

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale
Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale

Corso di Laurea in Ingegneria Aeronautica



Tesi di Laurea Specialistica

“Estensione in N-D di prodotto vettore e rotore e loro applicazioni”

Relatore: Prof. Riccardo Enrico ZICH

Tesi di Laurea di:

Carlo Andrea GONANO Matr. 750511

Anno Accademico 2010 - 2011

Ringraziamenti

Credo che coloro che sanno davvero di cosa tratta questo lavoro si possano contare sulle dita delle mani: l'argomento non è esattamente né dei più comuni né dei più intuitivi. Molti però mi sono stati vicini in questi ultimi anni e, pur senza sapere esattamente a cosa stessi lavorando, mi hanno dato conforto.

Desidero perciò ringraziare la mia famiglia e i miei amici, per l'affetto ed il sostegno. Ringrazio anche i miei compagni di corso che così spesso mi hanno sentito parlare delle analogie tra Fluidodinamica e Teoria delle relatività, di vortici e momenti in N dimensioni e altre stramberie, non solo di questo genere, sopportandomi con pazienza ma soprattutto stando bene assieme. Un riconoscimento particolare a Stefano Romanò, con il quale ho condiviso quasi tutti i progetti e le relazioni degli ultimi due anni. Oltre che per essermi amico, lo ringrazio per avermi portato ad utilizzare \LaTeX , il programma di scrittura senza il quale le centinaia di formule di questa tesi probabilmente non esisterebbero.

La mia gratitudine va anche al Professor Riccardo Enrico Zich, senza il quale davvero questo lavoro avrebbe potuto non esistere. In lui ho sempre trovato una porta aperta, grande disponibilità e gentilezza. Ritengo che egli possieda, oltre alle competenze tecniche e matematiche, anche la capacità di 'dare un senso' alle equazioni e un'immaginazione che gli consente di capire al volo le idee di un suo interlocutore.

Il mio riconoscimento va inoltre ad alcuni professori che, magari senza saperlo, mi hanno fornito le basi o gli indizi per lo sviluppo degli argomenti in questa tesi e non solo.

Ringrazio il Prof. Aldo Frezzotti per le sue lezioni di Meccanica Razionale e Meccanica Aerospaziale, che ho preso come modello sia per parte della notazione sia per il rigore espositivo.

Ringrazio il Prof. Arturo Baron, con il quale ho avuto qualche volta occasione di parlare di questi argomenti, per il suo interesse e la sua visione elegante e 'naturale' della Fluidodinamica.

Ringrazio i Prof. Maurizio Boffadossi e Prof. Maurizio Quadrio per il materiale fornitomi o segnalatomi sulle analogie tra vorticità e campo magnetico e comunque per le loro lezioni di Aerodinamica e Turbolenza, svolte con passione.

Un ringraziamento un po' particolare va anche ai Prof. Franco Auteri e Prof. Luigi P. Quartapelle, che non sono stati coinvolti direttamente in questo lavoro, ma nelle cui dispense di Fluidodinamica ho potuto trovare quel rigore che speravo di incontrare in diverse dimostrazioni matematiche. In particolare, ringrazio il Prof. Quartapelle per avermi fornito, circa due mesi or sono, alcuni preziosi riferimenti storici sulle Algebre di Grassmann e Clifford, di cui in precedenza ero all'oscuro.

La mia riconoscenza va a Jacopo De Vecchi e Rodolfo Di Maggio, che nulla sanno di questa tesi, ma che hanno giocato un ruolo fondamentale nella formazione mentale e culturale di molti, non solo la mia. Essi hanno sempre mostrato la capacità di stupirsi e di interrogarsi, la volontà di cercare il Bello e il Vero, quell' 'amore per il sapere' che dà gusto alla ricerca e quell' 'entusiasmo', nel senso più greco del termine, che anima nella creazione delle opere d'arte o, più semplicemente, nel fare bene il proprio lavoro.

Dedico questa tesi anche a coloro che si pongono domande, a quelli la cui curiosità e fantasia è viva e a quelli il cui entusiasmo è stato spento, sperando di poterlo ravvivare mostrando sotto un'altra luce argomenti in parte già noti.

Buona lettura!

Carlo Andrea Gonano,

Milano, 16 novembre 2011

Indice

1	Array, vettori e vettori applicati	1
1.1	Definizione di vettore - caso generale	1
1.2	Rappresentazione simbolica dei vettori	3
1.3	Prime considerazioni su vettori e array	4
1.4	Definizioni di vettore in matematica e fisica	7
1.4.1	Definizione di vettore - ambito matematico	7
1.4.2	Definizione di vettore - ambito fisico	8
1.5	Definizione di vettore - riassunto rapido	14
2	Prodotto scalare e norma	16
2.1	Prodotto scalare o interno	16
2.1.1	Definizione di prodotto interno complesso	16
2.1.2	Operatore trasposto T	17
2.1.3	Operatore trasposto coniugato H - hermitiano	18
2.1.4	Definizione di prodotto interno reale	18
2.1.5	Prodotti interni di vario tipo	19
2.1.6	L'operazione di prodotto scalare	20
2.1.7	Componente di un vettore su un altro	21
2.1.8	Vettori paralleli	22
2.1.9	Vettori ortogonali	22
2.1.10	Notazione per il prodotto scalare	22
2.2	Norma o 'modulo' di un vettore	23
2.2.1	Norma euclidea	23
2.2.2	Vettori a norma unitaria - versori	24
3	Il prodotto vettore in 3D	25
3.1	Concetto intuitivo e definizione in 3D	25
3.2	Un prima idea intuitiva: il vettore area	25
3.3	Un primo uso pratico: il calcolo dei volumi	28
3.4	Definizioni di prodotto vettore in 3D	33
3.4.1	Un po' di storia	33
3.4.2	Il prodotto esterno, ipervolumi e permutazioni	36
3.4.3	Il prodotto vettoriale in Meccanica Razionale	42
3.5	Riassunto definizioni e proprietà	47
3.5.1	Proprietà intuitive	47
3.5.2	Definizione analitica in 3D	48
3.5.3	Proprietà algebriche del prodotto vettore	48
3.6	Regoline elementari in 3D	49

3.6.1	Prodotto vettore per terna destra di versori	49
3.6.2	Regola del determinante	50
3.6.3	Regola 'xyzyz'	50
3.6.4	Regola della mano destra	50
3.6.5	Espressione matriciale del prodotto vettore 3D	51
3.7	Prodotti combinati	52
3.7.1	Triplo prodotto scalare 3D - il calcolo dei volumi	52
3.7.2	Doppio prodotto vettoriale in 3D - componente perpendicolare	53
3.7.3	Operazione inversa del prodotto vettore	54
3.7.4	Prodotto scalare tra prodotti vettori 3D - la potenza delle coppie	54
3.7.5	Prodotto vettoriale tra prodotti vettori 3D	55
4	Il Prodotto Vettore in N-D	57
4.1	Perché un'estensione in N-D?	57
4.2	Pseudo-vettori e aporie	61
4.2.1	Segmenti orientati, veri vettori o pseudo-vettori?	61
4.2.2	I vettori si sommano, le rotazioni si succedono!	62
4.2.3	Alice nel Mondo dello Specchio	65
4.2.4	Flatlandia e la 3 ^a dimensione	69
4.2.5	Spazio 4-D: un'infinità di normali	71
4.3	Un percorso dialettico verso più dimensioni	72
4.3.1	Vettori vs Matrici	73
4.3.2	Cosa chiedere ad un prodotto vettore in N-D	74
4.3.3	Considerazioni preliminari sugli indici	76
4.4	Componente parallela e perpendicolare	76
4.5	Prodotto diadico	78
4.6	L'estensione in N-D per mezzo dei tensori	80
4.6.1	Definizione di prodotto vettore N-D	82
4.7	Proprietà elementari Prodotto Vettore N-D	82
4.7.1	Proprietà anti-commutativa e anti-simmetria	83
4.7.2	Proprietà associativa per moltiplicazione per scalare	83
4.7.3	Proprietà distributiva a destra e sinistra	83
4.7.4	Non associatività dell'operazione rispetto a se stessa	84
4.7.5	Prodotto tra vettori paralleli	84
4.7.6	Rango della matrice - momento	84
4.7.7	Autovettori per la matrice - momento	85
4.7.8	Vettori annullati dai momenti	87
4.8	Contrazione di tensori e norma	87
4.9	Area compresa e magnitudine	89
4.10	Regole semplici per il caso N-D	90
4.11	Prodotti combinati	91
4.11.1	Triplo prodotto scalare N-D - il calcolo dei volumi	91
4.11.2	Prodotto a 3 indici	92
4.11.3	Doppio prodotto vettoriale in N-D - componente perpendicolare	93
4.11.4	Operazione inversa del prodotto vettore in N-D	94
4.11.5	Prodotto scalare tra prodotti vettori N-D - la potenza delle coppie	94

4.11.6	Prodotto vettoriale tra prodotti vettori N-D	95
4.11.7	Prodotto vettore N-D con 1 vettore trasformato	96
4.11.8	Prodotto vettore N-D con 2 vettori trasformati	96
4.11.9	Passaggio di sistemi di riferimento	97
5	Esercizi di stile - Meccanica Razionale	98
5.1	Cinematica - passaggio da un sist. di rif. all'altro	98
5.1.1	Posizioni	99
5.1.2	Velocità e velocità angolari	101
5.1.3	Velocità angolari e formule di Poisson	103
5.1.4	Accelerazioni	108
5.2	Dinamica - forze, momenti e inerzie	110
5.2.1	Baricentro di un sistema	110
5.2.2	La 1^A equazione cardinale del moto	112
5.2.3	Momento angolare	114
5.2.4	Momento di forze	116
5.2.5	La 2^A equazione cardinale del moto	118
5.2.6	Definizioni di 'matrice d'inerzia' in 2-D e 3-D	120
5.2.7	Matrice d'inerzia N-D - il calcolo delle covarianze	125
5.3	Considerazioni su matrici d'inerzia e momenti	128
5.3.1	Conversioni matrici d'inerzia: notazioni 3-D ed N-D	128
5.3.2	Momento d'inerzia polare e traccia delle matrici	129
5.3.3	Legge del trasporto per matrici d'inerzia	129
5.3.4	Passaggio da un sist. di rif. all'altro - legge dei tensori doppi	132
5.3.5	Matrice principale d'inerzia	134
5.3.6	Momento d'inerzia rispetto ad un asse	135
5.4	Moto rotatorio del corpo rigido	137
5.5	Energia cinetica	141
5.5.1	Definizione di energia cinetica	141
5.5.2	Componenti dell'energia cinetica	141
5.5.3	Teorema di König	142
5.5.4	Energia cinetica rotatoria - caso 3-D	142
5.5.5	Energia cinetica rotatoria - caso N-D	144
6	Il rotore in 3-D	146
6.1	Operatori differenziali: una prima panoramica	146
6.1.1	L'operatore nabla: ∇	146
6.1.2	Il gradiente	147
6.1.3	La divergenza di un campo vettoriale	152
6.1.4	Il laplaciano	154
6.2	Definizioni e usi del rotore in 3-D	156
6.2.1	Definizione di rotore in 3-D	156
6.2.2	Cenni storici	157
6.2.3	Interpretazione del rotore	160
6.2.4	Notazioni per il rotore	164
6.2.5	Proprietà e identità differenziali	165
6.3	Uso di rotore e prodotto vettore in fisica	166
6.3.1	Applicazioni del rotore in fluidodinamica	166
6.3.2	Applicazioni del rotore in elettromagnetismo	171

7	Il rotore in N-D - l'estensione	175
7.1	Perché un'estensione in N-D?	175
7.1.1	I problemi del rotore in 3-D	176
7.1.2	Riassunto obiettivi	177
7.2	La definizione del rotore in N-D	178
7.3	Proprietà e identità per il rotore in N-D	179
7.3.1	Conversione rotore 3-D ed N-D	179
7.3.2	Proprietà anti-commutativa e anti-simmetria	180
7.3.3	Proprietà distributiva	181
7.3.4	Rotore di vettore moltiplicato per scalare	182
7.3.5	Divergenza di prodotto vettore 3-D	182
7.3.6	Divergenza a 3 indici	183
7.3.7	Divergenza di prodotto vettore N-D e rotore di prodotto vettore 3-D	185
7.3.8	Rotore N-D per vettore e prodotto vettore di rotore 3-D	186
7.3.9	Espansione del gradiente di prodotto scalare	187
7.3.10	Divergenza di rotore 3-D e N-D	188
7.3.11	Rotore di gradiente	189
7.3.12	Divergenza di rotore N-D e rotore di rotore 3-D	190
8	Teoremi sui campi	191
8.1	Teoremi fondamentali e prime estensioni	191
8.1.1	Integrale 1-D di funzione vettoriale	192
8.1.2	Integrale su curva 1-D	192
8.1.3	Campo conservativo e a potenziale	194
8.1.4	Integrale di campo vettoriale su curva 1-D	195
8.1.5	Teorema di Green nel piano	196
8.2	Teorema di Gauss per la divergenza	196
8.2.1	Dimostrazione 'classica'	197
8.2.2	Applicazioni del Teorema della divergenza	199
8.3	Varianti del Teorema della divergenza	200
8.3.1	Teorema del gradiente e sua estensione	201
8.3.2	Variante per il rotore	202
8.4	Teorema del Gradiente Generalizzato - forma N-D	203
8.4.1	Dimostrazione ed enunciato	203
8.4.2	Dal teorema generale ai particolari	204
8.5	Simmetria e anti-simmetria - flusso e rotore	205
8.5.1	Prodotto flusso	206
8.5.2	Flusso	206
8.6	Premesse parametriche	208
8.6.1	Parametrizzazione di un dominio	208
8.6.2	Curva 1-D	209
8.6.3	Iper-superficie	209
8.6.4	Linee chiuse	210
8.6.5	Trasformazione dei campi	212
8.7	Teorema di Stokes per il rotore - caso 3-D	213
8.7.1	Cenni storici	213
8.7.2	Enunciato moderno 3-D	214
8.7.3	I problemi del Teorema del rotore	214
8.8	Estensione N-D del Teorema del rotore	216

8.8.1	Riassunto rapido	227
8.8.2	Campo irrotazionale, conservativo e a potenziale	228
9	Vorticità e magnetismo	230
9.1	Teoremi di Helmholtz per la vorticità	230
9.1.1	Enuncianti dei teoremi	230
9.1.2	Interpretazione N-D del 1° Teorema di Helmholtz	232
9.2	Sulle equazioni di Maxwell	235
9.2.1	Una questione di simmetria	236
9.2.2	I monopòli magnetici	237
9.2.3	Cos'è il campo magnetico?	239
9.2.4	Campo elettromagnetico N-D	242
9.2.5	Monopòli magnetici: una chimera?	243
9.2.6	Equazioni di Maxwell in N-D	246
10	Conclusioni e sviluppi futuri	247
	Bibliografia	251

Elenco delle figure

1.1	Vettore in uno spazio 3-D	2
1.2	Elemento finito per asta assiale	6
1.3	Coordinate di un vettore \vec{v} in uno spazio 2-D	8
1.4	Esempio di segmento orientato individuato da due punti	9
1.5	Somma di vettori col metodo punta-coda	10
1.6	Somma di vettori col metodo del parallelogramma	11
1.7	Proiezione v_r di un vettore \vec{v} su una retta orientata \vec{r}	11
1.8	Punto individuato su sfera con angoli di latitudine e longitudine	12
2.1	Esempio di proiezione di un vettore \vec{a} su un vettore \vec{b} e viceversa	21
3.1	Area del parallelogramma di lati \vec{a} e \vec{b}	26
3.2	Volume del parallelepipedo di lati \vec{a} , \vec{b} e \vec{c}	28
3.3	Prodotto vettore $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ come area orientata	29
3.4	Hermann Gunther Grassmann	33
3.5	William Rowan Hamilton	34
3.6	James Clerk Maxwell	35
3.7	Josiah Willard Gibbs	35
3.8	Olivier Heaviside, ritratto da Francis Edwin Hodge	36
3.9	Interpretazioni distinte di <i>cross product</i> e <i>wedge product</i>	41
3.10	Definizione di prodotto vettore in ‘Vector Analysis’	42
3.11	Terne destra e sinistra in ‘Vector analysis’	44
3.12	Terne adoperate per rappresentare lo stesso vettore \vec{v}	45
3.13	Regola della mano destra	51
3.14	Componenti parallela e perpendicolare di \vec{b} su \vec{a}	53
4.1	Riflessione di un sistema di vettori	66
4.2	Prodotto vettore davanti allo specchio	67
4.3	Frontespizio originale di <i>Flatland</i> , di Edwin A. Abbott	69
4.4	Scena tratta da <i>Flatland</i>	70
4.5	Scomposizione di \vec{F} in componenti parallela e normale a \vec{r}	77
5.1	Ellissoide d’inerzia	135
6.1	Linee di livello e gradienti di un campo scalare ϕ	148
6.2	Esempio di campo scalare ϕ definito su un dominio 2-D	149
6.3	Esempio di linee di campo convergenti e divergenti da un punto	153
6.4	Peter Guthrie Tait	158
6.5	<i>Convergence</i> e <i>Curl</i> nell’interpretazione di Maxwell	159

6.6	Campo di velocità per rotazione di un corpo rigido	161
6.7	Rotore in una corrente con linee di flusso parallele	162
6.8	Rappresentazioni dello strato limite	167
6.9	Baricentro di vorticità per lo strato limite	168
6.10	Forza di Lorentz su un filo percorso da corrente	172
8.1	Integrale di \vec{v} lungo una linea chiusa	195
8.2	Linee di corrente per $\vec{v} = [y; x; 0]$	208
8.3	Superficie 2-D Σ_2 parametrizzata in (q_i, q_j)	218
9.1	Circolazione attorno ad un tubo vorticoso	231
9.2	‘Monopòli’ del campo elettrico	238
9.3	linee di campo per una calamita	238
9.4	Dipoli magnetici	238

Sommario

Le operazioni di prodotto vettore e rotore compaiono frequentemente in vari ambiti della fisica e dell'ingegneria. In Meccanica Razionale il prodotto vettore viene utilizzato per il calcolo dei momenti, mentre in Fluidodinamica e in Elettromagnetismo il rotore descrive la vorticità di un flusso e compare nelle equazioni di Maxwell. Nonostante l'ampio uso di questi operatori in ambito scientifico, essi vengono comunemente espressi in un formalismo tipico delle 3-D che genera paradossi e difficoltà. A differenza di operatori analoghi quali il prodotto scalare e la divergenza, infatti, prodotto vettore e rotore sono definiti solo in 3-D, non rispettano la riflessione e invocano l'esistenza di sensi 'orari' o 'anti-orari' o di mani 'destre' o 'sinistre'. Questa tesi si propone di estendere i concetti di prodotto vettore e rotore in N-D, numero arbitrario di dimensioni, introducendo una notazione più semplice e generale e con essa ridimostrare alcuni teoremi il cui ambito di validità è attualmente più ristretto. Tra i principali risultati, si citano: in Meccanica Razionale la riscrittura di momenti e delle leggi per il moto rotario; in Fluidodinamica ed Elettromagnetismo, la reinterpretazione di vorticità e campo magnetico e l'inesistenza dei monopoli magnetici; l'estensione in N-D del Teorema del gradiente in forma generale e del Teorema di Stokes per il rotore.

Parole chiave: prodotto vettore; rotore; spazio N-D; monopoli magnetici

Abstract

Cross product and "curl" operations frequently occur in many problems of physics and engineering. Cross product is used for moment calculus in Rational Mechanics, while in Fluid Dynamics and Electromagnetism the curl operator describes flux vorticity and appears in Maxwell's equations. Though these mathematical operators are widely used in various scientific fields, they are commonly expressed in a classic 3-D formalism which creates some paradoxes and difficulties. In fact, instead of analogous operators like scalar product and divergence, cross product and curl are defined just in 3-D space, they don't respect reflection rules and invoke the existence of "clockwise" or "counter-clockwise" sense, "right-handed" or "left-handed" frames. The proposal of this work consists in an N-D extension of the concepts of curl and cross product, where N is an arbitrary number of spatial dimensions. A new simpler and more general notation will be introduced and used to re-demonstrate theorems whose application fields are more restricted at present. Among the main results, we may recall e.g.: in Rational Mechanics, the re-writing of moments and laws for rotational motion; in Fluid Dynamics and Electromagnetism, the re-interpretation of vorticity and magnetic field with the consequent lack of magnetic monopoles; N-D extension for Gradient Theorem and Stoke's Theorem for curl.

Keywords: cross product; wedge product; curl; rotor; N-D space; magnetic monopoles

Introduzione

La genesi di un'idea

Questa tesi è stata scritta in due mesi scarsi, ma costituisce un primo risultato di un lavoro personale di circa tre anni. Fin dal liceo, l'operazione di prodotto vettore mi era parsa un po' strana e decisamente diversa dalle altre normalmente adoperate in fisica. Tanto per cominciare, perché per definire questa operazione era necessario riferirsi alle idee di senso 'orario' o 'anti-orario' o di mano 'destra' e 'sinistra'? La somma di più vettori-forza, visti come frecce, al contrario non presentava problemi di questo genere. L'idea che un vettore come il momento di una forza fosse associato ad una rotazione e non una traslazione mi lasciò evidentemente un po' perplesso. Nel periodo in cui presi confidenza con le basi dell'Elettromagnetismo, mi accorsi che il prodotto vettore si ripresentava molto spesso nel calcolo di campi magnetici, forze di Lorentz, eccetera. Nonostante l'aiuto di varie regoline, mi capitava abbastanza spesso di fare confusione con i segni. Perché, inoltre, il campo magnetico attorno ad un filo percorso da corrente dovrebbe essere anti-orario? Perché la Natura dovrebbe scegliere un senso piuttosto che un altro? A quell'epoca il calcolo vettoriale mi era ancora sconosciuto, almeno nella sua forma analitica, perciò quelle domande rimasero momentaneamente senza risposta. Frequentando i corsi di Ingegneria Aerospaziale, ebbi modo di incontrare il prodotto vettore e di venire a conoscenza del rotore, suo analogo in campo differenziale. Prendendo familiarità con il calcolo vettoriale mi accorsi dell'eleganza e dell'efficacia di questo linguaggio simbolico. Questo prezioso strumento si rivelava adattissimo per esprimere una pluralità di concetti nei campi della matematica, della fisica e dell'ingegneria.

In particolare, il calcolo vettoriale consentiva persino l'indagine di un campo non direttamente esperibile coi sensi e per giunta difficile da cogliere con l'immaginazione: consentiva di descrivere ed esplorare spazi con un numero di dimensioni superiore alle tre in cui viviamo.

Devo confessare che, da quando li ho conosciuti, sia l'unità immaginaria i sia la possibile esistenza di N dimensioni mi hanno sempre affascinato. Per mezzo dei vettori mi abituai così a scrivere le equazioni in una forma che fosse valida in qualsiasi numero di dimensioni, anche solo per sfruttare la compattezza della notazione vettoriale.

Studiando i momenti in Meccanica Razionale e la vorticità in Fluidodinamica, prodotto vettore e rotore tornarono a costituire un problema: la loro estensione in N -D non si presentava così immediata come lo era invece per prodotto scalare e divergenza. Nonostante le mie ricerche su vari libri e su internet non riuscii a trovare alcun testo riguardo a tale problema, né a parlare con qualcuno che se ne fosse già occupato.

Costringendomi a ripensare dalle basi il senso ‘fisico’ delle equazioni e giocando con le matrici e i vettori, nei primi mesi del 2009 riuscii finalmente ad estendere il prodotto vettore in N-D e, poco dopo, anche il rotore,

Nei successivi tre anni ho sperimentato la nuova notazione in vari ambiti, ogni qualvolta si presentasse una di queste due operazioni. Non sempre la traduzione dal formalismo 3-D a quello N-D è stato immediato, e questo a causa proprio del diverso modo di interpretare la stessa operazione.

Nell’estate del 2009 provai ad applicare l’estensione N-D alle equazioni di Maxwell, nelle quali compaiono rotori e divergenze, e con mia sorpresa vidi che, passando in N-D, era possibile eliminare diversi dei paradossi che si presentavano con il classico formalismo 3-D. In particolare si spiegava perché non si riuscissero ad osservare monopoli magnetici e perché campo elettrico e magnetico non sembrassero simmetrizzabili. La natura di questi problemi non era legata tanto alla ‘fisica’, quanto alle definizioni degli oggetti coinvolti e al linguaggio formale utilizzato per descriverli.

Essendo poco più che un dilettante nel campo dell’Elettromagnetismo, andai a chiedere un consulto al Prof. Riccardo E. Zich, mio ex Professore di Elettronica ed Elettrotecnica. I possibili sviluppi apparvero subito piuttosto promettenti, e da allora il lavoro è proseguito toccando vari ambiti. In particolare, le somiglianze tra i linguaggi utilizzati in Fluidodinamica ed Elettromagnetismo si sono fatte via via più evidenti e persino alcuni fenomeni fisici sembrano legati da fortissime analogie. Molti di questi argomenti sono già stati sviluppati, per lo meno in forma cartacea, ma non è stato qui possibile riportarli.

Un obiettivo linguistico

Ci si potrebbe chiedere, a buon diritto, a che cosa serva l’estensione in N-D di prodotto vettore e rotore, specialmente in ambito ingegneristico. Un elenco delle possibili applicazioni è contenuto nei capitoli relativi alle suddette estensioni, ma gli obiettivi principali sono più generali e si possono riassumere. In primo luogo, prodotto vettore e rotore compaiono in continuazione in fisica e in ingegneria, e data la loro importanza è necessario sia saper dare un’*interpretazione* di queste operazioni, sia descriverle per mezzo di un *linguaggio* simbolico-matematico che sia coerente e di facile uso. Tra l’altro, spesso interpretazione e notazione si condizionano a vicenda, come dimostra la storia del calcolo vettoriale ma più in generale la storia delle scienze. Diversi studenti faticano magari a seguire un corso o a comprendere un argomento perché incontrano difficoltà con le notazioni, che possono essere particolarmente pesanti da scrivere, con un gran numero di pedici, con un gran numero di equazioni da ricordare a memoria, che prevedono miriadi di casi particolari o semplicemente sono più complicate del necessario. Per fare un esempio, il sottoscritto ha sviluppato una notazione N-D per il prodotto vettore anche perché continuava a sbagliare i segni o perché non riusciva a ricordare a memoria le principali identità di questa operazione. Tra l’altro, dimostrare queste relazioni algebriche coi formalismi 3-D porta presso a lunghi procedimenti con un gran numero di termini. Di conseguenza, gli errori di calcolo sono sempre in agguato. L’uso di una notazione N-D in forma vettoriale ha rivelato la sua efficacia anche in questo ambito grazie alla sua compattezza.

Si può dire che i metodi simbolici introdotti in questo testo vogliono funzionare come una sorta di *passapartout*: una chiave versatile in grado di aprire molte porte. Sebbene in questa tesi ci si sia dedicati soprattutto agli ambiti della Meccanica

Razionale, della Fluidodinamica e dell'Elettromagnetismo, la notazione N-D di prodotto vettore e rotore è suscettibile di applicazioni anche nella descrizione delle rotazioni (in alternativa ai quaternioni), degli spin in Meccanica Quantistica e forse anche in altri campi inaspettati. Si tratta quindi di uno *strumento*, al pari del calcolo vettoriale, utile per trovare soluzioni, anche se non costituisce la soluzione di alcun problema specifico.

‘Dire quasi la stessa cosa’

Si sente spesso dire che matematica e musica sono due linguaggi universali e che la loro espressione simbolica è ormai uguale e accettata su tutto il pianeta. Senza dubbio, c'è una gran parte di verità in questo, ma sia nel mondo scientifico che in quello musicale esistono molte varianti per ‘dire quasi la stessa cosa’. In campo musicale, ad esempio, le note vengono in Italia indicate con Do, Re, Mi eccetera, mentre in altri Paesi vengono associate alle lettere dell'alfabeto A, B, C eccetera. Persino la chiusura delle quinte, oltre ad essere un problema di accordi e di teoria dei numeri, ha costituito una questione di ... ‘accordo’ di convenzione. La scala temperata, teorizzata dal musicista Andreas Werckmeister nel 1691, consentiva uniformità nei rapporti tra le frequenze delle note, ma, per un orecchio allenato su una scala naturale, alcuni dei nuovi accordi suonavano ‘male’. L'adozione della scala temperata fu favorita senza dubbio da Johan Sebastian Bach, che nei due volumi del ‘Clavicembalo ben temperato’ scrisse come ‘esercizi di stile’ 48 preludi e fughe in tutte le tonalità della nuova scala per dimostrarne le potenzialità.

In ambito scientifico, il problema delle convenzioni e delle notazioni è forse ancora più evidente. Matematici, fisici e ingegneri scrivono le stesse equazioni in maniere differenti e la reciproca comprensione dei diversi linguaggi comporta spesso difficoltà o, peggio, la non comunicazione.

Nei due mesi in cui ho potuto dedicarmi attivamente alla ricerca di informazioni mi è capitato spesso di leggere equazioni magari già note, ma espresse con simbolismi adoperati da matematici e fisici così distanti da quelli utilizzati in ingegneria da sembrare quasi irriconoscibili. A questo si aggiunge anche il problema di quel ‘mare magnum’ di informazioni che è internet: navigare e districarsi tra di esse non è sempre così semplice e di conseguenza non è facile nemmeno verificare se il proprio lavoro è già stato svolto da qualcun altro. A questo proposito, specifico che sono venuto a conoscenza della (meravigliosa) storia del calcolo vettoriale solo negli ultimi due mesi e ho saputo delle Algebre di Grassmann e Clifford solo grazie ad alcuni riferimenti fornitimi dal Prof. Luigi P. Quartapelle. Cercando in continuazione qua e là, sono riuscito a trovare alcuni risultati simili ai miei, ma sempre in forma isolata, con notazioni non comuni in ingegneria o semplicemente privi d'interpretazione.

Non posso escludere che il contenuto di questa tesi sia già noto o sia già stato scritto in qualche altra forma: in ogni caso, sembra che questi argomenti non siano familiari tra gli ingegneri, che pure usano spesso prodotto vettore e rotore. La trattazione più o meno organica di queste operazioni mira quindi a facilitare il loro uso pratico, esprimendole in una notazione simile a quella comunemente adoperata in ingegneria, ma più compatta e generale.

Ho tentato di essere il più chiaro possibile e la maggior parte degli argomenti dovrebbero essere comprensibili da uno studente qualsiasi che abbia terminato il

2° anno di una facoltà d'Ingegneria, frequentando i corsi di Meccanica Razionale e Analisi matematica II. La segnalazione di punti oscuri o errori è gradita.

Breve sommario

Nei primi capitoli si ripercorrono rapidamente le basi del calcolo vettoriale, mostrando tra l'altro che cose date per scontate come la definizione di vettore sono meno ovvie di quanto sembrano. Successivamente, si passa ad analizzare il prodotto vettore in 3-D, partendo dalla sua definizione storica e passando per le sue principali proprietà, espresse nel classico formalismo 3-D. In seguito si evidenziano le *aporie* (difficoltà) di questo operatore e ci si interroga di nuovo sul suo significato. Dialetticamente, si prosegue fino a costruire l'estensione in N-D del prodotto vettore per poi andare a verificarne la coerenza con le proprietà dell'operatore già noto in 3-D. Successivamente vengono ridimostrate con la nuova notazione le identità algebriche di uso più comune, evidenziando corrispondenze e differenze rispetto al formalismo classico.

Si passa poi a 'sperimentare' la bontà del nuovo operatore applicandolo ad alcuni teoremi fondamentali della Meccanica Razionale, fornendone quindi anche una prima interpretazione 'fisica'. Lasciando l'ambito puramente algebrico, si analizza la definizione e lo sviluppo storico del rotore in forma 3-D, per poi produrne l'estensione in N-D e ancora una volta verificare le buone proprietà della nuova notazione e le sue analogie con quella classica. Nel capitolo 'Teoremi sui campi' vengono ridimostrate alcuni dei principali teoremi integrali e differenziali utilizzati per la descrizione dei campi vettoriali. Essi trovano largo uso sia in Fluidodinamica sia in Elettromagnetismo. In una breve sezione si analizzano certe caratteristiche del campo magnetico e si evidenzia perché, probabilmente, allo stato attuale non è mai stato osservato un singolo monopolo magnetico.

In un ultimo capitolo vengono tratte alcune conclusioni e si fa un rapido accenno ad altri sviluppi e applicazioni dei metodi introdotti, ad esempio la scomposizione di un campo vettoriale nelle sue componenti conservativa e non conservativa.

Ars longa, vita brevis

Qualcuno potrebbe ritenere questa tesi troppo lunga: in parte è vero, dato che i principali risultati potrebbero essere condensati in molte meno pagine, forse 20-30 circa. Credo però che in questo modo il testo non risulterebbe di facile lettura e soprattutto sarebbe difficile interpretare il significato dei risultati stessi.

Qualcun altro potrebbe invece sostenere che in questa tesi sono stati tralasciati degli argomenti importanti: in parte è vero anche questo, dato che questa tesi è stata scritta molto in fretta e comprende solo una parte dei problemi trattati nei tre anni di sviluppo. Mi sarebbe piaciuto ad esempio scrivere un capitolo sulla descrizione delle rotazioni per mezzo del prodotto vettore N-D e confrontarlo con i quaternioni, che tanto spesso vengono qui citati. Alcune tra le applicazioni più interessanti, come la scomposizione dei campi e la loro descrizione per mezzo di singolarità e gradienti, non hanno potuto essere inserite in questo testo per mancanza di tempo.

Si spera perciò, in un futuro prossimo, di poter completare opportunamente il lavoro svolto.

Nella scrittura dei vari capitoli ho tentato di esprimermi più chiaramente possibile, perciò spero che i problemi trattati risultino comprensibili anche per uno studente di Ingegneria del 2° o 3° anno. Questo testo vuole essere anche un'opera di consultazione, in cui andare a ricercare magari formule o definizioni che non si ricordano a memoria. Per tale ragione diverse equazioni basilari vengono scritte più di una volta e ogni sezione è, per quanto possibile, indipendente dalle altre.

Con l'augurio di buona lettura,
Carlo Andrea Gonano,

Milano, 17 novembre 2011

Capitolo 1

Array, vettori e vettori applicati

-“Sai dirmi, o Socrate, se la virtù può essere insegnata?[...]”
-“Oh Menone, [...] io sono tanto lontano dal sapere se possa essere insegnata o no, che non so neppure che cosa sia la virtù”

Platone, Dialoghi, *Menone*

Prima di trattare un operatore ‘esotico’ come il prodotto vettore, con tutte le sue particolarità, sarebbe bene chiedersi ‘Cos’è un vettore? Qual è la sua definizione?’ Può sembrare una domanda banale: in fondo si tratta di un concetto abbastanza familiare, rappresentabile con l’immagine del segmento, o freccia, di lunghezza, direzione e verso assegnati. In questa sede non s’intende trattare il calcolo vettoriale e matriciale dalle basi, sia perché sono già stati versati fiumi d’inchiostro (anche elettronico) sull’argomento con ottimi risultati ¹ sia perché non è questo l’obiettivo primario che ci si è preposti.

Nelle pagine seguenti, perciò, si forniranno più dei promemoria che delle spiegazioni esaustive, dando per scontata la conoscenza del normale calcolo vettoriale e matriciale sia in algebrico che differenziale. Come si vedrà meglio in seguito, non è però possibile esimersi dall’interrogarsi sulla natura degli oggetti che si andranno a trattare e dal tentare di descriverli in maniera chiara e coerente.

1.1 Definizione di vettore - caso generale

Nell’ambito più generale, consultando un’enciclopedia [22] alla voce ‘vettore’, si può trovare una definizione di questo tipo:

¹vedi ad esempio [2],[23]

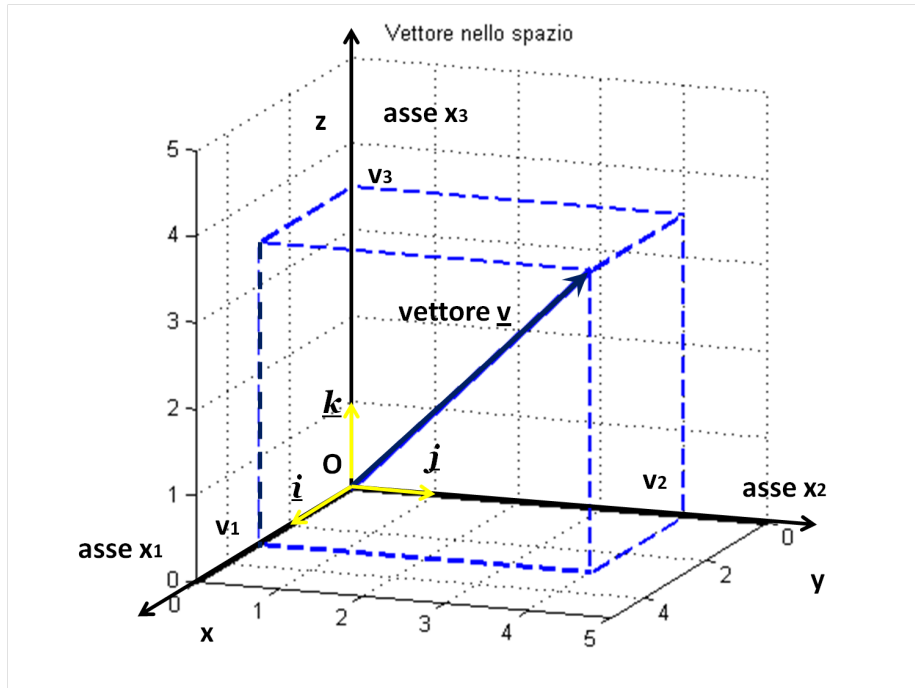


Figura 1.1: Vettore in uno spazio 3-D

Definizione generica di vettore

Un vettore \vec{v} è un insieme ordinato di n elementi, dove n è detta dimensione del vettore. Gli elementi di un vettore prendono anche il nome di ‘componenti’ e – usualmente – sono ordinati in colonna o in riga. Un vettore ‘colonna’ o ‘verticale’ \vec{a} , di componenti a_1, a_2, \dots, a_n e un vettore ‘riga’ o ‘orizzontale’ \vec{b} , di componenti b_1, b_2, \dots, b_n si indicano rispettivamente con:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \vec{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] \quad (1.1)$$

Per una classe di vettori deve essere possibile definire almeno le seguenti operazioni:

- **moltiplicazione per uno scalare**

Dati uno scalare $\alpha \in C$ e un vettore \vec{v}_A di dimensione n , si calcola:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \alpha \cdot \vec{v}_A && \text{tale che:} \\ v_B(i) &= \alpha \cdot v_A(i) && \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ovvero: ogni elemento i -esimo di \vec{v}_B si ottiene moltiplicando per α l' i -esimo elemento di \vec{v}_A

- **addizione tra vettori**

Dati i vettori \vec{v}_A, \vec{v}_B si calcola:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{v}_B && \text{tale che:} \\ v_C(i) &= v_A(i) + v_B(i) && \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ovvero: ogni elemento i -esimo di \vec{v}_C si ottiene sommando gli i -esimi elementi di \vec{v}_A e \vec{v}_B

Come si vedrà nella sezione 1.4.2 nella pagina 13, sotto un certo aspetto questa definizione è già specializzata per il modo in cui sono state date addizione e moltiplicazione. Altre operazioni comuni e familiari tra vettori, quali il *prodotto scalare* e il *prodotto vettore*, necessitano di una certa attenzione, legata anche al ‘tipo’ di definizione di vettore che si è data. Per ora si può notare che, per le operazioni appena descritte di ‘addizione tra vettori’ e ‘moltiplicazione per scalare’ valgono le proprietà commutativa, associativa e distributiva, infatti:

- **Proprietà commutativa**

$$\alpha \cdot \vec{v}_A = \vec{v}_A \cdot \alpha \quad (1.4)$$

$$\vec{v}_A + \vec{v}_B = \vec{v}_B + \vec{v}_A \quad (1.5)$$

- **Proprietà associativa**

$$\alpha(\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{v} \quad (1.6)$$

$$\vec{v}_A + (\vec{v}_B + \vec{v}_C) = (\vec{v}_A + \vec{v}_B) + \vec{v}_C \quad (1.7)$$

- **Proprietà distributiva**

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v} \quad (1.8)$$

$$\alpha \cdot (\vec{v}_A + \vec{v}_B) = \alpha \cdot \vec{v}_A + \alpha \cdot \vec{v}_B \quad (1.9)$$

1.2 Rappresentazione simbolica dei vettori

In forma simbolica, i vettori sono generalmente rappresentati tramite lettere, in maniere differenti a seconda delle esigenze degli autori. Tra le modalità più comuni si hanno:

- lettera in neretto (‘grassetto’): \mathbf{v}
- lettera in corsivo: v
- lettera in neretto corsivo, secondo norme ISO-UNI [34]: \mathbf{v}
- lettera soprilineata con una freccia: \vec{v}
- lettera sottolineata con un segmento: \underline{v}
- lettera circondata tra parentesi graffe: $\{v\}$

L'utilizzo del neretto \mathbf{v} per evidenziare i vettori è piuttosto diffuso, soprattutto in virtù della semplicità dei comandi necessari per ottenerlo. In quasi tutti i fogli di scrittura elettronici quali Word o \LaTeX è infatti presente nella barra dell'editor l'apposito riquadro per il 'grassetto', che consente di evidenziare facilmente una o più lettere. La notazione che prevede una lettera soprilineata da una freccia \vec{v} è in genere più difficile da ottenere lavorando su un foglio elettronico (esistono comunque gli appositi comandi), ma ha il vantaggio di richiamare immediatamente il concetto di vettore come segmento orientato, a differenza del neretto e altre segni grafici che assumono significati differenti in base all'uso e al contesto.

In questo testo si è quindi scelta la notazione a 'freccia soprilineata' per indicare i vettori, data la sua intuitività e il suo largo uso nella letteratura fisica e matematica.

L'ultima notazione nell'elenco, per mezzo della quale i vettori sono indicati per mezzo di parentesi graffe $\{v\}$, meriterà una considerazione a parte (vedi la sezione 1.3), dato che porta con sé un'idea di vettore radicalmente diversa da quella 'geometrica' a cui normalmente si è abituati.

1.3 Prime considerazioni su vettori e array

Soffermandosi sulla definizione 'generale' di vettore, si può notare che non viene avanzata alcuna ipotesi sugli elementi che lo compongono. Di base, si richiede semplicemente che sia possibile compiere le operazioni di addizione tra due vettori di eguali dimensioni e di moltiplicazione per uno scalare. Non è richiesto neppure che gli elementi del vettore siano di uno stesso tipo; nulla impedisce di costruire un vettore nella forma:

$$\vec{v} = \left[5, \quad 7 \text{ kg}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad y^2 + z^2 \right] \quad (1.10)$$

dove:

- 5 è un numero puro, privo di unità di misura
- 7 kg esprime una massa ed ha un'unità di misura
- $A =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

è una generica matrice 2×3 , dove gli elementi hanno unità di misura ignote e non necessariamente omogenee tra loro.

- $y^2 + z^2$ è una funzione scalare in y e z , anch'essa con unità di misura ignota

Certo si tratta di un vettore ben strano e potrebbe risultare un po' difficile pensarlo come una freccia che indica un punto nello spazio, sia perché sarebbe uno spazio con almeno $n = 4$ dimensioni, sia per la presenza della matrice A che, formalmente, è un singolo elemento tra quelli che costituiscono il vettore ma allo stesso tempo ne contiene altri 6! Viene da chiedersi: ma allora è davvero un

vettore? E' piuttosto diverso da quelli normalmente utilizzati! Eppure, secondo la definizione essenziale data, \vec{v} è un vettore, dato che si può sommarlo ad un altro vettore e/o moltiplicarlo per uno scalare e ottenere un terzo vettore. Ad esempio:

$$\alpha = 8 \text{ m/s} \quad (1.12)$$

$$\alpha \cdot \vec{v}_A =$$

$$\left[40 \text{ m/s}, \quad 56 \text{ kg m/s}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ m/s}, \quad 8(y^2 + z^2) \text{ m/s} \right] \quad (1.13)$$

Se α fosse un numero puro (ad esempio 8 senza l'unità di misura), si otterrebbe un vettore omogeneo (leggi: sommabile) con \vec{v}_A , ma nulla impedisce a priori che α sia uno scalare dotato di unità di misura, come si vede nell'esempio e come spesso accade in fisica. Per l'addizione il discorso è analogo, dato che si può scrivere:

$$\vec{v}_B = \left[4, \quad 3 \text{ kg}, \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}, \quad 7x^2 \right] \quad (1.14)$$

$$\vec{v}_A + \vec{v}_B =$$

$$\left[9, \quad 10 \text{ kg}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}, \quad 7x^2 + y^2 + z^2 \right] \quad (1.15)$$

Unica accortezza richiesta è che gli elementi delle matrici A e B siano a due a due omogenei e quindi sommabili. Ci si rende subito conto che i vettori appena utilizzati negli esempi sono di un tipo un po' particolare. Più che a frecce o punti nello spazio possono essere associati all'idea di un insieme di oggetti, anche di natura diversa. Comunemente, per indicare un insieme si utilizzano le parentesi graffe $\{\}$ che contengono gli elementi dello stesso separati per mezzo del punto e virgola. Per esempio, l'insieme dei numeri naturali minori di 5 può essere espresso come: $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Per analogia, quando si considera un 'vettore' più come un insieme di oggetti (seppur ordinato) che come un segmento orientato, lo si indica per mezzo delle parentesi graffe $\{v\}$ piuttosto che con la freccia soprilineata \vec{v} . In inglese questo tipo vettori sono spesso detti *array*, termine associato ai concetti di 'elenco, schiera, insieme, ordine' [35], mentre con il termine *vector* si designano di preferenza quelli associati all'idea di freccia o segmento orientato. Da qui in avanti, dove non diversamente specificato, per 'vettore' s'intenderà un ente di quest'ultimo tipo.

In ingegneria non è raro imbattersi in qualche *array* e spesso i loro elementi non sono omogenei. Si consideri ad esempio, in un programma ad Elementi Finiti, il modello di un'asta inflessibile (axial rod) ai cui estremi (nodi) si vogliono determinare i carichi applicati, note le proprietà elastiche del materiale e gli spostamenti assiali s_{x1} , s_{x2} e di torsione θ_1 e θ_2 . Dette F_{x1} , F_{x2} le azioni assiali e M_{x1} e M_{x2} i momenti torcenti applicati alle estremità delle trave, s'impone in primo luogo la condizione di equilibrio dell'elemento finito:

$$F_{x1} + F_{x2} = 0 \quad (1.16)$$

$$M_{x1} + M_{x2} = 0 \quad (1.17)$$

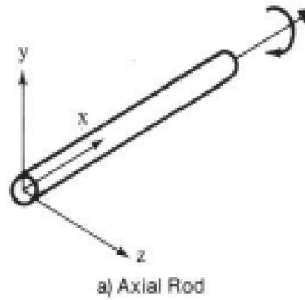


Figura 1.2: Elemento finito per asta assiale - figura tratta dalle slide del corso di Costruzioni Aerospaziali[30] di M. Lanz

Per il legame elastico tra azioni e deformazioni, assumendo il materiale omogeneo, si ha:

$$F_{x2} - F_{x1} = \frac{EA}{l} (s_{x2} - s_{x1}) \quad (1.18)$$

$$M_{x2} - M_{x1} = \frac{GJ}{l} (\theta_2 - \theta_1) \quad (1.19)$$

dove

- A è la sezione dell'asta [m^2]
- l è la lunghezza dell'asta [m]
- J è il momento polare d'inerzia della sezione [m^4]
- E è il modulo di elasticità (o *di Young*) del materiale [N/m^2]
- G è il modulo di taglio del materiale [N/m^2]

Riordinando a sistema le quattro equazioni appena esposte, è possibile esprimere i carichi applicati in funzione degli 'spostamenti' nella forma:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ M_{x1} \\ M_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \bar{0} \\ \bar{0} & \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{x1} \\ s_{x2} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

Ovvero il classico legame elastico nella forma

$$\{P\} = [K] \{u\} \quad (1.21)$$

dove $\{P\}$ è l'*array* di azioni generalizzate, $[K]$ la matrice di rigidezza elastica e $\{u\}$ l'*array* di spostamenti generalizzati. Si noti che per l'esempio in esame, né P , né K né u contengono grandezze omogenee. P infatti contiene sia forze F , di dimensioni $[N] = [kg \cdot m/s]$, sia momenti M , dimensioni $[N \cdot m] = [kg \cdot m^2/s]$, mentre u contiene sia spostamenti assoluti s di dimensioni $[m]$, sia angoli di torsione θ , di dimensioni $[rad] = [1]$. Ovviamente la matrice di rigidezza K dovrà contenere elementi le cui unità di misura garantiscano la coerenza del sistema.

Array come quello appena illustrato sono comunemente utilizzati per la descrizione di liste di incognite o di termini noti in sistemi lineari, largamente utilizzati in ingegneria.

1.4 Definizioni di vettore in matematica e fisica

Come si è appena visto nella sezione 1.3, la definizione più generale di vettore fornita include, oltre a quelli pensati come frecce o segmenti orientati, anche i ‘vettori’ di tipo *array*. In ambito matematico e fisico si preferisce considerare vettori solo i primi, tant’è vero che se ne dà una definizione più restrittiva. Tra l’altro, tra le definizioni date in analisi (ambito matematico) e in Meccanica Razionale (ambito fisico) esistono alcune sfumature di differenza.

Si vedano le definizioni di ‘vettore’ e ‘spazio vettoriale’ date in analisi [8].

1.4.1 Definizione di vettore - ambito matematico

Siano $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C, \dots$ gli elementi di un insieme V . Questi elementi sono chiamati *vettori*.

Siano $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gli elementi di un insieme numerico \mathbb{F} . In particolare, siano \mathbb{R} e \mathbb{C} gli insiemi dei numeri rispettivamente reali e complessi. L’insieme V è uno *spazio lineare* se è possibile applicare le seguenti regole per l’addizione e la moltiplicazione:

- **Regole per moltiplicazione di vettore in V per un elemento di \mathbb{F}**

- Proprietà (pseudo)commutativa $\alpha \vec{v}_A = \vec{v}_A \alpha$
- Proprietà distributività
 - $\alpha (\vec{v}_A + \vec{v}_B) = \alpha \vec{v}_A + \alpha \vec{v}_B$
 - $(\alpha + \beta) \vec{v}_A = \alpha \vec{v}_A + \beta \vec{v}_A$
- Proprietà associativa
 - $\alpha (\beta \vec{v}_A) = (\alpha \beta) \vec{v}_A$
- Elemento identità
 - $1\alpha = \alpha$

- **Regole per addizione tra vettori in V**

- Proprietà commutativa
 - $\vec{v}_A + \vec{v}_B = \vec{v}_B + \vec{v}_A$
- Proprietà associativa
 - $\vec{v}_A + (\vec{v}_B + \vec{v}_C) = (\vec{v}_A + \vec{v}_B) + \vec{v}_C$
- Elemento identità
 - Esiste un vettore nullo $\vec{0}$ tale che:
 - $\vec{v}_A + \vec{0} = \vec{v}_A$
- Elemento inverso
 - $\forall \vec{v}_A \in V, \exists -\vec{v}_A$ tale che:
 - $\vec{v}_A + (-\vec{v}_A) = \vec{0}$

Come si può notare, la definizione è per molti versi analoga a quella generale fornita precedentemente, pur con qualche differenza. I vettori vengono qui trattati come facenti parti di un insieme V , o più precisamente di una classe, e in aggiunta alle già viste proprietà commutativa, distributiva e associativa richieste per addizione e moltiplicazione si richiede l’esistenza dei rispettivi ‘elementi identità’, che lasciano invariato il vettore. Nel caso della moltiplicazione per

uno scalare, l'elemento identità è il numero 1, mentre per l'addizione tra vettori l'elemento identità è il vettore nullo $\vec{0}$.

Benché, a priori, non venga avanzata alcuna ipotesi sulla natura dei vettori, in analisi si richiede quasi sempre che gli elementi che compongono un vettore siano numeri, reali o complessi.

Considerando ad esempio lo spazio euclideo $V = \mathbb{R}_n$, un vettore \vec{v} definito su di esso avrà forma:

$$\vec{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \quad (1.22)$$

con $v_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Ogni i -esimo numero v_i è detto i -esima componente del vettore \vec{v} e può essere interpretato come l' i -esima coordinata di un punto individuato in uno spazio a n dimensioni. Le definizioni di addizione e moltiplicazione per questo tipo di

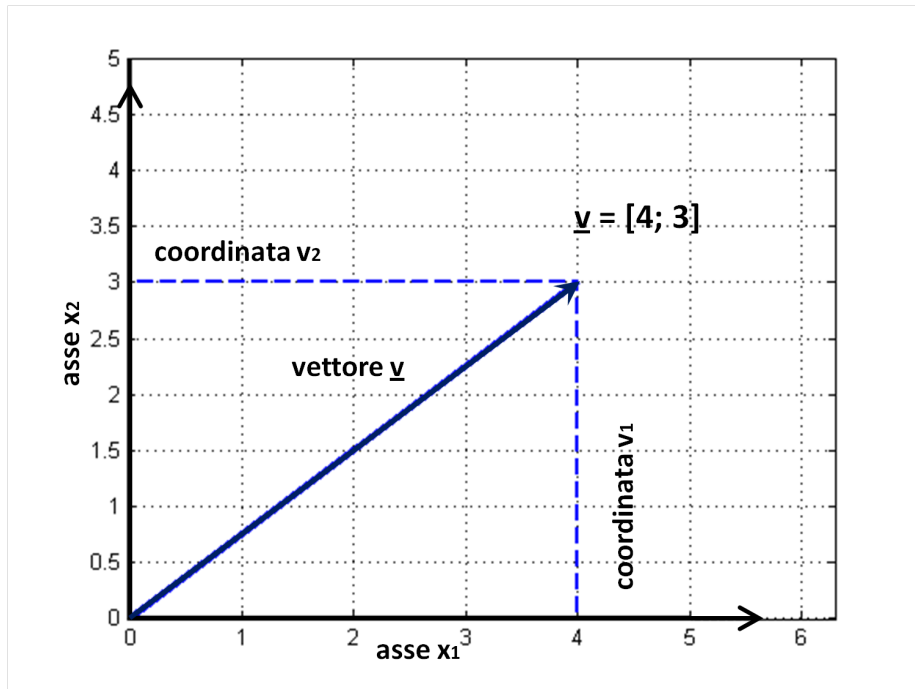


Figura 1.3: Coordinate di un vettore \vec{v} in uno spazio 2-D

entità sono quelle familiari e già viste per i numeri reali e complessi.

1.4.2 Definizione di vettore - ambito fisico

La definizione di vettore che viene data in Meccanica Razionale è, per certi versi, più intuitiva e 'geometrica' di quella data in analisi. Come si vedrà infatti, essa poggia sui concetti di punto e segmento, mentre la rappresentazione di questi per mezzo di coordinate viene introdotta in un secondo momento. Questo non deve stupire se si considera che Euclide, nei suoi *Elementi di geometria*, invoca in continuazione le idee di punto, retta e piano senza mai utilizzare coordinate ma identificando i singoli oggetti e le loro posizioni relative per mezzo

di ‘angoli compresi’ e ‘lunghezze’. In geometria, la rappresentazione per mezzo di coordinate è infatti molto più tarda ed è dovuta a Cartesio, da cui l’espressione *coordinate cartesiane*.

Si vedano allora le definizioni di segmento orientato e vettore fornite in Meccanica Razionale, tratte dal noto *Lezioni di meccanica razionale* [20] di Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi.

Definizione di segmento orientato

Sia dato un segmento di estremi distinti A e B . Questi possono essere ordinati in due *versi* opposti: da A verso B o da B verso A . Si dice segmento orientato AB il segmento di estremi A e B a cui si attribuisce il verso da A a B . La retta su cui giace il segmento si dice *linea d’azione* o *retta d’azione*. In generale, un

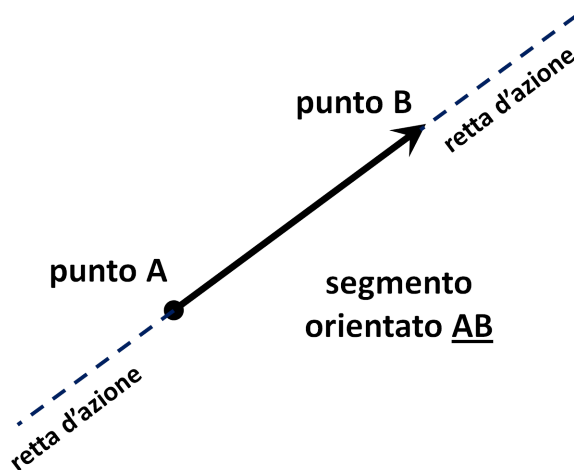


Figura 1.4: Esempio di segmento orientato individuato da due punti

segmento orientato AB viene visto come un ente geometrico dotato di un’*origine* (in questo caso A), di una *lunghezza* (la distanza tra A e B), di una *direzione* e di un *verso* (l’insieme di rette orientate parallele ad AB).

Nel caso particolare di segmento nullo, in cui A e B coincidono, la lunghezza è nulla mentre verso e direzioni sono indefiniti.

Definizione di segmenti orientati equipollenti

Due segmenti orientati A_1B_1 e A_2B_2 si dicono *equipollenti* quando hanno lo stessa lunghezza, la stessa direzione e verso, ovvero:

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} \quad \overrightarrow{A_1B_1} // \overrightarrow{A_2B_2} \quad (1.23)$$

Definizione di vettore

La classe di tutti segmenti orientati equipollenti ad un segmento orientato AB è in corrispondenza biunivoca con un *vettore*, ente geometrico caratterizzato da lunghezza, direzione e verso di AB ,

Si nota qui come, a differenza di un segmento orientato, un vettore non abbia un'origine definita.

Nel fondamentale testo *Vector analysis* [2] di Edwin B. Wilson, la definizione di vettore fornita al Cap. I è persino semplificata:

Definition: A vector is a quantity which is considered as possessing direction as well as magnitude.

Stranamente, scompare in questa definizione il riferimento al verso, benché successivamente venga introdotto come caratteristica fondamentale e si descrivono le regole di addizione e sottrazione dei vettori visti come frecce. Questo è probabilmente da imputarsi al fatto che in inglese con il termine 'direction' si può intendere sia la direzione che il verso.

Addizione e sottrazione tra vettori

In generale, le operazioni di addizione (e sottrazione) vengono introdotte in Meccanica Razionale per via 'visiva' e 'geometrica', secondo un'impostazione di memoria euclidea. Per sommare il vettore $\vec{S} = \overrightarrow{PP'}$ al vettore $\vec{T} = \overrightarrow{P'P''}$ si utilizza il metodo 'punta-coda': si applica la 'coda' della freccia \vec{S} nella sua origine P e si trova il punto P' , in 'punta' ad \vec{S} . In seguito, si applica la freccia \vec{T} facendo coincidere la 'coda' di quest'ultima con la 'punta' di \vec{S} , ovvero P' . Il punto di arrivo P'' coinciderà con la 'punta' di \vec{T} . Il vettore risultante $\vec{R} = \vec{S} + \vec{T}$

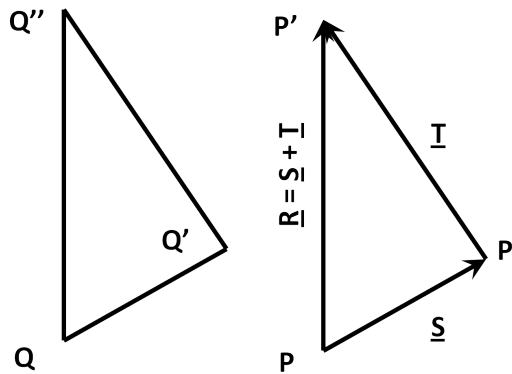


Figura 1.5: Somma di vettori col metodo punta-coda

sarà quindi pari a $\vec{R} = \overrightarrow{PP''}$, come in figura.

Sempre per via visiva, si dimostra come la regola di addizione col metodo 'punta-coda' sia commutativa, ovvero $\vec{R} = \vec{S} + \vec{T} = \vec{T} + \vec{S}$. Per il modo in cui vengono rappresentati i vettori e la loro somma, questo tipo di addizione viene anche chiamata 'metodo del parallelogramma'. Ancora una volta si può notare come non si sia fatto uso di coordinate di alcun genere e come la somma così definita sia sì 'geometrica', ma non formalizzata per via matematica. Anche per quanto riguarda le 'componenti' di un vettore \vec{v} , del resto, c'è qualche differenza tra le definizioni analitica e fisica. Nel primo caso infatti vengono infatti associate direttamente alle coordinate del vettore stesso, mentre nel secondo si associano all'idea di proiezione.

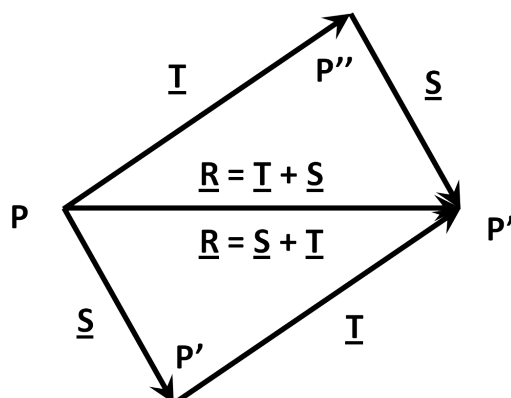


Figura 1.6: Somma di vettori col metodo del parallelogramma

Componenti di un vettore su di una retta orientata

Dati una retta orientata \vec{r} e un vettore \vec{v} , si dice componente v_r di \vec{v} su \vec{r} la lunghezza della proiezione del vettore \vec{v} su \vec{r} . Se la proiezione ha verso concorde con \vec{r} , v_r si associerà segno positivo +, altrimenti negativo -.

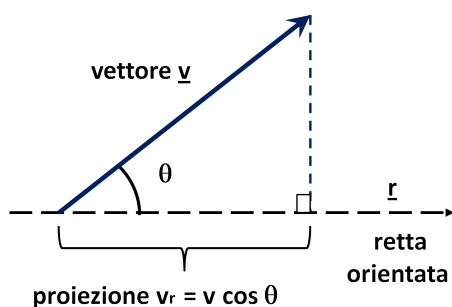


Figura 1.7: Proiezione v_r di un vettore \vec{v} su una retta orientata \vec{r}

Anche senza l'introduzione di coordinate, note la lunghezza v (qualunque cosa essa sia) del vettore \vec{v} e l'angolo $\widehat{r\vec{v}}$ compreso tra di esso e la retta \vec{r} , è possibile calcolare v_r come:

$$v_r = v \cos \widehat{r\vec{v}} \quad (1.24)$$

Rappresentazione dei vettori in Meccanica Razionale

Benché la definizione di vettore sia già stata data e non coincida esattamente né con quella generale né con quella analitica, essa viene di fatto estesa - o meglio, specializzata - fino a comprendere le altre due. La rappresentazione cartesiana di vettore come insieme ordinato di n numeri risulta infatti particolarmente utile per descriverne le proprietà e le operazioni che è possibile effettuare su di essi, perciò oggigiorno è universalmente accettata.

La definizione di vettore data in Meccanica Razionale si considererà perciò, da qui in avanti, come un caso particolare di quella analitico-matematica, di cui eredita le proprietà già illustrate, quali ad esempio le regole per addizione e moltiplicazione.

Si pensi ora di rappresentare i punti A e B in uno spazio di n dimensioni (spazio N-D). Essi saranno espressi come vettori (in senso analitico) contenenti le rispettive coordinate cartesiane.

$$\vec{A} = [A_1; A_2; \dots; A_n] \quad (1.25)$$

$$\vec{B} = [B_1; B_2; \dots; B_n] \quad (1.26)$$

Le componenti v_i del vettore \vec{v} associato al segmento orientato AB saranno calcolate come:

$$v_i = B_i - A_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Secondo la convenzione dovuta a Hermann Grassmann, il vettore \vec{v} viene espresso come la differenza dei due punti A e B:

$$\vec{v} = B - A \quad (1.27)$$

Si noti che questa relazione simbolica è sempre valida per ogni sistema di coordinate utilizzato, ma non sempre vale: $v_i = B_i - A_i$!

Le coordinate di un vettore, che devono semplicemente identificarlo, possono infatti anche essere *non cartesiane*! Si pensi ad esempio ad un vettore \vec{A} in 3-D: esso può essere identificato in coordinate sferiche dalla sua lunghezza A e dal suo verso, determinabile per mezzo di due angoli ϕ_A e θ_A , tipo latitudine e longitudine. I vettori \vec{A} , \vec{B} , \vec{v} potrebbero quindi essere rappresentati come:

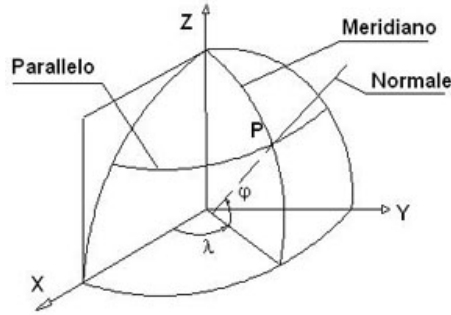


Figura 1.8: Esempio di punto P individuato su una sfera per mezzo degli angoli φ di latitudine e λ di longitudine - figura tratta dall'internet

$$\vec{A} = [A; \phi_A; \theta_A] \quad (1.28)$$

$$\vec{B} = [B; \phi_B; \theta_B] \quad (1.29)$$

$$\vec{v} = [v; \phi_v; \theta_v] \quad (1.30)$$

Solo che in questo caso si ha:

$$[v; \phi_v; \theta_v] \neq [B - A; \phi_B - \phi_A; \theta_B - \theta_A] \quad \text{a meno di casi particolari} \quad (1.31)$$

E' sempre possibile, anche in coordinate sferiche, stabilire le operazioni di 'addizione tra i vettori' e 'moltiplicazione per scalare' che rispettino le proprietà richieste, sia in ambito matematico che fisico. Si tratta però di procedure piuttosto complesse, perciò la rappresentazione cartesiana è di gran lunga la più utilizzata, proprio in virtù della semplicità con cui si possono eseguire queste operazioni. Tra l'altro, si può notare come la prima 'definizione generale' di vettore supponesse la somma e moltiplicazione applicate elemento per elemento, come avviene con la rappresentazione cartesiana. Si vede così che, pur nella sua globalità, la prima definizione data ha contemplato un caso particolare rispetto a quella analitico-matematica, che sotto questo aspetto è più generale.

Definizione di vettore applicato

Sempre secondo una convenzione di H. Grassmann, il segmento orientato AB viene detto *vettore \vec{v} applicato in A*, dove il punto B è tale che:

$$B = A + \vec{v} \quad (1.32)$$

Da qui in avanti ci si atterrà a questa nuova denominazione piuttosto che a quella di 'segmento orientato'.

Mentre in Analisi matematica non si distingue spesso tra vettori e vettori applicati, dato che le operazioni che si compiono su di essi sono le stesse, in Meccanica Razionale si preferisce tenere distinti i due concetti.

Ad esempio, spostamenti \vec{s} , velocità \vec{v} e accelerazioni \vec{a} sono considerati vettori. Lo spostamento di un generico punto materiale P può infatti essere visto come la differenza tra la sua posizione all'istante iniziale t_0 e all'istante finale t_f considerati.

$$\vec{s} = P(t_f) - P(t_0) \quad (1.33)$$

Discorso analogo per velocità e accelerazioni, che si ottengono derivando nel tempo gli spostamenti. Per le forze si preferisce invece considerare le frecce che le rappresentano come vettori applicati piuttosto che come semplici vettori. Per determinare l'effetto di una forza su di un corpo non è infatti sufficiente conoscerne intensità (cioè la 'lunghezza' della freccia associata), direzione e verso, ma è necessario anche il punto di applicazione, o meglio, la *linea d'azione*. Sempre nella *Vector analysis* [2] di Wilson, a pag. 3, viene ribadita questa convenzione, assieme a quella di vettore-freccia:

As examples of vector quantities force, displacement, velocity, and acceleration have been given. Each of these has other characteristics than those which belong to a vector pure and simple. The concept of vector involves two ideas and two alone - magnitude of the vector and direction of the vector. But force is more complicated. When it is applied to a rigid body the line in which it acts must be taken into consideration ; magnitude and direction alone do not suffice. And

in case it is applied to a non-rigid body the *point*² of application of the force is as important as the magnitude or direction. Such is frequently true for vector quantities other than force.

Per dare un'idea, si pensi di aprire una porta spingendola più o meno vicino ai cardini. Più il punto di applicazione è prossimo a questi, più si fatica a muovere la porta³.

Questo argomento, anche se piuttosto intuitivo, è in realtà vizioso, come si vedrà più avanti quando si illustrerà la definizione di 'momento di una forza' (vedi le sezioni 3.4.3 nella pagina 46, 5.2.4 nella pagina 116). Nella pratica si potrebbe calcolare benissimo il momento di una forza rispetto ai cardini della porta *anche se la forza non è applicata su di essa*. Certo in questo caso la porta non si muoverà, ma è sempre possibile calcolare la distanza tra il punto di applicazione della forza e l'asse della porta stessa, indipendentemente dal fatto che esista un collegamento rigido tra di essi.

La distinzione tra vettori e vettori applicati non è del resto molto 'rigida', per lo meno a livello formale. Per ora si può semplicemente notare che, per la 3^a Legge della Dinamica, la risultante delle forze F applicate su di un corpo è pari a:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1.34)$$

dove l'accelerazione \vec{a} è un *vettore* ed è moltiplicato per lo *scalare* massa m , quindi \vec{F} è un vettore, secondo le regole stabilite!

Questa stranezza viene implicitamente ammessa a pag. 92 di *Vector analysis* [2]:

The idea of the resultant therefore does not introduce the line of action of a force. As far as the resultant is concerned a force does not differ from a vector.

Si tratta solo di un indizio che mostra però come la differenza tra vettori e vettori applicati sia meno fondamentale di quanto non sembri. Come si vedrà meglio in seguito, l'idea di 'vettore applicato' è bene o male sempre associata all'operazione di prodotto vettore, per mezzo della quale si costruiscono i cosiddetti 'momenti'.

1.5 Definizione di vettore - riassunto rapido

Come si potuto vedere, anche la definizione di una 'cosa' familiare come il vettore può non essere così semplice. In particolare, il concetto legato ad esso dipende anche dall'uso che se ne fa e quest'uso varia a seconda dell'ambito, matematico, fisico o ingegneristico che sia. Non è obiettivo di questo testo fornire una definizione né universale né particolare di 'vettore', ma per farne buon uso se ne darà una definizione operativa, basata quindi sulle operazioni che s'intende compiere su quest'oggetto.

Riassumendo rapidamente, si richiede che, per ogni vettore \vec{v} appartenente alla classe dei vettori V si abbia:

²evidenziato nel testo originale

³Quest'esempio è tratto da *La fisica per i licei scientifici* [21], Vol. 2, pag. 8

- la definizione generale di insieme ordinato di n -elementi

$$\vec{v} = [v_1; v_2; \dots; v_n] \quad (1.35)$$

- la definizione ‘matematica’ di vettore, con relative regole per ‘addizione tra vettori’ e ‘moltiplicazione per scalare’ in forma *cartesiana*, ovvero elemento per elemento.

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \alpha \vec{v}_A && \text{tale che} \\ v_B(i) &= \alpha \cdot v_A(i) && \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{v}_A && \text{tale che} \\ v_C(i) &= v_A(i) + v_B(i) && \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1.37)$$

- ogni elemento i -esimo di \vec{v} è un numero reale o complesso

$$v_i \in \mathbb{R} \quad \vee \quad v_i \in \mathbb{C} \quad (1.38)$$

- tutti gli elementi di un singolo vettore \vec{v} sono omogenei tra loro, sia che siano numeri puri, sia che siano dotati di unità di misura. Le loro dimensioni fisiche [] sono quindi uguali.

$$[v_i] = [v_j] \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.39)$$

- per ogni coppia di vettori con lo stesso numero di elementi è possibile definire un’operazione di *prodotto interno*, associata alla *proiezione* dell’uno sull’altro. Il prodotto interno tra due vettori \vec{v}_A e \vec{v}_B , dove non specificato altrimenti, sarà indicato con: $\vec{v}_A^T \cdot \vec{v}_B$.
- per ogni vettore deve essere possibile definire una ‘lunghezza’ o ‘modulo’, nello specifico pari alla *norma di ordine 2 indotta dal prodotto interno*. Ove non specificato diversamente, il modulo di un vettore \vec{v} sarà indicato con la lettera privata del segno di vettore v o espressamente con il simbolo di norma $\|\vec{v}\|$

Si può notare come le ultime due richieste siano per alcuni versi ‘nuove’ e corrispondano alla necessità di definire le operazioni matematiche associate ai concetti di ‘proiezione’ e di ‘lunghezza’ invocati nell’ambito della Meccanica Razionale. Accanto alle già citate addizione e moltiplicazione, si andranno ad aggiungere quindi le operazioni di *prodotto scalare (o interno)* e di *norma*.

Capitolo 2

Prodotto scalare e norma

- Un punto è ciò che non ha parti
- Linea è una lunghezza senza larghezza
- Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza

Euclide, *Elementi*, Libro I

2.1 Prodotto scalare o interno

In analisi matematica, è possibile definire due tipi di prodotto scalare: ‘complesso’, più generale, o ‘reale’, come caso particolare del primo. In questa sede si utilizzerà di preferenza quello ‘reale’, ma per completezza si riporta anche la definizione di quello ‘complesso’.

2.1.1 Definizione di prodotto interno complesso

Uno spazio di vettori V si dice dotato di un prodotto scalare (o interno) complesso se, per ogni coppia di vettori (\vec{v}_A, \vec{v}_B) , si può definire un’operazione $\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle$ tale che si abbia:

- Risultato scalare in \mathbb{C}

$$\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

- Proprietà commutativa (per complesso coniugato)

$$\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle = \langle \vec{v}_B, \vec{v}_A \rangle^H \quad (2.2)$$

dove l’apice ‘H’ indica genericamente il trasposto coniugato di uno scalare o di un vettore. Per il suo significato si veda la sezione 2.1.3 nella pagina 18.

- Proprietà distributiva

$$\langle \vec{v}_A + \vec{v}_B, \vec{v}_C \rangle = \langle \vec{v}_A, \vec{v}_C \rangle + \langle \vec{v}_B, \vec{v}_C \rangle \quad \forall \vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C \in V \quad (2.3)$$

- Moltiplicazione per scalare tale che:

$$\langle \vec{v}_A, \beta \vec{v}_B \rangle = \beta \langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle \quad \forall \beta \in \mathbb{C} \quad (2.4)$$

- Norma non negativa

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0, \quad \text{con} \quad \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad (2.5)$$

2.1.2 Operatore trasposto **T**

Al paragrafo 2.1.1 nella pagina precedente si è indicato con l'apice 'H' l'operatore hermitiano di 'trasposto coniugato', estensione dell'operatore di 'trasposto' **T**, entrambi utilizzati nell'algebra delle matrici.

L'operatore di 'trasposto', indicato con l'apice 'T', indica la trasposizione di una matrice o di un vettore.

- **Trasposizione di matrice**

Se $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, la trasposta A^T è tale che:

$$A^T(i, j) = A(j, i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.6)$$

ovvero si scambiano gli indici della matrice di partenza.

- **Trasposizione di vettore**

In generale i vettori possono essere visti come matrici con una sola colonna (nel caso di vettori verticali) o con una sola riga (nel caso di vettori orizzontali). Tradizionalmente, nei sistemi lineari vengono moltiplicati a destra delle matrici, come ad esempio accade per la \vec{x} in:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Dove non diversamente indicato, i vettori sono perciò considerati di preferenza ordinati in verticale. Così, per la trasposizione di un vettore $\vec{v} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ si ha:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \vec{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (2.9)$$

Per semplificare la scrittura delle formule in corpo, per indicare un vettore verticale \vec{v} si userà la notazione $[v_1; v_2; \dots; v_n]$, separandone gli elementi col punto e virgola, mentre per i vettori orizzontali \vec{v}^T si utilizzerà come separatore la sola virgola: $[v_1, v_2, \dots, v_n]$.

- **Trasposizione di scalare**

Per gli scalari, che possono essere considerati come vettori di dimensione unitaria, la trasposizione non opera alcun cambiamento:

$$\alpha = \alpha^T \quad (2.10)$$

2.1.3 Operatore trasposto coniugato H - hermitiano

L'operatore hermitiano H traspone una matrice e per ogni elemento ne restituisce il complesso coniugato.

- **Trasposta coniugata di matrice**

Sia data la matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, scomposta nelle sue parti reale e immaginaria nella forma:

$$\begin{aligned} A(i, j) &= A_{Re}(i, j) + i A_{Im}(i, j) & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ & & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

con $A_{Re}(i, j), A_{Im}(i, j) \in \mathbb{R}$.

La trasposta coniugata A^H della matrice originaria è tale che:

$$\begin{aligned} A^H(i, j) &= A_{Re}(j, i) - i A_{Im}(j, i) & \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \\ & & \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ovvero:

$$A^H = A_{Re}^T - i A_{Im}^T \quad (2.13)$$

- **Trasposto coniugato di vettore**

Come nel caso della semplice trasposizione, un vettore può essere visto come una matrice con una sola colonna. Si avrà così:

$$\vec{v} = \vec{v}_{Re} + i \vec{v}_{Im}, \quad \text{con } \vec{v}_{Re}(j), \vec{v}_{Im}(j) \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.14)$$

$$\vec{v}^H = \vec{v}_{Re}^T - i \vec{v}_{Im}^T \quad (2.15)$$

- **Trasposto coniugato di scalare**

Per gli scalari, l'operatore hermitiano restituisce semplicemente il complesso coniugato corrispondente.

$$\alpha = \alpha_{Re} + i \alpha_{Im} \quad \text{con } \alpha_{Re}, \alpha_{Im} \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

$$\alpha^H = \alpha_{Re} - i \alpha_{Im} \quad (2.17)$$

2.1.4 Definizione di prodotto interno reale

La definizione di prodotto interno in \mathbb{R} è per molti versi analoga a quella del prodotto interno in \mathbb{C} , di cui costituisce infatti un caso particolare.

Uno spazio di vettori V si dice dotato di un prodotto scalare (o interno) reale se, per ogni coppia di vettori (\vec{v}_A, \vec{v}_B) , si può definire un'operazione $\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle$ tale che si abbia:

- Risultato scalare in \mathbb{R}

$$\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle \in \mathbb{R} \quad (2.18)$$

- Proprietà commutativa

$$\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle = \langle \vec{v}_B, \vec{v}_A \rangle \quad (2.19)$$

- Proprietà distributiva

$$\langle \vec{v}_A + \vec{v}_B, \vec{v}_C \rangle = \langle \vec{v}_A, \vec{v}_C \rangle + \langle \vec{v}_B, \vec{v}_C \rangle \quad \forall \vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C \in V \quad (2.20)$$

- Moltiplicazione per scalare tale che:

$$\langle \vec{v}_A, \beta \vec{v}_B \rangle = \beta \langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

- Norma non negativa

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0, \quad \text{con} \quad \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad (2.22)$$

Come si può facilmente verificare, se il prodotto $\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle$ appartiene a \mathbb{R}_n , la sua componente immaginaria è nulla e si può dimostrare la proprietà commutativa come caso particolare del prodotto interno complesso.

$$\begin{cases} \langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle \in \mathbb{R} \\ \langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle = \langle \vec{v}_B, \vec{v}_A \rangle^H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle = \text{Re}(\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle) \\ \text{Im}(\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle) = 0 \\ \text{Re}(\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle) = \text{Re}(\langle \vec{v}_B, \vec{v}_A \rangle) \\ \text{Im}(\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle) = -\text{Im}(\langle \vec{v}_B, \vec{v}_A \rangle) \end{cases} \Rightarrow \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} \text{Im}(\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle) = \text{Im}(\langle \vec{v}_B, \vec{v}_A \rangle) = 0 \\ \langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle = \text{Re}(\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle) = \text{Re}(\langle \vec{v}_B, \vec{v}_A \rangle) = \langle \vec{v}_B, \vec{v}_A \rangle \end{cases} \Rightarrow \quad (2.24)$$

$$\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle = \langle \vec{v}_B, \vec{v}_A \rangle \quad \text{C.V.D.} \quad (2.25)$$

2.1.5 Prodotti interni di vario tipo

Finora si sono elencate le proprietà che deve possedere un prodotto interno, ma non il tipo di operazione che esso effettivamente compie sui vettori. Date ad esempio due funzioni f e $g \in \mathbb{R}$ definite su $[x_0, x_f]$, è possibile definire un prodotto interno come:

$$\langle f, g \rangle = \int_{x_0}^{x_f} f(y)g(y) dy, \quad (2.26)$$

che rispetta *tutte* le proprietà richieste per un prodotto interno. Si potrebbe obiettare che $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni e non vettori. Eppure, nell'accezione analitica, f e g sono vettori, dato che rispettano la definizione data. Si tratta ovviamente di un caso particolare: l'argomento della funzione, x_i , può essere visto come l'indice della componente i -esima del vettore \vec{f} , e ogni componente $\vec{f}(i)$ è pari al valore assunto dalla funzione per $x = x_i$.

$$v_i = \vec{v}(i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.27)$$

$$f(x_i) = \vec{f}(i) \quad \forall x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (2.28)$$

Nel caso in cui $x \in [x_0, x_f]$, non solo il numero di elementi n del vettore è infinito, ma si tratta persino di un infinito non numerabile (nello specifico, con cardinalità 2^{\aleph_0}).

L'espressione simbolica di prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ha perciò un'accezione molto generale e non specifica né il tipo di vettore coinvolto né il tipo di operazione che si compie su di esso. Per fare un altro esempio, si può definire un prodotto interno reale tra due vettori come:

$$\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle = \sum_{k=1}^n k \cdot v_A(k) v_B(k) \quad (2.29)$$

che, utilizzando l'algebra delle matrici, può essere espresso come:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle &= \vec{v}_A^T \Lambda \vec{v}_B = \\ &= [v_{A1}, v_{A2}, v_{A3}, \dots, v_{An}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{B1} \\ v_{B2} \\ v_{B3} \\ \vdots \\ v_{Bn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Poichè la matrice di pesi diagonale Λ è definita positiva (ha tutti gli autovalori positivi), vale:

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \vec{v}^T \Lambda \vec{v} \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}_n \quad (2.31)$$

come richiesto per la costruzione di una norma. Anche in questo caso l'operazione così definita soddisfa tutte le proprietà richieste per un prodotto interno, eppure non corrisponde certo al concetto di 'proiezione' di un vettore su un altro vettore, come richiesto in Meccanica Razionale!

E' necessario ancora una volta specializzare le proprie richieste in base all'uso che si vuole fare degli oggetti matematici.

2.1.6 L'operazione di prodotto scalare

Si definisca un prodotto interno tra due vettori $\vec{v}_A, \vec{v}_B \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ nella forma seguente:

$$\langle \vec{v}_A, \vec{v}_B \rangle := \vec{v}_A^H \cdot \vec{v}_B \quad \text{dove :} \quad (2.32)$$

Prodotto scalare

$$\vec{v}_A^H \cdot \vec{v}_B \triangleq \sum_{k=1}^n v_A(k)^H v_B(k) \quad (2.33)$$

Si può verificare facilmente che questo prodotto rispetta tutte le proprietà richieste per un prodotto interno:

- Risultato scalare in \mathbb{C}

$$\vec{v}_A^H \cdot \vec{v}_B \in \mathbb{C} \quad (2.34)$$

- Proprietà commutativa (per complesso coniugato)

$$\vec{v}_A^H \cdot \vec{v}_B = (\vec{v}_B^H \cdot \vec{v}_A)^H \quad (2.35)$$

- Proprietà distributiva

$$(\vec{v}_A + \vec{v}_B)^H \cdot \vec{v}_C = \vec{v}_A^H \cdot \vec{v}_C + \vec{v}_B^H \cdot \vec{v}_C \quad \forall \vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C \in \mathbb{C}^{n \times 1} \quad (2.36)$$

- Moltiplicazione per scalare tale che:

$$\vec{v}_A^H \cdot (\beta \vec{v}_B) = \beta (\vec{v}_A^H \cdot \vec{v}_B) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.37)$$

- Norma non negativa

$$\vec{v}^H \cdot \vec{v} \geq 0, \quad \text{con} \quad \vec{v}^H \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad (2.38)$$

Si noti che, per vettori reali $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$, l'operatore H di trasposto coniugato può essere sostituito dal più semplice (e comune) operatore di trasposto T. In aggiunta, questo tipo di prodotto interno è associato all'idea di proiezione di un vettore sull'altro in coordinate cartesiane. In Meccanica Razionale il prodotto interno tra vettori reali viene infatti così definito ¹ :

Definition : The direct product of two vectors A [qui \vec{v}_A] and B [qui \vec{v}_B] is the scalar quantity obtained by multiplying the product of the magnitudes of the vectors by the cosine of the angle between them.

In forma simbolica:

$$\vec{v}_A^T \cdot \vec{v}_B \triangleq v_A v_B \cos \widehat{v_A v_B} \quad (2.39)$$

2.1.7 Componente di un vettore su un altro

Dall'espressione $v_A v_B \cos \widehat{v_A v_B}$ del prodotto risulta che esso si può interpretare come il prodotto (algebrico) della lunghezza v_A del primo per la proiezione (v_B su r_A) dell'altro sulla retta orientata su cui giace il primo e viceversa.

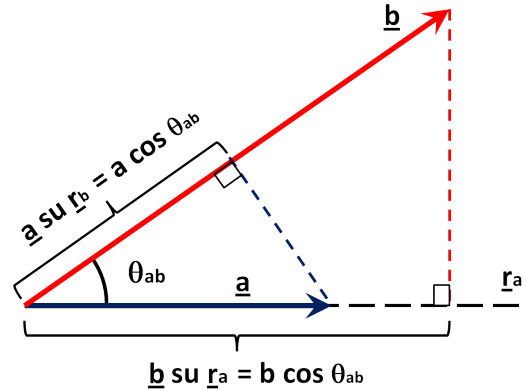


Figura 2.1: Esempio di proiezione di un vettore \vec{a} su un vettore \vec{b} e viceversa

$$v_A v_B \cos \widehat{v_A v_B} = v_A (v_B \cos \widehat{v_A v_B}) = v_A (v_B \cos \widehat{r_A v_B}) \quad (2.40)$$

$$v_A v_B \cos \widehat{v_A v_B} = v_A (v_B \text{ su } r_A) = v_B (v_A \text{ su } r_B) \quad (2.41)$$

¹vedi *Vector analysis*, [2], pag. 55, analogo su *Lezioni di meccanica razionale* [20]

2.1.8 Vettori paralleli

Due vettori \vec{v}_A e \vec{v}_B sono paralleli tra loro, indicato simbolicamente con $\vec{v}_A // \vec{v}_B$, se hanno lo stessa direzione, ovvero se l'angolo compreso essi è nullo o pari all'angolo piatto. In questo caso il loro prodotto scalare è pari al prodotto dei moduli a meno del segno.

$$\cos(\widehat{v_A v_B}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \widehat{v_A v_B} = 0 \text{ rad} \\ -1 & \text{se } \widehat{v_A v_B} = \pi \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow \quad (2.42)$$

$$\vec{v}_A^T \cdot \vec{v}_B = v_A v_B \cos(\widehat{v_A v_B}) = \begin{cases} v_A v_B & \text{se } \widehat{v_A v_B} = 0 \text{ rad} \\ -v_A v_B & \text{se } \widehat{v_A v_B} = \pi \text{ rad} \end{cases} \quad (2.43)$$

Ogni vettore è ovviamente parallelo a se stesso. In generale, se due vettori sono paralleli, uno può essere ottenuto dall'altro moltiplicando per uno scalare. Ponendo infatti $\vec{v}_B = \lambda \vec{v}_A$ con $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$, si ottiene un vettore con direzione identica a \vec{v}_A , come richiesto dalla condizione di parallelismo:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A // \vec{v}_B &\Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \in \mathbb{R} \text{ tale che :} \\ \vec{v}_B &= \lambda \vec{v}_A \end{aligned} \quad (2.44)$$

Come si vedrà più avanti, λ è calcolabile in funzione delle sole 'lunghezze' v_A e v_B dei vettori, la cui definizione aritmetica verrà data per mezzo dell'operatore norma.

2.1.9 Vettori ortogonali

Due vettori \vec{v}_A e \vec{v}_B sono ortogonali tra loro, indicato simbolicamente con $\vec{v}_A \perp \vec{v}_B$, se l'angolo compreso essi è retto. In questo caso la proiezione dell'uno sull'altro è nulla.

$$\vec{v}_A \perp \vec{v}_B \Leftrightarrow \cos \widehat{v_A v_B} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_A^T \cdot \vec{v}_B = 0 \quad (2.45)$$

Due vettori, di cui uno sia nullo (pari a $\vec{0}$), sono considerati reciprocamente ortogonali anche se l'angolo tra di essi non è definito, dato che in ogni caso il loro prodotto scalare è nullo.

2.1.10 Notazione per il prodotto scalare

Il prodotto interno tra vettori, così come viene normalmente definito in ambito fisico, viene chiamato comunemente 'prodotto scalare' senza distinguerlo dagli altri tipo di prodotto interno o diretto definibili in ambito matematico. Per semplicità, in questo testo si adatterà la locuzione 'prodotto scalare' in riferimento a quello utilizzato in fisica e associato al concetto di proiezione, mentre con l'espressione 'prodotto interno' si designerà l'accezione più generale di ambito analitico.

Anche per esprimere l'operatore di prodotto scalare esistono diverse notazioni, diffuse variamente per ragioni storiche. In Italia il prodotto di \vec{v}_A per \vec{v}_B viene spesso indicato per mezzo della \times moltiplicativa e il primo vettore non viene trasposto:

$$\vec{v}_A \times \vec{v}_B \quad (2.46)$$

Negli altri Paesi con questa stessa notazione si preferisce indicare il *prodotto vettoriale* tra \vec{v}_A e \vec{v}_B , mentre il prodotto scalare si indica con un punto \cdot interposto tra i due vettori, anche in questo caso senza spesso indicare alcuna trasposizione:

$$\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B \quad (2.47)$$

In questo testo di utilizzerà sempre, dove non diversamente indicato, la notazione:

$$\vec{v}_A^T \cdot \vec{v}_B \quad (2.48)$$

che garantisce coerenza con l'algebra delle matrici (prodotto righe per colonne) e la convenzione di considerare verticali i vettori. Si è scelto di utilizzare il punto \cdot piuttosto che la \times moltiplicativa perché quest'ultima è simile al simbolo di incognita x (specialmente su documenti scritti a mano) e, soprattutto, perché secondo l'altra convenzione indica l'operazione di *prodotto vettoriale*. Per evitare confusioni o un appesantimento nella lettura il prodotto scalare verrà quindi indicato per mezzo del punto \cdot , mentre con il cuneo \wedge si indicherà il prodotto vettore in 3-D.

2.2 Norma o ‘modulo’ di un vettore

In analisi, uno spazio di vettori V si dice ‘normato’ se, per ogni $\vec{v} \in V$, esiste un unico numero $\|\vec{v}\| \in \mathbb{R}$ tale che:

- $\|\vec{v}\| \neq 0$, con $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$
- disuguaglianza triangolare
 $\|\vec{v}_A + \vec{v}_B\| \leq \|\vec{v}_A\| + \|\vec{v}_B\| \quad \forall \vec{v}_A, \vec{v}_B \in V$

2.2.1 Norma euclidea

Benchè sia possibile definire più di un tipo di norma, in questo testo si utilizzerà esclusivamente la *norma di ordine 2 indotta dal prodotto scalare*, ovvero:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}^H \cdot \vec{v}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |v(k)|^2} \quad (2.49)$$

In ambito fisico la ‘lunghezza’ o ‘modulo’ (in inglese *magnitude*) v di un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}_{n \times 1}$ viene infatti calcolata come:

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \quad (2.50)$$

Si noti che per calcolare il quadrato v^2 della lunghezza equivale a proiettare \vec{v} su se stesso, infatti:

$$\vec{v}^T \cdot \vec{v} = vv \cos \widehat{v\vec{v}} = v^2 \cos 0 = v^2 \quad (2.51)$$

2.2.2 Vettori a norma unitaria - versori

I vettori la cui norma è unitaria, ovvero per i quali si ha:

$$\|\vec{u}\| = 1 \quad (2.52)$$

sono detti ‘versori’ e saranno indicati di preferenza con la lettera u di ‘unitario’. Essi indicano una direzione e un verso nello spazio e, dato un generico vettore \vec{v} , se ne può calcolare il versore associato \vec{u}_v come:

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad (2.53)$$

che verifica la proprietà richiesta.

Spesso è utile definire un sistema di assi ortogonali in forma cartesiana in un generico spazio N-D. Dati quindi N versori $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n]$, ognuno dei quali è in corrispondenza biunivoca con un asse, bisognerà garantire, che:

$$\begin{cases} \|\vec{u}_i\|^2 = 1 & \forall i \in \{1; 2; \dots; n\} \\ \vec{u}_i \perp \vec{u}_j \Rightarrow \vec{u}_i^T \cdot \vec{u}_j = 0 & \forall i \neq j \in \{1; 2; \dots; n\} \end{cases} \quad (2.54)$$

Questo deve essere valido qualunque sia il sistema di coordinate utilizzato, cartesiane, radiali o cilindriche, anche se l’operazione di prodotto scalare deve essere opportunamente definita. Nel caso cartesiano è possibile scegliere un sistema di versori particolarmente semplice, ovvero:

$$\vec{u}_i = [0; 0; \dots; \underbrace{0; 1; 0}_{i\text{-esima posizione}}; \dots; 0; 0] \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; n\} \quad (2.55)$$

Incolonnando i versori uno accanto all’altro, si ottiene la matrice identità $I_{n \times n}$:

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_{n \times n} \quad (2.56)$$

In letteratura questo sistema di versori viene spesso indicato con $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$ invece che con $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n]$. Nel caso si lavori in 3-D, i versori associati agli assi X , Y e Z vengono di frequente indicati rispettivamente con \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} .

Capitolo 3

Il prodotto vettore in 3D

...eppure io non posso porre una mano,
quale vien vista nello specchio, al
posto del suo originale; poiché se
questa era una mano destra, è una
sinistra quella nello specchio

Immanuel Kant, *Prolegomeni ad ogni
futura metafisica che vorrà presentarsi
come scienza*

3.1 Concetto intuitivo e definizione in 3D

Il prodotto vettore (in inglese *cross product*) costituisce, assieme all'addizione e al prodotto scalare, una delle operazioni più elementari che si possono compiere tra due vettori. Allo stesso tempo però è quella che presenta più stranezze e particolarità. Per la sua definizione si fa menzione di terne 'destre' o 'sinistre' di assi, a rotazioni in senso 'antiorario' o 'orario'; per qualche ragione, è molto difficile trovare un testo qualsiasi che parli di un prodotto vettore tra due vettori il cui numero di elementi non sia per forza 3 o, al minimo, 2. Eppure addizione e prodotto scalare si possono effettuare tra vettori di dimensioni qualsiasi, quindi con un numero n di elementi anche maggiore di 3.

In generale, nell'uso del prodotto vettore bisogna prestare una maggior attenzione rispetto al prodotto scalare, proprio in virtù di alcune sue particolarità. Si veda allora quale tipo di oggetto matematico sia il prodotto vettore, quale sia il concetto intuitivo dietro di esso e quale sia la sua definizione operativa.

3.2 Un prima idea intuitiva: il vettore area

Che cos'è il 'prodotto vettore'? A cosa serve e da quando lo si utilizza? Storicamente, la prima formulazione di 'prodotto vettore' si deve a Joseph Louis Lagrange. Nel 1773, nel suo trattato *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. Oeuvres. vol 3*, Lagrange calcola analiticamente gli equivalenti di prodotto scalare e prodotto vettore, allo scopo di determinare

il volume di un generico tetraedro di cui siano note le coordinate cartesiane dei vertici.

L'idea di base di 'prodotto vettore' fu probabilmente questa: uno strumento utile per il calcolo di aree e volumi.

Si consideri un generico parallelogramma, le cui coppie di lati sono associate ai vettori \vec{a} e \vec{b} . Noti questi vettori in forma cartesiana, come si può calcolare l'area A del parallelogramma? Secondo il metodo euclideo più classico, l'area A

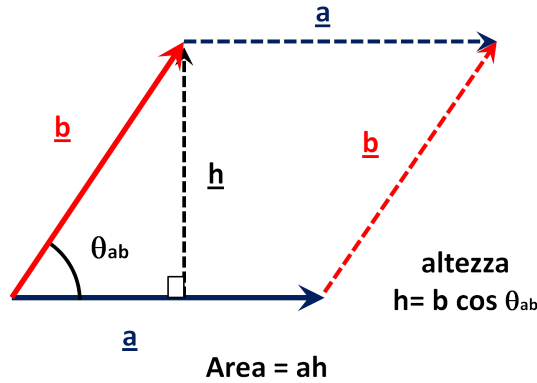


Figura 3.1: Calcolo dell'area del parallelogramma individuato dai vettori \vec{a} e \vec{b}

si ottiene moltiplicando la lunghezza della base per l'altezza del parallelogramma. Assumendo $a = \|\vec{a}\|$ come base del parallelogramma, si avrà così:

$$A = ah \quad (3.1)$$

Problema: anche se a è immediatamente calcolabile, noto \vec{a} , come trovare l'altezza h ? Sappiamo, per la definizione di 'altezza', che il segmento che la rappresenta deve essere *perpendicolare* alla base, cioè ad \vec{a} . Si richiede quindi un'informazione non solo sulla lunghezza di tale segmento, ma anche sulla sua direzione. Il segmento-altezza \vec{h} può essere quindi rappresentato come un vettore. La richiesta di ortogonalità tra \vec{a} e \vec{h} potrà essere così espressa tramite un'equazione scalare:

$$\vec{a} \perp \vec{h} \Rightarrow \vec{a}^T \cdot \vec{h} = 0 \quad (3.2)$$

Questa sola equazione non è sufficiente per determinare \vec{h} : ovviamente, sarà necessario sfruttare la conoscenza sul secondo lato \vec{b} del parallelogramma. \vec{h} , in quanto altezza, deve estendersi dalla base \vec{a} fino al lato parallelo ad essa. Un'estremità di quest'ultimo coincide con la punta del vettore \vec{b} , la cui coda coincide con quella di \vec{a} . Il vettore \vec{h} può quindi essere considerato applicato su un punto \vec{b}_a giacente sulla base e terminante con la punta coincidente con quella di \vec{b} . In altre parole, \vec{b} può essere considerato come somma di un vettore \vec{b}_a , parallelo ad \vec{a} , e del vettore altezza \vec{h} , perpendicolare ad \vec{a} . Si avrà così:

$$\begin{cases} \vec{b} = \vec{b}_a + \vec{h} \\ \vec{b}_a // \vec{a} \end{cases} \Rightarrow \vec{b}_a = \beta \vec{a} \quad (3.3)$$

Sostituendo l'espressione di \vec{b}_a nell'equazione precedente ed esprimendo \vec{h} in funzione di \vec{b} e \vec{a} si avrà:

$$\vec{h} = \vec{b} - \beta \vec{a} \quad (3.4)$$

Quella appena scritta è un'equazione vettoriale, con lo scalare β che costituisce un'incognita aggiunta. Moltiplicando a sinistra per il vettore \vec{a} , si otterrà:

$$\vec{a}^T \cdot \vec{h} = \vec{a}^T \cdot \vec{b} - \beta \vec{a}^T \cdot \vec{a} \quad (3.5)$$

$$\beta a^2 = \vec{a}^T \cdot \vec{b} - \vec{a}^T \cdot \vec{h} \quad (3.6)$$

Poiché per la condizione di ortogonalità di \vec{h} e \vec{a} si ha che il loro prodotto scalare è nullo, β sarà pari a:

$$\beta = \frac{\vec{a}^T \cdot \vec{b}}{a^2} \quad (3.7)$$

Sostituendo nell'espressione di \vec{h} si ottiene così:

$$\vec{h} = \vec{b} - \frac{\vec{a}^T \cdot \vec{b}}{a^2} \vec{a} \quad (3.8)$$

equazione che, sotto diverse forme, si ritroverà spesso.

A questo punto è possibile calcolare la lunghezza di \vec{h} . Si trovi allora h^2 :

$$h^2 = \vec{h}^T \cdot \vec{h} = (\vec{b} - \beta \vec{a})^T \cdot (\vec{b} - \beta \vec{a}) \quad (3.9)$$

$$h^2 = \vec{b}^T \cdot \vec{b} - 2\beta \vec{b}^T \cdot \vec{a} + \beta^2 \vec{a}^T \cdot \vec{a} \quad (3.10)$$

$$h^2 = b^2 + \beta^2 a^2 - 2\beta \vec{b}^T \cdot \vec{a} \quad (3.11)$$

Sostituendo l'espressione di β in funzione di \vec{a} e \vec{b} , si ottiene:

$$h^2 = b^2 + \left(\frac{\vec{a}^T \cdot \vec{b}}{a^2} \right)^2 a^2 - 2 \left(\frac{\vec{a}^T \cdot \vec{b}}{a^2} \right) \vec{b}^T \cdot \vec{a} \quad (3.12)$$

$$h^2 = b^2 + \frac{(\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2}{a^2} - 2 \frac{(\vec{a}^T \cdot \vec{b})}{a^2} \vec{b}^T \cdot \vec{a} \quad (3.13)$$

$$h^2 = b^2 - \frac{1}{a^2} (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \quad (3.14)$$

$$h^2 = \frac{1}{a^2} (a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2) \quad (3.15)$$

Sapendo che l'area è data da $A = ah$, il suo quadrato sarà pari a:

$$A^2 = a^2 h^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \quad (3.16)$$

Ovvero:

$$A^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \quad (3.17)$$

Si è così trovata l'equazione, detta anche *identità di Lagrange*, che consente di calcolare l'area del parallelogramma una volta noti i vettori \vec{a} e \vec{b} . Dato che l'area del parallelogramma è indipendente da come lo si ruota, per determinarla

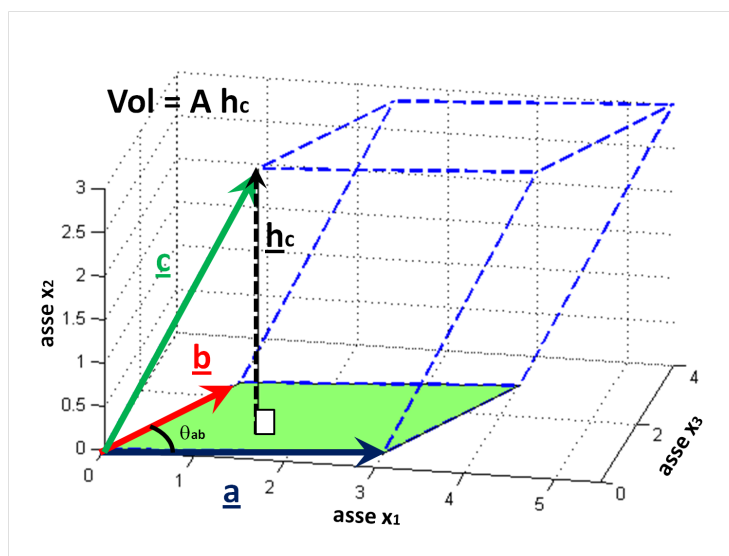


Figura 3.2: Esempio di calcolo del volume di un parallelepipedo individuato dai vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c}

è sufficiente conoscere le lunghezze dei lati e l'angolo compreso tra di essi, senza conoscere necessariamente i versi dei due vettori. Sapendo infatti che:

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = ab \cos \theta_{ab} \quad (3.18)$$

si ottiene:

$$A^2 = a^2 b^2 - (ab \cos \theta_{ab})^2 = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \theta_{ab}) \quad (3.19)$$

$$A^2 = a^2 b^2 \sin^2 \theta_{ab} \quad (3.20)$$

Finora non si è effettuata alcuna operazione che non fosse riconducibile ad una di quelle già illustrate: quand'è dunque che sarà necessario introdurre questo fantomatico prodotto vettore? L'utilità si presenta per il problema immediatamente successivo: il calcolo del volume.

3.3 Un primo uso pratico: il calcolo dei volumi

Dato il parallelogramma descritto nella sezione precedente, lo usi come base per costruirci sopra un parallelepipedo di cui si voglia calcolare il volume. I lati del solido suddetto sono associati ai vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} . Per determinare il volume Vol si può calcolare il prodotto tra l'area A del parallelogramma di base e l'altezza h_c , normale a tale base.

$$\begin{cases} Vol = Ah_c \\ \vec{h}_c \perp \vec{a}, \quad \vec{h}_c \perp \vec{b} \end{cases} \quad (3.21)$$

Per il calcolo di h_c si potrebbe seguire un procedimento analogo a quello già visto, scomponendo \vec{c} in due componenti, una contenuta nel piano individuato da (\vec{a}, \vec{b}) , l'altra perpendicolare a tale piano, cioè \vec{h}_c . L'altezza h_c può essere vista

però anche in una maniera leggermente differente, ovvero come la proiezione di \vec{c} sulla normale \vec{n} del piano, ovvero:

$$h_c = \vec{n}^T \cdot \vec{c} \quad (3.22)$$

dove:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a}, & \vec{n} \perp \vec{b} \\ \|\vec{n}\| = 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

Il volume del parallelogramma sarà allora:

$$Vol = Ah_c = A\vec{n}^T \cdot \vec{c} \quad (3.24)$$

$$Vol = (A\vec{n})^T \cdot \vec{c} = \vec{A}^T \cdot \vec{c} \quad (3.25)$$

Si è così riusciti ad esprimere il volume Vol come un prodotto scalare tra il terzo lato \vec{c} e il vettore-area $\vec{A} = A\vec{n}$. Questo ‘vettore’, determinabile una volta che siano noti \vec{a}, \vec{b} , è per l'appunto il *prodotto vettore* \vec{p} in 3-D dei vettori \vec{a} e \vec{b} , qui indicato con il simbolo del cuneo \wedge .

$$\vec{A} = \vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (3.26)$$

Come accennato, per calcolare il prodotto vettore sarà necessario determinare la

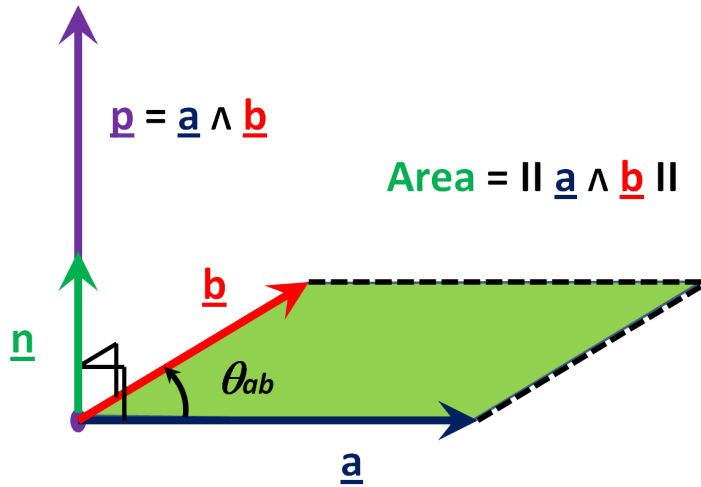


Figura 3.3: Definizione geometrica del prodotto vettore $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ come area orientata

normale \vec{n} al piano individuato da \vec{a} e \vec{b} . Riassumendo le informazioni, si avrà:

$$\vec{A} = \sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2} \vec{n} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \vec{n}^T \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{n}^T \cdot \vec{b} = 0 \\ \|\vec{n}\| = 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

Così:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2} \vec{n} \Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} // \vec{n} \quad (3.29)$$

Il sistema di equazioni per determinare il prodotto vettore $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sarà così:

$$\begin{cases} \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \\ (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{a} = 0 \\ (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Questo sistema è espresso in forma simbolica, ma per il calcolo effettivo del prodotto vettore $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ bisogna esprimere i suddetti vettori in un sistema di coordinate, di preferenza cartesiane. Si avrà allora:

$$\vec{a} = [a_1; a_2; a_3] \quad (3.31)$$

$$\vec{b} = [b_1; b_2; b_3] \quad (3.32)$$

$$\vec{p} = [p_1; p_2; p_3] \quad (3.33)$$

dove le coordinate di \vec{a} , \vec{b} sono note, mentre quelle di \vec{p} costituiscono le incognite del problema. Per la risoluzione del sistema è più comodo partire dalle due equazioni lineari che esprimono l'ortogonalità di \vec{p} con \vec{a} e \vec{b} .

$$\begin{cases} \vec{p}^T \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{p}^T \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

ovvero:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 p(i)a(i) = p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 = 0 \\ \sum_{i=1}^3 p(i)b(i) = p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3 = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \vec{a}^T \\ \vec{b}^T \end{bmatrix} \vec{p} = \vec{0} \quad \text{ovvero} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

E' ovvio che si tratta di un sistema sottodeterminato, dato che le incognite sono 3 e le equazioni finora sono soltanto 2. Rimarrà quindi un 'Grado di Libertà' da fissare per mezzo dell'ultima equazione. Volendo si potrebbe lasciare la coordinata p_3 come ultima incognita da determinare, ma la soluzione probabilmente più astuta è esprimere \vec{p} nella forma:

$$\vec{p} = \rho [a_2 b_3 - a_3 b_2; \quad a_3 b_1 - a_1 b_3; \quad a_1 b_2 - a_2 b_1] \quad \text{con } \rho \in \mathbb{R} \quad (3.37)$$

forma che soddisfa automaticamente le richieste di perpendicolarità, infatti:

$$\begin{cases} a_1 \rho (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 \rho (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 \rho (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \\ b_1 \rho (a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2 \rho (a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3 \rho (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{cases} \rho (a_1 a_2 b_3 - a_3 a_1 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_3 a_1 b_2 - a_2 a_3 b_1) = 0 \\ \rho (a_2 b_3 b_1 - a_3 b_1 b_2 + a_3 b_1 b_2 - a_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 - a_2 b_3 b_1) = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} \rho (a_1 a_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 + a_3 a_1 b_2 - a_1 a_2 b_3 - a_2 a_3 b_1 - a_3 a_1 b_2) = 0 & \forall \rho \in \mathbb{R} \\ \rho (a_2 b_3 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_1 b_2 b_3 - a_2 b_3 b_1 - a_3 b_1 b_2 - a_1 b_2 b_3) = 0 & \forall \rho \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.40)$$

Si tratta ora di trovare lo scalare ρ per definire univocamente \vec{p} . Per questo scopo si utilizza l'equazione che vincola la norma del prodotto vettore, ovvero:

$$\|\vec{p}\|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \quad (3.41)$$

Sviluppando in forma cartesiana il termine a destra dell'equazione si ottiene:

$$\|\vec{p}\|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \quad (3.42)$$

In una forma un po' più generale:

$$\|\vec{p}\|^2 = \left(\sum_{i=1}^3 a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^3 b_j^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i \right)^2 \quad (3.43)$$

$$\|\vec{p}\|^2 = \sum_{i=j}^3 \sum_{j=1}^3 a_i^2 b_j^2 - \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_i a_j b_j \right) \quad (3.44)$$

$$\|\vec{p}\|^2 = \sum_{i=j}^3 \sum_{j=1}^3 (a_i^2 b_j^2 - a_i b_i a_j b_j) \quad (3.45)$$

Senza svolgere a mano tutti i conti, che coinvolgono un gran numero di termini, si dimostra che:

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \\ (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

La dimostrazione di questa identità con l'uso della notazione 3-D è piuttosto lunga e laboriosa, anche solo per lo sviluppo di tutti i prodotti e la scrittura dei singoli termini. Più avanti però, alla sezione 4.9 nella pagina 89, si fornirà una dimostrazione più semplice e generale, valida in N-D, di quella che è sostanzialmente la stessa identità. In particolare, si vedrà come la norma del prodotto vettore N-D tra due vettori \vec{a} e \vec{b} sia pari al *doppio* dell'area compresa tra di essi.

Continuando per ora ad utilizzare la notazione 3-D e sfruttando l'identità appena scritta, si avrà perciò:

$$\|\vec{p}\|^2 = \|\rho [a_2 b_3 - a_3 b_2; \quad a_3 b_1 - a_1 b_3; \quad a_1 b_2 - a_2 b_1]\|^2 \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{p}\|^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Uguagliando le due equazioni si ottiene un'espressione quadratica di ρ :

$$\begin{aligned} \|\vec{p}\|^2 &= \rho^2 ((a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2) = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \quad \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\rho^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = \pm 1 \quad (3.50)$$

Esistono quindi due possibili valori di ρ tra cui scegliere. Questo è dovuto al fatto che l'ultima equazione non è lineare in \vec{p} ma, per l'appunto, quadratica. Per definire univocamente l'operazione di prodotto vettore è necessario eliminare questa arbitrarietà di segno. Per ora si porrà semplicemente $\rho = 1$: la ragione di tale scelta verrà spiegata al paragrafo 3.4.3 sulla lateralità delle terne. Così facendo, si ottiene finalmente l'espressione del prodotto vettore $\vec{a} \wedge \vec{b}$ in funzione di \vec{a} e \vec{b} .

Definizione analitica di prodotto vettore 3D

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = [a_2b_3 - a_3b_2; \quad a_3b_1 - a_1b_3; \quad a_1b_2 - a_2b_1] \quad (3.51)$$

Quella appena scritta è di fatto la *definizione* dell'operazione di prodotto vettore in 3D, espressa in coordinate cartesiane. Utilizzando i versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, si può scrivere in maniera del tutto equivalente:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \quad (3.52)$$

Volume del parallelogramma in forma analitica

A questo punto è possibile calcolare, a meno del segno, il volume Vol del parallelepipedo come richiesto inizialmente, infatti:

$$\begin{cases} Vol = \vec{A}^T \cdot \vec{c} \\ \vec{A} = \vec{a} \wedge \vec{b} \end{cases} \Rightarrow Vol = (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c} \quad (3.53)$$

Dato che per calcolare il volume del parallelepipedo si può partire scegliendo una qualsiasi base del solido, ad esempio quella compresa tra \vec{b} e \vec{c} , dovrà valere:

$$Vol = (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c})^T \cdot \vec{a} = (\vec{c} \wedge \vec{a})^T \cdot \vec{b} \quad (3.54)$$

Sviluppando il prodotto, si otterrà:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c} = [a_2b_3 - a_3b_2, \quad a_3b_1 - a_1b_3, \quad a_1b_2 - a_2b_1] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c} = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 \quad (3.56)$$

Si può così verificare che il risultato è lo stesso per qualsiasi permutazione 'ciclica' dei lati \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} :

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c} &= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1) = \\ (\vec{b} \wedge \vec{c})^T \cdot \vec{a} &= (b_1c_2a_3 + b_2c_3a_1 + b_3c_1a_2) - (b_1c_3a_2 + b_2c_1a_3 + b_3c_2a_1) = \\ (\vec{c} \wedge \vec{a})^T \cdot \vec{b} &= (c_1a_2b_3 + c_2a_3b_1 + c_3a_1b_2) - (c_1a_3b_2 + c_2a_1b_3 + c_3a_2b_1) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Nonostante queste invarianze, non è possibile scambiare i lati a piacere se si vuole che il volume mantenga lo stesso segno! L'espressione più corretta del volume, assunto come positivo, sarebbe dunque:

$$Vol = |(\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c}| \quad (3.58)$$

Per il momento, si è visto come il prodotto vettore, seppur in forma puramente analitica e non vettoriale, sia stato introdotto come strumento utile per il calcolo di aree e volumi. Nei paragrafi seguenti si illustreranno altre applicazioni comuni di questa operazione e se ne confronteranno le definizioni date nei diversi ambiti scientifici.

3.4 Definizioni di prodotto vettore in 3D

3.4.1 Un po' di storia

Prima di proseguire oltre nell'analisi del prodotto vettore, si ripercorrerà rapidamente la storia del calcolo vettoriale, basandosi essenzialmente sulla opera di Michael J. Crowe, autore nel 1967 del testo *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System* [3],[4], di cui quanto segue è sostanzialmente un riassunto essenziale.

Come si è visto nella sezione precedente, il prodotto vettore può essere utilizzato per il calcolo dei volumi e Lagrange ne sviluppò una formulazione analitica equivalente. Nonostante questo 'primato', Lagrange non può essere considerato il padre del 'prodotto vettore' semplicemente perché nel 1773 i 'vettori' non erano ancora stati introdotti!

Una prima formulazione analitica di vettore, datata 1799 e basata sulla rappresentazione geometrica dei numeri complessi, si deve al norvegese Caspar Wessel. Carl Friedrich Gauss, nello stesso periodo, giunse a conclusioni analoghe a quelle di Wessel ma pubblicò i suoi risultati solo nel 1831.

Il calcolo vettoriale si sviluppò di fatto durante tutto il corso del XIX secolo, grazie al contributo di molti matematici e fisici e secondo direzioni differenti. Sintetizzando all'estremo, si possono citare Hamilton, Grassmann, Gibbs ed Heaviside, che giunsero a risultati analoghi con metodi ed idee profondamente differenti.

Nel 1840, Hermann G. Grassmann completò la sua *Theorie der Ebbe und Flut* (uno studio sulle maree), che contiene il primo sistema di analisi spaziale basato sui vettori, ragionevolmente simile al metodo moderno.

La genesi di questo lavoro ha però radici più lontane: l'idea di 'prodotto geometrico' compare infatti già in due libri scritti da suo padre, intitolati *Raumlehre* ('Teoria dello spazio', 1824) e *Trigonometrie* (1835). In particolare, nel 1824 il padre scriveva: 'Il rettangolo stesso è il vero prodotto geometrico, e la sua costruzione è davvero moltiplicazione geometrica'. I risultati di Grassmann sono estranei alla tradizione di rappresentazione geometrica legata ai numeri complessi: egli venne infatti a conoscenza di questo tipo di approccio solo nel dicembre del 1844. Nello stesso anno, Grassmann pubblicò la sua *Ausdehnungslehre*, in cui è



Figura 3.4: Hermann Gunther Grassmann

contenuta la prima esposizione del suo sistema di analisi geometrica, estesa anche

a spazi con un numero arbitrario n di dimensioni. Gran parte dei risultati del moderno calcolo vettoriale, tra cui prodotto scalare e vettore, sono già contenuti in quest'opera, che fu però sostanzialmente ignorata a causa della sua complessità e dello stile di scrittura spesso giudicato troppo 'filosofico' e oscuro.

Seguendo un percorso completamente diverso, nel 1843 Hamilton introdusse i quaternioni, entità pensate originariamente per rappresentare le rotazioni in 3D in analogia con la rappresentazione delle rotazioni in 2D per mezzo dei numeri complessi. Tre anni dopo, nel 1846, Hamilton pubblicò un articolo in cui introduceva i termini di *scalare* e *vettoriale* per riferirsi a parte reale e immaginaria dei quaternioni.



Figura 3.5: William Rowan Hamilton

Dati due quaternioni $Q = a + xi + yj + zk$ e $Q' = a' + x'i + y'j + z'k$, se la loro parte scalare è nulla (quindi $a, a' = 0$), secondo le regole di moltiplicazione definite da Hamilton si ottiene il prodotto:

$$QQ' = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - zy')\mathbf{i} + (zx' - xz')\mathbf{j} + (xy' - yx')\mathbf{k}$$

dove la parte reale del nuovo quaternioni è uguale al opposto del moderno prodotto scalare tra le due parti vettoriali, mentre la parte immaginaria coincide con il moderno prodotto vettore.

Dal 1865 al 1880 i quaternioni cominciarono ad affermarsi nel mondo scientifico, mentre l'opera di Grassmann passava sostanzialmente sotto silenzio.

Nel 1873 James Clerk Maxwell pubblicò il suo *Treatise on electricity and magnetism*, opera fondamentale per l'elettromagnetismo. Benché durante il suo lavoro Maxwell non avesse mai fatto uso dei quaternioni, questi erano ormai molto diffusi, perciò decise di presentare molti dei suoi risultati in questa forma oltre a quella cartesiana. Nel 1877, William Kingdon Clifford pubblicò il suo *Elements of Dynamic*, un trattato di meccanica. Al capitolo intitolato 'Prodotti di due vettori', Clifford definisce le operazioni di 'prodotto vettore' e 'prodotto scalare', combinando in pratica le diverse impostazioni di Hamilton e di Grassmann (Clifford fu uno dei pochi matematici del tempo a conoscere entrambi i metodi). Sebbene Clifford resti ancora legato ai quaternioni, nel suo lavoro il prodotto tra queste entità viene scisso del tutto in due parti, ognuna delle quali viene trattata come un prodotto separato.

Nel 1881, Josiah Willard Gibbs terminò la stesura della prima metà dei suoi *Elements of Vector Analysis*, ad uso degli studenti, in cui esponeva quello che è



Figura 3.6: James Clerk Maxwell

essenzialmente il moderno sistema di analisi vettoriale; la seconda parte verrà stampata nel 1884. In una lettera a Schlegel del 1888, Gibbs afferma di aver sviluppato la nuova teoria a seguito della lettura del *Treatise on electricity and magnetism* di Maxwell, dove i quaternioni erano largamente utilizzati.

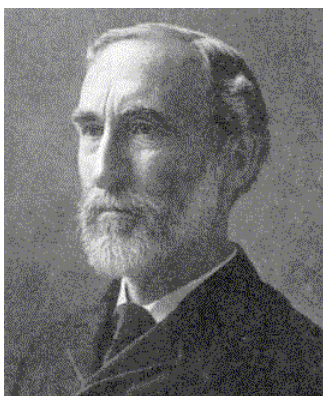


Figura 3.7: Josiah Willard Gibbs

Convinto della necessità di semplificare il calcolo, Gibbs sviluppò il nuovo sistema ripartendo da zero e separando *ab initio* i tipi di prodotto coinvolti. In seguito, Gibbs venne a conoscenza dell'opera di Grassmann e notò che i risultati conseguiti erano più simili nella forma a quelli di Grassmann che a quelli di Hamilton.

Parallelamente e in maniera indipendente, Olivier Heaviside, considerato il principale successore di Maxwell nella teoria elettromagnetica, iniziava ad introdurre una rappresentazione vettoriale nei suoi scritti. Nel 1885 Heaviside espose in un articolo la prima versione unificata del suo sistema di analisi vettoriale, sostanzialmente identico a quello di Gibbs, di cui però venne a conoscenza solo nel 1888, assieme all'opera di Grassmann. Nei vent'anni successivi scoppiò una 'lotta per la sopravvivenza' tra i sistemi di analisi vettoriale, che opponeva quaternionisti e vettorialisti. Peter Guthrie Tait, discepolo di Hamilton, bollò la *Vector analysis* di Gibbs come un 'mostro ermafrodita', mentre Heaviside evidenziò l'anti-intuitività dei quaternioni constatando che un sistema vettoriale privo di

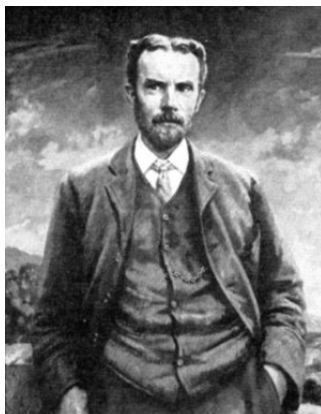


Figura 3.8: Olivier Heaviside, ritratto da Francis Edwin Hodge

questi poteva essere trovato da qualsiasi matematico che si fosse soffermato con attenzione ad esaminare le regole cartesiane, mentre l'invenzione dei quaternioni richiedeva un genio.

Nonostante le teorie di Hamilton godessero di un grande vantaggio iniziale in fama, i sistemi di Gibbs ed Heaviside si diffusero rapidamente anche grazie alla loro applicazione nel campo nascente dell'elettromagnetismo.

Un contributo fondamentale all'affermarsi del moderno metodo vettoriale si deve a Edwin Bidwell Wilson, ex-allievo di Gibbs, che nel 1901, pubblicò il primo trattato organico in cui viene presentata l'analisi vettoriale moderna: *Vector Analysis: A Text Book for the Use of Students of Mathematics and Physics and Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs* [2], opera che conobbe larga diffusione.

In generale, ripercorrendo la storia del calcolo vettoriale si nota come generazioni di matematici abbiano cercato di costruire una 'geometria delle posizioni', come auspicato da Leibniz nel 1679, giungendo a risultati analiticamente equivalenti. Risultati ottenuti partendo però da domande e problemi differenti, raggiunti ed espressi mediante l'uso di notazioni profondamente diverse. Anche queste testimoniano infatti l'importanza di un buon linguaggio formale, necessario non solo per la comunicazione e l'espressione delle idee, ma anche per il loro sviluppo.

Come si vedrà nelle sezioni seguenti, anche il problema da cui si parte e l'obiettivo che ci si prefigge condizionano l'uso di un oggetto matematico e il concetto ad esso associato. Nel caso del prodotto vettore, si può dire in sintesi che in Geometria Analitica è visto come uno strumento per il calcolo dei volumi o come un'operazione descrivibile con la Teoria dei Gruppi, mentre in Fisica è inteso soprattutto in associazione alle rotazioni e ai momenti.

3.4.2 Il prodotto esterno, ipervolumi e permutazioni

In base al suo primo utilizzo 'storico', il prodotto vettore può essere inteso nel senso di vettore-area, come già illustrato. Già nell'*Ausdehnungslehre*, dove Grassmann espone la sua 'Algebra esterna', questa idea viene estesa per il calcolo dei volumi ad un numero arbitrario N di dimensioni, anche superiore a 3.

Nella moderna ‘Algebra esterna’ (eng.: *Exterior Algebra*), e nell’‘Algebra Geometrica’, rielaborata da Clifford nel 1888 sulla base delle idee di Hamilton e Grassmann, tale impostazione ‘volumica’ viene sostanzialmente conservata.

Algebra Esterna - Grassmann

In Algebra Esterna, il prodotto vettore o esterno (detto anche *wedge product*) è considerato il prodotto per eccellenza e viene utilizzato per il calcolo degli iper-volumi in un numero qualsiasi di dimensioni. Il prodotto esterno di due vettori \vec{a} e \vec{b} viene indicato con $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ed è detto *bivettore*, associato ad uno spazio di ordine (o ‘rango’) superiore al quello dello spazio dei vettori. In generale, un bivettore è visto come un elemento piano orientato, allo stesso modo in cui un vettore può essere visto come un segmento orientato. Così come infatti un vettore è associato alla classe di tutti i segmenti orientati aventi modulo, direzione e verso identici, così un bivettore è associato alla classe di parallelogrammi aventi la stessa area, giacenti tutti sullo stesso piano e con la stessa orientazione dei loro contorni (oraria o antioraria).

Nell’opera di Grassmann quindi il prodotto esterno non è il prodotto vettore così come viene comunemente inteso oggi, sebbene le proprietà siano per molti versi analoghe. Dati due vettori \vec{a} e \vec{b} generici, infatti, il loro prodotto esterno deve essere tale che:

- scalando i lati del parallelogramma, l’area segnata corrispondente aumenta di un fattore equivalente:

$$(\alpha\vec{a}) \wedge (\beta\vec{b}) = \alpha\beta(\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- l’area individuata da due vettori coincidenti sia nulla (parallelogramma degenere):

$$A(\vec{a} \wedge \vec{a}) = 0$$

- dati due versori ortogonali \vec{u}_i e \vec{u}_j , con j successivo a i , si abbia che il quadrato da essi individuato abbia area unitaria:

$$A(\vec{u}_i \wedge \vec{u}_j) = 1$$

- l’operatore sia anti-commutativo e di conseguenza l’area sia dotata di segno:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

- l’area del parallelogramma non varia se non variano la base \vec{a} e l’altezza corrispondente. Questa richiesta equivale a:

$$(\vec{a} + \beta\vec{b}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

In 3D, dati i vettori \vec{a} e \vec{b} espressi come combinazione lineare dei versori unitari:

$$\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 \quad (3.59)$$

$$\vec{b} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3 \quad (3.60)$$

il loro prodotto esterno $\vec{a} \wedge \vec{b}$ è dato da:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + a_3 \vec{u}_3) \wedge (b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 + b_3 \vec{u}_3) \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)(\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) + \\ &\quad (a_3 b_1 - a_1 b_3)(\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1) + \\ &\quad (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Analogo al già visto:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{u}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{u}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{u}_3 \quad (3.63)$$

Apparentemente non c'è alcuna differenza sostanziale con il prodotto vettore precedentemente illustrato, e invece esiste! Il prodotto esterno di Grassmann si può infatti applicare a più di due vettori per volta! Rimanendo sempre in 3D, è possibile costruire un tri-vettore (detto anche *3-vettore*) associato al volume del parallelepipedo:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = ((a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1))(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) \quad (3.64)$$

cioè un'espressione simile al triplo prodotto $(\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c}$ visto in precedenza.

Questo procedimento può venire esteso per più vettori e più dimensioni. In generale, il prodotto esterno di k vettori è chiamato *k-blade*. La grandezza associata alla *k-blade* altro non è che il volume dell'iper-parallelepipedo k -dimensionale avente i vettori come lati.

$$Vol_k = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k \quad (3.65)$$

Si noti che, in generale, il determinante di una matrice quadrata altro non è che il volume individuato dai vettori colonna che la costituiscono! Se i vettori \vec{v}_i hanno dimensione $n = k$, è quindi possibile esprimere Vol_k può quindi essere espresso anche come:

$$Vol_k = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k = \det [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k] \quad (3.66)$$

Si presti attenzione che qui Vol_k non è uno scalare, ma una *k-blade*, quindi un oggetto matematico definito su uno spazio di ordine k .

In particolare, la k -esima *potenza esterna* di uno spazio vettoriale V , indicata con $\Lambda^k(V)$, è un sottospazio vettoriale di $\Lambda^k(V)$ avente come basi elementi nella forma:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k \quad \text{con } \vec{v}_i \in V \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; k\} \quad (3.67)$$

Se $A \in \Lambda^k(V)$, A è detto *k-multivettore* e può essere espresso come combinazione lineare di *k-blade*.

Le *k-blade* costituiscono infatti le basi dell'Algebra Esterna, dato che possono essere ottenute tramite il semplice prodotto di vettori. La somma di *k-blade* dà origine ad un *k-vettore*, che non sempre è scomponibile come semplice prodotto di vettori. Si consideri, ad esempio, per lo spazio vettoriale 4D $V = \mathbb{R}_4$, il multivettore:

$$A = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4 \quad (3.68)$$

Questo 2-multivettore non è esprimibile come un semplice prodotto esterno e per esso non vale $A \wedge A = 0$! Infatti:

$$A \wedge A = (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4) \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4) \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} A \wedge A &= (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) + (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \wedge (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4) + \\ &\quad (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4) \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) + (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4) \wedge (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4) = \\ &\quad 0 + (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) \wedge (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4) + (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4) \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) + 0 = \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$A \wedge A = 2(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_4)$$

Se A fosse scomponibile come semplice prodotto esterno, si avrebbe invece $A \wedge A = 0$.

L'Algebra Esterna è un'algebra associativa rispetto al prodotto esterno, perciò vale:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \quad (3.71)$$

con A, B, C elementi qualsiasi di un sottospazio $\Lambda^k(V)$.

Oltre al prodotto esterno, è possibile definire i prodotti 'interno' e 'interiore', che come l'esterno possono coinvolgere più di un vettore o multivettore per volta.

L'Algebra Esterna trova applicazioni o collegamenti soprattutto in matematica pura, ad esempio in geometria differenziale, in geometria proiettiva, nella teoria delle rappresentazioni, nell'Algebra di Lie eccetera. In fisica è considerata come un primo esempio storico di una 'superalgebra', utile per la descrizione di fermioni e supersimmetrie.

In particolare, esistono delle analogie con l'Algebra Ortogonale di Lie, associata ai Gruppi di rotazioni $O(n, R)$ e $SO(n, R)$. Dato infatti uno spazio vettoriale V dotato di un prodotto interno, l'Algebra Ortogonale di Lie è generata dai 2-vettori generati tramite la somma di 2-vettori semplici (ovvero le 2-blade) nella forma $\vec{a} \wedge \vec{b}$. I 2-vettori associati ai gruppi $O(n, R)$ e $SO(n, R)$ sono descritti per mezzo di matrici $n \times n$ anti-simmetriche.

Il paragone tra l'Algebra Esterna di Grassmann e l'Algebra Ortogonale di Lie è solo un esempio di come, nella matematica moderna, si utilizzino linguaggi più o meno diversi per descrivere oggetti che hanno le stesse proprietà, anche se con approcci differenti. Se infatti in Grassmann prevale un approccio geometrico e volumico, in Lie si fa uso della Teoria dei Gruppi e si mira a descrivere le rotazioni e le loro permutazioni. Un approccio algebrico ancora differente ai prodotti tra vettori è quello di Clifford, in cui emergono idee derivanti sia dai quaternioni di Hamilton sia dalle strutture di Grassmann.

Algebra Geometrica - Clifford

Nell'ambito matematico dell'Algebra esterna il 'prodotto vettore' è detto anche 'prodotto esterno' (eng: *exterior product*), in opposizione ai prodotti scalari o interni. In particolare, i prodotti elementari contemplati in Algebra Esterna sono il 'geometrico', l' 'interno' e l' 'esterno'.

Il *prodotto geometrico*, detto anche *Clifford product* è analogo, per certi versi, al prodotto scalare, con la differenza che in questo caso la commutatività non è contemplata e neanche un risultato scalare! Dati tre vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , l'operazione di prodotto geometrico, indicato con \mathbf{ab} (senza il punto in mezzo), è tale che valgano:

- Proprietà associativa
 $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$
- Proprietà distributiva a destra e sinistra
 $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$
 $(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}$

Deve inoltre essere possibile definire una norma quadratica. Nel caso di norma euclidea si ha semplicemente:

$$\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$$

Si evidenzia che il prodotto geometrico \mathbf{ab} non è considerato uno scalare!, mentre \mathbf{aa} viene considerato tale.

Il *prodotto interno* viene però definito come uno scalare nella forma:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \triangleq \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \quad (3.72)$$

che in aggiunta alle proprietà associativa e distributiva ha anche quella commutativa.

Il *prodotto esterno*, detto *outer product* o *wedge product* in inglese, è al contrario anti-commutativo e viene definito come:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \triangleq \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \quad (3.73)$$

Si può così facilmente verificare che:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (3.74)$$

In generale, il prodotto esterno $\mathbf{P} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ non è considerato un vettore ma un bi-vettore o tensore di ordine 2, quindi un oggetto che richiede almeno due indici per l'identificazione dei suoi elementi.

Come si può notare, molti dei concetti e dei simboli utilizzati da Clifford siano analoghi a quelli dell'Algebra Esterna di Grassmann.

Tra le particolarità (e stranezze) dell'Algebra Geometrica c'è anche la somma tra prodotto interno ed esterno:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = \mathbf{ab} \quad (3.75)$$

dove, secondo l'impostazione mista di Clifford, prodotto scalare e prodotto vettore sono di fatto trattati come parti di un unico oggetto. Si può dire, anzi, che il prodotto geometrico è posteriore agli altri due prodotti, di cui in fin dei conti non è altro che una combinazione, nello specifico un multivettore dato dalla somma di uno scalare (0-vettore) e di un bi-vettore (2-vettore).

$$\mathbf{ab} \triangleq \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (3.76)$$

L'impostazione di quest'algebra porta, tra l'altro, alla sorprendente identità:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \quad (3.77)$$

ovvero:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (\cos^2 \theta_{\mathbf{ab}} - 1) = -|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta_{\mathbf{ab}} \quad (3.78)$$

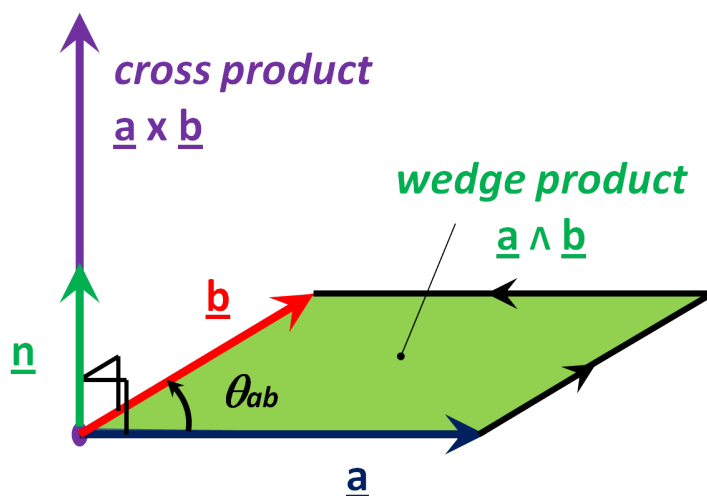


Figura 3.9: Interpretazioni distinte di *cross product* e *wedge product*

quindi l'opposto del quadrato dell'area del parallelogramma compreso tra \mathbf{a} e \mathbf{b} ! Un risultato simile si può ottenere, come già accennato, utilizzando i quaternioni e conseguendo un risultato scalare negativo da un'operazione di quadrato.

In generale, in Algebra Geometrica i prodotti definiti tra i vettori possono essere estese anche a tensori di ordine superiore e a spazi con un numero di dimensioni arbitrarie. Questa branca della matematica trova applicazioni in geometria proiettiva, nella descrizione delle rotazioni (utile per computer grafica), del campo elettromagnetico e dello spazio-tempo in Relatività.

L'idea di 'prodotto esterno' rimane però sempre legata all'idea di spazio compreso tra vettori più che ad all'idea di vettore: non per nulla si distingue tra *wedge product* e *cross product*.

Il primo viene indicato con $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, è considerato un tensore di ordine 2 ed è associato all'area compresa tra \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Il secondo viene indicato con $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, è considerato un vettore ed è associato alla normale al piano individuato da \mathbf{a} e \mathbf{b} . Questa distinzione è, concettualmente, molto significativa, dato che solo il *wedge product* può essere esteso in più di 3-D.

Come già fatto per le Algebre di Grassmann e di Lie, non ci si soffermerà oltre neanche su quella di Clifford. Queste branche della matematica sono infatti vastissimo e in ogni caso anche la sola esposizione delle loro basi esula largamente dagli obiettivi di questo testo. Era però doveroso mostrare come il 'prodotto esterno', così largamente utilizzato nelle geometrie analitiche, presenti fortissime analogie con il 'prodotto vettore' comunemente inteso, ma come allo stesso tempo quest'ultimo in fisica abbia un'accezione molto diversa. In aggiunta, a causa della somiglianza formale, con lo stesso simbolo di cuneo \wedge si denotano operazioni che in realtà sono diverse: si pensi anche solo al già citato esempio del volume, che nella notazione di Grassmann è indicato con $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$, mentre più comunemente viene espresso come il triplo prodotto scalare $(\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c}$.

Se quindi l'utilizzo degli stessi simboli può mettere in luce le somiglianze in certe procedure, d'altro canto può indurre in confusione e alla perdita del senso

delle equazioni che si stanno manipolando. Ancora una volta il linguaggio e la notazione si rivelano quindi di fondamentale importanza.

3.4.3 Il prodotto vettoriale in Meccanica Razionale

Nelle sezioni precedenti si è vista la definizione ‘operativa’ di prodotto vettore come vettore area e la sua espressione analitica. Si è visto inoltre come, in ambito matematico, il prodotto vettore sia considerato un prodotto esterno e venga definito per mezzo delle proprietà che si richiedono da esso, ad esempio l’anti-commutatività e la distributività.

In pratica, nella geometria analitica il ‘prodotto vettore’ è più una classe di operazioni caratterizzate da queste proprietà comuni piuttosto che una singola operazione specializzata. Vi è quindi una somiglianza con le già viste definizioni di ‘vettore’ e ‘prodotto interno’, che in matematica comprendono oggetti molto diversi ma che obbediscono alle stesse regole, mentre in fisica e in ingegneria il loro uso tende a essere più specializzato.

Si veda allora la definizione di prodotto vettore normalmente utilizzata in Meccanica Razionale e che si considererà come quella fondamentale a cui riferirsi.

Definizione di prodotto vettore - ambito fisico

A pagina 61 della *Vector Analysis* [2] di Wilson, si riporta la seguente definizione:

Il prodotto vettore ¹ di un vettore **A** e di un vettore **B** è la quantità vettoriale **C**, la cui direzione è la normale alla faccia del piano tra **A** e **B** sulla quale la rotazione da **A** a **B**, di un angolo minore di centottanta gradi, appare positiva o antioraria; e la cui grandezza è ottenuta moltiplicando il prodotto delle grandezze di **A** e **B** per il seno dell’angolo da **A** a **B**. Il verso di **A** × **B** può anche essere

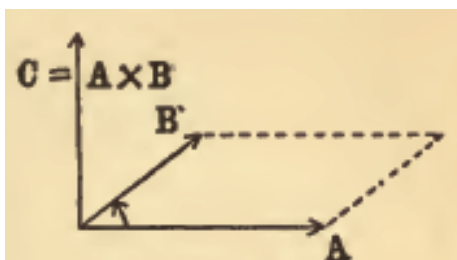


Figura 3.10: Definizione di prodotto vettore in ‘Vector Analysis’

denotato come quello in cui un’ordinaria vite (eng: *screw*) destrorsa avanza [si avvita] mentre gira in modo da portare **A** verso **B**

Il prodotto vettore [*skew product*] si denota per mezzo di una croce, mentre per il prodotto scalare [*direct product*] si utilizza un punto. Si scrive:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (3.79)$$

¹*skew product* nell’originale

e si legge ‘A vector [cross] B’. Per tale ragione è spesso chiamato *cross product*. Più spesso, comunque, esso è chiamato prodotto vettore, dato che si tratta di una quantità vettoriale al contrario di quanto avviene per il prodotto diretto o scalare il cui risultato è appunto uno scalare. Il prodotto vettore è per definizione:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{c} \quad (3.80)$$

dove \mathbf{A} e \mathbf{B} sono le lunghezze di \mathbf{A} e \mathbf{B} rispettivamente e dove \mathbf{c} è il versore unitario con la stessa direzione di \mathbf{C} .

Una definizione sostanzialmente analoga si trova a pag. 17 delle *Lezioni di meccanica razionale* [20] di T. Levi-Civita e U. Amaldi:

PRODOTTI VETTORIALE - Due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, non paralleli (ed entrambi diversi dallo zero) determinano, nell’ordine in cui son dati, su ogni piano avente la loro giacitura comune, un certo senso di rotazione, quello in cui, sul piano considerato, la parallela a \mathbf{v}_1 per un qualsiasi punto O , orientata nel verso di \mathbf{v}_1 , deve rotare intorno ad O per sovrapporsi, *descrivendo un angolo non maggiore di π* [sic], alla parallela per O a \mathbf{v}_2 , orientata nel verso di \mathbf{v}_2 . Di conseguenza i due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ permettono di distinguere l’uno dell’altro, per ogni direzione non appartenente alla giacitura di \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , i due versi: quello rispetto a cui il senso di rotazione determinato da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ appare destro e il verso opposto.

Ciò premesso, dicesi *prodotto vettoriale* (od *esterno*) dei due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e si designa con $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$ (da leggersi ‘ \mathbf{v}_1 vettore \mathbf{v}_2 ’ o ‘ \mathbf{v}_1 esterno \mathbf{v}_2 ’) il vettore che ha la lunghezza $v_1 v_2 \sin \widehat{v_1 v_2}$ (area del parallelogrammo racchiuso da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$), la direzione ortogonale alla giacitura di \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 e il verso rispetto a cui appare destro il senso di rotazione determinato dai due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, nell’ordine in cui sono dati.

Si può notare l’impostazione sostanzialmente ‘euclidea’, più che cartesiana, di entrambe queste definizioni. Il prodotto vettore viene infatti caratterizzato dalla sua ortogonalità ad un piano, da un ‘verso’ di rotazione e da un angolo, mentre le sue proprietà algebriche più formali sono introdotte successivamente, al contrario di quanto avviene in matematica ‘pura’.

In entrambi i testi citati si giunge comunque all’espressione analitica del prodotto vettore in coordinate cartesiane, già mostrata in precedenza:

$$\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b} = [a_2 b_3 - a_3 b_2; \quad a_3 b_1 - a_1 b_3; \quad a_1 b_2 - a_2 b_1] \quad (3.81)$$

Per ottenere questo risultato, come già visto, s’impone l’ortogonalità di \vec{p} con \vec{a} e \vec{b} e che il suo modulo sia pari a $ab \sin \theta_{ab}$. Il sistema di 3 equazioni è quindi:

$$\begin{cases} \vec{p}^T \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{p}^T \cdot \vec{b} = 0 \\ \|\vec{p}\|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \end{cases} \quad (3.82)$$

Si tratta di un sistema non-lineare, a causa della condizione sul modulo che è un’equazione quadratica. Si hanno così due soluzioni possibili per \vec{p} , costituite

da due vettori uguali e opposti:

$$\vec{p} = \pm \left((a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \right) \quad (3.83)$$

La scelta del segno è completamente arbitraria: si potrebbe scegliere il + così come il -. Nelle definizioni precedenti la ‘scelta’ del segno positivo avviene imponendo il *verso della rotazione* che porta \vec{a} verso \vec{b} .

Il vettore \vec{p} , personificato, deve vedere il vettore \vec{a} ruotare *da destra verso sinistra* o *in senso antiorario* verso il vettore \vec{b} , di un angolo minore di π [rad].

Al contrario di quanto visto in ambito algebrico, qui si invocano i concetti di *destra* e *sinistra* e di senso *orario* e *antiorario*, che sembrano desunti più dall’uso quotidiano che da una formale definizione.

Quale significato hanno destra e sinistra in questo ambito? Come definire matematicamente se un senso è orario o antiorario?

Terne destre e sinistre

A pag. 19 della *Vector Analysis* [2] di Wilson, si osserva che dati i versori \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} , associati rispettivamente agli assi X, Y e Z, è possibile costruire con essi due terne cartesiane diverse tra loro, una detta *destra* (eng: ‘right-handed’), l’altra *sinistra* o *sinistrorsa* (eng: ‘left-handed’). Per una terna *destra*, l’asse Z

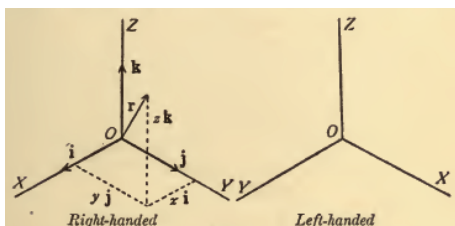


Figura 3.11: Terne destra e sinistra in ‘Vector analysis’

esce dalla parte del piano XY sulla quale una rotazione di un angolo dall’asse X verso l’asse Y appare *antioraria* o positiva, secondo una convenzione utilizzata in Trigonometria. Per una terna *sinistra*, al contrario, l’asse Z esce dalla parte del piano XY sulla quale una rotazione di un angolo dall’asse X verso l’asse Y appare *oraria* o negativa. Le due terne di assi non sono sovrapponibili a meno di una ‘riflessione’, che matematicamente corrisponde ad una matrice rotazione R con determinante pari a -1.

$$\det(\overline{R}) = -1 \quad \text{per riflessione} \quad (3.84)$$

Dall’espressione dei versori \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} in forma cartesiana si osserva che essa non contiene alcuna informazione sul fatto che una terna debba essere considerata ‘destra’ o ‘sinistra’.

$$\vec{i} = [1; 0; 0] \quad (3.85)$$

$$\vec{j} = [0; 1; 0] \quad (3.86)$$

$$\vec{k} = [0; 0; 1] \quad (3.87)$$

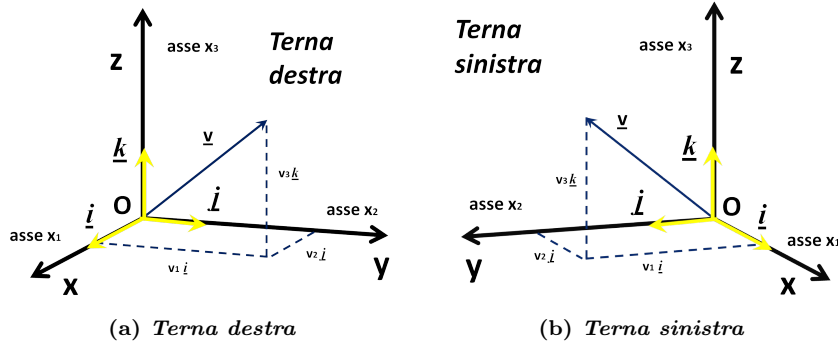


Figura 3.12: Terne adoperate per rappresentare lo stesso vettore \vec{v}

La nozione di ‘destro’ e ‘sinistro’ è infatti relativa: quella appena scritta potrebbe benissimo essere una terna sinistra di assi, ma convenzionalmente essa viene considerata ‘destra’. La richiesta che l’asse Z_{SX} di una terna sinistra veda una rotazione ‘negativa’ equivale a invertire il segno di tale asse. Si può costruire così una terna sinistra $\vec{i}_{SX}, \vec{j}_{SX}, \vec{k}_{SX}$ molto semplice nella forma:

$$\vec{i}_{SX} = [1; 0; 0] \quad (3.88)$$

$$\vec{j}_{SX} = [0; 1; 0] \quad (3.89)$$

$$\vec{k}_{SX} = [0; 0; -1] \quad (3.90)$$

dove si è solo cambiato il segno dell’asse \vec{k} . Seconda la convenzione comune, questa è una terna sinistra espressa nel sistema di riferimento di una terna destra, ma potrebbe benissimo essere vista come una terna destra espresso nel sistema di riferimento di un terna sinistra! Il concetto di destra-sinistra è quindi relativo: va riferito in confronto a due sistemi di assi che non siano sovrapponibili tramite una rotazione ordinaria non riflettente. In conclusione, un sistema di versori ortogonali $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]$ è detto ‘destro’, per convenzione, se il determinante della matrice associata è pari a 1.

$$\det([\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]) = 1 \quad \text{sistema destro con versori } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \quad (3.91)$$

Al contrario, se il determinante è pari a -1, il sistema è detto, per convenzione, ‘sinistro’. Questa definizione di ‘destro’ e ‘sinistro’ è applicabile in un spazi con numero n arbitrario di dimensioni.

Per il prodotto vettore la richiesta che una terna sia ‘destra’ equivale ad imporre la seguente relazione:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad (3.92)$$

Svolgendo il prodotto vettore tra \vec{i} e \vec{j} , imponendo solo le 3 condizioni viste, si ottengono le due soluzioni:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \pm[0; 0; 1] \quad \Rightarrow \quad \vec{i} \wedge \vec{j} = \pm\vec{k} \quad (3.93)$$

La scelta del segno + per la definizione di prodotto vettore in 3D consente quindi di soddisfare la relazione richiesta.

Il momento di una forza

In fisica il prodotto vettore è largamente utilizzato per descrivere le rotazioni e i ‘momenti’ delle forze. Si citeranno qui rapidamente alcuni esempi di applicazioni comuni di questa operazione.

Per esprimere la velocità relativa tra due punti P e Q di un corpo rigido che ruoti con velocità angolare ω si può sfruttare la ben nota relazione:

$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \wedge (P - Q) \quad (3.94)$$

Il momento M generato da una forza \vec{F} di braccio \vec{r} è invece dato da:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (3.95)$$

In generale, la definizione di ‘momento’ fisico è la seguente: ²

Definizione di momento: dati un vettore \vec{v} applicato in un punto P e un punto O detto ‘polo’, il prodotto vettoriale:

$$\vec{M}_v = (P - O) \wedge \vec{v} \quad (3.96)$$

è detto momento del vettore \vec{v} applicato in P rispetto al polo O .

Anche in questa definizione si opera una distinzione implicita tra ‘vettori’ e ‘vettori applicati’, come già illustrato in precedenza. Mentre spostamenti, velocità e accelerazioni sono considerati ‘vettori’, le forze sono viste come ‘vettori applicati’. Si può però dimostrare che tale distinzione è sostanzialmente inutile, almeno dal punto di vista formale. Così come è possibile infatti definire il *momento di una forza* \vec{M} , allo stesso modo è possibile definire il *momento di una quantità di moto* o *momento angolare* $\vec{\Gamma}$. Si confrontino le due espressioni formali:

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge (m\vec{v}) \quad (3.97)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (3.98)$$

dove \vec{r} è un generico braccio $(P - O)$ rispetto ad un polo O , $m\vec{v}$ è una quantità di moto ed F è una forza. Se si considera quest’ultima come un ‘vettore applicato in P ’, lo stesso si deve concludere per $m\vec{v}$. Per calcolare infatti il momento angolare $\vec{\Gamma}$ è infatti necessario considerare anche il punto di ‘applicazione’ della quantità di moto, o più precisamente sapere qual è la posizione del punto materiale di cui si sta considerando la quantità di moto. Si conclude perciò che $m\vec{v}$ è un vettore applicato, ma, poichè la velocità \vec{v} è un vettore e viene moltiplicata per lo scalare massa m , per le regole di moltiplicazione definite in precedenza $m\vec{v}$ deve essere pure un vettore!

Si è così mostrato come la differenza tra ‘vettori’ e ‘vettori applicati’ sia in pratica nulla a livello formale. Questa distinzione è quindi più di tipo concettuale e serve a ricordare che, dato un sistema di forze agenti su un insieme di punti materiali, per descriverne gli effetti è necessario conoscerne non solo modulo, direzione e verso, ma anche il punto di applicazione.

Lo stesso ragionamento si può fare anche per un campo di velocità $\vec{v}(\vec{x})$: non basta conoscerne il verso e l’intensità, ma bisogna sapere anche come varia in funzione di \vec{x} , cioè del ‘punto di applicazione’!

²cfr. *Lezioni di meccanica razionale* [20], pag. 26

In generale, dato un sistema di vettori $\{\vec{F}_i\}$ ³ e i loro punti di applicazione $\{P_i\}$, si dirà *risultante* del sistema il vettore \vec{F} pari a:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (3.99)$$

Dato poi un punto di riferimento O , si dirà momento risultante rispetto al polo O la somma dei momenti dei singoli vettori rispetto a quel polo.

$$\vec{M}_i = (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad \forall i \in \{1; 2; \cdots ; n\} \quad (3.100)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (3.101)$$

ovvero:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \quad (3.102)$$

L'idea di 'momento di un vettore', utilizzata in fisica, è in genere ben distinta da quella di 'vettore-area' adottata in geometria analitica. Una ragione di questa differenza è dovuta al fatto che un momento non ha le dimensioni fisiche di un'area e comunemente è associato ai movimenti rotatori. Inoltre, mentre in alcune Algebre, come quella Esterna di Grassmann, il prodotto esterno viene utilizzato per il calcolo dei volumi e opera su più vettori per volta, in fisica il prodotto vettoriale è considerato come un'operazione binaria, che agisce quindi su due soli vettori per volta.

In questo testo si prediligerà quest'ultima interpretazione e quindi la visione 'fisica' del prodotto vettore come generatore di momenti, tipica della Meccanica Razionale.

3.5 Riassunto definizioni e proprietà

Si riassumano ora rapidamente le principali proprietà del prodotto vettore, partendo da quelle intuitive e passando per quelle immediatamente dimostrabili.

3.5.1 Proprietà intuitive

In 3D il prodotto vettore $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, porta con sé:

- l'ortogonalità con i vettori di partenza \vec{a} e \vec{b} :

$$\vec{a}^T \cdot \vec{p} = \vec{a}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0 \quad (3.103)$$

$$\vec{b}^T \cdot \vec{p} = \vec{b}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0 \quad (3.104)$$

- informazione sui moduli di \vec{a} e \vec{b} e sull'angolo tra essi compreso

$$\|p\| = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = |ab \sin \theta_{ab}| \quad (3.105)$$

³non necessariamente forze

- informazione sull'area del parallelogramma compreso tra \vec{a} e \vec{b}

$$\|p\|^2 = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 = A^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \quad (3.106)$$

- un'informazione sul verso e una forma di 'anti-simmetria' associata, per cui vale:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \quad (3.107)$$

3.5.2 Definizione analitica in 3D

Esprimendo i vettori \vec{a} e \vec{b} in forma cartesiana:

$$\vec{a} = [a_1; a_2; a_3] \quad (3.108)$$

$$\vec{b} = [b_1; b_2; b_3] \quad (3.109)$$

imponendo le suddette richieste e adottando la convenzione di $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, si giunge alla definizione analitica di prodotto vettore $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ in 3D:

$$\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b} = [a_2 b_3 - a_3 b_2; \quad a_3 b_1 - a_1 b_3; \quad a_1 b_2 - a_2 b_1] \quad (3.110)$$

3.5.3 Proprietà algebriche del prodotto vettore

Per come è stato definito analiticamente il prodotto vettore, è possibile dimostrare alcune utili proprietà:

- Proprietà anti-commutativa

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \quad (3.111)$$

con conseguente annullamento per vettori coincidenti:

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad (3.112)$$

- Proprietà associativa per moltiplicazione per scalare

$$(\alpha \vec{a}) \wedge (\beta \vec{b}) = \alpha \beta (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3.113)$$

- Proprietà distributiva a destra e sinistra

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \quad (3.114)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c} \quad (3.115)$$

- Non associatività dell'operazione rispetto a se stessa

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \quad \text{in generale} \quad (3.116)$$

Si vedano ora alcune regoline utili per l'uso del prodotto vettore in 3D.

3.6 Regoline elementari in 3D

3.6.1 Prodotto vettore per terna destra di versori

Una volta definito analiticamente il prodotto vettore, si può dimostrare che per la terna di versori ortogonali \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} valgono le seguenti proprietà.

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{k}^T \cdot \vec{k} = 1 \qquad (3.117)$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{i}^T \cdot \vec{i} = 1 \qquad (3.118)$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{j}^T \cdot \vec{j} = 1 \qquad (3.119)$$

Così:

$$(\vec{i} \wedge \vec{j})^T \cdot \vec{k} = (\vec{j} \wedge \vec{k})^T \cdot \vec{i} = (\vec{k} \wedge \vec{i})^T \cdot \vec{j} = 1 \qquad (3.120)$$

In questa forma si può notare una prima, forte analogia con il prodotto tra quaternioni, non commutativo, per il quale si ha:

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{kk} = -\mathbf{1} \qquad (3.121)$$

$$\mathbf{jk} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{ii} = -\mathbf{1} \qquad (3.122)$$

$$\mathbf{ki} = \mathbf{j} \qquad \mathbf{jj} = -\mathbf{1} \qquad (3.123)$$

Inoltre:

$$\mathbf{ijk} = \mathbf{jki} = \mathbf{kij} = \mathbf{1} \qquad (3.124)$$

La differenza più notevole si ha per i quadrati dei versori, che nel caso vettoriale sono pari a 1, mentre per i quaternioni sono pari a -1.

Note le regole di moltiplicazione tra i versori, si può effettuare il prodotto vettore tra \vec{a} e \vec{b} esprimendoli come combinazione lineare dei suddetti e sfruttando la proprietà distributiva:

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k})^T \wedge (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = \\ & a_1 b_1 (\vec{i} \wedge \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \wedge \vec{j}) + a_1 b_3 (\vec{i} \wedge \vec{k}) + \\ & a_2 b_1 (\vec{j} \wedge \vec{i}) + a_2 b_2 (\vec{j} \wedge \vec{j}) + a_2 b_3 (\vec{j} \wedge \vec{k}) + \\ & a_3 b_1 (\vec{k} \wedge \vec{i}) + a_3 b_2 (\vec{k} \wedge \vec{j}) + a_3 b_3 (\vec{k} \wedge \vec{k}) = \\ & a_1 b_1 (\vec{0}) + a_1 b_2 (\vec{k}) + a_1 b_3 (-\vec{j}) + \\ & a_2 b_1 (-\vec{k}) + a_2 b_2 (\vec{0}) + a_2 b_3 (\vec{i}) + \\ & a_3 b_1 (\vec{j}) + a_3 b_2 (-\vec{i}) + a_3 b_3 (\vec{0}) = \\ & (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} \end{aligned} \qquad (3.125)$$

Si giunge così al risultato previsto dalla definizione, come richiesto. Si precisa che nell'equazione (3.125) si sono evidenziati in neretto i versori solo per renderne più facile la lettura.

3.6.2 Regola del determinante

Il prodotto vettore tra \vec{a} e \vec{b} può essere calcolato anche come il determinante di una matrice nel modo seguente:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad (3.126)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} &= \\ \mathbf{i} \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - \mathbf{j} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} + \mathbf{k} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} &= \\ (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} & \end{aligned} \quad (3.127)$$

Si noti che qui i versori sono trattati come se fossero elementi scalari di una matrice e non come vettori veri e propri, perché se così fosse la matrice non sarebbe quadrata ma rettangolare. La regola del determinante è quindi un semplice trucco mnemonico per il calcolo del prodotto vettore.

3.6.3 Regola ‘xyzzy’

Un altro metodo per ricordare l’ordine di successione degli indici per il prodotto vettore è la regola ‘xyzzy’. Siano dati, ad esempio, una braccio \vec{r} e una forza \vec{F} , le cui componenti sono espresse in un terna di assi XYZ:

$$\vec{r} = [r_x; r_y; r_z] \quad (3.128)$$

$$\vec{F} = [F_x; F_y; F_z] \quad (3.129)$$

La componente in direzione x del momento $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ sarà data da:

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y \quad (3.130)$$

Leggendo solo i pedici, si ottiene la parola ‘xyzzy’, relativamente facile da ricordare. Le componenti M_y ed M_z del momento si trovano ruotando ciclicamente gli indici:

$$M_y = r_z F_x - r_x F_z \quad (3.131)$$

$$M_z = r_x F_y - r_y F_x \quad (3.132)$$

3.6.4 Regola della mano destra

Un metodo pratico per visualizzare la posizione reciproca delle frecce coinvolte nel prodotto vettoriale è la cosiddetta ‘regola della mano destra’. Si apra la mano destra e si distenda il pollice verso l’esterno, a formare un angolo retto con l’indice. Si pieghino mignolo e anulare verso il palmo della mano e si alzi il dito medio fino a formare un angolo retto con il piano della mano. Le tre dita indice, medio e pollice, date in quest’ordine, formano una terna destra di assi

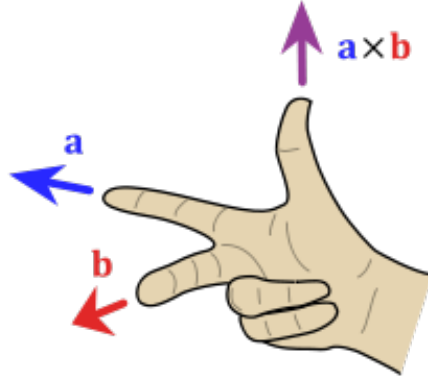


Figura 3.13: Regola della mano destra -
figura tratta dall'internet

ortogonali. Se al dito indice si associa un braccio \vec{r} e al dito medio una forza \vec{F} , il momento \vec{M} corrispondente risulterà associato al pollice. Questa regola serve semplicemente per immaginare la rappresentazione geometrica dei vettori in accordo con la convenzione di terna destra normalmente adottata.

3.6.5 Espressione matriciale del prodotto vettore 3D

L'operazione di prodotto vettore può essere ricondotta ad un prodotto tra una matrice anti-simmetrica e uno dei due vettori di partenza. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.133)$$

La matrice antisimmetrica utilizzata per il prodotto è, in entrambi i casi, originata da un singolo vettore. Si definiscono così le matrici $[a\wedge]$ e $[b\wedge]$ tali che:

$$[a\wedge] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [b\wedge] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = [a\wedge] \cdot \vec{b} = [b\wedge]^T \cdot \vec{a} \quad (3.135)$$

Questa riformulazione del prodotto vettore è di una certa importanza: consente infatti di ottenere lo stesso risultato per mezzo di un insieme di prodotti scalari. In pratica, in questo modo l'operazione di prodotto vettore è espressa con l'algebra delle matrici, molto più generale e di facile uso.

Tra le proprietà di questa formulazione matriciale si evidenziano:

$$[a\wedge] = -[a\wedge]^T \quad (3.136)$$

$$\vec{a}\wedge\vec{a} = [a\wedge] \cdot \vec{a} = \vec{0} \quad (3.137)$$

$$\vec{b}^T \cdot (\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}^T \cdot [a\wedge] \cdot \vec{b} = 0 \quad (3.138)$$

Si può osservare come l'anti-simmetria della matrice-vettore garantisca automaticamente l'ortogonalità tra il prodotto vettore risultante e i vettori iniziali.

Secondo una certa corrente di pensiero, la traduzione matriciale del prodotto vettore è un'inutile complicazione e tra l'altro contro-intuitiva: perché mai \vec{a} , che è un vettore, dovrebbe trasformarsi in una matrice $[a\wedge]$? In realtà questo approccio algebrico, nonostante alcune aporie e ingenuità che porta con sé, costituisce un primo passo verso l'estensione in N-D del prodotto vettore e la netta distinzione tra *vettori* e *pseudo-vettori*, che risolvono queste stranezze.

3.7 Prodotti combinati

In questa sezione si illustrano rapidamente i 'prodotti combinati', ovvero la successione di due o più operazioni di prodotto, siano essi scalari o vettoriali. Si riportano le identità algebriche più importanti senza però dimostrarle, almeno nell'immediato. Nella classica formulazione 3D del prodotto vettore è infatti possibile ricavarle in coordinate cartesiane manipolando i vettori secondo le regole stabilite, ma tale metodo è fortemente sconsigliato, dato che spesso i procedimenti sono lunghi e si rischia di far confusione con gli indici. Paradossalmente, gli stessi risultati verranno conseguiti (e dimostrati) in maniera più semplice nell'estensione N-D del prodotto vettore.

3.7.1 Triplo prodotto scalare 3D - il calcolo dei volumi

Si definisce *triplo prodotto scalare* o *prodotto misto* il risultato scalare del prodotto di 3 vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} nella forma:

$$Vol = (\vec{a}\wedge\vec{b})^T \cdot \vec{c} \quad (3.139)$$

$$Vol = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1) \quad (3.140)$$

Come già mostrato in precedenza, questa operazione equivale al calcolo del volume Vol (dotato di segno) del parallelepipedo compreso tra i lati \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} . Poiché il volume non varia a fronte di una permutazione ciclica dei lati, valgono le già dimostrate identità:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})^T \cdot \vec{c} = (\vec{b}\wedge\vec{c})^T \cdot \vec{a} = (\vec{c}\wedge\vec{a})^T \cdot \vec{b} \quad (3.141)$$

Conti alla mano, è possibile dimostrare che il triplo prodotto scalare, alcune volte indicato ⁴ con $[\mathbf{abc}]$, pari al determinante della matrice individuata dai vettori, come già visto nell'Algebra Esterna di Grassmann.

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})^T \cdot \vec{c} = [\mathbf{abc}] = \det \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right) \quad (3.142)$$

⁴cfr. *Vector Analysis* [2], pag 70

3.7.2 Doppio prodotto vettoriale in 3D - componente perpendicolare

Si definisce *doppio prodotto vettoriale* (eng: ‘vector triple product’) il risultato vettoriale del prodotto di tre vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} nella forma:

$$\vec{pp} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \quad (3.143)$$

$$\vec{pp} = \begin{bmatrix} (c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3) b_1 - (b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3) c_1 \\ (c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3) b_2 - (b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3) c_2 \\ (c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3) b_3 - (b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3) c_3 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

In 3D, il vettore \vec{pp} risulta perpendicolare ad \vec{a} e alla normale al piano (\vec{b}, \vec{c}) . \vec{pp} risulterà quindi contenuto nel piano (\vec{b}, \vec{c}) e perpendicolare ad \vec{a} . In generale l’operazione di doppio prodotto vettoriale non è associativa:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \quad (3.145)$$

le parentesi devono quindi esse mantenute. Svolgendo i conti, si può dimostrare che:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{a}) \vec{c} \quad (3.146)$$

la regola per ricordare l’ordine dei vettori consiste nelle parole ‘Cab meno bac’.

Da questa identità algebrica, si può dimostrare facilmente l’identità di Jacobi:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0} \quad (3.147)$$

Il doppio prodotto vettoriale viene di preferenza riportato alla forma ‘Cab meno bac’ e può essere utilizzato per calcolare la componente perpendicolare di un vettore su un altro. Scomponendo infatti \vec{b} nella forma:

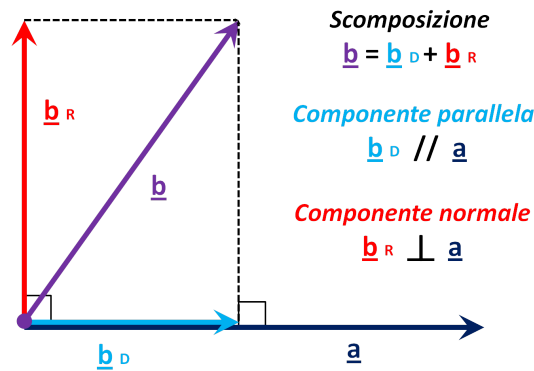


Figura 3.14: Componenti parallela e perpendicolare di \vec{b} su \vec{a}

$$\begin{cases} \vec{b} = \vec{b}_D + \vec{b}_R \\ \vec{b}_D // \vec{a} \\ \vec{b}_R \perp \vec{a} \end{cases} \quad (3.148)$$

la componente normale \vec{b}_R può essere espressa come:

$$\vec{b}_R = \vec{b} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} (\vec{b}^T \cdot \vec{a}) \vec{a} = \quad (3.149)$$

$$= \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \left((\vec{a}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{a}) \vec{a} \right) =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \left(\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}) \right)$$

$$\vec{b}_R = -\frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \left(\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) \right) \quad (3.150)$$

Ci si convince facilmente che è molto più conveniente utilizzare somma e prodotto scalare piuttosto che il doppio prodotto vettore. L'esempio riportato serve quindi solo per darne un'interpretazione.

3.7.3 Operazione inversa del prodotto vettore

Si è visto al paragrafo 3.7.2 nella pagina precedente che è possibile calcolare la componente normale di un vettore sull'altro nelle due forme:

$$\vec{b}_R = \vec{b} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} (\vec{b}^T \cdot \vec{a}) \vec{a} \quad (3.151)$$

$$\vec{b}_R = -\frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \left(\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) \right) \quad (3.152)$$

Se inizialmente sono noti solo il vettore \vec{a} e il prodotto $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, è quindi possibile calcolare \vec{b}_R come:

$$\vec{b}_R = -\frac{1}{\|\vec{a}\|^2} (\vec{a} \wedge \vec{p}) \quad (3.153)$$

$$\vec{b}_R = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} (\vec{p} \wedge \vec{a}) \quad (3.154)$$

Quella appena vista è quindi una specie di 'operazione inversa' per il prodotto vettore. Essa non consente infatti di calcolare la componente parallela $\vec{b}_D = \beta \vec{a}$, dato che:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\vec{b}_D + \vec{b}_R) = \vec{a} \wedge \vec{b}_D + \vec{a} \wedge \vec{b}_R \\ &= \beta \vec{a} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}_R = \vec{0} + \vec{a} \wedge \vec{b}_R = \\ \vec{p} &= \vec{a} \wedge \vec{b}_R \end{aligned} \quad (3.155)$$

Nell'operazione di prodotto vettoriale si perde quindi l'informazione sulla componente parallela di un vettore rispetto all'altro.

3.7.4 Prodotto scalare tra prodotti vettori 3D - la potenza delle coppie

Si definisce *prodotto scalare tra prodotti vettori* il risultato scalare del prodotto di 4 vettori \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} nella forma:

$$Pow = (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) \quad (3.156)$$

Si può dimostrare, conti alla mano, che valgono le seguenti identità algebriche:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}^T \cdot \vec{c})(\vec{b}^T \cdot \vec{d}) - (\vec{a}^T \cdot \vec{d})(\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \quad (3.157)$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \det \left(\begin{array}{cc} \vec{a}^T \cdot \vec{c} & \vec{a}^T \cdot \vec{d} \\ \vec{b}^T \cdot \vec{c} & \vec{b}^T \cdot \vec{d} \end{array} \right) \quad (3.158)$$

Un'interpretazione 'fisica' che si può dare di questa operazione è il calcolo della potenza di una coppia agente su un corpo rigido, calcolata come:

$$Pow = \vec{M}^T \cdot \vec{\omega} \quad (3.159)$$

Sia la coppia \vec{M} sia la velocità angolare $\vec{\omega}$ possono infatti essere viste come il risultato di due prodotti vettoriali:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (3.160)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r} \wedge \Delta \vec{v}) + \lambda \vec{r} \quad (3.161)$$

dove \vec{r} è il braccio tra il punto P e un polo di riferimento O , $\Delta \vec{v}$ la velocità relativa tra il punto considerato P e il polo stesso ed \vec{F} la forza equivalente, considerata applicata in P e controbilanciata da una forza uguale ed opposta in O . Il termine che $\lambda \vec{r}$ che compare nell'espressione di $\vec{\omega}$ è indeterminato ma qui inessenziale, dato che si annulla nella moltiplicazione con il momento \vec{M} . La potenza della coppia sarà quindi esprimibile come:

$$Pow = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r} \wedge \vec{F})^T \cdot (\vec{r} \wedge \Delta \vec{v}) \quad (3.162)$$

Introducendo il versore $\vec{u}_r = \vec{r}/\|\vec{r}\|$, si avrà:

$$\vec{u}_r = \vec{r}/\|\vec{r}\| \quad (3.163)$$

$$Pow = (\vec{u}_r \wedge \vec{F})^T \cdot (\vec{u}_r \wedge \Delta \vec{v}) \quad (3.164)$$

$$Pow = (\vec{u}_r^T \cdot \vec{u}_r)(\vec{F}^T \cdot \Delta \vec{v}) - (\vec{u}_r^T \cdot \vec{F})(\vec{u}_r^T \cdot \Delta \vec{v}) \quad (3.165)$$

$$Pow = (\vec{F}^T \cdot \Delta \vec{v}) - (\vec{u}_r^T \cdot \vec{F})(\vec{u}_r^T \cdot \Delta \vec{v}) \quad (3.166)$$

3.7.5 Prodotto vettoriale tra prodotti vettori 3D

Si definisce *prodotto vettoriale tra prodotti vettori* il risultato vettoriale del prodotto di 4 vettori \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} nella forma:

$$\vec{p}v = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) \quad (3.167)$$

In italiano questo tipo di operazione si potrebbe chiamare 'triplo prodotto vettoriale', dato che l'operatore \wedge vi compare 3 volte, ma ciò indurrebbe in confusione con la convenzione anglosassone che lo definirebbe un 'tetra vector product' a causa del coinvolgimento di 4 vettori.

Si veda ora un metodo per sciogliere questo prodotto combinato. Ponendo $\vec{e} = \vec{c} \wedge \vec{d}$, si otterrà:

$$\vec{p}v = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{e} = (\vec{a}^T \cdot \vec{e}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{e}) \vec{a} \quad (3.168)$$

$$\vec{p}v = (\vec{a}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})) \vec{a} \quad (3.169)$$

Si è così dimostrata, per via simbolica, l'identità algebrica:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) &= (\vec{a}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})) \vec{a} \\ &= (\vec{d}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})) \vec{c} - (\vec{c}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})) \vec{d} \end{aligned} \quad (3.170)$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [\mathbf{acd}]\mathbf{b} - [\mathbf{bcd}]\mathbf{a} = [\mathbf{dab}]\mathbf{c} - [\mathbf{cab}]\mathbf{d} \quad (3.171)$$

La stessa identità può essere scritta in una pluralità di modi, permutando opportunamente i vettori. Questo tipo di prodotto combinato sembra non presentare alcuna interpretazione geometrica o fisica particolarmente intuitiva, anche se non si esclude che ne possano esistere.

Capitolo 4

Il Prodotto Vettore in N-D

Sfera: “Ma dov’è questo paese delle quattro dimensioni?”

Quadrato: “Non lo so: ma di certo il mio maestro lo sa.”

Sfera: “No. Non esiste un paese simile. Solo l’idea è del tutto inconcepibile.”

Quadrato: “Non è inconcepibile per me, mio Signore, per cui lo sarà ancor meno per il mio Maestro.”

Edwin A. Abbott, *Flatlandia*

4.1 Perché un’estensione in N-D?

In questo capitolo si esporrà un metodo per estendere l’operazione di prodotto vettore da 3 dimensioni (3-D) ad N dimensioni (N-D) spaziali, mantenendo un’impostazione tipica della fisica.

Qualcuno potrebbe chiedersi ‘Come passare in N-D?’, ma soprattutto: ‘Perché farlo? A cosa serve?’. Si potrebbe pensare che non serva a niente e che si tratti di un virtuosismo matematico, privo di applicazioni. Sembra chiaro fin dal principio: ‘inventarsi uno spazio con N dimensioni è inutile, dato che viviamo in 3D e sappiamo già come muoverci in esso’. Ragionamenti di questo genere, seppure comprensibili, possono però rivelare una certa miopia e sono stati infatti confutati ben più di una volta nel corso della Storia delle scienze.

Gli ‘inutili’ numeri complessi

Si pensi ad esempio ai numeri immaginari: prima del Rinascimento un’equazione come $x^2 + 1 = 0$ veniva bollata come priva di senso: chi mai poteva affermare di aver visto qualche quantità nel mondo reale associata ad una ‘cosa’ come $\sqrt{-1}$? Equazioni come quella erano quindi *inutili*.

Nella prima metà del XVI secolo quelle entità ‘immaginarie’ si ripresentarono però in un problema di un certo interesse: la soluzione delle equazioni di 3° grado. Non ci si dilungherà qui sulla disputa che oppose Niccolò Tartaglia e Gerolamo Cardano: esistono buoni libri in proposito[16].

Si dirà qui che per la soluzione generale di un’equazione cubica spesso bisogna calcolare la radice quadrata di due numeri negativi. Anche se la soluzione finale risultava reale, dato che i contributi immaginari si elidevano, i matematici

dell'epoca furono costretti a riconfrontarsi con queste entità, ormai non più 'inutili', ma etichettate lo stesso come 'di comodo'. Nei due secoli successivi i numeri immaginari e complessi cominciarono ad essere studiati, nonostante parte della comunità matematica li bollasse come strane creazioni prive di utilità. Nel XIX secolo però non fu più possibile ignorare i numeri complessi a causa delle loro crescente importanza nell'analisi differenziale. Si citerà qui solo una coppia di applicazioni, note anche agli ingegneri: la trasformata di Fourier e la trasformata di Laplace, che ne costituisce un'estensione ¹. Dato un segnale $f(t)$, la sua trasformata di Laplace $F(s)$ viene calcolata come:

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{Re}(s) > 0$$

dove $s = \sigma + i\omega$ è un numero complesso ed $F(s)$ è, in generale, una funzione complessa.

Le trasformate di Fourier e Laplace trovano applicazioni nei campi più disparati: in termodinamica, nella teoria dei controlli, nell'analisi musicale e del segnale, nella fisica delle onde (elettromagnetismo compreso), nella spettrometria per le analisi chimiche, eccetera.

Quelle quantità 'immaginarie' hanno trovato una loro 'utilità', anche se si reputava che non avesse senso estendere il nome di numeri oltre a quelli 'reali'

Metodo socratico e notazioni

Quello appena esposto è un esempio, abbastanza banale, di come alcune scoperte in matematica e in fisica possano apparire inizialmente prive di utilità per scopi pratici, ma si possano trasformare in potenti strumenti in un secondo tempo, magari messe nelle mani esperte degli ingegneri. La domanda 'a cosa serve?' sembra infatti tipica proprio degli ingegneri più che dei matematici e dei fisici. Chi scrive ha frequentato una facoltà di Ingegneria, perciò è chiamato a dare almeno una prima risposta alla domanda:

'A che cosa serve un'estensione del prodotto vettore in N dimensioni?'

Prima osservazione pratica: qualcuno ha notato quante regoline bisogna ricordare per un utilizzo sicuro del prodotto vettore? Sbagliare il segno del prodotto è l'errore più classico e talvolta bisogna fermarsi e ricorrere alla regola della mano destra per verificare il senso 'fisico' dell'equazione che si ha davanti, come sovente accade in elettromagnetismo. Utilizzare i 'prodotti combinati' è persino peggio: si rischia spesso di fare confusione con le lettere e di fatto bisogna ricordarsi a memoria le identità algebriche, perché ridimostrarle da capo, esplicitando le componenti cartesiane di ogni vettore, è un lavoro lungo e a maggior ragione fonte di errori.

Se in 3-D il prodotto vettore dà già tanti problemi, perché andare a complicarsi la vita in N-D?

Perché, paradossalmente, l'estensione in N-D potrebbe renderla più semplice.

¹Fourier risolse il problema della propagazione del calore nei solidi con la sua analisi già nel 1807, ma fu solo nel 1822, con la 'Théorie analytique de la chaleur', che il suo lavoro fu presentato in forma completa e riconosciuto dalla comunità matematica

Nel momento in cui si esplora un campo nuovo, che persino non rientra nel dominio dell'esperienza, si è costretti ad abbandonare i metodi basati sull'intuizione e a ricercare un nuovo linguaggio che consenta di descrivere coerentemente i nuovi oggetti dell'indagine.

Si pensi al 'Quinto postulato' di Euclide, noto anche come postulato delle parallele: esso era basato su un'intuizione e sull'evidenza che per un punto esterno ad una retta poteva passare una e una sola parallela. Sembrava non potesse essere altrimenti. L'interrogarsi dei matematici su questo problema, apparentemente accademico, portò nel XVII secolo alla scoperta delle geometrie non euclidee, nelle quali il postulato delle parallele può essere falso. Le idee di Gauss e i lavori di Bolyai, Lobacevskij e Riemann, per citarne solo alcuni, trovarono la loro applicazione in geodesia e nella descrizione degli spazi curvi tipici della Teoria della Relatività.

Provando ad estendere un concetto si è quindi spesso costretti ad interrogarsi socraticamente sulla definizione e sulla natura degli oggetti che si vanno a trattare. Per fare un esempio, riconoscere un vortice è un'operazione abbastanza intuitiva per un essere umano, eppure tutt'oggi la comunità fluidodinamica non ha ancora raggiunto un accordo su una definizione matematica di vortice![29]

La questione non è puramente accademica, dato che in molti problemi di simulazione numerica di turbolenze sarebbe utile far identificare al computer strutture caratteristiche quali i 'vortici', ma un calcolatore è in grado di 'comprenderne' solo una definizione formale e non basata sull'intuizione.

In conclusione, si vedrà come l'estensione in N-D del prodotto vettore costringerà ad interrogarsi sulla sua vera natura e come, abbandonando alcune intuizioni fuorvianti del caso 3-D, sia possibile risolvere alcune aporie con l'utilizzo di una nuova notazione più generale e, a mio parere, per molti versi di più facile uso.

Riuscire a riscrivere una stessa operazione con un linguaggio più potente e semplice sarebbe già un risultato importante: la notazione con cui ci si esprime condiziona infatti il pensiero e la comprensione di un argomento da parte di terzi. Se questa può apparire una sottigliezza, si pensi che, dall'antichità fino al Rinascimento, le dimostrazioni geometriche e aritmetiche erano scritte in forma verbale e le espressioni matematiche, così come le intendiamo oggi, era molto rare.

Secondo la leggenda, Cartesio concepì il suo sistema di coordinate mentre era ammalato a letto, osservando una mosca che si muoveva sul soffitto a cassettoni della sua stanza e pensando ad un metodo per descriverne la posizione: quell'idea cambiò radicalmente il modo di pensare la geometria. Nel suo 'Discorso sul metodo', all'appendice 'la geometria', Cartesio introdusse molta della moderna notazione matematica elementare e sviluppò la sua interpretazione geometrica dell'algebra, ponendo le basi di un *modus operandi* che già dalla fine del XVIII secolo si sarebbe rivelato fertile di risultati.

La stessa storia del calcolo vettoriale può essere considerata per molti versi una storia di notazioni.

Nell'opera di Grassmann si trovano già diversi risultati con simbolismo moderno, ma essa non riscosse successo a causa di un linguaggio espositivo giudicato da molti troppo oscuro. Sebbene Hamilton con i quaternioni abbia

sostanzialmente inventato una ‘geometria delle posizioni’ come auspicato da Leibniz, oggi giorno i suoi metodi sono considerati in maggior parte inutilmente complicati e controintuitivi. Anche se non ‘scoprirono’ nulla che non fosse già noto in qualche forma, Gibbs ed Heaviside sono oggi riconosciuti come i veri padri del calcolo vettoriale. Essi seppero infatti tradurre idee e concetti preesistenti in un formalismo semplice ed efficace, fornendo anche un’*interpretazione* delle equazioni e degli oggetti in gioco.

L’importanza di questi aspetti viene sottolineata anche nella prefazione di *Vector analysis*[2] da Edwin B. Wilson :

Heaviside has set forth the claims of vector analysis as against Quaternions, and others have expressed similar views.[...] The keynote, then, to any system of vector analysis must be its practical utility. This, I feel confident, was Professor Gibbs’s point of view in building up his system. [...] It has been asserted by some that Quaternions, Vector Analysis, and all such algebras are of little value for investigating questions in mathematical physics. Whether this assertion shall prove true or not, one may still maintain that vectors are to mathematical physics what invariants are to geometry. As every geometer must be thoroughly conversant with the ideas of invariants, so every student of physics should be able to *think* [sic] in terms of vectors.

L’introduzione di una notazione valida non solo in 3-D ma anche in N-D non mira a sostituire quella già esistente, ma a piuttosto a fornire un metodo alternativo per svolgere gli stessi conti, metodo che qualcuno potrebbe trovare più semplice o intuitivo; non per nulla, esso è stato sviluppato perché il sottoscritto si confondeva con le regole del caso 3-D.

Gli obiettivi dell’estensione N-D del prodotto vettore non riguardano solo la notazione, ma anche il modo di *pensare* questo tipo di operazione, il suo significato. Il prodotto vettore compare troppo spesso in fisica ed ingegneria perché non si possa essere chiamati a darne per lo meno un senso o un’interpretazione: talvolta però la semplice intuizione può risultare fuorviante.

In questo testo si mostreranno quindi anche delle applicazioni del nuovo metodo in Meccanica Razionale, Fluidodinamica ed Elettromagnetismo, fornendo per ognuna di esse una certa interpretazione.

Riassunto obiettivi

Sintetizzando, gli scopi principali dell’estensione del prodotto vettore in N-D sono:

- introduzione di una notazione più generale e, possibilmente, più semplice, che consenta di ricavare rapidamente le identità algebriche più utili nel caso le si dimentichino.
- risoluzione di alcuni paradossi che si manifestano nell’uso del prodotto vettore nel caso 3D e fare luce sulla ‘natura’ di questa operazione.
- in Meccanica Razionale, mostrare come matrici d’inerzia e velocità angolari possano essere riscritte.

- in Fluidodinamica ed Elettromagnetismo, mostrare come sorgenti, doppie e vortici concentrati possano essere trattati con un unico metodo analitico e come separare le componenti rotazionale e irrotazionale di un campo vettoriale.
- in Fluidodinamica, mostrare una re-interpretazione della vorticità.
- in Elettromagnetismo, mostrare le somiglianze del campo magnetico con la vorticità ed evidenziare il motivo per cui, con tutta probabilità, non è possibile trovare monopoli magnetici.

4.2 Pseudo-vettori e aporie

In questa sezione si mostreranno alcuni paradossi in cui si può incappare utilizzando il prodotto vettore con la classica notazione 3-D.

4.2.1 Segmenti orientati, veri vettori o pseudo-vettori?

Leggendo qualche testo di base di fisica o di ingegneria,² può capitare di scoprire che velocità angolare e il momento di una forza non sono vettori ma *pseudo-vettori* o *vettori assiali*. Che cos'è un pseudo-vettore? Sebbene sia difficile trovarne una definizione univoca, in genere si tratta dei 'vettori' utilizzati per rappresentare rotazioni, momenti e altre grandezze che si possono ottenere proprio per mezzo del prodotto vettoriale.

La distinzione tra vettore e pseudo-vettore non è però universalmente accettata, tant'è vero che i vettori-area sono da alcuni considerati veri vettori, dato che si possono ottenere anche senza l'operazione di prodotto vettore, mentre secondo un'altra visione sono da trattarsi come pseudo-vettori una volta che si sia definita un'orientazione del contorno.

La normale ad una superficie $\Sigma(\vec{x}) = 0$, ad esempio un parallelogramma di lati \vec{a} e \vec{b} , può essere infatti essere calcolata in due modi:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\Sigma(\vec{x})}{\|\vec{\nabla}\Sigma(\vec{x})\|} \quad (4.1)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|} \quad (4.2)$$

dove nella prima equazione si è utilizzata un'impostazione generale, valida anche in N-D, mentre nella seconda si è utilizzato il prodotto vettore 3-D. In entrambi i casi è possibile scegliere il verso della normale, infatti:

$$\Sigma_{inv}(\vec{x}) = -\Sigma(\vec{x}) \quad (4.3)$$

$$\vec{n}_{inv} = \frac{\vec{\nabla}\Sigma_{inv}(\vec{x})}{\|\vec{\nabla}\Sigma_{inv}(\vec{x})\|} = -\frac{\vec{\nabla}\Sigma(\vec{x})}{\|\vec{\nabla}\Sigma(\vec{x})\|} \quad (4.4)$$

$$\vec{n}_{inv} = \frac{\vec{b}\wedge\vec{a}}{\|\vec{b}\wedge\vec{a}\|} = -\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|} \quad (4.5)$$

²Si veda ad esempio l'eccellente *La fisica per i licei scientifici*[21] di U. Amaldi

ovvero:

$$\vec{n}_{inv} = -\vec{n} \quad (4.6)$$

In un certo senso, anche l'operatore differenziale nabla (o 'del') $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1}; \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_n} \right]$$

può essere considerato uno pseudo-vettore, ovvero un *falso-vettore*, dato che non è provvisto né di un verso intrinseco né di una norma.

In generale però sono detti *pseudo-vettori* solo i vettori originati da un *prodotto esterno* tra due vettori e che, come si vedrà, non rispettano la regola della riflessione.

Si è già parlato di segmenti orientati, vettori e vettori applicati e si è vista la sostanziale analogia dei tre concetti: è dunque proprio necessario introdurre anche gli pseudo-vettori? Sì e no: dipende ancora una volta degli obiettivi che ci si pongono e dal tipo di sfumatura che si vuole dare al discorso.

Tradizionalmente, i segmenti orientati sono associati alle posizioni dei punti, i vettori alle traslazioni e loro derivate, i vettori applicati alle forze e gli pseudo-vettori alle rotazioni. Per rimarcare questa differenza, spesso gli pseudo-vettori vengono soprascritti in maniera diversa: con $\widehat{\omega}$ o con $\vec{\omega}$ invece di $\vec{\omega}$. Il momento di una forza può essere espresso ad esempio nella forma:

$$\widehat{M} = \vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

In questo testo si utilizzerà di preferenza il simbolo di normale freccia e si vedrà un modo ben più radicale per distinguere vettori e pseudo-vettori. Normalmente, così come si dà il punto di applicazione di una forza \vec{F} , così si considerano i momenti \vec{M} come applicati nel polo rispetto a cui vengono calcolati. Poiché, come le forze \vec{F} anche i momenti \vec{M} sono dotati di un verso, di un modulo e di un punto di applicazione, non si vede perché questi debbano essere pseudo-vettori piuttosto che vettori applicati.

La ragione di questa distinzione si vedrà in due modi: ruotando e guardando nello specchio. Più avanti si osserverà come gli pseudo-vettori siano, per molti versi, più simili agli array che non ai classici vettori.

4.2.2 I vettori si sommano, le rotazioni si succedono!

Nel definire le proprietà dell'addizione tra vettori si è fatto riferimento alla cosiddetta regola del punta-coda: per sommare i vettori tra di loro, essi possono essere considerati come frecce che collegano o più propriamente 'traslano' un punto (coda) in un altro (punta). La successione consecutiva di tutte le frecce-traslazione porta ad individuare il punto finale e quindi la freccia-traslazione risultante.

Dato quindi l'insieme di vettori $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_n\}$ ed un generico polo O , si può scrivere:

$$\vec{v}_1 = P_1 - O \quad (4.7)$$

$$\vec{v}_2 = P_2 - P_1 \quad (4.8)$$

$$\dots \quad (4.9)$$

$$\vec{v}_n = P_n - P_{n-1} \quad (4.10)$$

ogni vettore è così associato ad una traslazione che porta un punto in un altro. La successione di tutte le traslazioni deve portare alla traslazione risultante, che porta O in A_n . Si verifica facilmente che tale successione *equivale alla somma* dei vettori, infatti:

$$\begin{aligned} P_n - O &= (P_n - P_{n-1}) + (P_{n-1} - P_{n-2}) + \cdots + (P_2 - P_1) + (P_1 - O) = \\ &= \vec{v}_n + \vec{v}_{n-1} + \cdots + \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Quella appena illustrata altro non è che la forma algebrica della regola punta-coda. Secondo un punto di vista più ampio, una successione di trasformazioni rispetta la regola del punta-coda se le trasformazioni sono *additive*, cioè se rispettano le regole dell'addizione e la loro risultante è data dalla somma di tutte le trasformazioni. Si è così visto che la traslazione soddisfa questi requisiti; si veda ora se anche l'operazione di prodotto vettore è, a suo modo, additiva.

Si abbiano due versori \vec{u}_a e \vec{u}_b in 3-D. L'angolo φ compreso tra di essi sarà calcolabile dalle relazioni:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\vec{u}_a^T \cdot \vec{u}_b}{\|\vec{u}_a\| \|\vec{u}_b\|} = \vec{u}_a^T \cdot \vec{u}_b \\ |\sin \varphi| = \frac{\|\vec{u}_a \wedge \vec{u}_b\|}{\|\vec{u}_a\| \|\vec{u}_b\|} = \|\vec{u}_a \wedge \vec{u}_b\| \end{cases} \quad (4.12)$$

Sia \vec{u}_φ il versore ortogonale a quelli di partenza, calcolabile come:

$$\vec{u}_\varphi = \frac{\vec{u}_a \wedge \vec{u}_b}{\|\vec{u}_a \wedge \vec{u}_b\|} = \frac{\vec{u}_a \wedge \vec{u}_b}{|\sin \varphi|} \quad (4.13)$$

Quello appena determinato altro non è che *l'asse della rotazione che porta \vec{u}_a in \vec{u}_b* , mentre φ è *l'angolo di Eulero associato alla rotazione stessa*. La matrice di rotazione più semplice che porta \vec{u}_a in \vec{u}_b , quindi indicata come $R(\varphi, \vec{u}_\varphi)$, è tale che:

$$\begin{cases} R^T R = I \\ \vec{u}_b = R \vec{u}_a \\ R \vec{u}_\varphi = \vec{u}_\varphi \end{cases} \quad (4.14)$$

La rotazione lascia quindi invariato il versore \vec{u}_φ , cioè il suo asse. \vec{u}_φ è quindi un *autovettore* di R , cioè un vettore la cui direzione non è influenzata da una trasformazione. L'espressione di R , nella sua forma 3-D più generale, è la seguente:

$$R = I \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) \overline{\overline{u_\varphi u_\varphi^T}} - \sin \varphi [u_\varphi \wedge] \quad (4.15)$$

dove con $\overline{\overline{u_\varphi u_\varphi^T}}$ si è indicato il prodotto diadico.

Si vede dunque che per identificare una rotazione in 3-D è condizione necessaria e sufficiente conoscerne l'angolo ed l'asse. Queste due informazioni possono essere condensate in un unico vettore. Detto $\vec{\varphi} = \varphi \vec{u}_\varphi$, esso costituisce quindi il *vettore rotazione* che porta \vec{u}_a in \vec{u}_b , dato che come R è completamente identificato da φ e \vec{u}_φ . Si ha così:

$$\vec{\varphi} \triangleq \varphi \vec{u}_\varphi = \frac{\varphi}{|\sin \varphi|} \vec{u}_a \wedge \vec{u}_b \quad (4.16)$$

Si è così chiarito perché il prodotto vettore è spesso associato alle rotazioni. Ci può chiedere ora: dato che si dispone di vettori-rotazione tipo $\vec{\varphi}$, è possibile sommarli con la regola punta-coda? In altre parole, detti $\vec{\varphi}_{A \rightarrow B}$ il vettore che ruota il punto A nel punto B e $\vec{\varphi}_{B \rightarrow C}$ il vettore che ruota il punto B nel punto C, si può calcolare la rotazione risultante $\vec{\varphi}_{A \rightarrow C}$ che porta A in C sommando i vettori? In formula:

$$\vec{\varphi}_{A \rightarrow B} + \vec{\varphi}_{B \rightarrow C} \stackrel{?}{=} \vec{\varphi}_{A \rightarrow C} \quad (4.17)$$

Si veda un semplice esempio per chiarire meglio le idee. Si abbiano due rotazioni, entrambe per semplicità di 90° ($= \pi/2$ rad), la prima che porta l'asse X nell'asse Y e la seconda che porta l'asse Y nell'asse Z. Si avrà:

$$\vec{\varphi}_{X \rightarrow Y} = \frac{\frac{\pi}{2}}{|\sin \frac{\pi}{2}|} \vec{i} \wedge \vec{j} = \frac{\pi}{2} (\vec{i} \wedge \vec{j}) \quad (4.18)$$

$$\vec{\varphi}_{Y \rightarrow Z} = \frac{\frac{\pi}{2}}{|\sin \frac{\pi}{2}|} \vec{j} \wedge \vec{k} = \frac{\pi}{2} (\vec{j} \wedge \vec{k}) \quad (4.19)$$

ovvero:

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_{X \rightarrow Y} = \frac{\pi}{2} (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \frac{\pi}{2} \vec{k} \\ \vec{\varphi}_{Y \rightarrow Z} = \frac{\pi}{2} (\vec{j} \wedge \vec{k}) = \frac{\pi}{2} \vec{i} \end{cases} \Rightarrow \quad (4.20)$$

$$\vec{\varphi}_{X \rightarrow Y} + \vec{\varphi}_{Y \rightarrow Z} = \frac{\pi}{2} (\vec{k} + \vec{i}) = \frac{\pi}{2} [1; 0; 1] \quad (4.21)$$

Il vettore rotazione che porta direttamente l'asse X nell'asse Z è però:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_{X \rightarrow Z} &= \frac{\frac{\pi}{2}}{|\sin \frac{\pi}{2}|} \vec{i} \wedge \vec{k} = \frac{\pi}{2} (\vec{i} \wedge \vec{k}) = \\ \vec{\varphi}_{X \rightarrow Z} &= -\frac{\pi}{2} \vec{j} = \frac{\pi}{2} [0; -1; 0] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si vede quindi che in generale:

$$\vec{\varphi}_{A \rightarrow B} + \vec{\varphi}_{B \rightarrow C} \neq \vec{\varphi}_{A \rightarrow C}! \quad (4.23)$$

Si è così dimostrato che *i vettori-rotazione non si sommano con la regola del punta-coda*. Ci si potrebbe chiedere se questa particolarità non sia dovuta all'utilizzo delle coordinate cartesiane e se quindi sia possibile definire un'addizione in maniera diversa, magari in coordinate sferiche. Perché un'addizione sia tale, però, essa deve essere commutativa, e, in generale la successione di due rotazioni non è commutativa! Si veda infatti la formulazione matriciale dell'esempio precedente:

$$\vec{\varphi}_{X \rightarrow Y} \longleftrightarrow R_{X \rightarrow Y} = R_{yx} \quad (4.24)$$

$$\vec{\varphi}_{Y \rightarrow Z} \longleftrightarrow R_{Y \rightarrow Z} = R_{zy} \quad (4.25)$$

con:

$$R_{yx} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$R_{zy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Si ha così:

$$\begin{cases} \vec{j} = R_{yx} \vec{i} & \vec{k} = R_{yx} \vec{k} \\ \vec{k} = R_{zy} \vec{j} & \vec{i} = R_{zy} \vec{i} \end{cases} \Rightarrow \quad (4.28)$$

$$\vec{k} = R_{zy} R_{yx} \vec{i} \quad (4.29)$$

con:

$$R_{zy} R_{yx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Provando ad invertire l'ordine delle rotazioni si ha:

$$R_{yx} R_{zx} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Si ottiene una matrice diversa da quella precedente: si è dimostrato così che, in generale, *le rotazioni non sono commutative*:

$$R_{CB} R_{BA} \neq R_{BA} R_{CB} \quad (4.32)$$

Con questo esempio si è quindi messa in evidenza una differenza importante tra vettori e pseudo-vettori: i primi sono associati alla traslazioni, che sono trasformazioni additive, mentre i secondi sono associati alle rotazioni, che al contrario non sono additive. Mentre i vettori si possono quindi sommare in tutta tranquillità, per gli pseudo-vettori bisogna prestare attenzione al tipo di grandezza o trasformazione che essi rappresentano. Questo non significa però che gli pseudo-vettori non possano essere sommati: il momento risultante di un sistema di forze è infatti dato dalla somma di tutti i momenti applicati.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \quad (4.33)$$

In generale è quindi bene ricordare che se traslazioni e vettori si sommano, le rotazioni e gli pseudo-vettori associati si succedono!

4.2.3 Alice nel Mondo dello Specchio

Si immagini di voler descrivere un sistema di vettori riflesso in uno specchio. Ogni vettore può essere rappresentato da una freccia che collega due punti: essa andrà quindi trasformata nella sua speculare. Per semplicità, si consideri uno specchio che occupi il piano $x = x_1 = 0$. Detto \vec{v}_A il vettore-freccia non ancora riflesso, il suo speculare \vec{v}_B avrà tutte le componenti uguali all'originale ad eccezione della coordinata v_{A1} , di cui viene invertito il segno:

$$\vec{v}_A = [v_{A1}; v_{A2}; \dots; v_{An}] \quad (4.34)$$

$$\vec{v}_B = [-v_{A1}; v_{A2}; \dots; v_{An}] \quad (4.35)$$

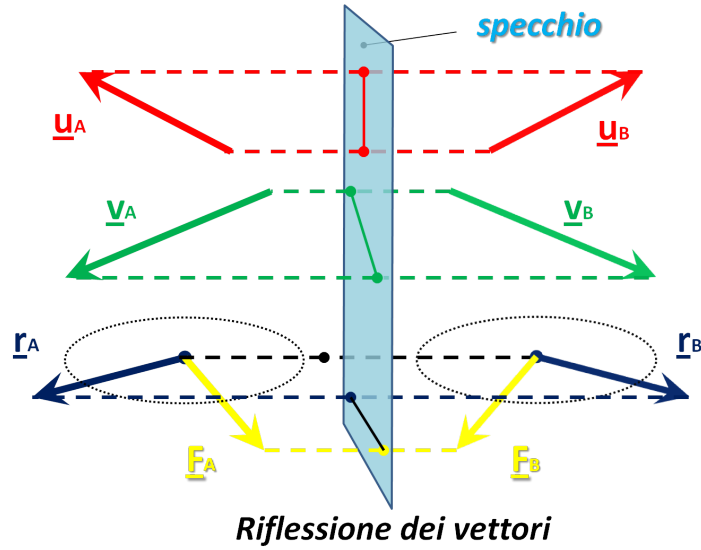


Figura 4.1: Riflessione di un sistema di vettori

In generale, la trasformazione che specchia un vettore in un altro è una rotazione il cui determinante è -1 . Nel caso in esame si ha:

$$R_{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\vec{v}_B = R_{BA} \vec{v}_A \quad (4.37)$$

Si noti che questa impostazione consente di trattare la riflessione per vettori di qualsiasi dimensione. Si è così vista la trasformazione che riflette un vettore qualsiasi nello specchio, ma, stranamente, *gli pseudo-vettori non rispettano la riflessione!* Si osservi un'operazione di prodotto vettore di fronte allo specchio, ad esempio il calcolo del momento di una forza. Detti \vec{r}_A e \vec{F}_A braccio e forza originali e \vec{r}_B e \vec{F}_B i loro speculari rispettivi, si avrà:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A \quad (4.38)$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B \quad (4.39)$$

$$\vec{r}_B = R_{BA} \vec{r}_A \quad (4.40)$$

$$\vec{F}_B = R_{BA} \vec{F}_A \quad (4.41)$$

Ci si potrebbe aspettare che anche i momenti vengano riflessi secondo la stessa procedura, e invece in generale:

$$\vec{M}_B \neq R_{BA} \vec{M}_A! \quad (4.42)$$

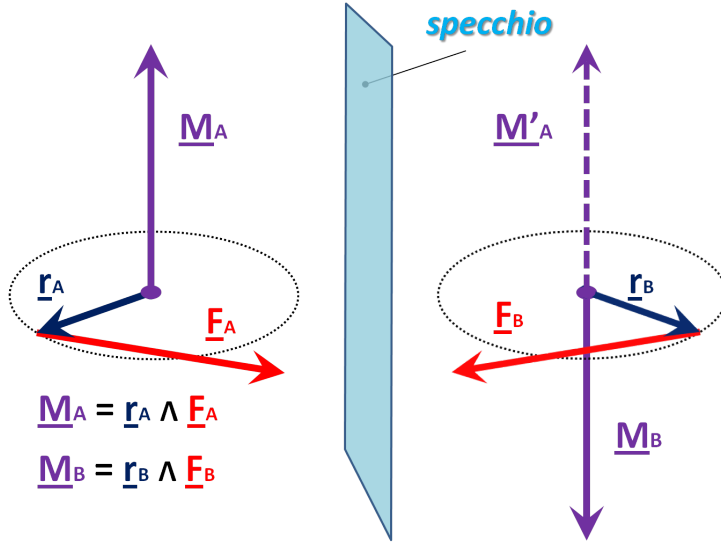


Figura 4.2: Prodotto vettore davanti allo specchio: si nota che mentre il braccio \vec{r} e la forza \vec{F} vengono riflessi normalmente, lo stesso non accade il momento $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

Per sincerarsene, si veda un semplice esempio in cui per comodità si ometteranno le unità di misura:

$$\vec{r}_A = [1; 0; 0] = \vec{i} \quad (4.43)$$

$$\vec{F}_A = [0; 1; 0] = \vec{j} \quad (4.44)$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A \Rightarrow \quad (4.45)$$

$$\vec{M}_A = \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \Rightarrow \quad (4.46)$$

$$\vec{M}_A = [0; 0; 1] = \vec{k} \quad (4.47)$$

Si calcolino i vettori riflessi nello specchio e il momento corrispondente:

$$\vec{r}_B = R_{BA} \vec{r}_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\vec{i} \quad (4.48)$$

$$\vec{F}_B = R_{BA} \vec{F}_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{j} \quad (4.49)$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B = (-\vec{i}) \wedge \vec{j} = -(\vec{i} \wedge \vec{j}) = -\vec{k} \quad (4.50)$$

Nel caso in esame si ha quindi:

$$\vec{M}_B = -\vec{M}_A = -\vec{k} \quad \text{ma} \quad (4.51)$$

$$R_{BA} \vec{M}_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{M}_A = \vec{k} \neq \vec{M}_B! \quad (4.52)$$

Si verifica quindi che il prodotto vettore non rispetta la riflessione!

$$\vec{M}_B \neq R_{BA} \vec{M}_A \quad \text{C.V.D} \quad (4.53)$$

L'esempio appena illustrato può essere interpretato, per il caso 3D, nel modo seguente: se si prende una terna *destra* di assi \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} , per essa varrà $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$. Quando essere viene sottoposta a riflessione, essa diventa *sinistra*, con assi $\vec{i}_{SX}, \vec{j}_{SX}$ e \vec{k}_{SX} tali che:

$$\vec{i}_{SX} \wedge \vec{j}_{SX} = -\vec{k}_{SX} \quad (4.54)$$

Il caso della riflessione mette così in luce un'altra differenza tra vettori e pseudo-vettori che, se non considerata, può portare a confusione o ad errori grossolani. Per fare un esempio pratico, si pensi ad un modello ad Elementi Finiti di una struttura simmetrica, ad esempio un aeroplano. Se essa è caricata *simmetricamente*, le forze applicate saranno *simmetriche* rispetto al piano di simmetria, ma lo stesso non si potrà dire per i momenti, il cui verso cambierà! E' necessario quindi fare attenzione, ogni qualvolta si applichi una trasformazione su un insieme di vettori, al modo in cui variano i prodotti vettori.

In generale, se due vettori \vec{r} e \vec{F} vengono sottoposti ad una trasformazione lineare L , il loro prodotto vettore rispetta la seguente identità:

$$(L\vec{r}) \wedge (L\vec{F}) = \det(L) \left(L^{-T} (\vec{r} \wedge \vec{F}) \right) \quad (4.55)$$

Si sconsiglia vivamente di provare a dimostrare con i metodi tradizionali la suddetta equazione, dato che l'espressione in coordinate cartesiane comprenderebbe un gran numero di termini ed indici. Una dimostrazione simbolica non è del resto molto praticabile, per lo meno con l'algebra 3D finora utilizzata! Si vedrà però come, con la notazione N-D, sia possibile dimostrare un'identità equivalente per il passaggio da un sistema di riferimento all'altro. Per adesso si può verificare che se la trasformazione L è una rotazione R_{BA} , si avrà:

$$\begin{cases} \det(R_{BA}) = \pm 1 \\ (R_{BA} \vec{r}_A) \wedge (R_{BA} \vec{F}_A) = \det(R_{BA}) \left(R_{BA}^{-T} (\vec{r}_A \wedge \vec{F}_A) \right) \end{cases} \Rightarrow \quad (4.56)$$

$$\begin{cases} \det(R_{BA}) = \pm 1 \\ \vec{M}_B = \vec{r}_B \wedge \vec{F}_A = \det(R_{BA}) \left(R_{BA} \vec{M}_A \right) \end{cases} \Rightarrow \quad (4.57)$$

$$\vec{M}_B = \begin{cases} R_{BA} \vec{M}_A & \text{per } \det(R_{BA}) = 1 \\ -R_{BA} \vec{M}_A & \text{per } \det(R_{BA}) = -1 \quad (\text{riflessione}) \end{cases} \quad (4.58)$$

Si vede quindi come, nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, gli pseudo-vettori possano essere ruotati allo stesso modo dei veri vettori solo se non è prevista riflessione.

4.2.4 Flatlandia e la 3^a dimensione

Nel libro *Flatlandia* [13] di Edwin A. Abbott, edito nel 1884, si descrive la vita degli abitanti di un mondo bidimensionale, cioè uno spazio 2-D. In un universo

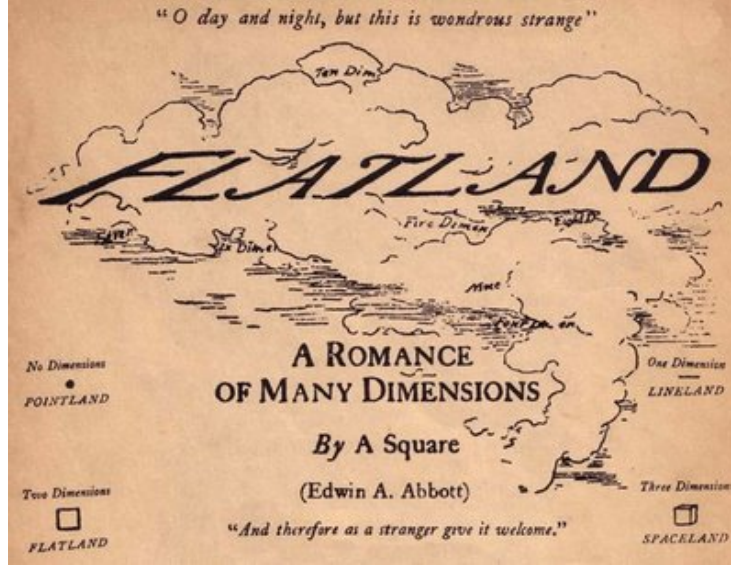


Figura 4.3: Frontespizio originale del racconto fantastico *Flatland*, di Edwin A. Abbott

del genere i vettori si possono sommare e proiettare tra loro, i parallelogrammi hanno un'area, le rotazioni possono essere orarie o antiorarie, sono possibili le riflessioni, si può calcolare il momento di una forza ma ... *il prodotto vettore non esiste*. O meglio, se esiste, gli abitanti di questo mondo devono avere una bella fantasia per immaginarsi un vettore che non è contenuto nello spazio in cui vivono. Siano ad esempio \vec{r} e \vec{F} un braccio e una forza contenuti in un piano: per gli abitanti del mondo 2-D essi appartengono al loro spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^{2 \times 1}$ e possono essere espressi nella forma:

$$\vec{r} = [r_1; r_2] = r_1 \vec{i} + r_2 \vec{j} \quad (4.59)$$

$$\vec{F} = [F_1; F_2] = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \quad (4.60)$$

Il momento M associato a braccio e forza, in 2-D, verrebbe considerato uno scalare e non un vettore, infatti:

$$M = M(\vec{r}, \vec{F}) = r_1 F_2 - r_2 F_1 \quad (4.61)$$

Il momento così calcolato è sempre tale che:

$$M(\vec{r}, \vec{F}) = -M(\vec{F}, \vec{r}) \quad (4.62)$$

$$M(\alpha \vec{r}, \beta \vec{F}) = \alpha \beta M(\vec{r}, \vec{F}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (4.63)$$

$$M(\vec{r}, \vec{F}_A + \vec{F}_B) = M(\vec{r}, \vec{F}_A) + M(\vec{r}, \vec{F}_B) \quad (4.64)$$

$$M(\vec{r}_A + \vec{r}_B, \vec{F}) = M(\vec{r}_A, \vec{F}) + M(\vec{r}_B, \vec{F}) \quad (4.65)$$

$$M^2 = r^2 F^2 - (\vec{r}^T \cdot \vec{F})^2 = r^2 F^2 \sin^2 \theta \quad (4.66)$$

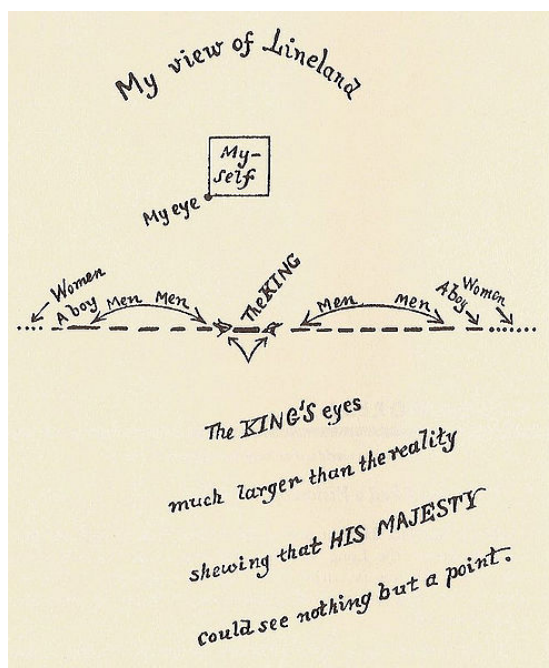


Figura 4.4: Scena tratta da *Flatland*: il narratore, un quadrato, vive in uno spazio 2-D e osserva Linealandia, un mondo 1-D.

Per l'operazione 'momento' valgono quindi tutte le proprietà richieste per il prodotto vettore, ad eccezione dell'ortogonalità con i vettori di partenza. Rimando in 2-D infatti non esiste alcun vettore $\vec{M} = M_1\vec{i} + M_2\vec{j}$ tale che $\vec{M} \perp \vec{r}$ e $\vec{M} \perp \vec{F}$! Non per nulla, secondo le regole 3-D la stessa situazione sarebbe descritta nella forma:

$$\vec{r} = [r_1; r_2; 0] = r_1\vec{i} + r_2\vec{j} + 0\vec{k} \quad (4.67)$$

$$\vec{F} = [F_1; F_2; 0] = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + 0\vec{k} \quad (4.68)$$

$$\vec{M} = [0; 0; r_1F_2 - r_2F_1] = [0; 0; M] = M\vec{k} \quad (4.69)$$

Perché mai M dovrebbe essere un vettore? Perché immaginarsi una 3^a dimensione? Perché mai un vettore \vec{k} dovrebbe *uscire dal piano* ed esistere in una dimensione *esterna*?

Questo è quello che potrebbero, legittimamente, domandarsi gli abitanti del mondo 2-D. Essi sarebbero comunque in grado di costruire un'operazione binaria tra vettori simile al prodotto vettore, così come lo s'intende in 3-D, ma il risultato di tale operazione – pur provvista di tutte le proprietà del caso – non sarebbe considerato un vettore. Questo semplice esempio vuole evidenziare due aspetti della questione. In primo luogo, assieme con le già viste particolarità degli pseudo-vettori, instillare il sospetto che forse il prodotto vettore non generi davvero un vettore ma un oggetto di qualche altro tipo. In secondo luogo, mostrare come un cambio di prospettiva possa portare ad una diversa visione degli stessi oggetti e forse ad una migliore comprensione del problema.

4.2.5 Spazio 4-D: un'infinità di normali

Il primo passo da uno spazio 3-D verso un mondo con un numero maggiore di dimensioni spaziali consiste in un'esplorazione di un mondo 4-D, cioè con una dimensione in più. Come potrebbe essere il prodotto vettore in 4-D? Detto $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, con $\vec{a}, \vec{b} \in V = \mathbb{R}^{4 \times 1}$, si provino ad imporre le condizioni su ortogonalità e modulo già viste in precedenza:

$$\vec{a} = [a_1; a_2; a_3; a_4] \quad (4.70)$$

$$\vec{b} = [b_1; b_2; b_3; b_4] \quad (4.71)$$

$$\vec{p} = [p_1; p_2; p_3; p_4] \quad (4.72)$$

$$\begin{cases} \vec{p}^T \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{p}^T \cdot \vec{b} = 0 \\ \|\vec{p}\|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \end{cases} \quad (4.73)$$

Quelle appena scritte sono 3 equazioni scalari, ma conoscere \vec{p} equivale a determinare le 4 incognite p_1, p_2, p_3, p_4 ! Manca quindi un'equazione e il problema ha 1 Grado di Indeterminazione. In altre parole, significa che in 4-D esiste un numero infinito ∞^1 di vettori \vec{p} normali a \vec{a}, \vec{b} e che rispettano la condizione sul modulo!

Per sincerarsene si veda il semplice caso in cui \vec{a}, \vec{b} siano contenuti nel piano XY o $x_1 x_2$ che dir si voglia. Si avrà allora:

$$\vec{a} = [a_1; a_2; 0; 0] = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} \quad (4.74)$$

$$\vec{b} = [b_1; b_2; 0; 0] = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} \quad (4.75)$$

Imponendo le suddette condizioni, si verifica che \vec{p} può essere un vettore qualsiasi nella forma:

$$\vec{p} = [0; 0; \cos \gamma; \sin \gamma] \sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2} \quad \forall \gamma \in \mathbb{R} \quad (4.76)$$

$$\vec{p} = (\cos \gamma \vec{k} + \sin \gamma \vec{l}) \left(a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \gamma \in \mathbb{R} \quad (4.77)$$

Si verifica così che, in 4-D, esiste un numero infinito di normali al piano XY! Anche volendo considerare $\vec{a} \wedge \vec{b}$ come un vettore, per definire l'operazione di prodotto bisognerebbe introdurre un'altra equazione arbitraria, con una scelta ben più radicale di quella tra due segni. Provare ad associare il prodotto vettore alle rotazioni in 4-D non è di aiuto: in questo spazio ci possono essere infatti più 'assi' di rotazione o anche nessuno. La rotazione R_{21} :

$$R_{21} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \overline{0} \\ \sin \theta & \cos \theta & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & 1 & 0 \\ \overline{0} & \overline{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

ha un'infinità di 'assi' nella forma:

$$\vec{u}_\gamma = [0; 0; \cos \gamma; \sin \gamma] = \cos \gamma \vec{k} + \sin \gamma \vec{l} \quad (4.79)$$

Infatti:

$$R_{21} \vec{u}_\gamma = \vec{u}_\gamma \quad \forall \gamma \in \mathbb{R} \quad (4.80)$$

La rotazione $R_{21,43}$, al contrario, non ha alcun asse di rotazione:

$$R_{21,43} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \overline{0} \\ \sin \theta & \cos \theta & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \begin{matrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$\nexists \vec{u} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \quad \text{tale che} \quad R_{21,43} \vec{u} = \vec{u} \quad \text{per} \quad \theta, \phi \neq 2\pi k, \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.82)$$

Se in 2-D non esisteva alcun vettore in grado di soddisfare tutte le condizioni richieste per il prodotto esterno, in 4-D ne possono esistere fin troppi e l'associazione con le rotazioni non è così semplice.

Nella prossima sezione si proverà a risolvere queste ed altre aporie e si indagherà sul significato di prodotto vettoriale, per poi riuscire ad estenderlo in N-D.

4.3 Un percorso dialettico verso più dimensioni

Nella sezione precedente si è mostrato come il concetto intuitivo di prodotto vettore, così come inteso in 3-D, porti a dei paradossi e cominci a scricchiolare. In particolare, l'idea che il prodotto vettore sia un *vero vettore* sembra insostenibile, sia di fronte a rotazioni e riflessioni, sia in un numero di dimensioni diverso da 3.

Qual è allora il senso del prodotto vettoriale? Qual è il significato di questa operazione e quale tipo di oggetto matematico è il suo risultato? Ci si potrebbe anche chiedere se il prodotto vettore abbia un senso solo in 3-D: eppure aree, normali, volumi, rotazioni e velocità angolari esistono anche in N-D! L'area del parallelogramma compreso tra \vec{a} e \vec{b} è sempre $a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2$, per vettori di qualsiasi dimensione e perché una matrice R rappresenti una rotazione in N-D è condizione necessaria e sufficiente che:

$$R \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (4.83)$$

$$R^T R = I \quad (4.84)$$

Una velocità angolare Ω può invece essere calcolata in forma matriciale come:

$$\Omega = \frac{dR}{dt} R^T \quad (4.85)$$

Se quindi gli oggetti a cui il prodotto vettore è così spesso associato possono essere definiti anche in N-D, potrebbe essere possibile trovare un'operazione analoga più generale e valida anche in N-D.

4.3.1 Vettori vs Matrici

Secondo la classica impostazione 3-D, il prodotto vettoriale $\vec{a} \wedge \vec{b}$ è un vettore \vec{p} tale che:

$$\begin{cases} \vec{p}^T \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{p}^T \cdot \vec{b} = 0 \\ \|\vec{p}\|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \end{cases} \quad (4.86)$$

Si ha quindi un sistema di 3 equazioni, ma in uno spazio N-D il vettore \vec{p} è costituito da N incognite p_1, p_2, \dots, p_N . Il problema ha quindi un Grado di Indeterminazione pari a $N - 3$, il che significa che non ha soluzione per $N = 2$ e che per $N > 3$ ne ha infinite. A meno che non si interpreti il prodotto vettore come un volume, esso è generato da due soli vettori e non si ha ragione di imporre altri vincoli per chiudere il problema. Per definire la natura del prodotto vettore bisognerà provare a darne un'interpretazione. In Meccanica Razionale può spesso capitare che la velocità angolare Ω di un corpo rigido sia descritta in due modi: in forma vettoriale o in forma matriciale.

La velocità relativa tra due punti P e Q di un corpo rigido che ruoti con velocità angolare Ω può infatti essere scritta nei due modi:

$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \wedge (P - Q) \quad (4.87)$$

$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \Omega(P - Q) \quad (4.88)$$

dove nella prima equazione compare il (falso-)vettore $\vec{\omega}$, mentre nella seconda compare la matrice Ω . Le due espressioni, in 3-D, sono legate l'una all'altra nella forma:

$$\Omega = [\omega \wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

cioè l'espressione matriciale del prodotto vettore già vista al paragrafo 3.6.5 nella pagina 51! Fra le due equazioni c'è però una differenza fondamentale: mentre la prima è utilizzabile solo in 3-D, la seconda è valida in qualsiasi numero di dimensioni. Ponendo $\vec{r} = P - Q$ e $\Delta\vec{v} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q$, le precedenti equazioni possono essere riscritte come:

$$\Delta\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (4.90)$$

$$\Delta\vec{v} = \Omega \vec{r} \quad (4.91)$$

Per il modo in cui è impostata la prima, si potrebbe pensare che $\Delta\vec{v}$ sia uno pseudo-vettore, dato che è originato dal prodotto esterno. E' noto però che \vec{r} e $\Delta\vec{v}$ sono 'veri vettori', infatti ω è calcolabile, a meno di una componente parallela a \vec{r} , come:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r} \wedge \Delta\vec{v}) + \lambda \vec{r} \quad (4.92)$$

Sostituendo quest'espressione, si verifica che:

$$\Delta\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \Delta\vec{v}) \quad (4.93)$$

$$\Delta\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} ((\vec{r}^T \cdot \vec{r}) \Delta\vec{v} - (\vec{r}^T \cdot \Delta\vec{v}) \vec{r}) \quad (4.94)$$

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v} - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r}^T \cdot \Delta\vec{v}) \vec{r} \quad (4.95)$$

Poiché per il corpo rigido si ha $\|\vec{r}\| = \text{cost}$, l'ultimo termine scomparirà, dato che:

$$\vec{r}^T \cdot \vec{r} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{d\vec{r}^T}{dt} \cdot \vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4.96)$$

$$\Delta\vec{v}^T \cdot \vec{r} = 0 \quad (4.97)$$

così $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}$, Come Volevasi Dimostrare.

Si verifica così che $\vec{\omega}$ è un pseudo-vettore generato da \vec{r} e $\Delta\vec{v}$, associato alla matrice Ω . Mentre la forma matriciale è generale e valida in N-D, il prodotto vettoriale classico si può fare solo in 3-D e genera pseudo-vettori. Viene da chiedersi allora se in realtà il prodotto vettore, in generale, non generi né un vettore né pseudo-vettore ma piuttosto una *matrice*.

4.3.2 Cosa chiedere ad un prodotto vettore in N-D

Per definire un'operazione tra vettori si può richiedere che essa rispetti alcune proprietà specifiche, ad esempio l'anti-commutatività, la distributività eccetera. In generale possono però esistere più operazioni per cui valgono le stesse proprietà, come già visto per i prodotti interni, perciò bisogna anche definire gli oggetti che esse coinvolgono e una procedura univoca per calcolare il risultato.

In questa sezione si farà così una lista di proprietà che si desidera siano rispettate da un prodotto vettore N-D. Visti i paradossi che si originano in 3-D, è evidente che qualche richiesta andrà cambiata, anche se inizialmente pareva molto intuitiva.

Associazione con l'area

Tra le proprietà evidenziate del normale prodotto vettore in 3-D ve ne sono alcune che valgono anche in 2-D e che, in generale, si potrebbe richiedere che valgano anche in N-D. Ad esempio, l'operazione $\vec{a} \wedge \vec{b}$ porta con sé un'informazione sull'area del parallelogramma compreso tra i due vettori, che è pur sempre:

$$\text{Area}(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2} = ab |\sin \theta_{ab}| \quad (4.98)$$

qualunque sia la dimensione dello spazio vettoriale a cui appartengono \vec{a} e \vec{b} . In un certo senso si presenta una complementarità con il prodotto scalare, tale che:

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = ab \cos \theta_{ab} \quad (4.99)$$

La richiesta che il risultato dell'operazione $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sia un vettore \vec{p} e che esso sia ortogonale ai vettori di portanza comporta invece significative difficoltà al variare del numero di dimensioni: tale requisito andrà dunque abbandonato.

Senso fisico: il calcolo dei momenti

Quale significato potrebbe avere allora il prodotto vettore?

Nell'opera di Grassmann, esso è in pratica il volume o l'iper-volume individuato da due o più vettori: il prodotto esterno definito in Algebra Esterna non è infatti necessariamente un'operazione binaria e può essere esteso ad un numero arbitrario di dimensioni. Quest'interpretazione è più che legittima, ma non è quella che si vuole dare in questo testo, rimanendo in ambito più 'fisico' che geometrico, perciò non ce ne si occuperà oltre. Un altro tipo di prodotto vettore che si potrebbe definire in N-D prevede un insieme di $N - 1$ vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{N-1} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, il cui prodotto esterno \vec{p} è un vettore ed è definito come:

$$\vec{p} = \wedge(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{N-1}) \quad (4.100)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_i^T \cdot \vec{p} = 0 \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; N-2; N-1\} \\ \|\vec{p}\| = \pm \det \left(\begin{array}{cccc} \vec{v}_1(1) & \vec{v}_1(2) & \dots & \vec{v}_1(N) \\ \vec{v}_2(1) & \vec{v}_2(2) & \dots & \vec{v}_2(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{v}_{N-1}(1) & \vec{v}_{N-1}(2) & \dots & \vec{v}_{N-1}(N) \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_N \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (4.101)$$

dove con \mathbf{u}_i si è indicato il versore unitario relativo all'asse i-esimo.

Si ha quindi un sistema di N equazioni ed N incognite. Il vettore \vec{p} sarà quindi normale all'iper-parallelogramma individuato dagli N-1 vettori e il suo modulo sarà pari all'"area" del suddetto. Il calcolo di \vec{p} con la regola del determinante, come in 3-D, equivale proprio a questo.

Anche questo tipo di prodotto esterno non è binario: esso coinvolge infatti più di due vettori. L'obiettivo in questo testo è realizzare un prodotto vettore che coinvolga due soli vettori, così come avviene per il calcolo dei momenti, definiti per mezzo di un braccio e di una forza. In ingegneria sembra infatti che il prodotto vettore venga utilizzato più per questo scopo che non per il calcolo dei volumi. Se forze, bracci, rotazioni e velocità angolari sono modellabili in più dimensioni, perché non dovrebbero esserlo anche i momenti? Si richiede quindi che il prodotto vettore abbia un senso 'fisico', più che geometrico.

Riassumendo, dal prodotto vettore N-D si possono richiedere almeno queste caratteristiche:

- il risultato dell'operazione deve contenere informazione sull'"area" compresa tra i vettori di partenza
- il risultato dell'operazione deve contenere informazione sulla componente perpendicolare di un vettore sull'altro
- l'operazione deve essere associabile all'idea del momento generato da una forza applicata su un braccio: deve quindi essere un'operazione binaria, dato che coinvolge solo 2 vettori.
- validità in N-D

Ovviamente, se l'operazione rispetterà le proprietà di un prodotto esterno sarà meglio e garantirà un uso più semplice. Questo però può essere verificato in un secondo tempo.

4.3.3 Considerazioni preliminari sugli indici

Prima di costruire un nuovo prodotto esterno, si può osservare una particolarità del prodotto vettore 3-D in forma matriciale. Detto \vec{M} il momento:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (4.102)$$

Esso può essere espresso in forma matriciale come segue:

$$\begin{aligned} \overline{\vec{M}} = [M\wedge] &= \begin{bmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 0 & r_2F_1 - r_1F_2 & r_3F_1 - r_1F_3 \\ r_1F_2 - r_2F_1 & 0 & r_3F_2 - r_2F_3 \\ r_1F_3 - r_3F_1 & r_2F_3 - r_3F_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Infatti:

$$\begin{cases} M_1 = r_2F_3 - r_3F_2 \\ M_2 = r_3F_1 - r_1F_3 \\ M_3 = r_1F_2 - r_2F_1 \end{cases} \quad (4.104)$$

Si nota che, se gli indici relativi a \vec{r} e \vec{F} sono i e j qualsiasi, la componente corrispondente del momento ha un'indice *sempre diverso*. Provando però ad esprimere le componenti del momento *come se si trattasse di una matrice* $M(i, j)$, si ha:

$$\overline{\vec{M}} = [M\wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{23} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Uguagliando termine a termine, si osserva che:

$$\begin{cases} M_{ii} = 0 & \forall i \in \{1; 2; 3\} \\ M_{32} = M_1 = r_2F_3 - r_3F_2 \\ M_{13} = M_2 = r_3F_1 - r_1F_3 \\ M_{21} = M_3 = r_1F_2 - r_2F_1 \end{cases} \quad (4.106)$$

Questa volta ogni componente $M(i, j)$ del momento, in forma matriciale, è identificata da due indici *che sono gli stessi che compaiono accanto a r ed F* . Più che a M_x inteso come momento attorno all'asse X, sembra si debba pensare piuttosto che $M_x = M_{zy}$, ovvero ad un momento che ruota dall'asse Y verso l'asse Z! La formulazione matriciale del prodotto vettore sembra quindi più adatta di quella vettoriale: questo è solo un indizio, ma da non trascurare.

4.4 Componente parallela e perpendicolare

All'articolo sui prodotti combinati, al paragrafo 3.7.3 nella pagina 54, si è mostrato come non esista un'operazione inversa', nel vero senso della parola, del prodotto vettore. Se infatti sono dati un braccio \vec{r} e \vec{F} il momento è subito determinato come $\mathbf{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, al contrario se sono noti \mathbf{M} e \vec{r} , il vettore \vec{F} che

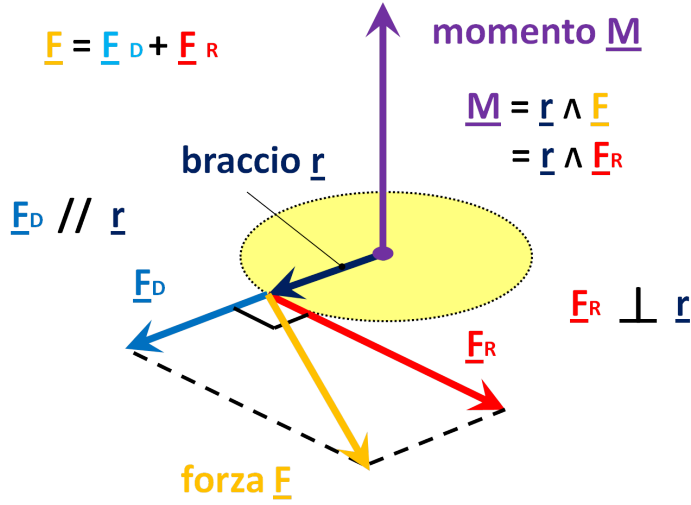


Figura 4.5: Scomposizione di \vec{F} in componenti parallela e perpendicolare ad \vec{r} e momento $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

soddisfi la relazione di partenza non è più univoco. Se si scompone \vec{F} nelle sue componenti \vec{F}_D e \vec{F}_R , rispettivamente parallela e ortogonale a \vec{r} , si avrà infatti:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge (\vec{F}_D + \vec{F}_R) = \vec{r} \wedge \vec{F}_D + \vec{r} \wedge \vec{F}_R \\ &= \vec{0} + \vec{r} \wedge \vec{F}_R = \vec{r} \wedge \vec{F}_R \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}_R \quad (4.108)$$

Noti \vec{M} e \vec{r} , non è quindi più possibile risalire alla componente di \vec{F} parallela a \vec{r} : si può ricostruire solo quella ortogonale \vec{F}_R . Nel caso si voglia utilizzare il prodotto vettore 3-D, \vec{F}_R sarà calcolabile come:

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r} \wedge \vec{M}) \quad (4.109)$$

Il calcolo di \vec{F}_R è però fattibile in qualsiasi numero di dimensioni, anche senza scomodare il prodotto vettore. Dati \vec{r} e \vec{F} , si determinino allora le componenti \vec{F}_D e \vec{F}_R rispettivamente parallela e ortogonale a \vec{r} . Il sistema avrà forma:

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{F}_D + \vec{F}_R \\ \vec{F}_D // \vec{r} \\ \vec{F}_R \perp \vec{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F} = \vec{F}_D + \vec{F}_R \\ \vec{F}_D = \lambda \vec{r} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ \vec{F}_R^T \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \quad (4.110)$$

Per calcolare il fattore di scala 'λ' si moltiplica la prima equazione per \vec{r} , ottenendo:

$$\vec{r}^T \cdot \vec{F} = \vec{r}^T \cdot \vec{F}_D + \vec{r}^T \cdot \vec{F}_R = \vec{r}^T \cdot (\lambda \vec{r}) + \vec{0} = \lambda r^2 \quad \Rightarrow \quad (4.111)$$

$$\lambda = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \vec{r}^T \cdot \vec{F} \quad (4.112)$$

così:

$$\begin{cases} \vec{F}_R = \vec{F} - \vec{F}_D \\ \vec{F}_D = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r}^T \cdot \vec{F}) \vec{r} \end{cases} \quad (4.113)$$

$$\begin{cases} \vec{F}_D = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r}^T \cdot \vec{F}) \vec{r} \\ \vec{F}_R = \vec{F} - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r}^T \cdot \vec{F}) \vec{r} \end{cases} \quad (4.114)$$

Si sono così espresse le componenti parallela e perpendicolare di \vec{F} su \vec{r} . Questo risultato è stato conseguito *senza l'uso del prodotto vettore* ed è valido in spazi con numero arbitrario di dimensioni. Dato che il prodotto vettore non conserva informazioni sulla componente parallela \vec{F}_D , per la sua estensione in N-D ci si concentrerà sull'espressione della componente perpendicolare \vec{F}_R .

Si pensi ora di trovare una matrice T che sia in grado di trasformare il braccio \vec{r} proprio nella forza ortogonale \vec{F}_R , nella forma:

$$\vec{F}_R = T \vec{r} \quad (4.115)$$

E' ovvio che T dipenderà in qualche modo da \vec{F} . La matrice T non ha il senso fisico immediato di un asse di rotazione, ma può essere immaginata come una scatola contenente qualche ingranaggio in grado di prendere in ingresso il vettore \vec{r} , scarlo e ruotarlo fino ad ottenere la forza \vec{F}_R ortogonale a \vec{r} stesso. Sostituendo l'espressione trovata di \vec{F}_R in funzione di \vec{r} e \vec{F} , si verifica che un'eventuale matrice T dovrà soddisfare l'equazione:

$$T \vec{r} = \vec{F} - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r}^T \cdot \vec{F}) \vec{r} \quad (4.116)$$

In uno spazio N-D, quella appena scritta è un'equazione vettoriale equivalente a N equazioni scalari, mentre per determinare completamente una matrice T bisogna fissare N^2 componenti. Si hanno quindi $N^2 - N$ Gradi d'Indeterminazione del problema, che possono essere ridotti scegliendo con molta libertà la forma più comoda per la matrice T . Per farlo, può essere utile ricorrere ad un prodotto tra vettori abbastanza semplice e intuitivo: il prodotto diadico.

4.5 Prodotto diadico

Dati due vettori \vec{a} e \vec{b} , non necessariamente con lo stesso numero di elementi, si dice *prodotto diadico* $\overline{PD} = \overline{ab^T}$ il tensore tale che:

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^{M \times 1}; \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^{N \times 1} \quad (4.117)$$

$$\overline{PD}(i, j) = \overline{ab^T}_{ij} = \vec{a}(i) \vec{b}(j) = a_i b_j \quad (4.118)$$

$$\forall i \in \{1; 2; \dots; M\}, \quad \forall j \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (4.119)$$

Più semplicemente:

$$\overline{ab^T}(i, j) = a_i b_j \quad (4.120)$$

Il prodotto diadico è costituito da tutte le possibili moltiplicazioni tra le componenti a_i e b_j , una per ognuno dei due vettori di partenza. In forma più esplicita si può scrivere:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_M \end{bmatrix} \quad \vec{b}^T = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_N] \quad (4.121)$$

$$\overline{[ab^T]} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_N \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_M b_1 & a_M b_2 & \dots & a_M b_N \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Sebbene il prodotto diadico non sia commutativo, gode comunque delle proprietà associative e distributiva come un prodotto interno. Si dimostra infatti immediatamente che:

$$\overline{[(\lambda a)b^T]} = \overline{[\lambda(ab)^T]} = \lambda \overline{[ab^T]} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.123)$$

$$\overline{[a(b+c)^T]} = \overline{[ab^T]} + \overline{[ac^T]} \quad (4.124)$$

$$\overline{[(a+b)c^T]} = \overline{[ab^T]} + \overline{[bc^T]} \quad (4.125)$$

dove l'unica accortezza è che i vettori sommati assieme abbiano la stessa dimensione.

Un'utile proprietà del prodotto diadico è anche la sua semplificazione a seguito del prodotto scalare con un terzo vettore, a destra o a sinistra:

$$\overline{[ab^T]} \vec{c} = \vec{a} (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) = (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad (4.126)$$

$$\vec{a}^T \overline{[bc^T]} = (\vec{a}^T \cdot \vec{b}) \vec{c}^T \quad (4.127)$$

$$\vec{a}^T \overline{[bc^T]} \vec{d} = (\vec{a}^T \cdot \vec{b}) (\vec{c}^T \cdot \vec{d}) \quad (4.128)$$

$$\overline{[ab^T]} \overline{[cd^T]} = (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \overline{[ad^T]} \quad (4.129)$$

Si può notare che il prodotto diadico dà origine ad una matrice il cui rango è pari a 1, indipendentemente dalla dimensione N di \vec{b} .

$$\text{rank} \left(\overline{[ab^T]} \right) = 1 \quad \forall \dim(\vec{b}) = N \in \mathbb{R} \quad (4.130)$$

Tutte le righe del prodotto sono infatti ottenibili moltiplicando il solo vettore \vec{b}^T per un fattore scalare: sono quindi tutte linearmente dipendenti. Nello specifico, la riga i -esima di $\overline{[ab^T]}$ è pari a $a_i \vec{b}^T$.

In ambito ingegneristico il prodotto diadico non viene spesso indicato, tanto che alcune volte si scrive semplicemente \mathbf{ab} senza neanche il segno di trasposto per \mathbf{b} . In alcuni casi si utilizza una notazione un po' più rigorosa, ad esempio \mathbf{ab}^T , $[\mathbf{ab}^T]$ o \overline{ab} . In ambito matematico sembra invece molto diffusa la simbologia $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, di cui si è venuti a conoscenza solo durante la scrittura di questo testo. Si è deciso di utilizzare la notazione $\overline{[ab^T]}$, leggermente ridondante, per i seguenti motivi:

- il segno di trasposizione su \vec{b} evita di fare confusione con gli indici e consente di operare coerentemente con l'algebra delle matrici.
- la doppia sovralineatura ricorda che per identificare una componente del prodotto diadico servono 2 indici, così come per un vettore ne basta 1 (la freccia può essere vista come una sovralineatura) mentre per uno scalare l'indice non è necessario (0 sovralineature)
- le parentesi quadre [], di per sé non necessarie, delimitano il prodotto diadico e ricordano di trattarlo con l'algebra delle matrici.

La notazione matematica $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ sembra poco diffusa in ambito ingegneristico, ad eccezione di alcune branche dell'elettromagnetismo, e può comprendere una pluralità di significati e operazioni. In particolare il simbolo \otimes può essere utilizzato per definire il prodotto tra spazi vettoriali nella forma $U \otimes V \rightarrow W$ o simili. Dati gli obiettivi di questo testo, si è quindi optato per una notazione 'ingegneristica' forse un po' più pesante ma con tutta probabilità più intuitiva.

4.6 L'estensione in N-D per mezzo dei tensori

Se si volesse determinare la componente \vec{F}_R a partire da \vec{F} nella forma:

$$\vec{F}_R = \mathbb{P}\vec{F} \quad (4.131)$$

il prodotto diadico consentirebbe di trovare facilmente il tensore di proiezione $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\vec{r})$; infatti:

$$\vec{F}_R = \vec{F} - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r}^T \cdot \vec{F}) \vec{r} \quad (4.132)$$

$$\vec{F}_R = I \vec{F} - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} [\overline{r r^T}] \vec{F} \quad (4.133)$$

$$\vec{F}_R = \left(I - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} [\overline{r r^T}] \right) \vec{F} \quad (4.134)$$

$$\mathbb{P} \triangleq I - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} [\overline{r r^T}] \quad (4.135)$$

Il tensore di proiezione \mathbb{P} dipende quindi solo da \vec{r} e, moltiplicato per un generico vettore \vec{F} , è in grado di estrarne la sola componente ortogonale a \vec{r} . Utilizzando il versore $\vec{u}_r = \vec{r}/\|\vec{r}\|$, il tensore di proiezione può essere riscritto anche come:

$$\mathbb{P} \triangleq I - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} [\overline{r r^T}] = I - [\overline{u_r u_r^T}] \quad (4.136)$$

L'obiettivo è trovare una matrice T che trasformi \vec{r} in \vec{F}_R in maniera analoga. Il procedimento è piuttosto semplice e porta, tra l'altro, alla definizione di una

seconda matrice $\overline{\overline{M}}$ dalle interessanti proprietà.

$$\vec{F}_R = \vec{F} - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} (\vec{r}^T \cdot \vec{F}) \vec{r} \quad (4.137)$$

$$\vec{F}_R = \frac{\vec{r}^T \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^2} \vec{F} - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} [\overline{\overline{rF^T}}] \vec{r} \quad (4.138)$$

$$\vec{F}_R = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \vec{F} (\vec{r}^T \cdot \vec{r}) - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} [\overline{\overline{rF^T}}] \vec{r} \quad (4.139)$$

$$\vec{F}_R = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} [\overline{\overline{Fr^T}}] \vec{r} - \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} [\overline{\overline{rF^T}}] \vec{r} \quad (4.140)$$

$$\vec{F}_R = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \left([\overline{\overline{Fr^T}}] - [\overline{\overline{rF^T}}] \right) \vec{r} \quad (4.141)$$

$$T := \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \left([\overline{\overline{Fr^T}}] - [\overline{\overline{rF^T}}] \right) \Rightarrow \quad (4.142)$$

$$\vec{F}_R = T \vec{r} \quad (4.143)$$

$$\overline{\overline{M}} := [\overline{\overline{Fr^T}}] - [\overline{\overline{rF^T}}] \quad (4.144)$$

$$\vec{F}_R = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \overline{\overline{M}} \vec{r} \quad (4.145)$$

Si osservi ora la matrice $\overline{\overline{M}} := [\overline{\overline{Fr^T}}] - [\overline{\overline{rF^T}}]$:

$$\overline{\overline{M}} = [\overline{\overline{Fr^T}}] - [\overline{\overline{rF^T}}] = \quad (4.146)$$

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} F_1 r_1 & F_1 r_2 & \cdots & F_1 r_N \\ F_2 r_1 & F_2 r_2 & \cdots & F_2 r_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_N r_1 & F_N r_2 & \cdots & F_N r_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1 F_1 & r_1 F_2 & \cdots & r_1 F_N \\ r_2 F_1 & r_2 F_2 & \cdots & r_2 F_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_N F_1 & r_N F_2 & \cdots & r_N F_N \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} 0 & r_2 F_1 - r_1 F_2 & \cdots & r_N F_1 - r_1 F_N \\ r_1 F_2 - r_2 F_1 & 0 & \cdots & r_N F_2 - r_2 F_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 F_N - r_N F_1 & r_2 F_N - r_N F_2 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

Diventa così evidente che:

$$\overline{\overline{M}}(i, j) = ([\overline{\overline{Fr^T}}] - [\overline{\overline{rF^T}}])_{ij} = F_i r_j - r_i F_j \quad (4.149)$$

$$\overline{\overline{M}}_{ij} = r_j F_i - r_i F_j \quad (4.150)$$

ovvero lo stesso risultato che si era visto con l'espressione matriciale del prodotto vettore, anche se limitato al caso 3-D:

$$\begin{cases} M_{ii} = 0 & \forall i \in \{1; 2; 3\} \\ M_{32} = M_1 = r_2 F_3 - r_3 F_2 \\ M_{13} = M_2 = r_3 F_1 - r_1 F_3 \\ M_{21} = M_3 = r_1 F_2 - r_2 F_1 \end{cases} \quad (4.151)$$

A differenza del caso precedente, però, la matrice $\overline{\overline{M}}$ è però costruibile in un numero qualsiasi di dimensioni, a patto che \vec{r} e \vec{F} abbiano lo stesso numero di elementi. La matrice $\overline{\overline{M}}$ altro non è che il *momento della forza \vec{F} applicata al braccio \vec{r}* . In questa forma è, come già dimostrato, tale che:

$$\vec{F}_R = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \overline{\overline{M}} \vec{r} \quad (4.152)$$

E' ora possibile definire il prodotto vettore in N-D.

4.6.1 Definizione di prodotto vettore N-D

Dati due vettori \vec{r} e \vec{F} tali che $\vec{r}, \vec{F} \in V = \mathbb{R}^{N \times 1}$, il loro prodotto vettore N-D, indicato con $\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}$ è così definito:

$$\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F} \triangleq [\overline{\overline{Fr^T}}] - [\overline{\overline{rF^T}}] \quad (4.153)$$

L'operatore di prodotto vettore N-D è indicato con due cunei sovrapposti $\hat{\wedge}$ per distinguerlo dagli operatori \wedge e \times , utilizzati normalmente in 3-D o in Algebra Esterna con differenti significati. Se il prodotto vettore 3-D \wedge genera un vettore o uno pseudo-vettore, per il quale basta 1 solo indice per identificarne un elemento, il prodotto vettore N-D $\hat{\wedge}$ genera una matrice, per la quale sono necessari 2 indici. Il simbolo di doppio cuneo serve quindi a ricordare l'accezione matriciale del nuovo prodotto esterno così definito.

Questa è quindi l'estensione del prodotto vettore in N-D. Nella prossima sezione se ne vedranno le proprietà principali.

Istruzioni \LaTeX per il prodotto vettore N-D

Per scrivere il doppio cuneo in \LaTeX è necessario caricare il pacchetto `amssymb`, che arricchisce la scelta di simboli matematici, scrivendo nel preambolo del documento:

```
\usepackage{amssymb}
```

Sempre nel preambolo conviene creare l'apposito comando `\doublewedge`:

```
\newcommand{\doublewedge}{\overset{\wedge}{\text{\scriptsize{\wedge}}}} %
```

o, in alternativa:

```
\newcommand{\doublewedge}{\overset{\land}{\text{\scriptsize{\land}}}} %
```

4.7 Proprietà elementari Prodotto Vettore N-D

Per come è stato definito il Prodotto Vettore N-D, esso rispetta *tutte* le classiche proprietà di un prodotto esterno. In questa sezione si illustrano le caratteristiche elementari della nuova operazione così definita.

4.7.1 Proprietà anti-commutativa e anti-simmetria

$$\vec{r} \wedge \vec{F} = -\vec{F} \wedge \vec{r} \quad (4.154)$$

Dimostrazione:

$$\vec{r} \wedge \vec{F} = \overline{[F\vec{r}^T]} - \overline{[r\vec{F}^T]} = -\overline{[r\vec{F}^T]} + \overline{[r\vec{F}^T]} = -\left(\overline{[r\vec{F}^T]} - \overline{[F\vec{r}^T]}\right) \quad (4.155)$$

$$\vec{r} \wedge \vec{F} = -\vec{F} \wedge \vec{r} \quad \text{C.V.D.} \quad (4.156)$$

Il prodotto di un vettore con se stesso è quindi nullo:

$$\vec{r} \wedge \vec{r} = \vec{0} \quad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^{N \times 1} \quad (4.157)$$

Detta $\overline{\overline{M}}$ la matrice-momento tra \vec{r} e \vec{F} , essa risulta anti-simmetrica:

$$\overline{\overline{M}} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (4.158)$$

$$\overline{\overline{M}} = -\overline{\overline{M}}^T \quad (4.159)$$

In generale vale quindi:

$$\vec{c}^T \overline{\overline{M}} \vec{c} = 0 \quad \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^{N \times 1} \quad (4.160)$$

In particolare si verifica facilmente che la componente \vec{F}_R è perpendicolare a \vec{r} come richiesto

$$\vec{r}^T \cdot \vec{F}_R = \vec{r}^T \cdot \left(\frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \overline{\overline{M}} \vec{r} \right) = \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \vec{r}^T \overline{\overline{M}} \vec{r} = 0 \quad (4.161)$$

$$\vec{r}^T \cdot \vec{F}_R = 0 \quad \text{C.V.D.} \quad (4.162)$$

4.7.2 Proprietà associativa per moltiplicazione per scalare

$$(\alpha \vec{r}) \wedge (\beta \vec{F}) = \alpha \beta (\vec{r} \wedge \vec{F}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (4.163)$$

Dimostrazione:

$$(\alpha \vec{r}) \wedge (\beta \vec{F}) = \overline{[(\beta F)(\alpha r)^T]} - \overline{[(\alpha r)(\beta F)^T]} = \quad (4.164)$$

$$\alpha \overline{[(\beta F)r^T]} - \beta \overline{[(\alpha r)F^T]} = \quad (4.165)$$

$$\alpha \beta \overline{[Fr^T]} - \alpha \beta \overline{[rF^T]} = \alpha \beta \left(\overline{[Fr^T]} - \overline{[rF^T]} \right) = \quad (4.166)$$

$$\alpha \beta (\vec{r} \wedge \vec{F}) \quad (4.167)$$

$$(\alpha \vec{r}) \wedge (\beta \vec{F}) = \alpha \beta (\vec{r} \wedge \vec{F}) \quad \text{C.V.D.} \quad (4.168)$$

4.7.3 Proprietà distributiva a destra e sinistra

$$\vec{r} \wedge (\vec{F}_A + \vec{F}_B) = \vec{r} \wedge \vec{F}_A + \vec{r} \wedge \vec{F}_B \quad (4.169)$$

$$(\vec{r}_A + \vec{r}_B) \wedge \vec{F} = \vec{r}_A \wedge \vec{F} + \vec{r}_B \wedge \vec{F} \quad (4.170)$$

Dimostrazione:

$$\vec{r} \hat{\wedge} (\vec{F}_A + \vec{F}_B) = \overline{[(F_A + F_B)r^T]} - \overline{[r(F_A + F_B)^T]} = \quad (4.171)$$

$$\overline{[F_A r^T]} + \overline{[F_B r^T]} - \overline{[r F_A^T]} - \overline{[r F_B^T]} = \quad (4.172)$$

$$\left(\overline{[F_A r^T]} - \overline{[r F_A^T]} \right) + \left(\overline{[F_B r^T]} - \overline{[r F_B^T]} \right) = \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_A + \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_B \quad (4.173)$$

$$\vec{r} \hat{\wedge} (\vec{F}_A + \vec{F}_B) = \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_A + \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_B \quad \text{C.V.D.} \quad (4.174)$$

Per la distributività a sinistra il ragionamento è analogo.

4.7.4 Non associatività dell'operazione rispetto a se stessa

$$\vec{c} \hat{\wedge} (\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}) \neq (\vec{c} \hat{\wedge} \vec{r}) \hat{\wedge} \vec{F} \quad \text{operazione proibita} \quad (4.175)$$

Per come è stato definito, infatti, il prodotto vettore N-D può essere eseguito solo tra vettori di pari dimensioni, perciò l'operazione $\vec{c} \hat{\wedge} (\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F})$ non è neanche effettuabile, dato che coinvolge un vettore \vec{c} e una matrice $\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}$.

4.7.5 Prodotto tra vettori paralleli

Detti \vec{r} ed $\vec{F} = \vec{F}_D + \vec{F}_R$, con $\vec{F}_D // \vec{r}$ e $\vec{F}_R \perp \vec{r}$, varrà:

$$\vec{F}_D // \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_D = \vec{0} \quad (4.176)$$

$$\vec{F}_R \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F} = \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_R \quad (4.177)$$

Dimostrazione:

poiché $\vec{F}_D // \vec{r}$, esso sarà esprimibile come \vec{r} moltiplicato per un fattore scalare, perciò:

$$\vec{F}_D // \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_D = \lambda \vec{r} \quad \Rightarrow \quad (4.178)$$

$$\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_D = \vec{r} \hat{\wedge} (\lambda \vec{r}) = \lambda (\vec{r} \hat{\wedge} \vec{r}) = \vec{0} \quad (4.179)$$

$$\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_D = \vec{0} \quad \text{C.V.D.} \quad (4.180)$$

Per la proprietà distributiva si dimostra così che:

$$\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F} = \vec{r} \hat{\wedge} (\vec{F}_D + \vec{F}_R) = \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_D + \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_R \quad (4.181)$$

$$\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F} = \vec{0} + \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_R = \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}_R \quad \text{C.V.D.} \quad (4.182)$$

4.7.6 Rango della matrice - momento

Il rango della matrice momento $\overline{\overline{M}} = \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F}$ è pari a 2, per qualsiasi dimensione N di \vec{r} ed \vec{F} .

$$\text{rank} \left(\vec{r} \hat{\wedge} \vec{F} \right) = 2 \quad \forall \dim(\vec{r}) = \dim(\vec{F}) = N \in \mathbb{R} \quad (4.183)$$

Essendo infatti:

$$M_{ij} = F_i r_j - F_j r_i \quad (4.184)$$

ogni riga i -esima di $\overline{\overline{M}}$ può essere scritta come combinazione lineari di 2 soli vettori, nello specifico \vec{r} e \vec{F} , nella forma:

$$M(i, :) = F_i \vec{r} - r_i \vec{F} \quad (4.185)$$

Poiché una matrice è invertibile solo se ha rango massimo pari a N , cioè se tutte le sue righe sono linearmente indipendenti, la matrice $\overline{\overline{M}}$ non è mai invertibile se $N - 2 > 0$. In altre parole, questo significa che $\overline{\overline{M}}$ è singolare e ha determinante nullo per un numero di dimensioni maggiore di 2.

$$\det(\overline{\overline{M}}) = \det\left(\overline{\overline{[Fr^T]}} - \overline{\overline{[rF^T]}}\right) = 0 \quad \forall N \in \mathbb{R} \text{ tale che: } N > 2 \quad (4.186)$$

Come caso particolare si ha quello in cui $\vec{r} // \vec{F}$, perciò i due vettori sono linearmente dipendenti e la matrice momento ha rango 1 invece di 2. Se invece uno dei due vettori è nullo, ad esempio $\vec{r} = \vec{0}$, si ha necessariamente $\overline{\overline{M}} = \vec{0}$ e quindi la matrice ha rango nullo.

4.7.7 Autovettori per la matrice - momento

Una matrice momento $\overline{\overline{M}} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, con \vec{a} e $\vec{b} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ non può avere né autovalori reali $\lambda \in \mathbb{R}$ né autovettori reali $\vec{v} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$.

$$\nexists \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}, \quad \nexists \vec{v} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^{N \times 1} \quad \text{tali che:} \quad (4.187)$$

$$\overline{\overline{M}} \vec{v} = [\vec{a} \wedge \vec{b}] \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad (4.188)$$

Dimostrazione:

per semplificare la scrittura dei conti, si utilizzerà la componente \vec{b}_R ortogonale a \vec{a} invece di \vec{b} . Quest'operazione non cambia il prodotto vettore, infatti: $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}_R$ come già dimostrato. Il problema agli autovalori equivalente diventa allora:

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}_R] \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad (4.189)$$

$$(\overline{\overline{[b_R a^T]}} - \overline{\overline{[a b_R^T]}}) \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad (4.190)$$

Si scomponga ora l'autovettore \vec{v} in tre componenti, di cui due rispettivamente parallele a \vec{a} e \vec{b}_R e la terza ortogonale ad essi.

$$\vec{v} = \alpha \vec{u}_a + \beta_R \vec{u}_{b_R} + \gamma \vec{u}_c \quad (4.191)$$

$$[\vec{u}_a^T; \vec{u}_{b_R}^T; \vec{u}_c^T] [\vec{u}_a, \vec{u}_{b_R}, \vec{u}_c] = I_{3 \times 3} \quad (4.192)$$

dove \vec{u}_a, \vec{u}_{b_R} sono i versori:

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{a}}{a} \quad (4.193)$$

$$\vec{u}_{b_R} = \frac{\vec{b}_R}{\|\vec{b}_R\|} = \frac{\vec{b}_R}{b_R} \quad (4.194)$$

\vec{u}_c è invece il versore associato alla componente di \vec{v} normale a \vec{a} e \vec{b} , calcolabile come:

$$\vec{u}_c = \frac{\vec{v} - (\alpha \vec{u}_a + \beta_R \vec{u}_{b_R})}{\|\vec{v} - (\alpha \vec{u}_a + \beta_R \vec{u}_{b_R})\|} \quad (4.195)$$

I coefficienti α, β_R e γ si calcolano in cascata, dato \vec{v} , con le formule:

$$\alpha = \vec{v}^T \cdot \vec{u}_a \quad (4.196)$$

$$\beta_R = \vec{v}^T \cdot \vec{u}_{b_R} \quad (4.197)$$

$$\gamma = \vec{v}^T \cdot \vec{u}_c \quad (4.198)$$

se ne omette la dimostrazione perché è immediata. Lo stesso prodotto vettore può essere riscritto nella forma:

$$\vec{a} \wedge \vec{b}_R = ab_R \left(\vec{u}_a \wedge \vec{u}_{b_R} \right) \quad (4.199)$$

Si calcoli allora il prodotto di $\vec{a} \wedge \vec{b}_R$ con \vec{v} :

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}_R] \vec{v} = (\overline{[b_R a^T]} - \overline{[a b_R^T]}) \vec{v} = ab_R \left(\overline{[u_{b_R} u_a^T]} - \overline{[u_a u_{b_R}^T]} \right) \vec{v} \quad (4.200)$$

$$\left(\overline{[u_{b_R} u_a^T]} - \overline{[u_a u_{b_R}^T]} \right) \vec{v} = (\vec{v}^T \cdot \vec{u}_a) \vec{u}_{b_R} - (\vec{v}^T \cdot \vec{u}_{b_R}) \vec{u}_a = \alpha \vec{u}_{b_R} - \beta \vec{u}_a \quad (4.201)$$

Così:

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}_R] \vec{v} = ab_R (\alpha \vec{u}_{b_R} - \beta \vec{u}_a) \quad (4.202)$$

Per la risoluzione del problema agli autovalori si richiede che:

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}_R] \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad \Rightarrow \quad (4.203)$$

$$ab_R (\alpha \vec{u}_{b_R} - \beta \vec{u}_a) = \lambda (\alpha \vec{u}_a + \beta_R \vec{u}_{b_R} + \gamma \vec{u}_c) \quad (4.204)$$

Ponendo $\lambda^* = \lambda / (ab_R)$, si avrà più semplicemente:

$$\alpha \vec{u}_{b_R} - \beta_R \vec{u}_a = \lambda^* (\alpha \vec{u}_a + \beta_R \vec{u}_{b_R} + \gamma \vec{u}_c) \quad (4.205)$$

Moltiplicando alternativamente quest'equazione per i versori $\vec{u}_a, \vec{u}_{b_R}, \vec{u}_c$, tra loro reciprocamente ortogonali, si otterrà:

$$\begin{cases} -\beta_R = \lambda^* \alpha & \text{moltiplicando per } \vec{u}_a \\ \alpha = \lambda^* \beta_R & \text{moltiplicando per } \vec{u}_{b_R} \\ 0 = \lambda^* \gamma & \text{moltiplicando per } \vec{u}_c \end{cases} \quad (4.206)$$

Affinché \vec{v} sia un autovettore non nullo, è necessario che tutte le tre equazioni siano soddisfatte contemporaneamente con $\lambda \neq 0$. La soluzione che si ottiene è quindi:

$$\begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta_R = -\lambda^* \alpha \\ \gamma = 0 \\ \lambda^* = \pm i \end{cases} \quad (4.207)$$

Autovalore λ e autovettore \vec{v} dovranno quindi avere forma:

$$\lambda = \pm i (ab_R) \quad (4.208)$$

$$\vec{v} = \alpha (\vec{u}_a \mp i \vec{u}_{b_R}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.209)$$

Si vede così che, anche se \vec{a} e \vec{b} sono reali, la loro matrice-momento ha solo una coppia di autovalori non nulli, entrambi immaginari e uguali e opposti. La coppia di autovettori associati è data da una combinazione lineare dei versori \vec{u}_a e \vec{u}_{b_R} , ma a causa della presenza dell'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ gli autovettori sono in generale complessi.

In campo reale la matrice-momento $[\vec{a} \wedge \vec{b}]$ è quindi priva di autovalori e autovettori, C. V. D.

4.7.8 Vettori annullati dai momenti

Qualsiasi vettore \vec{c} che sia ortogonale al piano di \vec{a} e \vec{b} è tale che, moltiplicato per il loro momento o prodotto vettore N-D, il risultato sia nullo.

$$\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \quad (4.210)$$

$$\vec{a}^T \cdot \vec{c} = 0, \quad \vec{b}^T \cdot \vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4.211)$$

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \vec{c} = \vec{0} \quad (4.212)$$

Dimostrazione: è immediata.

$$\begin{aligned} [\vec{a} \wedge \vec{b}] \vec{c} &= \left([\overline{ba^T}] - [\overline{ab^T}] \right) \vec{c} = \overline{ba^T} \vec{c} - \overline{ab^T} \vec{c} = \\ &= (\vec{a}^T \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \vec{a} = 0\vec{b} - 0\vec{a} = \vec{0} \quad \text{C.V.D.} \end{aligned} \quad (4.213)$$

Nel caso 3-D, posto $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, esso è sempre perpendicolare \vec{a} e \vec{b} , perciò vale:

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad (4.214)$$

$$\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (4.215)$$

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \vec{p} = [\vec{a} \wedge \vec{b}] (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{0} \quad (4.216)$$

dove nella stessa equazione si sono utilizzate sia la notazione N-D sia quella 3-D. In maniera analoga, vale anche:

$$\Omega \vec{\omega} = [\omega \wedge] \vec{\omega} = \vec{0} \quad (4.217)$$

4.8 Contrazione di tensori e norma

In questa sezione si mostreranno le operazioni di contrazione e norma di matrice, largamente utilizzate nell'algebra delle matrici.

Contrazione di matrici e tensori

Date due matrici o tensori A e $B \in \mathbb{R}^{M \times N}$, si definisce loro contrazione $ct = A : B$ lo scalare costruito come:

$$ct = A : B \triangleq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} B_{ij} \quad (4.218)$$

Si dimostra immediatamente che la contrazione rispetta le proprietà commutativa, associativa per la moltiplicazione con scalare, distributiva, ma non la

proprietà associativa rispetto a se stessa. Si ha così:

$$A : B = B : A \quad (4.219)$$

$$(\lambda A) : B = A : (\lambda B) = \lambda(A : B) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.220)$$

$$A : (B + C) = A : B + A : C \quad (4.221)$$

$$(A : B) : C \neq A : (B : C) \quad \text{operazione proibita} \quad (4.222)$$

La contrazione tra due matrici è inoltre eguale alla contrazione delle loro trasposte, infatti:

$$\begin{aligned} A : B &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} B_{ij} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M A_{ij} B_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M A_{ji} B_{ji} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M A(j, i) B(j, i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M A^T(i, j) B^T(i, j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M A_{ij}^T B_{ij}^T = \\ &= A^T : B^T \end{aligned} \quad (4.223)$$

$$A : B = A^T : B^T \quad \text{C.V.D.} \quad (4.224)$$

L'operazione di contrazione può talvolta essere combinata con il prodotto diadico nel modo seguente:

$$\vec{F} \in \mathbb{R}^{M \times 1}, \vec{r} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \quad A \in \mathbb{R}^{M \times N} \quad (4.225)$$

$$A : [\overline{F r^T}] = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} [\overline{F r^T}]_{ij} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} F_i r_j = \vec{F}^T A \vec{r} \quad (4.226)$$

$$A : [\overline{F r^T}] = \vec{F}^T A \vec{r} \quad (4.227)$$

La contrazione tra due prodotti diadici è quindi:

$$[\overline{a b^T}] : [\overline{c d^T}] = (\vec{c}^T \cdot \vec{a}) (\vec{b}^T \cdot \vec{d}) \quad (4.228)$$

La contrazione di tensori o matrici viene spesso utilizzato per il calcolo delle energie. Ad esempio, dati un tensore di sforzi $\overline{\sigma}$ e un tensore di deformazione $\overline{\epsilon}$, l'energia elastica per unità di volume è data da:

$$\rho e_{elast} = \overline{\sigma} : \overline{\epsilon} \quad (4.229)$$

Norma di matrice

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, si definisce la sua *norma euclidea* o *norma di ordine 2** $\|A\|$ lo scalare costruito come:

$$\|A\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij}^2} \quad (4.230)$$

La contrazione di una matrice con se stessa è quindi pari al quadrato della sua norma euclidea:

$$\|A\|^2 = A : A \quad (4.231)$$

L'operatore norma verrà adoperato per calcolare l'area compresa tra \vec{a} e \vec{b} quando sia noto solo il loro prodotto vettore $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

4.9 Area compresa e magnitudine

Nel caso 3-D si era visto come, dati due vettori \vec{a} e \vec{b} , per il calcolo dell'area del parallelogramma compreso tra di essi si potesse ricorrere ad una delle equazioni seguenti:

$$\text{Area}(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2} \quad (4.232)$$

$$\text{Area}(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \quad (4.233)$$

Dall'estensione N-D del prodotto vettore, noto solo $\vec{a} \wedge \vec{b}$, è possibile risalire in maniera analoga all'area del parallelogramma, infatti:

$$\text{Area}^2(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 \quad (4.234)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 &= [\vec{a} \wedge \vec{b}] : [\vec{a} \wedge \vec{b}] = \left([\overline{ba^T}] - [\overline{ab^T}] \right) : \left([\overline{ba^T}] - [\overline{ab^T}] \right) = \\ &= [\overline{ba^T}] : [\overline{ba^T}] - [\overline{ba^T}] : [\overline{ab^T}] - [\overline{ab^T}] : [\overline{ba^T}] + [\overline{ab^T}] : [\overline{ab^T}] = \\ &= (\vec{b}^T \cdot \vec{b})(\vec{a}^T \cdot \vec{a}) - (\vec{b}^T \cdot \vec{a})(\vec{b}^T \cdot \vec{a}) - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})(\vec{b}^T \cdot \vec{a}) + (\vec{a}^T \cdot \vec{a})(\vec{b}^T \cdot \vec{b}) = \\ &= b^2 a^2 - (\vec{b}^T \cdot \vec{a})^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 + a^2 b^2 = 2 \left(a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \right) \end{aligned} \quad (4.235)$$

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 = 2 \left(a^2 b^2 - (\vec{a}^T \cdot \vec{b})^2 \right) = 2 \text{Area}^2(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{C.V.D} \quad (4.236)$$

In forma più estesa, quest'equazione può essere scritta come:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_j b_i - a_i b_j)^2 = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_i^2 b_j^2 - a_i b_i a_j b_j) \quad (4.237)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_j b_i - a_i b_j)^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2 \sum_{j=1}^N b_j^2 - \left(\sum_{i=1}^N a_i b_i \right)^2 \quad (4.238)$$

cioè in forma analoga all'identità per la norma del prodotto vettore 3-D:

$$\begin{aligned} (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \end{aligned} \quad (4.239)$$

già vista alla sezione 3.3 nella pagina 31.

Si è quindi fornita la dimostrazione, valida in N-D, di un'identità che espressa in notazione 3-D avrebbe richiesto lo svolgimento manuale di un gran numero di operazioni tra coordinate.

Anti-simmetria e calcolo norme

Poiché la matrice $[\vec{a} \wedge \vec{b}]$ è anti-simmetrica, per calcolare l'area basta calcolare la norma solo del triangolo superiore. Si noti che, nell'espressione matriciale 3-D, si ha infatti:

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} 0 & -M_{21} & M_{13} \\ M_{21} & 0 & -M_{32} \\ -M_{13} & M_{32} & 0 \end{bmatrix} = [M \wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (4.240)$$

$$\begin{aligned} \|\overline{\overline{M}}\|^2 &= (-M_{21})^2 + M_{13}^2 + (-M_{32})^2 + \\ &+ 0^2 + 0^2 + 0^2 + M_{21}^2 + (-M_{13})^2 + M_{32}^2 = \end{aligned} \quad (4.241)$$

$$2(M_{21}^2 + M_{13}^2 + M_{32}^2) = 2(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) = 2\|\vec{M}\|^2$$

$$\|\overline{\overline{M}}\|^2 = 2\|\vec{M}\|^2 \quad (4.242)$$

In generale, dato il modulo $\|\vec{M}\|$ di uno pseudo-vettore, la norma della matrice anti-simmetrica corrispondente è pari al suo doppio.

4.10 Regole semplici per il caso N-D

In questa sezione si illustrano poche semplici regoline per l'utilizzo del prodotto vettore N-D. Nel caso 3-D il problema principale di $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ consisteva nel ricordare l'ordine degli indici, con le loro permutazioni, e il segno finale da attribuire al prodotto. Si poteva così fare ricorso alla seguente lista di regole mnemoniche già enunciate:

- Prodotto vettore per terna destra di versori
- Regola del determinante
- Regola 'xyzyz'
- Regola della mano destra
- Espressione matriciale del prodotto vettore 3D

Per il prodotto vettore N-D queste regole diventano superflue, se non inutili.

L'unica espressione da ricordare è infatti:

$$\vec{r} \wedge \vec{F} = [\overline{\overline{F r^T}}] - [\overline{\overline{r F^T}}] \quad (4.243)$$

La confusione più probabile che si potrebbe fare è se compare prima F o prima r in uno dei due prodotti diadici. Basta ricordare che in entrambi i casi F compare verso l'esterno dell'espressione. Ecco comunque alcune parole e frasi per ricordarsi l'ordine:

- una forza \vec{F} viene solitamente rappresentata come applicata *all'esterno* di un braccio \vec{r} .

- La lettura del prodotto $\vec{a} \wedge \vec{b}$ in forma diadica può essere letta come ‘baab’. In alternativa, $\vec{r} \wedge \vec{F}$ può essere ricordato come ‘FrrF’, ma sembra meno pratico.
- Le prime 3 consonanti di ‘Ferro’ e ‘Ferrero’ sono le prime 3 di ‘FrrF’.
- Se si vogliono ricordare sia il momento sia la posizione dei trasposti, si può utilizzare la frase: ‘Mi farete rifatturare’ dove le prime sette consonanti ricordano l’ordine delle lettere (apici compresi) nell’espressione:

$$\overline{\overline{M}} = [\overline{\overline{FrT}}] - [\overline{\overline{rFT}}] \quad (4.244)$$

4.11 Prodotti combinati

In questa sezione si mostra come l’estensione N-D del prodotto vettore consenta di dimostrare rapidamente e in forma simbolica gran parte delle identità algebriche normalmente utilizzate per i ‘prodotti combinati’, già viste per il caso 3-D. Verranno inoltre mostrate altre identità algebriche di facile utilizzo.

4.11.1 Triplo prodotto scalare N-D - il calcolo dei volumi

Finché si rimane in 3-D, 3 vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ individuano un parallelepipedo il cui volume segnato è calcolabile come un triplo prodotto scalare, come già visto:

$$\text{Vol} = (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c} \quad (4.245)$$

Per individuare un iper-parallelepipedo in N-D servono invece N vettori $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N]$, e l’iper-volume dotato di segno è il determinante della matrice A avente come colonne i vettori stessi.

$$\text{Vol}_N = \det([\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N]) \quad (4.246)$$

Anche in uno spazio N-D, 3 vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ individuano comunque un volume 3-D, calcolabile in valore assoluto. Con un procedimento un po’ laborioso, si dimostra che:

$$\begin{aligned} \text{Vol}^2 = a^2 b^2 c^2 [1 - (\cos^2 \theta_{AB} + \cos^2 \theta_{BC} + \cos^2 \theta_{CA}) \\ + 2(\cos \theta_{AB} \cos \theta_{BC} \cos \theta_{CA})] \end{aligned} \quad (4.247)$$

dove:

$$\begin{cases} \cos \theta_{AB} = \vec{u}_a^T \cdot \vec{u}_b \\ \cos \theta_{BC} = \vec{u}_b^T \cdot \vec{u}_c \\ \cos \theta_{CA} = \vec{u}_c^T \cdot \vec{u}_a \end{cases} \quad (4.248)$$

Esiste comunque un altro metodo per calcolare un ‘volume 3-D’ anche in uno spazio con numero di dimensioni arbitrarie. Per lo scopo, si definisce l’operazione di *prodotto a 3 indici*, valida in N-D ed in generale differente dal calcolo dei volumi, sebbene nel caso particolare 3-D produca lo stesso risultato.

4.11.2 Prodotto a 3 indici

Data una generica matrice $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, definita su uno spazio N-D, il suo *prodotto a 3 indici* $\vec{c} \cdot A$ con il vettore $\vec{c} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ rispetto agli indici i, j e k nell'ordine è definito come:

$$\vec{c} \cdot A = A_{ij} c_k + A_{jk} c_i + A_{ki} c_j \quad \forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (4.249)$$

Di fatto, \cdot è un nuovo operatore algebrico che richiede 3 indici per essere definito. Si può verificare facilmente che gli indici possono essere permutati ciclicamente, infatti:

$$\vec{c} \cdot A = \vec{c} \cdot A = \vec{c} \cdot A \quad (4.250)$$

In generale però queste sono le uniche permutazioni valide. Si veda ora che effettivamente *il volume individuato da 3 vettore in 3-D* può essere espresso come un *prodotto a 3 indici di un prodotto vettore in N-D*.

Prodotto a 3 indici di prodotto vettore: calcolo dei volumi

Si calcoli il prodotto a 3 indici tra un vettore $\vec{c} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ e un generico prodotto vettore N-D $[\vec{a} \wedge \vec{b}]$; si avrà:

$$\vec{c} \cdot [\vec{a} \wedge \vec{b}] = [\vec{a} \wedge \vec{b}]_{ij} c_k + [\vec{a} \wedge \vec{b}]_{jk} c_i + [\vec{a} \wedge \vec{b}]_{ki} c_j \quad (4.251)$$

$$\forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\}$$

Espandendo:

$$\vec{c} \cdot [\vec{a} \wedge \vec{b}] = (a_j b_i - a_i b_j) c_k + (a_k b_j - a_j b_k) c_i + (a_i b_k - a_k b_i) c_j \quad (4.252)$$

$$\forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\}$$

Ponendo $\{i; j; k\} = \{1; 2; 3\}$ si otterrà:

$$\vec{c} \cdot [\vec{a} \wedge \vec{b}] = (a_2 b_1 - a_1 b_2) c_3 + (a_3 b_2 - a_2 b_3) c_1 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) c_2 \quad (4.253)$$

$$\vec{c} \cdot [\vec{a} \wedge \vec{b}] = a_2 b_1 c_3 - a_1 b_2 c_3 + a_3 b_2 c_1 - a_2 b_3 c_1 + a_1 b_3 c_2 - a_3 b_1 c_2 \quad (4.254)$$

$$\vec{c} \cdot [\vec{a} \wedge \vec{b}] = (a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1) - (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) \quad (4.255)$$

Si è così ritrovata, a meno del segno, l'espressione di un volume originato da prodotto vettore in 3-D, infatti:

$$Vol = (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{c} \quad (4.256)$$

$$Vol = (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1) \quad (4.257)$$

Si può così scrivere:

$$\vec{c} \cdot [\vec{a} \wedge \vec{b}] = -\vec{c}_{RID}^T \cdot (\vec{a}_{RID} \wedge \vec{b}_{RID}) \quad (4.258)$$

Si noti che i vettori \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} possono essere *di dimensione N qualsiasi*, anche se una volta scelti 3 indici vengono estratti solo 3 elementi da ognuno di essi. I vettori che compaiono nell'espressione 'classica' in 3-D sono infatti ridotti rispetto agli originali:

$$\vec{a}_{RID} = [a_1; a_2; a_3] \quad (4.259)$$

$$\vec{b}_{RID} = [b_1; b_2; b_3] \quad (4.260)$$

$$\vec{c}_{RID} = [c_1; c_2; c_3] \quad (4.261)$$

In forma un po' semplificata, si può quindi scrivere la traduzione tra notazione N-D e 3-D come:

$$\vec{c} \cdot \left[\vec{a} \wedge \vec{b} \right]_{123} = -\vec{c}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (4.262)$$

Il prodotto a 3 indici ha anche un analogo operatore in campo differenziale, detto *divergenza a 3 indici*.

4.11.3 Doppio prodotto vettoriale in N-D - componente perpendicolare

Dati 3 vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, il loro doppio prodotto vettoriale è il vettore \vec{pp} esprimibile come:

$$\vec{pp} = (\vec{c}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{a}) \vec{c} \quad (4.263)$$

Nel caso 3-D si aveva:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{a}) \vec{c} \quad (4.264)$$

In notazione N-D, la stessa espressione può essere riscritta come:

$$\vec{a}^T [\vec{b} \wedge \vec{c}] = (\vec{c}^T \cdot \vec{a}) \vec{b}^T - (\vec{b}^T \cdot \vec{a}) \vec{c}^T \quad (4.265)$$

In entrambi i casi, si può definire un altro doppio prodotto vettoriale nella forma più semplice:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a}^T \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad (4.266)$$

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \vec{c} = (\vec{a}^T \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad (4.267)$$

Si può notare che l'ordine delle lettere *identico* in entrambe le notazioni.

L'ultima equazione, espressa in forma diadica, può assumere la forma:

$$\left([\overline{ba^T}] - [\overline{ab^T}] \right) \vec{c} = \vec{b} (\vec{a}^T \cdot \vec{c}) - \vec{a} (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \quad (4.268)$$

molto semplice da ricordare, dato che la successione delle lettere è identica a destra e a sinistra dell'uguale.

Dimostrazione: è immediata.

$$\begin{aligned} [\vec{a} \wedge \vec{b}] \vec{c} &= \left([\overline{ba^T}] - [\overline{ab^T}] \right) \vec{c} = \overline{ba^T} \vec{c} - \overline{ab^T} \vec{c} = \\ &= \vec{b} (\vec{a}^T \cdot \vec{c}) - \vec{a} (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) = (\vec{a}^T \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad \text{C.V.D.} \end{aligned} \quad (4.269)$$

La componente perpendicolare di \vec{b}_R può essere calcolata, come già visto e dimostrato, nella forma:

$$\vec{b}_R = \vec{b} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} (\vec{a}^T \cdot \vec{b}) \vec{a} \quad (4.270)$$

$$\vec{b}_R = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} [\vec{a} \wedge \vec{b}] \vec{a} \quad (4.271)$$

Anche in questo caso si verifica che la successione delle lettere è identica alla notazione per il caso 3-D:

$$\vec{b}_R = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \left((\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} \right) \quad (4.272)$$

4.11.4 Operazione inversa del prodotto vettore in N-D

Come per il caso 3-D, non esiste una vera e propria operazione inversa per il prodotto vettore. Dati infatti il prodotto $\vec{a} \wedge \vec{b}$ e uno dei vettori di partenza \vec{a} , è possibile risalire solo alla componente \vec{b}_R ortogonale del secondo vettore sul primo. La dimostrazione è già stata data negli articoli precedenti (vedi i paragrafi 4.11.3 e 3.7.3 nella pagina 54) perciò si riportano solo i risultati, per altro già visti.

Nel caso 3-D si ha:

$$\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (4.273)$$

$$\vec{b}_R = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} (\vec{p} \wedge \vec{a}) \quad (4.274)$$

Nel caso N-D si ha:

$$\overline{\vec{P}} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (4.275)$$

$$\vec{b}_R = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \overline{\vec{P}} \vec{a} \quad (4.276)$$

4.11.5 Prodotto scalare tra prodotti vettori N-D - la potenza delle coppie

Nel caso 3-D il ‘prodotto scalare tra prodotti vettori’ era definito per mezzo di 4 vettori \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} nella forma:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}^T \cdot \vec{c})(\vec{b}^T \cdot \vec{d}) - (\vec{a}^T \cdot \vec{d})(\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \quad (4.277)$$

Le stessa espressione può essere riscritta con la notazione N-D in forma:

$$\frac{1}{2} [\vec{a} \wedge \vec{b}] : [\vec{c} \wedge \vec{d}] = (\vec{a}^T \cdot \vec{c})(\vec{b}^T \cdot \vec{d}) - (\vec{a}^T \cdot \vec{d})(\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \quad (4.278)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} [\vec{a} \wedge \vec{b}] : [\vec{c} \wedge \vec{d}] &= \left([\overline{ba^T}] - [\overline{ab^T}] \right) : \left([\overline{dc^T}] - [\overline{cd^T}] \right) = \\ & \overline{ba^T} : [\overline{dc^T}] - [\overline{ba^T}] : [\overline{cd^T}] - [\overline{ab^T}] : [\overline{dc^T}] + [\overline{ab^T}] : [\overline{cd^T}] = \\ & (\vec{b}^T \cdot \vec{d})(\vec{a}^T \cdot \vec{c}) - (\vec{b}^T \cdot \vec{c})(\vec{a}^T \cdot \vec{d}) - (\vec{a}^T \cdot \vec{d})(\vec{b}^T \cdot \vec{c}) + (\vec{a}^T \cdot \vec{c})(\vec{b}^T \cdot \vec{d}) = \\ & 2 \left((\vec{a}^T \cdot \vec{c})(\vec{b}^T \cdot \vec{d}) - (\vec{a}^T \cdot \vec{d})(\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \right) \end{aligned} \quad (4.279)$$

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] : [\vec{c} \wedge \vec{d}] = 2 \left((\vec{a}^T \cdot \vec{c})(\vec{b}^T \cdot \vec{d}) - (\vec{a}^T \cdot \vec{d})(\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \right) \quad \text{C.V.D.} \quad (4.280)$$

In generale quindi la contrazione tra due prodotti vettori N-D è pari al doppio del ‘prodotto scalare tra prodotti vettori del caso 3-D.

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] : [\vec{c} \wedge \vec{d}] = 2 (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) \quad (4.281)$$

Riprendendo l'esempio fisico della potenza di una coppia, ³ detti $\overline{\overline{M}}$ e $\overline{\overline{\Omega}}$ rispettivamente momento e velocità angolare e \vec{M} e $\vec{\omega}$ i corrispettivi in 3-D, la potenza risultante sarà pari a:

$$Pow = \frac{1}{2} \overline{\overline{M}} : \overline{\overline{\Omega}} = \vec{M}^T \cdot \vec{\omega} \quad (4.282)$$

Con procedimento analogo a quelli già visti si dimostra facilmente che:

$$\frac{1}{2} [\vec{a} \wedge \vec{b}] : [\vec{c} \wedge \vec{d}] = \vec{a}^T [\vec{c} \wedge \vec{d}]^T \vec{b} = \vec{c}^T [\vec{a} \wedge \vec{b}]^T \vec{d} \quad (4.283)$$

$$\vec{a}^T [\vec{c} \wedge \vec{d}]^T \vec{b} = \vec{c}^T [\vec{a} \wedge \vec{b}]^T \vec{d} = (\vec{a}^T \cdot \vec{c})(\vec{b}^T \cdot \vec{d}) - (\vec{a}^T \cdot \vec{d})(\vec{b}^T \cdot \vec{c}) \quad (4.284)$$

4.11.6 Prodotto vettoriale tra prodotti vettori N-D

Nel caso 3-D, il ‘prodotto vettoriale tra prodotti vettori’ associato a 4 vettori \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} era definito come:

$$\vec{p}v = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) \quad (4.285)$$

Si era mostrato che:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \left(\vec{a}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) \right) \vec{b} - \left(\vec{b}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) \right) \vec{a} \quad (4.286)$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [\mathbf{acd}]\mathbf{b} - [\mathbf{bcd}]\mathbf{a} \quad (4.287)$$

Il significato di quest'operazione è la moltiplicazione di due volumi 3-D, ad esempio $[\mathbf{acd}]$ e $[\mathbf{bcd}]$, per una coppia di vettori, nell'esempio \vec{b} e \vec{a} . Sebbene sia difficile trovare un'interpretazione fisica di questo tipo di prodotto, esso può essere tradotto in N-D. Ammesso infatti che siano veri vettori tutti quelli di partenza, il risultato dell'operazione sarà pure un vero vettore e non uno pseudo-vettore. Sfruttando le proprietà del *prodotto a 3 indici*, per il quale si ha:

$$\vec{c} \cdot_{123} [\vec{a} \wedge \vec{b}] = -\vec{c}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = -[\mathbf{abc}] \quad (4.288)$$

Si potrà scrivere:

$$[\mathbf{acd}]\mathbf{b} - [\mathbf{bcd}]\mathbf{a} = - \left(\vec{a} \cdot_{123} [\vec{c} \wedge \vec{d}] \right) \vec{b} + \left(\vec{b} \cdot_{123} [\vec{c} \wedge \vec{d}] \right) \vec{a} \quad (4.289)$$

Così:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = - \left(\vec{a} \cdot_{123} [\vec{c} \wedge \vec{d}] \right) \vec{b} + \left(\vec{b} \cdot_{123} [\vec{c} \wedge \vec{d}] \right) \vec{a} \quad (4.290)$$

³Cfr. il caso 3-D alla sezione 3.7.4 nella pagina 54

4.11.7 Prodotto vettore N-D con 1 vettore trasformato

Si definirà qui *prodotto vettore N-D con 1 vettore trasformato* $\overline{\overline{Pt}}$ il prodotto di due vettori $\vec{a} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ e di una matrice $B \in \mathbb{R}^{N \times M}$ nella forma:

$$\overline{\overline{Pt}} = \vec{a} \hat{\wedge} (B\vec{b}) \quad (4.291)$$

Vale l'identità algebrica:

$$\vec{a} \hat{\wedge} (B\vec{b}) = B[\overline{\overline{ba^T}}] - [\overline{\overline{ab^T}}]B^T \quad (4.292)$$

Dimostrazione:

è immediata.

$$\vec{a} \hat{\wedge} (B\vec{b}) = [\overline{\overline{(Bb)a^T}}] - [\overline{\overline{a(Bb)^T}}] = B[\overline{\overline{ba^T}}] - [\overline{\overline{ab^T}}]B^T \quad \text{C.V.D.} \quad (4.293)$$

In maniera analoga si dimostra che:

$$(A\vec{a}) \hat{\wedge} \vec{b} = [\overline{\overline{ba^T}}]A^T - A[\overline{\overline{ab^T}}] \quad (4.294)$$

4.11.8 Prodotto vettore N-D con 2 vettori trasformati

Si definirà qui *prodotto vettore N-D con 2 vettori trasformati* $\overline{\overline{Ptt}}$ il prodotto di due vettori $\vec{a} \in \mathbb{R}^{K \times 1}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ e di due matrici $A \in \mathbb{R}^{N \times K}$ e $B \in \mathbb{R}^{N \times L}$ nella forma:

$$\overline{\overline{Ptt}} = (A\vec{a}) \hat{\wedge} (B\vec{b}) \quad (4.295)$$

Vale l'identità algebrica:

$$(A\vec{a}) \hat{\wedge} (B\vec{b}) = B[\overline{\overline{ba^T}}]A^T - A[\overline{\overline{ab^T}}]B^T \quad (4.296)$$

Dimostrazione:

Posto $\vec{c} = B\vec{b}$, si avrà:

$$\begin{aligned} (A\vec{a}) \hat{\wedge} (B\vec{b}) &= (A\vec{a}) \hat{\wedge} \vec{c} = \\ [\overline{\overline{ca^T}}]A^T - A[\overline{\overline{ac^T}}] &= [\overline{\overline{(Bb)a^T}}]A^T - A[\overline{\overline{a(Bb)^T}}] = \\ B[\overline{\overline{ba^T}}]A^T - A[\overline{\overline{ab^T}}]B^T &\quad \text{C.V.D.} \end{aligned} \quad (4.297)$$

Nel caso in cui A e B siano uguali, i vettori \vec{a} e \vec{b} sono sottoposti ad una stessa trasformazione lineare $L = A = B$. Si avrà allora:

$$(L\vec{a}) \hat{\wedge} (L\vec{b}) = L[\overline{\overline{ba^T}}]L^T - L[\overline{\overline{ab^T}}]L^T \quad (4.298)$$

$$(L\vec{a}) \hat{\wedge} (L\vec{b}) = L([\overline{\overline{ba^T}}] - [\overline{\overline{ab^T}}])L^T \quad (4.299)$$

$$(L\vec{a}) \hat{\wedge} (L\vec{b}) = L[\vec{a} \hat{\wedge} \vec{b}]L^T \quad (4.300)$$

4.11.9 Passaggio di sistemi di riferimento

Si mostrerà ora come trasformare opportunamente momenti e prodotti vettori in genere nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro. Si è appena vista la relazione:

$$(L\vec{a}) \wedge (L\vec{b}) = L[\vec{a} \wedge \vec{b}]L^T \quad (4.301)$$

Se L rappresenta una rotazione R_{BA} da un sistema di riferimento ad un altro, dati due vettori \vec{r}_A e \vec{F}_A nel primo sistema di riferimento e \vec{r}_B e \vec{F}_B i loro corrispondenti nel secondo sistema, varrà:

$$\vec{r}_B = R_{BA} \vec{r}_A \quad (4.302)$$

$$\vec{F}_B = R_{BA} \vec{F}_A \quad (4.303)$$

$$\overline{\overline{M}}_A = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A \quad (4.304)$$

$$\overline{\overline{M}}_B = \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B \quad (4.305)$$

$$\overline{\overline{M}}_B = (R_{BA}\vec{r}_A) \wedge (R_{BA}\vec{F}_A) = R_{BA}[\vec{r}_A \wedge \vec{F}_A]R_{BA}^T \quad (4.306)$$

Così:

$$\overline{\overline{M}}_B = R_{BA}\overline{\overline{M}}_AR_{BA}^T \quad (4.307)$$

Si noti che quanto scritto equivale alla legge dei tensori doppi, in pratica la regola per trasformare le matrici da un sistema di riferimento all'altro. A differenza del caso 3-D, in cui si aveva:

$$(L\vec{r}) \wedge (L\vec{F}) = \det(L) \left(L^{-T}(\vec{r} \wedge \vec{F}) \right) \quad (4.308)$$

e in particolare:

$$\vec{M}_B = \begin{cases} R_{BA} \vec{M}_A & \text{per } \det(R_{BA}) = 1 \\ -R_{BA} \vec{M}_A & \text{per } \det(R_{BA}) = -1 \quad (\text{riflessione}) \end{cases} \quad (4.309)$$

la trasformazione con notazione N-D è valida indipendentemente dal determinante della matrice e dal fatto che essa comporti riflessione oppure no. L'ambiguità legata al segno e alla lateralità, fonte di errori in 3-D, è qui completamente scomparsa.

Capitolo 5

Esercizi di stile - Meccanica Razionale

La meccanica è il paradiso della matematica perché qui se ne possono cogliere i frutti. Non c'è certezza nella scienza se la matematica non può esservi applicata, o se non vi è comunque in relazione.

Leonardo da Vinci, 1452-1519

In questo capitolo si mostreranno alcuni esempi dell'uso del prodotto vettore in Meccanica Razionale, evidenziando come sia possibile esprimere in notazione N-D i risultati noti in 2-D o 3-D. La trattazione che si darà qui degli argomenti è estremamente limitata rispetto all'estensione degli ambiti abbracciati dalla Meccanica Razionale e non si ha certo la pretesa di essere esaustivi. Piuttosto che portare un gran numero di esempi e piccoli problemi particolari, ci si concentrerà quindi sulle equazioni fondamentali della meccanica e sulla loro espressione. Si vuole infatti illustrare come l'estensione N-D del prodotto vettore abbia ampia validità e come i suoi concetti di base possano essere successivamente applicati in problemi più specifici. Nell'esposizione di cinematica e dinamica dei corpi si tenderà quindi ad essere piuttosto sintetici, dando per scontata una certa familiarità con le idee fondamentali della Meccanica Razionale.

5.1 Cinematica - passaggio da un sist. di rif. all'altro

In questa sezione si mostreranno i concetti basilari della cinematica, ovvero la descrizione del moto, del punto materiale e dei corpi in generale. In particolare si illustreranno le trasformazioni necessarie per determinare posizioni, velocità e accelerazioni nel passare da un sistema di riferimento ad un altro.

5.1.1 Posizioni

Per descrivere la posizione di un generico punto materiale P si può utilizzare un sistema di assi e coordinate cartesiane. Detto A questo sistema di riferimento, in esso P è identificato tramite un vettore \vec{x}_{PA} nella forma:

$$\vec{x}_{PA} = [x_{PA}(1); x_{PA}(2); \dots; x_{PA}(N)] \quad (5.1)$$

Nulla impedirebbe però di scegliere un diverso sistema di assi, anche non cartesiano, in cui il punto materiale P avrebbe però coordinate diverse. Detto B questo secondo sistema di riferimento, in esso P sarebbe identificato tramite un vettore \vec{x}_{PB} nella forma:

$$\vec{x}_{PB} = [x_{PB}(1); x_{PB}(2); \dots; x_{PB}(N)] \quad (5.2)$$

Benché il punto materiale P sia lo stesso in entrambi i sistemi di riferimento, la sua posizione viene descritta diversamente. In alcuni casi, ad esempio per una distribuzione continua nello spazio, i punti materiali sono identificati per mezzo delle *coordinate naturali* o *lagrangiane* \vec{q} , indicate in varia maniera. Il punto P è sempre identificato dalla coordinata corrispondente \vec{q}_P , che non varia nel tempo. Per rendere l'idea, si pensi ad un scacchiera di gomma o comunque deformabile: nonostante la si possa stirare e contorcere la casella identificata come $F4$ rimarrà sempre la casella $F4$, anche se la sua posizione nello spazio cambia. In generale quindi la posizione di P in un certo sistema di riferimento potrebbe essere vista come una funzione $\vec{x}_P = \vec{x}(\vec{q}_P, t)$ delle sue coordinate lagrangiane e del tempo. Si ha così:

$$\frac{d\vec{q}_P}{dt} = \frac{\partial \vec{q}_P}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{coordinate lagrangiane} \quad (5.3)$$

$$\vec{x}_{PA} = \vec{x}_A(\vec{q}_P, t) \quad \text{sist. di rif. A} \quad (5.4)$$

$$\vec{x}_{PB} = \vec{x}_B(\vec{q}_P, t) \quad \text{sist. di rif. B} \quad (5.5)$$

Questo tipo di approccio, molto generale, mostra come il passaggio da un sistema di riferimento all'altro richieda almeno qualche ipotesi. Banalmente, se due punti materiali distinti P e Q occupano la stessa posizione nel sist. di rif. A o più in generale se due corpi si compenetrano, significa che nota la posizione geometrica $\vec{x}_{PA} = \vec{x}_{QA}$ non si ha un unico punto materiale corrispondente. In altre parole, la funzione $\vec{x}_A(\vec{q}, t)$ non è invertibile: dato \vec{x}_A , \vec{q} non è unico.

Senza dilungarsi oltre sui sistemi di riferimento, si richiederà semplicemente che il passaggio dall'uno all'altro sia *rigido*, come usualmente postulato nella meccanica classica. Il tempo è inoltre considerato come *assoluto*, ovvero si può descrivere l'evoluzione dei fenomeni nei sist. di rif. A e B con un'unica coordinata temporale. In forma analitica dovrà valere:

$$\Delta t_A = \Delta t_B \quad (5.6)$$

benché non si sia fornita alcuna definizione né di tempo, né di istante, né di intervallo temporale. La questione esula comunque dagli obiettivi di questo testo, perciò non ce ne si occuperà oltre.

Trasformazione rigida tra sistemi di riferimento

Il passaggio tra due sistemi di riferimento A e B è detto 'rigido' se, dati due punti materiali P e Q qualsiasi, la loro distanza si mantiene invariata nel passaggio da

un sist. di rif. all'altro. Dette $\vec{x}_{PA}, \vec{x}_{QA}$ e $\vec{x}_{PB}, \vec{x}_{QB}$ le loro coordinate cartesiane rispettivamente nei sist. di rif. A e B , si avrà perciò:

$$\|\vec{x}_{PA} - \vec{x}_{QA}\| = \|\vec{x}_{PB} - \vec{x}_{QB}\| \quad \forall P, Q \quad (5.7)$$

In forma più compatta:

$$\|\Delta\vec{x}_A\| = \|\Delta\vec{x}_B\| \quad \forall \Delta\vec{x} = P - Q \quad (5.8)$$

Affinché una trasformazione sia rigida è condizione necessaria e sufficiente che sia una rototraslazione, cioè una composizione di una rotazione e di una traslazione, volendo anche nulle. Senza dimostrare la necessità, si verifichi comunque la sua sufficienza: la rototraslazione da A a B sarà espressa nella forma:

$$\vec{x}_B = \vec{x}_{O_{AB}} + R_{BA} \vec{x}_A \quad (5.9)$$

dove:

- \vec{x}_A è la posizione di un punto nel sist. di rif. A
- \vec{x}_B è la posizione corrispondente nel sist. di rif. B
- R_{BA} è la matrice di rotazione da A a B
- $\vec{x}_{O_{AB}}$ è l'origine del sist. di rif. A , tale $\vec{x}_{O_{AA}} = \vec{0}$, vista nel sist. di rif. B .

Le differenze tra i punti P e Q nei due sist. di rif. saranno quindi così legate:

$$\vec{x}_{PB} - \vec{x}_{QB} = (\vec{x}_{O_{AB}} + R_{BA} \vec{x}_{PA}) - (\vec{x}_{O_{AB}} + R_{BA} \vec{x}_{QA}) \quad (5.10)$$

$$\vec{x}_{PB} - \vec{x}_{QB} = R_{BA} \vec{x}_{PA} - R_{BA} \vec{x}_{QA} \quad (5.11)$$

$$\vec{x}_{PB} - \vec{x}_{QB} = R_{BA} (\vec{x}_{PA} - \vec{x}_{QA}) \quad (5.12)$$

In forma più compatta:

$$\Delta\vec{x}_B = R_{BA} \Delta\vec{x}_A \quad \forall \Delta\vec{x} = P - Q \quad (5.13)$$

Per determinare la distanza tra i punti si calcherà il quadrato della norme, così:

$$\begin{aligned} \|\Delta\vec{x}_B\|^2 &= (\Delta\vec{x}_B)^T \cdot (\Delta\vec{x}_B) = (R_{BA} \Delta\vec{x}_A)^T \cdot (R_{BA} \Delta\vec{x}_A) = \\ &= (\Delta\vec{x}_A^T R_{BA}^T) \cdot (R_{BA} \Delta\vec{x}_A) = \Delta\vec{x}_A^T (R_{BA}^T R_{BA}) \Delta\vec{x}_A = \end{aligned} \quad (5.14)$$

Poiché R_{BA} rappresenta una rotazione, vale l'identità matriciale:

$$R_{BA}^T R_{BA} = I_{N \times N} \quad (5.15)$$

Si può dire anzi che, sotto un certo punto di vista, questa proprietà delle matrici di rotazione deriva proprio dall'imporre che la distanza tra i punti non varii. Si ha così:

$$\begin{aligned} \|\Delta\vec{x}_B\|^2 &= \Delta\vec{x}_A^T (R_{BA}^T R_{BA}) \Delta\vec{x}_A = \Delta\vec{x}_A^T I_{N \times N} \Delta\vec{x}_A = \\ &= (\Delta\vec{x}_A)^T \cdot (\Delta\vec{x}_A) = \|\Delta\vec{x}_A\|^2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\|\Delta\vec{x}_B\|^2 = \|\Delta\vec{x}_A\|^2 \quad (5.17)$$

$$\|\Delta\vec{x}_B\| = \|\Delta\vec{x}_A\| \quad \text{C.V.D.} \quad (5.18)$$

Si è così verificato che una rototraslazione qualunque conserva le distanze come richiesto. La trasformazione che consente di determinare le coordinate di un punto qualunque nel passaggio da un sist. di rif. A a un altro B sarà da qui in avanti indicata per brevità come:

$$\vec{x}_B = \vec{x}_{OB} + R_{BA} \vec{x}_A \quad (5.19)$$

La sua inversa è semplicemente:

$$\begin{aligned} \vec{x}_A &= R_{BA}^T (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) = -\vec{x}_{OB} R_{BA}^T + R_{BA}^T \vec{x}_B = \\ &\vec{x}_{OA} + R_{AB} \vec{x}_B \end{aligned} \quad (5.20)$$

dove si è posto:

$$\vec{x}_{OA} = -\vec{x}_{OB} R_{BA}^T \quad (5.21)$$

5.1.2 Velocità e velocità angolari

Una volta nota la trasformazione per determinare la *posizione* dei punto in un altro sistema di riferimento, è possibile calcolarne anche la *velocità* derivando nel tempo l'equazione corrispondente. La velocità \vec{v}_{PA} di un punto materiale P in un sistema di riferimento A è *definita* come:

$$\vec{v}_{PA} \triangleq \frac{d\vec{x}_{PA}}{dt} = \frac{d(\vec{x}_A(\vec{q}_P, t))}{dt} \quad (5.22)$$

Si determini ora la velocità \vec{v}_B di un punto qualsiasi nel sist. di rif. B :

$$\vec{x}_B = \vec{x}_{OB} + R_{BA} \vec{x}_A \quad (5.23)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{x}_B) = \frac{d}{dt} (\vec{x}_{OB} + R_{BA} \vec{x}_A) \quad (5.24)$$

$$\frac{d\vec{x}_B}{dt} = \frac{d\vec{x}_{OB}}{dt} + \frac{dR_{BA}}{dt} \vec{x}_A + R_{BA} \vec{v}_A \quad (5.25)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{OB} + \frac{dR_{BA}}{dt} \vec{x}_A + R_{BA} \vec{v}_A \quad (5.26)$$

Per rendere un poco più agile la scrittura delle equazioni, per indicare la derivata nel tempo si ricorrerà, oltre alla notazione differenziale $d(\cdot)/dt$, anche la convenzione del punto sovrapposto alla grandezza: $\dot{(\cdot)}$. L'ultima equazione sarà riscritta come:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{OB} + \dot{R}_{BA} \vec{x}_A + R_{BA} \vec{v}_A \quad (5.27)$$

Si voglia ora esprimere \vec{v}_B in funzione di \vec{x}_B piuttosto che di \vec{x}_A . Sapendo che:

$$\vec{x}_A = R_{BA}^T (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) \quad (5.28)$$

sostituendo nell'equazione si avrà:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{OB} + \dot{R}_{BA} R_{BA}^T (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + R_{BA} \vec{v}_A \quad (5.29)$$

E' ora possibile definire la velocità angolare Ω_{BA} relativa tra i due sistemi di riferimento.

Definizione di velocità angolare

Detta R_{BA} la matrice di rotazione che trasforma il sistema A di assi cartesiani nel corrispondente sistema B di assi cartesiani, si definirà la matrice velocità angolare Ω_{BA} relativa ai due sistemi di riferimento come:

$$\Omega_{BA} \triangleq \frac{dR_{BA}}{dt} R_{BA}^T = \dot{R}_{BA} R_{BA}^T \quad (5.30)$$

Corollario: Ω_{BA} è anti-simmetrica:

$$\Omega_{BA} = -\Omega_{BA}^T \quad (5.31)$$

Dimostrazione:

$$R_{BA}^T R_{BA} = I_{N \times N} \quad (5.32)$$

$$R_{BA} R_{BA}^T = (R_{BA}^T R_{BA})^T = I_{N \times N}^T = I_{N \times N} \quad (5.33)$$

$$R_{BA} R_{BA}^T = I_{N \times N} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (R_{BA} R_{BA}^T) = \overline{0} \quad (5.34)$$

$$\frac{d}{dt} (R_{BA} R_{BA}^T) = \frac{dR_{BA}}{dt} R_{BA}^T + R_{BA} \frac{dR_{BA}^T}{dt} \quad \Rightarrow \quad (5.35)$$

$$\frac{dR_{BA}}{dt} R_{BA}^T + R_{BA} \frac{dR_{BA}^T}{dt} = \overline{0} \quad (5.36)$$

$$\frac{dR_{BA}}{dt} R_{BA}^T + \left(\frac{dR_{BA}}{dt} R_{BA}^T \right)^T = \overline{0} \quad (5.37)$$

$$\Omega_{BA} + \Omega_{BA}^T = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad (5.38)$$

$$\Omega_{BA} = -\Omega_{BA}^T \quad \text{C.V.D.} \quad (5.39)$$

Sostituendo l'espressione della velocità angolare nell'equazione delle velocità, si avrà:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{OB} + \Omega_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + R_{BA} \vec{v}_A \quad (5.40)$$

In genere quest'espressione viene scomposta nella forma:

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_t + \vec{v}_r \\ \vec{v}_t = \vec{v}_{OB} + \Omega_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) \\ \vec{v}_r = R_{BA} \vec{v}_A \end{cases} \quad (5.41)$$

dove:

- \vec{v}_t è detta *velocità di trascinamento* e dipende solo dal moto relativo tra un sistema di riferimento all'altro.
- \vec{v}_r è detta *velocità relativa* e dipende dal moto del punto materiale descritto nel sist. di rif. A .

Detti P e Q due punti qualsiasi, in generale si avrà:

$$\vec{v}_{PB} = \vec{v}_{OB} + \Omega_{BA} (\vec{x}_{PB} - \vec{x}_{OB}) + R_{BA} \vec{v}_{PA} \quad (5.42)$$

$$\vec{v}_{QB} = \vec{v}_{OB} + \Omega_{BA} (\vec{x}_{QB} - \vec{x}_{OB}) + R_{BA} \vec{v}_{QB} \quad (5.43)$$

$$\vec{v}_{PB} - \vec{v}_{QB} = (\vec{v}_{OB} + \Omega_{BA} (\vec{x}_{PB} - \vec{x}_{OB}) + R_{BA} \vec{v}_{PA}) - (\vec{v}_{OB} + \Omega_{BA} (\vec{x}_{QB} - \vec{x}_{OB}) + R_{BA} \vec{v}_{QA}) \quad (5.44)$$

$$\vec{v}_{PB} - \vec{v}_{QB} = \Omega_{BA} (\vec{x}_{PB} - \vec{x}_{QB}) + R_{BA} (\vec{v}_{PA} - \vec{v}_{QA}) \quad (5.45)$$

In forma più compatta:

$$\Delta \vec{v}_B = \Omega_{BA} \Delta \vec{x}_B + R_{BA} \Delta \vec{v}_A \quad (5.46)$$

Si immagini ora che il sistema A di assi cartesiani sia solidale con un corpo rigido: in tal caso qualsiasi punto materiale P appartenente al corpo stesso apparirà fermo. Si avrà perciò $\vec{v}_{PA} = \vec{0}$ e di conseguenza $\vec{v}_r = \vec{0}$. Ovviamente, la differenza di velocità tra due punti P e Q appartenenti allo stesso corpo rigido sarà nulla. Si avrà così:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{0}, \vec{v}_{QA} = \vec{0} \quad \text{per } P, Q \text{ solidali col sist. di rif. } A \Rightarrow \quad (5.47)$$

$$\Delta \vec{v}_A = \vec{v}_{PA} - \vec{v}_{QA} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (5.48)$$

$$\Delta \vec{v}_B = \Omega_{BA} \Delta \vec{x}_B + R_{BA} \vec{0} \quad (5.49)$$

$$\Delta \vec{v}_B = \Omega_{BA} \Delta \vec{x}_B \quad \text{valido per } P, Q \text{ su un CORPO RIGIDO} \quad (5.50)$$

Omettendo i pedici relativi al sistema di riferimento, si ritrova la ben nota equazione per il corpo rigido:

$$\Delta \vec{v} = \Omega \Delta \vec{x} \quad (5.51)$$

Come già accennato in precedenza, quella appena scritta è un'equazione matriciale valida in uno spazio con un numero arbitrario di dimensioni. In 3-D la suddetta viene spesso riscritta nella forma vettoriale, dove $\vec{\omega}$ è lo pseudo-vettore associato alla velocità angolare:

$$\Delta \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \Delta \vec{x} \quad (5.52)$$

Come già illustrato alla sezione 4.6 nella pagina 81, in 3-D è possibile passare da una notazione all'altra per mezzo delle relazioni:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{21} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & 0 & -\Omega_{32} \\ -\Omega_{13} & \Omega_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\omega} = [\omega_1; \omega_2; \omega_3] \quad (5.53)$$

$$\Omega = [\omega \wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Omega_{ii} = 0 & \forall i \in \{1; 2; 3\} \\ \Omega_{32} = \omega_1 \\ \Omega_{13} = \omega_2 \\ \Omega_{21} = \omega_3 \end{cases} \quad (5.54)$$

Pur senza ridiscendere nel dettaglio, si veda un confronto tra questi due modi d'intendere la velocità angolare.

5.1.3 Velocità angolari e formule di Poisson

Affinché un atto di moto sia effettivamente rigido è necessario la differenza di velocità tra due punti $\Delta \vec{v}$ sia sempre ortogonale al vettore $\Delta \vec{x}$ che li congiunge:

$$\Delta \vec{v}^T \cdot \Delta \vec{x} = 0 \quad \text{condizione di compatibilità} \quad (5.55)$$

Tale condizione è soddisfatta automaticamente sia in 3-D che in N-D per come sono costruite $\vec{\omega}$ e Ω , infatti:

$$\Omega \triangleq \frac{dR}{dt} R^T \quad \Rightarrow \quad \Omega = -\Omega^T \quad \Rightarrow \quad (5.56)$$

$$\Delta\vec{x}^T \cdot \Delta\vec{v} = \Delta\vec{x}^T \Omega \Delta\vec{x} = 0 \quad \text{C.V.D.} \quad (5.57)$$

$$\Delta\vec{x}^T \cdot \Delta\vec{v} = \Delta\vec{x}^T \cdot (\vec{\omega} \wedge \Delta\vec{x}) = 0 \quad \text{C.V.D.} \quad (5.58)$$

C'è però una differenza fondamentale tra le espressioni appena scritte: mentre infatti Ω è esplicitamente definita in funzione della matrice di rotazione R , la definizione di $\vec{\omega}$ non è specificata. E' vero che, noti $\Delta\vec{v}$ e $\Delta\vec{x}$, è possibile calcolare $\vec{\omega}$ come:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\|\Delta\vec{x}\|^2} (\Delta\vec{x} \wedge \Delta\vec{v}) + \lambda \Delta\vec{x} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.59)$$

ma questa non 'suona' esattamente come una definizione. Lo pseudo-vettore $\vec{\omega}$ è infatti determinato a meno di un vettore parallelo a $\Delta\vec{x}$, che si annulla calcolando $\vec{\omega} \wedge \Delta\vec{x}$. Per determinare la velocità angolare non è quindi sufficiente conoscere $\Delta\vec{x}$ e $\Delta\vec{v}$ per una sola coppia di punti appartenenti al corpo rigido.

Si vedano allora le formule di Poisson, che esprimono le relazioni tra la velocità angolare e i versori del sistema di assi in rotazione.

Formule di Poisson dirette

Si mostreranno ora le formule di Poisson *dirette*, che consentono di determinare la velocità $\dot{\vec{u}}$ di un versore note la sua posizione \vec{u} e la velocità angolare Ω o $\vec{\omega}$.

Nel caso 3-D, si considera la solita equazione che lega differenza velocità e posizione di due punti su un corpo rigido, imponendo che $\Delta\vec{x} = \vec{u} = U - O$, cioè che il vettore-distanza sia un versore. Si avrà allora:

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = 1 \\ \Delta\vec{x} := \vec{u} \\ \Delta\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \Delta\vec{x} \end{cases} \quad (5.60)$$

Poiché, per come è stata costruita, la differenza di velocità è pari alla derivata temporale della differenza di posizione:

$$\Delta\vec{v} = \frac{d\Delta\vec{x}}{dt} = \dot{\Delta\vec{x}} \quad (5.61)$$

Ponendo $\Delta\vec{x} = \vec{u}$, la velocità sarà pari alla derivata nel tempo del versore. Si avrà così:

$$\Delta\vec{v} = \dot{\Delta\vec{x}} = \dot{\vec{u}} \quad (5.62)$$

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = 1 \\ \dot{\vec{u}} = \vec{\omega} \wedge \vec{u} \end{cases} \quad (5.63)$$

Quella appena trovata altro non è che la formula diretta di Poisson nel caso 3-D: noti infatti $\vec{\omega}$ e \vec{u} si determina la velocità $\dot{\vec{u}}$ del versore come richiesto. In generale, detto \vec{u}_{Bi} un versore generico nel sistema rotante, si avrà:

$$\dot{\vec{u}}_{Bi} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{Bi} \quad (5.64)$$

La ragione di questa sostituzione apparirà più chiara confrontandosi con il caso N-D.

Sia U_B la matrice ortogonale avente come colonne i versori \vec{u}_{Bi} associati agli assi cartesiani di un sistema di riferimento B .

$$U_B = [\vec{u}_{B1}; \vec{u}_{B2}; \dots; \vec{u}_{BN}] \quad (5.65)$$

$$U_B^T U_B = I_{N \times N} \quad (5.66)$$

Questi versori saranno espressi nel sistema di riferimento A ; se fossero espressi nel sistema di riferimento B la matrice U_B non sarebbe infatti altro che una matrice identità. Nel sistema di riferimento A la matrice di versori U_A sarà perciò assunta pari all'identità. Detta R_{BA} la matrice di rotazione per il passaggio da un sistema di riferimento all'altro, si avrà:

$$\begin{cases} U_B = R_{BA} U_A \\ U_A = I_{N \times N} \end{cases} \Rightarrow U_B = R_{BA} \quad (5.67)$$

La matrice velocità angolare Ω_{BA} che consente di passare da A a B sarà quindi:

$$\Omega_{BA} \triangleq \frac{dR_{BA}}{dt} R_{BA}^T = \frac{dU_B}{dt} U_B^T \quad (5.68)$$

Si avrà così:

$$\frac{dU_B}{dt} = \Omega_{BA} U_B \quad (5.69)$$

$$\frac{d}{dt} ([\vec{u}_{B1}; \vec{u}_{B2}; \dots; \vec{u}_{BN}]) = \Omega_{BA} ([\vec{u}_{B1}; \vec{u}_{B2}; \dots; \vec{u}_{BN}]) \quad (5.70)$$

$$\frac{d\vec{u}_{Bi}}{dt} = \Omega_{BA} \vec{u}_{Bi} \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (5.71)$$

In forma un po' più compatta:

$$\dot{\vec{u}}_{Bi} = \Omega \vec{u}_{Bi} \quad (5.72)$$

Si è così trovata l'equivalente della formula di Poisson per il caso generale N-D: noti Ω e \vec{u}_{Bi} si determina la velocità $\dot{\vec{u}}_{Bi}$ del versore come richiesto.

Formule di Poisson inverse

Per mezzo delle formule di Poisson *inverse* è possibile determinare la velocità angolare Ω o $\vec{\omega}$ di un sistema di riferimento B una volta che siano note le posizioni dei suoi versori \vec{u}_{Bi} e le rispettive velocità $\dot{\vec{u}}_{Bi}$.

Nel caso 3-D il procedimento dimostrativo è piuttosto laborioso, anche se il risultato finale è relativamente semplice. Per ogni versore i -esimo del sist. rif. B si è verificato valere:

$$\dot{\vec{u}}_{Bi} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{Bi} \quad (5.73)$$

Volendo calcolare la velocità angolare $\vec{\omega}$, essa risulterà nota a meno di uno scalare λ_i , infatti:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\|\vec{u}_{Bi}\|^2} (\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi}) + \lambda_i \vec{u}_{Bi} \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (5.74)$$

$$\|\vec{u}_{Bi}\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (5.75)$$

$$\vec{\omega} = (\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi}) + \lambda_i \vec{u}_{Bi} \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (5.76)$$

Lo scalare λ_i può essere eliminato proiettando $\vec{\omega}$ sul versore \vec{u}_{Bi} , infatti:

$$\vec{u}_{Bi}^T \cdot \vec{\omega} = \vec{u}_{Bi}^T \cdot (\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi}) + \vec{u}_{Bi}^T \cdot (\lambda_i \vec{u}_{Bi}) \quad (5.77)$$

$$\vec{u}_{Bi}^T \cdot \vec{\omega} = \vec{0} + \lambda_i (\vec{u}_{Bi}^T \cdot \vec{u}_{Bi}) = \lambda_i \quad (5.78)$$

$$\lambda_i = \vec{u}_{Bi}^T \cdot \vec{\omega} \quad (5.79)$$

Quindi λ_i altro non è che la componente di $\vec{\omega}$ sul versore \vec{u}_{Bi} . Si nota che la velocità angolare deve comunque essere la stessa indipendentemente dall'asse i -esimo che si è scelto, sia esso il primo o qualunque altro.

$$\vec{\omega} = (\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi}) + (\vec{u}_{Bi}^T \cdot \vec{\omega}) \vec{u}_{Bi} \quad \forall i \in \{1; 2; 3\} \quad (5.80)$$

Operando una sorta di 'media' sull'espressione di $\vec{\omega}$ rispetto alla terne di versori $[\vec{u}_{B1}, \vec{u}_{B2}, \vec{u}_{B3}]$, si otterrà:

$$3\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \left((\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi}) + (\vec{u}_{Bi}^T \cdot \vec{\omega}) \vec{u}_{Bi} \right) \quad (5.81)$$

$$3\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 (\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi}) + \sum_{i=1}^3 ((\vec{u}_{Bi}^T \cdot \vec{\omega}) \vec{u}_{Bi}) \quad (5.82)$$

$$3\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 (\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi}) + \sum_{i=1}^3 (\omega_i \vec{u}_{Bi}) \quad (5.83)$$

$$3\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 (\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi}) + \vec{\omega} \quad (5.84)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi}) \quad (5.85)$$

Si è così espressa la velocità angolare $\vec{\omega}$ in funzione dei versori \vec{u}_{Bi} e delle loro velocità $\dot{\vec{u}}_{Bi}$, come richiesto; si è quindi trovata la formula di Poisson inversa per il caso 3-D. In forma un po' più intuitiva si può scrivere:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\vec{u}_{XB} \wedge \dot{\vec{u}}_{XB} + \vec{u}_{YB} \wedge \dot{\vec{u}}_{YB} + \vec{u}_{ZB} \wedge \dot{\vec{u}}_{ZB} \right) \quad (5.86)$$

Nel caso N-D la dimostrazione è praticamente immediata; si è già visto che:

$$\frac{dU_B}{dt} = \Omega U_B \quad (5.87)$$

$$\dot{\vec{u}}_{Bi} = \Omega \vec{u}_{Bi} \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (5.88)$$

Poiché U_B è ortogonale $U_B^T U_B = I_{N \times N}$, la velocità angolare Ω sarà calcolabile come:

$$\Omega = \frac{dU_B}{dt} U_B^T \quad (5.89)$$

Ovvero:

$$\Omega = [\dot{u}_{B1}, \dot{u}_{B2}, \dots, \dot{u}_{BN}] \begin{bmatrix} \vec{u}_{B1}^T \\ \vec{u}_{B2}^T \\ \dots \\ \vec{u}_{BN}^T \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

L'elemento di indici (i, j) della matrice Ω sarà quindi calcolabile come:

$$\Omega_{ij} = [\dot{u}_{B1}(i), \dot{u}_{B2}(i), \dots, \dot{u}_{BN}(i)] \begin{bmatrix} u_{B1}(j) \\ u_{B2}(j) \\ \dots \\ u_{BN}(j) \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

$$\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^N (\dot{u}_{Bk}(i) u_{Bk}(j)) \quad \forall i, j \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (5.92)$$

Si così trovata l'espressione N-D della formula inversa di Poisson, valida ovviamente anche nel caso 3D. La stessa equazione può essere riscritta anche come somma di prodotti diadici:

$$\Omega = \sum_{k=1}^N \left(\overline{[\dot{u}_{Bk} u_{Bk}^T]} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\overline{[\dot{u}_{Bi} u_{Bi}^T]} \right) \quad (5.93)$$

Volendo, dato che Ω è anti-simmetrica, si può scrivere anche:

$$\Omega = \frac{1}{2} (\Omega + (-\Omega)^T) \quad (5.94)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \left(\overline{[\dot{u}_{Bi} u_{Bi}^T]} \right) + \left(- \sum_{i=1}^N \left(\overline{[\dot{u}_{Bi} u_{Bi}^T]} \right) \right)^T \right) \quad (5.95)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\overline{[\dot{u}_{Bi} u_{Bi}^T]} - \overline{[u_{Bi} \dot{u}_{Bi}^T]} \right) \quad (5.96)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi} \right) \quad (5.97)$$

Si è così trovata un'espressione perfettamente duale al caso 3-D:

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi} \right) \quad (5.98)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\vec{u}_{Bi} \wedge \dot{\vec{u}}_{Bi} \right) \quad (5.99)$$

5.1.4 Accelerazioni

L'accelerazione \vec{a}_{PA} di un punto materiale P in un sistema di riferimento A è *definita* come la derivata temporale della sua velocità, ovvero:

$$\vec{a}_{PA} \triangleq \frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} = \frac{d^2(\vec{x}_A(\vec{q}_P, t))}{dt^2} \quad (5.100)$$

$$\vec{a}_{PA} \triangleq \ddot{\vec{x}}_{PA} \quad (5.101)$$

Si determini ora l'accelerazione \vec{a}_B di un punto qualsiasi nel sist. di rif. B . Per determinare posizione e velocità si sono trovate le equazioni:

$$\begin{cases} \vec{x}_B = \vec{x}_{OB} + R_{BA} \vec{x}_A \\ \vec{v}_B = \vec{v}_{OB} + \Omega_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + R_{BA} \vec{v}_A \end{cases} \quad (5.102)$$

In forma equivalente e più compatta:

$$\begin{cases} \Delta \vec{x}_B = R_{BA} \Delta \vec{x}_A \\ \Delta \vec{v}_B = \Omega_{BA} \Delta \vec{x}_B + R_{BA} \Delta \vec{v}_A \end{cases} \quad (5.103)$$

Derivando \vec{v}_B nel tempo si otterrà:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_B) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{OB} + \Omega_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + R_{BA} \vec{v}_A) \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_{OB}}{dt} + \frac{d\Omega_{BA}}{dt} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \Omega_{BA} \frac{d}{dt}(\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \\ \frac{dR_{BA}}{dt} \vec{v}_A + R_{BA} \frac{d\vec{v}_A}{dt} \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_B = \vec{a}_{OB} + \dot{\Omega}_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \Omega_{BA} (\vec{v}_B - \vec{v}_{OB}) + \\ \left(\frac{dR_{BA}}{dt} R_{BA}^T \right) R_{BA} \vec{v}_A + R_{BA} \vec{a}_A \end{aligned} \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_B = \vec{a}_{OB} + \dot{\Omega}_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \Omega_{BA} (\vec{v}_B - \vec{v}_{OB}) + \\ \Omega_{BA} R_{BA} \vec{v}_A + R_{BA} \vec{a}_A \end{aligned} \quad (5.107)$$

Esprimendo i termini $\vec{v}_B - \vec{v}_{OB}$ e $R_{BA} \vec{v}_A$ come:

$$\begin{cases} \vec{v}_B - \vec{v}_{OB} = \Omega_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + R_{BA} \vec{v}_A \\ \vec{v}_r = R_{BA} \vec{v}_A \quad \text{velocità relativa} \end{cases} \quad (5.108)$$

e sostituendo, si otterrà:

$$\vec{v}_B - \vec{v}_{OB} = \Omega_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \vec{v}_r \quad (5.109)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_B = \vec{a}_{OB} + \dot{\Omega}_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \Omega_{BA} (\Omega_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \vec{v}_r) + \\ \Omega_{BA} \vec{v}_r + R_{BA} \vec{a}_A \end{aligned} \quad (5.110)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_B = \vec{a}_{OB} + \dot{\Omega}_{BA} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \Omega_{BA}^2 (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \Omega_{BA} \vec{v}_r + \\ \Omega_{BA} \vec{v}_r + R_{BA} \vec{a}_A \end{aligned} \quad (5.111)$$

Infine:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{OB} + \left(\dot{\Omega}_{BA} + \Omega_{BA}^2 \right) (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + 2\Omega_{BA} \vec{v}_r + R_{BA} \vec{a}_A \quad (5.112)$$

Si è così trovata l'accelerazione nel sistema di riferimento B . In genere quest'espressione viene scomposta nella forma:

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_t + \vec{a}_c + \vec{a}_r \\ \vec{a}_t = \vec{a}_{OB} + \left(\dot{\Omega}_{BA} + \Omega_{BA}^2 \right) (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) \\ \vec{a}_c = 2\Omega_{BA} \vec{v}_r = 2\Omega_{BA} R_{BA} \vec{v}_A \\ \vec{a}_r = R_{BA} \vec{a}_A \end{cases} \quad (5.113)$$

dove:

- \vec{a}_t è detta *accelerazione di trascinamento* e dipende solo dal moto relativo tra un sistema di riferimento e l'altro.
- \vec{a}_c è detta *accelerazione di Coriolis* e dipende dalla velocità \vec{v}_A del punto materiale descritto nel sist. di rif. A . Per come è costruita, \vec{a}_c è sempre ortogonale alla velocità relativa \vec{v}_r , infatti:

$$\vec{v}_r^T \cdot \vec{a}_c = 2 \vec{v}_r^T \Omega_{BA} \vec{v}_r = 0 \quad \text{poiché } \Omega_{BA} = -\Omega_{BA}^T \quad (5.114)$$

- \vec{a}_r è detta *accelerazione relativa* e dipende dall'accelerazione \vec{a}_A del punto materiale descritto nel sist. di rif. A .

Quella appena scritta è una relazione valida in N-D grazie alla formulazione matriciale Ω della velocità angolare. Il procedimento in 3-D per il calcolo di \vec{a}_B è sostanzialmente analogo, dato che basta derivare nel tempo e operare qualche sostituzione. La differenza sta ovviamente nell'utilizzo dello pseudo-vettore $\vec{\omega}$ come velocità angolare; l'equazione per la velocità \vec{v}_B viene quindi riscritta come:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{OB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \vec{v}_r \quad (5.115)$$

Svolgendo i conti e sfruttando le formule di Poisson, si giunge ad esprimere l'accelerazione \vec{a}_B come:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{OB} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB})) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{a}_r \quad (5.116)$$

analogamente all'equazione per il caso N-D:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{OB} + \dot{\Omega} (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + \Omega^2 (\vec{x}_B - \vec{x}_{OB}) + 2\Omega \vec{v}_r + \vec{a}_r \quad (5.117)$$

Forma compatta

Come già effettuato per posizione e velocità, è possibile calcolare la differenza di accelerazione $\Delta \vec{a}_B$ tra due punti qualsiasi P e Q in un sistema di riferimento B . Molto semplicemente si può scrivere:

$$\Delta \vec{a}_B = \vec{a}_{PB} - \vec{a}_{QB} = \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt} - \frac{d\vec{v}_{QB}}{dt} = \frac{d\Delta \vec{v}_B}{dt} \quad \forall P, Q \quad (5.118)$$

Le relazioni per le differenze di posizione e velocità erano:

$$\begin{cases} \Delta \vec{x}_B = R_{BA} \Delta \vec{x}_A \\ \Delta \vec{v}_B = \Omega_{BA} R_{BA} \Delta \vec{x}_A + R_{BA} \Delta \vec{v}_A \\ \Delta \vec{v}_B = \Omega_{BA} \Delta \vec{x}_B + R_{BA} \Delta \vec{v}_A \\ \Delta \vec{v}_B = \Omega_{BA} \Delta \vec{x}_B + \Delta \vec{v}_r \end{cases} \quad (5.119)$$

In maniera analoga a quanto già visto per il calcolo esteso dell'accelerazione, si deriva nel tempo e si sostituisce ottenendo infine:

$$\Delta \vec{a}_B = \left(\dot{\Omega}_{BA} + \Omega_{BA}^2 \right) R_{BA} \Delta \vec{x}_A + 2 \Omega_{BA} R_{BA} \Delta \vec{v}_A + R_{BA} \Delta \vec{a}_A \quad (5.120)$$

$$\Delta \vec{a}_B = \left(\dot{\Omega}_{BA} + \Omega_{BA}^2 \right) \Delta \vec{x}_B + 2 \Omega_{BA} \Delta \vec{v}_r + \Delta \vec{a}_r \quad (5.121)$$

5.2 Dinamica - forze, momenti e inerzie

In questa sezione si esamineranno alcuni concetti essenziali della dinamica, quindi dello studio del moto dei corpi comprensivo delle masse e inerzie ad essi associate. L'approccio che qui si privilegerà è di tipo *effettuale* o *effettivo*: ci si limiterà quindi alla sola *descrizione* del movimento senza però indagare sulle sue *cause* 'fisiche' o naturali che dir si voglia. In particolare, si presenterà l'estensione in N-D delle definizioni dei momenti, sia della quantità di moto sia della forza, la conseguente riformulazione della matrice d'inerzia e le equazioni che regolano i moti rotatorii.

5.2.1 Baricentro di un sistema

Sia dato un dominio Ω_x in uno spazio N-D e una distribuzione di densità $\rho(\vec{x})$ di una certa grandezza fisica definita su di esso. Da qui in avanti tale grandezza sarà considerata la massa. La quantità di massa m_{tot} complessiva nel dominio Ω_x sarà pari a:

$$m_{tot} = \int_{\Omega_x} \rho \, d\Omega_x \quad (5.122)$$

dove $d\Omega_x$ è l'elemento di (iper)-volume infinitesimo, pari a:

$$d\Omega_x = dx_1 dx_2 \dots dx_N = \prod_{i=1}^N dx_i \quad (5.123)$$

L'approccio integrale qui adottato può essere utilizzato anche per descrivere un insieme di corpi puntiformi dotati di massa. Detta m_i la massa del corpo i -esimo e \vec{x}_i la sua posizione, si potrà esprimere la massa totale di un sistema di M corpi come:

$$m_{tot} = \sum_{i=1}^M m_i = \int_{\Omega_\infty} m_i \delta_N(\vec{x} - \vec{x}_i) \, d\Omega_x \quad (5.124)$$

dove:

- Ω_∞ è il dominio infinito, ovvero l'intero spazio N-D.
- $\delta_N(\vec{x})$ è la distribuzione 'delta di Dirac' in N-D, tale che:

$$f(\vec{x}_0) = \int_{\Omega_\infty} f(\vec{x}) \delta_N(\vec{x} - \vec{x}_0) \, d\Omega_x \quad \forall f(\vec{x}_0) \in \mathbb{R} \quad (5.125)$$

$$\int_{\Omega_x} \delta_N(\vec{x}_0) \, d\Omega_x = \begin{cases} 1 & \text{se } \vec{x}_0 \in \Omega_x \\ 1/2 & \text{se } \vec{x}_0 \in \partial\Omega_x \\ 0 & \text{se } \vec{x}_0 \notin \Omega_x \end{cases} \quad (5.126)$$

Data la maggior generalità dell'approccio integrale, si privilegerà questo tipo di descrizione piuttosto che quella 'discreta' adoperante le sommatorie.

Momento statico e definizione di baricentro

Detto \vec{x}_0 un punto qualsiasi, anche non appartenente al dominio Ω_x , si definisce *momento statico* rispetto a tale polo la grandezza \vec{S}_{x_0} così costruita:

$$\vec{S}_{x_0} = \int_{\Omega_x} \rho \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \quad (5.127)$$

Il vettore \vec{S}_{x_0} può essere considerato anche come la *quantità di posizione* del sistema rispetto al polo \vec{x}_0 .

Il *baricentro* o *centro di massa* G del sistema nel dominio Ω_x può essere definito come il punto in cui il relativo momento statico \vec{S}_{x_G} si annulla:

\vec{x}_G tale che:

$$\vec{S}_{x_G} = \int_{\Omega_x} \rho \cdot (\vec{x} - \vec{x}_G) d\Omega_x = \vec{0} \quad (5.128)$$

Detto \vec{x}_0 un altro polo qualsiasi, si può calcolare facilmente la posizione del baricentro rispetto ad esso:

$$\int_{\Omega_x} \rho \cdot (\vec{x} - \vec{x}_G) d\Omega_x = \vec{0} \quad (5.129)$$

$$\int_{\Omega_x} \rho \cdot ((\vec{x} - \vec{x}_0) - (\vec{x}_G - \vec{x}_0)) d\Omega_x = \vec{0} \quad (5.130)$$

$$\int_{\Omega_x} \rho \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \rho \cdot (\vec{x}_G - \vec{x}_0) d\Omega_x \quad (5.131)$$

$$\int_{\Omega_x} \rho \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \rho d\Omega_x \cdot (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \quad (5.132)$$

$$\int_{\Omega_x} \rho d\Omega_x (\vec{x}_G - \vec{x}_0) = \int_{\Omega_x} \rho \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \quad (5.133)$$

L'ultima equazione può essere riscritta anche in funzione della massa totale m_{tot} e del momento statico \vec{S}_{x_0} :

$$m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) = \vec{S}_{x_0} \quad (5.134)$$

Mantenendo la formulazione integrale, la posizione del baricentro sarà:

$$\vec{x}_G - \vec{x}_0 = \frac{\int_{\Omega_x} \rho \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x}{\int_{\Omega_x} \rho d\Omega_x} \quad (5.135)$$

Quella appena scritta può essere anche una definizione equivalente per il baricentro G , dato che implica l'altra. In forma più compatta si può scrivere anche:

$$\vec{x}_G - \vec{x}_0 = \frac{\vec{S}_{x_0}}{m_{tot}} \quad (5.136)$$

Nel caso si consideri un sistema di punti materiali, la stessa equazione per il baricentro può essere scritta come:

$$\vec{x}_G - \vec{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^M m_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0) d\Omega_x}{\sum_{i=1}^M m_i} \quad (5.137)$$

Come si vedrà nelle definizioni di quantità di moto e momenti vari, il baricentro gode di alcune proprietà che spesso consentono di semplificare conti e dimostrazioni.

5.2.2 La 1^A equazione cardinale del moto

Nella definizione di momento *statico* e di baricentro non si è specificato se il dominio Ω_x fosse costituito da *punti geometrici* \vec{x} , quindi fissati nel tempo, o da *punti materiali* o *'lagrangiani'* $\vec{x}(\vec{q}, t)$, ovvero da punti in grado di muoversi e mutare posizione. Tale distinzione non influisce infatti sul calcolo né di \vec{S}_{x_0} né di \vec{x}_G , ma diviene fondamentale per la definizione di altre grandezze fisiche, ad esempio della quantità di moto.

Da qui in avanti si considererà il dominio Ω_x come costituito da punti materiali di coordinate $\vec{x}(\vec{q}, t)$ variabili nel tempo, quindi si adotterà un approccio *lagrangiano* piuttosto che *euleriano*.

Definizioni di quantità di moto

Dato un dominio $\Omega_x(t)$ di punti materiali, si definisce *quantità di moto* \vec{Q} la derivata nel tempo della suo momento statico \vec{S}_{x_0} calcolato rispetto ad un polo qualsiasi \vec{x}_0 *fissato* nel tempo.

$$\vec{Q} \triangleq \frac{d\vec{S}_{x_0}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x(t)} \rho \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \quad (5.138)$$

In realtà questa non è l'unica definizione possibile di 'quantità di moto' in meccanica classica, dato che ne esistono altre equivalenti o quasi-equivalenti. Poiché $\vec{S}_{x_0} = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0)$ (vedi le equazioni (5.134) e (5.136)), si poteva anche porre:

$$\vec{Q} \triangleq \frac{d}{dt} (m_{tot} (\vec{x}_G - \vec{x}_0)) = \frac{d(m_{tot} \vec{x}_G)}{dt} \quad (5.139)$$

$$\vec{Q} = \frac{dm_{tot}}{dt} \vec{x}_G + m_{tot} \frac{d\vec{x}_G}{dt} \quad (5.140)$$

Se si ipotizza la conservazione della massa:

$$\frac{dm_{tot}}{dt} = 0 \quad \forall \Omega_x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x(t)} \rho d\Omega_x = 0 \quad (5.141)$$

la quantità di moto potrà essere espressa, senza ricorrere agli integrali, nella forma:

$$\vec{Q} = m_{tot} \frac{d\vec{x}_G}{dt} = m_{tot} \vec{v}_G \quad (5.142)$$

Si può inoltre dimostrare tramite il Teorema del trasporto di Reynolds che, se la massa si conserva, vale:

$$\vec{Q} = \int_{\Omega_x} \rho \cdot \frac{d}{dt} (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \quad (5.143)$$

$$\vec{Q} = \int_{\Omega_x} \rho \vec{v} d\Omega_x \quad (5.144)$$

Quella appena scritta, d'impostazione euleriana più che lagrangiana, viene spesso considerata come la vera *definizione* della quantità di moto, anche se non è del tutto equivalente alla prima definizione (equazione (5.138)), essendo necessaria l'ipotesi di conservazione della massa.

Ci sarebbe molto da dire su questo argomento, ma non è questa la sede per trattarlo. In generale, in Meccanica Razionale la trattazione lagrangiana è preferita a quella euleriana, tipica invece della Fluidodinamica, ma mentre la prima utilizza in genere grandezze *estensive*, ottenute tramite integrazione, la seconda ricorre a grandezze *intensive*, definite punto per punto sul dominio. L'approccio euleriano è quindi, sotto un certo punto di vista, più fondante rispetto a quello lagrangiano. In questo testo si privilegerà una trattazione di tipo intensivo-euleriano e, in generale, si assumerà la conservazione della massa: le definizioni date di quantità di moto risulteranno allora perfettamente equivalenti.

Riassumendo, si pone:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_x(t)} \rho d\Omega_x := 0 \quad \forall \Omega_x \quad \text{Ip. conservazione massa} \quad (5.145)$$

$$\vec{Q} \triangleq \int_{\Omega_x} \rho \vec{v} d\Omega_x \quad \text{Def. di Q.tà di moto} \quad (5.146)$$

Definizioni di forza

Sulla definizione di cosa sia una 'forza' \vec{F} sono stati scritti interi libri [26],[24],[25]. Ancora una volta non si entrerà nel merito della disputa, limitandosi ad illustrare due possibili formulazioni. La forza risultante su un dominio $\Omega_x(t)$ può essere definita nei due modi seguenti, in generale non equivalenti:

$$\vec{F}_{lagr} \triangleq \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_x(t)} \rho \cdot \vec{x}(\vec{q}, t) d\Omega_x \quad \text{forma 'lagrangiana'} \quad (5.147)$$

$$\vec{F}_{eul} \triangleq \int_{\Omega_x} \rho \cdot \frac{d^2 \vec{x}(\vec{q}, t)}{dt^2} d\Omega_x \quad \text{forma 'euleriana'} \quad (5.148)$$

In altra forma:

$$\vec{F}_{lagr} \triangleq \frac{d^2 \vec{S}_{x_0}}{dt^2} = \frac{d^2 (m_{tot} \vec{x}_G)}{dt^2} \quad \text{forma 'lagrangiana'} \quad (5.149)$$

$$\vec{F}_{eul} \triangleq \int_{\Omega_x} \rho \ddot{\vec{x}} d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \rho \vec{a} d\Omega_x \quad \text{forma 'euleriana'} \quad (5.150)$$

Se si ipotizza la conservazione della massa si può dimostrare, sempre per mezzo del teorema del trasporto di Reynolds, che le due formulazioni sono equivalenti:

$$\frac{dm_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x(t)} \rho \, d\Omega_x = 0 \quad \Rightarrow \quad (5.151)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_x(t)} \rho \cdot \vec{x}(\vec{q}, t) \, d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \rho \cdot \frac{d^2 \vec{x}(\vec{q}, t)}{dt^2} \, d\Omega_x \quad \Rightarrow \quad (5.152)$$

$$\vec{F}_{lagr} = \vec{F}_{eul} = \vec{F} \quad (5.153)$$

Inoltre:

$$\vec{F} = \frac{d^2(m_{tot}\vec{x}_G)}{dt^2} = m_{tot} \frac{d^2\vec{x}_G}{dt^2} = m_{tot}\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad (5.154)$$

$$\vec{F} = m_{tot}\vec{a}_G = \frac{d}{dt}(m_{tot}\vec{v}_G) \quad (5.155)$$

La 1^A equazione cardinale del moto

Poiché, come già visto (equazione (5.142)), la quantità di moto \vec{Q} è pari alla massa totale del sistema moltiplicata per la velocità del suo baricentro, sostituendo la sua espressione nell'ultima equazione (cioè la (5.155)) si otterrà:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F} \quad (5.156)$$

Quella appena scritta è detta anche '1^A equazione cardinale del moto'.

5.2.3 Momento angolare

Definizione 3-D del momento angolare

Dato un dominio $\Omega_x(t)$ di punti materiali in 3-D, si definisce *momento della quantità di moto* o *momento della angolare* $\vec{\Gamma}_0$ rispetto ad un polo \vec{x}_0 la grandezza:

$$\vec{\Gamma}_0 \triangleq \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \rho \vec{v} \, d\Omega_x \quad (5.157)$$

La definizione di momento angolare utilizza il prodotto vettore, perciò, in 3-D, anche il momento angolare $\vec{\Gamma}_0$ è un pseudo-vettore.

Definizione N-D del momento angolare

L'estensione del concetto di momento angolare in N-D è immediata: basta sostituire un paio di simboli:

$$\overline{\vec{\Gamma}}_0 \triangleq \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\rho \vec{v}) \, d\Omega_x \quad (5.158)$$

Si vede quindi che, in generale, *il momento angolare* $\overline{\vec{\Gamma}}_0$ *non è una vettore ma una matrice.*

Da qui in avanti si effettueranno le dimostrazioni direttamente in notazione N-D, considerato che quelle in 3-D sono decisamente più note.

Nel caso si consideri un singolo corpo puntiforme di massa m , di posizione \vec{x}_P e velocità \vec{v}_P , il suo momento angolare $\bar{\bar{\Gamma}}_0$ è semplicemente:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = \int_{\Omega_\infty} (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (m \delta_N(\vec{x}_P) \vec{v}_P) d\Omega_x \quad (5.159)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = (\vec{x}_P - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (m \vec{v}_P) \quad (5.160)$$

Componenti rotatoria e traslatoria del momento angolare

Tradizionalmente il momento angolare viene scomposto in due componenti, dette *rotatoria* e *traslatoria*. La prima dovrà essere indipendente dal polo rispetto a cui il momento viene calcolato e, di preferenza, riferita invece al baricentro G.

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = \bar{\bar{\Gamma}}_{0ROT} + \bar{\bar{\Gamma}}_{0TRASL} \quad (5.161)$$

Per operare tale scomposizione, si utilizzerà come secondo polo il baricentro G.

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.162)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = \int_{\Omega_x} ((\vec{x} - \vec{x}_G) + (\vec{x}_G - \vec{x}_0)) \hat{\wedge} (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.163)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_G) \hat{\wedge} (\rho \vec{v}) d\Omega_x + \int_{\Omega_x} (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.164)$$

Si trovano così le due componenti cercate:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_{0ROT} := \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_G) \hat{\wedge} (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.165)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_{0TRASL} := \int_{\Omega_x} (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.166)$$

Poiché \vec{x}_G e \vec{x}_0 sono due punti fissati sul dominio di integrazione, il loro contributo può essere spostato all'esterno dell'integrale e la componente traslatoria può essere riscritta come:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_{0TRASL} = (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \int_{\Omega_x} \rho \vec{v} d\Omega_x \quad (5.167)$$

Come già visto, la quantità di moto \vec{Q} è pari a:

$$\vec{Q} \triangleq \int_{\Omega_x} \rho \vec{v} d\Omega_x = m_{tot} \vec{v}_G \quad \Rightarrow \quad (5.168)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_{0TRASL} = (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (m_{tot} \vec{v}_G) \quad (5.169)$$

Il momento angolare complessivo può quindi essere riscritto come:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (m_{tot} \vec{v}_G) + \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_G) \hat{\wedge} (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.170)$$

Assumendo come polo il baricentro G del sistema, la componente traslatoria $\bar{\bar{\Gamma}}_{0TRASL}$ del momento angolare si annulla e rimane solo quella rotatoria. Si ha

così:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_G = \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_G) \wedge (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.171)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge (m_{tot} \vec{v}_G) + \bar{\bar{\Gamma}}_G \quad (5.172)$$

Si veda ora la legge di trasporto dei momenti angolari

Legge di trasporto dei momenti angolari

Siano $\bar{\bar{\Gamma}}_P$ e $\bar{\bar{\Gamma}}_Q$ i momenti angolari di un dominio di $\Omega_x(t)$ di punti materiali, calcolati rispetto ai poli P e Q . La differenza tra i due momenti angolari sarà pari a:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_P - \bar{\bar{\Gamma}}_Q = -(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \wedge (m_{tot} \vec{v}_G) \quad (5.173)$$

Dimostrazione:

$$\begin{cases} \bar{\bar{\Gamma}}_P = \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_P) \wedge (\rho \vec{v}) d\Omega_x \\ \bar{\bar{\Gamma}}_Q = \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_Q) \wedge (\rho \vec{v}) d\Omega_x \end{cases} \Rightarrow \quad (5.174)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_P - \bar{\bar{\Gamma}}_Q = \int_{\Omega_x} ((\vec{x} - \vec{x}_P) - (\vec{x} - \vec{x}_Q)) \wedge (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.175)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_P - \bar{\bar{\Gamma}}_Q = \int_{\Omega_x} -(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \wedge (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.176)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_P - \bar{\bar{\Gamma}}_Q = -(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \wedge \int_{\Omega_x} (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.177)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_P - \bar{\bar{\Gamma}}_Q = -(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \wedge \vec{Q} \quad (5.178)$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_P - \bar{\bar{\Gamma}}_Q = -(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \wedge (m_{tot} \vec{v}_G) \quad \text{C.V.D.} \quad (5.179)$$

Noto il momento angolare in un punto è quindi possibile ‘trasportarlo’ in un altro se è nota la quantità di moto del sistema. Il risultato N-D qui riportato è perfettamente analogo a quello espresso in notazione 3-D:

$$\vec{\Gamma}_P - \vec{\Gamma}_Q = -(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \wedge (m_{tot} \vec{v}_G) \quad (5.180)$$

Si veda ora la definizione di *momento di forze*.

5.2.4 Momento di forze

Definizione 3-D del momento di una forza

Dato un dominio $\Omega_x(t)$ di punti materiali in 3-D, si definisce *momento della forza* o *momento* rispetto ad un polo \vec{x}_0 la grandezza:

$$\vec{M}_0 \triangleq \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\rho \vec{a}) d\Omega_x \quad (5.181)$$

La definizione di momento di una forza utilizza il prodotto vettore, perciò, in 3-D, *anche il momento di forza* \vec{M}_0 è uno pseudo-vettore.

Definizione N-D del momento di forza

L'estensione del concetto di momento di forza in N-D è immediata e analoga a quella già vista di momento angolare:

$$\overline{\overline{M}}_0 \triangleq \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\rho \vec{a}) d\Omega_x \quad (5.182)$$

Si vede quindi che, in generale, *il momento di forza $\overline{\overline{M}}_0$ non è una vettore ma una matrice*. Da qui in avanti si effettueranno le dimostrazioni direttamente in notazione N-D, considerato che quelle in 3-D sono decisamente più note.

Componenti rotatoria e traslatoria del momento di forza

A differenza del momento angolare, in genere il momento di forza $\overline{\overline{M}}_0$ non viene scomposto in componente rotatoria e traslatoria. Nulla impedirebbe però di farlo con procedimento analogo a quanto già visto (vedi la sezione 5.2.3 nella pagina 115). Si avrebbe così:

$$\overline{\overline{M}}_{0ROT} := \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_G) \hat{\wedge} (\rho \vec{a}) d\Omega_x \quad (5.183)$$

$$\overline{\overline{M}}_{0TRASL} := \int_{\Omega_x} (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\rho \vec{a}) d\Omega_x \quad (5.184)$$

Così come il momento angolare traslatorio $\overline{\overline{\Gamma}}_{0TRASL}$ poteva essere espresso in funzione della Q.tà di moto \vec{Q} , così il momento di forza traslatorio $\overline{\overline{M}}_{0TRASL}$ può essere espresso in funzione della forza \vec{F} .

$$\overline{\overline{M}}_{0TRASL} = (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{F} \quad (5.185)$$

$$\overline{\overline{M}}_{0TRASL} = (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (m_{tot} \vec{a}_G) \quad (5.186)$$

L'espressione complessiva del momento $\overline{\overline{M}}_0$ sarà così:

$$\overline{\overline{M}}_0 = (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (m_{tot} \vec{a}_G) + \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_G) \hat{\wedge} (\rho \vec{a}) d\Omega_x \quad (5.187)$$

Assumendo come polo il baricentro G del sistema, la componente traslatoria $\overline{\overline{M}}_{0TRASL}$ del momento di forza si annulla e rimane solo quella rotatoria. Si ha così:

$$\overline{\overline{M}}_G = \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_G) \hat{\wedge} (\rho \vec{a}) d\Omega_x \quad (5.188)$$

$$\overline{\overline{M}}_0 = (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (m_{tot} \vec{a}_G) + \overline{\overline{M}}_G \quad (5.189)$$

Legge di trasporto dei momenti di forza

Siano $\overline{\overline{M}}_P$ e $\overline{\overline{M}}_Q$ i momenti di forza di un dominio di $\Omega_x(t)$ di punti materiali, calcolati rispetto ai poli P e Q. La differenza tra i due momenti di forza sarà pari a:

$$\overline{\overline{M}}_P - \overline{\overline{M}}_Q = -(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \hat{\wedge} \vec{F} \quad (5.190)$$

$$\overline{\overline{M}}_P - \overline{\overline{M}}_Q = -(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \hat{\wedge} (m_{tot} \vec{a}_G) \quad (5.191)$$

Dimostrazione: è analoga a quella per la legge di trasporto dei momenti angolari (vedi la sezione 5.2.3 nella pagina 116).

Nota il momento di forza in un punto è quindi possibile ‘trasportarlo’ in un altro se è nota la forza risultante sul sistema. Ancora una volta, il risultato N-D qui riportato è perfettamente analogo a quello espresso in notazione 3-D:

$$\vec{M}_P - \vec{M}_Q = -(\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \wedge (m_{tot} \vec{a}_G) \quad (5.192)$$

Si veda ora la 2^A equazione cardinale del moto, che lega il momento angolare e il momento di forza.

5.2.5 La 2^A equazione cardinale del moto

Detti $\bar{\Gamma}_0$ e \bar{M}_0 i momenti rispettivamente della quantità di moto e della forza su un sistema, calcolati entrambi rispetto ad un polo \vec{x}_0 , essi possono essere messi in relazione tramite la 2^A equazione cardinale del moto:

$$\frac{d\bar{\Gamma}_0}{dt} = \vec{Q} \wedge \vec{v}_0 + \bar{M}_0 \quad (5.193)$$

Dimostrazione: si calcoli la derivata temporale del momento angolare, assumendo che la massa si conservi:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\Gamma}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\rho \vec{v}) d\Omega_x \\ \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x} \rho d\Omega_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (5.194)$$

$$\frac{d\bar{\Gamma}_0}{dt} = \int_{\Omega_x} \frac{d}{dt} (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\rho \vec{v}) + (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right) d\Omega_x \quad (5.195)$$

$$\frac{d\bar{\Gamma}_0}{dt} = \int_{\Omega_x} (\vec{v} - \vec{v}_0) \wedge (\rho \vec{v}) + (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\rho \vec{a}) d\Omega_x \quad (5.196)$$

La dimostrazione estesa di tale affermazione richiede il Teorema del Trasporto di Reynolds ed è di una certa lunghezza. Ci si può comunque sincerare della correttezza di questo risultato considerando l'esempio di un sistema di M punti materiali. Il momento angolare sarà esprimibile come:

$$\bar{\Gamma}_0 = \sum_{i=1}^M \left((\vec{x}_i - \vec{x}_0) \wedge (m_i \vec{v}_i) \right) \quad (5.197)$$

Derivando nel tempo e postulando la conservazione della massa si otterrà così:

$$\frac{d\bar{\Gamma}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^M (\vec{x}_i - \vec{x}_0) \wedge (m_i \vec{v}_i) \quad (5.198)$$

$$\frac{d\bar{\Gamma}_0}{dt} = \sum_{i=1}^M \left(\frac{d}{dt} (\vec{x}_i - \vec{x}_0) \wedge (m_i \vec{v}_i) + (\vec{x}_i - \vec{x}_0) \wedge \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \right) \quad (5.199)$$

$$\frac{d\bar{\Gamma}_0}{dt} = \sum_{i=1}^M \left((\vec{v}_i - \vec{v}_0) \wedge (m_i \vec{v}_i) + (\vec{x}_i - \vec{x}_0) \wedge (m_i \vec{a}_i) \right) \quad (5.200)$$

in maniera analoga all'equazione integrale (5.196).

Riprendendo quest'ultima equazione, si giunge rapidamente ad una prima semplificazione:

$$\frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_0}{dt} = \int_{\Omega_x} (\vec{v} - \vec{v}_0) \hat{\wedge} (\rho\vec{v}) + (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\rho\vec{a}) d\Omega_x \quad (5.201)$$

$$\frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_0}{dt} = \int_{\Omega_x} (\vec{v} - \vec{v}_0) \hat{\wedge} (\rho\vec{v}) d\Omega_x + \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\rho\vec{a}) d\Omega_x \quad (5.202)$$

$$\frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_0}{dt} = \int_{\Omega_x} (\vec{v} - \vec{v}_0) \hat{\wedge} (\rho\vec{v}) d\Omega_x + \bar{\bar{M}}_0 \quad (5.203)$$

Il primo termine a destra dell'uguale può essere sciolto come segue:

$$\int_{\Omega_x} (\vec{v} - \vec{v}_0) \hat{\wedge} (\rho\vec{v}) d\Omega_x = \int_{\Omega_x} (\vec{v} \hat{\wedge} (\rho\vec{v}) - \vec{v}_0 \hat{\wedge} (\rho\vec{v})) d\Omega_x \quad (5.204)$$

$$\int_{\Omega_x} (\vec{v} - \vec{v}_0) \hat{\wedge} (\rho\vec{v}) d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \bar{\bar{0}} - \vec{v}_0 \hat{\wedge} (\rho\vec{v}) d\Omega_x \quad (5.205)$$

$$\int_{\Omega_x} (\vec{v} - \vec{v}_0) \hat{\wedge} (\rho\vec{v}) d\Omega_x = -\vec{v}_0 \hat{\wedge} \int_{\Omega_x} (\rho\vec{v}) d\Omega_x =$$

$$-\vec{v}_0 \hat{\wedge} \vec{Q} = \vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_0 \quad (5.206)$$

$$\int_{\Omega_x} (\vec{v} - \vec{v}_0) \hat{\wedge} (\rho\vec{v}) d\Omega_x = \vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_0 \quad (5.207)$$

Il prodotto $\vec{v} \hat{\wedge} (\rho\vec{v})$ è infatti sempre nullo, dato che \vec{v} e $\rho\vec{v}$ sono paralleli. Con un'ultima sostituzione, si ottiene infine l'enunciato della 2^A equazione cardinale:

$$\frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_0}{dt} = \vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \bar{\bar{M}}_0 \quad \text{C.V.D.} \quad (5.208)$$

Polo baricentrico

Nel caso si assuma il baricentro G come polo per il calcolo dei momenti, la 2^A equazione cardinale del moto si semplifica, diventando:

$$\frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_G}{dt} = \bar{\bar{M}}_G \quad (5.209)$$

Dimostrazione: è immediata.

$$\frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_0}{dt} = \vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \bar{\bar{M}}_0 \quad (5.210)$$

$$\frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_G}{dt} = \vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_G + \bar{\bar{M}}_G \quad (5.211)$$

$$\vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_G = (m_{tot}\vec{v}_G) \hat{\wedge} \vec{v}_G = \bar{\bar{0}} \quad \Rightarrow \quad (5.212)$$

$$\frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_G}{dt} = \bar{\bar{M}}_G \quad \text{C.V.D.} \quad (5.213)$$

Si vede così come il baricentro risulti un punto privilegiato per il calcolo e l'espressione dei momenti.

5.2.6 Definizioni di ‘matrice d’inerzia’ in 2-D e 3-D

Fino a questo punto i procedimenti adoperati per le dimostrazioni in notazione N-D sono sostanzialmente analoghi a quelli già noti in 3-D, tanto che le equazioni risultanti hanno la stessa forma: nella maggior parte dei casi basta cambiare gli pseudo-vettori in matrici e sostituire il cuneo con il doppio cuneo. Questo è un altro segno della somiglianza, a livello algebrico, del prodotto vettore N-D con quello 3-D. Nel momento in cui si passano però ad analizzare i concetti e le definizioni di ‘momento d’inerzia’ e ‘matrice d’inerzia’ cominciano a palesarsi notevoli differenze tra i due metodi.

Momento d’inerzia - il caso 2D

L’idea di ‘momento d’inerzia’ è in qualche modo associata alla difficoltà di mettere in rotazione un corpo inizialmente fermo, difficoltà dovuta appunto alla sua inerzia. In 2-D la definizione di *momento d’inerzia* I_0 di un dominio $\Omega_x(t)$ di punti materiali rispetto ad un polo \vec{x}_0 è particolarmente semplice:

$$I_0 \triangleq \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 d\Omega_x \quad (5.214)$$

Il momento I_0 è qui uno scalare e la sua utilità si manifesta nel calcolo del momento angolare $\vec{\Gamma}_0$, il quale pure in 2-D potrebbe essere considerato uno scalare. Si veda allora come legare i due momenti, ricorrendo questa volta alla notazione 3-D.

Si consideri allora un corpo rigido¹, per il quale vale quindi:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (5.215)$$

Sostituendo nell’espressione del momento angolare $\vec{\Gamma}_0$, si otterrà:

$$\vec{\Gamma}_0 = \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.216)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.217)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.218)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \wedge \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.219)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = m_{tot} (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.220)$$

L’ultimo termine dell’equazione può essere riarrangiato come segue:

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) &= ((\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)) \vec{\omega} - \\ & \quad ((\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \vec{\omega}) (\vec{x} - \vec{x}_0) \end{aligned} \quad (5.221)$$

¹si noti che fin qui tutti i risultati enunciati sono validi anche per corpi non rigidi o per insiemi di corpi

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \vec{\omega} - ((\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \vec{\omega}) (\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (5.222)$$

Questo risultato è valido in 2-D come in 3-D. Nel caso si descriva il moto nel piano, però, la velocità angolare $\vec{\omega}$ è normale ad esso, perciò:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (5.223)$$

In 2-D si ha semplicemente:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \vec{\omega} \quad (5.224)$$

Sostituendo nell'equazione (5.220), si avrà perciò:

$$\vec{\Gamma}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.225)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \vec{\omega} d\Omega_x \quad (5.226)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 + \left(\int_{\Omega_x} \rho \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 d\Omega_x \right) \vec{\omega} \quad (5.227)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 + I_0 \vec{\omega} \quad (5.228)$$

Si è così trovata l'equazione che lega momento angolare e momento d'inerzia. Scegliendo il baricentro G come polo di riferimento, si ha semplicemente:

$$\vec{\Gamma}_G = I_G \vec{\omega} \quad (5.229)$$

Questo risultato, così semplice in 2-D, si complica notevolmente in 3-D.

Momento e matrice d'inerzia - il caso 3D

In 3-D è possibile, in maniera analoga a quanto avviene in 2-D, definire un momento d'inerzia scalare I_0 sempre come:

$$I_0 = \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 d\Omega_x \quad (5.230)$$

La sua utilità rispetto al caso 2-D sarebbe però notevolmente ridimensionata. Si considerino infatti le già viste equazioni:

$$\vec{\Gamma}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.231)$$

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \vec{\omega} - ((\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \vec{\omega}) (\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (5.232)$$

In 3-D la velocità angolare $\vec{\omega}$ non è necessariamente ortogonale a $(\vec{x} - \vec{x}_0)$, perciò il termine associato non si annulla. Il momento angolare dovrà quindi essere espresso come:

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_0 = & m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \vec{\omega} d\Omega_x - \\ & \int_{\Omega_x} \rho ((\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \vec{\omega}) (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \end{aligned} \quad (5.233)$$

In questa forma il momento angolare è piuttosto . . . scomodo, e la sostituzione di I_0 non semplificherebbe molto l'espressione. Si tenta allora di 'addomesticarla' attraverso la definizione della matrice d'inerzia $\bar{\bar{I}}$. Si veda allora il procedimento che porta alla sua costruzione. In primo luogo, si separano le componenti traslatoria e rotatoria del momento angolare, calcolate rispetto al polo \vec{x}_0 :

$$\vec{\Gamma}_{0TRASL} = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 \quad (5.234)$$

$$\vec{\Gamma}_{0ROT} = \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \vec{\omega} - \rho ((\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \vec{\omega}) (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \quad (5.235)$$

Dato che la componente traslatoria è già abbastanza semplice, si punterà a riformulare quella rotatoria. Utilizzando la notazione 3-D per via algebrica non è possibile fare molto: è quindi necessario esprimere $(\vec{x} - \vec{x}_0)$ e $\vec{\omega}$ in coordinate cartesiane. Ponendo allora:

$$\vec{x} - \vec{x}_0 := x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}} \quad (5.236)$$

$$\vec{\omega} := p\vec{\mathbf{i}} + q\vec{\mathbf{j}} + r\vec{\mathbf{k}} \quad (5.237)$$

si otterrà:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \vec{\omega} - ((\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \vec{\omega}) (\vec{x} - \vec{x}_0) &= \|x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}\|^2 (p\vec{\mathbf{i}} + q\vec{\mathbf{j}} + r\vec{\mathbf{k}}) - \\ &\left((x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})^T \cdot (p\vec{\mathbf{i}} + q\vec{\mathbf{j}} + r\vec{\mathbf{k}}) \right) (x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}) = \\ (x^2 + y^2 + z^2)(p\vec{\mathbf{i}} + q\vec{\mathbf{j}} + r\vec{\mathbf{k}}) - (xp + yq + zr)(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}) &= \\ ((y^2 + z^2)p - (xy)q - (zx)r)\vec{\mathbf{i}} + (- (xy)p - (x^2 + z^2)q - (yz)r)\vec{\mathbf{j}} + \\ -(xz)p - (yz)q - (x^2 + y^2)r)\vec{\mathbf{k}} + \end{aligned} \quad (5.238)$$

Il momento angolare rotario risulterà quindi:

$$\vec{\Gamma}_{0ROT} = \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \vec{\omega} - \rho ((\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot \vec{\omega}) (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \quad (5.239)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{0ROT} &= \int_{\Omega_x} \rho \left(((y^2 + z^2)p - (xy)q - (zx)r)\vec{\mathbf{i}} + \right. \\ &(- (xy)p + (x^2 + z^2)q - (yz)r)\vec{\mathbf{j}} + \\ &\left. -(xz)p - (yz)q + (x^2 + y^2)r)\vec{\mathbf{k}} \right) d\Omega_x \end{aligned} \quad (5.240)$$

$$\vec{\Gamma}_{0ROT} = \int_{\Omega_x} \rho \left(\begin{bmatrix} (y^2 + z^2)p - (xy)q - (zx)r \\ -(xy)p + (x^2 + z^2)q - (yz)r \\ -(xz)p - (yz)q + (x^2 + y^2)r \end{bmatrix} \right) d\Omega_x \quad (5.241)$$

Il vettore che compare all'interno dell'integrale può essere espresso anche come il risultato del prodotto tra una matrice e la velocità angolare $\vec{\omega} = [p; q; r]$, infatti:

$$\vec{\Gamma}_{0ROT} = \int_{\Omega_x} \left(\rho \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) d\Omega_x \quad (5.242)$$

Portando all'esterno la velocità angolare $\vec{\omega}$, si ottiene:

$$\vec{\Gamma}_{0ROT} = \int_{\Omega_x} \left(\rho \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & x^2 + y^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \right) d\Omega_x \vec{\omega} \quad (5.243)$$

Volendo mantenere l'analogia con il caso 2-D, dove:

$$\vec{\Gamma}_{0ROT} = I_0 \vec{\omega} \quad (5.244)$$

ma non potendo ricorrere ad un semplice scalare, si dovrà definire una matrice d'inerzia $\overline{\overline{I}}_0$ che ne faccia le veci.

Definizione di matrice d'inerzia 3-D

Dato un dominio 3-D Ω_x di punti materiali, si definisce la sua *matrice d'inerzia 3-D* $\overline{\overline{I}}_0$ calcolata rispetto ad un polo \vec{x}_0 come:

$$\overline{\overline{I}}_0 \triangleq \int_{\Omega_x} \left(\rho \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & x^2 + y^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \right) d\Omega_x \quad (5.245)$$

dove $\vec{x} - \vec{x}_0 = [x; y; z]$.

Si può notare che tale definizione è indipendente dal fatto che un corpo sia rigido oppure no: è quindi possibile calcolare la matrice d'inerzia anche di un corpo deformabile o di un sistema di corpi. Nel caso si consideri un corpo rigido, sostituendo la definizione di matrice d'inerzia 3-D nell'equazione (5.243) si ottiene semplicemente:

$$\vec{\Gamma}_{0ROT} = \overline{\overline{I}}_0 \vec{\omega} \quad (5.246)$$

L'espressione complessiva del momento angolare sarà quindi:

$$\vec{\Gamma}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 + \overline{\overline{I}}_0 \vec{\omega} \quad (5.247)$$

Assumendo come polo di riferimento il baricentro G, si avrà la semplice relazione:

$$\vec{\Gamma}_G = \overline{\overline{I}}_G \vec{\omega} \quad (5.248)$$

Alcune stranezze delle matrici d'inerzia in 3-D

Spesso in 3-D la matrice d'inerzia $\overline{\overline{I}}_0$ viene rappresentata come:

$$\overline{\overline{I}}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{xx} & \mathcal{I}_{xy} & \mathcal{I}_{xz} \\ \mathcal{I}_{yx} & \mathcal{I}_{yy} & \mathcal{I}_{yz} \\ \mathcal{I}_{zx} & \mathcal{I}_{zy} & \mathcal{I}_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.249)$$

I termini della diagonale sono detti *momenti d'inerzia*:

$$\mathcal{I}_{xx} = \int_{\Omega_x} \rho(y^2 + z^2) d\Omega_x \quad (5.250)$$

$$\mathcal{I}_{yy} = \int_{\Omega_x} \rho(z^2 + x^2) d\Omega_x \quad (5.251)$$

$$\mathcal{I}_{zz} = \int_{\Omega_x} \rho(x^2 + y^2) d\Omega_x \quad (5.252)$$

I termini fuori dalla diagonale sono chiamati invece *prodotti d'inerzia*:

$$\mathcal{I}_{xy} = \mathcal{I}_{yx} = \int_{\Omega_x} -\rho(xy) d\Omega_x \quad (5.253)$$

$$\mathcal{I}_{yz} = \mathcal{I}_{zy} = \int_{\Omega_x} -\rho(yz) d\Omega_x \quad (5.254)$$

$$\mathcal{I}_{zx} = \mathcal{I}_{zx} = \int_{\Omega_x} -\rho(zx) d\Omega_x \quad (5.255)$$

Come era già accaduto per il momento di una forza, si manifesta qualche stranezza nel significato degli indici. Il momento d'inerzia \mathcal{I}_{xx} , così scritto, potrebbe far pensare che:

$$\mathcal{I}_{xx} = \int_{\Omega_x} \rho x^2 d\Omega_x \quad (5.256)$$

e invece:

$$\mathcal{I}_{xx} = \int_{\Omega_x} \rho(y^2 + z^2) d\Omega_x \quad (5.257)$$

Nonostante la x compaia due volte nel pedice, essa non è presente all'interno dell'integrale. \mathcal{I}_{xx} viene in genere chiamato 'momento d'inerzia attorno all'asse X', ma per calcolarlo si utilizzano invece y^2 e z^2 ! La matrice d'inerzia di un sistema 2-D contenuto nel piano XY, può essere scritta in forma 3-D immaginando un asse Z uscente dal piano. Risulterà così:

$$\bar{\bar{\mathcal{I}}}_{2D} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{xx} & \mathcal{I}_{xy} & 0 \\ \mathcal{I}_{yx} & \mathcal{I}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.258)$$

dove:

$$\mathcal{I}_{xx} = \int_{\Omega_x} \rho y^2 d\Omega_x \quad (5.259)$$

$$\mathcal{I}_{yy} = \int_{\Omega_x} \rho x^2 d\Omega_x \quad (5.260)$$

$$\mathcal{I}_{zz} = \mathcal{I}_{xx} + \mathcal{I}_{yy} = \int_{\Omega_x} \rho(x^2 + y^2) d\Omega_x \quad (5.261)$$

Certo un risultato ben strano, a guardare gli indici! Si può notare inoltre che il momento \mathcal{I}_{zz} altro non è che il momento d'inerzia scalare I_0 calcolato nel piano stesso. Ancora una volta, gli abitanti di un mondo 2-D potrebbero legittimamente chiedersi perché inventare un 3° asse quando basta un solo scalare per descrivere l'inerzia di rotazione.

Ulteriore fonte di dubbi sulla struttura della matrice $\bar{\bar{\mathcal{I}}}_0$ potrebbe essere il segno meno che compare nei prodotti d'inerzia: dovrebbe avere forse qualche particolare significato?

Come si vedrà nel prossimo paragrafo, queste stranezze della matrice d'inerzia dipendono dal modo in cui essa è stata costruita, ricorrendo a concetti che valgono solo in 3-D, ad esempio quello di 'asse di rotazione'. Il fatto che $\bar{\bar{\mathcal{I}}}_0$ trasformi lo

pseudo-vettore $\vec{\omega}$ in un altro pseudo-vettore $\vec{\Gamma}_0$ dovrebbe già mettere in guardia sul suo utilizzo e sulla sua interpretazione.

Si veda allora se è possibile costruire una ‘matrice d’inerzia’ in N-D che sia in grado di legare, come nel caso 3-D, la velocità angolare Ω e il momento angolare $\vec{\Gamma}_0$. Ovviamente, se con la nuova formulazione si risolveranno i paradossi in cui ci si è ora imbattuti sarà tanto meglio.

5.2.7 Matrice d’inerzia N-D - il calcolo delle covarianze

Per costruire una ‘matrice d’inerzia’ N-D, qualsiasi sia la sua struttura, conviene ripercorrere lo stesso procedimento adottato in 3-D, cioè provare a mettere in relazione il momento angolare $\vec{\Gamma}_0$ e la velocità angolare Ω e verificare se c’è una matrice ‘comoda’ in grado di farlo e associata all’inerzia rotazionale del sistema.

Come già postulato nel caso 3-D, si consideri un corpo rigido, per il quale vale quindi:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Omega (\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (5.262)$$

Sostituendo nell’espressione del momento angolare $\vec{\Gamma}_0$, si otterrà:

$$\vec{\Gamma}_0 = \int_{\Omega_x} (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\rho \vec{v}) d\Omega_x \quad (5.263)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\vec{v}_0 + \Omega (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.264)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\Omega (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.265)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\Omega (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.266)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = m_{tot} (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho (\vec{x} - \vec{x}_0) \hat{\wedge} (\Omega (\vec{x} - \vec{x}_0)) d\Omega_x \quad (5.267)$$

Per rapidità, da qui in avanti si porrà:

$$\Delta \vec{x}_0 = \vec{x} - \vec{x}_0 \quad \text{così:} \quad (5.268)$$

$$\vec{\Gamma}_0 = m_{tot} (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho \Delta \vec{x}_0 \hat{\wedge} (\Omega \Delta \vec{x}_0) d\Omega_x \quad (5.269)$$

Si semplifichi ora il termine all’interno dell’integrale, sfruttando le proprietà del prodotto diadico.

$$\Delta \vec{x}_0 \hat{\wedge} (\Omega \Delta \vec{x}_0) = [\overline{(\Omega \Delta \vec{x}_0) \Delta \vec{x}_0^T}] - [\overline{\Delta \vec{x}_0 (\Omega \Delta \vec{x}_0)^T}] \quad (5.270)$$

$$\Delta \vec{x}_0 \hat{\wedge} (\Omega \Delta \vec{x}_0) = \Omega [\overline{\Delta \vec{x}_0 \Delta \vec{x}_0^T}] - [\overline{\Delta \vec{x}_0 \Delta \vec{x}_0^T}] \Omega^T \quad (5.271)$$

Sostituendo quest’espressione nell’integrale, si otterrà:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_x} \rho \Delta \vec{x}_0 \hat{\wedge} (\Omega \Delta \vec{x}_0) d\Omega_x = \\ & \int_{\Omega_x} \rho \left(\Omega [\overline{\Delta \vec{x}_0 \Delta \vec{x}_0^T}] - [\overline{\Delta \vec{x}_0 \Delta \vec{x}_0^T}] \Omega^T \right) d\Omega_x = \\ & \Omega \left(\int_{\Omega_x} \rho [\overline{\Delta \vec{x}_0 \Delta \vec{x}_0^T}] d\Omega_x \right) - \left(\int_{\Omega_x} \rho [\overline{\Delta \vec{x}_0 \Delta \vec{x}_0^T}] d\Omega_x \right) \Omega^T \end{aligned} \quad (5.272)$$

In quest'ultima equazione si può notare come le matrici velocità-angolare siano state portate all'esterno degli integrali, analogamente a quanto avveniva nel caso 3-D. Osservando quest'equazione, è ora possibile definire la matrice d'inerzia N-D.

Definizione di matrice d'inerzia N-D

Dato un dominio N-D Ω_x di punti materiali, si definisce la sua *matrice d'inerzia N-D* $\bar{\bar{I}}_0$ calcolata rispetto ad un polo \vec{x}_0 come:

$$\bar{\bar{I}}_0 \triangleq \int_{\Omega_x} \rho [\overline{\Delta x_0 \Delta x_0^T}] d\Omega_x \tag{5.273}$$

dove $\Delta \vec{x}_0 = \vec{x} - \vec{x}_0$. In forma più esplicita, omettendo per chiarezza il pedice relativo al polo, la matrice d'inerzia N-D può essere riscritta come:

$$\bar{\bar{I}}_0 \triangleq \int_{\Omega_x} \left(\rho \begin{bmatrix} \Delta x_1 \Delta x_1 & \Delta x_1 \Delta x_2 & \dots & \Delta x_1 \Delta x_N \\ \Delta x_2 \Delta x_1 & \Delta x_2 \Delta x_2 & \dots & \Delta x_2 \Delta x_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta x_N \Delta x_1 & \Delta x_N \Delta x_2 & \dots & \Delta x_N \Delta x_N \end{bmatrix} \right) d\Omega_x \tag{5.274}$$

Sostituendo la definizione della matrice d'inerzia nell'equazione (5.272), si otterrà:

$$\int_{\Omega_x} \rho \Delta \vec{x}_0 \hat{\wedge} (\Omega \Delta \vec{x}_0) d\Omega_x = \Omega \left(\int_{\Omega_x} \rho [\overline{\Delta x_0 \Delta x_0^T}] d\Omega_x \right) - \left(\int_{\Omega_x} \rho [\overline{\Delta x_0 \Delta x_0^T}] d\Omega_x \right) \Omega^T \tag{5.275}$$

$$\int_{\Omega_x} \rho \Delta \vec{x}_0 \hat{\wedge} (\Omega \Delta \vec{x}_0) d\Omega_x = \Omega \bar{\bar{I}}_0 - \bar{\bar{I}}_0 \Omega^T \tag{5.276}$$

E' ora possibile esprimere il momento angolare in funzione di $\bar{\bar{I}}_0$ e Ω :

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \int_{\Omega_x} \rho \Delta \vec{x}_0 \hat{\wedge} (\Omega \Delta \vec{x}_0) d\Omega_x \tag{5.277}$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \Omega \bar{\bar{I}}_0 - \bar{\bar{I}}_0 \Omega^T \tag{5.278}$$

$$\bar{\bar{\Gamma}}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \Omega \bar{\bar{I}}_0 - \left(\Omega \bar{\bar{I}}_0 \right)^T \tag{5.279}$$

Assumendo come polo di riferimento il baricentro G, si ottiene la semplice relazione:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_G = \Omega \bar{\bar{I}}_G - \left(\Omega \bar{\bar{I}}_G \right)^T \tag{5.280}$$

Analogia con calcolo delle covarianze

Per come è stata definita, la matrice d'inerzia N-D $\bar{\bar{I}}_0$ è simmetrica ed associabile all'inerzia di rotazione del sistema. Nel caso 3-D, può essere espressa nella forma simbolica:

$$\bar{\bar{I}}_0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.281}$$

Solo che questa volta, a differenza del caso 3-D, si ha effettivamente:

$$I_{xx} = \int_{\Omega_x} \rho x^2 d\Omega_x \quad (5.282)$$

$$I_{yy} = \int_{\Omega_x} \rho y^2 d\Omega_x \quad (5.283)$$

$$I_{zz} = \int_{\Omega_x} \rho z^2 d\Omega_x \quad (5.284)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_{\Omega_x} \rho xy d\Omega_x \quad (5.285)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int_{\Omega_x} \rho yz d\Omega_x \quad (5.286)$$

$$I_{zx} = I_{xz} = \int_{\Omega_x} \rho zx d\Omega_x \quad (5.287)$$

con perfetta corrispondenza tra gli indici fuori e dentro gli integrali.

Proprio per come è stata costruita, \bar{I}_0 presenta una fortissima analogia con la matrice $\bar{\sigma}$ delle covarianze utilizzata in ambito statistico. Detta $\rho(\vec{x})$ una *densità di probabilità* funzione dei parametri \vec{x} , il *valore atteso* $\bar{\mu}$ è definito come:

$$\bar{\mu} \text{ tale che: } \int_{\Omega_\infty} \rho(\vec{x} - \bar{\mu}) d\Omega_x = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (5.288)$$

$$\bar{\mu} - \vec{x}_0 = \frac{\int_{\Omega_\infty} \rho(\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x}{\int_{\Omega_\infty} \rho d\Omega_x} = \int_{\Omega_\infty} \rho(\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x \quad (5.289)$$

in maniera analoga a quanto visto per il baricentro, dove però la ‘massa totale’ non è necessariamente unitaria, come richiesto invece per una distribuzione di probabilità.

$$\vec{x}_G - \vec{x}_0 = \frac{\int_{\Omega_x} \rho(\vec{x} - \vec{x}_0) d\Omega_x}{\int_{\Omega_x} \rho d\Omega_x} \quad (5.290)$$

La matrice delle covarianze $\bar{\sigma}$ viene invece definita, elemento per elemento, come:

$$\bar{\sigma}_{ij} \triangleq \int_{\Omega_\infty} \rho(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) d\Omega_x \quad \forall i, j \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (5.291)$$

In forma più estesa, ponendo $\Delta x_i = (x_i - \mu_i) \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; N\}$, si ha:

$$\bar{\sigma} \triangleq \int_{\Omega_\infty} \left(\rho \begin{bmatrix} \Delta x_1 \Delta x_1 & \Delta x_1 \Delta x_2 & \dots & \Delta x_1 \Delta x_N \\ \Delta x_2 \Delta x_1 & \Delta x_2 \Delta x_2 & \dots & \Delta x_2 \Delta x_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta x_N \Delta x_1 & \Delta x_N \Delta x_2 & \dots & \Delta x_N \Delta x_N \end{bmatrix} \right) d\Omega_x \quad (5.292)$$

ovvero, in forma compatta:

$$\bar{\sigma} \triangleq \int_{\Omega_\infty} \rho[\overline{\Delta x \Delta x^T}] d\Omega_x \quad (5.293)$$

Si ottiene così una definizione analoga a quella di una matrice d’inerzia N-D, calcolata rispetto al baricentro G.

$$\bar{I}_G = \int_{\Omega_x} \rho[\overline{\Delta x \Delta x^T}] d\Omega_x \quad (5.294)$$

5.3 Considerazioni su matrici d'inerzia e momenti

Le matrici d'inerzia $\bar{\bar{I}}_0$ e \bar{I}_0 , la prima definita con notazione 3-D e la seconda con quella N-D, sono radicalmente diverse sia per costruzione sia per interpretazione. Presentano comunque anche alcune analogie, infatti:

- entrambe sono simmetriche
- entrambe dipendono dal sistema di riferimento
- entrambe possono essere trasformate per mezzo di una legge di trasporto (per la traslazione) e della legge dei tensori doppi (per le rotazioni)
- entrambe sono diagonalizzabili
- entrambe, se la densità è positiva, sono semi-definite positive
- entrambe possono essere calcolate anche per corpi non rigidi e/o sistemi di più corpi

In questa sezione si illustreranno alcune proprietà e regole pratiche per l'utilizzo delle matrici d'inerzia, privilegiando ovviamente la notazione N-D, dato che si suppone che quella 3-D sia già nota.

5.3.1 Conversioni matrici d'inerzia: notazioni 3-D ed N-D

Nonostante la matrice d'inerzia $\bar{\bar{I}}_0$ sia utilizzata tipicamente solo 3-D, può essere convertita nella forma N-D \bar{I}_0 senza particolare problemi. La matrice $\bar{\bar{I}}_0$ può essere infatti riscritta come:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{I}}_0 &\triangleq \int_{\Omega_x} \left(\rho \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & x^2 + y^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \right) d\Omega_x = \\ &\int_{\Omega_x} \rho \left((x^2 + y^2 + z^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{bmatrix} \right) d\Omega_x \end{aligned} \quad (5.295)$$

ovvero:

$$\bar{\bar{I}}_0 = \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \bar{I}_{N \times N} d\Omega_x - \int_{\Omega_x} \rho [\overline{\Delta x_0 \Delta x_0^T}] d\Omega_x \quad (5.296)$$

$$\bar{\bar{I}}_0 = I_0 \bar{I}_{N \times N} - \bar{I}_0 \quad (5.297)$$

Si noti che, in questo trionfo di 'I', si è indicata con $\bar{I}_{N \times N}$ la matrice identità in N-D e con I_0 il momento d'inerzia scalare rispetto al polo \vec{x}_0 . Per tradurre in notazione N-D la matrice $\bar{\bar{I}}_0$, si avrà dunque:

$$\bar{I}_0 = I_0 \bar{I}_{N \times N} - \bar{\bar{I}}_0 \quad (5.298)$$

5.3.2 Momento d'inerzia polare e traccia delle matrici

Il momento d'inerzia I_0 rispetto ad un polo \vec{x}_0 può essere calcolato in qualsiasi numero di dimensioni ed espresso come:

$$I_0 = \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta\vec{x}_0\|^2 d\Omega_x \quad (5.299)$$

La traccia della matrice d'inerzia è proprio pari al momento d'inerzia polare, infatti:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\bar{\bar{I}}) &= \sum_{i=1}^N I_{ii} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_x} \rho \Delta x_{ii}^2 d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \rho \left(\sum_{i=1}^N \Delta x_{ii}^2 \right) d\Omega_x = \\ &= \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta\vec{x}\|^2 d\Omega_x = I_0 \end{aligned} \quad (5.300)$$

Così:

$$I_0 = \text{tr}(\bar{\bar{I}}_0) \quad (5.301)$$

Nel caso 3-D, la traccia della matrice d'inerzia $\bar{\bar{I}}_0$ è invece il doppio del momento d'inerzia polare, infatti:

$$\bar{\bar{I}}_0 = I_0 \bar{\bar{I}}_{N \times N} - \bar{\bar{I}}_0 \quad (5.302)$$

$$\text{tr}(\bar{\bar{I}}_0) = \text{tr}(I_0 \bar{\bar{I}}_{N \times N}) - \text{tr}(\bar{\bar{I}}_0) \quad (5.303)$$

$$\text{tr}(\bar{\bar{I}}_0) = I_0 N - I_0 = (N - 1) I_0 \quad N = 3 \quad \Rightarrow \quad (5.304)$$

$$\text{tr}(\bar{\bar{I}}_0) = 2 I_0 \quad \text{C.V.D.} \quad (5.305)$$

5.3.3 Legge del trasporto per matrici d'inerzia

Dette $\bar{\bar{I}}_P$ e $\bar{\bar{I}}_Q$ le matrici d'inerzia di un sistema Ω_x in N-D, calcolate rispettivamente rispetto ai poli P e Q, vale per esse la seguente *legge di trasporto*:

$$\bar{\bar{I}}_P - \bar{\bar{I}}_Q = m_{tot} [\overline{(x_P - x_G)(x_P - x_G)^T}] - m_{tot} [\overline{(x_Q - x_G)(x_Q - x_G)^T}] \quad (5.306)$$

Dimostrazione: per non perdere di generalità e per snellire la scrittura, si scompongono i vettori - distanza come segue:

$$\vec{x} - \vec{x}_P = (\vec{x} - \vec{x}_Q) - (\vec{x}_P - \vec{x}_Q) \quad (5.307)$$

$$\vec{x} - \vec{x}_P = \Delta\vec{x}_Q - \Delta\vec{x}_{PQ} \quad (5.308)$$

Si analizzi ora il prodotto diadico che compare nelle costruzioni di $\bar{\bar{I}}_P$:

$$\begin{aligned} \overline{(x - x_P)(x - x_P)^T} &= \overline{(\Delta x_Q - \Delta x_{PQ})(\Delta x_Q - \Delta x_{PQ})^T} = \\ &= \overline{\Delta x_Q \Delta x_Q^T} - \overline{\Delta x_Q \Delta x_{PQ}^T} - \overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_Q^T} + \overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_{PQ}^T} \end{aligned} \quad (5.309)$$

Calcolando l'integrale e sapendo che \bar{x}_P e \bar{x}_Q sono punti fissati sul dominio, si otterrà:

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{I}}_P &= \int_{\Omega_x} \left(\rho \overline{\overline{(x - x_P)(x - x_P)^T}} \right) d\Omega_x = \\
&= \int_{\Omega_x} \left(\rho \overline{\overline{\Delta x_Q \Delta x_Q^T}} - \overline{\overline{\Delta x_Q \Delta x_{PQ}^T}} - \overline{\overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_Q^T}} + \overline{\overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_{PQ}^T}} \right) d\Omega_x = \\
&= \int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_Q \Delta x_Q^T}} d\Omega_x - \int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_Q \Delta x_{PQ}^T}} d\Omega_x - \\
&= \int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_Q^T}} d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_{PQ}^T}} d\Omega_x
\end{aligned} \tag{5.310}$$

Il primo termine è pari alla matrice $\bar{\bar{I}}_Q$:

$$\int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_Q \Delta x_Q^T}} d\Omega_x = \bar{\bar{I}}_Q \tag{5.311}$$

Il secondo e il terzo termine a destra dell'uguale sono l'uno il simmetrico dell'altro e possono essere semplificati ricorrendo alla definizione di baricentro.

$$\int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_Q \Delta x_{PQ}^T}} d\Omega_x = \left[\left(\int_{\Omega_x} \rho \Delta x_Q d\Omega_x \right) \Delta x_{PQ}^T \right] \tag{5.312}$$

$$\int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_Q \Delta x_{PQ}^T}} d\Omega_x = \left[\left(\int_{\Omega_x} \rho (x - x_Q) d\Omega_x \right) \Delta x_{PQ}^T \right] \tag{5.313}$$

$$\int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_Q \Delta x_{PQ}^T}} d\Omega_x = m_{tot} \overline{\overline{(x_G - x_Q) \Delta x_{PQ}^T}} \tag{5.314}$$

$$\int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_Q \Delta x_{PQ}^T}} d\Omega_x = m_{tot} \overline{\overline{\Delta x_{GQ} \Delta x_{PQ}^T}} \tag{5.315}$$

L'ultimo termine può essere invece semplificato come:

$$\int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_{PQ}^T}} d\Omega_x = m_{tot} \overline{\overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_{PQ}^T}} \tag{5.316}$$

Sostituendo le espressioni trovate nell'equazione per $\bar{\bar{I}}_P$, si avrà:

$$\bar{\bar{I}}_P = \bar{\bar{I}}_Q - m_{tot} \left(\overline{\overline{\Delta x_{GQ} \Delta x_{PQ}^T}} + \overline{\overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_{GQ}^T}} \right) + m_{tot} \left(\overline{\overline{\Delta x_{PQ} \Delta x_{PQ}^T}} \right) \tag{5.317}$$

Con procedimento analogo, o semplicemente scambiando i pedici P e Q , si può scrivere anche:

$$\bar{\bar{I}}_Q = \bar{\bar{I}}_P - m_{tot} \left(\overline{\overline{\Delta x_{GP} \Delta x_{QP}^T}} + \overline{\overline{\Delta x_{QP} \Delta x_{GP}^T}} \right) + m_{tot} \overline{\overline{\Delta x_{QP} \Delta x_{QP}^T}} \tag{5.318}$$

Assumendo che uno dei due poli di riferimento proprio il baricentro, ad esempio $Q = G$, l'espressione si semplificherà notevolmente, infatti:

$$\bar{\bar{I}}_P = \bar{\bar{I}}_G - m_{tot} \left([\overline{\Delta x_{GG} \Delta x_{PG}^T}] + [\overline{\Delta x_{PG} \Delta x_{GG}^T}] \right) + m_{tot} \left([\overline{\Delta x_{PG} \Delta x_{PG}^T}] \right) \quad (5.319)$$

$$\Delta x_{GG} = \vec{x}_G - \vec{x}_G = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (5.320)$$

$$\bar{\bar{I}}_P = \bar{\bar{I}}_G - m_{tot} \left([0 \overline{\Delta x_{PG}^T}] + [\overline{\Delta x_{PG} 0^T}] \right) + m_{tot} [\overline{\Delta x_{PG} \Delta x_{PG}^T}] \quad (5.321)$$

$$\bar{\bar{I}}_P = \bar{\bar{I}}_G + m_{tot} [\overline{\Delta x_{PG} \Delta x_{PG}^T}] \quad (5.322)$$

$$\bar{\bar{I}}_P = \bar{\bar{I}}_G + m_{tot} [\overline{(x_P - x_G)(x_P - x_G)^T}] \quad (5.323)$$

Lo stesso ragionamento può essere condotto per il polo Q. Mettendo a sistema, si ottiene così:

$$\begin{cases} \bar{\bar{I}}_P = \bar{\bar{I}}_G + m_{tot} [\overline{(x_P - x_G)(x_P - x_G)^T}] \\ \bar{\bar{I}}_Q = \bar{\bar{I}}_Q + m_{tot} [\overline{(x_Q - x_G)(x_Q - x_G)^T}] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (5.324)$$

$$\bar{\bar{I}}_P - \bar{\bar{I}}_Q = m_{tot} [\overline{(x_P - x_G)(x_P - x_G)^T}] - m_{tot} [\overline{(x_Q - x_G)(x_Q - x_G)^T}] \quad (5.325)$$

$$\bar{\bar{I}}_P - \bar{\bar{I}}_Q = m_{tot} [\overline{\Delta x_{PG} \Delta x_{PG}^T}] - m_{tot} [\overline{\Delta x_{QG} \Delta x_{QG}^T}] \quad \text{C.V.D.} \quad (5.326)$$

Ovviamente risulta in generale più conveniente effettuare il trasporto rispetto al baricentro G, per il quale la legge assume una forma molto semplice:

$$\bar{\bar{I}}_P = \bar{\bar{I}}_G + m_{tot} [\overline{(x_P - x_G)(x_P - x_G)^T}] \quad (5.327)$$

Calcolando la traccia, si ottiene la legge per il trasporto dei momenti statici:

$$\text{tr}(\bar{\bar{I}}_P) = \text{tr}(\bar{\bar{I}}_G) + \text{tr}(m_{tot} [\overline{(x_P - x_G)(x_P - x_G)^T}]) \quad (5.328)$$

$$I_P = I_G + m_{tot} \|\vec{x}_P - \vec{x}_G\|^2 \quad (5.329)$$

Anche per le normali matrici d'inerzia 3-D $\bar{\bar{I}}_P$ esiste un'analogia legge di trasporto, ma se ne sconsiglia la dimostrazione con la notazione 3-D perché nella sua forma usuale richiede l'utilizzo delle singole coordinate e lo sviluppo di un gran numero di termini. Per conseguire la legge di trasporto in 3-D la via più semplice consiste nello sfruttare l'equazione per la conversione della matrice d'inerzia da una notazione all'altra, già vista al paragrafo 5.3.1 nella pagina 128.

$$\begin{cases} \bar{\bar{I}}_P = I_P \bar{\bar{I}}_{N \times N} - \bar{\bar{I}}_P \\ \bar{\bar{I}}_Q = I_Q \bar{\bar{I}}_{N \times N} - \bar{\bar{I}}_Q \end{cases} \quad (5.330)$$

$$\bar{\bar{I}}_P - \bar{\bar{I}}_Q = (I_P - I_Q) \bar{\bar{I}}_{N \times N} - \bar{\bar{I}}_P - \bar{\bar{I}}_Q \quad (5.331)$$

La differenza tra i momenti d'inerzia polari può essere semplificata come:

$$I_P - I_Q = (I_G + m_{tot} \|\vec{x}_P - \vec{x}_G\|^2) - (I_G + m_{tot} \|\vec{x}_Q - \vec{x}_G\|^2) \quad (5.332)$$

$$I_P - I_Q = m_{tot} \|\vec{x}_P - \vec{x}_G\|^2 - m_{tot} \|\vec{x}_Q - \vec{x}_G\|^2 \quad (5.333)$$

Per la differenza tra le matrici d'inerzia N-D si utilizza la già vista legge di trasporto:

$$\bar{\bar{I}}_P - \bar{\bar{I}}_Q = m_{tot}[\overline{(x_P - x_G)(x_P - x_G)^T}] - m_{tot}[\overline{(x_Q - x_G)(x_Q - x_G)^T}] \quad (5.334)$$

Risulta così:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{I}}_P - \bar{\bar{I}}_Q = m_{tot} \left(\|\vec{x}_P - \vec{x}_G\|^2 - \|\vec{x}_Q - \vec{x}_G\|^2 \right) \bar{\bar{I}}_{N \times N} - \\ m_{tot} \left(\overline{[(x_P - x_G)(x_P - x_G)^T]} - \overline{[(x_Q - x_G)(x_Q - x_G)^T]} \right) \end{aligned} \quad (5.335)$$

In forma più compatta:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{I}}_P - \bar{\bar{I}}_Q = m_{tot} \left(\|\Delta\vec{x}_{PG}\|^2 - \|\Delta\vec{x}_{QG}\|^2 \right) \bar{\bar{I}}_{N \times N} - \\ m_{tot} \left(\overline{[\Delta x_{PG} \Delta x_{PG}^T]} - \overline{[\Delta x_{QG} \Delta x_{QG}^T]} \right) \end{aligned} \quad (5.336)$$

Scegliendo come polo di riferimento il baricentro G, l'espressione si semplifica in:

$$\bar{\bar{I}}_P = \bar{\bar{I}}_G + m_{tot} \|\vec{x}_P - \vec{x}_G\|^2 \bar{\bar{I}}_{N \times N} - m_{tot} \overline{[(x_P - x_G)(x_P - x_G)^T]} \quad (5.337)$$

Queste sono dunque le 'leggi di trasporto' che consentono di calcolare una matrice d'inerzia a seguito di una traslazione del polo di riferimento. Nella sezione seguente vedrà la *legge dei tensori doppi*, che permette di determinare gli elementi di una matrice, non solo d'inerzia, a seguito di una rotazione.

5.3.4 Passaggio da un sist. di rif. all'altro - legge dei tensori doppi

Detti A e B due sistemi di riferimento legati da una trasformazione rigida, per essi varrà:

$$\Delta\vec{x}_B = R_{BA} \Delta\vec{x}_A \quad (5.338)$$

dove R_{BA} è la matrice di rotazione, e $\Delta\vec{x}_A$ e $\Delta\vec{x}_B$ sono i vettori-distanza tra due punti qualsiasi, espressi rispettivamente nel sist. di rif. A e nel sist. di rif. B . Dato allora un dominio Ω_x , i *relativi* momenti angolari $\bar{\bar{\Gamma}}$, di forza $\bar{\bar{M}}$ e le *relative* matrici d'inerzia N-D $\bar{\bar{I}}$ calcolati nei due sistemi di riferimento saranno legati dalla *legge dei tensori doppi*:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_{Br} = R_{BA} \bar{\bar{\Gamma}}_A R_{BA}^T \quad (5.339)$$

$$\bar{\bar{M}}_{Br} = R_{BA} \bar{\bar{M}}_A R_{BA}^T \quad (5.340)$$

$$\bar{\bar{I}}_B = R_{BA} \bar{\bar{I}}_A R_{BA}^T \quad (5.341)$$

dove $\bar{\bar{\Gamma}}_{Br}$ e $\bar{\bar{M}}_{Br}$ sono i momenti *relativi* nel sist. di rif. B e in generale:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_B \neq \bar{\bar{\Gamma}}_{Br} \quad (5.342)$$

$$\bar{\bar{M}}_B \neq \bar{\bar{M}}_{Br} \quad (5.343)$$

Verranno ora eseguite le dimostrazioni di tali enunciati.

Dimostrazione generale

In generale, qualsiasi matrice T_A in sist. di rif. A che trasformi un vettore $\Delta\vec{r}_A$ in $\Delta\vec{F}_A$ rispetta la legge dei tensori doppi. Infatti:

$$\begin{cases} \Delta\vec{r}_{Br} = R_{BA} \Delta\vec{r}_A \\ \Delta\vec{F}_{Br} = R_{BA} \Delta\vec{F}_A \\ \Delta\vec{F}_A = T_A \Delta\vec{r}_A \\ \Delta\vec{F}_{Br} = T_B \Delta\vec{r}_B \end{cases} \Rightarrow R_{BA} \Delta\vec{F}_A = R_{BA} T_A (R_{BA}^T R_{BA}) \Delta\vec{r}_A \Rightarrow$$

(5.344)

$$\Delta\vec{F}_{Br} = R_{BA} T_A R_{BA}^T \Delta\vec{r}_{Br} \Rightarrow$$

(5.345)

$$T_B = R_{BA} T_A R_{BA}^T \quad \text{C.V.D.}$$

(5.346)

Si noti che sia $\Delta\vec{r}_{Br}$ sia $\Delta\vec{F}_{Br}$ sono i vettori $\Delta\vec{r}_A$ e $\Delta\vec{F}_A$ visti nel sist. di rif. B in forma 'statica': se si trattasse di un braccio e di una forza, si tratterebbe quindi di grandezze *relative*, analoghe alle già viste velocità e accelerazioni relative:

$$\vec{v}_B \neq \vec{v}_r = R_{BA} \vec{v}_A \quad (5.347)$$

$$\vec{a}_B \neq \vec{a}_r = R_{BA} \vec{a}_A \quad (5.348)$$

In generale $\Delta\vec{r}_{Br}$ e $\Delta\vec{F}_{Br}$ sono quindi diversi da $\Delta\vec{r}_B$ e $\Delta\vec{F}_B$ che invece sono effettivamente braccio e forza visti nel sist. di rif. B. Ogni qualvolta nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro una grandezza dipende da una derivata temporale, si presentano dei termini di trascinamento e la legge dei tensori doppi va quindi adoperata con attenzione. Per come sono costruiti, i momenti originati dal prodotto vettore N-D sono in effetti delle matrici capaci di trasformare un vettore in un altro. Se dipendono dal tempo come accade per i momenti angolare e di forza, si può utilizzare la legge dei tensori doppi solo per calcolare la loro componente *relativa*.

Si veda ora una dimostrazione più dettagliata.

Dimostrazione per i momenti

Qualsiasi momento, sia esso angolare o di forza, per come è definito può essere espresso come un prodotto vettore N-D o come un somma di più di uno. Detti \vec{r}_A e \vec{s}_A due campi vettoriali nel sistema di riferimento A, il momento $\overline{\overline{M}}_A$ ad essi associato sul dominio Ω_x sarà dato da:

$$\overline{\overline{M}}_A = \int_{\Omega_x} \vec{r}_A \wedge \vec{s}_A d\Omega_x \quad (5.349)$$

I vettori *relativi* nel sist. di rif. B saranno calcolati nella solita forma:

$$\vec{r}_{Br} = R_{BA} \vec{r}_A \quad (5.350)$$

$$\vec{s}_{Br} = R_{BA} \vec{s}_A \quad (5.351)$$

Per le proprietà elementari del prodotto vettore vale:

$$\vec{r}_{Br} \wedge \vec{s}_{Br} = (R_{BA} \vec{r}_A) \wedge (R_{BA} \vec{s}_A) = R_{BA} (\vec{r}_A \wedge \vec{s}_A) R_{BA}^T \quad (5.352)$$

Moltiplicando per R_{BA} a destra e sinistra dell'integrale, si ottiene perciò:

$$R_{BA} \overline{\overline{M}}_A R_{BA}^T = R_{BA} \int_{\Omega_x} (\vec{r}_A \wedge \vec{s}_A) d\Omega_x R_{BA}^T \quad (5.353)$$

$$R_{BA} \overline{\overline{M}}_A R_{BA}^T = \int_{\Omega_x} R_{BA}^T (\vec{r}_A \wedge \vec{s}_A) R_{BA}^T d\Omega_x \quad (5.354)$$

$$R_{BA} \overline{\overline{M}}_A R_{BA}^T = \int_{\Omega_x} (\vec{r}_{Br} \wedge \vec{s}_{Br}) d\Omega_x \quad (5.355)$$

$$R_{BA} \overline{\overline{M}}_A R_{BA}^T = \overline{\overline{M}}_{Br} \quad (5.356)$$

$$\overline{\overline{M}}_{Br} = R_{BA} \overline{\overline{M}}_A R_{BA}^T \quad \text{C.V.D.} \quad (5.357)$$

Si ritrova così la legge dei tensori doppi.

Dimostrazione per le matrici d'inerzia

A differenza di quanto accade per i momenti angolari e di forza, le matrici d'inerzia non dipendono da velocità o accelerazioni, ma dalla posizione: non compare quindi alcuna derivata temporale nella loro definizione. Per tale ragione è possibile trasformare effettivamente una matrice $\overline{\overline{I}}$ da un sist. di rif. all'altro per mezzo della sola legge dei tensori doppi, a differenza di quanto avviene con i momenti angolari e di forza, per i quali si determinano solo le componenti *relative*. Si dimostri ora che, per le matrici d'inerzia N-D, vale la legge:

$$\overline{\overline{I}}_B = R_{BA} \overline{\overline{I}}_A R_{BA}^T \quad (5.358)$$

La dimostrazione è immediata, infatti:

$$\begin{cases} \Delta \vec{x}_B = R_{BA} \Delta \vec{x}_A \\ \overline{\overline{I}}_A = \int_{\Omega_x} \rho [\overline{\overline{\Delta x_A \Delta x_A^T}}] d\Omega_x \\ \overline{\overline{I}}_B = \int_{\Omega_x} \rho [\overline{\overline{\Delta x_B \Delta x_B^T}}] d\Omega_x \end{cases} \Rightarrow \quad (5.359)$$

$$\overline{\overline{\Delta x_B \Delta x_B^T}} = \overline{\overline{[(R_{BA} \Delta \vec{x}_A)(R_{BA} \Delta \vec{x}_A)^T]}} = R_{BA} \overline{\overline{\Delta x_A \Delta x_A^T}} R_{BA}^T \Rightarrow \quad (5.360)$$

$$\overline{\overline{I}}_B = \int_{\Omega_x} \rho \left(R_{BA} \overline{\overline{\Delta x_A \Delta x_A^T}} R_{BA}^T \right) d\Omega_x \quad (5.361)$$

$$\overline{\overline{I}}_B = R_{BA} \left(\int_{\Omega_x} \rho \overline{\overline{\Delta x_A \Delta x_A^T}} d\Omega_x \right) R_{BA}^T \quad (5.362)$$

$$\overline{\overline{I}}_B = R_{BA} \overline{\overline{I}}_A R_{BA}^T \quad \text{C.V.D.} \quad (5.363)$$

5.3.5 Matrice principale d'inerzia

Le matrici d'inerzia, siano esse espresse in notazione 3-D o N-D, sono simmetriche e perciò diagonalizzabili attraverso una rotazione. Detta R_{DA} la matrice associata

a tale trasformazione, si avrà nel caso N-D:

$$\bar{\mathbf{I}}_P = R_{DA}^T \bar{\mathbf{I}}_P R_{DA} \quad \text{con} \quad \bar{\mathbf{I}}_P = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \mathbf{I}_{ii} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.364)$$

Nel caso 3-D la formulazione è analoga. Se il polo di riferimento è il baricentro G , la matrice d'inerzia diagonale $\bar{\mathbf{I}}_G$ è detta *matrice principale d'inerzia*. La sua forma sarà sempre:

$$\bar{\mathbf{I}}_G = \int_{\Omega_x} \left(\rho \begin{bmatrix} \Delta x_1 \Delta x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta x_2 \Delta x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta x_N \Delta x_N \end{bmatrix} \right) d\Omega_x \quad (5.365)$$

Il sistema di riferimento D in cui si trova questa matrice è detto in maniera analoga 'principale d'inerzia'.

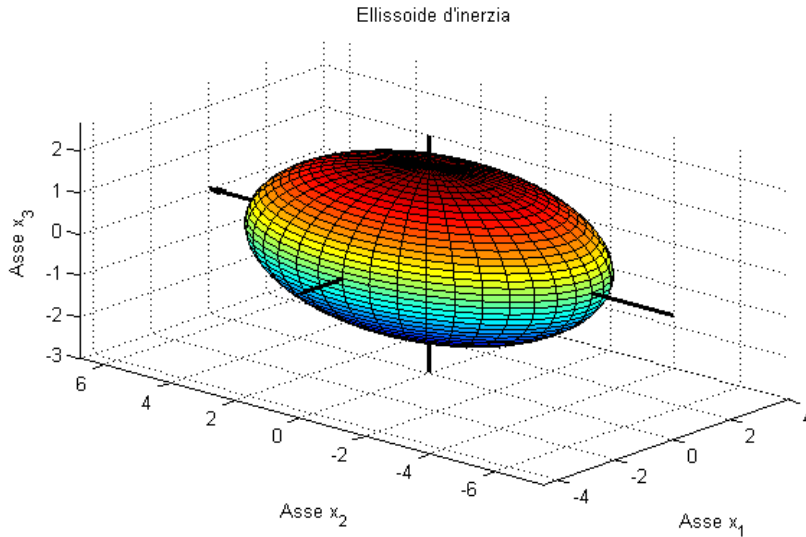


Figura 5.1: Ellissoide per una matrice principale d'inerzia. Gli assi dell'ellissoide coincidono con quelli del sistema di riferimento. La lunghezza dei semi-assi dipende dall'uso della notazione 3-D oppure di quella N-D

5.3.6 Momento d'inerzia rispetto ad un asse

Dato un punto \vec{x}_0 e un versore \vec{u} passante per esso, è possibile definire il momento d'inerzia I_{u_0} del dominio Ω_x rispetto a tale asse (\vec{x}_0, \vec{u}) .

Nel caso 3-D la definizione di momento d'inerzia I_{u_0} è la seguente:

$$I_{u_0} = \int_{\Omega_x} \left(\rho \|(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{u}\|^2 \right) d\Omega_x \quad (5.366)$$

L'interpretazione che se ne può dare è la seguente: detto \vec{x}_H il piede della perpendicolare di un punto \vec{x} sull'asse (\vec{x}_0, \vec{u}) , la distanza tra \vec{x} e l'asse è pari a:

$$\|\vec{x} - \vec{x}_H\| = \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \sin \theta \quad \text{con } (\vec{x}_H - \vec{x}_0) \perp (\vec{x} - \vec{x}_H) \quad \Rightarrow \quad (5.367)$$

$$\vec{x} - \vec{x}_H = \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} ((\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} \quad (5.368)$$

$$\vec{x} - \vec{x}_H = ((\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} \quad (5.369)$$

L'angolo θ è quello compreso tra l'asse e il vettore $(\vec{x} - \vec{x}_0)$. La definizione originaria del momento d'inerzia rispetto all'asse sarebbe infatti:

$$\mathcal{I}_{u_0} \triangleq \int_{\Omega_x} (\rho \|\vec{x} - \vec{x}_H\|^2) d\Omega_x \quad (5.370)$$

Poiché però, per le proprietà del prodotto vettore 3-D, si ha:

$$\|(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{u}\| = \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \sin \theta \quad (5.371)$$

è preferibile mantenere la prima definizione. Si esprima ora in forma più esplicita questo momento d'inerzia in funzione degli elementi della matrice d'inerzia $\overline{\overline{\mathcal{I}_0}}$ con notazione 3-D.

Posti per semplicità:

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (5.372)$$

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \quad (5.373)$$

svolgendo i conti si ottiene:

$$\begin{aligned} \|(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{u}\|^2 &= (y^2 + z^2) u_x^2 + (z^2 + x^2) u_y^2 + (x^2 + y^2) u_z^2 \\ &\quad - 2(xy)(u_x u_y) - 2(yz)(u_y u_z) - 2(zx)(u_z u_x) \end{aligned} \quad (5.374)$$

Integrando nella definizione di I_{u_0} , si giunge infine ad esprimerlo come:

$$\begin{aligned} I_{u_0} &= (\mathcal{I}_{xx} u_x^2 + \mathcal{I}_{yy} u_y^2 + \mathcal{I}_{zz} u_z^2) + \\ &\quad 2(\mathcal{I}_{xy} (u_x u_y) + \mathcal{I}_{yz} (u_y u_z) + \mathcal{I}_{zx} (u_z u_x)) \end{aligned} \quad (5.375)$$

Osservando con attenzione, si può notare che quest'equazione può essere riscritta in forma più compatta come:

$$I_{u_0} = \vec{u}^T \overline{\overline{\mathcal{I}_0}} \vec{u} \quad (5.376)$$

Si veda ora l'espressione del momento d'inerzia assiale I_{u_0} in notazione N-D. La componente perpendicolare di $(\vec{x} - \vec{x}_0)$ sull'asse \vec{u} può essere calcolata ricorrendo al prodotto vettore N-D nella forma:

$$\vec{x} - \vec{x}_H = \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} (\vec{u} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) \vec{u} \quad (5.377)$$

$$\vec{x} - \vec{x}_H = (\vec{u} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) \vec{u} \quad (5.378)$$

$$\Delta \vec{x}_H = (\vec{u} \wedge \Delta \vec{x}_0) \vec{u} \quad (5.379)$$

In realtà questo procedimento non è neanche necessario: è infatti più comodo scrivere direttamente:

$$\Delta \vec{x}_H = \Delta \vec{x}_0 - (\vec{u}^T \cdot \Delta \vec{x}_0) \vec{u} \quad (5.380)$$

Il quadrato della norma di $\Delta \vec{x}_H$ risulta semplicemente:

$$\|\Delta \vec{x}_H\|^2 = \|\Delta \vec{x}_0\|^2 \|\vec{u}\|^2 - (\vec{u}^T \cdot \Delta \vec{x}_0)^2 \quad (5.381)$$

$$\|\Delta \vec{x}_H\|^2 = \|\Delta \vec{x}_0\|^2 - (\vec{u}^T \cdot \Delta \vec{x}_0)(\Delta \vec{x}_0^T \cdot \vec{u}) \quad (5.382)$$

$$\|\Delta \vec{x}_H\|^2 = \|\Delta \vec{x}_0\|^2 - \vec{u}^T [\overline{\Delta x_0 \Delta x_0^T}] \vec{u} \quad (5.383)$$

Sostituendo questo risultato nella definizione di momento assiale, si avrà:

$$I_{u_0} \triangleq \int_{\Omega_x} \left(\rho \|\Delta x_H\|^2 \right) d\Omega_x \quad (5.384)$$

$$I_{u_0} = \int_{\Omega_x} \rho \left(\|\Delta x_0\|^2 - \vec{u}^T [\overline{\Delta x_0 \Delta x_0^T}] \vec{u} \right) d\Omega_x \quad (5.385)$$

$$I_{u_0} = \int_{\Omega_x} \rho \left(\|\Delta x_0\|^2 - \vec{u}^T [\overline{\Delta x_0 \Delta x_0^T}] \vec{u} \right) d\Omega_x \quad (5.386)$$

$$I_{u_0} = \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta x_0\|^2 d\Omega_x - \int_{\Omega_x} \rho \vec{u}^T [\overline{\Delta x_0 \Delta x_0^T}] \vec{u} d\Omega_x \quad (5.387)$$

$$I_{u_0} = I_0 - \vec{u}^T \left(\int_{\Omega_x} \rho [\overline{\Delta x_0 \Delta x_0^T}] d\Omega_x \right) \vec{u} \quad (5.388)$$

$$I_{u_0} = I_0 - \vec{u}^T \bar{\bar{I}}_0 \vec{u} \quad (5.389)$$

Si è così espresso il momento d'inerzia I_{u_0} rispetto all'asse (\vec{x}_0, \vec{u}) in funzione del momento polare I_0 e della matrice d'inerzia $\bar{\bar{I}}_0$ con notazione N-D.

5.4 Moto rotatorio del corpo rigido

Note la 2^A equazione cardinale del moto, che mette in relazione il momento angolare $\bar{\bar{\Gamma}}_0$ e il momento di forza $\bar{\bar{M}}_0$, e l'espressione per il momento angolare del corpo rigido, è possibile combinarle per legare il momento di forza all'inerzia e alla velocità angolare. Mettendo a sistema le due equazioni, si avrà:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_0}{dt} = \vec{Q} \wedge \vec{v}_0 + \bar{\bar{M}}_0 \\ \bar{\bar{\Gamma}}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 + \Omega \bar{\bar{I}}_0 - (\Omega \bar{\bar{I}}_0)^T \end{cases} \quad (5.390)$$

Si ricordi che, mentre la 2^A equazione cardinale ha validità generale, la seconda relazione è valida solo per corpi rigidi. Si calcoli ora la derivata temporale di $\bar{\bar{\Gamma}}_0$ espresso in funzione di Ω e $\bar{\bar{I}}_0$.

$$\frac{d\bar{\bar{\Gamma}}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 \right) + \frac{d}{dt} \left(\Omega \bar{\bar{I}}_0 - \Omega \bar{\bar{I}}_0 \right)^T \quad (5.391)$$

Il primo termine a destra dell'uguale diverrà:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(m_{tot} (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 \right) = \\ & m_{tot} \frac{d(\vec{x}_G - \vec{x}_0)}{dt} \wedge \vec{v}_0 + m_{tot} (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \\ & m_{tot} (\vec{v}_G - \vec{v}_0) \wedge \vec{v}_0 + m_{tot} (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \wedge \vec{a}_0 \end{aligned} \quad (5.392)$$

La derivata di $\Omega \bar{I}_0$ richiede qualche passaggio in più:

$$\frac{d}{dt} \left(\Omega \bar{I}_0 \right) = \dot{\Omega} \bar{I}_0 + \Omega \dot{\bar{I}}_0 \quad (5.393)$$

Poiché per un corpo rigido la matrice d'inerzia diagonale $\bar{\mathbf{I}}_0$ non varia nel tempo, essendo solidale con il sistema di assi del corpo stesso, sarà conveniente esprimere \bar{I}_0 in funzione di essa per mezzo della legge dei tensori doppi:

$$\bar{I}_0 = R_{BD} \bar{\mathbf{I}}_0 R_{BD}^T \quad (5.394)$$

$$\dot{\bar{I}}_0 = \frac{d}{dt} \left(R_{BD} \bar{\mathbf{I}}_0 R_{BD}^T \right) \quad (5.395)$$

$$\dot{\bar{I}}_0 = \frac{dR_{BD}}{dt} \left(\bar{\mathbf{I}}_0 R_{BD}^T \right) + R_{BD} \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{I}}_0 R_{BD}^T \right) \quad (5.396)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{I}}_0}{dt} = \bar{\mathbf{0}} \quad \text{per corpo rigido} \quad \Rightarrow \quad (5.397)$$

$$\dot{\bar{I}}_0 = \dot{R}_{BD} \bar{\mathbf{I}}_0 R_{BD}^T + R_{BD} \bar{\mathbf{I}}_0 \dot{R}_{BD}^T \quad (5.398)$$

La derivata temporale \dot{R}_{BD} della matrice di rotazione può essere espressa in funzione della velocità angolare come:

$$\dot{R}_{BD} = \Omega_{BD} R_{BD} \quad \Rightarrow \quad \dot{R}_{BD}^T = R_{BD}^T \Omega_{BD}^T \quad (5.399)$$

Sostituendo nell'equazione per $\dot{\bar{I}}_0$, si otterrà così:

$$\dot{\bar{I}}_0 = \Omega_{BD} R_{BD} \bar{\mathbf{I}}_0 R_{BD}^T + R_{BD} \bar{\mathbf{I}}_0 R_{BD}^T \Omega_{BD}^T \quad (5.400)$$

$$\dot{\bar{I}}_0 = \Omega_{BD} \bar{I}_0 + \bar{I}_0 \Omega_{BD}^T \quad (5.401)$$

$$\dot{\bar{I}}_0 = \Omega \bar{I}_0 + \bar{I}_0 \Omega^T \quad (5.402)$$

Si proceda ora con le ultime sostituzioni:

$$\frac{d}{dt} (\Omega \bar{I}_0) = \dot{\Omega} \bar{I}_0 + \Omega \dot{\bar{I}}_0 \quad (5.403)$$

$$\frac{d}{dt} (\Omega \bar{I}_0) = \dot{\Omega} \bar{I}_0 + \Omega (\dot{\bar{I}}_0 + \bar{I}_0 \Omega^T) \quad (5.404)$$

$$\frac{d}{dt} (\Omega \bar{I}_0) = \dot{\Omega} \bar{I}_0 + \Omega^2 \bar{I}_0 + \Omega \bar{I}_0 \Omega^T \quad (5.405)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Omega \bar{I}_0 - (\Omega \bar{I}_0)^T) = \\ (\dot{\Omega} \bar{I}_0 + \Omega^2 \bar{I}_0 + \Omega \bar{I}_0 \Omega^T) - (\dot{\Omega} \bar{I}_0 + \Omega^2 \bar{I}_0 + \Omega \bar{I}_0 \Omega^T)^T \end{aligned} \quad (5.406)$$

$$\frac{d}{dt} (\Omega \bar{I}_0 - (\Omega \bar{I}_0)^T) = (\dot{\Omega} \bar{I}_0 - (\dot{\Omega} \bar{I}_0)^T) + (\Omega^2 \bar{I}_0 - (\Omega^2 \bar{I}_0)^T) \quad (5.407)$$

$$\frac{d}{dt} (\Omega \bar{I}_0 - (\Omega \bar{I}_0)^T) = ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_0) - ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_0)^T \quad (5.408)$$

L'espressione complessiva della derivata del momento angolare sarà dunque:

$$\frac{d\bar{\bar{I}}_0}{dt} = \frac{d}{dt} (m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0) + \frac{d}{dt} (\Omega \bar{I}_0 - \Omega \bar{I}_0)^T \quad (5.409)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\bar{I}}_0}{dt} = (m_{tot}(\vec{v}_G - \vec{v}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0 + m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{a}_0) + \\ ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_0) - ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_0)^T \end{aligned} \quad (5.410)$$

Poiché:

$$m_{tot}(\vec{v}_G - \vec{v}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0 = m_{tot} \vec{v}_G \hat{\wedge} \vec{v}_0 = \vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_0 \quad (5.411)$$

$$m_{tot}(\vec{v}_G - \vec{v}_0) \hat{\wedge} \vec{v}_0 = \vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_0 \quad (5.412)$$

si può riscrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\bar{I}}_0}{dt} = (\vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_0 + m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{a}_0) + \\ ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_0) - ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_0)^T \end{aligned} \quad (5.413)$$

Unendo quest'equazione alla 2^A equazione cardinale del moto:

$$\frac{d\bar{\bar{I}}_0}{dt} = \vec{Q} \hat{\wedge} \vec{v}_0 + \bar{\bar{M}}_0 \quad (5.414)$$

si ottiene la relazione che lega il momento $\bar{\bar{M}}_0$ a inerzia \bar{I}_0 e velocità angolare Ω :

$$\bar{\bar{M}}_0 = m_{tot}(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \hat{\wedge} \vec{a}_0 + ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_0) - ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_0)^T \quad (5.415)$$

Polo baricentrico

Assumendo come polo di riferimento per momenti e matrici d'inerzia il baricentro G, le equazioni per il moto rotatorio del corpo rigido si semplificano notevolmente.

Si avrà infatti:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\Gamma}_G}{dt} = \bar{M}_G \\ \frac{d\bar{\Gamma}_G}{dt} = ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_G) - ((\dot{\Omega} + \Omega^2) \bar{I}_G)^T \end{cases} \quad (5.416)$$

Questo risultato è valido per i corpi rigidi ed espresso in notazione N-D. Utilizzando la classica notazione 3-D si consegue un'equazione analoga, anche se meno 'omogenea' dal punto di vista simbolico.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\Gamma}_G}{dt} = \vec{M}_G \\ \frac{d\vec{\Gamma}_G}{dt} = \bar{\mathcal{I}}_G \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\bar{\mathcal{I}}_G \vec{\omega}) \end{cases} \quad (5.417)$$

La dimostrazione che si darà qui è simile, come procedimento, a quella già vista in N-D. Ci si limiterà perciò a descrivere il caso di polo baricentrico, andando veloci su alcuni passaggi. Per fortuna, in questo caso specifico la dimostrazione può essere svolta per via simbolica, senza necessità di esplicitare tutte le coordinate come spesso accade in 3-D.

Dimostrazione:

$$\vec{\Gamma}_G = \bar{\mathcal{I}}_G \vec{\omega} \quad (5.418)$$

$$\dot{\vec{\Gamma}}_G = \bar{\mathcal{I}}_G \dot{\vec{\omega}} + \dot{\bar{\mathcal{I}}}_G \vec{\omega} \quad (5.419)$$

Senza stare a ridimostrarlo per esteso per mezzo della legge dei tensori doppi, la derivata della matrice d'inerzia è pari a:

$$\dot{\bar{\mathcal{I}}}_G = \Omega \bar{\mathcal{I}}_G + (\Omega \bar{\mathcal{I}}_G)^T \quad (5.420)$$

Poiché utilizzare la matrice Ω porterebbe ad una ... sgradevole disomogeneità, bisognerà esprimerla in funzione dello pseudo-vettore $\vec{\omega}$. Si avrà così:

$$\dot{\bar{\mathcal{I}}}_G = [\omega \wedge] \bar{\mathcal{I}}_G + ([\omega \wedge] \bar{\mathcal{I}}_G)^T \quad \Rightarrow \quad (5.421)$$

$$\dot{\vec{\Gamma}}_G = \bar{\mathcal{I}}_G \dot{\vec{\omega}} + ([\omega \wedge] \bar{\mathcal{I}}_G + ([\omega \wedge] \bar{\mathcal{I}}_G)^T) \vec{\omega} \quad (5.422)$$

$$\dot{\vec{\Gamma}}_G = \bar{\mathcal{I}}_G \dot{\vec{\omega}} + [\omega \wedge] \bar{\mathcal{I}}_G \vec{\omega} - (\bar{\mathcal{I}}_G [\omega \wedge]) \vec{\omega} \quad (5.423)$$

$$\dot{\vec{\Gamma}}_G = \bar{\mathcal{I}}_G \dot{\vec{\omega}} + [\omega \wedge] (\bar{\mathcal{I}}_G \vec{\omega}) - \bar{\mathcal{I}}_G ([\omega \wedge] \vec{\omega}) \quad (5.424)$$

Poiché, come già dimostrato (vedi 4.7.8 nella pagina 87), si ha $[\omega \wedge] \vec{\omega} = \vec{0}$, l'equazione si semplifica in:

$$\dot{\vec{\Gamma}}_G = \bar{\mathcal{I}}_G \dot{\vec{\omega}} + [\omega \wedge] (\bar{\mathcal{I}}_G \vec{\omega}) \quad (5.425)$$

$$\frac{d\vec{\Gamma}_G}{dt} = \bar{\mathcal{I}}_G \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\bar{\mathcal{I}}_G \vec{\omega}) \quad \text{C.V.D.} \quad (5.426)$$

5.5 Energia cinetica

In questa sezione metteranno a confronto le equazioni dell'energia cinetica espresse in notazione 3-D ed N-D.

5.5.1 Definizione di energia cinetica

Dato un dominio Ω_x di punti materiali in certo un sistema di riferimento, si definisce la sua *energia cinetica* E_K come:

$$E_K \triangleq \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{v}\|^2 d\Omega_x \quad (5.427)$$

5.5.2 Componenti dell'energia cinetica

Si veda ora come scomporre E_k in forma più semplice. Si consideri allora il campo di velocità $\vec{v}(\vec{x})$ come costruito dalla somma di una componente \vec{v}_0 , ad esempio la velocità di traslazione del sist. di rif. del corpo, e di una $\Delta\vec{v}_0$. Si avrà allora:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + (\vec{v} - \vec{v}_0) = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}_0 \quad (5.428)$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}_0\|^2 = (\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}_0)^T \cdot (\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}_0) \quad (5.429)$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}_0\|^2 + 2(\vec{v}_0^T \cdot \Delta\vec{v}_0) + \|\Delta\vec{v}_0\|^2 \quad \Rightarrow \quad (5.430)$$

$$E_K = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \left(\|\vec{v}_0\|^2 + 2(\vec{v}_0^T \cdot \Delta\vec{v}_0) + \|\Delta\vec{v}_0\|^2 \right) d\Omega_x \quad (5.431)$$

$$E_K = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{v}_0\|^2 d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \rho (\vec{v}_0^T \cdot \Delta\vec{v}_0) d\Omega_x + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta\vec{v}_0\|^2 d\Omega_x \quad (5.432)$$

Poiché \vec{v}_0 non dipende da \vec{x} , può essere portato all'esterno degli integrali, ottenendo così:

$$E_K = \frac{1}{2} \|\vec{v}_0\|^2 \int_{\Omega_x} \rho d\Omega_x + \vec{v}_0^T \cdot \int_{\Omega_x} \rho \Delta\vec{v}_0 d\Omega_x + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta\vec{v}_0\|^2 d\Omega_x \quad (5.433)$$

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_0\|^2 + \vec{v}_0^T \cdot \int_{\Omega_x} \rho \Delta\vec{v}_0 d\Omega_x + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta\vec{v}_0\|^2 d\Omega_x \quad (5.434)$$

Si è così scomposta l'energia cinetica in tre termini, il primo dei quali ha forma puramente traslatoria, il terzo dipende solo dalla differenza di velocità e il secondo è un termine 'misto' o 'mutuo', che dipende sia da \vec{v}_0 sia dal campo di velocità $\vec{v}(\vec{x})$.

Si noti che finora non si è avanzata alcuna ipotesi sul fatto che il corpo in esame sia rigido, e anzi non si è nemmeno postulato che si tratti di un singolo corpo piuttosto che di un insieme. Anche se si può identificare una componente *traslatoria* dell'energia cinetica, non si può quindi a priori distinguere quella *rotatoria* da un'eventuale componente legata all'energia cinetica di *deformazione*. L'ipotesi che il corpo sia rigido verrà quindi avanzata in un secondo tempo.

Si veda ora il Teorema di König, che consente di semplificare la scomposizione dell'energia cinetica

5.5.3 Teorema di König

Nota l'energia cinetica E_K associata ad un sistema Ω_x , essa può essere scomposta in due contributi, uno traslatorio dipendente solo dalla velocità \vec{v}_G del baricentro e uno dovuto alla sola differenza tra la velocità $\vec{v}(\vec{x})$ e la velocità del baricentro stesso:

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{v} - \vec{v}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.435)$$

Dimostrazione: riprendendo l'equazione (5.434) per la scomposizione dell'energia cinetica, si sostituisca il baricentro G al posto del polo 0.

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 + \vec{v}_G^T \int_{\Omega_x} \rho \Delta \vec{v}_G d\Omega_x + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta \vec{v}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.436)$$

Rimane solo da dimostrare che il termine 'mutuo' è nullo. Per farlo, basta considerare il solo integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x} \rho \Delta \vec{v}_G d\Omega_x &= \int_{\Omega_x} \rho (\vec{v} - \vec{v}_G) d\Omega_x = \\ \int_{\Omega_x} \rho \vec{v} d\Omega_x - \vec{v}_G \int_{\Omega_x} \rho d\Omega_x &= \int_{\Omega_x} \rho \Delta \vec{v}_G d\Omega_x = \vec{Q} - m_{tot} \vec{v}_G = \vec{0} \end{aligned} \quad (5.437)$$

Così:

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta \vec{v}_G\|^2 d\Omega_x \quad \text{C.V.D.} \quad (5.438)$$

Normalmente la componente:

$$E_{K_{TRASL}} = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 \quad (5.439)$$

è detta *energia cinetica traslatoria* per antonomasia, dato per il calcolo del moto conviene porre proprio nel baricentro l'origine del sistema di assi solidale con un corpo.

Da qui in avanti si utilizzerà sempre il baricentro G come polo di riferimento al fine di semplificare l'esposizione senza pur perdere di generalità.

5.5.4 Energia cinetica rotatoria - caso 3-D

Se si considera il moto di un corpo rigido, è possibile esprimere la differenza di velocità tra due punti qualsiasi di esso per mezzo della loro differenza di posizione e della velocità angolare. Nel caso si utilizzi la notazione 3-D, si avrà quindi:

$$\vec{v} - \vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_G) \quad (5.440)$$

$$\Delta \vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \Delta \vec{x}_G \quad (5.441)$$

L'energia cinetica di un corpo sarà allora effettivamente scomponibile in una componente traslatoria e in una puramente rotatoria:

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta \vec{v}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.442)$$

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{\omega} \wedge \Delta \vec{x}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.443)$$

$$\begin{cases} E_{K_{TRASL}} := \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 \\ E_{K_{ROT}} := \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{\omega} \wedge \Delta \vec{x}_G\|^2 d\Omega_x \end{cases} \Rightarrow E_K = E_{K_{TRASL}} + E_{K_{ROT}} \quad (5.444)$$

Si analizzi ora l'energia cinetica rotatoria $E_{K_{ROT}}$. Definendo il versore \vec{u}_ω associato all'asse d'istantanea rotazione, si potrà scrivere:

$$\vec{u}_\omega := \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} \quad (5.445)$$

$$\|\vec{\omega} \wedge \Delta \vec{x}_G\|^2 = \|\vec{\omega}\|^2 \left\| \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} \wedge \Delta \vec{x}_G \right\|^2 = \|\vec{\omega}\|^2 \|\vec{u}_\omega \wedge \Delta \vec{x}_G\|^2 \quad (5.446)$$

L'espressione dell'energia di rotazione diverrà allora:

$$E_{K_{ROT}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{\omega} \wedge \Delta \vec{x}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.447)$$

$$E_{K_{ROT}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{\omega}\|^2 \|\vec{u}_\omega \wedge \Delta \vec{x}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.448)$$

$$E_{K_{ROT}} = \|\vec{\omega}\|^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\vec{u}_\omega \wedge \Delta \vec{x}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.449)$$

$$(5.450)$$

Ricordando l'espressione del momento d'inerzia attorno ad un asse (vedi la sezione 5.3.6 nella pagina 135), si avrà:

$$I_{\vec{u}_\omega G} = \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta \vec{x}_G \wedge \vec{u}_\omega\|^2 d\Omega_x \quad (5.451)$$

$$E_{K_{ROT}} = \frac{1}{2} I_{\vec{u}_\omega G} \|\vec{\omega}\|^2 \quad (5.452)$$

Come già visto sempre alla sezione 5.3.6, il momento d'inerzia attorno ad un asse può essere calcolato dalla matrice d'inerzia 3-D come:

$$I_{u0} = \vec{u}^T \bar{\bar{I}}_0 \vec{u}^T \quad (5.453)$$

L'energia cinetica rotatoria potrà allora essere espressa come:

$$E_{K_{ROT}} = \frac{1}{2} \left(\vec{u}^T \bar{\bar{I}}_0 \vec{u}^T \right) \|\vec{\omega}\|^2 \quad (5.454)$$

$$E_{K_{ROT}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \bar{\bar{I}}_0 \vec{\omega} \quad (5.455)$$

In conclusione, in 3-D l'energia cinetica E_K per un corpo rigido sarà pari:

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \bar{I}_0 \vec{\omega} \quad (5.456)$$

Bisogna riconoscere che quest'equazione è dotata di una certa eleganza, nella sua semplicità. In N-D la sua corrispondente è più oggettivamente più complicata, ma non per via della notazione, bensì perché solo in 3-D è possibile associare un unico asse ad ogni rotazione! Il versore \vec{u}_ω infatti, per come è stato costruito, è pur sempre uno *pseudo-versore* e nel momento in cui si cambi numero di dimensioni è insufficiente per descrivere un atto di moto rotatorio. In N-D un corpo rigido può ruotare contemporaneamente attorno a più assi e la descrizione delle relative energie cinetiche risulta quindi più complessa, a prescindere dalla notazione utilizzata.

5.5.5 Energia cinetica rotatoria - caso N-D

L'equazione per la velocità del corpo rigido può essere scritta in notazione N-D come:

$$\vec{v} - \vec{v}_G = \Omega (\vec{x} - \vec{x}_G) \quad (5.457)$$

$$\Delta \vec{v}_G = \Omega \Delta \vec{x}_G \quad (5.458)$$

L'energia cinetica del corpo sarà allora effettivamente scomponibile in una componente traslatoria e in una puramente rotatoria, così come accade in 3-D:

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Delta \vec{v}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.459)$$

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Omega \Delta \vec{x}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.460)$$

$$\begin{cases} E_{K_{TRASL}} := \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 \\ E_{K_{ROT}} := \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Omega \Delta \vec{x}_G\|^2 d\Omega_x \end{cases} \Rightarrow E_K = E_{K_{TRASL}} + E_{K_{ROT}} \quad (5.461)$$

Analizzando l'energia cinetica rotatoria $E_{K_{ROT}}$, si può semplificare la norma all'interno dell'integrale come segue:

$$\|\Omega \Delta \vec{x}_G\|^2 = (\Omega \Delta \vec{x}_G)^T \cdot (\Omega \Delta \vec{x}_G) \quad (5.462)$$

$$\|\Omega \Delta \vec{x}_G\|^2 = \Delta \vec{x}_G^T (\Omega^T \Omega) \Delta \vec{x}_G \quad (5.463)$$

Ricordando le proprietà del prodotto diadico e contrazione e che Ω è antisimmetrica, si può scrivere:

$$\|\Omega \Delta \vec{x}_G\|^2 = \Delta \vec{x}_G^T (\Omega^T \Omega) \Delta \vec{x}_G \quad (5.464)$$

$$\|\Omega \Delta \vec{x}_G\|^2 = -\Delta \vec{x}_G^T \Omega^2 \Delta \vec{x}_G \quad (5.465)$$

$$\|\Omega \Delta \vec{x}_G\|^2 = -\Omega^2 : \overline{[\Delta x_G \Delta x_G^T]} \quad (5.466)$$

Sostituendo quest'equazione nell'espressione dell'energia rotatoria, si otterrà:

$$E_{K_{ROT}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \|\Omega \Delta \vec{x}_G\|^2 d\Omega_x \quad (5.467)$$

$$E_{K_{ROT}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \rho \left(-\Omega^2 : \overline{[\Delta x_G \Delta x_G^T]} \right) d\Omega_x \quad (5.468)$$

$$E_{K_{ROT}} = -\frac{1}{2} \Omega^2 : \int_{\Omega_x} \rho \overline{[\Delta x_G \Delta x_G^T]} d\Omega_x \quad (5.469)$$

$$E_{K_{ROT}} = -\frac{1}{2} \Omega^2 : \bar{I}_G \quad (5.470)$$

E' ora possibile riscrivere l'equazione dell'energia cinetica in completa notazione N-D:

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 : \bar{I}_G \quad (5.471)$$

Il fatto che compaia il segno $-$ di fronte al quadrato di una matrice in un'energia non deve stupire: esistono infatti matrici antisimmetriche che sotto diversi aspetti sono simili all'unità immaginaria. Posta ad esempio:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.472)$$

si verifica immediatamente che:

$$\Omega^H \Omega = \bar{I}_{2 \times 2} \quad \text{matrice unitaria} \quad (5.473)$$

$$\Omega^2 = -\bar{I}_{2 \times 2} \quad \text{così come: } i^2 = -1 \quad (5.474)$$

In particolare, ogni quaternioni \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} può essere associato ad una matrice antisimmetrica reale e unitaria in 4-D. L'argomento richiederebbe una trattazione approfondita: quest'esempio serve solo a mostrare che l'energia cinetica rotatoria è sempre positiva - in ogni caso, per come è definita - anche se nella sua espressione compare il segno $-$. Volendo l'equazione per l'energia può essere riscritta come:

$$E_K = \frac{1}{2} m_{tot} \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} (\Omega^T \Omega) : \bar{I}_G \quad (5.475)$$

dove non compare alcun segno negativo.

Capitolo 6

Il rotore in 3-D

E' quasi come se temessimo che, non appena provassimo a definire un “vortice”, l'intero concetto svanirebbe nel nulla

Peter A. Davidson, *Turbulence: an introduction for scientists and engineers*

In questo capitolo si mostreranno le definizioni dei principali operatori differenziali adoperati nel calcolo vettoriale e le loro proprietà. Particolare attenzione verrà prestata al rotore, operatore costruito in maniera analoga al prodotto vettore e, come quest'ultimo, utilizzato usualmente solo in 3-D. Come nei capitoli precedenti, si suppone che il lettore abbia già una certa familiarità con buona parte dei concetti che si vanno ad esporre; in particolare si darà qui per scontata la conoscenza del calcolo differenziale al livello di un corso di Analisi Matematica II, che in genere si segue al 2° anno di Ingegneria. Si tenderà quindi alla sintesi degli argomenti e a limitare gli esempi laddove non siano strettamente necessari. In generale, tutte le derivate e i gradienti saranno sempre intesi *nel senso delle distribuzioni*: in pratica non si porrà alcun restringimento sul fatto che funzioni, campi vettoriali e loro derivate debbano continue oppure no sul dominio.

6.1 Operatori differenziali: una panoramica

In questa sezione si mostreranno alcuni degli operatori differenziali più utilizzati in ambito fisico e ingegneristico, tra i quali il *gradiente* e la *divergenza*. Il *rotore* verrà trattato in un secondo momento date le sue particolarità, dato che a differenza dei due precedenti non si estende immediatamente in N-D

6.1.1 L'operatore nabla: ∇

Nell'analisi differenziale viene spesso utilizzato l'operatore ‘nabla’ o ‘del’, indicato col simbolo ∇ . Esso fu introdotto da Hamilton nel 1837 contemporaneamente allo sviluppo dei quaternioni e in seguito diffuso grazie grazie all'opera di Tait. Il nome ‘nabla’ deriva dal greco e indica l'arpa ebraica, la cui forma ricorda appunto il simbolo ∇ .

In un generico spazio N-D, l'operatore 'nabla' viene definito in forma cartesiana come:

$$\vec{\nabla} \triangleq \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2}; \quad \cdots; \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_n} \right] \quad (6.1)$$

L'operatore ∇ è uno strumento simbolico utile nella differenziazione dei campi sia scalari che vettoriali e garantisce una certa compattezza notazionale. Sebbene sia costruito in maniera simile ad un vettore con N elementi e, come in questo testo, sia talvolta soprallineato da una freccia, 'nabla' non è considerato un vettore vero e proprio ma, più correttamente, un operatore. Come si vedrà, a livello simbolico può però essere trattato molto spesso come un vettore e risulta così di facile utilizzo. Applicando ∇ ad uno campo scalare $v(\vec{x}) \in C$, se ne ottiene il gradiente trasposto:

$$\vec{\nabla} v = \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial v}{\partial x_2}; \quad \cdots; \quad \frac{\partial v}{\partial x_n} \right] \quad (6.2)$$

Nonostante questo vantaggio, la natura differenziale di 'nabla' può portare a risultati ed identità diverse da quelle algebriche, perciò è bene ricordarsi che $\vec{\nabla}$ è un vettore simbolico e non un vero vettore.

6.1.2 Il gradiente

Con il termine 'gradiente' si intende, in analisi differenziale, un operatore che consente di determinare quanto rapidamente varia un campo, scalare o vettoriale, nei dintorni di un punto in una certa direzione.

Sia dato dominio Ω_x in N-D tale che $\vec{x} \in \Omega_x \subseteq \mathbb{R}^{N \times 1}$ e sia $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$ un campo vettoriale $\vec{v} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ definito su tale dominio. Si voglia determinare come varia $\vec{v}(\vec{x})$ a seguito di uno spostamento infinitesimo $d\vec{x}$. La variazione $d\vec{v}$ sarà data da:

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_N} dx_N \quad (6.3)$$

In forma più compatta, la stessa equazione può essere riscritta come:

$$d\vec{v} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} dx_j \quad (6.4)$$

E' ora possibile definire il gradiente $\text{grad } \vec{v}$ della funzione $\vec{v}(\vec{x})$:

$$\text{grad } \vec{v}(\vec{x}) \triangleq \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \quad \text{con:} \quad d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} d\vec{x} \quad (6.5)$$

Per come è stato definito, il gradiente di un campo vettoriale è un tensore di ordine 2, servono quindi 2 indici per identificarne un elemento. Si ha così:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \quad \text{con:} \quad \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]_{ij} = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] (i, j) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ \forall i \in \{1; 2; \dots; M\}, \quad \forall j \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (6.6)$$

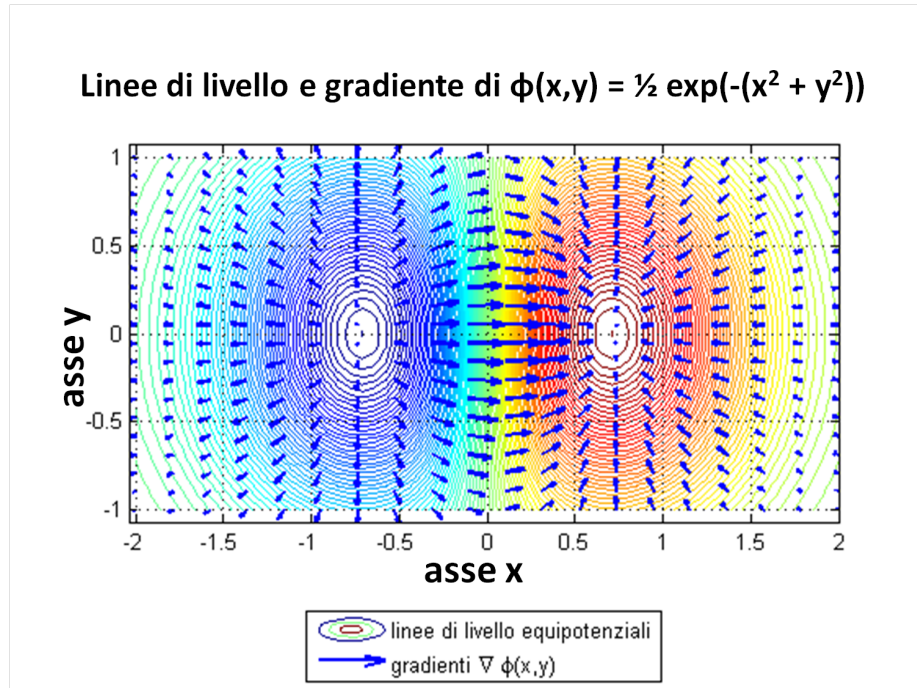


Figura 6.1: Linee di livello e gradienti di un campo scalare ϕ definito su un dominio 2-D

In forma più esplicita:

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v_N}{\partial x_1} & \frac{\partial v_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

In altre parole, il gradiente in uno spazio N -D di un vettore con M elementi può essere trattato come una matrice $M \times N$, suscettibile però di variare sul dominio.

Si veda ora il caso particolare di gradiente di uno scalare.

Gradiente di un campo scalare

Per definire e illustrare il concetto di gradiente normalmente si preferisce partire da un caso semplice, ovvero l'introduzione del gradiente di un campo scalare $\phi(\vec{x})$. Uno scalare può essere considerato come un vettore di dimensioni unitarie ($\dim(\vec{\phi}) = 1$), perciò, applicando la definizione, il suo gradiente sarà:

$$\text{grad } \phi(\vec{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \quad \text{con:} \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} d\vec{x} \quad (6.8)$$

In forma estesa, il gradiente di uno scalare risulta essere un vettore *orizzontale*:

$$\text{grad } \phi(\vec{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \dots; \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \right] \quad (6.9)$$

Tale precisazione è necessaria per mantenere coerenza con l'algebra delle matrici, dato che il vettore $d\vec{x}$ è verticale e, moltiplicato a sinistra per il gradiente $\text{grad } \phi(\vec{x})$, deve produrre uno scalare.

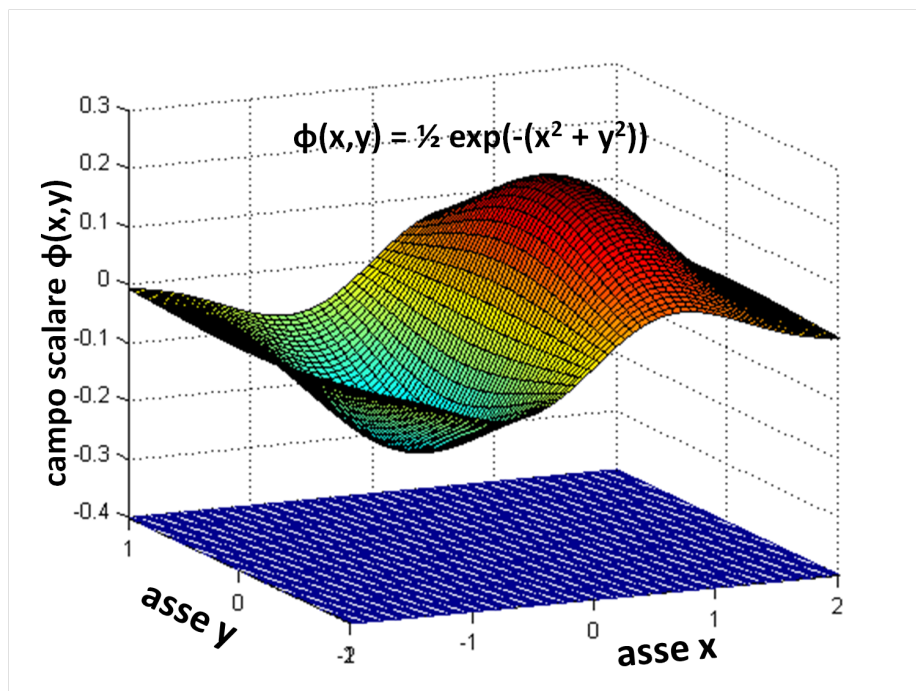


Figura 6.2: Esempio di campo scalare ϕ definito su un dominio 2-D

Alcune volte può essere però più comodo considerare il gradiente come un vettore verticale e per lo scopo si può ricorrere all'operatore nabla $\vec{\nabla}$ applicato al campo scalare in esame:

$$\vec{\nabla} \phi = \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1}; \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_n} \right] \phi = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}; \frac{\partial \phi}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_N} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Il gradiente espresso con il simbolo $\vec{\nabla}$ è quindi il trasposto del gradiente espresso nella forma frazionaria $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \vec{x}}$:

$$\vec{\nabla} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^T \quad (6.11)$$

Notazioni per il gradiente

L'operatore di gradiente viene indicato in maniera differente a seconda degli autori, sia che esso sia applicato ad un campo scalare oppure ad uno vettoriale. Le notazioni più diffuse sono:

- $\text{grad } \vec{v}$, simile ad una forma verbale.
- $\nabla \mathbf{v}$ o, più raramente, $\mathbf{v}\nabla$
- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}}$ o $\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]$

Di questi formalismi il primo è quello che fornisce meno indizi sull'uso degli indici per eventuali sommatorie e, in pratica, non esplicita la natura del gradiente né in forma matriciale né vettoriale. Le notazioni che coinvolgono l'operatore ∇ risultano di facile uso quando si calcoli il gradiente di un campo scalare, ma possono portare rapidamente a confusione nel momento in cui lo si applichi ad un campo vettoriale. Tra gli errori più classici compare ad esempio lo scambio degli indici nelle sommatorie:

$$(\nabla \mathbf{v})\mathbf{c} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial \vec{x}} c_i!! \quad (6.12)$$

Volendo si potrebbe esprimere il gradiente in una forma matriciale coerente utilizzando il prodotto diadico, infatti:

$$[\overline{v\nabla^T}]_{ij} = v_i \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \Rightarrow \quad \overline{[v\nabla^T]} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \quad (6.13)$$

Anche questo formalismo porta però con sé degli inconvenienti, dato che a differenza di quando accade per il prodotto diadico, in generale si ha:

$$[\overline{v\nabla^T}] \vec{c} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} c_j \neq \vec{v}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{c}) \quad (6.14)$$

Sembra quindi che, tra tutte, solo la notazione frazionaria $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}}$ garantisca una coerenza abbastanza . . . ferrea con l'algebra delle matrici e rammenti la natura differenziale del gradiente. Dove non diversamente specificato, si utilizzerà quindi questo formalismo, riservando l'uso dell'operatore ∇ per altre necessità.

Campo a potenziale

Un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$, definito su un dominio Ω_x , è detto *campo a potenziale* o *campo dotato di potenziale* se esiste un campo scalare $\phi(\vec{x})$ definito su Ω_x tale che:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega_x \quad (6.15)$$

Lo scalare ϕ viene chiamato *potenziale*.

Come corollario del *Teorema di Stokes per il rotore* si dimostra che, se un campo è a potenziale, allora è anche *irrotazionale*. La dimostrazione di quest'equivalenza verrà fornita più avanti, al paragrafo 8.8.2 nella pagina 228.

Identità per il gradiente

Si riportano qui, senza dimostrarle, le principali identità differenziali in cui è coinvolto il solo gradiente.

- Proprietà distributiva

$$\left[\frac{\partial(\vec{a} + \vec{b})}{\partial \vec{x}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \quad (6.16)$$

- Gradiente di campo scalare - uso dell'operatore nabla

$$\vec{\nabla} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right)^T \quad (6.17)$$

- Gradiente di prodotto di scalari

$$\vec{\nabla}(\phi \psi) = \psi(\vec{\nabla} \phi) + \phi(\vec{\nabla} \psi) \quad (6.18)$$

- Gradiente di rapporto tra scalari

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\phi}{\psi} \right) = \frac{1}{\psi}(\vec{\nabla} \phi) - \frac{\phi}{\psi^2}(\vec{\nabla} \psi) \quad (6.19)$$

- Gradiente della norma di un vettore

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 \right) = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \vec{v} \quad (6.20)$$

- Gradiente di vettore moltiplicato per scalare

$$\left[\frac{\partial(\phi \vec{v})}{\partial \vec{x}} \right] = [\overline{\overline{\nabla \phi^T}}] + \phi \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \quad (6.21)$$

- Prodotto tra un gradiente e un vettore

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{c} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} c_j \quad (6.22)$$

- Gradiente di prodotto scalare tra vettori

$$\vec{\nabla}(\vec{a}^T \cdot \vec{b}) = \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \vec{b} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \vec{a} \quad (6.23)$$

- Gradiente di un tensore di ordine 2

$$\left[\frac{\partial \overline{\overline{A}}}{\partial \vec{x}} \right]_{ijk} = \left[\frac{\partial \overline{\overline{A}}}{\partial \vec{x}} \right] (i, j, k) = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} = A_{ij/k} \quad (6.24)$$

- Prodotti tra gradiente di tensore e vettore

$$\left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}} \right]_{ijk} \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{\dim(\vec{v})} \frac{\partial \bar{A}(i, :)}{\partial \bar{x}} v_i \quad (6.25)$$

$$\left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}} \right]_{ijk} \cdot \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{\dim(\vec{v})} \frac{\partial \bar{A}(:, j)}{\partial \bar{x}} v_j \quad (6.26)$$

$$\left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}} \right]_{ijk} \cdot \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{\dim(\vec{v})} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_k} v_k \quad (6.27)$$

6.1.3 La divergenza di un campo vettoriale

Se un campo vettoriale è definito su uno spazio N-D ed esso stesso è costituito da vettori $\vec{v}(\vec{x})$ di dimensione N, allora i vettori \vec{v} e \vec{x} hanno pari dimensioni e il gradiente di \vec{v} assume la forma di una matrice quadrata.

$$\dim(\vec{v}) = \dim(\vec{x}) = N \quad \Rightarrow \quad \dim \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \right) = N \times N \quad (6.28)$$

In questo caso è possibile definire lo scalare *divergenza di \vec{v}* , indicato con $\text{div}(\vec{v})$, come:

$$\text{div}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (6.29)$$

ovvero:

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_N}{\partial x_N} = \text{tr} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \right) \quad (6.30)$$

Ricorrendo all'operatore ∇ , si può scrivere semplicemente:

$$\text{div}(\vec{v}) \triangleq \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (6.31)$$

Interpretazione della divergenza

La divergenza di un campo, calcolata in un punto, può essere considerata una misura della tendenza del campo ad 'aprirsi' o 'divergere' in quel punto. Se per esempio si è in presenza di una *sorgente* di linee di campo, la divergenza sarà positiva, mentre se si è in presenza di un *pozzo* di linee, la divergenza sarà negativa. Il valore dell'"allargamento" del campo vettoriale può essere misurato come il flusso uscente da una piccola superficie attorno ad un punto: in pratica, la divergenza $\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}$ è proprio il limite del *flusso uscente per unità di volume* attorno al punto stesso.

Un'altra definizione di divergenza che si può incontrare abbastanza spesso è, non a caso, basata proprio su un'operazione di limite di flusso attorno ad un punto:

$$\text{div}(\vec{v})|_{\vec{x}_0} = \lim_{V(\Omega_x) \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \oint_{\partial \Omega_x} \vec{n}^T \cdot \vec{v} dS_x \right) \quad (6.32)$$

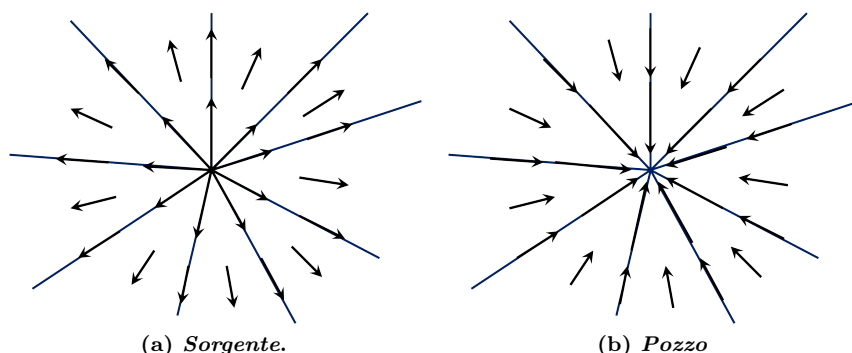


Figura 6.3: Esempio di linee di campo convergenti e divergenti da un punto

dove \vec{x}_0 è il punto su cui collapsa il dominio Ω_x , V è il suo volume, $\partial\Omega_x$ il contorno che lo racchiude e \vec{n} la normale a tale superficie, per convenzione uscente.

In realtà questa, più che una definizione matematica, è una formulazione ‘fisica’ di divergenza, capace di darne una certa interpretazione.

In questa sede si manterrà la definizione in forma differenziale, sia perché più semplice, sia perché l’equivalente formulazione integrale può essere dimostrata attraverso il *Teorema di Gauss per la divergenza*.

Campo solenoidale

Sempre ricorrendo all’interpretazione fisica, un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$ la cui divergenza sia nulla in ogni punto è detto *incomprimibile* o, più comunemente, *solenoidale*.

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v}(\vec{x}) \text{ su } \Omega_x \quad \text{campo solenoidale} \quad (6.33)$$

Divergenza di un tensore

In fisica può spesso capitare che sia necessario calcolare la divergenza di più campi vettoriali uniti in un unico tensore di ordine 2. La divergenza del tensore degli sforzi $\bar{\sigma}$ può però essere espressa in maniera molto semplice come:

$$\text{div}(\bar{\sigma})(i) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^N \sigma_{ij/j} \quad (6.34)$$

In forma più compatta, ricorrendo all’operatore $\vec{\nabla}$, si può scrivere:

$$\text{div}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \quad (6.35)$$

Si vede come in questo caso $\vec{\nabla}$ svolga effettivamente la parte di un vettore e come la stessa divergenza si trasformi, da scalare, in vettore.

Identità per la divergenza

Si riportano qui, senza dimostrarle, le principali identità differenziali in cui è coinvolta la sola divergenza.

- Proprietà distributiva per nabla

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla}^T \cdot \vec{a} + \vec{\nabla}^T \cdot \vec{b} \quad (6.36)$$

- Divergenza di vettore moltiplicato per scalare

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\phi \vec{a}) = (\vec{\nabla} \phi)^T \cdot \vec{a} + \phi (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{a}) \quad (6.37)$$

- Divergenza di matrice moltiplicata per scalare

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\phi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \phi)^T \cdot \vec{A} + \phi (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{A}) \quad (6.38)$$

$$(\phi \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \phi) + \phi (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \quad (6.39)$$

- Divergenza di matrice moltiplicata per vettore

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{A} \vec{v}) = \vec{v}^T \cdot \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \right) + \vec{A} : \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \quad (6.40)$$

- Divergenza di prodotto diadico

$$[\vec{c} \vec{v}^T] \cdot \vec{\nabla} = \vec{c} (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}) + \left[\frac{\partial \vec{c}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{v} \quad (6.41)$$

6.1.4 Il laplaciano

La divergenza del gradiente di un campo \mathbf{v} qualsiasi, sia esso scalare, vettoriale o un tensore di ordine superiore, è detta *laplaciano* del campo stesso e può essere indicato con il simbolo ∇^2 . Il nome di tale operatore differenziale del 2° ordine prende nome dal fisico e matematico Pierre Simon de Laplace (1749-1827).

Laplaciano di campo scalare

Detto $\phi(\vec{x})$ un generico campo scalare, il suo laplaciano sarà definito come:

$$\text{lapl}(\phi) \triangleq \text{div}(\text{grad } \phi) = \vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \phi) \quad (6.42)$$

In forma più esplicita:

$$\text{lapl}(\phi) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_N^2} \quad (6.43)$$

Trattando $\vec{\nabla}$ come un vettore simbolico, si può verificare che la sua ‘norma’ ∇^2 è esprimibile come:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}^T \cdot \vec{\nabla} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial (\cdot)}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_i^2} \quad (6.44)$$

Ovviamente, ∇^2 non è una vera norma perché $\vec{\nabla}$ non è un vero vettore, ma l’operatore di Laplace espresso in questa maniera è piuttosto comodo e intuitivo nel suo utilizzo. Si potrà così scrivere:

$$\text{lapl}(\phi) = \nabla^2 \phi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \quad (6.45)$$

In letteratura l'operatore di Laplace viene indicato abbastanza spesso anche con una delta maiuscola Δ al posto del nabla quadro. Questa notazione può portare a qualche difficoltà soprattutto perché la Δ viene utilizzata molto più frequentemente per indicare le variazioni o le differenze di grandezze omogenee, convenzione del resto adottata in questo testo.

Laplaciano di campo vettoriale

Così come si può calcolare il gradiente di un campo vettoriale, così si può calcolare il suo laplaciano. Detto $\vec{v}(\vec{x})$ un generico campo vettoriale, il suo laplaciano sarà:

$$\text{lapl}(\vec{v}) = \text{div}(\text{grad } \vec{v}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x_i^2} \quad (6.46)$$

In forma più compatta si può scrivere semplicemente

$$\text{lapl}(\vec{v}) = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2(\vec{v}) \quad (6.47)$$

L'estensione di 'laplaciano' a tensori di ordine superiore è immediata, dato che basta calcolare il laplaciano di ogni singolo elemento del tensore stesso.

Funzioni armoniche

Una funzione $\phi(\vec{x})$ è detta *armonica* sul dominio Ω_x se $\forall \vec{x} \in \Omega_x$ il suo laplaciano è nullo.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6.48)$$

Questo tipo di espressione è detta anche *equazione di Laplace* e compare in molti ambiti fisici.

Si consideri ad esempio un fluido in moto che sia *incomprimibile* e tale che il suo campo di velocità \vec{v} ammetta un *potenziale*. Si avrà allora:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \phi) = 0 \Rightarrow \quad (6.49)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (6.50)$$

Si trova così un'equazione differenziale del 2° ordine in cui l'incognita non è più un vettore ma lo scalare ϕ . In letteratura sono note molte soluzioni dell'equazione di Laplace, che si ripresenta frequentemente in problemi differenziali con Condizioni al Contorno (eng: 'Boundary Conditions', B.C.).

Identità per il laplaciano

Si riportano qui, senza dimostrarle, le principali identità differenziali in cui è coinvolto il laplaciano.

- Proprietà fondamentale del laplaciano

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 \phi \quad (6.51)$$

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 \vec{v} \quad (6.52)$$

- Laplaciano del prodotto di due scalari

$$\nabla^2(\phi \psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2(\vec{\nabla} \psi)^T \cdot (\vec{\nabla} \phi) + \psi \nabla^2 \phi \quad (6.53)$$

- Laplaciano di vettore moltiplicato per scalare

$$\nabla^2(\phi \vec{a}) = \phi \nabla^2 \vec{a} + 2 \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot (\vec{\nabla} \phi) + \vec{a} \nabla^2 \phi \quad (6.54)$$

- Laplaciano di prodotto scalare tra vettori

$$\nabla^2(\vec{a}^T \cdot \vec{b}) = \vec{a}^T \cdot \nabla^2 \vec{b} + 2 \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] : \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] + \vec{b}^T \cdot \nabla^2 \vec{a} \quad (6.55)$$

6.2 Definizioni e usi del rotore in 3-D

In questa sezione si esporranno proprietà e applicazioni del rotore, così come viene definito in 3 dimensioni. In particolare ci si soffermerà ancora una volta sul significato ‘fisico’ di quest’operatore, così com’era già avvenuto per il prodotto vettore, di cui il rotore costituisce l’analogo in campo differenziale. Si veda allora cos’è il rotore, come è nato e qual è il suo utilizzo.

6.2.1 Definizione di rotore in 3-D

Nei paragrafi precedenti si è visto come la divergenza di un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$ possa essere espressa in una forma simbolica simile a quella di un prodotto scalare tra il vettore simbolico $\vec{\nabla}$ e il vettore \vec{v} . Si potrebbe quindi dire, con un certo eccesso di analogia, che la divergenza di \vec{v} è il *prodotto scalare tra $\vec{\nabla}$ e \vec{v}* .

$$\begin{array}{ll} \vec{a}^T \cdot \vec{b} & \text{prodotto scalare tra } \vec{a} \text{ e } \vec{b} \\ \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} & \text{‘prodotto scalare’ tra } \vec{\nabla} \text{ e } \vec{v} \end{array}$$

In maniera simile, anche il gradiente può essere visto come il *prodotto diadico tra \vec{v} e $\vec{\nabla}$* :

$$\begin{array}{ll} \overline{[ab^T]} & \text{prodotto diadico tra } \vec{a} \text{ e } \vec{b} \\ \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = \overline{[v \nabla^T]} & \text{‘prodotto diadico’ tra } \vec{v} \text{ e } \vec{\nabla} \end{array}$$

In un certo senso, adoperando nabla come un vettore simbolico e applicandolo in operatori *algebrici*, quali appunto il *prodotto scalare* \cdot e il *prodotto diadico* $\overline{[..^T]}$, si possono ottenere degli operatori *differenziali* corrispondenti, quali appunto la *divergenza* e il *gradiente*.

Si veda allora se è possibile applicare $\vec{\nabla}$ nella forma di un *prodotto vettore* in 3-D e ottenere così un nuovo operatore differenziale che sarà chiamato *rotore*

Definizione analitica di rotore 3-D

Dato un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ definito su uno spazio 3-D, quindi con $\dim(\vec{x}) = 3$, il suo rotore $\text{rot}(\vec{v})$ è definito come:

$$\text{rot}(\vec{v}) \triangleq \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (6.56)$$

dove $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i versori associati agli assi cartesiani X,Y,Z, mentre v_x, v_y, v_z sono le rispettive coordinate di $\vec{v}(\vec{x})$. Analogamente al prodotto vettore 3-D, si può calcolare il rotore 3-D per mezzo della *regola del determinante*, con l'accortezza di sostituire le 'componenti' differenziali di nabla $\vec{\nabla}$ al posto di quelle del primo vettore:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \right) \quad (6.57)$$

Il rotore di \vec{v} può essere riscritto anche come:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left[\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}; \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}; \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right] \quad (6.58)$$

dove si sono numerati i pedici relativi agli assi cartesiani invece di esprimerli in forma alfabetica.

Si è vista così la definizione analitica di rotore in 3-D, ottenuta combinando assieme il vettore simbolico $\vec{\nabla}$ e l'operatore \wedge . Si veda ora la genesi storica di questo nuovo operatore differenziale ed il suo significato.

6.2.2 Cenni storici

Così come il prodotto vettore era stato già adoperato da Lagrange in forma implicita senza interpretarlo come un vettore, così anche il rotore è stato di fatto utilizzato ben prima di essere effettivamente isolato e riconosciuto come un operatore a sè.

Il simbolo ∇ – anche se inizialmente scritto come un triangolo ruotato \triangleright – fu introdotto da William R. Hamilton nel 1837, ma i quaternioni e i loro prodotti comparvero solo nel 1843, senza l'uso dei vettori.

Nel 1846 Hamilton pubblicò un articolo in cui introdusse per la prima volta i termini *scalar* e *vector*, riferendosi rispettivamente alla parte reale e immaginaria dei suoi quaternioni.

Detto $Q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ un quaternione qualsiasi, a è la sua parte scalare mentre $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ è la sua parte vettoriale. Nella notazione di Hamilton la suddivisione in queste due componenti veniva scritta come 'Q = Scal. Q + Vect. Q', 'Q = S.Q + V.Q' o più semplicemente come 'Q = SQ + VQ'. Questa importante distinzione venne ripresa e approfondita da Peter Guthrie Tait, discepolo di Hamilton e principale promotore dei quaternioni dopo di lui.

Nel 1867 Tait pubblicò il suo *Elementary Treatise of Quaternions*, in cui prestò grande attenzione alle applicazioni dei quaternioni in fisica. Nella stessa opera,

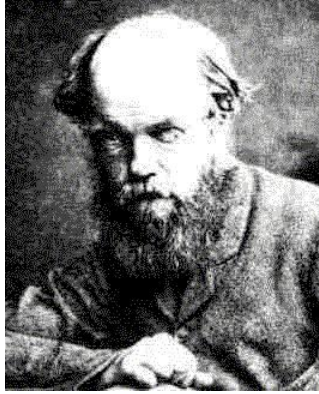


Figura 6.4: Peter Guthrie Tait

Tait fece un uso estensivo dell'operatore ∇ , scritto nella forma dei quaternioni come:

$$\nabla = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

Applicando le regole del prodotto di quaternioni tra ∇ e un generico $Q = 0 + q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}$, si ottiene il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \nabla Q = & - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \\ & \left(\left(\frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right) \end{aligned} \quad (6.59)$$

Si può notare come la parte scalare del nuovo quaternione altro non sia che l'opposto della divergenza di $\vec{q} = [q_x; q_y; q_z]$, mentre la parte vettoriale ne è il rotore. Mettendo a confronto la notazione di Tait e Hamilton con quella moderna, si ha così:

$$\begin{cases} S.\nabla Q = -\vec{\nabla}^T \cdot \vec{q} \\ V.\nabla Q = \vec{\nabla} \wedge \vec{q} \end{cases}$$

Tait era amico del fisico scozzese James Clerk Maxwell, con cui instaurò una fitta corrispondenza epistolare sui quaternioni e dal quale fu definito 'Chief Musician upon Nabla' a causa del suo uso estensivo del simbolo ∇ , che ricorda la forma di un'arpa ebraica chiamata appunto 'nabla' in lingua greca. In un famoso articolo del 1871, intitolato 'On the Mathematical Classification of Physical Quantities' [5] Maxwell evidenziò l'importanza del calcolo vettoriale in fisica, interpretando il laplaciano $\nabla^2(\phi)$ come rilevatore della *concentrazione* di carica e il vettore $\vec{\nabla}\phi$ come *pendenza* o *gradiente*¹, riprendendo un'idea di ambito topografico.

Nello stesso articolo, Maxwell analizzò la scomposizione nelle parti scalare e vettoriale del prodotto tra ∇ e un quaternioni, attribuendo ad esse i significati di *convergenza* e *rotore*:

¹'slope' nel testo originale, modernamente 'gradient'

If σ represents a vector function, $\nabla\sigma$ may contain both a scalar and a vector part, which may be written $S\nabla\sigma$ and $V\nabla\sigma$.

I propose to call the scalar part the *Convergence* of σ , because, if a closed surface be described about any point, the surface integral of σ , which expresses the effect of the vector σ considered as an inward flux through the surface, is equal to the volume integral of $S\nabla\sigma$ throughout the enclosed space. I think, therefore, that the *convergence* of a vector function is a very good name for the effect of that vector function in carrying its subject inwards towards a point.

But $\nabla\sigma$ has, in general, also a vector portion [cioè $V\nabla\sigma$], and I propose, but with great diffidence, to call this vector the **Curl** or **Version** of the original vector function.

It represents the direction and magnitude of the rotation of the subject matter carried by the vector σ . I have sought for a word which shall neither, like **Rotation**, **Whirl**, or **Twirl**, connote motion, nor, like **Twist**, indicate a helical or screw structure which is not of the nature of a vector at all. If we subtract from the general

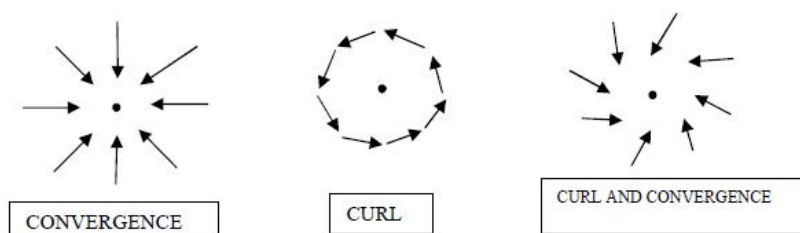


Figura 6.5: *Convergence e Curl nell'interpretazione di Maxwell*

value of the vector function σ its value σ_0 at the point P, then the remaining vector $\sigma - \sigma_0$ will, when there is pure convergence, point towards P. When there is pure curl, it will point tangentially round P; and when there is both convergence and curl, it will point in a spiral manner.

La 'convergenza' descritta da Maxwell è ovviamente l'opposto della divergenza, che nel prodotto ∇Q si manifesta con il segno cambiato, mentre il termine 'curl' richiama in inglese le idee di 'avvolgimento', di 'spirale' e di 'ricciolo'[35]. Gli altri termini menzionati da Maxwell ('Version', 'Rotation', 'Whirl', 'Twirl', 'Twist') richiamano in qualche modo sempre l'idea di qualcosa che 'gira': questo è in effetti il significato intuitivo del concetto di 'rotore'.

Il nome proposto da Maxwell conobbe larga diffusione nella comunità scientifica e ancora oggi nei Paesi anglosassoni $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ viene spesso letto come 'curl v' in alternativa a 'rotor v' o 'rotational v', convenzione più diffusa nell'Europa continentale.

Si veda ora più nel dettaglio quale interpretazione è possibile dare di questo operatore.

6.2.3 Interpretazione del rotore

Come già accennato, il rotore $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ misura, in un certo senso, quanto il campo vettoriale \vec{v} tenda a ‘girare’ o ad ‘arrotolarsi’ in ogni punto del campo. Come può far presupporre il suo nome, il rotore è quindi connesso all’idea di ‘velocità angolare’ e ‘vortice’, ma la sua interpretazione non è così semplice come quella della divergenza. In *Vector analysis* [2], alle pag. 155-156, Wilson fornisce due esempi fisici di rotore legati proprio alla rotazione di un corpo e alla ‘vorticità’ di un flusso di corrente in grado di generare tale moto, anche se privo di ‘vortici’ visibili.

Il rotore come doppia velocità angolare

Si consideri un corpo rigido in moto con velocità di traslazione \vec{v}_0 e con velocità angolare $\vec{\omega}$. La velocità \vec{v} di ogni punto materiale che costituisce il corpo stesso può essere espressa come:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0) \quad \text{con } \vec{x} \in \Omega_x \quad (6.60)$$

\vec{v}_0 , \vec{x}_0 e $\vec{\omega}$ sono noti e non varia sul dominio Ω_x del corpo perché sono fissati. Si calcoli ora il rotore del campo di velocità $\vec{v}(\vec{x})$ e si veda qual è il suo legame con la velocità angolare.

$$\text{rot}(\vec{v}) = \text{curl}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad (6.61)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0)) \quad (6.62)$$

Per il rotore, così come il prodotto vettore, vale la proprietà distributiva, perciò si avrà:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}_0 + \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}_0) \quad (6.63)$$

Poiché il rotore di un campo costante, come \vec{v}_0 e \vec{x}_0 , è nullo, si avrà:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) \quad (6.64)$$

Si espanda ora in notazione 3-D il prodotto vettore tra la velocità angolare e la posizione del punto, al fine di ottenere un terzo campo vettoriale:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{x} = (z\omega_y - y\omega_z)\vec{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\vec{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\vec{k} \quad (6.65)$$

Poiché la velocità angolare è fissata sul dominio, il calcolo del rotore di questo nuovo campo sarà abbastanza semplice:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) &= \vec{\nabla} \wedge \left((z\omega_y - y\omega_z)\vec{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\vec{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\vec{k} \right) \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(y\omega_x - x\omega_y) - \frac{\partial}{\partial z}(x\omega_z - z\omega_x) \right) \vec{i} + \\ &\quad \left(\frac{\partial}{\partial z}(z\omega_y - y\omega_z) - \frac{\partial}{\partial x}(y\omega_x - x\omega_y) \right) \vec{j} + \\ &\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}(x\omega_z - z\omega_x) - \frac{\partial}{\partial y}(z\omega_y - y\omega_z) \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (6.66)$$

Risulta infine:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) = 2\omega_x \vec{i} + 2\omega_y \vec{j} + 2\omega_z \vec{k} \quad (6.67)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) = 2\vec{\omega} \quad (6.68)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 2\vec{\omega} \quad (6.69)$$

Si verifica così che il rotore del campo di velocità di un corpo rigido è pari al doppio della velocità angolare. Di conseguenza, il rotore risulta anche costante su tutto il dominio.

In generale, anche per corpi non rigidi, è possibile definire una *velocità angolare locale* $\vec{\omega}(\vec{x})$ di una singola particella proprio come la metà del rotore della velocità:

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad \forall \vec{x} \in \Omega_x \quad (6.70)$$

Nel caso più semplice in cui $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ e si consideri un moto 2-D non traslatorio centrato nell'origine, il campo di velocità sarà semplicemente:

$$\vec{v} = \omega \left(-y\vec{i} + x\vec{j} \right) \quad (6.71)$$

Il rotore e la velocità angolare sono perpendicolari al piano e, dato che il moto

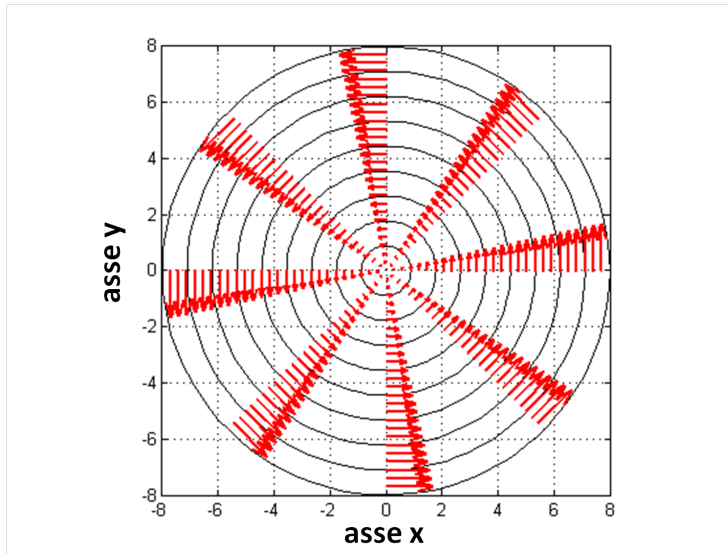


Figura 6.6: Campo di velocità per $\vec{v} = \omega[-y; x]$: moto rigido e vorticità costante

è antiorario, uscenti verso l'osservatore.

Dopo questo esempio si potrebbe pensare che qualsiasi campo con rotore non nullo abbia linee di flusso che si chiudono su se stesse o che comunque sembrano 'circolare' attorno ad un punto, così come può accadere per gorgi, vortici o mulinelli. Esistono però dei casi in cui un campo vettoriale non sembra affatto 'girare' o 'ruotare', anche se il suo rotore è diverso da zero. Si veda allora uno di questi casi.

Il rotore in assenza di vortici e linee chiuse

Si consideri un fluido in moto in uno spazio 2-D il cui campo di velocità sia descritto dall'equazione:

$$\vec{v}(\vec{x}) = 2\omega(0\vec{i} + x\vec{j}) = 2\omega x\vec{j} \quad (6.72)$$

Tutte le linee di flusso di questa corrente sono linee rette parallele tra loro e dirette come l'asse Y, perciò non vi è alcuna tendenza a 'circolare': tutte le particelle di fluido si muovono nella stessa direzione. Se si calcola rotore del campo si ottiene però:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 2\omega\vec{k} \neq \vec{0} \quad (6.73)$$

Che significato ha dunque il rotore, se vortici non se ne vedono? Per rispondere a

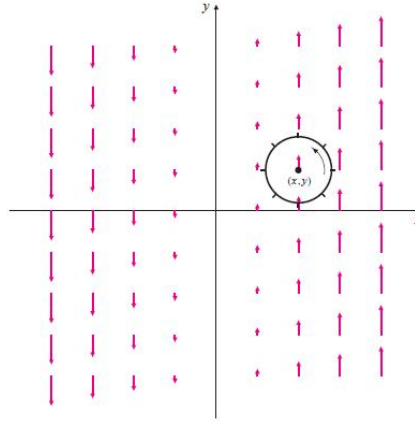


Figura 6.7: Rotore in una corrente con linee di flusso parallele - figura tratta dalle dispense di *Fluidodinamica* [27] di F. Auteri e L.P. Quartapelle

questa domanda, si immagini di porre una ruota a pale nella corrente in esame in un punto qualsiasi $\vec{x} = [x; y]$. La ruota verrà trasportata dal flusso con velocità $v_y = 2\omega x$ parallelamente all'asse Y, ma sarà contemporaneamente messa in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$ (ovunque si trovi). Questa rotazione è dovuta al fatto che la velocità della corrente non è comunque uniforme ed è diversa da una parte all'altra della ruota, che tende quindi a girare.

Si è così dimostrato che un campo può avere rotore non nullo anche in assenza di linee di corrente chiuse e di 'vortici'. Bisogna precisare che qui il termine 'vortice' assume il significato intuitivo del linguaggio comune, dato che allo stato attuale non esiste ancora una definizione matematicamente rigorosa di vortice che sia condivisa da tutta la comunità scientifica[29].

Anche se l'associazione con l'idea di 'vortice' non è immediata, il rotore può comunque essere visto come una *densità di circolazione per unità di area*, idea che adesso si andrà ad illustrare.

Il rotore come densità di circolazione

Data una linea chiusa γ parametrizzata tramite una coordinata q e un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$, si dice *circolazione* Γ di \vec{v} su γ l'integrale:

$$\Gamma = \oint_{q_0}^{q_f} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(q) \quad (6.74)$$

dove:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{x}) &= \vec{\gamma} && \text{con: } \dim(\vec{\gamma}) = \dim(\vec{x}) - 1 \\ d\vec{x} &:= \frac{\partial \vec{x}}{\partial q} dq && \text{linea parametrizzata in } q \\ \vec{x}(q_f) &= \vec{x}(q_0) && \text{linea chiusa} \end{aligned}$$

Se la linea γ è il contorno di una superficie Σ_2 in uno spazio 3-D ed è parametrizzata in senso antiorario, la sua circolazione può essere messa in relazione al rotore di \vec{v} su Σ_2 . Detta \vec{n} la normale alla superficie Σ_2 , il rotore sarà la *densità di circolazione per unità di area* per il caso in cui Σ_2 si rimpicciolisca fino a ridursi ad un punto.

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{n} = \lim_{A(\Sigma_2) \rightarrow 0} \left(\frac{1}{A} \oint_{\partial \Sigma_2} \vec{v}^T \cdot d\vec{x} \right) \quad (6.75)$$

Questa formulazione 'fisica' del rotore è per molti versi simile a quella della divergenza come 'densità di flusso per unità di volume' e talvolta viene utilizzata addirittura come definizione del rotore stesso.

Teorema di Stokes - enunciato

La relazione che esprime il rotore come una 'densità di circolazione' è in realtà tutt'altro che ovvia, tanto che non può essere considerata una vera definizione quanto piuttosto un'interpretazione. In pratica la relazione tra circolazione e rotore viene sancita successivamente alle loro definizioni analitiche: l'equazione appena scritta è infatti un altro modo di esprimere il *Teorema di Stokes per il rotore*, il cui enunciato è il seguente:

Teorema di Stokes per il rotore: sia Σ_2 una superficie orientata in uno spazio 3-D, liscia a pezzi, avente campo normale unitario \vec{n} e il cui contorno γ consista di una o più curve chiuse, continue a pezzi, con orientazione ereditata da Σ_2 . Se \vec{v} è un campo vettoriale liscio, definito su un insieme aperto contenente Σ_2 e tale che $\vec{v} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, allora:

$$\oint_{\gamma} \vec{v}^T \cdot d\vec{x} = \int_{\Sigma_2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{n} dS_x \quad (6.76)$$

Così per come è formulato, il Teorema di Stokes è valido solo in 3-D e risulta particolarmente restrittivo a causa delle ipotesi di continuità e derivabilità richieste per γ , Σ_2 e \vec{v} . Molto spesso però in fisica il Teorema di Stokes viene utilizzato anche per campi contenenti singolarità o per domini non esattamente 'lisci', ad esempio per i quadrati, il cui contorno non è continuo ma 'continuo a pezzi' a causa dei quattro angoli.

Nella pratica il Teorema di Stokes risulta valido anche per casi ‘patologici’ in cui né i domini né i campi vettoriali sono lisci e le derivate sono tutte intese nel *sensu delle distribuzioni*.

Si rinuncia qui a dare una dimostrazione in 3-D del Teorema di Stokes, che verrà comunque ripreso in seguito ed esteso in un numero arbitrario di dimensioni, fornendone una nuova interpretazione (vedi la sezione 8.8).

Inoltre, si mostrerà come sia possibile generalizzare il *Teorema del Gradiente* fino ad inglobare lo stesso Teorema di Stokes e unificare quindi la trattazione di ‘sorgenti’ e ‘vortici’.

Campo irrotazionale

Un campo vettoriale il cui rotore sia nullo ovunque è detto *irrotazionale*.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (6.77)$$

I campi irrotazionali sono spesso chiamati anche ‘conservativi’, dato che ammettono sempre un potenziale.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \exists \phi \text{ tale che: } \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad (6.78)$$

Quest’enunciato verrà dimostrato più avanti come corollario del *Teorema del rotore in N-D* (vedi il paragrafo 8.8.2 nella pagina 228). In Aerodinamica e in Gasdinamica molto spesso le correnti vengono approssimate come irrotazionali in vaste parti del dominio. In ambito elettromagnetico e relativistico, i campi elettro-statico e gravito-statico sono pure irrotazionali e quindi conservativi.

6.2.4 Notazioni per il rotore

Analogamente a quanto accade per altri operatori vettoriali, anche il rotore viene indicato con notazioni differenti a seconda delle preferenze degli autori: si riportano qui quelle più diffuse e più facili da incontrare.

Il rotore di un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ può essere espresso in forma simbolica nei seguenti modi:

- $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{v}$, espressione originale del rotore come parte vettoriale di un prodotto quaternionico, secondo la notazione di Hamilton e Tait, oggi in disuso.
- $\text{rot}(\vec{v})$, notazione diffusa nell’Europa continentale
- $\text{curl}(\vec{v})$, proposta da Maxwell nel 1871 e comune nei Paesi di lingua anglosassone
- $\nabla \times \vec{v}$, formalismo analogo al *cross product* (cioè il prodotto vettore 3-D); utilizzato da Gibbs e diffuso nei Paesi di lingua anglosassone in alternativa a $\text{curl}(\vec{v})$
- $\nabla \wedge \vec{v}$ o $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$, notazione che l’operatore unisce nabla ∇ con il prodotto esterno di Grassmann, indicato con il cuneo \wedge . Diffusa in Italia e nei Paesi di lingua tedesca.

In questo testo, per coerenza con la notazione utilizzata per il prodotto vettore, si indicherà il rotore 3-D di \vec{v} come $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$, salvo diversa indicazione.

6.2.5 Proprietà e identità differenziali

Si riportano ora le proprietà salienti del rotore e le principali identità differenziali in cui tale operatore è coinvolto. Non si forniscono le dimostrazioni per un semplice motivo: sono molto lunghe a causa del gran numero di termini che bisogna esplicitare in coordinate cartesiane e non comportano l'introduzione di alcuna novità concettuale, essendo basate tutte sull'applicazione pedissequa di gradiente, divergenza e rotore con le regole già viste. Queste relazioni verranno comunque dimostrate esplicitamente in notazione N-D, che ingloba ed e generalizza quella tipica delle 3-D.

- Anti-commutatività

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \quad (6.79)$$

- Proprietà distributiva

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} + \vec{\nabla} \wedge \vec{b} \quad (6.80)$$

- Rotore di vettore moltiplicato per scalare

$$\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{v}) = (\vec{\nabla} \phi) \wedge \vec{v} + \phi (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \quad (6.81)$$

- Divergenza di prodotto vettore

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) \quad (6.82)$$

- Rotore di prodotto vettore

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{b}) \vec{a} + \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{b} - \left((\vec{\nabla}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{a} \right) \quad (6.83)$$

o, una forma più comune:

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \left((\nabla \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \nabla \right) \vec{a} - \left((\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot \nabla \right) \vec{b} \quad (6.84)$$

- Prodotto vettore di rotore (notazione comune)

$$\vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \nabla) - (\vec{b} \nabla) \cdot \vec{a} \quad (6.85)$$

o, in altra forma:

$$\vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) = \nabla_b (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \nabla) \vec{a} \quad (6.86)$$

dove si è introdotta la notazione di Feynman con il simbolo ∇_b , che indica che il gradiente opera solo su \vec{b} .

- Espansione del gradiente di prodotto scalare (notazione comune)

$$\nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\nabla \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) + \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) \quad (6.87)$$

- Divergenza di rotore

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad (6.88)$$

La divergenza di un rotore è sempre nulla.

- Rotore di gradiente

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0} \quad (6.89)$$

Il rotore di un campo che ammetta un potenziale è quindi sempre nullo.

- Rotore di rotore

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}) - \nabla^2 (\vec{v}) \quad (6.90)$$

In altra forma si può scrivere:

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{\nabla} = \nabla^2 (\vec{v}) - \vec{\nabla} (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}) \quad (6.91)$$

6.3 Uso di rotore e prodotto vettore in fisica

Così come accade per il prodotto vettore, anche il rotore viene ampiamente utilizzato in vari ambiti della fisica e dell'ingegneria. Se in Meccanica Razionale prevale il prodotto vettore, in Fluidodinamica e in Elettromagnetismo è molto più facile imbattersi nel rotore. Quest'operatore può infatti essere applicato a campi vettoriali di grandezze intensive, come la velocità, definiti quindi punto per punto, a differenza del prodotto vettore che si utilizza per grandezze estensive, quali la quantità di moto e la forza, associate a interi domini o corpi.

6.3.1 Applicazioni del rotore in fluidodinamica

In fluidodinamica il rotore trova la sua applicazione principe nella definizione della *vorticità*. Dato un campo di velocità $\vec{v}(\vec{x})$ qualsiasi in $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ si definisce la sua *vorticità* \vec{w} come pari al suo rotore:

$$\vec{w} \triangleq \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad (6.92)$$

In genere la vorticità viene indicata con un lettera omega minuscola ω , il che purtroppo può generare confusione con la velocità angolare $\vec{\omega}$ in forma vettoriale, di cui la vorticità è pari al doppio, come già illustrato. In questo testo si è scelto di riservare l'omega alla velocità angolare, minuscola o maiuscola a seconda dei casi, indicando invece la vorticità con la doppia v 'w' al fine di distinguere le due grandezze.

La vorticità, sotto vari aspetti, si può incontrare in diverse branche della fluidodinamica; se ne vedano alcune.

Vorticità e strato limite

Nello studio del moto di un fluido attorno ad un corpo risulta spesso utile modellare la corrente come *irrotazionale* ovunque nel dominio, ad eccezione di un piccola zona attorno al corpo stesso. Per la condizione di adesione, la velocità

relativa tra il fluido e il contorno del corpo deve essere nulla e in questa zona della corrente prevalgono gli effetti viscosi e la vorticità non è nulla. La parte di dominio attorno al corpo in cui il flusso non può essere approssimato come irrotazionale è detta *strato limite*. Lo studio dello strato limite può rivelarsi piuttosto complicato

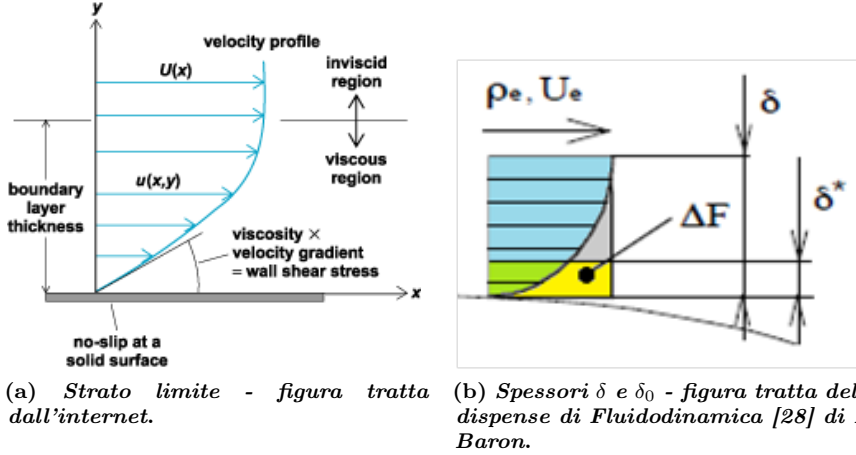


Figura 6.8: Rappresentazioni dello strato limite

e in alcuni casi risulta difficile darne una definizione matematica, ad esempio su corpi con forte curvatura. La definizione classica di strato limite δ in 2-D prevede che esso si trovi in prossimità del corpo dove la velocità v è pari al 99,5% di quella 'esterna' v_{est} , qualsiasi cosa s'intenda con il termine 'esterno'

$$\delta(s) \text{ tale che: } v(s, \delta(s)) = 99,5\% v_{est}(s) \quad (6.93)$$

dove s è una coordinata curvilinea che percorre il contorno del corpo stesso.

Trattandosi di una zona in cui il flusso non è irrotazionale, la vorticità si ripresenta in continuazione nei problemi legati allo strato limite.

Si consideri ad esempio δ^* lo spessore di spostamento dello strato limite su lamina piana, definito come:

$$\delta^*(x) \triangleq \int_0^{+\infty} 1 - \frac{\rho(x, y)v_x(x, y)}{\rho_{est}v_{x est}} dy = \int_0^{+\infty} 1 - \frac{\rho v_x}{\rho_e v_{x e}} dy \quad (6.94)$$

dove ρ è la densità del flusso, v_x la sua velocità in direzione parallela alla lamina e ρ_{est} e $v_{x est}$ i loro valori all'esterno dello strato limite. Lo spessore di spostamento tiene conto della differenza di flusso di massa attraverso lo strato limite rispetto ad un modello di corrente irrotazionale. δ^* può così essere visto come un contorno virtuale della lamina o del profilo: modellando la corrente esterna allo strato limite come *irrotazionale*, $\delta^*(x)$ ne costituisce infatti una linea di flusso.

Si può dimostrare anche che δ^* può essere interpretato come il *baricentro di vorticità* dello strato limite, almeno nel caso 2-D di flusso incomprimibile.

$$w = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (6.95)$$

$$\delta^* = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\int_0^h w y dy}{\int_0^h w dy} \quad (6.96)$$

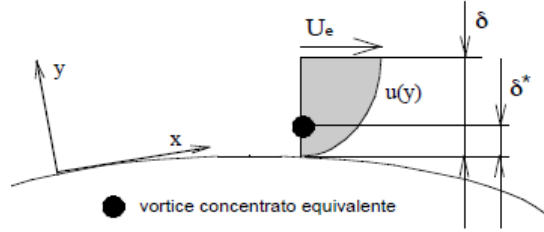


Figura 6.9: Vortice concentrato di circolazione pari a quella dello strato limite nella sezione considerata - figura tratta dalle dispense di Fluidodinamica [28] di A. Baron

Teorema di Bernoulli 3-D

Per descrivere il moto di un fluido sono spesso sufficienti le equazioni di *conservazione della massa*, e di *bilancio della quantità di moto*, mentre l'equazione di *bilancio dell'energia* può essere introdotta quando, ad esempio, si rimuovano le ipotesi di flusso incomprimibile e adiabatico. In forma differenziale, le equazioni per la massa e la quantità di moto assumono la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}^T \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (6.97)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \left(\rho \overline{[v v^T]} \right) \cdot \vec{\nabla} = \vec{f} = \rho \vec{a} \quad (6.98)$$

$$(6.99)$$

dove \vec{f} è il campo di forze per un'unità di volume, definito punto per punto.

Sfruttando la conservazione della massa, l'equazione per la quantità di moto può essere riscritta come:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{v} \right) = \rho \vec{a} \quad (6.100)$$

in una notazione più comune:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) \right) = \rho \vec{a} \quad (6.101)$$

Si veda ora se è possibile scomporre il termini di trasporto $\vec{v} \cdot (\nabla \vec{v})$ in una parte conservativa e in una dipendente dalla vorticità.

Si considerino allora le identità 3-D:

$$\vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \nabla) - (\vec{b} \nabla) \cdot \vec{a} \quad (6.102)$$

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} (\|\vec{v}\|^2) = (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) \quad (6.103)$$

Sostituendo \vec{v} al posto di \vec{a} e \vec{b} , si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{v} \nabla) - (\vec{v} \nabla) \cdot \vec{v} \\ \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\|\vec{v}\|^2) = \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) \end{cases} \Rightarrow \quad (6.104)$$

$$(\vec{v} \nabla) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\vec{v} \nabla) - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) \quad (6.105)$$

$$(\vec{v} \nabla) \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \|\vec{v}\|^2 - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) \quad (6.106)$$

$$(\vec{v} \nabla) \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \|\vec{v}\|^2 + (\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (6.107)$$

Sostituendo nell'equazione della quantità di moto si ottiene allora:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \|\vec{v}\|^2 + (\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = \rho \vec{a} \quad (6.108)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \|\vec{v}\|^2 + \vec{w} \wedge \vec{v} \right) = \rho \vec{a} \quad (6.109)$$

$$(6.110)$$

Si ipotizzi ora che il fluido sia a densità costante e che le forze di campo siano conservative, di cui un contributo sia dovuto al gradiente di pressione. Matematicamente ciò equivale a:

$$\begin{cases} \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 \\ \vec{f} = \rho \vec{a} = -\vec{\nabla}(P + \rho_0 K) \end{cases} \quad (6.111)$$

Sostituendo nell'equazione della quantità di moto e dividendo per la densità, si ottiene:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \|\vec{v}\|^2 + \vec{w} \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho_0} + K \right) \quad (6.112)$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho_0} + \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 + K \right) = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{w} \quad (6.113)$$

Questa è una formulazione alternativa del teorema di Bernoulli. Il termine a cui è applicato $\vec{\nabla}$ è detto anche *trinomio di Bernoulli* e viene indicato con H, mentre lo scalare K è in genere associato al potenziale di accelerazione terrestre e pari a gz con z coordinata verticale.

$$H = \frac{P}{\rho_0} + \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 + gz \quad (6.114)$$

$$\vec{\nabla} H = -\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{w} \quad (6.115)$$

Nel caso il flusso sia stazionario, ovvero valga $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, si ottiene proprio l'enunciato del 1° teorema di Bernoulli:

$$\vec{\nabla} H = \vec{v} \wedge \vec{w} \quad (6.116)$$

Si può dimostrare facilmente che il gradiente del trinomio di Bernoulli è perpendicolare alla linea di flusso e al vettore vorticità locale, infatti:

$$\vec{v}^T \cdot \vec{\nabla} H = \vec{v}^T \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0} \quad (6.117)$$

$$\vec{w}^T \cdot \vec{\nabla} H = \vec{w}^T \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0} \quad (6.118)$$

Poiché il *gradiente* di H è sempre diretto da una linea di flusso all'altra, significa che H varia solo da una linea all'altra ed è quindi costante su ogni singola linea di flusso.

Nel caso si supponga anche l'*irrotazionalità* del flusso, si ha che il trinomio di Bernoulli è costante ovunque sul dominio:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{w} := \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (6.119)$$

$$\vec{\nabla} H = \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho_0} + \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 + gz \right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (6.120)$$

$$\frac{P}{\rho_0} + \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 + gz = \text{cost.} \quad \forall \vec{x} \quad (6.121)$$

Questa forma scalare del Teorema di Bernoulli è particolarmente nota ed utilizzata in una pluralità di contesti.

Turbolenze e Kutta-Joukowski

In un modo o nell'altro la vorticità compare molto spesso in fluidodinamica e nelle sue ramificazioni. Elencare tutti i casi in cui tale concetto si presenta non è qui possibile. Non ci si può però esimere dal citare la sua importanza nell'ambito dello studio della Turbolenza. Tutti i flussi turbolenti sono infatti rotazionali con fluttuazioni su piccola scala e la loro descrizione in termini di bilancio di vorticità è ampiamente diffusa. Nel caso si consideri un fluido newtoniano incomprimibile, si può applicare il rotore all'equazione di bilancio della quantità di moto e ottenere:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\nabla \vec{v}) + \nu \nabla^2 \vec{w} \quad (6.122)$$

Questa è appunto l'equazione di *bilancio della vorticità*, in cui compare la viscosità cinematica $\nu [m/s^2]$. Questa relazione può essere riscritta in forma indiciale, con la convenzione di Einstein per la sommatoria degli indici ripetuti, come:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = w_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} \quad (6.123)$$

Sempre in ambito aeronautico, la vorticità compare in maniera implicita assieme al prodotto vettore anche nel Teorema di Kutta-Joukowski, che sotto opportune ipotesi consente di calcolare la portanza \vec{l} per unità di lunghezza nel caso 2-D, note la circolazione $\vec{\Gamma}$ attorno al corpo e la velocità asintotica \vec{v}_∞ della corrente.

$$\vec{l} = -\rho \vec{v}_\infty \wedge \vec{\Gamma} \quad (6.124)$$

$$\Gamma = \oint \vec{v}^T \cdot d\vec{x} = \int_{\Sigma_2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{n} dS_x \quad (6.125)$$

$$\vec{\Gamma} := \int_{\Sigma_2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} dS_x \quad (6.126)$$

Sia sull'equazione di bilancio della vorticità che sul teorema di Kutta-Joukowski si ritornerà in seguito, mostrando come possano essere estesi in N-D.

6.3.2 Applicazioni del rotore in elettromagnetismo

Il campo elettromagnetico è definito per mezzo delle equazioni di Maxwell. L'operatore di rotore compare in due di esse, per la precisione nella legge di Faraday per l'induzione e nella legge di Ampère. In forma differenziale, possono essere scritte come:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{legge di Maxwell-Faraday} \quad (6.127)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \text{legge di Maxwell-Ampère} \quad (6.128)$$

dove:

- \vec{E} è il campo elettrico
- \vec{B} è il campo magnetico
- \vec{J} è la densità di flusso elettrico
- ε_0 è la permeatività magnetica del vuoto
- μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto

L'equazione di Faraday manifesta che il campo elettrico non è conservativo se si ha una variazione del campo magnetico, mentre la legge di Maxwell-Ampère mette in relazione le due entità assieme al densità di flusso elettrico.

Utilizzando il Teorema di Stokes per il rotore, le due equazioni possono essere riscritte in forma integrale. L'equazione di Maxwell-Faraday diviene:

$$\oint_{\partial \Sigma_2} \vec{E}^T \cdot d\vec{x} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_2} \vec{B}^T \cdot \vec{n} dS_x \quad (6.129)$$

ovvero: *la circolazione del campo elettrico attorno ad una superficie 2-D è pari all'opposto della derivata nel tempo del flusso di campo magnetico attraverso la superficie stessa.*

La legge di Maxwell-Ampère assume invece la forma:

$$\oint_{\partial \Sigma_2} \vec{B}^T \cdot d\vec{x} = \mu_0 \int_{\Sigma_2} \vec{J}^T \cdot \vec{n} dS_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_2} \vec{E}^T \cdot \vec{n} dS_x \quad (6.130)$$

$$\oint_{\partial \Sigma_2} \vec{B}^T \cdot d\vec{x} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_2} \vec{E}^T \cdot \vec{n} dS_x \right) \quad (6.131)$$

dove con i si è indicata la corrente passante attraverso la superficie Σ_2 , positiva se concorde con la normale. Questa relazione può essere letta come il fatto che *la circolazione del campo magnetico attorno ad una superficie 2-D è proporzionale alla corrente elettrica concatenata al contorno sommata alla derivata nel tempo del flusso di campo elettrico attraverso la superficie stessa.*

In ambito elettromagnetico la circolazione viene chiamata anche *circuizione*

Dato che le equazioni di Maxwell costituiscono il fondamento della teoria elettromagnetica, si può ben comprendere quale sia l'importanza del rotore in tale contesto. Come accade in fluidodinamica, rotore e prodotto vettore si presentano secondo varie modalità in diversi problemi e non è possibile elencare tutti i casi in cui essi compaiono. Si veda però un esempio di una certa importanza.

La forza di Lorentz

Si consideri un filo di lunghezza l costituito da materiale conduttore e percorso da una corrente elettrica di intensità i . Se tale filo è immerso in un campo magnetico uniforme \vec{B} esso subirà una forza \vec{F} dipendente dall'orientazione nello spazio, ma proporzionale in intensità alla lunghezza l e alla corrente i .

$$F \propto il \quad (6.132)$$

Tramite un piccolo ago di ferro è possibile stabilire, punto per punto, l'orientazione del campo magnetico, senza che però sia possibile determinarne l'intensità. Detta \vec{u}_b l'orientazione del campo magnetico nello spazio, si verifica che la forza agente sul filo è proporzionale al prodotto vettore tra il verso della corrente i e \vec{u}_b :

$$\vec{F} \propto i \vec{l} \wedge \vec{u}_b \quad (6.133)$$

L'intensità B del campo magnetico sarà il fattore che lega le due grandezze nella forma:

$$\vec{F} = B(i \vec{l} \wedge \vec{u}_b) \quad (6.134)$$

$$\vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B} \quad (6.135)$$

Di fatto, quella appena scritta è una *definizione* operativa e implicita del campo magnetico, che risulta sempre perpendicolare alla forza che esercita. Utilizzando

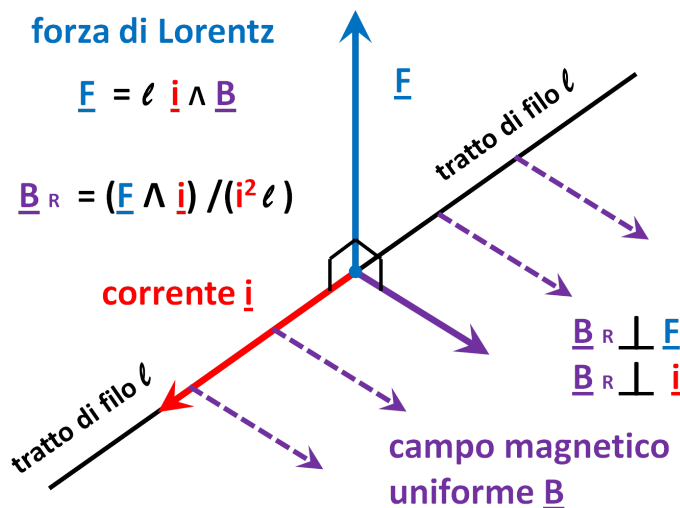


Figura 6.10: Forza di Lorentz \vec{F} esercitata su un tratto di filo di lunghezza l , percorso da corrente \vec{i} e immerso in un campo magnetico \vec{B} uniforme. Nell'immagine è visualizzata direttamente la componente di \vec{B} ortogonale al filo, che genera la forza.

le regole del prodotto vettore, la componente ortogonale \vec{B}_R del campo magnetico

può essere esplicitata come:

$$\vec{B}_R = \frac{1}{l} \frac{1}{\|\vec{i}\|^2} (\vec{F} \wedge \vec{i}) \quad (6.136)$$

$$\vec{B}_R = \frac{1}{il} (\vec{F} \wedge \vec{u}_i) \quad (6.137)$$

Per come sono scritte le equazioni, il calcolo della forza magnetica esercitata sul filo richiede di conoscere la lunghezza l e la corrente \vec{i} . E' possibile però riformulare in maniera più elementare la stessa relazione, senza bisogno di conoscere la lunghezza del filo. Si supponga che il filo abbia sezione S e che la corrente scorra in maniera costante attraverso di essa. Dato che la corrente i è, per definizione, la portata di carica elettrica nell'unità di tempo, essa potrà essere espressa come:

$$i = \Delta Q / \Delta t \quad (6.138)$$

Dove ΔQ è la quantità di carica elettrica passata attraverso la sezione del filo, pari a:

$$\Delta Q = (\rho_e S) (\vec{v}^T \cdot \vec{n}) \Delta t \quad (6.139)$$

dove ρ_e è la densità di carica elettrica e \vec{v} è la velocità media delle cariche. La corrente elettrica sarà così espressa come:

$$\vec{i} = \rho_e S \vec{v} = S \vec{J} \quad (6.140)$$

il prodotto di ρ_e e \vec{v} è infatti la *densità di flusso elettrico* \vec{J} .

La forza esercitata sul filo sarà allora pari a:

$$\vec{F} = \vec{i} l \wedge \vec{B} \quad (6.141)$$

$$\vec{F} = (\rho_e S \vec{v}) l \wedge \vec{B} \quad (6.142)$$

$$\vec{F} = (Sl) (\rho_e \vec{v}) \wedge \vec{B} = \text{Vol} (\rho_e \vec{v}) \wedge \vec{B} \quad (6.143)$$

Poiché la carica elettrica contenuta in una parte del filo di volume Vol è pari a $Q = \rho_e \text{Vol}$, si può scrivere anche:

$$\vec{F} = Q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (6.144)$$

Si è così ottenuta la forza magnetica esercitata sulla carica Q . Essa è detta anche **forza di Lorentz**, dal nome del fisico olandese Hendrick A. Lorentz (1853-1928). Si può notare questa forza è sempre perpendicolare al campo magnetico e la sua espressione è molto simile a quella della portanza \vec{l} nel Teorema di Kutta-Joukowski. Esprimendole entrambe in forma intensiva, quindi come forze per unità di volume, si avrebbe:

$$\vec{f}_{Lor} = \rho_e \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (6.145)$$

$$\vec{f}_{KJ} = -\rho \vec{v}_\infty \wedge \vec{w} \quad (6.146)$$

Si vede come le due relazioni siano straordinariamente simili. La presenza del segno meno davanti all'espressione per la portanza è dovuta alle convenzioni di rappresentare come positiva la velocità relativa di un fluido attorno ad un corpo. Se ci si pone nel sistema di riferimento del fluido, il corpo si muove con velocità $-\rho \vec{v}_\infty$ e i conti tornano.

Sull'argomento si ritornerà in seguito, ma meriterebbe di essere preso seriamente in considerazione e approfondito.

Momenti quantistici

Il prodotto vettore e il rotore trovano le loro applicazioni anche in Meccanica Quantistica. Seguono alcuni semplici esempi tratti dal 2° volume de ‘La fisica per il liceo scientifico’ di U. Amaldi [21].

Un elettrone che si muove lungo un’orbita chiusa è simile ad una spira percorsa da corrente elettrica, cioè ad un sistema fisico capace di avvertire gli effetti del campo magnetico. Come un ago magnetico, la spira tende infatti ad orientare il proprio asse \vec{n} nella direzione del campo \vec{B} in cui è posta.

Il momento \vec{M} che ruota un magnete dipende sia da \vec{B} sia da una caratteristica dell’oggetto mosso, detta *momento magnetico* e indicato con $\vec{\mu}$. Si ha infatti:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \quad (6.147)$$

In modo analogo, su una spira piana di sezione S percorsa da corrente elettrica i e posta in un campo magnetico \vec{B} agisce un momento motore pari a:

$$\vec{M} = i S \vec{n} \wedge \vec{B} \quad (6.148)$$

dove \vec{n} è la normale associata alla spira che vede la corrente circolare in senso anti-orario. Il *momento magnetico della spira* è quindi pari a:

$$\vec{\mu} = i S \vec{n} = i \vec{S} \quad (6.149)$$

Per l’elettrone in moto attorno al nucleo positivo di un atomo è possibile definire due momenti orbitali, quello *angolare* \vec{L} e quello *magnetico* $\vec{\mu}_L$. Essi sono legati dalla relazione:

$$\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m_0} \vec{L} \quad (6.150)$$

dove e è il valore assoluto della carica dell’elettrone ed m_0 la sua massa a riposo. L’elettrone possiede anche un momento angolare ‘intrinseco’ \vec{S} , detto *spin*. In inglese, ‘spin’ significa ‘trottola’: il momento \vec{S} non è infatti associato al ruotare dell’elettrone attorno al nucleo (su un’orbita) ma, in un certo senso, attorno a se stesso. In realtà, dalle osservazioni sperimentali, l’elettrone non risulta ‘girare’ su stesso e lo *spin* è una sua proprietà intrinseca, descritta dal numero quantico s . Al momento angolare intrinseco \vec{S} corrisponde un *momento magnetico intrinseco* $\vec{\mu}_S$, pari a:

$$\vec{\mu}_S = -\frac{e}{m_0} \vec{S} \quad (6.151)$$

Il momento magnetico complessivo dell’elettrone è dato dalla somma di $\vec{\mu}_L$ e $\vec{\mu}_S$. Di fatto, il momento angolare orbitale \vec{L} può essere interpretato come il momento angolare *traslatorio* $\vec{\Gamma}_{TRASL}$ riferito rispetto al nucleo atomico, mentre il momento angolare intrinseco \vec{S} è associabile al momento angolare *rotatorio* $\vec{\Gamma}_{ROT}$, riferito al centro dell’elettrone stesso.

Capitolo 7

Il rotore in N-D - l'estensione

Qual è 'l geomètra che tutto s'affigge
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova;
veder volea come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova

Dante, *Divina Commedia*, Par. XXXIII 133-138

In questo capitolo si esporrà un metodo per estendere l'operazione di rotore da 3 dimensioni (3-D) ad N dimensioni (N-D) spaziali, analogamente a quanto già fatto per il prodotto vettore.

7.1 Perché un'estensione in N-D?

Ancora una volta, qualcuno potrebbe chiedersi 'Com'è possibile passare in N-D?', ma soprattutto 'A cosa serve? Non basta il solito rotore in 3-D?'. La risposta a queste osservazioni è simile a quella già vista per il caso del prodotto vettore: lo scopo è trovare un linguaggio simbolico che consenta di manipolare più agilmente quelli che alla fin fine sono gli stessi oggetti matematici e che ne metta in luce alcune caratteristiche. L'utilizzo di una notazione diversa può inoltre condurre ad una nuova interpretazione di una stessa teoria o modello fisico, magari con applicazioni inaspettate come testimoniato da diversi casi scientifici già elencati. Per voler portare ancora un esempio, si considerino le *equazioni di Maxwell*, considerate l'unificazione teorica di tutti i fenomeni elettromagnetici studiati nell'Ottocento. Nel 1873 Maxwell pubblicò il suo *Treatise on electricity and magnetism*, in cui le equazioni che oggi portano il suo nome erano in numero di 20 e in forma scalare. Oggi esse sono ridotte a 4 equazioni espresse in forma vettoriale e possono essere ricordate abbastanza facilmente anche per merito di Heaviside, che insieme a Gibbs diffuse questo nuovo strumento simbolico in alternativa ai quaternioni. Non si sottovaluti quindi, anche nell'ambito dell'insegnamento, l'importanza di un linguaggio formale chiaro e coerente per comunicare o descrivere efficacemente un concetto o un'idea. La stessa rappresentazione di vettore come freccia orientata ha probabilmente avuto molto successo anche perché consente un'*interpretazione fisica* di questo oggetto

matematico. I quaternioni, al contrario, risultano meno intuitivi e per questo hanno avuto meno successo, sebbene per molti versi siano formalmente equivalenti ai vettori in 3-D.

Si veda allora quali vantaggi potrebbe apportare l'introduzione di un notazione N-D per il rotore al posto di quella 3-D comunemente utilizzata.

7.1.1 I problemi del rotore in 3-D

Se il prodotto vettore 3-D è spesso causa di lunghi conti ed errori di calcolo grossolani, il rotore non è certo da meno. Anche per quest'operatore risulta abbastanza facile confondersi con il segno o con gli indici da permutare e in genere richiede comunque una maggiore attenzione rispetto a divergenza e gradiente, specialmente se è necessario esplicitarlo in coordinate cartesiane (ma anche in coordinate sferiche non si scherza). Le identità algebriche che riguardano il prodotto vettore vengono in genere ricordate a memoria, dato che ridimostrarle è un'operazione piuttosto lunga. Lo stesso accade per il rotore, con la differenza che le identità non sono algebriche ma differenziali e si complicano molto più rapidamente. Per fare un semplice esempio, si veda il paragone tra il *prodotto vettoriale* tra un vettore e un altro moltiplicato scalare e un *rotore* corrispondente:

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge (\phi \vec{v}) &= \phi(\vec{a} \wedge \vec{v}) \\ \vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{v}) &= \phi(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + \vec{\nabla} \phi \wedge \vec{v}\end{aligned}$$

E' abbastanza evidente che non è possibile affidarsi neanche alle relazioni note per il prodotto vettore al fine di ricostruire quelle del rotore, dato che il primo è un operatore algebrico mentre il secondo è differenziale. Questa diversità diviene palese qualora si confrontino espressioni che coinvolgano più operazioni, ad esempio, il doppio prodotto vettore può essere espresso come:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b}^T \cdot \vec{a}) \vec{c} \quad (7.1)$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}^T \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a}^T \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (7.2)$$

Per il rotore l'espressione non è però analoga; infatti:

$$\nabla \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = ((\nabla \cdot \vec{c}) + \vec{c} \cdot \nabla) \vec{b} - ((\nabla \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \nabla) \vec{c} \quad (7.3)$$

$$\nabla \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\nabla \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\nabla \cdot \vec{b}) \vec{c} + ((\vec{c} \cdot \nabla) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{c}) \quad (7.4)$$

$$\nabla \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\nabla \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\nabla \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (7.5)$$

Le identità che coinvolgono il rotore risultano perciò più lunghe di quelle corrispondenti per il prodotto vettore. Se inoltre queste ultime, puramente algebriche, richiedono un gran numero di conti per essere ridimostrate, quelle per il rotore richiedono espansioni di termini ancora più lunghe e difficili a causa delle forme differenziali. In pratica, anche per il rotore è necessario ricordarsi molte relazioni a memoria e queste in genere sono piuttosto complicate.

In aggiunta, l'operazione di rotore porta con sè alcune stranezze e aporie già viste per il prodotto vettore, infatti:

- mentre divergenza, laplaciano e gradiente sono operazioni che si estendono immediatamente in N-D, il rotore è definito solo in 3-D, analogamente a

quanto succedeva per il prodotto vettore in confronto a prodotto scalare, norma e prodotto diadico.

- il rotore è associato a rotazioni e non a traslazioni, al contrario di quanto accade per i vettori ordinari. Nel momento in cui si effettua la somma di due o più rotori, bisogna perciò interrogarsi sul significato di tale operazione e ricordare che le rotazioni non si sommano ma si succedono.
- il rotore non rispetta la riflessione. Un vortice anti-orario posto di fronte allo specchio si trasforma in un vortice orario, perciò il rotore cambia verso e non è il riflesso speculare di quello originario.
- in un mondo 2-D il rotore potrebbe essere descritto per mezzo di un unico scalare, come già accadeva per i momenti. Gli abitanti di questo universo bidimensionale non avrebbero quindi motivo di immaginare una 3^{a} dimensione, esterna al piano, in cui contenere un vettore-rotore quando basta un unico numero per descrivere, ad esempio, la vorticità di un flusso.
- in un mondo 4-D il rotore non è semplicemente definito, almeno in forma analitica. Mentre per il prodotto vettore si avevano almeno 3 equazioni da cui partire per costruire effettivamente l'operazione, per il rotore la definizione è esplicita come $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ con $\vec{v} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Anche volendo definire il rotore in forma implicita come *densità di circolazione*:

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{n} = \lim_{A(\Sigma_2) \rightarrow 0} \left(\frac{1}{A} \oint_{\partial \Sigma_2} \vec{v}^T \cdot d\vec{x} \right)$$

il suo significato risulterebbe poco chiaro, dato che in 4-D esiste un'infinità ∞^1 di normali ad una superficie 2-D Σ_2 per un punto dato.

Diventa così abbastanza evidente che anche il rotore dà origine non a un vettore ma ad uno *pseudovettore*.

Nelle sezioni precedenti di questo capitolo si è evidenziata la frequenza con cui compaiono prodotto vettore e rotore in fisica e, di riflesso, in ingegneria. Non ci si può quindi esimere, ancora una volta, dall'interrogarsi sul senso di tali operazioni e dal chiedersi se non possano essere viste sotto un altro aspetto.

7.1.2 Riassunto obiettivi

L'estensione in N-D del rotore costituisce la naturale prosecuzione di quella del prodotto vettore, perciò gli obiettivi sono in pratica gli stessi. Riassumendo, essi consistono nei seguenti punti:

- introduzione di una notazione più generale e, possibilmente, più semplice, che consenta di ricavare rapidamente le identità differenziali più utili nel caso le si dimentichino, analogamente a quanto già fatto per il prodotto vettore.
- risoluzione di alcuni paradossi che si manifestano nell'uso del rotore nel caso 3D e fare luce sulla 'natura' di questa operazione, analogamente a quanto già fatto per il prodotto vettore.

- in Fluidodinamica ed Elettromagnetismo, mostrare come sorgenti, doppiette e vortici concentrati possano essere trattati con un unico metodo analitico e come separare le componenti rotazionale e irrotazionale di un campo vettoriale.
- in Fluidodinamica, mostrare una re-interpretazione della vorticità e riformulare i principali teoremi in cui essa compare, in particolare il *Teorema di Stokes per il rotore*.
- in Elettromagnetismo, mostrare le somiglianze del campo magnetico con la vorticità ed evidenziare il motivo per cui, con tutta probabilità, non è possibile trovare monopoli magnetici.

7.2 La definizione del rotore in N-D

In precedenza si è visto come estendere in N-D il prodotto vettore per mezzo di una matrice anti-simmetrica, data dalla somma di due prodotti diadici:

$$\vec{r} \wedge \vec{F} \longrightarrow \vec{r} \hat{\wedge} \vec{F} = [\overline{Fr^T}] - [\overline{rF^T}] \quad (7.6)$$

Nel caso 3-D, il rotore è stato definito utilizzando una forma simile a quella del prodotto vettoriale, utilizzando però il vettore simbolico nabla $\vec{\nabla}$:

$$\text{rot}(\vec{v}) \triangleq \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad (7.7)$$

Si provi allora a sostituire $\vec{\nabla}$ nell'espressione del prodotto vettore N-D e a vedere quel che ne salta fuori.

$$\vec{\nabla} \hat{\wedge} \vec{v} = [\overline{v\nabla^T}] - [\overline{\nabla v^T}] \quad (7.8)$$

Il prodotto diadico tra \vec{v} e $\vec{\nabla}$ è ovviamente una forma simbolica e può essere esplicitata come segue:

$$[\overline{v\nabla^T}]_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Rightarrow \quad (7.9)$$

$$[\overline{\nabla v^T}] = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \quad (7.10)$$

Si ottiene così il gradiente del campo vettoriale in esame. Ripetendo lo stesso ragionamento per il prodotto $[\overline{\nabla v^T}]$ si ottiene il trasporto del gradiente, perciò si avrà:

$$\vec{\nabla} \hat{\wedge} \vec{v} = [\overline{v\nabla^T}] - [\overline{\nabla v^T}] = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \quad (7.11)$$

E' ora possibile dare la definizione di rotore in N-D.

Definizione di rotore N-D

Dato un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ in uno spazio N-D (ovvero $\vec{x} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$), si definisce il suo rotore $\vec{\nabla} \hat{\wedge} \vec{v}$ in N-D come:

$$\vec{\nabla} \hat{\wedge} \vec{v} \triangleq \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \quad (7.12)$$

In forma più esplicita:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v_N}{\partial x_1} & \frac{\partial v_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_N}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_N}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_N} & \frac{\partial v_2}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial v_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_N} - \frac{\partial v_N}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_N} - \frac{\partial v_N}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v_N}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_N} & \frac{\partial v_N}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_N} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Risulta così evidente che:

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \right)_{ij} = \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right)_{ij} = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]_{ij} - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]_{ij}^T = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (7.15)$$

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \right)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (7.16)$$

Come già accadeva per il prodotto vettore, si ottiene un tensore anti-simmetrico

Si veda ora quali sono le proprietà del nuovo operatore così definito e se rispecchiano quelle del rotore in 3-D.

7.3 Proprietà e identità per il rotore in N-D

Per come è stato definito il rotore N-D, esso rispetta *tutte* le classiche proprietà del suo equivalente in 3-D. In questa sezione si illustreranno le caratteristiche elementari della nuova operazione così definita e si dimostreranno le principali relazioni differenziali in cui compare. In particolare, si mostrerà la loro analogia con le identità già viste in 3-D.

7.3.1 Conversione rotore 3-D ed N-D

Analogamente alla forma matriciale del prodotto vettore, il tensore che definisce il rotore di un campo vettoriale contiene tutta l'informazione presente nella sua

espressione in notazione 3-D, infatti:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (7.17)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}; & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}; & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & -\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ -\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Perciò:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -\text{rot}(\vec{v})_Z & \text{rot}(\vec{v})_Y \\ \text{rot}(\vec{v})_Z & 0 & -\text{rot}(\vec{v})_X \\ -\text{rot}(\vec{v})_Y & \text{rot}(\vec{v})_X & 0 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Noto quindi il rotore in 3-D, è sempre possibile tradurlo in forma matriciale e ottenere il corrispondente tensore in notazione N-D.

7.3.2 Proprietà anti-commutativa e anti-simmetria

Anti-commutatività

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \quad (7.21)$$

Dimostrazione:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = [\overline{v \nabla^T}] - [\overline{\nabla v^T}] = -([\overline{\nabla v^T}] - [\overline{v \nabla^T}]) = -\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \quad (7.22)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \quad \text{C.V.D.} \quad (7.23)$$

L'anticommutatività del rotore è in realtà più una convenzione simbolica piuttosto che una vera proprietà dell'operazione. In notazione N-D si ottiene comunque una forma equivalente a quella in 3-D:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \quad (7.24)$$

Anti-simmetria

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = -[\vec{\nabla} \wedge \vec{v}]^T \quad (7.25)$$

L'anti-simmetria è una proprietà effettiva del rotore e la sua dimostrazione è comunque analoga a quella dell'anti-commutatività.

Dimostrazione:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T = - \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \right) = \quad (7.26)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = - \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right)^T = - (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \quad (7.27)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \quad \text{C.V.D.} \quad (7.28)$$

Poiché il rotore è un tensore anti-simmetrico, se moltiplicato a destra e a sinistra per uno stesso vettore il risultato sarà nullo, come già accadeva per le matrici-momento.

$$\vec{c}^T [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \vec{c} = 0 \quad \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^{N \times 1} \quad (7.29)$$

In particolare, se si moltiplica il rotore per uno spostamento infinitesimo $d\vec{x}$ sul campo si ottiene una variazione $d\vec{v}_R$ del campo \vec{v} sempre ortogonale allo spostamento, infatti:

$$d\vec{v}_R := [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] d\vec{x} \quad (7.30)$$

$$d\vec{x}^T \cdot d\vec{v}_R = d\vec{x}^T [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] d\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (7.31)$$

$$d\vec{v}_R \perp d\vec{x} \quad (7.32)$$

7.3.3 Proprietà distributiva

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} + \vec{\nabla} \wedge \vec{b} \quad (7.33)$$

Dimostrazione:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \left[\frac{\partial(\vec{a} + \vec{b})}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial(\vec{a} + \vec{b})}{\partial \vec{x}} \right]^T = \quad (7.34)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] - \left(\left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \right)^T \quad (7.35)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right]^T + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right]^T \quad (7.36)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} + \vec{\nabla} \wedge \vec{b} \quad \text{C.V.D.} \quad (7.37)$$

Si è così trovata un'equazione analoga a quella in 3-D:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} + \vec{\nabla} \wedge \vec{b} \quad (7.38)$$

Per dimostrare la proprietà distributiva a sinistra il ragionamento è analogo.

7.3.4 Rotore di vettore moltiplicato per scalare

$$\vec{\nabla} \hat{\wedge} (\phi \vec{v}) = (\vec{\nabla} \phi) \hat{\wedge} \vec{v} + \phi (\vec{\nabla} \hat{\wedge} \vec{v}) \quad (7.39)$$

Dimostrazione:

$$\vec{\nabla} \hat{\wedge} (\phi \vec{v}) = \left[\frac{\partial(\phi \vec{v})}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial(\phi \vec{v})}{\partial \vec{x}} \right]^T \quad (7.40)$$

Il gradiente può essere scomposto come:

$$\left[\frac{\partial(\phi \vec{v})}{\partial \vec{x}} \right]_{ij} = \frac{\partial(\phi v_i)}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \phi \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (7.41)$$

$$\left[\frac{\partial(\phi \vec{v})}{\partial \vec{x}} \right] = \overline{[v(\nabla \phi)^T]} + \phi \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \quad (7.42)$$

Sostituendo nell'espressione con il rotore si avrà:

$$\left[\frac{\partial(\phi \vec{v})}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial(\phi \vec{v})}{\partial \vec{x}} \right]^T = \overline{[v(\nabla \phi)^T]} + \phi \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left(\overline{[v(\nabla \phi)^T]} + \phi \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \right)^T \quad (7.43)$$

$$\vec{\nabla} \hat{\wedge} (\phi \vec{v}) = \overline{[v(\nabla \phi)^T]} - \overline{[(\nabla \phi) v^T]} + \phi \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right) \quad (7.44)$$

$$\vec{\nabla} \hat{\wedge} (\phi \vec{v}) = (\vec{\nabla} \phi) \hat{\wedge} \vec{v} + \phi (\vec{\nabla} \hat{\wedge} \vec{v}) \quad \text{C.V.D.} \quad (7.45)$$

Si ottiene così un'espressione analoga a quella 3-D, dove compaiono i singoli cunei $\hat{\wedge}$ al posto di quelli doppi $\hat{\wedge}$.

$$\vec{\nabla} \wedge (\phi \vec{v}) = (\vec{\nabla} \phi) \wedge \vec{v} + \phi (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \quad (7.46)$$

7.3.5 Divergenza di prodotto vettore 3-D

L'operazione di 'divergenza di prodotto vettore' merita qualche considerazione a parte rispetto alle altre. Dato che il vettore $\vec{p} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ è in realtà uno *pseudo-vettore* ed è definito solo in 3-D, quale significato assume il calcolo della sua divergenza? In notazione 3-D si ha l'identità:

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b})^T \cdot \vec{\nabla} = \vec{b}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) \quad (7.47)$$

In notazione N-D, in generale questo tipo di relazione non vale:

$$\vec{\nabla}^T \cdot [\vec{a} \hat{\wedge} \vec{b}] \neq \vec{b}^T \cdot (\vec{\nabla} \hat{\wedge} \vec{a}) - \vec{a}^T \cdot (\vec{\nabla} \hat{\wedge} \vec{b}) \quad (7.48)$$

Si provi quindi ad espandere in coordinate cartesiane la espressione in notazione 3-D:

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\partial(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(a_3 b_1 - a_1 b_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{\partial x_3} \quad (7.49)$$

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\partial a_2 b_3}{\partial x_1} + \frac{\partial a_3 b_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_1 b_2}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial a_3 b_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1 b_3}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2 b_1}{\partial x_3} \right) \quad (7.50)$$

Si può notare che in ogni termine compaiono sempre le lettere a , b , x e tre indici numerici sempre diversi tra loro. Ogni singolo termine può essere quindi scritto come:

$$\frac{\partial a_i b_j}{\partial x_k} \quad \text{con: } i \neq j, j \neq k, i \neq k \quad (7.51)$$

Dato che per termine di indici (i, j) compare anche un termine con indici permutati (j, i) e segno opposto, ogni binomino può essere scritto come:

$$\frac{\partial(a_i b_j - a_j b_i)}{\partial x_k} \quad \text{con: } j \neq k, i \neq k \quad (7.52)$$

dove si richiede solo che l'indice di derivazione k sia diverso da i e j . Questi ultimi due possono infatti anche essere uguali perché comunque il binomio corrispondente si annullerebbe. La divergenza di un prodotto vettoriale in 3-D può quindi essere scritta come:

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \sum_{\substack{i < j, \\ k \neq i, k \neq j}}^{N-1=3-1} \left(\frac{\partial(a_i b_j - a_j b_i)}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial(a_N b_1 - a_1 b_N)}{\partial x_k} \Big|_{\substack{N=3, \\ k=2}} \quad (7.53)$$

Il risultato di tale operazione non è particolarmente chiaro, né del resto lo è il suo significato 'fisico'. Non si esclude che si possa trovare un senso in questa espressione o comunque una forma più elegante di scriverla: finché però non sia chiarito come *interpretare* la divergenza di uno pseudovettore, è meglio attendere. In realtà è possibile costruire una *divergenza su 3 indici*, capace di operare in qualsiasi numero di dimensioni, in grado di riprodurre lo stesso identico risultato di una divergenza 3-D.

7.3.6 Divergenza a 3 indici

Data una generica matrice $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, definita su uno spazio N-D, la sua *divergenza a 3 indici* $\nabla_{ijk} \cdot A$ rispetto agli indici i, j e k nell'ordine è definita come:

$$\nabla_{ijk} \cdot A = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_j} \quad \forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (7.54)$$

Di fatto, ∇_{ijk} è un nuovo operatore differenziale che richiede 3 indici per essere definito. Si può verificare facilmente che gli indici possono essere permutati ciclicamente, infatti:

$$\nabla_{ijk} \cdot A = \nabla_{jki} \cdot A = \nabla_{kij} \cdot A \quad (7.55)$$

In generale però queste sono le uniche permutazioni valide. Si veda ora che effettivamente la *divergenza di un prodotto vettore in 3-D* può essere espressa come una *divergenza a 3 indici di un prodotto vettore in N-D*

Divergenza di prodotto vettore: l'estensione in N-D

Si calcoli la divergenza a 3 indici di generico un prodotto vettore N-D $\vec{a} \wedge \vec{b}$; si avrà:

$$\vec{\nabla}_{ijk} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\partial(\vec{a} \wedge \vec{b})_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial(\vec{a} \wedge \vec{b})_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial(\vec{a} \wedge \vec{b})_{ki}}{\partial x_j} \quad (7.56)$$

$$\forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\}$$

$$\vec{\nabla}_{ijk} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\partial(a_j b_i - a_i b_j)}{\partial x_k} + \frac{\partial(a_k b_j - a_j b_k)}{\partial x_i} + \frac{\partial(a_i b_k - a_k b_i)}{\partial x_j} \quad (7.57)$$

$$\forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\}$$

Ponendo $\{i; j; k\} = \{1; 2; 3\}$ si otterrà:

$$\vec{\nabla}_{123} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\partial(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{\partial x_3} + \frac{\partial(a_3 b_2 - a_2 b_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{\partial x_2} \quad (7.58)$$

$$\vec{\nabla}_{123} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\partial(a_3 b_2 - a_2 b_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{\partial x_3} \quad (7.59)$$

$$\vec{\nabla}_{123} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = - \left(\frac{\partial(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(a_3 b_1 - a_1 b_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{\partial x_3} \right) \quad (7.60)$$

$$\vec{\nabla}_{123} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = -\vec{\nabla}_{3D}^T \cdot (\vec{a}_{RID} \wedge \vec{b}_{RID}) \quad (7.61)$$

Si è così ritrovata l'espressione della divergenza di prodotto vettore in 3-D. Si noti che i vettori \vec{a} e \vec{b} possono essere *di dimensione N qualsiasi*, anche se una volta scelti 3 indici vengono estratti solo 3 elementi da ognuno di essi. I vettori che compaiono nell'espressione 'classica' in 3-D sono infatti ridotti rispetto agli originali:

$$\vec{a}_{RID} = [a_1; a_2; a_3] \quad (7.62)$$

$$\vec{b}_{RID} = [b_1; b_2; b_3] \quad (7.63)$$

In forma un po' semplificata, si può quindi scrivere la traduzione tra notazione N-D e 3-D come:

$$\nabla_{123} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = -\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (7.64)$$

Sebbene ora l'introduzione della *divergenza a 3 indici* possa sembrare un mero artificio matematico, si vedrà in seguito la sua importanza per l'estensione del Teorema di Helmholtz per la linee vorticosi, applicato in aggiunta al campo magnetico.

Espansione e confronto con identità 3-D

La divergenza a 3 indici di un prodotto vettore N-D $\vec{a} \wedge \vec{b}$ può essere opportunamente espansa, separando le derivate degli elementi del vettore \vec{a} da quelle del

vettore \vec{b} . Infatti:

$$\frac{\partial(\vec{a} \wedge \vec{b})_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial(a_j b_i - a_i b_j)}{\partial x_k} \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial(\vec{a} \wedge \vec{b})_{ij}}{\partial x_k} = b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_k} + a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \left(b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_k} + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_k} \right) \quad (7.66)$$

$$\frac{\partial(\vec{a} \wedge \vec{b})_{ij}}{\partial x_k} = \left(b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_k} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) + \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_k} \right) \quad (7.67)$$

$$(7.68)$$

A partire da quest'ultima identità, si dimostra facilmente che:

$$\nabla_{ijk} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla_{ijk} [\vec{\nabla} \wedge \vec{a}] - \vec{a} \cdot \nabla_{ijk} [\vec{\nabla} \wedge \vec{b}] \quad (7.69)$$

Dove con \cdot si è indicato il *prodotto a 3 indici*, tale che:

$$\vec{v} \cdot A = A_{ij} v_k + A_{jk} v_i + A_{ki} v_j \quad \forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (7.70)$$

Per mezzo del nuovo operatore ∇_{ijk} si è così trovata una relazione strutturalmente simile a quella nota in 3-D:

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) \quad (7.71)$$

che, tradotta, cambiando il segno, diviene:

$$\nabla_{123} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla_{123} [\vec{\nabla} \wedge \vec{a}] - \vec{a} \cdot \nabla_{123} [\vec{\nabla} \wedge \vec{b}] \quad (7.72)$$

7.3.7 Divergenza di prodotto vettore N-D e rotore di prodotto vettore 3-D

La divergenza di prodotto vettore N-D può essere scomposta nella forma:

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \cdot \vec{\nabla} = (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{b}) \vec{a} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{a} - \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} \quad (7.73)$$

o, in alternativa:

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \cdot \vec{\nabla} = \left((\vec{\nabla}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{a} \right) - \left((\vec{\nabla}^T \cdot \vec{b}) \vec{a} + \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} \right) \quad (7.74)$$

Dimostrazione: per cominciare risulta comodo esplicitare la divergenza di un generico prodotto diadico:

$$[\overline{ab^T}] \cdot \vec{\nabla} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial(\vec{a} b_j)}{\partial x_j} \quad (7.75)$$

$$[\overline{ab^T}] \cdot \vec{\nabla} = \sum_{j=1}^N \left(\vec{a} \frac{\partial b_j}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_j} \right) \quad (7.76)$$

$$[\overline{ab^T}] \cdot \vec{\nabla} = \vec{a} (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{b}) + \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} \quad (7.77)$$

$$(7.78)$$

Così:

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \cdot \vec{\nabla} = \left(\overline{[ba^T]} - \overline{[ab^T]} \right) \cdot \vec{\nabla} \quad (7.79)$$

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \cdot \vec{\nabla} = \left(\vec{b}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{a}) + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{a} \right) - \left(\vec{a}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{b}) + \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} \right) \quad (7.80)$$

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \cdot \vec{\nabla} = \left((\vec{\nabla}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{a} \right) - \left((\vec{\nabla}^T \cdot \vec{b}) \vec{a} + \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} \right) \quad (7.81)$$

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \cdot \vec{\nabla} = (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{b}) \vec{a} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{a} - \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} \quad (7.82)$$

C.V.D.

Si può notare che il risultato così ottenuto è simile, nella struttura, al rotore di un prodotto vettore nel caso 3-D, infatti:

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \left((\nabla \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \nabla \right) \vec{a} - \left((\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot \nabla \right) \vec{b} \quad (7.83)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{b}) \vec{a} + \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{b} - \left((\vec{\nabla}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{a} \right) \quad (7.84)$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{\nabla} = (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{a}) \vec{b} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{a} - \left((\vec{\nabla}^T \cdot \vec{b}) \vec{a} + \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{b} \right) \quad (7.85)$$

Si può così tradurre una notazione nell'altra ricordando semplicemente che:

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] \cdot \vec{\nabla} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{\nabla} \quad (7.86)$$

Si noti che l'ordine di a , b e ∇ è identico nelle due espressioni.

7.3.8 Rotore N-D per vettore e prodotto vettore di rotore 3-D

Un generico rotore in N-D moltiplicato per un vettore può essere scomposto nella forma:

$$[\vec{\nabla} \wedge \vec{a}] \cdot \vec{b} = \left(\left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right) \cdot \vec{b} = \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} - \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right]^T \vec{b} \quad (7.87)$$

Dimostrazione: è autoevidente nella stessa identità, dato che si è semplicemente esplicitata la definizione di rotore in N-D.

Si può notare che in notazione 3-D il prodotto vettore di un rotore viene espresso come:

$$\vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \nabla) - (\vec{b} \nabla) \cdot \vec{a} \quad (7.88)$$

ovvero:

$$\vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \nabla) - (\vec{a} \nabla) \cdot \vec{b} \quad (7.89)$$

$$(\nabla \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = (\vec{a} \nabla) \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot (\vec{a} \nabla) \quad (7.90)$$

Traducendo quest'ultima espressione in notazione con gradiente 'frazionario' si ottiene:

$$(\nabla \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} = \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} - \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right]^T \vec{b} = \left(\left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right) \vec{b} \quad (7.91)$$

Si è quindi verificato che è possibile tradurre una notazione nell'altra:

$$\left[\vec{\nabla} \wedge \vec{a} \right] \cdot \vec{b} = (\nabla \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} \quad (7.92)$$

Anche in questo caso l'ordine di a , b e ∇ è identico nelle due espressioni.

7.3.9 Espansione del gradiente di prodotto scalare

$$\vec{\nabla}(\vec{a}^T \cdot \vec{b}) = \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{a} - \left(\left[\vec{\nabla} \wedge \vec{a} \right] \vec{b} + \left[\vec{\nabla} \wedge \vec{b} \right] \vec{a} \right) \quad (7.93)$$

Dimostrazione: innanzitutto, è possibile esplicitare il gradiente di un prodotto scalare in maniera più semplice, infatti:

$$\vec{\nabla}(\vec{a}^T \cdot \vec{b})_i = \frac{\partial(\vec{a}^T \cdot \vec{b})}{\partial x_i} \quad (7.94)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a}^T \cdot \vec{b})_i = \frac{\partial \vec{a}^T}{\partial x_i} \cdot \vec{b} + \frac{\partial \vec{b}^T}{\partial x_i} \cdot \vec{a} \quad (7.95)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a}^T \cdot \vec{b}) = \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \vec{b} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \vec{a} \quad (7.96)$$

In notazione comune:

$$\vec{\nabla}(\vec{a}^T \cdot \vec{b}) = (\nabla \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\nabla \vec{b}) \cdot \vec{a} \quad (7.97)$$

Poiché il trasposto di un gradiente può essere espresso in funzione del rotore come:

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad (7.98)$$

operando un paio di sostituzioni si otterrà:

$$\vec{\nabla}(\vec{a}^T \cdot \vec{b}) = \left(\left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] - \vec{\nabla} \wedge \vec{a} \right) \cdot \vec{b} + \left(\left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] - \vec{\nabla} \wedge \vec{b} \right) \cdot \vec{a} \quad (7.99)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a}^T \cdot \vec{b}) = \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{b} + \left[\frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{x}} \right] \vec{a} - \left(\left[\vec{\nabla} \wedge \vec{a} \right] \vec{b} + \left[\vec{\nabla} \wedge \vec{b} \right] \vec{a} \right) \quad (7.100)$$

C.V.D.

Com'era prevedibile, anche quest'identità ha la sua analoga in notazione 3-D:

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\nabla \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) + \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) \quad (7.101)$$

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \nabla) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \nabla) \cdot \vec{a} - \left((\nabla \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} + (\nabla \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} \right) \quad (7.102)$$

Ancora una volta è possibile passare da una notazione all'altra mantenendo invariato l'ordine di a , b e ∇ :

7.3.10 Divergenza di rotore 3-D e N-D

La divergenza di uno pseudo-vettore è un'operazione che, come tale, viene effettuata solo in 3-D. Già in 2-D ci si potrebbe chiedere legittimamente quale sia il senso di tale operazione, dato che prodotti vettori e rotori escono sempre dal piano. Dopo aver visto la divergenza di un prodotto vettore, si analizzi ora quello di un rotore.

In notazione 3-D si verifica che la divergenza del rotore di un campo qualsiasi è sempre nulla:

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad (7.103)$$

Dimostrazione: è abbastanza semplice

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) &= \\ \vec{\nabla}^T \cdot \left(\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right) &= \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \quad (7.104) \end{aligned}$$

In forma un po' più compatta:

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} (v_{z/y} - v_{y/z}) + \frac{\partial}{\partial y} (v_{x/z} - v_{z/x}) + \frac{\partial}{\partial z} (v_{y/x} - v_{x/y}) \quad (7.105)$$

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = v_{z/xy} - v_{y/xz} + v_{x/yz} - v_{z/yx} + v_{y/zx} - v_{x/zy} \quad (7.106)$$

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = (v_{z/xy} - v_{z/yx}) + (v_{y/zx} - v_{y/xz}) + (v_{x/yz} - v_{x/zy}) \quad (7.107)$$

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \text{C.V.D.} \quad (7.108)$$

In 3-D, il rotore di un campo di velocità è la vorticità, la cui divergenza risulta perciò nulla:

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^T \cdot \vec{w} = 0 \quad (7.109)$$

La vorticità in 3-D è quindi un campo *solenoidale*.

Questo è in pratica il *Teorema di Helmholtz per la vorticità*, espresso in forma compatta. Più avanti, al paragrafo 9.1 nella pagina 230 si esaminerà il teorema nel dettaglio, mostrando come esso possa essere applicato anche al campo magnetico. Si veda ora l'estensione N-D dell'operazione di 'divergenza di rotore 3-D'.

Divergenza a 3 indici di rotore N-D

Al paragrafo 7.3.6 nella pagina 184 si era visto come esprimere la divergenza di un prodotto vettore in notazione N-D, introducendo l'operatore di *divergenza a 3 indici*:

$$\nabla_{123} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = -\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (7.110)$$

Per la divergenza di un rotore il ragionamento è analogo, infatti:

$$\nabla_{123} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad (7.111)$$

Dimostrazione: si cominci col calcolare la divergenza a 3 indici di un gradiente.

$$\nabla_{ijk} \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]_{ki} \quad (7.112)$$

$$\nabla_{ijk} \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (7.113)$$

$$\nabla_{ijk} \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_i} \quad (7.114)$$

In forma più compatta:

$$\nabla_{ijk} \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = v_{i/kj} + v_{j/ki} + v_{k/ij} \quad (7.115)$$

Per il calcolo della divergenza del *trasporto del gradiente* basterà invertire gli indici i e j :

$$\nabla_{ijk} \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T = v_{j/ki} + v_{i/kj} + v_{k/ji} \quad (7.116)$$

E' ora possibile calcolare la divergenza del rotore:

$$\nabla_{ijk} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \nabla_{ijk} \cdot \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right) \quad (7.117)$$

$$\nabla_{ijk} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = v_{i/kj} + v_{j/ki} + v_{k/ij} - (v_{j/ki} + v_{i/kj} + v_{k/ji}) \quad (7.118)$$

$$\nabla_{ijk} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = (v_{i/kj} - v_{i/kj}) + (v_{j/ki} - v_{j/ki}) + (v_{k/ij} - v_{k/ji}) \quad (7.119)$$

$$\nabla_{ijk} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \text{C.V.D.} \quad (7.120)$$

Si noti che questo giochetto può funzionare in qualsiasi numero di dimensioni e anche per indici i, j, k qualsiasi, non necessariamente diversi tra loro.

7.3.11 Rotore di gradiente

In maniera analoga a quanto avviene in 3-D, il rotore di campo vettoriale $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$, che ammette quindi un potenziale, è sempre nullo.

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0} \quad (7.121)$$

Dimostrazione: è immediata.

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = [(\vec{\nabla} \phi) \vec{\nabla}^T] - [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \phi)^T] \quad (7.122)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \left[\frac{\partial (\vec{\nabla} \phi)}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial (\vec{\nabla} \phi)}{\partial \vec{x}} \right]^T \quad (7.123)$$

$$\left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) \right]_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (7.124)$$

$$\left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) \right]_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \quad \text{C.V.D.} \quad (7.125)$$

In forma più compatta:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \left[\frac{\partial(\vec{\nabla} \phi)}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial(\vec{\nabla} \phi)}{\partial \vec{x}} \right]^T \quad (7.126)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{x}^2} \right] - \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{x}^2} \right]^T = \vec{0} \quad (7.127)$$

dove si è introdotto il tensore jacobiano simmetrico tale che:

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{x}^2} \right]_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{x}^2} \right] = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vec{x}^2} \right]^T \quad (7.128)$$

Dato che il gradiente di un campo a potenziale si esplicita in un tensore simmetrico, il rotore del campo sarà sempre nullo.

Il risultato conseguito nella formulazione N-D è analogo, anche nella notazione, a quello 3-D:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0} \quad (7.129)$$

7.3.12 Divergenza di rotore N-D e rotore di rotore 3-D

La divergenza di un rotore in N-D può essere semplificata come:

$$[\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 \vec{v} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}) \quad (7.130)$$

Dimostrazione: è abbastanza rapida.

$$[\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{\nabla} = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{\nabla} - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \vec{\nabla} \quad (7.131)$$

Calcolo della divergenza del gradiente:

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{\nabla} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x_j^2} = \nabla^2 \vec{v} \quad (7.132)$$

Calcolo della divergenza del gradiente trasposto:

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \vec{\nabla} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial \vec{x}} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \vec{\nabla} \sum_{j=1}^N \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (7.133)$$

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}) \quad (7.134)$$

Loro sottrazione:

$$[\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 \vec{v} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}) \quad \text{C.V.D.} \quad (7.135)$$

Si noti che il risultato così conseguito è analogo al caso 3-D di rotore di rotore, infatti:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}) - \nabla^2(\vec{v}) \quad (7.136)$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{\nabla} = \nabla^2(\vec{v}) - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}) \quad (7.137)$$

Ancora una volta, l'ordine dei simboli è lo stesso.

Capitolo 8

Teoremi sui campi

Disegnando un numero sufficiente di linee di forza, possiamo indicare la sua direzione in ogni punto dello spazio in cui essa agisce.

James Clerk Maxwell,
On Physical Lines of Force

In questo capitolo si mostreranno rapidamente alcuni teoremi sui campi vettoriali, frequentemente utilizzati sia nell'ambito della Fluidodinamica che dell'Elettromagnetismo. Di tutti i teoremi verrà data anche una dimostrazione valida in N-D oppure se ne troverà un'estensione equivalente.

8.1 Teoremi fondamentali e prime estensioni

Data una funzione $f(x)$ definita sull'intervallo $[x_0; x_f]$, è noto che l'integrale della sua derivata su tale intervallo è pari alla differenza tra i valori che essa assume agli estremi. Matematicamente:

$$\int_{x_0}^{x_f} \frac{df}{dx} dx = f(x_f) - f(x_0) \quad (8.1)$$

Quest'enunciato è detto *Teorema fondamentale del calcolo integrale* o *teorema di Torricelli-Barrow*. A partire da questa relazione elementare, si possono costruire altri teoremi via via più generali che legano una o più integrazioni ai valori che una funzione può assumere su un contorno. Nel caso in esame si ha un dominio mono-dimensionale $[x_0; x_f]$, il cui contorno è costituito dai punti x_0 e x_f . La funzione $f(x)$ è un campo scalare, ma la prima estensione che si può fare del teorema fondamentale del calcolo prevede proprio che $\vec{f}(x)$ possa essere un campo vettoriale.

8.1.1 Integrale 1-D di funzione vettoriale

Ogni elemento del campo vettoriale $\vec{f}(x)$ può essere considerato un campo scalare, per il quale vale il *teorema fondamentale del calcolo integrale*:

$$f_i(x) = \vec{f}_{(i)}(x) \quad \Rightarrow \quad (8.2)$$

$$\int_{x_0}^{x_F} \frac{df_i}{dx} dx = f_i(x_F) - f_i(x_0) \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; \dim(\vec{f}(x))\} \quad (8.3)$$

Applicando derivate e integrali direttamente all'intero campo vettoriale, si ottiene perciò:

$$\int_{x_0}^{x_F} \frac{d\vec{f}}{dx} dx = \vec{f}(x_F) - \vec{f}(x_0) \quad (8.4)$$

Si è così trovata una prima estensione del *teorema fondamentale del calcolo integrale*. Si veda ora se possibile scegliere un dominio diverso dal semplice $[x_0; x_f]$.

8.1.2 Integrale su curva 1-D

Si immagini una linea o curva 1-D in uno spazio con un numero arbitrario di dimensioni. Anche se la linea è contenuta in spazio N-D, essa è un oggetto monodimensionale, dato che basta 1 sola coordinata per definire un punto su di essa. In generale, detta γ la curva, per definirla servono $N - 1$ equazioni scalari e può essere parametrizzata attraverso un'opportuna coordinata q . Se un punto \vec{x} appartiene a γ , potrà essere identificato tramite la coordinata \vec{q} , non necessariamente unica.

$$\text{Se } \vec{x} \in \gamma \quad \Rightarrow \quad \exists q \text{ tale che: } \vec{x} = \vec{x}_\gamma(q) \quad (8.5)$$

Una curva è quindi descritta da una funzione $\vec{x}_\gamma(\cdot)$, oppure è composta da più curve contigue per ognuna delle quali esiste un'opportuna funzione corrispondente. Per semplicità, da qui in avanti si ometterà il pedice γ e per indicare che un punto appartiene alla curva si scriverà solo $\vec{x}(q)$.

Si consideri allora una curva γ parametrizzata nell'intervallo $[q_0; q_F]$, i cui estremi nello spazio N-D sono quindi $\vec{x}_0 = \vec{x}(q_0)$ e $\vec{x}_F = \vec{x}(q_F)$. Si conosca inoltre il gradiente $\vec{\nabla}\phi$ di un campo scalare $\phi(\vec{x})$ e il suo valore $\phi(\vec{x})$ in corrispondenza del punto iniziale della curva. E' possibile determinare, con questi soli dati, il valore di ϕ all'altro estremo della curva? La risposta è affermativa.

Poiché ogni punto sulla curva γ è funzione di un'unica coordinata q , anche i valori di ϕ sulla curva dipendono solo da q :

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}(q) \\ \phi = \phi(\vec{x}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi(\vec{x}(q)) \quad (8.6)$$

Il dominio $[q_0; q_F]$ è pur sempre un dominio 1-D e la derivata di ϕ rispetto a q è esatta, perciò si può sfruttare il teorema fondamentale del calcolo integrale e scrivere:

$$\int_{q_0}^{q_F} \frac{d\phi(\vec{x}(q))}{dq} dq = \phi(\vec{x}(q_F)) - \phi(\vec{x}(q_0)) \quad (8.7)$$

Rimane ora da legare la derivata rispetto a q al gradiente $\vec{\nabla}\phi$. Poiché, su ogni punto della curva, deve valere:

$$\begin{cases} d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}}d\vec{x} = (\vec{\nabla}\phi)^T \cdot d\vec{x} \\ d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial q}dq \\ d\vec{x}(q) = \frac{d\vec{x}}{dq}dq \end{cases} \quad (8.8)$$

dovrà valere anche:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}}d\vec{x} = \frac{\partial\phi}{\partial q}dq \quad \forall dq \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}}\frac{d\vec{x}}{dq}dq = \frac{\partial\phi}{\partial q}dq \quad \forall dq \Rightarrow \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}}\frac{d\vec{x}}{dq} = \frac{\partial\phi}{\partial q} \quad (8.10)$$

Quest'ultima relazione è di particolare importanza; la si sostituisca nel teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_{q_0}^{q_F} \frac{d\phi(\vec{x}(q))}{dq} dq = \phi(\vec{x}(q_F)) - \phi(\vec{x}(q_0)) \quad (8.11)$$

$$\int_{q_0}^{q_F} \frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}}\frac{d\vec{x}}{dq} dq = \phi(\vec{x}(q_F)) - \phi(\vec{x}(q_0)) \quad (8.12)$$

E' ora possibile integrare rispetto a x , dato che:

$$d\vec{x}(q) = \frac{d\vec{x}}{dq}dq \Rightarrow \int_{q_0}^{q_F} \frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}}\frac{d\vec{x}}{dq} dq = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}} d\vec{x}(q) \quad (8.13)$$

$$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \frac{\partial\phi}{\partial\vec{x}} d\vec{x}(q) = \phi(\vec{x}(q_F)) - \phi(\vec{x}(q_0)) \quad (8.14)$$

$$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} (\vec{\nabla}\phi)^T \cdot d\vec{x}(q) = \phi(\vec{x}_F) - \phi(\vec{x}_0) \quad (8.15)$$

Si è così trovata la relazione cercata: noto ϕ su \vec{x}_0 , è possibile determinare il suo valore su un altro punto \vec{x}_F integrando la proiezione del gradiente $\vec{\nabla}\phi$ su una linea che congiunga i due punti.

E' possibile inoltre fare alcune considerazioni:

- la curva è arbitraria ed è sufficiente che colleghi i due punti \vec{x}_0 e \vec{x}_F affinché la relazione sia valida. Quindi, *l'integrale non dipende dal percorso*.
- la parametrizzazione non influenza il risultato: nell'espressione q compare infatti solo in forma implicita nell'espressione del differenziale $d\vec{x}(q)$.
- il vettore $d\vec{x}(q)$ porta un punto appartenente alla curva in un altro punto appartenente alla curva, infatti:

$$\vec{x}(q) \in \gamma, \quad \vec{x}(q+dq) \in \gamma \quad (8.16)$$

$$\vec{x}(q+dq) = \vec{x}(q) + d\vec{x}(q) = \vec{x}(q) + \frac{d\vec{x}}{dq}dq \quad (8.17)$$

Per tale ragione, $d\vec{x}(q)$ e $d\vec{x}/dq$ sono anche *tangenti* alla curva stessa.

- Coerentemente con l'algebra delle matrici e l'espressione frazionaria del gradiente, si può scrivere anche:

$$\phi(\vec{x}_F) - \phi(\vec{x}_0) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} d\vec{x}(q) \quad (8.18)$$

Come corollario, si ha che l'integrale di un campo a potenziale $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$ lungo una linea chiusa è sempre nullo. Una linea chiusa può essere infatti parametrizzata in modo che:

$$\vec{x}(q_0) = \vec{x}(q_F) \quad \text{per } q_0 < q_F \quad \text{linea chiusa} \quad \Rightarrow \quad (8.19)$$

$$\phi(\vec{x}_F) - \phi(\vec{x}_0) = 0 \quad (8.20)$$

L'enunciato può allora essere scritto nelle due forme:

$$\oint_{q_0}^{q_F} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \frac{d\vec{x}}{dq} dq = 0 \quad (8.21)$$

$$\oint (\vec{\nabla} \phi)^T \cdot d\vec{x} = 0 \quad (8.22)$$

Si veda ora la corrispondente definizione di *campo conservativo*.

8.1.3 Campo conservativo e a potenziale

Sia dato un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ definito su uno spazio N-D. Il campo \vec{v} è detto *conservativo* se il suo integrale di linea da un punto a un altro non varia in funzione del percorso.

$$\text{Integ} = \int_{x_0}^{x_F} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(q) \quad (8.23)$$

Si può verificare facilmente che *se campo ammette un potenziale, allora è conservativo*. Ponendo infatti: $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$, si ottiene:

$$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(q) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} (\vec{\nabla} \phi)^T \cdot d\vec{x}(q) \quad (8.24)$$

$$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(q) = \phi(\vec{x}_F) - \phi(\vec{x}_0) \quad (8.25)$$

$$\text{Integ} = \phi(\vec{x}_F) - \phi(\vec{x}_0) \quad \text{indipendente dal percorso} \quad (8.26)$$

Riassumendo:

$$\text{Se: } \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \text{ è conservativo} \quad (8.27)$$

E' vero anche il contrario, cioè che *se un campo è conservativo allora ammette necessariamente un potenziale*.

Noto il campo $\vec{v}(\vec{x})$, è infatti possibile costruire il suo potenziale $\phi(\vec{x})$ a meno di una costante. Fissato un punto \vec{x}_0 qualsiasi, su cui si assegna $\phi(\vec{x}_0) := \phi_0$, il potenziale su un qualsiasi altro punto \vec{x}_P sarà calcolato come:

$$\phi(\vec{x}_P) = \phi_0 + \int_{x_0}^{x_P} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(q) \quad (8.28)$$

Questo è possibile ovviamente solo se il campo \vec{v} è conservativo. Si ha così:

$$\text{Se: } \vec{v} \text{ è conservativo} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad (8.29)$$

Poiché l'implicazione vale in entrambi i sensi, si è dimostrato che *un campo vettoriale è conservativo se e solo se ammette un potenziale*:

$$\vec{v} \text{ è conservativo} \iff \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad (8.30)$$

Ogni campo conservativo-potenziale è anche *irrotazionale*, ma la dimostrazione di quest'affermazione discende dal *Teorema di Stokes per il rotore*, che si vedrà più avanti.

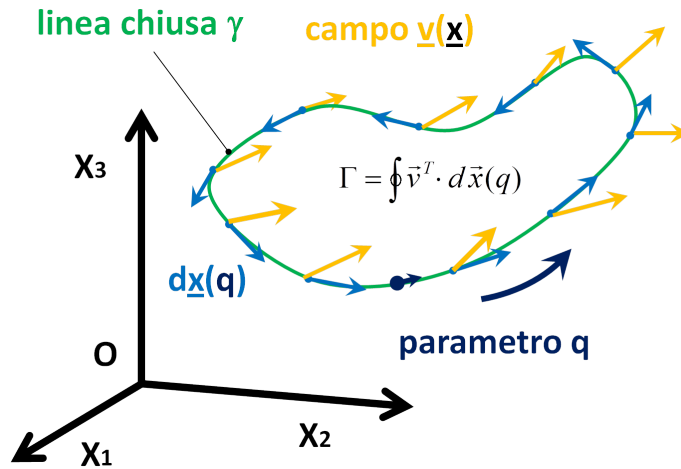


Figura 8.1: Esempio d'integrale del campo \vec{v} lungo una linea chiusa parametrizzata in q

8.1.4 Integrale di campo vettoriale su curva 1-D

Dato un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{M \times 1}$, definito su uno spazio N-D, è possibile considerare ogni suo elemento i -esimo $v_i(\vec{x})$ come un campo scalare, perciò vale:

$$v_i(\vec{x}) = \vec{v}_{(i)}(\vec{x}) \Rightarrow \quad (8.31)$$

$$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \frac{dv_i}{d\vec{x}} d\vec{x} = v_i(\vec{x}_F) - v_i(\vec{x}_0) \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; M\} \quad (8.32)$$

Applicando derivate e integrali direttamente all'intero campo vettoriale, si ottiene perciò:

$$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \frac{d\vec{v}}{d\vec{x}} d\vec{x} = \vec{v}(\vec{x}_F) - \vec{v}(\vec{x}_0) \quad (8.33)$$

analogamente a quanto già visto per l'integrazione su uno spazio 1-D. Si è trovata così l'espressione dell'integrale lungo una linea di un generico gradiente, che può essere scritta anche come:

$$\vec{v}(\vec{x}_F) - \vec{v}(\vec{x}_0) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot d\vec{x} \quad (8.34)$$

8.1.5 Teorema di Green nel piano

Il teorema di Green è una versione in 2-D del teorema fondamentale del calcolo differenziale, che prevede l'integrale di un certo tipo di 'derivata' su una superficie 2-D invece su una linea 1-D. Nel caso in esame, la 'derivata' sarà la componente del rotore $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ perpendicolare al piano.

Si veda allora l'enunciato di questo teorema.

Teorema di Green nel piano - enunciato

Sia dato un campo $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ definito su una superficie 2-D Σ_2 contenuta nel piano XY. Detta $\partial\Sigma_2$ la linea che ne costituisce il contorno, parametrizzata in senso *antiorario*, l'integrale della proiezione di \vec{v} sulla linea stessa è pari all'integrale sulla superficie Σ_2 della componente del rotore $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ perpendicolare al piano.

Matematicamente, ciò equivale a:

$$\oint_{\partial\Sigma_2} \vec{v}^T \cdot d\vec{x} = \int_{\Sigma_2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{u}_z dS_x \quad (8.35)$$

dove con \vec{u}_z si è indicato il versore \vec{k} relativo all'asse Z. In forma più esplicita, si può scrivere anche:

$$\oint_{\partial\Sigma_2} (v_x dx + v_y dy) = \int_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (8.36)$$

Come si può intuire, il Teorema di Green nel piano è un caso particolare del *Teorema di Stokes per il rotore*, di cui si darà in seguito la dimostrazione.

8.2 Teorema di Gauss per la divergenza

Il *Teorema di Gauss per la divergenza*, detto anche *Teorema di Gauss-Green* o *Teorema di Ostrogradski*, lega l'integrale della divergenza di un campo su un dominio al flusso attraverso il suo contorno. Il teorema è stato enunciato per la prima volta da Joseph Louis Lagrange nel 1762, ma il suo nome è oggi legato soprattutto ai nomi di Carl Friedrich Gauss e George Green, che lo riformularono rispettivamente nel 1813 e nel 1825 in maniera indipendente l'uno dall'altro. La prima dimostrazione apparve però solo nel 1831 ad opera di Michail Ostrogradskij.

Enunciato: dato un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ definito su un dominio N-D Ω_x , l'integrale della sua divergenza $\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v}$ su tale dominio è pari al suo flusso attraverso il contorno $\partial\Omega_x$ che racchiude il dominio stesso. Per il calcolo del flusso, le normali al contorno sono per convenzione considerate *uscenti* dal dominio.

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot \vec{v} dS_x \quad (8.37)$$

Si noti che l'(iper)-superficie $\partial\Omega_x$ è una superficie *chiusa*, dato che è il contorno completo di un dominio.

Dimostrazione: il Teorema di Gauss per la divergenza, così come la sua variante detta *Teorema del gradiente*, può essere dimostrato in forma rigorosa parametrizzando il dominio Ω_x per mezzo di N coordinate $\vec{q} = [q_1; q_2; \dots; q_N]$ che assumono valori nell'intervallo vettoriale $[\vec{q}_0; \vec{q}_F]$. Ogni punto $\vec{x} \in \Omega_x$ potrebbe quindi essere espresso in funzione di un vettore \vec{q} di pari dimensioni. Nello spazio delle coordinate \vec{q} si avrebbe un corrispondente dominio Ω_q , che per come è definito l'intervallo $[\vec{q}_0; \vec{q}_F]$ appare sempre come un (iper-)parallelepipedo in N-D.

Con questo tipo di formulazione si possono costruire rigorosamente le normali sul contorno $\partial\Omega_x$ nello spazio degli \vec{x} e dimostrare il teorema. Il procedimento è però piuttosto lungo e, in un primo approccio, non molto intuitivo. Si è quindi scelto di dimostrare il teorema per la divergenza nella sua forma 'classica' e in genere più nota.

8.2.1 Dimostrazione 'classica'

Si cominci a dimostrare il teorema della divergenza per un dominio infinitesimo che abbia la forma di un iper-cubo. Per comodità, ci si pone in un sistema di riferimento i cui assi ortogonali siano ortogonali alle facce dell'iper-cubo.

L'iper-volume infinitesimo $d\Omega_x = dV$ dell'iper-cubo elementare è calcolato come il prodotto dei suoi lati dx_i :

$$d\Omega_x = dV = dx_1 dx_2 \cdots dx_N = \prod_{i=1}^N dx_i \quad (8.38)$$

L'iper-cubo ha una coppia di facce per ogni asse cartesiano. La superficie dS_i per una faccia associata all' i -esimo asse sarà:

$$dS_i = \prod_{j \neq i}^N dx_j = \frac{1}{dx_i} \prod_{j=1}^N dx_j = \frac{1}{dx_i} d\Omega_x \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (8.39)$$

Per ogni coppia di facce i -esima si avrà una coppia di normali \vec{n}_i , uguali e opposte e parallele all'asse i -esimo.

$$\vec{n}_{i+} = -\vec{n}_{i-} \quad (8.40)$$

$$\vec{n}_{i+} \parallel \vec{u}_i \parallel \vec{u}_i dx_i = d\vec{x}_i \quad (8.41)$$

Dato che le normali hanno modulo unitario e sono parallele ai versori degli assi, si avrà semplicemente

$$\vec{n}_{i+} = \vec{u}_i \quad (8.42)$$

$$\vec{n}_{i-} = -\vec{u}_i \quad (8.43)$$

Si espliciti ora la divergenza del campo \vec{v} , moltiplicata per l'elemento di volume infinitesimo:

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \left(\prod_{j=1}^N dx_j \right) \quad (8.44)$$

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \prod_{j=1}^N dx_j \right) \quad (8.45)$$

Ogni termine i -esimo all'interno della sommatoria risulta moltiplicato per il volume infinitesimo $d\Omega_x$. Questo però può essere esplicitato come il prodotto dell'area della superficie dS_i per la corrispondente 'altezza' dx_i , e questo è valido per ogni direzione i -esima:

$$d\Omega_x = \prod_{j=1}^N dx_j = dx_i \prod_{j \neq i}^N dx_j = dx_i dS_i \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (8.46)$$

$$\prod_{j=1}^N dx_j = dx_i dS_i \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (8.47)$$

Si avrà allora:

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \prod_{j=1}^N dx_j \right) \quad (8.48)$$

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i dS_i \right) \quad (8.49)$$

$$(8.50)$$

Si analizzino ora le derivate parziali delle componenti di \vec{v} :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i = v_i(\vec{x}_i + dx_i \vec{u}_i) - v_i(\vec{x}_i) \quad (8.51)$$

$$v_i = \vec{v}(i) = \vec{v}^T \cdot \vec{u}_i \quad \Rightarrow \quad (8.52)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i = \vec{u}_i^T \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} dx_i = \vec{u}_i^T \cdot (\vec{v}(\vec{x}_i + d\vec{x}_i) - \vec{v}(\vec{x}_i)) \quad (8.53)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i = \vec{u}_i^T \cdot (\vec{v}(\vec{x}_i + d\vec{x}_i) - \vec{v}(\vec{x}_i)) \quad (8.54)$$

Sapendo che le normali alla coppia di facce i -esima sono uguali ai versori \vec{u}_i e $-\vec{u}_i$, si potrà scrivere:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i = \vec{u}_i^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i + d\vec{x}_i) - \vec{u}_i^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i) \quad (8.55)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i = \vec{n}_{i+}^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i + d\vec{x}_i) + \vec{n}_{i-}^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i) \quad (8.56)$$

Sostituendo nella sommatoria, si otterrà:

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = \sum_{i=1}^N (\vec{n}_{i+}^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i + d\vec{x}_i) + \vec{n}_{i-}^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i)) dS_i \quad (8.57)$$

Si può ora osservare che:

- $\vec{v}(\vec{x}_i + d\vec{x}_i)$ è il campo \vec{v} sulla faccia i -esima di normale \vec{n}_{i+}
- $\vec{v}(\vec{x}_i)$ è il campo \vec{v} definito sulla faccia i -esima di normale \vec{n}_{i-}
- $\vec{n}_{i+}^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i + d\vec{x}_i) dS_i$ è il flusso attraverso l' i -esima faccia di normale \vec{n}_{i+}

- $\vec{n}_{i-}^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i) dS_i$ è il flusso attraverso l'i-esima faccia di normale \vec{n}_{i+}

La sommatoria può essere riscritta in forma più compatta come:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{n}_{i+}^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i + d\vec{x}_i) + \vec{n}_{i-}^T \cdot \vec{v}(\vec{x}_i)) dS_i = \sum_{i=1}^N (\vec{n}^T \cdot \vec{v})|_{\Sigma_i} dS_i \quad (8.58)$$

dove Σ_i è l'unione di ogni coppia i-esima di facce.

Si trova così la relazione tra la divergenza e la somma dei flussi:

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = \sum_{i=1}^N (\vec{n}^T \cdot \vec{v})|_{\Sigma_i} dS_i \quad (8.59)$$

Poiché tutte le $2N$ facce dell'ipercubo ne costituiscono anche il contorno $\partial\Omega_x$, si ha che il flusso complessivo attraverso di esso è dato dalla somma di tutti i flussi attraverso le sue facce. In una forma simbolica non particolarmente felice ma compatta, si può scrivere:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{n}^T \cdot \vec{v})|_{\Sigma_i} dS_i = (\vec{n}^T \cdot \vec{v})|_{\partial\Omega_x} dS_x \quad (8.60)$$

Così:

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = (\vec{n}^T \cdot \vec{v})|_{\partial\Omega_x} dS_x \quad (8.61)$$

Questa relazione è in forma differenziale ed è riferita ad un ipercubo di ipervolume infinitesimo. Per ottenere la forma integrale bisognerà considerare un dominio di dimensioni finite. In generale, una zona di spazio Ω_x può essere approssimata in maniera via via più precisa come unione di più ipercubi, le cui facce sono a contatto l'una con l'altra.

Poiché le facce a contatto hanno normali uguali e opposte, il flusso uscente da un ipercubo risulterà entrante in quello contiguo e il bilancio netto risulta zero.

Per determinare il flusso di \vec{v} su Ω_x è quindi sufficiente considerare i contributi dovuti alle facce degli ipercubi non sovrapposte ad altre. Di fatto, il contorno $\partial\Omega_x$ del dominio può essere considerato indifferentemente come quello dato dall'unione di tutte le facce degli ipercubi o solo come l'unione di quelle 'libere': il risultato non cambia. Portando al limite l'operazione di approssimazione, Ω_x risulterà costituito da una distribuzione continua di ipercubi, sui cui volumi e contorni si potrà finalmente integrare:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot \vec{v} dS_x \quad \text{C.V.D.} \quad (8.62)$$

Si è così ottenuto l'enunciato del teorema, come richiesto.

8.2.2 Applicazioni del Teorema della divergenza

In Fisica e in Ingegneria il Teorema della divergenza compare in diversi contesti, data la sua utilità nel trasformare un integrale di volume in uno di superficie e viceversa. Si riportano qui, giusto per dare un'idea, due esempi tratti dagli ambiti della Fluidodinamica e dell'Elettromagnetismo.

Teorema di Reynolds per il trasporto

Detta b la densità di una grandezza estensiva B in un dominio $\Omega_x(t)$ in grado di muoversi, si voglia calcolare la variazione di B nel tempo.

$$B = \int_{\Omega_x(t)} b d\Omega_x \quad \Rightarrow \quad \frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_x(t)} b d\Omega_x \quad (8.63)$$

Si dimostra che:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_x(t)} b d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \frac{\partial b}{\partial t} d\Omega_x + \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot (b\vec{v}) dS_x \quad (8.64)$$

dove \vec{v} è il campo di velocità. L'integrale di superficie può essere tradotto, per mezzo del Teorema della divergenza, in un integrale di volume, perciò:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_x(t)} b d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \vec{\nabla}^T \cdot (b\vec{v}) \right) d\Omega_x \quad (8.65)$$

In generale, tutte le equazioni di bilancio in forma differenziale sono espresse proprio come:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \vec{\nabla}^T \cdot (b\vec{v}) = \mathcal{E}p_b \quad (8.66)$$

dove $\mathcal{E}p_b$ è una generica densità di produzione della grandezza B nell'unità di tempo.

Teorema di Gauss per il campo elettrico

Il flusso di campo elettrico attraverso una superficie chiusa è direttamente proporzionale alla quantità di carica elettrica in essa contenuta:

$$\oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot \vec{E} dS_x = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega_x} \rho_e d\Omega_x \quad (8.67)$$

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{E} d\Omega_x = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega_x} \rho_e d\Omega_x \quad (8.68)$$

In forma differenziale si ritrova così l'equazione di Maxwell per la carica elettrica:

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (8.69)$$

In generale, tutti i campi vettoriali generati da cariche sono legati da relazioni analoghe.

8.3 Varianti del Teorema della divergenza

Il Teorema della divergenza prevede due importanti varianti una delle quali è detta *Teorema del gradiente*. L'altra verrà qui chiamata *Variante per il rotore*. Mentre il Teorema del gradiente è valido in N-D, la variante per il rotore nella notazione classica è valida solo in 3-D, ma può essere generalizzata.

8.3.1 Teorema del gradiente e sua estensione

Il *Teorema del gradiente* afferma che, dato un campo scalare $\phi(\vec{x})$ definito su un dominio N-D Ω_x di contorno $\partial\Omega_x$, l'integrale del suo gradiente sul dominio è pari all'integrale delle normali \vec{n} sul contorno moltiplicate per ϕ :

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \phi d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \phi dS_x \quad (8.70)$$

Dimostrazione: in realtà il Teorema del gradiente è logicamente precedente al Teorema della divergenza: può infatti essere dimostrato indipendentemente e anzi quest'ultimo si può dimostrare partendo dal Teorema del gradiente. Per una dimostrazione rigorosa si potrebbe parametrizzare l'intero dominio Ω_x per mezzo di N coordinate \vec{q} ed effettuare una serie di trasformazioni per passare da un 'sistema di riferimento' all'altro, ma questo tipo di procedimento è piuttosto lungo e non particolarmente intuitivo. Ci si limiterà quindi alla dimostrazione classica del Teorema del gradiente, a partire quindi dal Teorema della divergenza già dimostrato.

Si consideri un campo vettoriale $\vec{v} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ che sia pari ad un campo scalare $\phi(\vec{x})$ moltiplicato per un vettore $\vec{c} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, costante sul dominio.

$$\vec{v} := \phi \vec{c} \quad \text{con: } \vec{c} = \overrightarrow{cost} \quad \text{su } \Omega_x \quad (8.71)$$

Applicando il Teorema della divergenza al campo \vec{v} si avrà:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot (\phi \vec{c}) d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot (\phi \vec{c}) dS_x \quad (8.72)$$

$$\int_{\Omega_x} (\vec{\nabla} \phi)^T \cdot \vec{c} + \phi (\vec{\nabla}^T \cdot \vec{c}) d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \phi \vec{n}^T \cdot \vec{c} dS_x \quad (8.73)$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{cost} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^T \cdot \vec{c} = 0 \quad (8.74)$$

$$\int_{\Omega_x} \vec{c}^T \cdot (\vec{\nabla} \phi) d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{c}^T \cdot (\phi \vec{n}) dS_x \quad (8.75)$$

$$(8.76)$$

Dato che il vettore \vec{c} è costante, può essere portato fuori dagli integrali. Si ottiene così:

$$\vec{c}^T \cdot \left(\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \phi d\Omega_x \right) = \vec{c}^T \cdot \left(\oint_{\partial\Omega_x} \phi \vec{n} dS_x \right) \quad (8.77)$$

Dato un campo scalare $\phi(\vec{x})$, si poteva moltiplicarlo per un vettore costante \vec{c} arbitrario e applicare il Teorema della divergenza a $\vec{v} = \phi \vec{c}$. Poiché \vec{c} è arbitrario nella scelta, affinché l'equazione sia sempre valida è necessario che:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \phi d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \phi dS_x \quad \text{C.V.D.} \quad (8.78)$$

E' così dimostrato l'enunciato.

8.3.2 Variante per il rotore

Il Teorema della divergenza ha una variante in cui l'operatore differenziale è il rotore invece della divergenza stessa. In questa variante si afferma che, dato un campo vettoriale $\vec{v} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ definito su un dominio 3-D Ω_x di contorno $\partial\Omega_x$, l'integrale del suo rotore sul dominio è pari all'integrale del prodotto vettore tra le normali \vec{n} sul contorno e \vec{v} stesso:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \wedge \vec{v} \, dS_x \quad (8.79)$$

Dimostrazione: il procedimento è per certi versi analogo a quello del Teorema per il gradiente. Si costruisce un campo di pseudo-vettori \vec{p} generato dal prodotto vettore 3-D tra un vettore \vec{c} costante sul dominio e il campo \vec{v} .

$$\vec{p} := \vec{c} \wedge \vec{v} \quad \text{con: } \vec{c} = \overrightarrow{\text{cost}} \quad \text{su } \Omega_x \quad (8.80)$$

Applicando il Teorema della divergenza al campo \vec{v} si avrà:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{v}) \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{v}) \, dS_x \quad (8.81)$$

La divergenza del prodotto vettore può essere esplicitata come:

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{v}) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{c})^T \cdot \vec{v} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{c} = \vec{0} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{c} \quad (8.82)$$

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{v}) = -(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{c} \quad (8.83)$$

Per l'identità del triplo prodotto scalare si ha inoltre:

$$\vec{n}^T \cdot (\vec{c} \wedge \vec{v}) = \vec{v}^T \cdot (\vec{n} \wedge \vec{c}) = \vec{c}^T \cdot (\vec{v} \wedge \vec{n}) \quad (8.84)$$

Sostituendo negli integrali, si ottiene:

$$\int_{\Omega_x} -(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{c} \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{c}^T \cdot (\vec{v} \wedge \vec{n}) \, dS_x \quad (8.85)$$

$$\int_{\Omega_x} -\vec{c}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{c}^T \cdot (-\vec{n} \wedge \vec{v}) \, dS_x \quad (8.86)$$

$$\vec{c}^T \cdot \left(\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \, d\Omega_x \right) = \vec{c}^T \cdot \left(\oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \wedge \vec{v} \, dS_x \right) \quad (8.87)$$

Data l'arbitrarietà di \vec{c} , si ha:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \wedge \vec{v} \, dS_x \quad \text{C.V.D.} \quad (8.88)$$

E' così dimostrato l'enunciato.

Alcune considerazioni

Si può notare che mentre i Teoremi del gradiente e della divergenza sono validi in spazi con numero arbitrario di dimensioni, così per come è formulata la *variante per il rotore* è valida solo in 3-D e genera degli pseudo-vettori. In pratica, costituisce una specie di 'stonatura' con gli altri due teoremi. Nella prossima sezione si vedrà però come sia possibile unificare in una sola espressione l'informazione di tutti e tre i teoremi grazie alla notazione 3-D.

8.4 Teorema del Gradiente Generalizzato - forma N-D

Osservando tutte assieme le equazioni dei teoremi della divergenza, del gradiente e della variante per il rotore, ci si rende subito conto della loro somiglianza simbolica:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot \vec{v} \, dS_x \quad (8.89)$$

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \phi \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \phi \, dS_x \quad (8.90)$$

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \wedge \vec{v} \, dS_x \quad (8.91)$$

In tutte le equazioni compare l'operatore differenziale $\vec{\nabla}$ all'interno dell'integrale di volume e, dall'altra parte dell'uguale, compare la normale \vec{n} nell'integrale di superficie. Tra le tre relazioni esistono però anche notevoli diversità 'strutturali': la prima infatti è un'equazione *scalare*, la seconda è *vettoriale* e la terza è *pseudo-vettoriale*. Ognuna di essa porta inoltre un'informazione di tipo diverso: la divergenza è associata all'idea di flusso, il gradiente sembra legato ad una 'pesatura' del campo di normali e il rotore a qualche loro forma di rotazione sulla superficie.

Nonostante queste differenze, tutte e tre le equazioni possono essere estratte da un'unica espressione, ovviamente in notazione N-D, che condensa tutta l'informazione che esse contengono.

8.4.1 Dimostrazione ed enunciato

Si consideri il Teorema del gradiente: esso coinvolge un campo scalare $\phi(\vec{x})$ e un campo di normali \vec{n} . Così come già fatto per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, sarà possibile estendere il Teorema del gradiente anche al caso di un campo vettoriale.

Sia dato un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ definito su un dominio N-D Ω_x . Ogni componente i -esima del vettore \vec{v} può essere considerata come un campo scalare $v_i(\vec{x})$, per cui vale quindi il Teorema del gradiente:

$$v_i(\vec{x}) = \vec{v}_{(i)}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad (8.92)$$

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} v_i \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} v_i \, dS_x \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; M\} \quad (8.93)$$

Poiché tale relazione vale per ogni componente di \vec{v} , si possono applicare integrali e gradienti direttamente all'intero campo vettoriale. Per farlo, è però necessario trasporre l'equazione:

$$\int_{\Omega_x} \frac{\partial v_i}{\partial \vec{x}} \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} v_i \vec{n}^T \, dS_x \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; M\} \quad (8.94)$$

Sostituendo al posto dello scalare v_i il vettore vettoriale \vec{v} si otterrà finalmente:

$$\int_{\Omega_x} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \overline{[\vec{v} \vec{n}^T]} \, dS_x \quad (8.95)$$

Quest'equazione matriciale è il **Teorema del Gradiente Generalizzato**, applicabile a campi vettoriali con numero qualsiasi di elementi e a domini di dimensioni arbitraria. In forma verbale, il suo enunciato è: *l'integrale del gradiente di un campo vettoriale su un dominio è pari all'integrale del suo prodotto diadico con il campo delle normali sul contorno.*

Probabilmente questa relazione è già nota in qualche forma, dato che è l'estensione diretta del Teorema del gradiente. Nonostante i miei sforzi, non sono comunque riuscito a trovarla in alcun testo, nemmeno in una notazione comune come potrebbe essere quella indiciale:

$$\int_{\Omega_x} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} v_i n_j dS_x \quad (8.96)$$

In ogni caso, l'espressione matriciale risulta, a mio parere, più facile da ricordare e consente di *vedere* la relazione esistente con gli altri teoremi. Si tratta quindi di una questione di *interpretazione* del risultato, oltre che di notazione.

8.4.2 Dal teorema generale ai particolari

Come anticipato, il Teorema del Gradiente Generalizzato contiene in sé tutti i tre 'Teoremi della divergenza' con le loro varianti. Ricordando quindi un'unica equazione matriciale simbolica, è possibile ricavarli con pochi passaggi.

Teorema della divergenza

Se il campo vettoriale \vec{v} ha dimensione N pari a quella dello spazio in cui è definito, il suo gradiente sarà una espresso da una matrice quadrata. Si dimostra facilmente che la traccia del gradiente di un campo vettoriale è la divergenza del campo stesso, infatti:

$$\text{tr} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} \quad (8.97)$$

Calcolando la traccia dell'equazione del Teorema del Gradiente Generalizzato, si ottiene il Teorema della divergenza, infatti:

$$\text{tr} \left(\int_{\Omega_x} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] d\Omega_x \right) = \text{tr} \left(\oint_{\partial\Omega_x} \overline{[vn^T]} dS_x \right) \quad (8.98)$$

$$\int_{\Omega_x} \text{tr} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \right) d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \text{tr} \left(\overline{[vn^T]} \right) dS_x \quad (8.99)$$

$$(8.100)$$

Infine:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot \vec{v} dS_x \quad \text{C.V.D.} \quad (8.101)$$

Teorema della gradiente

Il Teorema del gradiente può essere considerato, non a caso, come una versione particolare del Teorema del Gradiente Generalizzato, applicato ad un campo

vettoriale di dimensione unitaria. La dimostrazione è immediata:

$$\dim(\vec{v}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = [\phi] = \phi \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \quad (8.102)$$

$$\int_{\Omega_x} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} [\overline{vn^T}] dS_x \quad (8.103)$$

$$\int_{\Omega_x} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right] d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \phi \vec{n}^T dS_x \quad (8.104)$$

Così:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \phi d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \phi dS_x \quad (8.105)$$

Variante per il rotore

Se il campo vettoriale \vec{v} ha dimensione N pari a quella dello spazio in cui è definito, è possibile calcolarne il rotore in notazione N-D. Il Teorema del Gradiente Generalizzato è valido anche se si traspongono i termini da una parte all'altra dell'equazione, perciò si può scrivere:

$$\int_{\Omega_x} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} [\overline{vn^T}] dS_x \quad (8.106)$$

$$\int_{\Omega_x} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} [\overline{nv^T}] dS_x \quad (8.107)$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima, si otterrà:

$$\int_{\Omega_x} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} [\overline{vn^T}] - [\overline{nv^T}] dS_x \quad (8.108)$$

ovvero:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \wedge \vec{v} dS_x \quad (8.109)$$

Si è così ottenuta la variante per il rotore del Teorema della divergenza, direttamente in notazione N-D. Si noti che la relazione così costruita è un'equazione *matriciale* e non più pseudo-vettoriale.

8.5 Simmetria e anti-simmetria - flussore e rotore

Una generica matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ può essere scomposta in un parte simmetrica A_D e una anti-simmetrica A_R , così costruite:

$$A = A_D + A_R \quad (8.110)$$

$$\begin{cases} A_D := \frac{1}{2} (A + A^T) \\ A_R := \frac{1}{2} (A - A^T) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_D = A_D^T \\ A_R = -A_R^T \end{cases} \quad (8.111)$$

Volendo, è possibile effettuare lo stesso tipo di scomposizione per un prodotto diadico tra vettori di uguali dimensioni:

$$\overline{[ab^T]} = \frac{1}{2} \left(\overline{[ab^T]} + \overline{[ab^T]^T} \right) + \frac{1}{2} \left(\overline{[ab^T]} - \overline{[ab^T]^T} \right) \quad (8.112)$$

$$\overline{[ab^T]} = \frac{1}{2} \left(\overline{[ab^T]} + \overline{[ba^T]} \right) + \frac{1}{2} \left(\overline{[ab^T]} - \overline{[ba^T]} \right) \quad (8.113)$$

Nell'ultimo termine a destra dell'uguale si riconosce la metà del prodotto vettore N-D $\vec{b} \hat{\wedge} \vec{a}$, mentre il termine simmetrico non ha ancora un nome. Per ragioni che verranno spiegate in seguito, questo termine sarà chiamato *prodotto flusso* tra \vec{a} e \vec{b} .

8.5.1 Prodotto flusso

Analogamente al prodotto vettore N-D $\vec{a} \hat{\wedge} \vec{b}$, definito come:

$$\vec{a} \hat{\wedge} \vec{b} \triangleq \overline{[ba^T]} - \overline{[ab^T]} \quad (8.114)$$

si definisce il *prodotto flusso* $\vec{a} \diamond \vec{b}$ tra \vec{a} e \vec{b} come la somma dei due prodotti diadici che si possono costruire con i due vettori:

$$\vec{a} \diamond \vec{b} \triangleq \overline{[ba^T]} + \overline{[ab^T]} \quad (8.115)$$

Per costruzione, il prodotto flusso è ovviamente simmetrico:

$$\vec{a} \diamond \vec{b} = \vec{b} \diamond \vec{a} \quad (8.116)$$

Per indicare questo nuovo prodotto si è scelto di utilizzare il simbolo di un rombo \diamond , che ricorda due cunei sovrapposti $\hat{\wedge}$, il primo diretto verso l'alto e il secondo verso il basso. Con questa scelta simbolica è possibile ricordare facilmente che l'operatore \diamond è *simmetrico*, rispetto ad una linea orizzontale immaginaria, dato che è uguale al suo riflesso \diamond . L'operatore $\hat{\wedge}$ è, al contrario, *antisimmetrico* e non è uguale al suo 'riflesso' $\hat{\vee}$.

Ogni prodotto diadico tra vettori di uguali dimensioni può essere così scomposto come metà della somma di flusso e rotore:

$$\overline{[ba^T]} = \frac{1}{2} \vec{a} \diamond \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a} \hat{\wedge} \vec{b} \quad (8.117)$$

$$\begin{cases} \vec{a} \diamond \vec{b} = \overline{[ba^T]} + \overline{[ab^T]} \\ \vec{a} \hat{\wedge} \vec{b} = \overline{[ba^T]} - \overline{[ab^T]} \end{cases} \quad (8.118)$$

In realtà si potrebbe benissimo fare a meno di definire un nuovo prodotto come il flusso, ma al fine di mantenere una certa eleganza e 'simmetria' con il prodotto vettore e il rotore può essere utile introdurlo. Si vedrà in particolare come, in campo differenziale, costituisca la naturale estensione del concetto di divergenza.

8.5.2 Flusso

Analogamente a come si è costruito il rotore a partire dall'espressione del prodotto vettore, così si costruirà il flusso a partire dal prodotto flusso.

Sostituendo l'operatore differenziale $\vec{\nabla}$ al primo vettore di un prodotto flusso e applicandolo ad un campo $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, si otterrà:

$$\vec{\nabla} \diamond \vec{v} = [\overline{\nabla v^T}] + [\overline{\nabla v^T}] \quad (8.119)$$

ovvero:

$$\vec{\nabla} \diamond \vec{v} \triangleq \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \quad (8.120)$$

Per costruzione, il flusso è un tensore quadrato e simmetrico:

$$\vec{\nabla} \diamond \vec{v} = \vec{v} \diamond \vec{\nabla} \quad (8.121)$$

Il gradiente del campo può così essere scomposto nelle sue componenti simmetrica e anti-simmetrica, associate rispettivamente a flusso e rotore:

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right) + \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right) \quad (8.122)$$

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \diamond \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad (8.123)$$

In Fluidodinamica sia flusso che rotore compaiono nello studio delle correnti viscoso: in particolare, se \vec{v} è un campo di velocità, si chiamano:

- Tensore di rapidità di deformazione, o *rate of strain tensor* S :

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right) \quad (8.124)$$

- Tensore di vorticità, velocità angolare o *vorticity tensor* Ω :

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right) \quad (8.125)$$

Estensione della divergenza

Noti flusso e rotore di un campo \vec{v} , è quindi possibile ricostruirne l'intero gradiente. Lo stesso non è possibile avendo a disposizione solo divergenza e rotore: si consideri ad esempio il campo 3-D definito come:

$$\vec{v}(\vec{x}) = y\vec{i} + x\vec{j} = [y; \ x; \ 0] \quad (8.126)$$

Sia la divergenza che il rotore di questo campo sono nulli, ma non lo è il suo gradiente, infatti:

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.127)$$

Si può notare che la matrice risultante ha *traccia nulla* ed è *simmetrica*, coerentemente con divergenza e rotore nulli. Il flusso del campo di velocità attraverso

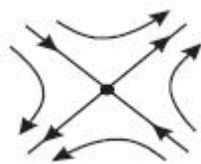


Figura 8.2: Linee di corrente per $\vec{v} = [y; x; 0]$

qualsiasi superficie chiusa è complessivamente nullo ma può essere distribuito in maniera varia: banalmente, la corrente potrebbe deviare di direzione. Nel calcolo della divergenza di un campo questo tipo di informazioni su direzione e intensità dei flussi vanno perdute, mentre vengono conservate nel calcolo del flusso. Si può inoltre dimostrare facilmente che la divergenza è pari a metà della traccia del flusso.

$$\text{tr} \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} \diamond \vec{v} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]_{ii} + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]_{ii}^T \right) \right) \quad (8.128)$$

$$\text{tr} \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} \diamond \vec{v} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} \quad \text{C.V.D.} \quad (8.129)$$

Di conseguenza, il rotore ha traccia nulla:

$$\begin{cases} \text{tr} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \right) = \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} \\ \text{tr} \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} \diamond \vec{v} \right) = \vec{\nabla}^T \cdot \vec{v} \\ \text{tr} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \right) = \text{tr} \left(2 \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \vec{\nabla} \diamond \vec{v} \right) \end{cases} \Rightarrow \text{tr} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \right) = 0 \quad (8.130)$$

Si conclude che è più conveniente considerare flusso e rotore come operatori complementari piuttosto che divergenza e rotore.

8.6 Premesse parametriche

Prima di dimostrare il Teorema del rotore in N-D, è utile effettuare un breve ripasso sui metodi matematici che consentono di descrivere spazi, superfici e linee in forma parametrica.

8.6.1 Parametrizzazione di un dominio

Dato un generico dominio Ω_x in uno spazio N-D, esso può essere parametrizzato o suddiviso in più parti parametrizzabili per mezzo di N coordinate $\vec{q} = [q_1; q_2; \dots; q_N]$, variabili nell'intervallo vettoriale $[\vec{q}_0, \vec{q}_F]$. Questo intervallo definisce un corrispondente dominio Ω_q che, nello spazio dei parametri, appare quindi come un (iper-)parallelepipedo. Ogni punto \vec{x} appartenente al dominio Ω_x può quindi essere identificato da uno o più vettori \vec{q} :

$$\exists \vec{q} \in [\vec{q}_0, \vec{q}_F] \quad \text{tale che:} \quad \vec{x} = \vec{x}(\vec{q}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega_x \quad (8.131)$$

Le coordinate parametriche o lagrangiane \vec{q} e quelle geometriche \vec{x} possono così essere legate in forma differenziale come:

$$d\vec{x} = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] d\vec{q} \quad (8.132)$$

Se ad ogni punto $\vec{x} \in \Omega_x$ corrisponde uno e un solo vettore $\vec{q} \in \Omega_q$, la relazione tra i due domini è biunivoca (non c'è autocompenetrazione) e si ha anche:

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega_x \quad \Rightarrow \quad d\vec{q} = \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right] d\vec{x} \quad (8.133)$$

Risulta così che:

$$\left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right] \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] = \bar{I}_{N \times N} \quad (8.134)$$

$$\left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^{-1} \quad (8.135)$$

8.6.2 Curva 1-D

Volendo, è possibile fissare N-1 delle coordinate $\vec{q} = [\vec{q}_s; q_N]$ e lasciare 'libera' l'ultima coordinata q_N . Si ha così 1 solo Grado di Libertà e l'equazione di una linea:

$$\vec{q}_s := \vec{q}_s \text{ fix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{x}(\vec{q}) = \vec{x}(\vec{q}_s, q_N) \quad \Rightarrow \quad (8.136)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(q_N) \quad \text{equazione della linea di coord. } \vec{q}_s = \vec{q}_s \text{ fix} \quad (8.137)$$

8.6.3 Iper-superficie

Allo stesso modo, è possibile lasciare libere N-1 delle coordinate $\vec{q} = [\vec{q}_s; q_N]$ e fissare solo l'ultima coordinata q_N . Si ha così 1 Grado di Indeterminazione e l'equazione di un'iper-superficie, non necessariamente chiusa.

$$q_N := q_N \text{ fix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{x}(\vec{q}) = \vec{x}(\vec{q}_s, q_N \text{ fix}) \quad \Rightarrow \quad (8.138)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{q}_s) \quad \text{equazione della superficie per } q_N = q_N \text{ fix} \quad (8.139)$$

Detta per semplicità $c = q_N \text{ fix}$ la coordinata fissata per la superficie, si può dimostrare che nel caso di corrispondenza biunivoca tra Ω_x e Ω_q l'equazione della superficie può essere scritta come:

$$\Sigma_{N-1}(\vec{x}) = c \quad \forall \vec{x} \in \Omega_x \quad (8.140)$$

Infatti:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{q}_s, c) \quad \forall \vec{x} \in \Omega_x \quad (8.141)$$

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad q_N = q_N(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad (8.142)$$

$$q_N(\vec{x}) = c \quad \forall \vec{x} \in \Omega_x \quad \Rightarrow \quad (8.143)$$

$$\Sigma_{N-1}(\vec{x}) = q_N(\vec{x}) \quad (8.144)$$

Normale ad una iper-superficie

Data l'equazione di una iper-superficie nella forma

$$\Sigma_{N-1}(\vec{x}) = c \quad \forall \vec{x} \in \Omega_x \quad (8.145)$$

$$\text{sapendo che: } \vec{x} = \vec{x}(\vec{q}_s, c) \quad \forall \vec{x} \in \Omega_x \quad (8.146)$$

si voglia trovare la sua normale \vec{n} per un punto. La normale, per definizione, dovrà avere norma unitaria ed essere perpendicolare ad ogni vettore $d\vec{x}(\vec{q}_s)$ tangente alla superficie stessa. Si avrà così:

$$\vec{n}^T \cdot d\vec{x}(\vec{q}_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}_s} \right] d\vec{q}_s = 0 \quad \forall d\vec{q}_s \quad (8.147)$$

$$\vec{n}^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}_s} \right] = \vec{0}^T \quad (8.148)$$

Si può inoltre verificare un'interessante proprietà del gradiente di $q_N(\vec{x})$, infatti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}_s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_N} \right] \\ \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] = \bar{I}_{N \times N} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\partial q_N}{\partial \vec{x}} \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}_s}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_N} \right] = [\vec{0}^T, 1] \quad (8.149)$$

Imponendo la norma unitaria, \vec{n} potrà quindi essere espressa come:

$$\vec{n}^T = \frac{\partial q_N}{\partial \vec{x}} / \left\| \frac{\partial q_N}{\partial \vec{x}} \right\| \quad (8.150)$$

Ovvero:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} q_N(\vec{x})}{\left\| \vec{\nabla} q_N(\vec{x}) \right\|} = \frac{\vec{\nabla} \Sigma(\vec{x})}{\left\| \vec{\nabla} \Sigma(\vec{x}) \right\|} \quad (8.151)$$

Si è così trovata un'espressione della normale ad una iper-superficie Σ_{N-1} valida in qualsiasi numero di dimensioni.

8.6.4 Linee chiuse

Dato un dominio Ω_x parametrizzato in coordinate \vec{q} nella forma $\vec{x} = \vec{x}(\vec{q})$, sia $c = q_N$ una coordinata che individua una posizione su una linea, la quale è identificata dagli altri $N - 1$ parametri \vec{q}_s .

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{q}) = \vec{x}(\vec{q}_s, c) \quad \text{equazione della linea con } \vec{q}_s \text{ fissato} \quad (8.152)$$

Dette c_0 e c_F le coordinate che identificano inizio e fine della classe linee così definite, esse saranno *chiuse* se:

$$\vec{x}(\vec{q}_s, c_0) = \vec{x}(\vec{q}_s, c_F) \quad \forall \vec{q}_s \in [\vec{q}_{S0}, \vec{q}_{SF}] \quad (8.153)$$

Nello spazio degli \vec{x} infatti punto di partenza e punto di arrivo della linea devono coincidere.

Di conseguenza, ogni grandezza $g(\vec{x})$, se definita in funzione di \vec{x} e non di \vec{q} , sarà tale che:

$$g(\vec{x}(\vec{q}_s, c_0)) = g(\vec{x}(\vec{q}_s, c_F)) \quad (8.154)$$

$$g(\vec{x}_0) = g(\vec{x}_F) \quad (8.155)$$

Volendo tenere distinti i due punti di inizio e fine, si può imporre che c appartenga all'intervallo aperto $[c_0; c_f[$ e ridefinire una classe di linee chiuse come:

$$\vec{x}(\vec{q}_s, c_0) = \lim_{c \rightarrow c_F^-} \vec{x}(\vec{q}_s, c) \quad \forall \vec{q}_s \in [\vec{q}_{S0}, \vec{q}_{SF}[\quad (8.156)$$

In questo caso una grandezza $g(\vec{x})$ può non assumere gli stessi valori da un capo all'altro della linea ed essere quindi discontinua:

$$g(\vec{x}(\vec{q}_s, c_0)) \neq \lim_{c \rightarrow c_F^-} g(\vec{x}(\vec{q}_s, c)) \quad (8.157)$$

In genere conviene quindi parametrizzare una linea facendo coincidere i punti \vec{x}_0 e \vec{x}_F , integrando eventuali discontinuità per mezzo di apposite distribuzioni come le delta di Dirac $\delta(c)$. Poiché in questo caso con le coordinate c_0 e c_F si identificano due punti coincidenti $\vec{x}_0 = \vec{x}_F$, la funzione $\vec{x} = \vec{x}(\vec{q})$ non è localmente invertibile.

Per evitare questo tipo di problemi, risulta quindi più comodo lavorare direttamente nel dominio Ω_q dei parametri \vec{q} . Se inoltre una grandezza g è definita direttamente in funzione di \vec{q} , può anche assumere più di un valore in uno stesso punto $\vec{x} \in \Omega_x$.

Si consideri ad esempio l'equazione di una circonferenza nel piano; in forma parametrica essa può essere scritta come:

$$\begin{cases} x = R \cos(\theta) & \forall \theta \in [0; 2\pi[\\ y = R \sin(\theta) & \forall \theta \in [0; 2\pi[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = q_1 \cos(q_2) & \forall q_2 \in [0; 2\pi[\\ x_2 = q_1 \sin(q_2) & \forall q_2 \in [0; 2\pi[\end{cases} \quad (8.158)$$

In forma vettoriale si ha:

$$\vec{x} = [x_1; x_2] = q_1 [\cos(q_2); \sin(q_2)] \quad \forall q_2 \in [0; 2\pi[\quad (8.159)$$

Si verifica facilmente che $\vec{x}(q_1, 0) = \vec{x}(q_1, 2\pi)$, perciò la linea è chiusa come previsto. E' possibile definire anche una grandezza $g(\vec{q})$ sia *continua nel dominio* Ω_q ma *discontinua nel dominio* Ω_x . Ponendo infatti:

$$g(q_1, q_2) = \theta = q_2 \quad \forall q_2 \in [0; 2\pi[\quad (8.160)$$

si ottiene una funzione g continua in q_2 , ma discontinua su Ω_x . Si verifica facilmente che:

$$\begin{cases} g(q_1, 0) = 0 \\ \lim_{c \rightarrow 2\pi^-} g(q_1, c) = g(q_1, 2\pi) = 2\pi \end{cases} \Rightarrow g|_{\vec{x}_0} \neq \lim_{q_2 \rightarrow 2\pi^-} g|_{\vec{x}} \quad (8.161)$$

L'utilizzo di coordinate parametriche consente quindi di trattare anche funzioni che nel dominio originale sarebbe discontinue o si troverebbero ad assumere più valori in un punto solo (polidromia).

8.6.5 Trasformazione dei campi

L'integrale di un campo lungo una linea può essere effettuato sia nel dominio Ω_x , sia nel dominio delle coordinate parametriche. Nel caso più semplice, detta $c = q_N$ la coordinata per individuare un punto su una linea, si avrà:

$$\mathcal{I} = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = \int_{c_0}^{c_F} \vec{v}^T \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial c} dc \quad (8.162)$$

Ponendo $v_c = \vec{v}^T \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial c}$, si potrebbe scrivere quindi l'integrale totalmente nel dominio di 'c':

$$\mathcal{I} = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_F} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = \int_{c_0}^{c_F} v_c dc \quad (8.163)$$

Più in generale, si costruisca allora un campo \vec{v}_q tale che:

$$\vec{v}_q^T \cdot d\vec{q} = \vec{v}^T \cdot d\vec{x} \quad \forall \vec{x}, d\vec{x} \quad (8.164)$$

Nell'ipotesi di corrispondenza biunivoca tra i punti dei domini Ω_x e Ω_q , si avrà allora:

$$d\vec{q} = \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right] d\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_q^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right] d\vec{x} = \vec{v}^T \cdot d\vec{x} \quad \forall \vec{x}, d\vec{x} \quad \Rightarrow \quad (8.165)$$

$$\vec{v}_q^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right] = \vec{v}^T \quad \forall \vec{x} \quad (8.166)$$

Si trova così la formula per tramutare un campo in un altro, ripetendo lo stesso ragionamento anche per variazioni $d\vec{q}$ qualsiasi:

$$\begin{cases} \vec{v} = \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \vec{v}_q \\ \vec{v}_q = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^T \cdot \vec{v} \end{cases} \quad (8.167)$$

Trasformazione dei gradienti

Si voglia ora determinare il gradiente del campo \vec{v}_q rispetto alle coordinate \vec{q} . Senza stare a svolgere tutti i passaggi, si può dimostrare che:

$$\left[\frac{\partial \vec{v}_q}{\partial \vec{q}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] + \left[\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \vec{q}^2} \right]_{kij} \cdot \vec{v}_k \quad (8.168)$$

Il singolo elemento di indici (i,j) del gradiente nel dominio Ω_q può quindi essere espresso come:

$$\frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{x}^T}{\partial q_i} \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 \vec{x}^T}{\partial q_i \partial q_j} \cdot \vec{v} \quad (8.169)$$

In forma ancora più compatta:

$$v_{q_i/q_j} = \vec{x}_{/q_i}^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{x}_{/q_j} + \vec{x}_{/q_i q_j}^T \cdot \vec{v} \quad (8.170)$$

Analogamente si ha:

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}_q}{\partial \vec{q}} \right] \cdot \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \right] + \left[\frac{\partial^2 \vec{q}}{\partial \vec{x}^2} \right]_{kij} \cdot \vec{v}_{q_k} \quad (8.171)$$

Trasformazione di flussori e rotori

Applicando le definizioni di flussore e di rotore al campo \vec{v}_q nel dominio Ω_q , si otterrà:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_q \diamond \vec{v}_q = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^T \cdot [\vec{\nabla} \diamond \vec{v}] \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] + 2 \left[\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \vec{q}^2} \right]_{kij} \cdot \vec{v}_k \\ \vec{\nabla}_q \wedge \vec{v}_q = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] + \vec{0} \end{cases} \quad (8.172)$$

dove $\vec{\nabla}_q$ è l'operatore differenziale nabla definito sul dominio Ω_q :

$$\vec{\nabla} \triangleq \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_2}; \quad \dots; \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_N} \right] \quad (8.173)$$

8.7 Teorema di Stokes per il rotore - caso 3- D

In questa sezione si fornirà una rapida descrizione del *Teorema di Stokes per il rotore*, noto anche come *Teorema di Kelvin-Stokes* o semplicemente *Teorema del rotore*.

8.7.1 Cenni storici

L'inglese William Thomson, conosciuto anche come Lord Kelvin, formulò una prima versione del teorema del rotore e la comunicò a Sir George Gabriel Stokes in una lettera del luglio 1850. In occasione dello Smith Prize[7] del febbraio 1854, un concorso annuale dell'università di Cambridge, Stokes inserì tra i quesiti dell'esame proprio l'enunciato del teorema che oggi porta il suo nome. Il quesito n° 8 recita infatti:

8. If X, Y, Z be functions of the rectangular co-ordinates x, y, z , dS an element of any limited surface, l, m, n the cosines of the inclinations of the normal at dS to the axes, ds an element of the bounding line, shew that:

$$\begin{aligned} \iint \left\{ l \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + m \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + n \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \right\} dS = \\ \int \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds \end{aligned} \quad (8.174)$$

the differential coefficients of X, Y, Z being partial, and the single integral being taken all round the perimeter of the surface.

Quell'anno il premio fu assegnato a James Clerk Maxwell e a Edward John Routh.

In forma moderna, la stessa equazione può essere scritta in forma vettoriale, infatti:

$$\vec{v} = [v_x; v_y; v_z] := [X; Y; Z] \quad (8.175)$$

$$\vec{n} = [l; m; n] \quad (8.176)$$

$$d\vec{x}(q) = \left[\frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; \frac{dz}{ds} \right] ds \quad (8.177)$$

Operando le suddette sostituzioni e riarrangiando un po' la notazione, si otterrà il Teorema di Stokes per il rotore per il caso 3-D. L'enunciato moderno del Teorema è un po' diverso da quello originale e, sebbene sia già stato dato al paragrafo 6.2.3 nella pagina 163, lo si riporta qui per completezza sia in forma verbale che matematica.

8.7.2 Enunciato moderno 3-D

Sia Σ_2 una superficie orientata in uno spazio 3-D, liscia a pezzi, avente campo normale unitario \vec{n} e il cui contorno γ consista di una o più curve chiuse, continue a pezzi, con orientazione ereditata da Σ_2 . Se \vec{v} è un campo vettoriale liscio, definito su un insieme aperto contenente Σ_2 e tale che $\vec{v} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, allora:

$$\int_{\Sigma_2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{n} dS_x = \oint_{\partial\Sigma_2} \vec{v}^T \cdot d\vec{x} \quad (8.178)$$

In questa formulazione, così come già osservato, il Teorema di Stokes è valido solo in 3-D e risulta particolarmente restrittivo a causa delle ipotesi di continuità e derivabilità richieste per γ , Σ_2 e \vec{v} . Molto spesso però in fisica il Teorema di Stokes viene utilizzato anche per campi contenenti singolarità o per domini non esattamente 'lisci', ad esempio per i quadrati, il cui contorno non è continuo ma 'continuo a pezzi' a causa dei quattro angoli. Nella pratica il Teorema di Stokes risulta valido anche per casi 'patologici' in cui né i domini né i campi vettoriali sono lisci e le derivate sono tutte intese nel *senso delle distribuzioni*.

8.7.3 I problemi del Teorema del rotore

Osservando l'equazione del Teorema di Kelvin-Stokes, si può notare una sua certa somiglianza con la variante per il rotore del teorema della divergenza:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \wedge \vec{v} dS_x \quad (8.179)$$

Mentre questa relazione è *matriciale*, però, il Teorema di Stokes consiste di un'equazione *scalare*.

Si è già osservato che è possibile definire una linea 1-D in uno spazio con un numero arbitrario di dimensioni, perciò è possibile calcolare la *circolazione* o *circuitazione* Γ di un campo \vec{v} senza particolari problemi anche in N-D:

$$\Gamma(\vec{v})|_\gamma = \oint_\gamma \vec{v}^T \cdot d\vec{x} \quad (8.180)$$

L'integrale che coinvolge la superficie 2-D Σ_2 si presenta come più problematico: se la linea 1-D deve essere il suo contorno, a cosa corrisponde Σ_2 in N-D?

Nel caso si scegliesse come contorno non una linea 1-D ma una frontiera $\partial\Omega_x$ parametrizzabile con N-1 coordinate, si otterrebbe ancora la variante per il rotore del teorema della divergenza. Volendo però mantenere l'idea di circolazione lungo una linea, quale sarà il significato di Σ_2 ?

Un altro problema insito nell'integrale di superficie 2-D è procurato dai termini al suo interno. Il rotore $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ è infatti definito usualmente solo in 3-D e viene moltiplicato scalarmente per la normale \vec{n} alla superficie Σ_2 . Finché si rimane in 3-D, il contorno di un dominio può essere parametrizzato per mezzo di due coordinate lagrangiane q_1 e q_2 che variano in un intervallo vettoriale. Se un vettore \vec{x} appartiene a Σ_2 , sarà identificabile per mezzo di un vettore $\vec{q} = [q_1; q_2]$ e ogni sua variazione infinitesima $d\vec{x}(\vec{q})$ sulla superficie potrà essere espressa come:

$$d\vec{x}(\vec{q}) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_2} dq_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} d\vec{q} \quad (8.181)$$

Anche in N-D è possibile parametrizzare un contorno con N-1 coordinate \vec{q} , perciò l'espressione della variazione di $d\vec{x}(\vec{q})$ tangente alla iper-superficie è generale. Dato che la normale ad un contorno in un punto deve essere perpendicolare, per definizione, ad ogni vettore tangente alla superficie stessa, si avrà:

$$\vec{n}^T \cdot d\vec{x}(\vec{q}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}^T \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} d\vec{q} = 0 \quad \forall d\vec{q} \quad \Rightarrow \quad (8.182)$$

$$\vec{n}^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] = \vec{0}^T \quad (8.183)$$

Nel caso 3-D si hanno così tre sole equazioni per definire la normale, ovvero:

$$\begin{cases} \vec{n}^T \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1} = 0 \\ \vec{n}^T \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_2} = 0 \\ \|\vec{n}\| = 1 \end{cases} \quad (8.184)$$

Si nota che *questo è lo stesso set di equazioni utilizzato per la definizione del prodotto vettore in 3-D*. La soluzione di questo sistema non è unica e bisogna infatti scegliere il verso della normale, che per convenzione deve vedere il contorno parametrizzato *in senso antiorario*. Sfruttando le già viste proprietà del prodotto vettore, si calcola la normale come:

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_2}}{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_2} \right\|} = \frac{\vec{x}/_{q_1} \wedge \vec{x}/_{q_2}}{\left\| \vec{x}/_{q_1} \wedge \vec{x}/_{q_2} \right\|} \quad (8.185)$$

Problema: la normale può essere calcolata in questo modo solo in 3-D! In N-D infatti il prodotto vettore genera una matrice e non un vettore! Inoltre, se Σ_2 è una superficie 2-D parametrizzata in $\vec{q} = [q_1; q_2]$, in uno spazio N-D generico esiste un numero infinito di normali passanti per un punto di Σ_2 ! Tre equazioni bastano solo in 3-D e già in 4-D si ha 1 Grado d'Indeterminazione per il calcolo della normale, ovvero un'infinità ∞^1 di scelte possibili.

A tutti gli effetti, la normale \vec{n} definita per mezzo del prodotto vettore è uno *pseudo-vettore*, che verrà tra l'altro moltiplicato scalarmente per il rotore $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$

che è un altro pseudo-vettore. Qual è allora il significato del termine:

$$\int_{\Sigma_2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{n} dS_x \quad (8.186)$$

che compare nel Teorema di Kelvin-Stokes? La risposta si può trovare, come al solito, con un approccio valido in un numero arbitrario di dimensioni.

8.8 Estensione N-D del Teorema del rotore

In questa sezione si darà una dimostrazione valida in N-D del *Teorema di Stokes per il rotore*, noto anche come *Teorema di Kelvin-Stokes* o semplicemente *Teorema del rotore*.

Ipotesi e premesse

Si consideri una linea 1-D γ_0 definita in uno spazio N-D, chiusa e parametrizzata da una coordinata q_i nell'intervallo $[q_{0i}; q_{Fi}]$.

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}(q_i) & \forall \vec{x} \in \gamma_0 & \text{curva 1-D} \\ q_i \in [q_{0i}; q_{Fi}] & & \text{intervallo parametro} \\ \vec{x}(q_{0i}) = \vec{x}(q_{Fi}) & & \text{linea chiusa} \end{cases} \quad (8.187)$$

Si voglia calcolare la circolazione Γ_{γ_0} lungo tale linea di un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ funzione di $\vec{x} \in \Omega_x$.

$$\Gamma_{\gamma_0} = \oint_{\gamma_0} \vec{v}^T \cdot d\vec{x} \quad (8.188)$$

In forma parametrica, si potrà scrivere anche:

$$\Gamma_{\gamma_0}(\vec{q}_s) = \int_{q_{0i}}^{q_{Fi}} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(q_i) \quad (8.189)$$

Dove \vec{q}_s è l'insieme di coordinate parametriche che identificano la linea γ_0 in esame tra tutte quelle parametrizzabili in q_i .

Si voglia ora esprimere la circolazione Γ_{γ_0} in funzione del rotore $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ del campo \vec{v} .

Poiché la linea è chiusa e \vec{v} è funzione diretta di \vec{x} , ai due capi della curva i valori di \vec{v} dovranno coincidere:

$$\begin{cases} \vec{x}(q_{0i}) = \vec{x}(q_{Fi}) \\ \vec{v} = \vec{v}(\vec{x}) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(\vec{x}(q_{0i})) = \vec{v}(\vec{x}(q_{Fi})) \quad (8.190)$$

$$\vec{v}(\vec{x}_0) = \vec{v}(\vec{x}_F) \quad (8.191)$$

Si passi ora nel dominio delle coordinate parametriche \vec{q} . L'integrale di circolazione può essere riscritto anche come:

$$\Gamma_{\gamma_0}(\vec{q}_s) = \int_{q_{0i}}^{q_{Fi}} \vec{v}^T \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} dq_i \quad (8.192)$$

E' possibile costruire un campo \vec{v}_q tale che:

$$\vec{v}_q^T \cdot d\vec{q} = \vec{v}^T \cdot d\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_q = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^T \vec{v} \quad (8.193)$$

Si può così notare che:

$$\vec{v}^T \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{x}^T}{\partial q_i} \cdot \vec{v} = \vec{v}_q(i) \quad (8.194)$$

Si ottiene così la i-esima componente del vettore \vec{v}_q . L'integrale di linea è perciò pari a:

$$\Gamma(\vec{q}_s) = \oint_{q_{0i}}^{q_{Fi}} \vec{v}_q(i) dq_i \quad (8.195)$$

Da qui in avanti, per comodità, si indicherà con c la coordinata q_i che percorre la linea e con $v_c = \vec{v}_q(i)$ la parte di campo corrispondente. Si avrà quindi:

$$\Gamma_{\gamma_0}(\vec{q}_s) = \oint_{c_0}^{c_F} v_c dc \quad (8.196)$$

Si è così ottenuto un integrale scalare in $dc = dq_i$, quindi su un dominio 1-D. Si voglia ora trasformare quest'equazione in un integrale di una superficie 2-D, pur mantenendo lo stesso risultato.

Da una curva 1-D ad una superficie 2-D

Si immagini allora che la linea γ_0 , identificata in una classe di linee dal vettore \vec{q}_s , abbia tra le coordinate del vettore stesso il valore q_{0j} . Fissando la j-esima coordinata di \vec{q} pari ad un altro valore q_{Fj} , si otterrà quindi l'equazione di un'altra linea γ_F . Parametrizzando opportunamente lo spazio, anche questa linea sarà chiusa.

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}(q_i, q_{0j}) \quad \forall \vec{x} \in \gamma_0 & \text{equazione per la linea } \gamma_0 \\ \vec{x} = \vec{x}(q_i, q_{Fj}) \quad \forall \vec{x} \in \gamma_F & \text{equazione per la linea } \gamma_F \\ \vec{x}(q_{0i}, q_j) = \vec{x}(q_{Fi}, q_j) \quad \forall q_j \in [q_{0j}, q_{Fj}] & \text{condizione di chiusura} \end{cases} \quad (8.197)$$

Tramite le due coordinate q_i e q_j , variabili negli intervalli $[q_{0i}, q_{Fi}]$ e $[q_{0j}, q_{Fj}]$ rispettivamente, si è così identificata una *superficie 2-D* Σ_{ij} .

$$\vec{x} = \vec{x}(q_i, q_j) \quad \forall \vec{x} \in \Sigma_{ij} \quad \Rightarrow \quad \gamma_0, \gamma_F \in \Sigma_{ij} \quad (8.198)$$

Le linee γ_0 e γ_F costituiranno così due parti del contorno di Σ_{ij} . Poiché esse sono parametrizzate in c e si è imposto che esse si chiudano se stesse, assieme a tutte le altre curve della stessa famiglia:

$$\vec{x}(q_{0i}, q_j) = \vec{x}(q_{Fi}, q_j) \quad \forall q_j \in [q_{0j}, q_{Fj}] \quad (8.199)$$

le altre 2 linee del contorno, identificate fissando appunto $q_j = q_{0j}$ e $q_j = q_{Fj}$, coincidono punto per punto. Percorrendo allora tutto il contorno $\partial\Sigma_{ij}$, in un senso o nell'altro, i contributi delle linee coincidenti si annulleranno a vicenda e rimarranno solo quelli delle linee γ_0 e γ_F .

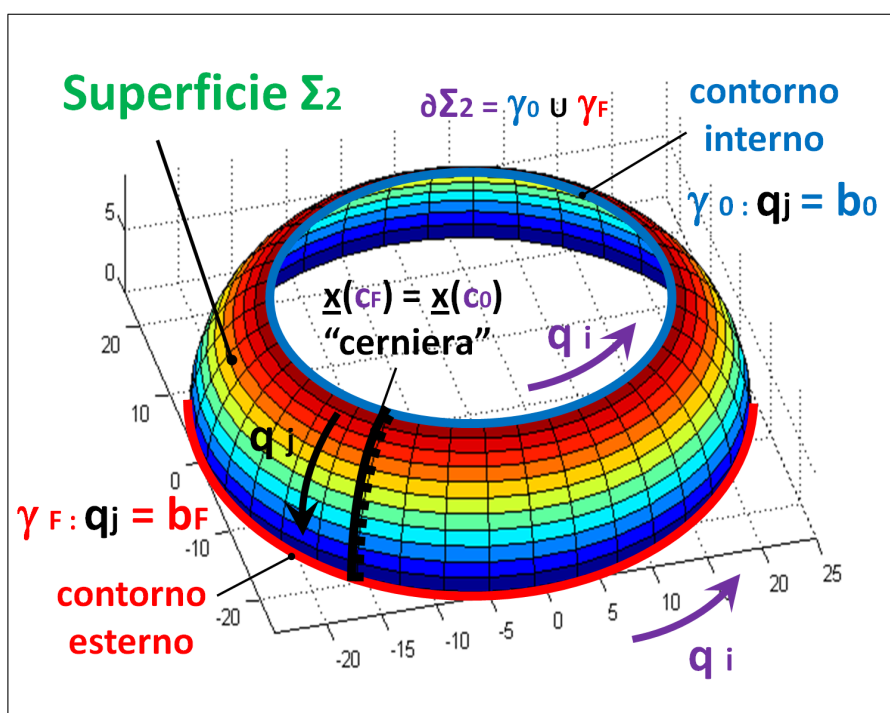


Figura 8.3: Esempio di superficie Σ_2 individuata da una coppia di coordinate (q_i, q_j) . La coordinata q_i è la *coordinata ciclica* che percorre le linee della classe γ , mentre q_j è la *coordinata-braccio* che consente di individuare le singole linee e i contorni interno ed esterno.

Le circolazioni lungo queste due linee saranno espresse come:

$$\Gamma_{\gamma_0} = \oint_{q_{0i}}^{q_{Fi}} \vec{v}^T(\vec{x}(q_i, q_{0j})) \cdot d\vec{x}(q_i) \quad (8.200)$$

$$\Gamma_{\gamma_F} = \oint_{q_{0i}}^{q_{Fi}} \vec{v}^T(\vec{x}(q_i, q_{Fj})) \cdot d\vec{x}(q_i) \quad (8.201)$$

In forma più compatta:

$$\Gamma_{\gamma_0} = \oint_{c_0}^{c_F} \vec{v}|_{q_{0j}}^T \cdot d\vec{x}(c) \quad (8.202)$$

$$\Gamma_{\gamma_F} = \oint_{c_0}^{c_F} \vec{v}|_{q_{Fj}}^T \cdot d\vec{x}(c) \quad (8.203)$$

Si calcoli ora la differenza $\Delta\Gamma$ di queste due circolazioni, sulla base della differenza $\Delta\vec{v}$ di campo tra le due linee:

$$\Gamma_{\gamma_F} - \Gamma_{\gamma_0} = \oint_{c_0}^{c_F} (\vec{v}|_{q_{Fj}}^T - \vec{v}|_{q_{0j}}^T) \cdot d\vec{x}(c) \quad (8.204)$$

$$\Delta\Gamma = \oint_{c_0}^{c_F} \Delta\vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) \quad (8.205)$$

La differenza $\Delta\vec{v}$ da un punto di γ_F a quello corrispondente di γ_0 è funzione solo della coordinata curvilinea c e può essere espressa come *un integrale in dq_j* , infatti:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}|_{q_{Fj}} - \vec{v}|_{q_{0j}} = \int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \frac{\partial\vec{v}}{\partial q_j} dq_j \quad (8.206)$$

Sostituendo nell'equazione per la differenza di circolazioni, si ottiene così:

$$\Delta\Gamma = \oint_{c_0}^{c_F} \int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \left(\frac{\partial\vec{v}^T}{\partial q_j} dq_j \right) \cdot d\vec{x}(c) \quad (8.207)$$

Esprimendo il differenziale $d\vec{x}(c) = d\vec{x}(q_i)$ in funzione di $dc = dq_i$, si otterrà un integrale sulla superficie 2-D Σ_{ij} .

$$\Delta\Gamma = \oint_{c_0}^{c_F} \int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \frac{\partial\vec{v}^T}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial\vec{x}}{\partial c} dq_j dc \quad (8.208)$$

$$\Delta\Gamma = \oint_{q_{0i}}^{q_{Fi}} \int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \frac{\partial\vec{v}^T}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_i} dq_j dq_i \quad (8.209)$$

$$\Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \left(\frac{\partial\vec{v}^T}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_i} \right) dS_{q_{ij}} \quad (8.210)$$

dove si è posto $dS_{q_{ij}} = dq_i dq_j$. In questa forma l'integrale è poco trattabile, perciò conviene tornare un attimo sui propri passi ed sfruttare le proprietà del campo v_c precedentemente costruito. Si ricordi che:

$$v_c = \vec{v}^T \cdot \frac{\partial\vec{x}}{\partial c} \quad (8.211)$$

Con ragionamento analogo, si esprimeranno allora le circolazioni come:

$$\Gamma_{\gamma_0} = \oint_{c_0}^{c_F} v_c|_{q_{0j}} dc \quad (8.212)$$

$$\Gamma_{\gamma_F} = \oint_{c_0}^{c_F} v_c|_{q_{Fj}} dc \quad (8.213)$$

Le relazioni tra le differenze saranno allora:

$$\Delta\Gamma = \oint_{c_0}^{c_F} \Delta v_c dc \quad (8.214)$$

$$\Delta v_c = v_c|_{q_{Fj}} - v_c|_{q_{0j}} = \int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \frac{\partial v_c}{\partial q_j} dq_j \quad (8.215)$$

L'integrale sulla superficie 2-D Σ_{ij} sarà allora:

$$\Delta\Gamma = \oint_{c_0}^{c_F} \int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \frac{\partial v_c}{\partial q_j} dq_j dq_i = \oint_{q_{0i}}^{q_{Fi}} \int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_j} dq_j dq_i \quad (8.216)$$

$$\Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial v_c}{\partial q_j} dS_{q_{ij}} \quad (8.217)$$

Decisamente, si ottiene una formula molto più compatta e trattabile.

Un integrale di superficie identicamente nullo

Prima di proseguire oltre, è bene notare che le coordinate q_j e $c = q_i$ non sono interscambiabili ed è anche per tale ragione che si è scelto di evidenziare tale differenza utilizzando la lettera c per la coordinata associata alla *chiusura* delle linee.

Ricordando che, proprio per la condizione di chiusura, si ha:

$$\vec{x}|_{c_0} = \vec{x}|_{c_F} \quad \text{con } \vec{v} = \vec{v}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}|_{c_0} = \vec{v}|_{c_F} \quad (8.218)$$

Per il calcolo del campo \vec{v}_q si avrà una condizione analoga, infatti:

$$\vec{v}_q = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^T \vec{v} \quad (8.219)$$

$$\vec{v}_q|_{c_0} = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]_{c_0}^T \vec{v}|_{c_0} \quad \vec{v}_q|_{c_F} = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]_{c_F}^T \vec{v}|_{c_F} \quad (8.220)$$

Poiché si è scelto di far coincidere punto d'inizio e punto di fine di ogni singola linea chiusa, varrà anche:

$$\left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]_{c_0} = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]_{c_F} \quad (8.221)$$

Si verifica allora che anche per il campo \vec{v}_q i valori da un capo all'altro della curva devono essere identici:

$$\vec{v}_q|_{c_0} = \vec{v}_q|_{c_F} \quad (8.222)$$

Questa relazione può essere espressa anche come una *differenza* e come un *integrale in dc*, infatti:

$$\Delta \vec{v}_q = \vec{v}_q|_{c_F} - \vec{v}_q|_{c_0} = \oint_{c_0}^{c_F} \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial c} dc = \vec{0} \quad (8.223)$$

$$\Delta v_{qj} = \oint_{c_0}^{c_F} \frac{\partial v_{qj}}{\partial c} dc = 0 \quad \forall v_{qj} \quad (8.224)$$

Integrando ulteriormente tale espressione in dq_j , si otterrà:

$$\int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \Delta \vec{v}_q dq_j = \int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \oint_{c_0}^{c_F} \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial c} dc dq_j = \vec{0} \quad (8.225)$$

$$\int_{q_{0j}}^{q_{Fj}} \oint_{q_{0i}}^{q_{Fi}} \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial q_i} dq_i dq_j = \vec{0} \quad (8.226)$$

$$\int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial \vec{v}_q}{\partial q_i} dS_{qij} = \vec{0} \quad (8.227)$$

$$(8.228)$$

Si è così ottenuto un integrale di superficie 2-D identicamente nullo.

Integrali di flussori e rotori nel dominio dei parametri

Selezionando l'elemento j -esimo del vettore \vec{v}_q e integrando su Σ_{ij} la sua derivata rispetto a q_i , si ottiene un'espressione simile a quella delle differenze di circolazione $\Delta\Gamma$, ma con gli indici sono scambiati:

$$\begin{cases} 0 = \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial v_{qj}}{\partial q_i} dS_{qij} = \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial v_{qj}}{\partial c} dS_{qij} \\ \Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial v_{qi}}{\partial q_j} dS_{qij} = \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial v_c}{\partial q_j} dS_{qij} \end{cases} \quad (8.229)$$

Sommando e sottraendo tra loro le due equazioni, si otterranno due utili relazioni che consentono di intravedere l'obiettivo:

$$\begin{cases} \Delta\Gamma + 0 = \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial v_{qi}}{\partial q_j} + \frac{\partial v_{qj}}{\partial q_i} dS_{qij} \\ \Delta\Gamma - 0 = \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial v_{qi}}{\partial q_j} - \frac{\partial v_{qj}}{\partial q_i} dS_{qij} \end{cases} \quad (8.230)$$

Si può notare che i termini all'interno degli integrali altro non sono che gli elementi (i,j) rispettivamente di flussore e rotore di \vec{v}_q nel dominio Ω_q , infatti:

$$\begin{cases} [\vec{\nabla}_q \diamond \vec{v}]_{ij} = \left[\frac{\partial \vec{v}_q}{\partial \vec{q}} \right]_{ij} + \left[\frac{\partial \vec{v}_q}{\partial \vec{q}} \right]_{ij}^T = \frac{\partial v_{qi}}{\partial q_j} + \frac{\partial v_{qj}}{\partial q_i} \\ [\vec{\nabla}_q \wedge \vec{v}]_{ij} = \left[\frac{\partial \vec{v}_q}{\partial \vec{q}} \right]_{ij} - \left[\frac{\partial \vec{v}_q}{\partial \vec{q}} \right]_{ij}^T = \frac{\partial v_{qi}}{\partial q_j} - \frac{\partial v_{qj}}{\partial q_i} \end{cases} \quad (8.231)$$

La differenza di circolazione potrà quindi essere riscritta in due modi, come integrale di un flusso o di un rotore:

$$\begin{cases} \Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} [\vec{\nabla}_q \diamond \vec{v}_q]_{ij} dS_{qij} \\ \Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} [\vec{\nabla}_q \wedge \vec{v}_q]_{ij} dS_{qij} \end{cases} \quad (8.232)$$

Utilizzando i versori unitari \vec{u}_i e \vec{u}_j per selezionare l'elemento di indici (i, j) di una matrice, si potrà anche scrivere:

$$\begin{cases} \Delta\Gamma = \vec{u}_i^T \cdot \left(\int_{\Sigma_{ij}} [\vec{\nabla}_q \diamond \vec{v}_q] dS_{qij} \right) \cdot \vec{u}_j \\ \Delta\Gamma = \vec{u}_i^T \cdot \left(\int_{\Sigma_{ij}} [\vec{\nabla}_q \wedge \vec{v}_q] dS_{qij} \right) \cdot \vec{u}_j \end{cases} \quad (8.233)$$

Trasformazione di flussori e rotori

Apparentemente, sembra che integrare col flusso o col rotore sia equivalente. In realtà, questo è vero finché si tratta del campo \vec{v}_q in coordinate \vec{q} . Infatti, per il campo \vec{v} in coordinate \vec{x} le due espressioni avranno forma diversa! Si era già mostrato al paragrafo 8.6.5 nella pagina 213 che:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial \vec{v}_q}{\partial \vec{q}} \right] = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] + \left[\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \vec{q}^2} \right]_{kij} \cdot \vec{v}_k \\ \vec{\nabla}_q \diamond \vec{v}_q = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^T \cdot [\vec{\nabla} \diamond \vec{v}] \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] + 2 \left[\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \vec{q}^2} \right]_{kij} \cdot \vec{v}_k \\ \vec{\nabla}_q \wedge \vec{v}_q = \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right]^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}} \right] + \vec{0} \end{cases} \quad (8.234)$$

Il singolo elemento di indici (i, j) di ognuno di questi tensori nel dominio Ω_q può quindi essere espresso come:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{qi}}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{x}^T}{\partial q_i} \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 \vec{x}^T}{\partial q_i \partial q_j} \cdot \vec{v} \\ \left[\vec{\nabla}_q \diamond \vec{v}_q \right]_{ij} = \frac{\partial \vec{x}^T}{\partial q_i} \cdot [\vec{\nabla} \diamond \vec{v}] \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} + 2 \frac{\partial^2 \vec{x}^T}{\partial q_i \partial q_j} \cdot \vec{v} \\ \left[\vec{\nabla}_q \wedge \vec{v}_q \right]_{ij} = \frac{\partial \vec{x}^T}{\partial q_i} \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} + 0 \end{cases} \quad (8.235)$$

In forma ancora più compatta:

$$\begin{cases} v_{qi/qj} = \vec{x}_{/qi}^T \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] \cdot \vec{x}_{/qj} + \vec{x}_{/qi}^T \cdot \vec{v} \\ \left[\vec{\nabla}_q \diamond \vec{v}_q \right]_{ij} = \vec{x}_{/qi}^T \cdot [\vec{\nabla} \diamond \vec{v}] \cdot \vec{x}_{/qj} + 2 \vec{x}_{/qi}^T \cdot \vec{v} \\ \left[\vec{\nabla}_q \wedge \vec{v}_q \right]_{ij} = \vec{x}_{/qi}^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{x}_{/qj} + 0 \end{cases} \quad (8.236)$$

Sostituendo le espressioni di flusso e rotore così trovate nelle equazioni per la circolazione, si otterrà così:

$$\begin{cases} \Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial \vec{x}^T}{\partial q_i} \cdot [\vec{\nabla} \diamond \vec{v}] \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} dS_{q_{ij}} + 2 \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial^2 \vec{x}^T}{\partial q_i \partial q_j} \cdot \vec{v} dS_{q_{ij}} \\ \Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \frac{\partial \vec{x}^T}{\partial q_i} \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} dS_{q_{ij}} \end{cases} \quad (8.237)$$

Condensando:

$$\begin{cases} \Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \vec{x}^T_{/q_i} \cdot [\vec{\nabla} \diamond \vec{v}] \cdot \vec{x}_{/q_j} dS_{q_{ij}} + 2 \int_{\Sigma_{ij}} \vec{x}^T_{/q_i q_j} \cdot \vec{v} dS_{q_{ij}} \\ \Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \vec{x}^T_{/q_i} \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{x}_{/q_j} dS_{q_{ij}} \end{cases} \quad (8.238)$$

La presenza di un termine di ‘curvatura’ nell’espressione del flusso mostra perciò che nel dominio degli \vec{x} è più comodo integrare direttamente il rotore.

Trasformazione degli elementi di superficie

Per completare l’opera, è necessario trasformare il differenziale $dS_{q_{ij}} = dq_i dq_j$ in un elemento di superficie 2-D dS_2 nello spazio degli \vec{x} . La superficie 2-D Σ_{ij} è parametrizzata in q_i e q_j , perciò le corrispondenti variazioni in \vec{x} saranno:

$$\begin{cases} d\vec{x}(q_i) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} dq_i \\ d\vec{x}(q_j) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} dq_j \end{cases} \quad (8.239)$$

La superficie elementare dS_2 è l’area compresa tra i vettori $d\vec{x}(q_i)$ e $d\vec{x}(q_j)$, perciò:

$$dS_2 = \text{Area}(d\vec{x}(q_i), d\vec{x}(q_j)) = \sqrt{\|d\vec{x}(q_i)\|^2 \|d\vec{x}(q_j)\|^2 - (d\vec{x}(q_i)^T \cdot d\vec{x}(q_j))^2} \quad (8.240)$$

$$\|d\vec{x}(q_i)\|^2 = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \right\|^2 dq_i^2, \quad \|d\vec{x}(q_j)\|^2 = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \right\|^2 dq_j^2 \quad (8.241)$$

$$d\vec{x}(q_i)^T \cdot d\vec{x}(q_j) = \frac{\partial \vec{x}^T}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} dq_i dq_j \quad (8.242)$$

Sostituendo, si ottiene:

$$dS_2 = \sqrt{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \right\|^2 - \left(\frac{\partial \vec{x}^T}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \right)^2} dq_i dq_j \quad (8.243)$$

E’ utile a questo punto definire i versori:

$$\begin{cases} \vec{u}_{q_i} = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}}{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \right\|} \Rightarrow \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \right\| \vec{u}_{q_i} \\ \vec{u}_{q_j} = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j}}{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \right\|} \Rightarrow \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \right\| \vec{u}_{q_j} \end{cases} \quad (8.244)$$

Sostituendo nell'espressione di dS_2 si otterrà allora:

$$dS_2 = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \right\| \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \right\| \sqrt{1 - (\vec{u}_{q_i}^T \cdot \vec{u}_{q_j})^2} dq_i dq_j \quad (8.245)$$

$$dS_2 = \|\vec{x}_{/q_i}\| \|\vec{x}_{/q_j}\| \sqrt{1 - (\vec{u}_{q_i}^T \cdot \vec{u}_{q_j})^2} dS_{q_{ij}} \quad (8.246)$$

$$(8.247)$$

Si è così trovata la relazione tra le due superfici. Si può notare che il termine $\sqrt{1 - (\vec{u}_{q_i}^T \cdot \vec{u}_{q_j})^2}$ è il valore assoluto del seno dell'angolo tra i versori \vec{u}_{q_i} e \vec{u}_{q_j} . Si sostituisca ora l'espressione della superficie elementare $dS_{q_{ij}}$ nell'integrale per il rotore:

$$dS_{q_{ij}} = \frac{dS_2}{\left(\|\vec{x}_{/q_i}\| \|\vec{x}_{/q_j}\| \sqrt{1 - (\vec{u}_{q_i}^T \cdot \vec{u}_{q_j})^2} \right)} \quad (8.248)$$

$$\Delta \Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \vec{x}_{/q_i}^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{x}_{/q_j} dS_{q_{ij}} \quad (8.249)$$

$$\Delta \Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \vec{x}_{/q_i}^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{x}_{/q_j} \frac{1}{\|\vec{x}_{/q_i}\|} \frac{1}{\|\vec{x}_{/q_j}\|} \frac{dS_2}{\sqrt{1 - (\vec{u}_{q_i}^T \cdot \vec{u}_{q_j})^2}} \quad (8.250)$$

Per come si sono definiti i versori, si potrà scrivere più semplicemente:

$$\Delta \Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} \vec{u}_{q_i}^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{u}_{q_j} \frac{dS_2}{\sqrt{1 - (\vec{u}_{q_i}^T \cdot \vec{u}_{q_j})^2}} \quad (8.251)$$

Si è così ottenuta la circolazione $\Delta \Gamma$ in funzione del rotore, come richiesto.

Prima espressione dimostrata del Teorema del rotore N-D

Esplicitando la circolazione in forma integrale, si otterrà:

$$\oint_{q_{0i}}^{q_{Fi}} \left(\vec{v}|_{q_{Fj}} - \vec{v}|_{q_{0j}} \right)^T \cdot d\vec{x}(q_i) = \int_{\Sigma_{ij}} \vec{u}_{q_i}^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{u}_{q_j} \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{u}_{q_i}^T \cdot \vec{u}_{q_j})^2}} dS_2 \quad (8.252)$$

Ponendo per semplicità $b = q_j$ la coordinata 'braccio' e $c = q_i$ la coordinate curvilinea, si potrà scrivere anche:

$$\oint_{c_0}^{c_F} \left(\vec{v}|_{b_F} - \vec{v}|_{b_0} \right)^T \cdot d\vec{x}(c) = \int_{\Sigma_2} \left(\vec{u}_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{u}_b \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{u}_b^T \cdot \vec{u}_c)^2}} \right) dS_2 \quad (8.253)$$

o ancora:

$$\oint_{\gamma_F} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) - \oint_{\gamma_0} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = \int_{\Sigma_2} \left(\vec{u}_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{u}_b \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{u}_b^T \cdot \vec{u}_c)^2}} \right) dS_2 \quad (8.254)$$

Poiché le linee γ_0 e γ_F costituiscono il contorno libero della superficie Σ , si ha:

$$\Delta\Gamma = \oint_{\partial\Sigma_2} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = \int_{\Sigma_2} \left(\vec{u}_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{u}_b \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{u}_b^T \cdot \vec{u}_c)^2}} \right) dS_2 \quad (8.255)$$

Si è così dimostrato il *Teorema del rotore* in un numero qualsiasi di dimensioni, evidenziando che, affinché sia valido, la circolazione va intesa come *una differenza di circolazione $\Delta\Gamma$ tra due linee*. Riducendo una linea fino a degenerarla in un punto, come spesso accade in molte parametrizzazioni, si avrebbe l'enunciato particolare normalmente utilizzato in 3-D.

Verso l'analogia con la notazione 3-D

Osservando la versione N-D del Teorema del rotore, ci si accorge che al posto di una normale \vec{n} , nell'integrale compaiono i due versori, \vec{u}_c e \vec{u}_b o \vec{u}_{qi} e \vec{u}_{qj} .

E' possibile scrivere la stessa equazione in maniera un po' più elegante, magari che assomigli alla classica formula seguente?

$$\Delta\Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{n} dS_2 \quad (8.256)$$

La risposta è affermativa. Si può notare che, nel caso 3-D, la normale \vec{n} alla superficie Σ_{ij} verrebbe calcolata come:

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial b} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial c}}{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial b} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial c} \right\|} = \frac{\vec{x}_b \wedge \vec{x}_c}{\|\vec{x}_b \wedge \vec{x}_c\|} \quad (8.257)$$

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}}{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \right\|} = \frac{\vec{x}_{/qj} \wedge \vec{x}_{/qi}}{\|\vec{x}_{/qj} \wedge \vec{x}_{/qi}\|} \quad (8.258)$$

La normale deve vedere infatti la coordinata c 'girare' in senso anti-orario, perciò la coordinata b deve comparire per prima nell'espressione del prodotto vettore.

Poiché la normale è indipendente dai moduli dei vettori, si ha anche:

$$\vec{n} = \frac{\vec{u}_b \wedge \vec{u}_c}{\|\vec{u}_b \wedge \vec{u}_c\|} = \frac{\vec{u}_{qj} \wedge \vec{u}_{qi}}{\|\vec{u}_{qj} \wedge \vec{u}_{qi}\|} \quad (8.259)$$

I versori $\vec{u}_{/qi}$ e $\vec{u}_{/qj}$ sono infatti tangenti alla superficie Σ_{ij} e, sfruttando le identità note per il prodotto vettore sia in notazione 3-D che N-D, si verifica che:

$$1 - (\vec{u}_{qi}^T \cdot \vec{u}_{qj})^2 = \|\vec{u}_{qi} \wedge \vec{u}_{qj}\|^2 = \frac{1}{2} \left\| \vec{u}_{qi} \wedge \vec{u}_{qj} \right\|^2 \quad (8.260)$$

Anche il prodotto tra i versori ed il rotore può essere riarrangiato in una maniera più simile a quella del caso 3-D, infatti:

$$u_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot u_b = u_c^T \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] u_b - u_c^T \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T u_b \quad (8.261)$$

$$u_c^T \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] u_b = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] : \overline{[u_c u_b^T]} = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T : \overline{[u_c u_b^T]^T} \quad (8.262)$$

$$u_c^T \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] u_b = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] : \overline{[u_c u_b^T]} + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T : \overline{[u_c u_b^T]^T} \right) \quad (8.263)$$

Analogamente si trova:

$$u_c^T \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T u_b = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T : [\overline{u_c u_b^T}] + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] : [\overline{u_c u_b^T}]^T \right) \quad (8.264)$$

Sottraendo le due espressioni l'una dall'altra, si ha:

$$u_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot u_b = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] : [\overline{u_c u_b^T}] + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T : [\overline{u_c u_b^T}]^T \right) - \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T : [\overline{u_c u_b^T}] + \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] : [\overline{u_c u_b^T}]^T \right) \quad (8.265)$$

$$u_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot u_b = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right] - \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \right]^T \right) : ([\overline{u_c u_b^T}] - [\overline{u_c u_b^T}]^T) \quad (8.266)$$

$$u_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot u_b = \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] : [\vec{u}_b \wedge \vec{u}_c] \quad (8.267)$$

Riassumendo, è possibile scrivere:

$$\begin{cases} \vec{n} = \frac{\vec{u}_{qj} \wedge \vec{u}_{qi}}{\|\vec{u}_{qj} \wedge \vec{u}_{qi}\|} \\ u_{qi}^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot u_{qj} = \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] : [\vec{u}_{qj} \wedge \vec{u}_{qi}] \\ 1 - (\vec{u}_{qi}^T \cdot \vec{u}_{qj})^2 = \frac{1}{2} \|\vec{u}_{qi} \wedge \vec{u}_{qj}\|^2 \end{cases} \quad (8.268)$$

Il termine nell'integrale di superficie sarà allora riscritto come:

$$u_{qi}^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot u_{qj} \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{u}_{qi}^T \cdot \vec{u}_{qj})^2}} = [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] : [\vec{u}_{qj} \wedge \vec{u}_{qi}] \frac{1}{\sqrt{2 \|\vec{u}_{qi} \wedge \vec{u}_{qj}\|}} \quad (8.269)$$

oppure, sostituendo i pedici

$$u_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot u_b \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{u}_b^T \cdot \vec{u}_c)^2}} = [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] : [\vec{u}_b \wedge \vec{u}_c] \frac{1}{\sqrt{2 \|\vec{u}_b \wedge \vec{u}_c\|}} \quad (8.270)$$

Tensore normale e risultato simil-3-D

E' possibile allora definire un tensore $\vec{\bar{n}}$ associato alla normale 3-D come:

$$\vec{\bar{n}} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2 \|\vec{u}_b \wedge \vec{u}_c\|}} [\vec{u}_b \wedge \vec{u}_c] \quad (8.271)$$

L'espressione della circolazione sarà allora:

$$\Delta \Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] : \vec{\bar{n}} dS_2 \quad (8.272)$$

Si è così ottenuta una formulazione analoga a quella 3-D, come preventivato.

$$\Delta \Gamma = \int_{\Sigma_{ij}} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})^T \cdot \vec{\bar{n}} dS_2 \quad (8.273)$$

8.8.1 Riassunto rapido

Siano γ_0 e γ_F due linee 1-D *chiuse*, contenute in uno spazio N-D Ω_x e parametrizzate da una coordinata c in grado di assumere valori in un intervallo $[c_0; c_F]$.

Siano γ_0 e γ_F i contorni *interno* ed *esterno* della superficie 2-D Σ_2 , parametrizzata nelle coordinate b e c . Il loro insieme costituisce quindi il *contorno libero* $\partial\Sigma_2$ della superficie. La coordinata b assume valori nell'intervallo $[b_0; b_F]$ e identifica una linea $\gamma(b)$ chiusa che costituisce Σ_2 : in altre parole, la famiglia di curve $\gamma(b)$ genera la superficie.

Sia \vec{u}_c il versore tangente ad una linea $\gamma(b)$ in un punto qualsiasi e diretto come il verso di parametrizzazione. Esso è definito come:

$$\vec{u}_c = \frac{\partial \vec{x}}{\partial c} / \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial c} \right\| = \frac{\vec{x}/c}{\|\vec{x}/c\|} \quad (8.274)$$

Sia \vec{u}_b un altro versore generato dalla parametrizzazione di Σ_2 . Esso sarà tangente alla superficie e definito come:

$$\vec{u}_b = \frac{\partial \vec{x}}{\partial b} / \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial b} \right\| = \frac{\vec{x}/b}{\|\vec{x}/b\|} \quad (8.275)$$

Sia detto per semplicità $\sin \theta_{bc}$ il seno dell'angolo compreso tra i versori \vec{u}_b e \vec{u}_c .

Sia $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ un campo vettoriale. Il *Teorema del rotore in N-D* afferma che la differenza delle circolazioni di \vec{v} lungo il contorno libero $\partial\Sigma_2$ è pari all'integrale su Σ_2 della proiezione del rotore $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ sui versori \vec{u}_c e \vec{u}_b in quest'ordine, divisa per il modulo del seno dell'angolo tra essi compreso. Matematicamente, ciò è esprimibile come:

$$\Delta\Gamma = \oint_{\partial\Sigma_2} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = \int_{\Sigma_2} \left(\vec{u}_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{u}_b \frac{1}{|\sin \theta_{bc}|} \right) dS_2 \quad (8.276)$$

In forma più estesa:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma_F} - \Gamma_{\gamma_0} &= \oint_{\gamma_F} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) - \oint_{\gamma_0} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = \\ &= \int_{\Sigma_2} \left(\vec{u}_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{u}_b \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{u}_b^T \cdot \vec{u}_c)^2}} \right) dS_2 \end{aligned} \quad (8.277)$$

o ancora:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma_F} - \Gamma_{\gamma_0} &= \int_{c_0}^{c_F} (\vec{v}|_{b_F} - \vec{v}|_{b_0})^T \cdot d\vec{x}(c) = \\ &= \int_{\Sigma_2} \left(\vec{u}_c^T \cdot [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{u}_b \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{u}_b^T \cdot \vec{u}_c)^2}} \right) dS_2 \end{aligned} \quad (8.278)$$

E' possibile esprimere lo stesso risultato in una notazione simile a quella 3-D, definendo il tensore $\vec{\bar{n}}$ come:

$$\vec{\bar{n}} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2} \|\vec{u}_b \wedge \vec{u}_c\|} [\vec{u}_b \wedge \vec{u}_c] \quad (8.279)$$

L'enunciato del teorema potrà allora essere riscritto come:

$$\Delta\Gamma = \oint_{\partial\Sigma_2} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = \int_{\Sigma_2} [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] : \bar{n} dS_2 \quad (8.280)$$

8.8.2 Campo irrotazionale, conservativo e a potenziale

Al paragrafo 7.3.11 nella pagina 189 si è mostrato che, se un campo \vec{v} ammette un potenziale, cioè se può essere espresso come il gradiente di un campo scalare, allora il suo rotore è sempre nullo.

$$\text{Se: } \vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (8.281)$$

Quindi, *tutti i campi a potenziale sono irrotazionali.*

Successivamente, al paragrafo 8.1.3 nella pagina 194 si era dimostrato che ogni campo a potenziale è anche conservativo e viceversa.

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \text{ è conservativo} \quad (8.282)$$

Come corollario del Teorema del rotore, si dimostra anche che, se un campo è irrotazionale, allora ammette un potenziale ed è quindi conservativo.

$$\text{Se: } \vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (8.283)$$

Di conseguenza, le tre proprietà sono equivalenti:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \text{ è conservativo} \quad (8.284)$$

Equivalenza tra conservatività e irrotazionalità: dimostrazione

Si dimostra che se un campo è irrotazionale allora è conservativo e viceversa. Infatti, se un campo è irrotazionale si ha:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \quad \Rightarrow \quad (8.285)$$

$$\int_{\Sigma_2} [\vec{\nabla} \wedge \vec{v}] : \bar{n} dS_2 = 0 \quad \forall \Sigma_2 \quad (8.286)$$

Tramite il Teorema del rotore si può tradurre l'integrale di superficie in uno di linea, che sarà di conseguenza nullo:

$$\oint_{\partial\Sigma_2} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = 0 \quad \forall \Sigma_2 \quad (8.287)$$

Data l'arbitrarietà della superficie scelta e di conseguenza del suo contorno, si avrà:

$$\oint_{\gamma_F} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) - \oint_{\gamma_0} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = 0 \quad (8.288)$$

Si può allora scegliere di rimpicciolire a piacere la linea γ_0 fino a degenerarla in un punto. Poiché il rotore del campo è nullo ovunque, \vec{v} è sufficientemente regolare, perciò la circolazione lungo γ_0 tenderà a zero:

$$\lim_{\gamma_0 \rightarrow \{0\}} \oint_{\gamma_0} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = 0 \quad (8.289)$$

Si avrà così:

$$\oint_{\gamma_F} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = 0 \quad \forall \gamma_F \text{ chiusa} \quad (8.290)$$

Questa è per l'appunto la definizione di campo conservativo. Si è così dimostrato che:

$$\text{Se: } \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \text{ è conservativo} \quad (8.291)$$

Poiché un campo è conservativo se e solo se ammette un potenziale e un campo a potenziale è sempre irrotazionale, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{v} \text{ è conservativo} & \iff \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \\ \text{Se: } \vec{v} = \vec{\nabla} \phi & \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \\ \text{Se: } \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} & \Rightarrow \vec{v} \text{ è conservativo} \end{array} \right. \quad (8.292)$$

Mettendo assieme tutte le proposizioni logiche, si avrà semplicemente:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \iff \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad \iff \quad \vec{v} \text{ è conservativo} \quad (8.293)$$

Le tre proprietà risultano quindi equivalenti.

Capitolo 9

Vorticità e magnetismo

La matematica è una scienza
sperimentale, e le definizioni non
arrivano subito, ma più tardi

Oliver Heaviside, *Proceedings of
the Royal Society of London*, 1893

In questo capitolo si esamineranno i Teoremi di Helmholtz per la vorticità. In seguito si avanzeranno alcune considerazioni sulle equazioni di Maxwell e sulle somiglianze esistenti tra il campo magnetico e la vorticità stessa.

9.1 Teoremi di Helmholtz per la vorticità

Nel corso della sua vita (1821 - 1894) lo scienziato tedesco Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz si occupò degli argomenti più vari in molti ambiti dello scibile umano, compresi la Fluidodinamica e l'Elettromagnetismo.

9.1.1 Enuncianti dei teoremi

Nel 1858, nel trattato *Über Wirbelbewegungen*, Helmholtz riassunse in tre teoremi alcune proprietà dei filamenti vorticosi per flussi non viscosi. Questi teoremi vengono modernamente chiamati 'Teoremi di Helmholtz per la vorticità' (eng: 'Helmholtz Vortex Theorems') e, mentre il primo è valido indipendentemente dal tipo di flusso considerato, il secondo e il terzo discendono dal *Teorema di Kelvin*.

Teorema di Kelvin

Il Teorema di Kelvin afferma che, sotto opportune ipotesi sul flusso, *la circolazione della velocità rimane costante, quando la si calcoli lungo una linea chiusa costituita da punti materiali.*

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) \quad (9.1)$$

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = 0 \quad (9.2)$$

In questa sede ci si concentrerà comunque più sul primo teorema di Helmholtz che sugli altri due, dato che esso ha validità più generale e non dipende dalla natura del flusso.

1° teorema di Helmholtz

Dato un insieme o ‘fascio’ di linee vorticosi, tali quindi che il campo di vorticità $\vec{w}(\vec{x})$ sia in ogni punto tangente ad esse, la loro unione costituisce un ‘tubo’ vorticoso. Sia C una linea chiusa che racchiuda il tubo vorticoso in senso antiorario e sia C' un'altra linea chiusa sempre concatenata allo stesso tubo vorticoso. Detto $\vec{v}(\vec{x})$ il campo di velocità, si dimostra che la sua circolazione Γ attorno

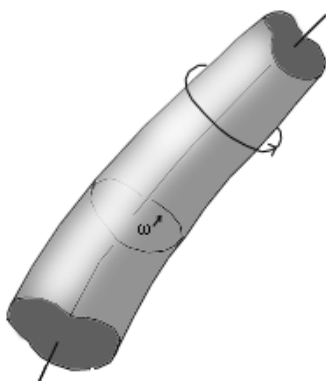


Figura 9.1: Circolazione attorno ad un tubo vorticoso - figura tratta dall'internet

al tubo vorticoso è uguale sia che venga calcolata attorno a C o a C' . In altre parole, la circolazione del tubo vorticoso è costante lungo il tubo stesso.

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) \quad \Gamma_{C'} = \oint_{C'} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) \quad (9.3)$$

$$\Gamma_C = \Gamma_{C'} \quad \text{per } C \text{ e } C' \text{ concatenate allo stesso tubo vorticoso} \quad (9.4)$$

Le linee vorticosi hanno perciò intensità costante e il flusso di vorticità attraverso qualsiasi sezione del tubo vorticoso stesso è costante.

$$\oint_C \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = \int_{\Sigma_C} \vec{w}^T \cdot \vec{n}_+ dS \quad (9.5)$$

$$\oint_{C'} \vec{v}^T \cdot d\vec{x}(c) = \int_{\Sigma_{C'}} \vec{w}^T \cdot \vec{n}_- dS \quad (9.6)$$

$$\int_{\Sigma_C} \vec{w}^T \cdot \vec{n}_+ dS = \int_{\Sigma_{C'}} \vec{w}^T \cdot \vec{n}_- dS \quad (9.7)$$

Facendo combaciare le due linee C e C' ma non Σ_C e $\Sigma_{C'}$, si ottiene un superficie chiusa $\Sigma_2 = \Sigma_C \cup \Sigma_{C'}$. Così:

$$\Gamma_C = \Gamma_{C'} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\Sigma_2} \vec{w}^T \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (9.8)$$

Sfruttando il *Teorema della divergenza*, si ha anche:

$$\oint_{\Sigma_2} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{w} dS = 0 \quad (9.9)$$

Questa è un'altra forma per esprimere il 1° teorema di Helmholtz: *il flusso di vorticità attraverso qualsiasi superficie chiusa è sempre nullo.*

2° teorema di Helmholtz

Ricorrendo al *Teorema di Kelvin*, si può dimostrare che *le linee vorticoso vengono trasportate dal flusso delle particelle e sono esse stesse costituite da punti materiali.*

3° teorema di Helmholtz

Poiché per il 1° teorema la circolazione Γ attorno ad un tubo vorticoso è costante lungo di esso e, per il *Teorema di Kelvin*, la sua 'intensità' si mantiene costante nel tempo, ne consegue che Γ è una caratteristica intrinseca del tubo vorticoso. Esso può deformarsi, allargarsi o restringersi senza che la sua circolazione vari in alcun modo. Di conseguenza, in un fluido inizialmente in quiete per il quale valgono le ipotesi del Teorema di Kelvin non può nascere alcun vortice o linea vorticoso di circolazione Γ senza che se ne generi uno con intensità opposta $-\Gamma$.

Per i flussi viscosi questo non è sempre vero: si pensi ad esempio di girare un cucchiaino in una tazza di caffè e latte e di osservare poi il vortice che si forma. La circolazione lungo una certa linea avrà inizialmente un certo valore, ma dopo qualche tempo il flusso rotatorio si arresterà per gli inevitabili attriti e quindi la circolazione sarà nulla lungo qualsiasi linea.

9.1.2 Interpretazione N-D del 1° Teorema di Helmholtz

Il 1° Teorema di Helmholtz può essere enunciato in diverse maniere, come appena visto. Si può dire sia che *la circolazione è costante lungo tubo vorticoso* sia che *il flusso di vorticità attraverso qualsiasi superficie chiusa è sempre nullo.* Si prenda in considerazione proprio quest'ultima interpretazione; matematicamente può essere espressa come:

$$\oint_{\Sigma_2} \vec{n}^T \cdot \vec{w} dS = 0 \quad (9.10)$$

Per il Teorema della divergenza si ha anche:

$$\oint_{\partial\Omega_3} \vec{n}^T \cdot \vec{w} dS_x = \int_{\Omega_3} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{w} d\Omega_x = 0 \quad (9.11)$$

Data l'arbitrarietà del volume Ω_3 , la stessa relazione può essere riscritta in forma differenziale come:

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{w} = 0 \quad (9.12)$$

si ritrova così la relazione già vista al paragrafo 7.3.10. Il campo di vorticità risulta così *solenoidale*, cioè ha divergenza nulla. Questo vuol dire che le linee vorticoso non solo hanno intensità $\|\vec{w}\|$ costante lungo di esse, ma che non possono né cominciare dal nulla né interrompersi. Se così fosse, esisterebbero

infatti ‘sorgenti’ o ‘pozzi’ di linee vorticose in qualche punto dello spazio e questo non è possibile perché la divergenza è nulla. Di conseguenza, *le linee vorticose possono solo chiudersi su se stesse o estendersi all’infinito*. Il 1° Teorema di Helmholtz viene spesso enunciato proprio in questa maniera ed è sempre vero, cioè *tautologico*, a differenza di quanto accade per il secondo e il terzo teorema. Questi ultimi due infatti sono validi se il flusso in esame rispetta determinate ipotesi, ad esempio se è *incomprimibile*, se le forze di campo sono *conservative* e se la viscosità è nulla. Esistono diverse varianti nelle ipotesi dei due teoremi, che comunque risultano sempre *contingenti*: si può sempre trovare un loro controesempio violando una delle premesse.

Si provi allora a falsificare il 1° Teorema di Helmholtz: si vedrà invece che esso è *necessariamente vero* semplicemente per come è stata definita la vorticità. Si è infatti già dimostrato che *la divergenza di un rotore è sempre nulla*, sia in notazione 3-D sia in notazione N-D, e la vorticità è definita proprio come il rotore del campo di velocità.

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}(\vec{x}) \quad (9.13)$$

Il 1° Teorema di Helmholtz è quindi più una legge *matematica* che una legge *fisica* e non dipende dal tipo di flusso in considerazione. Nonostante questo, l’interpretazione del teorema stesso non è così semplice e anzi il riferimento alle cosiddette ‘linee vorticose’ può spesso risultare fuorviante, come si vedrà tra poco.

I problemi delle linee vorticose

Come già anticipato, la vorticità \vec{w} non è un vettore ma uno *pseudo-vettore*, dato che è generata da un’operazione di rotore. Nel momento in cui si passa in N-D si scopre che la vorticità è in realtà un tensore anti-simmetrico e non può essere più interpretata come un vettore. Il 1° Teorema di Helmholtz può comunque essere riscritto agevolmente in notazione N-D in forma differenziale, infatti:

$$\bar{\bar{w}} \triangleq \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \nabla_{ijk} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}(\vec{x}) \quad (9.14)$$

dove si è fatto uso della divergenza a 3 indici introdotta al paragrafo 7.3.6 nella pagina 183:

$$\nabla_{ijk} \cdot \bar{\bar{w}} = \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial w_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial w_{ki}}{\partial x_j} \quad \forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (9.15)$$

In forma più compatta:

$$\nabla_{ijk} \cdot \bar{\bar{w}} = w_{ij/k} + w_{jk/i} + w_{ki/j} \quad \forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (9.16)$$

La scelta dei tre indici i, j e k è arbitraria: potrebbero essere anche tutti uguali tra loro, ma l’enunciato del teorema rimarrebbe sempre tautologico:

$$\nabla_{ijk} \cdot \bar{\bar{w}} = 0 \quad (9.17)$$

Nasce allora un problema nell’interpretazione classica della vorticità: se infatti essa non è un vettore ma uno *pseudo-vettore*, almeno in 3-D, che significato hanno le linee vorticose? Si può dire che esse sono simili a degli assi di rotazione istantanea: in maniera analoga esse sono definite univocamente solo in 3-D e

anche solo in 2-D si ridurrebbero a dei punti attorno a cui ruotano le particelle. In 4-D si richiederebbe invece che le linee siano ‘tangenti’ a quello che non è un vettore, con qualche difficoltà.

Analogamente a quanto accadeva per il prodotto vettore, è possibile passare da una notazione all’altra per la vorticità sapendo che:

$$\vec{\bar{w}} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{21} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & -w_{32} \\ -w_{13} & w_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = [w_1; w_2; w_3] \quad (9.18)$$

$$\vec{\bar{w}} = [w \wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w_{ii} = 0 & \forall i \in \{1; 2; 3\} \\ w_{32} = w_1 \\ w_{13} = w_2 \\ w_{21} = w_3 \end{cases} \quad (9.19)$$

Si può verificare facilmente che;

$$\vec{\bar{w}} \cdot \vec{w} = \vec{0} \quad \begin{bmatrix} 0 & -w_{21} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & -w_{32} \\ -w_{13} & w_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{32} \\ w_{13} \\ w_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

In 3-D lo pseudo-vettore \vec{w} è tangente alle linee vorticose. Volendo proprio effettuare un’estensione di tale concetto in N-D, si può definire la *classe* di vettori $\vec{w}_L(\vec{x})$ tali che:

$$\vec{w}_L = [\vec{w}_{L1}; \quad \vec{w}_{L2}; \quad \cdots \quad ; \quad \vec{w}_{LN}] \quad (9.21)$$

$$\vec{\bar{w}} \cdot \vec{w}_L = \vec{0} \quad (9.22)$$

I vettori \vec{w}_L sono così definiti in forma implicita e in generale per un punto ne può passare anche più di uno. Il loro significato non è inoltre particolarmente chiaro, anche se non si può escludere che se ne possa trovare uno.

Nonostante tutto, la rappresentazione delle linee vorticose, così come degli assi di rotazione, può essere utile per immaginare facilmente il moto di un fluido o di un corpo e non è certo da buttar via. Ancora un volta però è bene interrogarsi sul senso degli oggetti che si usano così spesso in fisica e in ingegneria.

Formulazione integrale in N-D del 1° Teorema di Helmholtz

In notazione N-D, la forma integrale del 1° Teorema di Helmholtz per la vorticità può essere così riscritta:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{w} \, d\Omega_x = \int_{\partial\Omega_x} \nabla_{ijk} \cdot \vec{\bar{w}} \, d\Omega_x = 0 \quad (9.23)$$

E’ possibile però fare ancora di meglio: sfruttando il Teorema della divergenza ed esprimendo la vorticità come il rotore della velocità si ottiene infatti:

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{w} \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot \vec{w} \, dS_x \quad (9.24)$$

$$\int_{\Omega_x} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{w} \, d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \, dS_x \quad (9.25)$$

A rigore, il secondo termine contenente il rotore in forma 3-D è corretto solo in 3-D. Si riconosce però un caso particolare del *Teorema del rotore*, quello in cui la superficie $\Sigma_2 = \partial\Omega_x$ è chiusa. In tal caso i contorni interno ed esterno della superficie stessa coincidono, per cui non si ha differenza di circolazione tra di essi.

$$\gamma_F \equiv \gamma_0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial\Omega_x} \vec{n}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) dS_x = \Gamma_{\gamma_F} - \Gamma_{\gamma_0} = 0 \quad (9.26)$$

Si ha così un'altra tautologia che conferma che il 'flusso' di vorticità attraverso una superficie chiusa è nullo.

Teorema dell'integrale della divergenza a 3 indici

Nel caso si voglia restare in N-D, la normale \vec{n} è a tutti gli effetti un vettore e si può scrivere un'altra versione integrale del Teorema di Helmholtz:

$$\oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \cdot \bar{\bar{w}}_{ijk} dS_x = \int_{\Omega_x} \nabla_{ijk} \cdot \bar{\bar{w}} d\Omega_x = 0 \quad (9.27)$$

dove si è utilizzato il prodotto a 3 indici per moltiplicare le componenti della normale con le corrispondenti della vorticità:

$$\vec{n} \cdot \bar{\bar{w}}_{ijk} = w_{ij} n_k + w_{ij} n_k + w_{ij} n_k \quad (9.28)$$

Di fatto, quello appena enunciato è un caso particolare del **Teorema del Gradiente Generalizzato**. Data una generica matrice A , si può calcolare la derivata parziale in direzione x_k rispetto al suo elemento (i, j) . Ricorrendo al Teorema del Gradiente Generalizzato si avrà così:

$$\int_{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial x_k} A_{ij} d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \nabla_k \cdot A_{ij} d\Omega_x \quad (9.29)$$

ovvero:

$$\int_{\Omega_x} \nabla_k \cdot A_{ij} d\Omega_x = \oint_{\partial\Omega_x} n_k \cdot A_{ij} dS_x \quad (9.30)$$

Permutando ciclicamente gli indici i, j, k e sommando assieme le equazioni si ottiene l'enunciato generale:

$$\oint_{\partial\Omega_x} \vec{n} \cdot \bar{\bar{A}}_{ijk} dS_x = \int_{\Omega_x} \nabla_{ijk} \cdot A d\Omega_x \quad (9.31)$$

9.2 Sulle equazioni di Maxwell

In questa sezione si avanzeranno alcune rapide osservazioni sulle equazioni di Maxwell e sulla loro 'simmetria'. L'argomento andrebbe trattato con maggior dettaglio e, non potendo qui dilungarsi oltre, ci si limiterà ad accennare solo alcuni aspetti salienti.

9.2.1 Una questione di simmetria

Formulazione integrale: flussi e circolazioni

In forma integrale, le equazioni di Maxwell esprimono i flussi e le circolazioni dei campi elettrico e magnetico e si presentano così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\partial\Omega_x} \vec{E}^T \cdot \vec{n} dS_x = \int_{\Omega_x} \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} d\Omega_x \\ \oint_{\partial\Sigma_2} \vec{E}^T \cdot d\vec{x} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_2} \vec{B}^T \cdot \vec{n} dS_x \\ \oint_{\partial\Omega_x} \vec{B}^T \cdot \vec{n} dS_x = 0 \\ \oint_{\partial\Sigma_2} \vec{B}^T \cdot d\vec{x} = \mu_0 \int_{\Sigma_2} \vec{J}^T \cdot \vec{n} dS_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_2} \vec{E}^T \cdot \vec{n} dS_x \end{array} \right. \quad (9.32)$$

In forma un po' più compatta, si può scrivere anche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{\partial\Omega_x}(\vec{E}) = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \\ \Phi_{\partial\Omega_x}(\vec{B}) = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{\Sigma_2}(\vec{B})) \\ \Gamma(\vec{B}) = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{\Sigma_2}(\vec{E})) \end{array} \right. \quad (9.33)$$

Come si può notare, nonostante siano strettamente intrecciati, il campo elettrico \vec{E} e il campo d'induzione magnetica \vec{B} presentano notevoli differenze. Si osserva infatti che:

- il flusso di campo elettrico $\Phi(\vec{E})$ attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla quantità di carica elettrica Q_e in essa contenuta. Al contrario, il flusso di campo magnetico $\Phi(\vec{B})$ attraverso una superficie chiusa risulta sempre nullo.
- la circolazione del campo elettrico $\Gamma(\vec{E})$ è proporzionale *all'opposto* della derivata temporale del flusso di campo magnetico $\Phi(\vec{B})$. Al contrario la circolazione del campo magnetico $\Gamma(\vec{B})$ è in parte proporzionale alla derivata temporale del flusso di campo elettrico $\Phi(\vec{E})$.
- la circolazione del campo magnetico $\Gamma(\vec{B})$ è in parte proporzionale alla corrente elettrica i concatenata alla linea, mentre la circolazione del campo elettrico $\Gamma(\vec{E})$ non è proporzionale ad alcuna corrente magnetica i_m .

Spesso si sente dire che, a causa di queste differenze tra campo elettrico e magnetico, le equazioni di Maxwell non sono 'simmetriche'. Per eliminare questa 'asimmetria' e descrivere campo elettrico e magnetico in maniera più omogenea sono state tentate molte strade, alcune intellettualmente molto accattivanti e/o bizzarre. Per fare un esempio, in qualche caso si è tentato di simmetrizzare le equazioni di Maxwell con il campo gravitazionale[9], ... arrivando poi a descrivere il funzionamento dei dischi volanti! A parte alcuni voli pindarici, la strada più battuta è però quella dei *monopòli magnetici*, di cui si parlerà tra poco.

Formulazione differenziale: divergenze e rotori

Si può osservare che l'apparente asimmetria delle equazioni di Maxwell non è dovuta alla loro formulazione integrale: anche scrivendole in forma intensiva le differenze rimangono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla}^T \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (9.34)$$

Si possono fare però due considerazioni che per la formulazione integrale non erano particolarmente immediate:

- il rotore compare in due equazioni e si è visto che il rotore di uno vettore è in realtà uno *pseudo-vettore*, mentre il rotore di uno pseudo-vettore è un vettore.
- la divergenza del campo magnetico \vec{B} è nulla e infatti, stando ai dati sperimentali, *le linee di campo magnetico si chiudono sempre su stesse o si estendono fino all'infinito*

Si tratta di due indizi utili nell'interpretazione della natura del campo magnetico, che sarà più chiara espressa in notazione N-D. Si veda ora cosa s'intenda con il termine *monopolo magnetico* e come si sia introdotto tale concetto per la simmetrizzazione delle equazioni di Maxwell.

9.2.2 I monopoli magnetici

Prima di esaminare le 'sorgenti' del campo magnetico, si faccia un breve ripasso su quelle del campo elettrico.

Cariche elettriche come monòpoli

Il campo elettrostatico \vec{E} è generato dalla presenza di una o più cariche elettriche distribuite nello spazio. Dagli esperimenti risulta che la carica elettrica è *quantizzata*, cioè assumere valori discreti. Tralasciando il caso dei quark, come unità elementare di riferimento per la carica si prende usualmente quella dell'elettrone e^- , uguale e opposta a quella del protone e^+ . In generale, una carica elettrica positiva, come ad esempio il protone, può essere vista come una *sorgente* o *monopolo positivo* di campo elettrico, mentre una negativa, come l'elettrone, corrisponde ad un *pozzo* o *monopolo negativo*, dato che le linee di campo risultano entranti. In realtà il termine 'monopolo' viene raramente riservato alle cariche elettriche e comunemente è usato con altri significati. In generale è possibile osservare delle cariche elettriche isolate e misurare il campo da esse generato. Anche i comuni corpi elettricamente neutri possono essere pensati come composti da cariche positive e negative in egual numero e alcuni di essi, come un pezzo di ambra¹ o la classica bacchetta di plastica possono essere elettrizzati per semplice strofinio.

¹ *elektron* in greco vuol dire ambra

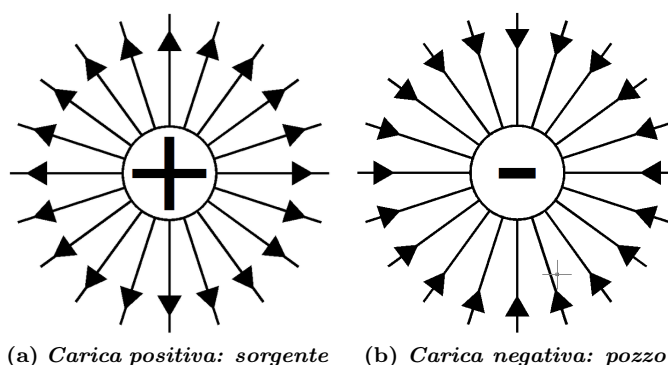


Figura 9.2: ‘Monopòli’ del campo elettrico - figure tratte dall’internet

Calamite irriducibili

Una comune calamita genera attorno a sé un campo magnetico ed è in grado di attirare oggetti metallici come il ferro o altre calamite. Il campo magnetico attorno ad una calamita può essere visualizzato con la classica limatura di ferro: si osserva così che le linee del campo partono da un polo, chiamato tradizionalmente ‘Nord’, e rientrano nell’altro, chiamato ‘Sud’. Il campo magnetico generato da

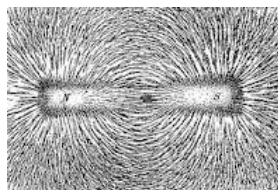


Figura 9.3: linee di campo magnetico generate da una calamita, visualizzate con limatura di ferro - figura tratta dall’internet

una calamita ha quindi linee che partono dalla calamita stessa e si richiudono su di essa. Il polo Nord, da cui fuoriescono le linee, sembra fare le veci di una ‘carica magnetica positiva’, mentre al contrario il polo Sud assomiglia ad un ‘pozzo’ di linee. E’ possibile allora isolare un singolo polo della calamita dall’altro e

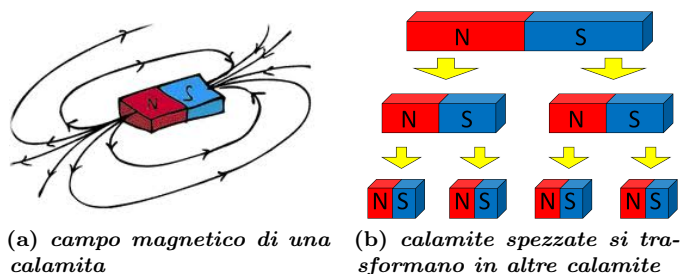


Figura 9.4: Dipoli magnetici

ottenere quindi un *monopòlo magnetico* separato, così com’è possibile separare le

cariche elettriche negative da quelle positive? Apparentemente non dovrebbero esserci problemi, ma se si prova a spezzare in due una calamita non si ottengono un polo Nord e un polo Sud, bensì altre due calamite. Il procedimento può essere iterato indefinitamente, ma si ottengono altri dipoli magnetici e allo stato attuale non si è ancora riusciti ad ottenere un singolo polo magnetico.

Cariche e flussi magnetici

L'esempio appena visto rende abbastanza bene l'idea di cosa s'intenda per *monopolo magnetico*. Nel caso venisse osservato, le linee di campo magnetico \vec{B} dovrebbero risultare entranti o uscenti da esso e quindi il flusso attraverso una superficie che racchiuda il monopolo non sarebbe più nullo. In forma differenziale, la legge di Maxwell-Gauss per il magnetismo diverrebbe:

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{B} = \rho_m \quad (9.35)$$

dove ρ_m è la *densità di carica magnetica*. Analogamente al flusso elettrico \vec{J} è possibile definire un flusso di campo magnetico \vec{J}_m che descriva il moto dei monopoli stessi. Con l'introduzione di queste nuove grandezze, le equazioni di Maxwell possono essere riscritte in una forma decisamente più simmetrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla}^T \cdot \vec{B} = \rho_m \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (9.36)$$

In forma compatta e integrale si potrebbe scrivere anche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{\partial\Omega_x}(\vec{E}) = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \\ \Phi_{\partial\Omega_x}(\vec{B}) = Q_m \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\vec{E}) = i_m - \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{\Sigma_2}(\vec{B})) \\ \Gamma(\vec{B}) = \mu_0 i_e + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{\Sigma_2}(\vec{E})) \end{array} \right. \quad (9.37)$$

Questa formulazione è senza dubbio dotata di una certa eleganza, ma soffre di due problemi:

- sperimentalmente, non sono mai state osservate cariche magnetiche.
- nel tentativo di rendere simmetriche le equazioni si postula di fatto che il campo elettrico e il campo magnetico abbiano una natura simile e non semplicemente legata.

Di questi, come si vedrà, il primo è il minore dei problemi. Si torni adesso sui propri passi e, prima di chiedersi come trovare un monopolo magnetico, ci si chieda *che cos'è il campo magnetico*.

9.2.3 Cos'è il campo magnetico?

Prima di esaminare nel dettaglio la questione di che cosa sia il campo magnetico, è consigliabile esaminare quella di campo elettrico. Entrambi gli argomenti richiederebbero una trattazione molto più approfondita di quella che segue, anche da un punto di vista storico. Ci si limiterà quindi a fornire alcuni concetti essenziali.

Definizione di campo elettrico

Già nel VII secolo avanti Cristo erano noti alcuni fenomeni elettrici elementari. Talete di Mileto osserva infatti che sfregando con una pelliccia di gatto dell'ambra quest'ultima era in grado di attirare alcuni oggetti leggeri, come le piume. La parola 'elettricità' deriva dal greco *elektron*, che vuol dire appunto 'ambra'.

Senza elencare qui tutti gli effetti elettrici che è possibile osservare nella vita di tutti i giorni, si può però constatare che essi non sono in generale immediatamente riducibili a fenomeni in qualche modo più familiari come la gravità. Il chiamare una forza 'elettrica' piuttosto che 'gravitazionale' serve quindi a distinguere la causa della forza stessa più che il suo effetto. Storicamente si può dire sia i fenomeni elettrici sia quelli magnetici sono stati classificati come tali, quindi a parte, perché non riconducibili a cause già note.

La moderna definizione di campo elettrico si basa sull'effetto dell'elettricità stessa, cioè una forza. Ponendo una carica di prova Q in un punto dello spazio, è possibile *definire* il campo elettrico \vec{E} come il rapporto tra la forza \vec{F} esercitata sulla carica e il valore della carica stessa:

$$\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}}{Q} \quad (9.38)$$

Poiché le forze \vec{F} sono vettori che si possono sommare con la regola del punta-coda e la carica Q è una grandezza scalare, ne risulta che il campo elettrico \vec{E} è un vero vettore, di intensità e verso univocamente determinati.

In realtà questa definizione di campo elettrico non è solo *effettuale*, ma anche implicitamente *causale*: si deve infatti aggiungere che la forza agente sulla carica di prova è un *forza di tipo elettrico*.

Per cogliere questa sottigliezza si pensi ad un elettrone sospeso sopra un pianeta. Anche se il pianeta è elettricamente neutro e quindi non genera alcun campo elettrico, l'elettrone sarà comunque attirato per forza di gravità verso il pianeta stesso. Detta $-\vec{g}$ l'accelerazione di gravità, m la massa dell'elettrone e $-e$ la sua carica, il campo elettrico agente su di esso sarebbe quindi:

$$\vec{E} \triangleq \frac{m\vec{g}}{e} \quad (9.39)$$

In realtà si preferisce dire che la forza che agisce sull'elettrone è di tipo *gravitazionale* e non elettrica: si fa quindi un'ipotesi sul tipo di causa che genera il moto. Per definire il campo elettrico bisognerebbe quindi specificare che si considera la forza agente sulla carica come generata da una causa *elettrica*, qualunque cosa ciò voglia dire. Si avrà allora:

$$\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}_{el}}{Q} \quad (9.40)$$

Questa definizione, anche se più strigente, è caratterizzata da una certa circolarità: ci si potrebbe infatti chiedere cos'è la forza elettrica e rispondere di rimando che è generata dal campo elettrico e così via. Un discorso simile si potrebbe fare anche per la carica elettrica: è una proprietà del corpo che subisce il campo elettrico o di quello che lo genera?

Per ora si dia per buona la definizione data di campo elettrico e la si affianchi a quella che di fatto è un'equazione di stato per \vec{E} , cioè la legge di Maxwell-Gauss

per il campo elettrico:

$$\vec{\nabla}^T \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (9.41)$$

Sebbene in forma implicita, essa afferma che le cariche elettriche sono la causa del campo elettrico. In forma più esplicita ed N-D il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q_e può essere espresso come:

$$\vec{E} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} \frac{1}{V_{N1}} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^N} \quad (9.42)$$

dove V_{N1} è il volume di un'ipersfera di raggio unitario in N-D, e \vec{r} il vettore distanza tra la posizione della carica e il punto in cui si considera il campo elettrico.²

Se la definizione del campo elettrico è tutto sommato abbastanza semplice, quella di campo magnetico si presenta come decisamente più complessa.

Definizione di campo magnetico

In natura esiste un minerale, la *magnetite* (Fe_3O_4) che si comporta come una calamita. Secondo la leggenda, questo minerale fu scoperto dal pastore Magnus nel IX secolo a.C. circa e la località in Grecia dove veniva estratto prese appunto il nome Magnesia.

Come già visto per il campo elettrico, anche l'idea di forza magnetica richiama in qualche modo alla presenza di una causa particolare, distinta dalle altre. La definizione che si dà del campo magnetico è comunque di tipo operativo, analogamente a quanto accade per il campo elettrico.

Tramite un piccolo ago di ferro è possibile stabilire, punto per punto, l'orientazione del campo magnetico, senza che però sia possibile determinarne l'intensità. Al paragrafo 6.3.2 nella pagina 172 si è visto come sia possibile misurare la forza magnetica \vec{F}_B su di un filo percorso da corrente e immerso in un campo magnetico uniforme \vec{B} . Si ritrova così la definizione implicita \vec{B} , tale che:

$$\vec{F}_B = \vec{i}l \wedge \vec{B} \quad (9.43)$$

In maniera analoga, esprimendo la forza magnetica esercitata su una carica puntiforme in moto, si ottiene:

$$\vec{F}_B = Q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (9.44)$$

Questa altro non è che l'equazione della forza di Lorentz, ma ci si chieda ora: essa costituisce la definizione di forza magnetica \vec{F}_B o di campo magnetico \vec{B} ? Per come è scritta, essa definisce esplicitamente solo l'*effetto* del campo, cioè la forza, ma non la *causa* del campo stesso. Inoltre, se sono noti il campo \vec{B} e la velocità \vec{v} la forza \vec{F}_B è univocamente determinata, mentre se sono noti la velocità \vec{v} e la forza \vec{F}_B è possibile risalire solo alla componente perpendicolare del campo magnetico, come già visto:

$$\vec{B} = \frac{1}{Qv} \left(\vec{F} \wedge \vec{v} \right) + \lambda \vec{v} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (9.45)$$

²Si noti che la permeatività ε_0 ha dimensioni fisiche dipendenti dal numero di dimensioni spaziali

Come per il campo elettrico è quindi necessaria un'equazione di stato che leghi \vec{B} ad una causa di qualche tipo. Invocare l'esistenza dei monopoli magnetici, in analogia con le cariche elettriche, non è qui di particolare utilità, dato che il campo magnetico si verifica esistere anche se la sua divergenza è nulla.

L'esperienza di Ampère

Un filo percorso da corrente non solo è sensibile ai campi magnetici ma è anche in grado di generarli. Nel caso statico, il campo \vec{B} generato da un filo rettilineo infinito percorso da un corrente \vec{i} è pari a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{d^2} \vec{i} \wedge \vec{d} \quad (9.46)$$

dove \vec{d} è il vettore di distanza minima che parte dal filo e raggiunge il punto in cui si considera il campo magnetico.

Quest'equazione potrebbe essere considerata una definizione del campo magnetico, benché manchi il termine non stazionario. In particolare, essa è vista come un caso delle legge di Maxwell-Ampère per la circolazione:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.47)$$

In generale si può notare che nelle equazioni di Maxwell il campo magnetico compare sempre derivato in qualche forma, sia in spazio che in tempo. Esso risulta così legato strettamente al campo elettrico, ma non altrettanto ben esplicitato.

9.2.4 Campo elettromagnetico N-D

Si è visto quanto spesso compaia il rotore nelle equazioni di Maxwell o il prodotto vettore nelle possibili definizioni di campo magnetico. Nel caso delle forza di Lorentz si ha:

$$\vec{F}_B = Q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (9.48)$$

dove sia la forza \vec{F}_B sia la velocità \vec{v} sono veri vettori. La componente ortogonale \vec{B}_R può essere esplicitata rispetto ad essi nella forma:

$$\vec{B}_R = \frac{1}{Qv} (\vec{F} \wedge \vec{v}) \quad (9.49)$$

Qui si rivela un aspetto del campo magnetico che in 3-D non è sempre così evidente, anche se noto: **il campo magnetico \vec{B} non è uno vero vettore, ma uno pseudo-vettore!** La legge di Ampère lo conferma in maniera più esplicita:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{d^2} \vec{i} \wedge \vec{d} \quad (9.50)$$

Nell'equazione di Maxwell-Faraday si trova ulteriore conferma, anche se viene scritta nell'ipotesi dell'esistenza di monopoli e correnti magnetiche:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.51)$$

Il campo elettrico \vec{E} è infatti un vero vettore, perciò sia \vec{B} sia \vec{J}_m devono essere pseudo-vettori!

Si veda ora la traduzione in notazione N-D delle equazioni appena esposte: nella maggior parte dei casi basterà indicare \mathbf{B} come un *tensor*e e sostituire il doppio cuneo al cuneo singolo.

Da pseudo-vettore a tensore

Le equazioni per la forza di Lorentz possono essere riscritte come:

$$\vec{F}_B = -Q \vec{B} \cdot \vec{v} \quad (9.52)$$

$$\vec{B}_R = \frac{1}{Qv} [\vec{F} \wedge \vec{v}] \quad (9.53)$$

L'equazione di Ampère per il campo magnetico generato da un filo percorso da corrente sarà:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{d^2} \vec{i} \wedge \vec{d} \quad (9.54)$$

L'equazione di Maxwell-Faraday diverrà invece:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.55)$$

nel caso si consideri anche la presenza di una densità di flusso magnetico, si avrà:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.56)$$

Rimangono ora due equazioni di Maxwell da trasformare: quelle che contengono divergenza e rotore del campo magnetici.

9.2.5 Monopoli magnetici: una chimera?

Si è osservato che il campo magnetico \mathbf{B} viene espresso sempre per mezzo delle operazioni di prodotto vettore di rotore. Il significato della sua divergenza non sarà quindi lo stesso di quella di un vero campo vettoriale.

Al paragrafo 7.3.6 si è osservato che in notazione N-D la divergenza di un pseudo-vettore può essere espressa come la divergenza a 3 indici del tensore associato:

$$\nabla_{123} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = -\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad \text{per } N = 3 \quad (9.57)$$

In maniera simile, si è mostrato al paragrafo 7.3.10 che la divergenza di un rotore è identicamente nulla, sia che la si esprima in notazione 3-D o N-D:

$$\vec{\nabla}^T \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad (9.58)$$

$$\nabla_{ijk} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0 \quad (9.59)$$

La divergenza del campo magnetico sarà in ogni caso espressa come *la divergenza a 3 indici di un tensore*

$$\nabla_{123} \cdot \vec{B} = -\vec{\nabla}^T \cdot \vec{B} \quad \text{per } N = 3 \quad (9.60)$$

Si considerino ora due casi, uno che contempra l'esistenza dei monopoli magnetici e l'altro no.

Ipotesi di esistenza dei monopoli magnetici

Il campo magnetico è definibile esplicitamente come un prodotto vettore o come somma di prodotti vettori.

$$\overline{\overline{B}} = \sum \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (9.61)$$

In questo caso la divergenza a 3 indici di $\overline{\overline{B}}$ potrebbe anche non essere nulla, ma il significato dei monopoli magnetici rimarrebbe piuttosto oscuro: essi non sarebbe infatti le sorgenti di un campo vettoriale, ma tensoriale! Inoltre, per $N > 3$ esisterebbero più densità di carica magnetica! Per definire la divergenza a 3 indici servono infatti proprio 3 indici, anche se si ci trova in N-D. Si potrebbe scrivere anche:

$$\nabla_{ijk} \cdot \overline{\overline{B}} = \rho_m \quad (9.62)$$

ma nulla garantirebbe, ad esempio, che ρ_m sia la stessa grandezza per ogni tripletta di indici! In 4-D si potrebbe avere infatti:

$$\nabla_{123} \cdot \overline{\overline{B}} \neq \nabla_{314} \cdot \overline{\overline{B}} \quad (9.63)$$

Che senso avrebbe allora assegnare una densità di carica magnetica ρ_m ? Anche senza spostarsi in 4-D, si può provare a pensare il campo magnetico in 2-D: dato che forze e correnti sono sempre contenute nel piano, \vec{B} risulterebbe sempre perpendicolare ad esso. La forza di Lorentz ricadrebbe comunque sempre nel piano e si avrebbero gli effetti del campo magnetico anche senza considerarlo un vettore!

Ipotesi di non-esistenza dei monopoli magnetici

Il campo magnetico è definibile esplicitamente come un rotore o come somma di rotori.

$$\overline{\overline{B}} = \sum \vec{\nabla} \wedge \vec{a} \quad (9.64)$$

Questo è decisamente il caso più semplice ed elegante: la divergenza di un rotore è infatti identicamente nulla. Si ritrova così:

$$\nabla_{ijk} \cdot \overline{\overline{B}} = 0 \quad \forall i, j, k \in \{1; 2; \dots; N\} \quad (9.65)$$

In questo caso i monopoli magnetici non esistono e il campo magnetico ha un comportamento analogo a quello della vorticità per un flusso: allo stesso modo infatti *le linee di campo possono solo chiudersi su se stesse o aprirsi all'infinito*, come attestato dal 1° Teorema di Helmholtz.

Questo risultato si accorda particolarmente bene con l'equazione di Maxwell-Faraday, dove almeno la derivata temporale del campo magnetico viene eguagliata proprio ad un rotore:

$$\frac{\partial \overline{\overline{B}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \quad (9.66)$$

calcolando la divergenza a 3 indici di tutta l'equazione, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{ijk} \cdot \overline{\overline{B}}) = 0 \quad (9.67)$$

confermando la coerenza del risultato.

Proprio a partire da questa forma si costruisce il potenziale vettore \vec{A} , tale che:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (9.68)$$

Calcolando il rotore di questa equazione, il termine a potenziale viene annullato e rimane:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (9.69)$$

Confrontando questo risultato con l'equazione di Maxwell-Faraday, risulta particolarmente comodo porre:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (9.70)$$

Si noti che questa potrebbe essere considerata benissimo come la *definizione* del campo magnetico, anche se comunemente non la si considera tale.

Esprimendolo in questo modo, il campo magnetico può essere interpretato come la *vorticità del campo* \vec{A} e gode di proprietà analoghe a quelle della vorticità \vec{w} utilizzata in Fluidodinamica.

Riscrittura della legge di Maxwell-Ampère

L'ultima equazione da tradurre è la legge di Maxwell-Ampère, che in notazione 3-D contiene il rotore del campo magnetico. In notazione N-D si avrà:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \quad (9.71)$$

Nel caso si esprima \vec{B} come un rotore si ha allora:

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2(\vec{A}) - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{A}) \quad (9.72)$$

La legge di Maxwell-Ampère può così essere riscritta nei due modi equivalenti:

$$-\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.73)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}^T \cdot \vec{A}) - \nabla^2(\vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.74)$$

Definizione del potenziale vettore

Utilizzando il Gauge di Coulomb, il potenziale vettore \vec{A} può essere definito in maniera comoda in modo che:

$$\nabla^2(\vec{A}) = -\mu_0 \vec{J} \quad (9.75)$$

L'argomento andrebbe approfondito, ma qui non è possibile dilungarsi oltre.

9.2.6 Equazioni di Maxwell in N-D

Riassumendo, le equazioni di Maxwell possono essere riscritte in forma differenziale in maniera che esse siano valide in qualsiasi numero di dimensioni. Esse sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}^T \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \\ \nabla_{ijk} \cdot \bar{\bar{B}} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \bar{\bar{B}}}{\partial t} \\ -\bar{\bar{B}} \cdot \vec{\nabla} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (9.76)$$

Per il loro completamento logico si possono aggiungere le equazioni che definiscono potenziale vettore \vec{A} e campo magnetico \vec{B} :

$$\nabla^2(\vec{A}) := -\mu_0 \vec{J} \quad (9.77)$$

$$\bar{\bar{B}} := \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (9.78)$$

Si nota che anche in questo caso le equazioni risultano ‘asimmetriche’, ma è comprensibile che sia così: il campo elettrico \vec{E} è costituito da *vettori*, mentre in 3-D quello magnetico \vec{B} da *pseudo-vettori* e, in generale, il campo magnetico $\bar{\bar{B}}$ è un *tensore*. Si tratta quindi di oggetti di natura diversa e non si può pretendere che si comportino allo stesso modo.

Il discorso andrebbe approfondito: è appena agli inizi. Qui non è possibile farlo.

Capitolo 10

Conclusioni e sviluppi futuri

Un'equazione non significa nulla per
me se non esprime un pensiero di Dio

Srinivasa Ramanujan

Si è giunti al termine di questa serie di considerazioni e analisi sul prodotto vettore ed il rotore. Partendo dalla definizione di vettore, si sono sfiorati vari argomenti, passando dal semplice calcolo delle aree fino a varcare le soglie di nuove dimensioni, estendendo e riformulando i concetti stessi di prodotto vettore e rotore, per poi sperimentarli nei diversi ambiti della Meccanica Razionale, della Fluidodinamica e dell'Elettromagnetismo.

Nonostante tutto, quanto riportato in questo testo è solo una parte dei risultati conseguiti nel corso degli ultimi tre anni. Molto ci sarebbe da dire ancora sulle analogie esistenti tra Fluidodinamica ed Elettromagnetismo, non solo rispetto alla vorticità, e sulla possibilità di utilizzare un linguaggio comune per i due ambiti. Il prodotto vettore N-D potrebbe essere utilizzato benissimo anche nella computer grafica per la descrizione delle rotazioni, in maniera analoga e alternativa ai quaternioni, mentre rotore e flusso N-D consentirebbero un nuovo approccio all'Aerodinamica 3-D e ai metodi numerici per il calcolo dei flussi attorno ai corpi. Vantaggi analoghi si troverebbero anche per la determinazione dei campi elettromagnetici e per la descrizione degli stati di deformazione in Scienza dei Materiali.

In definitiva, le applicazioni della nuova notazione sono potenzialmente vastissime: essa costituisce uno strumento concettuale di ampia portata, una specie di chiave in grado di aprire molte porte e finestre su nuove prospettive.

Tra i risultati che non è possibile qui illustrare in maniera dettagliata, se ne elencano alcuni che in futuro si spera di poter pubblicare opportunamente:

- ricorrendo alla notazione N-D si può esprimere un campo vettoriale in funzione del suo intero gradiente. Questo può essere chiamato come *Teorema di ricostruzione dal gradiente* e costituisce un'estensione del Teorema di Helmholtz per la divergenza e il rotore, che sotto alcune ipotesi consente di ricostruire un campo vettoriale se sono noti appunto la sua divergenza e il suo rotore. Questo Teorema di Helmholtz, non riportato nel testo, non è però in grado di descrivere campi irrotazionali e conservativi, che si

trovano invece nei casi elementari dell'aerodinamica. L'equazione per il Teorema di ricostruzione dal gradiente consente invece di trattare anche flussi che presentino tali caratteristiche.

- L'equazione del Teorema di ricostruzione dal gradiente può essere trasformata con Fourier nello spazio N-D dei numeri d'onda, in cui è possibile separare le componenti conservativa e non conservativa del campo originale. Ritornando nel dominio 'fisico' originale, si possono riottenere un campo puramente conservativo e uno rotazionale e solenoidale.
- la legge di Biot-Savart per l'elettromagnetismo, utilizzata anche in Aerodinamica per la simulazione dei filetti vorticosi, può essere esplicitata come un caso particolare del Teorema di ricostruzione dal gradiente.
- in generale, le singolarità virtuali utilizzate in Fluidodinamica ed Elettromagnetismo, quali ad esempio sorgenti, vortici e doppiette, possono essere modellate in un'unica forma derivata dal Teorema di Ricostruzione del gradiente.
- il Teorema di Kutta-Joukowski può essere generalizzato in N-D e applicato all'intero corpo in moto in un fluido. Inoltre è possibile mostrare che l'attrazione tra due fili paralleli percorsi da corrente può essere spiegata proprio tramite una versione elettromagnetica del Teorema di Kutta-Joukowski, senza bisogno di effetti relativistici.

Come si è visto nel corso di questa tesi, il linguaggio condiziona anche il modo di pensare e l'introduzione del calcolo vettoriale ha avuto storicamente una portata enorme, anche se non ha comportato direttamente alcuna invenzione o scoperta. L'interpretazione delle equazioni e la ricerca del loro significato è quindi fondamentale per il loro buon utilizzo. Il caso dei momenti e del campo magnetico sembra emblematico: finché si rimane in 3-D è possibile manipolarli come se si trattasse di veri vettori, ma prima o poi si incorre in qualche paradosso che deriva proprio dal formalismo usato per descriverli. In altre parole, i trucchetti del classico prodotto vettore funzionano solo in 3-D. Spingendosi oltre, si potrebbe persino dire che il considerare il prodotto vettore come un vettore è *un'illusione* frutto del mondo in cui viviamo, che di dimensioni ne ha solo 3 (almeno a prima vista). Nella visione più ampia in N-D ci si rende conto invece che momenti e rotori sono più probabilmente matrici o tensori.

In generale l'uso del prodotto vettore non presenta comunque aspetti tanto drammatici: è pur sempre un buono strumento matematico piuttosto intuitivo e per il mondo in cui viviamo può risultare comodo usarlo in notazione 3-D.

Alcune volte però l'intuizione è fuorviante e per guidarla, specie in ambito scientifico, è importante disporre di un formalismo semplice e coerente.

Si pensi al caso dei monopoli magnetici: già nel XIX secolo la loro ricerca consisteva in pratica nel tentativo di isolare il polo Nord e il polo Sud di una calamita. Le equazioni di Maxwell furono formulate nella constatazione che la divergenza di un campo magnetico risultava sempre nulla, stando agli esperimenti. Nonostante i monopoli magnetici non si osservassero in natura, la loro esistenza poteva sembrare comunque abbastanza ragionevole, dato che consentivano di formulare in maniera simmetrica le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo. Nel 1931 l'idea di carica magnetica ritornò in auge grazie al lavoro sull'elettrodinamica quantistica del fisico francese Paul Dirac, che a partire da considerazioni sulla

natura discreta della carica elettrica ipotizzò che essa potesse essere spiegata dalla presenza di monopòli magnetici. Allo stato attuale pare che diversi modelli fisici avanzati prevedano l'esistenza di queste entità sfuggenti e che nel corso dei decenni siano state condotte diverse ricerche per darne evidenza sperimentale.

Nel settembre 2009, in un articolo pubblicato sulla rivista *Science*, un gruppo di ricercatori ha annunciato di aver trovato dei monopòli magnetici nello *spin ice dysprosium titanate* ($Dy_2Ti_2O_7$) [10], [11], [12]. In seguito si è verificato che quelli osservati erano invece dipoli magnetici, anche se costituiti da due poli Nord e Sud in grado di muoversi con molta libertà l'uno rispetto all'altro.

Io non sono un fisico: so di elettromagnetismo meno di quel che vorrei, non conosco la meccanica quantistica e non ho idea di cosa sia uno 'spin ice'. Ho però il timore che i monopòli magnetici possano rivularsi una chimera scientifica al pari del flogisto e del calorico, per la cui ricerca vengono magari spesi ogni anno milioni di euro. La loro non-esistenza potrebbe conseguire semplicemente da un problema di definizione del campo magnetico, come illustrato al capitolo precedente. Finché si rimane in 3-D si ha l'impressione che campo elettrico \vec{E} e campo magnetico \vec{B} possano essere simmetrizzati in quanto vettori, ma nel momento in cui si passa alla notazione N-D ci si rende conto che il campo magnetico è in realtà un tensore $\overline{\vec{B}}$ e l'idea stessa di carica magnetica comincia a scricchiolare. Se poi il campo magnetico è definito come un rotore, allora la sua divergenza è tautologicamente nulla e i monopòli non esistono per questo semplice motivo, e non perché non si dispone dei mezzi sperimentali per osservarli.

Tutte queste considerazioni sull'elettromagnetismo non vogliono essere una risposta o la soluzione di qualche problema, ma un invito a porsi delle domande.

Il metodo socratico mostra ancora oggi la sua efficacia e la ricerca delle definizioni, il chiedersi 'cos'è?' costituisce un punto di partenza non solo filosofico ma anche scientifico. Ancora una volta si esorta ad interrogarsi, ad esercitare il cartesiano dubbio metodico e a cercare di dare un significato a quel che ci circonda.

Soprattutto, si rinnova l'invito a lasciarsi meravigliare, a provare a fantasticare nel senso più nobile e creativo di quest'azione, e a non lasciare spegnere il proprio entusiasmo, proseguendo nella ricerca del Vero e del Bello.

Bibliografia

- [1] Josiah Willard Gibbs, *Elements of vector analysis - Arranged for the use of Students of Physics*, 1881-1884;
<http://www.archive.org/stream/elementsvectora00gibbgoog#page/n4/mode/2up>
- [2] Edwin Bidwell Wilson, *Vector analysis - A text-book for the use of students of mathematics and physics*, 1901, Yale Bicentennial publication;
<http://www.archive.org/details/vectoranalysiste00gibbiala>
- [3] Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, 1967, Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press;
- [4] Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis* 2002, estratto conferenza, University of Louisville;
http://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.pdf
- [5] James Clerk Maxwell *Remarks on the Mathematical Classification of Physical Quantities*, marzo 1871, Proceedings of the London Mathematical Society, s1-3, 224-233
http://www.clerkmaxwellfoundation.org/MathematicalClassificationofPhysicalQuantities_Maxwell.pdf
- [6] James Clerk Maxwell *On Physical Lines of Force*, 1861, Philosophical Magazine, Volume 21 & 23 Series 4, Part I.
- [7] George Gabriel Stokes, Smith Prize Exam, febbraio 1854, University of Cambridge,
http://www.clerkmaxwellfoundation.org/SmithsPrizeExam_Stokes.pdf
- [8] Donald G. Dudley, *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory* 1994, IEEE PRESS, Oxford University Press;
- [9] Sabato Scala *Simmetrizzazione delle equazioni di Maxwell con l'introduzione del campo gravitazionale, un'idea bizzarra?* marzo 2007,
<http://baccelli1.interfree.it/maxwell.pdf>
<http://www.volta.alessandria.it/episteme/ep7/errata.htm>

- [10] Michel J. P. Gingras *Observing Monopoles in a Magnetic Analog of Ice*, *Science*, 16 October 2009: Vol. 326 no. 5951 pp. 375-376 DOI: 10.1126/science.1181510
<http://www.sciencemag.org/content/326/5951/375.summary>
- [11] *Dirac Strings and Magnetic Monopoles in the Spin Ice Dy₂Ti₂O₇*
 D. J. P. Morris, D. A. Tennant, S. A. Grigera, B. Klemke, C. Castelnovo, R. Moessner, C. Czternasty, M. Meissner, K. C. Rule, J.-U. Hoffmann, K. Kiefer, S. Gerischer, D. Slobinsky and R. S. Perry
Science, 16 October 2009: Vol. 326 no. 5951 pp. 411-414 DOI: 10.1126/science.1178868, Published Online September 3 2009
<http://www.sciencemag.org/content/326/5951/411.abstract>
- [12] *Magnetic Coulomb Phase in the Spin Ice Ho₂Ti₂O₇* T. Fennell, P. P. Deen, A. R. Wildes, K. Schmalzl, D. Prabhakaran, A. T. Boothroyd, R. J. Aldus, D. F. McMorrow and S. T. Bramwell
Science 16 October 2009: Vol. 326 no. 5951 pp. 415-417 DOI: 10.1126/science.1177582, Published Online September 3 2009
<http://www.sciencemag.org/content/326/5951/415.abstract>
- [13] Edwin Abbott Abbott, *Flatlandia: Racconto fantastico a più dimensioni*, 1884, Adelphi;
- [14] Autori Vari, *I 'Matematici'*; 2005, Ghisetti e Corvi Editori;
- [15] Renzo Baldoni, *La Storia del Calcolo*; 2004?, 'Museo d'Informatica e Storia del Calcolo', Pennabilli (PS);
- [16] Mario Livio, *L'equazione impossibile - Come un genio della matematica ha scoperto il linguaggio della simmetria*; 2006, Biblioteca Universale Rizzoli;
- [17] Marcus Du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi - L'ipotesi di Riemann, il più grande mistero della matematica*; 2004, Rizzoli;
- [18] Marcus Du Sautoy, *Il disordine perfetto - L'avventura di un matematico nei segreti della simmetria*; 2007, Rizzoli;
- [19] David Wells, *Personaggi e paradossi della matematica*; 2008, Oscar Saggi Mondadori;
- [20] T. Levi-Civita, U. Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale - Volume primo*, 1949, Zanichelli editore Bologna;
- [21] Ugo Amaldi, *La fisica per i licei scientifici - Vol. 1,2 e 3*, 1998, Zanichelli;
- [22] Autori vari, *Enciclopedia Hoepli*, 1969, Hoepli;
- [23] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Matematica numerica*, 2008, Springer;
- [24] Giulio Maltese, *La storia di F=ma: la seconda legge del moto nel XVIII secolo*, 1992, Olschki;
- [25] Giulio Maltese, *Da F=ma alle leggi cardinali della meccanica*, 2001, Hoepli;
- [26] Ernst Mach, *La meccanica esposta nel suo sviluppo storico-critico*, 1893;

- [27] F. Auteri, L. P. Quartapelle, *Fluidodinamica*, dispense ad uso degli studenti, marzo 2011;
http://www.aero.polimi.it/~auteri/bacheca_fluidoI/front.pdf
http://www.aero.polimi.it/~quartape/bacheca/mat_did_F1/front.pdf
http://www.aero.polimi.it/~quartape/bacheca/mat_did_F1/chap0.pdf
- [28] A. Baron, dispense ad uso degli studenti, giugno 2010;
http://www.aero.polimi.it/~baron/bacheca/Programma_dettagliato_bacheca.pdf
http://www.aero.polimi.it/~baron/bacheca/a11_stralim_max_rev10.pdf
- [29] G. Haller, *An objective definition of a vortex*, 2005, Journal of Fluid Mechanics, vol. 525, pp. 1-26, Cambridge University Press;
<http://www.crm.umontreal.ca/probindustriels2009/pdf/vortex.pdf>
- [30] M. Lanz, dispense ad uso degli studenti, ottobre 2011;
http://www.aero.polimi.it/~lanz/bacheca//downloads/cost/aa11_12/Ca19_10.pdf
- [31] Franco Bernelli Zazzera, *Appunti del corso di Dinamica e controllo d'assetto*, dispense ad uso degli studenti, 2009;
http://www.aero.polimi.it/~bernelli/bacheca/didattica/ACS_Appunti_parte1.pdf
- [32] Cristina Bertone, *Quaternioni e rotazioni*, articolo, Università di Torino, maggio 2006;
<http://alpha01.dm.unito.it/personalpages/abbena/quaternioni.pdf>
- [33] Emanuel Guariglia, *N, Z, Q, R, C : ma la storia come continua???????*,
<http://www.matematicasulweb.eu/algebra/quat/quat.asp>
- [34] Lorenzo Pantieri, *L'arte di scrivere con $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ - Un'introduzione a $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$* , settembre 2009,
<http://www.lorenzopantieri.net/>
- [35] A. Borrelli, E. Chinol, T. Frank, *Dizionario - Inglese Italiano - Italiano Inglese*, 1997, DeAgostini