

POLITECNICO DI MILANO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DEI SISTEMI
CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA MATEMATICA



TESI DI LAUREA DI SPECIALISTICA

**Modelli cinematici per la tettonica delle
placche:
Regressione e inferenza su archi sferici**

Relatore: Dott. Simone Vantini

Correlatore: Dott. Marco Cuffaro

Candidato:

Carmelo Vecchio matr. 734750

ANNO ACCADEMICO 2010-2011

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Elementi di geologia | 9 |
| 1.1 | La tettonica delle placche | 9 |
| 1.2 | I margini di placca | 12 |
| 1.3 | Il Paleomagnetismo | 13 |
| 2 | Geometria e cinematica sferica | 19 |
| 2.1 | Geometria sferica | 19 |
| 2.2 | Cinematica del corpo rigido sulla sfera | 24 |
| 3 | Modelli di rotazione di placca sulla sfera | 31 |
| 3.1 | Modelli cinematici per le placche a una e due rotazioni | 31 |
| 3.2 | Variabili osservabili | 35 |
| 4 | Media sferica e Regressione su archi sferici | 39 |
| 4.1 | Media e Varianza sferica | 39 |
| 4.2 | Regressione su archi sferici | 42 |
| 4.3 | Regressione temporale su archi sferici | 47 |
| 5 | Analisi della varianza | 55 |
| 5.1 | Indice di buon adattamento al modello di regressione su archi sferici | 55 |
| 6 | Test non parametrici | 69 |
| 6.1 | Test di permutazione | 69 |
| 7 | Studio del caso reale | 75 |
| 7.1 | Procedura generale di applicazione | 75 |
| 7.2 | Cinematica placca nordafricana | 78 |
| 7.3 | Cinematica placca europea | 84 |

| | | |
|----------|-------------------------------------|-----------|
| 7.4 | Cinematica placca iberica | 88 |
| 8 | Conclusioni | 93 |
| A | Elementi di cartografia | 97 |

Introduzione

Lo scopo del lavoro sarà di sviluppare strumenti statistici atti a studiare il modello cinematico, proposto in Cuffaro et al. (2008), per la deriva dei continenti (tettonica a placche).

Nel primo capitolo verranno trattati gli argomenti fondamentali di geologia, con lo scopo di comprendere a pieno le problematiche geologiche legate al fenomeno della deriva dei continenti.

La ricostruzione di tali moti ha un importante riscontro in geologia in quanto sono causa di fenomeni sismici e di orogenesi.

Le varie placche presenti sul globo si muovono sulla superficie terrestre a causa di moti convettivi di magma nell'interno della terra.

Attraverso lo studio delle inversioni di polarità del campo magnetico terrestre nel tempo, registrate dalle rocce di cui sono formati i fondali oceanici, è possibile una parziale ricostruzione della posizione di alcune placche terrestri a determinate ere.

Sotto l'ipotesi che le placche siano corpi rigidi, nel capitolo 2, ricondurremo il problema del loro moto ad una analisi cinematica del corpo rigido sulla sfera.

Richiameremo i risultati fondamentali di geometria e cinematica sferica necessari alla formulazione matematica del problema introdotto precedentemente.

Inoltre introdurremo dei concetti geometria differenziale, in quanto alcune particolari rappresentazioni sul piano della superficie sferica, saranno utili allo sviluppo degli algoritmi necessari alla stima dei parametri dei modelli cinematici proposti.

Ricordando che sulla superficie sferica tutti i moti sono riconducibili a rotazioni attorno ad un asse fissato, quindi individuati da un polo e un angolo di rotazione, nel capitolo 3, verranno analizzati due modelli cinematici:

- Il primo supporrà esista un polo di rotazione fisso nel tempo attorno al quale

la placca si muoverà con una velocità angolare media da determinare insieme al polo.

- Il secondo, recentemente proposto in letteratura in Cuffaro et al. (2008), invece supporrà che il polo di rotazione si muova secondo una legge assegnata e la velocità di rotazione attorno a tale polo sia costante nel tempo, tale legge descriverà un cerchio minore sulla sfera, individuato da un centro e da un raggio, che rappresenteranno i parametri da stimare, insieme alla velocità angolare media del polo su tale cerchio.

Successivamente si penserà a tale rotazione come la composizione di due rotazioni: una rotazione primaria attorno ad un polo fisso, ed una secondaria (subrotazione) attorno un polo che si muoverà nel tempo secondo una legge assegnata.

Un punto generico appartenente ad un placca descriverà così un epicicloide sferico.

A questo punto studieremo nel dettaglio i dati utilizzati nel lavoro per stimare i parametri dei modelli, in particolare i dati a nostra disposizione saranno:

poli e angoli di rotazione a determinate ere che descrivono il moto delle placche Nordafricana, Eurasiatica e Iberica rispetto la placca Nordamericana.

Nel capitolo 4, si stimeranno i parametri di tali modelli attraverso tecniche di regressione che tengano conto che la distanza sulla sfera non è quella euclidea, ma quella geodetica .

Verranno così ridefiniti i concetti di media e varianza dei dati distribuiti sulla sfera.

In particolare, per la stima dei parametri nel primo modello, utilizzeremo il concetto di media sferica, e un algoritmo di calcolo di quest'ultima proposto da Buss S., Fillmore J., 2001.

Per il secondo modello utilizzeremo l'algoritmo proposto in Jung S. et al. 2011 per la stima di un cerchio minore sulla superficie sferica, apportando alcune modifiche che ne migliorano le proprietà di velocità di convergenza, e sviluppando un'ulteriore algoritmo atto a stimare la velocità angolare media di un punto su esso.

Nel capitolo 5 verranno proposti alcuni indici appositamente definiti per comparare i modelli cinematici proposti e svilupperemo un test parametrico sotto alcune assunzioni sulla distribuzione dei dati.

Daremo indicazioni precise del valore che tali indici devono assumere al fine di

decidere quale modello cinematico spiega meglio questi dati. Nel capitolo 6 svilupperemo per tali indici dei test non parametrici svincolandoci così sulle assunzioni fatte sulla distribuzione dei dati, poiché le numerosità dei campione a disposizione non permette di ritenere valide le assunzioni fatte nel capitolo 5. Infine nell'ultimo capitolo procederemo all'applicazione degli strumenti sviluppati sui dati a nostra disposizione, al fine di valutare la validità del modello proposto da Cuffaro et al. (2008).

Capitolo 1

Elementi di geologia

In questo capitolo, attraverso un breve excursus storico, introdurremo le nozioni fondamentali di geologia necessarie alla comprensione del problema della cinematica delle placche terrestri.

1.1 La tettonica delle placche

La teoria della tettonica delle placche nacque intorno al 1915 dall'idea del meteorologo tedesco Alfred Wegener, il quale ipotizzò l'esistenza di un unico continente, detto pangèa, che, circa 200 milioni di anni fa, si frammentò in placche o zolle, la cui deriva avrebbe poi configurato il mondo come oggi lo conosciamo (figura 1.1).

Le idee a sostegno di questa tesi, oggi universalmente accettata, sono di varia natura: morfologiche - molte coste continentali sono complementari tra loro - paleontologiche - identità tra fossili faunistici e floristici in continenti separati dagli oceani - e paleoclimatiche - in Sudamerica, Australia, Africa ed India sono presenti rocce sedimentarie tipiche di un ambiente glaciale, le tilliti, mentre in Siberia, America settentrionale ed Europa centrosettentrionale vi sono dei carboni fossili della stessa età delle tilliti, ma formate da resti vegetali tipici di climi tropicali. Attorno al 1930, il geologo inglese Arthur Holmes rafforzò ulteriormente la teoria di Wegener ipotizzando quali fossero le forze che spingevano alla deriva le placche. Consideriamo la struttura interna della Terra (figura 1.2): oceani e continenti

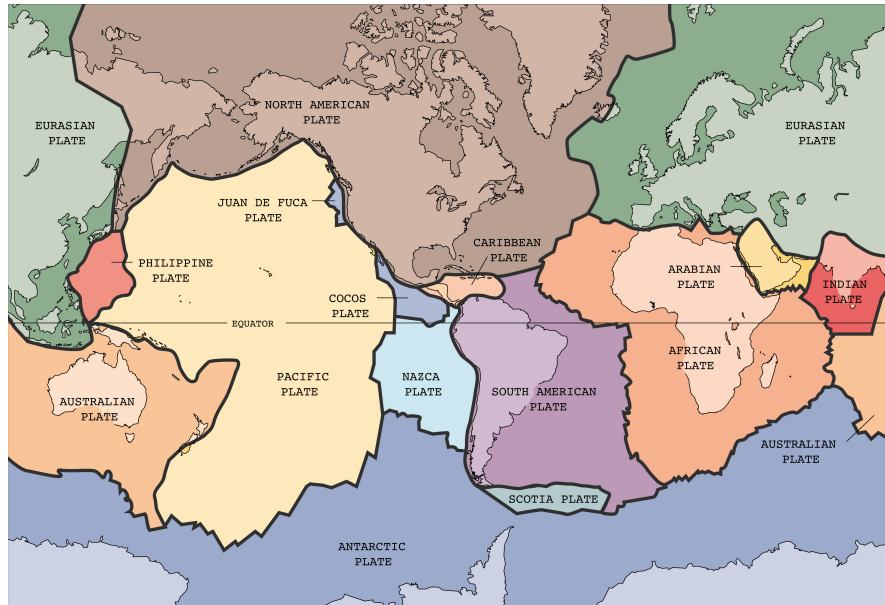


Figura 1.1: Configurazione odierna placche

Fonte: United States Geological Survey (USGS),
<http://pubs.usgs.gov/publications/text/slabs.html>

insieme ad uno strato rigido che va dai 30 ai 170 km formano la litosfera, sotto la quale vi è uno strato di materiale plastico di profondità di circa 350 km, detto astenosfera. A seguire uno strato rigido detto mesosfera (fino alla profondità di 2900 km circa), infine nucleo esterno (composto da materiale liquido fino alla profondità di 5100 km) ed interno composto da materiale rigido. Temperatura e pressione sono crescenti con la profondità.

Questa struttura dà origine a moti convettivi nella astenosfera, che trascinano la crosta terrestre provocando così la frammentazione e il movimento delle placche. Il magma di cui è composta l'astenosfera, nei punti di frattura tra due placche, risale e i margini delle placche sono spinti in direzioni opposte. Il magma fuoriuscendo dal mantello si raffredda formando una doppia catena di montagne ai lati della frattura, detta dorsale. Tale fenomeno avviene soprattutto negli oceani dove la crosta è più sottile e dove si formano immense catene sottomarine dette dorsale medio oceanica.

Le ultime scoperte degli anni '90 hanno però configurato ipotesi alternative per la spiegazione del problema: si è constatato, infatti, che il movimento preferenziale

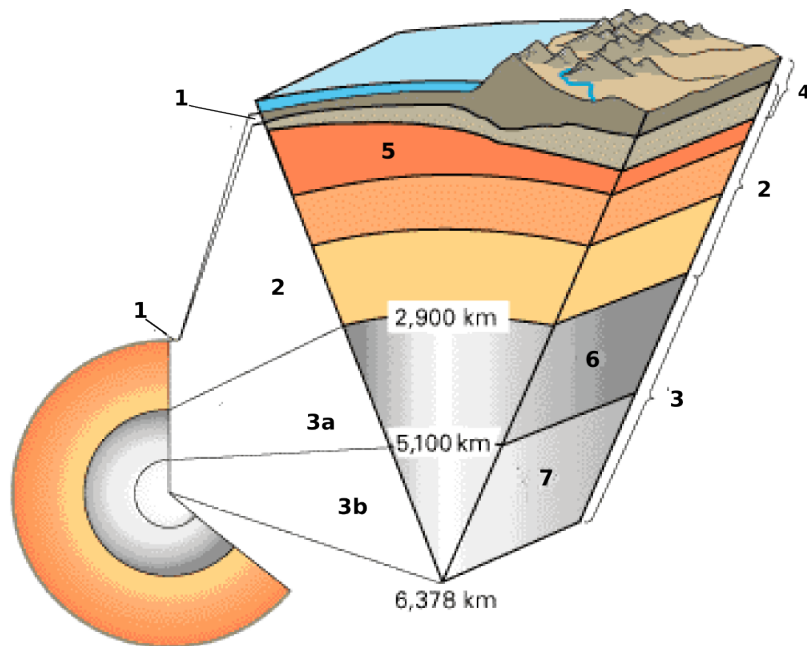


Figura 1.2: Struttura interna della terra

1- Crosta oceanica e continentale; 2- Mantello; 3- Nucleo; 3a-Nucleo esterno; 3b- Nucleo interno; 4- Litosfera; 5- Astenosfera;

Fonte: United States Geological Survey (USGS),
<http://pubs.usgs.gov/gip/dynamic/inside.htm>

delle placche segue all'incirca l'andamento dei paralleli, il che induce a pensare che il moto di rotazione terrestre sia il responsabile ultimo del loro moto.

Secondo questa ipotesi, la litosfera, composta da materiale rigido, si muoverebbe sull'asthenosfera, composta da materiale fluido, in direzione Ovest spinta dal moto di rotazione terrestre.

Se la zona di separazione tra litosfera e asthenosfera fosse omogenea, la velocità e la direzione di deriva della litosfera sarebbe uguale in ogni suo punto, e non ci sarebbero quindi fratture; esistono, in realtà, zone in cui sono presenti forti disomogeneità, dovute a differenti composizioni di materiale e cambi temperature e pressioni. Proprio in queste zone si creano le fratture sulla litosfera, di conseguenza, le placche formatesi su materiale magmatico meno viscoso viaggeranno a velocità superiori rispetto a quelle sotto le quali la viscosità del magma è maggiore.

1.2 I margini di placca

Al fine di studiare la cinematica delle placche è necessario capire i fenomeni che possono avvenire ai loro margini.

Possiamo considerare tre macrocategorie (figura 1.3):

1. Margini divergenti o costruttivi : lungo i quali due placche si allontanano l'una dall'altra, lasciando spazio per la risalita di magma dall'astenosfera, che forma nuova crosta (dorsali).

2. Margini convergenti o distruttivi: lungo i quali due placche si muovono l'una verso l'altra. Possono verificarsi tre tipi di scontro: crosta oceanica con crosta oceanica: una delle due placche si infossa sotto l'altra, tale fenomeno è chiamato subduzione.

Crosta oceanica con crosta continentale: la notevole differenza di densità tra le due placche fa sì che sia la placca oceanica ad essere subdotta poiché più densa e pesante, mentre la crosta continentale, formata da materiali più leggeri, risponde alle spinte dell'altra deformandosi, ripiegandosi e dando luogo a orogenesi.

Crosta continentale con crosta continentale: la densità delle placche fa sì che non vi sia subduzione; i margini si embricano l'uno con l'altro, dando così origine a catene montuose interne ai continenti.

3. Margini trasformati: in alcuni casi il movimento reciproco delle zolle non vede né subduzione né accavallamento, ma scorrimento laterale. Il piano di scorrimento è detto faglia trasforme.

I punti in cui tre placche si incontrano sono detti di giunzione tripla: qui si possono combinare i tre tipi di margini visti.

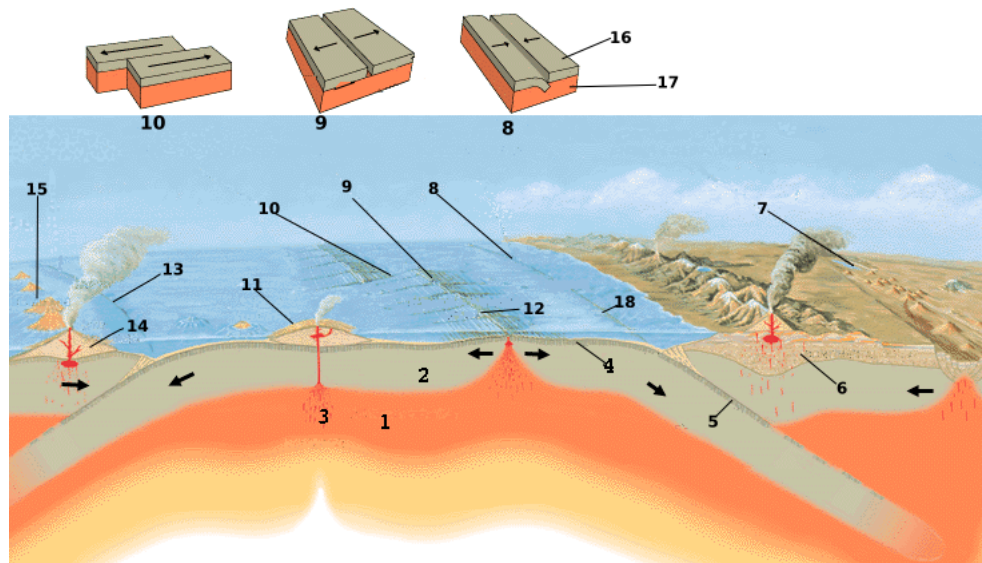


Figura 1.3: Margini di placca

1- Astenosfera; 2- Litosfera; 3- Hot spot; 4- Crosta oceanica; 5- Placca in subduzione; 6- Crosta continentale; 7- Zona di rift continentale; 8- Placca a margine convergente; 9- Placca a margine divergente; 10- Placca a margine trasforme; 11- Vulcano a scudo; 12- Dorsale oceanica; 13- Margine di placca convergente; 14- Strato vulcano; 15- Arco isola; 16- Placca 17- Astenosfera; 18- Fossa. Fonte: USGS <http://pubs.usgs.gov/gip/earthq1/plate.html>

1.3 Il Paleomagnetismo

Grazie allo studio delle proprietà magnetiche di rocce e sedimenti è possibile ottenere informazioni sul campo magnetico terrestre e le sue variazioni, sia in termini di intensità che di direzione.

Viene detto punto di Curie la temperatura alla quale riscaldando un materiale magnetico questo perde le sue proprietà magnetiche.

Una fondamentale proprietà di molte rocce magnetiche è che raffreddandosi sotto il punto di Curie, acquisiscono una magnetizzazione permanente che ha la stessa direzione del campo magnetico in cui erano immerse al momento del raffreddamento.

Quindi lungo i margini divergenti, il magma fuoriuscendo e raffreddandosi, a meno di essere riportato sopra il punto di Curie, assume una magnetizzazione nella direzione del campo magnetico terrestre in cui era immerso in quella data era. Questo

magnetismo fossile, che si conserva anche se il campione di roccia è sottoposto a modesti disturbi meccanici, magnetici e termici, che quindi permane inalterato anche a distanza di decine o centinaia di milioni di anni, è detto paleomagnetismo.

Tenendo conto delle età di una roccia e della sua polarizzazione si è costato che il campo magnetico terrestre inverte la polarità in maniera molto irregolare nel tempo, lunghi periodi caratterizzati dalla medesima polarità vengono detti *epoche magnetiche* (dell'ordine di mezzo milione di anni), brevi periodi (da 10.000 a 100.000 anni) vengono detti *eventi magnetici* (figura 1.4).

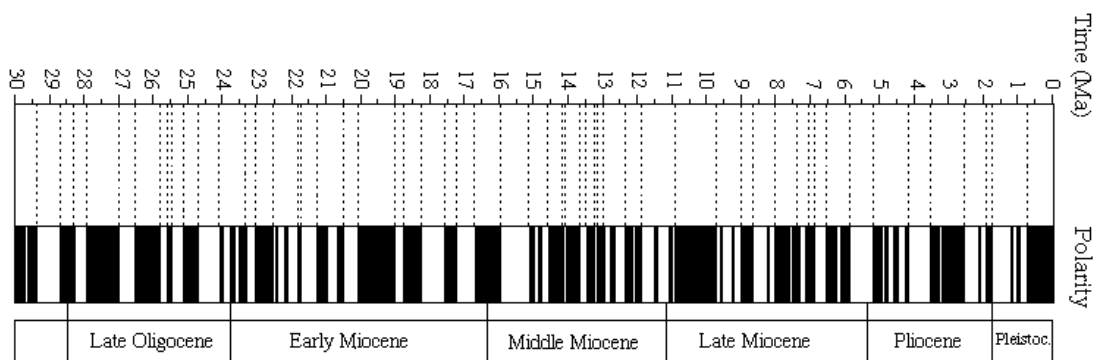


Figura 1.4: Inversioni di polarità negli ultimi 30 milioni di anni.

Fonte: Istituto Nazionale di geofisica e vulcanologia ,

<http://roma2.rm.ingv.it/en/themes/17/magnetostratigraphy>

Immagine estratta e modificata da: Berggren et al., 1995, A revised Cenozoic geochronology and chronostratigraphy.

Attraverso lo studio della successione di inversioni di polarità del campo magnetico terrestre, sui fondali oceanici (figura 1.5), si è notato (F.J. Vine and D.H. Matthews, 1963) che in fasce (dette anomalie magnetiche) parallele e simmetriche rispetto alle dorsali oceaniche si conservava il medesimo orientamento del campo magnetico.

Gli studiosi Vine e Matthews spiegarono così questo fenomeno:

Nuova crosta oceanica si crea dalla solidificazione del magma fuoriuscente lungo le dorsali.

Il magma fuso è a una temperatura superiore al punto di Curie, durante raffreddamento viene raggiunto tale punto, quindi le rocce assumono una magnetizzazione

permanente avente la direzione del campo magnetico terrestre in cui sono immerse.

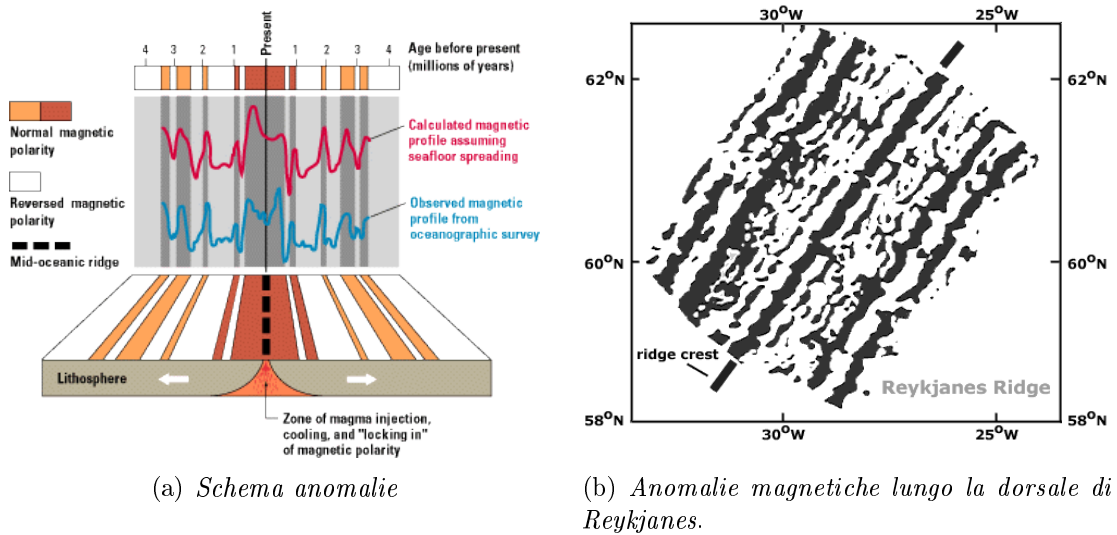


Figura 1.5: Anomalie magnetiche

Fonte:

(a) Heirtzler et al, 1966

(b) <http://pubs.usgs.gov/gip/dynamic/stripes.html>

Il processo di formazione della litosfera è continuo e procede simmetricamente lungo i due lati della dorsale. Attraverso tali osservazioni si evince come si sia formato il particolare pattern magnetico a fasce parallele. Correlando queste inversioni con la scala dei tempi geomagnetici, ottenuti con tecniche di datazione delle rocce, è stato possibile datare anche i fondali oceanici (Heirtzler et al, 1968), si è constatato che non hanno un'età superiore a 200 milioni di anni nelle parti più antiche, in quanto se da un lato si forma nuova crosta litosferica lungo le dorsali, dall'altro nelle zone di subduzione (lungo i margini convergenti) questa viene distrutta, inoltre è stato possibile associare ad ogni anomalia magnetica un'età costruendo così una mappa di isocrone (figura 1.3).

Attraverso svariate tecniche statistiche, che sostanzialmente hanno come obiettivo di trovare lo spostamento che permetta la migliore giustapposizione dei margini delle isocrone situate ad est ed ovest di una dorsale (Hellinger, 1981; Kirkwood

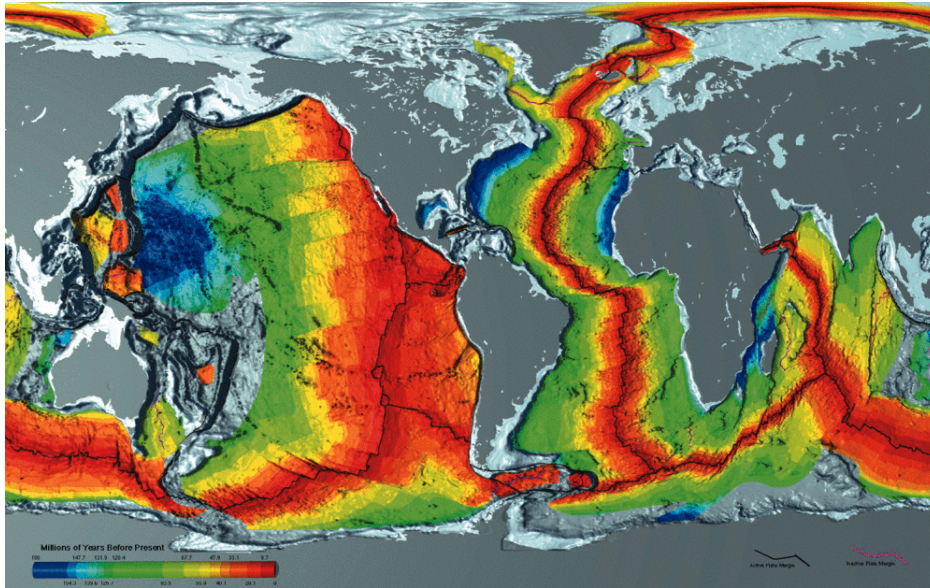


Figura 1.6: Età crosta oceanica

Fonte: <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/image/crustageposter.gif>

et al, 1999), sono stati stimati posizione e spostamenti di varie placche a determinate età.

Riportiamo brevemente, non soffermandoci sugli aspetti tecnici, che verranno approfonditi nei capitoli successivi, l'approccio al problema proposto in Hellinger, 1981.

Le ipotesi essenziali alla formulazione del problema sono approssimare il geoide terrestre con una sfera, e considerare le placche come corpi rigidi, sotto tali ipotesi tutti gli spostamenti di una placca sul terra possono essere descritti da una matrice di rotazione, dipendente da un asse e un angolo di rotazione.

Siamo interessati a stimare la matrice di rotazione A che meglio giustappone due isocrone al lato di una dorsale.

Supponiamo che ogni isocrona sia approssimabile con l'unione di archi di cerchio massimo (circonferenze giacenti sulla sfera con centro passante per l'origine della sfera), tale ipotesi permette di approssimare ogni arco che compone l'isocrona con un segmento.

Siano u_{ij} e v_{ik} i punti che stimano le due isocrone da giustapporre divise in s segmenti, indichiamo $i = 1, \dots, s$ i segmenti che le compongono e con $j = 1, \dots, m_i$ e $k = 1, \dots, n_i$ un punto che stima l' i -esimo segmento.

Siano σ_{ij} e $\tilde{\sigma}_{ik}$ l'incertezza associata alla misurazione della posizione dei punti u_{ij}

e v_{ik} .

Il numero totale di punti è $n = \sum_i (n_i + m_i)$. Ogni segmento può essere individuato dalla sua normale η_i e il segmento coniugato da $A\eta_i$ dove A è la matrice di rotazione che permette di sovrapporre i due segmenti che approssimano una parte di isocrone (figura 1.3).

$u_{ij}^T \eta_i$ e $v_{ik}^T A\eta_i$ rappresentano rispettivamente le distanze dei punti u_{ij} e v_{ik} dai segmenti definiti da η_i ed $A\eta_i$. Hellinger propone di minimizzare la sommatoria di tali distanze, pesate per la incertezza associata ai dati, scegliendo $\hat{\eta}_i$ e \hat{A} tali che minimizzano la funzione:

$$r(A, \eta) = \sum_i \left[\sum_j \sigma_{ij}^{-2} (u_{ij}^T \eta_i)^2 + \sum_k \tilde{\sigma}_{ik}^{-2} (v_{ik}^T A\eta_i)^2 \right]$$

Stimando così gli archi di cerchio massimo individuati da $\hat{\eta}_i$ che uniti formano le isocrone e la matrice di rotazione \hat{A} , che meglio le giustappone, ottenendo così a determinate ere polo e angolo di rotazione che applicate alla placca ne determinano la posizione a tale era.

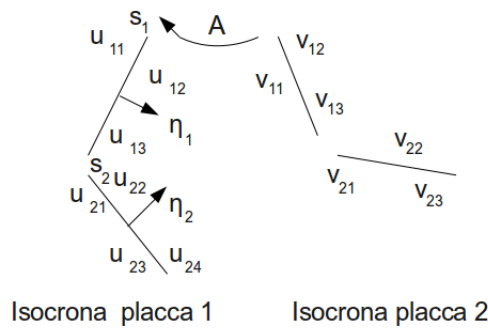


Figura 1.7: Schematizzazione giustapposizione isocrone

Capitolo 2

Geometria e cinematica sferica

In questo capitolo verranno presentati gli strumenti matematici utilizzati per la costruzione dei modelli di cinematica delle placche, e la stima dei loro parametri.

2.1 Geometria sferica

Sia $\mathbf{P}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, $r > 0$ si dice sfera di raggio r e centro \mathbf{P}_0

$$S_{\mathbf{P}_0}^n(r) := \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0\| = r\}$$

definiamo $S^n := S_{\mathbf{0}}^n(1)$.

Sia k un numero intero positivo tale che $1 \leq k \leq n + 1$ si chiama k -sottosfera l'intersezione di S^n con un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} di dimensione $k+1$. Se $k = 1$ tale intersezione è detta cerchio massimo.

Osserviamo che se \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 sono punti su S^n , allora esiste un unico cerchio massimo passante per \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 .

Sia A un sottospazio affine di $(k+1)$ -dimensionale di \mathbb{R}^{n+1} tale che $S^n \cap A \neq \emptyset$, $S^n \cap A$ si chiama k -sfera piccola.

Se $k = 1$ tale intersezione è detta cerchio minore, chiamiamo raggio sferico del cerchio minore la distanza geodetica della proiezione del suo centro sulla sfera (centro sferico del cerchio minore) ad un punto del cerchio minore.

Chiameremo polo nord di S^n il punto $\mathbf{N} = (0, \dots, 0, 1)$, polo sud $\mathbf{S} = (0, \dots, 0, -1)$.

Se $\mathbf{P} \in S^n$, si dirà iperpiano tangente in \mathbf{P} a S^n e si indicherà con $T_{\mathbf{P}}(S^n)$ l'iper-

piano affine passante per \mathbf{P} ed ortogonale a \mathbf{P} .

Siano $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in S^2$, si chiama distanza geodetica tra \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 e si indica con $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, la lunghezza dell'arco di cerchio massimo passante per \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 non maggiore di π .

Se \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 sono diametralmente opposti $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \pi$.

Sfruttando la struttura di \mathbb{R}^3 possiamo scrivere:

$$\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \cos^{-1}(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2) \quad (2.1)$$

È facile dimostrare che l'applicazione: $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è una distanza, ovvero se $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \in S^2$, soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \geq 0$
2. $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = 0 \iff \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$
3. $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \rho(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1)$
4. $\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \leq \rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3) + \rho(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$

Inoltre sia γ una curva parametrizzata su S^2 : $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow S^2$.

La lunghezza di tale curva, indipendentemente dalla parametrizzazione, è data da:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Una geodetica su una sfera è per definizione la curva:

$$g(t) : [a, b] \rightarrow S^2 \quad tc : \quad g(a) = \mathbf{P}_1 \quad g(b) = \mathbf{P}_2, \quad L(g) = \min_{\gamma} \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

È possibile dimostrare che $L(g) = \rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$

In questo studio sarà utile rappresentare la sfera in coordinate geografiche:

Consideriamo la sfera $S^2 \in \mathbb{R}^3$ (figura 2.1) con origine in \mathbf{O} :

si chiama latitudine di $\mathbf{P} \in S^2$ il numero reale $\lambda = \frac{\pi}{2} - (\widehat{\mathbf{ON}, \mathbf{OP}})$, dove $(\widehat{\mathbf{ON}, \mathbf{OP}})$ è l'angolo non orientato, espresso in radianti, individuato dalle semirette \mathbf{ON} e \mathbf{OP} , detto anche colatitudine.

Si dice longitudine di P il numero reale $\varphi \in [-\pi, \pi]$, misura dell'angolo $(\widehat{\mathbf{OA}, \mathbf{OP}'})$,

dove $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$, \mathbf{P}' è la proiezione sul piano xy di \mathbf{P} .

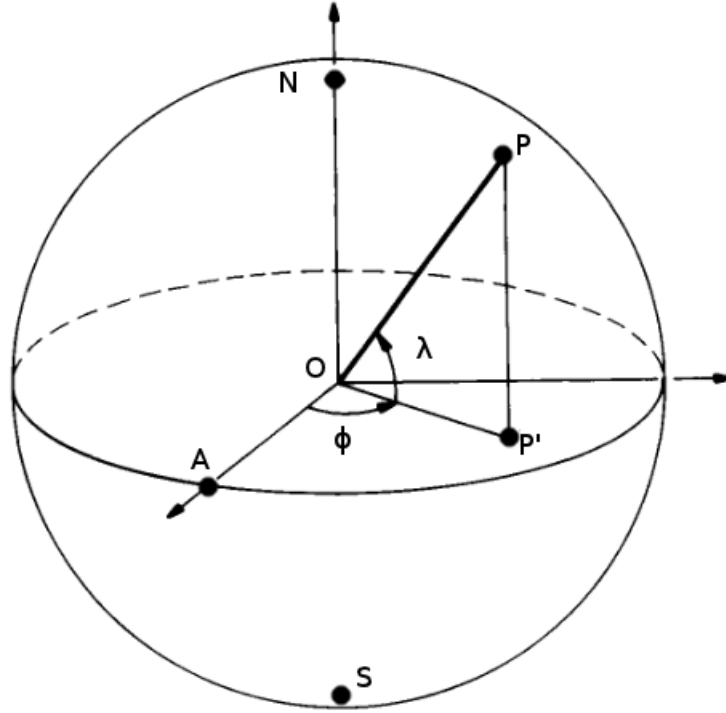


Figura 2.1: Coordinate geografiche

Siano (P_x, P_y, P_z) e (P_λ, P_φ) rispettivamente le coordinate cartesiane e geografiche del punto \mathbf{P} dalla loro definizione segue la relazione:

$$\begin{cases} P_x = \cos(P_\lambda) \cos(P_\varphi) \\ P_y = \cos(P_\lambda) \sin(P_\varphi) \\ P_z = \sin(P_\lambda) \end{cases}$$

I meridiani (rispettivamente i paralleli) di S^2 sono le curve dove la longitudine (rispettivamente latitudine) è costante.

La lunghezza della geodetica che congiunge $\mathbf{Q} = (Q_\lambda, Q_\varphi)$ a $\mathbf{P} = (P_\lambda, P_\varphi)$ su S^2 in coordinate geografiche è data dalla formula:

$$\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \cos^{-1}(\sin Q_\varphi \sin P_\varphi + \cos Q_\varphi \cos P_\varphi \cos(Q_\lambda - P_\lambda)) \quad (2.2)$$

Definiamo triangolo sferico la porzione di superficie della sfera ottenuta intersecando tre cerchi massimi (figura 2.2). I punti \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} sono detti vertici del triangolo sferico, gli archi di cerchio massimo a , b , c sono detti lati del triangolo sferico la cui lunghezza è pari alla distanza geodetica tra i vertici che definiscono il lato, infine gli angoli del triangolo α , β , γ sono gli angoli tra gli archi di cerchi massimo che definiscono il triangolo.

Per un triangolo sferico valgono i seguenti risultati:

- Teorema di Eulero:

$$\begin{cases} \cos(\rho(\mathbf{C}, \mathbf{B})) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha) \\ \cos(\rho(\mathbf{A}, \mathbf{C})) = \cos(a) \cos(c) + \sin(a) \sin(c) \cos(\beta) \\ \cos(\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a) \cos(\gamma) \end{cases}$$

- Teorema dei seni:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}$$

- Teorema di Pitagora sferico:

Supponiamo che l'angolo α sia retto e che la sfera abbia raggio r allora:

$$\cos(a/r) = \cos(b/r) \cos(c/r)$$

Negli algoritmi atti a stimare i parametri del modello cinematico per il moto delle placche sarà spesso utile mappare la superficie sferica S^2 in \mathbb{R}^2 , tale mappatura non si può introdurre senza che vi siano distorsioni degli angoli e delle distanze.

Definiamo in particolare la mappa esponenziale la cui caratteristica è di conservare le distanze geodetiche da un punto (centro della mappa in \mathbb{R}^2) della sfera rispetto agli altri.

Sia $T_{\mathbf{P}}S^2 \in \mathbb{R}^2$ il piano tangente alla superficie sferica nel punto \mathbf{P} .

La mappa esponenziale (figura 2.3) di S^2 con origine \mathbf{P} è un'applicazione invertibile, tranne che nel punto diametralmente opposto a \mathbf{P} .

$$Exp_{\mathbf{P}} : T_{\mathbf{P}}S^2 \rightarrow S^2 \quad \text{tale che} \quad \rho(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \|T_{\mathbf{P}}\mathbf{Q}\| \quad (2.3)$$

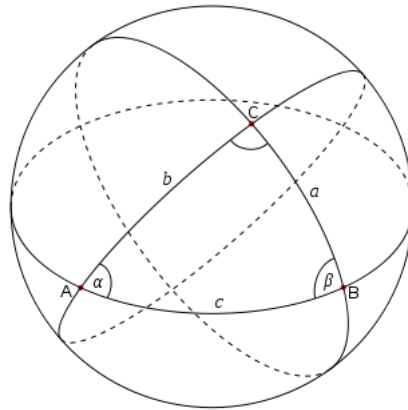


Figura 2.2: Triangolo sferico

dove con $\|T_{\mathbf{P}}\mathbf{Q}\|$ si intende la norma euclidea della proiezione del vettore \mathbf{Q} su $T_{\mathbf{P}}$.

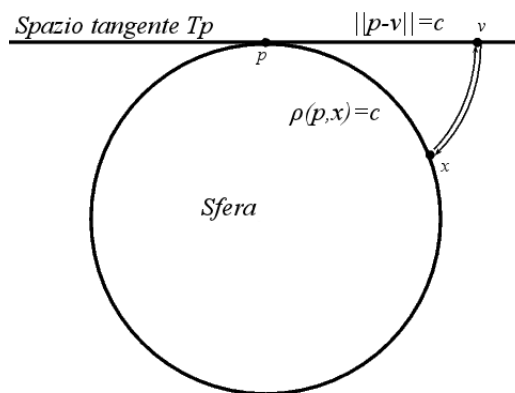


Figura 2.3: Mappa Esponenziale

Senza perdita di generalità sia $\mathbf{P} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z) \in S^2$, $v = (v_1, v_2) \in T_{\mathbf{P}}S^2$ allora:

$$Exp_{\mathbf{P}}(v) = \left(v_1 \frac{\sin \|v\|}{\|v\|}, v_2 \frac{\sin \|v\|}{\|v\|}, \cos \|v\| \right)$$

La trasformazione inversa sarà:

$$\text{Log}_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \left(Q_x \frac{\cos^{-1}(Q_z)}{\sin(\cos^{-1}(Q_z))}, Q_y \frac{\cos^{-1}(Q_z)}{\sin(\cos^{-1}(Q_z))} \right)$$

Per \mathbf{P} generico sarà sufficiente ruotare il sistema di coordinate in modo che l'asse associato al versore $e_3 = (0, 0, 1)$ si trasformi in \mathbf{P} , per poi applicare la mappa.

Sia $R_{\mathbf{P}}$ la matrice di rotazione che porta \mathbf{P} in e_3 allora $\text{Log}_{\mathbf{P}}(x) = \text{Log}_{e_3}(R_{\mathbf{P}}\mathbf{Q})$ e $\text{Exp}_{\mathbf{P}}(v) = R_{\mathbf{P}}\text{Exp}_{e_3}(v)$.

Occorre infine osservare che $\text{Log}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}) = \mathbf{0}$ ed $\text{Log}_{\mathbf{P}}(-\mathbf{P})$ non è definito.

2.2 Cinematica del corpo rigido sulla sfera

Teorema di rotazione di Eulero: Lo spostamento di un corpo rigido su una superficie sferica è equivalente ad una rotazione intorno ad un asse passante per il suo centro.

(Il risultato è dimostrato in: Goldstein, H., 1950. Classical Mechanics. Addison Wesley, Cambridge, MA, 399 pp.)

Consideriamo un punto \mathbf{P} su sfera una sfera di raggio unitario, che possiamo esprimere sia in coordinate cartesiane che geografiche (latitudine e longitudine) secondo le relazioni :

$$\begin{cases} P_x = \cos(P_\lambda) \cos(P_\varphi) \\ P_y = \cos(P_\lambda) \sin(P_\varphi) \\ P_z = \sin(P_\lambda) \end{cases}$$

La trasformazione inversa sarà:

$$\begin{cases} P_\lambda = \text{atan2}(P_z, \sqrt{P_x^2 + P_y^2}) \\ P_\varphi = \text{atan2}(P_y, P_x) \end{cases}$$

Dove la funzione:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & y < 0 \end{cases}$$

Una rotazione è univocamente determinata da un polo (detto polo di Eulero

o rotazione) e da un angolo di rotazione: (\mathbf{E}, ϕ)

Per ruotare il punto \mathbf{P} in \mathbf{P}' è sufficiente:

$\mathbf{P}' = A\mathbf{P}$ dove A è la matrice di rotazione associata a (\mathbf{E}, ϕ)

Al fine di derivare la matrice A iniziamo con lo scomporre la rotazione attorno al polo \mathbf{E} in tre rotazione ausiliarie:

1. una trasformazione di coordinate T che porta il polo di Eulero nel punto $e_3 = (0, 0, 1)$, versore lungo l'asse Z
2. una rotazione R attorno all'asse Z di angolo ϕ
3. una trasformazione T^{-1} che riporta il polo nelle coordinate originali

T è la matrice avente come elementi i coseni direttori tra i sistemi di riferimento (x, y, z) e (x', y', z') , ossia considerando i versori di tali sistemi:

$$\begin{pmatrix} \langle x, x' \rangle & \langle y, x' \rangle & \langle z, x' \rangle \\ \langle x, y' \rangle & \langle y, y' \rangle & \langle z, y' \rangle \\ \langle x, z' \rangle & \langle y, z' \rangle & \langle z, z' \rangle \end{pmatrix}$$

dove $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$, $z = (0, 0, 1)$,

$x' = (-\sin(E_\lambda) \cos(E_\varphi), -\sin(E_\lambda) \sin(E_\varphi), \cos(E_\lambda))$,

$y' = (-\sin(E_\varphi), \cos(E_\varphi), 0)$

$z' = (\cos(E_\lambda) \cos(E_\varphi), \cos(E_\lambda) \sin(E_\varphi), \sin(E_\lambda))$

esplicitando la matrice T otteniamo:

$$\begin{pmatrix} -\sin E_\lambda \cos E_\varphi & -\sin E_\lambda \sin E_\varphi & \cos E_\lambda \\ -\sin E_\varphi & \cos E_\varphi & 0 \\ \cos E_\lambda \cos E_\varphi & \cos E_\lambda \sin E_\varphi & \sin E_\lambda \end{pmatrix}$$

T è una matrice ortogonale ossia $T^T T = I$.

La matrice di rotazione R attorno all'asse Z sarà banalmente:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $A = T^{-1}RT$ e $\mathbf{P} = A^{-1}\mathbf{P}'$.

$$A = \begin{pmatrix} E_x^2(1 - \cos \phi) + \cos \phi & E_x E_y(1 - \cos \phi) - E_z \sin \phi & E_x E_z(1 - \cos \phi) + E_y \sin \phi \\ E_y E_x(1 - \cos \phi) + E_z \sin \phi & E_y^2(1 - \cos \phi) + \cos \phi & E_y E_z(1 - \cos \phi) - E_x \sin \phi \\ E_z E_x(1 - \cos \phi) - E_y \sin \phi & E_z E_y(1 - \cos \phi) + E_x \sin \phi & E_z^2(1 - \cos \phi) + \cos \phi \end{pmatrix}$$

Indichiamo con $R[\mathbf{E}, \phi]$ la rotazione attorno al polo di Eulero.

$R[\mathbf{E}, \phi]$ ha le seguenti proprietà:

- $R[\mathbf{E}, -\phi] = R^{-1}[\mathbf{E}, \phi]$
- siano $E'_\lambda := -E_\lambda$ e $E'_\varphi := E_\varphi + 180^\circ$, (E'_λ, E'_φ) è detto polo inverso e valgono le relazioni:

$$R[\mathbf{E}, \phi] = R[\mathbf{E}', -\phi] = R^{-1}[\mathbf{E}', \phi] = R^{-1}[\mathbf{E}, -\phi]$$

- la somma delle rotazioni $R[\mathbf{E}_1, \phi_1]$ e $R[\mathbf{E}_2, \phi_2]$ è data da:
 $R[\mathbf{E}_1, \phi_1] \circ R[\mathbf{E}_2, \phi_2] = R[\mathbf{E}, \phi]$ inoltre $A = A_1 A_2$, l'operazione in generale non gode della proprietà commutativa.
 Il polo somma \mathbf{E} , e l'angolo somma ϕ delle rotazioni può essere ricavato dagli elementi a_{ij} della matrice A come segue:

$$E_\lambda = \text{atan2} \left(a_{21} - a_{12}, \sqrt{(a_{13} - a_{31})^2 + (a_{32} - a_{23})^2} \right)$$

$$E_\varphi = \text{atan2} (a_{13} - a_{31}, a_{32} - a_{23})$$

$$\phi = \text{atan2} \left(\sqrt{(a_{32} - a_{23})^2 + (a_{21} - a_{12})^2 + (a_{13} - a_{31})^2}, \text{tr}(A) - 1 \right)$$

È possibile definire la rotazione di un insieme di punti che descrivono il contorno di un corpo rigido, di conseguenza anche la rotazione relativa di un corpo rigido rispetto all'altro in un dato intervallo di tempo e sommare queste su vari intervalli

di tempo disgiunti sfruttando le proprietà sopracitate:

Sia $R_{A,B}^{(0,t)}[\mathbf{E}, \phi(t)]$ dove $\phi(t) = \omega t$ la rotazione del corpo A rispetto il corpo B, attorno al polo \mathbf{E} di un angolo $\phi(t)$ con velocità angolare ω nell'intervallo di tempo $(0, t)$ allora:

$$R_{A,B}^{(0,t)}[\mathbf{E}, \omega t] = R_{B,A}^{-1(0,t)}[\mathbf{E}, \omega t] = R_{A,B}^{-1(t,0)}[\mathbf{E}, \omega t]$$

$$R_{A,C}^{(0,t)}[\mathbf{E}, \omega t] = R_{B,C}^{(0,t)}[\mathbf{E}, \omega t] \circ R_{A,B}^{(0,t)}[\mathbf{E}, \omega t]$$

sia $(0 = t_1, t_2, \dots, t_n = t) \Rightarrow$

$$R_{A,B}^{(t_1,t_n)}[\mathbf{E}, \omega t] = R_{A,B}^{(t_1,t_2)}[\mathbf{E}, \omega t_2] \circ R_{A,B}^{(t_2,t_3)}[\mathbf{E}, \omega(t_3 - t_2)] \circ \dots \circ R_{A,B}^{(t_{n-1},t_n)}[\mathbf{E}, \omega(t_n - t_{n-1})]$$

$$R_{A,B}^{(t_k,t_{k+1})} = R_{A,B}^{(t_1,t_{k+1})}[\mathbf{E}, \omega(t_{k+1} - t_1)] \circ R_{A,B}^{-1(t_1,t_k)}[\mathbf{E}, \omega(t_k - t_1)]$$

La composizione di due rotazioni (figura 2.4):

$$R_{A,B}^{(t_1,t_k)}[\mathbf{E}_1, \omega_1(t_k - t_1)] \text{ e } R_{A,B}^{(t_k,t_n)}[\mathbf{E}_2, \omega_2(t_n - t_k)]$$

può essere descritta da un'unica rotazione attraverso il prodotto delle matrici associate A_1 ed A_2 e calcolando dalla matrice così ottenuta il polo \mathbf{E} e angolo ϕ che la composizione delle rotazioni, possiamo poi ottenere la velocità angolare media di A rispetto B nell'intervallo di tempo (t_1, t_n) come segue:

$$\omega_{A,B}^{t_1,t_n} = \frac{\phi}{t_n - t_1}$$

Tale trattazione può essere generalizzata a n rotazioni.

In generale data una rotazione la velocità relativa media di un punto \mathbf{P} del corpo A rispetto al corpo B risulterà:

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{E} \times \mathbf{P}$$

Dove \mathbf{E} e ω rappresentano il polo e la velocità di rotazione di A rispetto B.

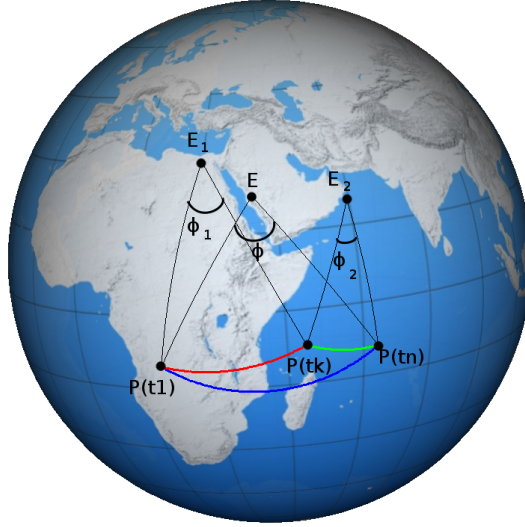


Figura 2.4: Composizione rotazioni

$P(t)$ posizione punto appartenente al corpo A considerando fisso il corpo B al tempo t , \mathbf{E}_1 polo prima rotazione, \mathbf{E}_2 polo seconda rotazione, $\phi_1 = \omega_1(t_k - t_1)$ angolo prima rotazione, $\phi_2 = \omega_2(t_n - t_k)$ angolo seconda rotazione, $\omega_{A,B}^{t_1,t_n} = \phi/(t_n - t_1)$ con \mathbf{E} polo e ϕ angolo composizione delle due rotazioni.

La traiettoria di un punto $\mathbf{P}(t)$ che ruota a velocità angolare costante ω attorno al polo \mathbf{E} descrive un cerchio minore sulla sfera con centro in \mathbf{E} e raggio sferico $r = \rho(\mathbf{E}, \mathbf{P}(t))$ che rimane costante nel tempo.

Considerando il triangolo sferico di vertici \mathbf{N} , \mathbf{E} , $\mathbf{P}(t)$, la lunghezza dell'arco $\mathbf{EP}(t)$ deve essere invariante nel tempo.

Sia $P_\phi(t) = \frac{\pi}{2} - P_\lambda(t)$ la colatitudine del punto $\mathbf{P}(t)$, sfruttando il teorema di eulero e dei seni per il triangolo $\mathbf{NEP}(t)$ (figura 2.5) otteniamo le relazioni:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - P_\lambda(t)\right) = \cos(a) \cos\left(\frac{\pi}{2} - E_\lambda\right) + \sin(a) \sin\left(\frac{\pi}{2} - E_\lambda\right) \cos(\beta(t))$$

$$\sin(a) = \frac{\sin(P_\phi(t) - E_\phi) \sin\left(\frac{\pi}{2} - P_\lambda(t)\right)}{\sin(\beta(t))}$$

Sostituendo la seconda relazione nella prima e derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$v_{lat}(t) = \omega \cos E_\lambda \sin(P_\varphi(t) - E_\varphi)$$

dove $\omega = d\beta(t)/dt = cost$, otteniamo la componente latitudinale della velocità, ripetendo il medesimo ragionamento per $\cos(a)$ otteniamo quella longitudinale che è pari a:

$$v_{lon}(t) = \omega(\cos P_\lambda(t) \sin E_\lambda - \sin P_\lambda(t) \cos P_\lambda(t) \cos(P_\varphi(t) - E_\varphi))$$

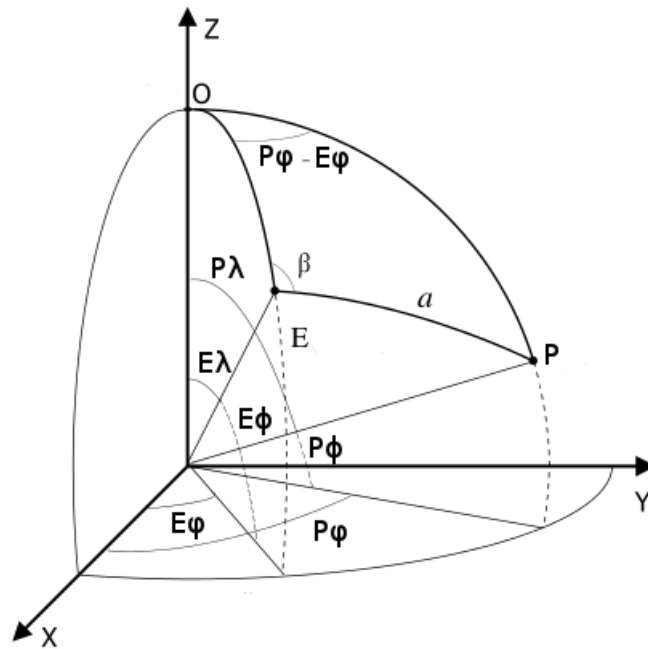


Figura 2.5: Relazioni triangolo sferico

Capitolo 3

Modelli di rotazione di placca sulla sfera

In questo capitolo presenteremo i modelli cinematici proposti in M. Cuffaro et al., (2008) e i dati a nostra disposizione per la stima dei loro parametri.

3.1 Modelli cinematici per le placche a una e due rotazioni

Assumendo che la Terra sia sferica e che le placche siano rigide, possiamo allora studiarne la cinematica grazie ai risultati precedenti.

In prima istanza consideriamo il modello cinematico più semplice ad una rotazione, supponiamo che il moto di una placca rispetto ad un'altra sia completamente descritto dalla rotazione attorno a un polo di Eulero ad una velocità angolare costante.

Per cui dato un polo di rotazione \mathbf{E} ed una velocità costante ω , un generico punto sulla placca A nell'intero intervallo $(0, t)$ subirà una rotazione (figura 3.1) rispetto la placca B data da: $R[\mathbf{E}, \omega t]_{A,B}^{(0,t)}$

In forma matriciale, essendo $A(t)$ la matrice associata alla rotazione $R[\mathbf{E}, \omega t]_{A,B}^{(0,t)}$, otteniamo che un generico punto \mathbf{P} al tempo t avrà posizione $\mathbf{P}(t) = A(t)P(0)$.

Tale polo rimane approssimativamente fisso per periodi geologici relativamente brevi, quindi non è possibile ottenere la posizione di una placca attraverso un

unico polo ed un'unica velocità di rotazione, ma bisogna suddividere tale periodo in intervalli in cui il polo approssimativamente rimane fisso, ottenendo così che per periodi lunghi il moto di un punto di una placca rispetto ad un'altra non segue una traiettoria descritta semplicemente da un cerchio minore, ma è l'unione dei cerchi minori descritti dai vari poli negli intervalli di tempo in cui essi sono fissi.

Anche se tale modello oggi è largamente accettato, l'ipotesi avanzata in M. Cuffaro et al., (2008) è che il moto di tale polo segue una traiettoria vincolata ad essere un arco di cerchio minore sulla sfera, e la traiettoria di un generico punto di una placca rispetto all'altra è un epicicloide sferico.

Un'ipotesi geodinamica (non ancora verificata), a favore di tale modello è che il modello ad una rotazione non può tenere in conto delle disomogeneità del magma di cui è composta la litosfera, che potrebbe spingere una placca oltre che a ruotare attorno ad un polo fisso anche a ruotare su se stessa. Supponiamo che la placca, che ruota attorno al suddetto polo fisso, si trovi al di sopra di una zona della litosfera nella quale il coefficiente di viscosità del magma non è costante ma, ad esempio, in parte una è molto alto e da un'altra basso, allora tale placca tenderà a muoversi più lentamente dove la viscosità del magma è maggiore rispetto dove è minore, ciò causerebbe un'ulteriore rotazione della placca su se stessa (figura 3.2).

Per cui è stato proposto un modello a due poli di rotazione (M. Cuffaro et al., 2008):

Un polo di rotazione fisso con velocità di rotazione costante ed un polo di subrotazione mobile sempre con velocità di rotazione costante vincolato a muoversi un cerchio minore definito dalla prima rotazione.

Siano $(E_\lambda^R, E_\varphi^R)$, ω_R le coordinate del polo e la velocità angolare di rotazione principale, $(E_\lambda^S(t), E_\varphi^S(t))$, ω_S le coordinate del polo e la velocità angolare del polo di subrotazione, associate rispettivamente alle rotazioni $R[\mathbf{E}^R, t\omega_R]_{A,B}^{(0,t)}$, $R[\mathbf{E}(t)^S, t\omega_S]_{A,B}^{(0,t)}$, la rotazione totale della placca A rispetto la placca B al tempo t sarà dunque la composizione di tali rotazioni.

Se $A_R(t)$, $A_S(t)$ sono le matrici associate alla rotazione principale e secondaria un generico punto $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ appartenente alla placca A si muoverà secondo la legge $\mathbf{P}(t) = A_R(t)A_S(t)\mathbf{P}(0)$ rispetto alla placca B.

Il luogo dei punti dei poli di subrotazione deve soddisfare la seguente relazione: $\mathbf{E}^S(t) = A_R(t)\mathbf{E}^S(0)$, ovvero deve essere definito da un arco di cerchio minore con centro nel polo di rotazione principale.

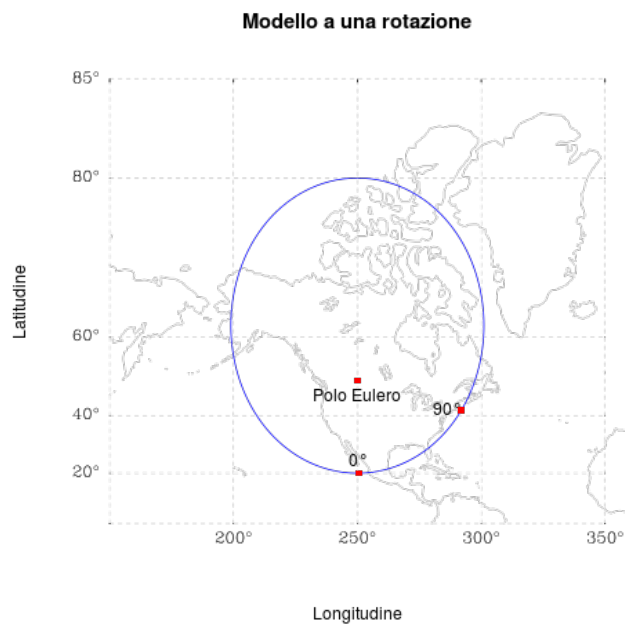
(a) *Proiezione cartografica.*(b) *Sfera terrestre.*

Figura 3.1: Modello a una rotazione
 Rotazione del punto di coordinate geografiche $P = (20, 250)$ rispetto il polo di coordinate $E = (50, 250)$ di un angolo di 90°

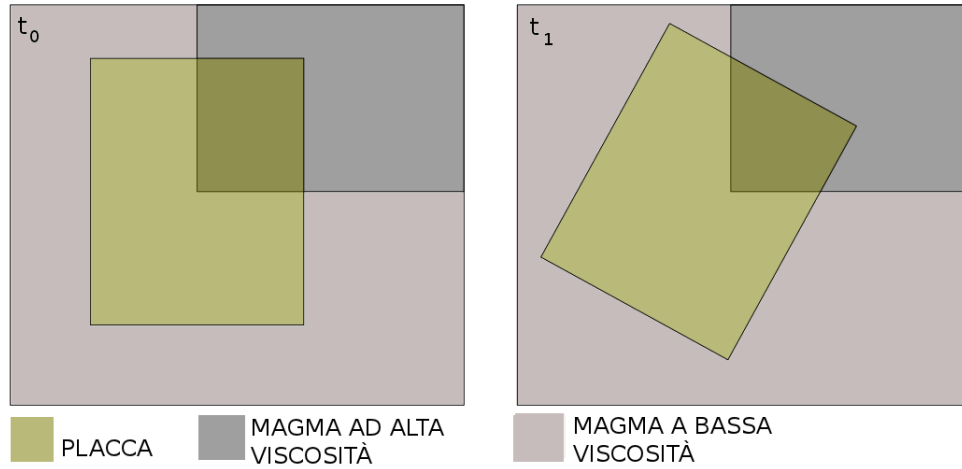


Figura 3.2: Subrotazione Placca

Dal prodotto delle matrici di rotazioni $A_R(t)A_S(t)$ possiamo ottenere le coordinate del polo al variare di t e la velocità di rotazione della composizione delle rotazioni. La traiettoria del polo della composizione delle rotazioni sarà così un cerchio minore, il cui raggio sferico dipenderà da ω_R , ω_S ed $\text{textbf}E^S(t)$, la posizione del suo centro risulterà essere $(E_\lambda^R, E_\varphi^R)$ e un punto su esso si muoverà con velocità ω_S .

Dal un punto di vista geofisico soluzioni interessanti per il problema si hanno per $|\omega_R| \sim |\omega_S|$, in quanto, se $|\omega_R| \ll |\omega_S|$ significherebbe che una placca compiuto una rotazione completa su se stessa nell'arco degli ultimi 250 milioni di anni, il che non è plausibile, se $|\omega_R| \gg |\omega_S|$ potremmo considerare trascurabile la subrotazione e studiare quindi il modello a singola rotazione con un unico polo che rimane fisso nel tempo (figura 3.3).

3.2 Variabili osservabili

L'obiettivo del lavoro è fornire, attraverso strumenti statistici adeguati, una stima dei parametri del modello con subrotazione ossia:

1. Polo di rotazione principale
2. Velocità di rotazione attorno al polo principale
3. Polo di subrotazione
4. Velocità di rotazione attorno al polo di subrotazione

La variabile aleatoria da noi osservabile è la realizzazione del polo ed angolo di rotazione della somma delle due rotazioni ad istanti di tempo noti (espressi in milioni di anni fa).

Per stimare tali parametri sono stati utilizzati i dati estratti da Rosenbaum, G. et al. (2002), che rappresentano i poli e le rotazioni stimate a delle date ere della placca africana, europea e iberica rispetto la placca nordamericana (tabella 7.3).

I dati sono stati raccolti da lavori degli ultimi 20 anni e stimati tramite tecniche di fitting delle isocrone ai lati della dorsale atlantica simili a quella spiegata nel paragrafo 1.3.

Ad ogni polo e angolo di rotazione, che nel modello cinematico con subrotazione rappresentano una stima della posizione dei poli composizione della rotazione con la subrotazione (ovvero il prodotto delle matrici di rotazione e subrotazione), sono associati un angolo e un'età, quindi è possibile ottenere la posizione a tempi discreti delle placche sopracitate rispetto la placca nordamericana, nella seguente maniera:

Scelta l'era a cui vogliamo riportare la placca, applichiamo una rotazione attorno al polo associato a tale era dell'angolo associato a tale era, questa rotazione porterà un punto della placca dalla posizione odierna a quella dell'era scelta.

Riportiamo ad esempio posizione dei poli e della placca europea rispetto la placca nordamericana a fissate ere in figura (3.4).

| Età (MA) | Latitudine (°) | Longitudine (°) | Rotazione (°) | Riferimento |
|---|----------------|-----------------|---------------|--------------------------------------|
| <i>Poli dell'Africa rispetto il Nordamerica</i> | | | | |
| 9.9 | 80.12 | 50.80 | -2.52 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 19.2 | 81.07 | 56.51 | -5.21 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 33.1 | 75.37 | 1.12 | -10.04 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 46.3 | 75.30 | - 3.88 | -15.25 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 52.4 | 78.33 | - 2.64 | -16.91 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 55.9 | 79.68 | -0.46 | -18.16 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 65.6 | 82.90 | 4.94 | -20.76 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 67.7 | 82.51 | -0.63 | -20.96 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 71.1 | 81.35 | -9.15 | -22.87 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 73.6 | 80.76 | -11.76 | -23.91 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 79.1 | 78.30 | -18.35 | -27.06 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 83.0 | 76.55 | -20.73 | -29.60 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 120.2 | 66.09 | -20.18 | -54.45 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 126.0 | 65.97 | -19.43 | -56.63 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 130.2 | 65.95 | -18.50 | -57.40 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 131.1 | 66.14 | -18.72 | -58.03 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 137.9 | 66.24 | -18.33 | -59.71 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 146.7 | 66.24 | -18.33 | -62.14 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 154.0 | 66.70 | -15.85 | -64.90 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 170.0 | 67.02 | -13.17 | -72.10 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 175.0 | 65.97 | -12.76 | -76.44 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| <i>Poli dell'Europa rispetto il Nordamerica</i> | | | | |
| 9.9 | 65.38 | 133.58 | -2.44 | <i>Lawver et al. (1990)</i> |
| 19.2 | 68.92 | 136.74 | -4.97 | <i>Lawver et al. (1990)</i> |
| 33.1 | 65.64 | 136.95 | -7.51 | <i>Lawver et al. (1990)</i> |
| 46.3 | 66.15 | 135.40 | -10.87 | <i>Srivastava and Roest (1996)</i> |
| 52.4 | 63.89 | 139.27 | -12.89 | <i>Srivastava and Roest (1996)</i> |
| 55.9 | 63.14 | 141.66 | -14.22 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 65.6 | 64.84 | 143.96 | -16.95 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 79.1 | 66.17 | 147.74 | -19.00 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 83.0 | 66.54 | 148.91 | -19.70 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 92 | 66.67 | 150.26 | -20.37 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 120.2 | 69.67 | 154.26 | -23.17 | <i>Srivastava et al. (2000)</i> |
| 142.5 | 68.99 | 154.75 | -23.05 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 154.0 | 69.03 | 155.44 | -23.26 | <i>Torsvik et al. (2001)</i> |
| 170 | 69.1 | 156.70 | -23.64 | <i>Royer et al. (1992)</i> |
| 175 | 71.61 | 156.70 | -25.27 | <i>Torsvik et al. (2001)</i> |
| <i>Poli dell'Iberia rispetto il Nordamerica</i> | | | | |
| 9.9 | 65.38 | 133.58 | -2.44 | <i>Lawver et al. (1990)</i> |
| 19.2 | 68.00 | 138.20 | -4.75 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 33.1 | 76.34 | 117.33 | -7.65 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 46.3 | 74.70 | 126.96 | -11.05 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 52.4 | 72.98 | 133.28 | -12.94 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 55.9 | 73.29 | 133.88 | -14.25 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 67.7 | 74.96 | 135.34 | -17.19 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 79.1 | 85.49 | 110.28 | -22.41 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 83.0 | 87.18 | 57.43 | -24.67 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 120.2 | 64.71 | -18.94 | -58.11 | <i>Srivastava et al. (2000)</i> |
| 154.0 | 66.90 | -12.93 | -60.45 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 175 | 65.72 | -12.82 | -66.32 | <i>Srivastava and Verhoef (1992)</i> |

Tabella 3.1: Data-set Rosenbaum, G. et al. (2002)

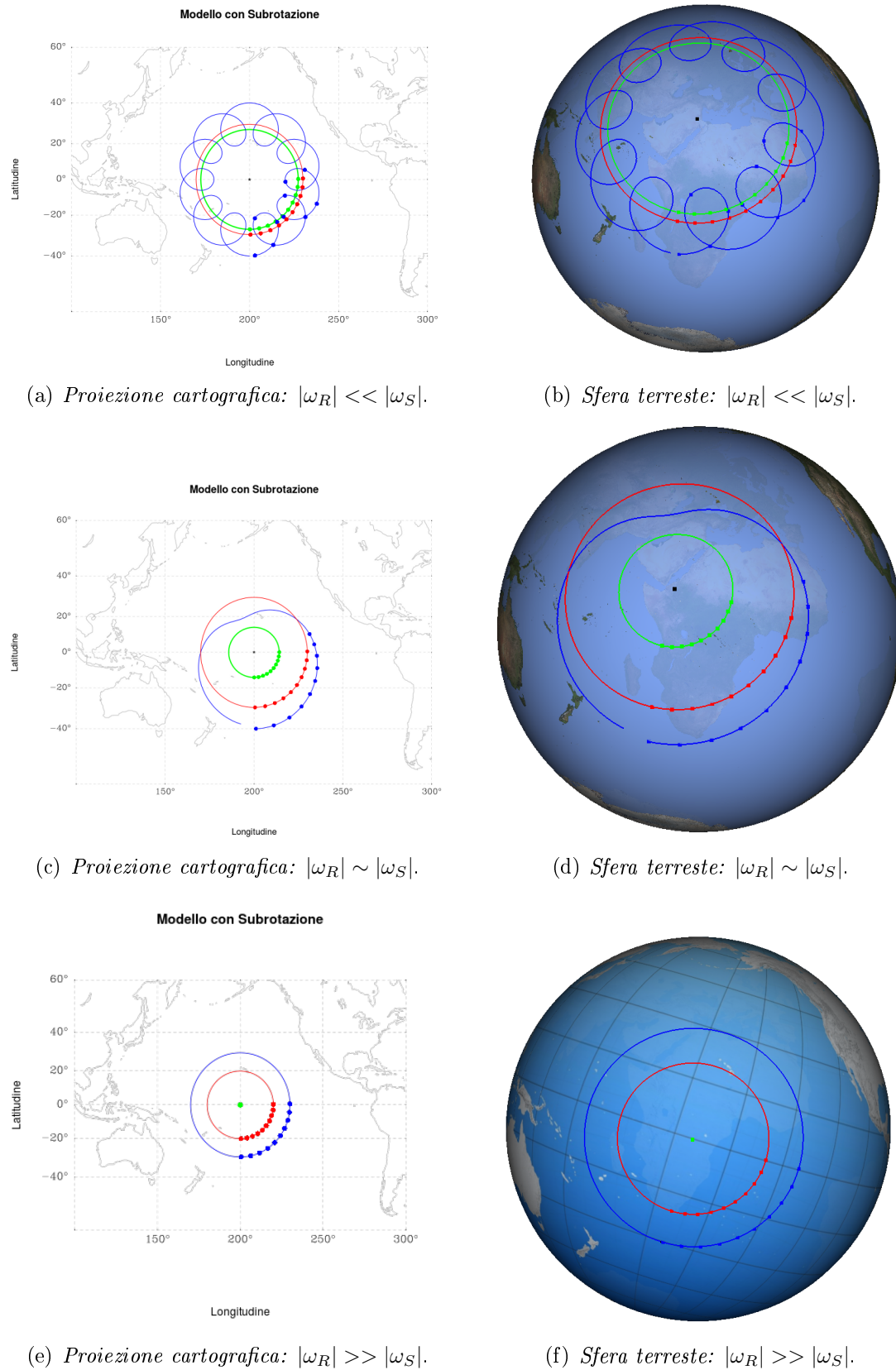


Figura 3.3: Modello con subrotazione
 Nero, polo di rotazione principale - Rosso, traiettoria polo di subrotazione - Blu, traiettoria di un generico punto - Verde - traiettoria del polo somma delle due rotazioni

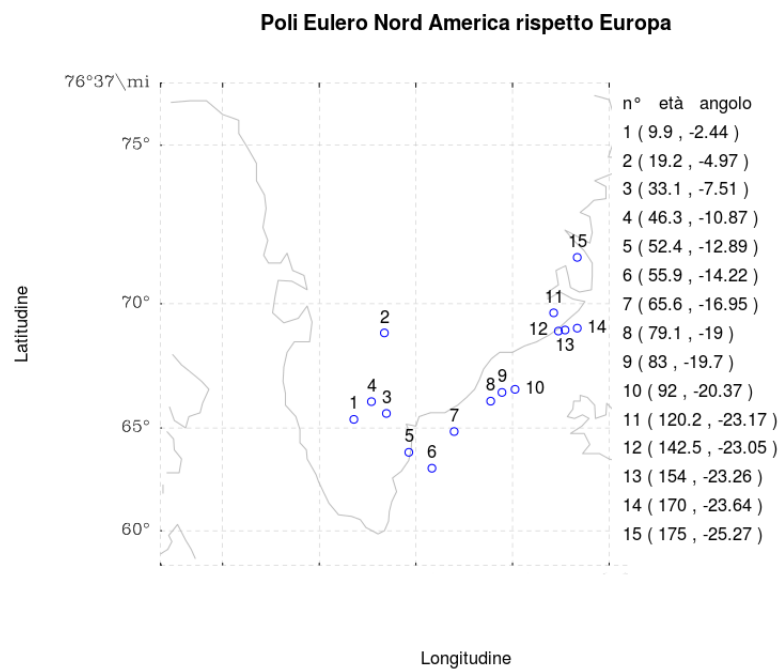


Figura 3.4: Posizione, angolo di rotazione ed età poli di Eulero placca europea

Capitolo 4

Media sferica e Regressione su archi sferici

In questo capitolo svilupperemo i principali strumenti atti a stimare i parametri dei modelli discussi nel Capitolo 3, trattando sia gli aspetti teorici che computazionali e portando alcuni esempi su data-set sintetici.

4.1 Media e Varianza sferica

Consideriamo un insieme \mathbf{X} di n punti $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ appartenenti a S^2 , vogliamo definire il concetto di media su S^2 .

Quindi siamo interessati a cercare un punto che in qualche modo rappresenti il centro dei dati.

Se calcolassimo la media con la definizione classica in \mathbb{R}^3 non è detto che questa appartenga a S^2 quindi sarebbe poco rappresentativa dei dati che sono vincolati ad appartenere appunto ad S^2 .

In letteratura sono proposte principalmente nozioni di media sulla superficie sferica: Media estrinseca e Media intrinseca (o geodetica).

Definiamo la media estrinseca (Fisher et al., 1993), $M_e(\mathbf{X})$ come:

$$\mathbf{M} \in S^2 \quad t.c. : \quad f(\mathbf{M}) = \min_{\mathbf{Q} \in S^2} f(\mathbf{Q}) = \min_{\mathbf{Q} \in S^2} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{Q} - \mathbf{X}_i\|$$

La media così può essere ottenuta calcolando la media aritmetica in \mathbb{R}^3 e proiettarla in S^2 (Srivastava and Klassen, 2002), (figura 4.1).

La media estrinseca non dipende dalla definizione di distanza in S^2 .

Diamo ora la definizione di media sferica intrinseca o media geodetica, detta intrinseca o geodetica appunto perché dipende dalla distanza definita in S^2 .

Sia $M_g(\mathbf{X})$ la media sferica intrinseca degli n punti, è naturale definirla come il punto $\mathbf{M} \in S^2$ che minimizza la somma dei quadrati delle distanze geodetiche dai punti $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ (figura 4.1) ossia:

$$\mathbf{M} \in S^2 \quad t.c. : \quad f(\mathbf{M}) = \min_{\mathbf{Q} \in S^2} f(\mathbf{Q}) = \min_{\mathbf{Q} \in S^2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\mathbf{Q}, \mathbf{X}_i)$$

dove con $\rho(\cdot, \cdot)$ intendiamo la distanza geodetica come definita in (2.2).

Nella trattazione sarà da ora in poi utilizzato il concetto di media geodetica se non altrimenti specificato.

Notiamo anche che il valore $f(\mathbf{M})$ rappresenta la somma degli scarti quadratici delle osservazioni dalla media sferica, ovvero la varianza sferica totale $V_s(\mathbf{X})$.

L'esistenza di una soluzione è sempre garantita, l'unicità sotto alcune ipotesi (S.R. Buss, J.P. Fillmore, 2001), ad esempio un'ipotesi sufficiente è che i dati appartengano ad un insieme $B(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = \{\mathbf{X} \in S^2 : \rho(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq \delta\}$ con $\delta < \pi/2$.

Nel caso in cui non sia garantita l'unicità si parla di insieme delle medie geodetiche.

Un esempio di non unicità è il seguente: supponiamo vi siano 4 punti equidistanti sull'equatore sia polo nord che polo sud minimizzano la somma dei quadrati delle distanze geodetiche dai punti.

Osserviamo che vale la seguente proprietà:

Sia A una matrice di rotazione $\mathbf{X}^R = (A\mathbf{X}_1, \dots, A\mathbf{X}_n)$ allora $M_g(\mathbf{X}^R) = AM_g(\mathbf{X})$.

Operativamente per il calcolo di M_g è proposto in letteratura (S.R. Buss, J.P. Fillmore, 2001) un algoritmo iterativo che semplifica la procedura formale di calcolo, riducendo di molto il costo di computazione, evitando la minimizzazione della funzione $f(\mathbf{Q})$ sfruttando le proprietà della mappa esponenziale (2.3).

Scelto un punto qualsiasi \mathbf{X}_i come centro della mappa logaritmica proietto i dati sul piano tangente alla sfera, calcolata la media euclidea sul piano tangente, utilizzo questa come nuovo centro della mappa logaritmica, ripeto questi passi finché la distanza euclidea tra tale centro e quello della iterazione precedente non è minore di una tolleranza fissata ϵ , il che significa ho scelto come centro della mappa la media aritmetica dei dati, questa minimizza per definizione la somma

delle distanze euclidee dei punti al quadrato, ma per le proprietà della mappa esponenziale queste distanze sono pari a quelle geodetiche. Tale algoritmo ha proprietà di convergenza locale, e velocità di convergenza lineare.

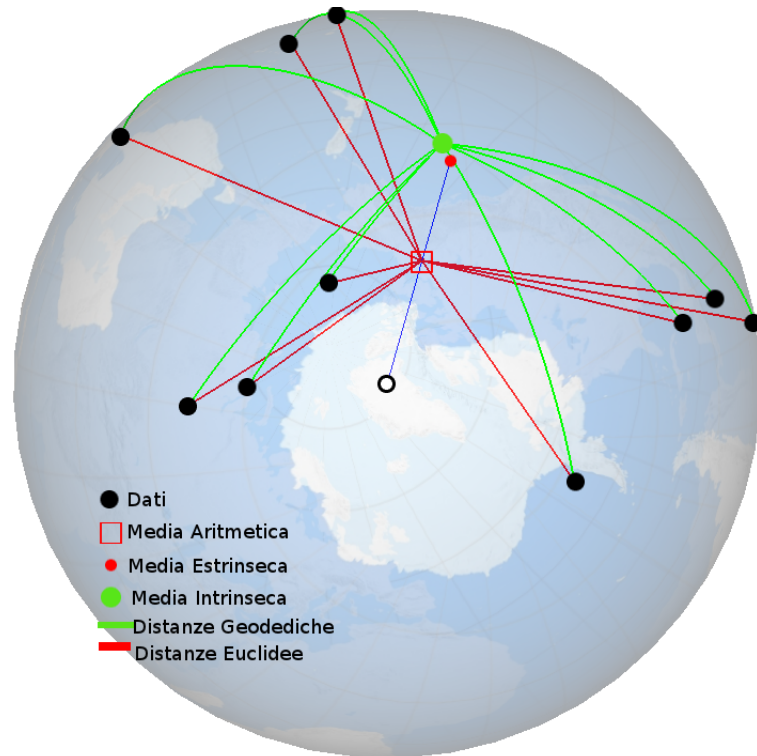


Figura 4.1: Media sferica Estrinsec ed Intrinsec

Algoritmo media geodetica:

Input: $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) \in S^2$

Output: $M_s(\mathbf{X}) \in S^2$

Inizializzazione: $\mathbf{Q} = \mathbf{X}_1$, fisso una tolleranza ϵ

Passo 1: $X^l = \text{Log}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$

Passo 2: $\bar{X}^l = \sum_{i=1}^n X_i^l / n$

Passo 3: $\mathbf{Q}_n = \text{Exp}_{\mathbf{Q}}(\bar{X}^l)$

Passo 4: Se $\|\mathbf{Q}_n - \mathbf{Q}\| < \epsilon$, allora la soluzione è $M_s(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}_n$, altrimenti $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_n$ e ripeti dal **passo 1**

Il concetto di media geodetica precedentemente discusso, nel caso ad esempio i dati siano distribuiti su un cerchio minore, quindi in un sottospazio affine di S^2 , restituisce punto che non è detto appartenere a tale sottospazio.

In questi casi vorremmo definire una media in modo che rappresenti in maniera migliore il concetto di “punto centrale” ai dati quando questi appartengono al sottospazio dei cerchi minori o al sottospazio affine dei cerchi massimi, in altre parole definiamo il concetto di media intrinseca in S^1 (figura 4.2).

Noto il centro del cerchio minore o massimo su cui giacciono le osservazioni, ruotiamo il sistema di riferimento in modo tale centro sia $\mathbf{Z} = (0, 0, 1)$.

Così facendo esprimendo i punti in coordinate geografiche questi avranno la stessa latitudine $X_{\lambda,m}$, e una longitudine $X_{\phi,i}$, definiamo la media intrinseca sul cerchio minore come $(X_{\lambda,m}, X_{\phi,m})$ dove l'angolo $X_{\phi,m}$ è tale che:

$$f(X_{\phi,m}) = \min_{X_{\phi} \in [0, 2\pi)} \sum_{i=1}^n [X_{\phi,i} - X_{\phi}]^2$$

Applichiamo poi la rotazione inversa per riportare il sistema di riferimento nella posizione originale.

Anche in questo caso l'esistenza della soluzione è sempre garantita, l'unicità sotto alcune ipotesi, ad esempio un'ipotesi sufficiente è che i dati siano distribuiti al massimo su un semicerchio.

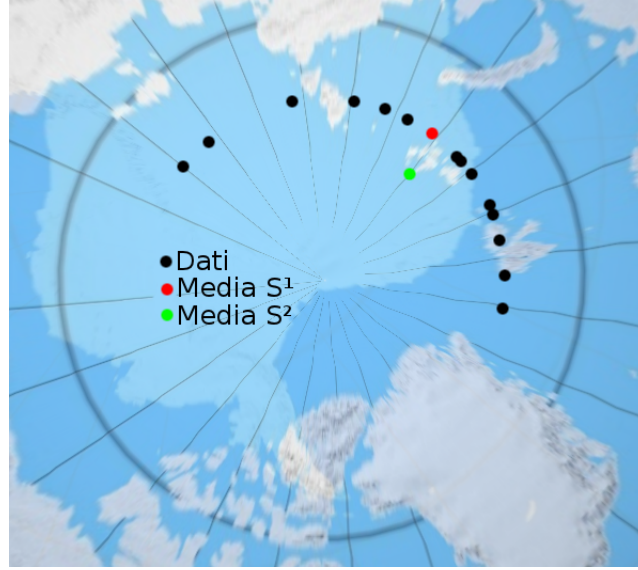
4.2 Regressione su archi sferici

Come spiegato nel paragrafo 3.2 assunto come modello quello con subrotazione, la variabile aleatoria da noi osservabile si distribuisce attorno ad un arco di circonferenza sulla sfera, per cui siamo interessati a stimare i parametri che descrivono tale cerchio.

Consideriamo un set di dati $X = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) \in S^2$ che supponiamo essere distribuiti attorno un arco di cerchio.

Ci proponiamo l'obiettivo di trovare il cerchio che meglio si adatta ai dati in termini di minimizzazione della distanza geodetica dei dati da tale cerchio.

Un cerchio su S^2 può essere parametrizzato dal suo centro sferico, $\mathbf{C} \in S^2$, e dal

Figura 4.2: Media Intrinseca su S^1

raggio sferico $r \in (0, \pi/2]$ e definito come segue:

$$\delta(\mathbf{C}, r) = \{\mathbf{X} \in S^2 \mid \rho(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = r\}$$

Il cerchio che meglio si adatta ai dati soddisferà il seguente problema di ottimizzazione vincolata (figura 4.3):

$$\mathbf{C} \in S^2, r \in (0, \pi) \quad t.c. : f(\mathbf{C}, r) = \min_{\mathbf{P}, l} \sum_{i=1}^n (\rho(\mathbf{P}, \mathbf{X}_i) - l)^2 \quad (4.1)$$

Ovvero è il cerchio che minimizza la somma delle distanze geodetiche al quadrato tra esso stesso ed il set di dati, in quanto, la distanza $|\rho(\mathbf{C}, \mathbf{X}_i) - r|$ altro non rappresenta che la distanza geodetica di \mathbf{X}_i dal cerchio $\delta(\mathbf{C}, r)$ (figura 4.3).

Il valore che assume la funzione obiettivo $f(\mathbf{C}, r)$ rappresenta la somma totale dei residui al quadrato.

Occorre notare che il problema ha sempre più soluzioni, senza perdita di generalità assumeremo $r \leq \pi/2$ infatti se $\delta(\mathbf{C}, r)$ è una soluzione questa può essere anche parametrizzata come $\delta(-\mathbf{C}, \pi - r)$.

Anche in questo caso, come nel caso di media sferica, risolveremo numericamente il problema di minimizzazione, sfruttando le proprietà della mappa esponenziale.

L'algoritmo è presentato in Jung, S. et al. (2011), e così strutturato:

Siano \mathbf{X}_i , $i = 1, \dots, n$ punti di S^2 . Proiettiamo la superficie sferica sullo spazio tangente rispetto un punto qualunque della superficie sferica (ad esempio la media sferica dei punti): $Log_{\mathbf{C}}(\mathbf{X}_i) = \tilde{X}_i$

Sullo spazio tangente viene risolto il problema di minimizzazione non vincolata:

$$\min_V \sum_{i=1}^n (\|\tilde{X}_i^T - V\| - r)^2 \quad (4.2)$$

con

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\tilde{X}_i - V\| \quad (4.3)$$

Il punto V sulla mappa logaritmica viene proiettato sulla mappa esponenziale ottenendo così come cerchio ottimo ($\mathbf{C} = Exp_{\mathbf{C}}(V), r$), \mathbf{C} viene fissato come nuovo centro della mappa logaritmica e viene risolto nuovamente il problema (4.2) finché la distanza dei centri \mathbf{C} tra due iterazioni non è minore di una tolleranza fissata ϵ .

Numericamente il problema (4.2) è molto più facilmente risolvibile rispetto alla forma (4.1).

Si passa infatti da un problema di minimizzazione vincolato in quattro variabili: tre coordinate per il punto \mathbf{C} ed r , a un problema di minimizzazione in 2 variabili: le coordinate del punto V .

Per minimizzare la funzione obiettivo in particolare viene usato l'algoritmo Quasi-Newton BFGS (Nocedal, 1999).

Algoritmo fitting arco sferico:

Input: $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \in S^2$

Output: $\mathbf{C} \in S^2, r \in \mathbb{R}$

Inizializzazione: $\mathbf{C}_0 = \mathbf{X}_1$, tolleranza fissata ϵ , $V = (0, 0)$

Passo 1: $\tilde{X}_i = Log_{\mathbf{C}_k}(\mathbf{X}_i)$, con r come (4.3) risolvere (4.2)

Passo 2: Se $\|V\| < \epsilon$, allora la soluzione è $(\mathbf{C} = \mathbf{C}_k, r)$, altrimenti $\mathbf{C}_{k+1} = Exp_{\mathbf{C}_k}(V)$ e ripeti dal **passo 1**

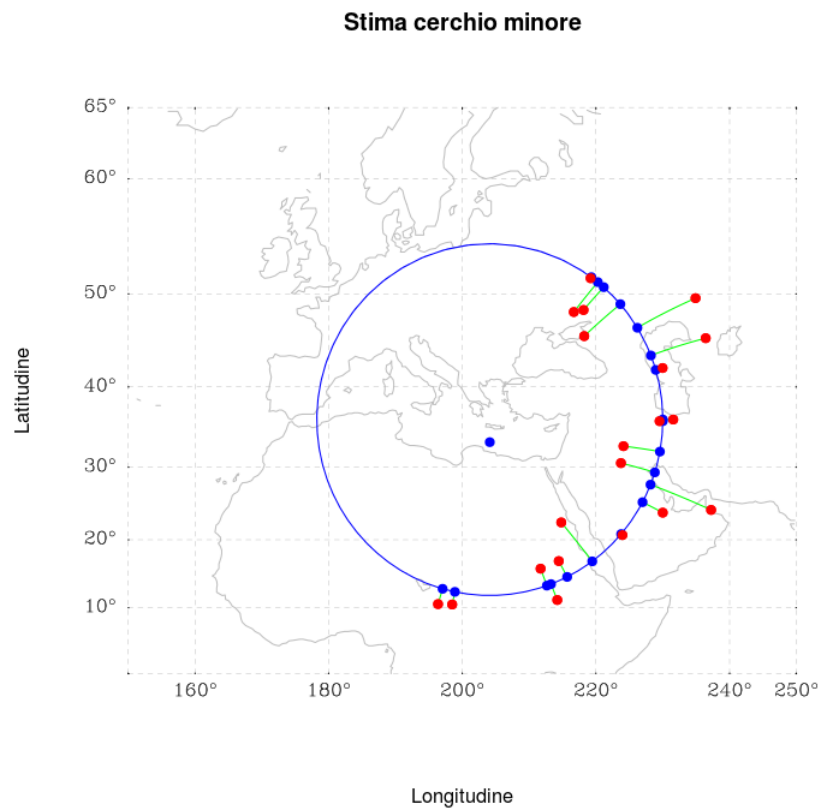


Figura 4.3: Regressione arco sferico.
punti rossi osservazioni, linea blu cerchio minore stimato.

Tale algoritmo risulta molto stabile e con buona velocità di convergenza, ma sperimentalmente in questo lavoro, si è osservato che se si procede alla minimizzazione della funzione obiettivo (4.2) anche nella variabile r il numero di ripetizioni del ciclo nell'algoritmo si riducono drasticamente (figura 4.4), tale riduzione del numero di iterazioni fa sì che sia più conveniente minimizzare poche volte una funzione in 3 variabili, che molte volte una funzione in 2 variabili.

Confrontiamo, a titolo di esempio, i grafici dei tempi di calcolo e del numero delle iterazioni al variare della numerosità dei dati dei due algoritmi. I dati sono stati generati nel modello spiegato nella sezione 3.2.

A numerosità di dati fissata sono stati generati 30 data set sintetici con parametri di raggio e varianza casuali, per ogni set di dati è stato poi risolto il problema con i due algoritmi sopra descritti e per ognuno sono stati calcolati i tempi esecuzione, in fine è stata calcolata la media del tempo di esecuzione per ambedue gli

algoritmo.

Tale procedura è stata ripetuta per numerosità di dati crescente.

Come si evince dalle figure (4.4) e (4.5) l'algoritmo modificato ha notevoli vantaggi in termini di velocità di convergenza.

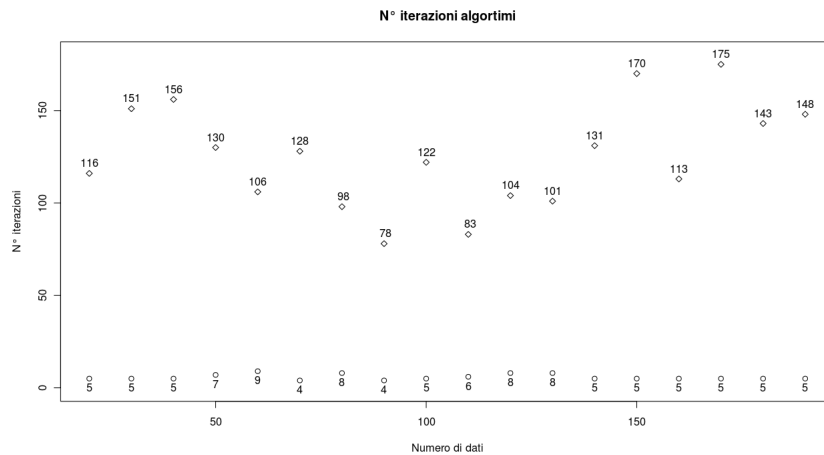


Figura 4.4: Regressione arco sferico - Numero iterazioni algoritmi
◇ algoritmo originale - ○ algoritmo modificato

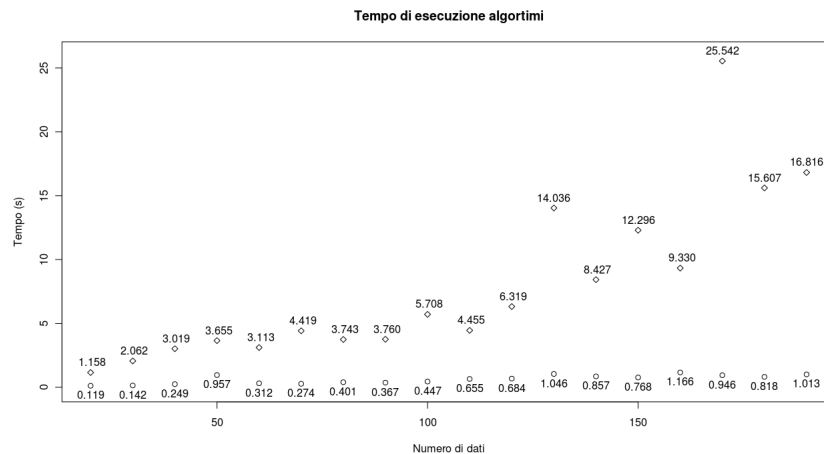
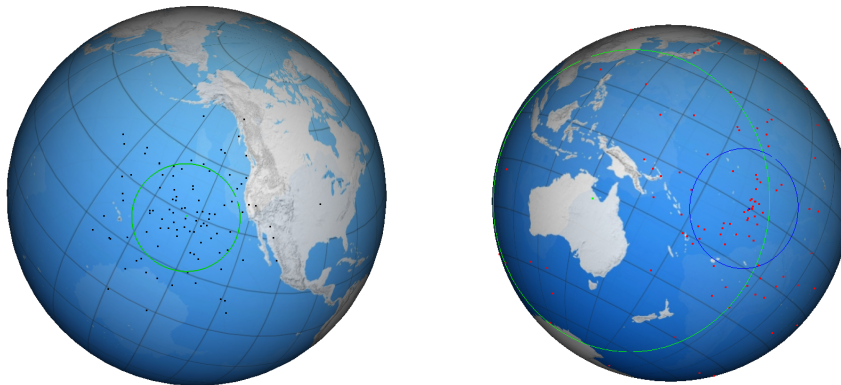


Figura 4.5: Regressione arco sferico - tempi esecuzione
◇ algoritmo originale - ○ algoritmo modificato

Attraverso simulazioni su data set sintetici si è osservato che in due casi l'arco stimato dall'algoritmo non rappresenta in maniera adeguata i dati:

1. Se i dati sono generati non attorno un arco, ma distribuiti attorno ad un polo (figura 4.6 (a))
2. Se i dati sono generati attorno un cerchio con raggio maggiore di zero, ma presentano molta dispersione. (figura 4.6 (b))

Tratteremo nel dettaglio tali casi nel capitolo 5.



(a) *Dati generati da una normale bivariata e poi proiettati sulla sfera attraverso la mappa logaritmica, raggio stimato algoritmo $\hat{r} = 0.24$, centro circa pari all'origine della mappa logaritmica..*

(b) *Dati generati da un arco di cerchio di raggio $r = 0.3$, centro c e varianza $\sigma = 0.6$, raggio stimato $\hat{r} = 0.89$, \hat{c} molto lontano da c , in blu cerchio da cui sono stati generati i dati in verde il cerchio stimato.*

Figura 4.6: Stime cerchio non rappresentative

4.3 Regressione temporale su archi sferici

Dei dati a nostra disposizione oltre alla localizzazione spaziale, conosciamo anche la temporale (tabella 7.3) per cui il passo successivo del nostro lavoro sarà stimare la traiettoria che descrive il polo composizione delle rotazioni, che nel modello a subrotazione assunto, si muoverà di moto circolare uniforme sulla sfera, per cui il cerchio minore da stimare non dovrà semplicemente minimizzare le distanze geodetiche dai punti del set di dati da esso, ma dovrà anche tener conto che ad ogni punto del set di dati come ad ogni punto del cerchio è associato un istante temporale, per cui sarà necessario minimizzare le distanze geodetiche tra i punti del set di dati e punti del cerchio associati al medesimo istante temporale.

Per cui i parametri da stimare in questo caso risultano essere, raggio e centro della traiettoria circolare e velocità angolare.

Formuliamo matematicamente il problema:

Sia $\mathbf{C} = (C_\lambda, C_\varphi)$ il centro del cerchio minore (polo di rotazione principale intorno al quale un punto ruota con velocità ω_R), tale cerchio rappresenta la traiettoria del polo composizione delle rotazioni allora possiamo effettuare un rotazione in modo da portare tale centro nelle coordinate $Z = (0, 0, 1)$, siano $\mathbf{P}(t)$ e $\mathbf{P}(t)^Z$ rispettivamente le coordinate del polo composizione delle rotazioni e del polo composizione che ha subito una rotazione che porta \mathbf{C} in \mathbf{Z} .

Poiché nel modello abbiamo ipotizzato che il polo composizione delle rotazioni $\mathbf{P}(t)^Z$ si muove di moto circolare uniforme su cerchio di raggio r , con velocità angolare ω costante, nel nuovo sistema di riferimento le sue coordinate geografiche risulteranno essere $(P_\lambda^Z, P_\varphi^Z(t)) = (r, \theta_0 + \omega(t - t_0))$, per riportarci al sistema di coordinate originali occorre applicare la rotazione inversa $R^{-1}[\mathbf{C}, (C_\lambda - \pi/2)]$ a $\mathbf{P}^Z(t)$, in forma matriciale otteniamo: $\mathbf{P}(t) = A\mathbf{P}(t)^Z$,

dove

$$\mathbf{P}(t)^Z = \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_y(t) \\ P_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(r) \cos(\theta_0 + \omega(t - t_0)) \\ \cos(r) \sin(\theta_0 + \omega(t - t_0)) \\ \sin(r) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

la A matrice associata a tale rotazione espressa in coordinate geografiche risulta essere:

$$\begin{aligned} A = & \sin(C_\lambda) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + \\ & -\cos(C_\lambda) \begin{bmatrix} 0 & -\sin(C_\lambda) & \cos(C_\lambda) \cos(C_\varphi) \\ \sin(C_\lambda) & 0 & -\cos(C_\lambda) \cos(C_\varphi) \\ -\cos(C_\lambda) \sin(C_\varphi) & -\cos(C_\lambda) \cos(C_\varphi) & 0 \end{bmatrix}^T + \\ & + [1 - \sin(C_\lambda)] \begin{bmatrix} \cos^2(C_\lambda) \cos^2(C_\varphi) & \cos^2(C_\lambda) \cos(C_\varphi) \sin(C_\varphi) & \cos(C_\lambda) \cos(C_\varphi) \sin(C_\lambda) \\ \cos^2(C_\lambda) \cos(C_\varphi) \sin(C_\varphi) & \cos^2(C_\lambda) \sin^2(C_\varphi) & \cos(C_\lambda) \sin(C_\lambda) \sin(C_\varphi) \\ \cos(C_\lambda) \cos(C_\varphi) \sin(C_\lambda) & \cos(C_\lambda) \sin(C_\lambda) \sin(C_\varphi) & \sin^2(C_\lambda) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Siano ora $\tilde{\mathbf{P}}(t_i)$ con $i = 1 \dots n$ le realizzazioni della variabile aleatoria polo composizione delle rotazioni al tempo t_i siamo interessati a stimare i parametri che mi-

minimizzano le distanze geodetiche tra $\tilde{\mathbf{P}}(t_i)$ e $\mathbf{P}(t_i)$ con $i = 1 \dots n$ ovvero sfruttando la relazione (2.1) la funzione obiettivo risulterà essere:

$$f(C_\lambda, C_\varphi, r, \omega, \theta_0) = \min_{C_\lambda, C_\varphi, r, \omega, \theta_0} \sum_{i=1}^n \rho(\tilde{\mathbf{P}}(t_i), \mathbf{P}(t_i)) = \min_{C_\lambda, C_\varphi, r, \omega, \theta_0} \sum_{i=1}^n \cos^{-1}(\tilde{\mathbf{P}}(t_i)^T \cdot \mathbf{P}(t_i)) \quad (4.5)$$

Minimizzando numericamente tale funzione con algoritmo BFGS, che è un algoritmo iterativo di minimizzazione locale, è possibile osservare che la soluzione che si ottiene dipende fortemente dalle condizioni di partenza (“*initial guess*”) imposte per la ricerca del minimo locale. Perciò volendo evitare problemi di convergenza verso minimi locali è necessario scegliere in maniera accurata la *initial guess*.

Procediamo a tal fine nella seguente maniera:

Stimato il cerchio $\delta(\mathbf{C}^*, r^*)$ che minimizza la somma dei quadrati delle distanze geodetiche dei punti $\tilde{\mathbf{P}}(t_i)$, con $i = 1 \dots n$, da esso, ruotiamo per semplicità il suo centro \mathbf{C}^* in $\mathbf{Z} = (0, 0, 1)$, in tal modo il nostro cerchio sarà descritto in coordinate geografiche da una latitudine costante $Q_\lambda = r^*$ e dalla longitudine Q_φ che varia in $(0, 2\pi)$, parametrizziamo Q_φ come prima rispetto al tempo, otteniamo quindi: $Q_\varphi(t) = Q_{\varphi,0} + \omega(t - t_0)$, applichiamo la medesima rotazione del cerchio anche ai dati, dunque note le stime delle coordinate del punto ai tempi t_i , vogliamo stimare $(Q_{\varphi,0}, \omega)$, che si traduce nel minimizzare le distanze geodetiche tra le osservazioni ruotate $\tilde{\mathbf{Q}}(t_i)$ e i punti sul cerchio minore di coordinate $\mathbf{Q}(t_i) = (Q_\lambda, Q_\varphi(t_i))$:

$$\min_{\omega, Q_{\varphi,0}} \sum_{i=1}^n \rho(\tilde{\mathbf{Q}}(t_i), \mathbf{Q}(t_i))^2 \quad (4.6)$$

Applichiamo poi la rotazione inversa per riportare il sistema di riferimento nella posizione originale (figura 4.7).

Abbiamo sostanzialmente sfruttato l’algoritmo per il fitting dell’arco sferico per ottenere una stima del centro e del raggio cerchio in base alla posizione dei dati, dopodiché come secondo passo, utilizzando i tempi associati a tali dati abbiamo stimato i parametri $(\omega, P_{\phi,0})$ che descrivono il moto del punto sul cerchio. In tal modo oltre a ottenere una soluzione approssimata del problema (4.5), ab-

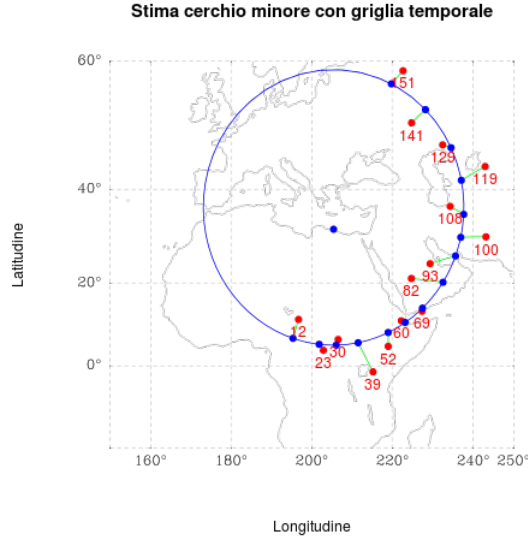


Figura 4.7: Regressione temporale sul cerchio minore.

biamo anche ottenuto un'ottima stima della *initial guess*.

Utilizzando la soluzione del problema (4.6) come condizione di partenza nell'algoritmo BFGS per la ricerca del minimo di (4.5) otteniamo ottime proprietà di convergenza (figura 4.8).

Attraverso degli esperimenti su set di dati sintetici si è osservato che velocità di convergenza dell'algoritmo applicato al problema (4.6) decresce linearmente con la numerosità del campione (figura 4.11 (b)), e in generale i tempi di esecuzione dell'algoritmo sono relativamente lunghi.

Introduciamo un'approssimazione che ci permetterà di risolvere un problema di minimizzazione quadratica al posto del problema (4.6) che è invece un problema non lineare complesso, riducendo così in maniera apprezzabile i tempi di esecuzione dell'algoritmo, senza però incidere sulla precisione della soluzione.

Siano $\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i)$ le proiezioni ortogonali delle osservazioni $\tilde{\mathbf{Q}}(t_i)$ sul cerchio minore $\delta(\mathbf{C}^*, r^*)$ il cui centro è stato ruotato in \mathbf{Z} , $\mathbf{Q}(t) = (Q_\lambda, Q_\varphi(t)) = (r^*, \theta_0 + \omega(t - t_0))$ le coordinate di tale cerchio, sul quale un punto, partendo da (Q_λ, θ_0) , si muove con velocità angolare ω , (figura 4.9)

Risulta ovviamente che i punti $\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i)$ giacciono sul cerchio $\delta(\mathbf{Z}, r^*)$, che definisce un sottoinsieme di S^2 , tale sottoinsieme sarà un cerchio di raggio $\sin(r^*)$ e centro $\mathbf{C}_s = (0, 0, \cos(r^*))$ ovvero un elemento di S^1 .

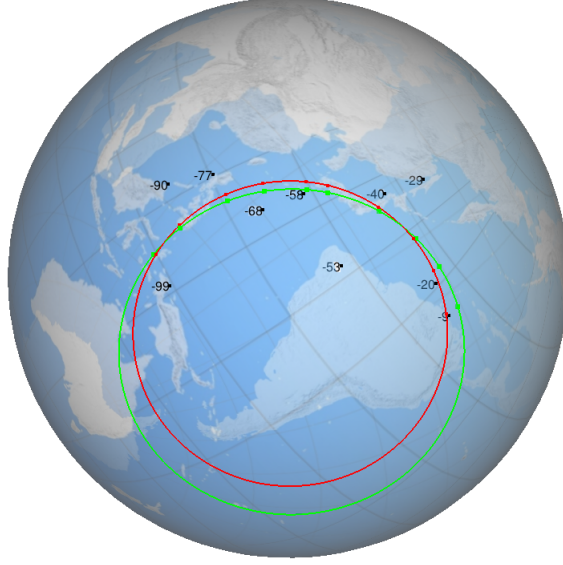


Figura 4.8: Regressione temporale sul cerchio minore e “Initial guess”.

In nero data-set sintetico, in rosso soluzione del problema (4.6) usata come condizione iniziale per la soluzione del problema (4.5) rappresentata in verde.

La distanza geodetica in S^1 tra due punti \mathbf{P} e \mathbf{Q} giacenti su cerchio di raggio r e centro \mathbf{O} è data da $\rho_{S^1}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = r \widehat{\mathbf{POQ}}$, quindi nel caso i punti \mathbf{P} e \mathbf{Q} abbiano la medesima latitudine, questa distanza in coordinate geografiche si può esprimere semplicemente come $\rho_{S^1}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = r |P_\varphi - Q_\varphi|$. L’idea dell’approssimazione sta nel minimizzare al posto della sommatoria da $i = 1 \dots n$ di $\rho_{S^2}(\tilde{\mathbf{Q}}(t_i), \mathbf{Q}(t_i))^2$ la somma delle distanze al quadrato in S^1 tra i punti del cerchio $\mathbf{Q}(t_i)$ e le proiezioni ortogonali $\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i)$ sul cerchio $\delta(\mathbf{Z}, r^*)$ delle osservazioni $\tilde{\mathbf{Q}}(t_i)$, che matematicamente si traduce in:

$$\min_{\omega, \theta_0} \sum_{i=1}^n \rho_{S^1}(\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i), \mathbf{Q}(t_i)) = \min_{\omega, \theta_0} \sum_{i=1}^n \left[\tilde{Q}_\varphi^\perp(t_i) - Q_\varphi(t_i) \right]^2 \quad (4.7)$$

Applichiamo poi, al solito, la rotazione inversa per riportare il sistema di riferimento nella posizione originale.

Analizziamo l’errore che commettiamo minimizzando la distanza in S^1 delle proiezioni dei punti, rispetto la distanza in S^2 dei punti, dal cerchio minore.

L’errore commesso è somma di due cause, la prima è aver utilizzato come dati le proiezioni dei punti sul cerchio minore stimato e non i punti, la seconda aver

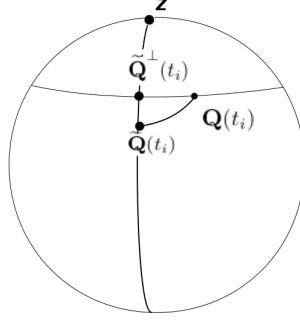


Figura 4.9: Approssimazione per la minimizzazione.

sostituito la distanza in S^2 con quella in S^1 .

Analizziamo la prima causa:

Consideriamo il triangolo sferico formato dai punti $(\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i), \tilde{\mathbf{Q}}(t_i), \mathbf{Q}(t_i))$, la lunghezza dei suoi lati sarà quindi $a = \rho_{S^2}(\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i), \tilde{\mathbf{Q}}(t_i))$, $b = \rho_{S^2}(\tilde{\mathbf{Q}}(t_i), \mathbf{Q}(t_i))$, $c = \rho_{S^2}(\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i), \mathbf{Q}(t_i))$, (figura 4.10) allora nel caso banale $a = 0$ risulterà $b = c$. Dal teorema di Pitagora sferico (Paragrafo 2.1) sappiamo che $\cos(c) = \cos(b)/\cos(a)$, quindi se il cerchio minore stimato si adatta bene ai dati, ossia a è piccolo, risulterà che $\cos(a) \approx 1$ da cui si deduce che $c \approx b$.

Per la seconda causa invece:

Osserviamo che i punti $\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i)$ e $\mathbf{Q}(t_i)$ hanno la stessa latitudine per cui la loro distanza geodetica in S^2 sarà:

$$\begin{aligned} \rho_{S^2}(\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i), \mathbf{Q}(t_i)) &= \cos^{-1}(\sin \tilde{Q}_\varphi^\perp(t_i) \sin Q_\varphi(t_i) + \cos \tilde{Q}_\varphi^\perp(t_i) \cos Q_\varphi(t_i)) = \\ &= \cos^{-1}(\cos(\tilde{Q}_\varphi^\perp(t_i) - Q_\varphi(t_i))) = |\tilde{Q}_\varphi^\perp(t_i) - Q_\varphi(t_i)| \end{aligned}$$

La distanza in S^1 invece:

$$\rho_{S^1}(\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i), \mathbf{Q}(t_i)) = \sin(r^*) |\tilde{Q}_\varphi^\perp(t_i) - Q_\varphi(t_i)|$$

Per cui più il raggio del cerchio minore sul quale vogliamo stimare il moto di punto sarà grande più piccolo sarà l'errore, se $r^* = \pi/2$, ovvero il cerchio è massimale l'errore è nullo, e in generale se la distanza in S^2 tra i punti $\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i)$ e $\mathbf{Q}(t_i)$ sarà piccola approssimando il problema la distanza tra i punti $\tilde{\mathbf{Q}}^\perp(t_i)$ e $\mathbf{Q}(t_i)$ in S^1 sarà dello stesso ordine di grandezza.

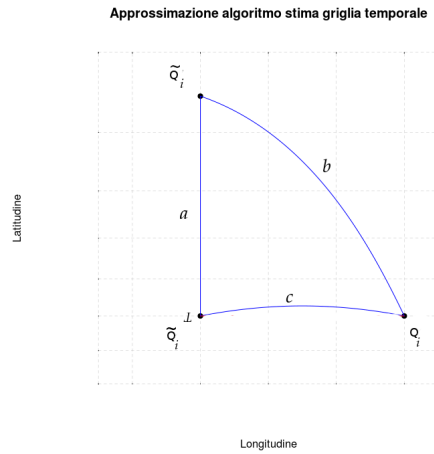
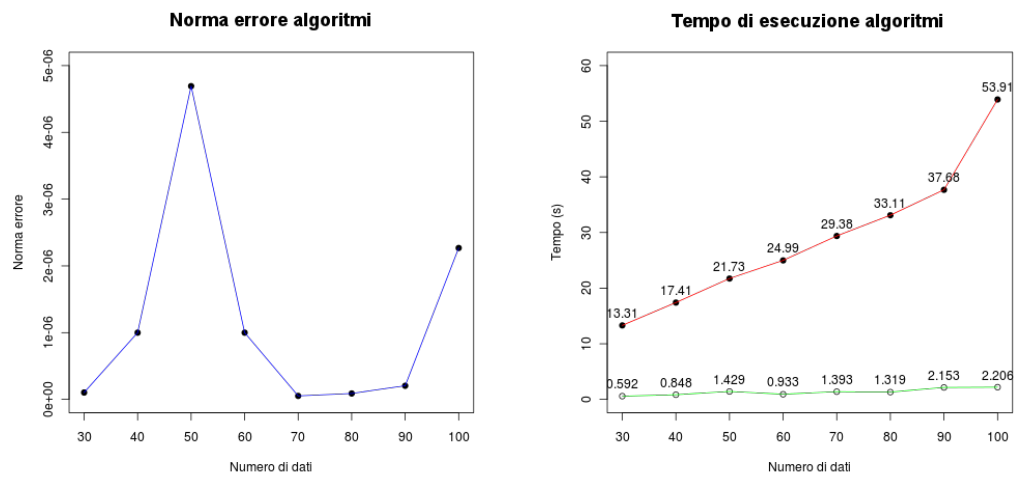


Figura 4.10: Approssimazione algoritmo.

Ciò giustifica l'uso del problema approssimato rispetto al problema non approssimato, sperimentando i dati sintetici attorno a un cerchio di raggio e varianza casuale, si osserva che la differenza tra le soluzioni dei due problemi in norma è dell'ordine di 10^{-6} indipendentemente dal numero di osservazione (figura 4.11 (a)) e che i tempi di esecuzione del problema approssimato hanno sempre una decrescita lineare rispetto al numero dei dati, ma sono molto minori rispetto a quelli del problema non approssimato (figura 4.11 (b)).



(a) Differenza in norma tra le soluzioni dei due algoritmi.

(b) Tempi di esecuzione: linea rossa problema non approssimato, linea verde problema approssimato.

Figura 4.11: Confronto algoritmi

Capitolo 5

Analisi della varianza

In questo capitolo si effettuerà un'analisi della varianza dei modelli di regressione discussi nella sezione precedente ed introdurremo opportuni indici per avere una misura qualitativa di quanto i dati si adattino ai modelli proposti, e sotto alcune ipotesi sulla distribuzione dei dati verrà sviluppato un test parametrico, per una valutazione più precisa su tali indici.

5.1 Indice di buon adattamento al modello di regressione su archi sferici

Vogliamo, come primo obiettivo, definire un indice che ci permetta di valutare in maniera adeguata quanto i dati si adattino al modello con subrotazione. Più nello specifico, vogliamo comparare il modello di subrotazione (regressione temporale su archi sferici) con il modello più semplice a singola rotazione (media sferica), allo scopo di comprendere se la maggiore complessità del primo modello apporta effettivamente una migliore spiegazione della cinematica delle placche terrestri.

Iniziamo con il considerare il problema di regressione su archi sferici senza tenere in considerazione la distribuzione temporale dei dati (Paragrafo 4.2).

Considerato il modello a singola rotazione, dove la media geodetica dei dati rappresenta la posizione del polo di rotazione, un valore che rappresenta in maniera efficace la variabilità totale dei dati, essendo $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ l'insieme dei dati ed \mathbf{M} la loro media geodetica, è sicuramente:

$$V_T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n |\rho(\mathbf{M}, \mathbf{X}_i)|$$

Ossia somma delle distanze geodetiche delle osservazioni dal polo di rotazione rappresentato appunto dalla media geodetica.

I valori che può assumere $V_T(\mathbf{X})$, se esiste almeno una coppia (i, j) tale che $\mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j$, appartengono all'intervallo $(0, \infty)$.

Nella stessa maniera, un valore che rappresenta la variabilità spiegata del modello di regressione dell'arco sferico è dato da:

$$V_S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n |\rho(\delta(\mathbf{C}, r), \mathbf{X}_i)|$$

dove con $\delta(\mathbf{C}, r)$ indichiamo al solito il cerchio minore ottimo ottenuto come soluzione del problema (4.1). Ossia la somma delle distanze geodetiche delle osservazioni dalla traiettoria del polo composizione delle rotazioni. I valori che può assumere $V_S(\mathbf{X})$ sono nell'intervallo $[0, \infty)$, $V_S(\mathbf{X}) = 0$ se e solo se il cerchio stimato interpola i dati.

Una misura quantitativa di qual è la proporzione di variabilità spiegata dal modello rispetto la variabilità totale è dunque:

$$|R| = 1 - \frac{V_S(\mathbf{X})}{V_T(\mathbf{X})}$$

Tale indice assumerà valori compresi nell'intervallo $(0, 1]$, assumerà il valore 1 se $V_S(\mathbf{X}) = 0$ ovvero il cerchio stimato interpola i dati, decrescerà all'aumentare di $V_S(\mathbf{X})$ ossia al peggiorare del fitting del cerchio minore stimato, oppure al diminuire di $V_T(\mathbf{X})$ ossia al diminuire della variabilità totale dei dati.

Quindi valori di $|R|$ vicini all'estremo superiore, faranno presumere che il modello ad arco sferico spiega molta più varianza rispetto al modello di media sferica, valori lontani al contrario ci indurranno a pensare che il modello a media sferica sia sufficiente a descrivere il problema (figura 5.1).

Al fine di fornire indicativamente un limite inferiore al valore di tale indice, quando i dati sono distribuiti attorno ad un polo e non attorno ad cerchio minore, è interessante studiare il comportamento dell'indice $|R|$, nei casi in cui:

1. I dati sono dispersi semplicemente attorno ad un polo (figura 4.6 (a)).

2. La deviazione dei dati dal raggio è mediamente dell'ordine del raggio stesso e quindi una regressione con arco sferico sarebbe poco significativa (figura 4.6 (b)).

A riguardo del caso 2 non approfondiremo l'analisi, in quanto nei casi reali è evidente che i dati non presentano forte dispersione.

Studiamo invece in maniera approfondita il primo caso:

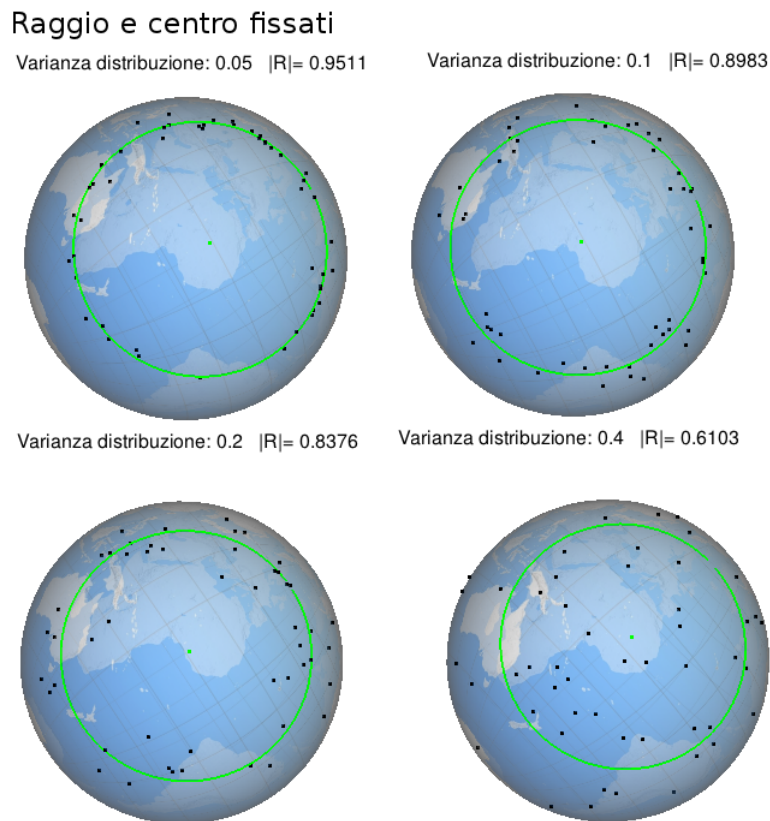


Figura 5.1: Valori di $|R|$ al variare di σ

Se i dati sono semplicemente dispersi attorno ad un polo fisso, supponiamo che le osservazioni provengano da un normale bivariata $N(\mathbf{0}, \sigma \mathbf{I})$ centrata nell'origine della mappa logaritmica $Log_{\mathbf{M}}$ poi proiettata attraverso l'applicazione $Exp_{\mathbf{M}}$ in S^2 , ricordiamo che \mathbf{M} rappresenta il punto di tangenza tra la sfera e la mappa esponenziale.

Innanzitutto osserviamo che, sotto tale ipotesi, sperimentalmente si osserva che la distanza geodetica tra centro \mathbf{C} del cerchio stimato e la media geodetica \mathbf{M} , è decrescente nella numerosità del campione, e crescente in σ (figura 5.2), ciò spinge

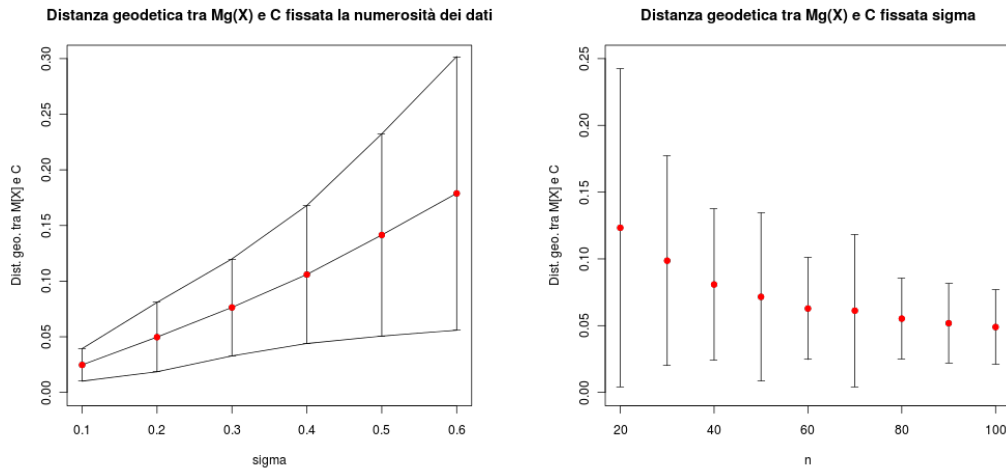
a ipotizzare che, in tale condizione, la media geodetica dei dati sia uno stimatore del centro del cerchio ottimo.

L'esperimento effettuato è il seguente:

Sia $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ ed $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_j)$, per ogni coppia dei parametri (σ_k, n_i) generiamo mille set di dati sotto l'ipotesi che i dati siano distribuiti attorno a un polo e per ogni set di dati stimiamo il centro del cerchio ottimo e la media geodetica dei dati, e calcoliamo la loro distanza geodetica, calcoliamo media e deviazione standard delle mille osservazione ottenute per ogni coppia (figura 5.2).

Supporremo verificata l'ipotesi che la media geodetica stimi il centro cerchio al fine di verificare analiticamente i risultati sperimentali che seguiranno dall'analisi dell'indice, in particolare è sicuramente valida per valori di σ bassi e numerosità del campione n alta.

Se per ipotesi \mathbf{M} è uno stimatore di \mathbf{C} , \mathbf{M} risulta essere il centro della mappa esponenziale nell'algorithm di fitting dell'arco sferico, la somma delle distanze geodetiche dal centro alle osservazioni \mathbf{X}_i proiettate su tale mappa coincide, per le proprietà della mappa logaritmica con $V_T(\mathbf{X})$ e come si deduce dalla (4.3) il raggio del cerchio stimato sarà pari semplicemente a $\frac{V_T(\mathbf{X})}{n}$.



(a) $\rho(\mathbf{C}, M_g(\mathbf{X}))$ al variare di σ , $n = 40$ (b) $\rho(\mathbf{C}, M_g(\mathbf{X}))$ al variare di n , $\sigma = 0.4$.

Figura 5.2: Distanza geodetica della media geodetica dal centro del cerchio stimato

Valutiamo, sotto le ipotesi che i dati siano distribuiti attorno ad un polo e la media geodetica dei dati stimi il centro del cerchio ottimo, la distribuzione e il

valor medio che assume $|R|$ al variare del parametro σ e della numerosità n dei dati attraverso i seguenti esperimenti:

Sia $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$, a numerosità del set di dati n fissata, generiamo mille set di dati per un dato σ_i e calcoliamo il valore di $|R|$, il risultato di tale esperimento ci suggerisce che la media di $|R|$ (figura 5.3) e la distribuzione di $|R|$ (figura 5.4) sono indipendenti dal parametro σ .

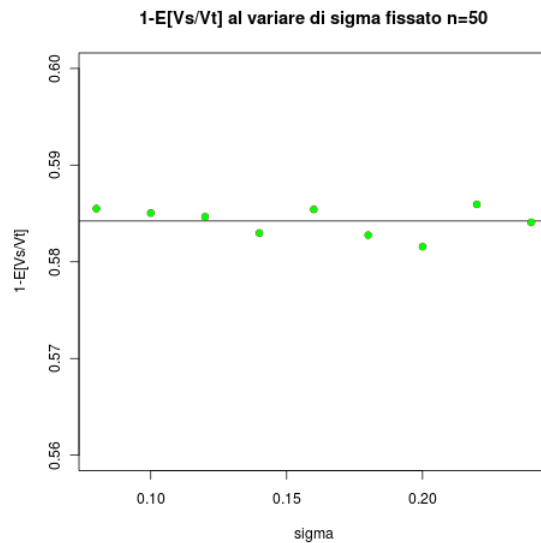
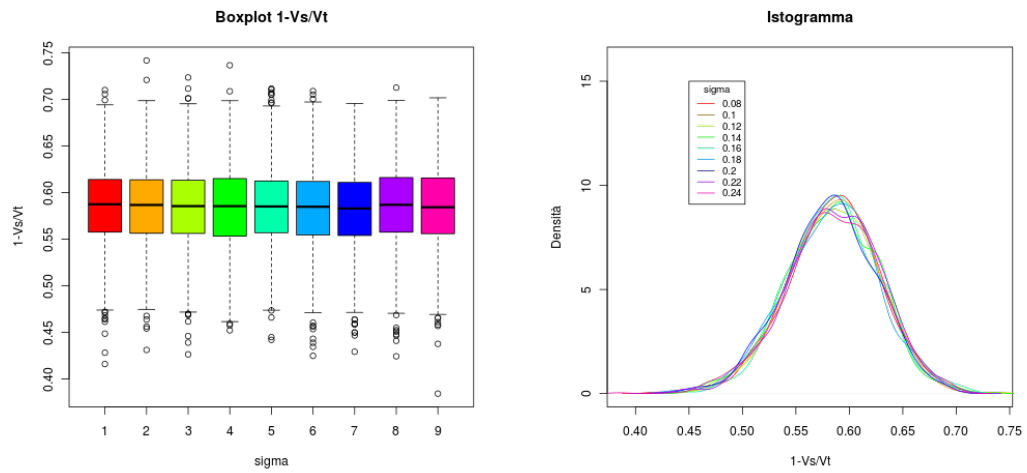


Figura 5.3: Media campionaria di $|R|$ al variare di σ

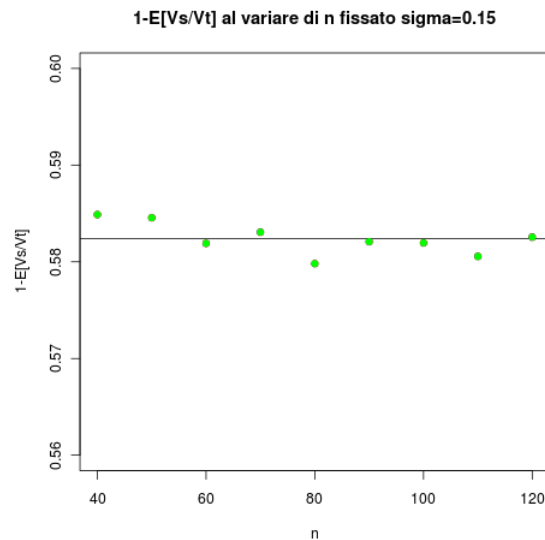
Sperimentalmente scelto $n = 50$, si osserva che la media campionaria che assume $|R|$ su mille osservazioni se generiamo i dati da una normale bivariata, è pari circa a $E[|R|] \approx 0.58$ con una deviazione standard media di $\sqrt{Var[|R|]} \approx 0.03$, dunque se abbiamo un campione di 100 dati e osserviamo una realizzazione di $|R|$ pari a 0.48, questo indurrà a pensare che il cerchio ottimo stimato in realtà non è un modello adatto a descrivere i dati e che il modello a media sferica sia sufficientemente adeguato, al contrario ad esempio un'osservazione $|R| = 0.70$ ci da buone possibilità di supporre che il cerchio ottimo sia un buon modello, tutto questo indipendente dalla varianza della distribuzione da cui sono stati generati i dati.

Siamo interessati ora a studiare la dipendenza di tale indice dalla numerosità dei dati a varianza fissata, ripetiamo l'esperimento precedente questa volta fissando σ e facendo variare la numerosità in $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_l)$.

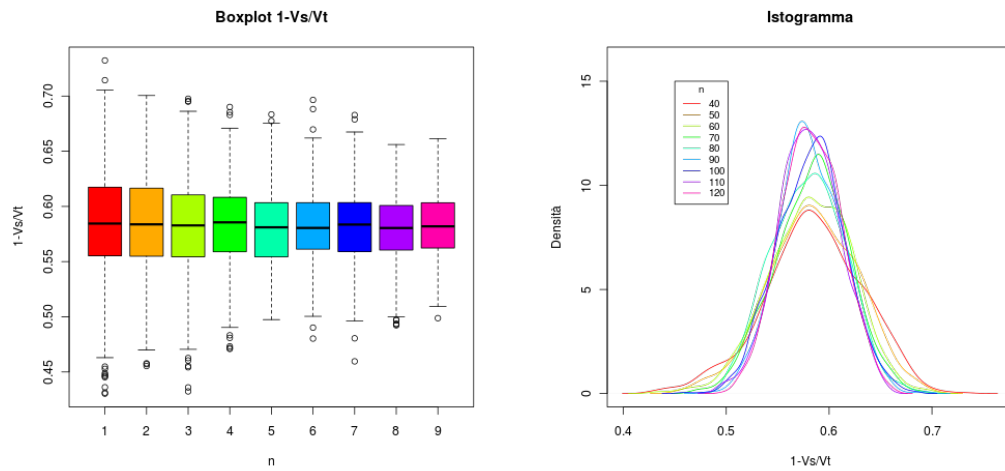
Il risultato di tale esperimento ci suggerisce che la media di $|R|$, rimane costante

(a) *Boxplot di $|R|$.*(b) *Densità stimata dall'istogramma di $|R|$.*Figura 5.4: Distribuzione empirica di $|R|$ al variare di σ

al variare dalla numerosità del campione (figura 5.5), inoltre dalla figura 5.6 si evince la distribuzione di $|R|$ dipende dalla numerosità del campione.

Figura 5.5: Media campionaria di $|R|$ al variare di n

Possiamo dunque affermare che, sotto le ipotesi assunte, la media dell'indice è indipendente dai parametri della distribuzione e dalla numerosità, per la distribuzione occorre invece valutare il risultato ottenuto in relazione alla numerosità del campione.

(a) *Boxplot di $|R|$.*(b) *Densità stimata dall'istogramma di $|R|$.*Figura 5.6: Distribuzione empirica di $|R|$ al variare di n

Al fine di derivare analiticamente i risultati sperimentali ottenuti sulla media e la distribuzione di $|R|$ è conveniente analizzare i singoli termini di cui l'indice è composto.

Definiamo la variabile aleatoria $|R|$ come:

$$|R| = z(X, Y) = 1 - \frac{X}{Y}$$

Dove la v.a. X rappresenta la somma delle distanze di n osservazioni dal cerchio ottimo stimato e Y la somma delle distanze di n osservazioni dalla media geodetica.

Sviluppando in serie di Taylor arrestata al primo ordine la funzione $z(x, y)$ nell'intorno di un punto (α_x, α_y) otteniamo:

$$z(x, y) = z(\alpha_x, \alpha_y) + \frac{\partial}{\partial x} z(\alpha_x, \alpha_y)(x - \alpha_x) + \frac{\partial}{\partial y} z(\alpha_x, \alpha_y)(y - \alpha_y) + o(x^2, y^2)$$

scegliendo $(\alpha_x, \alpha_y) = (E[X], E[Y])$ otteniamo:

$$z(X, Y) = 1 - \frac{E[X]}{E[Y]} + \frac{\partial}{\partial X} z(E[X], E[Y])(X - E[X]) + \frac{\partial}{\partial Y} z(E[X], E[Y])(Y - E[Y]) + o(X^2, Y^2)$$

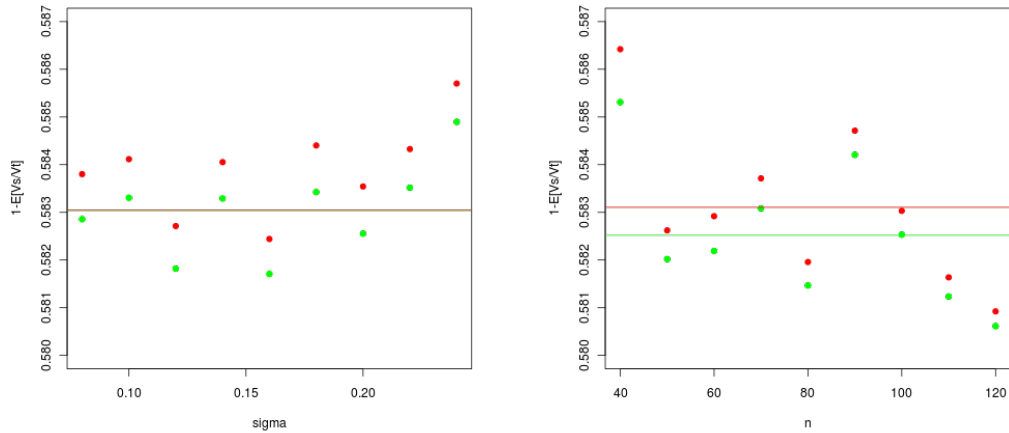
calcolando ora la media della variabile aleatoria $|R| = z(X, Y)$ otteniamo che:

$$E[|R|] = 1 - \frac{E[X]}{E[Y]} + o(X^2, Y^2)$$

Possiamo valutare sperimentalmente l'errore che commettiamo attraverso tale approssimazione (figura 5.7) al variare di σ ed n , da cui si deduce che indipendentemente da σ e n l'errore dovuto all'approssimazione sovrastima il valore medio dell'indice $|R|$ di un valore dell'ordine di 10^{-4} , ciò suggerisce che possiamo considerare valida tale approssimazione.

Con la medesima procedura applicata alla varianza, $VAR[|R|]$, si ottiene:

$$VAR[|R|] \approx \frac{E[X]^2}{E[Y]^2} \left(\frac{VAR[X]}{E[X]^2} - 2 \frac{COV[X, Y]}{E[X]E[Y]} + \frac{VAR[Y]}{E[Y]^2} \right)$$



(a) In rosso $E[|R|]$ approssimato, in verde $E[|R|]$ al variare di σ

(b) In rosso $E[|R|]$ approssimato, in verde $E[|R|]$ al variare di n .

Figura 5.7: Errore di approssimazione di $E[|R|]$

Seguiamo l'analisi studiando le distribuzioni della v.a. X e Y .

Assunto che il centro \mathbf{C} del cerchio minore è stimato dalla media sferica dei dati, proiettando questi su una mappa logaritmica di centro \mathbf{C} otterremo che saranno distribuiti come una normale bivariata $N(\mathbf{0}, \sigma \mathbf{I})$.

Le distanze euclidee delle osservazioni dal centro della mappa logaritmica, corri-

sponderanno alle distanze geodetiche delle osservazioni dal centro stimato, sia R la v.a. distanza di un'osservazione dal centro della mappa logaritmica, la v.a. Y è la somma di n realizzazioni indipendenti della v.a. R .

Vediamo che distribuzione avrà la v.a. R :

possiamo vedere la funzione densità di probabilità di $N(\mathbf{0}, \sigma\mathbf{I})$ come il prodotto delle densità di due variabili normali incorrelate N_1 ed N_2 di media nulla e deviazione standard σ , chiameremo tale densità $f_{N_1N_2}$.

Se (N_1, N_2) rappresentano le coordinate cartesiane di un punto sulla mappa logaritmica noi siamo interessati alla v.a. distanza di tale punto dal centro della mappa, applicando a tali variabili la trasformazione che fornisce le coordinate polari di un punto su tale mappa otteniamo:

$$\begin{cases} R = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \\ \Theta = \tan^{-1}(N_2/N_1) \end{cases}$$

la trasformazione inversa sarà:

$$\begin{cases} N_1 = R \cos(\Theta) \\ N_2 = R \sin(\Theta) \end{cases}$$

Quindi lo Jacobiano della trasformazione sarà:

$$J(R, \Theta) = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & -R \sin(\Theta) \\ \sin(\Theta) & R \cos(\Theta) \end{bmatrix}$$

ed il suo determinante $|J(R, \Theta)| = r > 0$ allora la densità della distribuzione congiunta nelle nuove variabili sarà:

$$f_{R\Theta} = R f_{N_1N_2}(R \cos(\Theta), R \sin(\Theta)) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2(\cos^2(\Theta) + \sin^2(\Theta))}{2\sigma^2}}$$

con $R > 0$, essendo interessati alla densità marginale R , che rappresenta appunto la densità di probabilità della distanza di un punto dal centro della mappa, occorre integrare rispetto a Θ in $[0, 2\pi]$ ottenendo come densità di R la funzione:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

con $r > 0$ ovvero una distribuzione di Rayleigh (figura 5.8) di parametro σ^2 di media $\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$ e varianza $(2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2$, quindi la $E[R]$ dipende linearmente da σ e $VAR[R]$ quadraticamente.

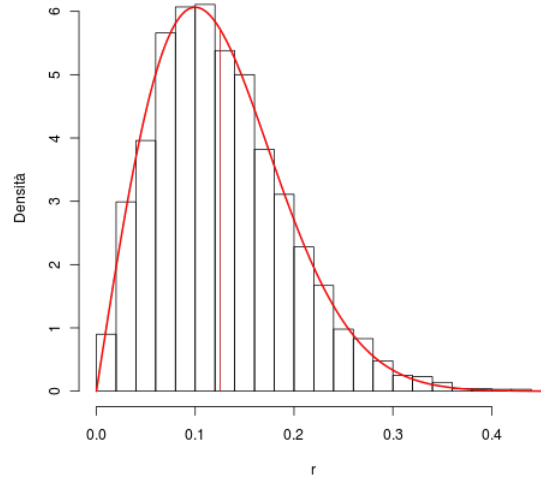


Figura 5.8: Densità di R

Se n è sufficientemente grande, allora la variabile Y sommatrice di n variabili Rayleigh avrà una distribuzione normale di parametri media $nE[R]$ e varianza $nVAR[R]$.

Analizziamo ora la distribuzione della variabile aleatoria X che rappresenta la somma delle distanze di n osservazioni dal cerchio ottimo stimato, ricordando che le distanze geodetiche calcolate dal centro del cerchio ottimo, che abbiamo ipotizzato essere la media geodetica dei dati, alle osservazioni corrisponderanno alla distanze euclidee sulla mappa logaritmica e che il raggio r^* che minimizza la media di X , in questo caso sarà $\frac{V_T(\mathbf{X})}{n}$ ovvero uno stimatore di $\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$. Sia P la v.a. distanza di un'osservazione dal cerchio ottimo proiettato sulla mappa logaritmica allora la sua distribuzione risulterà essere:

$$f_P(r) = \frac{r + r^*}{\sigma^2} e^{-\frac{(r + r^*)^2}{2\sigma^2}} + \mathbf{1}_{[r < r^*]} \left(-\frac{r - r^*}{\sigma^2} e^{-\frac{(r - r^*)^2}{2\sigma^2}} \right)$$

con $r > 0$, procedendo al calcolo della media di tale distribuzione essa risulterà essere (figura 5.9):

$$E[P] = \sqrt{2\pi\sigma^2}(1/2 - \Phi(\frac{r^*}{\sigma}) + \Phi(-\frac{r^*}{\sigma})) + r^*$$

dove $\Phi(\cdot)$ indica la cumulata di una normale standard.

Sostituendo l'espressione esplicita di r^* in $E[P]$ si vede come questa dipenda linearmente da σ . La varianza invece:

$$\begin{aligned} VAR[P] &= E[P^2] - E[P]^2 = \\ &= (r^*)^2 + 2\sqrt{2\pi}r^*\sigma(\Phi(\frac{r^*}{\sigma}) + \Phi(-\frac{r^*}{\sigma}) - 3/2) + 2\sigma^2 - (\sqrt{2\pi\sigma^2}(1/2 - \Phi(\frac{r^*}{\sigma}) + \Phi(-\frac{r^*}{\sigma})) + r^*)^2 = \\ &= 2\sigma^2 + 2\sqrt{2\pi}r^*\sigma(1 + 2\Phi(\frac{r^*}{\sigma})) + 2\sigma^2 - 2\pi\sigma^2(\frac{1}{2} - \Phi(\frac{r^*}{\sigma}) + \Phi(-\frac{r^*}{\sigma}))^2 \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione esplicita di r^* in $VAR[P]$ si vede come questa dipenda quadraticamente da σ .

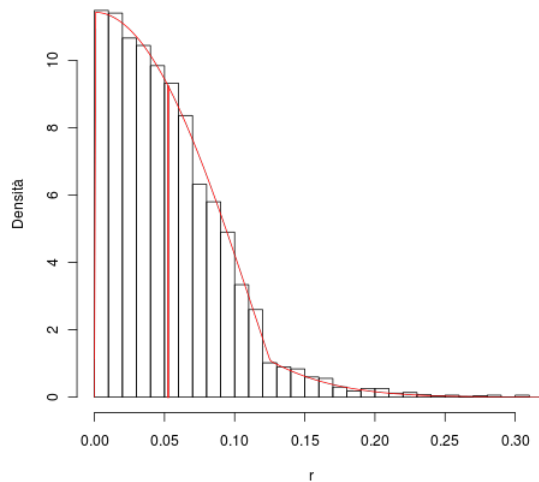


Figura 5.9: Densità di P

Se n è sufficientemente grande, allora la variabile X sommatrice di n variabili P avrà una distribuzione normale di parametri media $nE[P]$ e varianza $nVAR[P]$.

Per cui la distribuzione dell'indice $|R|$ sarà il rapporto di due normali, di media e varianza note, resta da calcolare la correlazione delle variabili X ed Y , per capire, dato che sono normali, se sono o meno indipendenti.

Il calcolo della correlazione è stato effettuato numericamente al variare di n e σ è risultato che tali coefficienti per numerosità del campione elevate sono dell'ordine di 10^{-4} (figura 5.10), possiamo considerare dunque le variabili aleatorie incorrelate e dal fatto che sono normali deriva l'approssimata indipendenza.

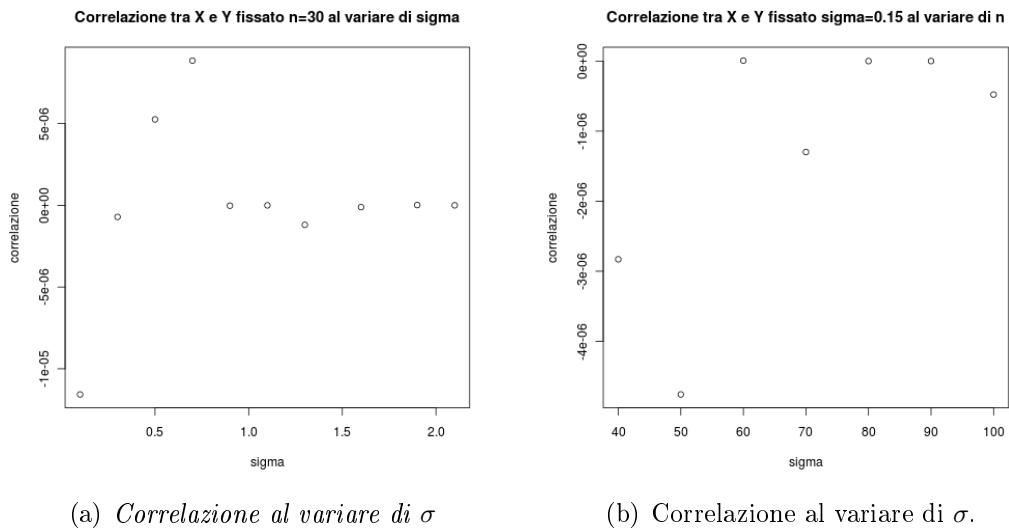


Figura 5.10: Correlazione v.a. X e Y

La media $|R|$ almeno in prima approssimazione è pari a $nE[P]/nE[R]$, osserviamo che calcolando l'espressione esplicita di tale rapporto otteniamo:

$$\begin{aligned}
 nE[P]/nE[R] &= 1 - \frac{n(\sqrt{2\pi\sigma^2}(1/2 - \Phi(\frac{\sqrt{\pi\sigma^2/2}}{\sigma}) + \Phi(-\frac{\sqrt{\pi\sigma^2/2}}{\sigma})) + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}})}{n\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}} = \\
 &= 1 - 2(1 - \Phi(\sqrt{\pi/2}) + \Phi(-\sqrt{\pi/2})) \approx 0.5798172
 \end{aligned}$$

Come ci aspettavamo dai risultati sperimentali tale valore è almeno in prima approssimazione indipendente da σ ed n .

La varianza in prima approssimazione, considerando trascurabile il termine di covarianza e sostituendo nella sua espressione i risultati precedentemente ottenuti, avrà forma:

$$VAR[|R|] \approx \frac{E[X]^2}{E[Y]^2} \left(\frac{VAR[X]}{E[X]^2} + \frac{VAR[Y]}{E[Y]^2} \right) \approx 0.1449274 \frac{1}{n}$$

ovvero indipendente da σ e decrescente in n come ci aspettavamo dal risultato sulla sua distribuzione empirica (figure 5.4 e 5.6).

Assumendo l'indipendenza delle variabili X e Y è noto in letteratura che il rapporto di due normali standard indipendenti si distribuisce come una variabile aleatoria T-student di parametro 1, per cui normalizzando tali variabili possiamo effettuare un test di ipotesi sull'indice $|R|$ al fine di valutare se i dati sono effettivamente distribuiti attorno ad un polo come una normale bivariata o hanno una distribuzione differente.

I risultati di inferenza statistica ottenuti sull'indice dipendono dall'ipotesi che la numerosità del campione sia grande, abbiamo sfruttato il teorema centrale del limite e la consistenza degli stimatori, tuttavia nei casi reali la numerosità dei campioni è molto bassa, per cui tali test pur essendo un valido strumento nel caso di numerosità alta del campione, non si prestano alla applicazione nel nostro caso, dove le numerosità dei campioni oscillano tra le dodici e le ventidue osservazioni, ed ogni osservazione è legata ad un'inversione di polarità del campo magnetico terrestre, che avviene in maniera caotica e comunque con intervalli dell'ordine dei milioni di anni.

A tale scopo verranno presentati nel capitolo 6 ulteriori tecniche che meglio si adattano al caso in esame.

In tale digressione abbiamo trascurato la variabile di localizzazione temporale del dato, in quanto volendo cogliere attraverso l'indice $|R|$ il carattere "i dati sono generati attorno ad un polo" la loro distribuzione temporale non è influente. Nel caso il valore dell'indice $|R|$ ci suggerisce che i dati sono distribuiti attorno ad un arco sferico, diventa necessario indagare anche sulla loro localizzazione

temporale, allo scopo di comprendere se il polo composizione delle rotazioni effettivamente si muove sul cerchio stimato di moto circolare uniforme, e non in maniera casuale o con altri tipi di moto.

A tal fine proponiamo il seguente indice:

$$|R_t| = \frac{\sum_{i=1}^n |\rho(\mathbf{Q}(t_i), \mathbf{X}(t_i))|}{\sum_{i=1}^n |\rho(\mathbf{M}, \mathbf{X}(t_i))|}$$

dove al solito \mathbf{M} rappresenta la media sferica dei dati, $\mathbf{X}(t_i)$ l'osservazione della composizione dei poli al tempo t_i e $\mathbf{Q}(t_i)$ la posizione al tempo t_i del cerchio stimato dall'algoritmo di regressione temporale di arco sferico presentato nel capitolo 4.

Osserviamo che tale indice perde la proprietà di appartenere all'intervallo $(0, 1]$ Qualitativamente se tale indice è vicino al valore dell'indice $|R|$ il moto del punto sarà circolare uniforme altrimenti sarà di un altro tipo.

Capitolo 6

Test non parametrici

In questo capitolo svincolandoci dalle ipotesi fatte nel capitolo precedente, che per quanto riguarda l'applicazione al caso reale in esame non sono verificate, poiché le numerosità dei campioni sono basse ed è difficile supporre una distribuzione per i dati, svilupperemo un test non parametrico di permutazione in maniera da dare indicazioni più affidabili rispetto al modello cinematico da utilizzare per la descrizione della cinematica delle placche.

6.1 Test di permutazione

Nel capitolo precedente è stato presentato un test parametrico, che nel caso di numerosità del campione sufficientemente elevate, ci ha permesso di distinguere, attraverso la statistica $|R|$, quando un campione di dati è distribuito attorno ad un polo o meno.

Seguendo questa strada, si è reso necessario supporre una distribuzione normale bivariata dei dati sotto l'ipotesi che essi siano sparsi simmetricamente attorno ad un polo e comunque per numerosità basse del campione non è stato possibile ottenere un test, ma solo la distribuzione empirica della statistica $|R|$ sotto tali ipotesi.

In questo capitolo presenteremo un test non parametrico di permutazione, che ci permetterà di svincolarci sulle ipotesi fatte sulla distribuzione dei dati.

L'idea alla base di tale test è la seguente: se i dati sono distribuiti simmetricamente attorno alla loro media geodetica, effettuando delle opportune trasformazioni di

simmetria (ovvero trasformazioni dei dati che lascino la funzione di verosimiglianza invariata benché incognita), ovvero ribaltando alcuni dati casualmente rispetto la media geodetica, otterremo un campione “equiprobabile” e la funzione di verosimiglianza rimarrà invariata, quindi il valore di $|R|$ del data set non permutato dovrebbe assumere valori simili per i vari set di dati permutati, al contrario se di dati sono distribuiti attorno ad un arco sferico, la media geodetica perde la proprietà di rappresentare il centro di simmetria del set di dati, che viene invece assunto dal centro del cerchio da cui i dati sono generati, per cui permutando casualmente questi dati rispetto la media geodetica vanno a perdersi le proprietà di forma del set di dati e i valori della statistica test $|R|$ dei set di dati permutati dovrebbero essere minori rispetto il valore di tale statistica calcolato con il set di dati non permutato.

Formuliamo in maniera più precisa tale concetto: fissiamo quindi come ipotesi nulla che i dati siano distribuiti simmetricamente attorno ad un polo e come alternativa che non lo siano.

I dati distribuiti sotto l'ipotesi nulla presentano una simmetria centrale alla media geodetica della distribuzione, ovvero se f_P è la funzione densità di probabilità della v.a. polo di composizione delle rotazioni, P , ed \mathbf{M} la sua media geodetica allora $f_P(\mathbf{M} - \mathbf{X}) = f_P(\mathbf{M} + \mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X}$.

Possiamo supporre che date n realizzazioni indipendenti della v.a. P , ribaltando casualmente alcune di esse rispetto la loro media geodetica stimata $\widehat{\mathbf{M}}$, queste risulteranno sempre essere realizzazioni indipendenti della medesima v.a. P .

Vediamo in figura 6.1 il risultato di 8 delle 2^n possibili permutazioni, di un set di dati di numerosità $n = 25$, rispetto la media geodetica di tali dati, vediamo che qualitativamente tali dati hanno distribuzioni simili, al contrario permutando dati distribuiti attorno ad un arco sferico rispetto la media geodetica questi perderanno la loro struttura geometrica (figura 6.2).

Scegliamo come statistica test, per valutare le proprietà di forma della distribuzione dei dati, al solito $|R|$ che è in grado di catturare eventuali deviazioni dall'ipotesi nulla della distribuzione dei dati. Ricordiamo che valori vicini ad uno di tale indice suggeriscono che i dati sono concentrati attorno ad un arco sferico, valori bassi che la loro distribuzione è concentrata attorno ad un punto. Sia \mathbf{X} un campione di n dati e siano indicate con \mathbf{X}^Δ le 2^n possibili permutazioni, indichiamo con $|R|^o = |R|(\mathbf{X})$ il valore della statistica test per il campione originale e con

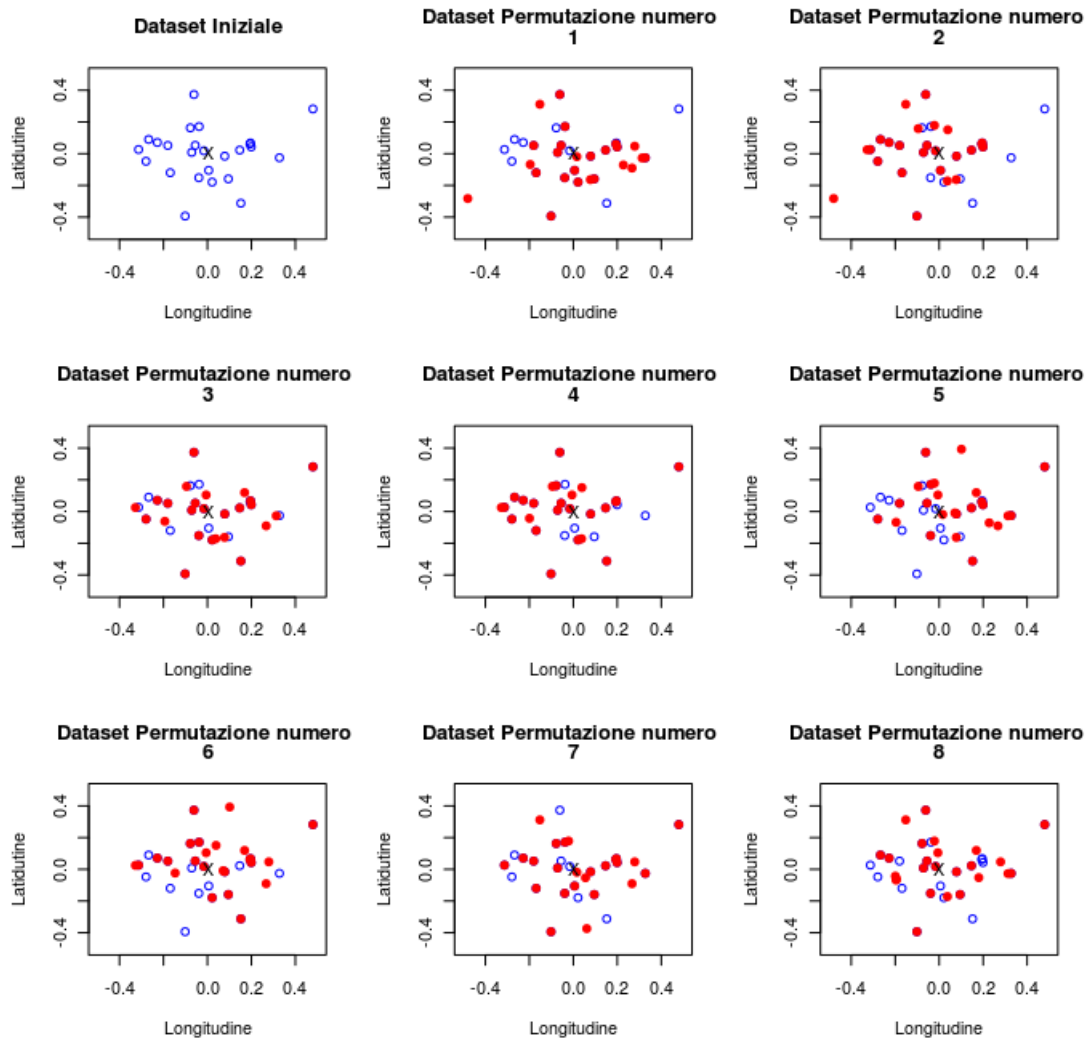


Figura 6.1: Permutazioni dati distribuiti attorno ad un polo (rosso), set di dati non permutato (blu), media geodetica (nero)

$|R|^\Delta = |R|(\mathbf{X}^\Delta)$ il valore della statistica test per le permutazioni del set di dati.

Occorre notare che per ottenere il valore della statistica test scelta per ogni permutazione è necessario risolvere 2^n problemi di regressione su arco sferico, il che è limitativo considerato il tempo di esecuzione di questo algoritmo, quindi, come suggerito in Pesarin (2010), considereremo un insieme casuale di $B = 1000$ permutazioni sulle 2^n possibili scelte.

In particolare la scelta della permutazione sarà effettuata attraverso l'ausilio di un processo di Bernoulli; avendo un set di n dati, associamo ad ogni dato una variabile aleatoria Bernoulli, viene simulata la realizzazione di queste n variabili

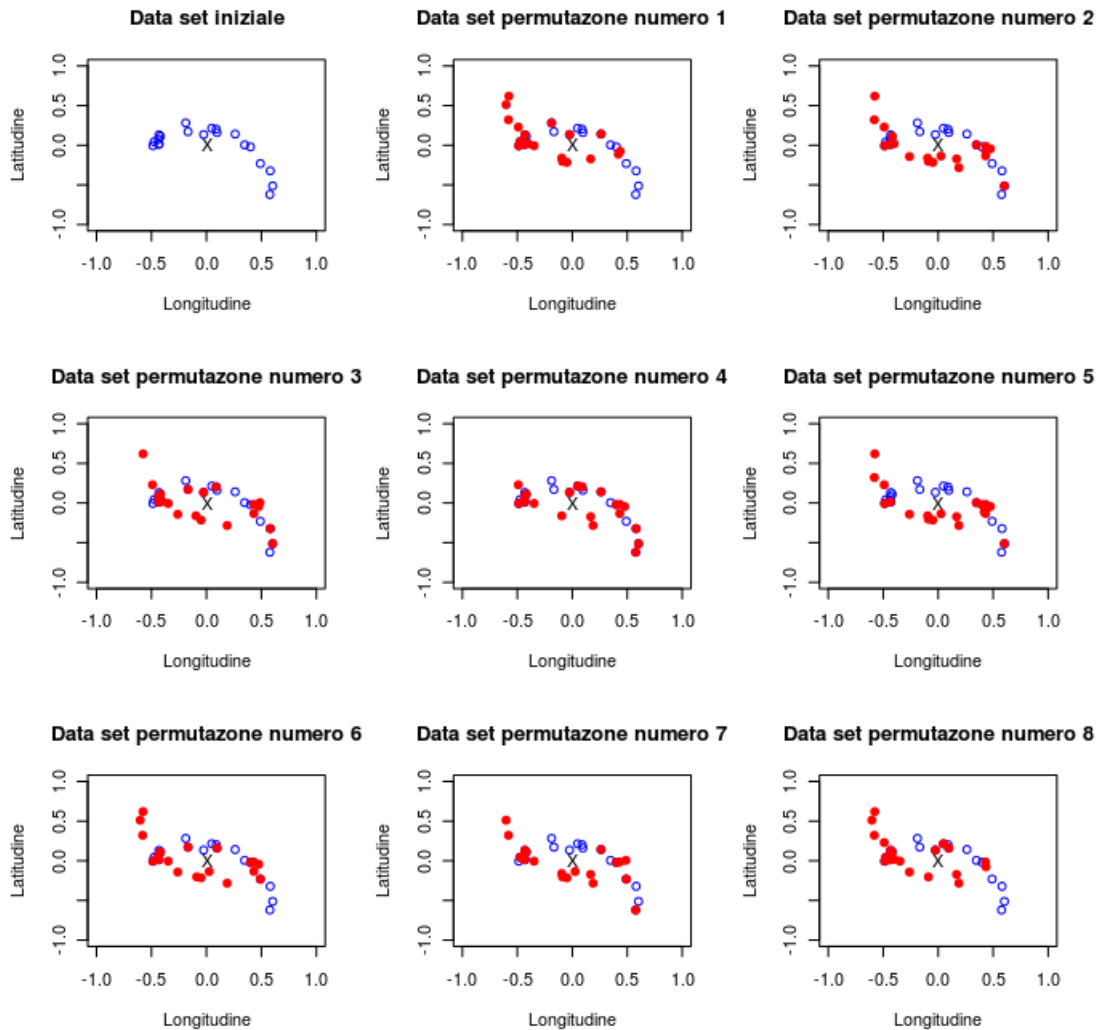


Figura 6.2: Permutazioni dati distribuiti attorno ad un arco sferico (rosso), set di dati non permutato (blu), media geodetica (nero)

aleatorie, permutiamo un dato rispetto la media geodetica se la variabile realizzata associata ad esso ha assunto valore 1, non permutiamo se ha assunto valore 0, ripetiamo la procedura, escludendo realizzazioni identiche di tale sequenza, finché non otteniamo mille permutazioni diverse scelte casualmente tra le possibili. Definiamo il *p-value* di tale test come:

$$\lambda = \frac{\#\{|R|^\Delta \geq |R|^\circ\}}{B}$$

scelto un livello di significatività α rifiutiamo l'ipotesi nulla se tale *p-value* è minore uguale α .

Questa scelta si traduce nel valutare la percentuale delle volte che la statistica test ha assunto un valore maggiore o uguale rispetto quella originale, ci aspettiamo la distribuzione di tale percentuale uniforme in $[0, 1]$ se i dati sono distribuiti attorno alla media geodetica della distribuzione, concentrata verso lo zero se i dati sono distribuiti attorno ad un arco sferico.

Al fine di valutare se la statistica test $|R|$ è adeguata a cogliere la differenza tra una distribuzione di punti sparsi attorno ad un polo, ovvero distribuiti come una normale bivariata sulla mappa logaritmica con centro il polo, o ad un arco sferico ovvero distribuiti sulla mappa logaritmica uniformemente su cerchio di raggio r e con aggiunto un disturbo normale nella direzione del raggio, valutiamo empiricamente la distribuzione del p -value, λ , al variare del raggio dell'arco sferico attorno al quale i punti sono generati, se $r = 0$ li consideriamo distribuiti attorno ad un polo, attraverso il seguente esperimento:

fissato un raggio da cui generiamo i dati generiamo mille set di dati su cui effettuiamo il test permutazione ottenendo così la distribuzione empirica di λ , facciamo poi variare il raggio della distribuzione da cui abbiamo generato i dati e ripetiamo l'esperimento.

Abbiamo effettuato tale esperimento per r nell'insieme $(0, \pi/8, \pi/4, \pi/2)$ mostriamo in figura 6.3 le distribuzioni empiriche ottenute per λ , come ci aspettavamo sotto l'ipotesi la distribuzione del p -value ha tendenza a distribuirsi uniformemente, si concentra invece su valori decrescenti al crescere di r .

In ultimo valutiamo la potenza empirica del test ovvero, la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando questa è effettivamente falsa, al variare di r e al variare del livello di significatività α dell' 1% e 5%, riportiamo nella seguente tabella i risultati ottenuti:

| α | $r = 0$ | $r = \pi/8$ | $r = \pi/4$ | $r = \pi/2$ |
|----------|---------|-------------|-------------|-------------|
| 1% | 0.9% | 10% | 75.37% | 61.34% |
| 5% | 3.8% | 30.4% | 92.59% | 82.47% |

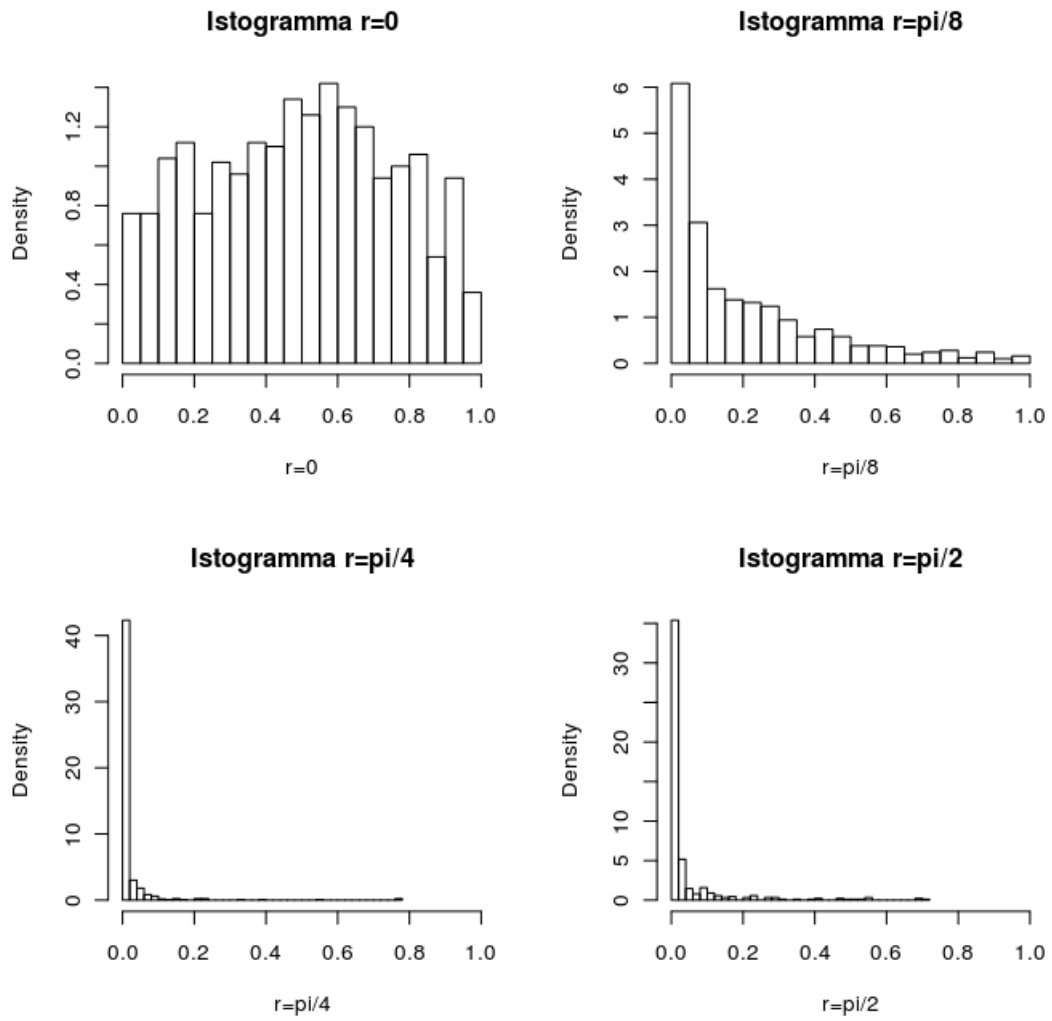


Figura 6.3: Istogrammi p -value al crescere di r

Capitolo 7

Studio del caso reale

In questo capitolo applicheremo i risultati ottenuti ai dati presentati nello studio di Rosenbaum, et al. (2002), presentando prima una procedura generale per l'analisi e particolarizzandola per lo studio della cinematica delle placche europea, iberica e africana, rispetto alla placca nordamericana.

7.1 Procedura generale di applicazione

Ricordano che i dati forniti nel capitolo 3 relativi al moto delle placche europea, iberica e africana rispetto la nordamericana, sono posizione polo composizione a una data era e angolo di rotazione che porta la placca dall'era odierna all'era di tale polo, vogliamo stimare i parametri del modello cinematico con subrotazione attraverso le tecniche proposte nel capitolo 4 e valutare se tale modello è adatto alla descrizione della cinematica di tali placche attraverso le tecniche sviluppare nei capitoli 5 e 6 ed analizzare i risultati ottenuti.

I passi che applicheremo per l'analisi delle specifiche placche, che spiegheremo prima in maniera generale, saranno:

1. Applicazione algoritmo regressione temporale su archi sferici
2. Analisi indice $|R|$ e test di permutazione
3. Scomposizione del moto composto dei poli in moto di rotazione principale e subrotazione

4. Applicazione del moto alla placche e confronto con il modello a una rotazione
5. Discussione dei risultati ottenuti

Iniziamo quindi con lo stimare dai dati posizione ed età del polo composizione, che indicheremo sinteticamente come $\tilde{\mathbf{E}}^T(t_i)$, la traiettoria descritta del moto circolare uniforme che meglio stima i dati secondo la definizione (4.5), che indicheremo come $\mathbf{E}^T(t)$, il risultato che otteniamo dall'applicazione dell'algoritmo sarà:

- \mathbf{C} centro del cerchio traiettoria dei poli composizione nonché corrispondente a \mathbf{E}^R polo di rotazione principale
- r raggio sferico del cerchio stimato, che rappresenta quindi la distanza geodetica da \mathbf{E}^R a $\mathbf{E}^T(t)$
- $\mathbf{E}^T(0)$ posizione iniziale del polo composizione.
- ω velocità angolare di $\mathbf{E}_T(t)$, che corrisponde alla velocità di rotazione principale ω_R di un punto generico attorno a \mathbf{E}^R

Valutiamo in prima istanza se effettivamente tali dati si adattano bene ad una traiettoria circolare qualitativamente attraverso l'indice $|R|$, in quanto le numerosità del campione non permettono di effettuare il test parametrico proposto e quantitativamente attraverso il test di permutazione, se tale analisi ci orienta verso l'ipotesi che i dati siano effettivamente distribuiti su un cerchio. A questo punto occorrerà scomporre la rotazione composizione nella somma di rotazione di principale e subrotazione. Osserviamo innanzitutto che è possibile ottenere dai dati la velocità angolare media della composizione delle rotazioni nella seguente maniera: di ogni polo composizione conosciamo, insieme a coordinate ed età, anche l'angolo di rotazione che porta un qualsiasi punto appartenente alla placca dal tempo $t = 0$ al tempo età del polo $t = t_i$, possiamo dunque, con le tecniche presentate nel capitolo 2 (figura 2.4), ottenere l'ampiezza dell'angolo ϕ_i percorso a un generico punto nell'intervallo temporale (t_i, t_{i-1}) , quindi la velocità angolare in tale intervallo risulterà pari a $\omega^{(t_i, t_{i-1})} = \phi_i / (t_i - t_{i-1})$ possiamo ottenere tale velocità angolare per ogni intervallo (t_i, t_{i-1}) con $i = 1, \dots, n$ e stimare la velocità angolare totale media come:

$$\omega^T = \frac{\sum_{i=1}^n \omega^{(t_i, t_{i-1})} (t_i - t_{i-1})}{t_n}$$

. Ovvero come la media pesata rispetto la durata del moto delle velocità angolari nei vari intervalli temporali.

Quindi i dati a nostra disposizione per scomporre la rotazione totale sono in definitiva: \mathbf{E}^P polo di rotazione principale, ω^R velocità di angolare media di rotazione principale, $\mathbf{E}^T(t)$ posizione polo di composizione al tempo t , ω^T velocità angolare media totale, sono incognite invece $\mathbf{E}^S(t)$ posizione dei poli di subrotazione e ω^S velocità angolare media di subrotazione, vale per definizione la seguente relazione tra le velocità angolari medie:

$$\omega^T \mathbf{E}^T(t) = \omega^R \mathbf{E}^R + \omega^S \mathbf{E}^S(t) \quad \forall t$$

essendo noto il polo di rotazione principale, possiamo senza perdita di generalità applicare una rotazione che lo porta al polo nord, risolvere il problema ed applicare la rotazione inversa per portarsi al sistema di coordinate originale.

Considerato quindi $\mathbf{E}^R = \mathbf{N} = (0, \frac{\pi}{2})$, possiamo valutare la relazione tra le velocità angolari in $t = 0$, ricordando che fissato il tempo polo di subrotazione e polo composizione giacciono sullo stesso meridiano (medesima longitudine) otteniamo le seguenti relazione in coordinate polari:

$$\begin{cases} \omega^S \cos(E_\lambda^S) - \omega^T \cos(E_\lambda^T) = 0 \\ \omega^R + \omega^S \sin(E_\lambda^S) - \omega^T \sin(E_\lambda^T) = 0 \end{cases}$$

la soluzione di tale sistema di equazioni non lineari è:

$$\begin{cases} E_\lambda^S = \tan^{-1} \left(\tan(E_\lambda^T) - \frac{\omega^R}{\omega^T \cos(E_\lambda^T)} \right) \\ \omega^S = \pm \sqrt{(\omega^R)^2 + (\omega^T)^2 - 2 \sin(E_\lambda^T) \omega^T \omega^R} \end{cases}$$

Il segno di ω^S in base a quale dei due soddisfa la relazione sulle velocità angolari medie.

Applichiamo poi la rotazione inversa che riporta il sistema di coordinate nella posizione originale.

Fatto ciò non resta che applicare i risultati ottenuti e valutarli.

È bene osservare che in nei paragrafi seguenti quando si verranno applicati il modelli, non saranno ruotati i confini delle varie placche ma bensì i confini geografici dei continenti al fine di rendere più chiara la rappresentazione grafica dei risulta-

ti, la proiezione cartografica utilizzata è stata quella di Mercatore (Appendice A).

7.2 Cinematica placca nordafricana

Applichiamo la procedura generale prima esposta per lo studio della cinematica della placca nordafricana rispetto la placca nordamericana.

Riportiamo innanzitutto i dati che verranno utilizzati:

| Età (MA) | Latitudine (°) | Longitudine (°) | Rotazione (°) | Riferimento |
|---|----------------|-----------------|---------------|-------------------------------------|
| <i>Poli dell'Africa rispetto il Nordamerica</i> | | | | |
| 9.9 | 80.12 | 50.80 | -2.52 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 19.2 | 81.07 | 56.51 | -5.21 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 33.1 | 75.37 | 1.12 | -10.04 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 46.3 | 75.30 | - 3.88 | -15.25 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 52.4 | 78.33 | - 2.64 | -16.91 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 55.9 | 79.68 | -0.46 | -18.16 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 65.6 | 82.90 | 4.94 | -20.76 | <i>Muller et al. (1990)</i> |
| 67.7 | 82.51 | -0.63 | -20.96 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 71.1 | 81.35 | -9.15 | -22.87 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 73.6 | 80.76 | -11.76 | -23.91 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 79.1 | 78.30 | -18.35 | -27.06 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 83.0 | 76.55 | -20.73 | -29.60 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 120.2 | 66.09 | -20.18 | -54.45 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 126.0 | 65.97 | -19.43 | -56.63 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 130.2 | 65.95 | -18.50 | -57.40 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 131.1 | 66.14 | -18.72 | -58.03 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 137.9 | 66.24 | -18.33 | -59.71 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 146.7 | 66.24 | -18.33 | -62.14 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 154.0 | 66.70 | -15.85 | -64.90 | <i>Roest et al. (1992)</i> |
| 170.0 | 67.02 | -13.17 | -72.10 | <i>Klitgord and Schouten (1986)</i> |
| 175.0 | 65.97 | -12.76 | -76.44 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |

Tabella 7.1: Data-set Rosenbaum, G. et al. (2002)

I parametri stimati dall' algoritmo in questo caso sono:

| $\mathbf{E}^R (E_\lambda^R, E_\varphi^R)$ | r | $\mathbf{E}^T(t_1) (E_\lambda^T(t_1), E_\varphi^T(t_1))$ | ω^R |
|---|-----------|--|------------|
| (61.8229°, 29.97832°) | 20.54374° | (78.87782°, 38.57431°) | 0.81°/MA |

Vediamo in figura 7.1 il modo dei poli composizione delle rotazioni stimato dall' algoritmo.

Valutiamo ora se tale risultato è un buon risultato o stima in maniera non corretta i dati sperimentali, il valore dell' indice $|R|$ è pari a 0.8288996 questo

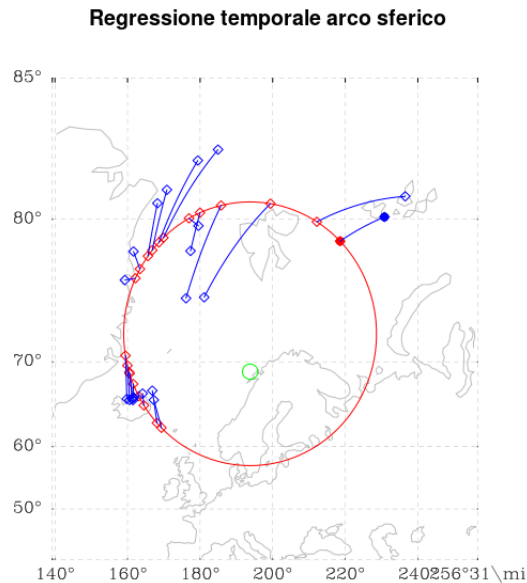


Figura 7.1: Stima algoritmo regressione temporale: in verde polo di rotazione principale, cerchio rosso traiettoria polo composizione, punti blu osservazioni (pieno prima osservazione), punti rossi stima osservazione sulla traiettoria (pieno prima osservazione)

lascia supporre che i dati siano effettivamente distribuiti attorno ad una traiettoria circolare.

Valutiamo tale risultato qualitativo attraverso il test di permutazione presentato nel capitolo precedente, ossia attraverso tale test ci chiediamo, vista la scarsa numerosità e la variabilità dei dati, se è sufficiente un valore di $|R|$ pari a 0.8288996 per avere l'evidenza statistica che i dati non siano distribuiti attorno ad un polo ma su un arco sferico

Ricordiamo che l'ipotesi nulla di tale test è che dati siano distribuiti attorno alla media geodetica, l'ipotesi alternativa che siano distribuiti attorno ad un arco sferico.

Il p -value che ci restituisce il test è pari a 33%, quindi non abbiamo evidenza statistica per rifiutare l'ipotesi nulla che i dati sono distribuiti attorno alla loro media geodetica. Ricordiamo che per il modello a singola rotazione assumiamo che la posizione del polo di rotazione è stimata dalla media geodetica dei dati e la velocità angolare di un punto attorno ad esso è rappresentata dalla velocità totale

media.

Torniamo all'analisi del modello con subrotazione:

Procediamo con la scomposizione del moto, calcoliamo prima la velocità angolare totale ottenendo $\omega^T = -0.4544^\circ/MA$, da cui insieme agli altri dati otteniamo velocità angolare media di subrotazione che risulta pari a $\omega^S = -1.2631^\circ/MA$ e posizione del polo di subrotazione al tempo $t_1 = 9.9MA$, che risulta avere coordinate geografiche $\mathbf{E}^S(t_1) = (72.49^\circ, 21.09^\circ)$ (figura 7.2).

Riassumiamo nella seguente tabella i risultati:

| $\mathbf{E}^R = (E_\lambda^R, E_\varphi^R)$ | ω^R | $\mathbf{E}^S(t_1) = (E_\lambda^S, E_\varphi^S)$ | ω^S |
|---|-----------------|--|--------------------|
| $(61.8229^\circ, 29.97832^\circ)$ | $0.81^\circ/MA$ | $(72.49^\circ, 21.09^\circ)$ | $-1.2631^\circ/MA$ |

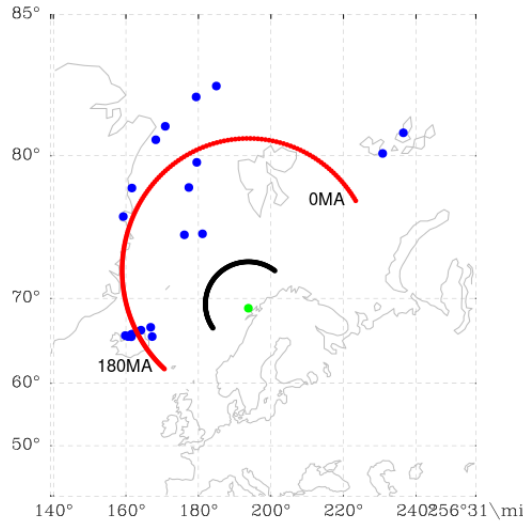


Figura 7.2: Scomposizione moto: in verde polo di rotazione principale, arco nero luogo dei poli di subrotazione, arco rosso luogo dei poli composizione, in blu data set originale.

Riprendiamo il modello ad una rotazione e calcoliamo i parametri, la velocità totale è pari a quella ottenuta per il modello con subrotazione, la posizione del polo risulta essere pari alla media geodetica dei dati ovvero $\mathbf{E}^{1R} = (74.37^\circ, -10.56^\circ)$ (figura 7.3).

Non resta che comparare i risultati ottenuti ricostruendo il moto della placca africana nei tre modelli, mostriamo in figura 7.4 rispettivamente il modello, a singola rotazione con i poli fissi a intervalli temporali (verde), a singola rotazione

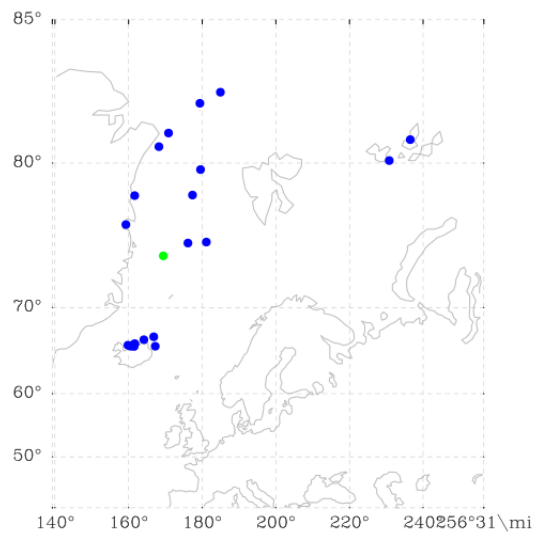


Figura 7.3: Modello a una rotazione: in verde polo di rotazione (media geodetica dei dati), in blu data set.

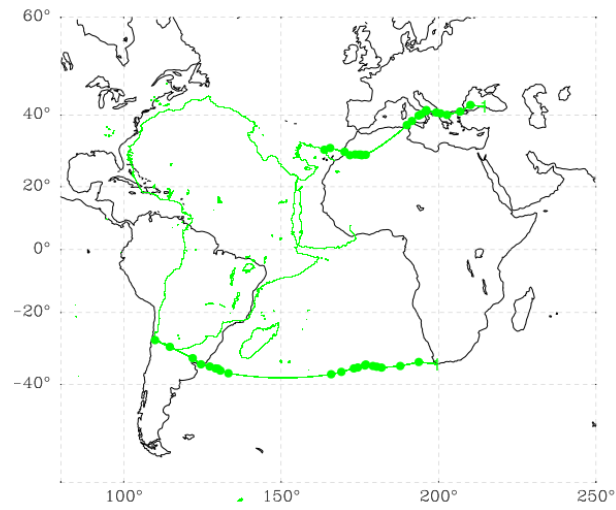
(rosso), e con subrotazione (blue), le linee rappresentano la traiettoria del continente africano, i punti le stime delle posizioni alle età presenti nel set di dati.

Abbiamo riportato il continente africano dalla posizione attuale a quella che aveva 175 milioni di anni fa.

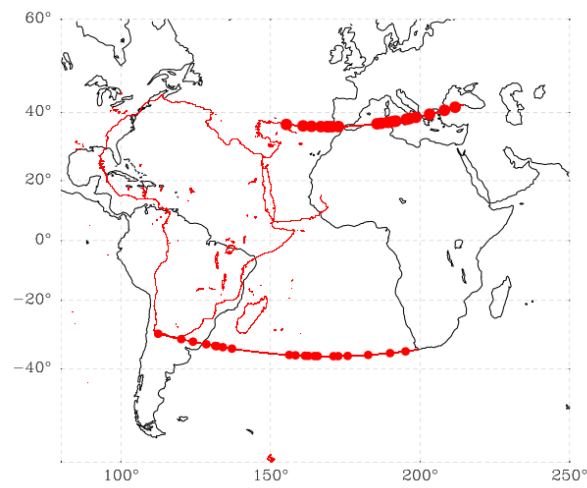
Nonostante il test ci suggeriva di scegliere il modello a singola rotazione, possiamo osservare come il modello con subrotazione è in grado di cogliere meglio la cinematica della placca africana.

Il modello a singola rotazione ha il vantaggio di avere parametri più semplici da stimare, ma è in grado di costruire solo traiettoria ad arco sferico, il modello con subrotazione riesce a cogliere meglio la cinematica evidentemente più complessa della placca africana, anche se resta limitativo considerare le velocità angolari costanti perché le velocità angolari totali tra due età stimate dal set di dati, non sembrano costanti ma, come vediamo nella seguente tabella, sono più che altro costanti su lunghi intervalli temporali, quindi una prima estensione del modelli presentati nel lavoro, sia singola rotazione che subrotazione, potrebbe includere velocità costanti a tratti, al fine di arricchire ulteriormente l'insieme delle traiettorie ammesse dal modello.

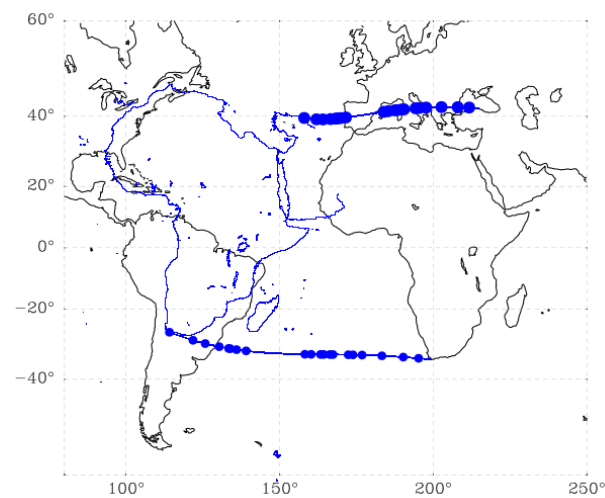
| intervallo età | velocità angolari ($^{\circ}$ /MA) |
|----------------|-------------------------------------|
| 0.0 - 9.9 | -0.25 |
| 9.9 - 19.2 | -0.28 |
| 19.2 - 33.1 | -0.36 |
| 33.1 - 46.3 | -0.39 |
| 46.3 - 52.4 | -0.30 |
| 52.4 - 55.9 | -0.37 |
| 55.9 - 65.6 | -0.29 |
| 65.6 - 67.7 | -0.16 |
| 67.7 - 71.1 | -0.59 |
| 71.1 - 73.6 | -0.43 |
| 73.6 - 79.1 | -0.61 |
| 79.1 - 83.0 | -0.69 |
| 83.0 - 120.2 | -0.69 |
| 120.2 - 126.0 | -0.37 |
| 126.0 - 130.2 | -0.20 |
| 130.2 - 131.1 | -0.73 |
| 131.1 - 137.9 | -0.24 |
| 137.9 - 146.7 | -0.27 |
| 146.7 - 154.0 | -0.40 |
| 154.0 - 170.0 | -0.45 |
| 170.0 - 175.0 | -0.90 |



(a) Ricostruzione del moto dai dati.



(b) Modello a singola rotazione .



(c) Modello con subrotazione.

Figura 7.4: Modelli cinematici applicati al continente africano

7.3 Cinematica placca europea

Applichiamo ora la procedura generale alla placca europea. I dati utilizzati saranno:

| Età (MA) | Latitudine (°) | Longitudine (°) | Rotazione (°) | Riferimento |
|---|----------------|-----------------|---------------|------------------------------------|
| <i>Poli dell'Europa rispetto il Nordamerica</i> | | | | |
| 9.9 | 65.38 | 133.58 | -2.44 | <i>Lawver et al. (1990)</i> |
| 19.2 | 68.92 | 136.74 | -4.97 | <i>Lawver et al. (1990)</i> |
| 33.1 | 65.64 | 136.95 | -7.51 | <i>Lawver et al. (1990)</i> |
| 46.3 | 66.15 | 135.40 | -10.87 | <i>Srivastava and Roest (1996)</i> |
| 52.4 | 63.89 | 139.27 | -12.89 | <i>Srivastava and Roest (1996)</i> |
| 55.9 | 63.14 | 141.66 | -14.22 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 65.6 | 64.84 | 143.96 | -16.95 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 79.1 | 66.17 | 147.74 | -19.00 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 83.0 | 66.54 | 148.91 | -19.70 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 92 | 66.67 | 150.26 | -20.37 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 120.2 | 69.67 | 154.26 | -23.17 | <i>Srivastava et al. (2000)</i> |
| 142.5 | 68.99 | 154.75 | -23.05 | <i>Srivastava and Roest (1989)</i> |
| 154.0 | 69.03 | 155.44 | -23.26 | <i>Torsvik et al. (2001)</i> |
| 170 | 69.1 | 156.70 | -23.64 | <i>Royer et al. (1992)</i> |
| 175 | 71.61 | 156.70 | -25.27 | <i>Torsvik et al. (2001)</i> |

Tabella 7.2: Data-set Rosenbaum, G. et al. (2002)

I parametri stimati dall'algorithm in questo caso sono:

| $\mathbf{E}^R (E_\lambda^R, E_\varphi^R)$ | r | $\mathbf{E}^T(t_1) (E_\lambda^T(t_1), E_\varphi^T(t_1))$ | ω^R |
|---|--------------|--|-----------------|
| $(70.28^\circ, 142.25^\circ)$ | 4.83° | $(67.16^\circ, 132.03^\circ)$ | $0.93^\circ/MA$ |

Vediamo in figura 7.5 il modo dei poli composizione delle rotazioni stimato dall'algorithm.

Valutiamo ora se il risultato ottenuto stima in maniera corretta i dati sperimentali, il valore dell'indice $|R|$ che è pari a 0.80 che lascia supporre che i dati siano effettivamente distribuiti attorno ad una traiettoria circolare, valutiamo se vi è evidenza statistica per supporre ciò attraverso il test di permutazione il cui p -value è pari a 0.044%, quindi l'evidenza statistica ci suggerisce di rifiutare l'ipotesi nulla che i dati siano distribuiti attorno ad un polo.

Procediamo con la scomposizione del moto, calcoliamo prima la velocità angolare totale ottenendo $\omega^T = -0.15^\circ/MA$, da cui insieme agli altri dati otteniamo una velocità angolare media di subrotazione che risulta pari a $\omega^S = -1.08^\circ/MA$

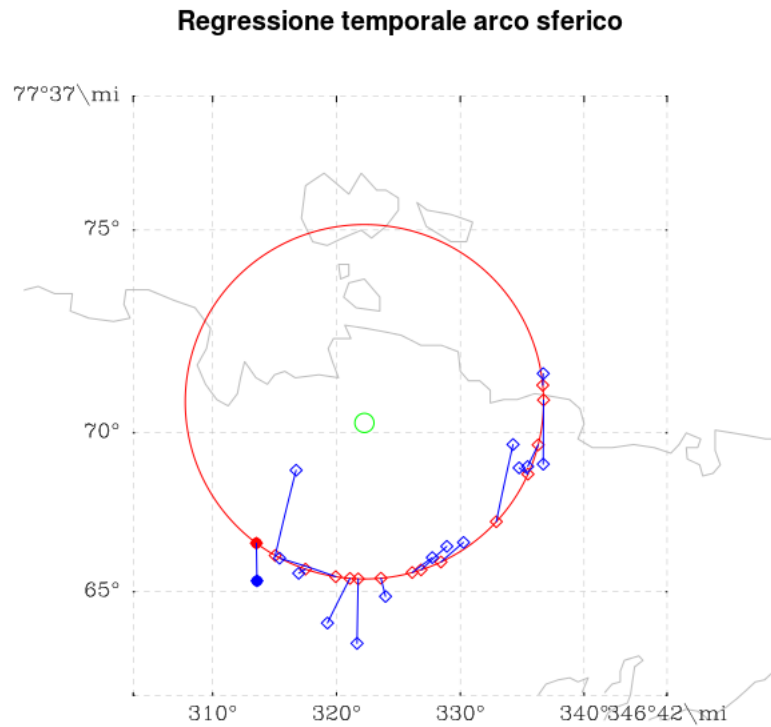


Figura 7.5: Stima algoritmo regressione temporale: in verde polo di rotazione principale, cerchio rosso traiettoria polo composizione, punti blu osservazioni (pieno prima osservazione), punti rossi stima osservazione sulla traiettoria (pieno prima osservazione)

e posizione del polo di subrotazione al tempo $t_1 = 9.9MA$, che ha coordinate geografiche $\mathbf{E}^S(t_1) = (69.88^\circ, 140.64^\circ)$ (figura 7.6).

Riassumiamo nella seguente tabella i risultati:

| $\mathbf{E}^R = (E_\lambda^R, E_\varphi^R)$ | ω^R | $\mathbf{E}^S(t_1) = (E_\lambda^S, E_\varphi^S)$ | ω^S |
|---|------------|--|------------|
| (70.28°, 142.25°) | 0.93°/MA | (69.88°, 140.64°) | -1.08°/MA |

Calcoliamo solo a titolo di confronto i parametri del modello a singola rotazione, la velocità totale è pari a quella ottenuta per il modello con subrotazione, la posizione del polo risulta essere pari alla media geodetica dei dati ovvero $\mathbf{E}^{1R} = (67.25^\circ, 145.62^\circ)$

Compariamo i risultati ottenuti ricostruendo il moto della placca europea nei tre modelli, mostriamo in figura 7.7 rispettivamente il modello, a singola rotazione con i poli fissi a intervalli temporali (verde), a singola rotazione (rosso), e con

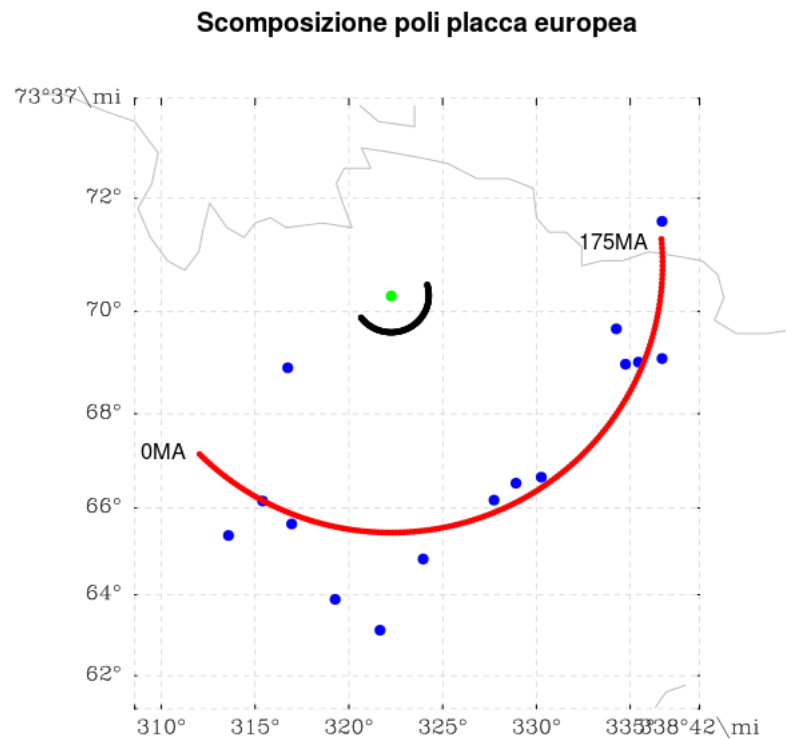
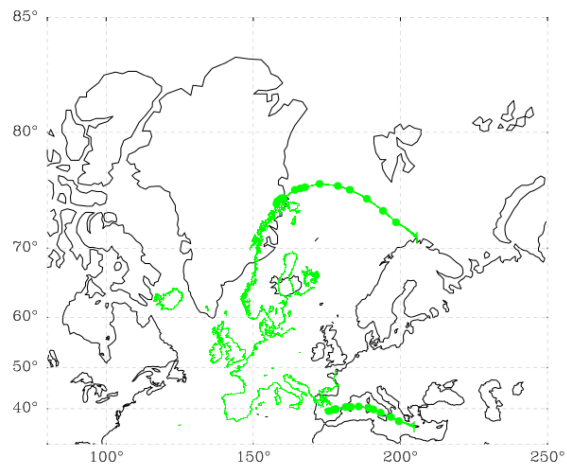


Figura 7.6: Scomposizione moto: in verde polo di rotazione principale, arco nero luogo dei poli di subrotazione, arco rosso luogo dei poli composizione, in blu data set originale.

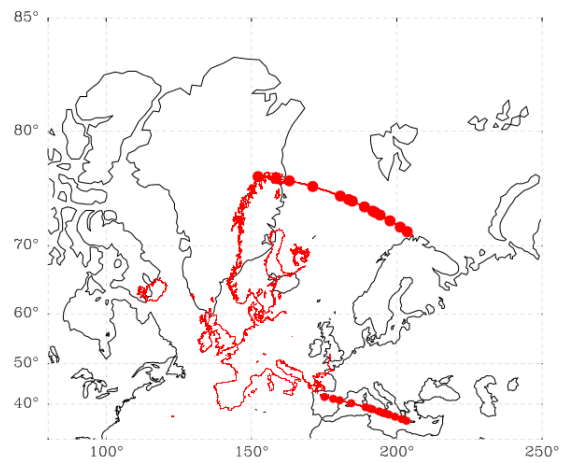
subrotazione (blue), le linee rappresentano la traiettoria del continente africano, i punti le stime delle posizioni alle età presenti nel set di dati.

Abbiamo riportato il continente europeo dalla posizione attuale a quella che aveva 175 milioni di anni fa.

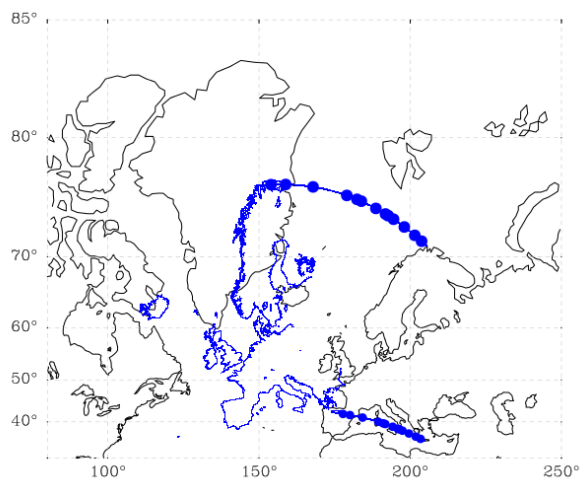
Il modello con subrotazione è in grado di cogliere molto meglio rispetto al modello a singola rotazione la cinematica della placca europea rispetto a quello a singola rotazione.



(a) Ricostruzione del moto dai dati.



(b) Modello a singola rotazione .



(c) Modello con subrotazione.

Figura 7.7: Modelli cinematici applicati al continente europeo

7.4 Cinematica placca iberica

Applichiamo infine la procedura generale alla placca iberica. I dati utilizzati saranno:

| Età (MA) | Latitudine (°) | Longitudine (°) | Rotazione (°) | Riferimento |
|---|----------------|-----------------|---------------|--------------------------------------|
| <i>Poli dell'Iberia rispetto il Nordamerica</i> | | | | |
| 9.9 | 65.38 | 133.58 | -2.44 | <i>Lawver et al. (1990)</i> |
| 19.2 | 68.00 | 138.20 | -4.75 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 33.1 | 76.34 | 117.33 | -7.65 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 46.3 | 74.70 | 126.96 | -11.05 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 52.4 | 72.98 | 133.28 | -12.94 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 55.9 | 73.29 | 133.88 | -14.25 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 67.7 | 74.96 | 135.34 | -17.19 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 79.1 | 85.49 | 110.28 | -22.41 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 83.0 | 87.18 | 57.43 | -24.67 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 120.2 | 64.71 | -18.94 | -58.11 | <i>Srivastava et al. (2000)</i> |
| 154.0 | 66.90 | -12.93 | -60.45 | <i>Srivastava et al. (1990a)</i> |
| 175 | 65.72 | -12.82 | -66.32 | <i>Srivastava and Verhoef (1992)</i> |

Tabella 7.3: Data-set Rosenbaum, G. et al. (2002)

I parametri stimati dall' algoritmo risultano:

| $\mathbf{E}^R (E_\lambda^R, E_\varphi^R)$ | r | $\mathbf{E}^T(t_1) (E_\lambda^T(t_1), E_\varphi^T(t_1))$ | ω^R |
|---|---------------|--|-----------------|
| $(32.90^\circ, 59.57^\circ)$ | 53.64° | $(60.31^\circ, 132.66^\circ)$ | $0.41^\circ/MA$ |

Vediamo in figura 7.8 il modo dei poli composizione delle rotazioni stimato dall'algoritmo.

Valutiamo ora se il risultato ottenuto stima in maniera corretta i dati sperimentali, il valore dell'indice $|R|$ che è pari a 0.92 i dati quindi si distribuiscono attorno ad una traiettoria circolare, valutiamo a conferma di ciò il p -value che ci restituisce il test di permutazione che è pari a 0.03%, per cui, vi è effettivamente evidenza statistica per rifiutare l'ipotesi che i dati attorno ad un polo.

Procediamo con la scomposizione del moto, calcoliamo prima la velocità angolare totale ottenendo $\omega^T = -0.42^\circ/MA$, da cui insieme agli altri dati otteniamo una velocità angolare media di subrotazione che risulta pari a $\omega^S = -0.74^\circ/MA$ e posizione del polo di subrotazione al tempo $t_1 = 9.9MA$, che ha coordinate geografiche $\mathbf{E}^S(t_1) = (52.48^\circ, 85.74^\circ)$ (figura 7.9).

Riassumiamo nella seguente tabella i risultati:

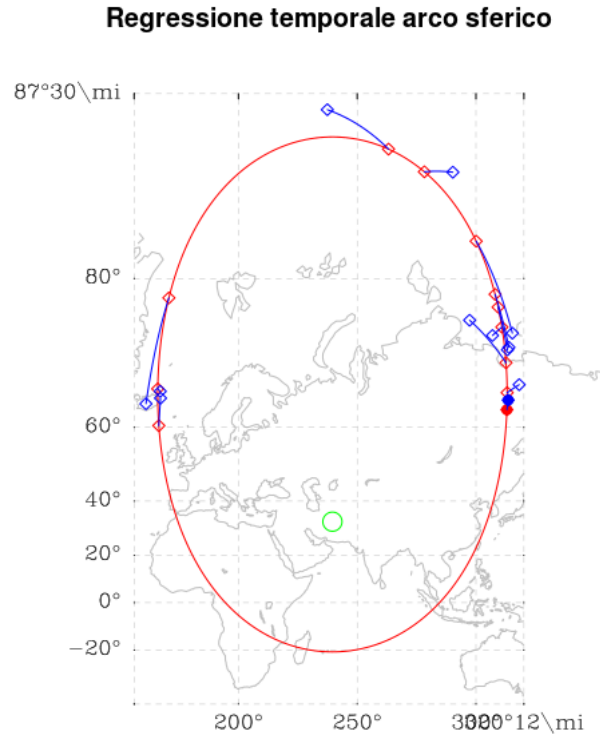


Figura 7.8: Stima algoritmo regressione temporale: in verde polo di rotazione principale, cerchio rosso traiettoria polo composizione, punti blu osservazioni (pieno prima osservazione), punti rossi stima osservazione sulla traiettoria (pieno prima osservazione)

| $\mathbf{E}^R = (E_\lambda^R, E_\varphi^R)$ | ω^R | $\mathbf{E}^S(t_1) = (E_\lambda^S, E_\varphi^S)$ | ω^S |
|---|-----------------|--|------------------|
| $(32.90^\circ, 59.57^\circ)$ | $0.41^\circ/MA$ | $(52.48^\circ, 85.74^\circ)$ | $-0.74^\circ/MA$ |

Calcoliamo a titolo di confronto i parametri del modello a singola rotazione, la velocità totale è pari a quella ottenuta per il modello con subrotazione, la posizione del polo risulta essere pari alla media geodetica dei dati ovvero $\mathbf{E}^{1R} = (83.14^\circ, 98.23^\circ)$

Compariamo i risultati ottenuti ricostruendo il moto della placca europea nei tre modelli, mostriamo in figura 7.10 rispettivamente il modello, a singola rotazione con i poli fissi a intervalli temporali (verde), a singola rotazione (rosso), e con subrotazione (blue), le linee rappresentano la traiettoria del continente africano, i punti le stime delle posizioni alle età presenti nel set di dati.

Abbiamo riportato la penisola iberica dalla posizione odierna a quella che aveva 175 milioni di anni fa.

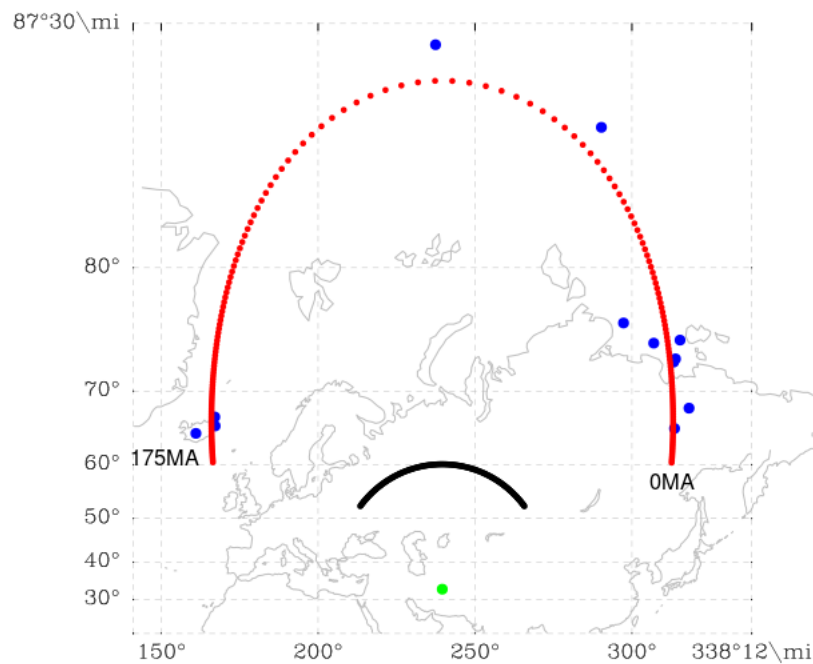
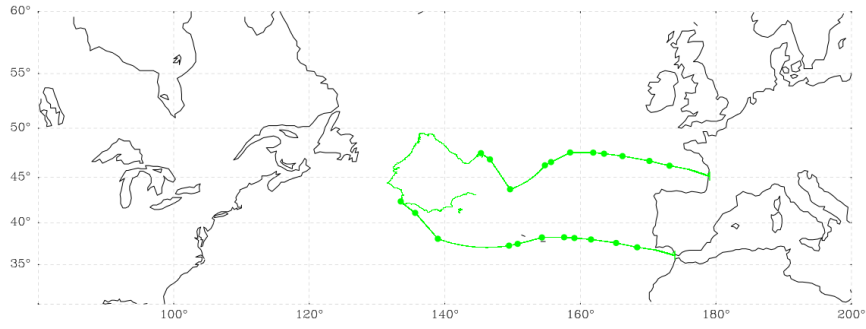
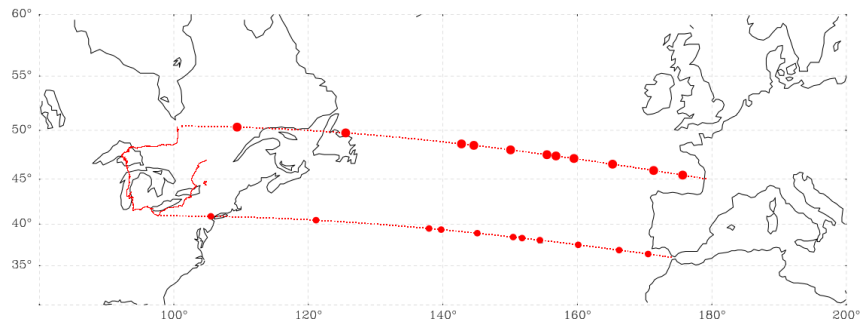


Figura 7.9: Scomposizione moto: in verde polo di rotazione principale, arco nero luogo dei poli di subrotazione, arco rosso luogo dei poli composizione, in blu data set originale.

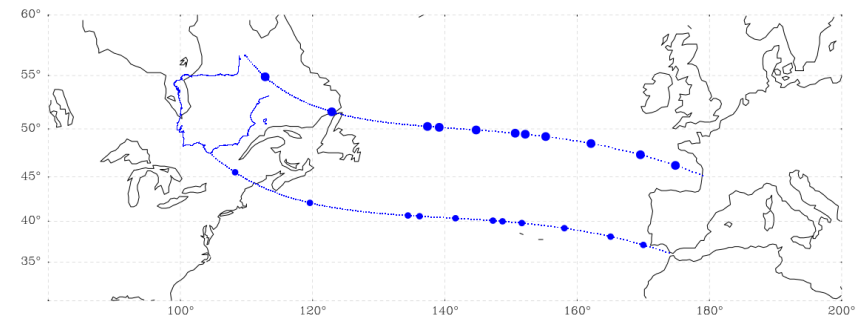
Osserviamo che la ricostruzione del moto di tale placca è poco rappresentativa, nel modello a singola rotazione la traiettoria nemmeno ricorda la traiettoria ottenuta dal set di dati, nel modello a subrotazione come forma la traiettoria già ricorda quella del set di dati, ma a causa sempre della non uniformità delle velocità delle placca nell'arco temporale considerato la velocità media della placca è sovrastimata dall'algoritmo, in particolare in figura 7.8 possiamo osservare come le distanze geodetiche dei quattro punti con latitudine maggiore dai punti corrispondenti osservati siano grandi rispetto le distanze delle osservazioni dal resto dei punti stimati, a causa dell'errore di stima di tali punti la cinematica ottenuta dai dati e la cinematica stimata dal modello con subrotazione non corrispondono, ricordiamo ancora una volta che tale errore è dovuto al fatto di assumere le velocità di rotazione e subrotazione costanti.



(a) Ricostruzione del moto dai dati.



(b) Modello a singola rotazione .



(c) Modello con subrotazione.

Figura 7.10: Modelli cinematici applicati alla penisola iberica

Capitolo 8

Conclusioni

L'obiettivo del lavoro è stato di fornire per il modello con subrotazione di cinematica delle placche terrestri, proposto in Cuffaro et. al. (2008), dei metodi statistici adatti alla stima e alla valutazione dei parametri del modello, per validare l'ipotesi che effettivamente tale modello sia uno strumento adeguato alla descrizione del problema della cinematica delle placche terrestri.

Si è reso necessario per i modelli di regressione sviluppati, tenere in considerazione che la metrica sulla sfera non è indotta dalla distanza euclidea, ma bensì dalla distanza geodetica.

Si è partiti da risultati noti in letteratura, come ad esempio l'algoritmo per la stima di un arco sferico, che sono stati ulteriormente sviluppati e adattati al caso geologico in esame, in particolare:

1. È stata migliorata notevolmente la velocità di convergenza dell'algoritmo per la stima di un arco sferico.
2. È stato proposto un nuovo algoritmo che stima dai dati la traiettoria circolare su cui un punto si muove con velocità costante.
3. Sotto alcune ipotesi, ovvero si è supposto che la distribuzione dei dati quando essi sono dispersi attorno ad un polo sia una normale bivariata sulla mappa logaritmica e che le numerosità del campione siano elevate, si è sviluppato un test parametrico asintotico che ha come ipotesi nulla che i dati siano distribuiti attorno ad un polo ed alternativa che siano distribuiti attorno ad

un arco sferico.

4. Si è sviluppato un test non parametrico di permutazione per svincolarsi dalle ipotesi esposte al punto precedente con ipotesi nulla e alternativa come quelle del punto precedente.

Applicando i risultati ottenuti ai casi reali si è dedotto che effettivamente tale modello è in grado di rappresentare in maniera più adeguata la cinematica delle placche rispetto al modello a singola rotazione, il modello a singola rotazione è in grado di descrivere solo traiettorie ad arco sferico, dalle stime delle posizioni dei poli ricostruendo il moto delle placche si vede le traiettorie descritte da queste non sono bene approssimabili con semplici archi sferici, il modello con subrotazione riesce meglio invece ad adattarsi alle traiettorie approssimate delle placche.

Uno sviluppo possibile per tale modello è non considerare le velocità angolari di rotazione e subrotazione costanti, ma ad esempio costanti su lunghi intervalli temporali. Le difficoltà legate a questo aspetto non sono legate alle complessità degli algoritmi di stima dei parametri, che trattato il caso di moto circolare uniforme, sono semplicemente estendibili a qualunque tipo di moto, ma più che altro all'identificazione dei punti di discontinuità di tali velocità angolari.

Altri sviluppi necessari a dare supporto a tale modello, sono relativi ai test, in particolare:

1. Per il test parametrico, si potrebbe dedurre la distribuzione dell'indice $|R|$ anche per basse numerosità del campione.
2. È possibile effettuare un'analisi più approfondita sull'indice $|R_t|$, ad esempio sviluppando un test di permutazione, nella seguente maniera: una volta stabilito che la distribuzione dei dati è su cerchio minore si potrebbe pensare di calcolare la statistica $|R_t|$ e poi permutare le etichette temporali associate ai dati oltre che permutare i dati spaziali attorno alla loro media geodetica come spiegato nel sesto capitolo, calcolare nuovamente la statistica e considerare come *p-value* il numero delle volte che l' $|R_t|$ originale è maggiore

dell' $|R_t|$ del set di dati permutato, ponendo come ipotesi nulla che la i dati siano distribuiti in maniera temporalmente disordinata e simmetricamente rispetto alla media geodetica e come ipotesi alternativa che i dati siano ordinati temporalmente in modo uniforme sul cerchio.

Avremmo così una distribuzione uniforme del $p - value$ sotto l'ipotesi nulla e concentrata verso lo zero sotto l'ipotesi alternativa

Appendice A

Elementi di cartografia

Una proiezione cartografica (o mappa) è un insieme di regole geometriche atte a esprimere le coordinate geografiche (figura 2.1), longitudine e latitudine (λ, φ) , in coordinate cartesiane piane (x, y) , sono dunque utili a rappresentare la superficie sferica su di un piano cartesiano.

È noto che non è possibile sviluppare la superficie sferica su un piano, senza che vi siano distorsioni nella mappa. Quindi la scelta dell'insieme di regole utili a rappresentare la superficie sferica sulla mappa sarà conseguenza delle proprietà che essa deve conservare.

Perciò proiezioni vengono classificate in:

- Equivalente se conserva i rapporti tra le aree.
- Equidistante se conserva le distanze da un punto. Non è possibile conservare le distanze tra tutti i punti di una mappa.
- Conforme (o equiangola) se conserva gli angoli.

L'idea di base per derivare le equazioni che descrivono un mappa è di costruire un sistema di coordinate cartesiane (x, y) tale che: $x = f(\lambda, \phi)$, $y = g(\lambda, \phi)$, dove λ e ϕ rappresentano la longitudine e la latitudine di un punto appartenente alla superficie sferica, f e g sono funzioni da determinare in maniera opportuna a seconda delle proprietà che vogliamo conservi la mappa (Banerjee, 2004).

Consideriamo un quadrilatero sferico $ABCD$ infinitesimale, definito dai vertici: $A = (\lambda, \phi)$, $B = (\lambda, \phi + d\phi)$, $C = (\lambda + d\lambda, \phi)$, $D = (\lambda + d\lambda, \phi + d\phi)$, che ha come lati gli archi di cerchio massimo che congiungono i punti AB , BD , CD

e CA , essendo tale quadrilatero infinitesimale possiamo considerare trascurabile la curvatura della sfera. Sia R il raggio della sfera, la lunghezza del segmento AC lungo un arco di latitudine è pari a $|AC| = R \cos \phi d\lambda$, quella AB lungo un arco di longitudine $|AB| = R d\phi$ per cui l'area del quadrilatero $ABCD$ è data da $|AB||AC| = R^2 \cos \phi d\lambda d\phi$. Sia $A'B'C'D'$ l'immagine di $ABCD$ sulla mappa allora abbiamo che:

$A' = (f(\lambda, \phi), g(\lambda, \phi))$, $B' = (f(\lambda, \phi + d\phi), g(\lambda, \phi + d\phi))$,
 $C' = (f(\lambda + d\lambda, \phi), g(\lambda + d\lambda, \phi))$, $D' = (f(\lambda + d\lambda, \phi + d\phi), g(\lambda + d\lambda, \phi + d\phi))$ questo implica che:

$$A'C' = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}, \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right) d\lambda \quad A'B' = \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial g}{\partial \phi} \right) d\phi$$

L'area del patch sulla mappa risulta così il prodotto vettoriale di:

$$(A'C', 0) \times (A'B', 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right) d\lambda d\phi$$

Se vogliamo una mappa che conservi quindi le aree dobbiamo dunque imporre che:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right) = R^2 \cos \phi$$

otteniamo quindi un'equazione alle derivate parziali alla quale dobbiamo imporre ulteriori condizioni, che determineranno altre caratteristiche della mappa, per garantire l'unicità di f e g .

Ad esempio possiamo imporre che $\frac{\partial g}{\partial \phi} = R$, ovvero che i paralleli rappresentati sulla mappa siano equispaziati, e che il meridiano di Greenwich corrisponda all'asse delle ordinate sulla mappa, per ottenere la seguente soluzione (figura A.1):

$$f(\lambda, \phi) = R\lambda \cos \phi \quad g(\lambda, \phi) = R\phi$$

Se vogliamo che una mappa sia conforme, dobbiamo imporre l'uguaglianza tra $\angle(AC, AB)$, che è uguale a $\pi/2$ per costruzione, e l'angolo sulla mappa $\angle(A'C', A'B')$ allora imponendo l'uguaglianza sui prodotti scalari otteniamo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial g}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right) = 0$$

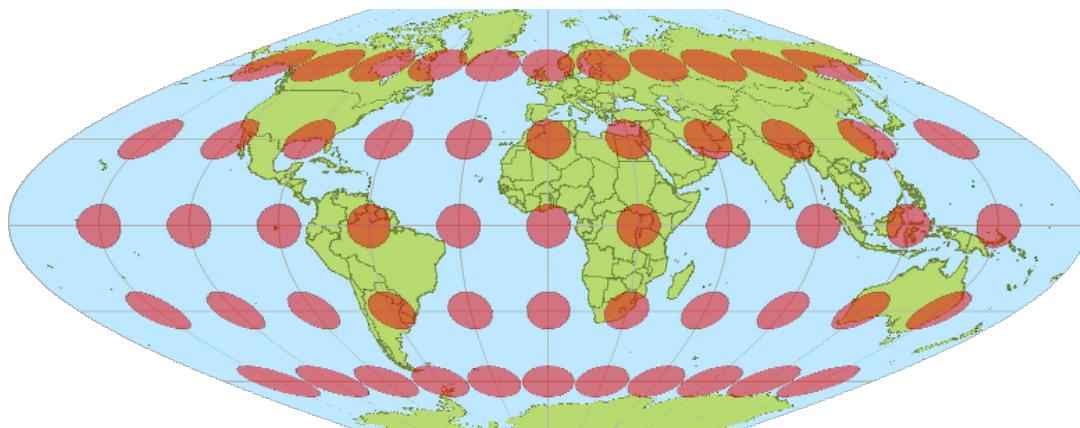


Figura A.1: Proiezione equivalente sinusoidale

Vengono conservate le aree a scapito di cambiamenti di angoli dei patch

Fonte: http://it.wikipedia.org/wiki/File:Sinusiodal_earth_circles.png

Fissando le condizioni $\frac{\partial g}{\partial \phi} = R \sec \phi$ e che il meridiano di Greenwich corrisponda all'asse delle ordinate sulla mappa otteniamo la nota proiezione di Mercatore (figura A.2):

$$f(\lambda, \phi) = R\lambda \quad g(\lambda, \phi) = R \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

Questo tipo di mappa sarà utilizzata per le rappresentazioni grafiche in questo lavoro.

Un segmento che unisce due punti sulla mappa di Mercatore, è una linea lossodromica ossia che taglia tutti i meridiani formando il medesimo angolo (figura A.3).

È da notare, che la lunghezza di questa linea non è la più breve tra due punti appartenenti alla superficie sferica, la quale detta geodetica invece è rappresentata da una linea ortodromica, ossia l'arco di cerchio massimo che congiunge i due punti, ed ha la caratteristica di tagliare tutti i meridiani con angoli diversi (figura A.3).

Un'altra tipologia di proiezione cartografica che utilizzeremo, non per fini di rappresentazione grafica, ma per risolvere problemi legati ad aspetti algoritmici, sarà la proiezione equidistante azimutale (figura A.4) rispetto il polo nord geografico (Snyder, 1987).

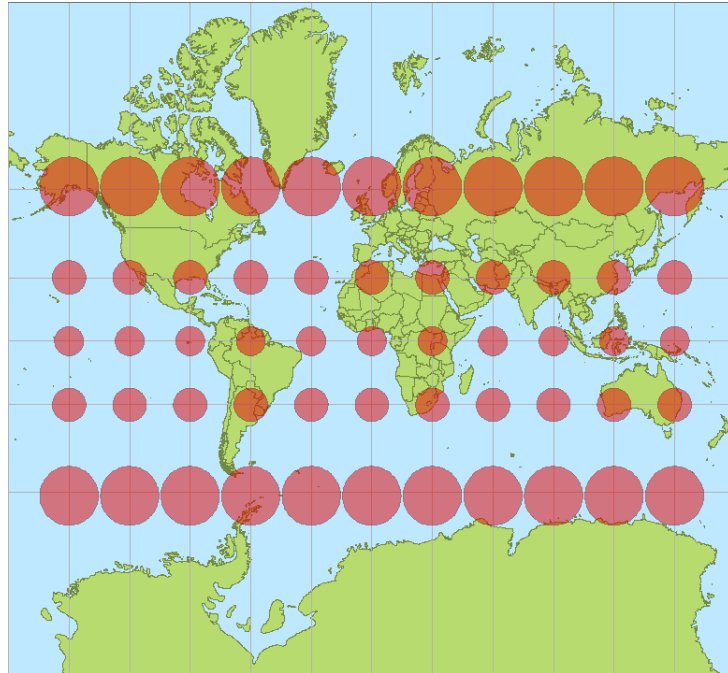


Figura A.2: Proiezione di Mercatore

Vengono conservati gli angoli a scapito di cambiamenti di area dei patch
 Fonte: http://it.wikipedia.org/wiki/File:Tissot_mercator.png

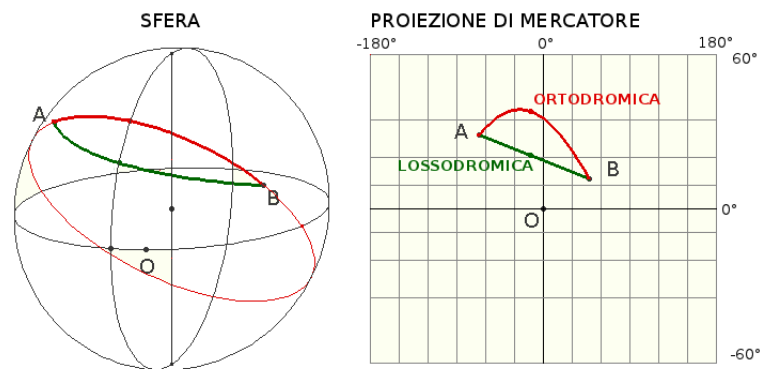


Figura A.3: Ortodromia e Lossodromia

La caratteristica principale di tale proiezione è che la distanza euclidea tra l'origine ed un qualsiasi altro punto sulla mappa, corrisponde alla distanza geodetica tra tali punti sulla sfera.

I paralleli appaiono come dei cerchi equidistanti, la distorsione delle aree cresce con l'allontanarsi dall'origine, fino a diventare infinita al polo opposto, che non

può essere rappresentato.

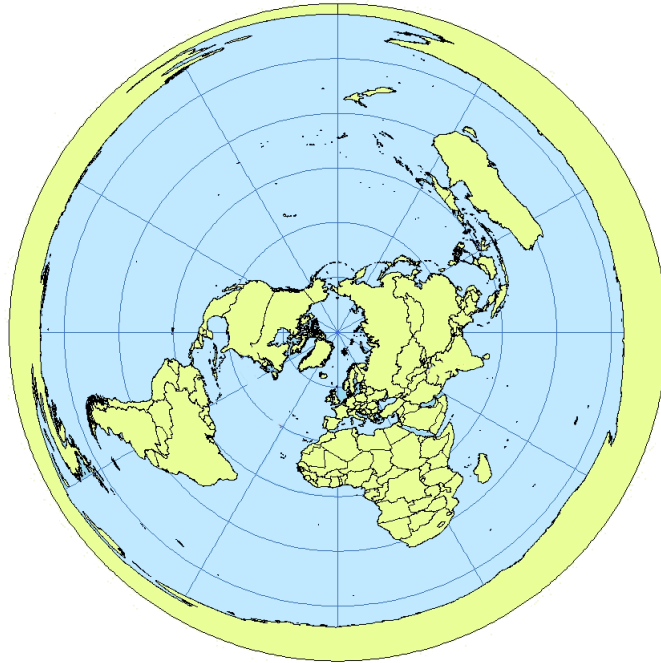


Figura A.4: Proiezione equidistante azimutale polare

Le funzioni f e g che legano le coordinate geografiche alle cartesiane (x, y) , sono:

$$f(\lambda, \phi) = R\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \cos \phi \quad g(\lambda, \phi) = R\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \sin \phi$$

In geometria differenziale l'inversa di tale mappa è detta esponenziale.

Elenco delle figure

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Configurazione odierna placche | 10 |
| 1.2 | Struttura interna della terra | 11 |
| 1.3 | Margini di placca | 13 |
| 1.4 | Inversioni di polarità negli ultimi 30 milioni di anni. | 14 |
| 1.5 | Anomalie magnetiche | 15 |
| 1.6 | Età crosta oceanica | 16 |
| 1.7 | Schematizzazione giustapposizione isocrone | 17 |
| 2.1 | Coordinate geografiche | 21 |
| 2.2 | Triangolo sferico | 23 |
| 2.3 | Mappa Esponenziale | 23 |
| 2.4 | Composizione rotazioni | 28 |
| 2.5 | Relazioni triangolo sferico | 29 |
| 3.1 | Modello a una rotazione | 33 |
| 3.2 | Subrotazione Placca | 34 |
| 3.3 | Modello con subrotazione | 37 |
| 3.4 | Posizione, angolo di rotazione ed età poli di Eulero placca europea | 38 |
| 4.1 | Media sferica Estrinseca ed Intrinseca | 41 |
| 4.2 | Media Intrinseca su S^1 | 43 |
| 4.3 | Regressione arco sferico. | 45 |
| 4.4 | Regressione arco sferico - Numero iterazioni algoritmi | 46 |
| 4.5 | Regressione arco sferico - tempi esecuzione | 46 |
| 4.6 | Stime cerchio non rappresentative | 47 |
| 4.7 | Regressione temporale sul cerchio minore. | 50 |
| 4.8 | Regressione temporale sul cerchio minore e “Initial guess”. | 51 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.9 | Approssimazione per la minimizzazione. | 52 |
| 4.10 | Approssimazione algoritmo. | 53 |
| 4.11 | Confronto algoritmi | 54 |
| 5.1 | Valori di $ R $ al variare di σ | 57 |
| 5.2 | Distanza geodetica della media geodetica dal centro del cerchio stimato | 58 |
| 5.3 | Media campionaria di $ R $ al variare di σ | 59 |
| 5.4 | Distribuzione empirica di $ R $ al variare di σ | 60 |
| 5.5 | Media campionaria di $ R $ al variare di n | 60 |
| 5.6 | Distribuzione empirica di $ R $ al variare di n | 61 |
| 5.7 | Errore di approssimazione di $E[R]$ | 62 |
| 5.8 | Densità di R | 64 |
| 5.9 | Densità di P | 65 |
| 5.10 | Correlazione v.a. X e Y | 66 |
| 6.1 | Permutazioni dati distribuiti attorno ad un polo (rosso), set di dati non permutato (blu), media geodetica (nero) | 71 |
| 6.2 | Permutazioni dati distribuiti attorno ad un arco sferico (rosso), set di dati non permutato (blu), media geodetica (nero) | 72 |
| 6.3 | Istogrammi p -value al crescere di r | 74 |
| 7.1 | Stima algoritmo regressione temporale: in verde polo di rotazione principale, cerchio rosso traiettoria polo composizione, punti blu osservazioni (pieno prima osservazione), punti rossi stima osserva- zione sulla traiettoria (pieno prima osservazione) | 79 |
| 7.2 | Scomposizione moto: in verde polo di rotazione principale, ar- co nero luogo dei poli di subrotazione, arco rosso luogo dei poli composizione, in blu data set originale. | 80 |
| 7.3 | Modello a una rotazione: in verde polo di rotazione (media geode- tica dei dati), in blu data set. | 81 |
| 7.4 | Modelli cinematici applicati al continente africano | 83 |
| 7.5 | Stima algoritmo regressione temporale: in verde polo di rotazione principale, cerchio rosso traiettoria polo composizione, punti blu osservazioni (pieno prima osservazione), punti rossi stima osserva- zione sulla traiettoria (pieno prima osservazione) | 85 |

| | | |
|------|---|-----|
| 7.6 | Scomposizione moto: in verde polo di rotazione principale, arco nero luogo dei poli di subrotazione, arco rosso luogo dei poli composizione, in blu data set originale. | 86 |
| 7.7 | Modelli cinematici applicati al continente europeo | 87 |
| 7.8 | Stima algoritmo regressione temporale: in verde polo di rotazione principale, cerchio rosso traiettoria polo composizione, punti blu osservazioni (pieno prima osservazione), punti rossi stima osservazione sulla traiettoria (pieno prima osservazione) | 89 |
| 7.9 | Scomposizione moto: in verde polo di rotazione principale, arco nero luogo dei poli di subrotazione, arco rosso luogo dei poli composizione, in blu data set originale. | 90 |
| 7.10 | Modelli cinematici applicati alla penisola iberica | 91 |
| A.1 | Proiezione equivalente sinusoidale | 99 |
| A.2 | Proiezione di Mercatore | 100 |
| A.3 | Ortodromia e Lossodromia | 100 |
| A.4 | Proiezione equidistante azimutale polare | 101 |

Bibliografia

- Banerjee, S., Carlin, B., Gelfand, A., 2004. Hierarchical modeling and analysis for spatial data. Vol. 101. Chapman & Hall/CRC.
- Bar, C., 2010. Elementary differential geometry. Cambridge Univ Pr.
- Boothby, W., 1986. An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Vol. 120. Elsevier.
- Buss, S., Fillmore, J., 2001. Spherical averages and applications to spherical splines and interpolation. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 20 (2), 95–126.
- Crespi, M., Cuffaro, M., Doglioni, C., Giannone, F., Riguzzi, F., 2007. Space geodesy validation of the global lithospheric flow. *Geophysical Journal International* 168 (2), 491–506.
- Cronin, V., 1987. Cycloid kinematics of relative plate motion. *Geology* 15 (11), 1006.
- Cronin, V., 1991. The cycloid relative-motion model and the kinematics of transform faulting. *Tectonophysics* 187 (1-3), 215–249.
- Cuffaro, M., Caputo, M., Doglioni, C., 2008. Plate subrotations. *Tectonics* 27 (4), TC4007.
- DeMets, C., Gordon, R., Argus, D., 2010. Geologically current plate motions. *Geophysical Journal International* 181 (1), 1–80.
- Fisher, N., Lewis, T., Embleton, B., 1993. Statistical analysis of spherical data. Cambridge Univ Pr.

- Fletcher, P., 2004. Statistical variability in nonlinear spaces: Application to shape analysis and DT-MRI. University of North Carolina at Chapel Hill Chapel Hill, NC, USA.
- Greiner, B., 1999. Euler rotations in plate-tectonic reconstructions. *Computers Geosciences* 25 (3), 209–216.
- Heirtzler, J., Dickson, G., Herron, E., Pitman III, W., Le Pichon, X., 1968. Marine magnetic anomalies, geomagnetic field reversals, and motions of the ocean floor and continents. *Journal of Geophysical Research* 73 (6), 2119–2136.
- In, H., 1950. *Classical mechanics*.
- Jung, S., Dryden, I., Marron, J., 2010. Analysis of principal nested spheres. Submitted in *Biometrika*.
- Jung, S., Foskey, M., Marron, J., 2011. Principal arc analysis on direct product manifolds. *The Annals of Applied Statistics* 5 (1), 578–603.
- Kearey, P., Klepeis, K., Vine, F., 2009. *Global tectonics*. Blackwell Pub.
- Kirkwood, B., Royer, J., Chang, T., Gordon, R., 1999. Statistical tools for estimating and combining finite rotations and their uncertainties. *Geophysical Journal International* 137 (2), 408–428.
- Klous, W., Tilling, R., 1996. *This dynamic Earth: the story of plate tectonics*. DIANE Publishing.
- Minster, J., Jordan, T., Molnar, P., Haines, E., 1974. Numerical Modelling of Instantaneous Plate Tectonics*. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 36 (3), 541–576.
- Nocedal, J., Wright, S., 1999. *Numerical optimization*. Springer verlag.
- Pesarin, F., Salmaso, L., 2010. *Permutation tests for complex data: theory, applications and software*. John Wiley & Sons Inc.
- Petit, G., 2010. IERS Conventions (2010). Tech. rep., BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES SEVRES (FRANCE).

- Rosenbaum, G., Lister, G., Duboz, C., 2002. Relative motions of Africa, Iberia and Europe during Alpine orogeny. *Tectonophysics* 359 (1-2), 117–129.
- Snyder, J., 1987. *Map projections—a working manual*. No. 1395. USGPO.
- Srivastava, A., Klassen, E., 2002. Monte carlo extrinsic estimators of manifold-valued parameters. *Signal Processing, IEEE Transactions on* 50 (2), 299–308.
- Vine, F., Matthews, D., 1963. Magnetic anomalies over mid-ocean ridges. *Nature* 199, 947–949.