

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale

Dipartimento di Ingegneria Strutturale



MICROATTUATORI ELETTROSTATICI E  
PIEZOELETTRICI PER LA REALIZZAZIONE DI  
MICROPOMPE

RELATORI: Prof. Alberto CORIGLIANO

Dott. Ing. Raffaele ARDITO

CORRELATORE: Dott. Ing. Emanuele BERTARELLI

Tesi di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile di:

Giacomo GAFFORELLI Matr. n. 748897

Anno Accademico 2010 – 2011



*“A man lies in his bed in a room with no door  
He waits, hoping for a presence, something, anything to enter  
After spending half his life searching, he still felt as blank  
As the ceiling at which he started  
He’s alive, but feels absolutely nothing  
So, is he?”*

*When he was six he believed that the moon overhead followed him  
By nine, he had deciphered the illusion, trading magic for fact  
No trade-backs...  
So this is what it’s like to be an adult  
If he only knew now what he knew then..*

*I’m open...I’m open...Come in... Come in... Come in... Come in...*

*I’m open...I’m open...Come in... Come in... Come in... Come in...*

*Lying sideways atop crumpled sheets and no covers he decides to dream..  
Dream up a new self...for himself”*



*“Nessuno di noi, infatti, vive per se stesso e nessuno muore per se stesso, perché se noi viviamo, viviamo per il Signore, se noi moriamo, moriamo per il Signore.*

*Sia che viviamo, sia che moriamo, siamo dunque del Signore”*



# Indice

<b>1. Introduzione .....</b>	<b>7</b>
1.1 Motivazioni.....	9
1.2 Oggetto dell'elaborato .....	10
<b>2. Microattuatori.....</b>	<b>13</b>
2.1 Microsistemi e Bio-microsistemi.....	15
2.1.1 Microsistemi.....	15
2.1.2 Bio-microsistemi.....	16
2.2 Microattuatori Elettrostatici e Piezoelettrici.....	18
2.2.1 Attuatori elettrostatici .....	18
2.2.2 Attuatori piezoelettrici .....	20
2.3 Trasporto di fluido alla microscala.....	23
2.3.1 Micropompe .....	23
2.3.2 Applicazioni .....	24
2.3.3 Classificazioni.....	27
2.4 Microattuatori utilizzati per la progettazione di una micropompa .....	41
2.4.1 Introduzione .....	41
2.4.2 Descrizione del dispositivo e del suo funzionamento.....	42
<b>3. Attuazione elettrostatica .....</b>	<b>49</b>
3.1 Introduzione al problema elettro-meccanico .....	51
3.2 Teoria cinematica della piastra alla <i>Reissner-Mindlin</i> .....	57
3.2.1 Ipotesi cinematiche .....	57
3.2.2 Principio dei lavori virtuali applicato alla piastra assialsimmetrica con carichi elettrostatici .....	60
3.3 Formulazione ad elementi finiti per la soluzione del problema di piastra soggetta a carichi elettrostatici.....	64
3.3.1 Il fenomeno dello “ <i>shear locking</i> ” .....	68

---

3.3.2	Algoritmo per la soluzione del problema di piastra con sollecitazione elettrostatica .....	72
3.4	Validazione del codice ad elementi finiti.....	74
3.5	Studio parametrico .....	80
<b>4.</b>	<b>Attuazione piezoelettrica .....</b>	<b>93</b>
4.1	Materiali piezoelettrici .....	95
4.1.1	Problema piano negli sforzi ( <i>Plane stress</i> ).....	99
4.2	Teoria classica dei laminati applicata a materiali piezoelettrici ( <i>Modified Classical Lamination Theory: MCLT</i> ).....	102
4.3	Formulazione ad elementi finiti per il problema piezoelettrico.....	107
4.4	Soluzione analitica della piastra alla <i>Mindlin</i> .....	109
4.4.1	Integrazione dell'equazione di equilibrio alla traslazione verticale .....	110
4.4.2	Integrazione dell'equazione di equilibrio sul momento .....	111
4.5	Validazione del codice .....	114
4.5.1	Piastra assialsimmetrica stratificata incastrata al bordo con carico uniformemente distribuito .....	114
4.5.2	Piastra assialsimmetrica stratificata appoggiata al bordo con carico uniformemente distribuito.....	116
4.5.3	Piastra assialsimmetrica stratificata appoggiata al bordo con deformazione piezoelettrica .....	119
4.6	Piastra incastrata con materiale piezoelettrico nella parte centrale.....	123
4.7	Studio parametrico .....	133
<b>5.</b>	<b>Confronto tra attuazione elettrostatica e piezoelettrica .....</b>	<b>139</b>
5.1	Confronto tra le tipologie di attuazione .....	141
5.2	Limitazione del voltaggio applicato.....	147
<b>6.</b>	<b>Dinamica della piastra .....</b>	<b>151</b>
6.1	Introduzione .....	153
6.2	Attuazione Elettrostatica .....	154

6.2.1	Applicazione al caso elettrostatico del metodo alfa per l'integrazione nel tempo di problemi dinamici.....	154
6.2.2	Matrice delle masse.....	160
6.2.1	Analisi modale .....	162
6.2.2	Matrice di smorzamento alla Rayleigh .....	168
6.2.3	Analisi dinamiche della piastra.....	170
6.3	Attuazione Piezoelettrica.....	181
6.3.1	Applicazione al caso piezoelettrico del metodo alfa per l'integrazione nel tempo di problemi dinamici.....	181
6.3.2	Matrice delle masse.....	185
6.3.3	Analisi modale .....	187
6.3.4	Matrice di smorzamento alla Rayleigh .....	191
6.3.5	Analisi parametriche .....	191
<b>7.</b>	<b>Analisi fluido-meccaniche .....</b>	<b>199</b>
7.1	Introduzione.....	201
7.2	Analisi fluido-meccaniche quasi-statiche.....	203
7.2.1	Formulazione ad elementi finiti del problema fluido bidimensionale .....	203
7.2.2	Analisi e risultati .....	206
7.3	Analisi fluido-struttura dinamiche.....	210
<b>8.</b>	<b>Conclusioni .....</b>	<b>211</b>
8.1	Risultati ottenuti .....	213
8.2	Sviluppi futuri.....	215
<b>9.</b>	<b>Bibliografia.....</b>	<b>217</b>



# Abstract

Il presente lavoro riguarda lo studio meccanico-strutturale di piastre sottili inserite all'interno di micropompe realizzate allo scopo di spostare piccole quantità di fluido. Sono state considerate nel lavoro due diverse tecniche attuative, elettrostatica e piezoelettrica per la movimentazione delle piastre.

Lo scopo principale del lavoro è valutare l'efficienza dell'una e dell'altra soluzione confrontando la potenza necessaria per pompare un certo volume di fluido (*stroke volume*). Nella prima parte dell'elaborato si presentano le numerose tecniche di attuazione per i microsistemi ponendo l'attenzione sulle caratteristiche peculiari delle tecniche attuative elettrostatica e piezoelettrica.

In seguito si studia da un punto di vista meccanico l'attuazione della membrana, realizzando analisi meccaniche quasi-statiche al variare dei parametri tipici delle due configurazioni di progetto considerate: spessore della membrana, distanza tra elettrodi e spessore dello strato piezoelettrico. Per questo si è programmato un codice scritto in linguaggio *Matlab* in cui si implementa la risoluzione dei problemi semi-accoppiati elettro-meccanico e piezo-meccanico.

Il confronto tra le due tecniche porta a concludere che per pompare i medesimi volumi di fluidi la micropompa elettrostatica deve lavorare a frequenze maggiori di quella piezoelettrica. In letteratura è riportato che il legame tra portata e frequenza è lineare solamente a basse frequenze. Per questa ragione si è deciso di indagare il comportamento dinamico della piastra implementando nel codice il *metodo alfa* per la risoluzione nel tempo di problemi dinamici.

Nell'ultima parte del lavoro si introduce un primo semplificato accoppiamento tra il problema meccanico e quello fluido. Si implementa nel codice la risoluzione bidimensionale del problema fluido mediante un modello individuato in letteratura e si presentano i risultati delle analisi quasi-statiche accoppiate. Da ultimo si introduce il problema completo dinamico elettro-fluido-meccanico mettendo in luce le problematiche legate alla modellazione completa del sistema micropompa.



# **1. Introduzione**



### 1.1 Motivazioni

Il presente lavoro di tesi si inserisce all'interno delle ricerche riguardanti i microsistemi in corso presso il Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Milano a partire dal 2002. I microsistemi o micro sistemi elettro meccanici (*Micro Electro Mechanical Systems, MEMS*) sono dispositivi complessi di dimensioni estremamente ridotte prodotti con tecnologie simili a quelle utilizzate per i microcircuiti che abbinano funzioni elettroniche a funzioni meccaniche ottenute mediante spostamento e deformazione di vere e proprie micro-strutture.

La ricerca nel campo dei microsistemi è stata oggetto di un notevole sviluppo negli ultimi 20 anni a causa dell'introduzione di tali dispositivi nel mercato di grande consumo. Ad oggi microsistemi sono presenti in moltissimi oggetti comunemente utilizzati dal consumatore medio, si citano ad esempio gli *smartphone* in cui sono presenti accelerometri e giroscopi. Le applicazioni sono numerose e in continua evoluzione, negli ultimi anni si registrano sviluppi legati in modo particolare all'ambito bio-medico, a quello del recupero di energia (*Energy harvesting*) e più recentemente in ambito strutturale per il monitoraggio di strutture ed infrastrutture. La ricerca legata a questo genere di dispositivi si è molto sviluppata negli ultimi anni e richiede una forte multidisciplinarietà, sono infatti richieste competenze in meccanica dei solidi, elettronica, fisica, chimica, meccanica dei fluidi. La necessità di comprendere fenomeni legati a più discipline e la loro interazione è ciò che rende complesso lo sviluppo dei micro-dispositivi ma anche ciò che muove l'interesse di numerosi ricercatori nel mondo.

La presente tesi riguarda lo sviluppo di un progetto legato alla realizzazione di una micropompa, attuata elettrostaticamente, per la somministrazione di insulina in persone affette da diabete, tale progetto è stato avviato con la tesi di dottorato di (Bertarelli, 2011). Obiettivi principali del presente lavoro di tesi sono: la completa comprensione del meccanismo di funzionamento di dispositivi nei quali si hanno piastre-membrane adibite allo spostamento di piccole quantità di fluido; lo studio di soluzioni alternative in termini di sistemi di micro-attuazione; la modellazione meccanica della risposta di piastre inserite in schemi di attuazione elettrostatica o piezoelettrica. L'attenzione maggiore è rivolta agli aspetti meccanico-strutturali del dispositivo legati alla movimentazione della membrana-piastra all'interno della micropompa.

---

## 1.2 Oggetto dell'elaborato

Nella prima parte dell'elaborato, capitolo 2, sono presentate le numerose tecniche di attuazione per i microsistemi con lo scopo di valutare per ciascuna di esse l'integrazione col dispositivo in esame ed i relativi vantaggi e svantaggi da un punto di vista meccanico. In letteratura è presente una quantità notevole di soluzioni riguardanti l'attuazione dei microsistemi e in particolare delle micropompe. Tra queste l'attuazione elettrostatica e piezoelettrica sembrano essere le più efficienti in termini di potenza impiegata, spostamenti generati e dimensioni dell'attuatore.

Nei capitoli successivi, 3 e 4, si studia da un punto di vista meccanico l'attuazione della membrana, realizzando analisi meccaniche quasi-statiche al variare dei parametri tipici delle due configurazioni progettuali considerate: spessore della membrana e distanza tra elettrodi per l'attuazione elettrostatica, spessore della membrana e dello strato piezoelettrico per l'attuazione piezoelettrica. Per questo si è programmato un codice scritto in linguaggio *Matlab* in cui si implementa la risoluzione dei problemi semi-accoppiati elettro-meccanico e piezo-meccanico. In questa prima parte si identificano inoltre i parametri descrittivi del comportamento della piastra che saranno in seguito utilizzati come parametri di confronto tra le due diverse soluzioni: il volume massimo di fluido trasportabile in un ciclo di carico (*stroke volume*:  $v_s$ ), lo spostamento massimo nel centro della piastra ( $f_m$ ) e la potenza necessaria per l'attuazione del dispositivo ( $P$ ). Nel capitolo 5 si procede con il confronto delle due diverse tecniche attuative mettendo in evidenza il fatto che, a parità di frequenza, la micropompa elettrostatica necessita di minor potenza, ma maggior voltaggio, di quella piezoelettrica per pompare il medesimo volume di fluido. Per ragioni di sicurezza dell'utente e di integrità del dispositivo si suppone di limitare la differenza di potenziale massima tra gli elettrodi delle pompe. Così facendo è necessario che la micropompa elettrostatica lavori a una frequenza maggiore rispetto a quella piezoelettrica per garantire il pompaggio del medesimo volume di fluido.

In letteratura è riportato che il legame tra portata e frequenza è lineare solamente a basse frequenze. Superato un valore limite di frequenza propria del sistema all'aumentare della frequenza la portata diminuisce per effetto della massa del fluido trasportato che smorza l'oscillazione della membrana. Al di sopra di tale limite le analisi riportate nei capitoli 3 e 4, svolte nell'ipotesi che il movimento della membrana sia quasi-statico, perdono validità. Per questa ragione nel capitolo 6 si è deciso di indagare il comportamento dinamico della piastra implementando nel codice il *metodo*

*alfa* ideato da Hughes ed altri per la risoluzione di problemi dinamici. In questa parte del lavoro si trascura la presenza del fluido limitandosi ad un'indagine dinamica del solo dominio solido mettendo in evidenza l'influenza della frequenza della forzante esterna e dello smorzamento sulla risposta del sistema. Nell'ultima parte dell'elaborato, capitolo 7, si introduce una prima semplificata interazione tra fluido e struttura valida sotto ipotesi limitative. Il fluido è modellato in 2D attraverso un modello preso dalla letteratura (*Hele-Show, 1898*) che suppone il fluido come una funzione parabolica nello spessore dello strato. Quest'ipotesi permette di introdurre un accoppiamento tra il problema meccanico e quello fluido ma ha validità solamente per analisi quasi-statiche. Da ultimo si introduce il problema completo dinamico elettro-fluido-meccanico mettendo in luce le problematiche legate alla modellazione in linguaggio *Matlab* e con codici commerciali (*Abaqus*) del sistema micropompa. Nel capitolo 8 si presentano i risultati ottenuti e gli sviluppi futuri necessari per proseguire la ricerca a proposito dell'attuazione delle micropompe.



## **2. Microattuatori**



### 2.1 Microsistemi e Bio-microsistemi

#### 2.1.1 Microsistemi

I microsistemi o Micro Electro Mechanical Systems (MEMS) sono dei dispositivi che hanno lunghezze caratteristiche comprese tra  $1\mu m$  ( $10^{-6}m$ ) e  $1mm$  ( $10^{-3}m$ ) che combinano componenti meccaniche ed elettroniche e che sono fabbricati sfruttando la medesima tecnologia degli Integrated Circuit (ICs) (Gad-el-Hak, 1999). L'innovazione dei MEMS consiste nel reinventare dispositivi fino a qualche anno fa costruiti con svariate tecnologie, sfruttando la tecnologia di fabbricazione degli ICs. Tale tecnologia permette la fabbricazione di dispositivi molto precisi e affidabili sfruttando tecniche ben conosciute e macchinari ormai in disuso per l'avvento di tecnologie sub-micrometriche nel campo della microelettronica. Inoltre la produzione su grande scala, naturale per questo tipo di fabbricazione, permette di ridurre il prezzo di dispositivi che sarebbero molto costosi.

Nell'arco degli ultimi vent'anni sono stati presentati innumerevoli dispositivi di qualunque genere e appartenenti a svariati campi, da sensori ad attuatori fino a sistemi di trattamento di fluidi. L'ampiezza delle applicazioni è dovuta alla possibilità di integrare facilmente parti elettroniche e meccaniche inserendo un *microcontroller* nel medesimo dispositivo. In questo modo si ha la possibilità di creare sistemi capaci di interagire con l'ambiente leggendo dati e agendo di conseguenza. In questo senso gli "occhi" e le "braccia" del dispositivo MEMS agiscono guidate dal "cervello" costituito dal sistema microelettronico integrato. In molte applicazioni il sensore acquisisce informazioni dall'ambiente misurando fenomeni meccanici, termici, biologici, chimici, magnetici e ottici. L'informazione proveniente dal sensore è processata dal sistema elettronico che definisce la risposta dall'attuatore (Cacchione, 2007).

I primi dispositivi elettro-meccanici sono stati proposti alla fine degli anni 60. Nel 1967 fu proposto un transistor in silicio (Nathanson et al., 1967), dieci anni dopo fu presentato il primo accelerometro (Roylance e Angell, 1978). Per vedere il primo dispositivo fabbricato con la tecnica degli Integrated circuit, occorre aspettare Petersen nell'82 che introdusse il concetto di silicio come materiale meccanico (Petersen, 1982).

Gli anni novanta sono stati scenario di un progresso rapido e aperto a numerosi ambiti del mondo dei microdispositivi. Il progresso è dovuto al passaggio dalla ricerca al mondo dell'industria

con l'inizio della produzione su grande scala. Si sono prodotti i primi accelerometri, i giroscopi e i sensori di pressione con applicazioni che vanno dall'automobile, all'aeronautica, al campo biomedico fino al mercato di grande consumo (*consumer markets*). L'esempio più immediato riguarda le testine delle stampanti (*inkjet heads*) che negli ultimi venti anni con il passaggio alla tecnologia MEMS sono state oggetto di uno sviluppo notevole.

### 2.1.2 Bio-microsistemi

Nelle ultime due decadi la tecnologia MEMS è stata applicata ai bisogni dell'industria biomedica con la nascita dei Biological Micro Electro Mechanical Systems (BioMEMS). Essi possono essere definiti come MEMS che si interfacciano con un ambiente biologico e sono costruiti per interagire con esso (Grayson et al., 2004).

Questi dispositivi combinano molti componenti come ad esempio microcanali, micropompe, microvalvole, micromixers, microreattori, microaghi, sensori, e tanti altri. Sono pensati per svariate applicazioni come la manipolazione e l'analisi di campioni di fluidi biologici o la somministrazione di piccole quantità di medicinali (Bertarelli, 2011). Altri ambiti di studio che si stanno percorrendo in questi anni riguardano la microchirurgia e svariate e particolari applicazioni riportate in tabella:

<p><b>Microfluidics Chips:</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Micro total analysis systems (<math>\mu</math>-TAS)</li> <li>· Lab-on-a-chip (LOC)</li> <li>· Polymerase chain reaction (PCR)</li> <li>· Proteomics</li> <li>· Single-cell analysis and manipulation</li> <li>· Single-molecule analysis and manipulation</li> <li>· Pharmaceutical analysis</li> </ul>
<p><b>Drug Delivery:</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· External or implantable devices for the treatment of chronic diseases (diabetes, neurological disorders, ...)</li> <li>· Localized drug administration</li> <li>· Pain management</li> </ul>

**Tabella 2.1-a:** Applicazioni per dispositivi BioMEMS (da Bertarelli, 2011)

<b>Interface and Operation:</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>· Implantable pressure sensors</li><li>· Implantable biochemical sensors</li><li>· Neural electrodes</li><li>· Minimally invasive system (MIS)</li><li>· Surgical tools</li><li>· Robotic surgery</li><li>· Tactile feedback</li><li>· Instrumented catheters</li><li>· Rehabilitation systems</li><li>· Retina implants</li></ul>
---------------------------------	--

**Tabella 2.2-b:** Applicazioni per dispositivi BioMEMS (da Bertarelli, 2011)

Lo sviluppo dei BioMEMS sta procedendo più lentamente rispetto a quello che è stato l'avvento dei MEMS. Questo è dovuto alle notevoli difficoltà sorte dall'interazione tra diversi ambienti di lavoro e non meno dalle dimensioni che portano problematiche che alla macroscale non sono di interesse.

Il design di oggetti come sono i BioMEMS coinvolge ingegneria, scienza dei materiali, biologia, chimica e scienze mediche. L'interazione tra diverse scienze è forse la sfida più difficile ma anche più interessante che stanno affrontando molti ricercatori in Europa e non solo. Inoltre una sfida nuova sorta con i BioMEMS riguarda l'esigenza della biocompatibilità, occorre quindi ripensare il campo dei materiali utilizzabili secondo l'applicazione particolare (Kotzar et al., 2002). La biocompatibilità del silicio è stata negli ultimi anni molto studiata, ed è possibile affermare con relativa sicurezza che è garantita. Rimangono come questioni aperte la biocompatibilità del silicio dopato, usato per ottenere le proprietà elettriche necessarie per l'attuazione, e la sterilità del dispositivo finale. Questi argomenti devono essere fatti oggetto di uno studio esaustivo nei prossimi anni per garantire uno sviluppo delle applicazioni dei BioMEMS.

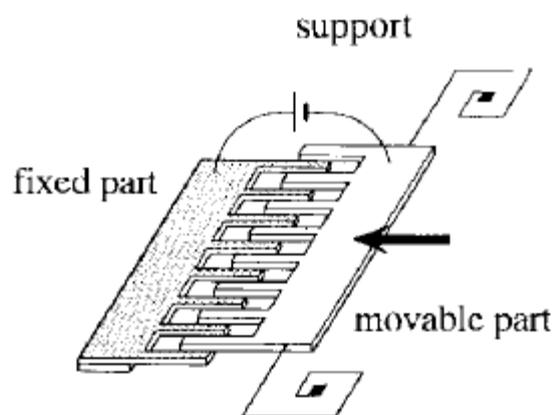
---

## 2.2 Microattuatori Elettrostatici e Piezoelettrici

### 2.2.1 Attuatori elettrostatici

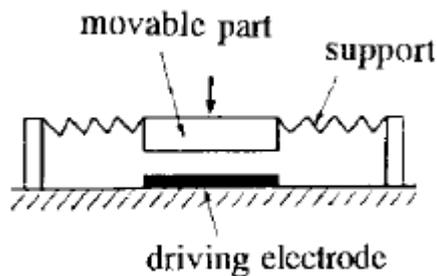
La grande innovazione dei MEMS è legata alla possibilità di produrre movimento meccanico a scale molto piccole. Per ottenere la microattuazione di questi dispositivi sono state proposte numerose tecniche che includono metodi elettrostatici, elettromagnetici, ultrasonici, idraulici e termici. Inoltre si è da subito sfruttata le proprietà di alcuni materiali (in particolare piezoelettrici) che sono capaci di trasformare energia elettrica in meccanica e viceversa. L'attuazione può essere sia esterna, tramite un elemento aggiuntivo al dispositivo, o interna, in cui l'attuatore è incorporato al dispositivo stesso. Non tutte le tecniche attuative proposte in letteratura sono adatte per un'integrazione con i processi di fabbricazione ICs.

La tecnica più sfruttata è stata quella elettrostatica perché non necessita particolari modifiche al processo di fabbricazione ICs e non è affetta da problematiche legate alla scalabilità. D'altra parte per ottenere spostamenti rilevabili, è necessario combinare diversi attuatori in complesse serie come avviene nei comuni sistemi di condensatori a pettini interdigitali (*comb-finger*) (Lee et al., 1997). Le applicazioni di queste tecniche sono numerose e sono utilizzate in tutti i campi che necessitano la presenza di microdispositivi: ottica, sistemi di comunicazione, microelettronica, medicina, sistemi di precisione (Behjat e Vahedi, 2007). Il tipico meccanismo *comb-finger* è riportato in **Figura 2.1**, all'applicazione di voltaggio la parte mobile del meccanismo si muove linearmente all'interno dell'altra. Le figure seguenti sono tratte da (Fujita, 1998).



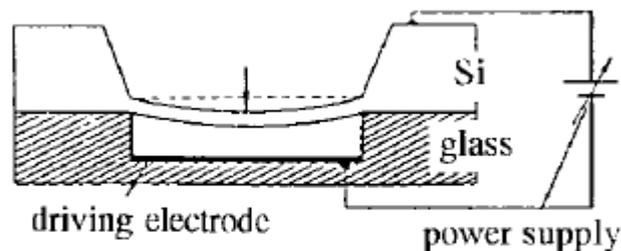
**Figura 2.1:** Schema di un attuttore Combs-fingers (da Fujita, 1998)

Sono stati presentati diversi possibili design che sfruttano l'attrazione elettrostatica per muovere parti di sistemi. Oltre ai già citati combs-fingers, si sono trovati in letteratura sistemi a piatti mobili, il cui movimento avviene parallelamente alle linee del campo elettrico (Hao e Liu, 2009).



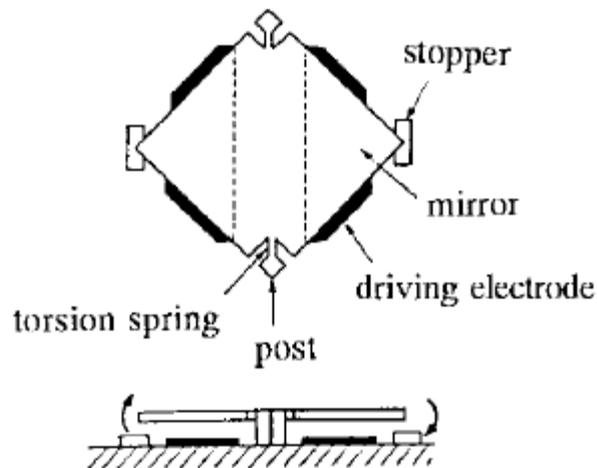
**Figura 2.2:** Schema di un attuttore elettrostatico a piatti paralleli (da Fujita, 1998)

Un'altra tipologia di attuatori elettrostatici consiste nei condensatori con piatto deformabile. Nel seguito del lavoro, al capitolo 2.3.3, saranno trattati con maggior approfondimento perché sono la tecnica principale di attuazione per le micropompe.



**Figura 2.3:** Schema di un attuttore elettrostatico a membrana deformabile (da Fujita, 1998)

Grande importanza hanno anche gli attuatori elettrostatici torsionali utilizzati per il posizionamento di microspecchi (Ma et al., 2011). La grande utilità di tale attuazione per dispositivi di questo genere consiste, oltre che nella possibilità di essere facilmente integrata nel processo di fabbricazione e di consumare poca potenza, nel fatto di avere fattori di riempimento (*fill factor*) molto elevati.



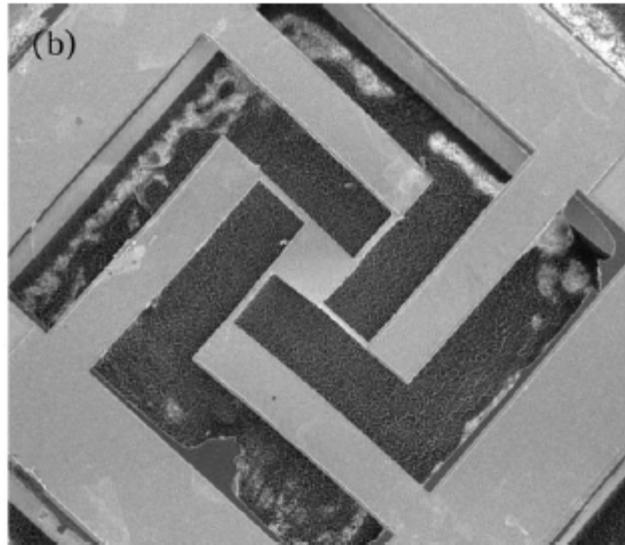
**Figura 2.4:** Schema di un attuttore elettrostatico torsionale (da Fujita, 1998)

### 2.2.2 Attuatori piezoelettrici

L'altra grande categoria di attuatori che sfrutta la corrente elettrica come ingresso per generare movimento meccanico è quella degli attuatori piezoelettrici. I materiali piezoelettrici, approfonditi da un punto di vista elettromeccanico nel seguito dell'elaborato al capitolo 4, si deformano se attraversati da una corrente elettrica e se deformati generano una corrente elettrica al loro interno. Essi sono naturalmente la sintesi di ciò che accade in un dispositivo elettromeccanico e per questa ragione sono stati notevolmente sfruttati all'interno dei dispositivi MEMS.

Nella review di (Maeda et al., 2004) si prendono in considerazione le numerose applicazioni degli attuatori piezoelettrici classificandoli per la loro geometria. Si distinguono due tipologie: gli attuatori a mensola (*cantilever*) e quelli compatti (*bulk*). In questa parte di lavoro si presentano in maniera introduttiva i campi di applicazione degli attuatori piezoelettrici, per un maggior approfondimento si rimanda alla review di Maeda.

Appartenenti al primo gruppo sono i micro-specchi, che hanno ricevuto un'attenzione particolare per le applicazioni nei sistemi ottici come i lettori di codici a barre o sistemi di posizionamento laser (**Figura 2.5**). Materiali piezoelettrici sono utilizzati anche nei microscopi atomici e nelle testine di lettura dei dischi rigidi (*hard disk drive heads*).



**Figura 2.5:** Microspecchio attuato piezoelettricamente con un doppio strato di PZT (*Lead zirconate titanate*)

Fino ad oggi gli attuatori piezoelettrici compatti, come per esempio pile e dischi piezoelettrici, sono stati usati in molte applicazioni. Per risolvere il problema dei bassi spostamenti s'incolla, con una colla epossidica, il materiale piezoelettrico a una membrana. L'accoppiamento tra una membrana, solitamente in silicio, e uno strato di materiale piezoelettrico permette di ottenere spostamenti maggiori così da rendere questa tecnica attraente per applicazioni tipo sistemi ultrasonici a fluido e micromiscelatori a onde acustiche. Per strati molto sottili di materiale piezoelettrico è necessario introdurre altre tecniche di fissaggio perché l'uso di un collante risulta impossibile. Si adottano tecniche di deposizione di PZT (lead zirconate titanate) grazie alle quali si possono raggiungere spessori anche inferiori al micron. Per tali dimensioni occorre però tenere in considerazione una differenza tra le caratteristiche elettromeccaniche alla macroscale e quelle alla microscale (Cho et al., 2005).

L'attuatore piezoelettrico a membrana è inoltre l'elemento principale delle micropompe piezoelettriche e sarà trattato più approfonditamente nel capitolo 4.

Attuatori piezoelettrici a membrana si trovano nei più svariati campi dei microdispositivi oltre che nella microfluidica. Altre promettenti applicazioni riguardano trasduttori e sistemi di generazione di energia (Frey et al., 2011) (Zhou et al., 2011) (Ritter, 2000) (Shung et al., 2007). I trasduttori piezoelettrici hanno un'impedenza acustica dello stesso ordine di grandezza di molti

---

solidi rigidi. Per questa ragione sono la scelta ideale per investigazioni non distruttive di tipo ultrasonico. Tuttavia quando si tratta con un dominio con proprietà acustiche simili a quelle dell'acqua, come per esempio tessuti umani o animali, la scelta dei trasduttori piezoelettrici risulta perdente a causa dell'elevata perdita di energia nel passaggio tra i due domini. Negli ultimi anni per ovviare a queste problematiche sono stati presentati trasduttori ultrasonici capacitivi (*CMUT*) (Doody et al., 2011).

L'attenzione maggiore degli ultimi anni rivolta ai materiali piezoelettrici riguarda sistemi di recupero di energia. Dispositivi che trasformano l'energia presente nell'ambiente in energia elettrica potrebbero portare all'aumento dell'autonomia dei dispositivi elettronici portatili o anche all'eliminazione delle batterie (Shaker e Salleh, 2010). L'articolo di (Khaligh et al., 2010) presenta una breve recensione delle tipologie di recupero di energia a quella data presentate. Egli divide in due categorie principali le tecnologie disponibili: quella piezoelettrica e quella elettromagnetica. All'interno di queste due macrocategorie si citano le tecniche di recupero energia dal movimento del corpo umano o dalla vibrazione di microtravi (tecniche piezoelettriche) e l'utilizzo di sistemi risonanti, vibranti e ibridi (tecniche elettromagnetiche).

I lavori di (Paradiso e Starner, 2005) e di (Roundy et al., 2003) riassumono le varie fonti di energia disponibili e mostrano l'efficienza di sistemi di conversione di energia da sistemi vibranti nei microsistemi. Tra le tecnologie disponibili l'uso dei materiali piezoelettrici è stato a questo scopo uno dei temi trattati con più interesse negli ultimi anni dato che questi materiali presentano densità di energia elevate e promettenti potenziali d'integrazione (Lallart et al., 2011).

Le applicazioni dei materiali piezoelettrici superano anche l'ambito dei microdispositivi. L'applicazione principale consiste nello smorzamento delle vibrazioni di sistemi elastici. Di fatto si utilizza alla macroscale il principio sfruttato per i microsistemi di recupero di energia per cui c'è trasferimento di energia dal sistema elastico a quello piezoelettrico, senza però che avvenga il recupero di energia (Guyomar et al., 2008) (Liang e Liao, 2009).

### 2.3 Trasporto di fluido alla microscala

La nascita dei BioMEMS ha dato luce ad un nuovo campo chiamato microfluidica. La microfluidica consiste nel design e nello sviluppo di micro dispositivi capaci di pompare, mescolare, monitorare e controllare piccoli volumi di fluido. Lo sviluppo di questi dispositivi si è velocemente allargato a una varietà di campi. I principali ambiti di applicazione sono le analisi chimiche e biologiche, drug delivery e la separazione di molecole come le analisi sul DNA. Inoltre la microfluidica è una componente essenziale per la precisione dei sistemi di controllo per l'automotive e l'ingegneria aerospaziale (Nisar et al., 2008).

La peculiarità della microfluidica consiste nel trattare fluidi che hanno numeri di Reynolds molto bassi a causa delle limitate dimensioni del dispositivo che interagisce col fluido. Numeri di Reynolds bassi significa linearizzare le equazioni di *Navier-Stokes* perché i termini inerziali possono essere trascurati rispetto a quelli viscosi. A questa semplificazione si aggiungono però fenomeni poco studiati che alla macroscala sono solitamente trascurati (Squires e Quake, 2005).

La microfluidica è un ambito di ricerca nuovo e l'interazione di questa scienza con la micromeccanica e la microelettronica sembra poter essere oggetto di ricerca di molti ricercatori per i prossimi anni.

#### 2.3.1 Micropompe

Elemento fondamentale dei dispositivi di microfluidica sono le micropompe. Esse sono il primo e il più sviluppato dei meccanismi necessari per il trattamento dei fluidi alla microscala come testimoniano le numerose reviews a questo riguardo: (Iverson e Garimella, 2008), (Laser e Santiago, 2004), (Woiias, 2005), (Zahn, 2007), (Amirouche et al., 2009). Oltre a queste si segnalano altre reviews che si concentrano su specifiche applicazioni: (Nisar et al., 2008), (Singhal et al., 2004), (Zhang et al., 2007), (Oh et Ahn., 2006) e (Amirouche et al., 2009).

Il sorprendente sviluppo di questi dispositivi è dovuto alla necessità sempre più pressante di saper trattare quantità di fluido molto piccole. I primi studi a riguardo indagano la tecnologia delle testine delle stampanti, già citata in precedenza. Lo sviluppo sensazionale si è avuto con l'avvento dei BioMEMS e con la necessità di operare su campioni di fluidi biologici (Zahn, 2007). Sviluppi molto recenti si allontanano dall'ambito biomedico pensando a sistemi di gestione termica di

---

componenti elettroniche di computer e dispositivi elettronici. Integrare sistemi di raffreddamento ai classici chip in silicio presuppone la presenza di un sistema pompante oltre al reticolo di microcanali accoppiati ai chip (Singhal et al., 2004).

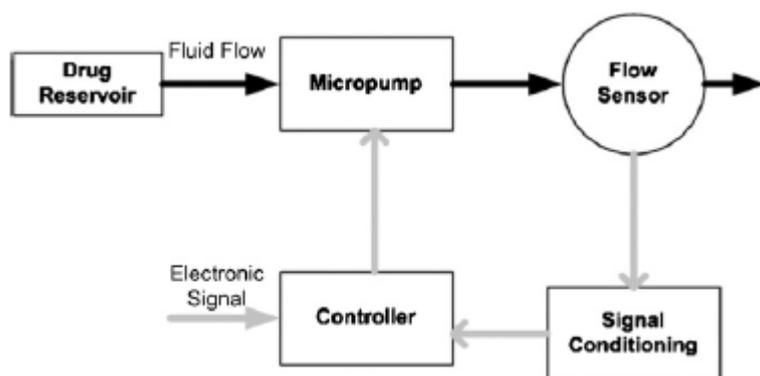
Per far fronte a tutte queste innumerevoli e varie esigenze sono state proposte nell'arco degli ultimi venti anni numerose soluzioni, ognuna delle quali fa fronte a particolari necessità. Nonostante lo sviluppo sia stato repentino e su larga scala, solamente negli ultimi anni ci si sta spostando verso il mercato vero e proprio. Le fondamentali esigenze odierne riguardano perciò la possibilità di fabbricare dispositivi in grande quantità a costi bassi sfruttando le proprietà di riproducibilità dei MEMS, mantenendo un livello di precisione e affidabilità molto alto per via delle applicazioni richieste (Woias, 2005).

### 2.3.2 Applicazioni

Nel seguente paragrafo si vogliono indagare più nel dettaglio le applicazioni prima solamente introdotte mostrando le principali necessità per ognuna di esse.

#### Drug Delivery Systems (DDS)

Un Drug Delivery Systems consiste in un sistema di microsensori, micropompe, microvalvole e microcanali collegati ad un serbatoio come mostrato in **Figura 2.6**, usato per la somministrazione di medicinali.



**Figura 2.6:** Schema di un sistema per il Drug Delivery (da Bertarelli, 2011)

Per garantire l'effetto terapeutico desiderato, medicinali e agenti chimici devono avere un livello di concentrazione ben definito. Per livelli di concentrazione al di sotto dei limiti prestabiliti

si può avere inefficacia delle cure mentre per livelli troppo elevati c'è il rischio di intossicazione (Tsai e Sue, 2007).

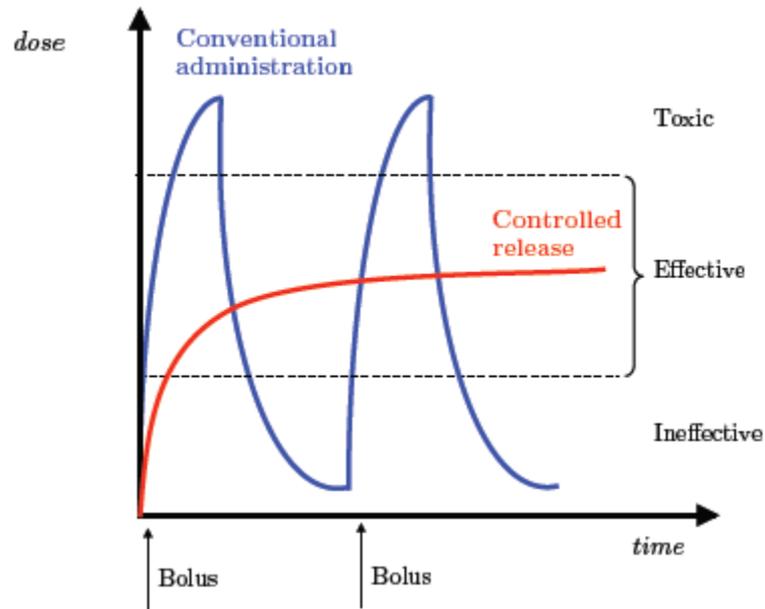


Figura 2.7: Relazione tra dose ed effetto di un medicinale (da Bertarelli, 2011)

Come si evince dalla **Figura 2.7** i tradizionali metodi di somministrazione di medicinali (somministrazione orale, iniezioni, ...) non sono in grado di garantire il corretto dosaggio di medicinale necessario per la cura. Inoltre il livello medicinale necessario cambia secondo le esigenze di ogni paziente e, non solo, per lo stesso paziente sono richiesti livelli di dosaggio diversi secondo le condizioni particolari del momento (Shawgo et al., 2002). Perché l'effetto terapeutico sia corretto, occorre che il giusto quantitativo di medicinale sia somministrato al momento giusto nel posto giusto (Bertarelli, 2011).

Le piccole dimensioni e l'alta precisione delle micropompe MEMS possono essere molto utili per cure come la chemioterapia, la somministrazione d'insulina per pazienti diabetici o per il dosaggio di medicinali per pazienti malati di cancro (Smits, 1990). Esse sarebbero idealmente inserite in un sistema chiuso auto sussistente capace di regolare la somministrazione del medicinale attraverso le informazioni ricevute da un sensore ed elaborate in tempo reale da un controllo elettronico (Bertarelli, 2011). Questo tipo di dispositivo deve essere il più compatto possibile, capace di regolare quantità di fluido non necessariamente elevate ma molto precise. Nell'ottica di

---

espandere il mercato di tali oggetti il prezzo deve essere accessibile e la fabbricazione di conseguenza il più possibile semplificata.

Inoltre sviluppando l'idea dell'impianto sotto cute è ovviamente necessario che tali dispositivi non siano dannosi per il paziente; deve essere perciò pensato un dispositivo capace di essere efficiente per tutta la durata della vita del paziente, di conseguenza i consumi devono essere limitati. Inoltre voltaggi troppo elevati sono da evitare perché insopportabili per il corpo umano. Il dispositivo completo e così anche la micropompa stessa devono infine essere garantiti in ragione della biocompatibilità (Tsai e Sue, 2007).

### Microsistemi per il trattamento di fluidi biologici

In questa categoria si includono tutti quei dispositivi che racchiudono in un unico strumento la possibilità di operare su un campione trattenendo, separando, ordinando, individuando e analizzando determinate quantità di fluido (Andersson e van den Berg, 2003).

Il vantaggio di usare micro sistemi per la gestione dei fluidi biologici consiste nella possibilità di progettare dei dispositivi chiusi capaci di includere in un unico strumento processi che richiederebbero numerosi e complessi steps. Inoltre in questo modo lo stesso processo è molto più preciso, accurato e riproducibile del medesimo eseguito a mano (Yager et al., 2006). In aggiunta sono utilizzati volumi di fluido molto minori e l'operazione è nel suo complesso meno costosa, più veloce e meno rischiosa per l'operatore (Janasek et al., 2006) (Iverson e Garimella, 2008).

In letteratura si possono trovare numerosi esempi. A questa categoria di fatto appartengono tutti quei dispositivi usati in ambito medico che necessitano il trasporto di fluido. Gli esempi classici riportati in molte *review* (Nisar et al., 2008) (Iverson e Garimella et al., 2008) sono le applicazioni per le *Polymerase chain reaction (PCR)* per la replicazione del *DNA* (Zhang et al., 2007), i *Point of care testing (POCT) systems, lab-on-a-chip (LOC)*, i *micro total analysis systems ( $\mu$  - TAS)* (Woiias, 2005) e il trasporto di sangue (Aimirouche, 2009).

Per la varietà delle applicazioni che rientrano in questa categoria, è difficile individuare dei parametri comuni a tutte quante. A riguardo si rimanda a trattazioni più specifiche di ogni applicazione.

Sicuramente è necessaria una versatilità del dispositivo non richiesta in altri ambiti. La capacità di coprire un grande range di volumi è sicuramente molto interessante. Non sono richieste particolari garanzie dal punto di vista della solidità dato che molti di questi dispositivi sono usa e

getta ( $\mu - TAS$ ) per evitare contaminazioni tra campioni differenti. Da questo punto di vista il basso costo è fondamentale. Inoltre il vantaggio dell'utilizzo di microsistemi consiste nella trasportabilità che deve essere quindi garantita. È evidente che il requisito indispensabile per qualunque delle sopracitate applicazioni è la biocompatibilità. Il fluido che è trattato non deve essere in alcun modo contaminato sia da agenti esterni (fluidi o agenti chimici) sia da fenomeni che possono modificarne le caratteristiche (campi elettrici o magnetici).

### *Microsistemi per la gestione termica di dispositivi elettronici.*

Per una trattazione esauriente di questo tema si rimanda alla review di (Singhal et al., 2004) (Garimella et al., 2006). L'idea è di sfruttare la compatibilità tra MEMS e chip elettronici accoppiandoli in un unico dispositivo così da avere un sistema di raffreddamento a fluido incorporato all'interno del chip stesso. Il vantaggio di questa soluzione consiste nella riduzione delle dimensioni del sistema di raffreddamento mantenendo una grande potenza dissipativa a basso consumo. Tecnologicamente consisterebbe nell'incorporare la fabbricazione dei due dispositivi in un unico processo.

Nell'ambito del raffreddamento di dispositivi elettronici le necessità sono molto varie in funzione della specifica applicazione che si considera. Da un lato sono necessari voltaggi e consumi non elevati per i dispositivi portatili, dall'altro sono necessari grandi flussi di fluido per i processori dei computer in grado di garantire il flusso di calore richiesto. Al contempo servono alte pressioni in ingresso per superare le perdite di pressione durante il ciclo di pompaggio (Singhal et al., 2004).

### *Sistemi di precisione*

Tra le altre possibili applicazioni non appartenenti al campo medico le più promettenti riguardano il mondo dell'automazione. Nel campo dell'automotive, dell'ingegneria aerospaziale e in particolare nella robotica si fa sempre più pressante la necessità di maneggiare quantità di fluido molto precise (Nisar et al., 2008).

### **2.3.3 Classificazioni**

Nelle numerose recensioni trovate in letteratura riguardo alle micropompe MEMS si individuano una quantità di soluzioni e proposte davvero impressionanti. La varietà dei sistemi di

---

pompaggio riguarda sia le geometrie e le tecniche di rettificazione del flusso sia le modalità di attuazione del meccanismo.

Si sono individuate due principali classificazioni:

- Classificazione rispetto alle modalità di rettificazione del flusso
- Classificazione rispetto alle modalità di attuazione

### Valvole

Nel presente studio ci si è concentrati sulla seconda classificazione sia perché più diffusa in letteratura sia perché più funzionale all'interesse di questo lavoro. È conveniente fare tuttavia un breve accenno anche alle modalità di rettificazione del fluido. Per una trattazione completa si rimanda alla review di (Oh et Ahn, 2006)..

In questo senso si individuano due fondamentali tipologie di pompe. Le pompe con valvole (*check valve micropump*) in cui si ha movimento di parti meccaniche e quelle senza (*valveless micropump*) in cui la rettificazione è dovuta alla particolare geometria dei canali.

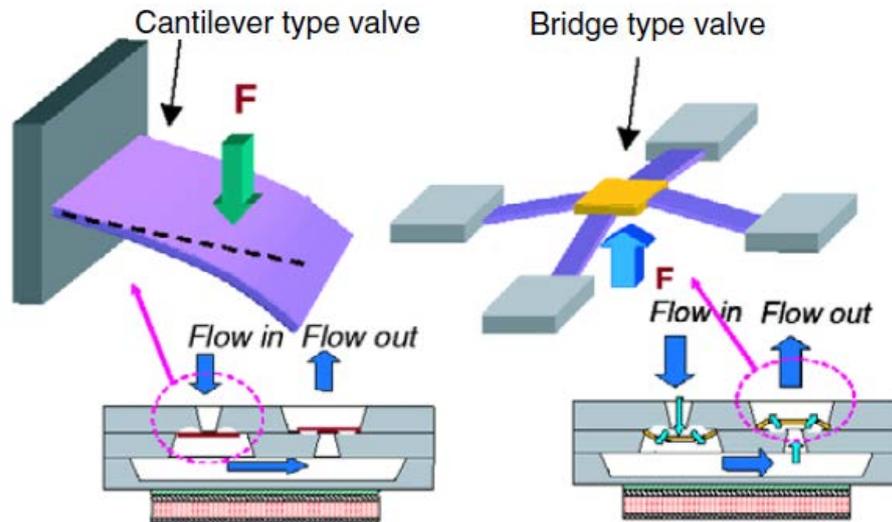
#### *Micropompe a valvola*

All'interno di questa si identificano le pompe a valvole attive, cioè attuate, e quelle a valvole passive, in cui l'apertura e la chiusura sono determinate dalla differenza di pressione tra l'interno e l'esterno della camera di pompaggio.

L'attuazione delle valvole (Neagu et al., 1997) (Li H.Q. et al., 2004) può essere interessante perché permette all'utente di regolare il flusso entrante e uscente dalla pompa. È un sistema sicuramente più complicato che però si rende necessario in particolari applicazioni. Inserire attuatori anche per le valvole rende la fabbricazione del dispositivo più complicata e i costi più elevati.

Le valvole passive (Li B. et al., 2005) (Bien et al., 2003) (Nguyen et al., 2004) non sfruttano al contrario nessun meccanismo attuativo per essere chiuse e aperte, il principio di movimento è più immediato e semplice. Quando la pressione all'interno della camera è minore di quella esterna la valvola di ingresso si apre lasciando entrare il fluido mentre quella di uscita resta chiusa a causa della pressione. Quando invece la pressione interna è maggiore di quella esterna si ha il meccanismo inverso con la chiusura della valvola di ingresso e l'apertura di quella di uscita. In questa logica gioca un ruolo fondamentale il rapporto tra le pressioni a cui la pompa lavora e i

parametri di rigidità delle valvole. Tipico meccanismo di questo tipo sono le valvole a mensola (Voigt et al., 1998) (Koch et al., 1997) o le valvole a bridge riportate in **Figura 2.8**.



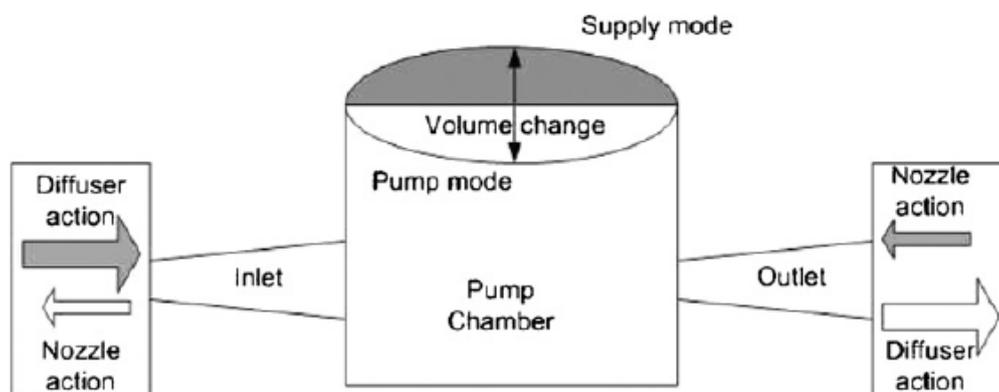
**Figura 2.8:** Schema di un sistema di check valves (da Oh e Ahn, 2006)

Le problematiche riguardanti queste tipologie di valvole sono dovute alla fabbricazione, non sempre semplice per la necessità di introdurre elementi mobili e alla possibilità di inceppamento per la presenza di granuli di polvere presenti nel fluido.

Questa tipologia è spesso associata a pompe di tipo meccanico a membrana oscillante (si rimanda ai paragrafi successivi).

### *Micropompe senza valvole*

A questa seconda categoria appartengono i sistemi nozzle-diffuser (Andersson et al., 2001) (Tsai e Lin, 2002) (Fadl et al., 2010) molto sfruttati per la semplicità di fabbricazione dato che non sono presenti parti in movimento. La direzione del flusso è generata dalla particolare geometria dei canali che si stringono all'ingresso e si allargano all'uscita.



**Figura 2.9:** Schema di una micropompa con flusso rettificato da elementi nozzle-diffuser (da Nisar et al., 2008)

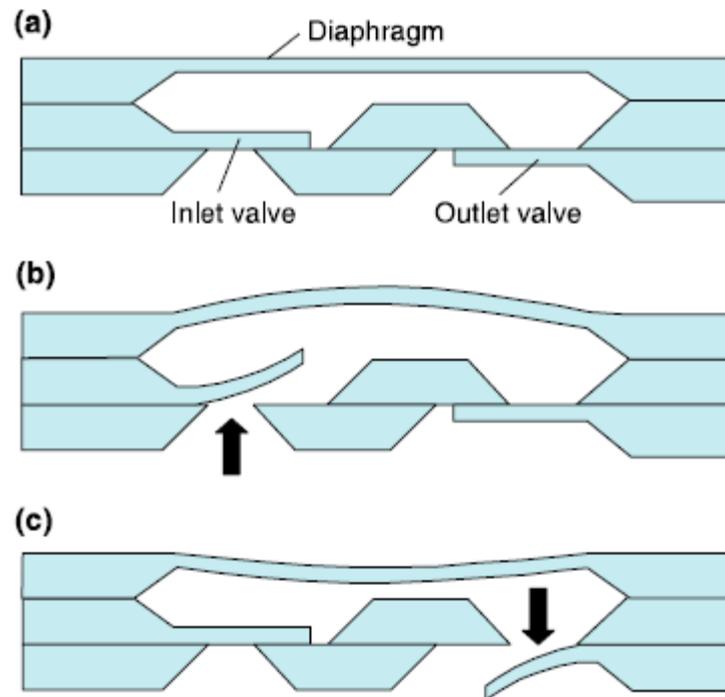
S'incontrano in letteratura altre tipologie di pompe in cui non ci sono elementi rettificatori del flusso. La direzione del flusso è data dalla particolare attuazione. Solitamente fanno parte di questa classe le pompe a flusso continuo per cui interessano maggiormente quantità elevate di fluido spostato a scapito della precisione.

### Micropompe a regolamento meccanico

Le micropompe a regolamento meccanico (*mechanical displacement micropumps*) sono quelle micropompe che esercitano una pressione oscillatoria o rotazionale sul fluido di lavoro attraverso il movimento di un elemento di contatto solido (micropompe a membrana oscillante, micropompe peristaltiche o micropompe rotazionali) o di un elemento fluido (micropompe ferrofluidiche, micropompe a cambiamento di fase o a permeazione di fluido) (Woias, 2005). In questo ambito ci si limiterà a una breve introduzione alle tecniche attuative delle micropompe a membrana oscillante, oggetto di questo elaborato. Per le altre tecniche citate si rimanda ad altre trattazioni (Iverson e Garimella, 2008), (Amirouche et al., 2009), (Nisar et al., 2008), (Laser e Santiago, 2004).

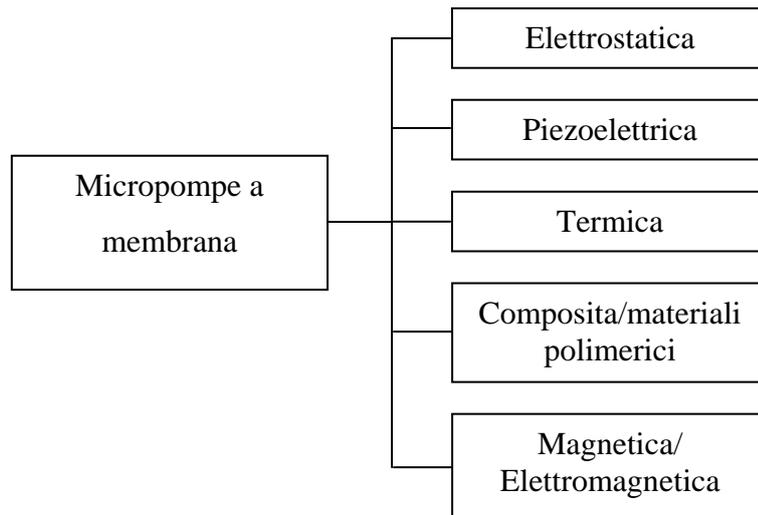
Le micropompe attuate attraverso il movimento di un elemento di controno solido come una membrana (*Diaphragm displacement micropumps*) sono per la loro semplicità e immediatezza di funzionamento le più sviluppate e studiate in letteratura. Sono generalmente composte da una camera di pompaggio connessa agli elementi rettificatori del flusso (siano valvole o elementi geometrici fermi). Quando il diaframma si inflette il fluido entra nella camera di pompaggio

attraverso la zona di ingresso. Una volta rilasciata la membrana, il fluido è spinto (dal ritorno elastico della stessa) all'esterno della camera attraverso la zona di uscita (Iverson e Garimella, 2008):



**Figura 2.10:** Schema di movimento di una micropompa a membrana oscillante. (a) posizione a riposo, (b) inflessione della membrana e ingresso del fluido nella camera di pompaggio, (c) ritorno elastico della membrana e uscita del fluido dalla camera (da Iverson e Garimella, 2008)

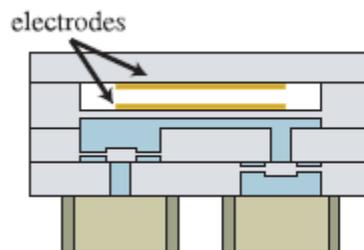
Esistono numerosi meccanismi di attuazione della membrana, ognuno dei quali sfrutta principi fisici diversi aventi per loro natura differenti caratteristiche, i più comuni sono riportati in **Figura 2.11:**



**Figura 2.11:** Classificazione delle micropompe con membrana oscillante in base alla tecnica attuativa

#### *Attuazione Elettrostatica*

Generalmente le micropompe elettrostatiche presentano la tipica struttura a piatti paralleli presente in **Figura 2.12**.



**Figura 2.12:** Schema di una micropompa elettrostatica (da Laser e Santiago, 2004)

Il movimento della membrana dipende dalla forza di attrazione tra le facce delle piastre del condensatore delle quali una è fissa e rigida e l'altra, collegata alla membrana (o anche la membrana stessa) è mobile e deformabile. Applicando e togliendo una differenza di potenziale si genera il movimento ciclico tipico di questi meccanismi (Amirouche et al., 2009).

La prima micropompa attuata elettrostaticamente fu presentata nel 1991 da (Judy et al., 1991). Nel lavoro è presentata una micropompa fabbricata sfruttando una tecnica di deposizione selettiva e rimozione di sacrificiali. È riportato che il voltaggio necessario per l'attuazione è pari a 50V, non sono stati tuttavia presentati risultati riguardanti l'azione pompante del dispositivo.

Per trovare la prima vera e propria micropompa fabbricata con la tecnica propria dei MEMS derivante da quella degli Integrate Circuits (ICs) occorre aspettare l'anno successivo in cui (Zengerle et al., 1992) presentano una micropompa interamente realizzata con le tecniche di micromachining del silicio. Il dispositivo è costituito di 4 layers in silicio e le sue dimensioni sono  $7 \times 7 \times 2 \text{ mm}$  mentre la membrana è quadrata con lato di  $4 \text{ mm}$  e spessore  $25 \mu\text{m}$  e dista  $4,4 \mu\text{m}$  dall'elettrodo fisso. Si sfruttano valvole passive a mensola per la rettificazione del flusso. Il volume di pompaggio riportato varia da  $10$  a  $50 \text{ nl}$  a frequenze di attuazione comprese tra  $1$  e  $100 \text{ Hz}$ . Per una frequenza di  $25 \text{ Hz}$  e  $170 \text{ V}$  si garantisce una portata di  $70 \mu\text{m}/\text{min}$  con pressione di ritorno nulla.

Lo stesso autore presentò l'anno successivo uno sviluppo del dispositivo in cui mise in evidenza l'inversione della direzione del flusso per frequenze elevate comprese tra  $2$  e  $6 \text{ kHz}$  dovuto allo sfasamento tra la risposta delle valvole e la pressione del fluido all'interno della camera (Zengerle et al., 1995).

Questa tipologia attuativa ha subito in seguito un rallentamento nel suo sviluppo dovuto allo svantaggio di non essere in grado di spostare volumi sufficientemente elevati di fluido a bassi voltaggi. Nel 1997 (Bourouinay et al., 1997) riportò una micropompa a basso consumo per applicazioni nell'ambito dei drug delivery systems. le dimensioni totali della pompa sono  $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ . È simulato inoltre che a  $10 \text{ V}$  è pompato fluido in un range tra  $0,01 \mu\text{l}/\text{min}$  e  $0,1 \mu\text{l}/\text{min}$ , non sono però riportate conferme sperimentali di questi risultati.

Nel 2005 (Machauf et al., 2005) presentò una micropompa elettrostatica che sfrutta l'alta permittività del fluido pompato per generare forze maggiore capaci di amplificare gli spostamenti della membrana. Con questa tecnica si raggiunge una portata di  $1 \mu\text{l}/\text{min}$  a  $50 \text{ V}$  con un gap tra gli elettrodi di  $63 \mu\text{m}$ . Al contrario della soluzione proposta da Zengerle il campo elettrico interagisce direttamente col fluido pompato. Per questa ragione non tutte le tipologie di fluido possono essere trasportate ma solamente quelli conduttivi. Inoltre il fluido subisce l'influenza diretta del campo elettrico con il rischio che sia danneggiato o modificato. Questa caratteristica potrebbe essere perciò sconveniente in ambito biomedico.

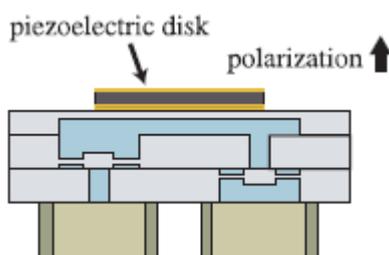
Negli ultimi dieci anni sono stati presentati articoli che trattano del problema dell'attuazione elettrostatica applicata alle micropompe da un punto di vista teorico e numerico (Francals et al., 1997), (Dufour e Francals, 2000), (Lin et al., 1997) e (Liu et al., 2010). Purtroppo a questi non è seguito lo sviluppo di prototipi e di prove sperimentali.

I grandi vantaggi dell'attuazione elettrostatica sono il minimo consumo di energia e la possibilità di scalare il dispositivo a dimensioni davvero limitate. Inoltre la fabbricazione di questi sistemi attuativi è del tutto compatibile con la tecnologia MEMS e non richiede l'introduzione di particolari modifiche al processo oggi comunemente sfruttato. Il grande svantaggio consiste nell'impossibilità di generare grandi spostamenti della membrana. Tale limite è in parte sopperito dalla capacità di lavorare a frequenze molto elevate, anche se è un tema che richiede delle attenzioni particolari, come discusso nel seguito del seguito del lavoro. Un'ulteriore problematica legata all'attuazione elettrostatica consiste nel degrado dell'elettrodo a causa della deposizione di carico su di esso (Woias, 2005).

#### *Attuazione Piezoelettrica*

L'attuazione piezoelettrica è la tecnica maggiormente sviluppata per micropompe a membrana e le micropompe piezoelettriche sono state le più utilizzate nel campo biomedico e per i drug delivery systems. In questa tipologia attuativa si sfrutta l'effetto piezoelettrico di alcuni materiali che si deformano se sottoposti a una corrente elettrica.

Una micropompa piezoelettrica consiste di fatto in un disco piezoelettrico attaccato alla membrana deformabile, il disco deformandosi la inflette generando l'aumento di volume per l'ingresso del fluido. Togliendo la corrente elettrica, il materiale piezoelettrico torna nella sua posizione originaria insieme alla membrana che spinge all'esterno il fluido (Nisar et al., 2008).



**Figura 2.13:** Schema di una micropompa piezoelettrica (da Laser e Santiago, 2004)

La prima micropompa piezoelettrica fu presentata da (Van Lintel et al., 1988) e consisteva di una camera di pompaggio, di una membrana sottile in vetro attuata da un disco piezoelettrico e di valvole passive per indirizzare il flusso. Il disco piezoelettrico era attaccato al vetro tramite un materiale adesivo. La pompa, lavorando a frequenze di  $1\text{Hz}$  con una differenza di potenziale di  $125\text{V}$ , è capace di generare una portata di  $8\ \mu\text{l}/\text{min}$ .

L'anno successivo (Esashi et al., 1989) presentarono una pompa strutturata su tre layers che sfrutta l'effetto assiale della deformazione piezoelettrica in modo da garantire un maggiore ampliamento della camera di pompaggio. La massima portata pari a  $15\mu\text{l}/\text{min}$  è ottenuta a una frequenza di  $30\text{Hz}$  e voltaggio di  $90\text{V}$ .

Un grande numero di soluzioni è stato proposto e sviluppato per garantire un'efficienza sempre maggiore. Alcune soluzioni propongono di aumentare il numero di camere di pompaggio (Olsson et al., 1995), altre uno studio accurato sulla configurazione di diverse camere di pompaggio poste in serie o in parallelo (Ullmann, 1998).

Le dimensioni del disco piezoelettrico e le difficoltà connesse all'adesione tra il disco e la membrana hanno spinto numerosi ricercatori a soluzioni alternative legate alla deposizione di un film sottile di materiale piezoelettrico sulla membrana stessa. (Koch et al., 1998) proposero una micropompa MEMS basata sulla deformazione di un sottile strato di PZT (lead zirconate titanate) depositato su una membrana in silicio. La membrana è rettangolare ( $8\text{mm}\times 4\text{mm}$ ) ed è spessa  $70\mu\text{m}$ , lo strato di PZT è spesso  $100\mu\text{m}$ . La pompa è capace di pompare  $120\mu\text{l}/\text{min}$  per un voltaggio di  $600\text{V}$  a  $200\text{Hz}$  di frequenza. Il dispositivo è pensato per applicazioni tipo i drug delivery systems. L'utilizzo di film piezoelettrici è molto promettente perché i coefficienti di accoppiamento piezoelettrico ed elettromeccanico sono molto alti e sono garantiti grandi spostamenti per voltaggi non eccessivi. Tuttavia le tecniche di fabbricazione sono molto complesse e le proprietà del materiale piezoelettrico sono in parte differenti da quelle dei dischi piezoelettrici (Cho et al., 2005).

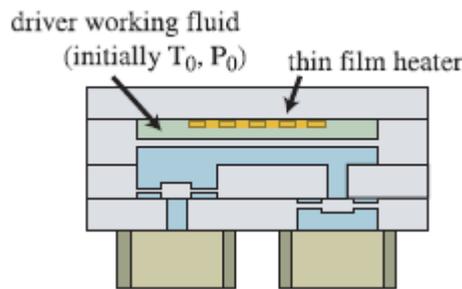
L'attuazione piezoelettrica ha subito un notevole sviluppo perché è capace di generare elevati stroke volume, cioè il volume della camera di pompaggio espansa, frequenze elevate e risposte meccaniche rapide all'ingresso elettrico (Amirouche et al., 2009). Inoltre l'integrazione del materiale piezoelettrico con il dispositivo è ad oggi fattibile senza le grosse difficoltà tecnologiche di una decina di anni fa, anche se il processo di fabbricazione richiede una complessità ancora superiore rispetto alle micropompe elettrostatiche.

Il problema dei voltaggi elevati per l'attuazione della micropompa è stato parzialmente ridotto con l'introduzione della tecnica di deposizione di film sottili di PZT grazie alla quale sono necessari voltaggi minori, perché la distanza tra gli elettrodi è minore, con una conseguente riduzione del consumo complessivo del dispositivo (Woiias, 2005).

### Attuazione Termica

A questa categoria appartengono meccanismi che sfruttano l'espansione termica dei materiali o il loro cambiamento di fase sotto l'effetto di calore. I classici dispositivi che funzionano grazie a questi fenomeni sono le micropompe termopneumatiche, le micropompe *shape memory alloys* (SMA) e le micropompe bimetalliche.

Le prime consistono di un radiatore, di una membrana e camera sigillata in cui è contenuto un fluido o un gas. L'aumento della temperatura del radiatore scalda il fluido nella camera che espandendosi inflette la membrana. La deformazione della membrana genera a sua volta la variazione di volume della camera di pompaggio necessaria per muovere il fluido dall'ingresso all'uscita.



**Figura 2.14:** Schema di una micropompa termopneumatica  
(da Laser e Santiago, 2004)

La prima micropompa termopneumatica fabbricata con le tecniche MEMS fu presentata da (Van de Pol et al., 1990) nel 1990. Si garantisce una portata massima di  $34 \mu\text{l}/\text{min}$  per una differenza di potenziale di  $6V$  con una temperatura massima di  $30^\circ$  nella camera sigillata. Nell'arco degli anni sono state proposte numerose altre micropompe termopneumatiche con lo scopo di massimizzare la portata sfruttando membrane corrugate (Jeong e Yang, 2000) o sfruttando il cambiamento di fase gas-liquido (Cooney e Towe, 2004).

Le micropompe SMA usano l'effetto shape memory, che consiste nel cambiamento di fase solido dall'austenite (ad alte temperature) alla martensite (a basse temperature), per generare gli spostamenti della membrana. Essendo la martensite più duttile dell'austenite e poiché nel passaggio da una fase all'altra si possono generare grandi deformazioni, (Bernard et al., 1998). proposero una micropompa con integrato un sottile film di materiale SMA.

Le micropompe bimetalliche sono basate sulla differenza tra i coefficienti di espansione termica di due materiali legati tra loro soggetti a una variazione di temperatura. Nel 1996 (Zhan et

al., 1996) propose una micropompa costituita da una membrana in silicio sulla quale è depositato uno strato di alluminio.

Le micropompe attuate termicamente permettono di ottenere grandi deformazioni (a parte le bimetalliche se i coefficienti termici dei due materiali sono simili) e pressioni nel fluido a voltaggi molto bassi. Tuttavia il loro utilizzo è molto limitato a causa dell'alto consumo di potenza e dell'impossibilità di lavorare a frequenze elevate. Il raffreddamento dei materiali è infatti molto lento e influisce notevolmente sulla velocità della risposta del sistema.

### *Attuazione con materiali compositi polimerici*

L'impiego di nuovi materiali ha subito un notevole sviluppo negli ultimi anni. Materiali IPCM (*ionic polymer-metal composite*) sono attuati in modo analogo ai materiali piezoelettrici generando spostamenti elevati sotto voltaggi molto bassi (Lee e Kim, 2005) (Kim et al., 2005),.

Altri sviluppi riguardanti nuovi materiali considerano l'attuazione grazie a materiali ICPF (*ion conductive polymer film*). Questi materiali considerano il gradiente di sforzo generato dal movimento di ioni messi in moto da un campo elettrico (**Figura 2.15**). All'applicazione di un campo elettrico i cationi presenti all'interno della catena polimerica tendono a spostarsi verso il catodo trasportando le molecole d'acqua presenti nel materiale espandendolo (Nisar et al., 2008). Se le condizioni al contorno sono ben costruite si genera in questo modo l'inflessione dell'oggetto.

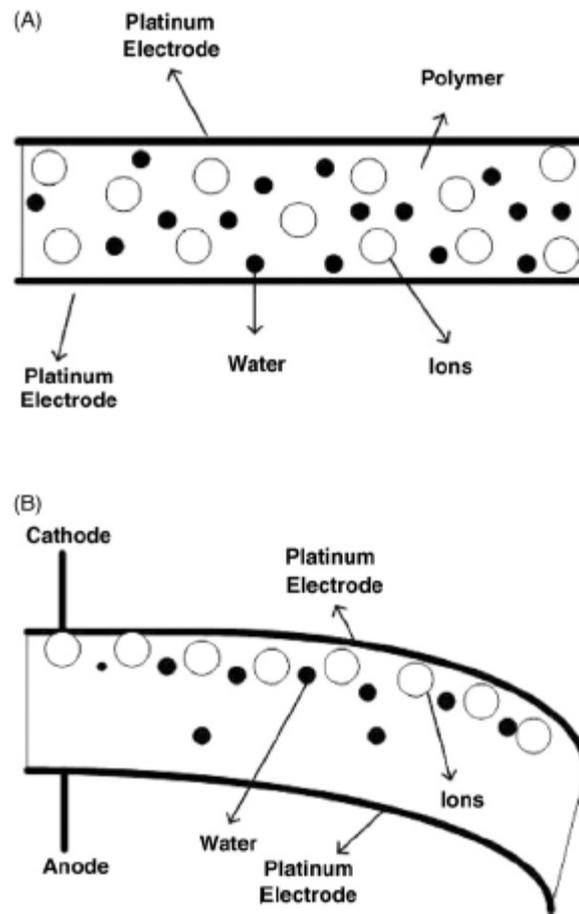


Figura 2.15: Principio attuativo dei materiali ICPF (da Nisar et al., 2008)

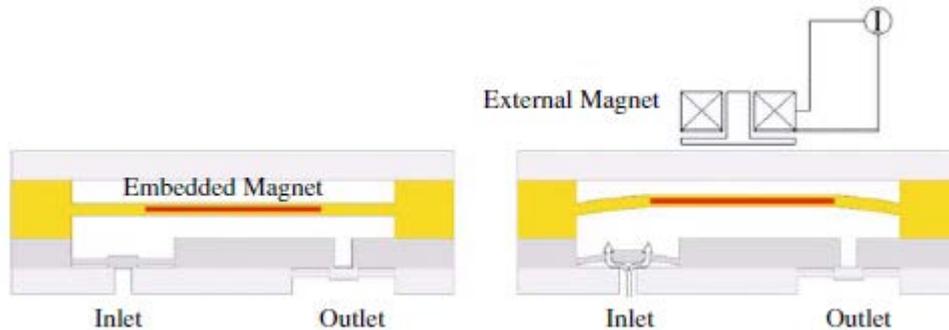
(Guo et al., 1996) hanno presentato una micropompa attuata secondo questo principio per applicazioni biomediche sfruttando il materiale ICPF integrato nel diaframma. Le dimensioni del dispositivo sono molto grandi rispetto alle micropompe attuate con altre tecniche e nell'articolo e in letteratura non è trattata la scalabilità di questa tecnologia.

Altri lavori presentano dispositivi che sfruttano geometrie particolari di interazione tra materiali ICPF e membrane in silicio atte a massimizzare le deformazioni del diaframma (Wei e Guo, 2010) (Fang e Tan, 2010).

Il grosso vantaggio di utilizzare questi materiali consiste nella possibilità di generare grandi spostamenti a bassi voltaggi e basso consumo. Inoltre la loro biocompatibilità permette possibili applicazioni in ambito medico. Lo svantaggio legato al loro utilizzo sta nel costo e nella fabbricazione complessa che restringe il campo a poche applicazioni come la microrobotica o la microchirurgia (Kato et al., 1998).

### Attuazione Magnetica ed Elettromagnetica

Nelle micropompe magnetiche il movimento della membrana è il risultato dell'interazione tra un magnete permanente e un campo magnetico variabile generato da un microsolenioide (Amirouche et al., 2009).



**Figura 2.16:** Schema di una micropompa magnetica (da Amirouche et al., 2009)

Le forze magnetiche possono essere sia attrattive sia repulsive, da qui la possibilità di invertire facilmente il flusso del fluido semplicemente invertendo la direzione della corrente. Perché le forze generate siano sufficientemente elevate, è necessaria la presenza di un campo magnetico esterno permanente o di un attuatore separato. L'uso di un attuatore esterno permanente limita notevolmente la possibilità di ridurre le dimensioni del dispositivo, in questi ultimi anni alcuni ricercatori hanno studiato tecniche di integrazione in un medesimo dispositivo degli elementi necessari per l'attuazione magnetica. Esistono esempi di membrane composite che incorporano al loro interno piccole particelle di materiale magnetico così da rendere il diaframma stesso parte del sistema attuativo (Yamahata et al., 2005) (Nagel et al., 2006).

La prima pompa magnetica fu studiata da (Zheng e Ahn, 1996) e consiste in una piastra spessa  $17\mu\text{m}$  rettangolare ( $8\text{mm} \times 8\text{mm}$ ). Lo spostamento massimo della membrana è di  $23\mu\text{m}$  e si garantisce una portata di  $20\ \mu\text{l}/\text{min}$  a  $5\text{Hz}$  per una differenza di potenziale di  $3\text{V}$ .

Il grande vantaggio delle micropompe elettromagnetiche consiste nella capacità di generare grandi spostamenti a bassi voltaggi e di poter lavorare a frequenze elevate dato che il campo magnetico appare e scompare rapidamente. D'altra parte questi dispositivi richiedono un alto consumo di energia e disperdono molto calore (Amirouche, 2009). La problematica delle dimensioni e dell'adattabilità al processo di fabbricazione dei MEMS è tuttora in fase di

---

discussione, anche se l'utilizzo di nuovi materiali, tipo membrane composite, sembra da questo punto di vista promettente anche se a scapito di costi e semplicità costruttiva.

### *Micropompe a flusso continuo*

Le micropompe a flusso continuo (*Dynamic continuous flow micropumps*) sono basate sulla trasformazione di energia meccanica o non meccanica in un movimento continuo del fluido. a questa categoria appartengono dispositivi ultrasonici, magnetoidrodinamici (*MHD*), elettroidrodinamici (*EHD*), elettroosmotici (*EO*) ed elettrochimici (*EC*) (Woiias, 2005). In questa sede si riporta solamente una breve introduzione a questa tipologia di pompa perché sono di poco interesse per gli scopi di questo elaborato. Per un ulteriore approfondimento si rimanda a reviews specializzate (Iverson e Garimella, 2008) (Nisar, et al., 2008) (Laser e Santiago, 2004).

La caratteristica principale di queste tecniche attuative consiste nella semplicità delle microstrutture del dispositivo dato che raramente occorre inserire parti mobili. Non essendoci parti in movimento il flusso è generato intervenendo direttamente sul fluido.

In questo senso si sfruttano eventuali proprietà del fluido trasportato, come per esempio proprietà ferrofluidiche nel caso dell'attuazione magnetoidrodinamica. È evidente come non tutti i fluidi siano perciò trasportabili ma solamente quelli aventi le proprietà adatte per quel tipo di tecnica. In alternativa si modificano le caratteristiche stesse del fluido per renderlo trasportabile, le micropompe elettroidrodinamiche sfruttano il movimento per effetto di una differenza di potenziale di cariche iniettate nel fluido.

Queste tipologie attuative intervenendo sul fluido possono renderlo inutilizzabile per gli scopi per cui è pensato, per questo il range di applicazione di tali metodi è limitato ed è necessario valutarne con accuratezza la compatibilità.

La notevole varietà dei principi di funzionamento rende difficile una discussione comune dei parametri tipici delle micropompe, alcune di queste infatti richiedono voltaggi elevati per funzionare (*EHD*) altre molto bassi (*MHD*). In generale si può affermare che i volumi di fluido trasportato sono maggiori rispetto alle micropompe meccaniche a scapito però di accuratezza e precisione. Sono per questa ragione poco utilizzati in sistemi di precisione e nei drug delivery systems.

### 2.4 Microattuatori utilizzati per la progettazione di una micropompa

#### 2.4.1 Introduzione

Come esposto nei capitoli precedenti, in letteratura sono state presentate numerose tipologie di micropompe che differiscono per modalità di attuazione e soluzioni progettuali.

In questo lavoro è presentata una micropompa a diaframma (*diaphragm displacement micropump*) costituita da una camera di pompaggio connessa alle valvole di inlet e uscita necessarie per rettificare il flusso del fluido trasportato.

Questa trattazione vuole confrontare due tipologie attuative per questo tipo di design, quella elettrostatica e quella piezoelettrica, mettendo in evidenza svantaggi e vantaggi delle due soluzioni.

Il criterio di confronto riguarda anzitutto la capacità di pompaggio, nel dettaglio il massimo volume pompato (*stroke volume*) in funzione della potenza necessaria per ottenerlo nel regime di frequenze al quale sono in grado di lavorare questi dispositivi.

L'interesse che muove la ricerca a proposito di micropompe costruite con la tecnologia dei microsistemi, è la possibilità di ridurre dimensioni e consumo e di conseguenza il costo di questi dispositivi. La fattibilità tecnologica, la semplicità di fabbricazione e la potenza necessaria al funzionamento della micropompa sono perciò criteri fondamentali per effettuare un confronto tra le diverse tipologie (Woias, 2005).

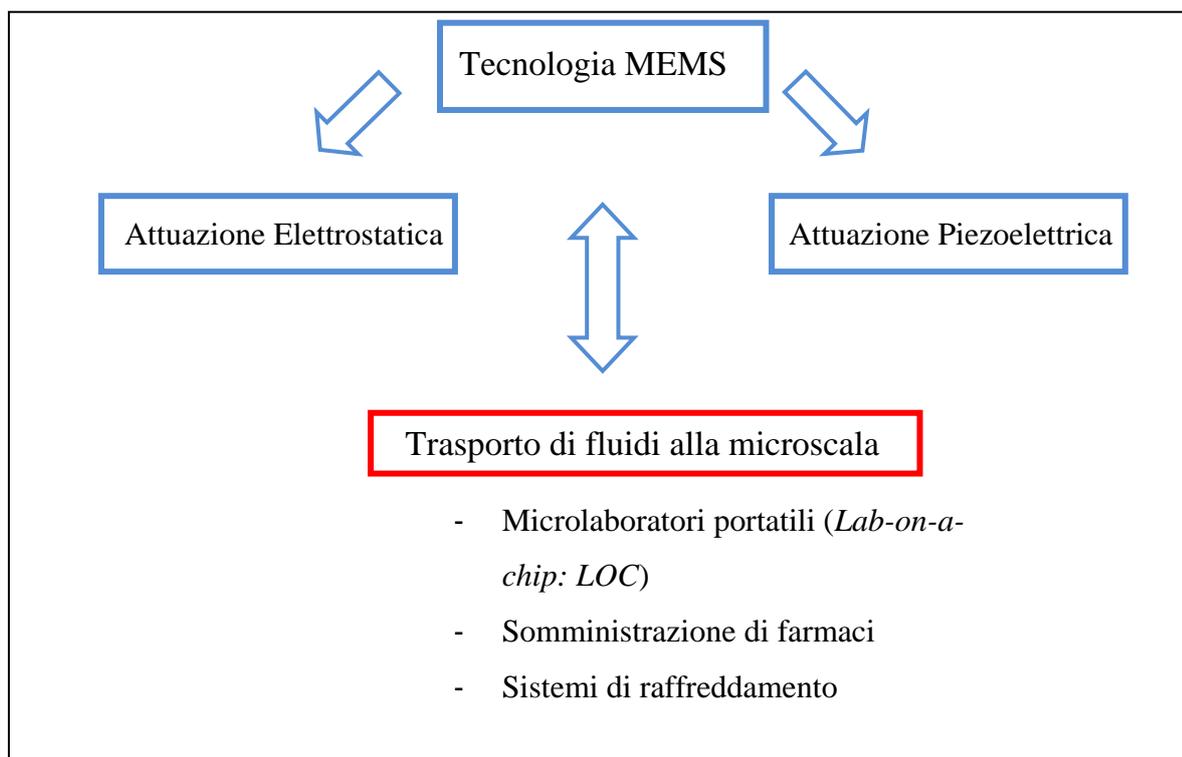
A partire da tali criteri si sono scelte le tipologie di attuazione piezoelettrica ed elettrostatica. Entrambe presentano la possibilità di essere scalate a dimensioni molto ridotte, dell'ordine del millimetro come raggio della camera di pompaggio.

L'attuazione elettrostatica è interessante in particolare per la semplicità costruttiva e per i costi, e ha come difetto la difficoltà a generare spostamenti accettabili a bassi voltaggi. Quella piezoelettrica ha invece il vantaggio di generare forze notevoli nonostante le ridotte dimensioni ma ha lo svantaggio di una fabbricazione sicuramente più complicata e di aver bisogno di maggior potenza per funzionare.

La micropompa qui presentata è pensata per l'uso Biomedico, per l'erogazione controllata di farmaci (*drug delivery systems*) o per dispositivi per il trattamento di fluidi biologici. In questi

ambiti è fondamentale l'alta qualità del meccanismo, in quanto riguarda affidabilità e accuratezza, oltre che il già citato basso costo per la necessità della produzione su grande scala. Ultimo requisito è la biocompatibilità.

Micropompe come quella studiata nel presente lavoro possono può essere sfruttate nel raffreddamento di elementi elettronici, inserite in sistemi di microcanali direttamente accoppiati ai chip di silicio. In questo ambito sta diventando sempre più necessaria l'esigenza di creare dispositivi estremamente piccoli dotati di una grande potenza dissipativa.



**Figura 2.17:** La tecnologia MEMS applicata al trasporto di fluidi alla microscala promette importanti sviluppi per quanto riguarda l'utilizzo delle attuazioni elettrostatica e piezoelettrica.

## 2.4.2 Descrizione del dispositivo e del suo funzionamento

La geometria proposta (**Figura 2.18**) consiste in una camera di pompaggio circolare di raggio interno  $R = 750\mu\text{m}$  e altezza  $h_f = 16,3\mu\text{m}$  per un volume iniziale pari a  $v_0 = \pi R^2 h_f \sim 28,8\text{nl}$ , il voltaggio applicato è pari a  $60\text{V}$ .

Nel caso elettrostatico si considera un diaframma in poli-silicio avente uno spessore  $h_m$  compreso nell'intervallo  $10 \div 25 \mu m$ . Un elettrodo rigido è posto al di sopra della membrana ad una distanza compresa tra  $4 \div 10 \mu m$ . Lo spazio compreso tra l'elettrodo e il diaframma è considerato riempito da un materiale dielettrico, nel caso presente aria, avente permittività  $\epsilon_a = 1,00059\epsilon_0$ .

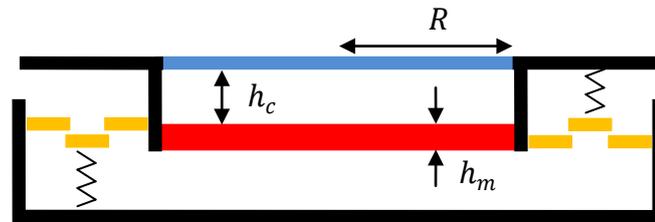


Figura 2.18: Schema della micropompa elettrostatica

Nel caso piezoelettrico (Figura 2.19) si ha una membrana con spessore  $h_m$  compreso tra  $10 \div 25 \mu m$ . Lo strato piezoelettrico ha uno spessore  $h_p$  compreso tra  $0,5 \div 3 \mu m$ .

I parametri elastici ed elettrici dei materiali sono riportati in Tabella 2.3:

	Poli-Silicio	PZT
$E [\mu N / \mu m^2]$	160000	69930.67
$\nu$	0.22	0.3
$\rho [\mu N \mu s^2 / \mu m^4]$	$2320 \cdot 10^{-6}$	$7830 \cdot 10^{-6}$
$d_{13} [\mu m / V]$	0	$-135 \cdot 10^6$
$d_{33} [\mu m / V]$	0	$325 \cdot 10^6$
$e_{13} [\mu N / \mu m V]$	0	-5.04
$e_{33} [\mu N / \mu m V]$	0	19.70
$\epsilon_{rel} [-]$	-	1250

Tabella 2.3: Proprietà elastiche e elettriche dei materiali

In entrambi i casi la piastra è incastrata sul bordo esterno. Nel caso piezoelettrico, non essendoci carichi trasversali, è necessario che lo strato piezoelettrico abbia raggio inferiore rispetto ad  $R$  perché ci possa essere inflessione. La deformazione imposta dal piezoelettrico non entra infatti

nelle equazioni di campo per cui se le condizioni al contorno sono puramente cinematiche non si ha alcuno spostamento.

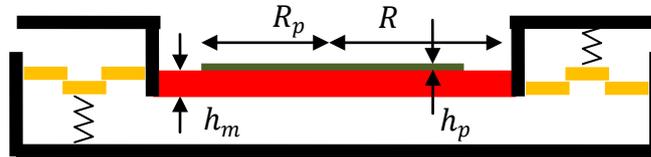


Figura 2.19: Schema della micropompa piezoelettrica

Le valvole di ingresso e di uscita sono situate sul perimetro della camera di pompaggio in posizione diametralmente opposta. A questo livello di studio sono considerate valvole ideali per cui non si hanno cadute di pressione durante il flusso del fluido e perdite quando la valvola è chiusa. Per questa ragione la distribuzione di pressione alla fine di un ciclo è la stessa che si ha inizio ciclo. Inoltre in questa prima fase di studio del problema è possibile considerare nulla la pressione in uscita; in seguito quest'ipotesi andrà rimossa per introdurre il valore di pressione dell'ambiente in cui la pompa lavora. Nel caso dei microsistemi biologici e dei microsistemi per la somministrazione dei farmaci, la pressione di uscita è un parametro molto importante.

Il ciclo di pompaggio è riassunto per i due casi analizzati nella **Figura 2.20**. All'applicazione del voltaggio si ha una differenza di potenziale che fa inflettere il diaframma (*b*), la pressione che si genera per la flessione della membrana è trasferita al fluido all'interno della camera di pompaggio generando una depressione. Se la pressione nella camera è minore della pressione che si ha all'ingresso allora la valvola di ingresso si apre lasciando entrare il fluido nella camera che si è espansa (*expansion stroke*).

Quando il voltaggio è rimosso (*c*) il diaframma ritorna elasticamente nella posizione originaria aumentando la pressione nella camera e aprendo la valvola di uscita. A questo punto il fluido è spinto fuori della membrana che torna nella sua posizione di iniziale (*compression stroke*).

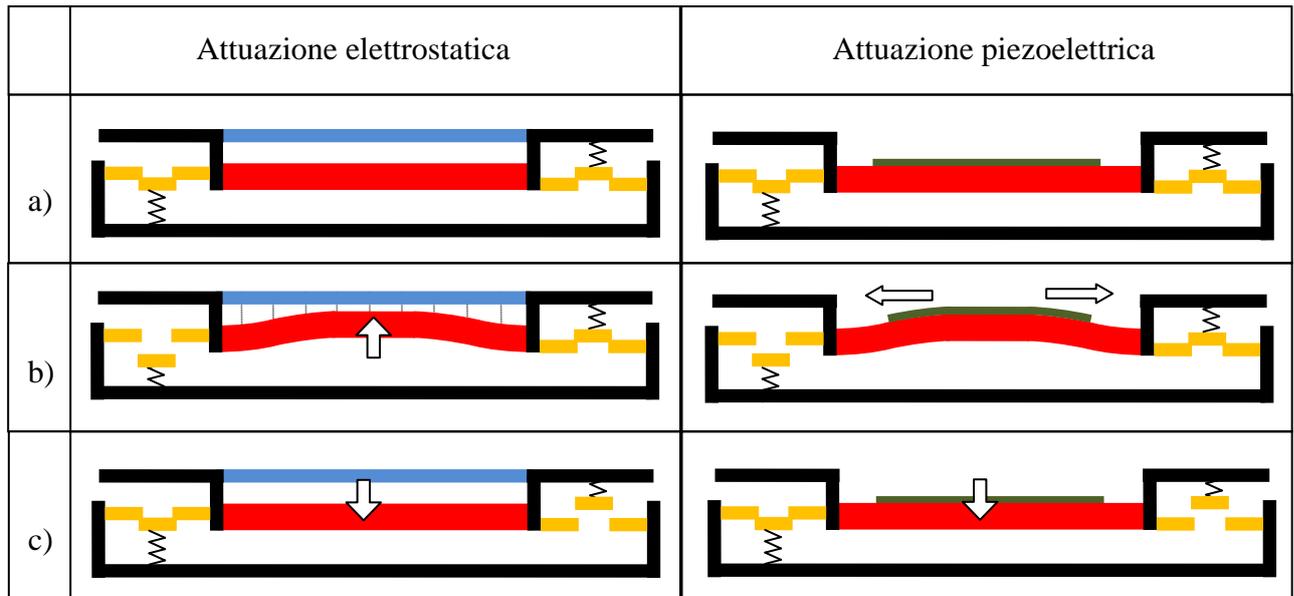


Figura 2.20: Schema di attuazione e funzionamento delle micropompe.

In questa fase iniziale di studio la variazione di volume tra la posizione iniziale e la posizione di massima espansione è pari allo *stroke volume* ( $\Delta v = v_s$ ). Questa considerazione è figlia dell'ipotesi precedentemente fatta riguardo alle perdite di pressione. Infatti si ipotizza che tutto il volume fluido che entra nella camera sia pompato verso l'esterno.

Per questa ragione la portata totale ideale della micropompa è pari allo *stroke volume* moltiplicato per la frequenza a cui lavorano i dispositivi.

$$Q_i = v_s \cdot f_p \quad [2.1]$$

Questa ipotesi è sicuramente falsa ad alta frequenza, infatti ad alte frequenze l'inerzia del fluido, fino a qui trascurata, gioca un ruolo fondamentale fungendo da smorzatore per la membrana. Superato un certo valore limite di frequenza non tutto il fluido che entra nella camera riesce ad essere pompato verso l'esterno e la differenza di volume tra le posizioni iniziale e a regime risulta inferiore allo *stroke volume* ( $\Delta v \leq v_s$ ). Questo effetto è messo in luce in altri lavori (Machauf et al., 2005) (Zengerle et al., 1992) (Bertarelli, 2011).

L'approssimazione riportata nell'equazione [2.1] è adottata per un primo studio parametrico con analisi quasi statiche al variare della geometria del dispositivo e per l'identificazione della migliore tecnica attuativa. I risultati ottenuti rappresenteranno un limite superiore per lo *stroke*

volume  $v_s$  per ottenere analisi più realistiche è necessario considerare gli effetti di inerzia del fluido a differenti frequenze di attuazione del dispositivo. Il fluido aumenta infatti l'inerzia della piastra, come una sorta di massa aggiunta, modificando il periodo di oscillazione propria della stessa. La difficoltà consiste nel fatto che tale effetto inerziale aggiuntivo dipende da numerosi fattori, in particolare dallo spessore del fluido e dalla sua velocità. Sarà in futuro necessario effettuare analisi dinamiche elettro-fluido-meccaniche per poter descrivere con veridicità tale fenomeno.

Se si vuole continuare a considerare lo stroke volume come parametro descrittivo della micropompa è necessario introdurre il concetto di efficienza della pompa.

$$\varepsilon(f_p) = \frac{\Delta v(f_p)}{v_s} \cdot f_p \quad [2.2]$$

Dove  $\Delta v(f_p)$  rappresenta il volume pompato per una data frequenza. La portata effettiva del dispositivo è data da:

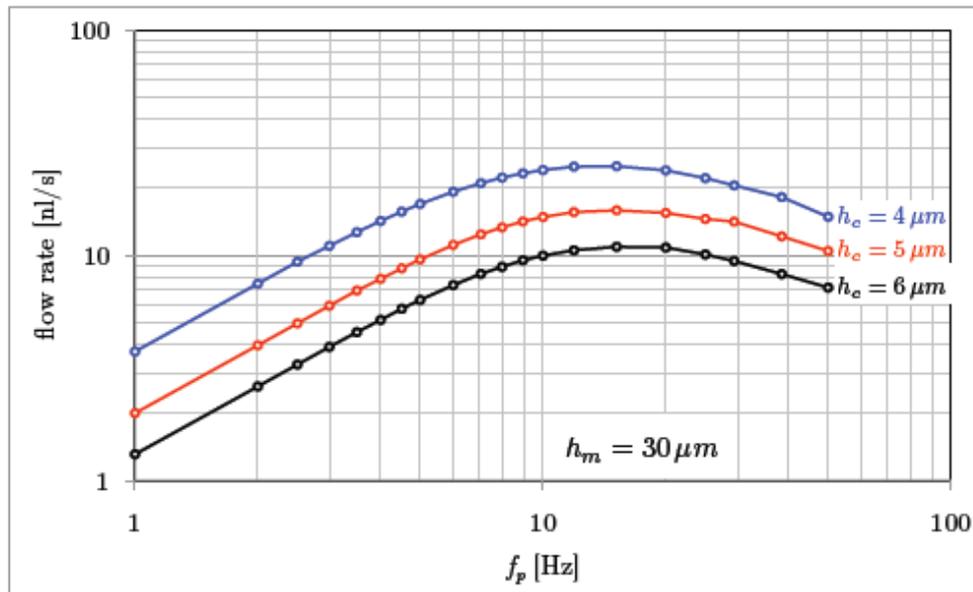
$$Q(f_p) = v_s \cdot \varepsilon(f_p) \quad [2.3]$$

In (Bertarelli, 2011) sono riportate analisi elettro-fluido-meccaniche effettuate con il codice di calcolo *Comsol* per il problema della micropompa elettrostatica assialsimmetrica. Questi risultati (**Figura 2.21**, **Figura 2.22**) come altri esperimenti (Machauf et al., 2005) (Zengerle et al., 1992), e altre trattazioni numeriche (Lin et al., 2007) mostrano il tipico andamento della portata all'aumentare della frequenza.

In **Figura 2.21** sono riportati i risultati (tratti da Bertarelli, 2011) al variare del gap iniziale tra elettrodo e membrana. Per valori bassi di frequenza il comportamento è lineare e la dinamica dell'oggetto può essere considerata come una serie di step quasi-statici, per cui valgono le ipotesi adottate per questo lavoro. All'aumentare di  $f_p$  la massa del fluido comincia a giocare un ruolo importante e la portata comincia a diminuire fino ad un picco che non conviene superare perché si ha una riduzione della portata per frequenze maggiori.

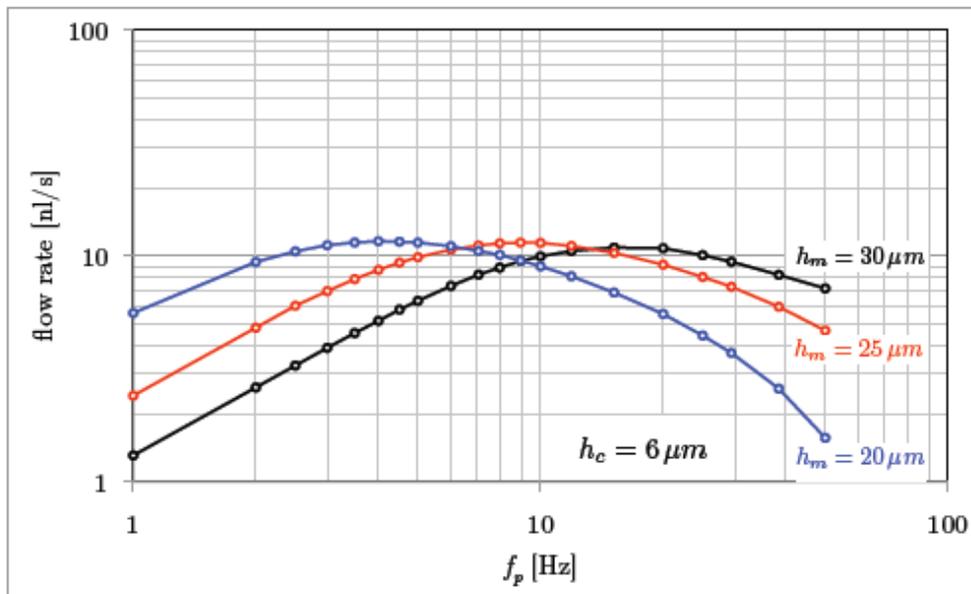
La variabilità della distanza iniziale tra elettrodo e piastra non ha alcuna influenza sulla posizione del picco perché non modifica in alcun modo l'inerzia del sistema fluido-membrana. Le

curve traslano verso l'alto perché per  $h_c$  minori gli spostamenti del diaframma sono maggiori e maggiore è il volume pompato.



**Figura 2.21:** Risultati di analisi dinamiche elettro-fluido-meccaniche su un dominio assialsimmetrico per una micropompa capacitiva in cui  $h_c$  è la distanza tra elettrodo e piastra deformabile. Andamento della portata in funzione della frequenza di attuazione al variare del gap iniziale (da Bertarelli, 2011).

In **Figura 2.22** sono riportati i risultati delle medesime analisi in funzione dello spessore della membrana in poli-silicio. Si nota il medesimo andamento per la portata con la presenza di un massimo. In questo caso però il valore di  $h_m$  influenza significativamente il comportamento della micropompa perché l'inerzia della piastra ne dipende direttamente.



**Figura 2.22:** Risultati di analisi dinamiche elettro-fluido-meccaniche su un dominio assialsimmetrico per una micropompa capacitiva in cui  $h_m$  è lo spessore della piastra deformabile. Andamento della portata in funzione della frequenza di attuazione al variare dello spessore della membrana (da Bertarelli, 2011).

# **3. Attuazione elettrostatica**



### 3.1 Introduzione al problema elettro-meccanico

Il problema elettro-meccanico risulta accoppiato e non lineare. La forza elettrostatica dipende infatti non linearmente dalla distanza fra superfici a potenziale diverso.

La risposta elettrica della membrana è governata dall'*equilibrio elettrostatico* nel volume  $\Omega$ , compreso tra elettrodo e piastra, e su  $\Gamma_{q_c}$ , area di elettrodo e piastra, e dalla *compatibilità elettrostatica* in  $\Omega$  e su  $\Gamma_\phi$  (Frangi et al., 2005).

$$D_{i,i} - \rho_c = 0 \text{ in } \Omega; \quad D_i n_i = -q_c \text{ su } \Gamma_{q_c} \quad [3.1,a-b]$$

$$E_i = -\phi_{,i} \text{ in } \Omega; \quad \phi = \bar{\phi} \text{ su } \Gamma_\phi \quad [3.2,a-b]$$

Il primo sistema di equazioni [3.1,a-b] è l'analogo elettrico dell'equilibrio dinamico e impone l'uguaglianza tra la variazione delle componenti del vettore di spostamento elettrico  $D_i$  e la densità volumica di carica elettrica  $\rho_c$  (Teorema di Gauss in forma locale) mentre sul contorno  $\Gamma_{q_c}$  è applicata una distribuzione superficiale di carica  $q_c$  (Teorema di Coulomb). Il secondo sistema [3.2,a-b] è invece il corrispondente della compatibilità meccanica, le componenti del campo elettrico  $E_i$  sono uguagliate al gradiente di un potenziale scalare  $\phi$  (conservatività del campo elettrico). Tale potenziale elettrico è imposto su  $\Gamma_\phi$ , dove la carica superficiale è incognita, pari al valore  $\bar{\phi}$ .

La legge costitutiva del problema elettrico lega spostamento elettrico a campo elettrico:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \quad [3.3]$$

Dove  $\boldsymbol{\varepsilon}^T$  è la matrice di permittività elettrica del materiale che si sta considerando.

Il procedimento corretto di approccio al problema implica l'accoppiamento del problema elettrostatico con la meccanica della piastra. La risoluzione del problema elettrostatico permette di calcolare il potenziale elettrico e di valutare in funzione di esso la forza elettrostatica che genera il movimento della piastra.

L'interpretazione di queste equazioni nell'ambito dell'elettrostatica fa riferimento a un oggetto chiamato condensatore costituito da due piatti di materiale conduttore separati da uno strato di materiale isolante, tipicamente l'aria. Le superfici  $\Gamma_\phi$  coincidono con i piatti del condensatore e tra di esse è imposta una differenza di potenziale pari a  $\Delta V$ , se uno dei due piatti è messo a terra si ha che la differenza di potenziale è pari al valore dello stesso sull'altro piatto.

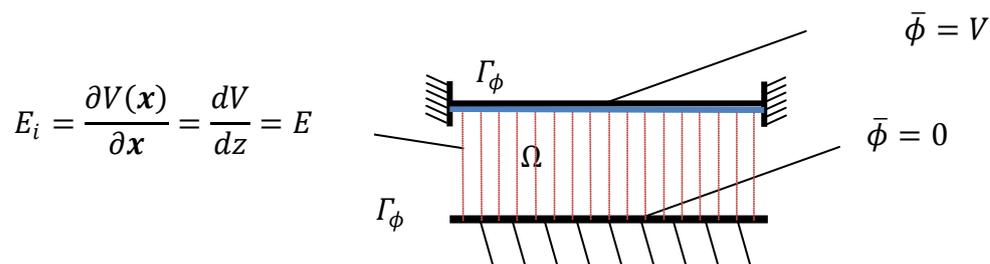


Figura 3.1: Condensatore a piatti fissi

Generalmente entrambi i piatti sono fissi e paralleli per cui, se si considera un'area molto grande rispetto alla distanza tra i piatti, il potenziale sarà una funzione lineare della coordinata verticale e il campo elettrico sarà costante. In questo lavoro si sfrutta la deformazione di uno dei due piatti che funge da membrana per la micropompa. In questo senso si perde l'ipotesi di linearità del potenziale elettrico che varia oltre che in direzione verticale anche in quella radiale.

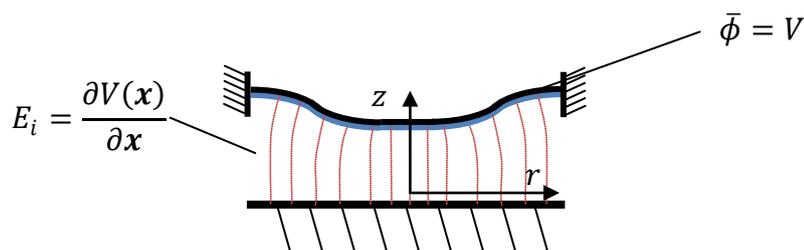


Figura 3.2: Condensatore a piatto deformabile

Risolvere analiticamente in maniera corretta il problema elettrostatico è complicato e non sempre i vantaggi sono reali rispetto a formulazioni semplificate. Nel caso in esame si ha un sistema nel quale gli spostamenti della piastra sono molto piccoli in confronto al suo raggio. Di fatto è possibile semplificare il problema come se la piastra fosse composta da una serie di condensatori a

piatti mobili uno affiancato all'altro. Ogni punto della membrana interagisce perciò solamente con il corrispondente punto sull'elettrodo anche a deformazione avvenuta e il potenziale è una funzione lineare di  $z$  per il singolo condensatore. Globalmente esso dipenderà anche dalla variabile radiale perché ogni punto della piastra avrà uno spostamento diverso dagli altri punti.

Facendo riferimento alla **Figura 3.2**, si può quindi assumere che il potenziale  $\phi$  sia governato dalla seguente relazione:

$$\phi = \frac{z}{(h_c - w(r))} V \quad [3.4]$$

Dove  $z$  ed  $r$  sono le coordinate evidenziate in **Figura 3.2** e  $w$  lo spostamento verticale della piastra deformabile, positivo opposto alla coordinata  $z$ .

Tale ipotesi fornisce risultati pressoché identici alla soluzione completa come confermato dal confronto con modelli che considerano interamente i due domini fisici (Bertarelli et al., 2001).

Sotto tali ipotesi il problema può essere risolto in via semiaccoppiata. Si risolve anzitutto la parte elettrostatica e si applica la pressione derivante da tale soluzione alla piastra. Essendoci una dipendenza tra potenziale e spostamenti si dovrà inserire questo procedimento in un processo iterativo.

È ora necessario valutare il comportamento dei condensatori a piatti variabili. La pressione elettrostatica in un condensatore con piatti piani e paralleli è data da:

$$F_{elec} = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2(h_c - w)^2} \quad [3.5]$$

Dove  $A$  è l'area della superficie del condensatore,  $w$  è lo spostamento del piatto per effetto dell'applicazione della differenza del potenziale  $V$  e  $\epsilon_0$  la costante di permittività del mezzo.

Applicando questa formula nel caso di piatto deformabile con l'ipotesi di cui sopra si ottiene il valore della forza elettrostatica  $dF_{elec}$  che si esercita su un area  $dA$ :

$$dF_{elec} = \frac{\varepsilon_0 V^2 dA}{2(h_c - w(r))^2} \quad [3.6]$$

e quindi della pressione elettrostatica:

$$p_{elec} \cong \frac{dF_{elec}}{dA} \quad [3.7]$$

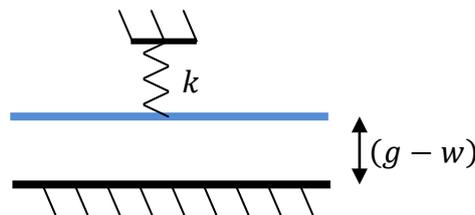
Dove  $w(r)$  rappresenta lo spostamento del diaframma funzione della posizione all'interno del piatto considerato circolare (il problema è assialsimmetrico per questo  $w$  è solamente funzione di  $r$ ). Tale ipotesi porta a considerare un potenziale lineare tra elettrodo (a  $\phi = V$ ) e piastra (a  $\phi = 0$ ).

Mediante un codice programmato in linguaggio *Matlab*, sono state effettuate delle simulazioni parametriche atte ad evidenziare l'influenza dello spessore della membrana  $h_m$  e del gap iniziale tra le piastre  $h_c$  sulla risposta del sistema.

Tale codice implementa un modello bidimensionale ad elementi finiti di piastra alla *Mindlin* e attraverso un processo iterativo tiene conto della variazione dell'attrazione elettrostatica all'aumentare dello spostamento verticale. La forza elettrostatica è calcolata separatamente a partire dallo spostamento di ogni nodo e poi computata come una forza distribuita non uniforme.

Sempre in (Bertarelli et al., 2011) è preso in considerazione il fenomeno del *pull-in*. Esso è un'instabilità dovuta al collasso del piatto sull'elettrodo al raggiungimento di un dato voltaggio (Rezazadeh et al., 2011).

Per intuire questo fenomeno si può prendere come esempio il comportamento di un condensatore a piatti mobili (**Figura 3.3**).



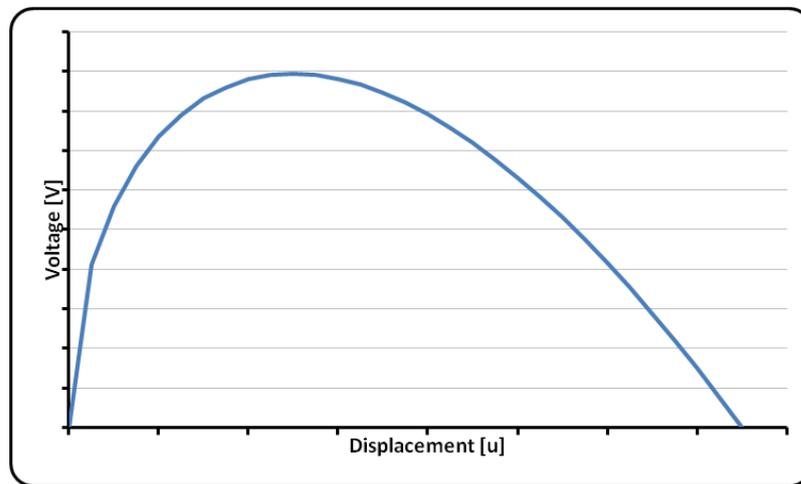
**Figura 3.3:** Condensatore a piatto mobile

L'equilibrio meccanico di tale sistema è dato dal bilancio tra la forza elettrostatica e quella elastica.

$$kw - F_{elec} = 0 \quad [3.8]$$

$$kw - \frac{\epsilon_0 AV^2}{2(g-w)^2} = 0 \quad [3.9]$$

Il legame tra il voltaggio e lo spostamento è di tipo non lineare, come rappresentato in **Figura 3.4**:



**Figura 3.4:** Legame tra voltaggio e spostamento per un condensatore a piatti mobili

Il valore di picco è un limite di stabilità per l'approccio in controllo di voltaggio.

Il comportamento del diaframma usato per la micropompa è del tutto analogo. Il piatto però in questo caso non è mobile ma incastrato al bordo e deformabile. L'approccio analitico per questo problema è riportato in (Bertarelli et al., 2011).

In questo caso lo spostamento  $w(r)$  del piatto mobile non è costante ma dipende dal raggio (si sta considerando una piastra circolare) e quindi anche la pressione elettrostatica dipende dal punto che si sta considerando. Di fatto si ragiona come se la piastra fosse composta da tanti condensatori a piatti mobili in parallelo (Bertarelli et al., 2011)..

---

$$\mathcal{D}(w(r)) - p_{elec}(r) = 0 \quad [3.10]$$

$$\mathcal{D}(w(r)) - \frac{\varepsilon_0 V^2}{2(g - w(r))^2} = 0 \quad [3.11]$$

Dove  $\mathcal{D}(\cdot)$  è l'operatore differenziale che risulta dall'equazione di equilibrio della piastra.

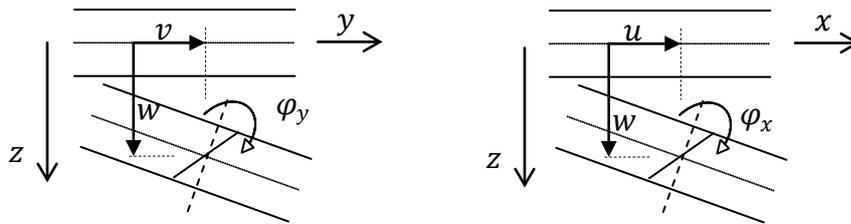
## 3.2 Teoria cinematica della piastra alla *Reissner-Mindlin*

### 3.2.1 Ipotesi cinematiche

Si riporta nel seguito la teoria di *Reissner-Mindlin* ( Corradi dell'acqua, 1992) adeguata a piastre moderatamente spesse.

Il campo di spostamenti della piastra viene descritto mediante funzioni delle coordinate  $x, y$  relative alla superficie media della piastra: 3 traslazioni e 2 rotazioni (vedi **Figura 3.5**).

$$\begin{cases} s_x(x, y, z) = u(x, y) - z\varphi_x(x, y) \\ s_y(x, y, z) = v(x, y) - z\varphi_y(x, y) \\ s_z(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad [3.12]$$



**Figura 3.5:** Cinematica della piastra

Dove:

- $\mathbf{s}^t = [s_x \ s_y \ s_z]$  vettore degli spostamenti
- $\mathbf{u}_m^t = [u \ v]$  spostamenti generalizzati membranali
- $\mathbf{u}_f^t = [w \ \varphi_x \ \varphi_y]$  spostamenti generalizzati flessionali

Da cui si ricava in modo compatto:

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_m \mathbf{u}_m + \mathbf{n}_f \mathbf{u}_f \quad [3.13]$$

Con:

$$\mathbf{n}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{n}_f = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [3.14]$$

La congruenza lineare lega le deformazioni alla parte simmetrica del gradiente degli spostamenti  $s_i$ , considerati piccoli, e si esprime nel seguente modo<sup>[1]</sup>:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i}) \quad [3.15]$$

Da cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ S_{yy} = \frac{\partial s_y}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ S_{zz} = \frac{\partial s_z}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ 2S_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ 2S_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} = -\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2S_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = -\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad [3.16]$$

In modo compatto è possibile esprimere le deformazioni attraverso la matrice  $C$ , operatore di congruenza (con  $S$  vettore che contiene 6 componenti indipendenti del tensore di deformazione):

$$S = C \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = C\mathbf{u} \quad [3.17]$$

con:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} & -z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [3.18]$$



Date le precedenti definizioni, la cinematica della piastra può essere espressa nel seguente modo:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_p \\ \mathbf{S}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m + z\mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} \quad [3.23]$$

E come già visto in precedenza per gli spostamenti, si può scrivere  $\mathbf{S}$  come combinazione lineare di  $\mathbf{q}_m$ ,  $\mathbf{q}_f$  e  $\mathbf{q}_s$ :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_m + \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_f + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}_s = \mathbf{b}\mathbf{q} \quad [3.24]$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{b}_m \mathbf{q}_m + \mathbf{b}_f \mathbf{q}_f + \mathbf{b}_s \mathbf{q}_s = [\mathbf{b}_m \quad \mathbf{b}_f \quad \mathbf{b}_s] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} \quad [3.25]$$

Con:

$$\mathbf{b}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_f = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.26]$$

### 3.2.2 Principio dei lavori virtuali applicato alla piastra assialsimmetrica con carichi elettrostatici

Il principio dei lavori virtuali afferma che condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che i lavori virtuali interno ed esterno siano uguali per ogni variazione virtuale di spostamenti e deformazioni:

$$\delta L_e = \delta L_i \quad [3.27]$$

$$\forall \delta \mathbf{s} \text{ e } \delta \mathbf{S} = \mathbf{C} \delta \mathbf{s} \text{ in } \Omega \text{ e } \delta \mathbf{s} = 0 \text{ su } S_u$$

Le equazioni dei lavori virtuali interno ed esterno risultano da quanto riportato nella sezione 3.2, per una piastra di superficie  $S$  e spessore  $h$ :

- Lavoro virtuale esterno:

$$\delta L_e = \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{F}_e^t(\mathbf{s}) \delta \mathbf{s} \cdot d\mathbf{z} dS \quad [3.28]$$

- $\mathbf{F}_e^t$ : Vettore dei carichi esterni elettrostatici
- $\mathbf{s}$ : Vettore degli spostamenti

$$\begin{aligned} &= \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{F}_e^t(\mathbf{u}) [\mathbf{n}_m \delta \mathbf{u}_m + \mathbf{n}_f \delta \mathbf{u}_f] \cdot d\mathbf{z} dS = \int_S \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{F}_e^t(\mathbf{u}) \mathbf{n}_m \delta \mathbf{u}_m + \mathbf{F}_e^t(\mathbf{u}) \mathbf{n}_f \delta \mathbf{u}_f] \cdot d\mathbf{z} dS = \\ &= \int_S \int_{-h/2}^{h/2} [\delta \mathbf{u}_m^t \mathbf{n}_m^t \mathbf{F}_e(\mathbf{u}) + \delta \mathbf{u}_f^t \mathbf{n}_f^t \mathbf{F}_e(\mathbf{u})] \cdot d\mathbf{z} dS = \\ &= \int_S \left[ \delta \mathbf{u}_m^t \cdot \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{n}_m^t \mathbf{F}_e(\mathbf{u})] \cdot d\mathbf{z} + \delta \mathbf{u}_f^t \cdot \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{n}_f^t \mathbf{F}_e(\mathbf{u})] \cdot d\mathbf{z} \right] dS = \\ &= \int_S [\delta \mathbf{u}_m^t \mathbf{p}_{m,e}(\mathbf{u}) + \delta \mathbf{u}_f^t \mathbf{p}_{f,e}(\mathbf{u})] \cdot dS = \int_S [\delta \mathbf{u}_m^t \quad \delta \mathbf{u}_f^t] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{m,e}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{p}_{f,e}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \cdot dS = \end{aligned}$$

Dove:

$$\mathbf{p}_{m,e}(\mathbf{u}) = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{n}_m^t \mathbf{F}_e(\mathbf{u})] \cdot d\mathbf{z} \quad [3.29]$$

$$\mathbf{p}_{f,e}(\mathbf{u}) = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{n}_f^t \mathbf{F}_e(\mathbf{u})] \cdot d\mathbf{z} \quad [3.30]$$

In definitiva si ottiene:

$$\delta L_e = \int_S \delta \mathbf{u}^t \mathbf{p}_e(\mathbf{u}) \cdot dS \quad [3.31]$$

- Lavoro virtuale interno:

$$L_i = \int_S [\mathbf{N}^t \delta \mathbf{q}_m + \mathbf{M}^t \delta \mathbf{q}_f + \mathbf{T}^t \delta \mathbf{q}_s] \cdot dS \quad [3.32]$$

- $\mathbf{N}^t$ ,  $\mathbf{M}^t$  e  $\mathbf{T}^t$ : azioni interne generalizzate definite come di seguito:

Azioni membranali generalizzate:

$$\mathbf{N} = \int_S \mathbf{T}_p dz \quad [3.33]$$

Azioni flessionali generalizzate:

$$\mathbf{M} = \int_S \mathbf{T}_p \cdot z \cdot dz \quad [3.34]$$

Azioni di taglio generalizzate:

$$\mathbf{T} = \int_S \mathbf{T}_s \cdot dz \quad [3.35]$$

$$\delta L_i = \int_S [\mathbf{N}^t \quad \mathbf{M}^t \quad \mathbf{T}^t] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_m \\ \delta \mathbf{q}_f \\ \delta \mathbf{q}_s \end{bmatrix} \cdot dS = \int_S \mathbf{Q}^t \delta \mathbf{q} \cdot dS =$$

$$\delta L_e = \int_S \mathbf{q}^t \mathbf{D}^t \delta \mathbf{q} \cdot dS \quad [3.36]$$

Dove si è sfruttato il legame costitutivo espresso in variabili generalizzate:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D} \mathbf{q} \quad [3.37]$$

Si rimanda al capitolo 4 la costruzione della matrice di rigidezza elastica  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{d}_s \end{bmatrix} \quad [3.38]$$

Con  $\mathbf{d}_p$  e  $\mathbf{d}_s$  le matrici di rigidezza elastica flessionale e a taglio:

$$\mathbf{d}_p = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad [3.39]$$

E:

$$\mathbf{d}_s = \frac{5}{6}G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.40]$$

### 3.3 Formulazione ad elementi finiti per la soluzione del problema di piastra soggetta a carichi elettrostatici

Si introduce ora la discretizzazione in elementi finiti nelle espressioni dei lavori virtuali:

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \mathbf{q}^{i^t} \{\mathbf{D}\}^t \delta \mathbf{q}^i \cdot dS = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \delta \mathbf{u}^{i^t} \mathbf{p}_e(\mathbf{u}) \cdot dS \quad [3.41]$$

Dove:

- $\mathbf{u}^i$ : parametri cinematici incogniti del singolo elemento finito di area  $S^i$

$$\mathbf{u}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m^t \\ \mathbf{u}_f^t \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix}_i \quad [3.42]$$

- $N_e$ : numero totale di elementi finiti del modello

Le condizioni al contorno del problema di piastra analizzato nel presente lavoro permettono di trascurare il problema membranale per cui le incognite cinematiche si riducono alle tre flessionali:

$$\mathbf{u}^i = [\mathbf{u}_f^t]_i = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix}_i \quad [3.43]$$

I parametri cinematici all'interno del singolo elemento finito dipendono dalle variabili nodali tramite le funzioni di forma.

$$\mathbf{u}^i(x) = \mathbf{N}^f(x) \cdot \mathbf{U}^i \quad [3.44]$$

Si considera un elemento finito tipo *Mindlin*, cioè con tre incognite per ogni nodo, a 6 nodi. La piastra è molto snella e sarebbe ammissibile utilizzare un elemento alla *Kirchhoff* che presenta

un numero minore di incognite e diminuisce le dimensioni del problema. Tuttavia la formulazione conforme per piastre alla *Kirchhoff* risulta piuttosto complessa, essendo richiesta una continuità di tipo  $C^1$  al campo di spostamenti approssimante attraverso le interfacce fra elementi adiacenti (Corigliano e Taliercio, 2005). L'elemento alla *Mindlin* oltre ad essere più completo non presenta queste problematiche. La scelta dell'elemento a 6 nodi è stata fatta per evitare il fenomeno dello shear locking (si veda nella sezione 3.3.1):

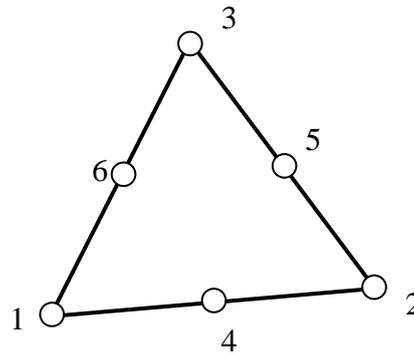


Figura 3.6: Elemento finito a 6 nodi di tipo piastra alla *Mindlin*

Per il  $k$ -esimo nodo le incognite nodali sono lo spostamento verticale e le rotazioni attorno a  $x$  e  $y$ :

$$\mathbf{U}_k^{i^t} = [W^k \quad \Phi_x^k \quad \Phi_y^k] \quad [3.45]$$

Il vettore delle incognite nodali dell'elemento  $i$ -esimo è perciò costituito da 18 elementi:

$$\mathbf{U}^{i^t} = [U_1^{i^t} \quad U_2^{i^t} \quad U_3^{i^t} \quad U_4^{i^t} \quad U_5^{i^t} \quad U_6^{i^t}] \quad [3.46]$$

La matrice delle funzioni di forma è perciò ha perciò dimensioni  $3 \times 18$ . Le funzioni di forma sono identiche per i tre gradi di libertà dell'elemento, è conveniente esprimerle in coordinate areolari o oblique (Corigliano e Taliercio, 2005), sistema di riferimento in cui sono paraboliche:

$$\begin{aligned} & \mathbf{N}(L_1, L_2, L_3) \\ & = [L_1(2L_1 - 1) \quad L_2(2L_2 - 1) \quad L_3(2L_3 - 1) \quad 4L_1L_2 \quad 4L_2L_3 \quad 4L_1L_3] \end{aligned} \quad [3.47]$$

E la matrice  $\mathbf{N}^f$  finale dell'elemento risulta essere:

$$\mathbf{N}^f = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_6 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad [3.48]$$

In modo analogo si possono esprimere le deformazioni in funzione delle derivate delle funzioni di forma [3.25]:

$$\mathbf{S}^i = \mathbf{b}_f \mathbf{q}_f^i + \mathbf{b}_s \mathbf{q}_s^i \quad [3.49]$$

Introducendo le variabili nodali:

$$\mathbf{q}_f^i = \mathbf{B}_f(\mathbf{x}) \mathbf{U}^i \quad [3.50]$$

$$\mathbf{q}_s^i = \mathbf{B}_s(\mathbf{x}) \mathbf{U}^i \quad [3.51]$$

$$\mathbf{q}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}_s(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{U}^i = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}^i \quad [3.52]$$

Dove  $\mathbf{B}_f$  e  $\mathbf{B}_s$  sono definiti nel modo seguente sull'i-esimo elemento:

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & -\frac{\partial N_6}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & 0 & -\frac{\partial N_6}{\partial y} & -\frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [3.53]$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -N_2 & 0 & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial x} & -N_6 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & -N_2 & \dots & \frac{\partial N_6}{\partial y} & 0 & -N_6 \end{bmatrix} \quad [3.54]$$

Il legame tra le variabili locali e quelle globali si può rappresentare tramite le matrici di connettività  $\mathbf{L}^i$ .

$$\mathbf{U}^i = \mathbf{L}^i \cdot \mathbf{U} \quad [3.55]$$

Sostituendo i modelli ad EF nella relazione [3.41]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \mathbf{U}^{i^t} \mathbf{B}^t \{\mathbf{D}\}^t \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{U}^i \cdot dS &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \delta \mathbf{U}^{i^t} \mathbf{N}^{f^t} \mathbf{p}_e(\mathbf{U}) \cdot dS \\ \sum_{i=1}^{N_e} \delta \mathbf{U}^{i^t} \int_{S^i} \mathbf{B}^t \{\mathbf{D}\}^t \mathbf{B} \cdot dS \cdot \mathbf{U}^i &= \sum_{i=1}^{N_e} \delta \mathbf{U}^{i^t} \int_{S^i} \mathbf{N}^{f^t} \mathbf{p}_e(\mathbf{U}) \cdot dS \\ \sum_{i=1}^{N_e} \delta \mathbf{U}^{i^t} \mathbf{K}^i \mathbf{U}^i &= \sum_{i=1}^{N_e} \delta \mathbf{U}^{i^t} \mathbf{P}_e^i(\mathbf{U}) \\ \delta \mathbf{U}^t \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{L}^{i^t} \mathbf{K}^i \mathbf{L}^i \cdot \mathbf{U} &= \delta \mathbf{U}^t \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{L}^{i^t} \mathbf{P}_e^i(\mathbf{U}) \end{aligned}$$

$$\delta \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^t \mathbf{P}_e(\mathbf{U})$$

Che deve valere per ogni  $\delta \mathbf{U}^t$ , si ricava perciò il sistema lineare risolvete il problema:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}_e(\mathbf{U}) \quad [3.56]$$

Dove:

- $\mathbf{K}$  è la matrice di rigidezza globale della piastra:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{L}^{it} \int_{S^i} \mathbf{B}^t \{\mathbf{D}\} \mathbf{B} \cdot dS \mathbf{L}^i \quad [3.57]$$

- $\mathbf{P}(\mathbf{U})$  è il vettore di carichi esterni dipendente dal vettore di incognite nodali.

$$\mathbf{P}_e(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{L}^{it} \int_{S^i} \mathbf{N}^{ft} \mathbf{p}_e(\mathbf{U}) \cdot dS \quad [3.58]$$

- $\mathbf{U}$  è il vettore di incognite nodali globale.

Le funzioni di forma sono paraboliche per cui nel calcolo di  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{P}$  intervengono funzioni polinomiali di secondo grado, nel caso di  $\mathbf{K}$  perché si moltiplicano le derivate delle funzioni di forma mentre per  $\mathbf{P}$  si utilizzano le funzioni di forma stesse. Per questa ragione sarà sufficiente integrare sull'elemento con 3 punti di Gauss le cui coordinate e pesi sono riportate in **Tabella 3.1**, occorre aggiungere un fattore di 0,5 per riferirsi ad elementi finiti triangolari (Hughes, 1987).

			Formula con 3 punti			Grado di precisione 2					
0.33333	33333	33333	0.66666	66666	66667	0.16666	66666	66667	0.16666	66666	66667

**Tabella 3.1:** Coordinate dei punti Gauss per un'integrazione su 3 punti

### 3.3.1 Il fenomeno dello “*shear locking*”

L'analisi di piastre sottili con EF alla *Mindlin* presentano problemi di tipo numerico analoghi a quelli che si hanno per gli elementi di trave alla *Timoshenko*. Ci si accorge del fatto che la formulazione alla *Mindlin* non può dare risultati attendibili per piastre sottili se le matrici di rigidezza dell'elemento vengono integrate esattamente. La condizione di *Kirchhoff* che impone la nullità dell'energia associata alla deformazione di taglio porta infatti ad un'amplificazione spuria della rigidezza flessionale che ha come conseguenza una sottostima grossolana degli spostamenti trasversali. Questo fenomeno prende il nome di “*shear locking*”.

Per comprendere appieno le ragioni di questo fenomeno è utile ragionare inizialmente a dimensioni ridotte, concentrandosi su una formulazione di travi snelle usando EF di trave alla *Timoshenko*. Si fa riferimento a un elemento finito di lunghezza  $L$  a 2 nodi (**Figura 3.7**).



**Figura 3.7:** Elemento finito a 2 nodi alla Timoshenko

Introducendo la variabile adimensionale  $\xi = 2x/L - 1$ , la curvatura flessionale può essere riscritta nel seguente modo:

$$\chi = \mathbf{B}_f \mathbf{U} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L} \quad [3.59]$$

La deformazione a taglio (scorrimento medio) è lineare lungo l'elemento ed è data da:

$$t = \mathbf{B}_s \mathbf{U} = \frac{v_2 - v_1}{L} - \varphi_1 - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L} x = \frac{v_2 - v_1}{L} - \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \xi \quad [3.60]$$

La [3.60] può essere riscritta nel modo seguente:

$$t = A - B\xi \quad [3.61]$$

Dove:

$$A = \frac{v_2 - v_1}{L} - \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \quad [3.62]$$

$$B = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \quad [3.63]$$

Il coefficiente  $A$  è una combinazione lineare di tutti i gradi di libertà dell'elemento mentre il coefficiente  $B$  dipende solamente dai gradi di libertà rotazionali.

Imporre la condizione di *Eulero-Bernoulli* per travi snelle significa annullare lo scorrimento medio in tutti i punti della trave. Questa condizione è tradotta nella formulazione ad EF annullando l'energia di deformazione a taglio dell'elemento,  $\Omega_s$ .

$$\Omega_s = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K}_s \mathbf{U} = 0 \quad [3.64]$$

Se la matrice di rigidezza a taglio  $\mathbf{K}_s$  è integrata esattamente, cioè sfruttando 2 punti di Gauss, la condizione  $\Omega_s = 0$  si traduce nelle condizioni di nullità dei coefficienti  $A$  e  $B$ .

La condizione  $B = 0$  implica che le rotazioni dell'elemento siano uguali. Di conseguenza sono nulle anche curvatura e energia flessionale dell'elemento.

Di fatto la formulazione alla *Timoshenko* per travi snelle non porta a risultati attendibili se le matrici di rigidezza dell'elemento vengono integrate esattamente perché si introduce un'amplificazione spuria della rigidezza flessionale.

Per ovviare a questo inconveniente si può utilizzare un'integrazione ridotta per la valutazione della rigidezza tagliante dell'elemento. Nel caso dell'elemento a 2 nodi si integra sfruttando un solo punto di Gauss, cosa che lascia libero il parametro  $B$  e quindi la deformazione flessionale della trave.

Il fenomeno dello *shear locking* dipende in maniera diretta dallo spessore della trave o della piastra che si stanno considerando. Al diminuire dello spessore, maggiore sarà l'effetto di *locking* del modello.

Considerando il caso più interessante della piastra, le sue matrici di rigidezza flessionale e tagliante dipendono dallo spessore in maniera diversa.

$$(\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_f) \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad [3.65]$$

Introducendo un peso adimensionale legato al rapporto fra le rigidezze si riscrive il termine legato al taglio:

$$\mathbf{K}_s = \alpha^* \mathbf{K}_s^* \quad [3.66]$$

Con:

$$\alpha^* = \frac{5G}{6E} \left(\frac{L}{h}\right)^2 \quad [3.67]$$

Dove  $L$  è una dimensione caratteristica della piastra in pianta, nel caso di studio il raggio della piastra circolare.

I termini  $K_f$  e  $K_s^*$  dipendono dallo spessore nello stesso modo e al tendere di questo a zero il sistema tende a ridursi al solo termine di taglio perché  $\alpha^* \rightarrow \infty$ :

$$\alpha^* K_s^* U = P \quad [3.68]$$

$$K_s^* U = \frac{P}{\alpha^*} \rightarrow 0 \quad [3.69]$$

$$K_s^* U = 0 \quad [3.70]$$

L'unico modo perché la soluzione non sia banale consiste nel rendere la matrice  $K_s^*$  singolare attraverso un'integrazione ridotta. Tuttavia un'integrazione ridotta per EF alla *Mindlin* può introdurre nel sistema modi cinematici ad energia nulla, che portano ad una singolarità della matrice di rigidezza globale, che non è voluta. La tecnica dell'integrazione ridotta può essere applicata con successo a piatto di utilizzare i dovuti accorgimenti (Corigliano e Taliercio, 2005). Nel dettaglio occorre introdurre una singolarità nella matrice di rigidezza a taglio facendo in modo che la matrice globale del sistema rimanga non singolare. Per questo occorre valutare per ogni elemento finito il numero di punti di Gauss corretto perché l'integrazione sia accurata e non ci siano singolarità globali nel sistema. Se invece il parametro  $\alpha^*$  non è sufficientemente elevato non si verifica il fenomeno dello *shear locking*.

Considerando l'elemento finito alla *Mindlin* a 3 nodi la snellezza al di sopra del quale non si verifica lo shear locking vale 7. Nel caso in esame se il raggio della piastra è pari a  $750\mu\text{m}$  la snellezza massima considerando  $h = 10\mu\text{m}$  risulta essere inferiore al valore limite e insorge il *locking*.

$$\frac{L}{h} = 75 > 7 \quad [3.71]$$

Se invece si considera l'elemento finito a 6 nodi presentato al capitolo 3.3, per cui le funzioni di forma sono di secondo grado, il valore limite di snellezza è 7500 ed è possibile trascurare il fenomeno dello *shear locking*.

### 3.3.2 Algoritmo per la soluzione del problema di piastra con sollecitazione elettrostatica

Per la risoluzione del problema è necessario procedere iterativamente perché la forza elettrostatica dipende dagli spostamenti. Nel presente lavoro è stato implementato il seguente algoritmo in un codice scritto in linguaggio *Matlab*.

1- *Calcolo della matrice elastica,  $\mathbf{K}$  che non cambierà nel corso dell'analisi*

2- *Inizializzazione del ciclo*

$$k = 1, \mathbf{w}^k = 0, \|\mathbf{w}^k\| = 1, \text{toll}$$

3- *Ciclo*

a- *Calcolo della forza elettrostatica:*

$$\mathbf{F}_{elec}^k = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2(h_c - \mathbf{w}^k)^2} \quad [3.72]$$

b- *Calcolo delle forze nodali equivalenti:*

$$\mathbf{P}(\mathbf{U}^k) = \mathbf{P}(\mathbf{F}_{elec}^k(\mathbf{w}^k)) \quad [3.73]$$

c- *Risoluzione del problema lineare:*

$$\mathbf{K}\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{P}(\mathbf{U}^k) \quad [3.74]$$

d- Aggiornamento degli spostamenti nodali:

$$\mathbf{U}^{k+1} \rightarrow \mathbf{w}^{k+1} \quad [3.75]$$

e- Test di convergenza:

$$err = \frac{\|\mathbf{w}^k\| - \|\mathbf{w}^{k+1}\|}{\|\mathbf{w}^{k+1}\|} < toll \quad [3.76]$$

Se il test è verificato **ESCI** dal ciclo e  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{k+1}$ .

Se no **AGGIORNA** il contatore ( $k = k + 1$ ) e **VAI** al punto “a”.

---

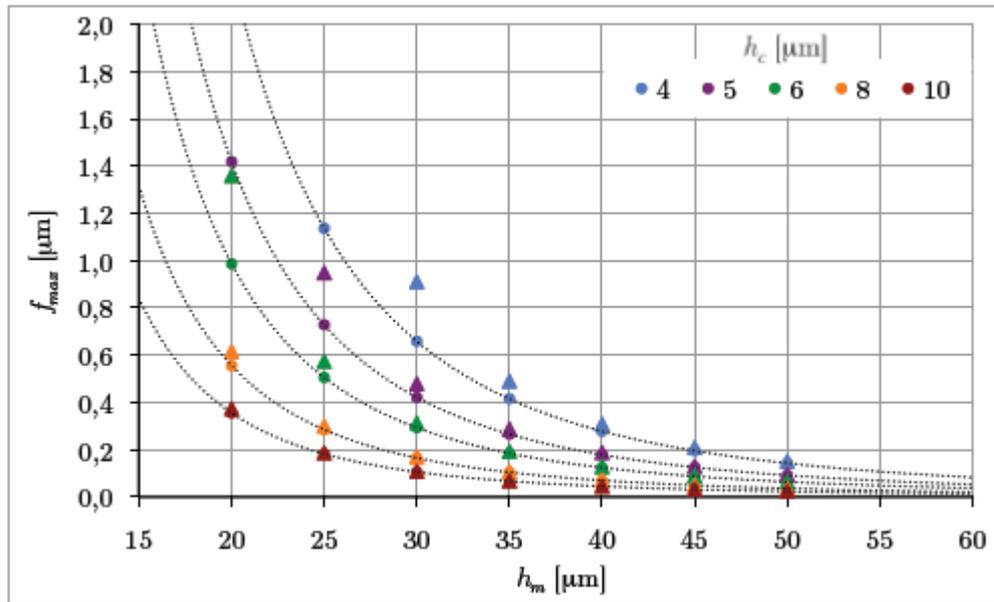
### 3.4 Validazione del codice ad elementi finiti

Nel lavoro di (Bertarelli, 2011) si eseguono analisi identiche a quelle presenti in questo lavoro su geometrie differenti mediante un codice commerciale (*Abaqus*). Il confronto con tali risultati, in termini di spostamenti, *stroke volume* e voltaggio di *pull-in* permette di convalidare il codice qui presentato e quindi di utilizzarlo in ulteriori analisi.

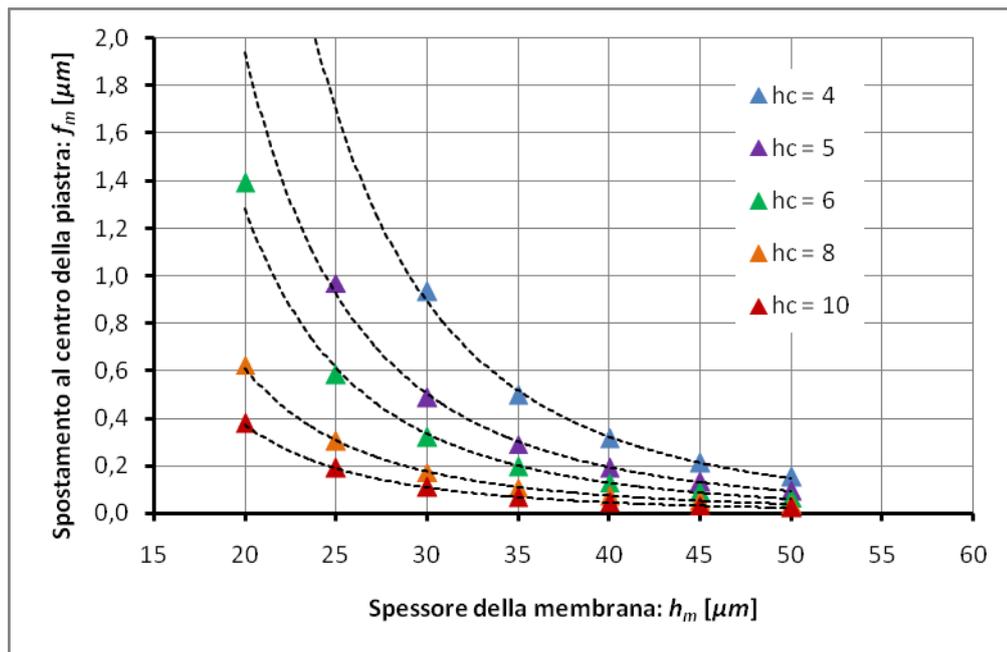
Le analisi di Bertarelli sono state effettuate per una micropompa capacitiva con raggio  $2\text{mm}$ , spessore della membrana variabile tra  $20$  e  $50\ \mu\text{m}$  e gap tra elettrodo e piastra inferiore variabile tra  $4$  e  $10\ \mu\text{m}$ , con differenza di voltaggio pari a  $60\text{V}$ .

Il confronto tra codice Matlab e Abaqus viene svolto per quanto riguarda gli spostamenti in centro della piastra, lo *stroke volume* e il voltaggio di *pull-in*.

Confronto tra spostamenti al centro della piastra:



(a)



(b)

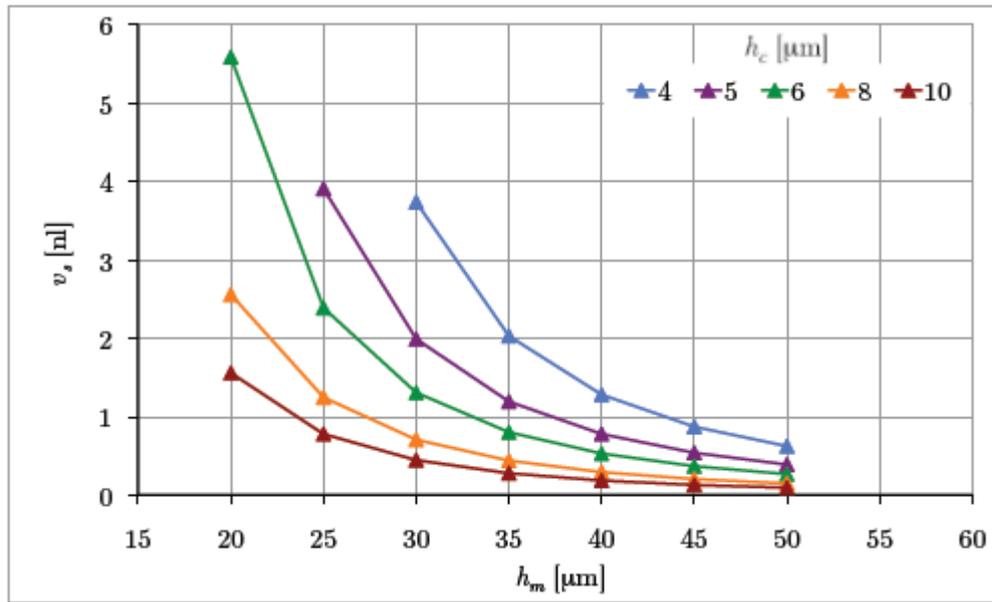
**Figura 3.8:** Spostamento al centro della piastra circolare attuata elettrostaticamente in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  e al variare del gap iniziale tra elettrodo e membrana  $h_c$ . (a) Analisi con *Abaqus* da (Bertarelli, 2011). (b) Analisi col codice Matlab.

---

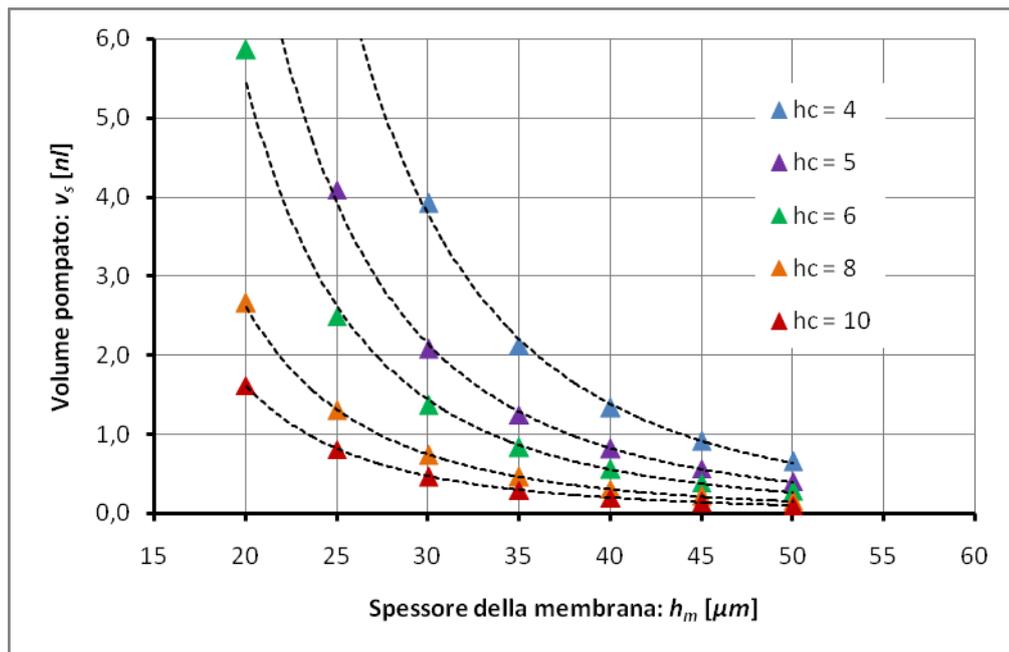
La **Figura 3.8** presenta gli spostamenti al centro della piastra circolare attuata elettrostaticamente in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  e al variare del gap iniziale tra elettrodo e membrana  $h_c$ . Nella **Figura 3.8-a** sono riportati i risultati relativi alle analisi svolte da Bertarelli con il codice *Abaqus* (Bertarelli, 2011). I puntini triangolari identificano le soluzioni numeriche mentre i puntini circolari le soluzioni analitiche ottenute applicando alla piastra un carico equivalente distribuito il cui integrale è pari alla forza elettrostatica globale. Nella **Figura 3.8-b** sono riportate le soluzioni numeriche ottenute con il codice *Matlab*. In entrambi i casi dove non sono presenti i puntini si è andati a pull-in. Tale valore è calcolato considerandolo come il primo punto in cui non si ha convergenza dell'analisi. Le linee sono ricavate per interpolazione esponenziale.

Come si può notare i due approcci portano a soluzioni pressoché identiche.

Confronto tra gli *stroke volume*:



(a)



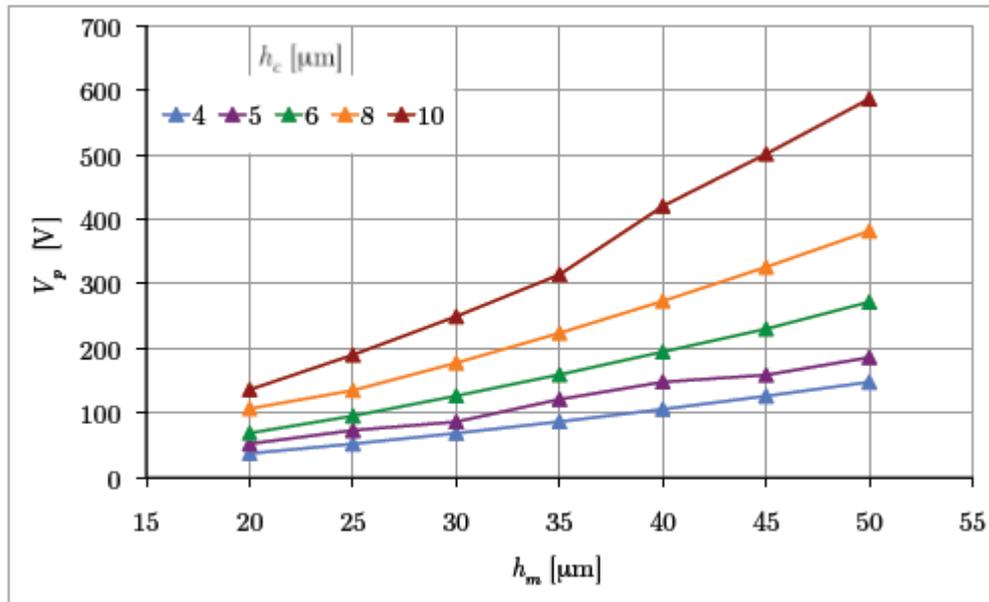
(b)

**Figura 3.9:** Stroke volume per la piastra circolare attuata elettrostaticamente in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  e al variare del gap iniziale tra elettrodo e membrana  $h_c$ . (a) Analisi con *Abaqus* da (Bertarelli, 2011). (b) Analisi col codice Matlab.

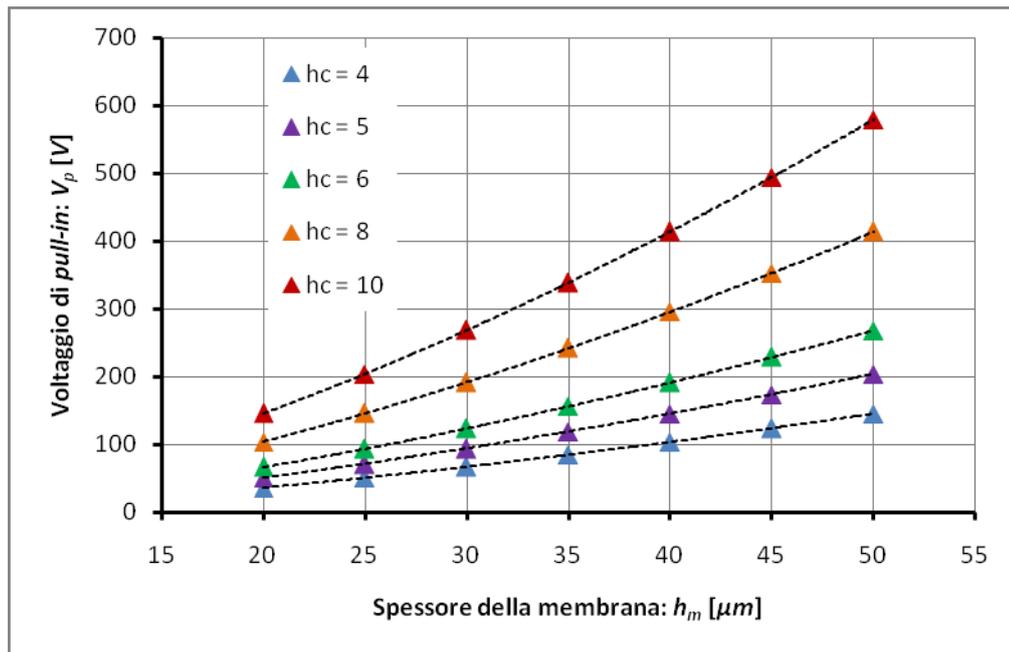
---

Per quanto riguarda lo *stroke volume* si hanno risultati analoghi, in questo caso si può notare come nel codice Matlab esso sia leggermente sovrastimato.

Confronto tra i voltaggi di *Pull-in*:



(a)



(b)

**Figura 3.10:** Voltaggio di pull-in per la piastra circolare attuata elettrostaticamente in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  e al variare del gap iniziale tra elettrodo e membrana  $h_c$ . (a) Analisi con *Abaqus* da (Bertarelli, 2011). (b) Analisi col codice Matlab.

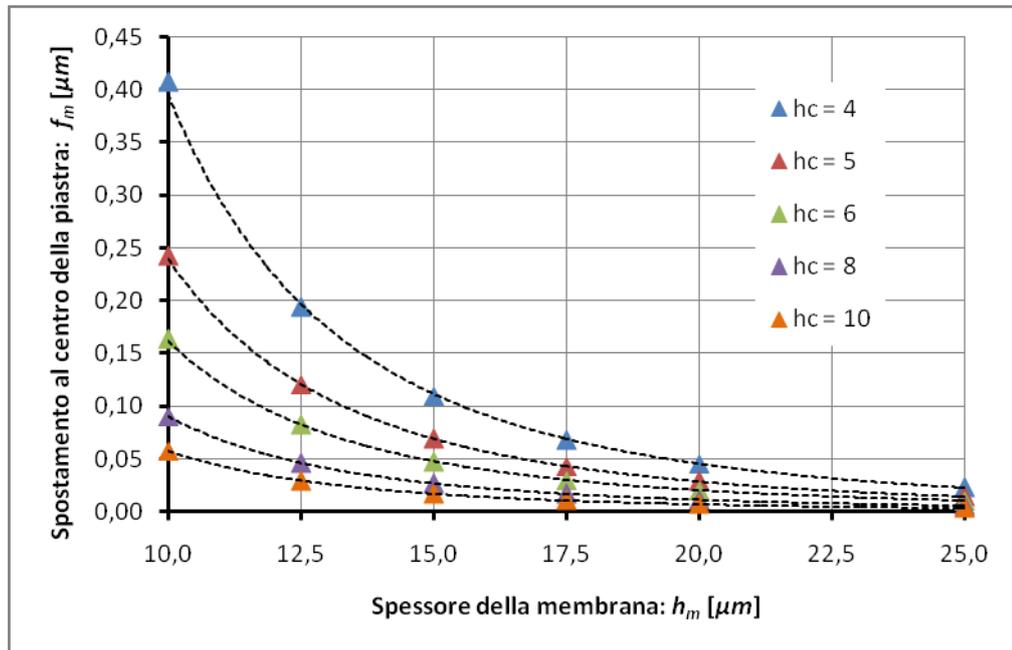
---

### 3.5 Studio parametrico

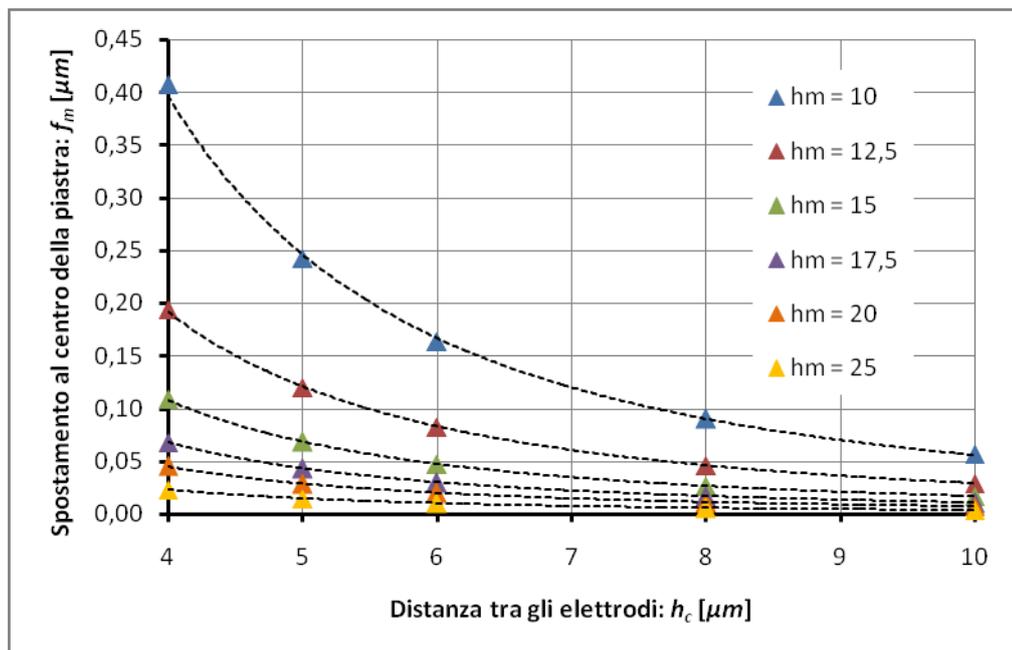
Le geometrie considerate in questo lavoro sono differenti da quelle inizialmente ipotizzate da (Bertarelli et al., 2011) ma fanno riferimento a quelle conclusive proposte nel medesimo lavoro. Si considera una piastra di dimensioni ridotte,  $R = 750\mu m$  con spessore variabile tra 10 e 25  $\mu m$ . La distanza tra elettrodo e piastra rimane invece invariata e compresa tra 4 e 10  $\mu m$ .

Nelle figure seguenti sono riportati i risultati in termini di spostamento massimo al centro della piastra, *stroke volume* e voltaggio di *pull-in* in funzione dello spessore della membrana e della distanza iniziale tra elettrodo e piastra.

Spostamento massimo della piastra



(a)



(b)

Figura 3.11-a,b: Spostamento al centro della piastra  $f_m$  in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  al variare del gap iniziale tra elettrodo e piastra  $h_c$  (a) e viceversa (b).

---

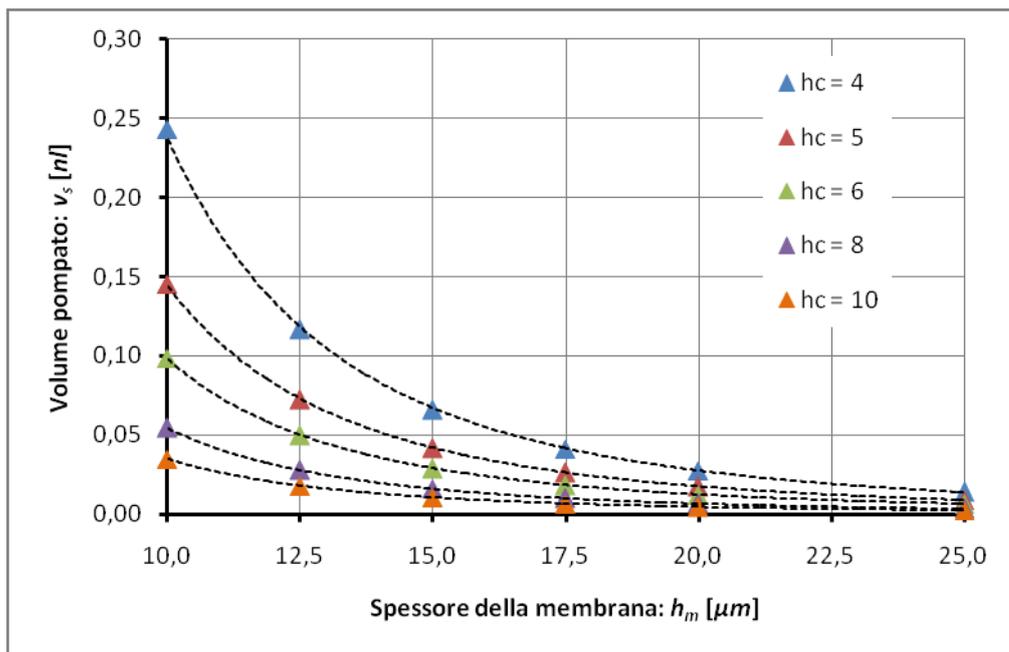
Le **Figura 3.11-a,b** mostrano la risposta del sistema in termini di spostamento massimo della piastra in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  e del gap iniziale tra elettrodo e piastra  $h_c$ . Nella **Figura 3.11-a** sono riportate le risposte del sistema in funzione dello spessore  $h_m$  per differenti distanze tra elettrodi  $h_c$ . Nella **Figura 3.11-b** sono riportate le risposte del sistema in funzione di  $h_c$  e  $h_m$ .

Al diminuire dello spessore della membrana il sistema è meno rigido per cui gli spostamenti al centro della piastra risultano essere maggiori; la diminuzione del gap porta a un aumento delle forze elettrostatiche, e quindi a frecce più grandi dato che dipendono dall'inverso della distanza tra i piatti.

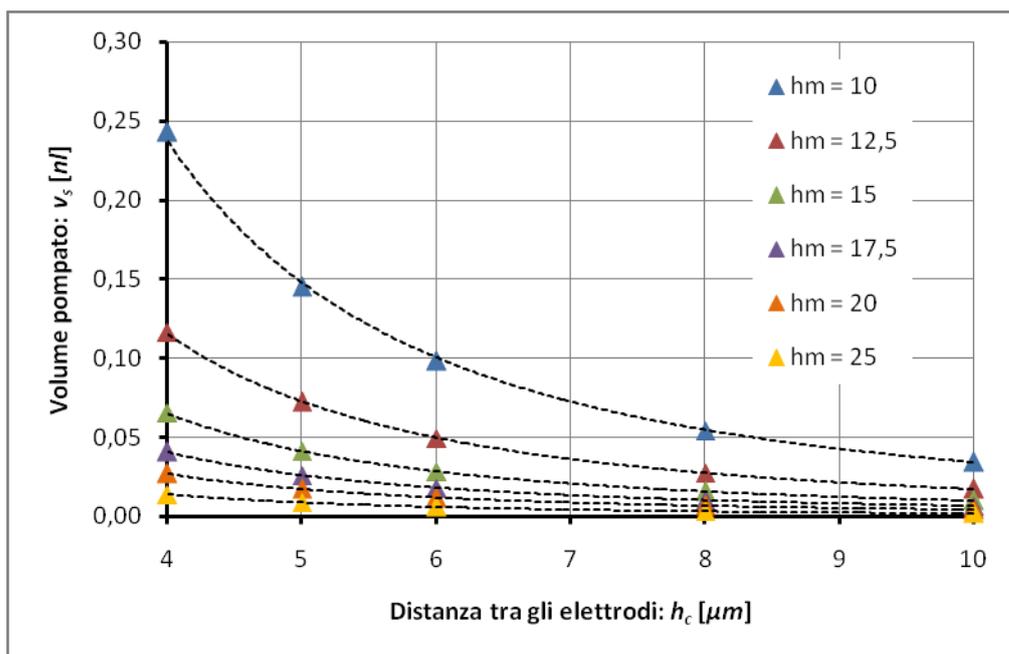
In nessuno di questi casi si raggiunge il voltaggio di pull-in e si ha convergenza anche per i valori minori di spessore, cosa che non avveniva nello studio di (Bertarelli et al., 2011). Ciò è dovuto alle dimensioni della piastra che, avendo un raggio minore, è globalmente più rigida.

### Stroke volume

Le **Figura 3.12-a,b** mostrano la risposta del sistema in termini di stroke volume in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  e della distanza iniziale tra elettrodo e piastra  $h_c$ . Nella **Figura 3.12-a** sono riportate le risposte del sistema in funzione dello spessore  $h_m$  per differenti gap  $h_c$ . Nella **Figura 3.12-b** sono riportate le risposte del sistema in funzione della distanza tra i piatti  $h_c$  per differenti spessori  $h_m$ . L'andamento dello *stroke volume* è analogo a quello dello spostamento in centro alla piastra, per cui si ha un aumento al diminuire dello spessore della membrana e al diminuire del gap iniziale tra i piatti:



(a)



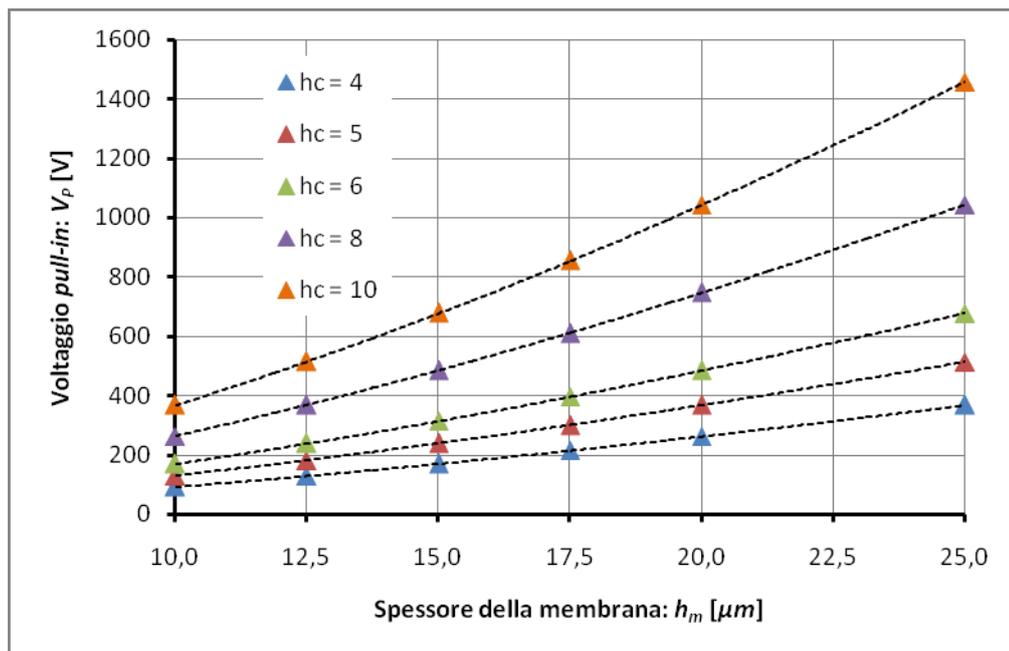
(b)

**Figura 3.12:** Stroke volume  $v_s$  in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  al variare del gap iniziale tra elettrodo e piastra  $h_c$  (a) e viceversa (b).

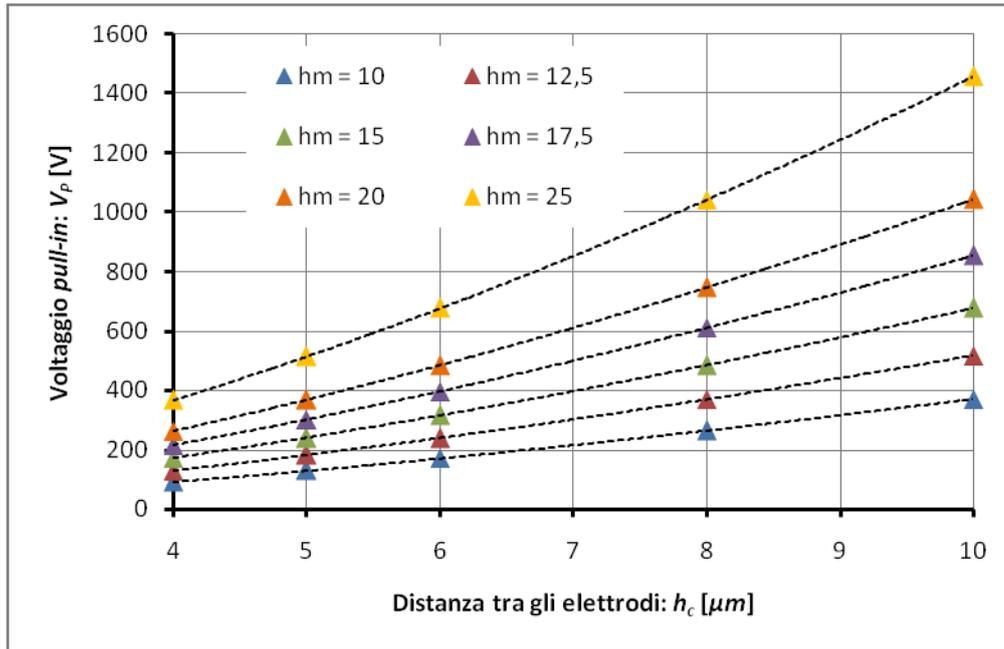
Voltaggio di pull-in

La nuova geometria della pompa, con un raggio notevolmente inferiore rispetto a quello inizialmente proposto da (Bertarelli et al., 2011) rende il sistema molto rigido. Per questa ragione in nessun caso indagato si raggiunge tale instabilità.

Nella **Figura 3.13-a,b** sono riportate le risposte del sistema in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  e del gap iniziale tra elettrodo e piastra  $h_c$ :



(a)



(b)

**Figura 3.13:** Voltaggio di *pull-in*  $V_p$  in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  al variare del gap iniziale tra elettrodo e piastra  $h_c$  (a) e viceversa (b).

Il limite di *pull-in* è minore se  $h_c$  è piccolo perché le forze generate dal sistema sono maggiori. Se la membrana è meno spessa il sistema è meno rigido e il *pull-in* è raggiunto prima.

Come si può notare i valori di voltaggio di *pull-in* sono in generale molto alti e di poco interesse considerando il range di voltaggio nel quale lavoreranno questi dispositivi, si limitano infatti i voltaggi massimi a circa 50/60volt per non causare danni al dispositivo e all'utente.

### Potenza immagazzinata

L'energia immagazzinata dal condensatore dipende dallo spostamento  $w$  del piatto che a sua volta varia con il raggio della piastra. Essa è definita [3.77] come metà dell'integrale sul volume interessato dal fenomeno elettrico ( $\Omega$ ) dello spostamento elettrico  $\mathbf{D}$  per il campo elettrico  $\mathbf{E}$ :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E}^t \cdot \mathbf{D} \cdot d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E}^t \cdot \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} \cdot d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0 \cdot \nabla\Phi^t \nabla\Phi \cdot d\Omega \quad [3.77]$$

Con  $\Phi$  potenziale elettrico e  $\epsilon_0$  la costante di permittività del vuoto.

Nel caso semplice di condensatore a facce parallele (sia fisse che mobili) il potenziale è lineare in  $z$  (coordinata definita sullo spessore del dominio elettrico), vale  $V$  sull'elettrodo ( $z = h_c$ ) ed è nullo sulla piastra che si trova collegata a terra .

L'espressione del potenziale è la seguente:

$$\Phi = \frac{z}{h_c} V \quad [3.78]$$

Il suo gradiente è:

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{V}{h_c} \quad [3.79]$$

Da cui si ricava l'espressione dell'energia immagazzinata:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0 \cdot \nabla \Phi^t \nabla \Phi \cdot d\Omega = \quad [3.80]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{h_c} \epsilon_0 \cdot \frac{V^2}{h_c^2} \cdot dz r dr d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \epsilon_0 \cdot \frac{V^2}{h_c} \cdot r dr d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \cdot A}{h_c} V^2 =$$

$$W = \frac{1}{2} C V^2 \quad [3.81]$$

Con  $A$  area della piastra e  $C \equiv \epsilon_0 \cdot A/h_c$  capacità del condensatore.

Nel caso in cui le facce del condensatore siano mobili pur mantenendosi piani, cambia l'espressione del potenziale elettrico che è pari a  $V$  per  $z = h_c$  e deve essere nullo per  $z = w$ :

$$\Phi = \left( \frac{z - w}{h_c - w} \right) V \quad [3.82]$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_0 \cdot \nabla \Phi^t \nabla \Phi \cdot d\Omega = \quad [3.83]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_w^{h_c} \varepsilon_0 \cdot \frac{V^2}{(h_c - w)^2} \cdot dz r dr d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\varepsilon_0 \cdot V^2}{h_c - w} \cdot r dr d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{(h_c - w)} V^2$$

$$W(w) = \frac{1}{2} C(w) V^2 \quad [3.84]$$

Formalmente l'espressione è identica all'equazione [3.81] tuttavia è diverso il valore di capacità che dipende dallo spostamento del piatto mobile.

Se il condensatore è invece a piatti deformabili il valore di capacità è variabile punto per punto della membrana.

Per poter risolvere il problema si ricorre anche in questo caso all'ipotesi già adottata per il calcolo della forza elettrostatica, che consiste nell'immaginare la piastra composta da tanti condensatori indipendenti.

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2} c(r) V^2 r dr d\vartheta \quad [3.85]$$

Indicando con  $c(r)$  una sorta di capacità specifica definita nel seguente modo:

$$c(r) = \frac{\varepsilon_0}{h_c - w(r)} \quad [3.86]$$

In alternativa si può procedere diversamente sfruttando la sola ipotesi di linearità del potenziale elettrico. Esso deve essere pari a  $V$  sull'elettrodo ( $z = h_c$ ) e deve essere nullo per  $z = w(r)$ .

$$\Phi = \left( \frac{z - w(r)}{h_c - w(r)} \right) V \quad [3.87]$$

Si nota subito come sia esplicitata anche la dipendenza dal raggio. Il gradiente di  $\Phi$  avrà perciò due componenti:

$$\nabla\Phi = \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right] = \left[ \frac{V}{h_c - w(r)} \quad \frac{-(h_c - z)}{(h_c - w(r))^2} \cdot \frac{dw(r)}{dr} V \right] \quad [3.88]$$

La prima delle due componenti è quella che va a generare l'energia come formulata precedentemente. Quella formula tuttavia non è completa perché non tiene conto della variabilità rispetto ad  $r$  che risulta da una trattazione più completa.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0 \cdot \nabla\Phi^t \nabla\Phi \cdot d\Omega = \quad [3.89]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{w(r)}^{h_c} \left\{ \epsilon_0 \cdot \frac{V^2}{(h_c - w(r))^2} + \epsilon_0 \cdot \frac{(h_c - z)^2 V^2}{(h_c - w(r))^4} \cdot \left( \frac{dw(r)}{dr} \right)^2 \right\} \cdot dz r dr d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ \frac{\epsilon_0 \cdot V^2}{h_c - w(r)} + \frac{\epsilon_0 \cdot V^2}{3(h_c - w(r))} \cdot \left( \frac{dw(r)}{dr} \right)^2 \right\} \cdot r dr d\vartheta =$$

$$W(w(r)) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\epsilon_0 \cdot V^2}{h_c - w(r)} \left( 1 + \frac{(w'(r))^2}{3} \right) \cdot r dr d\vartheta \quad [3.90]$$

Si è introdotto nel risultato la dipendenza dell'energia immagazzinata dalla rotazione della piastra. Se la piastra non ruota (è il caso di piatto mobile ma non deformabile) si ottiene che  $w'(r) = 0$  e l'energia risulta quella stimata nei casi semplici precedenti. Nel caso in esame la derivata di  $w(r)$  è molto piccola perché lo spostamento verticale è di almeno due ordini di grandezza inferiore al raggio della piastra. Negli esempi riportati infatti si hanno spostamenti massimi in centro alla piastra dell'ordine del micron mentre la membrana ha raggio di  $750\mu m$ . Per questo motivo non si compie un errore significativo trascurando il termine di rotazione.

Per ottenere la potenza occorre moltiplicare per la frequenza di oscillazione della membrana che si è posta convenzionalmente pari a  $1Hz$ . La potenza è calcolata integrando numericamente sfruttando il codice *Matlab*. Essa dipende in maniera molto sensibile dalla distanza tra elettrodo e piatto inferiore. La rigidità della membrana di silicio entra in gioco in modo indiretto perché influenza il profilo degli spostamenti finali, essa tuttavia sul calcolo della potenza ha un ruolo molto marginale ed è possibile trascurarla.

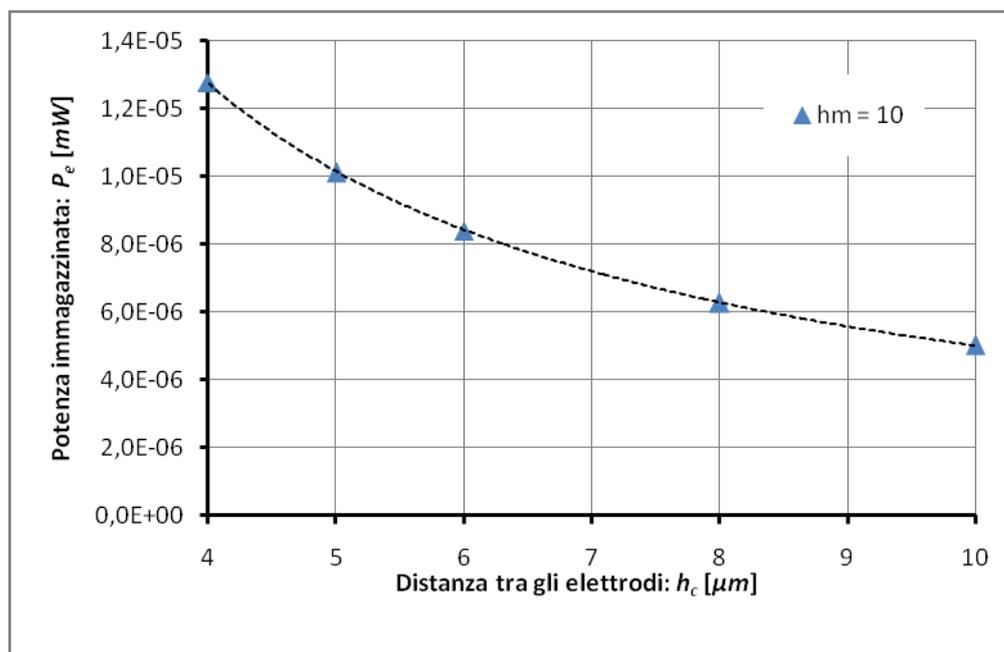


Figura 3.14: Potenza immagazzinata dalla micropompa elettrostatica

L'ordine di grandezza della potenza consumata è ragionevole, infatti nel caso in cui il piatto sia fisso ad una distanza  $h_c = 4\mu m$  dall'elettrodo, risulta:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} CV^2 f = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_a A}{h_c} V^2 = \frac{8.85 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot 750^2}{2 \cdot 4} 60^2 \cdot \frac{1}{10^6} \frac{\mu N \mu m}{\mu s} = 0,007034 \frac{\mu N \mu m}{\mu s} = \\ &= 0,007034 \frac{\mu N \mu m}{\mu s} = 0,007034 \cdot 10^{-6} W = 0,007034 \cdot 10^{-3} mW = 7,034 \cdot 10^{-6} mW \end{aligned}$$

Nel grafico si ottiene una potenza maggiore perché il piatto è deformabile e dopo la deformazione l'elettrodo si trova ad una distanza minore.



# **4. Attuazione piezoelettrica**



## 4.1 Materiali piezoelettrici

I materiali piezoelettrici appartengono a quella classe di materiali detti intelligenti (*smart material*) basati sulla risposta sistematica a particolari ingresso. La piezoelettricità consiste in due aspetti duali: l'effetto piezoelettrico diretto e quello inverso. Il primo si ha quando una carica elettrica appare in un materiale deformato meccanicamente mentre il secondo consiste nella deformazione del materiale sotto un impulso elettrico.

Il fenomeno piezoelettrico accoppia la risposta elastica del materiale all'applicazione di una corrente elettrica. La sua formulazione matematica è ottenuta considerando le equazioni governanti il problema elastico e quelle governanti il problema elettro-statico e in seguito modificando le relazioni costitutive caratterizzanti il comportamento del materiale.

La notazione usata di seguito è quello tipica per materiali piezoelettrici (Frangi et al., 2005).

Consideriamo un solido con volume  $\Omega$  e una superficie esterna  $\Gamma$  soggetto a forze volumetriche esterne  $F_i$  e a forze di superficie esterne  $f_i$ . Nell'ipotesi di piccole deformazioni e piccoli spostamenti, la parte meccanica della risposta del solido è governata dall'*equilibrio dinamico* e dalla *congruenza lineare* nel volume  $\Omega$  e sulla superficie  $\Gamma$ :

$$T_{ij,j} + F_i = \rho_m \ddot{s}_i \text{ in } \Omega; \quad T_{ij} n_j = f_i \text{ su } \Gamma_F \quad [4.1-a,b]$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i}) \text{ in } \Omega; \quad s_i = \bar{s}_i \text{ su } \Gamma_S \quad [4.2-a,b]$$

Il primo sistema di equazioni [4.1-a,b] è l'equilibrio dinamico, in cui  $T_{ij}$  è il tensore delle componenti di sforzo;  $\rho_m$  la densità di massa;  $\ddot{s}_i$  le componenti del vettore di accelerazione con  $s_i$  le componenti del vettore di spostamento. Le condizioni al contorno statiche su  $\Gamma_F$  legano le forze di superficie al vettore di sforzo  $T_{ij} n_j$  con normale unitaria alla superficie  $n_j$ .

La relazione di compatibilità [4.2-a,b] lega le componenti del tensore delle deformazioni  $S_{ij}$  alla parte simmetrica del gradiente dello spostamento. Sulla parte di dominio  $\Gamma_S$  si ha l'uguaglianza tra le componenti del vettore di spostamento e quelle del vettore di spostamenti imposti  $\bar{s}_i$  [4.2-a,b].

Analogamente la parte di risposta elettrica del solido è governata dall'*equilibrio elettrostatico* nel volume  $\Omega$  e su  $\Gamma_{qc}$  e dalla *compatibilità elettrostatica* in  $\Omega$  e su  $\Gamma_\phi$ .

$$D_{i,i} - \rho_c = 0 \text{ in } \Omega; \quad D_i n_i = -q_c \text{ su } \Gamma_{qc} \quad [4.3\text{-a,b}]$$

$$E_i = -\phi_{,i} \text{ in } \Omega; \quad \phi = \bar{\phi} \text{ su } \Gamma_\phi \quad [4.4\text{-a,b}]$$

Il primo sistema di equazioni [4.3-a,b] è l'analogo elettrico dell'equilibrio dinamico e impone l'uguaglianza tra la variazione delle componenti del vettore di spostamento elettrico  $D_i$  e la densità volumica di carica elettrica  $\rho_c$  che è imposta sulla parte di contorno  $\Gamma_{qc}$ .

Il secondo sistema [4.4-a,b] è invece il corrispondente della compatibilità meccanica, le componenti del campo elettrico  $E_i$  sono uguagliate al gradiente di un potenziale scalare  $\phi$ . Tale potenziale elettrico è uguagliato su  $\Gamma_\phi$  a un valore imposto  $\bar{\phi}$ .

La descrizione matematica del problema elettro-meccanico necessita delle relazioni costitutive che tengono conto dell'accoppiamento dovuto all'effetto piezoelettrico:

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} - e_{mij} E_m, \quad D_i = e_{ijk} S_{jk} + \varepsilon_{ij}^S E_j \quad [4.5\text{-a,b}]$$

La prima espressione [4.5-a,b] descrive la legge costitutiva lineare elastica per il solido  $\Omega$ , in cui compare il termine di accoppiamento piezoelettrico, mentre la seconda [4.5-a,b] descrive la legge costitutiva elettrica in cui compare il termine di accoppiamento elastico.

$C_{ijkl}$  e  $e_{mij}$  sono rispettivamente tensori, rispettivamente elastico e piezoelettrico del materiale mentre  $\varepsilon_{ij}^S$  è il tensore dielettrico.

Queste espressioni [4.5-a,b] possono essere raggruppate in un'unica formulazione detta *e-form*:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{e}^t \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\epsilon}^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad [4.6]$$

Come si può notare la formulazione [4.6] del problema ha il grosso svantaggio di non essere simmetrica. Per questa ragione si è soliti considerare il problema nella formulazione nelle deformazioni, detta *d-form* :

$$S_{ij} = A_{ijkl} T_{kl} + d_{mij} E_m, \quad D_i = d_{ijk} T_{jk} + \epsilon_{ij}^T E_j \quad [4.7]$$

Che raggruppato diventa:

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d^t \\ d & \epsilon^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix} \quad [4.8]$$

Questa formulazione [4.8] mantiene i termini diagonali simmetrici e definiti positivi e introduce termini antidiagonali uguali. La matrice  $d$  definisce l'accoppiamento piezo-meccanico ed è detta *matrice di carica piezoelettrica*.

Classicamente si considera che la direzione di polarizzazione del materiale sia la 3. Si distinguono quindi 3 effetti piezoelettrici macroscopici come riportato in **Figura 4.1**:  
Comportamento piezoelettrico macroscopico:

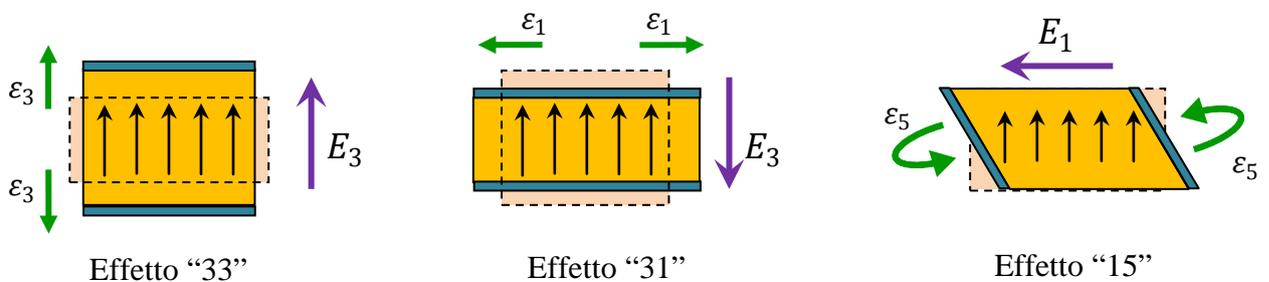


Figura 4.1: Comportamento piezoelettrico macroscopico

L'effetto "33" è l'effetto principale: si impone un campo elettrico nella direzione della polarizzazione e si utilizzano le deformazioni in questa stessa direzione. L'effetto "31" è quello più interessante dal punto di vista del lavoro che si sta illustrando. Si sfruttano le deformazioni nelle due direzioni ortogonali a quella di polarizzazione generate dal passaggio di corrente in questa

direzione. Il materiale piezoelettrico è geometricamente una piastra fissata sull'elemento che si vuole deformare.

Infine l'effetto "15" provoca uno scorrimento dell'elemento piezoelettrico quando si impone un campo elettrico in una direzione ortogonale a quella di polarizzazione (Thomas, 2011).

La matrice  $\mathbf{d}$  che descrive questo comportamento è di dimensioni  $3 \times 6$  ed è sparsa. È definita nel seguente modo:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [4.9]$$

Con le relazioni di simmetria aggiuntive:  $d_{31} = d_{32}$  e  $d_{15} = d_{26}$ .

Ciò significa che il comportamento piezoelettrico è simmetrico nel piano normale all'asse di polarizzazione.

Inoltre si può mostrare che il legame tra  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{d}$  è il seguente:

$$\mathbf{e}^t = \mathbf{c} \mathbf{d}^t \quad [4.10]$$

Dove  $\mathbf{c}$  è la matrice di rigidità elastica.

La formulazione appena illustrata è del tutto analoga a quella relativa al problema termo-elastico semiaccoppiato in cui alle quantità elettriche vengono sostituite quelle termiche:

$$q_{i,i} + Q = 0 \text{ in } \Omega; \quad q_i n_i = \bar{q} \text{ su } \Gamma_q \quad [4.11]$$

$$G_i = -\Theta_{,i} \text{ in } \Omega; \quad \Theta = \bar{\Theta} \text{ su } \Gamma_\Theta \quad [4.12]$$

Dove  $q$  è il flusso termico imposto uguale a  $\bar{q}$  su  $\Gamma_q$ ,  $Q$  la sorgente interna di calore,  $G$  il gradiente di temperatura che sostituisce lo spostamento elettrico e  $\Theta$  la temperatura che sostituisce il potenziale elettrico, essa è posta pari a  $\bar{\Theta}$  su  $\Gamma_\Theta$ .

In questa formulazione semiaccoppiata non si tengono in considerazione i termini di accoppiamento termo-elastico inverso cioè lo scambio di calore dovuto a deformazioni volumetriche nel mezzo elastico.

La *d-form* compatta per il problema termo-elastico semi accoppiato si scrive:

$$\begin{bmatrix} S \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d^{th} \\ \mathbf{0} & k^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ G \end{bmatrix} \quad [4.13]$$

Se nel problema elettro-meccanico si trascura l'effetto piezoelettrico diretto, cioè la nascita di una corrente per effetto di una deformazione, si ottiene una formulazione del tutto analoga a quella termo-elastica semi accoppiata (Frangi et al., 2005).

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d^t \\ d & \epsilon^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} a & d^t \\ \mathbf{0} & \epsilon^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix} \quad [4.14]$$

Per cui si considera un problema piezo-meccanico semiaccoppiato in cui il problema elettrico è risolto separatamente e successivamente si considera equivalente all'effetto di deformazioni anelastiche sulla struttura:

$$S = aT + d^t E \quad [4.15]$$

$$D = \epsilon^T E \quad [4.16]$$

#### 4.1.1 Problema piano negli sforzi (*Plane stress*)

Il legame sforzi-deformazioni in un problema in *plane stress* per materiali isotropi (caratterizzati da  $E$  e  $\nu$ ) viene costruito in maniera molto semplice imponendo la condizione di nullità dello sforzo normale (Taya et al., 2003).

Esplicitando l'equazione [4.6] si ha:

$$T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ T_{xy} \\ T_{zx} \\ T_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2S_{xy} \\ 2S_{zx} \\ 2S_{zy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{23} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{51} & 0 & 0 \\ 0 & e_{62} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad [4.17]$$

dove:

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad [4.18]$$

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad [4.19]$$

Imponendo la condizione di nullità di  $T_z$  si ottiene:

$$T_z = C_{31}S_x + C_{32}S_y + C_{33}S_z - e_{33}E_x = 0 \quad [4.20]$$

E la deformazione  $S_z$  diviene:

$$S_z = -\frac{1}{C_{33}}(C_{31}S_x + C_{32}S_y - e_{33}E_x) \quad [4.21]$$

Sostituendo la nuova espressione di  $\varepsilon_z$  nel legame sforzo-deformazioni e separando il problema nel piano da quello di taglio si ricavano le matrici di rigidezza:

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} - \frac{C_{31}}{C_{33}}C_{13} & C_{12} - \frac{C_{31}}{C_{33}}C_{23} & 0 \\ C_{12} - \frac{C_{31}}{C_{33}}C_{23} & C_{22} - \frac{C_{32}}{C_{33}}C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ 2S_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13} - \frac{C_{31}}{C_{33}}e_{33} \\ 0 & 0 & e_{23} - \frac{C_{32}}{C_{33}}e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{bmatrix} \quad [4.22]$$

Mentre per il taglio (la parte accoppiata non è presente perché si suppone di non avere corrente in direzioni  $x$  e  $y$ ):

$$\begin{bmatrix} T_{zx} \\ T_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2S_{zx} \\ 2S_{zy} \end{bmatrix} \quad [4.23]$$

Che scritte in maniera compatta risultano:

$$T_p = d_p S_p - e^t E \quad \text{e} \quad T_s = d_s S_s \quad [4.24]$$

Occorre fare attenzione a non confondere  $d_p$  e  $d_s$  con la matrice piezoelettrica introdotta in precedenza.

Nel caso isotropo tali matrici valgono:

$$d_p = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad [4.25]$$

$$d_s = \frac{5}{6} G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4.26]$$

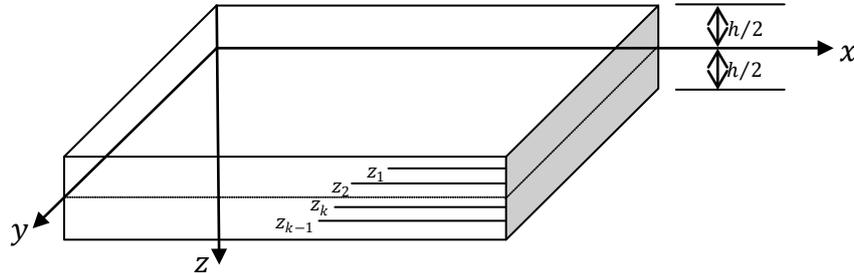
Con il coefficiente 5/6 per tener conto della riduzione dell'area reagente a taglio.

## 4.2 Teoria classica dei laminati applicata a materiali piezoelettrici (*Modified Classical Lamination Theory: MCLT*)

Come introdotto in precedenza si considera un problema piano, per questa ragione occorre integrare sullo spessore le proprietà del materiale e i carichi agenti sulla piastra. Si sfrutta la teoria dei laminati considerando una stratificazione del tipo: membrana-piezoelettrico-elettrodo.

Per effettuare questa operazione si sfrutta la *classical lamination theory* (CLT) modificata con l'introduzione del legame costitutivo piezoelettrico (Webber et al., 2006) (Taya et al., 2003) (Yoona et al., 2003). Si ragiona considerando una deformazione imposta anelastica nello strato piezoelettrico che genera azioni membranali e flessionali equivalenti oltre a quelle classiche elastiche.

Occorre anzitutto costruire le azioni interne generalizzate integrando sullo spessore  $h$  gli sforzi che intervengono nel modello e sostituire poi il legame costitutivo così come definito in precedenza.



**Figura 4.2:** Stratificazione di un laminato

Si considera la piastra stratificata come in **Figura 4.2**.

Azioni interne generalizzate membranali:

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{T}_p \cdot dz \quad [4.27]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{T}_p^k \cdot dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\mathbf{d}_p^k \mathbf{S}_p - \mathbf{e}^{kt} \mathbf{E}) \cdot dz = \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\mathbf{d}_p^k \mathbf{q}_m + \mathbf{d}_p^k \mathbf{q}_f \cdot z - \mathbf{e}^{kt} \mathbf{E}) \cdot dz = \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \mathbf{q}_m \cdot dz + \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \mathbf{q}_f \cdot z \cdot dz - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{e}^{kt} \mathbf{E} \cdot dz = \\
 &= \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \cdot dz \right\} \cdot \mathbf{q}_m + \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \cdot z \cdot dz \right\} \cdot \mathbf{q}_f - \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{e}^{kt} \mathbf{E} \cdot dz \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = \{\mathbf{A}\} \cdot \mathbf{q}_m + \{\mathbf{B}\} \cdot \mathbf{q}_f - \{\mathbf{N}^P\} \quad [4.28]$$

$\mathbf{A}$  è la rigidezza assiale totale della piastra,  $\mathbf{B}$  la rigidezza membranale-flessionale accoppiata e  $\mathbf{N}^P$  l'azione assiale equivalente dovuta alla deformazione piezoelettrica.

#### Azioni interne generalizzate flessionali

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{T}_p \cdot z \cdot dz \quad [4.29] \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{T}_p^k \cdot z \cdot dz = \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\mathbf{d}_p^k \mathbf{S}_p z - \mathbf{e}^{kt} \mathbf{E} \cdot z) \cdot dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\mathbf{d}_p^k \mathbf{q}_m \cdot z + \mathbf{d}_p^k \mathbf{q}_f \cdot z^2 - \mathbf{e}^{kt} \mathbf{E} \cdot z) \cdot dz = \\
 &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \mathbf{q}_m \cdot z \cdot dz + \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \mathbf{q}_f \cdot z^2 \cdot dz - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{e}^{kt} \mathbf{E} \cdot z \cdot dz =
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \cdot z \cdot dz \right\} \cdot \mathbf{q}_m + \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \cdot z^2 \cdot dz \right\} \cdot \mathbf{q}_f - \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{e}^{kt} \mathbf{E} \cdot z \cdot dz \right\} =$$

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{B}\} \cdot \mathbf{q}_m + \{\mathbf{D}\} \cdot \mathbf{q}_f - \{\mathbf{M}^P\} \quad [4.30]$$

$\mathbf{D}$  è la rigidezza flessionale totale della piastra,  $\mathbf{B}$  la rigidezza membranale-flessionale accoppiata e  $\mathbf{M}^P$  il momento equivalente dovuto alla deformazione piezoelettrica che genera una curvatura anelastica.

### Azioni interne generalizzate di taglio

L'approccio classico per il taglio porta ai seguenti risultati:

$$\mathbf{T} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{T}_s \cdot dz \quad [4.31]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{T}_s^k \cdot dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_s^k \mathbf{S}_s \cdot dz = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_s^k \mathbf{q}_s \cdot dz = \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_s^k \cdot dz \right\} \cdot \mathbf{q}_s = \end{aligned}$$

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{F}\} \cdot \mathbf{q}_s \quad [4.32]$$

Quest'approccio, tuttavia, porta a risultati sbagliati per quanto riguarda la rigidezza a taglio che sarebbe meglio considerare come l'inverso della sommatoria delle cedevolezza e non come la sommatoria delle rigidezze:

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{d}_s \mathbf{q}_s \quad \mathbf{q}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{T}_s \quad [4.33]$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_s &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{q}_s \cdot dz = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{A}_s \mathbf{T}_s \cdot dz = \\
 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{A}_s \cdot \frac{\mathbf{T}}{h} \cdot dz = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{A}_s^k \cdot \frac{\mathbf{T}}{h} \cdot dz = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_s^k \cdot \frac{\mathbf{T}}{h} (z_k - z_{k-1}) = \\
 &= \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_s^k \cdot (z_k - z_{k-1}) \cdot \mathbf{T} = \left\{ \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_s^k \cdot (z_k - z_{k-1}) \right\} \mathbf{T} =
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_s = \{\mathbf{F}^{-1}\} \mathbf{T} \quad [4.34]$$

In conclusione si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{N}^P \\ \mathbf{M}^P \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [4.35]$$

O anche, in modo compatto:

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{D}\} \mathbf{q} - \mathbf{Q}^P \quad [4.36]$$

Con:

- Rigidezza membranale:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \cdot dz = \sum_{k=1}^n \mathbf{d}_p^k (z_k - z_{k-1}) \quad [4.37]$$

- Rigidezza accoppiata membranale-flessionale, nulla nel caso di stratificato simmetrico:

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \cdot z \cdot dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{d}_p^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad [4.38]$$

- Rigidezza flessionale:

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{d}_p^k \cdot z^2 \cdot dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \mathbf{d}_p^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad [4.39]$$

- Rigidezza a Taglio:

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{d}_s^{k-1} (z_k - z_{k-1}) \right\}^{-1} \quad [4.40]$$

Ciò che compare in più rispetto alla *classical lamination theory (CLT)* sono i termini noti dovuti alla presenza di uno strato piezoelettrico all'interno dello stratificato:

- Le azioni membranali:

$$\mathbf{N}^P = \sum_{k=1}^n \mathbf{e}^{k t} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{E} \cdot dz \quad [4.41]$$

- I momenti flettenti:

$$\mathbf{M}^P = \sum_{k=1}^n \mathbf{e}^{k t} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{E} \cdot z \cdot dz \quad [4.42]$$

### 4.3 Formulazione ad elementi finiti per il problema piezoelettrico

La formulazione ad elementi finiti è equivalente a quella che si sviluppa per l'accoppiamento termo-elastico semi accoppiato con la sola differenza del significato fisico dei parametri in gioco. Per coerenza con la discussione analitica e con il codice *Matlab* utilizzato per l'attuazione elettrostatica si considera un modello di piastra tipo *Mindlin*.

Si procede come già fatto nel capitolo **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** a riguardo della formulazione ad elementi finiti per la micropompa capacitiva.

Il lavoro virtuale esterno è dato dall'equazione [3.31] con la sola differenza che il carico esterno non dipende dal campo di spostamenti.

$$\delta L_e = \int_S \delta \mathbf{u}^t \mathbf{p} \cdot dS \quad [4.43]$$

Il lavoro virtuale interni è dato dall'equazione [3.36], introducendo il legame costitutivo che tiene considera l'azione piezoelettrica [4.36] si ottiene:

$$\delta L_i = \int_S \mathbf{Q}^t \delta \mathbf{q} \cdot dS = \int_S \mathbf{q}^t \{\mathbf{D}\}^t \delta \mathbf{q} \cdot dS - \int_S \mathbf{Q}^{P^t} \delta \mathbf{q} \cdot dS \quad [4.44]$$

Come si può notare compare un secondo membro oltre al classico lavoro elastico, esso è dovuto proprio alla presenza del materiale piezoelettrico.

Introducendo la discretizzazione ad elementi finiti si ottiene il risultato già esplicitato nell'equazione [3.56] con in più un termine dovuto al piezoelettrico e l'indipendenza del carico esterno dagli spostamenti:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_p \quad [4.45]$$

Dove  $\mathbf{P}_p$  è ricavato come di seguito:

---

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{Q}^{pt} \delta \mathbf{q} \cdot dS &= \int_S \mathbf{Q}^{pt} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{U}^i \cdot dS = \sum_{i=1}^{N_e} \delta \mathbf{U}^{it} \int_{S^i} \mathbf{B}^t \mathbf{Q}^p \cdot dS = \sum_{i=1}^{N_e} \delta \mathbf{U}^{it} \mathbf{P}_p^i \\ &= \delta \mathbf{U}^t \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{L}^{it} \mathbf{P}_p^i = \delta \mathbf{U}^t \mathbf{P}_p\end{aligned}$$

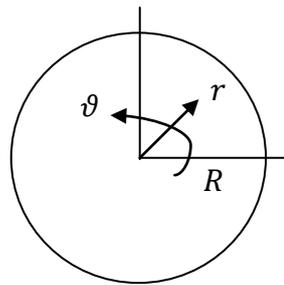
Per la definizione di  $\mathbf{B}$  si rimanda al capitolo 3.3.

#### 4.4 Soluzione analitica della piastra alla *Mindlin*

Per gli sviluppi analitici si è usato come riferimento il libro di Timoshenko sulla teoria delle piastre (Timoshenko, 1959).

Nel prosieguo della trattazione si trascura il problema membranale perché si considerano delle condizioni al contorno tali da garantire la nullità di tali azioni. La teoria di *Mindlin* per piastre moderatamente spesse è stata scelta per completezza anche se le geometrie considerate permetterebbero di sfruttare la teoria di *Kirchhoff* per piastre snelle.

Le equazioni che governano l'equilibrio di un concio generico per piastre assialsimmetriche, scritte in un sistema di coordinate polari (**Figura 4.3**).



**Figura 4.3:** Piastra assialsimmetrica in coordinate polari

- Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione trasversale:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_t}{r} - T - m = 0 \quad [4.46]$$

- Equilibrio alla traslazione verticale:

$$\frac{dT}{dr} + \frac{T}{r} + p = 0 \quad [4.47]$$

Il legame costitutivo è stato calcolato in precedenza [4.35]:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ q_f \\ q_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^P \\ M^P \\ 0 \end{bmatrix} \quad [4.48]$$

Le equazioni [4.48] non vengono modificate dal passaggio da un sistema cartesiano a uno polare perché i materiali che compongono gli strati sono isotropi nel piano della piastra:

$$\begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_f \\ q_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M^P \\ 0 \end{bmatrix} \quad [4.49]$$

$$\begin{bmatrix} M_r \\ M_t \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{rr} & D_{rt} & 0 \\ D_{tr} & D_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & F_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_r \\ \chi_t \\ t_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_r^P \\ M_t^P \\ 0 \end{bmatrix} \quad [4.50]$$

Con  $D_{rt} = D_{tr}$  e  $D_{rr} = D_{tt}$ .

Inoltre le deformazioni generalizzate devono essere riscritte nel corretto sistema di riferimento:

- $\chi_r = -d\varphi_r/dr$
- $\chi_t = -\varphi_r/r$
- $t_r = dw_r/dr - \varphi_r$

#### 4.4.1 Integrazione dell'equazione di equilibrio alla traslazione verticale

Si procede integrando anzitutto la seconda equazione di equilibrio [4.47] per ricavare l'espressione generica del taglio. È un'equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti variabili, conosciuta come equazione di Eulero. La forzante  $p$  è considerata costante.

Si procede all'integrazione risolvendo dapprima l'omogenea associata:

$$\frac{dT}{dr} + \frac{T}{r} = 0 \quad [4.51]$$

Si suppone  $T = C_1 r^\alpha$  e si ottiene:

$$C_1 \left( \alpha r^{\alpha-1} + \frac{r^\alpha}{r} \right) = 0$$

$$\alpha + 1 = 0 \quad \text{per } r \neq 0$$

$$\alpha = -1$$

Da cui:

$$T^o = \frac{C_1}{r} \quad [4.52]$$

La soluzione particolare invece è lineare in  $r$  perché la forzante è costante e vale:

$$T^P = -\frac{p}{2}r \quad [4.53]$$

In definitiva si ottiene:

$$\boxed{T(r) = \frac{C_1}{r} - \frac{p}{2}r} \quad [4.54]$$

#### 4.4.2 Integrazione dell'equazione di equilibrio sul momento

Sostituendo le espressioni di  $M$  e  $\varphi_r$  nella prima equazione di equilibrio [4.46] si ricava:

$$\frac{d^2 \varphi_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_r}{dr} - \frac{1}{r^2} \varphi_r = -\frac{T}{D_{rr}} \quad [4.55]$$

In cui  $M_r^P = M_t^P$  per l'isotropia nel piano del materiale piezoelettrico.

Essa può essere scritta in modo compatto nel seguente modo:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi_r) \right] = -\frac{T}{D_{rr}} \quad [4.56]$$

Sostituendo l'equazione [4.54] e integrando si ottiene:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi_r) \right] = -\frac{C_1}{D_{rr}} \frac{1}{r} + \frac{p}{2D_{rr}} r \quad [4.57]$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi_r) = -\frac{C_1}{D_{rr}} \ln(r) + \frac{p}{4D_{rr}} r^2 + C_2$$

$$\frac{d}{dr} (r\varphi_r) = -\frac{C_1}{D_{rr}} r \ln(r) + \frac{p}{4D_{rr}} r^3 + C_2 r$$

$$r\varphi_r = -\frac{C_1}{2D_{rr}} r^2 \ln(r) + \frac{C_1}{4D_{rr}} r^2 + \frac{p}{16D_{rr}} r^4 + C_2 \frac{r^2}{2} + C_3$$

$$\varphi_r = -\frac{C_1}{2D_{rr}} r \ln(r) + \frac{C_1}{4D_{rr}} r + \frac{p}{16D_{rr}} r^3 + C_2 \frac{r}{2} + \frac{C_3}{r}$$

$$\boxed{\varphi_r(r) = C_1 \left[ -\frac{r \ln(r)}{2D_{rr}} + \frac{r}{4D_{rr}} \right] + C_2 \frac{r}{2} + \frac{C_3}{r} + \frac{p}{16D_{rr}} r^3} \quad [4.58]$$

*N. B.*: l'integrale per parti di  $r \ln(r)$  vale:

$$\int r \ln(r) dr = \frac{r^2}{2} \ln(r) - \int \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} dr = \frac{r^2}{2} \ln(r) - \frac{r^2}{4}$$

Introducendo poi il legame costitutivo tra taglio e scorrimento angolare si può ricavare l'espressione dello spostamento  $w(r)$ :

$$T_r = F_r \left( \frac{dw(r)}{dr} - \varphi_r(r) \right) \quad [4.59]$$

$$\frac{dw(r)}{dr} = \frac{T_r}{F_r} + \varphi_r = \frac{C_1}{F_r} \frac{1}{r} - \frac{p}{2F_r} r - \frac{C_1}{2D_{rr}} r \ln(r) + \frac{C_1}{4D_{rr}} r + \frac{p}{16D_{rr}} r^3 + C_2 \frac{r}{2} + \frac{C_3}{r}$$

$$w(r) = \frac{C_1}{F_r} \ln(r) - \frac{p}{4F_r} r^2 - \frac{C_1}{4D_{rr}} r^2 \ln(r) + \frac{C_1}{8D_{rr}} r^2 + \frac{C_1}{8D_{rr}} r^2 + \frac{p}{64D_{rr}} r^4 + C_2 \frac{r^2}{4} + C_3 \ln(r) + C_4$$

$$w(r) = C_1 \left[ \frac{\ln(r)}{F_r} - \frac{r^2 \ln(r)}{4D_{rr}} + \frac{1}{4D_{rr}} r^2 \right] + C_2 \frac{r^2}{4} + C_3 \ln(r) + C_4 + p \left[ -\frac{r^2}{4F_r} + \frac{r^4}{64D_{rr}} \right] \quad [4.60]$$

Le espressioni di  $w$  e  $\varphi_r$  sopra riportate sono del tutto generali, imponendo le condizioni al contorno si ricava caso per caso l'espressione specifica.

## 4.5 Validazione del codice

### 4.5.1 Piastra assialsimmetrica stratificata incastrata al bordo con carico uniformemente distribuito

La stratificazione in questo caso è fittizia nel senso che si inseriscono proprietà uguali per tutti gli strati in modo da simulare la presenza di un materiale isotropo omogeneo e verificare la corretta introduzione della stratificazione.

Il carico uniforme è pari  $p = 0,5 \mu\text{N}/\mu\text{m}^2$ .

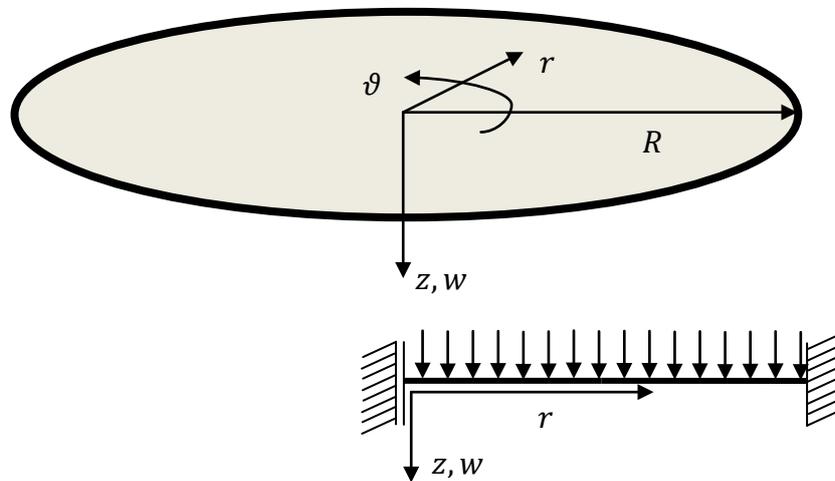


Figura 4.4: Piastra assialsimmetrica incastrata al bordo con carico uniformemente distribuito

Le condizioni al contorno impongono:

- $T(0) = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} T(r) = \frac{C_1}{r} - \frac{p}{2}r = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

- $\varphi_r(0) = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_r(0) = \frac{C_3}{r} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

- $\varphi_r(R) = 0$

$$\varphi_r(R) = +\frac{p}{16D_{rr}}R^3 + C_2\frac{R}{2} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{pR^2}{8D_{rr}}$$

- $w(R) = 0$

$$w(R) = -\frac{pR^2}{8D_{rr}}\frac{R^2}{4} + C_4 + p\left[-\frac{R^2}{4F_r} + \frac{R^4}{64D_{rr}}\right] = 0 \Rightarrow C_4 = +\frac{pR^4}{64D_{rr}} + \frac{pR^2}{4F_r}$$

Da cui:

$$\boxed{w(r) = +\frac{p(R^2-r^2)^2}{64D_{rr}} + \frac{p(R^2-r^2)}{4F_r}} \quad [4.61]$$

Con:

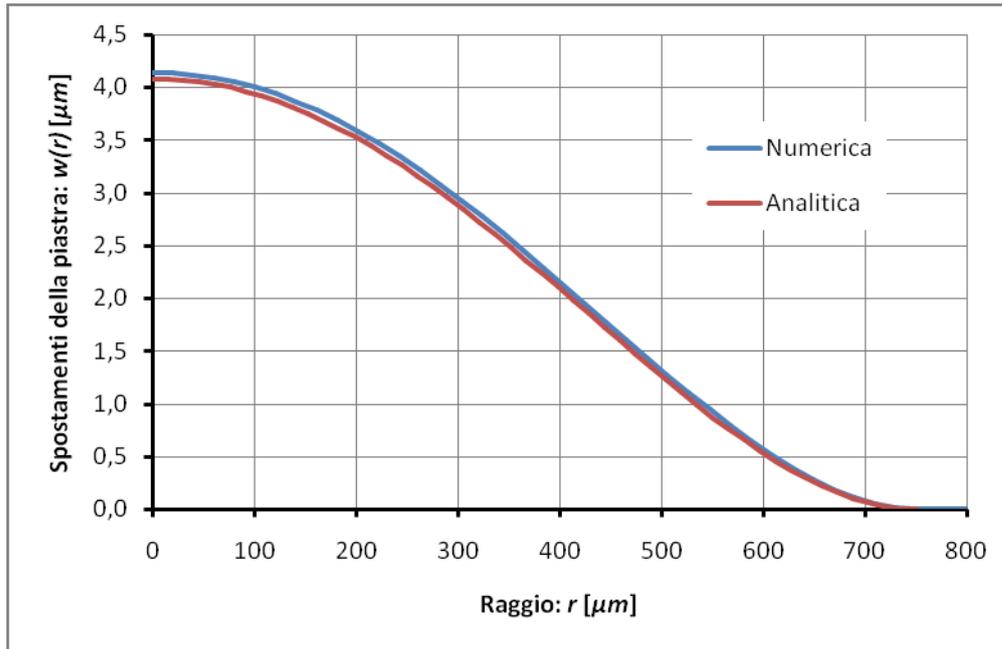
- $D_{rr} = Eh^3/(12(1-\nu^2))$
- $F_r = 5/6 Gh$

Considerando uno spessore  $h$  di  $16.3\mu\text{m}$  e i parametri elastici del silicio  $E = 160000\text{MPa}$  e  $\nu = 0.22$  si ha:

$$D_{rr} = Eh^3/(12(1-\nu^2)) = 60680216 \mu\text{N}\mu\text{m}$$

$$F_r = 5/6 Gh = 890710 \mu\text{N}/\mu\text{m}$$

Nella figura seguente il confronto tra la soluzione analitica (rossa) e quella numerica (blu):



**Figura 4.5:** Confronto tra gli spostamenti di una piastra assialsimmetrica incastrata al bordo con carico uniformemente distribuito. In rosso la soluzione analitica e in blu quella numerica

#### 4.5.2 Piastra assialsimmetrica stratificata appoggiata al bordo con carico uniformemente distribuito

In questo caso si considera un materiale stratificato non omogeneo, si introduce lo strato di piezoelettrico non viene tuttavia applicata alcuna differenza di potenziale così da poter verificare che la stratificazione sia effettivamente corretta. Si considera il caso di una piastra assialsimmetrica incernierata al bordo con un carico uniformemente distribuito su di essa pari a  $p = 0,5 \mu N / \mu m^2$ .

Nella tabella seguente sono riassunti i valori dei parametri geometrici ed elasto-meccanici dei materiali coinvolti:

	Silicio 1	Piezoelettrico	Silicio 2
$s[\mu m]$	14	1.3	1
$E[\mu N / \mu m^2]$	160000	69930.67	160000
$\nu$	0.22	0.3	0.22

**Tabella 4.1:** Parametri elastici e geometrici della stratificazione della piastra

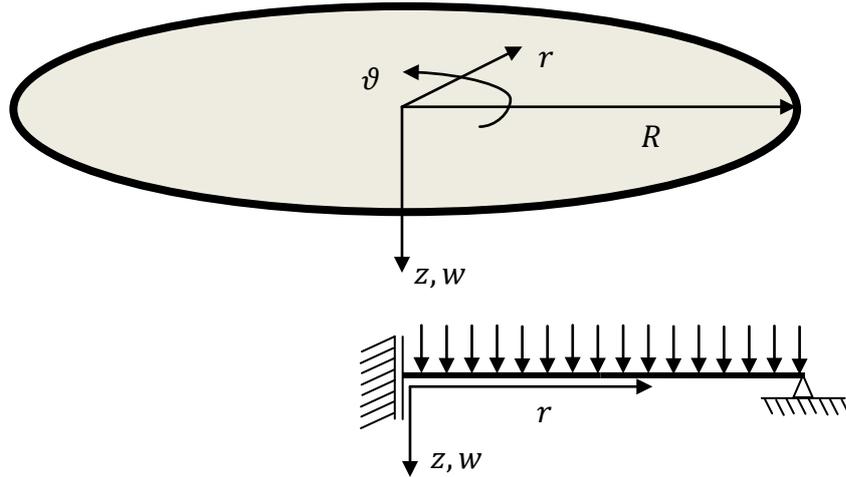


Figura 4.6: Piastra assialsimmetrica incernierata al bordo con carico uniformemente distribuito

Le condizioni al contorno impongono:

- $T(0) = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} T(r) = \frac{C_1}{r} - \frac{p}{2}r = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

- $\varphi_r(0) = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_r(0) = \frac{C_3}{r} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

- $M_r(R) = 0$

$$M_r(R) = -D_{rr} \frac{d\varphi_r}{dr} - D_{tr} \frac{\varphi_r}{r} = 0$$

$$M_r(R) = -D_{rr} \left( \frac{C_2}{2} + \frac{3p}{16D_{rr}} R^2 \right) - D_{tr} \left( \frac{C_2}{2} + \frac{p}{16D_{rr}} R^2 \right) = 0$$

$$M_r(R) = -C_2 \frac{(D_{rr} + D_{tr})}{2} - \left( \frac{p}{16D_{rr}} R^2 \right) (3D_{rr} + D_{tr}) = 0$$

$$C_2 = - \left( \frac{p}{8D_{rr}} R^2 \right) \frac{(3D_{rr} + D_{tr})}{(D_{rr} + D_{tr})}$$

- $w(R) = 0$

$$w(R) = -\left(\frac{pR^4}{32D_{rr}}\right)\frac{(3D_{rr} + D_{tr})}{(D_{rr} + D_{tr})} + C_4 + p\left[-\frac{R^2}{4F_r} + \frac{R^4}{64D_{rr}}\right] = 0$$

$$C_4 = \frac{pR^4}{64D_{rr}}\frac{(5D_{rr} + D_{tr})}{(D_{rr} + D_{tr})} + \frac{pR^2}{4F_r}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} w(r) &= \left(\frac{p}{64D_{rr}}\right)\frac{-R^2r^2(6D_{rr} + 2D_{tr}) + r^4(D_{rr} + D_{tr}) + R^4(5D_{rr} + D_{tr})}{(D_{rr} + D_{tr})} + \frac{p(R^2 - r^2)}{4F_r} = \\ &= \left(\frac{p}{64D_{rr}}\right)\frac{D_{rr}(-6R^2r^2 + r^4 + 5R^4) + D_{tr}(-2R^2r^2 + r^4 + R^4)}{(D_{rr} + D_{tr})} + \frac{p(R^2 - r^2)}{4F_r} = \\ &= \left(\frac{p}{64D_{rr}}\right)\frac{D_{rr}(R^2 - r^2)^2 + 4D_{rr}R^2(R^2 - r^2) + D_{tr}(R^2 - r^2)^2}{(D_{rr} + D_{tr})} + \frac{p(R^2 - r^2)}{4F_r} = \\ &= \left(\frac{p}{64D_{rr}}\right)\frac{(D_{rr} + D_{tr})(R^2 - r^2)^2 + 4D_{rr}R^2(R^2 - r^2)}{(D_{rr} + D_{tr})} + \frac{p(R^2 - r^2)}{4F_r} = \\ &= \left(\frac{p(R^2 - r^2)}{64D_{rr}}\right)\left[(R^2 - r^2) + \frac{4R^2D_{rr}}{(D_{rr} + D_{tr})}\right] + \frac{p(R^2 - r^2)}{4F_r} = \end{aligned}$$

$$\boxed{w(r) = \left(\frac{p(R^2 - r^2)}{64D_{rr}}\right)\left[\frac{(5D_{rr} + D_{tr})}{(D_{rr} + D_{tr})}R^2 - r^2\right] + \frac{p(R^2 - r^2)}{4F_r}} \quad [4.62]$$

La rigidezza flessionale del sistema è minore perché lo strato di piezoelettrico ha una costante elastica più bassa di quella del silicio.

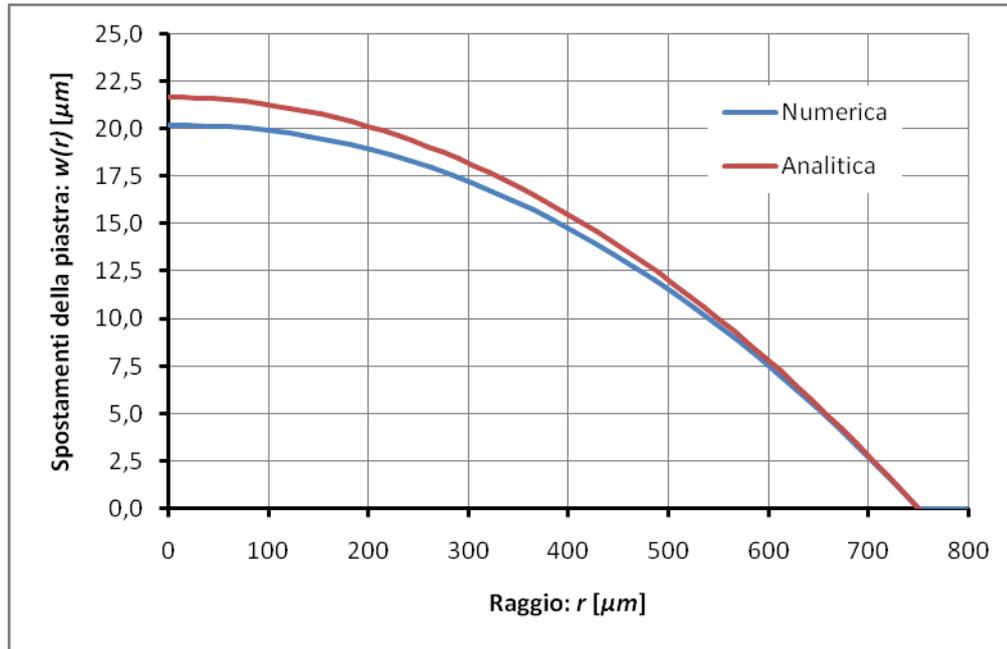


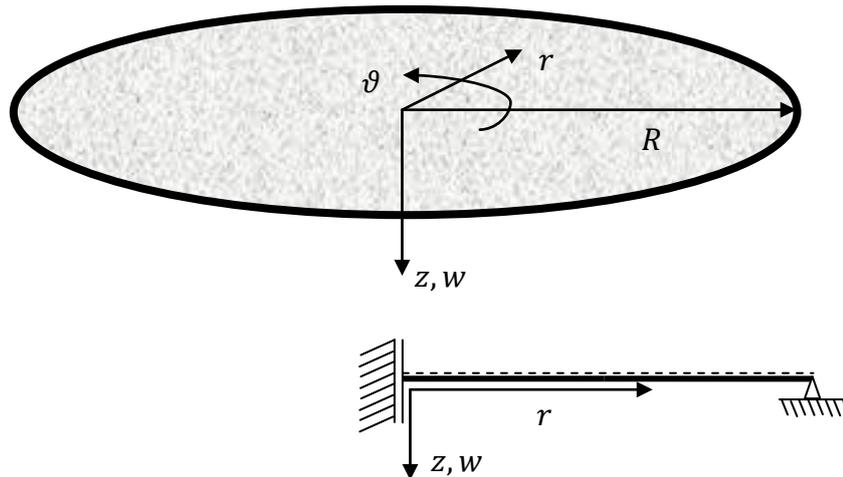
Figura 4.7: Confronto tra gli spostamenti di una piastra assialsimmetrica incernierata al bordo con carico uniformemente distribuito. In rosso la soluzione analitica e in blu quella numerica

La soluzione numerica, in blu, è più rigida di quella analitica di un fattore 7%.

### 4.5.3 Piastra assialsimmetrica stratificata appoggiata al bordo con deformazione piezoelettrica

Nel caso di piastra incastrata se lo strato di materiale piezoelettrico fosse uniformemente distribuito su tutta la superficie della piastra, questa non si muoverebbe. Infatti la deformazione piezoelettrica è percepita dalla piastra come una curvatura costante imposta e se le condizioni al contorno fossero di perfetto incastro, la piastra reagirebbe con una curvatura elastica opposta a quella piezoelettrica e la curvatura totale sarebbe nulla. Per capire questo concetto in modo immediato basta pensare ad una trave a doppio incastro soggetta ad un carico termico lineare nello spessore.

Per verificare il codice si considera inizialmente il caso di piastra assialsimmetrica con strato piezoelettrico appoggiata al bordo.



**Figura 4.8:** Piastra assialsimmetrica incernierata al bordo con strato di materiale piezoelettrico

Le proprietà elastiche del silicio sono quelle usate precedentemente. Lo strato piezoelettrico ha invece modulo elastico pari a  $69930,67\text{MPa}$  e coefficiente di *Poisson* di 0.3. Le costanti dielettriche che interessano per il problema sono:  $e_{33} = 19,70\text{ C/m}^2$  e  $e_{31} = -5,04\text{ C/m}^2$ . La costante di permittività relativa del piezoelettrico vale  $\epsilon_r = 1250$ . (Frangi et al., 2005).

Si ricorda che si considera una piastra di raggio  $750\ \mu\text{m}$  con un voltaggio applicato di  $60\text{V}$ .

Nella tabella seguente sono riassunti i valori dei parametri geometrici ed elasto-meccanici dei materiali coinvolti:

	Silicio 1	Piezoelettrico	Silicio 2
$s[\mu\text{m}]$	14	1.3	1
$E[\mu\text{N}/\mu\text{m}^2]$	160000	69930.67	160000
$\nu$	0.22	0.3	0.22
$d_{13}[\mu\text{m}/\text{V}]$	0	$-135 \cdot 10^6$	0
$d_{33}[\mu\text{m}/\text{V}]$	0	$325 \cdot 10^6$	0
$e_{13}[\mu\text{N}/\mu\text{mV}]$	0	-5.04	0
$e_{33}[\mu\text{N}/\mu\text{mV}]$	0	19.70	0

**Tabella 4.2:** Stratificazione della piastra e riassunto dei parametri elastici e piezoelettrici dei materiali

Per il problema in esame le condizioni al contorno impongono:

- $T(0) = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} T(r) = \frac{C_1}{r} - \frac{p}{2}r = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

- $\varphi_r(0) = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_r(0) = \frac{C_3}{r} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

- $M_r(R) = 0$

$$M_r(R) = -D_{rr} \frac{d\varphi_r}{dr} - D_{tr} \frac{\varphi_r}{r} - M_r^P = 0$$

$$M_r(R) = -D_{rr} \left( \frac{C_2}{2} \right) - D_{tr} \left( \frac{C_2}{2} \right) - M_r^P = 0$$

$$M_r(R) = -C_2 \frac{(D_{rr} + D_{tr})}{2} - M_r^P = 0$$

$$C_2 = -\frac{2M_r^P}{(D_{rr} + D_{tr})}$$

- $w(R) = 0$

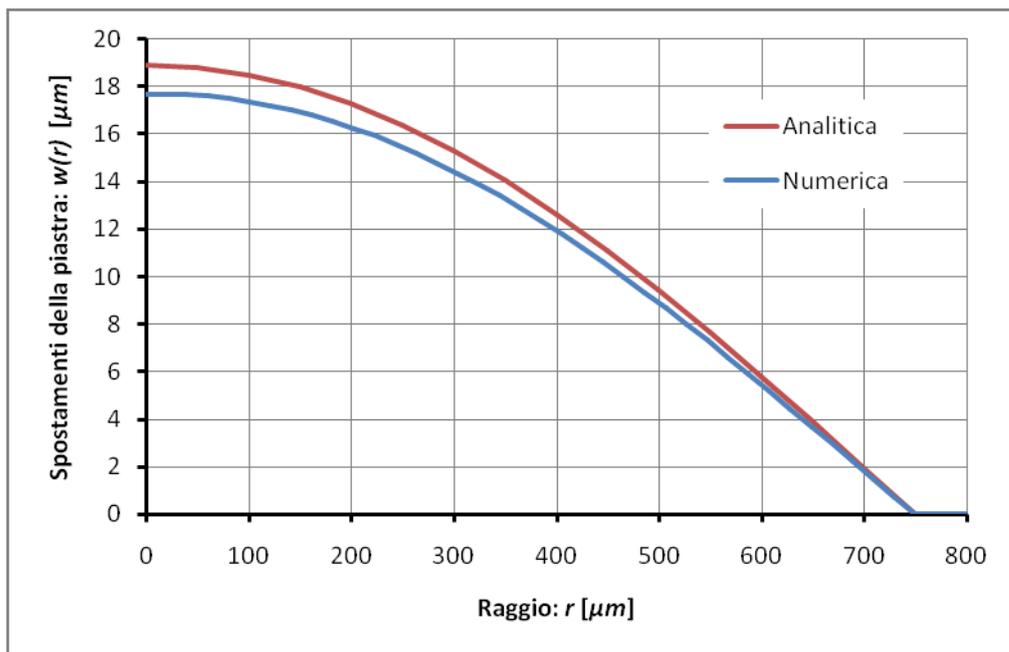
$$w(R) = -\frac{M_r^P R^2}{2(D_{rr} + D_{tr})} + C_4 = 0$$

$$C_4 = \frac{M_r^P R^2}{2(D_{rr} + D_{tr})}$$

Da cui:

$$\boxed{w(r) = \frac{M_r^P (R^2 - r^2)}{2(D_{rr} + D_{tr})}} \quad [4.63]$$

In rosso è riportata la soluzione analitica e in blu quella numerica, quest'ultima è più rigida.



**Figura 4.9:** Confronto tra gli spostamenti di una piastra assialsimmetrica incernierata al bordo con deformazione piezoelettrica. In rosso la soluzione analitica e in blu quella numerica

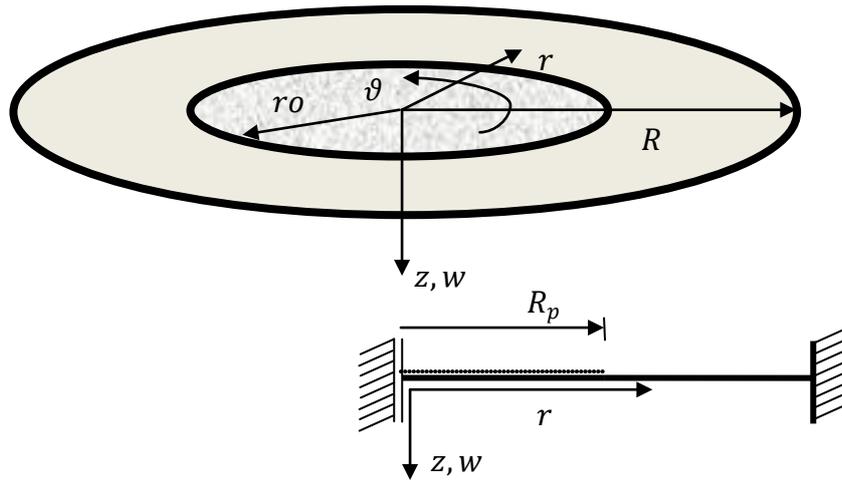
### 4.6 Piastra incastrata con materiale piezoelettrico nella parte centrale

Il caso precedente mostra spostamenti notevoli anche per voltaggi molto bassi, tuttavia è un caso ideale perché è tecnologicamente complicato realizzare delle cerniere perfette, ancor più se si tratta di una cerniera distribuita sul bordo di una piastra. Inoltre per il confronto tra le tipologie attuative elettrostatica e piezoelettrica è interessante avere coerenza tra le geometrie. Si considera perciò una membrana incastrata al bordo esterno.

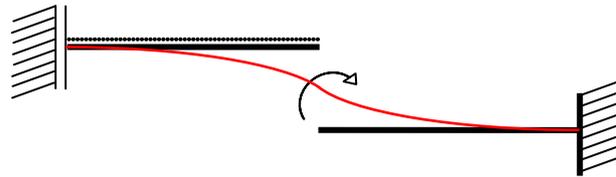
Nel caso piezoelettrico queste condizioni portano a delle considerazioni sulla geometria del piezoelettrico. Infatti per avere flessione occorre che lo strato piezoelettrico non occupi tutta la superficie della membrana. Se così non fosse la curvatura anelastica dovuta al piezoelettrico genererebbe una curvatura elastica opposta che annullerebbe gli spostamenti della piastra. È il medesimo fenomeno che avviene ad una trave a doppio incastro sollecitata con un carico termico lineare sullo spessore.

Per queste ragioni si propone la geometria seguente, in cui lo strato di piezoelettrico occupa un'area di raggio  $r_0$  minore di  $R$ .

Il problema presenta ora una discontinuità, può essere risolto con due tecniche. La prima consiste nel separare il problema in due sotto problemi e calcolare la reazione elastica della parte esterna della piastra dovuta alla rotazione imposta dal piezoelettrico (qui sviluppata). In alternativa è possibile considerare un problema composto da due solidi su cui valgono equazioni governanti diverse e applicare delle condizioni di continuità nel punto di collegamento tra i sottodomini.



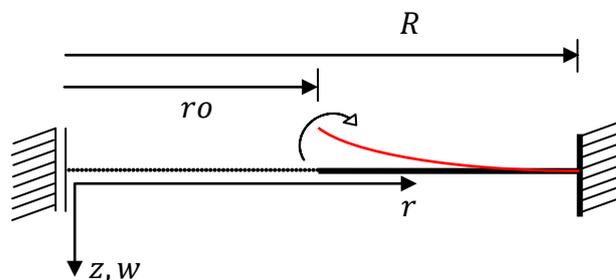
**Figura 4.10:** Schema della piastra assialsimmetrica con il materiale piezoelettrico



**Figura 4.11:** Schema di deformazione della piastra assialsimmetrica con il materiale piezoelettrico

Occorre anzitutto calcolare il valore della rigidezza elastica di rotazione con cui la parte esterna della piastra reagisce alla rotazione imposta, come fosse una sorta di coefficiente di influenza per la piastra forata.

È il problema di una piastra forata di raggio interno  $r_0$  e raggio esterno  $R$  soggetta a una rotazione unitaria nell'estremo libero.



**Figura 4.12:** Schema della piastra assialsimmetrica con foro centrale soggetta a una rotazione sul bordo libero interno

Le condizioni al contorno impongono:

- $T(ro) = 0$

$$T(ro) = \frac{C_1}{ro} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

- $\varphi_r(ro) = 1$

$$\varphi_r(ro) = C_2 \frac{ro}{2} + \frac{C_3}{ro} = \bar{\varphi} \Rightarrow C_3 = ro\bar{\varphi} - C_2 \frac{ro^2}{2}$$

- $\varphi_r(R) = 0$

$$\varphi_r(R) = C_2 \frac{R}{2} + \frac{C_3}{R} = 0$$

$$\varphi_r(R) = C_2 \frac{R}{2} + \frac{ro}{R} - C_2 \frac{ro^2}{2R} = 0$$

$$C_2 = -\frac{2ro}{R^2 - ro^2}$$

$$C_3 = ro\bar{\varphi} + \frac{ro^3}{R^2 - ro^2} = \frac{\bar{\varphi}roR^2 - \bar{\varphi}ro^3 + ro^3}{R^2 - ro^2} = \frac{roR^2 + ro^3(1 - \bar{\varphi})}{R^2 - ro^2}$$

- $w(R) = 0$

$$w(R) = -\frac{roR^2}{2(R^2 - ro^2)} + \frac{roR^2 + ro^3(1 - \bar{\varphi})}{R^2 - ro^2} \ln(R) + C_4$$

$$w(R) = \frac{roR^2}{2(R^2 - ro^2)} (2 \ln(R) - 1) + \frac{ro^3(1 - \bar{\varphi})}{R^2 - ro^2} \ln(R) + C_4 = 0$$

$$C_4 = \frac{roR^2}{2(R^2 - ro^2)} (1 - 2 \ln(R)) - \frac{ro^3(1 - \bar{\varphi})}{R^2 - ro^2} \ln(R)$$

Da cui:

$$w(r) = \frac{ro \left[ R^2 \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right) - r^2 \right]}{2(R^2 - ro^2)} + \frac{ro^3(1 - \bar{\varphi})}{R^2 - ro^2} \ln \left( \frac{r}{R} \right) \quad [4.64]$$

$$\varphi_r(r) = \frac{ro(R^2 - r^2 + ro^2(1 - \bar{\varphi}))}{r(R^2 - ro^2)} \quad [4.65]$$

Il valore della molla rotazionale coincide con il momento che si genera all'estremo  $ro$  della piastra posto,  $\bar{\varphi} = 1$ :

$$k_R = M_r(ro) = -D_{rr}^e \frac{d\varphi_r}{dr} - D_{tr}^e \frac{\varphi_r}{r}$$

$$M_r(r) = D_{rr}^e \frac{ro}{R^2 - ro^2} - D_{rr}^e \frac{roR^2}{r^2(R^2 - ro^2)} + D_{tr}^e \frac{ro}{R^2 - ro^2} + D_{tr}^e \frac{roR^2}{r^2(R^2 - ro^2)} =$$

$$M_r(r) = (D_{rr}^e + D_{tr}^e) \frac{ro}{R^2 - ro^2} - (D_{rr}^e - D_{tr}^e) \frac{roR^2}{r^2(R^2 - ro^2)}$$

$$M_r(ro) = \frac{ro^2(D_{rr}^e + D_{tr}^e) - R^2(D_{rr}^e - D_{tr}^e)}{ro(R^2 - ro^2)}$$

$$M_r(ro) = \frac{-D_{rr}^e(R^2 - ro^2) + D_{tr}^e(R^2 + ro^2)}{ro(R^2 - ro^2)} =$$

$$k_R = M_r(ro) = -\frac{D_{rr}^e}{ro} + \frac{D_{tr}^e}{ro} \frac{(R^2 + ro^2)}{(R^2 - ro^2)} \quad [4.66]$$

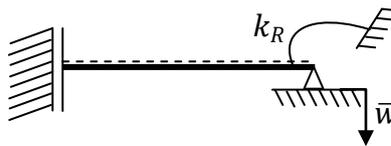
Dove  $D_{rr}^e$  e  $D_{tr}^e$ , sono i parametri della parte di piastra non stratificata in cui interviene la rigidezza del solo silicio.

Inoltre lo spostamento verticale in corrispondenza dell'estremo libero vale:

$$\bar{w} = w(ro) = \frac{ro \left[ R^2 \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{ro}{R} \right) \right) - ro^2 \right]}{2(R^2 - ro^2)} + \frac{ro^3 (1 - \bar{\varphi})}{R^2 - ro^2} \ln \left( \frac{ro}{R} \right) \quad [4.67]$$

Si può notare come sia necessario introdurre nel modello analitico, e quindi anche in quello numerico, una distinzione tra la parte esterna e quella interna della piastra. Nel codice si è introdotta la possibilità di scegliere, date le coordinate dell'elemento finito, tra materiale stratificato e non stratificato attraverso una semplice funzione di selezione.

Il problema è ora quello di calcolare il campo di spostamenti di una piastra assialsimmetrica stratificata con uno strato lo strato di piezoelettrico le cui condizioni al contorno esterno sono spostamento imposto pari a  $\bar{w}$  e momento pari a  $k_R \cdot \varphi_r(ro)$ .



**Figura 4.13:** Schema della parte centrale della piastra con materiale piezoelettrico e vincoli elastici al bordo esterno

Le condizioni al contorno impongono:

- $T(0) = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} T(r) = \frac{C_1}{r} - \frac{p}{2}r = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$$

- $\varphi_r(0) = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_r(0) = \frac{C_3}{r} = 0 \quad \Rightarrow C_3 = 0$$

- $M_r(ro) = k_R \cdot \varphi_r(ro)$

$$M_r(ro) = -D_{rr} \frac{d\varphi_r}{dr} - D_{tr} \frac{\varphi_r}{r} - M_r^P - k_R \cdot \varphi_r = 0$$

$$M_r(ro) = -D_{rr} \left( \frac{C_2}{2} \right) - D_{tr} \left( \frac{C_2}{2} \right) - M_r^P - k_R \cdot C_2 \frac{ro}{2} = 0$$

$$M_r(ro) = -C_2 \frac{(D_{rr} + D_{tr} + k_R ro)}{2} - M_r^P = 0$$

$$C_2 = - \frac{2M_r^P}{(D_{rr} + D_{tr} + k_R ro)}$$

Una volta calcolate le costanti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , si ha l'espressione della rotazione nell'estremo esterno necessaria per il calcolo di  $\bar{w}$ :

$$\bar{\varphi} = \varphi_r(ro) = C_2 \frac{ro}{2} = - \frac{M_r^P ro}{(D_{rr} + D_{tr} + k_R ro)}$$

$$\bar{w} = \frac{ro \left[ R^2 \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{ro}{R} \right) \right) - ro^2 \right]}{2(R^2 - ro^2)} + \frac{ro^3 (1 - \bar{\varphi})}{R^2 - ro^2} \ln \left( \frac{ro}{R} \right)$$

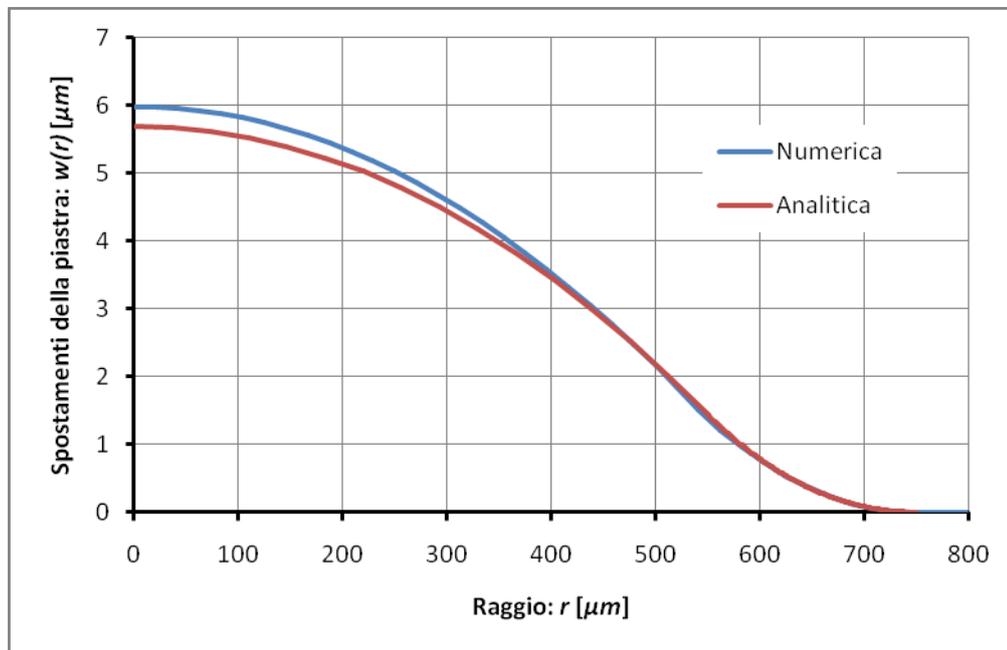
- $w(ro) = \bar{w}$

$$w(ro) = -\frac{M_r^P ro^2}{2(D_{rr} + D_{tr} + k_R ro)} + C_4 = \bar{w}$$

$$C_4 = \bar{w} + \frac{M_r^P R^2}{2(D_{rr} + D_{tr} + k_R ro)}$$

Da cui:

$$w(r) = \bar{w} + \frac{M_r^P (ro^2 - r^2)}{2(D_{rr} + D_{tr} + k_R ro)} \quad [4.68]$$



**Figura 4.14:** Confronto tra gli spostamenti di una piastra assialsimmetrica incastrata al bordo con deformazione piezoelettrica nella parte centrale. In rosso la soluzione analitica e in blu quella numerica

Il grafico sopra riportato è stato effettuato per un rapporto  $ro/R = 0,67$ . Al variare della lunghezza di  $ro$  la risposta cambia. Se  $ro$  è nullo la membrana non è attuata e non ci sarà inflessione della piastra se invece  $ro = R$  vale in discorso precedente per cui non si ha alcun movimento.

È interessante valutare il valore di raggio dello strato piezoelettrico ( $ro$ ) per il quale l'inflessione della piastra è massima fissato il raggio esterno ( $R$ ).

Per far questo consideriamo lo spostamento massimo della piastra, lo si ottiene in  $r = 0$ .

$$w(0) = \bar{w}(ro) + \frac{M_r^P ro^2}{2(D_{rr} + D_{tr} + k_R ro)} =$$

$$= \frac{ro \left[ R^2 \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{ro}{R} \right) \right) - ro^2 \right]}{2(R^2 - ro^2)} + \frac{ro^3 (1 - \bar{\varphi})}{R^2 - ro^2} \ln \left( \frac{ro}{R} \right) + \frac{M_r^P ro^2}{2(D_{rr} + D_{tr} + k_R ro)} =$$

Con  $\bar{\varphi}$  e  $k_R$  funzioni di  $ro$ .

$$\bar{\varphi} = - \frac{M_r^P ro}{(D_{rr} + D_{tr} + k_R ro)} \quad [4.69]$$

$$k_R = - \frac{D_{rr}^e}{ro} + \frac{D_{tr}^e (R^2 + ro^2)}{ro (R^2 - ro^2)} \quad [4.70]$$

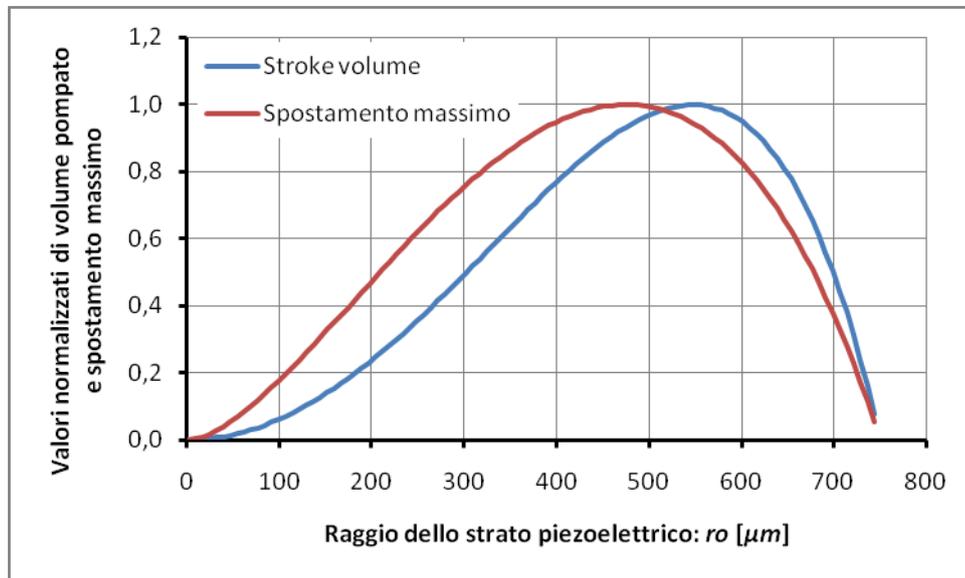
Dove  $D_{rr}^e$  e  $D_{tr}^e$ , sono i parametri della parte di piastra non stratificata.

Massimizzare lo spostamento in mezzeria non significa però garantire che lo *stroke volume* sia massimo, è infatti quest'ultimo un parametro più interessante per caratterizzare la capacità di pompaggio della pompa.

$$v_s = \int_0^{2\pi} \int_0^R w(r) r \cdot dr d\theta \quad [4.71]$$

Il volume può essere calcolato sia analiticamente, integrando gli spostamenti dapprima tra 0 ed  $R$  e in seguito tra  $ro$  e  $R$ , sia numericamente.

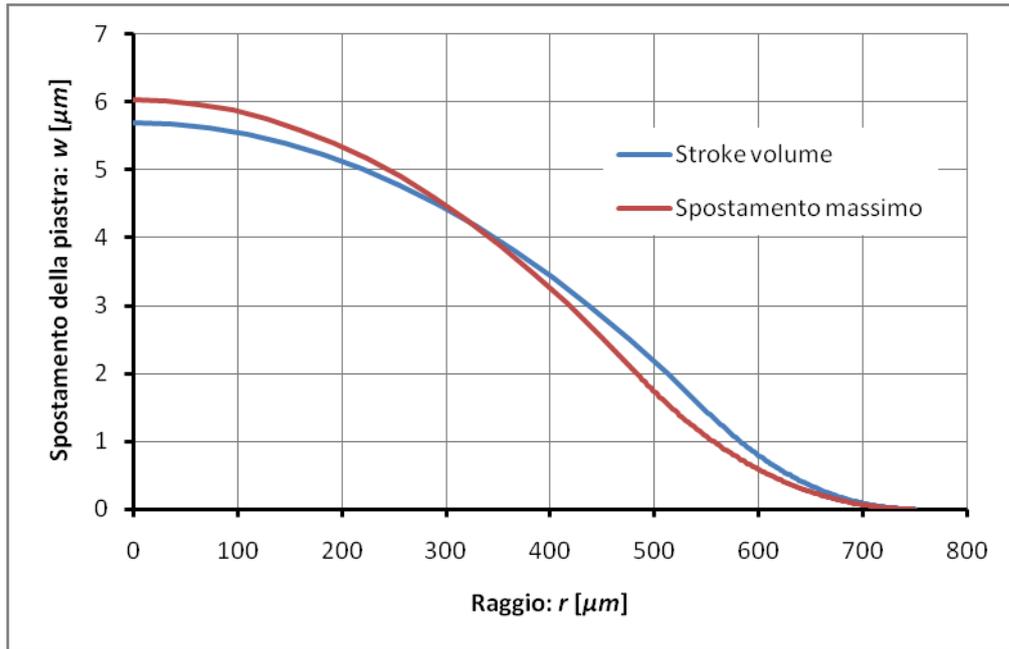
Il grafico risultante di  $v_s$  e  $w(0)$  normalizzati rispetto al proprio valore massimo in funzione di  $r_0$  risulta:



**Figura 4.15:** Ottimizzazione del raggio dello strato piezoelettrico per massimizzare spostamenti massimi e stroke volume della piastra

Il massimo valore di volume pompato a ciclo si ha per un raggio dello strato piezoelettrico pari a 0,73 volte il raggio esterno. A tale valore non corrisponde il massimo valore di spostamento nel centro della piastra che si ha per  $0,64R$ .

Questo accade perché la membrana risulta più schiacciata nel centro ma mediamente più sollevata:



**Figura 4.16:** Spostamenti della piastra con raggio del piezoelettrico variabile. In rosso la soluzione in cui è massimizzato lo spostamento nel centro, in blu la soluzione che massimizza lo stroke volume

Questi risultati non risentono particolarmente del valore del raggio esterno della piastra.

### 4.7 Studio parametrico

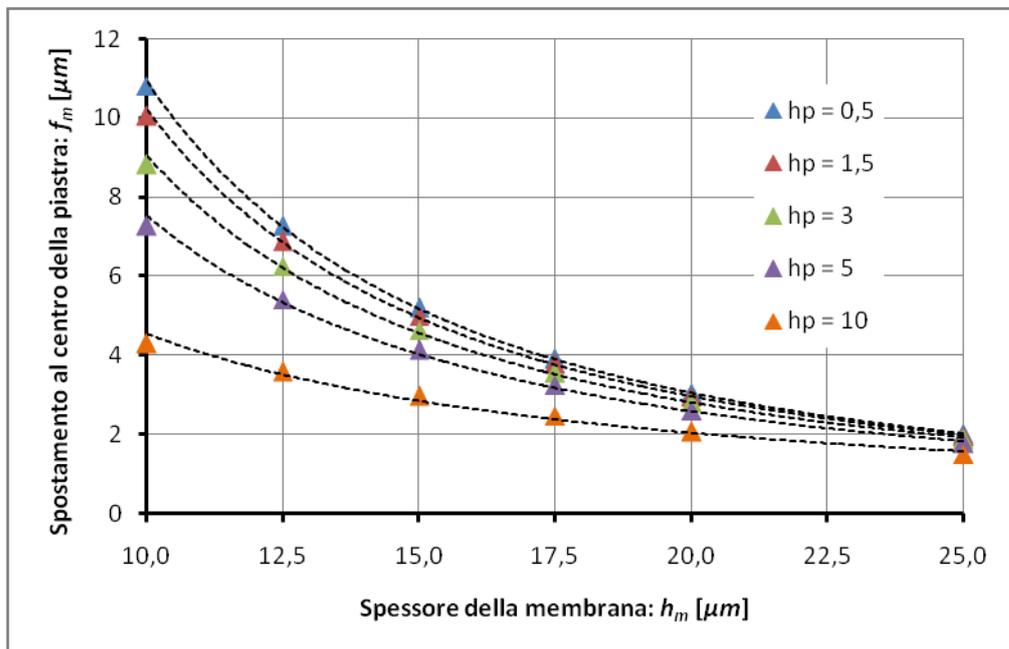
Le due fondamentali variabili geometriche in gioco sono lo spessore della membrana di silicio e lo spessore dello strato di materiale piezoelettrico. Per l'osservazione riportata al paragrafo precedente si considera che il piezoelettrico abbia raggio pari a  $0,73R$ .

Tecnologicamente è possibile creare film piezoelettrici molto sottili fino anche oltre il decimo di micron. Tuttavia a queste dimensioni le proprietà piezoelettriche del materiale non sono più costanti ma dipendono notevolmente dallo spessore del film.

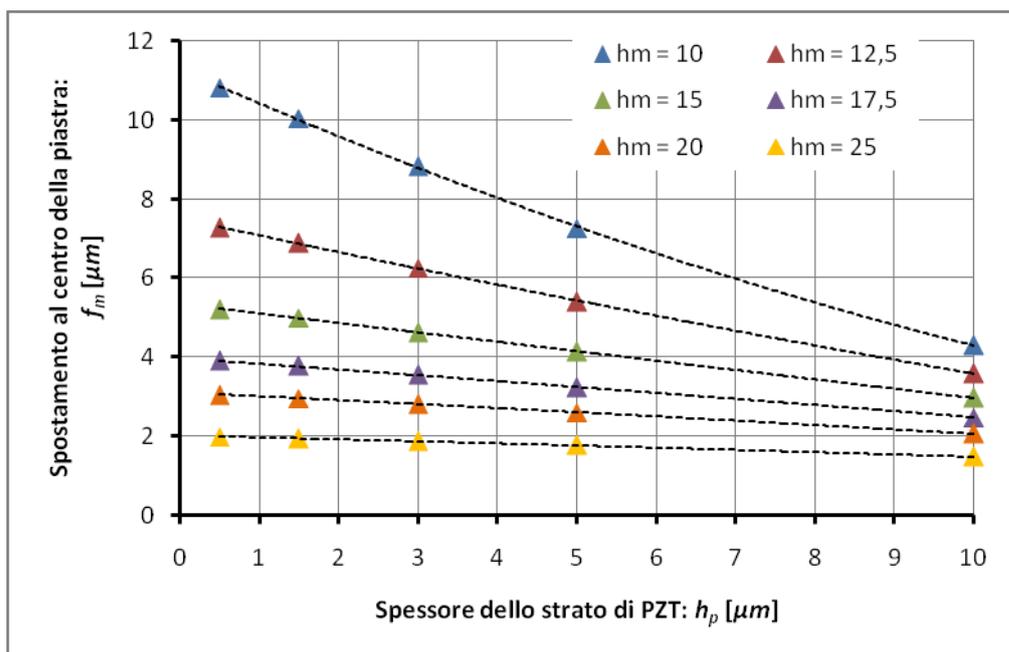
Per questa ragione ci si è limitati allo studio di strati sottili fino a  $0,5\mu m$ , valore al di sopra del quale le proprietà del materiale sono pressoché costanti.

Nelle figure seguenti sono riportati studi parametrici del tipo effettuato per la tipologia capacitiva per mostrare l'influenza dello spessore della membrana  $h_m$  e dello spessore dello strato di piezoelettrico  $h_p$  sulla risposta del sistema:

Spostamento massimo della piastra



(a)



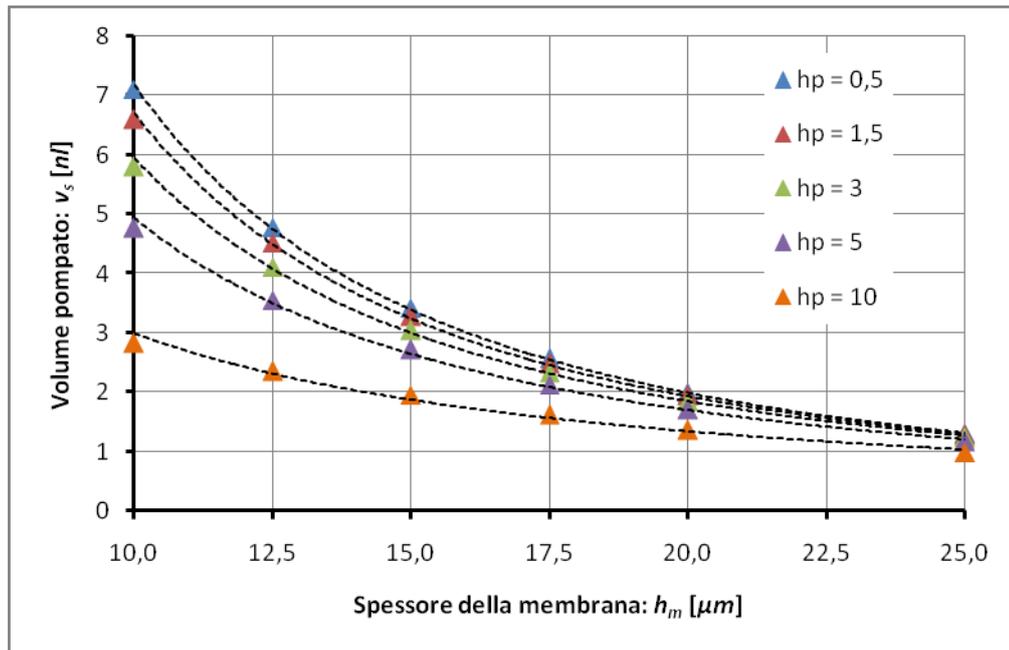
(b)

**Figura 4.17-a,b:** Spostamento in centro alla piastra  $f_m$  in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  al variare dello spessore dello strato piezoelettrico  $h_p$  (a) e viceversa (b).

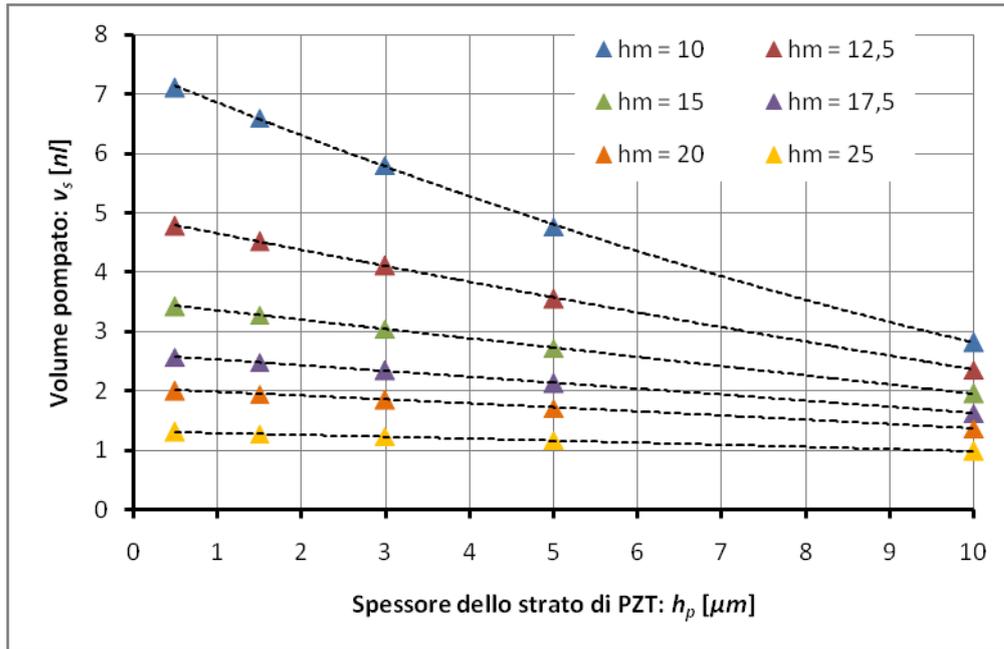
Al diminuire dello spessore della membrana il sistema ha spostamenti maggiori perché è meno rigido, se lo spessore del piezoelettrico è minore il sistema ha spostamenti più grandi perché il momento equivalente dovuto alla deformazione anelastica è inversamente proporzionale ad esso:

$$M^P \propto E \propto \frac{V}{t} \quad [4.72]$$

Stroke Volume



(a)



(b)

**Figura 4.18-a,b:** Stroke volume  $v_s$  in funzione dello spessore della membrana  $h_m$  al variare dello spessore dello strato piezoelettrico  $h_p$  (a) e viceversa (b).

Il discorso è analogo per quanto riguarda lo *stroke volume*.

### Potenza necessaria

La potenza necessaria per l'attuazione nel caso piezoelettrico è formalmente uguale all'espressione usata nel caso capacitivo.

$$P = \frac{1}{2} CV^2 f \quad [4.73]$$

Le variabili in gioco sono ovviamente differenti, anzitutto la capacità è costante e dipende dallo spessore totale degli strati di piezoelettrico considerati (Driesen et al., 2003).

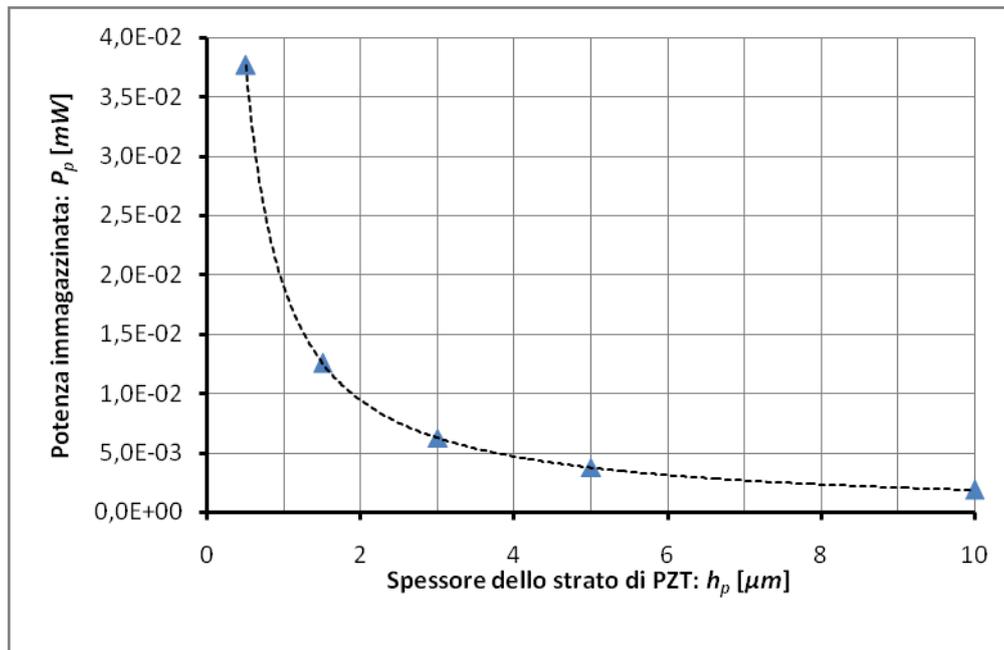
L'espressione di  $C$  è la seguente:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A_p}{h_p} \quad [4.74]$$

La costante di permittività relativa del materiale considerato è pari a 1250. Per questa ragione la potenza dissipata nel caso piezoelettrico sarà di 3/4 ordini di grandezza maggiore di quella nel caso elettrostatico a seconda del valore di  $h_p$ .

Essendo il problema lineare non si ha alcuna dipendenza della capacità e quindi della potenza dallo spostamento della membrana. L'unica variabile in gioco è lo spessore del materiale piezoelettrico che si può considerare costante durante la deformazione.

Per una frequenza di riferimento di 1Hz si ottiene:



**Figura 4.19:** Potenza impiegata per attuare la micropompa piezoelettrica in funzione dello spessore dello strato di materiale piezoelettrico

Come si può notare dalla figura sopra riportata, si ha che la potenza dissipata è molto influenzata da  $h_p$  soprattutto quando esso è molto piccolo.

# **5. Confronto tra attuazione elettrostatica e piezoelettrica**



### 5.1 Confronto tra le tipologie di attuazione

Le analisi riportate nei capitoli precedenti mettono in evidenza i vantaggi e gli svantaggi delle due tipologie attuative. A parità di voltaggio si vede che la tipologia elettrostatica ha buone prestazioni da un punto di vista dell'energia consumata ma è debole dal punto di vista puramente meccanico. In paragone con il caso piezoelettrico gli spostamenti e i volumi spostati sono fino a 30 volte inferiori. D'altra parte il grosso vantaggio dell'attuazione elettrostatica riguarda, come ci si aspettava, il basso consumo. In confronto al piezoelettrico si hanno energie consumate di 3 ordini di grandezza inferiori.

Per confrontare le due soluzioni si sceglie di fissare lo *stroke volume* e si paragona la potenza necessaria nei due casi per una frequenza di 1Hz. Avendo ipotizzato che il legame tra  $v_s$  e  $f$  sia lineare i risultati qui riportati sono validi per qualunque valore di frequenza e lo *stroke volume* coincide con la portata della pompa a meno del fattore  $f$ .

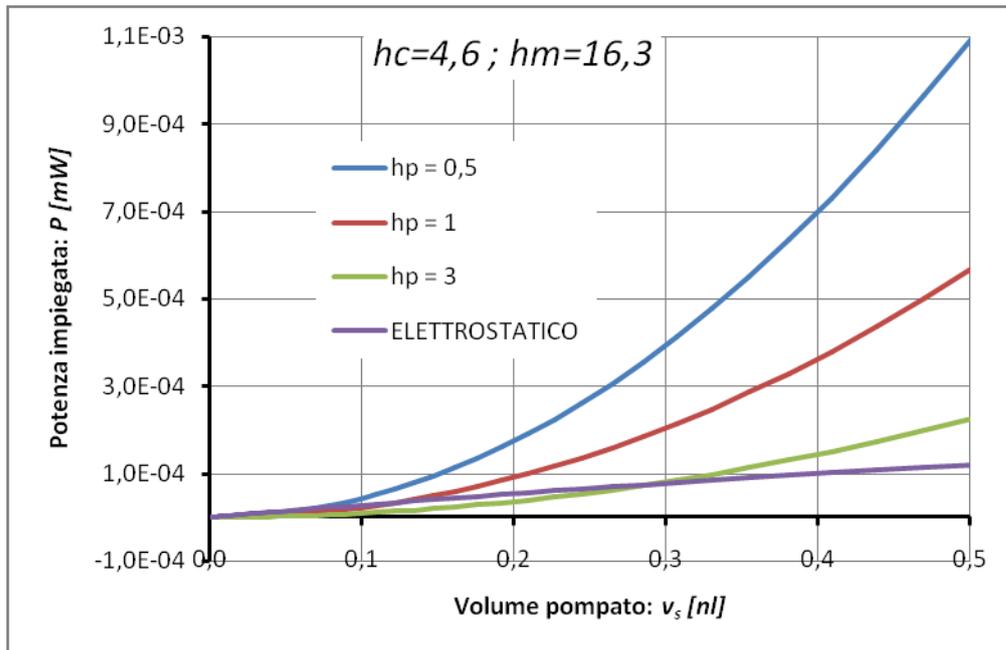
Per effettuare lo studio parametrico è necessario fissare di volta in volta due grandezze tra  $h_c$ ,  $h_m$  e  $h_p$ , così da mostrare l'effetto della variazione dell'altra grandezza sui risultati.

Si considera che la membrana sia spessa  $16,3\mu m$ . Questo valore è stato scelto per uniformità con il lavoro svolto da (Bertarelli et al., 2011).

Al variare del voltaggio applicato si calcolano numericamente lo *stroke volume* e la potenza dissipata nel caso elettrostatico, si procede poi inversamente al calcolo del voltaggio necessario per garantire il medesimo volume spostato nel caso piezoelettrico e di conseguenza è possibile risalire alla potenza dissipata in questo caso (il legame tra voltaggio e *stroke volume* per l'attuazione piezoelettrica è di tipo lineare mentre il legame con la potenza è parabolico).

Procedendo in questo modo si costruiscono i grafici della potenza consumata e del voltaggio applicato in funzione dello *stroke volume*.

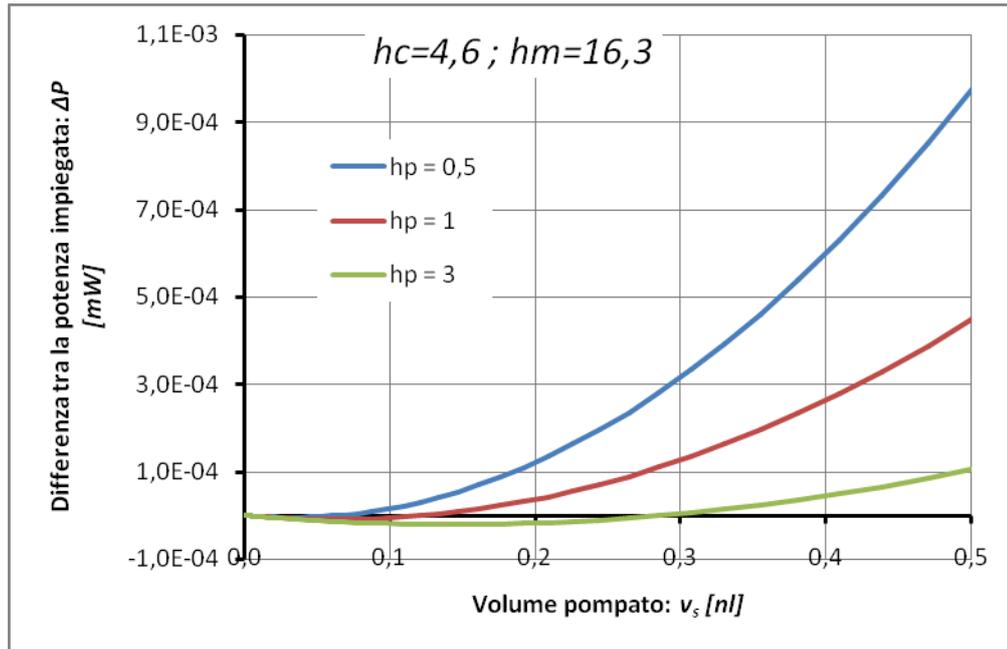
Il grafico sotto riportato mostra la potenza nel caso capacitivo  $P_{elec}$  e nel caso piezoelettrico  $P_{pzt}$  al variare dello spessore dello strato di piezoelettrico:



**Figura 5.1:** Consumo di potenza in funzione dello stroke volume per 1Hz di frequenza. In viola la soluzione elettrostatica per spessore della membrana di  $16,3 \mu m$  e capacitor gap di  $4,6 \mu m$ , in blu, rosso e verde le soluzioni piezoelettriche al variare dello spessore dello strato piezoelettrico.

La potenza impiegata è minore nel caso piezoelettrico per *stroke volume* più bassi mentre per valori alti l'attuazione elettrostatica è più efficiente. Aumentare lo spessore dello strato di piezoelettrico migliora notevolmente le prestazioni perché la potenza diminuisce molto velocemente. Nell'ottica di massimizzare lo *stroke* la soluzione capacitiva sembra essere migliore.

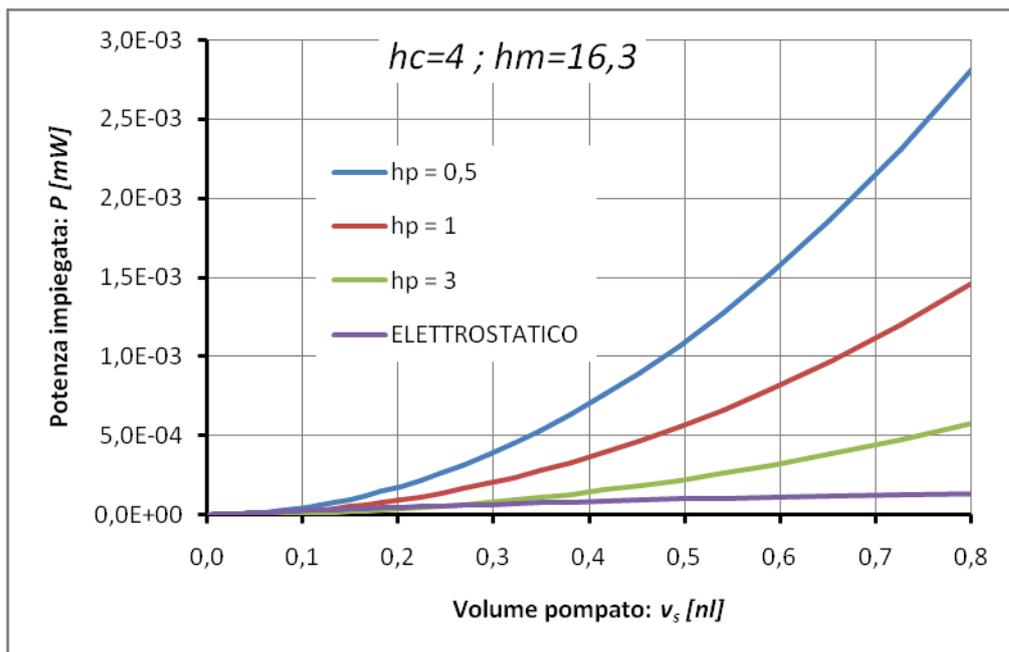
È interessante mostrare la differenza tra le potenze necessarie nei due casi per esplicitare la convenienza dell'una o dell'altra soluzione:



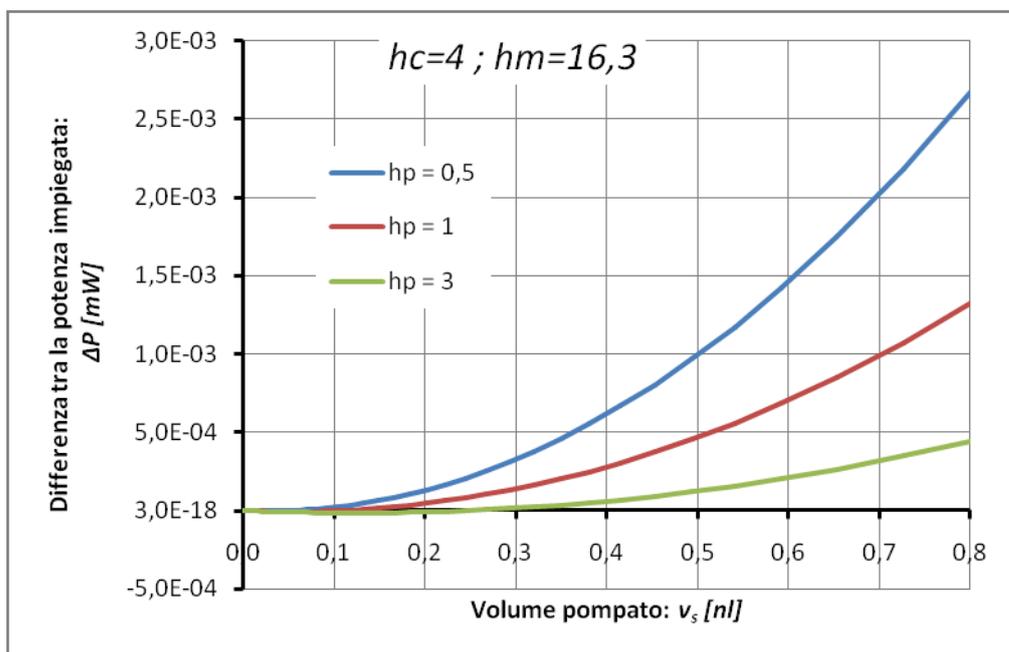
**Figura 5.2:** Differenza tra la potenza necessaria per la soluzione elettrostatica, per spessore della membrana di  $16,3 \mu m$  e capacitor gap di  $4,6 \mu m$ , e per quella piezoelettrica in funzione dello stroke volume per  $1 Hz$  di frequenza. In blu, rosso e verde le diverse soluzioni al variare dello spessore dello strato piezoelettrico.

Dove le curve sono negative la soluzione elettrostatica è meno efficiente di quella piezoelettrica e viceversa per i valori positivi.

Al variare di  $h_c$  si ottengono potenze maggiori a parità di volume, per quanto riguarda la differenza tra  $P_{elec}$  e  $P_{pzt}$  si ottengono risultati del tutto analoghi, si ottengono però i medesimi *stroke volume* per voltaggi inferiori.

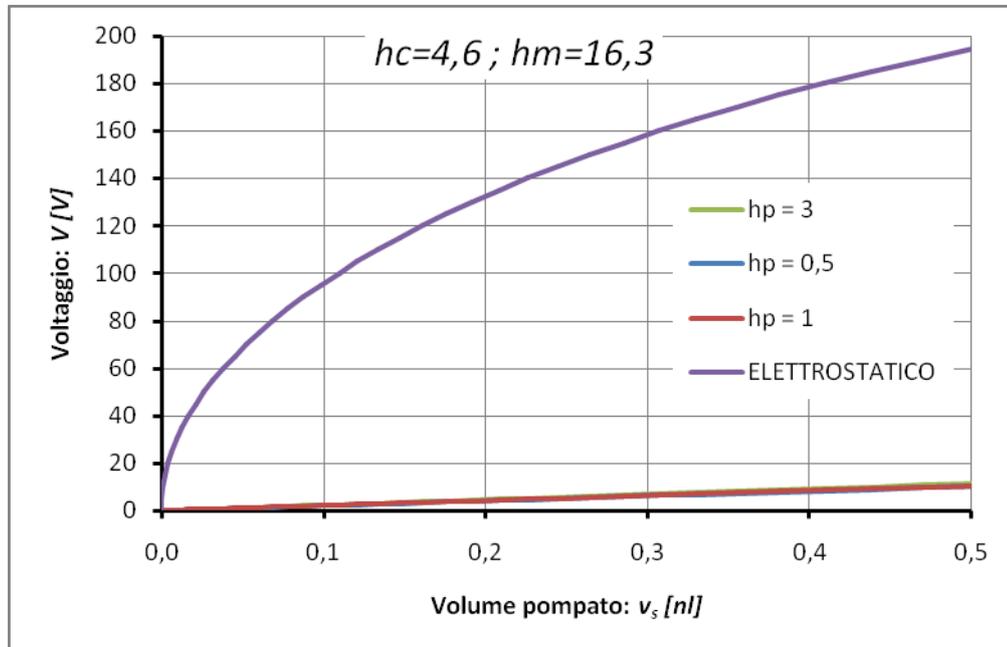


**Figura 5.3:** Consumo di potenza in funzione dello stroke volume per 1Hz di frequenza. In viola la soluzione elettrostatica per spessore della membrana di  $16,3 \mu\text{m}$  e capacitor gap di  $4 \mu\text{m}$ , in blu, rosso e verde le soluzioni piezoelettriche al variare dello spessore dello strato piezoelettrico.



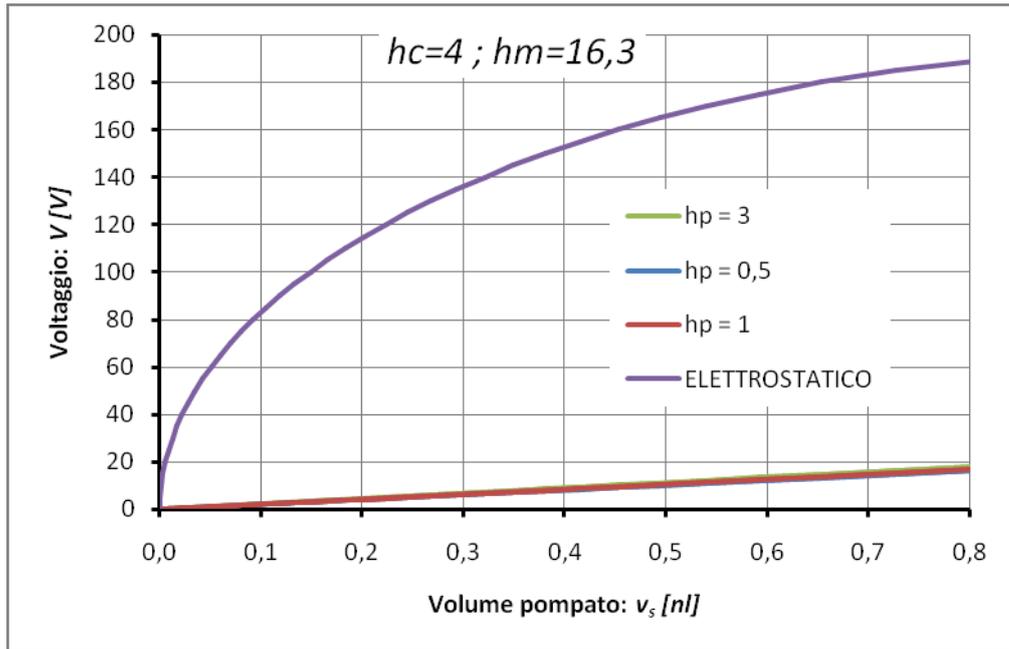
**Figura 5.4:** Differenza tra il consumo di potenza della soluzione elettrostatica, per spessore della membrana di  $16,3 \mu\text{m}$  e capacitor gap di  $4 \mu\text{m}$ , e quella piezoelettrica in funzione dello stroke volume per 1Hz di frequenza. In blu, rosso e verde le diverse soluzioni al variare dello spessore dello strato piezoelettrico.

Per questa ragione è interessante mostrare il legame che c'è tra volume e voltaggio. Infatti nel caso piezoelettrico nonostante la potenza richiesta sia maggiore per volumi alti si ha bisogno di voltaggi nettamente inferiori per ottenere il medesimo *stroke volume*.



**Figura 5.5:** Voltaggio applicato nel caso elettrostatico, per spessore della membrana di  $16,3 \mu m$  e capacitor gap di  $4,6 \mu m$ , e piezoelettrica in funzione dello stroke volume per  $1 Hz$  di frequenza. In viola la soluzione elettrostatica. In blu, rosso e verde le diverse soluzioni al variare dello spessore dello strato piezoelettrico.

Il legame  $v_s - V$  è al contrario di quello  $v_s - \Delta P$  molto sensibile alla variazione della distanza tra elettrodo e piastra  $h_c$ :



**Figura 5.6:** Voltaggio applicato nel caso elettrostatico, per spessore della membrana di  $16,3 \mu m$  e capacitor gap di  $4 \mu m$ , e piezoelettrica in funzione dello stroke volume per  $1 Hz$  di frequenza. In viola la soluzione elettrostatica. In blu, rosso e verde le diverse soluzioni al variare dello spessore dello strato piezoelettrico.

Come si era già dimostrato in precedenza se il gap tra elettrodi diminuisce si ottengono spostamenti maggiori a voltaggi inferiori.

Quest'ultima considerazione è molto importante perché spesso c'è un limite al voltaggio imposto dall'ambiente in cui il dispositivo lavora. Per esempio nel caso dei drugs delivery systems occorre garantire voltaggi non troppo elevati (fino a  $50/60V$ ) per non recare danno al paziente.

### 5.2 Limitazione del voltaggio applicato

Se si immagina di imporre una limitazione al voltaggio, mantenendo il volume spostato invariato, è necessario introdurre una differenza tra le frequenze a cui lavorano i due dispositivi.

Nel caso piezoelettrico si lavora a voltaggi molto bassi e non si risente di questo limite, nel caso elettrostatico invece questa limitazione riduce notevolmente le prestazioni del dispositivo.

Considerando un voltaggio limite di  $60V$  si ha un limite invalicabile per lo *stroke volume*:  $v_s(V_{lim}) = \bar{v}_s$  a cui corrisponde una portata  $\bar{Q} = \bar{v}_s \cdot f$ . La potenza dissipata per ottenere questo volume a  $1Hz$  di frequenza è indicata con  $\bar{P}_{elec}$ .

Per ottenere una portata pari a quella che si ha col caso piezoelettrico (che non è limitato dal voltaggio) è necessario aumentare la frequenza alla quale lavora il dispositivo capacitivo.

$$Q_{elec} = Q_{pzt} \quad [5.1]$$

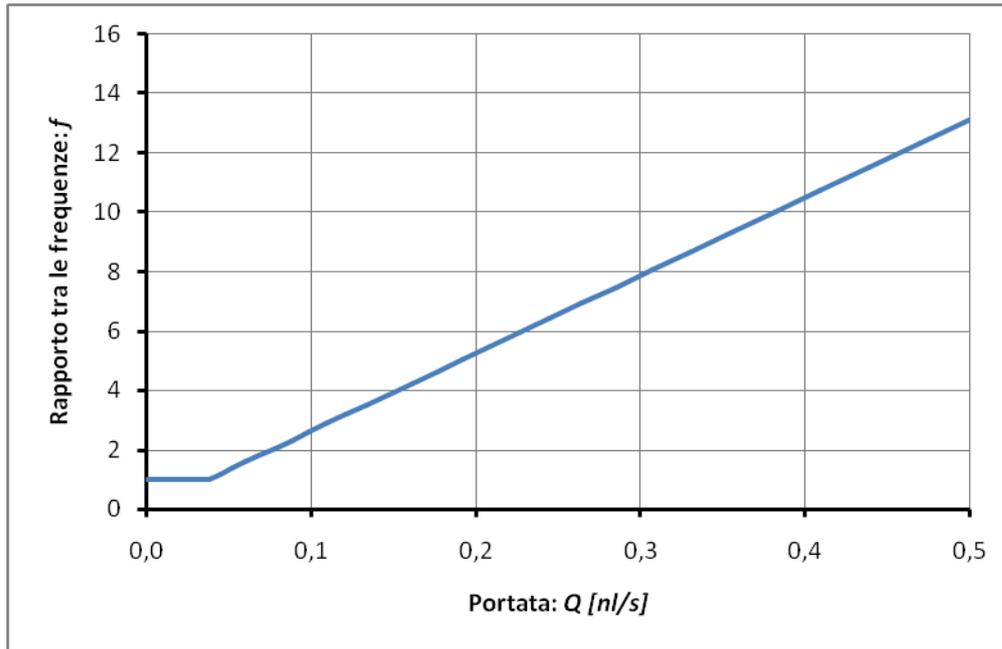
$$\bar{v}_s \cdot f_{elec} = v_s \cdot f_{pzt} \quad [5.2]$$

$$f_{elec} = \frac{v_s}{\bar{v}_s} \cdot f_{pzt} \quad [5.3]$$

Si definisce:

$$\bar{f}(v_s) = \frac{v_s}{\bar{v}_s} = \frac{f_{elec}}{f_{pzt}} \quad [5.4]$$

Per poter pareggiare la portata il caso capacitivo deve lavorare a una frequenza che è  $\bar{f}$  volte maggiore di quella a cui lavora il dispositivo piezoelettrico. È possibile quindi definire  $\bar{f}$  come il rapporto tra  $f_{elec}$  e  $f_{pzt}$ .



**Figura 5.7:** Valore del rapporto di frequenza  $\bar{f}$  tra l'attuazione elettrostatica e piezoelettrica al variare dello stroke volume. Per valori di stroke volume inferiore a  $\bar{v}_s$  il rapporto di frequenza è unitario, significa che i dispositivi piezoelettrico e elettrostatico possono lavorare alla medesima frequenza per ottenere la stessa portata.

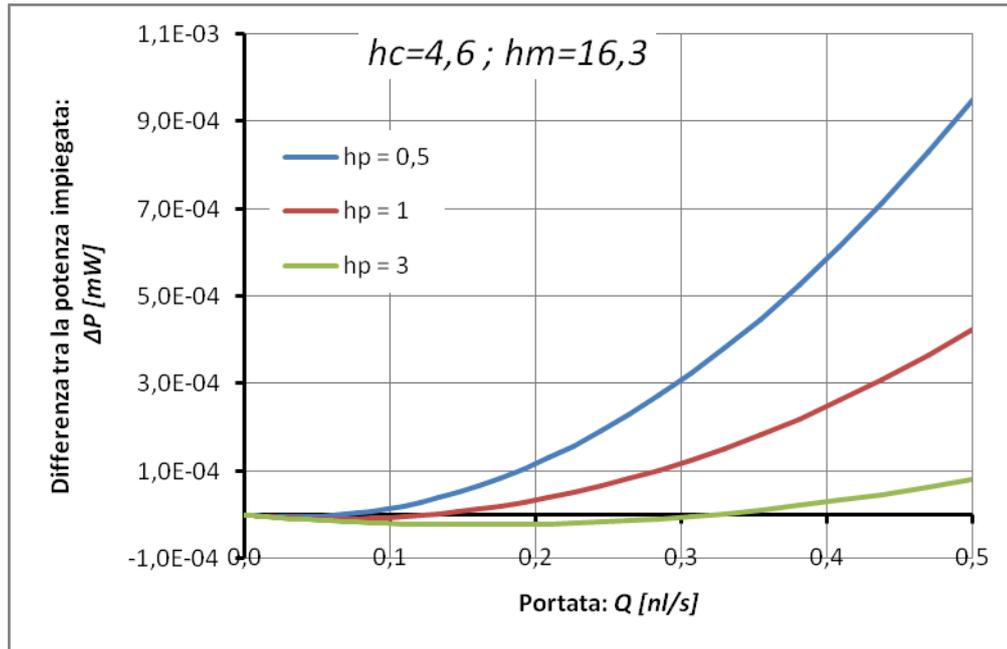
Una volta superato il valore di *stroke* volume limite per il caso elettrostatico per avere le medesime prestazioni in termini di portata occorre che i due dispositivi lavorino a frequenze diverse, queste frequenze sono legate dal fattore  $\bar{f}(v_s)$  funzione dello *stroke* che si vuole avere.

Lavorando a una frequenza maggiore il consumo sarà maggiore di quello preventivato inizialmente, essendo la potenza legata linearmente alla frequenza, la potenza dissipata aumenta anch'essa di  $\bar{f}$  volte:

$$P_{elec} = \bar{f} \cdot \bar{P}_{elec} = \frac{v_s}{\bar{v}_s} \cdot \bar{P}_{elec} \quad [5.5]$$

Con  $\bar{P}_{elec}$  potenza necessaria per ottenere lo *stroke volume* limite  $\bar{v}_s$ .

Nel grafico di **Figura 5.8** si considera che il dispositivo piezoelettrico lavori a 1Hz, di conseguenza quello elettrostatico lavora a  $\bar{f}$ Hz

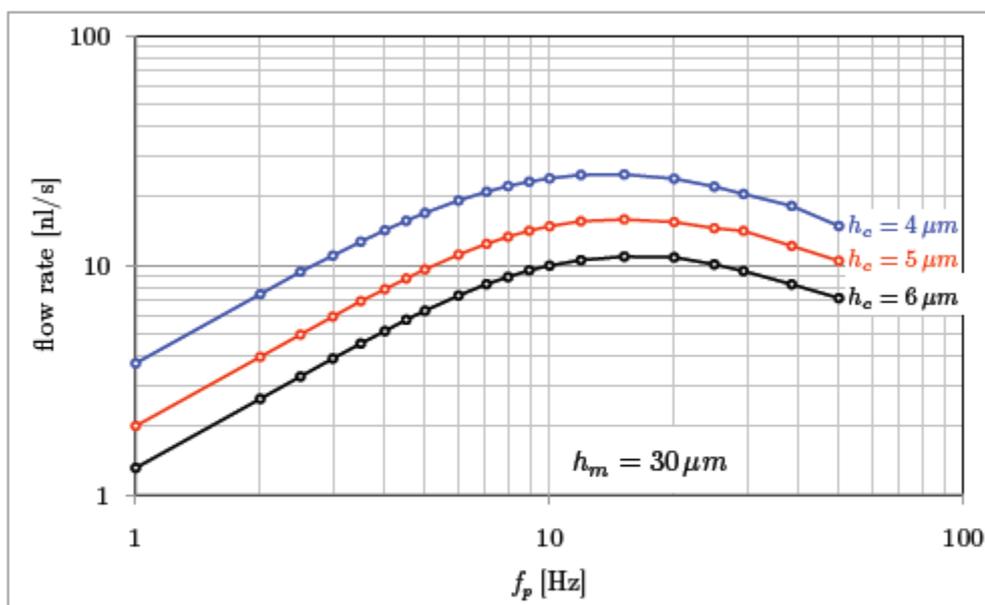


**Figura 5.8:** Differenza tra il consumo di potenza della soluzione elettrostatica, per spessore della membrana di  $16,3 \mu m$  e capacitor gap di  $4 \mu m$ , e quella piezoelettrica in funzione dello stroke volume. Il dispositivo piezoelettrico lavora a  $1 Hz$  di frequenza mentre quello elettrostatico lavora a  $\bar{f} Hz$ . In blu, rosso e verde le diverse soluzioni al variare dello spessore dello strato piezoelettrico.

La differenza tra  $P_{elec}$  e  $P_{pzt}$  è leggermente minore di quella calcolata precedentemente, la risposta del sistema non cambia tuttavia in maniera drastica come ci si poteva aspettare.

Nonostante ciò le considerazioni appena effettuate sono fondamentali se si considerano cicli di pompaggio ad alte frequenze.

Queste analisi sono state effettuate nell'ipotesi che la portata sia lineare nello *stroke volume*. Nella realtà si verifica che la presenza del fluido crea fenomeni inerziali che impediscono alla pompa di spingere all'esterno tutto il fluido che entra nella camera di pompaggio. Perciò dopo un certo valore si ha una diminuzione della portata all'aumentare della frequenza (si veda il capitolo 1).



**Figura 5.9:** Comportamento delle pompe a membrana al variare della frequenza di attuazione (da Bertarelli, 2011)

Il grafico di **Figura 5.9** fa riferimento ad altre geometrie ma è lecito pensare che il comportamento sia generalizzabile, esso mostra che al di sopra di una data frequenza la portata non cresce più linearmente. Questo comportamento non dipende dalla tecnica attuativa ma solamente dalla presenza del fluido che smorza le oscillazioni della piastra.

Le analisi precedenti diventano allora fondamentali se il fattore  $\bar{f}(v_s)$  è il discriminante tra il comportamento lineare monotono crescente e quello discendente. Infatti se la pompa elettrostatica lavora a frequenze che stanno oltre il picco che si vede nel grafico essa non è in grado di pompare il fluido efficientemente. In questo senso la micropompa piezoelettrica potrebbe diventare una risorsa importante perché in grado di garantire le stesse portate a frequenze minori.

In conclusione sembra essere indispensabile andare ad indagare il comportamento dinamico del sistema fluido-struttura.

# **6. Dinamica della piastra**



### 6.1 Introduzione

Le analisi quasi-statiche del capitolo precedente mostrano la necessità di introdurre la dinamica nel modello per poter ottenere dei risultati che descrivano l'effettivo comportamento della micropompa. La dinamica completa del sistema implicherebbe passare ad un problema multi fisico in cui è presente un accoppiamento completo tra meccanica (la piastra) e microfluidica (il fluido pompato). Una modellazione di questo tipo implica tuttavia l'introduzione di difficoltà notevoli legate in particolare alla dinamica del fluido che saranno trattate nel capitolo 7.

Procedendo per passi risulta naturale un approccio iniziale di tipo puramente meccanico in cui si considera la dinamica della sola piastra nei due casi di attuazione elettrostatica e piezoelettrica.

In questo capitolo sarà presentata l'implementazione in *Matlab* del *metodo alfa* presentato da (Hughes, 1987) per la soluzione di problemi dinamici mettendo in evidenza le particolarità legate al tipo di attuazione del sistema elettrostatica o piezoelettrica. Lo scopo di questa parte di lavoro consiste nel costruire uno strumento utile per un iniziale approccio alla dinamica della pompa. È evidente la necessità di un'integrazione con il tema dell'interazione fluido-struttura.

---

## 6.2 Attuazione Elettrostatica

### 6.2.1 Applicazione al caso elettrostatico del metodo alfa per l'integrazione nel tempo di problemi dinamici

Il *metodo alfa* (Hughes, 1987) nasce come sviluppo del *metodo beta* di Newmark che presenta la tendenza a presentare instabilità numeriche per alte frequenze. Inoltre l'introduzione di uno smorzamento lineare o di una viscosità artificiale porta ad una pessima accuratezza. Il metodo di Hughes introduce una dissipazione numerica per alte frequenze senza che si perda accuratezza della soluzione.

Il punto di partenza è l'equazione del moto scritta semi-discretizzata al tempo  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}_e^{t+\Delta t}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) \quad [6.1]$$

Dove:

- $\mathbf{M}$ : matrice delle masse
- $\mathbf{C}$ : matrice di smorzamento
- $\mathbf{K}$ : matrice di rigidezza elastica
- $\mathbf{P}_e^{t+\Delta t}(\mathbf{U}^{t+\Delta t})$ : vettore dei carichi esterni elettrostatici, dipendente dagli spostamenti

Si cerca una soluzione approssimata dell'equazione [6.1] introducendo il parametro  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{U}^t \\ = (1 + \alpha)\mathbf{P}_e^{t+\Delta t}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) - \alpha\mathbf{P}_e^t(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad [6.2]$$

Con:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta t\dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}^t + \beta\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \right] = \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \beta\Delta t^2\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}^t + \gamma\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}] = \tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \end{cases} \quad [6.3]$$

Si introducono le nuove variabili  $\tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$  e  $\tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t}$  per semplificare la trattazione, come si può notare i parametri “tilde” sono dipendenti da parametri di moto valutati all’istante di tempo  $t$  e sono perciò noti:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \equiv \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}^t \\ \tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} \equiv \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^t \end{cases} \quad [6.4]$$

Si è inoltre introdotto un fattore di smorzamento numerico lineare ad alfa dato da:

$$\alpha \{ \mathbf{K}(\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^t) + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{U}}^t) \} \quad [6.5]$$

Le equazioni [6.2] e [6.3] devono essere verificate contemporaneamente all’interno di un metodo iterativo del tipo Newton-Raphson in cui i carichi esterni vengono linearizzati per ogni step dell’iterazione. Assumendo di aver risolto il problema all’istante di tempo  $t$  ( $\mathbf{U}^t$ ,  $\dot{\mathbf{U}}^t$  e  $\ddot{\mathbf{U}}^t$  noti) si cerca la soluzione all’istante di tempo successivo  $t + \Delta t$ .

Data all’iterazione  $k$ -esima la soluzione di prova  $\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t}$  e  $\ddot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t}$ , essa non soddisfa l’equazione di moto [6.2] e per questo particolare step è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{U}_k^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{U}^t \\ = (1 + \alpha)\mathbf{P}_{e,k}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{P}_e^t - \mathbf{R}_k^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad [6.6]$$

Da cui la definizione del residuo per la  $k$ -esima iterazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k^{t+\Delta t} \equiv (1 + \alpha)\mathbf{P}_{e,k}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{P}_e^t - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} - (1 + \alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} + \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t \\ - (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{U}_k^{t+\Delta t} + \alpha\mathbf{K}\mathbf{U}^t \end{aligned} \quad [6.7]$$

Con  $\mathbf{P}_{e,k}^{t+\Delta t}$  e  $\mathbf{P}_e^t$  i vettori dei carichi elettrostatici valutati rispettivamente per gli spostamenti  $\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}$  e  $\mathbf{U}^t$ .

Se si sottrae l'equazione [6.6] all'equazione di moto [6.2] si ottiene:

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} + (1 + \alpha)\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}_k^{t+\Delta t} = (1 + \alpha)\Delta\mathbf{P}_{e,k}^{t+\Delta t} + \mathbf{R}_k^{t+\Delta t} \quad [6.8]$$

Dove:

$$\Delta\ddot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} = \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} \quad [6.9]$$

$$\Delta\dot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} \quad [6.10]$$

$$\Delta\mathbf{U}_k^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} \quad [6.11]$$

$$\Delta\mathbf{P}_{e,k}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}_e^{t+\Delta t} - \mathbf{P}_{e,k}^{t+\Delta t} \quad [6.12]$$

Conoscendo  $\Delta\mathbf{P}_{e,k}^{t+\Delta t}$ , e sfruttando le equazioni [6.3] l'equazione [6.8] può essere scritta nella sola variabile di spostamento.

Le equazioni [6.4] scritte per l'iterazione k-esima risultano essere:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \beta\Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} = \tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} + \gamma\Delta t \dot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} \end{cases} \quad [6.13]$$

In cui non compare il pedice  $k$  nei termini "tilde" perché essi sono fissati dallo step precedente.

Sottraendo [6.13] a [6.3] si ricavano le espressioni delle equazioni [6.9][6.10] in funzione di  $\Delta\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}$ :

$$\Delta\ddot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}}{\beta\Delta t^2} \quad [6.14]$$

$$\Delta\dot{\mathbf{U}}_k^{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta\mathbf{U}_k^{t+\Delta t} \quad [6.15]$$

È necessario ora linearizzare il termine  $\Delta\mathbf{P}_e^{t+\Delta t}$  per evidenziare la dipendenza dalla variabile di spostamento. Nell'espressione [6.12] i termini di carico sono calcolati rispettivamente a partire dagli spostamenti nodali  $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$  e  $\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}$ .

$$\mathbf{P}_e^{t+\Delta t} = \mathbf{P}_e^{t+\Delta t}(\mathbf{U}^{t+\Delta t}) \quad [6.16]$$

$$\mathbf{P}_{e,k}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}_e^{t+\Delta t}(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) \quad [6.17]$$

Linearizzando l'equazione [6.16] sfruttando la serie di Taylor nel punto  $\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}$  arrestata al primo ordine:

$$\mathbf{P}_e^{t+\Delta t} = \mathbf{P}_e^{t+\Delta t}(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) - \mathbf{J}_{\mathbf{P}_e^{t+\Delta t}}(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) \cdot \Delta \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} \quad [6.18]$$

Dove  $\mathbf{J}_{\mathbf{P}_e^{t+\Delta t}}(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t})$  è lo Jacobiano della funzione  $\mathbf{P}_e^{t+\Delta t}$  valutato nel punto  $\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}$ .

E sostituendo in [6.12] si ha:

$$\Delta \mathbf{P}_{e,k}^{t+\Delta t} = -\mathbf{J}_{\mathbf{P}_e^{t+\Delta t}}(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) \cdot \Delta \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} \quad [6.19]$$

L'equazione di moto può essere quindi scritta nella sola variabile di spostamento per ogni iterazione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \cdot \Delta \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \cdot \Delta \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} + (1+\alpha) \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} \\ = -(1+\alpha) \mathbf{J}_{\mathbf{P}_e^{t+\Delta t}}(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) \cdot \Delta \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} + \mathbf{R}_k^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad [6.20]$$

Per cui raccogliendo  $\Delta \mathbf{U}_k^{t+\Delta t}$  e definendo la matrice rigidità fittizia  $\tilde{\mathbf{K}}_k^{t+\Delta t}$  per l'iterazione corrente si perviene al sistema lineare [6.22]:

$$\left\{ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + (1+\alpha) \mathbf{K} + (1+\alpha) \mathbf{J}_{\mathbf{P}_e^{t+\Delta t}}(\mathbf{U}_k^{t+\Delta t}) \right\} \cdot \Delta \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} = \mathbf{R}_k^{t+\Delta t} \quad [6.21]$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_k^{t+\Delta t} \cdot \Delta \mathbf{U}_k^{t+\Delta t} = \mathbf{R}_k^{t+\Delta t} \quad [6.22]$$

---

### Algoritmo

1- Calcolo delle matrici elastica,  $\mathbf{K}$ , delle masse,  $\mathbf{M}$  e di smorzamento,  $\mathbf{C}$  e definizione del ciclo di voltaggio,  $\mathbf{V}$ , del passo temporale  $\Delta t$ , scelta delle variabili  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Il metodo è incondizionatamente stabile se:

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right], \gamma = 0,5 \cdot (1 - 2\alpha) \text{ e } \beta = 0,25 \cdot (1 - \alpha)^2.$$

Si è scelto  $\alpha = -0,05$  per evitare che lo smorzamento numerico sia eccessivo.

Per cui:  $\gamma = 0,55$ ,  $\beta = 0,2756$

2- Inizializzazione del ciclo temporale, calcolo delle variabili di moto

$$t = 1 \quad [6.23]$$

$$\mathbf{U}^t = \mathbf{0} \quad [6.24]$$

$$\dot{\mathbf{U}}^t = \mathbf{0} \quad [6.25]$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^t = \mathbf{0} \quad [6.26]$$

3- Ciclo temporale

A- Valutazione delle quantità “tilde” e del carico elettrostatico al tempo  $t$ .

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{U}}^t \quad [6.27]$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{U}}} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^t \quad [6.28]$$

$$\mathbf{P}_e^t = \mathbf{P}_e(\mathbf{U}^t, \mathbf{V}^t) \quad [6.29]$$

B- Inizializzazione del ciclo Newton-Raphson

$$k = 1 \quad [6.30]$$

$$\mathbf{U}^k = \tilde{\mathbf{U}} \quad [6.31]$$

$$\dot{\mathbf{U}}^k = \tilde{\dot{\mathbf{U}}} \quad [6.32]$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^k = \mathbf{0} \quad [6.33]$$

C- Calcolo degli spostamenti nodali e della norma

$$\mathbf{U}^k \rightarrow \mathbf{w}^k \quad [6.34]$$

$$\|\mathbf{w}^k\| \quad [6.35]$$

D- Ciclo di Newton-Raphson per il calcolo della soluzione al tempo  $t + \Delta t$

a- Calcolo della forza elettrostatica:

$$\mathbf{F}_{elec}^k = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2(h_c - \mathbf{w}^k)^2} \quad [6.36]$$

b- Calcolo del vettore prova dei carichi esterni  $\mathbf{P}_e^k = \mathbf{P}_e(\mathbf{U}^k, V^{t+1})$  e della sua matrice Jacobiana  $\mathbf{J}_{P_e} = \mathbf{J}_{P_e}(\mathbf{U}^k)$ .

c- Calcolo del residuo:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^k \equiv & (1 + \alpha)\mathbf{P}_e^k - \alpha\mathbf{P}_e^t - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^k + \\ & -(1 + \alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^k + \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t - (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{U}^k + \alpha\mathbf{K}\mathbf{U}^t \end{aligned} \quad [6.37]$$

d- Calcolo della matrice di rigidezza fittizia:

$$\tilde{\mathbf{K}}^k = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{(1 + \alpha)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + (1 + \alpha)\mathbf{K} + (1 + \alpha)\mathbf{J}_{P_e} \quad [6.38]$$

e- Risoluzione del sistema lineare:

$$\tilde{\mathbf{K}}^k \cdot \Delta\mathbf{U}^k = \mathbf{R}^k \quad [6.39]$$

f- Calcolo delle variabili di moto all'iterazione  $k + 1$ :

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + \Delta\mathbf{U}^k \quad [6.40]$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^{k+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{U}^{k+1} - \tilde{\mathbf{U}}) \quad [6.41]$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{k+1} = \tilde{\dot{\mathbf{U}}} + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{U}}^{k+1} \quad [6.42]$$

---

g- Calcolo degli spostamenti nodali

$$\mathbf{U}^{k+1} \rightarrow \mathbf{w}^{k+1} \quad [6.43]$$

h- Test di convergenza:

$$err = \frac{\|\mathbf{w}^k\| - \|\mathbf{w}^{k+1}\|}{\|\mathbf{w}^{k+1}\|} < toll \quad [6.44]$$

Se il test è verificato **ESCI** e **VAI** ad “E”. Se no **AGGIORNA** il contatore ( $k = k + 1$ ) e **VAI** al punto “a”.

E- Aggiornamento della soluzione al tempo  $t + 1$ .

$$\mathbf{U}^{t+1} = \mathbf{U}^{k+1}, \quad \dot{\mathbf{U}}^{t+1} = \dot{\mathbf{U}}^{k+1}, \quad \ddot{\mathbf{U}}^{t+1} = \ddot{\mathbf{U}}^{k+1}$$

F- Aggiornamento del contatore,  $t = t + 1$  e **VAI** al punto “A”.

## 6.2.2 Matrice delle masse

Il calcolo della matrice delle masse può essere effettuato partendo dal termine inerziale nel principio dei lavori virtuali:

$$\mathcal{A}(\ddot{\mathbf{s}}) = \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \ddot{\mathbf{s}}^t \cdot \delta \mathbf{s} \cdot dz dA \quad [6.45]$$

In cui  $\rho$  è la massa del materiale,  $\mathbf{s}$  vettore degli spostamenti di un punto della piastra e  $\ddot{\mathbf{s}}$  la sua accelerazione.

Introducendo le variabili cinematiche della piastra tipo *Mindlin* ( $\mathbf{s} = \mathbf{n}(z) \cdot \mathbf{u}$ ) e la discretizzazione in elementi finiti ( $\mathbf{u}^i = \mathbf{N}^f \cdot \mathbf{U}^i = \mathbf{N}^f \cdot \mathbf{L}^i \cdot \mathbf{U}$ ) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\ddot{\mathbf{s}}) &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \dot{\mathbf{s}}^{it} \cdot \delta \mathbf{s}^i \cdot d\mathbf{z} \cdot dS = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \dot{\mathbf{u}}^{it} \cdot \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{n} \delta \mathbf{u}^i \cdot d\mathbf{z} \cdot dS = \\
 &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \delta \mathbf{u}^{it} \cdot \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{u}}^i \cdot d\mathbf{z} \cdot dS = \\
 &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{L}^{it} \mathbf{N}^{ft} \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{n} \mathbf{N}^f \mathbf{L}^i \cdot \ddot{\mathbf{U}} \cdot d\mathbf{z} \cdot dS = \\
 &= \delta \mathbf{U}^t \cdot \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{L}^{it} \int_{S^i} \mathbf{N}^{ft} \cdot \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{z} \right\} \cdot \mathbf{N}^f \cdot dS \cdot \mathbf{L}^i \cdot \ddot{\mathbf{U}} = \\
 &= \delta \mathbf{U}^t \cdot \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{L}^{it} \left\{ \int_{S^i} \mathbf{N}^{ft} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{N}^f \cdot dS \right\} \cdot \mathbf{L}^i \cdot \ddot{\mathbf{U}} = \delta \mathbf{U}^t \cdot \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{L}^{it} \mathbf{M}^i \cdot \mathbf{L}^i \cdot \ddot{\mathbf{U}}
 \end{aligned}$$

Dove:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \mathbf{N}^{ft} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{N}^f \cdot dS \quad [6.46]$$

Il termine inerziale del principio dei lavori virtuali risulta essere:

$$\mathcal{A}(\ddot{\mathbf{U}}) = \delta \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} \quad [6.47]$$

Con:

$$\mathbf{m} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{z} \quad [6.48]$$

E:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \quad [6.49]$$

Da cui si può ricavare l'espressione esplicita si  $\mathbf{m}$  che gioca un ruolo formalmente analogo a quello che è la matrice di rigidezza  $\mathbf{d}_p$  per la matrice  $\mathbf{K}$ .

$$\mathbf{m} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{n} \cdot dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \cdot dz =$$

$$\mathbf{m} = \rho \cdot \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad [6.50]$$

Nel calcolo dell'integrale [6.46] intervengono funzioni polinomiali di quarto grado perché vengono moltiplicate fra loro le funzioni di forma che sono paraboliche. Per questa ragione occorre considerare un'integrazione con 6 punti di Gauss quando fino ad ora si erano considerati solamente 3 punti per rigidezza e carichi esterni.

**In Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** sono riportate le coordinate areolari dei punti di Gauss con i rispettivi pesi; occorre aggiungere un fattore di 0,5 per riferirsi ad elementi finiti triangolari (Hughes, 1987):

			6-point formula			Degree of precision 4					
0.10995	17436	55322	0.81684	75729	80459	0.09157	62135	09771	0.09157	62135	09771
0.22338	15896	78011	0.10810	30181	68070	0.44594	84909	15965	0.44594	84909	15965

**Tabella 6.1:** Coordinate dei punti Gauss per un'integrazione su 6 punti.

### 6.2.1 Analisi modale

Una prima analisi per verificare la correttezza del calcolo della matrice delle masse consiste nell'analisi modale. Si studia il problema omogeneo dell'equazione [6.1] eliminando il termine di smorzamento.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad [6.51]$$

L'equazione [6.51] è un problema agli autovalori generalizzato in cui gli autovalori giocano il ruolo del quadrato delle pulsazioni proprie del sistema e gli autovettori quello delle forme modali.

Gli autovalori sono i valori di  $\lambda$  che annullano il determinante della matrice  $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}$ . È immediato implementare questa soluzione in *Matlab* dato che esiste un apposito comando per la soluzione di un problema agli autovalori generalizzato:  $\text{eigs}(\mathbf{K}, \mathbf{M})$ .

Questa semplice operazione permette di poter verificare la correttezza del calcolo della matrice delle masse e della matrice di rigidità grazie al confronto con le soluzioni di altri codici di calcolo. Nel caso in esame si è realizzato un semplice modello della piastra in *Abaqus* effettuando un'analisi in frequenza.

Dal calcolo degli autovalori del problema,  $\lambda$ , si ricavano 3 parametri fondamentali, la pulsazione, la frequenza e il periodo proprio per ogni modo di vibrare del sistema:

$$\omega = \sqrt{\lambda} \quad [6.52]$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [6.53]$$

$$T = \frac{1}{f} \quad [6.54]$$

La geometria della piastra è la stessa riportata al capitolo 5. Il raggio della membrana è  $750\mu\text{m}$  mentre il suo spessore è  $h_m = 16.3\mu\text{m}$  mentre densità e parametri elastici sono gli stessi riportati al capitolo 2.

In **Figura 6.1**, **Figura 6.2**, **Figura 6.3** è riportato il confronto tra *Abaqus* e *Matlab* per i primi 3 modi di oscillazione della piastra.

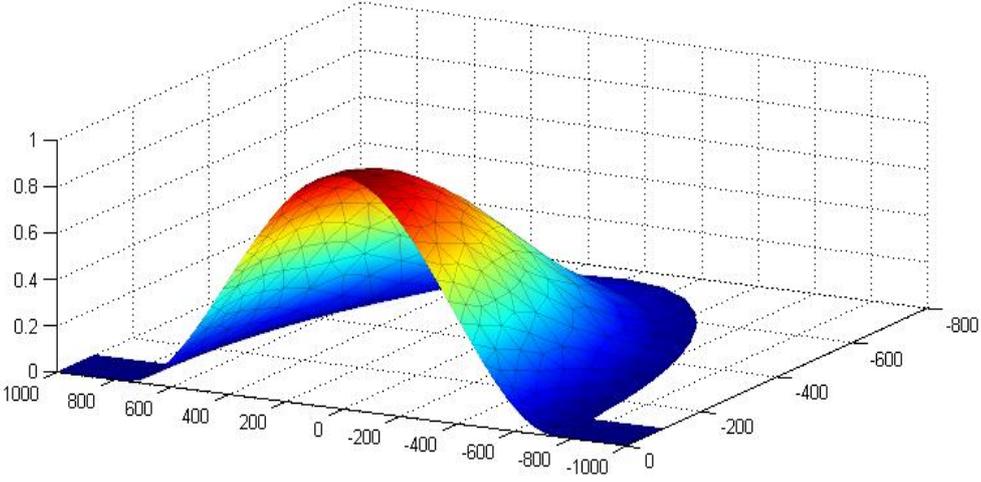
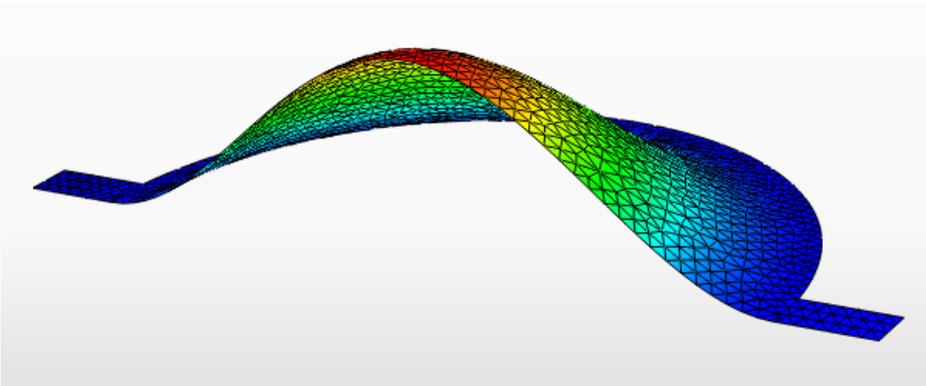
PRIMO MODO			
<b>MATLAB</b>	$\omega_0^I = \omega_0 = 0,7223 \text{ MHz}$	$f_0^I = f_0 = 0,1150 \text{ MHz}$	$T_0^I = T_0 = 8,6984 \text{ MHz}$
			
<b>ABAQUS</b>	$\omega_0^I = \omega_0 = 0,7297 \text{ MHz}$	$f_0^I = f_0 = 0,1161 \text{ MHz}$	$T_0^I = T_0 = 8,6110 \text{ MHz}$
			

Figura 6.1: Primo modo di vibrare

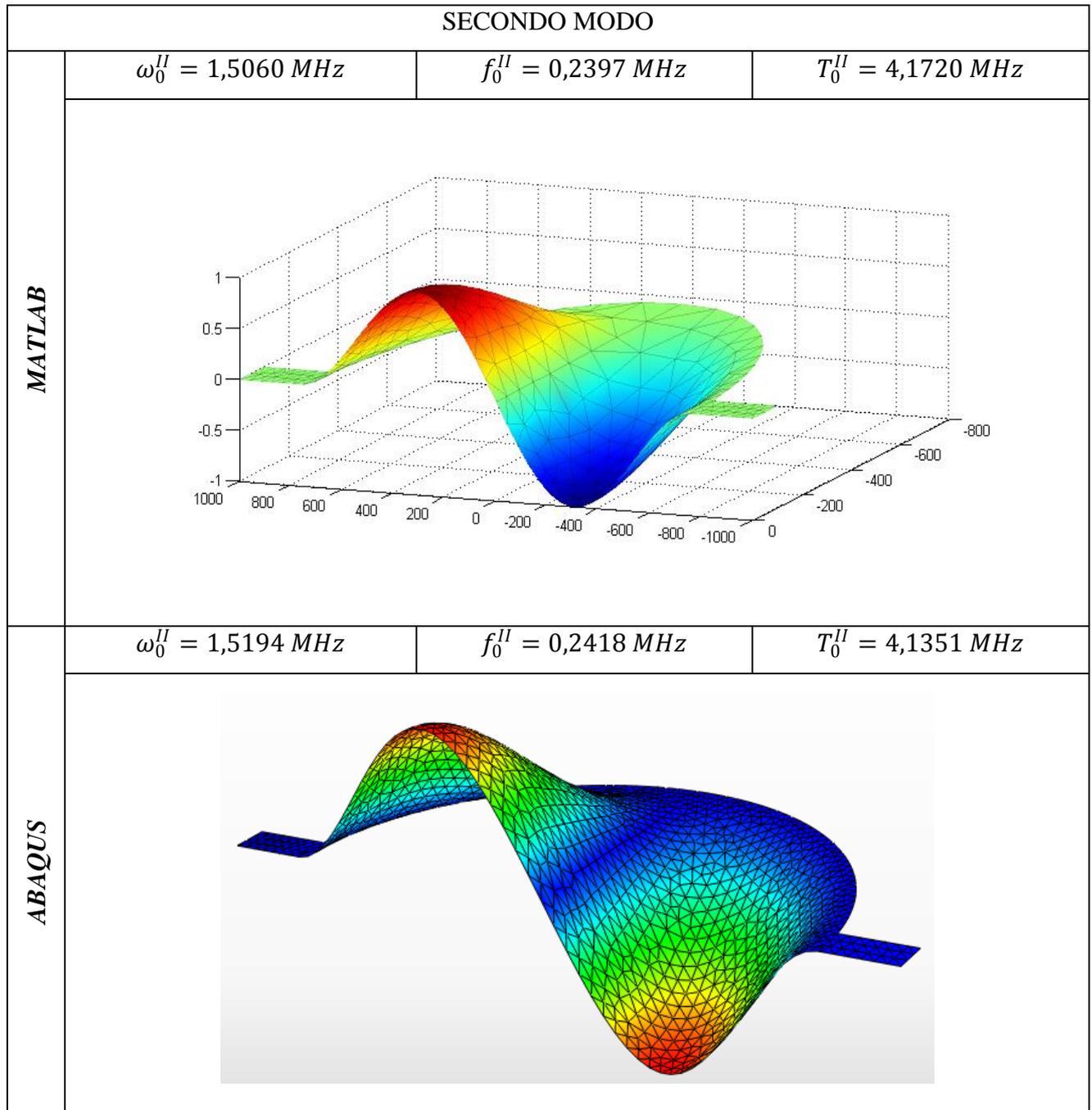
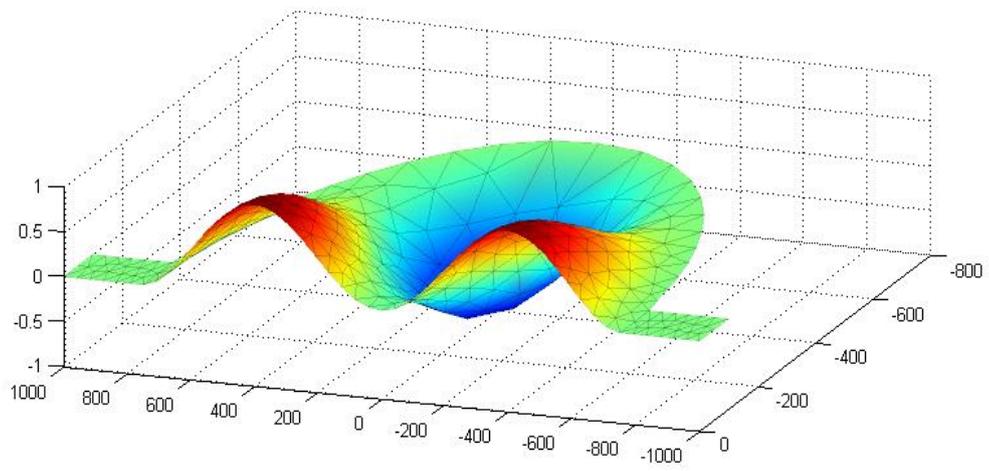
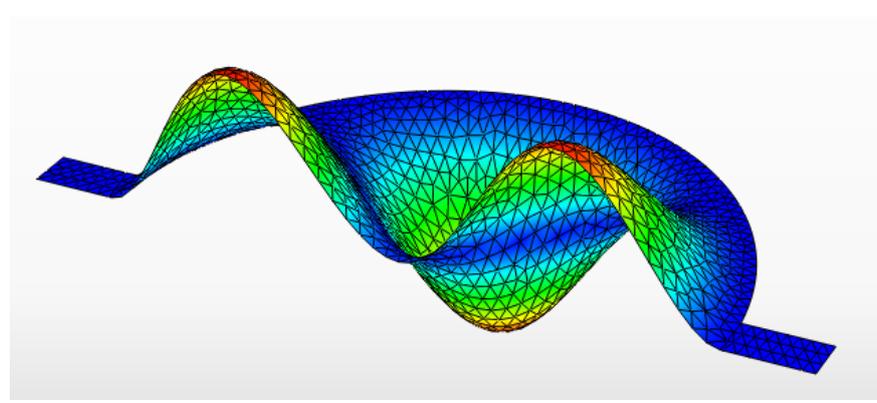


Figura 6.2: Secondo modo di vibrare

TERZO MODO			
<b>MATLAB</b>	$\omega_0^{III} = 2,4761 \text{ MHz}$	$f_0^{III} = 0,3941 \text{ MHz}$	$T_0^{III} = 2,5376 \text{ MHz}$
			
<b>ABAQUS</b>	$\omega_0^{III} = 2,4850 \text{ MHz}$	$f_0^{III} = 0,3955 \text{ MHz}$	$T_0^{III} = 2,5284 \text{ MHz}$
			

**Figura 6.3:** Terzo modo di vibrare

Il primo valore di  $\omega$  corrisponde alla pulsazione propria del primo modo di vibrare  $\omega_0$  ed è legato alla frequenza ed al periodo propri dalle relazioni:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0,115MHz = 115kHz \quad [6.55]$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \sim 8,7\mu s \quad [6.56]$$

La prima frequenza propria della piastra è un parametro fondamentale per quanto riguarda una discussione a proposito della dinamica. Infatti se la frequenza a cui lavora il dispositivo è molto inferiore alla sua frequenza propria, l'effetto dinamico è notevolmente ridotto ed è ragionevole considerare un percorso di step quasi-statici per modellizzare il comportamento del dispositivo. Se invece frequenza propria e di lavoro sono simili tra loro, allora l'amplificazione dinamica degli spostamenti è molto accentuata. Le micropompe lavorano a frequenza non superiori ai 500Hz, sarebbe a dire a 3 ordini di grandezza in meno rispetto alla frequenza propria delle membrane. Se la frequenza propria è di molto maggiore alla frequenza della forzante esterna l'effetto di amplificazione dinamica e di sfasamento tra il movimento della piastra ed il flusso del fluido dovrebbe essere trascurabile. Per questa ragione non si verificherebbe alcun effetto dinamico particolare al contrario di ciò che è mostrato da Bertarelli nella figura 2.6 al capitolo 2 (Bertarelli, 2011) in cui al di sopra di una data frequenza non si raggiunge più il massimo volume disponibile per un ciclo di pompaggio.

L'effetto "massa aggiunta" dovuto al fluido può essere schematizzato come nell'equazione [6.57]. L'aumento della massa a denominatore abbassa il valore di frequenza propria e di conseguenza gli effetti dinamici legati a carichi ciclici risultano amplificati anche per frequenze più basse di quella naturale della piastra. Inoltre si può notare che la massa dovuta al fluido dipende dal valore di frequenza a cui oscilla il dispositivo.

$$f_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i + m_{f,i}(f)}} \quad [6.57]$$

Dove:

- $m_i$ : massa della piastra attivata dal modo  $i$ -esimo di vibrazione
- $k_i$ : rigidità della piastra attivata dal modo  $i$ -esimo di vibrazione
- $m_{f,i}(f)$ : massa aggiunta dovuta alla presenza del fluido dipendente dalla frequenza di oscillazione del dispositivo.

L'equazione [6.57] è anch'essa una semplificazione del problema. Secondo tale equazione la piastra risente della presenza del fluido semplicemente aumentando la massa globale del sistema. Questo è parzialmente vero, in realtà il fluido interviene anche con un effetto inerziale lungo la direzione del flusso cioè perpendicolarmente al movimento oscillatorio della piastra.

Il periodo proprio gioca un ruolo fondamentale a livello numerico perché definisce il passo temporale massimo per avere risultati sufficientemente ricchi per descrivere correttamente l'andamento nel tempo della soluzione. Come linea di principio è conveniente che il passo  $\Delta t$  non sia maggiore di un decimo del periodo.

## 6.2.2 Matrice di smorzamento alla Rayleigh

Il metodo di Rayleigh costruisce la matrice di smorzamento come una combinazione lineare della matrice delle masse e di rigidità:

$$\mathbf{C} = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K} \quad [6.58]$$

Questo modo di ragionare è conveniente perché preserva in  $\mathbf{C}$  le stesse proprietà delle matrici di massa e rigidità, in particolare risulta semi-definita positiva.

Il parametro caratterizzante lo smorzamento del sistema è tipicamente il fattore di Qualità ( $Q$ ) (Bertarelli, 2011). Esso è inversamente proporzionale al doppio della percentuale di smorzamento critico del primo modo di vibrare  $\xi_D$ :

$$Q = \frac{1}{2\xi_D} \quad [6.59]$$

Partendo dall'equazione di moto riferita all' $i$ -esimo grado di libertà del sistema è possibile mostrare il legame tra  $\xi_i$  ed i parametri  $\alpha_R$  e  $\beta_R$ :

$$m_i \ddot{u}_i + c_i \dot{u}_i + k_i u_i = p_i(t) \quad [6.60]$$

$$\ddot{u}_i + \frac{c_i}{m_i} \dot{u}_i + \frac{k_i}{m_i} u_i = \frac{p_i(t)}{m_i} \quad [6.61]$$

$$\ddot{u}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i = \frac{p_i(t)}{m_i} \quad [6.62]$$

Dove si è introdotta la definizione di percentuale di smorzamento critico:

$$\xi_i = \frac{c_i}{2m_i \omega_i} \quad [6.63]$$

Definendo  $c_i$  coerentemente all'equazione [6.58] si ottiene l'espressione di  $\xi_i$ :

$$c_i = \alpha_R m_i + \beta_R k_i \quad [6.64]$$

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_R}{\omega_i} + \beta_R \omega_i \right) \quad [6.65]$$

Lo smorzamento dato dall'equazione [6.65] si compone di due termini, uno proporzionale alla pulsazione e l'altro inversamente proporzionale ad essa. Il primo dei due introduce nel sistema uno smorzamento di tipo viscoso proporzionale alla massa del sistema, l'altro invece introduce una dissipazione dovuta ad effetti interni al materiale ed è proporzionale alla rigidezza.

Classicamente si è soliti scegliere  $\alpha_R$  e  $\beta_R$  tali da garantire uno smorzamento indipendente dalla frequenza, nel caso in esame questa scelta non può essere adottata per il fatto che il comportamento dinamico del sistema è provato essere sensibile alla variazione di frequenza. La piastra infatti subisce uno smorzamento tanto maggiore quanto più è basso il suo periodo di

---

oscillazione. Se lo smorzamento cresce all'aumentare della frequenza significa che esso è principalmente di origine viscosa per cui il secondo termine della [6.65] deve essere posta a zero.

Se  $\beta_R = 0$  si ha:

$$\xi_i = \frac{\alpha_R}{2\omega_i} \quad [6.66]$$

E riferendosi al primo modo di vibrare, associato alla più piccola delle frequenze di oscillazione, si ottiene:

$$\xi_D = \frac{\alpha_R}{2\omega_0} \quad [6.67]$$

Dove  $\omega_0 = 2\pi f_0$  è la pulsazione propria della piastra come calcolata al paragrafo 6.3.3.

È allora esplicitata l'espressione del parametro  $\alpha_R$ :

$$\alpha_R = 2\xi_D \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} \quad [6.68]$$

In definitiva la matrice di smorzamento risulta essere proporzionale alla sola matrice delle masse attraverso il coefficiente  $\alpha_R$ :

$$\mathbf{C} = \frac{\omega_0}{Q} \mathbf{M} \quad [6.69]$$

### 6.2.3 Analisi dinamiche della piastra

Per verificare la funzionalità del codice e per comprendere il comportamento dinamico della piastra si sono eseguite una serie di analisi parametriche rispetto al fattore di qualità  $Q$  con un carico a gradino. In seguito si sono introdotti carichi ciclici a gradino e sinusoidali.

La differenza di potenziale massima applicata è pari a  $60\text{volt}$  e la distanza tra elettrodo e piastra è pari a  $h_c = 4,6\mu\text{m}$ . Lo spostamento calcolato con analisi statiche per una differenza di potenziale di  $60\text{volt}$  è pari a  $0,06049\mu\text{m}$ .

Carico a gradino

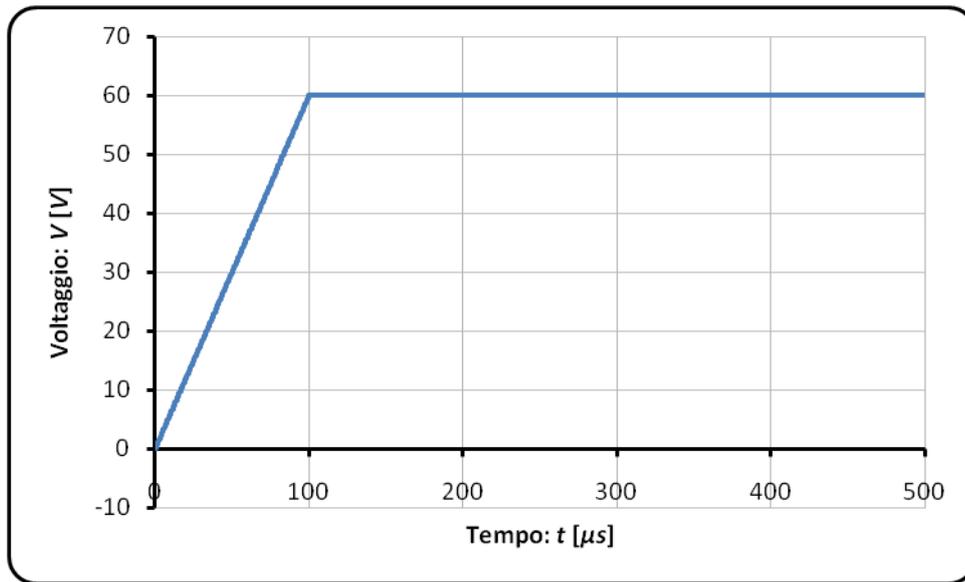
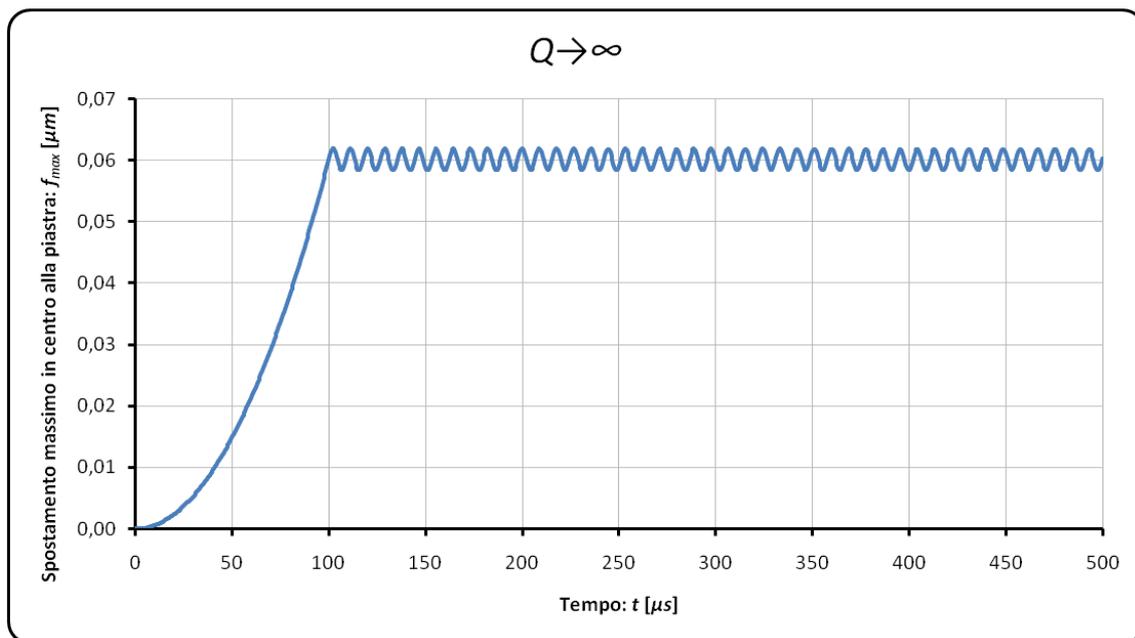


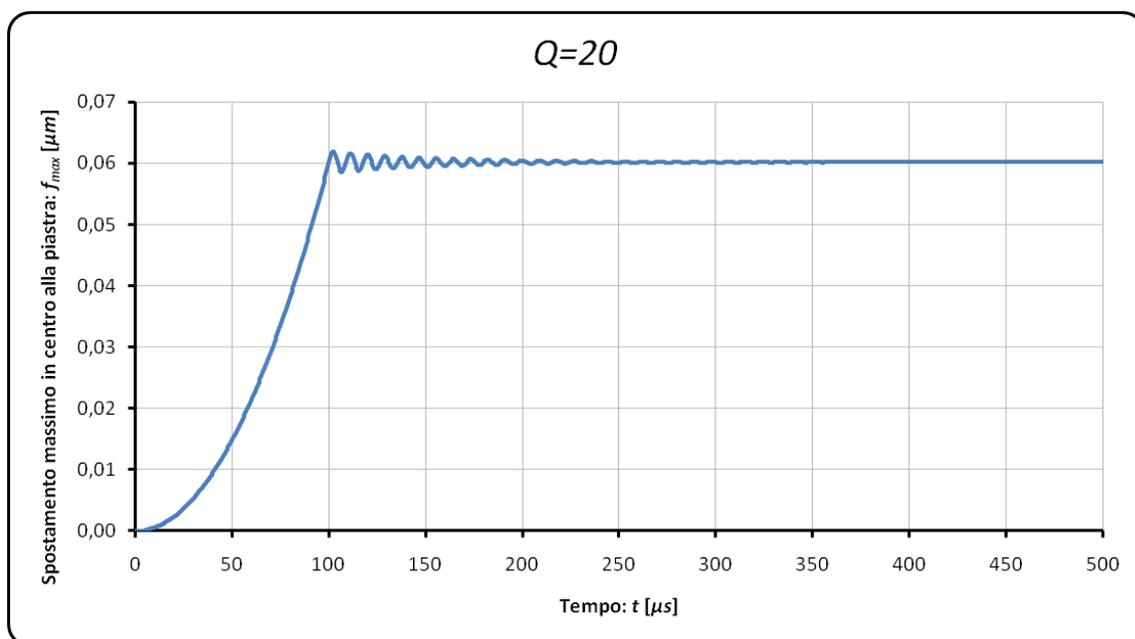
Figura 6.4: Carico a gradino

La risposta del sistema dipende dalla quantità di smorzamento identificata dal parametro di qualità  $Q$ . Considerando una prima analisi senza smorzamento **Figura 6.5**, la soluzione presenta comunque una riduzione delle oscillazioni per effetto di uno smorzamento numerico dovuto al parametro  $\alpha$  del metodo di Hughes. Come ci si aspettava le oscillazioni avvengono attorno alla posizione di equilibrio statico. Nella prima parte della soluzione lo spostamento aumenta non linearmente perché emerge la dipendenza non lineare tra la forza elettrostatica e gli spostamenti. Inoltre nella sottofigura è riportato uno zoom sul periodo di oscillazione della soluzione che è effettivamente pari a quello proprio del primo modo di vibrare della piastra ( $T_0 = 8,7\mu\text{s}$ ).



**Figura 6.5:** Massimo spostamento della piastra per un fattore di qualità  $Q \rightarrow \infty$

Al diminuire del parametro di qualità aumenta il grado di smorzamento e la soluzione si assesta sempre più rapidamente alla posizione di equilibrio:



**Figura 6.6:** Massimo spostamento della piastra per un fattore di qualità pari 20

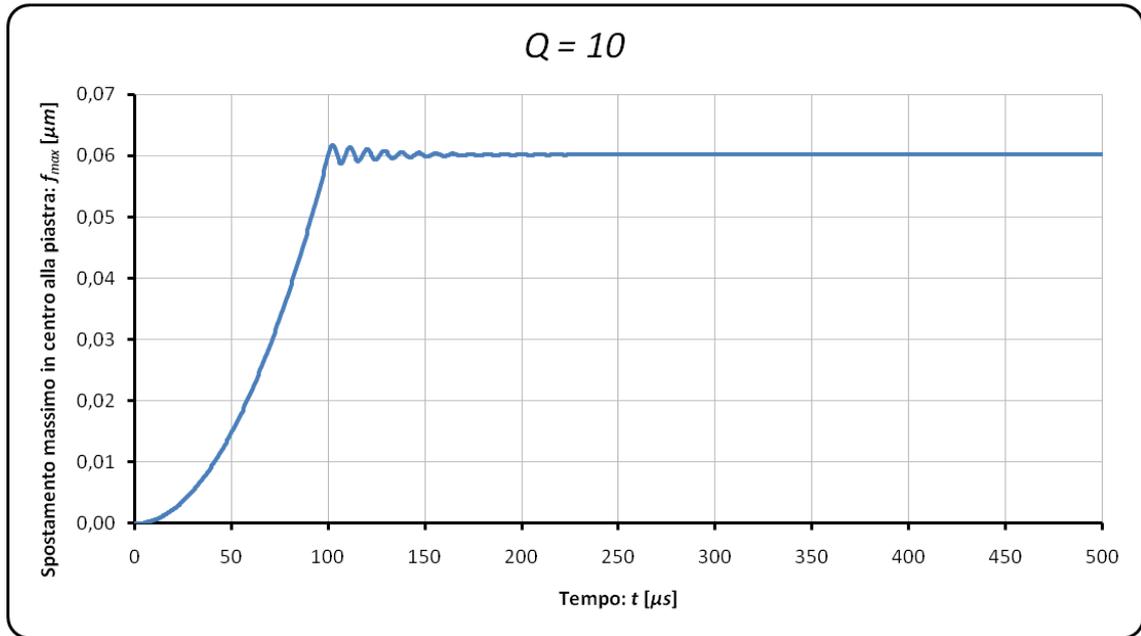


Figura 6.7: Massimo spostamento della piastra per un fattore di qualità pari 10

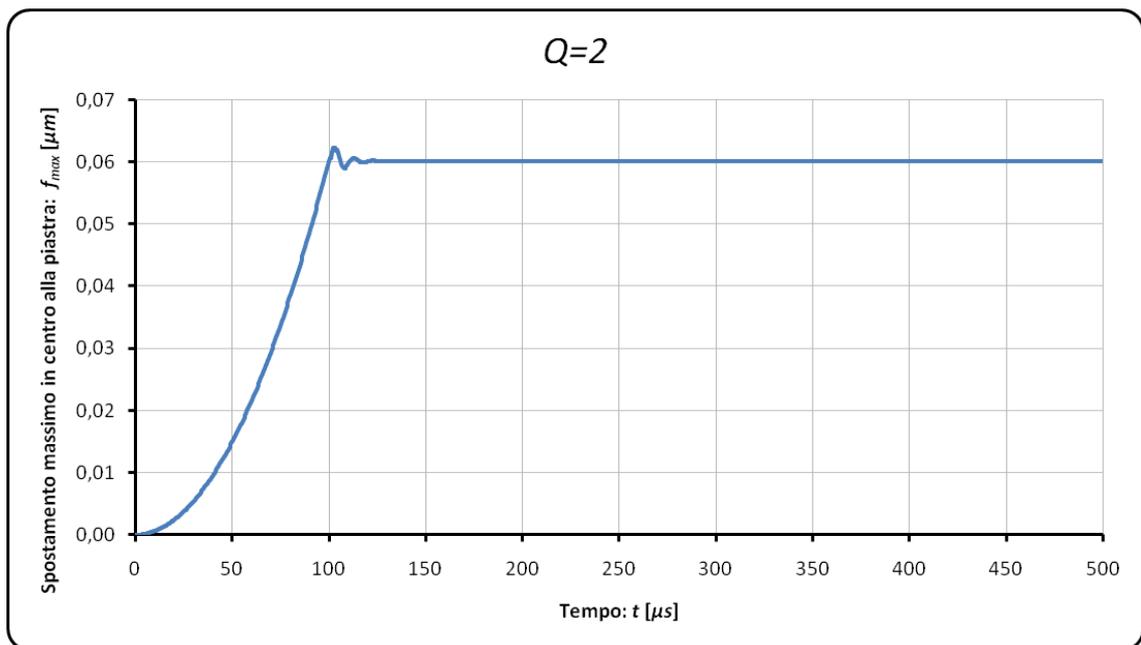
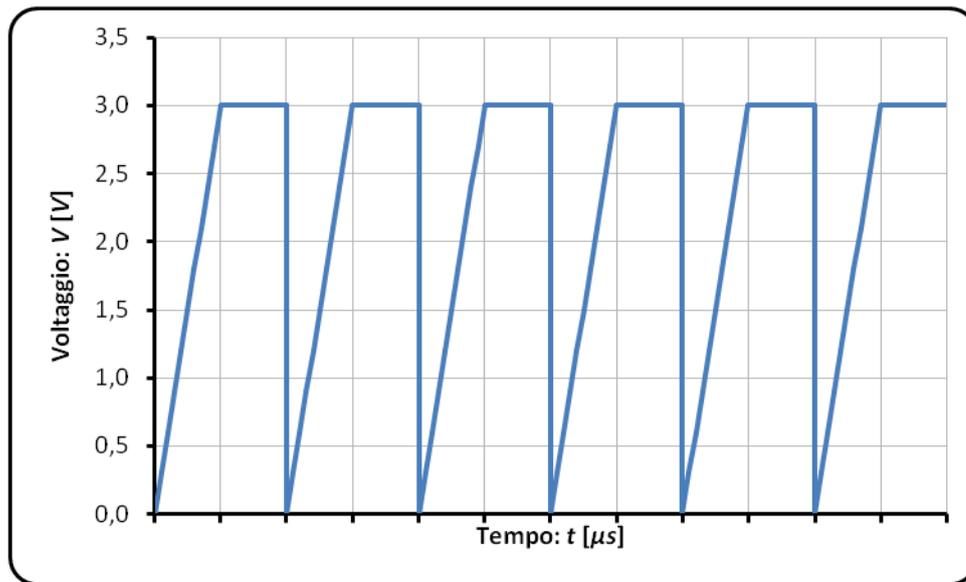


Figura 6.8: Massimo spostamento della piastra per un fattore di qualità pari 2

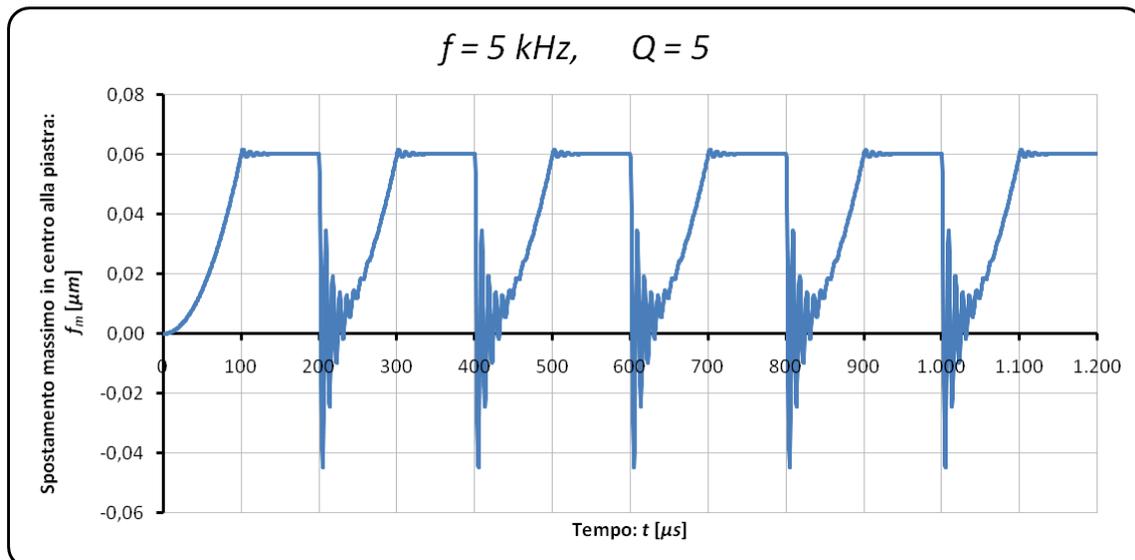
### Carico ciclico a gradino

Assumendo  $Q = 5$  si studia ora la dipendenza della soluzione dalla frequenza di lavoro della micropompa. Si studia la risposta del sistema a un carico ciclico a gradino (**Figura 6.9**) per frequenze comprese tra  $5 \div 100\text{kHz}$  e per il valore della frequenza di risonanza.

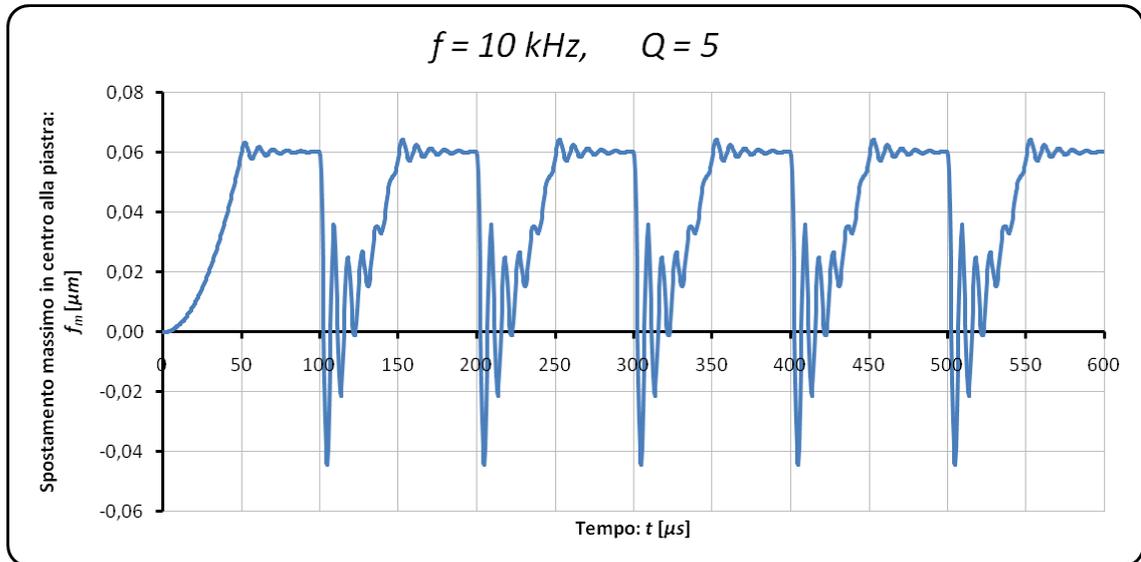


**Figura 6.9:** Carico ciclico a gradino per frequenze tra  $5 \div 100\text{kHz}$

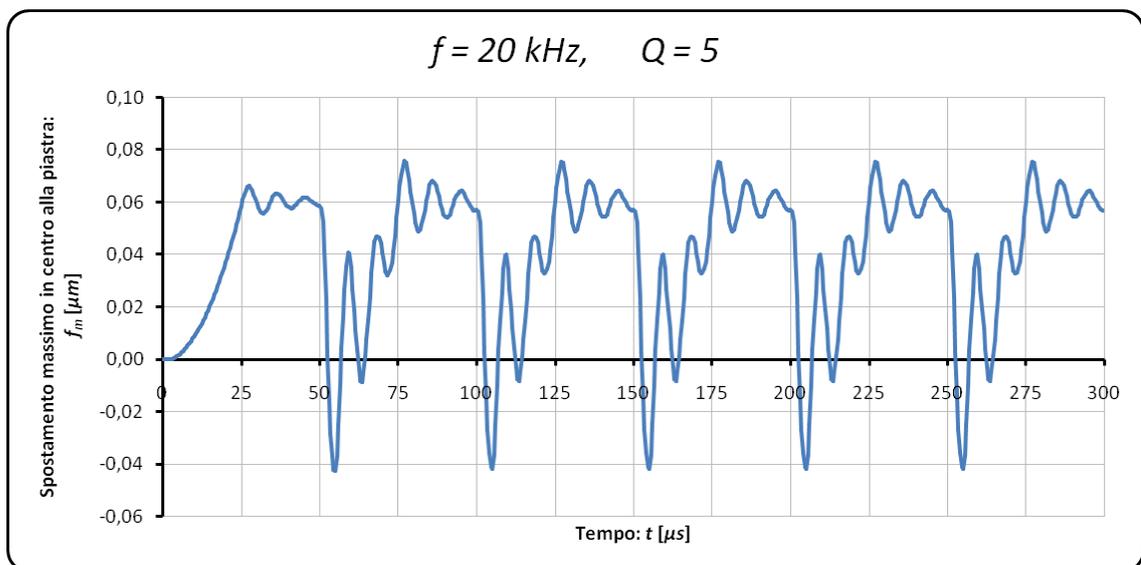
All' aumentare della frequenza aumenta l'effetto di amplificazione dinamica, che raggiunge il suo massimo in corrispondenza della frequenza naturale della piastra.



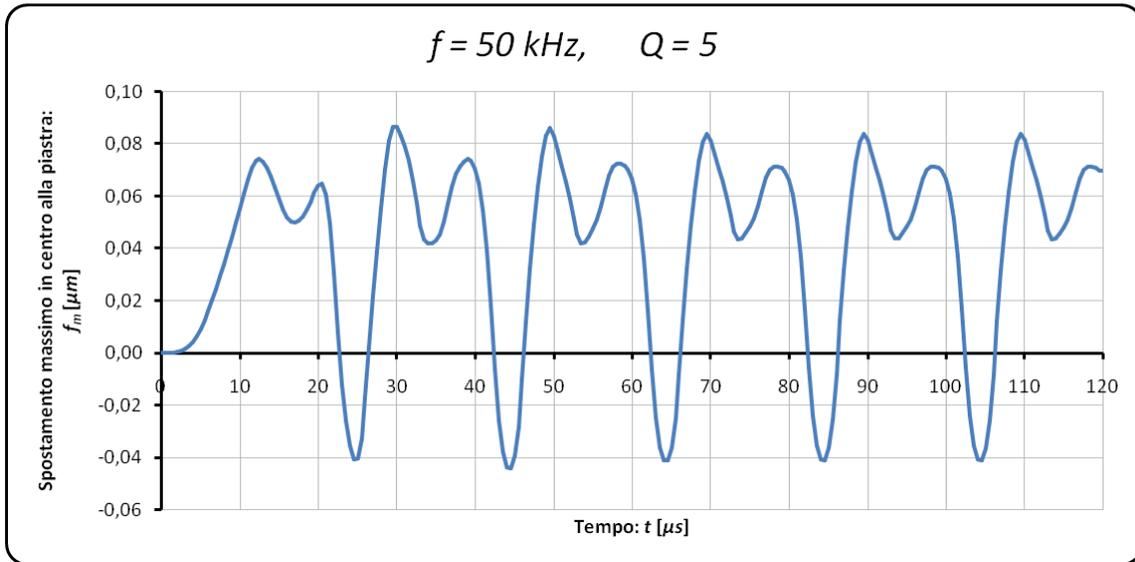
**Figura 6.10:** Risposta dinamica della piastra attuata elettrostaticamente con un carico ciclico di 5kHz e un parametro di qualità pari a 5



**Figura 6.11:** Risposta dinamica della piastra attuata elettrostaticamente con un carico ciclico di 10kHz e un parametro di qualità pari a 5

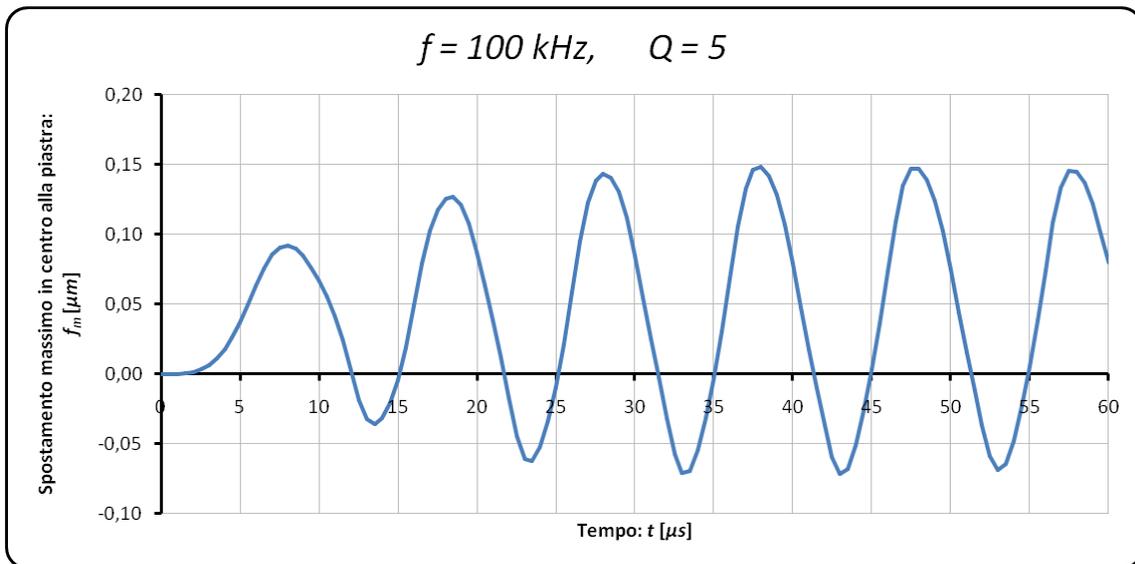


**Figura 6.12:** Risposta dinamica della piastra attuata elettrostaticamente con un carico ciclico di 20kHz e un parametro di qualità pari a 5



**Figura 6.13:** Risposta dinamica della piastra attuata elettrostaticamente con un carico ciclico di 50kHz e un parametro di qualità pari a 5

Se si lavora ad una frequenza prossima a quella naturale del sistema, la risposta dinamica risulta notevolmente amplificata:



**Figura 6.14:** Risposta dinamica della piastra attuata elettrostaticamente con un carico ciclico di 100kHz e un parametro di qualità pari a 5

Al raggiungimento della frequenza propria del sistema avviene il fenomeno della risonanza.

Per comprendere questo fenomeno si fa riferimento all'equazione di moto riferita al primo modo di vibrare della struttura.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad [6.70]$$

Dove  $m$ ,  $c$  e  $k$  sono rispettivamente la massa, lo smorzamento e la rigidità associati al primo modo di vibrare della piastra.

Con  $p(t)$  funzione periodica della variabile di tempo:  $p(t) = p_0 g(\bar{\omega}t)$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p_0 g(\bar{\omega}t)}{m} \quad [6.71]$$

Dove si sono introdotte le definizioni della percentuale di smorzamento critico e della pulsazione propria:

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad [6.72]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [6.73]$$

La risoluzione analitica dell'equazione [6.71] si compone di due termini, la soluzione dell'omogenea associata e la soluzione particolare associata alla forzante del sistema.

La soluzione dell'omogenea risulta essere:

$$u^0 = (A_1 \cos(\omega_D t) + A_2 \sin(\omega_D t)) e^{-\xi\omega t} \quad [6.74]$$

Con  $\omega_D$  la pulsazione propria smorzata:

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad [6.75]$$

La soluzione particolare è:

$$u^p = B_1 \sin(\bar{\omega}t) + B_2 \cos(\bar{\omega}t) \quad [6.76]$$

Riportando la [6.76] nella [6.71] si ottengono i valori delle costanti  $B_1$  e  $B_2$ :

$$-\bar{\omega}^2 B_1 \text{sen}(\bar{\omega}t) - \bar{\omega}^2 B_2 \text{cos}(\bar{\omega}t) + 2\xi\omega\bar{\omega}B_1 \text{cos}(\bar{\omega}t) - 2\xi\omega\bar{\omega}B_2 \text{sen}(\bar{\omega}t) + \omega^2 B_1 \text{sen}(\bar{\omega}t) + \omega^2 B_2 \text{cos}(\bar{\omega}t) = \frac{p_0 g(\bar{\omega}t)}{m}$$

$$\begin{aligned} &(-\bar{\omega}^2 B_1 - 2\xi\omega\bar{\omega}B_2 + \omega^2 B_1) \text{sen}(\bar{\omega}t) + (-\bar{\omega}^2 B_2 + 2\xi\omega\bar{\omega}B_1 + \omega^2 B_2) \text{cos}(\bar{\omega}t) \\ &= \frac{p_0 g(\bar{\omega}t)}{m} \end{aligned} \quad [6.77]$$

Nel caso particolare di carico ciclico a gradino sarebbe necessario sviluppare  $g(\bar{\omega}t)$  in serie di Fourier. Per semplicità si suppone che  $g(\bar{\omega}t) = \text{sen}(\bar{\omega}t)$ .

Per cui uguagliando termini a termine le componenti dell'equazione [6.77] si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -\bar{\omega}^2 B_1 - 2\xi\omega\bar{\omega}B_2 + \omega^2 B_1 = \frac{p_0}{m} \\ -\bar{\omega}^2 B_2 + 2\xi\omega\bar{\omega}B_1 + \omega^2 B_2 = 0 \end{cases} \quad [6.78]$$

Da cui si ottengono i valori delle costanti  $B_1$  e  $B_2$ :

$$B_1 = \frac{p_0}{k} \left( \frac{(1 - \beta^2)}{(2\xi\beta)^2 + (1 - \beta^2)^2} \right) \quad [6.79]$$

$$B_2 = -\frac{p_0}{k} \left( \frac{2\xi\beta}{(2\xi\beta)^2 + (1 - \beta^2)^2} \right) \quad [6.80]$$

Con:

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad [6.81]$$

Risulta:

$$u^p = \frac{p_0}{k} \left( \frac{1}{(2\xi\beta)^2 + (1 - \beta^2)^2} \right) \left( (1 - \beta^2) \text{sen}(\bar{\omega}t) - 2\xi\beta \text{cos}(\bar{\omega}t) \right) \quad [6.82]$$

E l'espressione finale dello spostamento è data da:

$$u = (A_1 \text{cos}(\omega_D t) + A_2 \text{sen}(\omega_D t)) e^{-\xi\omega t} + \frac{p_0}{k} \left( \frac{1}{(2\xi\beta)^2 + (1 - \beta^2)^2} \right) \left( (1 - \beta^2) \text{sen}(\bar{\omega}t) - 2\xi\beta \text{cos}(\bar{\omega}t) \right) \quad [6.83]$$

La prima parte dell'equazione [6.83] è costituisce la risposta transitoria dell'oscillatore, la seconda parte invece rappresenta la risposta forzata o stazionaria. La parte transitoria della soluzione tende ad annullarsi se è presente uno smorzamento ed è trascurabile per tempi di carico lunghi. Considerando solamente la seconda parte della soluzione è interessante notare il comportamento del sistema al variare di  $\beta$  e di  $\xi$ .

$$u \cong \frac{p_0}{k} \left( \frac{1}{(2\xi\beta)^2 + (1 - \beta^2)^2} \right) \left( (1 - \beta^2) \text{sen}(\bar{\omega}t) - 2\xi\beta \text{cos}(\bar{\omega}t) \right) \quad [6.84]$$

$$u \cong \frac{p_0}{k} D \text{sen}(\bar{\omega}t - \theta) \quad [6.85]$$

Con  $D$  definito come fattore di amplificazione dinamica.

$$D = \frac{1}{\sqrt{(2\xi\beta)^2 + (1 - \beta^2)^2}} \quad [6.86]$$

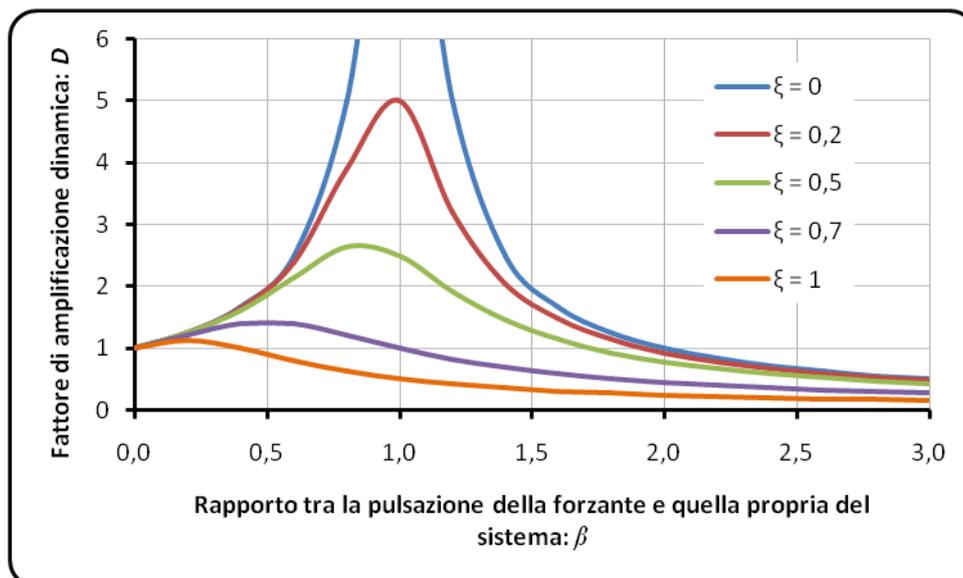


Figura 6.15: Fattore di amplificazione dinamica

Nel caso in cui il sistema non sia smorzato ( $\xi = 0$ ) l'amplificazione è infinita se  $\beta = 1$  cioè quando la frequenza di oscillazione della forzante è pari alla frequenza propria del sistema. All'aumentare dello smorzamento l'amplificazione dinamica diminuisce mantenendo il massimo in prossimità della frequenza propria del sistema, calcolando la derivata di  $D$  si ottiene il massimo per:  $\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ . Nel caso in esame  $\xi = 0,1$ , per cui l'amplificazione massima della risposta dinamica è ottenuta per  $f \cong f_0$ .

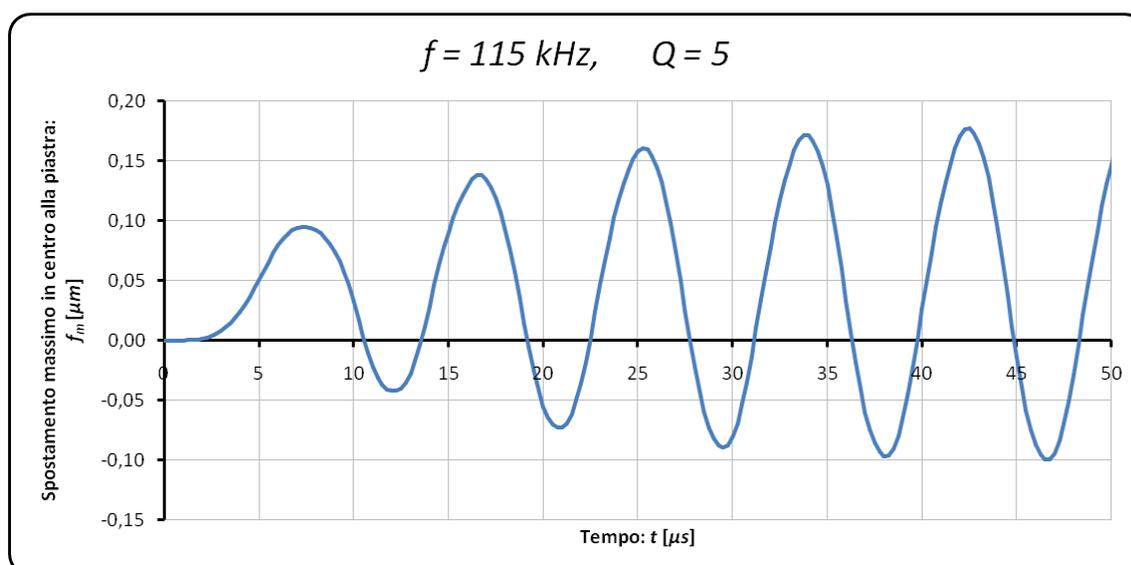


Figura 6.16: Risposta dinamica della piastra attuata elettrostaticamente con un carico ciclico con frequenza pari a quella critica del sistema e un parametro di qualità pari a 5

## 6.3 Attuazione Piezoelettrica

### 6.3.1 Applicazione al caso piezoelettrico del metodo alfa per l'integrazione nel tempo di problemi dinamici

Il punto di partenza è l'equazione di moto [6.1] scritta al tempo  $t + \Delta t$ , in questo caso il carico esterno è dovuto al carico equivalente piezoelettrico, indipendente dal vettore di spostamenti, derivante dalla scrittura del lavoro interno come al capitolo 4.3:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}_p^{t+\Delta t} \quad [6.87]$$

Dove:

- $\mathbf{M}$ : matrice delle masse
- $\mathbf{C}$ : matrice di smorzamento
- $\mathbf{K}$ : matrice di rigidezza elastica
- $\mathbf{P}_p^{t+\Delta t}(\mathbf{U}^{t+\Delta t})$ : vettore dei carichi esterni piezoelettrici, indipendente dagli spostamenti

Si cerca una soluzione approssimata dell'equazione [6.87] introducendo il parametro  $\alpha$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{U}^t = (1 + \alpha)\mathbf{P}_p^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{P}_p^t \quad [6.88]$$

Con:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta t\dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}^t + \beta \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \right] = \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t \left[ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \right] = \tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \end{cases} \quad [6.89]$$

Si procede come al capitolo **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** introducendo nuove variabile per semplificare la trattazione, come si può notare i parametri "tilde" sono dipendenti da parametri di moto valutati all'istante di tempo  $t$  e sono perciò noti:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{U}}^t \\ \tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}^t \end{cases} \quad [6.90]$$

Si cerca ora la soluzione all'istante  $t + \Delta t$  a partire da quella nota all'istante  $t$ . Per semplificare la trattazione è conveniente introdurre un cambio di variabili come conseguenza delle equazioni [6.89]:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^{t+\Delta t} - \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \\ \Delta \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} \end{cases} \quad [6.91]$$

Introducendo il cambio di variabili si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + (1 + \alpha) \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + (1 + \alpha) \mathbf{C} \tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^t + (1 + \alpha) \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} \\ + (1 + \alpha) \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{K} \mathbf{U}^t = (1 + \alpha) \mathbf{P}_p^{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{P}_p^t \end{aligned} \quad [6.92]$$

Sfruttando il cambio di variabili e le equazioni [6.89] è possibile esprimere le incognite della [6.92] in funzione dei soli spostamenti:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} \quad [6.93]$$

$$\Delta \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} \quad [6.94]$$

Da cui si ottiene inserendo nella [6.92]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} + \frac{(1 + \alpha) \gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} + (1 + \alpha) \mathbf{C} \tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^t + (1 + \alpha) \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} \\ + (1 + \alpha) \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{K} \mathbf{U}^t = (1 + \alpha) \mathbf{P}_p^{t+\Delta t} - \alpha \mathbf{P}_p^t \end{aligned} \quad [6.95]$$

Raccogliendo i termini proporzionali alle incognite si definisce una matrice di rigidezza equivalente formalmente analoga a quella definita per il caso elettrostatico:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + (1+\alpha)\mathbf{K} \quad [6.96]$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{K}}$  è indipendente dal passo temporale e può essere calcolata a priori per il sistema.

I termini rimanenti sono tutti noti e possono essere raccolti in un unico fattore che sarà chiamato  $\mathbf{R}^{t+\Delta t}$ .

$$\mathbf{R}^{t+\Delta t} = (1+\alpha)\mathbf{P}_p^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{P}_p^t - (1+\alpha)\mathbf{C}\tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t - (1+\alpha)\mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \alpha\mathbf{K}\mathbf{U}^t \quad [6.97]$$

Il vettore dei termini noti  $\mathbf{R}^{t+\Delta t}$  dipende dalla soluzione al passo temporale precedente e dal valore del carico equivalente piezoelettrico al passo in cui si sta cercando la soluzione.

Si è giunti molto semplicemente ad un sistema di equazioni lineari che occorre risolvere per ogni passo temporale:

$$\tilde{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} \quad [6.98]$$

Il problema è ora completamente risolto:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \Delta\mathbf{U}^{t+\Delta t} \quad [6.99]$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \tilde{\dot{\mathbf{U}}}^{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\mathbf{U}^{t+\Delta t} \quad [6.100]$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\mathbf{U}^{t+\Delta t} \quad [6.101]$$

---

### Algoritmo

1- Calcolo delle matrici elastica,  $\mathbf{K}$ , delle masse,  $\mathbf{M}$  e di smorzamento,  $\mathbf{C}$  e definizione del ciclo di voltaggio,  $\mathbf{V}$ , del passo temporale  $\Delta t$ , scelta delle variabili  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Il metodo è incondizionatamente stabile se:

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right], \gamma = 0,5 \cdot (1 - 2\alpha) \text{ e } \beta = 0,25 \cdot (1 - \alpha)^2.$$

Si è scelto  $\alpha = -0,05$  per evitare che lo smorzamento numerico sia eccessivo.

Per cui:  $\gamma = 0,55$ ,  $\beta = 0,2756$

2- Costruzione della matrice di rigidezza elastica fittizia indipendente dallo step temporale:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 + \alpha)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + (1 + \alpha) \mathbf{K} \quad [6.102]$$

3- Inizializzazione del ciclo temporale e delle variabili di moto:

$$t = 1 \quad [6.103]$$

$$\mathbf{U}^t = \mathbf{0} \quad [6.104]$$

$$\dot{\mathbf{U}}^t = \mathbf{0} \quad [6.105]$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^t = \mathbf{0} \quad [6.106]$$

4- Costruzione del carico esterno, noto a priori, per ogni istante temporale:

$$\mathbf{P}_p^t = \mathbf{P}_p(V^t) \quad [6.107]$$

$$\mathbf{P}_p^{t+1} = \mathbf{P}_p(V^{t+1}) \quad [6.108]$$

5- Ciclo temporale

A- Valuta le quantità “tilde” al tempo  $t$ .

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{U}}^t \quad [6.109]$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}^t \quad [6.110]$$

B- Calcolo del termine noto:

$$\mathbf{R}^t = (1 + \alpha)\mathbf{P}_p^{t+1} - \alpha\mathbf{P}_p^t - (1 + \alpha)\mathbf{C}\tilde{\mathbf{U}} + \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t - (1 + \alpha)\mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}} + \alpha\mathbf{K}\mathbf{U}^t \quad [6.111]$$

C- Soluzione del sistema lineare:

$$\tilde{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U}^{t+1} = \mathbf{R}^t \quad [6.112]$$

D- Calcolo delle variabili di moto all'istante di tempo successivo:

$$\mathbf{U}^{t+1} = \tilde{\mathbf{U}} + \Delta\mathbf{U}^t \quad [6.113]$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+1} = \tilde{\dot{\mathbf{U}}} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\mathbf{U}^t \quad [6.114]$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^{t+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\mathbf{U}^t \quad [6.115]$$

E- Aggiorna contatore  $t = t + 1$  e **VAI** al punto A

### 6.3.2 Matrice delle masse

La matrice delle masse si costruisce in modo del tutto analogo a quello fatto al capitolo 6.2.2 per il caso elettrostatico. La differenza fondamentale consiste nell'integrazione della densità sullo spessore per via della stratificazione. Si procede allora come già per la costruzione delle azioni interne generalizzate e delle rigidezze equivalenti nell'approccio statico al problema (capitoli 3.3 e 4.3).

La stratificazione interviene nel calcolo della matrice  $\mathbf{m}$  delle masse locali, equazione [6.48].

$$\mathbf{m} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{n} \cdot dz \quad [6.116]$$

Si considera un materiale a tre strati: la membrana in poli-silicio ( $h_m = 16,3\mu m$ ), lo strato piezoelettrico ( $h_p = 1\mu m$ ) e l'elettrodo ( $h_e = 0,5\mu m$ ).

$$\mathbf{m} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \cdot dz \quad [6.117]$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \cdot dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=1}^n \rho^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \cdot dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \cdot dz = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \cdot dz = \sum_{k=1}^n \rho^k \cdot \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \cdot dz = \end{aligned}$$

$$\mathbf{m} = \sum_{k=1}^n \rho^k \cdot \begin{bmatrix} (z_k - z_{k-1}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(z_k^3 - z_{k-1}^3) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{bmatrix} \quad [6.118]$$

È importante ricordare che nel caso piezoelettrico la stratificazione non è presente su tutto il dominio della piastra per ragioni già spiegate al capitolo 4. Nella costruzione di  $\mathbf{m}$  allora è necessario distinguere tra i punti della corona esterna in cui è presente solo silicio con spessore  $h_m$  e i punti più interni dove è effettivamente presente la stratificazione.

Per il resto la matrice delle masse si costruisce come in precedenza:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S_i} \mathbf{N}^{f^t} \mathbf{m} \mathbf{N}^f \cdot dS \quad [6.119]$$

La piastra è nel suo complesso più pesante rispetto al caso elettrostatico perché si sono aggiunte due stratificazioni ulteriori alla membrana in silicio.

### 6.3.3 Analisi modale

La ricerca dei modi propri di oscillazione della piastra avviene come già si è fatto per il modello capacitivo. Essendo la massa della piastra maggiore ci si aspetta di trovare frequenze proprie minori del caso precedente.

Anche in questo caso si effettuano analisi comparative con *Abaqus* per verificare la correttezza del codice:

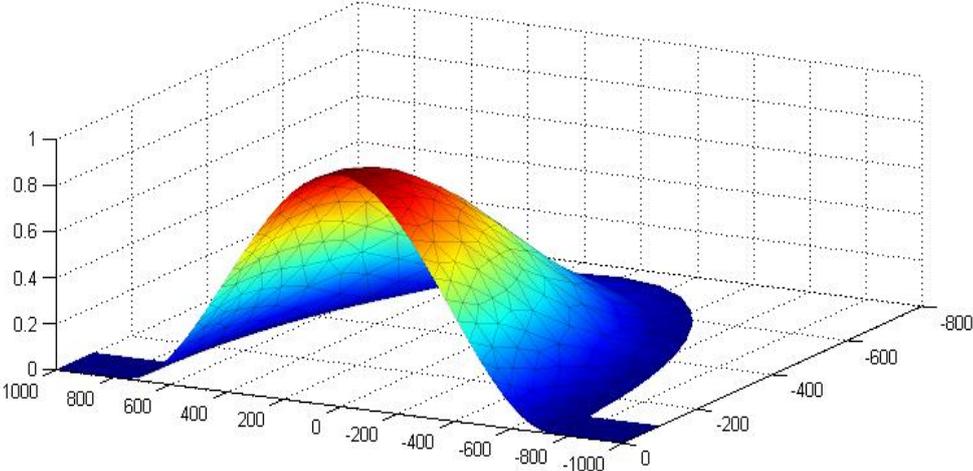
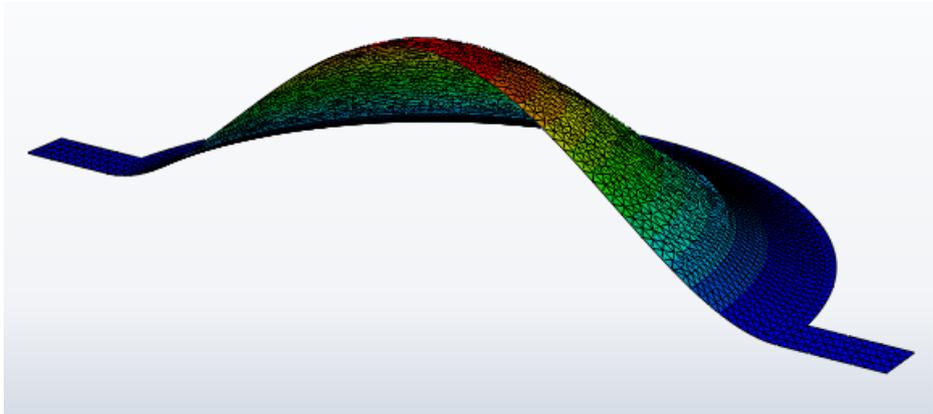
PRIMO MODO			
<b>MATLAB</b>	$\omega_0^I = \omega_0 = 0,6792 \text{ MHz}$	$f_0^I = f_0 = 0,1081 \text{ MHz}$	$T_0^I = T_0 = 9,2535 \mu\text{s}$
			
<b>ABAQUS</b>	$\omega_0^I = \omega_0 = 0,6849 \text{ MHz}$	$f_0^I = f_0 = 0,1090 \text{ MHz}$	$T_0^I = T_0 = 9,1743 \mu\text{s}$
			

Figura 6.17: Primo modo di vibrare

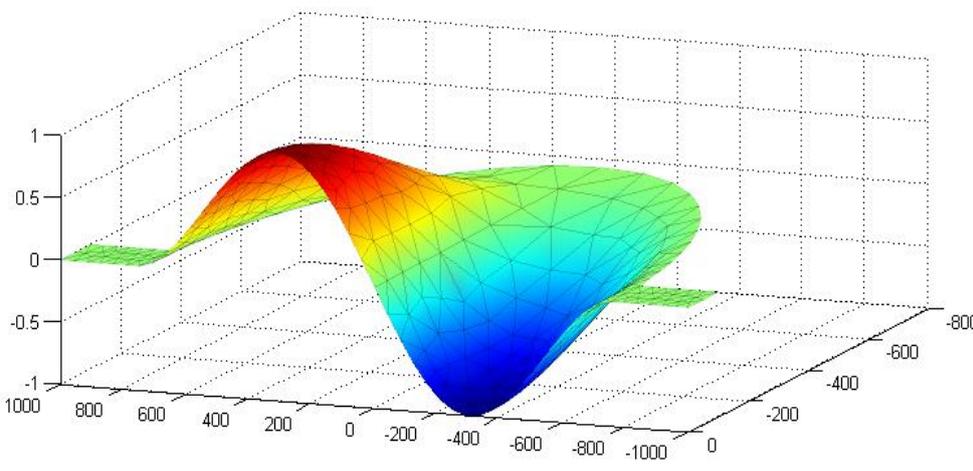
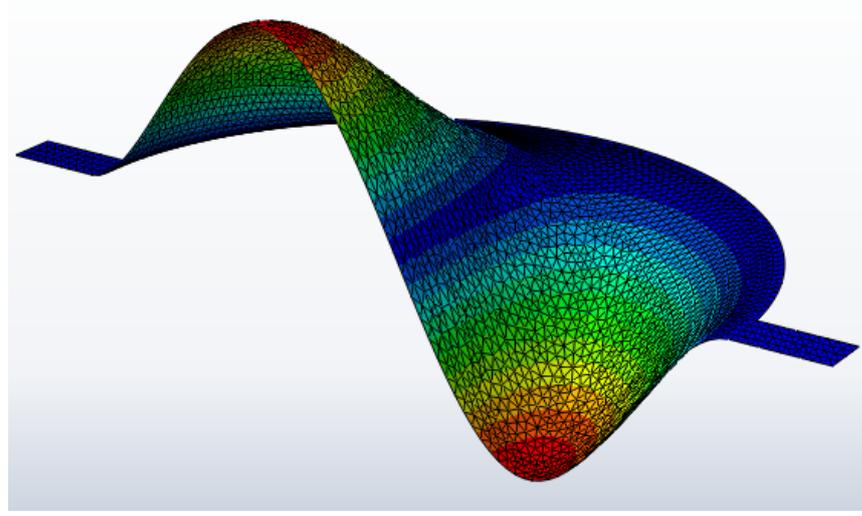
SECONDO MODO			
<b>MATLAB</b>	$\omega_0^{II} = 1,4464 \text{ MHz}$	$f_0^{II} = 0,2302 \text{ MHz}$	$T_0^{II} = 4,3439 \text{ MHz}$
			
<b>ABAQUS</b>	$\omega_0^{II} = 1,4495 \text{ MHz}$	$f_0^{II} = 0,2307 \text{ MHz}$	$T_0^{II} = 4,3346 \text{ MHz}$
			

Figura 6.18: Secondo modo di vibrare

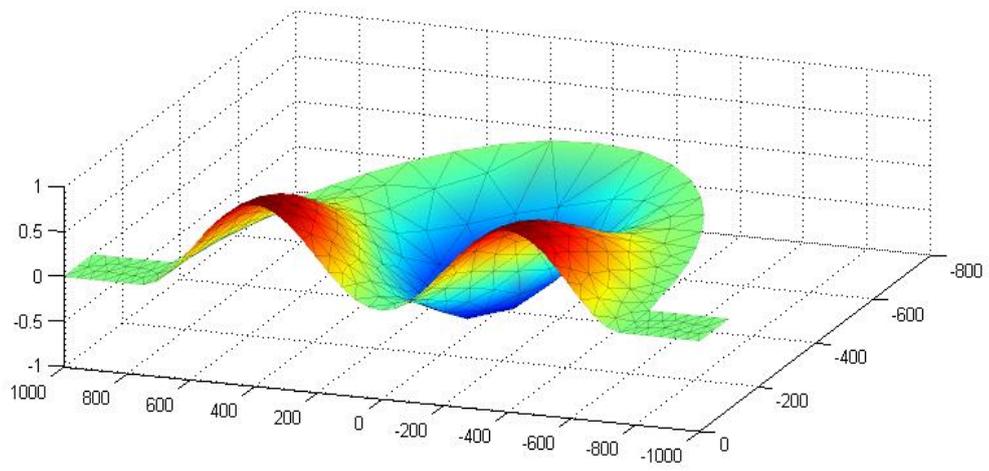
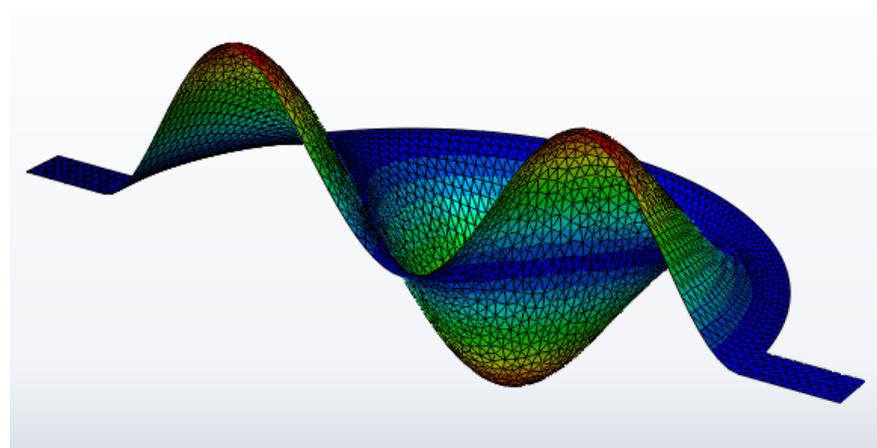
TERZO MODO			
<b>MATLAB</b>	$\omega_0^{III} = 2,4029 \text{ MHz}$	$f_0^{III} = 0,3824 \text{ MHz}$	$T_0^{III} = 2,6148 \text{ MHz}$
			
<b>ABAQUS</b>	$\omega_0^{III} = 2,3939 \text{ MHz}$	$f_0^{III} = 0,3810 \text{ MHz}$	$T_0^{III} = 2,6247 \text{ MHz}$
			

Figura 6.19: Terzo modo di vibrare

### 6.3.4 Matrice di smorzamento alla Rayleigh

La costruzione della matrice di smorzamento è identica al caso elettrostatico, secondo la formula [6.69]:

$$C = \frac{\omega_0}{Q} M \quad [6.120]$$

### 6.3.5 Analisi parametriche

Anche per il caso piezoelettrico si effettuano 2 tipologie di analisi, una prima con carico a gradino al variare del parametro di qualità  $Q$  e una seconda con carico ciclico a frequenza variabile con  $Q = 5$ .

La soluzione statica attorno alla quale avvengono le oscillazioni dinamiche è pari a .

#### Carico a gradino

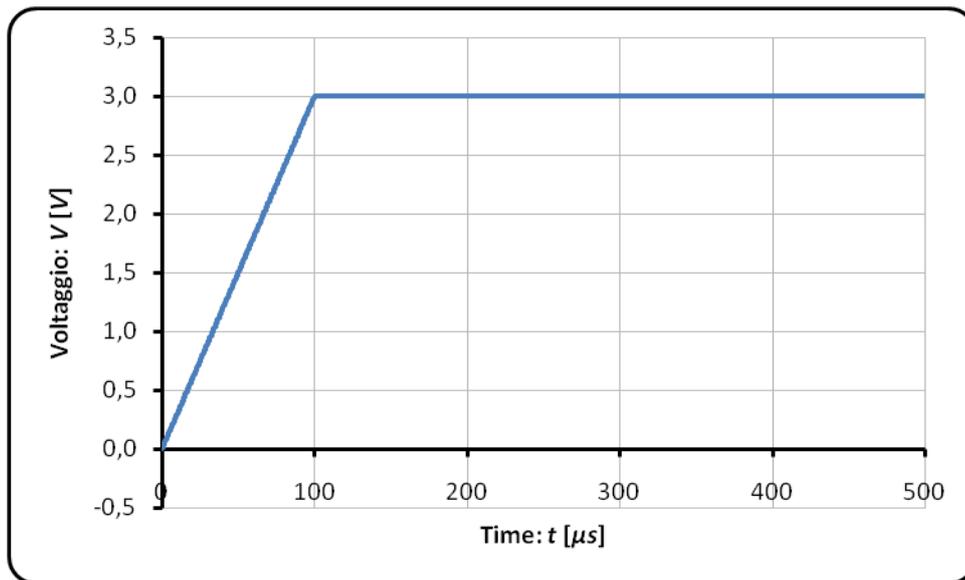


Figura 6.20: Carico a gradino

Al contrario di ciò che si è visto per il caso capacitivo la prima parte della soluzione, corrispondente alla rampa, è lineare. Il carico equivalente piezoelettrico dipende linearmente dalla differenza di potenziale applicata. Anche in questo caso al diminuire di  $Q$  si perde rapidamente l'effetto

dinamico. Le oscillazioni dinamiche avvengono attorno alla posizione di equilibrio statico pari a  $0,247513\mu m$ .

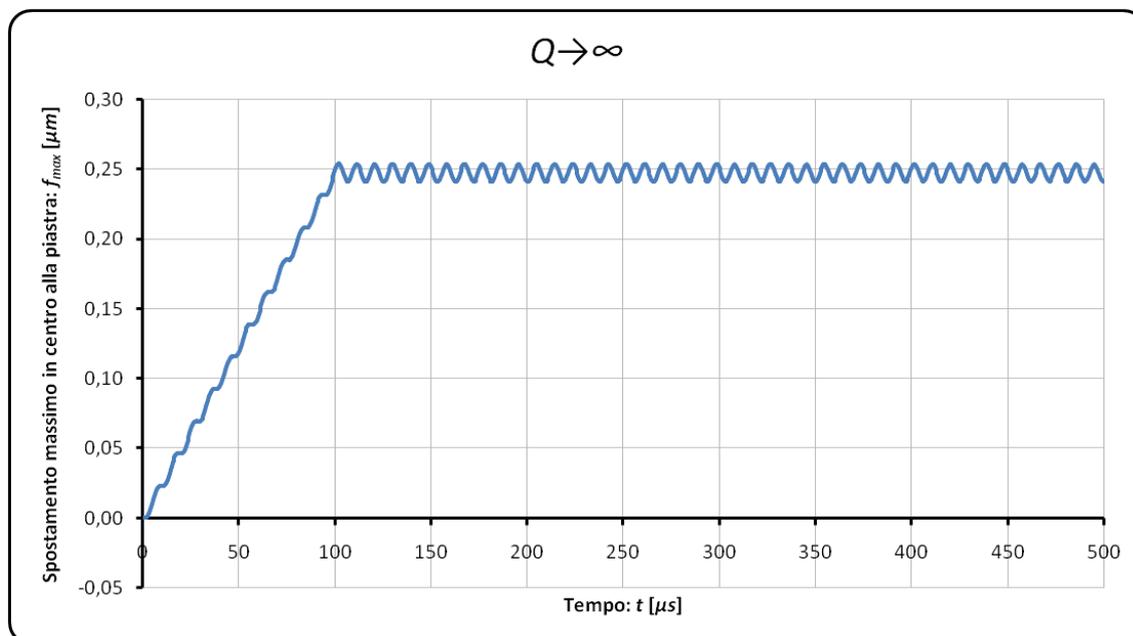


Figura 6.21: Massimo spostamento della piastra per un fattore di qualità  $Q \rightarrow \infty$

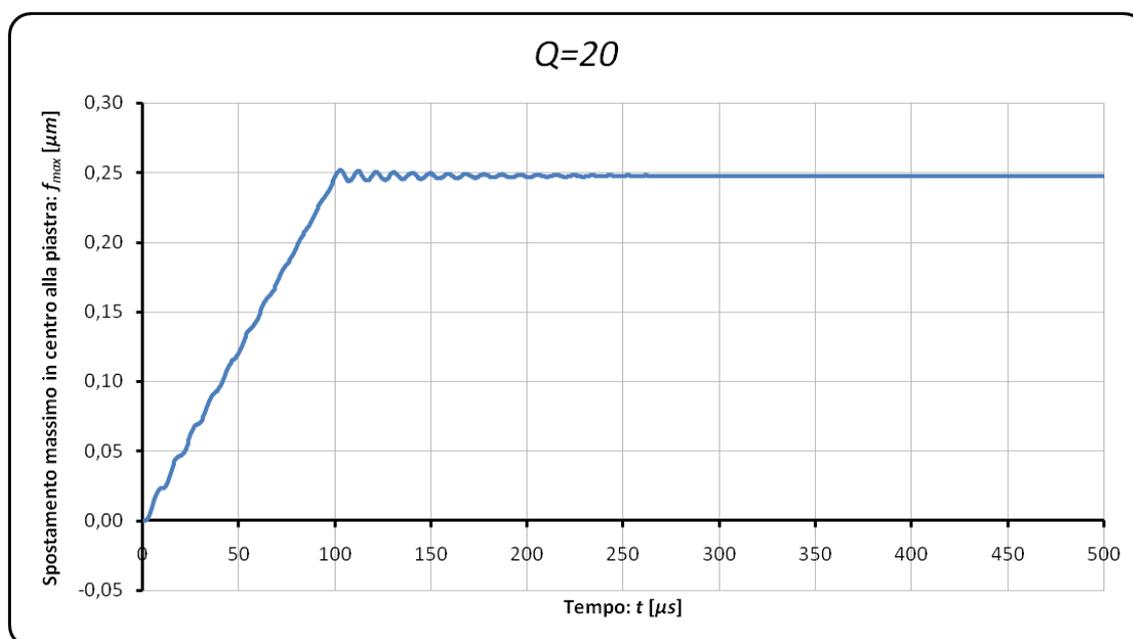


Figura 6.22: Massimo spostamento della piastra per un fattore di qualità di 20

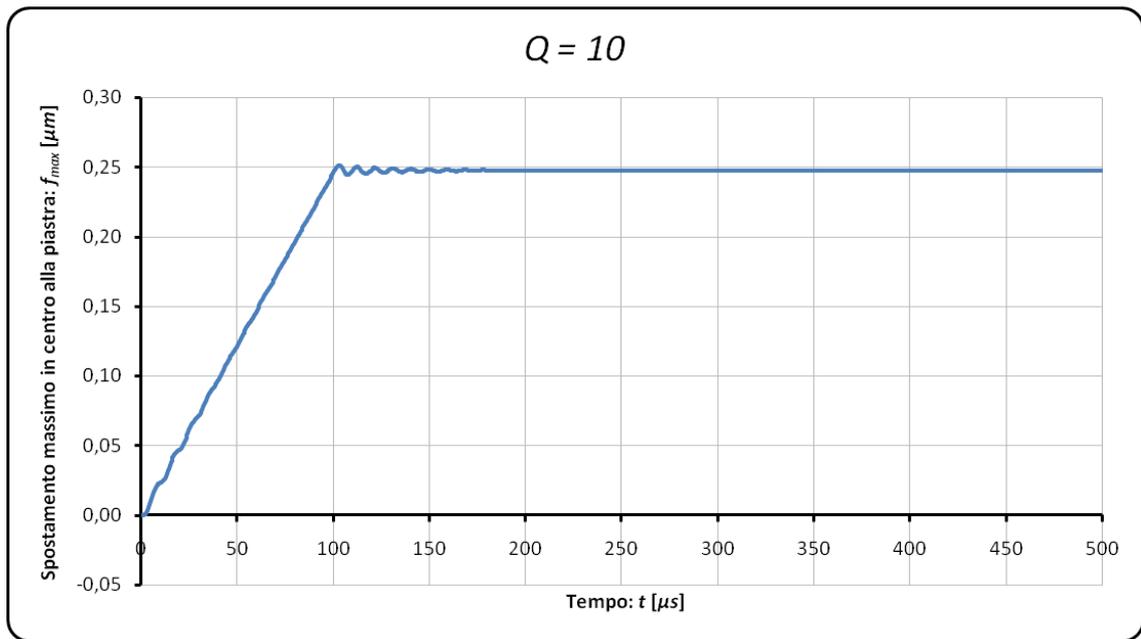


Figura 6.23: Massimo spostamento della piastra per un fattore di qualità di 10

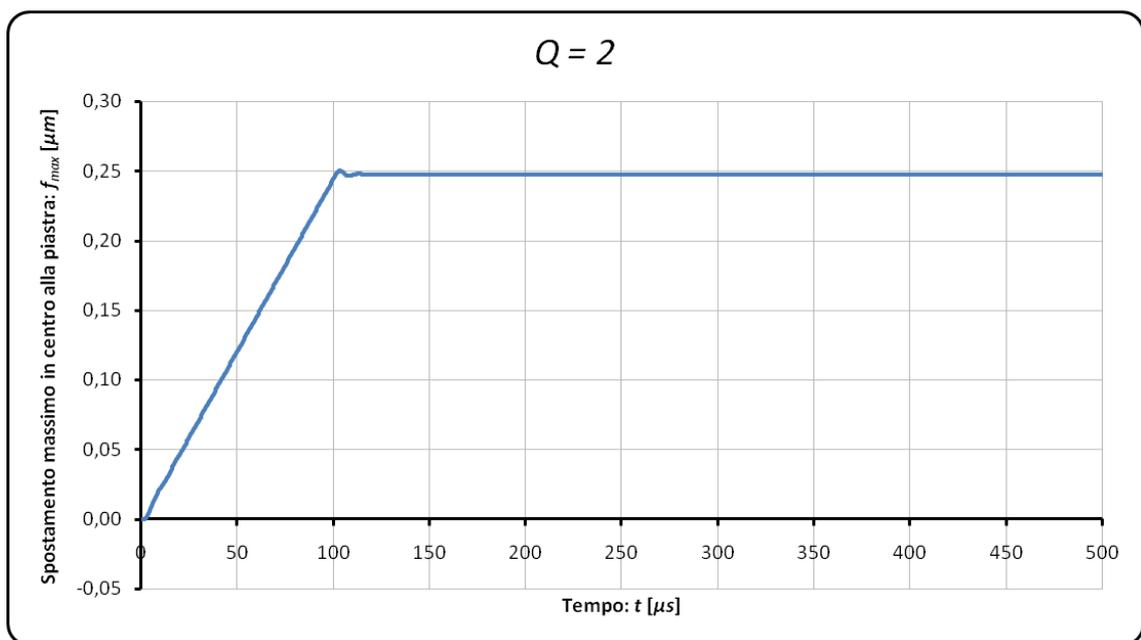


Figura 6.24: Massimo spostamento della piastra per un fattore di qualità di 2

Carico ciclico a gradino

Fissato il fattore di qualità a 5 si studia ora la dipendenza della soluzione dalla frequenza di lavoro della micropompa per carichi ciclici come in .

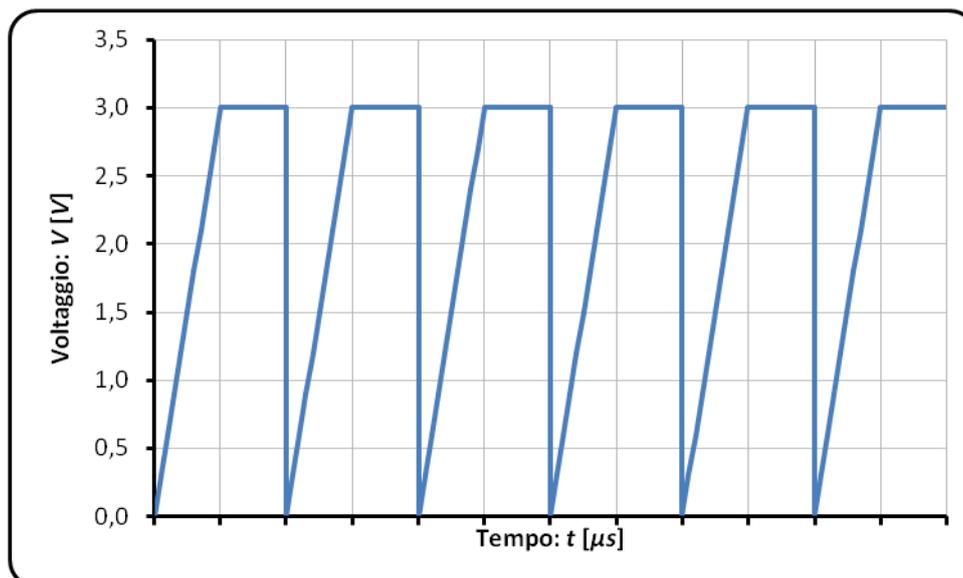


Figura 6.25: Carico ciclico a gradino per frequenze variabili tra 5 ÷ 100kHz

All' aumentare della frequenza aumenta l'effetto di amplificazione dinamica e che raggiunge il suo massimo in corrispondenza della frequenza naturale della piastra.

Per valori di frequenza relativamente bassi il sistema oscilla chiaramente attorno alla posizione di equilibrio statico:

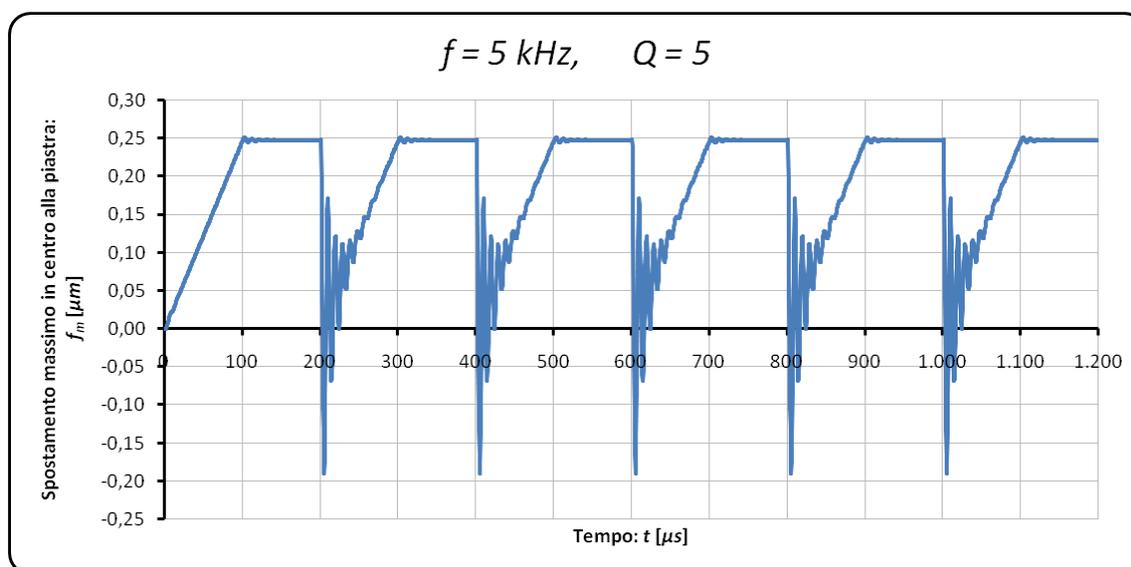
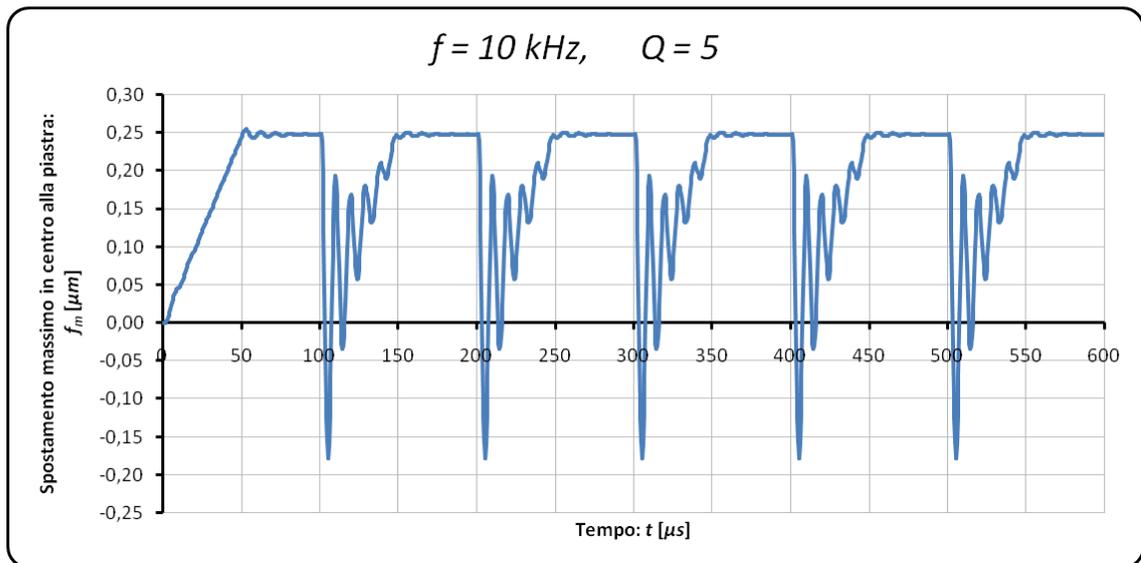
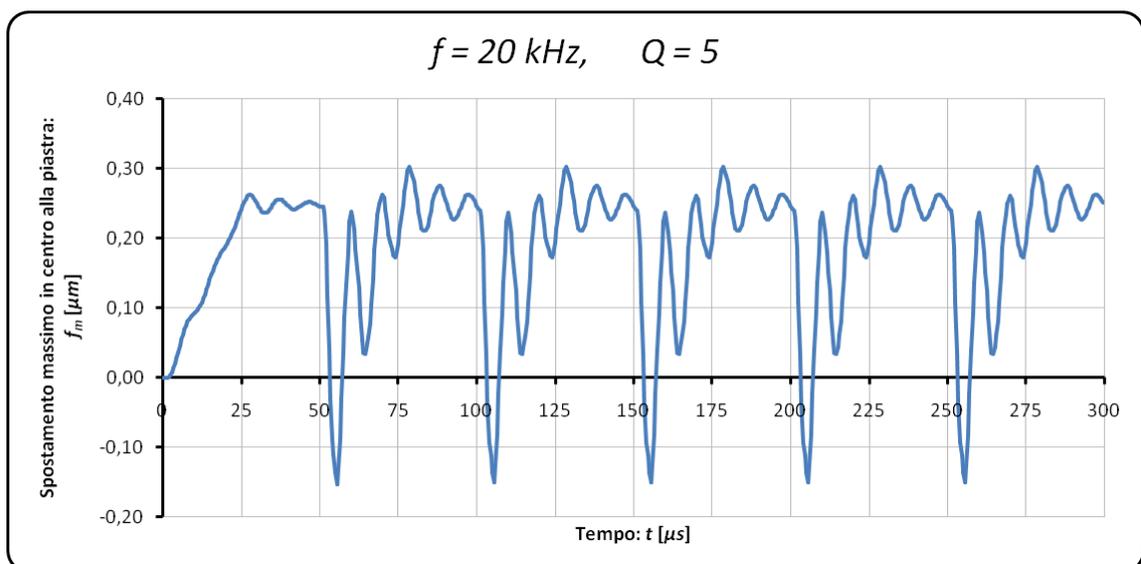


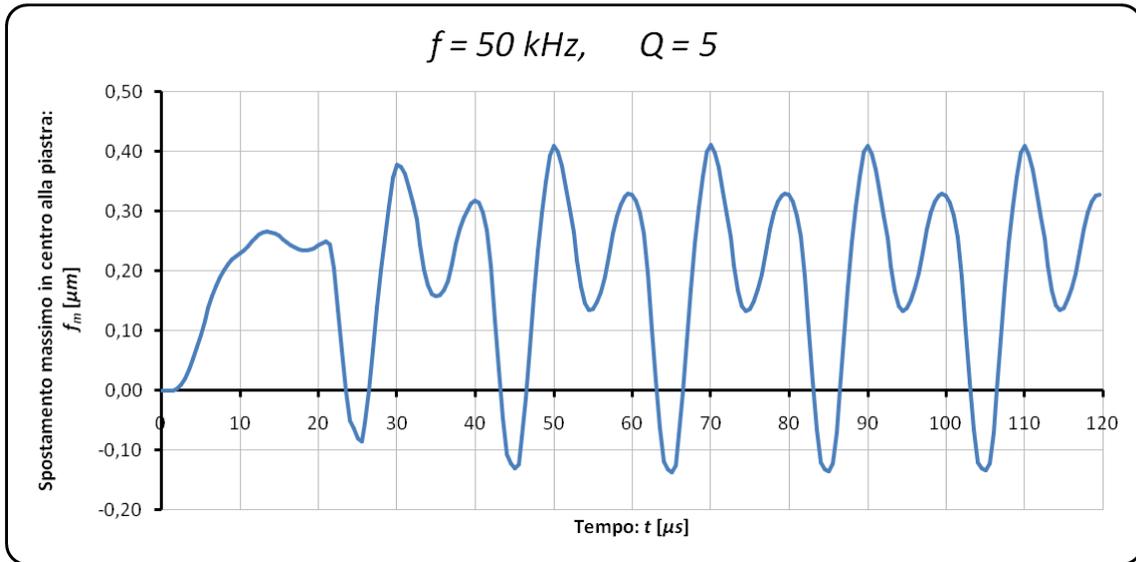
Figura 6.26: Risposta dinamica della piastra attuata piezoeletticamente con un carico ciclico di 5kHz e un parametro di qualità pari a 5



**Figura 6.27:** Risposta dinamica della piastra attuata piezoelectricamente con un carico ciclico di 10kHz e un parametro di qualità pari a 5

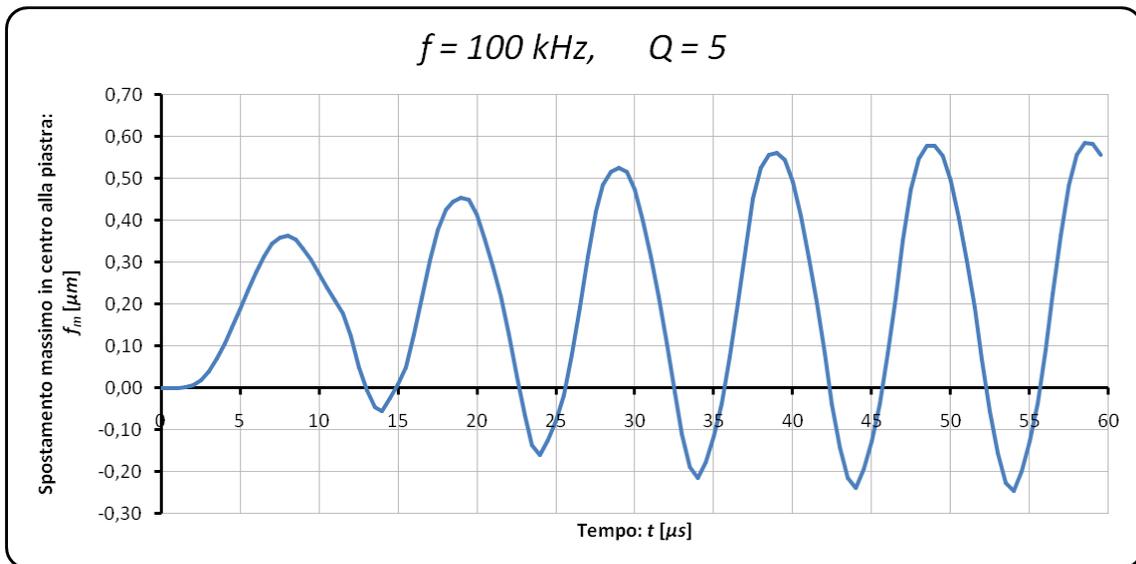


**Figura 6.28:** Risposta dinamica della piastra attuata piezoelectricamente con un carico ciclico di 20kHz e un parametro di qualità pari a 5

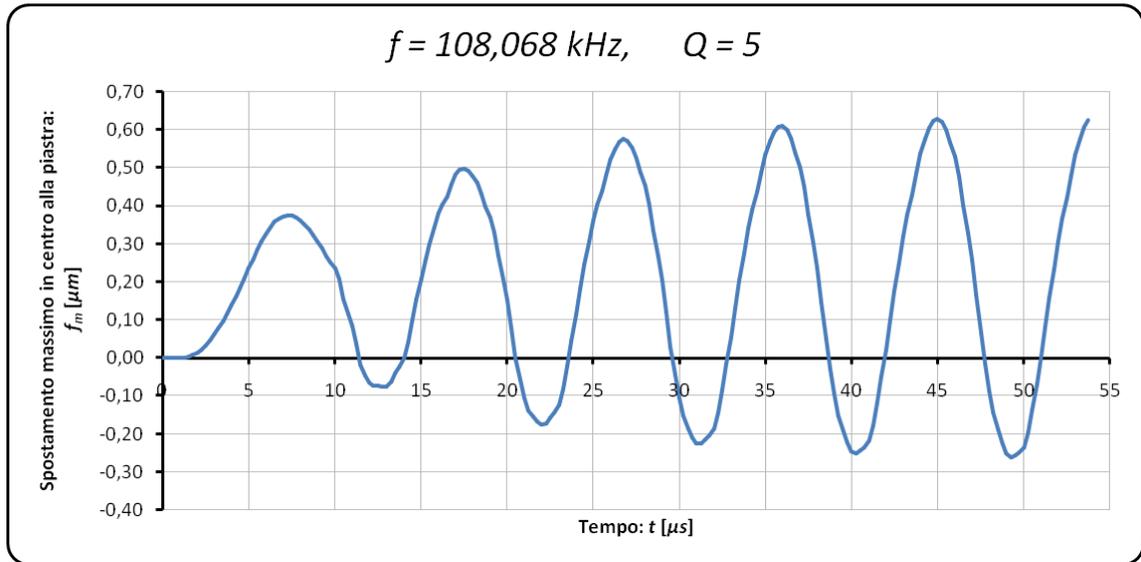


**Figura 6.29:** Risposta dinamica della piastra attuata piezoeletttricamente con un carico ciclico di 50kHz e un parametro di qualità pari a 5

Se si lavora ad una frequenza prossima a quella naturale del sistema, la risposta dinamica risulta notevolmente amplificata:



**Figura 6.30:** Risposta dinamica della piastra attuata piezoeletttricamente con un carico ciclico di 100kHz e un parametro di qualità pari a 5



**Figura 6.31:** Risposta dinamica della piastra attuata piezoeletttricamente con un carico ciclico con frequenza pari a quella critica del sistema e un parametro di qualità pari a 5



# **7. Analisi fluido- meccaniche**



## 7.1 Introduzione

Il percorso descritto nei capitoli precedenti ha come naturale sviluppo l'introduzione del dominio fluido nel modello. Nei capitoli 3-4-5 si sono realizzate analisi quasi-statiche con lo scopo di avere un inquadramento delle problematiche relative alle diverse scelte progettuali. I risultati di questi capitoli sono da utilizzare come indicazione e paragone per analisi più complete ancora da realizzare. Emergono inoltre chiaramente le tipicità di entrambe le scelte progettuali in particolare la necessità di operare a frequenze maggiori nel caso capacitivo per garantire stroke volume equivalenti al caso piezoelettrico. Nel capitolo 6 si è introdotta nel codice la dinamica della piastra e si è verificata la validità dello strumento realizzato.

Il passaggio successivo consiste nell'introduzione della dinamica del fluido e dell'interazione tra questo e la piastra per poter simulare il comportamento del sistema ad alte frequenze. Data la geometria del modello per simulare in maniera corretta la presenza del fluido è necessaria una modellazione tridimensionale. Questo alza il livello di difficoltà della programmazione manuale nel codice *Matlab*.

Si è già discusso nel capitolo 2 di microfluidica che consiste nello studio del comportamento di fluidi in un ambiente di dimensioni micrometriche tipico dei dispositivi MEMS. Il flusso del fluido può essere ragionevolmente considerato laminare perché il numero di *Reynolds* associato è molto basso.

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad [7.1]$$

Se il parametro legato alla geometria  $L$  del problema è dell'ordine di  $10^{-6}m$  il numero di *Reynolds* è molto inferiore a 1. Per questa ragione il flusso è laminare ed è possibile trascurare i termini inerziali all'interno delle equazioni di *Navier-Stokes* scritte per fluidi incomprimibili:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad [7.2]$$

---

La prima delle equazioni è il bilancio delle quantità di moto mentre la seconda è l'equazione di conservazione di massa.

I termini inerziali legati all'interno della prima equazioni possono essere trascurati ricavando così le equazioni di *Stokes*.

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad [7.3.a-b]$$

## 7.2 Analisi fluido-meccaniche quasi-statiche

Per questo si è pensato di affrontare inizialmente il problema attraverso un modello semplificato in cui si suppone che la velocità abbia una forma parabolica. Questa ipotesi è ammissibile perché l'altezza del dominio fluido al di sotto della membrana è piccola rispetto alle altre dimensioni. Si suppone inoltre che la pressione sia costante lungo l'altezza del flusso (Flusso bidimensionale alla *Hele-Shaw*, 1898).

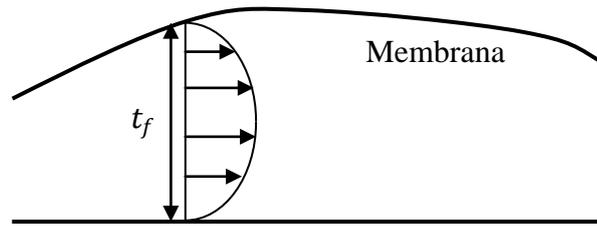


Figura 7.1: Forma parabolica della velocità all'interno della camera di pompaggio

$$\mathbf{v} = \frac{z(z - t_f)}{\mu} \nabla p \quad [7.4]$$

Utilizzando l'equazione di conservazione di massa [7.3.a-b] e l'equazione [7.4]:

$$\operatorname{div} \left( \frac{z(z - t_f)}{\mu} \nabla p \right) = 0 \quad [7.5]$$

$$\nabla^t \cdot (z(z - t_f) \nabla p) = 0 \quad [7.6]$$

$$-\nabla^t(t_f) \nabla p + (z - t_f) \Delta p = 0 \quad [7.7]$$

### 7.2.1 Formulazione ad elementi finiti del problema fluido bidimensionale

$$-\int_S \nabla^t(t_f) \nabla p \cdot \delta v \cdot dS + \int_S (z - t_f) \Delta p \cdot \delta v \cdot dS = 0 \quad [7.8]$$

$$-\int_S \nabla^t(t_f) \nabla p \cdot \delta v \cdot dS + \int_S (\nabla^t(t_f) \cdot \delta v + \nabla^t(\delta v) \cdot t_f) \cdot \nabla p \cdot dS = 0 \quad [7.9]$$

$$\int_S t_f \cdot \nabla^t(\delta v) \cdot \nabla p \cdot dS = 0 \quad [7.10]$$

Si introduce ora la discretizzazione ad elementi finiti, con  $N_e$  numero totale di elementi:

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} t_f \cdot \nabla^t(\delta v) \cdot \nabla p \cdot dS = 0 \quad [7.11]$$

Per ogni elemento si definiscono le variabili come funzione dei rispettivi parametri nodali. Si usa l'EF a 6 nodi adoperato per la risoluzione del problema meccanico descritto al capitolo 3. Si utilizzano le medesime funzioni di forma per pressione, velocità e spessore del flusso:

$$p^i = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}^i \quad [7.12]$$

$$t_f^i = \mathbf{N} \cdot \mathbf{t}^i \quad [7.13]$$

$$\delta v^i = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{V}^i \quad [7.14]$$

Dove  $\mathbf{N}$  è la matrice delle funzioni di forma:

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \quad [7.15]$$

Le pressioni e le velocità sono considerate con il loro gradiente che con l'introduzione degli elementi finiti risulta essere:

$$\nabla p^i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^i \quad [7.16]$$

$$\nabla \delta v^i = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{V}^i \quad [7.17]$$

Con  $B$  definita nel seguente modo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial y} \end{bmatrix} \quad [7.18]$$

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{V}^{i^t} \cdot \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^i \cdot dS = 0 \quad [7.19]$$

Si introducono ora le funzioni di connettività che legano i gradi di libertà locali a quelli globali:

$$\mathbf{P}^i = \mathbf{L}^i \cdot \mathbf{P} \quad [7.20]$$

$$\mathbf{t}^i = \mathbf{L}^i \cdot \mathbf{t} \quad [7.21]$$

$$\delta \mathbf{V}^i = \mathbf{L}^i \cdot \delta \mathbf{V} \quad [7.22]$$

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \mathbf{N} \cdot \mathbf{L}^i \cdot \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{V}^t \cdot \mathbf{L}^{i^t} \cdot \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^i \cdot \mathbf{P} \cdot dS = 0 \quad [7.23]$$

$$\delta \mathbf{V}^t \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S^i} \mathbf{N} \cdot \mathbf{L}^i \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{L}^{i^t} \cdot \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^i \cdot dS \right\} \cdot \mathbf{P} = 0 \quad [7.24]$$

$$\delta \mathbf{V}^t \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} = 0 \quad [7.25]$$

L'equazione [7.25] è valida per ogni valore di  $\delta \mathbf{V}^t$  per cui si ottiene l'espressione finale implementata nel codice in linguaggio *Matlab*.

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} = 0 \quad [7.26]$$

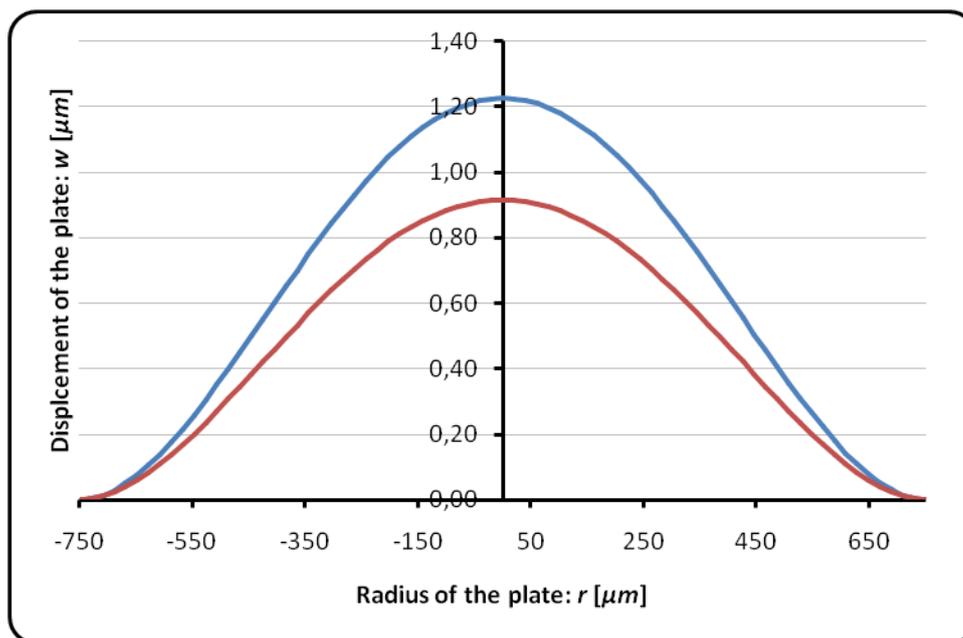
Con:

$$R = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{S_i} N \cdot L^i \cdot t \cdot L^{i^t} \cdot B^t \cdot B \cdot L^i \cdot dS \quad [7.27]$$

## 7.2.2 Analisi e risultati

Il codice permette, date le condizioni al contorno sulle velocità e sulle pressioni, di calcolare la variazione di pressione all'interno della camera di pompaggio e di applicarla come carico distribuito sulla piastra.

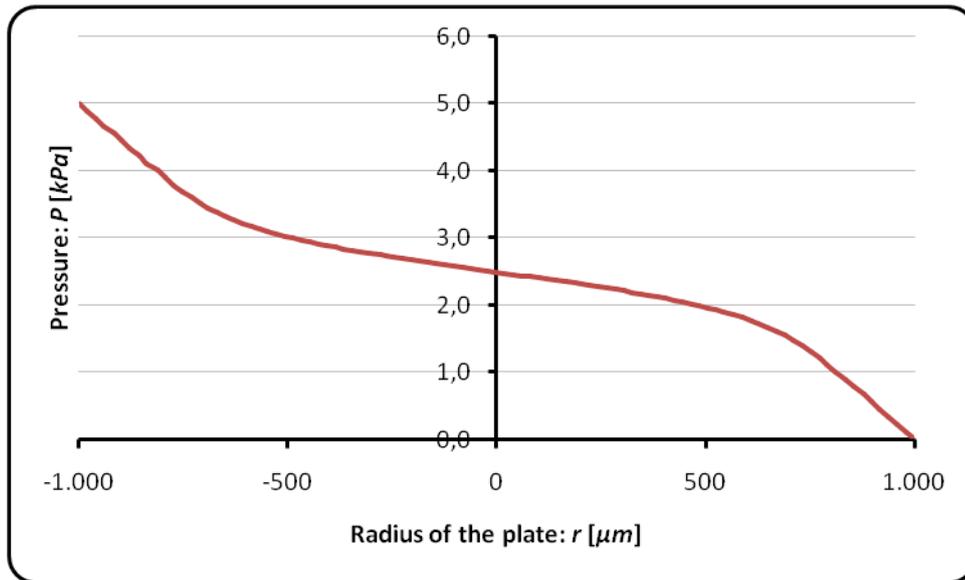
Nel caso elettrostatico si considerano  $200V$  come differenza di potenziale tra l'elettrodo fisso e la piastra deformabile posta ad una distanza di  $4,6\mu m$ . La membrana in poli-silicio è spessa  $16,3\mu m$ . Si impone inoltre una pressione pari a  $5kPa$  nella zona di input e pressione nulla nella zona di output. Nella **Figura 7.2** si riporta la soluzione che tiene conto del fluido e la soluzione della sola piastra deformata dalla presenza dell'azione elettrostatica.



**Figura 7.2:** Confronto tra la soluzione del modello elettrostatico senza fluido (in rosso) e quella del modello con il fluido (in blu). L'aumento di pressione nella camera di pompaggio spinge sulla piastra aumentandone la deformata.

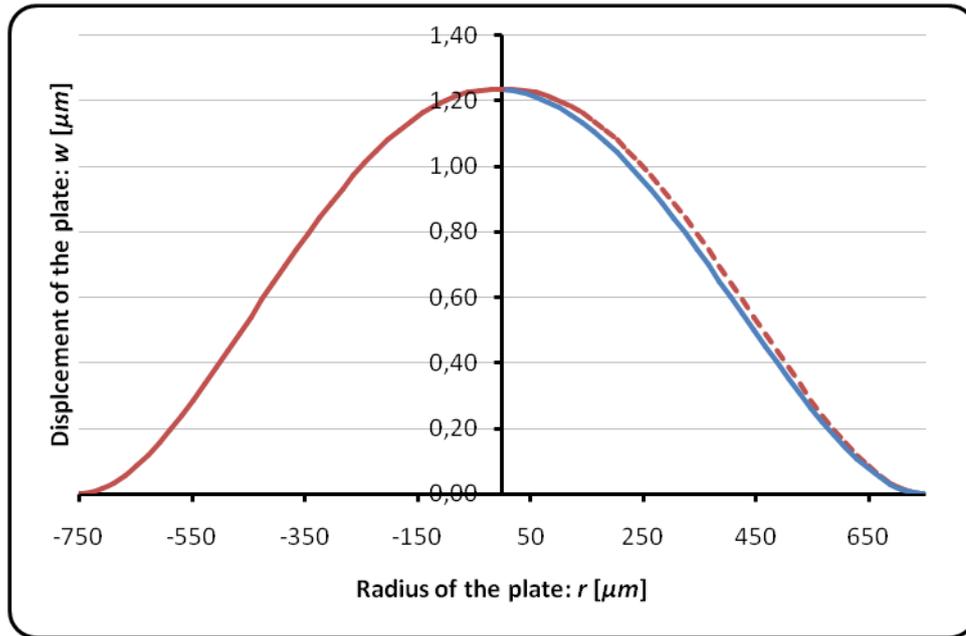
Nel modello in cui si considera l'interazione con il fluido gli spostamenti sono maggiori a causa dell'aumento di pressione nella camera di pompaggio che agisce come un carico distribuito sulla membrana.

L'andamento delle pressioni all'interno della camera di pompaggio è riportato in **Figura 7.3**. Si può notare il tipico andamento delle pressioni:



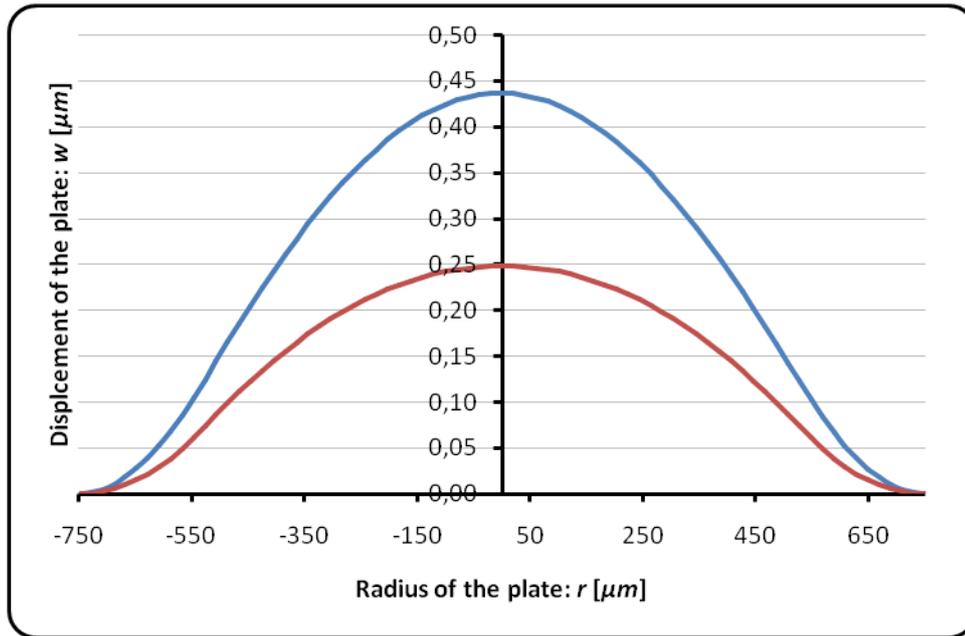
**Figura 7.3:** Andamento delle pressioni all'interno della camera di pompaggio, per una differenza di pressione tra l'input e l'output pari a  $5kPa$

Come si può evidentemente notare la soluzione perde la simmetria assialsimmetrica. Nella figura precedente (**Figura 7.2**) non si coglie molto questa cosa perché l'effetto della forza elettrostatica è predominante e perché la pressione non è eccessiva. Per evidenziare questo fenomeno è conveniente svolgere un'analisi con una differenza di pressione molto alta e annullando l'effetto elettrostatico:



**Figura 7.4:** Caso in cui la forza elettrostatica è nulla e la differenza tra pressione in ingresso e uscita è  $30\text{kPa}$ , per mettere in evidenza la natura non simmetrica della soluzione dovuta alla presenza del fluido. Tratteggiato in rosso, la soluzione simmetrica della parte di piastra con ascissa negativa dove la pressione è maggiore.

Analogamente è possibile introdurre l'accoppiamento tra fluido e piastra anche nel caso di attuazione piezoelettrica. Si considera la piastra composta da tre strati: la membrana in silicio spessa  $16,3\mu\text{m}$ , lo strato di PZT spesso  $1\mu\text{m}$  e l'elettrodo spesso  $0,5\mu\text{m}$ . In rosso è riportata la soluzione senza l'effetto del fluido, in blu la soluzione in cui si considera una differenza di pressione tra input ed output pari a  $5\text{kPa}$ . La differenza di potenziale tra elettrodo e piastra è pari a  $3\text{V}$ .



**Figura 7.5:** Confronto tra la soluzione del modello piezoelettrico senza fluido (in rosso) e quella del modello con il fluido (in blu). L'aumento di pressione nella camera di pompaggio spinge sulla piastra aumentandone la deformata

Per quanto riguarda la pressione all'interno della camera di pompaggio i ragionamenti sono analoghi a quelli fatti per il caso capacitivo.

Si può notare inoltre, che la differenza tra lo spostamento massimo nei modelli con fluido e senza fluido nei casi elettrostatico e piezoelettrico non sia uguale nonostante si abbiano le medesime condizioni al contorno fluido. Dalla **Figura 7.2** si evince che nel caso capacitivo la pressione del fluido aumenta lo spostamento massimo in mezzo alla mezzeria di:  $1,225\mu m - 0,914\mu m = 0,311\mu m$ . Nel caso piezoelettrico questa differenza è minore e vale:  $0,436\mu m - 0,248\mu m = 0,188\mu m$  (**Figura 7.5**).

Questo fatto non è dovuta alla diversa tecnica attuativa ma piuttosto al fatto che, date tali geometrie e tali carichi esterni, nel caso capacitivo si ottengono spostamenti maggiori e la variazioni di pressione all'interno della camera dipende dallo spessore del flusso del fluido.

---

### 7.3 Analisi fluido-struttura dinamiche

La modellazione manuale completa del dominio fluido è molto complessa perché è necessaria un'implementazione tridimensionale in cui si considerano come variabili sia la pressione che la velocità. Per questa ragione si è pensato di approssimare dapprima il problema sfruttando un codice commerciale: *Abaqus*. In *Abaqus* è implementata una sezione *CFD* (*Computational fluid dynamic*) che è possibile interfacciare con modelli solidi classici. Questa sezione e la possibilità di eseguire analisi multifisiche fluido-struttura è relativamente nuova e come è si vedrà presenta molte limitazioni.

Anzitutto è possibile inserire l'interazione tra fluido e struttura rispetto ad una sola superficie del modello. In questo modo si può considerare solo l'interazione tra il fluido e la membrana ma non quella con input e output. Inoltre non è possibile inserire condizioni di portata al confine del volume fluido ma solamente condizioni sulle velocità e sulle pressioni. Da ultimo il codice in *Abaqus*, se presente un'interazione con una parte solida, gestisce male le condizioni al contorno di pressione. Infatti l'interazione risulta ben posta se è il solido a generare il movimento del fluido ma non viceversa. Se infatti è il fluido a imprimere una pressione alla membrana il programma ha difficoltà a convergere.

È possibile affermare quindi che, date le difficoltà incontrate, il codice *Abaqus* non sia il più adatto per trattare l'interazione tra fluido e solido. Si consiglia perciò di utilizzare altri codici commerciali, come per esempio *Comsol*.

## **8. Conclusioni**



## 8.1 Risultati ottenuti

Nel presente lavoro è stata studiata da un punto di vista meccanico l'attuazione della membrana di una micropompa. Sono stati confermati i risultati del lavoro di riferimento (Bertarelli, 2011) attraverso il confronto con quelli di un codice programmato in linguaggio *Matlab* che modella il problema semi-accoppiato elettro-meccanico di attuazione di una piastra a piatto deformabile. È stata inoltre proposta una soluzione piezoelettrica alternativa per l'attuazione della piastra. Si è perciò implementato nel codice il problema semi-accoppiato piezo-meccanico in cui la piastra è modellizzata attraverso la teoria dei laminati in cui uno strato ha caratteristiche piezoelettriche. Inizialmente si sono eseguite simulazioni quasi-statiche in cui l'accoppiamento con il fluido viene trascurato (capitoli 3-4). Si identifica in questo modo l'influenza dello spessore della membrana, della distanza tra gli elettrodi e dello spessore dello strato piezoelettrico sulla risposta del sistema in termini di volume massimo trasportabile, spostamento massimo nel centro della piastra e potenza necessaria per l'attuazione. Il confronto tra le due diverse soluzioni (capitolo 5) mostra che la tecnica elettrostatica è generalmente più conveniente perché necessita minor potenza per poter movimentare la piastra. Tuttavia il confronto tra le differenze di potenziale da generare per l'attuazione evidenzia che nel caso elettrostatico i voltaggi necessari sono molto maggiori rispetto al caso piezoelettrico. Per poter utilizzare i microsistemi per esempio nella somministrazione di farmaci, non sono ammissibili voltaggi eccessivi per non creare danno all'utente e per evitare problemi di logoramento. Limitando la differenza di potenziale massima applicabile si mostra che la micropompa elettrostatica deve lavorare a frequenze di attuazione maggiori per garantire il pompaggio dello stesso quantitativo di fluido spostato nel caso piezoelettrico. Tale limitazione non modifica i risultati ottenuti al capitolo 5 nell'ipotesi di linearità tra portata e frequenza. Questa ipotesi perde di validità all'aumentare della frequenza per insorgere di fenomeni legati all'inerzia del fluido. Si mette quindi in evidenza la necessità di eseguire analisi dinamiche della piastra in presenza del fluido, così da mostrare il comportamento del sistema ad alte frequenze.

In questo elaborato è stato affrontato il problema dinamico in modo introduttivo, senza un'ampia discussione. Anzitutto si è implementato nel codice il *metodo alfa* di Hughes per trattare il comportamento dinamico della piastra attuata elettrostaticamente e piezoelettricamente

---

(capitolo 6). Si è mostrato come l'implementazione fosse corretta perché i risultati sono capaci di cogliere correttamente l'influenza dello smorzamento (introdotto tramite il fattore di qualità  $Q$ ) e della frequenza della forzante sul sistema. Per quanto riguarda lo smorzamento si mostra che la soluzione dinamica oscilla attorno alla posizione di equilibrio statico smorzandosi più velocemente al diminuire di  $Q$ . Le analisi al variare della frequenza mostrano invece il tipico fenomeno di amplificazione degli spostamenti all'avvicinarsi alla frequenza di risonanza. Nel capitolo 7 si introduce l'interazione tra fluido e struttura. Il fluido è modellizzato in 2D supponendo la velocità parabolica sullo spessore del flusso. Questa ipotesi è ammissibile perché la dimensione longitudinale è molto maggiore dell'altezza dello strato fluido, tuttavia in questo modo si permettono solamente analisi quasi-statiche. Nonostante il comportamento dinamico accoppiato fluido-struttura non sia colto, questa semplificazione permette di implementare nel codice una prima seppur limitata interazione tra il dominio solido e quello fluido. Nell'ultima parte dell'elaborato si mostrano le problematiche legate alla modellizzazione completa dinamica fluido-elettro-meccanica.

## 8.2 Sviluppi futuri

Per quanto riguarda i modelli è necessario proseguire nell'implementazione nel codice della dinamica del fluido, necessariamente 3D. Lo sviluppo di un codice autonomo permetterebbe di ovviare le problematiche relative all'uso dei codici commerciali. Inoltre è indispensabile completare lo studio attraverso il confronto tra le analisi qui svolte e i risultati di prove sperimentali su prototipi. Occorre dapprima testare l'attuazione della membrana nei casi elettrostatico e piezoelettrico mettendo in evidenza problematiche relative a sforzi residui (tipiche nei microsistemi a queste dimensioni) o altri eventuali criticità legate alla fabbricazione e alla deposizione dello strato di PZT sulla membrana. Come seconda cosa è necessario il confronto tra la portata effettiva della micropompa e quella stimata tramite il modello. Per questo occorre dapprima la concezione e la modellizzazione delle valvole di input e di output con i relativi test.

L'utilizzo di micropompe è la prerogativa indispensabile per tutte le applicazioni di microdispositivi che necessitano il trasporto di fluidi alla microscala. Per lo sviluppo di tali dispositivi è necessaria la comprensione del movimento del fluido in elementi di dimensioni micrometriche. È necessario perciò uno sviluppo ulteriore della microfluidica, sia teorico sia numerico.

L'uso di strati sottili di PZT per attuare i microsistemi è molto promettente perché permette di generare grandi forze e grandi spostamenti per basse differenze di potenziale. Tecnicamente è possibile ad oggi depositare strati di spessore anche inferiore al micron, tuttavia per queste dimensioni le proprietà piezoelettriche del materiale subiscono delle modifiche. Sviluppi ulteriori legati all'utilizzo di questi materiali riguardano l'effetto diretto della piezoelettricità, sarebbe a dire la generazione di corrente elettrica per effetto di una deformazione del materiale. Promettenti applicazioni riguardano i microdispositivi per il recupero di energia (*Energy scavenging o harvesting*). Occorre tuttavia fare particolare attenzione al comportamento ad alte frequenze degli strati di PZT. Ad alte frequenze insorgono infatti fenomeni di dissipazione energetica tra la superficie di contatto del materiale piezoelettrico e del supporto. Il comportamento costitutivo del materiale resta invece invariato.

L'utilizzo di questi dispositivi all'interno di oggetti portatili come gli *smartphone* o all'interno di autoveicoli, potrebbe potenzialmente aumentare notevolmente l'autonomia di tali oggetti o di oggetti ad essi accompagnati, attraverso il recupero di energia che sarebbe altrimenti

---

sprecata. Un'altra significativa applicazione sembra essere l'utilizzo di elementi piezoelettrici per imporre smorzamenti controllati a strutture. In questo ambito potrebbero utilizzati all'interno di strutture di ingegneria civile classica, come ponti ovvero edifici alti.

## **9. Bibliografia**



- Amirouche, F., Zhou, Y. and Johnson, T. «Current micropump technologies and their biomedical applications.» *Microsystems Technology*, 2009: 15:647–666.
- Andersson, H. and van den Berg, A. «Microfluidic devices for cellomics: a review.» *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2003: 92:315–325.
- Andersson, H., van der Wijngaart, W., Nilsson, P., Enoksson, P., and Stemme, G. «A valve-less diffuser micropump for microfluidic analytical systems.» *Sensors Actuators B*, 2001: 72:259-265.
- Behjat, V., and Vahedi, A. «Analysis and optimization of MEMS electrostatic microactuator.» *Proceeding of the 3rd International Conference of Young Scientists "Perspective Technologies and Methods in MEMS Design"*, MEMSTECH 2007, 2007: art. no. 4283417: 20-25.
- Benard, W.L., Kahn, H., Heuer, A.H., and Huff, M.A. «Thin-film shapememory alloy actuated micropumps.» *Journal of Microelectromechanical Systems*, 1998: 7(2): 245–251.
- Bertarelli. *BioMEMS for microscale fluid transport: design, simulation and prototyping*. PhD Thesis, Politecnico di Milano, 2011.
- Bertarelli, E., Ardito, R., Greiner, A., Korvink, J.G., and Corigliano A. «Design issues in electrostatic microplate actuators: device stability and post pull-in behaviour.» *2011 12th Int. Conf. on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems, EuroSimE 2011*, 2011: art. no. 5765843.
- Bien, D.C.S., Mitchell, S.J.N., and Gamble, H.S. «Fabrication and characterization of a micromachined passive valve.» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2003: 13:557-562.
- Bourouinay, T., Alain, B., and Grandchamp, J.P. «Design and simulation of an electrostatic micropump for drugs delivery applications.» *Journal of micromechanics and Microengineering*, 1997: 7: 186-188.

- 
- Cacchione. *Mechanical characterisation and simulation of fracture processes in polysilicon Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*. PhD Thesis, Politecnico di Milano, 2007.
- Cho, J., Anderson, M., Richards, R., Bahr, D., and Richards, C. «Optimisation of electromechanical coupling for a thin-film PZT membrane.» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005: 15:1804-1809.
- Cooney, C.G., and Towe, B.C. «A thermopneumatic dispensing micropump.» *Sensor and Actuator A: Physical*, 2004: 116: 519–524.
- Corigliano, A., Taliercio, A. *Meccanica computazionale*. esculapio, 2005.
- Corradi dell'acqua, L. *Meccanica delle strutture*. McGraw Hill, 1992.
- Doody, C.B., Rich C.A., and White, R.D. «Modeling and Characterization of CMOS-Fabricated Capacitive Micromachined Ultrasound Transducers.» *Journal of microelectromechanical systems*, 2011: 20: 104-118.
- Driesen, W., Bergander, A., Varidel, T., and Breguet, J.M. «Energy consumption of piezoelectric actuators for inertial drives.» *International symposium on micromechatronics and human science*, 2003: 51-58.
- Dufour, I., and Francais, O. «Enhancement of elementary displaced volume with electrostatically actuated diaphragms: application to electrostatic micropumps.» *10th Micromechanics Europe Workshop*, 2000: 10: 282-286.
- Esashi, M., Shoji, S., and Nakano, A. «Normally close microvalve and micropump fabricated on siliconwafer.» *Proceedings in IEEE MEMS*, 1989: 29-34.
- Fadl, A., Demming, S., Zhang, Z., Büttgenbach, S., Krafczyk, M., Meyer, D.M.L. «A multifunction and bidirectional valve-less rectification micropump based on bifurcation geometry.» *Microfluidics and Nanofluidics*, 2010: 9(2-3):267-280.

- Fang, Y., and Tan, X. «A novel diaphragm micropump actuated by conjugated polymer petals: Fabrication, modeling, and experimental results.» *Sensors and Actuators, A: Physical*, 2010: 158 (1):121-131.
- Francals, O., Dufour, I., and Sarraute, E. «Analytical static modelling and optimisation of electrostatic micropumps.» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 1997: 7: 183-185.
- Frangi, A., Corigliano, A., Binci, M., and Faure, P. «Finite element modelling of a rotating piezoelectric ultrasonic motor.» *Ultrasonics*, 2005: 747-755.
- Frey, A., Seidel, J., Schreiter, M., and Kuehne, I. «Piezoelectric MEMS energy harvesting module based on non-resonant excitation.» *16th International Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference, TRANSDUCERS'11*, 2011: art. no. 5969849: 683-686.
- Fujita, H. «Microactuators and micromachines.» *Proceedings of the IEEE*, 1998: 86 (8): 1721-1732.
- Gad-el-Hak. *The fluid mechanics of microdevices - The Freeman scholar lecture*. Journal of Fluids Engineering, 1999.
- Garimella, S., Singhal, V., and Liu, D. «On-chip thermal management with microchannel heat sinks and integrated micropumps.» *Proceedings of the IEEE*, 2006: 94:1534–1548.
- Grayson, A.C.R., Shawgo, R.S., Johnson, A.M., Flynn, N.T., Li, Y., Cima, M.J., and Langer, R. «A BioMEMS review: MEMS technology for physiologically integrated devices.» *Proceedings of the IEEE*, 2004: 92(1): 6-21.
- Guo, S., Nakamura, T., Fukuda, T., and Oguro, K. «Design and experiments of micropump using ICPF actuator.» *Proceedings of the Seventh International IEEE Symposium on Micro Machine and Human Science*, 1996: vol. 0-7803-3596-1/96: 235–240.
- Guyomar, D., Richard, C., Mohammadi, S. «Damping behavior of semi-passive vibration control using shunted piezoelectric materials.» *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2008: 19 (8): 977-985.

- 
- Hao, Y. ,and Liu, F. «Fault simulation for the electrostatic parallel-plate micro-actuator.» *Proceedings - 2009 International Forum on Information Technology and Applications, IFITA 2009 I*, 2009: art. no. 5231715, pp. 614-617.
- Hele Shaw, J. H. S. «The flow of water.» *Nature*, 1898: 58: 34-36.
- Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method*. Prentice Hall, 1987.
- Iverson, B. and Garimella, S. «Recent advances in microscale pumping.» *Microfluidics and Nanofluidics*, 2008: 5:145–174.
- Janasek, D., Franzke, J., and Manz, A. «Scaling and the design of miniaturized chemical-analysis systems.» *Nature*, 2006: 442:374–380.
- Jeong, O.C., and Yang, S.S. «Fabrication and test of a thermopneumatic micropump with a corrugated p diaphragm.» *Sensor and Actuators*, 2000: 83: 249–255.
- Judy, J.W., Tamagawa, T., and Polla, D.L. «Surface micromachined micropump.» *Proceeding MEMS 91*, 1991: 182-186.
- Kato, T., Guo, S., Fukuda, T., and Oguro, K. «A fish microrobot using ICPF Actuator.» *Proceedings of the 5th International Workshop on Advanced Motion Control*,, 1998: 592–597.
- Khaligh, A., Zeng, P., and Zheng, C. «Kinetic energy harvesting using piezoelectric and electromagnetic technologies: state of the art.» *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2010: 57 (3), art. no. 5071287: 850-860.
- Kim, K.J., Lee, S., and Park, H.C. «Design and performance analysis of a novel IPCM-driven micropump.» *San Diego, vol 5759*, 2005: 439-446.
- Koch, M., Evans, A.G.R., and Brunnschweiler, A. «Simulation and fabrication of micromachined cantilever valves.» *Sensors Actuators A*, 1997: 62:756-759.
- Koch, M., Harris, N., Evans, A.G.R., White, N.M., and Brunnschweiler, A. «A novel micromachined pump based on thick-film piezoelectric actuation .» *Sensors and Actuators, A: Physical* , 1998: 70 (1-2):98-103.

- Kotzar, G., Freas, M., Abel, P., Fleischman, A., Roy, S., Zorman, C., Moran, . «Evaluation of MEMS materials of construction for implantable medical devices.» *Biomaterials*, 2002: 23:2737-2750.
- Lallart, M., Wu, Y.-C., and Guyomar, D. «Switching delay effects on nonlinear piezoelectric energy harvesting techniques.» *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011: 59 (1), art. no. 5759079: 464-472.
- Laser, D. and Santiago, J. «A review of micropumps.» *Journal of Micromechanics*, 2004: 14:R35–R64.
- Lee, A.P., McConaghy, C.F., Krulevitch, P.A., Campbell, E.W., Sommargren, G.E., and Trevino, J.C. «Electrostatic comb drive for vertical actuation.» *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 1997: 3224: 109-119.
- Lee, S., and Kim, K.J. «Design of IPMC actuator-driven valve-less micropump and its flow rate estimation at low Reynolds numbers.» *Smart Materials Structure*, 2005: 14(4): 1103-1109.
- Li, B., Chen, Q., Lee, D.G., Woolman, J., and Carman, G.P. «Development of large flow rate, robust, passive micro check valves for compact piezoelectrically actuated pumps.» *Sensors Actuators A*, 2005: 117:325-330.
- Li, H.Q., Roberts, D.C., Steyn, J.L., Turner, K.T., Yaglioglu O., Hagoood, N.W., Spearing, S.M., and Schmidt, M.A. «Fabrication of a high frequency piezoelectric microvalve.» *Sensors Actuators A*, 2004: 111:51-56.
- Liang, J.R., and Liao, W.H. «Piezoelectric energy harvesting and dissipation on structural damping.» *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009: 20 (5): 515-527.
- Lin, Q., Yang, B., Xie, J., and Tai, Y.-C. «Dynamic simulation of a peristaltic micropump considering coupled fluid flow and structural motion.» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2007: 17(2): 220-228.
- Liu, W.y. «Research on electrostatic micropump pull-in phenomena based on reduced order model.» *International conference on intelligent computation technology and automation*. 2010. 1-4.

- 
- Ma, Y., Islam, S., and Pan, Y.-J. «Electrostatic torsional micromirror with enhanced tilting angle using active control methods.» *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2011: 16 (6) art. no. 5575426: 994-1001.
- Machauf, A., Nemirovsky, Y., and Dinnar, U. «A membrane micropump electrostatically actuated across the working fluid.» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005: 15:2309–2316.
- Machauf, A., Nemirovsky, Y., and Dinnar, U. «A membrane micropump electrostatically actuated across the working fluid.» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005: 15(12): 2309-2316.
- Maeda, R., Tsaur, J.J., Lee, S.H., Ichiki, M. «Piezoelectric microactuator devices.» *Journal of Electroceramics*, 2004: 12: 89-100.
- Nagel, J.J., Mikhail, G., Noh, H., and Koo, J. «Magnetically actuated micropumps using an Fe-PDMS composite membrane.» *Proceedings of SPIE-the international society for optical engineering, smart structures and materials*. San Diego, 2006. vol 6172: 1-13.
- Nathanson, H., Newell, W., Wickstrom, R., and Davis, J. «The resonant gate transistor.» *IEEE Transactions on Electron Devices*, 14(3), 1967: 117-133.
- Neagu, C.R., Gardeniers, J.G.E., Elwenspoek, M., and Kelly, J.J. «An electrochemical active valve.» *Electrochimical Acta*, 1997: 42:3367-13.
- Nguyen, N.-T., Truong, T.-Q., Wong, K.-K., Ho, S.-S., and Low, C.-N. «Micro check valves for integration into polymeric microfluidic devices.» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2004: 14:69–75.
- Nisar, A., Afzulpurkar, N., Mahaisavariya, B., and Tuantranont, A. «MEMS-based micropumps in drug delivery and biomedical applications.» *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2008: 130:917–942.
- Oh, K.W., and Ahn, C.H. «A review of microvalves.» *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2006: 16:R13–R39.

- Olsson, A., Stemme, G., and Stemme, A. «A valve-less planar fluid pump with two pump chambers.» *Sensors and Actuators A: Physical*, 1995: 47(1):549-556.
- Paradiso, J.A., and Starner, T. «Energy scavenging for mobile and wireless electronics.» *IEEE Pervasive Computing*, 2005: 4 (1): 18-27.
- Petersen, K. «Silicon as a mechanical material.» *Proceedings of IEEE*, 70, 1982: 420-457.
- Rezazadeh, G., Fathalilou, M., and Sadeghi, M. «Pull-in Voltage of Electrostatically-Actuated Microbeams in Terms of Lumped Model. Pull-in Voltage Using Novel Design Corrective Coefficients.» *Sensing and Imaging*, 2011: 1-15.
- Ritter, T. «Single crystal pzn/pt-polymer composites for ultrasound transducer applications.» *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2000: 47 (4): 792-800.
- Roundy, S., Wright, P.K., and Rabaey, J. «A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes.» *Computer Communications*, 2003: 26 (11): 1131-1144.
- Roylance, L. and Angell, J. «A miniature integrated circuit accelerometer.» *Digest of 1978 IEEE International Solid-State Circuits Conference*, 1978: 220-221.
- Shaker, M.D., and Salleh, H. «Approaches and developments in MEMS power harvesting generators.» *Proceedings of the IEEE/CPMT International Electronics Manufacturing Technology (IEMT) Symposium*, 2010: art. no. 5746698.
- Shawgo, R., Grayson, A. R., Li, Y., and Cima, M. «BioMEMS for drug delivery.» *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 2002: 6:329–334.
- Shung, K.K., Cannata, J.M., Zhou, and Q.F. «Piezoelectric materials for high frequency medical imaging applications: A review.» *Journal of Electroceramics*, 2007: 19 (1): 139-145.
- Singhal, V., Garimella, S., and Raman, A. «Microscale pumping technologies for microchannel cooling systems.» *Applied Mechanics Reviews*, 2004: 57:191–221.
- Smits, J.G. «Piezoelectric micropump with three valves working peristaltically.» *Sensor Actuators*, 1990: 21(1–3):203–206.

- 
- Squires, T. and Quake, S. «Microfluidics: fluid physics at the nanoliter.» *Reviews of Modern Physics*, 2005: 77:977-1026.
- Taya, M., Almajid A.A., Dunnc, M., and Takahashi, H. «Design of bimorph piezo-composite actuators with functionally graded microstructure.» *Sensors and Actuators A: Physical*, 2003: 107:248–260.
- Thomas, O. «Vibrations linéaires et non linéaires de structures élastiques et piézoélectriques.» 2011.
- Timoshenko, S. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, 1959.
- Tsai, J.-H. and Lin, L. «A thermal-bubble-actuated micronozzle-diffuser pump.» *Journal of Microelectromechanics Systems*, 2002: 11:665-671.
- Tsai, N.C., and Sue, C.Y. «Review of MEMS-based drug delivery and dosing systems.» *Sensor Actuators A Physics*, 2007: 134(2):555–564.
- Ullmann, A. «The piezoelectric valve-less pump performance enhancement analysis.» *Sensor and Actuators A: Physical*, 1998: 69(1):97-105.
- van de Pol, F., van Lintel, H., Elwenspoek, M., and Fluitman, J. «A thermopneumatic .» *1990, Sensor and Actuator A: Physical*: 21-23:198–202.
- Van Lintel, H.T.G., van De Pol, F.C.M., and Bouwstra, S. «A piezoelectric micropump based on micromachining of silicon.» *Sensor and Actuators*, 1988: 15(2) 153-167.
- Voigt, P., Schrag, G., and Wachutka, G. «Electrofluidic full-system modelling of a flap valve micropump based on Kirchhoffian network theory.» *Sensors Actuators A*, 1998: 66:9–14.
- Webber K.G., Hopkinson D.P., and Lynch, C.S. «Application of a Classical Lamination Theory Model to the Design of Piezoelectric Composite Actuators.» *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2006: 17-29.
- Wei, W., and Guo, S. «A Novel PDMS Diaphragm Micropump Based on ICPF Actuator.» *2010 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, ROBIO 2010* , 2010: art. no. 5723565:1577-1583.

- Woiyas, P. «Micropumps – Past, progress and future prospects.» *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2005: 105:28–38.
- Yager, P., Edwards, T., Fu, E., Helton, K., Nelson, K., Tam, M., and Weigl, B. «Microfluidic diagnostic technologies for global public health.» *Nature*, 2006: 442:412–418.
- Yamahata, C., Lotto, C., Al-Assaf, E., Y., and Gijs, M.A.M. «A PMMA valveless micropump using electromagnetic actuation.» *Microfluidics and Nanofluidics*, 2005: 1(3): 197-207.
- Yoona K.J., Parka, K.H., Parka, H.C., and Perreux, D. «Thermal deformation analysis of curved actuator LIPCA with a piezoelectric ceramic layer and fiber composite layers.» *Composites Science and Technology*, 2003: 63:501-506.
- Zahn, J. «Micropump applications in Bio-MEMS.» *Bio-MEMS Technologies*, 2007: 143–175.
- Zengerle, R., Geiger, W., Richter, M., Ulrich, J., Kluge, S., and Richter, A. «Transient measurements on miniaturized diaphragm pumps in microfluid systems.» *Sensors and Actuators A: Physical*, 1992: 46-47:557–561.
- Zengerle, R., Richter, M., and Sandmaier, H. «A micro membrane pump with electrostatic actuation.» *Proceedings of IEEE, Microelectromechanical Systems*, 1992: 19-24.
- Zengerle, R., Ulrich, J., Kluge, S., Richter, M., and Richter, A. «A bidirectional silicon micropump.» *Sensor and Actuators A*, 1995: 50: 81-86.
- Zhan, C., Lo, T., Liu, L., and Tsien, P. «Silicon membrane micropump with integrated bimetallic actuator.» *Chinese Journal of Electronics*, 1996: 5(2): 29–35.
- Zhang, C., Xing, D., and Li, Y. «Micropumps, microvalves, and micromixers within PCR microfluidic chips: advances and trends.» *Biotechnology Advances*, 2007: 25:483–514.
- Zhang, C., Xing, D., and Li, Y. «Micropumps, microvalves, and micromixers within PCR microfluidic chips: Advances and trends.» *Biotechnology Advances*, 2007: 25:483-514.
- Zheng, W., and Ahn, C.H. «A bi-directional magnetic micropump on a silicon wafer.» *Technical Digest Solid-State Sensor and Actuator Workshop*. Hilton Head Island, SC, USA, 1996.

---

Zhou, Q., Lau, S., Wu, D., and Kirk Shung, K. «Piezoelectric films for high frequency ultrasonic transducers in biomedical applications.» *Progress in Materials Science*, 2011: 56 (2), pp. 139-174.