POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi
Corso di Studi in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

ANALISI DELLE PROPRIETÀ REGOLARIZZANTI E ASINTOTICHE DI ALCUNE EVOLUZIONI NON-LINEARI: UN APPROCCIO TRAMITE DISUGUAGLIANZE FUNZIONALI

Relatore:
Prof. Gabriele GRILLO

Laureando:
Matteo MURATORI
matricola 735274

Anno Accademico 2010/2011

Indice

Sommario

L'obiettivo principale di questa tesi di Laurea Magistrale era analizzare possibili connessioni tra la validità di opportune disuguaglianze funzionali in spazi di Sobolev pesati e il soddisfacimento di determinate stime regolarizzanti e asintotiche di tipo L^q-L^r per le soluzioni di alcune equazioni evolutive non-lineari, in particolare l'equazione dei mezzi porosi pesata (*WPME*, *Weighted Porous Media Equation*) e l'evoluzione del p-Laplaciano pesato (*WpLE*, *Weighted p-Laplacian Evolution*). Tali connessioni sono ben note nel contesto lineare, tuttavia recenti lavori hanno mostrato la possibilità che esse possano aver luogo anche quando si considerino evoluzioni non-lineari come quelle citate. In una prima parte del lavoro dimostriamo che la validità di una disuguaglianza di p-Poincaré con la media, rispetto a due pesi presenti nell'equazione, è necessaria e sufficiente affinché le soluzioni della *WpLE* (con condizioni di Neumann omogenee) soddisfino una certa famiglia di stime regolarizzanti e asintotiche. Quest'ultimo risultato era già noto essere vero per la stessa equazione ma con condizioni di Dirichlet omogenee. Successivamente dimostriamo una simile proprietà per le soluzioni della *WPME* con condizioni di Dirichlet omogenee, non prima di aver stabilito per essa alcuni risultati di buona posizione che in letteratura non erano presenti in un ambito sufficientemente generale. In seguito studiamo nuovamente stime regolarizzanti e asintotiche per la *WPME* con condizioni di Neumann omogenee. In primo luogo, sotto l'ipotesi che nel dominio valga una disuguaglianza di 2-Poincaré con la media pesata, proviamo un effetto regolarizzante di tipo L^q-L^r e la convergenza a zero dell'ordine di una potenza del tempo negativa per soluzioni a media nulla e una convergenza esponenziale alla media per soluzioni *essenzialmente limitate* a media non nulla. In secondo luogo svolgiamo la medesima analisi sotto l'ipotesi più forte che valga una disuguaglianza di Sobolev pesata. Tale problema, nella sostanza, era già stato affrontato, e si era dimostrato che la regolarizzazione portava dati integrabili in soluzioni essenzialmente limitate (il che in generale è falso se è valida solo una disuguaglianza di Poincaré). In questo lavoro riusciremo a migliorare alcune delle precedenti stime note.
Infine, un intero capitolo è volto a illustrare molti esempi (riportati dalla corrispondente letteratura) di domini e pesi che soddisfano disuguaglianze di p-Poincaré (e in alcuni casi disuguaglianze di Sobolev).

Parole chiave: disuguaglianze funzionali; spazi di Sobolev pesati; evoluzione del p-Laplaciano pesato; equazione dei mezzi porosi pesata; stime regolarizzanti; stime asintotiche.

Abstract

The main goal of this Master Thesis was to investigate connections between the validity of suitabile functional inequalities in some weighted Sobolev spaces and L^q-L^r regularizing and decay estimates for the solutions of certain nonlinear evolution equations, basically the *Weighted Porous Media Equation* (shortened *WPME*) and the *Weighted p-Laplacian Evolution* (shortened *WpLE*). These connections are well-known in the linear context, while only relatively recent papers gave rise to the possibility of their existence also when considering nonlinear evolutions such as the ones just mentioned. In a first part of the work we prove that the validity of a p-Poincaré inequality (for zero-mean functions) with respect to two weight functions involved in the equation is necessary and sufficient for the solutions of the *WpLE* (with homogeneous Neumann boundary conditions) to satisfy a suitabile family of regularizing and decay estimates. This last result was already known to hold true for the same equation but assuming homogeneous Dirichlet boundary conditions. Afterwards we prove a similar property for the solutions of the *WPME* with homogeneous Dirichlet boundary conditions, not before having established some well-posedness results which were not available in the literature. Then we investigate again regularizing and decay estimates for the solutions of the *WPME* with homogeneous Neumann boundary conditions. Firstly the analysis is performed under the hypothesis that a weighted 2-Poincaré inequality (for zero-mean functions) holds in the domain, proving an L^q-L^r regularizing effect and a negative-power-type convergence to zero for zero-mean solutions and an exponential convergence to the mean value for *essentially bounded* non-zero-mean solutions. Secondly the same analysis is provided under the stronger assumption that a weighted Sobolev inequality holds. This case, actually, had already been studied, and the regularization was known to turn every integrable datum into an essentially bounded solution (which is *not* true when only a Poincaré inequality holds). However, we improve some of those previous estimates.
Finally, a whole chapter is devoted to illustrate several examples (taken from the related literature) of domains and weights that satisfy p-Poincaré (and in certain cases also Sobolev) inequalities.

Keywords: functional inequalities; weighted Sobolev spaces; weighted p-Laplacian evolution; weighted porous media equation; regularizing estimates; decay estimates.

Introduzione

L'equazione dei mezzi porosi

Una delle più semplici versioni non-lineari e degeneri della celebre equazione del calore è certamente costituita dall'equazione dei mezzi porosi (*PME*, *Porous Media Equation*). Dati un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e il parametro caratteristico $m > 1$, essa ha la seguente forma (è sottintesa l'assunzione di un opportuno dato iniziale e condizioni al bordo):

$$u_t = \Delta(u^m) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)\,, \tag{1}$$

con $u \geq 0$. Lo sviluppo di una solida teoria matematica che analizzasse in modo sufficientemente generale questioni fondamentali quali esistenza, unicità e altre importanti proprietà delle soluzioni della (1) ha avuto luogo solo in tempi relativamente recenti, ed il volume [Váz07] ne costituisce ad oggi forse la sintesi più completa. La parabolicità dell'equazione rende la stessa per certi versi simile all'equazione del calore (che corrisponde al caso $m = 1$), ma il carattere non-lineare e soprattutto degenere fa sì che le relative soluzioni manifestino allo stesso tempo comportamenti peculiari che non trovano eguali nelle soluzioni dell'equazione del calore. Sviluppando nella (1) il Laplaciano come divergenza del gradiente, otteniamo:

$$u_t = \operatorname{div}(m\, u^{m-1}\, \nabla u) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)\,, \tag{2}$$

da cui si vede che il coefficiente di diffusione (o di diffusività) è $m\, u^{m-1}$. In particolare, se pensassimo a u come alla concentrazione di qualche sostanza in Ω avremmo che la diffusione è tanto meno rapida quanto meno intensa è tale concentrazione. A livello matematico ciò si traduce nella notevole proprietà della *velocità di propagazione finita* che contraddistingue le soluzioni della (1) e che le differenzia radicalmente dalle analoghe dell'equazione del calore. Ponendoci nel contesto dell'intero spazio euclideo ($\Omega = \mathbb{R}^N$), è ben noto che la funzione

$$u_C(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{\frac{-|\mathbf{x}|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \tag{3}$$

costituisce il cosiddetto *nucleo integrale* dell'equazione del calore (o *soluzione fondamentale*), a partire dal quale, per convoluzione, si possono ottenere tutte le soluzioni corrispondenti a dati iniziali integrabili. Esso assume come dato iniziale la distribuzione $\delta(\cdot)$ di Dirac, che a livello fisico rappresenta la configurazione di una sostanza idealmente *concentrata* in un punto. La velocità di propagazione di una simile soluzione è chiaramente infinita, dato che dopo un arbitrario tempo $\tau > 0$ $u(\cdot, \tau)$ è strettamente positiva in tutto $\mathbb{R}^N$; si può poi vedere, per l'appunto tramite

convoluzione, che la stessa proprietà vale anche per generici dati iniziali a supporto compatto.
Per l'equazione dei mezzi porosi, è stata dimostrata l'esistenza di una famiglia di soluzioni su $\mathbb{R}^N$ che rappresentano la controparte non-lineare della soluzione fondamentale dell'equazione del calore (a causa della stessa non-linearità evidentemente si perde il concetto di nucleo integrale), le cosiddette ZKB, dai nomi di tre fisici e matematici russi (Zel'dovich, Kompaneets e Barenblatt) che le hanno ricavate attorno al 1950. Le soluzioni ZKB si presentano così (si veda [Váz07, cap. 4] per una loro derivazione):

$$u_{ZKB}(\mathbf{x},t) = t^{-\alpha}\left(C - k|\mathbf{x}|^2 t^{-2\beta}\right)_+^{\frac{1}{m-1}}, \tag{4}$$

dove

$$\alpha = \frac{N}{N(m-1)+2}, \ \beta = \frac{\alpha}{N}, \ k = \frac{\alpha(m-1)}{2mN},$$

essendo $C > 0$ una costante arbitraria legata a $M = \int_{\mathbb{R}^N} u$ (la "massa totale", che si conserva[1]). Si può dimostrare che quando $m \to 1$ la ZKB di massa totale unitaria converge alla soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Ciononostante, almeno tre importanti elementi, tra loro correlati, differenziano le soluzioni ZKB da quest'ultima:

- una velocità di propagazione *finita*;
- la formazione di una naturale *frontiera libera* che separa la regione in cui $u > 0$ da quella in cui $u = 0$, che è una superficie della forma

$$t = c(C, m, N)|\mathbf{x}|^{N(m-1)+2};$$

- la limitata regolarità (u_C è C^∞, le u_{ZKB} sono solo Hölderiane).

Si può poi dimostrare che queste proprietà, nella sostanza, rimangono valide anche per generiche soluzioni [Váz07, cap. 14]. In particolare, la finitezza della velocità di propagazione (chiaramente legata alla degenerazione della diffusione), dal punto di vista modellistico, rende un'equazione come la (1) più adatta a rappresentare determinati fenomeni fisici, tra cui anche la diffusione del calore. Il principale difetto che si imputa all'equazione del calore è proprio il fatto che non sia molto realistica la propagazione a velocità infinita da essa prevista. Vedremo nel seguito alcuni esempi di fenomeni fisici nella modellizzazione dei quali la *PME* gioca un ruolo molto importante.

In questa tesi, l'oggetto principale d'indagine sarà l'equazione dei mezzi porosi pesata (*WPME*, *Weighted Porous Media Equation*), anche nota come equazione dei mezzi porosi non-omogenea (*IHPME*, *Inhomogeneous Porous Media Equation*). Fissati due pesi (ovvero funzioni quasi ovunque strettamente positive) ρ_ν e ρ_μ, essa costituisce la seguente generalizzazione della *PME*:

$$u_t = \rho_\nu^{-1} \operatorname{div}\left(\rho_\mu \nabla(u^m)\right) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty). \tag{5}$$

[1]Nella soluzione fondamentale dell'equazione del calore essa vale identicamente 1, e per modificarla evidentemente basta moltiplicare per M la (3).

In letteratura manca una teoria sufficientemente generale per la (5). Solo in alcuni recenti lavori, tra i quali citiamo [RV08], [RV09], [KRV10], in cui peraltro si estendono risultati precedentemente ottenuti dagli stessi autori, si è studiato in dettaglio il caso particolare $\Omega = \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) e $\rho_\mu = 1$, assumendo su ρ_ν opportune condizioni di decadimento all'infinito; in sostanza si richiede che ρ_ν sia regolare localmente e che all'infinito si comporti come $|\mathbf{x}|^{-\gamma}$, per $\gamma > 0$. Al variare di γ si osservano interessanti fenomeni: ad esempio per $\gamma \in (0,2)$ continuano a esistere delle soluzioni di tipo ZKB e il loro comportamento rappresenta quello di un'ampia classe di soluzioni [RV09]; invece per $\gamma \in [2, \gamma_2)$, dove

$$\gamma_2 = 2 + \frac{(m-1)(N-2)}{m} \, ,$$

le soluzioni le soluzioni tendono, a livello asintotico, a comportarsi più come specifiche soluzioni a separazione di variabili, cioè della forma

$$u_S(\mathbf{x}, t) = t^{-\frac{1}{m-1}} w(\mathbf{x}) \, , \tag{6}$$

essendo w la soluzione "minimale" [KRV10] del problema ellittico

$$-\Delta(w^m) = \frac{\rho_\nu}{m-1} w \, .$$

Per questi valori di γ le ZKB ci sono ancora ma diventano illimitate, mentre per $\gamma > \gamma_2$ non esistono più (e le soluzioni continuano piuttosto a convergere opportunamente a u_S). In effetti nel caso di domini limitati quello che accade per la PME non pesata è che il comportamento asintotico delle soluzioni è guidato anche in tale contesto da soluzioni a separazione di variabili. Perciò, in sostanza, le soglie 2 e γ_2 fanno distinzione tra classi di pesi che, a causa del loro andamento all'infinito, rendono lo spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ meno o più simile ad un dominio limitato. Il valore γ_2, peraltro, è legato alla velocità di propagazione. Infatti si può mostrare che per $\gamma < \gamma_2$ dati iniziali a supporto compatto restano tali, mentre per $\gamma > \gamma_2$ questa proprietà si perde [RV08].
Nei capitoli 2 e 3 analizzeremo fenomeni meno raffinati e più generali. Studieremo, in particolare, alcune proprietà regolarizzanti (miglioramento dell'integrabilità rispetto al dato iniziale) e asintotiche (convergenza a zero o alla media) delle soluzioni della (5), assumendo solo che gli spazi di Sobolev pesati $W_0^{1,2}(\Omega; \nu, \mu)$ o $W^{1,2}(\Omega; \nu, \mu)$, che costituiranno la naturale ambientazione funzionale del problema, soddisfino una disuguaglianza di 2-Poincaré o di 2-Poincaré (o di Sobolev) con la media (si veda l'appendice A); il tutto, evidentemente, dopo aver stabilito alcuni risultati di buona posizione, richiedendo qualche ipotesi restrittiva sulla regolarità locale dei pesi.

Le connessioni tra la validità di opportune disuguaglianze funzionali e proprietà regolarizzanti e asintotiche di certe evoluzioni *lineari* sono state largamente studiate in passato (si veda [Dav89, cap. 2]), a partire principalmente dalle idee pionieristiche di J. Nash [Nas58] e L. Gross [Gro75]. L'estensione di una simile analisi anche in contesti non-lineari è piuttosto recente, ed è dovuta sostanzialmente ai lavori [BG05m] per quanto riguarda l'equazione dei mezzi porosi e a [BG05p], [Gri10] per l'evoluzione del p-Laplaciano (quando $p > 2$). Quest'ultima rientra nell'ambito delle equazioni diffusive in cui il coefficiente di diffusività dipende dal gradiente della soluzione, ed è così definita:

$$u_t = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \, . \tag{7}$$

Nel breve capitolo 1 ci occuperemo anche della versione pesata di tale equazione, estendendo i risultati ottenuti in [Gri10] con condizioni di Dirichlet omogenee alle condizioni di Neumann omogenee.

Le evoluzioni che studieremo, in realtà, prescindono dalla richiesta $u \geq 0$; ovvero, sottintendendo $u^m = |u|^{m-1}\,\mathrm{sign}(u)$, l'equazione (1) diventerà per noi la cosiddetta *signed PME*, la quale permette a u di assumere possibilmente valori negativi, altrimenti detto si dà un significato anche al concetto di soluzione per dati iniziali non necessariamente non-negativi. Si può poi dimostrare, una volta definite opportune soluzioni deboli per la (1) o per la (5) e stabiliti risultati di esistenza e unicità, che le soluzioni della *signed PME* si mantengono non-negative per dati iniziali non-negativi, coincidendo quindi con le corrispondenti soluzioni della classica *PME*.
L'interesse per soluzioni con segno, in sostanza, è puramente matematico. Infatti, come vedremo tra poco, i principali modelli fisici che portano alla *PME* riguardano l'evoluzione di quantità come densità, lunghezze o temperature (assolute) che sono intrinsecamente non-negative.
A livello di condizioni al bordo per le equazioni (1), (5) e (7), si considereranno quelle di Dirichlet omogenee,

$$u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega\,,$$

oppure quelle di Neumann omogenee,

$$F(u) = 0 \quad \text{su } \partial\Omega\,,$$

dove F rappresenta il flusso uscente dal dominio della quantità che diffonde, ovvero $\nabla(u^m)\cdot\mathbf{n}$ per l'equazione dei mezzi porosi e $|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\mathbf{n}$ per l'equazione del p-Laplaciano. Nel caso di equazioni pesate, i flussi rimangono gli stessi pur di moltiplicarli per ρ_μ. Imporre $u = 0$ sul bordo del dominio[2] equivale ad assumere che lì non vi sia sostanza (o, in base al modello, che la temperatura sia nulla). Imporre $F(u) = 0$ significa invece non ammettere flusso di sostanza (o flusso di calore) attraverso le pareti del dominio. Non a caso, pensando a domini limitati e alle equazioni non pesate, quello che accade è che per il problema di Dirichlet la massa totale diminuisce e la soluzione tende a zero per $t \to \infty$ (la materia o il calore sono liberi di uscire dal dominio), mentre per il problema di Neumann la massa totale si conserva e la soluzione converge alla sua media (non c'è flusso da o verso le pareti). Analizzeremo queste proprietà in un contesto un po' più generale in particolare nei capitoli 2 e 3.

Infine, segnaliamo che il caso $m \in (0,1)$ dà luogo alla cosiddetta equazione della diffusione veloce (*FDE*, *Fast Diffusion Equation*). Già dalla (2) è naturale aspettarsi che per questo intervallo di valori del parametro l'evoluzione possa essere sostanzialmente diversa da quella indotta dall'equazione dei mezzi porosi, che è una diffusione lenta. Infatti ora la diffusività è tanto più *elevata* quanto più rada è la concentrazione di sostanza. Per una breve introduzione a quest'interessante equazione, di cui *non* ci occuperemo, segnaliamo la sezione 5.10 di [Váz07] e i riferimenti ivi citati. Il fenomeno senza dubbio più caratteristico delle soluzioni della *FDE* è l'estinzione in tempi finiti (per il problema di Dirichlet); ovvero, la diffusione è così rapida che dopo un tempo finito T (dipendente dal dato iniziale) tutta la sostanza è fuoriuscita dal dominio e quindi da quell'istante in poi la soluzione è identicamente nulla.

[2] Chiaramente quando *c'è* un bordo (abbiamo visto esempi di soluzioni in $\mathbb{R}^N$).

Modelli fisici per la *PME*

Vediamo nel seguito alcune importanti applicazioni fisiche (tratte da [Váz07, cap. 2]) in cui l'equazione dei mezzi porosi si è rivelata un adeguato modello per il fenomeno in esame. Di volta in volta sottolineeremo quale ruolo possano assumere eventuali pesi ρ_ν e ρ_μ considerati.

Volendo descrivere la distribuzione della densità σ un gas politropico in un mezzo poroso, è necessario comporre tre fondamentali equazioni. La prima è la legge di bilancio di massa, anche nota come *equazione di continuità*, e si scrive in questo modo:

$$\varepsilon\sigma_t + \mathrm{div}(\sigma\mathbf{V}) = 0\,, \tag{8}$$

dove $\mathbf{V}$ è la velocità del gas nel mezzo e $\varepsilon \in (0,1)$ è la porosità di quest'ultimo, ovvero la frazione di volume in esso disponibile per la circolazione dei fluidi. Una seconda equazione è costituita dalla *legge di Darcy*, una relazione empirica che lega la velocità $\mathbf{V}$ alla pressione p:

$$\upsilon\mathbf{V} = -\kappa\nabla p\,, \tag{9}$$

essendo υ la viscosità del gas e κ la permeabilità del mezzo (quantità che esprime la facilità con cui un fluido in pressione lo può attraversare). Infine abbiamo l'equazione di stato per i gas perfetti, che mette in relazione pressione e densità:

$$p = p_0\,\sigma^\gamma\,, \tag{10}$$

dove $\gamma \geq 1$ è il cosiddetto *esponente politropico* e p_0 la pressione di riferimento. Dopo pochi passaggi, si arriva facilmente alla seguente equazione per la densità:

$$\sigma_t = \frac{\gamma\kappa p_0}{\varepsilon\upsilon(\gamma+1)}\Delta(\sigma^{\gamma+1})\,, \tag{11}$$

cioè l'equazione dei mezzi porosi per $m = \gamma + 1$ (a meno di una costante moltiplicativa che si può rimuovere con un semplice riscalamento temporale). Il risultato finale costituisce il cosiddetto modello di Leibenzon-Muskat (si veda, ad esempio, il volume [Mus37]). È chiaro che ammettendo anche una non-omogeneità spaziale della porosità il ruolo di quest'ultima equivale a quello del peso ρ_ν nell'equazione pesata (5), mentre un'eventuale non-omogeneità della permeabilità si riflette nella presenza del peso interno ρ_μ.

Un'altra importante applicazione della *PME* si ha con il modello di propagazione del calore in plasma (ovvero gas ionizzati) ad alte temperature. Esso prevede una modifica della classica legge di Fourier (che porta all'equazione del calore), in cui la conduttività termica dipende opportunamente dalla temperatura:

$$c\,\sigma\,T_t = \mathrm{div}(\phi(T)\,\nabla T)\,, \tag{12}$$

dove c è il calore specifico a pressione costante, σ la densità del gas, T la distribuzione di temperatura nello stesso (l'incognita) e ϕ (la conduttività termica) un'opportuna funzione della temperatura (ed eventualmente della variabile spaziale). Con la scelta $\phi(T) = aT^3$, per una fissata costante $a > 0$, otteniamo il modello di Zel'dovich-Raizer, corrispondente (a meno di costanti moltiplicative) all'equazione dei mezzi porosi con $m = 4$. Anche in questo caso osserviamo che una versione pesata della

(12) si deriva assumendo che la densità del gas (che qui è data) o la conduttività termica non siano spazialmente omogenee.

Un buon modello per la descrizione del fenomeno delle infiltrazioni idriche sotterranee si ha con la cosiddetta *equazione di Boussinesq*. Tale fenomeno consiste nella penetrazione di una sostanza fluida (tipicamente acqua) in uno strato poroso (di norma terroso) di una fissata altezza H giacente a sua volta su uno strato solido impermeabile. Si vuole stabilire quale sarà l'altezza h, dipendente dalle coordinate piane (x, y), dell'acqua infiltrata all'interno dello strato poroso, considerando a livello zero lo strato impermeabile sottostante. Le equazioni che si utilizzano sono sostanzialmente le stesse descritte per il modello di Leibenzon-Muskat (equazione di continuità e legge di Darcy, che qui tiene conto anche della gravità), anche se in questo caso l'incognita non è una densità (che si ritiene costante) bensì parte del dominio stesso, ovvero l'altezza h dell'acqua infiltrata. Se si assume che l'acqua si stia muovendo nel sottosuolo con una velocità prevalentemente orizzontale e che non ci siano variazioni significative rispetto alla variabile trasversale y, dopo alcuni passaggi, sfruttando le citate equazioni [Váz07, sez. 2.3], si può arrivare alla seguente relazione (*equazione di Boussinesq*):

$$h_t = \frac{\sigma g \kappa}{2\varepsilon \upsilon}(h^2)_{xx}\,, \tag{13}$$

dove g è l'accelerazione di gravità e ε, κ, σ e υ sono sempre, rispettivamente, la porosità e la permeabilità dello strato e la densità e la viscosità dell'acqua. Come si vede, la (13) equivale alla *PME* (modulo costanti moltiplicative) per $N = 1$ e $m = 2$. L'interpretazione di possibili pesi ρ_ν e ρ_μ è, naturalmente, ancora legata ad un eventuale carattere non omogeneo del mezzo.

Infine, da [GM77] abbiamo una semplice legge che descrive l'evoluzione di una determinata specie biologica, di cui indichiamo la densità in un'opportuna regione con la variabile u:

$$u_t = \operatorname{div}(\phi(u)\nabla u) + f(u)\,, \tag{14}$$

dove ϕ è una data funzione crescente (che rappresenta la diffusività della specie) e la forzante $f(u)$ è intesa riassumere gli effetti dovuti all'interazione con altre specie. Una scelta comune consiste nel porre $\phi(u) = au$ ($a > 0$ costante). Eventuali pesi ρ_ν e ρ_μ indicano sempre non-omogeneità spaziale, o della regione in cui la specie evolve (ρ_ν) o della diffusività della stessa (ρ_μ).

Come anticipato, nel capitolo 1 tratteremo anche l'equazione evolutiva del p-Laplaciano pesato. A livello di modelli, le sue applicazioni sono decisamente meno numerose rispetto a quelle dell'equazione dei mezzi porosi. Ci limitiamo a segnalare che essa appare, principalmente, in alcuni modelli di fluidi non-Newtoniani e, in un contesto 2-dimensionale, nell'*image processing*. Per riferimenti più precisi rimandiamo a [Töl11].

Organizzazione della tesi

L'appendice A contiene importanti definizioni e proprietà, nonché notazioni, relative a certi spazi di Sobolev pesati (e connesse disuguaglianze di p-Poincaré), delle quali si farà frequente uso nel resto del lavoro.

Nel capitolo 1 studieremo alcune proprietà regolarizzanti e asintotiche di tipo $L^{q_0}_\nu$-L^ϱ_ν (s'intende che il dato iniziale appartiene a $L^{q_0}(\Omega;\nu)$ e la soluzione, in un qualsiasi istante temporale $t>0$, a $L^\varrho(\Omega;\nu)$ con $\varrho>q_0$) delle soluzioni dell'equazione evolutiva del p-Laplaciano pesato con condizioni di Neumann omogenee. Dopo una prima sezione dedicata alla buona posizione del problema, ottenibile con argomenti piuttosto classici, stabiliremo l'equivalente del teorema 1.3 di [Gri10], dimostrando quindi che la validità della disuguaglianza di p-Poincaré con la media nello spazio $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è *equivalente* alla validità di una certa famiglia di stime regolarizzanti (e asintotiche) per le soluzioni di tale evoluzione. Il metodo consisterà nell'adattare l'approccio differenziale alla Gross già utilizzato in [Gri10]. A differenza di quanto dimostrato in [BG05p], in cui si assume la validità della disuguaglianza di Sobolev con la media (che è più forte della disuguaglianza di Poincaré), vedremo anche che, in generale, la regolarizzazione *non* arriva fino a $\varrho=\infty$.

Nel capitolo 2 studieremo simili proprietà per le soluzioni dell'equazione dei mezzi porosi pesata con condizioni di Dirichlet omogenee. Tuttavia in questo contesto una prima sezione relativamente corposa sarà dedicata allo studio della buona posizione del problema, dato che come detto non erano disponibili in letteratura risultati sufficientemente generali. Fornita una ragionevole definizione di soluzione debole, proveremo un teorema di esistenza e unicità. Il procedimento utilizzato nella dimostrazione sarà fortemente basato sulle tecniche sviluppate nel capitolo 5 di [Váz07]. Ovvero, l'idea principale è quella di risolvere dei problemi non-degeneri (rispetto ai quali ci si appella alla teoria quasilineare standard) che approssimino il problema originario, passando poi opportunamente al limite. Il risultato che otterremo varrà per generici domini $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, sotto alcune ipotesi di regolarità *locale* dei pesi ρ_ν e ρ_μ, cui sarà quindi consentito avere singolarità al più su $\partial\Omega$. Nelle successive sezioni stabiliremo che la validità della disuguaglianza di 2-Poincaré in $W^{1,2}_0(\Omega;\nu,\mu)$ implica che le soluzioni del problema di Dirichlet soddisfano una determinata stima regolarizzante (e asintotica) di tipo $L^{q_0}_\nu$-L^ϱ_ν (ancora tramite un metodo differenziale alla Gross), e proveremo l'implicazione inversa richiedendo $\nu(\Omega)<\infty$. Con un controesempio verificheremo nuovamente che, in generale, la regolarizzazione *non* ha luogo per $\varrho=\infty$, cosa che invece accade se si assume la validità di una disuguaglianza di Sobolev (dai risultati di [BG05m]).

Il capitolo 3 è dedicato a problematiche analoghe relative alle soluzioni dell'equazione dei mezzi porosi pesata con condizioni di Neumann omogenee. In una prima sezione proveremo anche in questo caso un risultato di esistenza e unicità, procedendo sulla falsariga del problema di Dirichlet. Successivamente dimostreremo che, assunta la validità della disuguaglianza di 2-Poincaré con la media in $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$, ha luogo una regolarizzazione sempre di tipo $L^{q_0}_\nu$-L^ϱ_ν, sia attraverso un approccio differenziale alla Gross che adattando la classica tecnica iterativa di Moser. Lo studio dell'asintotica delle soluzioni del problema di Neumann è risultato molto meno banale sia rispetto al problema di Dirichlet, in cui le soluzioni tendono a zero e le stime regolarizzanti danno in realtà già molte informazioni anche per tempi grandi, che rispetto al problema di Neumann per l'evoluzione del p-Laplaciano, in cui il comportamento delle soluzioni a media nulla è equivalente a quello delle soluzioni a media non nulla (a patto di sostituire la convergenza a zero con la convergenza alla media). In particolare, proveremo che per soluzioni a media nulla si ha convergenza a zero (in tutti gli spazi $L^\varrho(\Omega;\nu)$, $\varrho<\infty$) ed essa è dell'ordine di una potenza negativa del tempo (analogamente a quanto accade per il problema di Dirichlet e per l'evoluzione del p-Laplaciano), mentre per soluzioni a media non nulla generiche avremo sempre una convergenza alla media almeno dell'ordine di una potenza negativa del tempo, ma apparentemente (si tratta di stime dall'alto) meno rapida; tuttavia quando il dato iniziale è anche *limitato* riusciremo a dimostrare che in quest'ultimo caso la convergenza è addirittura esponenziale (fatto già noto, in un contesto particolare, dai risultati di [AR81]). A livello di implicazioni inverse, ne dedurremo una parziale, cioè a partire dalla validità di una certa stima regolarizzante otterremo che nello spazio $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ è a sua volta valida una disuguaglianza più debole di quella di Poincaré con la media. Infine, studieremo proprietà regolarizzanti e asintotiche delle soluzioni del problema di Neumann assumendo la validità della disuguaglianza di Sobolev con la media, analisi nella sostanza già effettuata in [BG05m] tramite un approccio differenziale alla Gross. In particolare, in questo caso ha effettivamente luogo una regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^∞ (cosa che, ancora una volta, *non* accade in generale se vale solo la disuguaglianza di Poincaré). Con una tecnica iterativa di Moser miglioreremo alcune delle stime ricavate nel suddetto lavoro.

Capitolo 1

L'evoluzione del p-Laplaciano pesato con condizioni di Neumann

In questo capitolo ci occupiamo dell'equazione evolutiva del p-Laplaciano con pesi ρ_ν e ρ_μ (siano $\mathrm{d}\nu = \rho_\nu \mathrm{d}\lambda$ e $\mathrm{d}\mu = \rho_\mu \mathrm{d}\lambda$ le rispettive misure), ambientata in un generico dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ di ν-misura *finita*. Richiederemo che ρ_ν e ρ_μ soddisfino le minime ipotesi discusse nella sezione A.1 che garantiscono la completezza dello spazio $W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$, il quale, come vedremo, costituisce il naturale contesto funzionale in cui analizzare il problema.
Formalmente, l'evoluzione studiata è la seguente:

$$\begin{cases} u_t = \rho_\nu^{-1} \operatorname{div}(\rho_\mu \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ \rho_\mu \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \quad \text{in } \Omega \end{cases} , \tag{1.0.1}$$

dove p è un fissato parametro che nel corso dell'intero capitolo si supporrà sempre appartenere all'intervallo $(2,\infty)$. Naturalmente la condizione al bordo va intesa in senso classico solo laddove il peso ρ_μ è non degenere e $\partial\Omega$ è sufficientemente regolare.
L'obiettivo è quello di estendere i risultati regolarizzanti e asintotici dimostrati in [Gri10] per la suddetta equazione con condizioni di Dirichlet omogenee al caso delle condizioni di Neumann omogenee, assumendo unicamente la validità della disuguaglianza di p-Poincaré con la media

$$\left\|v - \overline{v}\right\|_{p;\nu} \le C_P \left\|\nabla v\right\|_{p;\mu} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)\,, \tag{1.0.2}$$

dove

$$\overline{v} = \frac{\int_\Omega v \, \mathrm{d}\nu}{\nu(\Omega)} \,.$$

La sezione 1.1 è dedicata ad un breve studio della buona posizione del problema, basato su argomenti classici (a questo scopo dovremo fare una restrizione, in realtà piuttosto blanda, sulla classe di pesi considerata). Nella sezione 1.2 si dimostra, a partire esclusivamente dalla (1.0.2), che l'evoluzione (1.0.1) manifesta proprietà regolarizzanti e asintotiche di tipo $L^{q_0}_\nu$-L^{ϱ}_ν, con $q_0 \in [1,\infty)$ e $\varrho \in (q_0,\infty)$; nella sezione 1.3 si prova invece un'implicazione inversa, ovvero che la validità di opportune proprietà regolarizzanti e asintotiche per le soluzioni della (1.0.1) implica a sua volta che nello spazio $W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$ è soddisfatta la (1.0.2).

1.1 Buona posizione del problema

Nello studio di esistenza e unicità di soluzioni deboli per la (1.0.1), opportunamente riformulata, un ruolo fondamentale è giocato dal funzionale dell'energia associato all'evoluzione, ovvero

$$\mathcal{E}_p(f) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla f|^p \, \mathrm{d}\mu \,. \tag{1.1.1}$$

In particolare, è cruciale che $\mathcal{E}_p$ sia convesso e semi-continuo inferiormente in $L^2(\Omega;\nu)$. Possiamo dimostrare questo fatto posto che il peso ρ_ν soddisfi un'ipotesi aggiuntiva (rispetto a quella su ρ_μ che assicura la completezza di $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$, sezione A.1).

Proposizione 1.1. *Il funzionale $\mathcal{E}_p : L^2(\Omega;\nu) \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, definito come*

$$\mathcal{E}_p(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_\Omega |\nabla f|^p \, \mathrm{d}\mu & \text{se } f \in \{g \in L^2(\Omega;\nu) : \ \nabla g \in [L^p(\Omega;\mu)]^N\} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} , \tag{1.1.2}$$

è sempre convesso. Se inoltre $\rho_\mu \in B^p(\Omega)$ e $\rho_\nu \in B^2(\Omega)$, esso è anche semi-continuo inferiormente.

Dimostrazione. La convessità è un'immediata conseguenza della medesima proprietà di cui gode la funzione $|x|^p$. Per quanto riguarda la semi-continuità inferiore, procediamo con un argomento standard. Consideriamo una successione $f_n \to f$ in $L^2(\Omega;\nu)$. Senza perdita di generalità, è lecito assumere che $\nabla f_n \rightharpoonup \mathbf{w}$ in $[L^p(\Omega;\mu)]^N$. Fissata una generica $\boldsymbol{\varphi} \in [C_c^\infty(\Omega)]^N$, grazie alle ipotesi sui pesi possiamo dedurre, passando al limite nell'equazione che definisce ∇f_n in senso debole, che

$$\int_\Omega f \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \,,$$

ovvero $\mathbf{w} = \nabla f$. Perciò, grazie alla semi-continuità inferiore debole di $\| \cdot \|_{p;\mu}$, otteniamo:

$$\mathcal{E}_p(f) = \frac{1}{p} \, \|\nabla f\|_{p;\mu}^p \leq \frac{1}{p} \liminf_{n\to\infty} \|\nabla f_n\|_{p;\mu}^p = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}_p(f_n) \,,$$

cioè la semi-continuità inferiore di $\mathcal{E}_p$ in f. □

Osservazione 1.1. *Dalla dimostrazione, si vede come non si utilizzi in alcun modo la validità della* (1.0.2). *Se invece si volesse sfruttare anche la* (1.0.2) *(e quindi, implicitamente, la finitezza di $\nu(\Omega)$), non è difficile verificare che si otterrebbe la stessa conclusione anche senza l'assunzione $\rho_\nu \in B^2(\Omega)$.*

A questo punto siamo nelle condizioni di poter risolvere la (1.0.1) nell'ambito astratto delle equazioni differenziali in spazi di Hilbert governate da sottogradienti di funzionali convessi semi-continui inferiormente. Per la definizione di sottogradiente (o sottodifferenziale) si veda la sezione 2.2. Per un'ampia analisi di tali equazioni, rimandiamo a [Bré71] o [Bré73]. Formalmente, il sottogradiente $\partial\mathcal{E}_p$ del funzionale $\mathcal{E}_p$ in f è

$$\partial\mathcal{E}_p(f) = -\rho_\nu^{-1} \operatorname{div}(\rho_\mu \, |\nabla f|^{p-2} \, \nabla f) \,. \tag{1.1.3}$$

Dal fondamentale teorema 3.2 di [Bré73] abbiamo che, dato un qualsiasi elemento $u_0 \in L^2(\Omega;\nu)$, esiste un'unica funzione $u \in C([0,\infty); L^2(\Omega;\nu))$, assolutamente continua (a valori in $L^2(\Omega;\nu)$) in (τ,∞) per ogni $\tau > 0$, tale che

$$\begin{cases} u_t(t) \in -\partial\mathcal{E}_p(u(t)) & \text{per q.o. } t \in (0,\infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases} . \tag{1.1.4}$$

Inoltre la quantità $\mathcal{E}_p(u(t))$ è non-crescente [Bré73, teo. 3.2 (17)]. La (1.1.4) costituisce una formulazione rigorosa della (1.0.2). La condizione al bordo in realtà è implicita nel fatto che $\partial\mathcal{E}_p$ ha la forma (1.1.3), ovvero che il differenziale di $\mathcal{E}_p$ si può scrivere come un prodotto scalare in $L^2(\Omega;\nu)$. Infatti, se u, ρ_μ, Ω e φ fossero sufficientemente regolari avremmo (applicando esplicitamente il differenziale di $\mathcal{E}_p$ in u a φ e utilizzando la (1.1.3)):

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}\mu = -\int_\Omega \rho_\nu^{-1} \operatorname{div}(\rho_\mu |\nabla u|^{p-2} \nabla u)\, \varphi \, \mathrm{d}\nu \, ;$$

valendo l'uguaglianza per ogni φ, deduciamo che $\rho_\mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$. Come osservato in [BG05p], si può mostrare che la soluzione u della (1.1.4) risolve anche la seguente forma debole dell'equazione (1.0.1) (per un qualsiasi $T > 0$ fissato):

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega u(\mathbf{x},s) v_t(\mathbf{x},s) \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}s = &-\int_\Omega u_0(\mathbf{x}) v(\mathbf{x},0) \, \mathrm{d}\nu \, + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x},s)|^{p-2} \nabla u(\mathbf{x},s) \cdot \nabla v(\mathbf{x},s) \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

$$\forall v \in W^{1,2}((0,T); L^2(\Omega,\nu)) : \ \nabla v \in L^1((0,T); [L^p(\Omega;\mu)]^N) \, , \ v(T) = 0 \, .$$

Indicando con $S(t)[u_0]$ la soluzione, al tempo t, della (1.1.4) relativa al dato iniziale u_0, abbiamo che la famiglia $\{S(\cdot)[u_0]\}_{u_0 \in L^2_\nu}$ genera un semigruppo non-lineare continuo di Markov (si veda [CG03, def. 2.2]). In particolare, vale la

Proposizione 1.2. *Qualsiasi coppia di soluzioni $(S(\cdot)[u_0], S(\cdot)[v_0])$ soddisfa le seguenti proprietà:*

- *principio del confronto:*

$$u_0 \le v_0 \Longrightarrow S(t)[u_0] \le S(t)[v_0] \quad \forall t \ge 0 \, ; \tag{1.1.6}$$

- *L^q_ν-non-espansività:*

$$\|S(t)[u_0] - S(t)[v_0]\|_{q;\nu} \le \|u_0 - v_0\|_{q;\nu} \quad \forall t \ge 0 \, , \ \forall q \in [1,\infty] \, ; \tag{1.1.7}$$

- *conservazione della media:*

$$\overline{S(t)[u_0]} = \overline{u_0} \quad \forall t \ge 0 \, ; \tag{1.1.8}$$

- *linearità rispetto alle costanti:*

$$S(\cdot)[u_0 + c] = S(\cdot)[u_0] + c \quad \forall c \in \mathbb{R} \, . \tag{1.1.9}$$

Dimostrazione. La (1.1.6) e la (1.1.7) sono dirette conseguenze dei teoremi 3.6 e 4.1 di [CG03], mentre per la (1.1.8) e per la (1.1.9) si può procedere esattamente come, rispettivamente, nei lemmi 3.1 e 3.2 di [BCG03]. □

1.2 Disuguaglianza di p-Poincaré con la media e stime regolarizzanti e asintotiche: l'implicazione diretta

Dimostriamo in quanto segue che la (1.0.1) dà luogo a una regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^ϱ_ν per ogni $q_0 \in [1,\infty)$ e $\varrho \in (q_0,\infty)$ (implicazione diretta). Procederemo come in [Gri10] e [BG05p], cioè attraverso un approccio differenziale alla Gross (ovvero ispirato all'idea pionieristica[1], applicata nel contesto lineare, di L. Gross [Gro75]). Il prossimo risultato costituisce l'equivalente della prima implicazione del teorema 1.3 di [Gri10] nel caso dell'evoluzione del p-Laplaciano pesato con condizioni di Dirichlet.

Teorema 1.1. *Supponiamo che valga la disuguaglianza di p-Poincaré con la media* (1.0.2)*. Allora la soluzione u della* (1.0.1) *corrispondente a un dato iniziale $u_0 \in L^{q_0}(\Omega;\nu)$ (di media $\overline{u(t)} = \overline{u_0} = \overline{u}$), con $q_0 \in [1,\infty)$, soddisfa la seguente stima:*

$$\|u(t)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu} \le K_1\, t^{-\frac{\varrho-q_0}{\varrho(p-2)}}\, \|u_0-\overline{u}\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}} \qquad \forall t>0\,, \tag{1.2.1}$$

*dove $\varrho \in (q_0,\infty)$ e K_1 è un'opportuna costante dipendente solo da ϱ, p e C_P. Inoltre per $\varrho \in [1,\infty)$ vale l'*absolute bound*:*

$$\|u(t)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu} \le K_2\, t^{-\frac{1}{p-2}} \quad \forall t>0\,, \tag{1.2.2}$$

essendo K_2 una costante dipendente da ϱ, p, C_P e $\nu(\Omega)$.

Dimostrazione. Ci basiamo in maniera sostanziale sui procedimenti sviluppati nelle dimostrazioni di [Gri10, teo. 1.3] e [BG05p, teo. 1.1]. Supporremo inizialmente che $u(t)$ sia la soluzione corrispondente a un dato iniziale $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, rimuovendo tale ipotesi solo una volta provata la (1.2.1) per questo tipo di soluzioni. Osserviamo che grazie alla (1.1.7) ciò implica che anche $u(t) \in L^\infty(\Omega)$ $\forall t>0$.
I calcoli che svolgeremo, rigorosamente, varranno solo se $u(t)$ è sufficientemente regolare; per giustificarli in generale (ma sempre lavorando con soluzioni limitate) si può procedere come in[2] [CG01, lemmi 3.1–3.3].
Fissati $r \ge 1$, $\epsilon > 0$ e $f \in L^{r+\epsilon}(\Omega;\nu)$, iniziamo col definire il funzionale $J(r,\cdot)$ (comunemente denominato *entropia*) come

$$J(r,f) = \int_\Omega \frac{|f|^r}{\|f\|^r_{r;\nu}} \log\left(\frac{|f|}{\|f\|_{r;\nu}}\right) \mathrm{d}\nu\,. \tag{1.2.3}$$

È facile controllare che $J(r,f) = \frac{1}{r} J(1,|f|^r)$ e (dalla dimostrazione del teorema 1.3 di [Gri10]) per ogni $r \in [1,p)$ J soddisfa

$$J(r,f) \le \frac{1}{p-r} \log\left(\frac{\|f\|^p_{p;\nu}}{\|f\|^p_{r;\nu}}\right)\,. \tag{1.2.4}$$

Ora, la (1.0.2) si può riscrivere anche nel seguente modo:

$$\|v\|^p_{p;\nu} \le 2^{p-1}\left(C_P^p\, \|\nabla v\|^p_{p;\mu} + \|\overline{v}\|^p_{p;\nu}\right) \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)\,; \tag{1.2.5}$$

[1] Che consiste nel differenziare la quantità $\log\|u(s)\|_{q(s)}$.
[2] Almeno quando $q_0 \ge 2$, altrimenti occorre qualche dettaglio tecnico in più.

utilizzando la disuguaglianza numerica

$$\log x \le \varepsilon x - \log \varepsilon \quad \forall x, \varepsilon > 0\,, \tag{1.2.6}$$

la (1.2.4) e la (1.2.5), ricaviamo che per ogni $v \in W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ vale la famiglia di disuguaglianze logaritmiche

$$J(r,v) \le \frac{1}{p-r}\left[\varepsilon\, 2^{p-1}\left(\frac{C_P^p\,\|\nabla v\|_{p;\mu}^p + \|\overline{v}\|_{p;\nu}^p}{\|v\|_{r;\nu}^p}\right) - \log\varepsilon\right] \quad \forall \varepsilon > 0\,,\ \forall r \in [1,p)\,, \tag{1.2.7}$$

ovvero

$$\left(J(r,v) + \frac{1}{p-r}\log\varepsilon\right)\frac{(p-r)\,\|v\|_{r;\nu}^p}{\varepsilon\, 2^{p-1}\, C_P^p} - \frac{\|\overline{v}\|_{p;\nu}^p}{C_P^p} \le \|\nabla v\|_{p;\mu}^p\,. \tag{1.2.8}$$

A questo punto, come in [Gri10, teo. 1.3], fissati $t > 0$, $q_0 \in (1,\infty)$ e $\varrho \in (q_0,\infty)$, introduciamo una funzione $q : [0,t] \to [q_0,\varrho]$ crescente, biunivoca e $C^1[0,t]$. Tramite un calcolo esplicito si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\|u(s)\|_{q(s);\nu} =& \frac{\dot q(s)}{q(s)} J(q(s),u(s)) - \\ &- \left(\frac{p}{q(s)+p-2}\right)^p \frac{q(s)-1}{\|u(s)\|_{q(s);\nu}^{q(s)}} \left\|\nabla\left(|u(s)|^{\frac{q(s)+p-2}{p}}\right)\right\|_{p;\mu}^p .\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Applicando la (1.2.8) alla funzione $|u|^{(q+p-2)/p}$ nella (1.2.9) si arriva, dopo qualche passaggio (per non appesantire la notazione rimuoviamo da qui in poi la dipendenza di q e u dalla variabile temporale s), a

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\|u\|_{q;\nu} \le \frac{\dot q}{q^2} J(1,|u|^q) - \\ &- \left(\frac{p}{q+p-2}\right)^p \frac{(q-1)\,(p-r)}{\varepsilon\, 2^{p-1}\, C_P^p} \frac{\|u\|_{\frac{r}{p}(q+p-2);\nu}^{q+p-2}}{\|u\|_{q;\nu}^q} \left(\frac{1}{r} J\left(1, |u|^{\frac{r}{p}(q+p-2)}\right) + \frac{1}{p-r}\log\varepsilon\right) + \\ &+ \left(\frac{p}{q+p-2}\right)^p \frac{q-1}{C_P^p\,\nu(\Omega)^{p-1}} \frac{\|u\|_{\frac{q+p-2}{p};\nu}^{q+p-2}}{\|u\|_{q;\nu}^q}\,.\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Per gestire adeguatamente la (1.2.10) conviene effettuare, come in [Gri10, teo. 1.3], le seguenti scelte[3]:

$$r = \frac{pq}{q+p-2}\,,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{q^2}{\dot q}\left(\frac{p}{q+p-2}\right)^p \frac{(q-1)\,(p-r)}{2^{p-1}\, C_P^p\, r}\,,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\|u\|_{\frac{r}{p}(q+p-2);\nu}^{q+p-2}}{\|u\|_{q;\nu}^q}\,;$$

[3]Dato che $p > 2$, tale valore di r è lecito.

in questo modo la (1.2.10) diventa:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\|u\|_{q;\nu} \le &-\frac{\dot q}{q(p-2)}\log\varepsilon_1-\frac{\dot q}{q}\log\|u\|_{q;\nu}+\\ &+\left(\frac{p}{q+p-2}\right)^p\frac{q-1}{C_P^p\,\nu(\Omega)^{p-1}}\frac{\|u\|^{q+p-2}_{\frac{q+p-2}{p};\nu}}{\|u\|^q_{q;\nu}}\,.\end{aligned}\tag{1.2.11}$$

La (1.2.11) è identica alla (2.1) di [Gri10] a parte l'ultimo addendo, per controllare il quale procediamo similmente a [BG05p, lemma 3.3]. In particolare, utilizzando la disuguaglianza di interpolazione tra le norme $\|\cdot\|_{2;\nu}$, $\|\cdot\|_{2(q+p-2)/p;\nu}$, $\|\cdot\|_{q;\nu}$ e la non-espansività della norma $\|\cdot\|_{2;\nu}$, abbiamo:

$$\|u\|_{\frac{q+p-2}{p};\nu}\le\nu(\Omega)^{\frac{p}{2(q+p-2)}}\,\|u\|_{\frac{2(q+p-2)}{p};\nu}\le\nu(\Omega)^{\frac{p}{2(q+p-2)}}\,\|u_0\|_{2;\nu}^{\frac{p-2}{q+p-2}}\,\|u\|_{q;\nu}^{\frac{q}{q+p-2}}\;;\tag{1.2.12}$$

sostituendo la (1.2.12) nella (1.2.11) si ricava

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\|u\|_{q;\nu}\le&-\frac{\dot q}{q(p-2)}\log\left[\frac{q}{\dot q}\left(\frac{p}{q+p-2}\right)^p\frac{(q-1)\,(p-2)}{2^{p-1}\,C_P^p}\right]-\frac{\dot q}{q}\log\|u\|_{q;\nu}+\\ &+\left(\frac{p}{q+p-2}\right)^p\frac{q-1}{C_P^p\,\nu(\Omega)^{\frac{p}{2}-1}}\,\|u_0\|_{2;\nu}^{p-2}\,.\end{aligned}\tag{1.2.13}$$

Ponendo

$$\begin{aligned}A(s)&=\frac{\dot q(s)}{q(s)(p-2)}\log\left[\frac{q(s)}{\dot q(s)}\left(\frac{p}{q(s)+p-2}\right)^p\frac{(q(s)-1)\,(p-2)}{2^{p-1}\,C_P^p}\right],\\ \left(\frac{p}{q+p-2}\right)^p&\frac{q-1}{C_P^p\,\nu(\Omega)^{\frac{p}{2}-1}}\le\frac{p^p}{(p-1)^{p-1}C_P^p\,\nu(\Omega)^{\frac{p}{2}-1}}=M(p,C_P,\nu(\Omega))\,,\end{aligned}$$

e risolvendo la disequazione differenziale finale nella variabile $y(s)=\log\|u(s)\|_{q(s);\nu}$ come in [Gri10, teo. 1.3], otteniamo:

$$\log\|u(t)\|_{\varrho;\nu}\le\log\left(\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}}\right)-\frac{1}{\varrho}\int_0^t\left(A(s)-M\,\|u_0\|_{2;\nu}^{p-2}\right)q(s)\,\mathrm{d}s\,.\tag{1.2.14}$$

Effettuando la scelta $q(s)=q_0+\frac{s}{t}(\varrho-q_0)$ e il cambio di variabile $\xi=q(s)$ nell'integrale, si ha:

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left(A(s)-M\,\|u_0\|_{2;\nu}^{p-2}\right)q(s)\,\mathrm{d}s=\\ &=\frac{1}{p-2}\int_{q_0}^{\varrho}\log\left[t\frac{\xi(\xi-1)(p-2)}{(\varrho-q_0)2^{p-1}C_P^p}\left(\frac{p}{\xi+p-2}\right)^p\right]\mathrm{d}\xi-M(q_0+\varrho)\,\|u_0\|_{2;\nu}^{p-2}\,\frac{t}{2}\ge\\ &\ge\frac{\varrho-q_0}{p-2}\log t-B-M(q_0+\varrho)\,\|u_0\|_{2;\nu}^{p-2}\,\frac{t}{2}\,,\end{aligned}\tag{1.2.15}$$

dove B è una costante positiva dipendente solo da ϱ, p e C_P. Componendo la (1.2.15) con la (1.2.14) ed elevando alla e possiamo concludere con la seguente stima:

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu}\le t^{-\frac{\varrho-q_0}{\varrho(p-2)}}\,\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}}\,e^{\frac{B}{\varrho}+M(1+\frac{q_0}{\varrho})\|u_0\|_{2;\nu}^{p-2}\frac{t}{2}}\quad\forall t>0\,.\tag{1.2.16}$$

Per arrivare alla (1.2.1) occorre controllare il termine esponenziale. A tale scopo, supponiamo $\overline{u}=0$. Analogamente alla dimostrazione del teorema 1.1 di [BG05p], possiamo provare un *absolute bound* per la quantità $\|u(t)\|_{2;\nu}$. Infatti:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\|u(s)\right\|_{2;\nu}^{2}=-2\left\|\nabla u(s)\right\|_{p;\mu}^{p}\leq-\frac{2}{C_P^p}\left\|u(s)\right\|_{\nu;p}^{p}\leq-\frac{2}{C_P^p\nu(\Omega)^{\frac{p}{2}-1}}\left(\left\|u(s)\right\|_{2;\nu}^{2}\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{1.2.17}$$

Risolvendo la (1.2.17) nella variabile $y(s)=\|u(s)\|_{2;\nu}^2$ non è difficile dedurre che

$$\|u(t)\|_{2;\nu}\leq\frac{1}{\left(\|u_0\|_{2;\nu}^{2-p}+\frac{p-2}{C_P^p\nu(\Omega)^{\frac{p}{2}-1}}t\right)^{\frac{1}{p-2}}}\leq\frac{1}{(Dt)^{\frac{1}{p-2}}}\quad\forall t>0\,, \tag{1.2.18}$$

dove D è una costante dipendente solo da p, C_P e $\nu(\Omega)$. Osservando che, fissata l'origine dell'asse temporale in $t/2$, $u(t)$ è anche soluzione corrispondente al dato iniziale $u(t/2)$ (proprietà dei semigruppi), e utilizzando la non-espansività della norma $\|\cdot\|_{q_0;\nu}$, scriviamo la (1.2.16) in questo modo:

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu}\leq 2^{\frac{\varrho-q_0}{\varrho(p-2)}}t^{-\frac{\varrho-q_0}{\varrho(p-2)}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}}e^{\frac{B}{\varrho}+M(1+\frac{q_0}{\varrho})\|u(t/2)\|_{2;\nu}^{p-2}\frac{t}{4}}\quad\forall t>0\,; \tag{1.2.19}$$

grazie alla (1.2.18) (valutata al tempo $t/2$) deduciamo quindi che per un'opportuna costante[4] $K_1=K_1(\varrho,p,C_P)$

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu}\leq K_1\,t^{-\frac{\varrho-q_0}{\varrho(p-2)}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}}\quad\forall t>0\,. \tag{1.2.20}$$

Per soluzioni a media diversa da zero, è sufficiente sfruttare la proprietà (1.1.9) (caratteristica dell'equazione del p-Laplaciano) con $c=-\overline{u}$, così ritrovando la (1.2.1). Il caso $q_0=1$ si recupera facendo tendere q_0 a 1. Come già detto, la stima è stata ricavata solo per dati iniziali limitati. Volendola estendere a un generico dato $u_0\in L^{q_0}(\Omega;\nu)$, con $q_0\in[1,\infty)$, possiamo utilizzare un argomento ben noto. Ragionando per dati a media nulla (si ricordi per l'appunto la (1.1.9)), consideriamo una successione $u_{0n}\in L^\infty(\Omega)$ a media nulla convergente a u_0 in $L^{q_0}(\Omega;\nu)$ e la corrispondente successione $\{u_n\}_n$ di soluzioni della (1.0.1). Fissato $t>0$, dalla (1.1.7) deduciamo che $u_n(t)$ converge fortemente a $u(t)$ in $L^{q_0}(\Omega;\nu)$; inoltre dalla (1.2.20) abbiamo che, a meno di sottosuccessioni, $u_n(t)$ converge debolmente a una certa funzione v in $L^\varrho(\Omega;\nu)$. L'unicità del limite debole in $L^{q_0}(\Omega;\nu)$ garantisce che $v=u(t)$, e ritroviamo la (1.2.20) grazie alla semi-continuità inferiore debole della norma $\|\cdot\|_{\varrho;\nu}$. Infine, l'*absolute bound* (1.2.2) si può ricavare sfruttando la validità dello stesso nel caso della norma $\|\cdot\|_{2;\nu}$ (dimostrato con la (1.2.18)) e componendo quest'ultimo con la (1.2.1) per $q_0=2$, ovvero:

$$\begin{aligned}\|u(t)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu}&\leq K_1\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\varrho-2}{\varrho(p-2)}}\|u(t/2)-\overline{u}\|_{2;\nu}^{\frac{2}{\varrho}}\leq K_1\,2^{\frac{\varrho-2}{\varrho(p-2)}}D^{-\frac{2}{\varrho(p-2)}}t^{-\frac{1}{p-2}}=\\&=K_2\,t^{-\frac{1}{p-2}}\quad\forall t>0\,.\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

Ovviamente dato che $\nu(\Omega)<\infty$ il risultato vale anche per $\varrho\in[1,2)$. □

[4] $\nu(\Omega)$ si semplifica tra M e D.

Controesempio alla regolarizzazione in $L^\infty(\Omega)$

A differenza di quanto ottenuto in [BG05p], in cui si assume la validità di una disuguaglianza di tipo Sobolev più forte della (1.0.2), la stima (1.2.1) consente di dedurre una regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^ϱ_ν con ϱ necessariamente minore di ∞; difatti, essa non è in alcun modo estendibile al caso $\varrho = \infty$, dato che è facile verificare che la costante K_1 diverge per $\varrho \to \infty$. Tramite un controesempio esplicito possiamo mostrare che effettivamente, in generale, la validità della sola disuguaglianza di p-Poincaré con la media (1.0.2) non è sufficiente a garantire la regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^∞ per le soluzioni della (1.0.1). Per costruire tale controesempio, basta osservare che è possibile estendere quello fornito in [Gri10] nel caso del problema di Dirichlet sull'intervallo $(0,\infty)$ a tutta la retta reale. Ovvero, consideriamo su $\mathbb{R}$ i pesi gaussiani

$$\rho_\nu(x) = \rho_\mu(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Fissato un qualsiasi $p > 2$, dai risultati riportati nella sezione 4.2.2 abbiamo che in $W^{1,p}(\mathbb{R}; e^{-x^2/2}, e^{-x^2/2})$ vale la (1.0.2). Con un calcolo diretto si può controllare che, per una generica costante $c > 0$, la funzione

$$u(x,t) = \frac{x}{(c + (p-2)t)^{\frac{1}{p-2}}} \tag{1.2.22}$$

è soluzione classica[5] della (1.0.1), chiaramente appartenente ad un qualsiasi $L^q(\mathbb{R}; e^{-x^2/2})$ con $q < \infty$ ma allo stesso tempo illimitata per ogni $t > 0$.

1.3 Disuguaglianza di p-Poincaré con la media e stime regolarizzanti e asintotiche: l'implicazione inversa

Ottenuta la stima regolarizzante (1.2.1) grazie alla sola validità della (1.0.2), dimostriamo ora che è vero anche il risultato opposto, ovvero che la validità della (1.2.1) implica a sua volta la (1.0.2).

Teorema 1.2. *Se, per ogni soluzione della* (1.0.1) *e per un fissato* $q_0 \in [1,2)$*, vale la stima*

$$\|u(t) - \overline{u}\|_{2;\nu} \le K_1\, t^{-\frac{2-q_0}{2(p-2)}}\, \|u_0 - \overline{u}\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{2}} \quad \forall t > 0 \tag{1.3.1}$$

(ovvero la (1.2.1) *quando* $\varrho = 2$*), allora lo spazio* $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ *soddisfa la disuguaglianza di p-Poincaré con la media* (1.0.2)*.*

Dimostrazione. Procediamo similmente alla dimostrazione dell'analogo risultato nel caso dell'evoluzione del p-Laplaciano pesato con condizioni di Dirichlet [Gri10, teo 1.3]. Per semplificare la notazione, consideriamo soluzioni u *a media nulla*. Inoltre, supponiamo $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$. Fissato $t > 0$, mettendo come funzione test $v(s) = \xi_n(s)u(s)$ nella[6] (1.1.5) con $T = t$ (ciò è lecito grazie alla regolarità di u_0

[5] Qui la condizione al bordo è puramente formale, ciò che conta è lo spazio delle funzioni test nella (1.1.5), le quali in questo caso si possono prendere a supporto (spaziale) compatto (ricordando, dalla proposizione A.4, che $W^{1,p}(\mathbb{R}; e^{-x^2/2}, e^{-x^2/2}) = W^{1,p}_0(\mathbb{R}; e^{-x^2/2}, e^{-x^2/2})$).

[6] $\xi_n(s) = 1 + [n(t-s) - 1]\,\chi_{[t-\frac{1}{n},t]}(s)$.

e quindi di $u(\cdot)$ [Bré73, teo. 3.1]) e facendo tendere $n \to \infty$ ricaviamo che

$$\|u(t)\|_{2;\nu}^2 - \|u_0\|_{2;\nu}^2 = -2 \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{p;\mu}^p \, \mathrm{d}s \, ; \tag{1.3.2}$$

dato che la quantità $\|\nabla u(s)\|_{p;\mu}^p = p \, \mathcal{E}_p(u(s))$ è non-crescente, dalla (1.3.2) possiamo a sua volta dedurre che

$$\|u(t)\|_{2;\nu}^2 - \|u_0\|_{2;\nu}^2 \geq -2t \, \|\nabla u_0\|_{p;\mu}^p \, . \tag{1.3.3}$$

Utilizzando la stima (1.3.1), riscriviamo la (1.3.3) in questo modo:

$$\|u_0\|_{2;\nu}^2 \leq K_1^2 \, t^{-\frac{2-q_0}{p-2}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{q_0} + 2t \, \|\nabla u_0\|_{p;\mu}^p \quad \forall t > 0 \, . \tag{1.3.4}$$

Calcolando il minimo esatto, rispetto a $t > 0$, del membro destro della (1.3.4) otteniamo

$$\|u_0\|_{2;\nu} \leq B \, \|\nabla u_0\|_{p;\mu}^{\frac{p(2-q_0)}{2(p-q_0)}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0(p-2)}{2(p-q_0)}} \, , \tag{1.3.5}$$

dove $B > 0$ è una costante dipendente da q_0, p e K_1. Dato che il dominio Ω è di ν-misura finita e $q_0 < 2$ la (1.3.5) implica, in particolare,

$$\|u_0\|_{2;\nu} \leq B^{\frac{2(p-q_0)}{p(2-q_0)}} \, \nu(\Omega)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \, \|\nabla u_0\|_{p;\mu} \, . \tag{1.3.6}$$

Torniamo ora alla (1.3.5); per come è stata ricavata, possiamo affermare che essa continua a valere (assieme alla (1.3.6)) se al posto di u_0 mettiamo $f - \overline{f}$, dove $f \geq 0$ è una qualsiasi funzione appartenente a $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$. Posto

$$\vartheta = \frac{p(2-q_0)}{2(p-q_0)}$$

abbiamo quindi

$$\left\|f - \overline{f}\right\|_{2;\nu} \leq \left(B^{\frac{1}{\vartheta}} \, \|\nabla f\|_{p;\mu} \right)^{\vartheta} \left\|f - \overline{f}\right\|_{q_0;\nu}^{1-\vartheta} \, . \tag{1.3.7}$$

A questo punto l'obiettivo, come in [Gri10, teo. 1.3], è appellarsi ad un risultato forte quale il teorema 3.1 di [BCLS95]. Tuttavia quest'ultimo non è direttamente applicabile alla (1.3.7). Procediamo quindi allo scopo di rielaborare la stessa in modo da rendere lecito l'utilizzo del suddetto teorema. Anzitutto, dalla disuguaglianza triangolare ricaviamo

$$\|f\|_{2;\nu} \leq \left(B^{\frac{1}{\vartheta}} \, \|\nabla f\|_{p;\mu} \right)^{\vartheta} \left\|f - \overline{f}\right\|_{q_0;\nu}^{1-\vartheta} + \left\|\overline{f}\right\|_{2;\nu} \, ; \tag{1.3.8}$$

ora sfruttiamo le elementari disuguaglianze

$$\left\|\overline{f}\right\|_{2;\nu} \leq \nu(\Omega)^{-\frac{(2-q_0)(p-2)}{4(p-q_0)}} \, \|f\|_{2;\nu}^{\vartheta} \, \|f\|_{q_0;\nu}^{1-\vartheta} \, , \quad \left\|\overline{f}\right\|_{q_0;\nu} \leq \|f\|_{q_0;\nu}$$

componendole con la (1.3.8), arrivando a:

$$\|f\|_{2;\nu} \leq \Big[D(q_0, p, K_1, \nu(\Omega)) \left(\|\nabla f\|_{p;\mu} + \|f\|_{2;\nu} \right) \Big]^{\vartheta} \, \|f\|_{q_0;\nu}^{1-\vartheta} \, . \tag{1.3.9}$$

Adesso possiamo effettivamente applicare alla (1.3.9) il teorema 3.1 di [BCLS95]. Rispetto alla notazione lì utilizzata, in questo caso si pone $r = 2$, $s = q_0$, $q = p$ e come funzionale $\mathcal{W}(\cdot)$, sullo spazio $\mathcal{F} = \{f \geq 0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)\}$,

$$\mathcal{W}(f) = \|\nabla f\|_{p;\mu} + \|f\|_{2;\nu} .$$

La (1.3.9) si riscrive quindi così:

$$\|f\|_{r;\nu} \leq (D\,\mathcal{W}(f))^\vartheta \, \|f\|_{s;\nu}^{1-\vartheta} \ , \ \frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{q} + \frac{1-\vartheta}{s} . \tag{1.3.10}$$

Lo spazio $\mathcal{F}$ è chiaramente invariante rispetto all'operazione $(f - c_1)_+ \wedge c_2$ per ogni $c_1, c_2 \geq 0$, inoltre i funzionali $\mathcal{W}_1(f) = \|\nabla f\|_{p;\mu}$ e $\mathcal{W}_2(f) = \|f\|_{2;\nu}$ appartengono alla classe H_p^ρ, quindi anche la loro somma $\mathcal{W}$ (per la definizione di H_p^ρ e per una giustificazione di queste affermazioni si veda [BCLS95, sez. 2]). Perciò tutte le ipotesi di [BCLS95, teo. 3.1] sono soddisfatte, e la relativa tesi ci consente di concludere che esiste una costante (che continueremo a chiamare D) tale che la (1.3.10) vale anche per $\vartheta = 1$ e $q = p$, cioè

$$\|f\|_{p;\nu} \leq D \left(\|\nabla f\|_{p;\mu} + \|f\|_{2;\nu} \right) . \tag{1.3.11}$$

La disuguaglianza appena ricavata evidentemente vale per ogni $f \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$, senza vincoli di segno (essa è soddisfatta sia da f_+ che da f_-). Consideriamo quindi una tale f. Componendo la (1.3.11) con la (1.3.6), entrambe applicate a $f - \overline{f}$, otteniamo (sempre per una qualche costante $D = D(q_0, p, K_1, \nu(\Omega))$)

$$\left\| f - \overline{f} \right\|_{p;\nu} \leq D \, \|\nabla f\|_{p;\mu} . \tag{1.3.12}$$

Si conclude ricordando che lo spazio $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$ (proposizione A.3). □

Il teoremi 1.1 e 1.2, assieme al controesempio fornito nella sezione 1.2, costituiscono così l'esatto equivalente, nel caso delle condizioni di Neumann, del teorema 1.3 di [Gri10] (nel contesto euclideo).

Capitolo 2

L'equazione dei mezzi porosi pesata con condizioni di Dirichlet

Dato un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, fissati il parametro $m > 1$ e due pesi[1] ρ_ν e ρ_μ, consideriamo la seguente equazione dei mezzi porosi pesata (*WPME*, *Weighted Porous Media Equation*) con condizioni di Dirichlet omogenee:

$$\begin{cases} u_t = \rho_\nu^{-1} \operatorname{div}\left(\rho_\mu \nabla(u^m)\right) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \quad \text{in } \Omega \end{cases} . \tag{2.0.1}$$

Nel corso di questo e del prossimo capitolo, per ogni $q \in \mathbb{R}^+$ intenderemo sempre

$$x^q = |x|^q \operatorname{sign}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} . \tag{2.0.2}$$

Come per l'evoluzione del p-Laplaciano pesato, vogliamo studiare le proprietà regolarizzanti e asintotiche delle soluzioni della (2.0.1). Prima, però, è necessario analizzarne esistenza e unicità di opportune soluzioni deboli. Infatti, in questo caso, la (2.0.1) di per sé *non* è, in maniera naturale, un'equazione evolutiva governata dal sottogradiente di qualche funzionale convesso semi-continuo inferiormente in $L^2(\Omega;\nu)$. In realtà, come vedremo nella sezione 2.2, almeno nel caso in cui $\nu(\Omega) < \infty$ ci si può ricondurre ad un tale contesto. Tuttavia, $L^2(\Omega;\nu)$ non è lo spazio giusto a questo scopo. In letteratura non sono disponibili teoremi di esistenza e unicità generali; solo nel recente articolo [RV08], sulla base di precedenti lavori correlati, si stabilisce un simile risultato per soluzioni non-negative nel caso particolare $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\rho_\mu = 1$ (mentre ρ_ν è un generico peso regolare limitato).

Nella sezione 2.1 dimostreremo un teorema di esistenza e unicità per la (2.0.1) sotto alcune ipotesi di regolarità interna dei pesi, dopo aver definito un ragionevole concetto di soluzione debole basato sulla teoria sviluppata in [Váz07, cap. 5] nel caso non pesato; illustreremo poi brevemente i principali collegamenti con i risultati ottenuti in [RV08]. Nella sezione 2.2, come detto, proporremo una costruzione alternativa di soluzioni deboli appoggiandoci alla teoria classica degli operatori massimali monotòni in spazi di Hilbert [Bré73], e vedremo come, per una classe piuttosto ampia

[1] Per ora assumiamo che valgano solo le basilari ipotesi per la buona struttura dello spazio $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ (sezione A.2).

di dati iniziali, queste soluzioni coincidano con quelle ottenute nella sezione 2.1. Infine, le sezioni 2.3 e 2.4 sono volte all'analisi delle connessioni tra la validità della disuguaglianza di 2-Poincaré (che nel corso del capitolo chiameremo semplicemente *disuguaglianza di Poincaré*)

$$\|v\|_{2;\nu} \leq C_P \|\nabla v\|_{2;\mu} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu) \tag{2.0.3}$$

e le proprietà asintotiche e regolarizzanti per le soluzioni della (2.0.1).

2.1 Un teorema di esistenza e unicità

Iniziamo definendo alcuni spazi di Sobolev pesati che risulteranno particolarmente utili nel seguito[2].

Definizione 2.1. *Fissato $q \in [1,\infty)$, indichiamo con $V_0^q(\Omega;\nu,\mu)$ la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma*

$$\|\varphi\|_{q,2;\nu,\mu} = \|\varphi\|_{q;\nu} + \|\nabla\varphi\|_{2;\mu}\ , \tag{2.1.1}$$

e con $V_0^-(\Omega;\mu)$ lo spazio delle funzioni $v \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ per le quali esiste una successione $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|\nabla w - \nabla\varphi_n\|_{2;\mu} \to 0\,.$$

Evidentemente, $V_0^q(\Omega;\nu,\mu)$ è uno spazio di Banach (e riflessivo per $q > 1$).
Ora possiamo fornire un ragionevole concetto di soluzione debole per la (2.0.1).

Definizione 2.2. *Una funzione*

$$u \in L^1((0,T);L_{loc}^1(\Omega;\nu)):\ u^m(t) \in V_0^-(\Omega;\mu)\,,\ \nabla(u^m) \in L^1((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N)$$

$$\text{per q.o. } t > 0 \text{ e } \forall T > 0\,,$$

è soluzione debole *della* (2.0.1) *corrispondente al dato iniziale $u_0 \in L_{loc}^1(\Omega;\nu)$ se soddisfa:*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega u(\mathbf{x},t)\eta_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = &-\int_\Omega u_0(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x},0)\,\mathrm{d}\nu\, + \\ &+\int_0^T\int_\Omega \nabla(u^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\eta(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

$$\forall\eta \in C^1(\Omega\times[0,T]):\ \operatorname{supp}\eta(\cdot,t) \Subset \Omega\,,\ \eta(\mathbf{x},T) = 0 \quad \forall\mathbf{x}\in\Omega\,,\ \forall t\in[0,T]\,.$$

Nel corso di questa sezione dimostreremo un teorema di esistenza e unicità (quest'ultima in un'opportuna classe di soluzioni, cosiddette *di energia*) per le soluzioni deboli della forma (2.1.2), assumendo alcune ipotesi di regolarità aggiuntive sui pesi ρ_ν e ρ_μ.

[2] In realtà se si assumesse che in $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ vale la (2.0.3), si potrebbe evitare di ricorrere ad essi.

2.1.1 Risultati principali

Il prossimo risultato di unicità costituisce l'equivalente del teorema 5.3 di [Váz07] (la dimostrazione è del tutto analoga) relativo alla *PME* (*Porous Media Equation*) non pesata.

Proposizione 2.1. *Esiste al più una soluzione debole della* (2.0.1) *che soddisfi la seguente ipotesi:*

$$u^m \in L^{\frac{m+1}{m}}((0,T);V_0^{\frac{m+1}{m}}(\Omega;\nu,\mu))\,,\ \nabla(u^m) \in L^2((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N) \qquad (2.1.3)$$
$$\forall T > 0\,.$$

Dimostrazione. Osservato che la (2.1.3) implica che

$$u \in L^{m+1}((0,T);L^{m+1}(\Omega;\nu))\,, \qquad (2.1.4)$$

grazie alla (2.1.3) e alla (2.1.4), per densità, nella (2.1.2) si può inserire anche una qualsiasi funzione test η tale che

$$\eta \in W^{1,\frac{m+1}{m}}((0,T);V_0^{\frac{m+1}{m}}(\Omega;\nu,\mu))\,,\ \nabla\eta \in L^2((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N)\,,$$
$$\eta(T) = 0\,.$$

Consideriamo ora due eventuali soluzioni deboli u_1 e u_2 della (2.0.1) che soddisfino la (2.1.3). Procediamo come in [Váz07, teo. 5.3], ovvero scegliamo la funzione test di Oleĭnik

$$\widehat{\eta}(t) = \int_t^T (u_1^m(s) - u_2^m(s))\,\mathrm{d}s\,.$$

Evidentemente,

$$\widehat{\eta} \in W^{1,\frac{m+1}{m}}((0,T);V_0^{\frac{m+1}{m}}(\Omega;\nu,\mu))\,,\ \widehat{\eta}_t(t) = -\left(u_1^m(t) - u_2^m(t)\right)\,,\ \widehat{\eta}(T) = 0\,,$$
$$\nabla\widehat{\eta}(t) = \int_t^T \nabla(u_1^m(s) - u_2^m(s))\,\mathrm{d}s \in L^\infty((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N)\,.$$

Inserendo $\widehat{\eta}$ nella formulazione debole risolta dalla differenza $u_1 - u_2$ ricaviamo:

$$\int_0^T\int_\Omega (u_1(\mathbf{x},t) - u_2(\mathbf{x},t))\,(u_1^m(\mathbf{x},t) - u_2^m(\mathbf{x},t))\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t\, +$$
$$+ \int_0^T\int_\Omega \nabla(u_1^m - u_2^m)(\mathbf{x},t)\cdot\left(\int_t^T \nabla(u_1^m - u_2^m)(\mathbf{x},s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t = 0\,;$$

integrando per parti l'ultimo termine a membro sinistro arriviamo a

$$\int_0^T\int_\Omega (u_1(\mathbf{x},t) - u_2(\mathbf{x},t))\,(u_1^m(\mathbf{x},t) - u_2^m(\mathbf{x},t))\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t\, +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^T \nabla(u_1^m - u_2^m)(\mathbf{x},s)\,\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}\mu = 0\,,$$

e la non-negatività dei due addendi ci permette di concludere che $u_1 = u_2$. □

In accordo con la terminologia utilizzata in [Váz07, cap. 5], chiameremo *soluzioni di energia* tutte le soluzioni deboli della (2.0.1) che soddisfino la (2.1.3).

A livello di esistenza iniziamo col seguente fondamentale lemma, che utilizzeremo successivamente per ottenere soluzioni deboli sotto ipotesi meno restrittive.

Lemma 2.1. *Se si assume $\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\rho_\nu \in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\rho_\mu \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\rho_\nu^{-1}, \rho_\mu^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ e $u_0 \in C_c^{2,\alpha}(\Omega)$, esiste una soluzione debole u della* (2.0.1) *la quale soddisfa, per ogni $T > 0$ e per ogni $q \geq 0$, le seguenti stime:*

$$\frac{4q(q+1)m}{(m+q)^2} \int_0^T \int_\Omega \left| \nabla \left(u^{\frac{m+q}{2}} \right) (\mathbf{x}, t) \right|^2 \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}t + \int_\Omega |u(\mathbf{x}, T)|^{q+1} \, \mathrm{d}\nu \leq \int_\Omega |u_0(\mathbf{x})|^{q+1} \, \mathrm{d}\nu \,, \tag{2.1.5}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \zeta(t) \left[\left(u^{\frac{m+1}{2}} \right)_t (\mathbf{x}, t) \right]^2 \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}t \leq \max_{t \in [0,T]} \zeta'(t) \frac{m+1}{8m} \int_\Omega |u_0(\mathbf{x})|^{m+1} \, \mathrm{d}\nu \,, \tag{2.1.6}$$

dove $\zeta \geq 0$ è una qualsiasi funzione $\in C_c^1(0,T)$.
Inoltre, se v è un'altra soluzione debole (ottenuta con lo stesso procedimento approssimante) corrispondente ad un dato $v_0 \in C_c^{2,\alpha}(\Omega)$, vale il principio del confronto

$$\int_\Omega (u(\mathbf{x}, T) - v(\mathbf{x}, T))_+ \, \mathrm{d}\nu \leq \int_\Omega (u_0(\mathbf{x}) - v_0(\mathbf{x}))_+ \, \mathrm{d}\nu \,. \tag{2.1.7}$$

Dimostrazione. Si può ripercorrere, con alcune modifiche, la dimostrazione di [Váz07, lemma 5.8]. In particolare, prendiamo una successione di funzioni regolari $\Phi_n'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che intende approssimare $m\,|x|^{m-1}$, con le seguenti caratteristiche:

- $\Phi_n'(x) \to m\,|x|^{m-1}$ localmente uniformemente;
- $\Phi_n'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\Phi_n'(x) = \Phi_n'(-x)$, cosicché $\Phi_n(0) = 0$, dove $\Phi_n(x) = \int_0^x \Phi_n'(y)\,\mathrm{d}y$.

Il primo passo è trovare una soluzione classica del seguente problema parabolico, non degenere grazie alle proprietà di Φ_n':

$$\begin{cases} (u_n)_t = \rho_\nu^{-1} \operatorname{div} \left(\rho_\mu \nabla (\Phi_n(u_n)) \right) & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ u_n = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u_n(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \quad \text{in } \Omega \end{cases} . \tag{2.1.8}$$

A tale scopo, ci appelliamo alla teoria quasilineare sviluppata in [LSU68]. Prima però è opportuno riscrivere (2.1.8) in forma di divergenza, col cambio di variabile $w = \rho_\nu u_n$, ovvero:

$$\begin{cases} w_t = \operatorname{div} \left(\dfrac{\rho_\mu}{\rho_\nu} \Phi_n' \left(\dfrac{w}{\rho_\nu} \right) \nabla w - \dfrac{\rho_\mu}{\rho_\nu^2} \nabla(\rho_\nu) \, \Phi_n' \left(\dfrac{w}{\rho_\nu} \right) w \right) & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ w = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ w(\cdot, 0) = \rho_\nu(\cdot) u_0(\cdot) \quad \text{in } \Omega \end{cases} . \tag{2.1.9}$$

Non è restrittivo supporre che, fissato $\epsilon > 0$, per $|x| \geq \|u_0\|_\infty + \epsilon$ si abbia $\Phi_n'(x) = c$, dove c è una generica costante positiva, eventualmente dipendente da n. Sotto queste ipotesi, è applicabile il teorema V.6.1 di [LSU68]. Difatti l'unica richiesta da verificare con attenzione è la a), che in questo caso si traduce nell'esistenza di due costanti non-negative b_1 e b_2 tali che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \left(\frac{\rho_\mu}{\rho_\nu^2} (\rho_\nu)_{x_i} \Phi_n' \left(\frac{w}{\rho_\nu} \right) w \right) w \geq -b_1 w^2 - b_2 \, ; \tag{2.1.10}$$

dato che $\Phi_n'\left(\frac{w}{\rho_\nu}\right) = c$ e quindi $\Phi_n''\left(\frac{w}{\rho_\nu}\right) = 0$ per w sufficientemente grande, e i pesi ρ_ν, ρ_μ sono regolari ed equivalenti a 1 fin sul bordo, non è difficile controllare che tale richiesta è certamente soddisfatta. Di conseguenza il citato teorema ci fornisce, in particolare, una soluzione $w(\mathbf{x}, t) \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ $\forall T > 0$ della (2.1.9), e dai risultati di regolarità parabolica [LSU68, teo. IV.5.2] sappiamo anche che, in particolare, $w_t(\mathbf{x}, t) \in C^{1,0}(\Omega \times (0, T))$ (questo fatto ci servirà tra poco); tornando alla variabile originaria, abbiamo allora una soluzione $u_n(\mathbf{x}, t)$ del problema (2.1.8) con identica regolarità. Inoltre, grazie al principio del massimo parabolico [LSU68, teo. I.2.9], $\|u_n(T)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ $\forall T > 0$.
Ora, data una funzione η come nella (2.1.2), moltiplicando la (2.1.8) per $\rho_\nu \eta$ e integrando in $\Omega \times (0, T)$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega u_n(\mathbf{x}, t) \eta_t(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}t = &- \int_\Omega u_0(\mathbf{x}) \eta(\mathbf{x}, 0) \, \mathrm{d}\nu \, + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \nabla(\Phi_n(u_n))(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \eta(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}t \, . \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

L'obiettivo, evidentemente, è ricavare delle stime che consentano passare al limite nella (2.1.11) per ottenere una soluzione debole della (2.0.1). Procedendo in tal senso, moltiplichiamo la (2.1.8) prima per $\rho_\nu \Phi_n(u_n)$ e poi per $\rho_\nu u_n$; integrando in $\Omega \times (0, T)$ (fissato $T > 0$) e ponendo

$$\Psi_n(x) = \int_0^x \Phi_n(y) \, \mathrm{d}y \, , \ \Upsilon_n^1(x) = \int_0^x \sqrt{\Phi_n'(y)} \, \mathrm{d}y \, ,$$

si ha:

$$\int_\Omega \Psi_n(u_n(\mathbf{x}, T)) \, \mathrm{d}\nu + \int_0^T \int_\Omega |\nabla(\Phi_n(u_n))(\mathbf{x}, t)|^2 \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}t = \int_\Omega \Psi_n(u_0(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\nu \, , \tag{2.1.12}$$

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u_n^2(\mathbf{x}, T) \, \mathrm{d}\nu + \int_0^T \int_\Omega \left| \nabla(\Upsilon_n^1(u_n))(\mathbf{x}, t) \right|^2 \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_\Omega u_0^2(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\nu \, . \tag{2.1.13}$$

Adesso moltiplichiamo ancora la (2.1.8) per la quantità $\rho_\nu \zeta \Phi_n'(u_n)(u_n)_t$, essendo $\zeta \geq 0$ una qualsiasi funzione $\in C_c^1(0, T)$; integrando in $\Omega \times (0, T)$ si arriva facilmente (grazie anche alla regolarità di $(u_n)_t$) alla seguente stima:

$$\int_0^T \int_\Omega \zeta(t) \left[\left(\Upsilon_n^1(u_n) \right)_t (\mathbf{x}, t) \right]^2 \, \mathrm{d}\nu = \int_0^T \int_\Omega \frac{\zeta'(t)}{2} |\nabla(\Phi_n(u_n))(\mathbf{x}, t)|^2 \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{2.1.14}$$

Ora, dal principio del massimo e dalle stime (2.1.12), (2.1.13) e (2.1.14) notiamo che $\{\Upsilon_n^1(u_n)\}_n$ è una successione limitata in $H^1(\Omega \times (\tau, T))$ per ogni $\tau \in (0, T)$ (ricordiamo che, viste le ipotesi, ρ_ν e ρ_μ sono equivalenti al peso unitario in Ω); in particolare possiamo estrarne una sottosuccessione puntualmente convergente in

$\Omega \times (\tau, T)$, e dato che ciò vale per ogni $\tau, T > 0$ con $\tau \in (0,T)$, tramite un classico procedimento diagonale se ne può estrarre un'ulteriore sottosuccessione (che continueremo a indicare come $\Upsilon_n^1(u_n)$) che converge puntualmente in tutto $\Omega \times (0,\infty)$. Grazie alle caratteristiche dell'approssimante $\Phi_n'(x)$ di $m\,|x|^{m-1}$, si deduce che esiste una funzione $u : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tale che:

$$u_n \to u\,,\ \Psi_n(u_n) \to \frac{1}{m+1}|u|^{m+1}\,,\ \Phi_n(u_n) \to u^m\,,\ \Upsilon_n^1(u_n) \to \frac{2\sqrt{m}}{m+1}\,u^{\frac{m+1}{2}} \quad (2.1.15)$$

$$\text{q.o. in } \Omega \times (0,\infty)\,.$$

La limitatezza di u_n in $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ e le stime (2.1.12) e (2.1.14) ci permettono di asserire (sempre a meno di sottosuccessioni) che esistono tre funzioni v_1, v_2 e v_3 per cui:

$$u_n \to v_1 \text{ in } L^2((0,T); L^2(\Omega))\,,\ \Phi_n(u_n) \rightharpoonup v_2 \text{ in } L^2((0,T); H_0^1(\Omega))\,,$$

$$\Upsilon_n^1(u_n) \rightharpoonup v_3 \text{ in } W^{1,2}((\tau,T); L^2(\Omega))\,;$$

la (2.1.15) consente poi di concludere che $v_1 = u$, $v_2 = u^m$ e $v_3 = \frac{2\sqrt{m}}{m+1}\,u^{(m+1)/2}$. Di conseguenza, passando al limite per $n \to \infty$ nella (2.1.11), otteniamo che u è soluzione debole della (2.0.1) corrispondente al dato iniziale u_0 nel senso della definizione 2.2.
Restano ora da ricavare le stime (2.1.5), (2.1.6) e (2.1.7). Per la (2.1.5), nel caso $q \geq 1$, si ragiona come in precedenza; ovvero, moltiplicando la (2.1.8) per $\rho_\nu\, u_n^q$ e integrando in $\Omega \times (0,T)$ abbiamo:

$$\frac{1}{q+1}\int_\Omega |u_n|^{q+1}(\mathbf{x},T)\,\mathrm{d}\nu + \int_0^T\!\!\int_\Omega \left|\nabla(\Upsilon_n^q(u_n))(\mathbf{x},t)\right|^2\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t = \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u_0|^{q+1}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\nu\,, \quad (2.1.16)$$

dove

$$\Upsilon_n^q(x) = \int_0^x \sqrt{q\,\Phi_n'(y)|y|^{q-1}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Chiaramente, come nella (2.1.15),

$$\Upsilon_n^q(u_n) \to \frac{2\sqrt{qm}}{m+q}\,u^{\frac{m+q}{2}} \quad \text{q.o. in } \Omega \times (0,T)\,;$$

la limitatezza di u_n in $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ e la (2.1.16) implicano che, a meno di sottosuccessioni,

$$\Upsilon_n^q(u_n) \rightharpoonup \frac{2\sqrt{qm}}{m+q}\,u^{\frac{m+q}{2}} \text{ in } L^2((0,T); H_0^1(\Omega))\,.$$

La (2.1.5) segue poi dalla (2.1.16) (e dalla convergenza forte di $|u_n(T)|^{q+1}$ a $|u(T)|^{q+1}$ in $L^1(\Omega;\nu)$) passando al limite debole. Per $q \in (0,1)$ si può, per esempio, considerare un'approssimante $\xi_k(x)$ di x^q tale che $\xi_k' \leq k$, e ripetere il procedimento appena esposto sostituendo u_n^q con $\xi_k(u_n)$; poi si manda $n \to \infty$ e successivamente $k \to \infty$. Come osservato in [Váz07, prop. 5.12] il caso $q = 0$, che non è altro che la non-espansività della norma $\|\cdot\|_{1;\nu}$, si recupera facendo tendere $q > 0$ a zero.
Per quanto riguarda la (2.1.6), essa è una conseguenza diretta della convergenza debole di $\Upsilon_n^1(u_n)$ a $\frac{2\sqrt{m}}{m+1}\,u^{(m+1)/2}$ in $W^{1,2}((\tau,T); L^2(\Omega))$ (oppure in $H^1(\Omega \times (\tau,T))$),

della (2.1.14) e della (2.1.12).
Infine, la (2.1.7) si ottiene per approssimazione. Infatti, essa è valida per due soluzioni regolari u_n e v_n del problema (2.1.8) corrispondenti rispettivamente ai dati u_0 e v_0: per dimostrarlo, formalmente si moltiplica il problema differenza per la funzione test $\operatorname{sign}_+(\Phi_n(u_n) - \Phi_n(v_n))$, si integra in $\Omega \times (0,T)$ e si ricava

$$\int_\Omega (u_n(\mathbf{x},T) - v_n(\mathbf{x},T))_+ \,\mathrm{d}\nu \le \int_\Omega (u_0(\mathbf{x}) - v_0(\mathbf{x}))_+ \,\mathrm{d}\nu \tag{2.1.17}$$

(per una dimostrazione rigorosa si veda [Váz07, prop. 3.5]). La convergenza puntuale di u_n e v_n rispettivamente a u e v e la loro limitatezza in $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ consentono di passare al limite a membro sinistro nella (2.1.17). □

A partire dallo stesso lemma 2.1 possiamo dimostrare l'esistenza di soluzioni deboli (e di energia) per la (2.0.1) anche quando il dominio Ω, i pesi ρ_ν, ρ_μ e il dato iniziale u_0 sono meno regolari.

Teorema 2.1. *Sia Ω un generico dominio di $\mathbb{R}^N$, e siano ρ_ν e ρ_μ due pesi tali che:*

$$\rho_\nu \in C^{3,\alpha}_{loc}(\Omega)\,,\ \ \rho_\mu \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)\,,\ \ \rho_\nu^{-1}, \rho_\mu^{-1} \in L^\infty_{loc}(\Omega)\,. \tag{2.1.18}$$

Se $u_0 \in L^1(\Omega;\nu) \cap L^r(\Omega;\nu)$, con $r \ge m+1$, esiste una soluzione debole u della (2.0.1)*, la quale soddisfa la stima* (2.1.5) *per $q \le r-1$, la stima* (2.1.6) *ed è la soluzione di energia. Inoltre se v è un'altra soluzione di energia corrispondente ad un dato iniziale $v_0 \in L^1(\Omega;\nu) \cap L^{m+1}(\Omega;\nu)$, vale il principio del confronto* (2.1.7).

Dimostrazione. È opportuno procedere similmente a [Váz07, lemma 5.10 e teo. 5.7]. In primo luogo, osserviamo che tutti i risultati del lemma 2.1 si possono facilmente estendere al caso di generici dati iniziali $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Infatti basta prendere una successione $\{u_{0n}\}_n$ di funzioni $C^{2,\alpha}_c(\Omega)$ che converge a u_0 in ogni $L^{q+1}(\Omega)$, e considerare la corrispondente successione $\{u_n\}_n$ di soluzioni deboli della (2.0.1); utilizzando le stime (2.1.5) e (2.1.6) si procede poi come nella dimostrazione dello stesso lemma deducendo l'esistenza di una soluzione debole della (2.0.1) per la quale le suddette stime continuano a valere, assieme al principio del confronto (2.1.7).
Adesso mostriamo come le ipotesi sulla regolarità del dominio e soprattutto dei pesi si possano notevolmente rilassare. Sia quindi Ω un qualsiasi dominio di $\mathbb{R}^N$ e siano ρ_ν e ρ_μ due pesi che soddisfano la (2.1.18); osserviamo preliminarmente che ciò implica che essi, localmente, sono equivalenti al peso unitario. Assumiamo per ora che il dato iniziale u_0 appartenga a $L^1(\Omega;\nu) \cap L^\infty(\Omega)$. Consideriamo una successione crescente di domini $\Omega_n \in C^{2,\alpha}$ tale che $\Omega_n \Subset \Omega$ e $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$. Su ognuno di essi risolviamo il problema di Dirichlet omogeneo corrispondente al dato iniziale $u_{0n} = u_0|_{\Omega_n}$. Da quanto detto in precedenza, vista la regolarità interna dei pesi, la soluzione di tale problema esiste e soddisfa le stime (2.1.5) e (2.1.6) su Ω_n; chiamiamo u_n la sua estensione a zero fuori da Ω_n (cosicché, in particolare, $u_n^{(m+q)/2} \in L^2((0,T); W^{1,2}_0(\Omega;\nu,\mu))$). La (2.1.5) e la (2.1.6) si riscrivono nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &\frac{4q(q+1)m}{(m+q)^2} \int_0^T \int_\Omega \left| \nabla \left(u_n^{\frac{m+q}{2}} \right)(\mathbf{x},t) \right|^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t + \int_\Omega |u_n(\mathbf{x},T)|^{q+1} \,\mathrm{d}\nu \le \\ &\le \int_\Omega |u_{0n}(\mathbf{x})|^{q+1} \,\mathrm{d}\nu\,, \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

$$\int_0^T\int_\Omega \zeta(t)\left[\left(u_n^{\frac{m+1}{2}}\right)_t(\mathbf{x},t)\right]^2 \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t \le \max_{t\in[0,T]}\zeta'(t)\frac{m+1}{8m}\int_\Omega |u_{0n}(\mathbf{x})|^{m+1}\,\mathrm{d}\nu\,. \quad (2.1.20)$$

Ora non ci sono sostanziali difficoltà a ragionare come nella dimostrazione del lemma 2.1. La (2.1.19) per $q=1$ e la (2.1.20) implicano, in particolare, che la successione $\{u_n^{(m+1)/2}\}_n$ è limitata in $H^1(\Omega'\times(\tau,T))$ per ogni $\Omega'\Subset\Omega$ e per ogni $\tau,T>0$ con $\tau\in(0,T)$. Di conseguenza, con un procedimento diagonale otteniamo, a meno di sottosuccessioni, che $u_n^{(m+1)/2}$ converge puntualmente in $\Omega\times(0,\infty)$; da ciò, evidentemente, abbiamo che anche u_n e $u_n^{(m+q)/2}$ convergono puntualmente, rispettivamente, ad un'opportuna funzione u e a $u^{(m+q)/2}$. Dalla (2.1.19) e dalla (2.1.20) deduciamo anche che

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } L^2((0,T);L^2(\Omega;\nu))\,,\ u_n^m \rightharpoonup u^m \text{ in } L^2((0,T);W_0^{1,2}(\Omega;\nu;\mu))\,,$$

$$u_n^{\frac{m+1}{2}} \rightharpoonup u^{\frac{m+1}{2}} \text{ in } W^{1,2}((\tau,T);L^2(\Omega;\nu))\,.$$

Data una funzione test η come nella (2.1.2), abbiamo che per n sufficientemente grandi[3]

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega u_n(\mathbf{x},t)\eta_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = &-\int_\Omega u_{0n}(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x},0)\,\mathrm{d}\nu + \\ &+\int_0^T\int_\Omega \nabla(u_n^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\eta(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t\,;\end{aligned} \quad (2.1.21)$$

passando al limite nella (2.1.21) concludiamo che u è soluzione debole della (2.0.1) nel senso della definizione 2.2. Le stime (2.1.5) e (2.1.6) si ottengono dalla (2.1.19) e dalla (2.1.20) per la semi-continuità inferiore debole delle norme coinvolte: ad esempio, fissati $T,q>0$ (il caso $q=0$ si recupera sempre per $q\to 0$), la successione $\{u_n(T)\}_n$ è limitata in $L^{q+1}(\Omega;\nu)$, e di conseguenza ammette una sottosuccessione $\{u_{n_k}(T)\}_{n_k}$ debolmente convergente a un certo limite w in $L^{q+1}(\Omega;\nu)$. Siccome u_{n_k} converge puntualmente a u, necessariamente $w=u(T)$ e la (2.1.5) segue grazie alla semi-continuità inferiore debole della norma in $L^{q+1}(\Omega;\nu)$ (e ovviamente alla stessa proprietà per $L^2((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N)$). Per quanto riguarda il principio del confronto, dati $u_0,v_0\in L^1(\Omega;\nu)\cap L^\infty(\Omega)$ consideriamo due successioni approssimanti u_n,v_n delle corrispondenti soluzioni u,v come sopra. Valendo il principio del confronto per u_n e v_n, sappiamo che:

$$\int_\Omega (u_n(\mathbf{x},T)-v_n(\mathbf{x},T))_+\,\mathrm{d}\nu \le \int_\Omega (u_{0n}(\mathbf{x})-v_{0n}(\mathbf{x}))_+\,\mathrm{d}\nu\,. \quad (2.1.22)$$

Possiamo assumere che $z_n=(u_n(T)-v_n(T))_+$ converga debolmente a $z=(u(T)-v(T))_+$ in ogni $L^r(\Omega;\nu)$ con $r\in(1,\infty)$, perciò mandando $n\to\infty$ si ha

$$\|z\|_{r;\nu} \le \|(u_0-v_0)_+\|_{1;\nu}^{\frac{1}{r}}\left(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty\right)^{1-\frac{1}{r}}\ ;$$

facendo tendere r a 1 otteniamo la (2.1.7).
Infine, ci rimane da rimuovere l'ipotesi $u_0\in L^1(\Omega;\nu)\cap L^\infty(\Omega)$ ed estendere i risultati a dati iniziali in $L^1(\Omega;\nu)\cap L^r(\Omega;\nu)$ con $r\ge m+1$. In questo caso conviene prendere

[3] Tali che per ogni $t\in[0,T]$ $\operatorname{supp}\eta(\cdot,t)\Subset\Omega_n$.

una successione $u_{0n} \in L^1(\Omega;\nu) \cap L^\infty(\Omega)$ che converge a u_0 in $L^1(\Omega;\nu) \cap L^r(\Omega;\nu)$, e considerare la relativa successione $\{u_n\}_n$ di soluzioni della 2.0.1. Grazie al principio del confronto appena dimostrato, è facile dedurre che $\{u_n\}_n$ è di Cauchy in $L^\infty((0,\infty);L^1(\Omega;\nu))$, quindi converge nello stesso spazio (e, a meno di sottosuccessioni, puntualmente in $\Omega \times (0,\infty)$) a una funzione u. Osservato ciò, si procede esattamente come in precedenza; l'unica modifica è costituita dagli spazi in cui le successioni $u_n^{(m+q)/2}$ convergono debolmente, ovvero abbiamo che

$$u_n^{\frac{m+q}{2}} \rightharpoonup u^{\frac{m+q}{2}} \text{ in } L^2((0,T);V_0^{\frac{2r_1}{m+q}}(\Omega;\nu,\mu)) \tag{2.1.23}$$

per ogni $r_1 \in \left(\frac{m+q}{2}, r\right]$ e $q \in (0, r-1]$. La richiesta $r \geq m+1$ è necessaria affinché la (2.1.23) valga almeno per $q = m$, così da poter passare al limite nella (2.1.21)[4]. Le stime (2.1.5) e (2.1.6) si conservano, al solito, passando al limite debole (ovviamente per $q+1 \leq r$), mentre il principio del confronto è ancora più semplice da dimostrare: infatti date due approssimanti u_n e v_n di due soluzioni corrispondenti a dati iniziali u_0 e v_0 in $L^1(\Omega;\nu) \cap L^{m+1}(\Omega;\nu)$, esso è una conseguenza della (2.1.22) e del fatto che

$$(u_n(T) - v_n(T)) \to (u(T) - v(T)) \,,\ (u_{0n} - v_{0n}) \to (u_0 - v_0) \text{ in } L^1(\Omega;\nu) \,.$$

$\square$

Alcune osservazioni. Anzitutto, da come è stato costruito il processo approssimante, è facile verificare che le soluzioni fornite dal teorema 2.1 sono soluzioni di energia. Inoltre, grazie alla stima (2.1.6) sappiamo che, per esempio, $u^{(m+1)/2}$ è assolutamente continua in $C([\tau,\infty);L^2(\Omega;\nu))$, il che implica $u \in C([\tau,\infty);L^{m+1}(\Omega;\nu))$ (e quindi, vista la limitatezza di u in $L^\infty((0,\infty);L^1(\Omega;\nu))$, $u \in C([\tau,\infty);L^q(\Omega;\nu))$ $\forall q \in (1, m+1]$ per interpolazione). Da ciò si ricava facilmente la validità della cosiddetta *proprietà dei semigruppi*, ovvero per ogni $\tau > 0$ $u|_{[\tau,\infty)}$ è soluzione corrispondente al dato iniziale $u(\tau)$. Per dimostrarla, prendiamo una qualsiasi funzione η tale che

$$\eta \in C^1(\Omega \times [\tau, T]) \,,\ \operatorname{supp} \eta(\cdot, t) \Subset \Omega \,,\ \eta(\mathbf{x}, T) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \,,\ \forall t \in [\tau, T] \,.$$

Consideriamo una successione di estensioni η_k di η così costruita:

$$\eta_k(t) = \chi_{[\tau - \frac{1}{k}, \tau)}(t)\,(kt - k\tau + 1)\,\eta(\tau) + \chi_{[\tau,T]}(t)\eta(t) \quad \forall t \in [0,T] \,,$$

e inseriamola nella formulazione debole[5] (2.1.2). Otteniamo:

$$\begin{aligned} &\int_\tau^T \int_\Omega u(\mathbf{x},t)\eta_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t + k\int_{\tau-\frac{1}{k}}^{\tau}\int_\Omega u(\mathbf{x},t)\eta(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_\tau^T \int_\Omega \nabla(u^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\eta(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t + \\ &+ \int_{\tau-\frac{1}{k}}^{\tau} (kt - k\tau + 1)\int_\Omega \nabla(u^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\eta(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t\,; \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

[4]Infatti la reale importanza della (2.1.23) è per $q = m$, le altre forniscono solo maggiore regolarità della soluzione

[5]η_k è solo Lipschitziana, ma basta considerarne un'approssimazione che sia regolare anche in $t = \tau$ e $t = \tau - \frac{1}{k}$.

mandando $k \to \infty$, sfruttando la continuità di u in $t = \tau$ e il fatto che l'ultimo integrale a membro destro tende a zero, ricaviamo:

$$\begin{aligned}\int_\tau^T \int_\Omega u(\mathbf{x},t)\eta_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = &- \int_\Omega u(\mathbf{x},\tau)\eta(\mathbf{x},\tau)\,\mathrm{d}\nu + \\ &+ \int_\tau^T \int_\Omega \nabla(u^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\eta(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

Data l'arbitrarietà di η, ciò significa che $u|_{[\tau,\infty)}$ è soluzione debole della (2.0.1) corrispondente al dato iniziale $u(\tau)$.

Se u_0 è sufficientemente regolare, possiamo garantire che $u^{(m+1)/2}$ è continua anche in $t = 0$. Infatti, abbiamo il seguente (si veda anche [Váz07, sez. 5.6])

Corollario 2.1. *Se, oltre alle ipotesi del teorema 2.1, assumiamo anche*

$$u_0^m \in V_0^{\frac{m+1}{m}}(\Omega;\nu,\mu)\,,$$

allora per ogni $T > 0$ vale la stima:

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega \left[\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)_t(\mathbf{x},t)\right]^2 \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t + \frac{(m+1)^2}{8m}\int_\Omega |\nabla(u^m)(\mathbf{x},T)|^2\,\mathrm{d}\mu \le \\ &\le \frac{(m+1)^2}{8m}\int_\Omega |\nabla(u_0^m)(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mu\,.\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

In particolare, la funzione $u^{(m+1)/2}$ è assolutamente continua in $C([0,\infty);L^2(\Omega;\nu))$.

Dimostrazione. La (2.1.26) è facilmente ricavabile nelle ipotesi del lemma 2.1: è sufficiente porre $\zeta = 1$ (al posto di $\zeta \in C_c^1(0,T)$), integrare per parti e poi passare al limite per $n \to \infty$. Per ottenere la stessa sotto le ipotesi generali del teorema 2.1, basta ripercorrere la dimostrazione di quest'ultimo con la seguente modifica: si prende una successione crescente di domini $\Omega_n \in C^{2,\alpha} \Subset \Omega$ tale che $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$ e una corrispondente successione di dati iniziali $u_{0n} \in C_c^{2,\alpha}(\Omega_n)$ tale che u_{0n}^m converge a u_0^m in $V_0^{(m+1)/m}(\Omega;\nu,\mu)$ (in particolare, u_{0n} converge a u_0 in $L^{m+1}(\Omega;\nu)$). Il procedimento sarebbe più agevole se la successione $\{u_{0n}\}_n$ fosse anche limitata in $L^1(\Omega;\nu)\cap L^{m+1}(\Omega;\nu)$ (fatto banalmente vero quando $\nu(\Omega) < \infty$), ma in generale non è detto che ciò accada. In ogni caso, possiamo comunque dedurre che esiste un limite puntuale u della successione delle relative soluzioni $\{u_n\}_n$ (estese a zero in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_n$) tale che

$$\begin{gathered}u_n \rightharpoonup u \text{ in } L^{m+1}((0,T);L^{m+1}(\Omega;\nu))\,,\ \nabla(u_n^m) \rightharpoonup \nabla(u^m) \text{ in } L^2((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N)\,, \\ \left(u_n^{\frac{m+1}{2}}\right)_t \rightharpoonup \left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)_t \text{ in } L^2((0,T);L^2(\Omega;\nu))\,.\end{gathered} \tag{2.1.27}$$

In realtà non avendo la limitatezza di $\{u_{0n}\}_n$ in $L^2(\Omega;\nu)$ non possiamo garantire la limitatezza di $u^{(m+1)/2}$ in $H^1(\Omega' \times (0,T))$, dalla quale nel teorema 2.1 si deduceva la convergenza puntuale (che permette l'identificazione dei limiti deboli). Tuttavia la questione si può aggirare, per esempio, come in [Váz07, lemma 5.9]. Le (2.1.27) permettono di passare al limite assicurando che u è la soluzione di energia e di ottenere la (2.1.26) $\square$

La continuità in $t = 0$ per dati iniziali in $L^1(\Omega;\nu) \cap L^{m+1}(\Omega;\nu)$ non è di immediata analisi. Ci limitiamo a segnalare che, così come accade nel caso non pesato [Váz07, teo. 6.2], grazie al principio del confronto (che in particolare implica la non-espansività della quantità $\|u(t) - v(t)\|_{1;\nu}$) e alla proprietà dei semigruppi essa è equivalente all'appartenenza di u a $C([0,\infty); L^1(\Omega;\nu))$. La dimostrazione di tale continuità già nel contesto non pesato [Váz07, teo. 6.2 e sez. 7.5.1] è delicata e comporta un argomento di *barriere iniziali* a priori non replicabile in astratto per domini Ω e pesi ρ_ν, ρ_μ relativamente generici.

2.1.2 Soluzioni limite

Quando il dato iniziale appartiene solo a $L^1(\Omega;\nu)$, non siamo in grado di fornire una soluzione della (2.0.1) nel senso della definizione 2.2. Tuttavia, come già accennato, se u_0 e v_0 sono due dati iniziali in $L^1(\Omega;\nu) \cap L^{m+1}(\Omega;\nu)$ e u e v le relative soluzioni, dal principio del confronto abbiamo:

$$\|u(t) - v(t)\|_{1;\nu} \le \|u_0 - v_0\|_{1;\nu} \quad \forall t > 0\,. \tag{2.1.28}$$

La (2.1.28) è sufficiente a estendere il concetto di soluzione anche a dati solo in $L^1(\Omega;\nu)$, visto che la mappa $L^1(\Omega;\nu) \cap L^{m+1}(\Omega;\nu) \to L^\infty((0,\infty); L^1(\Omega;\nu))$ che associa al dato u_0 la soluzione di energia $u(\cdot)$ è Lipschitziana e definita su un insieme denso in $L^1(\Omega;\nu)$, e perciò si può prolungare in maniera univoca a tutto $L^1(\Omega;\nu)$ (applicazione del classico teorema di *estensione limitata*). Chiameremo gli elementi così costruiti *soluzioni limite*, in accordo con la terminologia di [Váz07, sez. 6.1].

Proposizione 2.2. *Siano u e v due soluzione limite della* (2.0.1) *corrispondenti a due dati iniziali $u_0, v_0 \in L^1(\Omega;\nu)$. Allora valgono le seguenti proprietà:*

- *se anche $u_0 \in L^{m+1}(\Omega;\nu)$, u è soluzione di energia;*
- *per quasi ogni $\tau > 0$, $u|_{[\tau,\infty)}$ è soluzione limite corrispondente al dato iniziale $u(\tau)$ (proprietà dei semigruppi);*
- *per quasi ogni $t > 0$ vale il principio del confronto*

$$\|(u(t) - v(t))_+\|_{1;\nu} \le \|(u_0 - v_0)_+\|_{1;\nu}\,. \tag{2.1.29}$$

Dimostrazione. La prima affermazione è una ovvia conseguenza del fatto che il concetto di soluzione limite *estende* quello di soluzione debole. La proprietà dei semigruppi e il principio del confronto si ereditano dalle soluzioni di energia: infatti data una soluzione limite u, per definizione esiste una successione $\{u_n\}_n$ di soluzioni di energia tali che

$$\|u(\tau) - u_n(\tau)\|_{1;\nu} \to 0 \quad \text{per q.o. } \tau > 0 \tag{2.1.30}$$

e

$$u_n|_{[\tau,\infty)} \to u|_{[\tau,\infty)} \text{ in } L^\infty((\tau,\infty); L^1(\Omega;\nu))\,. \tag{2.1.31}$$

Siccome $u_n|_{[\tau,\infty)}$ è soluzione debole corrispondente al dato iniziale $u_n(\tau)$, grazie alla (2.1.30) e alla (2.1.31) abbiamo che $u|_{[\tau,\infty)}$ è soluzione limite in (τ,∞) con dato iniziale $u(\tau)$.
Infine, il principio del confronto vale per le successioni di soluzioni deboli u_n e v_n che approssimano u e v, e passando al limite in $L^1(\Omega;\nu)$ al tempo t si conserva per u e v. □

Nella sezione 2.3 dimostreremo che sotto la sola ipotesi che nello spazio $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ valga la disuguaglianza di Poincaré (2.0.3), l'evoluzione (2.0.1) dà luogo ad una regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^{ϱ}_ν per ogni $q_0 \in [1,\infty)$ e $\varrho \in (q_0,\infty)$: di conseguenza, in questo caso, grazie alla proposizione 2.2 le soluzioni limite effettivamente sono anche soluzioni di energia dopo un arbitrario $\tau > 0$.

Concludiamo con un'ultima osservazione. Negli enunciati e nelle dimostrazioni del lemma 2.1, del teorema 2.1 e del corollario 2.1, per comodità abbiamo sempre utilizzato l'espressione "per ogni $T > 0$" al posto della più corretta "per quasi ogni $T > 0$". Tuttavia, a posteriori, dato che una soluzione debole ha anche una versione in $C([\tau,\infty);L^{m+1}(\Omega;\nu))$, la prima espressione rimane corretta se riferita a quest'ultima. Nella proposizione 2.2, invece, non avendo garantita la continuità in $L^1(\Omega;\nu)$ delle soluzioni limite si è mantenuto il più prudente "quasi ogni".

2.1.3 Confronto con alcuni precedenti risultati

Come precedentemente accennato, nel caso particolare in cui $\Omega = \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$), $\rho_\mu = 1$ e ρ_ν è un peso che soddisfa opportune condizioni di decadimento all'infinito, recenti lavori hanno portato a risultati di esistenza e unicità per la *WPME* (chiamata anche *Inhomogeneous PME*) considerando dati iniziali (e quindi soluzioni) non-negative. La sintesi più completa di tali risultati si può trovare in [RV08].
Fissato quindi $u_0 \geq 0 \in L^1(\mathbb{R}^N;\nu)$, in [RV08, def. 1.1] per soluzione debole della *WPME* su $\mathbb{R}^N$ corrispondente al dato iniziale u_0 si intende una funzione $u(\mathbf{x},t)$ non-negativa, continua in $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ e tale che per ogni $\tau > 0$ soddisfi le seguenti proprietà:

- $u \in C([0,\infty);L^1(\mathbb{R}^N;\nu)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N \times (\tau,\infty))$;
- $\nabla(u^m) \in \left[L^2(\mathbb{R}^N \times (\tau,\infty))\right]^N$;
- per ogni $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$ vale l'identità
$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla(u^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\varphi(\mathbf{x},t) - u(\mathbf{x},t)\varphi_t(\mathbf{x},t)\rho_\nu(\mathbf{x})]\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t = 0\,; \qquad (2.1.32)$$
- $u(\cdot,0) = u_0(\cdot)$.

Oltre che in alcune questioni di regolarità, come la limitatezza in $L^\infty(\mathbb{R}^N \times (\tau,\infty))$, la continuità a valori in $L^1(\mathbb{R}^N;\nu)$ e la possibile validità delle proprietà appena elencate fino a $\tau = 0$, la differenza principale tra la definizione di soluzioni di energia da noi data e quest'ultima definizione risiede nello spazio in cui si cerca u. Infatti osserviamo che, indipendentemente dalle proprietà del peso ρ_ν, secondo la [RV08, def. 1.1] non c'è modo di legare u^m alle funzioni test scelte nella (2.1.32), altrimenti detto di imporre che $u^m(\cdot,t)$ appartenga alla chiusura di $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ in un opportuno spazio funzionale. E in effetti, quello che accade, è che se ρ_ν tende a zero in modo sufficientemente rapido per $|\mathbf{x}| \to \infty$ si osservano casi di non unicità. Notiamo che nella dimostrazione della proposizione 2.1 (unicità delle soluzioni di energia) abbiamo utilizzato in maniera cruciale il fatto che $u^m(\cdot,t)$ appartenesse a $V_0^{(m+1)/m}(\Omega;\nu,\mu)$.

I due principali risultati dimostrati in [RV08] sono i seguenti:

- se $\rho_\nu > 0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$ è limitata, allora esiste una soluzione debole secondo la (2.1.32) [RV08, teo. 3.1];

- se $\rho_\nu > 0 \in C^1(\mathbb{R}^N)$ soddisfa la disuguaglianza

$$A_0(1+|\mathbf{x}|)^{-N} \leq \rho_\nu(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \tag{2.1.33}$$

per qualche fissata costante $A_0 > 0$, allora tale soluzione è anche unica [RV08, teo. 4.1] nella classe definita in [RV08, def. 1.1].

Il risultato di unicità, in un certo senso, non è migliorabile. Infatti se $\rho_\nu(\mathbf{x})$ all'infinito si comporta come $|\mathbf{x}|^{-\gamma}$ con $\gamma > N$, la finitezza della ν-misura di $\mathbb{R}^N$ permette di concludere che se il dato iniziale è 1 (o una qualsiasi altra costante positiva), allora $u(\mathbf{x}, t) = 1$ è soluzione della (2.1.32). Tuttavia si può dimostrare (si veda [RV08, sez. 8]) che in questo caso (in realtà anche solo per $\gamma > 2$) la soluzione costruita col risultato d'esistenza [RV08, teo. 3.1], per dati iniziali anche limitati, soddisfa la seguente condizione di decadimento all'infinito (per ogni $T > 0$):

$$\lim_{R\to+\infty} R^{1-N} \int_{|\boldsymbol{\sigma}|=R} \int_0^T u^m(\boldsymbol{\sigma}, t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \to 0\,; \tag{2.1.34}$$

dato che evidentemente la (2.1.34) *non* è verificata dalle costanti, se $u_0 = 1$ abbiamo quindi almeno due soluzioni e l'unicità si perde. Alla medesima conclusione si poteva giungere a partire dal risultato [Eid90, teo. 1.3], in cui si fornisce di fatto la stessa soluzione di [RV08, teo. 3.1], la quale soddisfa

$$\int_0^T u^m(\mathbf{x}, t)\, \mathrm{d}t \leq c\, |\mathbf{x}|^{2-N} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \tag{2.1.35}$$

per qualche costante c indipendente da $\mathbf{x}$. Integrando la (2.1.35) su $|\mathbf{x}| = R$ e passando al limite per $R \to +\infty$ otteniamo la (2.1.34).
Ora, se il dato iniziale appartiene a $L^1(\mathbb{R}^N; \nu) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, effettivamente la soluzione costruita in [RV08, teo. 3.1] soddisfa le richieste di [RV08, def. 1.1] sopraelencate fino a $\tau = 0$, perciò è a tutti gli effetti una soluzione di energia (nel senso della proposizione 2.1); ma anche una costante è banalmente una soluzione di energia. Per cui risulta naturale chiedersi in che modo questo problema di non unicità sia compatibile con l'unicità delle soluzioni di energia dimostrata con la proposizione 2.1. La risposta in realtà è semplice: in queste condizioni una costante *non* appartiene a $V_0^{(m+1)/m}(\mathbb{R}^N; \nu, \lambda)$, ovvero non ha "traccia nulla", ed è piuttosto una soluzione del problema di Neumann, che vedremo nel prossimo capitolo. Infatti si può verificare che se $\rho_\nu(\mathbf{x})$ all'infinito si comporta come $|\mathbf{x}|^{-\alpha}$, con $\alpha > N$, allora in $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N; \nu, \lambda)$ vale la disuguaglianza di 2-Poincaré senza media (sezione 4.1.2), perciò evidentemente le costanti non possono appartenervi (essendo la ν-misura di $\mathbb{R}^N$ finita analoga conclusione si trae per $V_0^{(m+1)/m}(\mathbb{R}^N; \nu, \lambda)$).

Qualitativamente, si intuisce come l'andamento del peso ρ_ν all'infinito renda lo spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ più o meno simile ad un dominio limitato; se ρ_ν va a zero troppo rapidamente, per garantire l'unicità delle soluzioni della (2.1.32) occorre allora specificare opportune condizioni "al bordo" per u^m (come l'appartenenza, per l'appunto, a $V_0^{(m+1)/m}(\mathbb{R}^N; \nu, \lambda)$). Inoltre la (2.1.34), intesa ora come condizione *imposta*, si rivela anche sufficiente per l'unicità (si vedano sempre [RV08, sez. 8] e i riferimenti ivi citati).
La costruzione di soluzioni deboli della (2.1.32) in [RV08] si sviluppa attraverso un

procedimento del tutto analogo a quello utilizzato nella dimostrazione del teorema 2.1. Ovvero, si risolve il problema di Dirichlet in domini regolari $\Omega_n \Subset \mathbb{R}^N$ ottenendo una successione di soluzioni $\{u_n\}_n$, e poi si passa al limite per $n \to \infty$ (la rimozione del carattere degenere dell'equazione, allo scopo di appellarsi alla teoria quasilineare, si effettua qui agendo direttamente sul dato piuttosto che sulla funzione $\Phi(x) = x^m$). Non a caso si può dimostrare [RV08, lemma 4.2] che per $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N; \nu) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ la soluzione u così ottenuta, indipendentemente dall'unicità, è minimale, ovvero per ogni possibile altra soluzione v (relativa allo stesso dato iniziale) secondo [RV08, def. 1.1] si ha $u \leq v$. Ciò non è sorprendente, dato che risolvendo il problema di Dirichlet in Ω_n si forza u_n ad annullarsi su $\partial\Omega_n$. Siccome tale soluzione è ottenuta tramite il suddetto processo approssimante, si verifica che essa è a tutti gli effetti una soluzione debole e di energia secondo la definizione 2.2, ovvero coincide con *la* soluzione di energia fornita dal teorema 2.1. Perciò, per esempio, abbiamo che in questo caso le soluzioni di energia appartengono anche a $C([0,\infty); L^1(\Omega;\nu))$ (si vedano le considerazioni immediatamente successive al corollario 2.1). Sempre dai risultati di [RV08] deduciamo poi che per generici dati in $L^1(\mathbb{R}^N;\nu)$ ha luogo una regolarizzazione fino a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$; ciò è coerente col fatto che nello spazio $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N; \nu, \lambda)$ è sempre valida la disuguaglianza di Sobolev senza media[6]

$$\|v\|_{\frac{2N}{N-2};\nu} \leq C_S \|\nabla v\|_2 \ ,$$

perciò è applicabile il risultato [BG05m, teo. 1.5].

Abbiamo già segnalato, nell'introduzione a questa tesi, che uno studio approfondito, in particolare sul comportamento asintotico, delle soluzioni della (2.1.32) è stato effettuato di recente per $\gamma \leq N$ prevalentemente con i lavori [RV09] e [KRV10]. Per il dettaglio rimandiamo ai citati articoli, tuttavia osserviamo che tali risultati permettono di dedurre principalmente stime sulla quanitità $\|u(t)\|_\infty$, e non sono quindi adeguatamente confrontabili con quelli ricavati nella sezione 2.3 (ricordiamo che qui vale una disuguaglianza di Sobolev, oltre alla Poincaré per $\gamma \geq 2$, e la ν-misura di $\mathbb{R}^N$ è infinita).

2.2 Una costruzione alternativa di soluzioni deboli tramite la teoria degli operatori massimali monotòni nel caso $\nu(\Omega) < \infty$

Quando Ω è un dominio di ν-misura finita, si può ottenere un risultato di esistenza per l'equazione (2.0.1) sotto la sola assunzione che i pesi ρ_ν, ρ_μ soddisfino le ipotesi di buona struttura per lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega; \nu, \mu)$ (sezione A.2) e che valga la disuguaglianza di Poincaré (2.0.3). L'approccio è molto simile a quelli descritti in [Váz07, cap. 10] o [BGV08, sez. 3]. Iniziamo con alcune importanti definizioni e proprietà [Bré71, sez. I].

Definizione 2.3. *Sia H uno spazio di Hilbert reale. Sia A una mappa $A : H \to 2^H$. Diciamo che A è un operatore monotòno se soddisfa*

$$\langle f_1 - f_2, g_1 - g_2 \rangle_H \geq 0 \quad \forall f_1, f_2 \in D(A)\,,\ \forall g_1 \in Av_1\,,\ \forall g_2 \in Av_2\,, \qquad (2.2.1)$$

[6] Conseguenza della classica disuguaglianza di Sobolev non pesata in $H^1(\mathbb{R}^N)$ e della limitatezza di ρ_ν.

dove $D(A)$ è il dominio di A, ovvero l'insieme di quegli elementi f tali che $A(f) \neq \emptyset$. L'operatore A è detto inoltre massimale *se non ammette alcuna estensione monotòna propria, ovvero se non esiste nessun operatore monotòno $\bar{A}$ tale che il grafico di A sia strettamente contenuto in quello di $\bar{A}$.*

È facile vedere che la proprietà (2.2.1) è equivalente alla richiesta che per ogni $\lambda > 0$ la mappa $(I + \lambda A)^{-1}$, laddove definita, sia una contrazione (non necessariamente stretta). Inoltre, un ben noto risultato dovuto a G. J. Minty afferma che un operatore monotòno A è massimale se e solo se $R(I + A) = H$, cioè se $I + A$ è suriettivo.

Definizione 2.4. *Sia $\Phi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funzionale convesso e semi-continuo inferiormente non identicamente uguale a $+\infty$ (cioè* proprio*). Posto $D(\Phi) = \{f \in H : \Phi(f) < +\infty\}$, definiamo l'operatore $\partial\Phi : D(\Phi) \to 2^H$, detto* sottogradiente *(o* sottodifferenziale*) di Φ, nel seguente modo:*

$$\Phi(f) = \{g \in H : \ \Phi(f_1) - \Phi(f) \geq \langle g, f_1 - f\rangle_H \quad \forall f_1 \in D(\Phi)\} \tag{2.2.2}$$

(per $\hat{f} \notin D(\Phi)$ è implicito che $\partial\Phi(\hat{f}) = \emptyset$).

Proposizione 2.3. *Dato un funzionale convesso, semi-continuo inferiormente e proprio Φ su H, l'operatore $\partial\Phi$ è sempre massimale monotòno.*

Dimostrazione. Si veda [Min64]. □

Poniamoci ora in un contesto meno astratto, ovvero nel quale $H = L^2(\Omega; \nu)$. A partire da una data funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa, semi-continua inferiormente di sottogradiente $\gamma : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, definiamo il funzionale $\Phi : L^2(\Omega; \nu) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ in questo modo:

$$\Phi(f) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \phi(f(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\nu & \text{se } \phi(f) \in L^1(\Omega; \nu) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} . \tag{2.2.3}$$

Proposizione 2.4 ([Bré71, sez. II])**.** *Il funzionale Φ definito con la* (2.2.3) *è convesso e s.c.i.*[7]*, inoltre $g \in L^2(\Omega; \nu)$ appartiene a $\partial\Phi(f)$ se e solo se per quasi ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ si ha $g(\mathbf{x}) \in \gamma(f(\mathbf{x}))$.*

Dimostrazione. La convessità di Φ segue immediatamente dalla convessità di ϕ. Per quanto riguarda la semi-continuità inferiore, essa si può provare con argomenti standard grazie al lemma di Fatou e alla semicontinuità inferiore di ϕ, riconducendosi al caso $\phi \geq 0$ sfruttando il fatto che una funzione convessa s.c.i. è sempre minorata da una funzione affine [Bré83, prop. I.9].
Il punto leggermente più delicato è la caratterizzazione di $\partial\Phi$. Se $g \in L^2(\Omega; \nu)$ è tale che $g(\mathbf{x}) \in \gamma(f(\mathbf{x}))$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in \Omega$, allora data una generica $h \in D(\Phi)$ per definizione di sottogradiente di ϕ abbiamo

$$\phi(h(\mathbf{x})) - \phi(f(\mathbf{x})) \geq g(\mathbf{x})(h(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) \tag{2.2.4}$$

[7] A volte utilizzeremo questa comune abbreviazione per il termine "semi-continuo inferiormente".

quasi ovunque in Ω. Integrando su Ω in $\mathrm{d}\nu$ otteniamo[8] quindi che g appartiene a $\partial\Phi(f)$ (infatti il risultato vale per ogni $h \in D(\Phi)$). Per dimostrare l'implicazione opposta è sufficiente far vedere che l'operatore $A : L^2_\nu \to 2^{L^2_\nu}$, che a una funzione $f \in L^2(\Omega;\nu)$ associa $g \in L^2(\Omega;\nu)$ se e solo se $g(\mathbf{x}) \in \gamma(f(\mathbf{x}))$ per q.o. $\mathbf{x} \in \Omega$, è massimale monotòno. Infatti abbiamo appena ricavato che il suo grafico è contenuto in $\partial\Phi$. Che sia monotòno è immediato dalla monotonia di γ. Per la massimalità basta mostrare che $R(I + A) = L^2(\Omega;\nu)$. Ora, data una qualsiasi $h \in L^2(\Omega;\nu)$, consideriamo la funzione $f(\mathbf{x}) = (I + \gamma)^{-1}(h(\mathbf{x}))$: essa è ben definita perché γ è massimale; inoltre, siccome $(I + \gamma)^{-1}$ è una contrazione (o meglio, una non-espansione) da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, assumendo $0 \in \gamma(0)$ (il che non è restrittivo essendo $\nu(\Omega) < \infty$) abbiamo che $f \in L^2(\Omega;\nu)$. Invertendo la relazione (puntualmente quasi ovunque) deduciamo che

$$f(\mathbf{x}) + \gamma(f(\mathbf{x})) \ni h(\mathbf{x}) \,,$$

ovvero $h - f \in A(f)$. Scrivendo $h = f + (h - f)$ otteniamo quanto voluto. $\square$

La proposizione appena dimostrata è importante perché permettere di descrivere puntualmente, data $f \in D(\partial(\Phi))$ e conoscendo $\gamma = \partial\phi$, come è fatto un generico elemento appartenente a $\partial\Phi(f)$. Ad esempio, nel caso che a noi interessa, ovvero $\varphi(x) = \frac{1}{m+1}|x|^{m+1}$ e quindi $\gamma(x) = x^m$ per $m > 1$ (differenziale in senso classico), abbiamo allora che $g \in L^2(\Omega;\nu)$ appartiene a $\partial\Phi(f)$ se e solo se $g(\mathbf{x}) = f^m(\mathbf{x})$. In particolare, siccome $\nu(\Omega) < \infty$ e $m > 1$, $f \in D(\partial\Phi)$ se e solo se $f \in L^{2m}(\Omega;\nu)$.
Il funzionale Φ definito con la (2.2.3), non è utile ai nostri scopi perché non intervengono mai lo spazio $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ e l'operatore $\Delta_{\nu,\mu}(\cdot) = \rho_\nu^{-1}\operatorname{div}(\rho_\mu \nabla(\cdot))$. Lavoriamo perciò in tal senso analogamente a quanto proposto in [Bré71, teo. 17]. In virtù della disuguaglianza di Poincaré (2.0.3), possiamo definire il prodotto scalare in $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ anche come

$$\langle v, w\rangle_{1;\nu,\mu} = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}\mu \,, \tag{2.2.5}$$

mentre useremo la notazione $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0;\nu}$ per indicare prodotto scalare in $L^2(\Omega;\nu)$ e ${}_{-1;\nu,\mu}\langle\cdot,\cdot\rangle_{1;\nu,\mu}$ per la dualità tra $W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu) = \left(W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)\right)^*$ e $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$. Così come accade nel caso non pesato per $-\Delta$, l'operatore $-\Delta_{\nu,\mu}$ rappresenta l'inverso dell'operatore di Riesz (che perciò denoteremo con $-\Delta_{\nu,\mu}^{-1}$) rispetto al prodotto scalare (2.2.5). Altrimenti detto, dato $\Lambda \in W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$, risolvere in senso debole

$$-\Delta_{\nu,\mu}(v) = \Lambda$$

significa trovare l'elemento di Riesz v di Λ; $-\Delta_{\nu,\mu}$ corrisponde quindi alla classica identificazione dello spazio $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ col suo duale. Un altro importante operatore è quello costituito dall'immersione di $L^2(\Omega;\nu,\mu)$ in $W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ attraverso l'identificazione di $L^2(\Omega;\nu)$ col suo duale, il quale va inteso come sottospazio di $W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$: chiamiamo tale operatore I_0. Per definizione vale quindi

$${}_{-1;\nu,\mu}\langle I_0(f), v\rangle_{1;\nu,\mu} = \langle f, v\rangle_{0;\nu} \quad \forall f \in L^2(\Omega;\nu)\,,\ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)\,.$$

[8]L'integrabilità di $\phi(f)$, ovvero l'appartenenza di f a $D(\Phi)$, è una conseguenza della stessa (2.2.4).

Chiaramente I_0 è lineare e continuo. Non solo: come nel caso non pesato, esso è iniettivo e con immagine densa. Ciò è di fondamentale importanza per quanto seguirà. Giunti a questo punto, introduciamo il funzionale $\Psi : W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ così definito:

$$\Psi(\Lambda) = \begin{cases} \Phi(I_0^{-1}(\Lambda)) & \text{se } \Lambda \in R(I_0) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}, \tag{2.2.6}$$

dove Φ è i inteso come nella (2.2.3) quando $\phi(x) = \frac{1}{m+1}|x|^{m+1}$. In sostanza diciamo che Ψ coincide con Φ sugli elementi di $W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ identificabili come funzioni di $L^2(\Omega;\nu,\mu)$ e vale $+\infty$ altrove. Il funzionale Ψ gode della seguente cruciale proprietà, per la quale in realtà non è necessario che Φ abbia la forma appena descritta:

Proposizione 2.5. *Supponiamo che Φ sia un funzionale convesso s.c.i. in $L^2(\Omega;\nu,\mu)$ e coercivo. Allora Ψ è convesso e s.c.i. in $W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$; inoltre $\Xi \in \partial\Psi(\Lambda)$ se e solo se $-\Delta_{\nu,\mu}^{-1}(\Xi) \in \partial\Phi(I_0^{-1}(\Lambda))$.*

Dimostrazione. È una diretta applicazione del teorema 4.3 di [SV97] (il quale richiede la validità della disuguaglianza di Poincaré) in un contesto qui più semplice dato che, rispetto alla notazione lì utilizzata, $H_a = H = L^2(\Omega;\nu,\mu)$ e $V_a = V = W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$. $\square$

La coercività richiesta a Φ, nel caso in cui Φ sia definito come nella (2.2.3) con $\phi(x) = \frac{1}{m+1}|x|^{m+1}$, evidentemente sussiste posto che $m > 1$ e $\nu(\Omega) < \infty$.
Unendo i risultati delle proposizioni 2.4 e 2.5 abbiamo un'importante caratterizzazione di $\partial\Psi(\Lambda)$, ovvero

$$\Xi \in \partial\Psi(\Lambda) \Longleftrightarrow -\Delta_{\nu,\mu}^{-1}(\Xi)(\mathbf{x}) \in \gamma(I_0^{-1}(\Lambda)(\mathbf{x})) \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \Omega\,. \tag{2.2.7}$$

Se γ è il grafico di una funzione (per esempio quando $\phi(x) = \frac{1}{m+1}|x|^{m+1}$ e perciò $\gamma(x) = x^m$) la (2.2.7), formalmente (trascurando I_0^{-1}), si può riscrivere come

$$\Xi = -\Delta_{\nu,\mu}(\gamma(\Lambda))\,.$$

Possiamo finalmente formulare un teorema di esistenza e unicità per la (2.0.1) sotto ipotesi più deboli (a parte la finitezza di $\nu(\Omega)$ e la validità della (2.0.3)) di quelle assunte nella sezione 2.1. Per semplicità di notazione sottintenderemo l'operatore I_0^{-1}.

Teorema 2.2. *Sia $u_0 \in W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$. Allora esiste una funzione $u \in C([0,\infty); W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu))$ tale che*

$$u(t) \in L^{m+1}(\Omega;\nu,\mu),\ u^m(t) \in W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu) \quad \forall t > 0\,, \tag{2.2.8}$$

$$u \in W^{1,\infty}([\tau_1,\infty); W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)) \quad \forall \tau_1 > 0\,, \tag{2.2.9}$$

$$\Delta_{\nu,\mu}^{-1}(u_t(t)) = u^m(t) \quad \text{per q.o. } t > 0\,, \tag{2.2.10}$$

$$u(0) = u_0\,. \tag{2.2.11}$$

Inoltre la funzione $\Psi(u(t)) = \frac{1}{m+1}\int_\Omega |u(t)|^{m+1}\,\mathrm{d}\nu$ *è Lipschitziana sugli intervalli* $[\tau_2,\infty)$ *per ogni* $\tau_2 > 0$, *con*

$$\frac{\mathrm{d}\Psi(u(t))}{\mathrm{d}t} = -\left\|\nabla(u^m(t))\right\|_{2;\mu}^2 \quad \text{per q.o. } t>0\,; \tag{2.2.12}$$

se anche $u_0 \in L^{m+1}(\Omega;\nu)$, *si può porre* $\tau_2 = 0$ *e si ha* $u \in W^{1,2}((0,\infty);W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu))$. *Infine se* $u_0^m \in W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ *la (2.2.9) vale per* $\tau_1 = 0$.

Dimostrazione. Il risultato è deducibile dai teoremi 3.1–3.2 e dalla proposizione 3.1 di [Bré73] e dalle proposizioni 2.4–2.5 con le scelte $H = W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$, $A = \partial\Psi$ e $\Phi(f) = \frac{1}{m+1}\int_\Omega f^{m+1}\,\mathrm{d}\nu$. □

Per parlare di unicità, prima naturalmente occorre introdurre un'opportuna classe di soluzioni. Seguendo [Bré73, def. 3.1], fissato $u_0 \in W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$, intendiamo come soluzione (nel senso degli operatori massimali monotòni) della (2.0.1) una qualsiasi funzione

$$u(t) \in C([0,\infty);W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)) \cap W^{1,\infty}_{loc}((0,\infty);W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu))$$

che soddisfi la (2.2.10) e la (2.2.11). In questo senso, evidentemente, quella fornita dal teorema 2.2 è una soluzione della (2.0.1). Non solo. Per due soluzioni u e v (nel senso degli operatori massimali monotòni) corrispondenti a due dati iniziali $u_0, v_0 \in W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ non è difficile verificare che vale la stima di non-espansività [Bré73, lemma 3.1]

$$\|u(t)-v(t)\|_{W^{-1,2}_{\nu,\mu}} \le \|u_0 - v_0\|_{W^{-1,2}_{\nu,\mu}}\;; \tag{2.2.13}$$

di conseguenza, l'unicità è un'immediata conseguenza della (2.2.13).
In ultima analisi, resta da stabilire il legame tra questo tipo di soluzioni e quelle costruite nella sezione 2.1. Anzitutto, supponiamo $u_0 \in L^{m+1}(\Omega;\nu)$. Dal teorema 2.2 deduciamo, in particolare, che $u \in L^\infty((0,\infty);L^{m+1}(\Omega;\nu)) \cap W^{1,2}((0,\infty);W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu))$ e $u^m \in L^2((0,\infty);\,W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu))$. Inoltre dalla (2.2.10) abbiamo che, fissata una qualsiasi funzione $w \in W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$,

$$\begin{gathered} {}_{-1;\nu,\mu}\langle u_t(t), w\rangle_{1;\nu,\mu} = -\langle u^m(t), w\rangle_{1;\nu,\mu} = -\int_\Omega \nabla(u^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla w(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mu \\ \text{per q.o. } t>0\,; \end{gathered} \tag{2.2.14}$$

inserendo nella (2.2.14) una funzione $\eta(\cdot,t)$ come nella formulazione debole (2.1.2) al posto di w e integrando in $(0,T)$, per $T>0$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^T\!\!\int_\Omega u(\mathbf{x},t)\eta_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = &-\int_\Omega u_0(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x},0)\,\mathrm{d}\nu + \\ &+\int_0^T\!\!\int_\Omega \nabla(u^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\eta(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t\,; \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

di conseguenza, concludiamo che u è la soluzione di energia della (2.0.1). Da ciò si deduce quindi che i due concetti di soluzione effettivamente coincidono almeno quando $u_0 \in L^{m+1}(\Omega;\nu)$. A partire da questo fatto è facile dimostrare che anche le soluzioni limite e le soluzioni nel senso degli operatori massimali monotòni sono equivalenti se il dato iniziale u_0 appartiene a $L^2(\Omega;\nu)$. Infatti, consideriamo una successione $u_{0n} \in L^{m+1}(\Omega;\nu)$ che converge a u_0 in $L^2(\Omega;\nu)$. Evidentemente, ciò implica che

$$u_{0n} \to u_0 \text{ in } L^1(\Omega;\nu) \quad \text{e} \quad u_{0n} \to u_0 \text{ in } W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)\,;$$

dalla definizione di soluzione limite abbiamo che $u_n(t)$ converge in $L^1(\Omega;\nu)$ alla soluzione limite $u_L(t)$ relativa al dato iniziale u_0 e allo stesso tempo, grazie alla stima di non-espansività (2.2.13), converge in $W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ alla soluzione nel senso degli operatori massimali monotòni $u_M(t)$ (il tutto per q.o. $t>0$). Inoltre, vista la non-espansività della norma $\|\cdot\|_{2;\nu}$ per soluzioni d'energia, possiamo assumere anche che, a meno di sottosuccessioni, $u_n(t)$ converga debolmente a $u_L(t)$ in $L^2(\Omega;\nu)$, da cui $u_L(t) = u_M(t)$ per quasi ogni $t>0$ grazie all'unicità del limite debole in $W^{-1,2}(\Omega;\nu,\mu)$.

2.3 Disuguaglianza di Poincaré e stime regolarizzanti e asintotiche: l'implicazione diretta

Supponiamo ora che nello spazio $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ valga la disuguaglianza di Poincaré (2.0.3). Sfruttando un metodo differenziale alla Gross analogo a quello utilizzato nel caso dell'evoluzione del p-Laplaciano (sezione 1.2), possiamo dimostrare che le soluzioni[9] dell'equazione (2.0.1) godono di una regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^{ϱ}_ν per ogni $q_0 \in [1,\infty)$ e $\varrho \in (q_0,\infty)$. Più precisamente, abbiamo il seguente risultato:

Teorema 2.3. *Sia $u_0 \in L^1(\Omega;\nu)\cap L^{q_0}(\Omega;\nu)$, con $q_0\in[1,\infty)$. Se vale la disuguaglianza di Poincaré* (2.0.3) *la soluzione u della* (2.0.1) *corrispondente al dato iniziale u_0 soddisfa la stima*

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu} \le K_1\, t^{-\frac{\varrho-q_0}{\varrho(m-1)}}\, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}} \qquad \forall t>0\,, \tag{2.3.1}$$

*dove $\varrho\in(q_0,\infty)$ e K_1 è un'opportuna costante dipendente solo da ϱ, m e C_P. Inoltre, se $\nu(\Omega)<\infty$, per ogni $\varrho\in[1,\infty)$ vale l'*absolute bound

$$\|u(t)\|_{\varrho} \le K_2\, t^{-\frac{1}{m-1}} \quad \forall t>0\,, \tag{2.3.2}$$

essendo K_2 un'altra costante dipendente da ϱ, m, C_P e $\nu(\Omega)$.

Dimostrazione. Il procedimento non è sostanzialmente diverso da quelli sviluppati in [Gri10, teo. 1.3] e nella dimostrazione del teorema 1.1, perciò segnaleremo solo le modifiche più significative[10]. In particolare, il funzionale entropico $J(r,f)$ è lo stesso definito nella suddetta dimostrazione. Fissato $r\in[1,2)$, la validità della famiglia di disuguaglianze logaritmiche

$$\left(J(r,v) + \frac{1}{2-r}\log\varepsilon\right)\frac{(2-r)\,\|v\|_{r;\nu}^2}{\varepsilon\, C_P^2} \le \|\nabla v\|_{2;\mu}^2 \tag{2.3.3}$$

[9]In questa e nella prossima sezione sarà sempre implicito che col termine soluzioni intenderemo *soluzioni limite*, e quindi anche che i pesi ρ_ν,ρ_μ soddisfino le ipotesi del teorema di esistenza 2.1.

[10]I calcoli che svolgeremo sono formali, ma si possono giustificare per approssimazione, per esempio ripartendo dai problemi non degeneri sui domini regolari Ω_n del teorema 2.1.

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \forall v \in L^r(\Omega;\nu) \cap W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$$

è già stata provata in [Gri10, teo. 1.3] (qui ci troviamo nel caso particolare $p = 2$). Dati $u_0 \in L^1(\Omega;\nu) \cap L^\infty(\Omega)$, $t > 0$, $q_0 \in (1,\infty)$, $\varrho \in (q_0,\infty)$, sia u la soluzione della (2.0.1) corrispondente a u_0. Introducendo una funzione $q : [0,t] \to [q_0,\varrho]$ crescente, biunivoca e $C^1[0,t]$, dopo un calcolo diretto, sfruttando la (2.0.1), si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \log \|u(s)\|_{q(s);\nu} =& \frac{\dot q(s)}{q(s)} J(q(s),u(s)) - \\ &- \left(\frac{2}{q(s)+m-1}\right)^2 \frac{m(q(s)-1)}{\|u(s)\|_{q(s);\nu}^{q(s)}} \left\|\nabla\left(u^{\frac{q(s)+m-1}{2}}\right)(s)\right\|_{2;\mu}^2 .\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Da questo punto in poi, una volta applicata la (2.3.3) alla funzione $u^{(q+m-1)/2}$ nella (2.3.4), la dimostrazione risulta identica a quella del teorema 1.3 di [Gri10], cambiando solo alcuni valori dei parametri coinvolti (nello specifico basta sostituire $q-1$ con $m(q-1)$, $p-2$ con $m-1$, p con 2 e C con C_P^2). Di conseguenza non ci sono difficoltà a ottenere la stima (2.3.1).
Per quanto riguarda l'*absolute bound* osserviamo anzitutto che, grazie alla (2.0.3) e alla finitezza di $\nu(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u(s)\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} &= -\left(\frac{2}{\varrho+m-1}\right)^2 m\varrho(\varrho-1)\left\|\nabla\left(u^{\frac{\varrho+m-1}{2}}\right)(s)\right\|_{2;\mu}^2 \le \\ &\le -\left(\frac{2}{\varrho+m-1}\right)^2 \frac{m\varrho(\varrho-1)}{C_P^2}\|u(s)\|_{\varrho+m-1;\nu}^{\varrho+m-1} \le \\ &\le -\left(\frac{2}{\varrho+m-1}\right)^2 \frac{m\varrho(\varrho-1)}{C_P^2\,\nu(\Omega)^{\frac{m-1}{\varrho}}}\|u(s)\|_{\varrho;\nu}^{\varrho+m-1} = -D\left(\|u(s)\|_{\varrho;\nu}^{\varrho}\right)^{\frac{\varrho+m-1}{\varrho}} ,\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

dove D è una costante dipendente da ϱ, m, C_P e $\nu(\Omega)$. Risolvendo la disequazione differenziale risultante nella variabile $y(s) = \|u(s)\|_{\varrho;\nu}^{\varrho}$ si arriva a:

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu} \le \frac{1}{\left(\|u_0\|_{\varrho;\nu}^{1-m} + \frac{D(m-1)}{\varrho}t\right)^{\frac{1}{m-1}}} \quad \forall t > 0\,, \tag{2.3.6}$$

da cui si deduce facilmente la (2.3.2).
Infine, per rimuovere l'ipotesi $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ si procede in modo standard come nella dimostrazione del teorema 1.1. □

Osserviamo che la (2.3.1), così come la (1.2.1), costituisce una regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^ϱ_ν non estendibile al caso $\varrho = \infty$ (la costante K_1 diverge per $\varrho \to \infty$). Se si assumesse che in $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ vale la classica disuguaglianza di Sobolev[11] (evidentemente per $N \ge 3$), non ci sarebbero difficoltà a ripetere la dimostrazione del teorema 1.5 di [BG05m] e concludere che si avrebbe una regolarizzazione anche in $L^\infty(\Omega)$. Tuttavia possiamo provare che, in generale, con la validità della disuguaglianza di Poincaré (2.0.3) tale regolarizzazione non ha luogo. A tale scopo, forniamo ora un controesempio esplicito.

[11] $\|v\|_{\frac{2N}{N-2};\nu} \le C_S \|\nabla v\|_{2;\mu}\ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$.

Controesempio alla regolarizzazione in $L^\infty(\Omega)$

Sia $\Omega = (0,\infty)$. Rispetto ai pesi $\rho_\nu(x) = \rho_\mu(x) = e^{-x}$, si sa che vale la disuguaglianza di Poincaré (2.0.3) (essa è verificata in tutto $AC_{\mathcal{L}}(0,\infty)$ – si veda la sezione 4.1.1). In questo contesto, l'equazione dei mezzi porosi pesata con condizioni di Dirichlet omogenee assume la seguente forma:

$$\begin{cases} u_t = e^x(e^{-x}(u^m)_x)_x & \text{in } (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = 0 \quad \text{per } t>0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } (0,\infty) \end{cases} . \tag{2.3.7}$$

Vogliamo dimostrare che per il dato iniziale $u_0(x) = \log(x+1)$ la corrispondente soluzione $u(x,t)$ rimane illimitata per ogni $t \geq 0$. A tale scopo, consideriamo la famiglia di funzioni

$$v_B(x,t) = \frac{\log(x+1)}{(1+B^{-1}(m-1)t)^{\frac{1}{m-1}}} . \tag{2.3.8}$$

Possiamo provare che per un'opportuna scelta della costante $B>0$, v_B è *sottosoluzione* della (2.3.7). Infatti, dopo qualche passaggio, si ottiene:

$$\begin{aligned} e^x(e^{-x}([\log(x+1)]^m)_x)_x = & -m\frac{[\log(x+1)]^{m-1}}{x+1} - m\frac{[\log(x+1)]^{m-1}}{(x+1)^2} + \\ & + m(m-1)\frac{[\log(x+1)]^{m-2}}{(x+1)^2} ; \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

evidentemente, esiste una costante $\widehat{B}>0$ tale che

$$\log(x+1) \geq -\widehat{B} e^x(e^{-x}([\log(x+1)]^m)_x)_x ; \tag{2.3.10}$$

perciò

$$\begin{aligned} \left(v_{\widehat{B}}\right)_t = & -\frac{\log(x+1)}{\widehat{B}\left(1+\widehat{B}^{-1}(m-1)t\right)^{\frac{m}{m-1}}} \leq \frac{e^x(e^{-x}([\log(x+1)]^m)_x)_x}{\left(1+\widehat{B}^{-1}(m-1)t\right)^{\frac{m}{m-1}}} = \\ = & \, e^x\left(e^{-x}\left(\left[v_{\widehat{B}}\right]^m\right)_x\right)_x . \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Di conseguenza, $v_{\widehat{B}}$ è effettivamente una sottosoluzione della (2.3.7) relativa al dato iniziale $u_0(x) = \log(x+1)$. Dal principio del confronto per sotto-soprasoluzioni[12] deduciamo che $v_{\widehat{B}} \leq u$, ovvero u è illimitata per ogni $t \geq 0$; siccome inoltre $u_0 \in L^{q_0}((0,\infty);e^{-x})$ $\forall q_0 \in [1,\infty)$, abbiamo mostrato che in questo caso la regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^∞ non ha luogo per nessun $q_0 \in [1,\infty)$.

2.4 Disuguaglianza di Poincaré e stime regolarizzanti e asintotiche: l'implicazione inversa

In questa sezione dimostriamo che, sotto l'ipotesi $\nu(\Omega) < \infty$, la validità della stima regolarizzante (2.3.1) implica a sua volta la validità della disuguaglianza di Poincaré (2.0.3).

[12] Vista la regolarità dei dati, si può provare similmente a [Váz07, teo. 8.10].

Teorema 2.4. *Supponiamo $\nu(\Omega) < \infty$. Se, per ogni soluzione della* (2.0.1) *e per un fissato $q_0 \in [1, m+1)$, vale la stima*

$$\|u(t)\|_{m+1;\nu} \leq K_1 \, t^{-\frac{m+1-q_0}{(m+1)(m-1)}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{m+1}} \qquad \forall t > 0 \tag{2.4.1}$$

(ovvero la (2.3.1) *quando $\varrho = m+1$), dove K_1 è una costante indipendente da u_0, allora nello spazio $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ sussiste la disuguaglianza di Poincaré* (2.0.3).

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del teorema 1.2 e di [Gri10, teo. 1.3], cerchiamo di portarci nella condizione di poter utilizzare il risultato [BCLS95, teo. 3.1]. Procedendo in tal senso, consideriamo una generico dato iniziale $u_0 \in W_c^{1,\infty}(\Omega)$. Anzitutto, si può provare la seguente disuguaglianza, analoga della (1.3.3) per l'evoluzione del p-Laplaciano:

$$\|u(t)\|_{m+1;\nu}^{m+1} - \|u_0\|_{m+1;\nu}^{m+1} \geq -(m+1)\, t \, \|\nabla(u_0^m)\|_{2;\mu}^2 \quad \forall t > 0 \, . \tag{2.4.2}$$

La (2.4.2), formalmente, si ottiene facilmente moltiplicando l'equazione (2.0.1) per $\rho_\nu u^m$, integrando in $\Omega \times (0,t)$ e sfruttando il fatto che la quantità $\|\nabla(u^m(s))\|_{2;\mu}$ è non-crescente (si veda il corollario 2.1). Tuttavia, in questo caso occorre prestare maggiore attenzione. Difatti se la stima (2.1.5) (per $q = m$) valesse come uguaglianza, la (2.4.2) si potrebbe dimostrare in modo semplice e rigoroso, ma tale stima è stata ricavata per convergenza debole, perciò in generale rimane solo una disuguaglianza. Se però il dominio Ω è di ν-misura finita e il dato iniziale appartiene a $W_c^{1,\infty}(\Omega)$, la (2.4.2) è comunque soddisfatta. Infatti ritornando al procedimento approssimante illustrato nella dimostrazione del lemma 2.1 (assumendo per ora anche le relative ipotesi), dalla (2.1.12) e dalla (2.1.14) (intesa con $\zeta = 1$) deduciamo, in particolare, che

$$\int_\Omega \Psi_n(u_n(\mathbf{x},t))\,\mathrm{d}\nu - \int_\Omega \Psi_n(u_0(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\nu \geq -t \int_\Omega |\nabla(\Phi_n(u_0))(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mu \quad \forall t > 0 \, . \tag{2.4.3}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ la disuguaglianza si mantiene grazie al fatto che il dato iniziale è regolare e $\Psi_n(u_n(\cdot,t))$, $\Psi_n(u_0(\cdot))$ e $\Phi_n'(u_0(\cdot))$ convergono puntualmente rispettivamente a $\frac{1}{m+1}|u(\cdot,t)|^{m+1}$, $\frac{1}{m+1}|u_0(\cdot)|^{m+1}$, $m|u_0(\cdot)|^{m-1}$ e sono certamente dominate da una funzione in $L^\infty(\Omega)$, traducendosi nella (2.4.2). Le ipotesi del lemma 2.1 si possono rimuovere ripetendo il procedimento approssimante del teorema 2.1. Il punto cruciale è proprio la convergenza della quantità $\int_\Omega |u_n(\cdot,t)|^{m+1}\mathrm{d}\nu$ a $\int_\Omega |u(\cdot,t)|^{m+1}\mathrm{d}\nu$, per dimostrare la quale abbiamo bisogno di dominare $|u_n(\cdot,t)|^{m+1}$ con una funzione integrabile, fatto immediato grazie alla non-espansività della norma $\|\cdot\|_\infty$ e alla finitezza di $\nu(\Omega)$. Se $\nu(\Omega) = \infty$ in generale possiamo concludere solo che $u_n(t)$ converge debolmente a $u(t)$ in $L^{m+1}(\Omega;\nu)$, il che evidentemente impedisce di passare al limite nella (2.4.2) (applicata a $u_n(t)$).

Ora, a partire dalla (2.4.2), utilizzando la proprietà regolarizzante (2.4.1) si ottiene immediatamente che

$$\|u_0\|_{m+1;\nu}^{m+1} \leq K_1^{(m+1)} \, t^{-\frac{(m+1-q_0)}{m-1}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{q_0} + (m+1)\, t \, \|\nabla(u_0^m)\|_{2;\mu}^2 \quad \forall t > 0 \, . \tag{2.4.4}$$

Ragionando come in [Gri10, teo. 1.3], calcolando esplicitamente il minimo del membro destro al variar di $t > 0$ arriviamo a

$$\|u_0\|_{m+1;\nu} \leq B \, \|\nabla(u_0^m)\|_{2;\mu}^{\frac{2(m+1-q_0)}{(m+1)(2m-q_0)}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0(m-1)}{(m+1)(2m-q_0)}} \, , \tag{2.4.5}$$

dove $B = B(q_0, m, K_1) > 0$ è un'opportuna costante. A questo punto, conviene riscrivere la (2.4.5) rimuovendo il termine u_0^m. Per fare ciò, vorremmo inserire nella stessa $u_0^{1/m}$ al posto di u_0, ma la funzione $u_0^{1/m}$ non è sufficientemente regolare. In ogni caso, si può procedere per approssimazione. Nello specifico, consideriamo la seguente successione di funzioni $\xi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } |x| \in \left[0, \frac{1}{2n}\right) \\ 2\left(x - \frac{1}{2n}\right) & \text{per } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right) \\ 2\left(x + \frac{1}{2n}\right) & \text{per } x \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{2n}\right) \\ x & \text{per } |x| \in \left[\frac{1}{n}, \infty\right) \end{cases} . \tag{2.4.6}$$

L'approssimante

$$v_n = \xi_n\left(u_0^{\frac{1}{m}}\right)$$

evidentemente appartiene ancora a $W_c^{1,\infty}(\Omega)$; inoltre:

$$|v_n(\mathbf{x})| \le |u_0(\mathbf{x})|^{\frac{1}{m}} , \tag{2.4.7}$$

$$\nabla(v_n^m)(\mathbf{x}) = \xi_n'\left(u_0^{\frac{1}{m}}(\mathbf{x})\right) |v_n(\mathbf{x})|^{m-1} |u_0(\mathbf{x})|^{\frac{1}{m}-1} \nabla u_0(\mathbf{x}) \tag{2.4.8}$$

$$\text{per q.o. } \mathbf{x} \text{ in } \Omega .$$

Viste le proprietà di ξ_n, non è difficile controllare che v_n e $\nabla(v_n^m)$ convergono puntualmente rispettivamente a $u_0^{1/m}$ e $\nabla(u_0)$ e (dalla (2.4.8)) che

$$|\nabla(v_n^m)|(\mathbf{x}) \le 2\,|\nabla(u_0)|(\mathbf{x}) \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \text{ in } \Omega ;$$

di conseguenza, applicando la (2.4.5) al dato iniziale v_n e passando al limite per $n \to \infty$, grazie al teorema della convergenza dominata otteniamo:

$$\left\| u_0^{1/m} \right\|_{m+1;\nu} \le B\, \|\nabla(u_0)\|_{2;\mu}^{\frac{2(m+1-q_0)}{(m+1)(2m-q_0)}} \left\| u_0^{1/m} \right\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0(m-1)}{(m+1)(2m-q_0)}} , \tag{2.4.9}$$

ovvero

$$\|u_0\|_{\frac{m+1}{m};\nu} \le B^m\, \|\nabla(u_0)\|_{2;\mu}^{\frac{2m(m+1-q_0)}{(m+1)(2m-q_0)}} \|u_0\|_{\frac{q_0}{m};\nu}^{\frac{q_0(m-1)}{(m+1)(2m-q_0)}} . \tag{2.4.10}$$

Ponendo

$$\vartheta = \frac{2m(m+1-q_0)}{(m+1)(2m-q_0)} ,\ r = \frac{m+1}{m} ,\ s = \frac{q_0}{m} ,\ q = 2 ,\ \mathcal{W}(f) = \|\nabla f\|_{2;\mu} ,$$

essendo f una qualsiasi funzione non-negativa appartenente a $W_c^{1,\infty}(\Omega)$, la (2.4.10) si riscrive così:

$$\|f\|_{r;\nu} \le \left(B^{\frac{m}{\vartheta}}\, \mathcal{W}(f)\right)^{\vartheta} \|f\|_{s;\nu}^{1-\vartheta} ,\ \frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{q} + \frac{1-\vartheta}{q_0} ; \tag{2.4.11}$$

il teorema 3.1 di [BCLS95] è applicabile, e ci garantisce che esiste una costante (che continueremo a chiamare $B = B(q_0, m, K_1)$) tale la (2.4.11) vale anche per $\vartheta = 1$ e $q = 2$, il che in questo caso significa

$$\|f\|_{2;\nu} \leq B \ \|\nabla f\|_{2;\mu} \ , \tag{2.4.12}$$

cioè la disuguaglianza di 2-Poincaré per le funzioni non-negative di $W_c^{1,\infty}(\Omega)$. L'estensione a tutte le funzioni di $W_c^{1,\infty}(\Omega)$ è immediata (basta scrivere $f = f_+ - f_-$), da cui per densità segue che la (2.4.12) vale in tutto $W_0^{1,2}(\Omega; \nu, \mu)$. □

La fondamentale disuguaglianza (2.4.2) è una diretta conseguenza del teorema 2.2 (in particolare, della (2.2.12)); si osservi però che quest'ultimo è del tutto inutilizzabile ai fini del teorema 2.4, dato che la costruzione di soluzioni deboli nella sezione 2.2 *richiede* la validità della disuguaglianza di Poincaré.
Infine notiamo che anche in questo caso i teoremi 2.3 e 2.4 (quando $\nu(\Omega) < \infty$), assieme al controesempio della sezione 2.3, costituiscono l'equivalente, adattato all'evoluzione (2.0.1), del teorema 1.3 di [Gri10].

Capitolo 3

L'equazione dei mezzi porosi pesata con condizioni di Neumann

In questo capitolo studieremo alcune importanti proprietà delle soluzioni del seguente problema evolutivo ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$):

$$\begin{cases} u_t = \rho_\nu^{-1} \operatorname{div}(\rho_\mu \nabla(u^m)) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ \rho_\mu \dfrac{\partial(u^m)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \quad \text{in } \Omega \end{cases}, \tag{3.0.1}$$

il quale costituisce l'equivalente, sostituendo la condizione di Dirichlet omogenea $u = 0$ su $\partial\Omega \times (0,\infty)$ con la condizione naturale di Neumann omogenea $\rho_\mu \frac{\partial(u^m)}{\partial \mathbf{n}} = 0$, dell'equazione dei mezzi porosi pesata (*WPME*) analizzata nel capitolo 2. Di conseguenza, per le notazioni utilizzate ci riferiamo a quest'ultimo. Manterremo la fondamentale ipotesi $m > 1$, e per ora supporremo che i pesi ρ_ν e ρ_μ siano tali da garantire almeno la completezza dello spazio di Sobolev pesato $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$, secondo quanto discusso nella sezione A.1.
Nella sezione 3.1 proveremo un risultato di esistenza e unicità per la (3.0.1), dopo aver dato un'opportuna definizione di soluzione debole; procederemo sulla falsariga delle dimostrazioni fornite nella sezione 2.1.1 (in particolare, occorrerà nuovamente richiedere regolarità interna per i pesi ρ_ν, ρ_μ). Assumendo $\nu(\Omega) < \infty$ e che valga la sola disuguaglianza di 2-Poincaré con la media (che nel corso di questo capitolo chiameremo semplicemente *disuguaglianza di Poincaré con la media*)

$$\|v - \overline{v}\|_{2;\nu} \le C_P \|\nabla v\|_{2;\mu} \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu), \tag{3.0.2}$$

dove

$$\overline{v} = \frac{\int_\Omega v \, \mathrm{d}\nu}{\nu(\Omega)},$$

nella sezione 3.2 studieremo l'effetto regolarizzante (sezione 3.2.1) di cui godono le soluzioni della (3.0.1), che risulterà simile a quello ottenuto per le soluzioni della (2.0.1), e il comportamento asintotico di quest'ultime, distinguendo (a differenza di quanto accade per l'evoluzione del p-Laplaciano) tra soluzioni che siano *a media nulla* (sezione 3.2.2) o meno (sezione 3.2.3). La breve sezione 3.3 è dedicata ad analizzare possibili implicazioni inverse, ovvero che tipo di disuguaglianza funzionale, valida in

$W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$, si può *dedurre* a partire dall'assunzione che la (3.0.1) generi un'opportuna regolarizzazione. Infine, nella sezione 3.4 ci occuperemo delle conseguenze della validità della disuguaglianza di Sobolev con la media ($N \geq 3$)

$$\|v-\overline{v}\|_{\frac{2N}{N-2};\nu} \leq C_S \, \|\nabla v\|_{2;\mu} \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu) \tag{3.0.3}$$

sulle proprietà regolarizzanti (sezione 3.4.1) e asintotiche (sezioni 3.4.2 e 3.4.3) delle soluzioni della (3.0.1). Un simile problema, in realtà, è già stato parzialmente affrontato in [BG05m]; in particolare, riusciremo a migliorare alcune delle stime fornite nel citato lavoro.

3.1 Un teorema di esistenza e unicità

Iniziamo con la definizione di un'utile spazio di Sobolev pesato e del concetto di soluzione debole per la (3.0.1).

Definizione 3.1. *Fissato $q \in [1,\infty)$, indichiamo con $V^q(\Omega;\nu,\mu)$ lo spazio costituito da tutte le funzioni $v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tali che*

$$\|v\|_{q,2;\nu,\mu} = \|v\|_{q;\nu} + \|\nabla v\|_{2;\mu} < \infty\,. \tag{3.1.1}$$

Osserviamo che $V^q(\Omega;\nu,\mu)$ costituisce l'equivalente dello spazio $V^q_0(\Omega;\nu,\mu)$ descritto nella sezione 2.1, senza il vincolo di "traccia nulla". Assumendo anche $\rho_\nu \in B^q(\Omega)$, è facile vedere che $V^q(\Omega;\nu,\mu)$ è di Banach (e riflessivo per $q>1$); tuttavia, come discusso nella sezione A.1, in realtà per garantire la completezza di $V^q(\Omega;\nu,\mu)$ è sufficiente la sola ipotesi $\rho_\mu \in B^2(\Omega)$.

Passiamo ora alla definizione di soluzione debole della (3.0.1).

Definizione 3.2. *Una funzione*

$$u \in L^2((0,T);L^2(\Omega;\nu)) : \ \nabla(u^m) \in L^2((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N) \quad \forall T>0$$

è soluzione debole della (3.0.1) *corrispondente al dato iniziale $u_0 \in L^2(\Omega;\nu)$ se soddisfa:*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega u(\mathbf{x},t)\eta_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = & -\int_\Omega u_0(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x},0)\,\mathrm{d}\nu\, + \\ & + \int_0^T\int_\Omega \nabla(u^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\eta(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

$$\forall \eta \in W^{1,2}((0,T);L^2(\Omega;\nu)) : \ \nabla\eta \in L^2((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N)\,,\ \eta(T)=0\,.$$

Si noti che la formulazione (3.1.2) è molto simile alla (2.1.2). Difatti la condizione al bordo nella (3.0.1) è puramente formale, ciò che cambia veramente rispetto alla (2.0.1) sono gli spazi funzionali in gioco. Se ci troviamo nella situazione in cui $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu) = W^{1,2}_0(\Omega;\nu,\mu)$ è immediato verificare che una soluzione della (3.1.2) è anche soluzione della (2.1.2).

A questo punto possiamo procedere con l'analisi di buona posizione per l'equazione (3.0.1).

Il problema di Neumann per la *PME* non pesata è affrontato nel capitolo 11 di [Váz07], in cui fa notare che è possibile arrivare a risultati analoghi a quelli ottenuti per il problema di Dirichlet utilizzando tecniche del tutto simili. In effetti, come vedremo, anche nel caso della *WPME* le idee sono ispirate in maniera sostanziale a quelle sviluppate nella sezione 2.1.1, perciò onde evitare ripetizioni cercheremo solo di evidenziarne le principali differenze. Partiamo da un risultato di unicità.

Proposizione 3.1. *Esiste al più una soluzione debole della* (3.1.2) *che soddisfa la seguente ipotesi* aggiuntiva*:*

$$u \in L^{m+1}((0,T); L^{m+1}(\Omega;\nu))\,. \tag{3.1.3}$$

Dimostrazione. Si procede in modo analogo alla dimostrazione della proposizione 2.1. In particolare, osserviamo che dalla (3.1.3) e dal fatto che u è una soluzione debole, deduciamo che

$$u^m \in L^{\frac{m+1}{m}}((0,T); V^{\frac{m+1}{m}}(\Omega;\nu,\mu))\,,\ \nabla(u^m) \in L^2((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N)\,. \tag{3.1.4}$$

Ora, vista l'ipotesi aggiuntiva, la (3.1.2) vale anche, per esempio, per funzioni η tali che[1]

$$\eta \in W^{1,\frac{m+1}{m}}((0,T); V^{\frac{m+1}{m}}(\Omega;\nu,\mu))\,,\ \nabla\eta \in L^2((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N)\,,\ \eta(T)=0\,. \tag{3.1.5}$$

Di conseguenza, date due ipotetiche soluzioni u_1 e u_2 corrispondenti allo stesso dato iniziale u_0 che soddisfino la (3.1.3), si inserisce la funzione test di Oleĭnik

$$\widehat{\eta}(t) = \int_t^T (u_1^m(s) - u_2^m(s))\,\mathrm{d}s$$

(che certamente verifica la (3.1.5)) nel problema differenza e, svolgendo passaggi identici a quelli della proposizione 2.1, si arriva nuovamente alla conclusione che $u_1 = u_2$. □

Anche in questo contesto chiameremo le soluzioni deboli che soddisfino la (3.1.3) *soluzioni di energia.* A livello di esistenza, possiamo formulare un analogo del teorema 2.1.

Teorema 3.1. *Sia Ω un generico dominio di $\mathbb{R}^N$, e siano ρ_ν e ρ_μ due pesi tali che:*

$$\rho_\nu \in C^{3,\alpha}_{loc}(\Omega)\,,\ \rho_\mu \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)\,,\ \rho_\nu^{-1}, \rho_\mu^{-1} \in L^\infty_{loc}(\Omega)\,. \tag{3.1.6}$$

Se $u_0 \in L^1(\Omega;\nu) \cap L^r(\Omega;\nu)$, con $r \geq m+1$, esiste la soluzione debole di energia u della (3.1.2)*, la quale soddisfa le seguenti stime:*

$$\frac{4q(q+1)m}{(m+q)^2} \int_0^T \int_\Omega \left|\nabla\left(u^{\frac{m+q}{2}}\right)(\mathbf{x},t)\right|^2 \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t + \int_\Omega |u(\mathbf{x},T)|^{q+1}\,\mathrm{d}\nu \leq \int_\Omega |u_0(\mathbf{x})|^{q+1}\,\mathrm{d}\nu\,, \tag{3.1.7}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \zeta(t) \left[\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)_t(\mathbf{x},t)\right]^2 \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t \leq \max_{t\in[0,T]} \zeta'(t)\frac{m+1}{8m}\int_\Omega |u_0(\mathbf{x})|^{m+1}\,\mathrm{d}\nu\,, \tag{3.1.8}$$

[1] Ricordando la proposizione A.3, si può approssimare η con funzioni test come nella (3.1.2) e passare al limite nella formulazione debole.

per ogni $q \leq r-1$ e per ogni $T > 0$. Se il dato iniziale è maggiormente regolare, ovvero $\nabla(u_0^m) \in [L^2(\Omega;\mu)]^N$, la (3.1.8) si può sostituire con la stima

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega \left[\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)_t(\mathbf{x},t)\right]^2 \mathrm{d}\nu\, \mathrm{d}t + \frac{(m+1)^2}{8m}\int_\Omega \left|\nabla(u^m)(\mathbf{x},T)\right|^2 \mathrm{d}\mu \leq \\ &\leq \frac{(m+1)^2}{8m}\int_\Omega \left|\nabla(u_0^m)(\mathbf{x})\right|^2 \mathrm{d}\mu\,.\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Inoltre se v è un'altra soluzione di energia corrispondente ad un dato iniziale $v_0 \in L^1(\Omega;\nu) \cap L^{m+1}(\Omega;\nu)$, vale il principio del confronto

$$\int_\Omega (u(\mathbf{x},T) - v(\mathbf{x},T))_+ \,\mathrm{d}\nu \leq \int_\Omega (u_0(\mathbf{x}) - v_0(\mathbf{x}))_+ \,\mathrm{d}\nu\,. \tag{3.1.10}$$

Dimostrazione. Si procede sulla falsariga delle dimostrazioni del lemma 2.1, del teorema 2.1 e del corollario 2.1. Ovvero, data una successione $\Phi_n(x)$ di approssimanti della funzione x^m come nel lemma 2.1 e fissato un dominio $\Omega' \in C^{2,\alpha} \Subset \Omega$, risolviamo in esso il seguente problema di Neumann:

$$\begin{cases} (u_n)_t = \rho_\nu^{-1}\,\mathrm{div}\,(\rho_\mu\, \nabla(\Phi_n(u_n))) \quad \text{in } \Omega' \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi_n(u_n)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega' \times (0,\infty) \\ u_n(\cdot,0) = u_0(\cdot) \quad \text{in } \Omega' \end{cases}, \tag{3.1.11}$$

dove per ora assumiamo $u_0 \in C^{2,\alpha}(\Omega')$ con $\frac{\partial(u_0)}{\partial \mathbf{n}} = 0$. Col cambio di variabile $w = \rho_\nu u_n$ riscriviamo la (3.1.11) in forma di divergenza:

$$\begin{cases} w_t = \mathrm{div}\left(\dfrac{\rho_\mu}{\rho_\nu}\,\Phi_n'\left(\dfrac{w}{\rho_\nu}\right)\nabla w - \dfrac{\rho_\mu}{\rho_\nu^2}\,\nabla(\rho_\nu)\,\Phi_n'\left(\dfrac{w}{\rho_\nu}\right) w\right) \quad \text{in } \Omega' \times (0,\infty) \\ \Phi_n'\left(\dfrac{w}{\rho_\nu}\right)\left(\nabla w - \dfrac{w}{\rho_\nu}\,\nabla(\rho_\nu)\right)\cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega' \times (0,\infty) \\ w(\cdot,0) = \rho_\nu(\cdot) u_0(\cdot) \quad \text{in } \Omega' \end{cases}. \tag{3.1.12}$$

La teoria quasilineare (si veda, per esempio, [Lie96, teo. 13.24]) garantisce che il problema (3.1.12) ammette una soluzione $w(\mathbf{x},t) \in C^{2,1}(\overline{\Omega'} \times [0,T])$ con, in particolare, $w_t(\mathbf{x},t) \in C^{1,0}(\Omega' \times (0,T))$ $\forall T > 0$, perciò tornando alla variabile originaria abbiamo una soluzione $u_n(\mathbf{x},t)$ della (3.1.11) con la stessa regolarità. Per due soluzioni u_n, v_n della (3.1.11) corrispondenti a due dati iniziali u_0, v_0 non è difficile verificare che vale il principio del confronto[2] (3.1.10), il quale in particolare ci garantisce che $\|u_n(T)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$. A questo punto si svolgono esattamente gli stessi calcoli effettuati nel lemma 2.1 e si passa al limite per $n \to \infty$, ottenendo una soluzione u della (3.1.2) che soddisfa le stime (3.1.7)–(3.1.9) e la validità del principio del confronto (3.1.10) nel dominio Ω'.
La questione cruciale riguarda l'estensione del risultato appena ricavato a domini generici. Anzitutto, notiamo che una volta ottenuta l'esistenza di una soluzione, assieme alle disuguaglianze (3.1.7)–(3.1.10), per domini $\Omega' \Subset \Omega$ regolari con dati

[2] Per esempio moltiplicando la differenza delle equazioni per un'approssimante di $\rho_\nu\, \mathrm{sign}_+(\Phi_n(u) - \Phi_n(v))$ e integrando in $\Omega' \times (0,T)$ [Váz07, prop. 3.5].

iniziali $u_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})$, non ci sono difficoltà a dedurre che tutto continua a valere se solo[3] $u_0 \in L^\infty(\Omega')$ (si veda l'inizio della dimostrazione del teorema 2.1). Per semplicità, consideriamo quindi un dato iniziale $u_0 \in L^1(\Omega;\nu) \cap L^\infty(\Omega)$ e una successione di domini crescenti $\Omega_n \in C^{2,\alpha}$ tale che $\Omega_n \Subset \Omega$ e $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$. Così come per il problema di Dirichlet, risolviamo su Ω_n il problema di Neumann omogeneo (3.0.1) corrispondente al dato iniziale $u_{0n} = u_0|_{\Omega_n}$ e chiamiamo u_n la relativa soluzione. Data una funzione η come nella definizione 3.2, evidentemente abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega_n} u_n(\mathbf{x},t)\eta_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = -\int_{\Omega_n} u_0(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x},0)\,\mathrm{d}\nu\,+ \\ + \int_0^T\int_{\Omega_n} \nabla(u_n^m)(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\eta(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t\,;\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

inoltre le stime (3.1.7) e (3.1.8) ci dicono che:

$$\begin{aligned}\frac{4q(q+1)m}{(m+q)^2}\int_0^T\int_{\Omega_n}\left|\nabla\left(u_n^{\frac{m+q}{2}}\right)(\mathbf{x},t)\right|^2\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t + \int_{\Omega_n}|u_n(\mathbf{x},T)|^{q+1}\,\mathrm{d}\nu \le \\ \le \int_{\Omega_n}|u_0(\mathbf{x})|^{q+1}\,\mathrm{d}\nu\,,\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

$$\int_0^T\int_{\Omega_n}\zeta(t)\left[\left(u_n^{\frac{m+1}{2}}\right)_t(\mathbf{x},t)\right]^2\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t \le \max_{t\in[0,T]}\zeta'(t)\frac{m+1}{8m}\int_{\Omega_n}|u_0(\mathbf{x})|^{m+1}\,\mathrm{d}\nu\,. \tag{3.1.15}$$

Ora, dalla (3.1.14) e dalla (3.1.15) deduciamo, in particolare, che $u_n^{(m+1)/2}$ è limitata in $H^1(\Omega' \times (\tau,T))$ per ogni $\Omega' \Subset \Omega$ e per ogni $\tau, T > 0$ con $\tau \in (0,T)$ (ricordiamo che i pesi ρ_ν e ρ_μ, localmente, sono equivalenti al peso unitario). Perciò, tramite un classico procedimento diagonale, possiamo estrarne una sottosuccessione (che continueremo a contrassegnare con l'indice n) convergente puntualmente ad una funzione che chiamiamo $u^{(m+1)/2}$, cosicché a loro volta u_n e u_n^m (tutte le funzioni vanno estese arbitrariamente fuori da Ω_n) convergono puntualmente rispettivamente a u e u^m in $\Omega\times(0,\infty)$. Fino a questo punto non ci sono grosse differenze con la dimostrazione fornita nel caso del problema di Dirichlet; ciò che manca è la convergenza debole, che per il suddetto problema deducevamo semplicemente osservando che estendendo a zero u_n fuori da Ω_n si otteneva una successione limitata in $L^2((0,T);L^2(\Omega;\nu))$ con u_n^m limitata in $L^2((0,T);W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu))$. In questo contesto, chiaramente, estendendo a zero u_n^m in $\Omega\setminus\Omega_n$ perdiamo l'appartenenza della stessa allo spazio $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$. Tuttavia si può superare quest'ostacolo con una semplice, ma efficace, osservazione. Ovvero, è sufficiente estendere a zero in $\Omega\setminus\Omega_n$ u_n (e quindi u_n^m) e $\nabla(u_n^m)$ *separatamente*. Perciò posti

$$z_n = u_n\,\chi_{\Omega_n}\,,\ \mathbf{w}_n = \nabla(u_n^m)\,\chi_{\Omega_n}\,,$$

la (3.1.13) diventa:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega} z_n(\mathbf{x},t)\eta_t(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = -\int_{\Omega} u_{0n}(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x},0)\,\mathrm{d}\nu\,+ \\ + \int_0^T\int_{\Omega} \mathbf{w}_n(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\eta(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t\,;\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

[3]Nel caso $\nabla(u_0^m) \in L^2(\Omega')$, per conservare la stima (3.1.9) possiamo prendere una successione $u_{0n} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})$ con $\frac{\partial u_{0n}}{\partial\mathbf{n}} = 0$ che converge a u_0 in tutti gli spazi $L^{q+1}(\Omega')$ e tale che $u_{0n}^m \to u_0^m$ in $H^1(\Omega')$.

grazie alla (3.1.14) possiamo assumere che le successioni z_n e $\mathbf{w}_n$ convergano debolmente rispettivamente a due elementi z in $L^2((0,T);L^2(\Omega;\nu))$ e $\mathbf{w}$ in $L^2((0,T);[L^2(\Omega;\mu)]^N)$, per cui si può passare al limite nella (3.1.16). Dalla convergenza puntuale segue che $z=u$, mentre per identificare $\mathbf{w}$ osserviamo che, fissato un qualsiasi $\Omega' \Subset \Omega$, definitivamente $\mathbf{w}_n|_{\Omega'} = \nabla(u_n^m|_{\Omega'})$. Siccome evidentemente $u_n^m|_{\Omega'} \rightharpoonup u^m|_{\Omega'}$ in $L^2((0,T);H^1(\Omega'))$ ma anche $\mathbf{w}_n|_{\Omega'} \rightharpoonup \mathbf{w}|_{\Omega'}$ in $L^2((0,T);L^2(\Omega'))$, ciò implica che $\nabla(u^m|_{\Omega'}) = \mathbf{w}|_{\Omega'}$, e data l'arbitrarietà di Ω' e T concludiamo che $\nabla(u^m)=\mathbf{w}$ e quindi u è soluzione debole della (3.0.1) nel senso della definizione 3.2. La validità delle disuguaglianze (3.1.7)–(3.1.8) (assieme alla (3.1.9) quando $\nabla(u_0^m) \in [L^2(\Omega;\mu)]^N$) e del principio del confronto (3.1.10) segue per convergenza debole come nella dimostrazione del teorema 2.1. Infine, anche per rimuovere l'ipotesi $u_0 \in L^1(\Omega;\nu) \cap L^\infty(\Omega)$, volendo considerare dati iniziali $u_0 \in L^1(\Omega;\nu) \cap L^r(\Omega;\nu)$ con $r \geq m+1$, si procede in maniera del tutto equivalente alla suddetta dimostrazione. □

Il teorema 3.1 ci fornisce quindi, sotto le relative ipotesi, una soluzione di energia della (3.0.1), la quale è anche unica (nella sua classe) grazie alla proposizione 3.1. Le soluzioni limite per generici dati in $L^1(\Omega;\nu)$ si definiscono esattamente come nella sezione 2.1.2, e la proposizione 2.2 continua chiaramente a valere anche in questo contesto. Nel caso in cui $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu) = W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ non è difficile verificare che le soluzioni di energia fornite dai teoremi 2.1 e 3.1 coincidono (infatti la soluzione di energia ottenuta grazie al teorema 2.1 diventa anche soluzione debole nel senso della (3.1.2)).

Osserviamo che se si parte da un dato iniziale non-negativo allora anche $u(\cdot,t)$ è (essenzialmente) non-negativa per ogni $t>0$. Tale proprietà evidentemente si eredita dalla validità della medesima per i problemi non-degeneri e dalla convergenza puntuale. La stessa conclusione segue anche per il problema di Dirichlet.

Particolarmente interessante ai nostri scopi è il caso $\nu(\Omega)<\infty$, in cui possiamo introdurre la media pesata

$$\overline{f} = \frac{\int_\Omega f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\nu}{\nu(\Omega)} \tag{3.1.17}$$

di una funzione $f \in L^1(\Omega;\nu)$. Il prossimo risultato è estremamente semplice ma di fondamentale importanza.

Proposizione 3.2. *Sia* $\nu(\Omega)<\infty$. *Se* u *è una soluzione debole della* (3.0.1) *allora*

$$\overline{u(t)} = \overline{u_0} = \overline{u} \quad \text{per q.o. } t>0\,. \tag{3.1.18}$$

Dimostrazione. Viste le ipotesi, è lecito inserire nella (3.1.2) la seguente funzione test:

$$\eta_h(s) = \chi_{[0,t-h/2)}(s) + \chi_{[t-h/2,t+h/2]}(s)\left(\frac{t-s}{h}+\frac{1}{2}\right)\,; \tag{3.1.19}$$

così facendo, ricaviamo:

$$\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2}\int_\Omega u(\mathbf{x},s)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}s = \int_\Omega u_0(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\nu\,. \tag{3.1.20}$$

L'asserto si deduce mandando h a zero e utilizzando il teorema di differenziazione di Lebesgue. □

Notiamo che il "quasi ogni" si può rimuovere considerando la versione continua di u fornita dal teorema 3.1 (come osservato nella sezione 2.1.1 u appartiene sempre a $C([\tau,\infty);L^{m+1}(\Omega;\nu))$ e quindi a $C([\tau,\infty);L^1(\Omega;\nu))$ essendo $\nu(\Omega)<\infty$).

Similmente a quanto dimostrato per il problema di Dirichlet, anche per il problema di Neumann, come detto, proveremo nella sezione 3.2 che se si assume la validità di una disuguaglianza di Poincaré con la media in $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ l'evoluzione (3.0.1) dà luogo ad una regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^{ϱ}_ν per ogni $q_0\in(1,\infty)$ e $\varrho\in(q_0,\infty)$, da cui abbiamo che le soluzioni limite corrispondenti a dati iniziali in $L^{q_0}(\Omega;\nu)$ sono soluzioni di energia dopo un arbitrario $\tau>0$.

3.2 Disuguaglianza di Poincaré con la media: stime regolarizzanti e asintotiche

In questa e nelle prossime sezioni supporremo sempre $\nu(\Omega)<\infty$. Assumendo che valga la disuguaglianza di Poincaré con la media (3.0.2), analizzeremo le proprietà regolarizzanti e asintotiche dell'evoluzione (3.0.1) sia tramite un metodo differenziale alla Gross che attraverso una tecnica iterativa basata sul celebre schema originariamente introdotto da J. Moser nei lavori [Mos64], [Mos71]. Col termine "soluzione" sarà sempre implicito che ci riferiremo a soluzioni limite (perciò sarà altrettanto implicito il fatto che i pesi soddisfino le ipotesi del teorema 3.1).

3.2.1 Stime regolarizzanti

Le principali regolarizzazioni che otterremo varranno in prima battuta per dati iniziali che appartengano almeno a $L^{1\vee(m-1)}(\Omega;\nu)$. Per estenderle a generici dati in $L^{q_0}(\Omega;\nu)$, con $q_0\in(1,\infty)$, saranno molto utili i due lemmi che seguono.

Lemma 3.1. *Supponiamo che valga la disuguaglianza di Poincaré* (3.0.2). *Allora per ogni $a\in(0,1]$ si ha:*

$$\|v^a-\overline{v^a}\|_{2;\nu}\le C_{P,a}\,\|\nabla v\|_{2;\mu}^a\quad\forall v\in W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)\,,\tag{3.2.1}$$

dove si può prendere $C_{P,a}=2^{1-\frac{a}{2}}\,\nu(\Omega)^{\frac{1}{2}(1-a)}\,C_P^a$.

Dimostrazione. Si veda [DGGW08, prop. 2.2]. □

A partire dal precedente lemma, possiamo dimostrare un primo risultato regolarizzante.

Lemma 3.2. *Fissati $k\in\mathbb{N}$, $q_0\in\left(1,\frac{m-1}{2^k-1}\right]$ e $m>2$, per la soluzione u della* (3.0.1) *corrispondente ad un dato iniziale $u_0\in L^{q_0}(\Omega;\nu)$ vale la stima*

$$\|u(t)\|_{2^k q_0;\nu}\le D(k)\left(t^{-\frac{1}{q_0+m-1}}\,\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+m-1}}+\|u_0\|_{q_0;\nu}\right)\quad\forall t>0\,,\tag{3.2.2}$$

essendo D una costante dipendente solo da k, q_0, m, C_P e $\nu(\Omega)$.

Dimostrazione. Conviene procedere per induzione. Iniziamo col dimostrare la (3.2.2) per $k=1$. Considereremo dati iniziali in $L^\infty(\Omega)$ (il passaggio a dati solo in $L^{q_0}(\Omega;\nu)$ è standard, si veda la dimostrazione del teorema 1.1). Ripartendo dalla (3.1.7) con $T=t$ e $q=q_0-1$ e applicando al membro sinistro la (3.2.1) alla funzione $u^{(q_0+m-1)/2}$, otteniamo:

$$\frac{4(q_0-1)q_0 m}{C_{P,a}^{2/a}(q_0+m-1)^2}\int_0^t \left(\left\|u^{a\frac{q_0+m-1}{2}}(s)\right\|_{2;\nu}-\nu(\Omega)^{-\frac{1}{2}}\left\|u^{a\frac{q_0+m-1}{2}}(s)\right\|_{1;\nu}\right)^{\frac{2}{a}}\mathrm{d}s\leq$$
$$\leq \|u_0\|_{q_0;\nu}^{q_0}\ . \tag{3.2.3}$$

Premettiamo che D rappresenterà, d'ora in poi, una generica costante dipendente da k, q_0, m, C_P e $\nu(\Omega)$ che può cambiare da passaggio a passaggio. Utilizzando la disuguaglianza di Jensen nell'integrale temporale della (3.2.3) ed elevando tutto alla $\frac{a}{2}$, ricaviamo:

$$t^{\frac{a}{2}-1}\int_0^t\left(\|u(s)\|_{a(q_0+m-1);\nu}^{\frac{a}{2}(q_0+m-1)}-\nu(\Omega)^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_{\frac{a}{2}(q_0+m-1);\nu}^{\frac{a}{2}(q_0+m-1)}\right)\mathrm{d}s\leq D\,\|u_0\|_{q_0;\nu}^{q_0\frac{a}{2}}\ ; \tag{3.2.4}$$

da cui, sfruttando la non-espansività delle norme (banale conseguenza sempre della (3.1.7)),

$$t^{\frac{a}{2}}\,\|u(t)\|_{a(q_0+m-1);\nu}^{\frac{a}{2}(q_0+m-1)}\leq D\,\|u_0\|_{q_0;\nu}^{q_0\frac{a}{2}}+\frac{t^{\frac{a}{2}}}{\nu(\Omega)^{\frac{1}{2}}}\,\|u_0\|_{\frac{a}{2}(q_0+m-1)}^{\frac{a}{2}(q_0+m-1)}\ , \tag{3.2.5}$$

ovvero

$$\|u(t)\|_{a(q_0+m-1);\nu}\leq D\left(t^{-\frac{1}{q_0+m-1}}\,\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+m-1}}+\|u_0\|_{\frac{a}{2}(q_0+m-1);\nu}\right). \tag{3.2.6}$$

A questo punto scegliendo $a=\frac{2q_0}{q_0+m-1}$ ricaviamo la (3.2.2) per $k=1$ (la richiesta $a\leq 1$ coincide con $q_0\leq m-1$).
Supponiamo ora che la (3.2.2) valga per un certo k. Nella (3.2.6) poniamo $a=\frac{2^{k+1}q_0}{q_0+m-1}$: ciò è lecito a patto che $q_0\leq\frac{m-1}{2^{k+1}-1}$. Di conseguenza abbiamo

$$\|u(t)\|_{2^{k+1}q_0;\nu}\leq D\left(t^{-\frac{1}{q_0+m-1}}\,\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+m-1}}+\|u_0\|_{2^k q_0;\nu}\right). \tag{3.2.7}$$

Dato che la (3.2.7) vale per ogni $t>0$, sfruttando la proprietà dei semigruppi possiamo prendere in essa come origine dei tempi $t/2$ (è lo stesso argomento utilizzato nella dimostrazione del teorema 1.1); applicando quindi al membro destro la (3.2.2) (che vale per ipotesi induttiva) valutata al tempo $t/2$, assieme alla non-espansività della norma $\|\cdot\|_{q_0;\nu}$, otteniamo la stessa (3.2.2) anche per $k+1$ e $q_0\in\left(1,\frac{m-1}{2^{k+1}-1}\right]$. $\square$

Il prossimo lemma fornisce un'elementare disuguaglianza numerica alla quale ci appelleremo spesso.

Lemma 3.3. *Fissati $\alpha,\beta\in(0,1)$ con $\alpha>\beta$, esiste una costante $c=c(\alpha,\beta)$ tale che $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$*

$$x^{-\alpha}y^{1-\alpha}+x^{-\beta}y^{1-\beta}+y\leq c(\alpha,\beta)(x^{-\alpha}y^{1-\alpha}+y)\,. \tag{3.2.8}$$

Dimostrazione. È sufficiente provare che

$$R(x,y)=\frac{x^{-\beta}y^{1-\beta}}{x^{-\alpha}y^{1-\alpha}+y} \tag{3.2.9}$$

è limitato in $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ da una costante che dipende solo da α e β. Ragioniamo per un fissato y. Grazie alle ipotesi su α e β abbiamo che $R(x,y)\to 0$ per $x\to 0^+$ e $x\to+\infty$. Perciò occorre trovare i punti $x^*(y)$ che annullano $R_x(\cdot,y)$. Con un calcolo esplicito si ottiene

$$x^*(y)=\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}y^{-1}\,.$$

Sostituendo tale valore nella (3.2.9) ricaviamo

$$R(x,y)\le R(x^*(y),y)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}\,,$$

da cui la (3.2.8) con

$$c(\alpha,\beta)=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}\,.$$

□

Veniamo ora al risultato regolarizzante.

Teorema 3.2. *Sia $u_0\in L^{q_0}(\Omega;\nu)$. Se vale la disuguaglianza di Poincaré con la media* (3.0.2)*, la soluzione u della* (3.0.1) *corrispondente al dato iniziale u_0 soddisfa le seguenti stime:*

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu}\le K_1\,t^{-\frac{\varrho-q_0}{\varrho(m-1)}}\,\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}}\,e^{\frac{K_0}{\nu(\Omega)^{1\wedge(m-1)}}\|u_0\|_{1\vee(m-1);\nu}^{m-1}\,t}\qquad\forall t>0 \tag{3.2.10}$$

per $q_0\in[1\vee(m-1),\infty)$ e $\varrho\in(q_0,\infty)$ e

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu}\le K_2\left(t^{-\frac{\varrho-q_0}{\varrho(m-1)}}\,\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}}+\|u_0\|_{q_0;\nu}\right)\qquad\forall t>0 \tag{3.2.11}$$

per $q_0\in(1,\infty)$ e $\varrho\in(q_0,\infty)$, dove $K_0=K_0(m,C_P)$, $K_1=K_1(\varrho,m,C_P)$ e $K_2=K_2(q_0,\varrho,m,C_P,\nu(\Omega))$.

Dimostrazione. La stima (3.2.10) si può ricavare tramite lo stesso metodo differenziale sviluppato nella dimostrazione del teorema 1.1. Riportiamo quindi solo le differenze principali rispetto a quel contesto, utilizzando le stesse notazioni. In maniera del tutto analoga (sostituendo p con 2) si ottiene, per ogni $v\in W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$, $r\in[1,2)$ ed $\varepsilon>0$

$$\left(J(r,v)+\frac{1}{2-r}\log\varepsilon\right)\frac{(2-r)\,\|v\|_{r;\nu}^2}{\varepsilon\,2\,C_P^2}-\frac{\|\overline{v}\|_{2;\nu}^2}{C_P^2}\le\|\nabla v\|_{2;\mu}^2\,. \tag{3.2.12}$$

Fissati $q_0 \in (1,\infty) \cap [m-1,\infty)$, $\varrho \in (q_0,\infty)$ e $u_0 \in L^\infty(\Omega)^4$, introducendo la solita funzione $q : [0,t] \to [q_0,\varrho]$ crescente, biunivoca e $C^1[0,t]$, dopo un calcolo diretto abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\|u(s)\|_{q(s);\nu} =& \frac{\dot q(s)}{q(s)}J(q(s),u(s))- \\ &-\left(\frac{2}{q(s)+m-1}\right)^2\frac{m(q(s)-1)}{\|u(s)\|_{q(s);\nu}^{q(s)}}\left\|\nabla\left(u^{\frac{q(s)+m-1}{2}}(s)\right)\right\|_{2;\mu}^2 ,\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

dove $u(\cdot)$ è la soluzione della (3.0.1) corrispondente al dato iniziale u_0. Con passaggi simili a quelli svolti nella citata dimostrazione non è difficile arrivare, a partire dalla (3.2.12) e dalla (3.2.13), utilizzando la disuguaglianza d'interpolazione tra le norme $\|\cdot\|_{m-1;\nu}$, $\|\cdot\|_{(q+m-1)/2;\nu}$ e $\|\cdot\|_{q;\nu}$ e la non-espansività della norma $\|\cdot\|_{1\vee(m-1);\nu}$, alla seguente disequazione differenziale:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\|u\|_{q;\nu} \leq& -\frac{\dot q}{q(m-1)}\log\left[\frac{2q(q-1)m(m-1)}{\dot q(q+m-1)^2C_P^2}\right]-\frac{\dot q}{q}\log\|u\|_{q;\nu}+ \\ &+\left(\frac{2}{q+m-1}\right)^2\frac{m(q-1)}{C_P^2\,\nu(\Omega)^{1\wedge(m-1)}}\|u_0\|_{1\vee(m-1);\nu}^{m-1} .\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

La (3.2.14) si risolve esattamente come nella dimostrazione del teorema 1.1, ottenendo così la (3.2.10).

Per ricavare la (3.2.11) svolgiamo un solo passo del metodo iterativo alla Moser. Inizialmente, supponiamo $q_0 \in (1,\infty) \cap [m-1,\infty)$. Senza perdita di generalità, per semplificare i conti assumiamo $\nu(\Omega) = 1$. Riscriviamo allora la disuguaglianza (3.0.2) nel seguente modo:

$$\frac{1}{2C_P^2}\|v\|_{2;\nu}^2-\frac{1}{C_P^2}\|v\|_{1;\nu}^2 \leq \|\nabla v\|_{2;\mu}^2 \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)\,; \tag{3.2.15}$$

considerando la (3.1.7) al tempo $T = t$ con $q = q_0 - 1$ e applicando la (3.2.15) alla funzione $u^{(q_0+m-1)/2}$, otteniamo:

$$\frac{4(q_0-1)q_0m}{C_P^2(m+q_0-1)^2}\int_0^t\left(\frac{1}{2}\|u(s)\|_{q_0+m-1;\nu}^{q_0+m-1}-\|u(s)\|_{\frac{q_0+m-1}{2};\nu}^{q_0+m-1}\right)\mathrm{d}s \leq \|u_0\|_{q_0;\nu}^{q_0} . \tag{3.2.16}$$

Dato che $q_0 \geq m-1$ e il dominio è a misura finita, la quantità $\|u\|_{(q_0+m-1)/2;\nu}$ si può controllare con $\|u\|_{q_0}$; sfruttando poi la non-espansività delle norme $\|\cdot\|_{q_0+m-1;\nu}$ e $\|\cdot\|_{q_0;\nu}$ a membro sinistro, dopo qualche calcolo otteniamo:

$$\|u(t)\|_{q_0+m-1;\nu} \leq D\left(t^{-\frac{1}{q_0+m-1}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+m-1}}+\|u_0\|_{q_0;\nu}\right) , \tag{3.2.17}$$

dove D è una costante dipendente da q_0, ϱ, m, C_P che potrà cambiare da passaggio a passaggio. Evidentemente, la (3.2.17) mostra solo una regolarizzazione da $L^{q_0}(\Omega;\nu)$ a $L^{q_0+m-1}(\Omega;\nu)$, ma non è difficile estrapolare da essa una regolarizzazione che arrivi fino ad un qualsiasi $L^\varrho(\Omega;\nu)$ con $\varrho \in (q_0,\infty)$. Infatti, iniziamo col generalizzare la

[4] Come già osservato, l'ipotesi $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ si può rimuovere con argomenti standard.

(3.2.17) a ogni $\varrho \in (q_0, q_0 + m - 1]$. Utilizzando la disuguaglianza d'interpolazione tra le norme $\|\cdot\|_{q_0;\nu}$, $\|\cdot\|_{\varrho;\nu}$ e $\|\cdot\|_{q_0+m-1;\nu}$, la (3.2.17) e la non-espansività della norma $\|\cdot\|_{q_0;\nu}$, abbiamo:

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu} \leq D \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho} \frac{q_0+m-1-\varrho}{m-1}} \left(t^{-\frac{1}{q_0+m-1}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+m-1}} + \|u_0\|_{q_0;\nu} \right)^{\frac{q_0+m-1}{\varrho} \frac{\varrho-q_0}{m-1}} , \tag{3.2.18}$$

ovvero

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu} \leq D \left(t^{-\frac{\varrho-q_0}{\varrho(m-1)}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}} + \|u_0\|_{q_0;\nu} \right) . \tag{3.2.19}$$

Per estendere la (3.2.19) a un generico $\varrho \in (q_0, \infty)$, procediamo per induzione. Ora, sappiamo che la (3.2.19) vale per $\varrho \in (q_0, q_0+m-1]$. Da ipotesi induttiva assumiamo che valga anche per ogni $\varrho \in (q_0, q_0 + k(m-1)]$, per un certo $k \in \mathbb{N}$. Dato $\varrho_1 \in (q_0 + k(m-1), q_0 + (k+1)(m-1)]$, dalla stessa (3.2.19) (scegliendo $q_0 + k(m-1)$ al posto di q_0 e ϱ_1 al posto di ϱ) ricaviamo

$$\|u(t)\|_{\varrho_1;\nu} \leq D \left(t^{-\frac{\varrho_1-q_0-k(m-1)}{\varrho_1(m-1)}} \|u_0\|_{q_0+k(m-1);\nu}^{\frac{q_0+k(m-1)}{\varrho_1}} + \|u_0\|_{q_0+k(m-1);\nu} \right) . \tag{3.2.20}$$

Traslando l'origine dei tempi in $t/2$ nella (3.2.20) e utilizzando l'ipotesi induttiva su $\|u(t/2)\|_{q_0+k(m-1)}$ arriviamo a

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\varrho_1;\nu} \leq D \Bigg(& t^{-\frac{\varrho_1-q_0}{\varrho_1(m-1)}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho_1}} + t^{-\frac{\varrho_1-q_0-k(m-1)}{\varrho_1(m-1)}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0+k(m-1)}{\varrho_1}} + \\ & + t^{-\frac{k(m-1)}{(q_0+k(m-1))(m-1)}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+k(m-1)}} + \|u_0\|_{q_0;\nu} \Bigg) ; \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

grazie al lemma 3.3 la (3.2.21) si semplifica in

$$\|u(t)\|_{\varrho_1;\nu} \leq D \left(t^{-\frac{\varrho_1-q_0}{\varrho_1(m-1)}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho_1}} + \|u_0\|_{q_0;\nu} \right) , \tag{3.2.22}$$

cioè la (3.2.11) per $q_0 \in (1, \infty) \cap [m-1, \infty)$. La richiesta $q_0 \geq m-1$ si può rilassare tramite il lemma 3.2. Infatti, supponiamo $m > 2$ (altrimenti non c'è nulla da dimostrare). Fissato $q_0 \in (1, m-1)$, evidentemente esiste sempre un intero k tale che

$$\frac{q_0 + m - 1}{2} \leq 2^k q_0 \, , \; q_0 \leq \frac{m-1}{2^k - 1} \, ; \tag{3.2.23}$$

a partire dalla (3.2.16) e utilizzando la prima delle (3.2.23) si ricava facilmente che

$$\|u(t)\|_{q_0+m-1;\nu} \leq D \left(t^{-\frac{1}{q_0+m-1}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+m-1}} + \|u_0\|_{2^k q_0;\nu} \right) . \tag{3.2.24}$$

Componendo la (3.2.24) considerata con origine temporale traslata in $t/2$ e applicando al membro destro così ottenuto la stima (3.2.2) valutata al tempo $t/2$ (ciò è lecito in virtù della seconda delle (3.2.23)), concludiamo che la (3.2.17) vale per ogni $q_0 \in (1, \infty)$ (da cui la (3.2.22) ripetendo esattamente lo stesso procedimento appena illustrato per $q_0 \geq m-1$).

Come detto, l'assunzione $\nu(\Omega) = 1$ non è vincolante, ed è possibile rimuoverla con un classico argomento di *scaling* spaziale. Ovvero, è facile verificare che se $u(t, \mathbf{x})$ è soluzione della (3.0.1) sul dominio Ω di misura $V = \nu(\Omega)$ rispetto ai pesi $\rho_\nu(\mathbf{x}), \rho_\mu(\mathbf{x})$ e al dato iniziale $u_0(\mathbf{x})$, allora

$$\widetilde{u}(t, \widetilde{\mathbf{x}}) = V^{-\frac{2}{N(m-1)}} u\left(t, V^{\frac{1}{N}} \widetilde{\mathbf{x}}\right) \tag{3.2.25}$$

è a sua volta soluzione della (3.0.1) sul dominio $\widetilde{\Omega} = \Omega / V^{\frac{1}{N}}$ di misura 1 rispetto ai pesi

$$\widetilde{\rho}_\nu(\widetilde{\mathbf{x}}) = \rho_\nu\left(V^{\frac{1}{N}} \widetilde{\mathbf{x}}\right) \,, \ \widetilde{\rho}_\mu(\widetilde{\mathbf{x}}) = \rho_\mu\left(V^{\frac{1}{N}} \widetilde{\mathbf{x}}\right)$$

e al dato iniziale

$$\widetilde{u}_0(\widetilde{\mathbf{x}}) = V^{-\frac{2}{N(m-1)}} u_0\left(V^{\frac{1}{N}} \widetilde{\mathbf{x}}\right) ;$$

di conseguenza si applica la (3.2.22) alla soluzione $\widetilde{u}$ e si ritorna alla soluzione originaria attraverso la (3.2.25) ricordando che

$$\|\widetilde{u}\|_{q;\widetilde{\nu}} = V^{-\frac{2}{N(m-1)}-\frac{1}{q}} \|u\|_{q;\nu} \,, \ C_P(\widetilde{\Omega}) = V^{-\frac{1}{N}} C_P(\Omega) \,,$$

ottenendo così la (3.2.11) con una costante K_2 che dipenderà anche da $\nu(\Omega)$. □

La stima (3.2.11), per come è stata ricavata, non è in alcun modo estendibile al caso $q_0 = 1$, dato che nella (3.2.16) il membro sinistro è identicamente nullo per $q_0 = 1$, il che implica che la costante D diverge per $q_0 \to 1$. Invece la (3.2.10), a differenza della (3.2.11), non consente di dedurre alcuna regolarizzazione per $q_0 < m - 1$, permettendo però allo stesso tempo di recuperare anche l'esponente $q_0 = 1$ almeno quando $m \leq 2$.

Controesempio alla regolarizzazione in $L^\infty(\Omega)$

Anche in questo caso possiamo mostrare, tramite un controesempio, che la validità della sola disuguaglianza di Poincaré con la media (3.0.2), in generale, non consente all'evoluzione (3.0.1) di dar luogo alla regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^∞. Infatti, si consideri il dominio $\Omega = \mathbb{R}$ con i pesi[5] $\rho_\nu(x) = \rho_\mu(x) = e^{-|x|}$. Ragionando come nella sezione 4.2.1, sfruttando il fatto che $\rho_\nu(x)$ e $\rho_\mu(x)$ soddisfano una disuguaglianza di Poincaré *senza* media in $AC_{\mathcal{L}}(0, +\infty)$ e $AC_{\mathcal{R}}(-\infty, 0)$, è facile mostrare che in $W^{1,2}(\mathbb{R}; e^{-|x|}, e^{-|x|}) = W^{1,2}_0(\mathbb{R}; e^{-|x|}, e^{-|x|})$ vale la disuguaglianza di Poincaré con la media (3.0.2). Con calcoli analoghi a quelli svolti nella costruzione del controesempio della sezione 2.3, si può verificare che esiste una costante $B > 0$ tale che la funzione

$$v(x, t) = \frac{\log(x^2 + 2)}{(1 + B^{-1}(m-1)t)^{\frac{1}{m-1}}} \tag{3.2.26}$$

è sottosoluzione[6] della (3.0.1), evidentemente illimitata. Ciò prova che a partire dal dato iniziale $u_0(x) = \log(x^2 + 2) \in L^{q_0}(\mathbb{R}; e^{-|x|})$ $\forall q_0 \in [1, \infty)$ non c'è alcuna regolarizzazione da $L^{q_0}(\mathbb{R}; e^{-|x|})$ a $L^\infty(\mathbb{R})$.

[5] Si possono rendere più regolari in $x = 0$ senza modificare la discussione nella sostanza.

[6] In realtà, la (3.2.26) non è una buona sottosoluzione a livello dello studio delle proprietà asintotiche della relativa soluzione $u(x, t)$. Infatti mostreremo nella sezione 3.2.3 che $u(\cdot, t)$ per $t \to \infty$ converge alla sua media $\overline{u} \neq 0$ in tutti gli spazi $L^\varrho(\mathbb{R}, e^{-|x|})$, mentre evidentemente $v(\cdot, t)$ converge a zero. Tuttavia v è sufficiente allo scopo di mostrare che u rimane illimitata.

3.2.2 Stime asintotiche: il caso $\overline{u} = 0$

Le stima (3.2.10) diverge per $t \to \infty$, perciò impedisce di dedurre alcunché sul comportamento asintotico di $u(\cdot, t)$; la stima (3.2.11) non diverge, tuttavia l'informazione da essa fornita circa l'andamento della quantità $\|u(t)\|_{\varrho;\nu}$ è molto povera, ovvero

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\varrho;\nu} \leq K_2 \|u_0\|_{q_0;\nu} \,.$$

Per l'analisi del comportamento per tempi grandi procederemo similmente alla dimostrazione del teorema 1.1 o del teorema 2.3 nel caso $\nu(\Omega) < \infty$. La chiave consiste nel controllare adeguatamente la quantità

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|u(s) - \overline{u}\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} \,.$$

Il prossimo lemma, dovuto a G. Grillo e M. M. Porzio[7], costituisce un fondamentale punto di partenza proprio per tale scopo. Prima di fornirne enunciato e dimostrazione, notiamo un fatto semplice ma cruciale, ovvero che il comportamento delle soluzioni della (3.0.1) per dati iniziali a media nulla non permette di trarre conclusioni in merito allo stesso per soluzioni corrispondenti a dati iniziali a media *non* nulla; ciò è una conseguenza del fatto che l'operatore soluzione non è lineare rispetto alle costanti, a differenza di quanto accade per l'evoluzione del p-Laplaciano (proprietà (1.1.9)). Già nel pionieristico articolo di N. D. Alikakos e R. Rostamian [AR81], in cui è trattata la *PME* con condizioni di Neumann omogenee su domini regolari, si dimostrava che se $\overline{u} = 0$ allora $u(\cdot, t)$ converge uniformemente alla media con ordine $t^{-1/(m-1)}$ [AR81, teo. 3.1], mentre se $\overline{u} \neq 0$ la convergenza alla media è almeno esponenziale con esponente proporzionale a $|\overline{u}|^{m-1}$ [AR81, teo. 3.3]. Tuttavia i risultati di [AR81] erano validi solo per dati iniziali in $L^\infty(\Omega)$, ovvero mancava un effetto regolarizzante L^{q_0}-L^∞, il quale è stato recentemente dimostrato in [BG05m, teo. 1.1], articolo in cui, come precedentemente detto, si assume che nel dominio Ω (nel caso euclideo) valga la disuguaglianza di Sobolev con la media (3.0.3). In questa sezione e nella prossima dimostreremo che i due tipi di convergenza alla media continuano a valere anche quando in $W^{1,2}(\Omega; \nu, \mu)$ vale solo la disuguaglianza di Poincaré con la media, sotto la condizione che il dato iniziale appartenga a $L^\infty(\Omega)$, pur di sostituire la convergenza uniforme con la convergenza in tutti gli spazi $L^\varrho(\Omega; \nu)$ ($\varrho < \infty$). Rispetto a generici dati in $L^{q_0}(\Omega; \nu)$ ma *non* limitati il risultato rimarrà inalterato se $\overline{u} = 0$, mentre se $\overline{u} \neq 0$ proveremo per essi una convergenza alla media in tutti gli spazi $L^\varrho(\Omega; \nu)$ ($\varrho < \infty$) meno raffinata.

Lemma 3.4 (Grillo-Porzio). *Supponiamo che nello spazio $W^{1,2}(\Omega; \nu, \mu)$ valga la disuguaglianza di Poincaré con la media* (3.0.2). *Sia inoltre $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e crescente che soddisfa le seguenti ipotesi*[8]*:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x^r} = l_0 \,, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\Phi(x)}{x^r} = l_- \,, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\Phi(x)}{x^r} = l_+ \tag{3.2.27}$$

per qualche costante $r \geq \frac{1}{2}$ e l_0, l_-, $l_+ \in (0, \infty)$. Allora per un'opportuna costante positiva C_Φ e per ogni funzione $\xi \in L^1(\Omega; \nu)$ tale che $\Phi(\xi) \in W^{1,2}(\Omega; \nu, \mu)$ e $\overline{\xi} = 0$

[7]Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo", Sapienza Università di Roma, piazzale A. Moro 2, 00185 Roma.

[8]Ricordiamo che x^r va intesa come nella (2.0.2).

vale la disuguaglianza

$$\|\Phi(\xi)\|_{2;\nu} \le C_\Phi \|\nabla\Phi(\xi)\|_{2;\mu} . \tag{3.2.28}$$

Dimostrazione. Si procede per assurdo. Negare la tesi equivale a sostenere l'esistenza di una successione di funzioni $\xi_n \in L^1(\Omega;\nu)$ tali che $\Phi(\xi_n) \in W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ (non identicamente nulle), $\overline{\xi_n} = 0$ e

$$\|\nabla\Phi(\xi_n)\|_{\mu;2} \le \frac{1}{n} \|\Phi(\xi_n)\|_{2;\nu} . \tag{3.2.29}$$

Poniamo $a_n = \|\Phi(\xi_n)\|_{2;\nu}$ e

$$\Psi_n(\xi_n) = \frac{\Phi(\xi_n)}{a_n} .$$

Evidentemente,

$$\|\Psi_n(\xi_n)\|_{2;\nu} = 1 , \ \|\nabla\Psi_n(\xi_n)\|_{2;\mu} \le \frac{1}{n} . \tag{3.2.30}$$

Applicando alla successione $\{\Psi_n(\xi_n)\}_n$ la disuguaglianza di Poincaré con la media (3.0.2) e utilizzando la seconda delle (3.2.30), abbiamo che

$$\left\|\Psi_n(\xi_n) - \overline{\Psi_n(\xi_n)}\right\|_{2;\nu} \le C_P \frac{1}{n} . \tag{3.2.31}$$

Combinando la disuguaglianza appena ottenuta con la prima delle (3.2.30) deduciamo facilmente che la successione numerica $\{\overline{\Psi_n(\xi_n)}\}_n$ è limitata, di conseguenza possiamo supporre, a meno di sottosuccessioni, che converga ad un certo limite c_0. Questo fatto, assieme ancora alla (3.2.31), ci permette di concludere che

$$\|\Psi_n(\xi_n) - c_0\|_{2;\nu} \to 0 \tag{3.2.32}$$

ovvero, sempre a meno di sottosuccessioni,

$$\Psi_n(\xi_n(\mathbf{x})) \to c_0 \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \Omega . \tag{3.2.33}$$

Grazie alla prima delle (3.2.30) necessariamente $c_0 \neq 0$. A questo punto dobbiamo distinguere tre casi, sulla base del comportamento della quantità[9]

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Se $a_\infty \in (0,\infty)$, dalla continuità di Φ e quindi di Φ^{-1} è facile ricavare che

$$\xi_n(\mathbf{x}) \to \Phi^{-1}(a_\infty c_0) \neq 0 \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \Omega . \tag{3.2.34}$$

I casi $a_\infty = 0$ e $a_\infty = +\infty$ sono leggermente più delicati. Cominciamo dal primo. Dalla definizione e dalle proprietà di Φ, e in virtù della (3.2.33), segue che

$$\xi_n(\mathbf{x}) \to 0 \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \Omega ; \tag{3.2.35}$$

perciò, sfruttando la prima delle ipotesi (3.2.27) e la (3.2.33),

$$\mathcal{Z}_n(\mathbf{x}) = \frac{\xi_n(\mathbf{x})}{a_n^{1/r}} = \left(\frac{[\xi_n(\mathbf{x})]^r}{\Phi(\xi_n(\mathbf{x}))}\Psi_n(\xi_n(\mathbf{x}))\right)^{\frac{1}{r}} \to \left(\frac{c_0}{l_0}\right)^{\frac{1}{r}} \neq 0 \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \Omega . \tag{3.2.36}$$

[9]Il limite ovviamente esiste passando eventualmente ad un'altra sottosuccessione.

Se $a_\infty = +\infty$ si ragiona in modo simile. Infatti, supponiamo $c_0 > 0$. Sempre dalle proprietà di Φ e dalla (3.2.33) deduciamo che necessariamente

$$\xi_n(\mathbf{x}) \to +\infty \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \Omega\,, \tag{3.2.37}$$

il che implica, grazie alla terza delle (3.2.27),

$$\mathcal{Z}_n(\mathbf{x}) = \frac{\xi_n(\mathbf{x})}{a_n^{1/r}} = \left(\frac{[\xi_n(\mathbf{x})]^r}{\Phi(\xi_n(\mathbf{x}))}\Psi_n(\xi_n(\mathbf{x}))\right)^{\frac{1}{r}} \to \left(\frac{c_0}{l_+}\right)^{\frac{1}{r}} \neq 0 \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \Omega\,. \tag{3.2.38}$$

Per $c_0 < 0$ si ottiene allo stesso modo che

$$\mathcal{Z}_n(\mathbf{x}) \to \left(\frac{c_0}{l_-}\right)^{\frac{1}{r}} \neq 0 \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \Omega\,. \tag{3.2.39}$$

Di conseguenza deduciamo che, in ogni caso, la successione $\{\mathcal{Z}_n\}_n$ converge sempre puntualmente ad una costante diversa da zero. Siccome ovviamente $\overline{\mathcal{Z}_n} = 0$ identicamente e l'operatore di media è continuo in $L^1(\Omega;\nu)$, per giungere ad un assurdo è sufficiente dimostrare che $\mathcal{Z}_n$ convergerebbe anche in $L^1(\Omega;\nu)$ a tale costante. Ma dal teorema di Egoroff è a sua volta sufficiente dimostrare che la quantità

$$\int_E |\mathcal{Z}_n(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\nu$$

tende a zero uniformemente per $n \to \infty$ e $|E| \to 0$. Ora, osserviamo anzitutto che le proprietà (3.2.27), assieme e alla continuità e alla monotonia di Φ, implicano l'esistenza di una costante $D > 0$ tale che

$$D^{-1}|x|^r \leq |\Phi(x)| \leq D|x|^r \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.2.40}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\int_E |\mathcal{Z}_n(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\nu = \int_E \frac{|\xi_n(\mathbf{x})|}{a_n^{1/r}}\,\mathrm{d}\nu &\leq D^{\frac{1}{r}} \int_E |\Psi_n(\xi_n(\mathbf{x}))|^{\frac{1}{r}}\,\mathrm{d}\nu \\ &\leq D^{\frac{1}{r}}|E|^{1-\frac{1}{2r}}\left(\int_E |\Psi_n(\xi_n(\mathbf{x}))|^2\,\mathrm{d}\nu\right)^{\frac{1}{2r}}\,,\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

e la quantità

$$\int_E |\Psi_n(\xi_n(\mathbf{x}))|^2\,\mathrm{d}\nu \tag{3.2.42}$$

tende a zero uniformemente per $n \to \infty$ e $|E| \to 0$; infatti

$$\int_E |\Psi_n(\xi_n(\mathbf{x}))|^2\,\mathrm{d}\nu \leq 2\left(\int_\Omega |\Psi_n(\xi_n(\mathbf{x})) - c_0|^2\,\mathrm{d}\nu + |E|c_0^2\right)\,. \tag{3.2.43}$$

Perciò concludiamo che $\mathcal{Z}_n$ convergerebbe in $L^1(\Omega;\nu)$ ad una costante diversa da zero, assurdo. $\square$

Osservazione 3.1. *Nel caso specifico* $\Phi(x) = x^m$, *per* $m > 1$, *il risultato era già stato provato in [AR81, lemma 3.2]. Tuttavia la dimostrazione lì fornita fa uso della compattezza dell'immersione di* $H^1(\Omega)$ *in* $L^2(\Omega)$. *La dimostrazione del lemma 3.4 si basa su idee analoghe, tuttavia ha il pregio di non richiedere in alcun modo compattezza. Notiamo inoltre che è essenziale che il comportamento di* $\Phi(x)$ *per* $x \to 0$ *e* $x \to \pm\infty$ *coincida con quello di una* stessa *potenza. Ovvero se* $\Phi(x) \sim x^{r_1}$ *per* $x \to 0$ *e* $\Phi(x) \sim x^{r_2}$ *per* $x \to \pm\infty$ *con* $r_1 \neq r_2$ *la dimostrazione non funziona (si perde il controllo della quantità* $\int_E |\mathcal{Z}_n| \, \mathrm{d}\nu$ *o per* $a_\infty = 0$ *o per* $a_\infty = +\infty$*).*

Veniamo finalmente al risultato asintotico per dati iniziali a media nulla.

Corollario 3.1. *Sia* $u_0 \in L^{q_0}(\Omega; \nu)$ *con* $q_0 \in [1, \infty)$ *e* $\overline{u_0} = 0$. *Allora, se vale la disuguaglianza di Poincaré con la media* (3.0.2) *e* u *è la soluzione della* (3.0.1), *vale a sua volta l'*absolute bound

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu} \leq Q_2 \, t^{-\frac{1}{m-1}} \quad \forall t > 0 \,, \tag{3.2.44}$$

dove $\varrho \in [1, \infty)$ *e* Q_2 *è una costante dipendente da* ϱ, m, C_P, C_{x^m} *e* $\nu(\Omega)$. *In conseguenza a ciò per dati iniziali a* media nulla *la regolarizzazione* $L^{q_0}_\nu$-L^ϱ_ν *ha luogo per ogni* $q_0 \in [1, \infty)$ *e* $\varrho \in (q_0, \infty)$, *e la* (3.2.10) *assume in questo caso la seguente forma:*

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu} \leq Q_1 \, t^{-\frac{\varrho - q_0}{\varrho(m-1)}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}} \quad \forall t > 0 \,, \tag{3.2.45}$$

per un'opportuna costante Q_1 *dipendente da* ϱ, m, C_P *e* C_{x^m}.

Dimostrazione. Fissato $\varrho \in (1, \infty)$ (e, al solito, considerando dati che siano anche in $L^\infty(\Omega)$), ripartiamo dall'identità (formale)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|u(s)\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} = -\left(\frac{2}{\varrho + m - 1}\right)^2 m\varrho(\varrho - 1) \left\| \nabla \left(u^{\frac{\varrho+m-1}{2}}\right)(s) \right\|_{2;\mu}^2 . \tag{3.2.46}$$

Per gestire il membro destro, nella dimostrazione dell'analogo risultato per il problema di Dirichlet (teorema 2.3) si applicava la disuguaglianza di Poincaré senza media alla quantità $u^{(\varrho+m-1)/2}$. In questo caso è invece necessario appellarsi al lemma 3.4, nel quale prendiamo $\Phi(x) = x^{(\varrho+m-1)/2}$. Grazie al fatto che $\overline{u} = \overline{u_0} = 0$ (proposizione 3.2), sappiamo quindi che esiste una costante $C_{x^{(\varrho+m-1)/2}}$ tale che

$$\|u\|_{\varrho+m-1;\nu}^{\varrho+m-1} \leq C_{x^{(\varrho+m-1)/2}}^2 \left\| \nabla \left(u^{\frac{(\varrho+m-1)}{2}}\right) \right\|_{2;\mu}^2 . \tag{3.2.47}$$

A questo punto per ottenere l'*absolute bound* si procede esattamente come nella dimostrazione del suddetto teorema, sostituendo C_P con $C_{x^{(\varrho+m-1)/2}}$ (il caso $\varrho = 1$ ovviamente si recupera grazie alla finitezza della misura). Il fatto che $C_{x^{(\varrho+m-1)/2}}$ si possa rimpiazzare con C_{x^m} seguirà dai prossimi calcoli.
Per ricavare la (3.2.45), anzitutto riscriviamo la stima (3.2.10) con origine temporale traslata all'istante $t/2$. Abbiamo (sfruttando anche la non-espansività della norma q_0):

$$\|u(t)\|_{\varrho;\nu} \leq K_1 \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\varrho - q_0}{\varrho(m-1)}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}} \, e^{\frac{K_0}{\nu(\Omega)^{1\wedge(m-1)}} \|u(t/2)\|_{1\vee(m-1);\nu}^{m-1} \frac{t}{2}} \quad \forall t > 0 \,. \tag{3.2.48}$$

Applicando l'*absolute bound* (3.2.44) al termine esponenziale arriviamo facilmente alla (3.2.45) (per $q_0 = 1$ tutto continua a valere facendo tendere q_0 a 1). Il fatto che la costante Q_1 sia indipendente da $\nu(\Omega)$ si può dedurre osservando che, scelto per esempio $\varrho = m+1$, Q_2 dipende da $\nu(\Omega)$ secondo la potenza $\nu(\Omega)^{1/(m+1)}$ (svolgendo lo stesso calcolo esplicito effettuato nella dimostrazione del teorema 2.3); perciò

$$\frac{K_0}{\nu(\Omega)^{1\wedge(m-1)}} \left\| u\left(t/2\right)\right\|_{1\vee(m-1);\nu}^{m-1} \frac{t}{2} \leq Q_0(m, C_P, C_{x^m})\,. \tag{3.2.49}$$

L'*absolute bound* evidentemente dipende da una costante derivante dal lemma 3.4 che è al più C_{x^m} se $\varrho \leq m+1$. In ogni caso, con la solita traslazione in $t/2$, componendo l'*absolute bound* per $\varrho = m+1$ e la stima (3.2.45) abbiamo che lo stesso vale anche per $\varrho > m+1$. □

Come accade per il problema di Dirichlet, ci si può nuovamente chiedere se sussista un'implicazione inversa, ovvero se la validità di una stima regolarizzante come la (3.2.45) implichi a sua volta la validità della disuguaglianza di Poincaré con la media (3.0.2). Procedendo identicamente alla dimostrazione del teorema 2.4, non ci sono difficoltà a ottenere, a partire dalla (3.2.45) (per $\varrho = m+1$ e qualche $q_0 < m+1$), la seguente disuguaglianza:

$$\|u_0\|_{m+1;\nu} \leq B\, \|\nabla(u_0^m)\|_{2;\mu}^{\frac{2(m+1-q_0)}{(m+1)(2m-q_0)}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0(m-1)}{(m+1)(2m-q_0)}}\,, \tag{3.2.50}$$

valida per $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ con $\overline{u_0} = 0$. Il problema, rispetto al caso Dirichlet, è che $u_0^{1/m}$, in generale, *non* è a media nulla. Di conseguenza non si può ricavare agevolmente dalla (3.2.50) una disuguaglianza come la (2.4.9). Nella sezione 3.3 vedremo che a partire invece dalla (3.2.11), che vale anche per dati non a media nulla, si può ottenere una disuguaglianza più vicina alla Poincaré.

3.2.3 Stime asintotiche: il caso $\overline{u} \neq 0$

Come già accennato, il comportamento asintotico delle soluzioni a media nulla della (3.0.1) non consente di trarre alcuna conclusione inerente allo stesso per soluzioni a media *non* nulla. Allo scopo di ottenere informazioni anche in questo caso, iniziamo con un importante lemma.

Lemma 3.5. *Esiste una costante Q dipendente da $\varrho \in [1,2]$, m, C_P e $\nu(\Omega)$ tale che per ogni soluzione u della* (3.0.1) *vale il seguente* absolute bound*:*

$$\|u(t) - \overline{u}\|_{\varrho;\nu} \leq Q\, t^{-\frac{1}{m-1}} \quad \forall t > 0\,. \tag{3.2.51}$$

Dimostrazione. Il risultato è già stato dimostrato in [DGGW08, teo. 4.5] nel caso $\rho_\nu = \rho_\mu$, ma non c'è alcuna difficoltà aggiuntiva se $\rho_\nu \neq \rho_\mu$. Riportiamo, per completezza, i passaggi. Il punto di partenza è la seguente identità (formale):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|u(s) - \overline{u}\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} = -\varrho(\varrho-1)m \int_\Omega |u(s,\mathbf{x})|^{m-1} |u(s,\mathbf{x}) - \overline{u}|^{\varrho-2} |\nabla u(s,\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mu\,. \tag{3.2.52}$$

La (3.2.52), quando $\overline{u} \neq 0$, non è immediata da gestire. Tuttavia nel caso particolare $\varrho = 2$ il membro destro si semplifica, diventando:

$$-\frac{8m}{(m+1)^2}\left\|\nabla\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)(s)\right\|_{2;\mu}^2 . \tag{3.2.53}$$

Adesso la (3.2.53) si può maggiorare facilmente grazie al lemma 3.1, applicandolo alla funzione $u^{(m+1)/2}$ con $a = \frac{2}{m+1}$. Così facendo si ottiene:

$$-\frac{8m}{(m+1)^2}\left\|\nabla\left(u^{\frac{m+1}{2}}\right)(s)\right\|_{2;\mu}^2 \leq -\frac{8m}{(m+1)^2\, C_{P,\frac{2}{m+1}}^{m+1}}\left\|u(s)-\overline{u}\right\|_{2;\nu}^{m+1} . \tag{3.2.54}$$

Componendo la (3.2.54) con la (3.2.52) e risolvendo la disequazione differenziale nella variabile $y(s) = \|u(s)-\overline{u}\|_{2;\nu}^2$ otteniamo la (3.2.51) per $\varrho = 2$. Il risultato per $\varrho \in [1, 2)$ segue dalla finitezza della misura. □

Osserviamo che quest'ultimo risultato, accidentalmente, garantisce che ha sempre luogo la regolarizzazione L^1_ν-L^2_ν, per cui tutte le stime regolarizzanti ricavate in precedenza effettivamente valgono anche per dati iniziali che appartengano solo a $L^1(\Omega;\nu)$ a patto di attendere un tempo τ arbitrariamente piccolo.

A partire dal lemma 3.5 e dai risultati regolarizzanti forniti dal teorema 3.2 non è difficile dedurre un risultato asintotico anche per $\varrho \in (2,\infty)$.

Corollario 3.2. *Siano $q_0 \in (1,\infty)$ e $\varrho \in (2 \vee q_0, \infty)$. Per la soluzione u della* (3.0.1) *relativa al dato iniziale $u_0 \in L^{q_0}(\Omega;\nu)$ vale la seguente stima asintotica:*

$$\|u(t)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu} \leq Q_1\, t^{-\frac{2(1-\epsilon)}{\varrho(m-1)}}\left(\|u_0\|_{q_0;\nu}^{q_0\frac{\epsilon}{\varrho}} + \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\varrho}}\right) \quad \forall \epsilon \in (0,1)\,,\ \forall t > 1\,, \tag{3.2.55}$$

dove $Q_1 = Q_1(q_0, \epsilon, \varrho, m, C_P, \nu(\Omega))$. Alternativamente, per $q_0 \in [1 \vee (m-1), \infty)$ e $\varrho \in (2 \vee q_0, \infty)$, si ha

$$\|u(t)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu} \leq Q_2\, t^{-\frac{2(1-\epsilon)}{\varrho(m-1)}}\, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{q_0\frac{\epsilon}{\varrho}}\, e^{\frac{Q_0}{\nu(\Omega)^{1\wedge(m-1)}}\|u_0\|_{1\vee(m-1);\nu}^{m-1}} \quad \forall \epsilon \in (0,1)\,,\ \forall t > 1\,, \tag{3.2.56}$$

con $Q_0 = Q_0(m, C_P)$ e $Q_2 = Q_2(\epsilon, \varrho, m, C_P, \nu(\Omega))$.

Dimostrazione. Si tratta di combinare il lemma 3.5 con le disuguaglianze d'interpolazione delle norme, la non-espansività delle stesse e con i risultati regolarizzanti dimostrati dal teorema 3.2. Ovvero, fissati $\varrho > 2$, $\epsilon \in (0,1)$ e $t > 1$, interpolando tra le norme $\|\cdot\|_{2;\nu}$, $\|\cdot\|_{\varrho;\nu}$ e $\|\cdot\|_{(\varrho-2+2\epsilon)/\epsilon;\nu}$ otteniamo:

$$\|u(t)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu} \leq \|u(t)-\overline{u}\|_{2;\nu}^{\frac{2}{\varrho}(1-\epsilon)}\, \|u(t)-\overline{u}\|_{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\epsilon};\nu}^{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\varrho}} . \tag{3.2.57}$$

Al primo fattore del membro destro possiamo applicare la (3.2.51), il che ci dà il *rate* temporale. La norma al secondo fattore, relativa ad un esponente maggiore di ϱ, la trattiamo in questo modo:

$$\|u(t)-\overline{u}\|_{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\epsilon};\nu} \leq 2\,\|u(t)\|_{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\epsilon};\nu} \leq 2\,\|u(1)\|_{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\epsilon};\nu} . \tag{3.2.58}$$

Di conseguenza abbiamo:

$$\|u(t) - \overline{u}\|_{\varrho;\nu} \le 2^{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\varrho}} Q^{\frac{2}{\varrho}(1-\epsilon)} \, t^{-\frac{2(1-\epsilon)}{\varrho(m-1)}} \, \|u(1)\|^{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\varrho}}_{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\epsilon};\nu} \; ; \tag{3.2.59}$$

maggiorando la quantità $\|u(1)\|_{\frac{\varrho-2+2\epsilon}{\epsilon};\nu}$ con una delle stime regolarizzanti fornite dal teorema 3.2, valutata al tempo $t = 1$, ricaviamo la (3.2.55) o la (3.2.56). □

Se il dato iniziale è anche limitato, è facile verificare che nella stima (3.2.55), a livello del *rate* temporale, si può scegliere anche $\epsilon = 0$ (basta effettuare, nella dimostrazione, l'interpolazione tra le norme $\|\cdot\|_{2;\nu}$, $\|\cdot\|_{\varrho;\nu}$ e $\|\cdot\|_{\infty}$). Tuttavia in questo caso possiamo dimostrare un risultato molto più soddisfacente. Infatti abbiamo il seguente

Teorema 3.3. *Siano $\varrho \in (1,\infty)$ e $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ con $\overline{u} \neq 0$. Allora per la corrispondente soluzione u della* (3.0.1) *si ha una convergenza alla media di tipo esponenziale. Più precisamente:*

$$\|u(t) - \overline{u}\|_{\varrho;\nu} \le e^{-\frac{(\varrho-1)m|\overline{u}|^{m-1}}{C^2 D^2} t} \, \|u_0 - \overline{u}\|_{\varrho;\nu} \quad \forall t > 0 \, , \tag{3.2.60}$$

posto che per una determinata costante $R > 0$

$$\frac{\|u_0 - \overline{u}\|_\infty}{|\overline{u}|} \le R \, , \tag{3.2.61}$$

dove $C = C_{\Phi_R}$ è la costante del lemma 3.4 relativa ad un'opportuna funzione Φ_R dipendente da ϱ, m e R mentre $D = D(\varrho, m)$.

Dimostrazione. Ponendo $w = u/\overline{u} - 1$, riscriviamo la (3.2.52) nel seguente modo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|w(s)\|^{\varrho}_{\varrho;\nu} = -\varrho(\varrho-1)m|\overline{u}|^{m-1} \int_\Omega |w(\mathbf{x},s)+1|^{m-1} |w(\mathbf{x},s)|^{\varrho-2} |\nabla w(\mathbf{x},s)|^2 \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{3.2.62}$$

Ora, se definiamo

$$\Phi(x) = \int_0^x |y|^{\frac{\varrho}{2}-1} |y+1|^{\frac{m-1}{2}} \, \mathrm{d}y \, , \tag{3.2.63}$$

la (3.2.62) diventa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|w(s)\|^{\varrho}_{\varrho;\nu} = -\varrho(\varrho-1)m|\overline{u}|^{m-1} \int_\Omega |\nabla \Phi(w)(\mathbf{x},s)|^2 \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{3.2.64}$$

Alla funzione Φ, evidentemente, vorremmo applicare il lemma 3.4. Essa è certamente continua e crescente e, utilizzando il teorema di de l'Hôpital, è facile verificare che soddisfa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x^{\frac{\varrho}{2}}} = \frac{2}{\varrho} \, , \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\Phi(x)}{x^{\frac{\varrho+m-1}{2}}} = \frac{2}{\varrho+m-1} \, ; \tag{3.2.65}$$

di conseguenza, come notato nell'osservazione 3.1, in queste condizioni il suddetto lemma *non* è applicabile a Φ. Tuttavia possiamo sfruttare il fatto che, essendo $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, dalla non-espansività della quantità[10] $\|u(t) - \overline{u}\|_\infty$ abbiamo

$$|w(\mathbf{x},t)| \le \frac{\|u_0 - \overline{u}\|_\infty}{|\overline{u}|} = R \tag{3.2.66}$$

[10] Si vede subito sempre dalla (3.2.52).

per ogni $t > 0$ e q.o. $\mathbf{x} \in \Omega$. Perciò, agli effetti di w, il comportamento di Φ all'infinito non conta. In virtù di questo fatto possiamo modificare la stessa come segue:

$$\Phi_R(x) = \begin{cases} \Phi(x) \quad \text{per } |x| \leq R+1 \\ \Phi(R+1) + \displaystyle\int_{R+1}^{x} y^{\frac{\varrho}{2}-1}(R+2)^{\frac{m-1}{2}}\,\mathrm{d}y \quad \text{per } x > R+1 \\ \Phi(-R-1) - \displaystyle\int_{x}^{-R-1} |y|^{\frac{\varrho}{2}-1}R^{\frac{m-1}{2}}\,\mathrm{d}y \quad \text{per } x < -R-1 \end{cases} ; \tag{3.2.67}$$

in questo modo Φ_R soddisfa effettivamente tutte le ipotesi del lemma 3.4, dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi_R(x)}{x^{\frac{\varrho}{2}}} = \frac{2(R+2)^{\frac{m-1}{2}}}{\varrho}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\Phi_R(x)}{x^{\frac{\varrho}{2}}} = \frac{2R^{\frac{m-1}{2}}}{\varrho}. \tag{3.2.68}$$

Per cui, dato che $\overline{w} = 0$, sappiamo che esiste una costante $C = C_{\Phi_R}$ tale che

$$\|\Phi_R(w)\|_{2;\nu} \leq C \, \|\nabla\Phi_R(w)\|_{2;\mu} ; \tag{3.2.69}$$

siccome inoltre $\Phi(w) = \Phi_R(w)$, componendo la (3.2.69) con la (3.2.64) abbiamo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|w(s)\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} \leq -\frac{\varrho(\varrho-1)m|\overline{u}|^{m-1}}{C^2} \|\Phi_R(w(s))\|_{2;\nu}^2 . \tag{3.2.70}$$

Vista la struttura di Φ_R, chiaramente esiste una costante $D = D(\varrho, m)$ tale che

$$D^{-1}|x|^{\frac{\varrho}{2}} \leq |\Phi_R(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.2.71}$$

quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|w(s)\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} \leq -\frac{\varrho(\varrho-1)m|\overline{u}|^{m-1}}{C^2D^2} \left\| w^{\frac{\varrho}{2}}(s) \right\|_{2;\nu}^2 = -\frac{\varrho(\varrho-1)m|\overline{u}|^{m-1}}{C^2D^2} \|w(s)\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} . \tag{3.2.72}$$

Risolvendo la (3.2.72) rispetto alla variabile $y(s) = \|w(s)\|_{\varrho}^{\varrho}$ e ritornando alla funzione originaria $u - \overline{u}$ otteniamo la (3.2.60). $\square$

Il risultato appena dimostrato evidentemente non è estendibile a dati iniziali $u_0 \notin L^\infty(\Omega)$, dato che la costante C_{Φ_R} dipende in modo non controllabile da R, quindi in particolare da $\|u_0\|_\infty$; peraltro anche fissando R è impossibile dedurne stime quantitative in generale (ricordiamo che è stata ricavata nel lemma 3.4 per assurdo).

3.3 Una parziale implicazione inversa

Come anticipato, investigare la possibilità che sussista un'implicazione inversa a partire dalle regolarizzazioni (3.2.10), (3.2.11) o (3.2.45) è più complicato rispetto a quanto accade per il problema di Dirichlet. Assumendo la validità della (3.2.11) possiamo comunque dimostrare che in $W^{1,2}(\Omega; \nu, \mu)$ vale una disuguaglianza funzionale un po' più debole della (3.0.2).

Teorema 3.4. *Supponiamo che per un fissato $q_0 \in [m, m+1)$ esista una costante K tale che per ogni soluzione u della (3.0.1), con $u_0 \in L^{q_0}(\Omega;\nu)$, vale la stima*

$$\|u(t)\|_{m+1;\nu} \leq K\left(t^{-\frac{m+1-q_0}{(m+1)(m-1)}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{m+1}} + \|u_0\|_{q_0;\nu}\right) \quad \forall t>0 \tag{3.3.1}$$

(ovvero la (3.2.11) per $\varrho = m+1$). Allora vale a sua volta la seguente disuguaglianza funzionale:

$$\|v\|_{2;\nu} \leq B\left(\|\nabla v\|_{2;\mu} + \|v\|_{\frac{q_0}{m};\nu}\right) \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)\,, \tag{3.3.2}$$

essendo $B>0$ una costante indipendente da v.

Dimostrazione. Anzitutto, consideriamo un dato iniziale non-negativo $u_0 \in L^\infty(\Omega)\cap W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$. Evidentemente, $u_0^m \in V^{(m+1)/m}(\Omega;\nu,\mu)$. Di conseguenza, procedendo come nella dimostrazione del teorema 2.4, non ci sono difficoltà ad arrivare alla seguente disuguaglianza:

$$\|u_0\|_{m+1;\nu} \leq B\left(\|\nabla(u_0^m)\|_{2;\mu}^{\frac{2(m+1-q_0)}{(m+1)(2m-q_0)}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0(m-1)}{(m+1)(2m-q_0)}} + \|u_0\|_{q_0;\nu}\right) \tag{3.3.3}$$

per un'opportuna costante $B = B(q_0, m, K) > 0$. Anche in questo caso vorremmo sostituire al posto di u_0 il dato $u_0^{1/m}$, così da rimuovere la dipendenza da $\nabla(u_0^m)$. Consideriamo allora la seguente successione di funzioni $\xi_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$:

$$\xi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{per } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ x & \text{per } x > \dfrac{1}{n} \end{cases}. \tag{3.3.4}$$

Posta $v_n = \xi_n(u_0^{1/m})$ (si ricordi che $u_0 \geq 0$) è facile verificare, similmente alla suddetta dimostrazione del teorema 2.4, che v_n converge a $u_0^{1/m}$ in $L^\infty(\Omega)$ e $\nabla(v^m)$ converge a $\nabla(u_0)$ in $[L^2(\Omega;\mu)]^N$. Perciò sostituendo u_0 con v_n nella (3.3.3) e passando al limite per $n\to\infty$ ricaviamo, dopo qualche passaggio (B indica sempre una generica costante dipendente da q_0, m e K),

$$\|u_0\|_{\frac{m+1}{m};\nu} \leq B\left(\|\nabla(u_0)\|_{2;\mu}^{\frac{2m(m+1-q_0)}{(m+1)(2m-q_0)}}\|u_0\|_{\frac{q_0}{m};\nu}^{\frac{q_0(m-1)}{(m+1)(2m-q_0)}} + \|u_0\|_{\frac{q_0}{m};\nu}\right). \tag{3.3.5}$$

Definendo

$$\vartheta = \frac{2m(m+1-q_0)}{(m+1)(2m-q_0)}\,,\; r = \frac{m+1}{m}\,,\; s = \frac{q_0}{m}\,,\; q=2\,,\; \mathcal{W}(f) = \|\nabla f\|_{2;\mu} + \|f\|_{\frac{q_0}{m};\nu}\,,$$

possiamo riscrivere la (3.3.5) nel seguente modo:

$$\|f\|_{r;\nu} \leq (B\,\mathcal{W}(f))^\vartheta\|f\|_{s;\nu}^{1-\vartheta}\,,\; \frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{q} + \frac{1-\vartheta}{q_0}\,,\quad \forall f\geq 0 \in L^\infty(\Omega)\cap W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)\,. \tag{3.3.6}$$

Appellandoci ancora una volta al teorema 3.1 di [BCLS95] deduciamo che la (3.3.6) vale anche per $\vartheta = 1$ e $q = 2$ (e per un'altra costante che continuiamo a chiamare B), cioè

$$\|f\|_{2;\nu} \leq B\left(\|\nabla f\|_{2;\mu} + \|f\|_{\frac{q_0}{m};\nu}\right) \quad \forall f \geq 0 \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)\,. \tag{3.3.7}$$

L'estensione della (3.3.7) a generici elementi in $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ si ottiene come nella dimostrazione del teorema 1.2. □

Osserviamo infine che la (3.3.2) è equivalente al fatto che lo spazio $V^{q_0/m}(\Omega;\nu,\mu)$ è immerso con continuità in $L^2(\Omega;\nu)$; in altre parole,

$$V^{\frac{q_0}{m}}(\Omega;\nu,\mu) = W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)\,.$$

3.4 Disuguaglianza di Sobolev con la media: stime regolarizzanti e asintotiche

Supponendo $N \geq 3$ assumeremo nel seguito che, al posto della (3.0.2), valga la disuguaglianza di Sobolev con la media (3.0.3): evidentemente, quest'ultima è più forte della disuguaglianza di Poincaré con la media, di conseguenza tutti i risultati ottenuti nella sezione 3.2 continuano a valere. Non solo, si può dimostrare che in questo caso ha luogo una regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^∞. Questo risultato, nella sostanza, è già stato provato in [BG05m] tramite un approccio differenziale alla Gross, ma nella prossima sezione otterremo delle stime migliori utilizzando una tecnica iterativa di Moser; nelle sezioni 3.4.2 e 3.4.3 analizzeremo invece alcune proprietà asintotiche delle soluzioni.

Prima di proseguire, osserviamo che condizione necessaria e sufficiente affinché valga la (3.0.3) è che valga la disuguaglianza di Poincaré con la media (3.0.2) e che $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ sia immerso con continuità in $L^{2N/(N-2)}(\Omega;\nu)$. Infatti, la necessità è ovvia, mentre per la sufficienza basta osservare che per funzioni $v \in W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ a *media nulla* abbiamo:

$$\|v\|_{\frac{2N}{N-2};\nu} \leq C_S^*\left(\|v\|_{2;\nu} + \|\nabla v\|_{2;\mu}\right) \leq C_S^*\left(C_P + 1\right)\|\nabla v\|_{2;\mu}\,, \tag{3.4.1}$$

essendo C_S^* la costante di continuità dell'immersione di $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ in $L^{2N/(N-2)}$ $(\Omega;\nu)$. Nel caso in cui Ω sia un dominio limitato e Lipschitziano, dato che hanno luogo sia l'immersione continua $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2N/(N-2)}(\Omega)$ (si veda ad esempio [Ada75, teo. 5.4.I], in cui si fornisce un risultato molto più generale) che la disuguaglianza di Poincaré con la media in $H^1(\Omega)$ (si deduce dalla compattezza dell'immersione $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ [Ada75, teo. 6.2.I]), concludiamo che vale anche la disuguaglianza di Sobolev con la media. La sezione 4.2.2 è improntata all'illustrazione di alcuni esempi di domini e pesi per i quali in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ vale la disuguaglianza di p-Poincaré con la media (1.0.2); tuttavia in certi casi si sa dire se ha luogo *anche* un'immersione $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu) \hookrightarrow L^q(\Omega;\nu)$ con $q > p$, da cui la (3.0.3) se $p = 2$ e

$q = \frac{2N}{N-2}$. Tipicamente, nei suddetti casi, la disuguaglianza di p-Poincaré vale per compattezza[11].

3.4.1 Stime regolarizzanti

Col prossimo teorema dimostriamo una regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^∞ che, come abbiamo visto nella sezione 3.2.1, in generale *non* si verifica a partire dalla sola disuguaglianza di Poincaré.

Teorema 3.5. *Sia u la soluzione della* (3.0.1) *corrispondente ad un dato iniziale $u_0 \in L^{q_0}(\Omega;\nu)$ con $q_0 \in (1,\infty)$. Se vale la disuguaglianza di Sobolev con la media* (3.0.3) *allora u soddisfa la seguente stima:*

$$\|u(t)\|_\infty \le K\left(t^{-\frac{N}{2q_0+N(m-1)}}\,\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{2q_0}{2q_0+N(m-1)}} + \|u_0\|_{q_0;\nu}\right) \quad \forall t>0\,, \tag{3.4.2}$$

dove K è una costante dipendente da q_0, m, C_S, N e $\nu(\Omega)$.

Dimostrazione. Procederemo con una classica tecnica iterativa di Moser. Inizialmente lavoreremo con un dato iniziale $u_0 \in L^\infty(\Omega)$: il fatto che la stima che otterremo non dipenderà in alcun modo da $\|u_0\|_\infty$ ci consentirà di estendere la stessa a qualsiasi dato in $L^{q_0}(\Omega;\nu)$ (al termine della sezione spiegheremo meglio qual è l'esatto argomento, piuttosto noto).
Fissato $t>0$, consideriamo la successione di istanti temporali $t_k = t\,(1-2^{-k})$. Evidentemente, $t_0 = 0$ e $t_\infty = t$. Sia inoltre $\{p_k\}_k$ una successione crescente di esponenti di norme tale che $p_0 = q_0$ e $p_\infty = \infty$, che specificheremo successivamente. Supponiamo per ora anche che $q_0 \in (1,\infty)\cap[m-1,\infty)$. Considerando la (3.1.7) tra gli istanti temporali t_k e t_{k+1} e con $q = p_k - 1$, abbiamo:

$$\frac{4(p_k-1)p_k m}{(p_k+m-1)^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_\Omega \left|\nabla\left(u^{\frac{p_k+m-1}{2}}\right)(\mathbf{x},s)\right|^2 \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}s \le \|u(t_k)\|_{p_k;\nu}^{p_k}\,. \tag{3.4.3}$$

Per semplicità computazionale assumiamo, senza perdita di generalità, che $\nu(\Omega)=1$. Volendo gestire adeguatamente il membro sinistro della (3.4.3), conviene scrivere la disuguaglianza di Sobolev con la media (3.0.3) nel seguente modo:

$$\frac{1}{2C_S^2}\|v\|_{2\sigma;\nu}^2 - \frac{1}{C_S^2}\|v\|_{1;\nu}^2 \le \|\nabla v\|_{2;\mu}^2 \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)\,, \tag{3.4.4}$$

dove $\sigma = \frac{N}{N-2}$. Adesso applichiamo la (3.4.4) alla funzione $u^{\frac{p_k+m-1}{2}}$ nella (3.4.3), ottenendo:

$$\begin{aligned}\frac{2(p_k-1)p_k m}{C_S^2(p_k+m-1)^2}&\int_{t_k}^{t_{k+1}}\|u(s)\|_{\sigma(p_k+m-1);\nu}^{p_k+m-1}\,\mathrm{d}s \le \\ &\le \|u(t_k)\|_{p_k;\nu}^{p_k} + \frac{4(p_k-1)p_k m}{C_S^2(p_k+m-1)^2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\|u(s)\|_{\frac{p_k+m-1}{2};\nu}^{p_k+m-1}\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

[11] Questa è solo un'affermazione euristica, dettata dal fatto che se $\nu(\Omega)<\infty$ l'immersione continua di $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ in uno spazio $L^q(\Omega;\nu)$ chiaramente ne implica l'immersione continua in tutti gli spazi $L^r(\Omega;\nu)$ con $r\in[p,q]$, e quello che *spesso* accade è che tali immersioni sono anche compatte per $r\in[p,q)$ (se q è il massimo esponente per cui si ha un'immersione continua).

Dato che $q_0 \geq m-1$ e p_k è crescente, possiamo maggiorare $\|u\|_{(p_k+m-1)/2;\nu}$ con $\|u\|_{p_k}$; utilizzando questo fatto e la non-espansività delle norme negli integrali, ricaviamo:

$$\begin{aligned} &\frac{(p_k-1)p_k m}{C_S^2(p_k+m-1)^2}\, 2^{-k}\, t\, \|u(t_{k+1})\|_{p_{k+1};\nu}^{\frac{p_{k+1}}{\sigma}} \leq \\ &\leq \|u(t_k)\|_{p_k;\nu}^{p_k} + \frac{2(p_k-1)p_k m}{C_S^2(p_k+m-1)^2}\, 2^{-k}\, t\, \|u(t_k)\|_{p_k;\nu}^{p_k+m-1} \;, \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

avendo posto $p_{k+1} = \sigma(p_k + m - 1)$. Ora supporremo $\|u_0\|_\infty = 1$. Tale ipotesi, in particolare, assicura che (ancora grazie alla non-espansività delle norme e alla misura unitaria)

$$\|u(t_k)\|_{p_k;\nu}^{p_k+m-1} \leq \|u(t_k)\|_{p_k;\nu}^{p_k} \,;$$

di conseguenza possiamo riscrivere la (3.4.6) come

$$\|u(t_{k+1})\|_{p_{k+1};\nu}^{\frac{p_{k+1}}{\sigma}} \leq \frac{C_S^2(p_k+m-1)^2}{(p_k-1)p_k m}\, 2^k\, t^{-1}\, \|u(t_k)\|_{p_k;\nu}^{p_k} + 2\,\|u(t_k)\|_{p_k;\nu}^{p_k} \,. \tag{3.4.7}$$

Per un'opportuna costante $D = D(q_0, m, C_S, N)$ la (3.4.7) si può semplificare in

$$\|u(t_{k+1})\|_{p_{k+1};\nu} \leq D^{\frac{k+1}{p_{k+1}}} (t^{-1}+1)^{\frac{\sigma}{p_{k+1}}}\, \|u(t_k)\|_{p_k;\nu}^{\sigma\frac{p_k}{p_{k+1}}} \,. \tag{3.4.8}$$

Ponendo $U_k = \|u(t_k)\|_{p_k;\nu}$, è facile verificare che la successione $\{U_k\}_k$ soddisfa

$$U_{k+1} \leq D^{\frac{\sigma^{k+2}-(k+2)\sigma+k+1}{p_{k+1}(\sigma-1)^2}} (t^{-1}+1)^{\frac{\sigma^{k+2}-\sigma}{p_{k+1}(\sigma-1)}}\, U_0^{q_0\frac{\sigma^{k+1}}{p_{k+1}}} \,. \tag{3.4.9}$$

Per come è stata definita $\{p_k\}_k$, si ha $p_k = (q_0 - A)\sigma^k + A$, con $A = \frac{\sigma}{\sigma-1}(1-m) = \frac{N}{2}(1-m)$. Perciò, mandando $k \to \infty$ nella (3.4.9), otteniamo:

$$\|u(t)\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \|u(t)\|_{p_{k+1};\nu} \leq \liminf_{k\to\infty} U_{k+1} \leq D(t^{-1}+1)^{\frac{N}{2q_0+N(m-1)}}\, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{2q_0}{2q_0+N(m-1)}} \tag{3.4.10}$$

(d'ora in poi $D = D(q_0, m, C_S, N)$ indicherà sempre una generica costante che può variare da passaggio a passaggio). Diversamente da come potrebbe apparire, la (3.4.10) *non* è una stima regolarizzante. Infatti, ricordiamo che essa è stata ricavata per dati iniziali u_0 tali che $\|u_0\|_\infty = 1$. Con un semplice argomento di *scaling* temporale possiamo dedurre una stima anche per generici dati in $L^\infty(\Omega)$ (perciò, per ora, il vincolo $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ non è rilassabile). Ovvero, data una soluzione $u(\cdot, t)$ della (3.0.1), non è difficile controllare che $\widehat{u}(\cdot, t) = \frac{1}{\lambda} u(\cdot, \lambda^{-m+1} t)$ è la soluzione corrispondente al dato iniziale $\widehat{u}_0 = \frac{1}{\lambda} u_0$. Per cui scegliendo $\lambda = \|u_0\|_\infty$ e applicando la (3.4.10) a $\widehat{u}(t)$ concludiamo che

$$\|u(t)\|_\infty = \|u_0\|_\infty\, \widehat{u}(\|u_0\|_\infty^{m-1}\, t) \leq D(t^{-1} + \|u_0\|_\infty^{m-1})^{\frac{N}{2p_0+N(m-1)}}\, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{2q_0}{2q_0+N(m-1)}} \,. \tag{3.4.11}$$

Anche la stima (3.4.11), di per sé, non ha grande interesse, dato che non stabilisce alcuna regolarizzazione (rimane la dipendenza dalla norma $\|\cdot\|_\infty$ del dato iniziale) e a livello asintotico fornisce solo un limite superiore per $\|u(t)\|_\infty$ non molto diverso da quello già garantito dalla non-espansività. Tuttavia, applicandola iterativamente, è possibile ridurre a piacere (ma *non* eliminare) la dipendenza da $\|u_0\|_\infty$. Infatti, iniziamo a riscriverla come

$$\|u(t)\|_\infty \leq D\left(t^{-\frac{N}{2q_0+N(m-1)}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{2q_0}{2q_0+N(m-1)}} + \|u_0\|_\infty^{\frac{N(m-1)}{2q_0+N(m-1)}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{2q_0}{2q_0+N(m-1)}}\right), \tag{3.4.12}$$

cioè, ponendo $\theta = \frac{N(m-1)}{2q_0+N(m-1)}$,

$$\|u(t)\|_\infty \leq D\left(t^{-\frac{\theta}{m-1}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta} + \|u_0\|_\infty^{\theta}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta}\right). \tag{3.4.13}$$

Ora è opportuno sfruttare la proprietà dei semigruppi, traslando l'origine dell'asse temporale da 0 a $t/2$ e ricordando che u è anche soluzione corrispondente al dato iniziale $u(t/2)$. Ciò porta a (sul termine $\|u(t/2)\|_{q_0;\nu}$ utilizziamo inoltre la non-espansività della norma q_0)

$$\|u(t)\|_\infty \leq D\left(t^{-\frac{\theta}{m-1}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta} + \|u(t/2)\|_\infty^{\theta}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta}\right); \tag{3.4.14}$$

riapplicando su $\|u(t/2)\|_\infty$ la (3.4.13) valutata al tempo $t/2$ otteniamo

$$\|u(t)\|_\infty \leq D\left(t^{-\frac{\theta}{m-1}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta} + t^{-\frac{\theta^2}{m-1}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta^2} + \|u_0\|_\infty^{\theta^2}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta^2}\right). \tag{3.4.15}$$

È chiaro che procedendo così per k passi si arriva a

$$\|u(t)\|_\infty \leq D(k,\cdot)\left(t^{-\frac{\theta}{m-1}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta} + \ldots + t^{-\frac{\theta^k}{m-1}}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta^k} + \|u_0\|_\infty^{\theta^k}\|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta^k}\right). \tag{3.4.16}$$

A questo punto abbiamo bisogno di una stima regolarizzante per rimuovere la dipendenza dalla norma $L^\infty(\Omega)$ a membro destro. A tale scopo, conviene procedere nel seguente modo. Assumiamo che si abbia $\|u_0\|_{q_0;\nu} = 1$. Ripartendo dalla (3.4.6) e chiamando sempre $U_k = \|u(t_k)\|_{p_k;\nu}$, si ricava:

$$U_{k+1}^{\frac{p_{k+1}}{\sigma}} \leq \frac{C_S^2(p_k+m-1)^2}{(p_k-1)p_k m}\, 2^k\, t^{-1} U_k^{p_k} + 2U_k^{p_k+m-1}. \tag{3.4.17}$$

Ora consideriamo una *soluzione* della (3.4.17), ovvero una successione $\{V_k\}_k$ tale che $V_0 = U_0 = 1$ e

$$V_{k+1}^{\frac{p_{k+1}}{\sigma}} = \frac{C_S^2(p_k+m-1)^2}{(p_k-1)p_k m}\, 2^k\, t^{-1} V_k^{p_k} + 2V_k^{p_k+m-1}; \tag{3.4.18}$$

è facile controllare, per induzione, che $U_k \leq V_k$ e $V_k \geq 1$. Di conseguenza, ragionando in maniera duale al caso $\|u_0\|_\infty = 1$ (adesso il termine dominante a membro destro è $V_k^{p_k+m-1}$), deduciamo che per un'opportuna costante $D = D(q_0, m, C_S, N)$ la successione $\{V_k\}_k$ soddisfa a sua volta

$$V_{k+1} \leq D^{\frac{k+1}{p_{k+1}}}\,(t^{-1}+1)^{\frac{\sigma}{p_{k+1}}}\,V_k. \tag{3.4.19}$$

Risolvendo quest'ultima disequazione ricorsiva si ottiene[12] (sfruttando il fatto che $p_k \geq q_0\,\sigma^k$)

$$V_{k+1} \leq D^{\frac{(k+2)(1-\sigma)\sigma^{-k-1}-\sigma^{-k-1}+\sigma}{q_0(\sigma-1)^2}}\,(t^{-1}+1)^{\frac{\sigma-\sigma^{-k}}{q_0(\sigma-1)}}, \tag{3.4.20}$$

[12]Ricordiamo che la costante D può variare da passaggio a passaggio.

e passando al limite per $k \to \infty$

$$\|u(t)\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \|u(t)\|_{p_k;\nu} \le \liminf_{k\to\infty} U_k \le \liminf_{k\to\infty} V_k \le D\,(t^{-1}+1)^{\frac{N}{2q_0}} . \tag{3.4.21}$$

Utilizzando nuovamente un argomento *scaling* temporale (stavolta con $\lambda = \|u_0\|_{q_0;\nu}$), la stima regolarizzante finale è

$$\|u(t)\|_\infty \le D\,(t^{-1} + \|u_0\|_{q_0;\nu}^{m-1})^{\frac{N}{2q_0}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\frac{N(m-1)}{2q_0}} , \tag{3.4.22}$$

che diventa, ponendo $\delta = \frac{N(m-1)}{2q_0}$,

$$\|u(t)\|_\infty \le D\,\left(t^{-\frac{\delta}{m-1}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\delta} + \|u_0\|_{q_0;\nu}\right) . \tag{3.4.23}$$

Chiaramente, gli esponenti della (3.4.23) non sono molto soddisfacenti (in particolare quando q_0 è piccolo rispetto a N). Tuttavia componendo questa stima con la (3.4.16) si può ricavare un risultato regolarizzante migliore. Infatti, mediante il solito artificio di porre l'origine dei tempi in $t/2$ nella (3.4.16) e utilizzando la (3.4.23) al tempo $t/2$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\infty \le D(\cdot,k)\, \Big(& t^{-\frac{\theta}{m-1}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta} + \dots \\ & \dots + t^{-\frac{\theta^k}{m-1}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\theta^k} + t^{-\frac{\delta\theta^k}{m-1}} \|u_0\|_{q_0;\nu}^{1-\delta\theta^k} + \|u_0\|_{q_0;\nu}\Big) . \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

Per arrivare alla (3.4.2), anzitutto scegliamo k sufficientemente grande di modo che $\delta\theta^k < \theta$; il risultato segue poi applicando iterativamente il lemma 3.3 con $x = t^{1/(m-1)}$, $y = \|u_0\|_{q_0;\nu}$, $\alpha = \theta$ e una prima volta $\beta = \delta\theta^k$, successivamente $\beta = \theta^j$ per $j = k \dots 2$.
L'assunzione $q_0 \ge m-1$ si può rilassare ragionando similmente alla dimostrazione del teorema 3.2. Ovvero, fissato un generico $q_0 \in (1, m-1]$ (per ora manteniamo sempre anche l'ipotesi $u_0 \in L^\infty(\Omega)$) e posto $m > 2$, svolgendo un passo della precedente iterazione di Moser (ripartendo dalla (3.4.5) con $t_0 = 0$ e $t_1 = t$) si ricava:

$$\|u(t)\|_{\sigma(q_0+m-1);\nu} \le D\left(t^{-\frac{1}{q_0+m-1}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+m-1}} + \|u_0\|_{\frac{q_0+m-1}{2};\nu}\right) . \tag{3.4.25}$$

Scelto quel k tale che $\frac{q_0+m-1}{2} \le 2^k q_0$ e $q_0 \le \frac{m-1}{2^k-1}$, trasliamo l'origine temporale della (3.4.25) in $t/2$, maggioriamo $\|u(t/2)\|_{(q_0+m-1)/2;\nu}$ con $\|u(t/2)\|_{2^k q_0;\nu}$ e applichiamo il risultato del lemma 3.2 valutato al tempo $t/2$ e la non-espansività della norma $\|\cdot\|_{q_0;\nu}$; così facendo arriviamo a

$$\|u(t)\|_{\sigma(q_0+m-1);\nu} \le D\left(t^{-\frac{1}{q_0+m-1}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+m-1}} + \|u_0\|_{q_0;\nu}\right) . \tag{3.4.26}$$

Per ottenere la stima finale è sufficiente comporre la (3.4.2) (sostituendo lì q_0 con $\sigma(p_0+m-1)$) e la (3.4.26) ancora una volta attraverso la traslazione temporale in $t/2$. Dopo qualche passaggio abbiamo:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\infty \le D\,\Bigg(& t^{-\frac{1}{m-1}\frac{N(m-1)}{2q_0+N(m-1)}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{2q_0}{2q_0+N(m-1)}} + \\ & + t^{-\frac{1}{m-1}\frac{(N-2)(m-1)}{2q_0+N(m-1)}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{2(q_0+m-1)}{2p_0+N(m-1)}} + t^{-\frac{1}{m-1}\frac{m-1}{q_0+m-1}} \, \|u_0\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{q_0+m-1}} + \|u_0\|_{q_0;\nu}\Bigg) ; \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

si conclude appellandosi due volte al lemma 3.3.
Infine, dobbiamo rimuovere le ipotesi $\nu(\Omega) = 1$ e $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Per quanto riguarda la prima, si procede per *scaling* spaziale esattamente come spiegato nella dimostrazione del teorema 3.2; il tutto si può tradurre semplicemente nella dipendenza della costante moltiplicativa anche da $\nu(\Omega)$. L'estensione a generici dati in $L^{q_0}(\Omega;\nu)$ si effettua con un argomento standard. Infatti, fissato $u_0 \in L^{q_0}(\Omega;\nu)$, consideriamo una successione $u_{0n} \in L^\infty(\Omega)$ che converge a u_0 in $L^{q_0}(\Omega;\nu)$ e le rispettive soluzioni della (3.0.1) u e u_n. Dal principio del confronto (3.1.10) deduciamo che $u_n(t) \to u(t)$ in $L^1(\Omega;\nu)$; inoltre dalla (3.4.2) sappiamo anche che, in particolare, a meno di sottosuccessioni $u_n(t)$ converge debolmente* in $L^\infty(\Omega)$ ad un certo elemento $v \in L^\infty(\Omega)$. L'identificazione tra $u(t)$ e v si può fare, per esempio, testando la successione $\{u_n(t)\}_n$ sulle funzioni di $L^1(\Omega;\nu) \cap L^\infty(\Omega)$, e la (3.4.2) si conserva passando al limite grazie alla semi-continuità inferiore della norma $\|\cdot\|_\infty$ rispetto alla topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$. $\square$

La stima (3.4.2) effettivamente migliora, rispetto alla dipendenza degli esponenti coinvolti da q_0, m e N, quella fornita dal teorema 1.1 di [BG05m] tramite un metodo differenziale alla Gross, la quale si presenta in questa forma[13]:

$$\|u(t)\|_\infty \leq C\, t^{-\frac{\alpha}{m-1}}\, \|u_0\|_{q_0}^{1-\alpha}\; e^{E_0 \|u_0\|_{1\vee(m-1)}^{m-1} t}, \tag{3.4.28}$$

dove C, E_0 sono costanti dipendenti da q_0, m, C_S, N e $\nu(\Omega)$ e

$$\alpha = \left[1 - \left(\frac{q_0}{q_0 + m - 1}\right)^{\frac{N}{2}}\right]. \tag{3.4.29}$$

Quest'ultima, comunque, nei confronti della (3.4.2) conserva il parziale vantaggio di valere per dati che appartengano almeno a $L^{1\vee(m-1)}(\Omega)$, il che evidentemente include anche il caso $q_0 = 1$ (per il quale l'approccio alla Moser è inapplicabile) se $m \in (1, 2]$.
Ciononostante sottolineiamo ancora che grazie al lemma 3.5 (che ovviamente continua a valere essendo la disuguaglianza di Sobolev più forte della Poincaré) la (3.4.2) rimane valida anche per dati solo in $L^1(\Omega;\nu)$ pur di attendere un tempo τ arbitrariamente piccolo.
Osserviamo inoltre che l'esponente temporale presente nella (3.4.2) coincide con quello ottenuto nel teorema 1.5 dello stesso articolo, in cui si assume la validità di una disuguaglianza di Sobolev come la (3.0.3) ma *senza* media.

3.4.2 Stime asintotiche: il caso $\overline{u} = 0$

Anche in questo contesto a partire dalle stime regolarizzanti dimostrate col teorema 3.5 possiamo dedurre che per soluzioni a media nulla vale un *absolute bound*, stavolta fino a $\varrho = \infty$.

[13]Gli autori per comodità assumono $q_0 \geq 2$, ma non ci sono difficoltà a partire da $q_0 \geq 1$. Inoltre, nella notazione, utilizziamo qui norme non pesate perché il risultato ottenuto in [BG05m], nel contesto euclideo, è valido per pesi unitari (anche se in realtà le dimostrazioni sono identicamente ripetibili nel caso pesato).

Corollario 3.3. *Sia* $u_0 \in L^{q_0}(\Omega;\nu)$ *con* $q_0 \in [1,\infty)$ *e* $\overline{u_0} = 0$. *Allora, se vale la disuguaglianza di Sobolev con la media* (3.0.3) *e* u *è la soluzione della* (3.0.1) *corrispondente a* u_0*, vale a sua volta l'*absolute bound

$$\|u(t)\|_\infty \le Q\, t^{-\frac{1}{m-1}} \quad \forall t > 0\,, \tag{3.4.30}$$

dove Q *è una costante dipendente da* m*,* C_S*,* C_{x^m}*,* N *e* $\nu(\Omega)$*.*

Dimostrazione. La stima

$$\|u(t)\|_{m+1;\nu} \le D(m, C_{x^m}, \nu(\Omega))\, t^{-\frac{1}{m-1}} \quad \forall t > 0 \tag{3.4.31}$$

è già stata dimostrata nel corollario 3.1. L'*absolute bound* (3.4.30) si ottiene combinando la regolarizzazione (3.4.2), intesa con origine temporale traslata in $t/2$ e $q_0 = m+1$, con la (3.4.31) valutata al tempo $t/2$; ovvero:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\infty \le K(m, C_S, N, \nu(\Omega)) \Big(& t^{-\frac{N}{2(m+1)+N(m-1)}} \|u(t/2)\|_{m+1;\nu}^{\frac{2(m+1)}{2(m+1)+N(m-1)}} + \\ & + \|u(t/2)\|_{m+1;\nu} \Big) \le Q\, t^{-\frac{1}{m-1}} \quad \forall t > 0\,. \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

□

La validità di un *absolute bound* col *rate* temporale $t^{-1/(m-1)}$ per soluzioni a media nulla costituisce un fatto nuovo. Infatti quest'ultimo è stato provato in [BG05m, cor. 1.3] per tutte le norme $\varrho < \infty$, ma non[14] per $\varrho = \infty$. Nel pionieristico lavoro [AR81] effettivamente già si era ottenuto un decadimento temporale dell'ordine di $t^{-1/(m-1)}$, ma la stima lì fornita [AR81, teo. 3.1] dipendeva in maniera sostanziale anche dal dato iniziale u_0.

3.4.3 Stime asintotiche: il caso $\overline{u} \neq 0$

Combinando il risultato del teorema 3.3, in cui dimostriamo convergenza esponenziale alla media per soluzioni *limitate*, con la regolarizzazione $L^{q_0}_\nu$-L^∞ otteniamo il seguente

Corollario 3.4. *Sia* $u_0 \in L^{q_0}(\Omega;\nu)$ *con* $q_0 \in (1,\infty)$ *e* $\overline{u} \neq 0$. *Se vale la disuguaglianza di Sobolev con la media* (3.0.3) *allora la soluzione* u *della* (3.0.1) *corrispondente al dato iniziale* u_0 *converge esponenzialmente alla media in tutti gli spazi* $L^\varrho(\Omega;\nu)$ *per* $\varrho \in (q_0,\infty)$*, ovvero:*

$$\|u(t) - \overline{u}\|_{\varrho;\nu} \le B\, e^{-\frac{(\varrho-1)m|\overline{u}|^{m-1}}{C^2_{R,\varrho} D^2}(t-2)} \|u_0 - \overline{u}\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}} \quad \forall t > 2\,, \tag{3.4.33}$$

posto che per una determinata costante $R > 0$

$$\frac{\|u(1) - \overline{u}\|_\infty}{|\overline{u}|} \le R\,, \tag{3.4.34}$$

dove $C_{R,p}$ *indica la costante del lemma 3.4 relativa ad un'opportuna funzione* $\Phi_{R,p}$ *dipendente da* p*,* m *e* R *mentre* $D = D(\varrho, m)$ *e* $B = B(|\overline{u}|, q_0, \varrho, R, m, C_{R,q_0})$.

[14] Tuttavia va detto che si poteva dimostrare anche partendo dallo stesso risultato regolarizzante [BG05m, teo. 1.1].

Dimostrazione. Grazie all'effetto regolarizzante dimostrato nel teorema 3.3 sappiamo, in particolare, che $u(T) \in L^\infty(\Omega)$ per ogni $T \geq 1$. Di conseguenza, ragionando esattamente come nella dimostrazione di tale teorema 3.3 (e adottandone la stessa notazione), possiamo dedurre che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|w(s)\|_{q_0;\nu}^{q_0} \leq -\frac{q_0(q_0-1)m|\overline{u}|^{m-1}}{C_{R,q_0}^2} \|\Phi_{R,q_0}(w(s))\|_{2;\nu}^2 \quad \forall s > 1\,, \tag{3.4.35}$$

essendo R una determinata costante tale che

$$\frac{\|u(1)-\overline{u}\|_\infty}{|\overline{u}|} \leq R \tag{3.4.36}$$

e Φ_{R,q_0} la medesima funzione definita nella suddetta dimostrazione mettendo q_0 al posto dell'esponente ϱ lì utilizzato. Fissato ora $\varrho \in (q_0,\infty)$, evidentemente esiste un'altra costante $D_0 = D_0(q_0,\varrho,R,m)$ per la quale si ha

$$|x|^{\frac{\varrho}{2}} \leq D_0^{-1}|\Phi_{R,q_0}(x)| \quad \forall x \in [-R,R]\,; \tag{3.4.37}$$

perciò la (3.4.35) diventa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|w(s)\|_{q_0;\nu}^{q_0} \leq -\frac{q_0(q_0-1)m|\overline{u}|^{m-1}}{C_{R,q_0}^2 D_0^2} \|w(s)\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} \quad \forall s > 1\,, \tag{3.4.38}$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \|u(s)-\overline{u}\|_{q_0;\nu}^{q_0} \leq -\frac{q_0(q_0-1)m|\overline{u}|^{q_0+m-1-\varrho}}{C_{R,q_0}^2 D_0^2} \|u(s)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} \quad \forall s > 1\,. \tag{3.4.39}$$

Integrando la (3.4.39) tra $s=1$ e $s=2$ e sfruttando la non-espansività della quantità $\|u(s)-\overline{u}\|_{\cdot;\nu}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \|u(2)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu} &\leq \left(\frac{C_{R,q_0}^2 D_0^2}{q_0(q_0-1)m|\overline{u}|^{q_0+m-1-\varrho}}\right)^{\frac{1}{\varrho}} \|u(1)-\overline{u}\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}} \leq \\ &\leq B(|\overline{u}|,q_0,\varrho,R,m,C_{R,q_0})\ \|u_0-\overline{u}\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}}\ . \end{aligned} \tag{3.4.40}$$

Perciò, ripartendo dalla stima (3.2.60) considerata con origine temporale in $t=2$,

$$\begin{aligned} \|u(t)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu} &\leq e^{-\frac{(\varrho-1)m|\overline{u}|^{m-1}}{C_{R,\varrho}^2 D^2}(t-2)} \|u(2)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu} \leq \\ &\leq B\, e^{-\frac{(\varrho-1)m|\overline{u}|^{m-1}}{C_{R,\varrho}^2 D^2}(t-2)} \|u_0-\overline{u}\|_{q_0;\nu}^{\frac{q_0}{\varrho}} \quad \forall t > 2\,. \end{aligned} \tag{3.4.41}$$

□

Naturalmente quest'ultima stima vale anche per $u_0 \in L^1(\Omega;\nu)$, anche se *non* per $q_0 = 1$.

Come si vede, la (3.4.33) garantisce una convergenza esponenziale alla media in tutti gli spazi $L^\varrho(\Omega;\nu)$ escluso $L^\infty(\Omega)$. Non è difficile dimostrare che *se* ha luogo una convergenza uniforme alla media, allora anch'essa è almeno esponenziale:

Proposizione 3.3. *Supponiamo che per una soluzione u della* (3.0.1) *relativa ad un dato iniziale $u_0 \in L^1(\Omega;\nu)$ si abbia convergenza uniforme alla media, ovvero:*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \overline{u}\|_\infty = 0\,. \tag{3.4.42}$$

Allora se in $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ è soddisfatta la disuguaglianza di Sobolev con la media (3.0.3)*, vale la seguente stima:*

$$\|u(t) - \overline{u}\|_\infty \le D\left(\left[|\overline{u}|^{m-1}\delta(1-\delta)(t-\tau)\right]^{-1} + 1\right)^{\frac{N}{4}} e^{-\frac{m|\overline{u}|^{m-1}\delta^2}{C_P^2}(t-\tau)}\,\|u_0 - \overline{u}\|_{2;\nu} \tag{3.4.43}$$

$$\forall\delta\in(0,1)\,,\ \forall t>\tau\,,$$

dove D è una costante dipendente da m, C_S, N e $\nu(\Omega)$ e $\tau = \tau(u,\delta) > 0$ è quell'istante temporale tale che

$$\|u(t)\|_\infty \ge \delta^{\frac{1}{m-1}}|\overline{u}| \quad \forall t\ge\tau\,. \tag{3.4.44}$$

Dimostrazione. Viste le ipotesi, ripartendo dalla (3.2.52) è facile ricavare che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u(s)-\overline{u}\|_{\varrho;\nu}^{\varrho} \le -4\frac{\varrho-1}{\varrho}m|\overline{u}|^{m-1}\delta\left\|\nabla\left(|u(s)-\overline{u}|^{\frac{\varrho}{2}}\right)\right\|_{2;\mu}^2 \quad \forall s\ge\tau\,. \tag{3.4.45}$$

Ora possiamo procedere con un'iterazione di Moser, prendendo come istante iniziale τ. Fissato quindi $t>\tau$, consideriamo una successione di istanti temporali $t_k = \tau + (t-\tau)(1-2^{-k})$ e una corrispondente successione crescente di esponenti $\{p_k\}_k$, con $p_0 = 2$. Posto $\varrho = p_k$, integrando la (3.4.45) tra t_k e t_{k+1}, tramite passaggi analoghi a quelli svolti a partire dalla (3.4.3) si ottiene:

$$\|u(t_{k+1})-\overline{u}\|_{p_{k+1};\nu} \le D^{\frac{k}{p_k}}\left(\left[|\overline{u}|^{m-1}\delta\,(t-\tau)\right]^{-1}+1\right)^{\frac{1}{p_k}}\|u(t_k)-\overline{u}\|_{p_k;\nu}\,, \tag{3.4.46}$$

dove $D = D(m, C_S, N, \nu(\Omega))$ rappresenta una generica costante che può variare da passaggio a passaggio e $p_{k+1} = \frac{N}{N-2}p_k$. Risolvendo la (3.4.46) e mandando $k\to\infty$ si arriva alla stima

$$\|u(t)-\overline{u}\|_\infty \le D\left(\left[|\overline{u}|^{m-1}\delta(t-\tau)\right]^{-1}+1\right)^{\frac{N}{4}}\|u(\tau)-\overline{u}\|_{2;\nu}\,. \tag{3.4.47}$$

Ragionando come in [BG05m, cor. 1.4], si può provare che per $t>\tau$ si ha

$$\|u(t)-\overline{u}\|_{2;\nu} \le e^{-\frac{m|\overline{u}|^{m-1}\delta}{C_P^2}(t-\tau)}\|u(\tau)-\overline{u}\|_{2;\nu}\,. \tag{3.4.48}$$

La (3.4.47) naturalmente vale anche se si rimpiazza τ con $\tau+\delta(t-\tau)$ (proprietà dei semigruppi); in particolare,

$$\|u(t)-\overline{u}\|_\infty \le D\left(\left[|\overline{u}|^{m-1}\delta(1-\delta)(t-\tau)\right]^{-1}+1\right)^{\frac{N}{4}}\|u(\tau+\delta(t-\tau))-\overline{u}\|_{2;\nu}\,; \tag{3.4.49}$$

da cui, utilizzando nella (3.4.49) la (3.4.48) valutata al tempo $\tau+\delta(t-\tau)$ (al posto di t) e il decadimento della quantità $\|u(s)-\overline{u}\|_{2;\nu}$ deduciamo la (3.4.43). □

Chiaramente la (3.4.43) è preferibile alla (3.4.33), dato che fornisce un controllo dall'alto rispetto alla convergenza uniforme alla media, ed inoltre non dipende da costanti del tipo C_Φ per le quali, come precedentemente discusso, è difficile ottenere stime quantitative. Un risultato analogo, in realtà, era già stato dimostrato in [AR81, teo. 3.3], assumendo però che il dato iniziale fosse minorato da una costante positiva. Invece, la (3.4.43) di fatto equivale alla stima ricavata in [BG05m, cor. 1.4] a meno di un fattore moltiplicativo $\gamma = 1-\alpha$ (α è definito come nella (3.4.29)) all'esponente. Va detto comunque che γ si poteva rimuovere in maniera analoga anche a partire da [AR81, teo. 3.3] e dalla convergenza uniforme alla media provata sempre in [BG05m] per generici dati in $L^1(\Omega)$. Il punto è proprio questo: nei citati lavori si *dimostra* che la convergenza uniforme alla media, *assunta* come ipotesi nella proposizione 3.3, ha effettivamente luogo. Tuttavia gli argomenti utilizzati non sono di natura funzionale, e non sembrano ripetibili in un ambito relativamente astratto come il nostro, salvo nel caso di un dominio Ω regolare e pesi ρ_ν, ρ_μ regolari fin sul bordo[15]. Ad esempio, in [BG05m] la dimostrazione della convergenza uniforme è basata sul fatto che, in quel contesto, si può provare che le soluzioni sono spazialmente Hölderiane con costante uniforme. Da cui è facile controllare che, se non ci fosse convergenza uniforme alla media, esisterebbero una successione di istanti temporali $t_n \to \infty$, di punti $\mathbf{x}_n \in \Omega$ e un certo $\epsilon > 0$ tali che

$$|u(\mathbf{x}, t_n) - \overline{u}| \geq \epsilon \quad \forall \mathbf{x} \in B_\epsilon(\mathbf{x}_n)\,, \tag{3.4.50}$$

e ciò evidentemente non è compatibile con la convergenza alla media in tutti gli spazi $L^\varrho(\Omega)$ per $\varrho < \infty$. Se i pesi non sono regolari fin sul bordo le cose, a priori, sono più complesse. Infatti anche qualora si riuscisse a mostrare la continuità Hölderiana spaziale (con costante uniforme), il ragionamento appena illustrato non è detto che porti a un assurdo, dato che la ν-misura di $B_\epsilon(\mathbf{x}_n)$ potrebbe tendere a zero.
Stabilire opportune classi di domini e pesi (assieme a connesse disuguaglianze funzionali) rispetto alle quali si possa garantire la convergenza uniforme alla media di $u(\cdot, t)$ resta quindi un problema aperto.

[15]Con quest'espressione intendiamo sempre che ρ_ν, ρ_μ siano sufficientemente differenziabili ed equivalenti al peso unitario.

Capitolo 4

Esempi di domini e pesi per cui valgono disuguaglianze di p-Poincaré

Presentiamo nel seguito alcune classi specifiche di domini $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e coppie di pesi (ρ_ν, ρ_μ) rispetto alle quali sono note valere disuguaglianze di p-Poincaré in $W_0^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$ oppure disuguaglianze di p-Poincaré con la media in $W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$ (per un richiamo su queste importanti disuguaglianze funzionali, si veda la sezione A.4). In certi casi si conoscono anche informazioni aggiuntive come immersioni di tipo Sobolev in spazi $L^q(\Omega; \nu)$ con $q > p$ e l'eventuale compattezza di queste ultime.

Nella sezione 4.1 trattiamo disuguaglianze di p-Poincaré in $W_0^{1,p}(\Omega;\, \nu, \mu)$, mentre nella sezione 4.2 ci occupiamo di disuguaglianze di p-Poincaré con la media in $W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$, suddividendo in entrambe il caso particolare $N = 1$ (sezioni 4.1.1 e 4.2.1) dal caso di un generico $N \geq 1$ (sezioni 4.1.2 e 4.2.2).

Prima di iniziare, introduciamo una classica funzione che avrà un ruolo fondamentale in molti degli esempi che vedremo.
Fissato un generico dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, si definisce la funzione *distanza* $\delta(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^+$ come

$$\delta(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{y} \in \Omega^c} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \,. \tag{4.0.1}$$

Si verifica facilmente che l'estremo inferiore in realtà è un minimo (Ω^c è chiuso) e che δ è sempre Lipschitziana in Ω. In generale, tuttavia, δ non ha regolarità maggiore della Lipschitzianità (si pensi a $\Omega = (0,1)^N$). Ciononostante un importante teorema (di Whitney [Ste70, teo. VI.2]) afferma, in particolare, che esistono sempre una funzione $\widetilde{\delta}(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^+$ di classe $C^\infty(\Omega)$ e una costante $K(N)$ tali che

$$K^{-1}\delta(\mathbf{x}) \leq \widetilde{\delta}(\mathbf{x}) \leq K\delta(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \,, \tag{4.0.2}$$

ovvero $\widetilde{\delta}$ è equivalente a δ. Per questa ragione $\widetilde{\delta}$ è comunemente chiamata *distanza regolarizzata*.

4.1 Disuguaglianze di p-Poincaré in $W_0^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$

Gli esempi riportati in questa sezione, relativi a disuguaglianze di p-Poincaré in $W_0^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$, sono principalmente basati sui risultati ricavati in [KO90].

4.1.1 $N = 1$

Cominciamo con un breve richiamo sugli spazi $AC_{\mathcal{L}}$, $AC_{\mathcal{R}}$ e $AC_{\mathcal{LR}}$. Seguiremo [KO90]. Fissato un qualsiasi intervallo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ (eventualmente con $a = -\infty$ o $b = +\infty$), si indica col simbolo $AC_{\mathcal{L}}(a,b)$ lo spazio costituito da tutte le funzioni $\eta : (a,b) \to \mathbb{R}$ *localmente* assolutamente continue e tali che

$$\lim_{x \to a^+} \eta(x) = 0\,. \tag{4.1.1}$$

Lo spazio $AC_{\mathcal{R}}(a,b)$ è definito in maniera analoga, sostituendo nella (4.1.1) a^+ con b^-, mentre $AC_{\mathcal{LR}} = AC_{\mathcal{L}} \cap AC_{\mathcal{R}}$. Nel volume [KO90] si sono ottenuti molti risultati riguardanti la validità di disuguaglianze di p-Poincaré pesate[1] della forma

$$\|\eta\|_{p;\nu} \le C_P \,\|\eta'\|_{p;\mu}\,, \tag{4.1.2}$$

dove η è una qualsiasi funzione appartenente ad uno degli spazi appena citati, C_P è una costante indipendente da η e ν e μ sono due opportune misure su (a,b) di densità rispettivamente ρ_ν e ρ_μ. Siccome $C_c^\infty(a,b) \subset AC_{\mathcal{LR}}(a,b)$, è chiaro che se la (4.1.2) è vera almeno in $AC_{\mathcal{LR}}(a,b)$ allora lo è anche in tutto $W_0^{1,p}((a,b);\nu,\mu)$.
Da [KO90, teo. 1.14] abbiamo che per $p \in (1,\infty)$ la (4.1.2) è valida in $AC_{\mathcal{L}}(a,b)$ se e solo se i pesi ρ_ν e ρ_μ soddisfano la condizione

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}}(a,b,\nu,\mu,p) = \sup_{x\in(a,b)} \left(\int_x^b \rho_\nu(y)\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x \rho_\mu(y)^{\frac{1}{1-p}}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty\,. \tag{4.1.3}$$

Scambiando i ruoli di a e b negli integrali si ottiene la condizione equivalente per $AC_{\mathcal{R}}(a,b)$ (si veda anche la (4.1.10)). Per quanto riguarda lo spazio $AC_{\mathcal{LR}}(a,b)$, osserviamo anzitutto che se $\eta \in AC_{\mathcal{LR}}(a,b)$ allora per ogni $c \in (a,b)$

$$\eta \in AC_{\mathcal{L}}(a,c)\,,\ \eta \in AC_{\mathcal{R}}(c,b)\,;$$

di conseguenza se esiste un qualsiasi $c \in [a,b]$ tale che

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}}(a,c,\nu,\mu,p) < \infty\,,\ \mathcal{B}_{\mathcal{R}}(c,b,\nu,\mu,p) < \infty$$

allora[2] la (4.1.2) vale in $AC_{\mathcal{LR}}(a,b)$. In realtà è vero anche il viceversa [KO90, teo. 8.8].
Chiaramente la (4.1.3) non è sempre immediata da verificare. Tuttavia sono anche note delle formule esplicite che consentono di ricavare ρ_ν da ρ_μ o ρ_μ da ρ_ν in modo che la (4.1.3) sia automaticamente soddisfatta. Per esempio [KO90, sez. 2.4], data ρ_μ,

$$\rho_\nu(x) = \rho_\mu(x)^{\frac{1}{1-p}} \left(\int_a^x \rho_\mu(y)^{\frac{1}{1-p}}\,\mathrm{d}y\right)^{-p}\,, \tag{4.1.4}$$

oppure, data ρ_ν,

$$\rho_\mu(x) = \rho_\nu(x)^{1-p} \left(\int_x^b \rho_\nu(y)\,\mathrm{d}y\right)^{p}\,. \tag{4.1.5}$$

[1] Chiamate anche *disuguaglianze di Hardy*.
[2] Ponendo per convenzione $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}(a,a,\cdot) = \mathcal{B}_{\mathcal{R}}(b,b,\cdot) = 0$.

Ovviamente è sottinteso che i pesi ρ_μ e ρ_ν debbano essere quasi ovunque diversi da zero e gli integrali coinvolti nella (4.1.4) e nella (4.1.5) quasi ovunque finiti. Una formula ancor più esplicita, che garantisce il soddisfacimento della (4.1.3) [KO90, sez. 2.5], si ha esprimendo ρ_ν e ρ_μ tramite una terza funzione nota. Più precisamente, data $\lambda : (a,b) \to \mathbb{R} \in C^1(a,b)$ con $\lambda' > 0$ e $\lim_{x\to b^-} \lambda(x) = +\infty$, i pesi ρ_ν e ρ_μ verificano la (4.1.3) se si pone

$$\begin{aligned} \rho_\nu(x) &= e^{\lambda(x)}\lambda'(x)\left(e^{\lambda(x)} - e^{\lambda(a)}\right)^{-p} \\ \rho_\mu(x) &= e^{(1-p)\lambda(x)}\left(\lambda'(x)\right)^{1-p} \end{aligned}, \tag{4.1.6}$$

dove $\lambda(a) = \lim_{x\to a^+} \lambda(x)$ può anche essere $-\infty$. Con una qualsiasi delle scelte (4.1.4), (4.1.5) o (4.1.6) si conosce anche il valore esplicito della costante C_P, che in particolare dipende solo da p [KO90, sezz. 2.5–2.7].

Presentiamo adesso alcuni esempi tratti da [KO90]. Supporremo sempre $p \in (1,\infty)$.
Nell'intervallo $(0,\infty)$ abbiamo che, posto $\beta \neq p-1$, i pesi

$$\rho_\nu(x) = x^{\beta-p}\,,\ \rho_\mu(x) = x^\beta$$

soddisfano la (4.1.2) in $A_{\mathcal{LR}}(0,\infty)$ [KO90, es. 6.7]. Per $\beta < p-1$ è facile verificare che queste scelte di ρ_ν e ρ_μ corrispondono (a meno di costanti moltiplicative) a scegliere $\lambda(x) = \frac{\beta+1-p}{1-p}\log(x)$ nella (4.1.6).
In intervalli della forma $(0,b)$, con $b \in (0,\infty)$, se $\beta \neq p-1$ e $\alpha \geq \beta - p$ oppure $\beta = p-1$ e $\alpha > -1$, in $AC_{\mathcal{LR}}(0,b)$ vale la (4.1.2) per [KO90, es. 6.8]

$$\rho_\nu(x) = x^\alpha\,,\ \rho_\mu(x) = x^\beta\,.$$

Rimanendo sempre nella classe delle potenze, per intervalli del tipo (a,∞) ($a \in (0,\infty)$) in $AC_{\mathcal{LR}}(a,\infty)$ è vera la (4.1.2) purché $\beta \neq p-1$ e $\alpha \leq \beta - p$ oppure $\beta = p-1$ e $\alpha < -1$ [KO90, es. 6.9].
In $(0,1)$ consideriamo ora pesi del tipo

$$\rho_\nu(x) = \frac{1}{x}\left|\log x\right|^{\beta-p}\,,\ x^{p-1}\left|\log x\right|^\beta\,.$$

Da [KO90, es. 6.10] possiamo dedurre che se $\beta \neq p-1$ per essi vale la (4.1.2) in $AC_{\mathcal{LR}}(0,1)$. Anche in questo caso osserviamo che una tale scelta, posto $\beta > p-1$, corrisponde a porre $\lambda(x) = \frac{\beta+1-p}{1-p}\log\left(\left|\log x\right|\right)$ nella (4.1.6) (sempre a meno di costanti moltiplicative). Con gli stessi pesi un risultato identico vale anche nell'intervallo $(1,\infty)$ [KO90, oss. 6.11].
Veniamo infine a pesi di tipo esponenziale [KO90, es. 6.12] definiti su $(a,b) = \mathbb{R}$, ovvero

$$\rho_\nu(x) = \rho_\mu(x) = e^{\alpha x}\,;$$

posto $\alpha \neq 0$, rispetto ad essi è soddisfatta la (4.1.2) in $AC_{\mathcal{LR}}(\mathbb{R})$ (per $\alpha < 0$ corrispondono alla scelta $\lambda(x) = \frac{\alpha}{1-p}x$ nella (4.1.6)). Se inoltre $\alpha > 0$ si può ripetere il tutto anche quando $\rho_\nu(x) = \rho_\mu(x) = e^{\alpha x^2}$ [KO90, es. 8.16].

Tutti i risultati precedenti, in realtà, sono estendibili anche al caso limite $p = 1$, volendo gestire il quale occorre generalizzare la (4.1.3) [KO90, sez. 5]. Per ulteriori condizioni che garantiscano la validità di altre disuguaglianze, di tipo Sobolev (immersioni $W_0^{1,p}((a,b);\nu\,\mu) \hookrightarrow L^q((a,b);\nu)$ con $q > p$), rimandiamo a [KO90, sez. 11.3 o cap. 3] o direttamente ad alcuni casi discussi nella prossima sezione, in cui tratteremo domini di $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$.

4.1.2 $N \geq 1$

Vediamo ora alcune classi di domini $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) e pesi (ρ_ν, ρ_μ) per i quali si sa che è vera la disuguaglianza di p-Poincaré

$$\|v\|_{p;\nu} \leq C_P \|\nabla v\|_{p;\mu} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)\,. \tag{4.1.7}$$

Pesi invarianti rispetto a opportune coordinate

Un primo elementare esempio [KO90, es. 12.6] si ha (posto $p \in [1,\infty)$) con il dominio cubico $\Omega = (0,1)^N$ e pesi della forma

$$\rho_\nu(\mathbf{x}) = \hat{\rho}_\nu(x_i)\,,\ \rho_\mu(\mathbf{x}) = \hat{\rho}_\mu(x_i)\,,$$

dove x_i è una qualsiasi variabile cartesiana per qualche $i \in \{1,\dots,N\}$ e $\hat{\rho}_\nu$ e $\hat{\rho}_\mu$ sono generici pesi[3] per cui vale la disuguaglianza di p-Poincaré monodimensionale in $(0,1)$ (si veda la sezione precedente). Dimostrare che con queste scelte i pesi ρ_ν e ρ_μ soddisfano la disuguaglianza di p-Poincaré è molto semplice; inoltre nella (4.1.7) il gradiente di v si può sostituire con la sola quantità $\frac{\partial v}{\partial x_i}$. Tutto ciò è ripetibile in maniera simile quando $\hat{\rho}_\nu(x_i) = \hat{\rho}_\mu(x_i)$ è un generico peso in $(0,1)$, senza ulteriori condizioni. In questo caso nella dimostrazione si procede utilizzando la classica disuguaglianza di p-Poincaré *non* pesata in $(0,1)$ (ovvero la (4.1.2) con $\rho_\nu = \rho_\mu = 1$), e nella (4.1.7) ∇v può essere rimpiazzato da $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ per un qualsiasi $j \neq i$.
Quest'ultimo risultato, in realtà, è ampiamente generalizzabile. Infatti esso rimane vero [KO90, lemma 13.2] se $\rho_\nu = \rho_\mu$ è un qualunque peso *indipendente* da almeno una variabile cartesiana (che chiamiamo x_k – nell'esempio appena visto $\hat{\rho}_\nu$ era indipendente da tutte le variabili cartesiane *tranne* la i-esima) e il dominio Ω è tale che[4] $D_k(\Omega) < \infty$. Per ulteriori estensioni rimandiamo a [KO90, lemma 13.3 e cor. 13.4]; in particolare si può garantire che quanto detto continua a valere se[5]

$$\rho_\nu(\mathbf{x}) = \hat{\rho}_1(x_k)\hat{\rho}_2(\mathbf{x}'_k)\,,\ \rho_\mu = \hat{\rho}_2(\mathbf{x}'_k)\,,$$

essendo $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ generici pesi dipendenti rispettivamente solo da x_k e $\mathbf{x}'_k$, con $\hat{\rho}_1$ tale che

$$\int_{I_k}^{S_k} (x_k - I_k)^{p-1}\,\hat{\rho}_1(x_k)\mathrm{d}x_k < \infty \quad \text{oppure} \quad \int_{I_k}^{S_k} (S_k - x_k)^{p-1}\,\hat{\rho}_1(x_k)\mathrm{d}x_k < \infty\,.$$

Per un esempio specifico, si veda [KO90, es. 13.6].
Anche il primo caso descritto (pesi che soddisfano la disuguaglianza di p-Poincaré monodimensionale) rientra in un contesto generalizzabile. L'idea è quella di analizzare pesi per i quali la disuguaglianza di p-Poincaré è valida (con controllo uniforme

[3] È sottinteso, qui e nel seguito, il fatto che verifichino almeno le minime ipotesi per la buona struttura di $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ fornite nella sezione A.2.

[4] $D_k(\Omega) = S_k - I_k$, $I_k = \inf_{\mathbf{x}\in\Omega} x_k$, $S_k = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} x_k$.

[5] $\mathbf{x}'_k = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N)$.

della costante C_P) su tutte le possibili $\mathbf{x}'_i$-sezioni del dominio Ω. Rimandiamo a [KO90, lemma 13.10 e cor. 13.12] per i risultati precisi.

Sia ora $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ x_i > 0 \quad \forall i = 1 \ldots N\}$, ovvero il primo ottante (se $N = 3$) dello spazio euclideo. Vogliamo considerare pesi della forma $\rho_\nu(\mathbf{x}) = \hat{\rho}_\nu(r(\mathbf{x}))$ e $\rho_\mu(\mathbf{x}) = \hat{\rho}_\mu(r(\mathbf{x}))$, dove $r : \Omega \to \mathbb{R}^+$ è la classica coordinata curvilinea

$$r(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2}\,.$$

È intuibile come l'approccio giusto in questo caso consista nel ricondursi, con l'ausilio delle coordinate sferiche, a situazioni analoghe a quelle descritte all'inizio della sezione, ovvero con pesi indipendenti da alcune variabili *curvilinee*. Infatti è facile verificare che se ρ_ν e ρ_ν dipendono solo da r e Ω è il dominio appena definito, allora la disuguaglianza (4.1.7) vale in[6] $W_0^{1,p}(\Omega; \rho_\nu(\mathbf{x}), \rho_\mu(\mathbf{x}))$ se e solo se la (4.1.2) vale in $W_0^{1,p}((0,\infty); \hat{\rho}_\nu(r)r^{N-1}, \hat{\rho}_\mu(r)r^{N-1})$ (si noti che una qualsiasi funzione $\varphi(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$, che diventa $\hat{\varphi}(r, \boldsymbol{\theta})$ in coordinate sferiche, bloccata la coordinata curvilinea $\boldsymbol{\theta}$ appartiene a $C_0^\infty(0,\infty)$). Ricordando gli esempi della sezione precedente in ambito monodimensionale, questo significa che, in particolare, i pesi $\rho_\nu(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x})^{\beta-p}$ e $\rho_\mu(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x})^\beta$ (per $\beta \neq p - N$) soddisfano sempre la (4.1.7) in Ω. Naturalmente identiche considerazioni valgono quando $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$. Anche in questo contesto ha senso chiedersi cosa accada utilizzando esclusivamente la disuguaglianza di Poincaré *non* pesata monodimensionale: trasformando gli integrali tramite le coordinate sferiche si può verificare che la (4.1.7) vale per pesi della tipologia $\rho_\nu(\mathbf{x}) = \hat{\rho}_\nu(r(\mathbf{x}))$ e $\rho_\mu = \hat{\rho}_\nu(r(\mathbf{x}))r(\mathbf{x})^p$, dove $\hat{\rho}_\nu$ è un qualsiasi peso su $(0,\infty)$. Per i calcoli espliciti nel caso $N = 3$ si veda [KO90, es. 12.8]. L'applicabilità della disuguaglianza non pesata monodimensionale ora richiede che una funzione $\varphi(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ (cioè $\hat{\varphi}(r, \boldsymbol{\theta})$ in coordinate sferiche) appartenga a $C_0^\infty(0, \frac{\pi}{2})$ quando tutte le variabili curvilinee tranne θ_k sono fissate (essendo θ_k la variabile curvilinea rispetto alla quale si utilizza la suddetta disuguaglianza). Per questo motivo il risultato è estendibile, così com'è, solo a domini Ω del tipo $\mathbb{R}^N \setminus \{x_i = 0, x_j > 0\}$ per qualche $i \neq j \in \{1, \ldots, N\}$ (in cui θ_k varia nell'intervallo $(0, 2\pi)$).
A conclusioni simili si può arrivare quando i pesi (e il dominio) hanno una simmetria cilindrica anziché sferica. Infatti, dato $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ x_i > 0 \quad \forall i = 1 \ldots N\}$, se consideriamo pesi della forma $\rho_\nu(\mathbf{x}) = \hat{\rho}_\nu(s(\mathbf{x}))$ e $\rho_\mu(\mathbf{x}) = \hat{\rho}_\mu(s(\mathbf{x}))$, dove ora $s(\mathbf{x})$ è un "raggio cilindrico" (ovvero la distanza di $\mathbf{x}$ da uno degli assi cartesiani), e se $\hat{\rho}_\nu(s)s^{N-2}$ e $\hat{\rho}_\mu(s)s^{N-2}$ soddisfano la disuguaglianza di p-Poincaré in $(0,\infty)$ oppure $\hat{\rho}_\nu(s)$ è un peso qualsiasi e $\hat{\rho}_\mu(s) = \hat{\rho}_\nu(s)s^p$, allora per $\rho_\nu(\mathbf{x})$ e $\rho_\mu(\mathbf{x})$ vale la (4.1.7). La dimostrazione di questi fatti si trova in [KO90, es. 12.10], ma il procedimento è del tutto analogo a quello accennato per pesi a simmetria sferica.

Gli esempi appena discussi non sono che dei casi particolari dei teoremi 13.7 e 13.15 di [KO90]; ci limitiamo ad osservare che essi generalizzano a loro volta i risultati presentati in precedenza per pesi opportunamente indipendenti da coordinate *cartesiane* a pesi indipendenti da coordinate *curvilinee*. L'idea è quella di trasformare, proprio attraverso le coordinate curvilinee, il dominio Ω di partenza in un dominio Ω' cartesiano in cui, grazie a opportune proprietà invarianti dei pesi rispetto a tali

[6] Con abuso di notazione, identificheremo ν con ρ_ν e μ con ρ_μ quando ciò sia utile e non crei confusione.

coordinate, si possano applicare i risultati noti in ambito cartesiano. Vedremo tra poco altri esempi attinenti.

Formule esplicite

Passiamo adesso al cosiddetto approccio tramite formule, che consente di ottenere in maniera diretta coppie di pesi ρ_ν e ρ_μ per le quali vale la (4.1.7) e che abbiamo già utilizzato nel caso monodimensionale (formule (4.1.6)). Il riferimento principale è il teorema 14.9 di [KO90], che ai nostri scopi può essere riletto come segue. Dato un generico dominio Ω, sia $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ un campo vettoriale in esso definito tale che

$$\mathbf{g} \in \left[W^{1,1}_{loc}(\Omega)\right]^N \, , \ \operatorname{div}\mathbf{g} > 0 \quad \text{q.o. in } \Omega \, ;$$

allora per $p \in (1,\infty)$ i pesi

$$\rho_\nu(\mathbf{x}) = \operatorname{div}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \, , \ \rho_\mu(\mathbf{x}) = |\mathbf{g}(\mathbf{x})|^p \left(\operatorname{div}\mathbf{g}(\mathbf{x})\right)^{1-p} \tag{4.1.8}$$

soddisfano la (4.1.7). Come possibile applicazione di questo risultato consideriamo, sul dominio $\Omega = B_R(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^3$, il campo $\mathbf{g}$ di componente radiale

$$g_r = \frac{r}{R-r}$$

e con tutte le altre componenti nulle. Utilizzando le formule della divergenza in coordinate sferiche, otteniamo:

$$\rho_\nu = \operatorname{div}\mathbf{g} = \frac{3R-2r}{(R-r)^2} > 0 \, ,$$

e in virtù della (4.1.8)

$$\rho_\mu = r^p (R-r)^{p-2} (3R-2r)^{1-p} \, .$$

Quest'esempio in realtà è strettamente connesso ai metodi precedentemente discussi legati a cambi di coordinate che permettano di ricondursi a pesi indipendenti da alcune variabili. È chiaro che conviene lavorare con coordinate sferiche. Sulla base di considerazioni analoghe a quelle seguenti l'esempio del dominio coincidente col primo ottante (o, più rigorosamente, di [KO90, teo. 13.15]), i pesi $\rho_\nu(r(\mathbf{x}))$ e $\rho_\mu(r(\mathbf{x}))$ così scelti soddisferanno la (4.1.7) in Ω se lo stesso vale per $\rho_\nu(r)r^2$ e $\rho_\mu(r)r^2$ in $(0,R)$. Possiamo quindi dimostrare in maniera alternativa che la (4.1.7) è valida ricorrendo ai pesi nella classe delle potenze esposti nel contesto monodimensionale su intervalli della forma $(0,b)$. Ora, per $r \to 0^+$ abbiamo che

$$\rho_\nu(r) \sim 1 \, , \ \rho_\mu(r) \sim r^p \, ,$$

mentre per $r \to R^-$

$$\rho_\nu(r) \sim (R-r)^{-2} \, , \ \rho_\mu(r) \sim (R-r)^{p-2} \, ;$$

di conseguenza, per $r \to 0^+$ siamo nel caso $\alpha = 2$ e $\beta = p+2$, mentre per $r \to R^-$ $\alpha = -2$ e $\beta = p-2$. Evidentemente, per entrambi questi valori ci troviamo nella condizione $\alpha = \beta - p$ e $\beta \neq p-1$. Dalla sezione 4.1.1 sappiamo quindi che per

ogni $c \in (0, R)$ la (4.1.2) è soddisfatta dai pesi $\rho_\nu(r)r^2$ e $\rho_\mu(r)r^2$ in $AC_{\mathcal{LR}}(0, c)$ e $AC_{\mathcal{LR}}(c, R)$ (a meno di traslazioni e riflessioni, ci si può sempre ricondurre a potenze in intervalli della forma $(0, b)$). In realtà ciò *non* è sufficiente a garantire che la (4.1.2) valga in $AC_{\mathcal{LR}}(0, R)$. Tuttavia, dato che $\alpha = \beta - p$, la (4.1.2) è soddisfatta sia in $AC_{\mathcal{L}}(0, c)$ e $AC_{\mathcal{R}}(0, c)$ che in $AC_{\mathcal{L}}(c, R)$ e $AC_{\mathcal{R}}(c, R)$ [KO90, es. 6.8]. In particolare, valendo in $AC_{\mathcal{L}}(0, c)$ e $AC_{\mathcal{R}}(c, R)$, possiamo concludere che effettivamente per $\rho_\nu(r)r^2$ e $\rho_\mu(r)r^2$ è vera la disuguaglianza di p-Poincaré in $AC_{\mathcal{LR}}(0, R)$, quindi per $\rho_\nu(r(\mathbf{x}))$ e $\rho_\mu(r(\mathbf{x}))$ in $\Omega = B_R(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^3$.
Attraverso l'artificio di ricondursi a disuguaglianze di p-Poincaré monodimensionali, si può anche dimostrare che se si regolarizza il peso $\rho_\mu(r)$ in un intorno di 0, rendendolo lì equivalente a 1 (chiamiamo ρ_{μ^*} tale peso regolarizzato), la (4.1.7) rimane vera rispetto alla coppia (ρ_ν, ρ_{μ^*}) nell'intera palla $\Omega = B_R(\mathbf{0})$. Rigorosamente, in questo caso il teorema 13.15 di [KO90] non è applicabile, ma procedendo con un calcolo diretto come in [KO90, es. 12.8] è facile verificare che se $\rho_\nu(r)r^2$ e $\rho_{\mu^*}(r)r^2$ soddisfano la (4.1.2) in $AC_{\mathcal{R}}(0, R)$ allora vale la (4.1.7) per $\rho_\nu(r(\mathbf{x}))$ e $\rho_{\mu^*}(r(\mathbf{x}))$ in $\Omega = B_R(\mathbf{0})$ (occorre che la (4.1.2) sia soddisfatta in $AC_{\mathcal{R}}(0, R)$ e non solo in $AC_{LR}(0, R)$ perché essendo Ω l'intera palla di raggio unitario non è detto che se $\varphi(\mathbf{x}) \in C_c^\infty(\Omega)$ allora $\hat{\varphi}(0, \boldsymbol{\theta}) = 0$). Dimostriamo quindi che in effetti $\rho_\nu(r)r^2$ e $\rho_{\mu^*}(r)r^2$ verificano la (4.1.2) in $AC_{\mathcal{R}}(0, R)$. A tale scopo ricordiamo [KO90, teo. 6.2] che, generalizzando la (4.1.3) (qui per $AC_{\mathcal{R}}$), dati $p, q \in (1, \infty)$ con $p \leq q$, due pesi σ_ν e σ_μ in (a, b) soddisfano la disuguaglianza di tipo Sobolev

$$\|\eta\|_{q;\nu} \leq C_S \|\eta'\|_{p;\mu} \tag{4.1.9}$$

rispetto alla classe $AC_{\mathcal{R}}(a, b)$ se e solo se

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}}(a, b, \sigma_\nu, \sigma_\mu, p, q) = \sup_{x \in (a,b)} \left(\int_a^x \sigma_\nu(y) \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^b \sigma_\mu(y)^{\frac{1}{1-p}} \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty \, . \tag{4.1.10}$$

Supponiamo ora che per ogni $c \in (0, R)$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}}(c, R, \sigma_\nu, \sigma_\mu, p, q) < \infty \, .$$

È facile verificare che se, in aggiunta, per $x \to 0^+$

$$\sigma_\nu(x) \sim x^\gamma \, , \ \sigma_\mu(x) \sim x^\gamma \, ,$$

con $\gamma \geq 0$, allora

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}}(0, R, \sigma_\nu, \sigma_\mu, p, q) < \infty$$

purché

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma + 1}$$

(occorre solo controllare che il prodotto degli integrali nella (4.1.10) rimanga finito quando $x \to 0^+$). Applicando in particolare tale risultato a $\rho_\nu(r)r^2$ e $\rho_{\mu^*}(r)r^2$ con $q = p$ e $\gamma = 2$ otteniamo che essi soddisfano la (4.1.2) rispetto ad $AC_{\mathcal{R}}(0, R)$, quindi vale la disuguaglianza di p-Poincaré per $\rho_\nu(r(\mathbf{x}))$ e $\rho_{\mu^*}(r(\mathbf{x}))$ in $\Omega = B_R(\mathbf{0})$.
In [KO90, sez. 14] si possono trovare altri esempi in cui i pesi ρ_ν e ρ_μ vengono

scelti secondo la (4.1.8). In particolare [KO90, es. 14.20], dati un generico dominio $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$), un punto $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, una costante $\alpha \neq 0$ e posto

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\alpha\, e^{\alpha|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{2-N}} |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{-N} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\,,$$

costruendo ρ_ν e ρ_μ in accordo con la (4.1.8) (a meno di costanti moltiplicative) possiamo concludere che fissato un qualsiasi $p \in (1,\infty)$ la (4.1.7) vale per

$$\rho_\nu(\mathbf{x}) = e^{\alpha|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{2-N}} |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{2(1-N)}\,,\ \rho_\mu(\mathbf{x}) = e^{\alpha|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{2-N}} |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{(p-2)(N-1)}\,.$$

Pesi costruiti tramite funzioni elementari

Proseguiamo ora con ulteriori esempi significativi tratti da [KO90, cap. 3], in cui rientrano quasi tutti quelli esposti nella precedente sezione per $N = 1$ e per i quali si possono fornire semplici condizioni sui vari parametri coinvolti affinché oltre alla disuguaglianza di p-Poincaré valgano anche immersioni di tipo Sobolev (ci interesseremo solo di quelle classiche, cioè da $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ a $L^q(\Omega;\nu)$ per $q > p$).

Sia $p \in [1,\infty)$ fissato. Dati un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e Lipschitziano e una costante $\beta < p-1$, da [KO90, teo. 21.5] abbiamo che la disuguaglianza di p-Poincaré vale in[7] $W_0^{1,p}(\Omega;\delta^\alpha,\delta^\beta)$ se e solo se $\alpha \geq \beta - p$. Sotto queste condizioni, definendo

$$p^* = \frac{pN}{N-p}\,,$$

ovvero il classico esponente di Sobolev[8] associato a p, dallo stesso teorema (e da [KO90, lemma 19.15]) possiamo dedurre che:

- se $\beta \leq p - N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega;\delta^\alpha,\delta^\beta)$ è immerso con continuità in $L^q(\Omega,\delta^\alpha)$ per ogni $q \in [p,p^*]$, e l'immersione è anche compatta posti $\alpha > \beta - p$ e $q \neq p^*$ oppure $\alpha = \beta - p \neq -N$ e $q \neq p, p^*$;

- se $\beta > p - N$ l'immersione continua ha luogo solo per $q \in [p, \min(p^*, p\kappa)]$, ed essa è compatta per $q \neq \min(p^*, p\kappa)$, dove
$$\kappa(\alpha,\beta,p,N) = \frac{\alpha+N}{\beta+N-p}\,. \tag{4.1.11}$$

Naturalmente nel caso si utilizzi la distanza regolarizzata $\widetilde{\delta}$ al posto di δ i risultati continuano a valere.

Sia ora Ω un dominio *esterno*, ovvero il complementare di un qualsiasi compatto K di $\mathbb{R}^N$, tale che $\inf_{\mathbf{x}\in\Omega}|\mathbf{x}| > 0$. Da [KO90, es. 21.10] deduciamo che, posto $\beta \neq p - N$, la disuguaglianza di p-Poincaré è valida in $W_0^{1,p}(\Omega;|\mathbf{x}|^\alpha,|\mathbf{x}|^\beta)$ se e solo se $\alpha \leq \beta - p$. Assumendo quest'ipotesi, dallo stesso esempio (e da [KO90, es. 20.6]) otteniamo anche che:

- se $\beta < p - N$ allora $W_0^{1,p}(\Omega;|\mathbf{x}|^\alpha,|\mathbf{x}|^\beta)$ è immerso con continuità in $L^q(\Omega;|\mathbf{x}|^\alpha)$ per ogni $q \in [p, \min(p^*, p\kappa)]$, e l'immersione è compatta posto che anche $q \neq \min(p^*, p\kappa)$;

[7] Ricordiamo che con $\delta : \Omega \to \mathbb{R}^+$ indichiamo la funzione distanza del dominio Ω, introdotta all'inizio del capitolo.

[8] Se $p \geq N$ poniamo $p^* = \infty$, intendendo in tal caso gli intervalli in cui p^* è estremo superiore sempre aperti a destra.

- se $\beta > p-N$ l'immersione continua ha luogo per ogni $q \in [p, p^*]$ ed è compatta se anche $\alpha < \beta - p$ e $q \neq p^*$ oppure $\alpha = \beta - p$ e $q \neq p, p^*$

(κ è la stessa costante definita con la (4.1.11)). Osserviamo che queste ultime conclusioni rimangono invariate se si pone $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\beta > p-N$, $\alpha \leq \beta - p$ e si regolarizzano i pesi per $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$, rendendoli equivalenti[9] a 1 in un intorno di $\mathbf{0}$: infatti si può ripetere il ragionamento dell'esempio corrispondente al dominio $\Omega = B_R(\mathbf{0})$ (è applicabile anche al caso $p = 1$ tramite la naturale estensione della definizione di $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ [KO90, sezz. 5–6]), verificando che la coppia di pesi monodimensionali $(r^{\alpha+N-1}, r^{\beta+N-1})$ soddisfa la (4.1.2) in $AC_{\mathcal{R}}(c, \infty)$ per ogni $c \in (0, \infty)$ (così come la (4.1.9) per ogni $q \in [p, p^*]$). Detto ciò, per tali valori dei parametri α e β la validità della disuguaglianza di 2-Poincaré si può dedurre anche ricorrendo ai risultati ottenuti in [Pan96] per alcuni operatori differenziali ellittici singolari. Riprenderemo queste considerazioni nella sezione 4.2.2.
Il caso $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ evidentemente non rientra tra quelli appena discussi. Infatti, sempre da [KO90, es. 21.10], sappiamo che per $\beta \neq p - N$ in $W_0^{1,p}(\Omega; |\mathbf{x}|^\alpha, |\mathbf{x}|^\beta)$ la disuguaglianza di p-Poincaré vale se e solo se $\alpha = \beta - p$ (si ricordino le proprietà dei pesi a simmetria sferica e delle potenze in $(0, \infty)$), e per tali scelte dei parametri non ha luogo nessun'immersione di Sobolev con $q > p$.

In ultima analisi vediamo pesi di tipo logaritmico ed esponenziale. In [KO90, es. 21.11] si studiano pesi della forma ($\beta \neq p - N$)

$$\rho_\nu(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\alpha (\log |\mathbf{x}|)^\gamma\,,\ \rho_\mu(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\beta (\log |\mathbf{x}|)^\delta\,,$$

su domini esterni Ω tali che

$$\Omega \subset \left\{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_{1+\varepsilon}(\mathbf{0})}\right\}$$

per qualche $\varepsilon > 0$, e si dimostra che la disuguaglianza di p-Poincaré vale in

$$W_0^{1,p}(\Omega; |\mathbf{x}|^\alpha (\log |\mathbf{x}|)^\gamma, |\mathbf{x}|^\beta (\log |\mathbf{x}|)^\delta)$$

se e solo se $\alpha < \beta - p$ oppure $\alpha = \beta - p$ e $\gamma \leq \delta$. Sotto queste ipotesi, e grazie anche a [KO90, es. 20.7], per quanto riguarda l'immersione continua

$$W_0^{1,p}(\Omega; |\mathbf{x}|^\alpha (\log |\mathbf{x}|)^\gamma, |\mathbf{x}|^\beta (\log |\mathbf{x}|)^\delta) \hookrightarrow L^q(\Omega; |\mathbf{x}|^\alpha (\log |\mathbf{x}|)^\gamma)$$

abbiamo che:

- se $\beta < p - N$ essa ha luogo per $q \in [p, p^*]$ se $p^* < p\kappa$, mentre se $p^* \geq p\kappa$ lo stesso vale per $q \in [p, p\kappa)$ oppure per $q = p\kappa$ se anche $\gamma \leq \delta\kappa$; si ha inoltre compattezza se $p^* \leq p\kappa$ e $q \in [p, p^*)$, mentre se $p^* > p\kappa$ abbiamo compattezza per $q \in [p, p\kappa)$ oppure per $q = p\kappa$ se anche $\gamma < \delta\kappa$;

- se $\beta > p - N$ essa ha sempre luogo per ogni $q \in [p, p^*]$, ed è compatta per $q \in [p, p^*)$ se anche $\alpha < \beta - p$, mentre se $\alpha = \beta - p$ è compatta per $q \in (p, p^*)$ oppure per $q \in [p, p^*)$ quando anche $\gamma < \delta$.

[9] Diciamo che due pesi ρ e σ sono equivalenti in un dominio Ω' se esiste una costante $K > 0$ tale che $K^{-1}\rho \leq \sigma \leq K\rho$ λ-q.o. in Ω'.

Come per i pesi che siano potenze di $|\mathbf{x}|$, anche in questo caso possiamo estendere i risultati a tutto lo spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ purché $\beta > p - N$ e si regolarizzino i pesi in un intorno di $\mathbf{0}$.

Quando i pesi sono di natura esponenziale [KO90, es. 21.12], ovvero ($\beta \neq 0$)

$$\rho_\nu(\mathbf{x}) = e^{\alpha|\mathbf{x}|}\,,\ \rho_\mu(\mathbf{x}) = e^{\beta|\mathbf{x}|}\,,$$

la disuguaglianza di p-Poincaré vale in $W_0^{1,p}(\Omega; e^{\alpha|\mathbf{x}|}, e^{\beta|\mathbf{x}|})$ se e solo se $\alpha \leq \beta$, posto che Ω sia un dominio esterno con $\inf_{\mathbf{x}\in\Omega}|\mathbf{x}| > 0$. Sotto queste condizioni, per l'immersione continua

$$W_0^{1,p}(\Omega; e^{\alpha|\mathbf{x}|}, e^{\beta|\mathbf{x}|}) \hookrightarrow L^q(\Omega; e^{\alpha|\mathbf{x}|})$$

si ha che:

- se $\beta < 0$ essa ha luogo per $q \in \left[p, \min\left(p^*, p\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$, ed è compatta posto che anche $q \neq \min\left(p^*, p\frac{\alpha}{\beta}\right)$;
- se $\beta > 0$ essa ha luogo per $q \in [p, p^*]$, ed è anche compatta per $q \neq p^*$ se $\alpha < \beta$ oppure per $q \neq p, p^*$ se $\alpha = \beta$.

Se $\beta > 0$ le stesse conclusioni valgono anche per $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N; e^{\alpha|\mathbf{x}|}, e^{\beta|\mathbf{x}|})$.

È chiaro come tutti questi esempi siano strettamente legati a quelli esposti nell'ambito monodimensionale: infatti come già accennato i relativi risultati si possono ottenere partendo da quelli noti per $N = 1$ e sfruttando opportunamente la simmetria sferica.

In conclusione, citiamo anche il recente lavoro [AW10] di F. G. Avkhadiev e K.-J. Wirths, in cui si dimostra la validità di ulteriori disuguaglianze di 2-Poincaré (dette equivalentemente *di Hardy*) su intervalli di $\mathbb{R}$ per pesi $\rho_\nu(x)$ e $\rho_\mu(x)$ che coinvolgono le funzioni di Bessel; utilizzando le proprietà di queste ultime, gli autori ottengono anche il valore esatto della più piccola costante C_P che verifica la (4.1.2) (si veda in particolare [AW10, teo. 1]). Tali risultati sono inoltre estendibili a opportuni domini Ω N-dimensionali convessi [AW10, sez. 3] grazie alle tecniche sviluppate in [Avk06] (teoremi 9 e 11), pur di sostituire nei pesi $\rho_\nu(\cdot)$ e $\rho_\mu(\cdot)$ x con $\delta(\mathbf{x})/\delta_0$, posto $\delta_0 = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega}\delta(\mathbf{x}) < \infty$.

Osserviamo infine come i pesi fin qui considerati soddisfano ampiamente le ipotesi discusse nella sezione A.2 per la buona struttura dello spazio $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ (sono tutti *localmente* regolari ed equivalenti al peso unitario).

4.2 Disuguaglianze di p-Poincaré con la media in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$

In questa sezione vedremo alcuni esempi di domini e pesi per i quali è nota valere la disuguaglianza di p-Poincaré con la media in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$; a tale scopo, spesso ci appelleremo ai risultati forniti nella sezione A.3 sulla densità di opportune classi di funzioni regolari nello spazio $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$.

4.2.1 $N = 1$

Iniziamo con qualche semplice risultato relativo al contesto monodimensionale. In [EO93, es. 5.4] si dimostra che, posti $p \in [1, \infty)$ e $a > 0$, vale la disuguaglianza

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \|v - c\|_{p;x^\alpha} \leq C_P^* \|v'\|_{p;x^\beta} \quad \forall v \in W^{1,p}((a,\infty); x^\alpha, x^\beta) \tag{4.2.1}$$

per una costante C_P^* indipendente da v purché

$$\beta \neq p-1,\, \alpha \leq \beta - p \quad \text{oppure} \quad \beta = p-1,\, \alpha < -1\,.$$

Questo risultato si ottiene utilizzando l'assoluta continuità *locale* delle funzioni di $W^{1,p}((a,\infty); x^\alpha, x^\beta)$ e mostrando che il membro sinistro della (4.2.1) si riesce a controllare col membro destro quando c è il valore di v in qualche punto interno a (a,∞) o il limite di $v(x)$ per $x \to \infty$.
Osserviamo che se $\alpha \geq -1$ la ν-misura di (a,∞) è infinita: questo significa che in $W^{1,p}((a,\infty); x^\alpha, x^\beta)$ vale la disuguaglianza di p-Poincaré *senza* media [EO93, lemma 3.9]. Ma infatti si può dimostrare che in queste condizioni (e per $\alpha < \beta - p$) l'immersione $W^{1,p}((a,\infty); x^\alpha, x^\beta) \hookrightarrow L^p((a,\infty), x^\alpha)$ è compatta [EO93, es. 3.12], e siccome 0 è l'unica costante appartenente a $W^{1,p}((a,\infty); x^\alpha, x^\beta)$ (per ovvie ragioni di integrabilità) è direttamente applicabile la proposizione A.6 (la dimostrazione non fa uso della particolare struttura di $W_0^{1,p}$). Per $\alpha = \beta - p$ la (4.1.2) vale in $AC_{\mathcal{R}}(a,\infty)$ (si veda [KO90, es. 6.9] o la condizione (4.1.10)), perciò in tutto $W^{1,p}((a,\infty); x^{\beta-p}, x^\beta)$: difatti seguendo lo stesso procedimento della dimostrazione della proposizione A.4 si può verificare che $AC_{\mathcal{R}}(a,\infty) \cap W^{1,p}((a,\infty); x^{\beta-p}, x^\beta)$ è denso in $W^{1,p}((a,\infty); x^{\beta-p}, x^\beta)$. È interessante osservare come la compattezza dell'immersione possa aver luogo esclusivamente nel caso pesato: è facile costruire una successione $v_n \in W^{1,p}(a,\infty)$ tale che

$$\|v_n\|_p = 1\,,\ \|v_n'\|_p \to 0\,.$$

In termini intuitivi, se $\alpha \in [-1, \beta - p)$ il divergere di x^β all'infinito forza $v'(x)$, e quindi $v(x)$, ad andare a zero per $x \to \infty$ in maniera più rapida che nel caso non pesato, a sufficienza da rendere l'immersione compatta. Per un'interessante discussione sul legame tra la compattezza dell'immersione $W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu) \hookrightarrow L^p(\Omega; \nu)$ e il comportamento delle funzioni di $W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$ in prossimità di $\partial\Omega$ (o per $|\mathbf{x}| \to \infty$) si veda [KO90, sez. 17].
Si noti che, grazie alla proposizione A.10, se assumiamo $\alpha < -1$ (cioè la finitezza della misura) in aggiunta alle ipotesi iniziali su α e β abbiamo che nello spazio $W^{1,p}((a,\infty); x^\alpha, x^\beta)$ vale la disuguaglianza di p-Poincaré con la media.

Più in generale, seguendo l'approccio di [EO93, es. 5.4], si possono trovare classi di pesi (anche su tutto $\mathbb{R}$) per cui vale la disuguaglianza di p-Poincaré con la media sfruttando i risultati ricavati in [KO90, cap. 1] riguardanti la validità di disuguaglianze di p-Poincaré *senza* media negli spazi $AC_{\mathcal{L}}(a,b)$ e $AC_{\mathcal{R}}(a,b)$. A tal fine, prendendo come riferimento il già citato esempio 6.9 di [KO90], sappiamo che per $p \in [1,\infty)$, $a > 0$, $\alpha < -1$ e $\beta \geq p-1$ si ha

$$\|\eta\|_{p;x^\alpha} \leq C_P \|\eta'\|_{p;x^\beta} \quad \forall \eta \in AC_{\mathcal{L}}(a,\infty)\,. \tag{4.2.2}$$

Sotto queste ipotesi, consideriamo allora i seguenti pesi:

$$\rho_\nu(x) = |x|^\alpha \chi_{\{x>a\}} + |x-2a|^\alpha \chi_{\{x\le a\}}\,,\ \rho_\mu(x) = |x|^\beta \chi_{\{x>a\}} + |x-2a|^\beta \chi_{\{x\le a\}}\,.$$

Vogliamo mostrare che con queste scelte lo spazio $W^{1,p}(\mathbb{R};\rho_\nu,\rho_\mu)$ soddisfa una disuguaglianza di p-Poincaré con la media. A tale scopo, ricordiamo ancora che una qualsiasi funzione $v \in W^{1,p}(\mathbb{R};\rho_\nu,\rho_\mu)$ è *localmente* assolutamente continua. In particolare,

$$[v(x)-v(a)]|_{\{x>a\}} \in AC_{\mathcal{L}}(a,+\infty) \quad \text{e} \quad [v(x)-v(a)]|_{\{x<a\}} \in AC_{\mathcal{R}}(-\infty,a)\,.$$

Perciò, applicando a $[v(x)-v(a)]|_{\{x>a\}}$ e $[v(x)-v(a)]|_{\{x<a\}}$ la (4.2.2) (a meno di riflessioni e traslazioni), non ci sono difficoltà ad ottenere, per un'opportuna costante D indipendente da v,

$$\|v-v(a)\|_{p;\nu} \le D\|v'\|_{p;\mu}\,,$$

che, sempre in virtù della proposizione A.10, equivale alla disuguaglianza di p-Poincaré con la media.
In questo esempio ρ_ν e ρ_μ per costruzione sono solo localmente Lipschitziani, tuttavia se ne possono sempre generare versioni regolarizzate in un intorno di $\{x=a\}$ che siano di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e rimangano equivalenti ai pesi originari.

Per intervalli (a,b) limitati rimandiamo alla prossima sezione, nella quale riportiamo alcuni risultati validi in classi di domini nelle quali essi ricadono ampiamente (si veda comunque anche [KO90, es. 6.8]).

4.2.2 $N \ge 1$

Passiamo ora a illustrare esempi di domini di $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \ge 1)$ e pesi (ρ_ν,ρ_μ) in cui vale la disuguaglianza di p-Poincaré con la media

$$\|v-\overline{v}\|_{p;\nu} \le C_P\,\|\nabla v\|_{p;\mu} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)\,. \tag{4.2.3}$$

Domini limitati

Quando Ω è un dominio limitato e stellato di $\mathbb{R}^N$ e $w:(0,\infty)\to(0,\infty)$ è una funzione crescente *debolmente concava*[10], si può dimostrare [BK98, teo. 1] (attraverso una tecnica geometrica definita dagli autori *Coning*) che se $p\in[1,\infty)$ e $k\in\mathbb{N}$ esiste una costante C_P indipendente da η tale che

$$\int_\Omega |\eta(\mathbf{x})-\overline{\eta}|^p\ w(\delta(\mathbf{x}))^k \mathrm{d}\mathbf{x} \le C_P \int_\Omega |\nabla\eta(\mathbf{x})|^p\ w(\delta(\mathbf{x}))^k \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \eta \in C^1(\Omega)\,. \tag{4.2.4}$$

La (4.2.4) ha il seguente significato: se il membro destro è finito allora tutti i termini in essa coinvolti hanno senso e la disuguaglianza sussiste. Viste le condizioni su w e Ω, osserviamo che la misura $\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}\mu = (w\circ\delta)^k \mathrm{d}\lambda$ è sempre finita. Inoltre ν e μ soddisfano certamente le ipotesi della proposizione A.2, di conseguenza possiamo estendere la (4.2.4) a tutto lo spazio $W^{1,p}(\Omega;(w\circ\delta)^k,(w\circ\delta)^k)$.

[10] Nel senso che $\forall s\in(0,1)$ $w(sr)\ge sw(r)$.

Come in [BK98, cor. 2], scegliendo opportunamente w e k deduciamo che per un qualsiasi $t \geq 0$ esiste una costante C'_P tale che

$$\int_\Omega |\eta(\mathbf{x}) - \overline{\eta}|^p \ \delta(\mathbf{x})^t \mathrm{d}\mathbf{x} \leq C'_P \int_\Omega |\nabla\eta(\mathbf{x})|^p \ \delta(\mathbf{x})^t \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \eta \in C^1(\Omega)\,, \tag{4.2.5}$$

ovvero $\forall \eta \in W^{1,p}(\Omega; \delta^t, \delta^t)$.
La validità di una disuguaglianza come la (4.2.4) si può ottenere per una classe più ampia di domini. Ad esempio, dati un dominio Ω limitato e stellato e un altro dominio Ω', supponiamo che esistano due domini $\Omega_0 \Supset \Omega$ e $\Omega'_0 \Supset \Omega'$ ed una mappa $\Phi : \Omega_0 \to \Omega'_0$ biunivoca e uniformemente bi-Lipschitziana. Se, per ogni costante $c > 0$, w soddisfa una disuguaglianza del tipo

$$K(c)^{-1} w(r) \leq w(cr) \leq K(c) w(r)\,, \tag{4.2.6}$$

dove $K(c)$ è una costante dipendente solo da c, non è difficile verificare che la (4.2.4) (eventualmente con una diversa costante C_P) è valida anche in $W^{1,p}(\Omega'; (w\circ\delta')^k, (w\circ\delta')^k)$, dove ora δ' è la funzione distanza di Ω'. Infatti grazie alle ipotesi su Φ abbiamo che una funzione $v : \Omega' \to \mathbb{R}$ appartiene a $W^{1,p}(\Omega'; (w \circ \delta \circ \Phi^{-1})^k, (w \circ \delta \circ \Phi^{-1})^k)$ se e solo se $v \circ \Phi$ appartiene a $W^{1,p}(\Omega; (w \circ \delta)^k, (w \circ \delta)^k)$. Inoltre, sempre in virtù delle ipotesi su Φ e della (4.2.6), possiamo garantire che i pesi $w \circ \delta'$ e $w \circ \delta \circ \Phi^{-1}$ sono equivalenti. A questo punto, siccome la (4.2.4) vale in $W^{1,p}(\Omega; (w \circ \delta)^k, (w \circ \delta)^k)$, utilizzando la proposizione A.10 e le proprietà di Φ deduciamo facilmente che l'analoga disuguaglianza è soddisfatta anche in $W^{1,p}(\Omega'; (w \circ \delta')^k, (w \circ \delta')^k)$.
Osserviamo infine che se w verifica la (4.2.6) non ci sono problemi a sostituire δ con $\widetilde{\delta}$ (si vedano le considerazioni a margine della proposizione A.10). Passiamo ora ad un altro esempio.

I domini di John limitati, in termini intuitivi, sono domini limitati di $\mathbb{R}^N$ per i quali esiste almeno un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ che sia raggiungibile da ogni altro punto $\mathbf{x} \in \Omega$ tramite una curva rettificabile che si mantenga a distanza almeno lineare (rispetto alla lunghezza d'arco) da $\partial\Omega$. Per una definizione rigorosa, rimandiamo a [DD08, sez. 2]. Qui ricordiamo solo che essi costituiscono una classe molto ampia, che in particolare contiene tutti i domini limitati Lipschitziani. Sia quindi Ω un dominio di John limitato. In [DD08, teo. 3.1] si dimostra (mediante la teoria degli integrali singolari [Ste70]) che esiste una costante C^*_P indipendente da v tale che la disuguaglianza

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \|v - c\|_p \leq C^*_P \|\nabla v\|_{p;\delta^{\alpha p}} \tag{4.2.7}$$

vale per ogni $v \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega; 1, \delta^{\alpha p})$ purché

$$1 < p < \infty\,,\ \alpha \in [0,1]\,,\ \alpha > 1 - \frac{N}{p}\,.$$

Siccome chiaramente i pesi $\rho_\nu = 1$ e $\rho_\mu = \delta^{\alpha p}$ soddisfano le condizioni della proposizione A.2, la (4.2.7) si può estendere a tutto lo spazio $W^{1,p}(\Omega; 1, \delta^{\alpha p})$ (ricordiamo ancora che dalla proposizione A.10 essa è equivalente alla disuguaglianza con la media, in questo caso non pesata). Se Ω è un dominio Lipschitziano e $\alpha < 1$ si può ricavare la validità della (4.2.7) in $W^{1,p}(\Omega; 1, \delta^{\alpha p})$ in modo alternativo per compattezza [KO90, teo. 19.11].

Nel lavoro [DD08] si trattano anche disuguaglianze del tipo (4.2.7) generalizzate, nel senso che il ruolo di 1 è ora assunto da un opportuno peso σ. Nello specifico [DD08, teo. 3.3], fissati $p \in (1,\infty)$ e $\alpha \in (0,1] \cap \left(1-\frac{N}{p},\infty\right)$, abbiamo che se σ è una funzione misurabile, q.o. > 0 in Ω (dominio di John limitato) che soddisfa

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^N} \frac{1}{|Q|} \left(\int_{Q\cap\Omega} \sigma(\mathbf{x})^p \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q\cap\Omega} \sigma(\mathbf{x})^{\frac{p}{1-p}} \,\mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{1-\frac{1}{p}} < \infty\,, \tag{4.2.8}$$

dove Q è un qualsiasi cubo di $\mathbb{R}^N$, allora vale la disuguaglianza

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \|v-c\|_{p;\sigma^p} \le C_P^* \|\nabla v\|_{p;\delta^{\alpha p}\sigma^p} \tag{4.2.9}$$

per ogni $v \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega;\sigma^p,\delta^{\alpha p}\sigma^p)$. La (4.2.8) è anche nota come *condizione di Muckenhoupt*, e in generale non è immediata da controllare, salvo casi banali. Ad ogni modo, è semplice verificare che l'estremo superiore si può restringere (a meno di costanti) a tutti i cubi con facce *parallele* agli assi cartesiani (dato un qualsiasi cubo Q ne esiste sempre uno con facce parallele agli assi che lo contiene e di volume proporzionale, con costante di proporzionalità indipendente da Q). Osservato ciò risulta più facile testare la (4.2.8) su pesi σ fattorizzati, cioè della forma

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_1(x_1)\sigma_2(x_2)\ldots\sigma_N(x_N)\,.$$

Ad esempio, tramite un calcolo esplicito, si può dimostrare che su $\Omega = (0,1)^N$ il peso

$$\hat\sigma(\mathbf{x}) = \left[x_{i_1}(1-x_{i_1})x_{i_2}(1-x_{i_2})\ldots x_{i_j}(1-x_{i_j})\right]^{\frac{1}{4}}\,, \tag{4.2.10}$$

dove $\{i_1 < i_2 < \ldots < i_n\}$ è una qualsiasi n-upla (con $n \le N$) di indici, soddisfa la (4.2.8) per $p = 2$. Vista la regolarità interna dei pesi, ciò significa che la disuguaglianza (4.2.9), con le scelte $\Omega = (0,1)^N$, $p = 2$ e $\alpha \in (0,1]\cap\left(1-\frac{N}{2},\infty\right)$, vale in tutto $W^{1,2}(\Omega;\hat\sigma^2,\delta^{2\alpha}\hat\sigma^2)$. Non solo: ricordando la proposizione A.9, la disuguaglianza di p-Poincaré con la media vale anche negli spazi $W^{1,p}(\Omega;\hat\sigma^2,\delta^{2\alpha}\hat\sigma^2)$ per ogni $p \in (2,\infty)$ (con gli stessi valori leciti di α). Infatti, essendo Ω sempre limitato, abbiamo che

$$\rho_\mu \le \rho_\nu \frac{\mathrm{diam}(\Omega)^{2\alpha}}{4^\alpha}\,.$$

Notiamo infine che anche in questi ultimi esempi è lecito sostituire δ con $\widetilde{\delta}$.

Osservazione 4.1. *Il limite inferiore $1-\frac{N}{p}$ che si richiede soddisfare al parametro α, in realtà è superfluo: essendo il dominio Ω limitato, e quindi la funzione δ, se la* (4.2.9) *vale per un certo α allora dalle considerazioni a margine della proposizione A.10 sappiamo che essa vale per un qualsiasi altro $\alpha' < \alpha$, eventualmente negativo (anche se naturalmente la precedente constatazione riguardante l'estendibilità della* (4.2.9) *a $W^{1,p}(\Omega;\hat\sigma^2,\delta^{2\alpha}\hat\sigma^2)$ resta inalterata posto che $\alpha \ge 0$).*

Torniamo adesso agli esempi proposti in [EO93]. In particolare [EO93, prop. 5.1] abbiamo che se Ω è un dominio limitato e Lipschitziano, per $p \in [1,\infty)$ e per ogni $\beta > -1$ l'immersione

$$W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta) \hookrightarrow L^p(\Omega;\delta^\beta)$$

è compatta. In realtà grazie ai teoremi 19.9 e 19.11 di [KO90] possiamo dire di più. Ovvero:

- se $\beta > p-1$ ha luogo l'immersione continua $W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta) \hookrightarrow L^q(\Omega;\delta^\beta)$ per $q \in \left[p, p\frac{\beta+N}{\beta+N-p}\right]$ ed è compatta per $q \neq p\frac{\beta+N}{\beta+N-p}$;
- se $-1 < \beta \le p-1$ l'immersione continua si ha per[11] $q \in \left[p, p\frac{\beta+N}{N-1}\right)$ ed è sempre compatta.

Dalla proposizione A.8 sappiamo poi che la compattezza dell'immersione

$$W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta) \hookrightarrow L^p(\Omega;\delta^\beta)$$

è sufficiente a garantire la validità della disuguaglianza di p-Poincaré con la media

$$\|v-\overline{v}\|_{p;\delta^\beta} \le C_P \|\nabla v\|_{p;\delta^\beta} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta)\,. \tag{4.2.11}$$

Per $\beta \ge 0$ ritroviamo la (4.2.5) (almeno in $W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta)$), anche se su una classe diversa di domini; ma infatti si può dimostrare che in queste ipotesi la (4.2.11) vale su un qualsiasi dominio di John limitato [Hur90, oss. 5.4]. Per $-1 < \beta < 0$ in realtà dovremmo assicurarci che la (4.2.11) abbia senso, ovvero che

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{x})^\beta \mathrm{d}\mathbf{x} < \infty\,. \tag{4.2.12}$$

Ora, quando $\Omega = (0,1)^N$ il comportamento di δ in prossimità di $\{x_i = 0\}$ equivale a quello di x_i, perciò la (4.2.12) è certamente verificata se $\beta > -1$. Sfruttando le mappe locali bi-Lipschitziane, si può giungere alla stessa conclusione anche se Ω è un generico dominio limitato Lipschitziano.

Per domini limitati e convessi, da [CW10, teo. 1.1] abbiamo che la disuguaglianza

$$\|v-\overline{v}\|_{p;\delta^\gamma} \le C_P \|\nabla v\|_{p;\delta^\beta}\ , \tag{4.2.13}$$

posti $p \in [1,\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $\gamma \ge 0 \vee (\beta - p)$, vale in $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega;\delta^\gamma,\delta^\beta)$ ovvero in tutto $W^{1,p}(\Omega;\delta^\gamma,\delta^\beta)$. Ricordando che un dominio convesso e limitato è sempre Lipschitziano [Grs85, cor. 1.2.2.3] e in virtù delle considerazioni successive alla proposizione A.10, osserviamo che tale risultato, per i nostri scopi (gli autori di [CW10] indagano specialmente la dipendenza di C_P da alcuni parametri caratteristici del dominio), è una conseguenza diretta della (4.2.11) per $\beta \le \gamma$ e delle immersioni compatte fornite da [KO90, teo. 19.11] per $\beta > \gamma$, almeno quando $\gamma > \beta - p$ (e in questo caso la (4.2.13) rimane valida anche se si assume solo $\gamma > -1$ al posto di $\gamma \ge 0$). Infatti dal citato teorema si deduce che se $\gamma > \beta - p$ e $\gamma > -1$ l'immersione $W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta) \hookrightarrow L^p(\Omega;\delta^\gamma)$ è continua e compatta; se poi $\beta > \gamma$ l'immersione $W^{1,p}(\Omega;\delta^\gamma,\delta^\beta) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta)$ è ovviamente continua, quindi risulta compatta l'immersione $W^{1,p}(\Omega;\delta^\gamma,\delta^\beta) \hookrightarrow L^p(\Omega;\delta^\gamma)$.
Infine, per $\gamma = 0$ e $\beta = p$ ritroviamo la (4.2.7).
Rimanendo nelle ipotesi che Ω sia limitato e Lipschitziano, $p \in [1,\infty)$ e $\gamma > -1 \vee (\beta - p)$ (sotto le quali, indipendentemente da $\beta \in \mathbb{R}$, la (4.2.13) è valida per compattezza), si possono trarre conclusioni anche riguardo all'immersione di Sobolev $W^{1,p}(\Omega;\delta^\gamma,\delta^\beta) \hookrightarrow L^q(\Omega;\delta^\gamma)$ per qualche $q \ge p$, generalizzando quanto detto in precedenza quando $\gamma = \beta$. Sia $\beta > p-1$. Sappiamo che l'immersione canonica

[11] Quando N=1 assumiamo che l'estremo superiore dell'intervallo sia $+\infty$.

$W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta) \hookrightarrow L^p(\Omega;\delta^\beta)$ è compatta: è facile quindi dedurre che $W^{1,p}(\Omega;\delta^\gamma,\delta^\beta)$ è immerso con continuità in[12] $W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta)$. Perciò i risultati ottenuti in [KO90, teo. 19.11] per $W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta)$ sono applicabili anche a $W^{1,p}(\Omega;\delta^\gamma,\delta^\beta)$. In particolare abbiamo che l'immersione $W^{1,p}(\Omega;\ \delta^\gamma,\delta^\beta) \hookrightarrow L^q(\Omega;\delta^\gamma)$ è continua per $q \in [p,\min(p^*,p\kappa)]$ e compatta se inoltre $q \neq \min(p^*,p\kappa)$ (κ è definito come nella (4.1.11) rimpiazzando α con γ). Se invece $\beta \le p-1$ possiamo arrivare a una conclusione un po' più debole, cioè che tale immersione è continua e compatta per $q \in \left[p, \min\left(p^*, p\frac{\gamma+n}{n-1}\right)\right)$.

Domini illimitati

Consideriamo ora domini illimitati. Ci limiteremo principalmente al caso notevole $\Omega = \mathbb{R}^N$.
Con opportune scelte dei parametri in gioco possiamo mostrare che, a partire dagli esempi della sezione (4.1.2), per alcune classi di pesi vale la disuguaglianza di p-Poincaré con la media per compattezza (proposizione A.8). Infatti, supponiamo che $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sia il dominio *esterno* di un dominio Lipschitziano. Se i pesi ρ_ν e ρ_μ sono localmente equivalenti al peso unitario e si sa che $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è immerso con compattezza in $L^p(\Omega;\nu)$, allora se ci troviamo in una delle ipotesi della proposizione A.4 possiamo concludere che, estendendo i pesi in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ mantenendoli localmente equivalenti al peso unitario, anche l'immersione $W^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu) \hookrightarrow L^p(\Omega;\nu)$ è compatta. Non solo: tutte le eventuali immersioni di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu) \hookrightarrow L^q(\Omega;\nu)$ si conservano. Tali proprietà sono una semplice conseguenza del fatto che possiamo sempre scegliere un dominio regolare Ω' tale che

$$\{\mathbb{R}^N \setminus \Omega\} \Subset \Omega' \Subset \mathbb{R}^N$$

e spezzare una qualsiasi funzione $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu)$ nella somma di due funzioni $v_1 \in W_c^{1,p}(\Omega')$ e $v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ tramite due operatori di *splitting* lineari e continui. Grazie a quest'osservazione e ai risultati riportati nella sezione 4.1.2 abbiamo che[13]:

- l'immersione
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N;|\mathbf{x}|^\alpha,|\mathbf{x}|^\beta) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N;|\mathbf{x}|^\alpha)\,,$$
posti $\beta < p-N$ e $\alpha < \beta - p$, è continua per $q \in [p,\min(p^*,p\kappa)]$, ed è anche compatta per $q \neq \min(p^*,p\kappa)$;

- l'immersione
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N;|\mathbf{x}|^\alpha(\log|\mathbf{x}|)^\gamma,|\mathbf{x}|^\beta(\log|\mathbf{x}|)^\delta) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N;|\mathbf{x}|^\alpha(\log|\mathbf{x}|)^\gamma)\,,$$
posti $\beta < p-N$ e $\alpha < \beta - p$, se $p^* < p\kappa$ è continua per $q \in [p,p^*]$, mentre se $p^* \ge p\kappa$ lo stesso vale per $q \in [p,p\kappa)$ oppure per $q = p\kappa$ se anche $\gamma \le \delta\kappa$; si ha inoltre compattezza se $p^* \le p\kappa$ per $q \neq p^*$, mentre se $p^* > p\kappa$ lo stesso vale per $q \neq p\kappa$ oppure per $q = p\kappa$ e $\gamma < \delta\kappa$;

[12] Se $\gamma \le \beta$ ciò è ovvio. Se invece $\gamma > \beta$ si procede in modo standard per compattezza: negare la tesi equivale ad ammettere l'esistenza di una successione $\{v_n\}_n$ tale che $\|v_n\|_{p;\delta^\beta} = 1$ e $\|v_n\|_{p;\delta^\gamma} + \|\nabla v_n\|_{p;\delta^\beta} \to 0$, ma ciò porta facilmente ad un assurdo (come conseguenza deduciamo che in quest'ultimo caso gli spazi $W^{1,p}(\Omega;\delta^\gamma,\delta^\beta)$ e $W^{1,p}(\Omega;\delta^\beta,\delta^\beta)$ coincidono).

[13] Tutti i pesi qui considerati vanno intesi regolarizzati in un intorno di zero cosicché lì siano equivalenti a 1.

- l'immersione
$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N; e^{\alpha|\mathbf{x}|}, e^{\beta|\mathbf{x}|}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N; e^{\alpha|\mathbf{x}|}),$$
posti $\beta < 0$ e $\alpha < \beta$, è continua per $q \in \left[p, \min\left(p^*, p\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$ ed è anche compatta per $q \neq \min\left(p^*, p\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Rimanendo sempre nel contesto dell'intero spazio euclideo, il recente lavoro [BL09] dimostra la validità della disuguaglianza di 2-Poincaré con la media in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N; \nu, \mu)$ per una classe relativamente ampia di pesi attraverso la teoria delle misure di probabilità convesse. Ad esempio, da [BL09, teo. 3.1] deduciamo che la suddetta disuguaglianza è sempre soddisfatta se

$$\rho_\nu(\mathbf{x}) = \rho_{\nu_\beta}(\mathbf{x}) = (1+|\mathbf{x}|^2)^{-\beta}\,,\ \rho_\mu(\mathbf{x}) = \rho_{\mu_\beta}(\mathbf{x}) = (1+|\mathbf{x}|^2)\,\rho_{\nu_\beta}(\mathbf{x})\,,\ \beta \geq N\,. \tag{4.2.14}$$

Osserviamo che sotto queste ipotesi $W^{1,2}(\mathbb{R}^N; \nu_\beta, \mu_\beta) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N; \nu_\beta, \mu_\beta)$ (proposizione A.4); inoltre la condizione $\beta \geq N$ chiaramente garantisce l'integrabilità del peso ρ_{ν_β} (e di ρ_{μ_β} per $N > 2$). Da [KO90, es. 20.6] è facile controllare che non ha luogo alcun'immersione di Sobolev con $q > 2$ e l'immersione $W^{1,2}(\mathbb{R}^N; \nu_\beta, \mu_\beta) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N; \nu_\beta)$ *non* è compatta. La misura ν_β, se opportunamente riscalata di modo da renderla una misura di probabilità, viene comunemente chiamata *distribuzione di Cauchy generalizzata*.
Il risultato precedente, per $\beta > N$, è estendibile a pesi della forma [BL09, teo. 5.1]

$$\rho_{\nu_\beta}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})^{-\beta}\,,$$

dove V è una qualsiasi funzione convessa positiva su $\mathbb{R}^N$ tale che ρ_{ν_β} sia integrabile e con un minimo di regolarità locale per garantire la densità di una classe di funzioni regolari in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N; \nu_\beta, \mu_\beta)$ (basta $C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ – sezione A.3).
Altri esempi di disuguaglianze di 2-Poincaré pesate (stavolta con $\nu = \mu$) si ottengono tramite pesi log-concavi, ovvero della tipologia

$$\rho_\nu(\mathbf{x}) = \rho_\mu(\mathbf{x}) = e^{-Z(\mathbf{x})}\,,$$

dove $Z \in C^2(\mathbb{R}^N)$ è una funzione convessa tale che $\nabla^2(Z)$ sia definita positiva e $e^{-Z(\mathbf{x})}$ sia integrabile. Si può dimostrare che sotto queste ipotesi una generica $\eta \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega)$ a ν-media nulla soddisfa

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta(\mathbf{x})^2\, e^{-Z(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left[\nabla^2(Z)\right]^{-1} \nabla\eta(\mathbf{x})\right) \cdot \nabla\eta(\mathbf{x})\, e^{-Z(\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,. \tag{4.2.15}$$

Per i dettagli si vedano [BL09, sez. 1] e i riferimenti ivi citati. Dalla (4.2.15) ricaviamo che se esiste una costante $c > 0$ tale che $\nabla^2(Z) \geq c\,I$ *uniformemente* in $\mathbb{R}^N$, nello spazio $W^{1,2}(\mathbb{R}^N; e^{-Z}, e^{-Z})$ vale la disuguaglianza di 2-Poincaré con la media. In questo caso, grazie alla proposizione A.9 (in particolare, $\nu = \mu$), la disuguaglianza di p-Poincaré con la media vale anche in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N; e^{-Z}, e^{-Z})$ per ogni $2 < p < \infty$. Inoltre dalla proposizione A.4 otteniamo ancora che $W^{1,p}(\mathbb{R}^N; e^{-Z}, e^{-Z}) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N; e^{-Z}, e^{-Z})$.
Un celebre esempio è costituito dalla distribuzione gaussiana multivariata, per la

quale, fissati un vettore $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e una matrice $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (costante) simmetrica definita positiva,

$$Z(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)'A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

(a meno di costanti additive).

Per classi di pesi simili a quelle appena considerate, si può arrivare a conclusioni analoghe tramite la teoria spettrale degli operatori auto-aggiunti in spazi di Hilbert, in particolare degli operatori ellittici singolari (si vedano, per esempio, [Dav07], [Dav89], [Dav95]). Infatti, fissata una funzione misurabile $\sigma : \mathbb{R}^N \to (0,\infty)$ tale che esiste una costante c per la quale

$$c^{-1}(1+|\mathbf{x}|) \le \sigma(\mathbf{x}) \le c(1+|\mathbf{x}|) \quad \text{per q.o. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

e fissate due costanti a e b, consideriamo la forma quadratica non-negativa definita su $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ come

$$Q(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\,\sigma(\mathbf{x})^{-b-N+2}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

È facile verificare che Q è chiudibile in $L^2(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N})$ (sia $\overline{Q}$ la sua chiusura) e che il dominio di $\overline{Q}$ è $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N},\sigma^{-b-N+2})$. Di conseguenza sappiamo [Dav95, teo. 4.4.2] che $\overline{Q}$ è la forma quadratica di un opportuno operatore non-limitato auto-aggiunto H su[14] $L^2(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N})$. Molte proprietà di tale operatore sono state studiate in [Pan96]. In particolare ci interessa la compattezza del risolvente di H in $L^2(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N})$ quando $\mathrm{d}\nu=\sigma^{-a-N}\mathrm{d}\lambda$ è una misura finita e

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N},\sigma^{-b-N+2}) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N},\sigma^{-b-N+2})\,, \tag{4.2.16}$$

garantita la quale sappiamo che in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N},\sigma^{-b-N+2})$ vale una disuguaglianza di 2-Poincaré con la media ([Dav89, sez. 1.1.10] – lo spettro di H è costituito da una successione di autovalori tendente a $+\infty$). Ora, la finitezza di ν è ovviamente assicurata se e solo se $a>0$. La condizione (4.2.16) vale indipendentemente da $a>0$ purché anche $b>0$ ([Pan96, lemma 2.3], oppure è direttamente applicabile la proposizione A.4). Se inoltre $a>b$ grazie a [Pan96, teo. 2.5] abbiamo che il risolvente di H è un operatore compatto da $L^2(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N})$ a $L^2(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N})$, di conseguenza $W^{1,2}(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N},\sigma^{-b-N+2})$ soddisfa la disuguaglianza di 2-Poincaré con la media. Osserviamo comunque che da questo risultato non possiamo dedurre lo stesso per i pesi (4.2.14), dato che in quel caso $a=b=2\beta-N$. Anzi, per $b\ge N$ e $a>b$ la validità della disuguaglianza di 2-Poincaré con la media in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N;\sigma^{-2\beta},\sigma^{-2\beta+2})$ implica la validità della stessa in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N},\sigma^{-b-N+2})$ (si ricordino le considerazioni a margine della proposizione A.10). Tuttavia quest'ultimo esempio ci fornisce informazioni anche per $b<N$.

Sempre in [Pan96] si dimostra poi che quando $a>0$ e $b<0$ oppure $a<0$ e $a>b$ l'operatore H ha ancora risolvente compatto (lemma 3.1 e teorema 4.2). In ogni caso, ciò ci fornisce disuguaglianze di 2-Poincaré senza media in $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N;\sigma^{-a-N},\sigma^{-b-N+2})$. Infatti per ambo le scelte dei parametri le costanti diverse da zero non possono appartenere a tale spazio: se $a<0$ semplicemente perché la misura ν non è finita, se $a>0$ e $b<0$ lo si può dedurre, sempre per ragioni di integrabilità, da [Pan96, lemma

[14] Formalmente, $H(v) = -\sigma^{a+N}\operatorname{div}(\sigma^{-b-N+2}\nabla v)$.

3.2]. Tali valori ovviamente rientrano (ponendo $\alpha = -a - N$ e $\beta = -b - N + 2$) tra quelli ammessi nei relativi esempi della sezione 4.1.2.

In ultima analisi vediamo come anche nel caso della distribuzione gaussiana si possa alternativamente ricorrere alla teoria spettrale degli operatori auto-aggiunti. Infatti (posto per semplicità $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$) l'operatore simmetrico

$$H_A(v) = -e^{\mathbf{x}'A\mathbf{x}}\,\mathrm{div}(e^{-\mathbf{x}'A\mathbf{x}}\nabla v) \tag{4.2.17}$$

(A è una matrice costante, simmetrica e definita positiva) definito su $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e chiuso in $L^2(\mathbb{R}^N; e^{-\mathbf{x}'A\mathbf{x}})$, è equivalente all'operatore

$$\widetilde{H}_A(w) = -\Delta w + \big(\mathbf{x}'A^2\mathbf{x} - tr(A)\big)\, w\,, \tag{4.2.18}$$

definito su $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e chiuso in $L^2(\mathbb{R}^N)$, ovvero

$$\widetilde{H}(w) = UHU^{-1}(w)\,, \tag{4.2.19}$$

dove U è l'isometria tra $L^2(\mathbb{R}^N; e^{-\mathbf{x}'A\mathbf{x}})$ e $L^2(\mathbb{R}^N)$ corrispondente alla moltiplicazione per $e^{-\mathbf{x}'A\mathbf{x}/2}$. L'operatore (4.2.18) nel caso $N = 1$ è il cosiddetto *oscillatore armonico*, molto importante in meccanica quantistica: è ben noto che il suo spettro è non-negativo e puramente discreto (si veda [Dav89, sez. 4.3] oppure [Dav07, sez. 14.5]). Tramite tensorizzazione ([RS80], teorema VIII.33 ed esempio VIII.10.1) abbiamo che lo stesso vale anche per l'operatore[15]

$$\widetilde{H}_D(w) = -\Delta w + (\mathbf{x}'D^2\mathbf{x} - tr(D))\, w$$

(dove D è una qualsiasi matrice diagonale tale che $D_{ii} > 0$ per ogni $i = 1 \dots N$). Siccome lo spettro di H_D coincide con quello di $\widetilde{H}_D$, dal teorema *minimax* [Dav89, sez. 1.1.10] deduciamo che in $W^{1,2}(\mathbb{R}^N; e^{-\mathbf{x}'D\mathbf{x}}, e^{-\mathbf{x}'D\mathbf{x}})$ vale la disuguaglianza di 2-Poincaré con la media (ricordiamo che siamo nel caso in cui $W^{1,2}(\mathbb{R}^N; \nu, \mu) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N; \nu, \mu)$). Quando A è una generica matrice simmetrica definita positiva il risultato segue da quello appena ricavato per mezzo del classico cambio di coordinate che rende gli autovettori di A i versori della base cartesiana.
Alla stessa conclusione si può giungere anche attraverso le *disuguaglianze di Sobolev logaritmiche*, le quali hanno un ruolo fondamentale nel caratterizzare le proprietà contrattive dei semigruppi generati da opportuni operatori auto-aggiunti [Dav89, cap. 2], [Gro75]. È noto [Dav89, teo. 4.3.4] che il semigruppo $e^{-H_a t}$ è ipercontrattivo in $L^2(\mathbb{R}; e^{-ax^2})$. In particolare questo implica ([Gro75, es. 2] oppure [DF92, L. Gross, sez. 1]) che per ogni $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}; e^{-ax^2}, e^{-ax^2})$ vale la disuguaglianza di Sobolev logaritmica

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)^2 \log|v(x)|\,\mathrm{d}\nu \le C_{Sl}\|v'\|_{2;\nu}^2 + \|v\|_{2;\nu}^2 \log\|v\|_{2;\nu}\,, \tag{4.2.20}$$

dove $\mathrm{d}\nu = e^{-ax^2}\mathrm{d}\lambda$ e C_{Sl} è una costante > 0 indipendente da v. Grazie al fatto che tali disuguaglianze si conservano per tensorizzazione [DF92, L. Gross, teo. 2.3] otteniamo che, fissata una qualsiasi matrice diagonale $D \in \mathbb{R}^{N\times N}$ definita positiva

[15] $\widetilde{H}_D = \Big[\Big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_1^2} + D_{11}^2x_1^2 - D_{11}\Big)\otimes I_2 \otimes \ldots \otimes I_N\Big] + \Big[I_1 \otimes \Big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_2^2} + D_{22}^2x_2^2 - D_{22}\Big)\otimes I_3 \otimes \ldots \otimes I_N\Big] + \ldots + \Big[I_1 \otimes \ldots \otimes I_{N-1} \otimes \Big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_N^2} + D_{NN}^2x_N^2 - D_{NN}\Big)\Big]$.

(tramite il cambio di coordinate descritto in precedenza ci si può ricondurre a questo caso), anche per ogni $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N;\, e^{-\mathbf{x}'D\mathbf{x}}, e^{-\mathbf{x}'D\mathbf{x}})$

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(\mathbf{x})^2 \log|u(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\nu \le C_{Sl}\,\|\nabla v\|_{2;\nu}^2 + \|v\|_{2;\nu}^2 \log\|u\|_{2;\nu}\,, \tag{4.2.21}$$

dove ora $\mathrm{d}\nu = e^{-\mathbf{x}'D\mathbf{x}}\mathrm{d}\lambda$ e C_{Sl} è sempre un'opportuna costante indipendente da v. Si può poi dimostrare che la (4.2.21) implica la validità della disuguaglianza di 2-Poincaré con la media [DF92, L. Gross, teo. 2.5].

Osserviamo infine che anche negli esempi trattati in questa sezione è facile verificare come tutti i pesi considerati siano *localmente* regolari ed equivalenti al peso unitario.

Conclusioni

Il primo obiettivo di questa tesi era estendere il risultato [Gri10, teo. 1.3] al caso delle condizioni di Neumann omogenee; in quest'ultimo lavoro si dimostra che la validitá della disuguaglianza di p-Poincaré in $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è equivalente alla validità di un'opportuna stima regolarizzante e asintotica per le soluzioni dell'equazione evolutiva del p-Laplaciano pesato con condizioni di Dirichlet omogenee. Tale obiettivo è stato raggiunto, avendo dimostrato l'equivalenza tra la validità della disuguaglianza di p-Poincaré con la media in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ e una proprietà regolarizzante e asintotica per le soluzioni della suddetta equazione.

Il secondo obiettivo consisteva nel provare un risultato analogo per l'equazione dei mezzi porosi pesata con condizioni di Dirichlet omogenee. Dopo aver stabilito un teorema di buona posizione per tale evoluzione, si è dimostrato che la validità della disuguaglianza di 2-Poincaré in $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ effettivamente dà luogo a stime regolarizzanti e asintotiche simili a quelle ricavate per l'evoluzione del p-Laplaciano, mentre a partire dalla validità di una stima regolarizzante e asintotica si è provata l'implicazione inversa, ovvero il soddisfacimento della disuguaglianza di 2-Poincaré in $W_0^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ (sotto l'ipotesi aggiuntiva $\nu(\Omega)<\infty$).

Il terzo obiettivo, il più ambizioso, riguardava l'analisi di proprietà regolarizzanti e asintotiche dell'equazione dei mezzi porosi pesata con condizioni di Neumann omogenee. Dimostrati nuovamente risultati di buona posizione (procedendo similmente al problema di Dirichlet), inizialmente si sono investigate tali proprietà assumendo che in $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ valga solo una disuguaglianza di 2-Poincaré con la media. Si è provata anche in questo caso una regolarizzazione analoga a quella ottenuta per il problema di Dirichlet (di tipo $L^{q_0}_\nu$-L^ϱ con $\varrho\in(q_0,\infty)$), nonché una parziale implicazione inversa. Lo studio asintotico è risultato più elaborato, dovendo distinguere necessariamente il comportamento di soluzioni a media nulla da quello di soluzioni a media non nulla. Per le prime si è provata una convergenza a zero dell'ordine di una potenza negativa del tempo, per le seconde una convergenza esponenziale alla media sotto l'ipotesi che il dato iniziale sia limitato. Successivamente ci si è focalizzati su problemi simili, assumendo però la validità in $W^{1,2}(\Omega;\nu,\mu)$ della disuguaglianza di Sobolev con la media (che assicura una regolarizzazione di tipo $L^{q_0}_\nu$-L^∞). I risultati ottenuti hanno portato al miglioramento di alcune stime già precedentemente ricavate in [BG05m].

Tra le questioni che rimangono aperte, segnaliamo:

- l'analisi della validità dell'implicazione inversa per la *WPME* nel caso del problema di Dirichlet per $\nu(\Omega)=\infty$ e nel caso del problema di Neumann (come detto, se n'è ottenuta solo una parziale);

- lo studio di eventuali condizioni meno restrittive sui pesi ρ_ν e ρ_μ che garantiscano la buona posizione dell'equazione dei mezzi porosi pesata;
- il possibile miglioramento delle stime asintotiche ricavate per le soluzioni della *WPME* con condizioni di Neumann quando il dato iniziale *non* è limitato (assumendo la validità della disuguaglianza di 2-Poincaré con la media);
- un'opportuna classificazione di domini e pesi per i quali le soluzioni del problema di Neumann per la *WPME* convergano *uniformemente* alla loro media.

Appendice A

Spazi di Sobolev pesati e disuguaglianze di p-Poincaré

In questa breve appendice richiamiamo alcune basilari definizioni e proprietà degli spazi di Sobolev con pesi e di connesse disuguaglianze di p-Poincaré, con o senza media.

A.1 Lo spazio $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) e siano ν e μ due misure positive assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue su Ω (che indicheremo sempre con λ). Chiamiamo ρ_ν e ρ_μ i corrispondenti pesi. Dato $p \in [1,\infty)$, definiamo come $L^p(\Omega;\nu)$ lo spazio di Banach costituito dalle classi d'equivalenza, rispetto all'uguaglianza ν-quasi ovunque, di funzioni f Lebesgue-misurabili tali che

$$\|f\|_{p;\nu}^p = \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega |f|^p \,\rho_\nu \mathrm{d}\lambda < \infty\,.$$

In maniera analoga s'intende lo spazio $L^p(\Omega;\mu)$.
Assumeremo sin da subito che anche la misura di Lebesgue sia assolutamente continua rispetto a ρ_ν e ρ_μ, il che equivale ad imporre

$$\rho_\nu(\mathbf{x}), \rho_\mu(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{per } \lambda\text{-q.o. } \mathbf{x} \in \Omega\,.$$

In questo modo le classi d'equivalenza di funzioni rispetto all'uguaglianza ν- e μ-quasi ovunque coincidono con quelle relative all'uguaglianza λ-quasi ovunque (che spesso indicheremo semplicemente con q.o.), e risultano ben definite ρ_ν^{-1} e ρ_μ^{-1}. Ciò sarà importante per il resto della trattazione.

Seguendo la teoria presentata in [KO84], ci occuperemo ora di come definire in maniera opportuna l'analogo dello spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ quando almeno una delle misure di riferimento ν e μ su Ω è diversa da λ. Posto $p \in (1,\infty)$, iniziamo col considerare come $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ lo spazio delle funzioni[1] $v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tali che

$$\|v\|_{p;\nu,\mu}^p = \|v\|_{p;\nu}^p + \|\nabla v\|_{p;\mu}^p < \infty\,. \tag{A.1.1}$$

[1] Per comodità parleremo di funzioni, ma sarà sempre implicito il fatto che in realtà lavoriamo con *classi d'equivalenza* di funzioni.

Senza ulteriori richieste su ρ_ν e ρ_μ non è detto che lo spazio normato $W^{1,p}\,(\Omega;\nu,\mu)$ sia di Banach.

Definizione A.1. *Indichiamo con $B^p(\Omega)$ la classe delle funzioni misurabili f tali che $f>0$ q.o. e*

$$|f|^{\frac{1}{1-p}} \in L^1_{loc}(\Omega)\,. \tag{A.1.2}$$

Si può dimostrare [KO84, teo. 2.1] che se $\rho_\mu \in B^p(\Omega)$ allora $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è di Banach. Se anche $\rho_\nu \in B^p(\Omega)$ la dimostrazione di questo fatto è molto semplice. Sia infatti $\{v_n\}_n$ una successione di Cauchy in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$. Allora esistono $w \in L^p(\Omega;\nu)$ e $\mathbf{w} \in [L^p(\Omega;\mu)]^N$ tali che per $n\to\infty$

$$v_n \xrightarrow{L^p_\nu} w\,,\ \nabla v_n \xrightarrow{[L^p_\mu]^N} \mathbf{w}\,.$$

Occorre quindi solo provare che $\nabla w = \mathbf{w}$; ma a tale scopo è sufficiente passare al limite nell'identità

$$\int_\Omega v_n \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla v_n\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall\boldsymbol{\varphi}\in[C_c^\infty(\Omega)]^N\ ,$$

essendo ciò possibile (basta moltiplicare e dividere per ρ_ν e ρ_μ nei rispettivi integrali) proprio grazie all'ipotesi $\rho_\nu,\rho_\mu \in B^p(\Omega)$. Comunque, come detto, il risultato rimane valido anche se $\rho_\nu \notin B^p(\Omega)$. Nel caso monodimensionale ($N=1$) non è difficile dimostrarlo utilizzando l'assoluta continuità locale delle funzioni di $W^{1,p}(I;\nu,\mu)$ (dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$, si veda [KO84, lemma 2.3]); quando invece si consideri un generico dominio Ω di $\mathbb{R}^N$ l'idea principale è proprio quella di ricondursi al contesto monodimensionale, sfruttando il fatto che una funzione di $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ è localmente assolutamente continua, fissato un qualsiasi indice $i\in\{1,\dots,N\}$, sull'insieme

$$\{y\in\mathbb{R}:\ (x_1,x_2,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_N)\in\Omega\}$$

per quasi ogni $(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_N)\in\mathbb{R}^{N-1}$ [Zie89, teo. 2.1.4]. Per i dettagli rimandiamo a [KO84, teo. 2.1].
Infine, osserviamo che per $p=\infty$ ovviamente $W^{1,\infty}(\Omega;\nu,\mu)$ coincide con $W^{1,\infty}(\Omega)$, ovvero lo spazio delle funzioni localmente Lipschitziane su Ω, limitate e con gradiente limitato. Nel caso $p=1$, la trattazione continua a valere pur di sostituire la condizione $\rho_\mu\in B^p(\Omega)$ con $\rho_\mu^{-1}\in L^\infty_{loc}(\Omega)$, cioè richiedendo che ρ_μ sia localmente uniformemente >0 (intenderemo quindi come $B^1(\Omega)$ tale classe di pesi).
Qualora nemmeno il peso ρ_μ appartenga a $B^p(\Omega)$ in generale non si è in grado di garantire la completezza di $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ (sono noti controesempi [KO84, ess. 2.5–2.6]); si può comunque ricorrere ad alcune definizioni alternative che la assicurino, le quali sostanzialmente consistono nel "rimuovere" da Ω i punti che rendono ρ_μ troppo irregolare [KO84, sez. 3]. Noi non ci addentreremo ulteriormente in tali questioni, e quando parleremo dello spazio $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ assumeremo sempre che $\rho_\mu\in B^p(\Omega)$.

A.2 Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$

In analogia con $W_0^{1,p}(\Omega)$, risulta naturale definire lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ come la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{p;\nu,\mu}$. Tuttavia lavorando con generici pesi ρ_ν e ρ_μ non è scontato che per una qualsiasi funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ la quantità $\|\varphi\|_{p;\nu,\mu}$ sia finita. A questo scopo richiediamo perciò che le misure ν e μ siano *localmente finite*, ovvero

$$\rho_\nu, \rho_\mu \in L^1_{loc}(\Omega)\,. \tag{A.2.1}$$

La condizione (A.2.1), come mostrato in [KO84, lemma 4.4], in realtà è necessaria e sufficiente affinché per ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ si abbia $\|\varphi\|_{p;\nu,\mu} < \infty$, ovvero valga l'inclusione $C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$. Sotto queste ipotesi, lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è chiaramente di Banach per costruzione; in ogni caso imponiamo sempre che $\rho_\mu \in B^p(\Omega)$ per garantire la naturale inclusione $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu) \subset W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$, cosicché, in particolare, ogni funzione di $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ appartiene a $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, ovvero il suo gradiente ha il consueto significato in senso debole.
Anche per lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ in [KO84, sez. 4] si può trovare una definizione alternativa allo scopo di gestire i casi in cui $\rho_\mu \notin B^p(\Omega)$ o ν o μ non siano localmente finite (ottenuta sempre "rimuovendo" opportunamente da Ω i punti che rendono i pesi eccessivamente irregolari). Nel seguito sarà sempre implicito che quando parleremo dello spazio $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ il peso ρ_μ appartenga a $B^p(\Omega)$ e valga la (A.2.1).

A.3 Funzioni regolari in $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ e $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$

La densità di una classe di funzioni regolari in $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è ovviamente implicita per definizione. Tuttavia spesso può risultare utile che anche le funzioni Lipschitziane a supporto compatto siano dense, il che equivale a richiedere che esse siano contenute in $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$.

Proposizione A.1. *Se $p \in [1,\infty)$ vale l'inclusione $W_c^{1,\infty}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$.*

Dimostrazione. Data $v \in W_c^{1,\infty}(\Omega)$, grazie a [Ada75, lemmi 2.18 e 3.15] sappiamo che esiste sempre una successione di funzioni $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$ (la classica *mollificazione* di v) tale che per $n \to \infty$

$$v_n \xrightarrow{\text{q.o.}} v\,,\ \nabla v_n \xrightarrow{\text{q.o.}} \nabla v\,,\ \|v_n\|_\infty \leq \|v\|_\infty\ ,\ \|\nabla v_n\|_\infty \leq \|\nabla v\|_\infty$$

e con $\mathrm{supp}(v_n) \subset \Omega' \Subset \Omega$. Essendo ν e μ localmente finite una diretta applicazione del teorema della convergenza dominata permette di concludere che $v_n \to v$ in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$. □

Per quanto riguarda lo spazio $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ le questioni, come si può intuire, sono più delicate. Nel caso non pesato $\nu = \mu = \lambda$ sappiamo [Ada75, teo. 3.16] che se $p \in [1,\infty)$ lo spazio $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ è sempre denso in $W^{1,p}(\Omega)$. Lo stesso risultato rimane valido se ρ_ν e ρ_μ sono diversi dal peso unitario ma sufficientemente regolari nell'interno di Ω.

Proposizione A.2. *Sia $p \in [1,\infty)$. Se si assume $\rho_\nu, \rho_\mu, \rho_\nu^{-1}, \rho_\mu^{-1} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, allora $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$.*

Dimostrazione. Le ipotesi aggiuntive su ρ_ν e ρ_μ garantiscono che *localmente* le norme pesate $\|\cdot\|_{p;\nu}$ e $\|\cdot\|_{p;\mu}$ sono equivalenti alla norma non pesata, cioè relativa al peso unitario. Perciò è sempre possibile approssimare in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ una funzione

$v \in W_c^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ con una successione di funzioni $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$ [Ada75, lemma 3.15] il supporto delle quali "tende" al supporto di v (ovvero per ogni Ω' tale che $\mathrm{supp}(v) \Subset \Omega' \Subset \Omega$ il supporto di v_n è contenuto definitivamente in Ω'). Cio è sufficiente per riprodurre la dimostrazione di [Ada75, teo. 3.16] sostituendo $\|\cdot\|_{p;\lambda,\lambda}$ con $\|\cdot\|_{p;\nu,\mu}$. Inoltre, seguendo sempre la costruzione di [Ada75, teo. 3.16], è facile verificare che se anche $v \in L^\infty(\Omega)$ l'intera successione approssimante $\{v_n\}_n$ appartiene a $L^\infty(\Omega)$. $\square$

Come si vede dalla dimostrazione, la richiesta che le misure ν e μ siano localmente equivalenti alla misura di Lebesgue serve per poter utilizzare risultati già noti nel caso $\nu = \mu = \lambda$: infatti a tale scopo occorre che una generica funzione di $W_{loc}^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ appartenga anche a $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ (da cui l'ipotesi $\rho_\nu^{-1}, \rho_\mu^{-1} \in L_{loc}^\infty(\Omega)$) e che l'approssimazione locale con funzioni regolari, che avviene rispetto alla norma non pesata $\|\cdot\|_{p;\lambda,\lambda}$, abbia luogo anche rispetto alla norma pesata $\|\cdot\|_{p;\nu,\mu}$ (da cui l'ipotesi $\rho_\nu, \rho_\mu \in L_{loc}^\infty(\Omega)$).

La densità dello spazio $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ non è scontata nemmeno quando $\nu = \mu = \lambda$, e richiede almeno un certo grado di regolarità del dominio Ω (si veda per esempio [Ada75, teo. 3.18] o [Eva98, teo. 5.3.3]). Non ci addentreremo ulteriormente in tali questioni, piuttosto tecniche, limitandoci ad osservare che anche nel caso di pesi ρ_ν e ρ_μ che soddisfino le ipotesi della proposizione (A.2) i principali teoremi relativi allo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ così come sono non risultano d'immediata estensione: in generale occorrerà imporre opportune restrizioni anche sul comportamento di ρ_ν e ρ_μ in prossimità di $\partial\Omega$ (che tuttavia, in tal caso, è proprio ciò che differenzia ν e μ da λ). Per un'introduzione a queste problematiche rimandiamo, ad esempio, a [Kuf85, sezz. 7,11].

Vediamo ora un semplice ma importante risultato di densità che lega le funzioni di $L^\infty(\Omega)$ e quelle di $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$.

Proposizione A.3. *Se $p \in [1,\infty)$, lo spazio $L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$.*

Dimostrazione. Si può procedere esattamente come nel caso non pesato. Ovvero, data $v \in W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$, consideriamo la successione approssimante

$$v_n = \min\left(n, \max\left(-n, v\right)\right) .$$

Evidentemente, per costruzione $v_n \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ e $|v_n| \le |v|$. Inoltre $\nabla v_n = (\nabla v)\,\chi_{\{-n<v<n\}}$. Un'immediata applicazione del teorema della convergenza monotòna permette di concludere che $v_n \to v$ in $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$. $\square$

Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $\nu = \mu = \lambda$ sappiamo che $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Un risultato simile vale per spazi pesati sotto opportune ipotesi.

Proposizione A.4. *Sia $p \in [1,\infty)$ e valga l'inclusione*

$$W_c^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu) \subset W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu) . \tag{A.3.1}$$

Supponiamo inoltre che i pesi ρ_ν e ρ_μ soddisfino almeno una delle seguenti ipotesi:

$$\frac{\rho_\mu(\mathbf{x})}{\rho_\nu(\mathbf{x})} = O(|\mathbf{x}|^p) \qquad \text{per } |\mathbf{x}| \to \infty \tag{A.3.2}$$

oppure

$$\int_{\{r<|\mathbf{x}|<2r\}} \rho_\mu(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = o(r^p) \qquad \text{per } r \to \infty\,. \tag{A.3.3}$$

Allora $W^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu)$.

Dimostrazione. Come nel caso non pesato, consideriamo una qualsiasi funzione $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $|\xi| \leq 1$, $\xi(\mathbf{x}) = 1$ per $|\mathbf{x}| \leq 1$ e $\xi(\mathbf{x}) = 0$ per $|\mathbf{x}| \geq 2$. È facile verificare che data $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu)$, la successione $v_n(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}/n)v(\mathbf{x})$ appartiene[2] a $W_c^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu)$ e converge a v in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu)$ se e solo se la quantità

$$I(n) = \int_{\mathbb{R}^N} |v(\mathbf{x})\nabla(\xi(\mathbf{x}/n))|^p \,\mathrm{d}\mu$$

tende a zero per $n \to \infty$. Anzitutto, osserviamo che

$$\nabla(\xi(\mathbf{x}/n)) = \frac{1}{n}(\nabla\xi)(\mathbf{x}/n)\,\chi_{\{n<|\mathbf{x}|<2n\}}\,,$$

dove per costruzione $|\nabla\xi|$ è maggiorato da una costante, che chiamiamo M. Se vale la (A.3.2) allora esiste un'altra costante Q tale che per $|\mathbf{x}|$ sufficientemente grande

$$\frac{\rho_\mu(\mathbf{x})}{\rho_\nu(\mathbf{x})} \leq Q|\mathbf{x}|^p\,;$$

di conseguenza

$$I(n) \leq 2^p M^p Q \int_{\{n<|\mathbf{x}|<2n\}} |v(\mathbf{x})|^p \,\mathrm{d}\nu$$

definitivamente. Siccome $|v|^p \in L^1(\mathbb{R}^N;\nu)$ otteniamo facilmente che $I(n) \to 0$ per $n \to \infty$. Supponiamo invece che valga la (A.3.3). In virtù della proposizione A.3 non è vincolante assumere anche $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sfruttando questo fatto, abbiamo

$$I(n) \leq M^p \,\|v\|_\infty^p \,\frac{\int_{\{n<|\mathbf{x}|<2n\}} \rho_\mu(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}}{n^p}\,,$$

quantità che tende a zero per $n \to \infty$ proprio grazie alla (A.3.3). In ambo i casi l'asserto segue poi dalla (A.3.1). □

La condizione $W_c^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu) \subset W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu)$ è ovviamente verificata quando, per esempio, i pesi ρ_ν e ρ_μ soddisfano le ipotesi della proposizione A.2.

Terminiamo questa sezione con un classico risultato riguardante l'approssimabilità delle funzioni di $L^p(\Omega;\nu)$ con funzioni regolari.

Proposizione A.5. *Sia $\rho_\nu \geq 0$ una funzione misurabile $\in L^1_{loc}(\Omega)$ e ν la misura ad essa associata, ovvero $\mathrm{d}\nu = \rho_\nu \mathrm{d}\lambda$. Lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega;\nu)$ per ogni $p \in [1,\infty)$.*

Dimostrazione. Grazie al teorema della convergenza monotòna è immediato verificare che lo spazio $L_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega;\nu)$: infatti data $f \in L^p(\Omega;\nu)$ è sufficiente considerare la successione

$$f_n = f\,\chi_{\{-n<f<n\}\cap\Omega_n}\,,$$

[2] Da un certo $\overline{n}$ in poi (assumendo anche $v \in L^\infty(\Omega)$ se vale solo la (A.3.3)).

dove $\{\Omega_n\}_n$ è una qualsiasi successione crescente di domini $\Omega_n \Subset \Omega$ tale che $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$. Perciò basta dimostrare che ogni funzione $g \in L_c^\infty(\Omega)$ è approssimabile in $L^p(\Omega;\nu)$ da una successione di funzioni di $C_c^\infty(\Omega)$. A tale scopo possiamo ricorrere ancora al lemma 2.18 di [Ada75], che in particolare ci fornisce una successione $g_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty \,, \; g_n \xrightarrow{\lambda\text{-q.o.}} g \,, \; \mathrm{supp}(g_n) \subset \Omega' \Subset \Omega \,.$$

Dall'ipotesi $\rho_\nu \in L^1_{loc}(\Omega)$ e dal teorema della convergenza dominata deduciamo quindi che anche $g_n \to g$ in $L^p(\Omega;\nu)$. □

A.4 Disuguaglianze di p-Poincaré

Nello spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ sappiamo che, sotto opportune ipotesi su Ω, p e N (si vedano ad esempio [Ada75, sez. 6.26, teo. 6.28], [Eva98, teo. 5.6.3] o [Sal07, teo. 8.2.3]), vale la cosiddetta disuguaglianza di p-Poincaré

$$\|v\|_p \leq C_P \|\nabla v\|_p \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \,, \tag{A.4.1}$$

dove C_P è una costante positiva indipendente da v. Naturalmente la validità di una simile disuguaglianza in $C_c^\infty(\Omega)$ è necessaria e sufficiente per la sua validità in tutto lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$.
Mostriamo allora una tipica condizione garantita la quale in $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è certamente vera una disuguaglianza di p-Poincaré.

Proposizione A.6. *Sia* $p \in [1,\infty]$. *Supponiamo che l'immersione di* $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ *in* $L^p(\Omega;\nu)$ *sia* compatta *e che l'unica funzione* costante *appartenente a* $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ *sia* 0. *Allora esiste una costante* C_P *tale che la disuguaglianza di* p*-Poincaré*

$$\|v\|_{p;\nu} \leq C_P \|\nabla v\|_{p;\mu} \tag{A.4.2}$$

vale per ogni $v \in W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$.

Dimostrazione. È un argomento classico. Infatti negare la (A.4.2) equivale ad ammettere l'esistenza di una successione $v_n \in W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ tale che

$$\|v_n\|_{p;\nu} = 1 \,, \; \|\nabla v_n\|_{p;\mu} \to 0 \,, \; v_n \to v \text{ in } L^p(\Omega;\nu) \,.$$

Ciò implica che la successione $\{v_n\}_n$ è di Cauchy in $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$, di conseguenza $v_n \to v$ anche in $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$, per cui da un lato avremmo $v \in W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ e $\nabla v = 0$, cioè v *costante* in Ω, dall'altro $\|v\|_{p;\nu} = 1$. In virtù delle ipotesi, ciò è evidentemente assurdo. □

Richiedere che l'unica funzione costante di $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ sia 0 può sembrare superfluo, ma non è così. Se $\nu = \mu = \lambda$ e Ω è un qualsiasi dominio di $\mathbb{R}^N$ è facile vedere come ciò sia sempre vero. Infatti se Ω è di λ-misura infinita ovviamente per ragioni di integrabilità l'unica costante in $W_0^{1,p}(\Omega)$ è 0. Se invece $\lambda(\Omega) < \infty$, sappiamo che estendendo una funzione di $W_0^{1,p}(\Omega)$ a zero in Ω^c (e analogamente il suo gradiente) otteniamo una funzione di $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Se esistesse una costante $c \neq 0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ciò porterebbe a un assurdo perché l'estensione a zero di c in Ω^c avrebbe gradiente nullo ma non sarebbe costante (varrebbe c in Ω e 0 in Ω^c, entrambi insiemi di

misura > 0). Tuttavia quando ν è una misura finita diversa da λ, può in effetti accadere che in $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ siano contenute anche le costanti diverse da zero: come abbiamo visto (proposizione A.4) se i pesi ρ_ν e ρ_μ soddisfano opportune ipotesi $W^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu)$, e[3] se $\nu(\mathbb{R}^N) < \infty$ questo significa che una *qualsiasi* funzione costante giace in $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N;\nu,\mu)$.
Osserviamo comunque che, banalmente, se anche le costanti diverse da zero appartengono a $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ la (A.4.2) non può mai valere.

Dimostriamo ora un'utile proprietà delle disuguaglianze di p-Poincaré.

Proposizione A.7. *Sia $q \in [1,\infty)$. Supponiamo che la disuguaglianza di q-Poincaré*

$$\|v\|_{q;\nu} \le C_{P,q}\,\|\nabla v\|_{q;\mu} \tag{A.4.3}$$

valga per ogni $v \in W_0^{1,q}(\Omega;\nu,\mu)$, con $C_{P,q}$ indipendente da v. Supponiamo inoltre che esista una costante D per cui $\rho_\mu \le D\rho_\nu$. Allora anche per ogni $p \in (q,\infty)$ e per ogni $w \in W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ vale la disuguaglianza di p-Poincaré

$$\|w\|_{p;\nu} \le C_{P,q}\,D^{\frac{1}{q}(1-\frac{q}{p})}\,\frac{p}{q}\,\|\nabla w\|_{p;\mu}\,. \tag{A.4.4}$$

Dimostrazione. Fissato $q \in (p,\infty)$, consideriamo una qualsiasi funzione $w \in W_c^{1,\infty}(\Omega)$. Dalla proposizione A.1 sappiamo che non ci sono problemi a dedurre che $z = |w|^{p/q} \in W_0^{1,q}(\Omega;\nu,\mu)$ e

$$\nabla z = \frac{p}{q}|w|^{\frac{p}{q}-1}\operatorname{sign}(w)\,\nabla w\,;$$

perciò per z vale la (A.4.3). Ciò implica che

$$\|w\|_{p;\nu}^p \le C_{P,q}^q\left(\frac{p}{q}\right)^q \left\||w|^{p-q}|\nabla w|^q\right\|_{1;\mu}\,;$$

applicando al membro destro la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\|w\|_{p;\nu}^p \le C_{P,q}^q\left(\frac{p}{q}\right)^q \|w\|_{p;\mu}^{p-q}\,\|\nabla w\|_{p;\mu}^q$$

ovvero, dopo qualche passaggio (usando il fatto che $\|w\|_{p;\mu} \le D^{1/p}\|w\|_{p;\nu}$),

$$\|w\|_{p;\nu} \le C_{P,q}\,D^{\frac{1}{q}(1-\frac{q}{p})}\,\frac{p}{q}\,\|\nabla v\|_{p;\mu}\,.$$

Abbiamo così stabilito che la (A.4.4) vale per ogni $w \in W_c^{1,\infty}(\Omega)$, quindi per densità anche per ogni $w \in W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$. $\square$

A livello dello spazio $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ è più naturale chiedersi[4], assumendo $\nu(\Omega) < \infty$, se valga in esso la disuguaglianza di p-Poincaré con la media

$$\|v-\overline{v}\|_{p;\nu} \le C_P\,\|\nabla v\|_{p;\mu}\,, \tag{A.4.5}$$

[3] Per ulteriori esempi di domini e pesi per i quali $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu) = W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ rimandiamo a [Kuf85, sez. 9].

[4] In ogni caso non è difficile verificare che il risultato della precedente proposizione è applicabile anche a $W^{1,q}(\Omega;\nu,\mu)$ (chiaramente ciò ha senso se $\nu(\Omega) = \infty$, altrimenti la (A.4.3) non può valere in $W^{1,q}(\Omega;\nu,\mu)$).

dove

$$\overline{v} = \frac{\int_\Omega v \, \mathrm{d}\nu}{\nu(\Omega)}$$

è la media di v in Ω pesata rispetto a ν e C_P è una costante indipendente da v. Quando $\nu = \mu = \lambda$ si sa che, per esempio, la (A.4.5) è valida per ogni $p \in [1, \infty]$ se Ω è un qualsiasi dominio limitato e Lipschitziano di $\mathbb{R}^N$, con costante C_P dipendente da Ω, N e p ([Eva98, teo. 5.8.1], si dimostra proprio utilizzando la prossima proposizione A.8).
Anche in questo caso un'ipotesi usuale sotto la quale la (A.4.5) è vera è la compattezza dell'immersione $W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu) \hookrightarrow L^p(\Omega; \nu)$. Infatti abbiamo la seguente

Proposizione A.8. *Sia $p \in [1, \infty]$. Se $\nu(\Omega) < \infty$ e l'immersione $W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu) \hookrightarrow L^p(\Omega; \nu)$ è compatta, allora esiste una costante C_P tale che la disuguaglianza di p-Poincaré con la media*

$$\|v - \overline{v}\|_{p;\nu} \leq C_P \|\nabla v\|_{p;\mu}$$

vale per ogni $v \in W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$.

Dimostrazione. Si può procedere esattamente come nella proposizione A.6 (si veda anche [Eva98, teo. 5.8.1]), negando la tesi ed arrivando a stabilire per assurdo l'esistenza di una funzione *costante*, diversa da 0 e a media nulla. □

Per le disuguaglianze di Poincaré con la media si può dimostrare un'analoga della proposizione A.7.

Proposizione A.9. *Siano $q \in (1, \infty)$, $\nu(\Omega) < \infty$. Supponiamo che la disuguaglianza di q-Poincaré con la media*

$$\|v - \overline{v}\|_{q;\nu} \leq C_{P,q} \|\nabla v\|_{q;\mu} \tag{A.4.6}$$

valga per ogni $v \in W^{1,q}(\Omega; \nu, \mu)$. Se esiste una costante D per cui $\rho_\mu \leq D\rho_\nu$ allora anche per ogni $p \in (q, \infty)$ e per ogni $w \in W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$ vale la disuguaglianza di p-Poincaré con la media

$$\|w - \overline{w}\|_{p;\nu} \leq C_{P,p} \|\nabla w\|_{p;\mu} , \tag{A.4.7}$$

dove $C_{P,p}$ è un'opportuna costante dipendente solo da $C_{P,q}$, q, p e D.

Dimostrazione. Data una qualsiasi $w \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega; \nu, \mu)$, abbiamo che $z = |w|^{\frac{p}{q}} \in W^{1,q}(\Omega; \nu, \mu)$ con

$$\nabla z = \frac{p}{q} |w|^{\frac{p}{q}-1} \operatorname{sign}(w) \nabla w \,;$$

di conseguenza, applicando a w la (A.4.6), otteniamo che

$$\begin{aligned} \|w\|_{p;\nu}^{\frac{p}{q}} = \|z\|_{q;\nu} \leq C_{P,q} \|\nabla z\|_{q;\mu} + \|\overline{z}\|_{q;\nu} \leq \\ \leq C_{P,q} \frac{p}{q} \|w\|_{p;\mu}^{\frac{p}{q}-1} \|\nabla w\|_{p;\mu} + \nu(\Omega)^{\frac{1}{q}-1} \|w\|_{\frac{p}{q};\nu}^{\frac{p}{q}} \leq \\ \leq C_{P,q} \frac{p}{q} D^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|w\|_{p;\nu}^{\frac{p}{q}-1} \|\nabla w\|_{p;\mu} + \nu(\Omega)^{\frac{1}{q}-1} \|w\|_{\frac{p}{q};\nu}^{\frac{p}{q}} . \end{aligned}$$

A questo punto, essendo $1 < \frac{p}{q} < p$, possiamo utilizzare sulla norma $\|\cdot\|_{\frac{p}{q};\nu}$ la classica disuguaglianza di interpolazione

$$\|\cdot\|_{\frac{p}{q};\nu} \le \|\cdot\|_{1;\nu}^{\frac{q-1}{p-1}} \|\cdot\|_{p;\nu}^{\frac{p-q}{p-1}},$$

arrivando quindi a

$$\|w\|_{p;\nu}^{\frac{p}{q}} \le C_{P,q}\frac{p}{q}D^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|w\|_{p;\nu}^{\frac{p}{q}-1} \|\nabla w\|_{p;\mu} + \nu(\Omega)^{\frac{1}{q}-1} \|w\|_{p;\nu}^{\frac{p}{q}(\frac{p-q}{p-1})} \|w\|_{1;\nu}^{\frac{p}{q}(\frac{q-1}{p-1})}.$$

Adesso è necessario portare a membro sinistro tutte le norme $\|\cdot\|_{p;\nu}$. A tale scopo è sufficiente applicare opportunamente al membro destro la seguente disuguaglianza numerica di Young:

$$ab \le \epsilon a^r + \left[(\epsilon r)^{-\frac{s}{r}} s^{-1}\right] b^s \quad \forall a, b, \epsilon > 0\,, \qquad \text{(A.4.8)}$$
$$\forall r, s \in (1,\infty) \text{ t.c. } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1\,.$$

Ponendo $K_1 = C_{P,q}\frac{p}{q}D^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ e $K_2 = \nu(\Omega)^{\frac{1}{q}-1}$, con le scelte

$$a_1 = \|w\|_{p;\nu}^{\frac{p}{q}-1},\ b_1 = \|\nabla w\|_{p;\mu}\,,\ \epsilon_1 = \frac{1}{4}K_1^{-1}\,,\ r_1 = \frac{p}{p-q}\,,\ s_1 = \frac{p}{q}$$

sul primo addendo e

$$a_2 = \|w\|_{p;\nu}^{\frac{p}{q}(\frac{p-q}{p-1})},\ b_2 = \|w\|_{1;\nu}^{\frac{p}{q}(\frac{q-1}{p-1})},\ \epsilon_2 = \frac{1}{4}K_2^{-1}\,,\ r_2 = \frac{p-1}{p-q}\,,\ s_2 = \frac{p-1}{q-1}$$

sul secondo, otteniamo:

$$\frac{1}{2}\|w\|_{p;\nu}^{\frac{p}{q}} \le K_1 \underbrace{\frac{q}{p}\left(\epsilon_1\frac{p}{p-q}\right)^{\frac{q-p}{q}}}_{E_1} \|\nabla v\|_{p;\mu}^{\frac{p}{q}} + K_2 \underbrace{\frac{q-1}{p-1}\left(\epsilon_2\frac{p-1}{p-q}\right)^{\frac{q-p}{q-1}}}_{E_2} \|w\|_{1;\nu}^{\frac{p}{q}}\,. \qquad \text{(A.4.9)}$$

Grazie alla proposizione A.3 possiamo estendere la disuguaglianza appena ricavata a tutte le funzioni di $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$. Consideriamo allora una qualsiasi funzione $w_0 \in W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ a *media nulla*; siccome dalle ipotesi sia ν che μ sono misure *finite* e $q < p$, chiaramente abbiamo anche $w_0 \in W^{1,q}(\Omega;\nu,\mu)$, perciò è possibile applicare a w_0 la (A.4.6). In particolare:

$$\|w_0\|_{1;\nu} \le \nu(\Omega)^{1-\frac{1}{q}} \|w_0\|_{q;\nu} \le$$
$$\le C_{P,q}\,\nu(\Omega)^{1-\frac{1}{q}} \|\nabla w_0\|_{q;\mu} \le C_{P,q}\,\nu(\Omega)^{1-\frac{1}{p}} \|\nabla w_0\|_{p;\mu}\,. \qquad \text{(A.4.10)}$$

Sostituendo la (A.4.10) nella (A.4.9) arriviamo facilmente a

$$\|w_0\|_{p;\nu} \le \left(2K_1E_1 + 2K_2E_2C_{P,q}^{\frac{p}{q}}\nu(\Omega)^{\frac{1}{q}(p-1)}\right)^{\frac{q}{p}} \|\nabla w_0\|_{p;\mu}\,;$$

ovvero, dopo qualche passaggio (si semplifica $\nu(\Omega)$),

$$\|w_0\|_{p;\nu} \le C_{P,p}\|\nabla w_0\|_{p;\mu} \qquad \text{(A.4.11)}$$

con

$$C_{P,p} = C_{P,q}\left[2^{\frac{2p-q}{q}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p-q}{q}}\left(\frac{p-q}{p}\right)^{\frac{p-q}{q}} D^{\frac{p-q}{q^2}} + 2^{\frac{2p-q-1}{q-1}}\frac{q-1}{p-1}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{p-q}{q-1}}\right]^{\frac{q}{p}} .$$

Per ottenere la (A.4.7) quando w è un generico elemento di $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ basta porre $w_0 = w - \overline{w}$ nella (A.4.11). □

Concludiamo con un'ulteriore, utile proprietà delle disuguaglianze di p-Poincaré. Date due coppie di pesi[5] $(\rho_{\nu_1},\rho_{\mu_1})$ e $(\rho_{\nu_2},\rho_{\mu_2})$ e posto $p\in[1,\infty)$ (il caso $p=\infty$ è triviale), se sappiamo che in $W_0^{1,p}(\Omega;\,\nu_1,\mu_1)$ vale la disuguaglianza di p-Poincaré (A.4.2) ed esistono due costanti D_ν e D_μ tali che

$$\rho_{\nu_2} \le D_\nu \rho_{\nu_1}\ ,\ \ \rho_{\mu_1} \le D_\mu \rho_{\mu_2}\ ,$$

è facile verificare come anche in $W_0^{1,p}(\Omega;\nu_2,\mu_2)$ deve valere la disuguaglianza di p-Poincaré; infatti, è sufficiente applicare la (A.4.2) a una qualsiasi funzione $v\in W_c^{1,\infty}(\Omega)$ e utilizzare le disuguaglianze

$$\|v\|_{p;\nu_2} \le D_\nu^{\frac{1}{p}}\|v\|_{p;\nu_1}\ ,\ \ \|\nabla v\|_{p;\mu_1} \le D_\mu^{\frac{1}{p}}\|\nabla v\|_{p;\mu_2}\ .$$

Per densità, il risultato si estende a tutto $W_0^{1,p}(\Omega;\nu_2,\mu_2)$.
Nel caso delle disuguaglianze di Poincaré con la media, assumendo le stesse ipotesi su $(\rho_{\nu_1},\rho_{\mu_1})$ e $(\rho_{\nu_2},\rho_{\mu_2})$, possiamo dimostrare un risultato analogo. Tuttavia, prima abbiamo bisogno della seguente

Proposizione A.10. *Siano $\nu(\Omega)<\infty$ e $p\in[1,\infty]$. In $W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$ vale la disuguaglianza di p-Poincaré con la media* (A.4.5) *se e solo esiste una costante C_P^* per la quale*

$$\inf_{c\in\mathbb{R}}\|v-c\|_{p;\nu} \le C_P^*\|\nabla v\|_{p;\mu} \quad \forall v\in W^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)\,. \tag{A.4.12}$$

Dimostrazione. L'implicazione inversa è immediata. L'implicazione diretta si prova applicando opportunamente alla quantità $\|\overline{v}-c\|_{p;\nu}$ la disuguaglianza di Hölder (per i dettagli, si veda [EO93, lemma 3.1]). □

A questo punto si procede come nel caso di $W_0^{1,p}(\Omega;\nu,\mu)$. Infatti, supponiamo che in $W^{1,p}(\Omega;\nu_1,\mu_1)$ valga la (A.4.5). Data $v\in L^\infty(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega;\nu_2;\mu_2)$, abbiamo anche che $v\in W^{1,p}(\Omega;\nu_1,\mu_1)$. Quindi, grazie alla proposizione A.10,

$$\inf_{c\in\mathbb{R}}\|v-c\|_{p;\nu_2} \le D_\nu^{\frac{1}{p}}\inf_{c\in\mathbb{R}}\|v-c\|_{p;\nu_1} \le D_\nu^{\frac{1}{p}}C_P^*\|\nabla v\|_{p;\mu_1} \le (D_\nu D_\mu)^{\frac{1}{p}}C_P^*\|\nabla v\|_{p;\mu_2}\ .$$

Dalle proposizioni A.3 e ancora A.10 ricaviamo subito che la disuguaglianza di p-Poincaré con la media vale anche nello spazio $W^{1,p}(\Omega;\nu_2,\mu_2)$.

[5] Che, ricordiamo, quando parliamo dello spazio $W_0^{1,p}(\Omega;\rho_\nu,\rho_\mu)$ richiediamo sempre essere *localmente finite*.

Ringraziamenti

Un primo, scontato ma altrettanto doveroso e sentito ringraziamento per la (si spera buona) riuscita di questa tesi va al prof. Grillo, per avermi guidato e sostenuto in tutte le fasi del lavoro, lasciandomi la giusta autonomia ma allo stesso tempo ponendomi in modo chiaro e onesto le questioni da affrontare di volta in volta. So che il mio istinto catastrofista non è sempre stato facile da tenere a bada, perciò lo ringrazio anche per avermi sopportato e supportato con numerosi (e talvolta immotivati. . .) slanci d'ottimismo, in periodi in cui nemmeno io mi sopportavo e mi accingevo a prendere decisioni semi-folli. La breve spedizione a Madrid da lui promossa si è rivelata una scelta azzeccata, e a tal proposito voglio ringraziare il prof. Juan Luis Vázquez e Matteo Bonforte per avermi ospitato qualche giorno alla Universidad Autónoma, con i quali ho avuto la possibilità di sostenere un'interessante e proficua discussione sui problemi di esistenza e unicità per la *WPME*.

Ringrazio tutti i compagni dei vari corsi che ho seguito a Ingegneria Matematica in questi anni, senza i quali questo lungo e faticoso percorso sarebbe stato molto più triste e grigio. Voi sapete a chi mi riferisco in particolare (o forse no).

Naturalmente non posso dimenticare la mia famiglia. Credo di essere stato tutto fuorché un buon esempio di come si concilia lo studio o una qualsiasi altra attività impegnativa con gli affetti. Proprio per questo vi ringrazio per non avermelo fatto pesare troppo, e per avermi capito in momenti nei quali, oggettivamente, c'era poco da capire. Mi auguro in futuro di riuscire a essere più presente (soprattutto con la testa).
Infine, uno speciale ringraziamento va ai miei nipoti Micaele e Alessandro: essere costantemente preso in giro da due fanciulli la cui somma delle età fa meno della metà dei miei anni è stato senza dubbio il modo più efficace per riportarmi, ogni tanto, ad una sana realtà.

Bibliografia

[Ada75] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York-London, 1975.

[AR81] N. D. Alikakos, R. Rostamian, *Large time behavior of solutions of Neumann boundary value problem for the porous medium equation*, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), no. 5, 749–785.

[Avk06] F. G. Avkhadiev, *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants*, Lobachevskii J. Math. 21 (2006), 3–31.

[AW10] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, *Weighted Hardy inequalities with sharp constants*, Lobachevskii J. Math. 31 (2010), no. 1, 1–7.

[BCG03] M. Bonforte, F. Cipriani, G. Grillo, *Ultracontractivity and convergence to equilibrium for supercritical quasilinear parabolic equations on Riemannian manifolds*, Adv. Differential Equations 8 (2003), no. 7, 843–872.

[BCLS95] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux, L. Saloff-Coste, *Sobolev inequalities in disguise*, Indiana Univ. Math. J. 44 (1995), no. 4, 1033–1074.

[BG05m] M. Bonforte, G. Grillo, *Asymptotics of the porous media equation via Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. 225 (2005), no. 1, 33–62.

[BG05p] M. Bonforte, G. Grillo, *Ultracontractive bounds for nonlinear evolution equations governed by the subcritical p-Laplacian*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 61, Trends in partial differential equations of mathematical physics, 15–26, Birkhäuser, Basel, 2005.

[BGV08] M. Bonforte, G. Grillo, J. L. Vázquez, *Fast diffusion flow on manifolds of nonpositive curvature*, J. Evol. Equ. 8 (2008), no. 1, 99–128.

[BK98] S. M. Buckley, P. Koskela, *New Poincaré inequalities from old*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 23 (1998), no. 1, 251–260.

[BL09] S. G. Bobkov, M. Ledoux, *Weighted Poincaré-type inequalities for Cauchy and other convex measures*, Ann. Probab. 37 (2009), no. 2, 403–427.

[Bré71] H. Brézis, *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations*, Contributions to nonlinear functional analysis, Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971, pp. 101–156, Academic Press, New York, 1971.

[Bré73] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.

[Bré83] *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[CG01] F. Cipriani, G. Grillo, *Uniform bounds for solutions to quasilinear parabolic equations*, J. Differential Equations 177 (2001), no. 1, 209–234.

[CG03] F. Cipriani, G. Grillo, *Nonlinear Markov semigroups, nonlinear Dirichlet forms and applications to minimal surfaces*, J. Reine Angew. Math. 562 (2003), 201–235.

[CW10] S.-K. Chua, R. L. Wheeden, *Weighted Poincaré inequalities on convex domains*, Math. Res. Lett. 17 (2010), no. 5, 993–1011.

[Dav07] E. B. Davies, *Linear operators and their spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Dav89] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Dav95] E. B. Davies, *Spectral theory and differential operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[DD08] I. Drelichman, R. G. Durán, *Improved Poincaré inequalities with weights*, J. Math. Anal. Appl. 347 (2008), no. 1, 286–293.

[DF92] E. Fabes, M. Fukushima, L. Gross, C. Kenig, M. Röckner, D. W. Stroock, *Dirichlet Forms. Lectures given at the First C.I.M.E. Session held in Varenna, June 8–19, 1992. Edited by G. Dell'Antonio and U. Mosco*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[DGGW08] J. Dolbeault, I. Gentil, A. Guillin, F.-Y. Wang, *L^q-functional inequalities and weighted porous media equations*, Potential Anal. 28 (2008), no. 1, 35–59.

[Eid90] D. Eidus, *The Cauchy problem for the nonlinear filtration equation in an inhomogeneous medium*, J. Differential Equations 84 (1990), no. 2, 309–318.

[EO93] D. E. Edmunds, B. Opic, *Weighted Poincaré and Friedrichs inequalities*, J. London Math. Soc. (2) 47 (1993), no. 1, 79–96.

[Eva98] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[GM77] M. E. Gurtin, R. C. MacCamy, *On the diffusion of biological populations*, Math. Biosci. 33 (1977), no. 1-2, 35–49.

[Gri10] G. Grillo, *On the equivalence between p-Poincaré inequalities and L^r-L^q regularization and decay estimates of certain nonlinear evolutions*, J. Differential Equations 249 (2010), no. 10, 2561–2576.

[Gro75] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975), no. 4, 1061–1083.

[Grs85] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[Hur90] R. Hurri, *The weighted Poincaré inequalities*, Math. Scand. 67 (1990), no. 1, 145–160.

[KO84] A. Kufner, B. Opic, *How to define reasonably weighted Sobolev spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 25 (1984), no. 3, 537–554.

[KO90] A. Kufner, B. Opic, *Hardy-type inequalities*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

[KRV10] S. Kamin, G. Reyes, J. L. Vázquez, *Long time behavior for the inhomogeneous PME in a medium with rapidly decaying density*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 26 (2010), no. 2, 521–549.

[Kuf85] A. Kufner, *Weighted Sobolev spaces*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.

[Lie96] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.

[LSU68] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.

[Min64] G. J. Minty, *On the monotonicity of the gradient of a convex function*, Pacific J. Math. 14 (1964), 243–247.

[Mos64] J. Moser, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure. Appl. Math. 17 (1964), 101–134.

[Mos71] J. Moser, *On a pointwise estimate for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971), 727–740.

[Mus37] M. Muskat, *The flow of homogeneous fluids through porous media*, McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1937.

[Nas58] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. 80 (1958), 931–954.

[Pan96] M. M. H. Pang, *L^1 and L^2 properties of a class of singular second order elliptic operators on $\mathbb{R}^N$ with measurable coefficients*, J. Differential Equations 129 (1996), no. 1, 1–17.

[RS80] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. Volume I. Functional analysis*, Second edition, Academic Press, New York, 1980.

[RV08] G. Reyes, J. L. Vázquez, *The inhomogeneous PME in several space dimensions. Existence and uniqueness of finite energy solutions*, Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008), 1275–1294.

[RV09] G. Reyes, J. L. Vázquez, *Long time behavior for the inhomogeneous PME in a medium with slowly decaying density*, Commun. Pure Appl. Anal. 8 (2009), no. 2, 493–508.

[Sal07] S. Salsa, *Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2004, ristampa con modifiche, 2007.

[Ste70] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[SV97] G. Savaré, A. Visintin, *Variational convergence of nonlinear diffusion equations: applications to concentrated capacity problems with change of phase*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 8 (1997), no. 1, 49–89.

[Töl11] J. M. Tölle, *Convergence of solutions to the p-Laplace evolution equation as p goes to 1*, arXiv:1103.0229v2 [math.AP].

[Váz07] J. L. Vázquez, *The porous medium equation. Mathematical theory*, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[Zie89] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation*, Springer-Verlag, New York, 1989.