

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale
Corso di Laurea specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e il
Territorio



**RESISTENZE AL MOTO NEI TRANSITORI DELLE
CORRENTI IN PRESSIONE
PROVE DI LABORATORIO E MODELLI MATEMATICI**

Relatore: Prof. Ing. Stefano Mambretti

Tesi di Laurea di:

Elia Grandini Matr. 755765

Anno Accademico 2010-2011

RINGRAZIAMENTI

Giunto al termine di questo lavoro di Tesi, voglio innanzitutto ringraziare la mia famiglia, che mi ha permesso di completare il percorso di studi intrapreso. In modo particolare e doveroso desidero invece ringraziare il Prof. Stefano Mambretti, per l'infinita disponibilità e professionalità con cui mi ha seguito; sono orgoglioso di aver avuto l'occasione di collaborare con lui per la realizzazione di questo progetto. Desidero inoltre ringraziare i miei compagni di corso con cui ho trascorso questi piacevoli anni di vita universitaria. Un sincero ringraziamento va infine a tutti coloro che hanno contribuito alla riuscita del lavoro nel Laboratorio di Idraulica. In maniera speciale desidero ringraziare Lando e Millo, per essersi sempre dimostrati disponibili e pazienti nei miei confronti, e per aver collaborato con grande entusiasmo.

INDICE

INTRODUZIONE	1
1. Moto vario in ipotesi elastiche	4
1.1 Teorema dell'impulso.....	5
1.1.1 <i>La celerità</i>	11
1.1.2 <i>Manovre brusche e manovre lente</i>	13
1.2 Equazioni del movimento.....	14
1.2.1 <i>L'equazione di continuità</i>	14
1.2.2 <i>Equazione del moto</i>	18
1.3 Il sistema risolvete.....	20
1.4 Definizione del problema della cavitazione.....	20
1.5 Analisi dei fattori fisici.....	21
1.5.1 <i>Sviluppo di aria disciolta</i>	21
1.5.2 <i>Comportamento delle bolle</i>	22
1.6 Modelli con cavitazione.....	24
1.7 Dissipazione di energia nel moto vario in presenza di cavitazione.....	24
1.7.1 <i>Modello matematico bidimensionale</i>	26
2. Apparato sperimentale	33
2.1 Descrizione dell'apparato strumentale.....	33
2.2 Stima della celerità.....	38
2.3 Il trasduttore di pressione Burster.....	39

2.4 Prove di moto permanente e calcolo della scabrezza	42
2.5 Il sensore di pressione Hydac.....	52
2.6 Prove statiche e di moto permanente con sensore Hydac	53
3. Metodi di integrazione numerica.....	59
3.1 Generalità	59
3.2 Condizione di CFL.....	61
3.2.1 Coefficiente di amplificazione.....	64
3.3 Forma conservativa e forma non conservativa	65
3.4 Metodo delle differenze finite	69
3.5 Metodo di Lax – Wendroff in un problema lineare	71
3.6 Metodo di Lax – Wendroff in un problema quasi-lineare.....	72
3.7 Applicazione del metodo	73
3.8 Discretizzazione alle differenze finite	74
3.9 Modello Lax – Wendroff con attrito	75
4. Prove sperimentali di moto vario.....	78
4.1 Modalità operative delle prove di moto vario.....	78
4.2 Realizzazione del colpo d'ariete – Configurazione I.....	79
4.3 Configurazione I - 1 ^a modifica: inserimento tubazione ad U.....	81
4.4 Configurazione I – 2 ^a modifica: spostamento elettrovalvola	88
4.5 Realizzazione del colpo d'ariete – Configurazione II.....	100
4.6 Configurazione II - 1 ^a modifica: inserimento tubazione trasparente	109
5. Moto vario e cavitazione: modelli numerici.....	114

5.1 Le resistenze al moto	114
5.2 Modelli IAB.....	116
5.2.1 Modello Brunone e Greco (1990).....	116
5.2.2 Modello Brunone et al. (1991a,b).....	119
5.3 Modelli MIAB.....	120
5.3.1 Modello Pezzinga (2000).....	120
5.3.2 Modello Ramos et al. (2004).....	122
5.4 Analisi della costante di smorzamento.....	123
5.4.1 Pezzinga (2000).....	124
5.4.2 Carravetta (1992).....	126
5.4.3 Vardy e Brown (1996).....	127
5.5 La cavitazione: modello semplificato di “Rottura di vena”	131
5.5.1 Collasso delle cavità.....	132
5.5.2 Dissipazioni energetiche.....	134
5.6 Modifica al modello.....	134
5.7 Ulteriori prove di laboratorio.....	135
5.8 Confronto tra dati sperimentali e modelli.....	136
5.8.1 Prove in assenza di cavitazione.....	136
5.8.2 Prove in presenza di cavitazione.....	139
6. Conclusioni.....	143
BIBLIOGRAFIA	147

INDICE DELLE FIGURE

Capitolo 1

Figura 1.1 Schema semplificato di impianto (<i>Mambretti, 2004</i>).....	5
Figura 1.2 Teorema dell'impulso (<i>Mambretti, 2004</i>).	7
Figura 1.3 Fasi del colpo d'ariete (<i>Defina, 2009</i>).....	9
Figura 1.4 Andamento nel tempo delle sovrappressioni all'otturatore.	10
Figura 1.5 Stato di pressione per le varie fasi del colpo d'ariete.	10
Figura 1.6 Abaco che rappresenta la variazione del valore di celerità in funzione di E/ε e D/e (<i>Citrini e Nosedà, 1975</i>).	12
Figura 1.7 Legge di chiusura dell'otturatore in ipotesi lineare.	13
Figura 1.8 Sovrappressione che si genera nel caso di chiusura lineare dell'otturatore (<i>Mambretti, 2004</i>).....	14
Figura 1.9 Rappresentazione del volume di controllo (<i>Mambretti, 2004</i>).....	15
Figura 1.10 Volume di controllo per la derivazione dell'equazione di moto (<i>Mambretti, 2004</i>)...	19
Figura 1.11 Relazione di equilibrio tra pressione esterna e raggio di una bolla (<i>Fanelli, 1983</i>)...	23
Figura 1.12 Confronto tra oscillazioni sperimentali e quelle calcolate (<i>TGCM</i>).	29
Figura 1.13 Confronto tra oscillazioni sperimentali e quelle calcolate (<i>GCM</i>).....	30
Figura 1.14 Confronto tra oscillazioni sperimentali e quelle calcolate (<i>RGCM</i>).....	31
Figura 1.15 Confronto tra oscillazioni sperimentali e quelle calcolate (<i>GCM</i>).....	31

Capitolo 2

Figura 2.1 Bobine di tubi utilizzate nell'impianto.	34
--	----

Figura 2.2 Misuratore magnetico di portata.....	35
Figura 2.3 Manicotto filettato con l'annesso rubinetto, presente a monte delle bobine.....	35
Figura 2.4 Elettrovalvola a chiusura molto rapida.....	36
Figura 2.5 Scatola elettrica sulla quale è installato l'interruttore che apre e chiude la valvola elettricamente.....	37
Figura 2.6 Manicotto filettato presente a valle.....	37
Figura 2.7 Trasduttore di pressione.....	39
Figura 2.8 Il trasduttore è dotato di amplificatore di segnale e di potenziometro.....	40
Figura 2.9 Pompa ad azionamento manuale e dispositivo tubolare utilizzati per la calibrazione del trasduttore.....	41
Figura 2.10 Manometrico metallico con fondo scala 4 bar.....	43
Figura 2.11 Manometro metallico con fondo scala 2.5 bar.....	44
Figura 2.12 Abaco di Moody.....	46
Figura 2.13 Grafico che mette in relazione i valori della perdita di carico ottenuti sperimentalmente, con quelli calcolati mediante la formula di Strickler.....	50
Figura 2.14 Modello Hydac HMG 3000.....	52
Figura 2.15 Sensore di pressione.....	53
Figura 2.16 Grafico che mette in relazione i valori della perdita di carico ottenuti sperimentalmente, con quelli calcolati mediante la formula di Strickler.....	57

Capitolo 3

Figura 3.1 Esempio di approccio esplicito (<i>Manni, 2006</i>).....	60
Figura 3.2 Esempio di approccio implicito (<i>Manni, 2006</i>).....	61
Figura 3.3 Dominio di Dipendenza Continuo (<i>Politi, 2006</i>).....	62
Figura 3.4 Dominio di Dipendenza Discreto (<i>Politi, 2006</i>).....	62

Figura 3.5 Caso favorevole: il dominio di Dipendenza Continuo è contenuto interamente in quello discreto (<i>Politi, 2006</i>).....	63
Figura 3.6 Caso sfavorevole: il dominio di Dipendenza Continuo contiene quello discreto (<i>Politi, 2006</i>).....	63
Figura 3.7 Interazione tra i domini, formulazione analitica (<i>Politi, 2006</i>).....	64
Figura 3.8 Sistemi di riferimento per le diverse formulazioni.	66
Figura 3.9 Volume di controllo considerato per ricavare la forma conservativa.....	67
Figura 3.10 Reticolo di discretizzazione.	70
Figura 3.11 Stencil per il metodo Lax – Wendroff.....	72

Capitolo 4

Figura 4.1 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo, per il caso di portata pari a 1.76 l/s.....	80
Figura 4.2 Saracinesca di regolazione "a farfalla".....	81
Figura 4.3 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo, per il caso di portata pari a 0.198 l/s (Trasduttore <i>Burster</i>).....	83
Figura 4.4 Colpo d'ariete con portata pari a 0.032 l/s (Trasduttore <i>Burster</i>).....	84
Figura 4.5 Colpo d'ariete con portata pari a 0.065 l/s (Trasduttore <i>Burster</i>).....	84
Figura 4.6 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo per una portata di 0.215 l/s (Sensore <i>Hydac</i>).....	86
Figura 4.7 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo per una portata di 0.148 l/s (Sensore <i>Hydac</i>).....	87
Figura 4.8 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo per una portata di 0.282 l/s (Sensore <i>Hydac</i>).....	87

Figura 4.9 Zoom che mostra la serie di oscillazioni in corrispondenza del picco massimo di sovrappressione (Trasduttore <i>Burster</i>).....	89
Figura 4.10 Zoom che mostra la serie di oscillazioni in corrispondenza del picco massimo di sovrappressione (Trasduttore <i>Burster</i>).....	89
Figura 4.11 Zoom che mostra la serie di oscillazioni in corrispondenza del picco massimo di sovrappressione (Trasduttore <i>Hydac</i>).....	90
Figura 4.12 Zoom che mostra la serie di oscillazioni in corrispondenza del picco massimo di sovrappressione (Trasduttore <i>Hydac</i>).....	90
Figura 4.13 Raccordo in ferro a forma di T che permette di avvitare i due sensori contemporaneamente.....	91
Figura 4.14 Grafico raffigurante l'andamento di entrambe le registrazioni per una portata pari a 0.198 l/s.....	93
Figura 4.15 Grafico che evidenzia come lo spostamento della valvola abbia contribuito a diminuire la "turbolenza" (le oscillazioni) nell'intorno del valore massimo registrato, per una portata pari a 0.198 l/s.	93
Figura 4.16 Grafico che evidenzia come lo spostamento della valvola abbia contribuito a diminuire la "turbolenza" (le oscillazioni) nell'intorno del valore massimo registrato, per una portata pari a 0.198 l/s.	94
Figura 4.17 Grafico raffigurante l'andamento di entrambe le registrazioni per una portata pari a 0.248 l/s.....	94
Figura 4.18 Grafico che evidenzia come lo spostamento della valvola abbia contribuito a diminuire la "turbolenza" (le oscillazioni) nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.248 l/s.	95
Figura 4.19 Grafico che evidenzia come lo spostamento della valvola abbia contribuito a diminuire la "turbolenza" (le oscillazioni) nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.248 l/s.	96

Figura 4.20 Grafico raffigurante l'andamento di entrambe le registrazioni per una portata pari a 0.648 l/s.....	96
Figura 4.21 Grafico che mostra le oscillazioni nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.648 l/s.	97
Figura 4.22 Grafico che mostra le oscillazioni nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.648 l/s.	97
Figura 4.23 Grafico raffigurante l'andamento di entrambe le registrazioni per una portata pari a 0.932 l/s.....	98
Figura 4.24 Grafico che mostra le oscillazioni nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.932 l/s.	98
Figura 4.25 Grafico che mostra le oscillazioni nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.932 l/s.	99
Figura 4.26 Ordine con cui sono posti gli strumenti: partendo da monte verso valle si trova il misuratore di portata, l'elettrovalvola, il manicotto e le due bobine.....	100
Figura 4.27 Tratto di tubazione che prosegue in verticale fino alla quota sommitale del soffitto, per poi dirigersi nuovamente verso il basso per lo scarico.....	101
Figura 4.28 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.365 l/s.....	105
Figura 4.29 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.698 l/s.....	105
Figura 4.30 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.882 l/s.....	106
Figura 4.31 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.148 l/s.....	107
Figura 4.32 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.948 l/s.....	107

Figura 4.33 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 1.697 l/s.....	108
Figura 4.34 Tubo in ferro (a valle dell'elettrovalvola) sostituito.	109
Figura 4.35 Flangia fissata con bulloni e dadi al resto dell'impianto.....	109
Figura 4.36 Tubo in pléxiglas con flange realizzate in PVC.....	110
Figura 4.37 Sequenza dei vari strumenti dopo la modifica.	110
Figura 4.38 Portata 141 litri/minuto: la valvola è appena stata chiusa ed il tubo non è più pieno.	111
Figura 4.39 Portata 141 litri/minuto: il fluido sta tornando indietro verso la valvola contro cui si infrange.	112
Figura 4.40 Portata 180 litri/minuto: la valvola è appena stata chiusa ed il tubo non è più pieno.	112
Figura 4.41 Portata 180 litri/minuto: il fluido sta tornando indietro verso la valvola contro cui si infrange.	113

Capitolo 5

Figura 5.1 Confronto tra la tipologia di modelli <i>IAB</i> e <i>MIAB</i> , nel caso in cui la sezione di chiusura sia per $x = 0$	121
Figura 5.2 Abaco da cui è possibile ricavare il valore di k (per $y_0 = 0.01$).	125
Figura 5.3 Esempio di grafico nel quale sono indicate due sovrappressioni a distanza di un periodo.....	126
Figura 5.4 Schematizzazione di un caso teorico.....	127
Figura 5.5 Profilo di velocità in moto turbolento.....	128
Figura 5.6 Profilo di velocità in una sezione prossima alla valvola per differenti istanti temporali di chiusura.....	128

Figura 5.7 Definizione di modello a tre strati.....	129
Figura 5.8 Grafico da cui si può ottenere il valore di k in funzione di Re	130
Figura 5.9 Collasso delle cavità all'aumentare della pressione idrostatica	132
Figura 5.10 Costruzione per via grafica della sovrappressione al momento del collasso di una cavità.	133
Figura 5.11 Confronto tra dati sperimentali e modello numerico introdotto (portata pari a 0.112 l/s).....	137
Figura 5.12 Confronto tra dati sperimentali e modello <i>Brunone e Greco (1990)</i> per una portata di 0.112 l/s.....	138
Figura 5.13 Grafico che mostra il confronto tra i dati sperimentali (test n°4) e il modello di moto uniforme (portata 3 l/s)	140
Figura 5.14 Grafico che mostra il confronto proposto anche in precedenza, con costante di smorzamento pari a 1.5 (portata 3 l/s).....	141

Capitolo 6

INDICE DELLE TABELLE

Capitolo 1

Capitolo 2

Tabella 2.1 Caratteristiche tecniche della tubazione delle bobine	44
Tabella 2.2 Risultati ottenuti da prove di moto permanente mediante l'utilizzo di due manometri metallici.	45
Tabella 2.3 Valori di scabrezza ottenuti (misure con manometri metallici).....	46
Tabella 2.4 Risultati ottenuti (misure con manometri metallici).	47
Tabella 2.5 Risultati ottenuti da prove di moto permanente mediante l'utilizzo del trasduttore di pressione.	48
Tabella 2.6 Valori di scabrezza ottenuti (misure con trasduttore).....	48
Tabella 2.7 Risultati ottenuti.....	49
Tabella 2.8 Valori di scabrezza ottenuti (misure con manometri metallici).....	51
Tabella 2.9 Valori di scabrezza ottenuti (misure con trasduttore).....	51
Tabella 2.10 Risultati ottenuti da prove di moto permanente mediante l'utilizzo del sensore Hydac.	54
Tabella 2.11 Valori di scabrezza ottenuti.	55
Tabella 2.12 Risultati ottenuti.....	56
Tabella 2.13 Risultati.....	58

Capitolo 3

Capitolo 4

Tabella 4.1 Valori di pressione corrispondenti alle varie portate (Trasduttore <i>Burster</i>).....	80
Tabella 4.2 Valori di pressione corrispondenti alle varie portate con la configurazione modificata (Trasduttore <i>Burster</i>).....	82
Tabella 4.3 Valori di pressione corrispondenti alle varie portate con la configurazione modificata (Sensore <i>Hydac</i>).....	85
Tabella 4.4 Valori ottenuti con il trasduttore di pressione della <i>BURSTER</i>	92
Tabella 4.5 Valori ottenuti con il trasduttore di pressione della <i>HYDAC</i>	92
Tabella 4.6 Risultati ottenuti con il trasduttore <i>BURSTER</i>	102
Tabella 4.7 Risultati ottenuti con il sensore <i>HYDAC</i>	102
Tabella 4.8 Risultati ottenuti con il trasduttore <i>BURSTER</i>	103
Tabella 4.9 Risultati ottenuti con il sensore <i>HYDAC</i>	104

Capitolo 5

Tabella 5.1 Dati delle prove sperimentali effettuate.....	136
---	-----

Capitolo 6

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro di Tesi si affronta il problema della modellazione del moto vario elastico in condotte in pressione e della valutazione delle resistenze che si sviluppano. Si tratta in maniera accurata la descrizione sia qualitativa che quantitativa del fenomeno, individuando anche un metodo di integrazione numerica adatto; il fulcro dell'intero lavoro è costituito dalle numerose prove sperimentali effettuate in laboratorio, su cui ci si basa per giungere alla definizione di diversi parametri e all'implementazione di un modello numerico capace di simulare le sovrappressioni di colpo d'ariete generate dalla chiusura "istantanea" di una valvola in presenza e in assenza di cavitazione.

Nel *Capitolo 1* viene illustrato il teorema dell'impulso e le formulazioni necessarie a calcolare le massime sovrappressioni che tale fenomeno può comportare all'interno delle condotte; viene inoltre descritta, per mezzo di uno schema di impianto semplificato, la natura oscillatoria del fenomeno. Ci si sofferma in particolare su un parametro fondamentale per il fenomeno stesso, ovvero la celerità di propagazione delle perturbazioni, di cui si riportano le relazioni utili al calcolo della stessa. Vengono definite inoltre le equazioni di *continuità* e *del moto* che reggono l'intero fenomeno, unitamente alla loro derivazione. Infine, viene affrontato il problema della *cavitazione*, descrivendolo sia dal punto qualitativo che analitico, e introducendo tutti i fattori da cui dipende e che comporta. In ultima analisi, si fa riferimento alla possibile modellazione della cavitazione, proponendo alcuni modelli presenti in letteratura e la trattazione di dissipazioni energetica proprio in presenza di questo fenomeno.

Nel *Capitolo 2* si procede alla descrizione dell'apparato sperimentale con tutte le varie componenti annesse. Si propone anche un valore di *celerità* stimato per la tubazione utilizzata. Successivamente si passa alla descrizione della strumentazione con cui sono state effettuate le prove di laboratorio; si esaminano in particolar modo i due sensori di pressione e le loro caratteristiche tecniche. Per ognuno dei due trasduttori vengono presentati i risultati ottenuti in condizioni statiche e di moto permanente: vengono poi illustrate diverse metodologie per giungere alla determinazione della scabrezza delle condotte, facendo riferimento ai risultati ottenuti con i vari strumenti utilizzati. Infine, si commentano i valori ottenuti per le diverse tipologie di strumenti e di modalità di calcolo, evidenziando quale sia la stima probabilmente più corretta e l'accuratezza delle varie misure.

Nel *Capitolo 3* vengono mostrati i vari metodi di integrazione numerica delle equazioni differenziali che governano il problema in esame. Vengono definiti i possibili approcci alle soluzioni e la condizione CFL. È stato affrontato anche il problema della scrittura delle equazioni in *forma conservativa* e *non conservativa*: dopo aver analizzato la differenza generale fra le due modalità di espressione si è passati da una formulazione delle equazioni di colpo d'ariete secondo uno schema non conservativo a una definizione delle equazioni del moto e di continuità in forma conservativa. Si pone particolare attenzione al metodo delle differenze finite, soffermandosi sulle condizioni da imporre per ottenere soluzioni reali e convergenti. Viene quindi descritto in dettaglio un metodo di integrazione numerica alle differenze finite, noto come *metodo di Lax – Wendroff al secondo ordine*. Vengono presentate le equazioni risolventi, contestualizzate nei vari ambiti in cui questa metodologia può essere applicata.

Nel *Capitolo 4* vengono descritte in maniera molto dettagliata le modalità operative con cui sono state eseguite le prove di moto vario; vengono illustrate le varie Configurazioni impiantistiche e le modifiche che sono state necessarie per poter migliorare i risultati ottenuti. Si tratta principalmente di due Configurazioni (*I* e *II*) alle quali sono state apportate diverse modifiche al fine di ottenere risultati in linea con quelli teorici attesi. In particolare ci si è soffermati ad analizzare gli effetti della turbolenza sulle sovrappressioni di moto vario, caso poco analizzato anche in letteratura, rilevato a causa della particolare vicinanza tra l'elettrovalvola e il misuratore di pressione. Diverse prove sono state ripetute per evidenziare e meglio valutare tale fenomeno, anche modificando la posizione della valvola rispetto al sensore di pressione. Il fenomeno è stato anche filmato, avendo inserito un condotto trasparente subito a valle della valvola.

Nel *Capitolo 5* si affronta il tema della modellazione delle resistenze al moto in presenza ed in assenza di cavitazione. Si introduce un metodo per la valutazione delle resistenze al moto del fluido in condotta che non consideri solamente le formule di moto uniforme, che non sono adatte a fornire risultati corretti. Per questo motivo occorre introdurre delle resistenze aggiuntive legate al profilo di velocità e delle sue modificazioni in condizioni di moto vario nelle condotte a seguito della chiusura "istantanea" di una valvola. Vengono quindi presentate due tipologie di modelli, descrivendo le equazioni necessarie per la definizione delle resistenze. Vengono analizzate in modo particolare le tecniche che permettono di definire, seppur con qualche approssimazione, la *costante di smorzamento* per moto vario, facendo riferimento ad alcuni metodi presenti in letteratura. In seguito si analizza il fenomeno della *rottura della vena idraulica*, o *cavitazione*, che può presentarsi nel caso in cui le pressioni registrate all'interno dell'impianto siano molto basse. Si descrive il fenomeno dal punto di vista fisico, evidenziando il carattere fortemente dissipativo dal punto di vista energetico del

fluido in condizioni cavitanti. Viene introdotto quindi un modello semplificato di *Rottura di vena*, in grado di valutare le resistenze al moto attraverso i metodi descritti in precedenza. Infine, si confrontano i risultati ottenuti per via sperimentale con quelli ricavati dai modelli presentati, sia in presenza che in assenza di cavitazione.

Nel *Capitolo 6* si commentano i risultati ottenuti, evidenziando i pregi e i limiti dei vari modelli di resistenza al moto durante i transitori nelle condotte in pressione introdotti e descritti. Ci si sofferma inoltre sulla necessità di poter disporre di modelli numerici più avanzati per una più accurata simulazione dei dati sperimentali, senza tralasciare il fatto che i modelli analizzati in certe situazioni funzionano abbastanza correttamente.

1

Moto vario in ipotesi elastiche

Le variazioni della portata di regime in condotte in pressione generano processi di moto vario che possono essere dannosi in quanto provocano oscillazioni di pressione rispetto al valore di regime. Tale instabilità è caratterizzata principalmente dalla continua variazione da istante a istante e da sezione a sezione di grandezze quali *pressione e velocità (o portata)*. È importante studiare tali fenomeni in fase di progetto per poterli prevedere, al fine di diminuirne gli effetti mediante l'introduzione di opportuni dispositivi di protezione o, ove possibile, variare il funzionamento dell'impianto. Le equazioni del moto vario in cui si tenga conto della comprimibilità dell'acqua e della deformabilità della condotta (ipotesi elastica) sono equazioni differenziali a derivate parziali di tipo iperbolico. A seguito dell'ipotesi elastica, le onde di pressione e di portata si propagano lungo la condotta con una celerità finita. Per la risoluzione del problema è necessario altresì porre opportune condizioni iniziali e al contorno. In certi casi è accettabile trascurare la comprimibilità dell'acqua e la deformabilità della condotta (ipotesi anelastica), il che equivale a dire che la celerità delle

perturbazioni è infinita. In tale situazione il problema si può ridurre all'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria. Il moto vario può così essere suddiviso in due diverse classificazioni: il moto vario elastico, detto anche *colpo d'ariete*, ed il moto vario anelastico, chiamato anche *oscillazioni di massa*. Risulta di notevole importanza studiare tale fenomeno in quanto è in grado di produrre importanti stati di sovrappressione o forti depressioni, che si alternano con frequenze molto elevate.

1.1 Teorema dell'impulso

In questo paragrafo vengono trattati fenomeni periodici di moto vario nelle condotte, che conseguono all'avviamento ed alle manovre di regolazione che si presentano all'esercizio. Vengono fatte qui due ipotesi semplificative (Citrini e Nosedà, 1975):

- il fluido sia comprimibile;
- la condotta sia costituita da materiale indeformabile ($\frac{\partial A}{\partial t} = 0$).

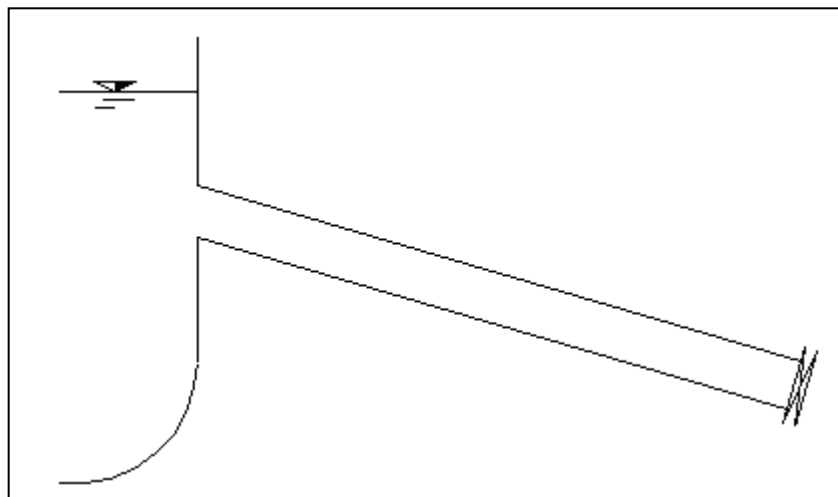


Figura 1.1 Schema semplificato di impianto (Mambretti, 2004).

Considerando il semplice schema rappresentato in *figura 1.1* (nel quale si assumono trascurabili l'energia cinetica e le perdite di carico) è possibile fare una serie di considerazioni. Poiché il serbatoio di alimento, posto a monte del sistema, viene considerato di grandi dimensioni, è possibile ritenere che la quota z_A del pelo libero del bacino rimanga inalterata qualunque siano le condizioni di moto. Da questo serbatoio parte successivamente una condotta di forma cilindrica, con lunghezza L e di sezione trasversale costante A , chiusa all'estremità di valle da un organo otturatore che consente di regolare il deflusso.

Quando l'otturatore è completamente aperto ed il moto in regime permanente, sia V_0 la velocità media della corrente in condotta. Poiché tale velocità è normalmente dell'ordine di qualche metro al secondo, l'altezza cinetica corrispondente assume valori limitati e di norma trascurabili rispetto alle altezze piezometriche in gioco. Trascurando per ipotesi anche le perdite di carico, la piezometrica e la linea dei carichi totali coincidono tra loro e con l'orizzontale alla quota del pelo libero nel serbatoio. All'arresto istantaneo del deflusso nella sezione terminale non può corrispondere l'arresto altrettanto istantaneo di tutta la massa d'acqua contenuta nel condotto perché questo comporterebbe l'annullamento di tutta la sua quantità di moto e quindi, per il teorema della quantità di moto, un incremento infinito della pressione nella tubazione.

Quindi nell'intervallo di tempo infinitesimo dt immediatamente seguente alla chiusura dell'otturatore, si nota che subito a monte di questo si ha l'arresto soltanto di un volume infinitesimo di lunghezza ds di fluido, mentre la restante parte della colonna liquida continua a muoversi con la velocità iniziale V_0 . Il fatto che si sia fermato il volume $A \cdot ds$ (cioè la massa $\rho \cdot A \cdot ds$) significa che si è avuta, per tale massa, una variazione della quantità di moto pari a $\rho \cdot A \cdot ds \cdot V_0$. Questa variazione deve essere perciò equilibrata con la nascita di un impulso di forze agenti sulla massa stessa, date dalla sovrappressione Δp che si genera all'otturatore e quindi pari a $A \cdot \Delta p \cdot dt$.

Di conseguenza si ha:

$$\rho \cdot A \cdot ds \cdot V_0 = A \cdot \Delta p \cdot dt$$

da cui:

$$\Delta p = \rho \cdot \frac{ds}{dt} \cdot V_0$$

Detta $c = \frac{ds}{dt}$ la celerità di propagazione della perturbazione in condotta, si ha in definitiva:

$$\Delta p = \rho \cdot c \cdot V_0 \quad (1.1)$$

La *figura 1.2* permette una migliore comprensione del fenomeno e della simbologia adottata per descrivere la fase di arresto della colonna liquida a seguito di una manovra di chiusura dell'otturatore.

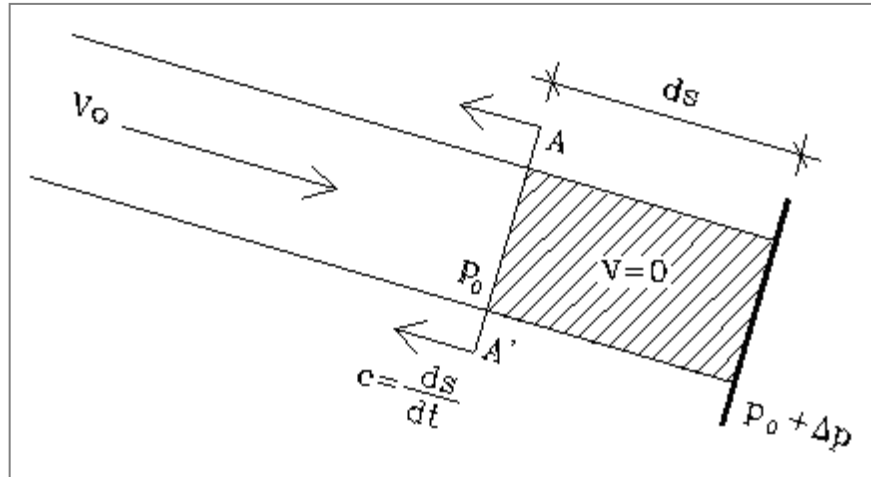


Figura 1.2 Teorema dell'impulso (Mambretti, 2004).

La sovrappressione scritta nei termini di altezza di colonna d'acqua (Citrini e Nosedà, 1975) deriva immediatamente dall'eq. 1.1 (formula di Allievi-Joukowsky):

$$\Delta h = \frac{c}{g} \cdot V_0 \quad (1.2)$$

Negli istanti seguenti si verifica l'arresto degli strati successivi di fluido nei quali la pressione assume ancora il valore dato dall'eq. 1.1, come si dimostra applicando ripetutamente il teorema dell'impulso. L'onda di sovrappressione si propaga quindi con celerità c verso il serbatoio di monte, che raggiunge nel tempo $t_1 = \frac{L}{c}$. Quando $t < t_1$ il condotto risulta diviso in due parti: l'una di lunghezza s , posta a valle, nella quale la velocità è nulla e la pressione è ovunque aumentata di $\rho \cdot c \cdot V_0$; l'altra di lunghezza $L - s$, posta a monte, nella quale vigono ancora le condizioni di moto uniforme. Al tempo t_1 l'onda di sovrappressione raggiunge il serbatoio di monte dove il carico è costante. In questo istante, di conseguenza, si crea una differenza di carico sulla sezione di imbocco dal serbatoio, mentre tutto il liquido (sia quello contenuto in condotta, sia quello nel serbatoio) è fermo. A causa di questa differenza di pressione l'acqua comincia a fluire dalla condotta al serbatoio, con velocità $-V_0$, mentre la pressione torna ad essere pari a quella in condizioni di moto permanente. Questa seconda fase permane fino al tempo $t_2 = \frac{2L}{c}$, quando cioè l'onda di perturbazione raggiunge nuovamente l'otturatore di valle.

Nel tempo $t_1 < t < t_2$ il condotto è ancora diviso in due tratti: quello a monte, nel quale la corrente è in movimento con velocità $-V_0$ con pressione pari a quella di moto permanente, e quello a valle, nel quale il fluido è fermo e la pressione pari a quella di moto permanente incrementata della sovrappressione di moto vario, in cui è possibile valutarne il valore analiticamente tramite la relazione 1.1.

Al tempo t_2 , al termine quindi della seconda fase, la perturbazione raggiunge nuovamente la sezione dell'otturatore dove evidentemente la velocità deve essere nulla. Con ragionamento analogo a quello della fase iniziale, tenendo conto che la velocità in condotto in questo istante è pari a $-V_0$, la riflessione dell'onda induce delle sovrappressioni pari a $\Delta p = -\rho \cdot c \cdot V_0$. La terza e la quarta fase sono quindi del tutto analoghe, rispettivamente, alla prima ed alla seconda, anche se in questo caso le sovrappressioni indotte sono di segno opposto. Al tempo $t_4 = \frac{4L}{c}$ si riproducono le condizioni iniziali e, quindi, si è nella situazione di ricominciare un nuovo ciclo di oscillazioni di pressione. Ovviamente tale fenomeno risulta essere infinito solo nel caso ideale; in condizioni reali infatti le variazioni indotte sui carichi e sulle velocità, a seguito della manovra, subiscono un graduale smorzamento nel tempo per effetto delle perdite che nascono nelle continue trasformazioni di energia da cinetica ad elastica (e viceversa), portando così il fenomeno ad attenuarsi in un tempo finito. In *figura 1.3* sono mostrate, in maniera schematizzata, le varie fasi del colpo d'ariete che accompagnano ogni singola manovra dell'otturatore.

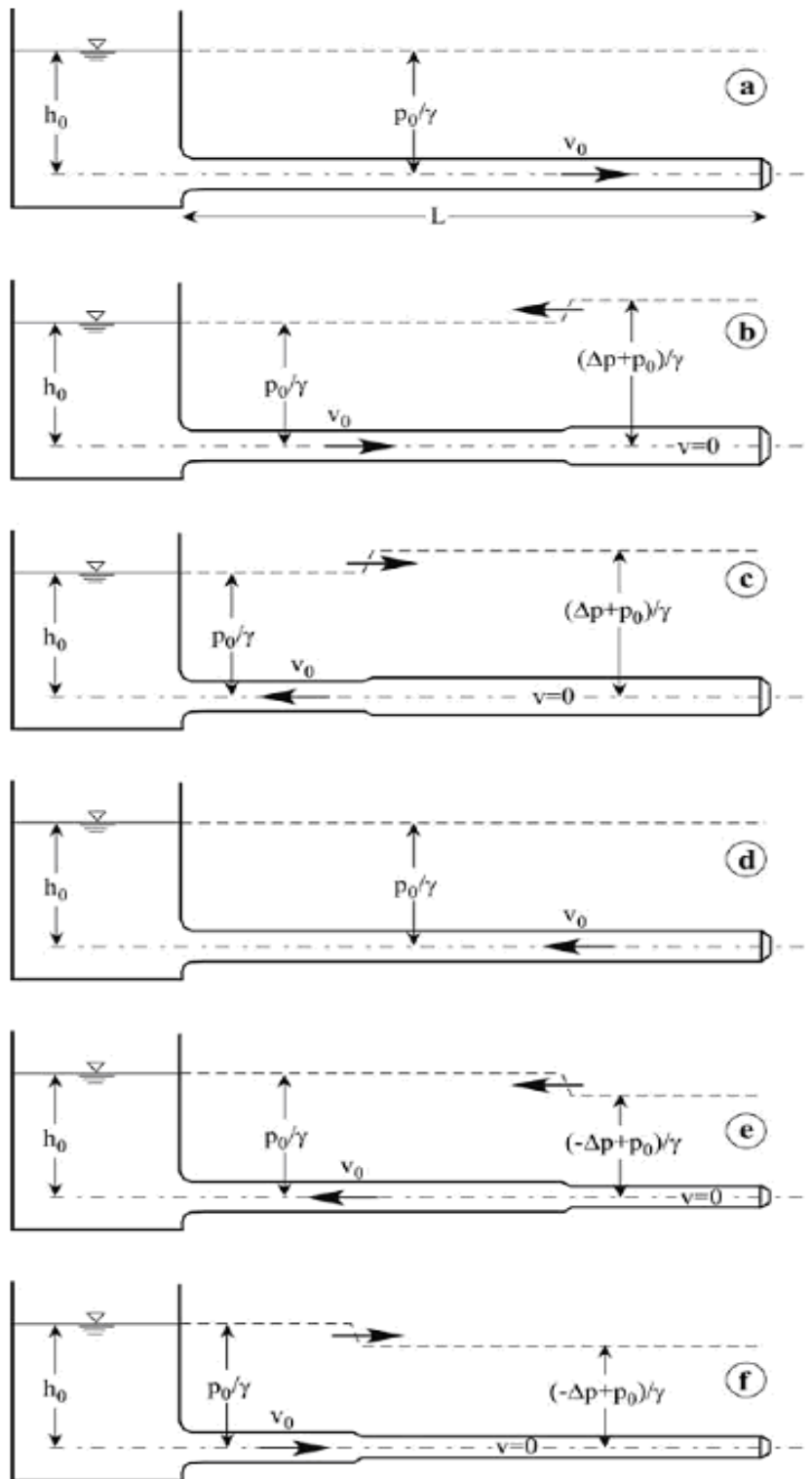


Figura 1.3 Fasi del colpo d'ariete (Defina, 2009).

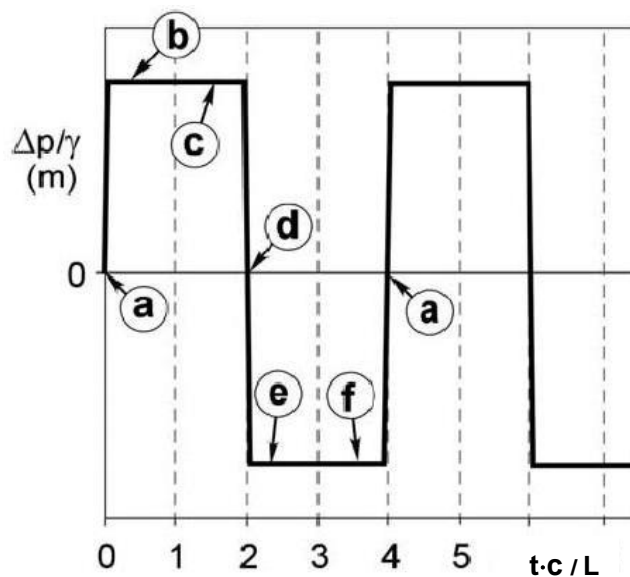


Figura 1.4 Andamento nel tempo delle sovrappressioni all'otturatore.

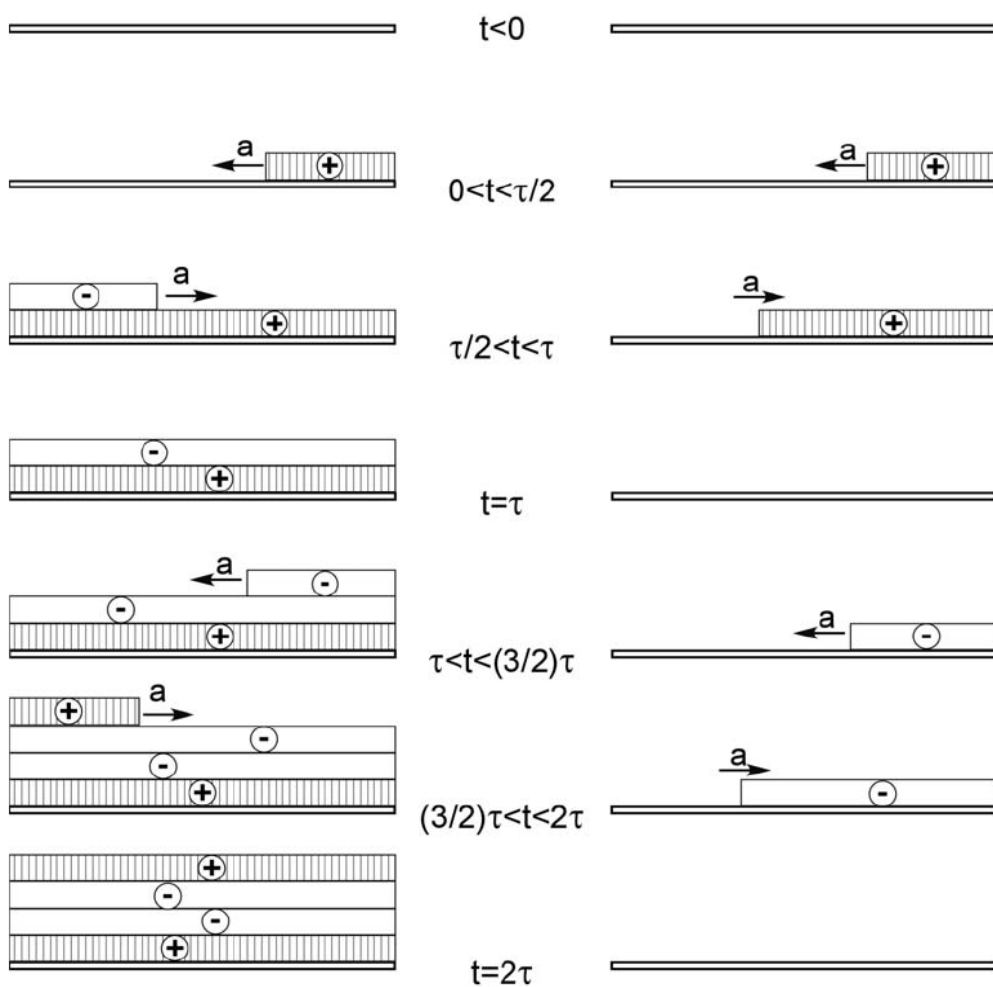


Figura 1.5 Stato di pressione per le varie fasi del colpo d'ariete.

1.1.1 La celerità

Come si è potuto notare tutte le caratteristiche essenziali del processo di colpo di ariete dipendono dal valore di celerità c con cui si muovono le perturbazioni elastiche nel liquido. L'obiettivo è ora quello di definire analiticamente, a partire dalle condizioni meccaniche del fluido e della condotta considerati, i valori di c sia nel caso generale di condotta indeformabile che in quello in cui si tiene conto della deformabilità della tubazione (*Citrini e Nosedà, 1975*). Il modulo di elasticità di volume (o coefficiente di comprimibilità cubica dell'acqua) ε è definito dalla seguente equazione:

$$\varepsilon = \rho \cdot \frac{dp}{d\rho} \quad (1.3)$$

Sempre per quanto riguarda il caso di condotta indeformabile, si consideri nuovamente la *figura 1.2* a seguito di una chiusura istantanea dove è rappresentata la situazione ad un generico tempo t . Nel successivo intervallo di tempo dt la sezione che separa il fluido fermo da quello in movimento non è più la $A - A'$ perché la perturbazione si sposta verso monte; invece la sezione $A - A'$ si sposta verso valle di una distanza pari a $V_0 \cdot dt$ e corrispondentemente il volume compreso tra l'otturatore e la detta sezione diminuisce di una quantità:

$$dW = -A \cdot V_0 \cdot dt \quad (1.4)$$

Contemporaneamente, però, sullo stesso volume è intervenuto un aumento di pressione dato dall'*eq. 1.1* al quale, per l'*eq. 1.3*, corrisponde una diminuzione di volume:

$$dW = -\frac{W \cdot \Delta p}{\varepsilon} = \frac{A \cdot \rho \cdot c \cdot V_0}{\varepsilon} \cdot ds \quad (1.5)$$

Uguagliando le *eq. 1.4* e *1.5* e ricordando che $c = \frac{ds}{dt}$ si ottiene:

$$c = c^* = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} \quad (1.6)$$

Questo valore corrisponde alla celerità del suono nel liquido. Per l'acqua a 8°C si ha $c \cong 1425 \text{ m/s}$ che aumenta di circa 3 m/s per ogni grado di aumento della temperatura. Se il liquido è maggiormente comprimibile, come nel caso di alcuni oli combustibili, la celerità diminuisce.

Nel caso in cui si consideri anche la deformabilità della condotta, è possibile stimare il valore di celerità attraverso una relazione differente che viene riportata senza una dimostrazione rigorosa. Si assume che la condotta sia costituita da un materiale elastico rispondente alla legge di *Hooke*, in cui lo spessore è piccolo rispetto al diametro.

Con questa considerazione aggiuntiva l'eq. 1.6 diviene:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \lambda \cdot \frac{\varepsilon \cdot D}{E \cdot e}}} \quad (1.7)$$

dove:

- D = diametro della condotta;
- e = spessore della condotta;
- E = modulo di elasticità del materiale;
- ε = modulo di comprimibilità dell'acqua;
- λ = coefficiente che tiene conto delle condizioni di giunzione tra i diversi tubi e che assume valore unitario per condotta singola.

Il grafico in figura 1.6 rappresenta il rapporto c^*/c in funzione di E/ε e D/e : esso mostra che la celerità è tanto minore quanto più sottile è il tubo e quanto minore è il suo modulo di velocità, vale a dire quanto più è deformabile il condotto. Nel caso di condotti in acciaio si assume usualmente $c = 1000 \text{ m/s}$, mentre per condotti in materiale plastico questo valore può scendere ulteriormente.

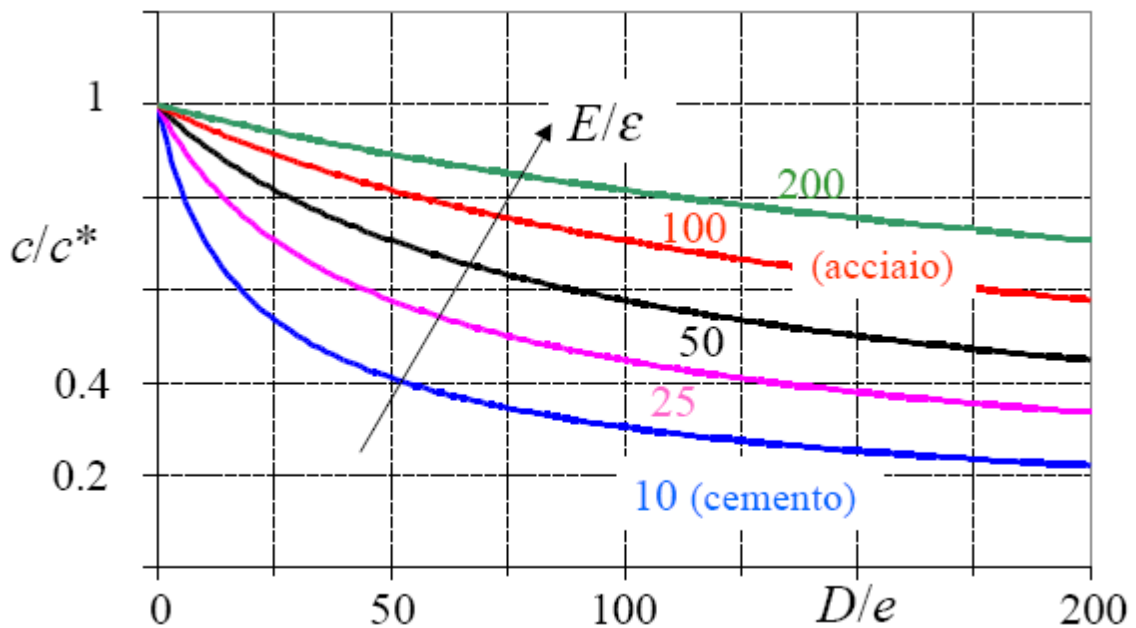


Figura 1.6 Abaco che rappresenta la variazione del valore di celerità in funzione di E/ε e D/e (Citrini e Nosedà, 1975).

1.1.2 Manovre brusche e manovre lente

Si consideri ora, in luogo della manovra istantanea della quale si è fin qui trattato, una chiusura dell'otturatore in un tempo t finito e maggiore di zero. Per semplicità, si supponga che la chiusura della valvola avvenga con una legge che consente di esprimere la velocità V nella sezione di valle al generico tempo t con un'espressione lineare del tipo:

$$\begin{cases} V(t) = V_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{T_c}\right) & \text{per } t \leq T_c \\ V(t) = 0 & \text{per } t > T_c \end{cases} \quad (1.8)$$

V_0 rappresenta la velocità media in moto permanente e T_c il tempo di chiusura dell'otturatore:

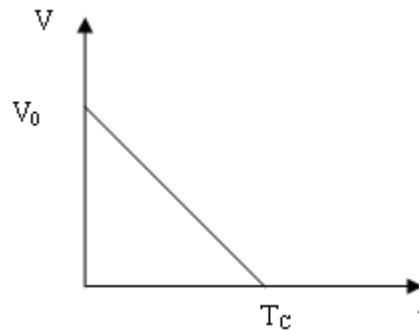


Figura 1.7 Legge di chiusura dell'otturatore in ipotesi lineare.

Nella situazione presa in esame la manovra dell'otturatore determina la formazione di una serie continua di onde di perturbazione ascendenti, che sono le uniche ad interessare la corrente in una prima fase, detta di *colpo diretto*. In questo caso la pressione all'otturatore è data genericamente da:

$$\Delta p = \rho \cdot c \cdot \Delta V$$

Ad un tempo $t > T_c$ nella sezione all'otturatore la corrente è ferma e la sovrappressione di moto vario è ancora data dall'eq. 1.1. Il fronte dell'onda di sovrappressione non è più verticale, come nel caso della figura 1.3 (si consideri sempre la prima fase), ma inclinato, come visibile nella successiva figura 1.4. Diminuendo linearmente la velocità dell'otturatore si ha, di riflesso, un aumento lineare delle sovrappressioni di moto vario.

Si consideri ora che, come è noto, quando la perturbazione raggiunge la sezione del serbatoio, viene riflessa di nuovo verso valle, dove si propaga come perturbazione discendente. Se la condotta è sufficientemente corta, ovvero se la manovra ha durata sufficientemente lunga da non essere ancora terminata quando si ha l'arrivo dell'onda riflessa, cioè dopo un tempo (detto durata della fase di colpo diretto o ritmo) pari a

$$\tau_0 = \frac{2L}{c} \quad (1.9)$$

l'onda di sovrappressione all'otturatore non ha il tempo di svilupparsi completamente.

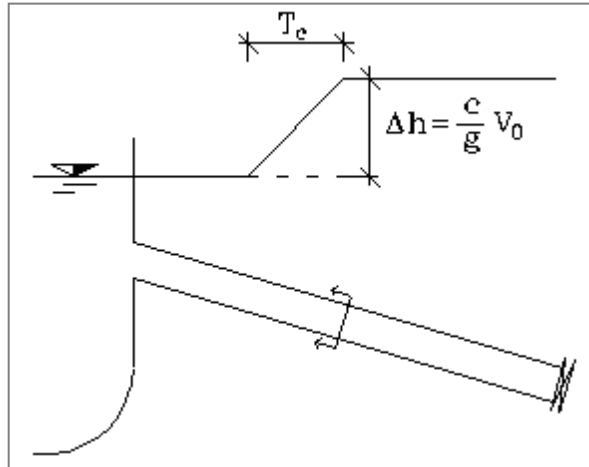


Figura 1.8 Sovrappressione che si genera nel caso di chiusura lineare dell'otturatore (Mambretti, 2004).

In altri termini, se la durata della fase di colpo diretto τ_0 è inferiore al tempo di chiusura dell'otturatore T_c (cioè $\tau_0 < T_c$), il massimo della sovrappressione viene raggiunto all'istante $t = \tau_0$ ed è ricavabile tramite la formula di Michaud:

$$\Delta p = \pm \rho \cdot c \cdot V_0 \cdot \frac{\tau_0}{T_c} \quad (1.10)$$

avendo indicato con V_0 la velocità all'otturatore all'istante τ_0 . In questo caso la manovra si dice *lenta*, in quanto più lenta del tempo di andata e ritorno dell'onda di sovrappressione. Come è ovvio, invece, se $\tau_0 > T_c$ la massima sovrappressione all'otturatore è data ancora dall'eq. 1.1. In questo caso la manovra si dice *brusca o veloce*.

1.2 Equazioni del movimento

Nel caso del moto vario elastico, non si può prescindere dall'ipotesi dell'elasticità del fluido; nelle applicazioni pratiche, è necessario tenere in considerazione anche l'elasticità del condotto, per cui il valore della celerità si calcola tramite l'eq. 1.7. Le equazioni sono le classiche del moto e di continuità monodimensionali. Nella trattazione qui adottata la corrente viene caratterizzata mediante la sua velocità media $(x, t) = \frac{Q(x, t)}{A(x, t)}$ ed il valore della pressione $p(x, t)$ nel baricentro della sezione.

1.2.1 L'equazione di continuità

Per poter definire l'equazione di continuità nel caso di moto vario elastico si ha la necessità di generalizzare ipotesi fatte nel paragrafo precedente. Si dovrà perciò ritenere che (Mambretti, 2004):

- il fluido sia comprimibile, cioè le fluttuazioni della pressione generano variazioni di massa legate a variazioni della densità del fluido;
- le fluttuazioni di pressione comportano sia variazioni di forma della sezione trasversale della corrente che allungamenti o accorciamenti della tubazione in direzione assiale.

L'equazione di continuità è derivata con riferimento ad un volume di controllo fisso rispetto alla condotta, che quindi ne segue ogni deformazione. Lo schema ed i simboli sono definiti nella figura 1.9.

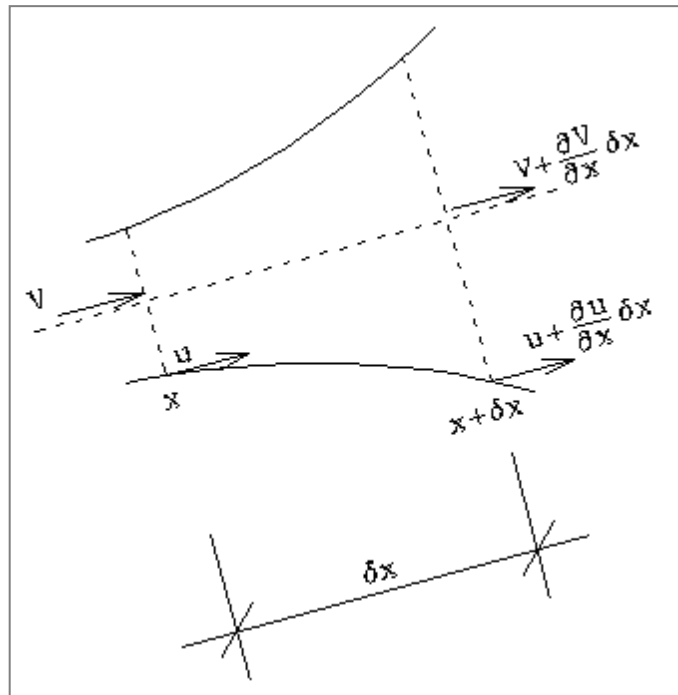


Figura 1.9 Rappresentazione del volume di controllo (Mambretti, 2004).

Detta u la velocità con la quale la parete del tubo si muove nella direzione e nel verso dell'asse della condotta, la massa entrante nel volume di controllo attraverso la sezione di monte nell'unità di tempo è $\rho \cdot A \cdot (V - u)$, mentre la massa uscente dalla sezione di valle, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è pari a:

$$\rho \cdot A \cdot (V - u) + \frac{\partial[\rho \cdot A \cdot (V - u)]}{\partial x} \cdot \delta x \quad (1.11)$$

La differenza tra massa entrante ed uscente nell'unità di tempo deve eguagliare l'aumento della massa contenuta nel volume di controllo nello stesso tempo, quindi, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore, si ha:

$$-\frac{\partial[\rho \cdot A \cdot (V - u)]}{\partial x} \cdot \delta x = \frac{D'}{Dt}(\rho \cdot A \cdot \delta x)$$

avendo indicato con il simbolo $\frac{D'}{Dt}$ la *derivata totale* rispetto al moto assiale del tubo.

Sviluppando:

$$\frac{D'}{Dt}(\rho \cdot A \cdot \delta x) = \delta x \frac{D'}{Dt}(\rho \cdot A) + (\rho \cdot A) \frac{D'}{Dt}(\delta x)$$

Tenendo conto del fatto che

$$\frac{D'}{Dt}(\delta x) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \delta x$$

Si può scrivere:

$$\frac{D'}{Dt}(\rho \cdot A \cdot \delta x) = \delta x \frac{D'}{Dt}(\rho \cdot A) + u_x \cdot \delta x$$

$$\frac{D'}{Dt}(\rho \cdot A) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial x}{\partial t}(\rho A)_x = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + u \cdot (\rho A)_x$$

Quindi si giunge a:

$$\frac{\partial(\rho \cdot A \cdot V)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} = 0$$

Riordinando ulteriormente ed indicando con un punto posto al di sopra della variabile la *derivata sostanziale* rispetto al moto medio della corrente:

$$\frac{(\rho_t + V\rho_x)}{\rho} + \frac{A_t + VA_x}{A} + V_x = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (1.12)$$

Si deve osservare come finora si sia trattato il caso più generale, senza porre ipotesi né sulla forma della tubazione, né sul suo materiale costituente o su quello trasportato. Si introducono ora delle ipotesi del tutto comuni nei casi pratici dell'Ingegneria Idraulica:

- Si supponga che il fluido sia newtoniano, ovvero che, detto ε il modulo di comprimibilità cubica del fluido, la sua legge costitutiva sia:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{p}}{\varepsilon} \quad (1.13)$$

- Si supponga che la condotta sia cilindrica a sezione circolare. Detto ξ_D l'allungamento unitario del diametro, si ha:

$$\frac{\dot{A}}{A} = 2 \cdot \frac{\dot{D}}{D} = 2 \cdot \xi_D$$

Si supponga che il materiale della condotta sia, per quanto riguarda le proprietà meccaniche, omogeneo ed isotropo, che abbia comportamento elastico lineare e che lo spessore della parete s sia trascurabile rispetto al diametro. Si può quindi scrivere la legge di *Hooke* per gli stati di sforzo bidimensionali, ovvero:

$$\xi_C = \xi_D = \frac{\sigma_C - \mu \cdot \sigma_x}{E}$$

$$\xi_x = \frac{\sigma_x - \mu \cdot \sigma_C}{E}$$

dove:

- ξ_c rappresenta l'allungamento unitario della parete in direzione circonferenziale;
- ξ_x rappresenta l'allungamento unitario della parete in direzione assiale;
- σ_c rappresenta lo sforzo normale in direzione circonferenziale;
- σ_x rappresenta lo sforzo normale in direzione assiale;
- μ è il coefficiente di Poisson ($0 \leq \mu \leq 0.5$);
- E è il modulo di elasticità del materiale costituente la condotta.

Se la pressione è sufficientemente elevata, si può considerare che le sue variazioni sulla generica sezione della condotta siano trascurabili, ovvero che la pressione p si possa considerare costante lungo il contorno della sezione, per cui si può dedurre la formula di *Mariotte*:

$$\sigma_c = \frac{p \cdot D}{2 \cdot s}$$

Lo sforzo assiale dipende dai vincoli imposti alla condotta. Se la condotta è libera di espandersi o contrarsi in direzione assiale, lo sforzo assiale risulta sempre nullo (è questo il caso di una tubazione con frequenti giunti di dilatazione), per cui $\sigma_x = 0$. Al contrario, se la condotta è vincolata in modo tale che qualsiasi deformazione assiale risulta impedita, si ha ovviamente $\xi_x = 0$. In sintesi, nel caso di sforzo assiale nullo la seconda condizione diviene

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{p \cdot D}{E \cdot s}$$

mentre nel secondo caso (deformazione assiale nulla) diviene

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{D'}{Dt} \left(\frac{p \cdot D}{E \cdot s} \cdot (1 - \mu^2) \right)$$

che si può condensare nella

$$\frac{\dot{A}}{A} = \left(\lambda \cdot \frac{\dot{p} \cdot D}{E \cdot s} \right)$$

dove λ varia al variare delle condizioni di vincolo, tra 0.75 e 1. Questo parametro dipende solo da μ che, a seguito delle ipotesi sul materiale, è costante nello spazio e nel tempo. Per le precedenti ipotesi sulla trascurabilità dello spessore rispetto al diametro, e quindi per l'accettabilità di uno stato di sforzo bidimensionale, anche s risulta costante nello spazio e nel tempo. Di conseguenza la precedente si semplifica nella:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\lambda}{E \cdot s} \cdot (\dot{p} \cdot D + p \cdot \dot{D})$$

Essendo $\dot{D} = \frac{D}{2} \cdot \frac{\dot{A}}{A}$, sostituendo ed estraendo $\frac{\dot{A}}{A}$ si ottiene:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\lambda \cdot \frac{\dot{p} \cdot D}{E \cdot s}}{1 - \lambda \cdot \frac{p \cdot D}{2 \cdot E \cdot s}}$$

Nelle normali applicazioni, poiché il denominatore del secondo membro è praticamente pari all'unità, si ha una decisa semplificazione della precedente espressione. Questa relazione semplificata, viene sostituita nell'equazione di continuità (1.12) tenendo in conto anche dell'eq. 1.13, ottenendo:

$$\lambda \cdot \frac{\dot{p} \cdot D}{E \cdot s} + \frac{\dot{p}}{\varepsilon} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

che si può anche scrivere come:

$$\frac{\dot{p}}{\rho} \cdot \frac{1 + \lambda \cdot \frac{\varepsilon \cdot D}{E \cdot s}}{\frac{\varepsilon}{\rho}} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Poiché il termine di celerità, nel caso di condotta deformabile, può essere espressa tramite l'eq. 1.7, la precedente diviene:

$$\dot{p} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

e svolgendo la derivata sostanziale infine si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{Equazione di continuità} \quad (1.14)$$

1.2.2 Equazione del moto

L'equazione del moto viene ricavata applicando l'equazione dell'equilibrio dinamico ad un elemento di corrente compreso tra due sezioni di condotta distanti tra loro δx (Marchi e Rubatta, 1981). In figura 1.10 è mostrato il volume di controllo con le forze che su di esso intervengono:

- la componente assiale del peso del volume di fluido: $G \cdot \sin \alpha = -\gamma \cdot A \cdot \delta x \cdot \sin \alpha$, essendo $\sin \alpha = \frac{dz}{dx}$;
- la componente assiale della spinta esercitata dalla parete della condotta sul volume fluido, che vale $\Pi_l = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2} \right) \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x$;
- le spinte dovute alle pressioni sulle superfici di monte e di valle

$$\begin{aligned} \Pi_{monte} &= p \cdot A \\ \Pi_{valle} &= p \cdot A + \frac{\partial(p \cdot A)}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x^2 \end{aligned}$$

la cui differenza, trascurando gli infinitesimi di ordine superiori, è:

$$\frac{\partial(p \cdot A)}{\partial x} \cdot \delta x$$

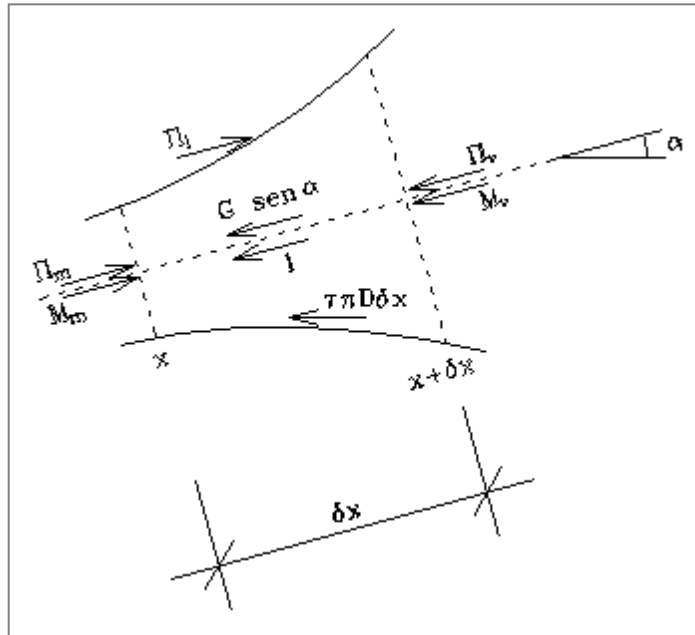


Figura 1.10 Volume di controllo per la derivazione dell'equazione di moto (Mambretti, 2004).

Per la *seconda legge di Newton* la risultante di tutte le forze agenti sul volume di fluido considerato deve eguagliare la *forza di inerzia* dovuta all'accelerazione della massa contenuta nel volume in esame. Accelerando, la massa si sposta nella direzione dell'asse, perciò l'accelerazione deve essere calcolata come derivata sostanziale della velocità V .

$$I = -\rho \cdot A \cdot \delta x \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

La risultante delle azioni di trascinamento tra fluido e parete, detto τ lo sforzo tangenziale alla parete, vale $\tau \cdot \pi \cdot D \cdot \delta x$. Volendo mettere in conto le variazioni di τ e di D con x si introdurrebbero solo infinitesimi di ordine superiore. Ipotizzando che lo sforzo alla parete abbia in moto vario la stessa espressione che possiede in moto permanente si ha:

$$\tau = \frac{\gamma \cdot D \cdot J}{4}$$

$$T = -\tau_0 \cdot \pi \cdot D \cdot \delta x = -\frac{\gamma \cdot D \cdot J}{4} \cdot \pi \cdot D \cdot \delta x$$

Sommando i diversi termini risultanti si ottiene:

$$\frac{\partial(p \cdot A)}{\partial x} \cdot \delta x - p \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x + \gamma \cdot A \cdot \delta x \cdot \frac{dz}{dx} + \rho \cdot A \cdot \delta x \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \cdot A \cdot \delta x \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\gamma \cdot D \cdot J}{4} \cdot \pi \cdot D \cdot \delta x = 0$$

da cui, semplificando:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \gamma \cdot J + \gamma \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{Equazione del moto} \quad (1.15)$$

Trattandosi di equazioni differenziali alle derivate parziali, devono essere integrate associando delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno, come sarà descritto nel seguito.

1.3 Il sistema risolvente

Il sistema trovato consiste nelle due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 & \text{Equazione di continuità} \\ \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \gamma \cdot J + \gamma \cdot \frac{dz}{dx} = 0 & \text{Equazione del moto} \end{cases}$$

che sono state dedotte tenendo come variabili incognite o dipendenti la pressione p e la velocità media della corrente V . Pare evidente come sia possibile la scrittura delle stesse equazioni tenendo come variabili incognite il carico $h = z + \frac{p}{\gamma}$ e la portata $Q = V \cdot A$ od una qualsiasi loro combinazione.

Le due variabili indipendenti sono il tempo t e la distanza x , o ascissa curvilinea. Le altre variabili c, ρ (oppure γ), D e la scabrezza del condotto f non variano significativamente durante il transitorio e quindi vengono considerati parametri costanti del sistema. In termini rigorosi si ha che in generale la cadente J non dipende solo dalla scabrezza f (che nel seguito, come detto, sarà sempre assunta come parametro costante del sistema), ma anche dal numero di Reynolds Re . Nei casi pratici, tuttavia, queste variazioni sono trascurabili (Mambretti, 2004).

1.4 Definizione del problema della cavitazione

In una corrente in pressione può accadere che, durante un transitorio di colpo d'ariete, si raggiungano nella condotta, almeno in taluni casi, pressioni prossime a quelle di vapore saturo. Tali condizioni sono indicate nella letteratura tecnica con varie denominazioni, tra cui le più diffuse sono "**rottura di vena**" o "**cavitazione**".

Nel caso di un fluido soggetto a pressioni vicine al valore della tensione di vapore saturo si può dire che in tali condizioni, per effetto di processi di diffusione del gas disciolto e di espansione di quello non disciolto, si formano delle cavità contenenti aria e vapore di liquido. Ciò avviene in seguito all'aumento delle dimensioni dei minuscoli volumi d'aria, i cosiddetti "*air nuclei*", inizialmente allocati

nelle fessure esistenti nelle pareti delle tubazioni, ovvero presenti stabilmente nel corpo del liquido stesso perché circondati da una sottilissima pellicola di sostanze organiche tensioattive. In una corrente in pressione, pertanto, vengono ad individuarsi delle zone, definite regioni cavitanti, in cui finché permane il summenzionato regime di pressioni, ha luogo un processo di moto polifasico i cui caratteri sono determinati dall'entità degli sforzi resistenti e dalla pendenza della condotta. La presenza delle cavità, pertanto, non implica necessariamente un'interruzione fisica della corrente, come il termine "rottura di vena" lascerebbe invece intendere (Baltzer, 1967).

Il processo di crescita delle cavità, cui contribuiscono anche i fenomeni di coalescenza fra bolle contigue, si arresta quando durante il transitorio si determina un incremento di pressione che porta, prima alla riduzione delle cavità, e quindi la ricostituzione della continuità dei caratteri della corrente. A tale ultima fase, come è noto, si accompagna solitamente l'insorgere di sovrapressioni di entità che può risultare anche maggiore di quella che si ottiene dalla formula di Joukowsky, in caso di manovra brusca dell'otturatore (Brunone e Greco, 1990).

1.5 Analisi dei fattori fisici

Si descrivono prima di tutto quali siano i fattori fisici elementari che influiscono sullo svolgimento del fenomeno macroscopico. In condizioni reali l'acqua che percorre i circuiti industriali e le reti di acquedotto contiene sempre aria disciolta, il cui contenuto è generalmente prossimo a quello teorico di saturazione e contiene altresì numerosissimi nuclei di cavitazione (particelle solide, microorganismi, bollicine etc., di dimensioni comprese tra 10^{-1} e 10 micron), per cui, a seguito di brusche diminuzioni di pressione avvengono diversi fenomeni che si cercherà di descrivere nei paragrafi seguenti.

1.5.1 Sviluppo di aria disciolta

Per la legge di Henry, che regola la solubilità dei gas in un liquido, se la pressione del fluido diminuisce, la concentrazione di saturazione, C_s , si riduce proporzionalmente.

$$C_s = \frac{C_0 \cdot p}{p_0}$$

dove C_0 è la concentrazione di saturazione corrispondente alla pressione p_0 . Per cui se la concentrazione iniziale era C_i , si crea, se $C_i > C_s$, un eccesso di concentrazione rispetto al valore di equilibrio:

$$\Delta C = C_i - C_0 \cdot \frac{p}{p_0}$$

Naturalmente non si raggiunge istantaneamente il nuovo equilibrio, perché il gas tende a svilupparsi preferenzialmente dalle superfici libere (nel caso in esame le eventuali superfici di bolle preesistenti, parte delle superfici dei nuclei, etc.) e si innesca quindi un fenomeno diffusivo in cui la concentrazione è funzione dello spazio e del tempo. L'equazione differenziale che regge questo fenomeno è del tipo (Fanelli, 1983):

$$D \cdot \nabla^2 C + \vec{V} \cdot \text{grad } C = \frac{\partial C}{\partial t}$$

ove D è la costante di diffusività del liquido.

1.5.2 Comportamento delle bolle

Le bolle al diminuire della pressione non mantengono invariate le loro dimensioni. Al fine di comprendere questo fenomeno basta pensare che altrimenti non vi sarebbe equilibrio tra pressione interna, che tenderebbe a crescere per effetto della diffusione, e pressione esterna. Se si suppone per semplicità di trascurare gli apporti di gas per diffusione (poiché il tempo caratteristico di diffusione è molto maggiore rispetto ai tempi caratteristici della caduta di pressione) e ammettendo che il gas entro la bolla segua una espansione politropica di esponente γ :

$$p_g = p_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma = p_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3\gamma}$$

Imponendo l'equilibrio statico tra l'interno e l'esterno, tenuto conto anche della tensione superficiale si ottiene:

$$p_g = p + \frac{2 \cdot A}{r} - p_v$$

Si ricava quindi la relazione tra p , pressione del liquido subito al di fuori della bolla, ed r , raggio della bolla:

$$p = p_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3\gamma} - \frac{2 \cdot A}{r} + p_v$$

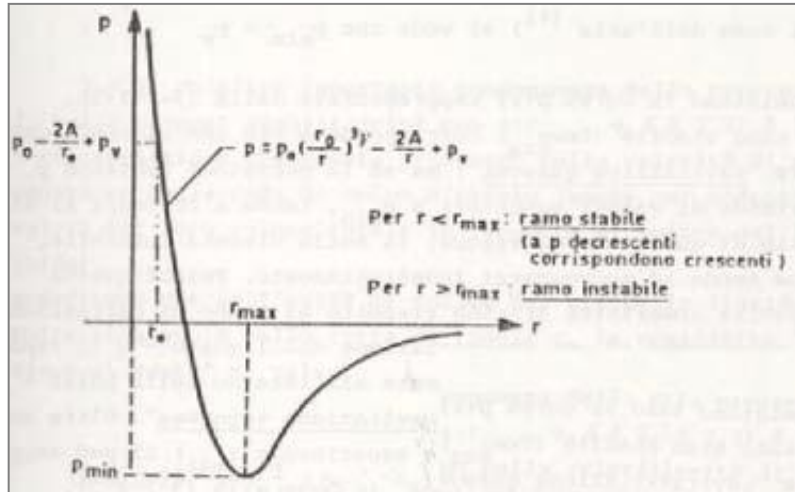


Figura 1.11 Relazione di equilibrio tra pressione esterna e raggio di una bolla (Fanelli, 1983).

Il valore di pressione diminuisce sino ad un minimo dato dalla condizione:

$$\frac{dp}{dr} = 0$$

che permette di ottenere il massimo valore di r compatibile con l'equilibrio:

$$r_{max} = \left(\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \gamma \cdot p_0 \cdot r_0^{3\gamma}} \right)^{\frac{1}{1-3\gamma}}$$

al quale corrisponde di conseguenza il valore minimo raggiunto dalla pressione:

$$p_{min} = 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{3\gamma} - 1 \right) \cdot \left(\frac{3\gamma}{2A} \cdot p_0 \cdot r_0^{3\gamma} \right)^{\frac{1}{1-3\gamma}} + p_v$$

Se il gas seguisse una trasformazione adiabatica si avrebbe che $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$, se invece come nel caso dell'aria, seguisse una trasformazione isoterma $\gamma = 1$; in ogni caso in un caso generale si ha $\gamma > 1$ e pertanto $p_{min} < p_v$.

In riferimento alla figura 1.12, il ramo stabile ($r < r_{max}$) corrisponde a ciò che in letteratura viene chiamato "cavitazione gassosa". Se la pressione ambientale p , partendo da valori superiori a p_{min} , tende a scendere al di sotto di quest'ultimo valore, la bolla diventa instabile, cioè tende ad accrescersi indefinitamente. Poiché questa crescita (rapida rispetto al tempo di diffusione) si accompagna alla vaporizzazione del liquido, ed il vapore prodotto si raccoglie ovviamente all'interno della bolla, questa fase viene chiamata "cavitazione vaporosa". Oltre un certo limite di r , superiore a r_{max} , si può assumere con buona approssimazione che:

$$p \cong p_v \quad \text{per } r \gg r_{max}$$

Ciò giustifica la pratica corrente secondo la quale, per eseguire la verifica alla cavitazione si confronta semplicemente la pressione assoluta nel liquido alla tensione di vapore saturante; giustifica altresì il fatto che, se non viene introdotta aria dall'esterno (per esempio attraverso valvole rompi vuoto), si

può tranquillamente supporre che la cavità sia piena essenzialmente di vapore, che può facilmente ricondensare durante eventuali successive diminuzioni di volume delle cavità, sino al collasso completo. Il riassorbimento in soluzione di aria è un fenomeno molto più lento; pertanto, nel caso in cui il volume delle cavità tende a diminuire, può il più delle volte essere trascurato.

1.6 Modelli con cavitazione

In generale poiché l'acqua che fluisce negli impianti si trova spesso vicino alla condizione di saturazione e contiene quindi una certa quantità di gas disciolto ed un notevole numero di nuclei di gas, si tende in prevalenza a studiare gli effetti della *cavitazione gassosa*. Nel momento in cui la pressione diminuisce bruscamente si possono quindi verificare fenomeni di rilascio del gas da parte del fluido, che influenzano il processo di cavitazione in maniera determinante. *Wylie (1984)* dimostra inoltre che i modelli di cavitazione gassosa sono capaci di riprodurre con buona approssimazione il fenomeno della cavitazione vaporosa. Nei transitori con cavitazione si osservano dissipazioni maggiori di quelle valutabili in base agli usuali modelli di calcolo. In parte, tali dissipazioni sono dovute all'attrito in condizioni non stazionarie, che può essere valutato con modelli quasi bidimensionali, i quali tengono conto del profilo di velocità nella generica sezione. Esistono tuttavia altre dissipazioni non imputabili a tale fenomeno, che nel caso di cavitazione risultano essere più influenti. Alcuni autori si sono concentrati sugli effetti del gas libero nel liquido ("*Release Gaseous Cavitation Model*"), altri si sono concentrati, oltre che sui fenomeni meccanici di iterazione, sulle dissipazioni aggiuntive dovute agli scambi termici fra fase gassosa libera e la fase liquida ("*Second Viscosity Cavitation Model*").

1.7 Dissipazione di energia nel moto vario in presenza di cavitazione

In condizioni di transitorio, quando la pressione in un condotto si abbassa, possono svilupparsi nel liquido cavità o bolle di gas disciolti e vapore, con valori di pressione che possono eccedere il valore calcolato con la formula di *Joukowski* (*Bergant and Simpson, 1999; Cannizzaro and Pezzinga, 2003*). In generale, è possibile distinguere 2 casi (*Zielke et al., 1990*), come già detto nel *paragrafo 1.5*: o la pressione raggiunge il corrispondente valore di pressione di saturazione oppure la pressione scende al valore di pressione di vapore del liquido. Nel primo caso, avviene la "*cavitazione gassosa*", caratterizzata dalla presenza di un grande numero di "*gas nuclei*". Nel caso in cui la pressione scendesse improvvisamente, potrebbe verificarsi un significativo rilascio di gas. Nel secondo caso

invece, prende luogo la “*cavitazione vaporosa*”, e quando la pressione del fluido scende improvvisamente, si verifica un improvviso aumento di nuclei contenenti vapore (*Wiggert and Sundquist, 1979*).

In letteratura vengono considerati per i fluidi bifase, i seguenti possibili meccanismi di smorzamento (*Ewing, 1980*):

1. Aumento della viscosità di volume del fluido dovuto alla presenza delle bolle d’aria (*Taylor, 1954*);
2. “Slip” (slittamento) tra le bolle d’aria e l’acqua (*Van Wijngaarden, 1976*);
3. Scambio termico tra le bolle di gas e il liquido circostante (*Ewing, 1980*);

Ciascuno di questi meccanismi può essere formalmente rappresentato dall’aggiunta di un termine di “*pseudoviscosità*” alla classica equazione della quantità di moto. Si può indicare questo termine di pseudoviscosità con $\xi = \rho \cdot \zeta$, dove ρ è la densità del fluido mentre ζ rappresenta un coefficiente di diffusione. In accordo con quanto sostenuto da *Ewing*, i valori del coefficiente di diffusione valgono: per gli effetti della viscosità di volume $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$, per il caso dello “slip” delle bolle dell’ordine di $10 \text{ m}^2/\text{s}$ mentre per lo scambio termico dell’ordine di $100 \text{ m}^2/\text{s}$.

Quello relativo allo scambio termico sembra essere il principale meccanismo di smorzamento tra quelli sopra citati ed è stato considerato in cavitazione, attraverso un’appropriata equazione energetica (*Cannizzaro and Pezzinga, 2001*).

D’altra parte, diversi autori hanno proposto modelli in cui vengono presi in considerazione gli effetti di gas “libero” in un liquido. In alcuni di questi modelli, per ragioni di semplicità, la massa di gas libero è considerata costante (*Wylie, 1992*), mentre in altri, viene preso in considerazione il processo di rilascio di gas disciolto (*Kranenburg, 1974; Wiggert and Sundquist, 1979; Cannizzaro and Pezzinga, 2002*).

La prima tipologia di modelli riproduce le caratteristiche salienti del fenomeno, e in particolare l’effetto sulla propagazione della maggiore compressibilità della miscela liquido-gas. I modelli del secondo tipo, assumendo una formulazione a rilascio che prende in considerazione un processo di rilassamento, riescono anche a spiegare la dissipazione non dovuta all’attrito. Diverse formulazioni del coefficiente di pseudoviscosità, combinando gli effetti di differenti processi di rilassamento, vengono presi in considerazione e verificati dal confronto con risultati sperimentali di colpo d’ariete in cavitazione (*Pezzinga, 2003*). In cavitazione in situazioni di transitorio, la dissipazione dovuta all’attrito irregolare può essere valutata correttamente per mezzo di modelli bidimensionali, in cui viene considerato il profilo di velocità nella sezione trasversale (*Pezzinga, 1999*).

1.7.1 Modello matematico bidimensionale

Il modello matematico bidimensionale proposto da *Cannizzaro e Pezzinga (2005)* considera la fase di gas libero e le sue interazioni con il liquido circostante. Vengono presi in considerazione sia lo scambio termico che il rilascio di gas. Tale modello è basato sulle seguenti ipotesi:

- le bolle di gas sono distribuite per tutta la tubazione e sono considerate molto piccole rispetto al diametro della condotta;
- la differenza di pressione dovuta alla tensione superficiale da una parte all'altra della superficie di una bolla può essere trascurata;
- lo scambio di quantità di moto tra le bolle di gas e il liquido circostante è trascurabile, così che le bolle di gas e il liquido abbiano la stessa velocità;

La densità della miscela liquido-gas può essere espressa come una funzione della densità del liquido ρ_w e la densità del gas ρ_g :

$$\rho = \left(1 - \frac{mRT}{p}\right) \cdot \rho_w + \frac{mRT}{p} \cdot \rho_g \quad (1.16)$$

dove:

m = massa di gas libero per unità di volume

R = costante dei gas

T = temperatura assoluta

p = pressione assoluta

Considerando la densità della miscela come una funzione del tempo per via di pressione, massa di gas libero e temperatura, e introducendo le usuali ipotesi semplificative, l'equazione di continuità monodimensionale per il moto di un mezzo bifase in una condotta elastica può essere scritta come:

$$\left(1 + \frac{\rho \cdot c_0^2 \cdot m \cdot R \cdot T}{p^2}\right) \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \left(c_0^2 - \frac{\rho \cdot c_0^2 \cdot R \cdot T}{p}\right) \cdot \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\rho \cdot c_0^2 \cdot m \cdot R}{p} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho \cdot c_0^2}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.17)$$

dove:

t = tempo

x = distanza lungo la condotta

c_0 = celerità del liquido in una condotta elastica

A = sezione trasversale della condotta

Q = portata

Trascurando sia la derivata spaziale che la deformabilità dell'area riguardo al termine $\frac{\partial m}{\partial t}$, l'equazione di continuità per la fase gassosa può essere scritta come (Wiggert and Sundquist, 1979; Zielke et al., 1990):

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1}{\theta_m} \cdot \frac{\beta}{RT} \cdot (p_s - p) \quad (1.18)$$

nella quale:

p_s = pressione di saturazione del gas

θ_m = tempo di rilassamento

β = costante della legge di Henry, espressa come rapporto adimensionale tra la concentrazione della fase liquida e la concentrazione della fase gassosa.

Gli autori sopra citati considerano però soltanto la fase di rilascio gassoso. Schweitzer e Szebehely (1950) hanno studiato il tempo di rilassamento sperimentalmente e trovarono valori differenti per il rilascio di gas ed il processo di soluzione. Nel modello proposto da Cannizzaro e Pezzinga sono considerati entrambi. Ovviamente quando $m = 0$, non è possibile una diminuzione ulteriore per cui $\frac{\partial m}{\partial t} = 0$. L'incertezza nella stima della dimensione iniziale della bolla e del numero di siti di nucleazione suggerisce la necessità di valutare empiricamente il tempo di rilassamento θ_m . Sono stati utilizzati valori di θ_m con un ordine di grandezza di 1000 s per simulare i dati sperimentali (Wiggert and Sundquist, 1979).

Sotto queste ipotesi, l'equazione energetica per la fase gassosa può essere espressa così (Anderson, 1995 e Saurel and Le Metayer, 2001):

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{\rho_g} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - q = 0 \quad (1.19)$$

dove:

h = entalpia per unità di massa

q = trasferimento di calore per unità di massa e di tempo

Lo scambio termico può essere espresso dalla legge di Newton del raffreddamento come (Ewing, 1980):

$$q = -c_p \cdot \frac{T - T_0}{\theta_T} \quad (1.20)$$

dove:

c_p = calore specifico dell'aria a pressione costante

T_0 = temperatura del liquido, assunta costante

θ_T = tempo di rilassamento

Introducendo il termine s (entropia del gas):

$$s = c_p \cdot \left(\ln T - \frac{k-1}{k} \cdot \ln p \right) \quad (1.21)$$

dove k rappresenta il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante, sostituendo e riscrivendo i vari termini si giunge all'equazione dell'energia:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c_p}{\theta_T} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) \quad (1.22)$$

e all'equazione di continuità della miscela:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c_0^2}{gA} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.23)$$

in cui:

g = accelerazione gravitazionale

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} - \frac{c_0^2 m R T}{g p} + \frac{c_0^2 m}{\rho g}$$

È possibile osservare che non viene presa in considerazione un'equazione per il numero di bolle per unità di lunghezza della condotta perché le prove sperimentali utilizzate per validare i risultati numerici non permettono una conoscenza dettagliata della geometria delle bolle di gas.

L'equazione della quantità di moto della miscela per una tubazione dalla sezione trasversale circolare e flusso assialsimmetrico, può essere espresso in coordinate cilindriche nella seguente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \frac{\partial (r\tau)}{\partial r} = 0 \quad (1.24)$$

in cui r rappresenta la distanza dall'asse di simmetria (*radiale*), u è la componente della velocità in direzione longitudinale, H il carico piezometrico e τ lo sforzo tangenziale alla parete.

Il carico piezometrico può essere espresso dalla seguente relazione:

$$H = z + \frac{p + p_v - p_a}{\rho \cdot g} \quad (1.25)$$

dove p_v è la pressione di vapore, p_a la pressione atmosferica e z la quota. La pressione del gas va aggiunta alla pressione di vapore perché le bolle di gas contengono anche vapor d'acqua (Wylie, 1992).

Per il moto turbolento, lo sforzo di taglio viene espresso da un modello di turbolenza a due zone. Nel substrato viscoso viene utilizzata la legge di Newton, mentre nel cuore della turbolenza è adottato un modello di lunghezza di miscelazione. Lo spessore del substrato viscoso è ottenuto come la distanza

dalla parete all'intersezione tra i profili di velocità nel substrato viscoso e nel nucleo puramente turbolento, ipotizzando che nel substrato il profilo di velocità sia lineare mentre nella regione turbolenta segua un andamento localmente logaritmico (Pezzinga, 1999).

Thermodynamic Gaseous Cavitation Model (TGCM)

Nel modello termodinamico con cavitazione gassosa viene considerata la temperatura variabile, mentre si assume che la massa di gas libero rimanga costante. I risultati del modello matematico, riassunto dalle eq. 1.22, 1.23 e 1.24, sono stati confrontati con i risultati ottenuti sperimentalmente (Cannizzaro e Pezzinga, 2005).

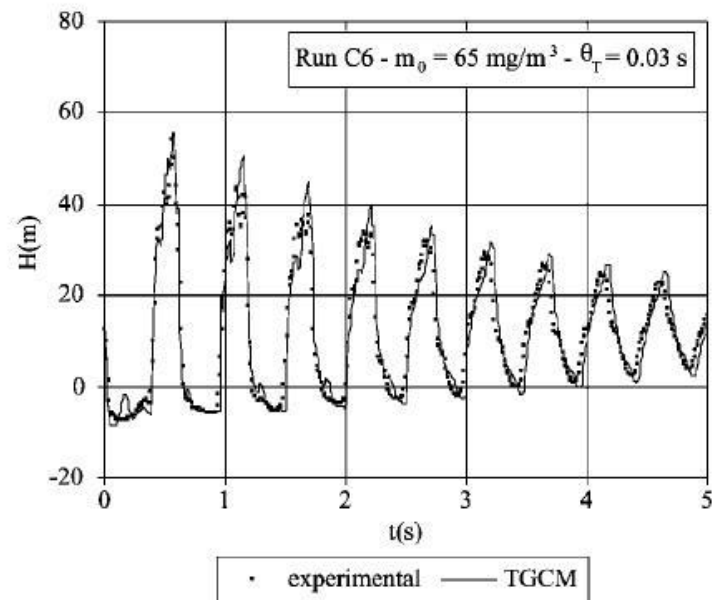


Figura 1.12 Confronto tra oscillazioni sperimentali e quelle calcolate (TGCM).

Per evidenziare il ruolo che assume la variabilità della temperatura, è stato effettuato un confronto tra i risultati sperimentali e quelli numerici del modello di cavitazione gassosa (GCM) in cui l'equazione dell'energia non viene utilizzata mentre vengono considerate costanti sia la temperatura che la massa di gas libero (Cannizzaro e Pezzinga, 2005).

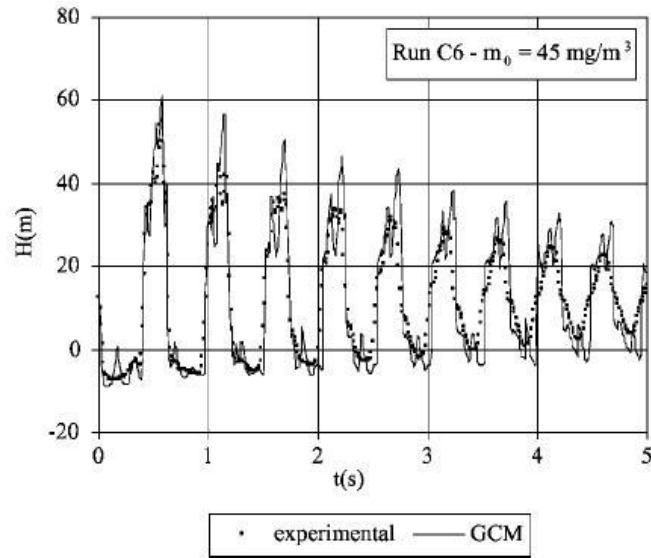


Figura 1.13 Confronto tra oscillazioni sperimentali e quelle calcolate (GCM).

Si può notare dai grafici riportati che, per questa serie di prove, il modello bidimensionale isotermico non riproduce adeguatamente le oscillazioni di pressione calcolate mentre considerando la termodinamica della fase gassosa si migliora il grado di approssimazione. Tuttavia in alcuni casi il modello non spiega completamente la dissipazione osservata sperimentalmente.

Release Gaseous Cavitation Model (RGCM)

Questo modello, in cui la temperatura è costante e la massa del gas libero è variabile, fu considerato successivamente. I risultati del modello matematico (eq. 1.18 e 1.24) sono stati confrontati con quelli ottenuti per via sperimentale (Cannizzaro e Pezzinga, 2005). Le prove sono state realizzate considerando una massa iniziale di gas libero (condizioni di saturazione) nel liquido.

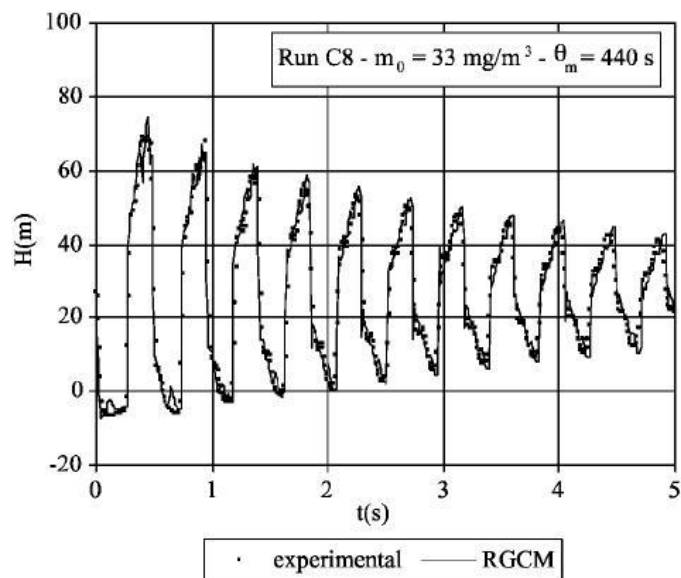


Figura 1.14 Confronto tra oscillazioni sperimentali e quelle calcolate (RGCM).

L'influenza del rilascio gassoso si percepisce confrontando i dati sperimentali con quelli calcolati, dal grafico di figura 1.14, in cui si ha la rappresentazione del modello 2D con una massa di gas libero costante, così come la temperatura.

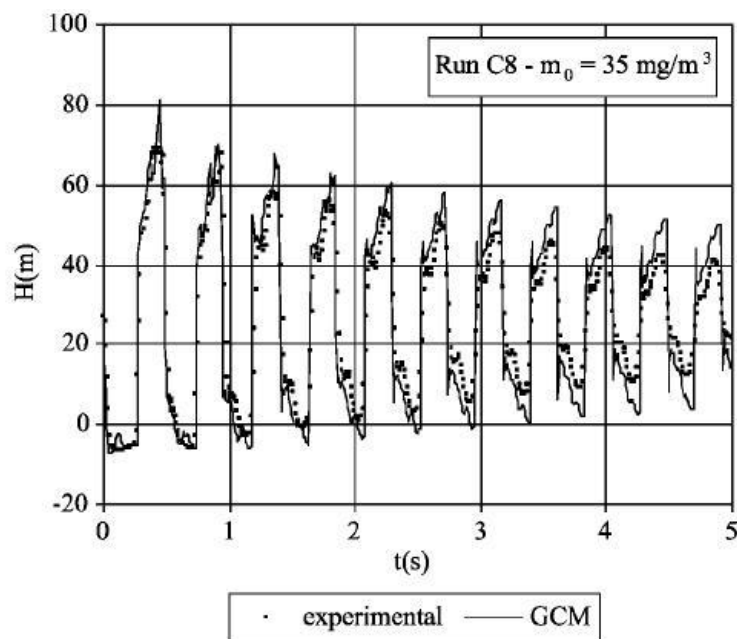


Figura 1.15 Confronto tra oscillazioni sperimentali e quelle calcolate (GCM).

Il modello 2D con massa di gas libero variabile introduce un notevole miglioramento nella riproduzione dei dati sperimentali.

Il processo di soluzione del gas, anche se più lento rispetto al processo di rilascio gassoso (Wiggert and Sundquist, 1979), sembra non poter essere trascurabile.

Nel caso di moto vario elastico con cavitazione, la dissipazione energetica attenua le oscillazioni di pressione e può essere attribuita all'attrito in condizioni non stazionarie e ad altri processi. La presenza di gas libero può cambiare il regime di flusso da monofase a bifase. In questo caso, la celerità della miscela diminuisce ed è una funzione della pressione, della temperatura e della massa di gas libero. Il confronto tra le oscillazioni di pressioni calcolate con questo modello bidimensionale e quelle sperimentali (*Cannizzaro and Pezzinga, 2005*), hanno mostrato che:

- il modello bidimensionale che considera costanti la temperatura e la massa del gas libero non è in grado di riprodurre completamente i risultati sperimentali, ma solo le prime oscillazioni;
- lo scambio termico tra la fase gassosa ed il liquido circostante migliora la simulazione dei dati sperimentali, ma non sempre spiega la dissipazione osservata;
- il modello che considera variabile la massa di gas libero permette di spiegare quasi interamente la dissipazione di energia osservata;
- la dissipazione attritiva non sembra essere principalmente responsabile dello smorzamento delle oscillazioni, ma l'uso del modello $2D$ è importante per correggere la calibrazione dei parametri.

In definitiva, dai risultati sperimentali ottenuti è lecito affermare che il modello a rilascio gassoso è in grado di riprodurre più accuratamente i fenomeni osservati.

2

Apparato sperimentale

2.1 Descrizione dell'apparato strumentale

L'impianto è stato realizzato nel Laboratorio di Idraulica del Politecnico di Milano, nel piano seminterrato; è costituito sostanzialmente da una tubazione che proviene da un serbatoio sospeso ad una quota di circa 5 m dal pavimento del primo piano dell'edificio, prosegue verso il basso attraversando un'intercapedine dello spessore di circa 1.2 m ed il piano terra dello stesso laboratorio. Quindi giunge nel piano seminterrato dove sono poste due valvole: una viene utilizzata per lo scarico nel cassone posto sotto il pavimento e l'altra serve ad alimentare l'impianto. Questa tubazione si allaccia, dopo opportuni restringimenti, a due bobine di condotti in ferro (*fig. 2.1*) che poi scaricano l'acqua fluente nel cassone citato sopra, posto ad una quota inferiore a quella del piano terra del Laboratorio. Il condotto in ferro proveniente dal serbatoio di monte ha un diametro $D_1 = 250\text{ mm}$ per

una lunghezza di circa 4.9 m ; tramite una riduzione il diametro di tale tubazione diviene pari a $D_2 = 300\text{ mm}$ fino al piano seminterrato, per una lunghezza complessiva di 9.8 m dove si riduce ulteriormente mediante un convergente ad un diametro $D_3 = 150\text{ mm}$. A circa 1.8 m dal pavimento del piano seminterrato è presente una biforcazione: l'acqua può essere scaricata direttamente nei cassoni presenti sotto il piano del pavimento oppure può proseguire in un'altra derivazione. Con opportune saracinesche l'acqua viene fatta fluire verso l'impianto in un condotto in cui il diametro si riduce ad un valore $D_4 = 52.5\text{ mm}$.



Figura 2.1 Bobine di tubi utilizzate nell'impianto.

Subito a valle di quest'ultimo restringimento è presente una valvola regolatrice, attraverso la quale la portata fluisce in un tubo di gomma trasparente collegato ad una tubazione (sempre di diametro $D_4 = 52.5\text{ mm}$) che si allaccia poi alle bobine di ferro.



Figura 2.2 Misuratore magnetico di portata.

Tra il tubo di gomma e l'attacco alle bobine è presente un misuratore magnetico di portata (che fornisce valori in l/min , visibile in *fig. 2.2*) e, subito a valle di questo, un manicotto filettato (*fig. 2.3*) sul quale può essere avvitato un trasduttore di pressione (o un manometro metallico).

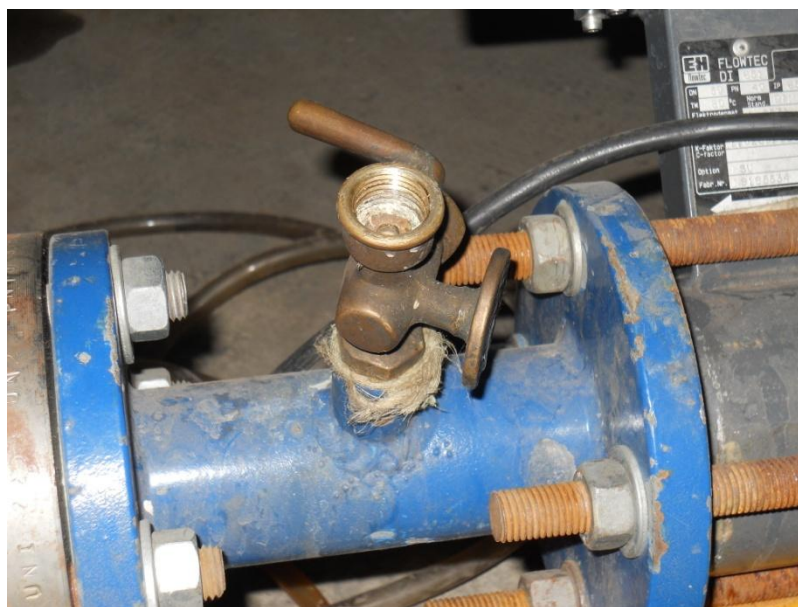


Figura 2.3 Manicotto filettato con l'annesso rubinetto, presente a monte delle bobine.

A valle del manicotto si trovano le due bobine di tubi in ferro composte da rotoli di 26 spire per una lunghezza di circa 90 m ciascuna. Situata appena dopo vi è l'elettrovalvola (fig. 2.4), ovvero un dispositivo elettromeccanico di chiusura molto rapida (quasi istantanea) della tubazione, per generare la sovrappressione da colpo d'ariete (viene azionata tramite un interruttore, come si vede in fig. 2.5).

Quando questa valvola non blocca il flusso, l'acqua che fluisce viene scaricata nel serbatoio posto sotto il pavimento del piano terra del laboratorio al quale si lavora. Questo dispositivo è stato posizionato a valle delle bobine nella configurazione iniziale dell'impianto; tuttavia per le prove di moto vario può essere spostato anche a monte di esse, per confrontare l'andamento della sovrappressione nelle due configurazioni.



Figura 2.4 Elettrovalvola a chiusura molto rapida.



Figura 2.5 Scatola elettrica sulla quale è installato l'interruttore che apre e chiude la valvola elettricamente.

Appena prima dell'elettrovalvola, ovvero tra la seconda spirale di tubi e la valvola stessa, è presente un altro manicotto filettato (*fig. 2.6*) sul quale è possibile avvitare il trasduttore (o il manometro) per poter rilevare anche in quel punto l'andamento della pressione.



Figura 2.6 Manicotto filettato presente a valle.

Il pelo libero dell'acqua contenuta nel serbatoio di monte ha una quota di 17.70 m rispetto al pavimento del piano terra dove è posizionato l'impianto. A causa della pendenza del pavimento e

della diversa inclinazione dei manicotti posti sulle bobine di tubi, la differenza in quota tra le posizioni dei trasduttori posti a monte e a valle dei due rotoli di condotte a spirale è di circa 25 cm (il primo manicotto è sollevato da terra 45 cm, il secondo 20 cm).

Le misure di pressione effettuate col trasduttore sia a monte che a valle delle due bobine di tubi, in condizioni statiche (cioè con acqua non in movimento, bloccata dall'elettrovalvola) evidenziano il fatto che la componente di pressione idrostatica a valle è maggiore di quella rilevata a monte: questo si giustifica col fatto che a valle la quota di posizionamento del trasduttore è minore per cui la colonna d'acqua sovrastante è maggiore. Si ottiene un valore di circa 1.78 bar a monte delle bobine mentre a valle di esse la pressione è circa pari a 1.8 bar. Questi valori sono di poco differenti rispetto a quelli ottenuti utilizzando dei manometri metallici: il problema relativo all'uso di questa tipologia di strumenti consiste nel fatto che la lettura del manometro non può sempre essere molto accurata in quanto il valore deve essere *stimato* poiché la lancetta indicatrice non sempre si posiziona sopra la tacca della gradazione ed è soggetta spesso ad una piccola oscillazione. Le misure effettuate con questo strumento hanno quindi un'incertezza maggiore rispetto a quelle fatte col trasduttore. I valori ottenuti distano di poco da quelli citati in precedenza: a monte delle bobine si ottiene un valore di circa 1.7 bar mentre a valle la pressione è pari a circa 1.75 bar.

2.2 Stima della celerità

Come già mostrato nel primo capitolo, una tubazione costituita da materiale elastico (in cui lo spessore è molto minore rispetto al diametro) obbedisce alla legge di *Hooke*, per cui si può stimare il valore della celerità del fluido in esame tramite la seguente formula:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \lambda \cdot \frac{\varepsilon \cdot D}{E \cdot e}}}$$

dove:

- D = diametro della condotta;
- e = spessore della condotta;
- E = modulo di elasticità del materiale;
- ε = modulo di comprimibilità dell'acqua;
- λ = coefficiente che tiene conto delle condizioni di giunzione tra i diversi tubi e che assume valore unitario per condotta singola.

La tubazione dell'impianto preso in considerazione è caratterizzata da un diametro interno pari a 0.0525 m e da uno spessore $e = 5\text{ mm}$. Il modulo di elasticità dell'acciaio vale $2 \cdot 10^{11}\text{ N/m}^2$; il modulo di comprimibilità dell'acqua ε vale $2.14 \cdot 10^9\text{ N/m}^2$ mentre la sua densità è $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$.

Attraverso la relazione scritta precedentemente è possibile ottenere il valore di celerità per il fluido:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \lambda \cdot \frac{\varepsilon \cdot D}{E \cdot e}}} = \frac{\sqrt{\frac{2.14 \cdot 10^9}{1000}}}{\sqrt{1 + \frac{2.14 \cdot 10^9 \cdot 0.0525}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0.005}}} = 1387.03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2.3 Il trasduttore di pressione Burster

Il trasduttore di pressione utilizzato (*USB Sensor Interface Model 9205*, fornito dalla *Burster S.p.a.*) è un dispositivo (*fig. 2.7*) adatto all'acquisizione e al processamento dei dati (segnali) di grandezze meccaniche.



Figura 2.7 Trasduttore di pressione.

Non è necessario l'utilizzo di un amplificatore esterno in quanto è già presente all'interno del dispositivo (*fig. 2.8*). Viene alimentato tramite un cavo USB collegato ad un computer, dato che non necessita di un voltaggio elevato (*5 Volt*). Attraverso questo cavo, i dati di pressione registrati

possono essere visualizzati in tempo reale mediante l'apposito software fornito dal produttore (9205-P100).



Figura 2.8 Il trasduttore è dotato di amplificatore di segnale e di potenziometro.

Grazie all'interfaccia grafica è possibile realizzare un output nel quale si può apprezzare l'andamento della pressione in funzione della coordinata temporale. Il software restituisce inoltre anche il valore minimo e massimo rilevato durante tutto l'intervallo di registrazione. Dal menu dei settaggi e delle impostazioni del software si può scegliere una serie di caratteristiche da utilizzare per l'acquisizione dei dati: l'unità di misura adottata, il tipo di grafico e la visualizzazione del risultato, ma in particolar modo è fondamentale scegliere da un menu a tendina il metodo con il quale questo strumento è in grado di lavorare. Ci sono due diverse modalità di acquisizione dei dati:

- *SOPM (Speed Optimized Polling Mode)*
- *SOSM (Speed Optimized Streaming Mode)*

La prima modalità di misura, *SOPM*, permette delle frequenze di acquisizione che vanno da 0.1 a 1000 Hz mentre con la modalità *SOSM* si può arrivare ad avere fino a 2500 misure al secondo.

È possibile inoltre esportare i rapporti delle misurazioni direttamente in formato ".xls" in modo da poter lavorare sui dati nel foglio di calcolo (ad esempio in *Excel*), oppure salvarli in formato ".pdf".

Lo strumento lavora in un intervallo di pressioni che va da 0 bar (*assoluti*) fino a 20 bar; il fondo scala e lo zero però non sono preimpostati, ma vanno determinati attraverso una procedura di calibrazione: questa operazione va effettuata tramite il software in dotazione 9205-P100, tramite la finestra dei settaggi che consente di attribuire ad una certa pressione "nota" un valore elettrico di voltaggio nella scala da 0 a 5 V. Per eseguire questa calibrazione è stato necessario utilizzare una pompa a pistone semplice ad azionamento manuale (*fig. 2.9*); tramite una struttura tubolare in

acciaio a 3 ingressi, sono stati collegati un manometro, il trasduttore e la pompa contemporaneamente.

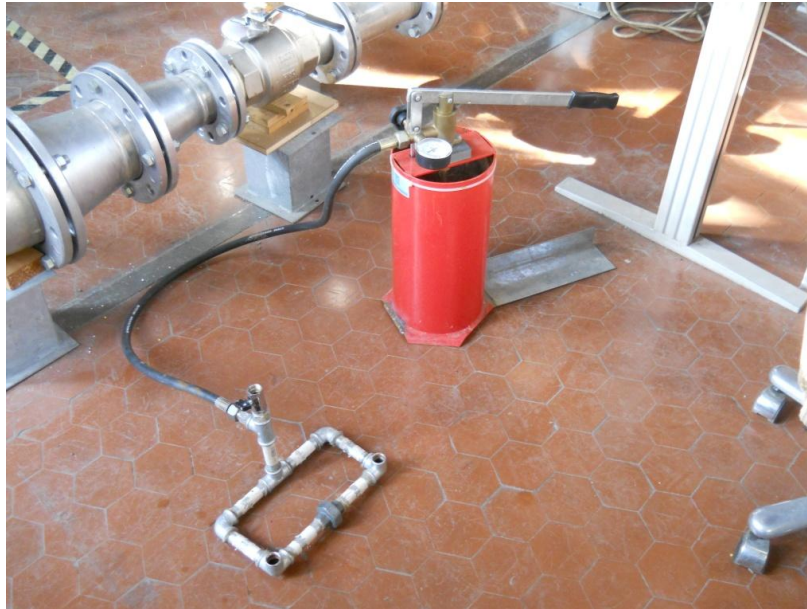


Figura 2.9 Pompa ad azionamento manuale e dispositivo tubolare utilizzati per la calibrazione del trasduttore.

Azionando manualmente la leva della pompa, si riempie la struttura tubolare d'acqua, contenuta nel serbatoio della pompa stessa, e una volta saturata d'acqua ai successivi movimenti della leva il liquido va in pressione: quando il manometro segna il valore desiderato si collega, tramite il cavo USB, il trasduttore al computer e nel pannello dei settaggi si imposta, ad esempio, tale valore come fondo scala. Per impostare lo "zero" della scala di valori è sufficiente non generare alcuna pressione sull'acqua contenuta nella struttura tubolare; a questo punto si registra il valore desiderato che corrisponderà ad un certo voltaggio nella scala potenziometrica dello strumento. Per quanto riguarda il fondo scala invece, tramite la leva della pompa è stata portata in pressione l'acqua fino a 20 *bar*: quando il manometro utilizzato (avente Fondo Scala di 25 *bar*) ha segnato tale valore è stato impostato come valore massimo della scala del range di misurazione (al quale corrisponde un determinato voltaggio). Una volta impostato il valore minimo e massimo della scala potenziometrica, valori intermedi o maggiori di 20 *bar* vengono ricavati attraverso un'interpolazione lineare. Questa operazione di calibrazione è stata necessaria per eliminare eventuali errori sistematici presenti ad ogni misurazione.

2.4 Prove di moto permanente e calcolo della scabrezza

La prima tipologia di prove che è stata effettuata ha avuto come scopo il calcolo della scabrezza delle tubazioni delle bobine, tramite prove in condizioni di **moto permanente**. Nel moto *permanente o stazionario* di una corrente lineare di fluido incomprimibile le variabili idrodinamiche (*pressione e velocità*) non variano nel tempo. Il moto permanente entro condotte in pressione può essere ricondotto al moto uniforme, nel quale la velocità non varia nella direzione del moto. Il *moto uniforme* è possibile solo nelle correnti rigorosamente lineari in cui la sezione della corrente è costante rispetto all'asse della corrente. Una corrente lineare in moto uniforme pertanto ha accelerazione nulla. L'equazione di bilancio della massa si riduce alla sola equazione di costanza della portata:

$$Q = cost \quad (2.1)$$

L'equazione del bilancio dell'energia invece assume questa forma:

$$\frac{dH_c}{ds} = -\frac{\tau_l}{\rho g \mathfrak{R}} \quad (2.2)$$

dove τ_l rappresenta lo sforzo tangenziale sulla parete della condotta da parte della corrente, \mathfrak{R} è il raggio idraulico mentre s è la coordinata spaziale lungo la condotta.

Questo legame esprime il fatto che la diminuzione del carico idraulico della corrente H_c (ricordando che $H_c = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{v^2}{2g}$) è dovuta all'azione dello sforzo tangenziale agente sul contorno laterale della corrente. Si ricorda che il raggio idraulico \mathfrak{R} è definito come il rapporto tra la sezione della corrente ed il suo perimetro.

L'eq. 2.2 può essere riscritta in questo modo:

$$-\frac{dH_c}{ds} = J \quad (2.3)$$

Il nuovo termine introdotto J rappresenta la diminuzione del carico idraulico per unità di lunghezza o perdita di carico unitaria. La J è una grandezza adimensionale, esprime i metri di carico idraulico perduti per metro di corrente, e positiva. Il moto della corrente infatti è causato da un gradiente negativo del carico poiché la corrente si muove da sezioni con carico maggiore verso sezioni con carico minore.

Si deve osservare che i membri dell'eq. 2.3, per la permanenza del moto, non dipendono dal tempo e che, per l'uniformità, non dipendono dalla variabile spaziale s . Ciò significa che lo sforzo tangenziale agente sul contorno è costante, indipendente dalla s , come pure le caratteristiche geometriche della corrente (sezione e perimetro), e che, di conseguenza, è costante anche la J .

Per calcolare la perdita di carico idraulico lungo una condotta, in regime di moto permanente, occorre calcolare la perdita di carico per metro di condotta e moltiplicarla per la lunghezza totale della tubazione. Nel caso in esame è stata misurata la perdita di carico tra il manicotto posto a monte delle bobine e quello posto a valle di esse, per diversi valori di portata fluente. Ad ogni valore di portata (*che viene mantenuta costante per la durata della singola prova*) corrisponde una perdita di carico: in base a questo valore, tramite foglio di calcolo, si ricava il valore di scabrezza che meglio approssima i risultati ottenuti. Queste prove sono state eseguite sia con due manometri metallici che con il trasduttore di pressione della *Burster*: è ovvio che i valori di scabrezza ricavati differiscono notevolmente a causa delle problematiche relative all'utilizzo dei manometri già esposte in precedenza. Inoltre, i manometri utilizzati per questo tipo di prove hanno un fondo scala (*F.S.*) differente: a monte delle bobine è stato utilizzato un manometro con *F.S.* pari a 4 bar (*fig. 2.10*) mentre a valle il *F.S.* dello strumento è pari a 2.5 bar (*fig. 2.11*). La diversa gradazione delle tacche dei due manometri può contribuire ad accrescere l'incertezza sui dati delle misure effettuate.



Figura 2.10 Manometrico metallico con fondo scala 4 bar.



Figura 2.11 Manometro metallico con fondo scala 2.5 bar.

La tabella seguente mostra le caratteristiche tecniche della tubazione, ricordando che il raggio idraulico è stato calcolato (come detto in precedenza) come segue:

$$\mathfrak{R} = \frac{\text{Sezione}}{\text{Perimetro bagnato}} = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{r}{2}$$

Diametro interno tubazione	0.0525 m
Lunghezza totale	180 m
Sezione tubazione	0.00216475 m²
Raggio idraulico	0.013125 m

Tabella 2.1 Caratteristiche tecniche della tubazione delle bobine

Di seguito vengono riportati i valori di pressione ottenuti, per il caso dei manometri metallici; nella tabella viene riportata anche la differenza di carico espressa in metri di colonna d'acqua ($1 \text{ bar} = 10.198 \text{ m}_{H_2O}$), tenendo conto del fatto che il manicotto di monte è sopraelevato di 25 cm rispetto a quello di valle.

n° prova	Portata (l/s)	P _{monte} (bar)	P _{valle} (bar)	$\Delta(z+P/\gamma)$ (m _{H₂O})	Velocità (m/s)
1	3.46	1.500	0.180	13.71	1.60
2	3.20	1.250	0.160	11.37	1.48
3	2.81	0.950	0.140	8.51	1.30
4	2.46	0.700	0.120	6.16	1.14
5	2.38	0.650	0.110	5.76	1.10
6	2.23	0.550	0.100	4.84	1.03
7	1.96	0.400	0.095	3.36	0.91

Tabella 2.2 Risultati ottenuti da prove di moto permanente mediante l'utilizzo di due manometri metallici.

Per ognuna delle prove effettuate, ovvero per ogni valore di velocità, è stato calcolato il relativo numero di *Reynolds*:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

dove ρ rappresenta la densità dell'acqua, μ la viscosità dell'acqua (a 20 °C), V la velocità della corrente mentre D è il diametro della tubazione. Il valore della cadente J invece è stato calcolato come il rapporto tra la perdita di carico misurata e la lunghezza totale della condotta considerata:

$$J = \frac{\Delta H}{L}$$

Dopodiché è stato calcolato il parametro λ tramite la nota formulazione di *Darcy-Weisbach*; a norma di essa la cadente viene espressa come proporzionale al rapporto fra l'altezza cinetica della velocità media e il diametro, per cui è bastato invertire la formula:

$$J = \lambda \cdot \frac{V^2}{2gD} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2gDJ}{V^2}$$

Per ottenere il valore di scabrezza opportuno occorre inserire tutti i valori ricavati in precedenza nella formula di *Colebrook-White*:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon/D}{3.71} \right)$$

In questa formulazione non compare la scabrezza assoluta, definibile a mezzo del parametro ε avente le dimensioni di una lunghezza, ma la scabrezza relativa ε/D (numero puro): ad ogni valore di ε/D corrisponde una particolare curva nell'abaco di *Moody* (grafico a scale logaritmiche nel quale compaiono in ascissa i logaritmi decimali del numero di Reynolds e nelle ordinate i valori di λ , come si vede in *fig. 2.12*), dalla quale è possibile ricavare che tipo di moto è stato analizzato.

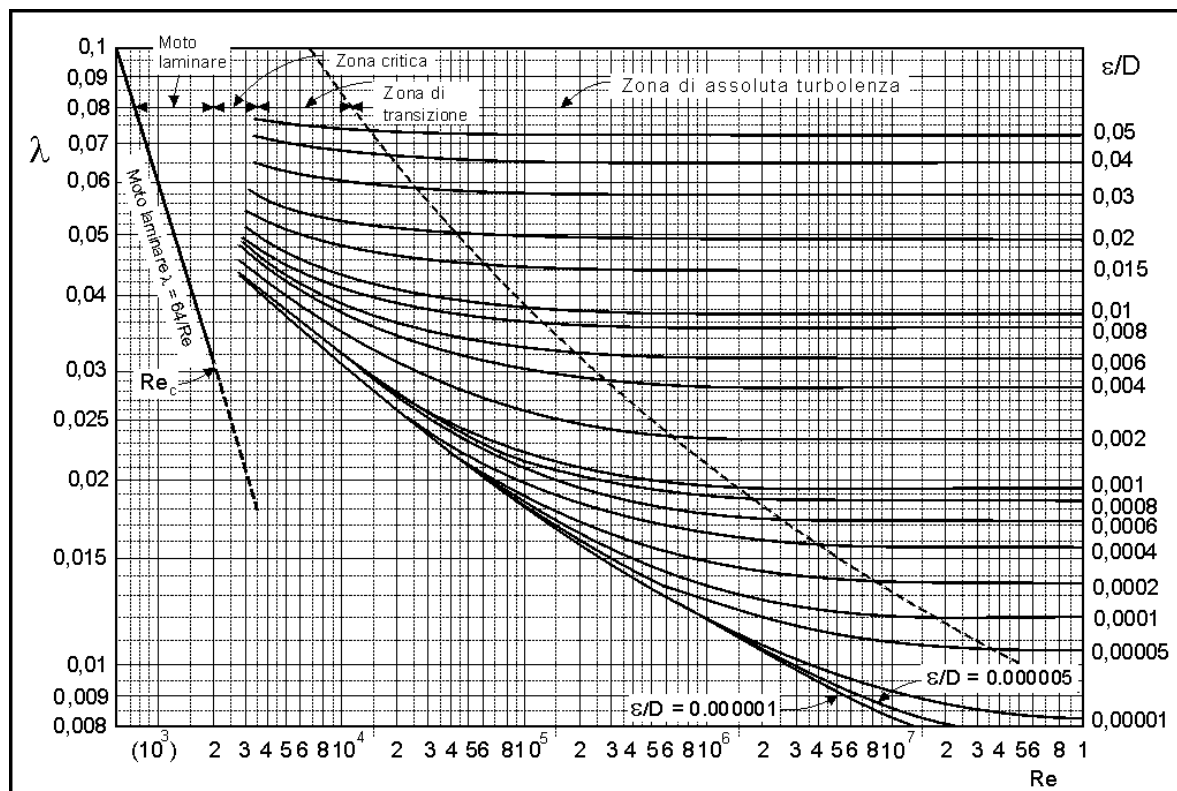


Figura 2.12 Abaco di Moody.

I risultati ottenuti per il caso dei due manometri sono riportati nella tabella seguente.

Reynolds	J	λ	ϵ	ϵ/D
83452	0.07617	0.03067	0.000239	0.004544
77064	0.06314	0.02981	0.000211	0.004017
67823	0.04728	0.02882	0.000179	0.003401
59385	0.03425	0.02723	0.000132	0.002513
57376	0.03198	0.02724	0.000130	0.002485
53760	0.02688	0.02608	0.000100	0.001903
47331	0.01867	0.02337	0.000037	0.000702

Tabella 2.3 Valori di scabrezza ottenuti (misure con manometri metallici).

I valori di scabrezza ϵ presentano questi valori di media, varianza e deviazione standard:

Media	Varianza	Dev. Stand.
0.000147	4.719E-09	6.870E-05

Con questi valori, entrando nell'abaco di *Moody* si nota che il moto analizzato è di tipo **turbolento di transizione**. In conseguenza di questa considerazione, è possibile notare che la zona dell'abaco interessata non presenta pendenze delle curve ε/D troppo elevate, per cui risulta ragionevole (anche se non rigorosamente corretto) procedere al calcolo della scabrezza anche tramite la formulazione di *Strickler*, che è comunque utile per avere un ulteriore confronto. Per ognuno dei valori ΔP ottenuti è stato calcolato il corrispondente valore di cadente J tramite la formula di *Strickler*:

$$J = \frac{V^2}{k_S^2 \cdot \Re^{1.33}}$$

nella quale V rappresenta la velocità, \Re il raggio idraulico mentre k_S è il valore del coefficiente di scabrezza di *Strickler*. Moltiplicando la perdita di carico (per metro di tubazione) per la lunghezza totale della condotta arrotolata nelle due bobine si trova una quantità espressa in metri di colonna d'acqua.

Questa quantità è stata confrontata con il valore di ΔP misurato per ogni singola prova calcolando il valore di scabrezza che rende nulla la differenza $\Delta P - JL$.

I risultati ottenuti per le prove effettuate con i manometri sono di seguito riportati:

V (m/s)	J (-)	k_S (m ^{1/3} /s)
1.60	0.076172	103.4
1.48	0.063144	104.9
1.30	0.047283	106.6
1.14	0.034249	109.7
1.10	0.031983	109.7
1.03	0.026884	112.1
0.91	0.018669	118.4

Tabella 2.4 Risultati ottenuti (misure con manometri metallici).

Il valore di scabrezza complessivo è stato ottenuto mediante una regressione col metodo dei minimi quadrati, con l'intento di trovare quel valore che interpolasse meglio i risultati ottenuti. Dall'analisi è risultato pari a $106.2 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$: utilizzarlo per l'intera tubazione comporta un'approssimazione forse eccessiva. Trattandosi di tubazioni in ferro ormai non più nuove, tale valore di scabrezza è sicuramente elevato e la sovrastima di questo coefficiente sembra legata all'incertezza della lettura dei manometri.

Di seguito viene invece riportata la tabella contenente i valori di pressione ottenuti mediante l'utilizzo del trasduttore; il procedimento di calcolo per ottenere il valore di scabrezza che meglio si adatta ai dati ottenuti per diverse portate è identico al caso precedente, per cui verranno riportati solo i risultati.

n° prova	Portata (l/s)	P _{monte} (bar)	P _{valle} (bar)	$\Delta(z+P/\gamma)$ (m _{H₂O})	Velocità (m/s)
1	3.46	1.81	0.18	16.873	1.60
2	3.01	1.40	0.15	12.998	1.39
3	3.06	1.45	0.14	13.609	1.42
4	2.88	1.27	0.13	11.876	1.33
5	2.70	1.13	0.120	10.550	1.25
6	2.56	1.02	0.100	9.632	1.18

Tabella 2.5 Risultati ottenuti da prove di moto permanente mediante l'utilizzo del trasduttore di pressione.

La tabella seguente mostra invece i valori di scabrezza ottenuti.

Reynolds	J	λ	ε (mm)	ε/D
83452	0.09374	0.03774	0.00049	0.00933
72644	0.07221	0.03837	0.00051	0.00974
73849	0.07561	0.03888	0.00053	0.01016
69430	0.06598	0.03838	0.00051	0.00972
65010	0.05861	0.03889	0.00053	0.01009
61796	0.05351	0.03930	0.00055	0.01038

Tabella 2.6 Valori di scabrezza ottenuti (misure con trasduttore).

I valori di scabrezza ε presentano sono caratterizzati da media, varianza e deviazione standard pari a:

Media	Varianza	Dev. Stand.
0.000520	3.988E-10	1.997E-05

I valori di scabrezza ottenuti mediante l'utilizzo del trasduttore sono riportati nella tabella seguente:

V (m/s)	J (-)	k_s ($m^{1/3}/s$)
1.60	0.093737	93.2
1.39	0.072207	92.4
1.42	0.075608	91.8
1.33	0.065976	92.4
1.25	0.058610	91.8
1.18	0.053509	91.3

Tabella 2.7 Risultati ottenuti.

In questo caso, adottando nuovamente il metodo dei minimi quadrati, si ottiene un valore di scabrezza pari a $92.4 \text{ m}^{1/3}/s$: questo risultato non differisce molto dal valore massimo e minimo, per cui l'approssimazione con i risultati ottenuti è molto buona.

Nella pagina seguente viene riportato il grafico che mostra come varia la perdita di carico distribuita in funzione della portata; vengono messi a confronto i valori ottenuti in modo sperimentale (sia con i manometri metallici che con il trasduttore) con quelli ottenuti tramite la formula di *Strickler* utilizzata per calcolare la scabrezza delle condotte.

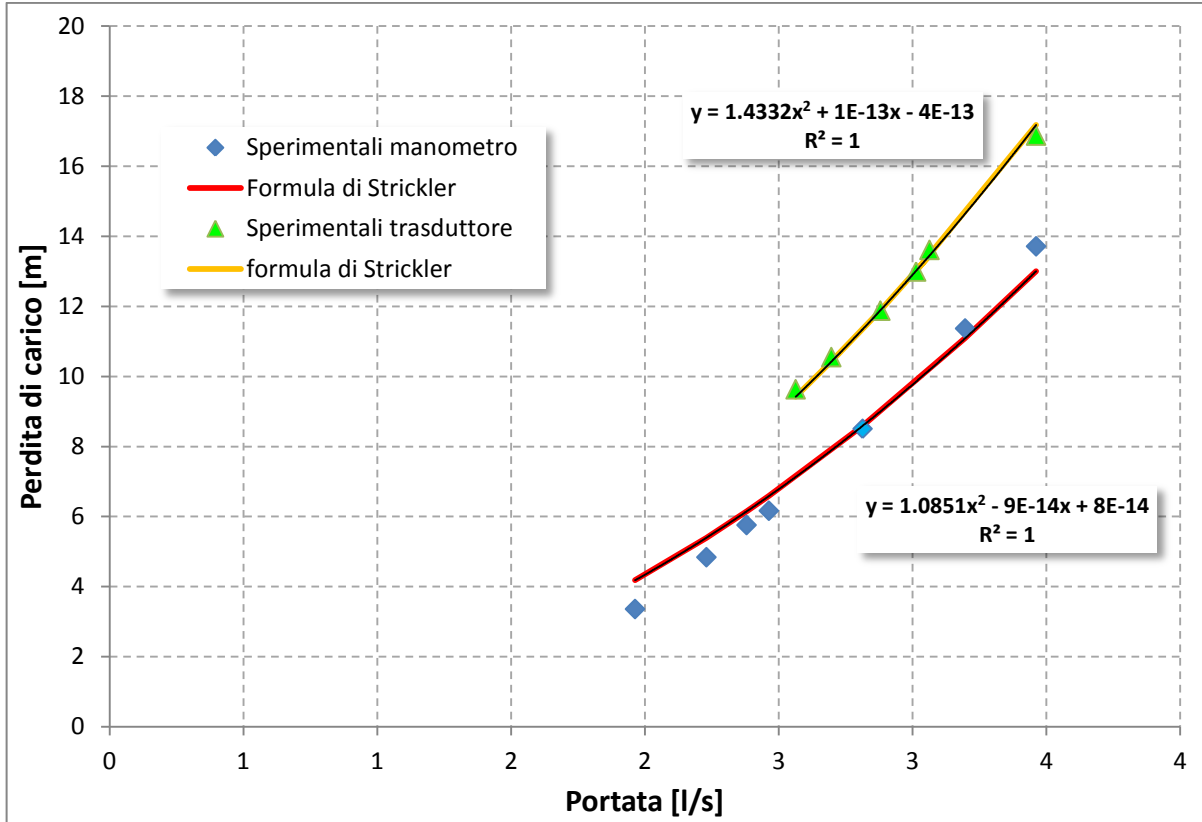


Figura 2.13 Grafico che mette in relazione i valori della perdita di carico ottenuti sperimentalmente, con quelli calcolati mediante la formula di Strickler.

In ultima analisi, si può avere un'ulteriore conferma del valore di scabrezza relativa procedendo in un altro modo, ovvero utilizzando altre formule rispetto a quelle proposte in precedenza.

È stato calcolato per tutti i risultati delle prove un valore di λ con la formula di Cozzo:

$$\lambda = \left(\frac{1}{2 \log \left(\frac{6.4}{Re^{0.91}} + \frac{\varepsilon/D}{3.71} \right)} \right)^2$$

Siccome questa formula contiene il termine di scabrezza relativa ε/D , è stato inserito un valore ipotetico, poi da trovare utilizzando il foglio di calcolo (*Excel*). Il valore del parametro λ così trovato per ogni prova, è stato utilizzato per calcolare il valore della cadente mediante l'espressione:

$$J = \lambda \cdot \frac{V^2}{2gD}$$

I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli ricavati in precedenza come segue:

$$J = \frac{\Delta H}{L}$$

Ponendo nulla la differenza tra le due J , tramite foglio di calcolo, è stato trovato il valore di scabrezza relativa che soddisfa la precedente equazione (Cozzo). I valori di scabrezza vengono di seguito riportati:

λ_{cozzo}	J	ε (mm)	ε/D
0.03060	0.076174	0.000229	0.00435
0.02970	0.063143	0.000200	0.00381
0.02897	0.047280	0.000175	0.00333
0.02776	0.034249	0.000138	0.00263
0.02802	0.031983	0.000142	0.00271
0.02645	0.026884	0.000102	0.00195
0.02352	0.018669	0.000038	0.00072

Tabella 2.8 Valori di scabrezza ottenuti (misure con manometri metallici).

Il valore medio di scabrezza relativa ε/D risulta pari a 0.00279: in questo caso i risultati hanno una variabilità molto marcata per cui è difficile poter dire con certezza che questa scabrezza possa andare bene per qualsiasi valore di portata. La notevole incertezza con cui sono stati misurati i valori di pressione assume ancora una volta un aspetto importante.

Per il caso delle prove con trasduttore invece sono stati ottenuti i seguenti risultati:

λ_{cozzo}	J	ε (mm)	ε/D
0.03781	0.093737	0.000481	0.00917
0.03842	0.072208	0.000501	0.00954
0.03838	0.075608	0.000500	0.00952
0.03843	0.065976	0.000499	0.00951
0.03838	0.058611	0.000494	0.00941
0.03886	0.053512	0.000512	0.00975

Tabella 2.9 Valori di scabrezza ottenuti (misure con trasduttore).

In questo caso si nota invece come il valore di scabrezza relativa sia molto più stabile: il valore medio è pari a 0.00948 e sembra rappresentare bene tutto il campione di misure. Al variare della portata quindi la scabrezza non varia significativamente per cui risulta ragionevole utilizzare il valore medio per la tubazione, in quanto per diversi valori di portata l'errore che si commetterebbe sarebbe del tutto trascurabile.

2.5 Il sensore di pressione Hydac

Per avere una sorta di riscontro di tutti i risultati ottenuti, è stato utilizzato (in un tempo successivo alle prime misurazioni effettuate con i manometri metallici e con il trasduttore della *Burster*) un altro sensore di pressione con il quale confrontare gli esiti delle prove. Poter utilizzare un secondo strumento con funzionamento elettronico può dare maggiore fiducia nei risultati ottenuti ed inoltre permette il confronto con i dati provenienti da una strumentazione simile, al contrario di quanto si potesse fare con i manometri metallici.

Il modello utilizzato è “*Portable Data Recorder HMG 3000*” della **Hydac Electronic**: si tratta di una unità portatile per la misurazione semplice di dati provenienti da sistemi idraulici e pneumatici. Le applicazioni si estendono prevalentemente alla manutenzione di impianti, risoluzione dei problemi e test. Questo strumento può valutare contemporaneamente segnali provenienti da un massimo di 10 sensori. L'unità dispone di ingressi per il collegamento dei sensori che all'occorrenza possono raddoppiare in numero utilizzando degli adattatori a doppio canale (*Y adapters*).



Figura 2.14 Modello Hydac HMG 3000.



Figura 2.15 Sensore di pressione.

La frequenza di acquisizione dello strumento varia in base al canale che si utilizza: tutte le linee utilizzate sono in grado di registrare fino a 1000 misure al secondo tranne due canali che arrivano ad una frequenza di acquisizione di 10 kHz (solo per alcune applicazioni). La centralina elettronica dello strumento è in grado di memorizzare i dati registrati sulla memoria interna di cui è dotata; esiste comunque la possibilità di salvare i dati su una memoria esterna per poi elaborarli. È possibile collegare lo strumento al computer mediante un cavo USB, e tramite l'apposito software "HMGWIN 3000" si possono archiviare, visualizzare graficamente e processare tutti i dati che vengono rilevati. L'interfaccia grafica è molto comoda e di facile utilizzo. Consente di cambiare tutti i settaggi (sia riguardanti la misurazione che la visualizzazione grafica in tempo reale dei dati) e permette di scegliere e modificare diverse opzioni tra cui la frequenza di acquisizione, il tempo di durata ed il voltaggio della sessione di misura, il range di misurazione, i canali che si vogliono utilizzare e il tipo di misurazione che si vuole effettuare. È possibile scegliere anche le unità di misura attraverso un menù a tendina; il file contenente i dati viene salvato in formato testo (.txt) che può essere aperto con foglio di calcolo (Excel). Si possono anche esportare la tabella contenente tutti i dati registrati ed il grafico con i relativi commenti e dati della sessione di misura in formato ".pdf". L'accuratezza delle misure è notevole, in quanto varia a seconda del canale utilizzato tra 0.1% e 1% del Fondo Scala.

2.6 Prove statiche e di moto permanente con sensore Hydac

La modalità con cui sono state effettuate le prove con questo strumento sono identiche a quelle già descritte nel *paragrafo 2.4* e ovviamente le caratteristiche tecniche delle condotte sono le stesse, per cui verranno di seguito riportati i risultati ottenuti ed i relativi commenti.

La prima prova che è stata effettuata è consistita nel misurare la pressione in condizioni statiche, ovvero avendo chiuso l'elettrovalvola e facendo in modo che l'acqua presente nell'impianto fosse

sottoposta al carico idraulico fornito dalla quota di sfioro del serbatoio posto all'ultimo piano del laboratorio. A monte delle bobine il valore ottenuto è stato di 1.705 *bar* (il valore numerico sul display oscillava tra 1.70 *bar* e 1.71 *bar*, per cui è stato adottato il valore medio) mentre a valle delle bobine la pressione statica era pari a 1.745 *bar* (come nel caso precedente il valore numerico sul display oscillava tra 1.74 *bar* e 1.75 *bar*, quindi il valore riportato rappresenta la media dei due). I risultati ottenuti sono del tutto ragionevoli e, rispetto a quelli ricavati col trasduttore della *Burster*, sembrano essere più accurati.

Di seguito vengono riportati i valori di pressione ottenuti per le prove in condizioni di moto permanente; nella tabella viene riportata anche la differenza di carico espressa in colonna di metri d'acqua ($1 \text{ bar} = 10.198 \text{ m}_{H_2O}$), tenendo conto del fatto che il manicotto di monte è sopraelevato di 25 *cm* rispetto a quello di valle.

n° prova	Portata (l/s)	P _{monte} (bar)	P _{valle} (bar)	$\Delta(z+p/\gamma)$ (m_{H_2O})	Velocità (m/s)
1	3.30	1.63	0.24	14.43	1.52
2	2.10	1.67	1.13	5.76	0.97
3	1.40	1.68	1.46	2.49	0.65
4	0.98	1.69	1.60	1.17	0.45
5	1.90	1.68	1.24	4.74	0.88
6	2.70	1.65	0.75	9.43	1.25
7	2.96	1.65	0.55	11.47	1.37
8	3.15	1.64	0.39	13.00	1.45
9	1.23	1.69	1.53	1.88	0.57
10	3.38	1.63	0.19	14.94	1.56

Tabella 2.10 Risultati ottenuti da prove di moto permanente mediante l'utilizzo del sensore Hydac.

Per ognuna delle prove effettuate, ovvero per ogni valore di velocità, è stato calcolato il relativo numero di *Reynolds*, la cadente *J* e il parametro λ tramite la formulazione di *Darcy-Weisbach* con le stesse formule già esposte nei paragrafi precedenti di questo capitolo (per cui verranno riportati solamente i risultati ottenuti); infine inserendo tutti i valori nella formulazione di *Colebrook-White* è stato ricavato il coefficiente di scabrezza relativa.

La tabella seguente mostra i risultati ottenuti dalle prove col sensore *Hydac*.

<i>Reynolds</i>	<i>J</i>	λ	ε (mm)	ε/D
79475	0.08014	0.03558	0.000403	0.007670
50545	0.03198	0.03510	0.000366	0.006973
33710	0.01385	0.03418	0.000306	0.005835
23666	0.00649	0.03248	0.000213	0.004057
45724	0.02632	0.03530	0.000368	0.007009
65010	0.05238	0.03475	0.000365	0.006946
71439	0.06371	0.03501	0.000378	0.007192
75858	0.07221	0.03519	0.000386	0.007360
29692	0.01045	0.03325	0.000262	0.004999
81443	0.08297	0.03508	0.000385	0.007328

Tabella 2.11 Valori di scabrezza ottenuti.

I risultati di scabrezza ottenuti assumono valori piuttosto stabili, tranne in due casi in cui si osservano valori più bassi, non a caso in corrispondenza delle portate minori. A bassi valori di portata è associata un'incertezza maggiore sulla misura della portata stessa, per cui era assolutamente prevedibile ottenere risultati anomali proprio per valori di portata (e quindi di velocità) piuttosto bassi.

I valori di scabrezza ε sono caratterizzati da media, varianza e deviazione standard pari a:

Media	Varianza	Dev. Stand.
0.000343	3.860E-09	6.213E-05

Inoltre, come già fatto precedentemente e per lo stesso motivo, per ognuno dei valori ΔP ottenuti è stato calcolato il corrispondente valore di cadente J tramite la formula di *Strickler*:

$$J = \frac{V^2}{k_s^2 \cdot \Re^{1.33}}$$

nella quale V rappresenta la velocità, \Re il raggio idraulico mentre k_s è il valore di tentativo del coefficiente di scabrezza di *Strickler*. Moltiplicando la perdita di carico (per metro di tubazione) per la lunghezza totale della condotta arrotolata nelle due bobine si trova una quantità espressa in metri di colonna d'acqua.

Questa quantità è stata confrontata con il valore di ΔP misurato per ogni singola prova calcolando il valore di scabrezza che rende nulla la differenza $\Delta P - JL$.

I valori della perdita del carico idraulico distribuita sono riportati nella tabella seguente:

V (m/s)	J (-)	k_s ($m^{1/3}/s$)
1.52	0.08014	96.0
0.97	0.03198	96.6
0.65	0.01385	97.9
0.45	0.00649	100.5
0.88	0.02631	96.4
1.25	0.05238	97.1
1.37	0.06370	96.8
1.45	0.07221	96.5
0.57	0.01045	99.3
1.56	0.08297	96.7

Tabella 2.12 Risultati ottenuti.

La *tabella 2.12* conferma quanto precedentemente affermato: si nota ancora che per i valori di velocità (e quindi di portata) minori si ottengono dei coefficienti di *Strickler* piuttosto alti rispetto alla media, come era lecito attendersi.

Utilizzando il metodo dei minimi quadrati, si ottiene un valore di scabrezza pari a $96.6 \text{ m}^{1/3}/s$: questo risultato legittima il fatto di poter approssimare molto bene i risultati ottenuti.

Nella pagina seguente viene riportato il grafico che mostra come varia la perdita di carico distribuita in funzione della portata.

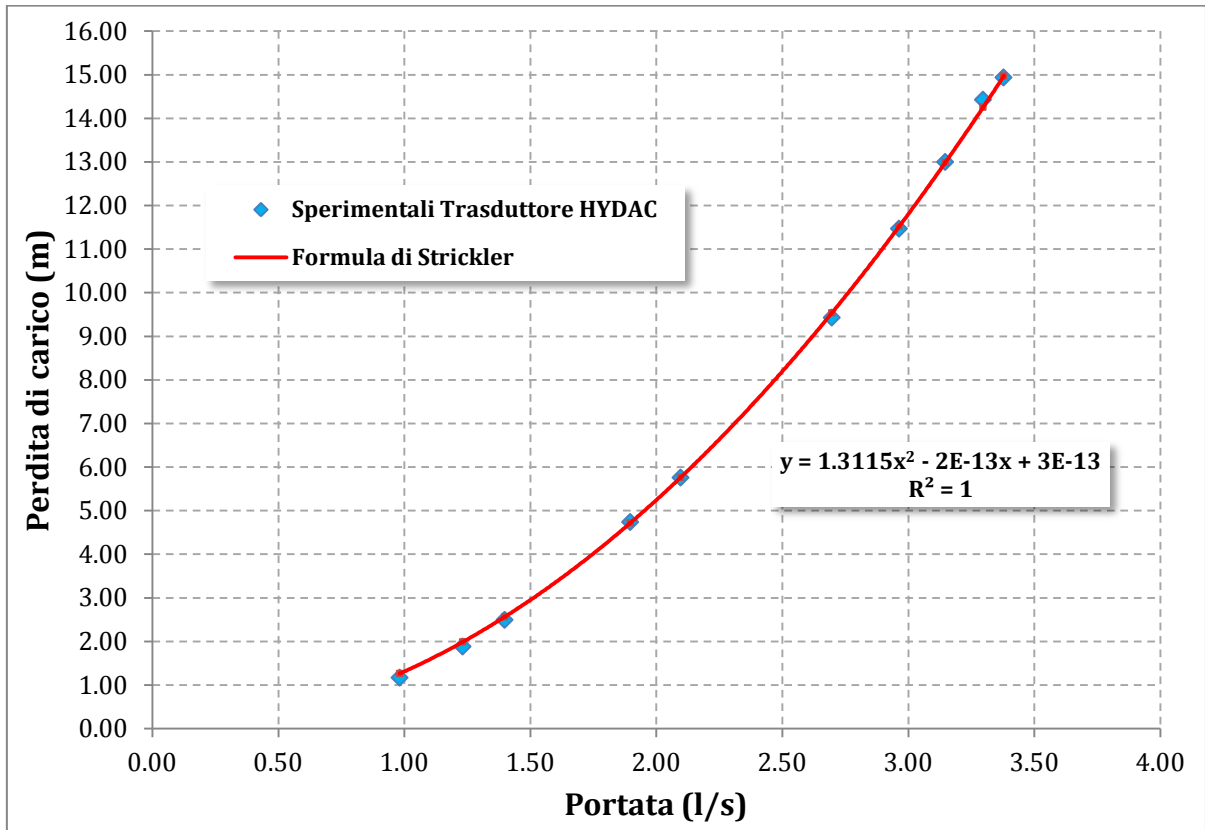


Figura 2.16 Grafico che mette in relazione i valori della perdita di carico ottenuti sperimentalmente, con quelli calcolati mediante la formula di Strickler.

Ancora una volta, è stato calcolato per tutti i risultati delle prove un valore di λ con la formula di Cozzo: con lo stesso procedimento esposto in precedenza relativamente alle prove effettuate con il trasduttore della *Burster*, è stata determinata la scabrezza ε (e la scabrezza relativa ε/D) con le stesse formule già citate nel *paragrafo 2.4*.

I valori di scabrezza vengono di seguito riportati:

λ_{cozzo}	J	ε (mm)	ε/D
0.03550	0.08014	0.000389	0.00741
0.03491	0.03198	0.000345	0.00658
0.03569	0.01385	0.000345	0.00657
0.03663	0.00649	0.000345	0.00657
0.03512	0.02632	0.000347	0.00660
0.03456	0.05238	0.000346	0.00659
0.03486	0.06371	0.000361	0.00688
0.03507	0.07221	0.000371	0.00707
0.03600	0.01045	0.000345	0.00657
0.03495	0.08297	0.000370	0.00704

Tabella 2.13 Risultati.

Per i valori ottenuti di ε , sono state calcolate media, varianza e deviazione standard:

Media	Varianza	Dev. Stand.
0.000356	2.449E-10	1.565E-05

Confrontando i risultati ottenuti con quelli calcolati col metodo esposto in precedenza, si può notare che la differenza è lieve; inoltre il valore medio rappresenta bene tutto il campione di misure essendo caratterizzato anche da una deviazione standard piuttosto bassa. Risulta quindi ragionevole adottare questo valore di scabrezza relativa per la tubazione.

Confrontando invece i risultati ottenuti col trasduttore della *Burster* si può notare una certa differenza: tale diversità potrebbe essere data dal fatto che l'accuratezza dei due strumenti è differente. La varianza ottenuta con il sensore della *Hydac* è inferiore rispetto a quella calcolata dalle prove effettuate col trasduttore della *Burster*. Per questo motivo, sembra ragionevole considerare più veritieri i risultati ottenuti con il sensore della *Hydac*, che effettivamente è risultato essere più accurato.

3

Metodi di integrazione numerica

3.1 Generalità

I fenomeni fluidodinamici vengono descritti generalmente da equazioni differenziali alle derivate parziali (*PDE*): queste sono usualmente risolte con tecniche numeriche, a causa della loro complessità, per cui risulta impossibile l'integrazione analitica. Tra gli approcci proposti per risolvere le equazioni di colpo d'ariete nel caso di liquido monofase, si ricordano alcuni metodi di integrazione numerica:

- *metodo delle linee caratteristiche;*
- *metodi alle differenze finite;*
- *metodi ai volumi finiti;*
- *metodi agli elementi finiti.*

La discretizzazione delle equazioni alle derivate parziali è detta *alle differenze finite*, quella delle forme integrali invece *ai volumi finiti*. Per discretizzazione si intende un processo che permette di risolvere un'equazione differenziale o integrale, che coinvolge delle funzioni definite su domini con la potenza del continuo, *attraverso delle approssimazioni*, definite su insiemi discreti di punti o volumi all'interno del dominio originario. Si ricorda che le soluzioni analitiche costituiscono soluzioni continue definite su tutto il dominio, mentre le soluzioni numeriche possono essere calcolate solo su un insieme discreto di punti che formano un reticolo.

Ognuno dei metodi di integrazione citati sopra può essere risolto con schemi di integrazione che si suddividono in *impliciti* ed *espliciti*. In tali *schemi di integrazione* si assume che le quantità idrauliche siano note al tempo t : il problema consiste nel determinarle al tempo $t + \Delta t$. Nei *metodi espliciti* i punti al tempo $t + \Delta t$ sono calcolati sulla base della conoscenza dei soli punti al tempo t (fig. 3.1).

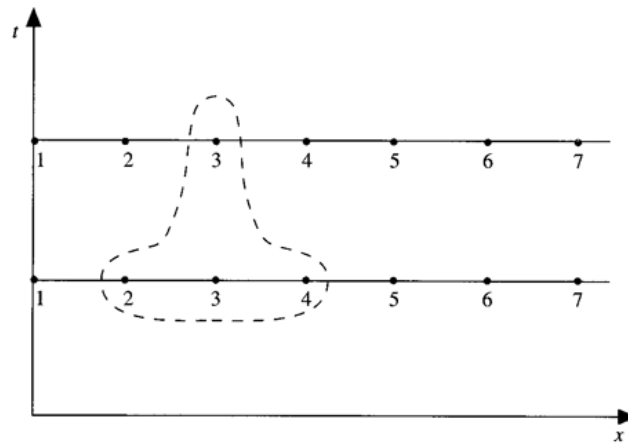


Figura 3.1 Esempio di approccio esplicito (Manni, 2006).

In uno *schema implicito* invece, i punti al tempo $t + \Delta t$ vengono calcolati in funzione sia dei punti al tempo t , sia dei punti al tempo $t + \Delta t$ (fig. 3.2). Poiché i punti al tempo $t + \Delta t$ sono incogniti, il problema non può essere risolto direttamente (esplicitamente), ma risulta necessario risolvere un sistema. Quindi, uno schema di tipo esplicito risulta di più semplice applicabilità, ma può dare problemi di stabilità. Il metodo implicito invece è *incondizionatamente stabile*. Il fatto che il metodo implicito sia stabile, non significa che sia necessariamente più accurato dell'altro.

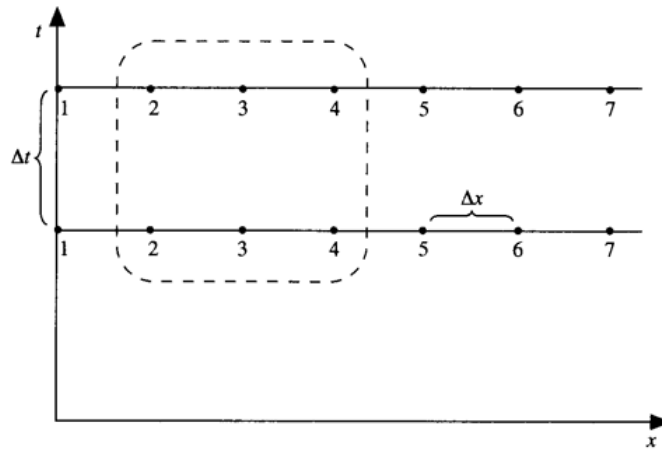


Figura 3.2 Esempio di approccio implicito (Manni, 2006).

Si può notare che la suddivisione in passi incrementali Δx e Δt compare sia in un approccio implicito che in uno esplicito. Per quanto riguarda l'approccio esplicito, una volta fissato Δx il valore che Δt può assumere non è arbitrario, ma deve obbedire ad un determinato *criterio di stabilità*.

Se Δt risulta maggiore del limite prefissato il processo diviene subito instabile. Per ovviare a ciò si preferisce utilizzare un passo di calcolo molto piccolo con un conseguente aumento del numero di processi che il programma di calcolo deve eseguire per ottenere la soluzione. Al contrario i processi impliciti non prevedono alcuna restrizione sul valore da assegnare a Δt .

3.2 Condizione di CFL

Uno schema numerico è stabile quando gli errori puramente numerici legati al processo di discretizzazione non vengono amplificati procedendo da una linea temporale alla successiva: la stabilità dello schema dipende quindi dalle dimensioni della griglia spazio-temporale di calcolo. Condizione necessaria affinché uno schema numerico esplicito sia stabile, è che il passo di discretizzazione temporale e quello spaziale siano legati tra loro dalla seguente relazione, detta **condizione di Courant – Friedrichs – Levy (CFL)**:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$$

Questa costante non può assumere valori qualsiasi ma è soggetta a restrizioni la cui violazione porta ad errori di carattere numerico ed all'instabilità della soluzione. La condizione CFL si basa sul concetto di dominio di dipendenza "fisico" o continuo (in un problema 1D) rappresentante l'insieme delle coordinate che influenzano il valore della soluzione fisica in un dato punto del piano (x_j, t_n) , come rappresentato in *fig. 3.3*.

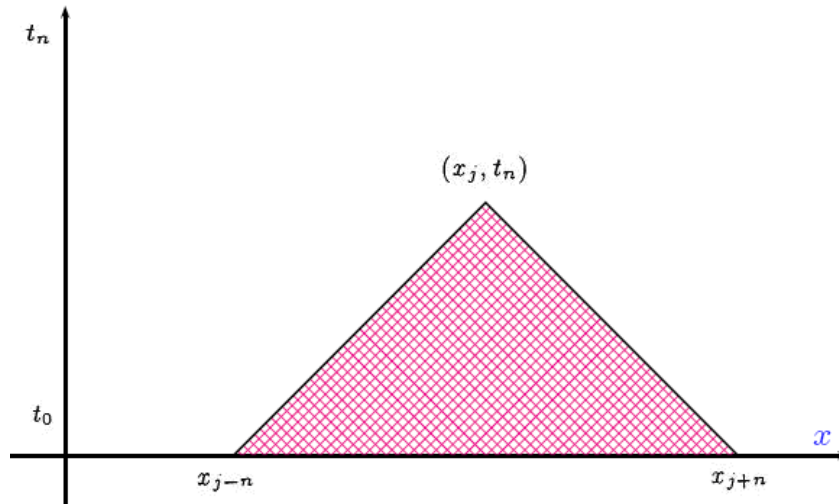


Figura 3.3 Dominio di Dipendenza Continuo (Politi, 2006).

Questo dominio è definito da un'area triangolare di vertici (x_j, t_n) , $(x_{j-n}, 0)$ e $(x_{j+n}, 0)$; le curve congiungenti i punti sono dette curve caratteristiche dell'equazione differenziale in (x_j, t_n) , espresse tramite:

$$x(t) = x_j - \lambda_{max} \cdot (t - t_n)$$

$$x(t) = x_j - \lambda_{min} \cdot (t - t_n)$$

Analogamente è necessario definire un dominio di dipendenza "numerico" o discreto associato a uno schema alle differenze rappresentante l'insieme dei punti del reticolo di calcolo che influenzano il valore della soluzione numerica nel nodo x_j al tempo t_n (fig. 3.4).

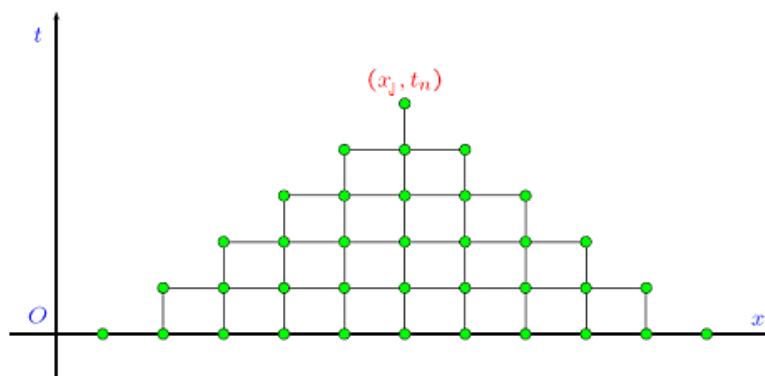


Figura 3.4 Dominio di Dipendenza Discreto (Politi, 2006).

La condizione di stabilità CFL, per garantire la convergenza del sistema numerico al risultato reale, richiede che il dominio di dipendenza continuo sia interamente incluso all'interno nel dominio di dipendenza numerico, come si può osservare in fig. 3.5.

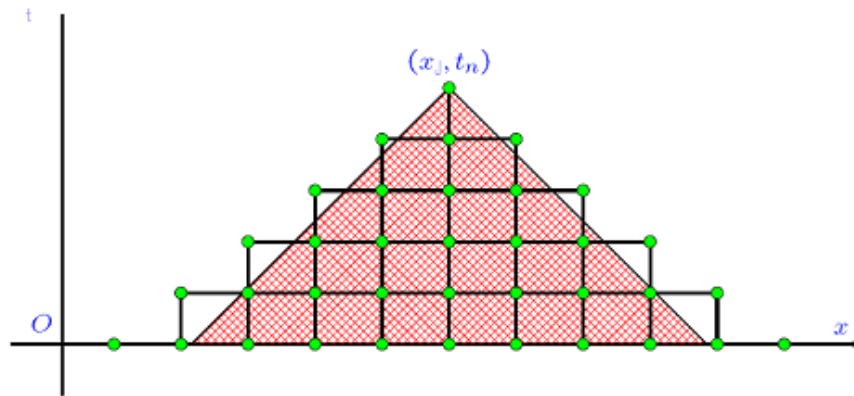


Figura 3.5 Caso favorevole: il dominio di Dipendenza Continuo è contenuto interamente in quello discreto (Politi, 2006).

Se tale condizione non fosse soddisfatta invece, come mostrato in *fig. 3.6*, sicuramente la soluzione numerica non potrebbe convergere a quella fisica per cui tale approssimazione numerica non può essere considerata affidabile.

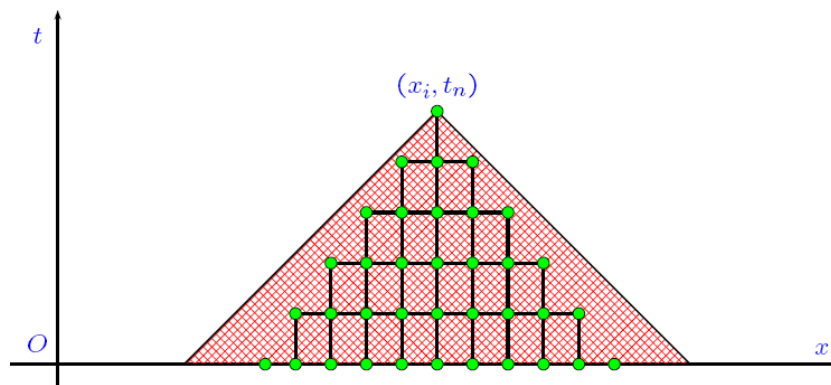


Figura 3.6 Caso sfavorevole: il dominio di Dipendenza Continuo contiene quello discreto (Politi, 2006).

Infatti, alterando la soluzione in un punto del dominio di dipendenza fisico esterno a quello numerico, non si avrebbe alcuna ripercussione sul valore numerico della soluzione calcolato con lo schema alle differenze. In altri termini, la soluzione numerica è ottenuta considerando solo una parte dei valori da cui dipende il valore teorico inficiando in questo modo la possibile convergenza della soluzione. Per ovviare a tale inconveniente, dal punto di vista matematico si deve richiedere di trovarsi nelle stesse condizioni mostrate in *fig. 3.5*, imponendo opportune condizioni sui passi di discretizzazione spaziale e temporale. Nel caso particolare è necessario richiedere che la retta caratteristica passante per (x_j, t_{n+1}) intersechi la retta di dipendenza del metodo numerico.

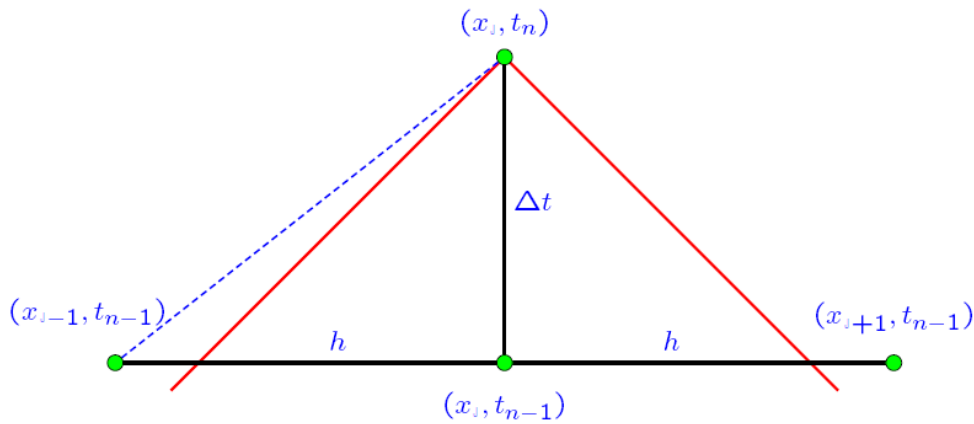


Figura 3.7 Interazione tra i domini, formulazione analitica (Politi, 2006).

La condizione viene verificata solo se la retta tratteggiata blu in *fig. 3.7* risulti avere un coefficiente angolare inferiore rispetto a quello della retta caratteristica. In breve si impone che ogni passo temporale utilizzato per la simulazione numerica debba essere sempre inferiore dell'intervallo di cui necessiterebbe qualsiasi evento per verificarsi, facendo in modo che la differenza tra questi due intervalli sia significativa. La relazione analitica di tale condizione è:

$$\left| \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad \rightarrow \quad |c \cdot \lambda| \leq 1$$

Il numero $c \cdot \lambda$ viene comunemente chiamato *numero di CFL*; si tratta di una quantità adimensionale essendo c , dimensionalmente, una velocità. E' bene ricordare, però, che la *condizione di CFL* costituisce solo una **condizione necessaria ma non sufficiente per la stabilità di un sistema esplicito** e che tali schemi possono comunque risultare instabili ed inefficaci se il problema da discretizzare presenta difficoltà connesse con la rappresentazione delle condizioni al contorno.

3.2.1 Coefficiente di amplificazione

In molti casi accade che in un problema matematico errori nella definizione e stima dei dati in ingresso vengano traslati sui risultati ottenuti. In alcuni casi, in corrispondenza di valori di dati specifici, l'errore relativo sul risultato risulta essere molto più grande dell'errore relativo sui dati: è avvenuta cioè un'amplificazione degli errori. Il risultato finale dell'algoritmo dipenderà così in maniera essenziale da come le perturbazioni, cioè i successivi errori, si amplificano durante la risoluzione dei singoli problemi elementari. Si dice che un problema è ben condizionato quando le perturbazioni sui dati non influenzano eccessivamente i risultati; un algoritmo è stabile invece

quando la successione di operazioni elementari non amplifica eccessivamente gli errori di arrotondamento. Secondo *Quarteroni (2008)*, il numero di CFL introdotto precedentemente ha importanza anche in termini di dissipazione numerica. La stabilità di uno schema si può studiare anche con l'analisi di *Von Neumann*. A titolo di esempio si ipotizza che la funzione da integrare $u_0(x)$ sia 2π – periodica e dunque si possa scrivere in serie di Fourier nel modo seguente:

$$u_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$$

dove:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x) e^{-ikx} dx \quad \text{è il } k\text{-esimo coefficiente di Fourier.}$$

Pertanto:

$$u_j^0 = u_0(x_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikjh}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Si può verificare che applicando uno schema alle differenze finite si perviene alla seguente relazione:

$$u_j^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikjh} \gamma_k^n, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n \geq 1.$$

Il numero $\gamma_k \in \mathbb{C}$ è detto **coefficiente d'amplificazione** della k -esima frequenza (o armonica), e caratterizza lo schema in esame.

Ad esempio nel caso dello schema *Lax – Wendroff* (che sarà descritto più avanti in questo capitolo), si trova:

$$\gamma_k = 1 - ia\lambda \sin(kh) - a^2\lambda^2(1 - \cos(kh))$$

Applicando l'analisi di *Von Neumann* per lo studio della stabilità di uno schema numerico, è possibile dimostrare che, qualora fosse richiesta la stabilità forte da parte dello schema, deve essere necessariamente verificata la seguente condizione:

$$|\gamma_k| \leq 1, \quad \forall k$$

3.3 Forma conservativa e forma non conservativa

Le equazioni del moto dei fluidi possono essere scritte in diverse formulazioni, più o meno equivalenti e più o meno complesse. Il passaggio da una forma all'altra è comunque un'operazione di tipo puramente matematico, che non comporta ipotesi fisiche aggiuntive (*Quadrio, 2003*). In particolare è necessario distinguere:

- *forma conservativa* se il volume di controllo attraverso cui scorre il fluido è fisso nello spazio;

- *forma non conservativa* se il volume di controllo si muove con il fluido stesso, venendo attraversato sempre dalle stesse particelle d'acqua.

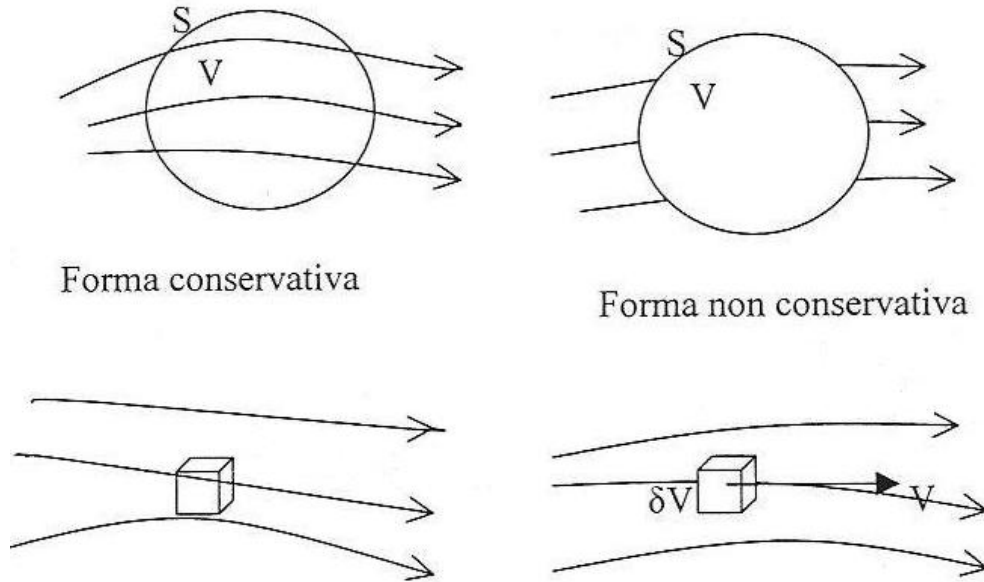


Figura 3.8 Sistemi di riferimento per le diverse formulazioni.

Se si considera un elemento di fluido infinitesimo che si muove con il flusso con un vettore velocità \vec{V} e si impone che venga rispettato il principio fisico della conservazione della massa, si ottiene:

$$\text{se } m = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \delta m = \rho \cdot \delta V$$

Ne segue che:

$$\frac{D\delta m}{Dt} = \frac{D(\rho \cdot \delta V)}{Dt} = \delta V \cdot \frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \frac{D\delta V}{Dt} = 0$$

Dividendo per δV si ottiene:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = 0$$

dove il termine $\frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt}$ rappresenta la divergenza del vettore velocità \vec{V} definita come segue:

$$\nabla = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \vec{i} + \frac{\delta v}{\delta y} \cdot \vec{j} + \frac{\delta w}{\delta z} \cdot \vec{k}$$

Si ottiene in questo modo l'equazione di continuità alle derivate parziali in forma *non conservativa*:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot (\nabla \cdot \vec{V}) = 0$$

Per ottenere invece la forma integrale conservativa, da cui dedurre quella differenziale, si deve considerare un volume di controllo finito e fisso nello spazio come mostrato nella figura seguente:

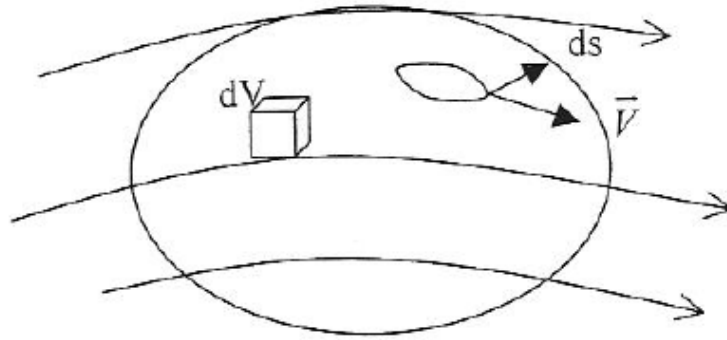


Figura 3.9 Volume di controllo considerato per ricavare la forma conservativa.

Ad un punto della superficie corrisponde un determinato vettore velocità \vec{V} ed un vettore che indica la direzione perpendicolare all'elemento di superficie infinitesimo \vec{ds} . Per il principio di conservazione della massa, la massa uscente dal volume di controllo attraverso la superficie è pari alla diminuzione nel tempo della stessa massa nel volume considerato.

Definendo con V_n la componente di velocità perpendicolare alla superficie, si può esprimere la massa uscente come:

$$\rho \cdot ds \cdot V_n = \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

da cui si deduce quella in forma integrale:

$$\iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

La massa totale presente nel volume di controllo viene espressa come:

$$\iiint_V \rho dV$$

Mentre la sua diminuzione nel tempo:

$$-\frac{\delta}{\delta t} \iiint_V \rho dV$$

Applicando l'uguaglianza fra massa uscente e la sua diminuzione nel tempo si ottiene l'equazione di continuità in forma integrale conservativa:

$$\frac{\delta}{\delta t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{ds} = 0$$

Per derivare la forma differenziale si utilizza il *teorema di Gauss* per ricondursi a soli integrali di volume che, posti uguali a zero, impongono che sia nulla la funzione integranda. Si ottiene quindi l'equazione di continuità in forma conservativa:

$$\frac{\delta p}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

Confrontando le due diverse forme, si nota che quella conservativa (rispetto alla forma non conservativa) è data dalla derivata di una variabile rispetto al tempo a cui si somma la derivata rispetto allo spazio di una funzione della variabile stessa.

È possibile passare da una forma all'altra ricordando che:

$$\nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = \rho \cdot \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho$$

Sostituendo tale espressione nella forma conservativa si otterrebbe:

$$\frac{\delta p}{\delta t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Ricordando la definizione di derivata totale, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$, dall'equazione scritta sopra è possibile ottenere l'equazione di continuità in forma non conservativa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot (\nabla \cdot \vec{V}) = 0$$

Le equazioni espresse in forma conservativa o non conservativa sono equivalenti da un punto di vista analitico, mentre non lo sono quando si integrano le equazioni per via numerica mediante discretizzazione. Per quanto riguarda la forma non conservativa, i termini non lineari non sono più contenuti nell'operatore di derivazione; così, mentre l'integrazione dell'espressione conservativa richiede solamente che la condizione "debole" di integrabilità della funzione sia soddisfatta, la forma non conservativa richiede quella maggiormente restrittiva di derivabilità, la quale viene a cadere in corrispondenza delle discontinuità. Di conseguenza, la conservazione delle variabili, integrando per via numerica, è ottenibile in maniera più semplice attraverso una formulazione di tipo conservativo. È stato dimostrato (Lax, 1954) che questa condizione è necessaria per poter ottenere relazioni corrette fra le discontinuità di uno schema numerico. In un problema di moto vario come quello considerato, è noto che mediante l'uso della forma conservativa, i risultati del campo di moto del fluido sono generalmente stabili, nel limite $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$. Discretizzando la forma non conservativa delle equazioni, può accadere che la soluzione ottenuta numericamente non converga alla soluzione discontinua del problema, nel limite per cui $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$ (Tomirotti, 1997).

Il sistema risolvibile, espresso in *forma non conservativa*, così come è stato ricavato nei capitoli precedenti viene di seguito riportato:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 && \text{equazione di continuità} \\ \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \cdot V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \gamma \cdot J + \gamma \cdot \frac{dz}{dx} &= 0 && \text{equazione del moto} \end{aligned}$$

Dividendo l'equazione del moto per la densità ρ è possibile ottenere il sistema equivalente in *forma conservativa*:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{equazione di continuità}$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\gamma \cdot J}{\rho} + \frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{equazione del moto}$$

3.4 Metodo delle differenze finite

Questo metodo è in grado di approssimare una derivata parziale con il quoziente di una differenza algebrica. In tal caso il semipiano ($t > 0$) viene discretizzato scegliendo un passo temporale Δt , un passo di discretizzazione spaziale Δx e definendo i punti di griglia (x_j, t^n) nel seguente modo:

$$x_j = \Delta x \cdot j, \quad j \in Z$$

$$t^n = \Delta t \cdot n, \quad n \in N$$

con $x_{j+1} = x_j + \Delta x$

cercando soluzioni discrete u_j^n che vengono approssimate a $u(x_j, t^n)$ per ogni j ed n . In genere si ottiene ciò utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione considerata, che permette di approssimare una funzione qualunque con un polinomio di grado qualunque. Essendo i polinomi le funzioni più semplici da trattare, è ovvio che la serie di Taylor costituisce uno strumento di calcolo insostituibile. Sia $f(x)$ una funzione numerica reale di dominio $[a,b]$ e sia x_0 un punto del dominio. Se la funzione è indefinitamente derivabile in x_0 lo sviluppo in serie di Taylor sarà:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \Big|_{x_0} \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!} + H$$

dove H rappresenta l'errore di troncamento che si commette trascurando i termini di ordine superiore. La derivata prima di una funzione in un punto può quindi essere approssimata direttamente attraverso lo sviluppo di Taylor.

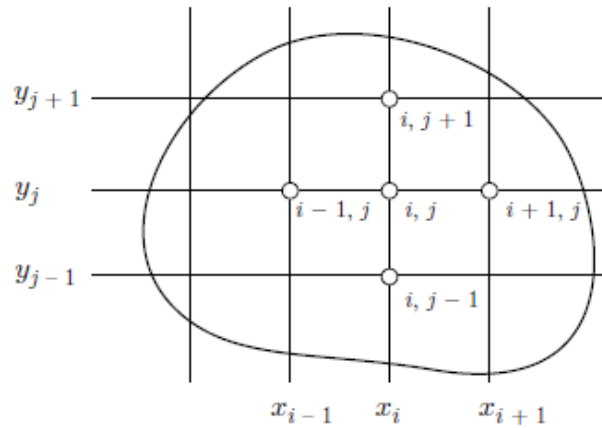


Figura 3.10 Reticolo di discretizzazione.

Facendo riferimento allo schema in *fig. 3.10*, si individuano diverse tipologie di approssimazione delle derivate a seconda dei nodi considerati; queste approssimazioni commettono un errore che ha lo stesso ordine di grandezza di (H) (errore di troncamento) se queste sono del primo ordine, oppure con un errore dell'ordine di (H^2) se le derivate sono del secondo ordine.

Quando la derivata in x_i è approssimata dalla sviluppo di Taylor che considera i punti x_i e x_{i+1} si ottiene un'approssimazione detta "Forward difference" (FDS). Se si considerano invece i punti x_i e x_{i-1} si ottiene un'approssimazione detta "Backward difference" (BDS). Infine, considerando i punti x_{i-1} e x_{i+1} si ottiene un'approssimazione detta "Central difference" (CDS).

Approssimando le derivate al primo ordine si ha:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} && \text{Forward difference} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} && \text{Backward difference} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2 \cdot \Delta x} && \text{Central difference} \end{aligned}$$

Per le derivate seconde si può usare la formula seguente alle differenze centrali:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - 2 \cdot f(x_i) + f(x_{i-1}))}{(\Delta x)^2}$$

I termini che sono stati trascurati costituiscono l'errore di troncamento: misurano cioè l'accuratezza dell'approssimazione e determinano il tasso con cui l'errore diminuisce al diminuire dello spazio che intercorre tra i punti.

3.5 Metodo di Lax – Wendroff in un problema lineare

Il metodo che prende il nome dai matematici *Peter Lax* e *Burton Wendroff* (1960), consiste in uno schema numerico esplicito applicabile a soluzioni marcianti sia nello spazio che nel tempo ed è particolarmente usato per la risoluzione di equazioni (o sistemi di equazioni) iperboliche lineari tramite il metodo delle differenze finite centrate. Tale metodologia garantisce un'accuratezza del secondo ordine sia nello spazio che nel tempo (*Thomas, 1995*) ottenuta considerando solo i primi tre termini dello sviluppo di Taylor che sta alla base della discretizzazione spaziale e temporale della soluzione. Come si è mostrato nel capitolo precedente, essendo un metodo esplicito è necessario imporre la condizione di stabilità di CFL:

$$\left| \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad \rightarrow \quad |c \cdot \lambda| \leq 1$$

$$\text{con } \frac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$$

Si consideri un sistema lineare del tipo:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0$$

che in forma compatta può essere espresso come:

$$u_t + A \cdot u_x = 0 \quad (3.1)$$

Alla base del metodo di Lax – Wendroff si ha lo sviluppo dell'equazione da risolvere in serie di Taylor:

$$u(x, t_{n+1}) = u(x, t_n) + \Delta t \cdot u_t(x, t_n) + \frac{1}{2} \cdot (\Delta t)^2 \cdot u_{tt}(x, t_n) + \dots \quad (3.2)$$

Dall'equazione differenziale (3.1) si ricava:

$$u_t = -A \cdot u_x$$

derivando ulteriormente rispetto al tempo:

$$u_{tt} = -A \cdot u_{xt} = A^2 \cdot u_{xx}$$

Tenendo conto che l'equazione (3.1) implica:

$$u_{xt} = u_{tx} = (-A \cdot u_x)_x = A^2 \cdot u_{xx}$$

Sostituendo le espressioni di u_t e u_{tt} appena ricavate, con quelle presenti nell'equazione (3.2):

$$u(x, t_{n+1}) = u(x, t_n) - \Delta t \cdot A \cdot u_x(x, t_n) + \frac{1}{2} \cdot (\Delta t)^2 \cdot (A)^2 \cdot u_{xx}(x, t_n) + o(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (3.3)$$

Considerando solo i primi tre termini dello sviluppo in serie ed approssimando u_x e u_{xx} tramite differenze centrali finite, si ottiene un metodo del secondo ordine denominato metodo di Lax-Wendroff, la cui equazione in forma generale diviene:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - A \cdot \frac{\lambda}{2} (u_j^{n+1} - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot A^2 (u_{j+1}^n - 2 \cdot u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.4)$$

nella quale con j si indica la posizione spaziale mentre con n l'istante temporale.

Ogni metodo alle differenze finite di tipo esplicito può essere anche scritto nella forma:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \cdot (H_{j+\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

dove $H_{j+\frac{1}{2}}^n = h(u_j^n; u_{j+1}^n)$ e $H_{j-\frac{1}{2}}^n = h(u_j^n; u_{j-1}^n)$, per ogni j e $h(\dots)$ è una funzione, da scegliersi in modo opportuno, detta *flusso numerico*.

Nel caso in esame:

$$H_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \cdot [A \cdot (u_{j+1}^n - u_j^n) - \lambda \cdot (A^2 \cdot (u_{j+1}^n - u_j^n))]$$

$$H_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \cdot [A \cdot (u_{j-1}^n + u_j^n) - \lambda \cdot (A^2 \cdot (u_j^n - u_{j-1}^n))]$$

Il metodo di Lax – Wendroff è definito “*Three-point support schemes*”: esaminando i punti della griglia usati nel calcolo, si ottiene un diagramma noto come lo stencil del metodo, in questo caso costituito da tre punti. Per ricavare i valori nel nodo $(j, n + 1)$ è necessario infatti, come mostrato dalla *fig. 3. 13*, conoscere i valori nei nodi (j, n) , $(j + 1, n)$ e $(j - 1, n)$.

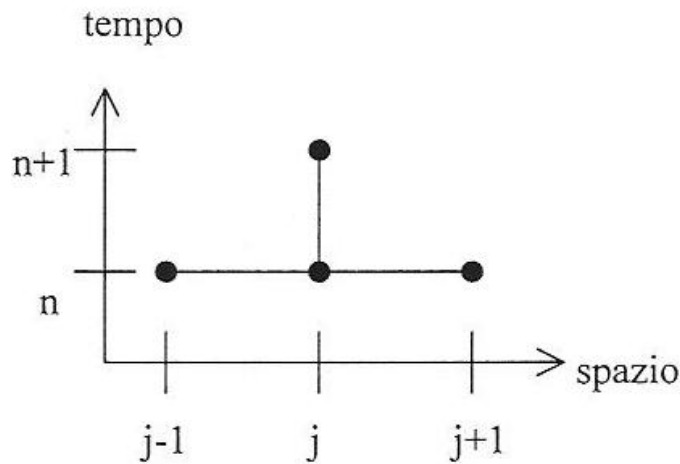


Figura 3.11 Stencil per il metodo Lax – Wendroff.

3.6 Metodo di Lax – Wendroff in un problema quasi-lineare

Il problema in esame non è però lineare, infatti riprendendo l’equazione da risolvere si ha:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(u) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{E}$$

Il metodo di Lax – Wendroff appena introdotto risulta applicabile per equazioni lineari; come si deduce dall’equazione precedente il problema in oggetto è però quasi lineare, ricordando che la forma generale di una equazione quasi-lineare è del tipo:

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u)$$

L'estensione del metodo di Lax-Wendroff a tali casi è stata compiuta dagli stessi Autori, anche se la formulazione più diffusa risulta essere quella di Roe (1981) che nel caso *semilineare* porta a :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - A_j^n \cdot \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot (A_j^n)^2 (u_{j+1}^n - 2 \cdot u_j^n + u_{j-1}^n)$$

3.7 Applicazione del metodo

Applicando il modello risolutivo ricavato nel paragrafo precedente al sistema di equazioni risolventi il problema di colpo d'ariete elastico, scritto in forma conservativa diviene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\gamma \cdot J}{\rho} + \frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Prima di procedere con i calcoli si ritiene opportuno effettuare due considerazioni che permettono di semplificare ulteriormente la trattazione analitica. Almeno inizialmente vengono trascurate infatti le perdite di carico distribuite che caratterizzano la condotta in cui avvengono le oscillazioni di pressione; ciò porta a livello analitico ad eliminare il termine J dall'equazione del moto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Per definizione poi $h = z + \frac{p}{\gamma}$, da cui $p = \gamma \cdot (h - z)$, differenziando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \gamma \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \gamma \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Sostituendo entrambi i termini nelle equazioni del sistema risolvete:

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + V \cdot \gamma \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \rho c^2 \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\gamma}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Semplificando i termini che si annullano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + V \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{c^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Secondo Fox (1989) il termine $V \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ è trascurabile rispetto agli altri termini dell'equazione: il massimo valore che $\frac{\partial z}{\partial x}$ può assumere è compreso tra uno (per condotte verticali) e zero (per condotte orizzontali). Pertanto, il termine $V \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ è compreso tra V e 0 quindi l'espressione finale del sistema risolvente diviene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Oppure scritto in forma matriciale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} h \\ V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V & c^2 \\ g & V \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} h \\ V \end{vmatrix} = 0$$

Espresso invece in forma compatta:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(u) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0$$

dove:

- $u = \begin{vmatrix} h \\ V \end{vmatrix}$
- $A = \begin{vmatrix} V & c^2 \\ g & V \end{vmatrix}$

3.8 Discretizzazione alle differenze finite

Per risolvere il sistema ricavato con il metodo di Lax – Wendroff, si utilizza la seguente relazione:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - A_j^n \cdot \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot (A_j^n)^2 \cdot (u_{j+1}^n - 2 \cdot u_j^n + u_{j-1}^n)$$

ovvero:

$$u_j^{n+1} = \begin{vmatrix} h_j^{n+1} \\ V_j^{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_j^n \\ V_j^n \end{vmatrix} - \frac{\lambda}{2} \cdot \begin{vmatrix} V & c^2 \\ g & V \end{vmatrix}_j^n \cdot \begin{vmatrix} h_{j+1}^n - h_{j-1}^n \\ V_{j+1}^n - V_{j-1}^n \end{vmatrix} + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\begin{vmatrix} V & c^2 \\ g & V \end{vmatrix}_j^n \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n \\ V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n \end{vmatrix}$$

con $A^2 = \begin{vmatrix} (V^2 + c^2) & \left(\frac{2 \cdot V \cdot c^2}{g}\right) \\ 2 \cdot V \cdot g & (V^2 + c^2) \end{vmatrix}$

Separando le due incognite V e h :

$$V_{j+1}^n = V_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(g \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + V_j^n \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left((2 \cdot V_j^n \cdot g) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + (c^2 + (V_j^n)^2) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right) \\
h_j^{n+1} & = h_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(V_j^n \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \frac{c^2}{g} \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right) + \\
& + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left((c^2 + (V_j^n)^2) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + \left(\frac{2 \cdot V_j^n \cdot c^2}{g} \right) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right)
\end{aligned}$$

Queste espressioni permettono di calcolare in ogni punto interno della condotta i valori di pressione e di velocità. Per determinare invece i valori al bordo sarà necessario introdurre nuove considerazioni che verranno mostrate in seguito.

3.9 Modello Lax – Wendroff con attrito

Nel paragrafo precedente è stata ricavata l'espressione del sistema risolvibile trascurando l'attrito all'interno delle condotte. Un'analisi più completa prevede però di considerare anche il caso in cui la cadente J non sia più trascurabile, in questo caso le equazioni da considerare sono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot c^2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x} & = 0 \\
\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\gamma \cdot J}{\rho} + \frac{\gamma}{\rho} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} & = 0
\end{aligned}$$

Seguendo lo stesso schema logico già mostrato nel caso di attrito trascurabile si sostituiscono i valori di $\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$ e di $\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right)$ e si trascura il termine $V \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ perché ininfluenza, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} & = 0 \\
\frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + J \cdot g & = 0
\end{aligned}$$

Oppure in forma matriciale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} h \\ V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V & c^2 \\ g & V \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} h \\ V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -g \cdot J \end{vmatrix}$$

Quindi il sistema da risolvere in forma compatta risulta:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(u) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{E}$$

dove:

- $u = \left| \frac{h}{V} \right|$
- $A = \left| \begin{array}{cc} V & \frac{c^2}{g} \\ g & V \end{array} \right|$
- $E = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -g \cdot J \end{array} \right|$

La discretizzazione alle differenze finite tramite metodo di *Lax – Wendroff* dovrà essere così corretta:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - A_j^n \cdot \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot (A_j^n)^2 \cdot (u_{j+1}^n - 2 \cdot u_j^n + u_{j-1}^n) + \Delta t \cdot E_j^n$$

cioè:

$$u_j^{n+1} = \left| \frac{h_j^{n+1}}{V_j^{n+1}} \right| = \left| \frac{h_j^n}{V_j^n} \right| - \frac{\lambda}{2} \cdot \left[\begin{array}{cc} V & \frac{c^2}{g} \\ g & V \end{array} \right]_j^n \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\left[\begin{array}{cc} V & \frac{c^2}{g} \\ g & V \end{array} \right]_j^n \right)^2 \cdot \left[\frac{h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n}{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n} \right] + \Delta t \cdot \left| \begin{array}{c} 0 \\ -g \cdot J \end{array} \right|_j^n$$

dove:

$$A^2 = \left| \begin{array}{cc} (V^2 + c^2) & \left(\frac{2 \cdot V \cdot c^2}{g} \right) \\ 2 \cdot V \cdot g & (V^2 + c^2) \end{array} \right|$$

Separando le due incognite V e h :

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot (g \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + V_j^n \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n)) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot ((2 \cdot V_j^n \cdot g) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + (c^2 + (V_j^n)^2) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n)) - g \cdot \Delta t \cdot J_j^n$$

$$h_j^{n+1} = h_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(V_j^n \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \frac{c^2}{g} \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left((c^2 + (V_j^n)^2) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + \left(\frac{2 \cdot V_j^n \cdot c^2}{g} \right) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right)$$

Le perdite di carico vengono espresse mediante la formulazione di Chézy:

$$J = \lambda \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot g \cdot D}$$
$$\chi = \sqrt{\frac{8 \cdot g}{\lambda}} \quad \rightarrow \quad \lambda \cong \frac{78.4}{\chi^2}$$

Dove χ viene ottenuto tramite la formula di Gauckler – Strickler (ipotizzando il moto assolutamente turbolento):

$$\chi = k_S^2 \cdot \mathcal{R}^{1/3}$$

dove:

- $k_S =$ *coefficiente di Strickler*
- $\mathcal{R} = \frac{d}{4} =$ *Raggio idraulico*

Combinando le relazioni precedenti si ricava il valore di λ utilizzato, pari a:

$$\lambda = \frac{124.528}{k_S^2 \cdot \mathcal{R}^{1/3}}$$

4

Prove sperimentali di moto vario

4.1 Modalità operative delle prove di moto vario

Una volta realizzato l'apparato sperimentale, descritto nel *Capitolo 2*, e stimato il valore di scabrezza per le tubazioni, sono state effettuate delle prove di moto vario. Lo scopo di tali prove è stato quello di riprodurre il *colpo d'ariete* e valutare l'andamento della pressione, osservando il picco massimo raggiunto, quello minimo e lo smorzamento delle oscillazioni fino al raggiungimento del valore di pressione statica. La sessione di prove sperimentali è stata suddivisa secondo due modalità operative: la prima prevede la realizzazione del fenomeno di *colpo d'ariete* utilizzando la configurazione impiantistica descritta in dettaglio nel *paragrafo 2.1* (chiamata per comodità *Configurazione I*) mentre nella seconda modalità operativa lo schema impiantistico viene modificato, spostando l'elettrovalvola da valle a monte delle due bobine (*Configurazione II*).

4.2 Realizzazione del colpo d'ariete – Configurazione I

Le prove di moto vario elastico sono state effettuate per diversi valori di portata, fatta variare tramite la valvola di regolazione; il valore della portata veniva letto dal misuratore magnetico. Per poter realizzare il fenomeno di *colpo d'ariete* è necessario bloccare in maniera “quasi istantanea” la corrente d'acqua fluente mediante l'utilizzo dell'elettrovalvola. Azionando l'interruttore di tale dispositivo elettromeccanico la corrente si arresta in un tempo che, con le dovute approssimazioni, si può considerare infinitesimo e, in ogni caso, si ha una manovra brusca. Tale blocco genera infatti un'onda di sovrappressione rilevata dal trasduttore di pressione collegato all'impianto, avvitato sul manicotto appena a monte dell'elettrovalvola. Grazie a questo strumento, collegato tramite cavo USB al computer, è possibile visualizzare il grafico della pressione istantanea in funzione del tempo. Tramite il software inoltre si ha la possibilità di scegliere tutte le impostazioni di misura, tra le quali è importante la frequenza di acquisizione dei dati, impostata sul valore massimo di ogni strumento. Ogni prova dura circa 40 – 50 secondi; dopo che la portata viene regolata sul valore desiderato, si deve attendere qualche minuto affinché il flusso si stabilizzi: dopodiché si può procedere con l'avvio della registrazione dei dati di pressione.

Una volta che la sessione di registrazione è avviata, si attende qualche secondo per stabilizzare il valore visualizzato sull'interfaccia grafica. Trascorso questo tempo, si aziona l'interruttore dell'elettrovalvola per bloccare il flusso: si nota negli istanti appena successivi che sul grafico compaiono dei picchi di pressione ad andamento sinusoidale che col passare dei secondi si attenuano. Dopo la chiusura “istantanea” della valvola si devono attendere circa 30 – 35 secondi prima di riaprirli, per fare in modo che tutte le oscillazioni residue si attenuino e il valore di pressione torni quello originale. A questo punto la corrente può nuovamente circolare per cui la valvola viene riaperta. Nella tabella seguente sono riportati i valori di pressione ottenuti per diverse portate, tramite l'utilizzo del trasduttore *Burster*.

Portata (l/s)	Velocità (m/s)	P_{MAX} (bar)	$\Delta P_{MISURATO}$ (bar)	$\Delta P_{TEORICO}$ (bar)	Differenza ΔP (%)
0.53	0.2448	4.63	2.68	3.40	-21.08
1.07	0.4943	8.99	7.05	6.86	2.78
1.38	0.6375	11.46	9.51	8.84	7.53
1.58	0.7299	12.73	10.78	10.12	6.48
1.76	0.8130	13.58	11.63	11.28	3.13
1.98	0.9147	15.51	13.56	12.69	6.89

Tabella 4.1 Valori di pressione corrispondenti alle varie portate (Trasduttore *Burster*).

Quello che si nota osservando la tabella soprastante è il fatto che tranne per il valore minore di portata, in ogni prova la pressione di picco viene sempre misurata in eccesso rispetto al suo valore teorico; questa sovrastima della pressione di picco è dovuta alla calibrazione dello strumento per cui generalmente questo (trasduttore *Burster*) tende a registrare valori più elevati di quelli teorici attesi.

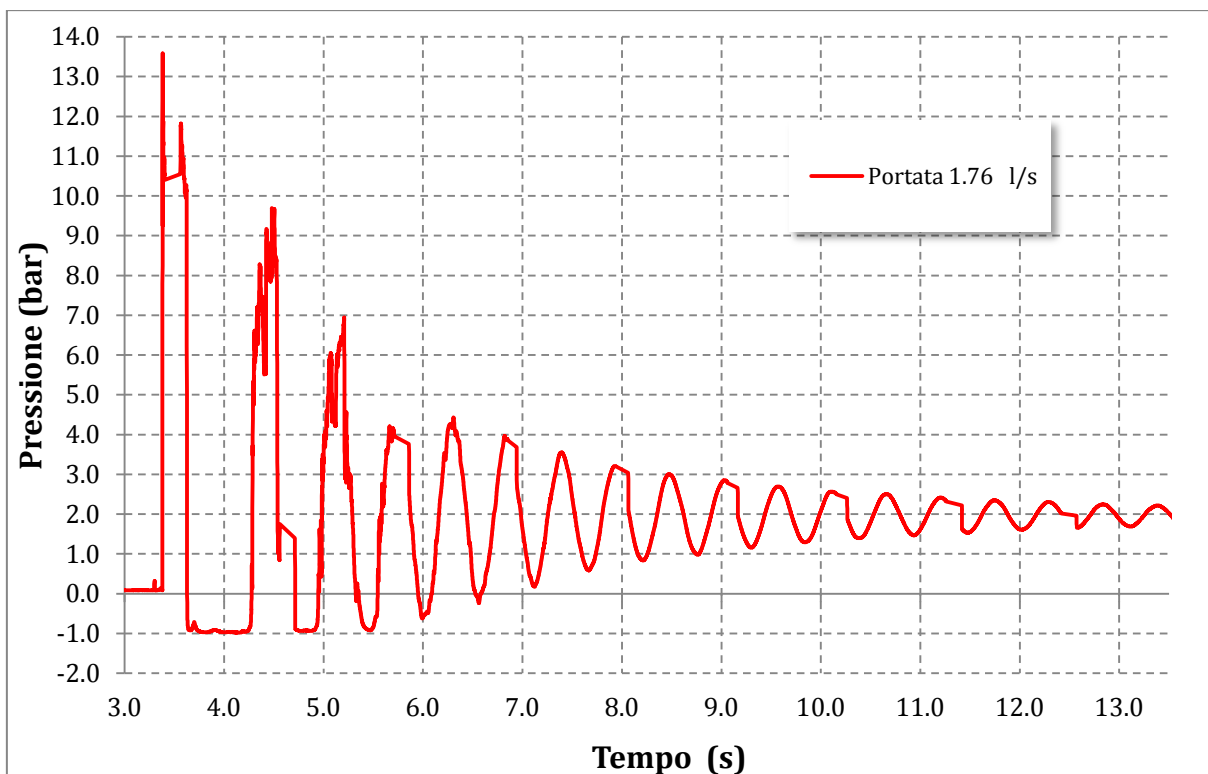


Figura 4.1 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo, per il caso di portata pari a 1.76 l/s.

Come si nota anche dal grafico sopra, i valori minimi di pressione registrati sono sempre negativi e pari circa a -1 bar . Per questo valore di pressione (relativa) negativa si sviluppa il fenomeno della

cavitazione. Per quanto la portata sia bassa, tale picco non risulta mai essere positivo o nullo. Per poter effettuare delle prove di moto vario elastico senza incorrere nella cavitazione, è necessario abbassare ulteriormente la portata in modo da ridurre in maniera sostanziale la velocità.



Figura 4.2 Saracinesca di regolazione “a farfalla”.

Siccome ulteriori tentativi di abbassare la portata non sono risultati abbastanza efficaci, si è deciso di effettuare anche una modifica all’impianto: nella parte terminale dove avviene lo scarico nei serbatoi sotto il pavimento del piano seminterrato, è stato aggiunto un tratto di tubazione ad U (formato da un pezzo dritto, due curve e un ulteriore tratto retto che funge da scarico). Al termine del tratto rettilineo prima dello scarico è stata posizionata una saracinesca “a farfalla” (fig. 4.2) per una regolazione più fine della portata.

4.3 Configurazione I - 1^a modifica: inserimento tubazione ad U

Con la modifica apportata all’impianto si è cercato di eliminare il picco negativo a -1 bar e non indurre la *cavitazione*. Bisogna sottolineare in ogni caso che le portate inserite in *tabella 4.1* sono piuttosto elevate perché il picco non assuma il valore unitario nel semiasse negativo delle ordinate. L’introduzione della saracinesca anche nel tratto finale della tubazione permette appunto di poter regolare la portata in maniera più accurata ed abbassarla ai valori desiderati, inferiori a mezzo litro al secondo.

Sono state ripetute le prove di moto vario con lo stesso schema procedurale descritto nel paragrafo precedente, ma con diversi valori di portata rispetto a quelli già citati. I risultati ottenuti col trasduttore della *Burster* sono riportati nella tabella seguente.

Portata (l/s)	Velocità (m/s)	P_{MAX} (bar)	$\Delta P_{MISURATO}$ (bar)	$\Delta P_{TEORICO}$ (bar)	Differenza ΔP (%)
0.033	0.0152	3.63	1.68	0.21	696.4
0.098	0.0453	3.70	1.76	0.63	180.1
0.165	0.0762	4.02	2.07	1.06	95.6
0.198	0.0915	3.53	1.58	1.27	24.6
0.215	0.0993	3.78	1.83	1.38	32.7
0.248	0.1146	4.26	2.31	1.59	45.6

Tabella 4.2 Valori di pressione corrispondenti alle varie portate con la configurazione modificata (Trasduttore *Burster*).

I risultati ottenuti in *tabella 4.2* mostrano che la differenza di pressione tra il picco massimo raggiunto e la statica è di gran lunga maggiore rispetto al caso precedente; tuttavia, osservando i grafici dei vari andamenti di pressione per le rispettive portate (mostrati di seguito) si può notare che il picco inferiore si trova sempre nel semipiano positivo delle ordinate: ciò sta a significare che con questo tentativo e con portate basse si è riusciti nell'intento di evitare la cavitazione. Tutto ciò va a scapito dell'accuratezza dei dati, in quanto per portate così basse come quelle riportate in tabella l'imprecisione sul valore esatto di portata transitante assume un ruolo importante e non può essere di certo trascurato.

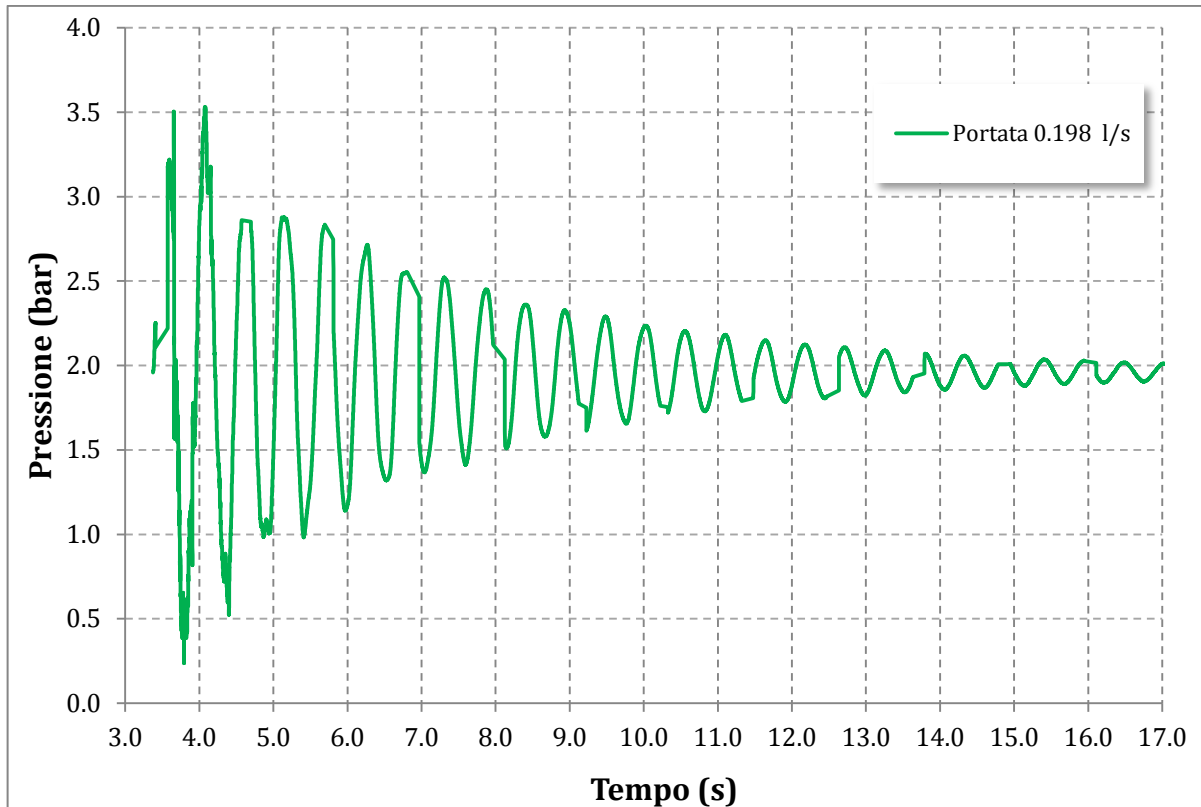


Figura 4.3 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo, per il caso di portata pari a 0.198 l/s (Trasduttore Burster).

In questo caso, si può notare innanzitutto che siccome la portata (e quindi la velocità) è molto minore rispetto al caso considerato nel grafico precedente di *fig. 4.1*, anche i valori di picco sono inferiori; inoltre, è evidente che il valore minimo di pressione non solo non induce la *cavitazione*, ma è anche positivo (0.238 bar).

Si può quindi affermare che il tentativo di evitare il fenomeno della *cavitazione* sia andato a buon fine grazie alle modifiche apportate sia ai valori di portata che all'impianto, facendo in modo che si potesse regolare ulteriormente la portata fluente e inserendo un "gomito" (costituito dalla doppia curva) nella tubazione.

È stato precisato in precedenza che nella realizzazione di tali registrazioni era necessario aspettare circa 30 secondi prima di riaprire la valvola dopo la sua chiusura "istantanea"; questo intervallo temporale serviva per far sì che il valore originario di pressione fosse ristabilito, dopo le oscillazioni e gli smorzamenti che caratterizzano il *colpo d'ariete*. Una volta che il trasduttore rilevava il valore iniziale e lo manteneva per diversi secondi, veniva riaperta la valvola. In alcune prove precedenti a quelle riportate in *tabella 4.2*, tale intervallo temporale non è stato rispettato, e la valvola è stata riaperta pochi secondi dopo che era stata chiusa. I risultati ottenuti vengono mostrati nei grafici riportati di seguito.

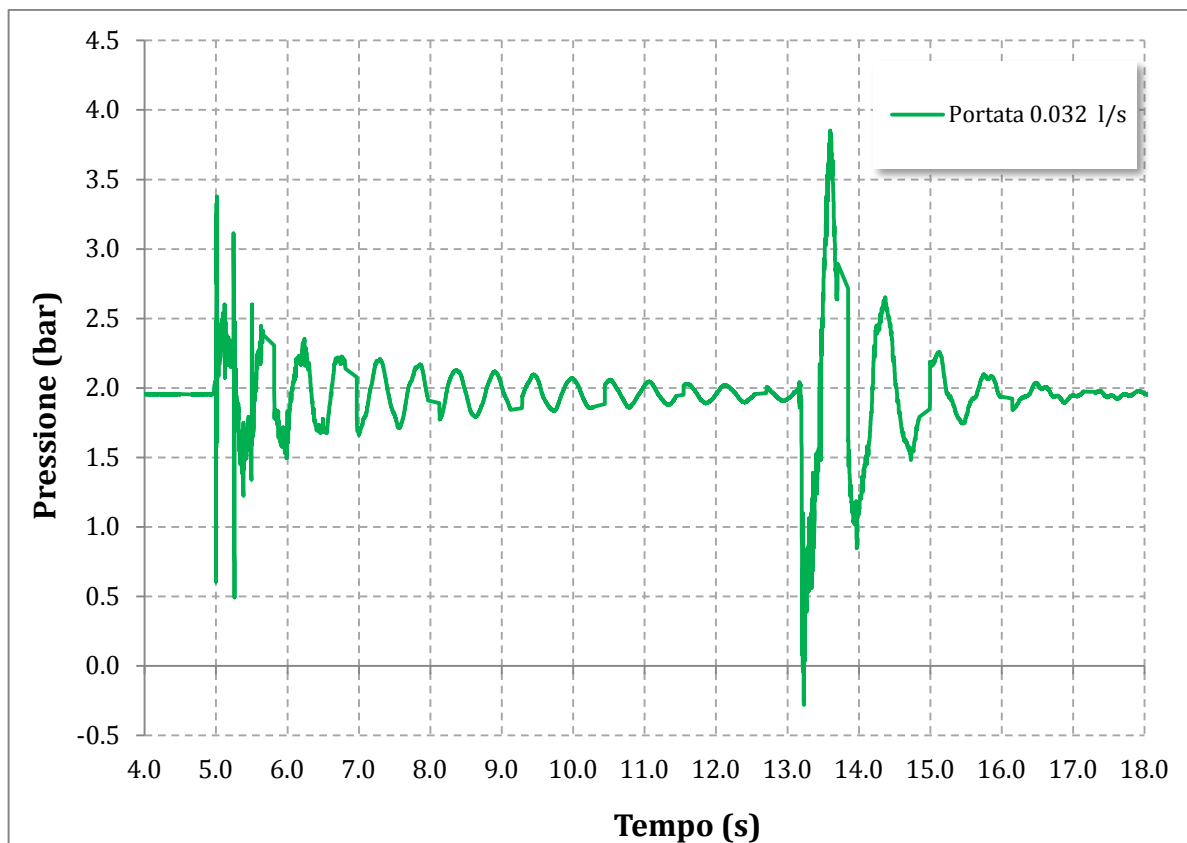


Figura 4.4 Colpo d'ariete con portata pari a 0.032 l/s (Trasduttore *Burster*).

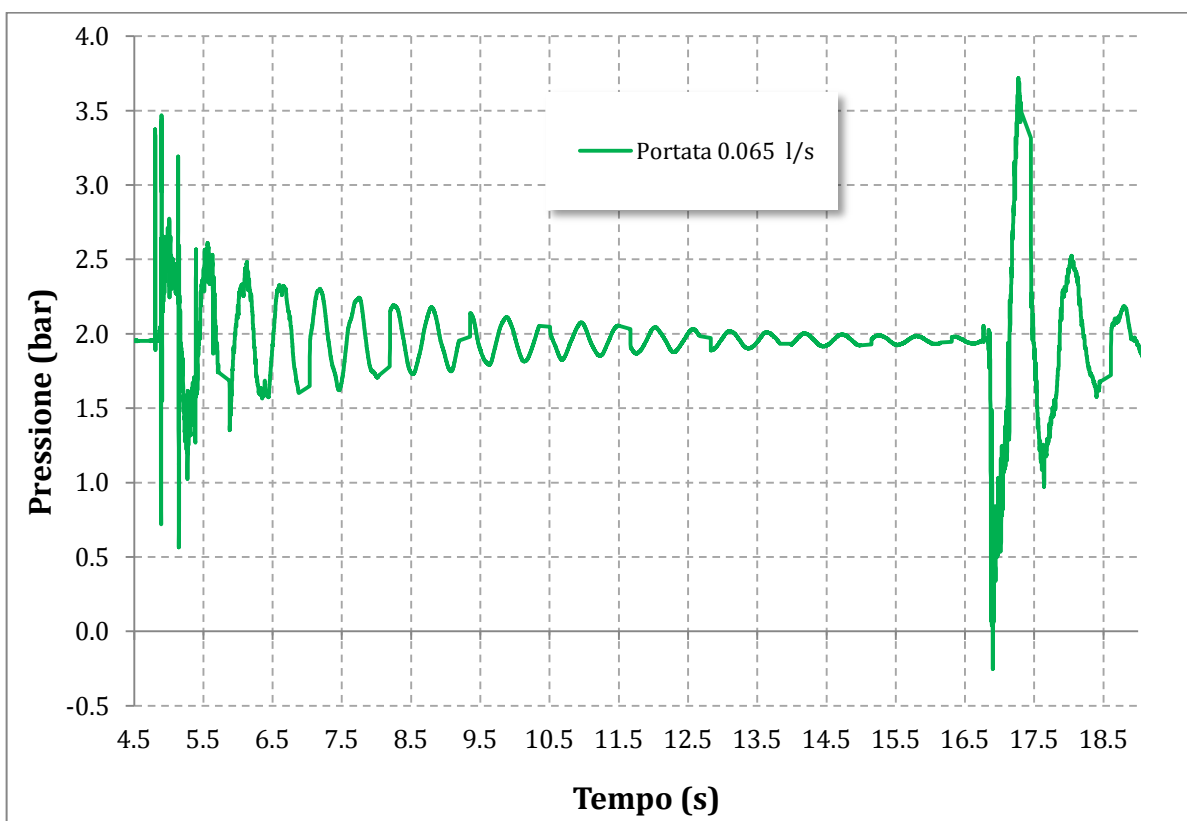


Figura 4.5 Colpo d'ariete con portata pari a 0.065 l/s (Trasduttore *Burster*).

Come si può notare dai grafici stessi, i picchi di sovrappressione sono al di sopra dell'asse delle ascisse (in corrispondenza del quale la pressione è nulla) ma al momento della riapertura della valvola (troppo ravvicinata dal punto di vista temporale) le oscillazioni non sono del tutto smorzate per cui sono stati registrati due ulteriori picchi maggiori (in valore assoluto) dei precedenti ottenuti alla chiusura della valvola. In entrambi i casi, nonostante la portata fosse molto bassa ed il tratto ad U di tubazione fosse stato inserito, è stato registrato un valore limite inferiore di pressione pari a circa -0.2 bar . Per questo motivo, i valori della riapertura non sono stati presi in considerazione.

Poiché i risultati ottenuti con questo strumento sono affetti da un errore relativo percentuale piuttosto elevato (per le ragioni già esposte), sono state effettuate altre prove con lo stesso schema impiantistico utilizzando il sensore di pressione *Hydac* (descritto nel *Capitolo 2*). L'impiego di un altro strumento con caratteristiche tecniche simili risulta molto utile per poter confrontare i risultati e poter capire se le registrazioni precedentemente riportate sono del tutto erronee oppure hanno un significato. Confrontando gli andamenti di pressioni originati dai due strumenti è possibile individuare se il trasduttore della Burster commetta un errore di sovrastima oppure se il valore reale sia quello mostrato.

Di seguito vengono quindi riportati grafici e tabelle ricavati dai risultati ottenuti mediante il sensore di pressione *Hydac*.

Portata (l/s)	Velocità (m/s)	P_{MAX} (bar)	$\Delta P_{MISURATO}$ (bar)	$\Delta P_{TEORICO}$ (bar)	Differenza ΔP (%)
0.148	0.0685	3.53	1.85	0.95	94.7
0.182	0.0839	4.22	2.53	1.16	117.4
0.215	0.0993	3.99	2.30	1.38	67.0
0.232	0.1070	3.76	2.08	1.48	40.1
0.282	0.1301	4.14	2.46	1.81	36.3
0.315	0.1455	4.70	3.03	2.02	50.1
0.415	0.1917	5.13	3.46	2.66	30.1

Tabella 4.3 Valori di pressione corrispondenti alle varie portate con la configurazione modificata (Sensore *Hydac*).

La prima cosa che è possibile osservare dalla *tabella 4.3* consiste nel fatto che la differenza relativa sul ΔP misurato è sicuramente inferiore rispetto a quello di *tabella 4.2*, anche se in ogni caso non è affatto trascurabile. Questa differenza può essere giustificata col fatto che il sensore *Hydac* possiede

un'accuratezza maggiore dell'altro trasduttore, per cui i risultati sono sicuramente migliori. Di seguito vengono riportati alcuni grafici relativi alle prove eseguite col sensore *Hydac*.

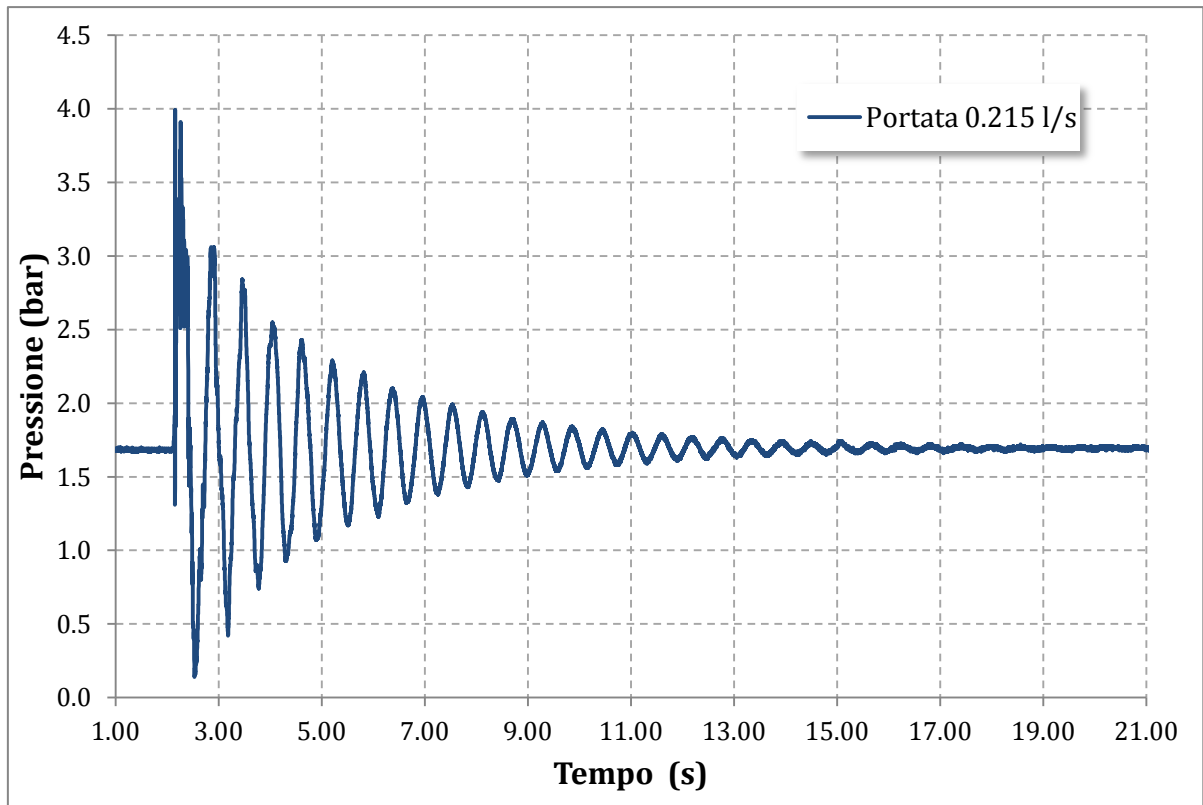


Figura 4.6 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo per una portata di 0.215 l/s (Sensore *Hydac*).

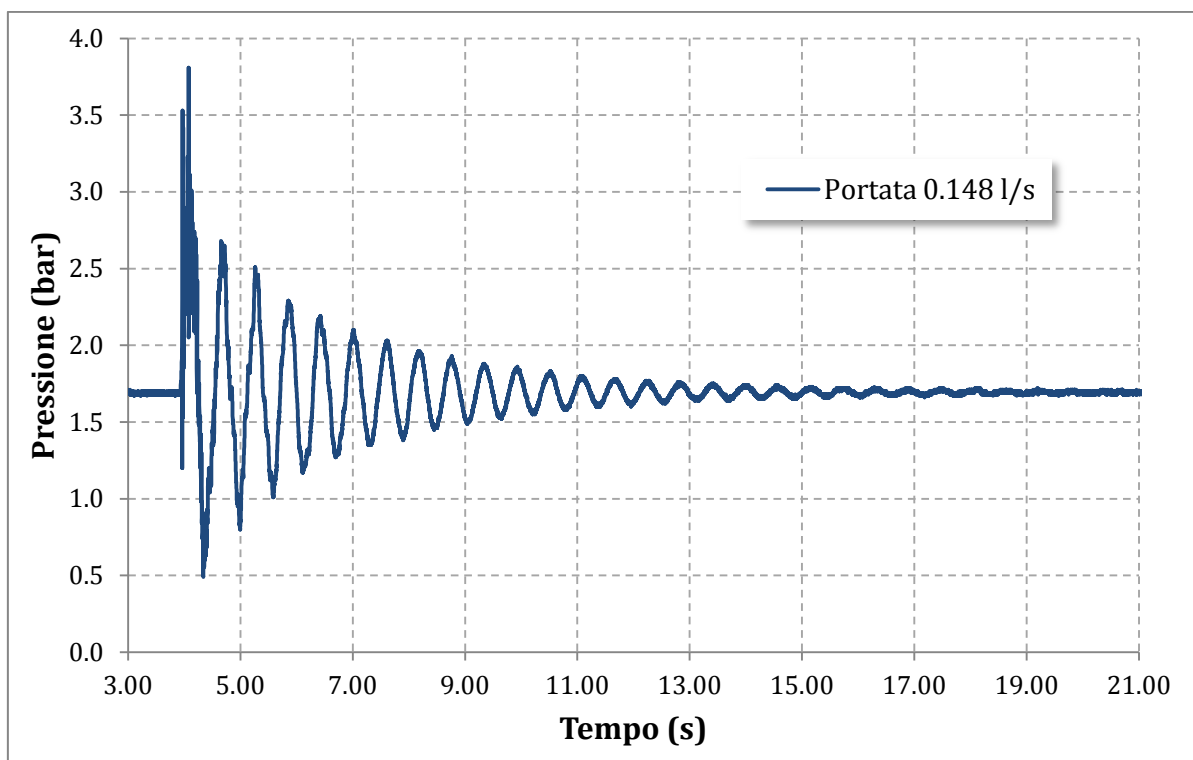


Figura 4.7 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo per una portata di 0.148 l/s (Sensore Hydac).

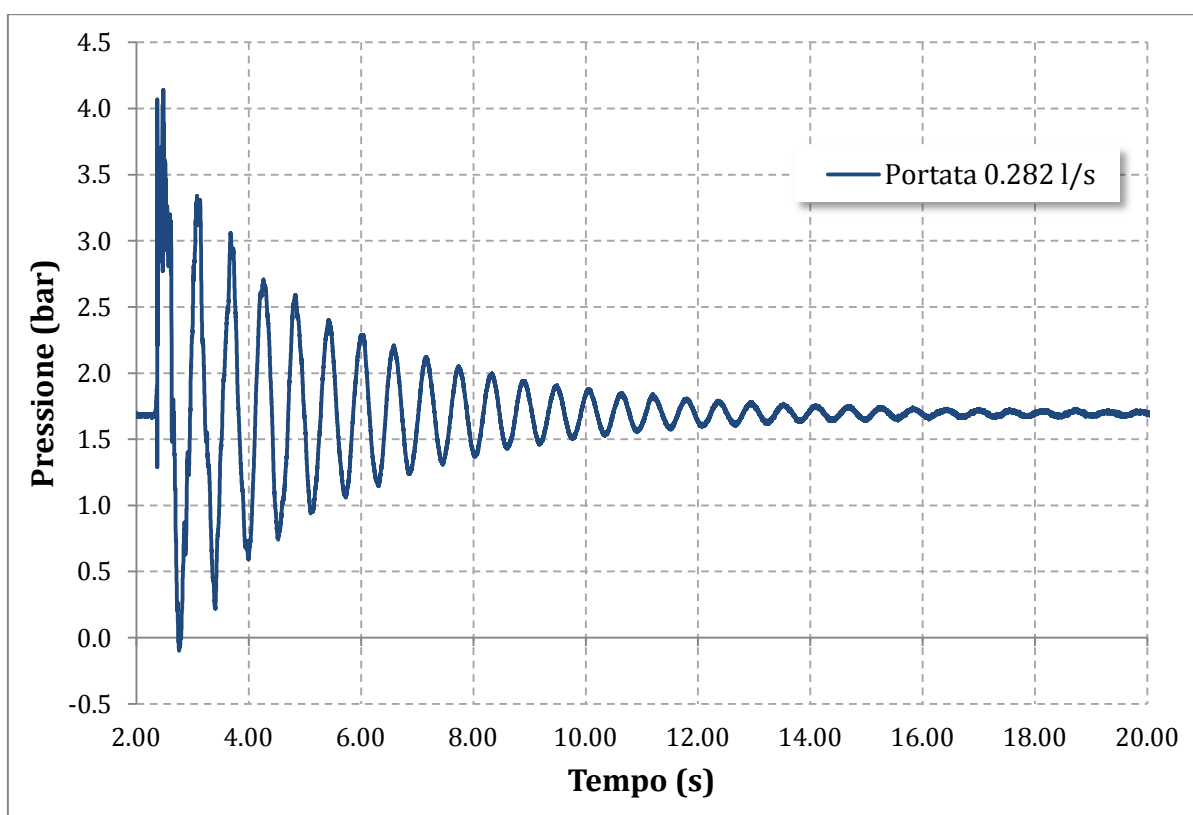


Figura 4.8 Grafico che mostra l'andamento della pressione in funzione del tempo per una portata di 0.282 l/s (Sensore Hydac).

4.4 Configurazione I – 2^a modifica: spostamento elettrovalvola

I risultati ottenuti riportati nel paragrafo precedente non sono paragonabili a quelli teorici attesi come si può notare dalle elevate differenze riscontrate tra il ΔP misurato e quello calcolato. Osservando in particolare la zona di grafico relativa al valore massimo di pressione nell'intorno di circa 1 secondo (a livello di scala temporale) si nota un fenomeno non visibile nei grafici precedenti: il picco massimo di sovrappressione immediatamente dopo la chiusura della valvola è composto da una serie di oscillazioni attorno al valore teorico atteso di pressione massima. Il problema potrebbe essere relativo allo strumento utilizzato, in quanto un disturbo anche impercettibile alla membrana che governa il funzionamento dello stesso potrebbe alterare la registrazione del segnale di pressione. In alternativa tale fenomeno potrebbe essere originato da una causa esterna da individuare.

Dal momento che queste oscillazioni del valore di picco non sono state registrate da un solo strumento, ma da entrambi, significa che la causa del "disturbo" del segnale non è da imputare al sensore di pressione. Si è ipotizzato che, la causa di tale "turbolenza" che si genera, possa essere attribuita alla stretta vicinanza del sensore (avvitato sul manicotto a valle delle bobine) all'elettrovalvola: siccome la distanza tra il manicotto e l'elettrovalvola è di circa **10 cm** è possibile che l'urto (piuttosto violento) provocato dalla chiusura "istantanea" della valvola crei un certo disturbo sul primo valore di picco registrato immediatamente dopo la chiusura stessa. In tutte le registrazioni effettuate è visibile la "turbolenza" attorno al valore teorico atteso per cui non può trattarsi di un errore casuale, perché si è ripetuto con regolarità.

Dopo aver individuato questo tipo di problema, si può ragionevolmente ritenere che il ΔP "medio" misurato non sia effettivamente così elevato: per calcolarne il valore generalmente si sottrae al valore massimo registrato quello di pressione statica, ma siccome il valore massimo è a sua volta il massimo delle oscillazioni attorno ad un valore (che è quello cercato), considerando il valore medio proprio di tale intervallo come massimo assoluto, il calcolo del ΔP risulta sicuramente più vicino a quello teorico atteso. Tutto ciò può essere giustificato col fatto che utilizzando strumenti caratterizzati da una frequenza di acquisizione di dati molto elevata (compresa tra 1000 e 2500 misure al secondo) è possibile percepire dei segnali di pressione quasi istantanei, di durata talmente breve che, nonostante l'intensità, non provocano alcuna reazione nel fluido né nei confronti della tubazione.

Di seguito vengono riportati solo alcuni dei grafici che mostrano le oscillazioni attorno al valore di sovrappressione atteso, per entrambi gli strumenti utilizzati.

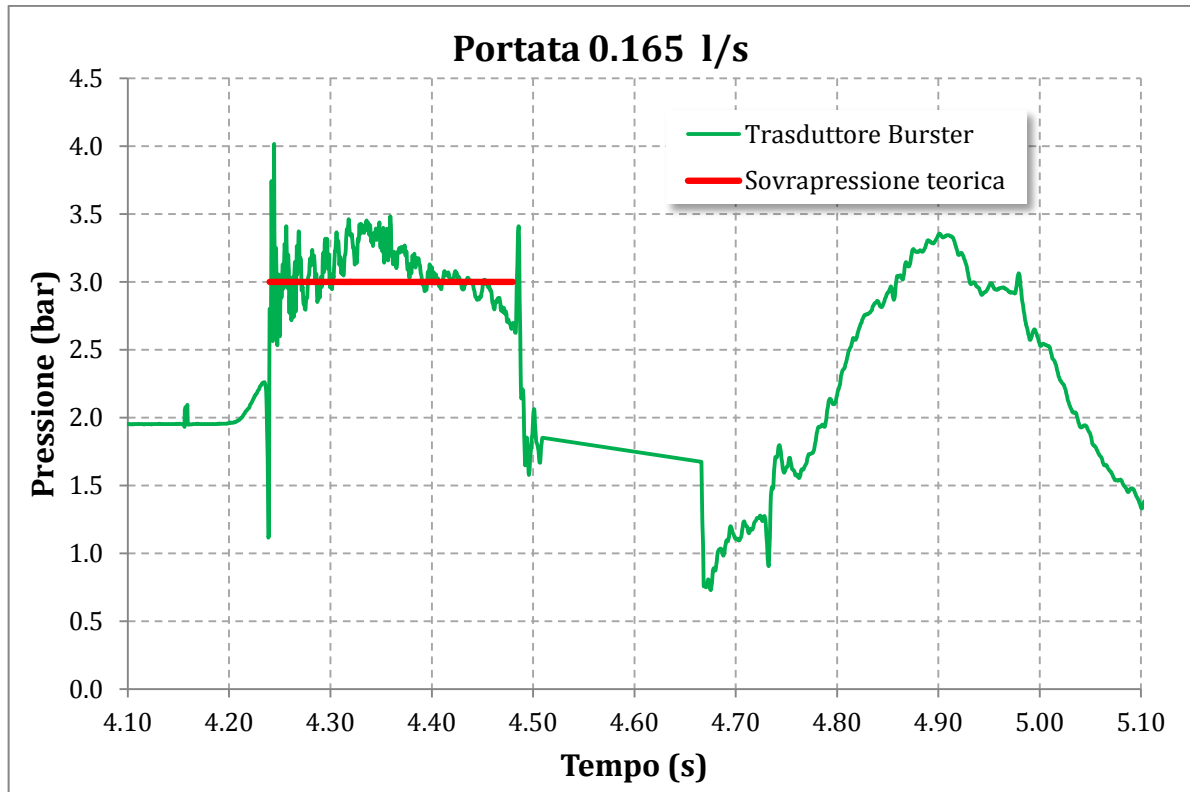


Figura 4.9 Zoom che mostra la serie di oscillazioni in corrispondenza del picco massimo di sovrappressione (Trasduttore Burster).

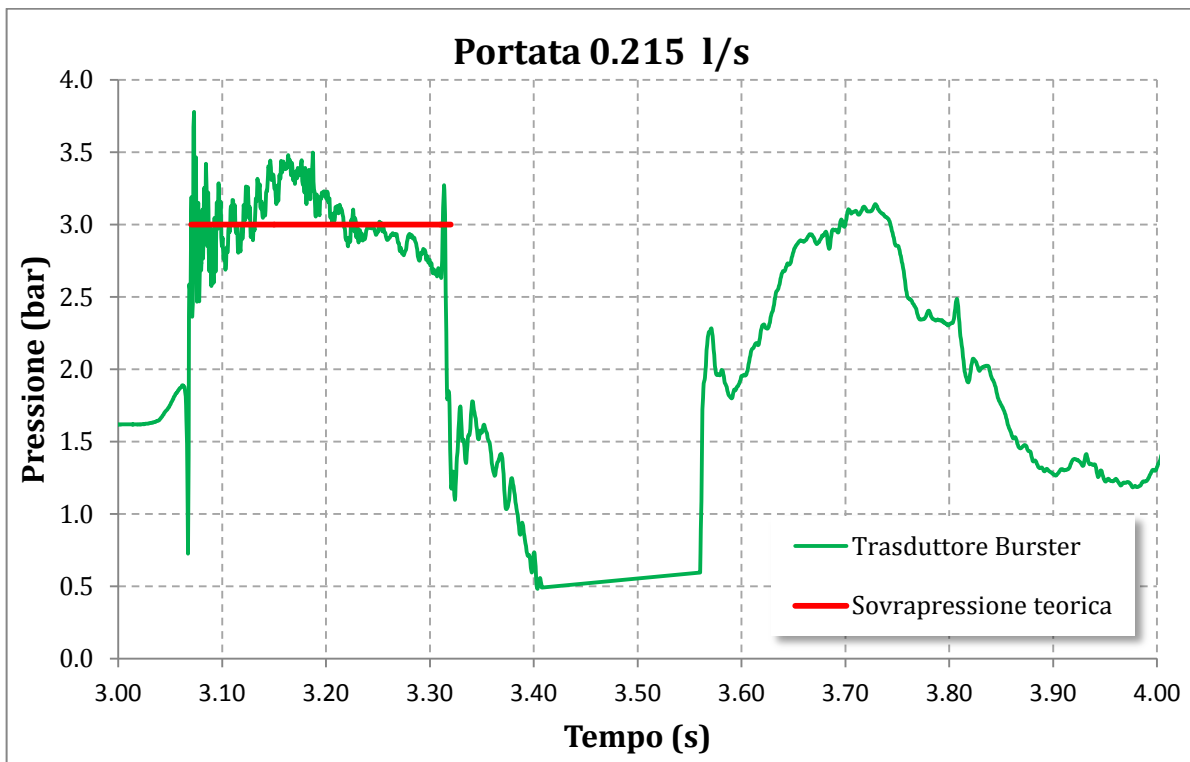


Figura 4.10 Zoom che mostra la serie di oscillazioni in corrispondenza del picco massimo di sovrappressione (Trasduttore Burster).

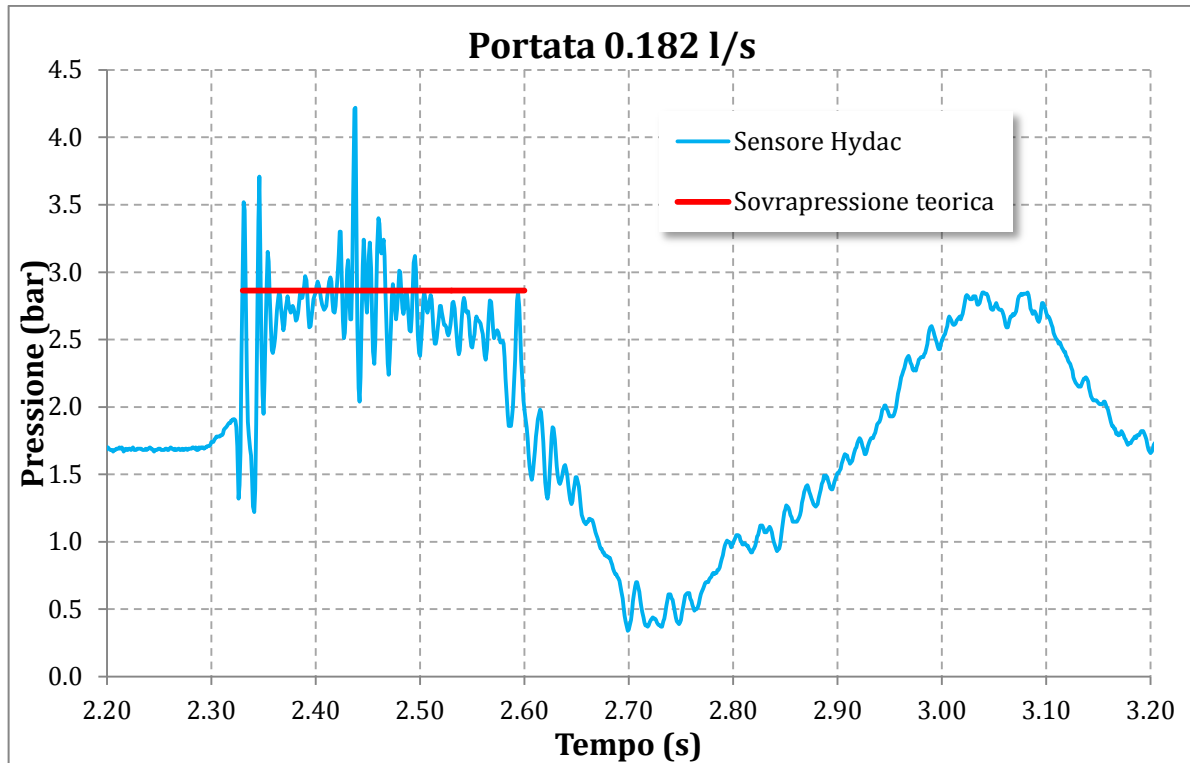


Figura 4.11 Zoom che mostra la serie di oscillazioni in corrispondenza del picco massimo di sovrappressione (Trasduttore Hydac).

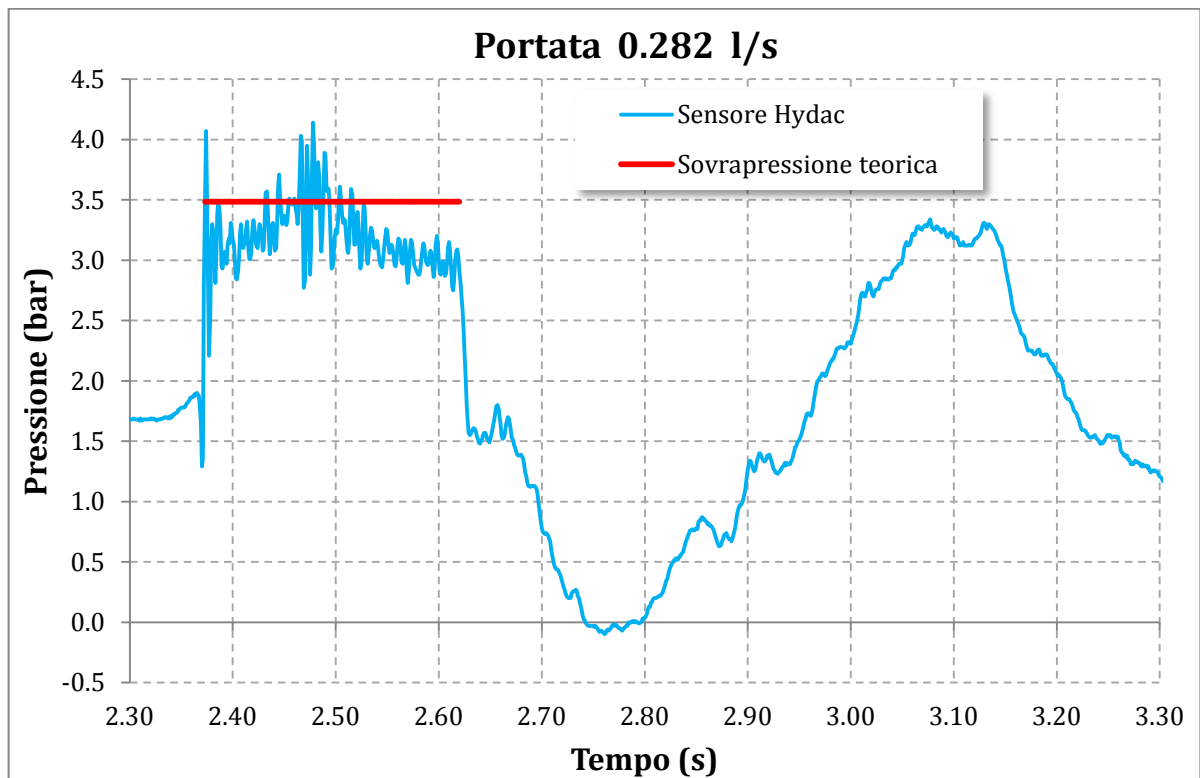


Figura 4.12 Zoom che mostra la serie di oscillazioni in corrispondenza del picco massimo di sovrappressione (Trasduttore Hydac).

Per cercare di capire se la causa della “turbolenza” fosse la vicinanza con l’elettrovalvola, si è deciso di allontanare di circa 1.5 m l’elettrovalvola stessa dal manicotto sul quale è avvitato il sensore di pressione. L’ordine con cui sono posti gli strumenti rimane del tutto immutato. Dopo aver introdotto questa ulteriore modifica, sono state eseguite delle prove di moto vario con la stessa modalità che è stata descritta nei paragrafi precedenti.

Di seguito vengono riportate le tabelle contenenti i risultati ottenuti ed il confronto con i risultati teorici attesi. L’unica differenza rispetto al caso precedentemente descritto consiste nel fatto che sul manicotto posto a valle delle bobine, grazie ad una biforcazione (raccordo in ferro a forma di T, visibile in *fig. 4.13*), sono stati avvitati sia il trasduttore di pressione della *Burster* che quello della *Hydac*.



Figura 4.13 Raccordo in ferro a forma di T che permette di avvitare i due sensori contemporaneamente.

La possibilità di poter ottenere registrazioni di pressione per lo stesso valore di portata e nello stesso punto è un grosso vantaggio, in quanto il confronto tra i risultati ottenuti è diretto. In questo caso non ci possono essere differenze di alcun tipo tra le registrazioni dei due strumenti; inoltre l’andamento della pressione viene confrontato in un unico grafico, per ogni valore di portata. Di seguito sono riportati alcuni grafici a titolo di esempio.

Portata (l/s)	Velocità (m/s)	P _{MAX} (bar)	ΔP _{MISURATO} (bar)	ΔP _{TEORICO} (bar)	Differenza Δp (%)
0.198	0.0916	3.38	1.46	1.27	14.89
0.248	0.1147	3.84	1.92	1.59	20.67
0.365	0.1686	4.57	2.65	2.34	13.31
0.065	0.0300	2.49	0.57	0.42	36.86
0.132	0.0608	2.96	1.04	0.84	23.28
0.448	0.2071	4.61	2.69	2.87	-6.36
0.565	0.2610	6.21	4.29	3.62	18.51
0.648	0.2995	7.08	5.16	4.15	24.22
0.932	0.4304	9.31	7.39	5.97	23.80

Tabella 4.4 Valori ottenuti con il trasduttore di pressione della BURSTER.

Portata (l/s)	Velocità (m/s)	P _{MAX} (bar)	ΔP _{MISURATO} (bar)	ΔP _{TEORICO} (bar)	Differenza Δp (%)
0.198	0.0916	3.05	1.34	1.27	5.45
0.248	0.1147	3.45	1.74	1.59	9.36
0.365	0.1686	4.15	2.44	2.34	4.33
0.065	0.0300	2.19	0.48	0.42	15.25
0.132	0.0608	2.62	0.91	0.84	7.87
0.448	0.2071	4.84	3.13	2.87	8.96
0.565	0.2610	5.61	3.90	3.62	7.73
0.648	0.2995	7.08	5.37	4.15	29.27
0.932	0.4304	9.31	7.60	5.97	27.32

Tabella 4.5 Valori ottenuti con il trasduttore di pressione della HYDAC.

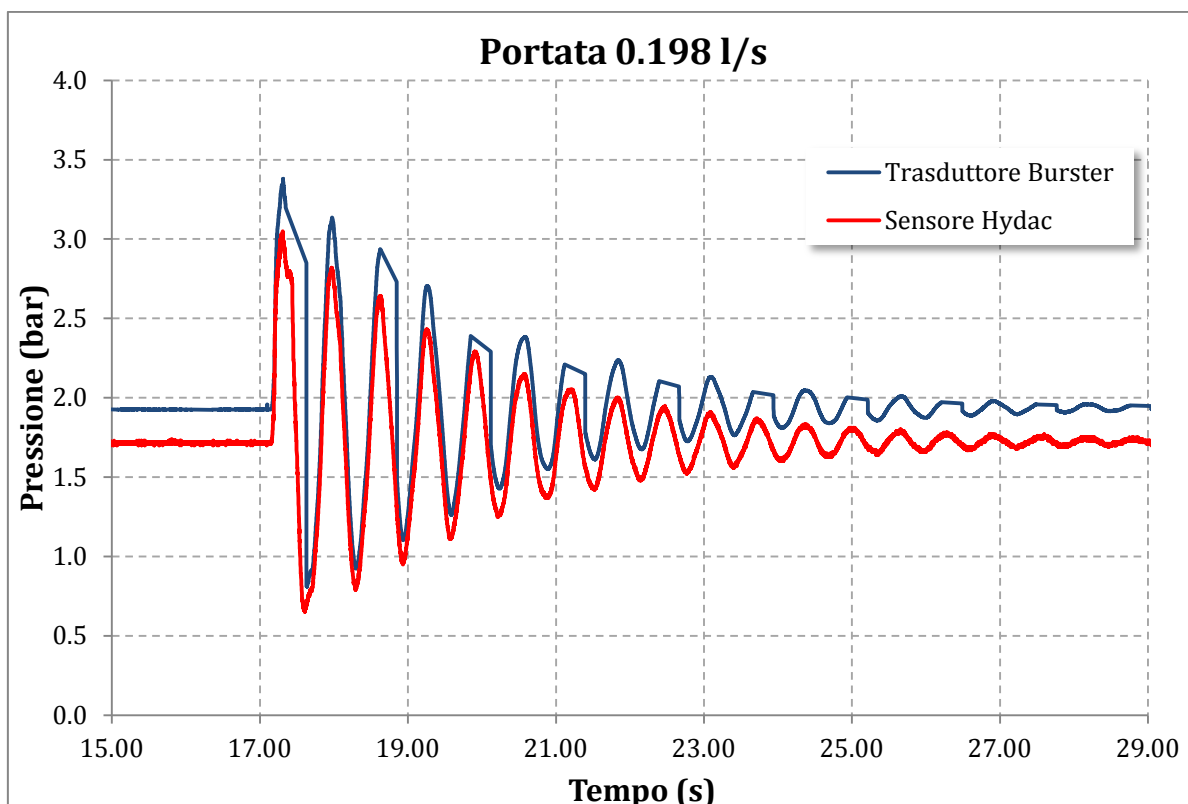


Figura 4.14 Grafico raffigurante l'andamento di entrambe le registrazioni per una portata pari a 0.198 l/s.

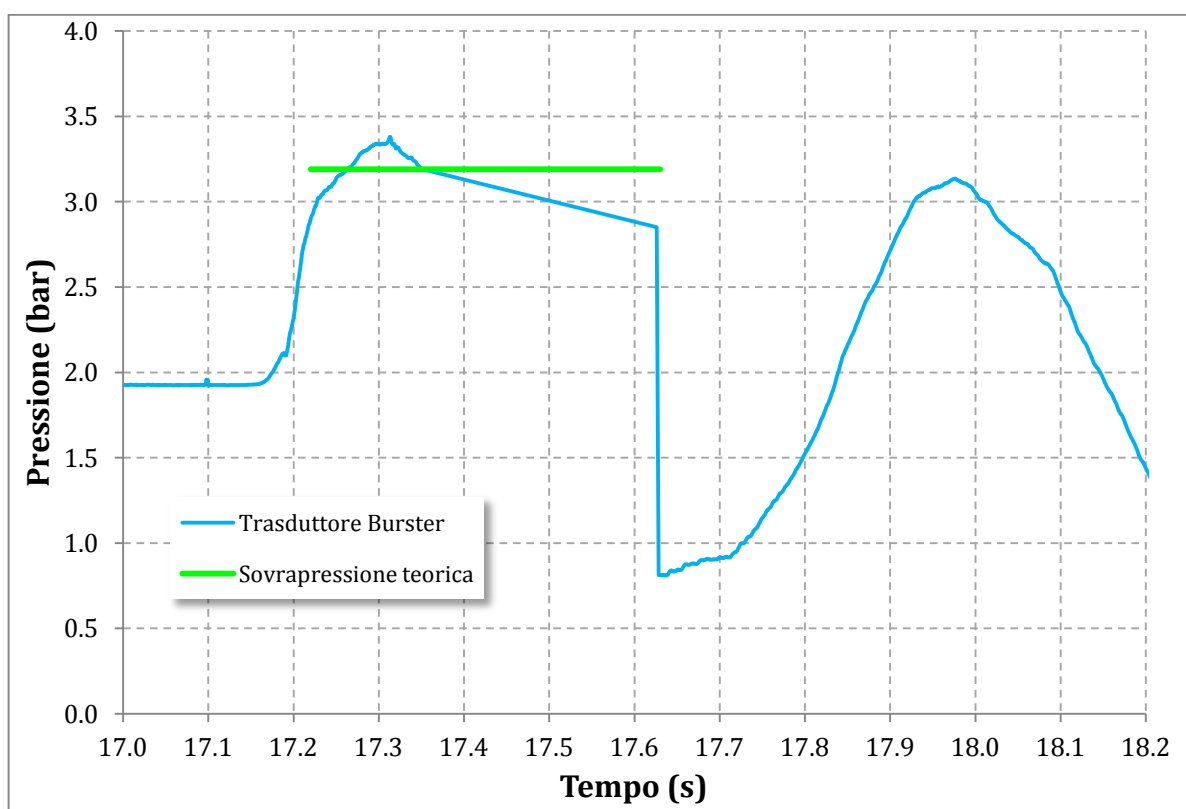


Figura 4.15 Grafico che evidenzia come lo spostamento della valvola abbia contribuito a diminuire la "turbolenza" (le oscillazioni) nell'intorno del valore massimo registrato, per una portata pari a 0.198 l/s.

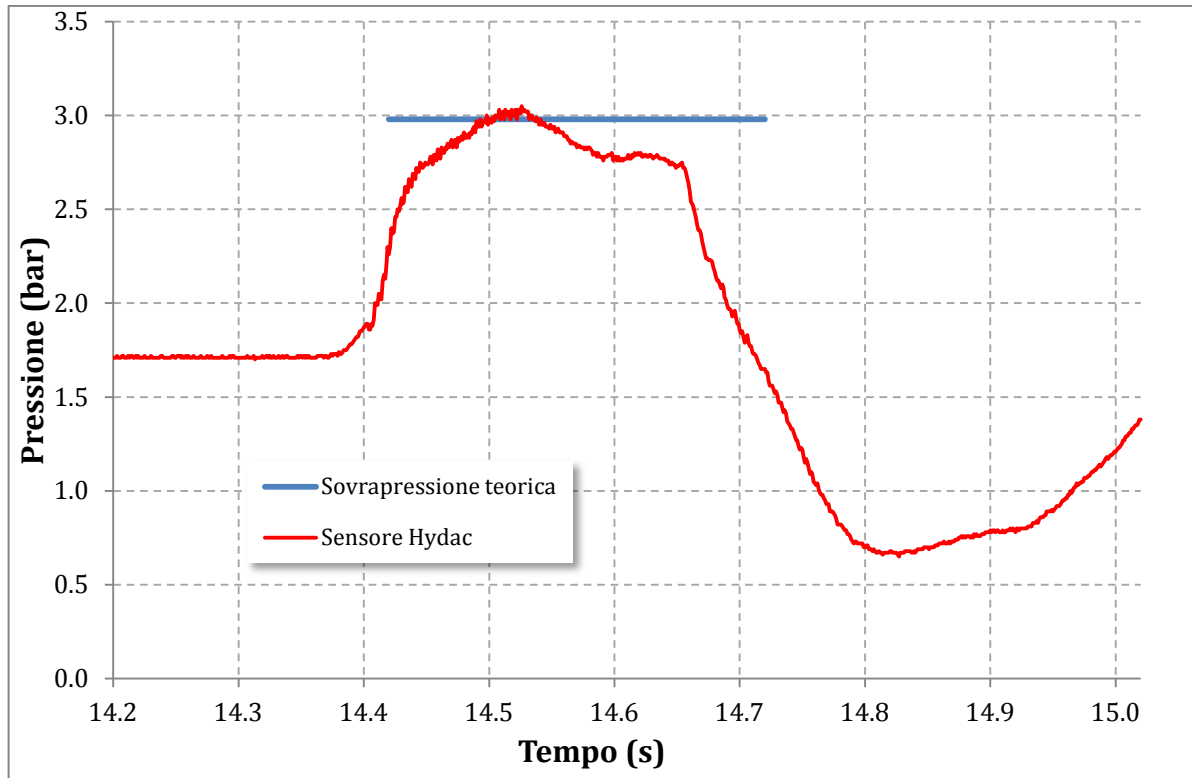


Figura 4.16 Grafico che evidenzia come lo spostamento della valvola abbia contribuito a diminuire la “turbolenza” (le oscillazioni) nell’intorno del valore massimo registrato, per una portata pari a 0.198 l/s.

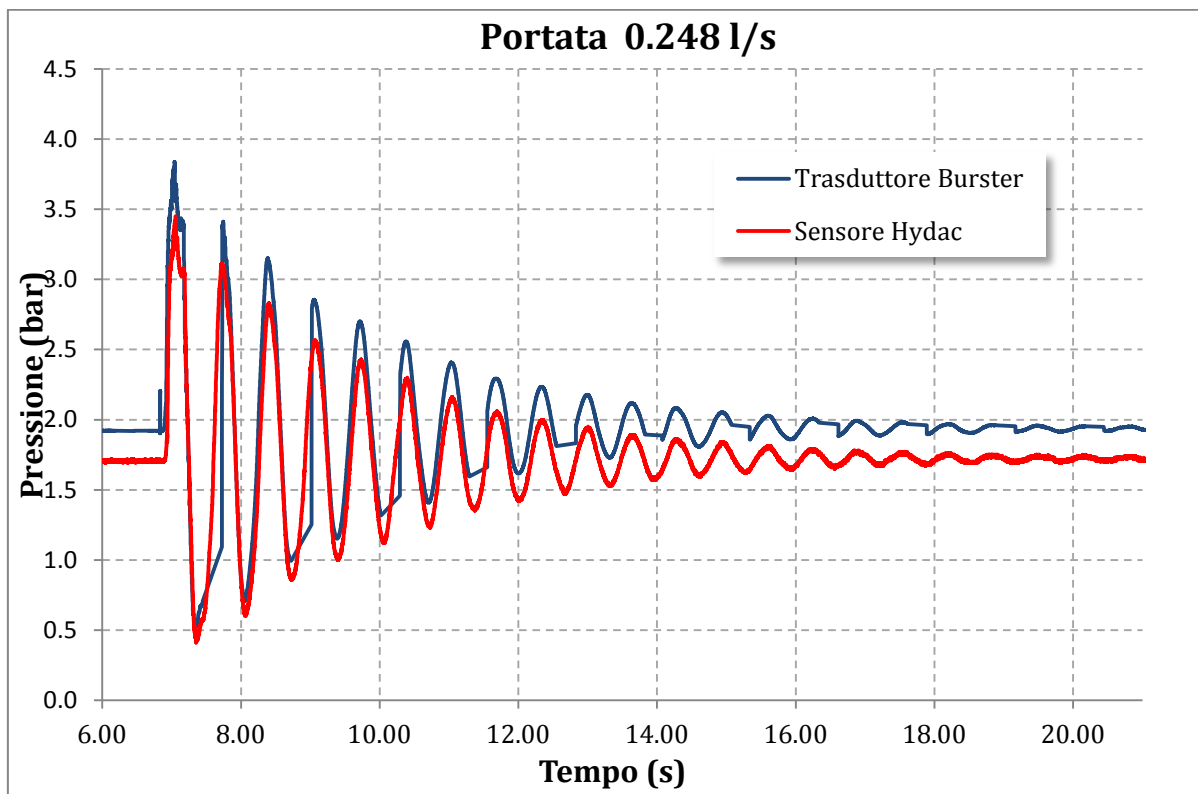


Figura 4.17 Grafico raffigurante l’andamento di entrambe le registrazioni per una portata pari a 0.248 l/s.

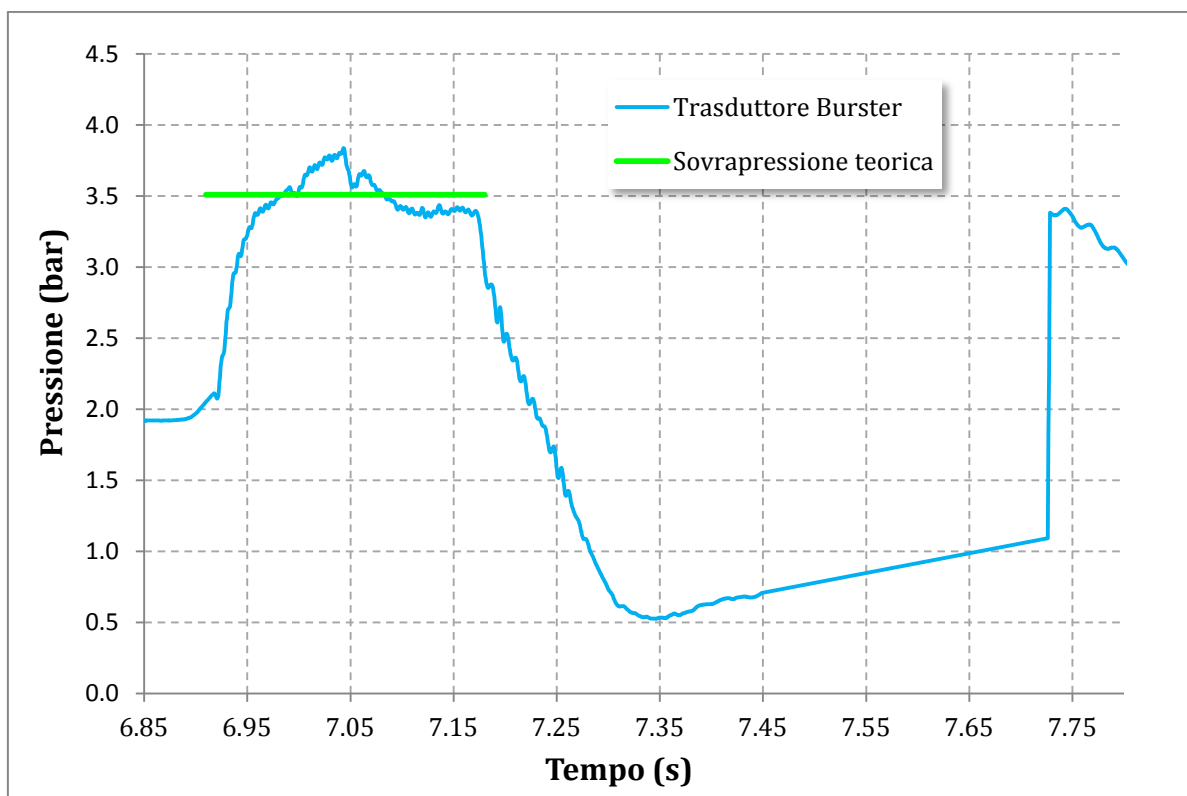


Figura 4.18 Grafico che evidenzia come lo spostamento della valvola abbia contribuito a diminuire la “turbolenza” (le oscillazioni) nell’intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.248 l/s.

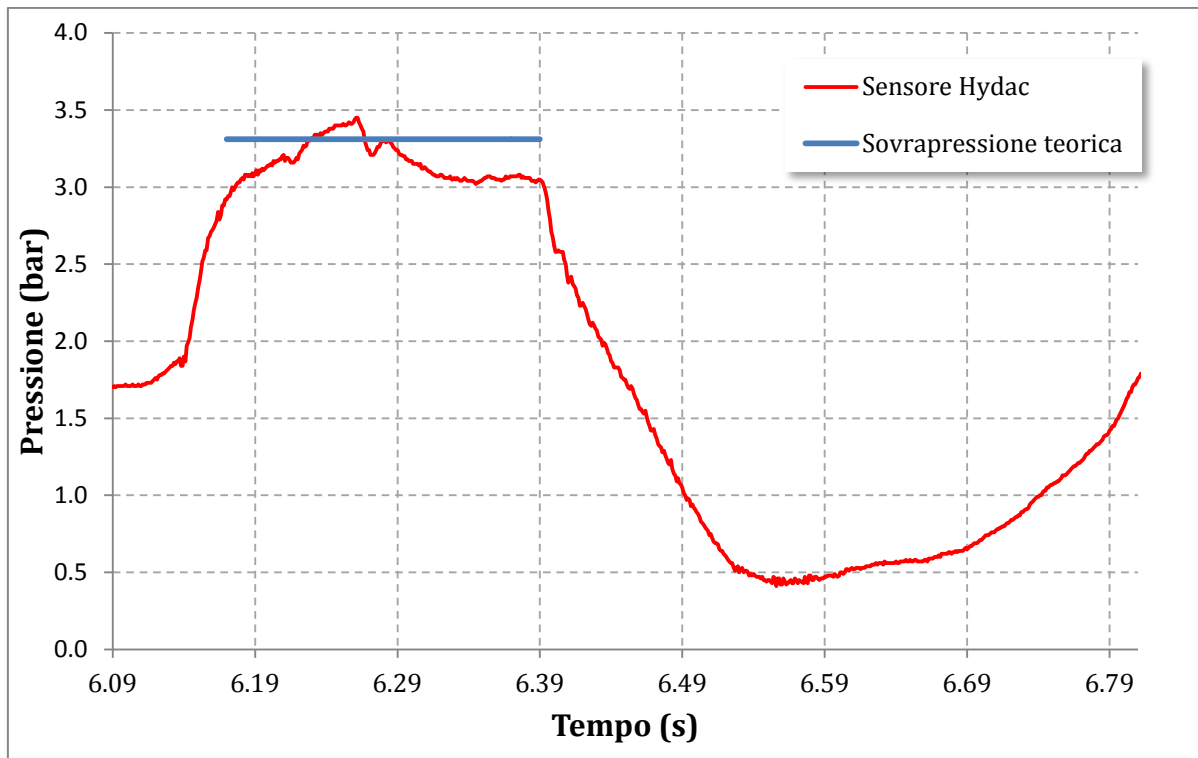


Figura 4.19 Grafico che evidenzia come lo spostamento della valvola abbia contribuito a diminuire la “turbolenza” (le oscillazioni) nell’intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.248 l/s.

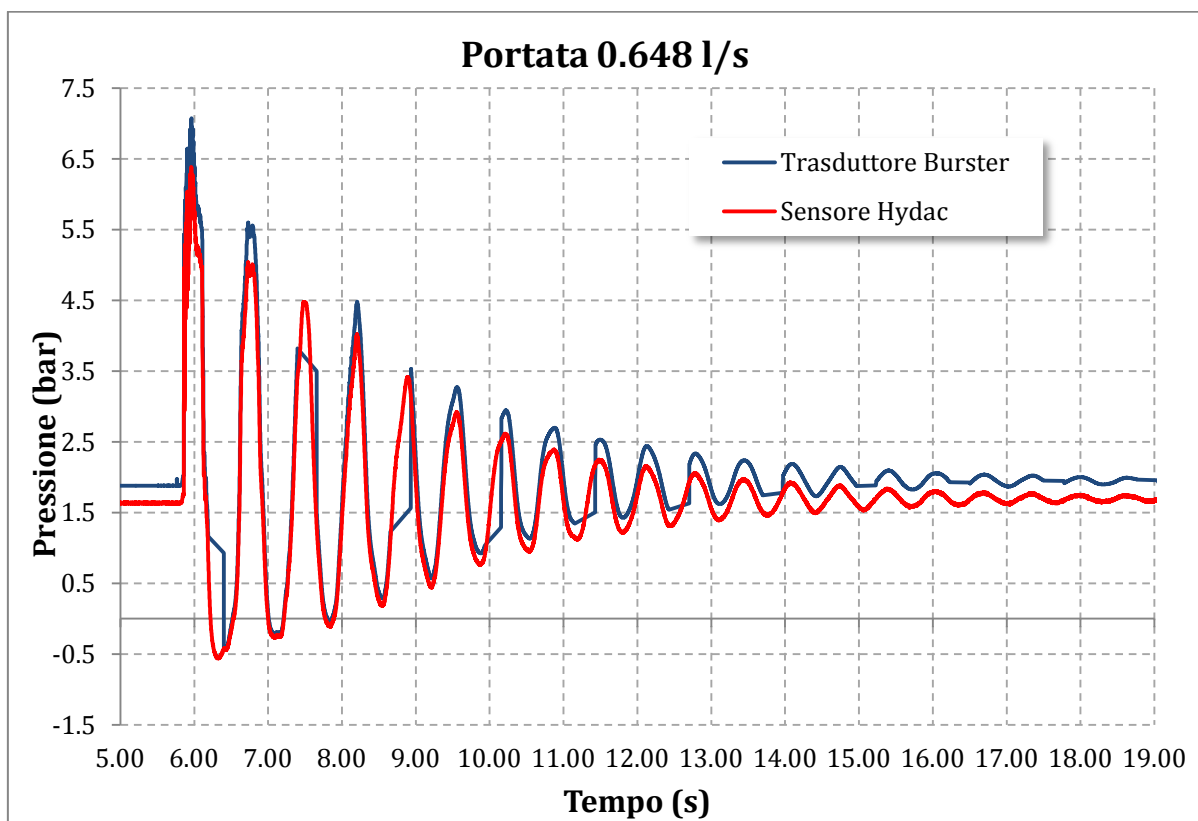


Figura 4.20 Grafico raffigurante l’andamento di entrambe le registrazioni per una portata pari a 0.648 l/s.

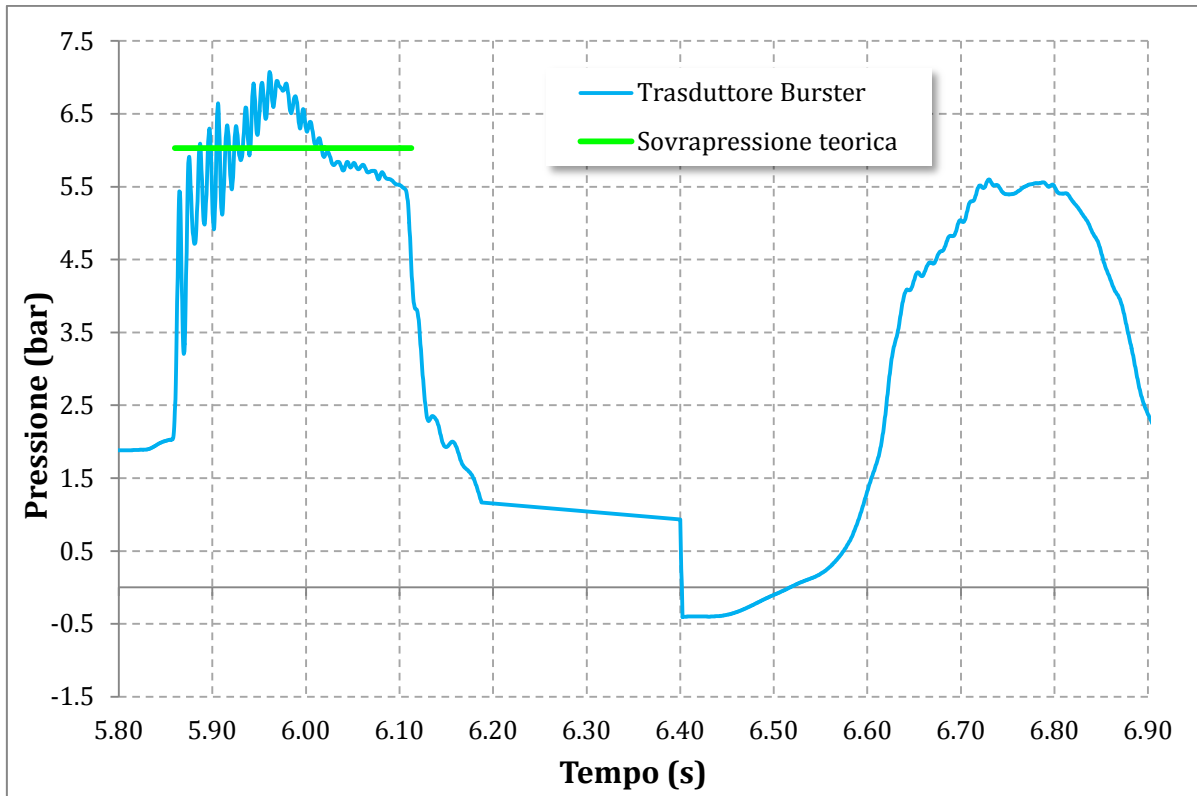


Figura 4.21 Grafico che mostra le oscillazioni nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.648 l/s.

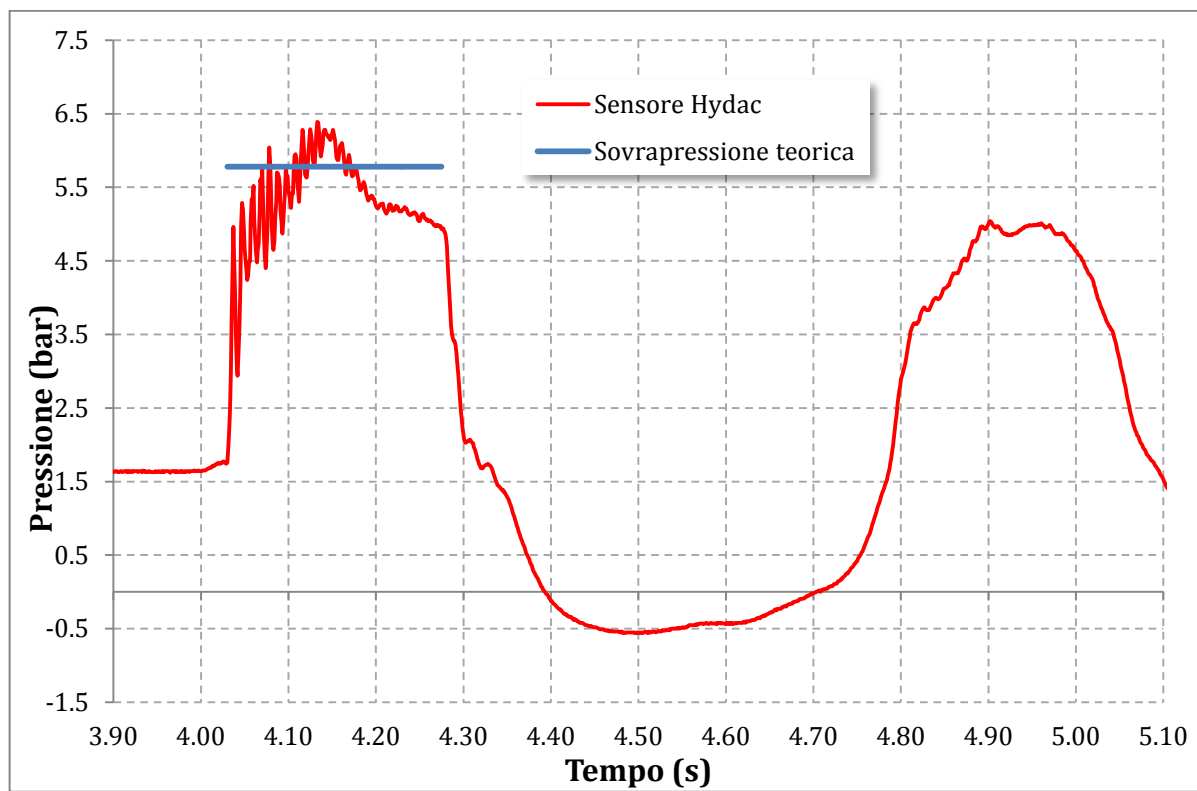


Figura 4.22 Grafico che mostra le oscillazioni nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.648 l/s.

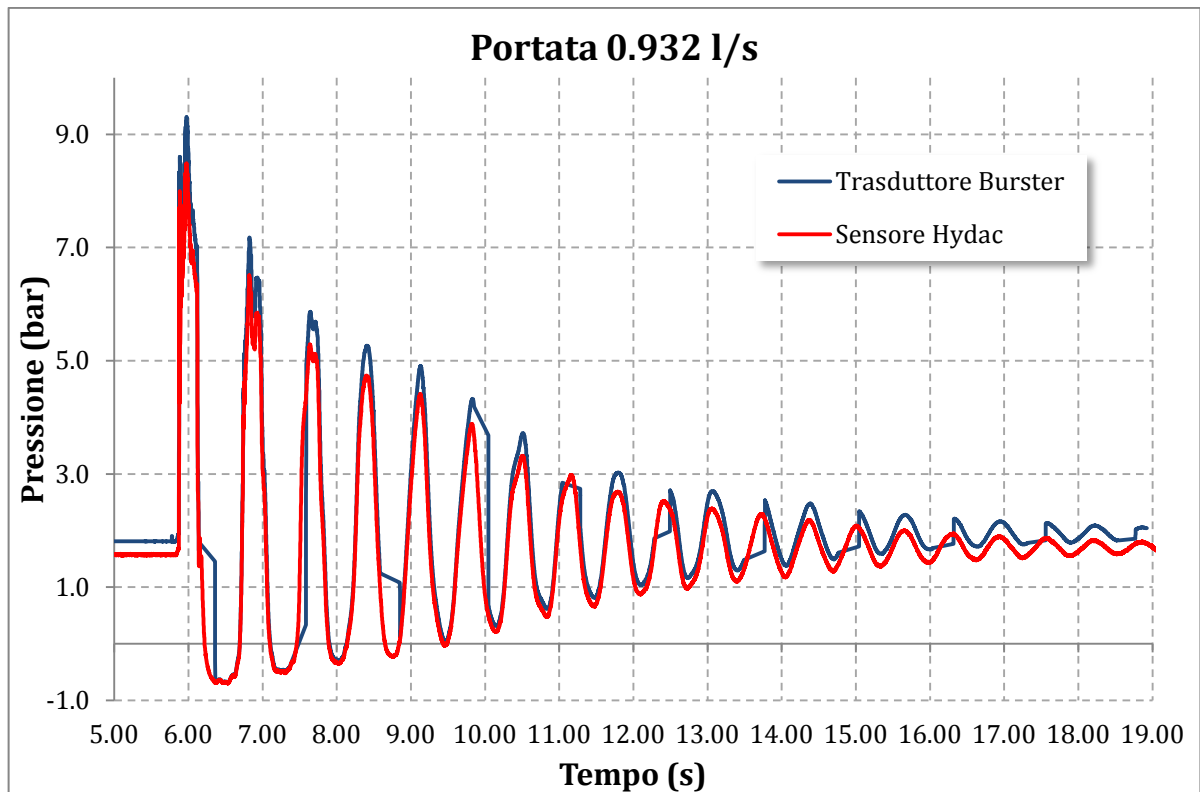


Figura 4.23 Grafico raffigurante l'andamento di entrambe le registrazioni per una portata pari a 0.932 l/s.

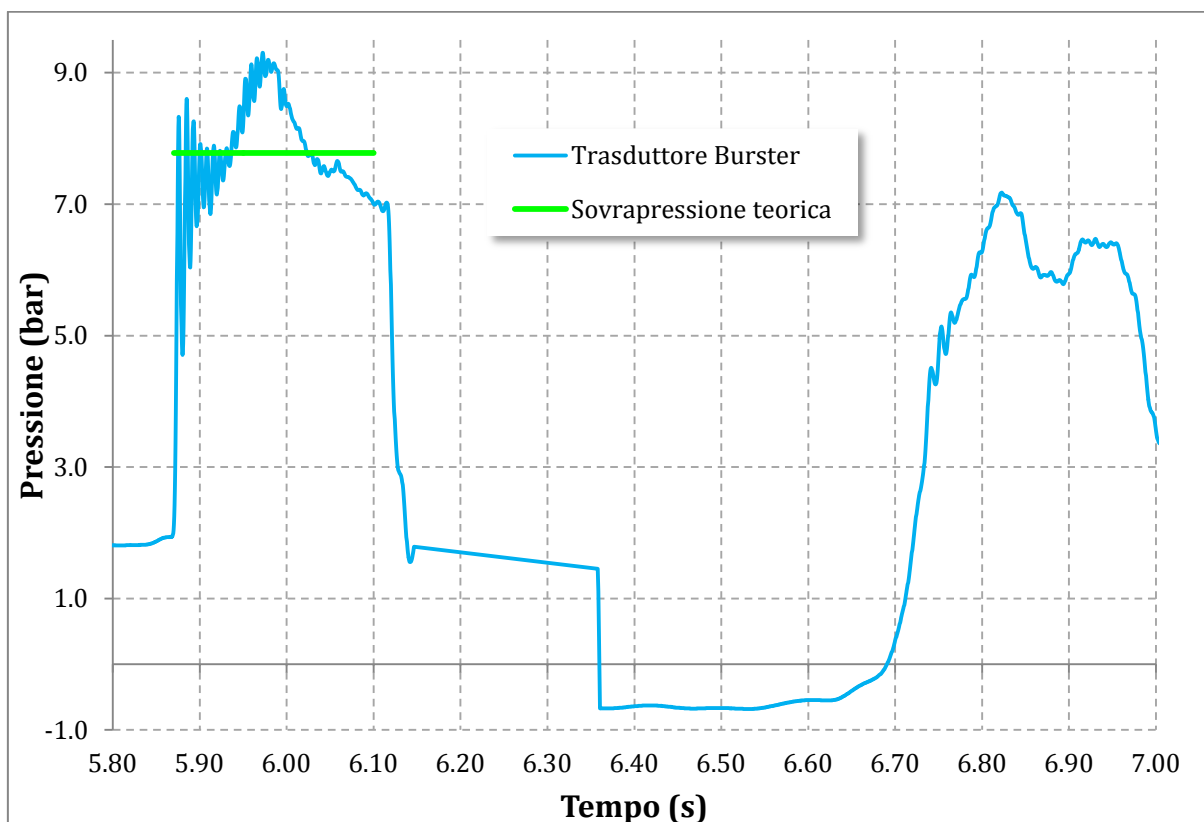


Figura 4.24 Grafico che mostra le oscillazioni nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.932 l/s.

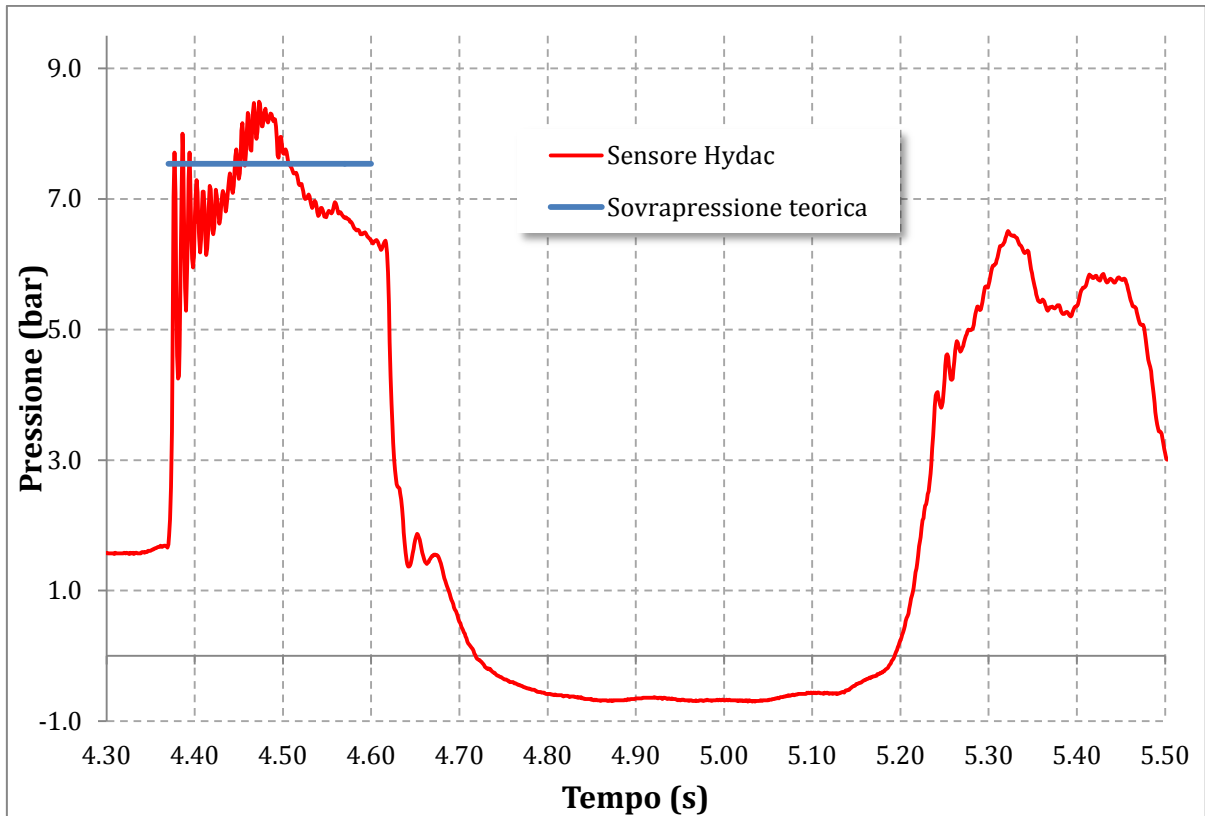


Figura 4.25 Grafico che mostra le oscillazioni nell'intorno del valore massimo registrato per una portata pari a 0.932 l/s.

Dai grafici riportati, si nota che per portate piuttosto basse gli effetti dell'azione violenta di chiusura della valvola non si manifestano, o comunque se sono presenti delle oscillazioni, queste hanno un'entità modesta. Per portate invece piuttosto elevate gli effetti della chiusura della valvola si cominciano a percepire, infatti in corrispondenza dei valori maggiori di portata si nota nuovamente il fenomeno di "turbolenza", anche se con un'intensità minore rispetto alla posizione precedente della valvola.

Per questo motivo è possibile ritenere che l'allontanamento dell'elettrovalvola non abbia influito in maniera tale da evitare completamente le oscillazioni, ma per ragioni di spazio nel laboratorio non è stato possibile modificare ulteriormente tale distanza. Tuttavia si nota che con questa modifica i picchi registrati si sono notevolmente ridotti, per cui è lecito ritenere che la causa della sovrastima dei valori sia proprio questa eccessiva vicinanza dell'elettrovalvola ai sensori. Si può aggiungere che, in ogni caso, la registrazione di tali oscillazioni, seppur di piccola entità, è dovuta in parte all'elevata sensibilità ed accuratezza degli strumenti utilizzati.

4.5 Realizzazione del colpo d'ariete – Configurazione II

Nella seconda configurazione lo schema impiantistico viene modificato: il principale cambiamento riguarda la posizione dell'elettrovalvola. Nella prima configurazione la valvola si trova a valle delle bobine, mentre nella seconda viene posizionata a monte di esse. In questo modo cambia l'ordine con cui sono disposti i vari strumenti, in quanto dopo il tubo in gomma il primo elemento che si trova è il misuratore magnetico di portata; a valle di questo viene inserita l'elettrovalvola, che precede di circa 50 cm il manicotto a monte delle bobine, posizione nella quale vengono effettuate le varie registrazioni di pressione con i sensori (fig. 4.26).



Figura 4.26 Ordine con cui sono posti gli strumenti: partendo da monte verso valle si trova il misuratore di portata, l'elettrovalvola, il manicotto e le due bobine.

A valle delle bobine è presente sempre l'altro manicotto (dove è possibile compiere altre registrazioni di pressione), dopodiché la tubazione procede in orizzontale per circa 1.5 m prima di una curva che fa proseguire la tubazione stessa in verticale, fino alla quota sommitale del soffitto del piano seminterrato. Giunta sino al soffitto, la tubazione viene collegata al "gomito" che è stato utilizzato nella *Configurazione I* per la prima modifica: questo è costituito da due curve ed un tratto rettilineo volto verso il basso per scaricare l'acqua proveniente da monte (fig. 4.27).

Condurre la tubazione fino alla quota massima possibile (tenendo presente che l'altezza del piano seminterrato è 4.10 m) è necessario per poter ottenere delle oscillazioni del valore di pressione ben visibili nel grafico: siccome i picchi di sovrappressione e depressione oscillano attorno al valore della



Figura 4.27 Tratto di tubazione che prosegue in verticale fino alla quota sommitale del soffitto, per poi dirigersi nuovamente verso il basso per lo scarico.

statica, con questo schema impiantistico si riesce ad elevare il valore di riferimento della statica alla quota maggiore che l'acqua assume nel percorso in tubazione. Come già detto in precedenza l'altezza del piano seminterrato è pari a 4.10 m mentre il condotto che parte orizzontale ed arriva fino al soffitto è sopraelevato dal pavimento nel tratto parallelo ad esso di circa $15 \div 20\text{ cm}$, per cui la quota di pressione statica che si raggiunge è poco meno di 4 m .

Nella parte culminante della condotta è presente (come nella configurazione precedente) la saracinesca "a farfalla" per poter regolare in maniera abbastanza sensibile la portata transitante. A causa della quota piuttosto elevata, per poter manovrare questa saracinesca occorre utilizzare una scala (come si vede in *fig. 4.27*). A valle dello scarico della tubazione in ferro (avente sempre lo stesso diametro interno della condotta arrotolata in spire pari a 52.5 mm) è stato collegato un tubo in PVC arancione per fare in modo che l'acqua uscente dalla condotta giungesse nel cassone presente sotto il livello del pavimento senza disperdersi lateralmente. Questa tubazione in materiale plastico

non dà continuità alla condotta in ferro, ma semplicemente (avendo un diametro maggiore) serve per contenere il liquido fino allo scarico vero e proprio nel cassone. Per ovvie ragioni di sicurezza nei confronti dell'operatore e di coloro che lavorano nel laboratorio e per una questione di stabilità della struttura stessa, il tratto verticale di tubazione è stato ancorato con delle impalcature per fare in modo che non oscillasse né tantomeno cadesse durante le fasi dell'esperimento.

Per quanto riguarda la realizzazione del colpo d'ariete, non vi è nessun cambiamento in quanto la modalità di lavoro è la stessa già descritta nei paragrafi precedenti. Con questa configurazione il raccordo in ferro a forma di T è stato avvitato sia sul manicotto a monte che su quello a valle delle bobine, per poter effettuare le registrazioni con entrambi gli strumenti contemporaneamente. Per quanto riguarda i risultati ottenuti, occorre tener presente che per i due strumenti, a parità di pressione di picco registrata, la sovrappressione risulta differente in quanto il valore di pressione statica rilevato dai sensori non coincide per motivi di calibrazione.

Di seguito vengono riportati i risultati ottenuti per entrambi gli strumenti, posizionati sul manicotto a valle delle bobine.

Portata (l/s)	Velocità (m/s)	P_{MAX} (bar)	$\Delta P_{MISURATO}$ (bar)	$\Delta P_{TEORICO}$ (bar)	Differenza ΔP (%)
0.365	0.1686	2.47	0.56	2.34	-76.1
0.615	0.2841	2.48	0.61	3.94	-84.5
0.698	0.3226	4.08	2.23	4.47	-50.1
0.882	0.4073	6.11	4.30	5.65	-23.8
0.982	0.4535	5.68	3.92	6.29	-37.8
1.082	0.4997	7.44	5.70	6.93	-17.8
1.182	0.5459	8.22	6.52	7.57	-13.9

Tabella 4.6 Risultati ottenuti con il trasduttore *BURSTER*.

Portata (l/s)	Velocità (m/s)	P_{MAX} (bar)	$\Delta P_{MISURATO}$ (bar)	$\Delta P_{TEORICO}$ (bar)	Differenza ΔP (%)
0.365	0.1686	2.18	0.51	2.34	-78.2
0.615	0.2841	2.20	0.56	3.94	-85.8
0.698	0.3226	3.66	2.02	4.47	-54.9
0.882	0.4073	5.85	4.26	5.65	-24.6
0.982	0.4535	5.67	4.13	6.29	-34.3
1.082	0.4997	6.84	5.32	6.93	-23.2
1.182	0.5459	7.93	6.44	7.57	-14.9

Tabella 4.7 Risultati ottenuti con il sensore *HYDAC*.

Di seguito vengono riportati i risultati per entrambi gli strumenti, posizionati sul manicotto a monte delle bobine (quindi maggiormente ravvicinato all'elettrovalvola).

Portata (l/s)	Velocità (m/s)	P _{MAX} (bar)	$\Delta P_{\text{MISURATO}}$ (bar)	$\Delta P_{\text{TEORICO}}$ (bar)	Differenza ΔP (%)
0.082	0.0377	2.14	0.24	0.52	-54.9
0.148	0.0685	2.14	0.23	0.95	-75.6
0.315	0.1455	2.05	0.13	2.02	-93.4
0.465	0.2148	1.91	0.01	2.98	-99.7
0.615	0.2841	2.01	0.12	3.94	-97.1
0.732	0.3380	3.25	1.35	4.69	-71.1
0.948	0.4381	3.57	1.68	6.08	-72.3
1.032	0.4766	3.62	1.73	6.61	-73.9
1.182	0.5459	5.01	3.12	7.57	-58.8
1.315	0.6075	4.76	2.89	8.43	-65.7
1.598	0.7383	7.19	5.33	10.24	-47.9
1.697	0.7838	8.16	6.31	10.87	-42.0
1.932	0.8923	6.60	4.77	12.38	-61.5
2.132	0.9847	9.07	7.25	13.66	-46.9
2.447	1.1302	7.20	5.38	15.68	-65.7

Tabella 4.8 Risultati ottenuti con il trasduttore BURSTER.

Portata (l/s)	Velocità (m/s)	P_{MAX} (bar)	$\Delta P_{MISURATO}$ (bar)	$\Delta P_{TEORICO}$ (bar)	Differenza ΔP (%)
0.082	0.0377	1.88	0.21	0.52	-59.9
0.148	0.0685	1.90	0.23	0.95	-75.8
0.315	0.1455	1.79	0.12	2.02	-94.1
0.465	0.2148	1.78	0.11	2.98	-96.3
0.615	0.2841	2.96	1.30	3.94	-67.0
0.732	0.3380	2.89	1.22	4.69	-74.0
0.948	0.4381	3.19	1.54	6.08	-74.7
1.032	0.4766	3.26	1.62	6.61	-75.5
1.182	0.5459	4.70	3.05	7.57	-59.7
1.315	0.6075	4.79	3.16	8.43	-62.5
1.598	0.7383	7.02	5.40	10.24	-47.3
1.697	0.7838	9.00	7.37	10.87	-32.2

Tabella 4.9 Risultati ottenuti con il sensore *HYDAC*.

Di seguito vengono riportati invece alcuni grafici che mostrano il confronto tra le registrazioni dei due strumenti, avvistati sul maniccotto posto a valle delle bobine.

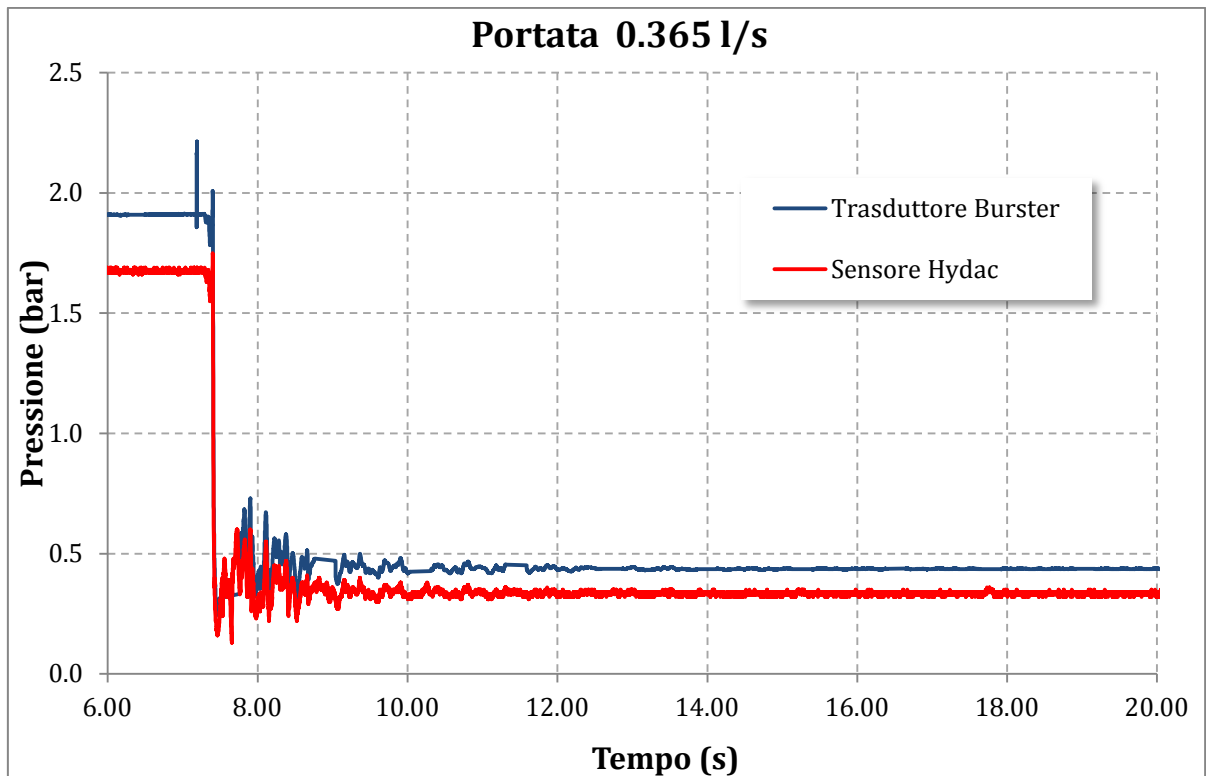


Figura 4.28 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.365 l/s.

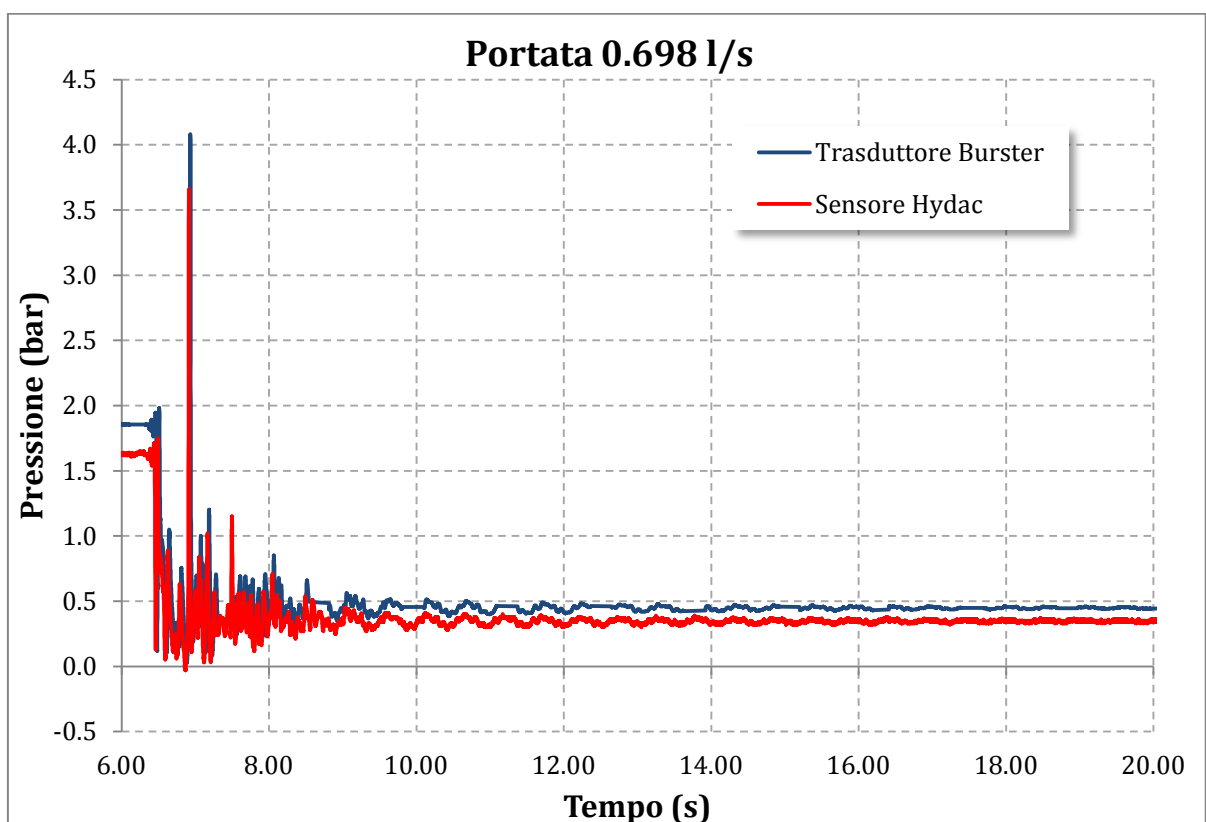


Figura 4.29 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.698 l/s.

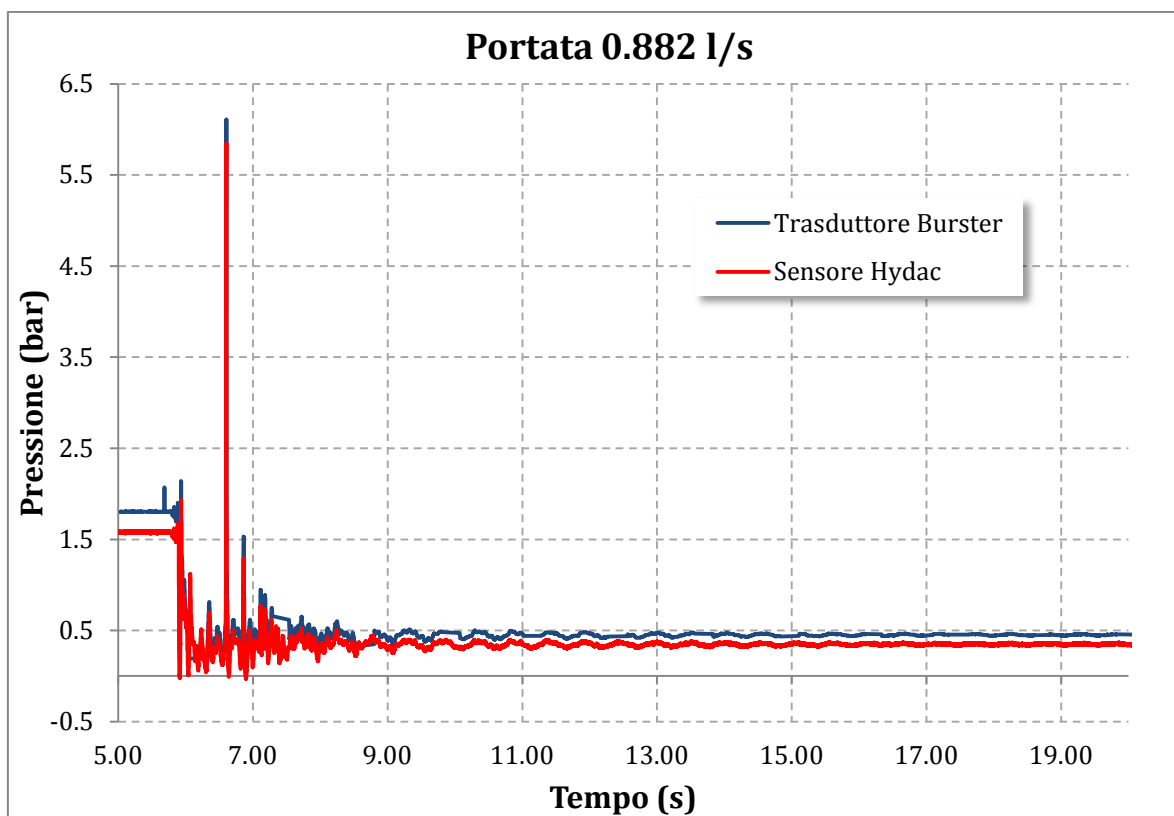


Figura 4.30 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.882 l/s.

Di seguito vengono riportati invece alcuni grafici che mostrano il confronto tra le registrazioni dei due strumenti, avvitati sul manicotto posto a monte delle bobine.

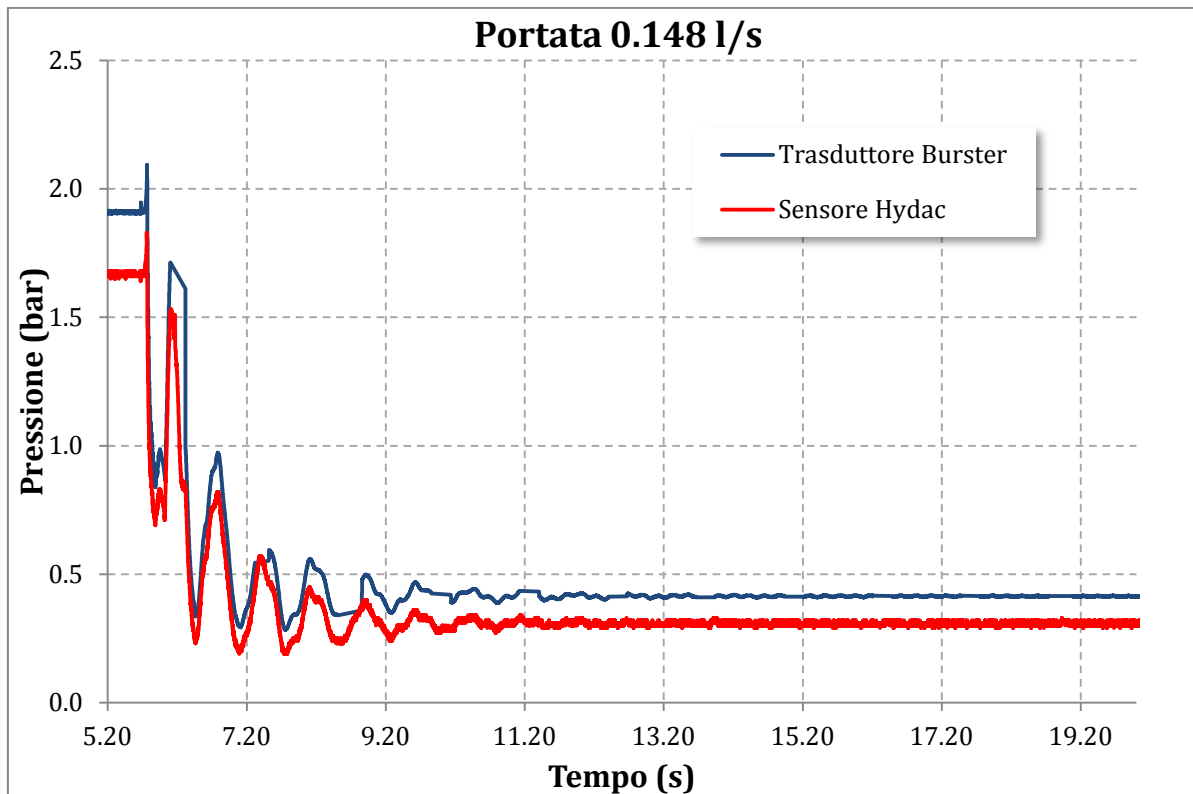


Figura 4.31 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.148 l/s.

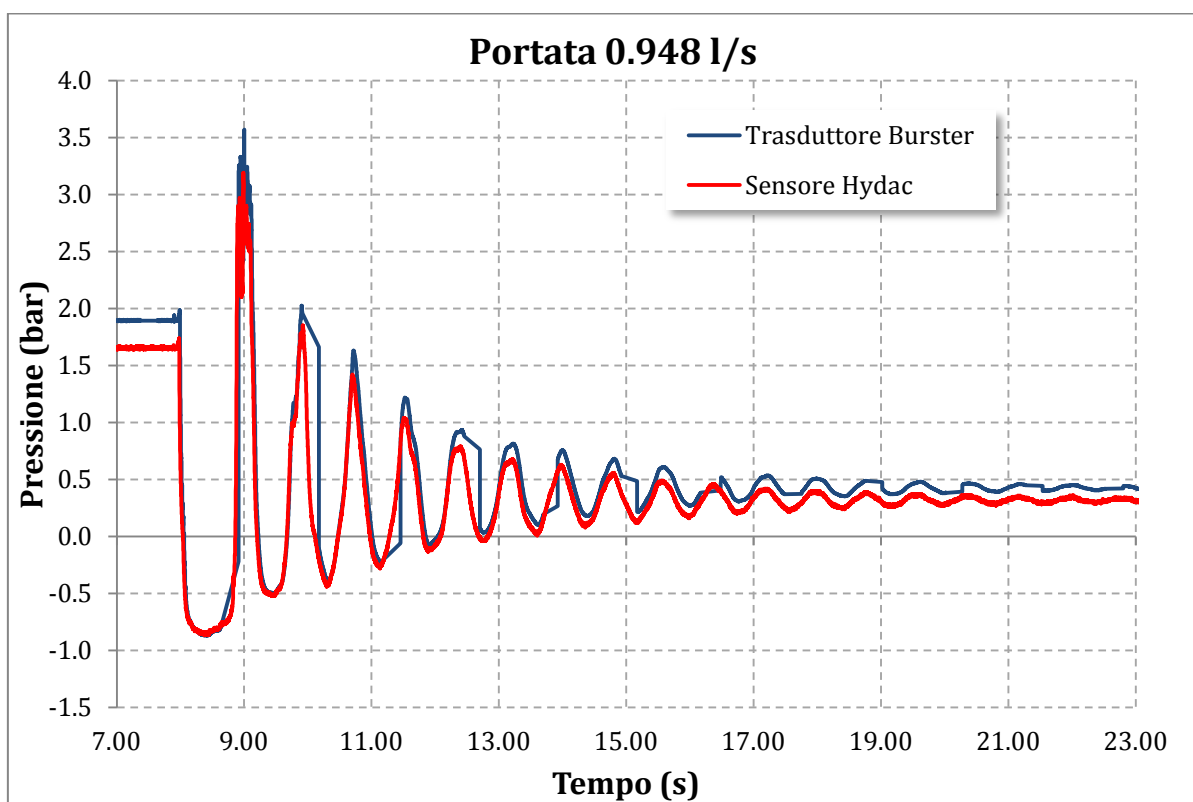


Figura 4.32 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 0.948 l/s.

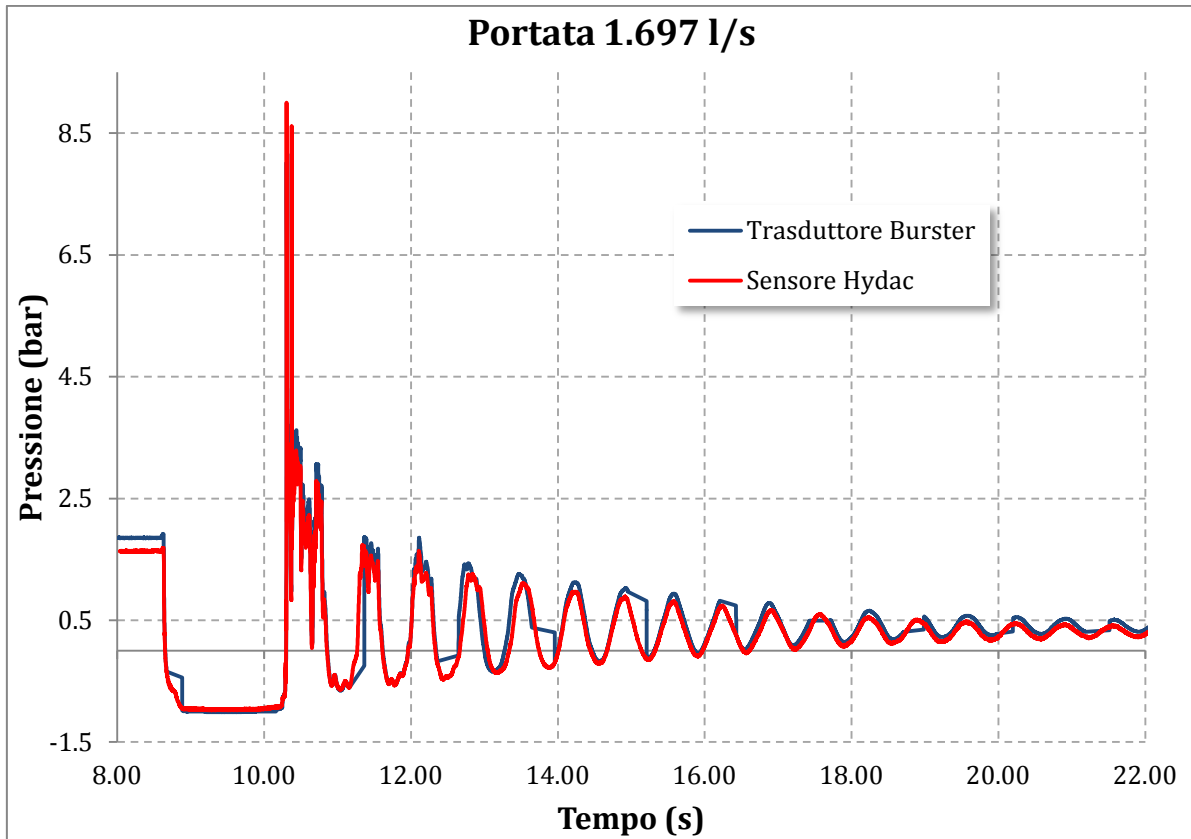


Figura 4.33 Grafico che mostra il confronto tra le registrazioni dei due strumenti per una portata pari a 1.697 l/s.

Osservando i valori riportati nelle tabelle si nota che la pressione massima non oltrepassa i 9 bar: tale limite superiore è dettato dal fatto che il fondo scala del sensore della *Hydac* è 9 bar, per cui onde evitare di rovinare lo strumento si è scelto di rimanere al di sotto di portate che consentissero un picco di sovrappressione che oltrepassasse il limite. Nelle tre occasioni in cui questo limite è stato superato, è stato utilizzato esclusivamente il trasduttore della *Burster*, avente un fondo scala più elevato.

Confrontando fra loro tutti i grafici si osserva che l'andamento di pressione registrato con entrambi gli strumenti è praticamente identico, con qualche piccola differenza relativamente ai valori assoluti: in genere il trasduttore della *Burster* tende a sovrastimare sia il picco di sovrappressione che il valore della statica, per cui in quasi tutti i grafici la curva relativa a questo strumento è sempre leggermente traslata verso l'alto rispetto alla curva relativa al sensore *Hydac*.

In alcuni grafici si nota inoltre che il picco di sovrappressione compare "in ritardo", ovvero il primo innalzamento di pressione è molto modesto, poi si ha una fase di depressione e dopo si ha il massimo picco di sovrappressione.

Ciò che sicuramente cattura l'attenzione, è l'entità delle differenze relative al valore di ΔP misurato, che sono troppo elevati (in valore assoluto). Ma in particolare si nota che non solo l'errore è elevato,

ma sempre di segno negativo, ovvero il valore misurato è sempre di gran lunga inferiore al valore atteso. Questo significa che gran parte dell'energia viene dissipata prima che avvenga il picco di sovrappressione, per cui il valore massimo è sempre inferiore a quello che ci si aspetterebbe.

4.6 Configurazione II - 1^a modifica: inserimento tubazione trasparente

L'unica modifica apportata all'impianto in questa seconda configurazione, consiste nella sostituzione di una parte di tubazione in ferro con una tubazione, della stessa lunghezza e di pari diametro, in materiale plastico e trasparente. Viene tolto un tubo lungo 50 cm situato immediatamente a valle dell'elettrovalvola (fig. 4.34) ed inserito un tubo in *pléxiglas* della stessa lunghezza: questo materiale è più trasparente del vetro alla luce visibile, ha un punto di rottura superiore allo stesso ed è molto più leggero (fig. 4.36).



Figura 4.34 Tubo in ferro (a valle dell'elettrovalvola) sostituito.



Figura 4.35 Flangia fissata con bulloni e dadi al resto dell'impianto.

Per l'inserimento del condotto occorre dotarlo di due flange, in modo da poterlo fissare con bulloni e dadi al resto della tubazione metallica (fig. 4.35). Le flange sono state realizzate in PVC, a partire da due tavolette di spessore pari a 2 cm; per fissare invece il tubo in pléxiglas al PVC occorre una resina chimica particolare per questo tipo di materiali.



Figura 4.36 Tubo in pléxiglas con flange realizzate in PVC.

La sequenza dei vari strumenti è mostrata in *fig. 4.37*:



Figura 4.37 Sequenza dei vari strumenti dopo la modifica.

Lo scopo di questa modifica consiste nella possibilità di poter riprendere tramite una videocamera il fenomeno della cavitazione. La videocamera viene posta su un piedistallo all'altezza del tubo, e viene accesa. Quando la valvola viene chiusa e la corrente si arresta, si può notare cosa accade: a causa dell'inerzia parte dell'acqua presente nel tubo prosegue verso valle (lasciando il tubo quasi vuoto), dopodiché la stessa acqua torna indietro a gran velocità e va a impattare sulla valvola, causando un notevole rumore. Nelle varie riprese eseguite, si nota anche la formazione di bollicine che si muovono assieme al flusso d'acqua: queste sono dovute alla liberazione dell'aria disciolta nell'acqua, a causa della bassa pressione, e provocano la dissipazione di una parte di energia che possiede il fluido. Questa prova è stata ripetuta per diverse portate, ma solamente con portate elevate si può notare con chiarezza questo fenomeno (che consiste appunto nella *cavitazione*). Di seguito vengono riportate alcune immagini che provengono dalle registrazioni fatte con la videocamera.



Figura 4.38 Portata 141 litri/minuto: la valvola è appena stata chiusa ed il tubo non è più pieno.



Figura 4.39 Portata 141 litri/minuto: il fluido sta tornando indietro verso la valvola contro cui si infrange.

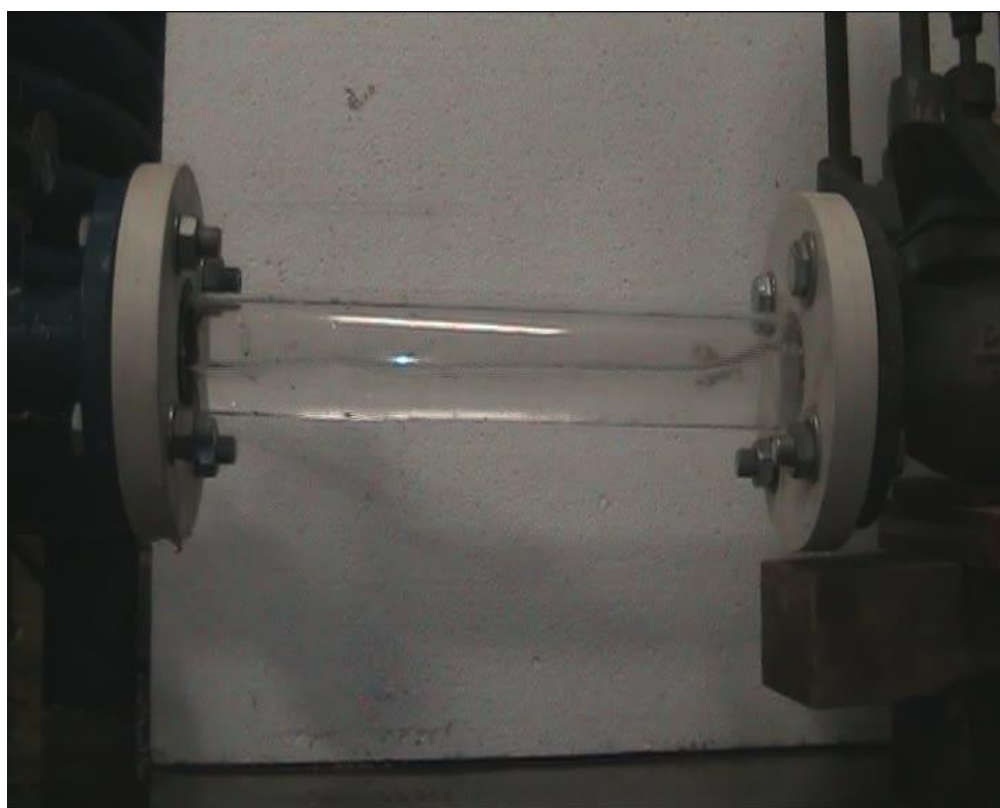


Figura 4.40 Portata 180 litri/minuto: la valvola è appena stata chiusa ed il tubo non è più pieno.



Figura 4.41 Portata 180 litri/minuto: il fluido sta tornando indietro verso la valvola contro cui si infrange.

5

Moto vario e cavitazione: modelli numerici

5.1 Le resistenze al moto

I fenomeni di smorzamento e di sfasamento dei picchi di pressione vengono solitamente osservati nelle fasi di chiusura delle ultime cavità; eppure questi sono stati osservati anche durante i transitori in assenza di cavitazione (*Vardy, 1980*): si può intuire quindi che tali fenomeni siano prettamente connessi ai processi di moto vario piuttosto che alla presenza di cavitazione. Per questo motivo, anche in assenza di cavitazione, il tradizionale criterio di valutazione delle forze resistenti in condizioni di moto vario è stato messo in discussione e sottoposto a revisione.

Le resistenze al moto del fluido vengono solitamente tenute in conto utilizzando le ordinarie formule di moto uniforme, i cui coefficienti vengono ritenuti costanti durante il processo di moto vario (valutazione di tipo “*steady*”), oppure variabili secondo la formula di *Colebrook-White*, determinando cioè l’appropriato valore del coefficiente λ in base ai valori istantanei del numero di *Reynolds* Re

locale (valutazione di tipo “*quasi-steady*”). Tale metodologia, infatti, se permette di ricostruire in maniera accettabile i transitori non troppo rapidi può risultare inadeguata invece per quelli caratterizzati da elevata rapidità. È noto inoltre che tale modalità di calcolo conduce ad una sottostima delle resistenze al moto, tanto maggiore quanto più è alta la frequenza del fenomeno e ad una conseguente sovrastima delle oscillazioni di pressione, in modo speciale quelle successive alla prima.

Il motivo di tale inadeguatezza è riconducibile (Van De Sande et al., 1980) essenzialmente alle notevoli differenze esistenti tra i profili di velocità in moto vario e i corrispondenti in moto uniforme. Considerando un diagramma di velocità più appiattito rispetto a quello di moto uniforme, si riscontra una variazione più rapida alla parete e, quindi, una maggiore forza resistente. Per questo motivo, a parità di portata, ai profili di moto vario sono associati sforzi tangenziali maggiori di quelli in condizione di moto permanente (Cocchi, 1988). Per poter riprodurre numericamente i fenomeni di smorzamento attraverso modelli monodimensionali, è possibile adottare formulazioni con termini dissipativi aggiuntivi da sommare algebricamente ai termini di resistenza tradizionali, sia per processi di moto vario in presenza di cavitazione che in assenza di essa. Esiste tuttavia una grande variabilità per quanto riguarda la determinazione di tali parametri impiegando le relazioni valide in condizioni di moto uniforme o permanente (valutazioni “*steady*” o “*quasi-steady*”) in relazione ai vari autori che hanno affrontato il problema. In letteratura, per la valutazione delle forze resistenti in moto vario, sono disponibili numerosi criteri, la cui classificazione avviene (Bergant et al., 2001) mediante sei diverse categorie:

- le forze resistenti dipendono dalle variazioni istantanee della velocità media della corrente V ;
- le forze resistenti dipendono sia dalle variazioni istantanee della velocità media della corrente V che dal valore dell’accelerazione locale media $\frac{\partial V}{\partial t}$;
- le forze resistenti dipendono dalle variazioni istantanee della velocità media della corrente V , dal valore dell’accelerazione locale $\frac{\partial V}{\partial t}$ e dal valore dell’accelerazione convettiva $\frac{\partial V}{\partial x}$;
- le forze resistenti dipendono dalle variazioni istantanee della velocità media della corrente V e dal termine diffusivo $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$;
- le forze resistenti dipendono sia dalle variazioni istantanee della velocità media della corrente V che dalla “*flow history*”, l’andamento passato dell’accelerazione;
- le forze resistenti dipendono dalle variazioni istantanee della velocità media sia in direzione longitudinale che in quella trasversale.

La valutazione delle dissipazioni può essere effettuata in maniera più adeguata, anche se con tempi di calcolo molto maggiori, per mezzo di modelli bidimensionali o quasi bidimensionali, che tengano conto del fatto che la sezione trasversale del profilo di velocità non sia uniforme.

5.2 Modelli IAB

Nei modelli IAB, modelli monodimensionali “*Instantaneous acceleration-based*”, la valutazione delle resistenze al moto di tipo “*steady*” avviene aggiungendo un termine proporzionale alla derivata locale della velocità.

5.2.1 Modello Brunone e Greco (1990)

Brunone e Greco (1990) presentano un modello con una valutazione delle resistenze al moto di tipo “*steady*”, che consiste nell’aggiunta di un termine proporzionale alla derivata locale della velocità solo nel caso in cui però tale accelerazione risulti concorde con la velocità media della corrente. Quindi si assume:

$$J = J_S + J_U$$

dove:

- J_S viene valutato in condizioni stazionarie, per cui vale la relazione:

$$J_S = \lambda \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot g \cdot D}$$

- J_U è valutato invece in condizioni non stazionarie e vale:

$$J_U = k_1 \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}$$

dove k_1 rappresenta la costante di smorzamento.

Quindi la formulazione completa risulta:

$$J = J_S + J_U = \lambda \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot g \cdot D} + k_1 \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Questo modello adottato per valutare le resistenze (e che quindi può non essere adatto per interpretare in dettaglio il fenomeno idrodinamico) si distingue tra i tanti proposti nella letteratura perché considera un termine addizionale presente solo durante le fasi di espansione della corrente e non durante quelle di contrazione.

Viene quindi imposto che la costante di smorzamento k_1 abbia valore nullo nel caso in cui i termini Q e $\frac{\partial Q}{\partial t}$ siano discordi.

Si è posto:

$$k_1 \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = k_1 \cdot \frac{\partial(A_S \cdot V)}{\partial t} \cong k_1 \cdot A_S \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + k_1 \cdot V \cdot \frac{\partial A}{\partial t}$$

Ipotizzando che $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, si ha:

$$k_1 \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \cong k_1 \cdot A_S \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

A rigore $\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0$ poiché la sezione della condotta non è costante per cui nella pratica si deforma e modifica il proprio diametro, sotto l'azione delle sovrappressioni. $\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0$ è inoltre l'ipotesi basilare per la formulazione analitica dell'equazione di continuità nel caso di moto vario. È lecito ritenere che nella pratica corrente tale termine possa essere trascurato in quanto le variazioni indotte alla sezione della condotta dalle sovrappressioni generate siano secondarie in termini numerici rispetto al valore assunto da $k_1 \cdot A_S \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$.

Quindi:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + J \cdot g = 0$$

Sostituendo i valori di J :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + g \cdot \left(J_S + k_1 \cdot A_S \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0$$

Raggruppando i termini simili e dividendo:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{g}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot J_S = 0$$

L'equazione di continuità non è cambiata per cui il sistema finale risulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{g}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot J_S = 0 \end{cases}$$

Che scritto in forma compatta diventa:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(u) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{E}$$

Dove:

$$u = \begin{vmatrix} h \\ V \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} V & \frac{c^2}{g} \\ \frac{g}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} & \frac{V}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \end{vmatrix}$$

$$E = \left| -\frac{0}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot J_S \right|$$

Utilizzando il metodo di *Lax – Wendroff* per la risoluzione, si ottiene:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - A_j^n \cdot \frac{\lambda}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot (A_j^n)^2 \cdot (u_{j+1}^n - 2 \cdot u_j^n + u_{j-1}^n) + \Delta t \cdot E_j^n$$

Scritto in forma estesa:

$$u_j^{n+1} = \begin{vmatrix} h_j^{n+1} \\ V_j^{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_j^n \\ V_j^n \end{vmatrix} - \frac{\lambda}{2} \cdot \begin{vmatrix} V & \frac{c^2}{g} \\ \frac{g}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} & \frac{V}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} \end{vmatrix}_j \cdot \begin{vmatrix} h_{j+1}^n - h_{j-1}^n \\ V_{j+1}^n - V_{j-1}^n \end{vmatrix} + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\begin{vmatrix} V & \frac{c^2}{g} \\ \frac{g}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} & \frac{V}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} \end{vmatrix}_j \right)^2 \cdot \begin{vmatrix} h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n \\ V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n \end{vmatrix} + \Delta t \cdot \left| -\frac{0}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot J_S \right|_j^n$$

$$\text{con } A^2 = \begin{vmatrix} \left(V^2 + \frac{c^2}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} \right) & \left(\frac{c^2 \cdot V}{g} + \frac{V \cdot c^2}{g \cdot (1+k_1 \cdot A_S \cdot g)} \right) \\ \left(\frac{V \cdot g}{(1+k_1 \cdot A_S \cdot g)} + \frac{V \cdot g}{(1+k_1 \cdot A_S \cdot g)^2} \right) & \left(\frac{c^2}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} + \frac{V^2}{(1+k_1 \cdot A_S \cdot g)^2} \right) \end{vmatrix}$$

Separando le due incognite V e h :

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{g}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \frac{V_j^n}{1 + k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{V_j^n \cdot g}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} + \frac{V_j^n \cdot g}{(1+k_1 \cdot A_S \cdot g)^2} \right) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + \left(\frac{c^2}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} + \frac{(V_j^n)^2}{(1+k_1 \cdot A_S \cdot g)^2} \right) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right) + \frac{g}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} \cdot \Delta t \cdot J_j^n$$

$$h_j^{n+1} = h_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(V_j^n \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \frac{c^2}{g} \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\left((V_j^n)^2 + \frac{c^2}{1+k_1 \cdot A_S \cdot g} \right) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + \left(\frac{c^2 \cdot V_j^n}{g} + \frac{V_j^n \cdot c^2}{g \cdot (1+k_1 \cdot A_S \cdot g)} \right) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right)$$

Il fatto di porre il coefficiente k_1 pari a zero per correnti che decelerano risulta, in base alle prove effettuate dagli autori, assolutamente indispensabile: senza tale assunzione, infatti, le dissipazioni fornite dal modello sono state minori. *Brunone e Greco (1990)* hanno utilizzato un unico valore di k_1 per tutte le prove eseguite, determinato senza eseguire una rigorosa taratura del modello. È possibile che lo schema riportato introduca una discrepanza tra i risultati di calcolo e i rilievi sperimentali, dovuta all'introduzione di una riduzione della celerità nel modello di calcolo (*Ramos, 2004*).

5.2.2 Modello Brunone et al. (1991a,b)

Brunone et al. (1991a,b) rivedono il modello mostrato in precedenza, e lo migliorano introducendo sia un termine proporzionale alla derivata locale della velocità che un termine proporzionale al valore dell'accelerazione convettiva. Il termine aggiuntivo tiene conto dell'incremento dei termini di inerzia e di resistenza che avvengono nel sistema. La formulazione proposta è la seguente:

$$J = J_S + \frac{k_2}{g} \cdot \left(1 - \frac{c}{\Omega_V}\right) \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \quad (5.1)$$

Dove:

$$\Omega_V = \frac{\frac{\partial V}{\partial t}}{\frac{\partial V}{\partial x}}$$

k_2 = costante di smorzamento assunta per semplicità indipendente dallo spazio e dal tempo.

In questo caso l'equazione della quantità di moto diviene:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + g \cdot J_S + k_2 \cdot c \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Raggruppando i termini simili:

$$(1 + k_2) \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + (V - k_2 \cdot c) \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + g \cdot J_S = 0$$

Per i transitori in cui il rapporto $\left(\frac{V}{c}\right)$ è molto minore di uno, il termine convettivo $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$ può essere trascurato (*Bergant et al., 2001*) per cui l'equazione precedente risulta:

$$(1 + k_2) \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - k_2 \cdot c \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + g \cdot J_S = 0$$

Quindi il sistema finale risulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{g}{(1+k_2)} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{k_2 \cdot c}{(1+k_2)} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{(1+k_2)} \cdot J_s = 0 \end{cases}$$

Risolto tramite il metodo di *Lax – Wendroff* e riscritto, diventa:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \begin{bmatrix} h_j^{n+1} \\ V_j^{n+1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h_j^n \\ V_j^n \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{2} \cdot \begin{bmatrix} V & \frac{c^2}{g} \\ \frac{g}{1+k_2} & -\frac{k_2 \cdot c}{(1+k_2)} \end{bmatrix}_j \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} V & \frac{c^2}{g} \\ \frac{g}{1+k_2} & -\frac{k_2 \cdot c}{(1+k_2)} \end{bmatrix}_j \right)^2 \cdot [h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n] + \Delta t \cdot \\ &\cdot \left[-\frac{g}{1+k_2} \cdot J \right]_j \end{aligned}$$

$$\text{con } A^2 = \begin{bmatrix} \left(V^2 + \frac{c^2}{(1+k_2)} \right) & \left(\frac{c^2 \cdot V}{g} - \frac{k_2 \cdot c^3}{g \cdot (1+k_2)} \right) \\ \left(\frac{V \cdot g}{1+k_2} - \frac{k_2 \cdot c \cdot g}{(1+k_2)^2} \right) & \left(\frac{c^2}{(1+k_2)} + \left(\frac{k_2 \cdot c}{(1+k_2)} \right)^2 \right) \end{bmatrix}$$

Come già visto nel modello precedente, per una corretta simulazione degli andamenti delle sovrappressioni occorre stabilire che k_2 sia diverso da zero per $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} > 0$ e pari a zero per $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} < 0$. I risultati ottenuti, nonostante il parametro di smorzamento sia diverso dal caso precedente, sono identici a quelli che sono stati ricavati con il metodo di *Brunone e Greco (1990)*.

5.3 Modelli MIAB

Sono stati introdotti in seguito i metodi *MIAB*, modelli unidimensionali “*Modified instantaneous acceleration-based*” che permettono di generalizzare la soluzione presentata e cercano di apporre migliorie rispetto ai modelli esposti in precedenza.

5.3.1 Modello Pezzinga (2000)

Pezzinga (2000) non condivide la decisione di porre il segno meno davanti al termine contenente la derivata spaziale della velocità, come mostrato in *Brunone et al. (1991a,b)* con riferimento all’eq. 5.1, in quanto ritiene che sia una scelta non giustificata e arbitraria. Nel caso di colpo d’ariete causato da una chiusura istantanea in una singola condotta di lunghezza L tale imposizione porta ad avere

dissipazioni aggiuntive quando la chiusura avviene nella sezione terminale del condotto ($x = L$), ma fa si che le oscillazioni aumentino quando la chiusura avviene nella sezione iniziale ($x = 0$). In *Figura 5.1* è mostrato il confronto tra i risultati ottenuti dai metodi introdotti nel caso l'otturatore sia posto nella sezione $x = 0$:

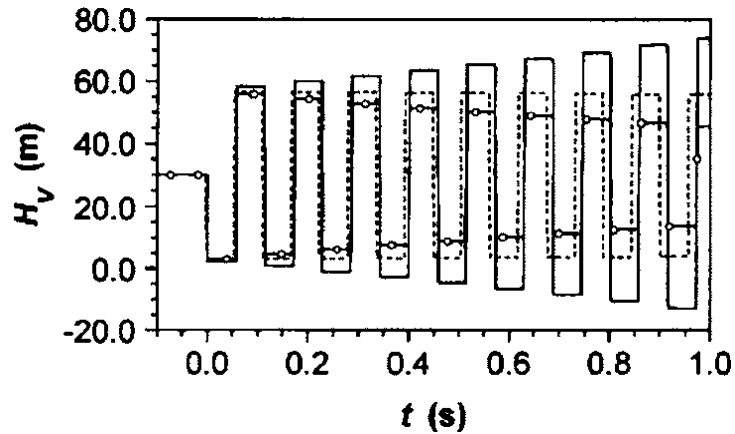


Figura 5.1 Confronto tra la tipologia di modelli *IAB* e *MIAB*, nel caso in cui la sezione di chiusura sia per $x = 0$.

Nel grafico presentato si possono notare i diversi andamenti ricavati tramite metodo delle linee caratteristiche (in cui si trascura la resistenza di moto vario), metodo *IAB* (in questo caso metodo di *Brunone e Greco, 1991a,b*) e metodo *MIAB* (metodo *Pezzinga, 2000*) nel caso di valvola di chiusura posta a ($x = 0$). Per generalizzare il modello di *Brunone (1991a,b)*, evitando di introdurre risultati differenti in funzione della posizione della valvola di chiusura, si può osservare che in condizioni di moto vario il segno dell'accelerazione convettiva è negativo se la manovra di chiusura viene effettuata nella parte terminale della condotta, ed è positivo per manovre prossime alla sezione iniziale. Su questa deduzione sono basati i modelli *MIAB*, come sostenuto da *Pezzinga (2000)* che introduce nella *relazione 5.1* la funzione $sgn\left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\right)$:

$$J = J_s + \frac{k_3}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + sgn\left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cdot \frac{k_3 \cdot c}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$$

L'equazione della quantità di moto si modifica in questo modo:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + g \cdot J_s + k_3 \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + sgn\left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cdot k_3 \cdot c \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Dove k_3 è una costante di smorzamento analoga a quella introdotta da *Brunone e Greco (1991a,b)*, in cui cioè $k_2 = k_3 = k$. Integrando tramite *Lax – Wendroff* e riportando solo la soluzione finale risulta:

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{g}{1+k_3} \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) \pm \frac{k_3 \cdot c}{1+k_3} \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right) +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{V_j^n \cdot g}{1+k_3} \pm \frac{k_3 \cdot c \cdot g}{(1+k_3)^2} \right) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + \left(\frac{c^2}{1+k_3} + \frac{(k_3 \cdot c)^2}{(1+k_3)^2} \right) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right) - \frac{g}{1+k_3} \cdot \Delta t \cdot J_j^n$$

$$h_j^{n+1} = h_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(V_j^n \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \frac{c^2}{g} \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right) +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\left((V_j^n)^2 + \frac{c^2}{1+k_3} \right) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + \left(\frac{c^2 \cdot V_j^n}{g} \pm \frac{k_3 \cdot c^3}{g \cdot (1+k_3)} \right) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right)$$

L'operatore $sgn\left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\right)$ assume pertanto valore $+1$ se $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \geq 0$ e -1 se $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} < 0$: questo permette di rendere la formulazione del modello indipendente dalla posizione della valvola di chiusura nel sistema di coordinate scelto, ottenendo a differenza di un modello *IAB* un segnale smorzato sia nel caso in cui la valvola di chiusura sia posta a $(x = 0)$ che a $(x = L)$. È stato dimostrato inoltre (*Vítkovský et al, 2006*) che il termine di smorzamento in moto vario sia trascurabile nella fase in cui la corrente sia decelerata, ovvero quando $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} < 0$, quindi anche per il modello di *Pezzinga (2000)* k deve essere posto pari a zero. Nella fase di accelerazione invece, per $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \geq 0$, k assume un valore costante. È stata introdotta un'ulteriore possibile estensione del metodo (*Bouazza e Brunelle, 2000*) che considera un coefficiente di smorzamento k variabile nello spazio e nel tempo, valutando tale coefficiente attraverso un secondo modello ausiliario di moto vario più complesso. A livello teorico tale approccio permette una migliore determinazione degli andamenti, ma determinare la variazione di k attraverso relazioni o abachi basati sulle caratteristiche del moto, per un modello monodimensionale non sono sempre validi e pertanto non possono essere sempre applicati. Per questo motivo il coefficiente k è stato considerato costante.

5.3.2 Modello Ramos et al. (2004)

Ramos (2004) propone sostanzialmente una modifica al modello proposto da *Pezzinga (2000)* in grado di migliorare gli andamenti delle sovrappressioni, adattandoli ai risultati sperimentali (*Vítkovský et al., 2000*). I modelli *MIAB* possono essere scomposti separando le due componenti, ovvero il termine di accelerazione locale e quello di accelerazione convettiva.

$$J = J_s + \frac{k_3}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + sgn\left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cdot \frac{k_3 \cdot c}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$$

Secondo *Ramos (2004)* il termine $\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$ non produce alcun smorzamento aggiuntivo al segnale ma invece è responsabile di una modifica del valore di celerità che comporta una variazione della frequenza del segnale nel tempo, mentre il termine $\frac{c}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$ è responsabile unicamente dello smorzamento del segnale dovuto al processo di moto vario. Poiché gli effetti fisici associati ai due termini presentati sono da considerarsi diversi ed indipendenti è possibile separarli utilizzando due coefficienti differenti. Quindi il valore delle perdite di carico secondo *Ramos (2004)* si può esprimere come:

$$J = J_S + \frac{k_p}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{sgn}\left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cdot \frac{k_A \cdot c}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$$

Questo metodo introduce così due costanti k_A e k_p che necessitano a loro volta di calibrazione. A partire da analisi sperimentali gli autori hanno notato che k_A e k_p possono assumere valori differenti, con k_A maggiore di k_p anche di un ordine di grandezza ($k_p \approx 10\% \cdot k_A$).

Integrando tramite *Lax – Wendroff* il risultato finale risulta essere:

$$\begin{aligned} V_j^{n+1} &= V_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{g}{1+k_p} \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) \pm \frac{k_A \cdot c}{1+k_p} \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right) + \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\left(\frac{V_j^n \cdot g}{1+k} \pm \frac{k_A \cdot c \cdot g}{(1+k_p)^2} \right) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + \left(\frac{c^2}{1+k_p} + \frac{(k_A \cdot c)^2}{(1+k_p)^2} \right) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right) - \frac{g}{1+k_p} \cdot \Delta t \cdot J_j^n \\ \\ h_j^{n+1} &= h_j^n - \frac{\lambda}{2} \cdot \left(V_j^n \cdot (h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \frac{c^2}{g} \cdot (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \right) + \\ &+ \frac{\lambda^2}{2} \cdot \left(\left((V_j^n)^2 + \frac{c^2}{1+k_p} \right) \cdot (h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) + \left(\frac{c^2 \cdot V_j^n}{g} \pm \frac{k_A \cdot c^3}{g \cdot (1+k_p)} \right) \cdot (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \right) \end{aligned}$$

5.4 Analisi della costante di smorzamento

Gli effetti dissipativi che non sono stati considerati direttamente nella trattazione analitica dei vari modelli presentati in precedenza, sono inclusi nel termine k . Quindi la calibrazione di tale parametro varia notevolmente in base allo schema impiantistico dell'apparato sperimentale e alla tecnica di integrazione utilizzata (*Pezzinga, 2000*). Per questo motivo in letteratura esistono diversi set di valori che rispecchiano le varie condizioni imposte dagli autori: ad esempio *Brunone et al. (1991a,b)* suggeriscono un valore unico per tutti i casi esaminati pari a $k = 0.085$, *Bergant e Simpson (1994)*

invece considerano valori compresi tra 0.33 e 0.085, *Bughazem and Anderson (1996)* tra 0.065 e 0.15, *Wylie (1996)* tra 0.02 e 0.03. A causa di questa grande varietà di set possibili, il parametro k viene valutato confrontando i risultati ottenuti in un modello numerico con gli andamenti delle sovrappressioni ricavati in un caso sperimentale: si studiano le soluzioni al variare del valore numerico di k fino ad identificare quella che meglio approssima gli andamenti reali. La stima di k_1 risulta essere così la più difficoltosa poiché non è possibile determinare il valore numerico della costante senza processi iterativi. Dal confronto di andamenti sperimentali ricavati con i metodi precedenti al variare di k è stato possibile determinare queste relazioni:

$$k_1 \cong k_2 \cdot 100 = k_3 \cdot 100 \quad (5.2)$$

In questo modo si può legare il valore della costante di *Brunone e Greco (1990)* con quelle introdotte da *Pezzinga (2000)* e *Brunone e Greco (1991a,b)*. Nei paragrafi successivi vengono descritti alcuni metodi che permettono di stimare k_2 e k_3 per via analitica o grafica; i risultati che si possono ottenere con i vari metodi possono essere molto differenti tra loro per cui vengono considerati solo come valori approssimati che hanno bisogno di essere validati.

5.4.1 Pezzinga (2000)

Per determinare il valore della costante di smorzamento senza processi iterativi, è possibile utilizzare gli abachi costruiti da *Pezzinga (2000)*. La tecnica introdotta ha il vantaggio di generalizzare il metodo di stima in funzione dei parametri costitutivi dell'impianto. Con questa metodologia è possibile definire k tramite le variabili fisiche che caratterizzano il problema in esame, invece che procedere attraverso una serie di iterazioni successive e relativi confronti con risultati sperimentali. *Vardy e Brown (1996)* hanno osservato che il parametro k diminuisce all'aumentare del numero di *Reynolds*, assumendo valori compresi tra 0.0156 e 0.0185. Il passo fondamentale per l'utilizzo del metodo consiste nella definizione di una serie di parametri adimensionali che raggruppano le grandezze fisiche in gioco nel problema di moto vario. In particolare:

- $\gamma_0 = \frac{g \cdot J_0 \cdot L}{c \cdot V_0}$, caratterizza i parametri caratteristici della condotta;
- $\frac{\varepsilon}{D}$, caratterizza la scabrezza relativa della condotta;
- $Re_0 = \frac{V_0 \cdot D}{\nu}$, caratterizza il numero di *Reynolds* in condizione di moto uniforme.

Con:

- L = lunghezza della condotta;
- V_0 = velocità di moto uniforme;
- J_0 = cadente iniziale in moto uniforme;
- ν = viscosità cinematica;
- ε = scabrezza;
- D = diametro della condotta.

Al variare di tali valori adimensionali sono stati creati una serie di abachi che permettono di definire k graficamente. A titolo esemplificativo si riporta in *Figura 5.2* l'andamento di uno dei diagrammi per $y_0 = 0.01$:

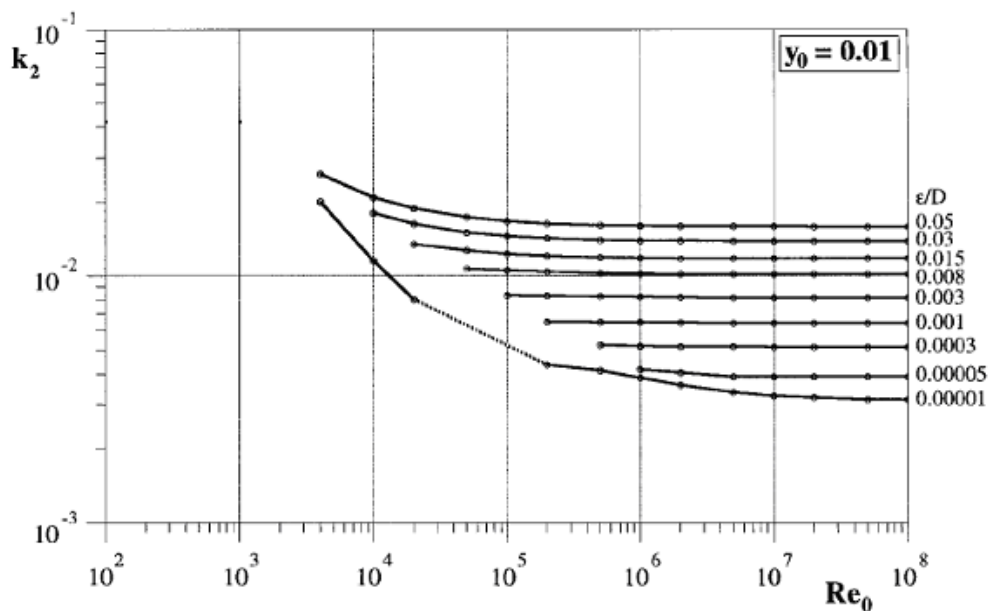


Figura 5.2 Abaco da cui è possibile ricavare il valore di k (per $y_0 = 0.01$).

Gli abachi presentati da Pezziga (2000) sono analoghi a quelli realizzati da Moody: per moti turbolenti infatti, tutte le curve del grafico tendono ad avere lo stesso comportamento per bassi valori di Re_0 , mentre dipendono esclusivamente dalla scabrezza relativa per alti valori di Re_0 . In moto laminare inoltre k non dipende più da Re_0 ma solo da y_0 .

5.4.2 Carravetta (1992)

È presente in letteratura un metodo alternativo per la stima del parametro k , partendo dai dati sperimentali ottenuti con una singola prova in moto vario. È stato dimostrato che J_S , termine relativo alle sole resistenze valutate tramite le formule del moto uniforme, è ininfluente nella determinazione delle attenuazioni indotte dalla formazione di moto vario (Golia, 1992). Poiché l'ordine di grandezza di questo termine è decisamente inferiore a quello dei termini specifici del moto vario, almeno nei casi di manovra di chiusura completa che si esauriscono in pochi ritmi, è ragionevole ritenere che il termine J_S possa essere trascurato, tranne in certi casi nei primi istanti. Significa quindi che l'analisi delle attenuazioni subite dal segnale in una generica prova è in grado di fornire informazioni sul valore numerico della costante di smorzamento.

Come già detto, con il termine ritmo ($\tau = \frac{2 \cdot L}{c}$) si indica il tempo che impiega una perturbazione elementare a percorrere l'intera condotta nei due sensi. A partire da queste considerazioni Carravetta et al. (1996) hanno dimostrato che k è direttamente correlato ai valori massimi delle sovrapressioni secondo la seguente relazione:

$$\frac{h_t}{h_{t-2\tau}} = \left(\frac{1}{1+k_1} \right)^2 = \left(\frac{1}{1+k_2} \right)^2$$

Con h_t e $h_{t-2\tau}$ vengono indicati i massimi delle sovrapressioni in due periodi consecutivi scelti arbitrariamente tra quelli successivi alla chiusura completa della valvola. L'eq. 5.2 afferma in sostanza che i valori di pressione a distanza di due ritmi, pari ad un periodo, come si vede in figura 5.3, stanno tra loro nel rapporto $\left(\frac{1}{1+k} \right)^2$.

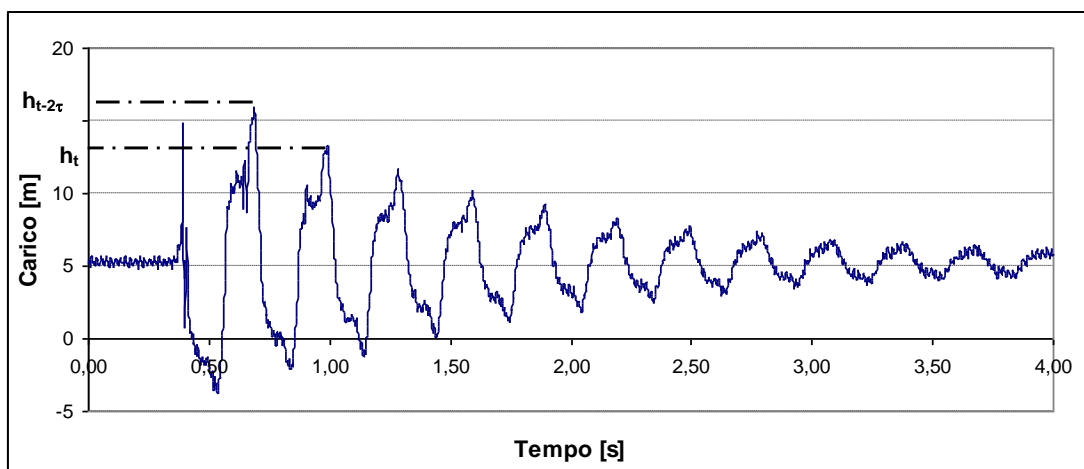


Figura 5.3 Esempio di grafico nel quale sono indicate due sovrapressioni a distanza di un periodo.

Quindi, una volta noto l'andamento delle pressioni ottenuto sperimentalmente, è possibile ricavare una stima della costante di smorzamento, con un buon grado di approssimazione, in questo modo:

$$k = \frac{1 - \sqrt{\frac{h_t}{h_{t-2\tau}}}}{\sqrt{\frac{h_t}{h_{t-2\tau}}}}$$

5.4.3 Vardy e Brown (1996)

Vardy e Brown (1996) hanno proposto di stimare il valore della costante di smorzamento mediante delle relazioni analitiche in funzione di Re_0 che caratterizza il moto in una condotta, senza consultare abachi né sapere i valori di sovrappressione ottenuti per via sperimentale. Senza soffermarsi sulle considerazioni analitiche che stanno alla base di tali assunzioni, vengono di seguito introdotti i principi che permettono di comprendere il fenomeno del moto vario e la variazione delle resistenze al moto rispetto alle condizioni di moto uniforme.

Come già ampiamente descritto nel primo capitolo in un caso teorico, nell'intervallo di tempo infinitesimo dt immediatamente seguente alla chiusura dell'otturatore, si nota che subito a monte di questo si ha l'arresto soltanto di un volume infinitesimo di lunghezza ds di fluido, mentre la restante parte della colonna liquida continua a muoversi con la velocità iniziale V_0 .

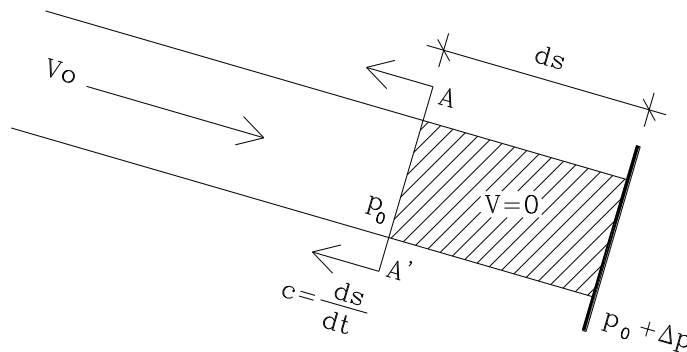


Figura 5.4 Schematizzazione di un caso teorico.

Nel caso ideale la sezione che separa il fluido fermo da quello in movimento è rappresentata in figura 5.4 tramite il segmento $A-A'$, definendo una frontiera di divisione netta fra le due condizioni di moto. Nella realtà non è possibile definire con precisione tale confine di separazione poiché i valori di velocità del fluido in condotta sono diversi considerando particelle lungo l'asse mediano o in prossimità della parete (Ghidaoui, 2002). In caso di moto turbolento l'andamento delle velocità in

una generica sezione non è di certo di tipo lineare, come si può vedere dal grafico rappresentato in *figura 5.5*:

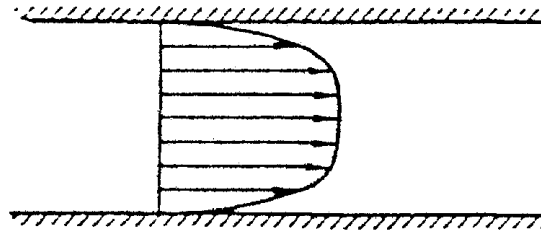


Figura 5.5 Profilo di velocità in moto turbolento.

Si nota che il modulo della velocità risulta essere massimo lungo l'asse della condotta per ridursi rapidamente di valore fino ad annullarsi in corrispondenza della parete. A seguito di questa diversità riscontrabile negli andamenti non è possibile interrompere il flusso in maniera istantanea in ogni punto come mostrato in *figura 5.4*: le particelle più veloci saranno le ultime infatti a rallentare in confronto a quelle prossime alla parete della condotta che sono da considerarsi già pressoché ferme. Il fenomeno di chiusura istantanea viene ben rappresentato in *figura 5.6*, in cui si può notare la variazione degli andamenti delle velocità a seguito di una manovra istantanea di un otturatore, nel caso in esame in una sezione di condotta prossima alla valvola. I numeri sul grafico rappresentano gli istanti temporali differenti successivi alla manovra di chiusura.

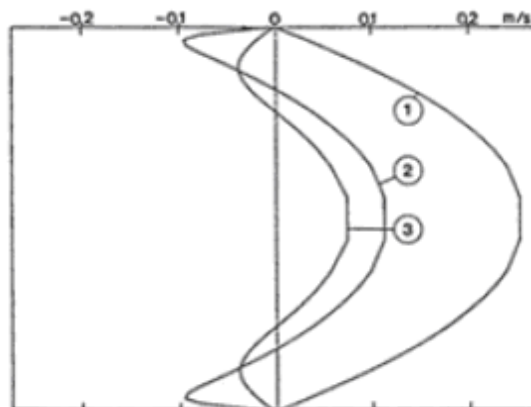


Figura 5.6 Profilo di velocità in una sezione prossima alla valvola per differenti istanti temporali di chiusura.

Questa diversità di comportamento tra le particelle di fluido lungo una generica sezione di condotta induce la formazione di turbolenze localizzate principalmente lungo il contorno del tubo, dove la variazione di velocità è minima. Nel tempo intercorso tra il passaggio della prima onda di compressione e quella generata dalla riflessione con il serbatoio tali turbolenze tendono a diffondersi

incrementandosi di intensità, influenzando così sia i valori di viscosità che quelli degli sforzi. In generale infatti (Vardy, 2003) in condizioni di moto laminare la viscosità del fluido si può considerare uniforme nello spazio e costante nel tempo, in moto turbolento stazionario la viscosità non è uniforme nello spazio ma è costante nel tempo, in moto turbolento non stazionario la viscosità non è uniforme né nello spazio né nel tempo. Questo complica la determinazione analitica del valore di sforzo di parete, che non può essere ricavato senza ricorrere ad alcune semplificazioni. La generazione di vortici lungo il perimetro del condotto, la loro conseguente diffusione, la variazione della viscosità e delle dissipazioni energetiche non possono essere incorporate in modello 1D, ma richiedono come è stato poi dimostrato (Vardy e Hwang, 1991), (Pezzinga, 1999) di lavorare in un ambiente 2D, in cui le variabili vengono analizzate lungo due direzioni: l'asse della condotta e la generica sezione trasversale. Vardy e Brown (1996) hanno introdotto un modello a tre strati per analizzare i diversi caratteri della corrente. La sezione trasversale viene così suddivisa in zone al variare della distanza dalla parete, definendo in particolare un sottostrato laminare, una zona di transizione, e uno stato limite turbolento o "core region". Per ciascuna di queste zone, al variare del numero di *Reynolds*, vengono definite delle relazioni analitiche aventi lo scopo di valutare il valore assunto dalla viscosità, dalla velocità e dagli sforzi.

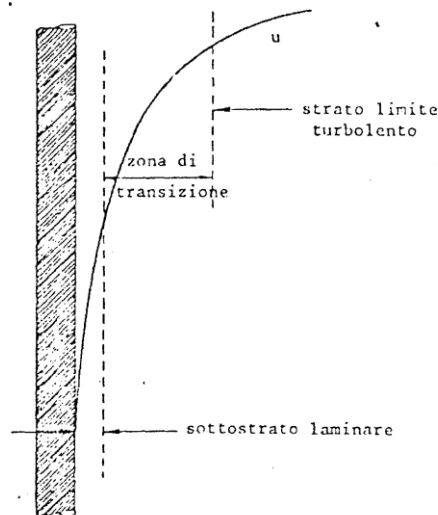


Figura 5.7 Definizione di modello a tre strati.

La caratteristica peculiare del modello di Vardy e Brown (1996) consiste nel ricondurre ad un'unica funzione tutte le considerazioni che sono state fatte. Tale espressione risulta essere composta da due coefficienti: una costante A^* e un parametro B^* , nominato "Inertia shear coefficient", che è funzione del numero di *Reynolds*. Nel caso di fluido in fase di accelerazione uniforme, per valori di Re

compresi tra 2000 e 10^8 , i valori ottenuti del parametro di resistenza in condizioni non stazionarie possono essere considerati prossimi a quelli del parametro k introdotto da *Brunone e Greco (1991a,b)* in condizioni monodimensionali nei modelli *IAB* e *MIAB*. Nonostante questa corrispondenza sia stata dimostrata solo in alcuni casi particolari, gli Autori ritengono ragionevole poter generalizzare tale implicazione.

Vardy e Brown (1996) e in seguito *Vardy e Brown (2003)*, definiscono il parametro C^* , detto “*Shear decay coefficient*” attraverso le relazioni seguenti:

$$k_3 = k_4 = 2\sqrt{C^*}$$

In cui C^* è definito al variare delle condizioni di moto:

$$C^* = \frac{12.86}{Re^{\log\left(\frac{15.9}{Re^{0.056}}\right)}}$$

La sua espressione grafica è mostrata nella figura seguente:

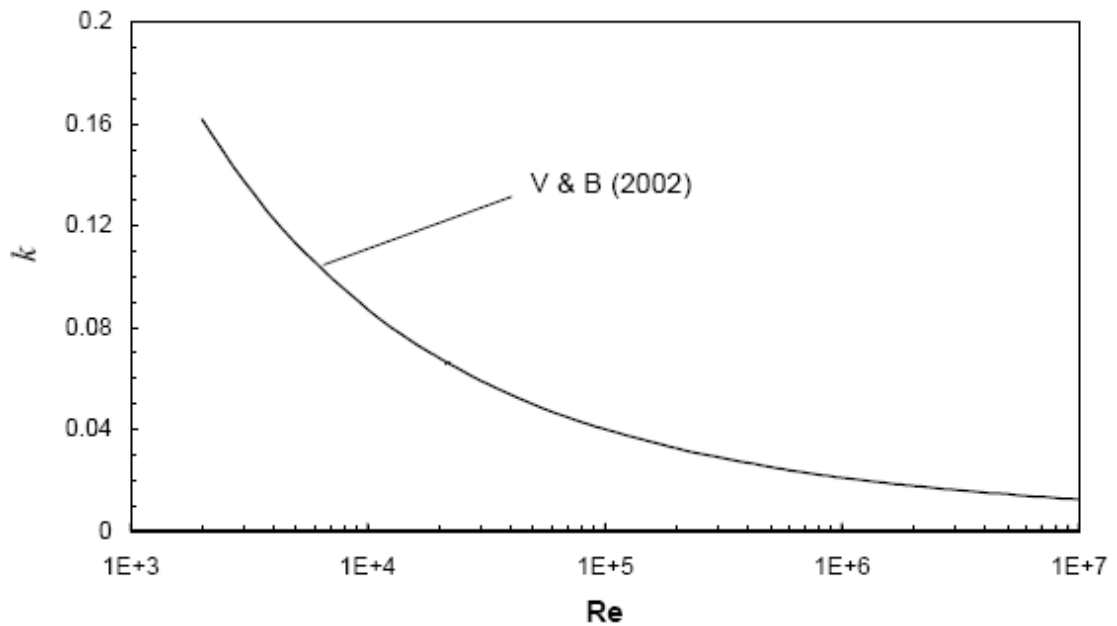


Figura 5.8 Grafico da cui si può ottenere il valore di k in funzione di Re .

5.5 La cavitazione: modello semplificato di “Rottura di vena”

Uno dei primi modelli teorici viene presentato da *Fanelli (1983)*; questo permette di descrivere lo stato di un generico sistema in cui avviene la cavitazione, inserito poi in un codice numerico da *Frigerio (2004)*. *Fanelli (1983)* considera la celerità costante, coincidente con il valore che corrisponde ad assenza di bolle, valutata a posteriori a partire da prove sperimentali ottenute in laboratorio. Non appena la pressione assoluta, diminuendo a seguito di una manovra di chiusura dell’otturatore, raggiunge la pressione di vapore saturo p_v , si ha la formazione di bolle. In tali condizioni evidentemente si interrompe la continuità della “vena liquida” (da qui la denominazione abbreviata di “rottura di vena idraulica”) e schematicamente si possono distinguere due tronconi, separati dalla cavità, uno posto a monte e l’altro a valle. Per ognuno di questi, supposto separato dalle cavità attraverso una sezione di passaggio abbastanza ben definita e non troppo estesa longitudinalmente (ipotesi detta “a pistone” per le due vene liquide), la cavità, se in essa non viene immessa aria, costituisce una sorgente di carico costante o meglio una condizione di estremo (estremo di valle per il tronco di monte, estremo di monte per il tronco di valle), a pressione assoluta costante e pari appunto alla tensione di vapor saturo p_v .

Nel caso si verifichi il fenomeno della cavitazione si modificano così le condizioni al contorno nella condotta, imponendo che per tutto il perdurare del fenomeno i valori di pressione a cavallo della discontinuità assumano il valore costante di:

$$h_0 = -10.33 \text{ m}$$

Fanelli (1983) fissa cioè come limite inferiore della pressione il valore fisico di $p_0 = -1 \text{ atm}$; nel momento in cui tale valore viene raggiunto, si ha il distacco di vena, e quindi un cambiamento sostanziale delle condizioni al contorno. Mentre sino a questo momento la condizione al contorno di monte veniva posta sulla velocità, valutando la chiusura lineare della valvola mediante l’equazione 1.8 e quindi il carico ricavato tramite integrazione numerica, durante la fase caratterizzata da $p_0 < -1 \text{ atm}$ questa assunzione viene modificata. Fintanto che il valore di pressione rimane confinato sotto questo valore “limite” la nuova condizione al contorno di monte risulta essere il valore del carico, pari alla tensione di vapor saturo dell’acqua $h_0 = -10.33 \text{ m}$, ricavando per via numerica il corrispondente valore di velocità. In questo modo è possibile valutare, per ogni passo temporale, la lunghezza assunta dal distacco di vena idraulica.

Quando nelle fasi successive di colpo d’ariete avviene il riattacco di vena, si torna a porre come condizione al contorno la velocità (pari a zero nella prima sezione di monte) e a valutare i carichi con il solito procedimento. Se invece nella cavità viene immessa aria (mediante l’utilizzo di valvole rompi

vuoto), la pressione assoluta all'interno delle bolle non risulta più essere costante nel tempo, ma dipendente da due variabili del problema:

- il volume della cavità;
- la massa d'aria immessa sino al momento considerato (che dipende a sua volta dalla modalità con cui viene introdotta e dalla "storia" del fenomeno sino a quel momento).

Per descrivere questa dipendenza occorre scrivere apposite equazioni del circuito pneumatico, che non vengono riportate perché non strettamente pertinenti.

5.5.1 Collasso delle cavità

Una volta che il valore di pressione, terminata la fase perturbativa, tende ad aumentare sino a valori $p_0 > -1 \text{ atm}$ la pressione di vapore nelle bolle non è più sufficiente a contrastare la pressione idrostatica perciò le cavità che si sono formate nelle fasi precedenti tendono ad implodere, come mostrato in *figura 5.9*:

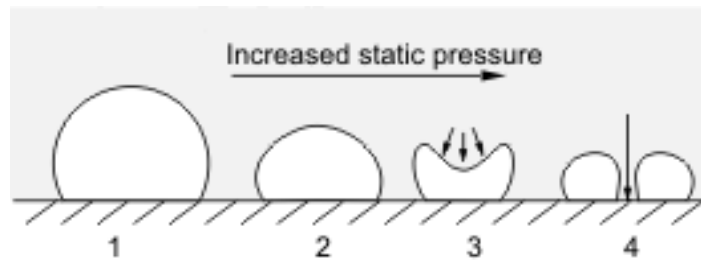


Figura 5.9 Collasso delle cavità all'aumentare della pressione idrostatica.

Mano a mano che la pressione aumenta la generica bolla si riduce di dimensioni deformandosi, sino a che la cavità si divide in due bolle più piccole e il liquido colpisce violentemente la parete (*Brennen, 1995*). Quest'ultima fase, come è noto, è accompagnata di solito dall'insorgere di sovrapressioni di entità notevole che possono alla lunga portare all'usura dei materiali. Il collasso può avvenire in diverse maniere, a seconda che negli istanti precedenti sia stata introdotta aria, oppure no.

Se l'aria è stata introdotta tramite valvola, nelle fasi successive al fenomeno può comprimersi, in quanto il volume della cavità tende a ridursi, quindi ad uscire verso l'esterno, sino alla scomparsa della cavità. Se invece non è stata introdotta aria, e quindi (a parte quella che si sviluppa dalla soluzione, e che nel modello viene trascurata) la cavità è piena di vapore ad una pressione assoluta assai vicina alla pressione di vapor saturo p_v , la richiusura delle cavità avviene a sistema chiuso, per immediata ricondensazione, istante per istante, del vapore in eccesso. Comunque avvenga il collasso, si giunge ad una situazione in cui i due tronconi, di monte e di valle, si trovano assai vicini

spazialmente, essendo divisi da una cavità in cui il volume tende a zero. Supponendo che la velocità di avanzamento del fronte del troncone di monte sia V_m e quella del troncone di valle sia V_v , nell'istante immediatamente precedente il collasso, il carico piezometrico è uguale per entrambe le sezioni, data la continuità spaziale all'istante del collasso, ed uguale altresì al carico nella cavità.

Sia z_c la quota della sezione in cui avviene il collasso e p_c la pressione assoluta regnante nella cavità in quell'istante. La piezometrica un attimo prima del collasso risulta pertanto:

$$H_m = H_v = z_c + \frac{p_c}{\gamma_a} - 10.33$$

dove γ_a è il peso specifico dell'acqua.

La continuità della vena liquida è stata ricostituita e quindi nella sezione in cui è avvenuto il collasso si ha per i due "ex tronconi" un valore unico non solo della piezometrica (H'_c) ma anche della velocità (V'_c). Se è avvenuto il collasso, evidentemente doveva essere $V_m > V_v$, cioè il tronco di monte tendeva a sopravanzare quello di valle.

Di seguito viene mostrata (figura 5.10) la costruzione di Bergeron (1950) ripresa poi da Fanelli (1983):

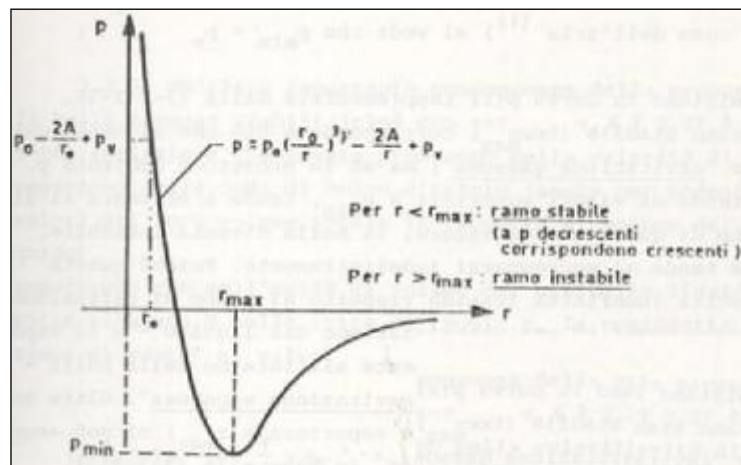


Figura 5.10 Costruzione per via grafica della sovrappressione al momento del collasso di una cavità.

dove:

ΔQ_C = portata d'urto;

ΔH_C = sovrappressione d'urto (in colonna d'acqua).

Il troncone di monte viene interessato da un'onda di colpo d'ariete retrograda, e quello di valle da un'onda di colpo d'ariete diretta, tali da riportare alla congruenza le due velocità. Il valore comune di velocità così stabilitosi dopo l'impatto è, per entrambi i tronconi, pari alla media delle due velocità immediatamente prima dell'impatto:

$$V'_c = \frac{V_m + V_v}{2}$$

mentre la sovrappressione di colpo d'ariete espressa in colonna d'acqua, assume il valore:

$$\Delta H = \frac{c}{g} \cdot (V'_c - V_v) = \frac{c}{g} \cdot (V_m - V'_c) = \frac{c}{g} \cdot \frac{V_m + V_v}{2}$$

Le equazioni riportate sono definite "equazioni del riattacco di vena": dopo il riattacco, e sino ad eventuale successiva nuova cavitazione riprendono validità le equazioni per vena integra.

5.5.2 Dissipazioni energetiche

La presenza nel liquido di bolle, oltre agli effetti mostrati in precedenza, introduce ulteriori dissipazioni energetiche rispetto alle ordinarie resistenze idrauliche dovute all'azione di attrito esercitata dalle pareti del condotto. È possibile fare un distinguo da un punto di vista qualitativo dei diversi meccanismi di dissipazione legati alla presenza di bolle:

- trasformazione del lavoro meccanico in calore nei cicli di compressione e decompressione a cui è soggetta la bolla;
- energia dissipata per viscosità nel liquido circostante le bolle: sia per effetto di moti radiali rispetto alla singola bolla (dilatazione e contrazione di bolle di forma sferica), sia per deformazione delle bolle stesse, sia per moti di scorrimento reciproci della materia liquida rispetto alle bolle in essa incluse.

Nel modello originale (*Fanelli, 1983*) e nella sua applicazione numerica effettuata da *Frigerio (2004)* tali perdite vengono trascurate perché difficilmente quantificabili, assumendo come perdite quelle ricavate in condizione di moto uniforme. Un modello più vicino alla realtà che potesse tenere conto delle considerazioni fatte precedentemente riguardo le resistenze aggiuntive in moto vario, è stato individuato nel modello di *Pezzinga (2000)*; tale modellazione è stata applicata al fenomeno della cavitazione, ricercando un opportuno valore del coefficiente di smorzamento k e modificando le condizioni al contorno come suggerito da *Fanelli (1983)*.

5.6 Modifica al modello

Al fine di migliorare la soluzione numerica si è ritenuto che fosse possibile valutare anche nel caso di cavitazione le resistenze aggiuntive al moto tramite la formula di *Pezzinga (2000)*, presentata in precedenza e di seguito riportata:

$$J = J_s + \frac{k_c}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{sgn}\left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cdot \frac{k_c \cdot c}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$$

Poiché tale relazione è stata introdotta per un regime di moto vario in assenza di cavitazione, il suo adattamento per il problema in esame introduce di fatto una semplificazione in quanto fisicamente non è in grado di spiegare la dinamica del problema in presenza di bolle. È stato dimostrato da *Edwing (1980)* che le dissipazioni dovute ad attrito sono nella realtà poco significative rispetto agli altri effetti, presentati in precedenza, che la presenza di bolle comporta. In questo contesto si è ipotizzato che k_c , costante di smorzamento per la cavitazione, fosse quantificabile come somma di tutti quei fattori che in un modello monodimensionale non possono essere considerati direttamente e pertanto dovesse essere valutata empiricamente tramite confronti con andamenti reali ottenuti per via sperimentale. I valori numerici associati alla costante di smorzamento sono pertanto differenti da quelli ottenuti nel caso in cui per il fluido considerato, non avvenga il fenomeno della cavitazione.

5.7 Ulteriori prove di laboratorio

Oltre alle prove di colpo d'ariete citate nei capitoli precedenti, sono state realizzate altre prove sperimentali (sempre nel Laboratorio di Idraulica del Politecnico di Milano) con un impianto solo in parte diverso da quello descritto in dettaglio nel *Capitolo 2*.

Lo schema costruttivo è simile al precedente; la sola differenza consiste nel fatto che in questo caso è stata utilizzata solo una bobina di tubi. A monte della spirale di tubi si trovano in successione il misuratore magnetico di portata, l'elettrovalvola e il manicotto al quale viene avvitato il trasduttore di pressione (è stato utilizzato in questo caso il sensore *Hydac*). Immediatamente dopo la spirale di tubi un serbatoio è situato a valle dell'intero impianto (a pressione atmosferica), posto a circa 5 m sopra il piano di appoggio. La spirale di tubi è la stessa descritta ed utilizzata in precedenza per cui le caratteristiche tecniche sono le medesime, come anche la celerità d'onda. Le misure vengono effettuate tramite il trasduttore di pressione situato subito a valle dell'elettrovalvola ed appena prima del tratto di tubo a spirale collegato ad un PC.

Sono state effettuate delle prove di colpo d'ariete per diversi valori di portata; i dati ottenuti dalle prove sperimentali sono riportati nella tabella sottostante.

N° Prova	Portata (l/s)	Velocità (m/s)	Carico Monte (m)
1	0.112	0.0527	5
2	0.228	0.1074	5
3	2.5	1.18	8.1
4	3.0	1.41	9.7
5	3.3	1.55	10.5

Tabella 5.1 Dati delle prove sperimentali effettuate.

Per valori di portata pari a quelli utilizzati nei test n°1 e n°2, il valore di pressione minimo raggiunto è sicuramente negativo (in termini di pressioni relative), ma di poco al di sotto di quello atmosferico. Per valori di portata maggiori (ad esempio pari a quelle adottate per le prove n°3, 4 e 5) la pressione scende certamente al di sotto dello zero e raggiunge il valore minimo (zero assoluto); in questo caso avviene sicuramente il distacco di vena, fenomeno tanto più marcato quanto maggiore è la velocità iniziale della corrente.

5.8 Confronto tra dati sperimentali e modelli

5.8.1 Prove in assenza di cavitazione

Di seguito viene riportato il grafico ottenuto per la prova n°1, che mostra il confronto tra i dati sperimentali e il modello numerico che impiega le relazioni valide in condizioni di moto uniforme, integrate tramite metodo *Lax – Wendroff con attrito* (descritto nel *Capitolo 3*).

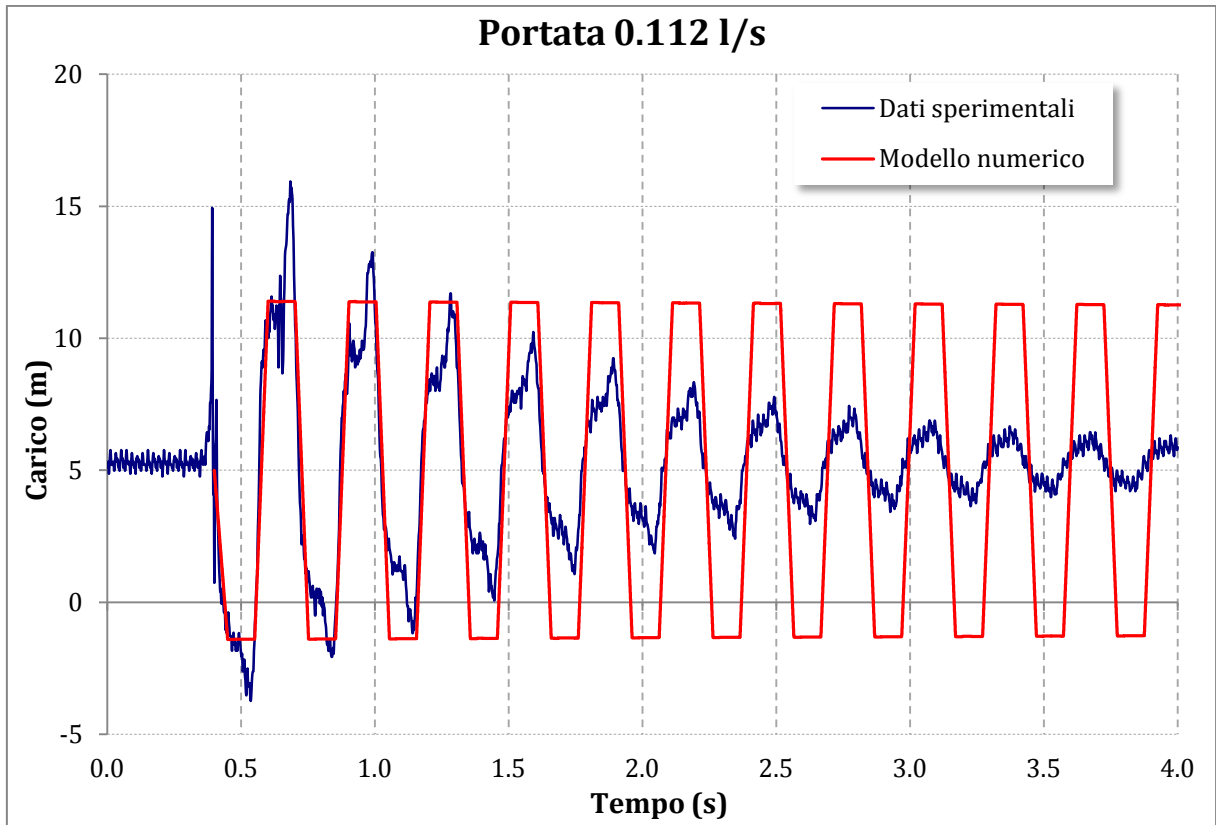


Figura 5.11 Confronto tra dati sperimentali e modello numerico introdotto (portata pari a 0.112 l/s).

È possibile notare come l'andamento reale delle pressioni subisca un notevole smorzamento dei valori, assolutamente non riprodotto dal modello analitico sin qui introdotto. Allo stesso modo si può evidenziare uno sfasamento progressivo fra i due andamenti, che sta a significare che i valori di celerità reali sono assolutamente differenti da quelli ottenuti tramite considerazioni puramente teoriche.

Si è deciso per questo motivo di confrontare i dati ottenuti (test n°1, in assenza di cavitazione) con un altro modello (già ampiamente descritto in precedenza), quello di *Brunone e Greco (1990)*.

$$J = J_s + J_v = \lambda \cdot \frac{V \cdot |V|}{2 \cdot g \cdot D} + k_1 \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Questo modello non ha la pretesa di fornire l'esatta soluzione del problema, ma semplicemente introduce un nuovo termine per esprimere le resistenze aggiuntive. Il modello non solo attenua le oscillazioni, ma crea anche delle variazioni indesiderate nella celerità d'onda che quindi provocano degli sfasamenti.

Il confronto tra la prova sperimentale n°1 (quindi in assenza di cavitazione) ed il modello di *Brunone e Greco (1990)* viene mostrato nel grafico riportato di seguito.

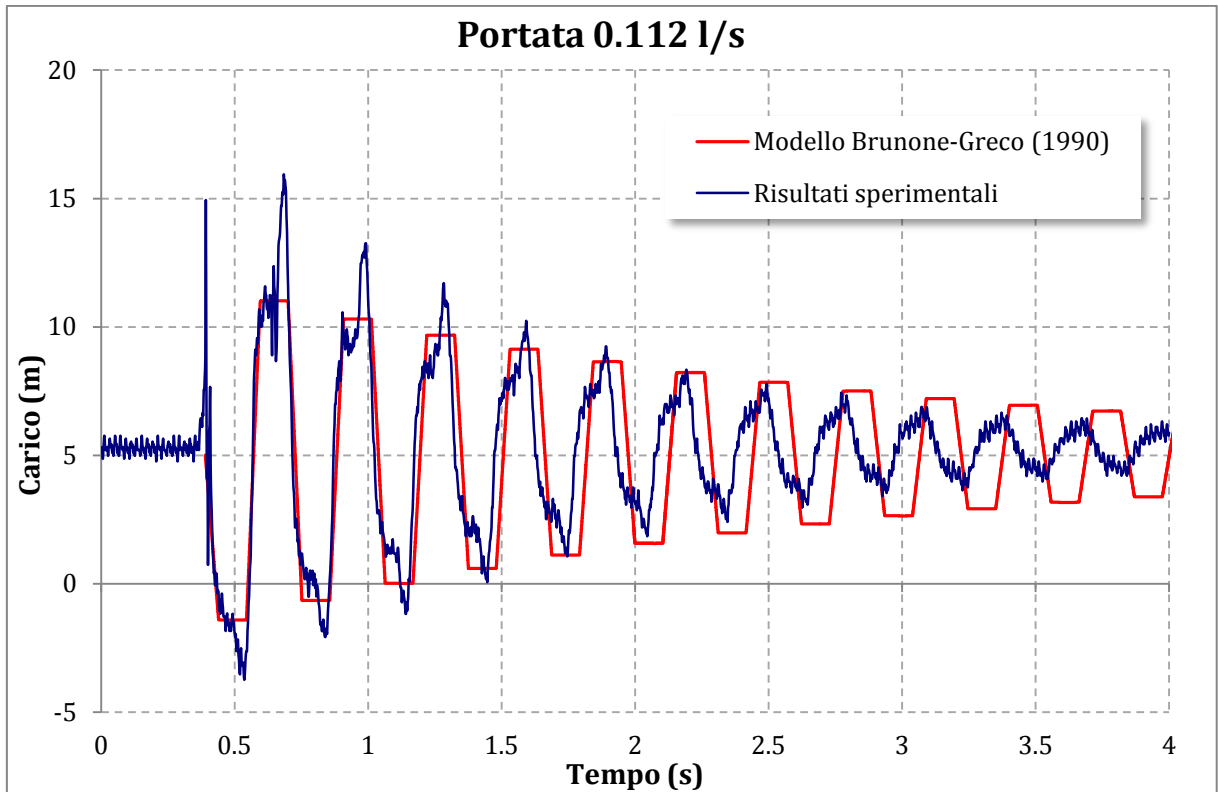


Figura 5.12 Confronto tra dati sperimentali e modello *Brunone e Greco (1990)* per una portata di 0.112 l/s.

Il risultato ottenuto con questa modellazione è molto buono; il valore del parametro di smorzamento k_1 è stato impostato pari a 0.0634, dopo un'operazione di calibrazione (mediante la tecnica di *Carravetta*, descritta in precedenza, che si basa sull'analisi dei valori di sovrappressione che si riscontrano nei risultati sperimentali). Come si può osservare dal grafico e come detto in precedenza, c'è un lieve sfasamento causato dalla celerità d'onda, che è influenzata dal termine aggiuntivo di resistenza. I valori dei picchi di sovrappressione misurati eccedono quelli teorizzati dal modello, ma ciò poco importa perché i valori massimi delle sovrappressioni sono ben approssimati dalla formula di *Allievi – Joukowski*. Ciò significa che le condizioni sperimentali sono in qualche modo differenti da quelle teoriche ipotizzate dal modello. I valori di pressione minimi raggiunti sono negativi (in termini relativi) per cui sono inferiori al valore atmosferico; potrebbe verificarsi quindi un rilascio d'aria con conseguente formazione di bolle. Questo potrebbe in qualche modo spiegare l'andamento asimmetrico della pressione, la variazione della celerità d'onda e i valori di picco di sovrappressione maggiori, che probabilmente si ottengono quando le bolle implodono a causa dell'aumento di pressione.

5.8.2 Prove in presenza di cavitazione

Per quanto riguarda invece le prove sperimentali con separazione della vena liquida, accade che, quando la pressione scende fino al valore di zero assoluto ($p_0 = -1 \text{ atm}$), le dimensioni dei nuclei d'aria aumentano e la corrente diviene multifase, con caratteristiche determinate dalle resistenze e dall'inclinazione della condotta.

Vengono di seguito riportati i risultati nel caso in cui le resistenze vengano valutate unicamente tramite le formule di moto uniforme, confrontandoli con gli andamenti ottenuti attraverso il modello di moto vario imponendo $k_C = 0$:

$$J = J_S + \frac{k_C}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{sgn}\left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\right) \cdot \frac{k_C \cdot c}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$$

Annullando la costante di smorzamento si ottiene un modello molto semplice basato appunto sulle relazioni del moto uniforme, che approssima molto bene il tempo di rottura della vena liquida. Con questo modello si riesce a simulare perfettamente anche il riattacco di vena idraulica; al contrario invece l'entità delle sovrappressioni non possono essere riprodotte correttamente, in quanto sono trascurati tutti i meccanismi dissipativi dovuti alla presenza di bolle, che risultano essere la componente preponderante delle dissipazioni rispetto alle perdite per attrito.

Di seguito viene riportato il grafico che mostra il confronto tra il modello appena commentato ed i risultati sperimentali.

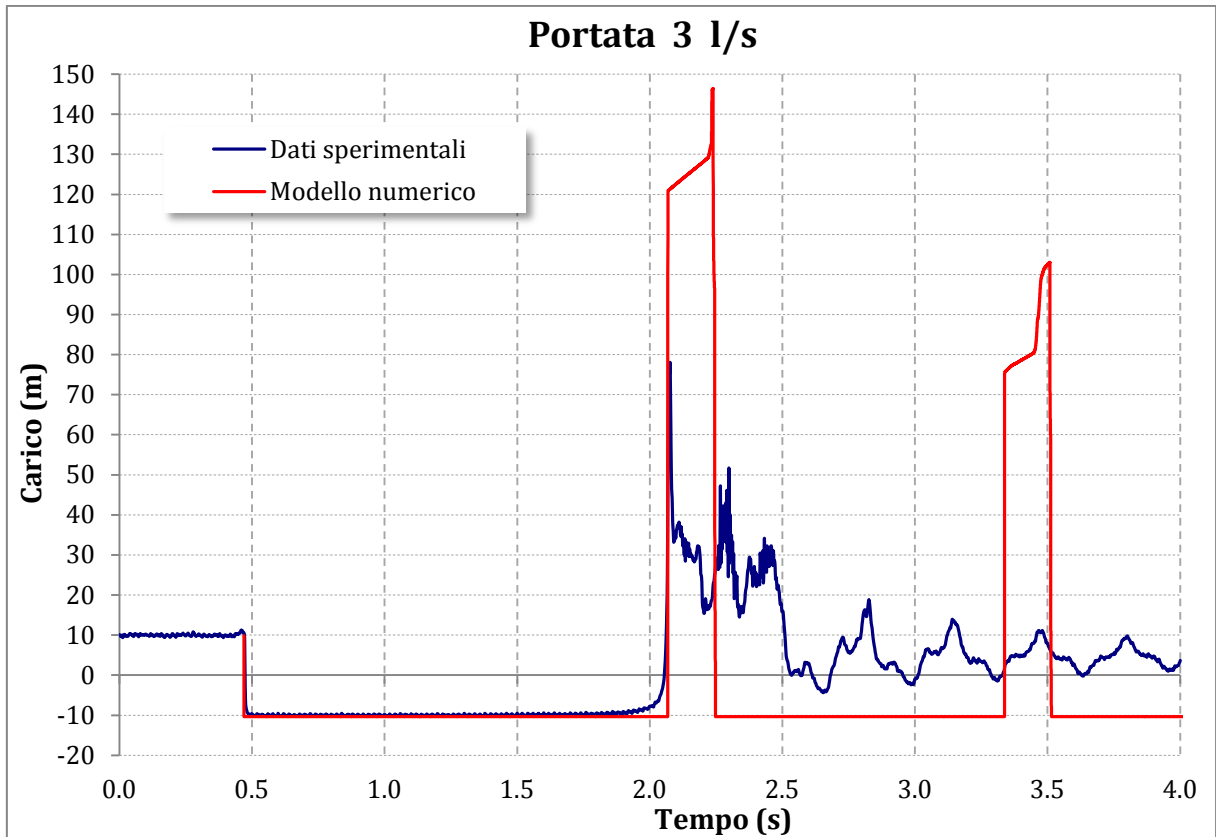


Figura 5.13 Grafico che mostra il confronto tra i dati sperimentali (test n°4) e il modello di moto uniforme (portata 3 l/s)

Come si può notare dal grafico, i picchi massimi di sovrappressione valutati dal modello sono troppo elevati rispetto a quelli reali; è possibile osservare inoltre che dopo il riattacco di vena è presente una forte turbolenza che riduce il carico.

Oltre a tutto questo, si nota che l'energia che la corrente possiede nel modello è sufficiente per generare una successiva rottura di vena, cosa che in realtà invece non accade.

Siccome i risultati ottenuti con questo modello non sono stati come quelli che era lecito attendersi, è stato effettuato un confronto anche con il modello descritto dall'equazione sopra citata, posta $k_C \neq 0$; analizzando il valore di questa costante è possibile stimare quale sia l'andamento che meglio approssima quello reale.

Di seguito viene riportato il grafico che mostra il confronto col modello avente una costante di smorzamento ricavata da una calibrazione.

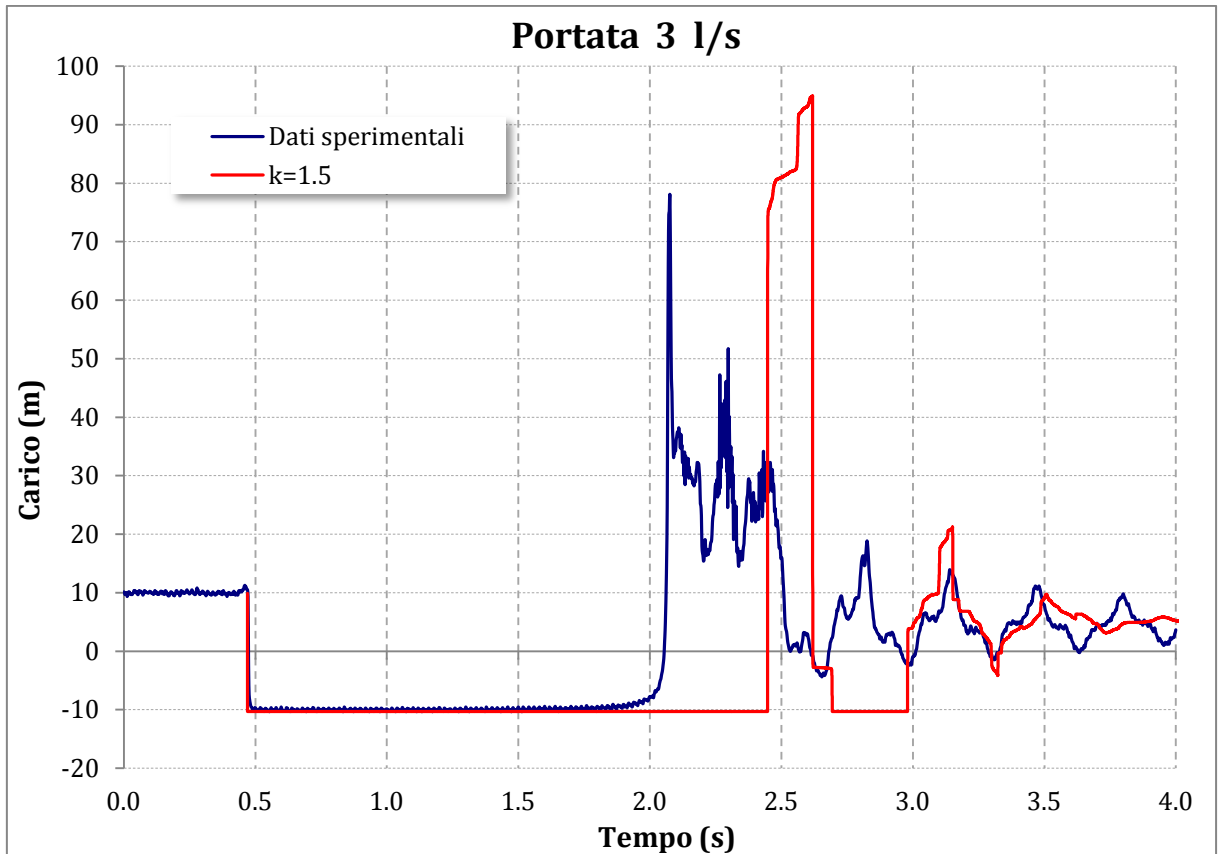


Figura 5.14 Grafico che mostra il confronto proposto anche in precedenza, con costante di smorzamento pari a 1.5 (portata 3 l/s).

Dal grafico si nota che la riproduzione del valore di picco non è esagerata (sebbene sovrastimi il valore, rispetto al grafico di *fig. 5.13* si è abbassato parecchio), ma la cosa più evidente è lo sfasamento che si crea, che porta a concludere che tale modello non approssima affatto in maniera adeguata i dati sperimentali.

La costante di smorzamento è responsabile cioè sia dell'effetto dissipativo, a cui è associato una diminuzione del valore delle sovrappressioni, sia dell'effetto di sfasamento dovuto al cambiamento del valore di celerità. Introducendo un opportuno valore di resistenza è possibile migliorare la stima delle sovrappressioni, perdendo però la precisione che il modello con $k_c = 0$ ha mostrato nel determinare il momento del riattacco della vena liquida a seguito della cavitazione.

Come è stato evidenziato in precedenza, esistono tanti diversi approcci sia in presenza che in assenza di cavitazione. Tuttavia, nel paragrafo presente, sono stati analizzati modelli monodimensionali; questi riproducono in maniera adeguata i dati sperimentali (nonostante sia necessaria la loro calibrazione) o perlomeno simulano abbastanza bene le principali caratteristiche del fenomeno, quando ci si trova appunto in condizioni per cui si verifichi il rilascio d'aria dovuto alla diminuzione

della pressione. Inoltre a causa della loro semplicità, l'implementazione non richiede tempi di lavoro eccessivi.

Quando invece si tratta di simulare dati sperimentali in presenza di rottura di vena, questi modelli sono del tutto inadeguati. Quindi per migliorare l'approssimazione dei risultati sperimentali, è probabilmente necessario utilizzare modelli bidimensionali; i prossimi passi della ricerca potrebbero essere mossi in questa direzione, per verificare se effettivamente modelli 2D in questo ambito funzionino in maniera efficace.

6

Conclusioni

Nel presente lavoro di Tesi si è affrontato il tema della valutazione delle resistenze al moto che nascono in una condotta a seguito della chiusura “istantanea” (o perlomeno ritenuta tale) di una valvola. Dopo una descrizione qualitativa e analitica del fenomeno che si genera alla chiusura della valvola, ovvero il *colpo d'ariete*, sono state analizzate anche le resistenze che si possono sviluppare sia in presenza che in assenza di *cavitazione*. Tutte le considerazioni che sono state sviluppate all'interno del presente lavoro, sono basate su esiti di prove sperimentali; le prove eseguite al Laboratorio di Idraulica “G. Fantoli” del Politecnico di Milano sono numerose ed eterogenee, in quanto mirate ad analizzare diversi aspetti dello stesso fenomeno.

La prima parte del lavoro in laboratorio è servita a determinare la scabrezza e la celerità delle condotte utilizzate; a questo scopo sono state eseguite un gran numero di prove in *regime di moto permanente* a diversi valori di portata per riuscire a trovare un coefficiente di scabrezza che fosse rappresentativo della condotta, alle varie portate. In questo ambito, sono stati utilizzati diversi strumenti: dapprima si sono confrontate le prove effettuate con manometri metallici ed un

trasduttore di pressione (*Burster*) ed in seguito, per avere un riscontro valido, sono state ripetute le stesse prove con un ulteriore sensore di pressione (*Hydac*), ottenendo risultati simili a quelli ricavati con il precedente trasduttore. L'unica differenza tra i due sensori di pressione consiste in un piccolo "shift" dei risultati grafici del trasduttore *Burster* rispetto all'altro, dovuto ad un problema di calibrazione dello strumento stesso.

Dopo questa prima parte di prove sperimentali si è cercato di individuare un metodo di integrazione numerica per il problema di colpo d'ariete; il metodo che è stato scelto è quello di *Lax – Wendroff*, un metodo alle differenze finite, esplicito, che fa parte della famiglia dei "Three-point support schemes". Successivamente sono stati riportati i risultati ottenuti in laboratorio dalla riproduzione del colpo d'ariete: i vari esiti sono stati articolati a seconda della configurazione dell'impianto sperimentale con cui sono stati conseguiti. Per ogni differente configurazione impiantistica sono stati mostrati risultati in forma tabellare e grafica: un risultato interessante si è ottenuto posizionando il sensore di pressione sul manicotto molto vicino all'elettrovalvola. Analizzando le registrazioni si è verificata la formazione di una forte "turbolenza" in corrispondenza del picco di sovrappressione massimo. Il forte disturbo che si crea (generato dalla chiusura " Brusca " della valvola) porta ad avere massime sovrappressioni ben superiori a quelle valutabili dalla teoria classica.

Allontanando l'elettrovalvola dai sensori di pressione, si può notare che la turbolenza che si registra è molto inferiore ed in alcuni casi addirittura non si presenta. È da sottolineare in ogni caso che i valori di picco di queste forti oscillazioni hanno una durata talmente breve che con uno strumento non sufficientemente accurato non si possono percepire. I sensori di pressione utilizzati in questa sessione di lavoro possiedono una frequenza di acquisizione dei dati che va da 1 kHz fino a 2.5 kHz, per cui sono in grado di registrare quei pochissimi valori (qualcuno in poche decine di millesimi di secondo) che mostrano tale comportamento.

L'ultima parte del lavoro è consistita nel determinare un modello analitico che rappresentasse in maniera adeguata i risultati sperimentali ottenuti con un'ultima configurazione impiantistica, diversa dalle precedenti; prima di fare ciò, è stato necessario introdurre due famiglie di modelli differenti a seconda che la pressione in condotta durante il transitorio assuma o meno valori prossimi a quella di vapor saturo. Nel primo caso si tratta di modelli di moto vario, nel secondo di modelli di cavitazione. Applicando un modello tradizionale di colpo d'ariete, basato su una definizione delle dissipazioni che adotta le relazioni in condizioni di moto uniforme, non è possibile ottenere risultati confrontabili con quelli sperimentali, poiché tale modello non tiene conto del fenomeno di attenuazione o smorzamento delle oscillazioni. Per questo motivo è stato creato un modello *monodimensionale*, associato ad uno schema per la valutazione delle resistenze in moto vario di tipo *MIAB*.

Con questo tipo di modello si riesce a migliorare molto, a livello qualitativo, la simulazione dei dati reali, rispetto al caso descritto precedentemente. Tenendo conto dell'attenuazione delle oscillazioni, occorre stimare il coefficiente di smorzamento k , introdotto dagli schemi *MIAB*, attraverso un processo di calibrazione sfruttando varie relazioni analitiche o abachi e grafici presenti in letteratura, che possono variare con le condizioni geometriche degli schemi impiantistici e dei metodi di integrazione adottati. Nel lavoro di Tesi, viene fornito un valore del parametro di smorzamento k stimato attraverso il metodo di *Carravetta (1992)*; occorre precisare che questo può essere rappresentativo solo per il caso esaminato, come sottolineato in precedenza.

In condizioni di fluido non cavitante, il modello proposto (dopo un'opportuna calibrazione dei parametri) approssima in maniera adeguata gli andamenti di pressione ottenuti per via sperimentale. L'unico errore che compie tale modello consiste nel fatto che sottostima i valori di sovrappressione, che comunque è possibile trascurare. Per questo motivo, si può ritenere che il modello presentato simuli l'andamento reale di pressione con un buon grado di approssimazione.

Per quanto riguarda invece le prove sperimentali con presenza di cavitazione, si è cercato di adattare il modello per il moto vario definito per il problema in esame: seguendo la teoria di *Fanelli (1983)* con le dovute ipotesi, si ottiene un modello per la cavitazione molto semplice basato sulle relazioni del moto uniforme, che riesce ad approssimare molto bene il tempo di distacco di vena idraulica e quello del riattacco, ma che per il resto è assolutamente inadeguato. Osservando i grafici riportati, si nota chiaramente come l'andamento proposto dal modello non riproduca quello reale; inoltre i picchi di sovrappressione sono troppo elevati rispetto a quelli registrati.

È necessario quindi stimare il valore del parametro di smorzamento che migliori la simulazione da parte del modello; come nel caso in assenza di rottura della vena liquida, la determinazione numerica delle costanti di smorzamento è da ritenersi la fase più delicata dell'intero processo, in quanto influisce fortemente sulla qualità dei risultati finali. Per il problema in esame non esistono relazioni analitiche o abachi che permettano di stimare il valore di tale coefficiente, per cui la stima fornita è stata ricavata a posteriori, effettuando un confronto tra il modello ed il risultato sperimentale. La modifica proposta migliora sia l'andamento generale che il valore massimo di sovrappressione, anche se introduce un notevole sfasamento rispetto all'andamento sperimentale.

In questa ultima di fase di lavoro descritta, sono stati analizzati vari approcci e modelli sia in presenza che in assenza di cavitazione; sono stati presi però in considerazione solo *modelli monodimensionali*: questi sembrano funzionare molto bene e possono riprodurre i dati sperimentali con un buon grado di approssimazione (dopo un'opportuna calibrazione dei parametri) in assenza di cavitazione. Quando avviene il fenomeno della cavitazione però, questi modelli non funzionano più; il modello di

Fanelli (1983) proposto riproduce in maniera molto accurata il tempo del distacco di vena e quello del riattacco, ma quando si tratta di simulare l'entità delle sovrappressioni non si può ritenere adeguato. L'introduzione di termini aggiuntivi dissipativi (come nel modello di *Pezzinga, 2000*) consente effettivamente di migliorare la simulazione in quanto i picchi di sovrappressione si abbassano, ma d'altro canto crea uno sfasamento progressivo tra l'andamento proposto e quello reale, che rende del tutto inadeguato il modello.

Per poter riprodurre i dati sperimentali con maggiore accuratezza occorre sviluppare, almeno in certi casi e per certi istanti temporali, un *modello bidimensionale*. I primi passi della ricerca in futuro potrebbero essere mossi in questa direzione, cercando di capire se effettivamente lo sviluppo e l'implementazione di modelli 2D diano un contributo nel migliorare la simulazione di dati sperimentali in condizioni di moto vario. Inoltre, sarebbe utile trovare un criterio in base al quale stabilire *se e quando* passare da modelli monodimensionali (che in certe situazioni, come si è potuto osservare dai confronti proposti nel *Capitolo 5*, funzionano abbastanza bene) a modelli bidimensionali.

In ogni caso, si osserva come i vari modelli 1D finora analizzati non hanno mai preso in considerazione il fenomeno della "*turbolenza*" che è stato osservato nell'esecuzione delle prove di colpo d'ariete. Nonostante in letteratura non sia presente alcun modello che tenga conto di questo fenomeno, si ritiene che gli effetti generati dalla turbolenza in prossimità degli organi regolatori o di chiusura possano avere un'importanza considerevole nella valutazione delle dissipazioni e delle resistenze in condizioni di moto vario, e probabilmente occorrerebbe tenerne conto qualora si progettino strutture con bassa inerzia.

BIBLIOGRAFIA

Ariyaratne C., He S., Vardy A.E., *“Wall friction and turbulence dynamics in decelerating pipe flows”*, Journal of Hydraulic Research, vol. 48, n. 6, pp. 810-821, 2010.

Baltzer R. A., *“Column separation accompanying liquid transients in pipes”*, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, series D, vol. 89, n.4, pp. 837-846, 1967.

Bergant A., Simpson A. R., *“Estimating unsteady friction in transient cavitating pipe flow”*, Proc., 2nd Int. Conf. on Water Pipeline Systems, BHR Group, Edinburgh, Scotland, pp. 3–16, 1994.

Bergant et al., *“Developments in unsteady pipe friction modelling”*, Journal of Hydraulic Research, vol. 39, n. 3, 2001.

Bouazza Z. e Brunelle P.E., *“A new friction model for transient pipe flows: Development of the frequency dependence approach of Brunone”*, Proc. Of the 9th Int. Conf. on Pressure Surges, BHR Group, Chester, U. K., pp. 391–404, 2004.

Bratlad O., *“Pipe flow 1, single-phase flow assurance”*, Risorsa online reperibile presso www.drbratland.com, 2009.

Bratland O., *“Frequency-dependent friction and radial kinematic energy variation in transient pipe flow”*, Proc. 5th Int. Conf. On Pressure Surge, BHRA, pp. 95-101, 1986.

Brennen C. E., *“Cavitation and bubble dynamics”*, Oxford University Press, 1995.

Brunone B. and Greco M., *“Un modello per la ricostruzione di fenomeni di colpo d’ariete anche in presenza di cavitazione”*, Riconcontro sperimentale, 22nd Convegno di Nazionale di Idraulica e costruzioni Idrauliche, Cosenza, Italy, vol. 4, pp. 114-160, 1990.

Brunone B., Karney B. W., Mecarelli M. and Ferrante M., *“Velocity Profiles and Unsteady Pipe Friction in Transient Flow”*, Journal of Water Resources Planning and Management, vol. 126, n. 4, pp. 236-244, 2000.

Brunone B. et al., *“Modelling of fast transient by numerical methods”*, Int. Meeting on Hydr. Transient and Water Column separation, pp. 273-282, 1991.

Brunone B. et al., *“Some remarks on the momentum equation for the fast transient”*, Int. Meeting on Hydr. Transient and Water Column separation, pp. 201-205, 1991.

Bughazem M. B., Anderson A., *“Problems with simple models for damping in unsteady flow”*, Proc., 7th Int. Conf. on Pressure Surges and Fluid Transients in Pipelines and Open Channels, BHR Group, Harrogate, U. K., pp. 537–548, 1996.

Cannizzaro D., Pezzinga G., *“Influenza del rilascio di gas sulle dissipazioni in transitori con cavitazione”*, Atti del XXVIII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, vol. 1, pp. 619-626, 2002.

Cannizzaro D. and Pezzinga G., *“Energy Dissipation in Transient Gaseous Cavitation”*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 131, n. 8, pp. 724-732, 2005.

Carravetta A. et al., *“Sull’attenuazione spontanea delle fluttuazioni di pressione durante i transitori di colpo d’ariete”*, Atti del XXIII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, E67-E79, 1992.

Citrini D., Nosedà G., *“Idraulica”*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1975.

Cocchi G., *“Esperimento sulla Resistenza al Deflusso con Moto Vario in Tubo”*, Atti dell’Accademia delle Scienze dell’Istituto di Bologna, Classe di Scienze Fisiche, anno 276, Rendiconti, Serie XIV, tomo V, 1987-1988.

D'Elia M., *“Modelli continui monodimensionali per il traffico automobilistico”*, Elaborato di Laurea di primo livello in Ingegneria Matematica, Politecnico di Milano, relatore Prof. Alessandro Veneziani, a.a. 2005-2006.

Defina A., *“Moto Vario nelle condotte”*, Dispensa del Corso di Idraulica 2, Università di Padova, 2009.

Eichinger P., Lein G., *“The influence of friction on unsteady pipe flow”*, Unsteady Flow and Fluid Transients, R. Bettes and J. Watts, eds., Balkema, Rotterdam, The Netherlands, pp. 41–50, 1992.

Ewing D. J. F., *“Allowing for free air in water hammer analysis”*, Proc., 3rd Int. Conf. On Pressure Surges, BHRA, Canterbury, U. K., pp. 127-146, 1980.

Fan S. et al., *“Low-Reynolds number Model for Unsteady Turbulent Boundary-Layer Flows”*, AIAA J., vol. 31, n. 10, pp. 1777-1784, 1993.

Fanelli M., *“I transitori idraulici nei circuiti industriali a bassa pressione (incluso il distacco e il riattacco di vena)”*, Clup, Milano, 1983.

Fornarelli R., *“Problemi di instabilità nella modellazione dei dischi di rottura per la riduzione delle sovrappressioni di moto vario in pressione”*, Tesi di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, Politecnico di Milano, relatore Prof. Stefano Mambretti, a.a. 2005-2006.

Fox J. A., *“Transient flows in pipes, open channels and sewers”*, Ellis Horwood Series in Civil Engineering, Chichester, 1989.

Frigerio A., *“Un modello di moto vario elastico per condotte in pressione in presenza di distacco di vena”*, Tesi di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, Politecnico di Milano, relatore Prof. Stefano Mambretti, a.a. 2004-2005.

Ghidaoui M. S., *“Efficient Treatment of the Vardy-Brown Unsteady Shear in Piper Transients”*, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 128, n. 1, pp. 102-112, 2002.

- Ghilardi P., Paoletti A., *"Additional viscoelastic pipes as pressure surges suppressors"*, Proceedings of the 5th International Conference on Pressure Surge, BHRA, pp. 189-204, 1986.
- Godunov. S. K., *"A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics"*, Matematicheskii Sbornik, n. 47, pp. 357-393, 1959.
- Golia U. M. *"Sulla valutazione delle Forze Resistenti nel Colpo d'Ariete"*, Pubblicazione n. 639 del Dipartimento di Idraulica, Università degli Studi di Napoli "Federico II", 1992.
- Greco M., Golia U. M., *"Colpo d'ariete in presenza di notevoli resistenze al moto, indagine sperimentale"*, Idrotecnica, vol. 3, pp. 123-137, 1982.
- Harten A., Lax P. D., *"On a class of high resolution total variation stable finite-difference schemes"*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 21(1), pp. 1-23, 1984.
- Hedstrom G., *"Models of difference schemes for $u_t + u_x = 0$ by partial differential equations"*, Math. Comp., n. 29, pp. 969-977, 1975.
- Hoffman J. D., *"Numerical methods for engineers and scientists"*, CRC Press, 2001.
- Jameson A., *"Transient aerofoil calculations using the Euler equation"*, in P. L. Roe (ed.), Numerical Methods in Aeronautical Fluid Dynamics, New York, 1982.
- Jones W. P., Launder B.E., *"The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence"*, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 15, pp. 301, 1972.
- Lam, C. K. G., Bremhorst, K. A., *"Modified form of the $k-\epsilon$ model for predicting wall turbulence."* J. Fluids Eng., vol. 103, n. 3, pp. 456-460, 1981.
- Lax P. D., *"Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computation"*, Communication on Pure and Applied Mathematics, vol. 7, pp. 159-193, 1954.

Lax P. D., Wendroff B., *"System of conservation laws"*, Comm. Pure and Applied Mathematics, vol. 13, pp. 217-237, 1960.

Mambretti S., *"Fenomeni di moto vario nelle correnti in pressione"*, Aracne Editrice, Roma, 2004.

Manni L., *"Aspetti computazionali di equazioni differenziali di interesse fisico"*, Elaborato di Laurea di primo livello in Fisica, Università del Salento, relatore Prof. Claudio Corianò, a.a. 2006-2007.

Marchi E. *"Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti"*, L'Energia Elettrica, Milano, vol. 38. n. 4, pp. 289-301, 1961.

Marchi E., Rubatta A., *"Meccanica dei fluidi"*, UTET, Torino, 1981.

McCormack R. W., Baldwin B. S., *"A numerical method for solving the Navier-Stokes equation with application to shock-boundary layer interaction"*, AIAA Paper, 1-75, 1975.

Ming Z., Ghidaoui M. S., *"Efficient Quasi-Two-Dimensional Model for Water Hammer Problems"*, Journal of Hydraulic Engineering, 2003.

Modica C., Pezzinga G., *"Un modello quasi bidimensionale per il moto vario elastico in regime turbolento"*, Atti del XXIII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, vol. 4, pp. E191-E205, 1992.

Pezzinga G., Brunone B., *"Turbulence, friction and Energy dissipation in transient pipe flow"*, Vorticity and turbulence effects in fluid structures interactions, pp. 213-236, 2006.

Pezzinga G., *"Affidabilità di modelli semi-empirici di turbolenza per la valutazione delle resistenze di attrito in condizioni di moto vario"*, L'Acqua, vol. 78, n. 1, pp. 29-38, 2000.

Pezzinga G., *"Elementi di idraulica numerica"*, Dispensa del corso di Idraulica Numerica, Università di Catania, 2007.

Pezzinga G., *"Evaluation of Unsteady Flow Resistances by Quasi-2D or 1D Models"*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 126, n. 10, pp. 778-785, 2000.

Pezzinga G., *"Local Balance Unsteady Friction Model"*, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 135, n. 1, pp. 45-56, 2009.

Pezzinga G., *"Second viscosity in transient cavitating pipe flows"*, Journal of Hydraulic Research, vol. 41, n. 6, pp. 656-665, 2003.

Pezzinga G., *"Unsteady Flow in Hydraulic Networks with Polymeric Additional Pipe"*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 128, pp. 238-244, 2002.

Pezzinga G., *"Quasi-2D model for Unsteady Flow in Pipe Networks"*, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 125, n. 7, pp. 676-685, 1999.

Pirizzoli S., Bernardini M., *"Gasdinamica Numerica"*, Dispensa del corso di Gasdinamica Numerica, Università di Roma "La Sapienza", a.a. 2007-2008.

Piscaglia F., *"Metodi numerici per la risoluzione delle equazioni di conservazione 1D per flussi instazionari e comprimibili"*, Dispensa del Corso di Motori a Combustione Interna, Politecnico di Milano, 2009.

Politi T., *"Lucidi delle lezioni di Analisi Numerica per le Telecomunicazioni"*, dispensa del corso di Analisi Numerica per le Telecomunicazioni, Politecnico di Bari, a.a. 2006-2007.

Pozzi P., *"Modelli di resistenza al moto durante i transitori nelle condotte in pressione"*, Tesi di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, Politecnico di Milano, relatore Prof. Stefano Mambretti, a.a. 2008-2009.

Pulliam T. H., *"Artificial dissipation models for the Euler equation"*, AIAA Paper 85-0438, AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, 1984.

- Puppo G., *"Lucidi delle lezioni di Metodi Numerici e Calcolo Scientifico"*, dispensa del corso di Metodi Numerici e Calcolo Scientifico, Politecnico di Torino, a.a. 2007-2008.
- Quadrio M., *"Aerodinamica"* Dispense del corso di Aerodinamica, Politecnico di Milano, a.a. 2003-2004.
- Quarteroni A., *"Modellistica numerica per problemi differenziali"*, Springer-Verlag, Milano, 2008.
- Quarteroni A., Sacco R., Saleri F., *"Matematica Numerica"*, Springer-Verlag, Milano, 2000.
- Quarteroni A., Saleri F., *"Introduzione al calcolo scientifico"*, Springer-Verlag, Milano, 2008.
- Ramos H. et al., *"Surge damping analysis in pipe systems: modelling and experiments"*, Journal of Hydraulic Research, vol. 42, n. 4, pp. 413-425, 2004.
- Randall J. LeVeque, *"Numerical Methods for conservation Laws"*, Birkhauser-Verlag, Basel, 1992.
- Riasi A., Nourbakhsh A., Raisee M., *"Unsteady Velocity Profiles in Laminar and Turbulent Water Hammer Flows"*, Journal of Fluids Engineering, vol. 131, 2009.
- Roe P. L., *"Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes"*, J. Comput. Phys, vol. 43, pp. 357-372, 1981.
- Samani H. M. S., Khayatzaheh. A., *"Transient flow in pipe network"*, Journal of Hydraulic Research, vol. 40, n. 5, pp. 637-644, 2003.
- Scaccia M. et al., *"Calibrazione di modelli di cavitazione gassosa per mezzo di microalgoritmi genetici"*, Atti del XXIX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, pp. 299-305, 2004.
- Thomas J., *"Numerical partial different equations: finite difference methods"*, Springer- Verlag, New York, 1995.

Tomirotti M., *“Modellazione fisica e matematica dei fenomeni di moto vario conseguenti al collasso di opera di ritenuta”*, Tesi si dottorato in Ingegneria per l’Ambiente e il Territorio, Politecnico di Milano, a.a. 1995-1996.

Van De Sande E. et al., *“Velocity profiles in Accelerating pipe Flows started from the Rest”*, Proceeding of the 3rd International Conference on Pressure Surges, BHRA Fluid Engineering, Canterbury, England, A1, pp. 1-14, 1980.

Vardy A. E., *“Unsteady Flows: Fact and friction”* Proceeding of the 3rd International Conference on Pressure Surges, BHRA Fluid Engineering, Canterbury, England, A2, pp. 15-26, 1980.

Vardy A. E. and Brown J.M.B., *“On turbulent, unsteady, smooth-pipe flow”*, Int. Conf. On Pressure Surges and Fluid Transients, BHR Group, Harrogate, England, pp. 289-311, 1996.

Vardy A. E. and Brown J.M.B., *“Transient turbulent friction in smooth pipe flows”*, Journal of sound and vibration, vol. 259, pp. 1011-1036, 2003.

Vardy A. E. and Brown J.M.B., *“Transient turbulent friction in fully rough pipe flows”*, Journal of sound and vibration, vol. 270, pp. 233-257, 2003.

Vardy A. E. and Brown J. M. B., *“Approximation of Turbulent Wall Shear Stresses in Highly Transient Pipe Flows”*, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 133, n. 11, pp. 1219-1228, 2007.

Vitkovsky J. et al., *“Advances in Unsteady Friction Model in Transient Pipe Flow”*, Proceedings of the 8th International Conference on Pressure Surge, The Hague, pp. 471-498, 2000.

Vitkovsky J. et al., *“Systematic Evaluation of One-Dimensional Unsteady Friction Models in Simple Pipelines”*, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 132, n. 7, pp. 696–708, 2006.

Wiggert D. C., Sundquist M. J., *“The Effect of Gaseous Cavitation on Fluid Transient”*, Journal of Fluids Engineers, ASME, vol. 101, pp. 79-86, 1979.

Wylie E. B., *"Simulation of Vaporous and Gaseous Cavitation"*, J. Fluids. Eng., ASME, vol. 106, pp. 307-311, 1984.

Wylie E. B., Streeter V. L., *"Fluid Transients in Systems"*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

Wylie, E. B., *"Frictional effects in unsteady turbulent pipe flow."*, Applied mechanics in the Americas, M. Rysz, L. A. Godoy, and L. E. Suarez, eds., vol. 5, The University of Iowa Press, Iowa City, Iowa, 5, pp. 29–34, 1996.

Zhao M., Ghidaoui M. S., *"Investigation of turbulence behaviour in pipe transients using a k-ε model"*, Journal of Hydraulic Research, vol. 44, n. 5, pp. 682-692, 2006.

Zhou F. et al., *"Transient Flow in a Rapidly Filling Horizontal Pipe Containing Trapped Air"*, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 128, n. 6, pp. 625-634, 2002.

Zielke W. et al., *"Gas Release in Transient Pipe Flow"* Proceedings of the 6th International Conference on Pressure Surge, BHRA, C1, pp. 3-13, 1990.

Zielke W., *"Frequency-dependent friction in transient pipe flow"*, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, series D, vol. 90, n. 1, pp. 109-115, 1968.

