



**POLITECNICO DI MILANO**

*Facoltà di*  
*INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA*

*Corso di laurea magistrale in*  
*INGEGNERIA DEI SISTEMI EDILIZI*

# Solai strutturali in legno lamellare incrociato

---

Inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Relatore: Prof. Ing. Alberto Franchi

Correlatore: Ing. Bruno Dal Lago

Tesi di Laurea di:  
Alessandro Baronio  
750895

ANNO ACCADEMICO 2010/2011



# Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

## Sommario

<b>1. STATO DELL'ARTE.....</b>	<b>5</b>
1.1 <i>Inquadramento e rilevanza del problema .....</i>	5
1.2 <i>Il legno lamellare incollato.....</i>	6
1.2.1 <i>Precedenti storici.....</i>	7
1.2.2 <i>La struttura classica dell'edificio di legno moderno.....</i>	8
1.2.3 <i>I limiti della struttura intelaiata.....</i>	9
1.2.4 <i>La superficie quale elemento strutturale .....</i>	10
1.3 <i>XLAM: un materiale nuovo e una rivoluzione nella costruzione.....</i>	12
1.3.1 <i>Il principio dell'XLAM.....</i>	13
1.3.2 <i>La produzione dei pannelli XLAM.....</i>	13
<b>2. CARATTERISTICHE STRUTTURALI E CAMPI DI APPLICAZIONE.....</b>	<b>21</b>
2.1 <i>L'elemento inflesso.....</i>	21
2.2 <i>L'elemento piastra.....</i>	23
2.3 <i>L'elemento lastra .....</i>	24
2.4 <i>L'elemento strutturale piano e la struttura portante dell'edificio .....</i>	25
2.5 <i>Campi di applicazione .....</i>	26
2.5.1 <i>Solette di legno massiccio XLAM .....</i>	26
2.5.2 <i>Pareti XLAM .....</i>	28
2.5.3 <i>Travi parete XLAM.....</i>	29
<b>3. IL CALCOLO DEGLI ELEMENTI STRUTTURALI XLAM.....</b>	<b>30</b>
3.1 <i>Base normativa italiana .....</i>	30
3.2 <i>Gli elementi inflessi .....</i>	32
3.2.1 <i>Analisi strutturale.....</i>	32
3.2.2 <i>Verifica a flessione.....</i>	32
3.2.3 <i>Verifica a taglio .....</i>	36
3.2.4 <i>Pressione trasversale al piano del pannello .....</i>	38
3.2.5 <i>Verifica dello stato di servizio e calcolo delle deformazioni .....</i>	38
3.2.6 <i>Vibrazioni.....</i>	42



# Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

<b>4.</b>	<b>CARATTERIZZAZIONE MECCANICA DELLA LAMINA ORTOTROPA .....</b>	<b>43</b>
4.1	<i>Introduzione .....</i>	43
4.2	<i>Legge di Hooke.....</i>	45
4.3	<i>Relazioni tra costanti elastiche e termini delle matrici di elasticità diretta e inversa.....</i>	47
4.4	<i>Matrici di elasticità diretta e inversa in un riferimento cartesiano arbitrario .....</i>	50
<b>5.</b>	<b>ESTENSIONE A COMPOSITI DI LAMINE ORTOTROPE: TEORIA CLASSICA DEI LAMINATI .....</b>	<b>53</b>
5.1	<i>Formulazione della teoria classica dei laminati .....</i>	53
5.2	<i>Matrici di rigidezza del laminato .....</i>	56
5.3	<i>Matrici di rigidezza di laminati particolari .....</i>	60
5.3.1	<i>Laminati simmetrici (<math>[B]=0</math>).....</i>	60
5.3.2	<i>Laminati simmetrici con <math>A_{13}=A_{23}=0</math> (laminati ortotropi) .....</i>	60
5.4	<i>Calcolo di tensioni e deformazioni .....</i>	62
<b>6.</b>	<b>MODELLI DI PIASTRE ORTOTROPE.....</b>	<b>63</b>
6.1	<i>Il comportamento a piastra .....</i>	63
6.1.1	<i>Il metodo semplificato di Grashof.....</i>	64
6.1.2	<i>Estensione del metodo di Grashof alle piastre ortotrope .....</i>	65
6.2	<i>Piastra ortotropa a flessione – Piastra di Kirchhoff.....</i>	67
6.2.1	<i>Metodo di soluzione alla Navier: Piastra rettangolare appoggiata al contorno .....</i>	69
6.3	<i>Piastra ortotropa a flessione – Piastra di Mindlin .....</i>	73
6.3.1	<i>Metodo di soluzione alla Navier: Piastra rettangolare appoggiata al contorno .....</i>	78
6.4	<i>Frequenze naturali delle piastre.....</i>	80
6.4.1	<i>Frequenze naturali di piastre soggette a carichi trasversali.....</i>	80
6.4.2	<i>Frequenze naturali di piastre ortotrope – Piastra di Kirchhoff .....</i>	81
6.4.3	<i>Frequenze naturali di piastre ortotrope – Piastra di Mindlin .....</i>	82
<b>7.</b>	<b>CONSIDERAZIONI SUL TAGLIO PER “ROTOLAMENTO” (ROLLING SHEAR).....</b>	<b>84</b>
7.1	<i>Confronto dei termini diretti di taglio della matrice di rigidezza del laminato.....</i>	84



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

---

7.2	<i>Il problema della rigidità torsionale della piastra XLAM</i>	88
<b>8.</b>	<b>STUDIO PARAMETRICO</b>	<b>90</b>
8.1	<i>Analisi dei carichi</i>	91
8.2	<i>Proprietà meccaniche del pannello</i>	93
8.3	<i>Calcolo monodirezionale semplificato (Monodirezionale 1/1bis)</i>	95
8.3.1	<i>Rigidezze</i>	95
8.3.2	<i>Verifiche agli stati limite ultimi</i>	96
8.3.3	<i>Verifiche agli stati limite di esercizio</i>	102
8.3.4	<i>Vibrazioni</i>	108
8.4	<i>Calcolo monodirezionale esatto (Monodirezionale 2/2bis)</i>	110
8.4.1	<i>Rigidezze</i>	110
8.4.2	<i>Verifiche agli stati limite ultimi</i>	111
8.4.3	<i>Verifiche agli stati limite di esercizio</i>	116
8.4.4	<i>Vibrazioni</i>	122
8.5	<i>Calcolo bidirezionale approssimato (Bidirezionale 1/1bis)</i>	123
8.5.1	<i>Rigidezze</i>	124
8.5.2	<i>Verifiche agli stati limite ultimi</i>	126
8.5.3	<i>Verifiche agli stati limite di esercizio</i>	132
8.5.4	<i>Vibrazioni</i>	137
8.6	<i>Calcolo bidirezionale esatto – Piastra di Kirchhoff (Bidirezionale 2/2bis)</i>	139
8.6.1	<i>Rigidezze</i>	141
8.6.2	<i>Verifiche agli stati limite ultimi</i>	142
8.6.3	<i>Verifiche agli stati limite di esercizio</i>	149
8.6.4	<i>Vibrazioni</i>	154
8.6.5	<i>Diverse soluzioni progettuali per geometria rettangolare</i>	156
8.7	<i>Calcolo bidirezionale esatto – Piastra di Mindlin (Bidirezionale 3/3bis)</i>	187
8.7.1	<i>Rigidezze</i>	187
8.7.2	<i>Verifiche agli stati limite ultimi</i>	189
8.7.3	<i>Verifiche agli stati limite di esercizio</i>	196
8.7.4	<i>Vibrazioni</i>	201



# Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

---

8.7.5	<i>Diverse soluzioni progettuali per geometria rettangolare.....</i>	<i>202</i>
8.8	<i>Confronto tra calcolo analitico e calcolo numerico .....</i>	<i>227</i>
<b>9.</b>	<b>CONFRONTI PARAMETRICI E CONCLUSIONI .....</b>	<b>234</b>
9.1	<i>Confronto tra le tipologie di calcolo monodirezionale.....</i>	<i>234</i>
9.2	<i>Confronto tra le tipologie di calcolo bidirezionale.....</i>	<i>240</i>
9.3	<i>Confronto tra le soluzioni progettuali per geometrie di piastra rettangolare .....</i>	<i>249</i>
9.4	<i>Conclusioni.....</i>	<i>249</i>
9.5	<i>Futuri sviluppi della ricerca.....</i>	<i>249</i>
	<b>ALLEGATI – Programmi di calcolo in linguaggio Mathcad .....</b>	<b>260</b>
A.1	<i>Calcolo delle matrici [A], [B] e [D].....</i>	<i>261</i>
A.2	<i>Calcolo dei fattori di taglio e della matrice [C] .....</i>	<i>272</i>
A.3	<i>Esempio di calcolo: Teoria di Kirchhoff – Geometria quadrata – con “rolling shear” .....</i>	<i>283</i>
A.4	<i>Esempio di calcolo: Teoria di Kirchhoff – Geometria rettangolare .....</i>	<i>288</i>
A.5	<i>Esempio di calcolo: Teoria di Mindlin – Geometria quadrata – con “rolling shear” ..</i>	<i>293</i>
A.6	<i>Esempio di calcolo: Teoria di Mindlin – Geometria rettangolare .....</i>	<i>300</i>
	<b>Riferimenti Web.....</b>	<b>307</b>
	<b>Bibliografia .....</b>	<b>308</b>
	<b>Indice delle figure.....</b>	<b>309</b>



# Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

---

## ***1. STATO DELL'ARTE***

### ***1.1 Inquadramento e rilevanza del problema***

La tecnologia di produzione dei pannelli in legno a strati incrociati (XLAM) introduce innovative ed interessanti soluzioni strutturali. In particolare appare promettente la possibilità di realizzare solai pieni dal peso ridotto, dal basso impatto ambientale e adatti a creare un diaframma rigido, fattori che potrebbero spianare la strada all'utilizzo di tale tecnologia, specialmente in strutture multipiano.

La presente trattazione è rivolta alla ricerca di nuovi modelli di calcolo da poter utilizzare nella progettazione strutturale con elementi in XLAM: le caratteristiche di questo materiale permettono di sfruttare le sue capacità portanti nelle due direzioni principali secondo l'orientamento degli strati disposti in modo ortogonale tra loro potendo di fatto realizzare a tutti gli effetti un modello a piastra.

I limiti legati alla produzione di questi pannelli, quelli legati al loro trasporto e in particolare la mancanza di un inquadramento teorico certificato da poter utilizzare per il calcolo di questi elementi, costituiscono ad oggi un grosso vincolo che non permette ai progettisti di indirizzare l'utilizzo dei pannelli XLAM verso la realizzazione di elementi di piastra, al contrario dell'approccio odierno, che prevede un funzionamento monodirezionale (comportamento a trave).

E' evidente comunque che anche se gli elementi vengono dimensionati considerando che il carico si trasferisca lungo una sola direzione, per le caratteristiche meccaniche del pannello, si avrà una ripartizione del carico in ambedue le direzioni della piastra, potendo di fatto sfruttare tale configurazione per il dimensionamento del pannello XLAM.

Verranno dunque approfondite nel seguito le possibili teorie da applicare per lo svolgimento del problema, effettuando un confronto parametrico dello stesso elemento strutturale dimensionato e progettato con i vari modelli di calcolo suggeriti in questa trattazione.

Il lavoro svolto è finalizzato ad individuare e chiarire le prestazioni di un utilizzo bidirezionale dei pannelli XLAM, fornendo indicazioni circa il processo di progettazione, reso complesso dall'ortotropia del materiale associata alla differente direzionalità degli strati.

## 1.2 Il legno lamellare incollato

Con il termine legno lamellare incollato si intende un prodotto a base di legno costituito da segati sovrapposti (talvolta anche affiancati), di spessore relativamente modesto (comunque non superiore a 50 mm) rispetto alla sezione dell'intero elemento, che vengono uniti tra loro a formare una sezione composta per mezzo di adesivi in grado di garantire resistenza e durabilità nel tempo.

La tecnologia del legno lamellare incollato consente la realizzazione di elementi a sezione variabile con una notevole ottimizzazione della materia prima ed una maggiore razionalizzazione delle forme per quanto riguarda l'ingombro delle strutture, le esigenze estetiche e statiche. Elementi curvi come archi e portali, peraltro non ottenibili dalla squadratura dei tronchi, possono essere facilmente realizzati partendo dal comune tavolame impiegato per comporre gli stessi elementi rettilinei.



Altro aspetto che riveste non trascurabile importanza è quello legato alla presenza di difetti nel tradizionale segato strutturale. Mentre infatti in una trave in legno massiccio non è possibile ovviare alla presenza di nodi, che influiscono pesantemente sulle resistenze meccaniche dell'intero elemento, questi possono essere facilmente eliminati all'atto della formazione delle lamelle; eventualmente potranno essere scartate le sole tavole giudicate troppo nodose ovvero potrà essere semplicemente ridotta l'influenza del difetto collocando le lamelle più "difettose" nei punti meno sollecitati della sezione dell'elemento strutturale e, comunque, in posizione nota.

Figura 1 – Edificio di 3 piani a Santiago del Cile in legno lamellare [1]

Il legno lamellare è un modo nuovo di usare un materiale antico quanto la storia abitativa dell'uomo. Facilità di progettazione e di utilizzo rendono il legno uno dei materiali più importanti per il futuro: il bassissimo impatto ambientale, a causa della natura biologica del legno, aiuta le persone a sceglierlo come materiale principale per gli edifici e muove grande attenzione sullo sviluppo di tecnologie legate all'applicazione del legno.

## 1.2.1 Precedenti storici

Dal punto di vista storico il legno lamellare incollato nasce col fine di superare i limiti dimensionali del tondame dal quale si ricavano le travature. Da un solo fusto è infatti impossibile ottenere elementi di sezione e lunghezza necessarie a consentire la copertura di luci libere di 20-30 metri. Inoltre il portamento tipico dei fusti non consente di ottenere travi curve, o della curvatura voluta, di sezione sufficiente.

Al primo problema si è ovviato storicamente tramite la realizzazione di travi composte più o meno effettivamente collaboranti, ad esempio tramite giunzioni a dente di sega.

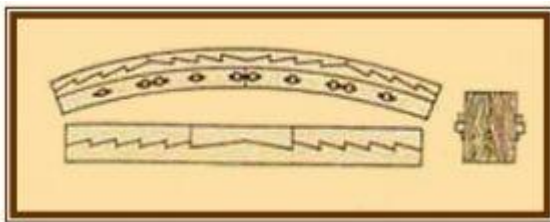


Figura 2 – Leonardo: XV secolo [2]

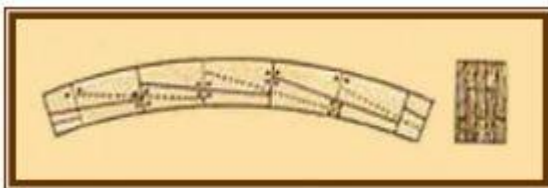


Figura 3 – Delorme: XVI secolo [2]

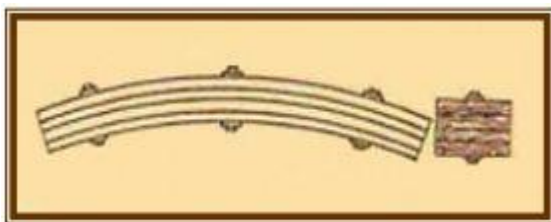


Figura 4 – Emy: XIX secolo [2]

Questa ultima soluzione, la cui prima intuizione si fa risalire a Leonardo, è attuabile con semplicità, ed è stata frequentemente utilizzata nel caso di membrature orizzontali, quali ad esempio le catene, che devono superare ampie luci.

Il secondo problema fu affrontato per la prima volta, a memoria, nel XVI secolo, quando si sviluppò nei costruttori l'idea di utilizzare il legno mediante assemblaggio di varie parti per ottenere centine ed archi. Il primo tentativo concreto a cui si sappia dare paternità è quello di Philibert Delorme in Francia, il quale riuniva mediante chiodatura più tavole in strati sovrapposti dando approssimativamente la forma dell'arco voluto, quindi profilando con una sega l'estradosso. Le tavole mantengono la loro planarità e la trasmissione dei carichi è affidata essenzialmente alla tenuta della chiodatura.

Il passo successivo è stato compiuto da Emy nel 1823, realizzando archi mediante chiodatura di tavole unite in pacchi con bulloni passanti. In seguito, prima Migneron e poi Wiebeking, misero a punto un sistema che prevedeva

un arco con lamelle formate da travi curvate a freddo e tenute a pressione da staffe metalliche, ma a differenza del francese Migneron, nel sistema ideato da Wiebeking, il bloccaggio delle travi era assicurato da biette in legno che assorbivano le possibili tensioni di scorrimento.

Una svolta radicale si ebbe dalla coniugazione tra la tecnica della laminazione del legno e quella dell'incollaggio che fu possibile però soltanto a partire dal XX secolo, in concomitanza con il fiorire delle industrie ed il concretizzarsi degli studi sulla composizione e la produzione delle colle. L'artefice di questa trasformazione fu il maestro carpentiere Otto Freidrich Hetzer (1846 – 1911) che nel 1901, per l'assemblaggio delle lamelle, sostituì a staffe e bulloni un collante a base di caseina: era nato così il *legno*



*lamellare* incollato. In pochi anni il brevetto di Hetzer si diffuse in tutta Europa, riscuotendo ovunque premi e riconoscimenti mentre in Svizzera, paese di origine del nuovo materiale, già nel 1920 si potevano contare oltre 200 realizzazioni. Nello stesso periodo il brevetto viene esportato negli Stati Uniti, ove però susciterà diffidenza e incontrerà molte resistenze, almeno fino alla metà degli anni Trenta.

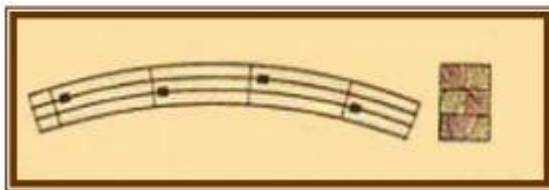
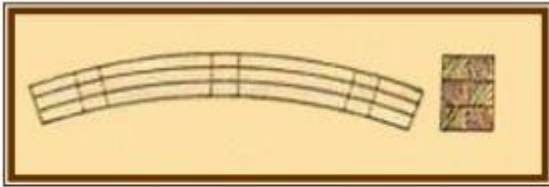


Figura 5 – Mignerone, Wiebeking: XIX secolo [2]

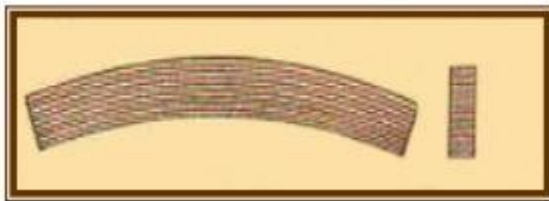


Figura 6 – Otto Freidrich Hetzer: XX secolo [2]

Anche in Italia, nel periodo compreso tra il 1935 e il 1939, vengono realizzate le prime opere in legno incollato, soprattutto sotto forma di archi a tre cerniere, con luci che raggiunsero i 30 metri. Il procedimento adottato consisteva nella curvatura a freddo e nella successiva sovrapposizione delle tavole, con interposti strati di colla alla caseina; l'assemblaggio era effettuato a piè d'opera, inchiodando il primo strato alla sagoma e fissando tra loro i successivi con un prefissato numero di chiodi o bulloni. Gli spessori e le intestature delle tavole erano particolarmente curati e le lunghezze scelte erano tali da non permettere né sovrapposizioni, né successivi avvicinamenti dei giunti. Per contro, non veniva effettuato alcun controllo del legname, impiegando di fatto sempre una terza scelta, e soprattutto rimaneva irrisolta le tradizionali problematiche relative all'attaccabilità del legno da parte di funghi e insetti, nonché alla sua infiammabilità.

E' solo nel secondo dopoguerra che l'industria chimica, con l'introduzione delle resine sintetiche, degli impregnanti e dei prodotti ignifughi, ha permesso di apportare al settore quel contributo tecnologico grazie al quale la "tecnica del lamellare" si è potuta sviluppare ed evolvere fino ai giorni nostri.

### 1.2.2 La struttura classica dell'edificio di legno moderno

La creazione di elementi strutturali piani è nota e diffusissima nella costruzione di legno. La tipologia costruttiva ancora oggi più diffusa in questo ambito, la costruzione intelaiata di legno, è composta da elementi piani formanti solai e pareti. Gli elementi strutturali sono il risultato dell'assemblaggio di più componenti. All'origine l'elemento di solaio e di parete era composto esclusivamente da elementi lineari di sezione molto ridotta: travetti di legno massiccio per formare i montanti verticali della parete o per formare le travi del solaio, e tavole sottili per formare il rivestimento strutturale e creare un elemento stabile nel proprio piano. I montanti e le travi inflesse, completate con una travatura di bordo su tutto il perimetro dell'elemento, formano l'intelaiatura, le tavole di rivestimento formano il rivestimento strutturale che permette di mantenere la forma dell'elemento piano, di garantirne la stabilità e la funzionalità strutturale.

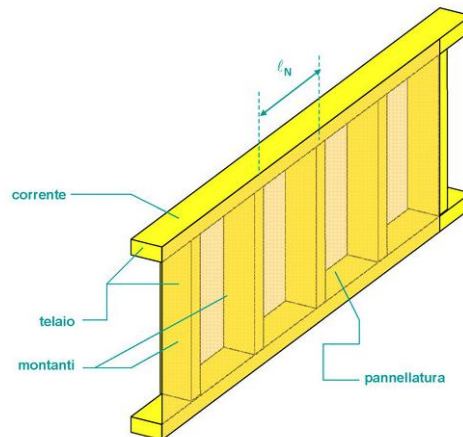


Figura 7 – Elemento di solaio della costruzione intelaiata [3]

Ancora oggi si costruiscono edifici di legno con struttura intelaiata e rivestimento strutturale formato da tavole sottili inchiodate all'intelaiatura. Non si tratta soltanto di reminescenze del passato o della volontà di costruire secondo sistemi tradizionali, ma di strutture in perfetta regola con le esigenze strutturali e tecniche del giorno d'oggi. Questo sistema di formare pareti e solai è senz'altro da definire come tradizionale e presenta caratteristiche tecniche e prestazioni meccaniche ridotte, rispetto agli elementi eseguiti con elementi di pannelli sottili, in particolar modo per quanto concerne la rigidità nel piano dell'elemento.

Dal punto di vista strutturale questi elementi sono formati da due componenti ben distinte: il telaio e la pannellatura. Al telaio, formato da travi o montanti, spetta il compito di assumere tutte le sollecitazioni derivanti dalle forze perpendicolari al piano dell'elemento, come pure della discesa delle forze verticali agenti sulle pareti dell'edificio. Alla pannellatura spetta il compito di irrigidire e stabilizzare questi elementi, come pure quello della discesa delle sollecitazioni orizzontali nel medesimo piano degli elementi strutturali, o, semplicemente, quello della controventatura orizzontale e verticale di tutta la struttura.

Questa tipologia strutturale, che non sarà analizzata di seguito, sta alla base dell'evoluzione e del successo della costruzione di legno in ambito edile degli ultimi decenni del mondo intero. Gli edifici multipiano di legno costruiti fino alla fine degli anni '90 del secolo scorso sono praticamente tutti stati concepiti, progettati e realizzati secondo questo principio. Si tratta quindi di una tipologia costruttiva e strutturale che può essere senz'altro definita come adatta alle esigenze attuali e moderna.

### 1.2.3 I limiti della struttura intelaiata

Il principio, e il grosso vantaggio, della struttura intelaiata, prevede la distribuzione delle sollecitazioni e dei carichi sull'integralità degli elementi piani (solai e pareti), in modo che ogni elemento lineare (travi dei solai e montanti delle pareti) sia sollecitato da una porzione di carico ridotta; l'unione di un numero elevato di elementi permette di far fronte alla totalità delle forze agenti sulla struttura dell'edificio, creando così l'effetto degli elementi piani di parete e di solaio.

Cercando i limiti di questo sistema strutturale, non si può fare a meno di osservare che l'effetto di superficie di questi elementi strutturali sia ottenuto tramite la pannellatura del rivestimento strutturale, che, di fatto, presenta uno spessore spesso molto limitato. Dal punto di vista strutturale questo spessore ridotto è senz'altro accettabile e permette di adempiere a tutte le funzioni strutturali, a condizione che esso sia ben dimensionato, verificato e realizzato a regola d'arte.

Gli elementi dei solai intelaiati sono originariamente nati per la realizzazione di edifici abitativi di dimensioni modeste. Con luci oltre i 5,50 metri il sistema costruttivo del solaio intelaiato mostra tutti i suoi limiti, derivati dal fatto che alla base dell'effetto strutturale si trova una serie di travi semplici, dal punto di vista strutturale completamente indipendenti una dall'altra. Con luci più grandi, le dimensioni delle sezioni delle travi, pur considerando l'interasse ridotto, diventano tanto importanti da mettere in discussione la possibile realizzazione del solaio: oltre i 5,50 metri di luce l'altezza strutturale necessaria per ottenere un solaio che rispetti le esigenze di resistenza e di rigidità dettate dalla realizzazione di edifici multipiano moderni, rappresenta almeno un ventesimo della luce, superando quindi facilmente i 300 millimetri.

La realizzazione di solai di grandi dimensioni e luci anche nell'edilizia abitativa ha portato all'evoluzione del solaio intelaiato verso il solaio a cassone, dove un secondo strato di pannellatura appositamente collegato con le travi permette di ottenere elementi strutturalmente più performanti.

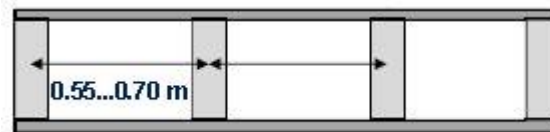


Figura 8 – Elemento di solaio a cassone con pannellatura incollata sui due lati [4]

Il collegamento strutturale tra la pannellatura e le travi, che ora formano le anime della trave composta, deve essere realizzato tramite incollatura strutturale, in modo da assicurarne una rigidità sufficiente. Questo tipo di solai richiede una tecnica di produzione decisamente più impegnativa e l'uso di pannelli adatti all'incollatura strutturale con la travatura. Inoltre la struttura di base di questo tipo di solai è sempre quella della serie di travi parallele e indipendenti tra loro: si tratta quindi sempre di un elemento di piastra con effetto strutturale unidirezionale. Questo tipo di solaio può essere considerato come il solaio corrispondente alla costruzione intelaiata per luci più grandi di 5 metri, o per ridurre l'altezza strutturale del solaio in generale.

### 1.2.4 La superficie quale elemento strutturale

La costruzione intelaiata rappresenta, quindi, una tipologia strutturale basata sulla realizzazione di una struttura composta da elementi di solaio e di parete, quindi elementi piani, ma non può essere definita come una tipologia strutturale basata su elementi strutturali piani, o come la realizzazione dell'uso della superficie come elemento geometrico fondamentale della struttura.



## **Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali**

Alessandro Baronio 750895

---

L'uso della superficie quale elemento strutturale richiede la capacità strutturale del materiale in tutte le direzioni del piano considerato. In particolar modo in caso di sollecitazione perpendicolare al piano dell'elemento strutturale è necessaria la possibilità di distribuire il carico, tramite flessione e taglio, nelle due direzioni del piano dell'elemento.

L'XLAM ha colmato questa lacuna, ed ha introdotto anche nelle costruzioni di legno la possibilità di disporre di elementi strutturali massicci, piani e di grandi dimensioni. Agli elementi strutturali lineari di legno, formati da travi con sezione e forma praticamente a piacere, alla possibilità di formare elementi costruttivi e strutturali piani di grandi dimensioni riunendoli e combinandoli con i pannelli sottili, si aggiunge la possibilità di concepire, progettare e realizzare strutture formate da elementi portanti piani, riunendo nell'unico elemento massiccio le funzioni di piastra e di lastra. Su questo materiale e sulla sua applicazione concreta alla realizzazione di edifici anche di dimensioni importanti si concentrano le indicazioni dei capitoli successivi.

### 1.3 *XLAM: un materiale nuovo e una rivoluzione nella costruzione*

L'XLAM nasce alla fine degli anni '90, in Austria e in Germania. In Austria si può identificare all'origine dell'XLAM un progetto di sviluppo e ricerca, realizzato presso l'Università di Graz, che portasse ad aprire nuove vie per un migliore sfruttamento delle risorse messe a disposizione dalla lavorazione del legno in segheria, realizzando elementi piani di grande dimensione. A questo progetto ne sono seguiti diversi altri, che, insieme a diversi altri lavori di sviluppo e ricerca in diversi paesi europei, hanno portato allo stato della tecnica attuale.

Nei primi anni del 1900 sono stati realizzati in Inghilterra i primi edifici multipiano con struttura in calcestruzzo armato, sfruttando fra l'altro proprio l'allora nuova possibilità di realizzare elementi strutturali piani con questo materiale. Nel 2007 è stato realizzato a Londra un edificio di 9 piani di struttura portante di pannelli XLAM; idee e studi per costruire edifici in legno, con questo materiale, di altezza ancora superiore sono già in discussione. Ma anche senza andare a cercare le altezze da record, sembra che, a poco più di un secolo di distanza dall'avvento della tecnologia strutturale delle pareti e delle solette di calcestruzzo armato, il pannello XLAM sembra stia permettendo al legno di offrire una tipologia costruttiva ad essa concorrenziale anche dal punto di vista della concezione strutturale dell'edificio: le porte sono aperte alla superficie – cioè all'elemento piano – di legno massiccio quale elemento strutturale. Il presente sembra dire che questa possibilità incontra l'interesse sia dei progettisti, sia della committenza. Il futuro ci dirà se siamo davanti ad un'altra rivoluzione, come già il calcestruzzo armato ne ha provocato una, poco più di un secolo fa.



Figura 9 – Edificio di 9 piani con struttura portante in XLAM, Shoreditch, Londra [5]



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### 1.3.1 Il principio dell'XLAM

I pannelli di legno massiccio a strati incrociati XLAM sono pannelli di grandi dimensioni, formati da più strati di tavole, sovrapposti e incollati uno sull'altro in modo che la fibratura di ogni singolo strato sia ruotata nel piano del pannello di 90° rispetto agli strati adiacenti. Il numero di strati e il loro spessore può variare a dipendenza del tipo di pannello e del produttore dello stesso. Il numero minimo di strati per ottenere un pannello XLAM è di 3; va però subito sottolineato che per ottenere un comportamento fisico e meccanico efficace sotto tutti i punti di vista e corrispondente alla definizione di elemento multistrato, il numero minimo di strati dovrebbe essere uguale a 5. Come le osservazioni seguenti potranno chiarire, il pannello formato da 3 strati presenta nel proprio piano una direzione particolarmente debole dal punto di vista delle caratteristiche strutturali e meccaniche; il pannello da 3 strati è e resta, comunque, un pannello XLAM a tutti gli effetti.

I pannelli XLAM sono prodotti con legno di conifera, come la maggior parte degli elementi di legno per uso strutturale realizzati secondo le tecnologie più moderne.

### 1.3.2 La produzione dei pannelli XLAM

I singoli strati di tavole sono composti da tavole di spessore variabile, di regola tra 15 e 30 mm. La larghezza delle singole tavole è pure variabile e si situa di regola fra gli 80 ed i 240 mm.

Le tavole usate per la produzione di pannelli XLAM devono rispettare i medesimi criteri delle tavole per la produzione di legno lamellare incollato. Si tratta cioè di materiale classificato secondo la resistenza e appartenente ad una ben precisa classe di resistenza.

La produzione delle tavole avviene quindi sulla base delle fasi di lavorazione seguenti:

- *Taglio delle tavole (o lamelle)*

Come per la produzione del legno lamellare incollato, la prima fase della lavorazione avviene in impianti altamente industrializzati e specializzati alla produzione di questo tipo.

- *Essiccazione*

L'essiccazione delle tavole è una fase essenziale della produzione, in quanto non solo per la classificazione, ma anche per l'incollatura, è indispensabile un tasso di umidità del legno ben definito, di regola del 12%, cui si aggiunge un margine di tolleranza di 2 o 3%.

- *Classificazione*

La classificazione delle tavole avviene in modo visivo o meccanico e permette di eliminare le parti di qualità troppo scadenti tramite troncatura dell'elemento; in seguito si procede all'attribuzione di ogni singola tavola ad una classe di resistenza. Le normative di riferimento per la classificazione sono quelle che definiscono la classificazione del legno massiccio (per esempio EN 14081) e che ne definiscono i profili prestazionali delle diverse classi di resistenza (per esempio EN 338).



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### ▪ *Giunti longitudinali delle lamelle*

Le singole lamelle che formano il singolo strato di tavole sono continue su tutta la lunghezza del pannello, in modo da garantire la continuità strutturale, ininterrotta, dello strato per tutta la lunghezza del pannello. Anche in questo caso la tecnologia applicata è quella della produzione del legno lamellare incollato, con la giunzione longitudinale incollata, a pettine, delle singole tavole. Le procedure di controllo della qualità e di garanzia delle caratteristiche del prodotto finito fanno riferimento alla produzione di legno lamellare incollato.

### ▪ *Giunti trasversali delle tavole*

Il collegamento trasversale fra le singole tavole è realizzato in modi diversi, a dipendenza del procedimento di produzione e, quindi, a dipendenza del produttore in questione. In alcuni casi le tavole sono incollate una all'altra anche nella direzione trasversale, in altri casi esse sono accostate in modo da creare una superficie omogenea senza che il giunto tra una tavola e l'altra sia visibile, in altri casi ancora la superficie di contatto fra le tavole non è particolarmente curata e può restare un'intercapedine visibile tra le due tavole.

La produzione dell'XLAM deve permettere la realizzazione dell'incollatura strutturale degli strati di tavole, ruotati di 90° uno rispetto all'altro, in modo da formare un unico elemento monolitico e multistrato. L'incollatura fra i singoli strati deve corrispondere alle esigenze dell'incollatura strutturale. I collanti usati sono quelli sviluppati per la produzione del legno lamellare incollato; anche per la produzione di XLAM si incontrano nella produzione sia gli adesivi più classici a base di formaldeide, sia quelli più recenti a base di poliuretani, con una prevalenza di quest'ultimi, probabilmente dettata dalla migliore predisposizione all'applicazione in condizioni particolari.

Il pannello XLAM non è un materiale o un prodotto definito da una specifica normativa di prodotto o da una regolamentazione del materiale. Anche le procedure di produzione non sono definite o prescritte in modo generale, ma si rifanno alle condizioni di produzione del legno incollato – cioè prodotto tramite incollatura – per uso strutturale. Per queste ragioni ogni produttore ha sviluppato la tecnologia di produzione più confacente alle sue particolarità e più promettente dal proprio punto di vista.

Si riporta, a titolo di esempio, la procedura di produzione dei pannelli XLAM che viene utilizzata dall'azienda Bettoni Legnami srl (<http://www.bettonilegnami.it/>), la quale ha da qualche anno iniziato la produzione dei pannelli in stabilimento partendo dalle tavole grezze in legno massiccio classificate secondo la UNI EN:338 come classe C24.

Le tavole grezze vengono successivamente piallate e tagliate della lunghezza necessaria alla realizzazione del pannello, le tavole hanno spessori grezzi e piallato rispettivamente:

GREZZO	PIALLATO
25mm	21mm
38mm	33mm
44mm	40mm

Con questa logica un pannello da 10 cm 3 strati sarà al grezzo 38-38-38 e finito 33-33-33.

Dopo la piallatura le tavole vengono tagliate della lunghezza necessaria per la realizzazione dei pannelli e vengono portate nello stabilimento dove è presente la vasca per il loro incollaggio.



Le tavole, piallate e tagliate della lunghezza necessaria vengono posizionate in prossimità della vasca.

In questo caso particolare le tavole più lunghe saranno quelle che costituiranno il primo, terzo e quinto strato di un elemento di solaio costituito da cinque strati di tavole.

Posizionamento del primo strato di tavole sul fondo della vasca.

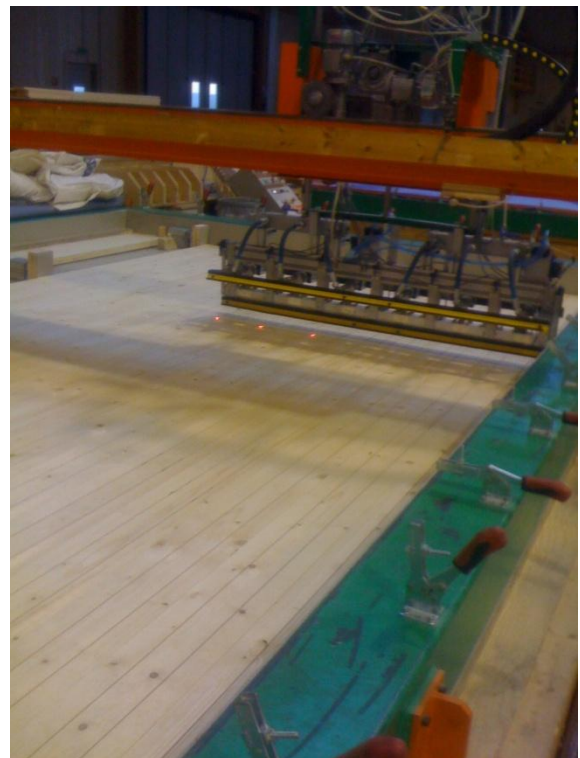






Una volta posizionate tutte le tavole che costituiscono il primo strato, queste vengono pressate con dei pistoni ad aria compressa per tenerle accostate senza che abbiano la possibilità di lasciare fessure tra una tavola e l'altra.

A questo punto si può procedere con l'applicazione del collante. La colla viene applicata in modo automatico dalla macchina che è stata programmata per applicare il giusto dosaggio.





Una volta che la macchina ha terminato la sua operazione di incollaggio, si può procedere con l'applicazione del secondo strato di tavole, disposto in modo ortogonale a quello precedente.

E' importante non lasciare passare troppo tempo tra l'applicazione della colla e dello strato successivo dato che la colla, in funzione della temperatura dell'ambiente, ha un certo margine di tempo in cui comincia la reazione e fa presa.

Le operazioni descritte fino ad ora vengono ripetute fino all'ultimo strato di tavole che costituisce l'estradosso del solaio.





L'ultimo strato viene posizionato in modo diverso dai precedenti. Si comincia a disporre le tavole dai lati fino ad arrivare alle due tavole centrali che vengono applicate come mostrato nell'immagine. In questo modo si riesce a evitare che tra una tavola e l'altra rimangano delle fessure.

Le tavole vengono pressate con i pistoni anche nell'altra direzione. In questo modo il pannello è stabile e le tavole non hanno possibilità di movimento reciproco intanto che la colla termina il suo processo di adesione.



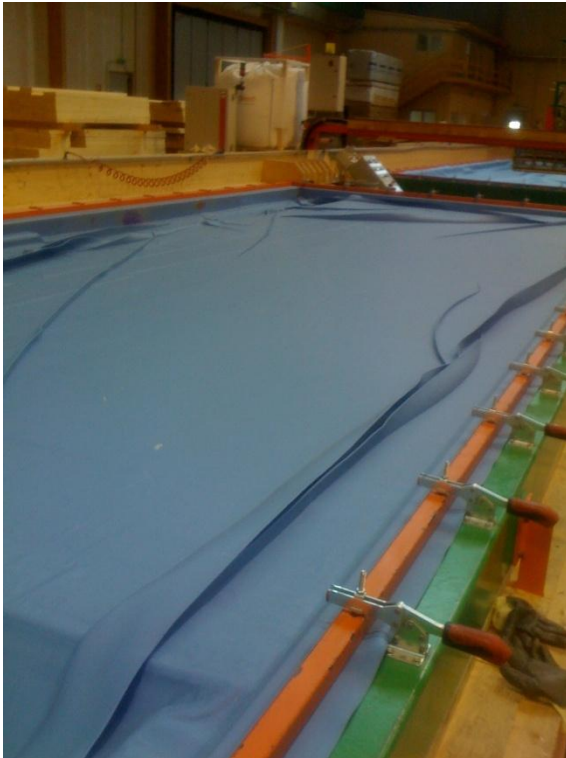


A questo punto comincia la preparazione per la fase di pressatura del pannello. La pressione viene esercitata dal telo blu visibile nell'immagine con un sistema di pressione-sottovuoto. In pratica la vasca presenta sul fondo delle scanalature dalle quali viene aspirata l'aria. E' importante coprire le tavole di legno prima dell'applicazione del telo per evitare che questo possa rompersi perdendo così l'efficacia del sottovuoto, soprattutto in corrispondenza degli spigoli.

Il telo viene fissato su tutti e quattro i lati della vasca in modo ermetico per consentire l'aspirazione dell'aria presente all'interno.

Durante le fase di aspirazione è sempre importante controllare che non si siano formate crepe o rotture del telo. In tal caso andrebbe interrotto il processo di aspirazione e riparato il telo.





Il dispositivo aspira l'aria presente all'interno fino ad esercitare una pressione sul pannello di  $90 \text{ kg/m}^2$ .

Il pannello viene tenuto in pressione per un tempo di circa 3-4 ore, che può variare a seconda della temperatura presente in ambiente, in quanto la colla ha diversi tempi di presa.

Una volta terminata l'operazione di pressatura, il pannello viene rimosso dalla vasca e posizionato nell'area di stoccaggio vicino alla macchina che dovrà eseguire le squadrate dei fori di eventuali porte e finestre o semplicemente rifilare i bordi della piastra in modo da ottenere sezioni regolari .

A questo punto i pannelli così ottenuti sono pronti per essere trasportati in cantiere e messi in opera a costituire la struttura portante dell'edificio.



## 2. CARATTERISTICHE STRUTTURALI E CAMPI DI APPLICAZIONE

Le caratteristiche meccaniche dell'XLAM possono essere definite sulla base della composizione del pannello, e considerando i singoli strati da cui il pannello è composto. In questo capitolo sono trattate, in forma breve, le caratteristiche meccaniche dell'XLAM in funzione del suo uso quale elemento strutturale. Per l'analisi strutturale, per il calcolo e per le procedure della verifica strutturale si rimanda al successivo capitolo.

### 2.1 L'elemento inflesso

Il pannello è formato da una serie di strati di tavole di legno, il cui comportamento strutturale può essere descritto sulla base delle caratteristiche strutturali del legno massiccio da cui sono composti. Questi strati possono essere definiti come strati unidirezionali, le cui caratteristiche meccaniche dipendono dalla direzione considerata rispetto alla direzione della fibratura.

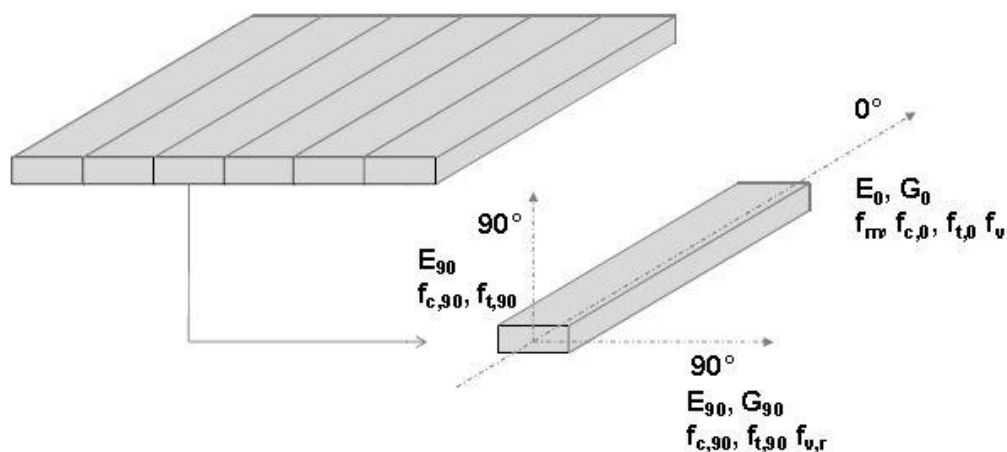


Figura 10 – Caratteristiche meccaniche (profilo prestazionale) di uno strato di tavole [6]

L'unione di più strati crea il pannello multistrato, o pannello a strati incrociati, XLAM. L'unione fra i singoli strati è realizzata tramite incollatura strutturale, e non rappresenta un indebolimento del sistema multistrato, ma rende i diversi strati di tavole collegati fra loro in modo rigido. Come per il legno lamellare incollato, lo strato di colla può essere come infinitamente rigido in relazione alla rigidità dei componenti di legno. In altre parole, lo strato di colla fra gli strati di tavole può essere trascurato ai fini della descrizione delle caratteristiche meccaniche del materiale.

Il comportamento meccanico del pannello può essere analizzato sulla base della considerazione delle due direzioni del piano del pannello.

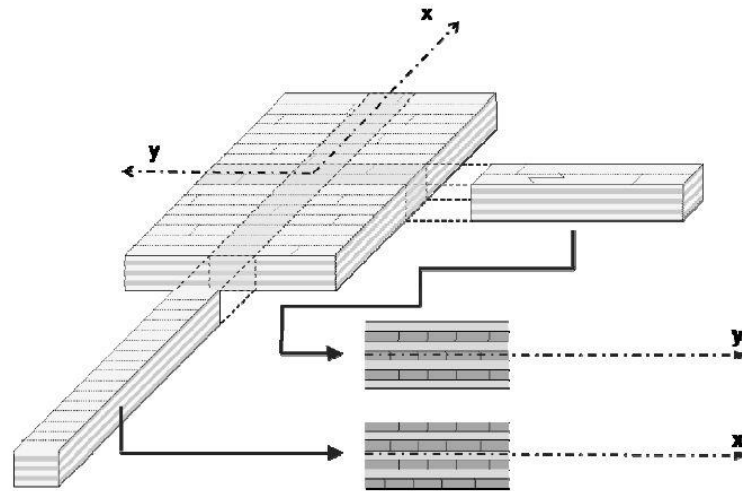


Figura 11 – XLAM quale griglia di elementi lineari e multistrato [6]

Il comportamento dell'elemento inflesso con la sezione composta da un numero di strati variabili può essere definito in modo piuttosto semplice, applicando le regole della scienza delle costruzioni, e più precisamente determinando le distribuzioni delle tensioni sui singoli strati in funzione delle rispettive caratteristiche meccaniche.

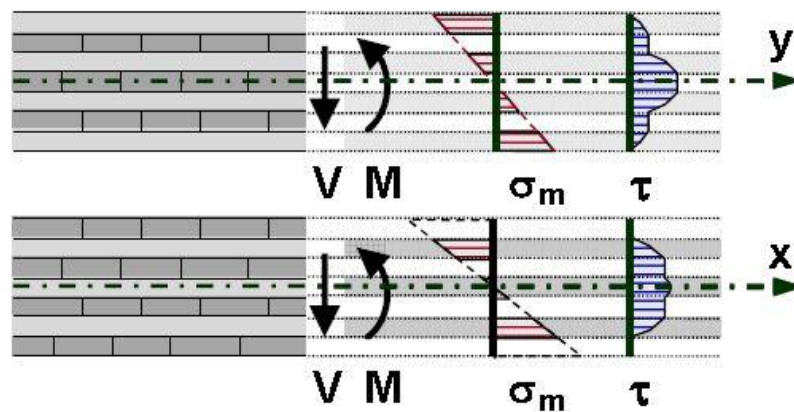


Figura 12 - Distribuzione delle tensioni di flessione e taglio sulla sezione per i due casi [6]

Si può notare come gli strati orientati trasversalmente rispetto alla direzione considerata assumano comunque una funzione essenziale, garantendo il collegamento rigido fra i diversi strati da cui è composto il pannello. L'effetto di ciò sulla rigidità e sulla resistenza del pannello è descritto nel capitolo dedicato al calcolo.

### 2.2 *L'elemento piastra*

L'analisi più semplice della piastra prevede la sua descrizione come griglia di elementi inflessi, che possono presentare caratteristiche meccaniche diverse nelle due direzioni del piano. L'applicazione di questo modello è giustificata dal fatto che, nella maggior parte dei casi concreti, la geometria degli elementi della piastra portano alla considerazione dell'effetto strutturale in una sola direzione; inoltre la rigidità torsionale dell'XLAM è comunque ridotta a causa dei ridotti valori del modulo G del legno. A ciò va ancora aggiunto l'effetto della possibile fessurazione degli strati di tavole, che ne riduce la continuità nella direzione trasversale.

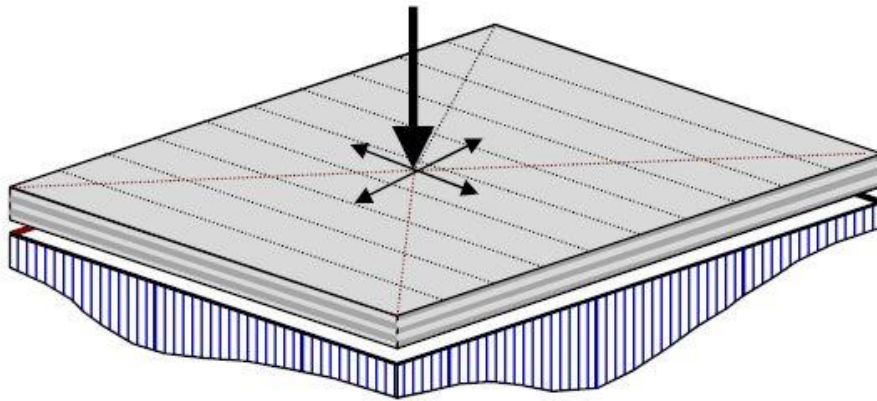


Figura 13 – Effetto strutturale dell'elemento piastra [6]

L'elemento strutturale così descritto permette di distribuire i carichi ad esso applicati nelle due direzioni del suo piano, sfruttando quindi tutto il materiale disponibile, riducendo così le sollecitazioni locali all'interno della piastra e permettendo di distribuire i carichi su tutto il perimetro.



### 2.3 *L'elemento lastra*

L'elemento base di parete è formato da una lastra verticale che deve assumere le funzioni di elemento compresso (forza assiale verticale) e di lastra (controventatura, forze orizzontali nel piano della parete). Il pannello XLAM permette di assumere entrambi le funzioni.

La rigidezza e la resistenza sono anche in questo caso definite dalla composizione dei diversi strati del pannello, dove lo spessore del pannello è la dimensione di riferimento.

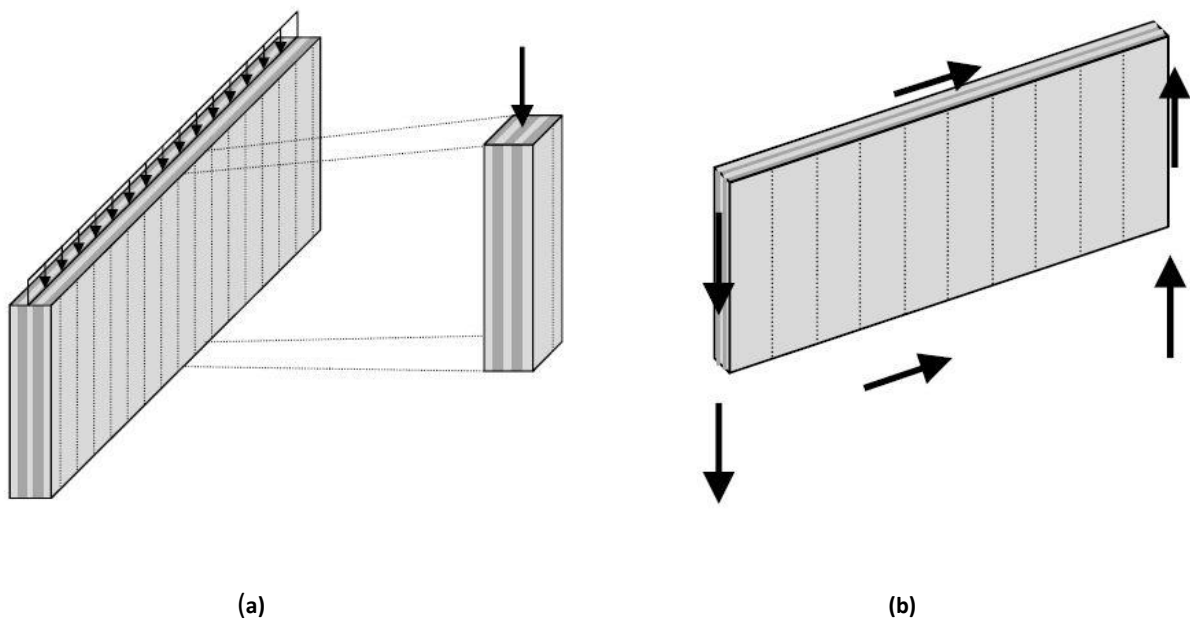
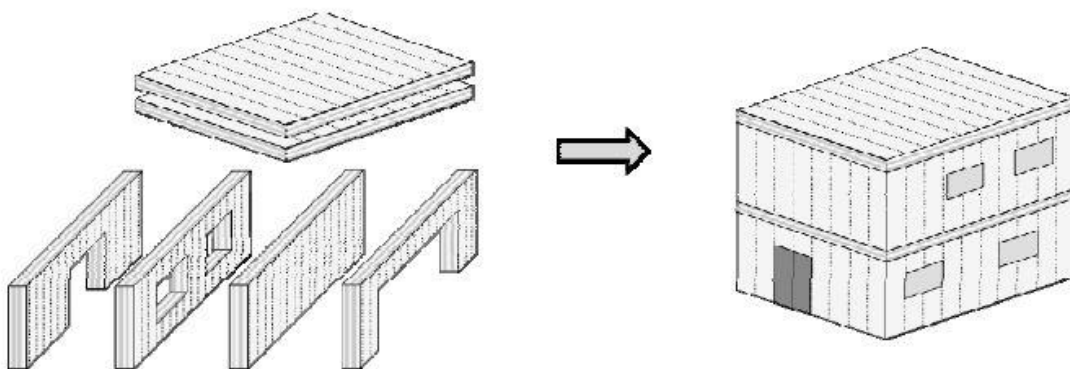


Figura 14 – Elemento di parete con funzione di discesa dei carichi verticali (a), con funzione di controventatura (b) [6]

## 2.4 *L'elemento strutturale piano e la struttura portante dell'edificio*

Il pannello XLAM offre quindi un elemento strutturale di superficie che può assumere tutte le funzioni strutturali:

- *L'effetto di piastra*, dato dalle sollecitazioni perpendicolari al piano del pannello e dalla resistenza e rigidità del pannello a flessione e taglio nelle due direzioni del suo piano;
- *L'effetto di lastra*, dato dalle sollecitazioni nel piano del pannello e dalla resistenza e rigidità agli sforzi normali e di taglio nel suo piano.



**Figura 15 – Struttura portante dell'edificio formata da elementi piani [6]**

La struttura portante di un edificio è quindi il risultato della combinazione di elementi di questo tipo, appositamente collegati tra loro in modo da creare strutture portanti tridimensionali. I collegamenti fra i diversi elementi formanti la struttura dell'edificio sono di regola da considerare come delle cerniere, che permettono e assicurano la trasmissione fra un elemento e l'altro di forze, la cui linea d'azione passa sempre per lo spigolo d'intersezione fra i piani di due elementi.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### 2.5 *Campi di applicazione*

L'uso dell'XLAM quale elemento strutturale è ammesso, tramite le omologazioni dei diversi prodotti, nelle classi di servizio 1 e 2; è quindi escluso l'uso in caso di esposizione diretta alle intemperie o in caso di contatto diretto con l'acqua. Trattandosi principalmente di elementi della struttura portante principale della costruzione o dell'edificio, si tratta di una limitazione che non dovrebbe creare situazioni di conflitto, in quanto, di fatto, impone che gli elementi strutturali di XLAM siano sempre posti in condizioni tali da non essere esposti al rischio di degrado biologico.

#### 2.5.1 *Solette di legno massiccio XLAM*

Solette massicce formate da XLAM richiedono uno spessore fra  $1/35$  e  $1/40$  della luce che determina la flessione massima della soletta, cioè normalmente della luce più piccola dell'elemento considerato. Questi valori hanno evidentemente carattere indicativo, perché tanto i carichi quanto le esigenze di rigidità della soletta riguardo alla verifica dello stato di servizio hanno un effetto decisivo sul dimensionamento e quindi sullo spessore necessario dell'elemento strutturale. È opportuno sottolineare che oltre ai noti criteri di limitazione delle deformazioni della struttura, anche il comportamento oscillatorio e vibrazionale può essere rilevante ai fini della verifica dell'attitudine al servizio.

La dimensione massima di trasporto determina di regola le dimensioni massime degli elementi che formano la soletta XLAM; è senz'altro possibile, e in molti casi indispensabile, usare pannelli di dimensioni più ridotte. Le ragioni per l'uso di pannelli di dimensioni ridotte possono essere di natura diversa, come per esempio il trasporto in piccole unità, la modularità della costruzione, la necessità di lavorare con elementi di peso ridotto o altro ancora. La maggior parte delle solette dell'edilizia abitativa sono comunque composte da diversi elementi di pannelli XLAM, che possono essere considerati in prima analisi come elementi strutturali inflessi con effetto portante in una direzione.

Il giunto fra i vari elementi di soletta XLAM, parallelo alla direzione strutturale principale, è di regola realizzato in modo semplice, così da ottenere la continuità strutturale anche in questa direzione, ma senza realizzare un giunto rigido, cioè senza continuità flessionale ma formando una cerniera. La continuità dell'elemento strutturale, sia come piastra che come lastra, è quindi garantita, ma senza dover realizzare un impegnativo giunto rigido alla flessione. In questo caso la larghezza dei singoli elementi XLAM gioca un ruolo secondario dal punto di vista strutturale, a condizione di accettare un numero di giunti strutturali più elevato in caso di elementi di larghezza ridotta.

Il sistema strutturale della soletta può quindi essere analizzato in modo semplice, sul modello della trave inflessa. È senz'altro possibile sfruttare la continuità strutturale di questo elemento su più campate, in modo da ottimizzare il comportamento strutturale o altri aspetti.

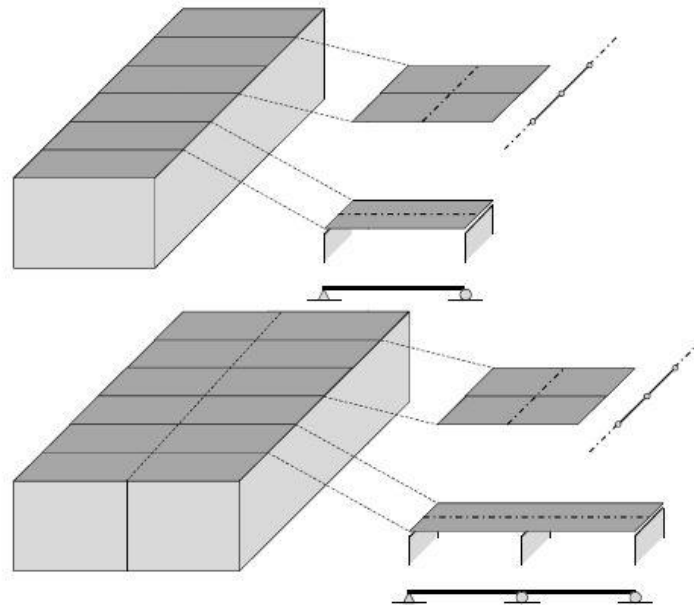


Figura 16 – Principio strutturale e giunti della soletta XLAM [6]

E' senz'altro interessante sottolineare come l'XLAM permetta la realizzazione di elementi con capacità portante a flessione nelle due direzioni del piano. L'elemento di piastra formato da un unico pannello XLAM, o da più pannelli uniti in modo da assicurare la continuità della rigidità flessionale permette di ottenere un elemento di questo tipo.

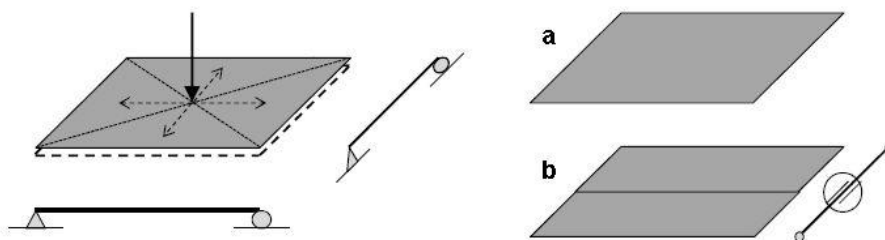


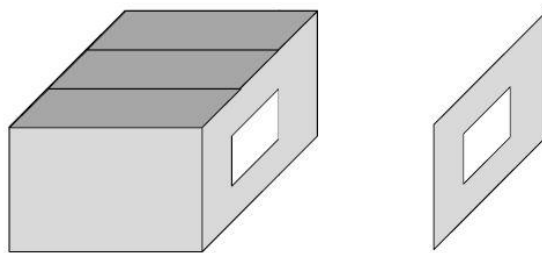
Figura 17 – Piastra con funzione portante in due direzioni: a) elemento unico; b) elemento composto da più parti con giunti rigidi [6]

Può essere utile e interessante sfruttare questa caratteristica laddove si presentano elementi ad angolo con sbalzi nelle due direzioni, o in caso di necessità di ridurre al minimo lo spessore della struttura. Dove queste situazioni non possono essere risolte con un unico pannello XLAM, i giunti fra i diversi pannelli dovranno essere concepiti e dimensionati in modo da garantire una sufficiente rigidità e resistenza tanto a flessione quanto a taglio.

### **2.5.2 Pareti XLAM**

La parete strutturale di XLAM può essere vista come un montante o un pilastro di lunghezza continua (vedi figura 14). Lo spessore minimo degli elementi di parete è determinato principalmente dai carichi verticali agenti sulla parete, ma anche dalle esigenze di rigidità e di resistenza spesso non direttamente considerate nel calcolo strutturale ma non per questo da sottovalutare: di quest'ultimo fanno parte le esigenze legate direttamente o indirettamente all'isolamento fonico, alla presenza di una massa sufficiente nella costruzione e alla necessità di offrire, comunque, anche localmente o in presenza di aperture anche di piccola dimensione, una sufficiente rigidità e resistenza dell'elemento strutturale. Pur ammettendo che il calcolo strutturale dell'elemento di parete nella sua globalità può portare a spessori minimi degli elementi di parete piuttosto ridotti, e che la realizzazione di pareti molto sottili è senz'altro possibile, è consigliabile di valutare molto attentamente e nel dettaglio la scelta di spessori delle pareti esterne al di sotto di 110 mm, o delle pareti portanti interne al di sotto di 100 mm.

La presenza di aperture nelle pareti rappresenta la situazione strutturale particolare per eccellenza degli elementi di parete. L'apertura crea un'interruzione del flusso di forze verso il basso, che deve essere deviato sulle zone a lato delle aperture, dove si crea una concentrazione di carichi e di sollecitazioni. Nella zona sopra l'apertura è necessario un elemento strutturale che garantisca una rigidità ed una resistenza a flessione sufficienti a fungere da architrave. Le pareti di XLAM si prestano particolarmente bene in queste circostanze, in quanto la sezione verticale della parte di parete al di sopra dell'apertura è costituita anche da un numero di strati di tavole orizzontali, che possono essere adibiti alla funzione di architrave. In presenza di un'altezza sufficiente di questa parte di parete, l'architrave di rinforzo della parete, sopra all'apertura, è quindi disponibile senza l'aggiunta di ulteriori rinforzi.



**Figura 18 – Parete con apertura [6]**

L'analisi strutturale di un elemento di parete di questo tipo si presenta come l'analisi di un elemento di lastra con una forma irregolare e richiede la determinazione delle forze interne della lastra e la verifica della sezione o delle parti con la sollecitazione più grande e determinante ai fini della verifica della sicurezza strutturale.

Le indicazioni sulle dimensioni minime dello spessore delle pareti indicate sopra sono valide in particolar modo per le pareti contenenti aperture o interruzioni, in quanto spesso – almeno in fase di primo dimensionamento della struttura – gli aspetti legati alla rigidità e alla resistenza delle pareti nella direzione orizzontale non vengono considerati.

### 2.5.3 Travi pareti XLAM

L'elemento strutturale della trave-parete o del diaframma con funzione strutturale di trave è poco conosciuto nelle strutture di legno, in quanto la formazione di elementi di questo tipo senza ricorrere all'XLAM è decisamente impegnativa e riservata a casi molto particolari. La parete di XLAM permette di offrire una soluzione anche in questo caso. La parete di XLAM si presta senz'altro ad assumere questa funzione, che è rappresentata in modo schematico nella figura seguente.

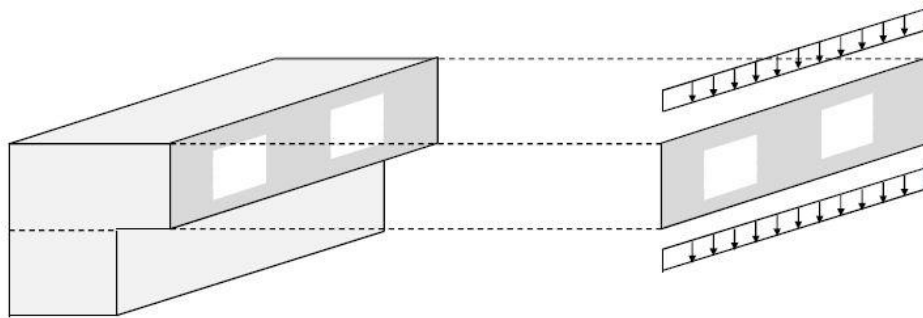


Figura 19 – Trave parete [6]

Anche in questo caso il calcolo strutturale richiede l'analisi dell'elemento di parete e la verifica delle sollecitazioni che ne risultano.

In questa considerazione rientra anche lo sfruttamento delle pareti quali elementi strutturali a formare la struttura tridimensionale dell'edificio. Le pareti possono quindi essere considerate come travi verticali, appoggiate alle pareti sottostanti, aprendo quindi la strada alla realizzazione di sistemi strutturali spaziali basati sull'uso delle superfici quali elementi strutturali principali. La realizzazione di strutture a sbalzo, sostenute dalle pareti ad esse perpendicolari è solo una delle molteplici applicazioni possibili.

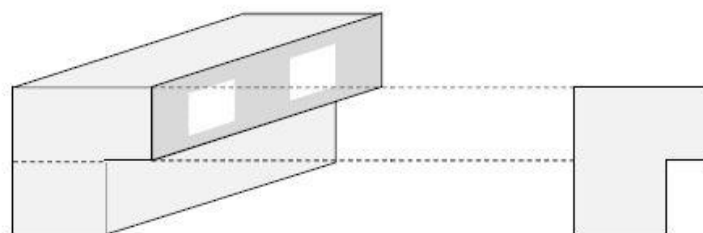


Figura 20 – Parete laterale quale elemento di sostegno dello sbalzo [6]



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### **3. IL CALCOLO DEGLI ELEMENTI STRUTTURALI DI XLAM**

Il calcolo strutturale dell'XLAM rappresenta una forma nuova del progetto delle strutture di legno per diverse ragioni. Prima fra tutte quella dell'uso strutturale di elementi piani di grandi dimensioni, che fino a pochi anni fa era completamente sconosciuto nella costruzione di legno, in quanto – fatta eccezione per i pannelli sottili – non esistevano elementi di questo tipo. Inoltre si tratta di un materiale completamente nuovo, per il quale al momento non esistono ancora normative di prodotto specifiche e che non è oggetto di trattazione specifica in nessuno dei testi di normativa attualmente e comunemente in uso da parte di strutturisti e addetti ai lavori. Ciò non significa però – come si vedrà più sotto – che non esista una base normativa su cui lavorare per questo prodotto; è anzi vero esattamente il contrario: le basi normative disponibili al momento permettono senza dubbio di considerare l'XLAM a tutti gli effetti facente parte delle conoscenze tecniche in esse contenute.

Le indicazioni che seguono vogliono dare le indicazioni necessarie per poter procedere in modo tecnicamente e formalmente corretto al calcolo delle strutture progettate con l'XLAM. Si tratta di un'introduzione al tema, toccando tutti gli aspetti essenziali legati al calcolo degli elementi strutturali di XLAM, di cui verranno più avanti approfonditi gli aspetti legati agli elementi inflessi: i solai.

#### **3.1 Base normativa italiana**

La base normativa italiana per il calcolo degli elementi strutturali è data dalle Norme Tecniche per le Costruzioni, così come pubblicate in GU il 14.01.2008 e come entrate in vigore, dopo diverse vicissitudini in particolar modo per quanto concerne il legno, per tutte le strutture nuove a partire dal 1 luglio 2009.

In questo documento sono contenute tutte le basi e i principi per il calcolo delle strutture di legno, e più precisamente in 3 parti distinte:

- Nel capitolo “4. Costruzioni civili e industriali” si trova un sottocapitolo “4.4 Costruzioni di legno” che contiene in 12 pagine le indicazioni sui principi di calcolo da applicare e da seguire per gli elementi strutturali di legno;
- Nel capitolo “7. Progettazione per azioni sismiche” un sottocapitolo di 5 pagine “7.7 Costruzioni di legno” contiene le indicazioni essenziali e specifiche alle strutture di legno in zona sismica;
- Nel capitolo “11. Materiali e prodotti per uso strutturale” è contenuto un sottocapitolo “11.7 Materiali e prodotti a base di legno”, che in 8 pagine descrive le prestazioni legate all'omologazione e alla certificazione dei materiali di legno per uso strutturale.

Le prescrizioni contenute nel capitolo 4.4 sono molto succinte e contengono solo alcune indicazioni concrete sui modelli di calcolo che permettono di determinare la resistenza e la rigidezza degli elementi strutturali. Le indicazioni dettagliate si trovano nel CNR-DT 206/2007, dal titolo “Istruzioni per la



## **Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali**

Alessandro Baronio 750895

---

Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo delle strutture di Legno", che è quindi, di fatto, il complemento applicativo delle NTC.

Le indicazioni contenute nel capitolo 7.7 riguardano l'aspetto particolare della sicurezza sismica delle costruzioni di legno, cui si aggiungono alcune considerazioni generali in relazione alle costruzioni di legno in zona sismica, contenute nel capitolo 7.2.

Il capitolo 11.7 descrive le caratteristiche dei materiali e prodotti a base di legno. In esso sono descritti in modo esplicito il legno massiccio (capitolo 11.7.2), il legno con giunti a dita (capitolo 11.7.3) e il legno lamellare incollato (capitolo 11.7.4). Appare evidente come l'XLAM non rientri in nessuna di queste tre categorie e non sia quindi oggetto di questi capitoli o di un altro capitolo specifico delle NTC. L'XLAM è oggetto del capitolo "11.7.6 Altri prodotti derivati dal legno per uso strutturale", che rimanda alle procedure di qualificazione del capitolo 11.7.10.



### 3.2 *Gli elementi inflessi*

#### 3.2.1 *Analisi strutturale*

La determinazione degli sforzi interni delle solette di XLAM può in molti casi partire dal principio che l'elemento di XLAM è sottoposto alla sollecitazione di flessione e taglio in una sola direzione del piano. L'elemento inflesso diventa quindi l'elemento più semplice, e probabilmente anche quello più frequente, da calcolare e dimensionare. Il principio di calcolo indicato di seguito si applica comunque alla verifica della resistenza a flessione e a taglio del pannello XLAM, indipendentemente dal fatto che sia sollecitato in una sola oppure in entrambe le direzioni del suo piano.

#### 3.2.2 *Verifica a flessione*

La distribuzione delle sollecitazioni a flessione deve tenere conto della struttura a strati dell'elemento e delle differenti caratteristiche meccaniche dei singoli strati.

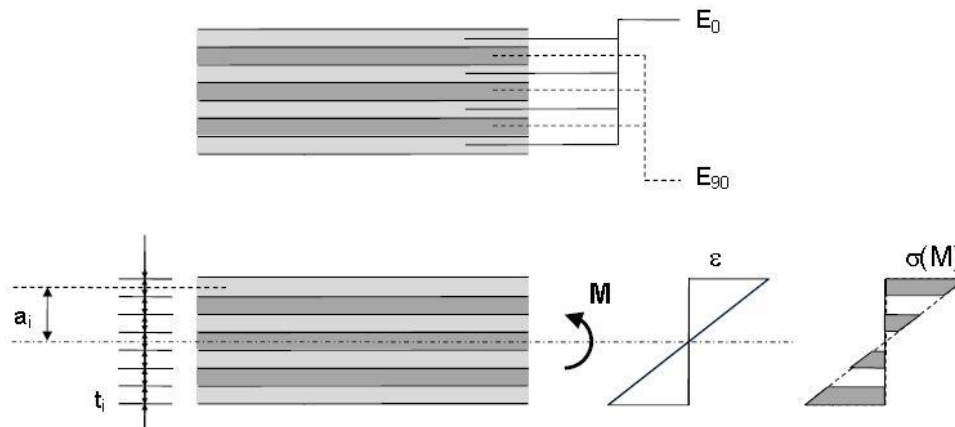


Figura 21 – Distribuzione delle sollecitazioni dovute al momento flettente  $M$  – Riferimenti geometrici [6]

Il calcolo della rigidezza flessionale della sezione di XLAM deve prendere in considerazione la differenza del modulo  $E$  fra i diversi strati di tavole; vista la grande differenza fra  $E_{90}$  e  $E_0$  è senz'altro indicato trascurare gli strati disposti trasversalmente.

La rigidezza flessionale della sezione dell'elemento XLAM, per una larghezza unitaria  $b$  dell'elemento stesso, è data dalla relazione:

$$K = EJ = \sum (J_i \cdot E_i) + \sum (A_i \cdot a_i^2 \cdot E_i) \quad (3.1)$$

Dove

- K = rigidezza flessionale nella direzione considerata
- $J_i$  = inerzia del singolo strato
- $E_i$  = modulo E del singolo strato
- $A_i$  = superficie del singolo strato
- $a_i$  = distanza dal baricentro della sezione
- $t_i$  = spessore del singolo strato

La distribuzione delle tensioni di flessione è indicata nella figura, e può essere determinata con:

$$\sigma = \frac{M}{K} \cdot a \cdot E_i \quad (3.2)$$

Dove

- M = momento flettente
- a = distanza dal baricentro della fibra considerata

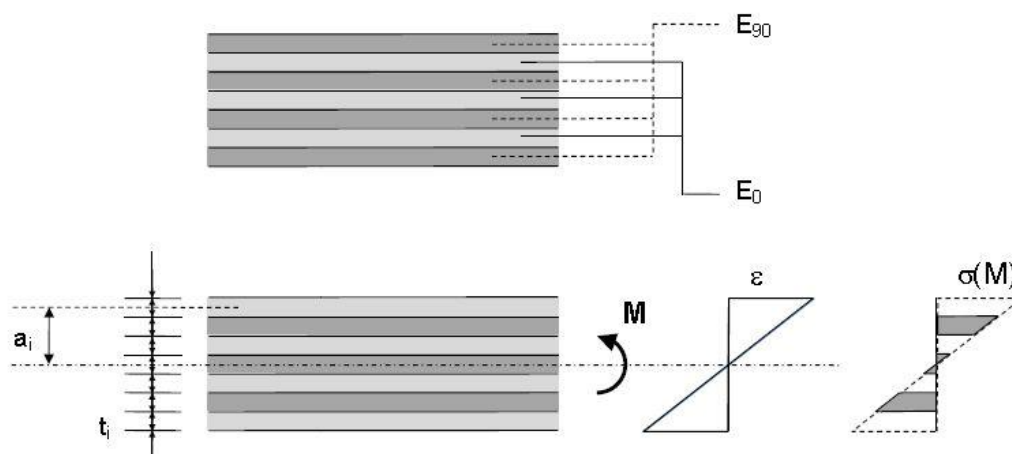
Nel caso di una sezione con strati di materiale della medesima classe di resistenza, il valore massimo della tensione di flessione è dato da:

$$\sigma = \frac{M}{W^*}, \quad \text{con} \quad W^* = \frac{K}{h/2} \cdot \frac{1}{E_0} \quad (3.3)$$

Dove

- h = altezza dell'elemento XLAM considerato
- $E_0$  = modulo E degli strati esterni considerati

Nel caso della flessione nell'altra direzione del pannello XLAM (spesso definita come la direzione debole), i due strati esterni possono essere trascurati, e lo stesso principio può essere applicato.



**Figura 22 – Direzione debole del pannello: distribuzione delle sollecitazioni dovute al momento M – Riferimenti geometrici [6]**



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

La verifica dello stato limite ultimo, a flessione, dell'XLAM può avvenire nella forma comune a tutte le verifiche:

$$\sigma_{m,d} \leq f_{m,d}, \quad \text{con} \quad f_{m,d,XLAM} = f_{m,d,BSH} \cdot K_{sys} \quad (3.4)$$

Dove

$f_{m,d,XLAM}$  = valore di calcolo della resistenza a flessione dell'XLAM

$f_{m,d,BSH}$  = valore di calcolo della resistenza a flessione del lamellare della classe di resistenza relativa alle lamelle considerate

$K_{sys}$  = coefficiente del sistema

Il valore della resistenza a flessione dell'elemento XLAM può essere ammesso come corrispondente alla resistenza a flessione del legno lamellare realizzato con le lamelle di uguale classe di resistenza. La similitudine della composizione della sezione considerata, in relazione allo stato limite ultimo, e i risultati della ricerca scientifica giustificano questa conclusione.

Il coefficiente di sistema permette di aumentare la resistenza di un elemento strutturale composto da più componenti sollecitati in parallelo, cioè in modo da poter redistribuire le sollecitazioni sui componenti più resistenti, alleviando quindi i più deboli. Il coefficiente di sistema è definito, fra l'altro, negli Eurocodici nella forma:

$$\begin{aligned} K_{sys} &= 1 + 0,025 \cdot n \\ K_{sys,max} &= 1,1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dove

$n$  = numero di lamelle sollecitate in parallelo,  $n > 1$

Il numero di lamelle efficaci ai fini della determinazione di  $K_{sys}$  deve essere definito sulla base della larghezza del pannello XLAM e sulla larghezza massima delle singole lamelle, come indicato dalla descrizione relativa all'omologazione del prodotto XLAM in questione. Di regola si può ammettere che con elementi di larghezza di almeno 1 metro, le condizioni sono date per ammettere  $K_{sys} = 1,1$ . In caso di sollecitazioni non costanti su almeno questa larghezza, come per esempio il caso di sollecitazioni non omogenee o localmente più elevate, il coefficiente di sistema non può essere applicato.

Le indicazioni relative al valore di calcolo della resistenza a flessione dell'XLAM si riferiscono al modello di calcolo generico citato sopra. In alternativa a questo valore, possono essere applicati i valori di calcolo (o caratteristici) della resistenza a flessione relativi al singolo prodotto, come indicati nelle omologazioni o nei profili prestazionali ad essi riferiti.

Nel caso di flessione biassiale, la verifica deve essere eseguita per le due direzioni del piano in modo indipendente, considerando in entrambi i casi la tensione flessionale massima nelle tavole con la fibratura orientata nella direzione della sollecitazione considerata.

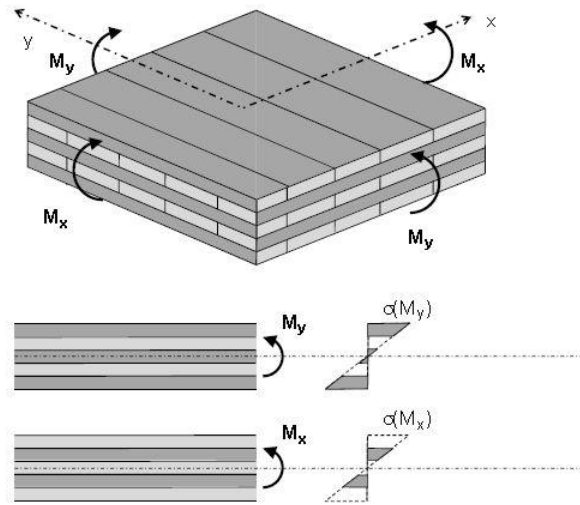


Figura 23 – Flessione biassiale nel piano della piastra [6]

La verifica assume la forma seguente:

$$\sigma_{mx,max,d} \leq f_{m,d,XLAM} \quad e \quad \sigma_{my,max,d} \leq f_{m,d,XLAM} \quad (3.6)$$

Nel caso di presenza di forze assiali sull'elemento XLAM, queste possono essere determinate seguendo il medesimo principio, trascurando gli strati con la fibratura trasversale rispetto alla direzione della forza assiale e sovrapponendo le tensioni flessionali a quelle dovute alla forza assiale. Anche in questo caso, la verifica deve essere fatta nelle due direzioni del piano del pannello, considerando ogni volta la tensione più grande relativa allo strato nella direzione considerata.

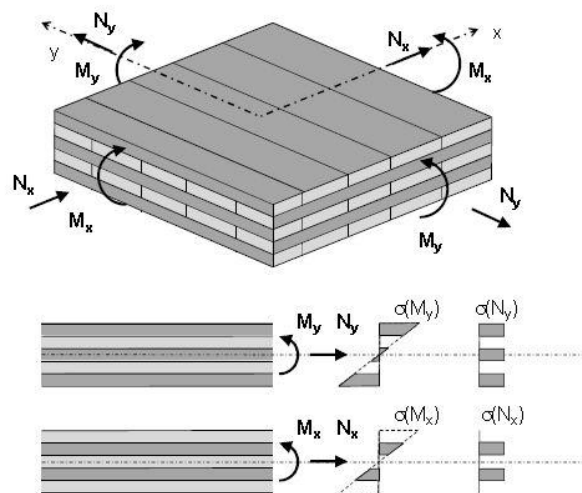


Figura 24 – Flessione biassiale e forze normali [6]

Le verifiche assumono quindi la forma:

$$\frac{\sigma_{mx,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} + \frac{\sigma_{cx,max,d}}{f_{c,d,XLAM}} \leq 1 \quad e \quad \frac{\sigma_{my,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} + \frac{\sigma_{cy,max,d}}{f_{c,d,XLAM}} \leq 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{\sigma_{mx,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} + \frac{\sigma_{tx,max,d}}{f_{t,d,XLAM}} \leq 1 \quad e \quad \frac{\sigma_{my,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} + \frac{\sigma_{ty,max,d}}{f_{t,d,XLAM}} \leq 1 \quad (3.8)$$

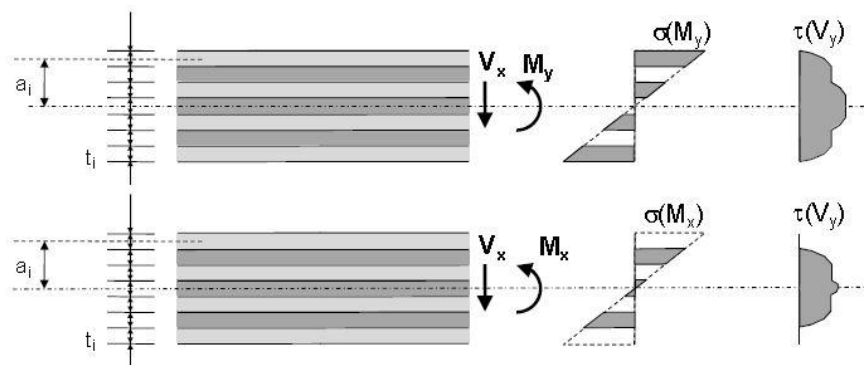
Dove

$f_{c,d,XLAM} = f_{c,d,BSH}$  = valore di calcolo della resistenza a compressione del lamellare della classe di resistenza relativa alle lamelle considerate

$f_{t,d,XLAM} = f_{t,d,BSH}$  = valore di calcolo della resistenza a trazione del lamellare della classe di resistenza relativa alle lamelle considerate

### 3.2.3 Verifica a taglio

La verifica a taglio trasversale al piano della lastra (taglio dovuto a flessione) avviene seguendo il medesimo principio indicato per la verifica a flessione. La determinazione delle tensioni di taglio sulla sezione considerata deve tener conto delle caratteristiche diverse dei singoli strati. In questo caso non sarebbe ragionevole definire come trascurabili gli strati con la fibratura trasversale rispetto alla direzione considerata, in quanto questi strati sono essenziali per la trasmissione della sollecitazione di taglio fra gli strati disposti parallelamente alla direzione considerata.



**Figura 25 – Flessione e taglio trasversale al piano con la rispettiva distribuzione delle tensioni sulla sezione [6]**

Il calcolo della distribuzione delle tensioni di taglio è dato dalla relazione:

$$\tau(a) = \frac{V \cdot \sum (S_m \cdot E_m)}{K \cdot b} \quad (3.9)$$

Dove



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

- b = larghezza dell'elemento considerato  
 $S_m$  = momento statico della parte di sezione

Le curve con la distribuzione delle tensioni tangenziali mostra come le stesse possano raggiungere il loro valore massimo negli strati trasversali della sezione considerata. La verifica dello stato limite ultimo deve tener conto del fatto che la resistenza a taglio dipende dalla direzione dell'orientazione della fibratura dell'elemento considerato. Quindi, oltre alla verifica a taglio sulla base della resistenza a taglio usuale, occorre comunque verificare la resistenza a taglio negli strati trasversali, dove la resistenza a taglio risulta essere molto più ridotta. Negli strati trasversali è determinante la resistenza a taglio trasversale, dove il collasso del materiale è dato dal raggiungimento della resistenza a trazione perpendicolare alla fibratura nella direzione della sollecitazione principale, inclinata di  $45^\circ$  rispetto all'asse dell'elemento considerato, o di inclinazione di  $\pm 45^\circ$  delle tensioni principali. Si parla in questo caso di taglio trasversale, indicandone la resistenza corrispondente con l'indice "r", dalla definizione inglese di "rolling shear", che a sua volta si ispira alla forma del collasso in questo caso particolare.

Si ricorda che la distribuzione delle tensioni descritta in questo modo rappresenta un'approssimazione, in quanto le deformazioni a taglio dei singoli strati non vengono considerate. Questo modo di procedere può essere giustificato dal fatto che per elementi con uno spessore sufficientemente ridotto (rapporto fra spessore e luce dell'elemento superiore a 10) le differenze sono praticamente trascurabili.

La verifica a taglio assume quindi la doppia forma:

$$\tau_d \leq f_{v,d} \quad \text{per gli strati nella direzione considerata, e} \quad (3.10)$$

$$\tau_d \leq f_{v,r,d} \quad \text{per gli strati trasversali rispetto alla direzione considerata.} \quad (3.11)$$

La resistenza a taglio  $f_v$  deve, secondo il modello di calcolo già citato, essere definita identica a quella del legno lamellare incollato della classe di resistenza corrispondente alla classe di resistenza delle lamelle che compongono l'XLAM. Il medesimo principio vale per la determinazione della resistenza a taglio rotatorio, il cui valore è pari al doppio della resistenza a trazione perpendicolare alla fibratura secondo gli Eurocodici, mentre assume un valore simile, ma definito in modo assoluto e specifico secondo altre fonti. Lo stesso modello permette di aumentare del 25% questo valore della resistenza a taglio rotatorio, in modo da considerare anche in questo caso il già citato effetto di sistema.

I valori di calcolo della resistenza si ottengono, come di consueto, partendo dai valori caratteristici e applicando i coefficienti di correzione e sicurezza appositi:

$$f_{v,d} = \frac{k_{\text{mod}} \cdot f_{v,k}}{\gamma_m} \quad \text{e} \quad f_{v,r,d} = \frac{k_{\text{mod}} \cdot f_{v,r,k}}{\gamma_m}$$

A dipendenza della composizione dell'XLAM e della direzione considerata, una delle due verifiche risulterà essere quella determinante. Di regola, visto il valore decisamente molto basso della resistenza a taglio rotatorio, questa verifica risulta determinante rispetto alla verifica a taglio longitudinale.

### 3.2.4 Pressione trasversale al piano del pannello

Nella direzione dello spessore del pannello, tutti gli strati sono sollecitati perpendicolarmente alla fibratura. Agli appoggi per contatto dei vari elementi orizzontali si presenta quindi la medesima situazione di rischio di schiacciamento trasversale alla fibratura come per tutti gli elementi strutturali di legno. Nel caso dell'XLAM la situazione si presenta all'appoggio degli elementi di soletta su una parete.

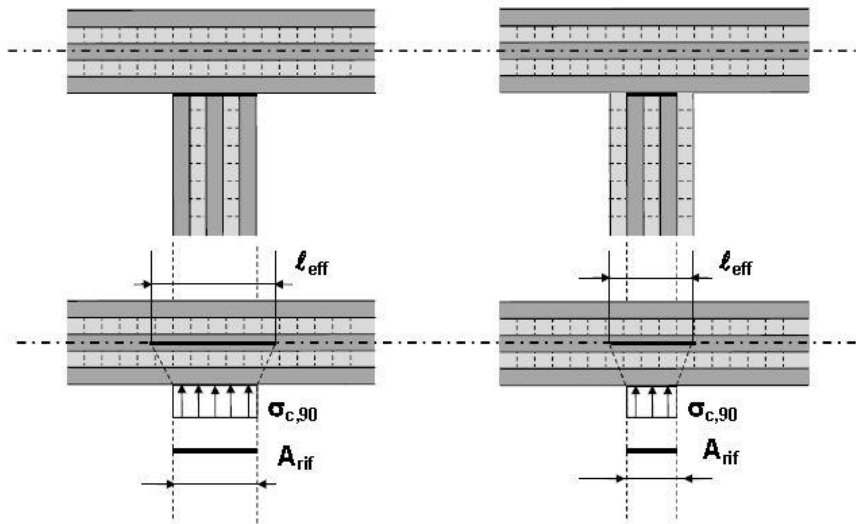


Figura 26 – Compressione perpendicolare alla fibratura agli appoggi [6]

Il calcolo delle tensioni perpendicolari alla fibratura avviene sulla base di una superficie di contatto di riferimento, che è determinata dalla larghezza degli strati verticali che introducono la forza nella soletta XLAM; in altri termini, gli eventuali strati orizzontali, esterni, della parete non sono considerati nel calcolo. In caso di appoggio omogeneo, per esempio con altri materiali, si considera la superficie effettiva di contatto. La verifica assume quindi la forma:

$$\sigma_{c,90,d} \leq f_{c,90,d} \quad (3.12)$$

La possibilità di aumentare il valore di calcolo della resistenza a compressione perpendicolare alla fibratura, come pure di determinare il valore di  $\sigma_{c,90,d}$  sulla base di una larghezza effettiva e più grande della larghezza di contatto reale, rimangono invariate. Nell'Eurocodice 5 questa possibilità è presa in considerazione tramite il coefficiente  $k_{90}$ ; nel DT 206, che è la base di calcolo valida in Italia, la determinazione della lunghezza di appoggio effettiva è definita in modo diverso.

### 3.2.5 Verifica dello stato di servizio e calcolo delle deformazioni

Per il calcolo dello stato di servizio del caso semplice di un carico distribuito su tutta la superficie dell'elemento è sufficiente definire i valori della rigidezza a flessione e taglio dell'XLAM in funzione della sua stratigrafia.

La rigidezza a flessione è già stata definita ed è data dalla relazione:

$$K = EJ = \sum (J_i \cdot E_i) + \sum (A_i \cdot a_i^2 \cdot E_i) \quad (3.1)$$

Dove

- K = rigidezza flessionale nella direzione considerata
- $J_i$  = inerzia del singolo strato
- $E_i$  = modulo E del singolo strato
- $A_i$  = superficie del singolo strato
- $a_i$  = distanza dal baricentro della sezione
- $t_i$  = spessore del singolo strato

La rigidezza a taglio dell'XLAM deve considerare l'effetto dei singoli strati e della loro diversa rigidezza a taglio. Il modulo G varia infatti a dipendenza dell'orientazione della sollecitazione; si definisce quindi un modulo  $G_0$  per la sollecitazione a taglio longitudinale e un modulo  $G_{90}$  per la sollecitazione a taglio rotatorio.

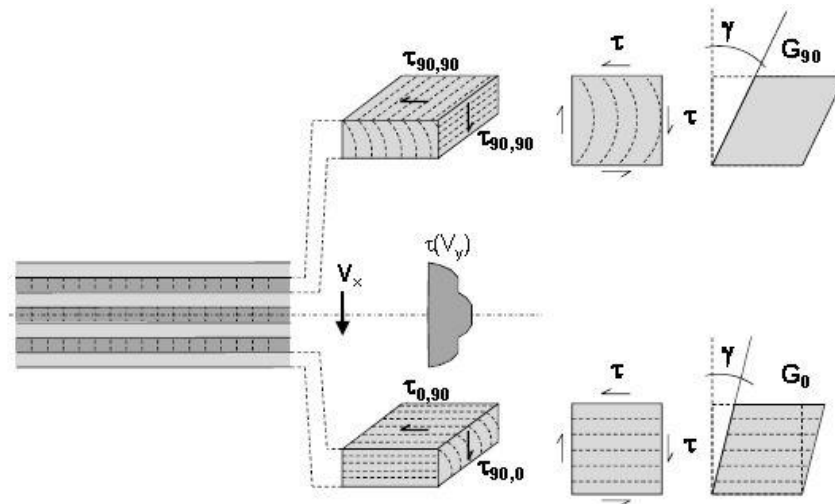


Figura 27 – Sollecitazioni a taglio e definizione del taglio rotatorio, con i moduli  $G_0$  e  $G_{90}$  [6]

La rigidezza a taglio della sezione si ottiene con:

$$S_v = GA' = \kappa \cdot \sum (G_i \cdot b_i \cdot t_i) = \kappa \cdot \sum (G_i \cdot A_i) \quad (3.13)$$

Dove

- $S_v$  = rigidezza a taglio nella direzione considerata
- $G_i$  = modulo di taglio del singolo strato
- $A_i$  = superficie del singolo strato
- $b_i$  = larghezza dell'elemento considerato
- $t_i$  = spessore del singolo strato
- $\kappa$  = coefficiente di correzione





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Il coefficiente di correzione  $\kappa$  permette di considerare le caratteristiche non uniformi su tutto lo spessore del materiale e dipende dalla geometria e dalle caratteristiche dei singoli strati. Nella forma completa può essere espresso nel modo seguente:

$$\kappa = \frac{1}{\sum (G_l \cdot A_l) \frac{1}{J^2} \int \frac{S^2(z)}{G_l(z) \cdot b} dz} \quad (3.14)$$

Dove

$S(z)$  = momento statico

$z$  = asse verticale (spessore del materiale)

Il valore di  $\kappa$  varia in funzione del numero di strati, del rapporto fra  $G_0$  e  $G_{90}$  e dello spessore dei singoli strati. L'analisi delle variazioni di questo coefficiente mostra come, per uno spessore costante dei singoli strati e per un rapporto fra  $G_0$  e  $G_{90}$  uguale a 10 si ottengono i valori seguenti:

	Numero strati					
	3	5	7	9	11	13
$\kappa$	0,21	0,24	0,26	0,27	0,27	0,27

Anche considerando una composizione dell'XLAM con strati di spessore diverso, e con un numero di strati più importante in una direzione rispetto all'altra, si può constatare come il valore di  $\kappa$ , per le stratigrafie di rilevanza effettiva nelle applicazioni pratiche, assuma sempre valori fra 0,20 e 0,30. Sulla base della constatazione che le deformazioni dovute all'effetto delle forze di taglio trasversali al pannello non superano di regola il 20% delle deformazioni totali, si può ammettere l'uso di un valore costante per il calcolo delle deformazioni effettive degli elementi strutturali. L'errore commesso è sufficientemente piccolo, da poter giustificare questo modo di procedere.

I valori caratteristici della rigidezza del materiale sono definiti dai profili prestazionali del materiale, compresi i valori di  $G_0$  (modulo di taglio "normale") e di  $G_{90}$ . Anche in questo caso, in modo generale valgono i valori relativi al legno lamellare composto da lamelle della corrispondente classe di resistenza. In alcune normative europee il valore di  $G_{90}$  è definito nel modo seguente:

$$G_{90} = \frac{G_0}{10} \quad (3.15)$$

Anche in questo caso, spesso le omologazioni dei singoli prodotti contengono indicazioni dettagliate al riguardo; possono quindi essere applicati i valori di calcolo (o caratteristici) della rigidezza relativi al singolo prodotto, come indicati nelle omologazioni o nei profili prestazionali ad essi riferiti.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Le caratteristiche reologiche del legno giocano un ruolo essenziale nel comportamento deformativo globale dell'elemento, caratterizzato infatti da un andamento solo inizialmente elastico, che diventa ben presto di tipo visco – elastico (fluage), causando un progredire della deformazione nel tempo sotto carico costante. Oltre determinati valori tensionali, inoltre, il recupero elastico al cessare dei carichi accidentali (per esempio stagionali) non è più completo, generando un accumulo di deformazioni irreversibili.

Non ci si può, dunque, limitare a prendere in considerazione la sola *freccia istantanea* (carichi di breve durata), ma va controllata anche quella *differita* (carichi prolungati nel tempo), soprattutto nel caso in cui le azioni che agiscono sull'elemento strutturale in modo permanente (pesi propri e permanenti, carico neve in alcune località di montagna) risultino percentualmente elevate rispetto al carico totale.

La deformazione finale,  $u_{fin}$ , si valuta come somma della deformazione istantanea,  $u_{ist}$ , e della deformazione dovuta al fluage,  $u_{dif}$ :

$$u_{fin} = u_{ist} + u_{dif} \quad (3.16)$$

Essa va calcolata sulla base delle combinazioni quasi permanenti. A scopo esemplificativo, nelle ipotesi che tutti gli elementi componenti siano caratterizzati da medesimi comportamenti reologici e da comportamento elastico – lineare, essa può quindi essere così espressa:

$$u_{fin} = u_{fin,G} + u_{fin,Q1} + u_{fin,Qi} \quad (3.17)$$

essendo:

$u_{fin,G} = u_{ist,G} \cdot (1 + k_{def})$  deformazione finale causata dalle azioni permanenti;

$u_{fin,Q1} = u_{ist,Q1} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$  deformazione finale causata dalla azione variabile principale,  $Q_1$ ;

$u_{fin,Qi} = u_{ist,Qi} \cdot (\psi_{0,i} + \psi_{2,i} \cdot k_{def})$  deformazione finale causata dalle altre azioni variabili,  $Q_i$  ( $i > 1$ );

$u_{ist,G}$ ;  $u_{ist,Q1}$ ;  $u_{ist,Qi}$  deformazioni istantanee relative, rispettivamente, alle azioni  $G$ ,  $Q_1$  e  $Q_i$ ;

$k_{def}$  è un coefficiente che tiene conto dell'aumento di deformazione con il tempo causato dall'effetto combinato della viscosità e dell'umidità del materiale.

In base alle indicazioni del documento DT 206:2007 e delle Norme Tecniche per le Costruzioni, le verifiche da effettuare risultano:

$$u_{2,ist} \leq l/300$$

$$u_{2,fin} \leq l/200$$

$$u_{net,fin} \leq l/250$$

Dove  $u_2$  è la freccia dovuta ai soli carichi variabili ed  $l$  è la luce libera della trave appoggiata, mentre per gli sbalzi  $l$  è pari a due volte la lunghezza dello sbalzo stesso.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### 3.2.6 Vibrazioni

La verifica delle vibrazioni è un aspetto abbastanza delicato non ampiamente discusso e trattato in sede di normativa italiana.

L'unica indicazione che si trova di fatto è il punto 6.4.4 del documento DT 206:2007, il quale cita *“Nel progetto devono essere tenuti opportunamente in conto gli effetti prodotti da urti e vibrazioni, ecc., anche al fine di ridurre i disagi per gli utenti, in particolare per strutture aperte al pubblico.*

*Nel caso di solai sui quali è previsto un intenso calpestio, salvo ulteriori esigenze specifiche, la frequenza naturale più bassa non dovrà essere inferiore a 6 Hz.”*

Facendo invece riferimento all'Eurocodice 5 i solai residenziali devono avere frequenza fondamentale maggiore di 8 Hz, proponendo, per il calcolo di  $f_1$ , per un solaio rettangolare avente dimensioni globali  $l \times b$  semplicemente appoggiato su tutti e quattro i bordi e con travi di legno avente luce  $l$ , la seguente espressione:

$$f_1 = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{(EI)_i}{m}} \quad (3.18)$$

dove:

$m$  è la massa per unità di area, in  $\text{kg/m}^2$

$l$  è la luce del solaio, in m

$(EI)_i$  è la rigidezza di piastra equivalente a flessione del solaio intorno a un asse perpendicolare alla direzione delle travi, in  $\text{Nm}^2/\text{m}$

## 4. CARATTERIZZAZIONE MECCANICA DELLA LAMINA ORTOTROPA

### 4.1 Introduzione

L'analisi di un laminato presuppone la conoscenza del comportamento meccanico della singola lamina ed in particolare delle sue equazioni costitutive. Una lamina di composito è un elemento microscopicamente eterogeneo essendo la sua composizione praticamente variabile da punto a punto.

Dal punto di vista macroscopico, cioè considerando una scala grande rispetto alle dimensioni delle fibre, essa può però considerarsi omogenea. In questa scala, inoltre, essa esibisce un comportamento meccanico anisotropo, in particolare ortotropo.

Si ricordi che un materiale si dice anisotropo quando le sue caratteristiche variano continuamente con la direzione considerata. In particolare se il materiale ammette tre piani di simmetria mutuamente ortogonali, esso si dice ortotropo ed i piani di simmetria sono anche detti piani di ortotropia.

Per comprendere meglio la differenza tra materiali anisotropo generico ed uno ortotropo è utile osservare, per esempio, che l'applicazione di un carico di trazione ad un elemento di forma prismatica in materiale anisotropo, produce deformazioni e scorrimenti variabili lungo tutti i lati dell'elemento. Se invece il materiale anisotropo è in particolare ortotropo, allora esistono tre direzioni mutuamente ortogonali tali che l'applicazione di uno sforzo di trazione in tali direzioni produce, come per un isotropo, una deformazione costante senza distorsioni nei piani da queste individuate.

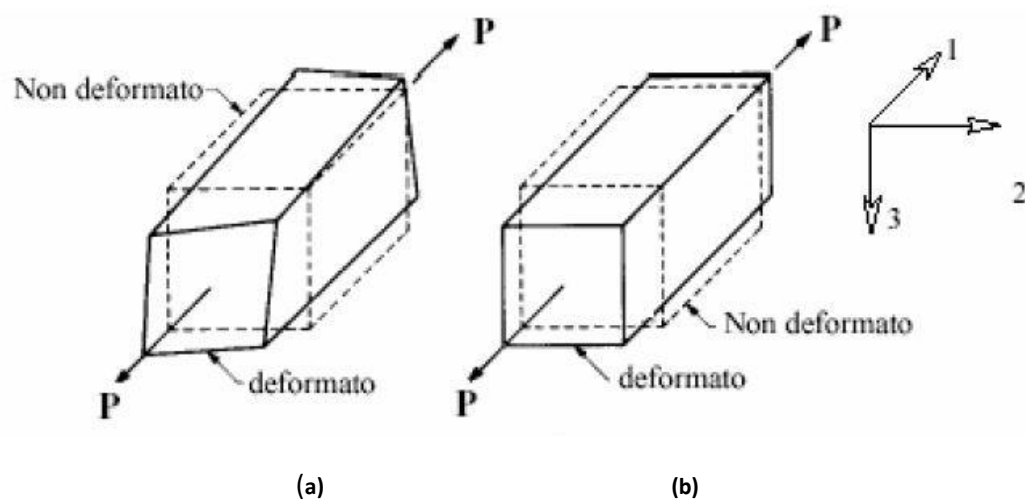


Figura 28 – Deformazione tipica di un materiale indefinito (a) ed ortotropo (b) soggetto a sforzo normale secondo una direzione principale [7]

Tali tre direzioni vengono denominate direzioni principali del materiale o anche direzioni di simmetria o assi naturali del materiale.

Considerando piuttosto che un cubetto di materiale, una lamina composita, si ha che se la direzione di applicazione del carico coincide con una direzione principale (Figura 29(a)) allora ad uno sforzo normale

semplice corrisponde uno stato di deformazione uniforme senza scorrimenti, mentre se la direzione del carico è deviata rispetto alle direzioni principali il carico produce anche scorrimenti nel piano (Figura 29(b)).

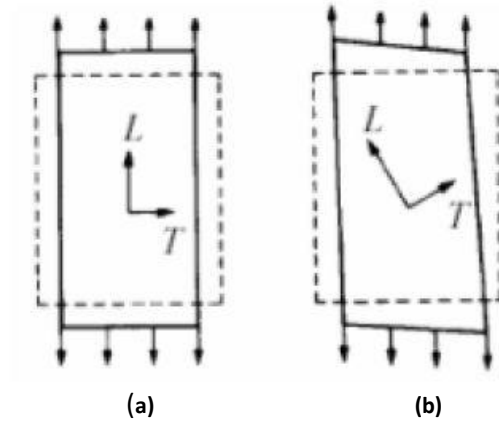


Figura 29 – Deformazione di una lamina ortotropa con carico secondo una direzione principale (a) e deviato (b) [7]

Vediamo ora quali sono le relazioni costitutive di una lamina composita ortotropa nella usuale ipotesi di comportamento elastico lineare e piccole deformazioni.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### 4.2 Legge di Hooke

Come è noto dalla teoria dell'elasticità, lo stato di tensione presente in un generico materiale nell'intorno del punto è univocamente descritto da nove componenti di tensione  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Lo stesso dicasi per lo stato di deformazione, descritto dalle nove componenti  $\varepsilon_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ). Conseguentemente, nell'ipotesi di comportamento elastico lineare, la relazione più generale tra tensioni e deformazioni (legge di Hooke generalizzata) si scrive come:

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.1)$$

Nel caso di materiale completamente anisotropo, pertanto, il legame tensioni-deformazioni, coinvolge ben  $9 \times 9 = 81$  costanti elastiche  $E_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ). In realtà poiché i tensori  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{kl}$  sono simmetrici, cioè solo 6 componenti sono indipendenti, le costanti elastiche indipendenti che descrivono il comportamento di un materiale anisotropo sono  $6 \times 6 = 36$ . Considerazioni di natura termodinamica, inoltre, consentono di ridurre ulteriormente tali costanti a sole 21. Detto  $U$  il potenziale elastico, si ha infatti che è:

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = \sum_{kl} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.2)$$

Deviando pertanto questa rispetto alla generica componente di deformazione  $\varepsilon_{kl}$  si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left( \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = E_{ijkl} \quad (4.3)$$

Invertendo quindi l'ordine di derivazione e tenendo conto della continuità di  $U$  rispetto alle funzioni di deformazione, si ottiene quindi (Teorema di Shwartz):

$$E_{klij} = E_{ijkl} \quad (4.4)$$

Le (4.4) costituiscono un sistema di 15 equazioni indipendenti che consente appunto di ridurre le costanti da 36 a 21. Se il materiale anisotropo è in particolare ortotropo, cioè ammette tre piani di simmetria mutuamente ortogonali, allora è facile mostrare che le relative leggi costitutive coinvolgono solo 9 costanti elastiche indipendenti. Indicando infatti con 1,2,3 i tre assi principali del materiale, poiché, come osservato in precedenza, l'applicazione di una tensione  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) non produce distorsioni  $\varepsilon_j$  ( $i \neq j$ ) deve essere:

$$E_{ijkl} = 0 \quad \text{se } k \neq l \quad (4.5)$$

La (4.5) rappresenta un sistema di nove equazioni che consente di ridurre le costanti da 21 a 12.

Inoltre per la simmetria rispetto ai piani 1-2, 1-3, 2-3, l'applicazione di uno sforzo di taglio  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$  e  $i \neq j$ ) non produce distorsioni  $\varepsilon_{kl}$  ( $k \neq l$ ) negli altri piani ( $ij \neq kl$ ), cioè deve essere anche:

$$E_{ijkl} = 0 \quad \text{se } i \neq j, k \neq l \text{ e } ij \neq kl \quad (4.6)$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Per il principio di reciprocità delle tensioni tangenziali ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ), la (4.6) rappresenta semplicemente un sistema di 3 equazioni che consente di ridurre ulteriormente le costanti elastiche da 12 a sole 9. Le costanti elastiche di un materiale ortotropo possono essere vantaggiosamente ordinate in una matrice simmetrica 6x6 (matrice di elasticità) che consente di scrivere la legge di Hooke in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1133} & E_{2233} & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Nel caso di stato piano di tensione ( $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ) tale relazione può essere vanataggiosamente semplificata come:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

A partire dalla (4.8) è possibile, mediante semplice inversione della matrice di elasticità, ottenere la relazione tra deformazioni e tensioni:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

La matrice  $[S]$  prende il nome di matrice di elasticità inversa.

I termini significativi di  $[S]$  sono legati ai termini della matrice di elasticità dalle relazioni di inversione:

$$E_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; \quad E_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; \quad E_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}; \quad E_{33} = \frac{1}{S_{33}} \quad (4.10)$$

In conclusione si può affermare che le equazioni costitutive di un materiale anisotropo coinvolgono 21 costanti elastiche (ovvero matrici 6x6 piene simmetriche), quelle di un materiale ortotropo 9 costanti elastiche (matrici 6x6 sparse) che nel caso piano si riducono a sole 4 (matrici 3x3 sparse). In ogni caso si ha una maggiore complessità rispetto al caso dei materiali isotropi che coinvolgono, per stati bidimensionali e tridimensionali, solo 2 costanti elastiche ( $E, \nu$ ).

### 4.3 *Relazioni tra costanti elastiche e termini delle matrici di elasticità diretta e inversa*

In presenza di uno stato tensionale biassiale, il comportamento meccanico di una lamina ortotropa (Figura 30) è definito univocamente dalle 4 costanti  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$ .

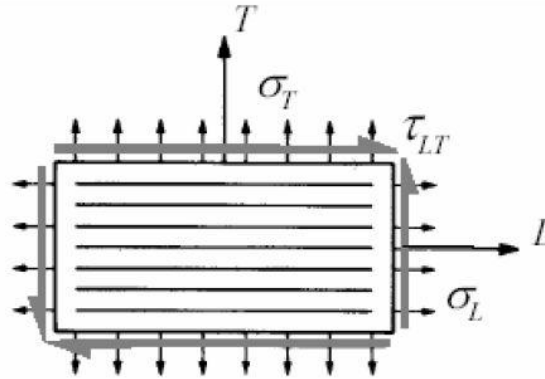


Figura 30 – Schema di lamina ortotropa caricata [7]

I legami tra tali costanti elastiche ed i termini della matrice di elasticità si ottiene considerando la lamina soggetta ad uno stato monoassiale di tensione diretto secondo le direzioni principali ed ad uno stato di taglio puro. Per una tensione monoassiale lungo la direzione longitudinale si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_L &= E_{11}\varepsilon_L + E_{12}\varepsilon_T \\ \sigma_T &= E_{12}\varepsilon_L + E_{22}\varepsilon_T\end{aligned}\tag{4.11-12}$$

che risolte rispetto alle deformazioni forniscono:

$$\begin{aligned}\varepsilon_L &= \frac{E_{22}}{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}\sigma_L \\ \varepsilon_T &= -\frac{E_{12}}{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}\sigma_T\end{aligned}\tag{4.13-14}$$

Tenendo quindi conto della definizione di modulo di Young e di coefficiente di Poisson, dalle precedenti equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}E_L &= \frac{\sigma_L}{\varepsilon_L} = \frac{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}{E_{22}} \\ \nu_{LT} &= -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = \frac{E_{12}}{E_{22}}\end{aligned}\tag{4.15-16}$$





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Considerando invece una tensione monoassiale in direzione trasversale, con analogo procedimento di ottiene:

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{\sigma_T}{\varepsilon_T} = \frac{E_{11}E_{22} - E_{12}^2}{E_{11}} \\ \nu_{TL} &= -\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_T} = \frac{E_{12}}{E_{11}} \end{aligned} \quad (4.17-18)$$

Considerando infine una sollecitazione di taglio puro, si ha:

$$\tau_{12} = E_{33}\gamma_{LT} \quad (4.19)$$

da cui si ottiene immediatamente:

$$G_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{\gamma_{LT}} = E_{33} \quad (4.20)$$

Dalle relazioni (4.15-18) e (4.20) si ha quindi:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ E_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ E_{12} &= \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{\nu_{TL}E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ E_{33} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (4.21-24)$$

Si ricordi che in accordo alla (4.23), i due coefficienti di Poisson principali sono legati ai moduli di Young dalla relazione:

$$\frac{\nu_{LT}}{\nu_{TL}} = \frac{E_L}{E_T} \quad (4.25)$$

cosicché delle 5 costanti elastiche presenti a secondo membro delle (4.21-24) solo 4 sono indipendenti.

Utilizzando le (4.21-24) e tenendo conto della relazione (4.10) si ottengono immediatamente le relazioni tra i termini della matrice di elasticità inversa e le costanti elastiche:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_L} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_T} \\
 S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_L} = -\frac{\nu_{TL}}{E_T} \\
 S_{33} &= \frac{1}{G_{LT}}
 \end{aligned}
 \tag{4.26-29}$$

In definitiva, nel caso piano le matrici di elasticità diretta e inversa assumono la forma:

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix}; \quad [S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix}
 \tag{4.30}$$

Per una lamina ortotropa, essendo questa in particolare anche trasversalmente isotropa (isotropa nel piano ortogonale alla direzione longitudinale), nel caso tridimensionale le costanti elastiche indipendenti non sono 9 come per un generico ortotropo, bensì soltanto 5. Indicando infatti con  $T'$  la direzione ortogonale al piano LT, risulta:

$$E_{T'} = E_T; \quad G_{LT'} = G_{LT}; \quad \nu_{LT'} = \nu_{LT}
 \tag{4.31}$$

L'unica costante nuova è quindi  $\nu_{TT'}$  visto che per l'isotropia trasversale  $G_{TT'}$  è legato al coefficiente di Poisson  $\nu_{TT'}$  ed al modulo di Young  $E_T$  da una relazione identica a quella valida per gli isotropi:

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TT'})}
 \tag{4.32}$$

In presenza di stati tridimensionali pertanto, l'analisi della lamina ortotropa necessita della conoscenza di 5 costanti elastiche indipendenti.

#### 4.4 Matrici di elasticità diretta e inversa in un riferimento cartesiano arbitrario

Le matrici di elasticità e elasticità inversa individuate al paragrafo precedente permettono di scrivere le relazioni tensioni-deformazioni (e viceversa) nel riferimento principale L-T della lamina.

Se si considera un riferimento cartesiano arbitrario le relazioni tra tensioni e deformazioni divengono più complesse: le matrici di elasticità sono ora matrici piene, cioè con elementi tutti diversi da zero.

Le matrici di elasticità e di elasticità inversa in un generico riferimento cartesiano formante col riferimento principale un angolo generico  $\theta$ , si possono ottenere considerando le equazioni di trasformazione dello stato di tensione e di deformazione nell'intorno del punto, note dalla Scienza delle Costruzioni.

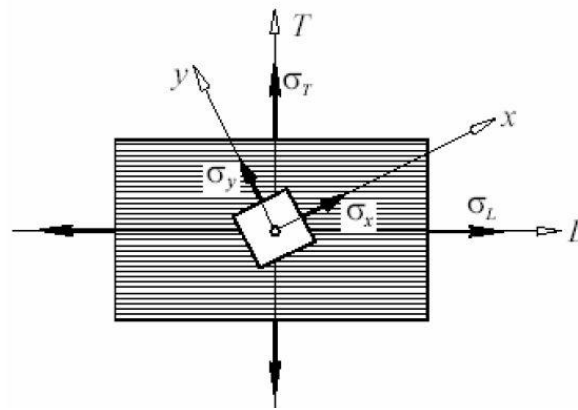


Figura 31 – Lamina ortotropica con riferimento cartesiano generico [7]

Tali relazioni infatti, essendo derivate da semplici considerazioni di equilibrio (le prime) e geometriche (le seconde) sono valide tanto per materiali isotropi che per materiali anisotropi.

Dalle relazioni generali per tensioni e deformazioni:

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} = \frac{(\sigma_L + \sigma_T)}{2} + \frac{(\sigma_L - \sigma_T)}{2} \cos 2\theta + \tau_{LT} \sin 2\theta = \sigma_L \cos^2 \theta + \sigma_T \sin^2 \theta + 2\tau_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{\theta} = -\frac{(\sigma_L - \sigma_T)}{2} \sin 2\theta + \tau_{LT} \cos 2\theta = -\sigma_L \sin \theta \cos \theta + \sigma_T \sin \theta \cos \theta + \tau_{LT} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (4.33)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\theta} = \frac{(\varepsilon_L + \varepsilon_T)}{2} + \frac{(\varepsilon_L - \varepsilon_T)}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{LT}}{2} \sin 2\theta = \varepsilon_L \cos^2 \theta + \varepsilon_T \sin^2 \theta + \gamma_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\gamma_{\theta}}{2} = -\frac{(\varepsilon_L - \varepsilon_T)}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{LT}}{2} \cos 2\theta = -\varepsilon_L \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_T \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{LT}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (4.34)$$

Con riferimento alla Figura 31 si ha in particolare:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_L \cos^2 \theta + \sigma_T \sin^2 \theta + 2\tau_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y = \sigma_L \sin^2 \theta + \sigma_T \cos^2 \theta - 2\tau_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{xy} = -\sigma_L \sin \theta \cos \theta + \sigma_T \sin \theta \cos \theta + \tau_{LT} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_L \cos^2 \theta + \varepsilon_T \sin^2 \theta + \gamma_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \varepsilon_y = \varepsilon_L \sin^2 \theta + \varepsilon_T \cos^2 \theta - \gamma_{LT} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} = -\varepsilon_L \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_T \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{LT}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (4.36)$$

che in forma matriciale possono essere scritte come:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT}/2 \end{bmatrix} \quad (4.37-38)$$

avendo indicato con  $[T]$  la nota matrice di rotazione data da:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Utilizzando le (4.37-38) è infine possibile scrivere a partire dalle (4.9-10) le corrispondenti relazioni valide in un generico riferimento cartesiano.

Per la matrice di elasticità si ha:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = [T][E] \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = [T][\bar{E}] \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT}/2 \end{bmatrix} = [T][\bar{E}][T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

avendo indicato con  $[\bar{E}]$  la matrice che si ottiene dalla matrice  $[E]$  (riferita agli assi naturali del materiale) semplicemente sostituendo il termine  $G_{LT}$  con  $2G_{LT}$ .

Dividendo per due i termini della terza colonna della matrice  $[T]^{-1}$  ed indicando con  $[\tilde{T}]$  la matrice così ottenuta, la (4.40) si scrive in forma compatta come:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\tilde{E}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad [\tilde{E}] = [T][\bar{E}][\tilde{T}]^{-1} \quad (4.41)$$

essendo in pratica:

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{11} &= E_{11} \cos^4 \theta + E_{22} \sin^4 \theta + 2(E_{12} + 2E_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 \tilde{E}_{12} &= (E_{11} + E_{22} - 4E_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + E_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \tilde{E}_{22} &= E_{11} \sin^4 \theta + E_{22} \cos^4 \theta + 2(E_{12} + 2E_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 \tilde{E}_{13} &= (E_{11} - E_{12} - 2E_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta - (E_{22} - E_{12} - 2E_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \tilde{E}_{23} &= (E_{11} - E_{12} - 2E_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta - (E_{22} - E_{12} - 2E_{33}) \cos^3 \theta \sin \theta \\
 \tilde{E}_{33} &= (E_{11} + E_{22} - 2E_{12} - 2E_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + E_{33} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
 \end{aligned} \tag{4.42-47}$$

Invertendo la (4.41) si ottiene immediatamente la relazione generale tra deformazioni e tensioni coinvolgente la matrice di elasticità inversa nel riferimento cartesiano generico:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\tilde{S}] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad [\tilde{S}] = [\tilde{E}]^{-1} = [T][\tilde{S}][\bar{T}]^{-1} \tag{4.48}$$

con:

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + S_{22} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 \tilde{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \tilde{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 \theta + S_{22} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 \tilde{S}_{13} &= 2(2S_{11} - 2S_{12} - S_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta - 2(2S_{22} - 2S_{12} - S_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \tilde{S}_{23} &= 2(2S_{11} - 2S_{12} - S_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta - 2(2S_{22} - 2S_{12} - S_{33}) \cos^3 \theta \sin \theta \\
 \tilde{S}_{33} &= 2(2S_{11} + S_{22} - 4S_{12} - S_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{33} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
 \end{aligned} \tag{4.42-47 bis}$$

Svolgendo i prodotti matriciali a destra delle (4.41) e (4.48) è facile verificare che le matrici di elasticità e di elasticità inversa nel riferimento generico sono matrici piene.

Ciò rende in pratica più complessa l'applicazione della legge di Hooke per passare dalle tensioni alle deformazioni o viceversa.

Per questo nella pratica la legge di Hooke viene solitamente applicata previa riduzione di deformazioni e tensioni nel riferimento principale del materiale utilizzando le relazioni generali di trasformazione dello stato tensionale e di deformazione nell'intorno del punto (eq. 4.35-36).

## 5. ESTENSIONE A COMPOSITI DI LAMINE ORTOTROPE: TEORIA CLASSICA DEI LAMINATI

### 5.1 Formulazione della teoria classica dei laminati

L'andamento delle deformazioni e delle tensioni in un laminato composito può essere facilmente ottenuto se sono soddisfatte alcune ipotesi semplificative quali:

1. le lamine costituenti il laminato siano perfettamente incollate cosicché nessuno scorrimento reciproco si può verificare sotto l'azione di carichi applicati (continuità di spostamenti e deformazioni all'interfaccia tra due lamine adiacenti);
2. il generico segmento rettilineo ortogonale al piano medio del laminato (vedi Figura 32) rimane rettilineo e ortogonale al piano medio anche a deformazione avvenuta, cioè  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ;
3. la deformazione  $\varepsilon_z$  sia piccola e trascurabile rispetto alle altre deformazioni  $\varepsilon_x$  ed  $\varepsilon_y$ ;
4. lo spessore del laminato sia piccolo rispetto alle altre dimensioni.

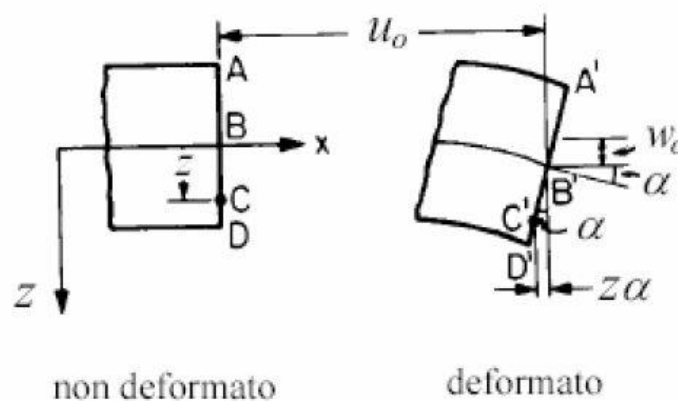


Figura 32 – Sezione non deformata e deformata di laminato di piccolo spessore: notazione generale [7]

Sotto queste ipotesi, considerando un generico segmento rettilineo ortogonale al piano medio ed indicando con  $u_0$ ,  $v_0$  ed  $w_0$  le componenti lungo  $x, y$  e  $z$  dello spostamento subito dal punto appartenente al piano medio del laminato (Figura 32), si ha allora che lo spostamento  $u$  lungo  $x$  subito dal generico punto del segmento distante  $z$  dal piano medio è dato da:

$$u(z) = u_0 - \alpha z \tag{5.1}$$

essendo  $\alpha$  la rotazione subita dal segmento considerato. Tenendo conto delle ipotesi fatte, tale rotazione è legata allo spostamento lungo  $z$  dalla relazione:

$$\alpha(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{5.2}$$

Sostituendo la (5.2) nella (5.1) si ha pertanto:

$$u(z) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (5.3)$$

Con analogo procedimento, considerando la deformazione in direzione y si ottiene anche:

$$v(z) = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (5.4)$$

Utilizzando le equazioni di congruenza, per le deformazioni nel piano x-y si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x^0 + z k_x \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y^0 + z k_y \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} \end{cases} \quad (5.5-6)$$

avendo indicato con  $k_x, k_y$  e  $k_{xy}$  le curvatures del piano medio del laminato nel piano x-z, y-z e x-y. Le espressioni possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

La (5.7) mostra che le componenti di deformazione significative variano tutte linearmente nello spessore z del laminato.

Se le deformazioni variano linearmente lungo z, non così avviene solitamente per le tensioni. In ciascuna lamina del laminato esse infatti sono legate alle deformazioni dalle relazioni tensioni-deformazioni viste al capitolo precedente.

Per la k-esima lamina:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Tenendo conto che la matrice  $[\tilde{E}]_k$  varia da una lamina all'altra dipendendo oltre che dalle peculiari caratteristiche della lamina anche dal relativo orientamento, in virtù delle espressioni sopra riportate si ha che a differenza delle deformazioni le tensioni hanno un andamento lineare nella generica sezione del laminato, ma presentano in genere dei salti passando da una lamina all'altra.

L'andamento è invece lineare all'interno di ciascuna lamina. A titolo di esempio la figura seguente mostra l'andamento qualitativo di una possibile distribuzione delle tensioni in un laminato costituito da tre lamine sovrapposte:

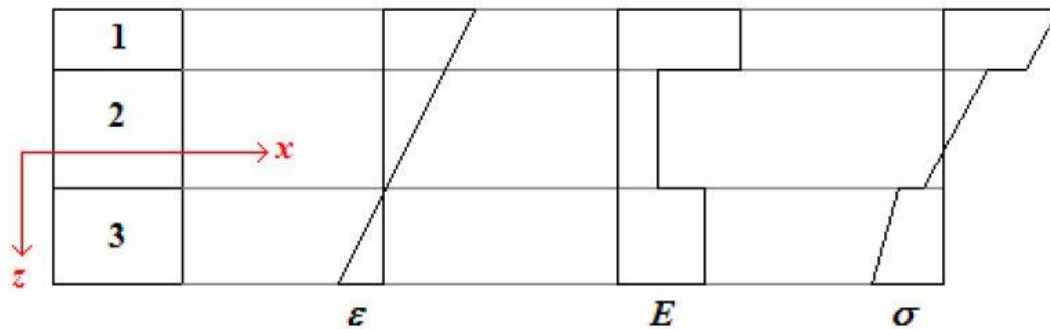


Figura 33 – Tipico andamento di deformazioni e tensioni in laminato composito [7]



## 5.2 Matrici di rigidità del laminato

Le relazioni viste in precedenza legano le tensioni presenti su ciascuna lamina con le corrispondenti deformazioni e curvatures del piano medio del laminato. A partire da queste è possibile individuare (in forma matriciale) il legame esistente tra le caratteristiche di sollecitazione del laminato (sforzo normale, momento torcente e flettente) per unità di larghezza del laminato e le componenti di deformazione del piano medio.

Si consideri il caso generale di un laminato costituito da  $n$  lamine, ed avente spessore complessivo  $h$  (vedi Figura 34).

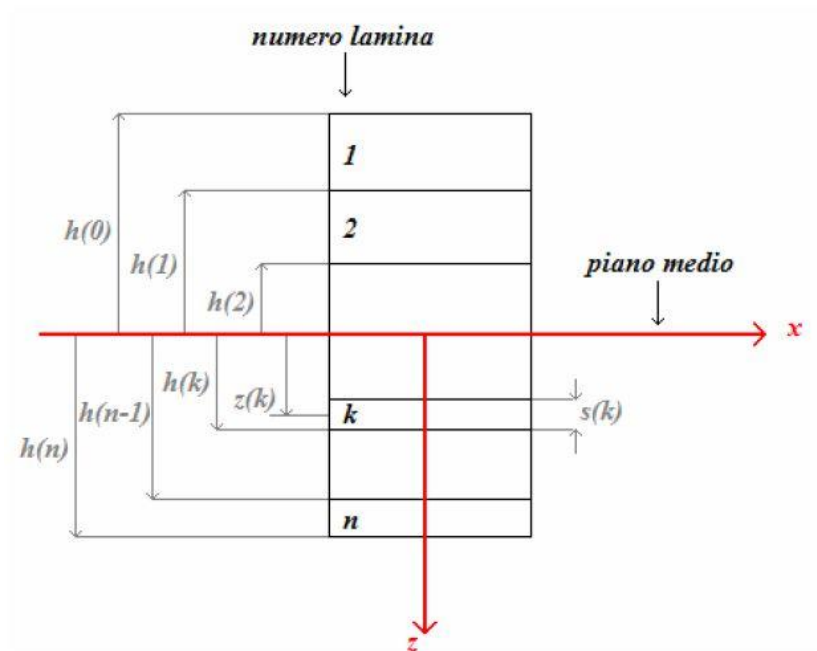


Figura 34 – Geometria di laminato con  $n$  lamine e notazione generale [7]

Da ovvie considerazioni di equilibrio, per le componenti caratteristiche dello sforzo normale (per unità di larghezza) si ha:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \tag{5.9-10}$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz$$

Per il taglio nel piano  $x$ - $y$  del laminato si ha invece:

$$T_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \tag{5.11}$$

Per le componenti del momento flettente:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\
 M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz
 \end{aligned}
 \tag{5.12-13}$$

e per il momento torcente infine:

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz
 \tag{5.14}$$

Sostituendo ora nelle espressioni di N,T, M la relazione generale delle tensioni è possibile legare le caratteristiche di sollecitazione alle componenti di deformazione del piano medio del laminato. Tenendo conto delle proprietà dell'integrale per lo sforzo normale ed il taglio si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left( [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \right) dz = \\
 &= \left( \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left( \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right) \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \\
 &= \left( \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (h_k - h_{k-1}) \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left( \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \left( \frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) \right) \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

Ponendo quindi:

$$\begin{aligned}
 [A] &= \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k s_k \\
 [B] &= \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \left( \frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k s_k \frac{h_k + h_{k-1}}{2} = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k s_k z_k
 \end{aligned}
 \tag{5.16-17}$$

si ha così:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

essendo gli elementi delle matrici  $[A]$  e  $[B]$  dati rispettivamente da:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\tilde{E}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\tilde{E}_{ij})_k s_k \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\tilde{E}_{ij})_k \left( \frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) = \sum_{k=1}^n (\tilde{E}_{ij})_k s_k z_k \end{aligned} \quad (5.19-20)$$

Per i momenti flettenti e torcenti si ha invece ordinatamente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left( z [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z^2 [\tilde{E}]_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \right) dz = \\ &= \left( \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left( \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right) \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \\ &= \left( \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \left( \frac{h_k^2 - h_{k-1}^2}{2} \right) \right) \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \left( \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \left( \frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{3} \right) \right) \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ponendo quindi:

$$[D] = \sum_{k=1}^n [\tilde{E}]_k \left( \frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{3} \right) \quad (5.22)$$

si ha così:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

essendo gli elementi della matrice  $[D]$  dati da:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n (\tilde{E}_{ij})_k \left( \frac{h_k^3 - h_{k-1}^3}{3} \right) \quad (5.24)$$

E' possibile infine riunire in un'unica espressione matriciale:

$$\begin{bmatrix} [N] \\ [M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\varepsilon^0] \\ [k] \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

con

$$[N] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon^0] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}; \quad [k] = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

che rappresenta l'equazione costitutiva del laminato. Le matrici  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$  prendono il nome di matrice di *rigidezza estensionale*, di *accoppiamento* e di *rigidezza flessionale*.

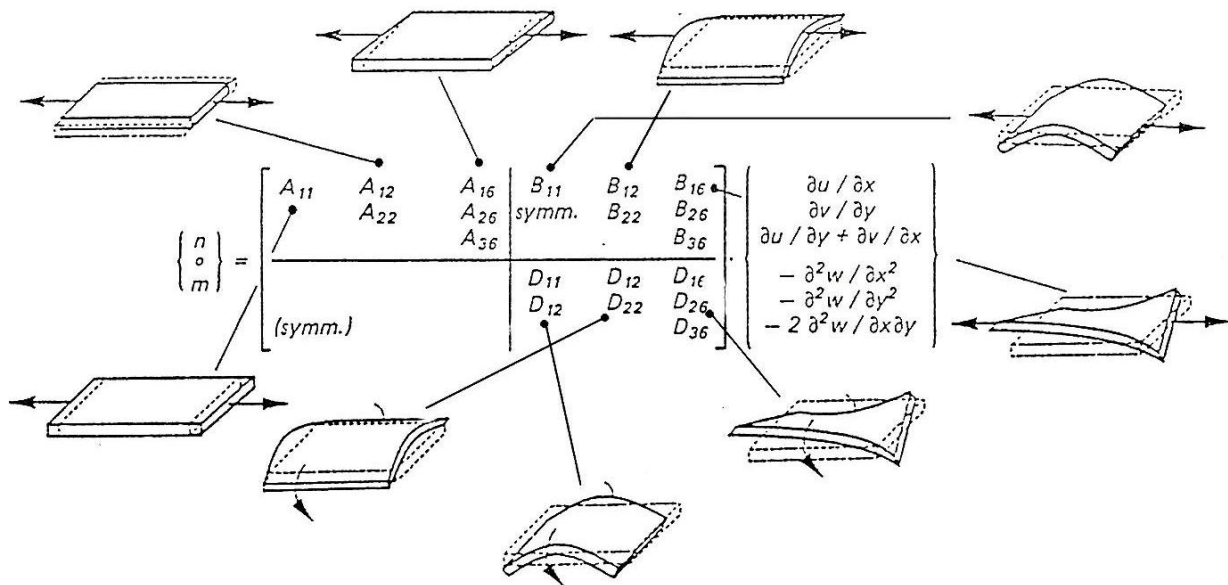


Figura 35 – Illustrazione di  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$



### 5.3 *Matrici di rigidezza di laminati particolari*

#### 5.3.1 *Laminati simmetrici ([B]=0)*

Una particolare classe di laminati è costituita da quelli in cui l'accoppiamento tra flessione e sforzo normale è eliminata. In questi laminati l'applicazione di uno sforzo normale non produce flessione del piano medio né l'applicazione di un momento flettente produce deformazioni (estensione/contrazione) del piano medio. Tale caratteristica è molto importante al fine di evitare che l'applicazione di sollecitazioni nel piano del laminato produca deformazioni fuori dal piano (ingobbamenti).

Tenendo conto delle equazioni costitutive trovate al paragrafo precedente, si vede che un tale comportamento del laminato corrisponde alla condizione per cui la matrice di accoppiamento  $[B]$  risulta identicamente nulla. Tenendo conto che il generico termine della matrice  $[B]$  è dato dalla sommatoria – estesa alle lamine- degli omologhi termini della matrice  $[\tilde{E}]_k$  moltiplicati per lo spessore della lamina e per la distanza media dal piano medio ( $s_k z_k$ ), si ha che tali termini possono essere resi nulli se ad ogni lamina posta al di sopra (al di sotto) del piano medio corrisponde una lamina eguale e con identico orientamento disposta simmetricamente rispetto al piano medio.

Un tale laminato dicesi perciò *simmetrico*.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ & 0 & 0 & 0 & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}$$

#### 5.3.2 *Laminati simmetrici con $A_{13}=A_{23}=0$ (laminati ortotropi)*

Un'altra classe di laminati importante è quella che presenta disaccoppiamento tra sforzo normale e scorrimenti ovvero tra taglio e deformazioni normali. Tale condizione si realizza se i termini  $A_{13}$  ed  $A_{23}$  della matrice  $[A]$  risultano nulli. Tenendo conto che tali termini risultano dalla sommatoria estesa alle lamine dei termini omologhi della matrice  $[\tilde{E}]_k$  per lo spessore della lamina (costante per lamine uguali), e considerando che i termini  $\tilde{E}_{13}$  ed  $\tilde{E}_{23}$  sono funzioni dispari di  $\theta$ , si ha che i termini  $A_{13}$  ed  $A_{23}$  della matrice  $[A]$  possono essere annullati se e solo se il laminato è costituito in modo che ad una lamina con orientamento  $\theta$  corrisponda, indipendentemente dalla sequenza di impacchettamento una lamina con orientamento opposto  $-\theta$ .



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Laminati simmetrici con  $A_{13} = A_{23} = 0$  sono detti comunemente laminati orto tropi in quanto ammettono, come la lamina ortotropa, tre piani (x-y-z) di simmetria mutuamente ortogonali.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

### 5.4 *Calcolo di tensioni e deformazioni*

Nella teoria classica dei laminati deformazioni e tensioni di ciascuna lamina sono messe, come visto, in relazione con le componenti di deformazione del piano medio del laminato. Nella procedura di calcolo di deformazioni e tensioni è pertanto conveniente valutare prima le componenti di deformazione del piano medio e successivamente passare alla valutazione delle variabili locali per ciascuna lamina.

L'equazione costitutiva della teoria classica dei laminati è la matrice compatta:

$$\begin{bmatrix} [N] \\ [M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\varepsilon^0] \\ [k] \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Le componenti di deformazione del piano medio possono essere in linea di principio calcolate direttamente dalle caratteristiche di sollecitazione invertendo la (5.25):

$$\begin{bmatrix} [\varepsilon^0] \\ [k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [b] & [d] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N] \\ [M] \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Dove:

$$\begin{aligned} [a] &= [A]^{-1} + [A]^{-1}[B]([D] - [B][A]^{-1}[B]^{-1})^{-1}[B][A]^{-1} \\ [b] &= -[A]^{-1}[B]([D] - [B][A]^{-1}[B]^{-1})^{-1} \\ [c] &= -([D] - [B][A]^{-1}[B]^{-1})^{-1}[B][A]^{-1} \\ [d] &= ([D] - [B][A]^{-1}[B]^{-1})^{-1} \end{aligned} \quad (5.27-28)$$

e ricordando che:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}; \quad [\varepsilon^0] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}; \quad [k] = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

Calcolate le componenti di deformazione del piano medio del laminato, è possibile calcolare le deformazioni e le tensioni (nel riferimento cartesiano x-y) in ogni punto delle singole lamine mediante le equazioni (5.7) e (5.8).

## 6 METODI DI CALCOLO DI PIASTRE ORTOTROPE

### 6.1 Il comportamento a piastra

Quando la differenza fra le due dimensioni è piuttosto limitata, gli appoggi perimetrali influenzano il comportamento flessionale del solaio, che presenta così due piani di flessione fra loro ortogonali (Figura 36): in questo caso si dice che il solaio ha un comportamento a piastra.

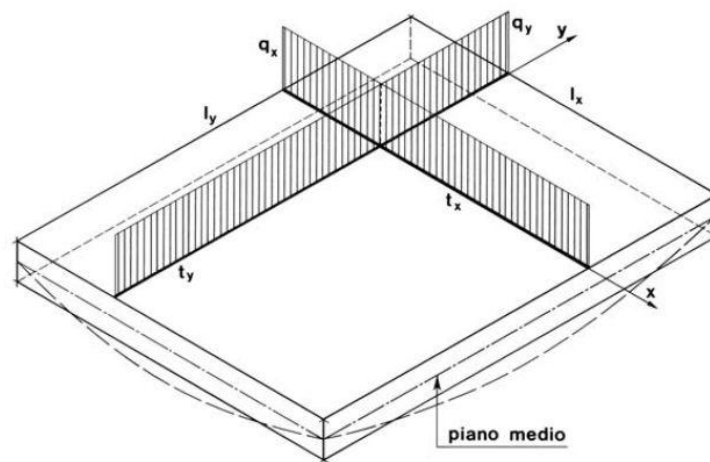


Figura 36 – Piastra con due piani di flessione ortogonali fra loro [8]

Il comportamento a piastra, quando è possibile, consente un migliore sfruttamento delle caratteristiche di resistenza della struttura che viene calcolata in funzione del suo reale comportamento statico.

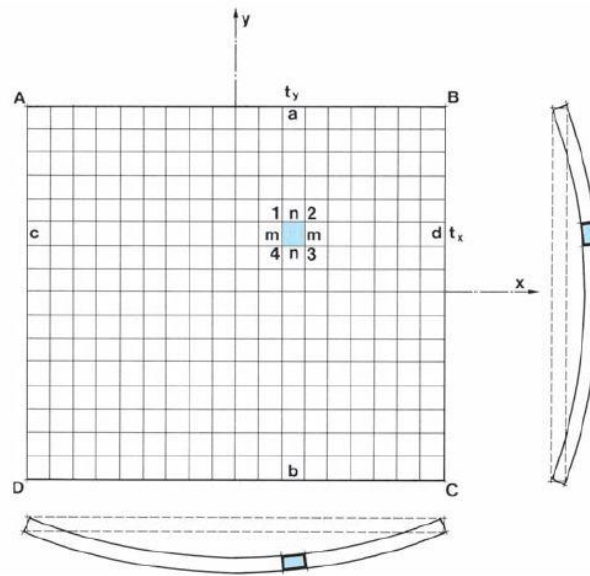
Consideriamo la piastra di Figura 36 riferita a un sistema di assi cartesiani  $x$  e  $y$ , e in particolare le due strisce ortogonali  $t_x$  e  $t_y$  gravate dai carichi  $q_x$  e  $q_y$  esercitati da un carico ripartito uniforme  $q$ , agente perpendicolarmente alla piastra rispetto al suo piano medio.

È evidente che la piastra è soggetta a flessione e, tenendo presenti le sue caratteristiche geometriche, questa si manifesta con momenti flettenti secondo direzioni ortogonali con valori diversi a seconda della coppia di strisce  $t_x$  e  $t_y$  considerate; assumendo il piano medio della superficie come “piano neutro”, le tensioni conseguenti alla flessione avranno un diagramma di ripartizione uguale a quello delle travi.

Tali tensioni si influenzano a vicenda tramite la deformazione per flessione, differente a seconda della coppia di strisce considerate, la  $\sigma$  agente in una direzione modifica la  $\sigma$  agente in direzione perpendicolare, aumentandola o riducendola; ugualmente la deformazione nel senso dell'asse  $x$  incrementa o diminuisce quella nel senso  $y$  perpendicolare.

Analizzando il comportamento delle due strisce generiche  $t_x$  e  $t_y$  (Figura 37), queste hanno in comune la piccola area 1-2-3-4; la striscia  $ab$ , deformandosi per flessione, determina una torsione nella striscia  $cd$  e l'elemento comune si inflette parallelamente ai lati  $m$ , mentre le estremità  $a$  e  $b$  della striscia  $t_y$  rimangono orizzontali.





**Figura 37 – Comportamento a piastra [8]**

Ciò significa che la striscia  $t_x$  sostiene la  $t_y$ , deformandosi per torsione, e le tensioni di questa sollecitazione assumono valore nullo in mezzeria di  $t_x$  e valori massimi alle sue estremità  $c$  e  $d$ .

Questo comportamento è reciproco per le due strisce e quindi vale per la striscia  $t_x$  rispetto a  $t_y$ , e viceversa. Come si può notare, a causa della continuità strutturale esistente, la striscia di una coppia si deforma per flessione e determina, per conseguenza, una torsione nell'altra. Il fenomeno flessionale è quindi quello tipico delle lastre, soltanto che la relazione di proporzionalità che esiste nelle travi fra tensione e momento flettente secondo la luce della trave deve essere ora sostituita dalla relazione di proporzionalità fra tensione e momento flettente secondo la direzione  $x$  oppure  $y$ , quest'ultimo corretto in più o in meno da una certa percentuale del momento flettente che si verifica nella direzione perpendicolare a quella considerata.

### **6.1.1 Metodo semplificato di Grashof**

Lo studio rigoroso di una piastra rettangolare risulta piuttosto complesso e pertanto il calcolo di progetto viene, il più delle volte, svolto applicando procedimenti approssimati basati sull'ipotesi che nel punto di incontro di una qualsiasi coppia di strisce ortogonali l'abbassamento sia uguale per entrambe le strisce; in realtà ciò risulta valido solo per la coppia di strisce centrali con vincoli di estremità uguali per ambedue.

Con l'ipotesi detta sopra Grashof ha sviluppato un metodo di calcolo delle piastre molto semplice, applicabile per qualsiasi condizione di vincolo.

Il carico  $q$  uniformemente ripartito gravante sulla piastra deve essere ripartito nei carichi  $q_x$  e  $q_y$  che agiscono sulla coppia di strisce in corrispondenza della freccia massima (centrali per vincoli simmetrici), rispettivamente parallele alle dimensioni  $l_x$  ed  $l_y$ , imponendo che per entrambe si abbia la medesima freccia, ossia:

$$k_x \cdot q_x \cdot l_x^4 = k_y \cdot q_y \cdot l_y^4 \tag{6.1}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

dove  $k_x$  e  $k_y$  rappresentano le condizioni di vincolo; ad esempio, se la striscia di luce  $l_x$  è appoggiata agli estremi si ha:

$$k_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{1}{EJ}$$

mentre se è incastrata risulta:

$$k_x = \frac{1}{384} \cdot \frac{1}{EJ}$$

Poiché deve essere:

$$q = q_x + q_y \quad \text{da cui} \quad q_y = q - q_x \quad (6.2)$$

Il valore di  $q_x$  si ricava dalla relazione:

$$q_x = \frac{q \cdot l_y^4}{K \cdot l_x^4 + l_y^4} \quad (6.3)$$

Sostituendo nella (6.2) si ricava il valore di  $q_y$ .

Il coefficiente  $K$  assume valori diversi a seconda della condizione di vincolo presente agli estremi delle strisce considerate.

### 6.1.2 Estensione del metodo di Grashof alle piastre ortotrope

Nel caso degli elementi lignei, i modesti valori di *modulo elastico a taglio*  $G$ , in rapporto a quelli del *modulo elastico longitudinale*  $E_0$ , impongono di considerare nel calcolo della freccia anche la parte dovuta alla deformabilità per taglio.

L'equazione della linea elastica, per il calcolo della deformabilità dell'elemento monodirezionale trave, deve essere quindi scritta nel modo seguente, tenendo in considerazione anche il contributo deformativo a taglio:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} + \frac{dT}{dx} \cdot \frac{\chi}{GA} \quad (6.4)$$

Il massimo abbassamento per una determinata configurazione di carico si ottiene quindi integrando l'equazione (6.4) tenendo conto delle condizioni al contorno (vincoli dell'elemento strutturale considerato). Per una trave inflessa di lunghezza  $l$ , in semplice appoggio, a sezione costante e soggetta a carico uniforme  $q$ , la freccia totale massima vale quindi:

$$f_{\max} = \frac{5ql^4}{384EJ} + \chi \frac{ql^2}{8GA} \quad (6.5)$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

dove:

- A = area della sezione trasversale
- J = momento d'inerzia della medesima sezione
- $\chi$  = fattore di taglio della sezione (1,2 per sezioni rettangolari)

L'equazione (6.1) deve quindi essere modificata nel seguente modo:

$$k_x \cdot q_x \cdot l_x^4 + g_x \cdot q_x \cdot l_x^2 = k_y \cdot q_y \cdot l_y^4 + g_y \cdot q_y \cdot l_y^2 \quad (6.6)$$

dove, nel caso di piastra appoggiata al contorno, si ha:

$$k_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{1}{(EJ)_x}, \quad k_y = \frac{5}{384} \cdot \frac{1}{(EJ)_y}$$
$$g_x = \chi \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(GA)_x}, \quad g_y = \chi \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(GA)_y}$$

Si nota in questo caso dalle espressioni dei coefficienti  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $g_x$  e  $g_y$  che oltre a dipendere dalla condizione di vincolo, assume un ruolo fondamentale la direzione di carico longitudinale considerata, in quanto, le rigidzze flessionali e a taglio della sezione possono assumere valori diversi in funzione del numero di strati ortogonali tra loro: è immediato comprendere che  $(EJ)_x$  assume lo stesso valore di  $(EJ)_y$  solo nel caso in cui l'elemento strutturale è costituito da un numero di strati pari; la stessa considerazione è valida per il modulo a taglio  $(GA)$ .

Le rigidzze flessionali e a taglio della sezione considerata possono essere calcolate come visto nel Capitolo 3, attraverso le equazioni (3.1) e (3.13), oppure attraverso le matrici di rigidzza del laminato descritte al Capitolo 5.

Con procedimento analogo al caso precedente, poiché deve essere:

$$q = q_x + q_y \quad \text{da cui} \quad q_y = q - q_x \quad (6.2)$$

Il valore di  $q_x$  si ricava dalla relazione:

$$q_x = \frac{q \cdot l_y^2}{\left[ \frac{k_x \cdot l_x^2 + g_x}{k_y \cdot l_y^2 + g_y} \right] \cdot l_x^2 + l_y^2} \quad (6.7)$$

Sostituendo nella (6.2) si ricava il valore di  $q_y$ .

## 6.2 Piastra ortotropa a flessione – Piastra di Kirchhoff

Se si considera il problema del comportamento a flessione di una piastra costituita da un materiale ortotropo si deve procedere ad una modifica delle equazioni costitutive.

Le relazioni tra sforzi e deformazioni, che nel caso di una materiale isotropo sono esprimibili in termini delle due costanti elastiche indipendenti  $E$  e  $\nu$  con le equazioni:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{6.8-10}$$

si devono ora esprimere in termini di quattro costanti elastiche indipendenti, nel caso di materiale ortotropo e sforzo piano, con le relazioni:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E_x \varepsilon_x + E_{xy} \varepsilon_y \\ \sigma_y &= E_{xy} \varepsilon_x + E_y \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{6.11-13}$$

dove  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_{xy}$  e  $G$  sono i parametri elastici indipendenti che rappresentano il comportamento del materiale, già precedentemente descritti nel capitolo 4.

Le relazioni cinematiche non dipendono dalle caratteristiche elastiche e quindi sono:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{6.14-16}$$

Ponendo le relazioni cinematiche precedenti nelle relazioni costitutive (6.11-13), si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -z \left( E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -z \left( E_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -2z G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{6.17-19}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

ponendo poi le espressioni degli sforzi nelle equazioni dei momenti:

$$\begin{aligned}M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \\M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \\M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz\end{aligned}\tag{6.20-22}$$

ed integrando si ottengono le espressioni:

$$\begin{aligned}M_x &= -\left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\M_y &= -\left(D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\M_{xy} &= -2G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{6.23-25}$$

dove si è posto:

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12}; \quad D_y = \frac{E_y t^3}{12}; \quad D_{xy} = \frac{E_{xy} t^3}{12}; \quad G_{xy} = \frac{G t^3}{12}$$

Queste posizioni definiscono le rigidezze flessionali  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$ , e la rigidezza torsionale  $G_{xy}$  di una piastra ortotropa.

Ponendo le espressioni dei momenti nelle equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - V_y &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x &= 0\end{aligned}\tag{6.26-27}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}V_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ V_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)\end{aligned}\tag{6.28-29}$$

dove:

$$H = D_{xy} + 2G_{xy} \quad (6.30)$$

Partendo dall'equazione di equilibrio in termini di momenti:

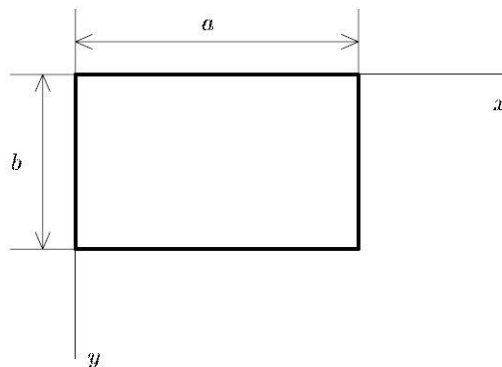
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad (6.31)$$

e dalle espressioni dei momenti in termini della deflessione  $w(x,y)$  si ottiene l'equazione per la flessione di una piastra ortotropa:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (6.32)$$

### 6.2.1 Metodo di soluzione alla Navier: piastra rettangolare appoggiata al contorno

Si consideri la piastra rettangolare, di lati  $a$  e  $b$ , appoggiata al contorno, caricata con carico distribuito  $p(x,y)$ , indicata in Figura 38.



**Figura 38 – Piastra rettangolare appoggiata al contorno [9]**

Nel 1820 *Navier* ha proposto la soluzione di questo problema basata sullo sviluppo in serie di *Fourier* del carico applicato e della funzione incognita  $w(x,y)$  con le posizioni:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (6.33-34)$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

dove  $p_{mn}$  e  $a_{mn}$  sono dei coefficienti incogniti da determinare. La condizione al contorno di appoggio semplice si traduce nelle condizioni:

$$\begin{aligned}
 x=0, \quad x=a &\rightarrow \begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \end{cases} \\
 y=0, \quad y=b &\rightarrow \begin{cases} w=0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La determinazione dei coefficienti  $p_{mn}$  relativi alla condizione del carico applicato si ottiene procedendo alla

*Fourier*, cioè moltiplicando per  $\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy$  ed integrando sulla piastra:

$$\int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \int_0^b \int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy$$

si ottiene:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \iint_A p(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dA \tag{6.35}$$

I coefficienti della deflessione  $a_{mn}$  si ottengono dall'imporre l'equazione del campo:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \tag{6.36}$$

si ha:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{mn} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{p_{mn}}{D} \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0$$

Questa relazione vale per ogni  $x$  e  $y$  e quindi deve risultare:

$$a_{mn} \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = \frac{p_{mn}}{D}$$

Sostituendo i coefficienti  $a_{mn}$  nello sviluppo della deflessione, si ha:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \tag{6.37}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

dove i coefficienti  $p_{mn}$  vengono determinati alla *Fourier* a seconda del carico applicato; si può dimostrare che la serie ottenuta è una serie convergente e costituisce quindi una soluzione per il problema della flessione di una piastra rettangolare semplicemente appoggiata al contorno.

Nel caso in cui il carico applicato sia distribuito in modo uniforme sulla struttura:

$$p(x, y) = p_0$$

si ha:

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}; \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$$

i coefficienti sono nulli per indice  $m$  od  $n$  pari e ponendo questa espressione nella serie che dà la deflessione, si ha:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}; \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Dalla flessione è possibile ricavare gli sviluppi in serie relativi ai momenti  $M_x, M_{xy}, M_y$ . Si ha per esempio:

$$M_x = \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left( \frac{n}{b} \right)^2}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (6.38)$$

ed analogamente per  $M_y$  ed  $M_{xy}$ . Si osserva come  $M_x$  e  $M_y$  sono rispettivamente nulli sul contorno per  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ , mentre il momento torcente non si annulla al contorno della piastra.

L'approccio alla *Navier* che si è utilizzato nel caso di una piastra isotropa può essere utilizzato anche nel caso di piastra ortotropica. Con riferimento ad una piastra rettangolare di lati  $a$  e  $b$  con un carico per unità di superficie  $p(x, y)$  e con condizioni al contorno di appoggio semplice, si può cercare la soluzione con lo sviluppo proposto nelle equazioni (6.33-34), le quali, sostituite nell'equazione della piastra (6.32), si ottiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{mn} \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} D_x + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} H + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} D_y \right) - p_{mn} \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0$$

Questa relazione deve valere per ogni  $x, y$  e quindi se si impone l'annullarsi dei termini tra parentesi quadrata, si ottiene la relazione che collega i coefficienti, incogniti, dello sviluppo di  $w(x, y)$  con quelli, noti, dello sviluppo del carico assegnato:





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$a_{mn} = \frac{P_{mn}}{\left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4}\right) D_x + 2\left(\frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2}\right) H + \left(\frac{n^4 \pi^4}{b^4}\right) D_y}$$

I coefficienti dello sviluppo del carico assegnato sono dati dalla:

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx dy \quad (6.39)$$

Per lo sviluppo della funzione incognita  $w(x, y)$  si ha quindi:

$$w(x, y) = \frac{4}{ab} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b \int_0^a \frac{p(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y}{\left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4}\right) D_x + 2\left(\frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2}\right) H + \left(\frac{n^4 \pi^4}{b^4}\right) D_y} \, dx dy \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (6.40)$$

Nel caso particolare in cui il carico assegnato sia uniformemente distribuito sulla superficie della piastra  $p(x, y) = p_0$  si ha l'espressione, precedentemente utilizzata, per i coefficienti dello sviluppo:

$$P_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}; \quad m, n \text{ dispari}$$

e quindi si ottiene per lo spostamento verticale l'espressione:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y}{mn \left[ \left(\frac{m^4}{a^4}\right) D_x + 2\left(\frac{m^2 n^2}{a^2 b^2}\right) H + \left(\frac{n^4}{b^4}\right) D_y \right]}$$

Una volta calcolata la  $w(x, y)$  si possono poi ricavare i momenti e gli sforzi tramite le (6.23-25) e (6.17-19).

### 6.3 Piastra ortotropa a flessione – Piastra di Mindlin

Per piastre spesse o piastre con una bassa rigidità di taglio trasversale, le rotazioni della normale del piano medio devono essere inclusi per una modellazione più accurata.

La teoria della deformazione di taglio della teoria della piastra di Mindlin utilizza cinque variabili di spostamento.

Gli spostamenti del piano medio  $u_0$  e  $v_0$  sono gli stessi ricavati dalla teoria di Kirchhoff, tuttavia, vengono introdotte due rotazioni fuori dal piano di taglio,  $\psi_x$  e  $\psi_y$ . Lo spostamento fuori dal piano,  $w$ , resta definito come nella teoria della piastra di Kirchhoff.

Il nuovo campo di spostamento è il seguente:

$$u = u_0(x, y, t) + z \psi_x(x, y, t); \quad v = v_0(x, y, t) + z \psi_y(x, y, t); \quad w = w(x, y, t) \quad (6.41-43)$$

La teoria della piastra di Mindlin assume che come in una piastra deformata, un piano immaginario originariamente normale al piano medio rimarrà piano, ma ruoterà durante la deformazione non rimanendo così ortogonale al piano medio. Questo permette di considerare delle deformazioni di taglio trasversali diverse da zero.

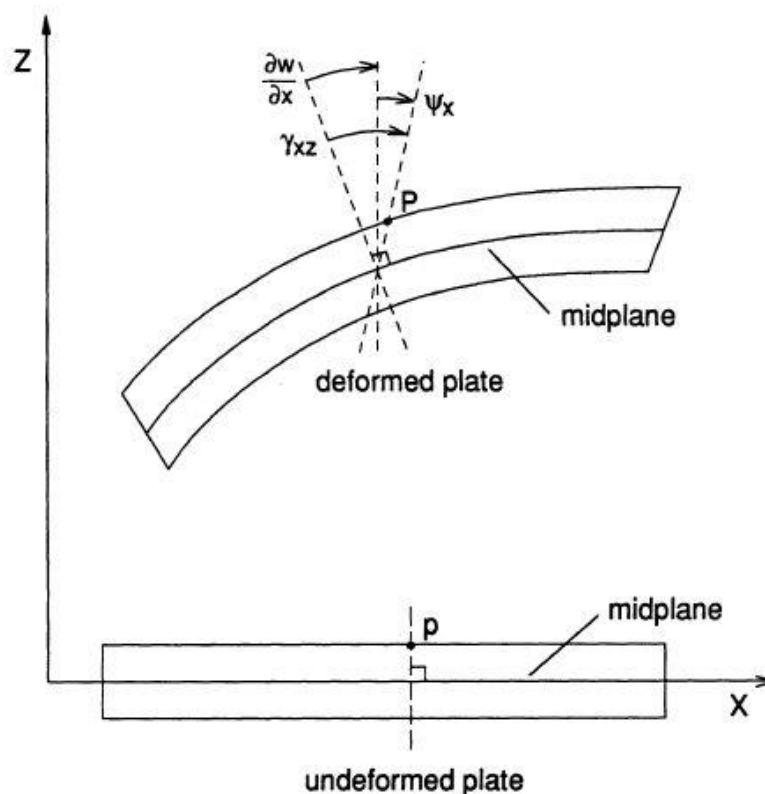


Figura 39 – Deformazione della piastra di Mindlin [21]

Anche nella teoria della piastra di Mindlin è possibile integrare le diverse quantità nello spessore della piastra. Le caratteristiche di sollecitazione (sforzo normale, momento torcente e flettente), così come le rigidzze nel piano  $x$ - $y$  sono definiti come nella teoria della piastra di Kirchhoff, tuttavia, ulteriori rigidzze a taglio trasversale sono necessarie.

Tradizionalmente, le rigidzze a taglio trasversale sono state definite come:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n (G_{ij})_k s_k \quad (6.44)$$

dove i termini  $G_{ij}$  rappresentano i moduli di taglio trasversale.

Si vede come l'espressione è del tutto analoga a quella già vista nel capitolo 5, per la definizione degli apici e pedici si veda quel capitolo.

Dopo aver definito tutte le rigidzze della piastra, le equazioni costitutive possono essere espresse come segue:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Le rigidzze di taglio trasversale sono state moltiplicate per un fattore di correzione di taglio  $\kappa$ . Questo fattore serve a correggere le imprecisioni fatte assumendo che la sollecitazione di taglio è costante attraverso lo spessore, mentre la sollecitazione di taglio va a zero sulla superficie della piastra.

Analizzando le equazioni di congruenza, per le deformazioni nel piano  $x$ - $y$  si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z k_x \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + z k_y \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} \end{cases} \quad (6.47-49)$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Le deformazioni nel piano rimangono definite come per la teoria della piastra di Kirchhoff, tuttavia, le curvature e le deformazioni a taglio trasversale sono ora definite come segue:

$$\begin{aligned}k_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\k_y &= \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\k_{xy} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y\end{aligned} \tag{6.50-54}$$

In modo del tutto analogo alla teoria classica dei laminati è possibile scrivere le espressioni in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

A questo punto è possibile calcolare le tensioni con la stessa equazione vista al Capitolo 5 (5.8):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [E]_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z [E]_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{6.56}$$

Avendo definito in questa teoria delle deformazioni a taglio trasversale è possibile inoltre calcolare le tensioni tangenziali nei piani  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$  come segue:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \kappa [G]_k \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

Il calcolo delle tensioni e deformazioni nella teoria di Mindlin è dunque del tutto analoga al procedimento utilizzato per la teoria classica dei laminati descritta nel Capitolo 5, dove si è svolta utilizzando il modello a piastra di Kirchhoff.

E' dunque possibile calcolare le deformazioni a partire dalle caratteristiche di sollecitazione, invertendo la (6.45) e la (6.46). Per la determinazione delle caratteristiche di sollecitazione si utilizzerà nuovamente il metodo di soluzione alla Navier.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Come per la teoria della piastra di Kirchhoff, se si considera il problema del comportamento a flessione di una piastra costituita da un materiale ortotropo, si deve procedere ad una modifica delle equazioni costitutive.

Le relazioni tra sforzi e deformazioni espresse in termini delle quattro costanti elastiche indipendenti, nel caso di materiale ortotropo e sforzo piano, sono:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E_x \varepsilon_x + E_{xy} \varepsilon_y \\ \sigma_y &= E_{xy} \varepsilon_x + E_y \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= \kappa_x G_{xz} \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= \kappa_y G_{yz} \gamma_{yz}\end{aligned}\tag{6.58-62}$$

Le relazioni cinematiche non dipendono dalle caratteristiche elastiche e quindi sono:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y\end{aligned}\tag{6.63-67}$$

Ponendo le relazioni cinematiche precedenti nelle relazioni costitutive (6.58-62), si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= z \left( E_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + E_{xy} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= z \left( E_{xy} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} &= z G \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) \\ \tau_{yz} &= G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right)\end{aligned}\tag{6.68-72}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Ponendo poi le espressioni degli sforzi nelle equazioni dei momenti e del taglio:

$$\begin{aligned}M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \\M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \\M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \\T_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \\T_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz\end{aligned}\tag{6.73-77}$$

ed integrando si ottengono, per i momenti, le espressioni:

$$\begin{aligned}M_x &= \left( D_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{xy} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\M_y &= \left( D_{xy} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\M_{xy} &= G_{xy} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{6.78-80}$$

dove compaiono nuovamente le rigidzze flessionali  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  e la rigidzza torsionale  $G_{xy}$ , definite come nel caso della teoria di Kirchhoff.

Per quanto riguarda il taglio invece si ha:

$$\begin{aligned}T_x &= \kappa_x G_{xz} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) \\T_y &= \kappa_y G_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right)\end{aligned}\tag{6.81-82}$$

dove si è posto:

$$G_{xz} = G_0 t; \quad G_{yz} = G_0 t$$

Queste posizioni sono state fatte considerando che, nel caso particolare di elementi in xlam, siamo in presenza di due diversi moduli di taglio trasversale, come già descritto nel Capitolo 3.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Si vede inoltre che compaiono i due termini  $\kappa_x$  e  $\kappa_y$ , che rappresentano i fattori di correzione di taglio rispettivamente nel piano  $x$ - $z$  e nel piano  $y$ - $z$ .

Sostituendo ora le espressioni del taglio e dei momenti nelle equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y &= 0 \end{aligned} \quad (6.83-85)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \kappa_x G_{xz} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + \kappa_y G_{yz} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + p(x, y) &= 0 \\ D_x \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{xy} + G_{xy}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + G_{xy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - T_x &= 0 \\ D_y \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + (D_{xy} + G_{xy}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + G_{xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - T_y &= 0 \end{aligned} \quad (6.86-88)$$

che rappresentano le equazioni di equilibrio per la piastra ortotropa di Mindlin.

### 6.3.1 Metodo di soluzione alla Navier: piastra rettangolare appoggiata al contorno

Per una piastra rettangolare, di lati  $a$  e  $b$ , appoggiata al contorno, caricata con carico distribuito  $p(x,y)$ , la soluzione di Navier assume le tre seguenti serie trigonometriche:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \psi_x(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \psi_y(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \quad (6.89-91)$$

che soddisfano tutte le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) &= 0 \\ M_x(0, y) = M_x(a, y) = M_y(x, 0) = M_y(x, b) &= 0 \\ \psi_y(0, y) = \psi_y(a, y) = \psi_x(x, 0) = \psi_x(x, b) &= 0 \end{aligned}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Quando il carico distribuito  $p(x,y)$  è nuovamente definito come una serie doppia trigonometrica (6.33), la soluzione può essere trovata attraverso l'equilibrio armonico e manipolazioni matriciali. Si ottiene:

$$\begin{aligned} I_{33} &= -\kappa_x G_{xz} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \kappa_y G_{yz} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \\ I_{34} &= -\kappa_x G_{xz} \left( \frac{m\pi}{a} \right) \\ I_{35} &= -\kappa_y G_{yz} \left( \frac{n\pi}{b} \right) \\ I_{44} &= \kappa_x G_{xz} + D_x \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + G_{xy} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \\ I_{45} &= (D_{xy} + G_{xy}) \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{n\pi}{b} \right) \\ I_{55} &= \kappa_y G_{yz} + G_{xy} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + D_y \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \end{aligned} \tag{6.95-100}$$

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} I_{33} & I_{34} & I_{35} \\ I_{34} & I_{44} & I_{45} \\ I_{35} & I_{45} & I_{55} \end{vmatrix}$$





## 6.4 Frequenze naturali delle piastre

### 6.4.1 Frequenze naturali di piastre soggette a carichi trasversali

I problemi dinamici sono strettamente connessi quello della determinazione delle frequenze naturali. Una piastra, nella quale si manifesta una deformazione iniziale con assegnata velocità, dopo la rimozione del carico inizia a oscillare liberamente in senso trasversale. Nella equazione biarmonica della piastra occorre prendere in considerazione le forze di inerzia:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (6.101)$$

Dove:

$$\bar{m} = \frac{\gamma_0 h}{g_g}$$

rappresenta la massa della piastra riferita all'unità di superficie e inoltre si è indicato con:

- $\gamma_0$  = peso specifico del materiale
- $h$  = spessore della piastra
- $g_g$  = accelerazione di gravità (9,81 m/sec<sup>2</sup>)

Tenendo conto delle forze di inerzia, l'equazione della superficie inflessa della piastra assume la forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\bar{m}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.102)$$

Per la soluzione di questa equazione può assumersi:

$$w = w_0(x, y) \cos(\omega t + t_0) \quad (6.103)$$

dove  $\omega$  rappresenta la frequenza circolare della vibrazione naturale della piastra, dipendente dalla frequenza  $f$  e dal periodo  $t_k$  della vibrazione secondo le relazioni:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad t_k = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.104)$$

Sostituendo la (6.103) nella (6.102) si ottiene:

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} w_0 = 0 \quad (6.105)$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Questa equazione corrisponde all'equazione omogenea di una piastra inflessa su suolo elastico avente modulo di comprimibilità:

$$E_0 = -\omega^2 \bar{m} \quad (6.106)$$

La frequenza naturale della piastra, ovvero il valore del parametro  $\omega$  in corrispondenza al quale l'equazione omogenea (6.105) ha soluzione non nulla, può essere calcolata determinando gli autovalori dell'equazione differenziale (6.105), ricorrendo alla soluzione in serie doppia (6.37). Per una piastra rettangolare semplicemente appoggiata lungo il perimetro, gli autovalori si ottengono dall'equazione  $\Delta_{mn} = 0$ :

$$\Delta_{mn} = \left( m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2 \right)^2 \quad (6.107)$$

Si trova così:

$$\frac{\omega^2 \bar{m} a^4}{\pi^4 D} = \left( m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2 \right)^2 \quad (6.108)$$

Da cui la frequenza naturale:

$$f_{mn} = \frac{\pi \left( m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2 \right)}{2a^2} \cdot \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} \quad (6.109)$$

### 6.4.2 Frequenze naturali di piastre ortotrope - Piastra di Kirchhoff

Con passaggi analoghi al caso precedente, è possibile ottenere la frequenza naturale di una piastra rettangolare ortotropa.

Tenendo conto delle forze di inerzia, l'equazione della superficie inflessa della piastra assume in questo caso la forma:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.110)$$

Anche in questo caso per la soluzione può assumersi:

$$w = w_0(x, y) \cos(\omega t + t_0) \quad (6.103)$$

Sostituendo la (6.103) nella (6.110) si ottiene:

$$D_x \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \omega^2 \bar{m} w_0 = 0 \quad (6.111)$$

Ricorrendo nuovamente alla soluzione in serie doppia (6.37), gli autovalori di ottengono dall'equazione  $\Delta_{mn} = 0$ :

$$\Delta_{mn} = \left( D_x m^4 + 2Hm^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} + D_y \frac{a^4}{b^4} n^4 \right) \quad (6.112)$$

Si trova così:

$$\frac{\omega^2 \bar{m} a^4}{\pi^4} = \left( D_x m^4 + 2Hm^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} + D_y \frac{a^4}{b^4} n^4 \right) \quad (6.113)$$

Da cui la frequenza naturale:

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2a^2} \cdot \sqrt{\frac{D_x m^4 + 2Hm^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} + D_y \frac{a^4}{b^4} n^4}{\bar{m}}} \quad (6.114)$$

### 6.4.3 Frequenze naturali di piastre ortotrope - Piastra di Mindlin

La frequenza naturale di vibrazione può essere trovata assumendo che lo spostamento e le rotazioni sono funzioni periodiche nel tempo:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= w(x, y) e^{i\omega t} \\ \psi_x(x, y, t) &= \psi_x(x, y) e^{i\omega t} \\ \psi_y(x, y, t) &= \psi_y(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6.115-117)$$

sostituendo nelle equazioni differenziali che governano il problema (6.86-88) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} I_{33} - \omega_{mn}^2 R_0 & I_{34} & I_{35} \\ I_{34} & I_{44} - \omega_{mn}^2 R_2 & I_{45} \\ I_{35} & I_{45} & I_{55} - \omega_{mn}^2 R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{mn} \\ \psi_{xmn} \\ \psi_{ymn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.118)$$

che deve essere risolto per le frequenze naturali di vibrazione, dove si è indicato:

$$R_0 = \int_{-t/2}^{t/2} \rho dz; \quad R_2 = \int_{-t/2}^{t/2} \rho z^2 dz$$

che rappresentano i termini di inerzia integrati sullo spessore della piastra.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Se il termine  $R_2$  è piccolo rispetto al termine  $R_0$ , l'inerzia rotazionale può essere ignorata con una piccola perdita di precisione. Questa approssimazione semplifica notevolmente il problema di determinare le frequenze naturali di vibrazione. Quando il termine  $R_2$  è assunto pari a zero, le frequenze naturali possono essere calcolate come segue:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{I_{33} (I_{44} I_{55} - I_{45}^2) + 2I_{34} I_{35} I_{45} - I_{44} I_{35}^2 - I_{55} I_{34}^2}{R_0 (I_{44} I_{55} - I_{45}^2)} \quad (6.119)$$

da cui la frequenza naturale:

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_{33} (I_{44} I_{55} - I_{45}^2) + 2I_{34} I_{35} I_{45} - I_{44} I_{35}^2 - I_{55} I_{34}^2}{R_0 (I_{44} I_{55} - I_{45}^2)}} \quad (6.120)$$

## 7. CONSIDERAZIONI SUL TAGLIO PER ROTOLAMENTO

Il taglio per rotolamento (“rolling shear”) è definito come uno sforzo di taglio che porta a tensioni di taglio in un piano perpendicolare alla direzione della fibratura dell’elemento considerato. Come già descritto al capitolo 3, è bene quindi tener conto del fatto che la resistenza e la rigidezza a taglio dipende dalla direzione dell’orientazione della fibratura rispetto alla direzione del carico considerata.

Questo fenomeno implica una rigidezza a taglio ridotta negli strati ortogonali, che viene assunta pari a 1/10 della rigidezza a taglio degli strati longitudinali, causando una maggiore deformabilità dell’elemento per sforzi tangenziali.

In questo capitolo si vogliono confrontare i valori di rigidezza a taglio nel caso in cui venga considerato o meno questo fenomeno.

Vengono dunque calcolati i termini  $C_{5,5}$  (rigidezza a taglio nel piano x-z) e  $C_{4,4}$  (rigidezza a taglio nel piano y-z) delle matrici di rigidezza con le espressioni viste al paragrafo 6.4, attraverso il software Mathcad, con il quale è stato sviluppato un programma per il calcolo matriciale sulla base della teoria classica dei laminati.

Il confronto tra questi termini è stato fatto inoltre considerando l’influenza del valore del fattore di taglio  $\chi$ , che come ben noto, per sezioni rettangolari è pari a 1,2. Nel caso dell’xlam invece, questo fattore permette di considerare le caratteristiche non uniformi su tutto lo spessore del materiale e dipende, oltre che dalla geometria, dalle caratteristiche dei singoli strati. E’ stato calcolato con la (3.14), considerando per i vari strati il modulo  $G_0$  (modulo di taglio “normale”) o il modulo  $G_{90}$  (modulo di taglio “trasversale”) a seconda della diversa orientazione degli strati.

### 7.1 Confronto dei termini diretti di taglio della matrice di rigidezza del laminato

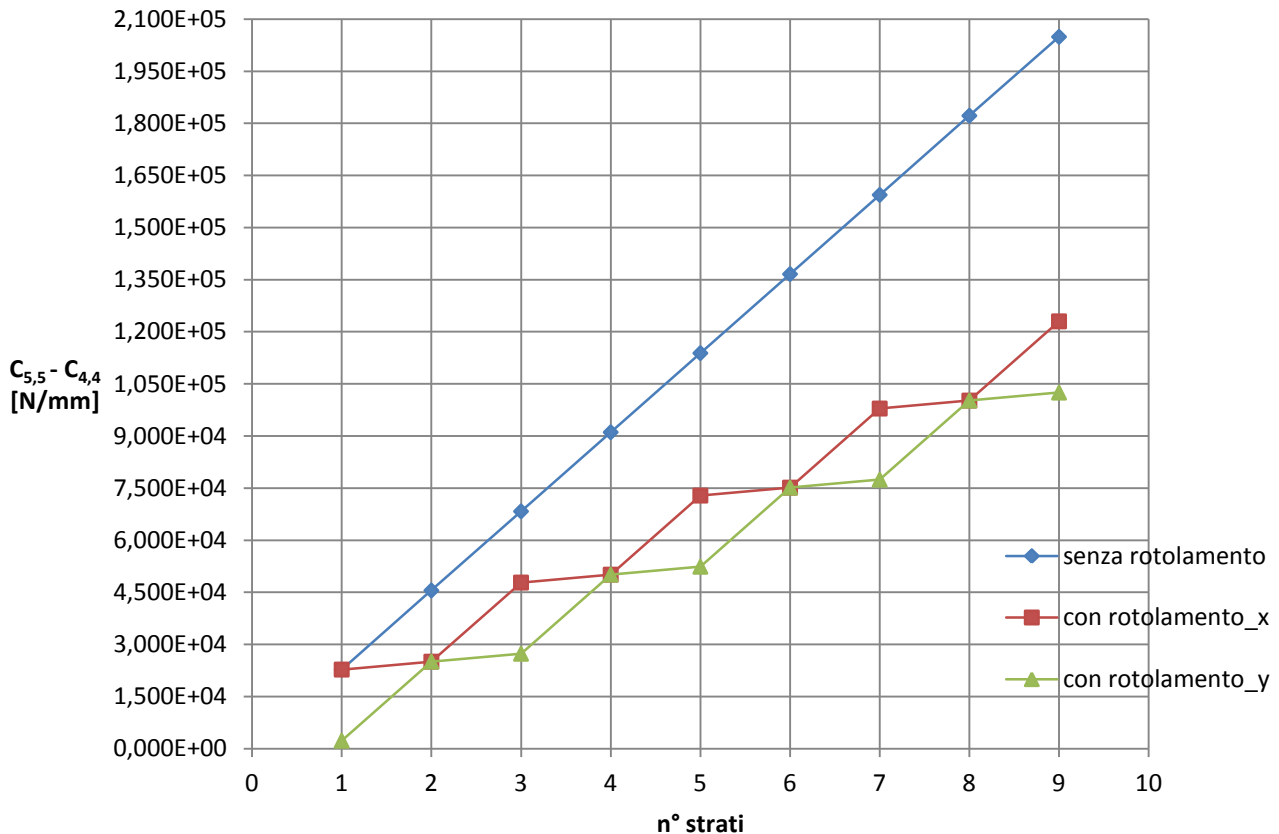
Si riportano di seguito i valori ricavati dal calcolo svolto attraverso il programma, il cui svolgimento è riportato in Allegato A.2, per un numero di strati da 1 a 9, prima senza considerare il taglio per rotolamento, poi considerando le due diverse orientazioni della fibratura rispetto alla direzione del carico.

**Tabella 1 – Valori dei termini  $C_{5,5}$ ;  $C_{4,4}$ ;  $\chi$**

n° strati	senza rotolamento		con rotolamento x		con rotolamento y	
	$C_{5,5} = C_{4,4}$	$\chi$	$C_{5,5}$	$\chi_x$	$C_{4,4}$	$\chi_y$
1	2,277E+04	1,2	2,277E+04	1,2	2,277E+03	1,2
2	4,554E+04	1,2	2,505E+04	3,63	2,505E+04	3,63
3	6,831E+04	1,2	4,782E+04	5,227	2,732E+04	2,293
4	9,108E+04	1,2	5,009E+04	3,63	5,009E+04	3,63
5	1,139E+05	1,2	7,286E+04	4,356	5,237E+04	2,941
6	1,366E+05	1,2	7,514E+04	3,63	7,514E+04	3,63
7	1,594E+05	1,2	9,791E+04	4,101	7,742E+04	3,168
8	1,822E+05	1,2	1,002E+05	3,63	1,002E+05	3,63
9	2,049E+05	1,2	1,230E+05	3,982	1,025E+05	3,282

Si vede immediatamente dalla tabella come i valori di rigidezza si riducono drasticamente in presenza di strati con modulo di taglio  $G_{90}$ , ovviamente tale diminuzione è maggiore in presenza di più strati con modulo ridotto, mentre è la stessa nel caso in cui gli strati fossero in numero pari. I grafici sotto riportati evidenziano questo abbattimento delle rigidezze.

### Rigidezza a taglio trasversale



**Figura 40 – Valori dei termini  $C_{5,5}$  e  $C_{4,4}$  in funzione degli effetti del “rolling shear”**

Si vede dal grafico che mentre nel caso in cui non fosse considerato l'effetto del taglio per rotolamento la rigidezza a taglio del pannello aumenta linearmente all'aumentare del numero di strati, in realtà tale rigidezza aumenta più o meno a seconda che la fibratura dello strato aggiunto sia disposta longitudinalmente od ortogonalmente rispetto alla direzione del carico considerata. E' immediato comprendere che nel caso in cui gli strati ortogonali siano nello stesso numero di quelli longitudinali i due valori di rigidezza coincidono.

Una considerazione merita il fattore di taglio  $\chi$ . Come si vede dalla tabella il suo valore aumenta sensibilmente nel caso in cui viene considerato il taglio per rotolamento, discostandosi dal valore di 1,2.

Tale aumento comporta un ulteriore abbattimento della rigidezza a taglio, che è dunque molto influenzata dalla presenza degli strati con un modulo  $G$  ridotto ( $G_{90}$ ), i quali hanno dunque un peso maggiore rispetto agli strati con modulo  $G_0$  nella caratterizzazione complessiva della rigidezza a taglio.

Osservando i grafici sotto riportati si può notare questa considerazione.

**Fattori di taglio  $\chi$**

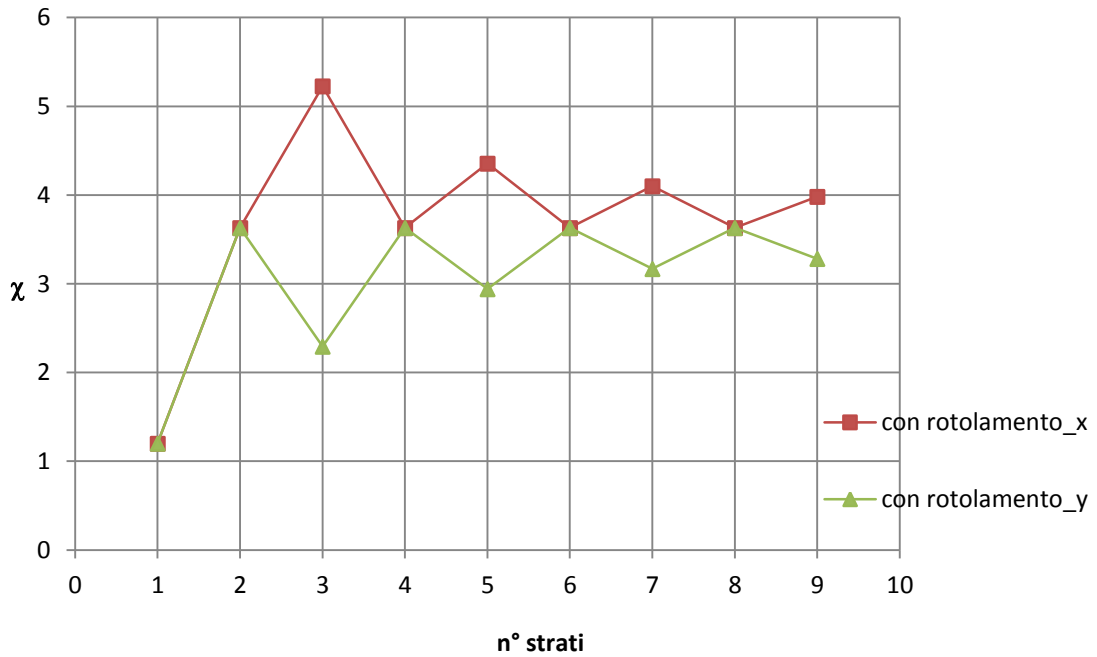


Figura 41 – Andamento del valore di  $\chi$  in funzione del numero di strati e della direzione considerata

**Rigidezza a taglio trasversale  $C/\chi$**

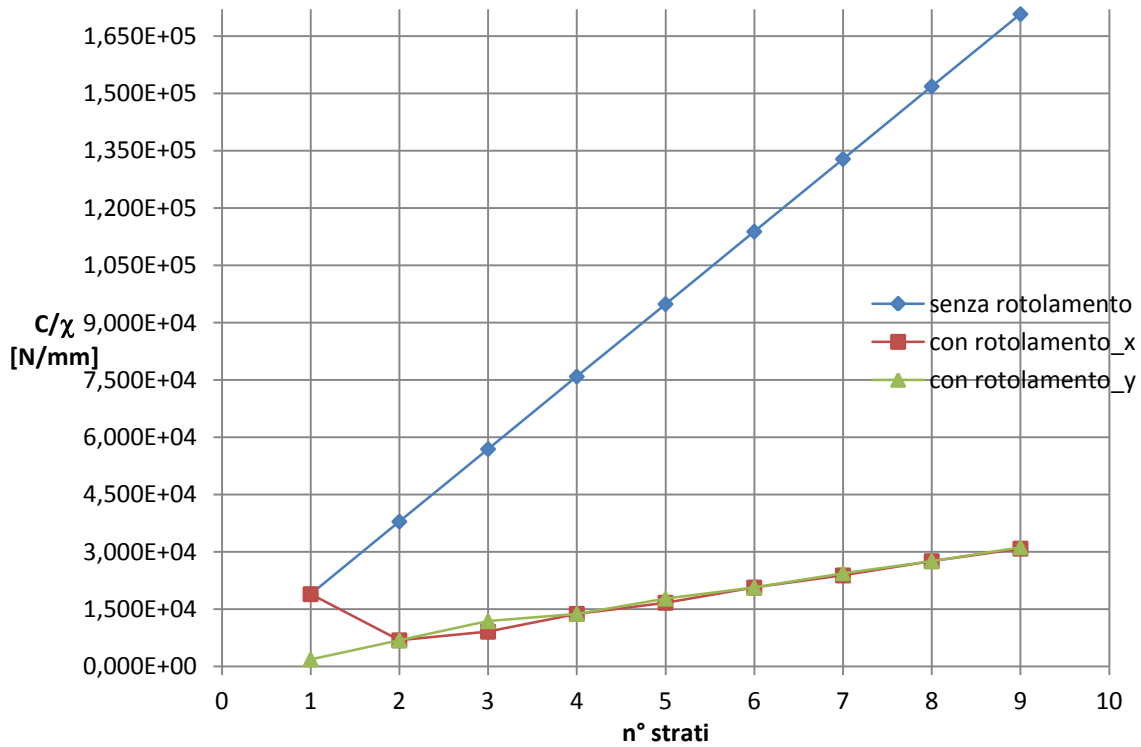


Figura 42 - Valori dei termini  $C_{5,5}/\chi$  e  $C_{4,4}/\chi$  in funzione degli effetti del “rolling shear”



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

---

Si evince dal grafico che un unico strato con modulo a taglio  $G_0$  è più rigido di un elemento costituito da alcuni strati con modulo  $G_{90}$ .

Un altro aspetto interessante consiste nel fatto che nel caso in cui fossero presenti più strati con modulo ridotto  $G_{90}$  di quelli con modulo  $G_0$ , il fattore di taglio è meno penalizzante nei riguardi della rigidezza.

Questo aspetto comporta che il rapporto tra i termini  $C_{5,5}$  e  $C_{4,4}$  della matrice di rigidezza e il fattore di taglio  $\chi$ , è praticamente lo stesso nei due casi considerati, andando così a compensare il differente abbattimento della rigidezza a taglio.



### 7.2 Il problema della rigidità torsionale della piastra XLAM

Si vogliono fare ora alcune considerazioni sulla rigidità torsionale della piastra XLAM, rappresentato in questo documento dal termine  $D_{3,3}$  della matrice di rigidità flessionale del laminato, definito al Capitolo 5. La rigidità torsionale di questo materiale è un tema sul quale si sta ancora lavorando anche a livello di ricerca. Il comportamento torsionale delle piastre di legno unidirezionali è conosciuto, e noto per la rigidità e la resistenza particolarmente ridotte che ne risultano. Per i pannelli a strati incrociati è ipotizzabile un comportamento simile: è quindi corretto affermare che la rigidità torsionale di questi pannelli è particolarmente ridotta. La rigidità del pannello a strati incrociati è quindi essenzialmente data dalla rigidità flessionale nelle due direzioni del piano.

Volendo determinare l'inerzia torsionale di un elemento composito, occorre considerare la diversa rigidità delle componenti della sezione considerata: la diversa rigidità degli strati sollecitati in direzione trasversale determina la rigidità ridotta di tutto l'elemento.

La torsione su una sezione di pannello a strati incrociati provoca delle sollecitazioni che creano il "rotolamento" delle fibre, lo stesso fenomeno che si presenta in caso di sollecitazioni di taglio che quindi non può essere trascurato anche nel caso della torsione.

Si riportano dunque di seguito i valori di tale rigidità calcolati attraverso il programma Mathcad, nel caso in cui venga considerato o meno questo fenomeno appena descritto.

**Tabella 2 - Valori del termine  $D_{3,3}$**

	<i>senza rotolamento</i>	<i>con rotolamento_x</i>	<i>con rotolamento_y</i>
<b>n° strati</b>	<b><math>D_{3,3}</math></b>	<b><math>D_{3,3}</math></b>	<b><math>D_{3,3}</math></b>
<b>1</b>	2,066E+06	2,066E+06	2,066E+05
<b>2</b>	1,653E+07	9,092E+06	9,092E+06
<b>3</b>	5,579E+07	5,393E+07	7,439E+06
<b>4</b>	1,322E+08	7,274E+07	7,274E+07
<b>5</b>	2,583E+08	2,099E+08	7,418E+07
<b>6</b>	4,463E+08	2,455E+08	2,455E+08
<b>7</b>	7,088E+08	5,247E+08	2,550E+08
<b>8</b>	1,058E+09	5,819E+08	5,819E+08
<b>9</b>	1,506E+09	1,053E+09	6,044E+08

I valori sopra riportati mostrano come la rigidità torsionale dell'elemento subisca una riduzione tanto maggiore quanto è il numero di strati disposti con la fibratura ortogonale rispetto alla direzione di applicazione del carico.

Il grafico sotto riportato mostra tale diminuzione rispetto al caso in cui non venga considerato il fenomeno del "rotolamento", ovviamente tale diminuzione aumenta all'aumentare del numero di strati che compongono il pannello XLAM, a conferma del fatto di come la presenza di strati con modulo ridotto faccia ridurre sensibilmente il valore di rigidità.

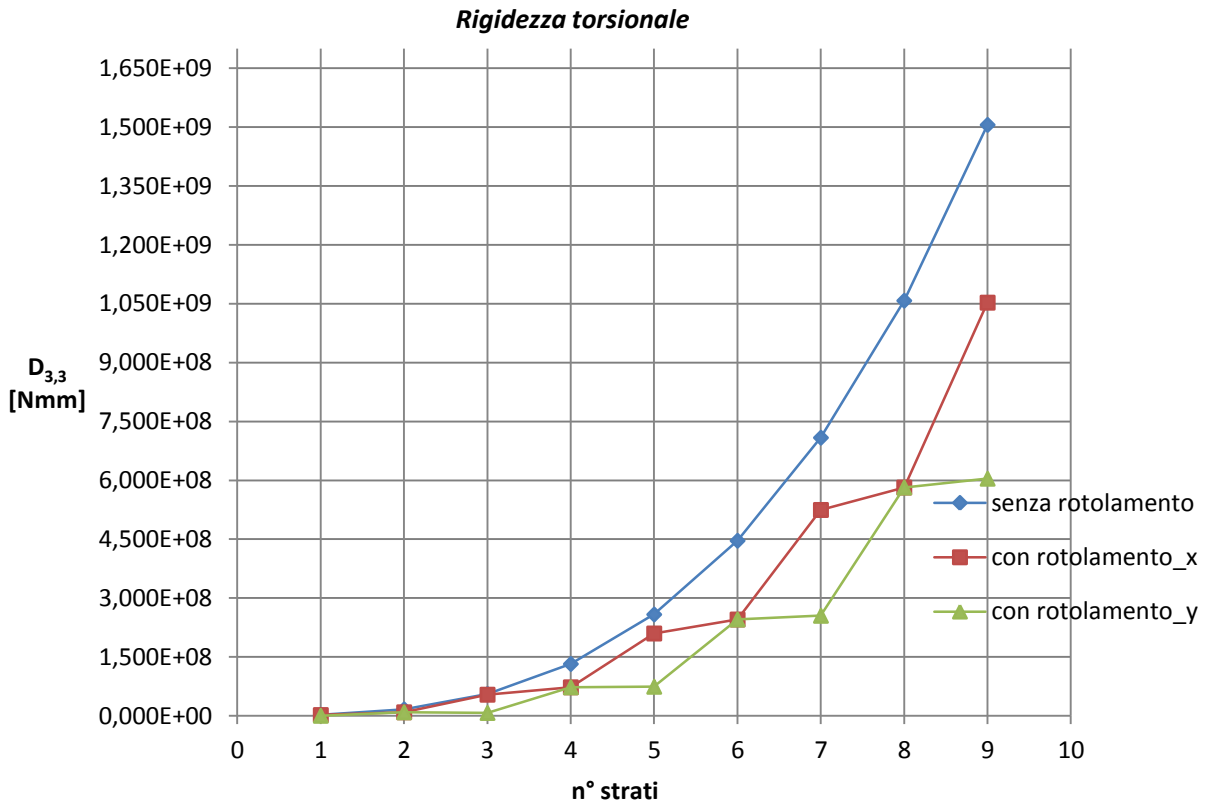


Figura 43 - Valori del termine  $D_{3,3}$  in funzione degli effetti del “rolling shear”

Appare subito evidente come nel caso di strati dispari, siamo in presenza di due diverse rigidezze. Questo aspetto molto probabilmente rappresenta una delle complicazioni che contribuiscono a rendere difficile la determinazione di valori esatti per questo parametro.

Considerando ora il caso di una piastra di lati 6x6 metri, costituita da un pannello composto da 6 strati, si vuole mostrare, a titolo di esempio, l’effetto risultante da tre casi diversi del valore della rigidezza torsionale della piastra in termini di deformazione e momenti:

	Rigidezza nulla	Rigidezza con “rotolamento”	Rigidezza senza “rotolamento”
<b>w [mm]</b>	16,783	14,822	13,527
<b><math>M_x</math> [Nmm]/mm</b>	16470	14460	13140
<b><math>M_y</math> [Nmm]/mm</b>	16470	14460	13140

I valori ottenuti, calcolati con la soluzione di Navier per le piastre ortotrope, mostrano che tra i due casi estremi vi è una differenza di circa il 25%, mentre la situazione in cui viene considerato l’effetto del taglio per rotolamento è posta pressoché in situazione intermedia. Ciò significa che di fatto la rigidezza torsionale della piastra è pari a circa la metà di quella che si otterrebbe considerando che tutti gli strati abbiano la stessa rigidezza calcolata con il modulo di taglio  $G_0$ .



## **8. STUDIO PARAMETRICO**

In questo capitolo si vuole procedere al calcolo di un solaio strutturale tipico di un edificio per civile abitazione costituito da pannelli di legno massiccio a strati incrociati (XLAM).

Lo stesso elemento strutturale è stato calcolato con diverse procedure di calcolo, in particolare si definiscono i seguenti casi di studio a cui si farà successivamente riferimento:

- *Monodirezionale 1/1bis*  
Calcolo semplificato in cui vengono trascurati gli strati ortogonali alla direzione del carico applicato, gli effetti del “taglio per rotolamento” vengono prima considerati (caso 1) e poi trascurati (caso 1bis);
  
- *Monodirezionale 2/2bis*  
Calcolo esatto in cui non vengono trascurati gli strati ortogonali alla direzione del carico applicato, gli effetti del “taglio per rotolamento” vengono prima considerati (caso 2) e poi trascurati (caso 2bis);
  
- *Bidirezionale 1/1bis*  
Calcolo approssimato (Teoria di Grashof) in cui vengono trascurati gli strati ortogonali alla direzione del carico applicato, gli effetti del “taglio per rotolamento” vengono prima considerati (caso 1) e poi trascurati (caso 1bis);
  
- *Bidirezionale 2/2bis*  
Calcolo esatto (Teoria di Kirchhoff) in cui vengono considerati gli strati ortogonali alla direzione del carico applicato, gli effetti del “taglio per rotolamento” vengono prima considerati (caso 2) e poi trascurati (caso 2bis);
  
- *Bidirezionale 3/3bis*  
Calcolo esatto (Teoria di Mindlin) in cui vengono considerati gli strati ortogonali alla direzione del carico applicato, gli effetti del “taglio per rotolamento” vengono prima considerati (caso 3) e poi trascurati (caso 3bis).

### 8.1 Analisi dei carichi

L'analisi dei carichi è svolta secondo le indicazioni riportate nelle Norme Tecniche per le Costruzioni (D.M. 14/01/2008), considerando una stratigrafia tipica di un solaio realizzato con questi pannelli strutturali. Le azioni agenti sul solaio sono i carichi permanenti (strutturali e non) e quelli di esercizio relativi ad ambienti per uso residenziale.

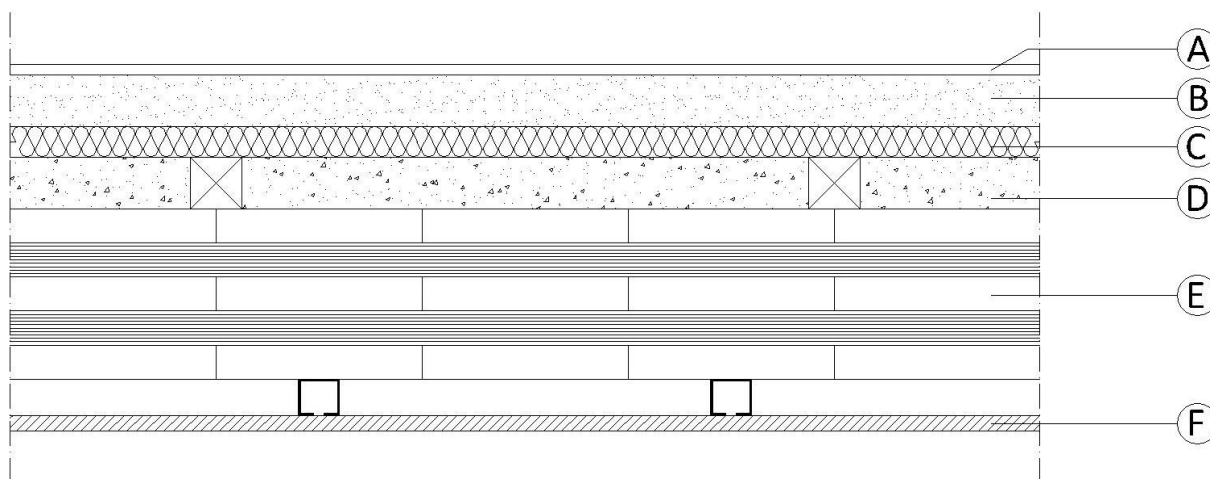


Figura 44 – Stratigrafia di un solaio realizzato con pannelli strutturali XLAM

Tabella 3 – Analisi dei carichi; carichi permanenti

Carichi permanenti Solaio tipo		n° strati								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		kg/m <sup>2</sup>								
<b>A</b>	Pavimento in legno, sp. 1 cm	5,0								
<b>B</b>	Sottofondo alleggerito, sp. 5 cm	57,5								
<b>C</b>	Isolante anticalpestio, sp. 3 cm	6,0								
<b>D</b>	Riempimento alleggerito, sp. 5 cm	30,0								
<b>E</b>	Pannello XLAM, sp. variabile	15,8	31,7	47,5	63,4	79,2	95,0	110,9	126,7	142,6
<b>F</b>	Pannello di cartongesso, sp. 2 cm	15,0								
<b>TOTALE</b>		<b>129,3</b>	<b>145,2</b>	<b>161,0</b>	<b>176,9</b>	<b>192,7</b>	<b>208,5</b>	<b>224,4</b>	<b>240,2</b>	<b>256,1</b>
<b>Strutturali</b>		<b>15,8</b>	<b>31,7</b>	<b>47,5</b>	<b>63,4</b>	<b>79,2</b>	<b>95,0</b>	<b>110,9</b>	<b>126,7</b>	<b>142,6</b>
<b>Permanenti</b>		<b>113,5</b>								

I carichi permanenti appartengono alla classe di durata *permanente*.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Tabella 4 – Analisi dei carichi; carichi d'esercizio

<b>Carichi d'esercizio</b> <b>Solaio tipo</b>	<b>n° strati</b>								
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
	<b>kg/m<sup>2</sup></b>								
<b>Accidentale</b>	<b>200,0</b>								

I carichi d'esercizio appartengono alla classe di durata *media*.

## 8.2 Proprietà meccaniche del pannello

Per poter definire le resistenze di calcolo e le rigidzze del pannello, si assume che esso sia composto da tavole appartenenti alla categoria di classificazione C24 secondo la UNI EN 338.

### Resistenze di calcolo

I valori caratteristici di resistenza per la categoria C24 sono i seguenti:

Tabella 5 – Valori caratteristici di resistenza secondo UNI EN 338

Resistenze (Mpa)		
flessione	$f_{m,k}$	24
trazione parallela alla fibratura	$f_{t,0,k}$	14
trazione perpendicolare alla fibratura	$f_{t,90,k}$	0,5
compressione parallela alla fibratura	$f_{c,0,k}$	21
compressione perpendicolare alla fibratura	$f_{c,90,k}$	2,5
taglio	$f_{v,k}$	2,5
taglio trasversale (rolling shear)	$f_{r,k}$	1,25

Per elementi XLAM appartenenti alla classe di *servizio 1* (elementi all'interno degli edifici in ambienti condizionati), come i solai in questione, e soggetti a carichi variabili appartenenti alla classe di *media* durata valgono i seguenti coefficienti:

- $\gamma_M = 1,45$
- $k_{mod} = 0,8$

Resistenza di calcolo a flessione:

$$f_{m,d,XLAM} = K_{sys} \cdot \frac{k_{mod} \cdot f_{m,k}}{\gamma_M} = 1,1 \cdot \frac{0,80 \cdot 24,0}{1,45} = 14,6 \text{ MPa}$$

Resistenza di calcolo a taglio:

$$f_{v,d,XLAM} = \frac{k_{mod} \cdot f_{v,k}}{\gamma_M} = \frac{0,80 \cdot 2,50}{1,45} = 1,38 \text{ MPa}$$

Resistenza di calcolo a taglio trasversale ("rolling shear"):

$$f_{r,d,XLAM} = \frac{k_{mod} \cdot f_{r,k}}{\gamma_M} = \frac{0,80 \cdot 1,25}{1,45} = 0,69 \text{ MPa}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Resistenza di calcolo a trazione perpendicolare alla fibratura:

$$f_{t,90,d,XLAM} = \frac{k_{\text{mod}} \cdot f_{t,90,k}}{\gamma_M} = \frac{0,80 \cdot 0,50}{1,45} = 0,28 \text{ MPa}$$

### Rigidezze

Contrariamente alle resistenze di calcolo i valori di rigidezza, flessionale e a taglio, dei pannelli non possono essere definiti in modo univoco in quanto variano a seconda del metodo di calcolo utilizzato.

Ci si limita ora a specificare che i pannelli sono costituiti da tavole dello spessore di 33 mm, aventi i seguenti valori medi di modulo elastico e di taglio:

Tabella 6 – Valori caratteristici di modulo elastico secondo UNI EN 338

#### Modulo elastico (Gpa)

modulo elastico medio parallelo alle fibre	$E_{0,mean}$	11
modulo elastico medio perpendicolare alle fibre	$E_{90,mean}$	0,37
modulo di taglio medio	$G_{mean}$	0,69
modulo di taglio "rolling shear"	$G_{R,mean}$	0,069

### 8.3 Calcolo monodirezionale semplificato (Monodirezionale 1/1bis)

#### 8.3.1 Rigidezze

Nel calcolo monodirezionale semplificato le rigidezze flessionali e a taglio del pannello XLAM vengono calcolate con le espressioni viste al Capitolo 3.

La rigidezza flessionale è dunque data dalla relazione (3.1):

$$K_{XLAM} = \sum_I (J_I \cdot E_I) + \sum_I (A_I \cdot a^2 \cdot E_I)$$

ricordando che vengono trascurati gli strati disposti trasversalmente aventi modulo  $E_{90}$  si ottengono i seguenti valori di rigidezza:

**Tabella 7 – Valori di  $K_{XLAM}$  per il calcolo monodirezionale semplificato**

<b>Rigidezza flessionale del pannello [Nmm<sup>2</sup>]</b>	<b>n° strati</b>				
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b><math>K_{XLAM}</math></b>	3,294E+10	8,565E+11	3,261E+12	8,038E+12	1,598E+13

Nel caso in cui non venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento", avendo questo influenza sul modulo di taglio  $G$ , i valori di rigidezza flessionale sono quindi gli stessi.

La rigidezza a taglio del pannello è data dalla relazione (3.13):

$$S_{XLAM} = \kappa \cdot \sum_I (G_I \cdot A_I)$$

dove in questo caso non è più possibile trascurare gli strati ortogonali.

In questo caso è dunque possibile calcolare valori diversi a seconda che sia considerato o meno l'effetto sopra citato; nel caso in cui fosse considerato la rigidezza a taglio si calcola applicando il due modulo di taglio,  $G_0$  e  $G_{90}$ , a seconda che lo strato sia disposto longitudinalmente o trasversalmente rispetto alla direzione del carico applicato, e moltiplicando per il fattore di taglio ottenuto da questi valori dei moduli (Tabella 1). Ricordando che  $\kappa = 1/\chi$  si ottengono i seguenti valori:

**Tabella 8 – Valori di  $S_{XLAM}$  per il calcolo monodirezionale semplificato con "rolling shear"**

<b>Rigidezza a taglio del pannello [N]</b>	<b>n° strati</b>				
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b><math>\kappa</math></b>	0,833	0,191	0,230	0,244	0,251
<b><math>S_{XLAM}</math></b>	1,898E+07	9,148E+06	1,673E+07	2,387E+07	3,088E+07



Nel caso in cui invece non fosse considerato l'effetto del "taglio per rotolamento", la rigidezza a taglio si calcola applicando a tutti gli strati il modulo  $G_0$  e moltiplicando per il fattore di taglio  $\kappa = 1/1,2 = 0,833$ , ottenendo i seguenti risultati:

Tabella 9 - Valori di  $S_{XLAM}$  per il calcolo monodirezionale semplificato senza "rolling shear"

Rigidezza a taglio del pannello [N]	n° strati				
	1	3	5	7	9
$\kappa$	0,833	0,833	0,833	0,833	0,833
$S_{XLAM}$	1,898E+07	5,693E+07	9,488E+07	1,328E+08	1,708E+08

### 8.3.2 Verifiche agli stati limite ultimi

Dall'analisi dei carichi risultano per gli strati dispari i seguenti carichi permanenti e d'esercizio:

Tabella 10 – Carichi permanenti e variabili gravanti sui pannelli XLAM con numero di strati dispari per il calcolo monodirezionale semplificato

	n° strati				
	1	3	5	7	9
<b>1) Carichi permanenti</b>					
$g_1$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,000158	0,000475	0,000792	0,001109	0,001426
$g_2$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
$G_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,001293	0,001610	0,001927	0,002244	0,002561
<b>2) Carichi variabili</b>					
$Q_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002

Le azioni sulla costruzione devono essere cumulate in modo da determinare condizioni di carico tali da risultare più sfavorevoli ai fini delle singole verifiche, tenendo conto della probabilità ridotta di intervento simultaneo di tutte le azioni con i rispettivi valori più sfavorevoli, come consentito dalle normative citate.

Per gli stati limite ultimi si adotterà la combinazione del tipo:

$$q_d = \gamma_{G1} \cdot G_1 + \gamma_{G2} \cdot G_2 + \gamma_Q \cdot Q_k$$

con:

$\gamma_{G1} =$	1,3
$\gamma_{G2} =$	1,5
$\gamma_Q =$	1,5



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Considerando una larghezza di solaio pari a un metro, si ottengono le seguenti combinazioni di carico allo SLU:

**Tabella 11 – Combinazioni di carico allo SLU per pannelli XLAM con numero di strati dispari per il calcolo monodirezionale semplificato**

<i>Combinazione di carico SLU [N/mm]</i>	<b>n° strati</b>				
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>q<sub>d</sub></b>	4,908	5,320	5,732	6,144	6,556

Considerando ora per i solai uno schema statico in semplice appoggio ad una sola campata, con luce variabile tra i 3 e gli 8 metri, si determinano i momenti e i tagli massimi di calcolo con le espressioni:

$$M_d = \frac{q_d \cdot l^2}{8} \quad V_d = \frac{q_d \cdot l}{2}$$

ottenendo i seguenti valori:

**Tabella 12 – Momento massimo di calcolo per il calcolo monodirezionale semplificato**

<i>Momento massimo di calcolo [Nmm]</i>	<b>n° strati</b>				
<b>Luce [m]</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	5521973	5985293	6448613	6911933	7375253
<b>4</b>	9816840	10640520	11464200	12287880	13111560
<b>5</b>	15338813	16625813	17912813	19199813	20486813
<b>6</b>	22087890	23941170	25794450	27647730	29501010
<b>7</b>	30064073	32586593	35109113	37631633	40154153
<b>8</b>	39267360	42562080	45856800	49151520	52446240

**Tabella 13 – Taglio massimo di calcolo per il calcolo monodirezionale semplificato**

<i>Taglio massimo di calcolo [N]</i>	<b>n° strati</b>				
<b>Luce [m]</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	7363	7980	8598	9216	9834
<b>4</b>	9817	10641	11464	12288	13112
<b>5</b>	12271	13301	14330	15360	16389
<b>6</b>	14725	15961	17196	18432	19667
<b>7</b>	17179	18621	20062	21504	22945
<b>8</b>	19634	21281	22928	24576	26223

Ovviamente i valori di sollecitazione, nel caso di calcolo monodirezionale, sono gli stessi sia che venga considerato o meno l'effetto del "taglio per rotolamento".

### Tensioni di calcolo

Note le caratteristiche di sollecitazione è ora possibile determinare le tensioni di calcolo agenti sulla sezione del pannello. Si procede quindi ad una differenziazione tra il calcolo della tensione normale e di quella tangenziale.

La tensione normale (flessione) è data dalla relazione (3.3):

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_d}{K_{XLAM}} \cdot h/2 \cdot E_0$$

come si vede dall'espressione, non essendoci dipendenza dal modulo di taglio G ed essendo unico il valore di  $M_d$ , la tensione di flessione è la stessa nel caso in cui venga considerato o meno il "taglio per rotolamento". Essendo  $h/2$  la distanza della fibra più sollecitata rispetto l'asse baricentrico, la tensione normale massima al bordo esterno risulta:

**Tabella 14 – Tensione normale massima al bordo esterno per il calcolo monodirezionale semplificato**

$\sigma_{m,\max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	30,42	3,81	1,79	1,09	0,75
4	54,09	6,76	3,19	1,94	1,34
5	84,51	10,57	4,98	3,03	2,09
6	121,70	15,22	7,18	4,37	3,02
7	165,64	20,72	9,77	5,95	4,11
8	216,35	27,06	12,76	7,77	5,36

Riguardo la tensione tangenziale è bene fare una distinzione tra i due casi.

Essa è data dalla relazione (3.9):

$$\tau_{d,\max} = \frac{V_d \cdot \sum (S_m \cdot E_m)}{K_{XLAM} \cdot b}$$

e come si può vedere anche in questo caso non vi è dipendenza dal modulo di taglio G, pertanto nel calcolo monodirezionale semplificato si ottiene lo stesso valore di tensione tangenziale per i due casi considerati.

La differenza tra il considerare o meno l'effetto del "taglio per rotolamento" sta nel confrontare la tensione tangenziale con due diverse resistenze di calcolo: nel caso in cui l'effetto è considerato si calcolano due tensioni tangenziali, una baricentrica che a seconda del numero di strati considerati può essere longitudinale o trasversale, e una seconda in corrispondenza degli strati trasversali per gli elementi per cui quella baricentrica risultava essere una tensione tangenziale longitudinale, dopodiché si confrontano le tensioni con la  $f_{v,d,XLAM}$  o con la  $f_{r,d,XLAM}$  a seconda che si tratti di tensioni tangenziali in corrispondenza di strati longitudinali o trasversali. La tensione tangenziale trasversale sarà per alcuni casi una tensione baricentrica (3 e 7 strati), mentre negli altri casi si calcola la tensione dello strato longitudinale precedente a quello baricentrico che rimane costante per tutto lo strato trasversale (si rimanda alla Figura 25 del Capitolo 3).

Nel caso in cui invece l'effetto del taglio per rotolamento non venga tenuto in conto, è sufficiente calcolare un'unica tensione tangenziale baricentrica da confrontare con la sola  $f_{v,d,XLAM}$ .

Fatta questa precisazione, le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico, nel caso in cui venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" sono:

**Tabella 15 – Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico per il calcolo monodirezionale semplificato con "rolling shear"**

$\tau_{d,max} [N/mm^2]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	0,335	0,112	0,067	0,055	0,045
4	0,446	0,149	0,089	0,073	0,060
5	0,558	0,186	0,112	0,092	0,075
6	0,669	0,223	0,134	0,110	0,090
7	0,781	0,260	0,157	0,128	0,105
8	0,892	0,298	0,179	0,147	0,120

	taglio in corrispondenza degli strati longitudinali
	taglio in corrispondenza degli strati trasversali ("rolling shear")

Mentre per gli elementi da 5 e 9 strati la tensione tangenziale in corrispondenza degli strati trasversali risulta essere:

**Tabella 16 – Tensione tangenziale massima in corrispondenza degli strati trasversali per gli elementi da 5 e 9 strati per il calcolo monodirezionale semplificato con "rolling shear"**

$\tau_{r,d,max} [N/mm^2]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	-	-	0,063	-	0,044
4	-	-	0,084	-	0,059
5	-	-	0,105	-	0,074
6	-	-	0,126	-	0,088
7	-	-	0,147	-	0,103
8	-	-	0,168	-	0,118

Come si vede già dai valori riportati in tabella la tensione tangenziale in corrispondenza degli strati trasversali è inferiore a quella in corrispondenza degli strati longitudinali, ma andrà confrontata in sede di verifica con la resistenza di calcolo a taglio trasversale  $f_{r,d,XLAM}$ . Essendo questa minore della resistenza di calcolo a taglio  $f_{v,d,XLAM}$  questo confronto sarà sicuramente determinante ai fini della verifica, come già precedentemente descritto al Capitolo 3.

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico nel caso in cui invece non fosse considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" sono:

**Tabella 17 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico per il calcolo monodirezionale semplificato senza "rolling shear"**

$\tau_{d,max} [N/mm^2]$	n° strati					
	Luce [m]	1	3	5	7	9
3		0,335	0,112	0,067	0,055	0,045
4		0,446	0,149	0,089	0,073	0,060
5		0,558	0,186	0,112	0,092	0,075
6		0,669	0,223	0,134	0,110	0,090
7		0,781	0,260	0,157	0,128	0,105
8		0,892	0,298	0,179	0,147	0,120

In questo caso le tensioni tangenziali, che sono le stesse di Tabella 15, andranno confrontate tutte con la resistenza di calcolo a taglio  $f_{v,d,XLAM}$ , motivo per cui ai fini della verifica la tensione che darà la condizione più sfavorevole è sempre quella baricentrica.

### Verifiche

Si procede ora con le verifiche di resistenza della sezione del pannello XLAM.

Dato che la tensione normale di flessione  $\sigma_{m,max,d}$  è la stessa per i due casi considerati si procede ad un'unica verifica:

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 18 – Verifica a flessione per il calcolo monodirezionale semplificato**

$\sigma_{m,max,d} / f_{m,d,XLAM}$	n° strati					
	Luce [m]	1	3	5	7	9
3		2,09	0,26	0,12	0,08	0,05
4		3,71	0,46	0,22	0,13	0,09
5		5,80	0,73	0,34	0,21	0,14
6		8,36	1,04	0,49	0,30	0,21
7		11,37	1,42	0,67	0,41	0,28
8		14,85	1,86	0,88	0,53	0,37

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta.

La verifica a taglio deve invece essere condotta in modo separato per i due casi, per i motivi descritti precedentemente.

Nel caso in cui venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" le verifiche sono:

$$\frac{\tau_{d,\max}}{f_{v,d, XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 19 – Verifica a taglio per il calcolo monodirezionale semplificato con "rolling shear"**

$\tau_{d,\max}/f_{v,d, XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	1	3	5	7
3	0,24	-	0,05	-	0,03
4	0,32	-	0,06	-	0,04
5	0,40	-	0,08	-	0,05
6	0,49	-	0,10	-	0,07
7	0,57	-	0,11	-	0,08
8	0,65	-	0,13	-	0,09

$$\frac{\tau_{r,d,\max}}{f_{r,d, XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 20 – Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") per il calcolo monodirezionale semplificato**

$\tau_{r,d,\max}/f_{r,d, XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	1	3	5	7
3	-	0,16	0,09	0,08	0,06
4	-	0,22	0,12	0,11	0,09
5	-	0,27	0,15	0,13	0,11
6	-	0,32	0,18	0,16	0,13
7	-	0,38	0,21	0,19	0,15
8	-	0,43	0,24	0,21	0,17

Come già descritto in precedenza, si può notare dai valori delle tabelle come la verifica a taglio trasversale sia quella determinante, in particolare per gli elementi costituiti da 5 e 9 strati, per cui la verifica è stata condotta sia per gli strati longitudinali che per quelli trasversali.

Appare comunque evidente inoltre che la verifica a taglio, sebbene va condotta in modo esatto, verificando dunque che la tensione agente sugli strati trasversali sia comunque inferiore alla rispettiva resistenza di calcolo, non risulta mai determinante ai fini della verifica complessiva in quanto già con la verifica a flessione alcuni elementi non erano verificati.

Nel caso in cui invece non venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" si procede ad un'unica verifica:

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 21 – Verifica a taglio per il calcolo monodirezionale semplificato senza "rolling shear"**

$\tau_{d,max}/f_{v,d,XLAM}$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	0,24	0,08	0,05	0,04	0,03
4	0,32	0,11	0,06	0,05	0,04
5	0,40	0,13	0,08	0,07	0,05
6	0,49	0,16	0,10	0,08	0,07
7	0,57	0,19	0,11	0,09	0,08
8	0,65	0,22	0,13	0,11	0,09

I valori risultano dunque minori rispetto a quelli di Tabella 20, in quanto non si è considerato il fatto che gli strati trasversali hanno una resistenza di calcolo molto inferiore rispetto a quelli longitudinali.

### 8.3.3 Verifiche agli stati limite di esercizio

Come già accennato nei capitoli precedenti, per il calcolo delle deformazioni, oltre al contributo del momento flettente, si considera anche il contributo del taglio.

Occorre quindi determinare la freccia istantanea dovuta ai carichi permanenti e a quelli variabili; per una trave inflessa di lunghezza  $l$ , in semplice appoggio, a sezione costante e soggetta a carico uniforme  $q$ , la freccia totale massima vale quindi:

$$u_{g,ist} = \frac{5}{384} \frac{G_k \cdot l^4}{K_{XLAM}} + \frac{G_k \cdot l^2}{8S_{XLAM}} \quad \text{per i carichi permanenti, e}$$

$$u_{q,ist} = \frac{5}{384} \frac{Q_k \cdot l^4}{K_{XLAM}} + \frac{Q_k \cdot l^2}{8S_{XLAM}} \quad \text{per i carichi variabili.}$$

Come si vede dalle espressioni il valore della freccia dipende dal termine  $S_{XLAM}$ , calcolato nel paragrafo 8.3.1 il quale assume valori diversi a seconda che venga considerato o meno l'effetto del "taglio per rotolamento".

Pertanto si vuole mostrare come fatto fin'ora per gli altri parametri, come cambia il valore della deformazione a seconda della rigidità a taglio considerata.

Per il calcolo delle deformazioni finali, tramite le espressioni della (3.17), si utilizzano i seguenti valori:  $k_{def} = 0,6$  (classe di servizio 1) e  $\psi_{2,1} = 0,3$  (categoria A, ambienti ad uso residenziale).



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Si riportano di seguito i valori di deformazione istantanea e finale nel caso in cui venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento":

**Tabella 22 – Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo monodirezionale semplificato con "rolling shear"**

$u_{g,ist} [mm]$	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
<b>3</b>	41,49	2,18	0,75	0,40	0,26
<b>4</b>	131,01	6,62	2,20	1,12	0,70
<b>5</b>	319,73	15,85	5,17	2,57	1,56
<b>6</b>	662,86	32,52	10,49	5,13	3,08
<b>7</b>	1227,89	59,85	19,18	9,30	5,52
<b>8</b>	2094,55	101,67	32,43	15,64	9,21

**Tabella 23 – Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo monodirezionale semplificato con "rolling shear"**

$u_{g,ist} [mm]$	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
<b>3</b>	64,15	2,71	0,78	0,36	0,20
<b>4</b>	202,59	8,22	2,28	1,00	0,55
<b>5</b>	494,41	19,69	5,36	2,29	1,22
<b>6</b>	1024,99	40,39	10,89	4,58	2,40
<b>7</b>	1898,70	74,34	19,90	8,29	4,31
<b>8</b>	3238,83	126,29	33,66	13,94	7,19

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 24 – Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo monodirezionale semplificato con "rolling shear"**

$u_{g,fin} [mm]$	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
<b>3</b>	66,38	3,49	1,20	0,64	0,42
<b>4</b>	209,62	10,59	3,52	1,79	1,12
<b>5</b>	511,57	25,36	8,27	4,10	2,50
<b>6</b>	1060,58	52,03	16,78	8,21	4,92
<b>7</b>	1964,62	95,76	30,68	14,88	8,83
<b>8</b>	3351,29	162,68	51,90	25,02	14,74



$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 25 – Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo monodirezionale semplificato con “rolling shear”**

$u_{q,fin}$ [mm]	n° strati					
	Luce [m]	1	3	5	7	9
3		75,70	3,20	0,92	0,42	0,24
4		239,05	9,70	2,69	1,18	0,65
5		583,40	23,23	6,33	2,70	1,44
6		1209,49	47,66	12,85	5,40	2,84
7		2240,46	87,72	23,49	9,78	5,09
8		3821,82	149,02	39,72	16,45	8,49

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 26 – Deformazione finale totale per il calcolo monodirezionale semplificato con “rolling shear”**

$u_{fin}$ [mm]	n° strati					
	Luce [m]	1	3	5	7	9
3		142,08	6,69	2,13	1,06	0,66
4		448,67	20,29	6,21	2,97	1,77
5		1094,97	48,59	14,60	6,80	3,94
6		2270,08	99,69	29,63	13,61	7,76
7		4205,08	183,49	54,17	24,67	13,92
8		7173,11	311,70	91,62	41,47	23,23

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

**Tabella 27 – Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo monodirezionale semplificato con “rolling shear”**

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati						
	Luce [m]	1	3	5	7		9
3		64,15	2,71	0,78	0,36	0,20	< 10,0 mm
4		202,59	8,22	2,28	1,00	0,55	< 13,3 mm
5		494,41	19,69	5,36	2,29	1,22	< 16,7 mm
6		1024,99	40,39	10,89	4,58	2,40	< 20,0 mm
7		1898,70	74,34	19,90	8,29	4,31	< 23,3 mm
8		3238,83	126,29	33,66	13,94	7,19	< 26,7 mm

**Tabella 28 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo monodirezionale semplificato con “rolling shear”**

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati					
	1	3	5	7	9	
Luce [m]	1	3	5	7	9	
3	75,70	3,20	0,92	0,42	0,24	< 15,0 mm
4	239,05	9,70	2,69	1,18	0,65	< 20,0 mm
5	583,40	23,23	6,33	2,70	1,44	< 25,0 mm
6	1209,49	47,66	12,85	5,40	2,84	< 30,0 mm
7	2240,46	87,72	23,49	9,78	5,09	< 35,0 mm
8	3821,82	149,02	39,72	16,45	8,49	< 40,0 mm

**Tabella 29 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo monodirezionale semplificato con “rolling shear”**

$u_{fin} < l/250$	n° strati					
	1	3	5	7	9	
Luce [m]	1	3	5	7	9	
3	142,08	6,69	2,13	1,06	0,66	< 12,0 mm
4	448,67	20,29	6,21	2,97	1,77	< 16,0 mm
5	1094,97	48,59	14,60	6,80	3,94	< 20,0 mm
6	2270,08	99,69	29,63	13,61	7,76	< 24,0 mm
7	4205,08	183,49	54,17	24,67	13,92	< 28,0 mm
8	7173,11	311,70	91,62	41,47	23,23	< 32,0 mm

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.

Di seguito sono invece riportate le deformazioni istantanee e finali nel caso in cui l'effetto del “taglio per rotolamento” non venga preso in considerazione:

**Tabella 30 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo monodirezionale semplificato senza “rolling shear”**

$u_{g,ist} [mm]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	41,49	2,01	0,65	0,31	0,19
4	131,01	6,32	2,01	0,96	0,56
5	319,73	15,39	4,87	2,32	1,35
6	662,86	31,85	10,06	4,79	2,77
7	1227,89	58,95	18,60	8,83	5,10
8	2094,55	100,49	31,68	15,02	8,67

**Tabella 31 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo monodirezionale semplificato senza “rolling shear”**

$u_{q,ist} [mm]$	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	64,15	2,50	0,67	0,28	0,15
4	202,59	7,85	2,09	0,86	0,44
5	494,41	19,11	5,06	2,07	1,06
6	1024,99	39,56	10,44	4,27	2,17
7	1898,70	73,22	19,30	7,87	3,99
8	3238,83	124,82	32,88	13,39	6,77

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 32 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo monodirezionale semplificato senza “rolling shear”**

$u_{g,fin} [mm]$	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	66,38	3,22	1,03	0,50	0,30
4	209,62	10,12	3,22	1,54	0,90
5	511,57	24,62	7,80	3,72	2,16
6	1060,58	50,96	16,10	7,66	4,44
7	1964,62	94,32	29,75	14,13	8,16
8	3351,29	160,79	50,68	24,04	13,87

$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 33 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo monodirezionale semplificato senza “rolling shear”**

$u_{q,fin} [mm]$	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	75,70	2,95	0,79	0,33	0,17
4	239,05	9,27	2,46	1,01	0,52
5	583,40	22,55	5,97	2,44	1,25
6	1209,49	46,68	12,32	5,03	2,55
7	2240,46	86,40	22,78	9,29	4,70
8	3821,82	147,29	38,79	15,80	7,99



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 34 - Deformazione finale totale per il calcolo monodirezionale semplificato senza "rolling shear"**

$u_{fin}$ [mm]	n° strati					
	Luce [m]	1	3	5	7	9
3		142,08	6,18	1,82	0,83	0,47
4		448,67	19,38	5,68	2,56	1,42
5		1094,97	47,17	13,76	6,16	3,41
6		2270,08	97,65	28,42	12,69	6,99
7		4205,08	180,71	52,53	23,42	12,87
8		7173,11	308,07	89,47	39,84	21,86

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

**Tabella 35 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo monodirezionale semplificato senza "rolling shear"**

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati						
	Luce [m]	1	3	5	7		9
3		64,15	2,50	0,67	0,28	0,15	< 10,0 mm
4		202,59	7,85	2,09	0,86	0,44	< 13,3 mm
5		494,41	19,11	5,06	2,07	1,06	< 16,7 mm
6		1024,99	39,56	10,44	4,27	2,17	< 20,0 mm
7		1898,70	73,22	19,30	7,87	3,99	< 23,3 mm
8		3238,83	124,82	32,88	13,39	6,77	< 26,7 mm

**Tabella 36 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo monodirezionale semplificato senza "rolling shear"**

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati						
	Luce [m]	1	3	5	7		9
3		75,70	2,95	0,79	0,33	0,17	< 15,0 mm
4		239,05	9,27	2,46	1,01	0,52	< 20,0 mm
5		583,40	22,55	5,97	2,44	1,25	< 25,0 mm
6		1209,49	46,68	12,32	5,03	2,55	< 30,0 mm
7		2240,46	86,40	22,78	9,29	4,70	< 35,0 mm
8		3821,82	147,29	38,79	15,80	7,99	< 40,0 mm

**Tabella 37 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo monodirezionale semplificato senza “rolling shear”**

$u_{fin} < l/250$	n° strati					
	1	3	5	7	9	
<b>Luce [m]</b>						
<b>3</b>	142,08	6,18	1,82	0,83	0,47	< 12,0 mm
<b>4</b>	448,67	19,38	5,68	2,56	1,42	< 16,0 mm
<b>5</b>	1094,97	47,17	13,76	6,16	3,41	< 20,0 mm
<b>6</b>	2270,08	97,65	28,42	12,69	6,99	< 24,0 mm
<b>7</b>	4205,08	180,71	52,53	23,42	12,87	< 28,0 mm
<b>8</b>	7173,11	308,07	89,47	39,84	21,86	< 32,0 mm

Confrontando i valori di Tabella 37 con quelli di Tabella 29 si vede che ai fini della verifica il considerare o meno l'effetto del “taglio per rotolamento” non incide, tuttavia, si avrebbero dei valori di deformazione più bassi nel caso in cui non fosse considerato. Nel successivo Capitolo 9 è possibile trovare con maggiore dettaglio il confronto di questi parametri.

### 8.3.4 Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto, per il caso monodirezionale semplificato, attraverso l'espressione fornita dall'Eurocodice 5 e già discussa al Capitolo 3.

L'espressione (3.18) è la seguente:

$$f_1 = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{(EJ)_l}{m}}$$

e come si può notare non vi è alcuna dipendenza dal modulo di taglio, pertanto, il suo valore è lo stesso sia che venga considerato o meno il diverso valore di G per i vari strati.

Si riportano di seguito le rigidzze flessionali del pannello e la massa per unità di area del solaio, avendo considerato come tale i soli carichi permanenti risultanti dall'analisi dei carichi.

**Tabella 38 – Rigidzze flessionali e massa per unità di area per il calcolo delle frequenze naturali di vibrazione per il calcolo monodirezionale semplificato**

	n° strati				
	1	3	5	7	9
<b>Rigidzza flessionale del pannello [Nm<sup>2</sup>/m]</b>	3,294E+04	8,565E+05	3,261E+06	8,038E+06	1,598E+07
<b>Massa per unità di area [kg/m<sup>2</sup>]</b>	129,34	161,02	192,7	224,38	256,06



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nella tabella sottostante, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

Tabella 39 – Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo monodirezionale semplificato

$f_1$ [Hz]	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	2,79	12,73	22,71	33,03	43,60
4	1,57	7,16	12,77	18,58	24,52
5	1,00	4,58	8,17	11,89	15,69
6	0,70	3,18	5,68	8,26	10,90
7	0,51	2,34	4,17	6,07	8,01
8	0,39	1,79	3,19	4,65	6,13

Come si vede da Tabella 39, in un primo confronto, appare già evidente come la verifica alle vibrazioni sia tra tutte quella più determinante, infatti, alcune condizioni che per la verifica a deformazione erano soddisfatte, non lo sono per quanto riguarda la frequenza naturale di vibrazione.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### 8.4 Calcolo monodirezionale esatto (Monodirezionale 2/2bis)

#### 8.4.1 Rigidezze

Si procede ora ad un calcolo monodirezionale “esatto”, nel senso che la procedura di calcolo utilizzata è la stessa del calcolo monodirezionale semplificato, ma ora non viene più trascurato il contributo degli strati disposti ortogonalmente rispetto all’applicazione del carico.

Il calcolo delle rigidezze è fatto quindi considerando non solo gli strati con modulo  $E_0$  ma anche quelli con modulo  $E_{90}$ , utilizzando non più l’espressione 3.1 utilizzata al capitolo precedente, ma attraverso le matrici di rigidezza flessionale sviluppate nel Capitolo 5.

I calcoli sono stati eseguiti con il programma sviluppato col software Mathcad, i cui svolgimenti sono riportati in Allegato A.1.

Di seguito si riportano i valori di rigidezza flessionale ottenuti (termine  $D_{1,1}$  della matrice  $[D]$ ):

**Tabella 40 - Valori di  $K_{XLAM}$  per il calcolo monodirezionale esatto**

Rigidezza flessionale del pannello [Nmm <sup>2</sup> ]	n° strati				
	1	3	5	7	9
$K_{XLAM}$	3,304E+10	8,602E+11	3,300E+12	8,172E+12	1,630E+13

Anche in questo caso i valori di rigidezza flessionale sono gli stessi nei due casi considerati (con o senza l’effetto del “taglio per rotolamento”).

Per quanto riguarda la rigidezza a taglio, già nel caso monodirezionale semplificato veniva determinata considerando sia gli strati longitudinali che quelli trasversali applicando diversi valori dei moduli di taglio ( $G_0$  e  $G_{90}$ ) a seconda della diversa orientazione delle fibre, pertanto i valori sono gli stessi, dati dalla relazione (3.13):

$$S_{XLAM} = \kappa \cdot \sum_I (G_I \cdot A_I)$$

Seguendo gli stessi criteri descritti al paragrafo 8.3.1 si ottengono quindi gli stessi valori di Tabella 8 nel caso in cui venga considerato il “taglio per rotolamento”:

**Tabella 41 - Valori di  $S_{XLAM}$  per il calcolo monodirezionale esatto con “rolling shear”**

Rigidezza a taglio del pannello [N]	n° strati				
	1	3	5	7	9
$\kappa$	0,833	0,191	0,230	0,244	0,251
$S_{XLAM}$	1,898E+07	9,149E+06	1,673E+07	2,387E+07	3,089E+07



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Mentre nel caso in cui tale effetto non venga considerato, i valori di rigidezza a taglio sono gli stessi di Tabella 9:

Tabella 42 - Valori di  $S_{XLAM}$  per il calcolo monodirezionale esatto senza "rolling shear"

Rigidezza a taglio del pannello [N]	n° strati				
	1	3	5	7	9
$\kappa$	0,833	0,833	0,833	0,833	0,833
$S_{XLAM}$	1,898E+07	5,693E+07	9,492E+07	1,328E+08	1,708E+08

### 8.4.2 Verifiche agli stati limite ultimi

Dall'analisi dei carichi risultano per gli strati dispari i seguenti carichi permanenti e d'esercizio:

Tabella 43 - Carichi permanenti e variabili gravanti sui pannelli XLAM con numero di strati dispari per il calcolo monodirezionale esatto

	n° strati				
	1	3	5	7	9
<b>1) Carichi permanenti</b>					
$g_1$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,000158	0,000475	0,000792	0,001109	0,001426
$g_2$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
$G_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,001293	0,001610	0,001927	0,002244	0,002561
<b>2) Carichi variabili</b>					
$Q_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002

Per gli stati limite ultimi si adotterà la combinazione del tipo:

$$q_d = \gamma_{G1} \cdot G_1 + \gamma_{G2} \cdot G_2 + \gamma_Q \cdot Q_k$$

con:

$\gamma_{G1}$ =	1,3
$\gamma_{G2}$ =	1,5
$\gamma_Q$ =	1,5

Considerando una larghezza di solaio pari a un metro, si ottengono le seguenti combinazioni di carico allo SLU:

Tabella 44 - Combinazioni di carico allo SLU per pannelli XLAM con numero di strati dispari per il calcolo monodirezionale esatto

Combinazione di carico SLU [N/mm]	n° strati				
	1	3	5	7	9
$q_d$	4,908	5,320	5,732	6,144	6,556





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Considerando ora per i solai uno schema statico in semplice appoggio ad una sola campata, con luce variabile tra i 3 e gli 8 metri, si determinano i momenti e i tagli massimi di calcolo con le espressioni:

$$M_d = \frac{q_d \cdot l^2}{8} \quad V_d = \frac{q_d \cdot l}{2}$$

ottenendo i seguenti valori:

**Tabella 45 - Momento massimo di calcolo per il calcolo monodirezionale esatto**

Momento massimo di calcolo [Nmm]	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	5521973	5985293	6448613	6911933	7375253
4	9816840	10640520	11464200	12287880	13111560
5	15338813	16625813	17912813	19199813	20486813
6	22087890	23941170	25794450	27647730	29501010
7	30064073	32586593	35109113	37631633	40154153
8	39267360	42562080	45856800	49151520	52446240

**Tabella 46 – Taglio massimo di calcolo per il calcolo monodirezionale esatto**

Taglio massimo di calcolo [N]	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	7363	7980	8598	9216	9834
4	9817	10641	11464	12288	13112
5	12271	13301	14330	15360	16389
6	14725	15961	17196	18432	19667
7	17179	18621	20062	21504	22945
8	19634	21281	22928	24576	26223

I valori di sollecitazione sono gli stessi sia che venga considerato o meno l'effetto del "taglio per rotolamento" e sono inoltre identici al caso del precedente capitolo (Monodirezionale 1/1bis).

### Tensioni di calcolo

Note le caratteristiche di sollecitazione è ora possibile determinare le tensioni di calcolo agenti sulla sezione del pannello. Si procede anche in questo caso ad una differenziazione tra il calcolo della tensione normale e di quella tangenziale.

La tensione normale (flessione) è sempre data dalla relazione (3.3):

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_d}{K_{XLAM}} \cdot h/2 \cdot E_0$$

quindi la tensione di flessione è ancora la stessa nel caso in cui venga considerato o meno il "taglio per rotolamento". In questo caso il valore di rigidità flessionale al denominatore è quello calcolato in questo

capitolo che comprende anche i valori di modulo elastico degli strati trasversali. Essendo  $h/2$  la distanza della fibra più sollecitata rispetto l'asse baricentrico, la tensione normale massima al bordo esterno risulta:

**Tabella 47 - Tensione normale massima al bordo esterno per il calcolo monodirezionale esatto**

$\sigma_{m,max,d} [N/mm^2]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	30,42	3,80	1,78	1,08	0,74
4	54,07	6,75	3,16	1,92	1,32
5	84,49	10,55	4,94	2,99	2,06
6	121,67	15,20	7,11	4,31	2,96
7	165,60	20,68	9,68	5,87	4,04
8	216,30	27,01	12,65	7,66	5,27

Per il calcolo della tensione tangenziale valgono le stesse considerazioni fatte al paragrafo 8.3.2.

Essa è nuovamente data dalla relazione (3.9):

$$\tau_{d,max} = \frac{V_d \cdot \sum (S_m \cdot E_m)}{K_{XLAM} \cdot b}$$

dove a differenza del calcolo monodirezionale semplificato, il modulo elastico e la rigidezza flessionale sono quelle ottenute dal calcolo attraverso il programma sviluppato con Mathcad.

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico, nel caso in cui venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" sono:

**Tabella 48 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico per il calcolo monodirezionale esatto con "rolling shear"**

$\tau_{d,max} [N/mm^2]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	0,335	0,111	0,067	0,054	0,044
4	0,446	0,149	0,089	0,072	0,059
5	0,558	0,186	0,111	0,090	0,074
6	0,669	0,223	0,133	0,108	0,089
7	0,781	0,260	0,155	0,126	0,104
8	0,892	0,297	0,177	0,144	0,118

taglio in corrispondenza degli strati longitudinali  
 taglio in corrispondenza degli strati trasversali ("rolling shear")



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Mentre per gli elementi da 5 e 9 strati la tensione tangenziale in corrispondenza degli strati trasversali risulta essere:

**Tabella 49 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza degli strati trasversali per gli elementi da 5 e 9 strati per il calcolo monodirezionale esatto con "rolling shear"**

$\tau_{r,d,max} [N/mm^2]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	-	-	0,063	-	0,043
4	-	-	0,083	-	0,058
5	-	-	0,104	-	0,072
6	-	-	0,125	-	0,087
7	-	-	0,146	-	0,101
8	-	-	0,167	-	0,116

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico nel caso in cui invece non fosse considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" sono:

**Tabella 50 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico per il calcolo monodirezionale esatto senza "rolling shear"**

$\tau_{d,max} [N/mm^2]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	0,335	0,111	0,067	0,054	0,044
4	0,446	0,149	0,089	0,072	0,059
5	0,558	0,186	0,111	0,090	0,074
6	0,669	0,223	0,133	0,108	0,089
7	0,781	0,260	0,155	0,126	0,104
8	0,892	0,297	0,177	0,144	0,118

Anche in questo caso le tensioni tangenziali, che sono le stesse di Tabella 48, andranno confrontate tutte con la resistenza di calcolo a taglio  $f_{v,d,XLAM}$ , motivo per cui ai fini della verifica la tensione che darà la condizione più sfavorevole è sempre quella baricentrica.

### Verifiche

Si procede ora con le verifiche di resistenza della sezione del pannello XLAM.

Dato che la tensione normale di flessione  $\sigma_{m,max,d}$  è la stessa per i due casi considerati si procede ad un'unica verifica:

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 51 – Verifica a flessione per il calcolo monodirezionale esatto**

$\sigma_{m,max,d}/f_{m,d,XLAM}$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	2,09	0,26	0,12	0,07	0,05
4	3,71	0,46	0,22	0,13	0,09
5	5,80	0,72	0,34	0,21	0,14
6	8,35	1,04	0,49	0,30	0,20
7	11,37	1,42	0,66	0,40	0,28
8	14,85	1,85	0,87	0,53	0,36

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta.

La verifica a taglio deve invece essere condotta ancora in modo separato per i due casi.

Nel caso in cui venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" le verifiche sono:

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 52 – Verifica a taglio per il calcolo monodirezionale esatto con "rolling shear"**

$\tau_{d,max}/f_{v,d,XLAM}$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	0,24	-	0,05	-	0,03
4	0,32	-	0,06	-	0,04
5	0,40	-	0,08	-	0,05
6	0,49	-	0,10	-	0,06
7	0,57	-	0,11	-	0,08
8	0,65	-	0,13	-	0,09

$$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 53 – Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") per il calcolo monodirezionale esatto**

$\tau_{r,d,max}/f_{r,d,XLAM}$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	-	0,16	0,09	0,08	0,06
4	-	0,22	0,12	0,10	0,08
5	-	0,27	0,15	0,13	0,11
6	-	0,32	0,18	0,16	0,13
7	-	0,38	0,21	0,18	0,15
8	-	0,43	0,24	0,21	0,17

Nel caso in cui invece non venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" si procede ad un'unica verifica:

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 54 – Verifica a taglio per il calcolo monodirezionale esatto senza "rolling shear"**

$\tau_{d,max}/f_{v,d,XLAM}$	n° strati				
	1	3	5	7	9
<b>Luce [m]</b>					
<b>3</b>	0,24	0,08	0,05	0,04	0,03
<b>4</b>	0,32	0,11	0,06	0,05	0,04
<b>5</b>	0,40	0,13	0,08	0,07	0,05
<b>6</b>	0,49	0,16	0,10	0,08	0,06
<b>7</b>	0,57	0,19	0,11	0,09	0,08
<b>8</b>	0,65	0,22	0,13	0,10	0,09

### 8.4.3 Verifiche agli stati limite di esercizio

Per il calcolo delle deformazioni valgono le stesse considerazioni fatte al paragrafo 8.3.3.

Occorre quindi determinare la freccia istantanea dovuta ai carichi permanenti e a quelli variabili:

$$u_{g,ist} = \frac{5}{384} \frac{G_k \cdot l^4}{K_{XLAM}} + \frac{G_k \cdot l^2}{8S_{XLAM}} \quad \text{per i carichi permanenti, e}$$

$$u_{q,ist} = \frac{5}{384} \frac{Q_k \cdot l^4}{K_{XLAM}} + \frac{Q_k \cdot l^2}{8S_{XLAM}} \quad \text{per i carichi variabili.}$$

Utilizzano sempre i valori  $k_{def} = 0,6$  (classe di servizio 1) e  $\psi_{2,1} = 0,3$  (categoria A, ambienti ad uso residenziale), si riportano di seguito i valori di deformazione istantanea e finale nel caso in cui venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento":

**Tabella 55 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo monodirezionale esatto con "rolling shear"**

$u_{g,ist} [mm]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
<b>Luce [m]</b>					
<b>3</b>	41,36	2,17	0,75	0,40	0,26
<b>4</b>	130,62	6,59	2,18	1,10	0,69
<b>5</b>	318,79	15,78	5,11	2,53	1,54
<b>6</b>	660,90	32,38	10,37	5,06	3,02
<b>7</b>	1224,26	59,60	18,96	9,16	5,42
<b>8</b>	2088,36	101,24	32,07	15,40	9,04

**Tabella 56 – Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo monodirezionale esatto con “rolling shear”**

$u_{q,ist} [mm]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	63,96	2,70	0,77	0,35	0,20
4	201,99	8,19	2,26	0,98	0,54
5	492,95	19,60	5,31	2,25	1,20
6	1021,96	40,22	10,77	4,51	2,36
7	1893,08	74,03	19,68	8,16	4,23
8	3229,25	125,75	33,28	13,72	7,06

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 57 – Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo monodirezionale esatto con “rolling shear”**

$u_{g,fin} [mm]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	66,18	3,48	1,19	0,63	0,41
4	209,00	10,55	3,48	1,77	1,10
5	510,06	25,25	8,18	4,05	2,46
6	1057,45	51,81	16,60	8,09	4,84
7	1958,81	95,36	30,34	14,66	8,67
8	3341,37	161,99	51,30	24,63	14,47

$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 58 – Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo monodirezionale esatto con “rolling shear”**

$u_{q,fin} [mm]$	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]					
3	75,47	3,18	0,91	0,42	0,24
4	238,34	9,66	2,67	1,16	0,64
5	581,68	23,13	6,26	2,66	1,42
6	1205,92	47,46	12,70	5,32	2,79
7	2233,83	87,35	23,22	9,63	4,99
8	3810,52	148,39	39,27	16,19	8,33



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 59 – Deformazione finale totale per il calcolo monodirezionale esatto con “rolling shear”**

$u_{fin}$ [mm]	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	141,66	6,66	2,11	1,05	0,65
4	447,34	20,21	6,15	2,93	1,74
5	1091,74	48,39	14,44	6,70	3,88
6	2263,36	99,27	29,30	13,41	7,63
7	4192,64	182,71	53,56	24,29	13,66
8	7151,89	310,37	90,57	40,83	22,80

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

**Tabella 60 – Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo monodirezionale esatto con “rolling shear”**

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati					
Luce [m]	1	3	5	7	9	
3	63,96	2,70	0,77	0,35	0,20	< 10,0 mm
4	201,99	8,19	2,26	0,98	0,54	< 13,3 mm
5	492,95	19,60	5,31	2,25	1,20	< 16,7 mm
6	1021,96	40,22	10,77	4,51	2,36	< 20,0 mm
7	1893,08	74,03	19,68	8,16	4,23	< 23,3 mm
8	3229,25	125,75	33,28	13,72	7,06	< 26,7 mm

**Tabella 61 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo monodirezionale esatto con “rolling shear”**

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati					
Luce [m]	1	3	5	7	9	
3	75,47	3,18	0,91	0,42	0,24	< 15,0 mm
4	238,34	9,66	2,67	1,16	0,64	< 20,0 mm
5	581,68	23,13	6,26	2,66	1,42	< 25,0 mm
6	1205,92	47,46	12,70	5,32	2,79	< 30,0 mm
7	2233,83	87,35	23,22	9,63	4,99	< 35,0 mm
8	3810,52	148,39	39,27	16,19	8,33	< 40,0 mm

**Tabella 62 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo monodirezionale esatto con “rolling shear”**

$u_{fin} < l/250$	n° strati					
	1	3	5	7	9	
Luce [m]	1	3	5	7	9	
3	141,66	6,66	2,11	1,05	0,65	< 12,0 mm
4	447,34	20,21	6,15	2,93	1,74	< 16,0 mm
5	1091,74	48,39	14,44	6,70	3,88	< 20,0 mm
6	2263,36	99,27	29,30	13,41	7,63	< 24,0 mm
7	4192,64	182,71	53,56	24,29	13,66	< 28,0 mm
8	7151,89	310,37	90,57	40,83	22,80	< 32,0 mm

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.

Di seguito sono invece riportate le deformazioni istantanee e finali nel caso in cui l’effetto del “taglio per rotolamento” non venga preso in considerazione:

**Tabella 63 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo monodirezionale esatto senza “rolling shear”**

$u_{g,ist}$ [mm]	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	41,36	2,01	0,64	0,31	0,18
4	130,62	6,30	1,99	0,95	0,55
5	318,79	15,32	4,82	2,29	1,33
6	660,90	31,72	9,95	4,71	2,72
7	1224,26	58,69	18,38	8,69	5,00
8	2088,36	100,06	31,31	14,78	8,50

**Tabella 64 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo monodirezionale esatto senza “rolling shear”**

$u_{q,ist}$ [mm]	n° strati				
	1	3	5	7	9
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	63,96	2,49	0,66	0,28	0,14
4	201,99	7,82	2,06	0,85	0,43
5	492,95	19,03	5,00	2,04	1,04
6	1021,96	39,39	10,32	4,20	2,12
7	1893,08	72,90	19,08	7,74	3,91
8	3229,25	124,28	32,49	13,17	6,64



Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 65 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo monodirezionale esatto senza "rolling shear"**

$u_{g,fin}$ [mm]	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	66,18	3,21	1,02	0,49	0,29
4	209,00	10,07	3,18	1,52	0,89
5	510,06	24,52	7,70	3,66	2,12
6	1057,45	50,74	15,91	7,54	4,35
7	1958,81	93,91	29,41	13,90	8,00
8	3341,37	160,10	50,09	23,65	13,60

$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 66 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo monodirezionale esatto senza "rolling shear"**

$u_{q,fin}$ [mm]	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	75,47	2,94	0,78	0,32	0,17
4	238,34	9,23	2,43	1,00	0,51
5	581,68	22,46	5,90	2,41	1,22
6	1205,92	46,48	12,18	4,95	2,51
7	2233,83	86,03	22,51	9,14	4,61
8	3810,52	146,65	38,34	15,54	7,83

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 67 - Deformazione finale totale per il calcolo monodirezionale esatto senza "rolling shear"**

$u_{fin}$ [mm]	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	141,66	6,15	1,80	0,82	0,46
4	447,34	19,30	5,61	2,52	1,40
5	1091,74	46,97	13,60	6,07	3,34
6	2263,36	97,23	28,09	12,49	6,85
7	4192,64	179,94	51,92	23,04	12,62
8	7151,89	306,75	88,43	39,19	21,43

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

**Tabella 68 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo monodirezionale esatto senza "rolling shear"**

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati					
	1	3	5	7	9	
Luce [m]	1	3	5	7	9	
3	63,96	2,49	0,66	0,28	0,14	< 10,0 mm
4	201,99	7,82	2,06	0,85	0,43	< 13,3 mm
5	492,95	19,03	5,00	2,04	1,04	< 16,7 mm
6	1021,96	39,39	10,32	4,20	2,12	< 20,0 mm
7	1893,08	72,90	19,08	7,74	3,91	< 23,3 mm
8	3229,25	124,28	32,49	13,17	6,64	< 26,7 mm

**Tabella 69 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo monodirezionale esatto senza "rolling shear"**

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati					
	1	3	5	7	9	
Luce [m]	1	3	5	7	9	
3	75,47	2,94	0,78	0,32	0,17	< 15,0 mm
4	238,34	9,23	2,43	1,00	0,51	< 20,0 mm
5	581,68	22,46	5,90	2,41	1,22	< 25,0 mm
6	1205,92	46,48	12,18	4,95	2,51	< 30,0 mm
7	2233,83	86,03	22,51	9,14	4,61	< 35,0 mm
8	3810,52	146,65	38,34	15,54	7,83	< 40,0 mm

**Tabella 70 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo monodirezionale esatto senza "rolling shear"**

$u_{fin} < l/250$	n° strati					
	1	3	5	7	9	
Luce [m]	1	3	5	7	9	
3	141,66	6,15	1,80	0,82	0,46	< 12,0 mm
4	447,34	19,30	5,61	2,52	1,40	< 16,0 mm
5	1091,74	46,97	13,60	6,07	3,34	< 20,0 mm
6	2263,36	97,23	28,09	12,49	6,85	< 24,0 mm
7	4192,64	179,94	51,92	23,04	12,62	< 28,0 mm
8	7151,89	306,75	88,43	39,19	21,43	< 32,0 mm

Confrontando i valori di Tabella 70 con quelli di Tabella 62 si vede che anche in questo caso ai fini della verifica il considerare o meno l'effetto del "taglio per rotolamento" non incide. Nel successivo Capitolo 9 è possibile trovare con maggiore dettaglio il confronto di questi parametri, in particolare con il calcolo monodirezionale semplificato.

#### 8.4.4 Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto, anche per il caso monodirezionale esatto, attraverso l'espressione fornita dall'Eurocodice 5 e già discussa al Capitolo 3.

L'espressione è la (3.18):

$$f_1 = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{(EJ)_l}{m}}$$

quindi nuovamente non vi è alcuna dipendenza dal modulo di taglio.

Si riportano di seguito le rigidzze flessionali del pannello e la massa per unità di area del solaio, avendo considerato come tale i soli carichi permanenti risultanti dall'analisi dei carichi.

**Tabella 71 – Rigidzze flessionali e massa per unità di area per il calcolo delle frequenze naturali di vibrazione per il calcolo monodirezionale esatto**

	n° strati				
	1	3	5	7	9
<b>Rigidzza flessionale del pannello [Nm<sup>2</sup>/m]</b>	3,304E+04	8,602E+05	3,300E+06	8,172E+06	1,630E+07
<b>Massa per unità di area [kg/m<sup>2</sup>]</b>	129,34	161,02	192,7	224,38	256,06

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nella tabella sottostante, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

**Tabella 72 – Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo monodirezionale esatto**

$f_1$ [Hz]	n° strati				
Luce [m]	1	3	5	7	9
3	2,79	12,76	22,84	33,31	44,04
4	1,57	7,18	12,85	18,74	24,77
5	1,00	4,59	8,22	11,99	15,85
6	0,70	3,19	5,71	8,33	11,01
7	0,51	2,34	4,20	6,12	8,09
8	0,39	1,79	3,21	4,68	6,19

### 8.5 *Calcolo Bidirezionale approssimato (Bidirezionale 1/1bis)*

Prima di procedere al primo esempio di calcolo bidirezionale (metodo approssimato di Grashof), è necessario fare alcune considerazioni sulla geometria delle sezioni dei pannelli XLAM da utilizzare per la realizzazione di solai a pianta quadrata, essendo, in prima analisi, il primo esempio di calcolo a piastra degli elementi strutturali oggetto di studio.

Appare immediato comprendere che, per la realizzazione di questo tipo di solaio, la convenienza consiste nell'utilizzare pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari, in modo da avere la stessa ripartizione del carico nelle due direzioni principali della piastra, avendo i pannelli uguale rigidezza flessionale.

I pannelli costituiti da un numero di strati pari costituiscono però un caso particolare, che merita uno studio diverso e leggermente più complicato rispetto alle più ricorrenti sezioni a strati dispari: considerando le caratteristiche elastiche dei singoli strati si ottiene infatti una sezione che non è più simmetrica.

Questo implica che l'asse neutro della sezione non passa più dal baricentro geometrico del pannello, ma si troverà spostato verso l'alto o il basso a seconda della disposizione dei singoli strati con la rigidezza maggiore in una o nell'altra direzione.

Per capire meglio questo concetto è possibile fare una considerazione simile a quella che si fa in genere con le sezioni di calcestruzzo armato, cioè attraverso l'omogeneizzazione della sezione attraverso il rapporto tra i differenti moduli elastici. Nel caso specifico siamo in presenza di alcuni strati aventi modulo elastico parallelo alle fibre  $E_0$  pari a 11000 MPa, e di un modulo elastico perpendicolare alle fibre  $E_{90}$  pari a 370 MPa. Si ottiene quindi un valore del rapporto tra i due moduli elastici pari a:

$$m = \frac{E_0}{E_{90}} = \frac{11000}{370} \cong 30$$

A questo punto è possibile considerare la sezione omogenea riducendo la larghezza degli strati trasversali nel rapporto  $b/m$ . Considerando per esempio una sezione costituita da quattro strati di larghezza  $b = 1000$  mm, disposti a  $90^\circ$  l'uno rispetto all'altro, si ottiene che gli strati trasversali hanno una nuova larghezza pari a circa  $b/m = 33$  mm, ottenendo così la sezione di Figura 45.

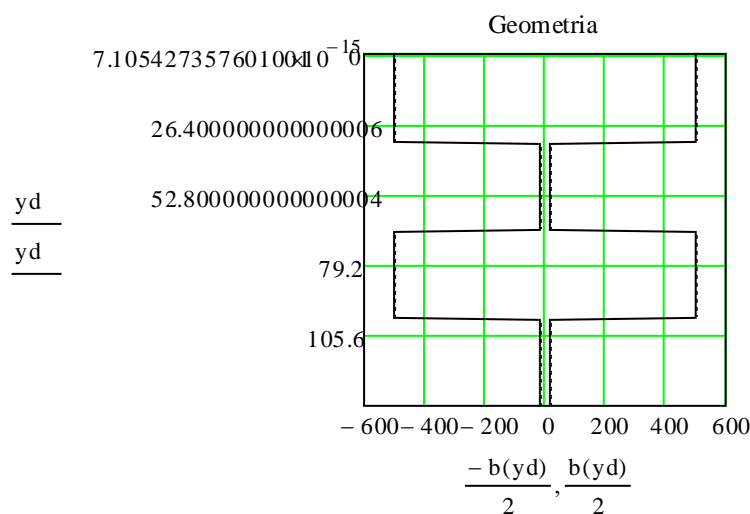
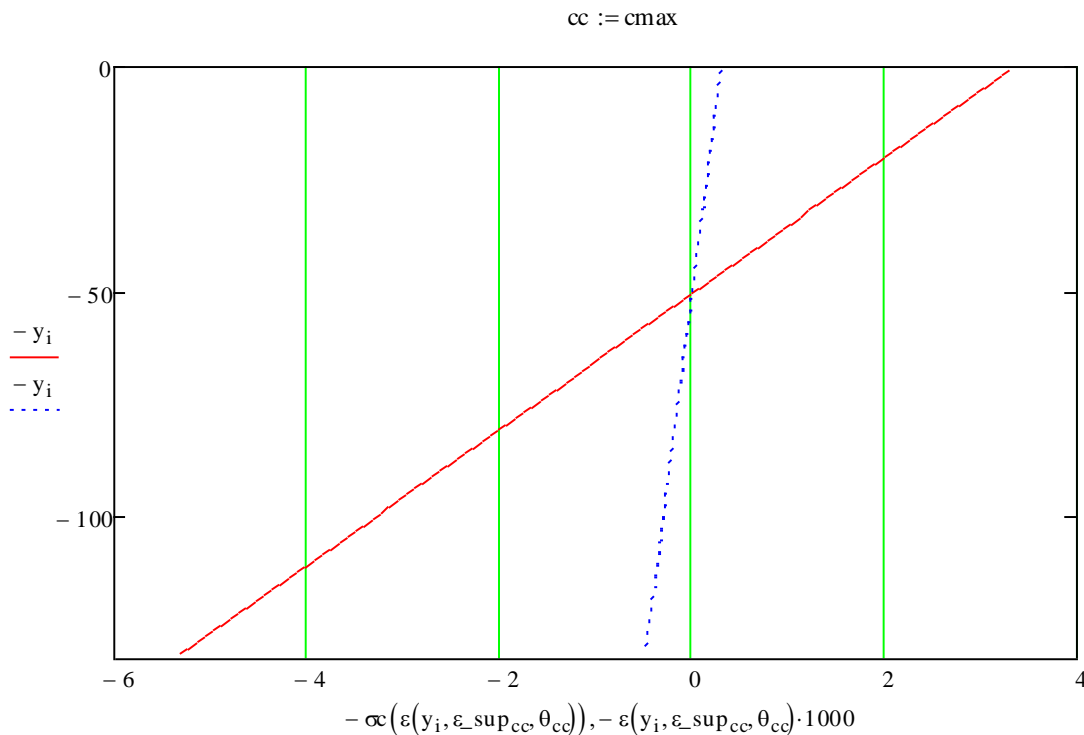


Figura 45 – Geometria della sezione omogeneizzata costituita da 4 strati

Per il calcolo delle tensioni occorre a questo punto determinare la posizione dell'asse neutro. Eseguendo il calcolo per il caso in questione la posizione dell'asse neutro si trova pressoché a metà del secondo strato, come mostra la Figura 46.



**Figura 46 – Diagramma sforzi – deformazioni per la determinazione della posizione dell'asse neutro della sezione da 4 strati**

Analizzando casi costituiti da un numero di strati maggiore si ottiene sempre che la posizione dell'asse neutro è posta circa a metà della sezione ottenuta eliminando l'ultimo strato, a dimostrazione che il suo contributo è pressoché nullo.

Fatte queste considerazioni, per i calcoli di questo capitolo, trattandosi comunque di un calcolo approssimato, le tensioni normali verranno calcolate senza determinare la corretta posizione dell'asse neutro, ma trascurando la presenza dello strato più esterno della sezione disposto trasversalmente rispetto alla direzione di carico considerata.

### 8.5.1 Rigidezze

Trattandosi di un calcolo approssimato le rigidezze flessionali del pannello XLAM vengono calcolate con le espressioni viste al Capitolo 3, quindi trascurando il contributo dato dagli strati ortogonali.

In questo caso però, dovendo fare un calcolo bidirezionale, siamo in presenza di due rigidezze flessionali nelle due direzioni principali della piastra, che nel caso di un numero di strati pari coincidono.

La rigidezza flessionale è dunque data dalla relazione (3.1):

$$K_{XLAM} = \sum_I (J_I \cdot E_I) + \sum_I (A_I \cdot a^2 \cdot E_I)$$

ottenendo per i pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari i seguenti valori di rigidezza:

**Tabella 73 – Valori di  $K_x$  e  $K_y$  per il calcolo bidirezionale approssimato**

<b>Rigidezza flessionale del pannello [Nmm<sup>2</sup>]</b>	<b>n° strati</b>			
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
<b><math>K_x</math></b>	1,3177E+11	1,054E+12	3,558E+12	8,433E+12
<b><math>K_y</math></b>	1,3177E+11	1,054E+12	3,558E+12	8,433E+12

Avendo espresso le rigidezze flessionali come nel calcolo monodirezionale, anche nel caso in cui non venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" i valori sono gli stessi.

La rigidezza a taglio del pannello è data dalla relazione (3.13):

$$S_{XLAM} = \kappa \cdot \sum_I (G_I \cdot A_I)$$

Come per la rigidezza flessionale, anche la rigidezza a taglio assume valori differenti a seconda della disposizione degli strati rispetto alla direzione considerata, come mostrato al Capitolo 7.

Nel caso in cui venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento", quindi applicando ai singoli strati il diverso valore del modulo di taglio  $G$ , le rigidezze a taglio del pannello sono le seguenti:

**Tabella 74 – Valori di  $S_x$  ed  $S_y$  per il calcolo bidirezionale approssimato con "rolling shear"**

<b>Rigidezza a taglio del pannello [N]</b>	<b>n° strati</b>			
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
<b><math>\kappa_x</math></b>	0,275	0,275	0,275	0,275
<b><math>S_x</math></b>	6,900E+06	1,380E+07	2,070E+07	2,760E+07
<b><math>\kappa_y</math></b>	0,275	0,275	0,275	0,275
<b><math>S_y</math></b>	6,900E+06	1,380E+07	2,070E+07	2,760E+07

Come si può notare dai valori riportati in Tabella 74 anche nel caso della rigidezza a taglio  $S_x$  ed  $S_y$  coincidono, come già discusso al Capitolo 7.

Nel caso in cui invece non fosse considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" si ottenengono i seguenti risultati:

**Tabella 75 – Valori di  $S_x$  ed  $S_y$  per il calcolo bidirezionale approssimato senza "rolling shear"**

<b>Rigidezza a taglio del pannello [N]</b>	<b>n° strati</b>			
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
$\kappa_x$	0,833	0,833	0,833	0,833
$S_x$	3,795E+07	7,590E+07	1,139E+08	1,518E+08
$\kappa_y$	0,833	0,833	0,833	0,833
$S_y$	3,795E+07	7,590E+07	1,139E+08	1,518E+08

### 8.5.2 Verifiche agli stati limite ultimi

Dall'analisi dei carichi risultano per gli strati pari i seguenti carichi permanenti e d'esercizio:

**Tabella 76 - Carichi permanenti e variabili gravanti sui pannelli XLAM con numero di strati pari per il calcolo bidirezionale approssimato**

	<b>n° strati</b>			
	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
<b>1) Carichi permanenti</b>				
$g_1$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,000317	0,000634	0,000950	0,001267
$g_2$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
$G_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,001452	0,001769	0,002085	0,002402
<b>2) Carichi variabili</b>				
$Q_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,002	0,002	0,002	0,002

Secondo la teoria di Grashof, descritta al Capitolo 6, vanno ora ripartiti i carichi nelle due direzioni principali della piastra attraverso i coefficienti della (6.6), di cui si riportano le espressioni:

$$k_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{1}{K_x} \quad k_y = \frac{5}{384} \cdot \frac{1}{K_y} \quad g_x = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{S_x} \quad g_y = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{S_y}$$

Essendo i coefficienti  $g_x$  e  $g_y$  dipendenti dai valori di rigidezza a taglio saremo in presenza di due valori diversi nei due casi considerati. Tuttavia si può notare che nella (6.7) compare il rapporto di questi due coefficienti, quindi la ripartizione del carico rimane la stessa sia che venga considerato o meno l'effetto del "taglio per rotolamento".



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Si riportano di seguito i valori dei coefficienti necessari per la ripartizione del carico gravante sulla piastra nelle sue due direzioni principali x e y.

**Tabella 77 – Valori dei coefficienti  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $g_x$  e  $g_y$  per il calcolo bidirezionale approssimato**

	n° strati				
	2	4	6	8	
$k_x$	9,8816E-14	1,2352E-14	3,6598E-15	1,544E-15	
$k_y$	9,8816E-14	1,2352E-14	3,6598E-15	1,544E-15	
$g_x$	1,812E-08	9,058E-09	6,039E-09	4,529E-09	con "rolling shear"
$g_y$	1,812E-08	9,058E-09	6,039E-09	4,529E-09	
$g_x$	3,2938E-09	1,6469E-09	1,0979E-09	8,2345E-10	senza "rolling shear"
$g_y$	3,2938E-09	1,6469E-09	1,0979E-09	8,2345E-10	

Noti i coefficienti, attraverso l'espressione 6.7 è possibile calcolare i carichi  $q_x$  e  $q_y$ , che nel caso di piastra quadrata, di luci  $l_x$  ed  $l_y$  variabili da 4 a 8 metri, assumono lo stesso valore e valgono:

$$q_x = \frac{q \cdot l_y^2}{\left[ \frac{k_x \cdot l_x^2 + g_x}{k_y \cdot l_y^2 + g_y} \right] \cdot l_x^2 + l_y^2} \quad q_y = q - q_x$$

**Tabella 78 – Ripartizione del carico nelle due direzioni principali x e y della piastra per il calcolo bidirezionale approssimato**

Ripartizione del carico [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati					
Luce [m]		2			4		
$l_x$	$l_y$	$g_1$	$g_2$	Q	$g_1$	$g_2$	Q
4	4	0,000158	0,0005675	0,001	0,000317	0,0005675	0,001
5	5	0,000158	0,0005675	0,001	0,000317	0,0005675	0,001
6	6	0,000158	0,0005675	0,001	0,000317	0,0005675	0,001
7	7	0,000158	0,0005675	0,001	0,000317	0,0005675	0,001
8	8	0,000158	0,0005675	0,001	0,000317	0,0005675	0,001

Luce [m]		6			8		
$l_x$	$l_y$	$g_1$	$g_2$	$Q_x$	$g_1$	$g_2$	Q
4	4	0,000475	0,0005675	0,001	0,000634	0,0005675	0,001
5	5	0,000475	0,0005675	0,001	0,000634	0,0005675	0,001
6	6	0,000475	0,0005675	0,001	0,000634	0,0005675	0,001
7	7	0,000475	0,0005675	0,001	0,000634	0,0005675	0,001
8	8	0,000475	0,0005675	0,001	0,000634	0,0005675	0,001





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Adottando per gli stati limite ultimi sempre la combinazione del tipo:

$$q_d = \gamma_{G1} \cdot G_1 + \gamma_{G2} \cdot G_2 + \gamma_Q \cdot Q_k$$

con:

$\gamma_{G1} =$	1,3
$\gamma_{G2} =$	1,5
$\gamma_Q =$	1,5

e considerando una larghezza di solaio pari a un metro, si ottengono le seguenti combinazioni di carico allo SLU:

**Tabella 79 – Combinazioni di carico allo SLU per pannelli XLAM con un numero di strati pari per il calcolo bidirezionale approssimato**

Combinazione di carico SLU [N/mm]	n° strati			
	2	4	6	8
$q_d$	2,557	2,763	2,969	3,175

Considerando per i solai uno schema statico in semplice appoggio ad una sola campata si determinano i momenti e i tagli massimi di calcolo con le espressioni:

$$M_d = \frac{q_d \cdot l^2}{8} \quad V_d = \frac{q_d \cdot l}{2}$$

ottenendo i seguenti valori:

**Tabella 80 - Momento massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale approssimato**

Momento massimo di calcolo [Nmm]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	5114340	5526180	5938020	6349860
5	7991156	8634656	9278156	9921656
6	11507265	12433905	13360545	14287185
7	15662666	16923926	18185186	19446446
8	20457360	22104720	23752080	25399440

**Tabella 81 - Taglio massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale approssimato**

Taglio massimo di calcolo [N]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	5114	5526	5938	6350
5	6393	6908	7423	7937
6	7672	8289	8907	9525
7	8950	9671	10392	11112
8	10229	11052	11876	12700



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### Tensioni di calcolo

Per il calcolo della tensione normale (flessione), per le considerazioni fatte in precedenza, occorre modificare la relazione (3.3):

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_d}{K_{XLAM}} \cdot (h-s)/2 \cdot E_0$$

In questo modo viene trascurato il contributo dello strato trasversale posto al bordo più esterno avendo una maggiore precisione dei valori di tensione, in quanto il calcolo rispetto al baricentro geometrico darebbe risultati poco significativi a causa dello spostamento dell'asse neutro.

La tensione di flessione è ancora la stessa nel caso in cui venga considerato o meno il "taglio per rotolamento" e il valore massimo al bordo esterno superiore risulta in direzione x:

**Tabella 82 – Tensione normale massima al bordo esterno per il calcolo bidirezionale approssimato**

$\sigma_{mx,max,d} [N/mm^2]$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	7,045	2,854	1,515	0,957
5	11,007	4,460	2,367	1,495
6	15,850	6,422	3,408	2,152
7	21,574	8,742	4,639	2,930
8	28,178	11,418	6,059	3,827

Ovviamente nell'altra direzione la tensione sarà la stessa ma al bordo esterno inferiore.

Per il calcolo della tensione tangenziale va invece fatto un discorso diverso. Premesso che un calcolo più corretto delle tensioni tangenziali verrà fatto successivamente con la teoria di Mindlin, ci si limita ora a stimare un valore approssimato della tensione calcolando un unico valore in corrispondenza dell'asse baricentrico geometrico dove sono presenti all'interfaccia due strati disposti ortogonalmente tra loro e confrontando tale valore sia con la resistenza di calcolo  $f_{v,d,XLAM}$  sia con la  $f_{r,d,XLAM}$ , in quanto la seconda essendo minore darà sicuramente la verifica determinante.

La tensione tangenziale è nuovamente data dalla relazione (3.9):

$$\tau_{d,\max} = \frac{V_d \cdot \sum (S_m \cdot E_m)}{K_{XLAM} \cdot b}$$

Anche per la tensione tangenziale, in questo caso specifico di geometria quadrata della piastra in cui si ha una ripartizione del carico uguale nelle due direzioni, basta calcolare quella in un direzione, considerando la tensione massima data dalla parte di sezione disposta longitudinalmente che si trova alla massima distanza dall'asse baricentrico.

Si tratta di un procedimento di calcolo sicuramente non corretto, ma che comunque si pone a favore di sicurezza andando a stimare valori più alti della tensione e adottato appositamente per confrontare successivamente questi valori "errati" con altri calcolati in modo più appropriato evidenziando maggiormente l'errore commesso.

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico, in entrambi i casi in cui venga considerato o meno l'effetto del "taglio per rotolamento", quindi sono:

**Tabella 83 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico per il calcolo bidirezionale approssimato**

$\tau_{d,max} [N/mm^2]$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		0,232	0,094	0,060	0,045
5		0,291	0,118	0,075	0,056
6		0,349	0,141	0,090	0,068
7		0,407	0,165	0,105	0,079
8		0,465	0,188	0,120	0,090

### Verifiche

Si procede ora con le verifiche di resistenza della sezione del pannello XLAM.

Dato che la tensione normale di flessione  $\sigma_{m,max,d}$  è la stessa in entrambe le direzioni della piastra e per i due casi considerati si procede ad un'unica verifica:

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 84 - Verifica a flessione per il calcolo bidirezionale approssimato**

$\sigma_{m,max,d} / f_{m,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		0,484	0,196	0,104	0,066
5		0,756	0,306	0,162	0,103
6		1,088	0,441	0,234	0,148
7		1,481	0,600	0,318	0,201
8		1,935	0,784	0,416	0,263

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta.

La verifica a taglio prevede quindi il confronto della tensione tangenziale baricentrica con le due resistenze di calcolo a taglio e taglio trasversale nel primo caso, nel secondo caso invece, dove non si considera il "taglio per rotolamento", va confrontata solo con la resistenza di calcolo a taglio.

Per il primo caso:

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 85 - Verifica a taglio per il calcolo bidirezionale approssimato con “rolling shear”**

$\tau_{d,max}/f_{v,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		0,169	0,068	0,043	0,033
5		0,211	0,085	0,054	0,041
6		0,253	0,102	0,065	0,049
7		0,295	0,120	0,076	0,057
8		0,337	0,137	0,087	0,065

$$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 86 - Verifica a taglio trasversale (“rolling shear”) per il calcolo bidirezionale approssimato**

$\tau_{r,d,max}/f_{r,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		0,337	0,137	0,087	0,065
5		0,421	0,171	0,109	0,082
6		0,506	0,205	0,130	0,098
7		0,590	0,239	0,152	0,114
8		0,674	0,273	0,174	0,131

Nel caso in cui invece non venga considerato l’effetto del “taglio per rotolamento” si procede ad un’unica verifica:

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 87 - Verifica a taglio per il calcolo bidirezionale approssimato senza “rolling shear”**

$\tau_{d,max}/f_{v,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		0,169	0,068	0,043	0,033
5		0,211	0,085	0,054	0,041
6		0,253	0,102	0,065	0,049
7		0,295	0,120	0,076	0,057
8		0,337	0,137	0,087	0,065

Che di fatto coincide con la verifica a taglio fatta nel caso precedente.

Come si vede da Tabella 86, nel caso in cui si è in presenza di un numero di strati pari la tensione tangenziale calcolata in prossimità dell’asse baricentrico va quindi sempre confrontata con la resistenza di calcolo a taglio trasversale poiché fornisce valori di verifica più alti.

### 8.5.3 Verifiche agli stati limite di esercizio

Essendo il calcolo bidirezionale approssimato, di fatto, un calcolo a trave nelle due direzioni principali della piastra, il calcolo delle deformazioni istantanee viene fatto con le stesse espressioni utilizzate nei calcoli monodirezionali.

Occorre quindi determinare la freccia istantanea dovuta ai carichi permanenti e a quelli variabili:

$$u_{g,ist} = \frac{5}{384} \frac{G_k \cdot l^4}{K_{XLAM}} + \frac{G_k \cdot l^2}{8S_{XLAM}} \quad \text{per i carichi permanenti, e}$$

$$u_{q,ist} = \frac{5}{384} \frac{Q_k \cdot l^4}{K_{XLAM}} + \frac{Q_k \cdot l^2}{8S_{XLAM}} \quad \text{per i carichi variabili.}$$

Utilizzano sempre i valori  $k_{def} = 0,6$  (classe di servizio 1) e  $\psi_{2,1} = 0,3$  (categoria A, ambienti ad uso residenziale), si riportano di seguito i valori di deformazione istantanea e finale nel caso in cui venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento":

**Tabella 88 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale approssimato con "rolling shear"**

$u_{g,ist}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		18,57	2,92	1,08	0,56
5		45,16	7,03	2,54	1,30
6		93,44	14,44	5,17	2,60
7		172,87	26,62	9,47	4,72
8		294,65	45,25	16,03	7,94

**Tabella 89 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale approssimato con "rolling shear"**

$u_{q,ist}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		25,59	3,31	1,03	0,47
5		62,21	7,95	2,44	1,08
6		128,72	16,33	4,96	2,16
7		238,14	30,10	9,08	3,93
8		405,91	51,17	15,38	6,61

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 90 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale approssimato con "rolling shear"**

$u_{g,fin}$ [mm]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	29,72	4,68	1,72	0,90
5	72,26	11,24	4,07	2,07
6	149,50	23,11	8,28	4,16
7	276,59	42,59	15,15	7,55
8	471,44	72,40	25,65	12,71

$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 91 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale approssimato con "rolling shear"**

$u_{q,fin}$ [mm]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	30,19	3,90	1,22	0,55
5	73,41	9,38	2,88	1,27
6	151,89	19,27	5,85	2,55
7	281,01	35,52	10,72	4,64
8	478,97	60,38	18,15	7,80

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 92 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale approssimato con "rolling shear"**

$u_{fin}$ [mm]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	59,91	8,58	2,94	1,45
5	145,67	20,62	6,95	3,34
6	301,38	42,39	14,13	6,71
7	557,60	78,11	25,87	12,19
8	950,41	132,79	43,80	20,52



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

Tabella 93 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale approssimato con "rolling shear"

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	
4	25,59	3,31	1,03	0,47	< 13,3 mm
5	62,21	7,95	2,44	1,08	< 16,7 mm
6	128,72	16,33	4,96	2,16	< 20,0 mm
7	238,14	30,10	9,08	3,93	< 23,3 mm
8	405,91	51,17	15,38	6,61	< 26,7 mm

Tabella 94 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale approssimato con "rolling shear"

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	
4	30,19	3,90	1,22	0,55	< 20,0 mm
5	73,41	9,38	2,88	1,27	< 25,0 mm
6	151,89	19,27	5,85	2,55	< 30,0 mm
7	281,01	35,52	10,72	4,64	< 35,0 mm
8	478,97	60,38	18,15	7,80	< 40,0 mm

Tabella 95 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale approssimato con "rolling shear"

$u_{fin} < l/250$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	
4	59,91	8,58	2,94	1,45	< 16,0 mm
5	145,67	20,62	6,95	3,34	< 20,0 mm
6	301,38	42,39	14,13	6,71	< 24,0 mm
7	557,60	78,11	25,87	12,19	< 28,0 mm
8	950,41	132,79	43,80	20,52	< 32,0 mm

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.

Di seguito sono invece riportate le deformazioni istantanee e finali nel caso in cui l'effetto del "taglio per rotolamento" non venga preso in considerazione:

**Tabella 96 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale approssimato senza "rolling shear"**

$u_{g,ist} [mm]$	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	18,40	2,82	1,00	0,49
5	44,89	6,86	2,41	1,18
6	93,05	14,21	4,99	2,44
7	172,34	26,30	9,22	4,50
8	293,96	44,83	15,70	7,66

**Tabella 97 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale approssimato senza "rolling shear"**

$u_{q,ist} [mm]$	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	25,35	3,19	0,95	0,41
5	61,84	7,76	2,31	0,99
6	128,18	16,07	4,78	2,03
7	237,42	29,74	8,84	3,75
8	404,96	50,70	15,06	6,38

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 98 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale approssimato senza "rolling shear"**

$u_{g,fin} [mm]$	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	29,44	4,51	1,59	0,78
5	71,83	10,98	3,86	1,89
6	148,88	22,73	7,98	3,90
7	275,75	42,08	14,75	7,20
8	470,34	71,73	25,13	12,25



$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 99 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale approssimato senza “rolling shear”**

$u_{q,fin}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		29,91	3,76	1,13	0,48
5		72,97	9,16	2,73	1,16
6		151,26	18,96	5,64	2,40
7		280,15	35,09	10,43	4,42
8		477,85	59,82	17,77	7,52

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 100 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale approssimato senza “rolling shear”**

$u_{fin}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		59,35	8,27	2,72	1,27
5		144,80	20,14	6,59	3,06
6		300,13	41,69	13,62	6,30
7		555,90	77,17	25,18	11,62
8		948,19	131,56	42,90	19,78

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

**Tabella 101 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale approssimato senza “rolling shear”**

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati					
	Luce [m]	2	4	6		8
4		25,35	3,19	0,95	0,41	< 13,3 mm
5		61,84	7,76	2,31	0,99	< 16,7 mm
6		128,18	16,07	4,78	2,03	< 20,0 mm
7		237,42	29,74	8,84	3,75	< 23,3 mm
8		404,96	50,70	15,06	6,38	< 26,7 mm

**Tabella 102 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale approssimato senza "rolling shear"**

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati				
	2	4	6	8	
<b>Luce [m]</b>					
<b>4</b>	29,91	3,76	1,13	0,48	< 20,0 mm
<b>5</b>	72,97	9,16	2,73	1,16	< 25,0 mm
<b>6</b>	151,26	18,96	5,64	2,40	< 30,0 mm
<b>7</b>	280,15	35,09	10,43	4,42	< 35,0 mm
<b>8</b>	477,85	59,82	17,77	7,52	< 40,0 mm

**Tabella 103 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale approssimato senza "rolling shear"**

$u_{fin} < l/250$	n° strati				
	2	4	6	8	
<b>Luce [m]</b>					
<b>4</b>	59,35	8,27	2,72	1,27	< 16,0 mm
<b>5</b>	144,80	20,14	6,59	3,06	< 20,0 mm
<b>6</b>	300,13	41,69	13,62	6,30	< 24,0 mm
<b>7</b>	555,90	77,17	25,18	11,62	< 28,0 mm
<b>8</b>	948,19	131,56	42,90	19,78	< 32,0 mm

### 8.5.4 Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto, anche per il caso bidirezionale approssimato, essendo un calcolo a trave nelle due direzioni, attraverso l'espressione fornita dall'Eurocodice 5 e già discussa al Capitolo 3.

L'espressione è la (3.18):

$$f_1 = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{(EJ)_l}{m}}$$

quindi nuovamente non vi è alcuna dipendenza dal modulo di taglio.

Si riportano di seguito le rigidzze flessionali del pannello e la massa per unità di area del solaio, avendo considerato come tale i soli carichi permanenti risultanti dall'analisi dei carichi.

**Tabella 104 - Rigidzze flessionali e massa per unità di area per il calcolo delle frequenze naturali di vibrazione per il calcolo bidirezionale approssimato**

	n° strati			
	2	4	6	8
<b>Rigidzza flessionale del pannello [Nm<sup>2</sup>/m]</b>	1,318E+05	1,054E+06	3,558E+06	8,433E+06
<b>Massa per unità di area [kg/m<sup>2</sup>]</b>	145,18	176,86	208,54	240,22



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nella tabella sottostante, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

Tabella 105 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale approssimato

$f_1$ [Hz]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	2,96	7,58	12,82	18,39
5	1,89	4,85	8,21	11,77
6	1,31	3,37	5,70	8,18
7	0,97	2,47	4,19	6,01
8	0,74	1,89	3,21	4,60

### 8.6 Calcolo Bidirezionale esatto – Piastra di Kirchhoff (Bidirezionale 2/2bis)

Il calcolo a piastra fatto col metodo di Grashof era un modello approssimato, in quanto, nel caso particolare di un elemento costituito da un numero di strati pari, si trascurava la presenza dello strato più esterno disposto trasversalmente per il calcolo delle tensioni rispetto all’asse neutro.

Ora si vuole effettuare il calcolo degli stessi elementi di piastra ma utilizzando il modello della piastra di Kirchhoff, per la cui teoria si rimanda al Capitolo 6.

Inoltre d’ora in poi le deformazioni e tensioni saranno calcolate con la teoria dei laminati, quindi utilizzando le matrici di rigidezza  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$  viste al Capitolo 5.

Utilizzando questo modello di calcolo è possibile determinare i corretti valori delle tensioni senza dover ricorrere a semplificazioni come nel caso precedente.

In particolare, la matrice di accoppiamento  $[B]$  svolge il ruolo di “equilibrare” le deformazioni a cui è soggetta la sezione: osservando infatti i valori dei termini della matrice riportati in Allegato A.1, si può notare che nel caso di elementi costituiti da un numero di strati dispari e simmetrici, i termini sono tutti uguali a zero; nel caso in cui gli strati che costituiscono l’elemento siano in numero pari (e simmetrici) i termini  $B_{1,1}$  e  $B_{2,2}$  sono diversi da zero, e in particolare hanno lo stesso valore ma di segno opposto.

Note le caratteristiche di sollecitazione e inserite nella (5.26) si ottengono, per il caso pari, delle deformazioni assiali “fittizie” di segno negativo o positivo a seconda che l’asse neutro sia spostato verso l’alto o il basso, che servono a ridistribuire le deformazioni lungo la sezione trovando di conseguenza la corretta posizione dell’asse neutro.

Ad esempio, considerando una piastra quadrata realizzata con un pannello XLAM da 4 strati, disponendo il primo strato con le fibre lungo la direzione  $x$ , tale deformazione assiale sarà negativa lungo  $x$ , in quanto l’asse neutro dovrà spostarsi verso l’alto e viceversa nella direzione  $y$ . L’esempio in Figura 47 mostra questa ridistribuzione delle deformazioni per il caso da 4 strati.

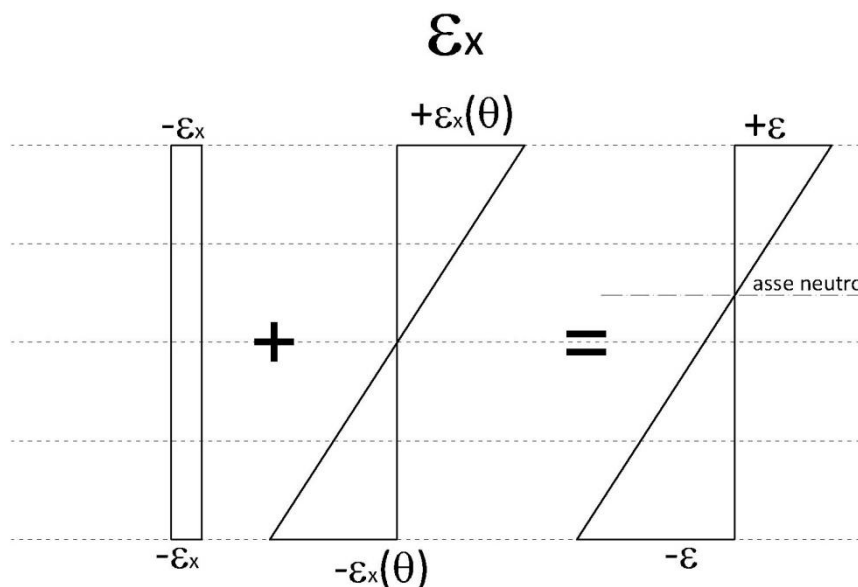


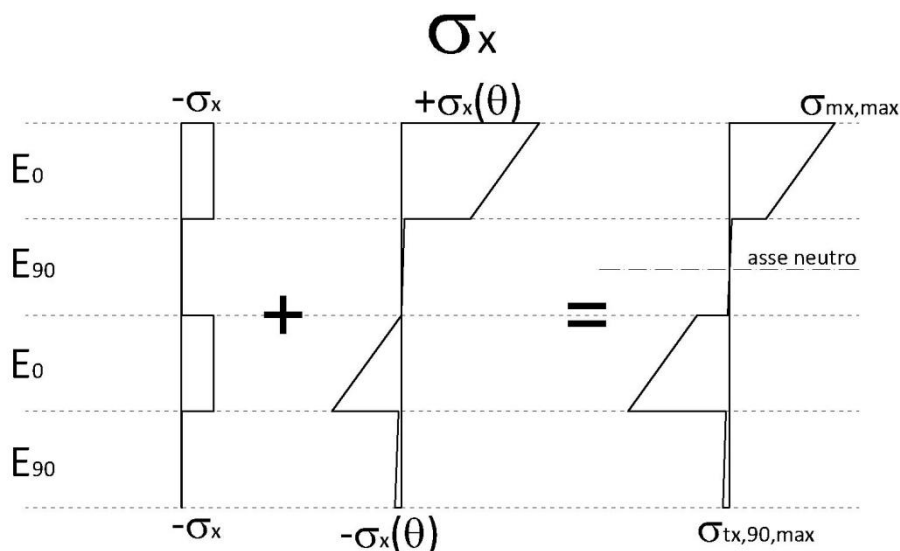
Figura 47 – Ridistribuzione delle deformazioni nella sezione XLAM costituita da 4 strati

Come si vede dalla Figura 47 l'asse neutro si trova all'incirca a metà del secondo strato, a conferma della semplificazione fatta per l'applicazione del metodo approssimato di Grashof.

Passando alle tensioni, queste sono calcolate con la (5.8), moltiplicando quindi il valore di deformazione per il modulo elastico del singolo strato,  $E_0$  o  $E_{90}$ , a seconda della differente orientazione delle fibre rispetto alla direzione del carico considerata.

Occorre a questo punto soffermarsi su alcune considerazioni in merito alle tensioni che agiscono sulla sezione. La tensione normale massima sulla sezione sarà data dalla deformazione al bordo esterno superiore per il modulo elastico  $E_0$ , che è più o meno la stessa tensione agente in corrispondenza dell'interfaccia tra il terzo e il quarto strato. Tale tensione andrà confrontata con la resistenza di calcolo a flessione  $f_{m,d,XLAM}$ .

La deformazione al bordo esterno inferiore darà luogo invece ad una tensione in zona tesa che, essendo il quarto strato disposto con le fibre perpendicolari rispetto alla direzione  $x$  considerata, genera una trazione perpendicolare alla fibratura. Anche se di modesta entità, poiché data dalla deformazione per il modulo elastico  $E_{90}$ , tale tensione potrebbe superare la resistenza di calcolo a trazione ortogonale alle fibre  $f_{t,90,d,XLAM}$  essendo questa molto bassa (0,28 MPa nel caso in questione). In Figura 48 è mostrato l'andamento delle tensioni sulla sezione XLAM composta da 4 strati.



**Figura 48 – Andamento delle tensioni nella sezione XLAM costituita da 4 strati**

Non disponendo di una resistenza di calcolo a flessione nel piano trasversale dei pannelli, si è dunque deciso di confrontare la tensione  $\sigma_{tx,90,max}$  con la resistenza  $f_{t,90,d,XLAM}$ . Bisogna considerare comunque che, qual'ora le fibre dovessero fessurarsi, non dovrebbe essere compromessa la loro resistenza nell'altra direzione, ma limitare tale tensione alla resistenza di calcolo a trazione ortogonale alle fibre rappresenta in ogni caso un requisito estetico da rispettare qual'ora si abbia l'esigenza di lasciare a vista i pannelli di legno. E' immediato comprendere che nell'altra direzione  $y$  il grafico sarebbe esattamente lo stesso ma ribaltato e la tensione al bordo esterno sarebbe a questo punto una compressione perpendicolare alle fibre, con valori di resistenza molto maggiori rispetto al caso di trazione.

### 8.6.1 Rigidezze

Il calcolo delle rigidezze è fatto attraverso le matrici di rigidezza flessionale sviluppate nel Capitolo 5.

I calcoli sono stati eseguiti con il programma sviluppato col software Mathcad, i cui svolgimenti sono riportati in Allegato A.1.

Per quanto riguarda le rigidezze flessionali  $D_x$ ,  $D_y$  e  $D_{xy}$ , il loro valore è lo stesso nei casi in cui venga considerato o meno l'effetto del "taglio per rotolamento".

La rigidezza torsionale  $G_{xy}$  invece è stata calcolata nel primo caso considerando il diverso valore del modulo di taglio  $G_0$  e  $G_{90}$ , nel secondo caso considerando per tutti gli strati, indipendentemente dall'orientazione delle fibre, sempre il valore  $G_0$ .

Di seguito si riportano i valori di rigidezza flessionale ottenuti (termini  $D_{1,1}$ ,  $D_{2,2}$  e  $D_{1,2}$  della matrice  $[D]$ ):

**Tabella 106 – Valori di  $D_x$ ,  $D_y$  e  $D_{xy}$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) per un numero di strati pari**

Rigidezze flessionali del pannello [Nmm <sup>2</sup> ]/mm	n° strati			
	2	4	6	8
$D_x$	1,366E+08	1,093E+09	3,689E+09	8,743E+09
$D_y$	1,366E+08	1,093E+09	3,689E+09	8,743E+09
$D_{xy}$	2,667E+06	2,134E+07	7,202E+07	1,707E+08

I valori di rigidezza torsionale sono invece diversi per i due casi (termini  $D_{3,3}$  della matrice  $[D]$ ):

**Tabella 107 – Valori di  $G_{xy}$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) per un numero di strati pari**

Rigidezze torsionali del pannello [Nmm <sup>2</sup> ]/mm	n° strati				
	2	4	6	8	
$G_{xy}$	9,092E+06	7,274E+07	2,455E+08	5,819E+08	con "rolling shear"
$G_{xy}$	1,653E+07	1,322E+08	4,463E+08	1,058E+09	senza "rolling shear"

Nella teoria di piastra di Kirchhoff non ha senso definire delle rigidezze a taglio trasversale, come fatto nei precedenti calcoli, in quanto tale teoria assume che la deformazione per scorrimento nel piano verticale sia nulla. Tutte le rigidezze necessarie per questo calcolo sono dunque quelle di Tabella 106 e 107.

### 8.6.2 Verifiche agli stati limite ultimi

Dall'analisi dei carichi risultano per gli strati pari i seguenti carichi permanenti e d'esercizio:

**Tabella 108 - Carichi permanenti e variabili gravanti sui pannelli XLAM per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) per un numero di strati pari**

	n° strati			
	2	4	6	8
<b>1) Carichi permanenti</b>				
$g_1$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,000317	0,000634	0,000950	0,001267
$g_2$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
$G_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,001452	0,001769	0,002085	0,002402
<b>2) Carichi variabili</b>				
$Q_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,002	0,002	0,002	0,002

Adottando per gli stati limite ultimi sempre la combinazione del tipo:

$$q_d = \gamma_{G1} \cdot G_1 + \gamma_{G2} \cdot G_2 + \gamma_Q \cdot Q_k$$

con:

$\gamma_{G1} =$	1,3
$\gamma_{G2} =$	1,5
$\gamma_Q =$	1,5

si ottengono le seguenti combinazioni di carico allo SLU:

**Tabella 109 - Combinazioni di carico allo SLU per pannelli XLAM per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) per un numero di strati pari**

Combinazione di carico SLU [N/mm <sup>2</sup> ]	n° strati			
	2	4	6	8
$q_d$	0,005114	0,005526	0,005938	0,006350

Per il calcolo delle caratteristiche di sollecitazione si utilizzano, per il calcolo bidirezionale con la teoria di piastra di Kirchhoff, le (6.23-24) per il calcolo dei momenti e le (6.28-29) per il taglio. Note dunque la geometria della piastra, le rigidità ed i carichi gravanti su di essa, tramite la (6.40) si calcola la deflessione  $w$ , necessaria per la determinazione del momento e del taglio massimi agenti, nel caso di carico distribuito uniformemente sulla superficie della piastra, nel punto di mezzeria di coordinate  $a/2$  e  $b/2$ .

Come si vede dalla (6.40) il valore della deflessione dipende dalle caratteristiche di rigidità del pannello XLAM, in particolare, nel termine  $H$  compare la rigidità torsionale  $G_{xy}$ , che come detto in precedenza assume valori diversi se viene considerato o meno il "taglio per rotolamento".

Per tale motivo, a differenza dei calcoli fatti con le teorie precedenti, avremo valori differenti nei due casi considerati già a partire dalle caratteristiche di sollecitazione, che di conseguenza porteranno a valori differenti delle tensioni.

Essendo la geometria delle piastre analizzate sempre quadrata, il valore del momento e del taglio sarà lo stesso nelle due direzioni  $x$  e  $y$ . Si riportano di seguito i valori ricavati dal calcolo, di cui si riporta un esempio in Allegato A.3:

**Tabella 110 - Momento massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

Momento massimo di calcolo $M_x = M_y$ [Nmm]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	4	5536	5982	6428	6874
5	5	8650	9347	10040	10740
6	6	12460	13460	14460	15470
7	7	16950	18320	19690	21050
8	8	22140	23930	25710	27500

**Tabella 111 - Momento massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

Momento massimo di calcolo $M_x = M_y$ [Nmm]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	4	5030	5435	5840	6245
5	5	7859	8493	9126	9758
6	6	11320	12230	13140	14050
7	7	15400	16650	17890	19130
8	8	20120	21740	23360	24980

**Tabella 112 - Taglio massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

Taglio massimo di calcolo $T_x = T_y$ [N]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	4	6,918	7,475	8,032	8,589
5	5	8,647	9,344	10,040	10,737
6	6	10,376	11,212	12,048	12,884
7	7	12,106	13,081	14,056	15,032
8	8	13,835	14,950	16,064	17,179



**Tabella 113 - Taglio massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

<i>Taglio massimo di calcolo <math>T_x = T_y</math> [N]/mm</i>		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	4	6,877	7,431	7,985	8,539
5	5	8,596	9,289	9,982	10,674
6	6	10,316	11,147	11,978	12,809
7	7	12,035	13,005	13,974	14,944
8	8	13,754	14,863	15,971	17,079

Note le caratteristiche di sollecitazione è possibile determinare il valore delle tensioni normali agenti sulla sezione del pannello XLAM. Inserite nella (5.26) si calcolano le deformazioni e le curvatures nel piano medio dell'elemento, dopodiché tramite la (5.8) si calcolano le tensioni nei punti di massima sollecitazione, utilizzando la matrice di elasticità del k-esimo strato che avrà nei termini  $E_{1,1}$  ed  $E_{2,2}$  i valori di modulo elastico parallelo o perpendicolare alle fibre a seconda che la strato sia disposto longitudinalmente o trasversalmente rispetto alla direzione considerata.

Per il calcolo della massima tensione di flessione al bordo esterno, uguale nelle due direzioni, si utilizzerà quindi sempre la coordinata  $z=y_g$ , ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 114 – Tensione normale massima al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{mx,max,d} = \sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	4	22,626	3,620	1,717	1,045
5	5	35,353	5,656	2,682	1,632
6	6	50,925	8,145	3,863	2,351
7	7	69,275	11,086	5,260	3,199
8	8	90,487	14,480	6,869	4,180

**Tabella 115 - Tensione normale massima al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{mx,max,d} = \sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	4	20,558	3,289	1,560	0,949
5	5	32,120	5,139	2,438	1,483
6	6	46,265	7,401	3,511	2,135
7	7	62,941	10,075	4,780	2,907
8	8	82,231	13,155	6,241	3,797

La massima tensione di trazione ortogonale alle fibre si trova invece al bordo esterno in zona tesa nella direzione in cui è presente in questa posizione uno strato disposto trasversalmente, per  $z = -y_g$  e con matrice di elasticità avente al termine  $E_{1,1}$  modulo  $E_{90}$  si ottiene:

**Tabella 116 – Tensione di trazione ortogonale alle fibre al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{tx,90,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	2,311	0,231	0,096	0,054
5	3,610	0,361	0,149	0,085
6	5,200	0,519	0,215	0,123
7	7,074	0,707	0,293	0,167
8	9,240	0,923	0,382	0,218

**Tabella 117 - Tensione di trazione ortogonale alle fibre al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{tx,90,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	2,099	0,210	0,087	0,050
5	3,280	0,328	0,136	0,077
6	4,725	0,472	0,195	0,111
7	6,427	0,642	0,266	0,152
8	8,397	0,838	0,347	0,198

Per il calcolo della tensione tangenziale, non avendo con la teoria di Kirchhoff la possibilità di stimare un valore di deformazione nei piani trasversali, si utilizza lo stesso procedimento adottato nel modello approssimato di Grashof, calcolando un unico valore in corrispondenza dell’asse baricentrico geometrico dove sono presenti all’interfaccia due strati disposti ortogonalmente tra loro e confrontando tale valore sia con la resistenza di calcolo  $f_{v,d,XLAM}$  sia con la  $f_{r,d,XLAM}$ , in quanto la seconda essendo minore darà sicuramente la verifica determinante.

La tensione tangenziale è nuovamente data dalla relazione (3.9):

$$\tau_{d,max} = \frac{V_d \cdot \sum (S_m \cdot E_m)}{K_{XLAM} \cdot b}$$

In questo caso però, avendo differenti valori del taglio, saremo in presenza di valori di tensione tangenziale differenti a secondo che sia considerato o meno l’effetto del “taglio per rotolamento”. La tensione massima è data dalla parte di sezione disposta longitudinalmente che si trova alla massima distanza dall’asse baricentrico. Ancora una volta si tratta di un calcolo non corretto, in particolare per pannelli costituiti da un numero di strati pari, in cui si ha uno spostamento dell’asse neutro dal baricentro geometrico della sezione, andando a quindi a sovrastimare la tensione tangenziale.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico, di uguale valore nelle due direzioni principali della piastra, quindi sono:

**Tabella 118 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{d,max}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	n° strati				
	Luca [m]	2	4	6	8
4		0,304	0,123	0,078	0,059
5		0,380	0,154	0,098	0,074
6		0,456	0,185	0,118	0,089
7		0,532	0,216	0,137	0,103
8		0,608	0,246	0,157	0,118

**Tabella 119 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{d,max}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	n° strati				
	Luca [m]	2	4	6	8
4		0,302	0,122	0,078	0,059
5		0,378	0,153	0,098	0,073
6		0,454	0,184	0,117	0,088
7		0,529	0,214	0,137	0,103
8		0,605	0,245	0,156	0,117

### Verifiche

Si procede ora con le verifiche di resistenza della sezione del pannello XLAM.

La tensione normale di flessione  $\sigma_{m,max,d}$  è la stessa in entrambe le direzioni della piastra ma è differente per i due casi considerati, si procede quindi a due verifiche:

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

in cui cambia semplicemente il valore di tensione da confrontare con la resistenza di calcolo a flessione  $f_{m,d,XLAM}$ .

La tensione di trazione perpendicolare alle fibre  $\sigma_{tx,90,max,d}$  va invece confrontata con la relativa resistenza di calcolo  $f_{t,90,d,XLAM}$ :

$$\frac{\sigma_{tx,90,max,d}}{f_{t,90,d,XLAM}} \leq 1$$

avendo in questo caso un unico valore dovuto alla direzione della piastra (direzione x nel caso in esame) ma due valori diversi dovuti al fatto di aver considerato o meno l'effetto del "taglio per rotolamento".

**Tabella 120 - Verifica a flessione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{m,max,d}/f_{m,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		1,553	0,249	0,118	0,072
5		2,427	0,388	0,184	0,112
6		3,496	0,559	0,265	0,161
7		4,756	0,761	0,361	0,220
8		6,212	0,994	0,472	0,287

**Tabella 121 - Verifica a flessione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{m,max,d}/f_{m,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		1,411	0,226	0,107	0,065
5		2,205	0,353	0,167	0,102
6		3,176	0,508	0,241	0,147
7		4,321	0,692	0,328	0,200
8		5,646	0,903	0,428	0,261

**Tabella 122 - Verifica a trazione ortogonale alle fibre per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{tx,90,max,d}/f_{t,90,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		8,377	0,837	0,348	0,196
5		13,086	1,309	0,540	0,308
6		18,850	1,881	0,779	0,446
7		25,643	2,563	1,062	0,605
8		33,495	3,346	1,385	0,790

**Tabella 123 - Verifica a trazione ortogonale alle fibre per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{tx,90,max,d}/f_{t,90,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		7,609	0,761	0,315	0,181
5		11,890	1,189	0,493	0,279
6		17,128	1,711	0,707	0,402
7		23,298	2,327	0,964	0,551
8		30,439	3,038	1,258	0,718

Appare evidente come la verifica a trazione ortogonale alle fibre sia molto più restrittiva rispetto a quella a flessione. Occorrerà dunque valutare se tale verifica sarà più penalizzante di quella a vibrazione per la scelta del numero di strati da utilizzare.

La verifica a taglio prevede il confronto della tensione tangenziale baricentrica con le due resistenze di calcolo a taglio e taglio trasversale nel primo caso, nel secondo caso invece, dove non si considera il “taglio per rotolamento”, va confrontata solo con la resistenza di calcolo a taglio.

Rispetto al calcolo approssimato di Grashof la verifica differisce nei due casi anche per il diverso valore della tensione tangenziale.

Per il primo caso:

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 124 - Verifica a taglio per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{d,max}/f_{v,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		0,221	0,089	0,057	0,043
5		0,276	0,112	0,071	0,053
6		0,331	0,134	0,085	0,064
7		0,386	0,156	0,100	0,075
8		0,441	0,179	0,114	0,086

$$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 125 - Verifica a taglio trasversale (“rolling shear”) per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{r,d,max}/f_{r,d,XLAM}$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		0,441	0,179	0,114	0,086
5		0,551	0,223	0,142	0,107
6		0,661	0,268	0,171	0,128
7		0,772	0,313	0,199	0,150
8		0,882	0,357	0,228	0,171

Nel caso in cui invece non venga considerato l’effetto del “taglio per rotolamento” si procede ad un’unica verifica:

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 126 - Verifica a taglio per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{d,max}/f_{v,d, XLAM}$	n° strati			
	2	4	6	8
<b>Luce [m]</b>				
<b>4</b>	0,219	0,089	0,057	0,043
<b>5</b>	0,274	0,111	0,071	0,053
<b>6</b>	0,329	0,133	0,085	0,064
<b>7</b>	0,384	0,155	0,099	0,074
<b>8</b>	0,438	0,178	0,113	0,085

### 8.6.3 Verifiche agli stati limite di esercizio

Il calcolo delle deformazioni istantanee viene fatto con la (6.40), nella cui espressione compare il già citato termine  $H$  che assume valori differenti nei due casi considerati, dando valori diversi di  $w$ .

Utilizzano sempre i valori  $k_{def} = 0,6$  (classe di servizio 1) e  $\psi_{2,1} = 0,3$  (categoria A, ambienti ad uso residenziale), si riportano di seguito i valori di deformazione istantanea e finale nel caso in cui venga considerato l'effetto del “taglio per rotolamento”:

**Tabella 127 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{g,ist} [mm]$	n° strati			
	2	4	6	8
<b>Luce [m]</b>				
<b>4</b>	19,33	2,94	1,03	0,50
<b>5</b>	47,20	7,19	2,51	1,22
<b>6</b>	97,88	14,90	5,21	2,53
<b>7</b>	181,33	27,61	9,64	4,69
<b>8</b>	309,35	47,10	16,45	8,00

**Tabella 128 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,ist} [mm]$	n° strati			
	2	4	6	8
<b>Luce [m]</b>				
<b>4</b>	26,63	3,33	0,99	0,42
<b>5</b>	65,02	8,13	2,41	1,02
<b>6</b>	134,82	16,85	4,99	2,11
<b>7</b>	249,77	31,22	9,25	3,90
<b>8</b>	426,10	53,25	15,78	6,66

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 129 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{g,fin}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		30,93	4,71	1,64	0,80
5		75,52	11,50	4,02	1,95
6		156,61	23,85	8,33	4,05
7		290,13	44,18	15,43	7,50
8		494,96	75,36	26,32	12,79

$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 130 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,fin}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		31,42	3,93	1,16	0,49
5		76,72	9,59	2,84	1,20
6		159,09	19,88	5,89	2,49
7		294,73	36,83	10,91	4,60
8		502,80	62,84	18,62	7,86

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 131 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{fin}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		62,36	8,64	2,81	1,29
5		152,25	21,09	6,86	3,15
6		315,70	43,73	14,22	6,53
7		584,87	81,01	26,34	12,10
8		997,76	138,20	44,94	20,65

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

**Tabella 132 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati					
	Luce [m]	2	4	6		8
4		26,63	3,33	0,99	0,42	< 13,3 mm
5		65,02	8,13	2,41	1,02	< 16,7 mm
6		134,82	16,85	4,99	2,11	< 20,0 mm
7		249,77	31,22	9,25	3,90	< 23,3 mm
8		426,10	53,25	15,78	6,66	< 26,7 mm

**Tabella 133 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati					
	Luce [m]	2	4	6		8
4		31,42	3,93	1,16	0,49	< 20,0 mm
5		76,72	9,59	2,84	1,20	< 25,0 mm
6		159,09	19,88	5,89	2,49	< 30,0 mm
7		294,73	36,83	10,91	4,60	< 35,0 mm
8		502,80	62,84	18,62	7,86	< 40,0 mm

**Tabella 134 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{fin} < l/250$	n° strati					
	Luce [m]	2	4	6		8
4		62,36	8,64	2,81	1,29	< 16,0 mm
5		152,25	21,09	6,86	3,15	< 20,0 mm
6		315,70	43,73	14,22	6,53	< 24,0 mm
7		584,87	81,01	26,34	12,10	< 28,0 mm
8		997,76	138,20	44,94	20,65	< 32,0 mm

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.



Di seguito sono invece riportate le deformazioni istantanee e finali nel caso in cui l'effetto del "taglio per rotolamento" non venga preso in considerazione:

**Tabella 135 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{g,ist}$ [mm]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	17,64	2,69	0,94	0,46
5	43,08	6,56	2,29	1,11
6	89,32	13,60	4,75	2,31
7	165,48	25,20	8,80	4,28
8	282,31	42,99	15,01	7,30

**Tabella 136 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,ist}$ [mm]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	24,30	3,04	0,90	0,38
5	59,34	7,42	2,20	0,93
6	123,04	15,38	4,56	1,92
7	227,94	28,49	8,44	3,56
8	388,86	48,60	14,40	6,08

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 137 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{g,fin}$ [mm]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	28,23	4,30	1,50	0,73
5	68,92	10,50	3,67	1,78
6	142,92	21,76	7,60	3,69
7	264,77	40,32	14,08	6,84
8	451,69	68,78	24,02	11,68

$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 138 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,fin}$ [mm]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	28,68	3,58	1,06	0,45
5	70,02	8,75	2,59	1,09
6	145,18	18,15	5,38	2,27
7	268,97	33,62	9,96	4,20
8	458,85	57,35	16,99	7,17

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 139 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{fin}$ [mm]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	56,91	7,88	2,56	1,18
5	138,94	19,25	6,26	2,87
6	288,10	39,91	12,98	5,96
7	533,74	73,94	24,04	11,05
8	910,54	126,13	41,01	18,84

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

**Tabella 140 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati				
Luce [m]	2	4	6	8	
4	24,30	3,04	0,90	0,38	< 13,3 mm
5	59,34	7,42	2,20	0,93	< 16,7 mm
6	123,04	15,38	4,56	1,92	< 20,0 mm
7	227,94	28,49	8,44	3,56	< 23,3 mm
8	388,86	48,60	14,40	6,08	< 26,7 mm

**Tabella 141 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati				
	2	4	6	8	
Luce [m]					
4	28,68	3,58	1,06	0,45	< 20,0 mm
5	70,02	8,75	2,59	1,09	< 25,0 mm
6	145,18	18,15	5,38	2,27	< 30,0 mm
7	268,97	33,62	9,96	4,20	< 35,0 mm
8	458,85	57,35	16,99	7,17	< 40,0 mm

**Tabella 142 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{fin} < l/250$	n° strati				
	2	4	6	8	
Luce [m]					
4	56,91	7,88	2,56	1,18	< 16,0 mm
5	138,94	19,25	6,26	2,87	< 20,0 mm
6	288,10	39,91	12,98	5,96	< 24,0 mm
7	533,74	73,94	24,04	11,05	< 28,0 mm
8	910,54	126,13	41,01	18,84	< 32,0 mm

### 8.6.4 Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto attraverso la (6.114):

$$f_1 = \frac{\pi}{2a^2} \sqrt{\frac{D_x \cdot m^4 + 2 \cdot H \cdot m^2 \cdot n^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + D_y \cdot n^4 \cdot \frac{a^4}{b^4}}{m}}$$

Anche per quanto riguarda la frequenza, come si vede dall’espressione, vi è dipendenza dalla rigidezza torsionale  $G_{xy}$  della piastra compresa nel termine  $H$ . Pertanto il calcolo va differenziato nei due casi analizzati, ottenendo valori differenti della frequenza naturale di vibrazione a causa del diverso valore della rigidezza torsionale. Ovviamente nel caso in cui l’effetto del “taglio per rotolamento” non venga considerato si otterranno valori di frequenza maggiori dovuti ad una maggiore rigidezza della piastra.

Si riportano di seguito le rigidzze flessionali e torsionali del pannello e la massa per unità di area del solaio, avendo considerato come tale i soli carichi permanenti risultanti dall’analisi dei carichi.

**Tabella 143 - Rigidezze flessionali e torsionali e massa per unità di area per il calcolo delle frequenze naturali di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria quadrata**

Rigidezze del pannello [Nm <sup>2</sup> ]/m	n° strati				
	2	4	6	8	
<b>D<sub>x</sub></b>	1,366E+02	1,093E+03	3,689E+03	8,743E+03	
<b>D<sub>y</sub></b>	1,366E+02	1,093E+03	3,689E+03	8,743E+03	
<b>D<sub>xy</sub></b>	2,667E+00	2,134E+01	7,202E+01	1,707E+02	
<b>G<sub>xy</sub></b>	9,092E+00	7,274E+01	2,455E+02	5,819E+02	con "rolling shear"
<b>G<sub>xy</sub></b>	1,653E+01	1,322E+02	4,463E+02	1,058E+03	senza "rolling shear"
<b>Massa per unità di area</b> [kg/m <sup>2</sup> ]	145,18	176,86	208,54	240,22	

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nelle tabelle sottostanti, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

**Tabella 144 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$f_1$ [Hz]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	4,57	11,72	19,83	28,44
5	2,93	7,50	12,69	18,20
6	2,03	5,21	8,81	12,64
7	1,49	3,83	6,47	9,29
8	1,14	2,93	4,96	7,11

**Tabella 145 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$f_1$ [Hz]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	4,78	12,26	20,74	29,75
5	3,06	7,85	13,27	19,04
6	2,13	5,45	9,22	13,22
7	1,56	4,00	6,77	9,71
8	1,20	3,07	5,19	7,44

### 8.6.5 *Diverse soluzioni progettuali per geometria rettangolare*

Finora i calcoli eseguiti sono stati fatti nell'ipotesi di dover ricoprire aree di solaio di geometria quadrata, utilizzando quindi pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari, che rappresenta la soluzione più appropriata per questo tipo di geometrie, ottenendo una uguale ripartizione del carico nelle due direzioni principali della piastra.

Si vuole ora studiare il comportamento del materiale nel caso in cui si avesse l'esigenza di ricoprire aree di solaio rettangolari utilizzando tre diverse soluzioni progettuali identificate come segue:

- *Trave*, utilizzando pannelli XLAM costituiti da un numero di strati dispari, disponendoli con l'inerzia maggiore in direzione minore (direzione  $x$ ) e inerzia minore in direzione maggiore (direzione  $y$ );
- *Piastra isotropa*, utilizzando pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari, ipotizzando, in prima analisi, di disporre il primo strato longitudinalmente alla direzione minore;
- *Piastra ortotropa*, utilizzando pannelli XLAM costituiti da un numero di strati dispari, disponendoli con l'inerzia maggiore in direzione maggiore (direzione  $x$ ) e inerzia minore in direzione minore (direzione  $y$ ).

Per studiare il comportamento del materiale per questi tre diversi casi si eseguiranno calcoli per geometrie rettangolari avente lato minore fisso di 4 e 5 metri e lato maggiore variabile di metro in metro fino ad una luce massima di 8 metri.

Inoltre i calcoli verranno eseguiti solo per il caso che considera l'effetto del "taglio per rotolamento".

Si riportano, per completezza, le rigidzze flessionali, le rigidzze torsionali ed i carichi relativi ai pannelli costituiti da un numero di strati dispari. Per quelli pari valgono i valori di Tabella 106 e 107 per le rigidzze e Tabella 108 e 109 per i carichi. Il valore di  $G_{xy}$  è quello ottenuto considerando l'effetto del "rolling shear".

**Tabella 146 - Valori di  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  e  $G_{xy}$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) per un numero di strati dispari**

Rigidzze del pannello [ $Nmm^2$ ]/mm	n° strati			
	3	5	7	9
$D_x$	8,602E+08	3,300E+09	8,172E+09	1,630E+10
$D_y$	6,194E+07	9,691E+08	3,542E+09	8,601E+09
$D_{xy}$	9,003E+06	4,168E+07	1,144E+08	2,431E+08
$G_{xy}$	5,393E+07	2,099E+08	5,247E+08	1,053E+09



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

**Tabella 147 - Carichi permanenti e variabili gravanti sui pannelli XLAM per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) per un numero di strati dispari**

	n° strati			
	3	5	7	9
<b>1) Carichi permanenti</b>				
$g_1$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,000475	0,000792	0,001109	0,001426
$g_2$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
$G_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,001610	0,001927	0,002244	0,002561
<b>2) Carichi variabili</b>				
$Q_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,002	0,002	0,002	0,002

**Tabella 148 - Combinazioni di carico allo SLU per pannelli XLAM per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) per un numero di strati dispari**

Combinazione di carico SLU [N/mm <sup>2</sup> ]	n° strati			
	3	5	7	9
$q_d$	0,005320	0,005732	0,006144	0,006556

### TRAVE

#### Verifiche agli stati limite ultimi

Si riportano di seguito i valori ricavati dal calcolo, di cui si riporta un esempio in Allegato A.4:

**Tabella 149 - Momento massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

Momento massimo di calcolo $M_x$ [Nmm]/mm		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
4	5	10470	10920	11270	11710
	6	10730	11740	12440	13130
	7	10770	12030	12930	13780
	8	10740	12050	13060	13990
5	6	16200	16650	17060	17650
	7	16660	17960	18860	19810
	8	16820	18600	19840	21030



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

**Tabella 150 - Momento massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

<i>Momento massimo di calcolo <math>M_y</math> [Nmm]/mm</i>		<b>n° strati</b>			
		<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>Luce [m]</b>		<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>5</b>	350	1757	2803	3617
	<b>6</b>	211	1121	1907	2543
	<b>7</b>	142	670	1214	1674
	<b>8</b>	112	378	724	1035
<b>5</b>	<b>6</b>	608	2976	4686	6003
	<b>7</b>	400	2115	3507	4615
	<b>8</b>	276	1437	2506	3386

**Tabella 151 - Taglio massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

<i>Taglio massimo di calcolo <math>T_x</math> [N]/mm</i>		<b>n° strati</b>			
		<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>Luce [m]</b>		<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>5</b>	10,545	11,286	11,786	12,338
	<b>6</b>	10,551	11,706	12,481	13,227
	<b>7</b>	10,483	11,775	12,705	13,566
	<b>8</b>	10,414	11,686	12,686	13,605
<b>5</b>	<b>6</b>	13,151	13,916	14,450	15,076
	<b>7</b>	13,206	14,494	15,346	16,196
	<b>8</b>	13,159	14,703	15,764	16,765

**Tabella 152 - Taglio massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

<i>Taglio massimo di calcolo <math>T_y</math> [N]/mm</i>		<b>n° strati</b>			
		<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>Luce [m]</b>		<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>5</b>	3,219	4,751	5,704	6,479
	<b>6</b>	3,146	4,546	5,373	6,050
	<b>7</b>	3,079	4,443	5,210	5,833
	<b>8</b>	3,012	4,374	5,122	5,722
<b>5</b>	<b>6</b>	4,045	6,016	7,249	8,247
	<b>7</b>	3,967	5,763	6,848	7,737
	<b>8</b>	3,898	5,622	6,617	7,430

Come si può notare dai valori delle tabelle, disponendo il pannello XLAM con la rigidezza maggiore in direzione minore, si ha effettivamente un comportamento a trave in quanto gli strati disposti longitudinalmente alla direzione maggiore assorbono una parte di sollecitazione praticamente trascurabile rispetto agli strati disposti nell'altro senso, che va incrementando con l'aumentare del numero di strati.

Note le caratteristiche di sollecitazione è possibile determinare il valore delle tensioni normali agenti sulla sezione del pannello XLAM nel modo descritto nei precedenti paragrafi.

Essendo in presenza di pannelli XLAM con strati dispari viene calcolata la sola tensione normale di flessione nelle due direzioni, trascurando a priori la tensione di trazione ortogonale alle fibre, come fatto nel calcolo monodirezionale.

Per il calcolo della massima tensione di flessione al bordo esterno si utilizzerà la coordinata  $z = y_g$  per la tensione in direzione  $x$  e  $z = y_g - s$  per la tensione in direzione  $y$ , ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 153 – Tensione normale massima al bordo esterno in direzione  $x$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\sigma_{mx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
4	5	6,647	3,008	1,754	1,174
	6	6,812	3,236	1,937	1,318
	7	6,838	3,317	2,015	1,384
	8	6,819	3,323	2,036	1,406
5	6	10,284	4,586	2,654	1,769
	7	10,577	4,949	2,936	1,988
	8	10,679	5,128	3,091	2,112

**Tabella 154 - Tensione normale massima al bordo esterno in direzione  $y$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
4	5	0,729	0,931	0,693	0,519
	6	0,313	0,568	0,459	0,358
	7	0,108	0,312	0,280	0,228
	8	0,021	0,147	0,154	0,134
5	6	1,325	1,587	1,162	0,865
	7	0,701	1,095	0,855	0,656
	8	0,331	0,709	0,595	0,472

Si vede nuovamente dai valori delle tensioni come quella in direzione  $y$  sia praticamente trascurabile rispetto a quella in direzione  $x$ .



La tensione tangenziale è sempre data dalla relazione (3.9):

$$\tau_{d,max} = \frac{V_d \cdot \sum (S_m \cdot E_m)}{K_{XLAM} \cdot b}$$

ed è calcolata con gli stessi criteri descritti al paragrafo 8.3.2, con la differenza che nel caso bidirezionale siamo in presenza di due diverse tensioni nelle rispettive direzioni x e y, quindi, a seconda della direzione considerata sarà, per esempio per un pannello costituito da 5 strati, in direzione x una tensione tangenziale longitudinale e in direzione y una tensione tangenziale trasversale.

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico quindi sono:

**Tabella 155 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{x,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
4	5	0,147	0,087	0,069	0,056
	6	0,147	0,091	0,073	0,060
	7	0,146	0,091	0,075	0,061
	8	0,145	0,090	0,075	0,061
5	6	0,184	0,108	0,085	0,068
	7	0,184	0,112	0,090	0,073
	8	0,184	0,114	0,093	0,076

taglio in corrispondenza degli strati longitudinali  
 taglio in corrispondenza degli strati trasversali ("rolling shear")

**Tabella 156 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{y,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
4	5	0,078	0,059	0,041	0,036
	6	0,076	0,056	0,039	0,034
	7	0,075	0,055	0,038	0,033
	8	0,073	0,054	0,037	0,032
5	6	0,098	0,075	0,052	0,046
	7	0,096	0,071	0,049	0,043
	8	0,094	0,070	0,048	0,042

**Tabella 157 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza degli strati trasversali per gli elementi da 5 e 9 strati per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{rx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	-	0,082	-	0,055
	6	-	0,085	-	0,058
	7	-	0,086	-	0,060
	8	-	0,085	-	0,060
5	6	-	0,101	-	0,067
	7	-	0,106	-	0,072
	8	-	0,107	-	0,074

**Tabella 158 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza degli strati trasversali per l'elemento da 7 strati per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{rx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	-	-	0,039	-
	6	-	-	0,036	-
	7	-	-	0,035	-
	8	-	-	0,035	-
5	6	-	-	0,049	-
	7	-	-	0,046	-
	8	-	-	0,045	-

### Verifiche

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 159 - Verifica a flessione in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\sigma_{mx,max,d} / f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	0,456	0,207	0,120	0,081
	6	0,468	0,222	0,133	0,090
	7	0,469	0,228	0,138	0,095
	8	0,468	0,228	0,140	0,097
5	6	0,706	0,315	0,182	0,121
	7	0,726	0,340	0,202	0,136
	8	0,733	0,352	0,212	0,145

**Tabella 160 - Verifica a flessione in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\sigma_{my,max,d}/f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	0,050	0,064	0,048	0,036
	6	0,021	0,039	0,032	0,025
	7	0,007	0,021	0,019	0,016
	8	0,001	0,010	0,011	0,009
5	6	0,091	0,109	0,080	0,059
	7	0,048	0,075	0,059	0,045
	8	0,023	0,049	0,041	0,032

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 161 - Verifica a taglio in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{x,max,d}/f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	-	0,063	-	0,040
	6	-	0,066	-	0,043
	7	-	0,066	-	0,044
	8	-	0,066	-	0,045
5	6	-	0,078	-	0,049
	7	-	0,081	-	0,053
	8	-	0,082	-	0,055

**Tabella 162 - Verifica a taglio in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{y,max,d}/f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	0,057	-	0,030	-
	6	0,055	-	0,028	-
	7	0,054	-	0,027	-
	8	0,053	-	0,027	-
5	6	0,071	-	0,038	-
	7	0,070	-	0,036	-
	8	0,069	-	0,035	-

$$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 163 - Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{rx,max,d}/f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	0,214	0,119	0,100	0,040
	6	0,214	0,124	0,106	0,042
	7	0,212	0,124	0,108	0,043
	8	0,211	0,123	0,108	0,044
5	6	0,266	0,147	0,123	0,048
	7	0,267	0,153	0,131	0,052
	8	0,266	0,155	0,134	0,054

**Tabella 164 - Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{ry,max,d}/f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	-	0,085	0,056	0,026
	6	-	0,082	0,053	0,025
	7	-	0,080	0,051	0,024
	8	-	0,079	0,050	0,023
5	6	-	0,108	0,071	0,033
	7	-	0,104	0,067	0,031
	8	-	0,101	0,065	0,030

### Verifiche agli stati limite di esercizio

**Tabella 165 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{g,ist}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	6,12	1,85	0,84	0,47
	6	6,28	1,99	0,92	0,52
	7	6,31	2,04	0,96	0,55
	8	6,30	2,04	0,97	0,56
5	6	14,80	4,40	1,98	1,10
	7	15,24	4,75	2,19	1,23
	8	15,39	4,92	2,30	1,31

**Tabella 166 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{q,ist} [mm]$		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
4	5	7,61	1,92	0,75	0,36
	6	7,81	2,06	0,82	0,41
	7	7,84	2,11	0,86	0,43
	8	7,82	2,12	0,86	0,44
5	6	18,38	4,56	1,76	0,86
	7	18,93	4,92	1,95	0,96
	8	19,12	5,10	2,05	1,02

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 167 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{g,fin} [mm]$		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
4	5	9,80	2,95	1,34	0,75
	6	10,05	3,18	1,48	0,84
	7	10,10	3,26	1,54	0,88
	8	10,08	3,27	1,55	0,89
5	6	23,67	7,04	3,16	1,76
	7	24,38	7,59	3,50	1,97
	8	24,63	7,87	3,68	2,09

$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 168 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{q,fin} [mm]$		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
4	5	8,97	2,26	0,88	0,43
	6	9,21	2,43	0,97	0,48
	7	9,25	2,49	1,01	0,51
	8	9,23	2,50	1,02	0,51
5	6	21,69	5,39	2,08	1,01
	7	22,34	5,81	2,30	1,13
	8	22,56	6,02	2,42	1,20

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 169 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{fin}$ [mm]		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
4	5	18,77	5,21	2,22	1,18
	6	19,26	5,61	2,45	1,32
	7	19,35	5,75	2,54	1,38
	8	19,31	5,77	2,57	1,40
5	6	45,36	12,42	5,24	2,77
	7	46,72	13,40	5,79	3,10
	8	47,19	13,89	6,10	3,29

### Verifiche

**Tabella 170 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{q,ist} < l/300$		n° strati				
Luce [m]		3	5	7	9	
4	5	7,61	1,92	0,75	0,36	< 13,3 mm
	6	7,81	2,06	0,82	0,41	< 13,3 mm
	7	7,84	2,11	0,86	0,43	< 13,3 mm
	8	7,82	2,12	0,86	0,44	< 13,3 mm
5	6	18,38	4,56	1,76	0,86	< 16,7 mm
	7	18,93	4,92	1,95	0,96	< 16,7 mm
	8	19,12	5,10	2,05	1,02	< 16,7 mm

**Tabella 171 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{q,fin} < l/200$		n° strati				
Luce [m]		3	5	7	9	
4	5	8,97	2,26	0,88	0,43	< 20,0 mm
	6	9,21	2,43	0,97	0,48	< 20,0 mm
	7	9,25	2,49	1,01	0,51	< 20,0 mm
	8	9,23	2,50	1,02	0,51	< 20,0 mm
5	6	21,69	5,39	2,08	1,01	< 25,0 mm
	7	22,34	5,81	2,30	1,13	< 25,0 mm
	8	22,56	6,02	2,42	1,20	< 25,0 mm

**Tabella 172 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{fin} < l/250$		n° strati				
		3	5	7	9	
Luce [m]						
4	5	18,77	5,21	2,22	1,18	< 16,0 mm
	6	19,26	5,61	2,45	1,32	< 16,0 mm
	7	19,35	5,75	2,54	1,38	< 16,0 mm
	8	19,31	5,77	2,57	1,40	< 16,0 mm
5	6	45,36	12,42	5,24	2,77	< 20,0 mm
	7	46,72	13,40	5,79	3,10	< 20,0 mm
	8	47,19	13,89	6,10	3,29	< 20,0 mm

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.

### Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto attraverso la (6.114).

Si riportano di seguito le rigidezze flessionali e torsionali del pannello e la massa per unità di area del solaio, avendo considerato come tale i soli carichi permanenti risultanti dall'analisi dei carichi.

**Tabella 173 - Rigidezze flessionali e torsionali e massa per unità di area per il calcolo delle frequenze naturali di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

Rigidezze del pannello [Nm <sup>2</sup> ]/m	n° strati			
	3	5	7	9
$D_x$	8,602E+02	3,300E+03	8,172E+03	1,630E+04
$D_y$	6,194E+01	9,691E+02	3,542E+03	8,601E+03
$D_{xy}$	9,003E+00	4,168E+01	1,144E+02	2,431E+02
$G_{xy}$	5,393E+01	2,099E+02	5,247E+02	1,053E+03
Massa per unità di area [kg/m <sup>2</sup> ]	161,02	192,70	224,38	256,06



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nella tabella sottostante, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

**Tabella 174 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$f_1$ [Hz]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	5	7,87	14,64	21,85	29,31
	6	7,65	13,97	20,63	27,50
	7	7,51	13,61	20,00	26,57
	8	7,43	13,40	19,64	26,04
5	6	5,08	9,50	14,22	19,12
	7	4,94	9,08	13,45	17,97
	8	4,85	8,83	13,01	17,32

### PIASTRA ISOTROPA

#### *Verifiche agli stati limite ultimi*

Si riportano di seguito i valori ricavati dal calcolo, i cui passaggi non sono stati riportati in allegato ma è simile all'esempio riportato in Allegato A.3 relativo al caso di piastra di geometria quadrata.

I carichi e le rigidezze dei pannelli XLAM utilizzati per la determinazione delle caratteristiche di sollecitazione sono gli stessi di Tabella 106 – 107 – 108 e 109.

**Tabella 175 - Momento massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

Momento massimo di calcolo $M_x$ [Nmm]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	5	8014	8660	9306	9951
	6	9595	10370	11140	11910
	7	10470	11320	12160	13000
	8	10900	11780	12650	13530
5	6	11860	12820	13770	14730
	7	14160	15300	16440	17580
	8	15650	16910	18170	19430





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

**Tabella 176 - Momento massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

<i>Momento massimo di calcolo <math>M_y</math> [Nmm]/mm</i>		<b>n° strati</b>			
		<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
<b>Luce [m]</b>					
<b>4</b>	<b>5</b>	4922	5319	5715	6112
	<b>6</b>	3857	4168	4479	4790
	<b>7</b>	2821	3048	3276	3503
	<b>8</b>	1960	2118	2276	2434
<b>5</b>	<b>6</b>	7976	8619	9262	9904
	<b>7</b>	6713	7254	7795	8336
	<b>8</b>	5354	5785	6217	6648

**Tabella 177 - Taglio massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

<i>Taglio massimo di calcolo <math>T_x</math> [N]/mm</i>		<b>n° strati</b>			
		<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
<b>Luce [m]</b>					
<b>4</b>	<b>5</b>	8,746	9,450	10,155	10,859
	<b>6</b>	9,850	10,643	11,437	12,230
	<b>7</b>	10,421	11,261	12,101	12,940
	<b>8</b>	10,664	11,523	12,382	13,241
<b>5</b>	<b>6</b>	10,551	11,401	12,251	13,101
	<b>7</b>	11,857	12,812	13,767	14,722
	<b>8</b>	12,662	13,682	14,702	15,722

**Tabella 178 - Taglio massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

<i>Taglio massimo di calcolo <math>T_y</math> [N]/mm</i>		<b>n° strati</b>			
		<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
<b>Luce [m]</b>					
<b>4</b>	<b>5</b>	6,313	6,822	7,330	7,839
	<b>6</b>	5,759	6,223	6,687	7,151
	<b>7</b>	5,416	5,852	6,288	6,725
	<b>8</b>	5,233	5,655	6,076	6,498
<b>5</b>	<b>6</b>	8,053	8,702	9,351	9,999
	<b>7</b>	7,446	8,046	8,645	9,245
	<b>8</b>	6,997	7,561	8,125	8,688

Note le caratteristiche di sollecitazione è possibile determinare il valore delle tensioni normali agenti sulla sezione del pannello XLAM nel modo descritto nei precedenti paragrafi.

Per il calcolo della massima tensione di flessione al bordo esterno nelle due direzioni si utilizzerà sempre la coordinata  $z=y_g$ , ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 179 – Tensione normale massima al bordo esterno in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{mx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	5	32,867	5,259	2,495	1,518
	6	39,425	6,310	2,993	1,820
	7	43,071	6,897	3,271	1,989
	8	44,875	7,183	3,406	2,072
5	6	48,614	7,781	3,690	2,246
	7	58,145	9,304	4,414	2,685
	8	64,339	10,295	4,884	2,971

**Tabella 180 - Tensione normale massima al bordo esterno in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	5	20,003	3,200	1,518	0,923
	6	15,554	2,487	1,180	0,718
	7	11,250	1,798	0,853	0,519
	8	7,684	1,227	0,582	0,354
5	6	32,456	5,192	2,463	1,498
	7	27,164	4,344	2,061	1,254
	8	21,506	3,438	1,631	0,992

Si vede dai valori delle tensioni come nel caso di piastra isotropa, quindi con un numero uguale di strati disposti nelle due direzioni principali x e y della piastra, si ottiene una distribuzione delle tensioni più regolare anche nel caso di geometria rettangolare. Tale regolarità va diminuendo con l'aumentare della differenza tra i due lati della piastra.

Avendo nel caso di piastra isotropa pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari, occorre determinare, come nel caso dei calcoli per piastre quadrate, la massima tensione di trazione ortogonale alle fibre che si trova invece al bordo esterno in zona tesa nella direzione in cui è presente in questa posizione uno strato disposto trasversalmente, ed è calcolata per  $z = -y_g$  e con matrice di elasticità avente al termine  $E_{1,1}$  modulo  $E_{90}$ .

**Tabella 181 - Tensione di trazione ortogonale alle fibre al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{tx,90,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
4	5	3,232	0,315	0,129	0,073
	6	3,795	0,365	0,149	0,084
	7	4,090	0,390	0,159	0,089
	8	4,223	0,400	0,162	0,091
5	6	4,808	0,471	0,193	0,110
	7	5,638	0,545	0,223	0,126
	8	6,155	0,589	0,240	0,136

La tensione tangenziale è calcolata con gli stessi criteri descritti al paragrafo 8.6.2.

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico quindi sono:

**Tabella 182 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{x,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
4	5	0,385	0,156	0,099	0,075
	6	0,433	0,175	0,112	0,084
	7	0,458	0,186	0,118	0,089
	8	0,469	0,190	0,121	0,091
5	6	0,464	0,188	0,120	0,090
	7	0,521	0,211	0,134	0,101
	8	0,557	0,226	0,144	0,108

**Tabella 183 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{y,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
4	5	0,278	0,112	0,072	0,054
	6	0,253	0,103	0,065	0,049
	7	0,238	0,096	0,061	0,046
	8	0,230	0,093	0,059	0,045
5	6	0,354	0,143	0,091	0,069
	7	0,327	0,133	0,084	0,064
	8	0,308	0,125	0,079	0,060

### Verifiche

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 184 - Verifica a flessione in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{mx,max,d}/f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	5	2,256	0,361	0,171	0,104
	6	2,707	0,433	0,205	0,125
	7	2,957	0,474	0,225	0,137
	8	3,081	0,493	0,234	0,142
5	6	3,338	0,534	0,253	0,154
	7	3,992	0,639	0,303	0,184
	8	4,417	0,707	0,335	0,204

**Tabella 185 - Verifica a flessione in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{my,max,d}/f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	5	1,373	0,220	0,104	0,063
	6	1,068	0,171	0,081	0,049
	7	0,772	0,123	0,059	0,036
	8	0,528	0,084	0,040	0,024
5	6	2,228	0,356	0,169	0,103
	7	1,865	0,298	0,141	0,086
	8	1,477	0,236	0,112	0,068

$$\frac{\sigma_{tx,90max,d}}{f_{t,90,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 186 - Verifica a trazione ortogonale alle fibre per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{tx,90,max,d}/f_{t,90,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	5	11,716	1,142	0,468	0,265
	6	13,757	1,323	0,540	0,305
	7	14,826	1,414	0,576	0,323
	8	15,308	1,450	0,587	0,330
5	6	17,429	1,707	0,700	0,399
	7	20,438	1,976	0,808	0,457
	8	22,312	2,135	0,870	0,493

$$\frac{\tau_{d,\max}}{f_{v,d, XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 187 - Verifica a taglio in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{x,\max,d}/f_{v,d, XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	5	0,279	0,113	0,072	0,054
	6	0,314	0,127	0,081	0,061
	7	0,332	0,135	0,086	0,064
	8	0,340	0,138	0,088	0,066
5	6	0,336	0,136	0,087	0,065
	7	0,378	0,153	0,097	0,073
	8	0,404	0,164	0,104	0,078

**Tabella 188 - Verifica a taglio in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{y,\max,d}/f_{v,d, XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	5	0,201	0,082	0,052	0,039
	6	0,184	0,074	0,047	0,036
	7	0,173	0,070	0,045	0,033
	8	0,167	0,068	0,043	0,032
5	6	0,257	0,104	0,066	0,050
	7	0,237	0,096	0,061	0,046
	8	0,223	0,090	0,058	0,043

$$\frac{\tau_{r,d,\max}}{f_{r,d, XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 189 - Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{rx,\max,d}/f_{r,d, XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
4	5	0,558	0,226	0,144	0,108
	6	0,628	0,254	0,162	0,122
	7	0,664	0,269	0,171	0,129
	8	0,680	0,275	0,175	0,132
5	6	0,673	0,273	0,174	0,130
	7	0,756	0,306	0,195	0,147
	8	0,807	0,327	0,208	0,157

**Tabella 190 - Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{ry,max,d} / f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
4	5	0,402	0,163	0,104	0,078
	6	0,367	0,149	0,095	0,071
	7	0,345	0,140	0,089	0,067
	8	0,334	0,135	0,086	0,065
5	6	0,513	0,208	0,132	0,100
	7	0,475	0,192	0,122	0,092
	8	0,446	0,181	0,115	0,087

### Verifiche agli stati limite di esercizio

**Tabella 191 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{g,ist} [mm]$		n° strati			
		2	4	6	8
4	5	27,69	4,22	1,47	0,72
	6	33,06	5,03	1,76	0,86
	7	36,08	5,49	1,92	0,93
	8	37,58	5,72	2,00	0,97
5	6	64,10	9,76	3,41	1,66
	7	76,29	11,62	4,06	1,97
	8	84,24	12,83	4,48	2,18

**Tabella 192 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{q,ist} [mm]$		n° strati			
		2	4	6	8
4	5	38,14	4,77	1,41	0,60
	6	45,54	5,69	1,69	0,71
	7	49,70	6,21	1,84	0,78
	8	51,76	6,47	1,92	0,81
5	6	88,29	11,03	3,27	1,38
	7	105,08	13,13	3,89	1,64
	8	116,03	14,50	4,30	1,81

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 193 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{g,fin}$ [mm]		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	5	44,30	6,75	2,36	1,15
	6	52,90	8,05	2,81	1,37
	7	57,73	8,79	3,07	1,49
	8	60,12	9,16	3,20	1,55
5	6	102,56	15,62	5,45	2,65
	7	122,06	18,59	6,49	3,16
	8	134,78	20,52	7,17	3,48

$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 194 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{q,fin}$ [mm]		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	5	45,00	5,62	1,67	0,70
	6	53,74	6,72	1,99	0,84
	7	58,65	7,33	2,17	0,92
	8	61,07	7,63	2,26	0,95
5	6	104,18	13,02	3,86	1,63
	7	123,99	15,50	4,59	1,94
	8	136,91	17,11	5,07	2,14

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 195 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{fin}$ [mm]		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	5	89,30	12,37	4,02	1,85
	6	106,64	14,77	4,80	2,21
	7	116,38	16,12	5,24	2,41
	8	121,20	16,79	5,46	2,51
5	6	206,74	28,64	9,31	4,28
	7	246,05	34,08	11,08	5,09
	8	271,69	37,63	12,24	5,62

### Verifiche

**Tabella 196 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{q,ist} < l/300$		n° strati				
		2	4	6	8	
Luce [m]						
4	5	38,14	4,77	1,41	0,60	< 13,3 mm
	6	45,54	5,69	1,69	0,71	< 13,3 mm
	7	49,70	6,21	1,84	0,78	< 13,3 mm
	8	51,76	6,47	1,92	0,81	< 13,3 mm
5	6	88,29	11,03	3,27	1,38	< 16,7 mm
	7	105,08	13,13	3,89	1,64	< 16,7 mm
	8	116,03	14,50	4,30	1,81	< 16,7 mm

**Tabella 197 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{q,fin} < l/200$		n° strati				
		2	4	6	8	
Luce [m]						
4	5	45,00	5,62	1,67	0,70	< 20,0 mm
	6	53,74	6,72	1,99	0,84	< 20,0 mm
	7	58,65	7,33	2,17	0,92	< 20,0 mm
	8	61,07	7,63	2,26	0,95	< 20,0 mm
5	6	104,18	13,02	3,86	1,63	< 25,0 mm
	7	123,99	15,50	4,59	1,94	< 25,0 mm
	8	136,91	17,11	5,07	2,14	< 25,0 mm

**Tabella 198 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{fin} < l/250$		n° strati				
		2	4	6	8	
Luce [m]						
4	5	89,30	12,37	4,02	1,85	< 16,0 mm
	6	106,64	14,77	4,80	2,21	< 16,0 mm
	7	116,38	16,12	5,24	2,41	< 16,0 mm
	8	121,20	16,79	5,46	2,51	< 16,0 mm
5	6	206,74	28,64	9,31	4,28	< 20,0 mm
	7	246,05	34,08	11,08	5,09	< 20,0 mm
	8	271,69	37,63	12,24	5,62	< 20,0 mm

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto attraverso la (6.114).

Si riportano di seguito le rigidzze flessionali e torsionali del pannello e la massa per unità di area del solaio, avendo considerato come tale i soli carichi permanenti risultanti dall'analisi dei carichi.

**Tabella 199 - Rigidzze flessionali e torsionali e massa per unità di area per il calcolo delle frequenze naturali di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

Rigidzze del pannello [Nm <sup>2</sup> ]/m	n° strati			
	2	4	6	8
$D_x$	1,366E+02	1,093E+03	3,689E+03	8,743E+03
$D_y$	1,366E+02	1,093E+03	3,689E+03	8,743E+03
$D_{xy}$	2,667E+00	2,134E+01	7,202E+01	1,707E+02
$G_{xy}$	9,092E+00	7,274E+01	2,455E+02	5,819E+02
<b>Massa per unità di area [kg/m<sup>2</sup>]</b>	145,18	176,86	208,54	240,22

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nella tabella sottostante, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

**Tabella 200 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$f_1$ [Hz]		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	5	3,82	9,78	16,54	23,73
	6	3,48	8,91	15,08	21,63
	7	3,31	8,48	14,34	20,57
	8	3,21	8,24	13,93	19,99
5	6	2,51	6,43	10,88	15,60
	7	2,29	5,88	9,94	14,26
	8	2,17	5,57	9,42	13,52

### PIASTRA ORTOTROPA

#### *Verifiche agli stati limite ultimi*

Si riportano di seguito i valori ricavati dal calcolo, i cui passaggi non sono stati riportati in allegato ma è simile all'esempio riportato in Allegato A.4 relativo al caso di piastra di geometria rettangolare disposta a trave, essendo anche nel caso di piastra ortotropica i pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari ma disposti in modo da avere l'inerzia maggiore in direzione maggiore.

Questo esempio di calcolo viene fatto per capire la convenienza o meno, qualora siano le verifiche soddisfatte, nel disporre i pannelli in modo da ottenere un maggior sfruttamento del materiale, avendo ottenuto che nel caso in cui fossero disposti a trave si ha di fatto un comportamento monodirezionale.

**Tabella 201 - Momento massimo di calcolo in direzione  $x$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropica**

Momento massimo di calcolo $M_x$ [Nmm]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5	4	12940	10410	9544	9265
6		15200	10210	8743	8188
7		16300	9124	7354	6672
8		16390	7712	5879	5178
6	5	19310	16070	14950	14620
7		22550	16300	14330	13610
8		24650	15380	12850	11870

**Tabella 202 - Momento massimo di calcolo in direzione  $y$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

Momento massimo di calcolo $M_y$ [Nmm]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5	4	1356	4715	6478	7718
6		2386	6851	8827	10180
7		3556	8593	10540	11870
8		4737	9875	11670	12930
6	5	1842	6663	9289	11150
7		3047	9425	12440	14520
8		4445	11880	14980	17100

**Tabella 203 - Taglio massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

Taglio massimo di calcolo $T_x$ [N]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5 6 7 8	4	11,978	10,555	10,177	10,208
		13,021	10,243	9,582	9,494
		13,521	9,709	8,962	8,854
		13,646	9,213	8,495	8,413
6 7 8	5	14,615	13,189	12,819	12,906
		15,847	13,021	12,304	12,234
		16,597	12,545	11,652	11,520

**Tabella 204 - Taglio massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

Taglio massimo di calcolo $T_y$ [N]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5 6 7 8	4	4,331	6,969	8,422	9,522
		5,380	8,582	10,137	11,298
		6,394	9,807	11,309	12,444
		7,306	10,651	12,036	13,112
6 7 8	5	5,155	8,264	10,022	11,359
		6,200	9,973	11,897	13,336
		7,243	11,401	13,334	14,781

Note le caratteristiche di sollecitazione è possibile determinare il valore delle tensioni normali agenti sulla sezione del pannello XLAM come fatto per il calcolo a trave.

Per il calcolo della massima tensione di flessione al bordo esterno si utilizzerà la coordinata  $z = y_g$  per la tensione in direzione x e  $z = y_g - s$  per la tensione in direzione y, ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 205 – Tensione normale massima al bordo esterno in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\sigma_{mx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5 6 7 8	4	8,212	2,860	1,479	0,925
		9,463	2,800	1,351	0,814
		10,338	2,496	1,132	0,660
		10,391	2,104	0,900	0,509
6 7 8	5	12,255	4,417	2,318	1,460
		14,308	4,474	2,217	1,355
		15,637	4,214	1,983	1,178

**Tabella 206 - Tensione normale massima al bordo esterno in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5	4	3,620	2,602	1,642	1,131
6		6,587	3,807	2,247	1,497
7		9,999	4,795	2,691	1,750
8		13,473	5,525	2,985	1,909
6	5	4,868	3,669	2,351	1,632
7		8,322	5,225	3,162	2,132
8		12,377	6,614	3,819	2,517

Osservando i valori delle tabelle si vede che per pannelli costituiti da un basso numero di strati il comportamento è simile a quello a trave ma nella direzione maggiore; per pannelli costituiti da un numero maggiore di strati invece il comportamento è sempre più uguale nelle due direzioni.

Questo dimostra sicuramente che disponendo gli strati in modo da avere l'inerzia maggiore nella direzione maggiore della piastra si ottiene un migliore sfruttamento del materiale in quanto presenta più o meno lo stesso grado di utilizzazione nelle due direzioni.

Occorre verificare, per valutare l'effettiva convenienza nell'utilizzare questa soluzione progettuale, in che modo cambia il comportamento della frequenza e della deformazione essendo queste le verifiche determinanti.

La tensione tangenziale è sempre data dalla relazione (3.9):

$$\tau_{d,max} = \frac{V_d \cdot \sum (S_m \cdot E_m)}{K_{XLAM} \cdot b}$$

ed è calcolata con gli stessi criteri del modello a trave.

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico quindi sono:

**Tabella 207 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{x,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5	4	0,167	0,082	0,060	0,046
6		0,182	0,079	0,056	0,043
7		0,189	0,075	0,053	0,040
8		0,191	0,071	0,050	0,038
6	5	0,204	0,102	0,075	0,058
7		0,221	0,101	0,072	0,055
8		0,232	0,097	0,069	0,052

	taglio in corrispondenza degli strati longitudinali
	taglio in corrispondenza degli strati trasversali ("rolling shear")

**Tabella 208 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{y,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
5	4	0,105	0,086	0,061	0,053
6		0,130	0,106	0,073	0,063
7		0,155	0,122	0,081	0,070
8		0,177	0,132	0,087	0,073
6	5	0,125	0,102	0,072	0,063
7		0,150	0,124	0,086	0,074
8		0,176	0,141	0,096	0,083

**Tabella 209 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza degli strati trasversali per gli elementi da 5 e 9 strati per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{rx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
5	4	-	0,077	-	0,045
6		-	0,075	-	0,042
7		-	0,071	-	0,039
8		-	0,067	-	0,037
6	5	-	0,096	-	0,057
7		-	0,095	-	0,054
8		-	0,091	-	0,051

**Tabella 210 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza degli strati trasversali per l'elemento da 7 strati per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{rx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
5	4	-	-	0,057	-
6		-	-	0,069	-
7		-	-	0,077	-
8		-	-	0,082	-
6	5	-	-	0,068	-
7		-	-	0,081	-
8		-	-	0,090	-

### Verifiche

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 211 - Verifica a flessione in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\sigma_{mx,max,d}/f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5	4	0,564	0,196	0,102	0,064
6		0,650	0,192	0,093	0,056
7		0,710	0,171	0,078	0,045
8		0,713	0,144	0,062	0,035
6	5	0,841	0,303	0,159	0,100
7		0,982	0,307	0,152	0,093
8		1,074	0,289	0,136	0,081

**Tabella 212 - Verifica a flessione in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\sigma_{my,max,d}/f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5	4	0,249	0,179	0,113	0,078
6		0,452	0,261	0,154	0,103
7		0,686	0,329	0,185	0,120
8		0,925	0,379	0,205	0,131
6	5	0,334	0,252	0,161	0,112
7		0,571	0,359	0,217	0,146
8		0,850	0,454	0,262	0,173

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 213 - Verifica a taglio in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{x,max,d}/f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5	4	-	0,059	-	0,033
6		-	0,057	-	0,031
7		-	0,054	-	0,029
8		-	0,052	-	0,028
6	5	-	0,074	-	0,042
7		-	0,073	-	0,040
8		-	0,070	-	0,038

**Tabella 214 - Verifica a taglio in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{y,max,d}/f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
5	4	0,076	-	0,044	-
6		0,095	-	0,053	-
7		0,112	-	0,059	-
8		0,128	-	0,063	-
6	5	0,091	-	0,052	-
7		0,109	-	0,062	-
8		0,127	-	0,070	-

$$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 215 - Verifica a taglio trasversale (“rolling shear”) in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{rx,max,d}/f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
5	4	0,243	0,111	0,087	0,033
6		0,264	0,108	0,082	0,030
7		0,274	0,102	0,076	0,028
8		0,276	0,097	0,072	0,027
6	5	0,296	0,139	0,109	0,041
7		0,321	0,137	0,105	0,039
8		0,336	0,132	0,099	0,037

**Tabella 216 - Verifica a taglio trasversale (“rolling shear”) in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{ry,max,d}/f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
5	4	-	0,125	0,083	0,039
6		-	0,154	0,100	0,046
7		-	0,176	0,111	0,050
8		-	0,191	0,118	0,053
6	5	-	0,149	0,099	0,046
7		-	0,179	0,117	0,054
8		-	0,205	0,131	0,060

### Verifiche agli stati limite di esercizio

**Tabella 217 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{g,ist}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5 6 7 8	4	11,79	2,77	1,12	0,59
		19,96	3,97	1,52	0,77
		29,23	4,96	1,80	0,89
		38,62	5,69	2,00	0,97
6 7 8	5	25,34	6,15	2,52	1,33
		40,30	8,57	3,35	1,72
		57,61	10,73	4,01	2,02

**Tabella 218 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{q,ist}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5 6 7 8	4	14,65	2,88	1,00	0,46
		24,80	4,12	1,35	0,60
		36,31	5,14	1,61	0,70
		47,98	5,90	1,78	0,76
6 7 8	5	31,48	6,38	2,25	1,04
		50,06	8,90	2,98	1,34
		71,56	11,14	3,58	1,57

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 219 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{g,fin}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5 6 7 8	4	18,87	4,43	1,80	0,94
		31,94	6,35	2,42	1,23
		46,77	7,93	2,88	1,43
		61,80	9,10	3,19	1,56
6 7 8	5	40,54	9,84	4,04	2,12
		64,47	13,71	5,35	2,75
		92,17	17,17	6,42	3,22



$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 220 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{q,fin}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5 6 7 8	4	17,29	3,39	1,18	0,54
		29,26	4,86	1,59	0,71
		42,85	6,07	1,90	0,82
		56,62	6,96	2,10	0,90
6 7 8	5	37,14	7,53	2,65	1,22
		59,07	10,50	3,52	1,58
		84,45	13,14	4,22	1,86

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 221 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{fin}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
5 6 7 8	4	36,15	7,83	2,98	1,48
		61,20	11,22	4,02	1,94
		89,62	14,00	4,78	2,26
		118,41	16,06	5,29	2,46
6 7 8	5	77,68	17,37	6,69	3,35
		123,54	24,21	8,87	4,33
		176,62	30,31	10,64	5,08

### Verifiche

**Tabella 222 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{q,ist} < l/300$		n° strati				
		3	5	7	9	
Luce [m]						
5 6 7 8	4	14,65	2,88	1,00	0,46	< 13,3 mm
		24,80	4,12	1,35	0,60	< 13,3 mm
		36,31	5,14	1,61	0,70	< 13,3 mm
		47,98	5,90	1,78	0,76	< 13,3 mm
6 7 8	5	31,48	6,38	2,25	1,04	< 16,7 mm
		50,06	8,90	2,98	1,34	< 16,7 mm
		71,56	11,14	3,58	1,57	< 16,7 mm

**Tabella 223 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{q,fin} < l/200$		n° strati				
		3	5	7	9	
Luce [m]						
5	4	17,29	3,39	1,18	0,54	< 20,0 mm
6		29,26	4,86	1,59	0,71	< 20,0 mm
7		42,85	6,07	1,90	0,82	< 20,0 mm
8		56,62	6,96	2,10	0,90	< 20,0 mm
6	5	37,14	7,53	2,65	1,22	< 25,0 mm
7		59,07	10,50	3,52	1,58	< 25,0 mm
8		84,45	13,14	4,22	1,86	< 25,0 mm

**Tabella 224 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{fin} < l/250$		n° strati				
		3	5	7	9	
Luce [m]						
5	4	36,15	7,83	2,98	1,48	< 16,0 mm
6		61,20	11,22	4,02	1,94	< 16,0 mm
7		89,62	14,00	4,78	2,26	< 16,0 mm
8		118,41	16,06	5,29	2,46	< 16,0 mm
6	5	77,68	17,37	6,69	3,35	< 20,0 mm
7		123,54	24,21	8,87	4,33	< 20,0 mm
8		176,62	30,31	10,64	5,08	< 20,0 mm

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.

### Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto attraverso la (6.114).

Si riportano di seguito le rigidezze flessionali e torsionali del pannello e la massa per unità di area del solaio, avendo considerato come tale i soli carichi permanenti risultanti dall'analisi dei carichi.

**Tabella 225 - Rigidezze flessionali e torsionali e massa per unità di area per il calcolo delle frequenze naturali di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

Rigidezze del pannello [Nm <sup>2</sup> ]/m	n° strati			
	3	5	7	9
<b><math>D_x</math></b>	8,602E+02	3,300E+03	8,172E+03	1,630E+04
<b><math>D_y</math></b>	6,194E+01	9,691E+02	3,542E+03	8,601E+03
<b><math>D_{xy}</math></b>	9,003E+00	4,168E+01	1,144E+02	2,431E+02
<b><math>G_{xy}</math></b>	5,393E+01	2,099E+02	5,247E+02	1,053E+03
<b>Massa per unità di area [kg/m<sup>2</sup>]</b>	161,02	192,70	224,38	256,06

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nella tabella sottostante, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

**Tabella 226 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$f_1$ [Hz]		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
5	4	5,81	12,07	18,97	26,23
6		4,48	10,08	16,31	22,88
7		3,71	9,01	14,91	21,14
8		3,23	8,39	14,11	20,16
6	5	3,96	8,10	12,65	17,44
7		3,15	6,86	10,98	15,33
8		2,64	6,13	10,01	14,12



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### 8.7 Calcolo Bidirezionale esatto – Piastra di Mindlin (Bidirezionale 3/3bis)

Il calcolo a piastra fatto con la teoria di piastra di Kirchhoff è un modello esatto che fornisce risultati affidabili riguardo le tensioni normali, ma non dà la possibilità di determinare le deformazioni dei piani trasversali dovendo quindi calcolare le tensioni tangenziali con le espressioni usate per i ricorrenti calcoli monodirezionali. In questo ultimo esempio di calcolo si vuol dunque utilizzare il modello di piastra di Mindlin, per la cui teoria si rimanda nuovamente al Capitolo 6.

Come già spiegato nei precedenti capitoli, nel caso degli elementi lignei, i modesti valori del modulo elastico a taglio  $G$ , in rapporto a quelli del modulo elastico longitudinale  $E_0$ , impongono di considerare nel calcolo della freccia anche la parte dovuta alla deformabilità per taglio. Nella teoria di Mindlin questo è reso possibile dall'aver definito le rigidzze a taglio trasversale dei due piani di scorrimento  $x-z$  ed  $y-z$ .

Le deformazioni e tensioni del piano  $x-y$  saranno calcolate sempre con la teoria dei laminati, quindi utilizzando le matrici di rigidzza  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$  viste al Capitolo 5, ma con le nuove curvature definite da questa teoria.

Essendo anche in questo caso i pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari valgono le considerazioni fatte al punto 8.6 riguardo la determinazione delle deformazioni "fittizie" oltre che la tensione di trazione perpendicolare alle fibre.

Inoltre sarà possibile calcolare le tensioni tangenziali attraverso le deformazioni tangenziali con un procedimento analogo utilizzato per le tensioni normali, utilizzando la matrice  $[C]$  definita al Capitolo 6.

#### 8.7.1 Rigidzze

Il calcolo delle rigidzze del piano  $x-y$  è fatto attraverso le matrici di rigidzza flessionale sviluppate nel Capitolo 5 e sono pertanto le stesse definite per la teoria di Kirchhoff, i cui svolgimenti sono riportati in Allegato A.1. Valgono quindi le stesse considerazioni fatte al paragrafo 8.6.1 riguardo il considerare o meno il "taglio per rotolamento".

Di seguito si riportano i valori di rigidzza flessionale ottenuti (termini  $D_{1,1}$ ,  $D_{2,2}$  e  $D_{1,2}$  della matrice  $[D]$ ):

Tabella 227 - Valori di  $D_x$ ,  $D_y$  e  $D_{xy}$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) per un numero di strati pari

Rigidzze flessionali del pannello [Nmm <sup>2</sup> ]/mm	n° strati			
	2	4	6	8
$D_x$	1,366E+08	1,093E+09	3,689E+09	8,743E+09
$D_y$	1,366E+08	1,093E+09	3,689E+09	8,743E+09
$D_{xy}$	2,667E+06	2,134E+07	7,202E+07	1,707E+08

I valori di rigidezza torsionale sono invece diversi per i due casi (termine  $D_{3,3}$  della matrice  $[D]$ ):

**Tabella 228 – Valori di  $G_{xy}$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) per un numero di strati pari**

Rigidezze torsionali del pannello [Nmm <sup>2</sup> ]/mm	n° strati				
	2	4	6	8	
$G_{xy}$	9,092E+06	7,274E+07	2,455E+08	5,819E+08	con "rolling shear"
$G_{xy}$	1,653E+07	1,322E+08	4,463E+08	1,058E+09	senza "rolling shear"

Nella teoria di piastra di Mindlin siamo ora in grado di definire delle rigidezze a taglio trasversale utilizzando la (6.44) e con gli stessi criteri adottati per il calcolo monodirezionale, quindi usando i moduli  $G_0$  o  $G_{90}$  a seconda della direzione delle fibre. Per la determinazione delle tensioni tangenziali e dei coefficienti delle serie trigonometriche della soluzione di Navier è inoltre necessaria la definizione dei fattori di taglio  $\kappa$ , calcolati e discussi al Capitolo 7.

Si riportano quindi i valori di rigidezza a taglio trasversale (termini  $C_{5,5}$  e  $C_{4,4}$  della matrice  $[C]$ ) e dei fattori di taglio ottenuti dal calcolo riportato in Allegato A.2 nei due casi considerati:

**Tabella 229 - Valori di  $G_{xz}$ ,  $G_{yz}$ ,  $\kappa_x$  e  $\kappa_y$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) per un numero di strati pari**

Rigidezza a taglio del pannello [N]/mm	n° strati				
	2	4	6	8	
$\kappa_x$	0,275	0,275	0,275	0,275	Con "rolling shear"
$G_{xz}$	2,505E+04	5,009E+04	7,514E+04	1,002E+05	
$\kappa_y$	0,275	0,275	0,275	0,275	
$G_{yz}$	2,505E+04	5,009E+04	7,514E+04	1,002E+05	
$\kappa_x$	0,833	0,833	0,833	0,833	Senza "rolling shear"
$G_{xz}$	4,554E+04	9,108E+04	1,366E+05	1,822E+05	
$\kappa_y$	0,833	0,833	0,833	0,833	
$G_{yz}$	4,554E+04	9,108E+04	1,366E+05	1,822E+05	

### 8.7.2 Verifiche agli stati limite ultimi

Dall'analisi dei carichi risultano per gli strati pari i seguenti carichi permanenti e d'esercizio:

**Tabella 230 - Carichi permanenti e variabili gravanti sui pannelli XLAM per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) per un numero di strati pari**

	n° strati			
	2	4	6	8
<b>1) Carichi permanenti</b>				
$g_1$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,000317	0,000634	0,000950	0,001267
$g_2$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
$G_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,001452	0,001769	0,002085	0,002402
<b>2) Carichi variabili</b>				
$Q_k$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,002	0,002	0,002	0,002

Adottando per gli stati limite ultimi sempre la combinazione del tipo:

$$q_d = \gamma_{G1} \cdot G_1 + \gamma_{G2} \cdot G_2 + \gamma_Q \cdot Q_k$$

con:

$\gamma_{G1} =$	1,3
$\gamma_{G2} =$	1,5
$\gamma_Q =$	1,5

si ottengono le seguenti combinazioni di carico allo SLU:

**Tabella 231 - Combinazioni di carico allo SLU per pannelli XLAM per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) per un numero di strati pari**

Combinazione di carico SLU [N/mm <sup>2</sup> ]	n° strati			
	2	4	6	8
$q_d$	0,005114	0,005526	0,005938	0,006350

Per il calcolo delle caratteristiche di sollecitazione si utilizzano, per il calcolo bidirezionale con la teoria di piastra di Mindlin, le (6.78-79) per il calcolo dei momenti e le (6.87-88) per il taglio. Note dunque la geometria della piastra, le rigidzze ed i carichi gravanti su di essa, tramite le (6.90-91) si calcolano le rotazioni  $\psi_x$  e  $\psi_y$ , necessarie per la determinazione del momento e del taglio massimi agenti, nel caso di carico distribuito uniformemente sulla superficie della piastra, nel punto di mezzeria di coordinate  $a/2$  e  $b/2$ .

Come si vede dalle (6.89-91) i valori della deflessione e delle rotazioni dipendono dalle caratteristiche di rigidzza del pannello XLAM, in particolare, oltre che dalla rigidzza torsionale  $G_{xy}$  anche dalle rigidzze a taglio trasversale  $G_{xz}$  e  $G_{yz}$  che assumono valori diversi se viene considerato o meno il "taglio per rotolamento".



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Per tale motivo, come nella teoria di Kirchhoff, avremo valori differenti nei due casi considerati già a partire dalle caratteristiche di sollecitazione, che di conseguenza porteranno a valori differenti delle tensioni.

Essendo la geometria delle piastre analizzate sempre quadrata, il valore del momento e del taglio sarà lo stesso nelle due direzioni  $x$  e  $y$ . Si riportano di seguito i valori ricavati dal calcolo, di cui si riporta un esempio in Allegato A.5:

**Tabella 232 - Momento massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

Momento massimo di calcolo $M_x = M_y$ [Nmm]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]		2	4	6	8
4	4	5533	5971	6403	6832
5	5	8647	9335	10020	10690
6	6	12450	13450	14440	15420
7	7	16950	18310	19660	21000
8	8	22140	23920	25680	27440

**Tabella 233 - Momento massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

Momento massimo di calcolo $M_x = M_y$ [Nmm]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]		2	4	6	8
4	4	5029	5434	5836	6238
5	5	7858	8491	9122	9751
6	6	11320	12230	13140	14040
7	7	15400	16640	17880	19120
8	8	20120	21740	23360	24970

**Tabella 234 - Taglio massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

Taglio massimo di calcolo $T_x = T_y$ [N]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]		2	4	6	8
4	4	6,913	7,459	7,994	8,519
5	5	8,643	9,330	10,009	10,679
6	6	10,373	11,201	12,022	12,835
7	7	12,103	13,071	14,034	14,989
8	8	13,833	14,940	16,044	17,142

**Tabella 235 - Taglio massimo di calcolo per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

<i>Taglio massimo di calcolo <math>T_x = T_y</math> [N]/mm</i>		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	4	6,876	7,427	7,976	8,523
5	5	8,596	9,286	9,974	10,661
6	6	10,315	11,144	11,971	12,797
7	7	12,034	13,002	13,968	14,933
8	8	13,754	14,860	15,965	17,069

Note le caratteristiche di sollecitazione è possibile determinare il valore delle tensioni normali agenti sulla sezione del pannello XLAM. Invertendo la (6.45) si calcolano le deformazioni e le curvatures nel piano medio dell'elemento, dopodiché tramite la (6.56) si calcolano le tensioni nei punti di massima sollecitazione, utilizzando la matrice di elasticità del k-esimo strato che avrà nei termini  $E_{1,1}$  ed  $E_{2,2}$  i valori di modulo elastico parallelo o perpendicolare alle fibre a seconda che la strato sia disposto longitudinalmente o trasversalmente rispetto alla direzione considerata.

Per il calcolo della massima tensione di flessione al bordo esterno, uguale nelle due direzioni, si utilizzerà quindi sempre la coordinata  $z=y_g$ , ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 236 – Tensione normale massima al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{mx,max,d} = \sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	4	22,614	3,613	1,711	1,038
5	5	35,341	5,649	2,677	1,625
6	6	50,884	8,139	3,858	2,344
7	7	69,275	11,080	5,252	3,192
8	8	90,487	14,474	6,861	4,170

**Tabella 237 - Tensione normale massima al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{mx,max,d} = \sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
4	4	20,554	3,288	1,559	0,948
5	5	32,116	5,138	2,437	1,482
6	6	46,265	7,401	3,511	2,134
7	7	62,941	10,069	4,777	2,906
8	8	82,231	13,155	6,241	3,795



La massima tensione di trazione ortogonale alle fibre si trova invece al bordo esterno in zona tesa nella direzione in cui è presente in questa posizione uno strato disposto trasversalmente, per  $z = -y_g$  e con matrice di elasticità avente al termine  $E_{1,1}$  modulo  $E_{90}$  si ottiene:

**Tabella 238 – Tensione di trazione ortogonale alle fibre al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{tx,90,max,d} [N/mm^2]$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	2,309	0,230	0,095	0,054
5	3,609	0,360	0,149	0,085
6	5,196	0,519	0,215	0,122
7	7,074	0,706	0,292	0,166
8	9,240	0,923	0,382	0,218

**Tabella 239 - Tensione di trazione ortogonale alle fibre al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{tx,90,max,d} [N/mm^2]$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	2,099	0,210	0,087	0,049
5	3,280	0,327	0,136	0,077
6	4,725	0,472	0,195	0,111
7	6,427	0,642	0,266	0,152
8	8,397	0,838	0,347	0,198

Per il calcolo della tensione tangenziale, con la teoria di Mindlin, siamo ora in grado di determinare il valore di deformazione nei piani trasversali  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ . Con procedimento analogo a quello utilizzato per le tensioni normali, note le caratteristiche di sollecitazione taglianti nei piani trasversali  $T_x$  e  $T_y$ , si inverte la (6.46) per ottenere il valore delle deformazioni.

A questo punto è possibile calcolare le tensioni tangenziali nei piani  $x$ - $z$  e  $y$ - $z$  attraverso la (6.57), moltiplicando la deformazione del piano per il corrispondente modulo elastico a taglio,  $G_0$  o  $G_{90}$ , a seconda che si tratti di uno strato disposto in modo longitudinale o trasversale, ridotti del fattore di taglio  $\kappa$  anch'esso dipendente dal piano di taglio considerato.

Essendo però nel caso di strati pari, si ha che il baricentro geometrico dei pannelli è posizionato all'interfaccia tra due strati ortogonali tra loro. Ricordando che con questa teoria il valore della tensione tangenziale è assunto uniforme su tutta la sezione, si avrebbero dunque due valori diversi di tensione tangenziale baricentrica, una agente sullo strato con modulo  $G_0$  che andrebbe confrontata con la resistenza di calcolo  $f_{v,d,XLAM}$  e una, molto minore, sullo strato con modulo  $G_{90}$  che andrebbe invece confrontata con la resistenza di calcolo  $f_{r,d,XLAM}$ . Dato che lo strato con rigidità  $G_{90}$  assorbirà una parte molto ridotta della sollecitazione a taglio, ma si trova comunque in contatto con lo strato adiacente con modulo  $G_0$ , si è deciso di considerare sempre la tensione tangenziale massima confrontando tale valore sia con la resistenza di



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

calcolo  $f_{v,d,XLAM}$  sia con la  $f_{r,d,XLAM}$ , in quanto la seconda essendo minore darà sicuramente la verifica determinante.

Nel caso in cui invece non venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" avremo un unico valore di tensione tangenziale dato che tutti gli strati hanno modulo elastico di taglio  $G_0$  che andrà confrontato con la sola resistenza di calcolo  $f_{v,d,XLAM}$ .

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico, di uguale valore nelle due direzioni principali della piastra, quindi sono:

**Tabella 240 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{d,max} [N/mm^2]$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	0,190	0,103	0,073	0,059
5	0,238	0,129	0,092	0,074
6	0,286	0,154	0,110	0,088
7	0,333	0,180	0,129	0,103
8	0,381	0,221	0,147	0,118

**Tabella 241 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{d,max} [N/mm^2]$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	0,104	0,056	0,040	0,032
5	0,130	0,070	0,050	0,040
6	0,156	0,084	0,060	0,048
7	0,182	0,099	0,071	0,057
8	0,208	0,113	0,081	0,065

### Verifiche

Si procede ora con le verifiche di resistenza della sezione del pannello XLAM.

La tensione normale di flessione  $\sigma_{m,max,d}$  è la stessa in entrambe le direzioni della piastra ma è differente per i due casi considerati, si procede quindi a due verifiche:

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

in cui cambia semplicemente il valore di tensione da confrontare con la resistenza di calcolo a flessione  $f_{m,d,XLAM}$ .

La tensione di trazione perpendicolare alle fibre  $\sigma_{tx,90,max,d}$  va invece confrontata con la relativa resistenza di calcolo  $f_{t,90,d,XLAM}$ :

$$\frac{\sigma_{tx,90,max,d}}{f_{t,90,d,XLAM}} \leq 1$$

avendo in questo caso un unico valore dovuto alla direzione della piastra (direzione x nel caso in esame) ma due valori diversi dovuti al fatto di aver considerato o meno l'effetto del "taglio per rotolamento".

**Tabella 242 - Verifica a flessione per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{m,max,d}/f_{m,d,XLAM}$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	1,553	0,248	0,117	0,071
5	2,426	0,388	0,184	0,112
6	3,493	0,559	0,265	0,161
7	4,756	0,761	0,361	0,219
8	6,212	0,994	0,471	0,286

**Tabella 243 - Verifica a flessione per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{m,max,d}/f_{m,d,XLAM}$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	1,411	0,226	0,107	0,065
5	2,205	0,353	0,167	0,102
6	3,176	0,508	0,241	0,147
7	4,321	0,691	0,328	0,200
8	5,646	0,903	0,428	0,261

**Tabella 244 - Verifica a trazione ortogonale alle fibre per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{tx,90,max,d}/f_{t,90,d,XLAM}$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	8,370	0,834	0,344	0,196
5	13,083	1,305	0,540	0,308
6	18,836	1,881	0,779	0,442
7	25,643	2,559	1,059	0,602
8	33,495	3,346	1,385	0,790

**Tabella 245 - Verifica a trazione ortogonale alle fibre per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\sigma_{tx,90,max,d} / f_{t,90,d,XLAM}$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	7,609	0,761	0,315	0,178
5	11,890	1,185	0,493	0,279
6	17,128	1,711	0,707	0,402
7	23,298	2,327	0,964	0,551
8	30,439	3,038	1,258	0,718

Anche in questo caso, come con la piastra di Kirchhoff, appare evidente come la verifica a trazione ortogonale alle fibre sia molto più restrittiva rispetto a quella a flessione.

La verifica a taglio differisce nei due casi per il diverso valore della tensione tangenziale e della resistenza di calcolo di confronto.

Per il primo caso:

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 246 - Verifica a taglio per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{d,max} / f_{v,d,XLAM}$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	0,138	0,075	0,053	0,043
5	0,173	0,094	0,067	0,054
6	0,207	0,112	0,080	0,064
7	0,241	0,131	0,094	0,075
8	0,276	0,160	0,107	0,086

$$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 247 - Verifica a taglio trasversale (“rolling shear”) per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{r,d,max} / f_{r,d,XLAM}$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	0,276	0,149	0,106	0,086
5	0,345	0,187	0,133	0,107
6	0,415	0,223	0,160	0,128
7	0,483	0,261	0,187	0,149
8	0,552	0,320	0,213	0,171

Nel caso in cui invece non venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento" si procede ad un'unica verifica:

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 248 - Verifica a taglio per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$\tau_{d,max}/f_{v,d,XLAM}$	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	0,075	0,041	0,029	0,023
5	0,094	0,051	0,036	0,029
6	0,113	0,061	0,044	0,035
7	0,132	0,072	0,051	0,041
8	0,151	0,082	0,059	0,047

### 8.7.3 Verifiche agli stati limite di esercizio

Il calcolo delle deformazioni istantanee viene fatto con la (6.89).

Utilizzano sempre i valori  $k_{def} = 0,6$  (classe di servizio 1) e  $\psi_{2,1} = 0,3$  (categoria A, ambienti ad uso residenziale), si riportano di seguito i valori di deformazione istantanea e finale nel caso in cui venga considerato l'effetto del "taglio per rotolamento":

**Tabella 249 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{g,ist}$ [mm]	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	19,58	3,09	1,15	0,60
5	47,59	7,42	2,69	1,38
6	98,43	15,24	5,47	2,76
7	182,09	28,07	10,00	5,00
8	310,33	47,70	16,92	8,40

**Tabella 250 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,ist}$ [mm]	n° strati			
	2	4	6	8
Luce [m]				
4	26,97	3,50	1,10	0,50
5	65,55	8,39	2,58	1,15
6	135,58	17,23	5,25	2,30
7	250,81	31,74	9,60	4,16
8	427,46	53,93	16,23	7,00



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

Tabella 251 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata

$u_{g,fin}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		31,33	4,95	1,83	0,96
5		76,14	11,88	4,31	2,21
6		157,49	24,39	8,75	4,41
7		291,34	44,91	16,00	8,00
8		496,53	76,32	27,07	13,44

$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

Tabella 252 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata

$u_{q,fin}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		31,83	4,13	1,30	0,59
5		77,35	9,90	3,05	1,36
6		159,99	20,33	6,19	2,71
7		295,96	37,45	11,32	4,91
8		504,40	63,64	19,15	8,26

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

Tabella 253 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata

$u_{fin}$ [mm]	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	8
4		63,16	9,08	3,13	1,55
5		153,49	21,78	7,36	3,56
6		317,48	44,72	14,94	7,13
7		587,30	82,36	27,33	12,91
8		1000,93	139,96	46,23	21,70



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

**Tabella 254 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	
4	26,97	3,50	1,10	0,50	< 13,3 mm
5	65,55	8,39	2,58	1,15	< 16,7 mm
6	135,58	17,23	5,25	2,30	< 20,0 mm
7	250,81	31,74	9,60	4,16	< 23,3 mm
8	427,46	53,93	16,23	7,00	< 26,7 mm

**Tabella 255 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	
4	31,83	4,13	1,30	0,59	< 20,0 mm
5	77,35	9,90	3,05	1,36	< 25,0 mm
6	159,99	20,33	6,19	2,71	< 30,0 mm
7	295,96	37,45	11,32	4,91	< 35,0 mm
8	504,40	63,64	19,15	8,26	< 40,0 mm

**Tabella 256 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{fin} < l/250$	n° strati				
	Luce [m]	2	4	6	
4	63,16	9,08	3,13	1,55	< 16,0 mm
5	153,49	21,78	7,36	3,56	< 20,0 mm
6	317,48	44,72	14,94	7,13	< 24,0 mm
7	587,30	82,36	27,33	12,91	< 28,0 mm
8	1000,93	139,96	46,23	21,70	< 32,0 mm

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.

Di seguito sono invece riportate le deformazioni istantanee e finali nel caso in cui l'effetto del "taglio per rotolamento" non venga preso in considerazione:

**Tabella 257 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{g,ist} [mm]$	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	17,69	2,71	0,96	0,48
5	43,15	6,60	2,32	1,14
6	89,43	13,66	4,80	2,35
7	165,62	25,28	8,87	4,33
8	282,49	43,10	15,10	7,37

**Tabella 258 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,ist} [mm]$	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	24,37	3,07	0,92	0,40
5	59,43	7,46	2,23	0,95
6	123,18	15,45	4,60	1,96
7	228,13	28,58	8,50	3,61
8	389,10	48,73	14,48	6,14

Le deformazioni finali risultano:

$$u_{g,fin} = u_{g,ist} \cdot (1 + k_{def})$$

**Tabella 259 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{g,fin} [mm]$	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	28,30	4,34	1,54	0,76
5	69,04	10,56	3,72	1,83
6	143,08	21,86	7,68	3,76
7	264,99	40,45	14,18	6,93
8	451,98	68,96	24,16	11,79



$$u_{q,fin} = u_{q,ist} \cdot (1 + \psi_{2,1} \cdot k_{def})$$

**Tabella 260 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,fin} [mm]$	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	28,75	3,62	1,09	0,47
5	70,13	8,81	2,63	1,12
6	145,35	18,23	5,43	2,31
7	269,19	33,73	10,03	4,26
8	459,14	57,50	17,09	7,24

La deformazione finale totale risulta quindi:

$$u_{fin} = u_{g,fin} + u_{q,fin}$$

**Tabella 261 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{fin} [mm]$	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	57,05	7,96	2,62	1,23
5	139,16	19,37	6,35	2,95
6	288,43	40,09	13,11	6,07
7	534,19	74,18	24,22	11,19
8	911,12	126,45	41,24	19,04

### Verifiche

Si procede a questo punto alle verifiche di deformazione secondo le indicazioni del DT 206:2007:

**Tabella 262 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza "rolling shear" nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,ist} < l/300$	n° strati				
Luce [m]	2	4	6	8	
4	24,37	3,07	0,92	0,40	< 13,3 mm
5	59,43	7,46	2,23	0,95	< 16,7 mm
6	123,18	15,45	4,60	1,96	< 20,0 mm
7	228,13	28,58	8,50	3,61	< 23,3 mm
8	389,10	48,73	14,48	6,14	< 26,7 mm

**Tabella 263 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{q,fin} < l/200$	n° strati				
	2	4	6	8	
Luce [m]					
4	28,75	3,62	1,09	0,47	< 20,0 mm
5	70,13	8,81	2,63	1,12	< 25,0 mm
6	145,35	18,23	5,43	2,31	< 30,0 mm
7	269,19	33,73	10,03	4,26	< 35,0 mm
8	459,14	57,50	17,09	7,24	< 40,0 mm

**Tabella 264 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata**

$u_{fin} < l/250$	n° strati				
	2	4	6	8	
Luce [m]					
4	57,05	7,96	2,62	1,23	< 16,0 mm
5	139,16	19,37	6,35	2,95	< 20,0 mm
6	288,43	40,09	13,11	6,07	< 24,0 mm
7	534,19	74,18	24,22	11,19	< 28,0 mm
8	911,12	126,45	41,24	19,04	< 32,0 mm

### 8.7.4 Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto attraverso la (6.120):

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_{33}(I_{44}I_{55} - I_{45}^2) + 2I_{34}I_{35}I_{45} - I_{44}I_{35}^2 - I_{55}I_{34}^2}{R_0(I_{44}I_{55} - I_{45}^2)}}$$

Le rigidezze flessionali, torsionali e di taglio trasversale del pannello per il calcolo dei termini  $I_{ij}$ , definiti dalle (6.95-100), sono quelle di Tabella 227-228-229 mentre  $R_0$  rappresenta la massa per unità di area del solaio, avendo considerato come tale i soli carichi permanenti risultanti dall’analisi dei carichi e coincidente ai valori riportati in Tabella 143 per pannelli con un numero di strati pari.

Ovviamente anche in questo caso siamo in presenza di valori differenti della frequenza naturale di vibrazione della piastra nel caso in cui venga considerato o meno l’effetto del “taglio per rotolamento”, ottenendo nuovamente valori più bassi della frequenza dati da una rigidezza minore nel caso in cui l’effetto fosse considerato.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nelle tabelle sottostanti, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

Tabella 265 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) con “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata

$f_1$ [Hz]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	4,54	11,40	18,68	25,69
5	2,91	7,37	12,20	17,01
6	2,03	5,14	8,57	12,05
7	1,49	3,79	6,34	8,96
8	1,14	2,91	4,88	6,92

Tabella 266 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) senza “rolling shear” nel caso di piastra di geometria quadrata

$f_1$ [Hz]	n° strati			
Luce [m]	2	4	6	8
4	4,78	12,19	20,48	29,11
5	3,06	7,82	13,17	18,77
6	2,13	5,44	9,17	13,09
7	1,56	4,00	6,75	9,64
8	1,20	3,06	5,17	7,40

### 8.7.5 Diverse soluzioni progettuali per geometria rettangolare

Al paragrafo 8.6.5 si era studiato il comportamento del materiale nel caso in cui si avesse l'esigenza di ricoprire aree di solaio rettangolari utilizzando le tre diverse soluzioni progettuali definite come *Trave*, *Piastra isotropa* e *Piastra ortotropica*.

Per poter effettuare un confronto finale tra queste tre soluzioni progettuali si eseguiranno ora calcoli per geometrie rettangolari aventi un rapporto tra lato minore e lato maggiore di circa 1,2 tenendo sempre fissa la differenza tra i due di un metro fino ad una luce massima di 8 metri.

Con questo criterio le geometrie studiate saranno: 3x4, 4x5, 5x6, 6x7 e 7x8 metri.

Inoltre i calcoli verranno eseguiti solo per il caso che considera l'effetto del “taglio per rotolamento”.

Si riportano, per completezza, le rigidezze flessionali, le rigidezze torsionali, le rigidezze a taglio trasversale ed i carichi relativi ai pannelli costituiti da un numero di strati dispari. Per quelli pari valgono i valori di Tabella 227 – 228 e 229 per le rigidezze e Tabella 230 e 231 per i carichi. I valori di  $G_{xy}$ ,  $G_{xz}$  e  $G_{yz}$  sono quelli ottenuti considerando l'effetto del “rolling shear”.

**Tabella 267 - Valori di  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  e  $G_{xy}$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) per un numero di strati dispari**

Rigidezze del pannello [ $Nmm^2$ ]/mm	n° strati			
	3	5	7	9
$D_x$	8,602E+08	3,300E+09	8,172E+09	1,630E+10
$D_y$	6,194E+07	9,691E+08	3,542E+09	8,601E+09
$D_{xy}$	9,003E+06	4,168E+07	1,144E+08	2,431E+08
$G_{xy}$	5,393E+07	2,099E+08	5,247E+08	1,053E+09

**Tabella 268 - Valori di  $G_{xz}$ ,  $G_{yz}$ ,  $\kappa_x$  e  $\kappa_y$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) per un numero di strati dispari**

Rigidezza a taglio del pannello [N]/mm	n° strati			
	3	5	7	9
$\kappa_x$	0,191	0,230	0,244	0,251
$G_{xz}$	4,782E+04	7,286E+04	9,791E+04	1,230E+05
$\kappa_y$	0,436	0,340	0,316	0,305
$G_{yz}$	2,732E+04	5,237E+04	7,742E+04	1,025E+05

**Tabella 269 - Carichi permanenti e variabili gravanti sui pannelli XLAM per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) per un numero di strati dispari**

	n° strati			
	3	5	7	9
<b>1) Carichi permanenti</b>				
$g_1$ ( $N/mm^2$ )	0,000475	0,000792	0,001109	0,001426
$g_2$ ( $N/mm^2$ )	0,0011	0,0011	0,0011	0,0011
$G_k$ ( $N/mm^2$ )	0,001610	0,001927	0,002244	0,002561
<b>2) Carichi variabili</b>				
$Q_k$ ( $N/mm^2$ )	0,002	0,002	0,002	0,002



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Tabella 270 - Combinazioni di carico allo SLU per pannelli XLAM per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) per un numero di strati dispari

Combinazione di carico SLU [N/mm <sup>2</sup> ]	n° strati			
	3	5	7	9
$q_d$	0,005320	0,005732	0,006144	0,006556

### TRAVE

#### Verifiche agli stati limite ultimi

Si riportano di seguito i valori ricavati dal calcolo, di cui si riporta un esempio in Allegato A.6:

Tabella 271 - Momento massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave

Momento massimo di calcolo $M_x$ [Nmm]/mm		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
3	4	5945	6207	6333	6476
4	5	10450	10760	10940	11190
5	6	16170	16480	16700	17090
6	7	23110	23350	23600	24130
7	8	31260	31360	31640	32330

Tabella 272 - Momento massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave

Momento massimo di calcolo $M_y$ [Nmm]/mm		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
3	4	179	1009	1726	2348
4	5	367	1921	3152	4175
5	6	627	3147	5044	6574
6	7	961	4689	7404	9552
7	8	1367	6546	10230	13110

**Tabella 273 - Taglio massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

Taglio massimo di calcolo $T_x$ [N]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	7,934	8,512	8,827	9,138
4	5	10,552	11,195	11,575	11,985
5	6	13,157	13,835	14,267	14,770
6	7	15,752	16,449	16,924	17,515
7	8	18,341	19,046	19,557	20,231

**Tabella 274 - Taglio massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

Taglio massimo di calcolo $T_y$ [N]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	2,436	3,603	4,383	5,059
4	5	3,249	4,832	5,866	6,739
5	6	4,068	6,082	7,380	8,457
6	7	4,891	7,344	8,912	10,198
7	8	5,716	8,613	10,455	11,953

Note le caratteristiche di sollecitazione è possibile determinare il valore delle tensioni normali agenti sulla sezione del pannello XLAM nel modo descritto nei precedenti paragrafi.

Essendo in presenza di pannelli XLAM con strati dispari viene calcolata la sola tensione normale di flessione nelle due direzione, trascurando a priori la tensione di trazione ortogonale alle fibre, come fatto nel calcolo monodirezionale.

Per il calcolo della massima tensione di flessione al bordo esterno si utilizzerà la coordinata  $z = y_g$  per la tensione in direzione x e  $z = y_g - s$  per la tensione in direzione y, ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 275 – Tensione normale massima al bordo esterno in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\sigma_{mx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	3,774	1,710	0,985	0,649
4	5	6,634	2,964	1,702	1,121
5	6	10,265	4,539	2,597	1,712
6	7	14,670	6,430	3,670	2,418
7	8	19,844	8,635	4,920	3,239

**Tabella 276 - Tensione normale massima al bordo esterno in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	0,357	0,535	0,428	0,339
4	5	0,781	1,024	0,783	0,603
5	6	1,382	1,684	1,255	0,950
6	7	2,165	2,516	1,845	1,381
7	8	3,127	3,520	2,551	1,897

La tensione tangenziale è sempre data dalla (6.57) ed è calcolata nello stesso modo descritto per il caso di piastra di geometria quadrata. In questo caso però essendo nel caso di strati dispari la tensione tangenziale baricentrica sarà per alcuni elementi una tensione tangenziale longitudinale in un direzione ed una tensione tangenziale trasversale nell'altra direzione. Nelle tabelle sottostanti viene mostrato l'effettivo valore della tensione tangenziale qual'ora lo strato in questione abbia modulo elastico di taglio  $G_{90}$  per rendere evidente la sostanziale differenza di sollecitazione assorbita da questi strati rispetto a quelli con modulo  $G_0$ . La verifica invece verrà effettuata considerando la tensione tangenziale dello strato longitudinale adiacente che risulta essere pari a 10 volte la tensione tangenziale trasversale (poiché la deformazione del piano trasversale è costante sulla sezione dell'elemento).

Per esempio, considerando l'elemento da 3 strati, la tensione tangenziale in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione x è una tensione tangenziale trasversale quindi la verifica verrà fatta con la tensione agente nello strato longitudinale confrontata con la resistenza di calcolo  $f_{r,d,XLAM}$ . Viceversa, in direzione y, la tensione tangenziale in corrispondenza dell'asse baricentrico è una tensione tangenziale longitudinale quindi si effettuerà una prima verifica confrontando tale tensione con la resistenza di calcolo  $f_{v,d,XLAM}$  ed una seconda verifica confrontando la stessa tensione (10 volte maggiore alla reale tensione tangenziale trasversale) con la resistenza di calcolo  $f_{r,d,XLAM}$ .

In questo modo si adotta la stessa ipotesi fatta nel calcolo monodirezionale in cui si calcolava la tensione tangenziale nello strato longitudinale che rimaneva costante in quello trasversale.

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico quindi sono:

**Tabella 277 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{x,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	0,011	0,081	0,006	0,051
4	5	0,015	0,106	0,008	0,067
5	6	0,019	0,131	0,010	0,083
6	7	0,023	0,156	0,012	0,098
7	8	0,026	0,180	0,014	0,114



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

	taglio in corrispondenza degli strati longitudinali
	taglio in corrispondenza degli strati trasversali ("rolling shear")

**Tabella 278 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{y,max,d} [N/mm^2]$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
3	4	0,062	0,005	0,039	0,003
4	5	0,082	0,006	0,052	0,005
5	6	0,103	0,008	0,066	0,006
6	7	0,124	0,010	0,079	0,007
7	8	0,144	0,011	0,093	0,008

### Verifiche

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 279 - Verifica a flessione in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\sigma_{mx,max,d} / f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
3	4	0,259	0,117	0,068	0,045
4	5	0,455	0,203	0,117	0,077
5	6	0,705	0,312	0,178	0,118
6	7	1,007	0,441	0,252	0,166
7	8	1,362	0,593	0,338	0,222

**Tabella 280 - Verifica a flessione in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\sigma_{my,max,d} / f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
3	4	0,050	0,064	0,048	0,036
4	5	0,021	0,039	0,032	0,025
5	6	0,007	0,021	0,019	0,016
6	7	0,001	0,010	0,011	0,009
7	8	0,091	0,109	0,080	0,059



$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 281 - Verifica a taglio in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{x,max,d}/f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	-	0,059	-	0,037
4	5	-	0,077	-	0,049
5	6	-	0,095	-	0,060
6	7	-	0,113	-	0,071
7	8	-	0,131	-	0,083

**Tabella 282 - Verifica a taglio in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{y,max,d}/f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	0,045	-	0,028	-
4	5	0,059	-	0,038	-
5	6	0,075	-	0,048	-
6	7	0,090	-	0,057	-
7	8	0,104	-	0,067	-

$$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 283 - Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{rx,max,d}/f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	0,160	0,117	0,087	0,074
4	5	0,218	0,154	0,116	0,097
5	6	0,276	0,190	0,145	0,120
6	7	0,334	0,226	0,174	0,142
7	8	0,377	0,261	0,203	0,165

**Tabella 284 - Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$\tau_{ry,max,d} / f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	0,090	0,068	0,057	0,025
4	5	0,119	0,091	0,075	0,033
5	6	0,149	0,116	0,096	0,041
6	7	0,180	0,141	0,115	0,049
7	8	0,209	0,160	0,135	0,058

### Verifiche agli stati limite di esercizio

**Tabella 285 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{g,ist} [mm]$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	2,16	0,72	0,37	0,23
4	5	6,47	2,05	0,99	0,60
5	6	15,33	4,71	2,21	1,30
6	7	31,20	9,38	4,33	2,49
7	8	57,05	16,92	7,72	4,39

**Tabella 286 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{q,ist} [mm]$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	2,68	0,75	0,33	0,18
4	5	8,04	2,13	0,88	0,47
5	6	19,04	4,88	1,97	1,01
6	7	38,75	9,74	3,86	1,95
7	8	70,86	17,56	6,88	3,43

**Tabella 287 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{g,fin} [mm]$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	3,45	1,16	0,59	0,37
4	5	10,35	3,28	1,59	0,96
5	6	24,53	7,53	3,54	2,08
6	7	49,91	15,01	6,93	3,99
7	8	91,27	27,07	12,35	7,02

**Tabella 288 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{q,fin}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	3,16	0,88	0,39	0,21
4	5	9,48	2,51	1,04	0,55
5	6	22,47	5,76	2,33	1,20
6	7	45,73	11,49	4,56	2,30
7	8	83,62	20,72	8,11	4,04

**Tabella 289 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{fin}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	6,62	2,04	0,97	0,59
4	5	19,83	5,79	2,63	1,51
5	6	47,00	13,29	5,86	3,27
6	7	95,64	26,50	11,49	6,29
7	8	174,89	47,78	20,46	11,06

### Verifiche

**Tabella 290 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{q,ist} < l/300$		n° strati				
		3	5	7	9	
Luce [m]						
3	4	2,68	0,75	0,33	0,18	< 10,0 mm
4	5	8,04	2,13	0,88	0,47	< 13,3 mm
5	6	19,04	4,88	1,97	1,01	< 16,7 mm
6	7	38,75	9,74	3,86	1,95	< 20,0 mm
7	8	70,86	17,56	6,88	3,43	< 23,3 mm

**Tabella 291 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{q,fin} < l/200$		n° strati				
		3	5	7	9	
Luce [m]						
3	4	3,16	0,88	0,39	0,21	< 15,0 mm
4	5	9,48	2,51	1,04	0,55	< 20,0 mm
5	6	22,47	5,76	2,33	1,20	< 25,0 mm
6	7	45,73	11,49	4,56	2,30	< 30,0 mm
7	8	83,62	20,72	8,11	4,04	< 35,0 mm

**Tabella 292 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$u_{fin} < l/250$		n° strati				
		3	5	7	9	
Luce [m]						
3	4	6,62	2,04	0,97	0,59	< 12,0 mm
4	5	19,83	5,79	2,63	1,51	< 16,0 mm
5	6	47,00	13,29	5,86	3,27	< 20,0 mm
6	7	95,64	26,50	11,49	6,29	< 24,0 mm
7	8	174,89	47,78	20,46	11,06	< 28,0 mm

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.

### Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto attraverso la (6.120).

Le rigidezze, i fattori di taglio ed i carichi necessari al calcolo sono quelli di Tabella 267 – 268 e 269 relativi a pannelli XLAM costituiti da un numero di strati dispari.

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nella tabella sottostante, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

**Tabella 293 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

$f_1$ [Hz]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
3	4	13,17	23,24	32,60	40,87
4	5	7,65	13,86	19,95	25,64
5	6	4,99	9,17	13,39	17,48
6	7	3,51	6,50	9,59	12,63
7	8	2,60	4,85	7,19	9,54

### PIASTRA ISOTROPA

#### Verifiche agli stati limite ultimi

Si riportano di seguito i valori ricavati dal calcolo, i cui passaggi non sono stati riportati in allegato ma è simile all'esempio riportato in Allegato A.5 relativo al caso di piastra di geometria quadrata.

**Tabella 294 - Momento massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

Momento massimo di calcolo $M_x$ [Nmm]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	4842	5184	5499	5791
4	5	7999	8599	9168	9710
5	6	11850	12760	13640	14500
6	7	16390	17670	18920	20140
7	8	21610	23320	25000	26640

**Tabella 295 - Momento massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

Momento massimo di calcolo $M_y$ [Nmm]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	2596	2856	3150	3469
4	5	4936	5375	5844	6339
5	6	7987	8665	9367	10090
6	7	11740	12720	13710	14730
7	8	16190	17520	18870	20230

**Tabella 296 - Taglio massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

Taglio massimo di calcolo $T_x$ [N]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	6,875	7,384	7,860	8,311
4	5	8,735	9,406	10,053	10,674
5	6	10,543	11,368	12,174	12,959
6	7	12,324	13,298	14,257	15,198
7	8	14,090	15,210	16,317	17,411

**Tabella 297 - Taglio massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

Taglio massimo di calcolo $T_y$ [N]/mm		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	6,313	6,822	7,330	7,839
4	5	5,759	6,223	6,687	7,151
5	6	5,416	5,852	6,288	6,725
6	7	5,233	5,655	6,076	6,498
7	8	8,053	8,702	9,351	9,999

Note le caratteristiche di sollecitazione è possibile determinare il valore delle tensioni normali agenti sulla sezione del pannello XLAM nel modo descritto nei precedenti paragrafi.

Per il calcolo della massima tensione di flessione al bordo esterno nelle due direzioni si utilizzerà sempre la coordinata  $z=y_g$ , ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 298 – Tensione normale massima al bordo esterno in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{mx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	19,872	3,150	1,475	0,883
4	5	32,804	5,222	2,458	1,481
5	6	48,573	7,744	3,655	2,210
6	7	67,157	10,720	5,068	3,069
7	8	88,519	14,144	6,694	4,058

**Tabella 299 - Tensione normale massima al bordo esterno in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	10,528	1,715	0,836	0,524
4	5	20,062	3,234	1,553	0,959
5	6	32,502	5,220	2,492	1,527
6	7	47,812	7,669	3,650	2,231
7	8	65,971	10,569	5,026	3,065

Avendo nel caso di piastra isotropa pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari, occorre determinare, come nel caso dei calcoli per piastre quadrate, la massima tensione di trazione ortogonale alle fibre che si trova invece al bordo esterno in zona tesa nella direzione in cui è presente in questa posizione uno strato disposto trasversalmente, ed è calcolata per  $z = -y_g$  e con matrice di elasticità avente al termine  $E_{1,1}$  modulo  $E_{90}$ .

**Tabella 300 - Tensione di trazione ortogonale alle fibre al bordo esterno per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{tx,90,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	1,939	0,187	0,076	0,043
4	5	3,227	0,313	0,128	0,072
5	6	4,805	0,469	0,192	0,109
6	7	6,671	0,654	0,268	0,152
7	8	8,821	0,867	0,356	0,202

La tensione tangenziale è calcolata con gli stessi criteri descritti al paragrafo 8.7.2.

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico quindi sono:

**Tabella 301 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{x,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	0,189	0,102	0,072	0,057
4	5	0,241	0,130	0,092	0,074
5	6	0,290	0,157	0,112	0,089
6	7	0,340	0,183	0,131	0,105
7	8	0,388	0,210	0,150	0,120

**Tabella 302 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{y,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	0,126	0,069	0,049	0,040
4	5	0,174	0,094	0,068	0,054
5	6	0,222	0,120	0,086	0,069
6	7	0,270	0,146	0,105	0,084
7	8	0,318	0,172	0,123	0,099

### Verifiche

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 303 - Verifica a flessione in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{mx,max,d}/f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	1,364	0,216	0,101	0,061
4	5	2,252	0,359	0,169	0,102
5	6	3,335	0,532	0,251	0,152
6	7	4,611	0,736	0,348	0,211
7	8	6,077	0,971	0,460	0,279

**Tabella 304 - Verifica a flessione in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Kirchhoff) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{my,max,d} / f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	0,723	0,118	0,057	0,036
4	5	1,377	0,222	0,107	0,066
5	6	2,231	0,358	0,171	0,105
6	7	3,283	0,527	0,251	0,153
7	8	4,529	0,726	0,345	0,210

$$\frac{\sigma_{tx,90max,d}}{f_{t,90,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 305 - Verifica a trazione ortogonale alle fibre per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\sigma_{tx,90,max,d} / f_{t,90,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	7,029	0,678	0,276	0,156
4	5	11,698	1,135	0,464	0,261
5	6	17,418	1,700	0,696	0,395
6	7	24,182	2,371	0,972	0,551
7	8	31,976	3,143	1,291	0,732

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 306 - Verifica a taglio in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{x,max,d} / f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	0,137	0,074	0,052	0,041
4	5	0,175	0,094	0,067	0,054
5	6	0,210	0,114	0,081	0,065
6	7	0,247	0,133	0,095	0,076
7	8	0,281	0,152	0,109	0,087



**Tabella 307 - Verifica a taglio in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{y,max,d}/f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	0,091	0,050	0,036	0,029
4	5	0,126	0,068	0,049	0,039
5	6	0,161	0,087	0,062	0,050
6	7	0,196	0,106	0,076	0,061
7	8	0,231	0,125	0,089	0,072

$$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 308 - Verifica a taglio trasversale (“rolling shear”) in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{rx,max,d}/f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	0,274	0,148	0,104	0,083
4	5	0,349	0,189	0,133	0,107
5	6	0,421	0,228	0,162	0,129
6	7	0,493	0,265	0,190	0,152
7	8	0,563	0,305	0,218	0,174

**Tabella 309 - Verifica a taglio trasversale (“rolling shear”) in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$\tau_{ry,max,d}/f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	0,183	0,100	0,071	0,058
4	5	0,252	0,136	0,099	0,078
5	6	0,322	0,174	0,125	0,100
6	7	0,392	0,212	0,152	0,122
7	8	0,461	0,249	0,178	0,144

### Verifiche agli stati limite di esercizio

**Tabella 310 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{g,ist}$ [mm]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	9,61	1,55	0,59	0,32
4	5	27,99	4,40	1,62	0,84
5	6	64,56	10,04	3,63	1,85
6	7	128,38	19,84	7,10	3,57
7	8	230,32	35,46	12,61	6,29

**Tabella 311 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{q,ist}$ [mm]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	13,24	1,75	0,57	0,27
4	5	38,56	4,98	1,55	0,70
5	6	88,93	11,35	3,48	1,54
6	7	176,83	22,43	6,81	2,97
7	8	317,24	40,09	12,10	5,24

**Tabella 312 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{g,fin}$ [mm]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	15,38	2,48	0,94	0,51
4	5	44,79	7,04	2,59	1,35
5	6	103,30	16,07	5,81	2,96
6	7	205,40	31,75	11,36	5,71
7	8	368,51	56,74	20,18	10,06

**Tabella 313 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{q,fin}$ [mm]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	15,62	2,06	0,67	0,31
4	5	45,50	5,87	1,83	0,83
5	6	104,93	13,40	4,11	1,81
6	7	208,65	26,47	8,04	3,51
7	8	374,34	47,31	14,28	6,18

**Tabella 314 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{fin}$ [mm]		n° strati			
Luce [m]		2	4	6	8
3	4	31,00	4,54	1,61	0,82
4	5	90,29	12,92	4,42	2,17
5	6	208,23	29,46	9,91	4,77
6	7	414,06	58,22	19,40	9,22
7	8	742,85	104,05	34,46	16,24

### Verifiche

**Tabella 315 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{q,ist} < l/300$		n° strati				
Luce [m]		2	4	6	8	
3	4	13,24	1,75	0,57	0,27	< 10,0 mm
4	5	38,56	4,98	1,55	0,70	< 13,3 mm
5	6	88,93	11,35	3,48	1,54	< 16,7 mm
6	7	176,83	22,43	6,81	2,97	< 20,0 mm
7	8	317,24	40,09	12,10	5,24	< 23,3 mm

**Tabella 316 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{q,fin} < l/200$		n° strati				
Luce [m]		2	4	6	8	
3	4	15,62	2,06	0,67	0,31	< 15,0 mm
4	5	45,50	5,87	1,83	0,83	< 20,0 mm
5	6	104,93	13,40	4,11	1,81	< 25,0 mm
6	7	208,65	26,47	8,04	3,51	< 30,0 mm
7	8	374,34	47,31	14,28	6,18	< 35,0 mm

**Tabella 317 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra isotropa**

$u_{fin} < l/250$		n° strati				
Luce [m]		2	4	6	8	
3	4	31,00	4,54	1,61	0,82	< 16,0 mm
4	5	90,29	12,92	4,42	2,17	< 16,0 mm
5	6	208,23	29,46	9,91	4,77	< 16,0 mm
6	7	414,06	58,22	19,40	9,22	< 16,0 mm
7	8	742,85	104,05	34,46	16,24	< 20,0 mm



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.

### Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto attraverso la (6.114).

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nella tabella sottostante, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

Tabella 318 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave

$f_1$ [Hz]		n° strati			
		2	4	6	8
Luce [m]					
3	4	6,46	16,06	25,94	35,08
4	5	3,79	9,55	15,70	21,70
5	6	2,50	6,33	10,51	14,70
6	7	1,77	4,51	7,52	10,59
7	8	1,32	3,37	5,65	8,00

### PIASTRA ORTOTROPA

#### Verifiche agli stati limite ultimi

Si riportano di seguito i valori ricavati dal calcolo, i cui passaggi non sono stati riportati in allegato ma è simile all'esempio riportato in Allegato A.6 relativo al caso di piastra di geometria rettangolare disposta a trave, essendo anche nel caso di piastra ortotropica i pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari ma disposti in modo da avere l'inerzia maggiore in direzione maggiore.

Tabella 319 - Momento massimo di calcolo in direzione  $x$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropica

Momento massimo di calcolo $M_x$ [Nmm]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	7662	5686	5076	4908
5	4	12840	10180	9269	8993
6	5	19210	15830	14630	14270
7	6	26790	22630	21130	20710
8	7	35570	30580	28780	28310

**Tabella 320 - Momento massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare - Trave**

Momento massimo di calcolo $M_y$ [Nmm]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
4	3	983	3169	4201	4876
5	4	1395	4838	6611	7818
6	5	1879	6801	9459	11310
7	6	2437	9068	12760	15360
8	7	3068	11640	16510	19980

**Tabella 321 - Taglio massimo di calcolo in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

Taglio massimo di calcolo $T_x$ [N]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
4	3	9,247	7,720	7,307	7,280
5	4	11,947	10,428	9,996	9,989
6	5	14,594	13,084	12,659	12,699
7	6	17,214	15,707	15,298	15,396
8	7	19,819	18,310	17,920	18,082

**Tabella 322 - Taglio massimo di calcolo in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

Taglio massimo di calcolo $T_y$ [N]/mm		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]		3	5	7	9
4	3	3,547	5,724	6,826	7,611
5	4	4,359	7,031	8,478	9,541
6	5	5,177	8,319	10,082	11,401
7	6	5,999	9,602	11,666	13,229
8	7	6,824	10,884	13,241	15,040

Note le caratteristiche di sollecitazione è possibile determinare il valore delle tensioni normali agenti sulla sezione del pannello XLAM come fatto per il calcolo a trave.

Per il calcolo della massima tensione di flessione al bordo esterno si utilizzerà la coordinata  $z = y_g$  per la tensione in direzione x e  $z = y_g - s$  per la tensione in direzione y, ottenendo i seguenti risultati:

**Tabella 323 – Tensione normale massima al bordo esterno in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\sigma_{mx,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	4,862	1,561	0,786	0,489
5	4	8,148	2,797	1,436	0,897
6	5	12,191	4,351	2,268	1,424
7	6	17,002	6,221	3,277	2,068
8	7	22,575	8,408	4,465	2,828

**Tabella 324 - Tensione normale massima al bordo esterno in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\sigma_{my,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	2,674	1,756	1,067	0,716
5	4	3,738	2,672	1,676	1,146
6	5	4,980	3,748	2,395	1,656
7	6	6,405	4,989	3,228	2,247
8	7	8,010	6,396	4,173	2,921

La tensione tangenziale è sempre data dalla (6.57) ed è calcolata con gli stessi criteri del modello a trave.

Le tensioni tangenziali in corrispondenza dell'asse baricentrico quindi sono:

**Tabella 325 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{x,max,d}$ [N/mm <sup>2</sup> ]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	0,013	0,073	0,005	0,041
5	4	0,017	0,099	0,007	0,056
6	5	0,021	0,124	0,009	0,071
7	6	0,025	0,149	0,011	0,086
8	7	0,029	0,173	0,013	0,101



taglio in corrispondenza degli strati longitudinali

taglio in corrispondenza degli strati trasversali ("rolling shear")

**Tabella 326 - Tensione tangenziale massima in corrispondenza dell'asse baricentrico in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{y,max,d} [N/mm^2]$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	0,090	0,008	0,061	0,005
5	4	0,110	0,009	0,076	0,006
6	5	0,131	0,011	0,090	0,008
7	6	0,151	0,013	0,104	0,009
8	7	0,172	0,014	0,118	0,010

### Verifiche

$$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 327 - Verifica a flessione in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\sigma_{mx,max,d} / f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	0,334	0,107	0,054	0,034
5	4	0,559	0,192	0,099	0,062
6	5	0,837	0,299	0,156	0,098
7	6	1,167	0,427	0,225	0,142
8	7	1,550	0,577	0,307	0,194

**Tabella 328 - Verifica a flessione in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\sigma_{my,max,d} / f_{m,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	0,184	0,121	0,073	0,049
5	4	0,257	0,183	0,115	0,079
6	5	0,342	0,257	0,164	0,114
7	6	0,440	0,343	0,222	0,154
8	7	0,550	0,439	0,286	0,201

$$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 329 - Verifica a taglio in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{x,max,d}/f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	-	0,053	-	0,030
5	4	-	0,072	-	0,041
6	5	-	0,090	-	0,051
7	6	-	0,108	-	0,062
8	7	-	0,125	-	0,073

**Tabella 330 - Verifica a taglio in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{y,max,d}/f_{v,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	0,065	-	0,044	-
5	4	0,080	-	0,055	-
6	5	0,095	-	0,065	-
7	6	0,109	-	0,075	-
8	7	0,125	-	0,086	-

$$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}} \leq 1$$

**Tabella 331 - Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") in direzione x per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{rx,max,d}/f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	0,189	0,106	0,075	0,059
5	4	0,247	0,144	0,102	0,081
6	5	0,305	0,180	0,129	0,103
7	6	0,363	0,216	0,160	0,125
8	7	0,421	0,251	0,189	0,146

**Tabella 332 - Verifica a taglio trasversale ("rolling shear") in direzione y per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$\tau_{ry,max,d}/f_{r,d,XLAM}$		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	0,131	0,109	0,088	0,037
5	4	0,160	0,134	0,110	0,047
6	5	0,190	0,160	0,131	0,056
7	6	0,219	0,189	0,151	0,065
8	7	0,249	0,203	0,171	0,073



### Verifiche agli stati limite di esercizio

**Tabella 333 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{g,ist}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	4,77	1,11	0,48	0,28
5	4	12,20	2,95	1,26	0,71
6	5	29,95	6,43	2,73	1,51
7	6	48,86	12,31	5,23	2,86
8	7	84,33	21,48	9,12	4,97

**Tabella 334 - Deformazione istantanea dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{q,ist}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	5,93	1,16	0,43	0,22
5	4	15,15	3,07	1,12	0,55
6	5	32,23	6,68	2,44	1,18
7	6	60,70	12,77	4,66	2,24
8	7	104,76	22,29	8,13	3,88

**Tabella 335 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi permanenti per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{g,fin}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	7,64	1,78	0,77	0,44
5	4	19,51	4,73	2,02	1,13
6	5	47,91	10,29	4,37	2,42
7	6	78,18	19,69	8,36	4,58
8	7	134,93	34,36	14,59	7,96

**Tabella 336 - Deformazione finale dovuta ai soli carichi variabili per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{q,fin}$ [mm]		n° strati			
		3	5	7	9
Luce [m]					
4	3	7,00	1,36	0,50	0,25
5	4	17,88	3,62	1,33	0,65
6	5	38,03	7,88	2,88	1,39
7	6	71,63	15,07	5,50	2,64
8	7	123,61	26,30	9,59	4,58

**Tabella 337 - Deformazione finale totale per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{fin}$ [mm]		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
4	3	14,63	3,14	1,27	0,70
5	4	37,39	8,34	3,34	1,78
6	5	85,94	18,17	7,25	3,81
7	6	149,81	34,76	13,86	7,22
8	7	258,54	60,66	24,19	12,54

### Verifiche

**Tabella 338 - Verifica  $u_{q,ist} < l/300$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{q,ist} < l/300$		n° strati				
Luce [m]		3	5	7	9	
4	3	5,93	1,16	0,43	0,22	< 10,0 mm
5	4	15,15	3,07	1,12	0,55	< 13,3 mm
6	5	32,23	6,68	2,44	1,18	< 16,7 mm
7	6	60,70	12,77	4,66	2,24	< 20,0 mm
8	7	104,76	22,29	8,13	3,88	< 23,3 mm

**Tabella 339 - Verifica  $u_{q,fin} < l/200$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{q,fin} < l/200$		n° strati				
Luce [m]		3	5	7	9	
4	3	7,00	1,36	0,50	0,25	< 15,0 mm
5	4	17,88	3,62	1,33	0,65	< 20,0 mm
6	5	38,03	7,88	2,88	1,39	< 25,0 mm
7	6	71,63	15,07	5,50	2,64	< 30,0 mm
8	7	123,61	26,30	9,59	4,58	< 35,0 mm

**Tabella 340 - Verifica  $u_{fin} < l/250$  per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa**

$u_{fin} < l/250$		n° strati				
Luce [m]		3	5	7	9	
4	3	14,63	3,14	1,27	0,70	< 12,0 mm
5	4	37,39	8,34	3,34	1,78	< 16,0 mm
6	5	85,94	18,17	7,25	3,81	< 20,0 mm
7	6	149,81	34,76	13,86	7,22	< 24,0 mm
8	7	258,54	60,66	24,19	12,54	< 28,0 mm



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Dove le celle oscurate rappresentano le condizioni in cui la verifica non risulta soddisfatta. Come si vede dalle tabelle la verifica determinante è sempre quella di deformazione finale.

### Vibrazioni

Il calcolo delle frequenze naturali di vibrazioni viene fatto attraverso la (6.120).

I valori di frequenza naturale di vibrazione ottenuti sono riportati nella tabella sottostante, considerando la verifica soddisfatta per  $f_1 > 8$  Hz.

Tabella 341 - Valori di frequenza naturale di vibrazione per il calcolo bidirezionale esatto (Mindlin) nel caso di piastra di geometria rettangolare – Piastra ortotropa

$f_1$ [Hz]		n° strati			
Luce [m]		3	5	7	9
4	3	9,14	18,96	28,76	37,72
5	4	5,71	11,65	17,81	23,71
6	5	3,91	7,90	12,11	16,26
7	6	2,85	5,72	8,77	11,83
8	7	2,17	4,33	6,64	8,98

### 8.8 Confronto tra calcolo analitico e calcolo numerico

Tutti i calcoli fatti finora sono stati eseguiti con le procedure analitiche descritte in questa trattazione. Tuttavia è possibile ottenere risultati analoghi con programmi di calcolo numerico di uso commerciale, nel caso specifico si vogliono mostrare a titolo di esempio alcuni casi analizzati con il programma Straus 7. Nel caso di un singolo strato è possibile definire le proprietà dell'elemento plate come *orthotropic*, come indicato in Figura 49, inserendo i valori dei moduli elastici nelle rispettive direzioni principali dell'elemento.

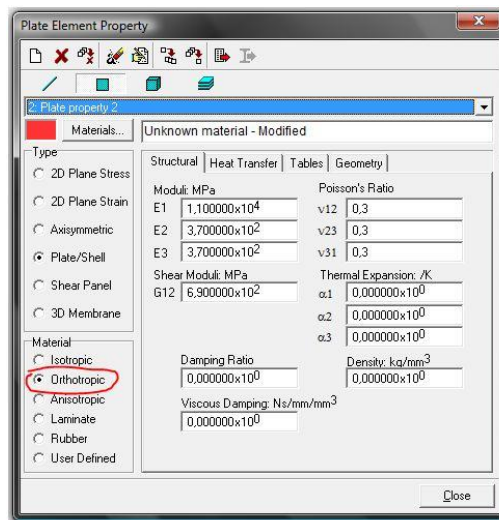


Figura 49 – Proprietà dell'elemento plate: *orthotropic*

In questo caso i valori ottenuti sono praticamente identici a quelli ricavati dal calcolo analitico. Nel caso invece di elementi costituiti da più strati è possibile implementare nel programma di calcolo numerico le matrici di rigidezza derivanti dalla teoria classica dei laminati già utilizzate per il calcolo analitico, definendo le proprietà dell'elemento plate come *user defined* ed inserendo direttamente il valore dei termini delle matrici  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[D]$ , come indicato in Figura 50.

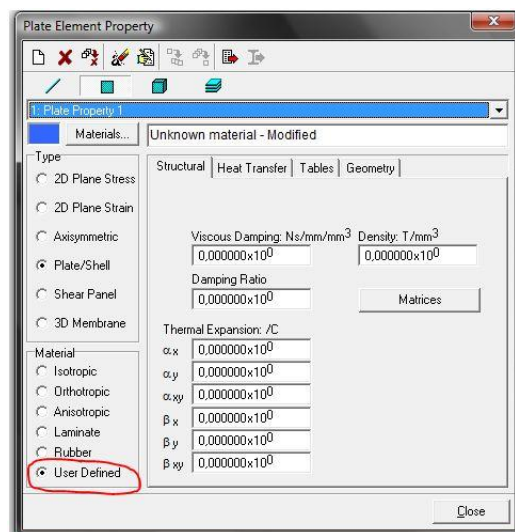


Figura 50 - Proprietà dell'elemento plate: *user defined*

In questo caso i valori ottenuti presentano una differenza rispetto al calcolo analitico che, per i casi analizzati, raggiunge un massimo del 10%. Ai fini progettuali tale differenza può essere accettata, tuttavia è consigliabile fare riferimento ai più corretti valori ottenuti con il calcolo analitico.

Si riportano di seguito i risultati ottenuti da 3 diversi casi analizzati:

- **Strato singolo, geometria quadrata 4x4 metri**

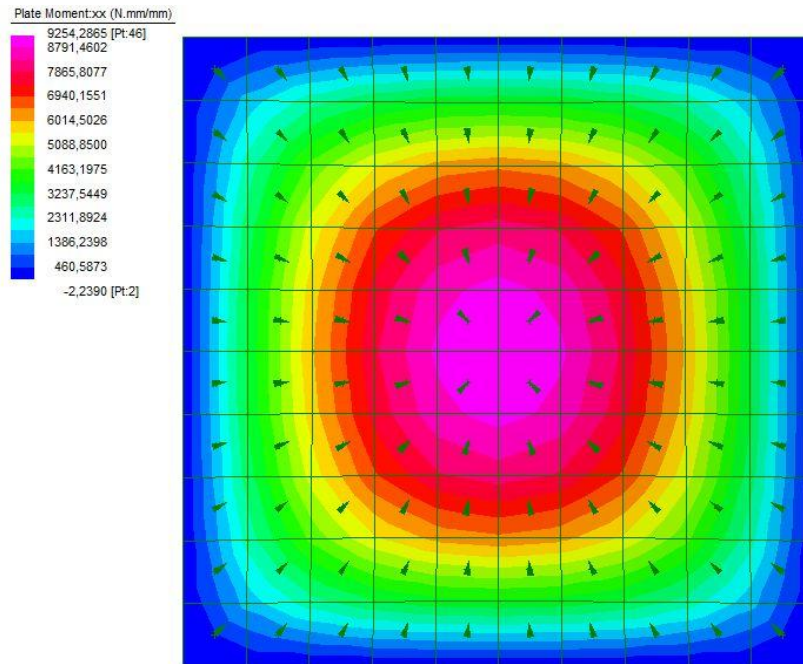


Figura 51 – Strato singolo, 4x4 metri,  $M_x$

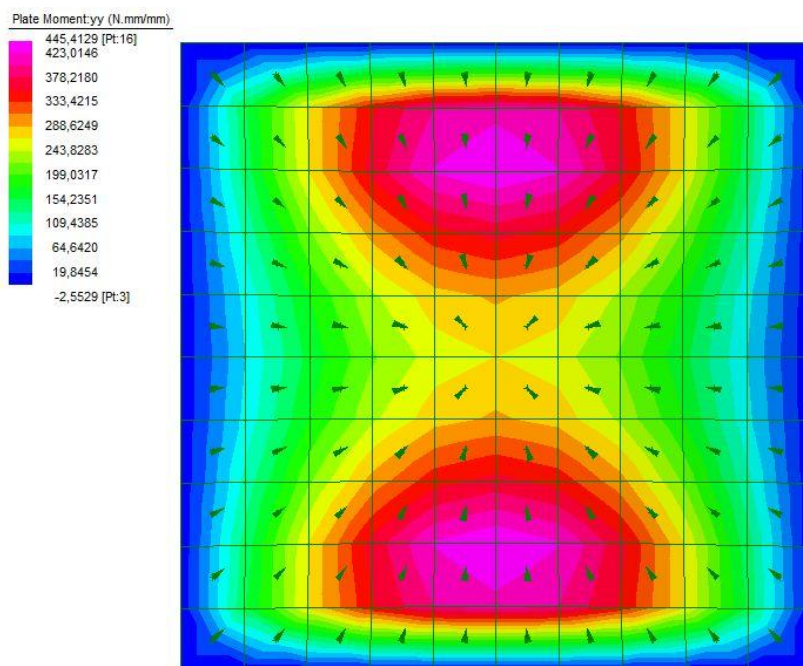


Figura 52 - Strato singolo, 4x4 metri,  $M_y$

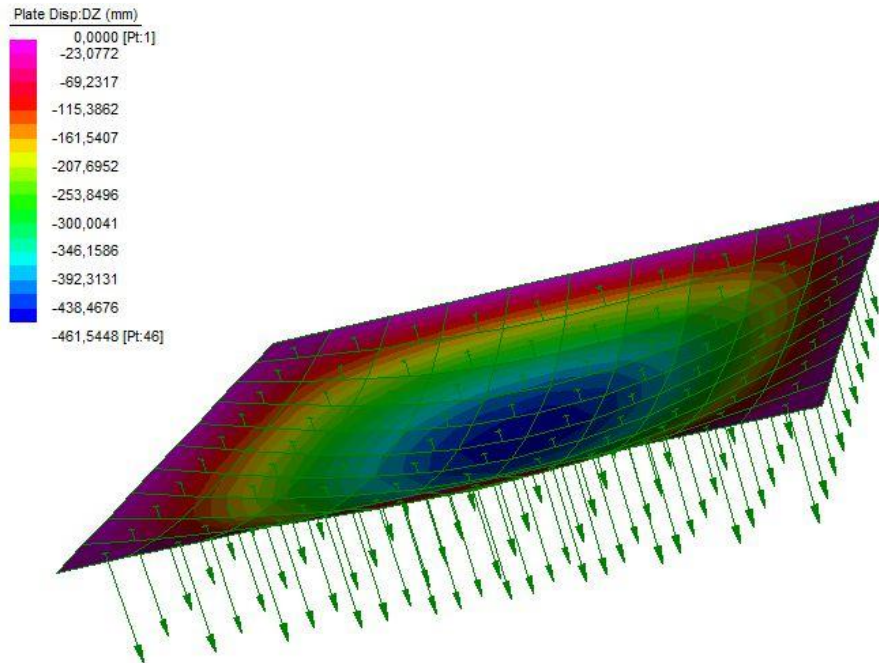


Figura 53 - Strato singolo, 4x4 metri,  $D_z$

- **4 strati, geometria quadrata 4x4 metri**

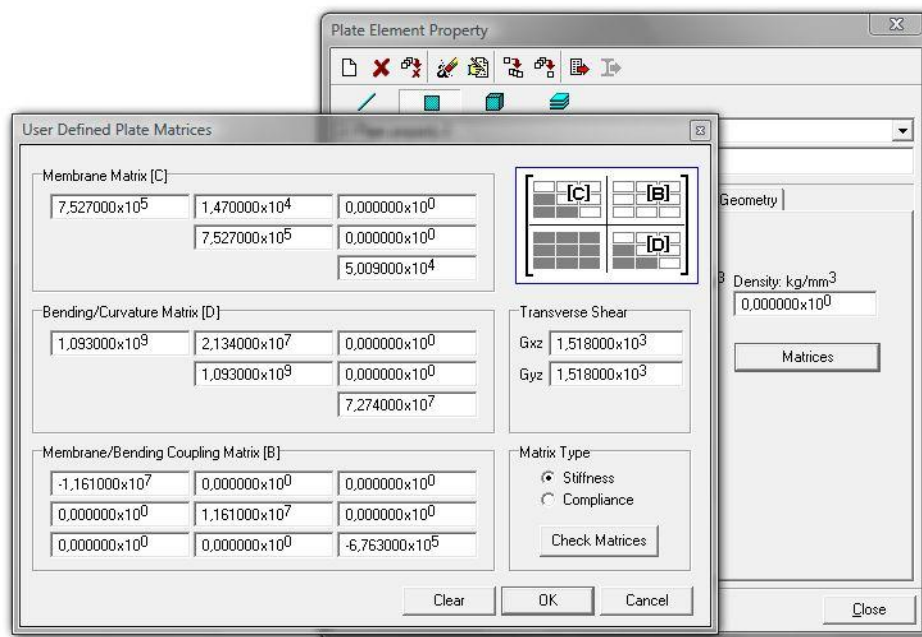


Figura 54 – 4 strati, 4x4 metri, inserimento delle matrici di rigidità

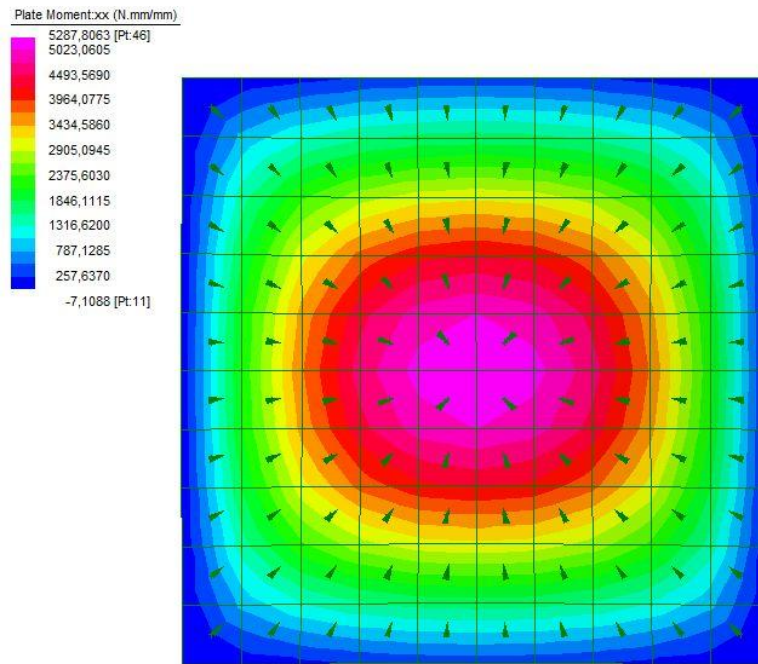


Figura 55 – 4 strati, 4x4 metri,  $M_x$

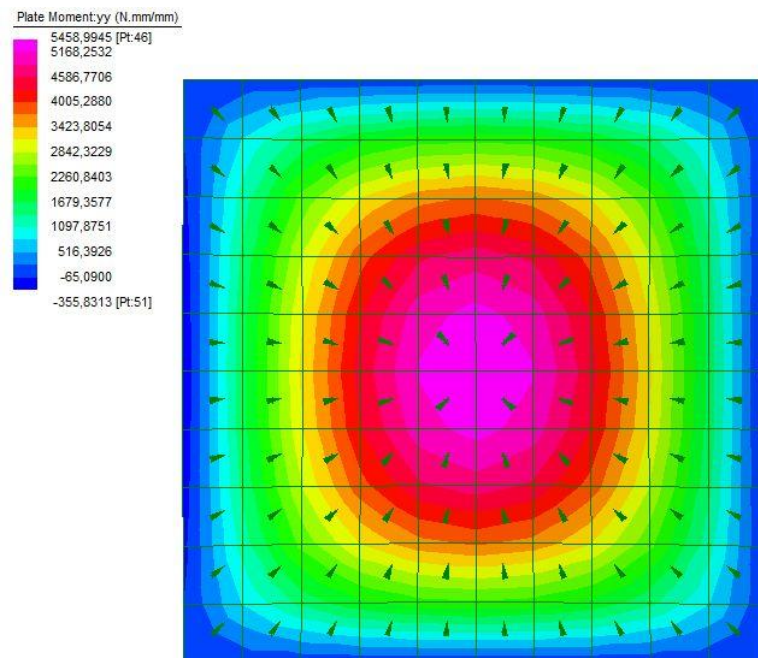


Figura 56 - 4 strati, 4x4 metri,  $M_y$

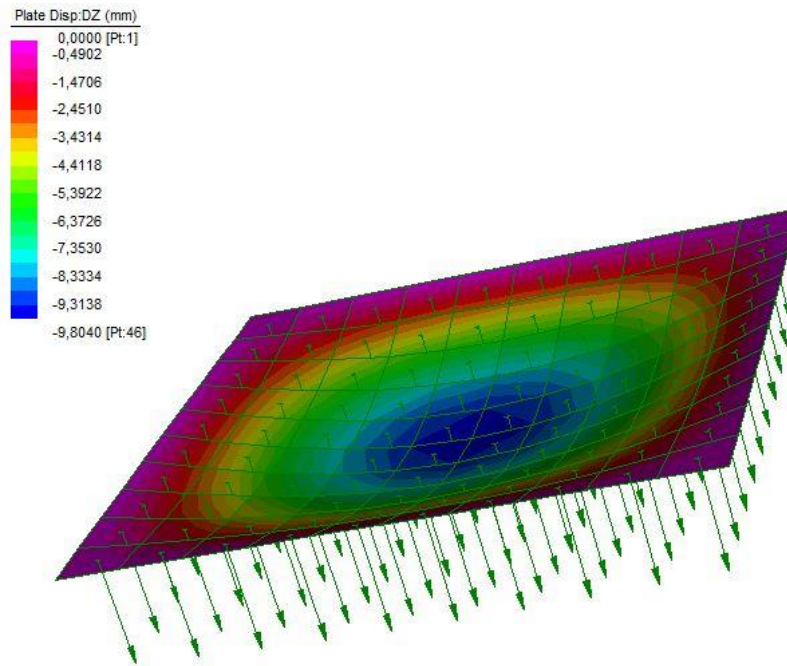


Figura 57 - 4 strati, 4x4 metri, D<sub>2</sub>

- 5 strati, geometria rettangolare 4x5 metri

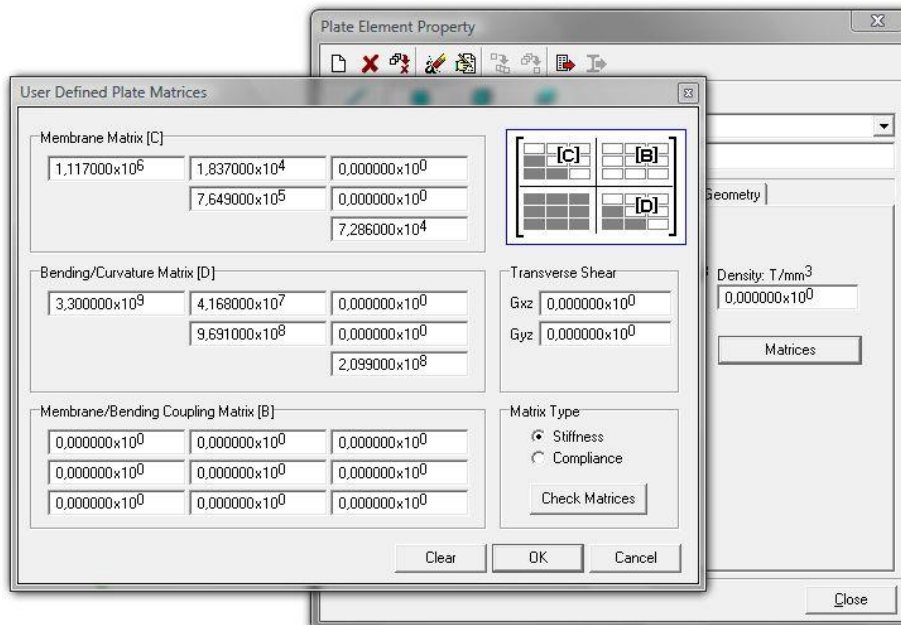


Figura 58 - 5 strati, 4x5 metri, inserimento delle matrici di rigidità



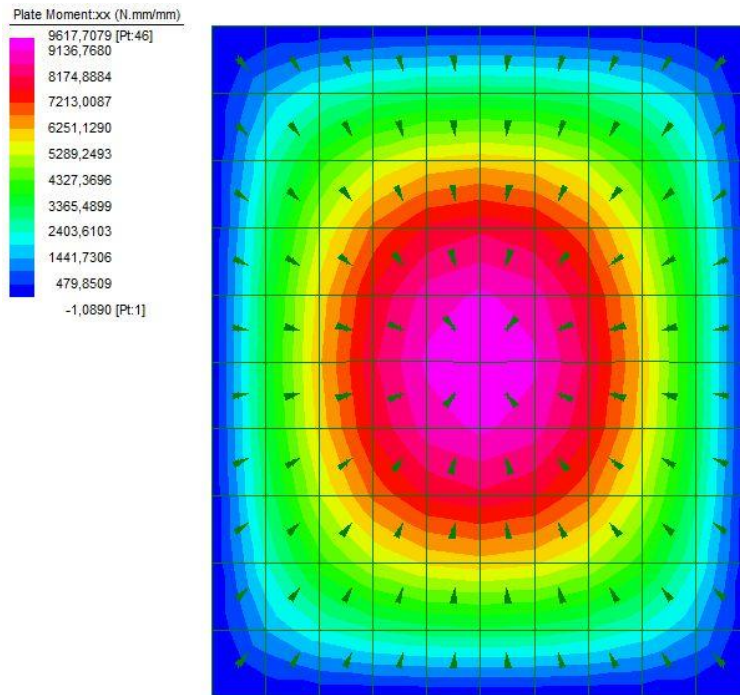


Figura 59 - 5 strati, 4x5 metri,  $M_x$

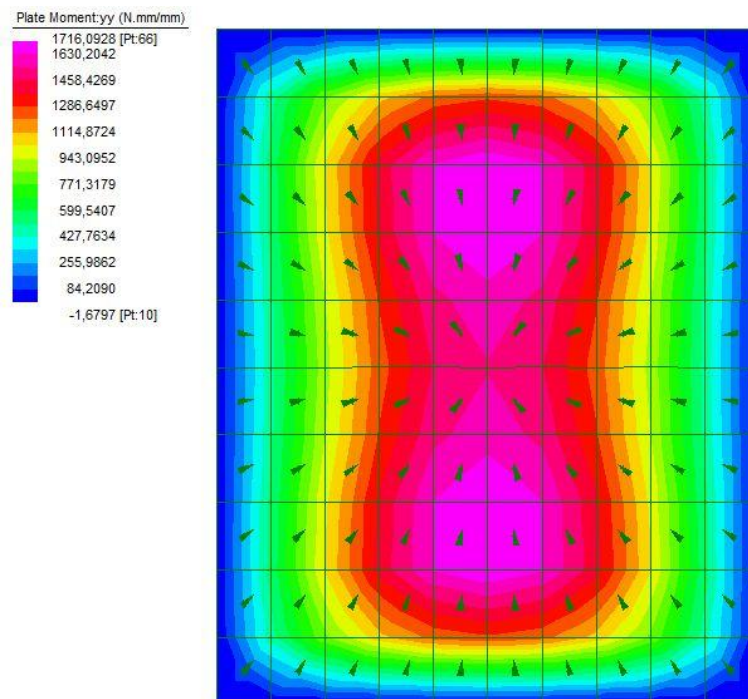


Figura 60 - 5 strati, 4x5 metri,  $M_y$

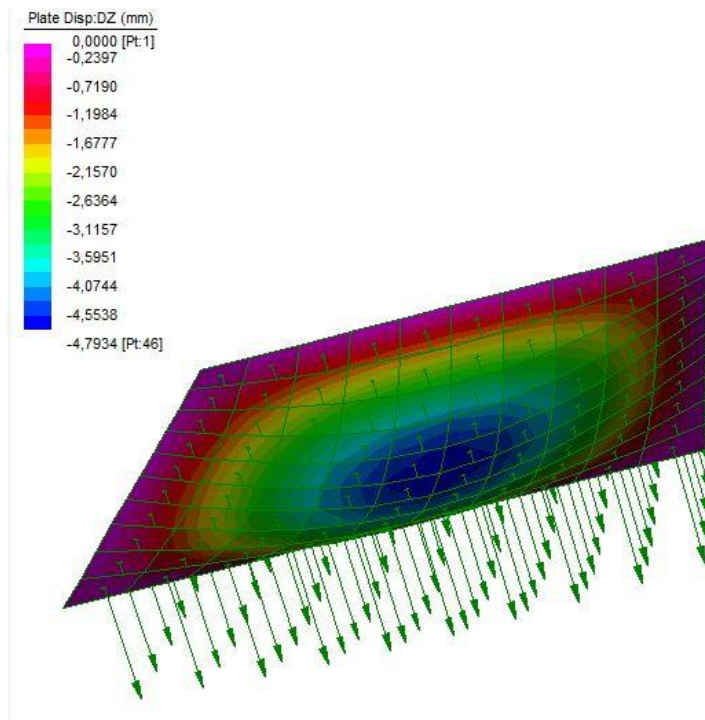


Figura 61 - 5 strati, 4x5 metri,  $D_z$

Si noti come, con riferimento a Figura 52 e Figura 60, nel caso di un elemento costituito da un numero di strati dispari il momento massimo nella direzione debole della piastra non sia nel punto di mezzeria, come ipotizzato nei calcoli analitici, ma si trova in posizione decentrata rispetto al punto baricentrico della piastra. Trattandosi della direzione debole, ed essendo il momento massimo maggiore di quello nel punto centrale di una quota ininfluenza ai fini della resistenza ultima della piastra, soprattutto per piastre costituite da un numero di strati uguale o superiore a 3, non vengono ripetuti i calcoli analitici fatti in precedenza lasciando la verifica soddisfatta sotto l'azione del momento applicato nel punto centrale.

Si tratta tuttavia di un aspetto interessante da sottolineare che caratterizza ulteriormente il particolare comportamento di questo materiale.

## 9. CONFRONTI PARAMETRICI E CONCLUSIONI

### 9.1 Confronto tra le tipologie di calcolo monodirezionale

Il primo confronto analizzato è quello tra le due tipologie di calcolo monodirezionale studiate. Ricordando che nel calcolo monodirezionale 1/1bis veniva trascurato il contributo offerto dagli strati trasversali alla direzione del carico applicato e nel calcolo monodirezionale 2/2bis tale contributo veniva invece considerato, si mettono ora a confronto i parametri  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $u$  ed  $f$  prima per il caso di un elemento costituito da 5 strati al variare della luce di calcolo e successivamente per una luce di calcolo di 6 metri al variare del numero di strati.

Riportando i valori ottenuti dal calcolo, per un elemento costituito da 5 strati al variare della luce di calcolo si ha:

**Tabella 342 – Verifiche agli stati limite ultimi, d’esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Monodirezionale\_1 per un elemento costituito da 5 strati al variare della luce di calcolo**

#### Monodirezionale\_1

Luce [m]	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$\frac{u_{fin}}{u_{max}}$	$\frac{f_{min}}{f_1}$
3	0,12	0,09	0,18	0,35
4	0,22	0,12	0,39	0,63
5	0,34	0,15	0,73	0,98
6	0,49	0,18	1,23	1,41
7	0,67	0,21	1,93	1,92
8	0,88	0,24	2,86	2,51

**Tabella 343 - Verifiche agli stati limite ultimi, d’esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Monodirezionale\_1bis per un elemento costituito da 5 strati al variare della luce di calcolo**

#### Monodirezionale\_1bis

Luce [m]	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{d,max}}{f_{v,d,XLAM}}$	$\frac{u_{fin}}{u_{max}}$	$\frac{f_{min}}{f_1}$
3	0,12	0,05	0,15	0,35
4	0,22	0,06	0,35	0,63
5	0,34	0,08	0,69	0,98
6	0,49	0,10	1,18	1,41
7	0,67	0,11	1,88	1,92
8	0,88	0,13	2,80	2,51

**Tabella 344 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Monodirezionale\_2 per un elemento costituito da 5 strati al variare della luce di calcolo**

### Monodirezionale\_2

Luce [m]	$\sigma_{m,max,d} / f_{m,d,XLAM}$	$\tau_{r,d,max} / f_{r,d,XLAM}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
3	0,12	0,09	0,18	0,35
4	0,22	0,12	0,38	0,62
5	0,34	0,15	0,72	0,97
6	0,49	0,18	1,22	1,40
7	0,66	0,21	1,91	1,91
8	0,87	0,24	2,83	2,49

**Tabella 345 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Monodirezionale\_2bis per un elemento costituito da 5 strati al variare della luce di calcolo**

### Monodirezionale\_2bis

Luce [m]	$\sigma_{m,max,d} / f_{m,d,XLAM}$	$\tau_{d,max} / f_{v,d,XLAM}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
3	0,12	0,05	0,15	0,35
4	0,22	0,06	0,35	0,62
5	0,34	0,08	0,68	0,97
6	0,49	0,10	1,17	1,40
7	0,66	0,11	1,85	1,91
8	0,87	0,13	2,76	2,49

Dai valori delle tabelle è possibile fare le seguenti considerazioni:

- In termini di tensione normale  $\sigma$ , la differenza tra le due tipologie di calcolo è, ai fini della verifica, praticamente trascurabile, in quanto si varia da una differenza dello 0% per una luce di calcolo di 3 metri ad una differenza dell'1% per una luce di calcolo di 8 metri. In entrambi i casi non vi è influenza dell'effetto del "taglio per rotolamento".
- In termini di tensione tangenziale  $\tau$ , non vi è alcuna differenza tra le due tipologie di calcolo. Per entrambe il non considerare l'effetto del "taglio per rotolamento" porterebbe a dei valori di verifica inferiori a quelli ottenuti considerando tale effetto del 45% fino a un massimo del 50% per 4 metri.
- In termini di deformazione  $u$ , la differenza tra le due tipologie di calcolo è nuovamente trascurabile ai fini della verifica in quanto si ha una differenza dello 0% fino ad un massimo dell'1%. In entrambi i casi il non considerare gli effetti del "taglio per rotolamento" porterebbe a valori minori di un massimo del 17% per una luce di calcolo di 3 metri fino a un minimo del 2% per 8 metri di luce.
- In termini di frequenza naturale di vibrazione  $f$ , la differenza tra le due tipologie di calcolo è ancora trascurabile ai fini della verifica, si ha infatti sempre una differenza di valori di circa l'1% per tutte le luci di calcolo. Non vi è influenza del "taglio per rotolamento".

Tutte queste considerazioni sono visibili graficamente in Figura 62:

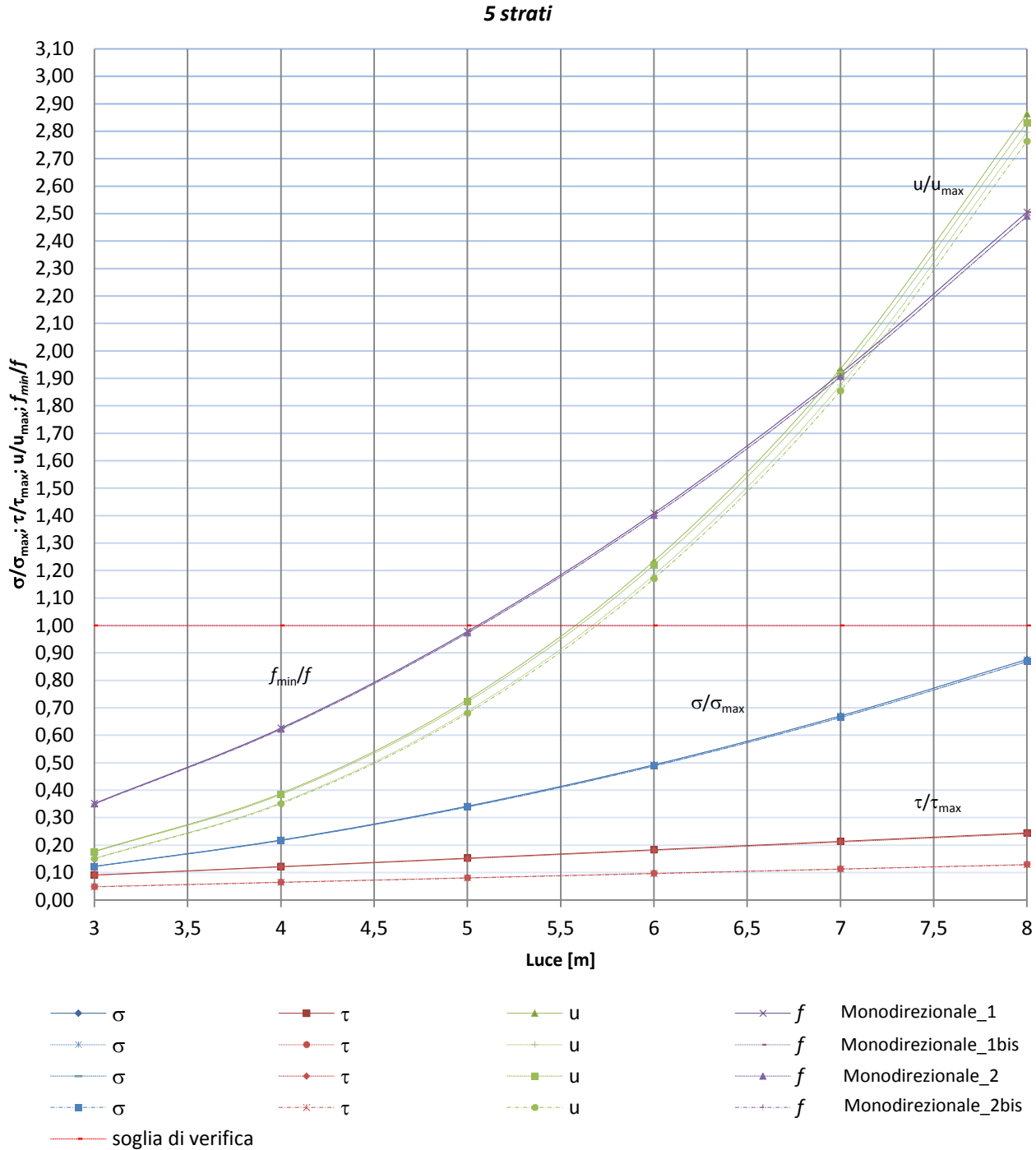


Figura 62 – Confronto dei parametri  $\sigma, \tau, u$  ed  $f$  per un elemento XLAM costituito da 5 strati al variare della luce di calcolo

Le stesse considerazioni possono essere fatte considerando una luce di calcolo pari a 6 metri al variare del numero di strati che compongono gli elementi:

**Tabella 346 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Monodirezionale\_1 per una luce di calcolo di 6 metri al variare del numero di strati**

### Monodirezionale\_1

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
3	1,04	0,32	4,15	2,51
5	0,49	0,18	1,23	1,41
7	0,30	0,16	0,57	0,97
9	0,21	0,13	0,32	0,73

**Tabella 347 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Monodirezionale\_1bis per una luce di calcolo di 6 metri al variare del numero di strati**

### Monodirezionale\_1bis

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
3	1,04	0,16	4,07	2,51
5	0,49	0,10	1,18	1,41
7	0,30	0,08	0,53	0,97
9	0,21	0,07	0,29	0,73

**Tabella 348 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Monodirezionale\_2 per una luce di calcolo di 6 metri al variare del numero di strati**

### Monodirezionale\_2

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
3	1,04	0,32	4,14	2,51
5	0,49	0,18	1,22	1,40
7	0,30	0,16	0,56	0,96
9	0,20	0,13	0,32	0,73

**Tabella 349 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Monodirezionale\_2bis per una luce di calcolo di 6 metri al variare del numero di strati**

### Monodirezionale\_2bis

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
3	1,04	0,16	4,05	2,51
5	0,49	0,10	1,17	1,40
7	0,30	0,08	0,52	0,96
9	0,20	0,06	0,29	0,73

I valori delle tabelle sono rappresentati graficamente in Figura 63:

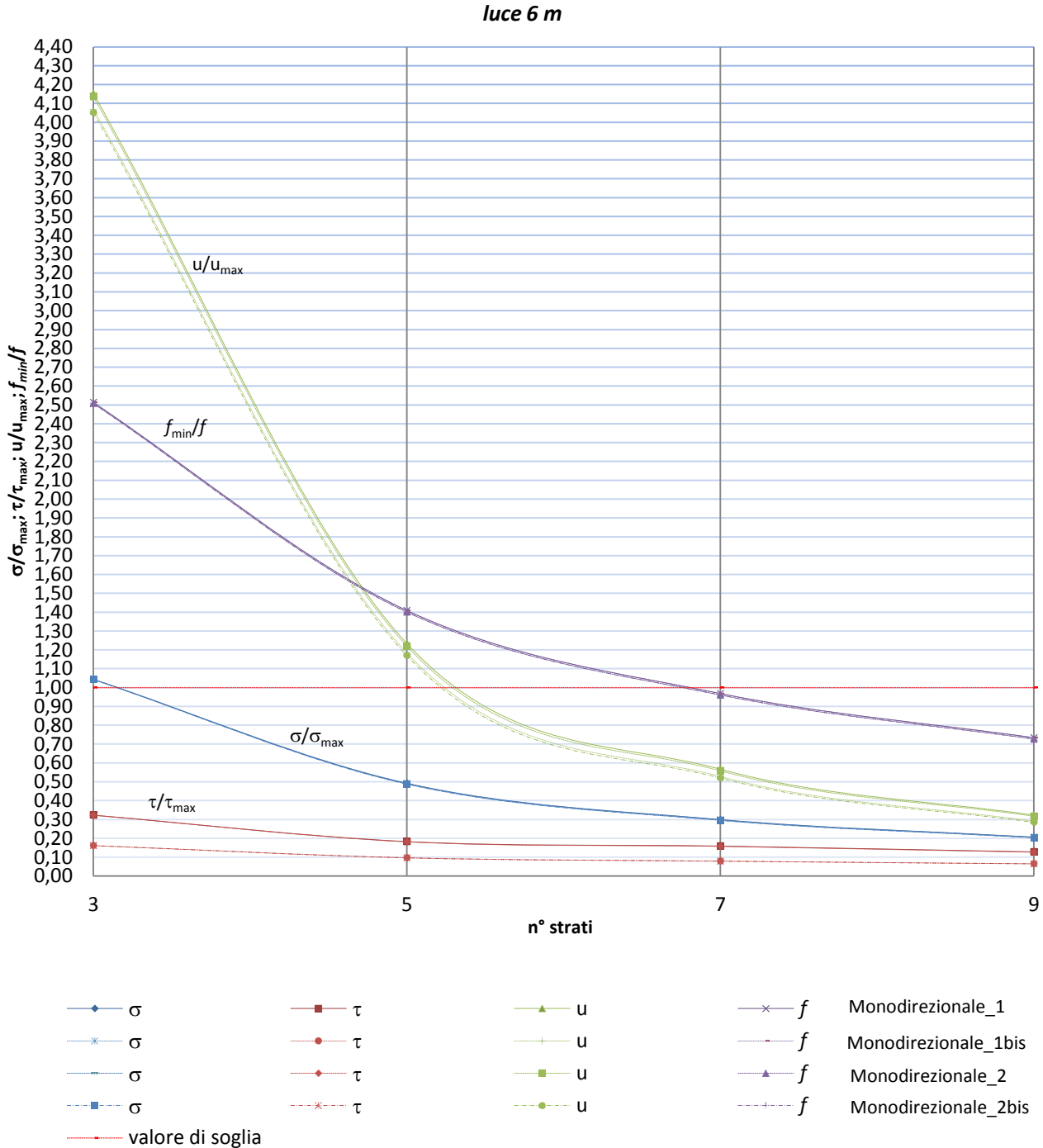


Figura 63 - Confronto dei parametri  $\sigma, \tau, u$  ed  $f$  per una luce di calcolo di 6 metri al variare del numero di strati



## **Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali**

Alessandro Baronio 750895

---

Si può quindi concludere il confronto dicendo che l'utilizzo di una o dell'altra tipologia di calcolo monodirezionale non influisce ai fini della verifica essendoci una differenza praticamente trascurabile tra i valori ottenuti .

Non considerare l'effetto del "taglio per rotolamento" porterebbe a dei valori di verifica minori (quindi maggiormente verificati) riguardo la deformazione e la tensione tangenziale, pertanto è bene considerare questo effetto.

E' inoltre interessante sottolineare, con riferimento al grafico di Figura 63, come per elementi costituiti da 3 strati la verifica più severa sia quella di deformazione, mentre già per elementi costituiti da 5 strati la verifica più severa diventa quella alle vibrazioni. In questo confronto è riportato il solo esempio relativo ad una luce di calcolo di 6 metri ma provando a confrontare i risultati ottenuti per luci diverse si riscontra sempre la stessa situazione. Tale considerazione risulterà utile successivamente per giustificare il confronto finale per la scelta del numero di strati da utilizzare per coprire determinate geometrie di solaio.



## 9.2 Confronto tra le tipologie di calcolo bidirezionale

Il secondo confronto analizzato è quello tra le tre tipologie di calcolo bidirezionale studiate.

Si mettono ora a confronto i parametri  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $u$  ed  $f$  prima per il caso di un elemento costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo (ricordando che si tratta in questo caso di geometrie di piastre quadrate) e successivamente per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati.

Riportando i valori ottenuti dal calcolo, per un elemento costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo si ha:

**Tabella 350 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_1 per un elemento costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo**

### Bidirezionale\_1

Luce [m]		$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$\frac{u_{fin}}{u_{max}}$	$\frac{f_{min}}{f_1}$
4	4	0,10	0,09	0,18	0,62
5	5	0,16	0,11	0,35	0,97
6	6	0,23	0,13	0,59	1,40
7	7	0,32	0,15	0,92	1,91
8	8	0,42	0,17	1,37	2,50

**Tabella 351 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_1bis per un elemento costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo**

### Bidirezionale\_1bis

Luce [m]		$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{v,d,XLAM}}$	$\frac{u_{fin}}{u_{max}}$	$\frac{f_{min}}{f_1}$
4	4	0,10	0,04	0,17	0,62
5	5	0,16	0,05	0,33	0,97
6	6	0,23	0,07	0,57	1,40
7	7	0,32	0,08	0,90	1,91
8	8	0,42	0,09	1,34	2,50

**Tabella 352 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_2 per un elemento costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo**

### Bidirezionale\_2

Luce [m]		$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$\frac{u_{fin}}{u_{max}}$	$\frac{f_{min}}{f_1}$
4	4	0,12	0,11	0,18	0,40
5	5	0,18	0,14	0,34	0,63
6	6	0,27	0,17	0,59	0,91
7	7	0,36	0,20	0,94	1,24
8	8	0,47	0,23	1,40	1,61

**Tabella 353 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_2bis per un elemento costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo**

### Bidirezionale\_2bis

Luce [m]		$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{v,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
4	4	0,11	0,06	0,16	0,39
5	5	0,17	0,07	0,31	0,60
6	6	0,24	0,08	0,54	0,87
7	7	0,33	0,10	0,86	1,18
8	8	0,43	0,11	1,28	1,54

**Tabella 354 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_3 per un elemento costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo**

### Bidirezionale\_3

Luce [m]		$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
4	4	0,12	0,11	0,20	0,43
5	5	0,18	0,13	0,37	0,66
6	6	0,26	0,16	0,62	0,93
7	7	0,36	0,19	0,98	1,26
8	8	0,47	0,21	1,44	1,64

**Tabella 355 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_3bis per un elemento costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo**

### Bidirezionale\_3bis

Luce [m]		$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{v,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
4	4	0,11	0,03	0,16	0,39
5	5	0,17	0,04	0,32	0,61
6	6	0,24	0,04	0,55	0,87
7	7	0,33	0,05	0,86	1,19
8	8	0,43	0,06	1,29	1,55

Per una maggiore chiarezza nella lettura dei grafici viene fatto un primo confronto tra il calcolo bidirezionale 1/1bis e bidirezionale 2/2bis ed un successivo confronto tra il calcolo bidirezionale 2/2bis e bidirezionale 3/3bis.

Il primo confronto è rappresentato graficamente in Figura 64:

### 6 strati

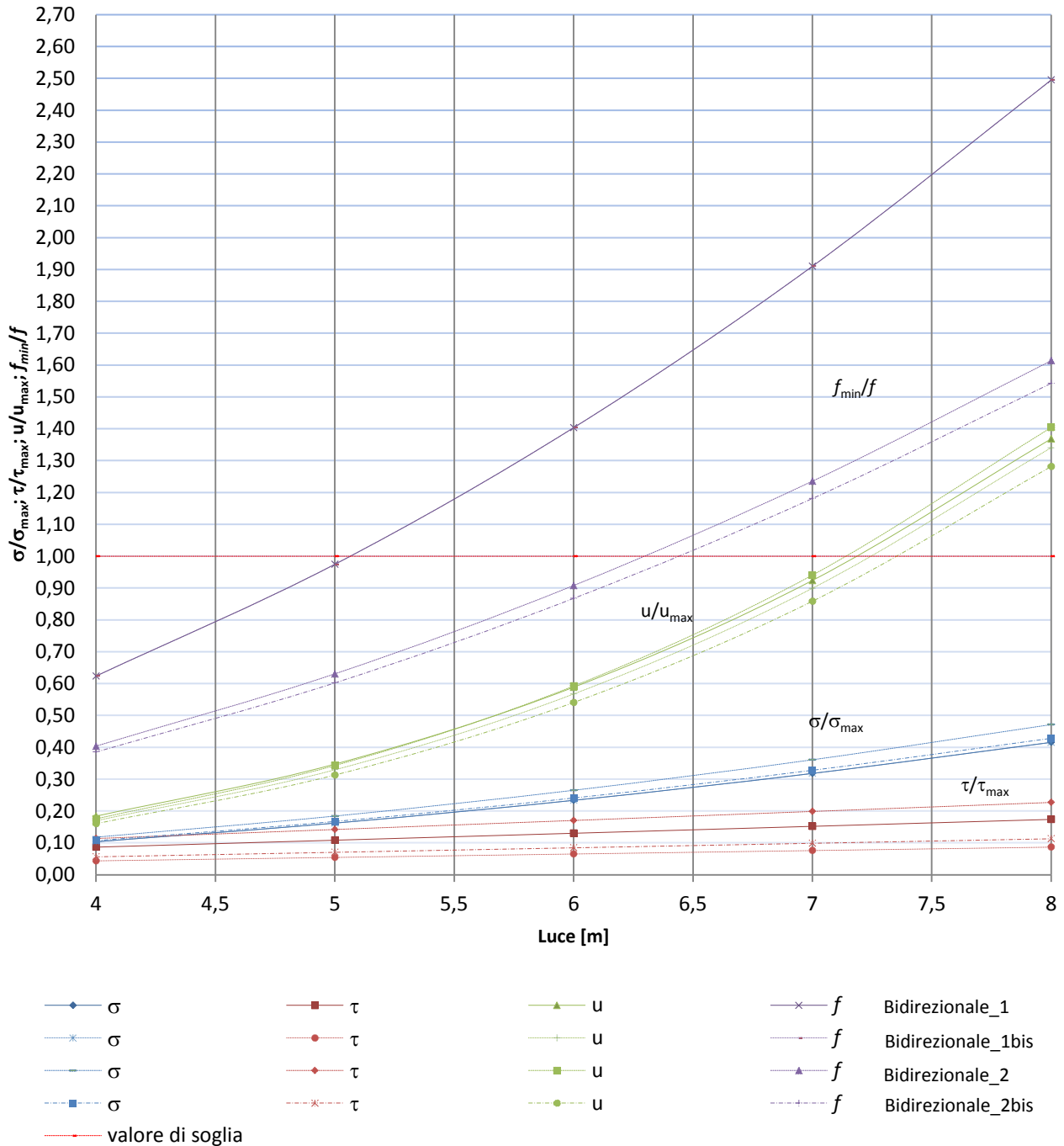


Figura 64 - Confronto dei parametri  $\sigma, \tau, u$  ed  $f$  per un elemento XLAM costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo tra calcolo bidirezionale 1/1bis e bidirezionale 2/2bis

Il secondo confronto è rappresentati graficamente in Figura 65:

### 6 strati

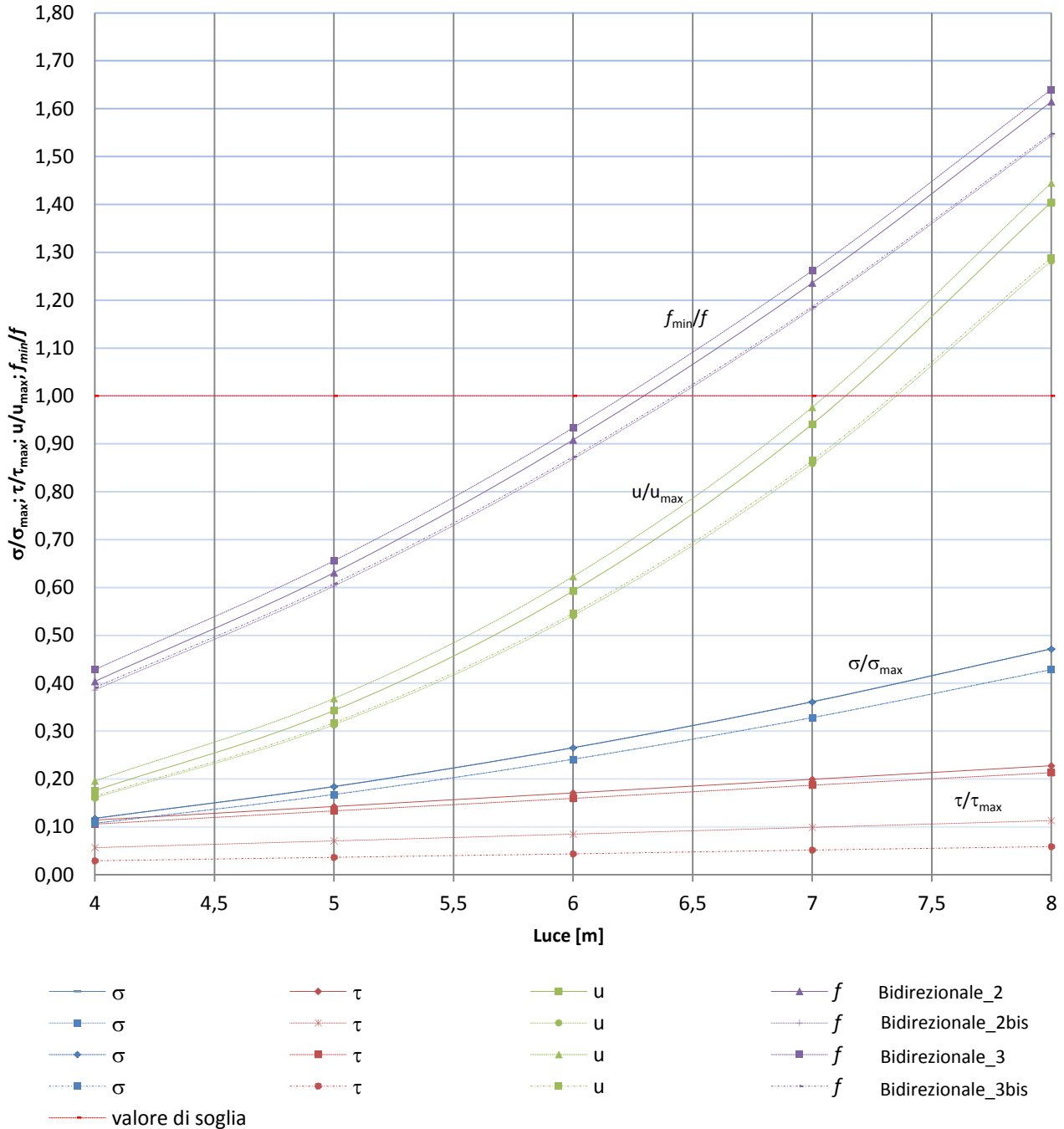


Figura 65 - Confronto dei parametri  $\sigma, \tau, u$  ed  $f$  per un elemento XLAM costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo tra calcolo bidirezionale 2/2bis e bidirezionale 3/3bis

Per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare della luce di calcolo si ha:

**Tabella 356 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_1 per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati**

**Bidirezionale\_1**

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
2	1,09	0,51	12,56	6,09
4	0,44	0,20	1,77	2,37
6	0,23	0,13	0,59	1,40
8	0,15	0,10	0,28	0,98

**Tabella 357 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_1bis per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati**

**Bidirezionale\_1bis**

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{v,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
2	1,09	0,25	12,51	6,09
4	0,44	0,10	1,74	2,37
6	0,23	0,07	0,57	1,40
8	0,15	0,05	0,26	0,98

**Tabella 358 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_2 per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati**

**Bidirezionale\_2**

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
2	3,50	0,66	13,15	3,94
4	0,44	0,20	1,77	2,37
6	0,23	0,13	0,59	1,40
8	0,15	0,10	0,28	0,98

**Tabella 359 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_2bis per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati**

**Bidirezionale\_2bis**

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{v,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
2	3,18	0,33	12,00	3,76
4	0,44	0,10	1,74	2,37
6	0,23	0,07	0,57	1,40
8	0,15	0,05	0,26	0,98

**Tabella 360 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_3 per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati**

**Bidirezionale\_3**

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{r,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
2	3,49	0,41	13,23	3,95
4	0,56	0,22	1,86	1,56
6	0,26	0,16	0,62	0,93
8	0,16	0,13	0,30	0,66

**Tabella 361 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo Bidirezionale\_3bis per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati**

**Bidirezionale\_3bis**

n° strati	$\frac{\sigma_{m,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\tau_{r,d,max}}{f_{v,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
2	3,18	0,11	12,02	3,76
4	0,51	0,06	1,67	1,47
6	0,24	0,04	0,55	0,87
8	0,15	0,03	0,25	0,61

L'elemento da 2 strati non è stato riportato nei grafici dato che presenta valori che discostano molto da quelli degli altri elementi costituiti da un numero maggiore di strati.

Il primo confronto è rappresentato graficamente in Figura 66:

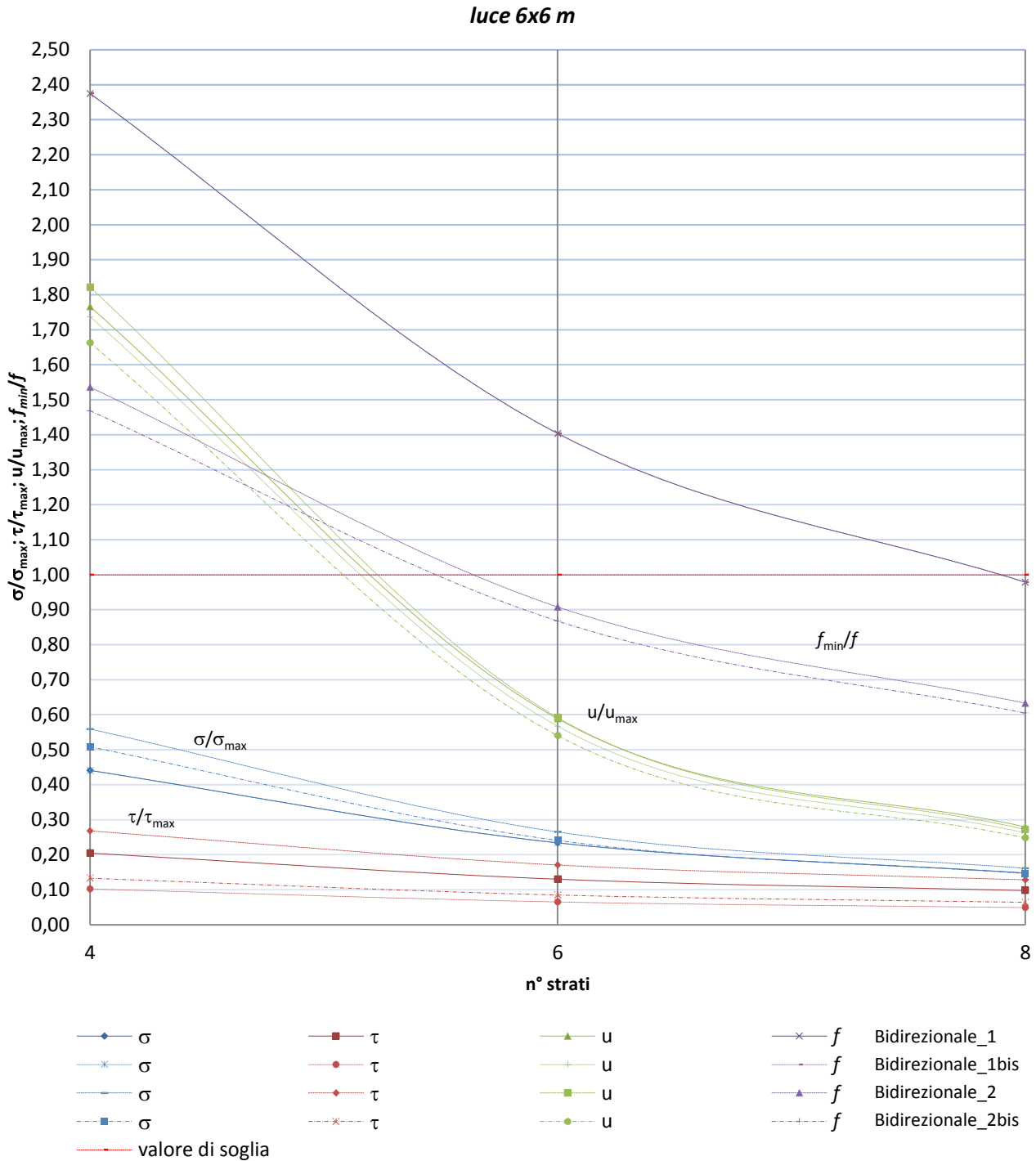


Figura 66 - Confronto dei parametri  $\sigma, \tau, u$  ed  $f$  per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati tra calcolo bidirezionale 1/1bis e bidirezionale 2/2bis

Il secondo confronto è rappresentato graficamente in Figura 67:

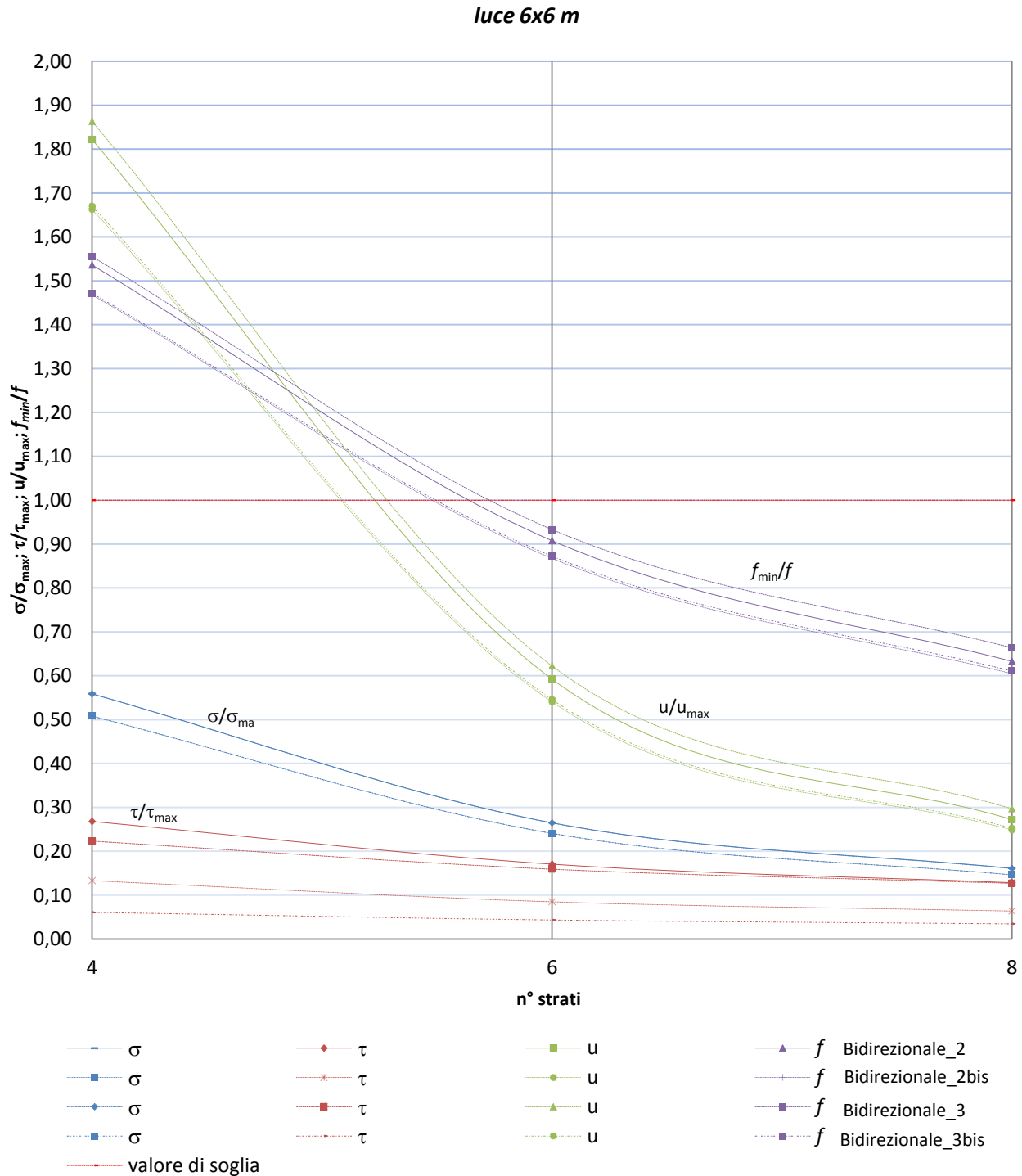


Figura 67 - Confronto dei parametri  $\sigma, \tau, u$  ed  $f$  per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati tra calcolo bidirezionale 2/2bis e bidirezionale 3/3bis





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Sulla base dei risultati ottenuti è quindi possibile fare le seguenti considerazioni:

- In termini di tensione normale  $\sigma$ , l'utilizzo di una tipologia di calcolo piuttosto di un'altra non porta a grosse differenze nei risultati. Tuttavia è evidente come il modello approssimato di Grashof dia valori di verifica minori rispetto alle altre teorie utilizzate. Tale differenza, che aumenta per grandi luci ed è maggiore per elementi costituiti da 4 strati, è dovuta, oltre ad una più corretta determinazione delle caratteristiche di sollecitazione con le teorie di Kirchhoff e Mindlin, alla semplificazione fatta nel calcolo approssimato di trascurare la presenza dell'ultimo strato trasversale. Si può notare infatti che tale differenza va diminuendo all'aumentare del numero di strati.

E' inoltre interessante sottolineare come il calcolo delle tensioni normali usando la teoria di Kirchhoff o quella di Mindlin porti a risultati praticamente identici sia che venga considerato o meno l'effetto del "taglio per rotolamento".

- In termini di tensione tangenziale  $\tau$ , l'utilizzo del modello approssimato piuttosto che la teoria di piastra di Kirchhoff porta a delle differenze dovute al diverso valore delle caratteristiche di sollecitazione, essendo le tensioni tangenziali calcolate allo stesso modo. Con entrambe le tipologie di calcolo veniva trascurata la corretta posizione dell'asse neutro della sezione calcolando le tensioni rispetto l'asse baricentrico geometrico. Osservando il confronto tra il calcolo bidirezionale 2/2bis e bidirezionale 3/3bis si vede infatti che in questo modo le tensioni sono state sovrastimate, in particolare, come nel caso delle tensioni normali, la differenza è maggiore per 4 strati e va diminuendo all'aumentare del numero di strati.

Il calcolo delle tensioni tangenziali con la teoria di Mindlin senza considerare l'effetto del "taglio per rotolamento" è quello che darebbe i valori di verifica minori.

- In termini di deformazione  $u$ , se si considera in prima analisi il confronto tra il modello approssimato e quello di Kirchhoff, si vede che l'utilizzo di una o dell'altra tipologia di calcolo darebbe praticamente gli stessi risultati, fatta eccezione ancora una volta per l'elemento da 4 strati e per luci prossime agli 8 metri. Si nota invece che la differenza tra i valori ottenuti considerando o meno l'effetto del "taglio per rotolamento" è maggiore con la teoria di Kirchhoff.

Confrontando invece i valori di deformazione ottenuti con la teoria di Mindlin si vede come effettivamente con questo modello di calcolo si ottengono risultati maggiori rispetto al modello di Kirchhoff. Interessante vedere anche in questo caso come si ottengano risultati molto simili qualora l'effetto del "taglio per rotolamento" non venga preso in considerazione.

- In termini di frequenza naturale di vibrazione  $f$ , appare subito evidente dal primo confronto come l'utilizzo del modello a trave per la sua determinazione dia valori molto penalizzanti nei riguardi della verifica alle vibrazioni.

Valgono invece le stesse considerazioni fatte per la deformazione per quel che riguarda il confronto tra il modello a piastra di Kirchhoff e quello di Mindlin, ottenendo frequenze naturali di vibrazione più basse con il secondo modello e quindi valori di verifica maggiori.

Appare comunque evidente come queste differenze siano poco significative soprattutto ai fini delle verifiche. Ciò è dovuto probabilmente al fatto che le piastre in questione sono poco spesse.

### 9.3 Confronto tra le soluzioni progettuali per geometrie di piastra rettangolari

Il confronto precedente riguardava il caso di geometrie di piastra quadrate.

Si vogliono ora analizzare i risultati ottenuti al punto 8.6.5 in cui sono state definite tre diverse soluzioni progettuali da poter utilizzare qualora si avesse l'esigenza di ricoprire aree di solaio di geometria rettangolare.

Per una luce di calcolo di 4x5 metri al variare del numero di strati si hanno i seguenti valori:

**Tabella 362 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo a Trave per una luce di calcolo di 4x5 metri al variare del numero di strati**

**Trave**

n° strati	$\frac{\sigma_{mx,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\sigma_{my,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
3	0,46	0,05	1,17	1,02
5	0,21	0,06	0,33	0,55
7	0,12	0,05	0,14	0,37
9	0,08	0,04	0,07	0,27

**Tabella 363 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo a Piastra isotropa per una luce di calcolo di 4x5 metri al variare del numero di strati**

**Piastra isotropa**

n° strati	$\frac{\sigma_{mx,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\sigma_{tx,90,max,d}}{f_{t,90,d,XLAM}}$	$\frac{\sigma_{my,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
4	0,36	1,14	0,22	0,77	0,82
6	0,17	0,47	0,10	0,25	0,48
8	0,10	0,26	0,06	0,12	0,34

**Tabella 364 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo a Piastra ortotropa per una luce di calcolo di 4x5 metri al variare del numero di strati**

**Piastra ortotropa**

n° strati	$\frac{\sigma_{mx,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\sigma_{my,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
3	0,56	0,25	2,26	1,38
5	0,20	0,18	0,49	0,66
7	0,10	0,11	0,19	0,42
9	0,06	0,08	0,09	0,30

Le verifiche al taglio non sono state incluse nel confronto essendo quelle meno significative ai fini della scelta finale della soluzione progettuale da utilizzare.

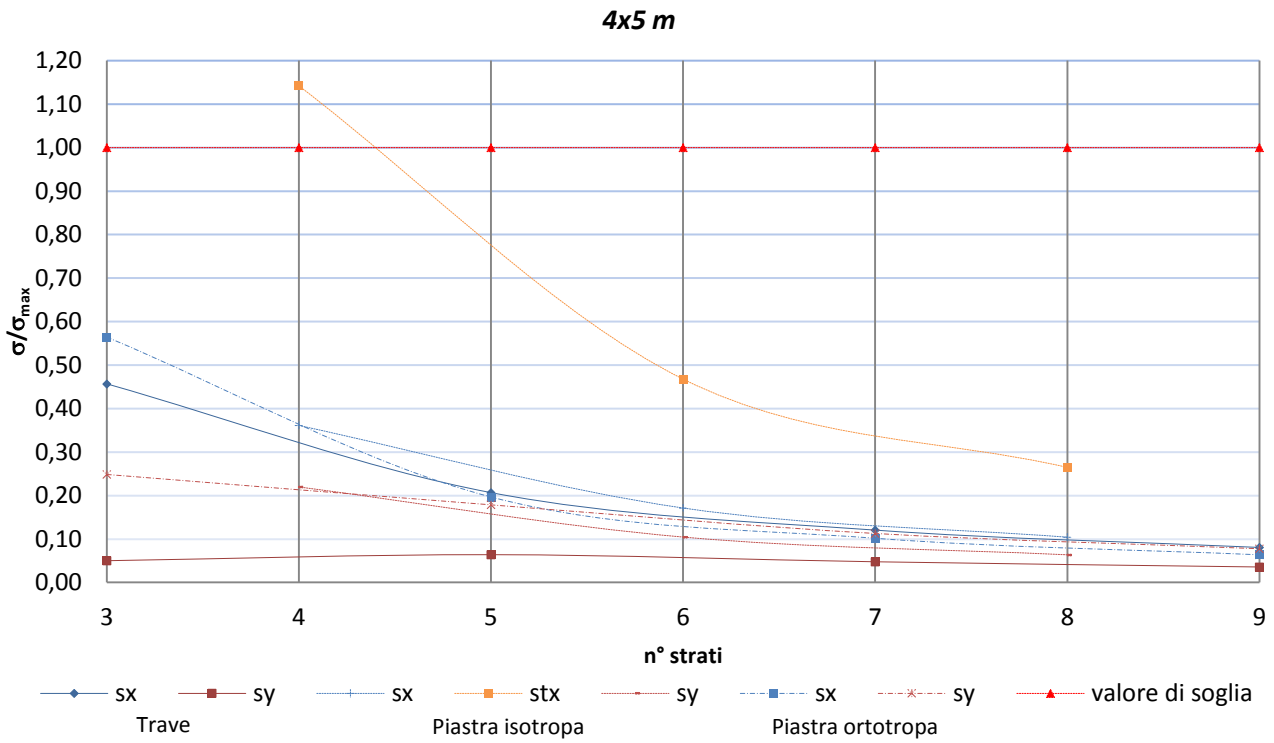


Figura 68 - Confronto del parametro  $\sigma$  per una luce di calcolo di 4x5 metri al variare del numero di strati tra calcolo a Trave, Piastra isotropa e Piastra ortotropa

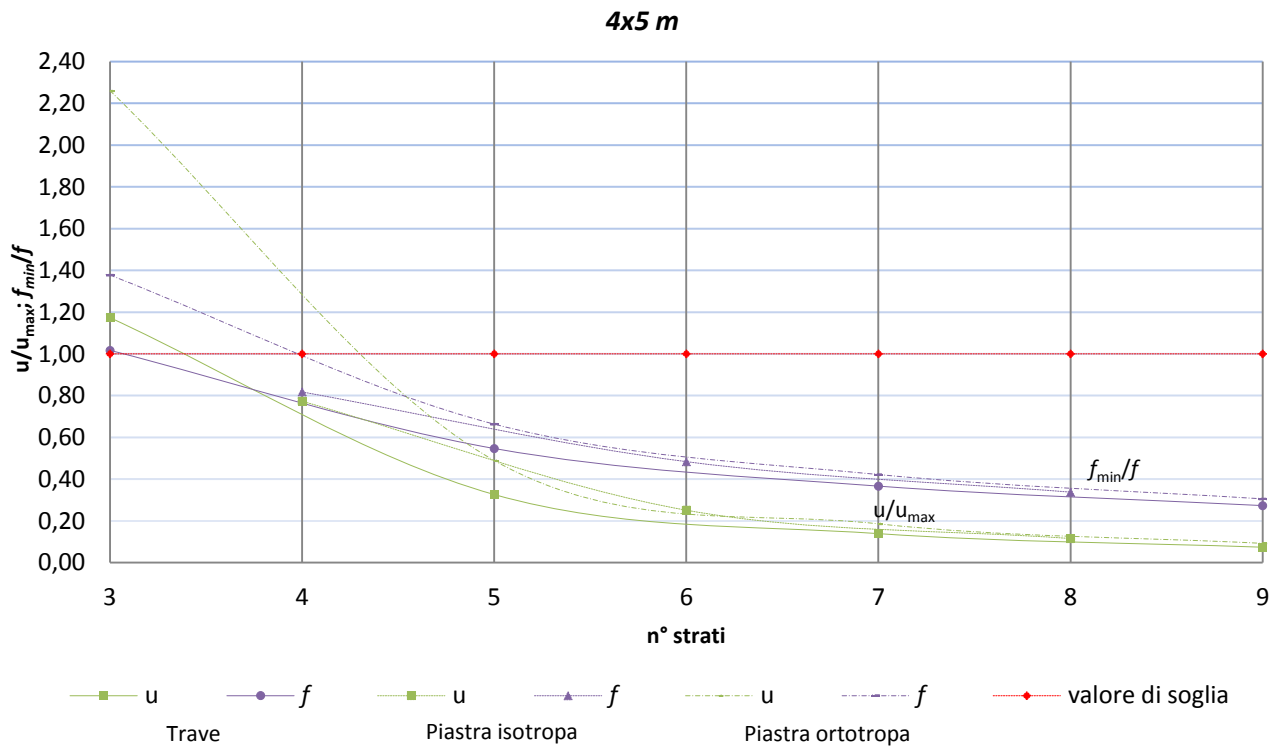


Figura 69 - Confronto dei parametri  $u$  ed  $f$  per una luce di calcolo di 4x5 metri al variare del numero di strati tra calcolo a Trave, Piastra isotropa e Piastra ortotropa



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Osservando i grafici di Figura 68 e Figura 69 si possono fare le seguenti considerazioni:

- Disponendo gli strati con inerzia maggiore in direzione minore (Trave) si ha effettivamente un comportamento monodirezionale per elementi costituiti da un basso numero di strati. La differenza tra le tensioni nelle due direzioni va diminuendo all'aumentare del numero di strati.
- Disponendo gli strati con inerzia maggiore in direzione maggiore (Piastra ortotropa) si ottiene, per elementi costituiti da un basso numero di strati, un comportamento a trave in direzione opposta rispetto al caso precedente. Anche in questo caso con l'aumentare del numero di strati la differenza tra le due tensioni va diminuendo fino ad un punto in cui si ritorna ad avere una tensione maggiore in direzione minore. In generale si ha un migliore sfruttamento del materiale in quanto la differenza tra le due tensioni nelle due direzioni principali è sempre minore rispetto al caso di Trave.
- Utilizzando il modello a piastra ortotropa si ottiene, rispetto al caso di trave, un netto peggioramento delle verifiche di esercizio. Nonostante l'andamento di questi due parametri sia lo stesso al variare del numero di strati, le curve della piastra ortotropa si trovano sempre spostate più in alto in quanto, adottando questa soluzione progettuale, si ottengono valori maggiori di deformazione e valori minori di frequenza naturale di vibrazione. Anche nel caso di questi due parametri la differenza tra i due modelli diventa sempre minore all'aumentare del numero di strati.
- Utilizzando il modello a piastra isotropa (strati pari) si ottiene un andamento pressoché regolare della differenza tra le tensioni, che va diminuendo all'aumentare del numero di strati, con uno sfruttamento maggiore del materiale sempre nella direzione più corta della piastra. Nel caso di elementi costituiti da un numero di strati pari siamo però in presenza della tensione di trazione ortogonale alle fibre all'intradosso del solaio che, nel caso particolare di un pannello XLAM costituito da 4 strati e per una geometria di solaio di 4x5 metri, rappresenta il parametro che determina la condizione più sfavorevole essendo questa verifica più penalizzante rispetto a quelle alle deformazioni ed alle vibrazioni.

In definitiva, per coprire una luce di solaio di 4x5 metri dovremmo utilizzare 5 strati, disposti indifferentemente con l'inerzia maggiore in direzione minore o viceversa, sapendo però che con il modello di piastra ortotropa otterremo sicuramente un migliore sfruttamento del materiale in entrambe le direzioni, ma allo stesso tempo valori maggiori di deformazione e frequenze naturali di vibrazione più basse. Volendo utilizzare il modello a piastra isotropa gli strati necessari a soddisfare tutte le verifiche (in particolare quella a trazione ortogonale alle fibre) diventerebbero 6.

Rimandando al paragrafo 8.6.5 occorre sottolineare però che in prima analisi si era deciso di disporre, nel caso di piastra isotropa, il primo strato longitudinalmente alla direzione minore della piastra. In questa configurazione sull'ultimo strato trasversale graverebbe la tensione di trazione ortogonale alle fibre dovuta alla sollecitazione maggiore di momento presente in questa direzione.

Appare evidente che disponendo il primo strato lungo la direzione maggiore si avrebbe un'inversione delle tensioni, ottenendo a questo punto sullo strato trasversale una tensione di trazione ortogonale alle fibre data dalla sollecitazione di momento minore.

Ripetendo gli stessi calcoli per il solo elemento da 4 strati, con luce di calcolo di 4 metri per la direzione minore (direzione y) e luce di calcolo variabile da 5 a 8 metri per la direzione maggiore (direzione x), disponendo gli strati con la nuova configurazione appena descritta si otterrebbe l'andamento di tensioni, deformazioni e vibrazioni rappresentato in Figura 70:

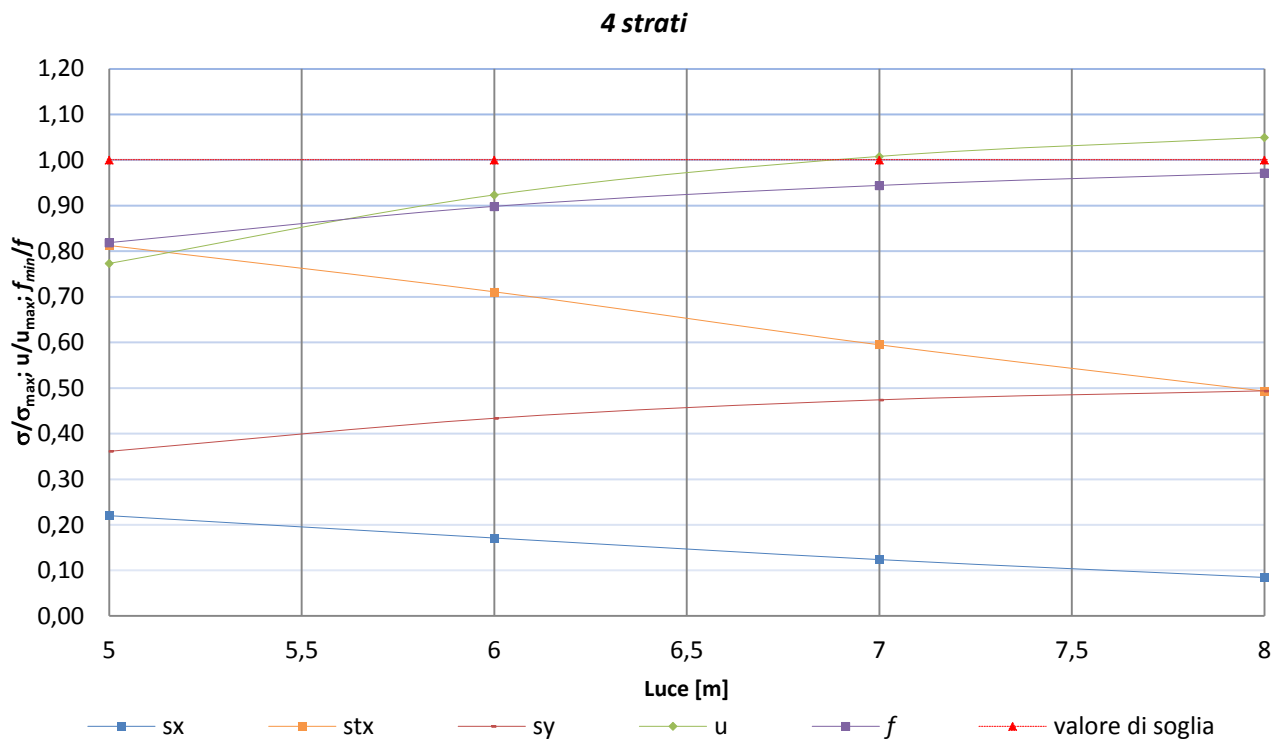


Figura 70 – Andamento dei parametri  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{tx}$ , u ed f per l'elemento da 4 strati al variare della luce di calcolo

Dal grafico è possibile vedere immediatamente che con la nuova configurazione degli strati la verifica a trazione ortogonale alle fibre è sempre soddisfatta. In particolare, con riferimento ai valori di Tabella 186, mentre nella prima ipotesi fatta di disporre il primo strato longitudinalmente alla direzione minore la verifica era sempre meno verificata all'aumentare del lato maggiore della piastra, in questo caso la verifica è sempre più soddisfatta in quanto tale tensione diminuisce.

In questo modo è dunque possibile utilizzare il modello a piastra isotropa (pannello XLAM costituito da 4 strati) ricoprendo aree di solaio aventi lato minore di 4 metri e lato maggiore fino ad una luce di circa 7 metri oltre la quale non è possibile andare per via della verifica a deformazione che non risulta più soddisfatta.

Occorre verificare se tali condizioni sono valide anche per aree di solaio maggiori e per pannelli XLAM costituiti da un numero maggiore di strati.

Per tale motivo si vuole riproporre lo stesso confronto dei parametri ottenuti per una luce di calcolo di 5x6 metri.

Per una luce di calcolo di 5x6 metri al variare del numero di strati si hanno i seguenti valori:

**Tabella 365 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo a Trave per una luce di calcolo di 5x6 metri al variare del numero di strati**

**Trave**

n° strati	$\frac{\sigma_{mx,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\sigma_{my,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
<b>3</b>	0,71	0,09	2,27	1,57
<b>5</b>	0,31	0,11	0,62	0,84
<b>7</b>	0,18	0,08	0,26	0,56
<b>9</b>	0,12	0,06	0,14	0,42

**Tabella 366 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo a Piastra isotropa per una luce di calcolo di 5x6 metri al variare del numero di strati**

**Piastra isotropa**

n° strati	$\frac{\sigma_{mx,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\sigma_{tx,90,max,d}}{f_{t,90,d,XLAM}}$	$\frac{\sigma_{my,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
<b>4</b>	0,53	1,71	0,36	1,43	1,24
<b>6</b>	0,25	0,70	0,17	0,47	0,74
<b>8</b>	0,15	0,40	0,10	0,21	0,51

**Tabella 367 - Verifiche agli stati limite ultimi, d'esercizio e delle vibrazioni per il calcolo a Piastra ortotropa per una luce di calcolo di 5x6 metri al variare del numero di strati**

**Piastra ortotropa**

n° strati	$\frac{\sigma_{mx,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$\frac{\sigma_{my,max,d}}{f_{m,d,XLAM}}$	$u_{fin} / u_{max}$	$f_{min} / f_1$
<b>3</b>	0,84	0,33	3,88	2,02
<b>5</b>	0,30	0,25	0,87	0,99
<b>7</b>	0,16	0,16	0,33	0,63
<b>9</b>	0,10	0,11	0,17	0,46

Ancora una volta le verifiche al taglio non sono state incluse nel confronto essendo quelle meno significative ai fini della scelta finale della soluzione progettuale da utilizzare.

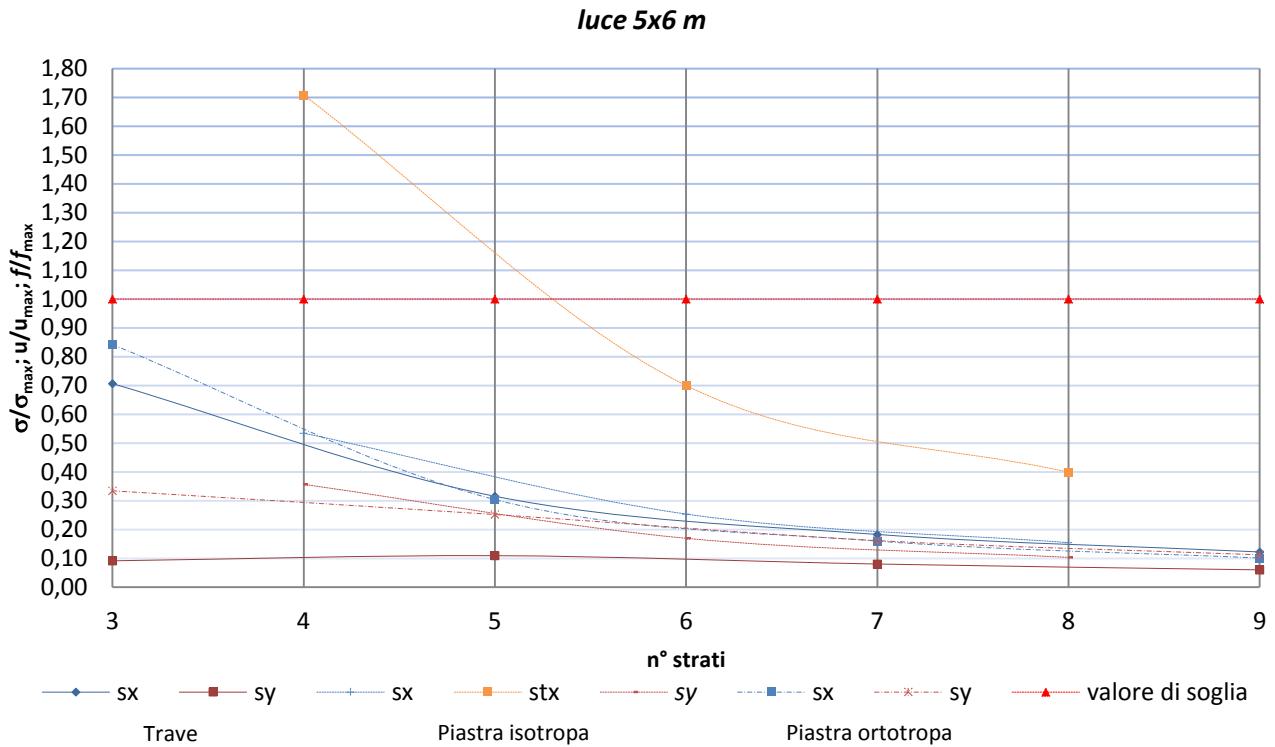


Figura 71 - Confronto del parametro  $\sigma$  per una luce di calcolo di 5x6 metri al variare del numero di strati tra calcolo a Trave, Piastra isotropa e Piastra ortotropa

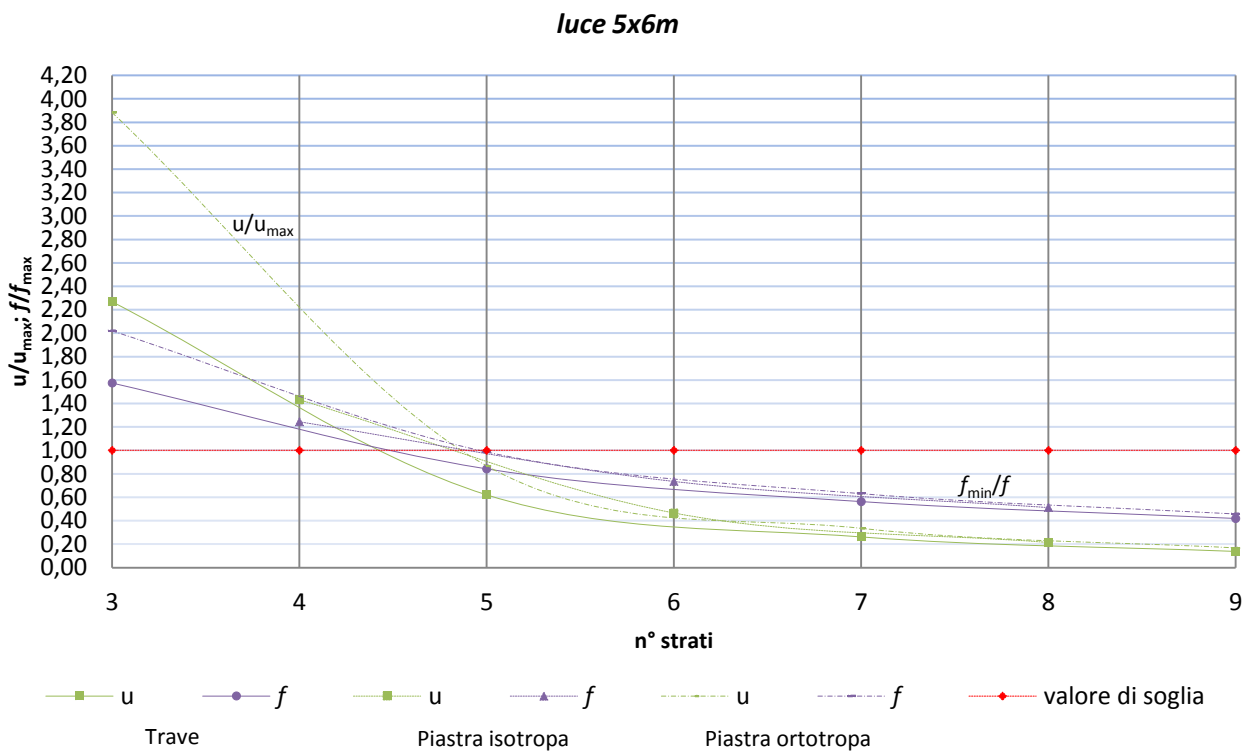


Figura 72 - Confronto dei parametri  $u$  ed  $f$  per una luce di calcolo di 5x6 metri al variare del numero di strati tra calcolo a Trave, Piastra isotropa e Piastra ortotropa



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

---

Dai grafici di Figura 71 e Figura 72 è possibile vedere che l'andamento dei parametri è lo stesso del caso precedente, quindi valgono le stesse considerazioni fatte in precedenza.

In questo caso però si vede che per la piastra isotropa non è comunque possibile utilizzare l'elemento da 4 strati poiché non risultano soddisfatte, oltre a quella a trazione ortogonale alla fibratura, anche le verifiche alle deformazioni e alle vibrazioni. Per poter impiegare questa soluzione progettuale bisognerebbe quindi utilizzare un pannello XLAM costituito da 6 strati, elemento per il quale la verifica a trazione ortogonale alle fibre non è più quella più severa essendo maggiormente soddisfatta rispetto alle altre due.

Da questa considerazione si deduce quindi che per piastre isotrope costituite da elementi con un numero di strati uguale o maggiore a 6 è indifferente disporre il primo strato longitudinalmente alla direzione minore o maggiore, tuttavia è consigliabile disporlo lungo la direzione maggiore in modo da avere tensioni di trazione ortogonale alle fibre minori causando minori probabilità di fessurazione del legno all'intradosso del solaio.

Per coprire una luce di solaio di 5x6 metri non si ha più la convenienza nell'utilizzare la piastra isotropa, dato che il suo impiego richiederebbe uno strato di materiale in più rispetto alla soluzione a trave che ne richiede 5. La piastra ortotropa richiederebbe addirittura 7 strati, in quanto il suo impiego non soddisferebbe la verifica alle vibrazioni.

In definitiva, per luci maggiori di 4x5 metri sarà necessario di volta in volta valutare la soluzione migliore da adottare andando a verificare quale delle tre soddisfa la verifica alle vibrazioni con l'impiego del minore numero di strati. La scelta della piastra isotropa è immediata in quanto comporta l'utilizzo di uno strato in più o in meno rispetto alle altre due soluzioni progettuali; la scelta di utilizzare il modello a trave rispetto a quello a piastra ortotropa dipenderà sostanzialmente, oltre che dalla scelta del grado di utilizzo del materiale, dal fatto che le frequenze naturali di vibrazioni della piastra ortotropa, nonostante minori di quelle del modello a trave, siano comunque verificate.



## 9.4 Conclusioni

Sulla base dei confronti parametrici di cui al paragrafo 9.1 e al paragrafo 9.2 si può concludere affermando che:

- Nell'ipotesi di adottare, per la progettazione di solai strutturali in legno lamellare incrociato, la procedura di calcolo monodirezionale, è ragionevole trascurare il contributo offerto dagli strati disposti trasversalmente rispetto alla direzione del carico applicato in quanto i calcoli eseguiti mostrano differenze trascurabili.
- Nell'ipotesi di eseguire invece un calcolo bidirezionale, la procedura tra quelle sviluppate che meglio descrive il reale comportamento del materiale è sicuramente il modello di piastra di Mindlin. Essendo il campo di applicazione in questione quello dell'edilizia residenziale, siamo in presenza di piastre poco spesse e ciò implica che il calcolo dei pannelli XLAM con la teoria di Kirchhoff porta a differenze che, per i casi analizzati, sono quasi sempre trascurabili ai fini delle verifiche. Tuttavia è consigliabile utilizzare sempre il modello a piastra di Mindlin essendo quello che fornisce, sia in termini di tensioni ma in particolare in termini di deformazioni e frequenze naturali di vibrazione, i valori più corretti.
- Sia che si decida di procedere ad un calcolo monodirezionale o bidirezionale vanno sempre tenuti in conto gli effetti del "rolling shear". Non considerare tale effetto implicherebbe degli errori abbastanza grossolani nei risultati.

Nell'ipotesi di dover coprire un'area di solaio di geometria quadrata si vuole mostrare ora la differenza del numero di strati richiesti dal calcolo monodirezionale rispetto a quello bidirezionale.

Sulla base dei valori ottenuti al paragrafo 8.1 per il calcolo monodirezionale e al paragrafo 8.7 per il calcolo bidirezionale si ottengono i risultati rappresentati in Figura 73:

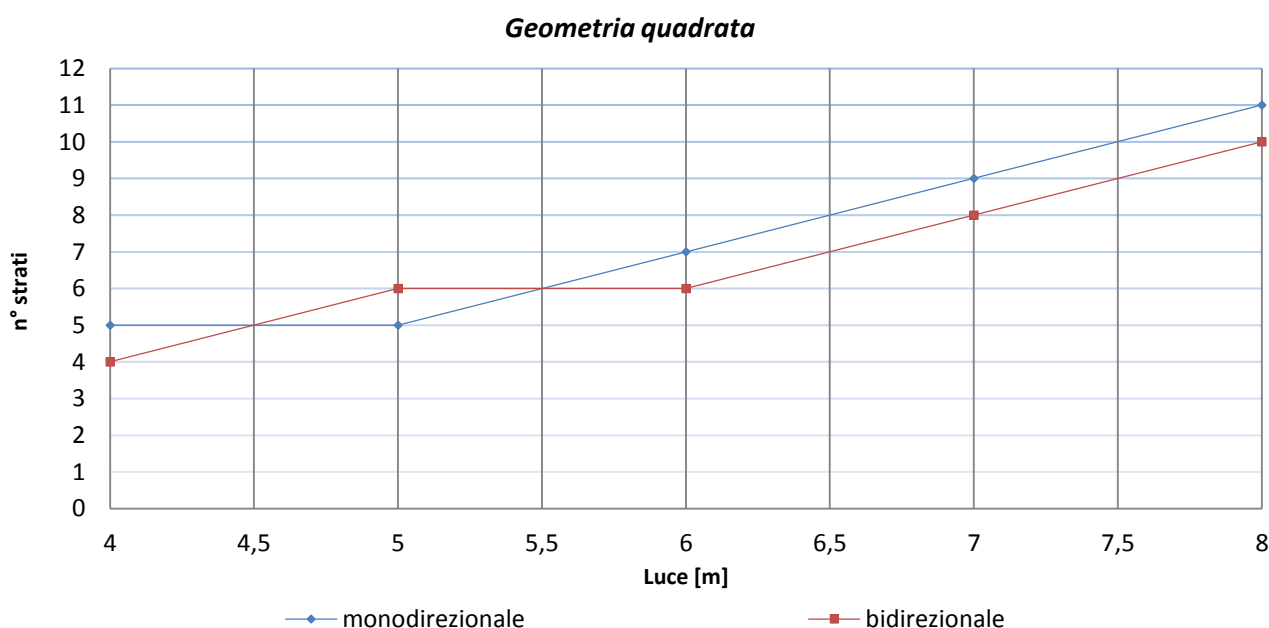


Figura 73 – Confronto del numero di strati richiesti dal calcolo monodirezionale e dal calcolo bidirezionale nel caso di piastra di geometria quadrata



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Dal grafico si vede che, fatta eccezione per la luce di calcolo di 5x5 metri per la quale il calcolo bidirezionale richiede l'impiego di una piastra costituita da 6 strati, vi è sempre convenienza nel considerare il funzionamento a piastra dell'elemento di solaio, potendo di fatto risparmiarne uno strato.

Il numero di strati rappresentato nel grafico è il numero minimo che soddisfa tutte le verifiche, compresa la verifica a trazione ortogonale alle fibre per i pannelli XLAM costituiti da un numero di strati pari. Ciò significa che per elementi costituiti da 4 strati, tale verifica è soddisfatta solo per la luce di calcolo di 4x4 metri. Per luci superiori invece, essendo richiesto comunque un numero maggiore di strati per soddisfare le verifiche alle deformazioni e alle vibrazioni, la verifica a trazione ortogonale alle fibre non è più quella determinante, come visto nel precedente paragrafo, lasciando il posto alla più severa verifica alle vibrazioni.

Sulla base dei confronti parametrici di cui al paragrafo 9.3, nel caso di piastra di geometria rettangolare, si può concludere affermando che:

- Disponendo gli strati con l'inerzia maggiore in direzione minore si ha di fatto un comportamento a trave. La differenza tra le tensioni nelle due direzioni principali della piastra diminuisce all'aumentare del numero di strati.
- Disponendo gli strati con l'inerzia maggiore in direzione minore si ottiene sempre un migliore sfruttamento del materiale nelle due direzioni principali ottenendo però valori più penalizzanti in termini di deformazione e frequenze naturali di vibrazione. Questa soluzione è pertanto poco consigliata.
- Si ha convenienza nell'utilizzare il modello a piastra isotropa (strati pari) per geometrie di solaio aventi luce minore pari a 4 metri e luce maggiore fino a circa 7 metri, utilizzando un pannello XLAM costituito da 4 strati disponendo il primo strato a partire dall'alto longitudinalmente alla direzione maggiore della piastra.
- Disponendo, nel caso di piastra isotropa, gli strati nella configurazione descritta al punto precedente anche per pannelli XLAM costituiti da un numero maggiore di strati, si ottengono valori più bassi della tensione di trazione ortogonale alle fibre all'intradosso del solaio garantendo una maggiore possibilità di non provocare in questo punto la fessurazione del materiale.
- In generale, fatta eccezione per la piastra isotropa per la quale occorre verificare in aggiunta la tensione di trazione ortogonale alle fibre, la verifica più severa è quella di deformazione per pannelli XLAM costituiti da un basso numero di strati e quella alle vibrazioni per un maggior numero di strati.
- La scelta della soluzione progettuale da utilizzare per luci superiori a 4x5 metri è dettata dunque dal soddisfacimento della verifica alle vibrazioni impiegando il minor numero di strati.

Nell'ipotesi di dover coprire un'area di solaio di geometria rettangolare, avente un rapporto tra lato minore e lato maggiore di circa 1,2, si vuole mostrare ora la differenza del numero di strati richiesti dal calcolo bidirezionale utilizzando le tre diverse soluzioni progettuali analizzate: *Trave*, *Piastra isotropa* e *Piastra ortotropia*.

Sulla base dei valori ottenuti al al paragrafo 8.7 per il calcolo bidirezionale si ottengono i risultati rappresentati in Figura 74:

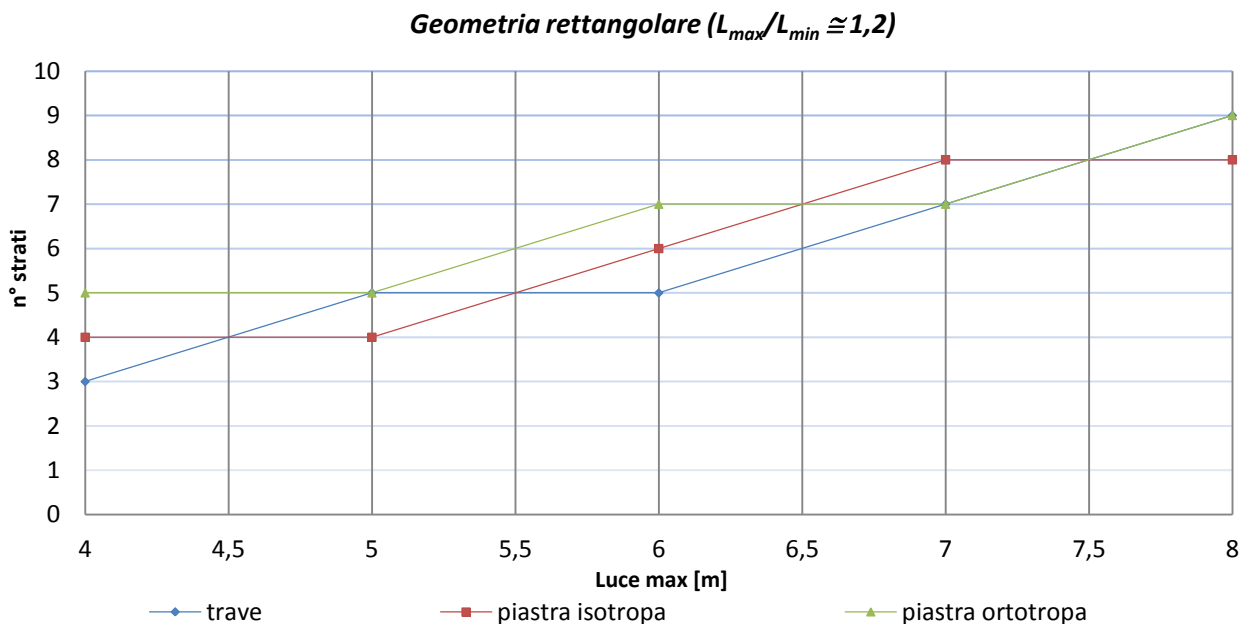


Figura 74 - Confronto del numero di strati richiesti dal calcolo bidirezionale nel caso di piastra di geometria rettangolare

Dal grafico è possibile vedere come le considerazioni fatte fino ad ora siano confermate:

- Per piccole luci (3x4 metri) conviene utilizzare il modello a trave poiché la piastra ortotropa richiederebbe l'utilizzo di 5 strati a causa dei valori di deformazione troppo elevati che si avrebbero con l'applicazione di soli 3 strati. Il modello a piastra isotropa richiederebbe comunque l'applicazione di 4 strati che rappresentano il numero minimo che soddisfa tutte le verifiche.
- Come detto in precedenza per la luce di 4x5 metri è possibile utilizzare il modello a piastra isotropa potendo arrivare fino a quasi 7 metri di luce in direzione maggiore.
- Per luci superiori ai 4x5 metri la soluzione progettuale che ha convenienza ad essere utilizzata dipende da quale delle tre soddisfa la verifica alle vibrazioni. Si vede che fino alla luce di 7x8 metri è conveniente l'utilizzo del modello a trave e in un caso (6x7 metri) oltre al modello a trave è possibile utilizzare il modello di piastra ortotropa.

Fatta eccezione per i casi in cui è conveniente l'utilizzo della piastra isotropa, è evidente come in generale il modello a trave sia più efficace di quello di piastra ortotropa. Per i casi in cui entrambi richiedono lo stesso numero di strati sta al progettista quale delle due adottare, tenendo presente che con la piastra isotropa si ha un migliore sfruttamento del materiale in entrambe le direzioni principali della piastra ma anche valori maggiori di deformazione e minori di frequenze naturali di vibrazione.

Inoltre il fatto di avere complessivamente un grado di utilizzazione maggiore a parità di prestazioni esclude la possibilità di sfruttare una (seppur ridotta) sovrarresistenza.



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### 9.5 *Sviluppi futuri della ricerca*

La seguente trattazione si è concentrata sull'inquadramento teorico e lo studio parametrico attraverso calcoli analitici del possibile utilizzo dei pannelli strutturali XLAM come elementi di piastra, cercando di capire i possibili vantaggi e svantaggi di questo tipo di applicazione.

- A conferma dei risultati ottenuti analiticamente è auspicabile un approfondimento sperimentale.
- Un altro aspetto che va sicuramente approfondito attraverso le prove sperimentali è quello relativo alla tensione di trazione ortogonale alle fibre, che nel caso di elementi costituiti da un numero di strati pari viene a trovarsi applicata in corrispondenza dell'intradosso del solaio. Nei calcoli effettuati in questa trattazione si è assunto che tale tensione debba essere minore della resistenza di calcolo a trazione ortogonale alle fibre, ma la presenza dello strato di colla che lega questo strato disposto trasversalmente a quello superiore potrebbe incrementarne la resistenza per confinamento. Occorre capire inoltre in che modo la fessurazione trasversale interagisce con la resistenza in direzione parallela alle fibre. Un'eventuale assenza di interazione sposterebbe tale verifica dallo *stato limite ultimo* allo *stato limite di esercizio*, portando a dei risultati meno penalizzanti.
- Un ultimo aspetto ma sicuramente di primissima importanza è quello legato alla connessione dei pannelli XLAM per poter realizzare geometrie di solaio con dimensioni in entrambe le direzioni che vanno oltre i limiti imposti dalla dimensione massima di produzione e trasporto. Per poter realizzare elementi di piastra che richiedono più di un pannello XLAM è necessario realizzare un giunto rigido in grado di assicurare la continuità della rigidezza flessionale; i giunti dovranno quindi essere concepiti e dimensionati in modo da garantire una sufficiente rigidezza e resistenza tanto a flessione quanto a taglio. Per soprassedere ai limiti di produzione e trasporto, lo studio di questo tipo di giunti potrebbe partire ad esempio dalla possibilità di realizzare i collegamenti tra i pannelli in opera o a piè d'opera, predisponendo in stabilimento i pannelli con opportune sagomature per consentirne l'incastro e l'unione attraverso viteria o resine.
- Tutti i calcoli fatti in questa trattazione si sono basati sulla validità dell'ipotesi di Bernoulli sulla planarità delle sezioni inflesse. Ulteriori studi, comprese osservazioni sperimentali, sono necessari per comprendere la veridicità di tali ipotesi in elementi fortemente disomogenei come i pannelli XLAM.



**Solai strutturali in legno lamellare incrociato:  
inquadramento teorico e comparazioni progettuali**

Alessandro Baronio 750895

---

# ***ALLEGATI***

***Programmi di calcolo in linguaggio Mathcad***

## A1. Calcolo delle matrici [A], [B] e [D]

### Con "rolling shear"

PROPRIETA' MECCANICHE DI UN LAMINATO IN XLAM (C24 - UNI EN 338)

$s_{xx} := 33$	spessore di una lamella [mm]
$EL := 11000$	modulo elastico longitudinale parallelo alle fibre [MPa]
$ET := 370$	modulo elastico longitudinale perpendicolare alle fibre [MPa]
$GLT := 690$	modulo elastico tangenziale [MPa]
$\nu_{LT} := 0.1$	coefficiente di Poisson long-trasv [-]

$$E := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu_{LT}^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu_{LT} \cdot \frac{ET}{1 - \nu_{LT}^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu_{LT} \cdot \frac{ET}{1 - \nu_{LT}^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu_{LT}^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & GLT \end{bmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1.103 \times 10^4 & 111.337 & 0 \\ 111.337 & 371.123 & 0 \\ 0 & 0 & 690 \end{pmatrix}$$

$$E(\theta) := \begin{bmatrix} E_{0,0} \cdot \cos(\theta)^4 + E_{1,1} \cdot \sin(\theta)^4 + 2 \cdot (E_{0,1} + 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \sin(\theta)^2 \cdot \cos(\theta)^2 \\ (E_{0,0} + E_{1,1} - 4 \cdot E_{2,2}) \cdot \sin(\theta)^2 \cdot \cos(\theta)^2 + E_{0,1} \cdot (\sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4) \\ (E_{0,0} - E_{0,1} - 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)^3 - (E_{1,1} - E_{0,1} - 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \sin(\theta)^3 \cdot \cos(\theta) \\ (E_{0,0} + E_{1,1} - 4 \cdot E_{2,2}) \cdot \sin(\theta)^2 \cdot \cos(\theta)^2 + E_{0,1} \cdot (\sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4) \\ E_{0,0} \cdot \sin(\theta)^4 + E_{1,1} \cdot \cos(\theta)^4 + 2 \cdot (E_{0,1} + 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \sin(\theta)^2 \cdot \cos(\theta)^2 \\ (E_{0,0} - E_{0,1} - 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^3 - (E_{1,1} - E_{0,1} - 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \cos(\theta)^3 \cdot \sin(\theta) \\ (E_{0,0} - E_{0,1} - 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)^3 - (E_{1,1} - E_{0,1} - 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \sin(\theta)^3 \cdot \cos(\theta) \\ (E_{0,0} - E_{0,1} - 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)^3 - (E_{1,1} - E_{0,1} - 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \cos(\theta)^3 \cdot \sin(\theta) \\ (E_{0,0} + E_{1,1} - 2 \cdot E_{0,1} - 2 \cdot E_{2,2}) \cdot \sin(\theta)^2 \cdot \cos(\theta)^2 + E_{2,2} \cdot (\sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4) \end{bmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := (0)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 1$$

$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 16.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$i := 1..n + 1$$

$$h(i) := -y_g + s \cdot (i + 1) \quad \text{distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]}$$

$$z(i) := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2} \quad \text{distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]}$$

$$E(i) := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (\theta_i)\right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( GLT \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{GLT}{10} \end{bmatrix}$$

$$A := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s) \quad A = \begin{pmatrix} 3.641 \times 10^5 & 3.674 \times 10^3 & 0 \\ 3.674 \times 10^3 & 1.225 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2.277 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$B := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s \cdot z(k)) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E\theta(k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right) \quad D = \begin{pmatrix} 3.304 \times 10^7 & 3.334 \times 10^5 & 0 \\ 3.334 \times 10^5 & 1.111 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 2.066 \times 10^6 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 2$$

$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 33 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$i := 1..n + 1$$

$$h(i) := -y_g + s \cdot (i + 1) \quad \text{distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]}$$

$$z(i) := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2} \quad \text{distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]}$$

$$E(i) := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (\theta_i)\right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( GLT \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{GLT}{10} \end{bmatrix}$$

$$A := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s) \quad A = \begin{pmatrix} 3.763 \times 10^5 & 7.348 \times 10^3 & -2.461 \times 10^{-13} \\ 7.348 \times 10^3 & 3.763 \times 10^5 & 2.179 \times 10^{-11} \\ -2.461 \times 10^{-13} & 2.179 \times 10^{-11} & 2.505 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$B := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s \cdot z(k)) \quad B = \begin{pmatrix} -5.806 \times 10^6 & 0 & -4.06 \times 10^{-12} \\ 0 & 5.806 \times 10^6 & 3.595 \times 10^{-10} \\ -4.06 \times 10^{-12} & 3.595 \times 10^{-10} & -3.381 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$D := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E\theta(k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right) \quad D = \begin{pmatrix} 1.366 \times 10^8 & 2.667 \times 10^6 & -8.933 \times 10^{-11} \\ 2.667 \times 10^6 & 1.366 \times 10^8 & 7.91 \times 10^{-9} \\ -8.933 \times 10^{-11} & 7.91 \times 10^{-9} & 9.092 \times 10^6 \end{pmatrix}$$





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$y_g := \frac{s \cdot n}{2}$$

$$y_g = 49.5$$

baricentro geometrico del composto [mm]

$$i := 1..n + 1$$

$$h(i) := -y_g + s \cdot (i + 1)$$

distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$z(i) := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2}$$

distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$E(i) := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (\theta_i)\right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( GLT \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{GLT}{10} \end{bmatrix}$$

$$A := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s)$$

$$A = \begin{pmatrix} 7.405 \times 10^5 & 1.102 \times 10^4 & -2.461 \times 10^{-13} \\ 1.102 \times 10^4 & 3.886 \times 10^5 & 2.179 \times 10^{-11} \\ -2.461 \times 10^{-13} & 2.179 \times 10^{-11} & 4.782 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$B := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s \cdot z(k))$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E\theta(k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 8.602 \times 10^8 & 9.003 \times 10^6 & -2.233 \times 10^{-11} \\ 9.003 \times 10^6 & 6.194 \times 10^7 & 1.977 \times 10^{-9} \\ -2.233 \times 10^{-11} & 1.977 \times 10^{-9} & 5.393 \times 10^7 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 4$$

$$y_g := \frac{s \cdot n}{2}$$

$$y_g = 66$$

baricentro geometrico del composto [mm]

$$i := 1..n + 1$$

$$h(i) := -y_g + s \cdot (i + 1)$$

distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$z(i) := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2}$$

distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$E(i) := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (\theta_i)\right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( GLT \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{GLT}{10} \end{bmatrix}$$

$$A := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s)$$

$$A = \begin{pmatrix} 7.527 \times 10^5 & 1.47 \times 10^4 & -4.922 \times 10^{-13} \\ 1.47 \times 10^4 & 7.527 \times 10^5 & 4.358 \times 10^{-11} \\ -4.922 \times 10^{-13} & 4.358 \times 10^{-11} & 5.009 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$B := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s \cdot z(k))$$

$$B = \begin{pmatrix} -1.161 \times 10^7 & 0 & -8.121 \times 10^{-12} \\ 0 & 1.161 \times 10^7 & 7.191 \times 10^{-10} \\ -8.121 \times 10^{-12} & 7.191 \times 10^{-10} & -6.763 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$D := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E\theta(k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1.093 \times 10^9 & 2.134 \times 10^7 & -7.146 \times 10^{-10} \\ 2.134 \times 10^7 & 1.093 \times 10^9 & 6.328 \times 10^{-8} \\ -7.146 \times 10^{-10} & 6.328 \times 10^{-8} & 7.274 \times 10^7 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \right)^T$$

$$\underline{n} := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 5$$

$$\underline{y}_g := \frac{s \cdot n}{2}$$

$$y_g = 82.5$$

baricentro geometrico del composto [mm]

$$i := 1..n + 1$$

$$\underline{h}(i) := -y_g + s \cdot (i + 1)$$

distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$\underline{z}(i) := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2}$$

distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$\underline{E}(i) := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (\theta_i)\right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( GLT \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{GLT}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.117 \times 10^6 & 1.837 \times 10^4 & -4.922 \times 10^{-13} \\ 1.837 \times 10^4 & 7.649 \times 10^5 & 4.358 \times 10^{-11} \\ -4.922 \times 10^{-13} & 4.358 \times 10^{-11} & 7.286 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s \cdot z(k))$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2.91 \times 10^{-11} & 0 \\ 2.91 \times 10^{-11} & 1.164 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E\theta(k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 3.3 \times 10^9 & 4.168 \times 10^7 & -5.806 \times 10^{-10} \\ 4.168 \times 10^7 & 9.691 \times 10^8 & 5.141 \times 10^{-8} \\ -5.806 \times 10^{-10} & 5.141 \times 10^{-8} & 2.099 \times 10^8 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \right)^T$$

$$\underline{n} := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 6$$

$$\underline{y}_g := \frac{s \cdot n}{2}$$

$$y_g = 99$$

baricentro geometrico del composto [mm]

$$i := 1..n + 1$$

$$\underline{h}(i) := -y_g + s \cdot (i + 1)$$

distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$\underline{z}(i) := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2}$$

distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$\underline{E}(i) := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu LT^2 \cdot \left( \frac{ET}{EL} \right)} & \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left( \frac{ET}{EL} \right)} & 0 \\ \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left( \frac{ET}{EL} \right)} & \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left( \frac{ET}{EL} \right)} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\left[ \frac{\pi}{2} - (\theta_i) \right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( GLT \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{GLT}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.129 \times 10^6 & 2.204 \times 10^4 & -7.382 \times 10^{-13} \\ 2.204 \times 10^4 & 1.129 \times 10^6 & 6.537 \times 10^{-11} \\ -7.382 \times 10^{-13} & 6.537 \times 10^{-11} & 7.514 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s \cdot z(k))$$

$$B = \begin{pmatrix} -1.742 \times 10^7 & -5.821 \times 10^{-11} & -1.218 \times 10^{-11} \\ -5.821 \times 10^{-11} & 1.742 \times 10^7 & 1.079 \times 10^{-9} \\ -1.218 \times 10^{-11} & 1.079 \times 10^{-9} & -1.014 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E\theta(k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 3.689 \times 10^9 & 7.202 \times 10^7 & -2.412 \times 10^{-9} \\ 7.202 \times 10^7 & 3.689 \times 10^9 & 2.136 \times 10^{-7} \\ -2.412 \times 10^{-9} & 2.136 \times 10^{-7} & 2.455 \times 10^8 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$y_g := \frac{s \cdot n}{2}$$

$$y_g = 115.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$i := 1..n + 1$$

$$h(i) := -y_g + s \cdot (i + 1)$$

distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$z(i) := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2}$$

distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$E(i) := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (\theta_i)\right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( GLT \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{GLT}{10} \end{bmatrix}$$

$$A := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.493 \times 10^6 & 2.572 \times 10^4 & -7.382 \times 10^{-13} \\ 2.572 \times 10^4 & 1.141 \times 10^6 & 6.537 \times 10^{-11} \\ -7.382 \times 10^{-13} & 6.537 \times 10^{-11} & 9.791 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$B := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s \cdot z(k))$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5.821 \times 10^{-11} & 0 \\ 5.821 \times 10^{-11} & -1.63 \times 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E\theta(k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 8.172 \times 10^9 & 1.144 \times 10^8 & -2.211 \times 10^{-9} \\ 1.144 \times 10^8 & 3.542 \times 10^9 & 1.958 \times 10^{-7} \\ -2.211 \times 10^{-9} & 1.958 \times 10^{-7} & 5.247 \times 10^8 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \right)^T$$

$$\underline{n} := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 8$$

$$\underline{y}_g := \frac{s \cdot n}{2}$$

$$y_g = 132$$

baricentro geometrico del composto [mm]

$$i := 1..n + 1$$

$$\underline{h}(i) := -y_g + s \cdot (i + 1)$$

distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$\underline{z}(i) := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2}$$

distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]

$$\underline{E}(i) := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (\theta_i)\right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( GLT \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{GLT}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.505 \times 10^6 & 2.939 \times 10^4 & -9.843 \times 10^{-13} \\ 2.939 \times 10^4 & 1.505 \times 10^6 & 8.716 \times 10^{-11} \\ -9.843 \times 10^{-13} & 8.716 \times 10^{-11} & 1.002 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s \cdot z(k))$$

$$B = \begin{pmatrix} -2.322 \times 10^7 & 5.821 \times 10^{-11} & -1.624 \times 10^{-11} \\ 5.821 \times 10^{-11} & 2.322 \times 10^7 & 1.438 \times 10^{-9} \\ -1.624 \times 10^{-11} & 1.438 \times 10^{-9} & -1.353 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E\theta(k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 8.743 \times 10^9 & 1.707 \times 10^8 & -5.717 \times 10^{-9} \\ 1.707 \times 10^8 & 8.743 \times 10^9 & 5.062 \times 10^{-7} \\ -5.717 \times 10^{-9} & 5.062 \times 10^{-7} & 5.819 \times 10^8 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \right)^T$$

$$\underline{n} := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 9$$

$$\underline{y}_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 148.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$i := 1..n + 1$$

$$\underline{h}(i) := -y_g + s \cdot (i + 1) \quad \text{distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]}$$

$$\underline{z}(i) := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2} \quad \text{distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]}$$

$$E(i) := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu LT \cdot \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu LT^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (\theta_i)\right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( GLT \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{GLT}{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s) \quad A = \begin{pmatrix} 1.869 \times 10^6 & 3.307 \times 10^4 & -9.843 \times 10^{-13} \\ 3.307 \times 10^4 & 1.518 \times 10^6 & 8.716 \times 10^{-11} \\ -9.843 \times 10^{-13} & 8.716 \times 10^{-11} & 1.23 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} := \sum_{k=0}^{n-1} (E\theta(k) \cdot s \cdot z(k)) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1.164 \times 10^{-10} & 0 \\ 1.164 \times 10^{-10} & -7.218 \times 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E\theta(k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right) \quad D = \begin{pmatrix} 1.63 \times 10^{10} & 2.431 \times 10^8 & -5.449 \times 10^{-9} \\ 2.431 \times 10^8 & 8.601 \times 10^9 & 4.825 \times 10^{-7} \\ -5.449 \times 10^{-9} & 4.825 \times 10^{-7} & 1.053 \times 10^9 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### Senza "rolling shear"

Il calcolo delle matrici del laminato nel caso in cui non venga considerato l'effetto del taglio epr rotolamento utilizza la stessa procedura di calcolo vista fin'ora con la differenza che al termine  $E_{3,3}$  della matrice  $[E]$  non compare più il coefficiente:

$$\left| \begin{array}{c} \left[ \frac{\pi}{2} - (\theta_i) \right] \\ \frac{\pi}{2} \end{array} \right| \cdot \left( \text{GLT} \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10}$$

Si riporta in questo caso un solo esempio per l'elemento da 5 strati:

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \right)^T$$

$$\underline{n} := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 5$$

$$\underline{y_g} := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 82.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$i := 1..n + 1$$

$$\underline{h(i)} := -y_g + s \cdot (i - 1) \quad \text{distanza del lato esterno di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]}$$

$$\underline{z(i)} := -y_g + s \cdot i + \frac{s}{2} \quad \text{distanza del baricentro di ogni lamella rispetto al baricentro totale [mm]}$$

$$\underline{A} := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E(\theta_k) \cdot s \right) \quad A = \begin{pmatrix} 1.117 \times 10^6 & 1.837 \times 10^4 & 4.527 \times 10^{-12} \\ 1.837 \times 10^4 & 7.649 \times 10^5 & 3.856 \times 10^{-11} \\ 4.527 \times 10^{-12} & 3.856 \times 10^{-11} & 1.139 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E(\theta_k) \cdot s \cdot z(k) \right) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2.91 \times 10^{-11} & 0 \\ 2.91 \times 10^{-11} & 1.164 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} := \sum_{k=0}^{n-1} \left( E(\theta_k) \cdot \frac{h(k)^3 - h(k-1)^3}{3} \right) \quad D = \begin{pmatrix} 3.3 \times 10^9 & 4.168 \times 10^7 & 5.341 \times 10^{-9} \\ 4.168 \times 10^7 & 9.691 \times 10^8 & 4.549 \times 10^{-8} \\ 5.341 \times 10^{-9} & 4.549 \times 10^{-8} & 2.583 \times 10^8 \end{pmatrix}$$





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### A2. Calcolo dei fattori di taglio e della matrice [C]

*Con rotolamento\_x*

PROPRIETA' MECCANICHE DI UN LAMINATO IN XLAM (C24 - UNI EN 338)

- $s_{AA} := 33$  spessore di una lamella [mm]
- $EL := 11000$  modulo elastico longitudinale parallelo alle fibre [MPa]
- $ET := 370$  modulo elastico longitudinale perpendicolare alle fibre [MPa]
- $GLT := 690$  modulo elastico tangenziale [MPa]
- $\nu_{LT} := 0.1$  coefficiente di Poisson long-trasv [-]

$$E := \begin{bmatrix} \frac{EL}{1 - \nu_{LT}^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \nu_{LT} \cdot \frac{ET}{1 - \nu_{LT}^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ \nu_{LT} \cdot \frac{ET}{1 - \nu_{LT}^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & \frac{ET}{1 - \nu_{LT}^2 \cdot \left(\frac{ET}{EL}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & GLT \end{bmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1.103 \times 10^4 & 111.337 & 0 \\ 111.337 & 371.123 & 0 \\ 0 & 0 & 690 \end{pmatrix}$$

$$G := \begin{pmatrix} GLT & 0 \\ 0 & \frac{GLT}{10} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 690 & 0 \\ 0 & 69 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := (0)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 1$$

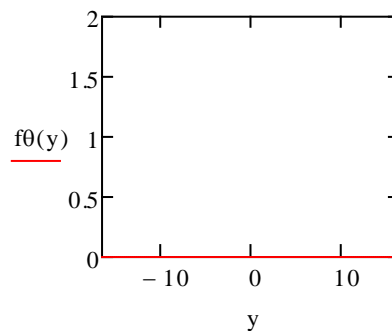
$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 16.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\frac{\pi}{2} - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s) \quad C = \begin{pmatrix} 2.277 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 2.277 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}[y + y_g < s \cdot 1, \theta_0, \theta_1]$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\chi^x := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 1.2$$

$$\kappa_x := \frac{1}{\chi^x} = 0.833$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 2$$

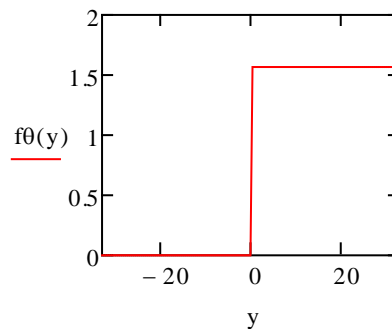
$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 33 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\frac{\pi}{2} - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s) \quad C = \begin{pmatrix} 2.505 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 2.505 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}[(y + y_g < s \cdot 1), \theta_0, \theta_1]$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\chi_x := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 3.63$$

$$k_x := \frac{1}{\chi_x} = 0.275$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 3$$

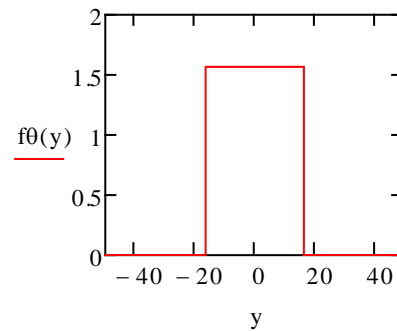
$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 49.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\frac{\pi}{2} - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s) \quad C = \begin{pmatrix} 4.782 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 2.732 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}(y + y_g < s \cdot 1, \theta_0, \text{if}(y + y_g < s \cdot 2, \theta_1, \theta_2))$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\chi_X := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 5.227$$

$$\kappa_X := \frac{1}{\chi_X} = 0.191$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 4$$

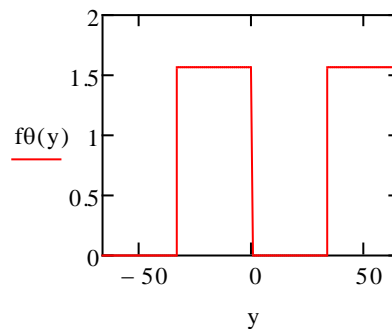
$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 66 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\left[ \frac{\pi}{2} - (\theta) \right]}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s) \quad C = \begin{pmatrix} 5.009 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 5.009 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}(y + y_g < s \cdot 1, \theta_0, \text{if}(y + y_g < s \cdot 2, \theta_1, \text{if}(y + y_g < s \cdot 3, \theta_2, \theta_3)))$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\chi_x := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 3.63$$

$$k_x := \frac{1}{\chi_x} = 0.275$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 5$$

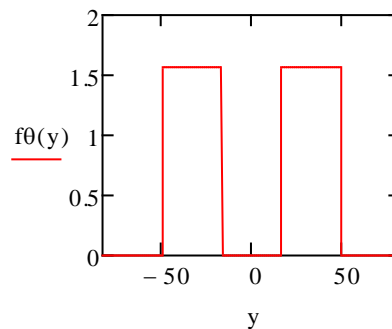
$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 82.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\frac{\pi}{2} - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s) \quad C = \begin{pmatrix} 7.286 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 5.237 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}(y + y_g < s \cdot 1, \theta_0, \text{if}(y + y_g < s \cdot 2, \theta_1, \text{if}(y + y_g < s \cdot 3, \theta_2, \text{if}(y + y_g < s \cdot 4, \theta_3, \theta_4))))$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\chi_X := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 4.356$$

$$\kappa_X := \frac{1}{\chi_X} = 0.23$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 6$$

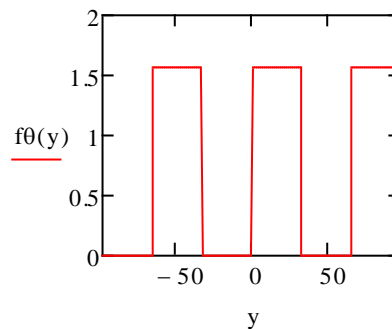
$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 99 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\frac{\pi}{2} - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s) \quad C = \begin{pmatrix} 7.514 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 7.514 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}(y + y_g < s \cdot 1, \theta_0, \text{if}(y + y_g < s \cdot 2, \theta_1, \text{if}(y + y_g < s \cdot 3, \theta_2, \text{if}(y + y_g < s \cdot 4, \theta_3, \text{if}(y + y_g < s \cdot 5, \theta_4, \theta_5))))))$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\chi_X := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 3.63$$

$$k_X := \frac{1}{\chi_X} = 0.275$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 7$$

$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 115.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

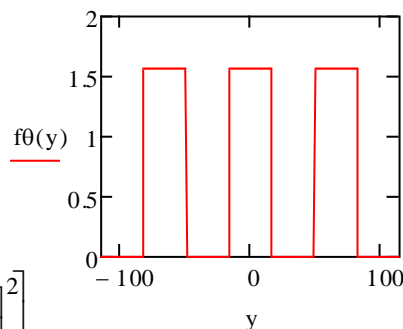
$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\frac{\pi}{2} - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s) \quad C = \begin{pmatrix} 9.791 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 7.742 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}(y + y_g < s \cdot 1, \theta_0, \text{if}(y + y_g < s \cdot 2, \theta_1, \text{if}(y + y_g < s \cdot 3, \theta_2,$$

$$\text{if}(y + y_g < s \cdot 4, \theta_3, \text{if}(y + y_g < s \cdot 5, \theta_4, \text{if}(y + y_g < s \cdot 6, \theta_5, \theta_6))))))$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\chi_x := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 4.101$$

$$k_{xx} := \frac{1}{\chi_x} = 0.244$$





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 8$$

$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 132 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

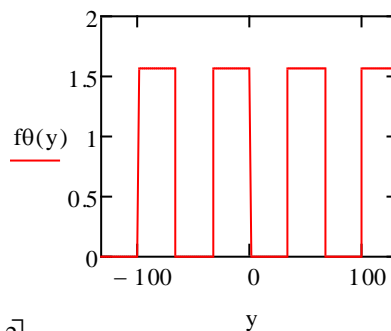
$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\frac{\pi}{2} - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1.002 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 1.002 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}(y + y_g < s \cdot 1, \theta_0, \text{if}(y + y_g < s \cdot 2, \theta_1, \text{if}(y + y_g < s \cdot 3, \theta_2, \text{if}(y + y_g < s \cdot 4, \theta_3,$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases} \quad , \text{if}(y + y_g < s \cdot 5, \theta_4, \text{if}(y + y_g < s \cdot 6, \theta_5, \text{if}(y + y_g < s \cdot 7, \theta_6, \theta_7))))))$$



$$\chi_x := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 3.63$$

$$\kappa_x := \frac{1}{\chi_x} = 0.275$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$\theta := \left( 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 9$$

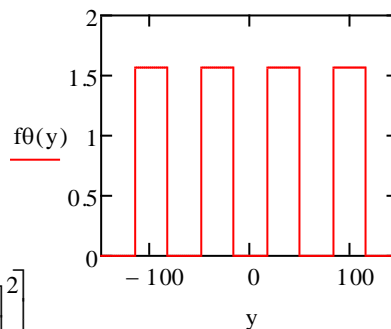
$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 148.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\frac{\pi}{2} - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s) \quad C = \begin{pmatrix} 1.23 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 1.025 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}(y + y_g < s \cdot 1, \theta_0, \text{if}(y + y_g < s \cdot 2, \theta_1, \text{if}(y + y_g < s \cdot 3, \theta_2, \text{if}(y + y_g < s \cdot 4, \theta_3, \text{if}(y + y_g < s \cdot 5, \theta_4, \\ \text{if}(y + y_g < s \cdot 6, \theta_5, \text{if}(y + y_g < s \cdot 7, \theta_6, \text{if}(y + y_g < s \cdot 8, \theta_7, \theta_8))))))))))$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\chi_X := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 3.982$$

$$k_X := \frac{1}{\chi_X} = 0.251$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### Con rotolamento\_y

Per il calcolo dei fattori di taglio in direzione y basta invertire i valori del vettore  $\theta$ .

Si riporta in questo caso un solo esempio per l'elemento da 5 strati:

$$\theta := \left( \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \right)^T$$

$$n := \text{rows}(\theta)$$

$$n = 5$$

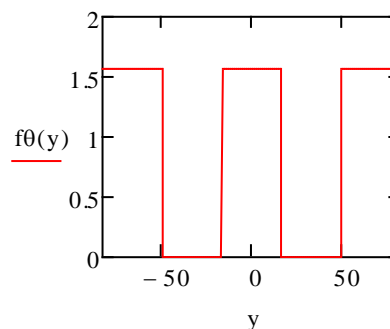
$$y_g := \frac{s \cdot n}{2} \quad y_g = 82.5 \quad \text{baricentro geometrico del composto [mm]}$$

$$G(\theta) := \begin{bmatrix} \left| \frac{\frac{\pi}{2} - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} & 0 \\ 0 & \left| \frac{0 - (\theta)}{\frac{\pi}{2}} \right| \cdot \left( \text{GLT} \cdot \frac{9}{10} \right) + \frac{\text{GLT}}{10} \end{bmatrix}$$

$$C := \sum_{k=0}^{n-1} (G(\theta_k) \cdot s) \quad C = \begin{pmatrix} 5.237 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 7.286 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$f\theta(y) := \text{if}(y + y_g < s \cdot 1, \theta_0, \text{if}(y + y_g < s \cdot 2, \theta_1, \text{if}(y + y_g < s \cdot 3, \theta_2, \text{if}(y + y_g < s \cdot 4, \theta_3, \theta_4))))$$

$$G(y) := \begin{cases} \text{GLT} & \text{if } f\theta(y) = 0 \\ \frac{\text{GLT}}{10} & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\chi_{y0,0} := C_{0,0} \cdot \frac{1}{4 \left[ \frac{(n \cdot s)^3}{12} \right]^2} \int_{-\frac{n \cdot s}{2}}^{\frac{n \cdot s}{2}} \frac{\left[ \frac{(n \cdot s)^2}{4} - y^2 \right]^2}{G(y)} dy = 2.941$$

$$k_y := \frac{1}{\chi_y} = 0.34$$



**Solai strutturali in legno lamellare incrociato:  
inquadramento teorico e comparazioni progettuali**

Alessandro Baronio 750895

**A3. Esempio di calcolo: teoria di Kirchhoff – geometria quadrata – con  
“rolling shear”**

▪ **Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione**

**PIASTRA RETTANGOLARE PIENA APPOGGIATA SU TUTTI I LATI**

**SOLUZIONE DI NAVIER IN SERIE DOPPIA DI FOURIER**

**4 STRATI**

$a := 400$	mm	LATO MINORE
$b := 400$	mm	LATO MAGGIORE
$s_{AA} := 132$	mm	SPESSORE DELLA PIASTRA

$D_x := 1.09310^9$  rigidezza flessionale ( $D_{0,0}$ ) [Nmm]

$D_y := 1.09310^9$  rigidezza flessionale ( $D_{1,1}$ ) [Nmm]

$D_{xy} := 2.13410^7$  rigidezza flessionale ( $D_{0,1}$ ) [Nmm]

$G_{xy} := 7.27410^7$  rigidezza torsionale ( $D_{2,2}$ ) [Nmm]

$H := D_{xy} + 2 \cdot G_{xy}$

$q := 0.00552$  N/mm<sup>2</sup> CARICO DISTRIBUITO SU UNA PORZIONE DI PIASTRA

$x_1 := c$  ASCISSA INIZIALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO

$x_2 := a$  ASCISSA FINALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO

$y_1 := c$  ORDINATA INIZIALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO

$y_2 := b$  ORDINATA FINALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO

$$p_{mn}(m,n) := \frac{4 \cdot q}{a \cdot b} \cdot \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) dx dy$$

$$a_{mn}(m,n) := \frac{p_{mn}(m,n)}{\left(\frac{m^4 \cdot \pi^4}{a^4}\right) \cdot D_x + 2 \cdot \left(\frac{m^2 \cdot n^2 \cdot \pi^4}{a^2 \cdot b^2}\right) \cdot H + \left(\frac{n^4 \cdot \pi^4}{b^4}\right) \cdot D_y}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right)$$

$$\phi_x(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left( amn(m, n) \cdot \cos\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \cdot m \cdot \frac{\pi}{a} \right]$$

$$\phi_y(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left( amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \cdot n \cdot \frac{\pi}{b} \right]$$

$$M_x(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ D_x \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_{xy} \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \cdot amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

$$M_y(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ D_{xy} \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_y \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \cdot amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

$$M_{xy}(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ \left(\frac{m\pi}{a} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot amn(m, n) \cdot \cos\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \cdot (2 \cdot G_{xy}) \right] \right]$$

$$V_x(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ H \cdot m \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_x \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \right] \cdot amn(m, n) \cdot \cos\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

$$V_y(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ H \cdot n \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_y \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 \right] \cdot amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

$$m := 15 \quad n := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 9.196 \quad \text{mm}$$

$$M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 5.982 \times 10^3 \quad \text{Nmm/mm}$$

$$M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 5.982 \times 10^3 \quad \text{Nmm/mm}$$

$$V_x\left(0, \frac{b}{2}, m, n\right) = 7.475 \quad \text{N/mm}$$

$$V_y\left(\frac{a}{2}, 0, m, n\right) = 7.475 \quad \text{N/mm}$$



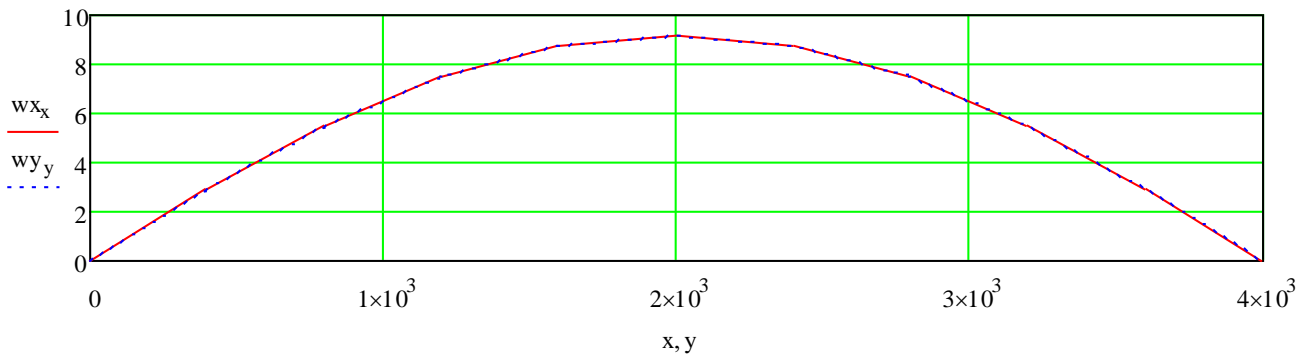
## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

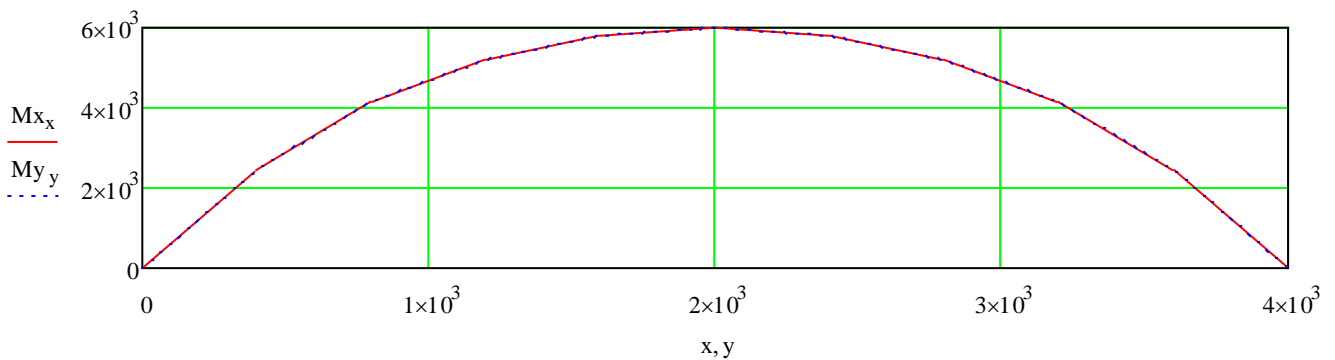
$i := 10$       punti di calcolo su ogni lato (consigliato minimo 10)

$$x := 0, \frac{a}{i} .. a \qquad y := 0, \frac{b}{i} .. b$$

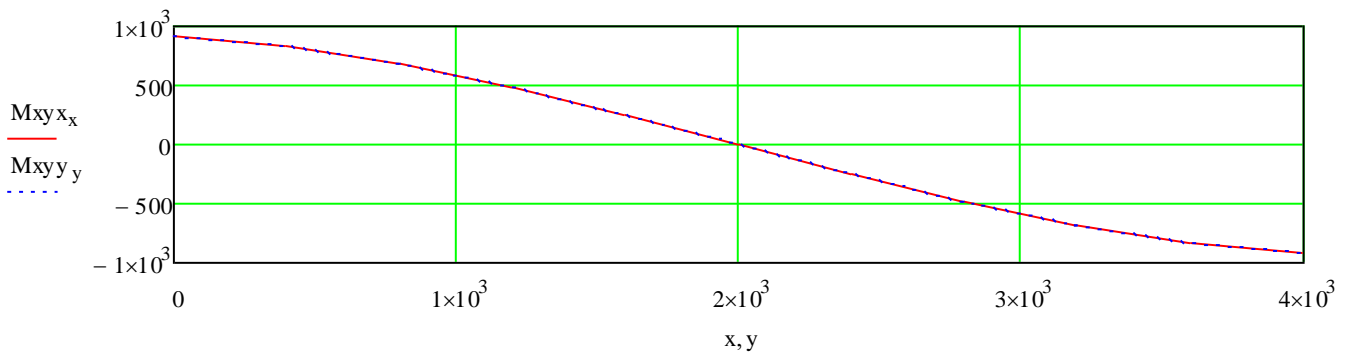
$$w_{x_x} := w\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \qquad w_{y_y} := w\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



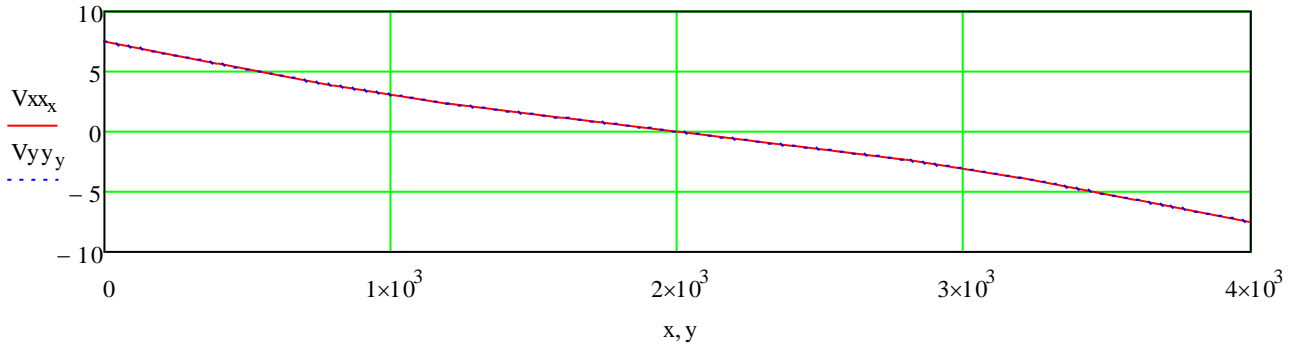
$$M_{x_x} := M_x\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \qquad M_{y_y} := M_y\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



$$M_{xy_x} := M_{xy}(x, b, m, n) \qquad M_{xy_y} := M_{xy}(a, y, m, n)$$



$$V_{xx_x} := V_x\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \quad V_{yy_y} := V_y\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



▪ **Calcolo delle tensioni**

$$P := \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & D_{0,0} & D_{0,1} & D_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & D_{1,0} & D_{1,1} & D_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix} \quad F := (0 \ 0 \ 0 \ 5982 \ 5982 \ 0)^T$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} := P^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} 1.01 \times 10^{-4} \\ -1.01 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 6.421 \times 10^{-6} \\ 6.421 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

lembo compresso

$$z := yg$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} := -E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \cdot E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.62 \\ 0.231 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.103 \\ -0.026 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z \cdot E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.723 \\ 0.204 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lembo teso

$$z := -yg$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} := -E\theta(3) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \cdot E\theta(3) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.231 \\ -3.62 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E\theta(3) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.026 \\ -1.103 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z \cdot E\theta(3) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.204 \\ -4.723 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### ▪ *Calcolo delle deformazioni*

$G_k := 0.00176 \quad \text{N/mm}^2 \quad \text{CARICHI PERMANENTI DISTRIBUITI SU UNA PORZIONE DI PIASTRA}$

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( amn(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \quad \text{abbassamento [mm]}$$

$$m := 15 \quad n := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 2.944 \quad \text{mm}$$

$Q_k := 0.00 \quad \text{N/mm}^2 \quad \text{CARICHI VARIABILI DISTRIBUITI SU UNA PORZIONE DI PIASTRA}$

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( amn(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \quad \text{abbassamento [mm]}$$

$$m := 15 \quad n := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 3.328 \quad \text{mm}$$

### ▪ *Calcolo della frequenza naturale di vibrazione*

$M := 176.8 \quad \text{massa per unità di area [kg/m}^2\text{]}$

$$\text{freq}(m, n) := \frac{\pi}{2 \cdot \left(\frac{a}{1000}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{D_x}{1000} \cdot m^4 + 2 \cdot \frac{H}{1000} \cdot m^2 \cdot n^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + \frac{D_y}{1000} \cdot n^4 \cdot \frac{a^4}{b^4}}{M}}$$

$\text{freq}(1, 1) = 11.718 \quad \text{Hz} \quad \text{frequenza fondamentale di risonanza della piastra}$





## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### A4. Esempio di calcolo: teoria di Kirchhoff - geometria rettangolare

#### ▪ Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione

PIASTRA RETTANGOLARE PIENA APPOGGIATA SU TUTTI I LATI

SOLUZIONE DI NAVIER IN SERIE DOPPIA DI FOURIER

#### 5 STRATI

$a := 400$	mm	LATO MINORE
$b := 500$	mm	LATO MAGGIORE
$s_s := 16$	mm	SPESSORE DELLA PIASTRA

$D_x := 3.30010^9$  rigidezza flessionale ( $D_{0,0}$ ) [Nmm]

$D_y := 9.69110^8$  rigidezza flessionale ( $D_{1,1}$ ) [Nmm]

$D_{xy} := 4.16810^7$  rigidezza flessionale ( $D_{0,1}$ ) [Nmm]

$G_{xy} := 2.09910^8$  rigidezza torsionale ( $D_{2,2}$ ) [Nmm]

$H_s := D_{xy} + 2 \cdot G_{xy}$

$q := 0.00573$  N/mm<sup>2</sup> CARICO DISTRIBUITO SU UNA PORZIONE DI PIASTRA

$x_1 := c$  ASCISSA INIZIALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO

$x_2 := a$  ASCISSA FINALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO

$y_1 := c$  ORDINATA INIZIALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO

$y_2 := b$  ORDINATA FINALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO

$$p_{mn}(m,n) := \frac{4 \cdot q}{a \cdot b} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) dx dy$$

$$a_{mn}(m,n) := \frac{p_{mn}(m,n)}{\left(\frac{4 \cdot \pi^4}{a^4}\right) \cdot D_x + 2 \cdot \left(\frac{m^2 \cdot n^2 \cdot \pi^4}{a^2 \cdot b^2}\right) \cdot H + \left(\frac{4 \cdot \pi^4}{b^4}\right) \cdot D_y}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right)$$

$$\phi_x(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left( amn(m, n) \cdot \cos\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \cdot m \cdot \frac{\pi}{a} \right]$$

$$\phi_y(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left( amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \cdot n \cdot \frac{\pi}{b} \right]$$

$$M_x(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ D_x \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_{xy} \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \cdot amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

$$M_y(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ D_{xy} \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_y \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \cdot amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

$$M_{xy}(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ \left(\frac{m\pi}{a} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot amn(m, n) \cdot \cos\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right)\right) \cdot (2 \cdot G_{xy}) \right] \right]$$

$$V_x(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ H \cdot m \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_x \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \right] \cdot amn(m, n) \cdot \cos\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

$$V_y(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ \left[ H \cdot n \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_y \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 \right] \cdot amn(m, n) \cdot \sin\left(m\pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(n\pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

$$m := 15 \quad n := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 5.489 \quad \text{mm}$$

$$M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 1.092 \times 10^4 \quad \text{Nmm/mm}$$

$$M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{4}, m, n\right) = 1.974 \times 10^3 \quad \text{Nmm/mm}$$

$$V_x\left(0, \frac{b}{2}, m, n\right) = 11.286 \quad \text{N/mm}$$

$$V_y\left(\frac{a}{2}, 0, m, n\right) = 4.751$$



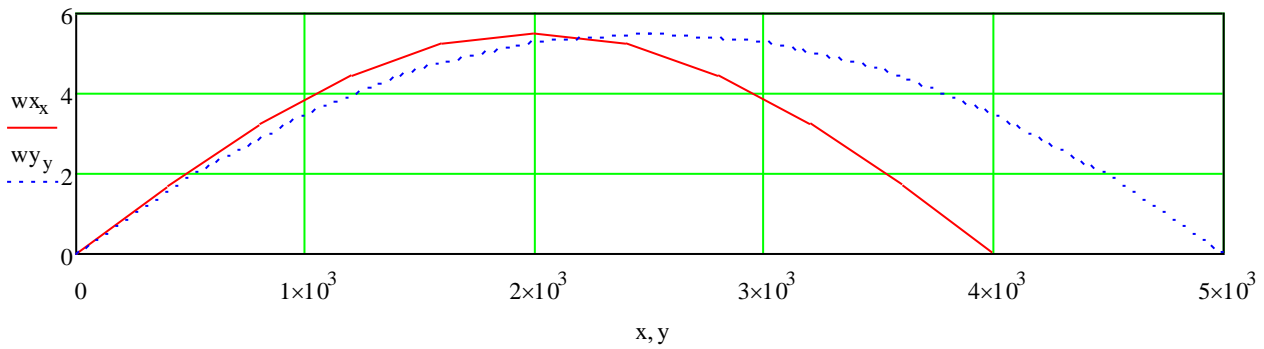
## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

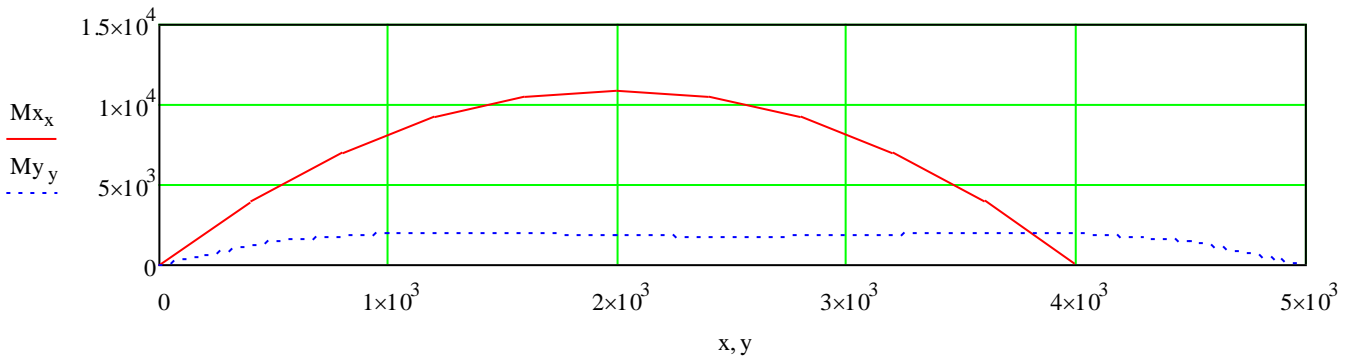
$i := 10$  punti di calcolo su ogni lato (consigliato minimo 10)

$$x := 0, \frac{a}{i} \dots a \qquad y := 0, \frac{b}{i} \dots b$$

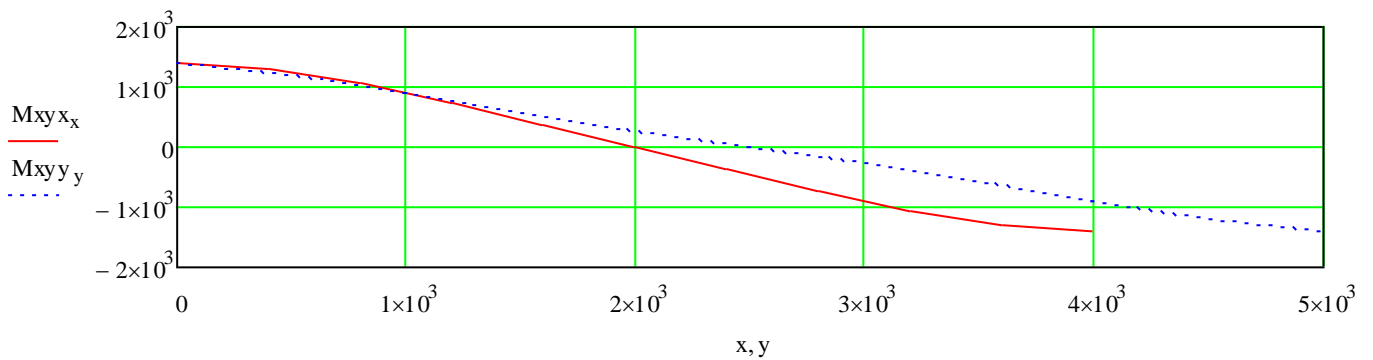
$$w_{x_x} := w\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \qquad w_{y_y} := w\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



$$M_{x_x} := M_x\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \qquad M_{y_y} := M_y\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



$$M_{xy_x} := M_{xy}(x, b, m, n) \qquad M_{xy_y} := M_{xy}(a, y, m, n)$$

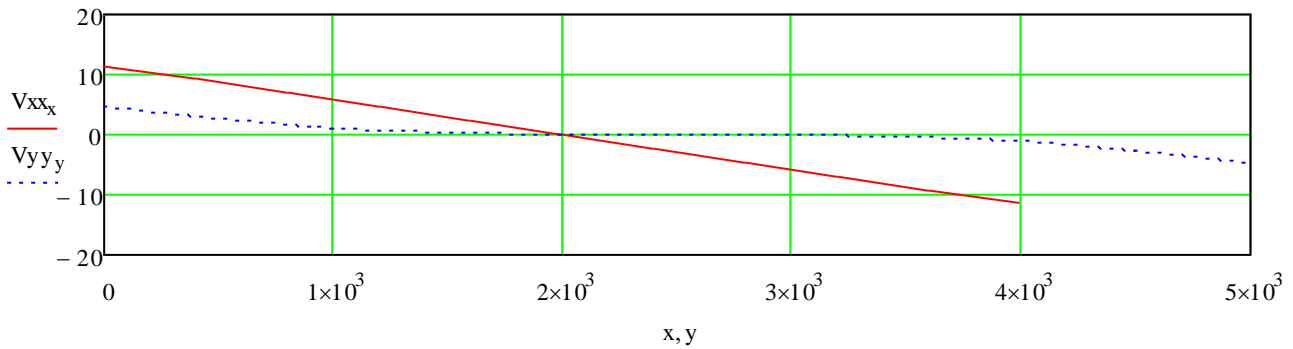




## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$V_{xx_x} := V_x\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \quad V_{yy_y} := V_y\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



### ▪ *Calcolo delle tensioni*

$$P := \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & D_{0,0} & D_{0,1} & D_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & D_{1,0} & D_{1,1} & D_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$F := (0 \ 0 \ 0 \ 10920 \ 1757 \ 0)^T$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} := P^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.288 \times 10^{-6} \\ 1.672 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z := y_g$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} := E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \cdot E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}$$

$$E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z \cdot E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.008 \\ 0.081 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z := 3 \frac{s}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} := E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \cdot E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}$$

$$E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z \cdot E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.07 \\ 0.931 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### ▪ *Calcolo delle deformazioni*

$G_k := 0.00192$  N/mm<sup>2</sup> CARICHI PERMANENTI DISTRIBUITI SU UNA PORZIONE DI PIASTRA

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( amn(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \quad \text{abbassamento [mm]}$$

$$m := 15 \quad n := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 1.845 \quad \text{mm}$$

$Q_k := 0.00$  N/mm<sup>2</sup> CARICHI VARIABILI DISTRIBUITI SU UNA PORZIONE DI PIASTRA

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( amn(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \quad \text{abbassamento [mm]}$$

$$m := 15 \quad n := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 1.915 \quad \text{mm}$$

### ▪ *Calcolo della frequenza naturale di vibrazione*

$M := 192.$  massa per unità di area [kg/m<sup>2</sup>]

$$\text{freq}(m, n) := \frac{\pi}{2 \cdot \left(\frac{a}{1000}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{D_x}{1000} \cdot m^4 + 2 \cdot \frac{H}{1000} \cdot m^2 \cdot n^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + \frac{D_y}{1000} \cdot n^4 \cdot \frac{a^4}{b^4}}{M}}$$

$\text{freq}(1, 1) = 14.644$  Hz frequenza fondamentale di risonanza della piastra



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### A5. Esempio di calcolo: teoria di Mindlin – geometria quadrata – con “rolling shear”

#### ▪ Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione

#### PIASTRA RETTANGOLARE PIENA APPOGGIATA SU TUTTI I LATI

#### SOLUZIONE DI NAVIER IN SERIE DOPPIA DI FOURIER

#### 4 STRATI

$a := 400$	mm	LATO MINORE
$b := 400$	mm	LATO MAGGIORE
$s := 13$	mm	SPESSORE DELLA PIASTRA
$D_x := 1.09310^9$		rigidezza flessionale ( $D_{0,0}$ ) [Nmm]
$D_y := 1.09310^9$		rigidezza flessionale ( $D_{1,1}$ ) [Nmm]
$D_{xy} := 2.13410^7$		rigidezza flessionale ( $D_{0,1}$ ) [Nmm]
$G_{xy} := 7.27410^7$		rigidezza torsionale ( $D_{2,2}$ ) [Nmm]
$G_{xz} := 5.009 \times 10^4$		rigidezza a taglio nel piano xz ( $C_{0,0}$ ) [Nmm]
$G_{yz} := 5.009 \times 10^4$		rigidezza a taglio nel piano yz ( $C_{1,1}$ ) [Nmm]
$\kappa_x := 0.27$		fattore di taglio nel piano xz [-]
$\kappa_y := 0.27$		fattore di taglio nel piano yz [-]
$q := 0.00552$	N/mm <sup>2</sup>	CARICO DISTRIBUITO SU UNA PORZIONE DI PIASTRA
$x_1 := c$		ASCISSA INIZIALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO
$x_2 := a$		ASCISSA FINALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO
$y_1 := c$		ORDINATA INIZIALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO
$y_2 := b$		ORDINATA FINALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$I(m, n) := \begin{bmatrix} \kappa_x \cdot G_{xz} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + \kappa_y \cdot G_{yz} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 & \kappa_x \cdot G_{xz} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) & \kappa_y \cdot G_{yz} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \\ \kappa_x \cdot G_{xz} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) & \kappa_x \cdot G_{xz} + D_x \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + G_{xy} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 & (D_{xy} + G_{xy}) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \\ \kappa_y \cdot G_{yz} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) & (D_{xy} + G_{xy}) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) & \kappa_y \cdot G_{yz} + G_{xy} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + D_y \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \end{bmatrix}$$

$$p_{mn}(m, n) := \frac{4 \cdot q}{a \cdot b} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) dx dy$$

$$a_{mn}(m, n) := \frac{p_{mn}(m, n) \cdot \left[ \left( I(m, n)_{1,2} \right)^2 - I(m, n)_{1,1} \cdot I(m, n)_{2,2} \right]}{|I(m, n)|}$$

$$b_{mn}(m, n) := \frac{p_{mn}(m, n) \cdot \left( I(m, n)_{0,1} \cdot I(m, n)_{2,2} - I(m, n)_{0,2} \cdot I(m, n)_{1,2} \right)}{|I(m, n)|}$$

$$c_{mn}(m, n) := \frac{p_{mn}(m, n) \cdot \left( I(m, n)_{0,2} \cdot I(m, n)_{1,1} - I(m, n)_{0,1} \cdot I(m, n)_{1,2} \right)}{|I(m, n)|}$$

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( -a_{mn}(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right)$$

$$\psi_x(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( b_{mn}(m, n) \cdot \cos\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right)$$

$$\psi_y(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( c_{mn}(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \cos\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right)$$

$$M_x(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ -D_x \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot b_{mn}(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) - \right. \\ \left. - D_{xy} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot c_{mn}(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$

$$M_y(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ -D_{xy} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot b_{mn}(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) - \right. \\ \left. - D_y \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot c_{mn}(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right]$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$M_{xy}(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ G_{xy} \left[ \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot bmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot cmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right] \right]$$

$$V_x(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ -D_x \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 \cdot bmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - \right. \\ \left. - (D_{xy} + G_{xy}) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot cmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - G_{xy} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \cdot bmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right]$$

$$V_y(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ -D_y \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \cdot cmn(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - \right. \\ \left. - (D_{xy} + G_{xy}) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot bmn(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - G_{xy} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 \cdot cmn(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right]$$

$$m_{\text{max}} := 15$$

$$n_{\text{max}} := 15$$

$$w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n \right) = 9.665 \quad \text{mm}$$

$$M_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n \right) = 5.971 \times 10^3 \quad \text{Nmm/mm}$$

$$M_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n \right) = 5.971 \times 10^3 \quad \text{Nmm/mm}$$

$$V_x \left( 0, \frac{b}{2}, m, n \right) = 7.459 \quad \text{N/mm}$$

$$V_y \left( \frac{a}{2}, 0, m, n \right) = 7.459 \quad \text{N/mm}$$





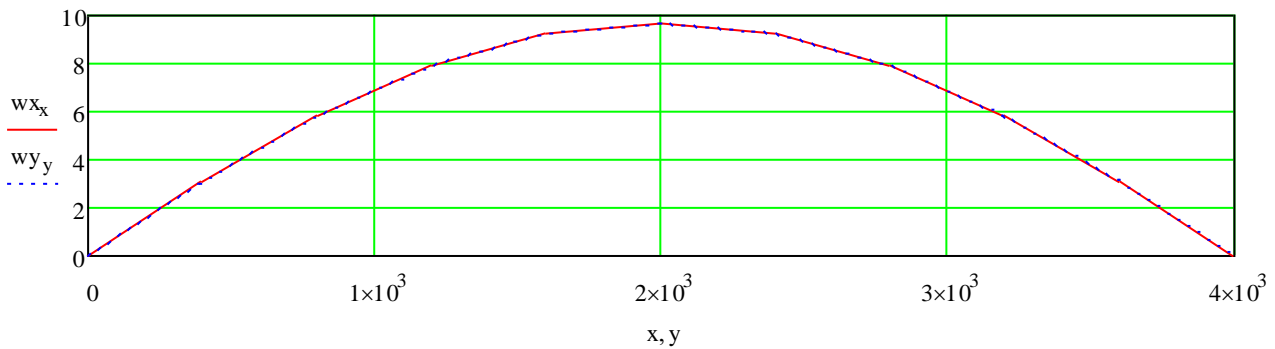
## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

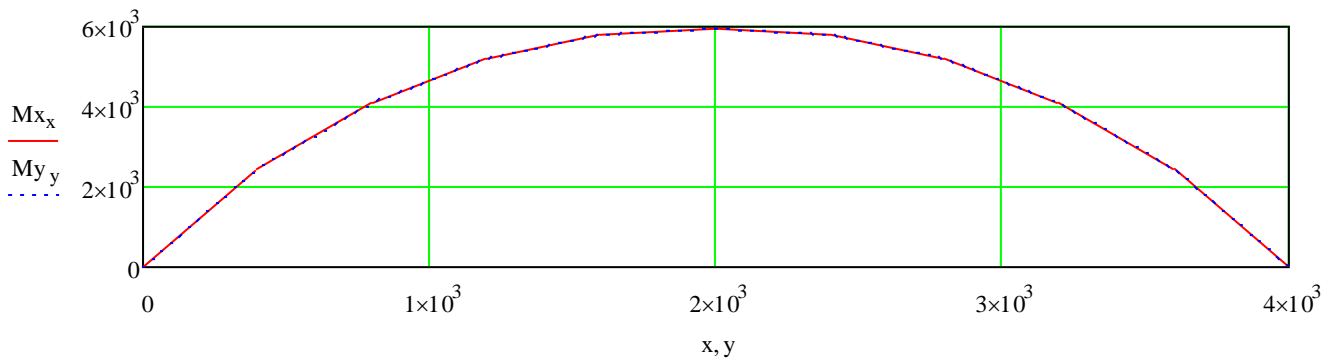
$i := 10$       punti di calcolo su ogni lato (consigliato minimo 10)

$$x := 0, \frac{a}{i} .. a \qquad y := 0, \frac{b}{i} .. b$$

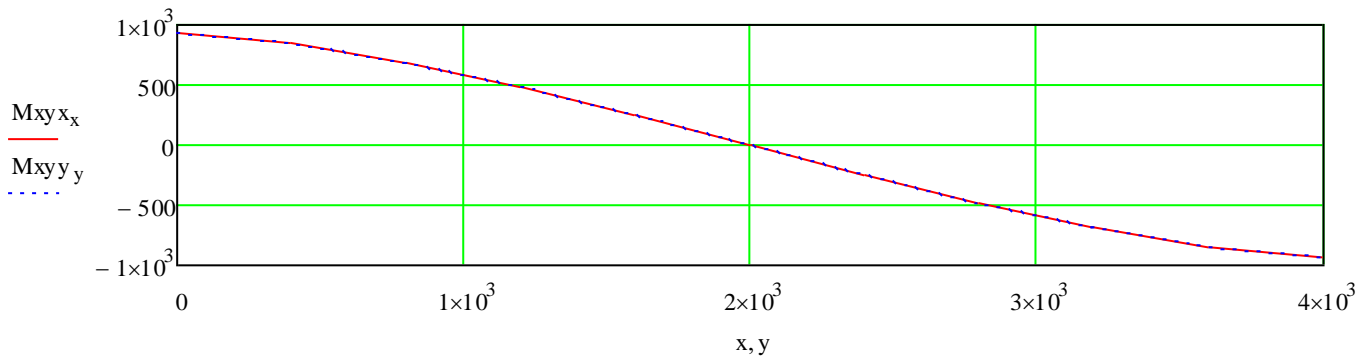
$$w_{x_x} := w\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \quad w_{y_y} := w\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



$$M_{x_x} := Mx\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \quad M_{y_y} := My\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



$$M_{xyx_x} := Mxy(x, b, m, n) \quad M_{xyy_y} := Mxy(a, y, m, n)$$

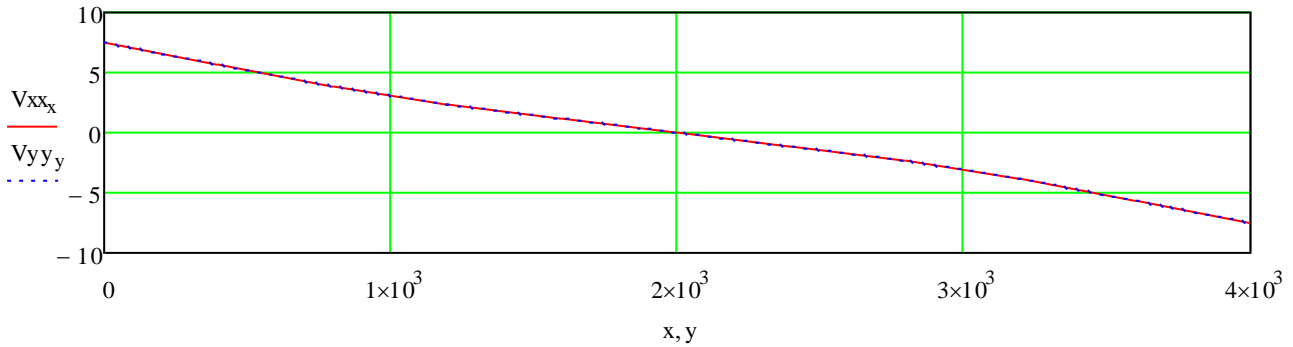




# Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$V_{xx_x} := V_x\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \quad V_{yy_y} := V_y\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



## Calcolo delle tensioni

$$P := \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & D_{0,0} & D_{0,1} & D_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & D_{1,0} & D_{1,1} & D_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix} \quad F := (0 \ 0 \ 0 \ 5971 \ 5971 \ 0)^T$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} := P^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} 1.008 \times 10^{-4} \\ -1.008 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 6.41 \times 10^{-6} \\ 6.41 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

lembo compresso

$$z := yg$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} := -E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \cdot E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.613 \\ 0.23 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.101 \\ -0.026 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z \cdot E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.715 \\ 0.204 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lembo teso

$$z := -yg$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} := -E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \cdot E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.23 \\ -3.613 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.026 \\ -1.101 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z \cdot E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.204 \\ -4.715 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$T := (7.459 \ 7.459)^T$$

$$\kappa := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3.63 & 3.63 \end{pmatrix}^T$$

$$Q := \begin{pmatrix} \kappa_0 \cdot C_{0,0} & 0 \\ 0 & \kappa_1 \cdot C_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} := Q^{-1} \cdot T = \begin{pmatrix} 5.405 \times 10^{-4} \\ 5.405 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \kappa_0 \cdot G(0)_{0,0} & 0 \\ 0 & \kappa_1 \cdot G(0)_{1,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.103 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

### ▪ *Calcolo delle deformazioni*

$G_k := 0.00176 \quad \text{N/mm}^2 \quad \text{CARICHI PERMANENTI DISTRIBUITI SU UNA PORZIONE DI PIASTRA}$

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( -am_n(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \quad \text{abbassamento [mm]}$$

$$\underline{m} := 15 \quad \underline{n} := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 3.094 \quad \text{mm}$$

$Q_k := 0.00 \quad \text{N/mm}^2 \quad \text{CARICHI VARIABILI DISTRIBUITI SU UNA PORZIONE DI PIASTRA}$

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( -am_n(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \quad \text{abbassamento [mm]}$$

$$\underline{m} := 15 \quad \underline{n} := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 3.498 \quad \text{mm}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

---

### ▪ *Calcolo della frequenza naturale di vibrazione*

$M := 176.8$  massa per unità di area [ $\text{kg/m}^2$ ]

$$\text{freq}(m, n) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{|I(m, n)|}{\frac{M}{10000000000} \left[ I(m, n)_{1,1} \cdot I(m, n)_{2,2} - \left( I(m, n)_{1,2} \right)^2 \right]}}$$

$\text{freq}(1, 1) = 11.401$  Hz      frequenza fondamentale di risonanza della piastra



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### A6. Esempio di calcolo: teoria di Mindlin – geometria rettangolare

#### ▪ Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione

#### PIASTRA RETTANGOLARE PIENA APPOGGIATA SU TUTTI I LATI

#### SOLUZIONE DI NAVIER IN SERIE DOPPIA DI FOURIER

#### 5 STRATI

$a := 400$	mm	LATO MINORE
$b := 500$	mm	LATO MAGGIORE
$s := 16$	mm	SPESSORE DELLA PIASTRA
$D_x := 3.310^9$		rigidezza flessionale ( $D_{0,0}$ ) [Nmm]
$D_y := 9.69110^8$		rigidezza flessionale ( $D_{1,1}$ ) [Nmm]
$D_{xy} := 4.16810^7$		rigidezza flessionale ( $D_{0,1}$ ) [Nmm]
$G_{xy} := 2.09910^8$		rigidezza torsionale ( $D_{2,2}$ ) [Nmm]
$G_{xz} := 7.286 \times 10^4$		rigidezza a taglio nel piano xz ( $C_{0,0}$ ) [Nmm]
$G_{yz} := 5.237 \times 10^4$		rigidezza a taglio nel piano yz ( $C_{1,1}$ ) [Nmm]
$\kappa_x := 0.23$		fattore di taglio nel piano xz [-]
$\kappa_y := 0.34$		fattore di taglio nel piano yz [-]
$q := 0.00573$	N/mm <sup>2</sup>	CARICO DISTRIBUITO SU UNA PORZIONE DI PIASTRA
$x_1 := c$		ASCISSA INIZIALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO
$x_2 := a$		ASCISSA FINALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO
$y_1 := c$		ORDINATA INIZIALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO
$y_2 := b$		ORDINATA FINALE DELL'IMPRONTA DEL CARICO



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$I(m, n) := \begin{bmatrix} \kappa_x \cdot G_{xz} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + \kappa_y \cdot G_{yz} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 & \kappa_x \cdot G_{xz} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) & \kappa_y \cdot G_{yz} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \\ \kappa_x \cdot G_{xz} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) & \kappa_x \cdot G_{xz} + D_x \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + G_{xy} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 & (D_{xy} + G_{xy}) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \\ \kappa_y \cdot G_{yz} \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) & (D_{xy} + G_{xy}) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) & \kappa_y \cdot G_{yz} + G_{xy} \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + D_y \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \end{bmatrix}$$

$$p_{mn}(m, n) := \frac{4 \cdot q}{a \cdot b} \cdot \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) dx dy$$

$$a_{mn}(m, n) := \frac{p_{mn}(m, n) \cdot \left[ \left( I(m, n)_{1,2} \right)^2 - I(m, n)_{1,1} \cdot I(m, n)_{2,2} \right]}{|I(m, n)|}$$

$$b_{mn}(m, n) := \frac{p_{mn}(m, n) \cdot \left( I(m, n)_{0,1} \cdot I(m, n)_{2,2} - I(m, n)_{0,2} \cdot I(m, n)_{1,2} \right)}{|I(m, n)|}$$

$$c_{mn}(m, n) := \frac{p_{mn}(m, n) \cdot \left( I(m, n)_{0,2} \cdot I(m, n)_{1,1} - I(m, n)_{0,1} \cdot I(m, n)_{1,2} \right)}{|I(m, n)|}$$

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( -a_{mn}(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right)$$

$$\psi_x(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( b_{mn}(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right)$$

$$\psi_y(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( c_{mn}(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right)$$

$$M_x(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ -D_x \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot b_{mn}(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - \right. \\ \left. - D_{xy} \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot c_{mn}(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right]$$

$$M_y(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ -D_{xy} \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot b_{mn}(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - \right. \\ \left. - D_y \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot c_{mn}(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right]$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$M_{xy}(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ G_{xy} \left[ \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot bmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot cmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right] \right]$$

$$V_x(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ -D_x \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 \cdot bmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - \right. \\ \left. - (D_{xy} + G_{xy}) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot cmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - G_{xy} \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \cdot bmn(m, n) \cdot \cos \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right]$$

$$V_y(x, y, m, n) := - \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left[ -D_y \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \cdot cmn(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - \right. \\ \left. - (D_{xy} + G_{xy}) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right) \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{b} \right) \cdot bmn(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) - G_{xy} \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 \cdot cmn(m, n) \cdot \sin \left( m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \cos \left( n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b} \right) \right]$$

$$m := 15$$

$$n := 15$$

$$w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n \right) = 6.094 \quad \text{mm}$$

$$M_x \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n \right) = 1.076 \times 10^4 \quad \text{Nmm/mm}$$

$$M_y \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n \right) = 1.921 \times 10^3 \quad \text{Nmm/mm}$$

$$V_x \left( 0, \frac{b}{2}, m, n \right) = 11.195 \quad \text{N/mm}$$

$$V_y \left( \frac{a}{2}, 0, m, n \right) = 4.832 \quad \text{N/mm}$$



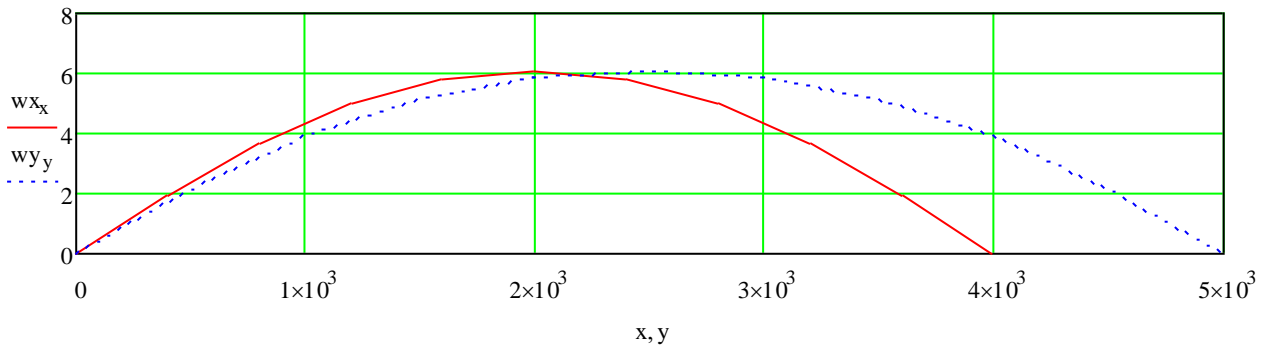
# Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

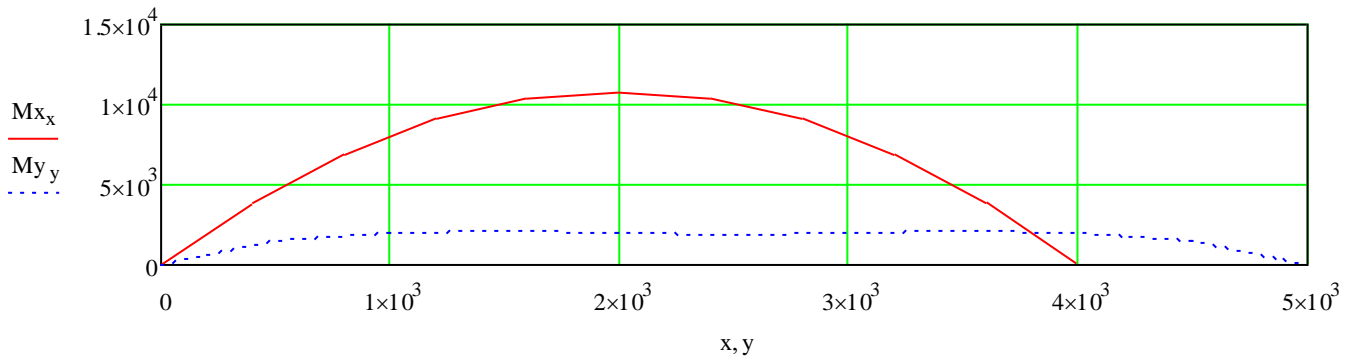
$i := 10$  punti di calcolo su ogni lato (consigliato minimo 10)

$$x := 0, \frac{a}{i} \dots a \quad y := 0, \frac{b}{i} \dots b$$

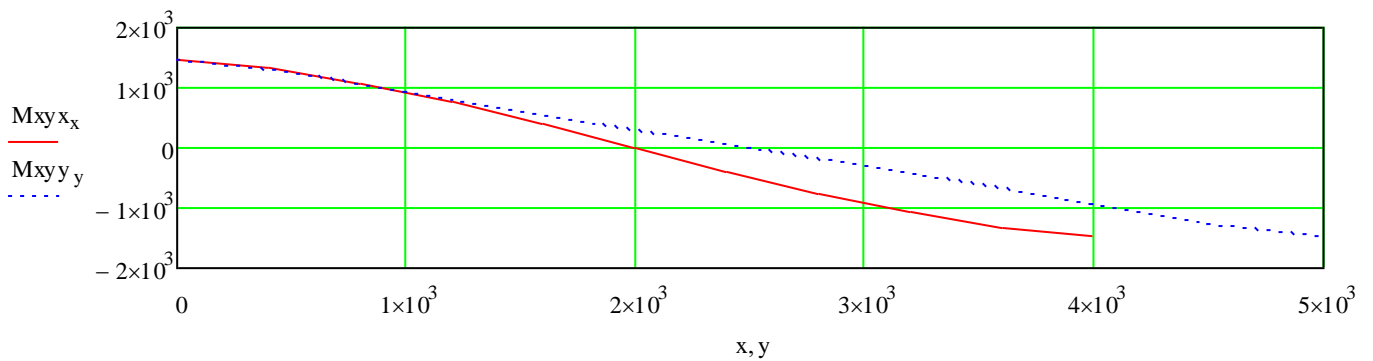
$$w_{x_x} := w\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \quad w_{y_y} := w\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



$$M_{x_x} := M_x\left(x, \frac{b}{2}, m, n\right) \quad M_{y_y} := M_y\left(\frac{a}{2}, y, m, n\right)$$



$$M_{xy_x} := M_{xy}(x, b, m, n) \quad M_{xy_y} := M_{xy}(a, y, m, n)$$



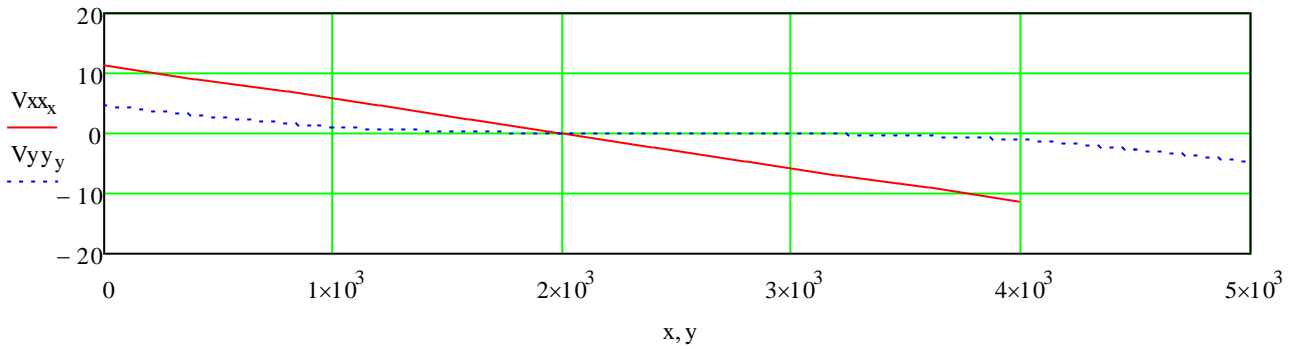




## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$V_{xx_x} := V_x \left( x, \frac{b}{2}, m, n \right) \quad V_{yy_y} := V_y \left( \frac{a}{2}, y, m, n \right)$$



### ▪ *Calcolo delle tensioni*

$$P := \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & D_{0,0} & D_{0,1} & D_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & D_{1,0} & D_{1,1} & D_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix} \quad F := (0 \ 0 \ 0 \ 10760 \ 1921 \ 0)^T$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} := P^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.237 \times 10^{-6} \\ 1.843 \times 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z := yg$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} := E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \cdot E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z \cdot E\theta(0) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.964 \\ 0.086 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z := 3 \cdot \frac{s}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} := E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} + z \cdot E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z \cdot E\theta(1) \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.07 \\ 1.024 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

$$T := (11.195 \ 4.832)^T$$

$$\kappa := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4.356 & 2.941 \end{pmatrix}^T \quad Q := \begin{pmatrix} \kappa_0 \cdot C_{0,0} & 0 \\ 0 & \kappa_1 \cdot C_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} := Q^{-1} \cdot T = \begin{pmatrix} 6.693 \times 10^{-4} \\ 2.714 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \kappa_0 \cdot G(0)_{0,0} & 0 \\ 0 & \kappa_1 \cdot G(0)_{1,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.106 \\ 6.366 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

### ▪ *Calcolo delle deformazioni*

$G_k := 0.00192 \quad \text{N/mm}^2 \quad \text{CARICHI PERMANENTI DISTRIBUITI SU UNA PORZIONE DI PIASTRA}$

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( -am_n(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \quad \text{abbassamento [mm]}$$

$$\underline{m} := 15 \quad \underline{n} := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 2.049 \quad \text{mm}$$

$Q_k := 0.00 \quad \text{N/mm}^2 \quad \text{CARICHI VARIABILI DISTRIBUITI SU UNA PORZIONE DI PIASTRA}$

$$w(x, y, m, n) := \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left( -am_n(m, n) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\right) \right) \quad \text{abbassamento [mm]}$$

$$\underline{m} := 15 \quad \underline{n} := 15$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, m, n\right) = 2.126 \quad \text{mm}$$



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### ▪ *Calcolo della frequenza naturale di vibrazione*

$M := 192.7$  massa per unità di area [ $\text{kg/m}^2$ ]

$$\text{freq}(m, n) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{|I(m, n)|}{\frac{M}{1000000000} \cdot [I(m, n)_{1,1} \cdot I(m, n)_{2,2} - (I(m, n)_{1,2})^2]}}$$

$\text{freq}(1, 1) = 13.861$  Hz frequenza fondamentale di risonanza della piastra



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

---

### *Riferimenti web*

1. [http://www.genitronsviluppo.com/architettura\\_sostenibile/immagini/decostruire\\_decostruzione\\_architettura\\_sostenibile\\_casa\\_riciclabile\\_riciclata\\_materiali\\_edili\\_riciclabili\\_smantellare\\_casa\\_smontabile\\_1.jpg](http://www.genitronsviluppo.com/architettura_sostenibile/immagini/decostruire_decostruzione_architettura_sostenibile_casa_riciclabile_riciclata_materiali_edili_riciclabili_smantellare_casa_smontabile_1.jpg)
2. <http://www.edilweb.it/IL%20LEGNO%20LAMELLARE%20.pdf>
3. <http://www.promolegno.com/typo3temp/pics/972478d5a0.jpg>
4. [http://www.promolegno.com/fileadmin/promolegno/documents/corsi/lezioni-corso/1\\_Bernasconi%20materiale\\_01.pdf](http://www.promolegno.com/fileadmin/promolegno/documents/corsi/lezioni-corso/1_Bernasconi%20materiale_01.pdf)
5. <http://www.promolegno.com/typo3temp/pics/4290655544.jpg>
6. [http://www.promolegno.com/fileadmin/promolegno/documents/corsi/lezioni-corso/2\\_calcolo-ab-2011-03-11.pdf](http://www.promolegno.com/fileadmin/promolegno/documents/corsi/lezioni-corso/2_calcolo-ab-2011-03-11.pdf)
7. <http://www.dpa.unina.it/download/zip/lamina.pdf>
8. [http://seieditrice.com/corso-costruzioni/files/2010/03/solai\\_solette\\_armatura\\_incrociata.pdf](http://seieditrice.com/corso-costruzioni/files/2010/03/solai_solette_armatura_incrociata.pdf)
9. [http://dma.ing.uniroma1.it/users/ls\\_sas/MATERIALE/cap4sa.pdf](http://dma.ing.uniroma1.it/users/ls_sas/MATERIALE/cap4sa.pdf)
10. [http://xoomer.virgilio.it/fedguidi/pdf/strutture\\_aeronautiche/piastre.pdf](http://xoomer.virgilio.it/fedguidi/pdf/strutture_aeronautiche/piastre.pdf)



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

### ***Bibliografia***

11. Aicher S., Dill – Langer G., (2000), *“Basic considerations to rolling shear modulus in wooden boards”*, OTTO – GRAF – JOURNAL, Vol. 11, pp. 157 – 165
12. Bares R., (1986), *“Calcolo di lastre e piaster con la teoria elastica lineare”*, CLUP, Milano
13. Blaß H. J., Fellmoser P., *“Influence of rolling shear modulus on strength and stiffness of structural bonded timber elements”*, INTERNATIONAL COUNCIL FOR RESEARCH AND INNOVATION IN BUILDING AND CONSTRUCTION, Meeting Thirty – Seven, Edinburgh, August 2004
14. Cooke D. W., Levinson M., (1983), *“Thick rectangular plates – I, the generalized Navier solution”*, INTERNATIONAL JOURNAL OF MECHANICAL SCIENCES, Vol. 25, No. 3, pp. 199 – 205
15. Cooke D. W., Levinson M., (1983), *“Thick rectangular plates – II, the generalized Navier solution”*, INTERNATIONAL JOURNAL OF MECHANICAL SCIENCES, Vol. 25, No. 3, pp. 207 – 215
16. Eftekhari S. A., Jafari A. A., (2011), *“An efficient mixed methodology for free vibration and buckling analysis of orthotropic rectangular plates”*, APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION, Vol. 218, No. 6, pp. 2670 – 2692
17. Gsell D., Gulzow A., Steiger R., *“Non destructive evaluation of elastic material properties of cross – laminated timber (CLT)”*, CONFERENCE COST E53, 29 – 30 October 2008, Delft, The Netherlands
18. Kazemi S., Khoshnoudian F., (2010), *“Fundamental frequency of tapered plates using modified modes”*, TRANSACTION A.: CIVIL ENGINEERING, Vol. 17, No. 5, pp. 396 – 406
19. Muthurajan K. G., Sanakaranarayanan K., Negeswara Rao B., (2004), *“Evaluation of elastic constants of specially orthotropic plates through vibration testing”*, JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, 272 (2004), pp. 413 – 424
20. Nanguneri R. Rajappa, (1964), *“On the exact solutions of vibration problems of rectangular orthotropic plates”*, KURZE MITTEILUNGEN – BRIEF REPORTS – COMMUNICATIONS BREVES, Vol. 15, pp. 201 – 205
21. Notestine R. J., (1991), *“Comparison of experimental results and analytical solutions for the deflections of anisotropic plates”*, MASTER OF SCIENCE IN AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS AT THE MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY
22. Piazza M., Tomasi R., Modena R., (2009), *“Strutture in legno: materiale, calcolo e progetto secondo le nuove normative europee”*, ULRICO HOEPLI EDITORE, Milano



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

23. BSPHandbuch, Holz- Massivbauweise in Brettsper Holz : Nachweise auf Basis des neuen europäischen Normenkonzepts / Autorenschaft Augustin - Graz : Technische Universität, 2009
24. D.M. 14/01/2008, "Norme Tecniche per le Costruzioni"
25. UNI EN 1995 – 1 – 1, "Eurocodice 5: Progettazione delle strutture di legno"
26. CNR DT 206/2007, "Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo delle Strutture di Legno"

### Indice delle figure

Figura 1 – Edificio di 3 piani a Santiago del Cile in legno lamellare [1].....	6
Figura 2 – Leonardo: XV secolo [2].....	7
Figura 3 – Delorme: XVI secolo [2].....	7
Figura 4 – Emy: XIX secolo [2].....	7
Figura 5 – Mignerone, Wiebeking: XIX secolo [2].....	8
Figura 6 – Otto Freidrich Hetzer: XX secolo [2].....	8
Figura 7 – Elemento di solaio della costruzione intelaiata [3].....	9
Figura 8 – Elemento di solaio a cassone con pannellatura incollata sui due lati [4].....	10
Figura 9 – Edificio di 9 piani con struttura portante in XLAM, Shoreditch, Londra [5].....	12
Figura 10 – Caratteristiche meccaniche (profilo prestazionale) di uno strato di tavole [6].....	21
Figura 11 – XLAM quale griglia di elementi lineari e multistrato [6].....	22
Figura 12 – Distribuzione delle tensioni di flessione e taglio sulla sezione per i due casi [6].....	22
Figura 13 – Effetto strutturale dell'elemento piastra [6].....	23
Figura 14 – Elemento di parete con funzione di discesa dei carichi verticali (a), con funzione di controventatura (b) [6].....	24
Figura 15 – Struttura portante dell'edificio formata da elementi piani [6].....	25
Figura 16 – Principio strutturale e giunti della soletta XLAM [6].....	27
Figura 17 – Piastra con funzione portante in due direzioni: a) elemento unico; b) elemento composto da più parti con giunti rigidi [6].....	27
Figura 18 – Parete con apertura [6].....	28
Figura 19 – Trave parete [6].....	29
Figura 20 – Parete laterale quale elemento di sostegno dello sbalzo [6].....	29
Figura 21 – Distribuzione delle sollecitazioni dovute al momento flettente M – Riferimenti geometrici [6].	32
Figura 22 – Direzione debole del pannello: distribuzione delle sollecitazioni dovute al momento flettente M – Riferimenti geometrici [6].....	33
Figura 23 – Flessione biassiale nel piano della piastra [6].....	35
Figura 24 – Flessione biassiale e forze normali [6].....	35



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Figura 25 – Flessione e taglio trasversale al piano con la rispettiva distribuzione delle tensioni sulla sezione [6].....	36
Figura 26 – Compressione perpendicolare alla fibratura agli appoggi [6].....	38
Figura 27 – Sollecitazioni a taglio e definizione del taglio rotatorio, con i moduli $G_0$ e $G_{90}$ [6].....	39
Figura 28 – Deformazione tipica di un materiale indefinito (a) ed ortotropo (b) soggetto a sforzo normale secondo una direzione principale [7].....	43
Figura 29 – Deformazione di una lamina ortotropo con carico secondo una direzione principale (a) e deviato (b) [7].....	44
Figura 30 – Schema di lamina ortotropo caricata [7].....	47
Figura 31 – Lamina ortotropo con riferimento cartesiano generico [7].....	50
Figura 32 – Sezione non deformata e deformata di laminato di piccolo spessore: notazione generale [7]....	53
Figura 33 – Tipico andamento di deformazioni e tensioni in laminato composito [7].....	55
Figura 34 – Geometria di laminato con n lamine e notazione generale [7].....	56
Figura 35 – Illustrazione di [A], [B] e [D].....	59
Figura 36 – Piastra con due piani di flessione ortogonali tra loro [8].....	63
Figura 37 – Comportamento a piastra [8].....	64
Figura 38 – Piastra rettangolare appoggiata al contorno [9].....	69
Figura 39 – Deformazione della piastra di Mindlin.....	73
Figura 40 – Valori dei termini $C_{5,5}$ e $C_{4,4}$ in funzione degli effetti del “rolling shear”.....	85
Figura 41 – Andamento del valore di $\chi$ in funzione del numero di strati e della direzione considerata.....	86
Figura 42 – Valori dei termini $C_{5,5}/\chi$ e $C_{4,4}/\chi$ in funzione degli effetti del “rolling shear”.....	86
Figura 43 – Valori del termine $D_{3,3}$ in funzione degli effetti del “rolling shear”.....	89
Figura 44 – Stratigrafia di un solaio realizzato con pannelli strutturali XLAM.....	91
Figura 45 – Geometria della sezione omogeneizzata costituita da 4 strati.....	123
Figura 46 – Diagramma sforzi – deformazioni per la determinazione della posizione dell’asse neutro della sezione da 4 strati.....	124
Figura 47 – Ridistribuzione delle deformazioni nella sezione XLAM costituita da 4 strati.....	139
Figura 48 – Andamento delle tensioni nella sezione XLAM costituita da 4 strati.....	140
Figura 49 – Proprietà dell’elemento plate: <i>orthotropic</i> .....	227
Figura 50 – Proprietà dell’elemento plate: <i>user defined</i> .....	227
Figura 51 – Strato singolo, 4x4 metri, $M_x$ .....	228
Figura 52 – Strato singolo, 4x4 metri, $M_y$ .....	228
Figura 53 – Strato singolo, 4x4 metri, $D_z$ .....	229
Figura 54 – 4 strati, 4x4 metri, inserimento delle matrici di rigidezza.....	229
Figura 55 – 4 strati, 4x4 metri, $M_x$ .....	230
Figura 56 – 4 strati, 4x4 metri, $M_y$ .....	230
Figura 57 – 4 strati, 4x4 metri, $D_z$ .....	231
Figura 58 – 5 strati, 4x5 metri, inserimento delle matrici di rigidezza.....	231
Figura 59 – 5 strati, 4x5 metri, $M_x$ .....	232
Figura 60 – 5 strati, 4x5 metri, $M_y$ .....	232
Figura 61 – 5 strati, 4x5 metri, $D_z$ .....	233



## Solai strutturali in legno lamellare incrociato: inquadramento teorico e comparazioni progettuali

Alessandro Baronio 750895

Figura 62 – Confronto dei parametri $\sigma$ , $\tau$ , $u$ ed $f$ per un elemento XLAM costituito da 5 strati al variare della luce di calcolo.....	236
Figura 63 – Confronto dei parametri $\sigma$ , $\tau$ , $u$ ed $f$ per una luce di calcolo di 6 metri al variare del numero di strati.....	238
Figura 64 – Confronto dei parametri $\sigma$ , $\tau$ , $u$ ed $f$ per un elemento XLAM costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo tra calcolo bidirezionale 1/1bis e bidirezionale 2/2bis.....	242
Figura 65 – Confronto dei parametri $\sigma$ , $\tau$ , $u$ ed $f$ per un elemento XLAM costituito da 6 strati al variare della luce di calcolo tra calcolo bidirezionale 2/2bis e bidirezionale 3/3bis.....	243
Figura 66 – Confronto dei parametri $\sigma$ , $\tau$ , $u$ ed $f$ per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati tra calcolo bidirezionale 1/1bis e bidirezionale 2/2bis.....	246
Figura 67 – Confronto dei parametri $\sigma$ , $\tau$ , $u$ ed $f$ per una luce di calcolo di 6x6 metri al variare del numero di strati tra calcolo bidirezionale 2/2bis e bidirezionale 3/3bis.....	247
Figura 68 – Confronto del parametro $\sigma$ per una luce di calcolo di 4x5 metri al variare del numero di strati tra calcolo a trave, piastra isotropa e piastra ortotropa.....	250
Figura 69 – Confronto dei parametri $u$ ed $f$ per una luce di calcolo di 4x5 metri al variare del numero di strati tra calcolo a trave, piastra isotropa e piastra ortotropa.....	250
Figura 70 – Andamento dei parametri $\sigma_x$ , $\sigma_y$ , $\sigma_{tx}$ , $u$ ed $f$ per l'elemento da 4 strati al variare della luce di calcolo.....	252
Figura 71 – Confronto del parametro $\sigma$ per una luce di calcolo di 5x6 metri al variare del numero di strati tra calcolo a trave, piastra isotropa e piastra ortotropa.....	254
Figura 72 – Confronto dei parametri $u$ ed $f$ per una luce di calcolo di 5x6 metri al variare del numero di strati tra calcolo a trave, piastra isotropa e piastra ortotropa.....	254
Figura 73 – Confronto del numero di strati richiesti dal calcolo monodirezionale e dal calcolo bidirezionale nel caso di piastra di geometria quadrata.....	256
Figura 74 – Confronto del numero di strati richiesti dal calcolo bidirezionale nel caso di piastra di geometria rettangolare.....	258