



POLITECNICO DI MILANO

FACOLTÀ DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica

**METODOLOGIE DI PROGETTO ROBUSTO PER LA
RISONANZA AL SUOLO DELL'ELICOTTERO**

Relatore:
Ing. Giuseppe QUARANTA

Correlatore:
Prof. Marco LOVERA

Candidato:
Luca LAMPARELLI
Matricola 755035

Indice

1	Analisi robusta dei sistemi dinamici	9
1.1	Rappresentazione delle incertezze	9
1.2	Definizione delle matrici N ed M	12
1.3	Definizione di Stabilità robusta (RS)	14
1.4	Proprietà dello Structured Singular Value μ	16
2	Stabilità robusta della Ground Resonance: elicottero semplificato a 4 gdl	19
2.1	Equazioni di equilibrio e modello agli stati	20
2.2	Analisi di stabilità robusta	28
2.2.1	Definizione delle incertezze di modello	28
2.2.2	Dinamica delle incertezze	32
2.2.3	μ -Analisi	32
2.2.4	Criterio Generalizzato di Nyquist (GNC)	35
2.3	Risultati ottenuti	41
2.3.1	Stabilità nominale	41
2.3.2	Curve limite GNC	44
2.3.3	Validazione della μ -Analisi	52
2.3.4	Margini di stabilità robusta	57
3	Stabilità robusta della Ground Resonance: Puma IAR 330	65
3.1	Modello MASST	68
3.1.1	La fusoliera a terra	68
3.1.2	Il rotore principale	77
3.1.3	Il rotore di coda	82
3.1.4	I Sensori	84

3.1.5	I controllori	85
3.1.6	Gli smorzatori di ritardo	86
3.1.7	I servo-attuatori	88
3.2	Modello agli stati	91
3.3	Analisi di stabilità robusta	92
3.3.1	Definizione delle incertezze di modello	92
3.3.2	Criterio Generalizzato di Nyquist con FCS	95
3.4	Risultati ottenuti	97
3.4.1	Stabilità nominale	97
3.4.2	Curve limite GNC e μ -Analisi	100
3.4.3	Margini di stabilità robusta	106
3.4.4	Sensibilità rispetto alla Trazione	111
3.4.5	Modello di verifica	113
4	Analisi robusta dei sistemi LTV	119
4.1	Studio delle non linearità dei sistemi dinamici: le Funzioni Descrittive	119
4.2	Analisi robusta della rottura dello smorzatore di ritardo	123
4.2.1	Funzione descrittiva per ingresso sinusoidale (SIDF MI-MO)	124
4.2.2	Parametri limite di rottura	126
4.2.3	Risultati ottenuti: elicottero semplificato	127
4.2.4	Risultati ottenuti: Puma IAR 330	139
5	Conclusioni	149
A	Analisi agli autovalori e risposta nel tempo (LTI)	151
A.1	Validazione dei risultati per l'elicottero semplificato	151
A.2	Validazione dei risultati per il Puma IAR 330	175
B	Analisi robusta dei sistemi SISO LTV: l'equazione di Mathieu	191
B.1	μ -Analisi e GNC	192
B.2	Funzione descrittiva per ingresso sinusoidale (SIDF SISO)	193
B.3	Risultati ottenuti	197
	Lista degli acronimi	205
	Lista dei simboli	207
	Elenco delle figure	218

Elenco delle tabelle	220
Bibliografia	221

Sommario

Il fenomeno della risonanza al suolo dell'elicottero rappresenta un aspetto fondamentale nell'ambito della progettazione degli smorzatori di ritardo del rotore. I parametri utili alla modellazione di tali componenti, a causa del relativo comportamento fortemente non lineare, sono spesso affetti da significative incertezze. Inoltre, la necessità di usufruire di un sistema di controllo del volo (FCS) che vada a ridurre in sicurezza l'impegno del pilota sta diventando sempre più attuale; per questo motivo è opportuno verificare a priori l'influenza di tale accorgimento sulla ground resonance.

L'obiettivo di questa trattazione è lo sviluppo di modalità generalizzate di progetto che permettano di quantificare la robustezza delle scelte operative per non compromettere la stabilità aeroelastica della macchina. A tale scopo sono state adottate delle tecniche di analisi robusta dei sistemi dinamici provenienti dalla letteratura scientifica dell'ingegneria del controllo, quali il criterio generalizzato di Nyquist (GNC) e la μ -Analisi.

La prima parte della tesi verte principalmente sulla valutazione dell'impatto di incertezze parametriche e non su sistemi lineari tempo invarianti. In primo luogo, nel Capitolo 2, è stata affrontata la modellazione e lo studio della stabilità di un elicottero semplificato in presenza di incertezze sulle caratteristiche elastoviscose degli smorzatori di ritardo e sulle proprietà strutturali della fusoliera.

Successivamente, nel Capitolo 3, si è passati alla valutazione della risonanza al suolo dell'elicottero quadripala Puma IAR 330. È stata quindi verificata la stabilità alla ground resonance in presenza di incertezze sia sugli smorzatori di ritardo che sulla funzione di trasferimento di un eventuale FCS installato sulla macchina. Le potenzialità offerte dai metodi di progetto sintetizzati vanno ricercate nella loro generalità di applicazione per qualsiasi elicottero con rotore articolato o soft-in-plane.

Infine, nel Capitolo 4, sfruttando le funzioni descrittive, sono stati sviluppate delle procedure per adattare le tecniche di progetto robusto anche al caso di sistema dinamico periodico. La differenza sostanziale che intercorre tra l'uso di metodi classici per le analisi parametriche di sistemi tempo varianti e quelli robusti qui presentati risiede nella valutazione della sensibilità della soluzione rispetto ai parametri incerti. Da un lato occorre eseguire un'analisi differente per ogni elemento della mappatura mentre dall'altro è possibile sfruttare i risultati ottenuti dall'analisi robusta del sistema lineare, conducendo un unico studio per tutti i parametri ritenuti incerti.

Parole chiave: Ground Resonance - Stabilità robusta - μ -Analisi - Funzioni Descrittive - Rottura dello smorzatore

Analisi robusta dei sistemi dinamici

In questo capitolo vengono tracciate le linee guida per lo studio della stabilità di un sistema dinamico in presenza di incertezze associate a determinati parametri appartenenti al modello; in particolare, viene mostrato come possono essere sfruttate differenti tecniche di analisi robusta del sistema che potrebbero essere utilizzate sin dalla fase di progettazione preliminare.

In questo modo, non solo viene valutata la sensibilità del sistema rispetto a determinate caratteristiche che esso presenta, bensì, si ha la possibilità di valutare l'escursione massima ammissibile di tali valori mantenendo la stabilità.

Si evince pertanto che col termine robustezza si fa riferimento alla capacità del sistema di sopportare un discostamento più o meno considerevole delle grandezze costitutive del modello rispetto al relativo valore nominale. Prima di procedere alla delineazione delle modalità di analisi, risulta quindi opportuno sottolineare le possibili fonti di incertezza associate al sistema in esame.

1.1 Rappresentazione delle incertezze

Durante la modellazione, l'analisi, la sperimentazione e la validazione di un qualsiasi sistema dinamico associato ad un velivolo, le incertezze possono provenire da vari aspetti, dei quali vengono riportati di seguito quelli fondamentali:

- nel modello lineare (o linearizzato) del sistema vi sono dei parametri noti in maniera approssimativa grazie ad esempio ad una campagna di prove sperimentali o altrimenti non noti e che, se pur selezionati con buon senso, potrebbero non aderire alle reali condizioni in cui si trova il sistema;

- i medesimi parametri del modello lineare potrebbero cambiare a causa della presenza di non linearità geometriche o delle leggi costitutive o di modifiche causate dalle condizioni operative;
- anche quando si ha a disposizione un modello strutturale molto dettagliato del velivolo si preferisce sfruttarne una condensazione per diminuire il costo computazionale, pertanto, la dinamica tipicamente della deformabilità alle alte frequenze, rappresenta una fonte di incertezza del modello;
- infine, le dinamiche associate al sistema di misurazione ed attuazione potrebbero modificare il comportamento di eventuali sistemi di controllo attivo sia a causa della presenza di un'imperfezione della misura sia a causa di disturbi sugli ingressi di controllo.

Per qualificare al meglio le tipologie di incertezze che sono state ispezionate in questa trattazione si opera una macro suddivisione di quest'ultime in 3 gruppi principali riproposta in [10]; in particolare, è stata affrontata una differente attività di analisi di problemi dinamici in ambito elicotteristico facente capo ad ognuna della seguente classificazione:

- *incertezze parametriche*, ovvero il caso in cui è nota la natura e l'ordine del modello del sistema ma alcune proprietà p_i presentano una particolare variabilità percentuale $r_p\Delta$ contenuta in un intorno del relativo valore nominale \bar{p} .

$$\begin{aligned}
 p_i &= \bar{p}(1 + r_p\Delta) \\
 r_p\Delta &= \frac{p_{max} - p_{min}}{p_{max} + p_{min}}\Delta, \text{ in cui } \Delta \leq 1
 \end{aligned}$$

Si faccia riferimento alla modellazione del sistema dinamico incerto degli smorzatori di ritardo del Puma IAR 330 per l'analisi della ground resonance (pag. 65);

- *dinamiche non modellate*, ossia viene inserita nel modello globale un'incertezza riferita a dinamiche che sono state trascurate in prima analisi ma che risultano essere particolarmente influenti in determinate condizioni operative dell'elicottero; ad esempio nel caso in cui non sia possibile effettuare la media sul giro dei coefficienti delle matrici del sistema lineare tempo periodico, ovvero in caso di malfunzionamento o rottura di uno smorzatore di ritardo (Cap. 4). È pertanto, possibile introdurre un'incertezza sul sistema che inglobi eventuali dinamiche locali, ad esempio degli smorzatori stessi o del sistema di attuazione, che

sono state tralasciate per qualificare esclusivamente il comportamento globale del sistema.

- *incertezze raggruppate*, in cui esistono incertezze parametriche o dinamiche trascurate che vengono raggruppate complessivamente in un unico blocco di perturbazioni sul sistema di struttura arbitraria (Figura 1.1). Si inserisce nella funzione di trasferimento G del sistema una perturbazione o sull'ingresso Δ_i o sull'uscita Δ_o con i relativi pesi W_i, W_o che modifica la trasformazione di uscita ottenendo una nuova funzione di trasferimento G_p .

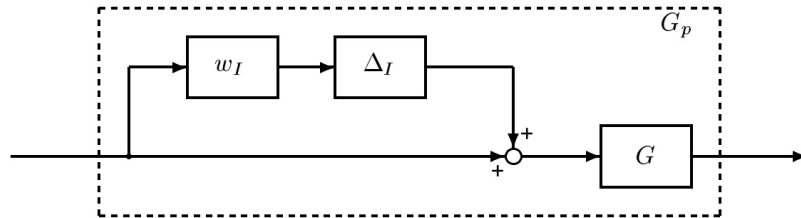


Figura 1.1: Incertezza moltiplicativa applicata all'ingresso del sistema.

$$G_p = G(1 + W_i\Delta_i) = G(1 + W_o\Delta_o)$$

Per quanto riguarda questa modalità di applicazione delle incertezze è stato analizzato il caso della ground resonance dell'elicottero semplificato proposto da C. E. Hammond in [9] a pag. 20.

Un'ulteriore caratterizzazione delle incertezze è sostanzialmente riferita alle proprietà del blocco di perturbazione Δ . Infatti, considerando l'esempio precedente di sistema con matrice di trasferimento $\mathbf{G}_p(j\omega)$ riportato in Figura 1.1, è evidente che il comportamento e le prestazioni del sistema in anello chiuso dipendano dalla morfologia e dal valore delle varie componenti di Δ_i o Δ_o . Al fine di tenere in considerazione la modalità di applicazione della perturbazione di ciascun anello del sistema, in letteratura si distinguono due principali tipologie di incertezze:

- *non strutturate*, ossia è nota la norma $\|\Delta\|_\infty$ della perturbazione senza imporre nessun ulteriore vincolo;
- *strutturate*, ovvero non solo viene adottata una precisa struttura della matrice di perturbazione, bensì è possibile definire dei valori minimi e massimi entro cui può estendersi l'incertezza.

L'utilizzo delle tipologie appena illustrate implica un differente approccio per lo studio della robustezza della stabilità del sistema; in questa trattazione sono state adottate entrambe le modalità di perturbazione verificandone gli effetti e le conseguenze sui risultati ottenuti per ciascuna tecnica di analisi. Inoltre, è stata investigata la possibilità di introdurre una perturbazione che sfrutti i benefici di entrambe le incertezze; infatti, si è previsto di analizzare vari sistemi dinamici di elicotteri con complessità variabile associando ai modelli un'incertezza con una struttura ben definita ma senza alcuna imposizione sull'intervallo di appartenenza degli elementi della matrice Δ . Per un maggior approfondimento sulle modalità con cui i sistemi dinamici incerti sono stati analizzati si rimanda ai capitoli successivi.

1.2 Definizione delle matrici N ed M

In generale nell'ambito della letteratura dell'analisi robusta dei sistemi dinamici sono definite delle matrici di trasferimento significative utili allo studio della stabilità e delle prestazioni in senso robusto del sistema.

In particolare, con N si intende la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso tra ingressi ed uscite generalizzati. I primi sono rappresentati da errori normalizzati sul riferimento desiderato w e perturbazioni u_Δ imputabili alla presenza di incertezze nell'anello del sistema; mentre i secondi sono le uscite del sistema z e la quota parte di uscita dovuta alle incertezze y_Δ . Si separa pertanto la matrice N dalla perturbazione Δ che agisce sul sistema ottenendo lo schema esemplificativo riportato in Figura 1.2.

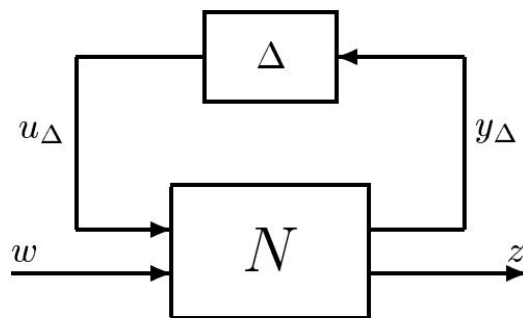


Figura 1.2: Struttura $N - \Delta$ del sistema.

Così facendo, a partire da un sistema MIMO affetto da molteplici perturbazioni (Figura 1.3) si risale alla struttura $N - \Delta$ andando ad escludere il blocco di perturbazione Δ , come visibile in Figura 1.4.

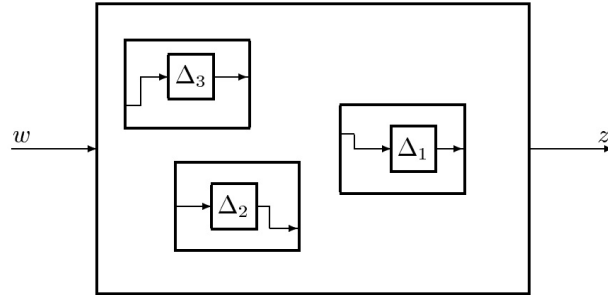


Figura 1.3: Sistema MIMO originario affetto da molteplici incertezze [10].

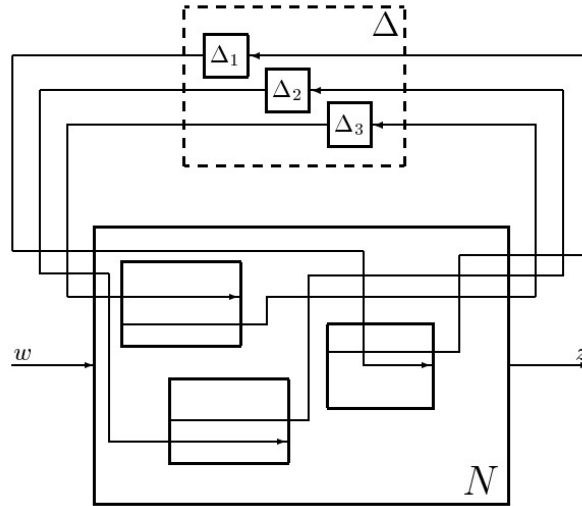


Figura 1.4: Ridisposizione del sistema [10].

A questo punto, nel caso in cui si fosse interessati allo studio della sola stabilità robusta del sistema è possibile escludere gli ingressi desiderati e le uscite al fine di ottenere la struttura $M - \Delta$ attraverso una *Linear Fractional Transformation* superiore (LFT_u).

$$F(\Delta) = F_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} \quad (1.1)$$

$$M = N_{11} \quad (1.2)$$

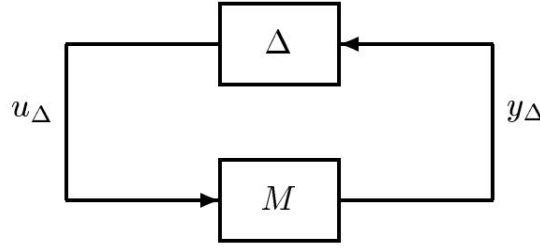


Figura 1.5: Struttura $M - \Delta$ del sistema.

1.3 Definizione di Stabilità robusta (RS)

L'analisi di stabilità robusta del sistema prevede di determinare con certezza quando il sistema rimane stabile a fronte della variazione dei parametri incerti entro un determinato intervallo; considerando l'espressione (1.1) si noti come l'unica possibile fonte di instabilità derivi dal termine $(I - N_{11}\Delta)^{-1}$, è pertanto necessario stabilire una condizione di limite di stabilità della struttura $M - \Delta$.

Dato il sistema nominale stabile $\mathbf{M}(s)$ e la perturbazione stabile $\Delta(s)$, si ricorre al Criterio Generalizzato di Nyquist (GNC), ovvero valutando il diagramma di Nyquist associato a ciascun anello del sistema si richiede che esso non circonda l'origine per ogni Δ , ossia:

$$(RS) \Leftrightarrow \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta(j\omega)) \neq 0, \forall \omega, \forall \Delta \quad (1.3)$$

↓

$$(RS) \Leftrightarrow \lambda_i(\mathbf{M}\Delta) \neq 1, \forall i, \forall \omega, \forall \Delta \quad (1.4)$$

Questa modalità di valutazione prevede che l'incertezza sia di tipo non strutturata in quanto non vengono imposti dei limiti specifici sulla perturbazione del sistema. Viceversa, nel caso in cui si introduca un'incertezza di tipo strutturata, in cui Δ è un blocco diagonale contenente delle perturbazioni δ_i con una struttura ben definita, il problema può essere riformulato generando una nuova matrice \mathbf{M} con gli ingressi e le uscite scalati attraverso la matrice $D = \text{diag}\{d_i \mathbf{I}_i\}$.

$$\begin{aligned} \Delta_i &= d_i \Delta_i d_i^{-1} \\ \Delta &= \mathbf{D} \Delta \mathbf{D}^{-1} \end{aligned}$$

Si mostra quindi la nuova struttura $M - \Delta$ del sistema in Figura 1.6, in cui la nuova perturbazione Δ risulta essere un blocco diagonale in cui ciascun termine è stato normalizzato con un limite superiore ed inferiore.

1.4 Proprietà dello Structured Singular Value

μ

Lo *structured singular value* μ è una funzione che generalizza il concetto di massimo valor singolare $\bar{\sigma}$ e di raggio spettrale ρ^1 . La nascita di questo parametro per lo studio della stabilità e delle prestazioni in anello chiuso di un determinato sistema dinamico deriva dalla necessità di determinare la più piccola perturbazione diagonale $\Delta \in \mathbb{C}^{q \times p}$ tale che, data la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{p \times q}$, verifichi la seguente relazione:

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0, \quad \forall \omega, \forall \Delta \quad (1.7)$$

Come accennato in precedenza, la possibile fonte di incertezza che viene introdotta all'interno del sistema attraverso la matrice di perturbazione Δ può essere di natura reale, complessa o un caso misto tra i primi due; a seconda delle caratteristiche strutturali di tale matrice, il relativo coefficiente di scalatura $\mu = 1/k_m$ presenterà delle proprietà di continuità differenti; per questo motivo è necessario porsi nel caso più generale possibile per la definizione delle incertezze che portano a verificare la relazione (1.7).

Pertanto, dato l'ordine n del sistema dettato dalla matrice \mathbf{M} , si definisce un'insieme di indici interi $K = \{1, \dots, m_r, 1, \dots, m_c, 1, \dots, m_C\}$ tali da rispettare la relazione di consistenza dimensionale del problema (1.8); è possibile quindi definire attraverso la relazione (1.9) lo spazio X_K delle possibili perturbazioni agenti sul problema dinamico che in letteratura viene definito generalmente come *complex block structure* [23].

$$m_r + m_c + m_C \leq n \quad (1.8)$$

$$X_K = \left\{ \Delta = \text{diag } \delta_1^r \mathbf{I}_{\mathbf{k}_1}, \dots, \delta_{m_r}^r \mathbf{I}_{\mathbf{k}_{m_r}}, \delta_1^c \mathbf{I}_{\mathbf{k}_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c \mathbf{I}_{\mathbf{k}_{m_r+m_c}}, \right. \\ \left. \Delta_1^C, \dots, \Delta_{m_C}^C : \delta_i^r \in \mathbb{R}, \delta_i^c \in \mathbb{C}, \Delta_i^C \in \mathbb{C}^{(k_{m_r+m_c+i}) \times (m_r+m_c+i)} \right\} \quad (1.9)$$

A questo punto si può dare una definizione formalmente corretta dello structured singular value sia come $\mu_\Delta(\mathbf{M})$ nella (1.11) in relazione ad una qualsiasi possibile perturbazione $\Delta \in X_K$, che come $\mu(\mathbf{M})$ nella (1.12) considerando

¹Si ricorda che in questa trattazione, con raggio spettrale $\rho(\cdot)$ si intende il massimo autovalore in modulo della matrice (\cdot) .

l'insieme delle incertezze $\Delta \in BX_K$.

$$BX_K = \{ \Delta \in X_K : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \} \quad (1.10)$$

$$\mu_\Delta(\mathbf{M}) \triangleq \frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0, \Delta \in X_K \}} \quad (1.11)$$

$$\mu(\mathbf{M}) \triangleq \frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\mathbf{M}) \mid \det(\mathbf{I} - k_m \mathbf{M}\Delta) = 0, \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \}} \quad (1.12)$$

Dalla definizione di μ è possibile mettere in evidenza i limiti entro i quali risulta essere compreso grazie alla disuguaglianza seguente:

$$\rho(\mathbf{M}) \leq \mu_\Delta(\mathbf{M}) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{M}) \quad (1.13)$$

Tuttavia, al livello quantitativo, i valori di $\bar{\sigma}(\mathbf{M})$ e di $\rho(\mathbf{M})$ possono essere significativamente distanti; di conseguenza è opportuno andare a limitare l'intervallo in cui μ risulta essere contenuto sfruttando il Lemma 1 in [35], come segue:

$$D_K = \{ \mathbf{D} = \text{diag } e^{j\theta_1} D_1, \dots, e^{j\theta_{m_r}} D_{m_r}, D_{m_r+1}, \dots, D_{m_r+m_c}, \\ d_1 \mathbf{I}_{k_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_c} \mathbf{I}_{k_{m_r+m_c+m_c}}, \quad \} : \theta_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \\ 0 \leq D_i = D_i^* \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, 0 \leq d_i \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

$$\mu_\Delta(\mathbf{M}) = \mu_\Delta(\mathbf{DMD}^{-1}), \forall \mathbf{D} \in D_K \quad (1.15)$$

Considerando, in seguito, una perturbazione \mathbf{Q} a norma unitaria definita dallo spazio Q_K (1.16) è possibile ricorrere all'importante teorema (1.17) per la delineaazione concreta a livello computazionale dei margini superiore ed inferiore di μ .

$$Q_K = \{ \Delta \in X_K : \delta_i^r \in [-1, 1], \delta_i^c \delta_i^{c*} = 1, \Delta_i^{C*} \Delta_i^C = \mathbf{I}_{k_{m_r+m_c+i}} \} \quad (1.16)$$

$$\max_{\mathbf{Q} \in Q_K} \rho(\mathbf{QM}) \leq \max_{\Delta \in BX_K} \rho(\Delta \mathbf{M}) = \mu_\Delta(\mathbf{M}) \leq \inf_{\mathbf{D} \in D_K} \bar{\sigma}(\mathbf{DMD}^{-1}) \quad (1.17)$$

Pertanto la determinazione di μ comporta l'utilizzo di un algoritmo iterativo che permette di ottenerne il limite inferiore, rappresentato dal raggio spettrale $\rho(\mathbf{QM})$. Per chiarimenti riguardo alla procedura di calcolo si fa riferimento a [35].

Va sottolineato che, nonostante la rapidità appurata del metodo, come verrà illustrato in seguito, la convergenza effettiva tra $\rho(\mathbf{QM})$ e $\mu_\Delta(\mathbf{M})$ può

essere violata se la matrice di perturbazione \mathbf{Q} contiene esclusivamente variazioni dei parametri incerti reali. Una possibile soluzione per determinare un compromesso tra la convergenza del metodo iterativo delle potenze e la bontà della soluzione determinata può essere quella di introdurre nel sistema una perturbazione fittizia complessa.

Dal momento che non sempre in questo modo si riesce a garantire la continuità di μ è stata prevista un'ulteriore procedura per il calcolo del relativo limite inferiore basata su un'ottimizzazione. Tale approccio risulta essere sostanzialmente basato sul guadagno generalizzato del sistema; per visionare le modalità di implementazione dell'algoritmo sfruttato si fa riferimento alla guida di Matlab.

Dal punto di vista dell'efficienza, poiché l'ottimizzazione adattiva sul blocco di perturbazione chiama internamente il metodo delle potenze, è evidente che essa comporti un costo computazionale maggiore; d'altra parte come viene mostrato in seguito, il metodo iterativo è molto più efficace in presenza di una perturbazione esclusivamente complessa, mentre in un caso reale o misto produce delle discontinuità con salto nell'andamento di μ . Di conseguenza, dal momento che il divario tra i costi computazionali non è considerevole e che l'ottimizzazione produce dei risultati che poco si discostano quelli ottenuti tramite GNC, in generale si predilige l'algoritmo di *coordinate-wise optimization*.

Stabilità robusta della Ground Resonance: elicottero semplificato a 4 gdl

In questo capitolo è stata condotta un'analisi della robustezza della stabilità dell'elicottero rispetto al fenomeno della ground resonance. Esso consiste nell'insorgere di un'instabilità aeromeccanica dovuta all'accoppiamento tra il moto di ritardo delle pale del rotore e i moti del centro di gravità dell'intero velivolo. L'instabilità è caratterizzata dalla coalescenza della frequenza regressiva del modo di ritardo del rotore con la frequenza propria della struttura su cui il rotore risulta essere vincolato.

Poiché la frequenza di ritardo dipende dalla velocità di rotazione delle pale, è possibile andare a definire un certo range di velocità Ω critico, tipicamente collocato tra il 40% e il 120% del valore di regime, in cui $\nu_\zeta \Omega$ è minore della 1 per giro; in questo caso, per rotori così detti soft-in-plane o di tipo articolato, potrebbe innescarsi ground resonance a causa dell'interazione tra i modi di oscillazione della fusoliera del velivolo messo a terra tramite il carrello di atterraggio e i modi laterali e longitudinali generati dall'oscillazione nel piano del baricentro del rotore stesso.

Dal momento che questa tipologia di instabilità aeromeccanica risulta essere potenzialmente molto distruttiva, è inevitabile che lo studio di tale fenomeno debba essere previsto in sede di progetto sin dalle fasi iniziali, imponendo che la ground resonance rimanga al di fuori della vita operativa dell'elicottero.

A tal fine, poiché l'apporto di smorzamento strutturale non è sufficiente, è necessario soprattutto per i rotori articolati, l'introduzione di un componente associato a ciascuna pala in grado di fornire rigidità e smorzamento al sistema tali da prevenire l'insorgere di instabilità, ovvero lo smorzatore di ritardo. Lo sviluppo tecnologico associato alla progettazione di tali componenti ha portato ad un passaggio da dissipatori di tipo idraulici a smorzatori elastoviscosi di tipo elastomerico in grado di dissipare energia tramite dei

processi isteretici dovuti alla particolare relazione costitutiva del materiale di cui sono principalmente composti ([25] e [3]).

Assodata la natura fortemente non lineare e di difficile determinazione della risposta dinamica degli smorzatori, è evidente che potrebbero esserci delle incertezze nella definizione delle costanti dei modelli matematici o delle relazioni costitutive che li caratterizzano; pertanto, lo studio della stabilità del sistema a fronte di possibili incertezze nello smorzamento e nella rigidità equivalenti condotto attraverso un'analisi robusta, non solo potrebbe andare ad affinare la conoscenza dei margini di stabilità associati alla ground resonance, ma, a priori, potrebbe risultare una tecnica di progetto preliminare e di dettaglio degli smorzatori stessi [32].

Nell'ottica di effettuare una μ -Analisi dell'elicottero a terra per lo studio della ground resonance sono stati modellati due differenti velivoli con complessità crescente sia per la validazione delle procedure di calcolo che per l'applicazione di quest'ultime a problemi elicotteristici più complessi.

2.1 Equazioni di equilibrio e modello agli stati

In questa sezione verrà effettuata una validazione dell'approccio robusto applicato ad un sistema MIMO, Lineare Tempo Invariante di un elicottero semplificato riproposto da C. Hammond in [9]; le ipotesi alla base della formulazione di questo modello per l'analisi dell'instabilità aeromeccanica sono:

- il comportamento dinamico della fusoliera dell'elicottero e del relativo carrello d'atterraggio è ridotto ad uno schema a parametri concentrati (Figura 2.1) applicato al collegamento con il rotore principale;
- si considera per ciascuna pala esclusivamente il grado di libertà di ritardo ξ_i , tralasciando le restanti coordinate libere in quanto non significative per lo studio della ground resonance (Figura 2.2).

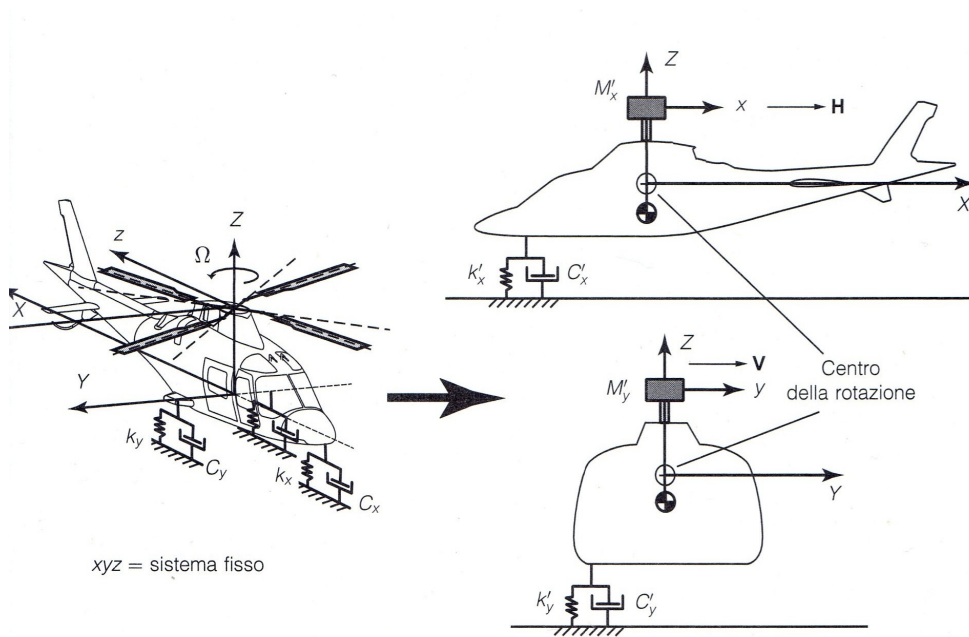


Figura 2.1: Modello a parametri concentrati della fusoliera dell'Hammond [1].

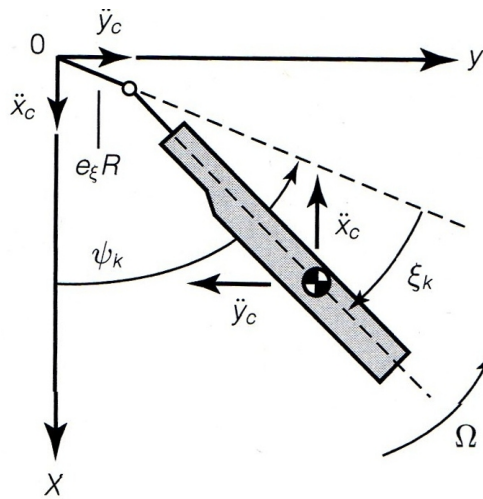


Figura 2.2: Modello semplificato della pala [1].

Per ricavare le equazioni associate alle N_b pale dell'elicottero è necessario innanzitutto scrivere la posizione del generico punto di massa dm appartenente alla pala rispetto al sistema di riferimento fisso (2.1)-(2.2) per poi andarne a ricavare le accelerazioni (2.4)-(2.5) per la determinazione delle

forze d'inerzia.

$$x_i = x_h + e \cos \psi_i + r \cos \psi_i + \xi_i \quad (2.1)$$

$$y_i = y_h + e \sin \psi_i + r \sin \psi_i + \xi_i \quad (2.2)$$

$$\psi_i = \Omega t + 2\pi \frac{i-1}{N}; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

in cui Ω è la velocità angolare del rotore nota e fissata al valore di regime.

$$\ddot{x}_i = \ddot{x}_h - e\Omega^2 \cos \psi_i - r(\Omega + \dot{\xi}_i)^2 \cos \psi_i + \xi_i - r\ddot{\xi}_i \sin \psi_i + \xi_i \quad (2.4)$$

$$\ddot{y}_i = \ddot{y}_h - e\Omega^2 \sin \psi_i - r(\Omega + \dot{\xi}_i)^2 \sin \psi_i + \xi_i + r\ddot{\xi}_i \cos \psi_i + \xi_i \quad (2.5)$$

Successivamente, una volta definiti i momenti d'inerzia del primo ordine S_b e del secondo ordine I_b associati a ciascuna pala, derivanti dall'integrazione sul volume dell'elemento infinitesimo di massa dm , si procede con la scrittura delle equazioni di equilibrio della pala in forma non lineare nei rispettivi gradi di libertà di ritardo; si effettua la linearizzazione di quest'ultime ipotizzando piccole perturbazioni di ritardo rispetto alla condizione di equilibrio di riferimento ($\cos \xi_i \approx 1$ e $\sin \xi_i \approx \xi_i$).

$$\begin{aligned} I_b \ddot{\xi}_i + e\Omega^2 S_b \sin \xi_i - S_b(\ddot{x}_h \sin \psi_i + \dot{\xi}_i) - \ddot{y}_h \cos \psi_i + \dot{\xi}_i + k_i \xi_i + c_i \dot{\xi}_i &= 0 \\ \ddot{\xi}_i + \eta_i \dot{\xi}_i + (\omega_{0_i}^2 + \Omega^2 \nu_0^2) \xi_i - \left(\frac{\nu_0^2}{e} \right) (\ddot{x}_h \sin \psi_i - \ddot{y}_h \cos \psi_i) &= 0 \\ &i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Per poter mostrare le equazioni in una forma più compatta e familiare per problemi di tipo elicotteristico sono stati definiti i seguenti parametri:

$$\begin{aligned} \nu_0^2 &= \frac{eS_b}{I_b} \\ \omega_{0_i}^2 &= \frac{k_b}{I_b} \\ \eta_i &= \frac{c_b}{I_b} \end{aligned}$$

in cui e , k_b e c_b rappresentano rispettivamente l'eccentricità, la rigidezza e lo smorzamento associati al ritardo di ciascuna pala.

Sulla base della modellazione a parametri concentrati precedentemente accennata, sono poi state ricavate le equazioni di equilibrio della fusoliera. Si nota come la presenza del rotore accoppi le equazioni relative a traslazione longitudinale e laterale con quelle di ritardo associate a ciascuna pala.

Dopo aver esplicitato l'escursione del baricentro del rotore a causa della ro-

tazione delle pale, è stato possibile determinare le equazioni di moto riferite al mozzo.

$$\begin{aligned}x_C &= x_h - \frac{\rho_c}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \sin \psi_i \\y_C &= y_h + \frac{\rho_c}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \cos \psi_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_x \ddot{x}_h + c_x \dot{x}_h + k_x x_h &= -Nm_b \ddot{x}_C \\m_y \ddot{y}_h + c_y \dot{y}_h + k_y y_h &= -Nm_b \ddot{y}_C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m_x + Nm_b) \ddot{x}_h + c_x \dot{x}_h + k_x x_h &= S_b \sum_{i=1}^N [(\ddot{\xi}_i - \Omega^2 \xi_i) \sin \psi_i + 2\Omega \dot{\xi}_i \cos \psi_i] \\(m_y + Nm_b) \ddot{y}_h + c_y \dot{y}_h + k_y y_h &= -S_b \sum_{i=1}^N [(\ddot{\xi}_i - \Omega^2 \xi_i) \cos \psi_i + 2\Omega \dot{\xi}_i \sin \psi_i]\end{aligned}$$

in cui ρ_c rappresenta la distanza radiale del baricentro di ciascuna pala dal centro dell'albero del rotore. In particolare, si noti come le equazioni sopra riportate, se affiancate con quelle del moto di ritardo delle pale del rotore, rappresentano un sistema di equazioni linearizzate tempo variante. Infatti, la presenza della posizione azimutale ψ_i di ciascuna pala, non solo sottolinea il sistema di riferimento utilizzato per la scrittura dell'equilibrio, ossia quello rotante, ma palesa la dipendenza dal tempo dei vari coefficienti delle equazioni differenziali.

Con l'ipotesi di rotore a comportamento perfettamente isotropo, ossia per cui le caratteristiche strutturali degli smorzatori di ritardo risultano essere identiche per ciascuna pala, è possibile ovviare al problema della periodicità dei coefficienti passando ad un sistema di riferimento non rotante con la trasformazione in coordinate multipala.

$$\xi_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \quad (2.6)$$

$$\xi_C = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \cos \psi_i \quad (2.7)$$

$$\xi_S = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \sin \psi_i \quad (2.8)$$

ξ_0 rappresenta il passo collettivo di ritardo, mentre ξ_C e ξ_S sono rispettivamente i modi ciclici di coseno e seno delle pale. In questo modo è possibile esprimere il grado di libertà di ritardo di ciascuna pala e le rispettive derivate come elencato di seguito:

$$\xi_C = \xi_0 + \xi_C \cos \psi_i + \xi_S \sin \psi_i \quad (2.9)$$

$$\dot{\xi}_i = (\dot{\xi}_C + \Omega \xi_S) \cos \psi_i + (\dot{\xi}_S - \Omega \xi_C) \sin \psi_i \quad (2.10)$$

$$\ddot{\xi}_i = (\ddot{\xi}_C + 2\Omega \dot{\xi}_S - \Omega^2 \xi_C) \cos \psi_i + (\ddot{\xi}_S - 2\Omega \dot{\xi}_C - \Omega^2 \xi_S) \sin \psi_i \quad (2.11)$$

Si riportano quindi le equazioni finali associate alla dinamica dell'elicottero semplificato¹ in cui il modello è costituito sostanzialmente da 4 gradi di libertà: lo spostamento longitudinale x_h e laterale y_h della fusoliera e le coordinate multipala di ritardo ξ_C e ξ_S .

Il movimento collettivo delle pale risulta essere disaccoppiato con le restanti equazioni e pertanto ininfluente nello studio della ground resonance.

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_C + \frac{C_b}{I_b} \dot{\xi}_C + \Omega^2 \left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{I_b \Omega^2} \right) \xi_C + 2\Omega \dot{\xi}_S + \frac{C_b}{I_b} \Omega \xi_S + \frac{\nu_0^2}{e} \ddot{y}_h &= 0 \\ \ddot{\xi}_S + \frac{C_b}{I_b} \dot{\xi}_S + \Omega^2 \left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{I_b \Omega^2} \right) \xi_S - 2\Omega \dot{\xi}_C - \frac{C_b}{I_b} \Omega \xi_S - \frac{\nu_0^2}{e} \ddot{x}_h &= 0 \\ (m_x + Nm_b) \ddot{x}_h + C_x \dot{x}_h + K_x x_h - \frac{S_b N}{2} \ddot{\xi}_S &= 0 \\ (m_y + Nm_b) \ddot{y}_h + C_y \dot{y}_h + K_y y_h + \frac{S_b N}{2} \ddot{\xi}_C &= 0 \end{aligned}$$

Dal momento che l'obiettivo è quello di ottenere un modello agli stati per l'analisi della stabilità robusta della ground resonance, è necessario effettuare una manipolazione delle equazioni sopra riportate per esplicitare le derivate seconde associate a ciascun grado di libertà dell'elicottero; pertanto risulta essere utile operare una contrazione di notazione andando a definire le seguenti grandezze:

$$M_x = m_x + Nm_b \quad (2.12)$$

$$M_y = m_y + Nm_b \quad (2.13)$$

$$M_I = 1 - \frac{\nu_0^2 S_b N}{2eM_y} \quad (2.14)$$

$$M_{II} = 1 - \frac{\nu_0^2 S_b N}{2eM_x} \quad (2.15)$$

¹Si noti come dapprima siano state ricavate le accelerazioni $\ddot{\xi}_C$ e $\ddot{\xi}_S$ dalle (2.7), (2.8) per poi riconoscerne la presenza nelle equazioni di equilibrio alla traslazione longitudinale e laterale della fusoliera.

Esplicitando quindi le accelerazioni del mozzo e andando a sostituirle nelle equazioni di equilibrio associate alle coordinate multipala si ottengono delle espressioni che possono essere facilmente riportate agli stati adottando come incognita il vettore $\mathbf{x} = \{\dot{\xi}_C, \dot{\xi}_S, \dot{x}, \dot{y}, \xi_C, \xi_S, x, y\}^T$.

$$\ddot{x}_h = -\frac{C_x}{M_x}\dot{x}_h - \frac{K_x}{M_x}x_h + \frac{S_b N}{2M_x}\ddot{\xi}_S \quad (2.16)$$

$$\ddot{y}_h = -\frac{C_y}{M_y}\dot{y}_h - \frac{K_y}{M_y}y_h - \frac{S_b N}{2M_y}\ddot{\xi}_C \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_C = & -\frac{c_b}{M_I I_b}\dot{\xi}_C - \frac{\Omega^2}{M_I}\left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{\Omega^2 I_b}\right)\xi_C + \frac{2\Omega}{M_I}\dot{\xi}_S - \frac{c_b\Omega}{M_I I_b}\xi_S + \\ & + \frac{\Omega^2}{eM_I}\left(\frac{C_y}{M_y}\dot{y}_h + \frac{K_y}{M_y}y_h\right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_S = & -\frac{c_b}{M_{II} I_b}\dot{\xi}_S + \frac{\Omega^2}{M_{II}}\left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{\Omega^2 I_b}\right)\xi_S + \frac{2\Omega}{M_{II}}\dot{\xi}_C + \frac{c_b\Omega}{M_{II} I_b}\xi_C + \\ & - \frac{\Omega^2}{eM_{II}}\left(\frac{C_x}{M_x}\dot{x}_h + \frac{K_x}{M_x}x_h\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Per studiare il sistema con approccio robusto risulta utile scomporlo in modo da esplicitare le caratteristiche degli smorzatori di ritardo come elementi in retroazione rispetto al sistema dinamico che rappresenta il velivolo. In particolare andando a invertire la matrice di trasformazione dalle coordinate fisiche del sistema di riferimento rotante a quelle multipala del sistema di riferimento non rotante (2.6-2.8) è possibile ottenere l'espressione delle coppie agenti in coordinate multipala e chiudere l'anello del sistema inserendo così in retroazione l'effetto stabilizzante degli smorzatori di ritardo.

Per un rotore isotropo in cui rigidezza k_b e smorzamento c_b sono identici per ogni pala, l'espressione delle reazioni elastoviscose multipala rimane tempo invariante evitando di ottenere delle matrici agli stati periodiche.

$$\mathbf{C}^{\text{NR}} = -\mathbf{K}_b^{\text{NR}}\boldsymbol{\xi}^{\text{NR}} - \mathbf{C}_b^{\text{NR}}\dot{\boldsymbol{\xi}}^{\text{NR}} = -\mathbf{K}(k_b, c_b)\mathbf{y} \quad (2.20)$$

Tale procedura verrà tuttavia illustrata e utilizzata in maniera estensiva per problemi dinamici più complessi in cui la diminuzione del costo computazionale per il trattamento delle risposte dinamiche e dell'analisi robusta rappresenta un requisito necessario; pertanto, in questo caso semplificato, si riporta direttamente il sistema nella forma matriciale agli stati esplicitando a pag. 27 la struttura e le varie parti della matrice $\bar{\mathbf{A}}$.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}(C_x, K_x) - \mathbf{BK}(k_b, c_b)\mathbf{C})\mathbf{x} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

Si riassumono quindi le caratteristiche principali del rotore di Hammond [9] nella Tabella 2.1, facendo particolare attenzione ai valori nominali di rigidezza e smorzamento equivalenti associati agli smorzatori dell'elicottero semplificato.

Numero di pale N_b	4	[-]
offset cerniera di ritardo e	0.3048	[m]
Massa della pala m_b	94.9	[kg]
Momento statico della pala S_b	289.1	[kg m]
Momento d'inerzia della pala I_b	1084.7	[kg m ²]
Rigidezza di ritardo smorzatori k_b	0	[N m /rad]
Smorzamento di ritardo smorzatori c_b	4067.5	[N m s/rad]
Massa longitudinale equivalente m_x	8026.7	[kg]
Massa laterale equivalente m_y	3283.6	[kg]
Rigidezza longitudinale equivalente K_x	1240481.8	[N/m]
Rigidezza laterale equivalente K_y	1240481.8	[N/m]
Smorzamento longitudinale equivalente C_x	51078.7	[N s/m]
Smorzamento laterale equivalente C_y	25539.3	[N s/m]

Tabella 2.1: Parametri del modello del rotore di Hammond [9].

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_b M_I} & 0 & \frac{1}{I_b M_I} & \frac{1}{I_b M_I} \\ 0 & \frac{1}{I_b M_I} & -\frac{I_b M_I}{S_b N} & -\frac{I_b M_I}{S_b N} \\ 0 & \frac{1}{2I_b M_x M_I} & -\frac{I_b M_I}{S_b N \Omega} & -\frac{I_b M_I}{S_b N \Omega} \\ -\frac{S_b N}{2I_b M_y M_I} & -\frac{S_b N}{2I_b M_y M_I} & -\frac{I_b M_I}{2I_b M_x M_I} & -\frac{I_b M_I}{2I_b M_x M_I} \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & \Omega C_b & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega C_b & k_b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}(k_b, c_b) = \begin{bmatrix} k_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & \Omega C_b & 0 \\ 0 & -\Omega C_b & k_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_b \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}}(k_b, c_b, K_x, C_x) = \begin{bmatrix} -\frac{c_b}{M_I I_b} & \frac{2\Omega}{M_I} & -\frac{c_b}{M_I I_b} & 0 & -\frac{\nu_0^2}{e M_I M_y} & 0 & -\frac{\Omega^2}{M_I} \left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{I_b \Omega^2} \right) & -\frac{c_b \Omega}{M_I I_b} & 0 & -\frac{c_b \Omega}{M_I I_b} & \frac{\nu_0^2}{e M_I M_y} & 0 \\ \frac{2\Omega}{M_I} & -\frac{c_b}{M_I I_b} & -\frac{c_b}{M_I I_b} & -\frac{\nu_0^2}{e M_I M_x} & 0 & 0 & \frac{c_b \Omega}{M_I I_b} & -\frac{c_b \Omega}{M_I I_b} & \frac{\Omega^2}{M_I} \left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{I_b \Omega^2} \right) & \frac{\nu_0^2}{e M_I M_y} & 0 & 0 \\ \frac{S_b \Omega}{M_x M_I} & -\frac{c_b S_b N}{2I_b M_x M_I} & -\frac{c_b S_b N}{2I_b M_x M_I} & -\left(\frac{\nu_0^2 S_b N}{2e M_x M_I} + 1 \right) \frac{C_x}{M_x} & 0 & 0 & \frac{S_b \Omega^2}{2M_x M_I} \left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{I_b \Omega^2} \right) & \frac{c_b S_b \Omega}{2I_b M_x M_I} & \frac{S_b \Omega^2}{2M_x M_I} \left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{I_b \Omega^2} \right) & -\left(\frac{\nu_0^2 S_b N}{2e M_I M_y} + 1 \right) \frac{K_x}{M_x} & \frac{\nu_0^2 S_b N}{e M_I M_y} & 0 \\ \frac{c_b S_b N}{2I_b M_y M_I} & -\frac{S_b \Omega}{M_y M_I} & -\frac{S_b \Omega}{M_y M_I} & 0 & -\left(\frac{\nu_0^2 S_b N}{2e M_y M_I} + 1 \right) \frac{C_y}{M_y} & -\left(\frac{\nu_0^2 S_b N}{2e M_y M_I} + 1 \right) \frac{C_y}{M_y} & \frac{S_b \Omega^2}{2M_y M_I} \left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{I_b \Omega^2} \right) & \frac{c_b S_b \Omega}{2I_b M_y M_I} & \frac{S_b \Omega^2}{2M_y M_I} \left(\nu_0^2 - 1 + \frac{k_b}{I_b \Omega^2} \right) & 0 & 0 & -\left(\frac{\nu_0^2 S_b N}{2e M_I M_y} + 1 \right) \frac{K_y}{M_y} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabella 2.2: Matrici di stato del sistema dinamico dell'elicottero semplificato

Dal sistema in anello chiuso sopra riportato attraverso $\bar{\mathbf{A}}$ si nota come gli ingressi di controllo sono sostanzialmente rappresentati da delle coppie di ritardo espresse direttamente in coordinate multipala e suddivise in un contributo elastico e viscoso rispettivamente rappresentato dalla rigidità equivalente k_b e dallo smorzamento equivalente c_b .

Per quanto concerne invece le uscite si suppone di avere a disposizione dei sensori di velocità e posizione in ritardo di ciascuna pala espresse anche in questo caso direttamente in coordinate multipala.

Riassumendo, il sistema in esame ha 8 stati contenuti nel vettore \mathbf{x} , 4 uscite di misura in posizione e velocità di ritardo associate a ciclico coseno e ciclico seno ($\xi_C, \xi_S, \dot{\xi}_C, \dot{\xi}_S$) e 2 ingressi di controllo rappresentate dalle coppie di reazione di ritardo elastoviscose cicliche coseno e cicliche seno (C_C^ξ, C_S^ξ).

2.2 Analisi di stabilità robusta

In questo paragrafo vengono riportati i passi successivi che hanno portato alla determinazione dei margini di stabilità robusta del sistema dinamico associato all'elicottero semplificato a 4 gradi di libertà.

In primo luogo, sono stati selezionati alcuni parametri di progetto che potrebbero essere affetti da una possibile incertezza, mentre successivamente, dopo aver appurato la stabilità del sistema nominale, si è costruita la cosiddetta struttura $N - \Delta$ del sistema agli stati. Pertanto, dopo aver isolato il sistema nominale dall'azione delle incertezze contenute esclusivamente nella matrice Δ , si è studiato l'andamento al variare della frequenza del massimo valore singolare strutturato μ della matrice di trasferimento tra ingresso e uscita delle perturbazioni, ovvero quella precedentemente definita con il simbolo \mathbf{M} .

2.2.1 Definizione delle incertezze di modello

Gli elementi maggiormente incerti nel modello del rotore per lo studio della ground resonance sono sicuramente rappresentati dalle caratteristiche elastoviscose degli smorzatori di ritardo di ciascuna pala; essendo il rotore isotropo, è possibile localizzare in k_b e c_b tali parametri incerti e, visualizzarne la posizione all'interno della matrice $\bar{\mathbf{A}}$. Si definiscono pertanto gli intervalli di variabilità di rigidità e smorzamento rispetto al valore nominale di

riferimento.

$$k_b = k_b^N \left(1 + \frac{\delta k_b}{k_b^N} \right) \text{ in cui } \delta_1 = \frac{\delta k_b}{k_b^N} = [-100\%, 100\%] \quad (2.21)$$

$$c_b = c_b^N \left(1 + \frac{\delta c_b}{c_b^N} \right) \text{ in cui } \delta_2 = \frac{\delta c_b}{c_b^N} = [-100\%, 100\%] \quad (2.22)$$

Inizialmente, sono state considerate esclusivamente tali fonti di incertezza, mentre in un secondo momento sono state introdotte ulteriori variabilità associate a rigidezza e smorzamento del moto longitudinale della fusoliera, in quanto risultato maggiormente critico per il fenomeno della ground resonance.

$$K_x = K_x^N \left(1 + \frac{\delta K_x}{K_x^N} \right) \text{ in cui } \delta_3 = \frac{\delta K_x}{K_x^N} = [-50\%, 50\%] \quad (2.23)$$

$$C_x = C_x^N \left(1 + \frac{\delta C_x}{C_x^N} \right) \text{ in cui } \delta_4 = \frac{\delta C_x}{C_x^N} = [-50\%, 50\%] \quad (2.24)$$

Pertanto, sostituendo le espressioni sopraelencate all'interno della matrice del sistema è possibile identificare l'implicazione delle incertezze introdotte sulla dinamica complessiva; in particolare la tipologia di incertezza che si è introdotta si può identificare come *inverse additive uncertainty* sulla $\mathbf{A}(\mathbf{K}_x, \mathbf{C}_x)$ da un lato e sulla $\mathbf{BK}(\mathbf{k}_b, \mathbf{c}_b)\mathbf{C}$ dall'altro.

Infatti, attraverso l'espressione (2.25) e il diagramma a blocchi riportato in Figura 2.3, è stato possibile trattare in un unico blocco di perturbazione applicato esclusivamente alle uscite \mathbf{y} del sistema sia l'incertezza contenuta all'interno del controllore che quella rappresentata dalla struttura della fusoliera del velivolo a terra.

Tale procedura è stata ottenuta andando a applicare alle uscite delle matrici peso \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 che tenessero conto della struttura del controllore per l'applicazione delle incertezze k_b e c_b attraverso $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{C}$ e della dinamica associata alla fusoliera per quelle su K_x e C_x attraverso i coefficienti \tilde{K}_x, \tilde{C}_x nella $\bar{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{I_b M_I} & 0 & -\frac{1}{I_b M_I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_b M_{II}} & 0 & \frac{1}{I_b M_{II}} \\ 0 & \frac{S_b N}{2I_b M_x M_{II}} & 0 & \frac{S_b N}{2I_b M_x M_{II}} \\ \frac{S_b N}{2I_b M_y M_I} & 0 & \frac{S_b N}{2I_b M_y M_I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabella 2.3: Rappresentazione delle incertezze sugli smorzatori di ritardo.

Analogamente si mostrano le matrici di perturbazione e relativi pesi per il caso in cui sono state trattate ulteriori incertezze applicate alla struttura della fusoliera del modello semplificato dell'elicottero; in questo caso il rango delle matrici corrispondenti alla perturbazione sul sistema dinamico è pari a uno sia per K_x che per C_x quindi all'interno dell'analisi robusta verrà aumentata la dimensione della matrice di perturbazione fino ad ottenere una 6x6.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{I_b M_I} & 0 & -\frac{1}{I_b M_I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_b M_{II}} & 0 & \frac{1}{I_b M_{II}} & -\frac{\nu_0^2}{e M_{II} M_x} & \frac{\nu_0^2}{e M_{II} M_x} \\ 0 & \frac{S_b N}{2I_b M_x M_{II}} & 0 & \frac{S_b N}{2I_b M_x M_{II}} & -\left(\frac{\nu_0^2 S_b N}{2e M_x M_{II}} + 1\right) \frac{1}{M_x} & -\left(\frac{\nu_0^2 S_b N}{2e M_x M_{II}} + 1\right) \frac{1}{M_x} \\ \frac{S_b N}{2I_b M_y M_I} & 0 & \frac{S_b N}{2I_b M_y M_I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabella 2.4: Rappresentazione delle incertezze sugli smorzatori e sulla struttura della fusoliera.

2.2.2 Dinamica delle incertezze

Un'ulteriore aspetto da tenere in considerazione come accennato precedentemente e come viene rimarcato da [27] e [23] riguarda le problematiche legate alla continuità del margine di stabilità robusta k_m .

Infatti, in presenza di perturbazioni reali come in questo caso, può avvenire che all'interno delle frequenze di interesse μ presenti delle discontinuità con salto causate dalla migrazione dei poli dal piano stabile a quello instabile nell'intorno stretto di una particolare frequenza o addirittura solo in corrispondenza di quest'ultima.

In questo caso, innanzitutto può essere utile un opportuno infittimento della griglia di calcolo in frequenza, in modo da riuscire a cogliere in maniera sufficientemente corretta l'andamento del margine di stabilità nei pressi dell'eventuale frequenza critica. Oppure, è possibile introdurre una rapida dinamica di transizione associata a ciascuna incertezza in modo da eliminare le discontinuità al variare della frequenza. In questo caso, si va ad aggiungere una dinamica ai guadagni puri del sistema e se questa tende a zero, i margini di stabilità calcolati per il problema modificato convergono a quelli del problema originario.

A partire dai valori di incertezza introdotti, si è quindi associata a ciascun parametro δ_i una dinamica, la quale, pur imponendo una determinata percentuale di variazione in senso conservativo del modulo della perturbazione, generalmente non più del 5 %, permettesse di evitare di sottostimare il valore di μ grazie all'aggiunta di una incertezza fittizia sulla parte complessa.

La difficoltà maggiore legata a questa procedura è il raggiungimento del giusto compromesso tra complessità aggiunta per la convergenza del metodo e la perturbazione del sistema dinamico originario.

In questo senso, qualora la perturbazione dovesse essere eccessiva sarebbe necessario utilizzare degli algoritmi di ottimizzazione più complessi basati sul guadagno del sistema con conseguente maggior costo computazionale. Per meglio comprendere le implicazioni di tale procedura si fa riferimento ai risultati ottenuti nei paragrafi successivi.

2.2.3 μ -Analisi

Attraverso la schematizzazione semplificata di Figura 2.4, a partire dalla conoscenza della matrice di trasferimento $\mathbf{P}(K_x^N, C_x^N)$ che lega ingresso $\{u_\Delta, u, w\}^T$ e uscite $\{z = y_\Delta, y, v\}^T$ del sistema e della matrice associata al sistema di controllo $\mathbf{K}(k_b^N, c_b^N)$, si è costruita la struttura $N - \Delta$ riportata in Figura 2.5 ricorrendo ad una LFT inferiore. Si ricorda che l'ingresso w

è rappresentato da uscite desiderate r , disturbo d sul sistema e disturbo di misura delle uscite n .

$$N = F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2.26)$$

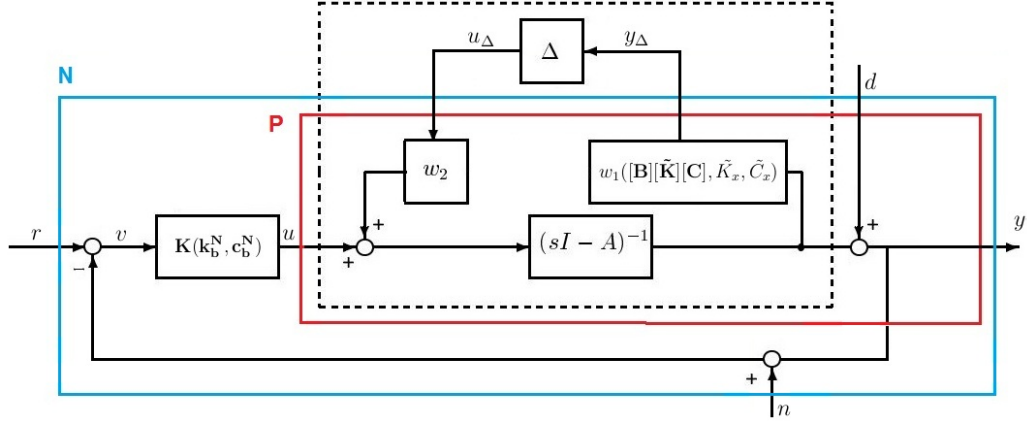


Figura 2.4: Configurazione generale del sistema dinamico dell'elicottero con P ed N .

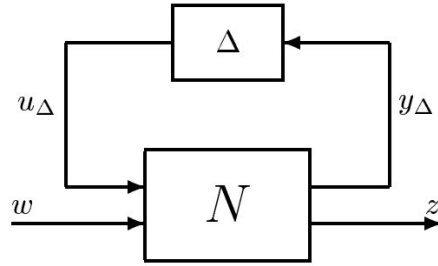


Figura 2.5: Struttura $N - \Delta$ per l'analisi robusta della stabilità.

Come descritto in precedenza, considerando gli ingressi esogeni w (disturbi e segnali di riferimento normalizzati) e le uscite esogene z (errori normalizzati) è possibile definire un'unica funzione di trasferimento della quale minimizzare la norma \mathcal{H}_∞ rappresentata da $F(\Delta)$, ovvero la LFT superiore.

$$F(\Delta) = F_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} \quad (2.27)$$

Si evince quindi che il primo requisito per la stabilità robusta è evidentemente rappresentato dalla stabilità nominale del sistema (NS); ossia è necessario andare a verificare i poli del sistema con i valori nominali per k_b , c_b , K_x e C_x .

Posto che la perturbazione Δ sia stabile e che sia verificata la relazione $\|\Delta\|_\infty < 1$, l'unica fonte di instabilità per il sistema affetto dalle incertezze è rappresentata dalla parte $(I - N_{11}\Delta)^{-1}$ della LFT; pertanto questo assunto porta allo studio della stabilità tramite la struttura $M - \Delta$ riportata in Figura 2.6.

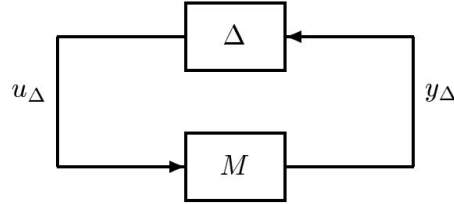


Figura 2.6: Struttura $M - \Delta$ del sistema.

Infatti, l'algoritmo implementato determina esclusivamente la parte N_{11} della LFT, ossia si ottiene la matrice di trasferimento \mathbf{M} tra ingresso u_Δ e uscita y_Δ del blocco della perturbazione.

A questo punto si riporta la condizione limite di stabilità robusta del sistema (RS) nella (2.29) andando a identificare il massimo valor singolare strutturato μ non solo a livello matematico come parametro generalizzato della decomposizione ai valori singolari ma anche come inverso del margine di stabilità robusta del sistema.

$$NS \Leftrightarrow N_{11} \text{ stabile} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} RS &\Leftrightarrow \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta(jw)) \neq 0, \quad \forall w, \forall \Delta \\ &\Leftrightarrow \lambda_i(\mathbf{M}\Delta(jw)) \neq 1, \quad \forall i, \forall w, \forall \Delta \end{aligned} \quad (2.29)$$

A livello operativo occorre quindi esplicitare una modalità di calcolo del margine di stabilità k_m del sistema a partire dalla condizione si/no riportata precedentemente; pertanto è stato necessario determinare un algoritmo che scalasse la perturbazione attraverso il valore k_m con Δ diagonale in modo da localizzare al variare della frequenza e degli autovalori il più piccolo k_m che rendesse singolare l'espressione $\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta(jw)$.

Si ottiene quindi la definizione di μ , la quale porta ad una nuova condizione per la caratterizzazione della stabilità robusta del velivolo.

$$\mu(\mathbf{M}) = \frac{1}{\min k_m | \det(\mathbf{I} - k_m \mathbf{M}\Delta(jw)) = 0} \quad (2.30)$$

$$RS \Leftrightarrow \mu(\mathbf{M}(jw)) \sigma(\Delta(jw)) < 1 \forall w \quad (2.31)$$

2.2.4 Criterio Generalizzato di Nyquist (GNC)

Prendendo in considerazione il modello del sistema dinamico affetto esclusivamente dalle incertezze associate alle caratteristiche elastoviscose degli smorzatori di ritardo dell'elicottero, è stato possibile condurre parallelamente alla μ -Analisi, uno studio di stabilità robusta facendo riferimento a [32].

Nella trattazione dell'articolo citato, è stato utilizzato un procedimento differente ma analogo; infatti, per il sistema MIMO in questione, è stato sfruttato il Criterio di Nyquist Generalizzato (GNC) [34], secondo cui, posto che il sistema nominale controllato sia stabile, la condizione limite di stabilità viene raggiunta quando è verificata la seguente relazione:

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{M}(s)\mathbf{\Delta}(s)) = 0, \quad \text{per } s = j\omega \quad (2.32)$$

In particolare quindi è stata adottata la tecnica del *Characteristic Loci*, ovvero è stata verificata la stabilità di ciascun autovalore della funzione di trasferimento del sistema a fronte di un'introduzione di un'incertezza $\mathbf{\Delta}(j\omega)$ supposta limitata e stabile. Questa caratterizzazione, partendo dall'andamento del diagramma di Nyquist della funzione d'anello $\mathbf{L}(j\omega)$ nel piano complesso (Fig. 2.7), valuta lo scostamento della curva dal punto -1 per assodarne la stabilità.

Gli autovalori del sistema incerto in anello chiuso devono quindi essere distanti dal punto critico in -1.

$$\lambda_i(\mathbf{M}(s)\mathbf{\Delta}(s)) \neq -1, \quad \forall \omega \text{ per } i = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

Per quanto concerne invece la modalità con cui è stata quantificata la robustezza del sistema affetto dalle incertezze sui parametri k_b e c_b , è stato identificato come visibile in Figura 2.8 il margine di stabilità $\rho_i e^{j\theta_i}$ come la distanza del diagramma di Nyquist dal punto -1 lungo il vettore congiungente quest'ultimo e $\mathbf{L}(j\omega)$.

Infatti, è possibile identificare l'effetto della presenza della perturbazione su ciascun autovalore del sistema incerto tramite l'espressione di z_i .

$$z_i = \lambda_i(\mathbf{L}_0(s)) + \rho_i e^{j\theta_i} \quad (2.34)$$

in cui $\lambda_i(\mathbf{L}_0(j\omega))$ rappresentano gli autovalori della funzione d'anello associata al sistema dinamico nominale, ossia verificano le seguenti espressioni:

$$\mathbf{u}_i^T \lambda = \mathbf{u}_i^T \mathbf{L}_0(j\omega) \quad (2.35)$$

$$\lambda \mathbf{v}_i = \mathbf{L}_0(j\omega) \mathbf{v}_i \quad (2.36)$$

in cui $\mathbf{L}_0(j\omega) = \mathbf{M}(j\omega)\mathbf{\Delta}_0(j\omega)$.

Si sottolinea che il contributo degli smorzatori di ritardo è formalmente inserito nella dinamica completa del sistema attraverso una legge di controllo lineare in controreazione sulle uscite di velocità e posizione di ritardo delle pale. In questo modo, da un lato si avrà una perturbazione nominale del sistema data da $\Delta_0(j\omega)$ in cui si presuppone un funzionamento degli smorzatori pari alla condizione di progetto, mentre dall'altro una perturbazione $\delta\Delta(j\omega)$ rappresentata dalle possibili incertezze su k_b e c_b .

$$\Delta(j\omega) = \Delta_0(j\omega) + \delta\Delta(j\omega) \quad (2.37)$$

Si distinguono i due differenti casi presi in esame, rispettivamente con 2 incertezze δk_b e δc_b sugli smorzatori e con 4 incertezze $\delta k_b, \delta c_b, \delta K_x$ e δC_x su smorzatori e caratteristiche strutturali della fusoliera; se ne riporta la differente matrice di perturbazione. Nel caso di 4 incertezze è stato necessario introdurre sia un'ulteriore uscita di posizione associata al moto longitudinale x della fusoliera che un ingresso di controllo in controreazione diretta su tale misura che producesse una forza proporzionale alle incertezze di modello δK_x e δC_x .

⇒ 2 incertezze

$$\Delta_0 = \frac{N_b}{2} \begin{bmatrix} k_b^N + j\omega c_b^N & \Omega c_b^N \\ -\Omega c_b^N & k_b^N + j\omega c_b^N \end{bmatrix}; \quad \delta\Delta = \frac{N_b}{2} \begin{bmatrix} \delta k_b + j\omega \delta c_b & \Omega \delta c_b \\ -\Omega \delta c_b & \delta k_b + j\omega \delta c_b \end{bmatrix}$$

⇒ 4 incertezze

$$\Delta_0 = \frac{N_b}{2} \begin{bmatrix} k_b^N + j\omega c_b^N & \Omega c_b^N & 0 \\ -\Omega c_b^N & k_b^N + j\omega c_b^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\delta\Delta = \frac{N_b}{2} \begin{bmatrix} \delta k_b + j\omega \delta c_b & \Omega \delta c_b & 0 \\ -\Omega \delta c_b & \delta k_b + j\omega \delta c_b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{N_b}(\delta K_x + j\omega \delta C_x) \end{bmatrix}$$

Ponendosi nel caso limite di autovalore pari a -1 è possibile determinare il margine di stabilità del sistema come distanza tra $\mathbf{L}(j\omega)$ e -1 del diagramma di Nyquist lungo la congiungente tra i due punti (esempio in Figura 2.7).

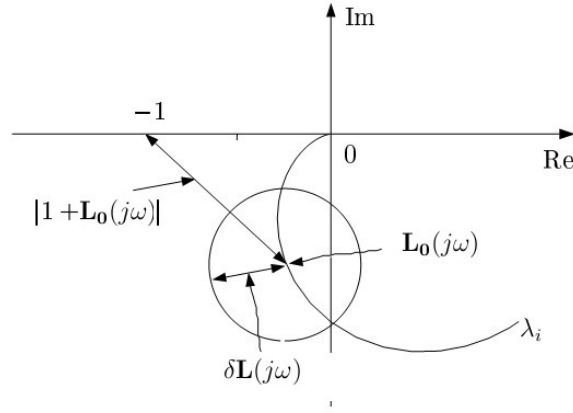


Figura 2.7: Possibile diagramma di Nyquist della funzione d'anello perturbata.

$$\rho_i(\omega)e^{j\theta_i} = -(\lambda_i(\mathbf{L}_0(j\omega)) + 1) = \mathbf{u}_i(\omega)^T \mathbf{M}(j\omega) \delta \mathbf{\Delta}(j\omega) \mathbf{v}_i(\omega) \quad (2.38)$$

Valutando dalla relazione soprastante la parte reale e quella immaginaria, è possibile ricavare rispettivamente la condizione limite di stabilità e lo sfasamento introdotto nel sistema dalle incertezze per ogni autovalore.

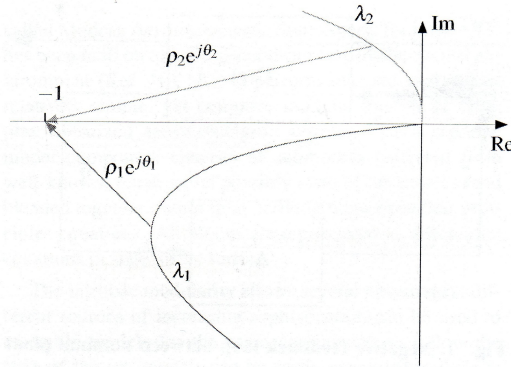


Figura 2.8: Determinazione di $\rho_i e^{j\theta_i}$ per ogni autovalore del sistema.

$$|\lambda_i(\mathbf{L}_0(j\omega)) + 1| \geq |\mathbf{u}_i(\omega)^T \mathbf{M}(j\omega) \delta \mathbf{\Delta}(j\omega) \mathbf{v}_i(\omega)| \quad (2.39)$$

$$\theta_i(\omega_i) = \arg(\mathbf{u}_i(\omega)^T \mathbf{M}(j\omega) \delta \mathbf{\Delta}(j\omega) \mathbf{v}_i(\omega)) \quad (2.40)$$

Una volta noto l'andamento di $\rho_i e^{j\theta_i}$ è possibile impostare un sistema lineare attraverso la (2.38) nelle incognite $\delta\Delta(j\omega)$ col quale per ogni autovalore si determinano gli scostamenti Δk_b , Δc_b , ΔK_x e ΔC_x rispetto ai relativi valori nominali che porterebbero il sistema alla condizione di instabilità. La procedura adottata è differente a seconda delle incertezze da cui il sistema è affetto, in particolare si avrà:

► **2 incertezze:** $(\delta k_b, \delta c_b)$

$$\tilde{\mathbf{K}}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i \quad j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i + \Omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_b \mathbf{v}_i \right] \begin{Bmatrix} \delta k_b \\ \delta c_b \end{Bmatrix} = \left\{ \rho_i e^{j\theta_i} \right\}$$

Si separa quindi la parte reale da quella immaginaria ricavando il sistema lineare risolvete in 2 equazioni e 2 incognite δk_b e δc_b come segue:

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i) & \text{Re}(j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i + \Omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_b \mathbf{v}_i) \\ \text{Im}(\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i) & \text{Im}(j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i + \Omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_b \mathbf{v}_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta k_b \\ \delta c_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \end{Bmatrix}$$

Analogamente vengono calcolate le variazioni che inducono un margine complessivo del sistema k_m pari al 15 %, tenendo conto della direzione i_ρ della congiungente tra funzione di trasferimento del sistema e punto -1.

$$\mathbf{I}_{\rho_i} = 1 - 0.15 \frac{\rho_i(\omega) e^{j\theta_i(\omega)}}{|\rho_i(\omega) e^{j\theta_i(\omega)}|} \quad (2.41)$$

$$\left\{ \rho_i(\omega) e^{j\theta_i(\omega)} \right\}_{k_m=15\%} = \mathbf{I}_{\rho_i} - \lambda_i(L_0(j\omega)) \quad (2.42)$$

►► 4 incertezze: $(\delta \mathbf{k}_b, \delta c_b, \delta K_x, \delta C_x)$

$$\tilde{\mathbf{K}}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{K}}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i & j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i + \Omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_b \mathbf{v}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i & j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta k_b \\ \delta c_b \\ \delta K_x \\ \delta C_x \end{array} \right\} = \{ \rho_i e^{j\theta_i} \}$$

Tuttavia, in questo caso, la separazione della parte reale da quella immaginaria porterebbe ad un sistema lineare a 2 equazioni e 4 incognite $\delta k_b, \delta c_b, \delta K_x$ e δC_x . Ossia in presenza di 4 incertezze il sistema è sotto determinato; per giungere alla chiusura del bilancio incognite ed equazioni ed ottenere dei valori limite confrontabili con quelli forniti dalla μ -Analisi sono state utilizzate due modalità di risoluzione:

► Valori esterni delle incertezze

sfruttando la linearità nelle incognite, una volta ricavate δk_b e δc_b in funzione delle restanti due incognite, vengono fissati i valori di δK_x e δC_x al valore della massima escursione possibile; pertanto, analizzando per ogni frequenza considerata il segno dei termini di parte reale e immaginaria di $\mathbf{G}_b^{-1} \mathbf{G}_x$ è stato possibile identificare la peggior combinazione tra $\delta K_x^{LIM} = \pm 50\% K_x$ e $\delta C_x^{LIM} = \pm 50\% C_x$ che minimizzasse lo scostamento di δc_b rispetto al valore nominale.

$$\left[\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i \quad j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i + \Omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_b \mathbf{v}_i \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta k_b \\ \delta c_b \end{array} \right\} =$$

$$= \{ \rho_i e^{j\theta_i} \} - \left[\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i \quad j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta K_x^{LIM} \\ \delta C_x^{LIM} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i) & \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i + \Omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_b \mathbf{v}_i) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i) & \operatorname{Im}(j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i + \Omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_b \mathbf{v}_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta k_b \\ \delta c_b \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i) & \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i) & \operatorname{Im}(j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta K_x^{LIM} \\ \delta C_x^{LIM} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

↓

$$\begin{Bmatrix} \delta k_b \\ \delta c_b \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}_b]^{-1} \begin{Bmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \end{Bmatrix} - [\mathbf{G}_b]^{-1} [\mathbf{G}_x] \begin{Bmatrix} \delta K_x^{LIM} \\ \delta C_x^{LIM} \end{Bmatrix}$$

➔ **Ottimizzazione**

la determinazione dei parametri limite dello smorzatore di ritardo si basa sulla combinazione lineare delle incertezze delle caratteristiche strutturali della fusoliera del velivolo tale da minimizzare la seguente funzione di merito F.

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \delta K_x \\ \delta C_x \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \delta k_b(\mathbf{x}) \\ \delta c_b(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_b^{-1} \begin{Bmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \end{Bmatrix} - \mathbf{G}_b^{-1} \mathbf{G}_x \mathbf{x}$$

$$\min F(\mathbf{x})_{[x \in R^{2 \times 1}]} = \sqrt{\left(\frac{\delta k_b(\mathbf{x})}{k_b^N}\right)^2 + \left(\frac{\delta c_b(\mathbf{x})}{c_b^N}\right)^2} \quad (2.43)$$

Per essere il più possibile coerenti con la dinamica del sistema si è scelto di attivare un ulteriore algoritmo per il calcolo della stima iniziale dell'ottimizzatore; in particolare si è impostato il sistema come se fosse affetto dalle sole incertezze strutturali di fusoliera e con smorzatori nominali. Risolvendo quindi il sistema di equazioni lineari riportato in seguito si ottengono i massimi valori ammissibili di ΔK_x e ΔC_x che causerebbero la migrazione dei poli del sistema nel semipiano destro del piano di Argan.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i & j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_x \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta K_x \\ \delta C_x \end{Bmatrix} = \{ \rho_i e^{j\theta_i} \}$$

In questo caso $\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}} = 1$ essendo incerto solo l'anello del moto longitudinale della fusoliera. Dividendo la parte reale da quella immaginaria si ricava il sistema lineare risolvete in 2 equazioni e 2 incognite δK_x e δC_x come nel caso precedente di due sole incognite.

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_i) & \text{Re}(j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_i) \\ \text{Im}(\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_i) & \text{Im}(j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta K_x^{AMM} \\ \Delta C_x^{AMM} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_i \cos \theta_i \\ \rho_i \sin \theta_i \end{Bmatrix}$$

Si sceglie, pertanto come \mathbf{x}_0 il 50 % del valore limite così determinato in modo da agevolare il solutore fornendogli un punto di partenza frequenza per frequenza coerente con l'andamento di ΔK_x^{AMM} e ΔC_x^{AMM} .

2.3 Risultati ottenuti

2.3.1 Stabilità nominale

Per quanto concerne la stabilità, per il caso semplificato in analisi è possibile andare a visualizzare la parte reale degli autovalori del sistema per poter appurare la stabilità nominale di quest'ultimo; in particolare, si nota dalla Tabella 2.5 non solo che i poli sono tutti stabili ma anche che la norma \mathcal{H}_∞ della funzione di trasferimento tra ingressi e uscite risulta essere piuttosto piccola, praticamente nulla.

Autovalori	
Re(λ)	Imag(λ)
-2.9059	+29.2239
-2.9059	-29.2239
-0.9922	+15.8364
-0.9922	-15.8364
-3.5038	+16.2629
-3.5038	-16.2629
-3.1993	+11.7828
-3.1993	-11.7828
\mathcal{H}_∞	6.4700e-004

Tabella 2.5: Poli del sistema in anello chiuso con valori nominali.

Come ulteriore verifica della stabilità del sistema, utilizzando il modello MASST dell'elicottero è stata effettuata un'analisi di continuazione per l'inseguimento degli autovalori del sistema; in particolare sono stati introdotto i gradi di libertà di fusoliera associati a spostamento laterale e longitudinale x e y del velivolo e le coordinate multipala di variazione passo ciclico coseno e ciclico seno ξ_C e ξ_S , esattamente come il modello a 8 stati costruito per l'analisi robusta del sistema.

Si riporta quindi l'andamento, rispettivamente in Figura 2.9 e 2.10, della parte reale e immaginaria degli autovalori del sistema in funzione della 1 per giro avendo fissato la velocità di rotazione del rotore al relativo valore di regime di $\Omega = 200$ RPM. Inoltre, come visibile dalla Figura 2.11, anche il diagramma di Nyquist associato alla funzione di trasferimento d'anello di ξ_S conferma che il sistema nelle condizioni nominali garantisce la stabilità per ogni frequenza considerata.

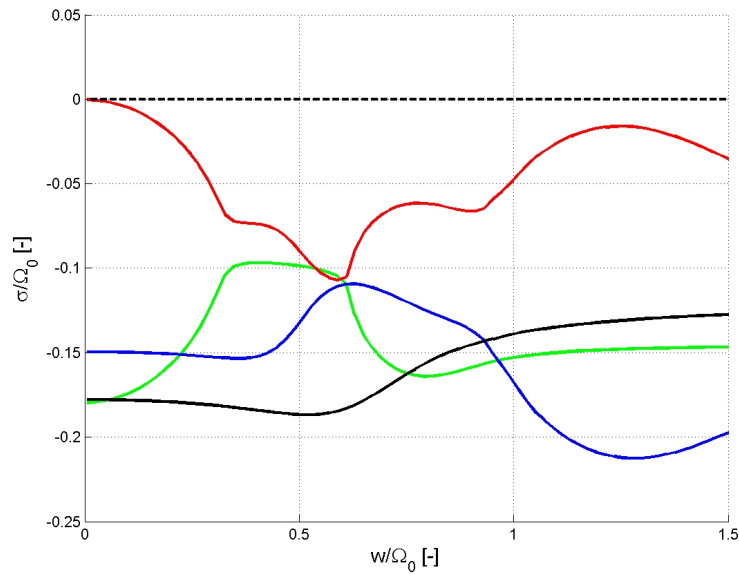


Figura 2.9: Andamento della parte reale degli autovalori del rotore di Hammond.

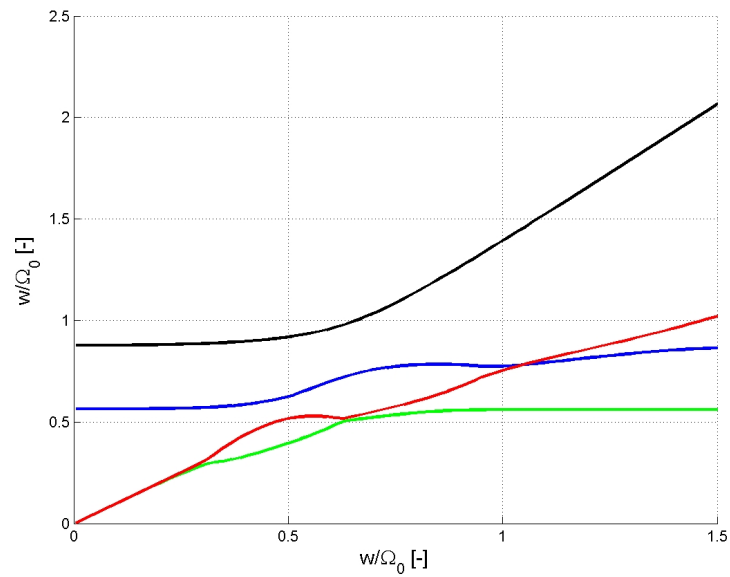


Figura 2.10: Andamento della parte immaginaria degli autovalori del rotore di Hammond.

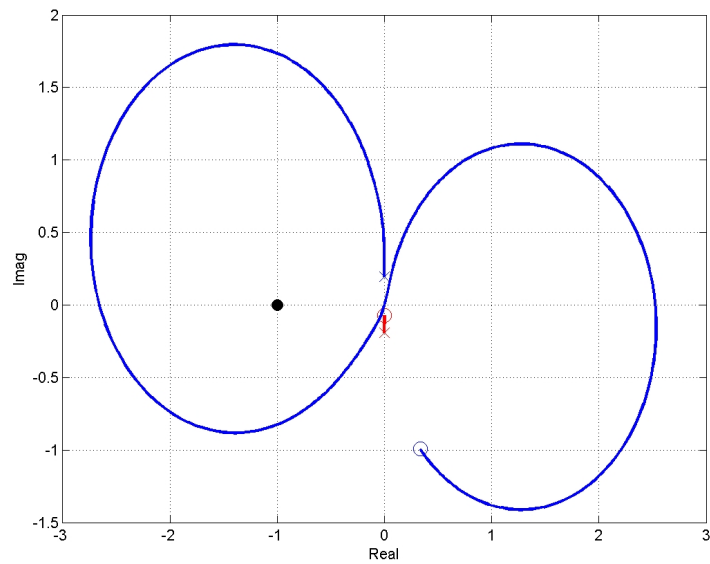


Figura 2.11: Diagramma di Nyquist associato all'anello ξ_S .

Ancora una volta è evidente come il sistema nominale rimanga sempre stabile globalmente, tuttavia, già da questa analisi di continuazione è possi-

bile osservare due interazioni critiche: da un lato tra la frequenza di ritardo regressiva riportata in colore rosso e il modo longitudinale x di fusoliera in verde al 65 % della Ω , mentre dall'altro tra la regressiva e il modo laterale y della fusoliera in blu al 105 % Ω . Tali risultati hanno nuovamente confermato la necessità di studiare il comportamento del sistema al variare delle caratteristiche strutturali della fusoliera ed elastoviscose degli smorzatori di ritardo per meglio comprendere le dinamiche associate al fenomeno della risonanza al suolo.

2.3.2 Curve limite GNC

In ambiente MATLAB è stato implementato un algoritmo per la determinazione degli autovalori del sistema in anello chiuso tramite un metodo di continuazione in un intervallo di frequenze compreso tra l'1% e il 150% della velocità di rotazione di regime del rotore.

Sfruttando le relazioni (2.38) e (2.42), è stato determinato sia il valore del guadagno generalizzato del sistema che le variazioni ammissibili attraverso l'ottimizzazione in (2.43) o la risoluzione del sistema lineare².

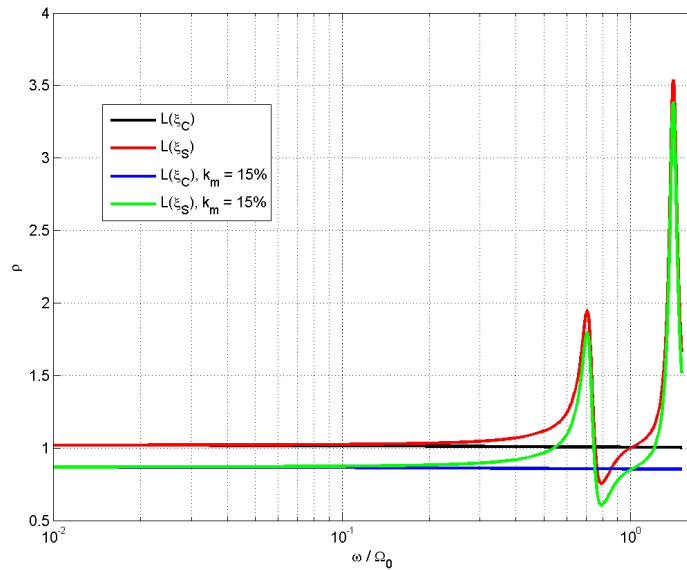


Figura 2.12: Determinazione del margine di stabilità ρ_i di ciascun autovalore di $\mathbf{L}(j\omega)$ (2 incertezze).

²Per il caso di 2 incertezze si fa riferimento alla (2.2.4), mentre per 4 incertezze alla (2.2.4) utilizzando i valori esterni per ΔK_x e ΔC_x

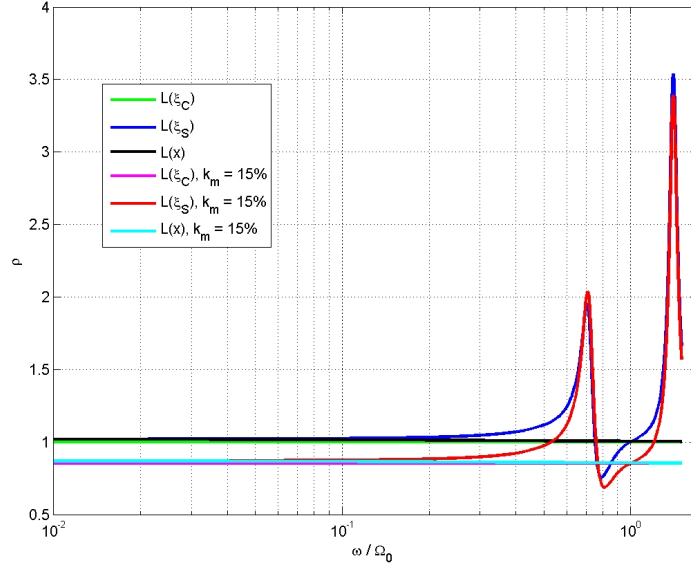


Figura 2.13: Determinazione del margine di stabilità ρ_i di ciascun autovalore di $\mathbf{L}(j\omega)$ (4 incertezze).

Nelle Figure 2.12 e 2.13 si riportano gli andamenti del guadagno del sistema per 2 e 4 incertezze in funzione della frequenza sia per la condizione di limite di stabilità che con un margine di distanza percentuale dall'instabilità pari al 15%.

La stabilità è garantita come sottolineato precedentemente, quando il guadagno generalizzato del sistema soddisfa la seguente disuguaglianza.

$$|\lambda_i(\mathbf{L}_0(j\omega)) + 1| > |\mathbf{u}_i(\omega)^T \mathbf{M}(j\omega) \boldsymbol{\delta} \Delta(j\omega) \mathbf{v}_i(\omega)|, \forall \omega, \forall i \quad (2.44)$$

Da questo punto di vista, la condizione (2.44) risulta essere soddisfatta per ogni frequenza pari o inferiore alla velocità di rotazione di regime delle pale Ω sia in presenza di 2 incertezze (Figura 2.15), che per il caso di 4 incertezze di modello (Figura 2.15).

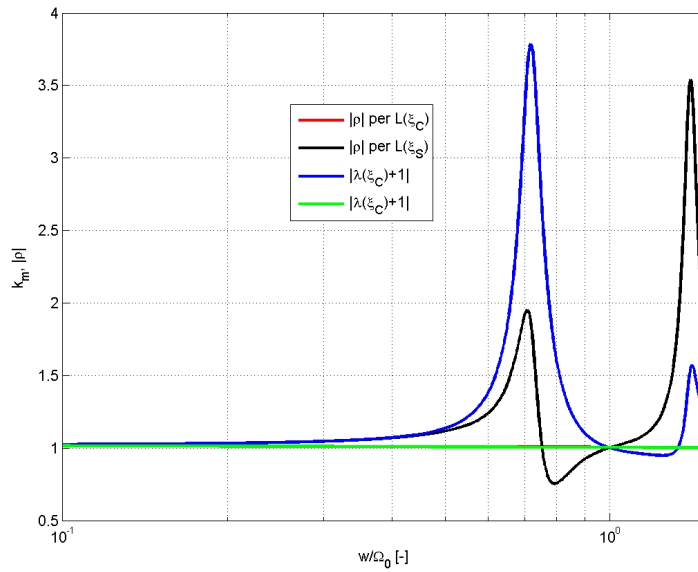


Figura 2.14: Verifica della condizione di stabilità sul guadagno generalizzato del sistema ρ_i (2 incertezze).

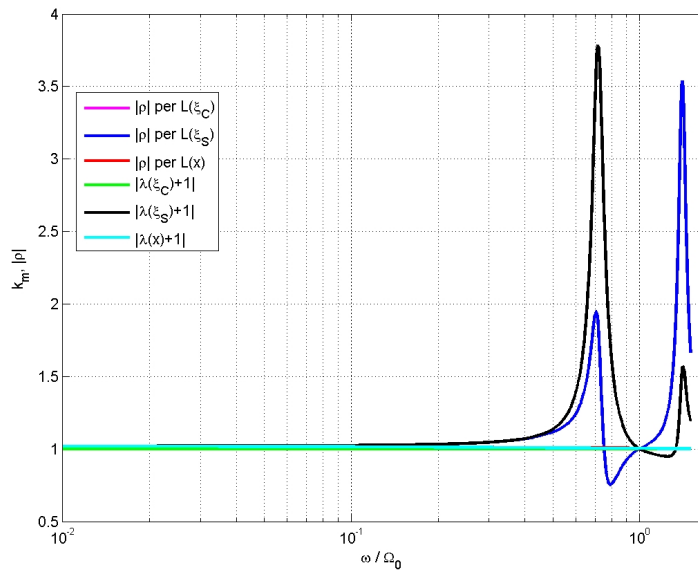


Figura 2.15: Verifica della condizione di stabilità sul guadagno generalizzato del sistema ρ_i (4 incertezze).

Al fine di quantificare il margine del sistema in termini di variazioni dei parametri ammissibili si deve identificare nello spazio delle variazioni possibili rappresentato dal piano Δk_b - Δc_b , quali incertezze risultano essere rispettose della fisicità del problema.

Infatti, in Figura 2.16 e 2.19, si mostra solo la parte di piano significativa della curva limite delle incertezze non strutturate, ossia lontano dalla situazione di smorzamento totale nullo corrispondente a $\Delta c_b/c_b^N = -1$ o $\Delta C_x/C_x^N = -1$ ³. Nonostante il sistema sia affetto dalle incertezze, il punto di progetto rappresentato nel grafico come scostamento nullo dei parametri dello smorzatore rispetto ai rispettivi valori nominali, risulta essere ben collocato in quanto sufficientemente distante dalla curva limite. Questa procedura mostra come il criterio generalizzato di Nyquist potrebbe essere sfruttato non solo come tecnica di analisi o verifica a posteriore rispetto alla progettazione, ma anche come parte integrante della progettazione preliminare stessa.

Infatti, sin dalle prime fasi del dimensionamento dello smorzatore, si è immediatamente in grado di quantificare la robustezza delle eventuali scelte progettuali prese in considerazione.

Si riportano inoltre, in Figura 2.17 le incertezze limite in funzione della frequenza; in questo caso, in tale grafico multiscala è possibile identificare la regione di stabilità come compresa tra $k_b(\omega)$ e $c_b(\omega)$. Si può notare, inoltre, che alle basse frequenze normalizzate rispetto alla 1 per giro, il sistema non necessita di un ulteriore smorzamento c_b per rimanere stabile, bensì, è possibile aumentare significativamente la rigidità degli smorzatori.

Chiaramente, all'aumentare della frequenza ci si avvicina alla condizione limite di stabilità fino al momento in cui lo smorzamento richiesto raggiunge asintoticamente il valore infinito, sintomo dell'incapacità dello smorzatore di stabilizzare la ground resonance per quell'intervallo critico di frequenze.

³Nel caso della μ -Analisi, invece, la conoscenza dell'andamento di μ include intrinsecamente il massimo valor ammissibile per ciascun parametro in quanto esso rappresenta il coefficiente moltiplicativo della matrice di perturbazione tale da indurre in instabilità il sistema (per delucidazione si veda il par. 1.4 a pag. 16).

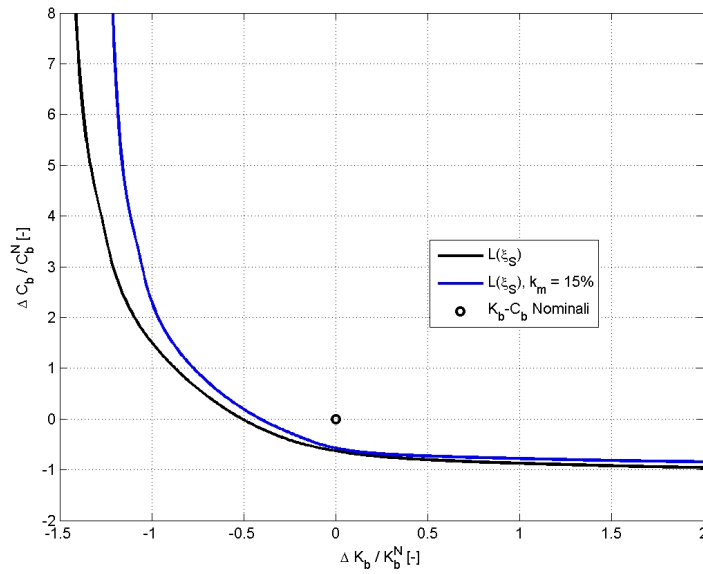


Figura 2.16: Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e ΔC_b al limite di stabilità e con $k_m = 15\%$ (2 incertezze).

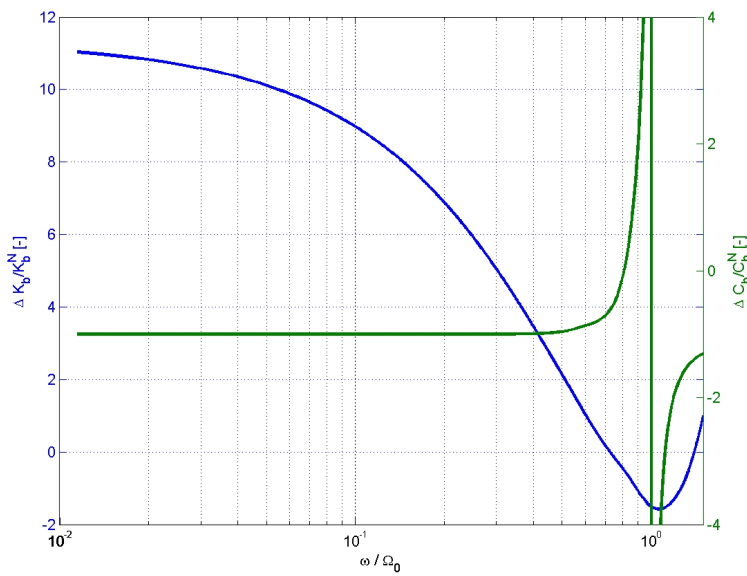


Figura 2.17: Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e ΔC_b in funzione della frequenza (2 incertezze).

Allo stesso modo si mostrano in Figura 2.18 i limiti ottenuti con 4 incertezze nello spazio dei parametri $\Delta k_b - \Delta c_b$ a differenti valori della coppia $(\Delta K_x, \Delta C_x)$ fissati in modulo dal 10% al 50 % del relativo nominale. Si noti come la presenza di due ulteriori incertezze del sistema, come atteso, mostra un vincolo tanto più stringente quanto più viene aumentata la possibile variabilità di K_x e C_x .

Sebbene siano state introdotte altre 2 fonti di incertezza, il punto di progetto risulta essere ancora una volta soddisfacente rispetto ai requisiti di stabilità dinamica del sistema; pertanto, si sottolinea ulteriormente l'eventuale possibilità di determinare la robustezza del sistema sin dalle prime fasi della progettazione, durante le quali la conoscenza di alcuni parametri di modellazione potrebbe essere approssimativa o del tutto teorica.

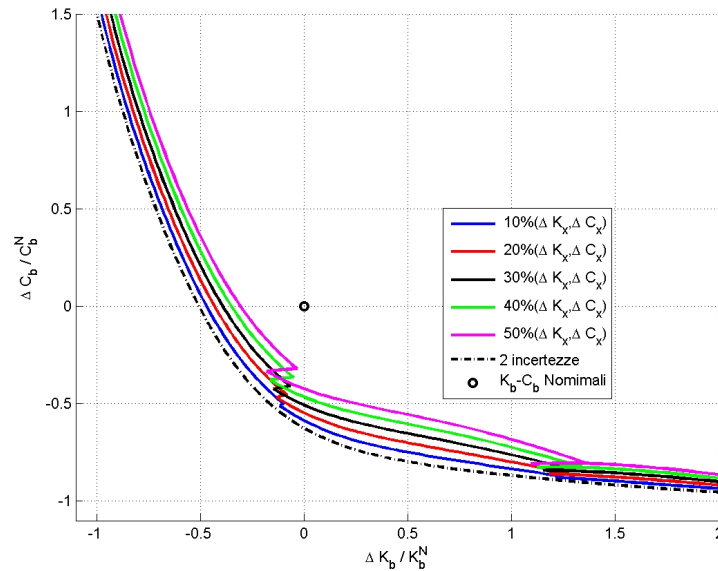


Figura 2.18: Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b al limite di stabilità al variare di ΔK_x e ΔC_x .

Si confrontano nelle Figure 2.19 e 2.20, i risultati ottenuti attraverso valori esterni di ΔK_x e ΔC_x e processo di ottimizzazione; in particolare, soprattutto nel intervallo di frequenze di interesse, ossia approssimativamente tra il 20% e il 100% della 1 per giro, i due metodi risultano essere praticamente in accordo, ovvero la condizione peggiore è effettivamente caratterizzata da una variazione di $\pm 50\%$ rispetto al valore nominale.

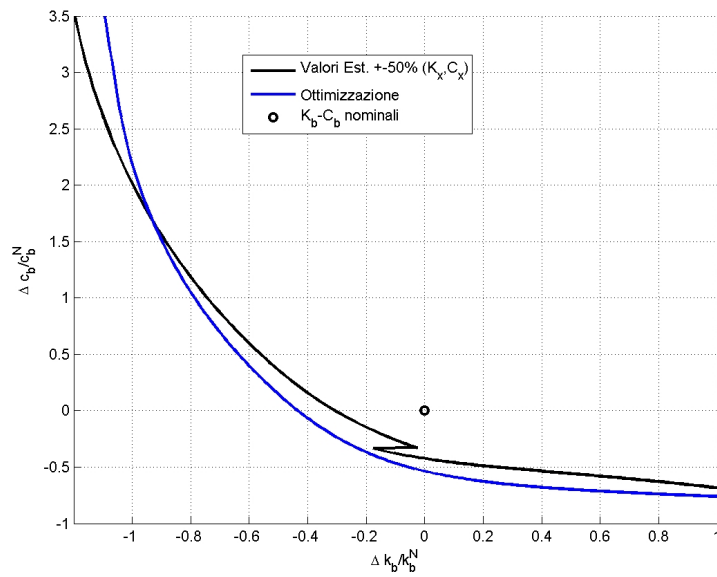


Figura 2.19: Limite di stabilità nello spazio dei parametri incerti Δk_b e Δc_b (4 incertezze).

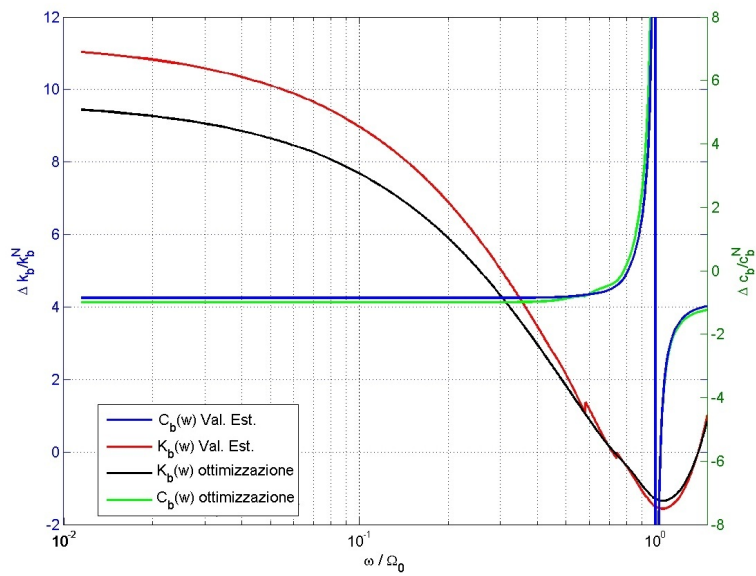


Figura 2.20: Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b in funzione della frequenza (4 incertezze).

Si riportano infine in Figura 2.21 l'andamento delle caratteristiche strutturali limite del moto longitudinale della fusoliera in funzione della frequenza; in particolare, si nota come alle basse frequenze per la tecnica dei valori esterni le incertezze ammissibili siano negative, ovvero, il sistema rimane comunque stabile a fronte di una significativa diminuzione della rigidità K_x e dello smorzamento C_x . Al contrario, a partire dal 77.4% della 1 per giro si ha un cambio di tendenza ovvero la condizione peggiore è dettata da un aumento delle grandezze incerte; ciò denota che il sistema per poter rimanere all'interno della regione di stabilità richiede un considerevole apporto di smorzamento sia da parte del modo strutturale che dagli smorzatori di ritardo. Si noti inoltre, che la discontinuità che presenta l'andamento delle incertezze limite sulle caratteristiche strutturali della fusoliera si ripercuote inevitabilmente, come visibile dal ginocchio in Figura 2.19, sull'aumento repentino dello smorzamento c_b necessario alla stabilizzazione.

Attraverso l'ottimizzazione viene sostanzialmente colto il medesimo comportamento dinamico anche se il grado di dettaglio dei risultati ottenuti è molto maggiore in quanto si riesce ad indicare nello specifico per ogni frequenza il valore delle variazioni ΔK_x e ΔC_x che conducono ad instabilità.

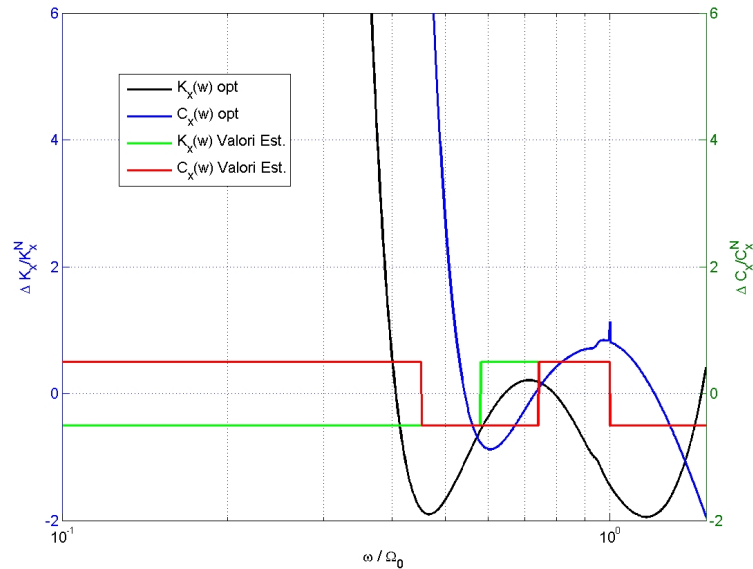


Figura 2.21: Andamento delle variazioni dei parametri incerti K_x e C_x in funzione della frequenza.

2.3.3 Validazione della μ -Analisi

È quindi possibile effettuare una validazione della μ -Analisi implementata andando a considerare l'andamento delle incertezze che portano il sistema a violare la condizione limite di stabilità.

Le due tipologie di analisi robusta si prestano ad una interpretazione differente in quanto nel caso del GNC l'incertezza applicata non è strutturata mentre nel caso della μ -Analisi esiste un effettivo intervallo di variabilità dei parametri imposto a priori dall'utente.

Infatti, se da un lato la μ -Analisi permette di stabilire la massima variazione dei parametri che il sistema è in grado di sopportare senza giungere alla condizione di instabilità, dall'altro, considerando il GNC, non si hanno informazioni immediate sulle grandezze fisiche, bensì occorre ricavarle grazie a procedure di calcolo a posteriori.

Si mostra quindi nello spazio dei parametri il confronto degli andamenti delle variazioni delle incertezze, sia per il caso del GNC che per la μ -Analisi, rispettivamente in Figura 2.22 con 2 incertezze e in Figura 2.23 con 4 incertezze.

Si ricorda che, come esposto precedentemente una problematica associata alla determinazione di μ è la relativa oscillazione al variare della frequenza nel caso in cui la perturbazione sia esclusivamente reale; pertanto, per contenere tali oscillazioni è stato sufficiente introdurre una dinamica alle incertezze imponendo una componente complessa a δ_i tale da garantire un buon compromesso tra stabilità numerica dell'algoritmo e variazione del modulo della perturbazione (non superiore del 2 % rispetto al valore dell'incertezza massima).

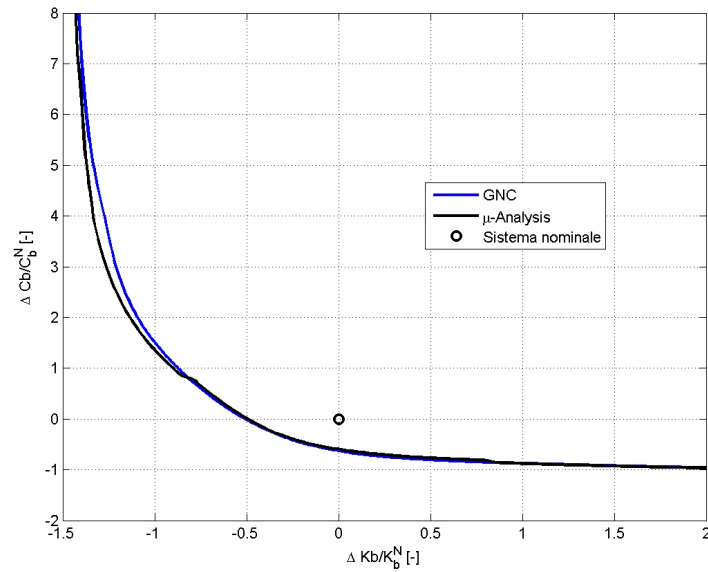


Figura 2.22: Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b al limite di stabilità (2 incertezze).

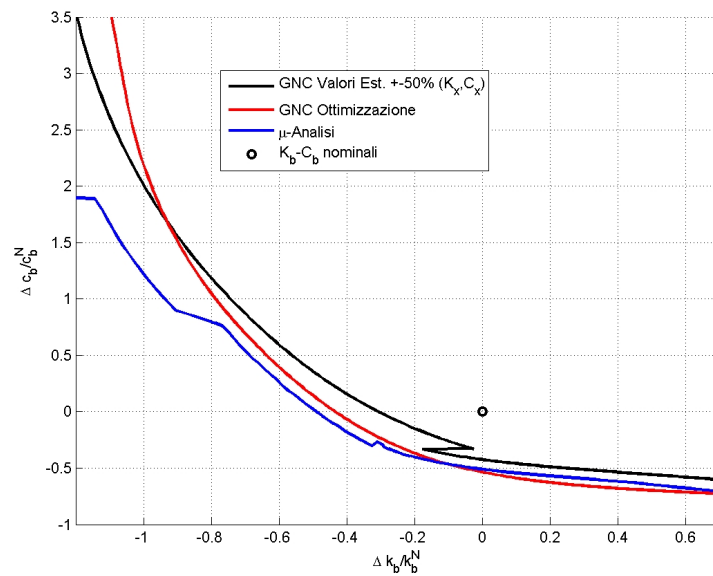


Figura 2.23: Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b al limite di stabilità (4 incertezze).

Entrambi i metodi dimostrano che il sistema a cui sono associate le caratteristiche elastoviscose nominali degli smorzatori di ritardo è stabile in senso robusto in quanto distante dalla curva limite.

Mediamente, il criterio generalizzato di Nyquist risulta essere più conservativo dei risultati ottenuti con la μ Analisi soprattutto all'aumentare della frequenza.

Le variazioni delle incertezze in funzione della frequenza per 2 incertezze sono equivalenti per i due metodi, come visibile in Figura 2.24, nel caso in cui viene utilizzata una coordinate-wise optimization per il calcolo del limite inferiore di μ sulla base del guadagno del sistema.

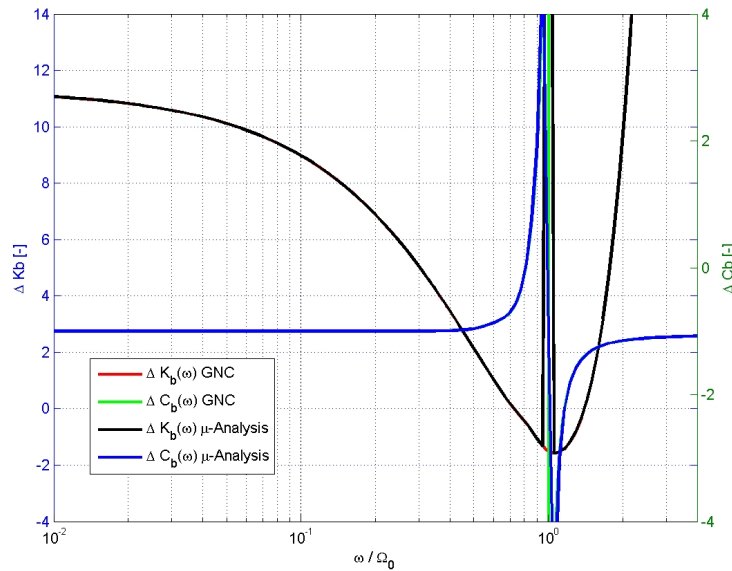


Figura 2.24: Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b al limite di stabilità (ottimizzazione con 0% di complessità).

D'altra parte, in Figura 2.25, si nota che la soluzione numerica per frequenze prossime alla 1 per giro rilascia delle oscillazioni non fisiche essenzialmente dovute alle discontinuità numeriche che μ presenta quando la perturbazione introdotta dalle incertezze è esclusivamente reale.

Se viene invece aggiunta parte complessa per aumentare la possibilità di convergenza del metodo delle potenze o dell'ottimizzazione associato alla determinazione di μ , nell'intorno della 1 per giro il comportamento delle variazioni dei parametri di incertezza al limite di instabilità è corretto.

Tuttavia, in questo sistema la parte complessa della perturbazione risulta essere tale da modificare le caratteristiche originarie alle basse frequenze dove i valori limite si discostano dal metodo del GNC (Figura 2.26).

Come visibile dall'ingrandimento, inoltre, il metodo del GNC approssima meglio il comportamento asintotico per $\omega/\Omega = 1$, simulando correttamente dal punto di vista fisico l'andamento delle variazioni dei parametri incerti.

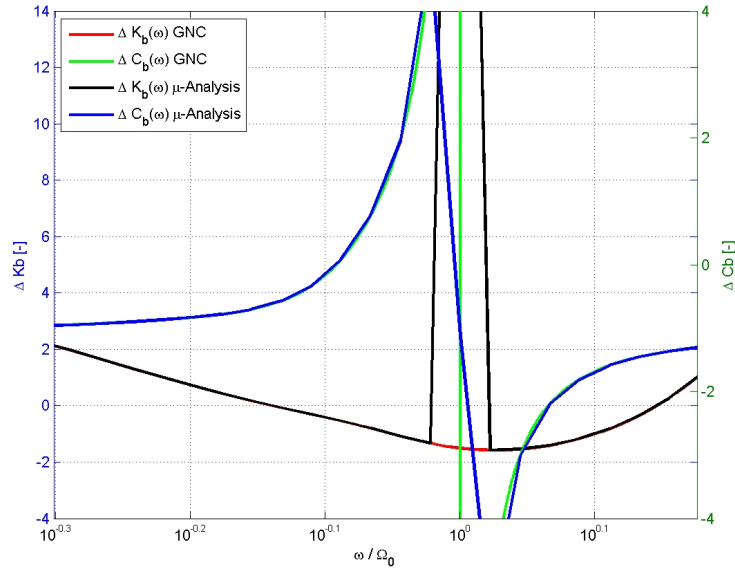


Figura 2.25: Andamento delle variazioni dei parametri incerti k_b e c_b in prossimità di 1 per giro.

In questi casi, per la μ -Analisi la scelta di una formulazione basata sul guadagno del sistema e sulle tecniche di ottimizzazione di Figura 2.26 espone in precedenza (pag. 16) a scapito del metodo delle potenze di Figura 2.27 è necessaria, in quanto permette di ottenere dei risultati che si correlano molto bene con quelli a disposizione. L'inconveniente è sicuramente rappresentato da due aspetti: da un lato l'aumento del costo computazionale legato all'utilizzo di queste tecniche di ottimizzazione, dall'altro dalla maggior complessità implementativa ad esse legata rispetto al metodo delle potenze e alla formulazione secondo il GNC.

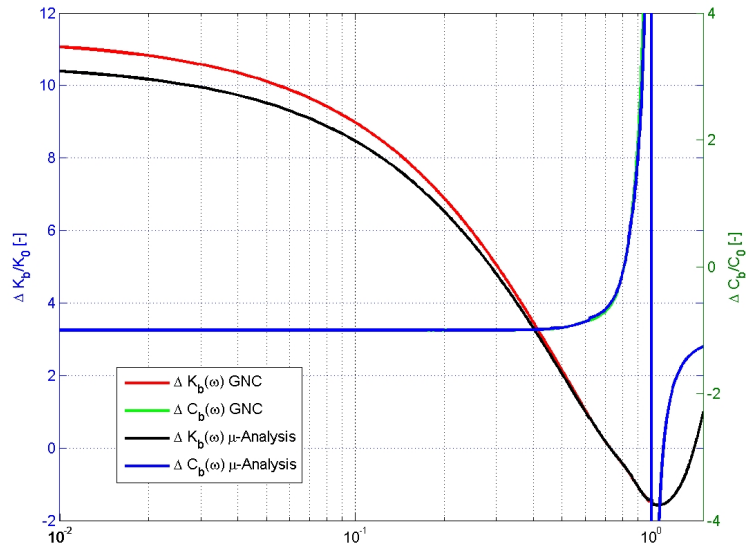


Figura 2.26: Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b (ottimizzazione con 2% di complessità).

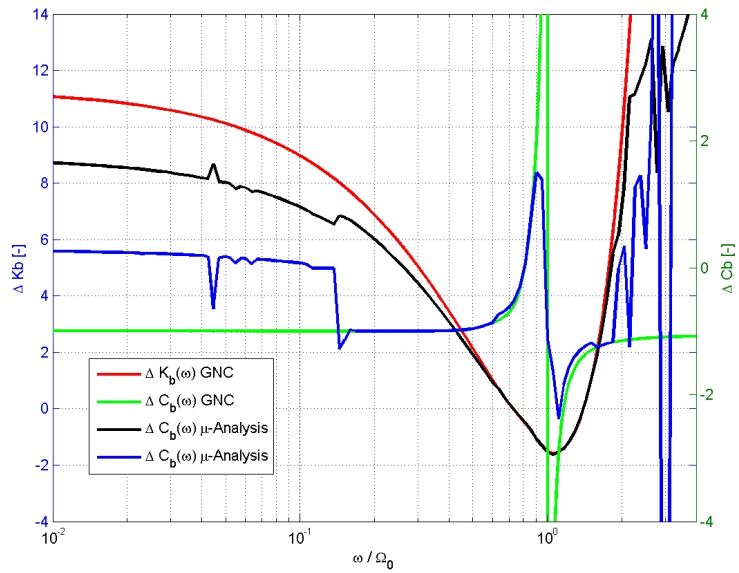


Figura 2.27: Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b (metodo delle potenze con 5% di complessità).

Al fine di verificare e validare i risultati sopra proposti sono state condotte varie analisi nel tempo e agli autovalori del sistema avente smorzatori con caratteristiche sia all'interno che all'esterno della regione di stabilità tracciata dalle curve limite. Queste analisi di validazione sono riportate nel paragrafo A.1 dell'appendice A.

2.3.4 Margini di stabilità robusta

Effettuata la validazione dell'algoritmo implementato per l'analisi di stabilità robusta, vengono esposti nei paragrafi seguenti i risultati ottenuti in termini di valori limite di incertezza, frequenza critica del sistema, margini e diagramma di Bode associato alla condizione limite di stabilità. In particolare, come precedentemente stabilito, dapprima sono stati considerati come elementi incerti all'interno della modellazione dinamica le caratteristiche elastoviscose equivalenti degli smorzatori k_b e c_b , successivamente, invece, sono state introdotte ulteriori incertezze associate alle caratteristiche strutturali della fusoliera del velivolo, identificate rispettivamente con rigidità K_x e smorzamento C_x longitudinali.

► **2 incertezze ($\delta k_b, \delta c_b$): $\pm 100\%$**

Per quanto concerne l'andamento delle variazioni dei parametri rispetto al valore nominale in funzione della frequenza si riportano in Figura 2.28 i valori limite determinati attraverso il calcolo di μ ; si nota come la curva in tratto nero rappresentante lo scostamento Δk_b normalizzato rispetto alla rigidità centrifuga $k_b^N = eS_b\Omega^2$ delle pale, delinea un limite al di sopra del quale si ha il cambio di segno della parte reale dei poli del sistema con l'insorgere di un'instabilità.

Per quanto riguarda invece lo smorzamento normalizzato denominato con Δc_b , si ha che la porzione di piano soprastante la curva limite rappresenta il luogo dei punti in cui il sistema ha uno smorzamento sufficientemente elevato.

Di conseguenza, alle basse frequenze si ha che a fronte di una variazione molto elevata, fino a 10 volte in più rispetto al valore nominale della rigidità centrifuga delle pale, è necessario un quantitativo limitato di smorzamento, infatti la relativa curva presenta un asintoto verticale in -1.

Come riscontrato dalle precedenti analisi di continuazione, anche in questo caso, i valori di rigidità e smorzamento raggiungono i limiti fisici in 2 condizioni particolarmente critiche per il fenomeno della ground resonance, ovvero in prossimità del 48 % e del 111 % della 1 per giro.

Nell'intorno della velocità di rotazione del rotore, si ha che lo smorzamento necessario alla stabilizzazione tende all'infinito mentre la rigidità raggiunge dei valori negativi non realistici.

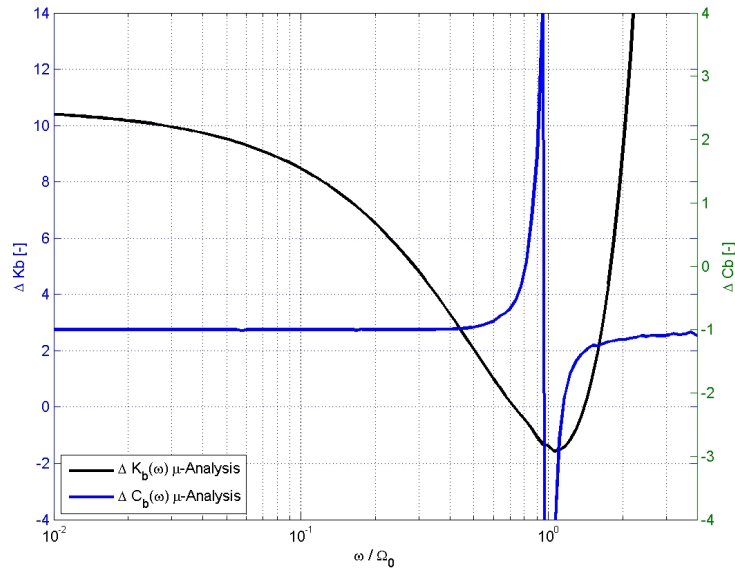


Figura 2.28: Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b .

Avendo normalizzato la matrice diagonale delle incertezze si ha che $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ e quindi la stabilità robusta risulta essere violata direttamente quando il valore di μ attraversa il limite 1. Come mostrato dalla Figura 2.29, μ assume valori superiori a quello unitario tra il 60 % e l'87 % della 1 per giro. Ossia, all'interno di tale intervallo il sistema non è in grado di sopportare la variazione imposta dalle incertezze; di conseguenza si ha che la frequenza critica per la ground resonance si trova a $\omega = 16.21 \text{ rad/s} = 77.57\% \Omega$. Per tale valore è possibile determinare in base al margine di stabilità inferiore corrispondente all'inverso del limite superiore di μ , gli scostamenti normalizzati dalla condizione nominale che comportano l'insorgere dell'instabilità:

$$\begin{aligned} \Delta k_b &= -30.46\% \\ \Delta c_b &= -31.93\% \end{aligned}$$

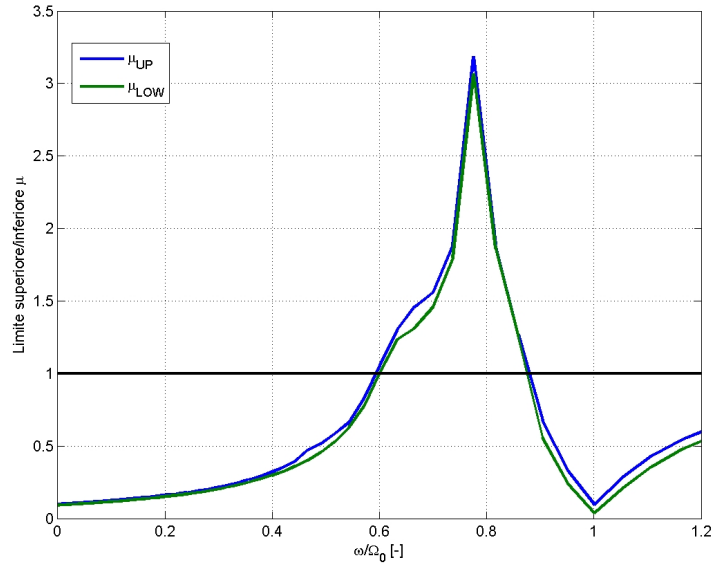


Figura 2.29: Limite inferiore e superiore di μ con 2 incertezze.

Con una lieve perturbazione complessa, secondo [23], non solo si riesce a garantire la continuità di μ come visibile dai limiti superiori ed inferiori sopra riportati, bensì, si ha che il margine di stabilità $k_m(\delta_r + j\epsilon)$ tende a $k_m(\delta_r)$ per ϵ tendente a zero. Inoltre, si è dimostrato sempre in riferimento alle proprietà di μ esposte precedentemente (pag. 16), che il margine così determinato risulta essere limitato superiormente dal margine con perturbazione esclusivamente reale, pertanto, da un punto di vista ingegneristico, tale procedura risulta essere sufficientemente conservativa per la ground resonance della macchina.

Si evidenziano in Figura 2.30, i valori di frequenza destabilizzante e minimo margine del sistema per confermare il valore di incertezza normalizzata determinato al di sopra del quale si avrebbe l'insorgere dell'instabilità.

Come ulteriore verifica del comportamento del sistema al limite di stabilità è stata analizzata la condizione di guadagno peggiore andando a considerare il diagramma di Bode associato a ciascun canale del sistema MIMO completo paragonato con quello del sistema nominale. In Figura 2.31 si nota come in corrispondenza della frequenza critica determinata in precedenza si ha un picco in frequenza della funzione di trasferimento input/output.

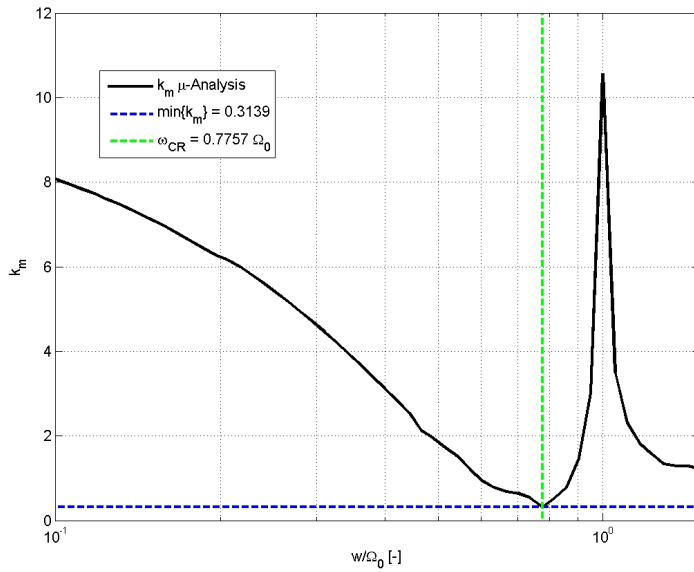


Figura 2.30: Margine di stabilità k_m del sistema con 2 incertezze.

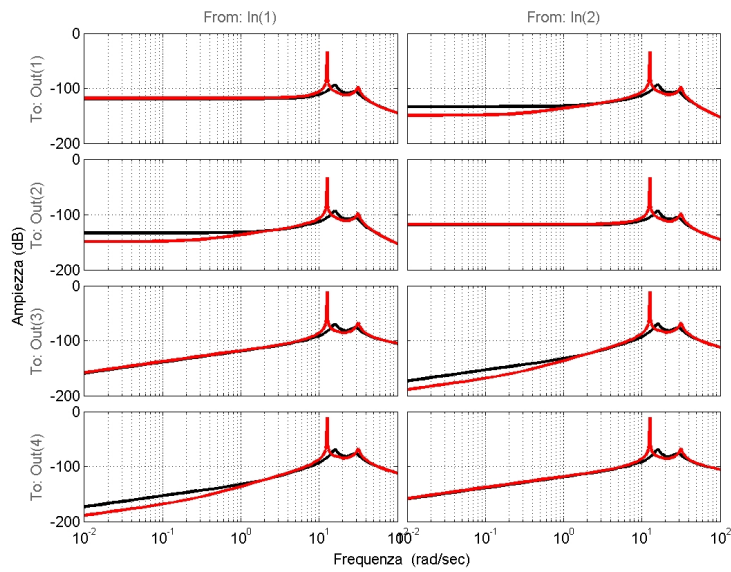


Figura 2.31: Confronto del diagrammi di Bode tra caso nominale e peggiore per ogni canale.

►► **4 incertezze:** $(\delta k_b, \delta c_b): \pm 100\%$; $\delta K_x, (\delta C_x): \pm 50\%$

Analogamente al caso precedente, si impongono delle incertezze del 50 % in modulo sulla conoscenza delle caratteristiche strutturali della fusoliera combinate con quelle al 100 % degli smorzatori per verificare il comportamento del sistema in termini di limiti di stabilità, di variazioni dei parametri considerati e margini limite k_m .

In particolare, si riporta in Figura 2.32 l'andamento delle variazioni dei parametri incerti in funzione della frequenza per la condizione di $100\% \Omega$ dell'elicottero. Si riscontra che alle basse frequenze, come nel caso precedente, il sistema non necessita complessivamente di un apporto significativo di smorzamento, anzi, si nota come è possibile una sottostima del 97.13 % anche sullo smorzamento strutturale senza inficiare la stabilità globale del sistema.

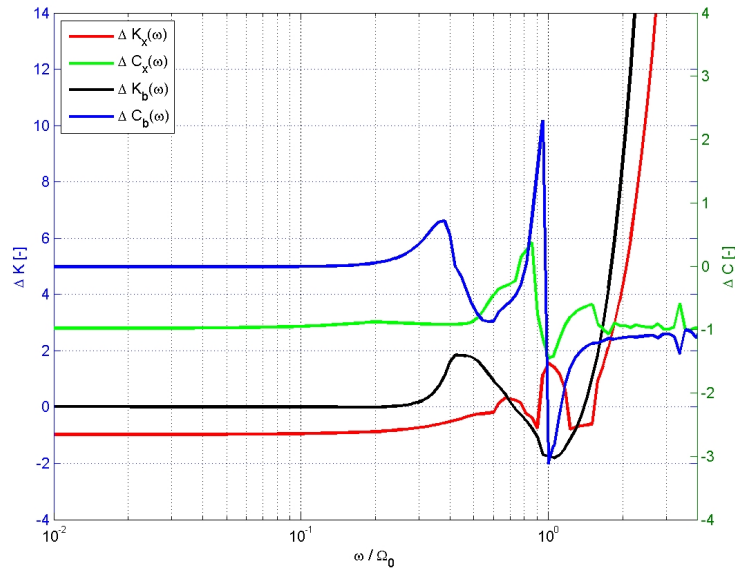


Figura 2.32: Variazione delle incertezze ΔK_x , ΔC_x , Δk_b e Δc_b rispetto al relativo valore nominale.

Al contrario, in corrispondenza del 50 % e del 122 % della velocità di rotazione di regime del rotore, si ha un aumento dello smorzamento equivalente sia della fusoliera che degli smorzatori. Inoltre, ad eccezione del caso di $\omega = \Omega$ in cui le rigidzze raggiungono dei valori negativi non fisici, per le frequenze menzionate occorrerebbe una fusoliera circa 2 volte più rigida rispetto alla condizione nominale (tratto rosso).

Come visibile dalla Figura 2.33 esiste un intervallo di frequenze in cui il sistema non è stabile in senso robusto in quanto μ supera il valore unitario.

In particolar modo, facendo riferimento al valore del margine di stabilità limite riportato in Figura 2.34, si mostrano di seguito la combinazione di incertezze limite che il sistema è in grado di sopportare senza incappare in una condizione di instabilità dinamica:

$$\begin{aligned}\Delta K_x &= +14.41\% \\ \Delta C_x &= +14.41\% \\ \Delta k_b &= -28.81\% \\ \Delta c_b &= -28.81\%\end{aligned}$$

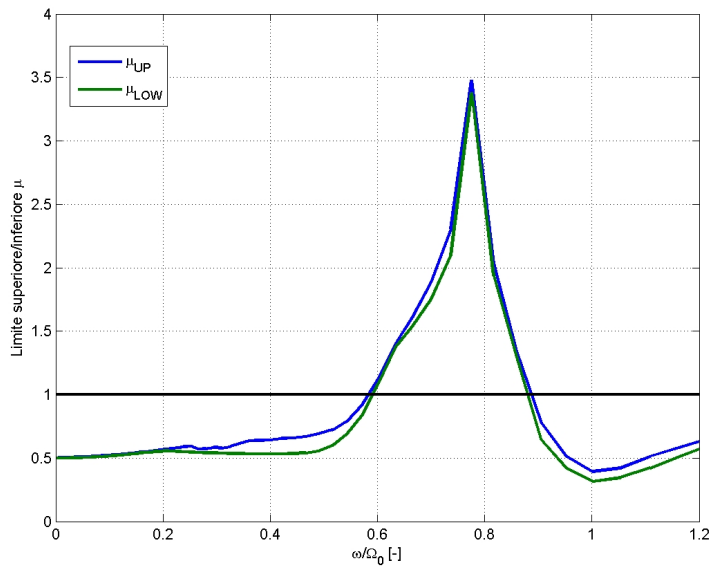


Figura 2.33: Limite inferiore e superiore di μ con 4 incertezze.

Si confrontano le curve limite nello spazio delle incertezze $\Delta k_b - \Delta c_b$ in Figura 2.35 con i differenti approcci e 2 o 4 incertezze; in questo caso si evidenzia il differente risultato che si ottiene considerando da un lato incertezze non strutturate per il GNC e dall'altro incertezze strutturate per la μ -Analisi.

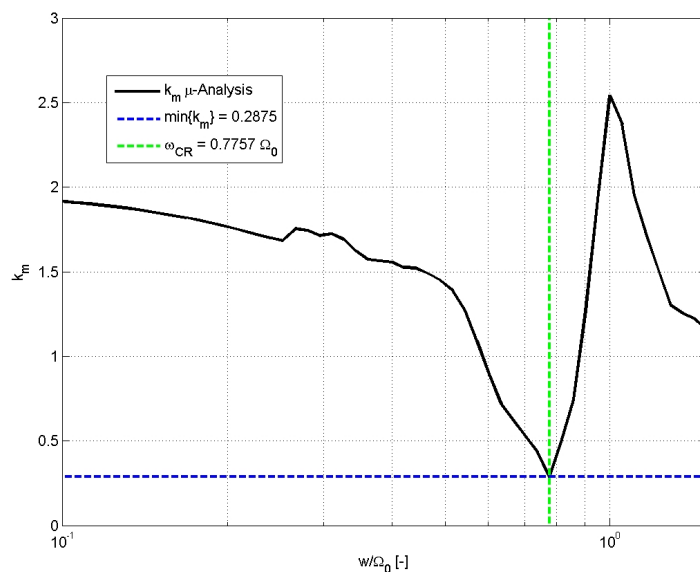


Figura 2.34: Margine di stabilità k_m del sistema con 4 incertezze.

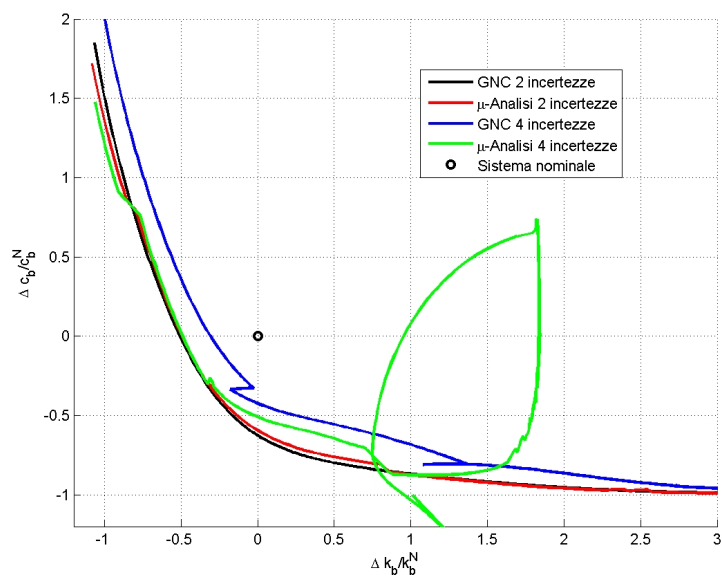


Figura 2.35: Confronto delle curve limite con incertezze non strutturate (GNC) e strutturate (μ -Analisi).

La richiesta di un forte smorzamento della curva associata alla μ -Analisi alle basse frequenze è dovuta al basso smorzamento fornito dall'incertezza ΔC_x sulla fusoliera (Figura 2.32). Pertanto si nota che in questo caso associare un possibile intervallo di variazione delle incertezze strutturate comporta un risultato differente rispetto all'imposizione di ΔC_x e ΔK_x fatta tramite GNC. Nonostante ciò, come mostrano le analisi nel tempo contenute in appendice entrambe le soluzioni fornite dai due differenti approcci di analisi robusta producono delle curve rappresentative del limite di stabilità del sistema.

Si effettua, infine un confronto tra margine di stabilità ottenuto con 2 e con 4 incertezze di modello, in Figura 2.36. Si evince che nel primo caso il sistema è molto più stabile in senso robusto del secondo infatti globalmente è in grado di sopportare per un maggior intervallo di frequenze una variazione dei parametri di progetto in modulo maggiore rispetto al caso con 4 incertezze.

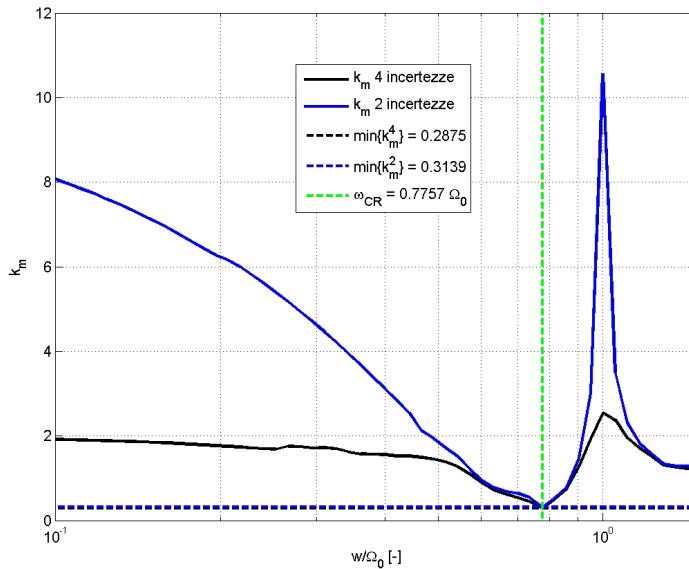


Figura 2.36: Confronto tra i margini di stabilità k_m del sistema con 2 e 4 incertezze.

Stabilità robusta della Ground Resonance: Puma IAR 330

Il Puma IAR 330 è un elicottero fabbricato dalla IAR Brasov attraverso l'acquisto della licenza di produzione dell'SA 330 Puma alla francese Aérospatiale. Dal 1974 al 2008 sono state sviluppate varie versioni del velivolo adottate sia in ambito civile che in ambito militare, in particolare si mostra in Figura 3.1 la versione di supporto *System Optronique de Cercetare si Anti-Tank* (SOCAT).



Figura 3.1: Versione SOCAT del Puma IAR 330.

Il suo largo utilizzo nel corso degli ultimi 40 anni mostra certamente che l'elicottero non presenta problemi di instabilità legati al fenomeno della

ground resonance; tuttavia, avendo a disposizione le caratteristiche generali del velivolo e in particolare degli smorzatori di ritardo, risulta essere interessante valutare la robustezza della stabilità del sistema dinamico associato all'elicottero a terra.

Pertanto, in questo capitolo si mostra la procedura con cui è stato ottenuto il modello agli stati del Puma IAR 330 e la relativa analisi di stabilità robusta focalizzando l'attenzione sul fenomeno della risonanza al suolo. La modellazione del velivolo si avvale del codice Modern Aeroservoelastic State Space Tools (MASST) implementato in ambiente MATLAB presso il Politecnico di Milano in collaborazione con AgustaWestland; gli elementi necessari alla costruzione del modello del Puma possono essere sintetizzati come segue:

➔ **Fusoliera**

ovvero il modello del velivolo a terra composto sostanzialmente dalla struttura della fusoliera, dagli ammortizzatori e dagli pneumatici del carrello d'atterraggio; per lo studio della ground resonance si presuppone che le forze aerodinamiche provengano esclusivamente dal rotore dell'elicottero trascurando l'eventuale contributo associato alla meccanica del volo della fusoliera e del pianetto di coda per la stabilizzazione in volo. In questo caso, l'aspetto fondamentale per la modellazione strutturale risulta essere la corretta ricostruzione della frequenza e del modo di rollio della fusoliera, in quanto responsabile del fenomeno della risonanza a suolo;

➔ **Rotore**

si tratta di una sotto-struttura che simula il comportamento aeroelastico del rotore articolato del Puma immerso in una corrente d'aria; in generale, le forze aerodinamiche derivanti dal movimento delle pale dell'elicottero assumono una natura intrinsecamente non lineare e periodica, tuttavia, al fine di poter generare un modello lineare tempo invariante agli stati, viene fornita a MASST una collezione di modelli linearizzati del rotore generati attraverso il programma commerciale CAMRAD/JA. In questo modo, una volta noto il comportamento del rotore nell'intorno di determinati punti di equilibrio MASST opera un'interpolazione ai minimi quadrati per i casi in cui ci si trovi in condizioni intermedie;

➔ **Attuatori**

ovvero sotto-strutture in grado di modellare la risposta dinamica di servoattuatori dal punto di vista della catena di trasmissione del comando e della cedevolezza statica o dinamica che caratterizza la reazione fornita dal sistema di attuazione;

➔ **Sensori**

essi rappresentano tutte le misurazioni che vengono effettuate sul modello; possono essere sia ideali che dotati di una propria risposta dinamica che viene inclusa all'interno del modello completo. In realtà, per l'analisi robusta mostrata in seguito e in generale per la progettazione si tende a considerare in prima battuta i sensori come ideali per poi andare ad includerli nella dinamica del sistema solo come verifica a posteriori, considerando eventualmente anche gli effetti del travaso di controllo.

➔ **Controllori**

si tratta sostanzialmente di leggi di controllo che agiscono in controreazione rispetto alle misure a disposizione dai sensori, in particolare, sono stati sfruttati controllori di tipo schedato, proporzionali e flight control system (FCS) per il grado di libertà di rollio della macchina.

Una volta generato il modello completo del Puma, vengono avviate delle procedure quali ad esempio riduzione modale per le strutture o metodo di Rogers-Richardson per l'aerodinamica, atte alla determinazione di modelli ridotti nell'ambito della aeroelasticità moderna; in questo modo si ha la possibilità di effettuare l'analisi robusta tramite criterio generalizzato di Nyquist e μ -Analisi sfruttando le procedure illustrate precedentemente.

In questo caso, le possibili incertezze di modello, associate sia alle caratteristiche elastomeccaniche degli smorzatori di ritardo che alla presenza di un sistema di controllo del volo, sono dovute a differenti fattori:

- le varie condizioni operative dell'elicottero;
- la non linearità geometriche e di materiale dei componenti;
- eventuali contributi di secondo ordine trascurati dal processo di linearizzazione dei modelli (dinamiche locali).

Così facendo si è in grado di stabilire la robustezza della stabilità del sistema a fronte di un possibile comportamento dinamico differente degli smorzatori; inoltre, è possibile determinare i limiti in termini di guadagno e ritardo dell'FCS entro i quali il sistema rimarrebbe comunque al di fuori della condizione di ground resonance.

3.1 Modello MASST

3.1.1 La fusoliera a terra

Al fine di poter analizzare gli effetti sulla stabilità dinamica in senso robusto dell'elicottero, è stato necessario determinare un modello modale della fusoliera dello stesso sfruttando una rappresentazione a parametri concentrati (Figura 3.4) basata su massa e molle relative al sistema fusoliera-carrello; in questo modo è stato possibile collegare il rotore alla fusoliera grazie all'imposizione della congruenza dei gradi di libertà all'interfaccia tra le due componenti attraverso il programma MASST [26].

In particolare, a partire dalle dimensioni geometriche della fusoliera ricavate dal trittico in Figura 3.3 in [24], dalla conoscenza delle inerzie e da una ragionevole stima delle frequenze, sono stati determinati i valori delle rigidità concentrate necessarie ad ottenere le frequenze proprie desiderate.

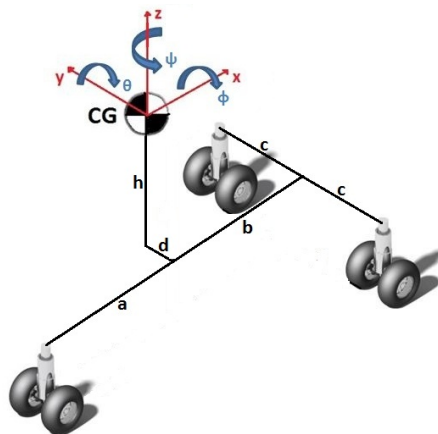


Figura 3.2: Sistema di riferimento e gradi di libertà adottati.

Le caratteristiche inerziali della fusoliera sono note e possono essere riassunte in:

- M , massa totale del sistema fusoliera-carrelli;
- J_x , momento d'inerzia di rollio;
- J_y , momento d'inerzia di beccheggio;
- J_z , momento d'inerzia d'imbardata.

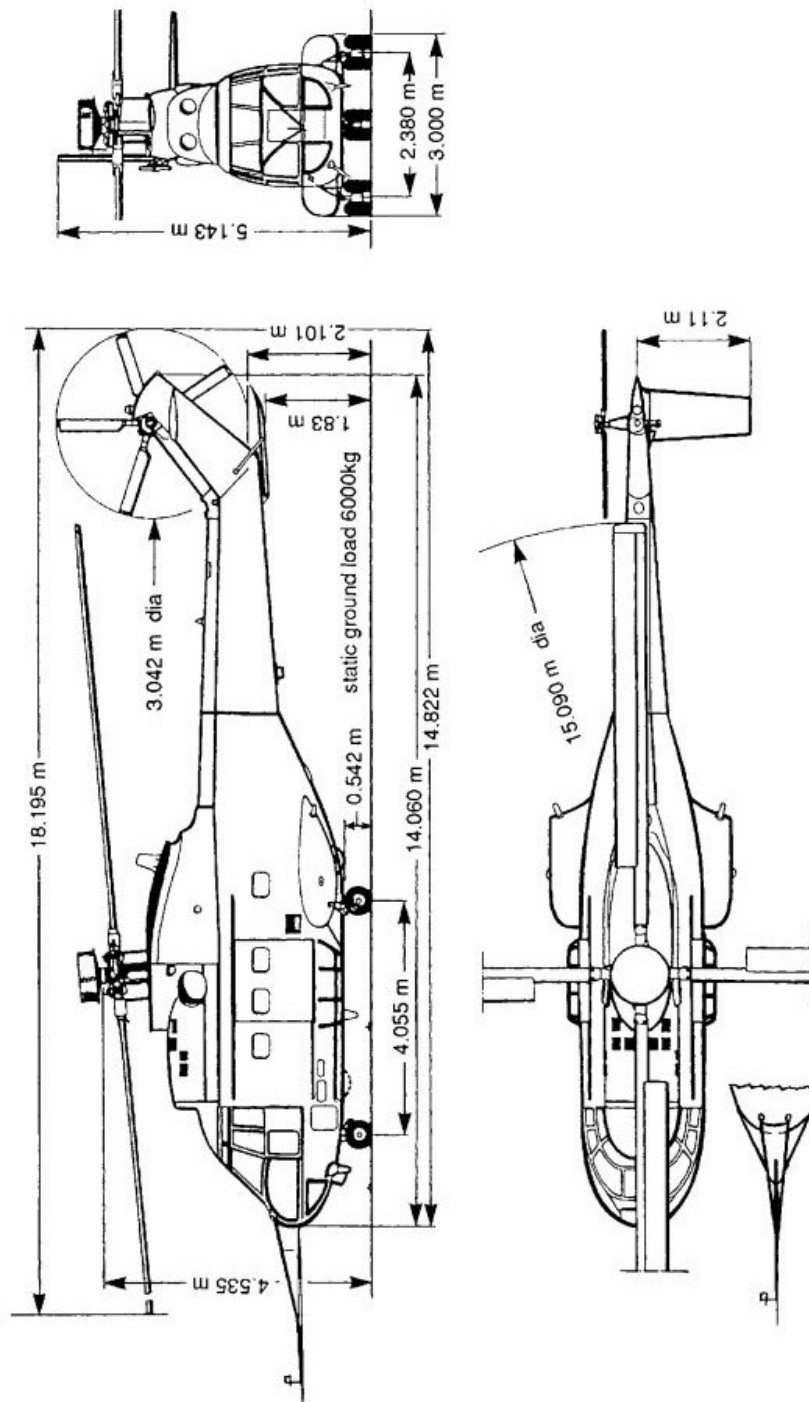


Figura 3.3: Trittico del Puma IAR 330.

Per quanto riguarda il carrello anteriore, sono state utilizzate secondo il sistema di riferimento riportato in Figura 3.4, delle molle con rigidzze incognite definite come KA_x, KA_y, KA_z ; mentre, per il carrello principale, posto che per simmetria non si è differenziato il gruppo ruote sinistro da quello destro, sono state utilizzate delle molle per ciascun collegamento al suolo di rigidzza KB_x, KB_y, KB_z .

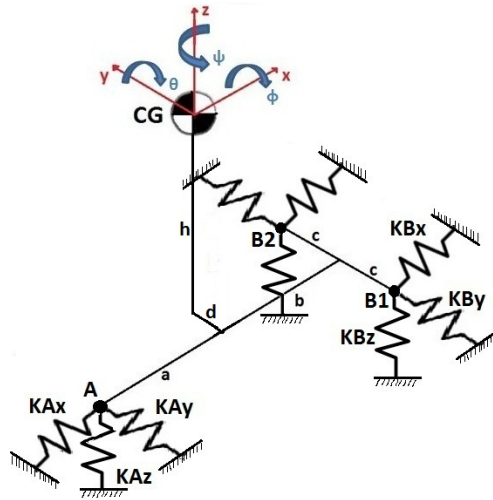


Figura 3.4: Modello a parametri concentrati della fusoliera.

Una volta definiti i gradi di libertà di avanzamento longitudinale, laterale, verticale e rotazione di rollio, beccheggio ed imbardata della fusoliera attraverso il vettore $\mathbf{x} = \{x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi\}^T$, sono state ricavate le equazioni di moto ricorrendo al formalismo lagrangiano. Sono state quindi esplicitate le 6 equazioni di equilibrio del sistema sintetizzate dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} &= 0; \quad k = \{x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi\} \end{aligned}$$

Esplicitando i termini di energia cinetica e potenziale associata al sistema si ottiene:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J_x\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_y\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}J_z\dot{\psi}^2 \\
 V &= \frac{1}{2}KA_x\Delta x_A^2 + \frac{1}{2}KA_y\Delta y_A^2 + \frac{1}{2}KA_z\Delta z_A^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{2}KB_x\Delta x_{B1}^2 + \frac{1}{2}KB_y\Delta y_{B1}^2 + \frac{1}{2}KB_z\Delta z_{B1}^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{2}KB_x\Delta x_{B2}^2 + \frac{1}{2}KB_y\Delta y_{B2}^2 + \frac{1}{2}KB_z\Delta z_{B2}^2
 \end{aligned}$$

in cui è necessario determinare gli spostamenti relativi di ciascuna molla in funzione dei gradi di libertà del sistema rappresentati dagli spostamenti e dalle rotazioni del baricentro della fusoliera; considerando le distanze a , b , c e h riportate in Figura 3.4 gli schiacciamenti delle molle possono essere riassunti dalle relazioni (3.1-3.9) in cui si è utilizzata un'approssimazione lineare alle piccole perturbazioni considerando $\cos \alpha \approx 1$ e $\sin \alpha \approx \alpha$.

$$\begin{aligned}
 \Delta x_A &= x + a(1 - \cos \psi + 1 - \cos \vartheta) - h \sin \vartheta + d \sin \psi \approx \\
 &\approx x - h\vartheta + d\psi
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta y_A &= y - a \sin \psi + h \sin \varphi + d(1 - \cos \psi + 1 - \cos \varphi) \approx \\
 &\approx y - a\psi + h\varphi
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta z_A &= z + a \sin \vartheta + h(1 - \cos \varphi + 1 - \cos \vartheta) - d \sin \varphi \approx \\
 &\approx z + a\vartheta - d\varphi
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{B1} &= x - b(1 - \cos \vartheta) - h \sin \vartheta + (c + d) \sin \psi \approx \\
 &\approx x - h\vartheta + (c + d)\psi
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta y_{B1} &= y + (d + c)(1 - \cos \varphi + 1 - \cos \psi) + h\varphi + b \sin \psi \approx \\
 &\approx y + h\varphi + b\psi
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta z_{B1} &= z - (d + c) \sin \varphi - b \sin \vartheta - h(1 - \cos \varphi + 1 - \cos \vartheta) \approx \\
 &\approx z - (c + d)\varphi - b\vartheta
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{B2} &= x - b(1 - \cos \vartheta) - h \sin \vartheta - (c - d) \sin \psi \approx \\
 &\approx x - h\vartheta - (c - d)\psi
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta y_{B2} &= y + (c - d)(1 - \cos \varphi + 1 - \cos \psi) + h \sin \varphi + b \sin \psi \approx \\
 &\approx y + h\varphi + b\psi
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta z_{B2} &= z + (c - d) \sin \varphi - b \sin \vartheta - h(1 - \cos \varphi + 1 - \cos \vartheta) \approx \\
 &\approx z + (c - d)\varphi - b\vartheta
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Successivamente, applicando il formalismo lagrangiano si ottengono le equazioni di equilibrio del sistema riscritte in forma esplicita e in forma matriciale nelle seguenti espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{x} + (KA_x + 2KB_x)x - (KA_x + 2KB_x)h\vartheta + (KA_x + 2KB_x)d\psi = 0 \\ M\ddot{y} + (KA_y + 2KB_y)y + (KA_y + 2KB_y)h\varphi + (2KB_yb - KA_ya)\psi = 0 \\ M\ddot{z} + (KA_z + 2KB_z)z - (KA_z + 2KB_z)d\varphi + (KA_za - 2KB_zb)\vartheta = 0 \\ J_x\ddot{\varphi} + [(KA_y + 2KB_y)h^2 + KA_zd^2 + 2KB_z(c^2 + d^2)]\varphi + (KA_y + 2KB_y)hy + \\ - (KA_z + 2KB_z)dz + (2KB_zb - KA_za)d\vartheta + (2KB_yb - KA_ya)h\psi = 0 \\ J_y\ddot{\vartheta} + [(KA_x + 2KB_x)h^2 + 2KB_xb^2 + KA_za^2]\vartheta - (KA_x + 2KB_x)hx + \\ + (KA_za - 2KB_zb)z + (2KB_zb - KA_za)d\varphi - (KA_x + 2KB_x)hd\psi = 0 \\ J_z\ddot{\psi} + (KA_xd^2 + 2KB_x(c^2 + d^2) + KA_ya^2 + 2KB_yb^2)\psi + (KA_x + 2KB_x)dx + \\ + (2KB_yb - KA_ya)y + (2KB_yb - KA_ya)h\varphi - (KA_x + 2KB_x)hd\vartheta = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (3.10)$$

in cui:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi \\ \vartheta \\ \psi \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (KA_x + 2KB_x) & 0 & 0 \\ 0 & (KA_y + 2KB_y) & 0 \\ 0 & 0 & (KA_z + 2KB_z) \\ 0 & (KA_y + 2KB_y)h & -(KA_z + 2KB_z)d \\ -(KA_x + 2KB_x)h & 0 & KA_z a - 2KB_z b \\ (KA_x + 2KB_x)d & 2KB_y b - KA_y a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -(KA_x + 2KB_x)h \\ (KA_y + 2KB_y)h & 0 \\ -(KA_z + 2KB_z)d & KA_z a - 2KB_z b \\ (KA_y + 2KB_y)h^2 + KA_z d^2 + 2KB_z(c^2 + d^2) & (2KB_z b - KA_z a)d \\ (2KB_z b - KA_z a)d & (KA_x + 2KB_x)h^2 + 2KB_z b^2 + KA_z a^2 \\ (2KB_y b - KA_y a)h & -(KA_x + 2KB_x)hd \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (KA_x + 2KB_x)d \\ 2KB_y b - KA_y a \\ 0 \\ (2KB_y b - KA_y a)h \\ -(KA_x + 2KB_x)hd \\ KA_x d^2 + 2KB_x(c^2 + d^2) + KA_y a^2 + 2KB_y b^2 \end{bmatrix}$$

Si imposta la risoluzione di un sistema non lineare attraverso il metodo di Newton-Raphson applicato all'equazione di uguaglianza tra il quadrato delle frequenze proprie stimate della fusoliera w_{EX}^2 e le frequenze proprie w^2 determinate dal sistema riportato nella (3.10). Va sottolineato che esiste un ulteriore vincolo sottinteso per la risoluzione del problema. Infatti, è necessario che le frequenze determinate in funzione delle incognite per ciascuna iterazione del metodo corrispondano effettivamente ai modi a cui sono associati. Pertanto, una volta ottenute le w_i^2 e la matrice degli autovettori U con normalizzazione a spostamento/rotazione unitaria è stato fatto un controllo sulla massima componente di ciascun autovettore per poter identificare se la frequenza ad esso corrispondente fosse di moto longitudinale, laterale, verticale, di rollio, beccheggio o imbardata.

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \{KA_x, KA_y, KA_z, KB_x, KB_y, KB_z\}^T \\ f(\mathbf{z}) &= w^2(\mathbf{z}) - w_{EX}^2 = 0 \Rightarrow f(\mathbf{z}_i) + \left[\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right]_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_i} \Delta \mathbf{z}_{i+1} = 0 \\ \Delta \mathbf{z}_{i+1} &= - \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \right]_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_i}^{-1} f(\mathbf{z}_i) \Rightarrow \mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{z}_i + \Delta \mathbf{z}_{i+1} \end{aligned}$$

Parallelamente, come verifica del risultato ottenuto è stata effettuata una minimizzazione del funzionale $\|w^2(\mathbf{z}) - w_{EX}^2\|$, imponendo come vincoli sulle rigidezze incognite che fosse maggiori di zero; dal momento che i valori così determinati risultano essere praticamente identici a quelli ricavati dalla risoluzione del sistema non lineare, si è concluso che la scelta effettuata rappresenta effettivamente una combinazione ottimale delle rigidezze per ottenere le frequenze proprie desiderate.

In particolare, nelle Tabelle 3.2-3.4 vengono riportati i valori numerici di tali frequenze e le corrispondenti ottenute attraverso l'ottimizzazione al variare della condizione operativa della fusoliera stessa, ovvero a differenti *weigh on wheels* e quindi trazione agente sul rotore.

I valori delle rigidezze incognite sono elencati di seguito.

Rigidezze	T = 0%	T = 40%	T = 75%
KA_x [N/m]	746882.57	54065.08	267539.50
KA_y [N/m]	84225.25	221545.07	145017.65
KA_z [N/m]	870486.97	274393.44	246704.12
KB_x [N/m]	138837.03	81366.88	59694.69
KB_y [N/m]	136728.64	195853.98	72190.19
KB_z [N/m]	271969.78	198671.53	226208.02

Tabella 3.1: Valore dei parametri di rigidezza al variare della trazione.

T = 0%		
w_{EX} [rad/s]	w [rad/s]	Errore % [-]
1.6698	3.5393	-47.12 %
1.3248	0.9060	-31.61 %
2.1307	2.1644	1.58 %
3.9946	4.0060	0.28 %
3.5371	3.5393	0.06 %
2.0689	2.0689	0.00 %

Tabella 3.2: Frequenze proprie desiderate e ottenute della fusoliera, *weight on wheels* = 100%.

T = 40%		
w_{EX} [rad/s]	w [rad/s]	Errore % [-]
1.3133	0.5671	-56.81 %
1.1437	0.9786	-14.42 %
1.4526	1.4961	2.99 %
4.1921	4.1938	0.04 %
1.736	1.7594	1.34 %
1.9115	1.9110	-0.02 %

Tabella 3.3: Frequenze proprie desiderate e ottenute della fusoliera, *weight on wheels* = 60%.

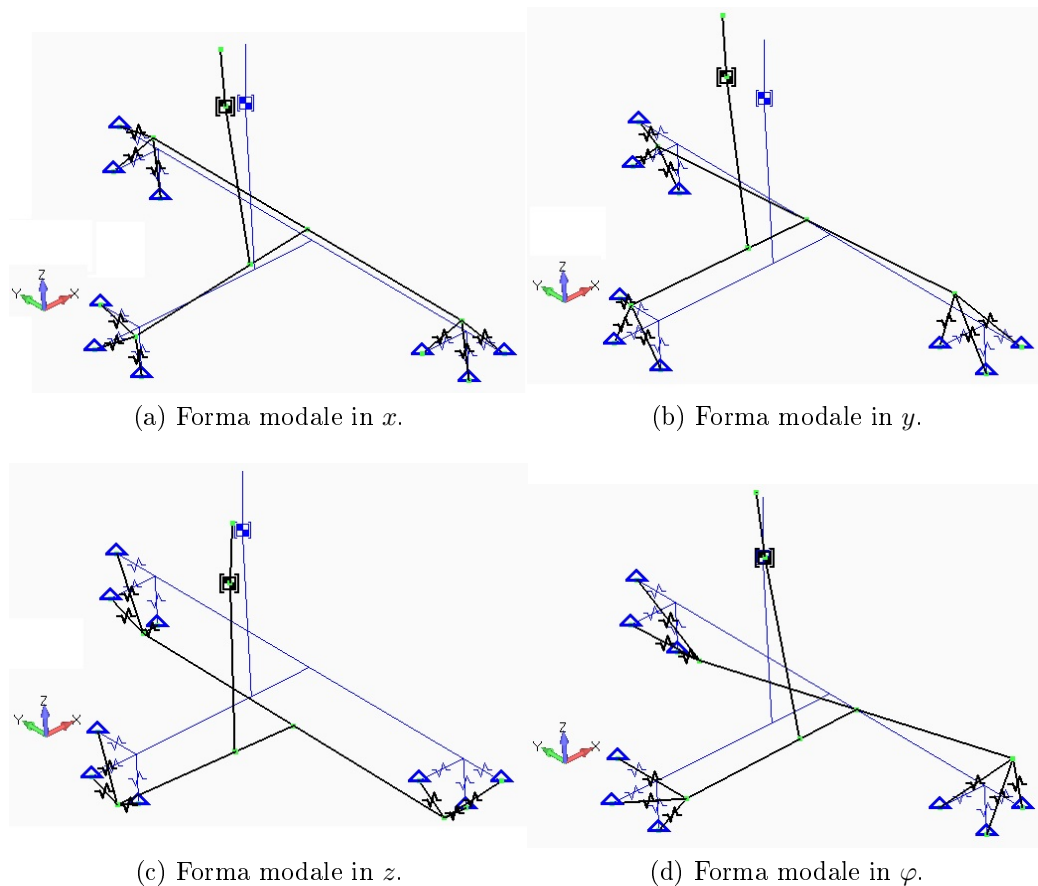
T = 75%		
w_{EX} [rad/s]	w [rad/s]	Errore % [-]
1.3159	2.1209	61.17 %
1.1501	0.8089	-29.66 %
1.4879	1.5521	4.31 %
3.6783	3.6841	0.15 %
2.1369	2.1209	-0.74 %
1.5299	1.5364	0.43 %

Tabella 3.4: Frequenze proprie desiderate e ottenute della fusoliera, *weight on wheels* = 25%.

Come visibile dalle precedenti tabelle, sono state rispettate con un'ottima approssimazione le frequenze proprie di traslazione verticale, rollio, beccheggio e imbardata; tuttavia, per garantire la convergenza desiderata sui modi di maggior interesse associati al problema della ground resonance dell'elicottero, ossia rollio e beccheggio, si è ottenuto un errore abbastanza elevato nella stima delle frequenze proprie di traslazione longitudinale e laterale.

Questa discordanza con le frequenze a disposizione in x e y è stata giudicata influente ai fini dello studio della stabilità della macchina, in quanto, nonostante i valori numerici non corrispondessero, si è riscontrata una buona approssimazione delle forme modali della fusoliera.

Infatti, come visibile nelle Figure 3.5, pur emergendo un certo grado di accoppiamento tra spostamenti e rotazioni della fusoliera, andando a confrontare con la configurazione iniziale riportata in blu, è possibile notare per ciascun grado di libertà una buona approssimazione della forma modale ad esso associato.



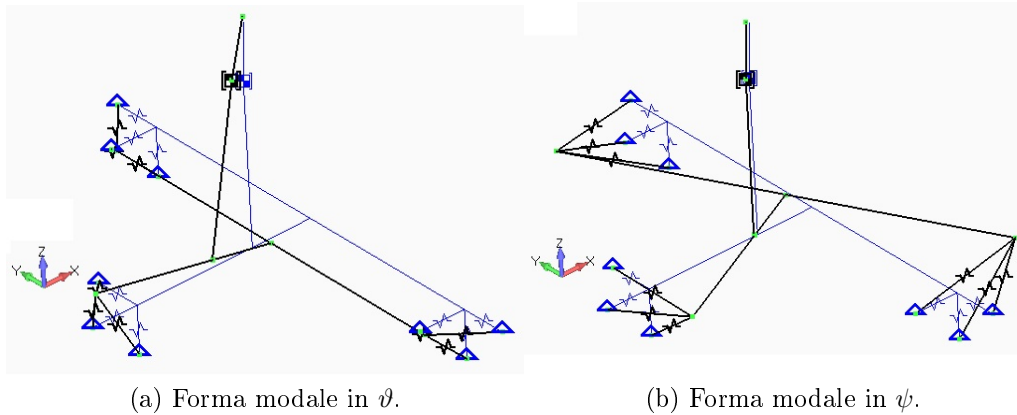


Figura 3.5: Visualizzazione delle forme modali della fusoliera.

3.1.2 Il rotore principale

Il rotore principale del Puma IAR 330 è un quadripala di tipo completamente articolato servo assistito con asse di flappeggio disassato rispetto al centro di rotazione del mozzo; esso è dotato di smorzatori di ritardo elastomerici (Figura 3.6).



Figura 3.6: Visualizzazione del rotore del Puma IAR 330.

La dinamica di un rotore di questa tipologia viene genericamente espressa attraverso dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari a coefficienti periodici che derivano dalle equazioni di moto delle pale. In Figura 3.7 si riporta il sistema di riferimento del mozzo utilizzato per la scrittura di tali equazioni.

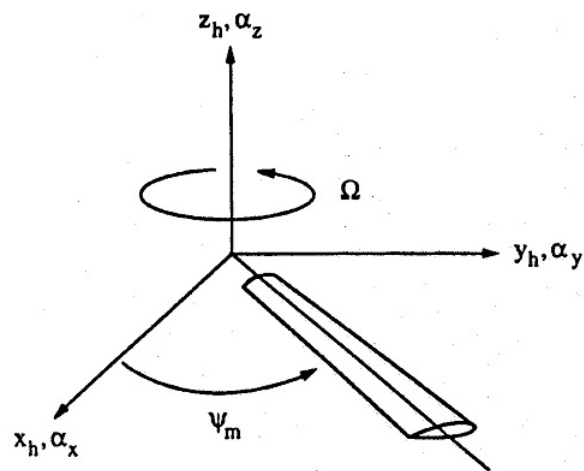


Figura 3.7: Sistema di riferimento locale per il rotore [12].

Per la definizione del sistema di riferimento in MASST è necessario conoscere l'orientazione del rotore rispetto alla fusoliera; infatti, come visibile in Figura 3.8, il rotore presenta un angolo di inclinazione rispetto all'asse y della fusoliera di -5° .

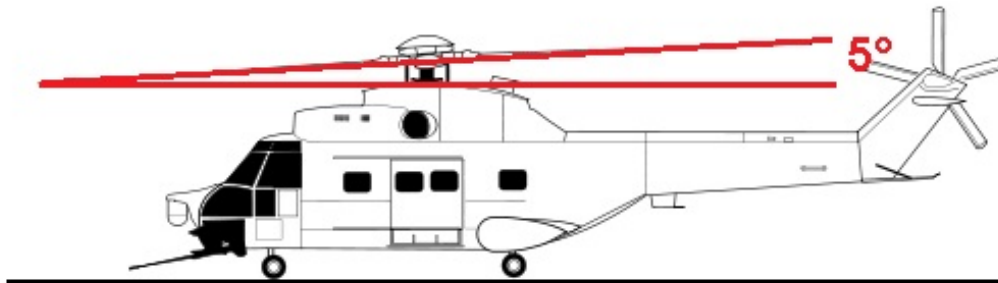


Figura 3.8: Orientazione del rotore rispetto alla fusoliera.

Si definiscono quindi i versore del riferimento locale del rotore come segue:

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \{0.99619, 0, 0.08716\} \\ \alpha_y &= \{0, 1, 0\} \\ \alpha_z &= \alpha_x \times \alpha_y\end{aligned}$$

Al fine di poter condurre un'analisi dinamica e un'analisi robusta alle piccole perturbazioni, è necessario operare una linearizzazione delle forze d'inerzia e delle forze aerodinamiche nell'intorno di una condizione di equilibrio di

riferimento; tale soluzione è di tipo stazionaria di regime a controlli fissati e senza forzanti esterni. In particolare, essa è costituita dai seguenti parametri:

- densità dell'aria ρ_{AIR} ;
- velocità angolare di rotazione del rotore Ω [RPM];
- velocità asintotica del vento che investe il rotore v_∞ ;
- angolo di incidenza α tra asse x_h del riferimento locale del rotore e vettore velocità asintotica \mathbf{v}_∞ ;
- comando di passo collettivo θ_0 ;
- comando di passo ciclico laterale θ_1
- comando di passo ciclico longitudinale θ_2 ;
- forza aerodinamica di trazione T [N] sviluppata dal rotore in direzione α_z del riferimento locale;
- forza aerodinamica di resistenza D [N] sviluppata dal rotore in direzione α_x del riferimento locale;
- forza aerodinamica laterale F_L [N] sviluppata dal rotore in direzione α_y del riferimento locale;
- momento di rollio L [Nm] sviluppato dal rotore attorno all'asse α_x del riferimento locale;
- momento di rollio M [Nm] sviluppato dal rotore attorno all'asse α_y del riferimento locale;
- momento di rollio N [Nm] sviluppato dal rotore attorno all'asse α_z del riferimento locale;

Linearizzando opportunamente attraverso CAMRAD/JA si determina una collezione di rotori che possono essere rappresentati attraverso dei modelli quasi-stazionari del secondo ordine del tipo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{B}_\theta\theta \quad (3.11)$$

Le matrici a coefficienti costanti¹ di massa, smorzamento e rigidità racchiudono il comportamento strutturale e quasi-stazionario aerodinamico del

¹In caso di matrici a coefficienti periodici viene effettuata una media sul giro per eliminare la dipendenza dal tempo.

rotore, il vettore di forzante θ rappresenta gli ingressi di comando di passo collettivo e passi ciclici, mentre \mathbf{q} sono i gradi di libertà del rotore riportati nella Tabella 3.5. Si noti che per l'analisi robusta della ground resonance sono stati eliminati i gradi di libertà di ritardo collettivo e di velocità di rotazione del rotore in quanto non è stata modellata la trasmissione del motore che mette in rotazione il rotore.

Inoltre, come illustrato in seguito, sono stati generati sostanzialmente due differenti modelli per effettuare le analisi: il primo in cui si è considerato solo la fusoliera e i gradi di libertà multipala di ritardo mentre il secondo, di verifica, in cui sono stati introdotti tutti i rimanenti gradi di libertà per quantificare l'influenza dell'accoppiamento flappeggio-ritardo e ritardo-variazione passo.

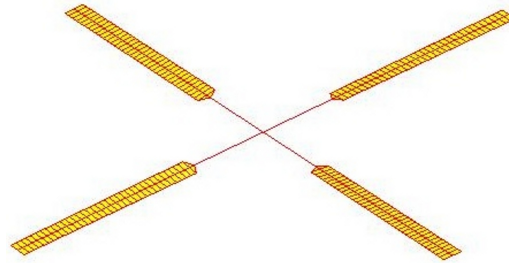


Figura 3.9: Visualizzazione del modello del rotore in MASST.

In linea teorica, al variare delle condizioni operative del velivolo sarebbe necessario produrre un relativo modello di rotore generalizzato; tuttavia questo approccio porterebbe ad una mole eccessiva di dati da gestire da parte del codice, pertanto, a partire dai modelli linearizzati CAMRAD/JA forniti in ingresso, MASST opera un'interpolazione ai minimi quadrati delle varie soluzioni di equilibrio per determinare il modello linearizzato di rotore di una condizione operativa intermedia tra quelle a disposizione.

Per lo studio della risonanza al suolo del velivolo sono stati generati 6 modelli di rotore corrispondenti a 6 differenti velocità di rotazione delle pale per ogni trazione considerata nella modellazione della fusoliera.

Posto che $\Omega = 270$ RPM sono state selezionati:

$$\frac{\Omega}{\Omega} = \{10\%, 25\%, 50\%, 75\%, 100\%, 120\%\}, \text{ con } \mathbf{T} = \{0\%, 40\%, 75\%\}W$$

q	Descrizione
AIRFRAME_FORE/AFT	Spostamento longitudinale rigido
AIRFRAME_LATERAL	Spostamento laterale rigido
AIRFRAME_HEAVE	Spostamento verticale rigido
AIRFRAME_ROLL	Rotazione attorno all'asse α_x
AIRFRAME_PITCH	Rotazione attorno all'asse α_y
AIRFRAME_YAW	Rotazione attorno all'asse α_z
COLL_BEND_1 CYCLIC_COS_1_BEND_1 CYCLIC_SIN_1_BEND_1 REACTIONLESS_BEND_1	Modo rigido di ritardo in multipala
COLL_BEND_2 CYCLIC_COS_1_BEND_2 CYCLIC_SIN_1_BEND_2 REACTIONLESS_BEND_2	Modo rigido di flappeggio in multipala
COLL_BEND_3 CYCLIC_COS_1_BEND_3 CYCLIC_SIN_1_BEND_3 REACTIONLESS_BEND_3	I Modo elastico di flappeggio in multipala
COLL_PITCH CYCLIC_COS_1_PITCH CYCLIC_SIN_1_PITCH REACTIONLESS_PITCH	Modo di elasticità della catena di comando
COLL_TORS_2 CYCLIC_COS_1_TORS_2 CYCLIC_SIN_1_TORS_2 REACTIONLESS_TORS_2	I Modo elastico torsionale in multipala
ROTOR_SPEED	velocità di rotazione del rotore

Tabella 3.5: Gradi di libertà del rotore.

La presenza nella Tabella 3.5 dei 6 gradi di libertà rigidi del rotore è giustificata dalla procedura di assemblaggio del modello ridotto del rotore col modello modale di fusoliera generato precedentemente. Infatti, si utilizza un approccio alla Craig-Bampton in cui vengono considerati come gradi di libertà di contorno \mathbf{u}_b della sottostruttura rotore e della struttura principale proprio i 6 sopracitati modi rigidi.

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_{CB} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_R & \mathbf{U}_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix}$$

\mathbf{q}_i e \mathbf{U}_L sono rispettivamente i gradi di libertà e la matrice degli autovettori dei modi propri delle strutture da collegare considerando tutti i gradi di libertà di collegamento bloccati; mentre \mathbf{U}_R è la matrice dei modi di vincolo ottenuta bloccando i gradi di libertà interni e imponendo spostamento unitario su quelli di contorno.

3.1.3 Il rotore di coda

Come visibile in Figura 3.10, il rotore di coda del Puma IAR 330, è dotato di 5 pale e, come la maggior parte dei rotori di tale tipologia, è comandato esclusivamente attraverso la variazione del passo collettivo θ_0^{TR} . La modellazione di questa sotto-struttura risulta essere fondamentale soprattutto per la stabilizzazione del movimento di imbardata dell'elicottero, in quanto è in grado di fornire una coppia attorno all'asse z_h .



Figura 3.10: Visualizzazione del rotore di coda del Puma IAR 330.

Tuttavia, non avendo a disposizione il modello CAMRAD/JA del rotore in questione, lo si è introdotto fittiziamente come un controllore statico; ossia, supponendo di avere a disposizione la misura del passo collettivo e un sistema di attuazione in grado di generare un ingresso di controllo in corrispondenza

del rotore di coda, si è implementata una legge di controllo schedulata in funzione della velocità di volo che restituisse in uscita le forze e i momenti aerodinamici scaricati dal rotore sulla coda.

Nota la collocazione del rotore grazie al trittico, si è sfruttata la conoscenza tramite [24] delle relative derivate di controllo X_θ , Y_θ , Z_θ , L_θ , M_θ , N_θ . Dopo aver accurato, come ragionevolmente ci si potesse attendere, che l'unico contributo significativo delle derivate di controllo a disposizione provenisse dalla forza laterale $Y_\theta(v_\infty)\theta$, è stato implementato una procedura in ambiente MATLAB che a partire dal collettivo di coda e dalla velocità di volo restituisse la forza laterale corrispondente.

I valori a disposizione in letteratura adimensionalizzati rispetto alla massa del velivolo vengono riportati in Figura 3.11; per velocità superiori a quelle riportate nel grafico viene effettuata una estrapolazione costante pari al valore della derivata in $v = 140$ Knots.

$$Y(\theta_0^{TR}) = MY_\theta\theta_0^{TR}$$

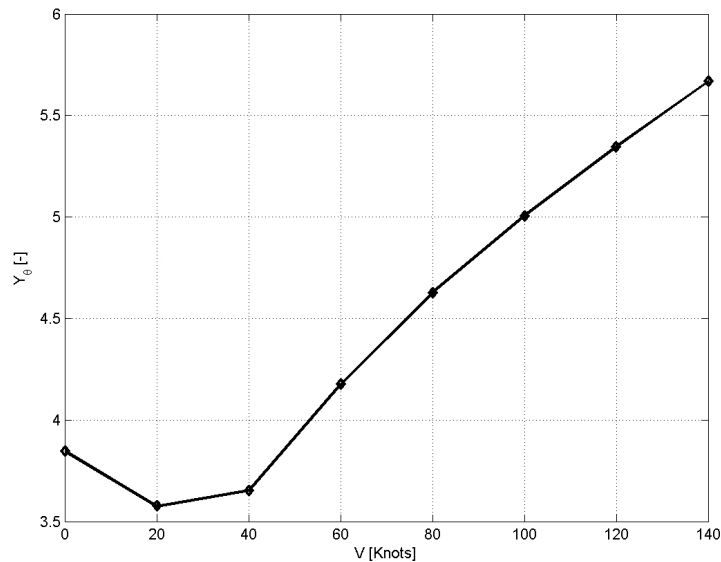


Figura 3.11: Andamento della derivata di controllo Y_θ del rotore di coda.

3.1.4 I Sensori

Il modello dei sensori in MASST è stato introdotto per la definizione di controllori retroazionati sulla base delle uscite misurate; si è deciso di trascurare la dinamica associata a questi componenti ai fini dell'analisi robusta in quanto il numero di sensori e le eventuali caratteristiche meccaniche, in questo caso, non avrebbero sicuramente influenzato in maniera ingegneristicamente significativa i risultati ottenuti. Pertanto sono stati posizionati 10 sensori per la misurazione ideale delle grandezze desiderate i quali vengono riassunti nella Tabella seguente.

Sensore	Tipologia	Collocazione	Grado di libertà
AIRFRAME_ROLL	Posizione	Baricentro del velivolo	Rotazione attorno all'asse x
COLL_BEND_1P CYCLIC_COS_1_BEND_1P CYCLIC_SIN_1_BEND_1P REACTIONLESS_BEND_1P	Posizione	Cerniera di ritardo di ogni pala	Rotazione di ritardo in multipala
COLL_BEND_1V CYCLIC_COS_1_BEND_1V CYCLIC_SIN_1_BEND_1V REACTIONLESS_BEND_1V	Velocità	Cerniera di ritardo di ogni pala	Velocità di ritardo in multipala
COLL_TR	Posizione	Rotore di coda	Passo collettivo del rotore di coda

Tabella 3.6: Riassunto dei sensori utilizzati.

Per quanto concerne le misurazioni effettuate per le sotto-strutture rotori, è conveniente andare a sfruttare i gradi di libertà in coordinate multipala, ovvero è stato definito durante la modellazione un nodo fittizio come *scalar point* in corrispondenza della cerniera di ritardo di ciascuna pala. Ad esso sono state assegnate rotazione e velocità di ritardo della pala stessa. In questo modo date le 4 generiche grandezze di ritardo misurate $\hat{\xi}_i$ si ha in uscita:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_0 &= \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \hat{\xi}_i \\ \hat{\xi}_S &= \frac{2}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \hat{\xi}_i \sin n\psi_i \\ \hat{\xi}_C &= \frac{2}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \hat{\xi}_i \cos n\psi_i \\ \hat{\xi}_R &= \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \hat{\xi}_i (-1)^i\end{aligned}$$

Analogamente per il rotore di coda si ottiene attraverso il sensore di posizione

sopraindicato il valore del passo collettivo attuale.

$$\hat{\theta}_0^{TR} = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \hat{\theta}_i^{TR}$$

3.1.5 I controllori

Avendo a disposizione delle uscite di misura è necessario definire opportunamente in funzione di esse degli ingressi di controllo da inviare al sistema di attuazione.

Per la modellazione dei sistemi di controllo in MASST, oltre a indicare gli attuatori corrispondenti, illustrati in seguito, è necessario indicare il sensore dal quale proviene la misura e i parametri utili a stabilire delle leggi di controllo; in particolare sono stati previsti:

- ① un sistema di controllo per la stabilizzazione del moto di ritardo delle pale assistito da attuatori ideali elastoviscosi rappresentati fisicamente dagli smorzatori di ritardo;
- ② un sistema di controllo per la ricostruzione della meccanica del volo del rotore di coda assente nel modello completo;
- ③ un *Flight Control System* (FCS) con guadagno e ritardo arbitrario per simulare la presenza di un eventuale controllore per la stabilizzazione in volo.

In Tabella 3.7 vengono riportati gli ingressi definiti per l'introduzione dei sistemi sopraindicati.

Forza esterna	Sensore	Attuatore	Architettura del controllore
F_COLL_MR F_CYCLIC_COS_MR F_CYCLIC_SIN_MR F_COLL_TR	AIRFRAME_ROLL	Servo-attuatori del rotore principale e del rotore di coda	Imposizione di guadagno K_{FCS} e ritardo T_{FCS}
C_COLL C_CYC_COS1 C_CYC_SIN1 C_REA	COLL_BEND_1P CYCLIC_COS_1_BEND_1P CYCLIC_SIN_1_BEND_1P REACTIONLESS_BEND_1P COLL_BEND_1V CYCLIC_COS_1_BEND_1V CYCLIC_SIN_1_BEND_1V REACTIONLESS_BEND_1V	Ideale	Proporzionale a rotazione e velocità di ritardo attraverso k_b e c_b

Tabella 3.7: Sistemi di controllo adottati.

Per quanto concerne l'architettura degli smorzatori di ritardo si rimanda per un maggior approfondimento al paragrafo successivo per meglio comprendere il significato delle forze esterne generalizzate in coordinate multipala.

Nel caso del rotore di coda come precedentemente illustrato, ci si avvale dei risultati presenti in letteratura [24], infine, per quanto riguarda la determinazione dell'FCS si è semplicemente impostata una funzione Matlab che riproducesse gli effetti equivalenti di un sistema di controllo del volo in termini di guadagno e ritardo. Si sottolinea che è stato adottato questo approccio semplificato in quanto non è oggetto di questa trattazione una progettazione dettagliata di un FCS per il Puma IAR 330, bensì si desidera quantificare in maniera equivalente gli effetti della presenza di tale sistema sulla robustezza della stabilità alla risonanza al suolo del velivolo.

3.1.6 Gli smorzatori di ritardo

Per quando riguarda l'introduzione dell'effetto stabilizzante dovuto alla coppia di ritardo fornita dagli smorzatori di ritardo di ciascuna pala, ai fini della modellazione delle incertezze relative a questi importanti componenti del velivolo, è stato necessario generare all'interno del modello MASST della macchina un sistema di controllo fittizio, che andasse a manipolare l'azione degli smorzatori sulle pale senza modificare il modello CAMRAD/JA del rotore stesso.

Come specificato in precedenza, il modello modale ridotto del rotore dell'elicottero disponibile attraverso il software CAMRAD/JA contiene di per sé gli smorzatori utili alla soppressione del fenomeno della ground resonance; tuttavia, dovendo quantificare la stabilità della macchina a fronte di possibili incertezze² associate a rigidità e smorzamento equivalenti k_b e c_b , sono state estratte dal modello di base del velivolo le caratteristiche degli smorzatori. Seguendo tale procedura, è stato notevolmente diminuito il numero di occorrenze dei parametri incerti all'interno del modello, circoscrivendole alla sola matrice di controllo.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(p_i)\mathbf{x} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{K}(p_i) = \mathbf{K}(p_{0_i}) + \Delta\mathbf{K}(\delta p_i); \quad p_i = p_{0_i} + \delta p_i = p_{0_i}(1 + \delta_i) \quad (3.13)$$

Un vantaggio di tale scelta operativa è sicuramente rappresentato dal fatto che la modellazione ha richiesto un unico modello MASST dell'elicottero ed un unico modello camrad del rotore, rendendo molto più automatica la procedura di manipolazione delle matrici agli stati e la trattazione successiva dei risultati.

D'altra parte, è doveroso evidenziare l'approssimazione che una simile modellazione comporta, ossia, utilizzando un unico modello di rotore, le forme

²Per determinare la fonte di incertezza associata alla dinamica dei dampers si faccia riferimento alla parte introduttiva del capitolo (pag. 67).

modali ad esso associate risultano essere corrette per la condizione di smorzatori nominali ma formalmente errate al di fuori di tale condizione di partenza, avendo variato le caratteristiche elastoviscose di quest'ultimi.

Nonostante questo limite, dal momento che l'incertezza associata alle caratteristiche nominali degli smorzatori è comunque circoscritta all'interno di un ristretto intervallo di variazione e poiché il sistema è lineare, l'errore che si è commesso sulla ricostruzione modale è stato ritenuto sicuramente trascurabile per lo studio della ground resonance dell'elicottero.

Per ottenere tramite MASST il sistema di controllo associato agli smorzatori di ritardo è stato necessario esplicitare la relazione di guadagno che intercorre tra i modi di ritardo multipala associati al rotore e le coppie di ritardo fornite per la stabilizzazione del sistema (Tabella 3.7). In questo senso è stata quindi determinata una relazione matriciale per la determinazione della matrice dei guadagni $\mathbf{K}(k_b, c_b)$ che andasse a legare le coordinate multipala ξ_0, ξ_C, ξ_S e $\xi_{N/2}$ con le coppie di ritardo espresse nel sistema di riferimento non rotante. Viene riportata l'espressione formale delle coppie fornite nel sistema di riferimento non rotante del rotore grazie alla relazione che intercorre tra la rotazione e la velocità angolare di ritardo di ciascuna pala e le coordinate multipala per il caso di rotore quadripala.

$$\xi_i = \xi_0 + \xi_{C1} \cos \psi_i + \xi_{S1} \sin \psi_i + \xi_{N/2} (-1)^i; \quad \psi_i = \Omega t + \frac{2\pi i}{N}$$

$$\xi^{\mathbf{R}} = \mathbf{T}(t) \xi^{\mathbf{NR}} \quad (3.14)$$

$$\dot{\xi}^{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{T}}(t) \xi^{\mathbf{NR}} + \mathbf{T}(t) \dot{\xi}^{\mathbf{NR}} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{C}^{\mathbf{NR}} = \mathbf{T}(t)^{-1} \mathbf{C}^{\mathbf{R}} = -\mathbf{T}(t)^{-1} \mathbf{K}_b^{\mathbf{R}} \xi^{\mathbf{R}} - \mathbf{T}(t)^{-1} \mathbf{C}_b^{\mathbf{R}} \dot{\xi}^{\mathbf{R}} \quad (3.16)$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\mathbf{NR}} &= -(\mathbf{T}(t)^{-1} \mathbf{K}_b^{\mathbf{R}} \mathbf{T}(t) + \mathbf{T}(t)^{-1} \mathbf{C}_b^{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{T}}(t)) \xi^{\mathbf{NR}} + \\ &\quad -\mathbf{T}(t)^{-1} \mathbf{C}_b^{\mathbf{R}} \mathbf{T}(t) \dot{\xi}^{\mathbf{R}} = \\ &= -\mathbf{K}_b^{\mathbf{NR}} \xi^{\mathbf{NR}} - \mathbf{C}_b^{\mathbf{NR}} \dot{\xi}^{\mathbf{NR}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Avendo effettuato l'ipotesi di rotore isotropo, ovvero avente caratteristiche elastoviscose uguali per gli smorzatori di ciascuna pala, si avrà non solo che le matrici $\mathbf{K}_b^{\mathbf{R}}$ e $\mathbf{C}_b^{\mathbf{R}}$ risultano essere praticamente diagonali ma che il contributo delle matrici di guadagno su rotazioni e velocità angolari di ritardo nel sistema di riferimento non rotante è tempo invariante.

3.1.7 I servo-attuatori

A seguito dell'imposizione da parte del pilota di un comando durante una determinata missione, per poter raggiungere la condizione desiderata del velivolo, ovvero garantirne la manovrabilità, deve esistere una catena di comando articolata in modo da tradurre lo spostamento della barra di comando in forza/coppia di attuazione. In questo modo, viene innescato il moto delle superfici aerodinamiche per la generazione della forza/coppia necessaria al soddisfacimento della richiesta del pilota. Sostanzialmente occorre conoscere:

- il comando di riferimento δ_c e la funzione di trasferimento che ne permetta la realizzazione;
- l'impedenza dinamica che lega la forza/coppia generalizzata di reazione M_c al movimento relativo δ tra condizione attuale e condizione richiesta.

Nelle Figure 3.12 si mostra la collocazione sia per il rotore principale che per il rotore di coda dei 4 servo-attuatori introdotti nel modello MASST; in questo caso il grado di libertà ad essi associato risulta essere l'allungamento del pistone idraulico, ossia lo scostamento relativo tra il nodo di collegamento del servo-comando sulla fusoliera in blu e il nodo di collegamento sul rotore in corrispondenza del piatto oscillante fisso in verde (Figura 3.13).

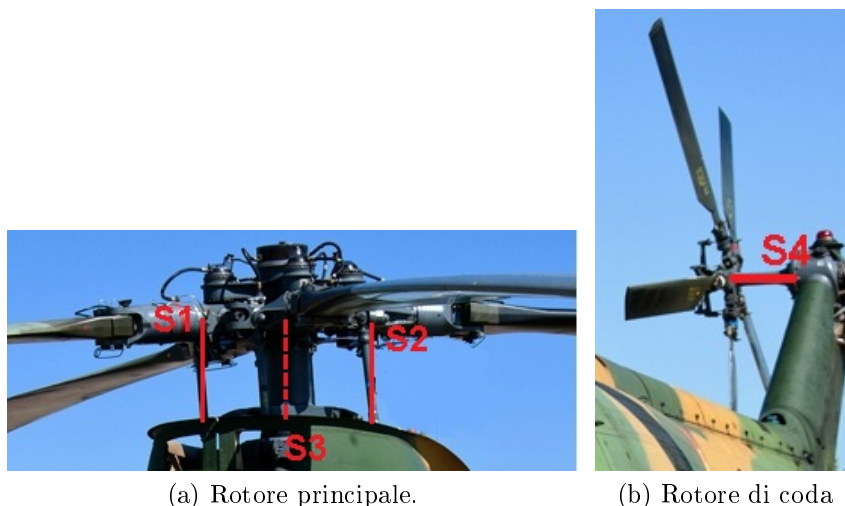


Figura 3.12: Collocazione nel modello MASST dei servoattuatori.

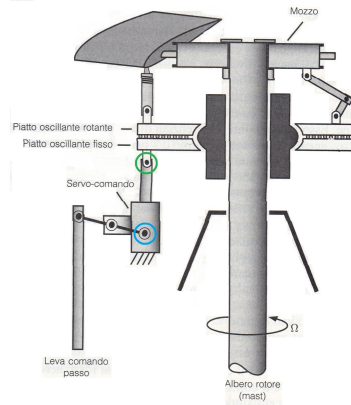


Figura 3.13: Schema dell'assieme del rotore [1].

A questo punto è possibile introdurre la dinamica dei 4 servoattuatori considerati uguali per ogni grado di libertà δ_i attraverso il contributo della funzione di trasferimento associata alla dinamica della catena di comando $H_\delta \mathbf{B2S}$ e alla cedevolezza della reazione ottenuta H_M dell'attuatore.

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{H}_\delta \hat{\boldsymbol{\delta}}_c + \mathbf{H}_M \mathbf{M}_c = \mathbf{H}_\delta \mathbf{B2S} \boldsymbol{\delta}_c + \mathbf{H}_M \mathbf{M}_c \quad (3.18)$$

in cui $\hat{\boldsymbol{\delta}}_c = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4\}$ sono gli allungamenti dei servoattuatori.

È necessario ricostruire la catena cinematica di comando grazie alla conoscenza della geometria del piatto del rotore in modo da determinare il legame che intercorre tra gli allungamenti $\hat{\boldsymbol{\delta}}_c$ e i comandi ciclici e collettivi $\boldsymbol{\delta}_c$ imposti dall'inclinazione del piatto stesso.

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_c = \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_l & r \frac{x_l}{d_l} \cos 60^\circ - \alpha_l & r \frac{x_l}{d_l} \sin 60^\circ - \alpha_l & 0 \\ x_l & r \frac{x_l}{d_l} \cos 120^\circ - \alpha_l & r \frac{x_l}{d_l} \sin 120^\circ - \alpha_l & 0 \\ x_l & r \frac{x_l}{d_l} \cos 180^\circ - \alpha_l & r \frac{x_l}{d_l} \sin 180^\circ - \alpha_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B2S_{TR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_0^{MR} \\ \theta_1^{MR} \\ \theta_2^{MR} \\ \theta_0^{TR} \end{Bmatrix} = \mathbf{B2S} \boldsymbol{\delta}_c$$

Per quanto concerne, invece, le funzioni di trasferimento nella (3.18), considerando la banda passante del sistema dell'elicottero e sulla base di velivoli della medesima classe è stata selezionata una cedevolezza statica costante per H_M e una funzione del secondo ordine per la dinamica di trasmissione del comando che presentasse due poli in alta frequenza, uno a $w_1 = 10$ Hz e uno a $w_2 = 60$ Hz.

$$\begin{aligned} H_\delta &= \frac{w_1}{s + w_1} \frac{w_2}{s + w_2} \\ H_M &= F = \frac{1}{K} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Si riportano in Figura 3.14 i diagrammi di bode di ampiezza e fase delle funzioni di trasferimento adottate per la modellazione dei servo-comandi³.

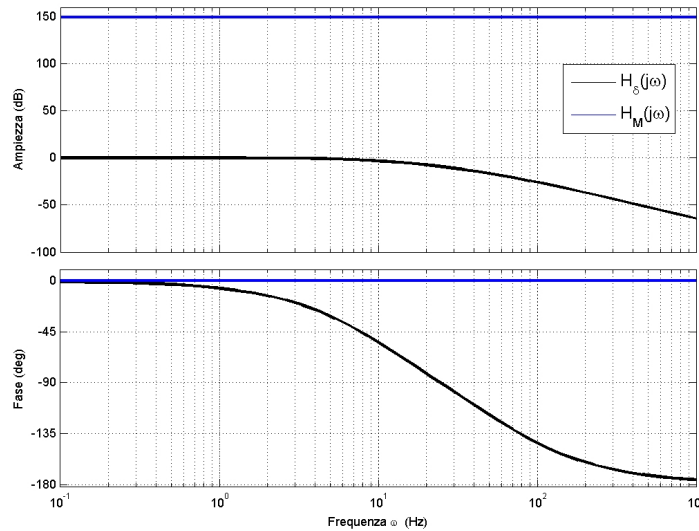


Figura 3.14: Ampiezza e fase delle funzioni di trasferimento caratteristiche dei servo-attuatori.

Il termine M_c nella (3.18) rappresenta le forze di controllo che vengono generate dall’FCS riportato precedentemente nella Tabella 3.7; in questo modo, non solo è possibile sostituire M_c nelle equazioni aeroelastiche del velivolo inglobando così la dinamica dei servoattuatori nel sistema complessivo ma, dal punto di vista del sistema di controllo significa che è possibile controreazionare l’uscita della velocità angolare di rollio con l’ingresso nel sistema di un ciclico laterale imposto dal pilota.

$$\begin{aligned} \delta_c &= \mathbf{H}_{\text{FCS}} p \\ \mathbf{H}_{\text{FCS}} &= \mathbf{B} \mathbf{2S} \mathbf{1} \mathbf{K}_{\text{FCS}} e^{j\omega T_{\text{FCS}}} \end{aligned}$$

in cui $\vec{\mathbf{1}} = \{0, 1, 0, 0\}^T$, in quanto si desidera imporre proprio un comando ciclico laterale al rotore.

³Ragionevolmente sono stati utilizzati gli stessi servo-attuatori sia per i tre presenti sul rotore principale che per quello del rotore di coda.

Dal punto di vista della modellazione l'approccio di assemblaggio tra fusoliera, rotori e servo-attuatori sfrutta ancora una volta una procedura riconducibile a quella di Craig-Bampton citato precedentemente; infatti, la condensazione dei vari modelli è stata effettuata grazie alla determinazione dei modi di vincolo dei servo-attuatori imponendo per ciascuno di essi un allungamento unitario e mantenendo bloccati i restanti gradi di libertà.

3.2 Modello agli stati

Grazie a MASST, viene fatta una ricostruzione del modello aeroelastico agli stati ottenendo il sistema strettamente proprio nella forma generica⁴:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\text{ae}} &= \mathbf{A}_{\text{ae}}\mathbf{x}_{\text{ae}} + [\mathbf{B}_{\boldsymbol{\xi}} \ \mathbf{B}_{\theta}]\{\mathbf{u}_{\boldsymbol{\xi}} \ \delta_{\text{c}}\}^T \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{C}_{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{C}_{\text{p}})\mathbf{x}_{\text{ae}}\end{aligned}$$

In particolare, come accennato precedentemente, sono stati previsti due differenti modelli in tempo: uno ridotto a 12 gradi di libertà utilizzato per le analisi ed uno di dimensioni maggiori a 28 gradi di libertà per la verifica. Si distinguono, pertanto nella Tabella seguente i due differenti casi trattati, evidenziando che per il modello di verifica sono stati introdotti anche i gradi di libertà del rotore principale in coordinate multipala associati al flappeggio rigido ed elastico e alla torsione delle pale sia rigida che elastica. In questo modo è possibile verificare l'influenza sulla stabilità robusta alla ground resonance dell'accoppiamento flappeggio-ritardo e ritardo-variazione passo.

⁴Si ricorda che il sistema di controllo fittizio per la modellazione del rotore di coda non viene considerato come tale bensì è stato inglobato all'interno della matrice \mathbf{A}_{ae} in corrispondenza del passo collettivo del rotore di coda.

	Modello ridotto	Modello di verifica
Airframe	$x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi$	$x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi$
Rotore	$x_r, y_r, z_r, \varphi_r, \vartheta_r, \psi_r, \xi^{NR}$	$x_r, y_r, z_r, \varphi_r, \vartheta_r, \psi_r, \xi^{NR},$ $\beta_r^{NR}, \beta_e^{NR}$ $\vartheta_r^{NR}, \vartheta_e^{NR}$
Servo-comandi ciclici e collettivi	$\theta_0^{MR}, \theta_1^{MR}, \theta_2^{MR}, \theta_0^{TR}$	$\theta_0^{MR}, \theta_1^{MR}, \theta_2^{MR}, \theta_0^{TR}$
Uscite	$\xi^{NR}, \dot{\xi}^{NR}, p$	$\xi^{NR}, \dot{\xi}^{NR}, p$
Ingressi	C^{NR}, δ_c	C^{NR}, δ_c

Tabella 3.8: Modello ridotto e modello di verifica del Puma IAR 330.

3.3 Analisi di stabilità robusta

In questo paragrafo vengono riportati i passi successivi che hanno portato alla determinazione dei margini di stabilità robusta del sistema dinamico associato al problema della ground resonance per il Puma IAR 330.

In primo luogo, sono stati selezionati 4 parametri di progetto che potrebbero essere affetti da una possibile incertezza, mentre successivamente, dopo aver appurato la stabilità del sistema nominale, si è costruita la cosiddetta struttura $N - \Delta$ del sistema agli stati. Pertanto, dopo aver isolato il sistema nominale dall'azione delle incertezze contenute esclusivamente nella matrice Δ , si è effettuata una μ -Analisi e un'analisi robusta secondo il criterio generalizzato di Nyquist focalizzando l'attenzione, da un lato sui limiti forniti dalle incertezze strutturate del primo metodo e dall'altro andando a localizzare i valori ammissibili dei parametri nello spazio delle possibili incertezze non strutturate. Infine, come ulteriore scopo della trattazione si è ispezionata la sensibilità dei risultati ottenuti rispetto alla trazione agente sull'elicottero a terra, andando a confrontare la robustezza di 3 differenti modelli generati (nominale con $T = 0\%$, con $T = 45\%$ e $T = 75\%$).

3.3.1 Definizione delle incertezze di modello

Come visualizzato precedentemente, il dimensionamento degli smorzatori di ritardo per la tutela del velivolo rispetto al fenomeno della ground reso-

nance assume un'importanza primaria; inoltre, è possibile che in particolari situazioni il flight control system dell'elicottero vada ad influenzare il comportamento dinamico del velivolo a terra.

Ad esempio, in alcuni casi risulta essere necessario inserire a posteriore un filtro per il controllore in grado di rigettare quella determinata frequenza che genera una critica interazione con la dinamica del velivolo (*Notch filter*). Tuttavia, in questi casi, la presenza di un filtro di questa tipologia va inevitabilmente a degradare le prestazioni globali del sistema di controllo in quando nella realtà non è possibile escludere solo una determinata frequenza senza introdurre un certo ritardo più o meno significativo su tutte le altre.

Per tali ragioni, si è deciso di ispezionare attraverso tecniche di analisi robusta l'effetto della presenza di incertezza sul guadagno e sul ritardo dell'FCS, favorendo la possibilità sin dalle fasi preliminare del progetto di localizzare eventuali bande critiche di frequenza, evitando l'inserimento a posteriori di un filtraggio di tipo notch.

Analogamente a quanto fatto per il rotore semplificato a 4 gradi di libertà, vengono scelti come parametri incerti del modello le caratteristiche elastoviscose degli smorzatori di ritardo presenti nel modello CAMRAD/JA di rotore. Successivamente, per quantificare l'effetto di un eventuale FCS si considerano incerti anche il relativo guadagno e ritardo.

L'intervallo di variabilità di k_b e c_b è stabilito dalle seguenti relazioni:

$$k_b = k_b^N \left(1 + \frac{\delta k_b}{k_b^N} \right) \text{ in cui } \delta_1 = \frac{\delta k_b}{k_b^N} = [-100\%, 100\%] \quad (3.20)$$

$$c_b = c_b^N \left(1 + \frac{\delta c_b}{c_b^N} \right) \text{ in cui } \delta_2 = \frac{\delta c_b}{c_b^N} = [-100\%, 100\%] \quad (3.21)$$

Per quanto concerne invece il limite dell'FCS si è scelto ragionevolmente in senso conservativo una variazione massima del guadagno pari a ± 2 ; mentre per quanto riguarda l'incertezza sul ritardo si fa riferimento agli articoli [21], [8], in cui viene illustrato attraverso l'istogramma riportato in Figura 3.15 e lo schema in Figura 3.16 le cause di ritardo del sistema di controllo.

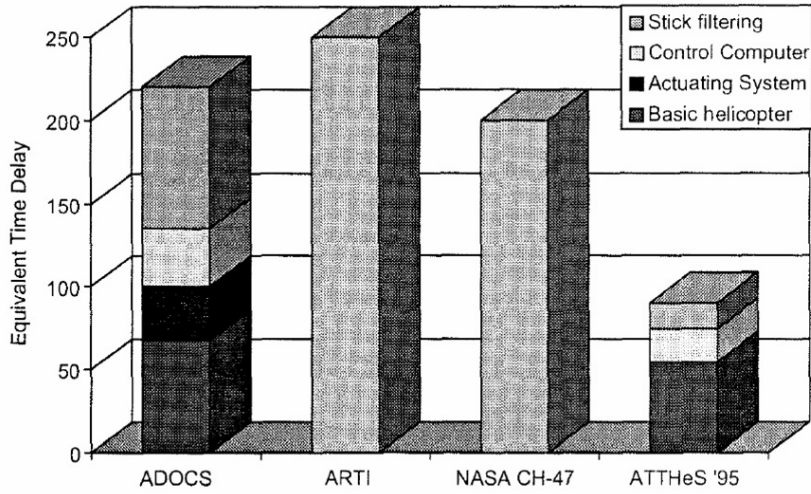


Figura 3.15: Istogramma dei tempi di aggiornamento e ritardo dell’FCS.

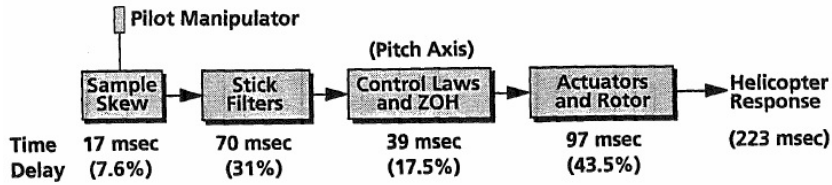


Figura 3.16: Schema per la definizione del ritardo complessivo dell’FCS.

Pertanto alla luce dei vari tempi necessari all’FCS per stabilizzare il volo sono stati scelti come limite di variazione dei due parametri incerti i seguenti:

$$K_{FCS} = K_{FCS}^N \left(1 + \frac{\delta K_{FCS}}{K_{FCS}^N} \right) \text{ in cui } \delta_3 = \frac{\delta K_{FCS}}{K_{FCS}^N} = [-2, 2] \quad (3.22)$$

$$T_{FCS} = T_{FCS}^N \left(1 + \frac{\delta T_{FCS}}{T_{FCS}^N} \right) \text{ in cui } \delta_4 = \frac{\delta T_{FCS}}{T_{FCS}^N} = [0, 0.5] \text{ s} \quad (3.23)$$

Avendo predisposto la modellazione dell’elicottero in modo che le incertezze ricadessero esclusivamente nei vari sistemi di controllo, la scelta più conveniente dal punto di vista implementativo è quella di considerare l’apporto di incertezze del sistema come una perturbazione agente sugli ingressi attraverso un’incertezza di tipo parametrico. È nota la natura e l’ordine del modello del sistema ma le proprietà $\mathbf{p} = \{k_b, c_b K_{FCS}, T_{FCS}\}^T$ presentano una particolare variabilità percentuale $r_p \Delta$ contenuta in un intorno del relativo valore

nominale \bar{p} .

$$p_i = \bar{p}(1 + r_p \Delta)$$

$$r_p \Delta = \frac{p_{max} - p_{min}}{p_{max} + p_{min}} \Delta, \text{ in cui } \Delta \leq 1$$

Lo schema esemplificativo è riportato in Figura 3.17; per la pesatura della perturbazione, in questo caso viene introdotta direttamente dall'architettura lineare del sistema.

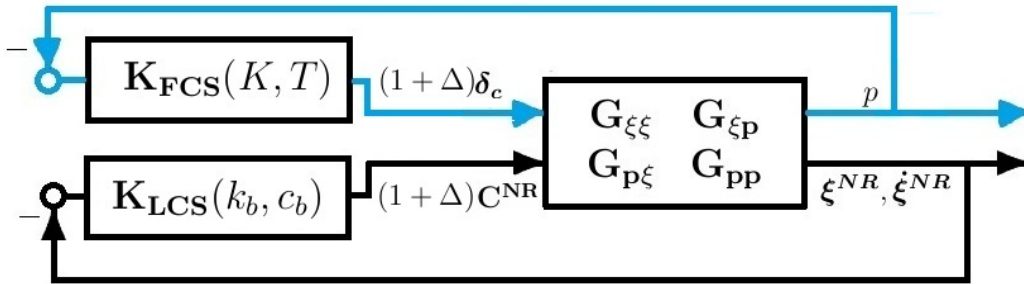


Figura 3.17: Schema per l'introduzione della perturbazione.

Se vengono considerate solo due incertezze viene chiusa la linea di addizione della perturbazione dell'FCS ritenendo nulli i termini δK_{FCS} e δT_{FCS} .

A differenza di quanto fatto precedentemente col modello semplificato dell'elicottero, non è conveniente andare ad esplicitare il contributo della perturbazione parametrica sulla matrice degli stati A_{ae} in quanto i processi che portano alla determinazione delle strutture $N-\Delta$ e $M-\Delta$ per la μ -Analisi passano attraverso LFT numeriche.

3.3.2 Criterio Generalizzato di Nyquist con FCS

La procedura per il trattamento del caso di due incertezze sugli smorzatori è del tutto analoga a quella utilizzata per il rotore dell'Hammond, pertanto si fa riferimento al paragrafo 2.2.4 a pag. 35.

Per quanto concerne invece la modellazione delle 4 incertezze comprendenti anche il sistema di controllo FCS, si mostra la matrice di perturbazione nominale del sistema e la variazione rispetto alla condizione di riferimento. Per semplificare la trattazione si è considerata la perturbazione dell'FCS $K_{FCS}e^{j\omega T_{FCS}}$ come parte reale Re_{FCS} e immaginaria Im_{FCS} .

$$\Delta_0 = \frac{N_b}{2} \begin{bmatrix} k_b^N + j\omega c_b^N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b^N + j\omega c_b^N & \Omega c_b^N & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega c_b^N & k_b^N + j\omega c_b^N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_b^N + j\omega c_b^N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_b^N + j\omega c_b^N \end{bmatrix};$$

$$\delta\Delta = \frac{N_b}{2} \begin{bmatrix} \delta k_b + j\omega\delta c_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta k_b + j\omega\delta c_b & \Omega\delta c_b & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega\delta c_b & \delta k_b + j\omega\delta c_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta k_b + j\omega\delta c_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta k_b + j\omega\delta c_b \end{bmatrix} + \frac{2}{N_b} \mathbf{B2S\tilde{I}}(\delta Re_{FCS} + \delta Im_{FCS})$$

Si ricorda quindi l'espressione del guadagno generalizzato come distanza tra la funzione di trasferimento di ciascun anello $L_i(j\omega)$ e il punto -1 lungo la relativa congiungente sul piano complesso.

$$\rho_i(\omega)e^{j\theta_i} = -(\lambda_i(\mathbf{L}_0(j\omega)) + 1) = \mathbf{u}_i(\omega)^T \mathbf{M}(j\omega) \delta\Delta(j\omega) \mathbf{v}_i(\omega) \quad (3.24)$$

Una volta verificata la condizione di limite di stabilità si cercano nello spazio delle possibili incertezze i valori ammissibili per ciascun parametro impostando come in precedenza un sistema lineare che assume, in questo caso, la forma seguente:

$$\tilde{\mathbf{K}}_b = \begin{bmatrix} 1_{4 \times 4} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}}_b = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}}_L = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{4 \times 4} & \mathbf{B2S\tilde{I}} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i & j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{K}}_b \mathbf{v}_i + \Omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_b \mathbf{v}_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_L \mathbf{v}_i & j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{C}}_L \mathbf{v}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta k_b \\ \delta c_b \\ \delta Re_{FCS} \\ \delta Im_{FCS} \end{Bmatrix} = \{ \rho_i e^{j\theta_i} \}$$

Valutando la parte reale e quella immaginaria di ciascuna equazione si procede sia con la tecnica dei valori esterni delle incertezze sull'FCS che impostando un'ottimizzazione per la minimizzazione dello scostamento rispetto al sistema nominale delle caratteristiche elastoviscose degli smorzatori di ritardo⁵.

⁵Per maggior chiarezza si veda l'impostazione di tale procedura illustrata a pag. 39.

3.4 Risultati ottenuti

3.4.1 Stabilità nominale

Condizione necessaria allo studio della robustezza del sistema è garantire la stabilità nominale di quest'ultimo, pertanto si riporta l'andamento della parte reale e della parte immaginaria degli autovalori del sistema normalizzati rispetto alla velocità di regime Ω . In particolare, tali analisi sono state condotte senza smorzamento fornito dagli smorzatori nelle Figure 3.18 e 3.19, mentre con smorzamento nominale nelle Figure 3.20 e 3.21. Si nota come nel caso non smorzato esista un'interazione tra il modo di rollio della fusoliera e la regressiva di ritardo; infatti nell'intervallo di frequenze tra il 60 % e il 80 % della Ω lo smorzamento diventa positivo, sintomo dell'insorgere dell'instabilità aeromeccanica di ground resonance.

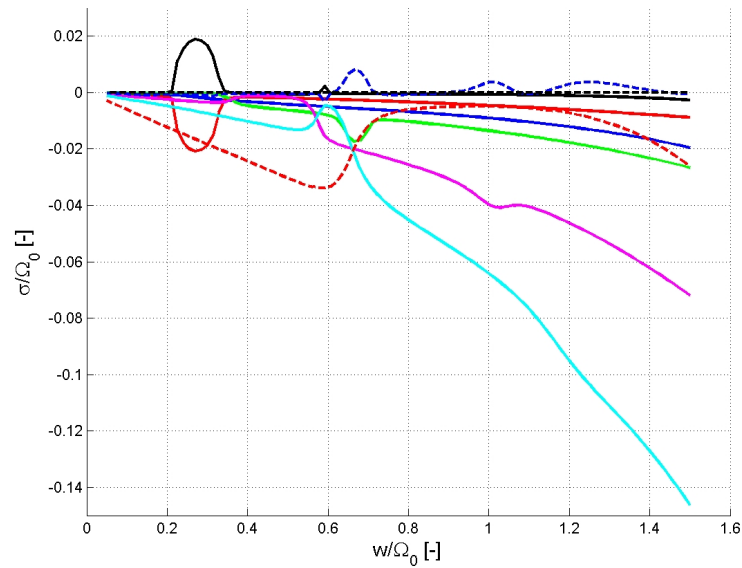


Figura 3.18: Andamento della parte reale degli autovalori del sistema ($c_b = 0$).

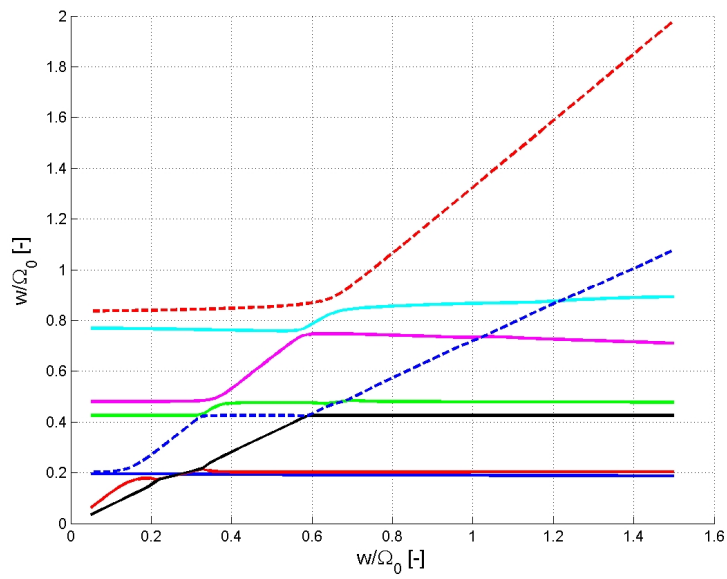


Figura 3.19: Andamento della parte immaginaria degli autovalori del sistema ($c_b = 0$).

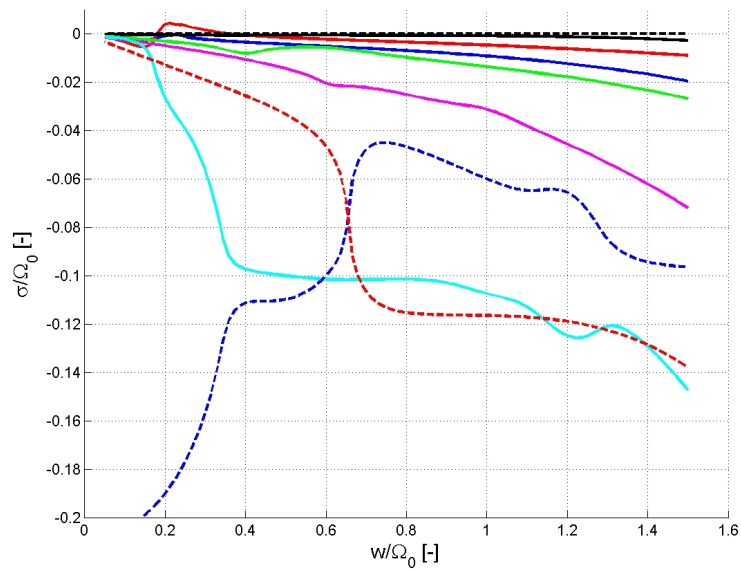


Figura 3.20: Andamento della parte reale degli autovalori del sistema ($c_b = c_b^N$).

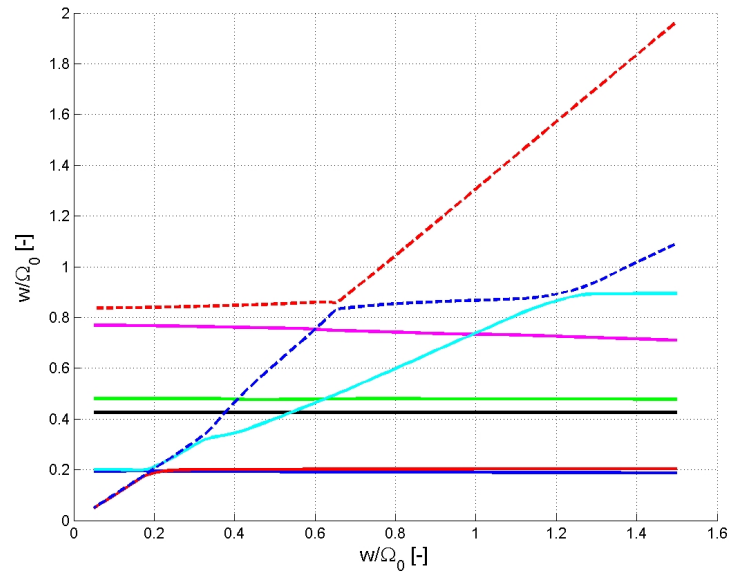


Figura 3.21: Andamento della parte immaginaria degli autovalori del sistema ($c_b = c_b^N$).

Va sottolineato che alle basse frequenze, nell'intorno del 23 % di Ω i modi di spostamento longitudinale e laterale x ed y della macchina presentano uno smorzamento positivo se pur molto contenuto.

È stato deciso di non tenere in considerazione questa possibile instabilità in quanto essa rappresenta una condizione operativa molto improbabile per il velivolo, poichè nella fase di avviamento della macchina tale situazione viene immediatamente superata. In questo modo prima che si inneschi il meccanismo di instabilità la frequenza critica viene scavalcata e il rotore, in condizioni nominali di funzionamento si colloca operativamente in velocità di rotazione che non comportano mai l'insorgere di risonanza al suolo.

3.4.2 Curve limite GNC e μ -Analisi

Dapprima si mostra nelle Figure 2.12 e 2.13 l'andamento del guadagno generalizzato per ogni anello chiuso del sistema; secondo il GNC, la condizione limite di stabilità viene raggiunta se viene violata la seguente disuguaglianza:

$$|\lambda_i(\mathbf{L}_0(j\omega)) + 1| > |\mathbf{u}_i(\omega)^T \mathbf{M}(j\omega) \delta \mathbf{\Delta}(j\omega) \mathbf{v}_i(\omega)|, \forall \omega, \forall i \quad (3.25)$$

Pertanto, viene visualizzato a livello grafico sia per tutte le frequenze di interesse in Figura 3.24, che per la banda di maggior interesse per la ground resonance (tra 70% e 85 % della 1 per giro) in Figura 3.25, la verifica del soddisfacimento della (3.25).

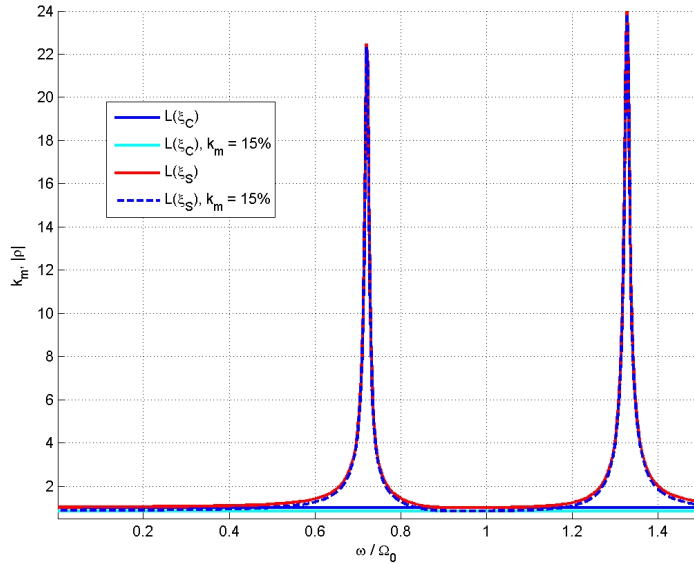


Figura 3.22: Guadagno generalizzato per gli anelli $L_{\xi_C}(j\omega)$ e $L_{\xi_S}(j\omega)$ (2 incertezze).

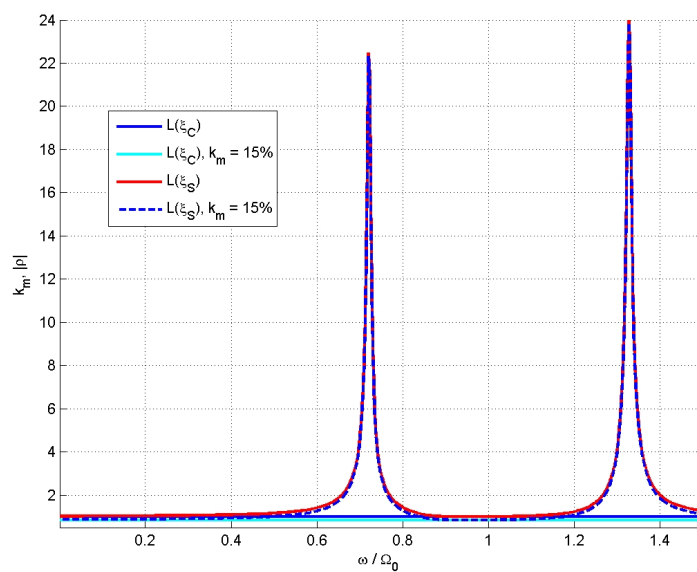


Figura 3.23: Guadagno generalizzato per gli anelli $L_{\xi_C}(j\omega)$ e $L_{\xi_S}(j\omega)$ (4 incertezze).

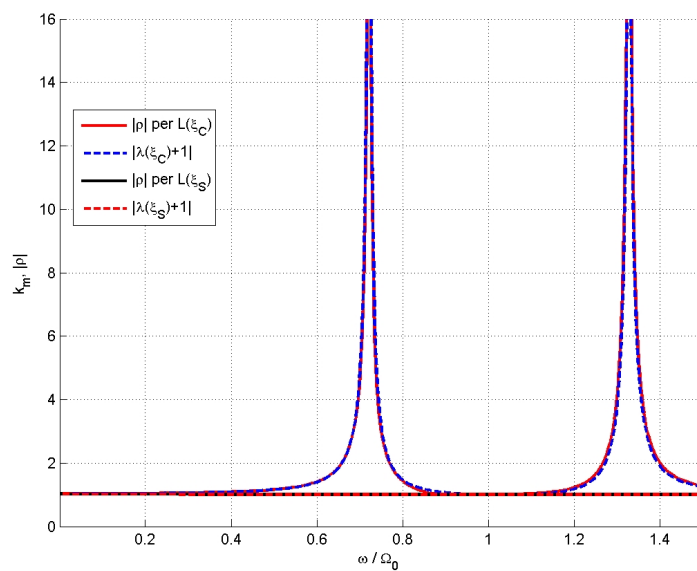


Figura 3.24: Condizione limite di stabilità per gli anelli $L_{\xi_C}(j\omega)$ e $L_{\xi_S}(j\omega)$.

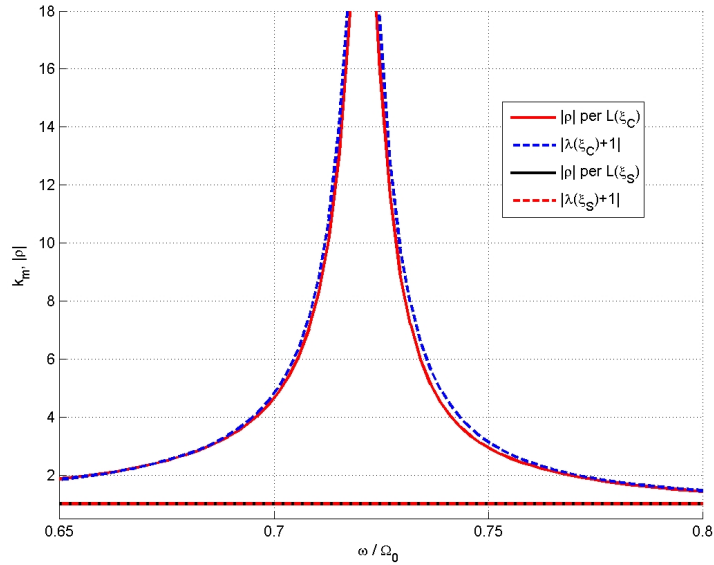


Figura 3.25: Particolare della condizione limite di stabilità per gli anelli $L_{\xi_C}(j\omega)$ e $L_{\xi_S}(j\omega)$.

Risolviendo il sistema lineare (3.24) si ottengono i limiti fisici ammissibili per le incertezze sulle caratteristiche elastoviscose degli smorzatori di ritardo; se ne riportano gli andamenti in Figura 3.26 e 3.27, rispettivamente sul piano $\Delta k_b - \Delta c_b$ e in funzione della banda di frequenze normalizzate di interesse. I risultati mostrano come il punto di progetto sia ben collocato all'interno della regione di stabilità tracciata dalle curve limite, inoltre, si evidenzia come l'apporto di smorzamento utile alla stabilizzazione sia complessivamente basso ad eccezione dell'intorno dell'85% della 1 per giro in cui a causa della possibilità di ground resonance si ha un aumento di Δc_b necessario.

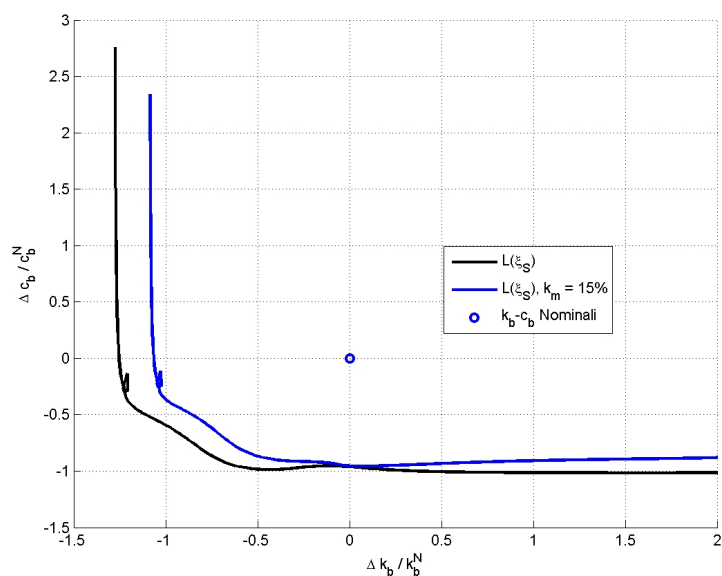


Figura 3.26: Andamento dei parametri incerti al limite di stabilità e con margine $k_m = 15\%$ (2 incertezze).

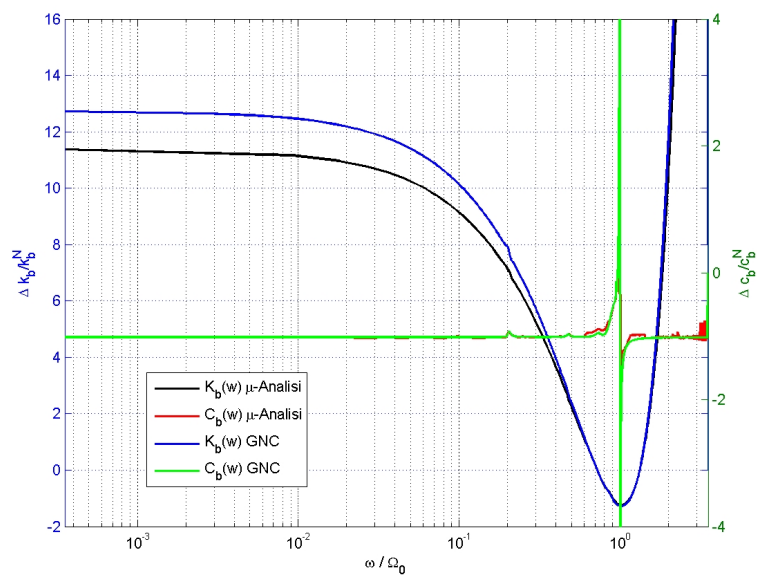


Figura 3.27: Andamento dei parametri incerti al limite di stabilità in funzione della frequenza (2 incertezze).

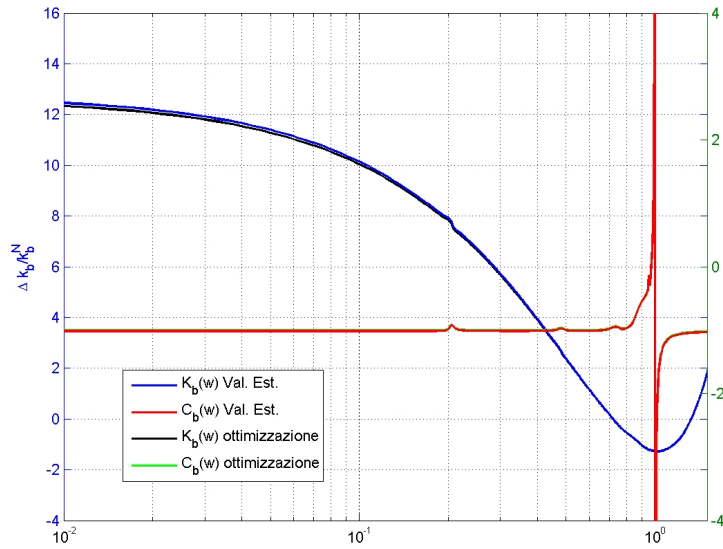


Figura 3.28: Andamento dei parametri incerti al limite di stabilità in funzione della frequenza (4 incertezze).

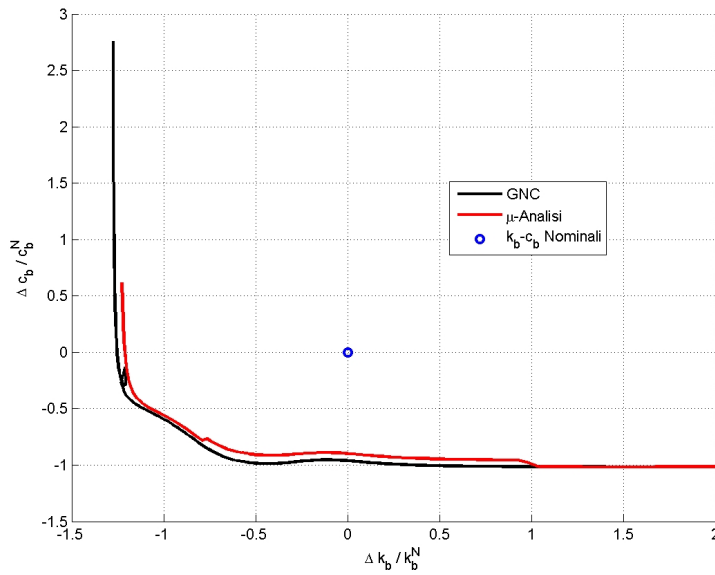


Figura 3.29: Confronto delle curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per GNC e μ -Analisi (2 incertezze).

I risultati della μ -Analisi sono in accordo con quelli del GNC come mostrato dal confronto riportato nella Figura 3.29 per 2 incertezze e nella 3.30 nel caso di 4 incertezze.

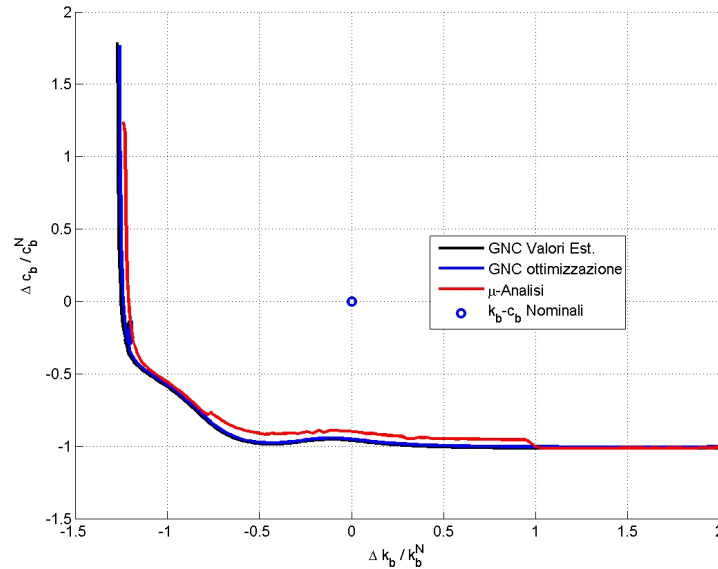


Figura 3.30: Confronto delle curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per GNC e μ -Analisi (4 incertezze).

Allo stesso modo, si mostra in Figura 3.31 il modulo limite per l'eventuale FCS; si riscontra che alle basse frequenze, il sistema è in grado di sopportare ampi guadagni dell'FCS è un ritardo massimo di 0.5 s senza incappare mai in ground resonance.

La permanenza di $K_{FCS} = 2$ per il metodo dei valori esterni significa che il guadagno per il caso del GNC non è vincolante dal punto di vista della stabilità al di fuori dell'intervallo critico tra 80% e 85% della 1 per giro. Infatti, anche tramite l'ottimizzazione e la μ -Analisi si nota come il guadagno del sistema di controllo può essere maggiore di 2 per la maggior parte delle frequenze e al limite 1.14 in corrispondenza della banda di interesse della ground resonance. Per quanto riguarda il ritardo, invece il comportamento è differente in quanto il sistema è in grado di sopportare per ogni frequenza considerata il ritardo massimo imposto pari a 0.5 s, in quanto anche se l'FCS introducesse un aumento di fase questo non comporterebbe l'insorgere dell'instabilità.

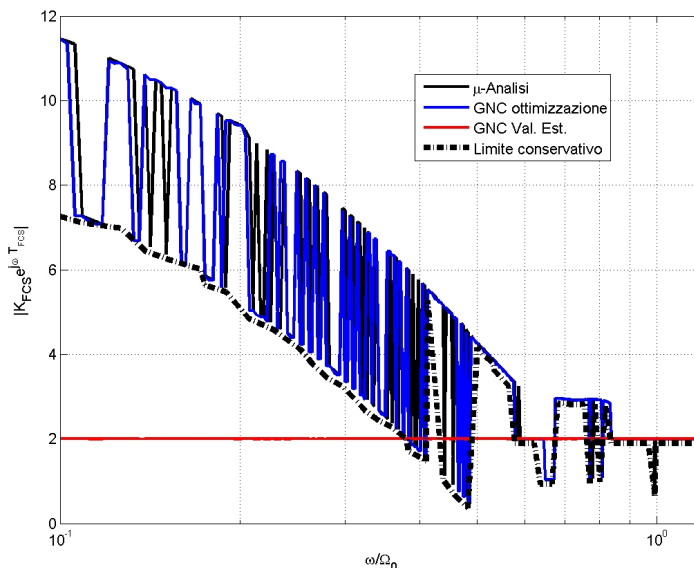


Figura 3.31: Modulo limite dell'FCS.

Va evidenziato che, nell'ambito della progettazione preliminare del sistema di controllo del volo, avere a disposizione dei limiti in termini di modulo e fase della funzione di trasferimento ad esso associata può essere molto utile per effettuarne una progettazione più mirata e robusta.

3.4.3 Margini di stabilità robusta

Vengono esposti nei paragrafi seguenti i risultati ottenuti in termini di valori limite di incertezza, frequenza critica del sistema e margini di stabilità.

➡ **2 incertezze ($\delta k_b, \delta c_b$): $\pm 100\%$**

Per quanto concerne l'andamento delle variazioni dei parametri rispetto al valore nominale in funzione della frequenza si riportano in Figura 3.32 i valori limite determinati attraverso il calcolo di μ . Si nota che, concordemente con quanto ottenuto attraverso lo studio semplificato del rotore dell'Hammond, alle basse frequenze si ha che a fronte di una variazione fino a 12 volte in più rispetto al valore nominale della rigidità centrifuga delle pale, è necessario un quantitativo limitato di smorzamento per la stabilizzazione. Al contrario, alle alte frequenze i valori di rigidità e smorzamenti raggiungono i limiti fisici in 2 condizioni particolarmente critiche per il fenomeno della ground resonance, ovvero in prossimità della 1 per giro e nell'intorno dell'80% di quest'ul-

tima. In questo caso l'apporto di smorzamento deve essere maggiore per evitare di incappare in un'instabilità del sistema.

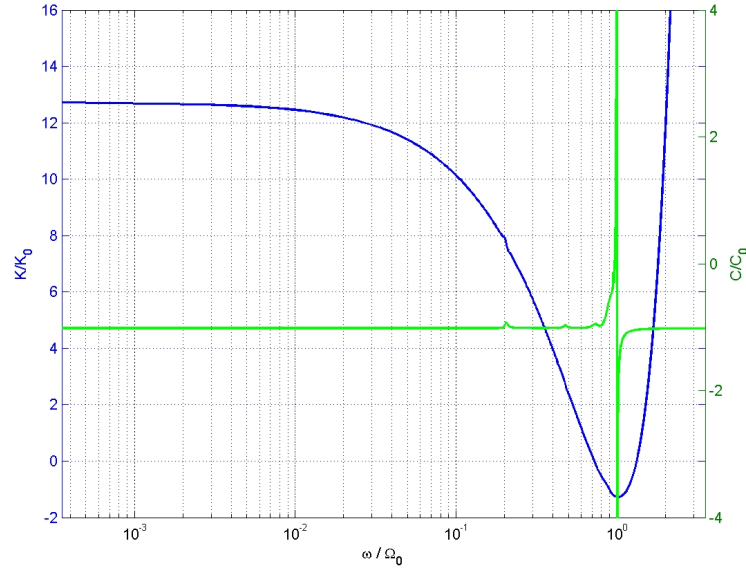


Figura 3.32: Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b .

Avendo normalizzato la matrice diagonale delle incertezze si ha che $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ e quindi la stabilità robusta risulta essere violata direttamente quando il valore di μ attraversa il limite 1. Come mostrato dalla Figura 3.33, μ assume valori superiori a quello unitario tra il 60 % e l'87 % della 1 per giro; la frequenza critica per la ground resonance si trova al $\omega = 24.10 \text{ rad/s} = 85.22 \% \Omega$. Per tale valore è possibile determinare in base al margine di stabilità, gli scostamenti normalizzati dalla condizione nominale che comportano l'insorgere dell'instabilità:

$$\begin{aligned}\Delta k_b &= -77.55\% \\ \Delta c_b &= -77.55\%\end{aligned}$$

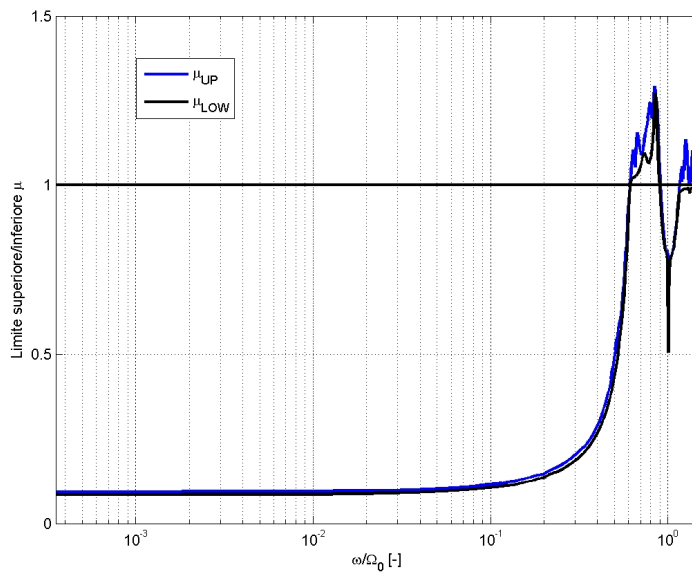


Figura 3.33: Limite inferiore e superiore di μ con 2 incertezze.

Si ricorda che i risultati sono stati ottenuti introducendo una percentuale di complessità alla perturbazione sul sistema; in questo modo si garantisce la continuità di μ e il margine determinato tende a quello del sistema reale al tendere a zero della perturbazione complessa introdotta [23].

Si evidenziano in Figura 3.34, i valori di frequenza destabilizzante e minimo margine del sistema per confermare il valore di incertezza normalizzata determinato al di sopra del quale si avrebbe l'insorgere dell'instabilità.

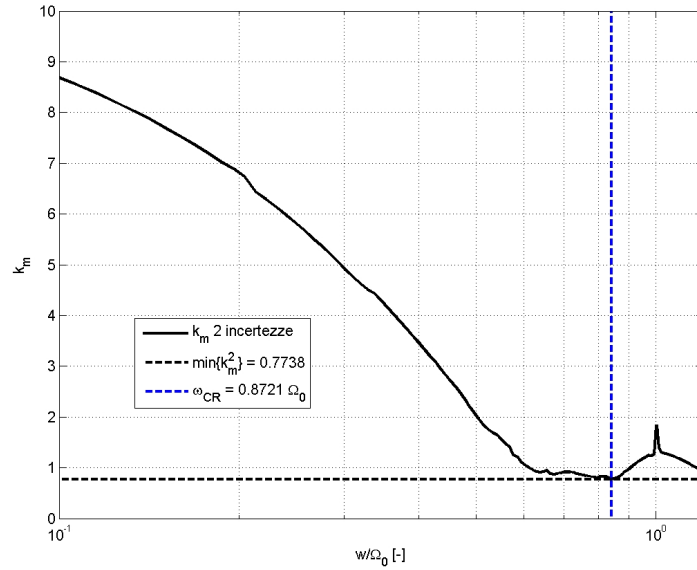


Figura 3.34: Margine di stabilità k_m del sistema con 2 incertezze.

➡ **4 incertezze:** $(\delta k_b, \delta c_b)$: $\pm 100\%$; δK_{FCS} : $[0, 2]$, δT_{FCS} : $[0, 0.5 \text{ s}]$

Analogamente al caso precedente, si sono imposte delle incertezze sul guadagno e sulla fase dell'FCS; come visibile dalla Figura 3.35 esiste un intervallo di frequenze in cui il sistema non è stabile in senso robusto in quanto μ supera il valore unitario, in particolar modo, facendo riferimento al valore del margine di stabilità limite riportato in Figura 3.36, si mostrano di seguito la combinazione di incertezze limite che il sistema è in grado di sopportare senza incappare in nessuna ω in una condizione di instabilità dinamica:

$$\begin{aligned} \Delta K_{FCS} &= +1.14 \\ \Delta T_{FCS} &= +0.5 \\ \Delta k_b &= -77.55\% \\ \Delta c_b &= -77.55\% \end{aligned}$$

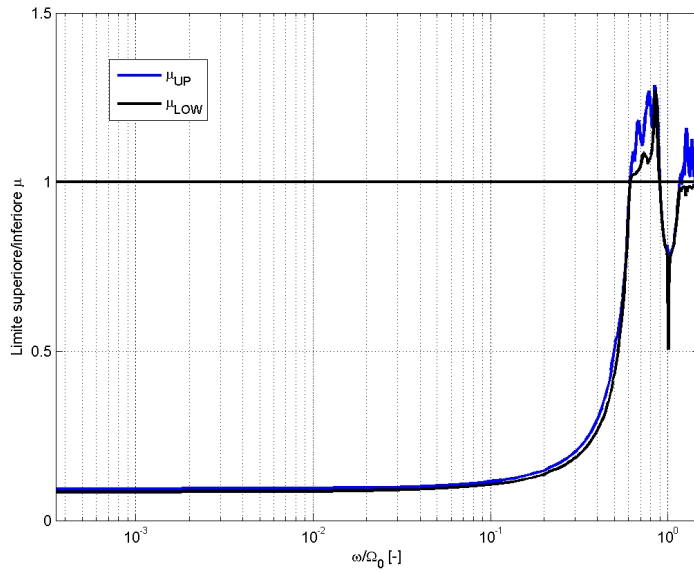


Figura 3.35: Limite inferiore e superiore di μ con 4 incertezze.

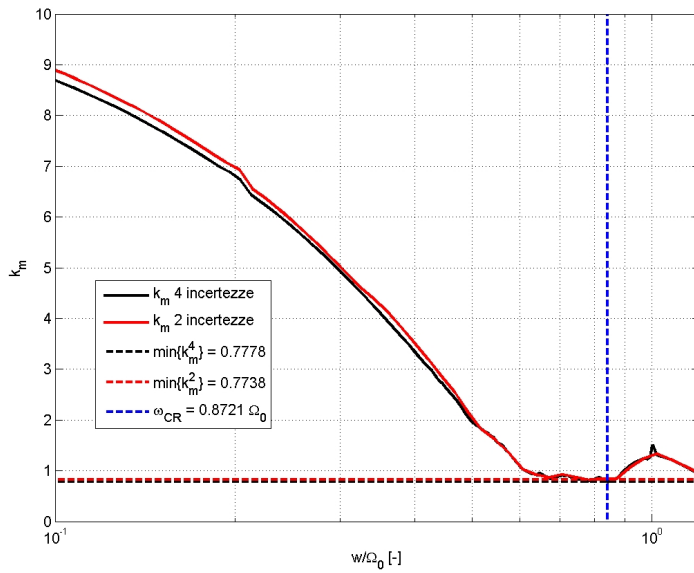


Figura 3.36: Margine di stabilità k_m del sistema con 4 incertezze.

3.4.4 Sensibilità rispetto alla Trazione

Come esposto nei paragrafi precedenti sono stati generati 3 differenti modelli del velivolo in cui si è fatto variare sia per la fusoliera che per il rotore il valore della trazione T . In particolare sono state correlate le frequenze proprie della fusoliera e i parametri di trimmaggio del rotore sulla base di $T = \{0\%, 40\%, 75\%\}W$. Tali valori corrispondono ad un *weight on wheels* di $\{100\%, 60\%, 25\%\}W$.

I risultati della μ -Analisi e della trattazione secondo GNC sono approssimativamente i medesimi pertanto si mostrano esclusivamente quelli associati alla μ -Analisi sia in termini di incertezze limite in Figure 3.37 che di margini di stabilità robusta nella 3.38.

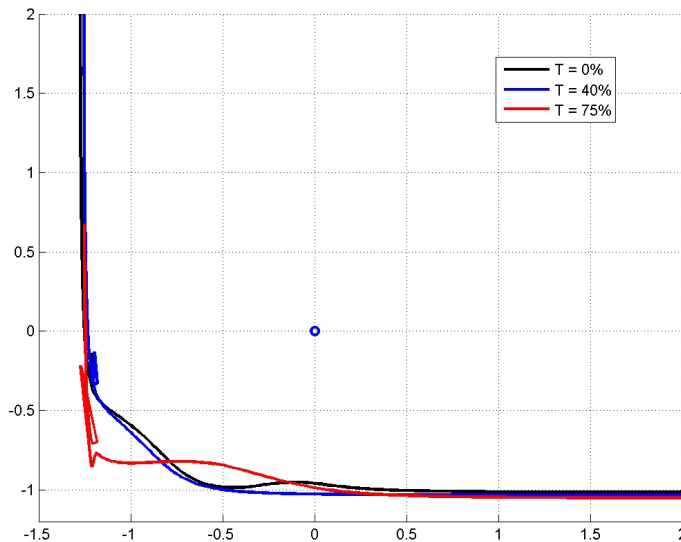


Figura 3.37: Incertezze limite di stabilità al variare della trazione.

Si nota come la presenza della trazione tende ad aumentare la regione di stabilità delimitata dalla curva limite sul piano $\Delta k_b - \Delta c_b$ sia per 2 che per 4 incertezze. Inoltre, si riportano i massimi scostamenti dai valori nominali sopportabili dal sistema senza giungere ad instabilità nella Tabella 3.9.

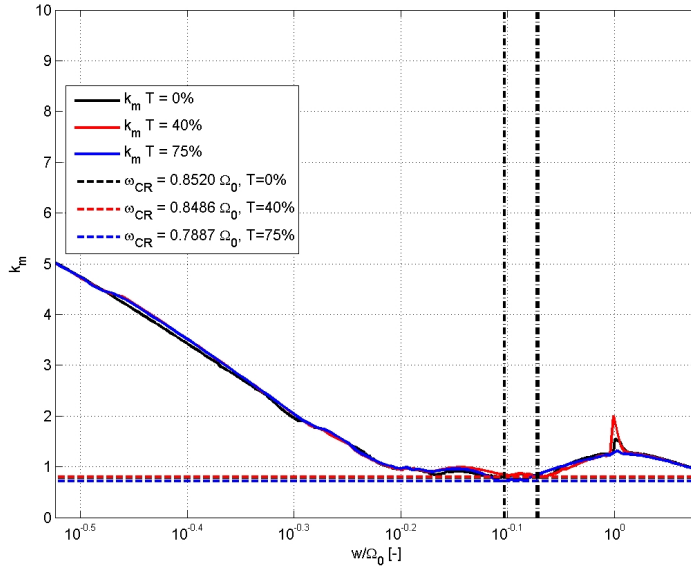


Figura 3.38: Margini di stabilità robusta al variare della trazione.

2 incertezze	T = 0%W	T = 40%W	T = 75%W
Δk_b	-77.55 %	-80.23 %	-77.10 %
Δc_b	-77.55 %	-79.67 %	-74.01 %
4 incertezze	T = 0%W	T = 40%W	T = 75%W
Δk_b	-77.55 %	-80.23 %	-77.10 %
Δc_b	-77.55 %	-79.67 %	-74.01 %
ΔK_{FCS}	1.14	1.13	1.13
ΔT_{FCS}	0.5 s	0.5 s	0.5 s

Tabella 3.9: Massime incertezze ammissibili al variare di T.

Sia dai grafici che dai valori numerici sopra riportati si nota che per il guadagno e il ritardo dell'FCS non ci sono sostanziali differenze. Per quanto concerne le caratteristiche elastoviscose degli smorzatori si ha che per $T = 40\%W$ la rigidezza e lo smorzamento richiesti per la stabilizzazione in qualsiasi frequenza sono più piccoli del 3% rispetto a $T = 0\%W$; pertanto, lo scarico inerziale che produce una diminuzione del weight on wheels favorisce la stabilità del sistema. Tuttavia ciò non è completamente applicabile per $T = 75\%W$, in quanto, indubbiamente la regione di stabilità aumenta notevolmente (Figura 3.37), ma esiste un range di frequenza assimilabile tra il 75% e l'85% della 1 per giro in cui la richiesta di smorzamento aumenta determinando dei requisiti di progetto più restringenti.

3.4.5 Modello di verifica

Al fine di meglio qualificare la dinamica del velivolo a terra si è deciso di condurre un'analisi di verifica dei risultati ottenuti, che prevedesse una μ -Analisi introducendo i gradi di libertà rigidi ed elastici di flappeggio e variazione passo.

In questo modo si è voluto quantificare l'effetto dell'accoppiamento inevitabile che esiste tra flappeggio-ritardo e ritardo-variazione passo. In generale, questo fenomeno, legato principalmente alla cinematica ed alla struttura del rotore articolato del velivolo, viene trascurato in fase di progettazione degli smorzatori per la ground resonance.

Per l'analisi viene sfruttato il modello riportato nella Tabella 3.8 a pag. 92. Come mostrato in Figura 3.39, i modi di flappeggio e variazione passo rigidi ed elastici, contribuiscono significativamente sulla rigidezza di ritardo ammissibile; in particolare si ha che la regione di stabilità viene ridotta a causa di una richiesta di una maggior k_b . Il punto di progetto rimane in ogni caso ben collocato ma, avendo constatato questo effetto sul sistema, sarebbe opportuno inserire una rigidezza positiva di precarico sullo smorzatore in modo da avere la certezza di evitare ground resonance per qualsiasi condizione operativa.

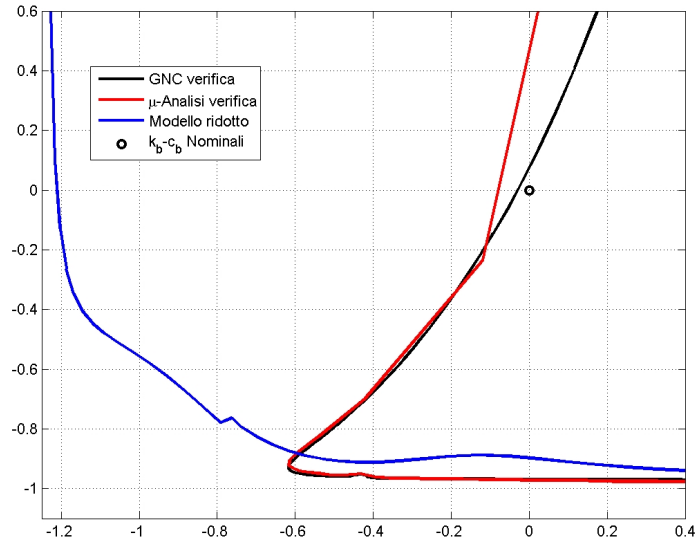


Figura 3.39: Parametri limite del modello di verifica.

In questo caso gli scostamenti dei parametri limite per evitare instabilità devono essere maggiori dei seguenti:

$$\Delta k_b = -22.50\% \quad (3.26)$$

$$\Delta c_b = -13.42\% \quad (3.27)$$

Per validare la presenza del ginocchio della curva limite si eseguono tre analisi nel tempo utilizzando i parametri riportati in Figura 3.40 ponendosi al di sopra e al di sotto del limite imposto sia dalla μ -Analisi che dal GNC.

Nelle Figure 3.41, 3.42 e 3.43 si mostra come un eccessivo apporto di smorzamento associato al modo di ritardo di ciascuna pala porta in presenza del flappeggio e della torsione ad una risposta divergente nel tempo.

Al contrario, immettendo uno smorzamento tale da rientrare nella regione di stabilità dello spazio delle incertezze $\Delta k_b - \Delta c_b$, le oscillazioni del moto di ritardo vengono smorzate nel tempo sino al raggiungimento della condizione di regime, sia entro la regione del GNC che entro quella della μ -Analisi (Figure 3.45 e 3.46).

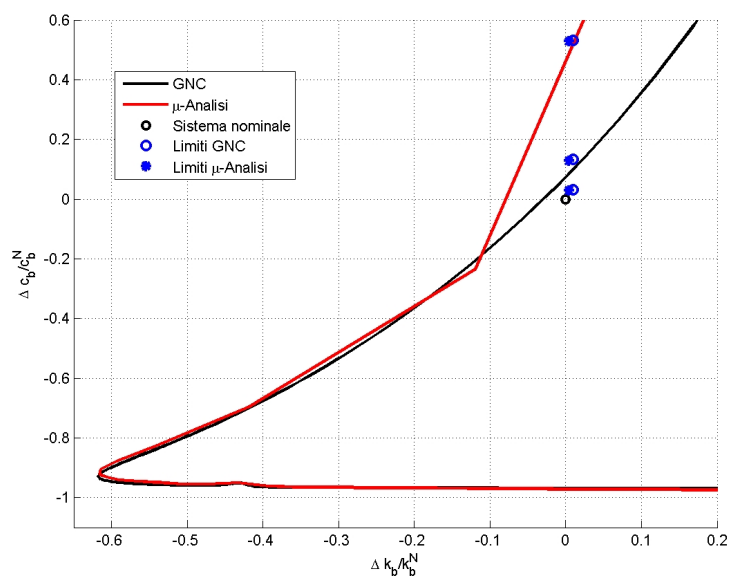


Figura 3.40: Parametri limite del modello di verifica per validare il limite di stabilità.

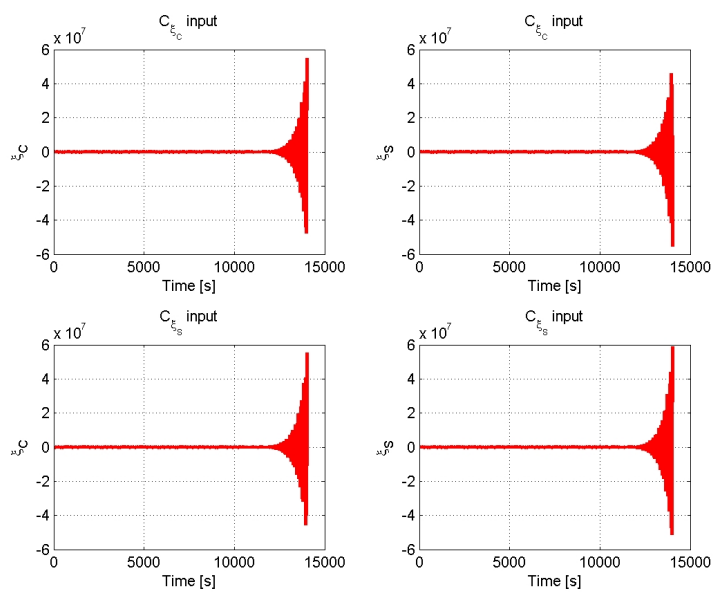


Figura 3.41: Risposta nel tempo con parametri al di sopra del 2% della curva limite del GNC.

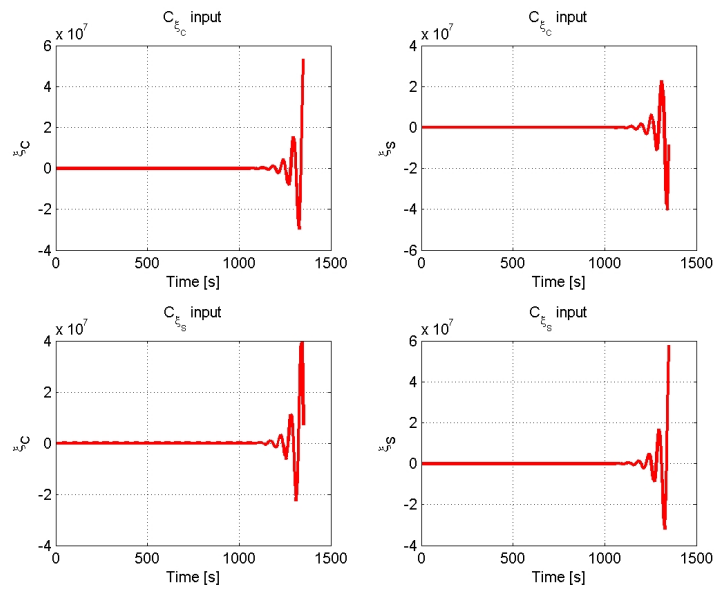


Figura 3.42: Risposta nel tempo con parametri al di sopra del 52% della curva limite del GNC.

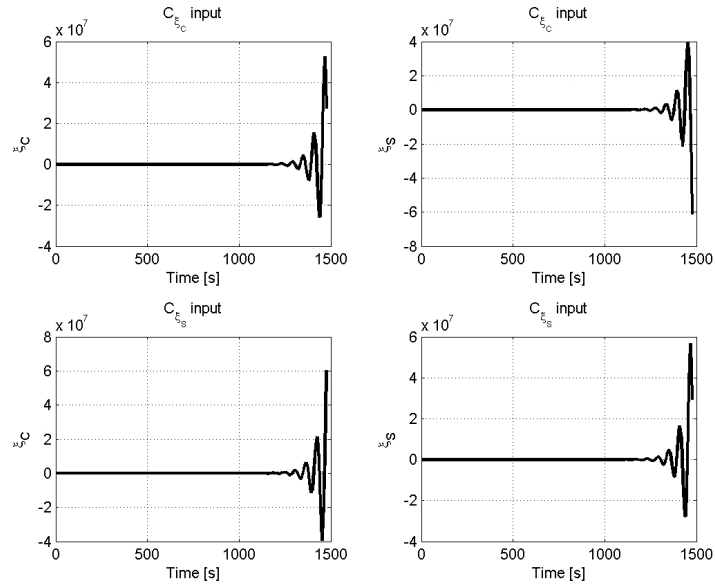


Figura 3.43: Risposta nel tempo con parametri al di sopra del 1% della curva limite della μ -Analisi.

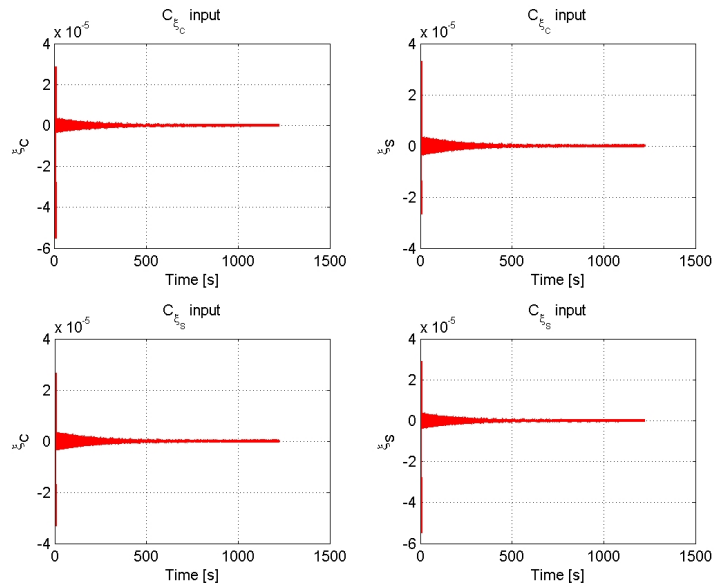


Figura 3.44: Risposta nel tempo con parametri al di sotto del 5% della curva limite del GNC.

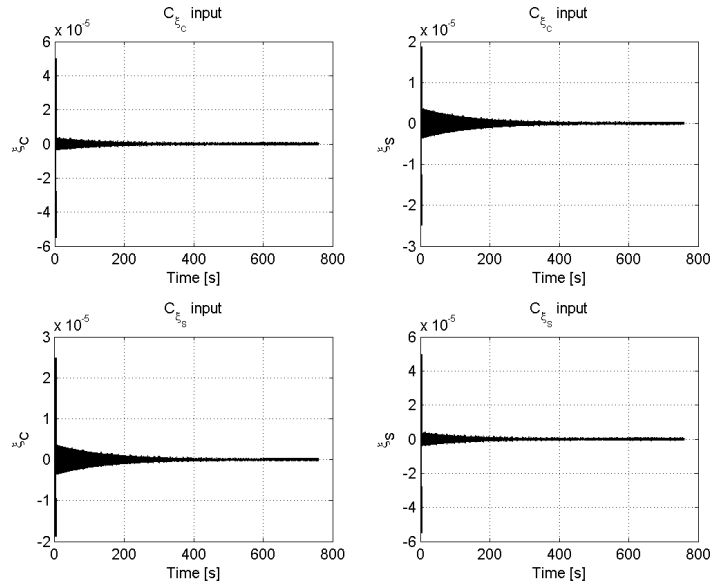


Figura 3.45: Risposta nel tempo con parametri al di sotto del 40% della curva limite della μ -Analisi.

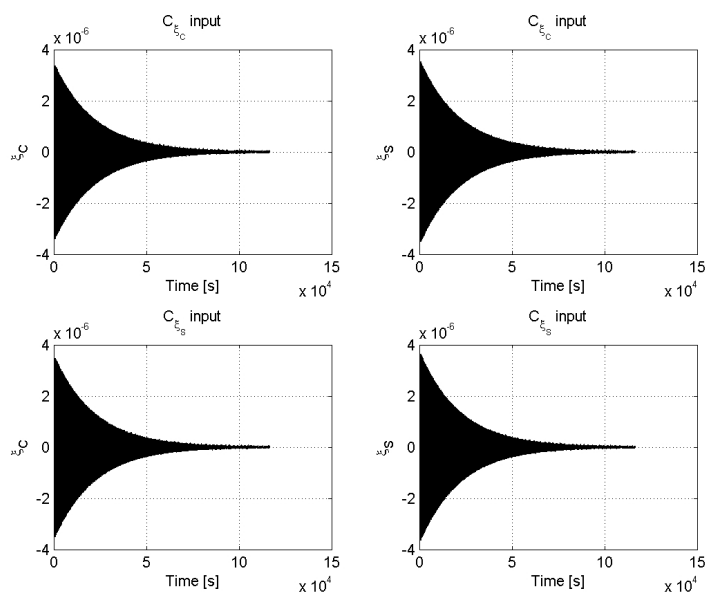


Figura 3.46: Risposta nel tempo con parametri al di sotto del 55% della curva limite della μ -Analisi.

Analisi robusta dei sistemi LTV

4.1 Studio delle non linearità dei sistemi dinamici: le Funzioni Descrittive

Come largamente trattato in [4], la funzione descrittiva è una linearizzazione di un elemento non lineare soggetto ad un ingresso arbitrario. La forma di quest'ultima viene assunta a priori facendo riferimento a tre principali macro gruppi di classificazione degli ingressi:

- *Bias*: una possibile componente costante nell'ingresso dovuta alla propagazione all'interno dell'anello di un bias dell'uscita contenuto nel blocco non lineare, oppure, un errore di accumulo dovuto a integratori contenuti nella parte lineare del sistema;
- *Sinusoidale*: qualsiasi segnale periodico contenuto all'interno del sistema tende a mostrarsi come senoide per filtraggio della parte lineare o per propagazione attraverso la non linearità;
- *Processo Gaussiano*: la presenza di segnali non deterministici con densità spettrale di potenza finita tende a ripresentarsi all'ingresso del blocco non lineare come processi di tipo gaussiano.

In Figura 4.1, viene illustrato uno schema rappresentativo della possibile approssimazione quasi-lineare che si adotta per valutare il comportamento del sistema in presenza di non linearità.

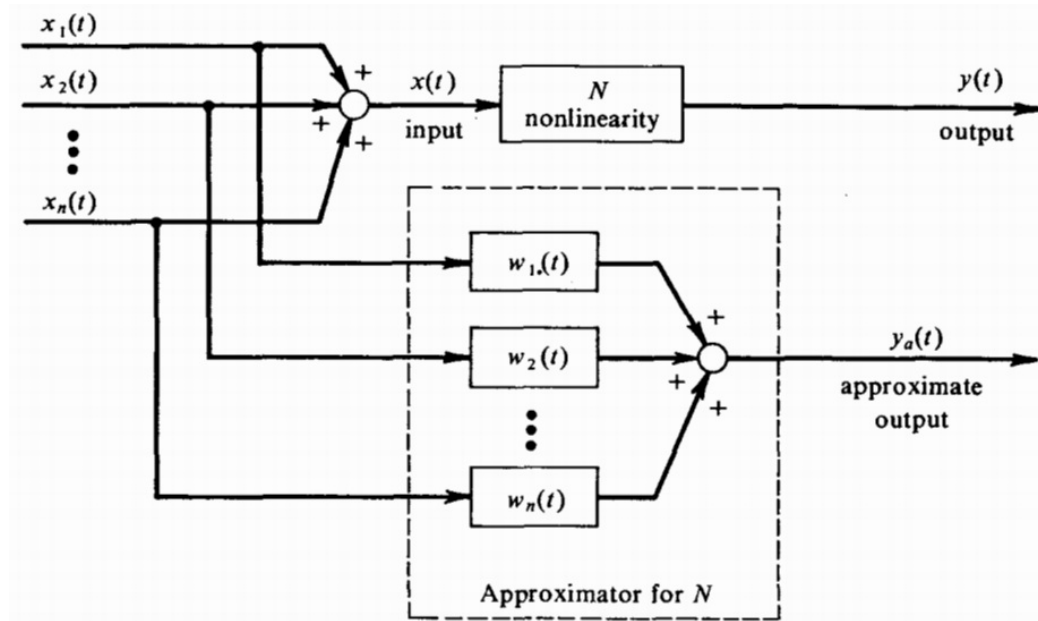


Figura 4.1: Schema generale per l' approssimazione di non linearità del sistema [4].

Lo scopo della sintesi di una adeguata funzione descrittiva è quello di generare un'opportuna operazione di filtraggio dinamico sull'ingresso sinusoidale/bias/random del sistema, in modo da ottenere un guadagno statico, lineare, complesso equivalente.

In generale, è possibile ottenere una funzione di pesatura per il filtro tramite un approccio ai minimi quadrati che abbatta l'errore di ricostruzione dell'uscita.

$$e(t) = y_a(t) - y(t) \tag{4.1}$$

Tramite semplici operazioni riportate in [4], si giunge all'espressione generale della funzione di trasferimento del filtro:

$$\int_0^\infty w_{0i}(\tau_2)\phi_{ii}(\tau_1 - \tau_2)d\tau_2 = y(t)\overline{x_i(t + \tau_1)}, \quad \tau_1 \geq 0, i = 1, \dots, N_i \tag{4.2}$$

in cui $\phi_{ii}(\tau)$ è l'autocorrelazione degli N_i ingressi $x_i(t)$.

Per quanto concerne il caso in esame di ingressi armonici se ne presuppone una struttura sinusoidale con sfasamento θ e residuo del segnale $x_r(t)$:

$$x_i(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta) + x_r(t) \tag{4.3}$$

Sviluppando i calcoli nella (4.2), grazie al teorema del campionamento della delta di dirac, si ottiene l'espressione della funzione di trasferimento del filtraggio della non linearità del sistema; si tratta appunto della funzione descrittiva per ingressi sinusoidali.

$$n_A(\tau_2) = \frac{2}{A} \overline{y(0) \sin \theta} \delta(\tau_2) + \frac{2}{A\omega_0} \overline{y(0) \cos \theta} \dot{\delta}(\tau_2)$$

In generale, considerando l'ingresso non lineare $y(x(t), \dot{x}(t))$, è possibile esplicitare la funzione descrittiva in termini di funzione di trasferimento proporzionale derivativa da applicare allo stato del sistema in esame ($\psi = \omega_0 t$).

$$N_A = n_p + j n_q \quad (4.4)$$

$$n_p = \frac{2}{A} \overline{y(0) \sin \theta} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} y(A \sin \psi, A\omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi \quad (4.5)$$

$$n_q = \frac{2}{A} \overline{y(0) \cos \theta} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} y(A \sin \psi, A\omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi \quad (4.6)$$

$$y(x(t), \dot{x}(t)) \approx \left[n_p(A, \omega_0) + \frac{n_q(A, \omega_0)}{\omega_0} s \right] x = N_A(A, \omega_0) x \quad (4.7)$$

Il caso di forzanti sinusoidali applicate al sistema è rappresentato in Figura 4.2; esso è sicuramente quello più significativo per questa trattazione in quanto come verrà largamente illustrato in seguito, una caratteristica principale dei sistemi dinamici associati a velivoli ad ala rotante è sicuramente la periodicità della soluzione.

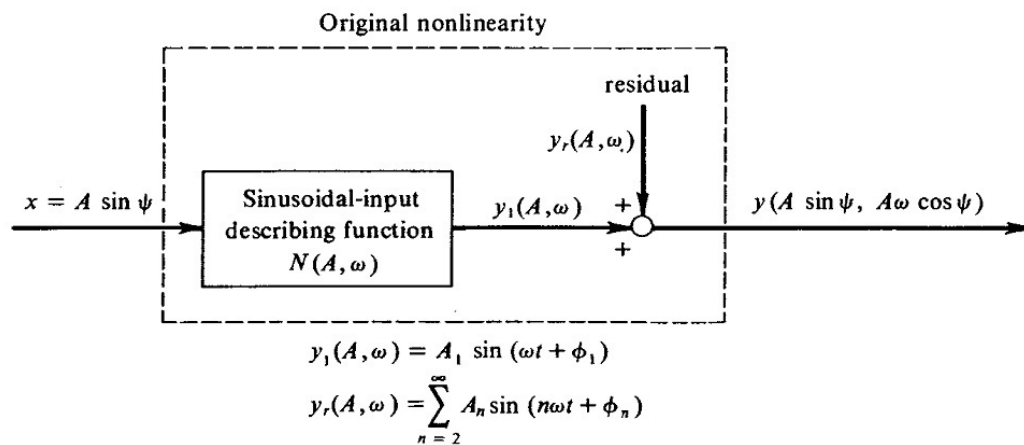


Figura 4.2: Schema della funzione descrittiva per ingresso sinusoidale [4].

In letteratura esistono svariati esempi di utilizzo di una funzione descrittiva per ingresso sinusoidale (SIDF); in particolare in [7], [18], [6] lo scopo principale è quello di caratterizzare il comportamento di un sistema non lineare in termini di progettazione di controllori o studio delle possibili soluzioni di ciclo limite. Quest'ultima applicazione è certamente fondamentale per quanto concerne lo studio e il progetto dell'elicottero, in quanto, un'opportuna conoscenza delle possibili soluzioni di ciclo limite permette di determinare le eventuali sollecitazioni a fatica dei vari componenti installati. Durante i capitoli successivi si cercherà pertanto di affrontare il problema della determinazione dei limiti di stabilità del sistema attraverso un utilizzo congiunto, da un lato delle funzioni descrittive per ottenere un'approssimazione quasi-lineare del sistema, e dall'altro della μ -Analisi per stabilire il range di possibile variazione di alcuni parametri di modello per evitare o contenere le soluzioni di ciclo limite.

Al fine di acquisire una sufficiente confidenza con le tecniche sopra descritte, è stato analizzato il caso semplificato SISO dell'equazione di Mathieu, riportato nel Capitolo B dell'appendice.

4.2 Analisi robusta della rottura dello smorzatore di ritardo

Dopo aver appurato l'efficacia dell'analisi dei sistemi non lineari SISO attraverso le funzioni descrittive, si procede valutandone l'applicazione al caso MIMO dell'elicottero. La necessità di tale scelta operativa risiede sostanzialmente nella valutazione della ground resonance della macchina in presenza di malfunzionamento o rottura di uno degli smorzatore di ritardo. Evidentemente, soprattutto per il rotore di elicottero il caso di maggior interesse è caratterizzato da un ingresso di tipo sinusoidale con frequenza proporzionale alla 1 per giro; ovvero la non linearità con cui opera la funzione descrittiva è da intendersi come introduzione nel sistema di un elemento periodico.

In generale, le matrici di stato del sistema lineare del velivolo sono tempo varianti, tuttavia viene operata una media sul giro dei relativi coefficienti che permette l'utilizzo di tecniche consolidate di analisi di stabilità e sintesi dei controllori. Esistono delle particolari condizioni operative del velivolo, come ad esempio in presenza di un rotore non isotropo, in cui l'operazione di media sul giro non è più rappresentativa della fisica del sistema reale. Poiché da normativa è necessario ispezionare le condizioni operative dell'elicottero valutate critiche e/o dimensionanti per la progettazione della macchina, l'analisi con malfunzionamento o assenza di uno smorzatore di ritardo è un requisito indispensabile alla stesura del progetto.

Nelle espressioni delle coppie di ritardo fornite dagli smorzatori nel riferimento non rotante la dipendenza dal tempo permane sotto forma di non-linearità armoniche che moltiplicano posizione e velocità di ciascun modo multipala di ritardo.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\text{NR}} &= -(\mathbf{T}(t)^{-1}\mathbf{K}_b\mathbf{T}(t) + \mathbf{T}(t)^{-1}\mathbf{C}_b\dot{\mathbf{T}}(t))\xi^{\text{NR}} + \\ &\quad -\mathbf{T}(t)^{-1}\mathbf{C}_b\mathbf{T}(t)\dot{\xi}^{\text{R}} = \\ &= -\mathbf{K}_b^{\text{NR}}(t)\xi^{\text{NR}} - \mathbf{C}_b^{\text{NR}}(t)\dot{\xi}^{\text{NR}} \end{aligned}$$

La modellazione e lo studio della stabilità della ground resonance di un elicottero con rottura di uno degli smorzatori necessita inevitabilmente l'utilizzo di simulazioni di risposta nel tempo o come previsto in [9] del metodo di Floquet. Nel caso dell'elicottero semplificato il costo computazionale derivante dalla scelta del corretto passo di integrazione per la determinazione della matrice di transizione di Floquet e dal numero di gradi di libertà del sistema non risulta essere particolarmente elevato. Tuttavia, nel caso di analisi di stabilità di un velivolo completo come il Puma IAR 330 si potrebbe incorrere in tempi di calcolo considerevoli.

Da qui nasce l'esigenza di poter caratterizzare il comportamento di un sistema lineare tempo variante (LTV) con i medesimi approcci utilizzati in precedenza per il caso tempo invariante (LTI). A tale scopo, isolando dal sistema esclusivamente il contributo periodico degli smorzatori è necessario ricorrere alla tecnica di quasi-linearizzazione delle funzioni descrittive per determinare un equivalente LTI del modello privo di uno smorzatore. Nel seguito si mostra come poter ottenere le matrici di funzioni descrittive con ingresso sinusoidale per analizzare la robustezza della stabilità del sistema al variare delle caratteristiche elastoviscose del singolo smorzatore non funzionante. Analogamente, si effettua un'analisi robusta utile a determinare quanto sia effettivamente possibile o necessario variare lo smorzamento e la rigidità nominali degli altri smorzatori operativi.

4.2.1 Funzione descrittiva per ingresso sinusoidale (SIF MIMO)

La presenza della non linearità può essere sempre ritenuta come una perturbazione tempo variante del sistema nominale a coefficienti costanti; come precedentemente accennato, l'idea fondamentale alla base della tecnica delle funzioni descrittive e quella di replicare tale perturbazione LTV con un termine di guadagno funzione della frequenza e dell'ampiezza dell'uscita del sistema. Per la tipologia di problema in esame, come suggerito largamente in [4], è opportuno ipotizzare che l'uscita di ritardo multipala assuma un andamento assimilabile a quello di una senoide:

$$\boldsymbol{\xi}^{NR}(t) = \mathbf{A}^{NR} \sin(\omega t)$$

Si tratta, pertanto, di andare a caratterizzare la dipendenza dal tempo attraverso una matrice di funzioni non lineari $\mathbf{F}(t, \omega, \Omega, \mathbf{A}^{NR}, \delta k_i, \delta c_i)$, in cui con i si intende che l' i -esimo smorzatore di ritardo è mal funzionante o danneggiato.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}^{NR}(t) = \mathbf{BK}(k_b^N, c_b^N)\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{F}(t, \omega, \Omega, \mathbf{A}^{NR}, \delta k_i, \delta c_i)\mathbf{x}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}[\mathbf{K}_b^{NR}(t) \mathbf{C}_b^{NR}(t)]\mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}(k_b^N, c_b^N)\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{F}(t, \omega, \Omega, \mathbf{A}^{NR}, \delta k_i, \delta c_i)\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Il caso dell'elicottero semplificato risulta essere molto significativo in quanto, grazie alle ridotte dimensioni del sistema è possibile condensare l'effetto delle funzioni descrittive esclusivamente sui gradi di libertà di ciclico coseno e ciclico seno. Per un velivolo completo, invece, occorre includere nella procedura di calcolo anche i modi collettivo e gli eventuali reactionless.

Il vantaggio significativo è rappresentato dalla possibilità di adottare per qualsiasi elicottero una procedura analitica per la determinazione delle funzioni descrittive, le quali saranno, fissato il numero di pale uguali per tutti. Sono state quindi sfruttate direttamente le espressioni derivanti dall'integrazione simbolica dell'uscita funzione dei parametri $(\omega_u, \Omega, \mathbf{A}^{\text{NR}}, \delta k_i, \delta c_i)$.

Per ogni elemento della matrice \mathbf{F} si utilizzano le seguenti formule per la determinazione delle funzioni descrittive:

$$N_{A_{kl}} = n_{p_{kl}} + jn_{q_{kl}}, \text{ con } (k, l) = 1, 2, 3, 4.$$

$$n_{p_{kl}} = \frac{\omega}{A_k^{\text{NR}}\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F_{kl}(A_l^{\text{NR}} \sin \omega t, A_l^{\text{NR}}\omega \cos \omega t) \sin \omega t dt$$

$$n_{q_{kl}} = \frac{\omega}{A_k^{\text{NR}}\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F_{kl}(A_l^{\text{NR}} \sin \omega t, A_l^{\text{NR}}\omega \cos \omega t) \cos \omega t dt$$

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{n}_p(\omega, \Omega, \mathbf{A}^{\text{NR}}, \delta k_i, \delta c_i) \boldsymbol{\xi}^{\text{NR}} + j\mathbf{n}_q(\omega, \Omega, \mathbf{A}^{\text{NR}}, \delta k_i, \delta c_i) \dot{\boldsymbol{\xi}}^{\text{NR}} \quad (4.8)$$

Si sottolinea come le varie ampiezze dell'uscita, conoscendo gli autovalori e autovettori di ogni anello, possono essere parametrizzate con un'unica ampiezza incognita A andando a scalare ciascuno stato con la relativa componente dell'autovettore v_i .

$$\mathbf{A}^{\text{NR}} = A\mathbf{v} \quad (4.9)$$

Inoltre, in questo caso in cui il comportamento dell'uscita viene assimilato a quello di un'unica sinusoide di frequenza ω si ha che i termini delle funzioni descrittive, così come era avvenuto per l'equazione di Mathieu con $A \sin(\omega t)$ (Cap. B), perdono la dipendenza dal parametro dell'ampiezza divenendo esclusivamente una funzione non lineare della frequenza dell'uscita e lineare delle caratteristiche elastoviscose dello smorzatore non funzionante. Per questo motivo è possibile per ogni anello del sistema evidenziare la dipendenza dalla frequenza $\omega = \omega_u$ dell'uscita e dalla combinazione lineare della coppia $(\delta k_i, \delta c_i)$ dello smorzatore non funzionante.

$$\mathbf{N}_A(\omega_u, \delta k_i, \delta c_i) = [\mathbf{K}_{DF}(\omega_u) \quad \mathbf{C}_{DF}(\omega_u)] \begin{Bmatrix} \delta k_i \\ \delta c_i \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_A(\omega_u) \Delta_i$$

4.2.2 Parametri limite di rottura

Ricorrendo alla notazione sfruttata nel paragrafo 2.2, si mostra in Figura 4.3 uno schema del modello dell'Hammond in presenza della perturbazione LTV utile a capire come sia possibile sfruttare nuovamente la μ -Analisi e il criterio generalizzato di Nyquist.

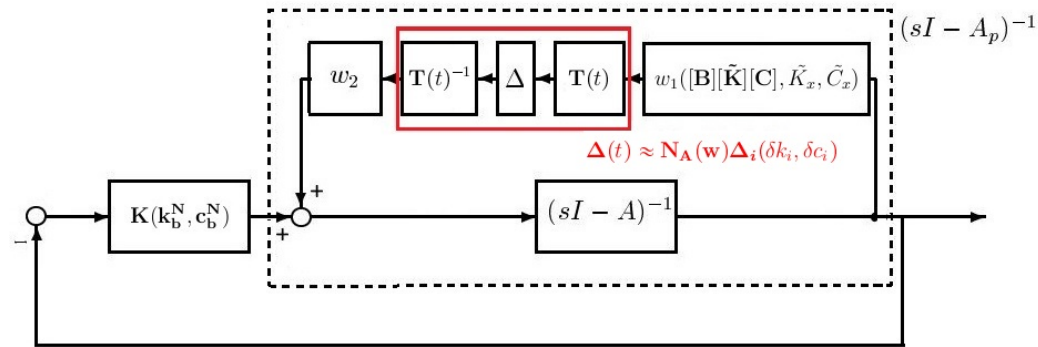


Figura 4.3: Diagramma a blocchi per la rappresentazione dell'incertezza LTV dovuta al rotore non isotropo.

Dal calcolo effettuato nei Capitoli 2 e 3 per la valutazione della robustezza della stabilità del sistema, è stato ricavato il guadagno generalizzato come distanza al variare della frequenza tra la funzione di trasferimento in anello chiuso, rappresentata da ciascun autovalore, e il punto $(-1 + 0j)$ del piano complesso. È evidente che se la parte lineare tempo variante dovuta al malfunzionamento di uno smorzatore è vista come possibile perturbazione agente sul sistema, sarà possibile valutare l'entità della variazione delle caratteristiche dello smorzatore che portano il sistema al limite di stabilità. A tal fine si impone che il guadagno generalizzato funzione di δk_i e δc_i eguagli quello determinato tramite analisi robusta facendo variare la possibile frequenza dell'uscita $\omega_u = \Omega/n$ con N subarmoniche della 1 per giro.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k(j\omega) \mathbf{M}(j\omega) \mathbf{N}_A(\omega_u, \delta k_i, \delta c_i) \mathbf{v}_k(j\omega) &= \rho_k(j\omega) e^{j\theta_k(j\omega)} \\ \forall k, \omega_u &= \frac{\Omega}{n}, \quad n = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.10)$$

Come effettuato nel paragrafo 2.2.4 per la determinazione delle incertezze limite ammissibili per il sistema, si imposta un sistema lineare nelle incognite

$(\delta k_i, \delta c_i)$ valutando parte reale e immaginaria della relazione (4.10) per ogni k -esimo anello.

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{u}_k^T \mathbf{M}(j\omega) \mathbf{K}_{\text{DF}}(\omega_u) \mathbf{v}_k) & \operatorname{Re}(\mathbf{u}_k^T \mathbf{M}(j\omega) \mathbf{C}_{\text{DF}}(\omega_u) \mathbf{v}_k) \\ \operatorname{Im}(\mathbf{u}_k^T \mathbf{M}(j\omega) \mathbf{K}_{\text{DF}}(\omega_u) \mathbf{v}_k) & \operatorname{Im}(\mathbf{u}_k^T \mathbf{M}(j\omega) \mathbf{C}_{\text{DF}}(\omega_u) \mathbf{v}_k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta k_i \\ \delta c_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_k \cos \theta_k \\ \rho_k \sin \theta_k \end{Bmatrix}$$

Così facendo, fissata la frequenza dell'uscita come subarmonica ω_u si ottengono delle curve limite nello spazio delle incertezze associate ad un unico smorzatore in funzione della frequenza del sistema. Ovvero, è possibile quantificare con precisione il livello di smorzamento o rigidità δc_i e δk_i necessario alla stabilizzazione delle soluzioni di ciclo limite alla frequenza ω_u considerata. Tale procedura disponibile sin dalle prime fasi di progettazione della macchina, risulta essere indubbiamente un ottimo strumento per evitare determinate condizioni di ciclo limite che potrebbero instaurarsi nel moto di ritardo di ciascun pala, con evidenti implicazioni dal punto di vista della sollecitazione a fatica degli smorzatori.

4.2.3 Risultati ottenuti: elicottero semplificato

Dopo aver mostrato le modalità per lo studio della stabilità in presenza di malfunzionamento o rottura di un'unico smorzatore di ritardo, in questo paragrafo si intende illustrare a livello quantitativo i risultati ottenuti dall'azione congiunta di funzioni descrittive e tecniche di analisi della stabilità robusta.

Si mostrano le curve limite dello smorzatore danneggiato in differenti condizioni operative della macchina. La validazione di quanto ottenuto, come fatto in precedenza si rifa al modello completamente periodico del velivolo generato in Simulink.

Curve limite con GNC e μ -Analisi

A partire dallo studio eseguito in [9], è possibile confrontare i risultati in termini di stabilità con uno smorzatore non operativo; in particolare sono stati esaminate due condizioni del velivolo a terra:

- ➔ velocità angolare di regime $\Omega = 200$ RPM;
- ➔ velocità angolare $\Omega = 255$ RPM¹.

¹Si è deciso tale valore in quanto corrispondente ad un punto di instabilità all'interno del diagramma di Coleman riportato in [9].

Sono state inoltre analizzate differenti subarmoniche con cui valutare l'influenza della funzione descrittiva sul sistema; ossia dato $n = [1, \dots, 10, 15, 20]$, sono stati considerate le subarmoniche:

$$\omega_u = \frac{\Omega}{n} \Rightarrow N_A = N_A(\omega_u, \delta k_i, \delta c_i)$$

Si ricorda che la scelta di quale smorzatore sia inattivo di fatto è influente sul risultato finale. Si espongono rispettivamente nelle Figure 4.4 e 4.5 gli scostamenti ammissibili δk_i e δc_i di rigidezza e smorzamento dello smorzatore selezionato al variare della frequenza del segnale in ingresso alla funzione descrittiva. Ancora una volta sia sfruttando la μ -Analisi che il GNC i risultati rimangono i medesimi.

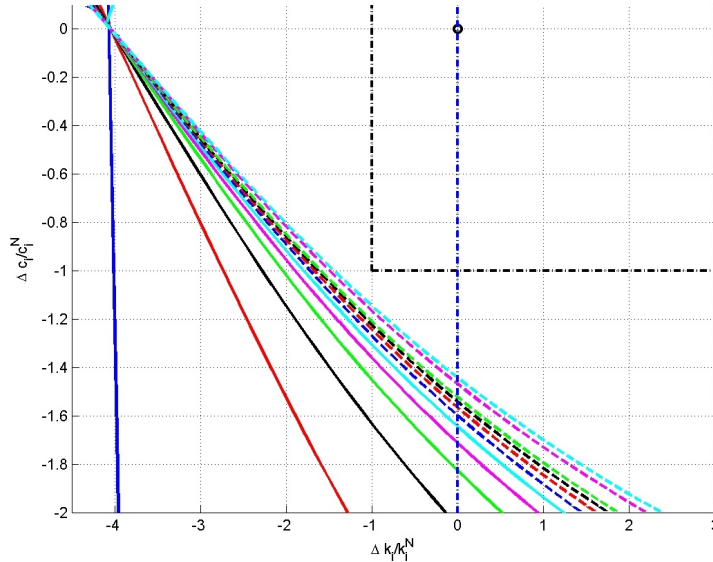


Figura 4.4: Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = 200$ RPM.

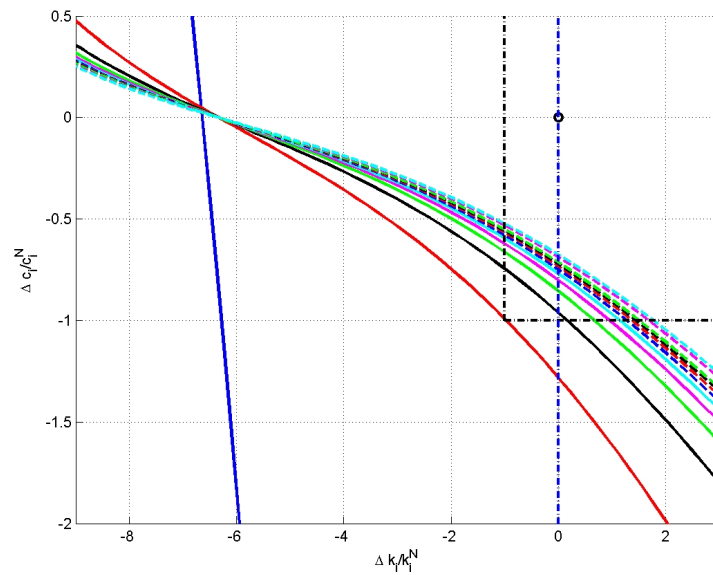


Figura 4.5: Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = 255$ RPM.

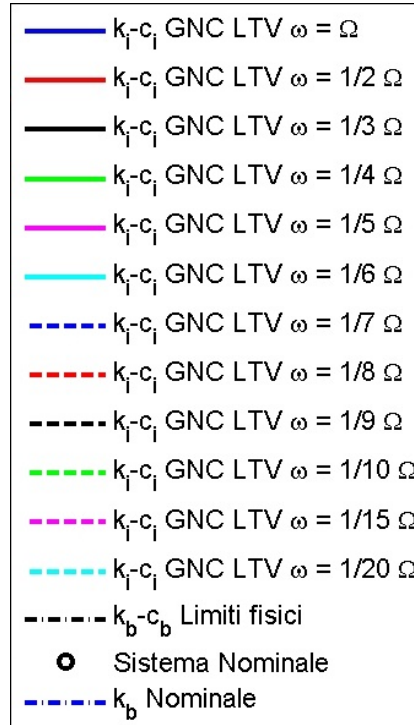


Figura 4.6: Legenda delle frequenze dell'uscita ω_u per la DF.

Nello spazio delle incertezze la curva limite più conservativa denota una zona di ciclo limite lungo la quale si innescano delle oscillazioni che perdurano nel tempo senza essere smorzate. L'atteggiamento delle curve sembra appiattirsi attorno ad un asintoto al diminuire della frequenza dell'ingresso della funzione descrittiva; al di sopra di tale asintoto non sussistono condizioni di instabilità.

Si evidenzia quindi la necessità di una verifica dei risultati attraverso il metodo classico dell'analisi di risposta nel tempo (Par. 4.2.3). Si mostra per chiarezza di esposizione, l'andamento dello smorzamento limite determinato al variare della frequenza dell'uscita ω_u , sia per il caso di 255 RPM in Figura 4.7 che per il caso di 200 RPM in Figura 4.8. Come affermato in [9], per quest'ultimo caso lo smorzamento rimane sempre sotto al limite fisico -1 confermando la stabilità alla risonanza al suolo della macchina in caso di inattività di uno smorzatore.

Al contrario, per $\Omega = 255$ RPM esiste una regione in cui lo smorzamento richiesto per la stabilizzazione è maggiore di zero. Pertanto, è evidente che occorre selezionare un Δc_i tale da garantire la stabilità della curva di ciclo limite con frequenza minore di tutte.

Infatti, stabilizzare le subarmoniche a frequenza maggiore sarebbe inutile a fronte di un comportamento divergente di una inferiore.

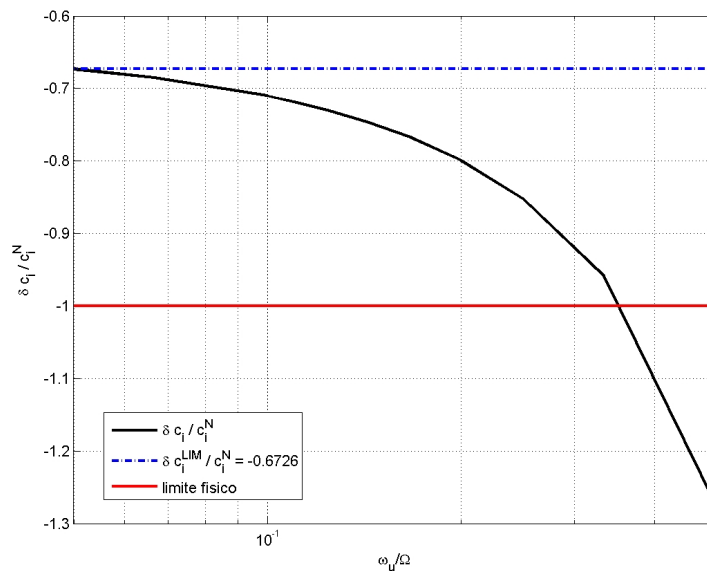


Figura 4.7: Smorzamento limite Δc_i al variare della frequenza ω_u della funzione descrittiva ($\Omega = 255$ RPM).

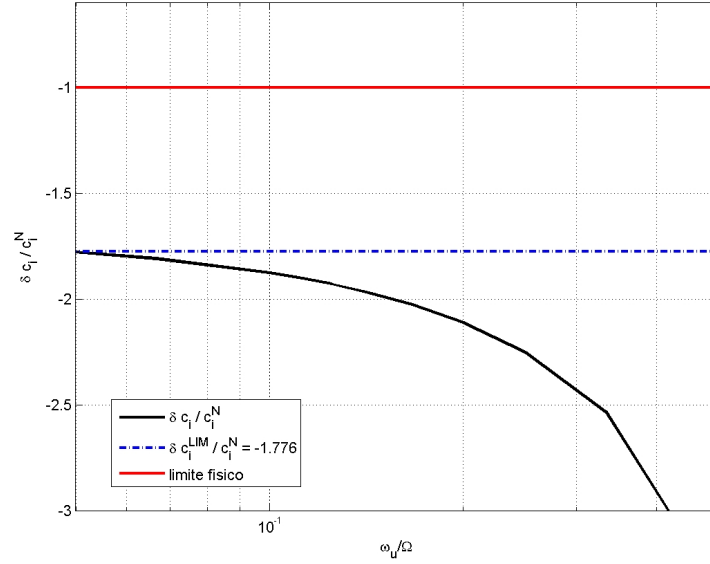


Figura 4.8: Smorzamento limite Δc_i al variare della frequenza ω_u della funzione descrittiva ($\Omega = 200$ RPM).

Si riporta, per il caso della μ -Analisi l'andamento del massimo valor singolare strutturato μ al variare della frequenza nelle Figure 4.10 e 4.9 per 200 RPM e 255 RPM. Si ricorda che i valori delle incertezze strutturate implementate prevedono la completa perdita di uno degli smorzatori di ritardo:

$$k_i = k_i^N \left(1 + \frac{\delta k_i}{k_i^N} \right) \text{ in cui } \delta_1 = \frac{\delta k_i}{k_i^N} = [-100\%, 100\%] \quad (4.11)$$

$$c_i = c_i^N \left(1 + \frac{\delta c_i}{c_i^N} \right) \text{ in cui } \delta_2 = \frac{\delta c_i}{c_i^N} = [-100\%, 100\%] \quad (4.12)$$

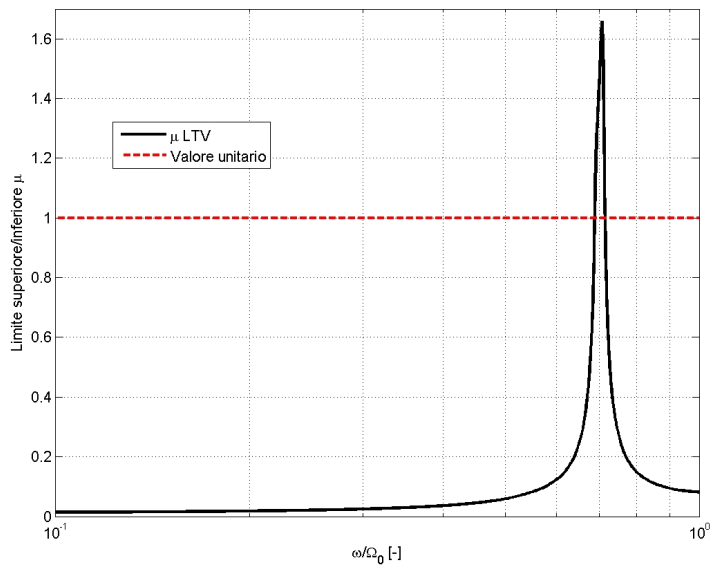


Figura 4.9: Andamento di μ al variare della frequenza del sistema ($\Omega = 255$ RPM).

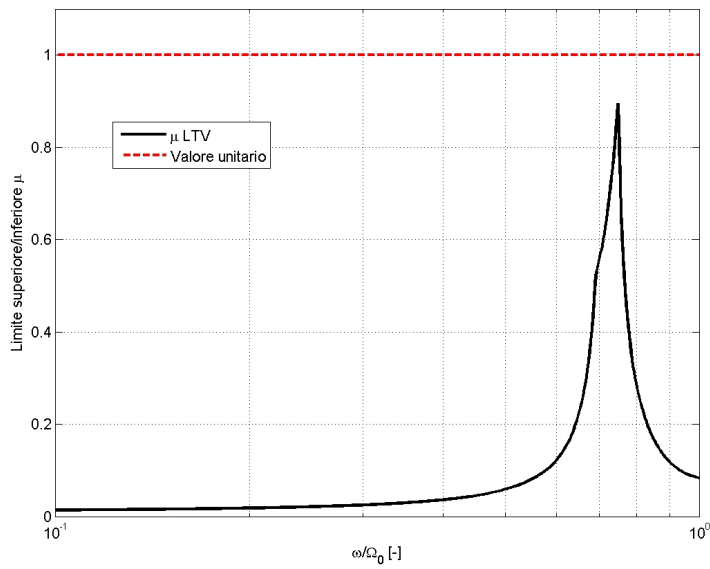


Figura 4.10: Andamento di μ al variare della frequenza del sistema ($\Omega = 200$ RPM).

Come dimostrato dai grafici soprastanti in caso di $\Omega = 255$ RPM μ supera il valore unitario proprio in prossimità della frequenza di ground resonance $\omega = 70.65\%\Omega$, confermando che il sistema con uno smorzatore inattivo non è stabile in senso robusto.

Infine, adottando una logica di tipo progettuale, è necessario determinare di quanto sia possibile variare lo smorzamento e la rigidezza nominale dei 3 smorzatori attivi per garantire la stabilità della ground resonance con failure. Le analisi sono state condotte sia per $\Omega = 200$ RPM che per $\Omega = 255$ RPM; nel primo caso, come visibile in Figura 4.11, si ottiene che utilizzando uno smorzamento inferiore del 16.90% rispetto al valore nominale il sistema rimarrebbe comunque stabile con uno smorzatore non operativo.

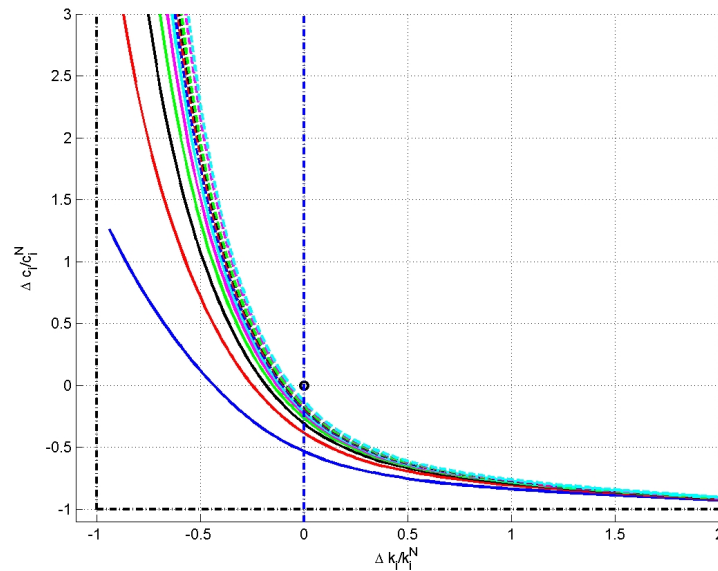


Figura 4.11: Curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per gli smorzamenti attivi in caso di failure ($\Omega = 200$ RPM).

In Figura 4.12, si riporta la condizione di ciclo limite in cui si incapperebbe con la rottura di uno smorzatore e diminuzione dello smorzamento per gli altri come indicato in precedenza.

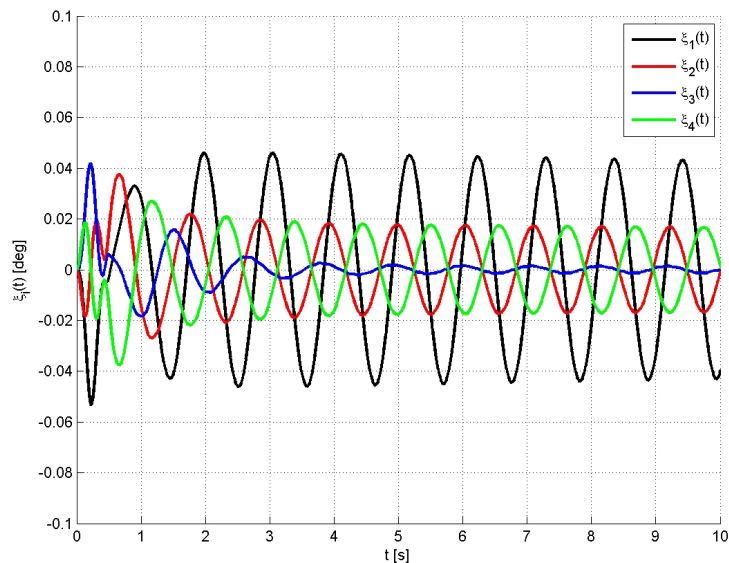


Figura 4.12: Risposta nel tempo $\xi(t)$ con smorzamento limite $\Delta c_b = -16.90\%$ ($\Omega = 200$ RPM).

Per quanto riguarda invece la condizione operativa $\Omega = 255$ RPM, in Figura 4.13 si mostra come la curva limite peggiore ($\omega_u = 1/20\Omega$) presenta un asintoto verticale in $\Delta k_b = 0$; ossia, con rigidezza nominale nulla non esiste nessun valore di smorzamento da aggiungere a quello nominale in grado di stabilizzare il sistema.

Il risultato è validato dalle analisi nel tempo condotte inserendo per gli smorzatori operativi uno smorzamento 100 volte superiore a quello nominale (Figura 4.14). La pala in cui è stato tolto lo smorzatore a $\Omega = 255$ RPM raggiunge una condizione di instabilità locale della dinamica ad essa relativa. Pertanto una qualsiasi modifica delle caratteristiche elastoviscose delle altre pale non può in nessun modo contribuire alla stabilizzazione globale della macchina.

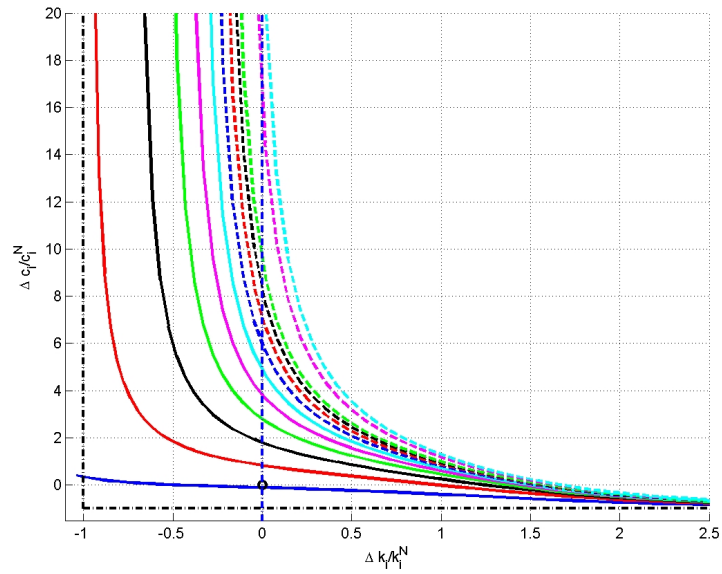


Figura 4.13: Curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per gli smorzamenti attivi in caso di failure ($\Omega = 255RPM$).

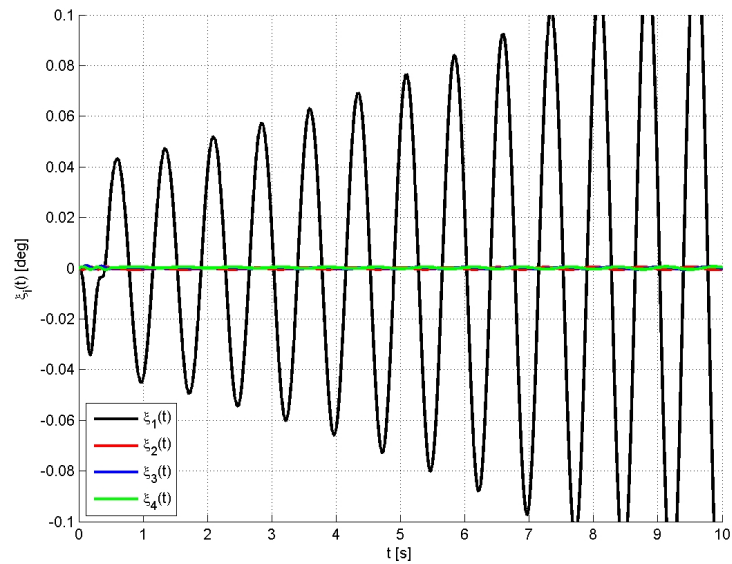


Figura 4.14: Risposta nel tempo $\xi(t)$ con smorzamento limite $\Delta c_b = +100c_b^N$ ($\Omega = 255RPM$).

Validazione attraverso la risposta nel tempo

Per confermare l'affidabilità della procedura progettuale sintetizzata è necessario ricorre a varie analisi nel tempo del sistema dinamico con smorzatori al limite di stabilità.

Innanzitutto, è opportuno evidenziare in questo caso le frequenze dominanti del moto di ritardo delle pale del velivolo rappresentate sostanzialmente dal moto della progressiva $\Omega(1 + \nu_\xi)$ e della regressiva $\Omega(1 - \nu_\xi)$. In questo senso, come nel caso semplificato dell'equazione di Mathieu, si ha una maggior influenza sul sistema da parte di tale frequenza significativa, indipendentemente dalla valutazione di ω_u . Dalle caratteristiche geometriche ed inerziali degli smorzatori del velivolo si ricava dunque:

$$\nu_\xi = \sqrt{\frac{eS_b}{I_b}}\Omega = 0.29\Omega \approx \frac{1}{3}\Omega$$

Considerando le curve tracciate al variare di ω_u vengono selezionati tre valori di variazione di smorzamento δc_i nell'intorno del caso maggiormente critico per $\Omega = 255$ RPM (Figura 4.15):

- ➔ in corrispondenza della curva limite;
- ➔ al di sotto dell'1% della curva limite;
- ➔ al di sopra dell'1% della curva limite.

Grazie alla modellazione attraverso l'ambiente Simulink di Matlab è stato generato un modello periodico dell'elicottero; rispettivamente nelle Figure 4.16, 4.17 e 4.18 si riporta la risposta nel tempo della coordinata libera di ritardo ξ_i dell' i -esimo smorzatore del velivolo.

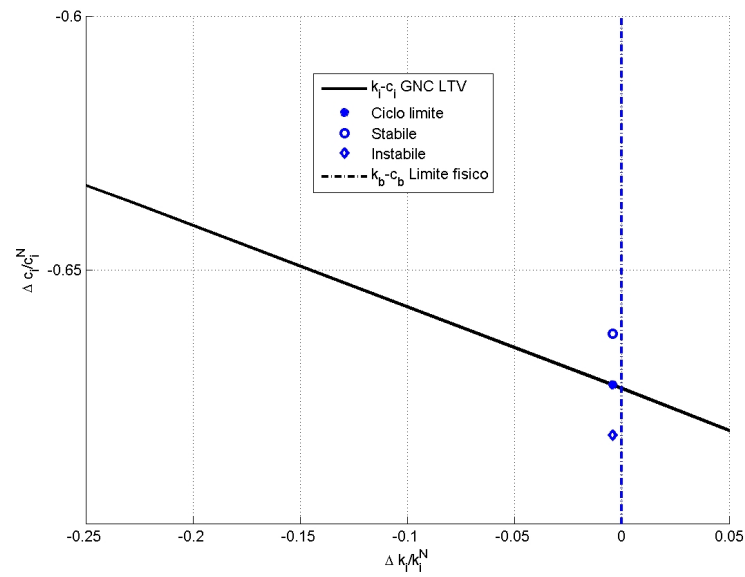


Figura 4.15: Scelta dei parametri di smorzamento per la verifica a $\Omega = 255$ RPM con rigidezza $\delta k_i = 0$.

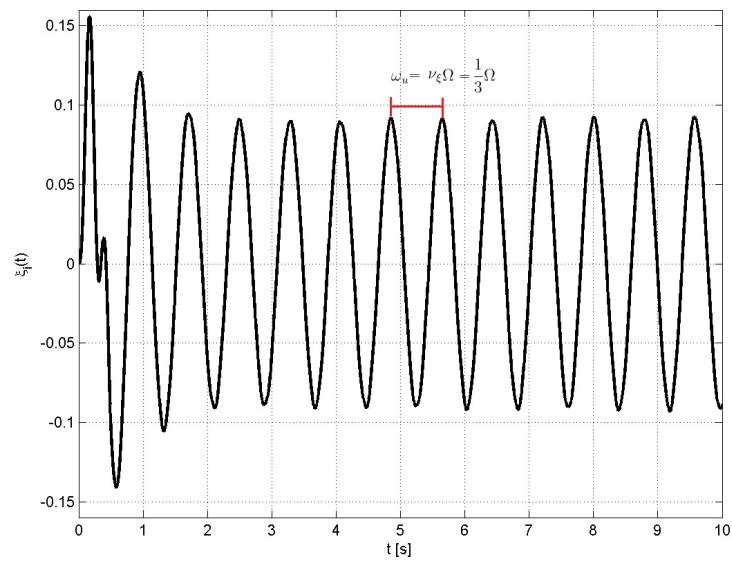


Figura 4.16: Risposta nel tempo con smorzamento sulla curva di ciclo limite.

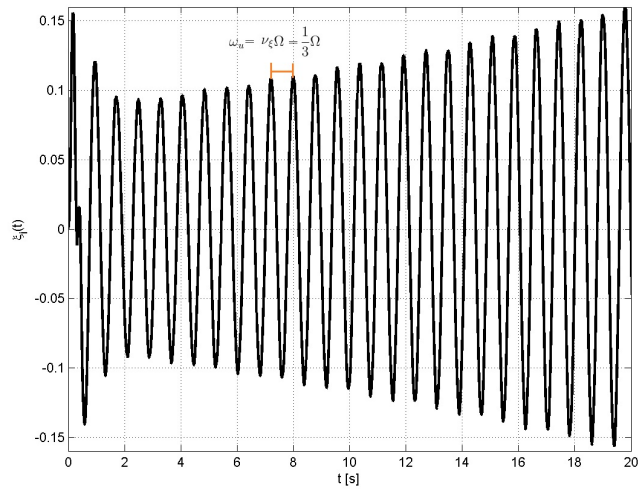


Figura 4.17: Risposta nel tempo con smorzamento sotto la curva di ciclo limite.

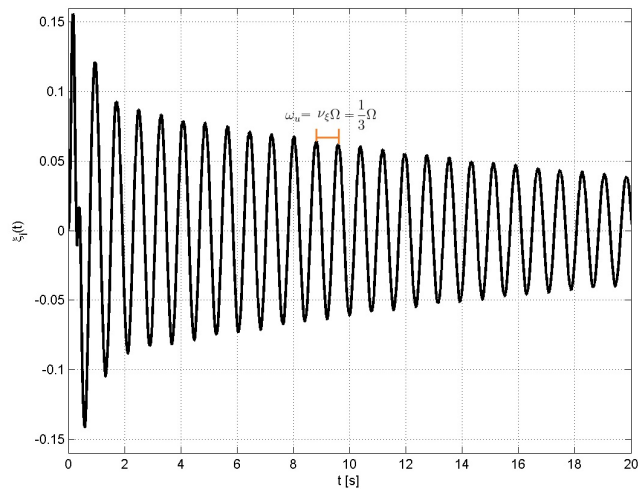


Figura 4.18: Risposta nel tempo con smorzamento sopra la curva di ciclo limite.

Per quanto concerne la risposta nel tempo al limite di stabilità, non solo viene confermato che la metodologia di azione congiunta tra funzione descrittiva e tecniche di analisi robusta restituisce dei risultati attendibili, bensì la frequenza di ciclo limite risulta essere come atteso pari a $\Omega/3$. Al di sotto e al di sopra dei valori di instabilità chiaramente il sistema assume rispettiva-

mente un comportamento divergente o asintoticamente stabile. Per quanto riguarda invece la validazione dei parametri ammissibili a $\Omega = 200$ RPM, come ottenuto da C. Hammond in [9], la possibilità di totale inattività di uno degli smorzatori di ritardo non inficia la stabilità alla ground resonance dell'elicottero con Ω di regime (Figura 4.19).

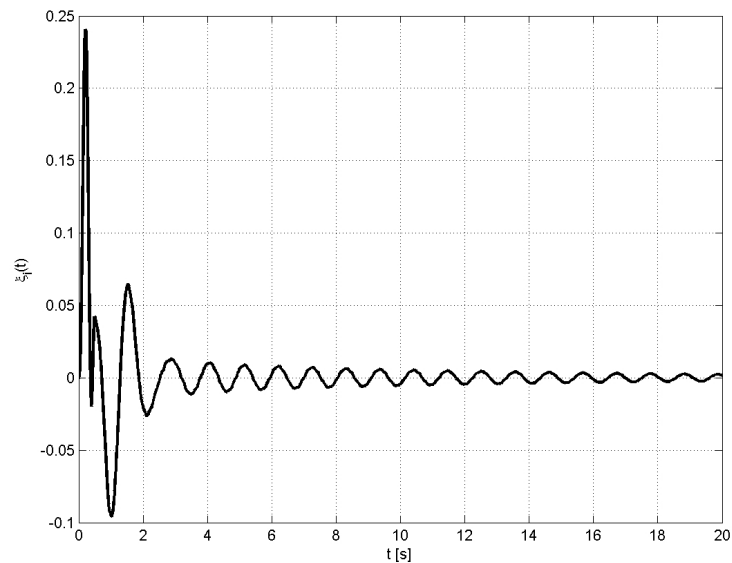


Figura 4.19: Risposta nel tempo con smorzamento nullo per $\Omega = 200$ RPM.

4.2.4 Risultati ottenuti: Puma IAR 330

Dopo aver investigato la stabilità della risonanza al suolo del sistema in presenza di malfunzionamento di un'unico smorzatore di ritardo per l'elicottero semplificato, in questo paragrafo si intende mostrare a livello quantitativo i risultati ottenuti per il Puma IAR 330.

Si mostrano le curve limite dello smorzatore danneggiato in differenti condizioni operative della macchina. La validazione di quanto ottenuto passa attraverso la generazione di un modello in ambiente Simulink di Matlab completamente periodico, includendo anche modi collettivo e reactionless di ritardo.

Curve limite con GNC e μ -Analisi

Sono stati esaminate due condizioni del velivolo a terra:

- ➔ velocità angolare di regime $\Omega_{REG} = 270 \text{ RPM}^2$;
- ➔ velocità angolare $\Omega = 324 \text{ RPM} = 120\% \Omega_{REG}$;

Analogamente a quanto fatto in precedenza sono state utilizzate varie subarmoniche ω_u per la funzione descrittiva attraverso $n = [1, \dots, 10, 15, 20]$.

$$\omega_u = \frac{\Omega}{n} \Rightarrow N_A = N_A(\omega_u, \delta k_i, \delta c_i)$$

Si espongono rispettivamente nelle Figure 4.20 e 4.21 gli scostamenti ammissibili δk_i e δc_i di rigidezza e smorzamento dello smorzatore selezionato al variare della frequenza del segnale in ingresso alla funzione descrittiva.

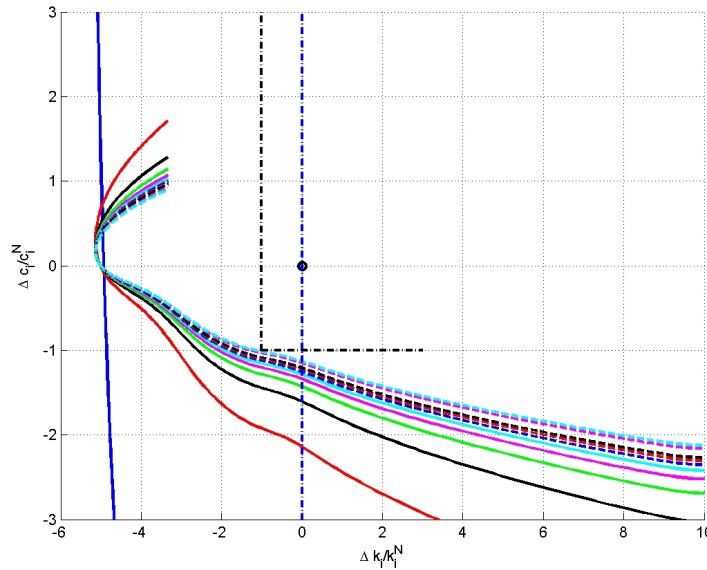


Figura 4.20: Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = \Omega_{REG}$.

²Per questa casistica è stato utilizzato sia il modello ridotto che quello di verifica (cfr. Par. 3.2 a pag. 91)

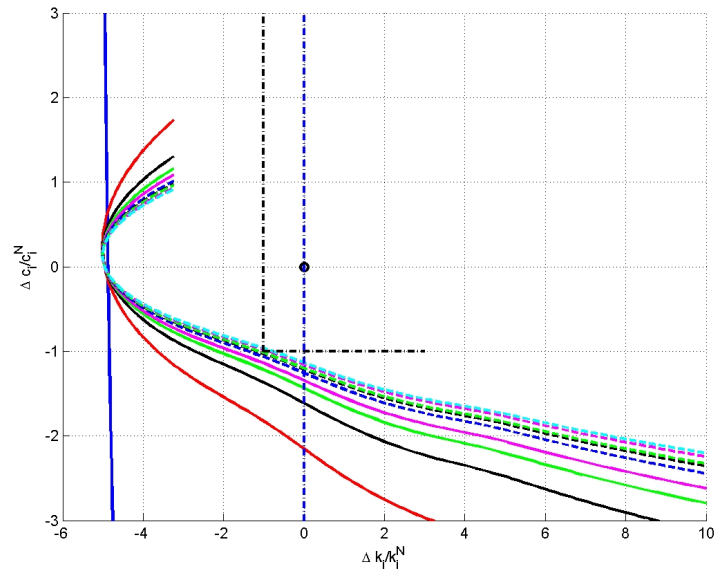


Figura 4.21: Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = 120\% \Omega_{REG}$.

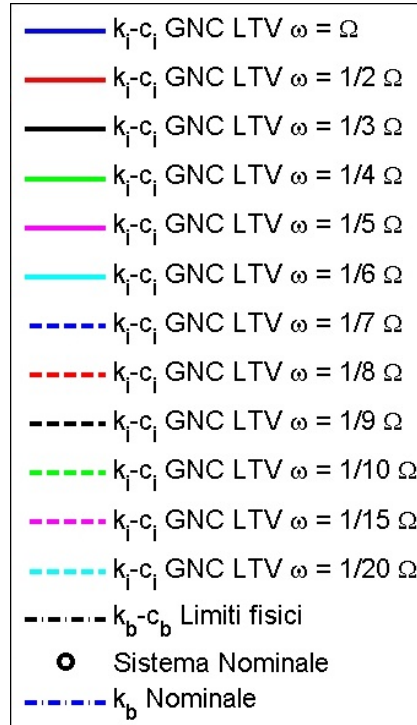


Figura 4.22: Legenda delle frequenze dell'uscita ω_u per la DF.

Per tutti i casi di interesse, nello spazio delle incertezze le curve limite non presentano la possibilità per il sistema di incappare in una condizione di ciclo limite.

Si evidenzia la necessità, ancora una volta, di una verifica dei risultati attraverso il metodo classico dell'analisi di risposta nel tempo (Par. 4.2.4).

L'andamento dello smorzamento limite al variare della frequenza dell'uscita ω_u a rigidità nulla è illustrato nelle Figure 4.23 e 4.24. Lo smorzamento rimane sempre sotto al limite fisico -1 confermando la stabilità alla risonanza al suolo della macchina in caso di inattività di uno smorzatore per ciascuna condizione operativa.

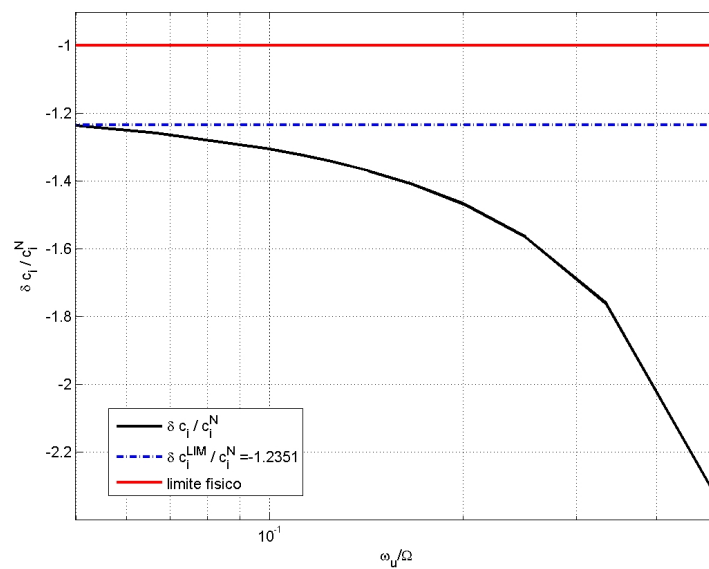


Figura 4.23: Smorzamento limite Δc_i al variare della frequenza ω_u ($\Omega = \Omega_{REG}$).

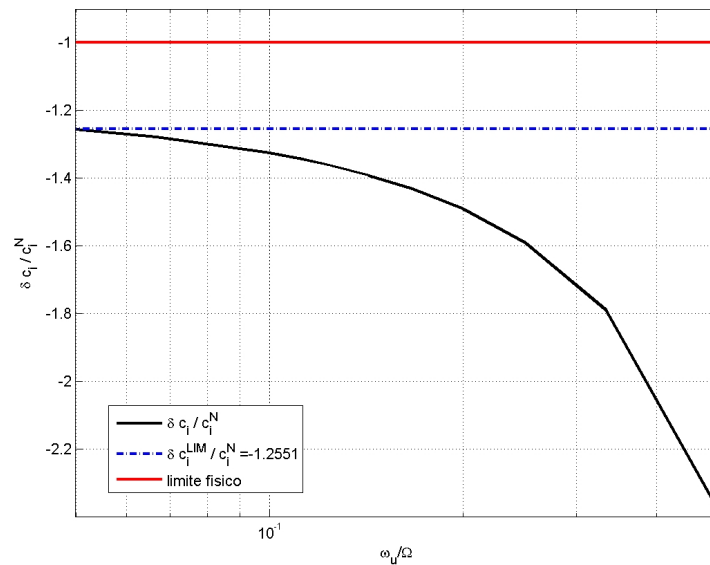


Figura 4.24: Smorzamento limite Δc_i al variare della frequenza ω_u della funzione descrittiva ($\Omega = 120\% \Omega_{REG}$).

Infine, si è determinato tramite le medesime procedure, il valore di scostamento di rigidità e smorzamento che permetterebbe al sistema di rimanere comunque stabile in caso di rottura di uno smorzatore fino al 120% della velocità angolare di regime. Questo accorgimento permette non tanto di effettuare una verifica di stabilità, quanto di stabilire una modalità di progetto degli smorzatori stessi.

Infatti, nelle Figure 4.25 e 4.26 si mostrano rispettivamente gli scostamenti limite rispetto ai valori nominali e la risposta di ciclo limite corrispondente con rigidità $\Delta k_b = 0$.

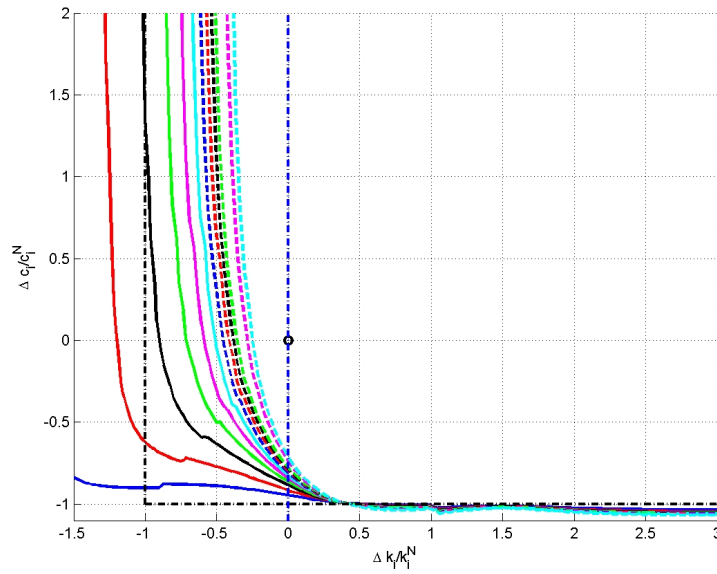


Figura 4.25: Curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per gli smorzamenti attivi in caso di failure ($\Omega = 120\% \Omega_{REG}$).

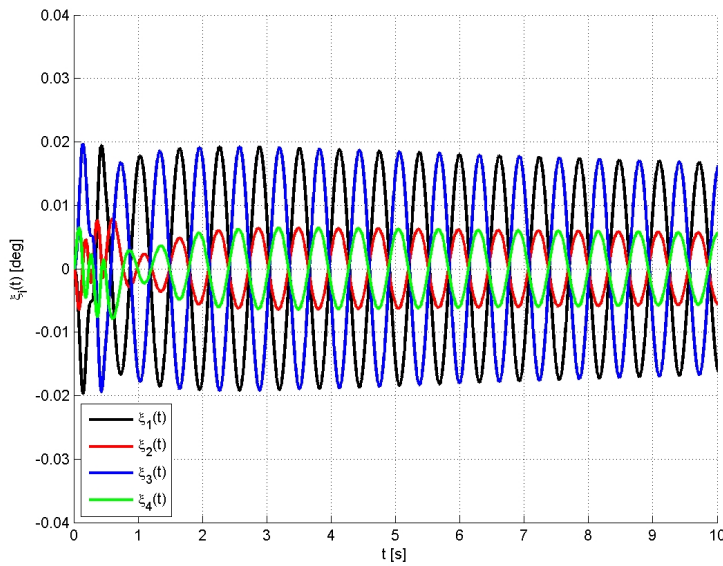


Figura 4.26: Risposta nel tempo $\xi(t)$ con smorzamento limite $\Delta c_b = -70.64\%$ ($\Omega = 120\% \Omega_{REG}$).

Questo approccio evidenzia la buona collocazione del punto di progetto per gli smorzatori del Puma IAR 330, ma una notevole possibilità di riduzione dello smorzamento nominale fornito. Infatti, sarebbe possibile diminuire del 70.64% lo smorzamento nominale garantendo comunque la stabilità, d'altra parte converrebbe adottare comunque almeno un margine del 10% per ovviare alle eventuali alterazioni rispetto al comportamento nominale di progetto degli smorzatori di ritardo.

Infatti, a causa di perdite per trafileamento o condizioni ambientali differenti, si potrebbe incorrere in una diminuzione della risposta della coppia fornita dallo smorzatore. Sfruttando quindi questa metodologia di progetto si è certi che, in caso di rottura di uno smorzatore e funzionamento non ottimale degli altri, il velivolo non rischia comunque di incappare in una condizione di ground resonance.

Infine, essendo noto il valore dello smorzamento e della rigidità limite, è possibile determinare con maggior accuratezza i tempi di manutenzione e controllo degli smorzatori, valutando la perdita per trafileamento che porterebbe ad una diminuzione ad esempio del 10% imposto dello smorzamento equivalente.

Validazione attraverso la risposta nel tempo

Per confermare l'affidabilità dell'analisi sul Puma IAR 330 è necessario ricorrere a varie analisi nel tempo del sistema dinamico con uno smorzatore assente.

Grazie alla modellazione attraverso l'ambiente Simulink di Matlab è stato generato un modello periodico dell'elicottero; rispettivamente nelle Figure 4.27 e 4.28 si riporta la risposta nel tempo della coordinata libera di ritardo ξ_i dell' i -esimo smorzatore del velivolo.

Il sistema come atteso risulta essere sempre stabile anche in caso di rottura di uno degli smorzatori di ritardo.

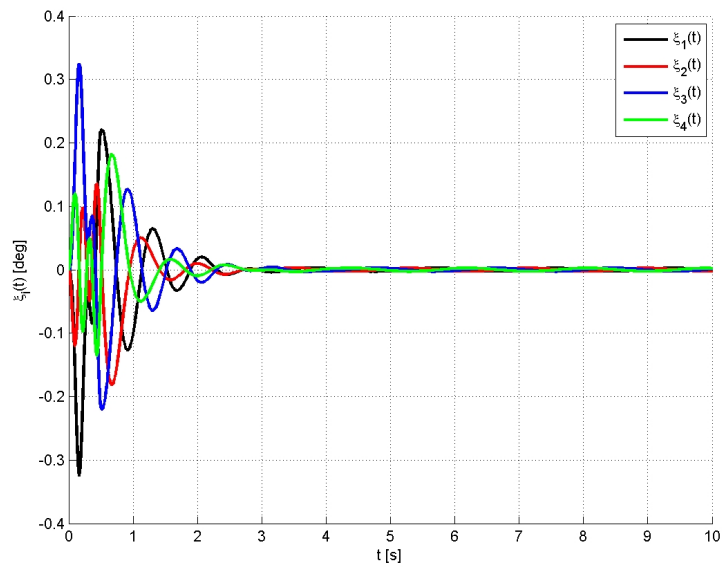


Figura 4.27: Risposta nel tempo per $\Omega = \Omega_{REG}$ senza uno smorzatore.

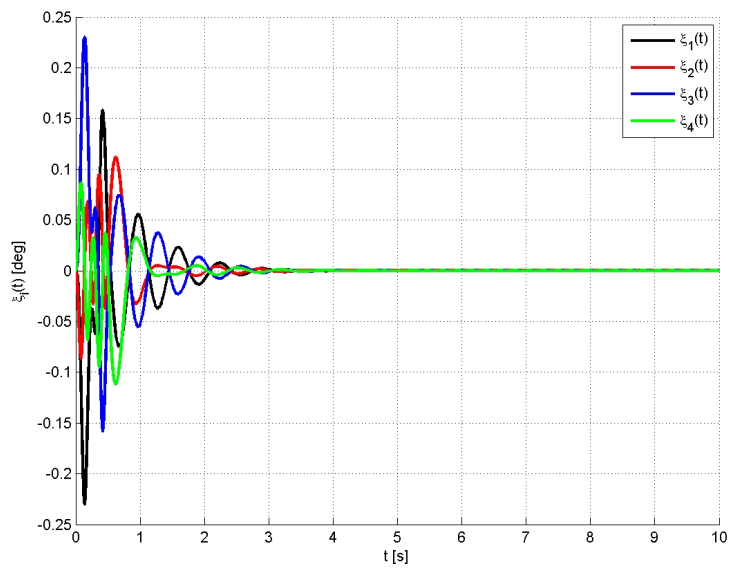


Figura 4.28: Risposta nel tempo per $\Omega = 120\% \Omega_{REG}$ senza uno smorzatore.

Come ulteriore conferma, si riportano per la velocità di rotazione di regime anche i risultati ottenuti con l'analisi del modello di verifica, in cui sono compresi i modi rigidi ed elastici di flappeggio e variazione passo. Come visibile dalla Figura 4.29, analogamente a quanto riscontrato nell'analisi robusta del sistema lineare, il punto di progetto è sicuramente ben collocato, tale da evitare situazioni di ciclo limite.

Tuttavia sarebbe maggiormente conservativo aumentare la rigidità dello smorzatore per allontanarsi dalla curva di limite di stabilità. Quanto affermato risulta essere avvalorato dalla risposta nel tempo di tale modello (Figura 4.30).

Infatti, essa presenta a parità di perturbazione del sistema un andamento più oscillante rispetto al caso del modello ridotto.

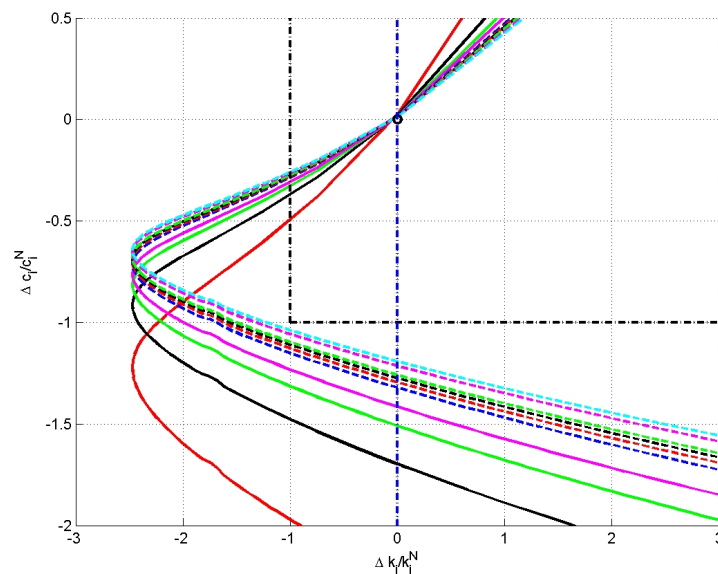


Figura 4.29: Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = \Omega_{REG}$ (modello di verifica).

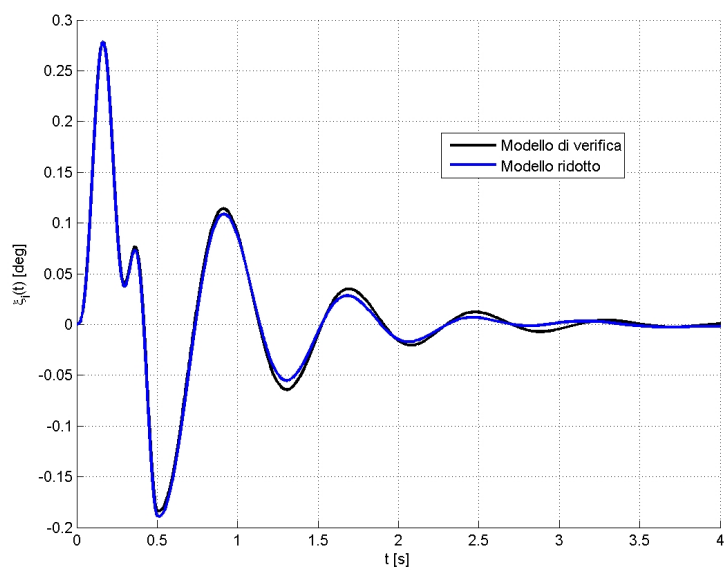


Figura 4.30: Confronto della risposta nel tempo $\xi_1(t)$ per $\Omega = \Omega_{REG}$.

Conclusioni

La realizzazione di metodologie generalizzate di progetto che garantiscano la robustezza della stabilità alla risonanza al suolo dell'elicottero è sicuramente il filo conduttore delle varie attività esposte in questa trattazione. La necessità di adottare differenti tecniche di analisi robusta per lo studio del sistema dinamico del velivolo è dettata da tre aspetti fondamentali presi in considerazione:

- ➔ il progetto degli smorzatori di ritardo per rotori articolati e soft-in-plane;
- ➔ l'influenza di un eventuale sistema di controllo del volo fly-by-wire (FCS);
- ➔ la possibilità di ispezionare con approcci alternativi a quelli classici l'assenza di uno smorzatore di ritardo.

Quantificare sin dalle fasi preliminari del progetto la sensibilità del sistema a delle variazioni dei parametri principali rappresenta uno strumento utile a conoscere l'effettivo margine della macchina. Non solo si è in grado di qualificare una particolare condizione di stabilità, bensì si ha la possibilità di valutare l'impatto sui parametri fisici stessi di tutte le condizioni operative del velivolo considerate.

Per quanto concerne il primo aspetto sopra riportato, analizzando il sistema del Puma IAR 330, è stato riscontrato che il punto di progetto nominale risulta essere sufficientemente ben collocato. D'altra parte, nella verifica dei risultati ottenuti includendo l'accoppiamento flappeggio-ritardo e ritardo-variazione passo, è emerso che sarebbe opportuno adottare un precarico di rigidità sugli smorzatori di ritardo per consolidare la stabilità alla ground

resonance. Allo stesso modo si è appurato che un ulteriore apporto di smorzamento rispetto al valore nominale determinerebbe in realtà un comportamento divergente del velivolo al suolo.

Inoltre, l'impatto dell'FCS sulla stabilità del Puma IAR 330 nell'intorno della frequenza di ground resonance ha dimostrato la possibilità di stabilire una soglia per il guadagno di tale sistema di controllo. Comparando i tempi utili complessivi necessari all'intervento dell'FCS disponibili in letteratura è stato accertato che il ritardo imposto non compromettesse la stabilità globale della macchina.

Per quanto riguarda invece, lo studio condotto per il sistema periodico è stata validata la procedura di analisi congiunta tra linearizzazione armonica delle funzioni descrittive e parametri incerti per la μ -Analisi. Infatti, come da normativa, presumendo la possibilità di inattività di uno degli smorzatori di ritardo, occorre prevedere l'insorgere di condizioni di ciclo limite di stabilità. Attraverso tale approccio, è stata confermata non solo la possibilità di stabilire se il sistema è stabile o meno, bensì si è fornita anche l'escursione delle caratteristiche elastoviscose dello smorzatore danneggiato che provocherebbero la manifestazione di un ciclo limite.

Si sottolinea come in [33], sia già stata condotta un'analisi robusta dell'elicottero semplificato qui considerato, introducendo le non linearità derivanti dalle leggi costitutive degli smorzatori di ritardo attraverso le funzioni descrittive.

Si ricorda come tali studi sul comportamento non lineare del sistema siano fondamentale dal punto di vista strutturale della sollecitazione a fatica dei componenti del velivolo. Definendo un valore limite di smorzamento necessario a stabilizzare qualsiasi condizione di ciclo limite è possibile sia evitare la rottura del componente che, eventualmente, prolungare i tempi di manutenzione e controllo degli smorzatori stessi.

I possibili sviluppi futuri della trattazione vertono innanzitutto sull'eventuale influenza dell'introduzione di armoniche a frequenza superiore rispetto a quella fondamentale nelle funzioni descrittive adottate per il caso periodico. In secondo luogo, si prevede la possibilità di adottare le tecniche utilizzate per lo studio della stabilità robusta di ulteriori sistemi dinamici elicotteristici, quali, ad esempio, la stabilità longitudinale o latero-direzionale della macchina.

Analisi agli autovalori e risposta nel tempo (LTI)

A.1 Validazione dei risultati per l'elicottero semplificato

Al fine di qualificare la bontà dei risultati di robustezza ottenuti per l'elicottero in [9] è opportuno condurre delle analisi agli autovalori e di risposta nel tempo del sistema affetto dalle incertezze limite illustrate nel capitolo 2.3.

Pertanto, parallelamente sia con la μ -Analisi che con il criterio generalizzato di Nyquist, sono stati selezionati i valori di Δk_b , Δc_b , ΔK_x e ΔC_x delle curve limite di ciascun metodo a differenti frequenze secondo le Tabelle sottostanti. Per ciascuna tupla di quest'ultime sono state condotte tre analisi agli autovalori e tre analisi di risposta nel tempo per ciascun approccio di analisi robusta del sistema, ovvero rispettivamente per ogni riga con:

- GNC con valori tabulati;
- GNC con valori tabulati aumentati dell'1%;
- GNC con valori tabulati diminuiti dell'1%;
- μ -Analisi con valori tabulati;
- μ -Analisi con valori tabulati aumentati dell'1%;
- μ -Analisi con valori tabulati diminuiti dell'1%;

ω/Ω_0	GNC		μ -Analisi	
	$\Delta\mathbf{k}_b$	$\Delta\mathbf{c}_b$	$\Delta\mathbf{k}_b$	$\Delta\mathbf{c}_b$
5%	10.1031	-1.0000	9.4746	-1.0000
10%	8.9491	-0.9999	8.4082	-0.9999
15%	7.8899	-0.9999	7.4510	-0.9995
20%	6.8614	-0.9999	6.4946	-0.9911
25%	5.9247	-0.9996	5.5906	-0.9996
30%	5.0236	-0.9989	4.7473	-0.9989
35%	4.2121	-0.9971	4.0078	-0.9971
40%	3.4420	-0.9925	3.2810	-0.9924
45%	2.7392	-0.9815	2.6155	-0.9813
50%	2.1185	-0.9588	2.0087	-0.9576
55%	1.5341	-0.9189	1.4843	-0.9198
60%	1.0179	-0.8691	0.9747	-0.8685
65%	0.5512	-0.8063	0.5458	-0.7692
70%	0.1696	-0.7067	0.1542	-0.6662
75%	-0.1600	-0.5027	-0.1555	-0.4794
80%	-0.4484	-0.1098	-0.4402	-0.1014
85%	-0.7557	0.6229	-0.7409	0.6373
90%	-1.0658	1.8508	-1.0797	1.7169

Tabella A.1: Parametri limite per le analisi nel tempo e agli autovalori del sistema (2 incertezze).

Si distinguono le analisi condotte con differenti incertezze presenti nel sistema, evidenziando in ogni caso gli autovalori stabili con colore nero, quelli al limite di stabilità con colore verde e quelli instabili con colore rosso.

ω/Ω_0	GNC				μ -Analisi			
	Δk_b	Δc_b	ΔK_x	ΔC_x	Δk_b	Δc_b	ΔK_x	ΔC_x
5%	10.1031	-1.0000	-0.5000	0.5000	1.0108	1.0028	-0.9713	-0.9713
10%	8.9491	-0.9999	-0.5000	0.5000	1.0400	1.0609	-0.9481	-0.9481
15%	7.8900	-0.9999	-0.5000	0.5000	0.8998	0.9589	-0.9148	-0.9148
20%	6.8619	-0.9996	-0.5000	0.5000	0.7498	0.7464	-0.8779	-0.8779
25%	5.9260	-0.9988	-0.5000	0.5000	0.8741	0.1682	-0.8117	-0.8971
30%	5.0264	-0.9964	-0.5000	0.5000	1.8176	0.6745	-0.7284	-0.9088
35%	4.2161	-0.9902	-0.5000	0.5000	1.8319	0.5629	-0.6364	-0.9159
40%	3.4436	-0.9748	-0.5000	0.5000	1.8377	0.1187	-0.5249	-0.9188
45%	2.7221	-0.9437	-0.5000	0.5000	1.8253	0.3238	-0.4020	-0.9126
50%	2.1097	-0.8761	-0.5000	-0.5000	1.7173	0.6535	-0.2786	-0.8586
55%	1.4372	-0.8083	-0.5000	-0.5000	1.3589	0.8643	-0.2320	-0.6794
60%	1.1497	-0.7290	0.5000	-0.5000	0.9072	0.8702	-0.1956	-0.4536
65%	0.5857	-0.5739	0.5000	-0.5000	0.5873	0.6708	0.2623	-0.3354
70%	0.1249	-0.4647	0.5000	-0.5000	0.1512	0.5549	0.2774	-0.2774
75%	-0.0865	-0.2708	0.5000	0.5000	-0.1771	-0.4161	0.2080	-0.2080
80%	-0.4067	0.1731	0.5000	0.5000	-0.4228	-0.1288	-0.2114	0.2114
85%	-0.7353	0.9793	0.5000	0.5000	-0.7135	0.5860	-0.3567	0.3567
90%	-1.0593	2.3497	0.5000	0.5000	-1.0599	1.4765	-0.7382	-0.7382

Tabella A.2: Parametri limite per le analisi nel tempo e agli autovalori del sistema (4 incertezze).

Per quanto riguarda, invece le analisi nel tempo, si mostra per ogni frequenza delle Tabelle A.1 e A.2, un confronto tra GNC e μ -Analisi in termini di risposta nel tempo delle uscite di posizione di ritardo cicliche ξ_C e ξ_S dovute ad una forzante a gradino applicata alle coppie cicliche degli smorzatori di ritardo C_C e C_S .

▣► **2 incertezze**

Nelle Figure A.1, A.2 e A.3 si mostra la scelta dei parametri limite secondo le direttive sopra elencate per meglio comprendere le condizioni del sistema nelle analisi presentate in seguito.

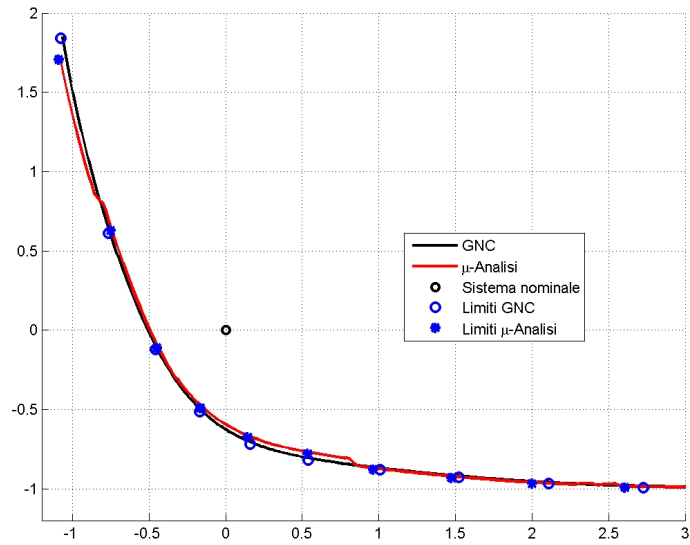


Figura A.1: Visualizzazione dei parametri limite al -1% di variazione (2 incertezze).

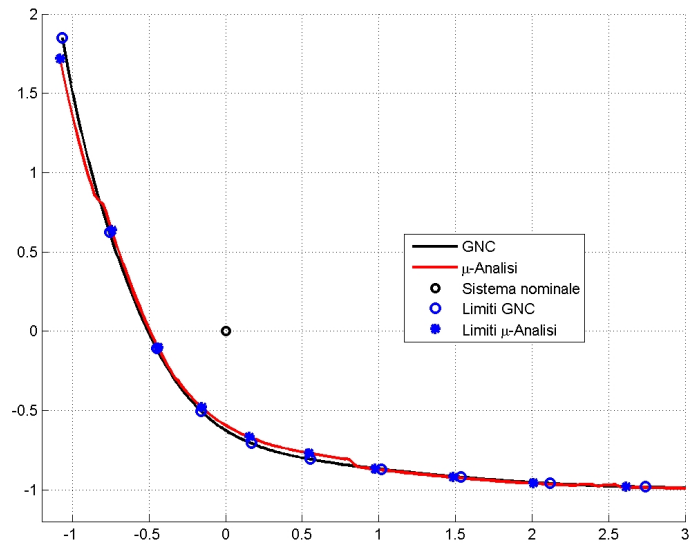


Figura A.2: Visualizzazione dei parametri limite allo 0% di variazione (2 incertezze).

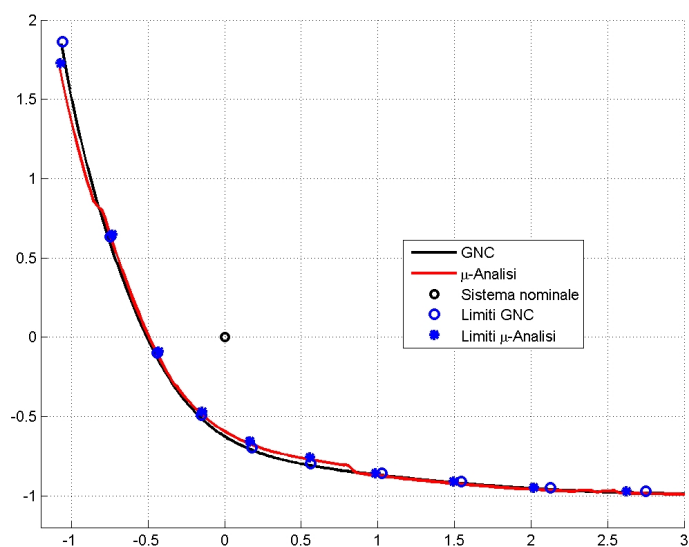


Figura A.3: Visualizzazione dei parametri limite all'1% di variazione (2 incertezze).

Come visibile nelle Tabelle A.3 e A.4, nel caso in cui vengano selezionati esattamente i valori limite forniti dalle curve nello spazio delle incertezze degli smorzatori, gli autovalori sono stabili o al più al limite di instabilità con parte reale associata ad almeno un autovalore nulla o praticamente nulla¹.

Parallelamente, si propone nelle Figure A.4 e A.5 l'analisi nel tempo associata alla scelta dei parametri tabulati a $\omega/\Omega_0 = 50\%$ e a $\omega/\Omega_0 = 10\%$. Come atteso la soluzione mostra un ciclo limite con oscillazioni che non si smorzano nel tempo.

¹Si ricorda che per semplificare l'esposizione dei risultati sono stati riportati omissi i complessi coniugati degli autovalori riportati nelle tabelle.

ω/Ω_0	GNC con 2 incertezze: $\delta\Delta = \delta\Delta_{LIM}$			
	$\lambda_1(\mathbf{L})$	$\lambda_2(\mathbf{L})$	$\lambda_3(\mathbf{L})$	$\lambda_4(\mathbf{L})$
5 %	-0.29-42.34 i	-0.00-1.05 i	-3.41-17.99 i	-3.02-11.75 i
10 %	-0.30-41.29 i	0.00-2.11 i	-3.40-17.97 i	-3.02-11.74 i
15 %	-0.32-40.28 i	0.00-3.14 i	-3.38-17.95 i	-3.02-11.74 i
20 %	-0.34-39.24 i	0.00-4.20 i	-3.37-17.93 i	-3.01-11.73 i
25 %	-0.36-38.24 i	0.00-5.23 i	-3.36-17.91 i	-3.01-11.73 i
30 %	-0.38-37.22 i	-0.00-6.30 i	-3.34-17.87 i	-3.01-11.72 i
35 %	-0.41-36.24 i	-3.32-17.84 i	-0.00-7.33 i	-3.00-11.70 i
40 %	-0.45-35.24 i	-3.30-17.79 i	-0.00-8.39 i	-3.00-11.68 i
45 %	-0.51-34.26 i	-3.27-17.73 i	-0.00-9.45 i	-3.01-11.66 i
50 %	-0.59-33.33 i	-3.25-17.65 i	0.00-10.48 i	-3.04-11.63 i
55 %	-0.72-32.39 i	-3.22-17.55 i	0.00-11.54 i	-3.09-11.62 i
60 %	-0.88-31.48 i	-3.20-17.40 i	0.00-12.57 i	-3.14-11.64 i
65 %	-1.09-30.58 i	-3.22-17.20 i	0.00-13.64 i	-3.16-11.68 i
70 %	-1.37-29.78 i	-3.31-16.94 i	-0.00-14.67 i	-3.17-11.71 i
75 %	-1.90-29.00 i	-0.00-15.73 i	-3.57-16.62 i	-3.17-11.74 i
80 %	-2.85-28.16 i	-0.00-16.76 i	-4.15-16.38 i	-3.16-11.78 i
85 %	-4.67-26.84 i	-0.00-17.82 i	-5.19-16.61 i	-3.13-11.81 i
90 %	-8.67-23.87 i	-0.00-18.86 i	-5.99-18.52 i	-3.08-11.82 i

Tabella A.3: Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze (GNC).

Analisi agli autovalori e risposta nel tempo (LTI)

ω/Ω_0	μ -Analisi con 2 incertezze: $\delta\Delta = \delta\Delta_{LIM}$				
	$\lambda_1(\mathbf{L})$	$\lambda_2(\mathbf{L})$	$\lambda_3(\mathbf{L})$	$\lambda_4(\mathbf{L})$	$\lambda_5(\mathbf{L})$
5 %	-4.33e6	-0.29-41.79 i	-3.40-17.98 i	-3.02-11.75 i	-0.84-1.71 i
10 %	-0.30-40.814374 i	-3.39-17.96 i	-3.02-11.74 i	0.00-2.14 i	-1.65-2.49 i
15 %	-0.32-39.885179 i	-3.38-17.95 i	-3.01-11.74 i	-0.00-3.14 i	-2.39-3.16 i
20 %	-0.35-38.903844 i	-3.36-17.92 i	-3.01-11.73 i	0.00-4.21 i	-3.20-3.85 i
25 %	-3.49e6	-0.36-37.91 i	-3.35-17.90 i	-3.01-11.72 i	-0.00-5.27 i
30 %	-0.39-36.942122 i	-3.33-17.86 i	-3.00-11.71 i	-0.00-6.33 i	-5.92-0.56 i
35 %	-5.66e7	-0.42-36.02 i	-3.31-17.83 i	-3.00-11.70 i	0.00-7.33 i
40 %	-0.46-35.068585 i	-3.29-17.78 i	-0.00-8.40 i	-3.00-11.68 i	-8.08-0.43 i
45 %	-0.52-34.124522 i	-3.26-17.72 i	-0.00-9.46 i	-3.01-11.65 i	-9.20-0.36 i
50 %	-8.05e6	-0.61-33.19 i	-3.24-17.64 i	-0.00-10.52 i	-3.04-11.63 i
55 %	-1.40e6	-0.73-32.33 i	-3.21-17.54 i	0.00-11.52 i	-3.08-11.61 i
60 %	-5.52e5	-0.90-31.42 i	-3.20-17.39 i	-0.00-12.59 i	-3.13-11.63 i
65 %	-1.15-30.577779 i	-3.22-17.20 i	0.00-13.65 i	-3.16-11.68 i	-13.63-0.05 i
70 %	-7.01e5	-1.45-29.75 i	0.00-14.71 i	-3.32-16.93 i	-3.17-11.71 i
75 %	-1.13e5	-1.93-29.01 i	0.00-15.71 i	-3.57-16.63 i	-3.17-11.75 i
80 %	-2.86-28.183780 i	0.00-16.78 i	-4.17-16.39 i	-3.16-11.78 i	-16.84-0.09 i
85 %	-4.70-26.879347 i	-0.00-17.84 i	-5.21-16.66 i	-17.94-0.17 i	-3.13-11.82 i
90 %	-2.48e4	-8.48-23.78 i	0.00-18.90 i	-6.16-18.59 i	-18.98-0.16 i
ω/Ω_0	$\lambda_6(\mathbf{L})$	$\lambda_7(\mathbf{L})$	$\lambda_8(\mathbf{L})$	$\lambda_9(\mathbf{L})$	$\lambda_{10}(\mathbf{L})$
5 %	0.00-1.08 i	-1.17-0.88 i	-0.60-0.30 i	-0.76-0.76 i	-0.76-0.76 i
10 %	-2.00-1.47 i	-1.52-0.55 i	-1.51-1.51 i	-1.51-1.51 i	-1.00-0.00 i
15 %	-2.57-0.67 i	-2.64-2.09 i	-0.00-0.00 i	-2.22-2.22 i	-2.22-2.22 i
20 %	-3.86-0.69 i	-3.31-2.79 i	-0.08-0.00 i	-2.97-2.97 i	-2.97-2.97 i
25 %	-4.80-0.62 i	-3.91-4.52 i	-4.02-3.59 i	-3.73-3.73 i	-3.73-3.73 i
30 %	-4.65-5.18 i	-4.73-4.35 i	-4.48-4.48 i	-4.48-4.48 i	-0.00-0.00 i
35 %	-6.97-0.50 i	-5.34-5.80 i	-5.40-5.07 i	-5.18-5.18 i	-5.18-5.18 i
40 %	-6.07-6.46 i	-6.12-5.84 i	-5.94-5.94 i	-5.94-5.94 i	-0.00-0.00 i
45 %	-6.81-7.12 i	-6.84-6.61 i	-6.69-6.69 i	-6.69-6.69 i	-1.00+0.00 i
50 %	-10.31-0.29 i	-7.54-7.79 i	-7.56-7.38 i	-7.44-7.44 i	-7.44-7.44 i
55 %	-11.36-0.23 i	-8.23-8.42 i	-8.24-8.10 i	-8.15-8.15 i	-8.15-8.15 i
60 %	-12.47-0.15 i	-8.95-9.09 i	-8.96-8.87 i	-8.90-8.90 i	-8.90-8.90 i
65 %	-9.76-9.58 i	-9.64-9.65 i	-0.00-0.00 i	-9.65-9.65 i	-9.65-9.65 i
70 %	-14.69-0.05 i	-10.50-10.33 i	-10.39-10.40 i	-10.40-10.40 i	-10.40-10.40 i
75 %	-15.70-0.03 i	-11.19-11.05 i	-11.10-11.11 i	-11.11-11.11 i	-11.11-11.11 i
80 %	-11.83-11.74 i	-11.83-11.88 i	-0.00-0.00 i	-11.86-11.86 i	-11.86-11.86 i
85 %	-12.58-12.36 i	-12.56-12.65 i	-0.01-0.00 i	-12.61-12.61 i	-12.61-12.61 i
90 %	-3.09-11.82 i	-12.76-13.51 i	-13.40-13.38 i	-13.37-13.37 i	-13.37-13.37 i

Tabella A.4: Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze (μ -Analisi).

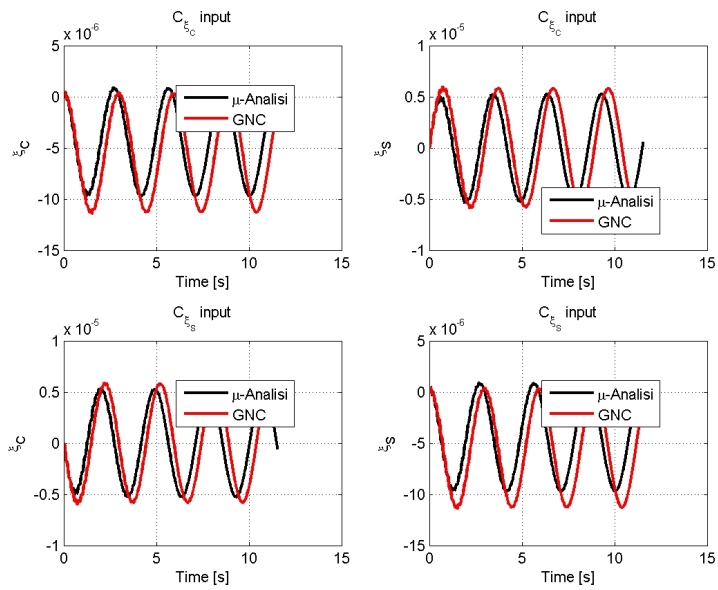


Figura A.4: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 10\%\Omega_0$.

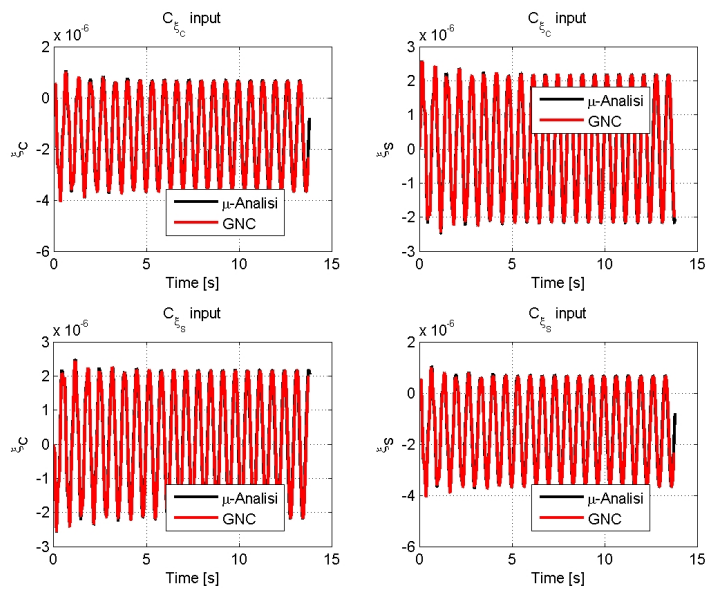


Figura A.5: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 50\%\Omega_0$.

Al fine di confermare la correttezza delle analisi robuste effettuate vengono mostrati rispettivamente nelle Tabelle A.5 e A.6 gli autovalori del sistema calcolati imponendo i parametri limite al di sotto dell'1% della curva determinata come segnalato in Figura A.1.

Si sottolinea in questo caso la presenza di veri e propri autovalori instabili sia utilizzando i parametri limite di rigidezza e smorzamento del GNC che quelli della μ -Analisi.

ω/Ω_0	GNC con 2 incertezze: $\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$			
	$\lambda_1(\mathbf{L})$	$\lambda_2(\mathbf{L})$	$\lambda_3(\mathbf{L})$	$\lambda_4(\mathbf{L})$
5 %	-0.27-42.33 i	0.01-1.06 i	-3.41-17.99 i	-3.02-11.75 i
10 %	-0.28-41.28 i	0.01-2.12 i	-3.40-17.97 i	-3.02-11.74 i
15 %	-0.30-40.27 i	0.01-3.15 i	-3.38-17.95 i	-3.02-11.74 i
20 %	-0.32-39.23 i	0.01-4.21 i	-3.37-17.93 i	-3.01-11.73 i
25 %	-0.34-38.23 i	0.01-5.25 i	-3.36-17.91 i	-3.01-11.73 i
30 %	-0.36-37.21 i	0.01-6.31 i	-3.34-17.87 i	-3.01-11.72 i
35 %	-0.39-36.22 i	-3.32-17.84 i	0.01-7.34 i	-3.00-11.70 i
40 %	-0.43-35.23 i	-3.30-17.79 i	0.01-8.40 i	-3.00-11.68 i
45 %	-0.49-34.25 i	-3.27-17.73 i	0.01-9.47 i	-3.01-11.66 i
50 %	-0.57-33.32 i	-3.25-17.65 i	0.02-10.50 i	-3.04-11.63 i
55 %	-0.70-32.37 i	-3.22-17.54 i	0.02-11.56 i	-3.09-11.62 i
60 %	-0.87-31.46 i	-3.21-17.40 i	0.02-12.59 i	-3.14-11.64 i
65 %	-1.07-30.56 i	-3.22-17.20 i	0.02-13.66 i	-3.16-11.68 i
70 %	-1.36-29.75 i	-3.31-16.94 i	0.02-14.69 i	-3.17-11.71 i
75 %	-1.88-28.97 i	0.02-15.75 i	-3.58-16.62 i	-3.17-11.74 i
80 %	-2.83-28.14 i	0.02-16.77 i	-4.16-16.39 i	-3.16-11.78 i
85 %	-4.66-26.82 i	0.02-17.84 i	-5.19-16.62 i	-3.13-11.81 i
90 %	-8.66-23.86 i	0.01-18.87 i	-5.98-18.52 i	-3.08-11.82 i

Tabella A.5: Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sotto dell'1% del limite minimo (GNC).

Infatti, nelle Figure A.6 e A.7 si instaura un comportamento divergente per entrambi gli esempi di soluzione di risposta nel tempo rispettivamente a $\omega = 25\%\Omega_0$ e $\omega = 65\%\Omega_0$, il moto di ritardo risulta quindi essere globalmente instabile.

ω/Ω_0	μ -Analisi con 2 incertezze: $\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$				
	$\lambda_1(\mathbf{L})$	$\lambda_2(\mathbf{L})$	$\lambda_3(\mathbf{L})$	$\lambda_4(\mathbf{L})$	$\lambda_5(\mathbf{L})$
5 %	-4.33e6	-0.27-41.78 i	-3.40-17.98 i	-3.02-11.75 i	-0.83-1.71 i
10 %	-0.28-40.80 i	-3.39-17.96 i	-3.02-11.74 i	0.01-2.16 i	-1.65-2.48 i
15 %	-0.30-39.87 i	-3.38-17.95 i	-3.01-11.74 i	0.01-3.16 i	-2.39-3.16 i
20 %	-0.33-38.89 i	-3.36-17.92 i	-3.01-11.73 i	0.01-4.22 i	-3.19-3.84 i
25 %	-3.49e6	-0.34-37.90 i	-3.35-17.90 i	-3.01-11.72 i	0.01-5.28 i
30 %	-0.37-36.93 i	-3.33-17.86 i	-3.00-11.71 i	0.01-6.35 i	-5.92-0.56 i
35 %	-5.66e7	-0.40-36.01 i	-3.31-17.83 i	-3.00-11.70 i	0.01-7.35 i
40 %	-0.44-35.05 i	-3.29-17.78 i	0.01-8.41 i	-3.00-11.68 i	-8.08-0.43 i
45 %	-0.50-34.10 i	-3.26-17.72 i	0.01-9.48 i	-3.01-11.65 i	-9.20-0.36 i
50 %	-8.05e6	-0.59-33.18 i	-3.24-17.64 i	0.01-10.54 i	-3.04-11.63 i
55 %	-1.40e6	-0.71-32.31 i	-3.21-17.54 i	0.02-11.54 i	-3.08-11.62 i
60 %	-5.52e5	-0.88-31.40 i	-3.20-17.39 i	0.02-12.61 i	-3.13-11.64 i
65 %	-1.13-30.55 i	-3.22-17.20 i	0.02-13.67 i	-3.16-11.68 i	-13.63-0.05 i
70 %	-7.01e5	-1.43-29.72 i	0.02-14.74 i	-3.32-16.93 i	-3.17-11.71 i
75 %	-1.13e5	-1.92-28.99 i	0.02-15.73 i	-3.58-16.64 i	-3.17-11.75 i
80 %	-2.85-28.16 i	0.02-16.79 i	-4.18-16.40 i	-3.16-11.78 i	-16.84-0.09 i
85 %	-4.69-26.85 i	0.02-17.85 i	-5.21-16.67 i	-17.94-0.17 i	-3.13-11.81 i
90 %	-2.48e4	-8.47-23.77 i	0.02-18.91 i	-6.15-18.59 i	-18.98-0.15 i
ω/Ω_0	$\lambda_6(\mathbf{L})$	$\lambda_7(\mathbf{L})$	$\lambda_8(\mathbf{L})$	$\lambda_9(\mathbf{L})$	$\lambda_{10}(\mathbf{L})$
5 %	0.00-1.09 i	-1.17-0.88 i	-0.60-0.30 i	-0.76-0.76 i	-0.76-0.76 i
10 %	-2.00-1.47 i	-1.53-0.55 i	-1.51-1.51 i	-1.51-1.51 i	-1.00+0.00 i
15 %	-2.57-0.66 i	-2.64-2.09 i	-2.22-2.22 i	0.00-0.00 i	-2.22-2.22 i
20 %	-3.86-0.69 i	-3.30-2.80 i	-0.08-0.00 i	-2.97-2.97 i	-2.97-2.97 i
25 %	-4.80-0.62 i	-3.90-4.51 i	-4.02-3.59 i	-3.73-3.73 i	-3.73-3.73 i
30 %	-4.65-5.17 i	-4.73-4.35 i	-4.48-4.48 i	-4.48-4.48 i	0.00+0.00 i
35 %	-6.97-0.50 i	-5.34-5.80 i	-5.40-5.07 i	-5.18-5.18 i	-5.18-5.18 i
40 %	-6.07-6.46 i	-6.12-5.84 i	-5.94-5.94 i	-5.94-5.94 i	0.00+0.00 i
45 %	-6.81-7.12 i	-6.84-6.61 i	-6.69-6.69 i	-6.69-6.69 i	-1.00+0.00 i
50 %	-10.31-0.29 i	-7.54-7.79 i	-7.56-7.38 i	-7.44-7.44 i	-7.44-7.44 i
55 %	-11.36-0.23 i	-8.22-8.42 i	-8.24-8.10 i	-8.15-8.15 i	-8.15-8.15 i
60 %	-12.47-0.15 i	-8.95-9.09 i	-8.96-8.87 i	-8.90-8.90 i	-8.90-8.90 i
65 %	-9.76-9.58 i	-9.64-9.65 i	0.00-0.00 i	-9.65-9.65 i	-9.65-9.65 i
70 %	-14.70-0.05 i	-10.50-10.33 i	-10.39-10.40 i	-10.40-10.40 i	-10.40-10.40 i
75 %	-15.70-0.03 i	-11.19-11.05 i	-11.10-11.11 i	-11.11-11.11 i	-11.11-11.11 i
80 %	-11.83-11.74 i	-11.83-11.88 i	0.00-0.00 i	-11.86-11.86 i	-11.86-11.86 i
85 %	-12.58-12.36 i	-12.56-12.65 i	-0.01-0.00 i	-12.61-12.61 i	-12.61-12.61 i
90 %	-3.09-11.82 i	-12.76-13.51 i	-13.40-13.38 i	-13.37-13.37 i	-13.37-13.37 i

Tabella A.6: Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sotto dell'1% del limite minimo μ -Analisi).

Analisi agli autovalori e risposta nel tempo (LTI)

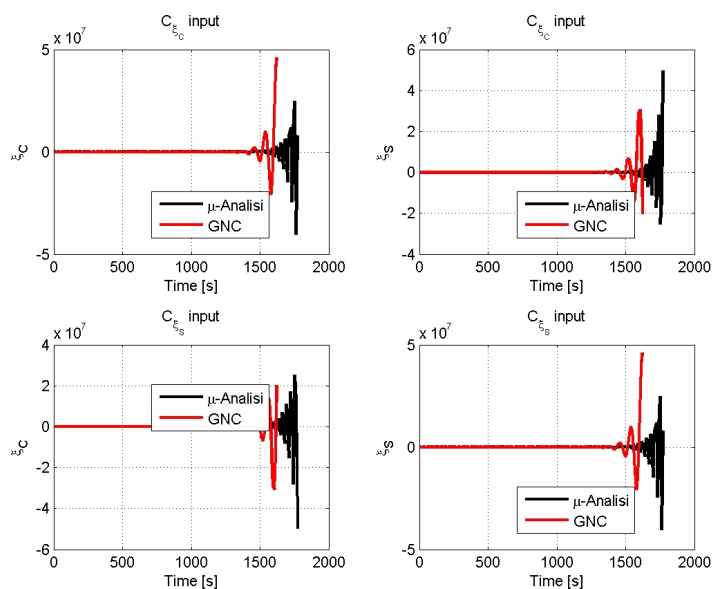


Figura A.6: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 25\% \Omega_0$ al di sotto dell'1% del limite minimo .

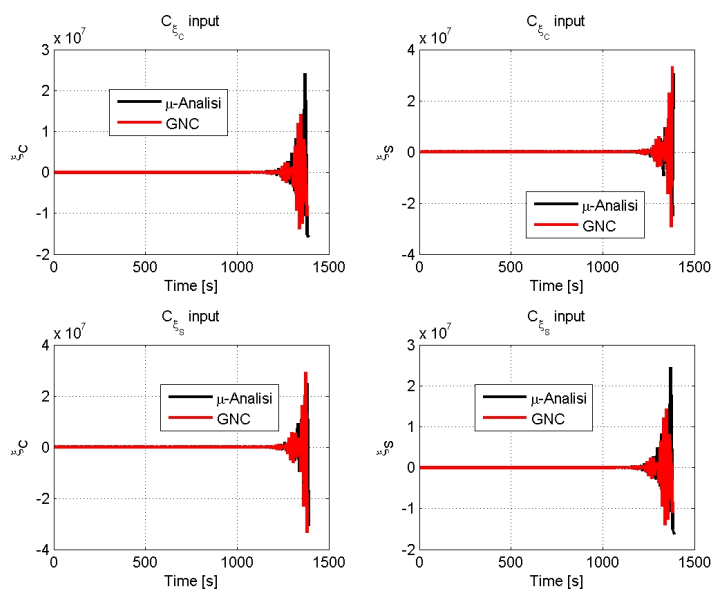


Figura A.7: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 65\% \Omega_0$ al di sotto dell'1% del limite minimo .

Viene analizzato il caso di sistema affetto da incertezze pari al 101% del valore limite e quindi all'interno della regione di stabilità.

ω/Ω_0	GNC con 2 incertezze: $\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$			
	$\lambda_1(\mathbf{L})$	$\lambda_2(\mathbf{L})$	$\lambda_3(\mathbf{L})$	$\lambda_4(\mathbf{L})$
5 %	-0.31-42.35 i	-0.01-1.04 i	-3.41-17.99 i	-3.02-11.75 i
10 %	-0.32-41.30 i	-0.01-2.10 i	-3.40-17.97 i	-3.02-11.74 i
15 %	-0.34-40.29 i	-0.01-3.13 i	-3.38-17.95 i	-3.02-11.74 i
20 %	-0.36-39.25 i	-0.01-4.19 i	-3.37-17.93 i	-3.01-11.73 i
25 %	-0.38-38.25 i	-0.01-5.22 i	-3.36-17.91 i	-3.01-11.73 i
30 %	-0.40-37.23 i	-0.01-6.28 i	-3.34-17.87 i	-3.01-11.72 i
35 %	-0.43-36.25 i	-3.32-17.84 i	-0.01-7.31 i	-3.00-11.70 i
40 %	-0.47-35.25 i	-3.30-17.79 i	-0.01-8.37 i	-3.00-11.68 i
45 %	-0.53-34.28 i	-3.27-17.73 i	-0.01-9.44 i	-3.01-11.66 i
50 %	-0.61-33.35 i	-3.25-17.65 i	-0.02-10.47 i	-3.04-11.63 i
55 %	-0.74-32.40 i	-3.22-17.55 i	-0.02-11.53 i	-3.09-11.62 i
60 %	-0.90-31.50 i	-3.20-17.41 i	-0.02-12.56 i	-3.14-11.64 i
65 %	-1.11-30.60 i	-3.21-17.20 i	-0.02-13.61 i	-3.16-11.67 i
70 %	-1.39-29.80 i	-3.30-16.94 i	-0.02-14.64 i	-3.17-11.71 i
75 %	-1.91-29.02 i	-0.02-15.71 i	-3.56-16.62 i	-3.17-11.74 i
80 %	-2.87-28.19 i	-0.02-16.75 i	-4.14-16.37 i	-3.16-11.78 i
85 %	-4.69-26.86 i	-0.02-17.81 i	-5.20-16.60 i	-3.13-11.81 i
90 %	-8.68-23.89 i	-0.02-18.85 i	-6.00-18.51 i	-3.08-11.82 i

Tabella A.7: Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sopra dell'1% del limite minimo (GNC).

In questo caso, si mostra come gli autovalori siano complessivamente stabili e quindi tali da evitare l'insorgere di un comportamento dinamico divergente nelle risposte nel tempo; infatti, dai grafici riportati in Figura A.8 e A.9, si nota come l'andamento del moto ciclico seno e ciclico coseno di ritardo sia stabile a fronte di una perturbazione a gradino delle coppie di ritardo in ingresso (sono stati riportati solo gli esempi relativi a $\omega = 20\%\Omega_0$ e $\omega = 85\%\Omega_0$ ma qualitativamente la risposta del sistema rimane invariata per tutti i restanti casi).

ω/Ω_0	μ -Analisi con 2 incertezze: $\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$				
	$\lambda_1(\mathbf{L})$	$\lambda_2(\mathbf{L})$	$\lambda_3(\mathbf{L})$	$\lambda_4(\mathbf{L})$	$\lambda_5(\mathbf{L})$
5 %	-4.33e6	-0.31-41.80 i	-3.40 -17.98 i	-3.02-11.75 i	-0.85-1.72 i
10 %	-0.32-40.82 i	-3.39-17.96 i	-3.02 -11.74 i	-0.01-2.13 i	-1.66-2.50 i
15 %	-0.34-39.89 i	-3.38-17.95 i	-3.01 -11.74 i	-0.01-3.13 i	-2.40-3.17 i
20 %	-0.37-38.91 i	-3.36-17.92 i	-3.01 -11.73 i	-0.01-4.19 i	-3.20-3.85 i
25 %	-3.49e6	-0.38-37.93 i	-3.35 -17.90 i	-3.01-11.72 i	-0.01-5.26 i
30 %	-0.41-36.95 i	-3.33-17.86 i	-3.00 -11.71 i	-0.01-6.32 i	-5.92-0.57 i
35 %	-5.66e7	-0.44-36.04 i	-3.31 -17.83 i	-3.00-11.7 i	-0.01-7.32 i
40 %	-0.48-35.08 i	-3.29-17.78 i	-0.01 -8.38 i	-3.00-11.6 i	-8.08-0.44 i
45 %	-0.54-34.13 i	-3.26-17.72 i	-0.01 -9.44 i	-3.01-11.6 i	-9.20-0.36 i
50 %	-8.05e6	-0.63-33.21 i	-3.23 -17.64 i	-0.01-10.5 i	-3.04-11.63 i
55 %	-1.40e6	-0.75-32.34 i	-3.21 -17.54 i	-0.02-11.5 i	-3.08-11.61 i
60 %	-5.52e5	-0.92-31.43 i	-3.19 -17.40 i	-0.02-12.5 i	-3.14-11.63 i
65 %	-1.17-30.59 i	-3.22-17.21 i	-0.02 -13.63 i	-3.16-11.6 i	-13.63-0.05 i
70 %	-7.01e5	-1.47-29.77 i	-0.02 -14.69 i	-3.31-16.9 i	-3.17-11.71 i
75 %	-1.13e5	-1.95-29.03 i	-0.02 -15.69 i	-3.56-16.6 i	-3.17-11.75 i
80 %	-2.88-28.20 i	-0.02-16.76 i	-4.17 -16.39 i	-3.16-11.7 i	-16.84-0.09 i
85 %	-4.72-26.89 i	-0.02-17.83 i	-5.21 -16.65 i	-17.94-0.1 i	-3.13-11.82 i
90 %	-2.48e4	-8.48-23.80 i	-0.02 -18.89 i	-6.18-18.5 i	-18.98-0.15 i
ω/Ω_0	$\lambda_6(\mathbf{L})$	$\lambda_7(\mathbf{L})$	$\lambda_8(\mathbf{L})$	$\lambda_9(\mathbf{L})$	$\lambda_{10}(\mathbf{L})$
5 %	-0.00-1.07 i	-1.17-0.88 i	-0.60-0.308018 i	-0.76-0.76 i	-0.76-0.76 i
10 %	-2.01-1.47 i	-1.52-0.56 i	-1.51-1.518950 i	-1.51-1.51 i	-1.00-0.00 i
15 %	-2.56-0.67 i	-2.64-2.08 i	-0.01-0.000000 i	-2.22-2.22 i	-2.22-2.22 i
20 %	-3.86-0.70 i	-3.31-2.79 i	-0.08-0.000002 i	-2.97-2.97 i	-2.97-2.97 i
25 %	-4.80-0.62 i	-3.91-4.52 i	-4.02-3.590370 i	-3.73-3.73 i	-3.73-3.73 i
30 %	-4.65-5.18 i	-4.73-4.35 i	-4.48-4.481762 i	-4.48-4.48 i	0.00+0.00 i
35 %	-6.97-0.50 i	-5.34-5.80 i	-5.40-5.077391 i	-5.18-5.18 i	-5.18-5.18 i
40 %	-6.07-6.46 i	-6.12-5.84 i	-5.94-5.941057 i	-5.94-5.94 i	0.00+0.00 i
45 %	-6.81-7.13 i	-6.69-6.69 i	-6.84-6.612848 i	-6.69-6.69 i	-1.00+0.00 i
50 %	-10.31-0.29 i	-7.54-7.79 i	-7.56-7.380422 i	-7.44-7.44 i	-7.44-7.44 i
55 %	-11.36-0.23 i	-8.23-8.42 i	-8.24-8.102693 i	-8.15-8.15 i	-8.15-8.15 i
60 %	-12.47-0.15 i	-8.95-9.09 i	-8.96-8.869988 i	-8.90-8.90 i	-8.90-8.90 i
65 %	-9.76-9.58 i	-9.64-9.65 i	-0.01-0.000000 i	-9.65-9.65 i	-9.65-9.65 i
70 %	-14.69-0.05 i	-10.50-10.33 i	-10.39-10.402588 i	-10.40-10.40 i	-10.40-10.40 i
75 %	-15.70-0.03 i	-11.19-11.05 i	-11.10-11.111126 i	-11.11-11.11 i	-11.11-11.11 i
80 %	-11.83-11.74 i	-11.83-11.88 i	-0.01-0.000000 i	-11.86-11.86 i	-11.86-11.86 i
85 %	-12.58-12.36 i	-12.56-12.65 i	-0.01-0.000000 i	-12.61-12.61 i	-12.61-12.61 i
90 %	-3.09-11.82 i	-12.76-13.51 i	-13.40-13.383023 i	-13.37-13.37 i	-13.37-13.37 i

Tabella A.8: Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sopra dell'1% del limite minimo (μ -Analisi 2 incertezze).

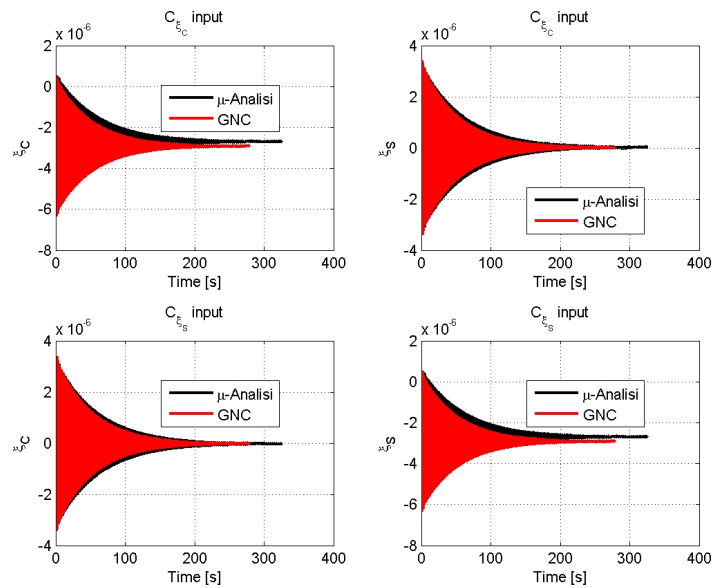


Figura A.8: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 20\%\Omega_0$ al di sopra dell'1% del limite minimo .

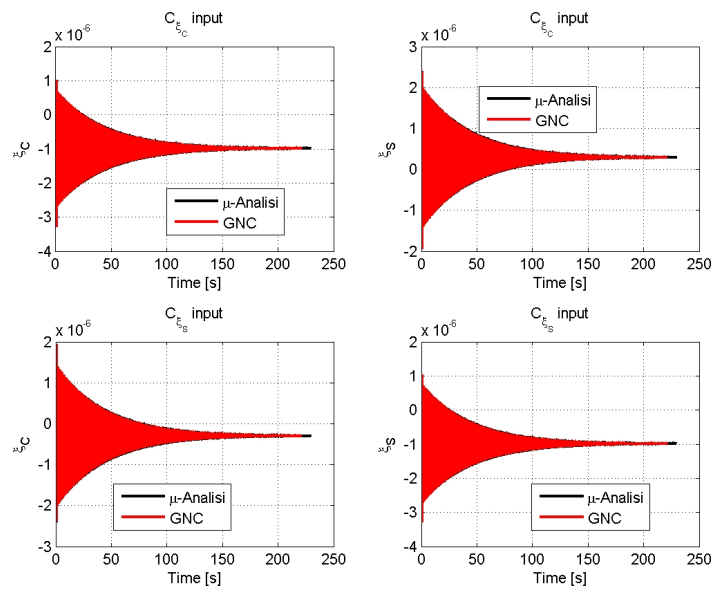


Figura A.9: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 85\%\Omega_0$ al di sopra dell'1% del limite minimo .

►► 4 incertezze

In questo caso, la determinazione delle incertezze limite è differente in quanto se per la μ -Analisi è comunque possibile imporre delle incertezze di tipo strutturato con un intervallo di variabilità ben definito, al contrario attraverso il GNC le incertezze sono di tipo non strutturato. Pertanto, come mostrato in precedenza, sono state utilizzate sostanzialmente due soluzioni differenti: assumendo un massimo scostamento in modulo di ΔK_x e ΔC_x oppure cercando tramite l'ottimizzazione (2.43) la combinazione lineare di ΔK_x e ΔC_x che conducesse alla peggior condizione di instabilità del sistema.

Questa discrepanza tra i due approcci di analisi robusta ha portato comunque al raggiungimento di condizioni di instabilità per il sistema ma con differenti valori delle curve limite per Δk_b e Δc_b . Tuttavia, è necessario anche in questo caso andare a verificare con delle analisi agli autovalori e di risposta nel tempo se effettivamente i limiti imposti rappresentano delle condizioni di divergenza del sistema. I valori forniti dagli algoritmi di calcolo sono riportati nella Tabella A.2, mentre la modalità utilizzata è analoga al caso precedente con 2 incertezze, come riportato nelle Figure A.10, A.11 e A.12.

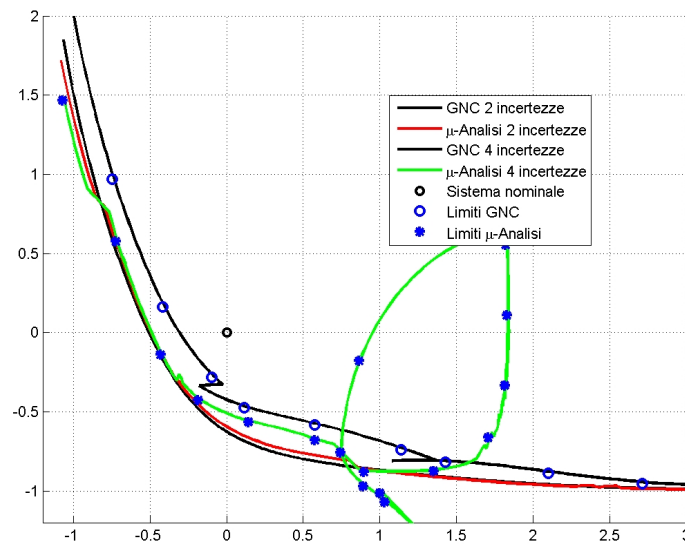


Figura A.10: Visualizzazione dei parametri limite al -1% di variazione (4 incertezze).

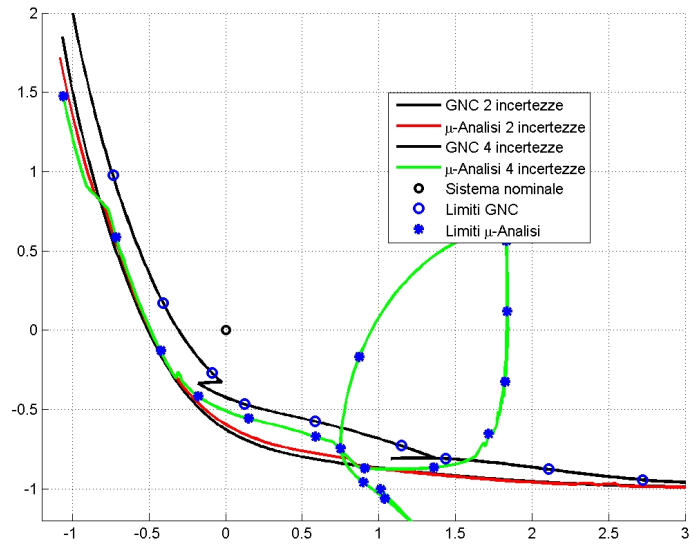


Figura A.11: Visualizzazione dei parametri limite allo 0% di variazione (4 incertezze).

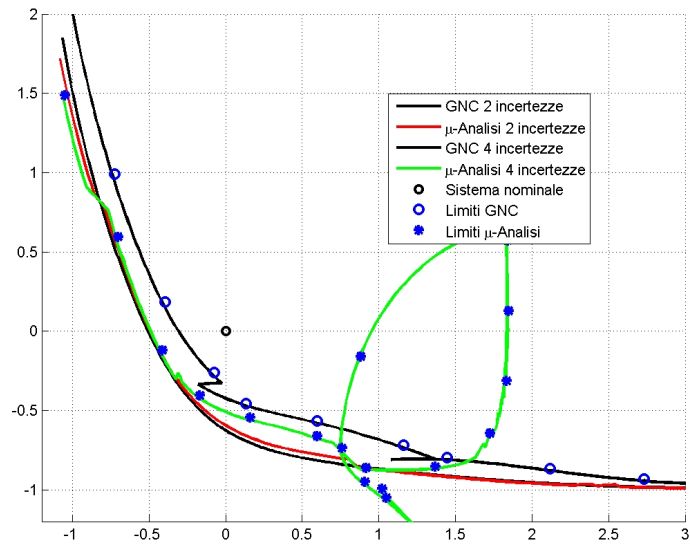


Figura A.12: Visualizzazione dei parametri limite all'1% di variazione (4 incertezze).

Si mostrano pertanto gli autovalori del sistema in Tabella A.9e A.13 in cui vengono utilizzati esattamente i valori limite forniti dall'analisi robusta.

ω/Ω_0	GNC con 4 incertezze: $\delta\Delta = \delta\Delta_{LIM}$			
	$\lambda_1(\mathbf{L})$	$\lambda_2(\mathbf{L})$	$\lambda_3(\mathbf{L})$	$\lambda_4(\mathbf{L})$
5 %	-0.31-42.31 i	-3.41-17.99 i	0.00-1.05 i	-4.55-7.28 i
10 %	-0.33-41.26 i	-3.40-17.97 i	0.00-2.11 i	-4.54-7.28 i
15 %	-0.34-40.25 i	-3.38-17.95 i	0.00-3.14 i	-4.54-7.27 i
20 %	-0.36-39.21 i	-3.37-17.93 i	0.00-4.20 i	-4.54-7.27 i
25 %	-0.38-38.21 i	-3.35-17.90 i	0.00-5.23 i	-4.54-7.27 i
30 %	-0.41-37.18 i	-3.34-17.87 i	0.00-6.29 i	-4.54-7.26 i
35 %	-0.45-36.20 i	-3.32-17.83 i	-0.00-7.32 i	-4.54-7.26 i
40 %	-0.51-35.20 i	-3.29-17.78 i	-0.02-8.37 i	-4.54-7.25 i
45 %	-0.61-34.19 i	-3.26-17.72 i	-0.06-9.44 i	-4.55-7.25 i
50 %	-0.71-33.30 i	-3.23-17.65 i	-0.14-10.38 i	-1.57-8.46 i
55 %	-0.90-32.20 i	-3.19-17.51 i	-0.26-11.60 i	-1.55-8.47 i
60 %	-1.10-31.78 i	-3.17-17.48 i	-0.40-12.54 i	-1.53-14.35 i
65 %	-1.50-30.70 i	-3.12-17.25 i	-0.14-14.03 i	-2.05-14.16 i
70 %	-1.82-29.73 i	-3.13-16.88 i	-0.00-14.92 i	-2.43-14.61 i
75 %	-2.46-29.14 i	-0.25-15.86 i	-3.65-16.65 i	-4.72-13.84 i
80 %	-3.55-28.17 i	-0.13-16.92 i	-4.24-16.47 i	-4.87-13.92 i
85 %	-5.62-26.59 i	-0.07-17.96 i	-5.32-16.75 i	-4.90-14.19 i
90 %	-10.97-23.28 i	-0.03-18.98 i	-5.50-18.94 i	-4.72-14.27 i

Tabella A.9: Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze (GNC 4 incertezze).

Sia dalla Tabella A.13 che dalle Figure A.13², A.14 e A.15 per la risposta nel tempo, si dimostra che, a fronte di diversi limiti forniti dalla μ -Analisi e dal GNC il sistema si trova comunque in una condizione di limite di stabilità, presentando delle oscillazioni nella risposta che non vengono né abbattute né eccitate nel tempo.

²Si noti che per la μ -Analisi si è preferito riportare gli autovalori in formato grafico in quanto l'aggiunta della dinamica associata alle incertezze porta ad un aumento delle dimensioni del problema (26 autovalori).

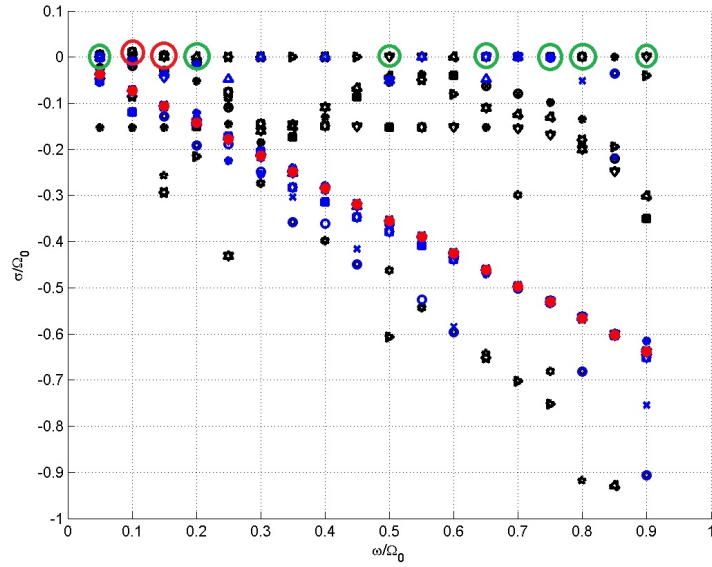


Figura A.13: Andamento della parte reale degli autovalori in funzione della frequenza (μ -Analisi con $\delta\Delta = \delta\Delta_{LIM}$).

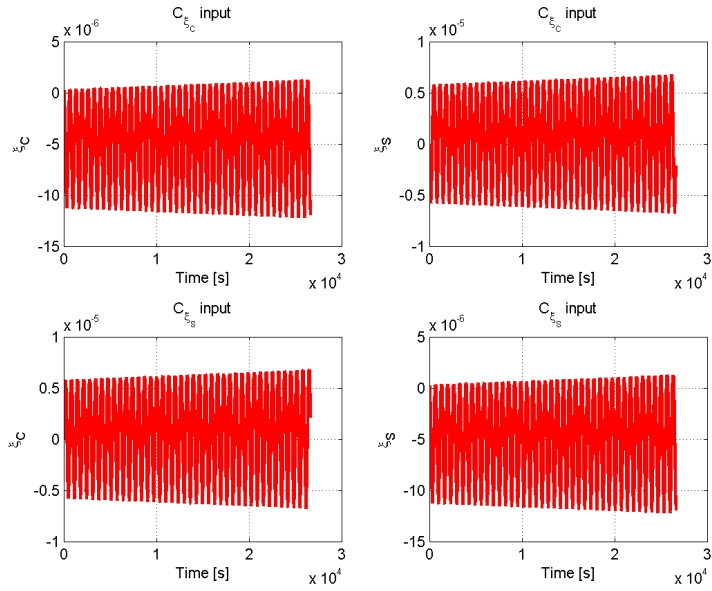


Figura A.14: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 10\%\Omega_0$ (GNC 4 incertezze).

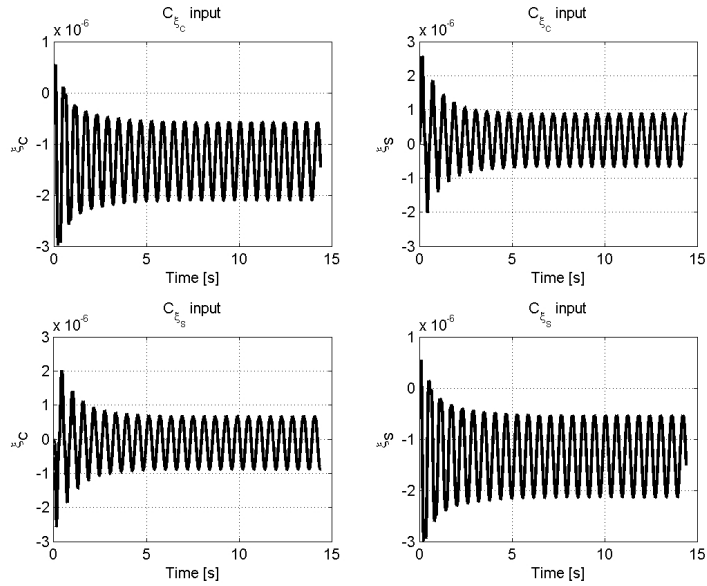


Figura A.15: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 50\%\Omega_0$ (μ -Analisi 4 incertezze).

Per confermare tali risultati, si analizzano dapprima gli autovalori per perturbazioni che non comportano una fuoriuscita dalla regione di stabilità tracciata dai metodi ($\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$) e, in seguito con parametri che coperterebbero un passaggio dei poli nel semipiano destro dello spazio di Argan ($\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$). I risultati per entrambe le casistiche vengono riportati rispettivamente nelle Tabelle A.10 e A.11 per GNC e nelle Figure A.16 e A.17 per μ -Analisi.

ω/Ω_0	GNC con 4 incertezze: $\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$			
	$\lambda_1(\mathbf{L})$	$\lambda_2(\mathbf{L})$	$\lambda_3(\mathbf{L})$	$\lambda_4(\mathbf{L})$
5 %	-0.35-42.30 i	-3.41-17.99 i	-0.03-1.07 i	-4.49-7.51 i
10 %	-0.37-41.25 i	-3.39-17.97 i	-0.03-2.13 i	-4.48-7.51 i
15 %	-0.38-40.23 i	-3.38-17.95 i	-0.03-3.16 i	-4.48-7.51 i
20 %	-0.40-39.19 i	-3.37-17.93 i	-0.03-4.22 i	-4.48-7.51 i
25 %	-0.42-38.19 i	-3.35-17.90 i	-0.03-5.26 i	-4.47-7.50 i
30 %	-0.45-37.16 i	-3.33-17.87 i	-0.03-6.32 i	-4.47-7.50 i
35 %	-0.49-36.18 i	-3.31-17.83 i	-0.04-7.34 i	-4.48-7.49 i
40 %	-0.55-35.17 i	-3.29-17.78 i	-0.05-8.40 i	-4.48-7.49 i
45 %	-0.65-34.16 i	-3.26-17.72 i	-0.09-9.48 i	-4.49-7.48 i
50 %	-0.75-33.27 i	-3.23-17.64 i	-0.17-10.41 i	-1.64-8.62 i
55 %	-0.94-32.16 i	-3.19-17.51 i	-0.29-11.64 i	-1.62-8.63 i
60 %	-1.15-31.74 i	-3.17-17.47 i	-0.43-12.60 i	-1.60-14.23 i
65 %	-1.55-30.66 i	-3.12-17.23 i	-0.15-14.05 i	-2.13-14.10 i
70 %	-1.87-29.68 i	-3.14-16.85 i	-0.10-14.94 i	-2.47-14.56 i
75 %	-2.49-29.18 i	-0.31-15.82 i	-3.63-16.64 i	-4.67-13.76 i
80 %	-3.49-28.23 i	-0.16-16.86 i	-4.20-16.46 i	-4.81-13.85 i
85 %	-5.55-26.67 i	-0.10-17.91 i	-5.30-16.71 i	-4.83-14.10 i
90 %	-10.80-23.33 i	-0.07-18.95 i	-5.56-18.92 i	-4.65-14.18 i

Tabella A.10: Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sopra dell'1% del limite minimo (GNC 4 incertezze).

ω/Ω_0	GNC con 4 incertezze: $\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$			
	$\lambda_1(\mathbf{L})$	$\lambda_2(\mathbf{L})$	$\lambda_3(\mathbf{L})$	$\lambda_4(\mathbf{L})$
5 %	-0.29-42.32 i	-3.41-17.99 i	0.01-1.04 i	-4.58-7.16 i
10 %	-0.31-41.27 i	-3.40-17.97 i	0.01-2.10 i	-4.57-7.16 i
15 %	-0.32-40.26 i	-3.38-17.95 i	0.01-3.13 i	-4.57-7.15 i
20 %	-0.34-39.22 i	-3.37-17.93 i	0.01-4.19 i	-4.57-7.15 i
25 %	-0.36-38.22 i	-3.35-17.90 i	0.01-5.22 i	-4.57-7.15 i
30 %	-0.39-37.19 i	-3.34-17.87 i	0.01-6.28 i	-4.57-7.14 i
35 %	-0.43-36.21 i	-3.32-17.83 i	0.01-7.30 i	-4.57-7.14 i
40 %	-0.49-35.21 i	-3.29-17.79 i	-0.00-8.36 i	-4.57-7.13 i
45 %	-0.59-34.20 i	-3.27-17.72 i	-0.04-9.43 i	-4.58-7.13 i
50 %	-0.68-33.31 i	-3.23-17.65 i	-0.12-10.36 i	-1.54-8.38 i
55 %	-0.88-32.21 i	-3.19-17.52 i	-0.25-11.58 i	-1.52-8.39 i
60 %	-1.08-31.80 i	-3.17-17.48 i	-0.39-12.51 i	-1.50-14.41 i
65 %	-1.48-30.73 i	-3.12-17.26 i	-0.14-14.02 i	-2.00-14.19 i
70 %	-1.80-29.75 i	-3.12-16.90 i	0.16-14.90 i	-2.41-14.64 i
75 %	-2.45-29.12 i	-0.22-15.88 i	-3.66-16.66 i	-4.75-13.88 i
80 %	-3.58-28.14 i	-0.12-16.95 i	-4.26-16.48 i	-4.91-13.96 i
85 %	-5.66-26.55 i	-0.05-17.98 i	-5.33-16.77 i	-4.94-14.23 i
90 %	-11.05-23.25 i	-0.02-18.99 i	-5.46-18.95 i	-4.75-14.31 i

Tabella A.11: Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sotto dell'1% del limite minimo(GNC 4 incertezze).

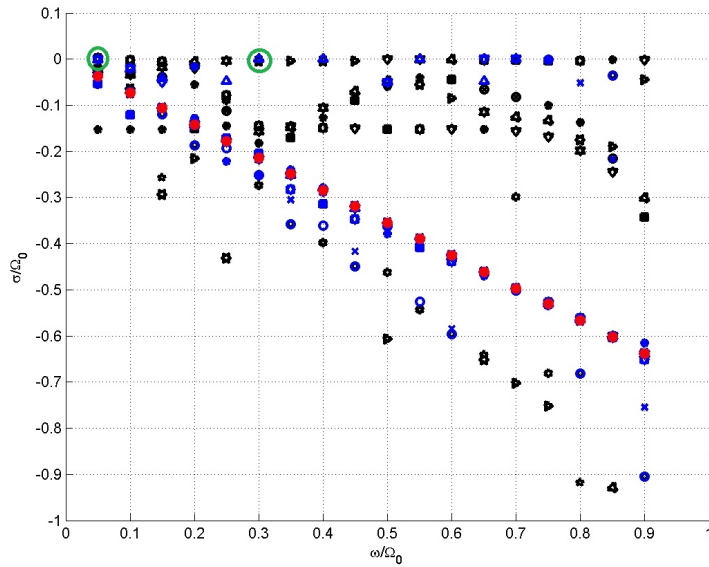


Figura A.16: Andamento della parte reale degli autovalori in funzione della frequenza (μ -Analisi con $\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$).

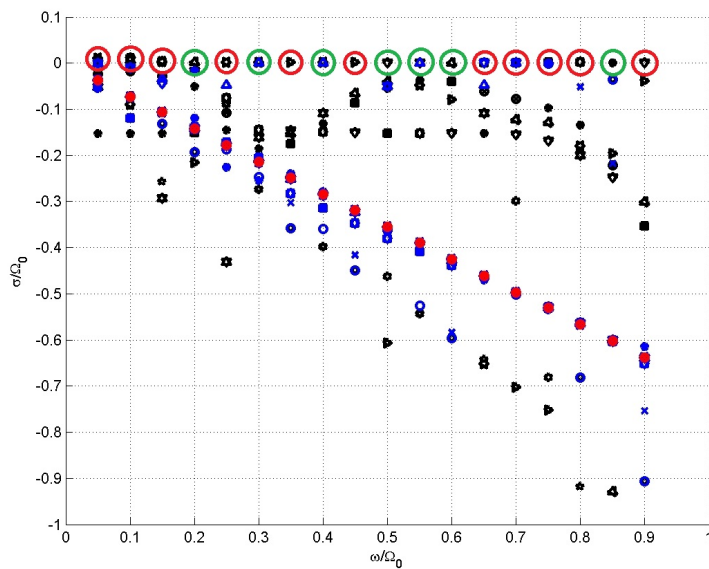


Figura A.17: Andamento della parte reale degli autovalori in funzione della frequenza (μ -Analisi con $\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$).

Si considerano a titolo esemplificativo due analisi di risposta nel tempo per GNC e μ -Analisi; in particolare in Figure (A.18, A.19) e (A.20, A.21) si mostrano rispettivamente i ciclici coseno e seno ottenuti attraverso la risposta allo scalino selezionando i valori limite al 101 % e al 99 %. Come atteso, nel rispetto delle analisi agli autovalori riportate, nel primo caso si ha un andamento divergente della risposta in quanto il sistema si presenta instabile; nell'altro, invece, avendo selezionato dei valori contenuti all'interno della regione di stabilità delimitata dalle curve limite delle incertezze, si ha un andamento smorzato nel tempo che tende a raggiungere il relativo valore di regime.

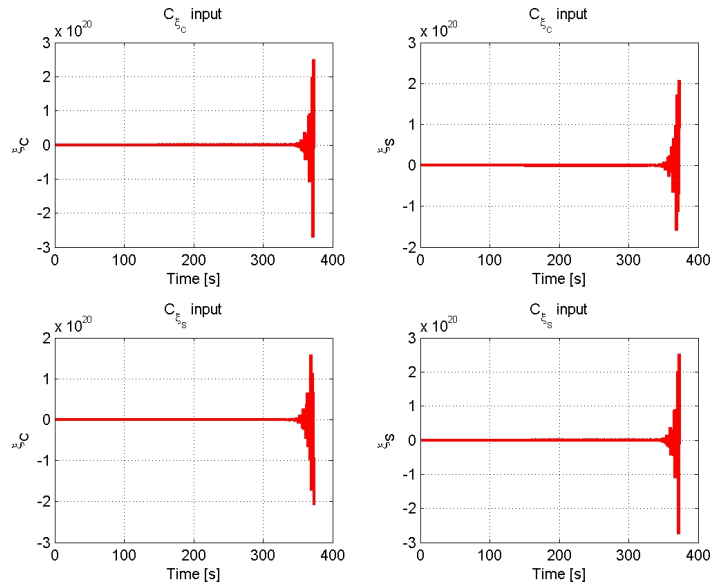


Figura A.18: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 10\%\Omega_0$ (GNC con $\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$).

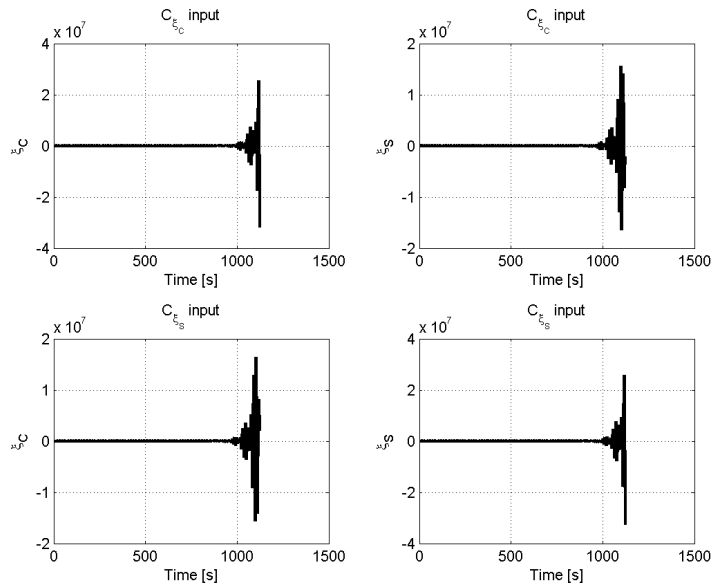


Figura A.19: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 50\%\Omega_0$ (μ -Analisi con $\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$).

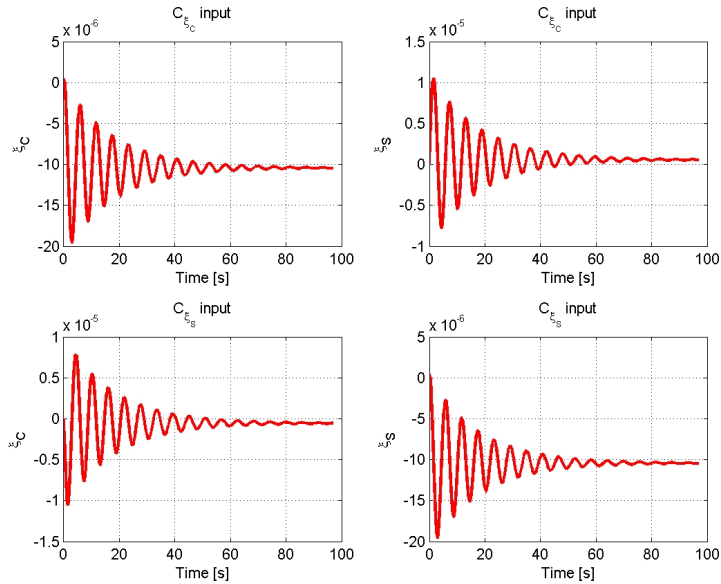


Figura A.20: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 5\%\Omega_0$ (GNC con $\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$).

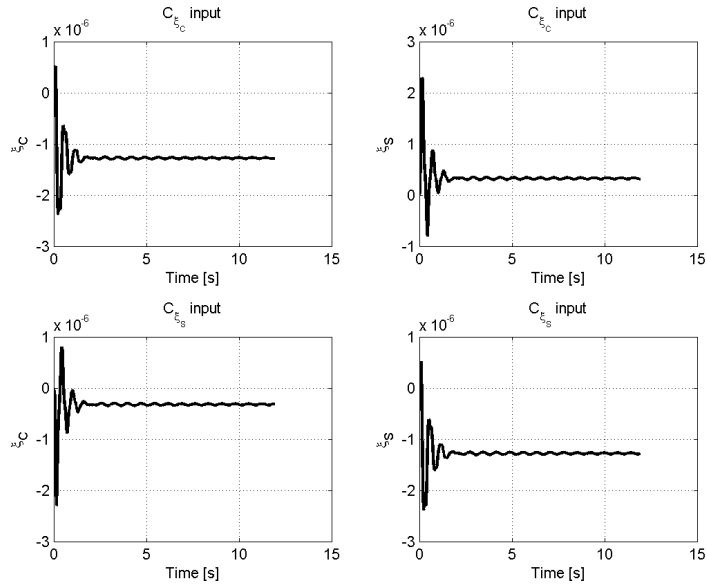


Figura A.21: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 40\%\Omega_0$ (μ -Analisi con $\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$).

A.2 Validazione dei risultati per il Puma IAR 330

Al fine di qualificare la bontà dei risultati ottenuti attraverso l'analisi robusta effettuata sul Puma IAR 330 è necessario condurre delle analisi agli autovalori e di risposta nel tempo del sistema affetto dalle incertezze limite riportate nel paragrafo 3.4.

Pertanto, parallelamente sia con la μ -Analisi che con il criterio generalizzato di Nyquist, sono stati selezionati i valori di Δk_b , Δc_b , ΔK_{FCS} e ΔT_{FCS} delle curve limite di ciascun metodo a differenti frequenze secondo le seguenti tabelle.

ω/Ω	GNC		μ -Analisi	
	Δk_b	Δc_b	Δk_b	Δc_b
5%	11.3343	-1.0158	10.1541	-1.0175
10%	10.0846	-1.0158	8.9955	-1.0172
15%	8.9066	-1.0159	8.0783	-1.0231
20%	7.8998	-0.9735	7.0548	-0.9273
25%	6.6951	-1.0120	5.9839	-1.0216
30%	5.6723	-1.0137	5.2139	-1.0087
35%	4.7582	-1.0138	4.3283	-1.0138
40%	3.9115	-1.0130	3.5142	-1.0127
45%	3.1361	-1.0068	2.8885	-1.0062
50%	2.3656	-1.0021	2.1410	-1.0056
55%	1.7317	-1.0126	1.5202	-1.0127
60%	1.1262	-1.0117	1.0457	-1.0116
65%	0.6164	-1.0060	0.5712	-0.9454
70%	0.1727	-0.9810	0.1768	-0.9192
75%	-0.2486	-0.9631	-0.2712	-0.8988
80%	-0.5406	-0.9745	-0.5743	-0.8885
85%	-0.7858	-0.8230	-0.7624	-0.7624
90%	-1.0419	-0.5532	-1.0154	-0.5420

Tabella A.12: Parametri limite per le analisi nel tempo e agli autovalori del sistema (2 incertezze).

ω/Ω	GNC				μ -Analisi			
	Δk_b	Δc_b	ΔK_{FCS}	ΔT_{FCS}	Δk_b	Δc_b	ΔK_{FCS}	ΔT_{FCS}
5%	11.3461	-1.0158	2.0000	0.5000	10.1281	-1.0158	-20.2563	-2.2820
10%	10.0658	-1.0158	2.0000	0.5000	9.0410	-1.0159	-18.0821	-2.0102
15%	8.9296	-1.0159	2.0000	0.5000	8.0047	-1.0163	-16.0094	-1.7511
20%	7.8952	-0.9705	2.0000	0.5000	7.0473	-0.9135	14.0946	-1.5118
25%	6.6660	-1.0121	2.0000	0.5000	6.0451	-1.0131	-12.0903	-0.9109
30%	5.6667	-1.0137	2.0000	0.5000	5.1811	-1.0068	-10.3622	-1.0452
35%	4.7844	-1.0138	2.0000	0.5000	4.3704	-1.0050	-8.7409	-0.8426
40%	3.9157	-1.0130	2.0000	0.5000	3.5799	-1.0129	-7.1599	1.1449
45%	3.1220	-1.0064	2.0000	0.5000	2.8736	-1.0056	-5.7472	0.9684
50%	2.3369	-1.0038	2.0000	0.5000	2.1932	-1.0036	-4.3865	0.7983
55%	1.7266	-1.0126	2.0000	0.5000	1.5843	-1.0098	-3.1686	-0.1460
60%	1.1341	-1.0117	-2.0000	-0.5000	1.0461	-1.0116	-0.0137	0.2499
65%	0.6116	-1.0059	-2.0000	-0.5000	0.6058	-0.9470	1.8940	0.0132
70%	0.1582	-0.9793	-2.0000	-0.5000	0.1613	-0.9207	1.8414	0.0198
75%	-0.2482	-0.9630	-2.0000	-0.5000	-0.2596	-0.9042	-1.8084	0.0239
80%	-0.5464	-0.9734	2.0000	0.5000	-0.5484	-0.8974	-1.7949	0.0256
85%	-0.7859	-0.8228	2.0000	0.5000	-0.7636	-0.7636	-0.0010	0.2500
90%	-1.0478	-0.5483	2.0000	0.5000	-1.0043	-0.5514	0.0010	0.2500

Tabella A.13: Parametri limite per le analisi nel tempo e agli autovalori del sistema (4 incertezze).

Per verificare che effettivamente il sistema dotato delle caratteristiche sopra elencate fosse effettivamente al limite di stabilità sono state considerate come in precedenza le seguenti condizioni:

- GNC con valori tabulati;
- GNC con valori tabulati aumentati dell'1%;
- μ -Analisi con valori tabulati;
- μ -Analisi con valori tabulati aumentati dell'1%;

Si evidenziano gli autovalori stabili con colore nero, quelli al limite di stabilità con colore verde e quelli instabili con colore rosso.

Per quanto riguarda, invece le analisi nel tempo, si mostra per ogni frequenza delle Tabelle A.12 e A.13, un confronto tra GNC e μ -Analisi in termini di risposta nel tempo delle uscite di posizione di ritardo ξ_0 , ξ_C , ξ_S e $\xi_{N/2}$ dovute ad una forzante a gradino applicata alle coppie degli smorzatori C_0 , C_C , C_S e $C_{N/2}$.

➡ **2 incertezze**

Nelle Figure A.22 e A.23 si mostra la scelta dei parametri limite secondo le direttive sopra elencate per meglio comprendere le condizioni del sistema nelle analisi presentate in seguito.

Come visibile nelle Figure A.24 e A.25, nel caso in cui vengano selezionati esattamente i valori limite forniti dalle curve nello spazio delle incertezze degli smorzatori, gli autovalori sono stabili³.

Parallelamente, si propone nelle Figure A.26 e A.27 l'analisi nel tempo associata alla scelta dei parametri tabulati a $\omega/\Omega = 10\%$ e a $\omega/\Omega = 90\%$. Come atteso la soluzione mostra un ciclo limite con oscillazioni che non si smorzano nel tempo.

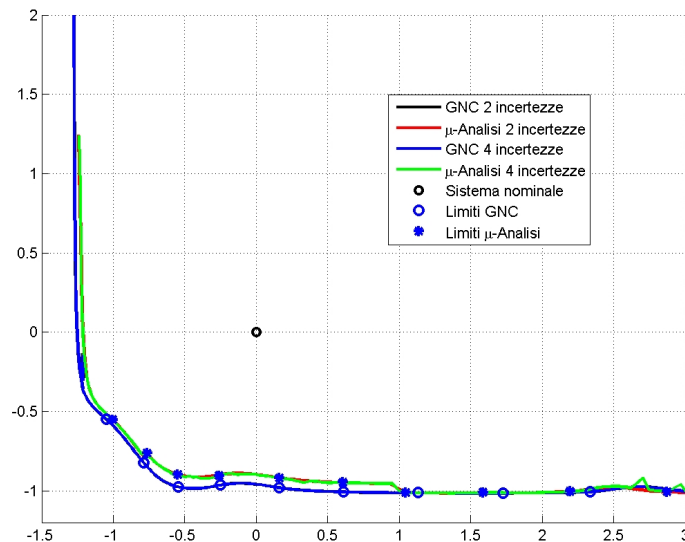


Figura A.22: Visualizzazione dei parametri limite allo 0% di variazione (2 incertezze).

³Si ricorda che per semplificare l'esposizione dei risultati sono stati omessi i complessi coniugati degli autovalori riportati nelle tabelle.

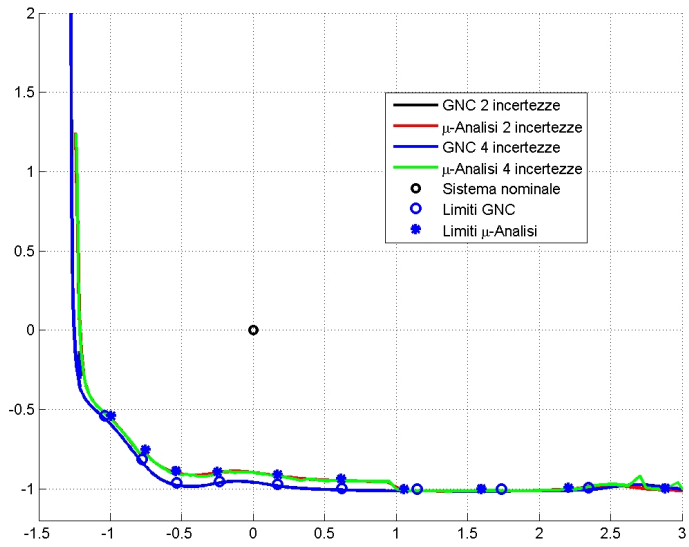


Figura A.23: Visualizzazione dei parametri limite all'1% di variazione (2 incertezze).

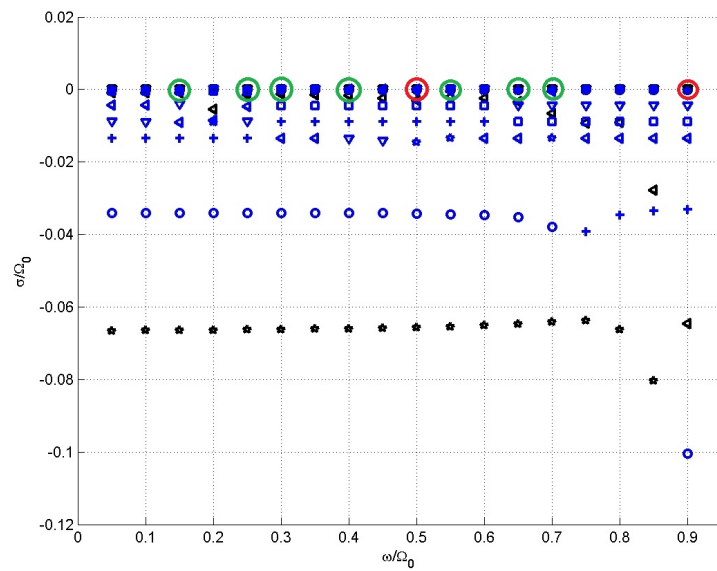


Figura A.24: Autovalori nelle frequenze selezionate per GNC (2 incertezze).

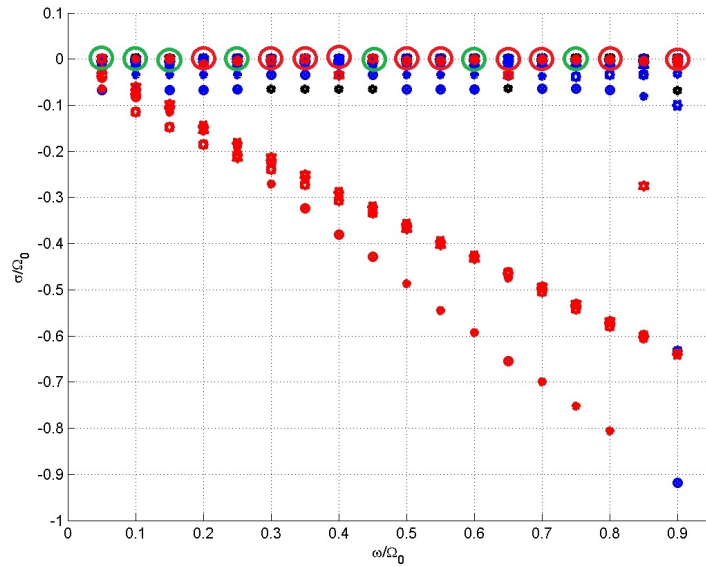


Figura A.25: Autovalori nelle frequenze selezionate per μ -Analisi (2 incertezze).

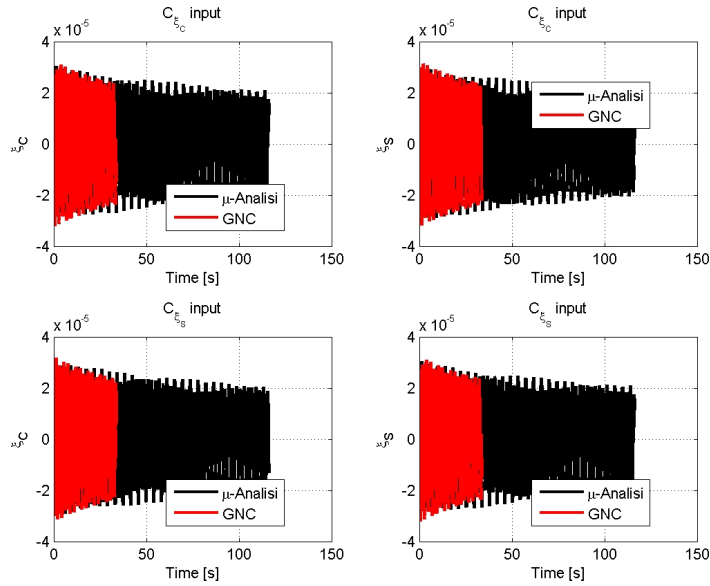


Figura A.26: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 10\%\Omega$ (2 incertezze).

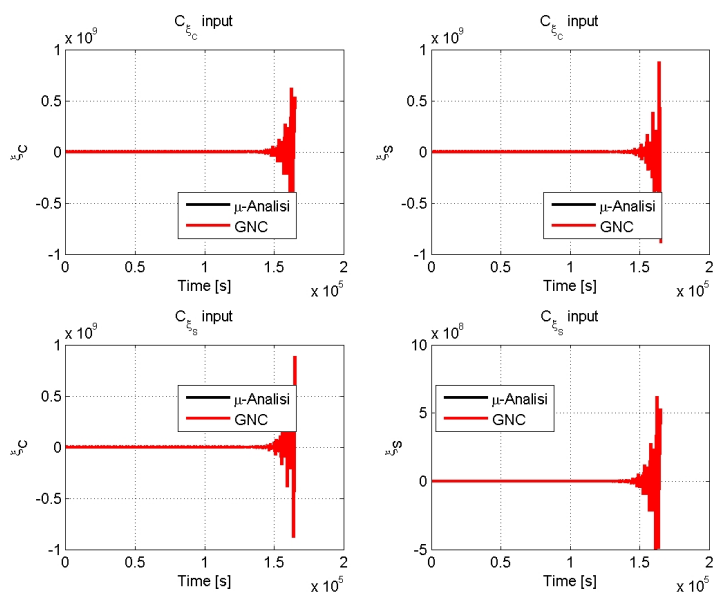


Figura A.27: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 90\% \Omega$ (2 incertezze).

Al fine di confermare la correttezza delle analisi robuste effettuate vengono mostrati rispettivamente nelle Figure A.28 e A.29 gli autovalori del sistema calcolati imponendo i parametri limite al di sopra dell'1% della curva determinata come segnalato in Figura A.23.

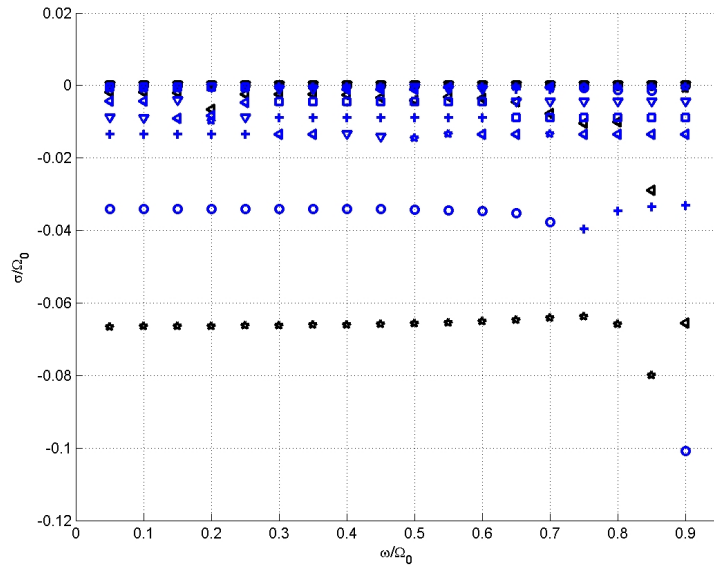


Figura A.28: Autovalori per GNC con parametri al di sopra dell'1% del limite minimo (2 incertezze).

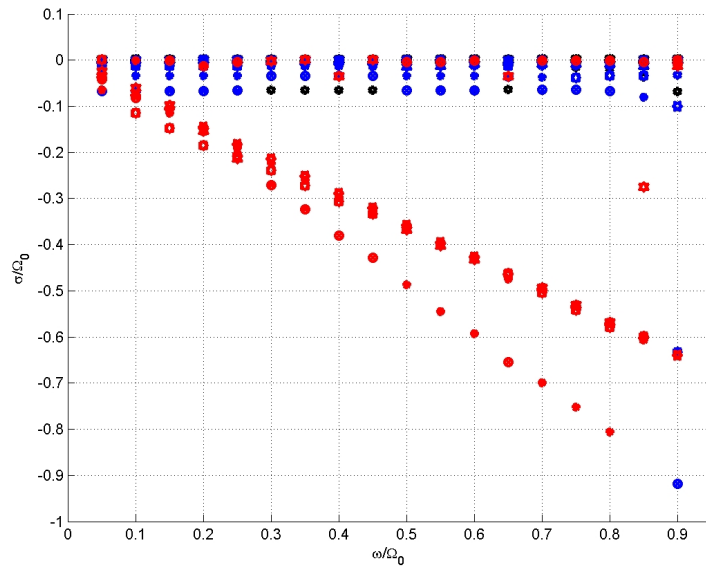


Figura A.29: Autovalori per μ -Analisi con parametri al di sopra dell'1% del limite minimo (2 incertezze).

In questo caso, si mostra come gli autovalori siano complessivamente stabili e quindi tali da evitare l'insorgere di un comportamento dinamico divergente nelle risposte nel tempo; infatti, dai grafici riportati in Figura A.30 e A.31, si nota come l'andamento del moto ciclico seno e ciclico coseno di ritardo sia stabile a fronte di una perturbazione a gradino delle coppie di ritardo in ingresso (sono stati riportati solo gli esempi relativi a $\omega = 20\%\Omega$ e $\omega = 70\%\Omega$ ma qualitativamente la risposta del sistema rimane invariata per tutti i restanti casi).

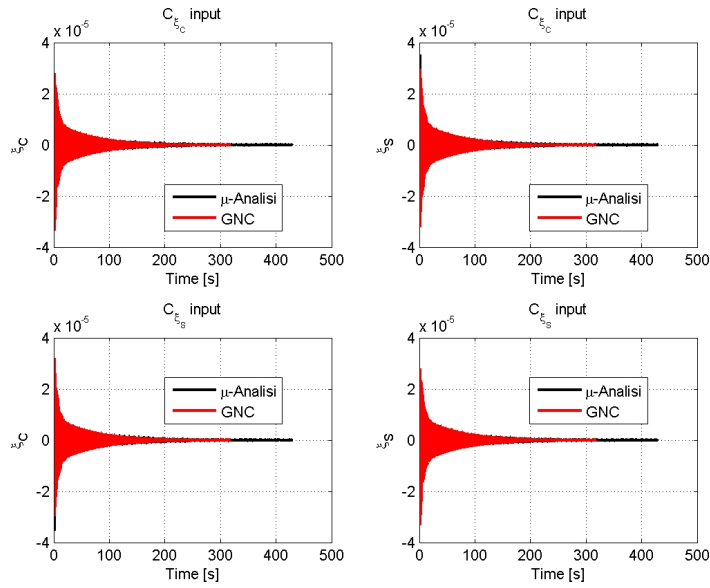


Figura A.30: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 20\%\Omega$ al di sopra dell'1% del limite minimo (2 incertezze).

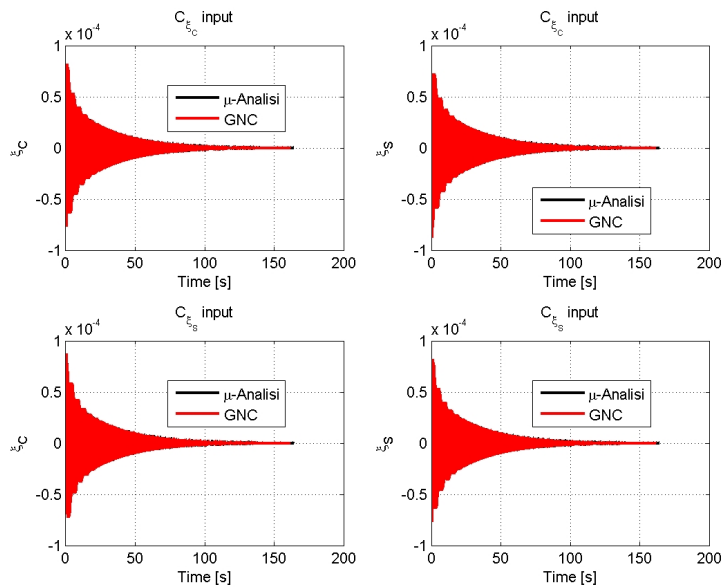


Figura A.31: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 70\%\Omega$ al di sopra dell'1% del limite minimo (2 incertezze).

➡ **4 incertezze**

Si riportano i risultati anche per il caso di 4 incertezze evidenziando come i risultati ottenuti siano del tutto analoghi ai precedenti e dimostrino sostanzialmente che entrambi i metodi stabiliscono dei valori limite di stabilità dei parametri incerti. Se ne riporta una selezione nelle Figure A.32 e A.33.

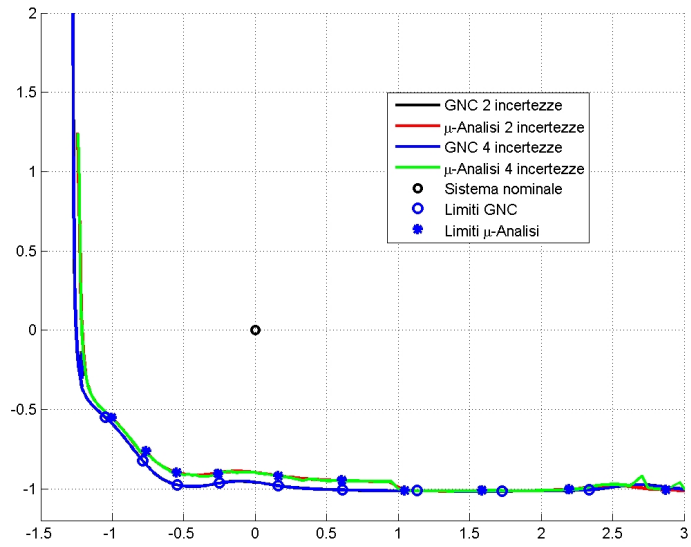


Figura A.32: Visualizzazione dei parametri limite allo 0% di variazione (4 incertezze).

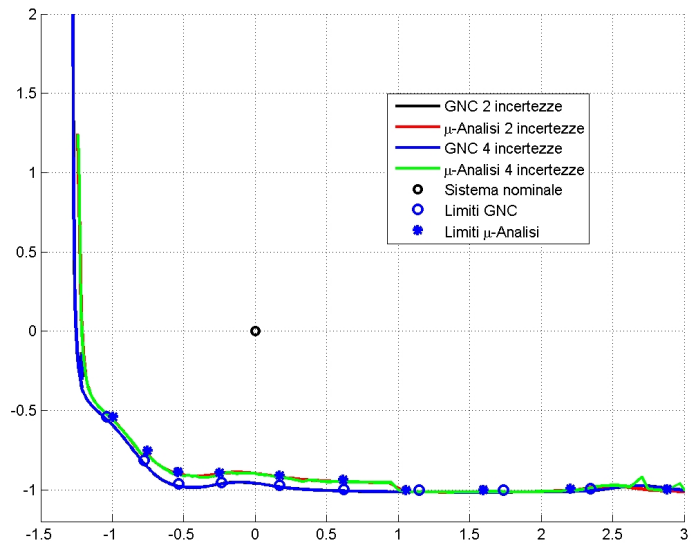


Figura A.33: Visualizzazione dei parametri limite all'1% di variazione (4 incertezze).

Si mostrano pertanto gli autovalori del sistema in Figura A.34 e A.35 in cui vengono utilizzati esattamente i valori limite forniti dall'analisi robusta.

Le risposte nel tempo nelle Figure A.14 e A.15 dimostrano il ciclo limite che si instaura al limite di stabilità.

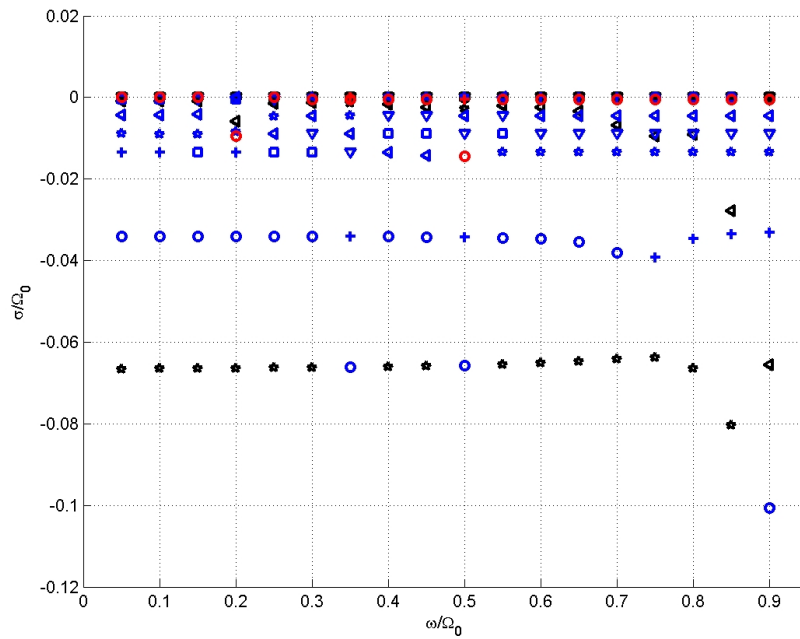


Figura A.34: Autovalori nelle frequenze selezionate per GNC (4 incertezze).

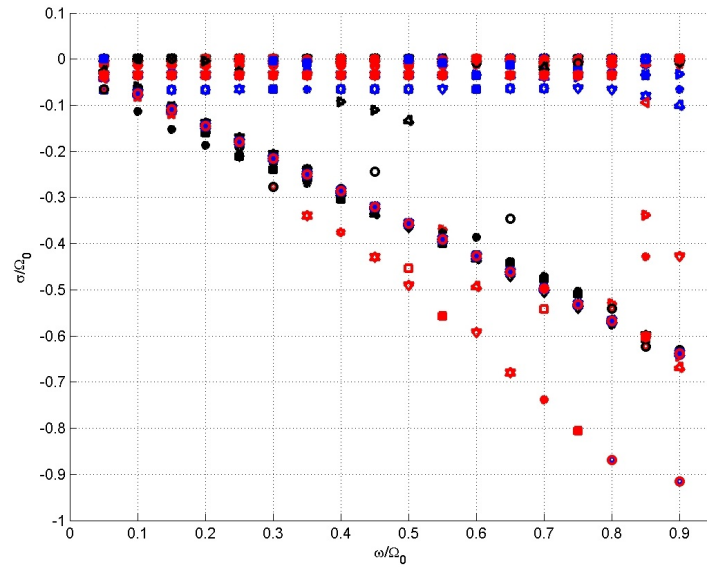


Figura A.35: Autovalori nelle frequenze selezionate per μ -Analisi (4 incertezze).

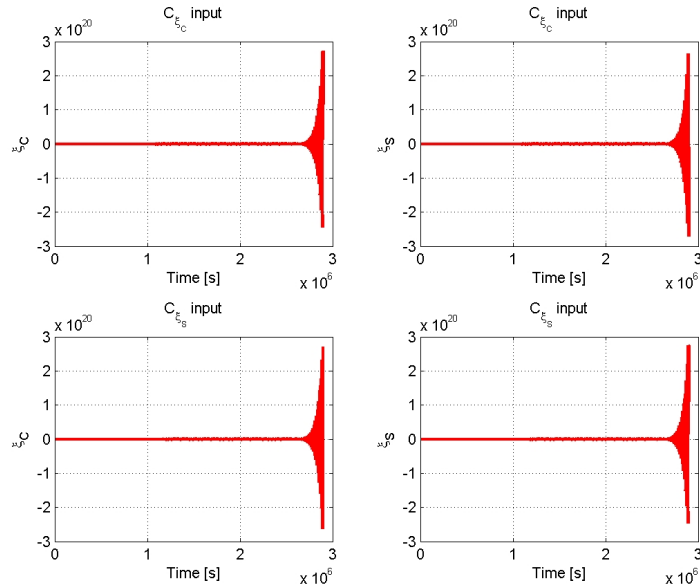


Figura A.36: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 20\% \Omega$ (GNC 4 incertezze).

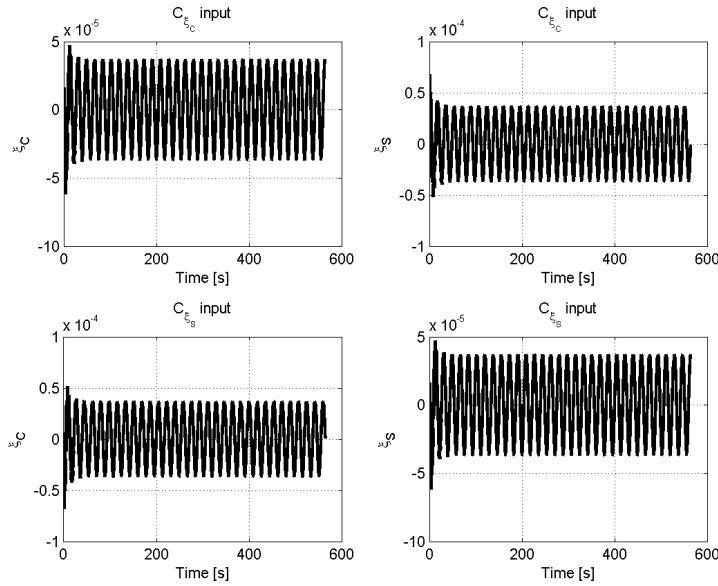


Figura A.37: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 60\% \Omega$ (μ -Analisi 4 incertezze).

Per confermare tali soluzioni, si riportano gli autovalori per perturbazioni che non comportano una fuoriuscita dalla regione di stabilità tracciata dai metodi ($\delta\Delta = 99\% \delta\Delta_{LIM}$).

I risultati vengono mostrati rispettivamente nelle Figure A.38 e A.39 per GNC e μ -Analisi ai quali si associano nelle Figure A.40 A.41 le rispettive analisi di risposta nel tempo. Per tutti i parametri limiti selezionati all'interno della regione di stabilità il sistema risulta essere stabile per entrambi i metodi di analisi robusta.

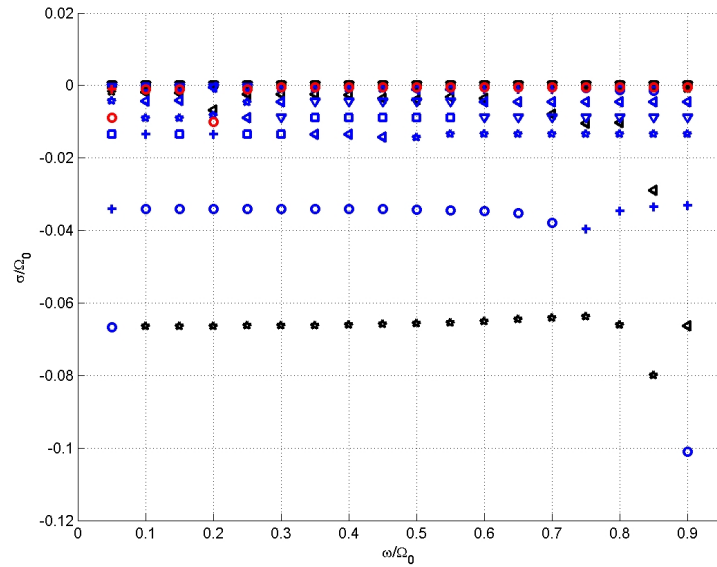


Figura A.38: Autovalori per GNC con parametri al di sopra dell'1% del limite minimo (4 incertezze).

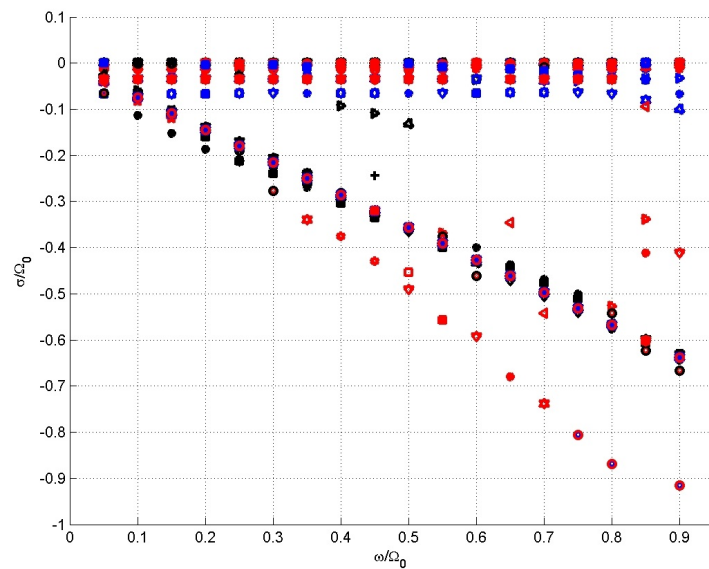


Figura A.39: Autovalori per μ -Analisi al di sopra dell'1% del limite minimo (4 incertezze).

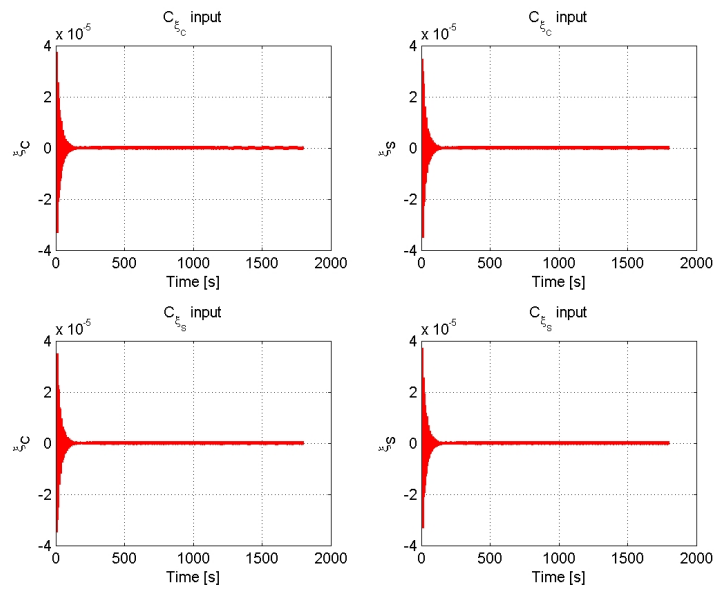


Figura A.40: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 40\%\Omega$ al di sopra dell'1% del limite minimo (GNC 4 incertezze).

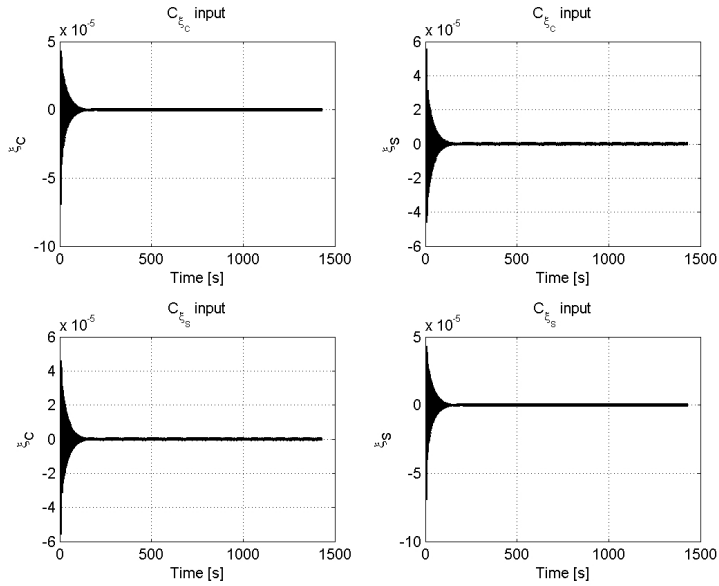


Figura A.41: Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 65\%\Omega$ al di sopra dell'1% del limite minimo (μ -Analisi 4 incertezze).

Analisi robusta dei sistemi SISO LTV: l'equazione di Mathieu

Al fine di acquisire dimestichezza con la derivazione delle funzioni descrittive si è trattato il caso periodico semplificato associato all'equazione di Mathieu. Essa rappresenta un oscillatore quasi-armonico la cui pulsazione è una funzione sinusoidale del tempo.

$$\ddot{x} + (w_n^2 - M \sin(\omega_0 t + \theta)) x = 0, \text{ in cui } |M| < w_n^2 \quad (\text{B.1})$$

In questo caso, la frequenza propria del sistema in assenza di periodicità risulta essere evidentemente w_n ; l'introduzione nel sistema di una variazione $\Delta\omega^2(M, \theta)$ della pulsazione critica ne modifica il comportamento dinamico. In realtà, dal momento che in genere si è interessati alla asintotica stabilità, omettere lo smorzamento all'interno della (B.1) porterebbe a ottenere una soluzione oscillante per definizione; pertanto si considera il caso dell'equazione di Mathieu smorzata con un coefficiente di smorzamento $\xi = 0.001$ e un ipotetico ingresso di controllo u .

$$\ddot{x} + 2\xi_n w_n \dot{x} + (w_n^2 - M \sin(\omega_0 t + \theta)) x + u = 0 \quad (\text{B.2})$$

Lo schema a blocchi del sistema è riportato in Figura B.1.

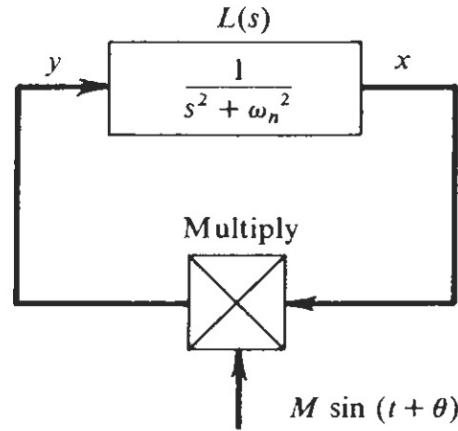


Figura B.1: Schema a blocchi dell'equazioni di Mathieu [4].

Prima di procedere con la determinazione dei limiti ammissibile per $\Delta\omega^2(M, \theta)$ occorre esplicitare il sistema agli stati del secondo ordine di tale equazione. Detto $\mathbf{x} = \{x, \dot{x}\}^T$ il vettore degli stati e selezionati come uscite $y = x$ si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2\xi_n w_n \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = [0 \quad 1].$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

B.1 μ -Analisi e GNC

Si effettua quindi un'analisi robusta del sistema in presenza di incertezze sul fattore di smorzamento $\delta\xi$ e sulla variazione della frequenza propria $\delta\omega^2$ dovuta alla perturbazione armonica. I limiti considerati per la μ -Analisi sono i seguenti:

$$\delta\omega_n^2 = w_n^2 \left(1 + \frac{\delta\omega^2}{w_n^2}\right) \text{ in cui } \delta_1 = \frac{\delta\omega^2}{w_n^2} = [-50\%, 50\%] \quad (\text{B.3})$$

$$\delta\xi_n = \xi_n \left(1 + \frac{\delta\xi}{\xi_n}\right) \text{ in cui } \delta_2 = \frac{\delta\xi}{\xi_n} = [-50\%, 50\%] \quad (\text{B.4})$$

$$(\text{B.5})$$

Per quanto concerne invece il criterio generalizzato di Nyquist, si procede in maniera analoga a quanto riportato per l'elicottero semplificato e il Puma IAR 330, determinando guadagno generalizzato $\rho e^{j\theta\rho}$ attraverso gli autovalori del sistema in anello chiuso e valori limite delle incertezze $\delta\Delta$ tramite la risoluzione del sistema lineare $\mathbf{G}_b\delta\Delta = \rho$.

$$\rho_i(\omega)e^{j\theta_i} = -(\lambda_i(\mathbf{L}_0(j\omega)) + 1)$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i) & \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i) \\ \operatorname{Im}(\frac{1}{2\omega_n} \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i) & \operatorname{Im}(\frac{1}{2\omega_n} j\omega \mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\omega^2 \\ \delta\xi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_i \cos \theta_{\rho i} \\ \rho_i \sin \theta_{\rho i} \end{Bmatrix}$$

B.2 Funzione descrittiva per ingresso sinusoidale (SIDF SISO)

Applicando le formule precedentemente determinate in (4.5) e (4.6), considerando la presenza dell'operatore non lineare $y(x, \dot{x}) = -M \sin(\omega_0 t + \theta)x$, è possibile determinare la funzione descrittiva $N_A(M, \theta, \omega_0, \omega)$ parametrizzata in funzione dell'ampiezza della sinusoide, della frequenza di disturbo del sistema e dello sfasamento che essa introduce. Si ricorda che l'ottenimento dell'espressione analitica in forma chiusa è circoscritto a semplici casi come l'equazione di Mathieu, sostanzialmente utili più in senso didattico che applicativo.

Si consideri inizialmente il caso in cui il sistema si trova in stabilità semplice con un'unica armonica:

$$x(t) = A \sin \omega t \tag{B.6}$$

in cui:

$$n_p(M, \theta, \omega) = \frac{2M\omega^3 (-\cos \theta + \cos(\theta + \frac{2\pi\omega_0}{\omega}))}{\pi(\omega_0^3 - 4\omega^2\omega_0)} \tag{B.7}$$

$$n_q(M, \theta, \omega) = \frac{M\omega^2 (-\sin \theta + \sin(\theta + \frac{2\pi\omega_0}{\omega}))}{\pi(\omega_0^3 - 4\omega^2\omega_0)} \tag{B.8}$$

$$N_A(M, \theta, \omega_0, \omega) = n_p(M, \theta, \omega_0, \omega) + jn_q(M, \theta, \omega_0, \omega) \tag{B.9}$$

La frequenza critica che occorre ispezionare è sicuramente quella che annulla il denominatore della funzione descrittiva in quanto comporterebbe l'introdu-

zione nel sistema di una forzante sinusoidale di ampiezza infinita; si effettua quindi un limite per $\omega \rightarrow 1/2\omega_0$ di $N_A(M, \theta, \omega_0, \omega)$.

$$N_A(M, \theta) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{1}{2}\omega_0} N_A(M, \theta, \omega_0, \omega) = \frac{M}{2}(-\sin \theta + j \cos \theta) = \frac{M}{2}e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

Sfruttando lo schema riportato in Figura B.1 si determina la funzione di trasferimento d'anello del sistema, la quale viene successivamente valutata in corrispondenza della frequenza critica individuata in $\omega = 1/2\omega_0$. In questo modo è possibile determinare il limite di stabilità considerando il modulo di $L(j1/2\omega_0) = 1$. In base alla frequenza dell'armonica che perturba il sistema è quindi possibile effettuare uno studio del limite di stabilità del sistema periodico valutando l'influenza a ω_0 fissata di ampiezza M e fase θ sul valore della frequenza propria w_n^2 .

La procedura di calcolo della DF è stata applicata anche con l'aggiunta di ulteriori armoniche dispari alla soluzione, coerentemente a quanto fatto in [4], in modo da poter effettuare un confronto dei risultati ottenuti.

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin (\omega t + \psi) \quad (\text{B.10})$$

$$x(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin (2\omega t + \psi) \quad (\text{B.11})$$

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin (\omega t + \psi_3) + A_5 \sin (\omega t + \psi_5) \quad (\text{B.12})$$

Vengono ricavate le funzioni descrittive ricorrendo nuovamente alla (4.4) per ciascuna armonica. Per quanto riguarda la (B.10) si è ottenuto:

$$N_{A_1}(M, \theta) = \frac{M}{2}(e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} + e^{j(\psi - \theta + \frac{\pi}{2})}), \text{ con } \omega \rightarrow \frac{1}{2}\omega_0$$

$$N_{A_3}(M, \theta) = -\frac{M}{2} \frac{A_1}{A_3} e^{j(\theta - \psi + \frac{\pi}{2})}, \text{ con } \omega \rightarrow \frac{1}{2}\omega_0$$

Per l'armonica pari le funzioni descrittive sono:

$$N_{A_0}(M, \theta) = \frac{M}{2}(e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\theta + \frac{\pi}{2})}), \text{ con } \omega \rightarrow \omega_0$$

$$N_{A_1}(M, \theta) = \frac{M}{2} \left(\frac{A_2}{A_1} e^{j(\psi - \theta + \frac{\pi}{2})} + 2 \frac{A_0}{A_1} e^{j\theta} \right), \text{ con } \omega \rightarrow \omega_0$$

$$N_{A_2}(M, \theta) = -\frac{M}{2} \frac{A_1}{A_2} e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})}, \text{ con } \omega \rightarrow \omega_0$$

Con la quinta sinusoide della (B.12) invece si ha:

$$\begin{aligned} N_{A_1}(M, \theta) &= \frac{M}{2} (e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})} + e^{j(\psi_3-\theta+\frac{\pi}{2})}), \text{ con } \omega \rightarrow \frac{1}{2}\omega_0 \\ N_{A_3}(M, \theta) &= \frac{M}{2} \left(-\frac{A_1}{A_3} e^{j(\frac{\pi}{2}-\psi_3+\theta)} + \frac{A_5}{A_3} e^{j(\frac{\pi}{2}-\psi_3+\psi_5-\theta)} \right), \text{ con } \omega \rightarrow \frac{1}{2}\omega_0 \\ N_{A_5}(M, \theta) &= \frac{M}{2} \frac{A_3}{A_5} e^{j(\psi_3-\psi_5+\theta+\frac{\pi}{2})}, \text{ con } \omega \rightarrow \frac{1}{2}\omega_0 \end{aligned}$$

In questo caso la modalità di analisi di stabilità considera un approccio simile al *characteristic loci* in cui si considera l'anello di Figura B.2 al limite di stabilità imponendo che

$$1 - N_{A_i} L(jw_i^{CR}) = 0 \tag{B.13}$$

$$L(jw_i^{CR}) = \frac{1}{N_{A_i}}, \forall i \tag{B.14}$$

in cui, in questo caso $w_i^{CR} = 1/2\omega_0$ per le armoniche dispari e $w_i^{CR} = \omega_0$, per il termine costante A_0 e per le sinusoidi pari. Si evidenzia che al di fuori di entrambi i valori di frequenza, come noto da letteratura, la funzione descrittiva si annulla, pertanto, al fine di determinare la condizione di limite di stabilità, in generale è necessario considerare un numero finito di subarmoniche con cui valutare ciascuna N_A .

$$\omega = \frac{1}{n}\omega_0, n \in N$$

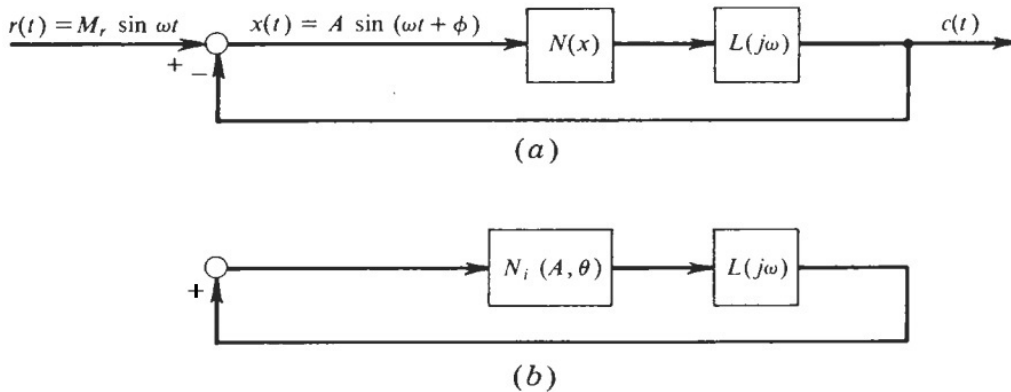


Figura B.2: Sistema non lineare (a) e sistema equivalente con la funzione descrittiva (b) [4].

Pertanto attraverso il sistema (B.14) si ricavano le equazioni caratteristiche in forma chiusa che legano i valori di ampiezza M e sfasamento θ alla frequenza propria del sistema w_n .

$$\begin{aligned}
 M &= 2 \left(w_n^2 - \left(\frac{1}{2} \omega_0 \right)^2 \right) \\
 \left[\frac{M}{2} e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} + \left(\frac{M}{2} \right)^2 \frac{1}{w_n^2 - \left(\frac{3}{2} \omega_0 \right)^2} \right] &= \left(w_n^2 - \left(\frac{1}{2} \omega_0 \right)^2 \right) \\
 \left[- \left(\frac{M}{2} \right)^2 e^{j\psi} L(j2\omega_0) + \frac{M^2}{2} (e^{j2\theta + \frac{\pi}{2}} + j) \frac{1}{\omega_n^2} \right] &= (w_n^2 - \omega_0^2) \\
 \left(\frac{M}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{1/L(j\omega_0/2) - M/2e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})}} + L(j\frac{5}{2}\omega_0) \right] &= \left(w_n^2 - \left(\frac{3}{2} \omega_0 \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

Parallelamente, è possibile combinare i risultati ottenuti attraverso la μ -Analisi con quelli della funzione descrittiva parametrica; ovvero avendo a disposizione il valore limite ammissibili in termini di variazione di frequenza propria $\Delta\omega^2$ e di smorzamento $2\omega_n\Delta\xi$ si imposta la risoluzione di un sistema non lineare nelle incognite (θ, M) .

$$-\omega^2 x + (w_n^2 + N_{A_i}(M, \theta, \omega)) x = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$-\omega^2 x + (w_n^2 + j\omega 2w_n \delta\xi + \delta\omega^2) x = 0 \quad (\text{B.16})$$

↓

$$|\Delta\omega_{LIM}^2 + j2\omega_n\omega_i^{CR}\Delta\xi_{LIM}| = |N_{A_i}(M, \theta, \omega_i^{CR})| \quad (\text{B.17})$$

$$\angle(\Delta\omega_{LIM}^2 + j2\omega_n\omega_i^{CR}\Delta\xi_{LIM}) = \angle(N_{A_i}(M, \theta, \omega_i^{CR})) \quad (\text{B.18})$$

Si verificano quindi per la validazione dei risultati le curve limite $M(\omega_n^2)$ determinate con le funzioni descrittive e con la μ -Analisi.

B.3 Risultati ottenuti

In questo paragrafo si riporta la validazione della stabilità robusta dell'equazione di Mathieu e delle curve limite dei parametri incerti in essa contenuti; in particolar modo si è fatto riferimento all'applicazione del metodo di Floquet per valutare l'affidabilità dei risultati ottenuti attraverso la tecnica della funzione descrittiva.

Successivamente si confrontano le incertezze che comportano l'insorgere di instabilità in funzione di ampiezza e fase della perturbazione sinusoidale introdotta tramite funzione descrittiva.

Confronto con il metodo di Floquet

Al fine di confermare la validità della procedura di linearizzazione armonica fornita dalla tecnica delle funzioni descrittive, si analizza l'equazione di Mathieu con il Metodo di Floquet e si mettono a confronto gli andamenti delle curve $M(\omega_n^2)$ determinate per i differenti casi di soluzioni $x(t)$.

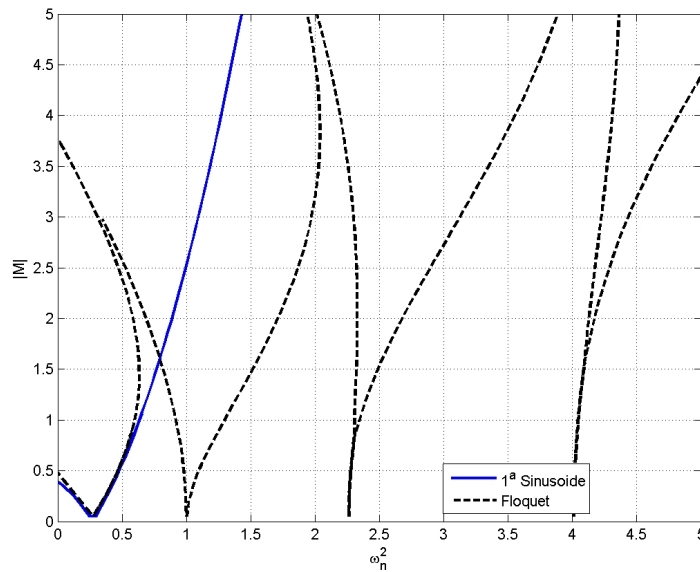


Figura B.3: Curve limite di stabilità con la 1^a sinusoide (B.6).

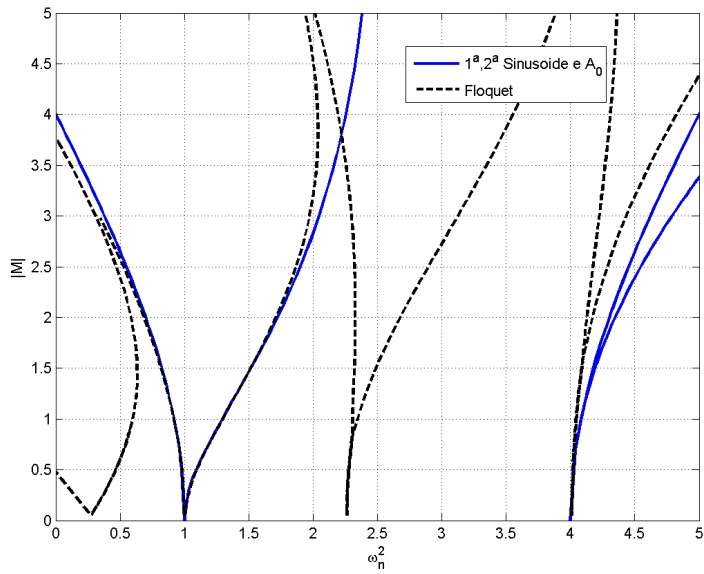


Figura B.4: Curve limite di stabilità con le 1^a, 2^a sinusoidi e il termine costante (B.11).

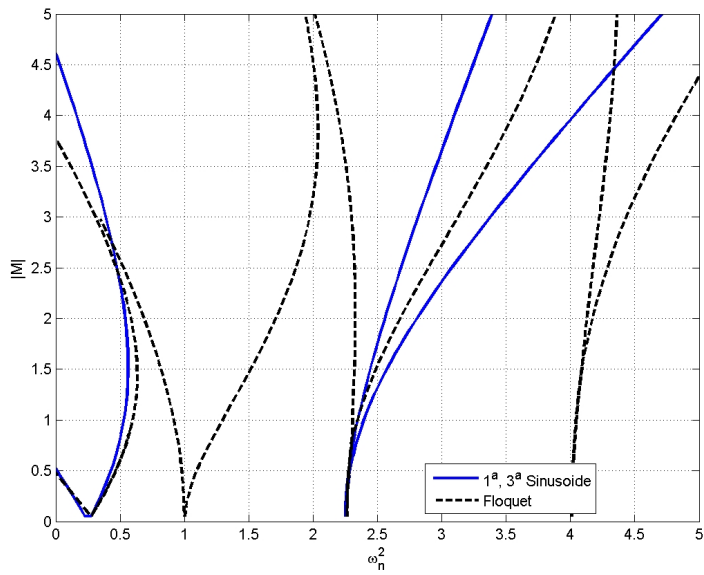


Figura B.5: Curve limite di stabilità con le 1^a e 3^a sinusoidi (B.10).

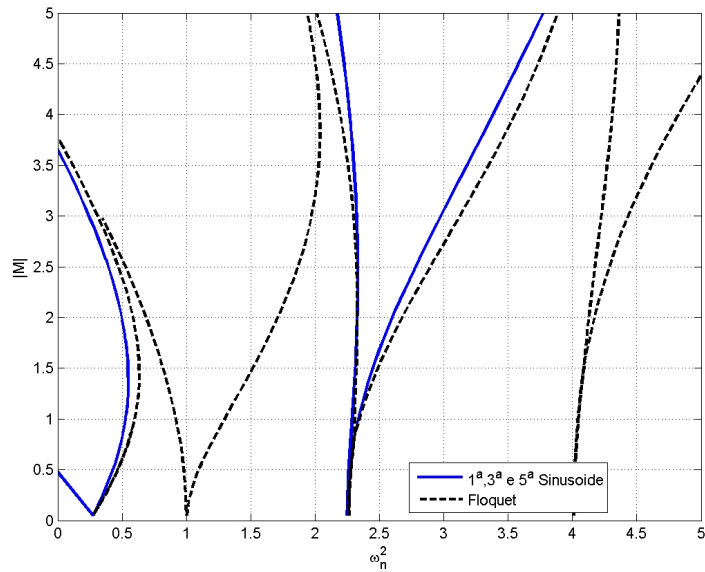


Figura B.6: Curve limite di stabilità con le 1^a, 3^a e 5^a sinusoidi (B.12).

Si sottolinea come le armoniche pari e quelle dispari portino a delle curve limite differenti ma comunque sufficientemente aderenti a quelle del metodo di Floquet (Figura B.7).

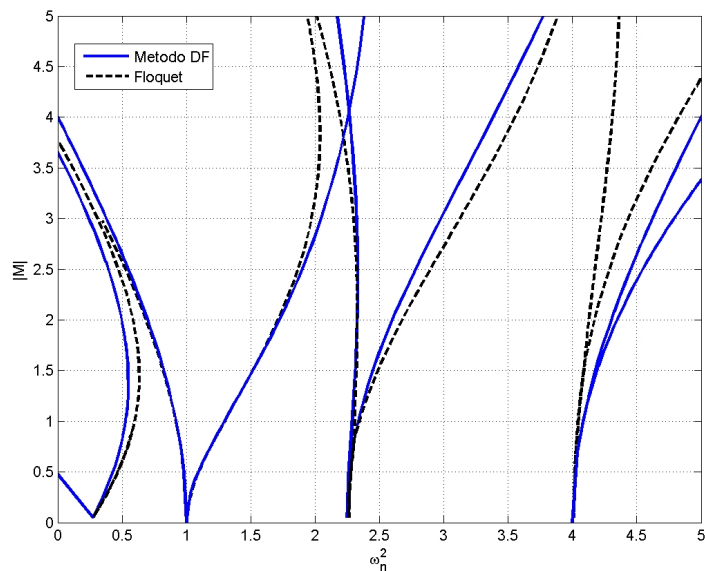


Figura B.7: Confronto generale tra metodo di Floquet e metodo delle DF.

Pertanto, la linearizzazione armonica delle funzioni descrittive del caso semplificato dell'equazione di Mathieu è in grado di delineare le condizioni di limite di stabilità anche per matrici di stato a coefficienti periodici. Si passa quindi dalla necessità di integrare il sistema nel tempo per ottenere la matrice di transizione di Floquet, un processo tanto più oneroso all'aumentare delle dimensioni del sistema, all'integrazione su un unico periodo delle funzioni descrittive poste in retroazione al sistema non periodico.

Curve limite dell'analisi robusta

Dopo aver appurato l'efficacia delle funzioni descrittive per la caratterizzazione di fenomeni periodici, si è cercato di legare questa tecnica con quella della μ -Analisi.

Come precedentemente illustrato sono stati determinati i valori limite in termini di variazione di smorzamento e di frequenza propria del sistema senza la perturbazione periodica. Imponendo quindi le relazioni (B.17) e (B.18) nell'incognita $M(\omega_n^2)$, sono state ricavati gli andamenti dell'ampiezza M della perturbazione sinusoidale dell'equazione di Mathieu al variare della ω_n^2 .

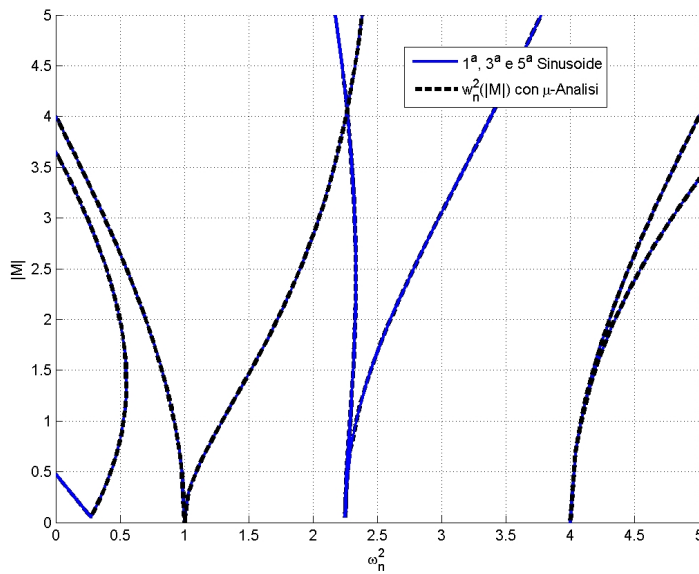


Figura B.8: Confronto le curve limite DF e le curve limite con μ -Analisi.

Si visualizzano inoltre, il valore limite di incertezze $\Delta\omega^2$ e $\Delta\xi$ valutati con la μ -Analisi sia a differenti valori dell'ampiezza della parte periodica della perturbazione in Figura B.9, che al variare di ω_n^2 in corrispondenza di $\omega_i = \omega_i^{CR}$ in Figura B.10.

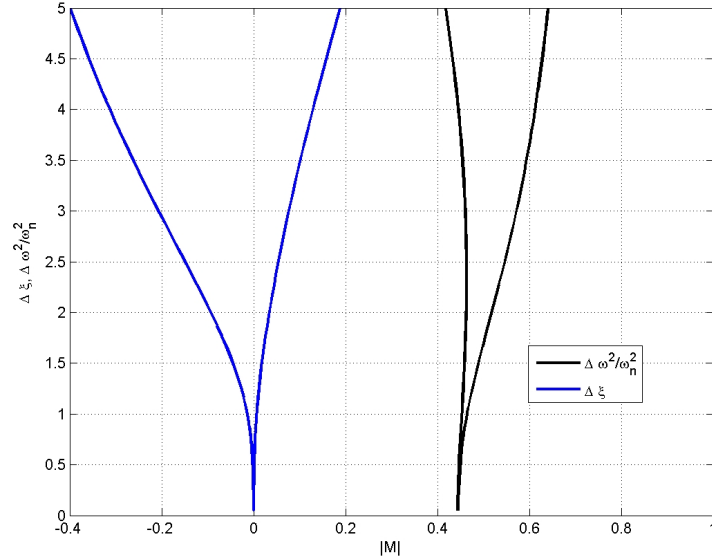


Figura B.9: Parametri limite di frequenza propria e smorzamento a differenti ampiezze M .

I limiti riscontrati sono i medesimi ottenuti attraverso lo studio delle funzioni descrittive operato in precedenza; si evince quindi la possibilità di combinare in maniera molto più efficiente la linearizzazione fornita dalle DF con i limiti dell'analisi robusta tramite GNC o μ -Analisi.

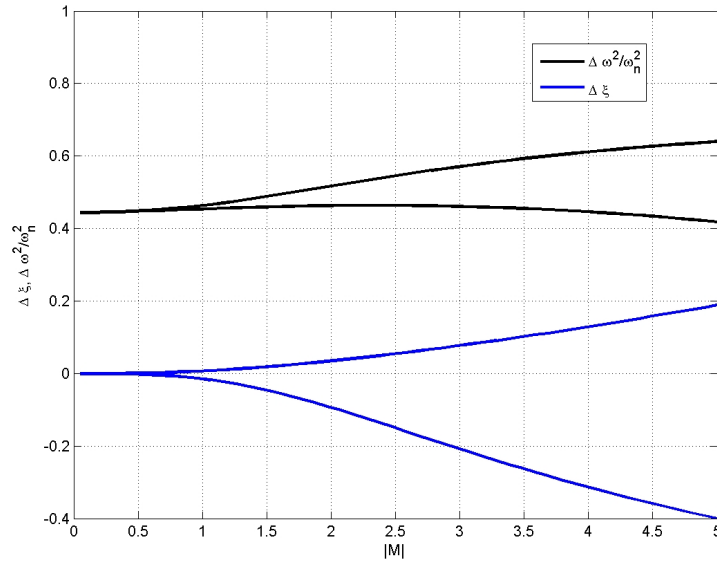


Figura B.10: Andamento delle incertezze limite $\Delta\omega^2(\omega_n^2)$ e $\Delta\xi(\omega_n^2)$.

Questa procedura innovativa, rispetto al metodo di Floquet, risulta essere sicuramente più adatta ad un'analisi di tipo parametrico del sistema; essa infatti non solo comporta un costo computazionale minore, ma si avvale della possibilità di valutare i limiti delle incertezze tramite GNC un'unica volta fissato il numero di parametri. Al contrario con Floquet si dovrebbe determinare la risposta nel tempo con tutti i gradi di libertà del sistema e per ogni valore desiderato dei parametri.

Infine, come verifica del comportamento del sistema agli stati dell'equazione di Mathieu si è implementato un modello in ambiente Simulink per il calcolo della risposta del sistema a seguito dell'applicazione di un gradino in ingresso; come visibile dalla Figura B.11, si ha che a parità di $M = 0.9595$, imponendo per il sistema rispettivamente $\omega_n^2 = 0.4488$ e $\omega_n^2 = 0.9837$ corrispondenti a i due differenti rami delle soluzioni di Figura B.8 (il primo a $\omega = 1/2\omega_0$ e il secondo a $\omega = \omega_0$), si ricavano due differenti condizioni di ciclo limite per il sistema dominate da un comportamento sinusoidale con periodo T e $2T$, con $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

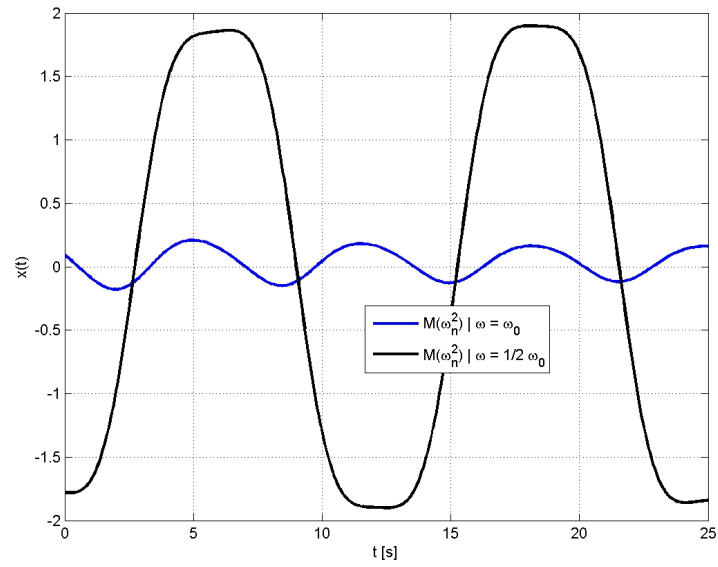


Figura B.11: Cicli limite determinati per l'equazione di Mathieu attraverso le funzioni descrittive.

Lista degli acronimi

Acronimo	Descrizione
SISO	Sistema dinamico Single Input - Single Output.
MIMO	Sistema dinamico Multiple Input - Multiple Output.

Lista dei simboli

Simbolo	Descrizione
p_i	parametro di modello incerto.
\bar{p}	parametro di modello medio.
r_p	massimo variazione in modulo del parametro p .
Δ	incertezza di modello < 1 .
$\mathbf{\Delta}$	matrice di incertezze di modello, $\ \Delta\ _\infty \leq 1$.
G	funzione di trasferimento dei sistemi SISO.
L	funzione di trasferimento dei sistemi SISO in anello chiuso.
G_p	funzione di trasferimento dei sistemi SISO incerti.
\mathbf{G}	matrice di funzioni di trasferimento dei sistemi MIMO.
\mathbf{G}_p	matrice di funzioni di trasferimento dei sistemi MIMO incerti.
\mathbf{P}	matrice di funzioni di trasferimento tra ingressi e uscite generalizzati.
w	errore normalizzato sul generico riferimento desiderato w_0 .
u	ingresso di controllo.
u_Δ	perturbazione sull'ingresso dovuta alle incertezze.
z	uscite del sistema.

Simbolo	Descrizione
v	misure del sistema.
y_Δ	perturbazione sull'uscita dovuta alle incertezze.
\mathbf{K}	matrice dei guadagni di controllo.
\mathbf{N}	LFT inferiore tra ingressi e uscite generalizzati in presenza di incertezze Δ .
\mathbf{M}	LFT superiore tra ingressi u_Δ e uscite y_Δ in presenza di incertezze Δ .
\mathbf{D}	matrice di preconditionamento della struttura $M - \Delta$.
$\bar{\sigma}(\cdot)$	massimo valor singolare della matrice (\cdot) .
m_r	numero di perturbazioni reali e diagonali sul sistema.
m_c	numero di perturbazioni complesse e diagonali sul sistema.
m_C	numero di perturbazioni complesse e generiche sul sistema.
n	ordine complessivo del sistema.
X_K	spazio delle possibili incertezze.
$\mu_\Delta(\cdot)$	massimo valor singolare strutturato di (\cdot) per incertezze Δ generiche.
BX_K	spazio delle possibili incertezze tali che $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$.

Simbolo	Descrizione
$\mu(\cdot)$	massimo valor singolare strutturato di (\cdot) per incertezze $\Delta \in BX_K$.
k_m	margine di stabilità robusta inverso di μ .
Q_K	spazio delle possibili incertezze a norma unitaria.
$\rho(\cdot)$	raggio spettrale di (\cdot) .
$y_a(t)$	uscita reale del sistema tempo variante.
$y(t)$	uscite del sistema approssimate tramite funzioni descrittive.
N_A	funzione descrittiva della non linearità.
n_p	parte reale della funzione descrittiva.
n_q	parte complessa della funzione descrittiva.

Elenco delle figure

1.1	Incertezza moltiplicativa applicata all'ingresso del sistema. . .	11
1.2	Struttura $N - \Delta$ del sistema.	12
1.3	Sistema MIMO originario affetto da molteplici incertezze [10].	13
1.4	Ridisposizione del sistema [10].	13
1.5	Struttura $M - \Delta$ del sistema.	14
1.6	Nuova struttura $M - \Delta$ del sistema.	15
2.1	Modello a parametri concentrati della fusoliera dell'Hammond [1].	21
2.2	Modello semplificato della pala [1].	21
2.3	Diagramma a blocchi per la rappresentazione dell'incertezza sulla $(s[\mathbf{I}] - [\mathbf{A}])^{-1}$	30
2.4	Configurazione generale del sistema dinamico dell'elicottero con P ed N	33
2.5	Struttura $N - \Delta$ per l'analisi robusta della stabilità.	33
2.6	Struttura $M - \Delta$ del sistema.	34
2.7	Possibile diagramma di Nyquist della funzione d'anello per- turbata.	37
2.8	Determinazione di $\rho_i e^{j\theta_i}$ per ogni autovalore del sistema. . . .	37
2.9	Andamento della parte reale degli autovalori del rotore di Hammond.	42
2.10	Andamento della parte immaginaria degli autovalori del rotore di Hammond.	43
2.11	Diagramma di Nyquist associato all'anello ξ_S	43
2.12	Determinazione del margine di stabilità ρ_i di ciascun autova- lore di $\mathbf{L}(j\omega)$ (2 incertezze).	44

2.13	Determinazione del margine di stabilità ρ_i di ciascun autovalore di $\mathbf{L}(j\omega)$ (4 incertezze).	45
2.14	Verifica della condizione di stabilità sul guadagno generalizzato del sistema ρ_i (2 incertezze).	46
2.15	Verifica della condizione di stabilità sul guadagno generalizzato del sistema ρ_i (4 incertezze).	46
2.16	Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b al limite di stabilità e con $k_m = 15\%$ (2 incertezze).	48
2.17	Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b in funzione della frequenza (2 incertezze).	48
2.18	Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b al limite di stabilità al variare di ΔK_x e ΔC_x	49
2.19	Limite di stabilità nello spazio dei parametri incerti Δk_b e Δc_b (4 incertezze).	50
2.20	Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b in funzione della frequenza (4 incertezze).	50
2.21	Andamento delle variazioni dei parametri incerti K_x e C_x in funzione della frequenza.	51
2.22	Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b al limite di stabilità (2 incertezze).	53
2.23	Andamento delle variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b al limite di stabilità (4 incertezze).	53
2.24	Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b al limite di stabilità (ottimizzazione con 0% di complessità).	54
2.25	Andamento delle variazioni dei parametri incerti k_b e c_b in prossimità di 1 per giro.	55
2.26	Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b (ottimizzazione con 2% di complessità).	56
2.27	Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b (metodo delle potenze con 5% di complessità).	56
2.28	Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b	58
2.29	Limite inferiore e superiore di μ con 2 incertezze.	59
2.30	Margine di stabilità k_m del sistema con 2 incertezze.	60
2.31	Confronto dei diagrammi di Bode tra caso nominale e peggiore per ogni canale.	60
2.32	Variazione delle incertezze ΔK_x , ΔC_x , Δk_b e Δc_b rispetto al relativo valore nominale.	61
2.33	Limite inferiore e superiore di μ con 4 incertezze.	62
2.34	Margine di stabilità k_m del sistema con 4 incertezze.	63
2.35	Confronto delle curve limite con incertezze non strutturate (GNC) e strutturate (μ -Analisi).	63

2.36	Confronto tra i margini di stabilità k_m del sistema con 2 e 4 incertezze.	64
3.1	Versione SOCAT del Puma IAR 330.	65
3.2	Sistema di riferimento e gradi di libertà adottati.	68
3.3	Trittico del Puma IAR 330.	69
3.4	Modello a parametri concentrati della fusoliera.	70
3.5	Visualizzazione delle forme modali della fusoliera.	77
3.6	Visualizzazione del rotore del Puma IAR 330.	77
3.7	Sistema di riferimento locale per il rotore [12].	78
3.8	Orientazione del rotore rispetto alla fusoliera.	78
3.9	Visualizzazione del modello del rotore in MASST.	80
3.10	Visualizzazione del rotore di coda del Puma IAR 330.	82
3.11	Andamento della derivata di controllo Y_θ del rotore di coda.	83
3.12	Collocazione nel modello MASST dei servoattuatori.	88
3.13	Schema dell'assieme del rotore [1].	89
3.14	Ampiezza e fase delle funzioni di trasferimento caratteristiche dei servo-attuatori.	90
3.15	Istogramma dei tempi di aggiornamento e ritardo dell'FCS.	94
3.16	Schema per la definizione del ritardo complessivo dell'FCS.	94
3.17	Schema per l'introduzione della perturbazione.	95
3.18	Andamento della parte reale degli autovalori del sistema ($c_b = 0$).	97
3.19	Andamento della parte immaginaria degli autovalori del sistema ($c_b = 0$).	98
3.20	Andamento della parte reale degli autovalori del sistema ($c_b = c_b^N$).	98
3.21	Andamento della parte immaginaria degli autovalori del sistema ($c_b = c_b^N$).	99
3.22	Guadagno generalizzato per gli anelli $L_{\xi_C}(j\omega)$ e $L_{\xi_S}(j\omega)$ (2 incertezze).	100
3.23	Guadagno generalizzato per gli anelli $L_{\xi_C}(j\omega)$ e $L_{\xi_S}(j\omega)$ (4 incertezze).	101
3.24	Condizione limite di stabilità per gli anelli $L_{\xi_C}(j\omega)$ e $L_{\xi_S}(j\omega)$	101
3.25	Particolare della condizione limite di stabilità per gli anelli $L_{\xi_C}(j\omega)$ e $L_{\xi_S}(j\omega)$	102
3.26	Andamento dei parametri incerti al limite di stabilità e con margine $k_m = 15\%$ (2 incertezze).	103
3.27	Andamento dei parametri incerti al limite di stabilità in funzione della frequenza (2 incertezze).	103
3.28	Andamento dei parametri incerti al limite di stabilità in funzione della frequenza (4 incertezze).	104

3.29	Confronto delle curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per GNC e μ -Analisi (2 incertezze).	104
3.30	Confronto delle curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per GNC e μ -Analisi (4 incertezze).	105
3.31	Modulo limite dell'FCS.	106
3.32	Variazioni dei parametri incerti Δk_b e Δc_b	107
3.33	Limite inferiore e superiore di μ con 2 incertezze.	108
3.34	Margine di stabilità k_m del sistema con 2 incertezze.	109
3.35	Limite inferiore e superiore di μ con 4 incertezze.	110
3.36	Margine di stabilità k_m del sistema con 4 incertezze.	110
3.37	Incetnze limite di stabilità al variare della trazione.	111
3.38	Margini di stabilità robusta al variare della trazione.	112
3.39	Parametri limite del modello di verifica.	114
3.40	Parametri limite del modello di verifica per validare il limite di stabilità.	115
3.41	Risposta nel tempo con parametri al di sopra del 2% della curva limite del GNC.	115
3.42	Risposta nel tempo con parametri al di sopra del 52% della curva limite del GNC.	116
3.43	Risposta nel tempo con parametri al di sopra del 1% della curva limite della μ -Analisi.	116
3.44	Risposta nel tempo con parametri al di sotto del 5% della curva limite del GNC.	117
3.45	Risposta nel tempo con parametri al di sotto del 40% della curva limite della μ -Analisi.	117
3.46	Risposta nel tempo con parametri al di sotto del 55% della curva limite della μ -Analisi.	118
4.1	Schema generale per l'approssimazione di non linearità del sistema [4].	120
4.2	Schema della funzione descrittiva per ingresso sinusoidale [4].	122
4.3	Diagramma a blocchi per la rappresentazione dell'incertezza LTV dovuta al rotore non isotropo.	126
4.4	Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = 200$ RPM.	128
4.5	Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = 255$ RPM.	129
4.6	Legenda delle frequenze dell'uscita ω_u per la DF.	129
4.7	Smorzamento limite Δc_i al variare della frequenza ω_u della funzione descrittiva ($\Omega = 255$ RPM).	130
4.8	Smorzamento limite Δc_i al variare della frequenza ω_u della funzione descrittiva ($\Omega = 200$ RPM).	131

4.9	Andamento di μ al variare della frequenza del sistema ($\Omega = 255$ RPM).	132
4.10	Andamento di μ al variare della frequenza del sistema ($\Omega = 200$ RPM).	132
4.11	Curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per gli smorzamenti attivi in caso di failure ($\Omega = 200$ RPM).	133
4.12	Risposta nel tempo $\xi(t)$ con smorzamento limite $\Delta c_b = -16.90\%$ ($\Omega = 200$ RPM).	134
4.13	Curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per gli smorzamenti attivi in caso di failure ($\Omega = 255$ RPM).	135
4.14	Risposta nel tempo $\xi(t)$ con smorzamento limite $\Delta c_b = +100c_b^N$ ($\Omega = 255$ RPM).	135
4.15	Scelta dei parametri di smorzamento per la verifica a $\Omega = 255$ RPM con rigidezza $\delta k_i = 0$.	137
4.16	Risposta nel tempo con smorzamento sulla curva di ciclo limite.	137
4.17	Risposta nel tempo con smorzamento sotto la curva di ciclo limite.	138
4.18	Risposta nel tempo con smorzamento sopra la curva di ciclo limite.	138
4.19	Risposta nel tempo con smorzamento nullo per $\Omega = 200$ RPM.	139
4.20	Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = \Omega_{REG}$.	140
4.21	Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = 120\% \Omega_{REG}$.	141
4.22	Legenda delle frequenze dell'uscita ω_u per la DF.	141
4.23	Smorzamento limite Δc_i al variare della frequenza ω_u ($\Omega = \Omega_{REG}$).	142
4.24	Smorzamento limite Δc_i al variare della frequenza ω_u della funzione descrittiva ($\Omega = 120\% \Omega_{REG}$).	143
4.25	Curve limite $\Delta k_b - \Delta c_b$ per gli smorzamenti attivi in caso di failure ($\Omega = 120\% \Omega_{REG}$).	144
4.26	Risposta nel tempo $\xi(t)$ con smorzamento limite $\Delta c_b = -70.64\%$ ($\Omega = 120\% \Omega_{REG}$).	144
4.27	Risposta nel tempo per $\Omega = \Omega_{REG}$ senza uno smorzatore.	146
4.28	Risposta nel tempo per $\Omega = 120\% \Omega_{REG}$ senza uno smorzatore.	146
4.29	Curve limite dello smorzatore non operativo a $\Omega = \Omega_{REG}$ (modello di verifica).	147
4.30	Confronto della risposta nel tempo $\xi_1(t)$ per $\Omega = \Omega_{REG}$.	148
A.1	Visualizzazione dei parametri limite al -1% di variazione (2 incertezze).	154
A.2	Visualizzazione dei parametri limite allo 0% di variazione (2 incertezze).	154

A.3	Visualizzazione dei parametri limite all'1% di variazione (2 incertezze).	155
A.4	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 10\%\Omega_0$.	158
A.5	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 50\%\Omega_0$.	158
A.6	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 25\%\Omega_0$ al di sotto dell'1% del limite minimo.	161
A.7	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 65\%\Omega_0$ al di sotto dell'1% del limite minimo.	161
A.8	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 20\%\Omega_0$ al di sopra dell'1% del limite minimo.	164
A.9	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 85\%\Omega_0$ al di sopra dell'1% del limite minimo.	164
A.10	Visualizzazione dei parametri limite al -1% di variazione (4 incertezze).	165
A.11	Visualizzazione dei parametri limite allo 0% di variazione (4 incertezze).	166
A.12	Visualizzazione dei parametri limite all'1% di variazione (4 incertezze).	166
A.13	Andamento della parte reale degli autovalori in funzione della frequenza (μ -Analisi con $\delta\Delta = \delta\Delta_{LIM}$).	168
A.14	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 10\%\Omega_0$ (GNC 4 incertezze).	168
A.15	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 50\%\Omega_0$ (μ -Analisi 4 incertezze).	169
A.16	Andamento della parte reale degli autovalori in funzione della frequenza (μ -Analisi con $\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$).	172
A.17	Andamento della parte reale degli autovalori in funzione della frequenza (μ -Analisi con $\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$).	172
A.18	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 10\%\Omega_0$ (GNC con $\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$).	173
A.19	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 50\%\Omega_0$ (μ -Analisi con $\delta\Delta = 101\%\delta\Delta_{LIM}$).	174
A.20	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 5\%\Omega_0$ (GNC con $\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$).	174
A.21	Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 40\%\Omega_0$ (μ -Analisi con $\delta\Delta = 99\%\delta\Delta_{LIM}$).	175
A.22	Visualizzazione dei parametri limite allo 0% di variazione (2 incertezze).	178
A.23	Visualizzazione dei parametri limite all'1% di variazione (2 incertezze).	179
A.24	Autovalori nelle frequenze selezionate per GNC (2 incertezze).	179

A.25 Autovalori nelle frequenze selezionate per μ -Analisi (2 incertezze).	180
A.26 Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 10\%\Omega$ (2 incertezze).	180
A.27 Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 90\%\Omega$ (2 incertezze).	181
A.28 Autovalori per GNC con parametri al di sopra dell'1% del limite minimo (2 incertezze).	182
A.29 Autovalori per μ -Analisi con parametri al di sopra dell'1% del limite minimo (2 incertezze).	182
A.30 Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 20\%\Omega$ al di sopra dell'1% del limite minimo (2 incertezze).	183
A.31 Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 70\%\Omega$ al di sopra dell'1% del limite minimo (2 incertezze).	184
A.32 Visualizzazione dei parametri limite allo 0% di variazione (4 incertezze).	185
A.33 Visualizzazione dei parametri limite all'1% di variazione (4 incertezze).	185
A.34 Autovalori nelle frequenze selezionate per GNC (4 incertezze).	186
A.35 Autovalori nelle frequenze selezionate per μ -Analisi (4 incertezze).	187
A.36 Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 20\%\Omega$ (GNC 4 incertezze).	187
A.37 Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 60\%\Omega$ (μ -Analisi 4 incertezze).	188
A.38 Autovalori per GNC con parametri al di sopra dell'1% del limite minimo (4 incertezze).	189
A.39 Autovalori per μ -Analisi al di sopra dell'1% del limite minimo (4 incertezze).	189
A.40 Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 40\%\Omega$ al di sopra dell'1% del limite minimo (GNC 4 incertezze).	190
A.41 Risposta nel tempo con parametri limite a $\omega = 65\%\Omega$ al di sopra dell'1% del limite minimo (μ -Analisi 4 incertezze).	190
B.1 Schema a blocchi dell'equazioni di Mathieu [4].	192
B.2 Sistema non lineare (a) e sistema equivalente con la funzione descrittiva (b) [4].	195
B.3 Curve limite di stabilità con la 1 ^a sinusoidale (B.6).	197
B.4 Curve limite di stabilità con le 1 ^a , 2 ^a sinusoidi e il termine costante (B.11).	198
B.5 Curve limite di stabilità con le 1 ^a e 3 ^a sinusoidi (B.10).	198

B.6	Curve limite di stabilità con le 1 ^a , 3 ^a e 5 ^a sinusoidi (B.12).	199
B.7	Confronto generale tra metodo di Floquet e metodo delle DF.	199
B.8	Confronto le curve limite DF e le curve limite con μ -Analisi.	200
B.9	Parametri limite di frequenza propria e smorzamento a differenti ampiezze M .	201
B.10	Andamento delle incertezze limite $\Delta\omega^2(\omega_n^2)$ e $\Delta\xi(\omega_n^2)$.	202
B.11	Cicli limite determinati per l'equazione di Mathieu attraverso le funzioni descrittive.	203

Elenco delle tabelle

2.1	Parametri del modello del rotore di Hammond [9].	26
2.2	Matrici di stato del sistema dinamico dell'elicottero semplificato	27
2.3	Rappresentazione delle incertezze sugli smorzatori di ritardo. . .	31
2.4	Rappresentazione delle incertezze sugli smorzatori e sulla struttura della fusoliera.	31
2.5	Poli del sistema in anello chiuso con valori nominali.	41
3.1	Valore dei parametri di rigidezza al variare della trazione. . . .	74
3.2	Frequenze proprie desiderate e ottenute della fusoliera, <i>weight on wheels</i> = 100%.	75
3.3	Frequenze proprie desiderate e ottenute della fusoliera, <i>weight on wheels</i> = 60%.	75
3.4	Frequenze proprie desiderate e ottenute della fusoliera, <i>weight on wheels</i> = 25%.	75
3.5	Gradi di libertà del rotore.	81
3.6	Riassunto dei sensori utilizzati.	84
3.7	Sistemi di controllo adottati.	85
3.8	Modello ridotto e modello di verifica del Puma IAR 330. . . .	92
3.9	Massime incertezze ammissibili al variare di T.	112
A.1	Parametri limite per le analisi nel tempo e agli autovalori del sistema (2 incertezze).	152
A.2	Parametri limite per le analisi nel tempo e agli autovalori del sistema (4 incertezze).	153
A.3	Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze (GNC).	156
A.4	Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze (μ -Analisi).	157

A.5	Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sotto dell'1% del limite minimo (GNC).	159
A.6	Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sotto dell'1% del limite minimo (μ -Analisi).	160
A.7	Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sopra dell'1% del limite minimo (GNC).	162
A.8	Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sopra dell'1% del limite minimo (μ -Analisi 2 incertezze).	163
A.9	Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze (GNC 4 incertezze).	167
A.10	Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sopra dell'1% del limite minimo (GNC 4 incertezze).	170
A.11	Autovalori del sistema con valori limite delle incertezze al di sotto dell'1% del limite minimo (GNC 4 incertezze).	171
A.12	Parametri limite per le analisi nel tempo e agli autovalori del sistema (2 incertezze).	176
A.13	Parametri limite per le analisi nel tempo e agli autovalori del sistema (4 incertezze).	177

Bibliografia

- [1] M. Arra. *L'elicottero*. HOEPLI, 2005.
- [2] Young P. M. Newlin M. P. Doyle J. C. Practical computation of the mixed μ problem. 1992.
- [3] I. Chopra. Perspectives in aeromechanical stability of helicopter rotors. *VERTICA, Vol. 14 (4)*, pp. 457-508, 1990.
- [4] Gelb A. Vander Velde E.W. *Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design*. McGraw Hill, 1968.
- [5] Doyle J. C. Packard A. Fan M. K. H. A power method for the structured singular value. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988.
- [6] Jalali H. Bonad B. T. Ahmadian H. Identification of weakly nonlinear systems using describing function inversion. *Experimental Mechanics*, 51:739-747, 2011.
- [7] Taylor J. H. Wilson B. H. A frequency-domain model-order-deduction algorithm for nonlinear systems. *Proc. IFAC, Vol. 1 (7)*, pp. 21-28, 1963.
- [8] P. G. Hamel. Rotorcraft-pilot coupling, a critical issue for highly augmented helicopters. 1996.
- [9] C. E. Hammond. An application of floquet theory to prediction of mechanical instability. *Langley Directorate, U.S. Army Air Mobility R&D Laboratory*, 1974.

- [10] Skogestad S. Postlethwaite I. *Multivariable feedback control*. John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [11] W. Johnson. *Helicopter theory*. Dover Publication, 1980.
- [12] W. Johnson. *CAMRAD/JA A comprehensive Analytical Model of Rotorcraft Aerodynamics and Dynamics*. Johnson Aeronautics, 1988.
- [13] Hohenemser K. H. Yin S. K. Some applications of the method of multiblade coordinates. *Journal of the american helicopter society, Vol. 7, No. 3, pp. 17.3*, 1972.
- [14] T. Kato. A short introduction to perturbation theory for linear operators. *Springer velag*, 1982.
- [15] Fan M. K. H. Tits A. L. Characterization and efficient computation of the structured singular value. *IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-31, No. 8*, 1986.
- [16] Fan M. K. H. Tits A. L. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE transactions on automatic control, Vol. 36, No. 1*, 1991.
- [17] A. Leonhard. The describing function method applied for the investigation of parametric excited oscillations. *Proc. IFAC - Automatic and Remote Control, Vol. 1, No. 7, pp. 187/1-187/7*, 1963.
- [18] Nuij P. W. J. M. Bosgra O. H. Steinbuch M. High order sinusoidal input describing functions for the analysis of non-linear systems with harmonic responses. *ELSEVIER*, 2005.
- [19] H. E. Merrit. *Hydraulic control systems*. John Wiley and Sons, Inc., 1967.
- [20] Impram S. T. Munro N. Describing functions in non-linear systems with structured and unstructured uncertainties. *International Journal of Control, Vol. 74, No. 6, pp. 600-608*, 2001.
- [21] C. J. Ockier. Pilot induced oscillations in helicopters-three case studies. 1996.
- [22] E. E. Osborne. On pre-conditioning of matrices. *JACM, Vol. 7, pp. 338-345*, 1960.

- [23] Packard A. Pandey P. Continuity properties of the real/complex structured singular value. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993.
- [24] G. D. Padfield. *Helicopter flight dynamics: the theory and application of flying qualities and simulation modelling, second edition*. Blackwell, 2007.
- [25] J. L. Potter. Improving reliability and eliminating maintenance with elastomeric dampers for rotor systems. *Lord Library No. LL2120*, 1973.
- [26] Masarati P. Quaranta G. *MASST*. Politecnico di Milano, 2009.
- [27] Barmish B.R. Khargonekar P. P. Shi Z. C. Tempo R. Robustness margin need not to be a continuous function of the problem data. *Systems & Control Letters* 15 pp. 91-98, 1989.
- [28] M.G. Safonov. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems. *IEEE PROC., Vol. 129 (6), Pt. D*, pp. 251-256, 1982.
- [29] J. H. Taylor. Describing functions. *Electrical Engineering Encyclopedia, Vol. 1 (7)*, pp. 21-28, 1999.
- [30] Loh A. P. Vasnani V. U. Describing function matrix for multivariable systems and its use in multiloop pi design. *J. Proc. Cont. 1994, Volume 4 (3)*, 1993.
- [31] Quaranta G. Masarati P. Muscarello V. Linearized aeroservoelastic analysis of rotary-wing aircraft. 2010.
- [32] Quaranta G. Masarati P. Muscarello V. Robust aeroservoelastic stability of helicopters: application to the air/ground resonance. 2011.
- [33] Quaranta G. Muscarello V. Multiple input describing function for non-linear analysis of ground and air resonance. *European Rotorcraft Forum*, 2011.
- [34] Desoer C. Wang Y. On the generalized nyquist stability criterion. *Automatic Control, IEEE Transactions on, Vol. 25 (2)*, pp. 187-196, 1980.
- [35] Doyle J. C. Young P. M. Computation of μ with real and complex uncertainties. 1990.