

POLITECNICO DI MILANO  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DEI SISTEMI  
CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA MATEMATICA



TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**METODI FFT PER IL PRICING DI  
OPZIONI SECONDO MODELLI DI  
LÉVY ESPONENZIALI**

Relatore: Prof. Daniele Marazzina

Giancarlo Giuffra

Matricola 754637

ANNO ACCADEMICO 2010-2011

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Modelli di Lévy Esponenziale</b>	<b>3</b>
1.1 Nozioni Preliminari . . . . .	3
1.2 Processi di Lévy . . . . .	16
1.3 Martingale, Tempi d'Arresto e Misure Aleatorie . . . . .	23
1.4 Calcolo Stocastico . . . . .	31
1.5 Modello di Lévy Esponenziale, Assenza d'Arbitraggio e Completezza . . . . .	45
<b>2 Metodi FFT</b>	<b>50</b>
2.1 Introduzione, notazione e concetti preliminari . . . . .	50
2.2 Il metodo CONV . . . . .	52
2.2.1 Opzioni Europee . . . . .	53
2.2.2 Opzioni Bermudiane . . . . .	56
2.2.3 Opzioni Barriera . . . . .	59
2.3 Il metodo COS . . . . .	60
2.3.1 Opzioni Europee . . . . .	62
2.3.2 Opzioni Bermudiane . . . . .	65
2.3.3 Opzioni Barriera . . . . .	70
<b>3 Prove Numeriche</b>	<b>73</b>
3.1 Opzioni Europee . . . . .	73
3.2 Opzioni Bermudiane . . . . .	80
3.3 Opzioni Barriera . . . . .	83
3.4 Conclusioni . . . . .	85
<b>A Codice Matlab</b>	<b>89</b>
A.1 Opzioni Europee . . . . .	89
A.2 Opzioni Bermudiane . . . . .	91
A.3 Opzioni Barriera . . . . .	94
A.4 Funzioni Ausiliarie . . . . .	98

# Elenco delle figure

3.1	CONV, Analisi del parametro di damping $\alpha$ . . . . .	76
3.2	CONV, Analisi del tipo di discretizzazione . . . . .	78
3.3	CONV e COS, Analisi dell'errore per opzioni europee . . . . .	79
3.4	CONV e COS, Analisi dell'ordine di convergenza per opzioni europee . . . . .	79
3.5	CONV e COS, Analisi del tempo di calcolo per opzioni europee	80
3.6	CONV e COS, Analisi dell'errore per opzioni bermudiane . . . . .	82
3.7	CONV e COS, Analisi dell'ordine di convergenza per opzioni bermudiane . . . . .	82
3.8	CONV e COS, Analisi del tempo di calcolo per opzioni bermudiane . . . . .	84
3.9	CONV e COS, Analisi dell'errore per opzioni barriera . . . . .	86
3.10	CONV e COS, Analisi del tempo di calcolo per opzioni barriera	86

# Elenco delle tabelle

2.1	Metodo CONV per le opzioni bermudiane. . . . .	59
2.2	Metodo CONV per una opzione barriera up-and-out. . . . .	60
2.3	Metodo COS per le opzioni bermudiane. . . . .	70
2.4	Metodo COS per le opzioni barriera out. . . . .	72
3.1	CONV, Analisi del parametro di damping $\alpha$ . . . . .	76
3.2	CONV, Analisi del tipo di discretizzazione . . . . .	77
3.3	CONV e COS, Analisi dell'errore per opzioni europee . . . . .	78
3.4	CONV e COS, Analisi del tempo di calcolo per opzioni europee	78
3.5	CONV e COS, Analisi dell'errore per opzioni bermudiane . . . . .	81
3.6	CONV e COS, Analisi del tempo di calcolo per opzioni bermudiane . . . . .	83
3.7	CONV e COS, Analisi dell'errore per opzioni barriera . . . . .	85
3.8	CONV e COS, Analisi del tempo di calcolo per opzioni barriera	85

## **Sommario**

In questa tesi vengono studiati due metodi numerici per il pricing di opzioni quando il modello di mercato usato è il modello di Lévy Esponenziale. I due metodi numerici si basano sull'utilizzo dell'algoritmo numerico Fast Fourier Transform (FFT). Verranno presentate le implementazioni di entrambi i metodi nel caso di opzioni europee, bermudiane e barriera.

# Introduzione

I modelli di Lévy Esponenziali costituiscono una generalizzazione del classico modello di Black & Scholes permettendo al sottostante di presentare dei salti, ma preservando l'indipendenza e stazionarietà dei rendimenti logaritmici. Inoltre, la varietà di Processi di Lévy a disposizione donna grande flessibilità al modello. La dinamica del sottostante, che indichiamo con  $S$ , viene data da

$$S_t = S_0 e^{rt + X_t}$$

dove  $r$  denota il tasso di interesse neutrale al rischio e  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è un processo di Lévy. Per poter utilizzare il modello per il pricing di opzioni bisogna avere la dinamica del sottostante  $S$  descritta sotto una misura di martingala equivalente  $Q$ . Una caratteristica importante di questi modelli è l'incompletezza del mercato ovvero la non unicità della misura  $Q$ . Questa caratteristica risulta in accordo con i mercati reali visto che una strategia di copertura perfetta non esiste nella pratica. Un'altra importante proprietà di questi modelli è il fatto che è possibile caratterizzarli completamente attraverso la sua tripletta caratteristica  $(\gamma, \sigma, \nu)$  che definisce univocamente la funzione caratteristica del processo di Lévy  $X$ . Questa funzione caratteristica è quindi nota per tutti questi modelli, fatto che viene sfruttato nei metodi numerici che studieremo.

Esistono diversi metodi numerici per il pricing di opzioni secondo i modelli di Lévy Esponenziale. Questi possono essere classificati in tre grandi gruppi: risoluzione numerica della corrispondente equazione integro - differenziale alle derivate parziali (PIDE dall'acronimo inglese), simulazioni Monte Carlo e metodi di integrazione numerica. Dentro la categoria di metodi di integrazione numerica, data la conoscenza della funzione caratteristica di  $X$  in questi modelli, sono stati sviluppati metodi che fanno uso della teoria della trasformata di Fourier. Questi metodi si basano sulle idee introdotte in [5, 17]. Entrambi i metodi che studieremo appartengono a questa classe e partono dalla nota formula del pricing neutrale al rischio, che per un payoff  $H$  di scadenza  $T$ , assume la seguente forma

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} E^Q [H(S_T) | \mathcal{F}_t] ,$$

dove  $\Pi_t(H)$  indica il prezzo al tempo  $t$  del payoff  $H$ , e  $E^Q[\cdot | \mathcal{F}_t]$  indica l'operatore di valore atteso condizionato all'informazione fino al tempo  $t$ , sotto la

misura di martingala equivalente  $Q$ . Il primo metodo studiato, denominato metodo CONV ([14]), applica la trasformata di Fourier a questa formula e attraverso di discretizzazioni si riconduce a una formula che usa la trasformata discreta di Fourier, per il cui calcolo è possibile utilizzare l'algoritmo numerico Fast Fourier Transform (FFT). Il secondo metodo, denominato metodo COS ([9, 10]), fa uso dell'espansione in serie di coseni della densità associata al processo di Lévy nella formula del pricing neutrale al rischio. Questo fatto poi porta a delle formule che coinvolgono dei prodotti matrice-vettore con matrici che hanno una particolare struttura che permette di calcolare tali prodotti attraverso l'utilizzo dell'algoritmo FFT.

La tesi è strutturata nel seguente modo. Il primo capitolo presenta nozioni di base riguardanti i processi di Lévy per poi poter introdurre il modello di mercato di Lévy Esponenziale e infine presentare le condizioni che garantiscono che il modello di mercato soddisfi la condizione di assenza d'arbitraggio. Il capitolo 2 presenta i due metodi numerici per il pricing e studia la loro implementazione nel caso di opzioni europee, bermudiane e barriera. Infine il capitolo 3 è dedicato alle prove numeriche.

# Capitolo 1

## Modelli di Lévy Esponenziale

### 1.1 Nozioni Preliminari

In questa sezione ricordiamo alcuni concetti di base necessari per poter introdurre gli strumenti matematici che sono alla base del tema centrale di questo capitolo: i processi di Lévy.

**Definizione 1.1.1** (Spazio di Probabilità). Uno spazio di probabilità è una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  dove:

- $\Omega$  è un insieme. Tale insieme è costituito da tutti gli stati del mondo, oppure tutti gli scenari, ai quali siamo interessati. Per noi questi scenari saranno gli andamenti nel mercato del particolare asset che vogliamo modellare.
- $\mathcal{F}$  è una  $\sigma$ -algebra su  $\Omega$ , ovvero una famiglia di sottoinsiemi di  $\Omega$  chiusa rispetto ad un qualunque insieme numerabile di operazioni.  $\mathcal{F}$  contiene tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$  sui quali potremmo voler fare un'affermazione. Ad esempio, per certi tipi di derivati, è importante capire al momento dell'acquisto se l'asset sottostante si manterrà al di sopra di una certa soglia durante tutto il periodo di validità del contratto. In questo caso siamo interessati all'unione di tutti gli scenari, elementi di  $\Omega$ , per i quali il sottostante ha un tale andamento. Quest'unione è un elemento di  $\mathcal{F}$ . Gli elementi di  $\mathcal{F}$  vengono chiamati talvolta eventi.
- $P$  è una misura di probabilità su  $\mathcal{F}$ , e permette appunto di associare una probabilità agli eventi appartenenti a  $\mathcal{F}$ .

Inoltre la coppia  $(\Omega, \mathcal{F})$  viene chiamata *spazio misurabile*.

**Definizione 1.1.2** (Spazio di Probabilità Completo). Lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si dice completo se presi due qualunque insiemi  $A$  e  $B$ , sottoinsiemi di  $\Omega$ , tali che



- $A \in \mathcal{F}$  con  $P(A) = 0$  e
- $B \subset A$

si ha che  $B \in \mathcal{F}$ .

Si ricorda che dato uno spazio di probabilità  $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, P)$  è sempre possibile costruire la sua versione completa  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ponendo semplicemente  $\mathcal{F} = \sigma(\bar{\mathcal{F}} \cup \mathcal{N})$ , dove

$$\mathcal{N} = \{B \subset \Omega : B \subset A \text{ per un qualche } A \in \bar{\mathcal{F}}, \text{ con } P(A) = 0\}$$

e  $\sigma(\mathcal{C})$  indica la più piccola  $\sigma$ -algebra su  $\Omega$  contenente  $\mathcal{C}$ , una data collezione di sottosinsiemi di  $\Omega$ . Si evidenzia che una tale  $\sigma$ -algebra esiste sempre. Inoltre  $\mathcal{F}$  viene detta il  $P$ -completamento di  $\bar{\mathcal{F}}$ . Nel seguito lavoreremo sempre con spazi di probabilità completi.

**Definizione 1.1.3** (Variabile Aleatoria). Se  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  è uno spazio di probabilità e  $(E, \mathcal{E})$  è uno spazio misurabile, una variabile aleatoria è una funzione  $X : \Omega \rightarrow E$  misurabile, tale cioè che

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{E}. \quad (1.1)$$

Se  $E = \mathbb{R}$  e  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  (i boreliani di  $\mathbb{R}$ ) si dice che  $X$  è una variabile aleatoria reale.

Si osserva che grazie alla condizione (1.1) è possibile associare delle probabilità, usando  $P$ , a eventi della forma  $\{X \in A\}$  per un qualche  $A \in \mathcal{E}$ , attraverso la controimmagine di  $X$ . In effetti abbiamo la seguente,

**Definizione 1.1.4** (Distribuzione di una Variabile Aleatoria). Sia  $X$  una variabile aleatoria definita su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e a valori in  $(E, \mathcal{E})$ . La sua distribuzione è la misura di probabilità  $p_X$  su  $(E, \mathcal{E})$  definita come

$$p_X(A) = P(X^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{E}.$$

D'ora in poi, per semplicità, lavoreremo con variabili aleatorie reali, cioè a valori in  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

**Definizione 1.1.5** (Valore Atteso). Data una variabile aleatoria reale  $X$  definita su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , il suo valore atteso è dato da

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x p_X(dx).$$

Si osserva che data una variabile aleatoria reale  $X$  e una funzione Borel-misurabile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , è sempre possibile definire il valore atteso della variabile aleatoria  $f(X)$ ,

$$E[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_X(dx).$$

Abbiamo la seguente importante definizione, che nasce come valore atteso di una funzione Borel-misurabile applicata alla variabile aleatoria  $X$ ,

**Definizione 1.1.6** (Funzione Caratteristica). Sia  $X$  una variabile aleatoria reale definita su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , la sua funzione caratteristica  $\phi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è definita da

$$\phi_X(u) = E[e^{iuX}] = \int_{\Omega} e^{iuX(\omega)} P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} p_X(dx),$$

per ogni  $u \in \mathbb{R}$ , dove  $i$  indica l'unità immaginaria e  $\mathbb{C}$ , l'insieme dei numeri complessi. Elenchiamo alcune proprietà elementari di  $\phi_X$ :

- $|\phi_X(u)| \leq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}$ ,
- $\phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)} \quad \forall u \in \mathbb{R}$ ,
- Se  $E[|X|^n] < \infty$  per un qualche  $n \in \mathbb{N}$  allora

$$E[X^n] = i^{-n} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \phi_X(u) \Big|_{u=0}.$$

**Definizione 1.1.7** (Valore Atteso Condizionale). Sia  $X$  una variabile aleatoria integrabile definita su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e sia  $\mathcal{D}$  una sotto- $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{F}$ . Si dice valore atteso condizionale di  $X$  rispetto a  $\mathcal{D}$  e si indica con  $E[X|\mathcal{D}]$  la classe di equivalenza delle variabili aleatorie  $Z$ ,  $\mathcal{D}$ -misurabili e integrabili, tali che per ogni  $A \in \mathcal{D}$

$$E[ZI_A] = E[XI_A].$$

Una variabile aleatoria  $Z$  con queste proprietà esiste sempre ed è unica a meno di una  $P$ -equivalenza.

Nello studio dei processi di Lévy il seguente concetto occupa un ruolo quasi centrale,

**Definizione 1.1.8** (Infinita Divisibilità). Sia  $X$  una variabile aleatoria reale. Si dice che  $X$  è infinitamente divisibile se, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , esistono variabili aleatorie  $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$  i.i.d. tali che

$$X = Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}.$$

**Proposizione 1.1.1** ([1, p.25]). *Sia  $X$  una variabile aleatoria reale e  $\phi_X$  la sua funzione caratteristica. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1)  $X$  è infinitamente divisibile,
- (2) per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\phi_X$  ha una radice  $n$ -esima che è lei stessa funzione caratteristica di una variabile aleatoria.

*Dimostrazione.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Scelto un qualsiasi  $n \in \mathbb{N}$ , dalle definizioni di infinità divisibilità, dalle proprietà degli esponenziali e dalla indipendenza delle  $Y_i^{(n)}$  con  $i = 1, \dots, n$ , si ha che per ogni  $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\phi_X(u) &= E[e^{iuX}] = E\left[e^{iu(Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)})}\right] \\ &= E\left[e^{iuY_1^{(n)}}\right] \dots E\left[e^{iuY_n^{(n)}}\right].\end{aligned}$$

Se denotiamo con  $Y$  la variabile aleatoria che ha la stessa distribuzione delle  $Y_i^{(n)}$  con  $i = 1, \dots, n$ , e con  $\phi_Y$  la sua funzione caratteristica, si ottiene infine che

$$\phi_X(u) = (E[e^{iuY}])^n = \phi_Y(u)^n,$$

cioè l'implicazione richiesta.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Denotiamo con  $Y$  la variabile aleatoria di cui si parla in (2). Fissato  $n \in \mathbb{N}$ , scegliamo  $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$  copie indipendenti della variabile aleatoria  $Y$ . Abbiamo quindi che per ogni  $u \in \mathbb{R}$

$$E[e^{iuX}] = E\left[e^{iuY_1^{(n)}}\right] \dots E\left[e^{iuY_n^{(n)}}\right] = E\left[e^{iu(Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)})}\right].$$

Siccome due variabili aleatorie che hanno la stessa funzione caratteristica coincidono, si conclude che

$$X = Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}.$$

Inoltre questa procedura può essere fatta per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , da cui segue il risultato richiesto.  $\square$

**Esempi** (Infinita Divisibilità).

- **Gaussiana.** Sia  $X$  una variabile aleatoria reale e  $p_X$  la sua distribuzione. Diciamo che  $X$  è gaussiana se  $p_X$  ha la seguente densità, rispetto alla misura di Lebesgue,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La funzione  $f$  viene detta densità di probabilità di  $X$ . In questo caso usiamo la notazione  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , dove  $\mu$  è il valore atteso,  $\mu = E[X]$  e  $\sigma^2$  è la varianza,  $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$ . Calcoliamo la funzione

caratteristica di  $X$ , per ogni  $u \in \mathbb{R}$  abbiamo che

$$\begin{aligned}\phi_X(u) &= E[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} p_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2 - 2iu\sigma^2 x]\right\} dx \\ &= \exp\left\{iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right\} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu-iu\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \exp\left\{iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right\}.\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$[\phi_X(u)]^{1/n} = \exp\left\{iu\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}u^2\frac{\sigma^2}{n}\right\},$$

e  $X$  è infinitamente divisibile con  $Y_j^{(n)} \sim N(\mu/n, \sigma^2/n)$  per  $j = 1, \dots, n$ .

- **Poisson.** In questo caso la variabile aleatoria  $X$  prende valori in  $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .  $X$  si dice di Poisson se esiste un numero reale  $\lambda > 0$  tale che

$$P\left(\left\{\omega : X(\omega) = n\right\}\right) = p_X(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Usiamo la notazione  $X \sim \pi(\lambda)$ . Si verifica facilmente che  $E[X] = V[X] = \lambda$ , dove abbiamo indicato con  $V[X]$  la varianza di  $X$ . Calcoliamo la funzione caratteristica di  $X$ , per ogni  $u \in \mathbb{R}$  si ha che

$$\begin{aligned}\phi_X(u) &= E[e^{iuX}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{iun} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{iu})^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \exp\left\{\lambda e^{iu}\right\} = \exp\left\{\lambda(e^{iu} - 1)\right\}.\end{aligned}$$

Da cui si deduce che  $X$  è infinitamente divisibile con  $Y_j^{(n)} \sim \pi(\lambda/n)$  per  $j = 1, \dots, n$ .

- **Poisson Composto.** Supponiamo che  $\{Z_n, n \in \mathbb{N}^+\}$  sia una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. con  $Z_0 = 0$  q.c. e supponiamo inoltre di avere  $N \sim \pi(\lambda)$  indipendente da tutte le  $Z_n$ . La variabile aleatoria  $X$  definita da

$$X = \sum_{n=0}^N Z_n$$

si dice essere di Poisson composto. Per calcolare la funzione caratteristica di  $X$ , denotiamo con  $\phi_Z$  la funzione caratteristica comune a tutte

le  $Z_n, n \in \mathbb{N}$ , e condizionamo al valore di  $N$ , per ogni  $u \in \mathbb{R}$  abbiamo allora che

$$\begin{aligned} \phi_X(u) &= E \left[ \exp \left\{ iu \sum_{k=0}^N Z_k \right\} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} E \left[ \exp \left\{ iu \sum_{k=0}^N Z_k \right\} \middle| N = n \right] p_N(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E \left[ \exp \left\{ iu \sum_{k=0}^n Z_k \right\} \right] \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_Z(u)^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \phi_Z(u))^n}{n!} = \exp \left\{ \lambda (\phi_Z(u) - 1) \right\} \\ &= \exp \left\{ \lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iuz} - 1) p_Z(dz) \right\}, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con  $p_Z$  la distribuzione comune a tutte le  $Z_n, n \in \mathbb{N}$ . Se  $X$  è un Poisson composto scriviamo  $X \sim \pi(\lambda, p_Z)$ .  $X$  è infinitamente divisibile con  $Y_j^{(n)} \sim \pi(\lambda/n, p_Z)$  per  $j = 1, \dots, n$ . Si osserva inoltre che

$$E[X] = \lambda m_Z,$$

dove  $m_Z$  è il valore atteso comune a tutte le  $Z_n, n \in \mathbb{N}$ .

Prima di introdurre un'importante caratterizzazione delle variabile aleatorie infinitamente divisibile, abbiamo bisogno della seguente,

**Definizione 1.1.9** (Misura di Lévy). Sia  $\nu$  una misura definita su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Si dice che  $\nu$  è una misura di Lévy se

$$\int_{\mathbb{R}} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty \quad \text{e} \quad \nu(\{0\}) = 0$$

**Teorema 1.1.1** (Lévy-Khintchine [1, p.29]). Se  $X$  è una variabile aleatoria infinitamente divisibile allora esistono  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$ , e una misura di Lévy  $\nu$ , tali che per ogni  $u \in \mathbb{R}$

$$\phi_X(u) = \exp \left\{ iu\gamma - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iuxI_{\{|x|<1\}}) \nu(dx) \right\} \quad (1.2)$$

Inoltre ogni mappa della forma (1.2) è la funzione caratteristica di una qualche variabile aleatoria infinitamente divisibile.

La tripletta  $(\gamma, \sigma, \nu)$  viene chiamata la tripletta caratteristica della variabile aleatoria infinitamente divisibile  $X$  e se si pone

$$\phi_X(u) = e^{\psi(u)}$$

la funzione  $\psi$  viene detta esponente caratteristico oppure esponenziale di Lévy di  $X$ . Inoltre si osserva come la definizione di misura di Lévy garantisca che l'integrale in (1.2) sia finito. In effetti abbiamo che per ogni  $u \in \mathbb{R}$

$$\int_{|x| \geq 1} (e^{iux} - 1) \nu(dx) \leq 2 \int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty$$

e

$$\int_{|x| < 1} (e^{iux} - 1 - iux) \nu(dx) < \infty,$$

l'ultima disuguaglianza è più chiara grazie all'espansione di Taylor attorno a  $x = 0$ ,

$$e^{iux} = 1 + iux + O(|x|^2).$$

Per entrare in confidenza con la formula (1.2) presentiamo i seguenti,

**Esempi** (Tripletta Caratteristica).

- **Gaussiana.** Abbiamo visto precedentemente che se  $X \sim N(\mu, s^2)$  la sua funzione caratteristica è la seguente

$$\phi_X(u) = \exp \left\{ iu\mu - \frac{1}{2}u^2s^2 \right\} \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Quindi secondo la notazione del Teorema 1.1.1 abbiamo che  $\gamma = \mu$ , la media di  $X$ , e  $\sigma^2 = s^2$ , la varianza. Mentre  $\nu$  è la misura nulla.

- **Poisson.** Sia  $X \sim \pi(\lambda)$ , allora la sua funzione caratteristica è

$$\phi_X(u) = \exp \left\{ \lambda (e^{iu} - 1) \right\} \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza la sua tripletta caratteristica è  $(0, 0, \lambda\delta_1)$ , dove  $\delta_1$  indica la misura che pone massa 1 sull'insieme  $\{1\}$  e massa nulla sugli insiemi che non contengono tale insieme.

- **Poisson Composto.** Sia ora  $X \sim \pi(\lambda, p_Z)$  dove  $p_Z$  è un'opportuna distribuzione. La corrispondente funzione caratteristica è

$$\phi_X(u) = \exp \left\{ \lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iuz} - 1) p_Z(dz) \right\} \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Si osserva quindi facilmente, usando le notazioni del Teorema 1.1.1, che

$$\begin{aligned} \gamma &= \lambda \int_{|z| < 1} zp_Z(dz), \\ \sigma &= 0, \\ \nu &= \lambda p_Z. \end{aligned}$$

Il Teorema 1.1.1 di Lévy-Khintchine presenta ogni variabile aleatoria infinitamente divisibile come una convoluzione tra una variabile gaussiana e una variabile di “tipo” Poisson, questa relazione sarà chiarita quando verranno introdotti i processi di Lévy. Per ora abbiamo il caso gaussiano e il caso di Poisson come casi estremi, ma c’è un’ampia gamma di comportamenti tra questi due. Una particolare sottoclasse di variabili aleatorie infinitamente divisibili, sulla quale ora ci concentriamo, è quella delle variabili aleatorie stabili.

**Definizione 1.1.10** (Variabile Aleatoria Stabile). Una variabile aleatoria  $X$  viene detta stabile se per ogni  $n \geq 2$  e  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. con la stessa distribuzione di  $X$ , esistono due costanti  $a_n > 0$  e  $b_n$  tali che

$$X_1 + \dots + X_n = a_n X + b_n.$$

Si osserva facilmente che ogni variabile aleatoria stabile è infinitamente divisibile. In effetti basta prendere

$$Y_j^{(n)} = \frac{1}{a_n} \left( X_j - \frac{b_n}{n} \right) \quad \text{per } j = 1, \dots, n$$

nella definizione di variabile infinitamente divisibile, dove le  $X_j$  sono quelle della definizione di variabile aleatoria stabile. Si può dimostrare inoltre che le costanti di normalizzazione  $a_n$  sono tali che  $a_n = n^{1/\alpha}$  con  $0 < \alpha \leq 2$ . La costante  $\alpha$  prende il nome di indice di stabilità. Per quanto riguarda la loro caratterizzazione abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 1.1.2** ([1, p.34]). Sia  $X$  una variabile aleatoria stabile di indice  $\alpha \in (0, 2]$ , allora la sua tripletta caratteristica  $(\gamma, \sigma, \nu)$  assume una delle due seguenti forme:

- quando  $\alpha = 2$ ,  $\nu = 0$  ovvero  $X \sim N(\gamma, \sigma^2)$ ,
- quando  $\alpha \neq 2$ ,  $\sigma = 0$  e

$$\nu(dx) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} \mathbf{I}_{(0, \infty)} dx + \frac{c_2}{x^{1+\alpha}} \mathbf{I}_{(-\infty, 0)} dx$$

dove  $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$  e  $c_1 + c_2 > 0$ .

Un’attenta trasformazione dell’integrale nella formula (1.2) porta a una forma diversa della funzione caratteristica per le variabili aleatorie stabili, che a volte risulta più conveniente.

**Teorema 1.1.3** ([1, p.35]). Una variabile aleatoria  $X$  è stabile di indice  $\alpha \in (0, 2]$  se e solo se esistono  $s > 0$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  tali che per ogni  $u \in \mathbb{R}$

- quando  $\alpha = 1$

$$\phi_X(u) = \exp \left\{ iu\mu - s|u| \left[ 1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(u) \log(|u|) \right] \right\}$$

- quando  $\alpha = 2$

$$\phi_X(u) = \exp \left\{ iu\mu - \frac{1}{2} u^2 s^2 \right\}$$

- quando  $\alpha \neq 1, 2$

$$\phi_X(u) = \exp \left\{ iu\mu - s^\alpha |u|^\alpha \left[ 1 + i\beta \text{sign}(u) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] \right\}$$

Si può dimostrare che  $E[X^2] < \infty$  se e solo se  $\alpha = 2$ , cioè se  $X$  è gaussiana, e che  $E[|X|] < \infty$  se e solo se  $\alpha \in (1, 2]$ .

Passiamo ora a occuparci di fenomeni che dipendono dal tempo. In effetti si ricorda che il fenomeno che si vuole modellare, cioè l'andamento di un particolare asset nel mercato, non è un fenomeno statico ma bensì dinamico. Lo spazio di probabilità in uso deve essere arricchito con un elemento che tenga conto di questa caratteristica inerente al fenomeno. A questo proposito abbiamo la seguente,

**Definizione 1.1.11** (Filtrazione). Dato uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , una filtrazione  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$  è una famiglia di sotto- $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{F}$  tali che

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F} \quad \text{per } 0 \leq s < t \leq T. \quad (1.3)$$

Inoltre, lo spazio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  viene chiamato spazio di probabilità filtrato.

Si osserva come la condizione (1.3) rappresenti il naturale flusso dell'informazione a disposizione al trascorrere del tempo. In effetti  $\mathcal{F}_t$  contiene  $\mathcal{F}_s$ , ovvero gli eventi noti al tempo  $t$  non sono altro che gli eventi che erano già noti a un tempo passato  $s$  più altri eventi che non erano allora noti e che si sono rivelati durante l'intervallo di tempo  $(s, t]$ .

Per illustrare il concetto di spazio di probabilità filtrato e come questo sia adeguato a modellare il flusso d'informazione quando si è in un contesto aleatorio e temporale abbiamo il seguente semplice esempio.

**Esempio** (Spazio di Probabilità Filtrato). Illustriamo il concetto in un contesto molto idealizzato. Supponiamo che il valore di un asset al tempo  $t = 0$ , ad esempio oggi, sia noto, e che questo suo valore rimanga invariato fino al tempo  $t = 1$ , nel quale può saltare con probabilità positiva verso l'alto oppure può saltare, sempre con probabilità positiva, verso il basso. Ci sono solo quei due possibili comportamenti. La situazione si ripete per un altro passo temporale, cioè il valore dell'asset al tempo  $t = 1$  rimane invariato fino al tempo  $t = 2$ , nel quale questo valore può saltare verso l'alto o verso il



basso. Questo valore poi rimane invariato fino al tempo  $T$  nel quale finisce la nostra osservazione del fenomeno. Supponiamo inoltre, per fissare le idee, che i salti siano simmetrici, cioè il salto verso l'alto ha la stessa ampiezza di quello verso il basso. Possiamo costruire il nostro insieme  $\Omega$  nel seguente modo,

$$\Omega = \{uu, ud, du, dd\}$$

Per spiegare la notazione prendiamo il secondo elemento  $ud$ . Questo indica lo scenario nel quale il valore dell'asset salta verso l'alto (up) al tempo  $t = 1$  e poi verso il basso (down) al tempo  $t = 2$ . Gli altri elementi hanno un'interpretazione analoga. Si evidenzia come l'insieme  $\Omega$  contenga tutti i possibili scenari del nostro fenomeno idealizzato. Come  $\sigma$ -algebra su  $\Omega$  prendiamo semplicemente il suo insieme delle parti  $\mathcal{P}(\Omega)$ , cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$ . Quindi abbiamo che  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Per definire una misura di probabilità  $P$  su  $\mathcal{F}$  possiamo fare la seguente ipotesi: il salto al tempo  $t = 1$  è indipendente dal salto al tempo  $t = 2$ . Se indichiamo poi con  $p$  la probabilità positiva di saltare verso l'alto abbiamo definito la nostra misura  $P$ :

$$\begin{aligned} P(\{uu\}) &= p^2 \\ P(\{ud\}) &= p(1-p) \\ P(\{du\}) &= (1-p)p \\ P(\{dd\}) &= (1-p)^2 \end{aligned}$$

Gli altri elementi di  $\mathcal{F}$  si ottengono attraverso unione di questi quattro insiemi disgiunti e quindi il valore di  $P$  su di essi si ottiene grazie alle proprietà delle misure. Infine dotiamo il nostro spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  della filtrazione  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$  definita come segue,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &= \{\emptyset, \Omega\}, & 0 \leq t < 1 \\ \mathcal{F}_t &= \{\emptyset, \Omega, \{uu, ud\}, \{du, dd\}\}, & 1 \leq t < 2 \\ \mathcal{F}_t &= \mathcal{F}, & 2 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

A ciascuna  $\sigma$ -algebra di  $\mathbb{F}$  è naturale associare la corrispondente partizione più fine possibile di  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= \{\Omega\}, & 0 \leq t < 1 \\ \mathcal{P}_1 &= \{\{uu, ud\}, \{du, dd\}\}, & 1 \leq t < 2 \\ \mathcal{P}_2 &= \{\{uu\}, \{ud\}, \{du\}, \{dd\}\}, & 2 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Quindi se denotiamo con  $\omega^*$  lo scenario che rappresenta il reale andamento del nostro asset, scenario noto solo a  $t \geq 2$ , possiamo descrivere il flusso d'informazione nel seguente modo. Per  $0 \leq t < 1$  la partizione che abbiamo

a disposizione è  $\mathcal{P}_0$  e quindi possiamo solo dire che  $\omega^* \in \Omega$ . Nel seguente intervallo temporale, cioè per  $1 \leq t < 2$ , avremo già osservato il salto del valore dell'asset a  $t = 1$ , in effetti la partizione corrispondente sarà  $\mathcal{P}_1$ . E quindi sapremo se  $\omega^*$  appartiene all'insieme  $\{uu, ud\}$  oppure all'insieme  $\{du, dd\}$ . Per ultimo a  $t = 2$  sarà noto a quale elemento di  $\mathcal{P}_2$  corrisponde  $\omega^*$ , ovvero sapremo quale scenario è stato realizzato. Con il passare del tempo le  $\mathcal{F}_t$  diventano più ricche, ovvero si ha a disposizione sempre più informazione. Questo si traduce nel fatto di avere partizioni di  $\Omega$  via via più fini, permettendo di avere più dettagli sullo scenario  $\omega^*$  che si sta realizzando.

In generale assumiamo che lo spazio di probabilità filtrato  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  soddisfi le seguenti *condizioni usuali*:

- (i)  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  è completo.
- (ii)  $\mathcal{F}_0$  contiene tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$  di probabilità nulla secondo  $P$ .
- (iii)  $\mathbb{F}$  è continuo da destra, cioè  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$  per ogni  $t \in [0, T)$ .

Analogamente al caso di uno spazio di probabilità, dato uno spazio di probabilità filtrato  $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{F}}, P)$  è sempre possibile costruire il suo corrispondente spazio in condizioni usuali  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ . Si prende  $\mathcal{F} = \sigma(\bar{\mathcal{F}} \cup \mathcal{N})$  e per ogni  $0 \leq t \leq T$  si pone

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \sigma(\bar{\mathcal{F}}_s \cup \mathcal{N}).$$

Inoltre  $\mathbb{F}$  viene detto il  $P$ -completamento di  $\bar{\mathbb{F}}$ . D'ora in poi lavoreremo sempre con spazi di probabilità filtrati in condizioni usuali.

Possiamo ora dare la definizione di Processo Stocastico.

**Definizione 1.1.12** (Processo Stocastico). Un processo stocastico,  $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ , è una famiglia di variabili aleatorie definite su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e a valori in uno spazio misurabile  $(E, \mathcal{E})$ . Se le variabili aleatorie sono reali anche il processo stocastico si dice reale.

L'introduzione di una filtrazione nello spazio di probabilità dove viene definito un processo stocastico porta alla seguente,

**Definizione 1.1.13** (Processo Adattato). Dato uno spazio di probabilità filtrato  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  il processo stocastico  $X$  si dice adattato alla filtrazione  $\mathbb{F}$ , oppure  $\mathbb{F}$ -adattato, se per ogni  $t$  la variabile aleatoria  $X_t$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile.

Il concetto di processo stocastico adattato esprime il fatto che per questo tipo di processi il valore di  $X_t$  è noto al tempo  $t$ . Questa caratteristica è sicuramente condivisa con il fenomeno che si vuole modellare.

Un'altra definizione che si renderà necessaria nel seguito è

**Definizione 1.1.14** (Processo Predicibile). Dato uno spazio di probabilità filtrato  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$  il processo stocastico  $X$  si dice  $\mathbb{F}$ -predicibile se  $X_t$  è  $\mathcal{F}_{t-}$ -misurabile per ogni  $t$  dove

$$\mathcal{F}_{t-} = \bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s.$$

Si osserva quindi che per i processi stocastici predicibili il valore di  $X_t$  è noto strettamente prima del tempo  $t$ .

Quando lo spazio di probabilità dove viene definito un processo stocastico non è dotato di una filtrazione si fa di solito ricorso alla seguente,

**Definizione 1.1.15** (Filtrazione Naturale). Dato un processo stocastico  $X$  definito su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si chiama filtrazione naturale di  $X$ , e viene indicata con  $\mathbb{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, 0 \leq t \leq T\}$ , il  $P$ -completamento della filtrazione  $\bar{\mathbb{F}}^X = \{\bar{\mathcal{F}}_t^X, 0 \leq t \leq T\}$  dove, per ogni  $t \in [0, T]$ ,  $\bar{\mathcal{F}}_t^X$  indica la più piccola  $\sigma$ -algebra che rende  $X_t$  misurabile.

**Definizione 1.1.16** (Modificazione, Indistinguibilità). Dati due processi stocastici  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  e  $X' = \{X'_t, t \geq 0\}$  definiti su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , si dice che sono una modificazione l'uno dell'altro se

$$P(X_t = X'_t) = 1 \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Si dicono invece indistinguibili se

$$P(X_t = X'_t \text{ per ogni } t \geq 0) = 1.$$

**Definizione 1.1.17** (Processo Misurabile). Un processo  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  definito su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e a valori in  $(E, \mathcal{E})$  si dice misurabile se l'applicazione  $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$  è misurabile da  $(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F})$  in  $(E, \mathcal{E})$ .

**Definizione 1.1.18** (Processo Progressivamente Misurabile). Un processo  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  definito su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e a valori in  $(E, \mathcal{E})$  si dice progressivamente misurabile se per ogni  $t \geq 0$  l'applicazione  $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$  è misurabile da  $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F})$  in  $(E, \mathcal{E})$ .

Si osserva che un processo progressivamente misurabile è misurabile.

Passiamo ora a introdurre alcune classi importanti di processi stocastici.

**Definizione 1.1.19** (Processo di Markov). Si dice processo di Markov un processo  $X = \{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, (X_t)_{t \in [0, T]}\}$  a valori in uno spazio misurabile  $(E, \mathcal{E})$  tale che

$$P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A | X_s) \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{E} \text{ e } 0 \leq s < t \leq T.$$

Si ricorda che le probabilità condizionali così come le speranze condizionali sono classi di equivalenza di variabili aleatorie rispetto alla misura di probabilità  $P$ . L'uguaglianza va intesa in quel senso.

I processi di Markov hanno quindi la particolarità che la distribuzione del valore del processo in un istante futuro è indipendente dal passato e dipende solo dal valore del processo all'istante corrente.

Adesso parliamo di una classe di processi caratterizzati dalle proprietà delle sue traiettorie. Ricordiamo che, fissato  $\omega \in \Omega$ , una traiettoria del processo  $X$  è data dall'applicazione  $t \mapsto X_t(\omega)$  dove abbiamo evidenziato che la particolare traiettoria dipende dall'evento elementare  $\omega$  considerato.

Cominciamo considerando una funzione a valori reali  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definizione 1.1.20** (Funzione a Variazione Finita). Sia  $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  una partizione dell'intervallo reale  $[a, b]$ . Definiamo variazione della funzione  $f$  sulla partizione  $\pi$  la quantità

$$V_\pi(f) = \sum_{i=0}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Inoltre se

$$TV(f) = \sup_{\pi \in \Pi} V_\pi(f) < \infty,$$

dove  $\Pi$  è l'insieme di tutte le partizioni sull'intervallo  $[a, b]$ , la funzione  $f$  si dice a variazione finita su  $[a, b]$ . Altrimenti la funzione  $f$  si dice a variazione infinita. La quantità  $TV(f)$  viene chiamata variazione totale di  $f$  su  $[a, b]$ . Se  $f$  è definita su  $\mathbb{R}$  oppure su  $[0, \infty)$ , si dice che questa è a variazione finita se lo è per ogni compatto di  $\mathbb{R}$  o  $[0, \infty)$ , rispettivamente. In caso contrario, analogamente a prima, si dice che è a variazione infinita.

Ritorniamo ora ai processi stocastici.

**Definizione 1.1.21** (Processo a Variazione Finita). Il processo stocastico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  si dice a variazione finita se per quasi ogni  $\omega \in \Omega$  le sue traiettorie sono delle funzioni a variazione finita. Se questo non è il caso diciamo che il processo è a variazione infinita.

**Definizione 1.1.22** (Processo cadlag). Il processo stocastico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è cadlag se per quasi ogni  $\omega \in \Omega$  le sue traiettorie sono delle funzioni continue a destra e limitate a sinistra.

Il termine cadlag deriva dal francese *continue à droite et limites à gauche*. Se il processo stocastico  $X$  è cadlag denoteremo con

$$X_{t-} = \lim_{s \rightarrow t-} X_s$$

il suo limite sinistro, e con

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-}$$

il salto al tempo  $t$ .

**Definizione 1.1.23** (Processo caglad). Il processo stocastico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è caglad se per quasi ogni  $\omega \in \Omega$  le sue traiettorie sono delle funzioni continue a sinistra e limitate a destra.

## 1.2 Processi di Lévy

**Definizione 1.2.1** (Processo di Lévy). Un processo stocastico cadlag  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  definito su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  a valori reali tali che  $X_0 = 0$  q.c. si dice di Lévy se possiede le seguenti proprietà:

- (i) Incrementi Indipendenti: per ogni successione crescente di tempi  $t_0, \dots, t_n$ , le variabili aleatorie  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sono indipendenti.
- (ii) Incrementi Stazionari: la distribuzione di  $X_{t+h} - X_t$  non dipende da  $t$ .
- (iii) Continuità Stocastica:  $\forall \epsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0$ .

La condizione che il processo sia cadlag a volte non viene inclusa nella definizione. Comunque si può dimostrare che ogni processo di Lévy (definito senza richiedere la proprietà cadlag) possiede un'unica modificazione che è cadlag. Quindi questa proprietà può essere assunta senza perdere generalità. Si osserva poi che la condizione (iii) non implica in nessun modo che le traiettorie del processo stocastico siano continue. Serve a escludere processi con salti a tempi fissati. Significa che per un dato  $t$  la probabilità di osservare un salto a  $t$  è nulla, cioè i salti del processo capitano a tempi aleatori.

**Proposizione 1.2.1** ([1, p.43]). Se  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è un processo di Lévy allora  $X_t$  è una variabile aleatoria infinitamente divisibile per ogni  $t \geq 0$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  possiamo scrivere

$$X_t = Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)},$$

dove per  $k = 1, \dots, n$

$$Y_k^{(n)} = X_{kt/n} - X_{(k-1)t/n}.$$

Le  $Y_k^{(n)}$  sono i.i.d grazie alle condizioni (i) e (ii) della definizione di processo di Lévy. □

**Proposizione 1.2.2** ([1, p.43]). Se  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  possiede la proprietà di continuità stocastica, allora la mappa  $t \mapsto \phi_{X_t}(u)$  è continua per ogni  $u \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $s, t \geq 0$  con  $s \neq t$  poniamo  $X_{s,t} = X_t - X_s$ . Fissiamo  $u \in \mathbb{R}$ . Grazie alla continuità della mappa  $x \mapsto e^{iux}$  nell'origine, dato qualsiasi  $\epsilon > 0$  esiste sempre  $\delta_1 > 0$  tale che

$$\sup_{|x| \leq \delta_1} |e^{iux} - 1| < \epsilon/2.$$

Inoltre, grazie alla continuità stocastica del processo  $X$ , esiste sempre  $\delta_2 > 0$  tale che per ogni  $s, t$  con  $|t - s| < \delta_2$  si ha che

$$P(|X_{s,t}| > \delta_1) < \epsilon/4.$$

Quindi per ogni  $t, s$  con  $|t - s| < \delta_2$  si ha che

$$\begin{aligned} |\phi_{X_t}(u) - \phi_{X_s}(u)| &= \left| \int_{\Omega} e^{iuX_s(\omega)} \left( e^{iuX_{s,t}(\omega)} - 1 \right) P(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |e^{iuX_s(\omega)}| |e^{iuX_{s,t}(\omega)} - 1| P(d\omega) \\ &\leq \int_{\Omega} |e^{iuX_{s,t}(\omega)} - 1| P(d\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |e^{iux} - 1| p_{X_{s,t}}(dx) \\ &= \int_{|x| \leq \delta_1} |e^{iux} - 1| p_{X_{s,t}}(dx) + \int_{|x| > \delta_1} |e^{iux} - 1| p_{X_{s,t}}(dx) \\ &\leq \sup_{|x| \leq \delta_1} |e^{iux} - 1| \int_{|x| \leq \delta_1} p_{X_{s,t}}(dx) + 2 \int_{|x| > \delta_1} p_{X_{s,t}}(dx) \\ &\leq \sup_{|x| \leq \delta_1} |e^{iux} - 1| + 2P(|X_{s,t}| > \delta_1) \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

cioè il risultato richiesto.  $\square$

**Teorema 1.2.1** ([1, p.44]). *Se  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è un processo di Lévy, allora*

$$\phi_{X_t}(u) = e^{t\psi(u)}$$

per ogni  $u \in \mathbb{R}$  e  $t \geq 0$ , dove  $\psi$  è l'esponente caratteristico di  $X_1$ .

*Dimostrazione.* Sia  $X$  un processo di Lévy e prendiamo, per ogni  $u \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ . Definiamo  $\phi_u(t) = \phi_{X_t}(u)$ , allora grazie alle proprietà (i) e (ii) dei

processi di Lévy si ha che

$$\begin{aligned}
 \phi_u(t+s) &= E \left[ e^{iuX_{s+t}} \right] \\
 &= E \left[ e^{iu(X_{s+t}-X_s)} e^{iuX_s} \right] \\
 &= E \left[ e^{iu(X_{s+t}-X_s)} \right] E \left[ e^{iuX_s} \right] \\
 &= E \left[ e^{iuX_t} \right] E \left[ e^{iuX_s} \right] \\
 &= \phi_u(t)\phi_u(s).
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ora, grazie a che  $X_0 = 0$  q.c., si osserva che

$$\phi_u(0) = 1. \tag{1.5}$$

Inoltre grazie alla Proposizione 1.2.2 sappiamo che la mappa  $t \mapsto \phi_u(t)$  è continua. Comunque l'unica soluzione continua di (1.4) e (1.5) è data da  $\phi_u(t) = e^{t\alpha(u)}$  dove  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Infine, grazie alla Proposizione 1.2,  $X_1$  è infinitamente divisibile e di conseguenza  $\alpha$  è il suo esponente di Lévy.  $\square$

Diamo di seguito la formula di Lévy-Khintchine per un processo di Lévy  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ ,

$$\phi_{X_t}(u) = \exp \left[ t \left\{ iu\gamma - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iuxI_{\{|x|<1\}}) \nu(dx) \right\} \right]. \tag{1.6}$$

per ogni  $u \in \mathbb{R}$ , dove  $(\gamma, \sigma, \nu)$  è la tripletta caratteristica di  $X_1$ . Definiremo d'ora in poi le caratteristiche del processo di Lévy  $X$  come quelle della variabile aleatoria  $X_1$ .

**Esempi** (Processi di Lévy).

- **Moto Browniano.** Un Moto Browniano standard è un processo di Lévy  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  tale che

- (i)  $B_t \sim N(0, t)$  per ogni  $t \geq 0$ .
- (ii)  $B$  ha delle traiettorie continue.

Ricaviamo facilmente la sua funzione caratteristica,

$$\phi_{B_t}(u) = \exp \left[ -\frac{1}{2}tu^2 \right].$$

Dal Moto Browniano standard si definisce nel seguente modo il Moto Browniano con drift,

$$X_t = \mu t + \sigma B_t,$$

dove  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma > 0$ . Segue che la sua funzione caratteristica ha la seguente forma,

$$\phi_{X_t}(u) = \exp \left[ t \left( iu\mu - \frac{1}{2}u^2 \right) \right].$$

Di seguito elenchiamo alcune proprietà del Moto Browniano.

1. Il Moto Browniano è localmente Hölder continuo con esponente  $\alpha$ , per ogni  $0 < \alpha < 1/2$ . Cioè, per ogni  $T > 0$ ,  $\omega \in \Omega$ , esiste  $K = K(T, \omega)$  tale che

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq K|t - s|^\alpha$$

per  $0 \leq s < t \leq T$ .

2. Le traiettorie di  $B$  sono quasi certamente non differenziabili dappertutto.
3. Per ogni successione  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^+$  tale che  $t_n \rightarrow \infty$  monotona-mente, si ha che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} B_{t_n} = -\infty \quad \text{q.c.} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} B_{t_n} = \infty \quad \text{q.c.}$$

- **Processo di Poisson.** Un processo di Poisson  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  di intensità  $\lambda$  è un processo di Lévy tale che per ogni  $t \geq 0$

$$N_t \sim \pi(\lambda t).$$

La sua funzione caratteristica si ricava direttamente da quella della variabile aleatoria di Poisson, ed è data da

$$\phi_{N_t}(u) = \exp \left\{ \lambda t (e^{iu} - 1) \right\}.$$

A partire dal processo di Poisson si definisce il processo di Poisson compensato  $\tilde{N} = \{\tilde{N}_t, t \geq 0\}$  dove per ogni  $t \geq 0$

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t.$$

Si osserva che  $E[\tilde{N}_t] = 0$  e  $E[\tilde{N}_t^2] = \lambda t$  per ogni  $t \geq 0$ .

- **Processo di Poisson Composto.** Supponiamo che  $\{Z_n, n \in \mathbb{N}^+\}$  sia una successione di variabili aleatorie reali i.i.d. con  $Z_0 = 0$  q.c. per convenzione. Indichiamo con  $p$  la densità di probabilità comune delle variabili  $Z_n$ . Supponiamo inoltre di avere un processo di Poisson  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  di intensità  $\lambda$  indipendente da tutte le  $Z_n$ . Il processo stocastico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  definito da

$$X_t = \sum_{n=0}^{N_t} Z_n$$



è un processo di Lévy. Usando la notazione introdotta per la variabile aleatoria di Poisson composto, possiamo scrivere che per ogni  $t \geq 0$

$$X_t \sim \pi(\lambda t, p).$$

La funzione caratteristica di  $X$  è data da

$$\phi_{X_t}(u) = \exp \left\{ \lambda t \int_{\mathbb{R}} (e^{iuz} - 1) p(dz) \right\}.$$

- **Processo Gamma.** Cominciamo introducendo la variabile aleatoria Gamma di parametri  $\alpha, \lambda > 0$  che indichiamo con  $G(\alpha, \lambda)$ . La sua densità  $f$  è data da

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{I}_{\{x>0\}},$$

dove abbiamo indicato con  $\Gamma(\cdot)$  la funzione gamma. La variabile aleatoria  $G(\alpha, \lambda)$  risulta essere infinitamente divisibile. Procediamo ora a definire il processo Gamma. Il processo Gamma di parametri  $\alpha, \lambda > 0$  è il processo di Lévy  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  tale che per ogni  $t \geq 0$

$$X_t \sim G(\alpha t, \lambda).$$

La tripletta caratteristica del processo  $X$ , che denotiamo come al solito con  $(\gamma, \sigma, \nu)$  è data da

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\alpha}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}) \\ \sigma &= 0 \\ \nu(dx) &= \alpha x^{-1} e^{-\lambda x} \mathbf{I}_{\{x>0\}} dx. \end{aligned}$$

- **Inverse Gaussian.** Cominciamo introducendo la variabile aleatoria Inverse Gaussian di parametri  $\alpha, \lambda > 0$  che indichiamo con  $IG(\alpha, \lambda)$ . La sua densità  $f$  è data da

$$f(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{\alpha\lambda} x^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2 x^{-1} + \lambda^2 x)} \mathbf{I}_{\{x>0\}}.$$

La variabile aleatoria  $IG(\alpha, \lambda)$  risulta essere infinitamente divisibile. Procediamo ora a definire il processo Inverse Gaussian. Il processo Inverse Gaussian di parametri  $\alpha, \lambda > 0$  è il processo di Lévy  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  tale che per ogni  $t \geq 0$

$$X_t \sim IG(\alpha t, \lambda).$$

La tripletta caratteristica del processo  $X$ , che denotiamo come al solito con  $(\gamma, \sigma, \nu)$  è data da

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\alpha}{\lambda} (2N(\lambda) - 1) \\ \sigma &= 0 \\ \nu(dx) &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 x} \mathbf{I}_{\{x>0\}} dx ,\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con  $N(\cdot)$  la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria normale standard.

- **Inverse Gaussian Generalizzata.** Cominciamo introducendo la variabile aleatoria Inverse Gaussian Generalizzata di parametri  $\gamma, \alpha$  e  $\lambda$  che indichiamo con  $GIG(\gamma, \alpha, \lambda)$ . La sua densità  $f$  è data da

$$f(x) = \frac{(\alpha/\lambda)^\gamma}{K_\gamma(\alpha\lambda)} x^{\gamma-1} e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2 x^{-1} + \lambda^2 x)} \mathbf{I}_{\{x>0\}} ,$$

dove  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \lambda > 0$  e  $K_\gamma(\cdot)$  denota la funzione di Bessel modificata del terzo tipo con indice  $\gamma$ . La funzione caratteristica della variabile aleatoria  $GIG(\gamma, \alpha, \lambda)$ , che indichiamo con  $\phi_{GIG}$ , è data da

$$\phi_{GIG}(u) = \frac{(1 - 2iu/\lambda^2)^{\gamma/2}}{K_\gamma(\alpha\lambda)} K_\gamma\left(\alpha\lambda\sqrt{1 - 2iu\lambda^{-2}}\right) .$$

Si dimostra che la variabile aleatoria  $GIG(\gamma, \alpha, \lambda)$  è infinitamente divisibile. Quindi si definisce il processo Inverse Gaussian Generalizzato come il processo di Lévy i cui incrementi in un intervallo di tempo di lunghezza pari a  $t$  hanno come funzione caratteristica la seguente

$$\phi_{GIG}^t .$$

- **Variance Gamma.** Cominciamo introducendo la variabile aleatoria Variance Gamma di parametri  $\gamma, \alpha$  e  $\lambda$  che indichiamo con  $VG(\gamma, \alpha, \lambda)$ . La sua funzione caratteristica, indicata con  $\phi_{VG}$ , è data da

$$\phi_{VG}(u) = \left(1 - iu\alpha\lambda + \frac{1}{2}\alpha\gamma^2 u^2\right)^{-1/\alpha} ,$$

dove  $\alpha > 0$  e  $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ . La variabile aleatoria  $VG(\gamma, \alpha, \lambda)$  risulta essere infinitamente divisibile. Procediamo ora a definire il processo Variance Gamma. Il processo Variance Gamma di parametri  $\gamma, \alpha$  e  $\lambda$  è il processo di Lévy  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  tale che per ogni  $t \geq 0$

$$X_t \sim VG(\gamma\sqrt{t}, \alpha/t, \lambda t) .$$

La funzione caratteristica di  $X$  è allora data da

$$\phi_{X_t}(u) = \left(1 - iu\alpha\lambda + \frac{1}{2}\alpha\gamma^2 u^2\right)^{-t/\alpha} .$$

- **Normal Inverse Gaussian.** Cominciamo introducendo la variabile aleatoria Normal Inverse Gaussian di parametri  $\gamma, \alpha$  e  $\lambda$  che indichiamo con  $NIG(\gamma, \alpha, \lambda)$ . La sua funzione caratteristica, indicata con  $\phi_{NIG}$ , è data da

$$\phi_{NIG}(u) = \exp\left(-\lambda \left[\sqrt{\gamma^2 - (\alpha + iu)^2} - \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}\right]\right),$$

dove  $\gamma, \lambda > 0$  e  $\alpha \in (-\gamma, \gamma)$ . La variabile aleatoria  $NIG(\gamma, \alpha, \lambda)$  risulta essere infinitamente divisibile. Procediamo ora a definire il processo Normal Inverse Gaussian. Il processo Normal Inverse Gaussian di parametri  $\gamma, \alpha$  e  $\lambda$  è il processo di Lévy  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  tale che per ogni  $t \geq 0$

$$X_t \sim NIG(\gamma, \alpha, \lambda t).$$

La tripletta caratteristica del processo  $X$ , che denotiamo come al solito con  $(\gamma, \sigma, \nu)$  è data da

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\gamma\lambda}{\pi} \int_0^1 \sinh(\alpha x) K_1(\gamma x) dx \\ \sigma &= 0 \\ \nu(dx) &= \frac{\gamma\lambda e^{\alpha x} K_1(\gamma|x|)}{\pi|x|} dx, \end{aligned}$$

dove ricordiamo che  $K_1(\cdot)$  indica la funzione di Bessel modificata del terzo tipo con indice 1.

- **Processo CGMY.** Cominciamo introducendo la variabile aleatoria CGMY di parametri  $C, G, M$  e  $Y$  che indichiamo con  $CGMY(C, G, M, Y)$ . La sua funzione caratteristica, indicata con  $\phi_{CGMY}$ , è data da

$$\phi_{CGMY}(u) = \exp\left\{C\Gamma(-Y)\left[(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y\right]\right\},$$

dove  $C, G, M > 0$  e  $Y < 2$ . La variabile aleatoria  $CGMY(C, G, M, Y)$  risulta essere infinitamente divisibile. Procediamo ora a definire il processo CGMY. Il processo CGMY di parametri  $C, G, M$  e  $Y$  è il processo di Lévy  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  tale che per ogni  $t \geq 0$

$$X_t \sim CGMY(Ct, G, M, Y).$$

La tripletta caratteristica del processo  $X$ , che denotiamo come al solito con  $(\gamma, \sigma, \nu)$  è data da

$$\begin{aligned} \gamma &= C \left( \int_0^1 x^{-Y} e^{-Mx} dx - \int_{-1}^0 |x|^{-Y} e^{Gx} dx \right) \\ \sigma &= 0 \\ \nu(dx) &= \begin{cases} C e^{Gx} (-x)^{-1-Y} dx & x < 0 \\ C e^{-Mx} x^{-1-Y} dx & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

### 1.3 Martingale, Tempi d'Arresto e Misure Aleatorie

**Definizione 1.3.1** (Martingala). Un processo stocastico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è una martingala rispetto a  $\mathbb{F}$  se

- (i)  $X$  è  $\mathbb{F}$ -adattato,
- (ii)  $E[|X_t|] < \infty$  per ogni  $t \geq 0$ ,
- (iii)  $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$  q.c. per  $0 \leq s \leq t$ .

La (ii) è una condizione di integrabilità che garantisce la buona definizione delle speranze condizionali di  $X_t$  per  $t \geq 0$ . La (iii) invece è la condizione che caratterizza le martingale come quei processi per cui la migliore previsione possibile sul valore del processo in un istante futuro, nota la storia fino all'istante corrente, è il valore in questo istante.

**Proposizione 1.3.1** ([1, p.85]). Sia  $X$  un processo di Lévy di esponente caratteristico  $\psi$ , allora per ogni  $u \in \mathbb{R}$ ,  $M^u = \{M_t^u, t \geq 0\}$  è una martingala rispetto a  $\mathbb{F}^X$ , dove

$$M_t^u = \exp \{iuX_t - t\psi(u)\}.$$

*Dimostrazione.*  $E[|M_t^u|] = e^{-t \operatorname{Re} \psi(u)} < \infty$  per ogni  $t \geq 0$ . Poi per  $0 \leq s \leq t$  possiamo scrivere

$$M_t^u = M_s^u \exp \{iu(X_t - X_s) - (t - s)\psi(u)\}.$$

Allora grazie alla proprietà (ii) dei processi di Lévy e al Teorema 1.2.1 si ha che

$$\begin{aligned} E[M_t^u | \mathcal{F}_s^X] &= M_s^u \exp \{iuX_{t-s}\} \exp \{- (t - s)\psi(u)\} \\ &= M_s^u, \end{aligned}$$

come richiesto. □

**Esempi** (Martingale).

- $B_t = \sigma W_t$ , dove  $W_t$  è un Moto Browniano standard e  $\sigma \in \mathbb{R}$ .
- $B_t^2 - \sigma^2 t$ .
- $\exp \left\{ uB_t - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 t \right\}$ , dove  $u \in \mathbb{R}$ .
- $\tilde{N}_t$  dove  $\tilde{N}_t$  è un processo di Poisson compensato di intensità  $\lambda$ .
- $\tilde{N}_t^2 - \lambda t$ .

- $\{E[Y|\mathcal{F}_t], t \geq 0\}$ , dove  $Y$  è una variabile aleatoria arbitraria in uno spazio di probabilità filtrato per il quale  $E[|Y|] < \infty$ .

**Definizione 1.3.2** (Submartingala, Supermartingala). Un processo stocastico  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  si dice submartingala rispetto a  $\mathbb{F}$  se

- (i)  $X$  è  $\mathbb{F}$ -adattato,
- (ii)  $E[|X_t|] < \infty$  per ogni  $t \geq 0$ ,
- (iii)  $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$  q.c. per  $0 \leq s \leq t$ .

Diciamo invece che  $X$  è una supermartingala se  $-X$  è una submartingala.

**Esempio** (Submartingala). Data una martingala  $X$  a valori reali e una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convessa tale che  $E[|f(X_t)|] < \infty$  per ogni  $t \geq 0$ , allora  $f(X)$  è una submartingala grazie alle disuguaglianze di Jensen in versione condizionale. In particolare se  $X_t \geq 0$  q.c. allora  $\{X_t^p, t \geq 0\}$  è una submartingala qualora  $1 < p < \infty$  e  $E[|X_t|^p] < \infty$  per ogni  $t \geq 0$ .

**Definizione 1.3.3** (Tempo d'Arresto). Sia  $\mathbb{F}$  una filtrazione. Una variabile aleatoria  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  si dice tempo d'arresto se l'evento  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  per ogni  $t \geq 0$ . Si pone inoltre

$$\mathcal{F}_\tau = \left\{ A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ per ogni } t \geq 0 \right\},$$

dove  $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right)$ .

**Proposizione 1.3.2** ([2, p.26]). Siano  $\tau_1$  e  $\tau_2$  due tempi d'arresto. Allora

- a)  $\tau_1$  è  $\mathcal{F}_{\tau_1}$ -misurabile.
- b)  $\tau_1 \vee \tau_2, \tau_1 \wedge \tau_2$  sono tempi d'arresto.
- c) Se  $\tau_1 \leq \tau_2$  si ha  $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$ .
- d)  $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$ .

*Dimostrazione.*

- a) Segue direttamente dalla definizione di  $\mathcal{F}_{\tau_1}$ .
- b) Si ha che per ogni  $t \geq 0$   $\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  essendo intersezione di due insiemi che, per la definizione di tempo d'arresto, appartengono entrambi alla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_t$ . Analogamente  $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cup \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

- c) Dobbiamo dimostrare che se  $\tau_1 \leq \tau_2$ ,  $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$  implica  $A \in \mathcal{F}_{\tau_2}$ . Prendiamo quindi  $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ , dalla definizione di  $\mathcal{F}_{\tau_1}$  si ha che per ogni  $t \geq 0$

$$A \cap \{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (1.7)$$

Ora siccome  $\tau_1 \leq \tau_2$  possiamo scrivere che

$$\{\tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\}$$

e si ottiene che per ogni  $t \geq 0$

$$A \cap \{\tau_2 \leq t\} = A \cap \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

grazie alla (1.7) e alla definizione di tempo di arresto per  $\tau_2$ .

- d) Dobbiamo dimostrare che preso un insieme  $A \subset \Omega$  vale la seguente

$$\left\{ A \in \mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \right\} \Leftrightarrow \left\{ A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \text{ e } A \in \mathcal{F}_{\tau_2} \right\}$$

Supponiamo vera la seconda proposizione. Abbiamo quindi che

$$A \cap \{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

$$A \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

e la prima implicazione segue da

$$\begin{aligned} A \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} &= A \cap \left[ \{\tau_1 \leq t\} \cup \{\tau_2 \leq t\} \right] \\ &= \left[ A \cap \{\tau_1 \leq t\} \right] \cup \left[ A \cap \{\tau_2 \leq t\} \right] \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Supponiamo vera la prima proposizione. Abbiamo quindi che

$$A \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Inoltre dalla definizione di tempo d'arresto sappiamo che

$$\{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

$$\{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

dalle quali segue che anche i seguenti insiemi appartengono a  $\mathcal{F}_t$

$$A_1 = \{\tau_1 \leq t\} \setminus \left[ \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \right],$$

$$A_2 = \{\tau_2 \leq t\} \setminus \left[ \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \right].$$

Con questi insiemi in  $\mathcal{F}_t$  è possibile ricostruire gli insiemi  $A \cap \{\tau_1 \leq t\}$  e  $A \cap \{\tau_2 \leq t\}$  nel seguente modo

$$A \cap \{\tau_1 \leq t\} = A \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} \setminus A_2,$$

$$A \cap \{\tau_2 \leq t\} = A \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} \setminus A_1,$$

che di conseguenza appartengono anche loro a  $\mathcal{F}_t$ , il che dimostra l'ultima implicazione.

□

**Esempio** (Tempo d'Arresto). Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo stocastico cadlag adattato a una filtrazione  $\mathbb{F}$ , e sia  $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ . Allora la variabile aleatoria

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\},$$

dove prendiamo la convenzione che  $\inf\{\emptyset\} = \infty$ , è un tempo d'arresto.  $\tau_A$  viene chiamato il tempo di ingresso in  $A$ .

Il seguente teorema è un'importante applicazione dei concetti di martingala e tempi d'arresto.

**Teorema 1.3.1** ([2, p.75]). *Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  una martingala cadlag, e  $\tau_1, \tau_2$  due tempi d'arresto limitati tali che  $\tau_1 \leq \tau_2$  q.c. Allora*

$$E[X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}] = X_{\tau_1} \quad \text{q.c.}$$

**Definizione 1.3.4** (Martingala Locale). Un processo  $X = \{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, (X_t)_{t \geq 0}\}$  si dice una martingala locale se esiste una successione crescente  $\{\tau_n\}_n$  di tempi d'arresto tale che

- (i)  $\tau_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow \infty$  q.c.
- (ii)  $\{X_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0\}$  è una  $\mathbb{F}$ -martingala per ogni  $n$ .

Diremo che una successione  $\{\tau_n\}_n$  come nella Definizione 1.3.4 riduce la martingala locale  $X$ .

**Proposizione 1.3.3** ([2, p.126]). *Una martingala locale positiva è una supermartingala.*

*Dimostrazione.* Sia  $\{\tau_n\}_n$  una successione di tempi d'arresto che riduce la martingala locale  $X$ . Allora  $X_{t \wedge \tau_n} \rightarrow X_t$  per  $n \rightarrow \infty$  e per il Lemma di Fatou e il fatto che  $\{X_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0\}$  è una martingala per ogni  $n$

$$E[X_t] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{t \wedge \tau_n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_{0 \wedge \tau_n}] = E[X_0],$$

dunque  $X_t$  è integrabile. Bisogna ora dimostrare, dalla definizione di valore atteso condizionale, che se  $A \in \mathcal{F}_s$  e  $s < t$ , allora

$$E[(X_t - X_s)I_A] \leq 0. \tag{1.8}$$

Poichè  $\{\tau_n > s\} \in \mathcal{F}_s$  e  $\{X_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0\}$  è una martingala, per ogni  $n$

$$E[I_{A \cap \{\tau_n > s\}}(X_{t \wedge \tau_n} - X_s)] = E[I_{A \cap \{\tau_n > s\}}(X_{t \wedge \tau_n} - X_{s \wedge \tau_n})] = 0. \tag{1.9}$$

Poichè  $\tau_n \rightarrow +\infty$  e  $X_t$  è positiva le due relazioni

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_{A \cap \{\tau_n > s\}}(X_{t \wedge \tau_n} - X_s) &= I_A(X_t - X_s) \\ I_{A \cap \{\tau_n > s\}}(X_{t \wedge \tau_n} - X_s) &\geq -X_s \end{aligned}$$

permettono di applicare il Lemma di Fatou alla (1.9) ottenendo la (1.8). □

Passiamo ora ad analizzare il processo di salto  $\Delta X = \{\Delta X_t, t \geq 0\}$  associato a un processo di Lévy. Chiaramente  $\Delta X$  è un processo adattato ma, in generale, non è un processo di Lévy come dimostra il seguente esempio.

**Esempio.** Sia  $N$  un processo di Poisson e fissiamo  $0 \leq s < t < \infty$ . Abbiamo che

$$P(\Delta N_t - \Delta N_s = 0 | \Delta N_s = 1) \neq P(\Delta N_t - \Delta N_s = 0),$$

e quindi  $\Delta N_t$  non può avere incrementi indipendenti.

Gran parte della difficoltà analitiche nella manipolazione di un generico processo di Lévy  $X$  sorge dal fatto che è possibile che

$$\sum_{0 \leq s < t} |\Delta X_s| = \infty \quad \text{q.c.}$$

Il modo nel quale queste difficoltà sono superate sfrutta il fatto che sempre si ha

$$\sum_{0 \leq s < t} |\Delta X_s|^2 < \infty \quad \text{q.c.}$$

Per poter capire meglio queste idee cominciamo a introdurre alcuni concetti.

**Definizione 1.3.5** (Misura di Radon). Sia  $E \subset \mathbb{R}^d$  per un certo  $d$ . Una misura di Radon su  $(E, \mathcal{B}(E))$  è una misura  $\mu$  tale che per ogni insieme compatto e misurabile  $A$  si ha che  $\mu(A) < \infty$ .

**Definizione 1.3.6.** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità. Una misura aleatoria su uno spazio misurabile  $(E, \mathcal{E})$  è una mappa  $M$  definita su  $\Omega \times \mathcal{E}$  tale che

- $M(\omega, \cdot)$  è una misura su  $(E, \mathcal{E})$  per q.o.  $\omega \in \Omega$ ,
- $M(\cdot, A)$  è una variabile aleatoria per ogni  $A \in \mathcal{E}$ .

**Definizione 1.3.7** (Misura Aleatoria di Poisson). Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità e  $\mu$  una data misura di Radon positiva su  $(E, \mathcal{B}(E))$ . Una misura aleatoria di Poisson su  $(E, \mathcal{B}(E))$  di intensità  $\mu$  è una misura aleatoria a valori in  $\mathbb{N}^+$ :

$$M : \Omega \times \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathbb{N}^+$$

tale che

- (i)  $M(\omega, \cdot)$  è una misura di Radon su  $(E, \mathcal{B}(E))$  a valori in  $\mathbb{N}^+$ , per q.o.  $\omega \in \Omega$ .
- (ii) Per ogni insieme misurabile  $A \subset E$ ,  $M(\cdot, A) = M(A)$  è una variabile aleatoria di Poisson di parametro  $\mu(A)$ :

$$P(M(A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{\mu(A)^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$



(iii) Per insiemi misurabili e disgiunti  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(E)$ , le variabili aleatorie  $M(A_1), \dots, M(A_n)$  sono indipendenti.

Data una misura aleatoria di Poisson  $M$ , di intensità  $\mu$  e definita su  $(E, \mathcal{B}(E))$ , è possibile definire degli integrali rispetto a lei. Abbiamo che per quasi ogni  $\omega \in \Omega$ ,  $M(\omega, \cdot)$  è una misura su  $(E, \mathcal{B}(E))$  e quindi possiamo definire degli integrali come con qualsiasi altra misura. Prima, lo facciamo per funzioni semplici

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{I}_{A_i}$$

dove  $c_i \geq 0$  per  $i = 1, \dots, n$  e  $A_i \subset E$  disgiunti e misurabili per  $i = 1, \dots, n$ . Definiamo quindi  $M(f)$ , l'integrale di  $f$  rispetto a  $M$ , come

$$M(f) = \sum_{i=1}^n c_i M(A_i).$$

Si osserva che  $M(f)$  è una variabile aleatoria di valore atteso  $E[M(f)] = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$ . Poi, per funzioni  $f$  misurabili e positive, definiamo

$$M(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(f_n),$$

dove  $\{f_n\}_n$  è una successione crescente di funzioni semplici che tende a  $f$  puntualmente. Per il teorema di convergenza monotona,  $M(f)$  è una variabile aleatoria a valori in  $[0, \infty]$  e di valore atteso, probabilmente infinito,  $E[M(f)] = \mu(f)$ . Per funzioni misurabili a valori reali  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , uno può scomporre  $f$  nella sua parte positiva e negativa:  $f = f^+ - f^-$ , e se  $f$  verifica

$$\mu(|f|) = \int_E |f(x)| \mu(dx) < \infty,$$

le variabili aleatorie positive  $M(f^+)$  e  $M(f^-)$  hanno valore atteso finito. In particolare, sono quasi certamente finite. Di conseguenza possiamo definire

$$M(f) = M(f^+) - M(f^-)$$

che ha come valore atteso

$$E[M(f)] = \mu(f) = \int_E f(x) \mu(dx).$$

D'ora in poi useremo la notazione più esplicita

$$\int_E f(x) M(dx)$$

per denotare la variabile aleatoria  $M(f)$ .

Indaghiamo ora come questi concetti si relazionino al processo di salto  $\Delta X$  associato a un processo di Lévy. Ad ogni processo di Lévy  $X$  è possibile associare una misura aleatoria  $J_X$  su  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  che descrive i salti di  $X$ . Per ogni insieme misurabile  $B$  di  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$J_X(B) = \#\{(t, \Delta X_t) \in B\}.$$

Per ogni insieme misurabile  $A \in \mathbb{R}$ ,  $J_X([t_1, t_2] \times A)$  conta il numero di salti di  $X$  tra  $t_1$  e  $t_2$  di ampiezza appartenente all'insieme  $A$ .  $J_X$  viene chiamata misura di salto del processo  $X$ . Abbiamo il seguente primo risultato.

**Proposizione 1.3.4** ([6, p.77]). *Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo di Poisson composto di intensità  $\lambda$  e distribuzione dei salti  $p$ . La sua misura di salto  $J_X$  è una misura aleatoria di Poisson su  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  di intensità  $\mu$  data da*

$$\mu(dt \times dx) = \nu(dx)dt = \lambda p(dx)dt.$$

Grazie alla Proposizione 1.3.4 possiamo scrivere ogni processo di Poisson composto  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  nel seguente modo

$$X_t = \sum_{s \in [0, t]} \Delta X_s = \int_{[0, t] \times \mathbb{R}} x J_X(dx \times dt). \quad (1.10)$$

Abbiamo quindi scritto  $X_t$  come la somma dei salti del processo  $X$  fino a  $t$ . In questo caso siccome il processo  $X$  ha quasi certamente un numero finito di salti nell'intervallo  $[0, t]$ , l'integrale che compare in (1.10) è semplicemente una somma finita e non presenta nessun problema di convergenza. Prima di dare il risultato principale di questa sezione ricordiamo il processo di Poisson composto compensato, ora sotto l'ottica della Proposizione 1.3.4. Sia quindi  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo di Poisson composto di intensità  $\lambda$  e distribuzione dei salti  $p$ , il corrispondente processo compensato è dato da

$$\tilde{X}_t = X_t - \lambda t \int_{\mathbb{R}} x p(dx),$$

che grazie alla Proposizione 1.3.4 possiamo scrivere come

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &= \int_{[0, t] \times \mathbb{R}} x J_X(dx \times dt) - \lambda t \int_{\mathbb{R}} x p(dx) \\ &= \int_{[0, t] \times \mathbb{R}} x \left[ J_X(dx \times dt) - \lambda p(dx)dt \right] \\ &= \int_{[0, t] \times \mathbb{R}} x \left[ J_X(dx \times dt) - \nu(dx)dt \right]. \end{aligned}$$

La misura aleatoria  $\tilde{J}_X(dx \times dt) = J_X(dx \times dt) - \nu(dx)dt$  viene detta misura aleatoria di Poisson compensata. Inoltre il processo  $\tilde{X}_t$  risulta essere una martingala. In effetti abbiamo il seguente risultato.

**Proposizione 1.3.5** ([6, p.62]). *Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo di Poisson composto di intensità  $\lambda$  e distribuzione dei salti  $p$  e sia  $J_X$  la corrispondente misura di Poisson di intensità  $\nu = \lambda p$ . Data una funzione  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che*

$$\int_{[0,t] \times \mathbb{R}} |f(t, x)| \nu(dx) dt < \infty$$

*il processo stocastico*

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} x \tilde{J}_X(dx \times dt) \\ &= \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} x \left[ J_X(dx \times dt) - \nu(dx) dt \right] \end{aligned}$$

*è una martingala.*

**Teorema 1.3.2** (Decomposizione di Lévy-Itô [6, p.81]). *Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo di Lévy con tripletta caratteristica  $(\gamma, \sigma, \nu)$ . Allora*

- *La misura di salto di  $X$ , denotata con  $J_X$ , è una misura aleatoria di Poisson su  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  con intensità  $\nu(dx)dt$ .*
- *Esiste un moto browniano  $\{B_t, t \geq 0\}$  di varianza  $\sigma^2$  tale che per ogni  $t \geq 0$*

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{X}_t^\epsilon, \quad (1.11)$$

*dove*

$$X_t^l = \int_{|x| > 1, s \in [0,t]} x J_X(ds \times dx)$$

*e*

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^\epsilon &= \int_{\epsilon < |x| < 1, s \in [0,t]} x \left[ J_X(ds \times dx) - \nu(dx) ds \right] \\ &= \int_{\epsilon < |x| < 1, s \in [0,t]} x \tilde{J}_X(ds \times dx). \end{aligned}$$

*I termini in (1.11) sono indipendenti e la convergenza dell'ultimo addendo è quasi certa e uniforme in  $t$ .*

Commentiamo il significato dei termini nella formula (1.11). Prima abbiamo  $\gamma t + B_t$ , che è un processo di Lévy gaussiano. Ogni processo di Lévy gaussiano è continuo e può essere scritto in questa forma e descritto da due parametri: il drift  $\gamma$  e la varianza  $\sigma^2$  del moto browniano. Gli altri due termini sono processi discontinui che incorporano i salti del processo  $X$  e sono descritti dalla misura di Lévy  $\nu$ . La condizione

$$\int_{|x| \geq 1} \nu(dx) < \infty$$

significa che  $X$  ha un numero finito di salti di ampiezza in valore assoluto maggiore di 1. Quindi la somma

$$X_t^l = \sum_{0 \leq s \leq t}^{\lvert \Delta X_s \rvert \geq 1} \Delta X_s$$

contiene quasi certamente un numero finito di addendi e  $X_t^l$  è un processo di Poisson composto. Si osserva comunque che la soglia  $\Delta X_t = 1$  è del tutto arbitraria. Per ogni  $\epsilon > 0$ , la somma dei salti del processo  $X$  di ampiezza in valore assoluto tra  $\epsilon$  e 1:

$$X_t^\epsilon = \sum_{0 \leq s \leq t}^{1 > \lvert \Delta X_s \rvert \geq \epsilon} \Delta X_s = \int_{\epsilon < \lvert x \rvert < 1, s \in [0, t]} x J_X(ds \times dx) \quad (1.12)$$

è anche lei un processo di Poisson composto ben definito. Comunque,  $X$  è un generico processo di Lévy e non un processo di Poisson composto, di conseguenza  $\nu$  può presentare una singolarità nello zero:  $X$  può avere infiniti salti infinitesimi e la loro somma non converge necessariamente. Questo fatto ci impedisce di far tendere  $\epsilon$  a 0 direttamente in (1.12). Per riuscire ad ottenere la convergenza dobbiamo centrare il termine rimanente, cioè dobbiamo usare la versione compensata dell'integrale:

$$\tilde{X}_t^\epsilon = \int_{\epsilon < \lvert x \rvert < 1, s \in [0, t]} x \tilde{J}_X(ds \times dx)$$

che, grazie alla Proposizione 1.3.5, sappiamo essere una martingala. Si può dimostrare che questa proprietà di martingala insieme alla condizione di integrabilità soddisfata da  $\nu$  per i piccoli salti:

$$\int_{\lvert x \rvert < 1} \lvert x \rvert^2 \nu(dx) < \infty,$$

garantiscono la convergenza di  $\tilde{X}_t^\epsilon$ .

## 1.4 Calcolo Stocastico

**Definizione 1.4.1** (Processi Predicibili Semplici). Un processo stocastico  $\{\phi_t, t \in [0, T]\}$  viene detto processo predicibile semplice se può essere scritto come

$$\phi_t = \phi_0 \mathbf{I}_{t=0} + \sum_{i=0}^n \phi_i \mathbf{I}_{(T_i, T_{i+1}]}(t)$$

dove  $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n < T_{n+1} = T$  sono dei tempi d'arresto e ogni  $\phi_i$  è una variabile aleatoria limitata  $\mathcal{F}_{T_i}$ -misurabile.

L'insieme dei processi predicibili semplici su  $[0, T]$  verrà denotato con  $\mathbb{S}([0, T])$ .

**Definizione 1.4.2** (Semimartingala). Un processo stocastico adattato e cadlag  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  viene detto semimartingala se l'integrale stocastico di processi predicibili semplici rispetto a  $X$ :

$$\phi_t = \phi_0 \mathbf{1}_{t=0} + \sum_{i=0}^n \phi_i \mathbf{I}_{(T_i, T_{i+1}]}(t) \longmapsto \int_0^T \phi_t dX_t = \phi_0 X_0 + \sum_{i=0}^n \phi_i (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})$$

soddisfa la seguente proprietà di continuità: per ogni  $\{\phi^n\}_n, \phi \in \mathbb{S}([0, T])$  se

$$\sup_{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega} |\phi_t^n(\omega) - \phi_t(\omega)| \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

allora

$$\int_0^T \phi_t^n dX_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^T \phi_t dX_t \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

dove abbiamo indicato con  $\xrightarrow{\mathbb{P}}$  la convergenza in probabilità.

La proprietà di continuità nella definizione di semimartingala stabilisce la convergenza delle variabili aleatorie  $\int_0^T \phi_t^n dX_t$  per  $T$  fissato. La seguente proposizione mostra che la proprietà di continuità è soddisfatta anche dal processo definito dall'integrale stocastico:

$$\int_0^t \phi_u dX_u = \phi_0 X_0 + \sum_{i=0}^n \phi_i (X_{T_{i+1} \wedge t} - X_{T_i \wedge t}) \quad \text{per } t \in [0, T].$$

**Proposizione 1.4.1** ([6, p.254]). Se  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  è una semimartingala si ha che per ogni  $\{\phi^n\}_n, \phi \in \mathbb{S}([0, T])$

$$\text{se} \quad \sup_{(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega} |\phi_t^n(\omega) - \phi_t(\omega)| \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty \quad (1.13)$$

$$\text{allora} \quad \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \phi_u^n dX_u - \int_0^t \phi_u dX_u \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Si osserva che in (1.13) abbiamo convergenza uniforme in  $[0, T] \times \Omega$ ; mentre in (1.14) abbiamo convergenza uniforme in probabilità in  $[0, T]$ , che d'ora in poi denotiamo con ucp.

Verificare che un processo  $X$  è una semimartingala usando la definizione può non risultare un compito facile. Diamo due importantissimi esempi di semimartingale che ci permetteranno di dedurre che i processi di Lévi sono anche loro delle semimartingale.

**Esempi** (Semimartingale).

- **Processi a Variazione Finita.** Sia  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  un processo a variazione finita e sia  $TV(X)$  la sua variazione totale su  $[0, T]$ . Si ha sempre che

$$\int_0^T \phi_t dX_t \leq TV(X) \sup_{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega} |\phi_t(\omega)|$$

per ogni  $\phi = \{\phi_t, t \in [0, T]\} \in \mathcal{S}([0, T])$ . Da ciò segue che

$$\left| \int_0^T \phi_t^n dX_t - \int_0^T \phi_t dX_t \right| \leq TV(X) \sup_{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega} |\phi_t^n(\omega) - \phi_t(\omega)|,$$

e la proprietà di continuità che definisce le semimartingale è soddisfatta.

- **Martingale a Quadrato Integrabile.** Sia  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  una tale martingala, si ha che per ogni  $\phi = \{\phi_t, t \in [0, T]\} \in \mathcal{S}([0, T])$

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_0^T \phi_t dX_t \right)^2 \right] &= E \left[ \left( \phi_0 X_0 + \sum_{i=0}^n \phi_i (X_{T_{i+1}} - X_{T_i}) \right)^2 \right] \\ &\leq \left( \sup_{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega} |\phi_t(\omega)| \right)^2 E \left[ \left( X_0 + \sum_{i=0}^n (X_{T_{i+1}} - X_{T_i}) \right)^2 \right] \\ &= \left( \sup_{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega} |\phi_t(\omega)| \right)^2 E \left[ X_0^2 + \sum_{i=0}^n (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2 \right] \\ &= \left( \sup_{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega} |\phi_t(\omega)| \right)^2 E \left[ X_0^2 + \sum_{i=0}^n (X_{T_{i+1}}^2 - X_{T_i}^2) \right] \\ &\leq \left( \sup_{(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega} |\phi_t(\omega)| \right)^2 \sup_{t \in [0,T]} E[X_t^2], \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il Teorema 1.3.1 nel terzo e quarto passaggio. La disuguaglianza di sopra implica che qualvolta si abbia convergenza uniforme di una successione  $\{\phi^n\}_n$  a  $\phi$ , tutte in  $\mathcal{S}([0, T])$ , i corrispondenti integrali stocastici convergono in  $L^2(\Omega)$ . La proprietà di continuità delle semimartingale segue dal fatto che la convergenza in  $L^2(\Omega)$  implica quella in probabilità.

Dagli esempi segue facilmente che

- Il Moto Browniano è una semimartingala perchè una martingala a quadrato integrabile.
- Il Processo di Poisson Composto è una semimartingala perchè un processo a variazione finita.

Inoltre abbiamo la seguente

**Proposizione 1.4.2** ([1, p.137]). *Ogni processo di Lévy è una semimartingala.*

L'obiettivo ora è quello di usare la proprietà di continuità per riuscire a definire l'integrale stocastico rispetto a una semimartingala ma per un'integranda in uno spazio più ampio di quello dei processi predicibile semplici  $\mathbb{S}([0, T])$ . Abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 1.4.1** ([16, p.57]). *Denotiamo con  $\mathbb{L}([0, T])$  lo spazio dei processi stocastici caglad. Si ha che lo spazio  $\mathbb{S}([0, T])$  è denso in  $\mathbb{L}([0, T])$  sotto la topologia ucp (uniforme convergenza in probabilità).*

Il precedente risultato ci permette di estendere a integrande in  $\mathbb{L}([0, T])$  la definizione di integrale stocastico rispetto a una semimartingala utilizzando un passaggio al limite.

**Definizione 1.4.3** (Integrale Stocastico). Sia  $\phi = \{\phi_t, t \in [0, T]\} \in \mathbb{L}([0, T])$  e  $\{\phi^n\}_n$  una sua successione approssimante (in senso ucp) appartenente a  $\mathbb{S}([0, T])$ . Sia poi  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  una semimartingala. Definiamo il processo integrale stocastico di  $\phi$  rispetto a  $X$ , e lo indichiamo con  $\left\{ \int_0^t \phi_u dX_u, t \in [0, T] \right\}$ , come il processo ottenuto attraverso il seguente limite in probabilità, per ogni  $t \in [0, T]$

$$\int_0^t \phi_u^n dX_u \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \phi_u dX_u, \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Enunciamo ora due importanti proprietà dell'integrale stocastico appena definito.

**Proposizione 1.4.3** (Proprietà di Semimartingala [16, p.62]). *Sia  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  una semimartingala e sia  $\phi = \{\phi_t, t \in [0, T]\} \in \mathbb{L}([0, T])$ , allora il processo integrale stocastico*

$$S_t = \int_0^t \phi_u dX_u, \quad t \in [0, T]$$

*è una semimartingala.*

**Proposizione 1.4.4** (Proprietà di Martingala [16, p.63]). *Sia  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  una martingala a quadrato integrabile e sia  $\phi = \{\phi_t, t \in [0, T]\} \in \mathbb{L}([0, T])$  un processo limitato, allora il processo integrale stocastico*

$$S_t = \int_0^t \phi_u dX_u, \quad t \in [0, T]$$

*è una martingala a quadrato integrabile.*

Analizziamo ora la costruzione dell'integrale stocastico rispetto al moto browniano. Cominciamo a derivare alcune proprietà di questo integrale stocastico quando l'integranda è un processo semplice predicibile. Sia quindi  $\phi = \{\phi_t, t \in [0, T]\}$  tale che

$$\phi_t = \phi_0 \mathbf{I}_{t=0} + \sum_{i=0}^n \phi_i \mathbf{I}_{(T_i, T_{i+1}]}(t),$$

il suo integrale stocastico rispetto al moto browniano standard  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  è dato da

$$\int_0^t \phi_u dW_u = \sum_{i=0}^n \phi_i (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t}),$$

per  $t \geq 0$ . Si osserva facilmente che siccome  $W$  è una martingala anche  $\left\{ \int_0^t \phi_u dW_u, t \geq 0 \right\}$  lo è. Questo fatto segue anche dalla Proposizione 1.4.4 essendo  $W$  a quadrato integrabile. Come prima proprietà abbiamo che

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^t \phi_u dW_u \right] &= E \left[ \sum_{i=0}^n \phi_i (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t}) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n E \left[ \phi_i (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t}) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n E \left[ E \left[ \phi_i (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t}) \mid \mathcal{F}_{T_i \wedge t} \right] \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cioè  $\left\{ \int_0^t \phi_u dW_u, t \geq 0 \right\}$  è un processo a media costante nulla. Una seconda



e più importante proprietà segue da

$$\begin{aligned}
 E \left[ \left| \int_0^t \phi_u dW_u \right|^2 \right] &= V \left[ \sum_{i=0}^n \phi_i (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t}) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^n E [\phi_i^2 (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t})^2] \\
 &\quad + 2 \sum_{i>j} \text{Cov} [\phi_i (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t}), \phi_j (W_{T_{j+1} \wedge t} - W_{T_j \wedge t})] \\
 &= \sum_{i=0}^n E [E [\phi_i^2 (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t})^2 | \mathcal{F}_{T_i \wedge t}]] \\
 &\quad + 2 \sum_{i>j} E [E [\phi_i \phi_j (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t})(W_{T_{j+1} \wedge t} - W_{T_j \wedge t}) | \mathcal{F}_{T_j \wedge t}]] \\
 &= \sum_{i=0}^n E [E [\phi_i^2 (W_{T_{i+1} \wedge t} - W_{T_i \wedge t})^2 | \mathcal{F}_{T_i \wedge t}]] \\
 &= \sum_{i=0}^n E [\phi_i^2] (T_{i+1} \wedge t - T_i \wedge t) = E \left[ \int_0^t \phi_u^2 du \right].
 \end{aligned}$$

Questa relazione viene detta Isometria di Itô e permette di costruire degli integrali stocastici rispetto al moto browniano per integrande che sono processi predicibili  $\phi = \{\phi_t, t \in [0, T]\}$  che soddisfino

$$E \left[ \int_0^T \phi_t^2 dt \right] < \infty.$$

Per una tale  $\phi$  è sempre possibile trovare una successione  $\{\phi^n\}_n$  di processi semplici predicibili tale che

$$E \left[ \int_0^T |\phi_t - \phi_t^n|^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Questa relazione insieme all'isometria di Itô valida per i processi semplici predicibili permette di definire il processo integrale stocastico  $\left\{ \int_0^t \phi_u dW_u, t \geq 0 \right\}$  come il limite in  $L^2(\Omega)$  del processo  $\left\{ \int_0^t \phi_u^n dW_u, t \geq 0 \right\}$ . La seguente proposizione stabilisce che le proprietà di martingala e la Isometria di Itô si preservano con il passaggio al limite.

**Proposizione 1.4.5** ([6, p.259]). *Sia  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  un moto browniano standard e sia  $\phi = \{\phi_t, t \in [0, T]\}$  un processo predicibile tale che*

$$E \left[ \int_0^T \phi_t^2 dt \right] < \infty.$$

Allora  $\left\{ \int_0^t \phi_u dW_u, t \geq 0 \right\}$  è una martingala a quadrato integrabile e

$$E \left[ \int_0^t \phi_u dW_u \right] = 0$$

$$E \left[ \left| \int_0^t \phi_u dW_u \right|^2 \right] = E \left[ \int_0^t \phi_u^2 du \right],$$

per ogni  $t \in [0, T]$ .

Ora vediamo come possono essere definiti degli integrali stocastici rispetto a una misura aleatoria di Poisson. Precedentemente abbiamo visto degli integrali rispetto a queste misure quando l'integranda era una funzione deterministica, adesso ci occupiamo di definire degli integrali quando l'integranda è una funzione aleatoria predicibile. Prendiamo quindi una misura aleatoria di Poisson  $M$  definita su  $([0, T] \times \mathbb{R}, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  di intensità  $\mu$ . Ricordiamo la notazione  $M_t(A) = M([0, t] \times A)$  con  $t \in [0, T]$  per insiemi misurabili  $A \subset \mathbb{R}$  tali che  $\mu([0, T] \times A) < \infty$ . Per analogia con i processi semplici predicibili usati in precedenza, consideriamo ora funzioni predicibili semplici  $\phi : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\phi(t, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^m \phi_{ij} \mathbb{I}_{(T_i, T_{i+1}]}(t) \mathbb{I}_{A_j}(x),$$

dove  $T_1 \leq \dots \leq T_n$  sono tempi d'arresto,  $\{\phi_{ij}\}_{j=1}^m$  sono delle variabili aleatorie  $\mathcal{F}_{T_i}$ -misurabili e  $\{A_j\}_j$  sono insiemi disgiunti di  $\mathbb{R}$  tali che  $\mu([0, T] \times A_j) < \infty$ . L'integrale stocastico  $\int_{[0, T] \times \mathbb{R}} \phi(t, x) M(dt \times dx)$  è quindi definito come la variabile aleatoria

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) M(dt \times dx) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij} M((T_i, T_{i+1}] \times A_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij} [M_{T_{i+1}}(A_j) - M_{T_i}(A_j)].$$

In modo analogo, uno può definire il processo integrale stocastico  $t \mapsto \int_{[0, t] \times \mathbb{R}} \phi(s, x) M(ds \times dx)$  nella seguente maniera

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s, x) M(ds \times dx) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij} [M_{T_{i+1} \wedge t}(A_j) - M_{T_i \wedge t}(A_j)].$$

Si osserva che il processo  $t \mapsto \int_{[0, t] \times \mathbb{R}} \phi(s, x) M(ds \times dx)$  è un processo adattato e cadlag. In modo simile, l'integrale compensato  $\int_{[0, T] \times \mathbb{R}} \phi(t, x) \tilde{M}(dt \times dx)$

è definito da

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) \tilde{M}(dt \times dx) &= \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij} \tilde{M}((T_i, T_{i+1}] \times A_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij} \left[ \tilde{M}((T_i, T_{i+1}] \times A_j) - \mu((T_i, T_{i+1}] \times A_j) \right], \end{aligned}$$

e il processo associato, da

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s, x) \tilde{M}(ds \times dx) = \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij} \left[ \tilde{M}_{T_{i+1} \wedge t}(A_j) - \tilde{M}_{T_i \wedge t}(A_j) \right],$$

per  $t \in [0, T]$ . Riguardo il processo integrale compensato abbiamo la seguente

**Proposizione 1.4.6** ([6, p.260]). *Per ogni funzione predicibile semplice  $\phi : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , il processo  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  definito da*

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s, x) \tilde{M}(ds \times dx)$$

*è una martingala a quadrato integrabile e soddisfa la seguente isometria*

$$E [|X_t|^2] = E \left[ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\phi(s, x)|^2 \mu(ds \times dx) \right]. \quad (1.15)$$

L'isometria (1.15) può essere usata per estendere la definizione d'integrale compensato a funzioni predicibili di quadrato integrabile. Infatti, data una funzione predicibile tale che

$$E \left[ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\phi(s, x)|^2 \mu(ds \times dx) \right] < \infty,$$

esiste sempre una successione  $\{\phi^n\}_n$  di funzioni predicibili semplici tale che

$$E \left[ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\phi(s, x) - \phi^n(t, x)|^2 \mu(ds \times dx) \right] \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Usando l'isometria (1.15) insieme alla relazione di sopra, uno può dimostrare che la variabile aleatoria  $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi^n(t, x) \tilde{M}(dt \times dx)$  converge in  $L^2(\Omega)$ , per  $n \rightarrow \infty$ , a un limite che denotiamo con  $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s, x) \tilde{M}(ds \times dx)$ , il quale definisce l'integrale stocastico di  $\phi$  rispetto alla misura  $\tilde{M}$ . Abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 1.4.7** ([6, p.262]). *Per ogni funzione aleatoria predicibile  $\phi : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che*

$$E \left[ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\phi(s, x)|^2 \mu(ds \times dx) \right] < \infty,$$

il processo

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s, x) \tilde{M}(ds \times dx) \quad \text{per } t \in [0, T]$$

è una martingala a quadrato integrabile, e inoltre vale

$$E \left[ \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s, x) \tilde{M}(ds \times dx) \right|^2 \right] = E \left[ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\phi(s, x)|^2 \mu(ds \times dx) \right],$$

per  $t \in [0, T]$ .

Un caso importante di integrale stocastico rispetto a una misura aleatoria di Poisson è il caso di un processo di Lévy  $X$  di misura di Lévy  $\nu$ . La sua misura di salto  $J_X$  è una misura aleatoria di Poisson d'intensità  $\mu(dx \times dt) = \nu(dx)dt$ . Data quindi una funzione aleatoria predicibile  $\phi$  possiamo usare la seguente scrittura, più esplicita, del suo integrale rispetto a  $J_X$ :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) J_X(dt \times dx) = \sum_{t \in [0, T]}^{\Delta X_t \neq 0} \phi(t, \Delta X_t).$$

*Osservazione 1.4.1.* Nel caso speciale quando il processo  $X$  è un processo di salto con tempi di salto  $T_1 < T_2 < \dots$ , e  $\phi(t, x) = \psi(t)x$ , dove  $\psi(t) = \sum_i \psi_i \mathbf{I}_{(T_i, T_{i+1}]}(t)$  è costante tra due salti di  $X$ . L'integrale stocastico rispetto a  $J_X$  di  $\phi$  è esattamente l'integrale stocastico rispetto a  $X$  di  $\psi$ :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) J_X(dt \times dx) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi(t)x J_X(dt \times dx) = \sum_{t \in [0, T]}^{\Delta X_t \neq 0} \psi(t) \Delta X_t = \int_0^T \psi(t) dX_t.$$

Ma questo è un caso speciale, per un'integranda generica  $\phi$  il suo integrale rispetto alla misura  $J_X$  non può sempre essere scritto come un'integrale stocastico rispetto a  $X$ . Questo esempio dimostra che, quando  $X$  è un processo di salto la cui misura di salto  $J_X$  è una misura aleatoria di Poisson, integrazione rispetto a  $J_X$  e integrazione rispetto a  $X$  sono due concetti differenti.

Ora introduciamo il concetto di Variazione Quadratica. Dato un processo  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  e una partizione  $\pi = \{0 = t_0 < \dots < t_{n+1} = T\}$  di  $[0, T]$ , definiamo la *varianza realizzata*  $V_X(\pi)$  di  $X$  per la partizione  $\pi$  come

$$V_X(\pi) = \sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

Ogni termine della somma può essere scritto nel seguente modo

$$(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2 - 2X_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) ,$$

e la varianza realizzata diventa

$$X_T^2 - X_0^2 - 2 \sum_{i=0}^n X_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) . \quad (1.16)$$

Nel caso che il processo  $X$  sia una semimartingala con  $X_0 = 0$  q.c., come nel caso dei processi di Lévy, per definizione si ha che il processo è adattato e cadlag e quindi è possibile definire il processo  $X_- = \{X_{t-}, t \in [0, T]\}$  che risulta essere caglad. Dalla teoria sviluppata precedentemente sappiamo allora che l'integrale stocastico di  $X_-$  rispetto a  $X$  è ben definito. Risulta facile intuire che l'espressione in (1.16) converge in senso ucp alla seguente variabile aleatoria

$$X_T^2 - 2 \int_0^T X_{t-} dX_t ,$$

che viene chiamata *variazione quadratica* di  $X$  in  $[0, T]$  e la denotiamo con  $[X, X]_T$ . Ripetendo questa procedura per intervalli del tipo  $[0, t]$  con  $t \in [0, T]$  si arriva a definire il processo variazione quadratica.

**Definizione 1.4.4** (Variazione Quadratica). Il processo variazione quadratica di una semimartingala  $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$  è il processo adattato e cadlag definito da:

$$[X, X]_t = X_t^2 - 2 \int_0^t X_{u-} dX_u ,$$

per  $t \in [0, T]$ .

Diamo alcune proprietà del processo variazione quadratica di una semimartingala  $X$ .

**Proposizione 1.4.8** (Proprietà della Variazione Quadratica [6, p.264]).

- $[X, X] = \{[X, X]_t, t \in [0, T]\}$  è un processo crescente, cioè

$$[X, X]_s < [X, X]_t \quad \forall s, t \in [0, T] : s < t .$$

- I salti di  $[X, X]$  sono relazionati ai salti di  $X$  dalla seguente

$$\Delta[X, X]_t = |\Delta X_t|^2 .$$

In particolare,  $[X, X]$  ha traiettorie continue se e solo se  $X$  le ha.

- Se  $X$  ha traiettorie continue ed è a variazione finita, allora  $[X, X] = 0$  q.c.

- Se  $X$  è una martingala e  $[X, X] = 0$  q.c., allora  $X = X_0$  q.c.

*Osservazione 1.4.2.* Gli ultimi due punti della Proposizione 1.4.8 hanno un'importante conseguenza: se  $X$  è una martingala continua con traiettorie a variazione finita, allora  $X = X_0$  q.c. Quindi una martingala continua a quadrato integrabile e con traiettorie a variazione finita è costante con probabilità 1. Questa osservazione ci permette di distinguere tra due classi di processi: martingale, come il moto browniano e il processo di Poisson compensato, che sono tipicamente esempi di *processi di rumore*, e i processi continui a variazione finita, che possono essere interpretati come dei *drift*. Non esiste un processo non banale che appartenga a entrambe le classi:

$$\{\text{Martingale}\} \cap \{\text{Processi Continui a Variazione Finita}\} = \{\text{Costanti}\}.$$

Un'altra importante conseguenza di questa osservazione è che se un processo  $X$  può essere decomposto nella somma di una martingala a quadrato integrabile  $M$  e un processo continuo a variazione finita  $\varphi$ :

$$X_t = M_t + \varphi_t,$$

allora questa decomposizione è unica a meno di una costante.

Facciamo notare che la variazione quadratica di un processo, contrariamente alla varianza, non viene definita attraverso le operazione di valore atteso. La variazione quadratica è una proprietà delle traiettorie del processo. Questa è una quantità ben definita per tutte le semimartingale, incluse quelle che hanno varianza infinita. Presentiamo ora alcuni esempi di processi per i quali è possibile calcolare la variazione quadratica in forma esplicita.

**Esempi (Variazione Quadratica).**

- **Moto Browniano.** Sia  $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$  tale che

$$B_t = \sigma W_t,$$

dove  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  è un moto browniano standard. Dimostriamo che

$$[B, B]_t = \sigma^2 t.$$

Sia  $\pi^n = \{0 = t_0^n < \dots < t_{n+1}^n = T\}$  una successione di partizioni di  $[0, T]$  tale che  $|\pi^n| = \sup_k |t_k^n - t_{k-1}^n| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Prima osserviamo che

$$V_B(\pi^n) - \sigma^2 T = \sum_{i=0}^n \left[ (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - \sigma^2 (t_{i+1}^n - t_i^n) \right]$$

è una somma di termini indipendenti di media nulla. Di conseguenza

$$\begin{aligned}
 E \left[ |V_B(\pi^n) - \sigma^2 T|^2 \right] &= \sum_{i=0}^n E \left[ \left| (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \sigma^2 (t_{i+1} - t_i) \right|^2 \right] \\
 &= \sum_{i=0}^n \sigma^4 (t_{i+1} - t_i)^2 E \left[ \left| \frac{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2}{\sigma^2 (t_{i+1} - t_i)} - 1 \right|^2 \right] \\
 &= \sum_{i=0}^n \sigma^4 (t_{i+1} - t_i)^2 E \left[ |Z^2 - 1|^2 \right] \quad \text{dove } Z \sim N(0, 1) \\
 &\leq \sigma^4 T E \left[ |Z^2 - 1|^2 \right] |\pi^n| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo convergenza in  $L^2(\Omega)$  che implica la convergenza in probabilità di  $V_B(\pi^n)$  a  $\sigma^2 T$  per  $n \rightarrow \infty$ , e il risultato segue.

- **Processo di Poisson.** Sia  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  un processo di Poisson e sia  $\pi = \{0 = t_0 < \dots < t_{n+1} = T\}$  una qualunque partizione di  $[0, T]$ . Abbiamo che

$$V_N(\pi) = \sum_{i=0}^n (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^n (N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) = N_T,$$

da cui segue immediatamente che

$$[N, N]_t = N_t.$$

Nel caso di un processo di Poisson composto  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  tale che  $X_1 \sim \pi(\lambda, p)$ , il quale possiamo rappresentare come

$$X_t = \sum_{i=0}^{N_t} Z_i$$

dove ricordiamo che  $Z_0 = 0$  q.c. e  $\{Z_i\}_{i \geq 1}$  è una successione di variabili i.i.d. distribuite secondo  $p$ , si ottiene che

$$[X, X]_t = \sum_{i=0}^{N_t} |Z_i|^2 = \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta X_s|^2.$$

In generale, è possibile dimostrare che per ogni processo a variazione finita  $X$  si ha che

$$[X, X]_t = \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta X_s|^2.$$

- **Processo di Lévy.** Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo di Lévy di tripletta caratteristica  $(\gamma, \sigma, \nu)$ , il suo processo variazione quadratica è dato da

$$[X, X]_t = \sigma^2 t + \sum_{0 \leq s \leq t}^{\Delta X_s \neq 0} |\Delta X_s|^2 = \sigma^2 t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^2 J_X(dx \times dt).$$

Si evidenzia che il processo variazione quadratica di un processo di Lévy è anch'esso un processo di Lévy.

- **Integrale Stocastico Browniano.** Consideriamo un processo  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  definito da

$$X_t = \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

dove  $\sigma = \{\sigma_t, t \geq 0\}$  è un processo caglad e  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  è un moto browniano standard. Si ottiene che

$$[X, X]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

In particolare, se l'integrale stocastico browniano ha un processo variazione quadratica quasi certamente nullo, allora l'integrale stesso è quasi certamente nullo. Questa osservazione segue dall'ultimo punto della Proposizione 1.4.8, essendo l'integrale stocastico browniano una martingala.

- **Integrale Stocastico di Poisson.** Consideriamo una misura aleatoria di Poisson  $M$  definita su  $([0, T] \times \mathbb{R}, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  di intensità  $\mu$  e una funzione aleatoria predicibile  $\phi : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiamo il processo  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  come l'integrale stocastico di  $\phi$  rispetto a  $M$ :

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s, x) M(ds \times dx).$$

Il processo variazione quadratica di  $X$  è dato da

$$[X, X]_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\phi(s, x)|^2 M(ds \times dx).$$

Chiudiamo la sezione con 3 risultati molto importanti.

**Proposizione 1.4.9** (Formula di Itô per Processi di Lévy [6, p.278]). *Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo di Lévy di tripletta caratteristica  $(\gamma, \sigma, \nu)$ , e sia*



$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ . Allora

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}) dX_s \\ &\quad + \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \right] ds \\ &\quad + \sum_{\substack{\Delta X_s \neq 0 \\ 0 \leq s \leq t}} \left[ f(s, X_{s-} + \Delta X_s) - f(s, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}) \right]. \end{aligned}$$

**Proposizione 1.4.10** (Decomposizione di Funzioni di Processi di Lévy [6, p.279]). Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo di Lévy di tripletta caratteristica  $(\gamma, \sigma, \nu)$ , e sia  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  tale che  $f$  e le sue derivate coinvolte siano limitate da una costante  $C$ . Allora

$$Y_t = f(t, X_t) = M_t + V_t,$$

dove  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  è una martingala data da

$$\begin{aligned} M_t &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}) \sigma dW_s \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [f(s, X_{s-} + x) - f(s, X_{s-})] \tilde{J}_X(ds \times dx), \end{aligned}$$

e  $V = \{V_t, t \geq 0\}$  è un processo continuo a variazione finita:

$$\begin{aligned} V_t &= \int_0^t \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) ds + \int_0^t \gamma \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[ f(s, X_{s-} + x) - f(s, X_{s-}) - x \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}) \mathbf{I}_{\{|x| < 1\}} \right] \nu(dx) ds. \end{aligned}$$

**Proposizione 1.4.11** (Formula di Itô per Semimartingale [6, p.282]). Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  una semimartingala e sia  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ . Allora

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}) dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d[X, X]_s^c \\ &\quad + \sum_{\substack{\Delta X_s \neq 0 \\ 0 \leq s \leq t}} \left[ f(s, X_{s-} + \Delta X_s) - f(s, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}) \right], \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con  $[X, X]^c = \{[X, X]_t^c, t \geq 0\}$  la parte continua del processo variazione quadratica  $[X, X]$  di  $X$ .

## 1.5 Modello di Lévy Esponenziale, Assenza d'Arbitraggio e Completezza

In questa sezione presenteremo i due teoremi fondamentali dell'asset pricing. Per fare ciò consideriamo un modello di mercato le cui possibili evoluzioni nell'intervallo di tempo  $[0, T]$  sono descritte dallo spazio di probabilità filtrato  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ , dove  $P$  rappresenta la probabilità "oggettiva" dei futuri scenari oppure la visione soggettiva di uno investitore. Inoltre il nostro modello è costituito da due asset: un asset rischioso dato dal processo stocastico  $S = \{S_t, t \in [0, T]\}$ , che ipotizziamo essere una semimartingala, cadlag e adattata alla filtrazione  $\mathbb{F}$ ; e un asset non rischioso  $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ , che rappresenta un conto bancario che guadagna interessi a un tasso deterministico  $r > 0$ , dato da

$$dB_t = rB_t dt.$$

con  $B_0 = 1$ .

**Definizione 1.5.1** (Portafoglio). Un portafoglio è un processo  $\phi = \{(\phi_t^B, \phi_t^S), t \in [0, T]\}$ , dove  $\phi^B$  e  $\phi^S$  sono predicibili. Il suo processo valore  $V^\phi$  è dato da

$$V_t^\phi = \phi_t^B B_t + \phi_t^S S_t$$

per  $t \in [0, T]$ .

**Definizione 1.5.2** (Portafoglio Autofinanziante). Un portafoglio  $\phi = \{(\phi_t^B, \phi_t^S), t \in [0, T]\}$  è autofinanziante se si ha che

$$dV_t^\phi = \phi_t^B dB_t + \phi_t^S dS_t. \quad (1.17)$$

La condizione (1.17) formalizza l'ipotesi che l'investitore non aggiunge nè sottrae capitale al portafoglio. In effetti, dalla (1.17) si osserva che le variazioni nel valore del portafoglio autofinanziante sono proporzionali alle variazioni dei due asset del modello.

**Definizione 1.5.3** (Portafoglio Ammissibile). Un portafoglio  $\phi = \{(\phi_t^B, \phi_t^S), t \in [0, T]\}$  si dice ammissibile se esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  non negativo tale che

$$\int_0^t \phi_u^B dB_u + \int_0^t \phi_u^S dS_u \geq -\alpha \quad \forall t \in [0, T].$$

**Definizione 1.5.4** (Misura di Martingala Equivalente). Una misura di probabilità  $Q$  su  $\mathcal{F}$  è detta una misura di martingala equivalente per il modello di mercato costituito dalla coppia  $(B, S)$  se

- $Q$  è equivalente a  $P$  su  $\mathcal{F}$ ,

- Il processo  $\tilde{S} = \{S_t/B_t, t \in [0, T]\}$  è una martingala sotto la misura  $Q$ .

**Definizione 1.5.5** (Arbitraggio). Un portafoglio  $\phi = \{(\phi_t^B, \phi_t^S), t \in [0, T]\}$  ammissibile e autofinanziante viene detto un arbitraggio se il suo processo valore  $V^\phi$  è tale che

- $V_0^\phi = 0$
- $P(V_T^\phi \geq 0) = 1$
- $P(V_T^\phi > 0) > 0$ .

Quindi un arbitraggio è un portafoglio di valore iniziale nullo che garantisce un guadagno al tempo  $T$ .

**Definizione 1.5.6.** Il modello di mercato  $(B, S)$  viene detto in assenza di arbitraggio se non esistono dei portafogli che costituiscono degli arbitraggi.

Denotiamo con  $\mathcal{K}_0$  il seguente spazio

$$\mathcal{K}_0 = \left\{ \int_0^T \phi_t^B dB_t + \int_0^T \phi_t^S dS_t : \phi \text{ ammissibile e autofinanziante} \right\}.$$

Quindi lo spazio  $\mathcal{K}_0$  è formato da tutte le variabili aleatorie costruite come processi valore al tempo  $T$  di portafogli ammissibili e autofinanziati di valore iniziale nullo. Denotiamo inoltre con  $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  lo spazio delle variabili aleatorie  $\mathcal{F}$ -misurabile e limitate quasi ovunque, e con  $L_+^\infty$  lo spazio delle variabili aleatorie non negative appartenenti a  $L^\infty$ . Denotiamo anche con  $L^0 = L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  lo spazio delle variabili aleatorie  $\mathcal{F}$ -misurabili definite quasi ovunque e con  $L_+^0$  lo spazio delle variabili aleatorie non negative appartenenti a  $L^0$ . Poniamo poi

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cap L^\infty$$

$$\mathcal{C} = (\mathcal{K}_0 - L_+^0) \cap L^\infty = \{g \in L^\infty : g \leq f, \text{ per qualche } f \in \mathcal{K}\}$$

**Definizione 1.5.7.** Diciamo che il modello di mercato  $(B, S)$  rispetta la condizione di

- **Assenza di Arbitraggio** se

$$\mathcal{C} \cap L_+^\infty = \{0\}$$

- **No Free Lunch with Vanishing Risk (NFLVR)** se

$$\bar{\mathcal{C}} \cap L_+^\infty = \{0\}$$

dove  $\bar{\mathcal{C}}$  denota la chiusura di  $\mathcal{C}$  in  $L^\infty$ .

La prima condizione coincide con la definizione di assenza di arbitraggio data nella definizione 1.5.6. In effetti, risulta equivalente a  $\mathcal{K}_0 \cap L_+^0 = \{0\}$ , il cui significato è che l'unica variabile aleatoria non negativa che risulta essere il valore finale di un portafoglio ammissibile e autofinanziante di valore iniziale nullo è la variabile aleatoria nulla. La condizione NFLVR è una generalizzazione della condizione di assenza di arbitraggio. Se NFLVR non è soddisfatta allora esiste una variabile aleatoria non identicamente nulla  $X \in L_+^\infty$  e una successione  $\{X_n\}_n \subset \mathcal{C}$  che converge quasi certamente a  $X$ . In particolare si ha quindi che

$$\begin{aligned} |X_n - X| &< 1/n \quad \text{per ogni } n \\ X_n &> -1/n. \end{aligned}$$

In termini economici questo ammonta ad avere *quasi* un arbitraggio visto che il rischio delle strategie diventa arbitrariamente piccolo al crescere di  $n$ .

Possiamo enunciare ora il seguente

**Teorema 1.5.1** (Primo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing [8, p.467]). *Sia il processo  $S$  limitato. Allora esiste una misura di martingala equivalente  $Q$  per il modello di mercato  $(B, S)$  se e solo se tale modello soddisfa la condizione NFLVR.*

L'importanza del Primo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing è che l'esistenza di una misura di martingala equivalente  $Q$  permette di ottenere una formula per il processo di prezzo di un payoff  $H$  che preservi l'assenza d'arbitraggio dentro il modello di mercato  $(B, S)$ . Prima di presentare tale formula chiariamo il significato di payoff.

**Definizione 1.5.8.** Un payoff  $H$  è una variabile aleatoria  $\mathcal{F}_T$ -misurabile.

**Proposizione 1.5.1** (Formula del Pricing Neutrale al Rischio [6, p.303]). *Dato il modello di mercato  $(B, S)$  e dato un payoff  $H$ . Il processo di prezzo  $\Pi_t(H)$  del payoff  $H$  che preserva l'assenza d'arbitraggio dentro il modello è dato da*

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} E^Q [H | \mathcal{F}_t], \quad (1.18)$$

dove  $E^Q[\cdot | \mathcal{F}_t]$  indica l'operatore di valore atteso condizionato all'informazione fino al tempo  $t$ , sotto la misura di martingala equivalente  $Q$ .

Il Primo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing stabilisce quindi la condizione che garantisce l'esistenza di una misura di martingala equivalente  $Q$ . Grazie all'esistenza di questa misura è possibile poi ottenere una formula per il processo di prezzo di un qualunque payoff  $H$ . Il Secondo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing riguarda l'unicità di una tale misura  $Q$ .

**Definizione 1.5.9** (Portafoglio Replicante). Dato un payoff  $H$ , un portafoglio autofinanziante  $\phi = \{(\phi_t^B, \phi_t^S), t \in [0, T]\}$  si dice un portafoglio replicante per il payoff  $H$  se vale  $P$ -q.c. che

$$H = V_0^\phi + \int_0^T \phi_t^B dB_t + \int_0^T \phi_t^S dS_t. \quad (1.19)$$

**Definizione 1.5.10** (Completezza). Il modello di mercato  $(B, S)$  viene detto completo se per ogni payoff  $H$  esiste un portafoglio replicante  $\phi$ .

Possiamo ora enunciare il seguente

**Teorema 1.5.2** (Secondo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing [6, p.305]). *Il modello di mercato  $(B, S)$  è completo se e solo se esiste un'unica misura di martingala equivalente  $Q$ .*

I due Teoremi Fondamentali dell'Asset Pricing relazionano due concetti economici, l'assenza d'arbitraggio e la costruzione di una strategia di copertura, a l'esistenza e unicità di una misura di martingala equivalente. Adesso presentiamo il modello di Lévy esponenziale e poi seguiranno due osservazioni riguardanti i due Teoremi Fondamentali dell'Asset Pricing nel caso particolare di questo modello.

**Definizione 1.5.11** (Modello di Lévy Esponenziale). Il modello di mercato  $(B, S)$  si dice modello di Lévy Esponenziale se si ha che per ogni  $t \geq 0$

$$S_t = S_0 e^{rt + X_t} \quad (1.20)$$

dove  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è un processo di Lévy.

Presentiamo di seguito la prima osservazione precedentemente menzionata.

*Osservazione 1.5.1.* Nell'enunciato del Primo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing si richiede la limitatezza del processo  $S$ . Purtroppo nella maggioranza dei modelli di Lévy Esponenziale il processo  $S$  presenta salti non limitati. Una rigorosa formulazione del Primo Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing valida nel caso di un modello di Lévy esponenziale richiede concetti molto tecnici come la nozione di  $\sigma$ -martingala. Per questo risultato rimandiamo a [7, p.215]

Presentiamo comunque un risultato che stabilisce una condizione sufficiente dentro il modello di Lévy esponenziale che garantisce l'esistenza della misura di martingala equivalente  $Q$ .

**Teorema 1.5.3** ([6, p.316]). *Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo di Lévy. Se le sue traiettorie non sono nè q.c. crescenti nè q.c. decrescenti allora per il modello di Lévy esponenziale basato sul processo  $X$  esiste una misura di martingala equivalente  $Q$ . In altre parole si ha l'esistenza di  $Q$  nei seguenti casi, non mutuamente esclusivi,*

- $X$  ha una componente gaussiana non nulla, cioè la sua tripletta caratteristica  $(\gamma, \sigma, \nu)$  è tale che  $\sigma > 0$ .
- $X$  è a variazione infinita, cioè la sua misura di Lévy  $\nu$  è tale che

$$\int_{-1}^1 |x| \nu(dx) = \infty.$$

- $X$  ha salti sia in direzione crescente che decrescente.
- $X$  ha salti in direzione crescente e un drift negativo oppure ha salti in direzione decrescente e un drift positivo.

Presentiamo ora la seconda osservazione.

*Osservazione 1.5.2.* Il modello di Lévy Esponenziale è un modello di mercato incompleto.

L'incompletezza di un modello di mercato si ritiene come una caratteristica che rende il modello più in accordo con la realtà visto che strategie di copertura perfette non esistono nella pratica. Rimane quindi ancora la scelta della misura di martingala equivalente  $Q$  da usare nella formula di pricing neutrale al rischio, visto che questa  $Q$  risulta non essere unica. La scegliamo imponendo che il processo di prezzo scontato di  $S$  sia una martingala. Questo si traduce nell'imporre che il processo  $\{e^{X_t}, t \geq 0\}$  sia una martingala. A questo proposito abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 1.5.4** ([6, p.101]). *Sia  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processo di Lévy di tripletta caratteristica  $(\gamma, \sigma, \nu)$ . Allora il processo  $\{e^{X_t}, t \geq 0\}$  è una martingala se e solo se*

$$\int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) < \infty \tag{1.21}$$

e

$$\gamma + \frac{1}{2} \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - x \mathbf{I}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx) = 0. \tag{1.22}$$

La condizione (1.21) risulta equivalente a chiedere

$$E [e^{X_t}] < \infty \quad \forall t \geq 0,$$

ovvero a chiedere che il processo  $S$  abbia valore atteso finito per ogni  $t$  finito. Questa condizione impone quindi una restrizione sulla misura di Lévy  $\nu$ . Invece usando l'equazione (1.21) è possibile fissare il parametro  $\gamma$  in funzione di  $\sigma$  e  $\nu$ . Si osserva inoltre che la (1.22) può essere scritta come

$$\ln(\phi(-i)) = 0, \tag{1.23}$$

dove  $\phi$  è la funzione caratteristica di  $X_1$ .

## Capitolo 2

# Metodi FFT

In questo capitolo presentiamo due metodi per il pricing sotto il modello di Lévy esponenziale. La caratteristica comune di questi metodi è l'utilizzo dell'algoritmo numerico Fast Fourier Transform (FFT). Il primo metodo che sarà presentato, denominato metodo CONV ([14]), consiste nel ricondurre la formula del pricing neutrale al rischio a una convoluzione facendo uso della trasformata di Fourier. Poi si procede a una discretizzazione che porta a una formula che usa la trasformata discreta di Fourier, per il cui calcolo è possibile utilizzare l'algoritmo numerico FFT. Invece il secondo metodo, denominato metodo COS ([9, 10]), fa uso dell'espansione in serie di coseni della densità associata al processo di Lévy nella formula del pricing neutrale al rischio. Questo fatto poi porta a delle formule che coinvolgono dei prodotti matrice-vettore con matrici che hanno una particolare struttura che permette di calcolare tali prodotti attraverso l'utilizzo dell'algoritmo FFT. Vedremo entrambi i metodi applicati a delle opzioni europee, bermudiane e barriera.

### 2.1 Introduzione, notazione e concetti preliminari

Richiamiamo brevemente il modello di Lévy Esponenziale. Il modello di mercato è a orizzonte finito, l'intervallo di tempo  $[0, T]$ , e le sue possibili evoluzioni sono descritte dallo spazio di probabilità filtrato  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ , dove  $P$  rappresenta la probabilità "oggettiva" dei futuri scenari oppure la visione soggettiva di uno investitore. Inoltre il modello è costituito da due asset. Il primo è un asset rischioso descritto dal processo stocastico  $S = \{S_t, t \in [0, T]\}$  adattato alla filtrazione  $\mathbb{F}$  e dato da

$$S_t = S_0 e^{rt + X_t} \quad \forall t \geq 0, \quad (2.1)$$

dove  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è un processo di Lévy la cui tripletta caratteristica  $(\gamma, \sigma, \nu)$  è tale che

$$\int_{|x| \geq 1} e^x \nu(dx) < \infty$$

e

$$\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - xI_{\{|x|<1\}}) \nu(dx) = 0.$$

Osserviamo che stiamo dando la dinamica del processo già sotto una misura di martingala equivalente  $Q$ . Il secondo asset è un asset non rischioso  $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ , che rappresenta un conto bancario che guadagna interessi a un tasso deterministico  $r > 0$ , ed è dato da

$$dB_t = rB_t dt.$$

con  $B_0 = 1$ . Ricordiamo inoltre la formula del pricing neutrale al rischio. Dato quindi un payoff  $H$ . Il suo processo di prezzo  $\Pi_t(H)$  è dato da

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} E^Q [H | \mathcal{F}_t].$$

Questa formula sarà il punto di partenza di entrambi metodi numerici CONV e COS.

Introduciamo ora alcune notazioni per indicare la trasformata e antitrasformata di Fourier di una funzione,

$$\begin{aligned} \hat{h}(u) &= \mathcal{F}[h(t)](u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iut} h(t) dt \\ h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{h}(u)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iut} \hat{h}(u) du. \end{aligned}$$

Invece, data una sequenza di  $N$  punti  $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$ , introduciamo la seguente notazione per indicare la trasformata e l'antitrasformata discreta di Fourier di tale sequenza,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_l[x_k] &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{ilk2\pi/N} x_k \\ \mathcal{D}_k^{-1}[x_l] &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-ilk2\pi/N} x_l \end{aligned}$$

L'algoritmo FFT permette il calcolo della trasformata discreta di Fourier di una sequenza di punti in modo efficiente, nel senso che l'algoritmo ha complessità  $\Theta(N \log N)$  invece che  $\Theta(N^2)$ , complessità che si otterrebbe se si facessero i calcoli diretti. Illustriamo quindi i punti più salienti di questo algoritmo. Prendiamo  $N$  pari a una potenza di 2 e poniamo

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^k x_k.$$

Il calcolo della trasformata discreta di Fourier della sequenza  $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$  diventa quindi la valutazione di  $p(e^{il2\pi/N})$  per  $l = 0, \dots, N-1$ . Introduciamo



i polinomi

$$\begin{aligned} p_a(z) &= x_0 + x_2z + \cdots + x_{N-2}z^{N/2-1} \\ p_b(z) &= x_1 + x_3z + \cdots + x_{N-1}z^{N/2-1}, \end{aligned}$$

e notiamo che

$$p(z) = p_a(z^2) + zp_b(z^2),$$

da cui segue che il calcolo della trasformata discreta di Fourier di  $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$  può essere eseguito valutando i polinomi  $p_a$  e  $p_b$  nei punti  $e^{2(il2\pi/N)}$  per  $l = 0, \dots, N - 1$ . Osservando però che

$$e^{2(il2\pi/N)} = e^{il\frac{2\pi}{N/2}},$$

segue che si devono valutare i polinomi  $p_a$  e  $p_b$  in corrispondenza delle radici principali dell'unità di ordine  $N/2$ . In questo modo, ci siamo ricondotti al calcolo di due trasformate discrete di Fourier di ordine  $N/2$ . Applicando poi ricorsivamente la stessa procedura ai polinomi  $p_a$  e  $p_b$  si ricava che la complessità dell'algoritmo FFT è  $\Theta(N \log N)$ .

Per concludere questa sezione introduciamo una definizione che sarà usata nella descrizione del metodo COS. Si tratta del concetto di convoluzione circolare.

**Definizione 2.1.1** (Convoluzione Circolare). Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$  due vettori di componenti  $x_0, \dots, x_{N-1}$  e  $y_0, \dots, y_{N-1}$ , rispettivamente. Il vettore  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$  di componenti  $z_0, \dots, z_{N-1}$  date da

$$z_l = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot y_{(l-k) \bmod N}$$

per  $l = 0, \dots, N - 1$  è detto convoluzione circolare dei vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . Questa operazione viene denotata con

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \circledast \mathbf{y}.$$

## 2.2 Il metodo CONV

Il metodo CONV consiste nell'applicare la trasformata di Fourier alla formula di valutazione neutrale al rischio per esprimere il valore del derivato in questione come l'antitrasformata del prodotto di due funzioni: la trasformata di Fourier del payoff del derivato e la funzione caratteristica associata al modello che descrive l'andamento del sottostante. Poi, applicando delle formule di quadratura per discretizzare gli integrali coinvolti, si trova un'approssimazione per il valore del derivato analoga alla formula analitica che però utilizza la trasformata e antitrasformata di Fourier discrete. Infine si avvale dell'algoritmo FFT per il calcolo di queste ultime. Nella seguente sezione illustriamo il metodo CONV applicato alle opzione europee.

### 2.2.1 Opzioni Europee

Denotiamo il payoff di una opzione europea di maturity  $T$  con  $\varphi(T, y)$ . Il suo valore al tempo  $t_0 < T$  possiamo scriverlo come

$$V(t_0, S_{t_0}) = e^{-r\Delta t} \int_{\mathbb{R}} \varphi(T, y) f(y|S_{t_0}) dy, \quad (2.2)$$

dove  $\Delta t = T - t_0$  e  $f(\cdot|S_{t_0})$  denota la densità di probabilità di transizione del valore del sottostante dal tempo  $t_0$  al tempo  $T$  partendo da  $S_{t_0}$ . A questo punto conviene passare a coordinate logaritmiche, ovvero usare non il valore del sottostante  $S_t$  ma il suo logaritmo naturale  $\ln(S_t)$ . A questo proposito, e abusando leggermente della notazione, scriviamo l'equazione (2.2) in coordinate logaritmiche come

$$V(t_0, x) = e^{-r\Delta t} \int_{\mathbb{R}} \varphi(T, y) f(y|x) dy \quad (2.3)$$

dove  $x = \ln(S_{t_m})$  ed  $f(\cdot|x)$  indica questa volta la densità di probabilità di transizione del logaritmo naturale del valore del sottostante dal tempo  $t_0$  al tempo  $T$  partendo da  $x$ . Un'osservazione cruciale è che grazie alla proprietà di incrementi indipendenti dei processi di Lévy la densità di probabilità condizionata  $f$  dipende unicamente da  $x$  e  $y$  tramite la loro differenza, e di conseguenza possiamo scrivere

$$f(y|x) = f(y - x).$$

Inserendo questa espressione in equazione (2.3) e applicando il seguente cambio di variabile  $z = y - x$  si ottiene

$$V(t_0, x) = e^{-r\Delta t} \int_{\mathbb{R}} \varphi(T, x + z) f(z) dz, \quad (2.4)$$

che non è altro che la cross-correlazione tra le funzioni  $\varphi(T, \cdot)$  e  $f(\cdot)$ . Il seguente passo consiste in applicare la trasformata di Fourier per far comparire la funzione caratteristica del processo di Lévy, la quale conosciamo in forma chiusa. Non solo, sfrutteremo anche il fatto che la trasformata di Fourier di una convoluzione tra due funzioni è il prodotto delle due trasformate. Per poter applicare la trasformata di Fourier dobbiamo garantire che la funzione alla quale viene applicata sia  $L^1$  in suo dominio. A questo proposito facciamo uso di un fattore moltiplicativo dipendente da una costante  $\alpha$ , il cui valore verrà scelto a posteriori per garantire il soddisfacimento di tale condizione di integrabilità. Questo fattore ha la seguente forma

$$e^{\alpha x}$$

dove  $x$  indica la variabile indipendente della funzione alla quale la trasformata di Fourier verrà applicata. Moltiplicando quindi l'equazione (2.4) per

il fattore  $e^{\alpha x}$  e applicando la trasformata di Fourier si ottiene

$$e^{r\Delta t} \mathcal{F}[\bar{V}(t_0, x)](u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iu(x+z)} \bar{\varphi}(T, x+z) e^{-i(u-i\alpha)z} f(z) dz dx,$$

dove abbiamo usato la seguente notazione

$$\begin{aligned} \bar{V}(t_0, x) &= e^{\alpha x} V(t_0, x) \\ \bar{\varphi}(T, x+z) &= e^{\alpha(x+z)} \varphi(T, x+z). \end{aligned}$$

Ritornando alla variabile  $y = x + z$  possiamo scrivere il doppio integrale come il prodotto di due integrali singoli. Abbiamo in effetti,

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} \mathcal{F}[\bar{V}(t_0, x)](u) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} \bar{\varphi}(T, y) e^{-i(u-i\alpha)z} f(z) dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} \bar{\varphi}(T, y) dy \int_{\mathbb{R}} e^{-i(u-i\alpha)z} f(z) dz \\ &= \mathcal{F}[\bar{\varphi}(T, y)](u) \cdot \phi(i\alpha - u), \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove si è indicata con  $\phi$  la funzione caratteristica del processo di Lévy che modella l'andamento del sottostante. Si osserva che per garantire la buona definizione del termine  $\phi(-(u - i\alpha))$  dobbiamo scegliere  $\alpha$  tale che

$$\phi(i\alpha) < \infty.$$

Dall'equazione (2.5) si ricava facilmente, applicando l'antitrasformata di Fourier, la seguente espressione per il valore dell'opzione,

$$V(t_0, x) = e^{-r\Delta t - \alpha x} \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[\bar{\varphi}(T, y)](u) \cdot \phi(i\alpha - u) \right](x). \quad (2.6)$$

Occupiamoci prima del calcolo della trasformata di Fourier interna. Dobbiamo ricondurci al calcolo di una trasformata discreta di Fourier per essere in grado di applicare l'algoritmo FFT. A questo proposito discretizziamo l'integrale che definisce la trasformata di Fourier con la formula di Newton-Côtes del trapezio. Fissiamo allora  $N$  nodi che rappresentano la griglia uniforme per la variabile  $y$ , i quali scriviamo nel seguente modo,

$$y_n = y_0 + n\Delta y \quad \text{per } n = 0, \dots, N-1.$$

Abbiamo quindi la seguente approssimazione per  $u$  fissato,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\bar{\varphi}(T, y)](u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} \bar{\varphi}(T, y) dy \\ &\approx \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{iuy_n} \bar{\varphi}(T, y_n) \Delta y, \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove ricordiamo che i pesi  $w_n$  sono dati da

$$w_0 = \frac{1}{2}, \quad w_{N-1} = \frac{1}{2}, \quad w_n = 1 \quad \text{per } n = 1, \dots, N-2.$$

Lasciamo per un momento in sospenso la discretizzazione di questa trasformata di Fourier e passiamo alla discretizzazione dell'antitrasformata esterna in equazione (2.6). Per la discretizzazione di questa antitrasformata usiamo la formula di Newton-Côtes del rettangolo, prendendo il valore della funzione nell'estremo sinistro dell'intervallo. Anche in questo caso scegliamo  $N$  nodi che rappresentano la griglia uniforme per la variabile  $u$ . Questi nodi li scriviamo nel seguente modo,

$$u_j = u_0 + j\Delta u \quad \text{per } j = 0, \dots, N-1.$$

Possiamo ora scrivere la seguente approssimazione,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(u) \cdot \phi(i\alpha - u)](x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \hat{\varphi}(u) \cdot \phi(i\alpha - u) du \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-iu_j x} \hat{\varphi}(u_j) \cdot \phi(i\alpha - u_j) \Delta u, \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove abbiamo usato la seguente notazione,

$$\hat{\varphi}(u) = \mathcal{F}[\bar{\varphi}(T, y)](u).$$

Mettendo assieme le due approssimazioni (2.7) e (2.8) nell'equazione (2.6) si ottiene la seguente approssimazione per il valore dell'opzione,

$$V(t_0, x) \approx e^{-r\Delta t - \alpha x} \frac{\Delta u \Delta y}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-iu_j x} \phi(i\alpha - u_j) \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{iu_j y_n} \bar{\varphi}(T, y_n) \quad (2.9)$$

Per poter procedere e far comparire la trasformata e antitrasformata discreta di Fourier nell'approssimazione (2.9), assegniamo i seguenti valori,

$$\Delta u \Delta y = \frac{2\pi}{N}, \quad u_0 = -\frac{N}{2} \Delta u.$$

Il primo assegnamento corrisponde alla condizione di Nyquist e il secondo a usare una griglia simmetrica attorno all'origine per la variabile  $u$ .

Occupiamoci ora della sommatoria interna nell'approssimazione (2.9). Esplicitando le espressioni per  $u_j$  e  $y_n$  nell'esponenziale si ottiene che

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{iu_j y_n} \bar{\varphi}(T, y_n) &= e^{iu_0 y_0 + ij\Delta u y_0} \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{ijn\Delta u \Delta y} e^{iu_0 n\Delta y} \bar{\varphi}(T, y_n) \\ &= e^{iu_0 y_0 + ij\Delta u y_0} \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{ijn2\pi/N} (-1)^n \bar{\varphi}(T, y_n), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la condizione di Nyquist e il fatto che grazie alla scelta  $u_0 = -N/2\Delta u$  si ha che

$$e^{iu_0n\Delta y} = e^{in\pi} = (-1)^n. \quad (2.10)$$

Usando quindi la notazione introdotta per indicare la trasformata discreta di Fourier possiamo scrivere che

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{iu_j y_n} \bar{\varphi}(T, y_n) = e^{iu_0 y_0 + ij\Delta u y_0} \mathcal{D}_j [(-1)^n w_n \bar{\varphi}(T, y_n)]. \quad (2.11)$$

Ora, inserendo questa espressione nell'approssimazione (2.9) si ottiene la seguente,

$$V(t_0, x) \approx e^{-r\Delta t - \alpha x} \frac{\Delta u \Delta y}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-iu_j x} \phi(i\alpha - u_j) e^{iu_0 y_0 + ij\Delta u y_0} \mathcal{D}_j [(-1)^n w_n \bar{\varphi}(T, y_n)]. \quad (2.12)$$

Esplicitando questa volta  $u_j$  ed scrivendo  $x = x_0 + \Delta y$  nell'esponenziale, usando la condizione di Nyquist, applicando il risultato (2.10) con  $n$  pari a 1, e facendo uso della notazione introdotta per l'antitrasformata discreta di Fourier, si riesce a riscrivere l'approssimazione (2.12) come

$$V(t_0, x) \approx -e^{-r\Delta t - \alpha x} e^{iu_0(y_0 - x_0)} \mathcal{D}_1^{-1} \left[ e^{ij(y_0 - x_0)\Delta u} \phi(i\alpha - u_j) \mathcal{D}_j [(-1)^n w_n \bar{\varphi}(T, y_n)] \right]. \quad (2.13)$$

L'approssimazione (2.13) rappresenta l'equivalente discreto dell'equazione (2.6). Inoltre siccome coinvolge unicamente trasformata e antitrasformata discreta di Fourier è possibile applicare l'algoritmo FFT.

### 2.2.2 Opzioni Bermudiane

Prendiamo ora in considerazione un'opzione bermudiana con  $M$  date di esercizio  $t_1, \dots, t_M$  che per semplicità consideriamo equidistanti di passo  $\Delta t$ . Denotiamo inoltre il payoff d'esercizio nelle corrispondenti date con  $\varphi(t_i, S_{t_i})$  per  $i = 1, \dots, M$ . Abbiamo visto che il prezzo di una tale opzione bermudiana al tempo  $t_0$ , con  $t_0 \leq t_1$ , e che denotiamo con  $V(t_0, S_{t_0})$ , può essere calcolato attraverso la seguente induzione all'indietro

$$\begin{cases} V(t_M, S_{t_M}) &= \varphi(t_M, S_{t_M}) \\ C(t_m, S_{t_m}) &= e^{-r\Delta t} E_{t_m} [V(t_{m+1}, S_{t_{m+1}})] \\ V(t_m, S_{t_m}) &= \max[C(t_m, S_{t_m}), \varphi(t_m, S_{t_m})] \\ V(t_0, S_{t_0}) &= C(t_0, S_{t_0}) \end{cases} \quad (2.14)$$

dove  $m = M - 1, \dots, 1$ ,  $C(t_i, S_{t_i})$  per  $i = 1, \dots, M - 1$  indica il valore di continuazione dell'opzione nelle diverse date di esercizio, e  $E_t[\cdot] = E[\cdot | \mathcal{F}_t]$ , cioè denota l'operatore di valore atteso condizionato all'informazione disponibile al tempo  $t$ .

Ovviamente è il calcolo del valore di continuazione dell'opzione che rappresenta l'ostacolo computazionale. Per illustrare il metodo CONV applicato alle opzioni bermudiane cominciamo scrivendo in modo esplicito il valore atteso condizionato per  $m$  fissato,

$$C(t_m, S_{t_m}) = e^{-r\Delta t} \int_{\mathbb{R}} V(t_{m+1}, y) f(y | S_{t_m}) dy \quad (2.15)$$

dove  $f(\cdot | S_{t_m})$  denota la densità di probabilità di transizione del valore del sottostante dal tempo  $t_m$  al tempo  $t_{m+1}$  partendo da  $S_{t_m}$ . Così come abbiamo fatto nel caso delle opzioni europee, conviene passare a coordinate logaritmiche, ovvero usare non il valore del sottostante  $S_t$  ma il suo logaritmo naturale  $\ln(S_t)$ . A questo proposito, e abusando leggermente della notazione, scriviamo l'equazione (2.15) in coordinate logaritmiche come

$$C(t_m, x) = e^{-r\Delta t} \int_{\mathbb{R}} V(t_{m+1}, y) f(y | x) dy \quad (2.16)$$

dove  $x = \ln(S_{t_m})$  ed  $f(\cdot | x)$  indica questa volta la densità di probabilità di transizione del logaritmo naturale del valore del sottostante dal tempo  $t_m$  al tempo  $t_{m+1}$  partendo da  $x$ . Riconosciamo nell'equazione (2.16) la stessa struttura dell'equazione (2.3). Portando avanti analoghi passi a quelli descritti nella sezione precedente, si ricava la seguente approssimazione per il valore di continuazione dell'opzione per  $x$  fissato (analogamente all'approssimazione (2.9)),

$$C(t_m, x) \approx e^{-r\Delta t - \alpha x} \frac{\Delta u \Delta y}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-iu_j x} \phi(i\alpha - u_j) \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{iu_j y_n} \bar{V}(t_{m+1}, y_n) \quad (2.17)$$

dove ricordiamo che si fa uso della seguente notazione

$$\bar{V}(t_{m+1}, y) = e^{\alpha y} V(t_{m+1}, y),$$

e che le griglie per le variabili  $y$  e  $u$  sono date da

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + n\Delta y & \text{per } n = 0, \dots, N - 1 \\ u_j &= u_0 + j\Delta u & \text{per } j = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

A questo punto introduciamo una griglia uniforme per la variabile  $x$ . Scegliamo sempre  $N$  nodi, i quali scriviamo nel seguente modo,

$$x_k = x_0 + k\Delta x \quad \text{per } k = 0, \dots, N - 1.$$

Ricordiamo che la griglia in  $x$  è necessaria perchè ad ogni passo temporale dobbiamo calcolare il valore di continuazione dell'opzione per diversi valori di  $x$ . Inoltre si osserva che la griglia per la variabile  $x$  a un passo temporale diventa la griglia per la variabile  $y$  al passo successivo. Proprio per questo motivo si sceglie anche di mettere  $\Delta x = \Delta y$ . Fissiamo ora un nodo  $x_k$  e scriviamo l'approssimazione (2.17) in questo nodo,

$$C(t_m, x_k) \approx e^{-r\Delta t - \alpha x_k} \frac{\Delta u \Delta y}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-iu_j x_k} \phi(i\alpha - u_j) \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{iu_j y_n} \bar{V}(t_{m+1}, y_n). \quad (2.18)$$

Come fatto nella sezione precedente assegniamo i seguenti due valori che corrispondono alla condizione di Nyquist e a usare una griglia simmetrica attorno all'origine per la variabile  $u$  rispettivamente,

$$\Delta u \Delta y = \frac{2\pi}{N}, \quad u_0 = -\frac{N}{2} \Delta u.$$

Seguendo passaggi analoghi a quelli della sezione precedente si riesce a scrivere la sommatoria interna nell'approssimazione (2.18) nel seguente modo,

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{iu_j y_n} \bar{V}(t_{m+1}, y_n) = e^{iu_0 y_0 + ij \Delta u y_0} \mathcal{D}_j [(-1)^n w_n \bar{V}(t_{m+1}, y_n)]. \quad (2.19)$$

Inserendo quindi questa espressione nell'approssimazione (2.18) si ricava,

$$C(t_m, x_k) \approx e^{-r\Delta t - \alpha x_k} \frac{\Delta u \Delta y}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-iu_j x_k} \phi(i\alpha - u_j) e^{iu_0 y_0 + ij \Delta u y_0} \mathcal{D}_j [(-1)^n w_n \bar{V}(t_{m+1}, y_n)]. \quad (2.20)$$

Dall'approssimazione (2.20), analogamente a quanto fatto nella sezione precedente, ma tenendo conto che  $x_k$  questa volta viene esplicitato come  $x_k = x_0 + k\Delta y$ , si ricava infine la seguente,

$$C(t_m, x_k) \approx e^{-r\Delta t - \alpha x_k} e^{iu_0(y_0 - x_0)} (-1)^k \mathcal{D}_k^{-1} \left[ e^{ij(y_0 - x_0)\Delta u} \phi(i\alpha - u_j) \mathcal{D}_j [(-1)^n w_n \bar{V}(t_{m+1}, y_n)] \right]. \quad (2.21)$$

L'approssimazione (2.21) serve a calcolare il valore di continuazione dell'opzione bermudiana in tutti i nodi  $x_k$  e costituisce così il nucleo del metodo CONV per questa tipologia di opzione. Presentiamo in Tabella 2.1 lo schema del metodo CONV applicato alle opzioni bermudiane.

- Scelta la griglia per la variabile  $y$  calcolare il valore dell'opzione al tempo  $t_M$  nei nodi della griglia,

$$V(t_M, y_n) = \varphi(t_M, y_n) \quad \text{per } n = 0, \dots, N - 1.$$

- Per  $m = M - 1, \dots, 1$

1. Scelte le griglie per le variabili  $x$  e  $u$ , calcolare il valore di continuazione dell'opzione al tempo  $t_m$  nei nodi  $x_k$  usando l'approssimazione (2.21).
2. Calcolare il valore dell'opzione al tempo  $t_m$  nei nodi  $x_k$  nel seguente modo,

$$V(t_m, x_k) = \max[C(t_m, x_k), \varphi(t_m, x_k)] \quad \text{per } k = 0, \dots, N - 1.$$

- Calcolare il valore dell'opzione al tempo  $t_0$  usando l'approssimazione (2.21) valutata nel nodo corrispondente al valore  $\ln(S_{t_0})$ .

Tabella 2.1: Metodo CONV per le opzioni bermudiane.

### 2.2.3 Opzioni Barriera

In questa sezione vediamo come il metodo CONV possa essere applicato alle opzioni barriera a monitoraggio discreto. Illustreremo l'algoritmo nel caso di un'opzione "up-and-out", i passi per il caso di opzioni "down-and-out" sono analoghi. Si osserva che il metodo può essere applicato a opzioni con caratteristiche "in" facendo delle semplice modifiche. Consideriamo quindi un'opzione barriera up-and-out. Indichiamo le  $M$  date di osservazione con  $t_1, \dots, t_M$ , che per semplicità prendiamo equidistanti di passo  $\Delta t$  e dove  $t_M$  coincide con la data di scadenza dell'opzione  $T$ . Indichiamo inoltre con  $H$  il livello della barriera e con  $R$  l'ammontare fisso di denaro che riceve il possessore dell'opzione nel caso la condizione relazionata alla barriera venga verificata. Questo ammontare fisso viene chiamato *rebate*. Il valore dell'opzione barriera up-and-out a scadenza, che indichiamo con  $V(T, S_T)$ , può essere scritto come

$$V(T, S_T) = [\alpha(S_T - K)]^+ I_{\{S_{t_i} < H \forall i\}} + RI_{\{S_{t_j} \geq H \text{ per qualche } j\}}, \quad (2.22)$$

dove  $\alpha = 1$  per un'opzione call e  $\alpha = -1$  per una put. Quindi se il sottostante non supera la barriera in nessuna delle date d'osservazione, il possessore dell'opzione riceve il payoff di un'opzione europea call o put a seconda del caso. Altrimenti, riceve il rebate.

Si ricava facilmente la seguente formula ricorsiva per il valore dell'opzione



barriera up-and-out per  $m = M - 1, \dots, 1$ ,

$$\begin{cases} C(t_m, x) &= e^{-r\Delta t} \int_{\mathbb{R}} V(t_{m+1}, y) f(y|x) dy \\ V(t_m, x) &= C(t_m, x) I_{\{x < h\}} + e^{-r(T-t_m)} R I_{\{x \geq h\}}, \end{cases} \quad (2.23)$$

dove abbiamo usato le notazioni delle sezioni precedenti per indicare il valore dell'opzione, il valore di continuazione della stessa e la densità di probabilità di transizione. Inoltre siamo passati a coordinate logaritmiche e di conseguenza  $h = \ln(H/K)$ . Si osserva che al tempo  $t_M$ , ai fini della formula ricorsiva, il valore dell'opzione  $V(t_M, x)$  sarà pari al payoff dell'opzione europea oppure pari al rebate a seconda del valore di  $x$ .

Come fatto per le opzioni bermudiane, una volta introdotte le griglie per le variabili  $x, y$  e  $u$ , il calcolo del valore di continuazione dell'opzione nel nodo  $x_k$  al tempo  $t_m$ , indicato con  $C(t_m, x_k)$ , può essere calcolato facendo uso dell'approssimazione (2.21). Dopodichè il valore dell'opzione al tempo  $t_m$ , sempre nel nodo  $x_k$ , può essere approssimato attraverso l'equazione corrispondente in (2.23) ponendo  $x = x_k$  e usando al posto di  $C(t_m, x_k)$  la sua approssimazione. Presentiamo in Tabella 2.2 lo schema del metodo CONV applicato a un'opzione barriera up-and-out.

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Scelta la griglia per la variabile <math>y</math> calcolare il valore dell'opzione al tempo <math>t_M</math> nei nodi della griglia,</li> </ul> $V(t_M, y_n) = [\alpha K(e^{y_n} - 1)]^+ I_{\{y_n < h\}} + R I_{\{y_n \geq h\}} \quad \text{per } n = 0, \dots, N - 1.$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Per <math>m = M - 1, \dots, 1</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Scelte le griglie per le variabili <math>x</math> e <math>u</math>, calcolare il valore di continuazione dell'opzione al tempo <math>t_m</math> nei nodi <math>x_k</math> usando l'approssimazione (2.21).</li> <li>2. Calcolare il valore dell'opzione al tempo <math>t_m</math> nei nodi <math>x_k</math> come,</li> </ol> <math display="block">V(t_m, x_k) = C(t_m, x_k) I_{\{x_k &lt; h\}} + e^{-r(T-t_m)} R I_{\{x_k \geq h\}}</math> </li> <li>• Calcolare il valore dell'opzione al tempo <math>t_0</math> usando l'approssimazione (2.21) valutata nel nodo corrispondente al valore <math>\ln(S_{t_0})</math>.</li> </ul>
--

Tabella 2.2: Metodo CONV per una opzione barriera up-and-out.

### 2.3 Il metodo COS

Il metodo COS si basa sull'espansione in serie di coseni della densità di probabilità di transizione del processo di Lévy che modella l'andamento

del sottostante. I coefficienti di questa espansione vengono approssimati facendo uso della funzione caratteristica associata a questa densità per poi poter utilizzare l'espansione nella formula di valutazione neutrale al rischio che espressa il valore del derivato in questione. Si evidenzia che per le opzioni europee non sarà necessario l'uso dell'algoritmo FFT. Invece per le opzioni bermudiane e barriera l'algoritmo FFT verrà usato.

Cominciamo introducendo quindi l'espansione di una funzione in serie di coseni.

**Teorema 2.3.1** (Espansione in Serie di Coseni [12]). *Sia data una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per qualche  $\varepsilon > 0$  si abbia che*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{1+\varepsilon} dx < \infty .$$

*Definiamo la sua espansione in serie di coseni sull'intervallo  $[a, b]$  come il limite puntuale per  $N \rightarrow +\infty$  della seguente somma parziale*

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=0}^N A_k \cos \left( k\pi \frac{x-a}{b-a} \right)$$

*dove nella serie è sottointeso che il primo termine viene pesato per il coefficiente 0.5 e i coefficienti  $A_k$  sono dati da*

$$A_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \left( k\pi \frac{x-a}{b-a} \right) dx .$$

*Allora si ha che*

$$S_N(f) \rightarrow f \text{ q.o. in } [a, b] \text{ per } N \rightarrow +\infty .$$

*Inoltre se  $f \in L^2([a, b])$  allora si ha che*

$$S_N(f) \rightarrow f \text{ in } L^2([a, b]) \text{ per } N \rightarrow +\infty .$$

Il primo passaggio importante del metodo COS è quello di trovare un'approssimazione dei coefficienti  $A_k$  dell'espansione in serie di coseni della densità di probabilità di transizione del logaritmo del sottostante  $f(y|x)$ , in base alla funzione caratteristica definita a partire da questa densità. In realtà non useremo il logaritmo naturale del sottostante, ma il logaritmo naturale del rapporto tra il valore del sottostante e una costante, che sarà scelta pari allo strike dell'opzione in questione. Per fissare le idee, introduciamo la seguente notazione,

$$\phi(u; x) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} f(y|x) dy$$

Allora, se scegliamo un intervallo  $[a, b]$  tale da contenere quasi tutta la massa della densità  $f(y|x)$ , possiamo fare la seguente approssimazione,

$$\phi(u; x) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} f(y|x) dy \approx \int_a^b e^{iuy} f(y|x) dy.$$

Facendo uso di questa approssimazione e valutandola nel punto  $u = \frac{k\pi}{b-a}$  si ottiene che

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{k\pi}{b-a}; x\right) &\approx \int_a^b e^{i\frac{k\pi}{b-a}y} f(y|x) dy \\ &= \int_a^b e^{i\frac{k\pi}{b-a}y \pm i\frac{k\pi}{b-a}a} f(y|x) dy \\ &= e^{i\frac{k\pi}{b-a}a} \int_a^b e^{ik\pi\frac{y-a}{b-a}} f(y|x) dy \\ &= e^{i\frac{k\pi}{b-a}a} \left[ \int_a^b \cos\left(k\pi\frac{y-a}{b-a}\right) f(y|x) dy + i \int_a^b \sin\left(k\pi\frac{y-a}{b-a}\right) f(y|x) dy \right], \end{aligned}$$

da cui si ricava che

$$\Re\left[\phi\left(\frac{k\pi}{b-a}; x\right) e^{i\frac{k\pi}{b-a}a}\right] \approx \int_a^b \cos\left(k\pi\frac{y-a}{b-a}\right) f(y|x) dy, \quad (2.24)$$

dove abbiamo indicato con  $\Re$  l'operatore che estrae la parte reale di un numero immaginario. Di conseguenza, riconoscendo in essenza nel membro destro dell'approssimazione (2.24) i coefficienti  $A_k$  dell'espansione in serie di coseni della densità  $f(y|x)$ , abbiamo infine l'approssimazione cercata,

$$A_k \approx F_k = \frac{2}{b-a} \Re\left[\phi\left(\frac{k\pi}{b-a}; x\right) e^{-i\frac{k\pi}{b-a}a}\right]. \quad (2.25)$$

L'approssimazione (2.25) permette di approssimare un maniera efficiente i coefficienti  $A_k$  dal momento in cui conosciamo in forma chiusa l'espressione della funzione caratteristica  $\phi$ . Questa approssimazione sarà usata nel calcolo degli integrali che coinvolgono la densità  $f$ .

### 2.3.1 Opzioni Europee

Denotiamo il payoff di una opzione europea di maturity  $T$  con  $\varphi(T, y)$ . Il suo valore al tempo  $t_0 < T$  possiamo scriverlo come

$$V(t_0, x) = e^{-r\Delta t} \int_{\mathbb{R}} \varphi(T, y) f(y|x) dy,$$

dove  $\Delta t = T - t_0$ . Possiamo approssimare il valore di  $V(t_0, x)$  troncando l'integrale a un intervallo  $[a, b]$  che contenga quasi tutta la massa della

densità  $f(y|x)$ . Si ottiene quindi che

$$V(t_0, x) \approx e^{-r\Delta t} \int_a^b \varphi(T, y) f(y|x) dy. \quad (2.26)$$

Facendo uso dell'espansione in serie di coseni della densità  $f(y|x)$  possiamo scrivere l'approssimazione (2.26) nel seguente modo

$$V(t_0, x) \approx e^{-r\Delta t} \int_a^b \varphi(T, y) \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy,$$

dove abbiamo esplicitato la dipendenza da  $x$  dei coefficienti  $A_k(x)$ . Grazie alle proprietà di convergenza della serie possiamo scambiare l'integrale con il segno di serie e ottenere la seguente espressione

$$V(t_0, x) \approx \frac{1}{2}(b-a)e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \hat{\varphi}_k,$$

dove si è fatto uso della seguente notazione

$$\hat{\varphi}_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b \varphi(T, y) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy.$$

Grazie al rapido decadimento dei coefficienti  $A_k(x)$  è possibile troncare la serie a un numero fissato di addendi che denotiamo con  $N$ . Applicando questo ulteriore troncamento e infine facendo uso dell'approssimazione (2.25) otteniamo la seguente

$$V(t_0, x) \approx e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \Re \left[ \phi\left(\frac{k\pi}{b-a}; x\right) e^{-i\frac{k\pi}{b-a}a} \right] \hat{\varphi}_k. \quad (2.27)$$

Inoltre si dimostra facilmente che vale la seguente scomposizione della funzione caratteristica  $\phi(\cdot, x)$ ,

$$\phi(u; x) = \phi(u; 0) e^{iux} \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Tenendo conto dell'equazione (2.28) possiamo riscrivere infine l'approssimazione (2.27) nel seguente modo,

$$V(t_0, x) \approx e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \Re \left[ \phi\left(\frac{k\pi}{b-a}; 0\right) e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \right] \hat{\varphi}_k. \quad (2.29)$$

Nell'approssimazione (2.29) gli unici termini che devono ancora essere calcolati sono i coefficienti  $\hat{\varphi}_k$ . Di seguito mostriamo come questi coefficienti

possano essere trovati in forma chiusa per le opzioni call e put. Prima ricordiamo alcune notazioni, abbiamo che

$$x = \ln(S_0/K) \quad \text{e} \quad y = \ln(S_T/K),$$

dove abbiamo indicato come al solito con  $S_t$  il valore del sottostante al tempo  $t$ . Inoltre abbiamo indicato con  $T$  la maturity dell'opzione e con  $K$  lo strike. Con queste notazioni possiamo scrivere il payoff per le opzioni europee come

$$\varphi(T, y) = [\alpha K(e^y - 1)]^+ \quad \text{con } \alpha = \begin{cases} 1 & \text{per un'opzione call} \\ -1 & \text{per un'opzione put.} \end{cases}$$

Presentiamo sotto forma di osservazione un risultato che ci permette di derivare facilmente l'espressione analitica del generico coefficiente  $\hat{\varphi}_k$ , sia per un'opzione call che per un'opzione put.

*Osservazione 2.3.1.* Sia dato un intervallo  $[c, d] \subset [a, b]$ . I coefficienti dell'espansione in serie di coseni della funzione  $g(y) = e^y$  su  $[c, d]$ , che indichiamo con  $\chi(c, d)$ ,

$$\chi_k(c, d) = \int_c^d e^y \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy,$$

e quelli della corrispondente espansione della funzione  $g(y) = 1$  su  $[c, d]$ , che indichiamo con  $\psi(c, d)$ ,

$$\psi_k(c, d) = \int_c^d \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy,$$

hanno le seguenti forme analitiche

$$\begin{aligned} \chi_k(c, d) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2} \left[ e^d \cos\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) - e^c \cos\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k\pi}{b-a} e^d \sin\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) - \frac{k\pi}{b-a} e^c \sin\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) \right] \\ \psi_k(c, d) &= \begin{cases} \frac{b-a}{k\pi} \left[ \sin\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) - \sin\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) \right] & \text{se } k \neq 0 \\ d-c & \text{se } k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dall'osservazione (2.3.1) segue facilmente che

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_k^{\text{call}} &= \frac{2}{b-a} K [\chi_k(0, b) - \psi_k(0, b)] \\ \hat{\varphi}_k^{\text{put}} &= \frac{2}{b-a} K [-\chi_k(a, 0) + \psi_k(a, 0)], \end{aligned} \quad (2.30)$$

dove abbiamo indicato con  $\hat{\varphi}_k^{\text{call}}$  e con  $\hat{\varphi}_k^{\text{put}}$  i coefficienti dell'espansione in serie di coseni sull'intervallo  $[a, b]$  della funzione payoff di una call e di una put rispettivamente. Queste formule chiuse per i coefficienti  $\hat{\varphi}_k^{\text{call}}$  e  $\hat{\varphi}_k^{\text{put}}$  ci permettono di calcolare i valori di opzioni europee facendo uso dell'approssimazione (2.29).

### 2.3.2 Opzioni Bermudiane

Consideriamo come fatto precedentemente nell'analogia sezione del metodo CONV un'opzione bermudiana. Useremo in questa sezione le stesse notazioni usate in quella sezione per descrivere le caratteristiche di una tale opzione. Ricordiamo che il valore di questa opzione si ricava dalle equazioni (2.14) che riportiamo di seguito,

$$\begin{cases} V(t_M, S_{t_M}) &= \varphi(t_M, S_{t_M}) \\ C(t_m, S_{t_m}) &= e^{-r\Delta t} E_{t_m}[V(t_{m+1}, S_{t_{m+1}})] \\ V(t_m, S_{t_m}) &= \max[C(t_m, S_{t_m}), \varphi(t_m, S_{t_m})] \\ V(t_0, S_{t_0}) &= C(t_0, S_{t_0}). \end{cases}$$

Facendo uso dell'approssimazione (2.29) si ricava la seguente approssimazione per il valore di continuazione dell'opzione al tempo  $t_{M-1}$ ,

$$C(t_{M-1}, x) \approx e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \Re \left[ \phi \left( \frac{k\pi}{b-a}; 0 \right) e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \right] \hat{\varphi}_k,$$

dove  $\hat{\varphi}_k$  sarà  $\hat{\varphi}_k^{\text{call}}$  oppure  $\hat{\varphi}_k^{\text{put}}$ , coefficienti dati dalle equazioni (2.30), a seconda che l'opzione sia una call o una put. Si osserva che si sta considerando  $T = t_M$ . In questo passaggio i coefficienti  $\hat{\varphi}_k$  sono noti in forma chiusa. Se continuiamo andando indietro nel tempo, facendo sempre uso dell'approssimazione (2.29), ricaviamo la seguente approssimazione per il valore di continuazione dell'opzione al tempo  $t_m$  con  $m = M - 2, \dots, 0$ ,

$$C(t_m, x) \approx e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \Re \left[ \phi \left( \frac{k\pi}{b-a}; 0 \right) e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \right] \hat{V}_k(t_{m+1}), \quad (2.31)$$

dove si è usata la seguente notazione

$$\hat{V}_k(t_{m+1}) = \frac{2}{b-a} \int_a^b V(t_{m+1}, y) \cos \left( k\pi \frac{y-a}{b-a} \right) dy.$$

Nell'approssimazione (2.31) i coefficienti  $\hat{V}_k(t_{m+1})$  non sono dati in forma chiusa. Adesso illustriamo come questi coefficienti possano essere approssimati ad ogni passo temporale. Cominciamo denotando con  $x_m^*$  il punto di esercizio anticipato al tempo  $t_m$ , cioè l'unico punto tale che

$$C(t_m, x_m^*) = \varphi(t_m, x_m^*). \quad (2.32)$$

Una volta noto  $x_m^*$ , e facendo uso della relazione

$$V(t_m, \cdot) = \max [C(t_m, \cdot), \varphi(t_m, \cdot)],$$

possiamo suddividere l'integrale nella definizione dei coefficienti  $\hat{V}_k(t_m)$  in due integrali: uno nell'intervallo  $[a, x_m^*]$  e l'altro nell'intervallo  $[x_m^*, b]$ . Quindi abbiamo che

$$\hat{V}_k(t_m) = \begin{cases} \hat{C}_k(t_m, a, x_m^*) + \hat{\varphi}_k(x_m^*, b) & \text{per una call,} \\ \hat{\varphi}_k(a, x_m^*) + \hat{C}_k(t_m, x_m^*, b) & \text{per una put,} \end{cases} \quad (2.33)$$

per  $m = M - 1, \dots, 1$ , e

$$\hat{V}_k(t_M) = \begin{cases} \hat{\varphi}_k(0, b) & \text{per una call,} \\ \hat{\varphi}_k(a, 0) & \text{per una put,} \end{cases} \quad (2.34)$$

dove abbiamo usato la seguente notazione

$$\begin{aligned} \hat{C}_k(t_m, x_1, x_2) &= \frac{2}{b-a} \int_{x_1}^{x_2} C(t_m, y) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \\ \hat{\varphi}_k(x_1, x_2) &= \frac{2}{b-a} \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t_m, y) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy. \end{aligned}$$

Grazie all'osservazione 2.3.1 ricaviamo facilmente la seguente espressione per i coefficienti  $\hat{\varphi}_k(x_1, x_2)$ ,

$$\hat{\varphi}_k(x_1, x_2) = \frac{2}{b-a} \alpha K \left[ \chi_k(x_1, x_2) - \psi_k(x_1, x_2) \right], \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{per un'opzione call} \\ -1 & \text{per un'opzione put,} \end{cases}$$

che quindi conosciamo in forma chiusa. Sono i coefficienti  $\hat{C}_k(t_m, x_1, x_2)$  che richiedono un'approssimazione. Per trovarla basta inserire nella definizione di questi coefficienti al posto di  $C(t_m, y)$  la sua approssimazione data in (2.31). Facendo ciò ed scambiando la sommatoria con l'integrale si trova la seguente espressione,

$$\hat{C}_k(t_m, x_1, x_2) \approx e^{-r\Delta t} \Re \left[ \sum_{j=0}^{N-1} \phi\left(\frac{j\pi}{b-a}; 0\right) \hat{V}_j(t_{m+1}) M_{kj}(x_1, x_2) \right], \quad (2.35)$$

dove abbiamo fatto uso della seguente notazione

$$M_{kj}(x_1, x_2) = \frac{2}{b-a} \int_{x_1}^{x_2} e^{ij\pi \frac{x-a}{b-a}} \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy. \quad (2.36)$$

L'approssimazione (2.35) costituisce una forma ricorsiva per ricavare i coefficienti  $\hat{C}_k(t_m, x_1, x_2)$ , e di conseguenza anche i coefficienti  $\hat{V}_k(t_m)$ , andando

indietro nel tempo. In effetti, al tempo  $t_m$  i coefficienti  $\hat{V}_j(t_{m+1})$  nell'approssimazione (2.35) sono noti. Per rendere però questa approssimazione utilizzabile bisogna trovare un modo efficiente per calcolare i coefficienti  $M_{kj}(x_1, x_2)$ . Vediamo di seguito come questo possa essere fatto riscrivendo in forma matriciale l'approssimazione (2.35) e facendo uso dell'algoritmo FFT.

Cominciamo con la seguente osservazione che ci dà una forma più agevole per i coefficienti  $M_{kj}(x_1, x_2)$ .

*Osservazione 2.3.2.* Esplicitando nella definizione (2.36) l'esponenziale come,

$$e^{ij\pi\frac{x-a}{b-a}} = \cos\left(ij\pi\frac{x-a}{b-a}\right) + i \sin\left(ij\pi\frac{x-a}{b-a}\right),$$

e facendo semplici passaggi si ricava la seguente espressione

$$M_{kj}(x_1, x_2) = -\frac{i}{\pi} \left[ M_{kj}^c(x_1, x_2) + M_{kj}^s(x_1, x_2) \right], \quad (2.37)$$

dove

$$M_{kj}^c(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{i\pi(x_2 - x_1)}{b - a} & \text{per } k = j = 0 \\ \frac{e^{i(j+k)\pi\frac{x_2-a}{b-a}} - e^{i(j+k)\pi\frac{x_1-a}{b-a}}}{j + k} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$M_{kj}^s(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{i\pi(x_2 - x_1)}{b - a} & \text{per } k = j \\ \frac{e^{i(j-k)\pi\frac{x_2-a}{b-a}} - e^{i(j-k)\pi\frac{x_1-a}{b-a}}}{j - k} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Procediamo ora a riscrivere l'approssimazione (2.35) in forma matriciale. Definiamo prima il vettore  $\mathbf{u} = \{u_j\}_{j=0}^{N-1}$  con

$$u_0 = \frac{1}{2}\phi(0; 0)\hat{V}_0(t_{m+1})$$

$$u_j = \phi\left(\frac{j\pi}{b-a}; 0\right)\hat{V}_j(t_{m+1}) \quad \text{per } j = 1, \dots, N-1,$$

e il vettore

$$\hat{\mathbf{C}}(t_m, x_1, x_2) = \left\{ \hat{C}_k(t_m, x_1, x_2) \right\}_{k=0}^{N-1}.$$

Definiamo inoltre le matrici

$$M^c = \left\{ M_{kj}^c(x_1, x_2) \right\}_{k,j=0}^{N-1} \quad M^s = \left\{ M_{kj}^s(x_1, x_2) \right\}_{k,j=0}^{N-1}.$$



Possiamo quindi con queste notazioni appena introdotte e grazie anche all'equazione (2.37) riscrivere l'approssimazione (2.35) come

$$\hat{\mathbf{C}}(t_m, x_1, x_2) \approx \frac{e^{-r\Delta t}}{\pi} \Im \left[ (M^c + M^s) \mathbf{u} \right], \quad (2.38)$$

dove  $\Im$  indica l'operatore che estrae la parte immaginaria, componente per componente, di un vettore. Nell'approssimazione (2.38) il costo computazionale viene dal calcolo dei prodotti matrice-vettore. Grazie alle particolari strutture che hanno le matrici  $M^c$  ed  $M^s$  questi prodotti possono essere ricondotti a delle convoluzioni circolari tra vettori, le quali vengono calcolate in modo molto efficiente facendo uso dell'algoritmo FFT, perché a sua volta possono essere ricondotte a delle trasformate di Fourier discrete. Abbiamo quindi la seguente osservazione sulle strutture delle matrici  $M^c$  ed  $M^s$ .

*Osservazione 2.3.3.* La matrice  $M^c$  è una matrice di Hankel:

$$M^c = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_{N-1} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N-1} & m_N & \dots & m_{2N-2} \end{bmatrix}$$

e la matrice  $M^s$  è una matrice di Toeplitz:

$$M^s = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_{N-1} \\ m_{-1} & m_0 & \dots & m_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1-N} & m_{2-N} & \dots & m_0 \end{bmatrix}$$

con

$$m_j = \begin{cases} \frac{i\pi(x_2 - x_1)}{b - a} & \text{per } j = 0 \\ \frac{e^{ij\pi \frac{x_2 - a}{b - a}} - e^{ij\pi \frac{x_1 - a}{b - a}}}{j} & \text{per } j \neq 0. \end{cases}$$

Presentiamo ora un teorema che stabilisce la relazione tra i prodotti matrice-vettore con matrici di Hankel e di Toeplitz e il concetto di convoluzione circolare.

**Teorema 2.3.2** ([10, p.9]). *Valgono i seguenti due risultati:*

- Siano

$$\mathbf{m}_s = [m_0, m_{-1}, m_{-2}, \dots, m_{1-N}, 0, m_{N-1}, m_{N-2}, \dots, m_1]'$$

$$\mathbf{u}_s = [u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, 0, \dots, 0]'$$

due vettori di  $2N$  componenti. Allora il prodotto  $M^s \mathbf{u}$  è pari al vettore le cui componenti sono le prime  $N$  componenti della convoluzione circolare  $\mathbf{m}_s \circledast \mathbf{u}_s$ .

- Siano

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_c &= [m_{2N-1}, m_{2N-2}, \dots, m_1, m_0]' \\ \mathbf{u}_c &= [0, \dots, 0, u_0, u_1, \dots, u_{N-1}]',\end{aligned}$$

due vettori di  $2N$  componenti. Allora il prodotto  $M^c \mathbf{u}$  è pari al vettore le cui componenti sono le prime  $N$  componenti della convoluzione circolare  $\mathbf{m}_c \circledast \mathbf{u}_c$ , disposte in ordine inverso.

Infine presentiamo il teorema che stabilisce come una convoluzione circolare possa essere scritta attraverso delle trasformate discrete di Fourier.

**Teorema 2.3.3** ([4]). *Dati due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , vale che*

$$\mathbf{x} \circledast \mathbf{y} = \mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{D}(\mathbf{y})],$$

dove il prodotto al quale viene applicata l'antitrasformata discreta si intende componente per componente.

Grazie ai teoremi 2.3.2 e 2.3.3 possiamo calcolare i prodotti matrice-vettore nell'approssimazione (2.38) applicando l'algoritmo FFT per calcolare le trasformate discrete di Fourier coinvolte. Per completare la descrizione del metodo COS per le opzioni bermudiane manca solo un ultimo dettaglio e cioè il calcolo del punto di esercizio anticipato  $x_m^*$  ad ogni passo temporale. A quel proposito presentiamo la seguente,

*Osservazione 2.3.4.* Denotiamo con  $C_{\text{approx}}(t_m, x)$  l'approssimazione del valore di continuazione dell'opzione data dalla relazione (2.31). Allora esiste al più un punto, che denotiamo con  $\tilde{x}_m^*$ , che soddisfa

$$C_{\text{approx}}(t_m, \tilde{x}_m^*) = \varphi(t_m, \tilde{x}_m^*),$$

quando  $\varphi$  denota il payoff di una opzione call oppure di una opzione put.

Consideriamo il punto  $\tilde{x}_m^*$  come un'approssimazione del punto  $x_m^*$ . Inoltre se  $\tilde{x}_m^*$  non appartiene all'intervallo  $[a, b]$  poniamo il suo valore pari al valore al quale è più prossimo tra  $a$  e  $b$ . Nell'algoritmo si userà il metodo di Newton per calcolare questo punto e sarà usato al posto di  $x_m^*$  nelle approssimazioni. In Tabella 2.3 presentiamo uno schema dell'algoritmo descritto in questa sezione. Si osserva che nello schema si è usato il fatto che

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}_c) = \mathbf{sgn} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{u}_s)$$

con  $\mathbf{sgn} = [1, -1, 1, -1, \dots]'$ , relazione che deriva dalle proprietà di traslazione della trasformata di Fourier discreta.

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trovare i coefficienti <math>\hat{V}_j(t_M)</math> dati dall'equazione (2.34).</li> <li>• Per <math>m = M - 1, \dots, 1</math>,             <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Trovare il punto <math>x_m^*</math> usando il metodo di Newton.</li> <li>2. Calcolare i vettori <math>M^s \mathbf{u}</math> e <math>M^c \mathbf{u}</math> come                 <math display="block">M^s \mathbf{u} = \text{Primi } N \text{ elementi di } \mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}(\mathbf{m}_s) \cdot \mathcal{D}(\mathbf{u}_s)]</math> <math display="block">M^c \mathbf{u} = \text{Primi } N \text{ elementi di } \mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}(\mathbf{m}_c) \cdot \mathbf{sgn} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{u}_s)]</math>                 in ordine inverso.             </li> <li>3. Calcolare i coefficienti <math>\left\{ \hat{C}_k(t_m, x_1, x_2) \right\}_{k=0}^{N-1}</math> facendo uso dell'approssimazione (2.38), dove                 <math display="block">(x_1, x_2) = \begin{cases} (a, x_m^*) &amp; \text{per una call} \\ (x_m^*, b) &amp; \text{per una put.} \end{cases}</math> </li> <li>4. Ricavare <math>\left\{ \hat{V}_k(t_m) \right\}_{k=0}^{N-1}</math> dall'equazione (2.33).</li> </ol> </li> <li>• Calcolare <math>V(t_0, S_{t_0})</math> usando l'approssimazione (2.31) per <math>m = 0</math> e <math>x = \ln(S_{t_0})</math>, visto che <math>V(t_0, S_{t_0}) = C(t_0, S_{t_0})</math>.</li> </ul>
--

Tabella 2.3: Metodo COS per le opzioni bermudiane.

### 2.3.3 Opzioni Barriera

In questa sezione vediamo come il metodo COS possa essere applicato alle opzioni barriera a monitoraggio discreto. Illustreremo l'algoritmo nel caso di un'opzione "up-and-out", comunque includeremo anche nello schema il caso delle opzioni "down-and-out". Useremo le stesse notazioni introdotte nella sezione analoga del metodo CONV. Richiamiamo quindi la formula ricorsiva per il valore di una opzione up-and-out,

$$\begin{cases} C(t_m, x) &= e^{-r\Delta t} \int_{\mathbb{R}} V(t_{m+1}, y) f(y|x) dy \\ V(t_m, x) &= C(t_m, x) \mathbf{I}_{\{x < h\}} + e^{-r(T-t_m)} R \mathbf{I}_{\{x \geq h\}}, \end{cases} \quad (2.39)$$

dove ricordiamo che stiamo usando le coordinate logaritmiche.

Come nel caso del metodo COS applicato alle opzioni bermudiane, il costo computazionale si focalizza nell'approssimazione dei coefficienti

$$\left\{ \hat{C}_k(t_m, x_1, x_2) \right\}_{k=0}^{N-1} \quad e \quad \left\{ \hat{V}_k(t_m) \right\}_{k=0}^{N-1} .$$

Comunque nel caso delle opzioni barriera, ad ogni passo temporale, non c'è nessun punto di esercizio anticipato  $x_m^*$ , invece abbiamo il livello della barriera  $h$  che però è noto e fisso. Questo fatto riduce notevolmente il costo computazionale richiesto. Presentiamo prima, sotto forma di Teorema, l'espressione per i coefficienti  $\{\hat{V}_k(t_m)\}_{k=0}^{N-1}$ .

**Teorema 2.3.4.** *Nel caso di un'opzione barriera up-and-out, abbiamo che per  $m = M - 1, \dots, 1$ ,*

$$\hat{V}_k(t_m) = \hat{C}_k(t_m, a, h) + e^{-r(T-t_m)} R \frac{2}{b-a} \psi_k(h, b), \quad (2.40)$$

dove la funzione  $\psi$  è stata definita nell'osservazione (2.3.1). Inoltre, se  $h < 0$ , si ha che

$$\hat{V}_k(t_M) = \begin{cases} 2R\psi_k(h, b)/(b-a) & \text{per una call} \\ \hat{\varphi}_k(a, h) + 2R\psi_k(h, b)/(b-a) & \text{per una put,} \end{cases} \quad (2.41)$$

se invece  $h \geq 0$  si trova che

$$\hat{V}_k(t_M) = \begin{cases} \hat{\varphi}_k(0, h) + 2R\psi_k(h, b)/(b-a) & \text{per una call} \\ \hat{\varphi}_k(a, 0) & \text{per una put.} \end{cases} \quad (2.42)$$

Per l'approssimazione dei coefficienti  $\hat{C}_k(t_m, a, h)$  nella formula (2.40) usiamo l'approssimazione (2.38) con  $x_1 = a$  e  $x_2 = h$ . I teoremi 2.3.2 e 2.3.3 rimangono ovviamente ancora validi, ma è utile notare che il calcolo dei vettori  $\mathbf{m}_c$  ed  $\mathbf{m}_s$  può essere fatto fuori del ciclo ricorsivo visto che  $h$  è fisso. Presentiamo in Tabella 2.4 lo schema del metodo COS applicato alle opzioni barriera "out".

- Trovare i coefficienti  $\hat{V}_k(t_M)$  dati dalle equazioni (2.41) e (2.42).

- Per una opzione up-and-out:

$$x_1 = a \quad x_2 = h \quad c = h \quad d = b,$$

e per una opzione down-and-out:

$$x_1 = h \quad x_2 = b \quad c = a \quad d = h.$$

- Definire

$$\mathbf{d}_1 = \mathcal{D}(\mathbf{m}_s(x_1, x_2))$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{sgn} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{m}_c(x_1, x_2))$$

- Per  $m = M - 1, \dots, 1$ ,

1. Calcolare i vettori  $M^s \mathbf{u}$  e  $M^c \mathbf{u}$  come

$$M^s \mathbf{u} = \text{Primi } N \text{ elementi di } \mathcal{D}^{-1}[\mathbf{d}_1 \cdot \mathcal{D}(\mathbf{u}_s)]$$

$$M^c \mathbf{u} = \text{Primi } N \text{ elementi di } \mathcal{D}^{-1}[\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{sgn} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{u}_s)]$$

in ordine inverso.

2. Calcolare i coefficienti  $\left\{ \hat{C}_k(t_m, x_1, x_2) \right\}_{k=0}^{N-1}$  facendo uso dell'approssimazione (2.38).

3. Ricavare  $\left\{ \hat{V}_k(t_m) \right\}_{k=0}^{N-1}$  dall'equazione (2.40).

- Calcolare  $V(t_0, S_{t_0})$  usando l'approssimazione (2.31) per  $m = 0$  e  $x = \ln(S_{t_0})$ , visto che  $V(t_0, S_{t_0}) = C(t_0, S_{t_0})$ .

Tabella 2.4: Metodo COS per le opzioni barriera out.

## Capitolo 3

# Prove Numeriche

In quest'ultimo capitolo presentiamo i risultati delle prove numeriche mettendo in comparazione entrambi i metodi, CONV e COS, nel caso delle tre tipologie di opzioni descritte nel capitolo precedente. Per tutte le prove numeriche è stato usato un computer portatile dotato di processore Intel Core 2 Duo di 2.4 GHz, memoria RAM di 2GB e sistema operativo Mac OS X Snow Leopard versione 10.6.8. La versione di Matlab usata è stata la 7.7.0.471 (R2008b).

### 3.1 Opzioni Europee

In questa sezione prendiamo come modello di Lévy Esponenziale il Moto Browniano Geometrico, ovvero modelliamo l'asset rischioso come

$$S_t = S_0 e^{rt + \gamma t + \sigma W_t}, \quad (3.1)$$

dove  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  è un Moto Browniano Standard. Si osserva quindi il modello appena introdotto è quello descritto in equazione (1.20), dove il processo  $X$  è un processo di Lévy di tripletta  $(\gamma, \sigma, 0)$  scritto facendo uso della sua decomposizione di Lévy-Itô (Teorema 1.3.2). Siccome vogliamo descrivere la dinamica dell'asset rischioso direttamente sotto una misura di martingala  $Q$ , che in questo caso risulta essere unica, applichiamo il Teorema 1.5.4. La condizione (1.21) è automaticamente soddisfata visto che  $\nu = 0$ . Invece la condizione (1.22) ci impone che

$$\gamma = -\frac{1}{2}\sigma^2.$$

Fissiamo quindi i tre parametri del nostro modello.

$$S_0 = 100 \qquad r = 0.1 \qquad \sigma = 0.25.$$

L'opzione europea che prendiamo in considerazione è una call di maturity  $T$  e strike  $K$  fissati come:

$$T = 0.1 \qquad K = 90.$$

Prima di procedere con le prove numeriche bisogna ancora definire le griglie per le variabili  $x, y$  e  $u$  nel caso del metodo CONV e l'intervallo di troncamento  $[a, b]$  per il metodo COS. Cominciamo quindi con la scelta delle griglie per il metodo CONV seguendo l'articolo originale (mettere citazione). In questo caso non abbiamo bisogno di una griglia per la variabile  $x$  visto che non c'è nessuna formula ricorsiva nel tempo. Per la variabile  $y$  che ricordiamo essere  $\ln(S_T/S_0)$  introduciamo la seguente griglia

$$y_j = \left(j - \frac{N}{2}\right) \Delta y \quad j = 0, \dots, N - 1, \quad (3.2)$$

ovvero una griglia centrata in 0. Nelle prove numeriche faremo variare il numero di punti  $N$  della griglia e sarà  $N$  a definire il passo  $\Delta y$ . Per definire  $\Delta y$  in base a  $N$  dobbiamo specificare l'intervallo dove viene considerata la variabile  $y$ , questo intervallo verrà denotato come  $[-L/2, L/2]$ . Per definire il valore di  $L$  da usare, seguendo l'articolo originale, prendiamo  $L$  proporzionale alla deviazione standard di  $\ln S_T$ ,

$$L = \delta \sqrt{\frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial u^2} \Big|_{u=0} + \left(\frac{\partial \phi(u)}{\partial u} \Big|_{u=0}\right)^2}, \quad (3.3)$$

dove  $\phi$  denota la funzione caratteristica di  $\ln S_T$  condizionata a  $\ln S_0$  e  $\delta$  è una costante di proporzionalità.  $L$  ha questa forma per garantire, in base al valore del parametro  $\delta$ , che la massa della densità di  $y$  al di fuori dell'intervallo  $[-L/2, L/2]$  sia trascurabile. Una volta scelto  $\delta$  e di conseguenza anche  $L$ , la griglia descritta in (3.2) viene completamente specificata ponendo

$$\Delta y = \frac{L}{N}.$$

La griglia per la variabile  $u$  l'abbiamo già scelta in precedenza, la riportiamo di seguito,

$$u_j = \left(j - \frac{N}{2}\right) \Delta u \quad j = 0, \dots, N - 1. \quad (3.4)$$

Si osserva che la condizione di Nyquist implica che

$$\Delta u = \frac{2\pi}{L},$$

di conseguenza l'intervallo dove viene considerata la variabile  $u$  è l'intervallo  $[-N\pi/L, (N-2)\pi/L]$ . Quindi una volta fissato  $N$ , c'è un compromesso tra l'errore di troncamento dell'intervallo della variabile  $y$  e quello dell'intervallo

della variabile  $u$ . Chiameremo l'insieme delle griglie (3.2) e (3.4) con il nome di *Discretizzazione I*. Ora tenendo conto che il payoff dell'opzione presenta un punto di discontinuità della derivata prima per  $y = \ln(K/S_0)$  consideriamo anche la seguente griglia per la variabile  $y$ ,

$$y_j = \ln(K/S_0) + \left(j - \frac{N}{2}\right) \Delta y \quad j = 0, \dots, N - 1. \quad (3.5)$$

L'insieme delle griglie (3.5) e (3.4) verrà indicato con il nome di *Discretizzazione II*. Le prove numeriche dimostreranno che l'utilizzo della Discretizzazione II garantisce una convergenza monotona dell'errore. Per entrambe le discretizzazioni fissiamo la costante di proporzionalità  $\delta$  come

$$\delta = 20.$$

Passiamo ora a considerare l'intervallo di troncamento  $[a, b]$  per il metodo COS. Seguiamo l'articolo originale che propone la seguente forma

$$[a, b] = \left[ c_1 - \delta \sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}}, c_1 + \delta \sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}} \right], \quad (3.6)$$

dove  $c_n$  denota il cumulante  $n$ -esimo della variabile aleatoria  $\ln(S_T/K)$ . Fissiamo il valore di  $\delta$  per il metodo COS come

$$\delta = 10,$$

per essere in accordo con la scelta corrispondente per il metodo CONV. Si osserva che il cumulante  $c_4$  per il modello di mercato scelto è pari a zero.

La prima prova numerica che presentiamo è uno studio del parametro di damping  $\alpha$  che bisogna utilizzare nel metodo CONV. Abbiamo preso i seguenti valori per  $N$  e per  $\alpha$ ,

$$N = [2^5, 2^7, 2^9] \quad \alpha = [0, -5, -10, -15, -20].$$

Per questo modello abbiamo una formula chiusa per il prezzo del prodotto che abbiamo preso in considerazione, la ben nota formula di Black&Scholes. Analizziamo quindi la seguente quantità al variare del parametro  $\alpha$  per i valori di  $N$  sopra elencati,

$$err = \log_{10} |p_{CONV} - p_{B\&S}|,$$

dove abbiamo indicato con  $p_{CONV}$  il prezzo ottenuto con il metodo CONV e con  $p_{B\&S}$  il prezzo esatto ottenuto con la formula di Black&Scholes. In Figura 3.1 vengono presentati i risultati di questa prova numerica. Si osserva che il valore del parametro di damping  $\alpha$  non ha nessuna influenza nell'andamento dell'errore. Questo è dovuto al fatto che abbiamo troncato il dominio di integrazione e quindi praticamente l'utilizzo di un parametro di damping



per soddisfare la condizione di integrabilità per la buona definizione della trasformata di Fourier non è più necessario. Per completezza presentiamo in Tabella 3.1 i valori numerici riportati in Figura 3.1. Possiamo osservare che in effetti ci sono piccole variazioni nel valore  $err$  al variare del valore di  $\alpha$  ma di vari ordini di grandezza inferiori all'errore stesso. Precisiamo che è stata usata la Discretizzazione II per questa prova numerica.

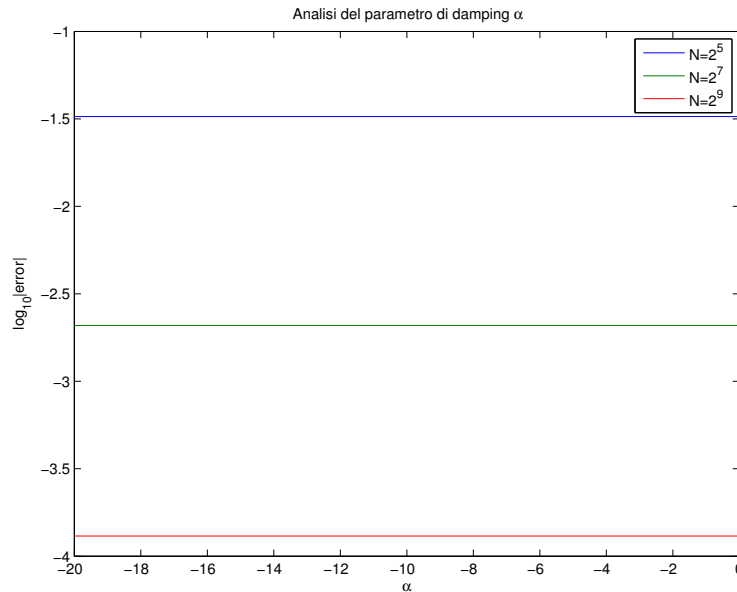


Figura 3.1: Andamento di  $\log_{10} |p_{CONV} - p_{B\&S}|$  al variare del parametro di damping  $\alpha$  per alcuni valori di  $N$ , il numero di punti nelle griglie.

		$\alpha$				
		0	-5	-10	-15	-20
N	$2^5$	-1.486769596372	-1.486764755791	-1.486771287133	-1.486781815450	-1.486720296001
	$2^7$	-2.681051674027	-2.681051674031	-2.681051674032	-2.681051674033	-2.681051674033
	$2^9$	-3.884607023730	-3.884607024404	-3.884607024499	-3.884607024534	-3.884607024588

Tabella 3.1: Valori corrispondenti a quelli riportati in Figura 3.1

Ora procediamo appunto a comparare entrambe le discretizzazioni introdotte per il metodo CONV. In questa prova numerica, e in quelle successive, si decide di usare un parametro di damping  $\alpha = 0$  visti i risultati appena presentati. Facciamo variare  $N$  nel seguente modo

$$N = 2^n \quad \text{per } n = 7, 8, \dots, 16.$$

Presentiamo in Tabella 3.2 i risultati di questa prova numerica. In Figura 3.2 vengono presentati gli stessi risultati in modo più efficiente. Si osserva chiaramente come la convergenza dell'errore sia più regolare nel caso della

Discretizzazione II. D'ora in avanti sarà questa la Discretizzazione che verrà usata.

$n$	Discretizzazione I	Discretizzazione II
7	-2.981	-2.681
8	-3.451	-3.283
9	-4.297	-3.885
10	-5.620	-4.487
11	-5.395	-5.089
12	-5.869	-5.691
13	-6.725	-6.293
14	-7.942	-6.895
15	-7.801	-7.497
16	-8.233	-8.101

Tabella 3.2: Andamento di  $err = \log_{10} |p_{\text{CONV}} - p_{\text{B\&S}}|$  al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambi Discretizzazioni I e II.

Infine mettiamo in comparazione entrambi metodi CONV e COS. Facciamo variare  $N$  nel seguente modo

$$N = 2^n \quad \text{per } n = 4, 5, \dots, 10.$$

Presentiamo in Tabella 3.3 l'andamento di

$$err = \log_{10} |p_{\text{NUM}} - p_{\text{B\&S}}|,$$

dove  $p_{\text{NUM}}$  è il prezzo ottenuto con il metodo CONV o COS a seconda dei casi, al variare di  $n$ . Figura 3.3 presenta in modo grafico i risultati. Si osserva come l'errore ottenuto con il metodo COS sia sempre minore a quello ottenuto con il metodo CONV. Inoltre il metodo COS arriva a convergenza molto più rapidamente che il metodo CONV, già per  $n = 6$  siamo quasi a precisione machina da  $p_{\text{B\&S}}$ . Per quantificare l'ordine di convergenza di entrambi metodi riportiamo in Figura 3.4 i valori di

$$\log_2 |p_{\text{NUM}} - p_{\text{B\&S}}|$$

al variare di  $n$ , insieme a quello di  $-2n$  e  $-2^n$ . Si osserva che il metodo CONV ha indicativamente un ordine di convergenza quadratico mentre il metodo COS ha un ordine di convergenza esponenziale. Vedremo però nella sezione successiva che l'ordine di convergenza esponenziale per il metodo COS viene perso nel caso delle opzioni bermudiane.

Studiamo anche l'andamento del tempo di calcolo al variare di  $n$ . Presentiamo i risultati in Tabella 3.4 e in Figura 3.5. Si osserva per quanto riguarda il tempo di calcolo, il metodo COS risulta più veloce, ma comunque l'ordine di grandezza è quasi lo stesso.

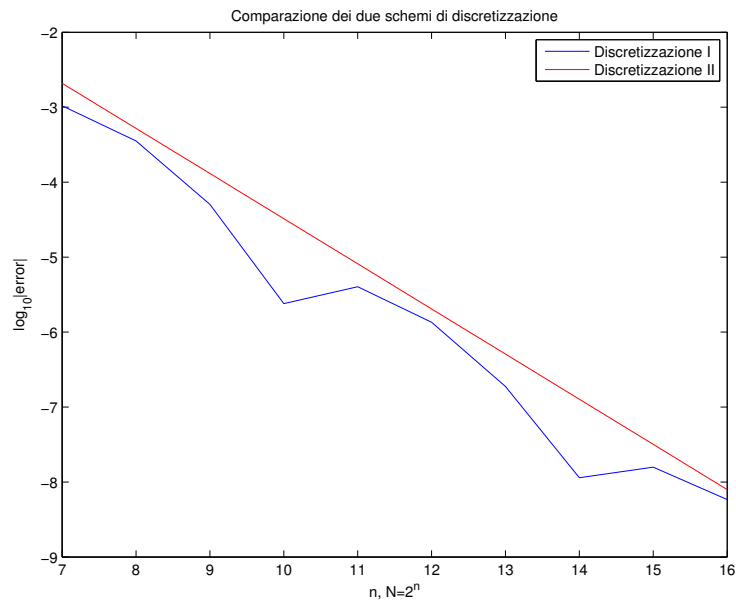


Figura 3.2: Andamento di  $\log_{10} |p_{\text{CONV}} - p_{\text{B\&S}}|$  al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambe Discretizzazioni I e II.

$n$	Metodo CONV	Metodo COS
4	-0.91	-2.33
5	-1.49	-6.95
6	-2.08	-14.45
7	-2.68	-14.45
8	-3.28	-14.45
9	-3.88	-14.45
10	-4.49	-14.45

Tabella 3.3: Andamento di  $err = \log_{10} |p_{\text{NUM}} - p_{\text{B\&S}}|$  al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per i metodi CONV e COS.

$n$	Metodo CONV	Metodo COS
4	1.86E-003	6.26E-004
5	2.08E-003	6.42E-004
6	2.13E-003	6.89E-004
7	2.29E-003	7.47E-004
8	2.46E-003	8.80E-004
9	2.99E-003	1.12E-003
10	3.75E-003	1.60E-003

Tabella 3.4: Andamento del tempo di calcolo al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per i metodi CONV e COS.

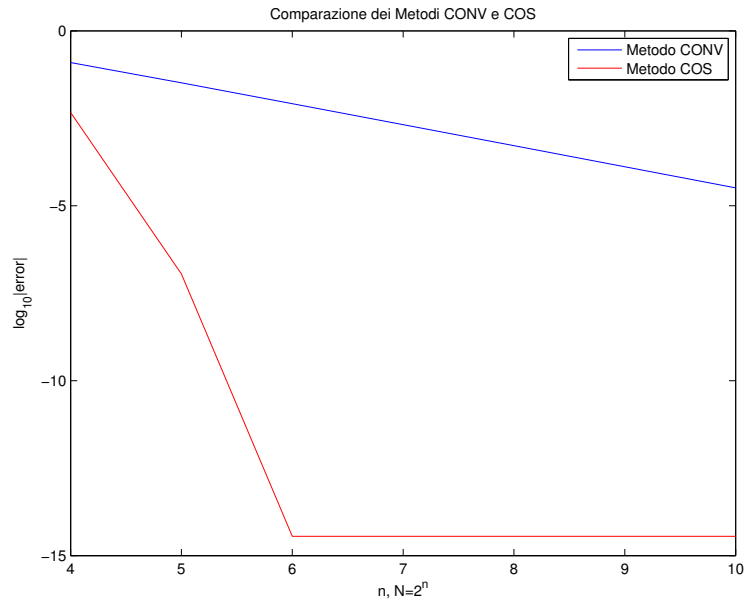


Figura 3.3: Andamento di  $\log_{10} |p_{\text{NUM}} - p_{\text{B\&S}}|$  al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambi i metodi CONV e COS.

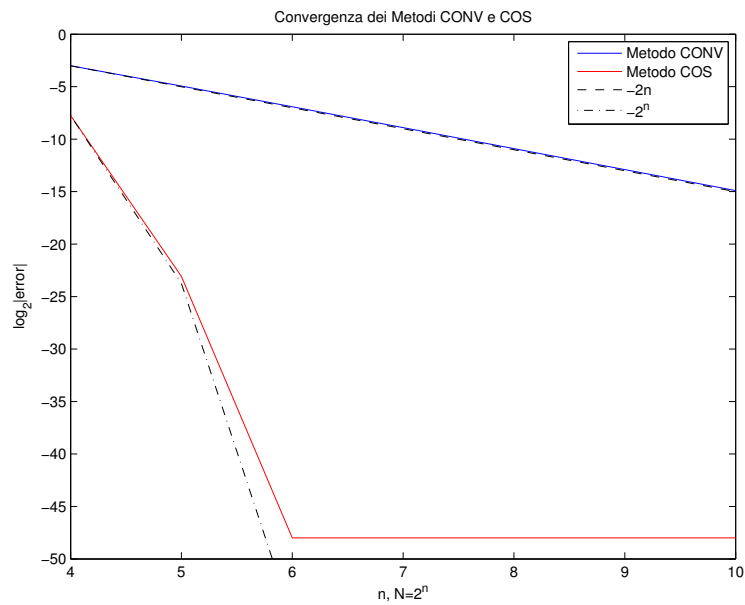


Figura 3.4: Andamento di  $\log_2 |p_{\text{NUM}} - p_{\text{B\&S}}|$  al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambi i metodi CONV e COS. Vengono riportati i grafici di  $-2n$  e  $-2^n$  per studiare l'ordine di convergenza.

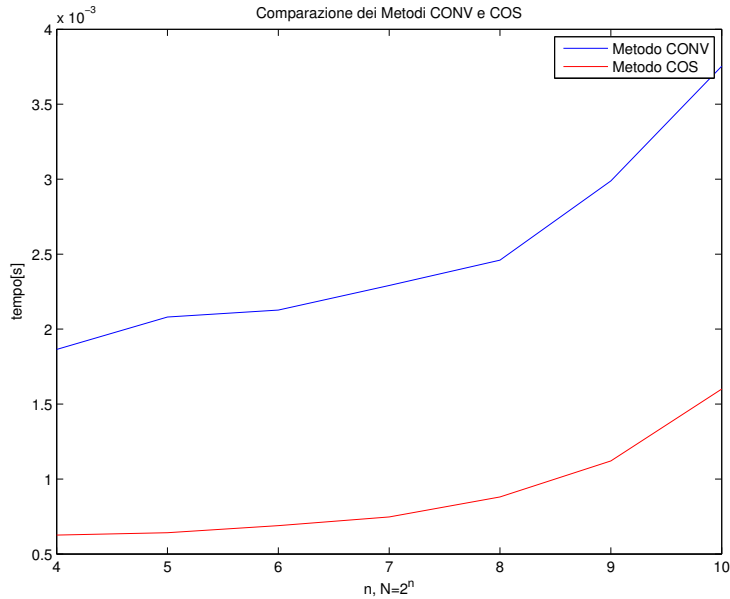


Figura 3.5: Andamento del tempo di calcolo al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambi metodi CONV e COS.

### 3.2 Opzioni Bermudiane

In questa sezione consideriamo come modello di Lévy esponenziale quello che fa uso del processo Variance Gamma di parametri  $(\sigma, \nu, \theta)$ . La dinamica del nostro asset rischioso  $S$  è quindi data da

$$S_t = S_0 e^{rt + \gamma t + X_t}, \tag{3.7}$$

dove  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è appunto un processo Variance Gamma di parametri  $(\sigma, \nu, \theta)$ . Ricordiamo che stiamo scrivendo la dinamica dell'asset rischioso sotto una misura di martingala  $Q$ . Si dimostra che la condizione (1.21) viene soddisfatta. Per quanto riguarda la condizione (1.22) consideriamo la sua formulazione (1.23), dove la funzione caratteristica  $\phi$  che dobbiamo considerare è quella di  $\gamma + X_1$ . Abbiamo visto nel primo capitolo che la funzione caratteristica di  $X_1$  è data da

$$\phi_{X_1}(u) = \left( 1 - iu\theta\nu + \frac{1}{2}\nu\sigma^2 u^2 \right)^{-1/\nu}.$$

Quindi la condizione (1.23) si traduce nella seguente

$$\gamma = \frac{1}{\nu} \ln \left( 1 - \theta\nu - \frac{1}{2}\nu\sigma^2 \right).$$

I parametri che prendiamo per il modello di mercato sono

$$S_0 = 100 \quad r = 0.1 \quad \sigma = 0.12 \quad \nu = 0.2 \quad \theta = -0.14.$$

Il derivato che consideriamo ora è un'opzione bermudiana put di maturità  $T$ , con  $M$  date d'esercizio ed strike  $K$  fissati come segue,

$$T = 1 \qquad M = 10 \qquad K = 110.$$

Il valore di riferimento per il prezzo di questo derivato viene preso dall'articolo originale, ed è pari al valore ottenuto con il metodo CONV ponendo  $N = 2^{20}$ . Lo indichiamo con  $p_{\text{rif}}$  ed è pari a

$$p_{\text{rif}} = 9.040646119.$$

Facciamo variare  $N$  nel seguente modo

$$N = 2^n \quad \text{per } n = 4, 5, \dots, 10,$$

e come nel caso delle opzioni europee analizziamo la seguente quantità

$$err = \log_{10} |p_{\text{NUM}} - p_{\text{rif}}|,$$

dove  $p_{\text{NUM}}$  è il prezzo ottenuto con il metodo CONV o COS a seconda dei casi, al variare di  $n$ . Presentiamo i risultati in Tabella 3.5 e in Figura 3.6. Si osserva che anche in questo caso il metodo COS risulta essere migliore, comunque la differenza non è così marcata come nel caso di opzioni europee sotto il modello di Black&Scholes. Per quantificare l'ordine di convergenza di entrambi metodi riportiamo in Figura 3.7 i valori di

$$\log_2 |p_{\text{NUM}} - p_{\text{rif}}|$$

al variare di  $n$ , insieme a quello di due rette di pendenze -2 e -3 rispettivamente. Si osserva che il metodo CONV ha indicativamente un ordine di convergenza quadratico mentre il metodo COS ha un ordine di convergenza di circa 3.

n	Metodo CONV	Metodo COS
4	0.100	-0.916
5	0.765	-1.562
6	-0.420	-1.686
7	-1.018	-2.722
8	-1.967	-3.720
9	-2.643	-4.592
10	-3.216	-5.429

Tabella 3.5: Andamento di  $err = \log_{10} |p_{\text{NUM}} - p_{\text{rif}}|$  nel caso di un'opzione bermudiana put al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$  per entrambi metodi CONV e COS.

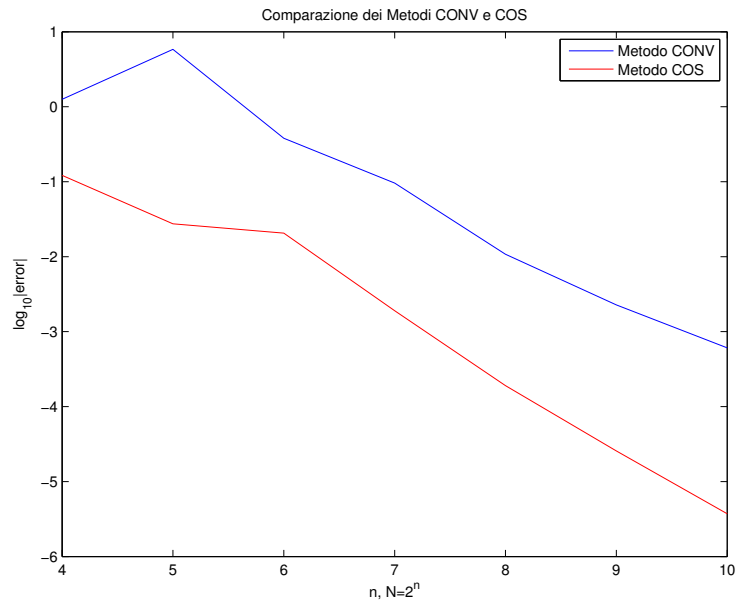


Figura 3.6: Andamento di  $err = \log_{10} |p_{NUM} - p_{rif}|$  nel caso di un'opzione bermudiana put al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambi metodi CONV e COS.

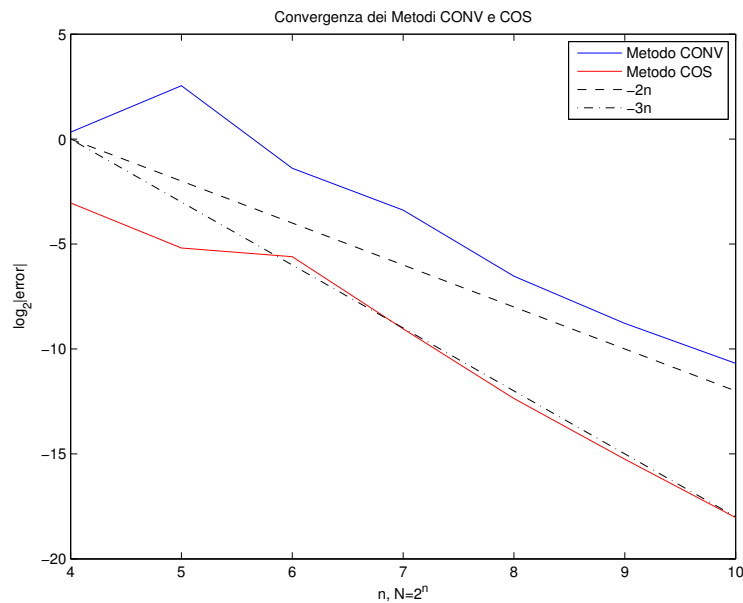


Figura 3.7: Andamento di  $\log_2 |p_{NUM} - p_{rif}|$  nel caso di un'opzione bermudiana put al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambi metodi CONV e COS. Vengono riportate due rette di pendenza -2 e -3 per studiare l'ordine di convergenza.

Includiamo anche lo studio dell'andamento del tempo di calcolo al variare di  $n$  per entrambi metodi. Tabella 3.6 e Figura 3.8 mostrano i risultati. In questo caso il metodo COS risulta essere più oneroso e il tempo di calcolo sembra crescere velocemente per  $n > 7$ . Comunque la differenza di un ordine di grandezza nel tempo di calcolo può essere giustificata della differenza di due ordini di grandezza in accuratezza.

n	Metodo CONV	Metodo COS
4	1.31E-002	2.49E-002
5	1.34E-002	2.51E-002
6	1.39E-002	2.77E-002
7	1.48E-002	3.39E-002
8	1.71E-002	4.56E-002
9	2.09E-002	6.96E-002
10	2.91E-002	1.18E-001

Tabella 3.6: Andamento del tempo di calcolo nel caso di un'opzione bermudiana put al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$  per entrambi metodi CONV e COS.

### 3.3 Opzioni Barriera

In questa sezione consideriamo come modello di Lévy esponenziale quello che fa uso del processo CGMY di parametri  $(C, G, M, Y)$ . Inoltre assumiamo che l'asset rischioso  $S$  paghi dividendi in tempo continuo a un tasso istantaneo pari a  $q$ . Ricordiamo che sotto questa ipotesi il "tasso d'interesse" neutrale al rischio diventa  $r - q$ . La dinamica del nostro asset rischioso  $S$  è quindi data da

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t + \gamma t + X_t}, \tag{3.8}$$

dove  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  è un processo CGMY di parametri  $(C, G, M, Y)$ . Ricordiamo che stiamo scrivendo la dinamica dell'asset rischioso sotto una misura di martingala  $Q$ . Si dimostra che la condizione (1.21) viene soddisfatta. Per quanto riguarda la condizione (1.22) consideriamo la sua formulazione (1.23), dove la funzione caratteristica  $\phi$  che dobbiamo considerare è quella di  $\gamma + X_1$ . Abbiamo visto nel primo capitolo che la funzione caratteristica di  $X_1$  è data da

$$\phi_{X_1}(u) = \exp \{ C \Gamma(-Y) [(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y] \}.$$

Quindi la condizione (1.23) si traduce nella seguente

$$\gamma = -C \Gamma(-Y) [(M - 1)^Y - M^Y + (G + 1)^Y - G^Y].$$



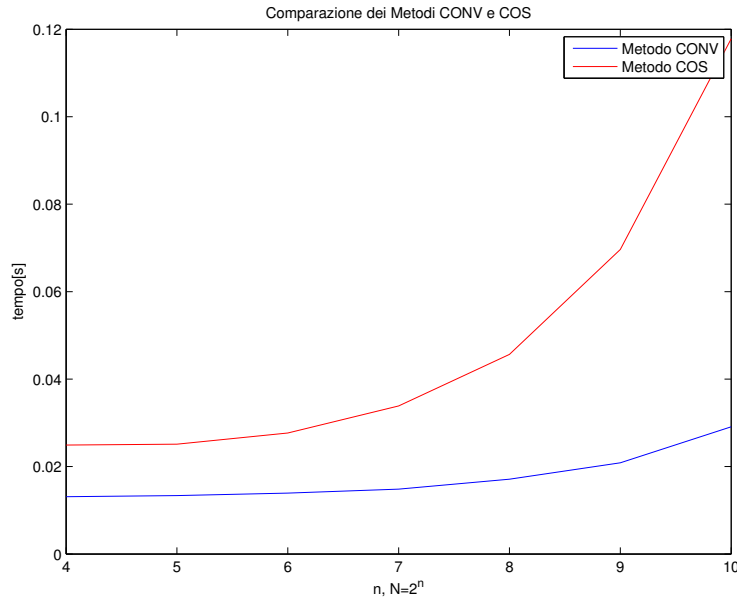


Figura 3.8: Andamento del tempo di calcolo nel caso di un'opzione bermudiana put al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambi metodi CONV e COS.

I parametri che prendiamo per il modello di mercato sono

$$S_0 = 100 \quad r = 0.05 \quad q = 0.2 \quad C = 4 \quad G = 50 \quad M = 60 \quad Y = 0.7.$$

Il derivato che consideriamo ora è un'opzione barriera Down&Out put di maturity  $T$ , con  $J$  date d'osservazione, strike  $K$ , livello della barriera  $H$  e Rebate  $R$  fissati come segue,

$$T = 1 \quad J = 12 \quad K = 100 \quad H = 80 \quad R = 0.$$

Il valore di riferimento per il prezzo di questo derivato viene preso dall'articolo originale, ed è pari al valore ottenuto con il metodo CONV ponendo  $N = 2^{15}$ . Lo indichiamo con  $p_{\text{rif}}$  ed è pari a

$$p_{\text{rif}} = 2.339381026.$$

Facciamo variare  $N$  nel seguente modo

$$N = 2^n \quad \text{per } n = 4, 5, \dots, 10,$$

e come nei casi anteriori analizziamo la seguente quantità

$$err = \log_{10} |p_{\text{NUM}} - p_{\text{rif}}|,$$

dove  $p_{\text{NUM}}$  è il prezzo ottenuto con il metodo CONV o COS a seconda dei casi, al variare di  $n$ . Presentiamo i risultati in Tabella 3.7 e in Figura 3.9. In questo caso vediamo ancora che il metodo COS supera in accuratezza al metodo CONV e riesce a raggiungere convergenza per  $n = 8$ . Mentre la convergenza del metodo CONV è abbastanza lenta.

n	Metodo CONV	Metodo COS
4	0.369	-0.281
5	0.369	-1.886
6	-0.429	-3.462
7	-0.541	-6.744
8	-1.016	-9.435
9	-1.132	-9.435
10	-1.783	-9.435

Tabella 3.7: Andamento di  $err = \log_{10} |p_{\text{NUM}} - p_{\text{rif}}|$  nel caso di un'opzione barriera Down&Out put al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$  per entrambi metodi CONV e COS.

Includiamo anche lo studio dell'andamento del tempo di calcolo al variare di  $n$  per entrambi metodi. Tabella 3.8 e Figura 3.10 mostrano i risultati. Si osserva che in questo caso i metodi hanno tempi di calcolo molto simili, fatto che risulta essere un pregio del metodo COS vista la rapida velocità di convergenza.

n	Metodo CONV	Metodo COS
4	3.30E-003	2.59E-003
5	3.56E-003	2.84E-003
6	5.65E-003	3.47E-003
7	4.93E-003	4.44E-003
8	8.81E-003	6.77E-003
9	1.05E-002	1.14E-002
10	1.84E-002	2.10E-002

Tabella 3.8: Andamento del tempo di calcolo nel caso di un'opzione barriera Down&Out put al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$  per entrambi metodi CONV e COS.

### 3.4 Conclusioni

In questa sezione facciamo un riepilogo dei due metodi studiati e riassumiamo i risultati delle prove numeriche. Quindi abbiamo studiato due metodi numerici per il pricing di opzioni secondo il modello di Lévy esponenziale.

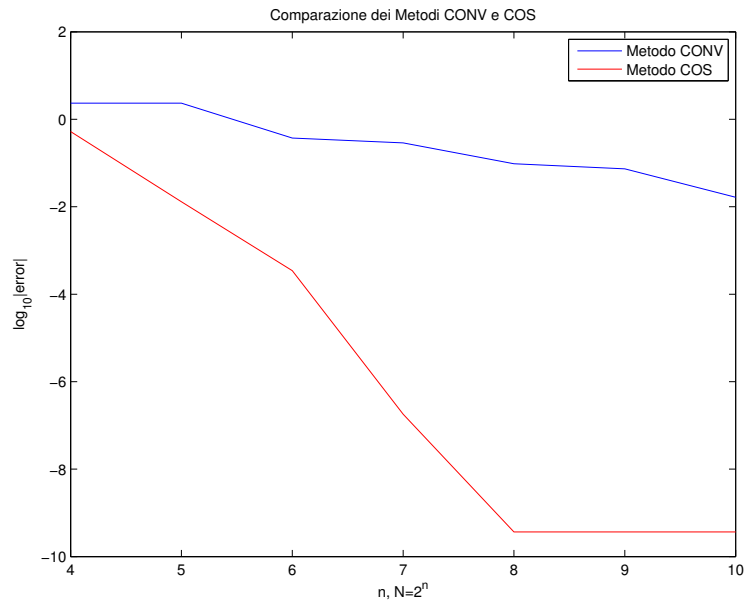


Figura 3.9: Andamento di  $err = \log_{10} |p_{NUM} - p_{rif}|$  nel caso di un'opzione barriera Down&Out put al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambi metodi CONV e COS.

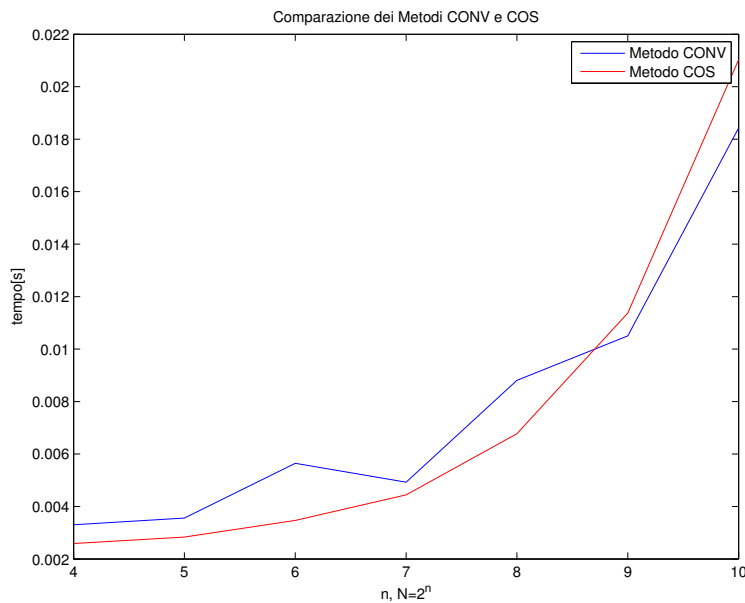


Figura 3.10: Andamento del tempo di calcolo nel caso di un'opzione barriera Down&Out put al variare di  $n$ , dove  $N = 2^n$ , per entrambi metodi CONV e COS.

Entrambi i metodi partono dalla formula del pricing neutrale al rischio e si basano sull'utilizzo dell'algoritmo numerico Fast Fourier Transform (FFT). Il primo metodo, il metodo CONV, applica la trasformata di Fourier a tale formula per poi discretizzare gli integrali che compaiono. Questa procedura, insieme alla scelta di nodi equispaziati per la discretizzazione, porta a una formula che coinvolge delle trasformate discrete di Fourier. Per la valutazione di tali trasformate si fa uso dell'algoritmo FFT. Invece il secondo metodo, il metodo COS, usa la espansione in serie di coseni della densità del processo di Lévy che guida la dinamica dell'asset rischioso nella formula di pricing neutrale al rischio. Dopo alcune manipolazioni algebriche si riesce a scrivere la formula come dei prodotti matrice-vettore, dove le matrici hanno delle strutture particolari. Per la precisione sono una matrice di Toeplitz e una di Hankel. Questi prodotti vengono calcolati in modo efficiente attraverso l'utilizzo dell'algoritmo FFT. Abbiamo presentato l'implementazione di entrambi i metodi nel caso di opzioni europee, barriera e bermudiane.

Analizziamo ora i risultati delle prove numeriche. Presentiamo le conclusioni sotto forma di lista.

1. Il metodo CONV risulta avere un ordine di convergenza circa quadratico, come si può osservare nelle Figure 3.4 e 3.7.
2. Il metodo COS converge più velocemente rispetto al metodo CONV. Abbiamo convergenza esponenziale nel caso di opzioni europee e barriera, rispetto a una convergenza quadratica del metodo CONV. Nel caso di opzioni bermudiane abbiamo, per il metodo COS, una convergenza di circa il terzo ordine in confronto a una convergenza sempre quadratica per il metodo CONV. La perdita della convergenza esponenziale del metodo COS, nel caso delle bermudiane, è probabilmente dovuto all'approssimazione del punto di esercizio anticipato ad ogni passo temporale. In effetti, l'implementazione del metodo COS nel caso di opzioni bermudiane e barriera è molto simile. La sostanziale differenza è che nel caso delle ultime il livello della barriera è fisso mentre nel caso delle bermudiane il punto di esercizio anticipato è incognito e deve essere approssimato.
3. I risultati di convergenza ottenuti per entrambi i metodi sono in accordo con l'analisi numerica presentata negli articoli originali, ad eccezione del caso del metodo COS per opzioni bermudiane. L'articolo originale presenta dei risultati di convergenza esponenziale in questo caso.
4. Dall'andamento dei tempi di calcolo riportati nelle Figure 3.5, 3.8 e 3.10 si conclude che il costo computazionale di entrambi i metodi è pressochè lo stesso.

5. Infine, si conclude che il metodo COS è la scelta migliore, visto che a parità di costo computazionale risulta il metodo più accurato. Inoltre la difficoltà nell'implementazione di entrambi metodi è la stessa.

# Appendice A

## Codice Matlab

### A.1 Opzioni Europee

---

```
function [prezzo]=conv_method(s0,strike,r,sigma,T,N,tag,delta)

%DESCRIZIONE
%Questa funzione implementa il metodo CONV per calcolare il prezzo di una
%opzione call europea sotto il modello di Black&Scholes.
%
%INPUT
%s0 = valore del sottostante
%strike = strike dell'opzione call
%r = tasso d'interesse neutrale al rischio
%sigma = parametro di volatilita del modello B&S
%T = scadenza dell'opzione
%N = numeri di punti nella griglia
%tag = 1 per Discretizzazione I oppure 2 per Discretizzazione II
%delta = costante di proporzionalita che controlla l'ampiezza
%dell'intervallo dove abitano le variabili x e y
%
%OUTPUT
%prezzo = prezzo dell'opzione
%
%griglia
L=delta*sigma*sqrt(T);
j=(0:N-1)';
dy=L/N; du=2*pi/L;
if tag==1
    x=(j-N/2)*dy;
    y=x;
    u=(j-N/2)*du;
elseif tag==2
    x=(j-N/2)*dy;
    y=log(strike/s0)+(j-N/2)*dy;
    u=(j-N/2)*du;
end

%parametro di damping
alpha=0;
```

---

```

%payoff call
payoff=@(t) s0*max( exp(t) - strike/s0 , 0 );

%funzione caratteristica
phi=@(w) exp(1i*w*(r-0.5*sigma^2)*T - 0.5*sigma^2*w.^2*T);

%pesi quadratura trapezi
w=ones(length(j),1); w(1)=0.5; w(end)=0.5;

%serve dentro la DFT di formula (27) dell'articolo
sgn=(-ones(length(j),1)).^j;

%definizione di v come nell'articolo
v= exp(alpha*y).*payoff(y);

%DFT in (27), l'articolo usa una definizione di DFT e IDFT
%scambiate rispetto a quelle definite su matlab
Dj=N*ifft( sgn.*w.*v );

%IDFT in (27)
Dp=1/N*fft( exp(1i*j*(y(1)-x(1))*du).*phi(-u+1i*alpha).*Dj );

%calcolo per tutti gli x della griglia
prezzo=exp(-r*T)*exp(1i*u(1)*(y(1)-x(1)))*exp(-alpha*x).*sgn.*Dp;

%interpolazione per estrarre il prezzo per un valore del sottostante pari a
%s0
prezzo=interp1(x,real(prezzo),0,'spline');

end

```

Listing A.1: /Users/gianca/Desktop/tesi/codice\_tesi/conv\_method.m

---

```

function [prezzo]=cos_method(s0,strike,r,sigma,T,N)

%DESCRIZIONE
%Questa funzione implementa il metodo COS per calcolare il prezzo di una
%opzione call europea sotto il modello di Black&Scholes.
%
%INPUT
%s0 = valore del sottostante
%strike = strike dell'opzione call (puo essere un vettore)
%r = tasso d'interesse neutrale al rischio
%sigma = parametro di volatilita del modello B&S
%T = scadenza dell'opzione
%N = numeri di punti nella griglia
%
%OUTPUT
%prezzo = prezzo dell'opzione (puo essere uno scalare o un vettore a
%seconda della natura dell'input strike)
%
%valori iniziali
x=log(s0./strike);

%indici della somma
kk=(0:N-1)';

%troncamento del dominio come in articolo
L=10;

```

```

c1=(r-0.5*sigma)*T;
c2=sigma^2*T;
ymin=c1-L*sqrt(c2);
ymax=c1+L*sqrt(c2);

%funzione caratteristica
phi=@(omega) exp( li*omega*(r-0.5*sigma^2)*T - ...
    0.5*sigma^2*T*omega.^2);

%V_k dell' articolo
chi=@(k,x1,x2) 1./(1+(k*pi/(ymax-ymin)).^2).*(...
    cos(k*pi*(x2-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x2) - ...
    cos(k*pi*(x1-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x1) + ...
    k*pi/(ymax-ymin).*sin(k*pi*(x2-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x2) - ...
    k*pi/(ymax-ymin).*sin(k*pi*(x1-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x1) );

%la funzione psi viene definita in un altro file matlab
V=@(k,x1,x2) 2/(ymax-ymin)*strike*...
    ( chi(k,x1,x2) - psi(k,x1,x2,ymin,ymax) )';

%formula finale
e=ones(length(kk),1); e(1)=0.5;
prezzo=exp(-r*T)*real( V(kk,0,ymax).*exp((x-ymin)/(ymax-ymin)*li*kk'*pi)...
    *(e.*phi(kk*pi/(ymax-ymin))));
end

```

---

Listing A.2: /Users/gianca/Desktop/tesi/codice\_tesi/cos\_method.m

## A.2 Opzioni Bermudiane

```

function [prezzo]=conv_bermuda_vg(s0,strike,r,T,N,M,tag,delta,sigma,nu,theta)

%DESCRIZIONE
%Questa funzione implementa il metodo CONV per calcolare il prezzo di una
%opzione put bermudiana sotto il modello di Levy Esponenziale con
%processo di Levy Variance Gamma di parametri (sigma,nu,theta)
%
%INPUT
%s0 = valore del sottostante
%strike = strike dell'opzione
%r = tasso d'interesse neutrale al rischio
%T = scadenza dell'opzione
%N = numeri di punti nella griglia
%M = date di esercizio dell'opzione
%tag = 1 per Discretizzazione I oppure 2 per Discretizzazione II
%delta = costante di proporzionalita che controlla l'ampiezza
%dell'intervallo dove abitano le variabili x e y
%sigma,nu,theta = parametri del processo Variance Gamma
%
%OUTPUT
%prezzo = prezzo dell'opzione
%
%griglia
dt=T/M;
L=delta*sqrt(T)*sqrt(sigma^2+nu*theta^2);
j=(0:N-1)';

```



```

dy=L/N; du=2*pi/L;
if tag==1
    y=(j-N/2)*dy;
    u=(j-N/2)*du;
elseif tag==2
    y=log(strike/s0)+(j-N/2)*dy;
    u=(j-N/2)*du;
end

%damping parameter
alpha=0;

%payoff put
payoff=@(t) s0*max(-exp(t)+ strike/s0 , 0 );

%funzione caratteristica
muvg = r+1/nu*log(1-theta*nu-0.5*sigma^2*nu);
phi=@(w) exp(1i*w*muvg*dt).*(1-1i*w*theta*nu+ ...
    0.5*sigma^2*nu*w.^2).^(-dt/nu);

%pesi quadratura trapezi
w=ones(length(j),1); w(1)=0.5; w(end)=0.5;

%serve in formula (27) dell'articolo
sgn=(-ones(length(j),1)).^j;

%v al tempo finale
v= exp(alpha*y).* payoff(y);

for m=M-1:-1:1
    %griglia
    x=y;
    %calcolo C
    Dj=N*ifft(sgn.*w.*v);
    Dp=1/N*fft( exp(1i*j*(y(1)-x(1))*du).*phi(-u+1i*alpha).*Dj );
    C=exp(-r*dt)*exp(1i*u(1)*(y(1)-x(1)))*exp(-alpha*x).*sgn.*Dp;
    C=real(C);
    if tag==2
        %trovo x_1
        E=payoff(x);
        ind=find(C-E>0);
        ind=ind(1);
        %interpolo
        d=interp1([C(ind-1)-E(ind-1);C(ind)-E(ind)],...
            [x(ind-1);x(ind)],0,'cubic');
        %modifico griglia
        x=d+(j-N/2)*dy;
        %ricalcolo C
        Dj=N*ifft(sgn.*w.*v);
        Dp=1/N*fft( exp(1i*j*(y(1)-x(1))*du).*phi(-u+1i*alpha).*Dj );
        C=exp(-r*dt)*exp(1i*u(1)*(y(1)-x(1)))*exp(-alpha*x).*sgn.*Dp;
        C=real(C);
        %griglia
        y=x;
    end
    %calcolo v
    v=exp(alpha*x).*max(C, payoff(x));
end

%ultimo step
x=(j-N/2)*dy;
Dj=N*ifft(sgn.*w.*v);

```

```

Dp=1/N*fft( exp(1i*j*(y(1)-x(1))*du).*phi(-u+1i*alpha).*Dj );
C=exp(-r*dt)*exp(1i*u(1)*(y(1)-x(1)))*exp(-alpha*x).*sgn.*Dp;
C=real(C);
prezzo=interp1(x,C,0,'spline');

end

```

Listing A.3: /Users/gianca/Desktop/tesi/codice\_tesi/conv\_bermuda\_vg.m

```

function prezzo=cos_bermuda_vg(s0,strike,r,T,tag,N,M,sigma,nu,theta)

%DESCRIZIONE
%Questa funzione implementa il metodo COS per calcolare il prezzo di una
%opzione call/put bermudiana sotto il modello di Levy Esponenziale con
%processo di Levy Variance Gamma di parametri (sigma,nu,theta)
%
%INPUT
%s0 = valore del sottostante
%strike = strike dell'opzione
%r = tasso d'interesse neutrale al rischio
%T = scadenza dell'opzione
%tag = 1 per un'opzione call oppure -1 per una put
%N = numeri di punti nella griglia
%M = date di esercizio dell'opzione
%sigma,nu,theta = parametri del processo Variance Gamma
%
%OUTPUT
%prezzo = prezzo dell'opzione
%
%valore iniziale
x=log(s0/strike);

%tempo tra le date di esercizio della opzione bermudiana
dt=T/M;

%indici della somma
kk=(0:N-1)';

%troncamento come in articolo
L=10;
muvg = r+1/nu*log(1-theta*nu-0.5*sigma^2*nu);
c1=(muvg+theta)*T;
c2=(sigma^2+nu*theta^2)*T;
ymin=c1+x-L*sqrt(c2);
ymax=c1+x+L*sqrt(c2);

%funzione caratteristica
phi=@(omega) exp(1i*omega*muvg*dt).*(1-1i*omega*theta*nu+ ...
    0.5*sigma^2*nu*omega.^2).^(-dt/nu);

%G_k dell'articolo
chi=@(k,x1,x2) 1./(1+(k*pi/(ymax-ymin)).^2).*(...
    cos(k*pi*(x2-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x2) - ...
    cos(k*pi*(x1-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x1) + ...
    k*pi/(ymax-ymin).*sin(k*pi*(x2-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x2) - ...
    k*pi/(ymax-ymin).*sin(k*pi*(x1-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x1) );

G=@(k,x1,x2) 2/(ymax-ymin)*tag*strike.*...
    ( chi(k,x1,x2) - psi(k,x1,x2,ymin,ymax) );

```

```

%payoff
g=@(x) max(strike*tag*(exp(x)-1),0);

%V_k(t_M)
e=ones(length(kk),1); e(1)=0.5;
V=G(kk,ymin,0);

%ciclo per calcolare V_k(t_m)
for m=M-1:-1:1
    %c capuccio al tempo t_m
    c=@(x) exp(-r*dt)*sum( e.*real( phi(kk*pi/(ymax-ymin)).*...
        exp(1i*pi*(x-ymin)/(ymax-ymin)*kk)).*V );

    %calcolo di x^*_m
    xx=fzero(@(x) c(x)-g(x),0);
    if ~(xx>=ymin && xx<=ymax)
        xx= ymin*( abs(xx-ymin)<abs(xx-ymax) ) + ...
            ymax*( abs(xx-ymin)>=abs(xx-ymax) );
    end

    %calcolo effettivo di V_k(t_m)
    %calcolo gli m_j
    jj=(0:N-1)';
    mj=calcola_mj(jj,xx,ymax,ymin,ymax);
    %calcolo u(t_m)
    u=phi(kk*pi/(ymax-ymin)).*V; u=u.*e;
    %calcolo Msu
    ms=[-conj(mj);0;mj(end:-1:2)];
    us=[u; 0*e];
    fft_us=fft(us);
    Msu=ifft(fft(ms).*fft_us);
    Msu=Msu(1:N);
    %calcolo Mcu
    jj=(2*N-1:-1:0)';
    mc=calcola_mj(jj,xx,ymax,ymin,ymax);
    sgn=(-1).^(0:2*N-1)';
    Mcu=ifft(fft(mc).*sgn.*fft_us);
    Mcu=Mcu(1:N); Mcu=Mcu(N:-1:1);
    %calcolo finale
    C=exp(-r*dt)/pi*imag(Msu+Mcu);
    V=C+G(kk,ymin,xx);
end

prezzo=exp(-r*dt)*sum( e.*real( phi(kk*pi/(ymax-ymin)).*...
    exp(1i*pi*(x-ymin)/(ymax-ymin)*kk)).*V );
end

```

Listing A.4: /Users/gianca/Desktop/tesi/codice\_tesi/cos\_bermuda\_vg.m

### A.3 Opzioni Barriera

```

function [prezzo]=conv_barriera(s0,strike,r,q,sigma,CC,G,MM,Y,T,N,M,...
    tag_griglia,tag_cp,tag_ud,delta,H)

%DESCRIZIONE
%Questa funzione implementa il metodo CONV per calcolare il prezzo di una

```

```

%opzione barriera call/put down/up&out sotto il modello di Levy
%Esponenziale con processo di Levy CGMY di parametri (CC,G,MM,Y)
%-----
%INPUT
%s0 = valore del sottostante
%strike = strike dell'opzione
%r = tasso d'interesse neutrale al rischio
%q = tasso istantaneo di dividendo
%sigma = parametro di diffusione browniana
%CC,G,MM,Y = parametri del processo CGMY
%T = scadenza dell'opzione
%N = numeri di punti nella griglia
%M = date di esercizio dell'opzione
%tag_griglia = 1 per Discretizzazione I oppure 2 per Discretizzazione II
%tag_cp = 1 per un'opzione call oppure -1 per una put
%tag_ud = 1 per un'opzione up&out oppure -1 per una down&out
%delta = costante di proporzionalita che controlla l'ampiezza
%dell'intervallo dove abitano le variabili x e y
%H = livello della barriera
%-----
%OUTPUT
%prezzo = prezzo dell'opzione
%-----

%griglia
dt=T/M;
c2=sigma^2*T + CC*gamma(2-Y)*( MM^(Y-2) + G^(Y-2) )*T;
c4=CC*gamma(4-Y)*( MM^(Y-4) + G^(Y-4) )*T;
L=delta*sqrt(c2+sqrt(c4));
j=(0:N-1)';
dy=L/N; du=2*pi/L;
h=log(H/H);
if tag_griglia==1
    y=(j-N/2)*dy;
    u=(j-N/2)*du;
elseif tag_griglia==2
    y=log(s0/H)+(j-N/2)*dy;
    u=(j-N/2)*du;
end

%damping parameter
alpha=0;

%payoff
if tag_ud == 1
    payoff=@(t) H*max( tag_cp*(exp(t)-strike/H) , 0 ).*(t<h);
elseif tag_ud == -1
    payoff=@(t) H*max( tag_cp*(exp(t)-strike/H) , 0 ).*(t>h);
end

%funzione caratteristica
mu=r-q-0.5*sigma^2-CC*gamma(-Y)*( (MM-1)^Y - MM^Y + (G+1)^Y - G^Y );
phi=@(omega) exp( li*omega*mu*dt - 0.5*sigma^2*dt*omega.^2 + ...
    CC*gamma(-Y)*( (MM-li*omega).^Y - MM^Y + (G+li*omega).^Y - G^Y )*dt);

%pesi quadratura trapezi
w=ones(length(j),1); w(1)=0.5; w(end)=0.5;

%serve in formula (27) dell'articolo
sgn=(-ones(length(j),1)).^j;

%v al tempo finale

```

```

v= exp(alpha*y).* payoff(y);

for m=M-1:-1:1
    %griglia
    x=y;
    %calcolo C
    Dj=N*ifft(sgn.*w.*v);
    Dp=1/N*fft( exp(1i*j*(y(1)-x(1))*du).*phi(-u+li*alpha).*Dj );
    C=exp(-r*dt)*exp(1i*u(1)*(y(1)-x(1)))*exp(-alpha*x).*sgn.*Dp;
    C=real(C);
    %calcolo v
    if tag_ud == 1
        v=exp(alpha*x).*C.*(x<h);
    elseif tag_ud == -1
        v=exp(alpha*x).*C.*(x>h);
    end
end

%ultimo step
Dj=N*ifft(sgn.*w.*v);
Dp=1/N*fft( exp(1i*j*(y(1)-x(1))*du).*phi(-u+li*alpha).*Dj );
C=exp(-r*dt)*exp(1i*u(1)*(y(1)-x(1)))*exp(-alpha*x).*sgn.*Dp;
C=real(C);
prezzo=interp1(x,C,log(s0/H),'spline');

end

```

Listing A.5: /Users/gianca/Desktop/tesi/codice\_tesi/conv\_barriera.m

```

function prezzo=cos_barriera(s0,strike,r,q,sigma,C,G,MM,Y,T,...
    tag,tag_ud,H,Rb,N,M)

%DESCRIZIONE
%Questa funzione implementa il metodo COS per calcolare il prezzo di una
%opzione barriera call/put down/up&out sotto il modello di Levy
%Esponezionale con processo di Levy CGMY di parametri (CC,G,MM,Y)
%
%ANPUT
%s0 = valore del sottostante
%strike = strike dell'opzione
%r = tasso d'interesse neutrale al rischio
%q = tasso istantaneo di dividendo
%sigma = parametro di diffusione browniana
%C,G,MM,Y = parametri del processo CGMY
%T = scadenza dell'opzione
%tag = 1 per un'opzione call oppure -1 per una put
%tag_ud = 1 per un'opzione up&out oppure -1 per una down&out
%H = livello della barriera
%Rb = Rebate dell'opzione
%N = numeri di punti nella griglia
%M = date di esercizio dell'opzione
%
%OUTPUT
%prezzo = prezzo dell'opzione
%
%valore iniziale
x=log(s0/strike);
%barriera
h=log(H/strike);

```

```

%tempo tra le date di esercizio della opzione bermuda
dt=T/M;

%indici della somma
kk=(0:N-1)';

%funzione caratteristica
mu=r-q-0.5*sigma^2-C*gamma(-Y)*( (MM-1)^Y - MM^Y + (G+1)^Y - G^Y );
phi=@(omega) exp( li*omega*mu*dt - 0.5*sigma^2*dt*omega.^2 + ...
    C*gamma(-Y)*( (MM-li*omega).^Y - MM^Y + (G+li*omega).^Y - G^Y )*dt);

%troncamento come in articolo
L=10;
c1=mu*T + C*gamma(1-Y)*( MM^(Y-1) - G^(Y-1) )*T;
c2=sigma^2*T + C*gamma(2-Y)*( MM^(Y-2) + G^(Y-2) )*T;
c4=C*gamma(4-Y)*( MM^(Y-4) + G^(Y-4) )*T;
ymin=c1+x-L*sqrt( c2+sqrt( c4 ));
ymax=c1+x+L*sqrt( c2+sqrt( c4 ));

%G.k dell'articolo
chi=@(k,x1,x2) 1./(1+(k*pi/(ymax-ymin)).^2).*(...
    cos(k*pi*(x2-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x2) - ...
    cos(k*pi*(x1-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x1) + ...
    k*pi/(ymax-ymin).*sin(k*pi*(x2-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x2) - ...
    k*pi/(ymax-ymin).*sin(k*pi*(x1-ymin)/(ymax-ymin))*exp(x1) );

G=@(k,x1,x2) 2/(ymax-ymin)*tag*strike.*...
    ( chi(k,x1,x2) - psi(k,x1,x2,ymin,ymax) );

%up or down
if tag_ud == 1
    x1=ymin; x2=h; c=h; d=ymax;
elseif tag_ud == -1
    x1=h; x2=ymax; c=ymin; d=h;
end

%V.k(t_M)
if h < 0
    if tag == 1
        if tag_ud == 1
            V=2*Rb*psi(kk,c,d,ymin,ymax)/(ymax-ymin);
        elseif tag_ud == -1
            V=G(kk,0,ymax) + 2*Rb*psi(kk,c,d,ymin,ymax)/(ymax-ymin);
        end
    elseif tag == -1
        if tag_ud == 1
            V=G(kk,ymin,h)+2*Rb*psi(kk,c,d,ymin,ymax)/(ymax-ymin);
        elseif tag_ud == -1
            V=G(kk,h,0)+2*Rb*psi(kk,c,d,ymin,ymax)/(ymax-ymin);
        end
    end
else
    if tag == 1
        if tag_ud == 1
            V=G(kk,0,h)+2*Rb*psi(kk,c,d,ymin,ymax)/(ymax-ymin);
        elseif tag_ud == -1
            V=G(kk,h,ymax)+2*Rb*psi(kk,c,d,ymin,ymax)/(ymax-ymin);
        end
    elseif tag == -1
        if tag_ud == 1
            V=G(kk,ymin,0)+2*Rb*psi(kk,c,d,ymin,ymax)/(ymax-ymin);
        elseif tag_ud == -1

```

```

                V=2*Rb*psi(kk,c,d,ymin,ymax)/(ymax-ymin);
            end
        end
    end

%quantita da usare nel ciclo ma che non vengono aggiornate ad ogni iter
%calcolo gli m_j
jj=(0:N-1)';
mj=calcola_mj(jj,x1,x2,ymin,ymax);
%calcolo ms
ms=[-conj(mj);0;mj(end:-1:2)];
%calcolo mc
jj=(2*N-1:-1:0)';
mc=calcola_mj(jj,x1,x2,ymin,ymax);
%calcolo d1,d2 articolo
d1=fft(ms);
sgn=(-1)^(0:2*N-1)';
d2=sgn.*fft(mc);
%calcolo G
GG=2/(ymax-ymin)*Rb*psi(kk,c,d,ymin,ymax);
e=ones(length(kk),1); e(1)=0.5;

%ciclo per calcolare V_k(t_m)
for m=M-1:-1:1

    %calcolo u(t_m)
    u=phi(kk*pi/(ymax-ymin)).*V; u=u.*e;
    %calcolo Msu
    us=[u; 0*e];
    fft_us=fft(us);
    Msu=ifft(d1.*fft_us);
    Msu=Msu(1:N);
    %calcolo Mcu
    Mcu=ifft(d2.*fft_us);
    Mcu=Mcu(1:N); Mcu=Mcu(N:-1:1);
    %calcolo finale
    C=exp(-r*dt)/pi*imag(Msu+Mcu);
    V=C+exp(-r*(T-m*dt))*GG;
end

prezzo=exp(-r*dt)*sum(e.*real(phi(kk*pi/(ymax-ymin)).*...
    exp(1i*pi*(x-ymin)/(ymax-ymin)*kk)).*V);
end

```

---

Listing A.6: /Users/gianca/Desktop/tesi/codice\_tesi/cos\_barriera.m

## A.4 Funzioni Ausiliarie

---

```

function [prezzo]=bs_formula(s0,k,r,sigma,T,tag)

%DESCRIZIONE
%Questa funzione calcola il valore di una call/put europea usando la
%formula di Black&Scholes
%
%INPUT
%%s0 = valore del sottostante
%k = strike dell'opzione

```

---

```

%r = tasso d'interesse neutrale al rischio
%sigma = parametro di volatilita del modello B&S
%T = maturity dell'opzione
%tag = 1 per un'opzione call oppure -1 per una put
%
%OUTPUT
%prezzo = prezzo dell'opzione
%
d_1=( log(s0./k) + (r+0.5*sigma.^2).*T )./( sigma.*sqrt(T) );
c=s0.*normcdf(d_1) - k.*normcdf(d_1 - sigma.*sqrt(T)).*exp(-r.*T);
p=c-s0+k.*exp(-r.*T);
if tag==1
    prezzo=c;
elseif tag==-1
    prezzo=p;
end
end

```

---

Listing A.7: /Users/gianca/Desktop/tesi/codice\_tesi/bs\_formula.m

---

```

function res=psi(k,x1,x2,ymin,ymax)

%DESCRIZIONE
%Questa funzione riproduce la funzione psi descritta in Osservazione 2.3.1
%e riguarda il metodo COS
%
%INPUT
%k = indice della sommatoria
%x1 = primo argomento della funzione psi
%x2 = secondo argomento della funzione psi
%ymin = estremo inferiore dell'intervallo di troncamento
%ymax = estremo superiore dell'intervallo di troncamento
%
%OUTPUT
%res = psi_k(x1,x2)
%
res=zeros(length(k),1);
ind=find(k);
res(ind)= (ymax-ymin)./(k(ind)*pi).*( sin(k(ind)*pi*(x2-ymin)/(ymax-ymin))...
    - sin(k(ind)*pi*(x1-ymin)/(ymax-ymin)) );
res(k==0)=x2-x1;
end

```

---

Listing A.8: /Users/gianca/Desktop/tesi/codice\_tesi/psi.m

---

```

function res=calcola_mj(k,x1,x2,ymin,ymax)

%DESCRIZIONE
%Questa funzione riproduce i coefficienti m_j descritti in Osservazione
%2.3.3 e riguarda il metodo COS

```



---

```
%-----
%INPUT
%k = indice del coefficiente
%x1 = primo argomento del coefficiente m_k
%x2 = secondo argomento del coefficiente m_k
%ymin = estremo inferiore dell'intervallo di troncamento
%ymax = estremo superiore dell'intervallo di troncamento
%-----
%OUTPUT
%res = m_k(x1, x2)
%-----

res=zeros(length(k),1);
ind=find(k);
res(ind)= 1./k(ind).*(exp(1i*(x2-ymin)*pi/(ymax-ymin)*k(ind)) - ...
    exp(1i*(x1-ymin)*pi/(ymax-ymin)*k(ind)) );

res(k==0)=(x2-x1)*pi*1i/(ymax-ymin);

end
```

---

Listing A.9: /Users/gianca/Desktop/tesi/codice\_tesi/calcola\_mj.m

# Bibliografia

- [1] David Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.
- [2] P. Baldi. *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*. Pitagora Editrice, 2000.
- [3] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 1999.
- [4] E. Oran Brigham. *Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice-Hall, 1988.
- [5] P. Carr and D. Madan. Option valuation using the fast fourier transform. *Journal of Computational Finance*, 2(4):61–73, 1999.
- [6] Rama Cont and Peter Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [7] F. Delbaen and W. Schachermayer. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Math. Ann.*, 312(2):215–250, 1998.
- [8] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300(3):463–520, 1994.
- [9] F. Fang and C. W. Oosterlee. A novel pricing method for European options based on Fourier-cosine series expansions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(2):826–848, 2008/09.
- [10] F. Fang and C. W. Oosterlee. Pricing early-exercise and discrete barrier options by Fourier-cosine series expansions. *Numer. Math.*, 114(1):27–62, 2009.
- [11] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 2. Wiley, New York, NY, second edition, 1971.

- 
- [12] Richard A. Hunt. On the convergence of Fourier series. In *Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967)*, pages 235–255. Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill., 1968.
- [13] R.W. Lee. Option pricing by transform methods: extensions, unification and error control. *Journal of Computational Finance*, 7(3):51–86, 2004.
- [14] R. Lord, F. Fang, F. Bervoets, and C. W. Oosterlee. A fast and accurate FFT-based method for pricing early-exercise options under Lévy processes. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(4):1678–1705, 2008.
- [15] D.B. Madan, P.P. Carr, and E.C. Chang. The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2(1):79–105, 1998.
- [16] Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Second edition. Version 2.1, Corrected third printing.
- [17] S. Raible. *Lévy processes in finance: Theory, numerics, and empirical facts*. PhD thesis, Mathematischen Fakultät der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br., 2000.
- [18] Ken-iti Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author.
- [19] Wim Schoutens. *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 1 edition, 2003.
- [20] Steven E. Shreve. *Stochastic calculus for finance. II*. Springer Finance. Springer-Verlag, New York, 2004. Continuous-time models.
- [21] P. Wilmott, J. Dewynne, and S. Howison. *Option pricing: mathematical models and computation*. Oxford Financial Press, 2000.