

POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi
Corso di Laurea in Ingegneria Matematica



**Metodi Immersed Boundary ai volumi finiti centrali per il
sistema Shallow Water**

Relatore: Dr. Edie Miglio

Simone Rinco, 740208

Anno Accademico 2010/2011

Abstract

Questo lavoro di tesi riguarda i metodi di tipo *Immersed Boundary* con particolare riferimento alla risoluzione numerica di sistemi di EDP mediante schemi ai volumi finiti in due dimensioni spaziali. L'approccio Immersed Boundary consiste in una particolare rappresentazione del dominio computazionale (di forma anche complessa) e ad una conseguente implementazione delle condizioni al bordo che eviti la procedura di generazione di griglia permettendo di lavorare con griglie strutturate.

Più nel dettaglio l'applicazione di un metodo classico ai volumi finiti non risulta alterata dalla presenza di un punto esterno al dominio nello stencil di una cella interna ad esso. Questi punti esterni vengono denominati *ghost points* ai quali vengono attribuiti valori fittizi sulla base delle condizioni al contorno e della forma locale del dominio consentendo l'applicazione inalterata dello schema numerico come se tutte le celle fossero interne.

In questo lavoro viene testato il codice numerico, implementato in linguaggio C++, applicato al sistema *Shallow Water* su una griglia cartesiana con celle quadrate tramite l'impiego di un metodo semidiscreto centrale del secondo ordine accoppiato ad un solutore Runge Kutta per l'evoluzione temporale. Per le caratteristiche del sistema lo schema é costruito in modo che preservi la positività dell'altezza dell'acqua e bilanci il termine sorgente per il mantenimento esatto degli stati stazionari di quiete. Vengono presentate numerose simulazioni numeriche che testano l'approccio Immersed Boundary e forniscono buoni spunti per sviluppi futuri.

Abstract

This work deals with Immersed Boundary methods related to the numerical resolution of PDEs by means of finite volume schemes in two spatial dimensions. The Immersed Boundary approach consists in a particular representation of the computational domain (even with a complex shape) and a special treatment of the boundary conditions in order to avoid the mesh generation procedure, thus allowing the use of structured meshes.

Specifically, the standard application of a finite volume method remains unchanged even though points outside the domain in the stencil of an internal cell are present. These external points are called *ghost points* to which *ghost values* are assigned depending on the boundary conditions and the local shape of the domain, thus allowing the implementation of a numerical scheme as if all the cells were in the domain.

This work tests the numerical code, implemented in C++ language, with the *Shallow Water* system in a cartesian grid with squared cells using a central second order semidiscrete finite volume method coupled with a Runge Kutta ODE solver for the time evolution. The resultant fully discrete scheme is positivity preserving and well balanced. Several numerical simulations which test the Immersed Boundary approach are shown and offer a basis for future developments.

Indice

Introduzione	7
1 Leggi di conservazione e sistema Shallow Water	9
1.1 Leggi di conservazione	9
1.2 Deduzione del sistema Shallow water	10
1.2.1 Conservazione dell'energia	13
2 Metodi centrali ai volumi finiti	15
2.1 Il metodo Lax-Friedrichs staggered	16
2.2 Il metodo Nessyahu-Tadmor staggered	17
2.3 Metodo semidiscreto del secondo ordine	19
2.4 Evoluzione temporale: metodi Runge-Kutta	25
2.5 Applicazione al sistema Shallow Water	26
2.5.1 Positività dell'altezza dell'acqua	28
2.5.2 Bilanciamento del termine sorgente	31
3 Metodi di tipo Immersed Boundary	32
3.1 Trattamento geometrico del bordo	32
3.2 Trattamento delle condizioni al bordo	36
3.2.1 Caso 1: <i>all_wet</i>	37
3.2.2 Caso 2: <i>GPs</i>	38
3.2.3 Caso 3: <i>dry_no_GP</i>	41
3.2.4 Determinazione delle incognite nei ghost points	43
4 Simulazioni numeriche e analisi dei risultati	45
4.1 Test numerici	46
4.1.1 Stato stazionario di quiete con fondo non piatto	46
4.1.2 Analisi di convergenza	47
4.1.3 Conservazione della massa e dell'energia	48
4.1.4 Fondo non piatto: dam break con scivoli lineari	50

4.1.5	Trattamento Immersed Boundary delle condizioni al contorno . .	53
4.1.6	Un caso reale: la diga di Malpasset	55
5	Conclusioni e sviluppi futuri	58
A	Codice numerico	59
B	Soluzione analitica dam break monodimensionale	60

Introduzione

La risoluzione numerica di equazioni a derivate parziali in due e tre dimensioni spaziali prevede una fase iniziale che sostanzialmente si occupa della generazione di griglia: a partire dal dominio reale di definizione dell'equazione si genera il dominio computazionale e lo si suddivide in una griglia composta tipicamente da triangoli e/o quadrilateri in due dimensioni e da poliedri in tre dimensioni (solitamente tetraedri). Questa fase, di per sè molto complessa e per la quale esistono molti algoritmi, dipende per sua natura in maniera determinante dalla forma del dominio. L'approccio Immersed Boundary si muove nella direzione opposta: partendo da una griglia strutturata si cerca di tener conto della forma del dominio e delle assegnate condizioni al bordo mediante opportune tecniche (si veda ad esempio [12] o [13] per una panoramica sui diversi metodi) in modo che non sia necessario costruire una griglia body conformal. La fase di generazione di griglia può essere onerosa soprattutto nei casi in cui il dominio sia mobile poichè si dovrebbe costruire una nuova griglia ad ogni passo temporale. Inoltre lavorare con griglie strutturate permette una migliore ottimizzazione del codice e semplifica notevolmente l'implementazione di un metodo numerico una volta disponibile una libreria generica che si occupi del trattamento Immersed Boundary del dominio e delle condizioni al bordo.

Questo lavoro mostra l'applicazione dei metodi Immersed Boundary a problemi fluidodinamici, con particolare riferimento a simulazioni di inondazioni in seguito ad eventi quali la rottura di una diga o il sopraggiungere di un'onda di maremoto sulla costa. Per questo tipo di problemi, nei quali le scale orizzontali sono predominanti su quelle verticali, esiste un modello semplificato della dinamica del fluido che prende il nome di sistema *Shallow Water*. Si tratta di un sistema iperbolico di leggi di conservazione derivato a partire da alcune ipotesi semplificative e dalle leggi di conservazione della massa e della quantità di moto. La derivazione delle equazioni e l'esposizione di alcune principali proprietà è svolta nel capitolo 1.

Trattandosi di un sistema di leggi di conservazione abbiamo deciso di applicare un metodo ai volumi finiti, i quali risultano particolarmente adatti alla risoluzione numerica di EDP che esprimono matematicamente un principio di conservazione. Tra i molti metodi esistenti ne viene presentato uno semidiscreto del secondo ordine accoppiato ad

un metodo Runge Kutta del terzo ordine per l'evoluzione temporale. Per le proprietà del sistema Shallow Water il metodo é costruito in modo che risulti *positivity preservig* e *well balanced*. La descrizione del metodo numerico é svolta nel capitolo 2.

Il capitolo 3 tratta nel dettaglio l'approccio Immersed Boundary con particolare riferimento al sistema Shallow Water.

Il capitolo 4 é invece dedicato alle simulazioni e ai risultati numerici mentre il capitolo 5 é dedicato alle conclusioni e ai possibili sviluppi del lavoro svolto.

L'appendice descrive con estrema sintesi la struttura del codice utilizzato.

Capitolo 1

Leggi di conservazione e sistema Shallow Water

Il sistema di equazioni a derivate parziali denominato *Shallow Water* o *Sistema di de Saint Venant* é un sistema di leggi di conservazione che descrive il moto dei fluidi sotto alcune ipotesi semplificative. In questo capitolo ci occupiamo di derivarne le equazioni partendo dalle leggi fisiche di conservazione della massa e della quantità di moto sulla base delle ipotesi modellistiche.

1.1 Leggi di conservazione

Una legge di conservazione traduce matematicamente un principio fisico di conservazione, ad esempio della massa o della carica elettrica. Se $Q = Q(x, t)$ é una grandezza scalare che si conserva consideriamone la densità q misurata in $\left[\frac{Q}{m^3}\right]$ in tre dimensioni e in $\left[\frac{Q}{m^2}\right]$ in due dimensioni. Fissato un arbitrario volume di controllo Ω il principio di conservazione stabilisce che la variazione nel tempo della quantità Q contenuta in Ω é uguale allo scambio di Q attraverso il bordo di Ω al quale va sommato l'apporto di Q dovuto ad una qualche sorgente esterna $S = S(q, x, t)$. Tipicamente il fenomeno di scambio al bordo é governato da una funzione vettoriale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(q, x, t)$ che descrive il flusso di Q nell'unità di tempo attraverso un elemento di superficie unitario. Una legge di conservazione sul volume Ω si scrive quindi

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} q d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} S d\Omega \quad \left[\frac{Q}{s}\right]$$

dove \mathbf{n} indica il versore normale uscente alla superficie. Poichè il volume di controllo é arbitrario e indipendente dal tempo l'equazione si può scrivere puntualmente, applicando il teorema di Gauss all'integrale di superficie e in ipotesi generali di regolarità, nella

forma

$$\frac{\partial}{\partial t}q(x, t) + \operatorname{div}(\mathbf{F}(q, x, t)) = S(q, x, t). \quad (1.1)$$

Se \mathbf{q} é una grandezza vettoriale d -dimensionale e il problema é ambientato in n dimensioni la divergenza del flusso $\mathbf{F} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$ é il vettore di componenti

$$[\operatorname{div}(\mathbf{F})]_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} F_{ij} \quad i = 1, \dots, d.$$

1.2 Deduzione del sistema Shallow water

Il sistema Shallow Water si può scrivere nella forma (1.1) imponendo il principio di conservazione della massa e della quantità di moto nelle due direzioni orizzontali x e y assumendo le seguenti ipotesi:

1. il fluido é omogeneo e incompressibile;
2. il fluido é perfetto;
3. la velocità in direzione verticale é nulla;
4. la pressione segue la distribuzione idrostatica.

Queste ipotesi sono ragionevolmente valide quando le dimensioni orizzontali del fenomeno sono molto maggiori di quelle verticali. Con le notazioni precedentemente introdotte si ha $d = 3$ e $n = 2$.

Consideriamo il fluido contenuto nella regione $\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$. La massa di fluido in Ω_t divisa per la densità¹ (costante in spazio e in tempo) é pari a

$$\int_{\Omega_t} h(x, y, t) d\Omega.$$

Per il principio di conservazione della massa si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} h(x, y, t) d\Omega = 0$$

e applicando il teorema del trasporto di Reynolds

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} h + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) \right) = 0$$

¹Poichè dividiamo per la densità misuriamo la massa in m^3 e la portata in $\frac{m^2}{s}$. L'energia é misurata invece in $\frac{m^3}{s^2}$.

dove $\mathbf{u}(x, y, t) = [u(x, y, t), v(x, y, t)]$ é la velocità del fluido. Per l'arbitrarietà di Ω_t la legge di conservazione della massa é dunque

$$h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0. \quad (1.2)$$

Questa deduzione é valida poichè il fluido contenuto nella regione Ω_t e il fluido contenuto nella regione Ω'_t con $\Omega_t \cap \Omega'_t = \emptyset$ si troveranno in ogni istante di tempo in regioni separate perchè la velocità verticale é nulla per ipotesi.

L'equazione di conservazione della quantità di moto in direzione x e y é

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} h\mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega_t} \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

dove \mathbf{f} rappresenta le forze di volume e \mathbf{T} é il tensore degli sforzi. Applicando ancora il teorema del trasporto di Reynolds si deduce la relazione puntuale

$$(h\mathbf{u})_t + \text{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{f} + \text{div}(\mathbf{T}) \quad (1.3)$$

con $[\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}]_{ij} = u_i u_j$.

In tre dimensioni le forze di volume coincidono col peso del fluido pari a $-gh$ in direzione verticale. Il fondale, descritto dalla funzione $B(x, y)$, esercita sul fluido una forza che bilancia la componente normale del peso, mentre nel piano tangente il fluido é libero di muoversi, poichè viene trascurato l'attrito. Il versore

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + B_x^2 + B_y^2}} \begin{bmatrix} -B_x \\ -B_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

é normale al fondale nel punto (x, y) e quindi si ha

$$\mathbf{F}_n = (\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \frac{1}{1 + B_x^2 + B_y^2} \begin{bmatrix} ghB_x \\ ghB_y \\ -gh \end{bmatrix}$$

mentre la componente tangenziale vale

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_p - \mathbf{F}_n = \frac{1}{1 + B_x^2 + B_y^2} \begin{bmatrix} -ghB_x \\ -ghB_y \\ -gh(B_x^2 + B_y^2) \end{bmatrix}$$

Chiaramente la forza complessiva esercitata dalla gravità sul fluido presenta una componente verticale non nulla. Se le scale orizzontali sono molto maggiori di quelle verticali, ossia se $B_x^2 + B_y^2 \ll 1$, si ha

$$\mathbf{F}_t \simeq \begin{bmatrix} -ghB_x \\ -ghB_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi le forze complessive in nelle direzioni x e y si possono considerare rispettivamente pari a $-ghB_x$ e $-ghB_y$.

Per l'ipotesi di fluido perfetto il tensore degli sforzi assume la forma $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$. Poiché la pressione é distribuita idrostaticamente si ha dalla legge di Stevino

$$p_{tot}(x, y) = \int_0^{h(x,y)} gs \, ds = \frac{1}{2}gh^2(x, y)$$

e quindi

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}) = -\nabla p_{tot} = -\nabla \left(\frac{1}{2}gh^2 \right).$$

Scrivendo la (1.3) per componenti si ha

$$(hu)_t + (hu^2)_x + (huv)_y = -ghB_x - \frac{1}{2}g(h^2)_x$$

e

$$(hv)_t + (huv)_x + (hv^2)_y = -ghB_y - \frac{1}{2}g(h^2)_y.$$

Il sistema Shallow water é dunque

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0 \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x + (huv)_y = -ghB_x \\ (hv)_t + (huv)_x + (hv^2 + \frac{1}{2}gh^2)_y = -ghB_y \end{cases}$$

che si può scrivere nella forma conservativa

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{q})_y = \mathbf{q}_t + \operatorname{div}(\mathbb{F}(\mathbf{q})) = \mathbf{S}(x, y, \mathbf{q})$$

con

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}(x, y, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghB_x(x, y) \\ -ghB_y(x, y) \end{bmatrix}, \mathbb{F} = [\mathbf{F} \ \mathbf{G}].$$

1.2.1 Conservazione dell'energia

Le equazioni di conservazione della massa e del momento nelle direzioni orizzontali contengono l'equazione di conservazione dell'energia totale E , data dalla somma dell'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2}h(u^2 + v^2)$ e di quella potenziale $E_p = \frac{1}{2}gh(2B + h)$. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} E_p = (gB + gh)h_t,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_c = -\frac{1}{2}(u^2 + v^2)h_t + (hu)_t u + (hv)_t v$$

e sfruttando le equazioni di conservazione della massa e del momento si ottiene

$$\begin{aligned} E_t &= \left(gB + gh - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 \right) (- (hu)_x - (hv)_y) + \\ &+ u \left(- (hu^2)_x - \frac{1}{2}g(h^2)_x - (huv)_y - ghB_x \right) + \\ &+ v \left(- (hv^2)_y - \frac{1}{2}g(h^2)_y - (huv)_x - ghB_y \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Consideriamo ora i termini che coinvolgono le derivate rispetto a x :

$$-gB(hu)_x - gh u B_x = -g(Buh)_x;$$

$$\frac{1}{2}u^2(hu)_x - u(hu^2)_x = \frac{1}{2}(hu^3)_x - \frac{1}{2}hu(u^2)_x - (hu^3)_x + hu^2u_x = -\frac{1}{2}(hu^3)_x;$$

$$\frac{1}{2}v^2(hu)_x - v(huv)_x = \frac{1}{2}(huv^2)_x - \frac{1}{2}(v^2)_x hu - (huv^2)_x + huvv_x = -\frac{1}{2}(huv^2)_x;$$

$$-gh(h^2u)_x - \frac{1}{2}gu(h^2)_x = -g(uh^2)_x.$$

La somma di questi quattro termini é pari a

$$-(uE)_x - \frac{1}{2}g(uh^2)_x$$

e ripetendo i calcoli per le derivate in direzione y si ottiene l'equazione di conservazione dell'energia meccanica

$$E_t + \operatorname{div}(\mathbf{u}E) + \operatorname{div}\left(\mathbf{u}\frac{1}{2}gh^2\right) = 0. \quad (1.5)$$

Considerando il fluido che occupa la regione Ω_t al tempo t la (1.5) si può scrivere nella forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} E d\Omega = - \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{2}gh^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

L'ultimo termine rappresenta la potenza esercitata dal fluido circostante dovuta alla pressione $p_{tot} = \frac{1}{2}gh^2$. Integrando su tutto il dominio Ω si ha che sotto la condizione $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ su $\partial\Omega$ l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}h(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}gh^2$$

si conserva. Un buon metodo numerico deve preservare la conservazione della massa e dell'energia meccanica previste dalle equazioni del sistema Shallow Water. Per questo é desiderabile che lo schema presenti la più bassa dissipazione possibile, la quale é intrinseca alla discretizzazione e non prevista dal modello matematico. La conservazione della massa e dell'energia meccanica totale sono quindi ottimi test per verificare la bontà di un metodo dal punto di vista dissipativo.

Per l'applicazione di un metodo numerico é importante scrivere i flussi in funzione delle variabili del sistema. Introducendo le portate $Q_x = hu$ e $Q_y = hv$ i flussi assumono la forma

$$\mathbf{F}(h, Q_x, Q_y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ \frac{Q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{Q_x Q_y}{h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(h, Q_x, Q_y) = \begin{bmatrix} Q_y \\ \frac{Q_x Q_y}{h} \\ \frac{Q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}.$$

Capitolo 2

Metodi centrali ai volumi finiti

I metodi centrali ai volumi finiti sono metodi universali adatti alla risoluzione numerica di sistemi di leggi di conservazione poichè prescindono dalla particolare struttura del problema in esame. La caratteristica principale di questi metodi consiste nel fatto che non é necessario conoscere un solutore di Riemann esatto o approssimato, sfruttando le sole informazioni relative alle velocità di propagazione locali. I metodi centrali sono basati sulla ricostruzione polinomiale a pezzi della soluzione numerica ottenuta mediante la tecnica dei limitatori di flusso e si possono distinguere in metodi staggered o non-staggered e completamente discreti o semidiscreti. In questo capitolo deduciamo ed evidenziamo le principali proprietà del metodo non-staggered semidiscreto ai volumi finiti del secondo ordine utilizzato in questo lavoro di tesi. Accoppiando tale metodo ad uno schema Runge-Kutta del terzo ordine per l'evoluzione temporale si ottiene il definitivo schema completamente discreto.

Consideriamo l'equazione scalare

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad (2.1)$$

e consideriamo intervalli equispaziati $I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ di centro x_j e passo Δx . L'estensione al caso dei sistemi risulterà immediata ragionando componente per componente. Definendo le medie di cella

$$\bar{u}_j(t) = \int_{I_j} u(x, t) dx$$

e integrando l'equazione in spazio su I_j e in tempo sull'intervallo $[t^n, t^{n+1}]$ si ottiene la formula

$$\bar{u}_j(t^{n+1}) = \bar{u}_j(t^n) - \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[F\left(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)\right) - F\left(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)\right) \right] dt. \quad (2.2)$$

I metodi centrali differiscono tra loro per il calcolo di u nei nodi “frazionari” a partire dai valori nei nodi “interi” (medie di cella) e per l’approssimazione dell’integrale temporale a secondo membro. In particolare il primo passo prevede la ricostruzione polinomiale a pezzi della soluzione a partire dai valori $u_j^n \simeq \bar{u}_j(t^n)$. In formule

$$u^{\mathcal{R}}(x, t^n) = \sum_j P_j(x) \mathbf{1}_{I_j}$$

dove $P_j(x)$ é un polinomio che dipende dai valori u_j^n in uno stencil più o meno ampio (tipicamente a due o tre punti).

2.1 Il metodo Lax-Friedrichs staggered

Il più semplice esempio di metodo centrato si ottiene considerando una ricostruzione costante a tratti e l’approssimazione

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t) dt \simeq \Delta t f(t^n).$$

per una generica funzione continua f . Volendo calcolare la soluzione al nuovo passo temporale su una griglia staggered il primo passo é calcolare la media al tempo t^n sulla nuova griglia a partire dalla ricostruzione fatta ottenendo

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}.$$

Per approssimare l’integrale a secondo membro di (2.2) si ha $F(u(x_{j+1}, t^n)) \simeq F(u_{j+1}^n)$ e

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(u(x_{j+1}, t)) \simeq \Delta t F(u_{j+1}^n).$$

Si ottiene quindi il metodo di Lax-Friedrichs staggered

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} - \lambda (F(u_{j+1}^n) - F(u_j^n)) \quad (2.3)$$

dove $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

L’approssimazione dell’integrale prevede che la soluzione rimanga continua in (t^n, t^{n+1}) . Questo é assicurato se le discontinuità che partono al tempo t^n nei punti x_j non raggiungono i punti $x_{j+\frac{1}{2}}$, ossia se il passo temporale Δt soddisfa la condizione CFL

$$\Delta t < \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\max_j a(u_j^n)}$$

dove $a(u_j^n)$ é il raggio spettrale della matrice Jacobiana del flusso $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Nel caso scalare si ha $a(u_j^n) = |F'(u_j^n)|$.

Lo schema di Lax-Friedrichs, di ordine uno, é il prototipo dal quale si sono sviluppati gli schemi centrali. Lo svantaggio principale di questo metodo é l'elevata viscosità numerica pari a $\mathcal{O}(\frac{\Delta x^2}{\Delta t})$.

2.2 Il metodo Nessyahu-Tadmor staggered

Nel 1990 Nessyahu e Tadmor (vedere [2]) hanno introdotto uno schema staggered del secondo ordine basato sulla ricostruzione lineare a pezzi della soluzione (vedere figura (2.1)) e sull'approssimazione dell'integrale temporale a secondo membro di (2.2) con la regola del punto medio. Procedendo sulla falsariga della deduzione del metodo LxF definiamo

$$P_j(x) = u_j^n + (u_x)_j^n(x - x_j)$$

dove $(u_x)_j^n$ é l'approssimazione della derivata di u rispetto a x nel punto x_j al tempo t^n che verrà calcolata a partire dalle medie di cella u_j^n . Osserviamo che la ricostruzione conserva la media di cella, ossia

$$\int_{I_j} P_j(x) dx = u_j^n$$

e che $u^{\mathcal{R}}(x_j, t^n) = u_j^n$. Con questa ricostruzione si ha

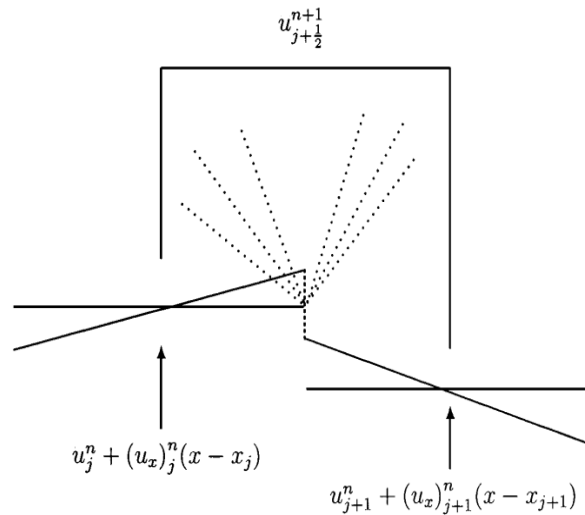


Figura 2.1: Ricostruzione lineare a pezzi $u^{\mathcal{R}}(x, t^n)$ e calcolo della media $u_{j+1/2}^n$ sulla griglia staggered.

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + \Delta x \frac{(u_x)_j^n - (u_x)_{j+1}^n}{8}.$$

Per quanto riguarda l'integrale temporale si ha invece

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(u(x_{j+1}, t)) \simeq \Delta t F(u(x_{j+1}, t^{n+\frac{1}{2}})).$$

Il valore $u(x_{j+1}, t^{n+\frac{1}{2}})$ è incognito e viene approssimato ricorrendo allo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine e la legge di conservazione. In formule

$$u^{\mathcal{R}}(x_{j+1}, t^{n+\frac{1}{2}}) \simeq u_{j+1}^n + u_t(x_{j+1}, t^n) \frac{\Delta t}{2} = u_{j+1}^n - F(u_{j+1}^n)_x \frac{\Delta t}{2} \simeq u_{j+1}^n - (F_x)_{j+1}^n \frac{\Delta t}{2}$$

dove $(F_x)_{j+1}^n$ è un'approssimazione della derivata spaziale del flusso. Lo schema numerico che ne risulta è composto quindi dalla fase “*predictor*”

$$u(x_j, t^{n+\frac{1}{2}}) \simeq v_j = u_j^n - \frac{\Delta t}{2} (F_x)_j^n \quad (2.4)$$

e dalla fase “*corrector*”

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + \Delta x \frac{(u_x)_j^n - (u_x)_{j+1}^n}{8} - \lambda (F(v_{j+1}) - F(v_j)). \quad (2.5)$$

La deduzione svolta prevede che la soluzione rimanga regolare in corrispondenza dei nodi x_j . Poichè la velocità di propagazione è finita questa condizione è verificata sotto la condizione *CFL*

$$\Delta t < \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\max_j a_{j+\frac{1}{2}}^n} \quad (2.6)$$

con

$$a_{j+\frac{1}{2}}^n = \max \left\{ a(u_{j+\frac{1}{2}}^-), a(u_{j+\frac{1}{2}}^+) \right\}$$

dove $u_{j+\frac{1}{2}}^-$ e $u_{j+\frac{1}{2}}^+$ sono i limiti¹ rispettivamente sinistro e destro della ricostruzione $u^{\mathcal{R}}(x, t^n)$ nel punto $x_{j+\frac{1}{2}}$. Osserviamo che ponendo $(F_x)_j^n = (u_x)_j^n = 0$ si ritrova il metodo *LxF* staggered.

Tipicamente la ricostruzione lineare a tratti della soluzione al tempo t^n ha lo scopo di limitare le oscillazioni dello schema numerico. Questo accade se lo schema è TVDM (total variation diminishing in the means), ossia se

$$\sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \leq \sum_j |u_{j+1}^0 - u_j^0| \quad \forall n > 0.$$

¹Omettiamo per non appesantire la notazione gli apici n relativi all'istante temporale.

Il limitatore di flusso utilizzato in questo lavoro di tesi é il cosiddetto limitatore *minmod*, per il quale

$$(u_x)_j^n = \frac{1}{\Delta x} \minmod \left(\theta(u_{j+1}^n - u_j^n), \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}, \theta(u_j^n - u_{j-1}^n) \right) \quad \theta \in [1, 2] \quad (2.7)$$

dove la funzione *minmod* é definita come

$$\minmod(a, b, c) = \begin{cases} \min(a, b, c) & \text{se } a > 0, b > 0, c > 0; \\ \max(a, b, c) & \text{se } a < 0, b < 0, c < 0; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione *minmod* ritorna quindi l'argomento di modulo minimo se tutti gli argomenti hanno lo stesso segno e ritorna 0 in caso contrario. Si osservi che gli argomenti della funzione *minmod* in (2.7) sono rispettivamente l'approssimazione della derivata alle differenze finite in avanti, centrata e all'indietro (almeno per $\theta = 1$) calcolate a partire dalle medie di cella. Queste osservazioni suggeriscono che il limitatore (2.7) é un buon candidato ad essere un'approssimazione non oscillante di $(u_x)_j^n$. É evidente che piú é piccolo il coefficiente θ piú il limitatore é restrittivo e quindi lo schema risulterà meno oscillante rispetto a valori piú alti del parametro, ma in generale si avrà una maggiore dissipazione numerica.

Si può verificare che lo schema di Nessyahu-Tadmor (NT) accoppiato ad un limitatore del tipo (2.7) oltre a essere del secondo ordine é TVD sotto un'opportuna condizione *CFL*. Per maggiori dettagli consultare [2]. La dissipazione numerica del metodo NT é inferiore a quella del metodo LxF e pari a $\mathcal{O}(\frac{\Delta x^4}{\Delta t})$.

Purtroppo entrambi gli schemi non ammettono una formulazione semidiscreta (per $t \rightarrow 0$ la dissipazione numerica tende a infinito) precludendo la possibilità di usare solutori di ODE accurati come ad esempio i metodi Runge Kutta (RK).

2.3 Metodo semidiscreto del secondo ordine

Deriviamo quindi un metodo completamente discreto del secondo ordine che ammette una formulazione semidiscreta e che presenta una dissipazione numerica pari a $\mathcal{O}(\Delta x^3)$. Gli ingredienti chiave sono gli stessi utilizzati per la costruzione del metodo NT sfruttando però maggiori informazioni relativamente alle velocità di propagazione. Inoltre il metodo risulterà essere non-staggered. Con riferimento alla figura (2.2) supponiamo di aver calcolato la ricostruzione lineare a pezzi $u^{\mathcal{R}}(x, t^n)$. Sotto la condizione *CFL* (2.6) i tre intervalli

$$I_{j-\frac{1}{2}}^n = [x_{j-\frac{1}{2},l}^n, x_{j-\frac{1}{2},r}^n] = [x_{j-\frac{1}{2}} - |a_{j-\frac{1}{2}}^n| \Delta t, x_{j-\frac{1}{2}} + |a_{j-\frac{1}{2}}^n| \Delta t],$$

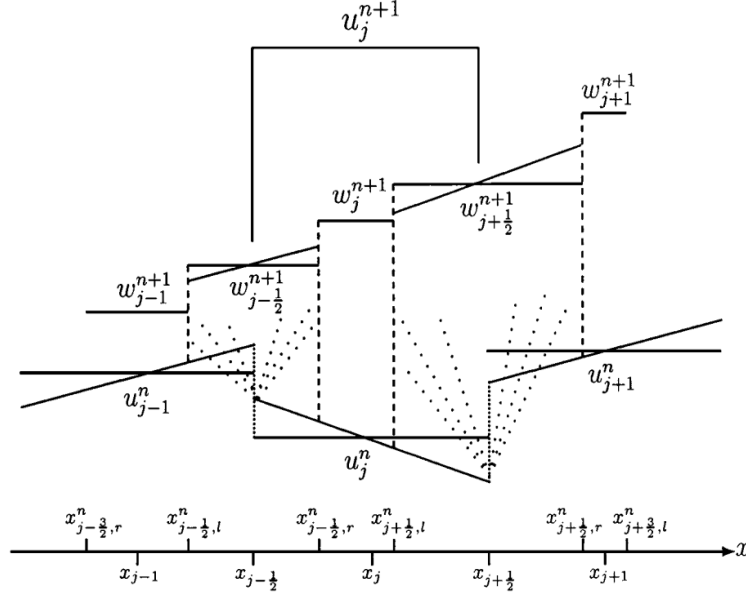


Figura 2.2: Diagramma di riferimento per il calcolo delle medie u_j^{n+1} a partire dalla ricostruzione $u^{\mathcal{R}}(x, t^n)$.

$$I_j^n = \left[x_{j-\frac{1}{2},r}^n, x_{j+\frac{1}{2},l}^n \right] \text{ e}$$

$$I_{j+\frac{1}{2}}^n = \left[x_{j+\frac{1}{2},l}^n, x_{j+\frac{1}{2},r}^n \right] = \left[x_{j+\frac{1}{2}} - |a_{j+\frac{1}{2}}^n| \Delta t, x_{j+\frac{1}{2}} + |a_{j+\frac{1}{2}}^n| \Delta t \right]$$

sono disgiunti.

In particolare la soluzione rimarrà regolare in $\left[x_{j-\frac{1}{2},r}^n, x_{j+\frac{1}{2},l}^n \right]$ per $t \in (t^n, t^n + \Delta t)$.

Per il calcolo della soluzione numerica u_j^{n+1} procediamo come segue:

1. calcolare le medie $w_j^n, w_{j\pm\frac{1}{2}}^n$ sulla griglia staggered non uniforme a partire da $u^{\mathcal{R}}(x, t^n)$;
2. applicare il metodo NT e calcolare le medie $w_j^{n+1}, w_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+1}$;
3. eseguire la ricostruzione $w^{\mathcal{R}}(x, t^{n+1})$ lineare a pezzi di $w_{j\pm\frac{1}{2}}^{n+1}$;
4. calcolare u_j^{n+1} tramite integrazione di $w^{\mathcal{R}}(x, t^{n+1})$ sull'intervallo I_j .

Ponendo $\Delta x_{j+\frac{1}{2}} = x_{j+\frac{1}{2},r}^n - x_{j+\frac{1}{2},l}^n = 2a_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta t$ si ha

$$w_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{j+\frac{1}{2},l}^n}^{x_{j+\frac{1}{2},r}^n} u^{\mathcal{R}}(x, t^n) dx = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} + \frac{1}{4} \left(\Delta x - a_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta t \right) \left((u_x)_j^n - (u_x)_{j+1}^n \right) \quad (2.8)$$

Per applicare lo schema NT bisogna predire i valori di $u^{\mathcal{R}}$ nei punti $x_{j+\frac{1}{2},l}^n$ e $x_{j+\frac{1}{2},r}^n$ al tempo $t^{n+\frac{1}{2}}$ per l'approssimazione degli integrali temporali. Si ha

$$u^{\mathcal{R}}(x_{j+\frac{1}{2},l}, t^{n+\frac{1}{2}}) \simeq v_{j+\frac{1}{2},l} = u^{\mathcal{R}}(x_{j+\frac{1}{2},l}, t^n) - \frac{\Delta t}{2}(F_x)_{j+\frac{1}{2},l}^n \quad (2.9)$$

dove

$$u^{\mathcal{R}}(x_{j+\frac{1}{2},l}, t^n) = u_j^n + (u_x)_j^n (x_{j+\frac{1}{2},l}^n - x_j) = u_j^n + (u_x)_j^n \left(\frac{\Delta x}{2} - a_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta t \right). \quad (2.10)$$

e $(F_x)_{j+\frac{1}{2},l}^n$ é un'approssimazione di $\frac{\partial}{\partial x} F(u(x_{j+\frac{1}{2},l}, t^n))$.

Infine si ha

$$\begin{aligned} w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= w_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_{j+\frac{1}{2}}} \left(F(v_{j+\frac{1}{2},r}) - F(v_{j+\frac{1}{2},l}) \right) = \\ &= w_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2a_{j+\frac{1}{2}}^n} \left(F(v_{j+\frac{1}{2},r}) - F(v_{j+\frac{1}{2},l}) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Procedendo in maniera del tutto analoga si calcola $w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$.

Per quanto riguarda il calcolo di w_j^{n+1} si ha

$$w_j^n = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2},r}^n}^{x_{j+\frac{1}{2},l}^n} u^{\mathcal{R}}(x, t^n) dx = u_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(a_{j-\frac{1}{2}}^n - a_{j+\frac{1}{2}}^n \right) (u_x)_j^n \quad (2.12)$$

e applicando lo schema NT si ottiene

$$\begin{aligned} w_j^{n+1} &= w_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \left(F(v_{j+\frac{1}{2},l}) - F(v_{j-\frac{1}{2},r}) \right) = \\ &= w_j^n - \frac{\lambda}{1 - \lambda(a_{j-\frac{1}{2}}^n + a_{j+\frac{1}{2}}^n)} \left(F(v_{j+\frac{1}{2},l}) - F(v_{j-\frac{1}{2},r}) \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Per calcolare la media u_j^{n+1} calcoliamo la ricostruzione lineare a pezzi

$$w^{\mathcal{R}}(x, t^{n+1}) = \sum_j \left[\left(w_j^{n+1} + (w_x)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} (x - x_{j+\frac{1}{2}}) \right) \mathbf{1}_{I_j^n} + w_{j+\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{I_{j+\frac{1}{2}}^n} \right].$$

La ricostruzione sugli intervalli I_j é mantenuta costante a pezzi poichè $I_j^n \subset I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ e il calcolo di w_j^{n+1} porterebbe allo stesso risultato con qualsiasi altra

ricostruzione lineare. Si ha infine

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \\
&= \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} w^{\mathcal{R}}(x, t^{n+1}) dx = \\
&= \lambda \left(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} a_{j+\frac{1}{2}}^n + w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} a_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + w_j^{n+1} \left(1 - \lambda (a_{j+\frac{1}{2}}^n + a_{j-\frac{1}{2}}^n) \right) - \\
&- \frac{\lambda \Delta t}{2} \left((a_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 (w_x)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (a_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 (w_x)_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Osserviamo che il calcolo delle derivate approssimate (F_x) e (w_x) é effettuato su una griglia non uniforme e quindi bisogna modificare opportunamente il limitatore utilizzato (ad esempio il già citato limitatore *minmod*).

Deduciamo ora dallo schema completamente discreto (2.14) lo schema semidiscreto. Sottraendo membro a membro u_j^n e dividendo per Δt si ottiene

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{w_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} w_j^{n+1} (a_{j+\frac{1}{2}}^n + a_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{\Delta x} \left(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} a_{j+\frac{1}{2}}^n + w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} a_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \mathcal{O}(\Delta t). \tag{2.15}$$

Per $\Delta t \rightarrow 0$ il primo membro tende a $\frac{d}{dt} u_j^n$.

Dalla (2.9) e dalla (2.10) si ha

$$v_{j+\frac{1}{2},l} \rightarrow u_{j+\frac{1}{2}}^-, \quad v_{j-\frac{1}{2},r} \rightarrow u_{j-\frac{1}{2}}^+$$

e quindi dalla (2.12) e dalla (2.13) si ricava

$$\frac{w_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \rightarrow \frac{1}{2} \left(a_{j-\frac{1}{2}}^n - a_{j+\frac{1}{2}}^n \right) (u_x)_j^n - \frac{1}{\Delta x} \left(F(u_{j+\frac{1}{2}}^-) - F(u_{j-\frac{1}{2}}^+) \right). \tag{2.16}$$

Ancora dalla (2.12) e dalla (2.13) si ricava

$$-\frac{1}{\Delta x} w_j^{n+1} (a_{j+\frac{1}{2}}^n + a_{j-\frac{1}{2}}^n) \rightarrow -\frac{1}{\Delta x} u_j^n (a_{j+\frac{1}{2}}^n + a_{j-\frac{1}{2}}^n). \tag{2.17}$$

Dalla (2.8) si ha

$$w_{j+\frac{1}{2}}^n \rightarrow \frac{1}{2} \left[u_j^n + u_{j+1}^n + \frac{\Delta x}{2} (u_x)_j^n - \frac{\Delta x}{2} (u_x)_{j+1}^n \right] = \frac{1}{2} \left(u_{j+\frac{1}{2}}^- + u_{j+\frac{1}{2}}^+ \right)$$

e quindi dalla (2.11) si ottiene

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \left(u_{j+\frac{1}{2}}^- + u_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) - \frac{1}{2a_{j+\frac{1}{2}}^n} \left(F(u_{j+\frac{1}{2}}^+) - F(u_{j+\frac{1}{2}}^-) \right). \tag{2.18}$$

Sommando i limiti in (2.16) e (2.17) i primi due addendi in (2.15) tendono a

$$-\frac{1}{\Delta x} \left[a_{j+\frac{1}{2}}^n u_{j+\frac{1}{2}}^- + a_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^+ + F(u_{j+\frac{1}{2}}^-) - F(u_{j-\frac{1}{2}}^+) \right] \quad (2.19)$$

mentre dalla (2.18) il terzo addendo tende a

$$\frac{1}{2\Delta x} \left[a_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+\frac{1}{2}}^- + u_{j+\frac{1}{2}}^+) + a_{j-\frac{1}{2}}^n (u_{j-\frac{1}{2}}^- + u_{j-\frac{1}{2}}^+) - F(u_{j+\frac{1}{2}}^+) + F(u_{j+\frac{1}{2}}^-) - F(u_{j-\frac{1}{2}}^+) + F(u_{j-\frac{1}{2}}^-) \right]. \quad (2.20)$$

Sommando (2.19) e (2.20) si ottiene

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} a_{j+\frac{1}{2}}^n \left(u_{j+\frac{1}{2}}^- - u_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) - \frac{1}{2} a_{j-\frac{1}{2}}^n \left(u_{j-\frac{1}{2}}^- - u_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(F(u_{j+\frac{1}{2}}^-) + F(u_{j+\frac{1}{2}}^+) \right) - \frac{1}{2} \left(F(u_{j-\frac{1}{2}}^-) + F(u_{j-\frac{1}{2}}^+) \right) \right]. \end{aligned}$$

Definendo i flussi numerici

$$H_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} a_{j+\frac{1}{2}}^n \left(u_{j+\frac{1}{2}}^- - u_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) + \frac{1}{2} \left(F(u_{j+\frac{1}{2}}^-) + F(u_{j+\frac{1}{2}}^+) \right)$$

e

$$H_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} a_{j-\frac{1}{2}}^n \left(u_{j-\frac{1}{2}}^- - u_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) + \frac{1}{2} \left(F(u_{j-\frac{1}{2}}^-) + F(u_{j-\frac{1}{2}}^+) \right)$$

lo schema semidiscreto derivato a partire dalla (2.15) si può scrivere nella forma compatta

$$\frac{d}{dt} u_j^n = -\frac{1}{\Delta x} \left(H_{j+\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (2.21)$$

Osserviamo che con l'impiego del limitatore *minmod* il flusso $H_{j+\frac{1}{2}}^n$ dipende dai quattro valori $u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n$ ed è consistente, ossia

$$H_{j+\frac{1}{2}}(u, u, u, u) = F(u).$$

Lo schema (2.21) porta ad un sistema non lineare di equazioni differenziali ordinarie risolvibile ad esempio con un metodo esplicito che sarà in generale soggetto ad una limitazione sul passo temporale Δt (condizione di tipo *CFL*) necessaria alla stabilità. Applicando a (2.21) il metodo di Eulero esplicito si ha

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(H_{j+\frac{1}{2}}^n - H_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

e considerando la ricostruzione costante a tratti si ottiene il metodo alle differenze finite di Eulero centrato in avanti per l'equazione (2.1):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (F(u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n)).$$

Kuznetsov ha dimostrato (vedere [1]) che schemi monotoni nella forma

$$u_j^{n+1} = G(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

sono accurati al massimo all'ordine 1 sia in tempo che in spazio. Da questo fatto si evince che il passo di ricostruzione é fondamentale per ottenere schemi di ordine superiore possibilmente non oscillanti in presenza di discontinuità. Con il limitatore *minmod* si usa infatti uno stencil a cinque punti poichè bisogna approssimare le derivate spaziali di u nei nodi x_{j+1} e x_{j-1} . Le proprietà del metodo numerico dipendono quindi fortemente dalla scelta della ricostruzione della soluzione al tempo t^n . Con il limitatore *minmod* si può dimostrare che lo schema (2.21) é, nel caso monodimensionale, TVDM (consultare [3]).

Si possono utilizzare ricostruzioni di ordine più elevato con l'obiettivo di aumentare l'ordine del metodo. In [4] viene proposto un metodo del terzo ordine basato su una ricostruzione parabolica a pezzi della soluzione in grado di riconoscere zone regolari e zone discontinue (tramite opportuni indicatori) garantendo quindi alta accuratezza nelle zone regolari e limitando le oscillazioni in presenza di discontinuità.

L'estensione di (2.21) al caso bidimensionale é immediata. Considerando il sistema

$$u_t + F(u)_x + G(u)_y = 0$$

la corrispondente formulazione semidiscreta del secondo ordine é

$$\frac{d}{dt} u_{j,k}^n = -\frac{1}{\Delta x} \left(H_{j+\frac{1}{2},k}^x - H_{j-\frac{1}{2},k}^x \right) - \frac{1}{\Delta y} \left(H_{j,k+\frac{1}{2}}^y - H_{j,k-\frac{1}{2}}^y \right) \quad (2.22)$$

dove per semplicità sono stati omissi gli apici relativi al tempo t^n ai flussi numerici H^x e H^y così definiti:

$$H_{j+\frac{1}{2},k}^x = \frac{1}{2} a_{j+\frac{1}{2},k}^x \left(u_{j+\frac{1}{2},k}^- - u_{j+\frac{1}{2},k}^+ \right) + \frac{1}{2} \left(F(u_{j+\frac{1}{2},k}^-) + F(u_{j+\frac{1}{2},k}^+) \right)$$

e

$$H_{j,k+\frac{1}{2}}^y = \frac{1}{2} a_{j,k+\frac{1}{2}}^y \left(u_{j,k+\frac{1}{2}}^- - u_{j,k+\frac{1}{2}}^+ \right) + \frac{1}{2} \left(G(u_{j,k+\frac{1}{2}}^-) + G(u_{j,k+\frac{1}{2}}^+) \right).$$

con

$$a_{j+\frac{1}{2},k}^x = \max \left\{ J_F(u_{j+\frac{1}{2},k}^+), J_F(u_{j+\frac{1}{2},k}^-) \right\}$$

e

$$a_{j,k+\frac{1}{2}}^y = \max \left\{ J_G(u_{j,k+\frac{1}{2}}^+), J_G(u_{j,k+\frac{1}{2}}^-) \right\}$$

dove J_F e J_G sono rispettivamente le matrici Jacobiane del flusso F e del flusso G . In [3] si dimostra che sotto una condizione di tipo *CFL* il metodo (2.22) accoppiato al metodo di Eulero in avanti soddisfa il seguente principio del massimo:

$$\max_{j,k} |u_{j,k}^n| \leq \max_{j,k} |u_{j,k}^0| \quad \forall n.$$

2.4 Evoluzione temporale: metodi Runge-Kutta

I metodi Runge-Kutta sono solutori di ODE ad un passo basati sull'utilizzo innestato del metodo di Eulero in avanti. Dato il sistema di ODE

$$\frac{d}{dt}u = C(u)$$

con $C : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ un metodo RK esplicito a s stadi per l'approssimazione di $u(t^{n+1})$ partendo dall'approssimazione $u^n \simeq u(t^n)$ si può scrivere nella forma

1. porre $u^{(0)} \equiv u^n$;
2. per $i = 1, \dots, s$ calcolare le funzioni intermedie

$$u^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} w_h^{il}, \quad w_h^{il} = u^{(l)} + \frac{\beta_{il}}{\alpha_{il}} \Delta t C(u^{(l)});$$

3. porre $u^{n+1} \equiv u^{(s)}$.

I coefficienti α_{il} sono tali che $\alpha_{il} \geq 0$ e $\sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} = 1$.

Si può dimostrare che metodi espliciti a s stadi hanno ordine di convergenza pari a s per $s = 1, \dots, 4$. Per la sua struttura un metodo RK esplicito è facilmente implementabile e molte proprietà del metodo globale ottenuto partendo da (2.21) utilizzando un metodo RK possono essere studiate concentrandosi sul singolo passo di Eulero esplicito (consultare ad esempio [6] in ambito elementi finiti discontinui). Vedremo che questo sarà fondamentale nella discretizzazione del sistema Shallow Water affinché preservi la positività dell'altezza totale. Scriviamo ad esempio per esteso il metodo esplicito del terzo ordine utilizzato:

- porre $u^{(0)} \equiv u^n$;
- primo passo di Eulero esplicito: $\tilde{u}^{(1)} = u^{(0)} + \Delta t C(u^{(0)})$;

- $u^{(1)} = \tilde{u}^{(1)}$;
- secondo passo di Eulero esplicito: $\tilde{u}^{(2)} = u^{(1)} + \Delta t C(u^{(1)})$;
- $u^{(2)} = \frac{3}{4}u^{(0)} + \frac{1}{4}\tilde{u}^{(2)}$;
- terzo passo di Eulero esplicito: $\tilde{u}^{(3)} = u^{(2)} + \Delta t C(u^{(2)})$;
- $u^{n+1} \equiv u^{(3)} = \frac{1}{3}u^{(0)} + \frac{2}{3}\tilde{u}^{(3)}$.

Si può notare come ogni passo $u^{(i)}$ risulti essere una combinazione convessa di soluzioni intermedie calcolate attraverso il metodo di Eulero in avanti puro.

2.5 Applicazione al sistema Shallow Water

In questa sezione applichiamo il metodo semidiscreto (2.22) al sistema Shallow Water. I problemi da affrontare per adattare lo schema numerico proposto sono sostanzialmente due:

1. il metodo numerico deve preservare la nonnegatività dell'altezza h dell'acqua;
2. il metodo deve essere *well-balanced* ossia deve mantenere esattamente gli stati stazionari di quiete.

Il primo problema si traduce in una modifica della ricostruzione lineare a pezzi nelle zone dove l'altezza dell'acqua è vicina a 0 mentre il secondo problema viene risolto discretizzando opportunamente il termine sorgente dovuto al fondo non piatto. Trattandosi di un sistema iperbolico le incognite sono l'altezza h e le portate $Q_x = uh$ in direzione x e $Q_y = vh$ in direzione y . Tuttavia gli autovalori delle matrici Jacobiane dei flussi sono

$$\lambda_1^x = u, \quad \lambda_{2,3}^x = u \pm \sqrt{gh}$$

e

$$\lambda_1^y = v, \quad \lambda_{2,3}^y = v \pm \sqrt{gh}$$

e le velocità sono ottenute tramite il rapporto delle portate e dell'altezza. Per evitare il propagarsi di errori numerici nel calcolo di u e v nelle zone quasi asciutte si ricorre ad una formula di desingularizzazione. Seguendo [7] la velocità u (e analogamente la velocità v) si calcola con la formula

$$u = \frac{\sqrt{2}hQ_x}{\sqrt{h^4 + \max\{h^4, \varepsilon\}}} \quad (2.23)$$

dove $\varepsilon \propto (\Delta x)^4$. Se $h^4 \geq \varepsilon$ la (2.23) restituisce il vero valore di u (almeno in aritmetica esatta) mentre per $0 < h^4 \leq \varepsilon$ la velocità calcolata é, sempre in aritmetica esatta, pari a

$$u = u^{exact} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{h^4}}}.$$

Inoltre la (2.23) evita in ogni caso la divisione per quantità molto prossime a 0. La formula di desingularizzazione viene applicata nel calcolo dei raggi spettrali ma soprattutto nel calcolo dei flussi. In quest'ultimo caso una volta calcolata la velocità u si deve ricalcolare consistentemente la portata $Q_x = hu$.

Indichiamo con $\mathbf{u}_{j,k}^n = (h_{j,k}^n, (Q_x)_{j,k}^n, (Q_y)_{j,k}^n)$ il vettore della soluzione numerica (approssimazioni delle medie di cella) relativo alla cella (j, k) al tempo t^n . La ricostruzione lineare a pezzi della soluzione avviene componente per componente tramite il limitatore *minmod* per l'approssimazione delle derivate $(\mathbf{u}_x)_{j,k}^n$ e $(\mathbf{u}_y)_{j,k}^n$:

$$(\mathbf{u}_x)_{j,k}^n = \frac{1}{\Delta x} \minmod \left(\theta(\mathbf{u}_{j+1,k}^n - \mathbf{u}_{j,k}^n), \frac{\mathbf{u}_{j+1,k}^n - \mathbf{u}_{j-1,k}^n}{2}, \theta(\mathbf{u}_{j,k}^n - \mathbf{u}_{j-1,k}^n) \right) \quad \theta \in [1, 2],$$

$$(\mathbf{u}_y)_{j,k}^n = \frac{1}{\Delta y} \minmod \left(\theta(\mathbf{u}_{j,k+1}^n - \mathbf{u}_{j,k}^n), \frac{\mathbf{u}_{j,k+1}^n - \mathbf{u}_{j,k-1}^n}{2}, \theta(\mathbf{u}_{j,k}^n - \mathbf{u}_{j,k-1}^n) \right) \quad \theta \in [1, 2].$$

Il passo che risulterà fondamentale per ottenere le positività dell'altezza e il bilanciamento del termine sorgente consiste nella ricostruzione bilineare $\tilde{B}(x, y)$ del fondo reale $B(x, y)$ del tipo

$$\tilde{B}(x, y) = b_{j,k}^0 + b_{j,k}^x x + b_{j,k}^y y + b_{j,k}^{xy} xy \quad (x, y) \in C_{j,k}$$

dove $C_{j,k}$ é cella di centro (x_j, y_k) e di dimensioni $\Delta x \times \Delta y$. La ricostruzione viene fatta in modo tale che il fondo approssimato coincida col fondo reale nei vertici della cella, ossia

$$\tilde{B}(x_{j \pm \frac{1}{2}}, y_{k \pm \frac{1}{2}}) = B(x_{j \pm \frac{1}{2}}, y_{k \pm \frac{1}{2}}) \quad \forall j, k.$$

Definiamo la media di cella del fondo ricostruito

$$B_{j,k} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_{j,k}} \tilde{B}(x, y) dx dy.$$

Per come é stato ricostruito il fondale si hanno le importanti proprietà

1. $B_{j+\frac{1}{2},k} \equiv \tilde{B}(x_{j+\frac{1}{2}}, y_k) = \frac{1}{2} \left(\tilde{B}(x_{j+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}) + \tilde{B}(x_{j+\frac{1}{2}}, y_{k-\frac{1}{2}}) \right)$ e simili;
2. $B_{j,k} = \tilde{B}(x_j, y_k) = \frac{1}{2} \left(B_{j+\frac{1}{2},k} + B_{j-\frac{1}{2},k} \right) = \frac{1}{2} \left(B_{j,k+\frac{1}{2}} + B_{j,k-\frac{1}{2}} \right)$.

Notiamo che si ha quindi

$$B_{j,k} = \frac{1}{4} \left(B_{j+\frac{1}{2},k} + B_{j-\frac{1}{2},k} + B_{j,k+\frac{1}{2}} + B_{j,k-\frac{1}{2}} \right).$$

Se il fondo reale é regolare l'approssimazione della media di cella é accurata al secondo ordine, cioè

$$\left| B_{j,k} - \int_{C_{j,k}} B(x,y) dx dy \right| = \mathcal{O}((\Delta x \Delta y)^2).$$

2.5.1 Positività dell'altezza dell'acqua

Conviene riscrivere il sistema Shallow Water nelle nuove incognite (Z, Q_x, Q_y) dove $Z = B + h$ é l'altezza totale. I flussi e il termine sorgente assumono la forma

$$\mathbf{F}(Z, Q_x, Q_y, B) = \begin{bmatrix} Q_x \\ \frac{Q_x^2}{Z-B} + \frac{1}{2}g(Z-B)^2 \\ \frac{Q_x Q_y}{Z-B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(Z, Q_x, Q_y, B) = \begin{bmatrix} Q_y \\ \frac{Q_x Q_y}{Z-B} \\ \frac{Q_y^2}{Z-B} + \frac{1}{2}g(Z-B)^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}(Z, B) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(Z-B)B_x \\ -g(Z-B)B_y \end{bmatrix}$$

e indichiamo ancora con $\mathbf{u}_{j,k}^n$ il vettore delle nuove incognite discrete $(Z_{j,k}^n, (Q_x)_{j,k}^n, (Q_y)_{j,k}^n)$.

La ricostruzione dell'altezza totale al tempo t^n deve essere nonnegativa. Seguendo la nomenclatura di figura (2.3) introduciamo una correzione al ricostruttore *minmod* solo nei punti in cui l'altezza totale risulti negativa. In particolare, omettendo tutte le indicazioni relative al tempo t^n , se

$$Z_{j+\frac{1}{2},k}^- < B_{j+\frac{1}{2},k} \implies Z_{j+\frac{1}{2},k}^- := B_{j+\frac{1}{2},k} \quad \text{e} \quad Z_{j-\frac{1}{2},k}^+ = 2Z_{j,k} - B_{j+\frac{1}{2},k},$$

altrimenti se

$$Z_{j-\frac{1}{2},k}^+ < B_{j-\frac{1}{2},k} \implies Z_{j-\frac{1}{2},k}^+ := B_{j-\frac{1}{2},k} \quad \text{e} \quad Z_{j+\frac{1}{2},k}^- = 2Z_{j,k} - B_{j-\frac{1}{2},k}.$$

In questo modo si conserva la media di cella

$$Z_{j,k} = \frac{1}{2} \left(Z_{j-\frac{1}{2},k}^+ + Z_{j+\frac{1}{2},k}^- \right)$$

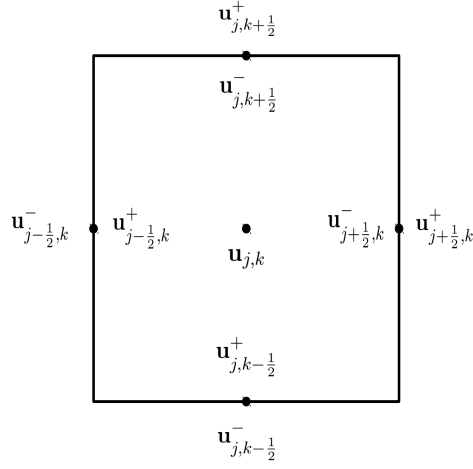


Figura 2.3: Nomenclatura per i valori ricostruiti alle interfacce (componente per componente).

e la positività dell'altezza alle interfacce. Infatti nel primo caso si ha

$$Z_{j-\frac{1}{2},k}^+ - B_{j-\frac{1}{2},k} = 2Z_{j,k} - B_{j+\frac{1}{2},k} - B_{j-\frac{1}{2},k} = 2(Z_{j,k} - B_{j,k}) \geq 0.$$

In direzione y si procede analogamente: se

$$Z_{j,k+\frac{1}{2}}^- < B_{j,k+\frac{1}{2}} \implies Z_{j,k+\frac{1}{2}}^- := B_{j,k+\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad Z_{j,k-\frac{1}{2}}^+ = 2Z_{j,k} - B_{j,k+\frac{1}{2}},$$

altrimenti se

$$Z_{j,k-\frac{1}{2}}^+ < B_{j,k-\frac{1}{2}} \implies Z_{j,k-\frac{1}{2}}^+ := B_{j,k-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad Z_{j,k+\frac{1}{2}}^- = 2Z_{j,k} - B_{j,k-\frac{1}{2}}.$$

Fissato un istante temporale definiamo le velocità

$$a_{j+\frac{1}{2},k}^x = \max \left\{ |u_{j+\frac{1}{2},k}^-| + \sqrt{gh_{j+\frac{1}{2},k}^-}, |u_{j+\frac{1}{2},k}^+| + \sqrt{gh_{j+\frac{1}{2},k}^+} \right\}$$

e

$$a_{j,k+\frac{1}{2}}^y = \max \left\{ |v_{j,k+\frac{1}{2}}^-| + \sqrt{gh_{j,k+\frac{1}{2}}^-}, |v_{j,k+\frac{1}{2}}^+| + \sqrt{gh_{j,k+\frac{1}{2}}^+} \right\}.$$

Vale allora il seguente importante

Teorema 1 *Se il sistema Shallow Water nelle variabili (Z, Q_x, Q_y) é discretizzato con*

il metodo (2.22) accoppiato al metodo di Eulero esplicito e vale la condizione CFL

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta x}{4a_x}, \frac{\Delta y}{4a_y} \right\}$$

con²

$$a_x = \max_{j,k} \{a_{j+\frac{1}{2},k}^x\}; \quad a_y = \max_{j,k} \{a_{j,k+\frac{1}{2}}^y\}$$

vale la relazione

$$h_{jk}^n \geq 0 \quad \forall j, k \implies h_{jk}^{n+1} \geq 0 \quad \forall j, k.$$

DIMOSTRAZIONE

Un passo del metodo (2.22) accoppiato al metodo di Eulero esplicito corrisponde all'equazione

$$\begin{aligned} Z_{j,k}^{n+1} &= Z_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[a_{j+\frac{1}{2},k}^x (Z_{j+\frac{1}{2},k}^- - Z_{j+\frac{1}{2},k}^+) + (hu)_{j+\frac{1}{2},k}^- + (hu)_{j+\frac{1}{2},k}^+ - \right. \\ &\quad \left. - a_{j-\frac{1}{2},k}^x (Z_{j-\frac{1}{2},k}^- - Z_{j-\frac{1}{2},k}^+) - (hu)_{j-\frac{1}{2},k}^- - (hu)_{j-\frac{1}{2},k}^+ \right] - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[a_{j,k+\frac{1}{2}}^y (Z_{j,k+\frac{1}{2}}^- - Z_{j,k+\frac{1}{2}}^+) + (hv)_{j,k+\frac{1}{2}}^- + (hv)_{j,k+\frac{1}{2}}^+ - \right. \\ &\quad \left. - a_{j,k-\frac{1}{2}}^y (Z_{j,k-\frac{1}{2}}^- - Z_{j,k-\frac{1}{2}}^+) - (hv)_{j,k-\frac{1}{2}}^- - (hv)_{j,k-\frac{1}{2}}^+ \right]. \end{aligned}$$

Osserviamo che $Z_{j+\frac{1}{2},k}^- - Z_{j+\frac{1}{2},k}^+ = h_{j+\frac{1}{2},k}^- - h_{j+\frac{1}{2},k}^+$ per la continuit  del fondo. Sottraendo $B_{j,k}$ ad entrambi i membri e notando che

$$h_{j,k}^n = \frac{1}{4} \left(h_{j+\frac{1}{2},k}^- + h_{j-\frac{1}{2},k}^+ + h_{j,k+\frac{1}{2}}^- + h_{j,k-\frac{1}{2}}^+ \right)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} h_{j,k}^{n+1} &= h_{j+\frac{1}{2},k}^- \left(\frac{1}{4} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(a_{j+\frac{1}{2},k}^x + u_{j+\frac{1}{2},k}^- \right) \right) + \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} h_{j+\frac{1}{2},k}^+ \left(a_{j+\frac{1}{2},k}^x - u_{j+\frac{1}{2},k}^+ \right) - \dots \end{aligned}$$

Poich  $|a_{j+\frac{1}{2},k}^x + u_{j+\frac{1}{2},k}^-| \leq 2a_x$ si ha che sotto la condizione

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{4a_x}$$

²L'istante temporale   da intendersi t^n laddove non indicato.

il coefficiente di $h_{j+\frac{1}{2},k}^-$ é nonnegativo. Inoltre si ha $a_{j+\frac{1}{2},k}^x - u_{j+\frac{1}{2},k}^+ \leq 0$. Procedendo in maniera analoga per tutti gli altri termini e ricordando che tutte le altezza ricostruite sono nonnegative si ha la tesi.

□

2.5.2 Bilanciamento del termine sorgente

Consideriamo la soluzione stazionaria di quiete

$$Z = \text{costante}, \quad Q_x = Q_y = 0.$$

Applicando (2.22) inserendo il termine sorgente a secondo membro si ottiene la seguente equazione per Q_x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q_x &= -\frac{g}{2\Delta x} \left[(Z - B_{j+\frac{1}{2},k})^2 - (Z - B_{j-\frac{1}{2},k})^2 \right] + S^{(2)} = \\ &= g \frac{2Z - B_{j+\frac{1}{2},k} - B_{j-\frac{1}{2},k}}{2} \frac{B_{j+\frac{1}{2},k} - B_{j-\frac{1}{2},k}}{\Delta x} + S_{j,k}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

dove

$$S_{j,k}^{(2)} \simeq -g \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_{j,k}} (Z - B) B_x dx dy.$$

Vogliamo che la discretizzazione del termine sorgente sia accurata al secondo ordine e che bilanci esattamente i termini dovuti ai flussi in (2.24). Questo accade effettuando la seguente approssimazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_{j,k}} (Z - B) B_x dx dy &\simeq -g \left(Z(x_j, y_k) - B(x_j, y_k) \right) B_x(x_j, y_k) \simeq \\ &\simeq -g \frac{Z_{j+\frac{1}{2},k}^- - B_{j+\frac{1}{2},k} + Z_{j-\frac{1}{2},k}^+ - B_{j-\frac{1}{2},k}}{2} \frac{B_{j+\frac{1}{2},k} - B_{j-\frac{1}{2},k}}{\Delta x} = \\ &= -g (Z_{j,k} - B_{j,k}) \frac{B_{j+\frac{1}{2},k} - B_{j-\frac{1}{2},k}}{\Delta x} \equiv S_{j,k}^{(2)}. \end{aligned}$$

L'integrale é stato cioè approssimato con la formula del punto medio: il primo fattore é stato stimato con la media agli estremi mentre il secondo con le differenze finite centrate. In maniera analoga definiamo

$$S_{j,k}^{(3)} \equiv -g (Z_{j,k} - B_{j,k}) \frac{B_{j,k+\frac{1}{2}} - B_{j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta y}.$$

Capitolo 3

Metodi di tipo Immersed Boundary

In questo capitolo descriviamo nel dettaglio le idee chiave dei metodi *Immersed Boundary*. La prima sezione riguarda considerazioni e approssimazioni di tipo geometrico mentre la seconda si occupa del trattamento delle condizioni al bordo con particolare riferimento al caso del sistema delle Shallow Water oggetto di questo lavoro di tesi.

3.1 Trattamento geometrico del bordo

Consideriamo una griglia cartesiana composta¹ da $(N_x + 2) \times (N_y + 2)$ celle quadrate di centro (x_j, y_k) con $j = 0, \dots, N_x + 1$ e $k = 0, \dots, N_y + 1$ e un dominio poligonale assegnato per punti (i vertici). La prima fase per applicare un qualsiasi metodo di tipo *Immersed Boundary* consiste nell'adeguamento del bordo alla griglia. Questa fase può causare una leggera modifica del dominio originale che diventa tanto più trascurabile quanto fine diventa il passo di griglia $\Delta x = \Delta y$. Chiamiamo *dominio computazionale*, per distinguerlo dal dominio reale, il dominio costruito in questa fase e definiamo *cella tagliata* una cella che risulti attraversata dal bordo del dominio computazionale.

Il dominio computazionale deve rispettare tre regole fondamentali:

1. ogni cella tagliata é attraversata da un unico segmento rettilineo;
2. la linea che unisce i centri di due celle adiacenti² attraversa al più una volta il dominio computazionale;

¹Utilizziamo qui la stessa notazione impiegata dal codice C++.

²Data una certa cella, le celle ad essa adiacenti sono le 4 celle a Est, a Ovest, a Nord e a Sud. Due celle sono quindi adiacenti se condividono uno dei 4 lati di bordo cella.

3. se due celle adiacenti sono tagliate i segmenti che tagliano le due celle si devono incontrare in un punto.

Queste regole permettono di manipolare efficacemente domini complessi limitando il numero di configurazioni possibili per l'assegnamento delle condizioni al bordo, discusse nella sezione successiva. Con riferimento alla fluidodinamica³ consideriamo *celle bagnate* quelle celle il cui centro sia all'interno del dominio computazionale, mentre *celle asciutte* quelle con centro all'esterno del dominio computazionale. Nei metodi *Immersed Boundary* risulta fondamentale il concetto di ghost cell.

Definizione 1 (Ghost cell) *Una ghost cell è una cella asciutta che ha almeno una cella adiacente bagnata.*

Il dominio reale può essere definito, anziché per punti, attraverso una curva di livello. Sia $f(x, y)$ una funzione differenziabile con gradiente non nullo negli zeri di f , ossia nei punti (x^*, y^*) tali che $f(x^*, y^*) = 0$. Allora il dominio reale è definito dalla relazione

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 0\} \quad (3.1)$$

e si ha

$$\Gamma = \partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Le figure (3.1) e (3.2) mostrano la costruzione del dominio effettuata assegnandone i vertici. Nelle figure (3.3) e (3.4) il dominio è definito come in (3.1) con

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy - 2.$$

³Questa sezione è in realtà di carattere generale. Le celle bagnate sono le celle nelle quali si vuole calcolare la soluzione numerica.

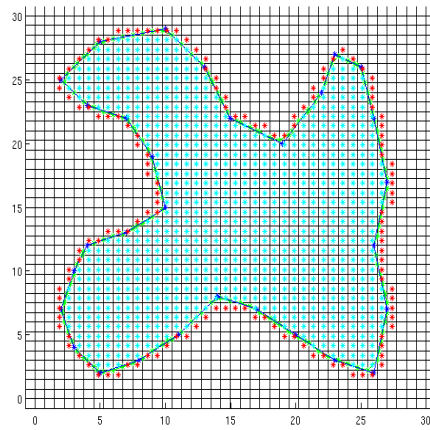


Figura 3.1: Esempio di adattamento del dominio alla griglia. In azzurro: wet cells; in rosso: ghost cells; in blu: dominio reale; in verde: dominio computazionale.

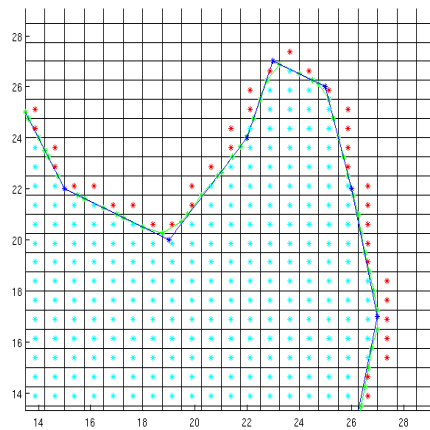


Figura 3.2: Zoom della figura precedente sull'angolo in alto a destra: si nota che il dominio computazionale é leggermente diverso dal dominio reale.

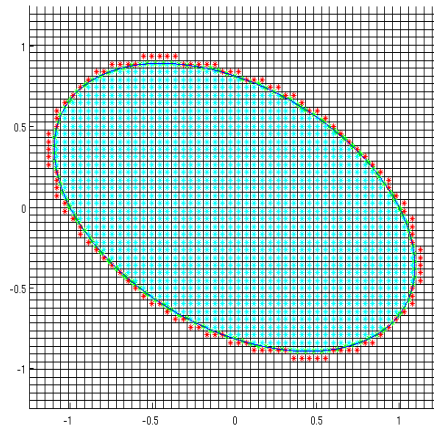


Figura 3.3: Esempio di adattamento del dominio alla griglia nel caso *level set*.

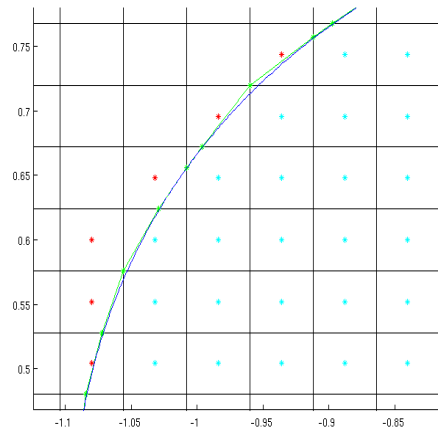


Figura 3.4: Particolare della figura precedente: si nota anche in questo caso che il dominio computazionale é leggermente diverso dal dominio reale.

3.2 Trattamento delle condizioni al bordo

Un classico metodo ai volumi finiti richiede la conoscenza delle medie di cella nelle 4 celle adiacenti a quella corrente. Di fatto si deve iterare sulle celle bagnate, che sono le uniche nelle quali interessa calcolare la soluzione, e applicare lo schema desiderato. Nel caso in cui una o più tra le celle adiacenti a quella considerata sia asciutta (e quindi è una ghost cell) si devono assegnare a queste dei valori fittizi in modo da rispettare in qualche senso le condizioni al bordo. Si procede poi con l'applicazione dello schema numerico come se tutte le celle adiacenti fossero wet cells. In questa sezione descriviamo nel dettaglio come imporre i valori alle ghost cells con riferimento al sistema Shallow Water.

Le condizioni al bordo su Γ sono le seguenti⁴:

$$Q_n = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{dQ_t}{dn} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{dZ}{dn} = 0. \quad (3.4)$$

Le quantità Q_n e Q_t sono rispettivamente le componenti normale e tangente al bordo della portata. Se $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ è il versore normale uscente al bordo e $\mathbf{t} = (t_x, t_y) = (-n_y, n_x)$ il versore tangente si ha

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y, \quad Q_t = Q_x t_x + Q_y t_y.$$

Per assegnare un valore fittizio al centro delle ghost cells si proietta tale punto, che chiamiamo *ghost point* (GP), all'interno del dominio in direzione normale al bordo individuando il *boundary point* (BP) sul bordo e il *reflected point* (RP) all'interno del dominio, in modo che la distanza tra GP e BP sia la stessa tra BP e RP. Successivamente si calcola il valore dell'incognita voluta nel reflected point tramite un particolare interpolante e se ne estrapola linearmente il valore nel ghost point sulla base delle condizioni al bordo desiderate. Per ricostruire il valore in RP si utilizzano, laddove possibile, i valori delle incognite nel quadrato di interpolazione così definito:

Definizione 2 *Dato un RP si definisce quadrato di interpolazione⁵ del RP l'insieme dei quattro centri cella che sono i vertici del più piccolo quadrato che contiene RP avente per vertici dei centri cella.*

Con le regole elencate precedentemente si possono presentare solo 3 situazioni possibili che danno luogo a diverse procedure per l'imposizione delle condizioni al bordo:

⁴Condizioni di bordo chiuso e fermo.

⁵Di seguito indicato con IS.

1. tutti i vertici di IS sono centri cella bagnati (caso *all_wet*);
2. IS contiene uno o più ghost points mentre gli altri vertici sono bagnati (caso *GPs*);
3. IS contiene uno e un solo centro cella asciutto che non è un ghost point (caso *dry_no_GP*).

3.2.1 Caso 1: *all_wet*

Il caso *all_wet* in cui tutti i vertici del quadrato di interpolazione sono bagnati é il piú semplice per due motivi: la procedura di calcolo del valore in RP é la stessa per ogni variabile e non dipende dalle condizioni al bordo implementate. Inoltre é l'unico caso che prescinde dal particolare sistema di equazioni considerato. Un esempio di tale situazione é mostrato in figura (3.5). Indichiamo con ϕ una generica incognita della quale sono

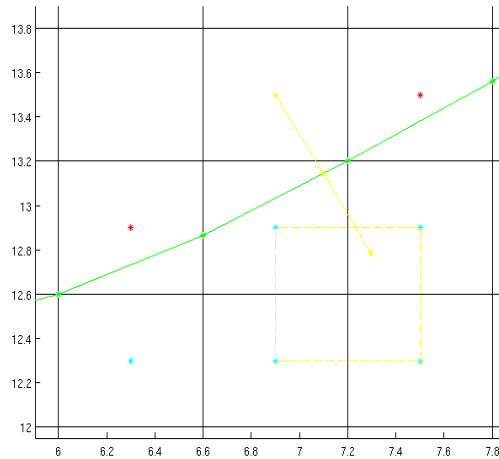


Figura 3.5: Situazione *all wet* nella quale ogni vertice del quadrato di interpolazione é bagnato. In giallo sono rappresentati il GP (centro della ghost cell), il BP e il RP.

disponibili i valori in tutti i vertici di IS e numeriamo i vertici di IS da 1 a 4 partendo dal vertice di sud-ovest e procedendo in senso antiorario. Con ovvio significato della notazione usata si deve calcolare ϕ_{RP} noti i valori ϕ_i per $i = 1, 2, 3, 4$. Supponendo ϕ della forma

$$\phi(x, y) = c_1xy + c_2x + c_3y + c_4$$

si trovano i coefficienti di interpolazione c_i risolvendo il sistema $M\mathbf{c} = \Phi$ con

$$M = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}$$

e $[c]_i = c_i$, $[\Phi]_i = \phi_i$ mentre x_i e y_i sono le coordinate dell' i -esimo vertice (centro cella) di interpolazione. Osserviamo che la matrice M é la stessa per ognuna delle incognite. Una volta noti i coefficienti c_i si calcola

$$\phi_{RP} = c_1x_{RP}y_{RP} + c_2x_{RP} + c_3y_{RP} + c_4.$$

Infine il valore ϕ_{GP} si calcolerà in funzione delle condizioni al bordo che si vogliono implementare in quella zona del dominio (vedere più avanti).

3.2.2 Caso 2: *GPs*

Con la sigla *GPs* indichiamo la presenza in IS di almeno un GP e nessun vertice di IS che sia un centro cella asciutto ma non un ghost point. Stavolta il calcolo delle incognite

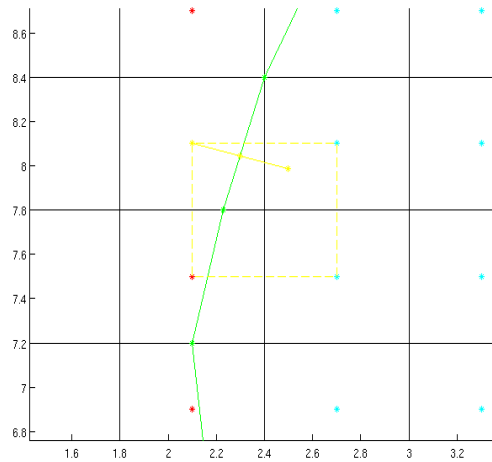


Figura 3.6: Situazione *GPs* nella quale IS contiene due vertici che sono ghost points (il ghost point stesso in giallo e il vertice di sud-ovest) e due vertici bagnati.

in RP dipende non solo dall'incognita considerata, ma anche dalle condizioni al bordo. Faremo quindi riferimento al caso del sistema delle Shallow Waters. Nella situazione di figura (3.6) i vertici di interpolazione 2 e 3 sono bagnati e quindi sono disponibili i valori di tutte le incognite, mentre i vertici 1 e 4 sono inutilizzabili. L'idea é quella di sostituire

ogni vertice inutilizzabile con un boundary point nel quale si impongono le condizioni al bordo volute. Indichiamo con BP_1 il boundary point che sostituisce il vertice 1 e con

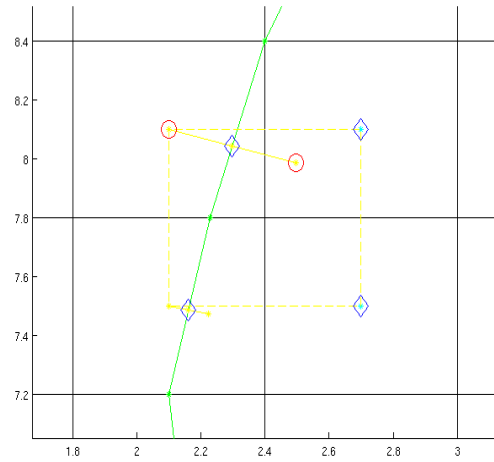


Figura 3.7: I due vertici di interpolazione 1 e 4 sono ghost points e vengono quindi sostituiti da due BP. I vertici del nuovo quadrilatero di interpolazione sono evidenziati in blu e permetteranno di calcolare il valore dell'incognita nel RP in rosso col quale si calcherà il valore nel GP selezionato (anch'esso in rosso).

BP_4 il boundary point che sostituisce il vertice 4.

Caso GP s: calcolo dell'altezza totale

Supponendo, come prima, che Z sia della forma

$$Z(x, y) = c_1xy + c_2x + c_3y + c_4.$$

i vertici bagnati forniscono ancora le due equazioni

$$c_1x_iy_i + c_2x_i + c_3y_i + c_4 = Z_i \quad i = 2, 3.$$

In un generico boundary point applichiamo la condizione al contorno (3.4) per l'altezza totale che porta all'equazione

$$\frac{dZ}{dn} \Big|_{BP} = \nabla Z \cdot \mathbf{n} = \nabla(c_1xy + c_2x + c_3y + c_4) \Big|_{BP} \cdot \mathbf{n} = (c_1y_{BP} + c_2)n_x + (c_1x_{BP} + c_3)n_y = 0.$$

Si é quindi giunti ad un sistema lineare $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$ con

$$M = \begin{bmatrix} y_{BP_1}n_{x_1} + x_{BP_1}n_{y_1} & n_{x_1} & n_{y_1} & 0 \\ x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ y_{BP_4}n_{x_4} + x_{BP_4}n_{y_4} & n_{x_4} & n_{y_4} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Caso *GPs*: calcolo della portata

Sempre in riferimento al caso illustrato in figura (3.7) utilizziamo i punti riflessi 1 e 4 per trovare le equazioni mancanti, sfruttando le condizioni al bordo (3.2) e (3.3) che permettono di calcolare i coefficienti di interpolazione. Supponiamo Q_x e Q_y della forma

$$Q_x(x, y) = c_{1_x}xy + c_{2_x}x + c_{3_x}y + c_{4_x}, \quad Q_y(x, y) = c_{1_y}xy + c_{2_y}x + c_{3_y}y + c_{4_y}$$

e scriviamo il vettore dei coefficienti di interpolazione \mathbf{c} nella forma

$$\mathbf{c} = [c_{1_x} \ c_{1_y} \ c_{2_x} \ c_{2_y} \ c_{3_x} \ c_{3_y} \ c_{4_x} \ c_{4_y}]^T.$$

I centri cella bagnati 2 e 3 forniscono le quattro equazioni

$$c_{1_\theta}x_iy_i + c_{2_\theta}x_i + c_{3_\theta}y_i + c_{4_\theta} = (Q_\theta)_i \quad i = 2, 3 \quad \theta = x, y.$$

Le restanti quattro equazioni si determinano imponendo le condizioni (3.2) e (3.3) nei punti riflessi 1 e 4. Dato un generico punto riflesso la condizione (3.2) porta all'equazione

$$\begin{aligned} Q_{n_{BP}} &= Q_{x_{BP}}n_{x_{BP}} + Q_{y_{BP}}n_{y_{BP}} = \\ &= (c_{1_x}xy + c_{2_x}x + c_{3_x}y + c_{4_x})n_x + (c_{1_y}xy + c_{2_y}x + c_{3_y}y + c_{4_y})n_y = 0 \end{aligned}$$

dove nell'ultima formula sono stati omissi i pedici BP alle coordinate x e y . La condizione (3.3) porta all'equazione, omettendo ancora i pedici BP ed indicando con $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y)$ il vettore portata,

$$\begin{aligned} \frac{dQ_t}{dn} &= \nabla(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} = \nabla(-Q_xn_y + Q_yn_x) \cdot \mathbf{n} = \\ &= \nabla(-(c_{1_x}xy + c_{2_x}x + c_{3_x}y + c_{4_x})n_y + (c_{1_y}xy + c_{2_y}x + c_{3_y}y + c_{4_y})n_x) \cdot \mathbf{n} = \\ &= (-(c_{1_x}y + c_{2_x})n_y + (c_{1_y}y + c_{2_y})n_x)n_x + (-(c_{1_x}x + c_{3_x})n_y + (c_{1_y}x + c_{3_y})n_x)n_y = \\ &= 0. \end{aligned}$$

La matrice M di interpolazione diventa quindi

$$M = \begin{bmatrix} (xyn_x)_1 & (xyn_y)_1 & (xn_x)_1 & (xn_y)_1 & (yn_x)_1 & (yn_y)_1 & (n_x)_1 & (n_y)_1 \\ (-yn_xn_y - xn_y^2)_1 & (yn_x^2 + xn_xn_y)_1 & (-n_xn_y)_1 & (n_x^2)_1 & (-n_y^2)_1 & (n_xn_y)_1 & 0 & 0 \\ x_2y_2 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_2y_2 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & 1 \\ x_3y_3 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_3y_3 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & 0 & 1 \\ (xyn_x)_4 & (xyn_y)_4 & (xn_x)_4 & (xn_y)_4 & (yn_x)_4 & (yn_y)_4 & (n_x)_4 & (n_y)_4 \\ (-yn_xn_y - xn_y^2)_4 & (yn_x^2 + xn_xn_y)_4 & (-n_xn_y)_4 & (n_x^2)_4 & (-n_y^2)_4 & (n_xn_y)_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove il pedice 1 nella prima e seconda riga si riferisce al BP_1 e il pedice 4 nella settima e ottava riga si riferisce al BP_4 . Il termine noto assume la forma

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (Q_x)_2 \\ (Q_y)_2 \\ (Q_x)_3 \\ (Q_y)_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Trovato il vettore dei coefficienti $\mathbf{c} = M^{-1}\mathbf{b}$ si calcolano finalmente

$$(Q_x)_{RP} = c_{1_x}x_{RP}y_{RP} + c_{2_x}x_{RP} + c_{3_x}y_{RP} + c_{4_x}$$

e

$$(Q_y)_{RP} = c_{1_y}x_{RP}y_{RP} + c_{2_y}x_{RP} + c_{3_y}y_{RP} + c_{4_y}.$$

3.2.3 Caso 3: *dry_no_GP*

Con la sigla *dry_no_GP* intendiamo la situazione nella quale esiste esattamente un vertice asciutto in IS che non sia il centro di una ghost cell. In questo caso non é possibile applicare le condizioni al bordo al punto riflesso del centro cella *dry_no_GP* che di fatto non viene nemmeno calcolato poichè la cella non é una ghost cell. Si hanno dunque solo tre vertici di interpolazione disponibili che sono centri cella bagnati o ghost points. Come nel caso precedente il calcolo delle incognite nel punto riflesso dipende dall'incognita considerata e dal tipo di condizioni al bordo. Riferendoci alle condizioni (3.2), (3.3), (3.4) per il sistema delle Shallow Waters esaminiamo separatamente il caso dell'altezza totale e della portata.

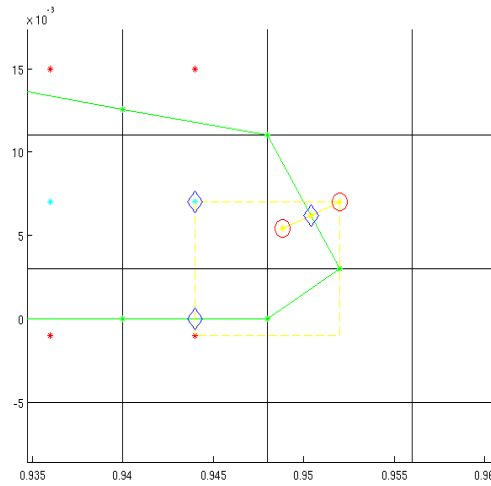


Figura 3.8: L'IS del RP relativo al GP esaminato (entrambi in rosso) ha il secondo vertice *dry_no_GP*. I tre vertici di interpolazione (in blu) sono dunque il BP relativo al primo vertice di IS, il BP relativo al terzo vertice di IS e il quarto vertice di IS.

Caso *dry_no_GP*: calcolo altezza totale

Avendo a disposizione solo tre punti di interpolazione consideriamo l'interpolante di Z della forma

$$Z(x, y) = c_1x + c_2y + c_3.$$

Riferendoci al caso particolare di figura (3.8) il quarto vertice é bagnato e fornisce quindi l'equazione

$$c_1x_4 + c_2y_4 + c_3 = Z_4.$$

Se un vertice é un GP consideriamo⁶ il suo BP e applichiamo la condizione al bordo (3.4) per ottenere l'equazione

$$\left. \frac{dZ}{dn} \right|_{BP} = \nabla Z \cdot \mathbf{n} = \nabla (c_1x + c_2y + c_3) |_{BP} \cdot \mathbf{n} = c_1n_x + c_2n_y = 0.$$

La matrice M di interpolazione, il vettore \mathbf{c} dei coefficienti e il termine noto \mathbf{b} diventano

$$M = \begin{bmatrix} n_{x1} & n_{y1} & 0 \\ n_{x3} & n_{y3} & 0 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_4 \end{bmatrix}$$

⁶In realtà un GP può avere due BP (e quindi due RP) distinti. In tal caso considereremo il punto riflesso più vicino a IS.

Caso *dry_no_GP*: calcolo portata

Consideriamo gli interpolanti di Q_x e Q_y della forma

$$Q_x(x, y) = c_{1_x}x + c_{2_x}y + c_{3_x}, \quad Q_y(x, y) = c_{1_y}x + c_{2_y}y + c_{3_y}.$$

Sempre in riferimento alla situazione di figura (3.8) il quarto vertice fornisce le equazioni

$$c_{1_x}x_4 + c_{2_x}y_4 + c_{3_x} = (Q_x)_4, \quad c_{1_y}x_4 + c_{2_y}y_4 + c_{3_y} = (Q_y)_4.$$

Preso invece un BP e applicando la condizione al bordo (3.2) si ottiene l'equazione

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y = (c_{1_x}x + c_{2_x}y + c_{3_x})n_x + (c_{1_y}x + c_{2_y}y + c_{3_y})n_y = 0$$

dove per semplicità sono stati omissi i pedici ad x, y, n_x e n_y per indicare il riferimento al BP. La condizione (3.3) porta invece all'equazione

$$\begin{aligned} \frac{dQ_t}{dn} &= \nabla(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} = \nabla(-Q_x n_y + Q_y n_x) \cdot \mathbf{n} = \\ &= (-c_{1_x}n_y + c_{1_y}n_x)n_x + (-c_{2_x}n_y + c_{2_y}n_x)n_y = 0. \end{aligned}$$

nel boundary point. In definitiva la matrice M , il vettore \mathbf{c} e il termine noto \mathbf{b} diventano

$$M = \begin{bmatrix} (xn_x)_1 & (xn_y)_1 & (yn_x)_1 & (yn_y)_1 & (n_x)_1 & (n_y)_1 \\ -(n_x n_y)_1 & (n_x^2)_1 & -(n_y^2)_1 & (n_x n_y)_1 & 0 & 0 \\ (xn_x)_3 & (xn_y)_3 & (yn_x)_3 & (yn_y)_3 & (n_x)_3 & (n_y)_3 \\ -(n_x n_y)_3 & (n_x^2)_3 & -(n_y^2)_3 & (n_x n_y)_3 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & y_4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & y_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{1_x} \\ c_{1_y} \\ c_{2_x} \\ c_{2_y} \\ c_{3_x} \\ c_{3_y} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (Q_x)_4 \\ (Q_y)_4 \end{bmatrix}$$

dove i pedici 1 e 3 in M si riferiscono ai BP e il pedice 4 si riferisce al centro cella bagnato. Trovati i coefficienti di interpolazione si ricavano $(Q_x)_{RP}$ e $(Q_y)_{RP}$.

3.2.4 Determinazione delle incognite nei ghost points

Una volta noto il valore delle incognite nel punto riflesso si esegue un'estrapolazione lineare sfruttando le condizioni al bordo. Per l'altezza totale si ha

$$\left. \frac{dZ}{dn} \right|_{BP} \approx \frac{Z_{GP} - Z_{RP}}{2d}$$

dove d è la distanza tra GP e BP e tra BP e RP. La condizione (3.4) porta dunque ad imporre

$$Z_{GP} = Z_{RP}.$$

Per la portata in direzione normale al bordo si ha, estrapolando linearmente,

$$(Q_n)_{BP} \approx \frac{(Q_n)_{GP} + (Q_n)_{RP}}{2}$$

e quindi per la (3.2) si ha

$$(Q_n)_{GP} = -(Q_n)_{RP}.$$

Infine

$$\left. \frac{dQ_t}{dn} \right|_{BP} \approx \frac{(Q_t)_{GP} - (Q_t)_{RP}}{2d}$$

e la (3.3) porta a scrivere

$$(Q_t)_{GP} = (Q_t)_{RP}.$$

Noti i valori $(Q_n)_{GP}$ e $(Q_t)_{GP}$ si calcolano i valori $(Q_x)_{GP}$ e $(Q_y)_{GP}$ risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Q_x)_{GP} \\ (Q_y)_{GP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Q_n)_{GP} \\ (Q_t)_{GP} \end{bmatrix}.$$

Capitolo 4

Simulazioni numeriche e analisi dei risultati

In questo capitolo mostriamo alcune simulazioni numeriche per testare le prestazioni del codice e la bontà dello schema numerico utilizzato sulla base delle proprietà discusse nei precedenti capitoli. Sono molti i criteri che si possono adottare per giudicare il lavoro svolto e in questo capitolo cercheremo di illustrare pregi e difetti del metodo in vari scenari con particolare riferimento al trattamento Immersed Boundary delle condizioni al contorno.

Per valutare nella sua globalità le simulazioni numeriche non bisogna dimenticare l'obiettivo finale e l'aspetto pratico nel quale il lavoro svolto si inserisce. Alcuni possibili aspetti applicativi derivati dalla risoluzione del sistema Shallow Water riguardano la previsione del movimento dell'acqua in una valle in seguito alla rottura di una diga oppure la descrizione di un'onda di maremoto che si infrange sulla costa. Il modello Shallow Water può essere quindi ritenuto valido in applicazioni di questo genere poichè le scale orizzontali sono molto maggiori di quelle verticali. La conservazione dell'energia è un importante criterio per valutare la pericolosità e la forza devastante dell'acqua in questi scenari. Seppur sia vero che l'energia dell'acqua diminuisca col passare del tempo, trascurare questo fatto consente di mettersi nel caso peggiore e quindi cautelarsi maggiormente, oltre che semplificare le equazioni. Senza dubbio vorremmo che le simulazioni numeriche conservino la massa e l'energia non solo per questioni modellistiche (il sistema Shallow Water conserva esattamente la massa e l'energia) ma anche e soprattutto per questioni ingegneristiche.

I metodi ai volumi finiti sono per loro natura adatti a descrivere leggi di conservazione e tra i vari schemi abbiamo scelto quello che realizzi un buon compromesso tra semplicità (e quindi basso costo computazionale), bassa dissipazione numerica e alto ordine di convergenza. Le proprietà di conservazione della nonnegatività dell'altezza dell'acqua e

di bilanciamento del termine sorgente per catturare esattamente gli stati stazionari sono proprietà molto importanti per la fisica del problema in esame. Limitare le oscillazioni spurie generate dai metodi numerici in prossimità di discontinuità é un altro fattore che va tenuto in considerazione nella valutazione di un metodo numerico, soprattutto nel campo delle equazioni iperboliche.

4.1 Test numerici

Per tutte le simulazioni illustrate in questa sezione, salvo avviso contrario, si é posto $\varepsilon = (\Delta x)^4$ mentre la costante CFL é pari a 0.22.

4.1.1 Stato stazionario di quiete con fondo non piatto

Consideriamo il cerchio unitario (dominio assegnato tramite level set), il fondo descritto dall'equazione

$$B(x, y) = 3.0 + e^{\sin(x) \cos(y)} \sin(5x) \cos(5y)$$

e le condizioni iniziali $Z = 5$ e $Q_x = Q_y = 0$, come mostrato in figura (4.1). Si osserva che la soluzione numerica mantiene esattamente lo stato di quiete, come previsto dalla teoria. Le portate presentano oscillazioni spurie dell'ordine di $10^{-16} \frac{m^2}{s}$. L'approccio Immersed Boundary delle condizioni di bordo chiuso si rivela adeguato vista anche la complessità del dominio rispetto alla griglia cartesiana di riferimento.

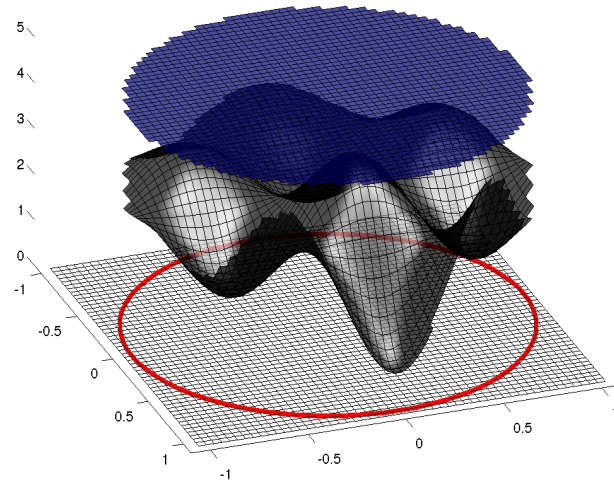


Figura 4.1: Fondo e altezza totale al tempo 0.7 s per il test di conservazione dello stato stazionario di quiete. La griglia cartesiana ha dimensioni 50×50 .

4.1.2 Analisi di convergenza

Dam break

Consideriamo un dominio rettangolare di dimensioni $20 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ inclinato di 45 gradi rispetto alla griglia cartesiana di riferimento. La configurazione iniziale prevede metà del rettangolo pieno d'acqua ($h = 1.0 \text{ m}$) e metà asciutto mentre la velocità iniziale é nulla. Il fatto che il dominio computazionale sia obliquo rispetto alla griglia cartesiana, come illustrato in figura (4.2), permette di testare la bontà del trattamento Immersed Boundary delle condizioni al contorno di bordo chiuso. Si tratta sostanzialmente di un problema monodimensionale del quale si ha la soluzione analitica che permette di effettuare l'analisi di convergenza. Il trattamento della transizione asciutto-bagnato avviene, come detto, tramite l'impiego della formula di desingularizzazione (2.23) con l'obiettivo di limitare gli errori numerici. In questo caso particolare si é visto che $\varepsilon = (\Delta x)^4$ altera significativamente la soluzione nei pressi della transizione asciutto-bagnato e l'effetto che si ottiene é quello di una soluzione numerica molto simile al fenomeno di dam break dove entrambe le zone sono bagnate. Per questa simulazione si é adottato $\varepsilon = 10^{-4}(\Delta x)^4$. In generale la scelta di ε deve realizzare un compromesso tra accuratezza e riduzione degli errori numerici in prossimità delle zone asciutte. La soluzione numerica

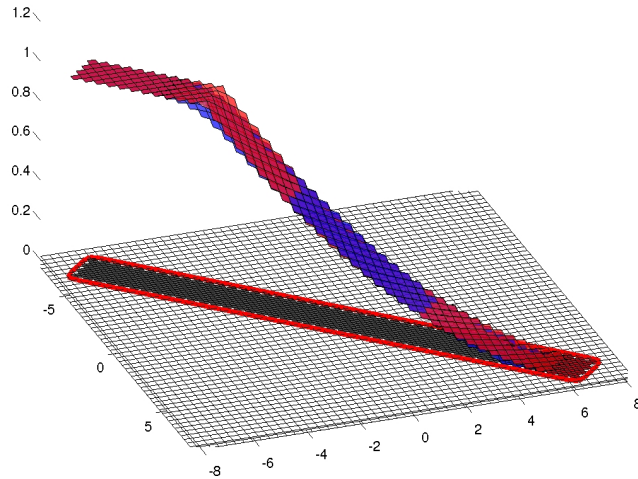


Figura 4.2: Soluzione analitica (in rosso) e numerica (in blu) del problema di dam break al tempo 1.5 s su una griglia cartesiana originale 50×50 .

tende a quella esatta e l'ordine di convergenza per questo problema risulta essere 1, come mostrato in tabella (4.1).

Si ottengono risultati simili per il problema di dam break dove entrambe le zone

$\Delta x = \Delta y$	$N_x = N_y$	Wet cells	Edges	Ghost cells	L^1 error	rate
0.64	25	109	92	52	0.7420	-
0.32	50	400	188	100	0.3443	1.11
0.16	100	1504	380	196	0.1712	1.01
0.08	200	6178	772	390	0.0869	0.98

Tabella 4.1: Errori in norma L^1 sull'altezza dell'acqua per il problema di dam break sul rettangolo obliquo al tempo 1.5 s.

risultano inizialmente bagnate e se il dominio rettangolare ha i lati paralleli alla griglia cartesiana di riferimento. In particolare l'ordine di convergenza risulta essere 1 in tutti i casi.

Ordine quadratico di convergenza

Consideriamo il dominio quadrato $[-1, 1]^2$, il fondo piatto e le condizioni iniziali regolari

$$Z(x, y) = h(x, y) = 0.2e^{-15(x^2+y^2)}; \quad Q_x = Q_y = 0.$$

Dato che non é disponibile una soluzione analitica per questo problema consideriamo una soluzione di riferimento calcolata al tempo 0.1 s su una griglia molto fitta pari a 640×640 e calcoliamo gli errori rispetto a questa soluzione. La tabella (4.2) mostra che l'ordine di convergenza é quadratico.

$N_x = N_y$	L^1 error	rate
10	1199.8	-
20	385.2	1.64
40	103.4	1.90
80	26.5	1.96
160	7.1	1.89

Tabella 4.2: Errori in norma L^1 sull'altezza dell'acqua per il problema con dato iniziale regolare sul quadrato $[-1, 1]^2$ al tempo 0.1 s.

4.1.3 Conservazione della massa e dell'energia

Questa simulazione ha l'obiettivo di testare la conservazione della massa e dell'energia tramite il trattamento Immersed Boundary delle condizioni al bordo. Consideriamo il

dominio rettangolare $\Omega = [-3, 3] \times [-1, 1]$ con lati paralleli alla griglia cartesiana e la condizione iniziale di dam break

$$Z(x, y) = h(x, y) = \begin{cases} 1.0 & \text{se } x \leq 0 \\ 0.0 & \text{se } x > 0 \end{cases} ; \quad Q_x = Q_y = 0. \quad (4.1)$$

Poichè il bordo è chiuso siamo interessati a verificare che la massa d'acqua si conservi visto che a priori questa proprietà non è garantita dall'approccio Immersed Boundary. Come visto nel capitolo 1 il sistema Shallow Water conserva l'energia totale se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ su $\partial\Omega$. Per la condizione di bordo chiuso (3.2) ci aspettiamo che la simulazione numerica conservi l'energia. A meno di dissipazioni intrinseche al metodo numerico vogliamo testare se il trattamento Immersed Boundary si rivela in questo caso adeguato soprattutto negli istanti di impatto tra l'onda e il bordo. Sono state considerate tre griglie di dimensioni 30×10 , 60×20 e 120×40 . Qualitativamente il fluido che incontra il bordo genera un'onda riflessa e si instaura un moto oscillante tra i due estremi della vasca. Il primo impatto con il bordo si ha al tempo 0.8 s mentre i successivi si hanno con una cadenza di circa 2.6 s ai tempi 4.1 s, 6.7 s, 9.3 s, 12.0 s, 14.7 s. La figura (4.3) mostra

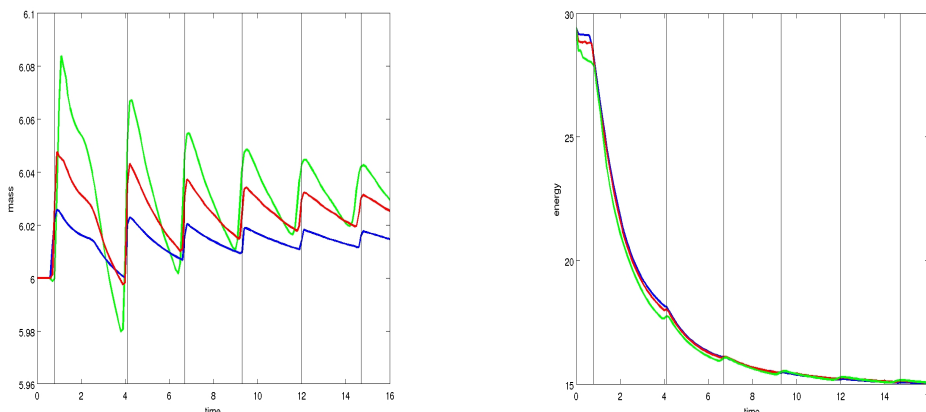


Figura 4.3: Massa ed energia in funzione del tempo per il problema sul rettangolo $[-3, 3] \times [-1, 1]$ e le condizioni iniziali (4.1). In blu i dati relativi alla griglia 120×40 , in rosso quelli relativi alla griglia 60×20 e in verde quelli relativi alla griglia 30×10 . Le linee verticali rappresentano gli istanti nei quali l'onda viene riflessa al bordo.

i risultati ottenuti. Per quanto riguarda la conservazione della massa si osservano delle fluttuazioni attorno al valore esatto di 6 m^3 evidenti negli istanti di riflessione dell'onda. Tuttavia l'errore viene visibilmente ridotto all'aumentare del numero di celle e nel caso 120×40 lo scostamento massimo dal valore esatto è inferiore allo 0.8%. Possiamo concludere che l'approccio Immersed Boundary associato alle condizioni di bordo chiuso è soddisfacente in merito alla conservazione della massa.

Per quanto riguarda l'energia totale si ha una forte dissipazione durante il primo impatto dell'onda con il bordo e la prima riflessione ($t \in [0.8, 4.1]$) e la situazione non migliora apprezzabilmente raddoppiando il numero di celle in entrambe le direzioni. Osserviamo che l'energia iniziale é pari a $3g = 29.43 \frac{m^3}{s^2}$ e che se l'evoluzione numerica tende ad uno stato stazionario l'energia tende a $\frac{3}{2}g = 14.71 \frac{m^3}{s^2}$ poichè la massa é praticamente conservata. Notiamo che per tempi inferiori a 0.8 s l'aumento del numero di celle produce un apprezzabile miglioramento relativo alla conservazione dell'energia. Tuttavia ripetendo la simulazione con lo stesso dominio inclinato di 45 gradi rispetto alla griglia cartesiana di riferimento si ottengono gli stessi risultati. Questo fatto consente di affermare che le dissipazioni di energia sono da imputare al metodo numerico e alle condizioni al bordo, ma non all'approccio Immersed Boundary.

4.1.4 Fondo non piatto: dam break con scivoli lineari

Consideriamo la configurazione iniziale del fluido (fermo) rappresentata in figura (4.4). In questa simulazione vogliamo verificare il corretto trattamento del fondo non piatto e della transizione asciutto-bagnato che avverrà lungo gli scivoli.

Qualitativamente il dam break di destra dovrà affrontare una curva verso sinistra e

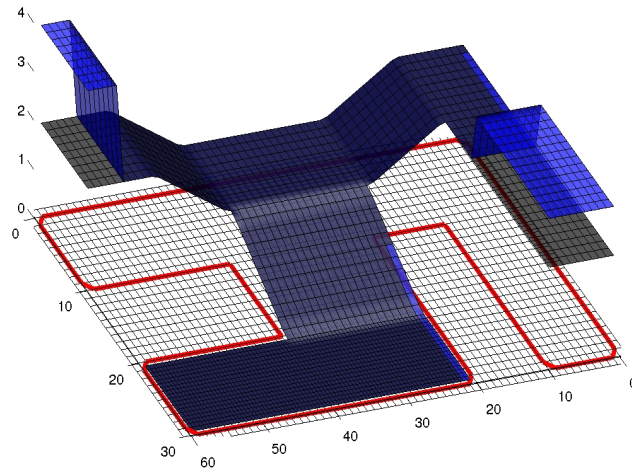


Figura 4.4: Configurazione iniziale con doppio dam break. Il fondale presenta tre scivoli lineari e una vasca di raccoglimento a valle. La griglia cartesiana ha dimensioni 60×30 .

darà luogo ad un'onda riflessa. Le masse d'acqua provenienti da destra e da sinistra scenderanno lungo i rispettivi scivoli e incontrandosi daranno luogo ad onde riflesse mentre una parte del fluido inizierà a percorrere lo scivolo centrale. Il fenomeno evolve

fino a raggiungere una situazione “stazionaria” con il fluido raccolto nella vasca a valle (vedere le figure (4.5) e (4.6)). Naturalmente ci aspettiamo che le simulazioni numeriche seguino la descrizione qualitativa. Notiamo che si ha

$$\max_{\Omega} \{B_x^2 + B_y^2\} = 0.01 \ll 1.$$

La simulazione numerica mostra che lo schema adottato risolve soddisfacentemente il

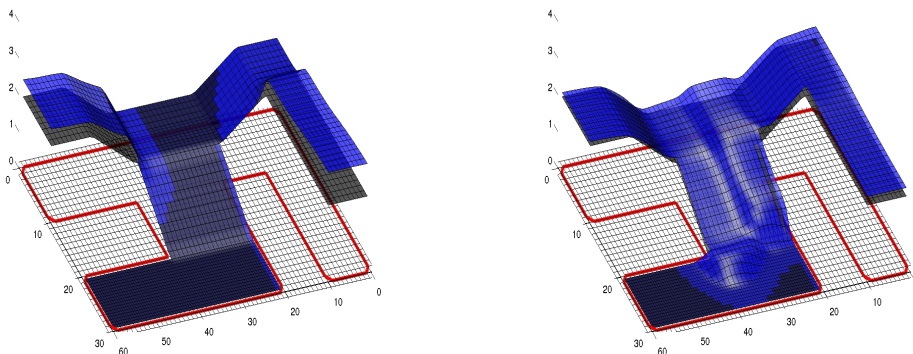


Figura 4.5: Altezza dell’acqua al tempo 5 s (a sinistra) e al tempo 30 s (a destra) per il problema degli scivoli lineari.

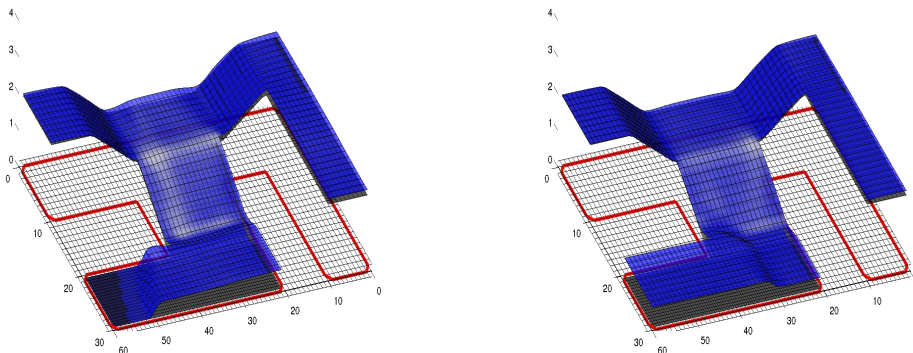


Figura 4.6: Altezza dell’acqua al tempo 55 s (a sinistra) e al tempo 100 s (a destra) per il problema degli scivoli lineari.

problema per quanto riguarda la transizione asciutto bagnato che avviene nelle zone dove il fondo non é piatto, la conservazione della massa é rispettata (fluttuazioni inferiori al 1.2% nel caso della griglia 180×90) mentre l’energia viene dissipata notevolmente

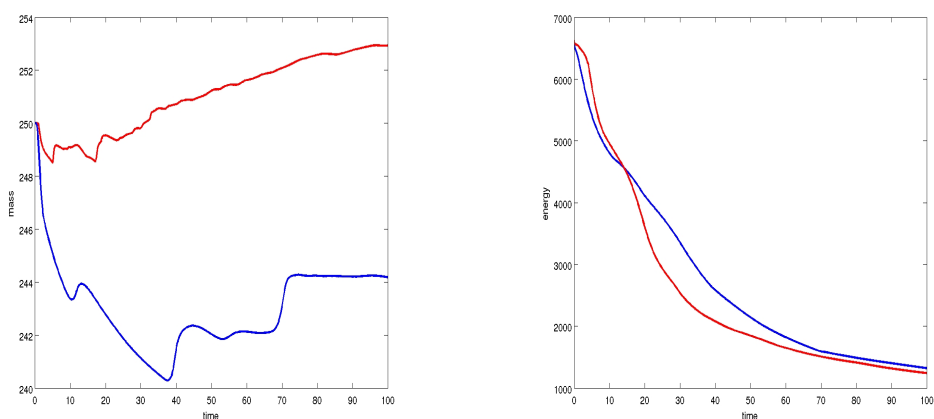


Figura 4.7: Massa in funzione del tempo (a sinistra) ed energia (a destra) per il problema degli scivoli lineari per griglie 60×30 (in blu) e 180×90 (in rosso).

anche nel caso della griglia più fitta e si ha una minor dispersione nel caso 180×90 rispetto al caso 60×30 solo per i primi 14 secondi.

In questa simulazione risulta molto interessante l'analisi dell'evoluzione del campo delle portate. Come detto la situazione più critica si ha laddove l'altezza dell'acqua è prossima a zero e in questi punti la scelta della formula di desingularizzazione del tipo (2.23) è un elemento che incide notevolmente sulle prestazioni dello schema numerico. Questa

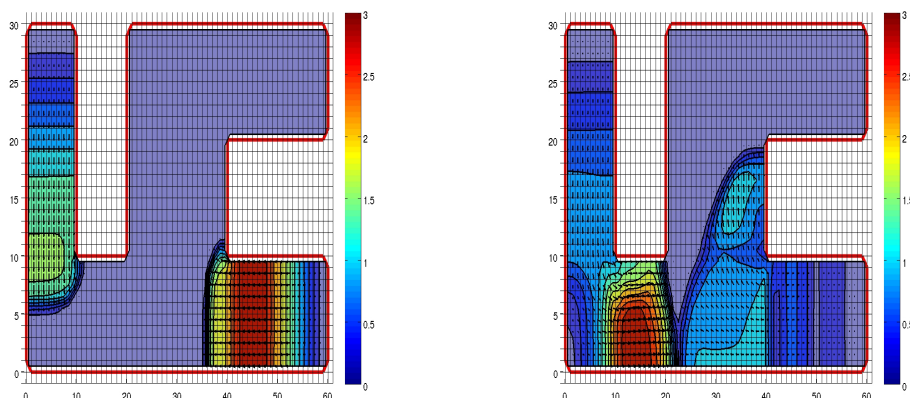


Figura 4.8: Campo delle portate al tempo 7 s (a sinistra) e al tempo 20 s (a destra) per il problema degli scivoli lineari.

formula interviene nel calcolo dei raggi spettrali e dei flussi ma non al termine del calcolo della soluzione numerica al nuovo istante temporale. Una rappresentazione del campo delle portate senza il calcolo delle velocità con conseguente ricalcolo delle portate stesse porta a risultati inverosimili (velocità nell'ordine dei $100 \frac{m}{s}$). D'altra parte desingulariz-

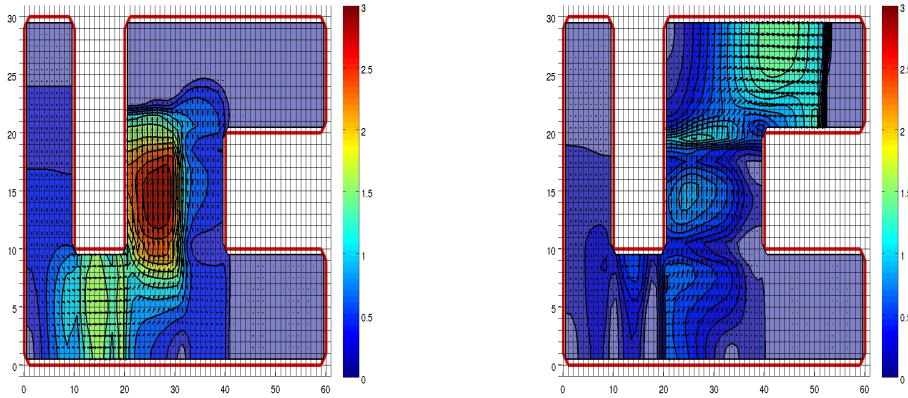


Figura 4.9: Campo delle portate al tempo 32 s (a sinistra) e al tempo 60 s (a destra) per il problema degli scivoli lineari.

zare dopo ogni iterazione porta a sottostimare le velocità con l'effetto che l'acqua “non scende” lungo gli scivoli. Si é deciso di mantenere le portate non desingularizzate per quanto riguarda l'evoluzione temporale ma di ricalcolarle in fase di visualizzazione. La vera soluzione da considerare é dunque quella mostrate nelle figure (4.8) e (4.9) anche se la soluzione numerica mantiene i valori non desingularizzati.

Dal punto di vista qualitativo l'approccio Immersed Boundary é adeguato a descrivere il campo di moto non banale associato a questo problema. In particolare risulta visibilmente soddisfatta la condizione $Q_n = 0$.

4.1.5 Trattamento Immersed Boundary delle condizioni al contorno

In questa simulazione vogliamo testare l'efficacia del trattamento Immersed Boundary delle condizioni al contorno in una geometria complessa (convergente-divergente) e tale per cui anche la dinamica del fluido risulti piuttosto complicata. Consideriamo il dominio e la condizione iniziale di dam break illustrata in figura (4.10). L'evoluzione risulterà complessa a causa della convergenza e della divergenza del dominio. A monte dello stretto condotto il fluido si innalzerá dando luogo ad un'onda riflessa mentre a valle il fluido che sopraggiunge tenderà ad espandersi. Ogni lato del dominio é inclinato rispetto alla griglia cartesiana di riferimento in modo da rendere il più influente possibile il trattamento Immersed Boundary.

L'altezza al tempo 6 s in figura (4.11) mostra l'innalzamento del fluido in prossimità della convergenza e l'espansione in prossimità della divergenza. Al tempo 12 s si può osservare l'onda riflessa generata nei pressi della convergenza che viaggia verso monte mentre nella zona a valle si nota l'infrangimento del fluido sul bordo. Al tempo 20 s, in figura (4.12),

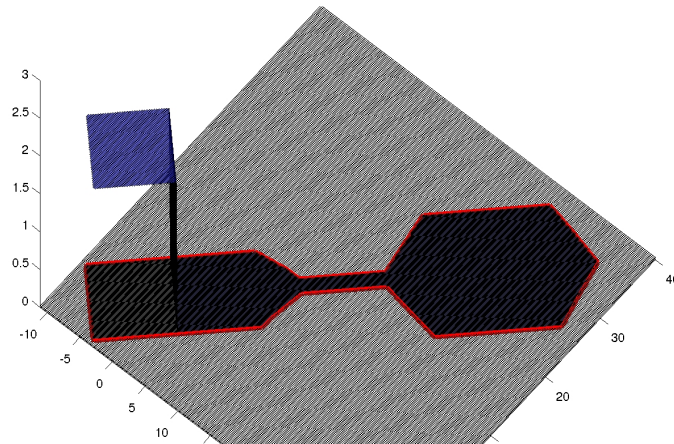


Figura 4.10: Condizione iniziale per il test sul trattamento Immersed Boundary delle condizioni al contorno.

si osserva l'onda riflessa dal condotto che ritorna verso di esso dopo essere stata riflessa dal bordo alla estrema sinistra. Il trattamento Immersed Boundary é soddisfacente in

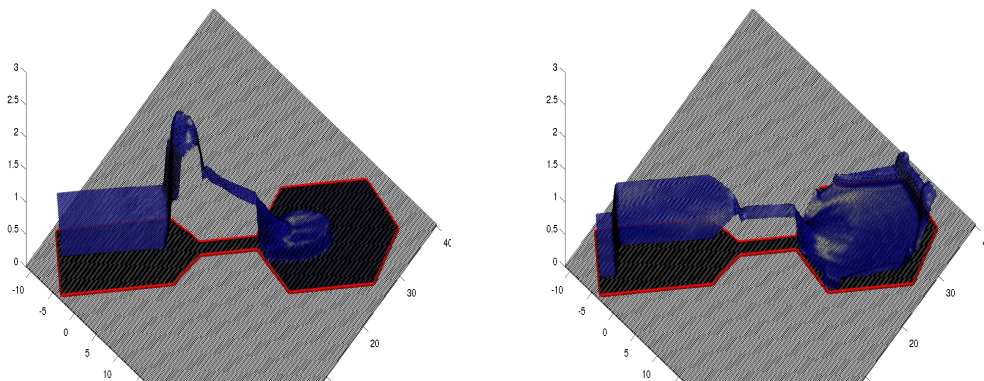


Figura 4.11: Altezza del fluido al tempo 6 s (a sinistra) e al tempo 12 s (a destra) per il problema convergente-divergente.

quanto viene rispettato l'andamento qualitativo con geometria ed evoluzione complesse. In figura (4.13) viene mostrato il campo delle portate al tempo 5 s nei pressi del condotto. Osserviamo il fluido che sopraggiunge parallelamente al condotto con una portata di circa $2 \frac{m^2}{s}$ e le linee del campo che quasi bruscamente diventano parallele alla convergenza per poi riallinearsi altrettanto bruscamente in direzione parallela al condotto¹ dove la

¹Ricordiamo che il fluido é perfetto e quindi un brusco cambiamento del campo di moto non dá luogo a sforzi tangenziali.

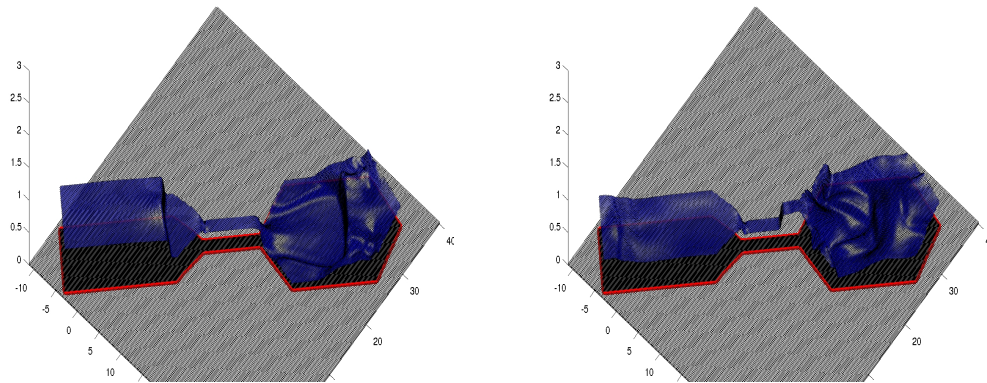


Figura 4.12: Altezza del fluido al tempo 20 s (a sinistra) e al tempo 55 s (a destra) per il problema convergente-divergente.

portata vale circa $4 \frac{m^2}{s}$. Possiamo anche in questo caso affermare che il dominio é ben rappresentato con la tecnica Immersed Boundary.

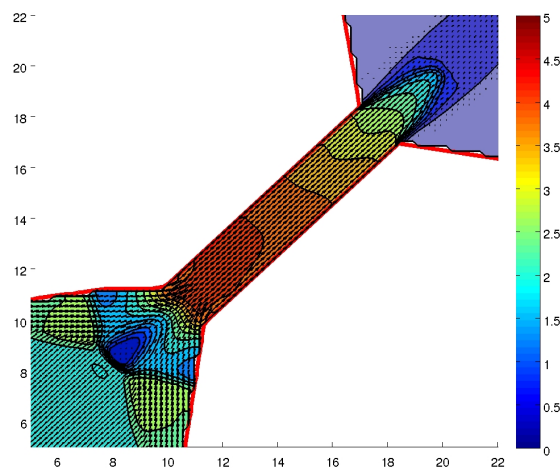


Figura 4.13: Campo delle portate in prossimità della convergenza al tempo 5 s per il test sul trattamento Immersed Boundary delle condizioni al contorno.

4.1.6 Un caso reale: la diga di Malpasset

La diga di Malpasset fu costruita nel 1954 sul fiume Reyran, la cui acqua era destinata al consumo idropotabile e all'irrigazione agricola. Era alta circa 66 metri e doveva essere in grado di contenere un bacino di volume pari a circa 48 milioni di metri cubi. Nel 1959, a causa di intense precipitazioni che fecero salire velocemente il livello del lago, la diga

collassò dando luogo a un'onda alta circa 40 metri. Questo avvenimento è un caso reale unico, dato che sono noti i dati relativi al tempo d'arrivo del fronte d'onda e l'elevazione massima dell'acqua dell'evento originale in diversi punti della valle. I dati relativi alla batimetria sono stati forniti attraverso una matrice di dimensione 1100×440 relativi ad una griglia con celle quadrate di dimensioni $15 \text{ m} \times 15 \text{ m}$. Alcune entrate della matrice contengono dati non validi fissati al valore 110 m mentre i valori validi sono tutti inferiori a tale valore. Tuttavia in questo caso la costruzione del dominio per *level set* non può essere effettuata non avendo a disposizione una funzione differenziabile. Si è proceduto estraendo la curva di livello di ordine 105 m tramite la funzione `contour` di Matlab e costruendo il dominio per vertici. Un possibile sviluppo del codice riguarda la costruzione del dominio tramite level set partendo da una matrice come quella disponibile in questa simulazione. In linea di principio l'utilizzo di un dominio di forma rettangolare contenente anche i dati non validi non altera la simulazione, poichè l'acqua si mantiene sempre all'interno della valle. L'approccio Immersed Boundary viene qui testato solamente per quanto riguarda la costruzione di un dominio molto complesso, come si vede in figura (4.14). Si è considerata una griglia 800×400 di passo $\Delta x = \Delta y = 17.5 \text{ m}$. La figura (4.15) mostra l'altezza dell'acqua dopo 1000 secondi dalla rottura della diga e la figura (4.16) mostra il campo della portata in prossimità della diga a 200 secondi dal collasso.

Per una descrizione più dettagliata di questa simulazione consultare [15].

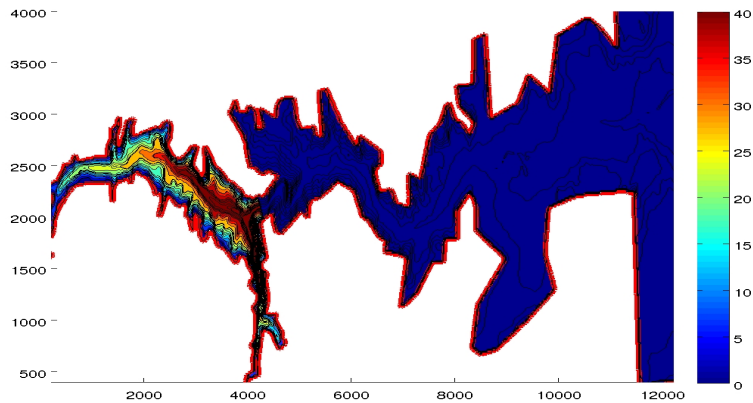


Figura 4.14: Conformazione della valle, altezza iniziale dell'acqua e punti di osservazione per la simulazione relativa alla diga di Malpasset.

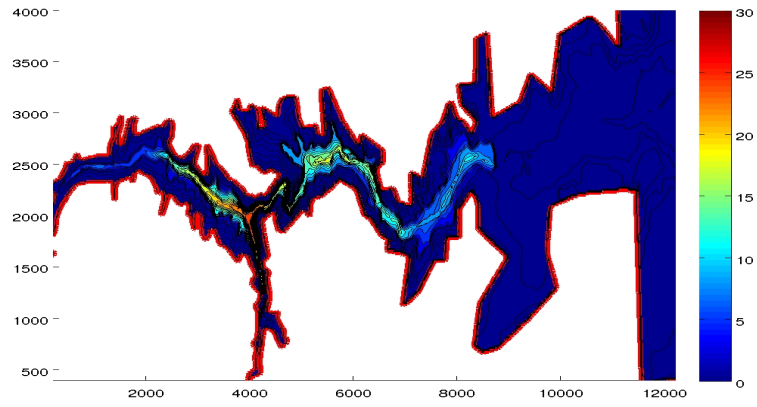


Figura 4.15: Altezza dell'acqua a 1000 secondi dalla rottura della diga.

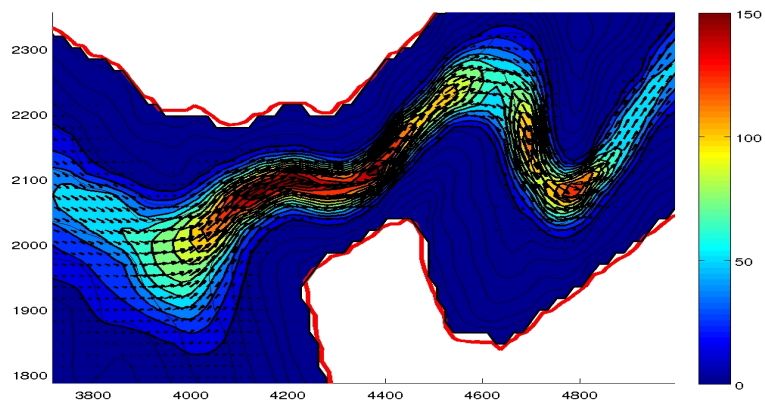


Figura 4.16: Campo delle portate a 200 secondi dalla rottura della diga.

Capitolo 5

Conclusioni e sviluppi futuri

Il presente lavoro ha mostrato l'impiego delle tecniche Immersed Boundary applicato alla risoluzione numerica del sistema Shallow Water mediante un metodo centrale ai volumi finiti. Il capitolo riguardante le simulazioni ha mostrato come questo tipo di approccio consenta di trattare domini poligonali anche complessi, come nel caso della diga di Malpasset, consentendo l'utilizzo di una griglia cartesiana che sostanzialmente é indipendente dal dominio stesso. Come già osservato un possibile ampliamento del codice riguarda la possibilità di generare domini per level set partendo da una matrice di valori piuttosto che assegnando una funzione differenziabile.

Le simulazioni hanno mostrato come venga ben rispettata la condizione di bordo chiuso imponendo con la tecnica Immersed Boundary l'annullamento della componente normale della portata. Un possibile sviluppo può orientarsi verso l'imposizione di condizioni al bordo diverse, come ad esempio l'imposizione di un certo valore della portata su tutto il dominio o solo su una parte di esso. In ambito fluidodinamico i metodi Immersed Boundary sono adatti a rappresentare ostacoli sul territorio che possono essere trattati come monodimensionali, come strade sopraelevate o ferrovie. In questi casi é a priori permesso al fluido di trovarsi da entrambi i lati dell'ostacolo mentre in questo lavoro il fluido si trova sempre da una parte ben definita. Il trattamento di queste situazioni é sicuramente un possibile ampliamento del lavoro svolto. L'estensione più importante riguarda la possibilità di avere domini mobili per lo studio di interazioni fluido-struttura. In questi casi ad ogni passo temporale, nota la posizione del nuovo bordo, si dovranno eseguire da capo tutte le procedure esposte nel capitolo 3.

Appendice A

Codice numerico

Il codice numerico é stato implementato in linguaggio C++ ed é stato strutturato in modo che tutto il trattamento Immersed Boundary avvenga automaticamente e venga svolto da un'unica classe che gestisce anche il tipo di condizioni al bordo e le conseguenti matrici di interpolazione. La classe `grid` legge da file i dati di input relativi al numero di celle in direzione x e y e il file dei vertici del dominio assegnato per punti¹, dopodichè crea il dominio computazionale, le matrici di interpolazione e determina le *wet cells* e le *ghost cells*. Tramite alcuni metodi pubblici l'applicazione di un semplice metodo numerico ai volumi finiti diventa estremamente semplice, dovendo iterare solo sulle celle bagnate applicando lo schema desiderato senza doversi occupare della gestione delle condizioni al bordo. La struttura dati é basata principalmente sul contenitore generico `map` della standard library mentre le matrici vengono gestite dal software `Eigen`.

¹Se si sceglie questa modalit .

Appendice B

Soluzione analitica dam break monodimensionale

Consideriamo il sistema Shallow Water 1D

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ u_t + uu_x + gh_x = 0 \end{cases}$$

definito sulla retta reale per $t > 0$. Consideriamo la condizione iniziale di dam break

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_0 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

e $u(x, 0) = 0$. Si può dimostrare che la soluzione analitica di tale problema é la seguente:

$$h(x, t) = \begin{cases} h_0 & \text{se } x \leq -c_0t \\ \frac{1}{9g}(2c_0 - \frac{x}{t}) & \text{se } -c_0t < x < 2c_0t \\ 0 & \text{se } x \geq 2c_0t \end{cases}$$

e

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -c_0t \\ \frac{2}{3}(c_0 + \frac{x}{t}) & \text{se } -c_0t < x < 2c_0t \\ 0 & \text{se } x \geq 2c_0t \end{cases}$$

dove $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

Bibliografia

- [1] A. Quarteroni, “*Modellistica numerica per problemi differenziali*”; Terza edizione, Springer (2006)
- [2] H. Nessyahu, E. Tadmor, “*Non-oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws*”; Journal of Computational Physics 87, 1990, 408-463
- [3] A. Kurganov, E. Tadmor, “*New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations*”; Journal of Computational Physics 160, 2000, 214-282
- [4] D. Levy D, G. Puppo, G. Russo, *Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws*; M2AN Math. Model. Numer. Anal. 33 (1999), no. 3, 547-571. MR 2000f:65079
- [5] A. Kurganov, D. Levy “*A third-order semi-discrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equations*”; Arxiv preprint math/0002133 (2000)
- [6] B. Cockburn B, C. W. Shu, “*Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems*”; Journal of Scientific Computing 16 (2001) 173-261
- [7] A. Kurganov, G. Petrova, “*A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the Saint-Venant system*”; Commun. Math. Sci. 5 (2007), no. 1, 133-160
- [8] J. Balbás, S. Karni “*A central scheme for shallow water flows along channels with irregular geometry*”; ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 333-351 (2009)
- [9] G. Russo, “*Central schemes for conservation laws with application to shallow water equations*”; Trends and Applications of Mathematics to Mechanics, 225-246 (2005)

- [10] M. Altinakar, “*Representation of Linear Terrain Features in a 2D Flood Model with Regular Cartesian Mesh*” dal sito
<http://www.serri.org/publications/Pages/technicalpapers.aspx>
- [11] M. Altinakar, M. McGrath, Y. Ozeren, E. Miglio, “*Two Sided Cut Cell Boundary Method for Simulating Linear Terrain Features and 1D Stream Flows on a 2D Rectangular Mesh*” dal sito
<http://www.serri.org/publications/Pages/technicalpapers.aspx>
- [12] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F.M. Najjar, A. Vargas, A. von Loebbecke, “*A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries*”; *Journal of Computational Physics* Volume 227, Issue 10, 1 May 2008, Pages 4825-4852
- [13] R. Mittal and G. Iaccarino, “*Immersed Boundary Methods*”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 37, pp. 239-261, 2005
- [14] <http://www.cscamm.umd.edu/centpack/>
- [15] D. Ferrarese, *Metodi a volumi finiti centrati well balanced per la soluzione delle equazioni delle Shallow Water*; tesi di laurea in Ingegneria Matematica (2010)