

POLITECNICO DI MILANO

SCUOLA DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE E TERRITORIALE
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile



ANALISI DINAMICA DELLA GUGLIA MAGGIORE DEL DUOMO DI MILANO SOGGETTA AD AZIONI SISMICHE

Relatore: Prof. Federico PEROTTI

Correlatore: Prof. Alfredo CIGADA

Linda Postoli - Matricola 751602
Paolo Giorgetti - Matricola 751269

Anno Accademico 2011/2012

INDICE

| | | |
|-------|--|----|
| 1. | INTRODUZIONE | 2 |
| 2. | IDENTIFICAZIONE DEL COMPORTAMENTO DELLA GUGLIA MAGGIORE PER VIA SPERIMENTALE | 6 |
| 3. | MODELLAZIONE DELLA GUGLIA | 11 |
| 3.1 | MODELLO A BASE RIGIDA | 11 |
| 3.1.1 | GEOMETRIA | 11 |
| 3.1.2 | MASSE/CARICHI | 17 |
| 3.2 | VERIFICA E ADEGUAMENTO DEL MODELLO INIZIALE | 20 |
| 3.2.1 | PROPRIETA' MODALI MODELLO 1 (INIZIALE) | 21 |
| 3.2.2 | MODELLO 2 | 22 |
| 3.2.3 | MODELLO 3 | 25 |
| 3.2.4 | VERIFICA DELLE PROPRIETA' DEL MATERIALE | 29 |
| 3.3 | MODELLO CON ROTAZIONI ALLA BASE | 31 |
| 3.4 | RIEPILOGO | 33 |
| 4 | RISPOSTA IN FREQUENZA | 35 |
| 4.1 | TIPO DI SEGNALE | 36 |
| 4.2 | TRASFORMATA DI FOURIER | 38 |
| 4.1.1 | TRASFORMATA DI FOURIER CONTINUA | 38 |
| 4.1.2 | TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA | 39 |
| 4.3 | SPETTRI DI FOURIER | 40 |
| 5 | CONFRONTO | 48 |
| 5.1 | DATI A DISPOSIZIONE | 48 |
| 5.2 | CONFRONTO DEGLI SPETTRI DI FOURIER. | 50 |
| 5.2.1 | RISPOSTA SPERIMENTALE | 51 |
| | | 2 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 5.2.2 | RISPOSTA NUMERICA | 58 |
| 5.2.3 | SOVRAPPOSIZIONE DEGLI SPETTRI DI FOURIER | 66 |
| 5.3 | CONFRONTO DEGLI SPETTRI DI RISPOSTA. | 70 |
| 5.3.1 | SPETTRO DI RISPOSTA: OSCILLATORE SEMPLICE | 70 |
| 5.3.2 | Spettro della normativa tecnica italiana (2008). | 72 |
| 5.3.3 | SPETTRI DI RISPOSTA RELATIVI AL SUOLO DEL DUOMO DI MILANO | 74 |
| 6 | VERIFICHE STRUTTURALI | 81 |
| 6.1 | VERIFICA CORPO CENTRALE | 82 |
| 6.1.1 | DOMINIO DI INTERAZIONE M – N | 82 |
| 6.1.2 | VERIFICA SEMPLIFICATA PER AZIONI TAGLIANTI | 88 |
| 6.2 | VERIFICA PILASTRI TELAIO ESTERNO | 92 |
| 6.3 | RIEPILOGO | 100 |
| 7 | CONCLUSIONI | 101 |
| | APPENDICE 1 | 1 |
| | INPUT PROGRAMMA | 1 |
| | DATI REGISTRATI AL LIVELLO 3. | 1 |
| | CONVERSIONE FILE | 4 |
| | DEFINIZIONE LOAD CASES | 5 |
| | ESEGUI ANALISI | 6 |
| | BIBLIOGRAFIA | |

INDICE DELLE FIGURE

| | |
|--|----|
| Figura 1.1: Forma del ponteggio realizzato | 4 |
| Figura 2.1: Disposizione degli strumenti | 7 |
| Figura 2.2: Livelli di misura sulla Guglia Maggiore del Duomo. | 8 |
| Figura 2.3: Posizionamento degli accelerometri in pianta. | 8 |
| Figura 2.4: PSD dei segnali calcolata tra 0-10 Hz. | 9 |
| Figura 3.1: Geometria della Guglia Maggiore del Duomo di Milano considerata per il modello | 12 |
| Figura 3.2: Sezione corpo centrale | 13 |
| Figura 3.3: Modello 3d iniziale della cuspide | 14 |
| Figura 3.4: <i>Sezione pilastro</i> | 14 |
| Figura 3.5: Sezione travetti pilastro - pilastro | 15 |
| Figura 3.6: Travetti scale | 15 |
| Figura 3.7: Modello 1 | 17 |
| Figura 3.8: Deformata modo 1 (modello 1) | 21 |
| Figura 3.9: Effetto traliccio delle decorazioni della cuspide | 22 |
| Figura 3.10: Sezione orizzontale e verticale della modellazione della cuspide | 23 |
| Figura 3.11: Scema strutturale traliccio | 24 |
| Figura 3.12: Elementi travetti scale modificati | 25 |
| Figura 3.13: Allargamento della parte bassa considerato al 3° tentativo | 26 |
| Figura 3.14: Modellazione dell'allargamento sezionale alla base della guglia | 26 |
| Figura 3.15: Travetto aggiuntivo tra i pilastri | 27 |
| Figura 3.16: Modello in Sap 2000 al tentativo 4 | 28 |
| Figura 3.17: Dati degli inclinometri al balconcino e alla base della guglia in seguito al sisma del 25 Febbraio. | 31 |
| Figura 4.1: Posizione accelerometri | 36 |
| Figura 4.2: Segnale affetto da aliasing. | 37 |
| Figura 4.3: Segnale discreto che rappresenta correttamente quello continuo. | 37 |
| Figura 4.4: Posizione degli accelerometri installati sulla Guglia Maggiore. | 41 |
| 4.5 a): Posizione degli accelerometri sulla Guglia Maggiore del Duomo di Milano. | 42 |

| | |
|---|----|
| Figura 4.6 b) : Nodo #32 nel modello in corrispondenza dell'accelerometro al Livello 1 | 42 |
| Figura 4.7: Storia temporale sperimentale al Livello 1, sisma del 17 Luglio in direzione X e Y. | 43 |
| Figura 4.8:Storie temporali numeriche (INCASTRO) al Livello 1,sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y. | 44 |
| Figura 4.9: Storie temporali numeriche (MOLLA) al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y. | 44 |
| Figura 4.10: Posizionamento di un nuovi accelerometri | 46 |
| Figura 4.11: Dati Numerici e sperimentali al Livello 1, sisma del 17 Luglio2011 in direzione X. | 47 |
| Figura 4.12: Dati Numerici ottenuti con i due modelli, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y. | 47 |
| Figura 5.1: Particolare della Carta geologica di Milano. | 49 |
| Figura 5.2: Posizione degli accelerometri sulla Guglia Maggiore. | 51 |
| Figura 5.3: Dati Sperimentali al Livello 3, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y. | 52 |
| Figura 5.4: Dati Sperimentali al Livello 3, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X e Y. | 53 |
| Figura 5.5: Dati Sperimentali al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y. | 54 |
| Figura 5.6: Dati Sperimentali al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X e Y. | 55 |
| Figura 5.7: Dati Sperimentali misurati al Livello 1 e 3 relativi al sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X. | 56 |
| Figura 5.8: Dati Sperimentali misurati al Livello 1 e 3 relativi al sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y. | 56 |
| Figura 5.9: Dati Sperimentali misurati al Livello 1 e 3 relativi al sisma del 25 Febbraio 20012 in direzione X. | 57 |
| Figura 5.10: Dati Sperimentali misurati al Livello 1 e 3 relativi al sisma del 25 Febbraio 20012 in direzione Y | 57 |
| Figura 5.11: Nodi del modello in corrispondenza degli accelerometri. | 59 |
| Figura 5.12: Dati Numerici (modello con l'incastro) al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y. | 61 |

| | |
|---|----|
| Figura 5.13: Dati numerici (modello con la molla) al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y. | 61 |
| Figura 5.14: Dati numerici (modello con l' incastro) al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X e Y. | 62 |
| Figura 5.15: Dati numerici (modello con la molla) al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X e Y | 62 |
| Figura 5.16: Spettri di Fourier dei due modelli al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X. | 64 |
| Figura 5.17: Spettri di Fourier dei due modelli al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y. | 64 |
| Figura 5.18: Spettri di Fourier dei due modelli al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X. | 65 |
| Figura 5.19: Spettri di Fourier dei due modelli al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione Y. | 65 |
| Figura 5.20: Sovrapposizione degli spettri "sperimentale" e "numerici" al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X. | 66 |
| Figura 5.21: Sovrapposizione degli spettri "sperimentale" e "numerici" al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y. | 67 |
| Figura 5.22: Sovrapposizione degli spettri "sperimentale" e "numerici" al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X. | 67 |
| Figura 5.23: Sovrapposizione degli spettri "sperimentale" e "numerici" al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione Y. | 68 |
| Figura 5.24: Dati sperimentali: misurati in situ al Livello 3 e dall'INGV, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y. | 69 |
| Figura 5.25: Oscillatore semplice. | 70 |
| Figura 5.26: Spettro di risposta dei sismi del 17 Luglio 2011 e 25 Febbraio 2012 in direzione X. | 72 |
| Figura 5.27: Spettro elastico normalizzato | 73 |
| Figura 5.28: Spettro di risposta elastico secondo la Normativa Tecnica Italiana (2008) relativa al Comune di Milano. | 75 |

| | |
|--|----|
| Figura 5.29: Spettro di progetto e spettri di risposta dei sismi del 17 Luglio 2011 e 25 Febbraio 2012 in direzione X. | 76 |
| Figura 5.30: Spettri di progetto e spettri di risposta dei sismi del 17 Luglio 2011 e 25 Febbraio 2012 in direzione Y. | 76 |
| Figura 5.31: Spettro di risposta al Livello 3 e al CNR (o INGV) per il sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X. | 77 |
| Figura 5.32: Spettro di risposta al Livello 3 e al CNR (o INGV) per il sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y. | 78 |
| Figura 5.33: Spettri di risposta dei sismi del 20 e 29 Maggio in direzione X | 79 |
| Figura 5.34: Spettri di progetto SLD e SLV e spettri di risposta del sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X al Livello 3 | 79 |
| Figura 5.35: Spettri di progetto SLD e SLV e spettri di risposta del sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione Y al Livello 3 della Guglia | 80 |
| Figura 6.1: Posizione del nodo 52 nel modello | 81 |
| Figura 6.2: Sezione pilastro con individuazione dei punti in cui cambia la sezione per il calcolo di area e baricentro | 83 |
| Figura 6.3: segmenti circolari per il calcolo di aree e baricentri | 84 |
| Figura 6.4: Dominio M-N relativo al corpo centrale con le azioni interne relative al nodo 52 dell'asta 45 | 85 |
| Figura 6.5: Ingrandimento diagramma N – M allo SLV | 86 |
| Figura 6.6: Diagramma M–N con le azioni allo SLD aventi la peggiore combinazione prevista dalla stessa | 87 |
| Figura 6.7: Ingrandimento del diagramma N M allo SLD | 87 |
| Figura 6.8: Andamento del teglio nei due modelli | 89 |
| Figura 6.9: Sezione pilastro, avente un asse di simmetria | 92 |
| Figura 6.10: Divisione del pilastro in areole | 93 |
| Figura 6.11: Pianta dei pilastri con relativi valori di N in seguito al sisma di Febbraio | 94 |
| Figura 6.12: Momenti limite per il pilastro 28 | 96 |
| Figura 6.13: Momenti limite per il pilastro 34 | 96 |
| Figura 6.14: Momenti limite per il pilastro 40 | 96 |

| | |
|---|----|
| Figura 6.15: Momenti limite per il pilastro 46 | 97 |
| Figura 6.16: Momenti limite per il pilastro 58 | 97 |
| Figura 6.17: Momenti limite per il pilastro 70 | 97 |
| Figura 6.18: Mappa pilastri con le rispettive rotazioni per trasformare il sistema di riferimento locale in globale | 98 |
| Figura 0.1 Schema illustrativo della creazione dell'input nel software. | 1 |
| Figura 0.2 Accelerometri e rispettivi assi | 2 |
| Figura 0.3 Direzione degli assi degli accelerometri in pianta, Livello 3 | 2 |
| Figura 0.4 Scomposizione delle storie temporali | 3 |
| Figura 0.5 Definizione della storia temporale in SAP relativa al sisma del 17 Luglio 2011, direzione x. | 4 |
| Figura 0.6 Definizione della sollecitazione conseguente al Sisma del 17 Luglio 2011, direzione x | 5 |

1. INTRODUZIONE

Il Duomo di Milano e la sua Madonnina sono da sempre un punto di riferimento, un simbolo, una parte essenziale, nonché l'orgoglio della città e del suo popolo, i milanesi, i quali furono i maggiori finanziatori di questa meravigliosa opera.

Questa cattedrale, dedicata a Maria Nascente, è un esempio unico di architettura gotica la cui costruzione ebbe inizio nel 1386 e proseguì nei secoli successivi. Venne scelto in fase di progetto da Gian Galeazzo Visconti (Signore di Milano che assunse il controllo dei lavori) di adottare come materiale per la costruzione il marmo di Candoglia.

Nei primi anni del sedicesimo secolo venne terminata la costruzione del tiburio e Giovanni Antonio Amedeo propose un modello della Guglia Maggiore la cui costruzione venne presto interrotta. Lo studio di una soluzione richiese molto tempo e il contributo di molte importanti personalità dell'epoca, tra cui l'ingegnere Bartolomeo Bolla e Carlo Giuseppe Merlo (architetto della Veneranda Fabbrica) successore di Antonio Quadrio, fino a Francesco Croce, successore di Merlo, che presentò il progetto di quella che tutt'ora è la Guglia Maggiore nella primavera del 1764.

La sua costruzione sollevò fino dai suoi primi progetti molti dubbi e critiche anche da parte di illustri personalità, nonostante il tema della sicurezza fosse sempre in primo piano. Per questo motivo il Capitolo della Fabbrica del Duomo non poteva rimanere indifferente ma chiese sempre "pareri" esterni in merito. In particolare, agli studiosi dell'epoca venne sollevato un duplice quesito: primo, *se la progettata guglia fosse sufficientemente solida se considerata in sé stessa*; secondo, *se essa fosse adeguatamente solida in relazione alla fermezza di tutta la Cattedrale*.

Questo quesito, quindi, mise in evidenza due problemi: il primo relativo alla guglia, una struttura snella in marmo, alta trenta metri, da collocare in ad una quota che la esponeva agli effetti del vento; e il secondo relativo alla struttura sottostante alla quale veniva appoggiata, nello specifico, al tiburio.

A questi quesiti, entrambi i matematici interpellati, con studi che si basavano su approcci diversi ma con la stessa accuratezza di calcolo e attenzione al dettaglio, pervennero a stabilire la fattibilità della costruzione che si concluse nel 1769.

Ebbe ben presto però i primi problemi: nel 1842 infatti, i tiranti in ferro, inseriti all'interno della struttura per conferire maggiore resistenza al marmo, ormai corrosi, fecero crollare una parte del belvedere. Questo problema continuò negli anni e aumentò a causa del forte inquinamento fino a quando, negli anni '60, vennero sostituiti molti degli elementi corrosi con altri in acciaio inossidabile. Il degrado però, non colpì solo gli elementi metallici, ma anche quelli in marmo.

Oggi infatti si stanno facendo i conti con gli stessi problemi di restauro riscontrati un secolo fa. Infatti i lavori di restauro riguardano la sostituzione degli elementi in ferro e di quelli in marmo. In particolare i tiranti in ferro vengono sostituiti con elementi in acciaio con le due estremità in titanio per evitare, come già si è verificato, che la diversa dilatazione termica tra marmo e ferro causi la fessurazione del marmo nel punto di connessione tra i due materiali.

Gli elementi in marmo, che sulla guglia maggiore sono esposti in maggior modo alle azioni ambientali e all'inquinamento, vengono sostituiti: il blocco viene estratto dalla sua sede e momentaneamente sostituito con puntelli che svolgono il suo compito strutturale; questo viene trasportato alla cava della Veneranda Fabbrica in cui viene ricostruito interamente dagli scultori e quindi reinserto nella sede originale.

Per intraprendere questi lavori di restauro, è stata necessaria l'erezione di un ponteggio metallico, che tutt'ora circonda la Guglia Maggiore. Questa opera è delicata in quanto aumenta considerevolmente la superficie esposta al vento, i cui effetti, se trasmessi alla Guglia, potrebbero risultare deleteri. Un altro aspetto a lungo considerato, è stato il supporto al quale viene appoggiato il ponteggio.

Per questi due motivi è stata scelta la realizzazione del ponteggio, riportato in Figura 1.1, che non avesse alcuna connessione intermedia atta a trasferire forze tra le due strutture.

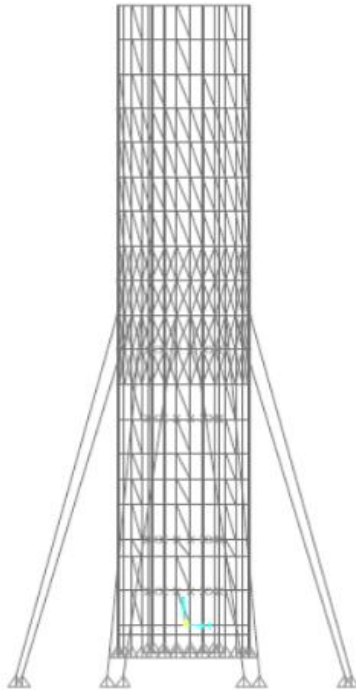


Figura 1.1: Forma del ponteggio realizzato

All'interno quindi di questo vasto progetto di recupero di elementi e realizzazione del ponteggio si inserisce il ruolo del Politecnico di Milano. Diversi sono i dipartimenti coinvolti e molti sono gli studi effettuati su questa struttura: dal progetto del ponteggio alla ricostruzione tridimensionale della guglia, al monitoraggio delle vibrazioni della struttura e altro ancora.

In particolare il Dipartimento di Meccanica ha disposto un accurato sistema di monitoraggio della Gran Guglia attraverso strumenti di misurazione quali accelerometri, inclinometri e potenziometri; tale sistema è stato utile, non solo a monitorare lo spostamento relativo fra la Guglia e il ponteggio, ma anche a consentire la caratterizzazione dinamica della Guglia stessa, effettuata sulla base di vibrazioni ambientali. Ha inoltre consentito di rilevare la risposta della Guglia ai recenti terremoti verificatisi nel nord Italia,

Data questa disponibilità di dati sperimentali, ci si è proposti di sfruttare questa opportunità andando a creare un modello dinamico della Guglia, calibrato sulla base della caratterizzazione precedentemente effettuata dal Dipartimento di Meccanica. Il modello

è stato impiegato per valutare e la risposta ai recenti eventi sismici ed effettuare qualche prima verifica del comportamento strutturale sotto l'azione dei terremoti.

2. IDENTIFICAZIONE DEL COMPORTAMENTO DELLA GUGLIA MAGGIORE PER VIA SPERIMENTALE

Il restauro della Guglia Maggiore del Duomo di Milano ha posto la necessità della progettazione di un ponteggio che la circonda. Condizione necessaria per evitare danni strutturali alla Guglia è l'assenza di contatto tra le due strutture. Pertanto, al fine di verificare tale condizione da un certo livello in poi è stato necessario introdurre un sistema di strumenti che misurasse continuamente gli spostamenti relativi tra la guglia e il ponteggio.

Su richiesta della Commissione Prefettizia, il Dipartimento di Meccanica ha scelto un sistema di strumenti che permettesse una descrizione del comportamento statico e dinamico della Guglia e del ponteggio che la circonda.

Si riporta in seguito il set di strumentazione impiegato nella guglia principale del Duomo, come riportato in Figura 2.1.

- Accelerometri piezoelettrici ad alta sensibilità (1 V/g, range 0.5 g).
- Inclinometri biassiali ad altro guadagno (range 0.5°), con termistore per la compensazione in temperatura.
- Trasduttori di spostamento a filo (range 0.5 m).
- Sensori estensimetrici in fibra ottica a reticolo di Bragg e sensori di temperatura.
- Sistema di acquisizione ed elaborazione dei segnali.
- Centralina meteorologica per l'acquisizione e l'elaborazione di dati ambientali.
- Telecamera per la trasmissione via rete e la registrazione di riprese video.

I dati vengono acquisiti automaticamente dagli strumenti, di seguito vengono mediati opportunamente, salvati ed infine elaborati per la presentazione in sintesi di determinati parametri di particolare significato e importanza. L'acquisizione dei dati avviene in tempo reale.

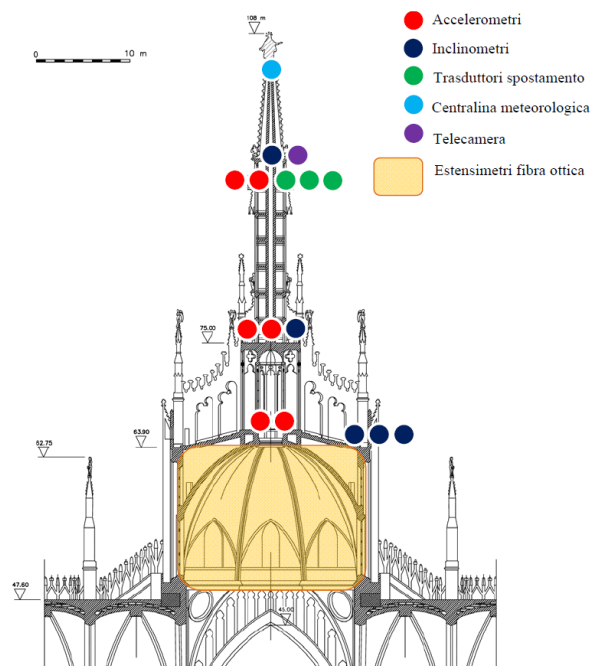


Figura 2.1: Disposizione degli strumenti

Con tali strumenti è stato eseguito dal Dipartimento di Meccanica un set di misure apposite per identificare sperimentalmente i primi modi di vibrare della struttura preesistente. (Nascimbene, et al. 2011).

A tale proposito, sono state utilizzate tecniche di analisi modale operativa basate sulla sola misura della risposta della struttura per l'identificazione dei modi di vibrare (Farrar, 1997). Pertanto sono necessarie le accelerazioni che interessano la struttura per effetto del traffico e vento, ovvero forzanti ambientali. Per la loro misurazione sono stati utilizzati accelerometri piezoelettrici ad alta sensibilità, che consentono la registrazione di minime variazioni di accelerazione con ottime prestazioni in termini di qualità del segnale. La Figura 2.1 riporta le caratteristiche metrologiche dei sensori impiegati.

| Sensore | Fondo Scala | Banda Passante | Sensibilità | Rumore di fondo |
|---|-------------|-----------------|-------------|--|
| Accelerometro Piezoelettrico PCB 393B12 | 0.5 g | 0.1 Hz - 500 Hz | 10 V/g | 3.1 ($\mu\text{m}/\text{sec}^2$)/ $\sqrt{\text{Hz}}$ |

Tabella 2.1: Caratteristiche metrologiche dei sensori.

Al fine di cogliere il maggior numero di modi possibili della struttura, le misure sono state effettuate su quattro livelli. Infine è stato aggiunto un anemometro a coppe posto in corrispondenza del livello più alto.

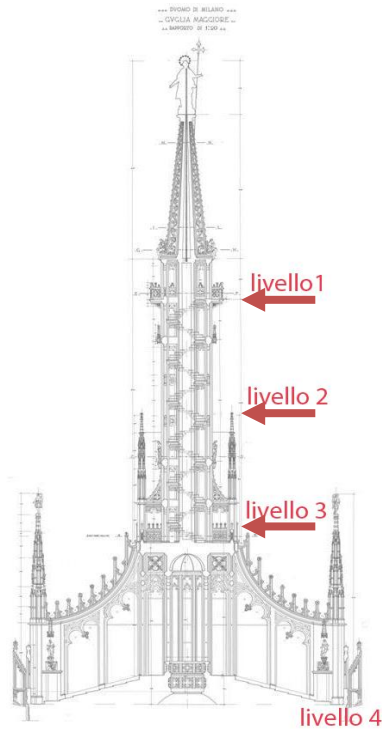


Figura 2.2: Livelli di misura sulla Guglia Maggiore del Duomo.

Si riporta in Figura 2.3 la collocazione nel piano degli accelerometri sulla Guglia Maggiore a seconda del livello considerato.

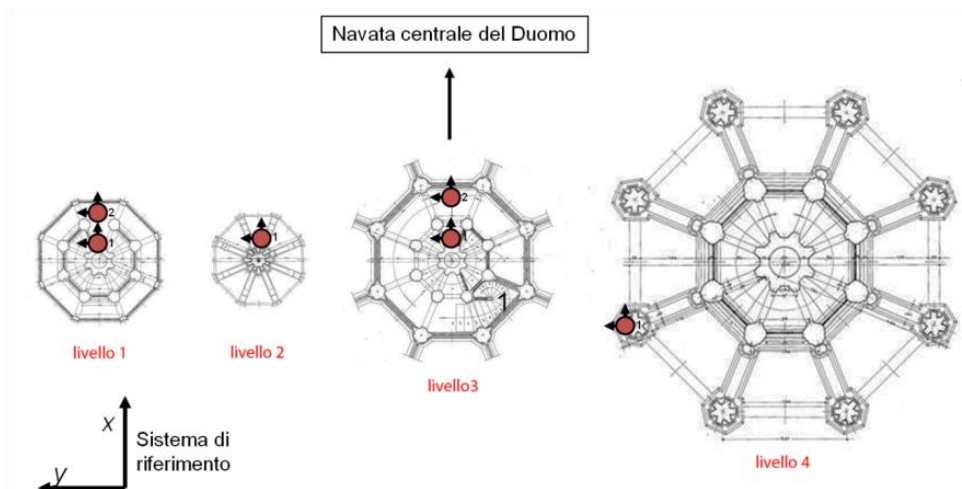


Figura 2.3: Posizionamento degli accelerometri in pianta.

Tale disposizione è stata ritenuta idonea dal gruppo incaricato del monitoraggio per la descrizione dei primi modi flessionali e torsionali della Guglia.

Le storie temporali relative alle acquisizioni ambientali, effettuate nei giorni 1 e 2 Giugno 2010, sono state private dai disturbi per gli urti in cantiere o per problemi legati all'alimentazione elettrica degli strumenti al fine di evitare una negativa influenza di questi nell'analisi. La finestra di osservazione risulta di 24 h e per tale periodo è stata stimata la densità spettrale di potenza (PSD) per ognuno dei punti di misura, come mostrato in Figura 2.4: PSD dei segnali calcolata tra 0-10 Hz. dove è possibile scorgere l'esistenza di cinque picchi prevalenti.

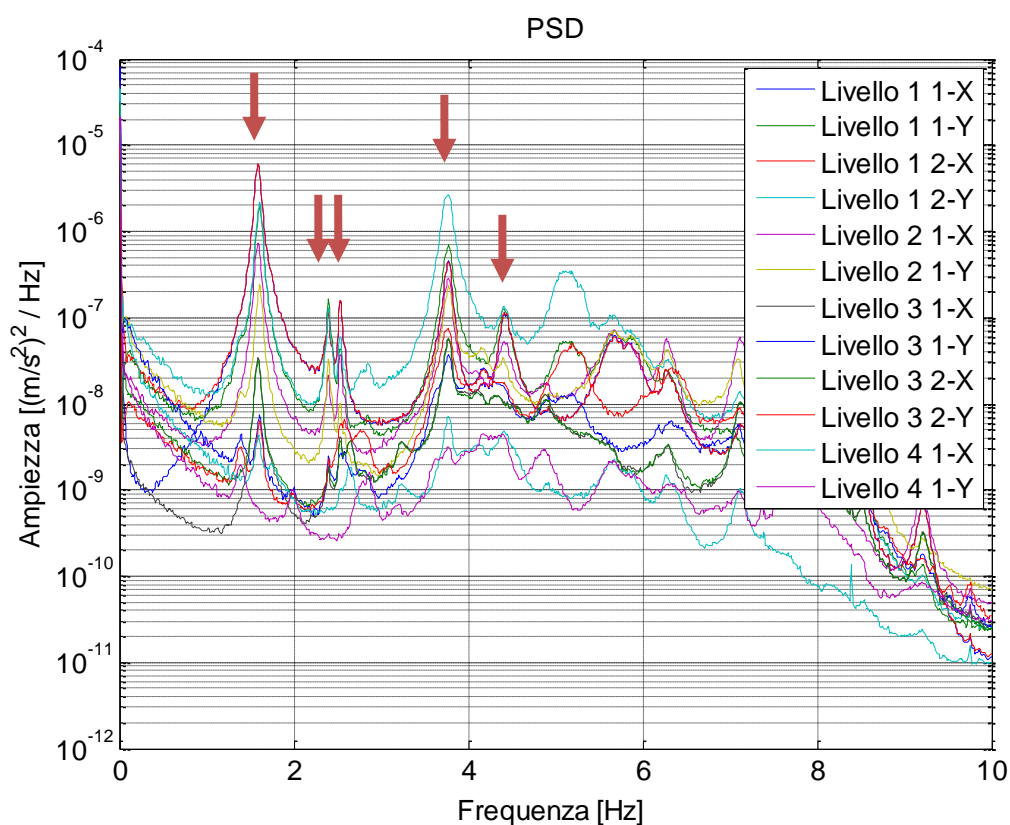


Figura 2.4: PSD dei segnali calcolata tra 0-10 Hz.

Si riportano in Tabella 2.2 i valori delle frequenze dei primi modi che come si può notare sono multipli: la duplicità è giustificata dal fatto che la Guglia ha una sezione pressoché assialsimmetrica.

| Modi identificati sperimentalmente | |
|---|-----------------------|
| Modo | Frequenze [Hz] |
| 1 | 1.59 |
| 2 | 1.61 |
| 3 | 3.77 |
| 4 | 3.77 |

Tabella 2.2: Valori di frequenza dei primi modi ricavati sperimentalmente.

L'analisi delle deformate ha messo in evidenza come i modi 1 e 2 corrispondano ad una flessione della Guglia Maggiore secondo i due assi ortogonali. I modi 3 e 4 rappresentano una torsione mista a flessione della guglia.

Questi valori di frequenza saranno un termine di paragone sostanziale per la costruzione del modello numerico, come si vedrà nel prossimo capitolo.

Inoltre, in una fase di affinamento del modello numerico, sono state considerate i valori di rotazioni misurate dagli inclinometri posizionato al Livello 1 e 2 (Figura 2.1).

Si verifica infatti un certo rapporto dei i valori medi tra i due livelli che è stato opportunamente considerato nella modellazione numerica come di seguito si potrà osservare con maggiore dettaglio.

3. MODELLAZIONE DELLA GUGLIA

Per la modellazione e l'analisi sismica della struttura è stato utilizzato il programma di analisi strutturale SAP2000. Le analisi effettuate sono state effettuate in regime elastico lineare.

In questo capitolo si descriveranno i due modelli che sono stati sviluppati, in base a criteri diversi, per la Guglia Maggiore. In particolare in un primo momento è stato costruito un modello a base rigida, cioè con tutti gli elementi di base dotati di un vincolo di incastro al "terreno" (in realtà alle sottostanti strutture del Duomo). In seguito è stato invece costruito un modello nel quale la base della guglia è vincolata ad un corpo rigido, a sua volta incernierato alle strutture sottostanti; il corpo rigido è inoltre dotato di un vincolo alla rotazione intorno all'asse verticale e di due molle rotazionali che consentono le rotazioni nei piani verticali.

3.1 MODELLO A BASE RIGIDA

Con la collaborazione dei ricercatori del dipartimento BEST, che seguono il progetto della modellazione tridimensionale della Guglia Maggiore, e sulla base dei dati forniti dalla Veneranda Fabbrica del Duomo, è stato possibile realizzare il modello geometrico della struttura della Guglia stessa. In particolare ci è stata fornita copia dei disegni originali della Veneranda; abbiamo inoltre potuto consultare il modello tridimensionale sviluppato presso il BEST per poter ricavare i particolari costruttivi e i volumi degli elementi strutturali non facilmente interpretabili dai disegni.

Per controllare la correttezza del modello ci si è basati sul confronto fra i modi principali della struttura individuati dal modello e quelli identificati sulla base delle misure descritte al Capitolo 2. In particolare per quanto riguarda i modi identificati in sito sono stati considerati i risultati riportati nell'articolo (Nascimbene, et al. 2011).

3.1.1 GEOMETRIA

La struttura è formata da una torre, alta 19,46 m ed articolata su sette "livelli"; la torre è composta da un corpo centrale e otto pilastri a sezione costante per tutti i piani ed è sovrastata da una cuspide alta 9,85 m sulla quale si imposta la statua della Madonnina, di

altezza pari a 4,16 m. La struttura da noi considerata Figura 3.1 Figura 2.1 misura quindi, globalmente, 33,478 m.

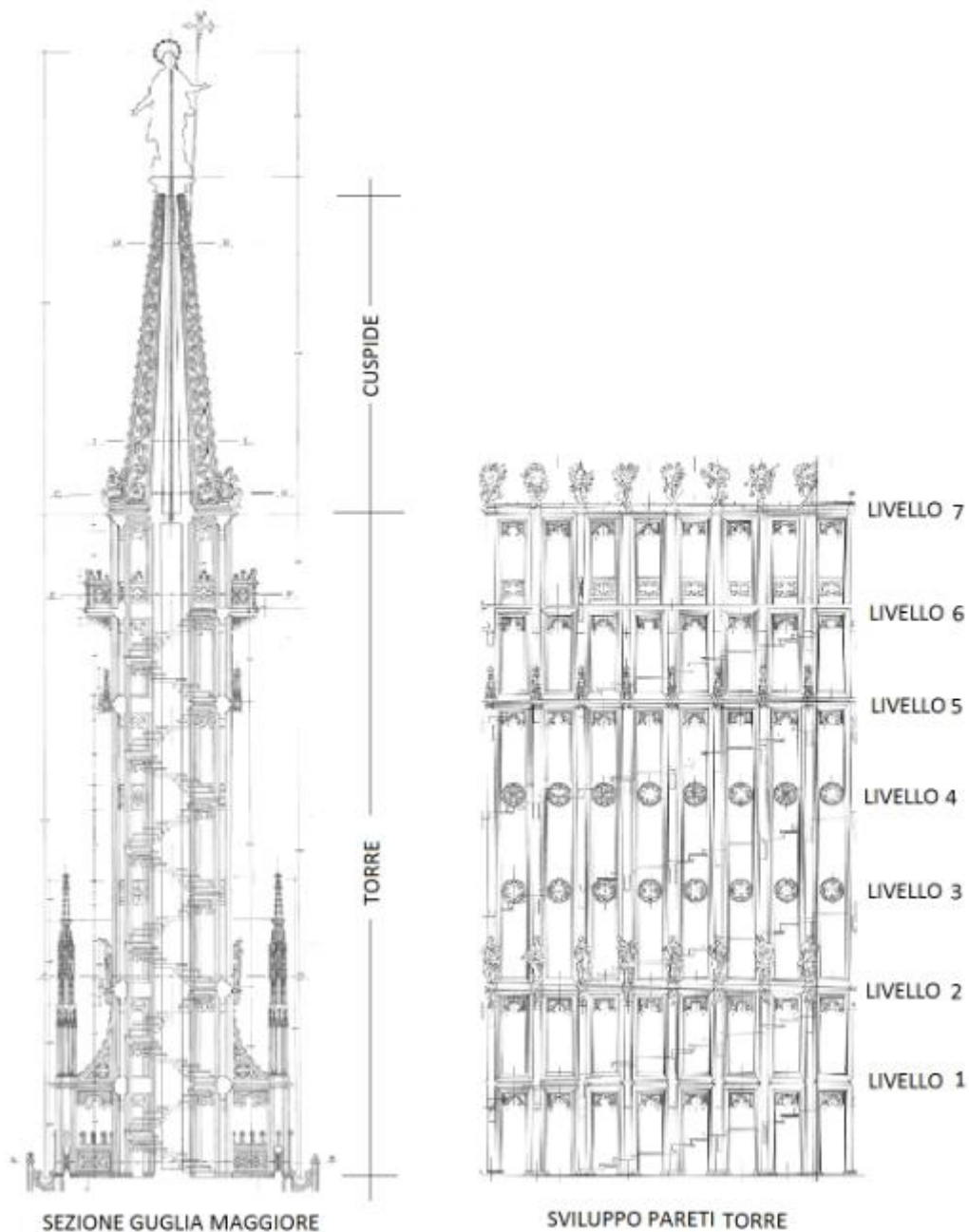


Figura 3.1: Geometria della Guglia Maggiore del Duomo di Milano considerata per il modello

È stata inizialmente definita una griglia creata dalla geometria della sezione orizzontale della Guglia; in base a tale griglia si sono inseriti gli elementi strutturali che compongono il modello.

Sono state inizialmente inserite, per via grafica, le sezioni del corpo centrale e dei pilastri, inserendo le coordinate di ogni spigolo della figura.

Il corpo centrale ha una forma tubolare circolare con dei pilastrini, da esso sporgenti, utili a conferire ulteriore rigidità all'elemento strutturale. Questo elemento ha una sezione costante lungo tutta l'altezza della torre; lungo la cuspide ha invece forma conica, con la conseguente riduzione, lungo l'altezza, della sua sezione e dello spessore.

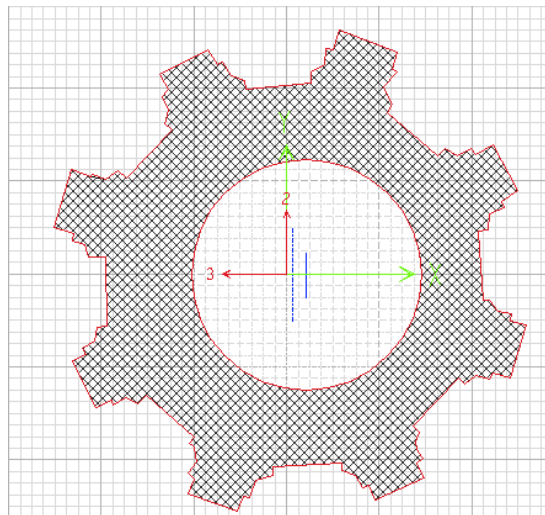


Figura 3.2: Sezione corpo centrale

La cuspide stessa è stata inizialmente semplificata dividendola in tre parti, ciascuna delle quali è stata considerata come un cilindro a sezione costante, avente lo spessore e il diametro della sezione media del tratto considerato. È inoltre presente, all'interno della cuspide, un'asta metallica centrale, che è stata aggiunta nel secolo scorso per migliorare la rigidità e resistenza flessionale dell'elemento strutturale conico. L'asta è vincolata alla base della cuspide ed ha inoltre il compito di vincolare la statua della Madonna, all'interno della quale si prolunga per quasi tutta l'altezza della statua, per 3,50 m. La sezione dell'asta è circolare con diametro pari a 10 cm.

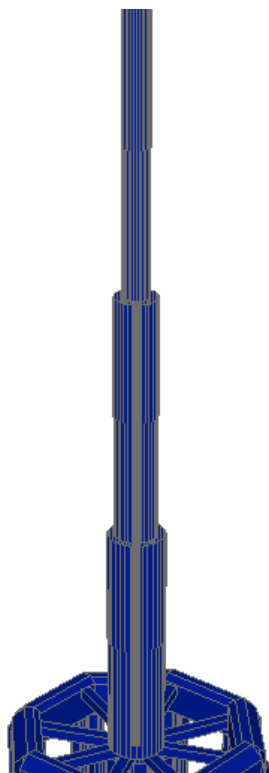


Figura 3.3: Modello 3d iniziale della cuspid

Gli otto pilastri che circondano il corpo centrale, si sviluppano lungo l'altezza della torre per fermarsi alla base della cuspid. Per quanto riguarda la loro geometria, questa cambia per ognuno degli otto che compongono la struttura della torre. Questa differenza è stata trascurata perché ritenuta poco influente per il tipo di analisi da noi effettuata; è stata dunque descritta una sola sezione e poi ruotata in base alla posizione del pilastro.

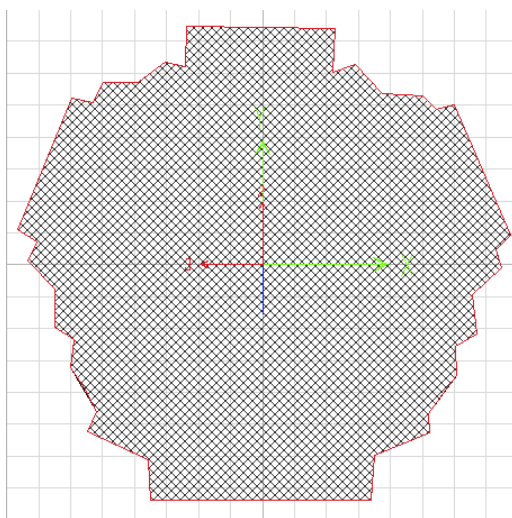


Figura 3.4: Sezione pilastro

Sono presenti inoltre travetti che collegano i pilastri in corrispondenza dei livelli 1, 2, 5, 6, 7 aventi la sezione riportata in Figura 3.5. **L'origine riferimento non è stata trovata..** Ai livelli 3 e 4 questi non sono presenti, essendoci solo degli elementi decorativi circolari che sono stati ipotizzati per il momento senza alcuna funzione strutturale;

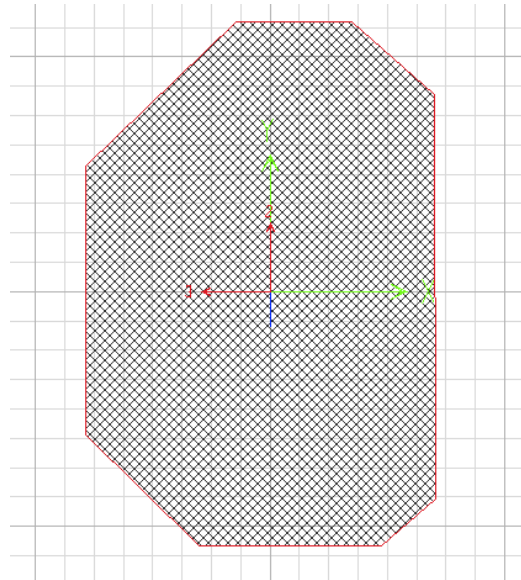


Figura 3.5: Sezione travetti pilastro - pilastro

Sono inoltre presenti nella struttura un sistema di travetti in direzione radiale con il compito di sostenere la scala e di creare una connessione (unitamente alla scala stessa) tra il corpo centrale e i pilastri esterni. I travetti non sono stati modellati come distribuiti lungo l'altezza di ogni singolo livello ma, per semplicità, tutti e otto concentrati ad ogni livello. Questi hanno una geometria molto particolare (Figura 3.6) ma vista la difficoltà di interpretazione del comportamento strutturale di tale geometria, nel modello si è tuttavia considerata, in base ai criteri enunciati nel seguito, una sezione costante.

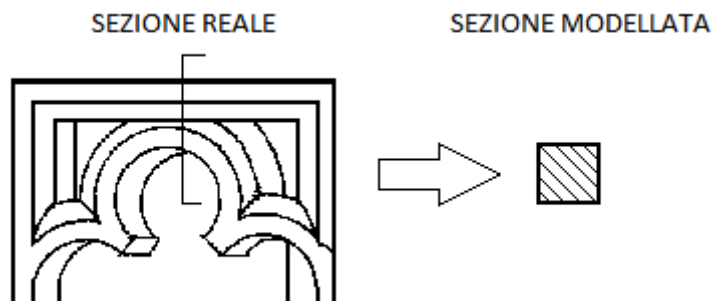


Figura 3.6: Travetti scale

Per quanto riguarda la scala a chiocciola che si sviluppa lungo i sette piani della torre, questa ha essenzialmente due funzioni strutturali: innanzitutto crea un vincolo per gli spostamenti, nel piano orizzontale, del cilindro centrale e del telaio di bordo. Di tale vincolo si è tenuto conto, in tutti i modelli realizzati, ipotizzando, in via semplificativa, la presenza di un piano (diaframma) rigido membranalmente ad ogni livello della torre.

Le rampe della scala, tuttavia, forniscono, grazie alla loro inclinazione, un ulteriore contributo di “controventamento” della struttura, facendo collaborare, al di là del collegamento geometrico dovuto all’azione membronale, il cilindro interno ed il telaio esterno. Di tale effetto, che risulta essenzialmente nella trasmissione di taglio nel piano verticale, si è tenuto conto, sempre in via semplificativa, introducendo, a ciascun piano/livello, degli elementi di trave collocati in corrispondenza dei travetti di sostegno dei gradini, ma dotati di rigidità fittiziamente molto elevata. Tali travetti collegano i pilastri esterni al bordo esterno del cilindro centrale; fra quest’ultimo ed il baricentro del cilindro è presente un vincolo di corpo rigido, che ricostruisce l’ipotesi di planarità della sezione del cilindro stesso. L’effetto di controvento, dovuto alla scala, non è stato considerato nella prima versione del modello; come si vedrà, questo porta ad una significativa sottostima della rigidità strutturale.

La statua della Madonnina è stata infine considerata come un corpo rigido, dotato di un vincolo di incastro nella sezione finale della cuspide. La statua ha un’altezza di 4,16 m. Sempre nell’ottica di una modellazione semplificata, è stato stimato il diametro di un cilindro equi pesante pari a 0,8; i momenti d’inerzia sono stati pertanto calcolati in base alle proprietà del cilindro appena descritto.

Il modello iniziale (Modello 1) definito fino ad ora ha la forma riportata in Figura 3.7.

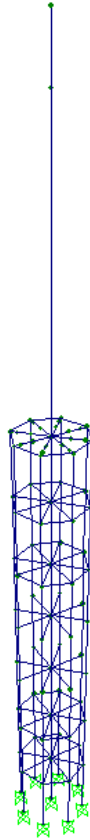


Figura 3.7: Modello 1

3.1.2 MASSE/CARICHI

Per poter rappresentare correttamente le proprietà inerziali del modello è necessario considerare i carichi presenti sulla struttura, in particolare è necessario considerare il peso proprio degli elementi strutturali e decorativi. Il peso proprio dei primi è stato considerato come peso specifico attribuito agli elementi trave che compongono la struttura. Il peso proprio delle decorazioni, come per esempio le statue, invece è stato inserito nei nodi della struttura come massa concentrata.

PESO PROPRIO

Per quanto riguarda il peso proprio, sono stati definiti due materiali principali:

- il marmo di Candoglia con il quale è stato costruito il Duomo
- l'acciaio con il quale è stata realizzata l'asta metallica presente nella cuspide.

Le caratteristiche dei due materiali sono state riportate nella Tabella 3.1.

| CARATTERISTICHE MATERIALI | | | |
|---------------------------|-------------------------------|-----------------------|-------|
| MATERIALE | γ [KN/m ³] | E [MPa] | ν |
| Marmo di Candoglia | 27 | 7200 ± 20% | 0,2 |
| Acciaio | 78,5 | 2,1 x 10 ⁵ | 0,3 |

Tabella 3.1: Caratteristiche acciaio e marmo

Ci sono, come già è stato detto, degli elementi che non sono stati modellati come la scala, i travetti ad arco tra i pilastri, le decorazioni, le statue e il balcone del belvedere ed il parapetto. Questi sono stati considerati in maniera diversa.

La scala è stata considerata come un carico distribuito costante lungo l'altezza del corpo centrale. È stato dunque modificato il peso specifico γ di ogni parte del corpo centrale avendo calcolato il volume dei gradini per ogni piano. Avendo altezze diverse il volume e di conseguenza anche γ cambierà per ogni piano come si può notare dalla Tabella 3.2 sottostante.

| γ TOTALE PER PIANO | | |
|-------------------------------|----------|----------------------|
| Terrazzo basso Primo piano | 36,96123 | [KN/m ³] |
| Piano 1 Piano 2 | 36,41824 | [KN/m ³] |
| 9Piano 2 Piano 3 | 36,42358 | [KN/m ³] |
| Piano 3 Piano 4 | 37,25199 | [KN/m ³] |
| Piano 4 Piano 5 | 37,02879 | [KN/m ³] |
| Piano 5 Belvedere | 36,98987 | [KN/m ³] |

Tabella 3.2: Tabella pesi specifici nel corpo centrale

Per quanto riguarda la cuspide, nel modello è presente solamente la parte conica cava. È quindi stato necessario considerare come peso specifico aggiuntivo tutti gli elementi di decoro che la rivestono.

La massa totale degli elementi che compongono la cuspide ci è stata comunicata dalla Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano, e risulta essere pari a 25.000 Kg.

Come abbiamo visto precedentemente, la cuspide è stata modellata mediante tre elementi di trave aventi sezione diversa. A questi tre elementi è stato dunque attribuito un peso specifico fittizio per poter tener conto della quantità di decorazioni presenti.

È stato calcolato inizialmente il peso delle tre parti tenendo conto della dimensione media del cono delle decorazioni: Tabella 3.3.

| VOLUME REALE | | PESO REALE | |
|---------------------|----------------|-------------------|----|
| 9,023675 | m ³ | 11256,8473 | Kg |
| 6,873426 | m ³ | 8574,4561 | Kg |
| 4,143313 | m ³ | 5168,6966 | Kg |

Tabella 3.3: Pesì e volumi dei conci che compongono la cuspide

In Tabella 3.4 sono riportati i volumi degli elementi modellati.

| | Area [m³] | H | VOLUMI MODELLATI | |
|--------------|-----------------------------|----------|-------------------------|----------------|
| BASSO | 0,8145 | 3 | 2,4435 | m ³ |
| META' | 0,4548 | 3 | 1,3644 | m ³ |
| ALTO | 0,1691 | 3,34 | 0,5648 | m ³ |

Tabella 3.4: Volumi del modello

Questi devono avere il peso riportato in Tabella 3.3; sono stati pertanto calcolati i pesi specifici fittizi dei singoli elementi. Questi sono stati riportati nella tabella seguente

| | PESO SPECIFICO γ | |
|--------------|---|-------------------|
| BASSO | 45,193 | KN/m ³ |
| META' | 61,650 | KN/m ³ |
| ALTO | 89,776 | KN/m ³ |

Tabella 3.5: Pesì specifici degli elementi della cuspide

MASSE CONCENTRATE

Gli elementi decorativi come statue, balcone parapetti etc. sono stati considerati invece come masse concentrate nei nodi tra un pilastro e quello successivo, come mostra la Tabella 3.6. È stata riportata una sola stilata e i carichi sono stati considerati uguali su tutte le altre sette. I volumi delle decorazioni sono stati ricavati dal modello tridimensionale sviluppato presso il Dipartimento BEST.

**MASSE
CONCENTRATE**

$\gamma = 27 \text{ KN/m}^3$

| [KN] | Terrazzo Basso | Piano 1 | Piano 2 | Piano 3 | Piano 4 | Piano 5 | Belvedere | Piano 7 | |
|----------------------------|---------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------|----------------|-------------|
| Travetto | 0 | 0,9501 | 0,9501 | 0 | 0 | 0,9501 | 0,9501 | 0,9501 | |
| Statua | 0 | 0 | 4,5180 | 0 | 0 | 0,7040 | 0 | 0 | |
| Decorazione | 0 | 0 | 0 | 1,1491 | 1,1491 | 0 | 0 | 0 | |
| Parapetto | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,6298 | 0 | |
| Parapetto Belvedere | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,9417 | 0 | |
| Pavim. Belvedere | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9,0255 | 0 | |
| TOT PER PIANO | 0 | 0,9501 | 5,4681 | 1,1491 | 1,1491 | 1,6541 | 11,5473 | 0,9501 | [KN] |

Tabella 3.6: Masse concentrate nei nodi della struttura

3.2 VERIFICA E ADEGUAMENTO DEL MODELLO INIZIALE

Per verificare le prestazioni del modello iniziale, sono stati confrontati i dati ottenuti da questo con quelli sperimentali misurati in sito, relativi ai modi di vibrare della struttura. Di seguito sono riportate in Tabella 3.7 le frequenze dei modi di vibrare della guglia misurate in sito.

| MODI IDENTIFICATI | |
|-------------------|----------------|
| Modo | Frequenze [Hz] |
| 1 | 1,59 |
| 2 | 1,61 |
| 3 | 3,77 |
| 4 | 3,77 |

Tabella 3.7: Tabella delle frequenze proprie identificate sperimentalmente

Si ricorda inoltre che i modi sono doppi in quanto la struttura ha un comportamento simmetrico nelle due direzioni.

3.2.1 PROPRIETA' MODALI MODELLO 1 (INIZIALE)

L'analisi numerica ha fornito i seguenti risultati in termini frequenze proprie:

| N° MODO | FREQUENZA [Hz] |
|---------|----------------|
| 1 | 0,58663 |
| 2 | 0,58857 |
| 3 | 1,1329 |
| 4 | 1,1384 |
| 5 | 2,2478 |
| 6 | 5,1263 |
| 7 | 5,1312 |
| 8 | 6,8709 |
| 9 | 6,8827 |
| 10 | 8,8797 |
| 11 | 11,469 |
| 12 | 11,527 |

Tabella 3.8: Frequenze del primo tentativo (modello I)

Sono state confrontate le frequenze proprie e la forma dei modi di vibrare (si veda ad esempio la Figura 3.8).



Figura 3.8: Deformata modo 1 (modello 1)

Il modello I è evidentemente troppo poco rigido. In particolare, osservando la deformata del primo modo, si è anche notato che la parte della cuspidè così modellata si deforma eccessivamente.

3.2.2 MODELLO 2

Quanto riportato al paragrafo precedente suggerisce che le decorazioni presenti sulla cuspidè debbano essere considerate come parte strutturale che contribuisce alla rigidità della struttura. Infatti osservando la Figura 3.9 si può notare come la forma di quello che precedentemente era stato considerato come decorazione, può essere modellata come un traliccio “equivalente” che contribuisce a fornire supporto al corpo centrale all’interno della cuspidè.

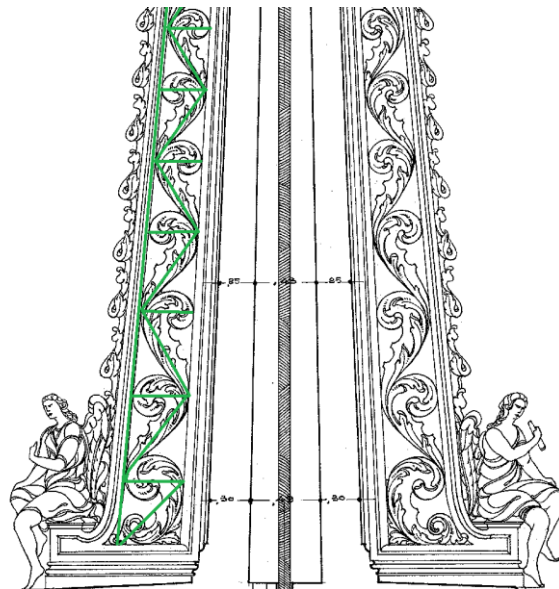


Figura 3.9: Effetto traliccio delle decorazioni della cuspidè

Per la modellazione è stato necessario tener in considerazione la geometria degli elementi della decorazione. Questa, come si può notare dalla figura soprastante, ha una sezione che si stringe man mano che si avvicina alla sommità. Sono stati considerati i tre conci in cui era stato suddiviso il cono centrale all’interno della cuspidè e per questi è stata considerata la sezione media degli elementi che compongono il traliccio. Per traversi e montanti è stata considerata la stessa geometria mentre per i correnti è stato definito

un diverso elemento. I dati della geometria sono stati ricavati dalle tavole della Veneranda Fabbrica del Duomo.

Inoltre per il funzionamento statico del modello è stato necessario introdurre dei nuovi vincoli per permettere la collaborazione tra traliccio e cono modellato precedentemente. La modellazione e i vincoli sono visibili in Figura 3.10.

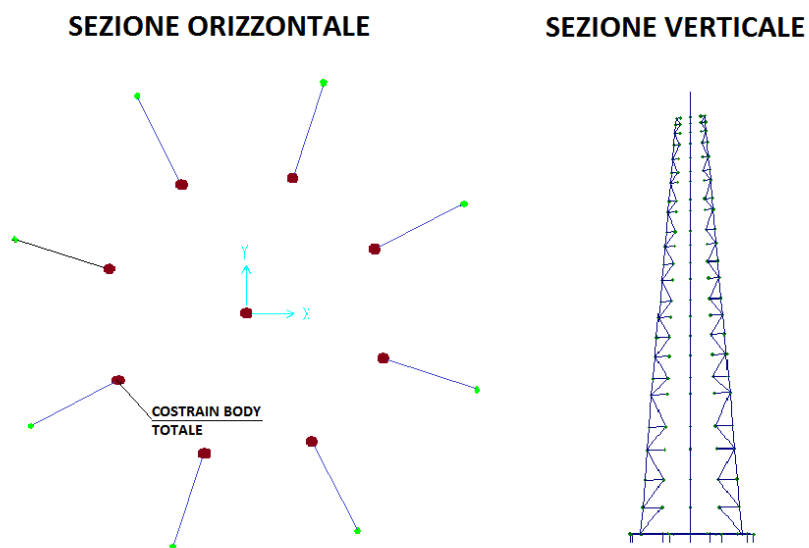


Figura 3.10: Sezione orizzontale e verticale della modellazione della cuspide

Per la costruzione della geometria del traliccio sono stati inseriti tutti i nodi che compongono un elemento verticale della decorazione, collegati dagli opportuni elementi di trave. In seguito sono stati copiati e ruotati con il comando “replicate” attorno all’asse z. Il materiale che è stato definito ha come rigidità quella propria del marmo di Candoglia riportata in Tabella 3.1, mentre il peso specifico è stato posto nullo in quanto il peso di questi elementi era già stato considerato nel peso specifico del cilindro interno.

Per quanto riguarda i vincoli, è stato inserito, ad ogni piano orizzontale in cui è stata divisa la cuspide, un corpo rigido che collega il baricentro dell’elemento centrale al punto, appartenente al bordo esterno di quest’ultimo, al quale si connettono montante e traversi del traliccio equivalente esterno. Lo schema strutturale adottato è quello rappresentato in Figura 3.11, con il corrente esterno continuo ed elementi biella a rappresentare le altre aste.

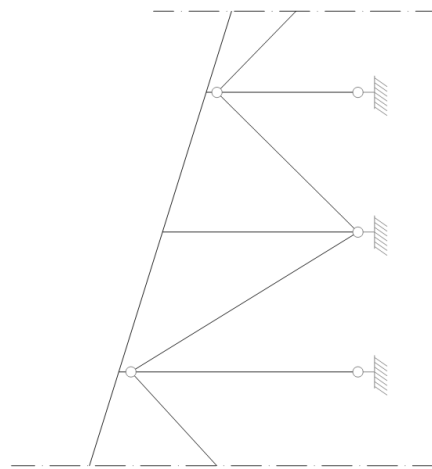


Figura 3.11: Scema strutturale traliccio

Con queste modifiche è stata effettuata nuovamente l'analisi dei modi principali, che ha fornito le frequenze riportate in Tabella 3.9.

| N° MODO | FREQUENZA [Hz] |
|---------|----------------|
| 1 | 0,944 |
| 2 | 0,9463 |
| 3 | 1,4496 |
| 4 | 1,4554 |
| 5 | 2,5953 |
| 6 | 5,7511 |
| 7 | 5,7704 |
| 8 | 8,1424 |
| 9 | 8,1707 |
| 10 | 8,9217 |
| 11 | 12,014 |
| 12 | 12,076 |

Tabella 3.9: Frequenze proprie del Modello 2

Queste frequenze sono state confrontate con quelle sperimentali in Tabella 3.7 e con quelle ottenute dal Modello 1. I risultati sono sicuramente migliori rispetto al primo tentativo ma sono ancora lontani da quelli sperimentali. È stato pertanto necessario proseguire con il perfezionamento del modello.

3.2.3 MODELLO 3

Per migliorare ulteriormente il modello è stato innanzitutto introdotto, secondo i criteri più sopra citati, l'effetto di controvento dovuto alla scala a chiocciola. Ciò è stato realizzato aumentando, in modo fittizio, la rigidezza flessionale dei travetti che collegano, ad ogni livello, il cilindro interno ai pilastri esterni, come indicato nella Figura 3.12.

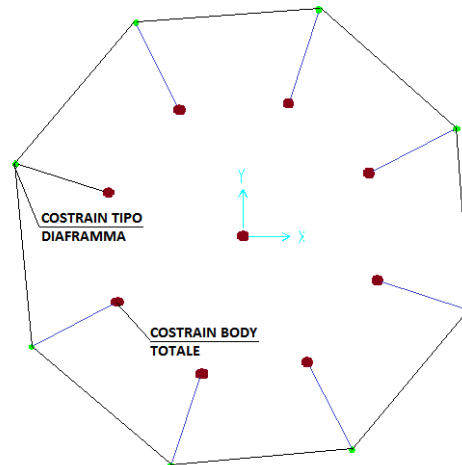


Figura 3.12: Elementi travetti scale modificati

È stato poi introdotto un ulteriore affinamento, cioè l'allargamento della sezione del tronco di base, mediante il quale la torre si collega al livello del terrazzo alto. Questo allargamento prevede l'inserimento di otto pilastri all'esterno di quelli considerati fino ad ora, collegati a questi con travetti come si nota in Figura 3.13. Gli otto pilastri appena inseriti sono ulteriormente connessi tra loro attraverso dei travetti a sezione costante.

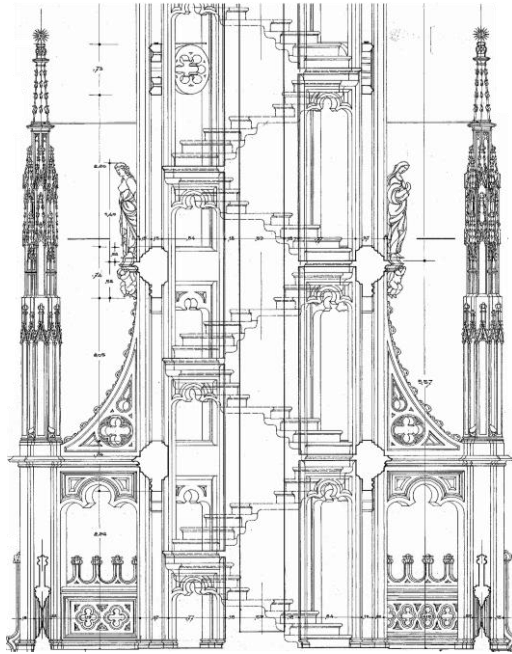


Figura 3.13: Allargamento della parte bassa considerato al 3° tentativo

La rigidità del modello è stata ulteriormente incrementata con le seguenti operazioni:

- L'introduzione del contrafforte, presente al secondo piano, che unisce i pilastri esterni a quelli interni del livello superiore. Questo è stato modellato come un'asta a sezione costante, avente rigidità molto elevata. La modellazione appena descritta è riportata in Figura 3.15;

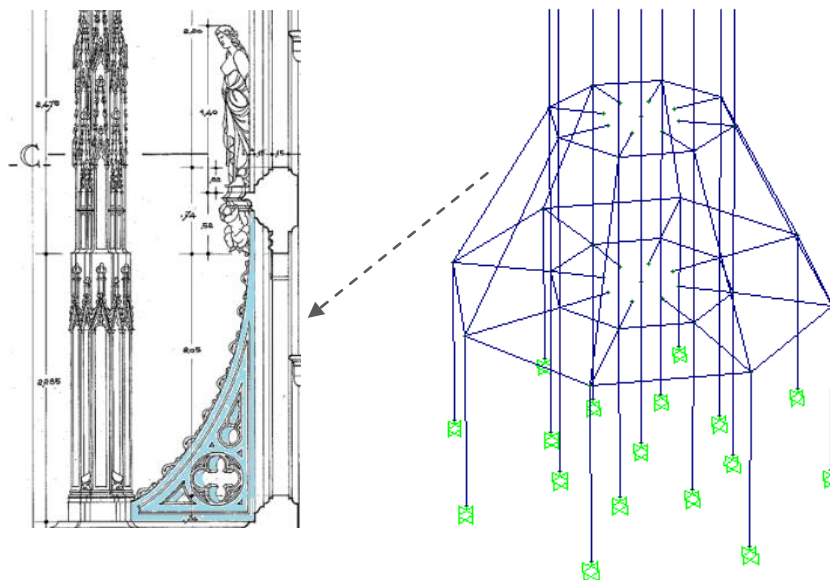


Figura 3.14: Modellazione dell'allargamento sezionale alla base della guglia

- Una più realistica modellazione dei travetti tra i pilastri, la cui rigidezza era stata sottostimata, sia a causa della presenza delle catene di acciaio, sia per il fatto che era stato considerato come strutturale solo il corrente superiore, trascurando l'effetto arco dovuto agli elementi sottostanti (Figura 3.15). Anche qui la modifica è stata effettuata aumentando fittiziamente la rigidezza degli elementi trave che collegano i pilastri del telaio esterno.

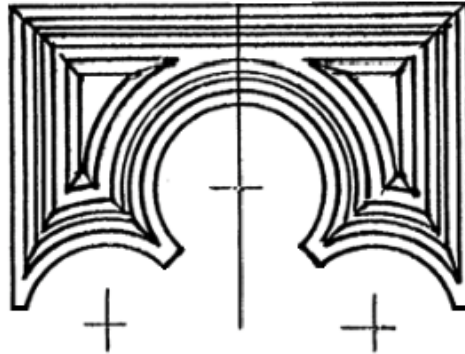


Figura 3.15: Travetto aggiuntivo tra i pilastri

- Questo criterio, utilizzato per i travetti, è stato anche esteso alla modellazione degli elementi di decoro ai livelli 3 e 4.

Per chiarire meglio gli elementi ai quali è stata modificata la rigidezza si riporta la Figura 3.16 nella quale vengono rappresentati in colore rosso gli elementi con rigidezza modificata ed in blu gli elementi con le caratteristiche di partenza definite precedentemente.

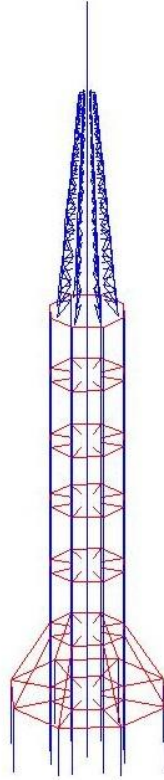


Figura 3.16: Modello 3

Il modello così creato ha fornito i seguenti risultati sono stati confrontati con quelli identificati.

| FREQUENZE MODELLO 3 | | FREQUENZE IDENTIFICATE | |
|---------------------|----------------|------------------------|----------------|
| N° MODO | FREQUENZA [Hz] | Modo | Frequenze [Hz] |
| 1 | 1,5495 | 1 | 1,59 |
| 2 | 1,5542 | 2 | 1,61 |
| 3 | 3,8288 | | |
| 4 | 3,8329 | 3 | 3,77 |
| 5 | 3,9956 | 4 | 3,77 |
| 6 | 7,5665 | | |
| 7 | 7,5808 | | |
| 8 | 10,452 | | |
| 9 | 11,81 | | |
| 10 | 11,829 | | |
| 11 | 13,795 | | |
| 12 | 17,171 | | |

Tabella 3.10: Tabella dei modi finale

Confrontando questi risultati si nota che sono molto simili. Il modello si può dunque ritenere affidabile per le analisi che saranno fatte nella seconda parte del lavoro di tesi.

3.2.4 VERIFICA DELLE PROPRIETA' DEL MATERIALE

Si può osservare, in base a quanto esposto al paragrafo precedente, che si è ottenuto un ottimo accordo fra modello e risultati sperimentali a patto di aumentare fittiziamente la rigidità di alcuni elementi strutturali, vale a dire i travetti del telaio spaziale esterno, i travetti che collegano il cilindro centrale ai pilastri esterni ed i contrafforti al secondo livello.

Si osservi inoltre che, da dati di letteratura, il modulo di elasticità del “materiale” marmo di Candoglia è dell'ordine di:

$$E = 50.000 \text{ MPa}$$

Valore decisamente superiore a quello inserito nel modello, sulla base di quanto riportato in (Nascimbene, et al. 2011), che è pari a 7200 MPa.

In tale situazione viene da chiedersi quale sarebbe il comportamento del modello adottando un modulo elastico più elevato, e più vicino a quello del materiale, per tutti gli

elementi elastici, compresi quelli per i quali non era stata fittiziamente incrementata la rigidità.

A titolo indicativo si riportano, nella seguente tabella, i valori delle frequenze proprie ottenuti ponendo il modulo elastico pari a 25000 e 20000 kN/m² per tutti gli elementi strutturali

| N° MODO | FREQUENZA CON E = 25 000 kN/m ² [Hz] | FREQUENZA CON E = 20 000 kN/m ² [Hz] |
|---------|--|--|
| 1 | 1,8007 | 1,6106 |
| 2 | 1,8057 | 1,615 |
| 3 | 5,3019 | 4,7422 |
| 4 | 5,452 | 4,8765 |
| 5 | 5,4612 | 4,8847 |
| 6 | 9,3455 | 8,359 |
| 7 | 9,3614 | 8,3733 |
| 8 | 13,732 | 12,283 |
| 9 | 13,774 | 12,32 |
| 10 | 14,157 | 12,662 |
| 11 | 18,62 | 16,655 |
| 12 | 18,671 | 16,7 |

Tabella 3.11: Frequenze proprie con rigidità del marmo modificate

Come si può notare il modello con modulo pari a 20.000 MPa bene approssima i primi due modi identificati; se però si prosegue a confrontare i modi successivi, si nota che questi hanno frequenze troppo alte (queste per i terzo e quarto modo dovrebbero essere 3,77 Hz).

In conclusione è stato possibile affermare che il criterio adottato per il modello a base fissa consente la migliore approssimazione del comportamento globale della struttura della Guglia.

3.3 MODELLO CON ROTAZIONI ALLA BASE

Dalle misurazioni degli strumenti presenti sulla Guglia Maggiore del Duomo di Milano si è visto che la base del modello subisce delle rotazioni tutt'altro che trascurabili.. A titolo di esempio si riporta la Figura 3.17 in cui si possono osservare le rotazioni alla base e al belvedere in seguito al sisma del 25 Febbraio.

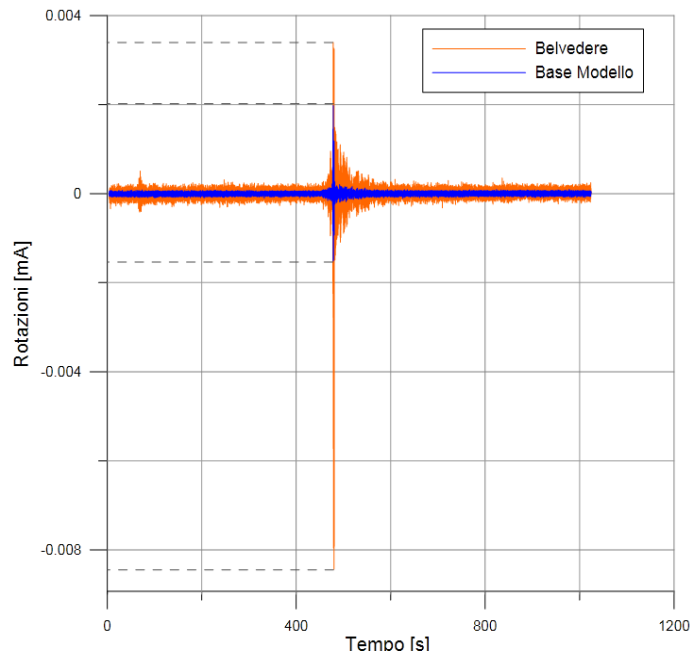


Figura 3.17: Dati degli inclinometri al balconcino e alla base della guglia in seguito al sisma del 25 Febbraio.

È stato affermato poco fa che le rotazioni alla base non sono trascurabili. Per dar ragione a questa affermazione è stato calcolato il rapporto tra il valore quadratico medio (RMS) delle rotazioni al belvedere e quelle alla base nelle due direzioni in x e y.

Tale rapporto risulta pari a:

$$RMS x = 3,445$$

$$RMS y = 3,445$$

MODIFICHE APPORTATE AL MODELLO

È stato introdotto nel modello un “Link Element” alla base del modello che permette l’assegnazione di rigidzze diverse nelle sei direzioni: x, y, z, Rx, Ry, Rz.

Le analisi parametriche effettuate hanno portato a definire le rigidzze delle molle rotazionali attorno all’asse X e Y e il modulo elastico del materiale “marmo” fino a ottenere il rapporto fra i valori RMS pari a 3,44, cioè uguale al valore sperimentale.

Si è dunque intervenuti sul modulo elastico del marmo di cui sono costituiti tutti gli elementi strutturali della guglia. In particolare, non sono stati modificati i materiali dei travetti, del traliccio etc., ma è stato modificato esclusivamente il materiale col quale sono stati modellati i pilastri e il corpo centrale tubolare. Il modulo elastico è stato aumentato da $E = 7,2 * 10^6$ a $E = 3 * 10^7 kN/m^2$.

Si è intervenuto sulle rigidezze delle due molle rotazionali che agiscono nei piani verticali. Le rigidezze rotazionali che hanno portato ai valori di rapporto di RMS sopra riportato sono:

$$K_x = 1,37 * 10^7 kNm$$

$$K_y = 1,54 * 10^7 kNm$$

Con queste modifiche sono stati calcolati dal programma i seguenti modi principali di vibrare:

| N° MODO | FREQUENZA [Hz] |
|---------|----------------|
| 1 | 1,5283 |
| 2 | 1,5499 |
| 3 | 3,7717 |
| 4 | 3,7764 |
| 5 | 4,3599 |
| 6 | 7,6029 |
| 7 | 7,6191 |
| 8 | 9,9205 |
| 9 | 10,0090 |
| 10 | 13,2080 |
| 11 | 13,2360 |
| 12 | 14,2870 |

Tabella 3.12: Modi del modello con molla alla base

Come si evince dalla tabella sopra riportata i modi principali di vibrare si possono ritenere corretti rispetto a quelli ottenuti dall'analisi numerica dei dati sperimentali. Il modello può essere ritenuto coerente.

Inoltre il valore di valore quadratico medio (RMS) al quale si è arrivati dopo le iterazioni sui parametri appena spiegati è pari a:

$$RMS x = 3,490$$

$$RMS y = 3,330$$

3.4 RIEPILOGO

In conclusione di questo capitolo è utile fare un riepilogo di quanto effettuato fino ad ora rispetto ai modelli creati e al loro significato.

Sono stati creati due modelli diversi: il primo, visto nel paragrafo 3.1, a base incastrata e il secondo, visto nel paragrafo 3.3, con una molla rotazionale attorno all'asse x ed una attorno all'asse y.

Per quanto riguarda il modello incastrato alla base, è stato considerato un materiale marmo molto scarso che tenesse in considerazione della presenza di giunti che non permettono la totale collaborazione dei vari blocchi che formano la Guglia. In particolare il modulo elastico utilizzato è pari a 7200 MPa quando quello sperimentale del marmo di Candoglia risulta essere pari a 50000 MPa. Inoltre sono stati inseriti vincoli con la funzione di diaframma ad ogni piano della Guglia per modellare il comportamento della scala che ha effettivamente lo scopo di resistere alle azioni taglianti. Per incrementare questa funzione strutturale sono stati modellati inoltre i travetti ai vari piani con una rigidezza aumentata rispetto a quella del marmo: questo anche per la presenza dei ferri con la funzione di tiranti che contribuiscono alla resistenza e alla stabilità della struttura. Il valore dato al modulo elastico dei travetti sottoposti alle scale e di quelli tra pilastri è pari a $7,2 * 10^9 KN/m^2$. Questo valore supera il valore del modulo elastico del marmo (50000 MPa) ma è giustificato da quanto appena detto rispetto alla funzione strutturale della scala.

Per il modello creato in seguito con la rotazione alla base, registrata in sito dagli inclinometri invece, è stato considerato un materiale marmo con un modulo di resistenza molto più alto, in modo tale da ottenere gli stessi modi principali e lo stesso valore del rapporto dei valori quadratici medi (RMS) al belvedere alla base. Per ottenere questi risultati sono state considerati i moduli elastici riportati in tabella 3.1.

L'identificazione appare valida in un range di piccole deformazioni; appare inoltre ragionevole, in tale ipotesi, il confronto fra analisi numerica condotta sulla sola Guglia e

dati sperimentali che tengono conto anche delle oscillazioni ambientali dell' "edificio" Duomo che sostiene la Guglia stessa. Queste ultime, dovute principalmente al vento, possono essere senza dubbio ritenute trascurabili.

Nei prossimi capitoli quindi si considererà la Guglia soggetta ai sismi registrati in data 17 Luglio 2011 e 25 Febbraio 2012.

4 RISPOSTA IN FREQUENZA

Il lavoro si è concentrato nella costruzione del modello della Guglia Maggiore del Duomo in modo tale che i modi propri di vibrare del modello numerico fossero uguali, o per lo meno molto vicini, a quelli identificati sperimentalmente. Dal momento che tale modello è stato costruito riferendo la Guglia a condizioni ambientali.

Ci poniamo di seguito l'obiettivo di studiare il comportamento della Guglia sottoposto a fenomeni più intensi e di breve durata. In particolare modo faremo riferimento ai sismi che si sono verificati a Milano nei giorni 17 Luglio 2011 e il 25 Febbraio 2012.

Il sistema di strumenti posizionato sulla Guglia, come descritto nel Capitolo 2, ha permesso la misurazione in tempo reale di questi eventi in termini di accelerazioni alla quota del belvedere alto (Livello 1) e di quello basso (Livello 3), quest'ultimo situato in corrispondenza della base del modello (Figura 4.1).

Le storie temporali relative a ciascun sisma al livello più basso sono state inserite, come moto del riferimento, nel modello numerico. Al termine delle analisi, sono state analizzate le storie temporali della risposta in punti significativi. Nello specifico, il nodo scelto è situato nel belvedere alto, in corrispondenza dell'accelerometro che misura dati in tempo reale. Questo rende possibile un riscontro tra dati sperimentali e numerici per tale punto, e dunque una verifica della bontà del modello numerico.

Lo studio della risposta nel dominio del tempo è complicata poiché non permette di individuare in modo chiaro le caratteristiche che definiscono la risposta della Guglia. Pertanto sarà necessario ricorrere allo studio della risposta nel dominio delle frequenze.

A tale fine, è necessario definire il tipo di segnale che viene misurato e accennare alcuni contenuti teorici sulla risposta in frequenza di un sistema dinamico soggetto a una forzante generica.

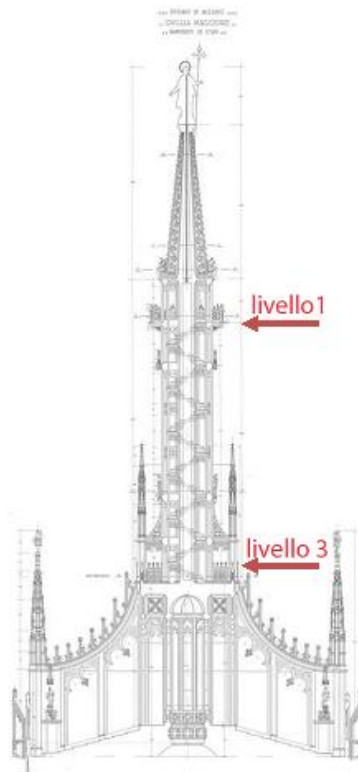


Figura 4.1: Posizione accelerometri

4.1 TIPO DI SEGNALE

Il sisma è per natura un tipo di segnale arbitrario e dipendente con continuità dal tempo. Pertanto l'accelerometro fornisce una funzione $g(t)$ in tensione continua, ma l'elaborazione del segnale richiede la conversione in formato digitale/numerico, unica informazione utilizzabile dal calcolo digitale.

Una funzione continua ha infiniti valori tra due punti di un generico intervallo considerato, ma, ovviamente, il calcolatore permette l'utilizzo di un numero finito di dati. E' necessario una operazione di campionamento. Con questo termine si intende una operazione di selezione di punti ad intervalli costanti di tempo. Tale spaziatura, se troppo grande altera la natura del segnale variando il suo periodo. Si faccia riferimento a titolo di esempio alla Figura 4.2.

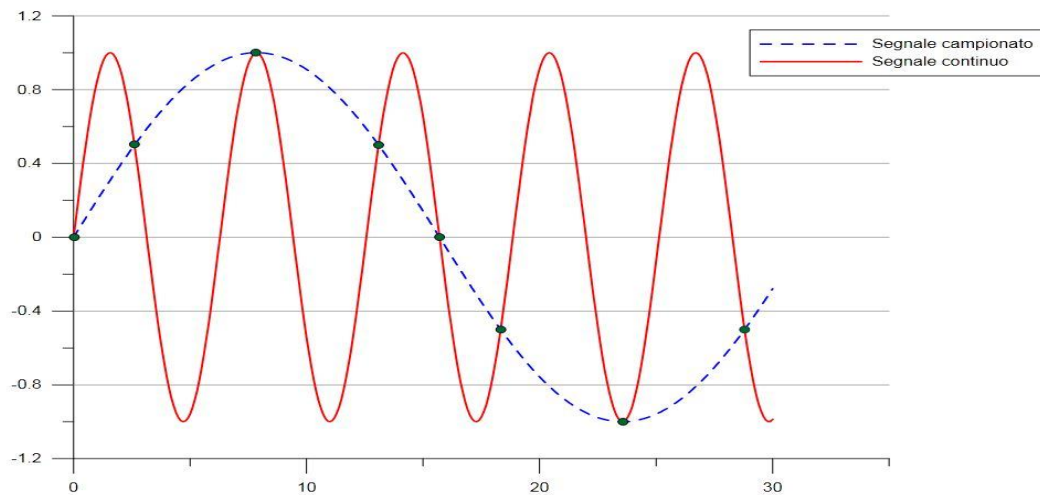


Figura 4.2: Segnale affetto da aliasing.

Pertanto è necessario scegliere una frequenza di campionamento ($f_s = 1/\Delta t$) tale da evitare questo fenomeno generalmente chiamato “aliasing”. In Figura 4.3 si mostra come un numero sufficiente di punti rappresenti correttamente il segnale continuo senza alterarne il periodo di oscillazione.

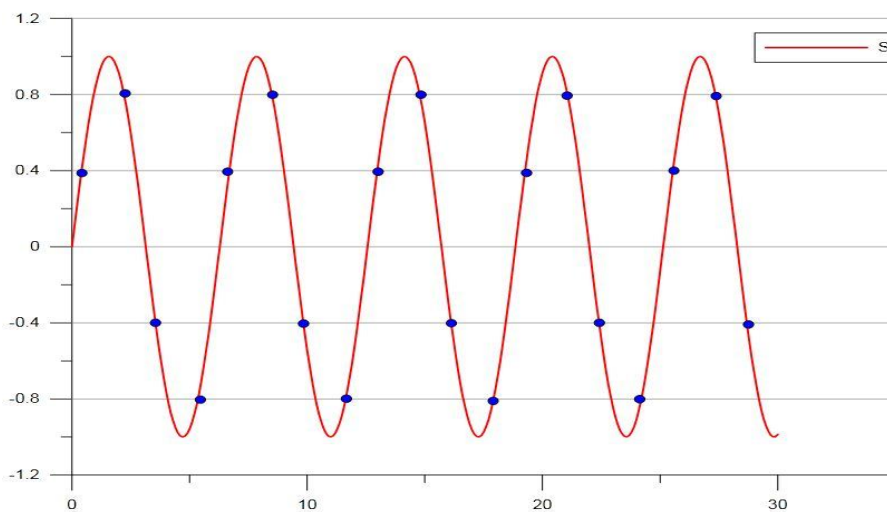


Figura 4.3: Segnale discreto che rappresenta correttamente quello continuo.

In riferimento ai dati registrati dagli strumenti sulla Guglia Maggiore, tale frequenza di campionamento è stata definita in 64 Hz dal gruppo di ricerca del Dipartimento di Ing. Meccanica del Politecnico di Milano, incaricato del monitoraggio della Guglia Maggiore del Duomo di Milano.

Alla luce di queste considerazioni, le storie temporali a disposizione oltre a essere un tipo di segnale arbitrario ed irregolare, per la natura del fenomeno sismico, sono inoltre anche in forma discretizzata. La necessità di caratterizzare il segnale sarà evidente nel prossimo paragrafo, in cui vedremo come si studia un segnale nel campo delle frequenze a seconda che il segnale sia continuo o discreto: utilizzando nel primo caso la Trasformata di Fourier Continua e nel secondo quella Discreta.

4.2 TRASFORMATA DI FOURIER

Il calcolo della risposta nel dominio delle frequenze si basa su concetti propri dell'analisi di Fourier.

Si introducono di seguito alcune brevi note riguardanti tale analisi per funzioni non periodiche (Perotti s.d.). Si analizza inizialmente il caso di funzioni continue e in seguito di segnali discreti.

4.1.1 TRASFORMATA DI FOURIER CONTINUA

Si consideri la serie esponenziale di Fourier:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \exp(i2\pi n \Delta f t) \quad (4.1)$$

con

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \exp(-i2\pi n \Delta f t) dt ; \Delta f = \frac{1}{T} \quad (4.2)$$

La serie permette la rappresentazione della serie $g(t)$ come somma di componenti armoniche relative a infiniti valori di frequenza separati dall'intervallo Δf . Combinando le espressioni precedenti la funzione $g(t)$ può essere espressa nel seguente modo:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi n \Delta f t) \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \exp(-i2\pi n \Delta f t) dt \quad (4.3)$$

Se si suppone ora che il periodo della funzione $g(t)$ tenda all'infinito, ovvero $T \rightarrow \infty$, pertanto $\Delta f \rightarrow df$ e $n\Delta f \rightarrow f$ e che esista l'integrale

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (4.4)$$

Allora la funzione $g(t)$ sarà espressa da:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(i2\pi ft) df \quad (4.5)$$

L'espressione $G(f)$ prende il nome di Trasformata di Fourier, mentre la $g(t)$ la Trasformata di Fourier inversa. Condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza della trasformata di Fourier è la relazione di integrabilità assoluta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty \quad (4.6)$$

La Trasformata di Fourier gode delle stesse proprietà di simmetria coniugata che caratterizza i coefficienti G_n .

4.1.2 TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA

Si faccia ora riferimento al caso di una funzione temporale $g(t)$ che assume valori diversi da zero e limitati in un intervallo di tempo T . Questa funzione soddisfa l'ipotesi di integrabilità assoluta (**Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**). Inoltre, qualora ci si limiti alla rappresentazione della funzione nell'intervallo $(0, \bar{T})$, quest'ultima può essere sviluppata per mezzo della serie di Fourier

$$\bar{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \exp(i2\pi n \Delta f t) \quad (4.7)$$

Essendo $\Delta f = \frac{1}{\bar{T}}$ e

$$G_n = \frac{1}{\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} g(t) \exp(-i2\pi n \Delta f t) dt \quad (4.8)$$

Lo sviluppo definisce una funzione periodica $\bar{g}(t)$, di periodo \bar{T} , che coincide con la funzione data nell'intervallo $(0, \bar{T})$, a patto che la ripetizione periodica di quest'ultima non presenti discontinuità, cioè che $\bar{g}(0) = \bar{g}(\bar{T})$.

Osserviamo anzitutto che, essendo la $\bar{g}(t)$ nulla fuori dall'intervallo considerato, vale la relazione:

$$G_n = \frac{1}{T} \int_0^{\bar{T}} g(t) \exp(-i2\pi n \Delta f t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-i2\pi n \Delta f t) dt \quad (4.9)$$

Esprimendo ora la $g(t)$ per mezzo della trasformata di Fourier si può scrivere:

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \exp(-i2\pi f t) df \right\} \exp(-i2\pi n \Delta f t) dt \quad (4.10)$$

Invertendo l'ordine di integrazione e osservando che il $\delta(f - n \Delta f)$ è una quantità reale, l'espressione precedente assume la forma seguente:

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i2\pi(f - n\Delta f)t] dt df = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \delta(f - n\Delta f) df \\ &= \frac{1}{T} G(n\Delta f) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dal punto di vista dell'analisi numerica si può quindi osservare come, sotto ipotesi non molto restrittive la formulazione continua della trasformata di Fourier possa essere sostituita da quella della serie di Fourier.

Nell'applicazione della dinamica strutturale si verifica inoltre che la funzione da sviluppare è data per mezzo di una sequenza temporale, invece della funzione $g(t)$ sono pertanto noti solo gli $N+1$ valori

$$g(k \Delta t) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad ; \quad g(0 \Delta t) = g(N \Delta t)$$

che questa assume ad intervalli costanti Δt .

Questo è il caso tipico della registrazione in forma digitale delle grandezze legate a fenomeni naturali, quali sismi.

4.3 SPETTRI DI FOURIER

Tornando al caso della Guglia Maggiore del Duomo, è possibile ricavare la storia temporale di qualsiasi elemento del modello. I punti ritenuti significativi del modello numerico sono due: entrambi corrispondono alla posizione spaziale reale degli accelerometri installati sulla Guglia come indicato in Figura 4.4.

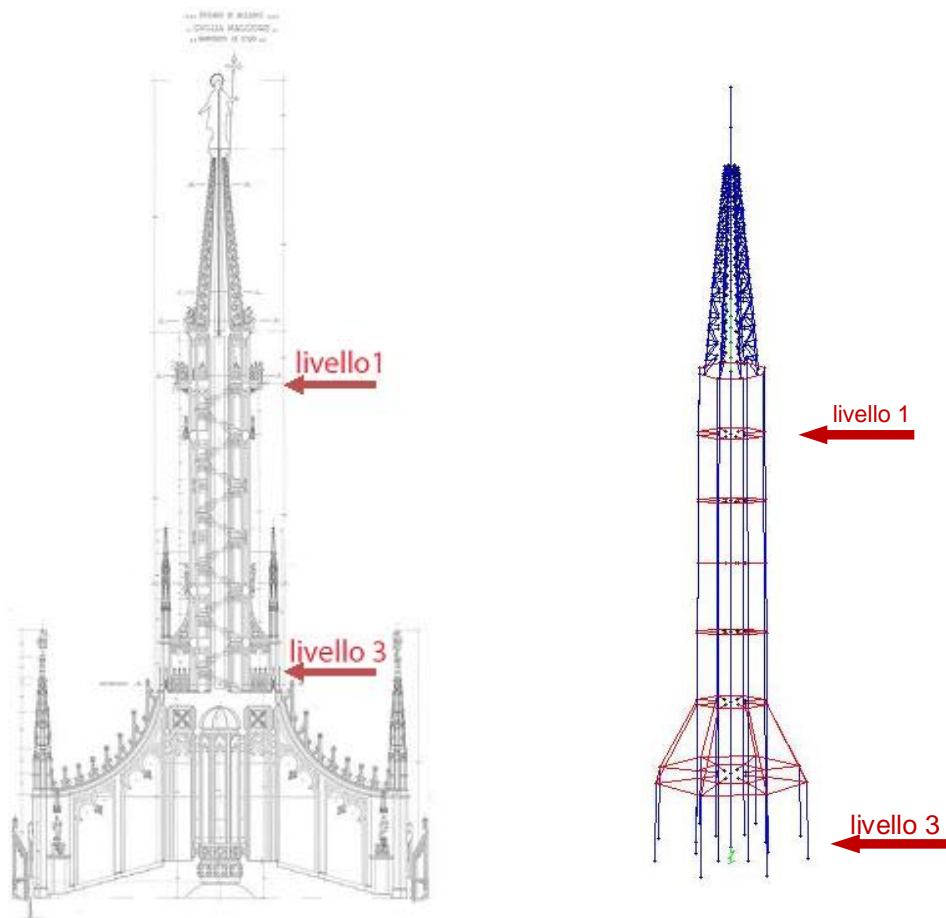
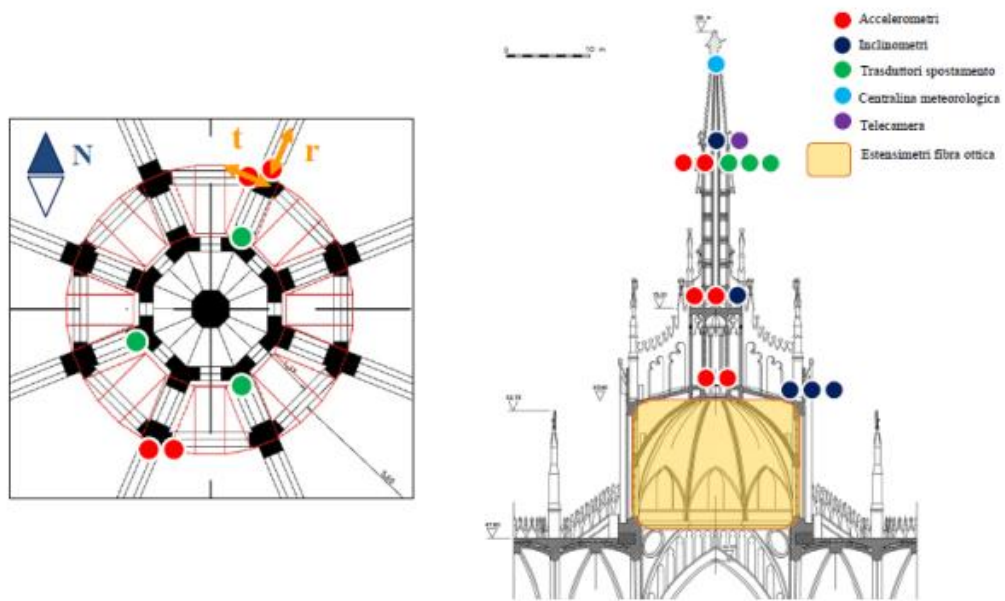


Figura 4.4: Posizione degli accelerometri installati sulla Guglia Maggiore.

In particolare, la risposta al Livello 3 è identica a quella misurata dagli accelerometri essendo l'eccitazione in ingresso alla base del modello numerico. Pertanto il punto veramente significativo risulta essere quello in corrispondenza del Livello 1 corrispondente al nodo 32 nel modello, evidenziato con un cerchio rosso in Figura 4.6 b):



4.5 a): Posizione degli accelerometri sulla Guglia Maggiore del Duomo di Milano.

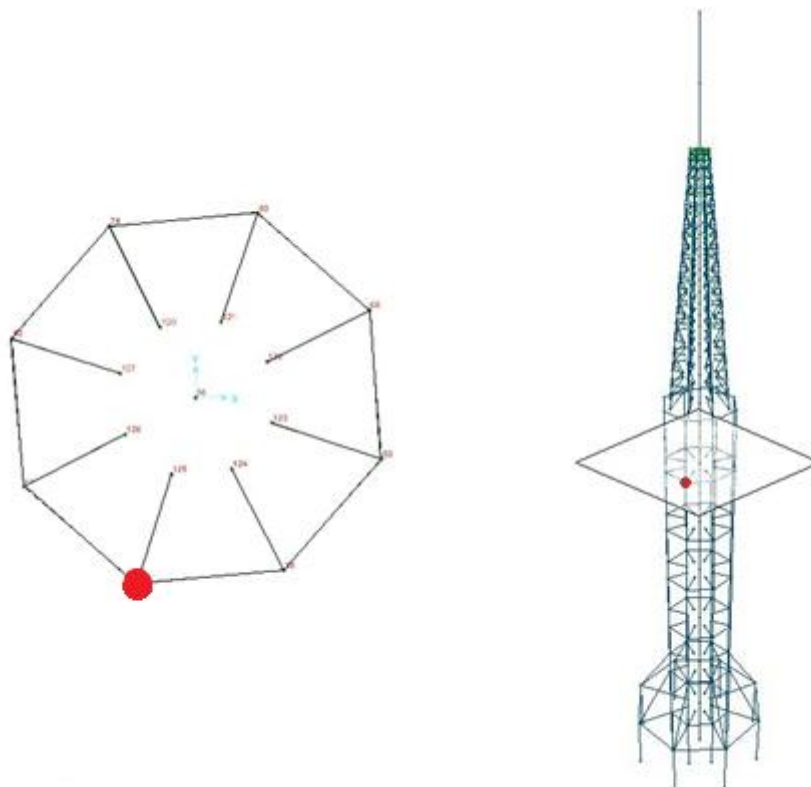


Figura 4.6 b) : Nodo #32 nel modello in corrispondenza dell'accelerometro al Livello 1

Infatti di tale punto si dispongono sia dati sperimentali di accelerazione misurati in tempo reale, come descritto nel Capitolo **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, che dati numerici. E' dunque è possibile verificare la bontà del modello numerico, ossia che questi rappresenti correttamente il comportamento reale della Guglia Maggiore. Questo confronto verrà affrontato più approfonditamente nel prossimo paragrafo. Per il momento ci si limita a osservare la risposta numerica nel dominio del tempo.

I modelli a disposizione, come illustrato nel Capitolo **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, sono due. Il primo è un "modello a mensola" con un incastro perfetto alla base e il secondo con cerniera e un sistema di molle rotazionali di rigidezze tali da rispettare il rapporto delle rotazioni RMS (valori quadratici medi) tra belvedere alto e base della guglia che si riscontrano nelle misure dei rispettivi inclinometri.

Si riporta in seguito la risposta numerica e sperimentale del punto situato al Livello 1 (sisma del 17 Luglio 2011) nelle seguenti figure.

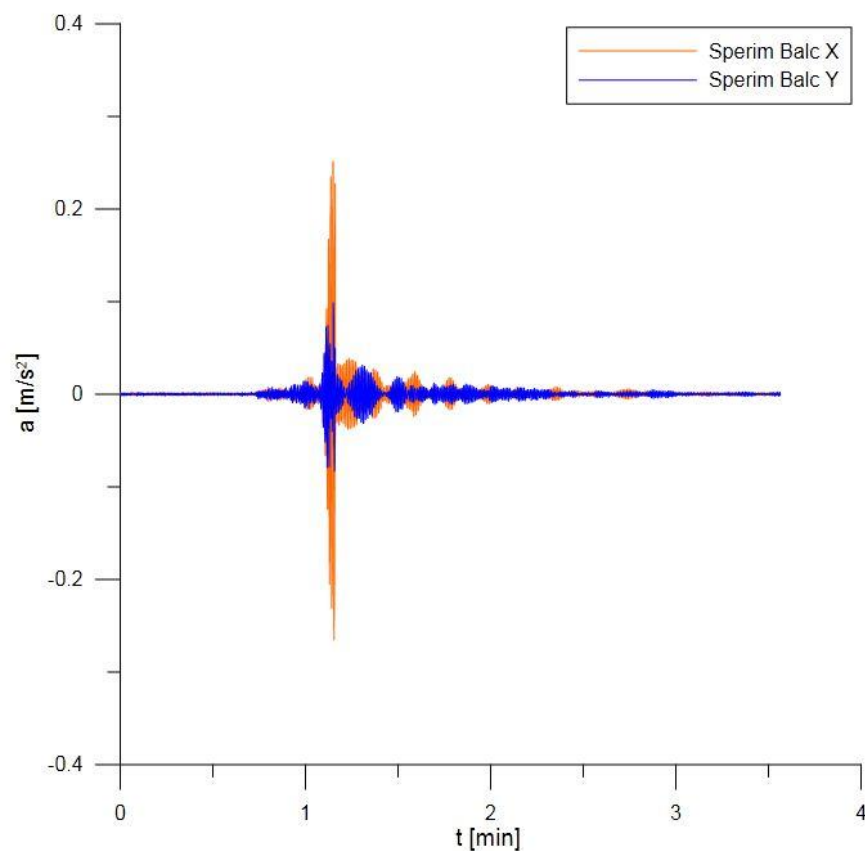


Figura 4.7: Storia temporale sperimentale al Livello 1, sisma del 17 Luglio in direzione X e Y.

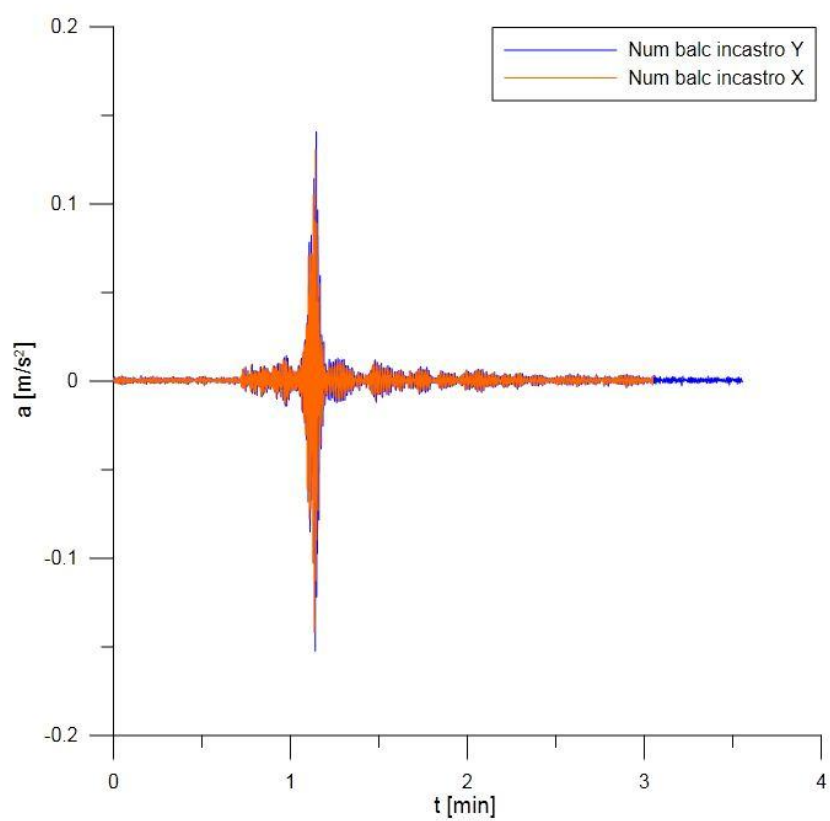


Figura 4.8:Storie temporali numeriche (INCASTRO) al Livello 1,sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y.

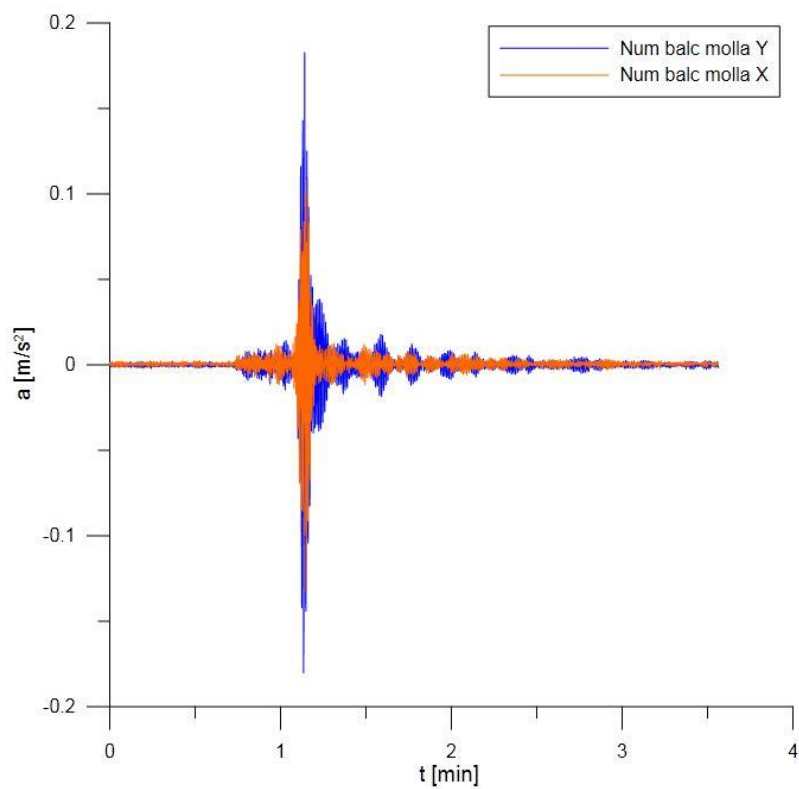


Figura 4.9: Storie temporali numeriche (MOLLA) al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y.

Come si può notare dalle precedenti figure, confrontare storie temporali sperimentali e numeriche semplicemente sovrapponendole nello stesso grafico può darci delle informazioni di massima sulla bontà del risultato numerico rispetto a quello reale.

Per esempio è immediato paragonare i valori di picco delle rispettive storie come mostrato nelle Figura 4.7 **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, Figura 4.8, Figura 4.9. Tali valori sono riassunti nella Tabella 4.1, si riportano inoltre quelli relativi al sisma di Febbraio.

| | Storie temporali | picco in X [m/s ²] | picco in Y [m/s ²] |
|------------------|--------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 17 Luglio 2011 | Dati sperimentali | 0,266 | 0,099 |
| | Dati numerici (INCASTRO) | 0,142 | 0,152 |
| | Dati numerici (MOLLA) | 0,133 | 0,183 |
| 25 Febbraio 2012 | Dati sperimentali | 0,586 | 0,631 |
| | Dati numerici (INCASTRO) | 0,468 | 0,492 |
| | Dati numerici (MOLLA) | 0,526 | 0,556 |

Tabella 4.1: Valori di picco delle storie temporali sperimentali e numeriche

Per via sperimentale si riscontrano due diversi comportamenti a seconda del sisma considerato: per il sisma del 17 Luglio 2011 si verifica una accelerazione di picco di più grande in direzione X, invece per quello del 25 Febbraio 2012 nell'altra direzione.

Per quanto riguarda i dati numerici, i picchi di accelerazione per l'evento di Febbraio sono molto vicini. Invece per quelli di Luglio, in particolare per il modello con la molla, i valori di picco sono più grandi nella direzione X invece che in Y, come osservato per quelli sperimentali.

Va osservato che nei modelli numerici non si tiene conto della interazione che c'è tra la Guglia e la struttura sottostante se non per l'eccitazione sismica inserita come dato di input. Pertanto l'accelerazione misurata sulla Guglia è in realtà affetta dal comportamento dinamico dell'intera Cattedrale; nel caso dell'eccitazione sismica tale effetto non può essere certo ritenuto trascurabile, ma non può essere quantificato con i dati a disposizione.

Si potrebbero posizionare, auspicabilmente in un prossimo futuro, un accelerometro alla quota zero del Duomo, nella stessa linea verticale di quelli esistenti, oltre ad un sistema di rilievo (almeno due accelerometri biassiali) della risposta alla quota della terrazza. Si

confronti la Figura 4.10, nella quale si mostra indicativamente la posizione del nuovo accelerometro, in rosso, rispetto agli altri, in bianco. (Il disegno è puramente indicativo).

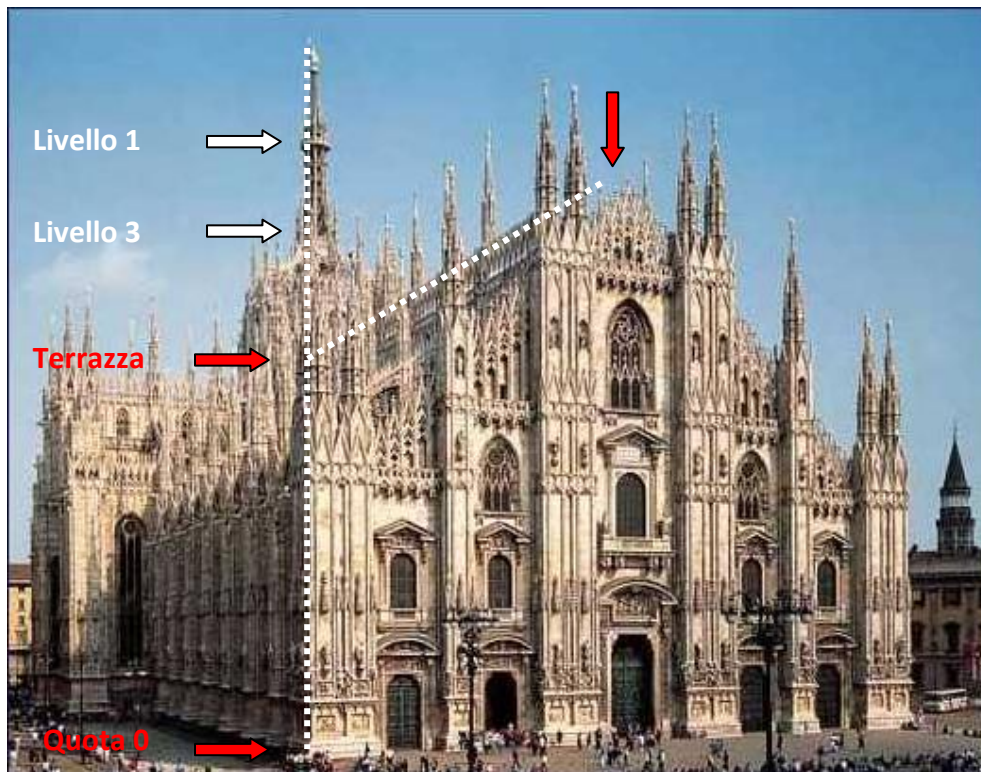


Figura 4.10: Posizionamento di un nuovi accelerometri

Mediante la funzione di trasferimento tra i dati misurati alla base della guglia e a questo livello sarà possibile identificare, almeno in termini globali ed ai fini della risposta della Guglia, la risposta complessiva del Duomo.

E' evidente che i valori di picco non sono sufficienti a descrivere in modo esaustivo né il comportamento della struttura né quello del modello; è pertanto necessario eseguire una analisi in frequenza come specificato all'inizio del capitolo. Si riportano a titolo di esempio gli spettri di Fourier che si ottengono con tutti i dati (Figura 4.11 e Figura 4.12).

Nel prossimo capitolo si effettuerà uno studio delle informazioni che derivano da tali spettri e il confronto tra dati sperimentali e numerici.

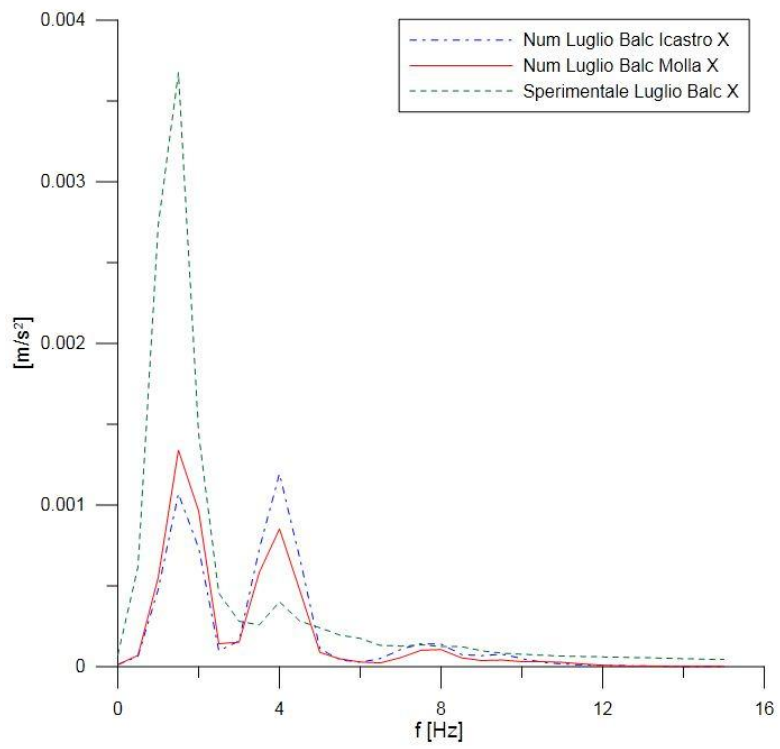


Figura 4.11: Dati Numerici e sperimentali al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X.

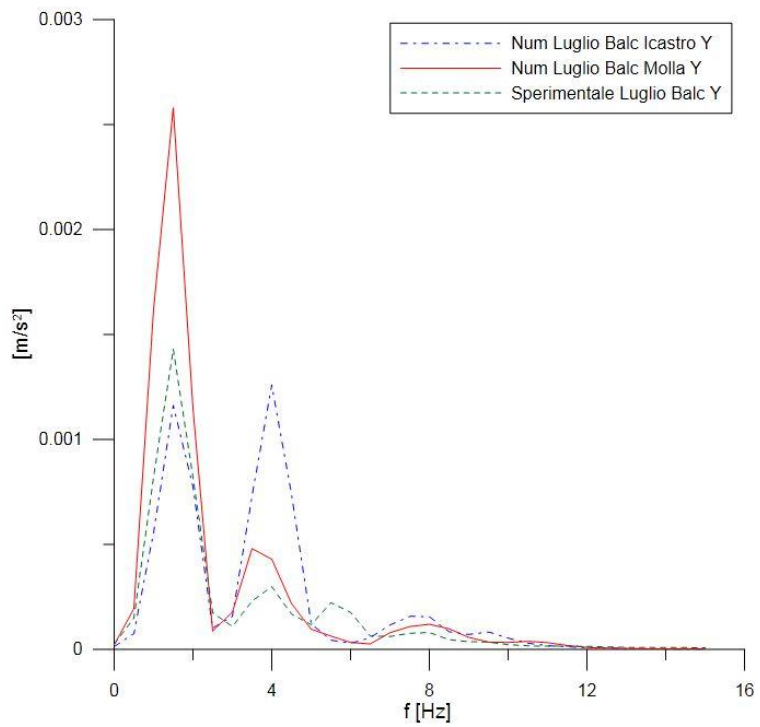


Figura 4.12: Dati Numerici ottenuti con i due modelli, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y.

5 CONFRONTO

Si pone ora l'obiettivo di confrontare nel dettaglio la risposta sperimentale, cioè reale, con quella numerica ottenuta con le analisi numeriche. Si dispone inoltre di storie temporali del terreno misurati dalla "Rete Accelerometrica Italia Settentrionale" (RAIS). A differenza di degli altri, questi sono relativi a Milano, ma corrispondono a diverse coordinate geografiche rispetto al Duomo di Milano. Pertanto, come si vedrà successivamente, si faranno delle ipotesi forti sulla legittimità del confronto tra i dati disponibili, in termini di registrazioni in campo libero, e quelli misurati sulla Guglia.

Il confronto si effettuerà principalmente su due fronti:

- spettri di Fourier,
- spettri di risposta.

Il primo ci permetterà di verificare la bontà del modello numerico e la sua risposta dinamica ai singoli eventi. Il secondo invece introdurrà tali eventi in un contesto più ampio che è quello della Normativa Italiana del 2008 e permetterà nel capitolo successivo di valutare gli effetti strutturali dei sismi in considerazione.

5.1 DATI A DISPOSIZIONE

In principio si avevano dati di accelerazione in funzione del tempo. Per quanto visto nel Capitolo 3, si è deciso di studiare la risposta nel dominio delle frequenze. Si riassumono in seguito l'insieme di storie temporali a disposizione di cui si vuole fare il confronto.

- Dati sperimentali: misurati con frequenza di campionamento di 64 Hz in corrispondenza del belvedere alto (Livello 1) e quello basso (Livello 3).
- Dati numerici: data una storia temporale (precedentemente campionata a 64 Hz) che sollecita la struttura, la risposta del nodo 32 e nodo 5 viene calcolata con il medesimo passo di campionamento (Appendice 1).
- Dati sperimentali RAIS (Rete Accelerometrica Italia Settentrionale): misurati con frequenza di campionamento 100 Hz al livello del terreno nei pressi del Politecnico di Milano, all'Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia (INGV).

In riferimento a questi ultimi dati è necessario fare alcune considerazioni di importanza rilevante. Dal momento che non si dispone di accelerometri al piano terreno del Duomo di Milano, gli unici dati che possano rappresentare in modo molto qualitativo le accelerazioni a tale quota sono quelli misurati dall' INGV. Questa grande approssimazione è concessa dal fatto che il terreno del Centro di Milano e quello di Città Studi (evidenziati con triangoli rispettivamente rosso e blu in Figura 5.1) rientrano nella stessa caratterizzazione geologica.

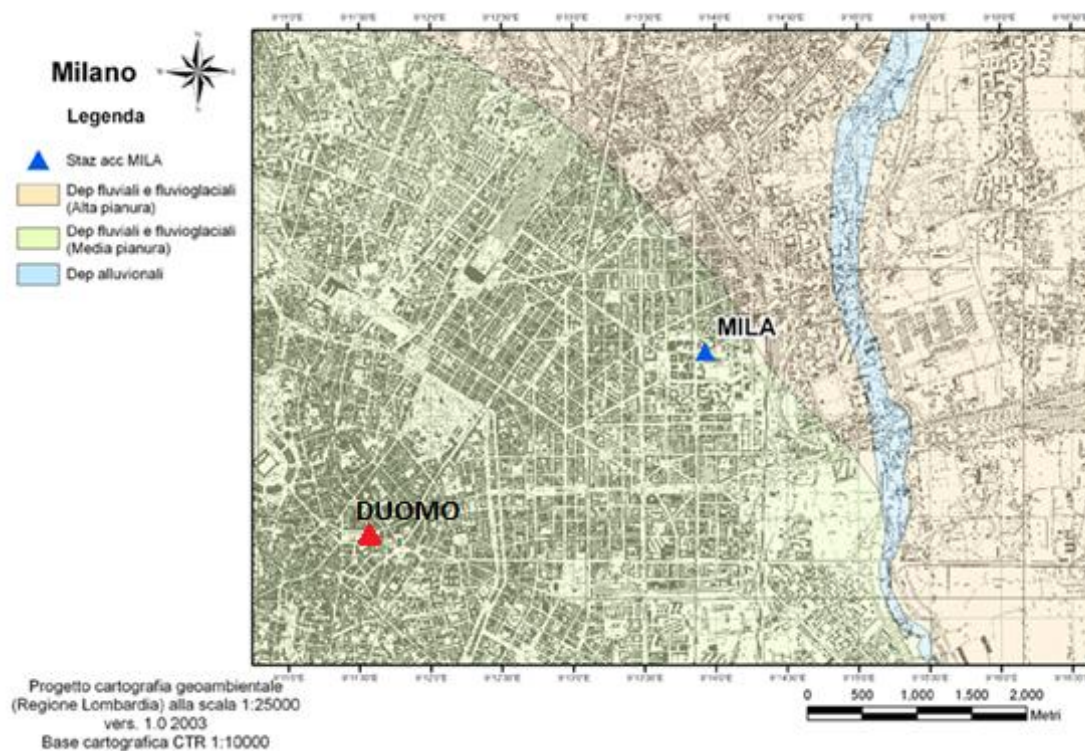


Figura 5.1: Particolare della Carta geologica di Milano.

Inoltre, nella prospettiva di un confronto, ammessa la sua legittimità, la frequenza di campionamento dell'INGV deve essere adattata a quella dei dati sperimentali misurati sulla Guglia. E' stato pertanto effettuato una operazione di decimazione passando da una frequenza campionamento di 100 Hz a 64 Hz. Tale operazione non ha alterato in alcun modo la natura del segnale dal momento che per il Teorema di Nyquist, la banda limite del segnale della Rete Accelerometrica dell'Italia Settentrionale è $100/2 = 50\text{Hz}$ che è ampiamente sufficiente poiché 50 Hz è maggiore di 32 Hz ($= 60 / 2\text{ Hz}$).

La legittimità del confronto si assume momentaneamente vera, pur essendo questa una ipotesi molto forte. E' strettamente necessario giustificarla sperimentalmente in un secondo momento, per esempio confrontandola con dati di un nuovo accelerometro posto alla quota 0 come proposto al Paragrafo 4.3.

5.2 CONFRONTO DEGLI SPETTRI DI FOURIER.

L'intenzione di questo paragrafo è quella di verificare le prestazioni del modello numerico mediante una osservazione critica dei dati a disposizione. Tali osservazioni hanno come presupposto ipotesi, più o meno forti, discusse nei capitoli precedenti. Si riportano brevemente in seguito:

1. Comportamento lineare del modello: si considera la Guglia in condizioni ambientali, giustificato dal fatto che risposta al sisma è simile, in termini di frequenze proprie, a quella all'eccitazione ambientale.
2. Comportamento flessionale: non si è in grado di quantificare la torsione.
3. Il modello numerico della Guglia non tiene conto del comportamento della struttura sottostante. Tale comportamento è solo in parte colto, in termini di deformabilità locale, dal modello con la molla che per come è stato definito il vincolo alla base riporta due molle rotazionali (in x e in y) caratterizzate, per il momento, da una uguale rigidità.
4. Le accelerazioni misurate all'INGV (in zona Città Studi) si assumono, in modo molto approssimativo e qualitativo, rappresentative della risposta del pian terreno: questo è l'unico dato che potrebbe in qualche modo dare informazioni sull'amplificazione dovuta alle strutture che sorreggono la Guglia.

Si ricorda inoltre che nel modello numerico sono stati individuati dodici modi di vibrare, ma solo i primi quattro di questi sono stati considerati per il confronto poiché gli unici riscontrati anche sperimentalmente.

Per favorire il confronto tra la risposta numerica e quella sperimentale è stato scelto un passo di analisi pari $1/64$. Tenendo conto che il periodo del quarto modo è pari a $1/3,77$ allora, dal momento che il passo di analisi deve essere inferiore ad almeno

1/10 di tale valore, si può affermare che il passo di analisi appena definito sia corretto.

Infine per quanto riguarda il fattore di smorzamento, difficilmente definibile a priori per una struttura come quella del Guglia, è stato lasciato quello proposto di default dal software, ovvero 5%.

Alla luce di queste ipotesi e considerazioni si osservino gli spettri di Fourier separatamente per ciascun tipo di dato a disposizione ed in seguito se ne consideri la sovrapposizione.

5.2.1 RISPOSTA SPERIMENTALE

Si ricorda la posizione degli accelerometri sulla Guglia Maggiore del Duomo di Milano in Figura 5.2:

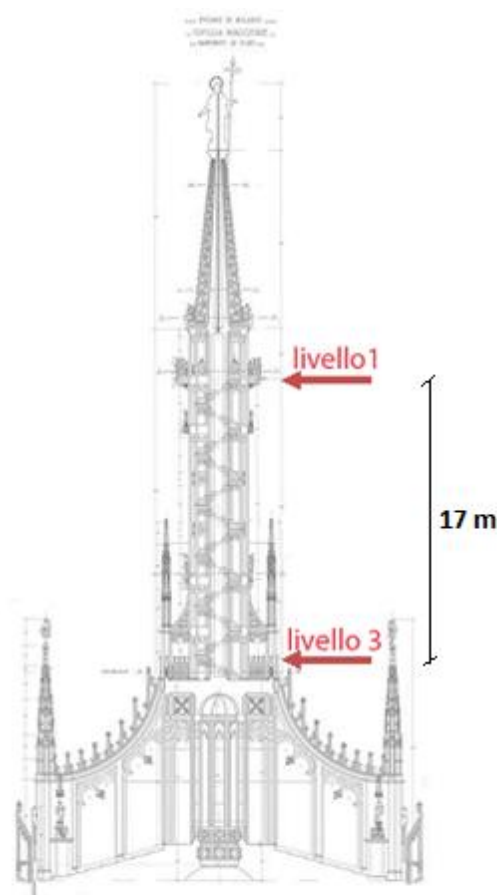


Figura 5.2: Posizione degli accelerometri sulla Guglia Maggiore.

Inoltre si riportano in Tabella 5.1 le frequenze dei primi modi identificati dal gruppo di ricerca del Dipartimento di Meccanica al Politecnico di Milano:

| FREQUENZE IDENTIFICATE | |
|------------------------|----------------|
| Modo | Frequenze [Hz] |
| 1 | 1,59 |
| 2 | 1,61 |
| 3 | 3,77 |
| 4 | 3,77 |

Tabella 5.1: Frequenze dei modi identificate sperimentalmente.

Si riportano gli Spettri di Fourier (in termini di ampiezza della trasformata discreta) relativi ai dati misurati durante i sismi dei giorni 17 Luglio 2011 e 25 Febbraio 2012 in entrambe le direzioni per ciascun Livello.

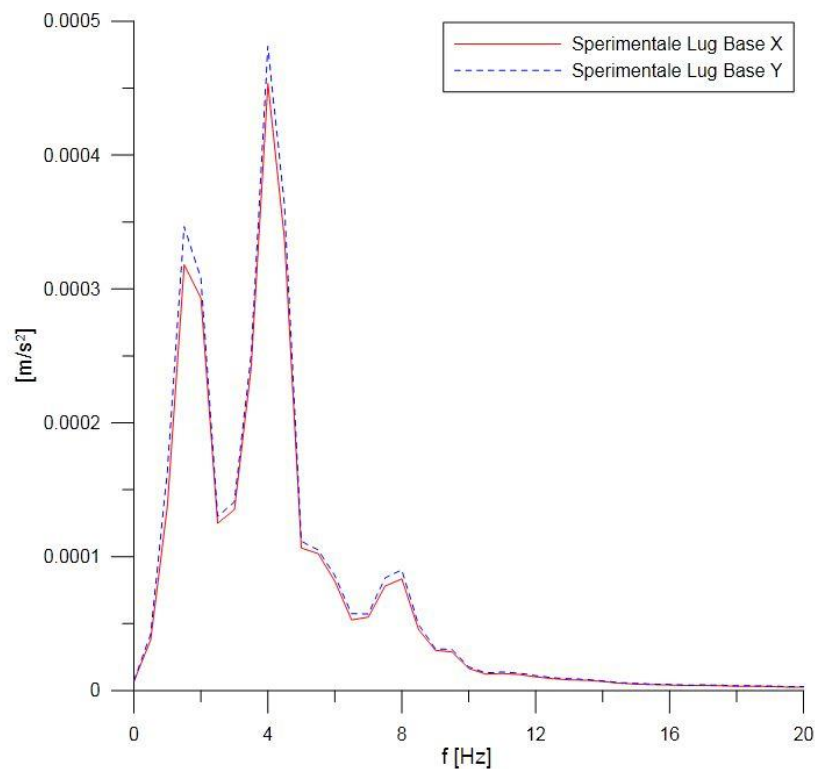


Figura 5.3: Dati Sperimentali al Livello 3, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y.

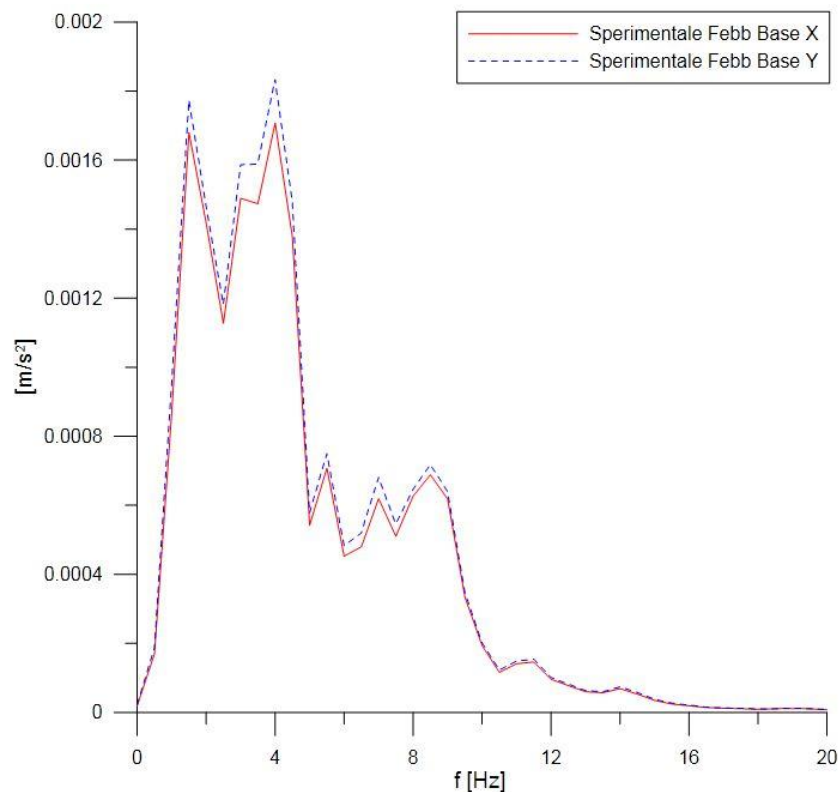


Figura 5.4: Dati Sperimentali al Livello 3, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X e Y.

Come si può osservare dalle Figura 5.3 e Figura 5.4 in entrambi i sismi, la risposta misurata al Livello 3 ha qualitativamente lo stesso andamento in entrambe le direzioni. Questo è indice del fatto che le misurazioni sono attendibili poiché, come noto sperimentalmente e da letteratura, il sisma è molto simile nelle due direzioni, pertanto si attende che tale sia anche la risposta.

Il terremoto di Febbraio è caratterizzato da una intensità superiore a quella di Luglio, pertanto, lo spettro di Fourier riporta dei piccoli picchi che potrebbero corrispondere ai modi torsionali. Dal momento che per la seconda ipotesi si trascura la torsione, i picchi di interesse risultano quelli in corrispondenza delle frequenze 1,59 Hz e 3,77 Hz per la direzione in X e 1,61 Hz e 3,77 Hz per quella in Y, che sicuramente sono legati al comportamento flessionale della struttura.

Dunque le armoniche principali che compongono la risposta, in termini di accelerazioni, sono caratterizzate da tali frequenze e le loro ampiezze dal valore in ordinata dei rispettivi picchi degli spettri.

Si vuole ora studiare la risposta in frequenza dei dati misurati al Livello 1. Come si può osservare dalle Figura 5.5 e Figura 5.6, mentre per il sisma di Febbraio le risposte al belvedere alto quasi si sovrappongono, per l'evento di Luglio l'andamento nelle due direzioni è qualitativamente simile, ma alla prima frequenza in direzione X corrisponde una ampiezza di spettro di Fourier che è più di due volte tanto quella in Y.

Questa differenza non si riscontra nel sisma di Febbraio, pur essendo più intenso di quello di Luglio. Infatti tale amplificazione non è necessariamente legata alla intensità del sisma, quanto alla frequenza della eccitazione e alla interazione della guglia con la struttura sottostante. E' probabile infatti che la prima armonica abbia una frequenza molto vicina a quella della prima della Guglia in direzione X, pertanto è come se fosse prossima alla risonanza interna.

Certamente queste supposizioni necessitano di una giustificazione numerica, che per il momento, non è possibile fornire per mancanza di dati relativi alla interazione tra la Guglia e la struttura sottostante. Si osserverà nel prossimo paragrafo la risposta numerica.

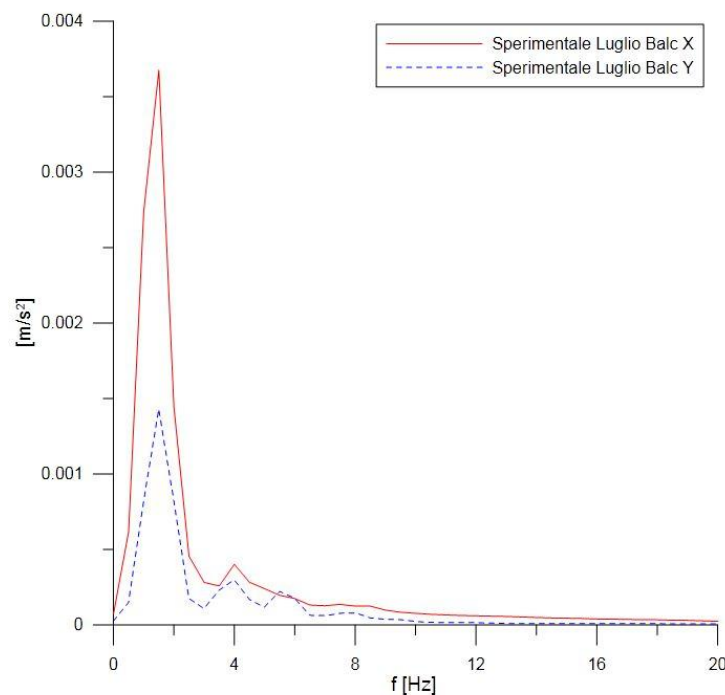


Figura 5.5: Dati Sperimentali al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y.

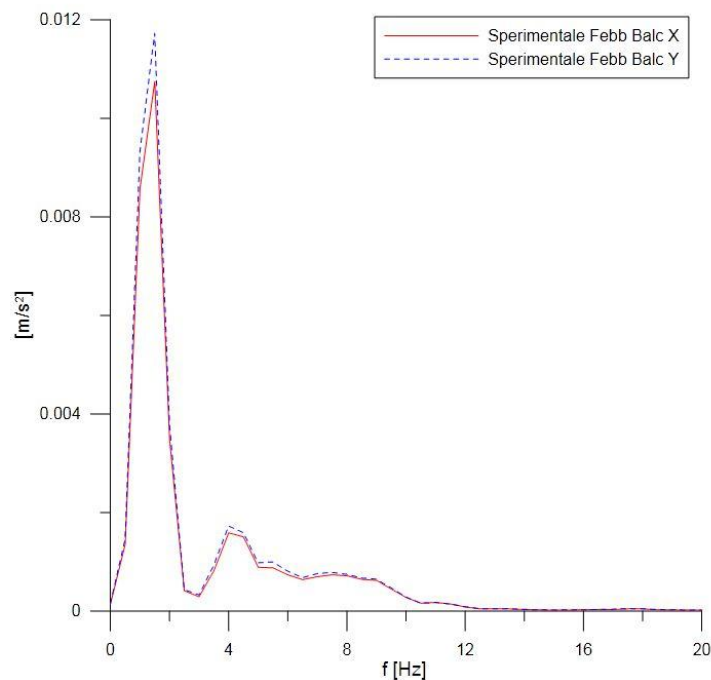


Figura 5.6: Dati Sperimentali al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X e Y.

Tenendo conto che la Guglia è una struttura snella che si sviluppa in altezza, si attende verificarsi una amplificazione non trascurabile tra i due livelli, che sono distanti di circa 17m. Infatti confrontando le Figura 5.7, Figura 5.8, Figura 5.9 e Figura 5.10 è immediato osservare che vi è una amplificazione soprattutto per il primo modo.

Si riassumono in Tabella 5.2 i valori dei picchi degli spettri relativi al primo modo. Si sottolinea in color grigio il rapporto tra livello superiore e inferiore. Questi valori rappresentano l'amplificazione che si verifica.

| SISMA | | Picco in X [m/s ²] | Picco in Y [m/s ²] |
|------------------|------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 17 Luglio 2011 | livello 1 | 0,00368 | 0,00143 |
| | livello 3 | 0,00045 | 0,00048 |
| | rapporto | 8,10 | 2,97 |
| 25 Febbraio 2012 | livello 1 | 0,01075286 | 0,011727471 |
| | livello 3 | 0,00170815 | 0,001833809 |
| | rapporto | 6,3 | 6,4 |

Tabella 5.2: Picchi degli Spettri di Fourier relativi al primo modo per i dati misurati al Livello 1 e 3 e il rapporto per le rispettive direzioni e sismi.

Per quanto riguarda il sisma di Febbraio il rapporto nelle due direzioni è praticamente uguale. Non avviene lo stesso per quello di Luglio, anzi l'amplificazione in direzione X è quasi 2,7 volte tanto quello in Y. Questo induce sempre di più a pensare quanto precedentemente osservato, cioè che ci possa essere una interazione della Guglia Maggiore con la parte sottostante che si attiva non necessariamente in caso di un sisma intenso.

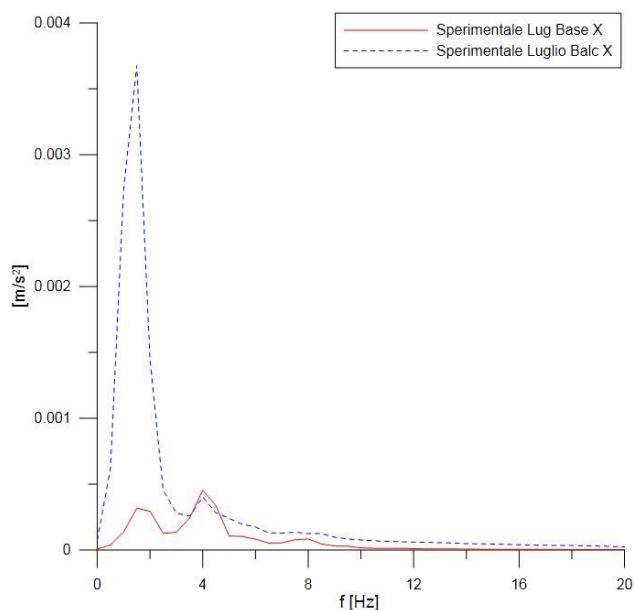


Figura 5.7: Dati Sperimentali misurati al Livello 1 e 3 relativi al sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X.

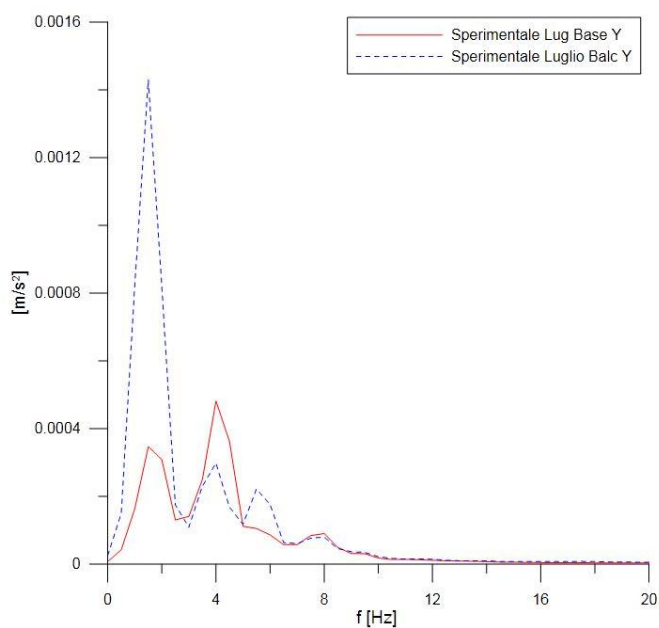


Figura 5.8: Dati Sperimentali misurati al Livello 1 e 3 relativi al sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y.

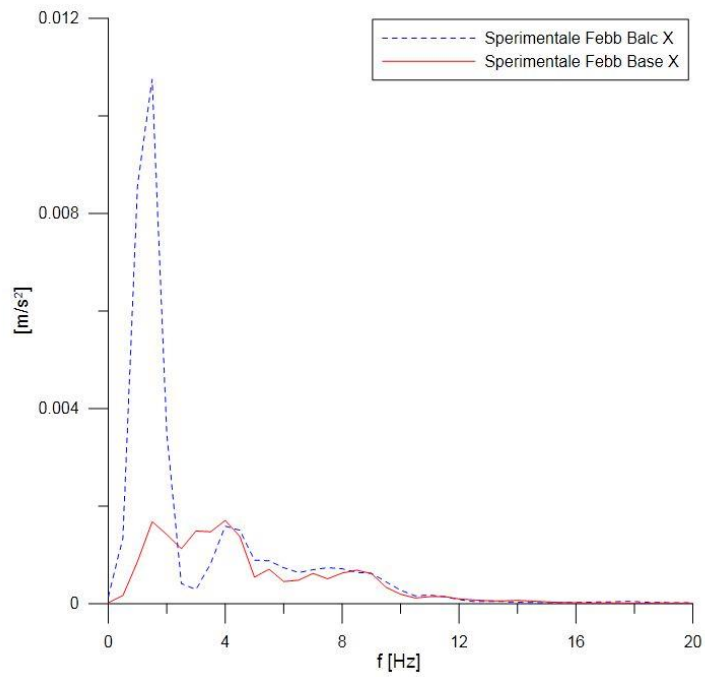


Figura 5.9: Dati Sperimentali misurati al Livello 1 e 3 relativi al sisma del 25 Febbraio 20012 in direzione X.

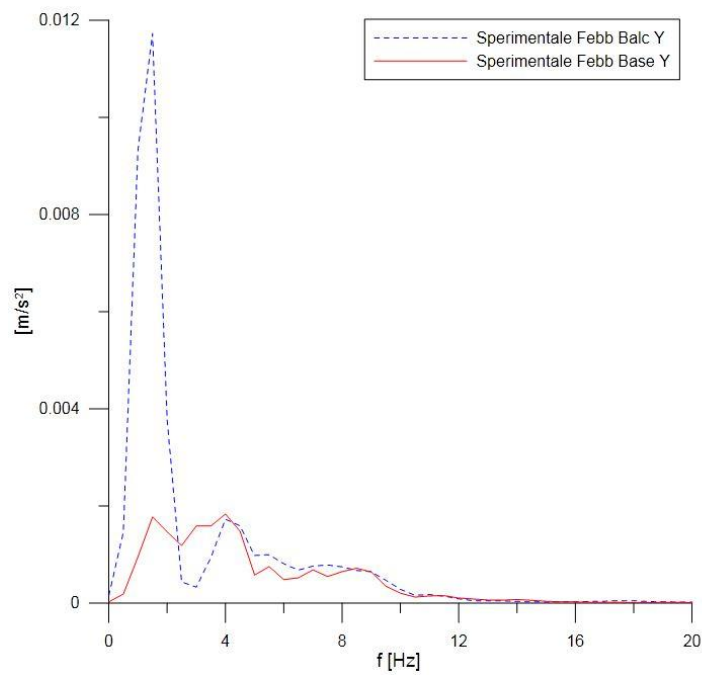


Figura 5.10: Dati Sperimentali misurati al Livello 1 e 3 relativi al sisma del 25 Febbraio 20012 in direzione Y.

5.2.2 RISPOSTA NUMERICA

Si cerchino di studiare in seguito i connotati della risposta numerica. Si evidenziano in rosso in Figura 5.11 la posizione dei nodi di interesse. Si ricorda che l'eccitazione sismica che si impone alla base del modello è la storia temporale è quella misurata al Livello 3, pertanto la risposta in tale punto è identica a quella sperimentale e dunque avrà le caratteristiche viste al Paragrafo 5.2.1. Si studia pertanto solamente la risposta "numerica" relativa al nodo 32.

Si ricorda inoltre che vi sono a disposizione due modelli che principalmente differiscono per il vincolo alla base (Si rimanda al Capitolo 3):

- Incastro perfetto: blocco totale dei gradi di libertà.
- Link Element: un vincolo che blocca totalmente tutte le traslazioni e la rotazione attorno all'asse verticale e parzialmente quelle attorno alle direzioni del piano. Questo è stato possibile dal momento che l'elemento link utilizzato alla base del modello permette di definire i gradi di vincolo mediante un insieme di molle traslazioni e rotazionali caratterizzate ciascuna da una certa rigidità.

Si studieranno le risposte di entrambi i modelli, e nel prossimo paragrafo si cercherà di capire quale dei due modelli rappresenta meglio il comportamento reale della Guglia Maggiore.

In primo luogo si analizzano i valori relativi alle frequenze dei primi modi ottenuti mediante l'analisi modale per ciascun modello. Tali valori si riportano in Tabella 5.3.

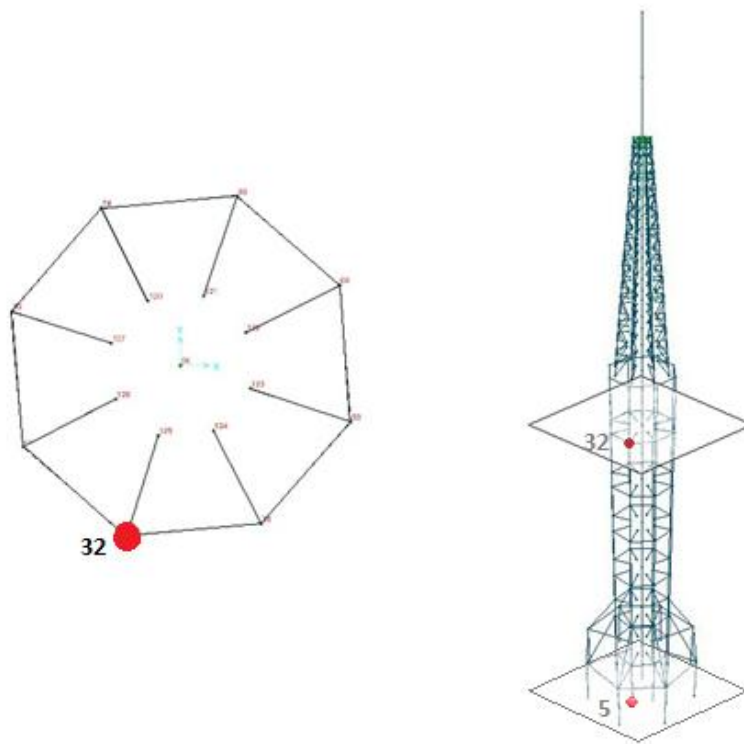


Figura 5.11: Nodi del modello in corrispondenza degli accelerometri.

I due modelli presentano valori di frequenza molto simili tra loro fino al quarto modo, inoltre sono molto vicini a quelli sperimentali: quello con la molla approssima meglio dell'altro i valori delle frequenze dei primi quattro modi.

| Sperimentali | | Modello con INCASTRO | | Modello con MOLLA | |
|--------------|----------------|----------------------|----------------|-------------------|----------------|
| N° MODO | FREQUENZA [Hz] | N° MODO | FREQUENZA [Hz] | N° MODO | FREQUENZA [Hz] |
| 1 | 1,59 | 1 | 1,5377 | 1 | 1,5552 |
| 2 | 1,61 | 2 | 1,5423 | 2 | 1,5581 |
| 3 | 3,77 | 3 | 3,8689 | 3 | 3,7411 |
| 4 | 3,77 | 4 | 3,8729 | 4 | 3,7445 |
| | | 5 | 3,9502 | 5 | 5,0837 |
| | | 6 | 7,0445 | 6 | 7,2948 |
| | | 7 | 7,0581 | 7 | 7,3064 |
| | | 8 | 8,6404 | 8 | 10,659 |
| | | 9 | 9,8659 | 9 | 10,672 |
| | | 10 | 9,8846 | 10 | 11,152 |
| | | 11 | 13,29 | 11 | 15,552 |
| | | 12 | 13,319 | 12 | 15,591 |

Tabella 5.3: Frequenze dei primi modi identificate numericamente.

Questa analisi delle frequenze dei modi propri, anche se necessaria, non è sufficiente per dimostrare l'efficacia dei modelli anche al livello di deformazioni imposto da un sisma, sia pur di modesta entità. Pertanto è necessario studiare la risposta numerica nel dominio delle frequenze e poi sovrapporla, nel capitolo successivo, a quella sperimentale.

Ricordando che i sismi di riferimento sono quelli verificati il 17 Luglio 2011 e il 25 Febbraio 2012, si osservino gli Spettri di Fourier nelle Figura 5.12, Figura 5.13, Figura 5.14 e Figura 5.15.

E' immediato osservare che c'è una discrepanza tra i due eventi nella elaborazione numerica come già rilevato per i dati sperimentali. In entrambi i modelli, in corrispondenza del belvedere alto (cioè Nodo #32), gli spettri di Fourier del sisma di Febbraio (Figura 5.14 e Figura 5.15.) presentano andamenti pressoché identici nelle due direzioni. Questo non avviene per il sisma di Luglio che presenta invece una risposta amplificata in Y rispetto a X (Figura 5.12, Figura 5.13).

La differenza della risposta nelle due direzioni, induce nuovamente a pensare che durante l'evento di Luglio vi sia stata una interazione della Guglia con la struttura sottostante che abbia provocato un aumento molto grande della risposta della Guglia per il primo modo. I modelli certamente tengono conto di tale interazione mediante l'eccitazione sismica a cui sono soggetti. La storia temporale infatti inserita come input nel software è quella reale misurata al Livello 3. Però i vincoli alla base dei modelli, per la terza ipotesi, non tengono conto della struttura sottostante: ciò potrebbe spiegare il fatto che l'amplificazione del primo modo nei dati numerici sia più grande in direzione Y anziché in X come visto per i dati sperimentali (Figura 5.12 e Figura 5.13).

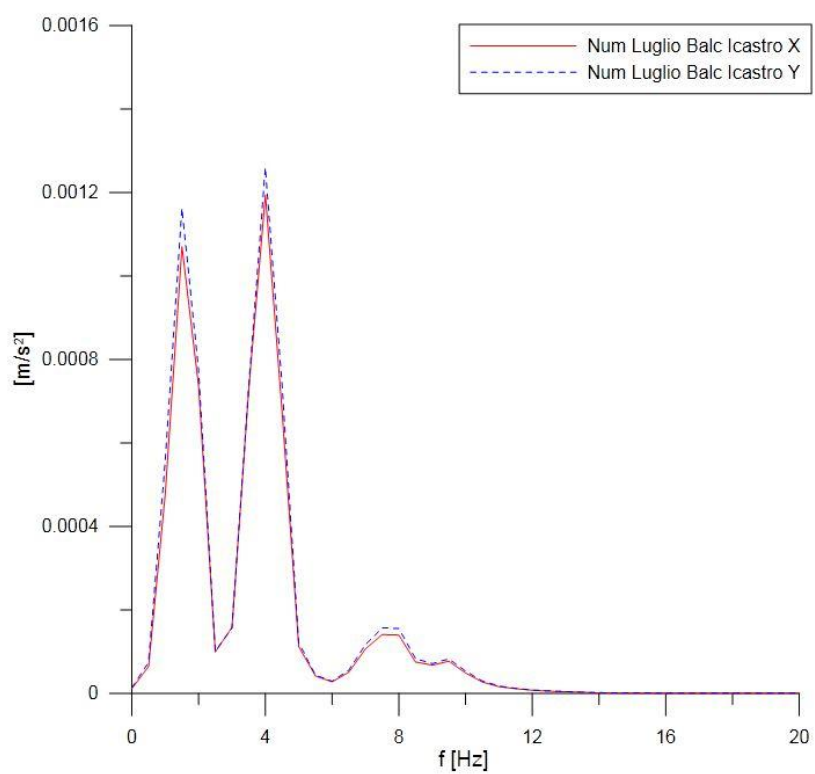


Figura 5.12: Dati Numerici (modello con l'incastro) al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y.

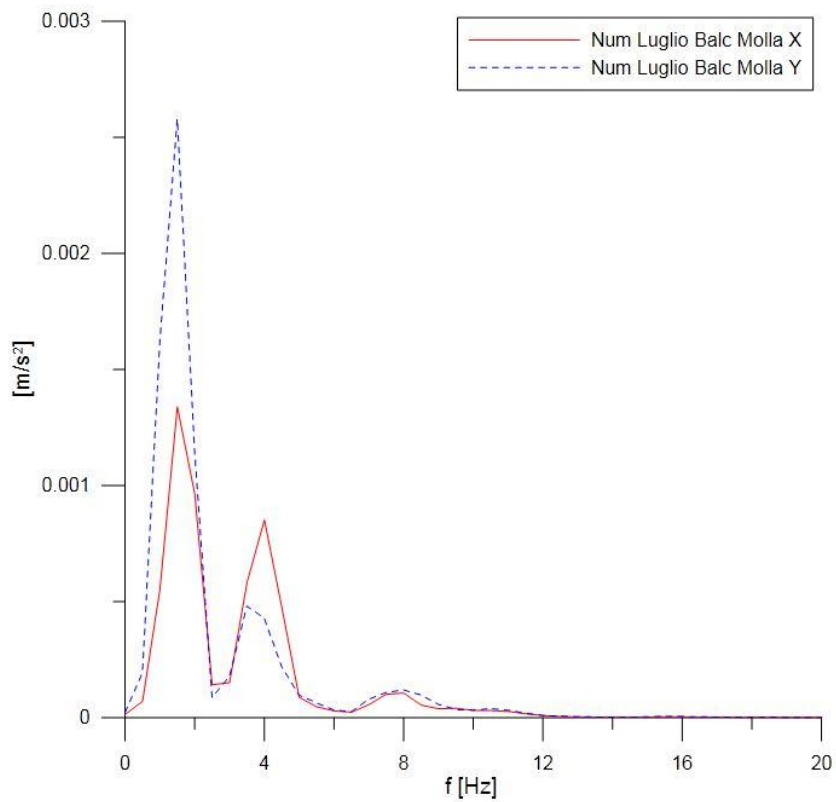


Figura 5.13: Dati numerici (modello con la molla) al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y.

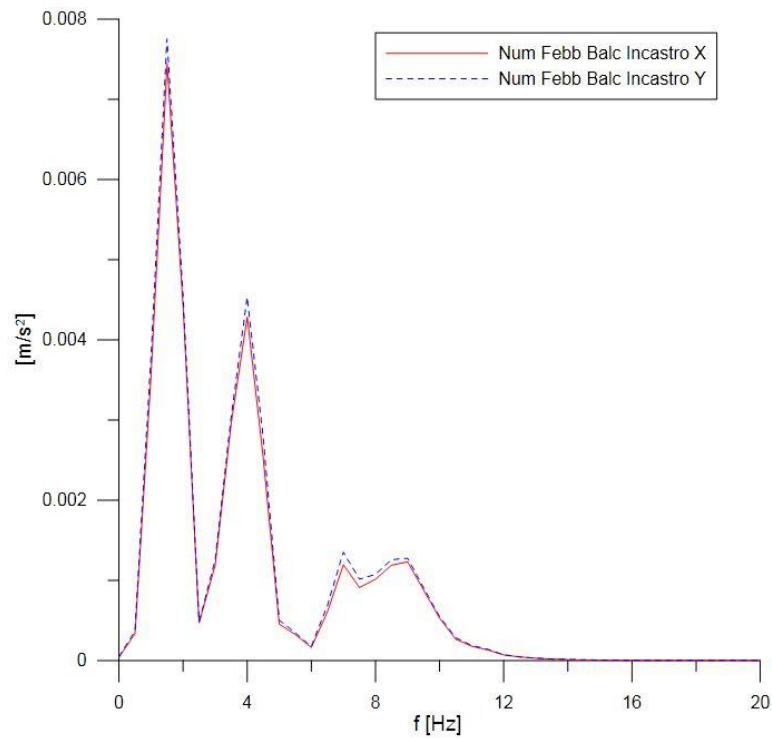


Figura 5.14: Dati numerici (modello con l' incastro) al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X e Y.

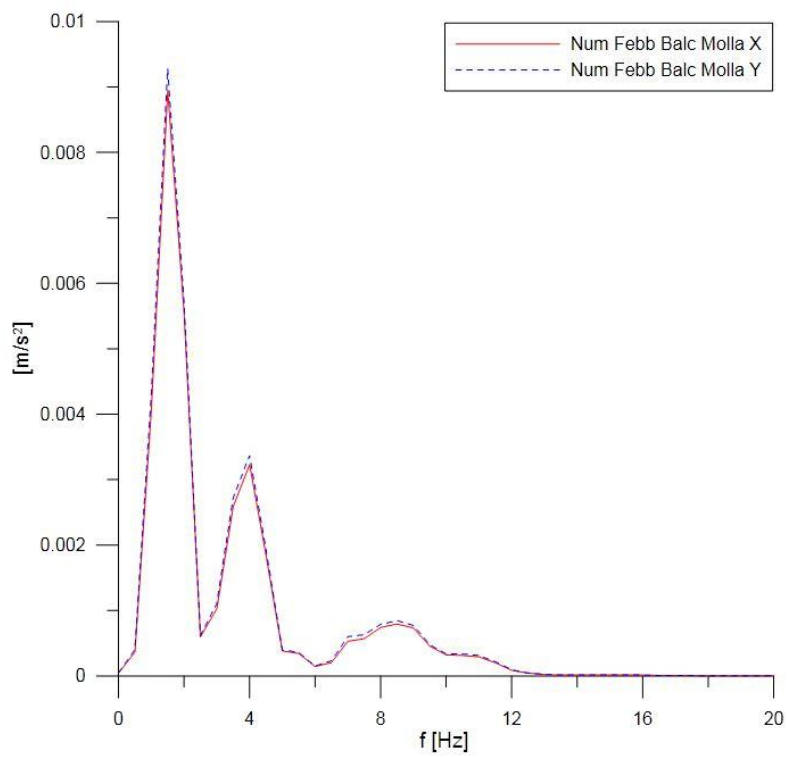


Figura 5.15: Dati numerici (modello con la molla) al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X e Y

Si cerchi ora di valutare l'amplificazione "numerica" che si verifica tra i due livelli. Tali valori si riportano in Tabella 5.4.

Nel caso del sisma di Febbraio il modello con la molla presenta una amplificazione più vicina a quella reale rispetto all'altro. Invece riguardo l'evento di Luglio nel caso della molla vi è una grande differenza tra la direzione X e Y. Dal momento che, per la terza ipotesi, il modello non tiene conto della struttura sottostante, è probabile che l'interazione che si genera per il sisma di Luglio non emerga anche numericamente, anzi, addirittura che prevalga l'altra direzione. Si ribadisce nuovamente che è necessario in futuro quantificare tale interazione e tenerne conto anche nel modello.

| SISMA | | SPERIMENTALI | | INCASTRO | | MOLLA | |
|------------------------|-----------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | | picco in X [m/s ²] | picco in Y [m/s ²] | picco in X [m/s ²] | picco in Y [m/s ²] | picco in X [m/s ²] | picco in Y [m/s ²] |
| 17 Luglio 2011 | livello 1 | 0,00368 | 0,00143 | 0,00119 | 0,00126 | 0,00134 | 0,00258 |
| | livello 3 | 0,00045 | 0,00048 | 0,00045 | 0,00048 | 0,00045 | 0,00048 |
| | rapporto | 8,10 | 2,97 | 2,63 | 2,62 | 2,95 | 5,36 |
| 25 Febbraio 2012 | livello 1 | 0,01075 | 0,01173 | 0,00745 | 0,00775 | 0,00895 | 0,00928 |
| | livello 3 | 0,00171 | 0,00183 | 0,00171 | 0,00183 | 0,00171 | 0,00183 |
| | rapporto | 6,3 | 6,4 | 4,4 | 4,2 | 5,2 | 5,1 |

Tabella 5.4: Picchi degli Spettri di Fourier relativi al primo modo per i dati elaborati coi due modelli al Livello 1 e 3 e il rapporto per le rispettive direzioni e sismi.

Alla luce delle precedenti considerazioni, si può osservare dalle Figura 5.16 e Figura 5.17 che gli spettri relativi a una stessa componente e diversi modelli presentano un andamento simile.

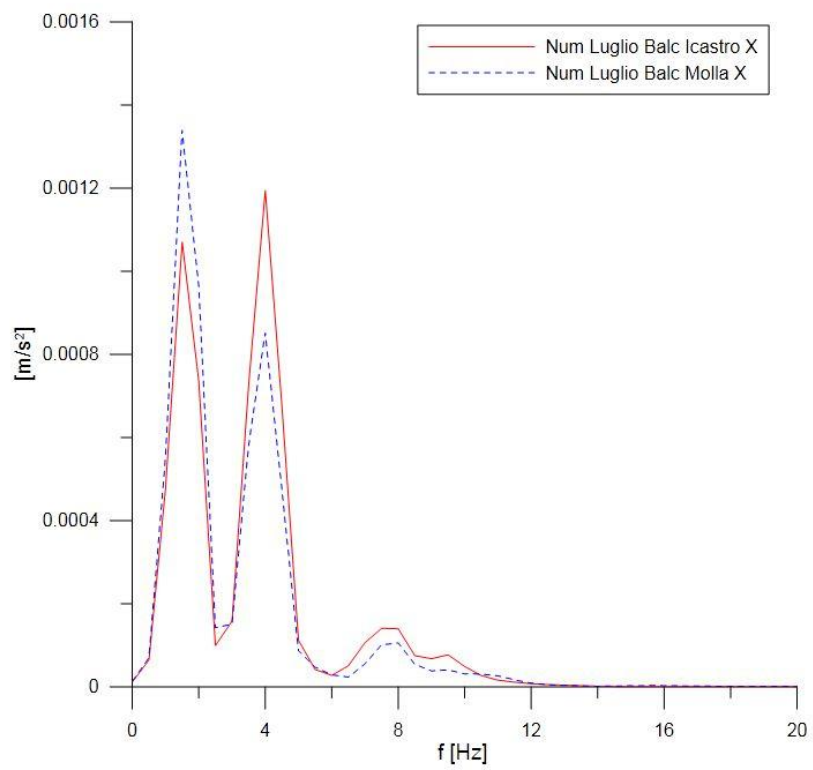


Figura 5.16: Spettri di Fourier dei due modelli al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X.

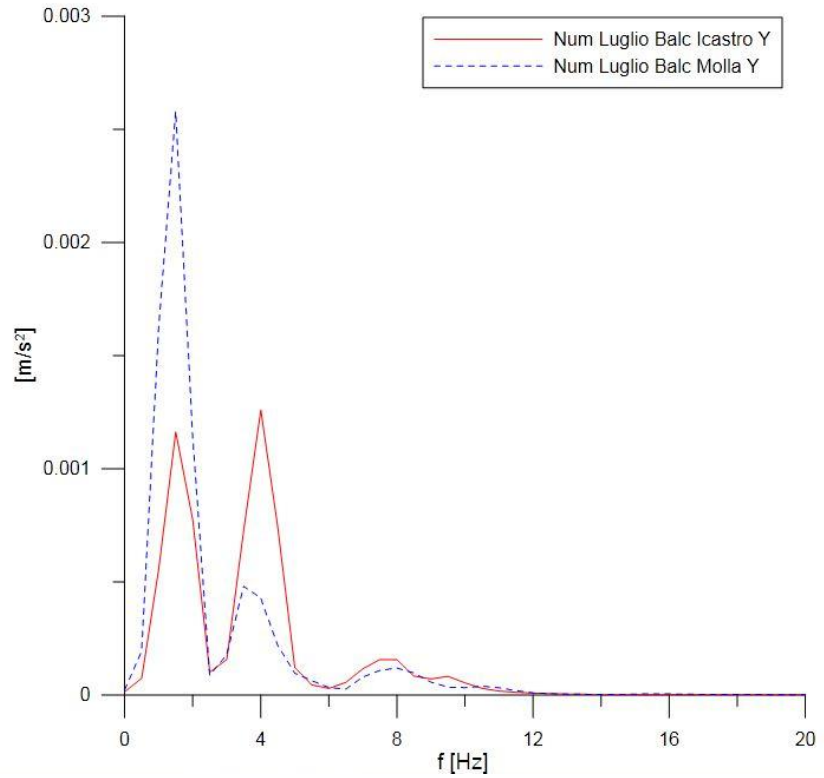


Figura 5.17: Spettri di Fourier dei due modelli al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y.

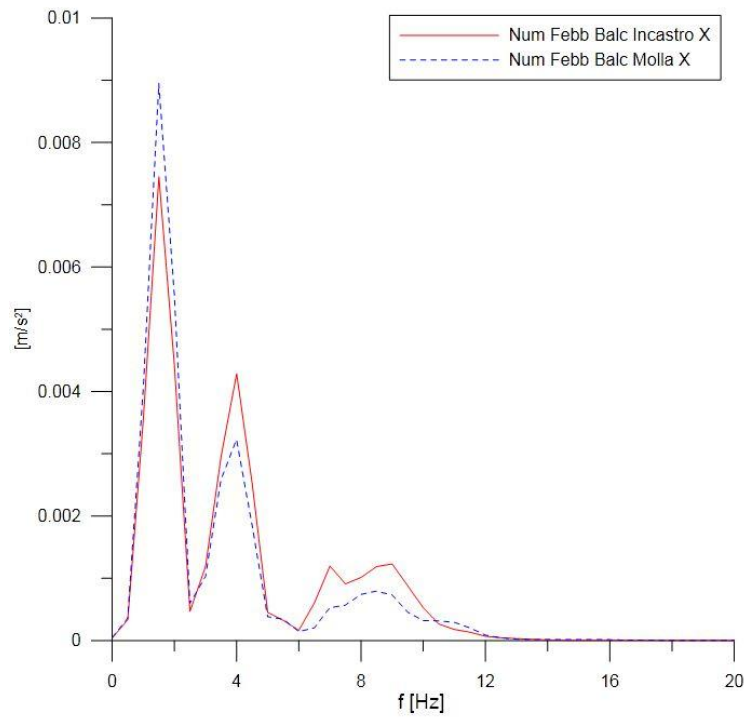


Figura 5.18: Spettri di Fourier dei due modelli al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X.

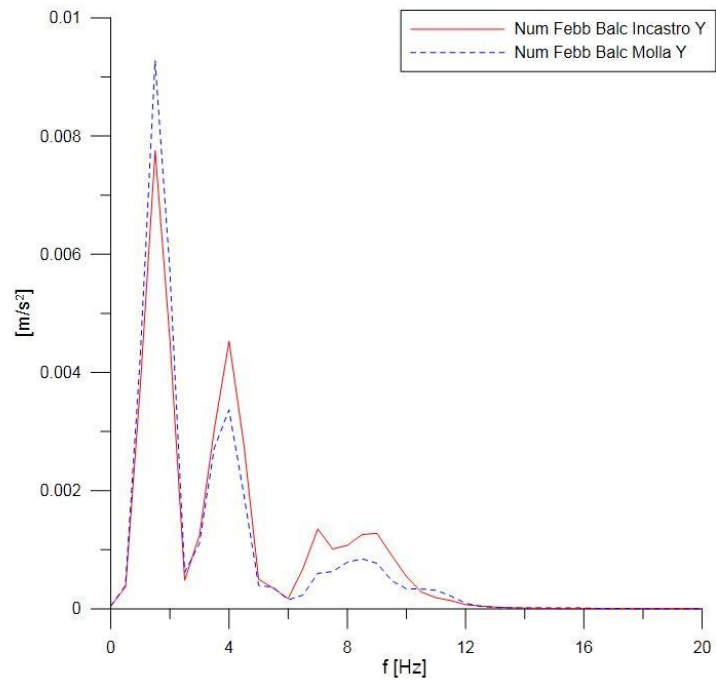


Figura 5.19: Spettri di Fourier dei due modelli al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione Y.

Con le osservazioni fatte finora non si è in grado di decidere quale dei due modelli rappresenti meglio il comportamento reale della Guglia. E' pertanto necessario sovrapporre gli spettri "sperimentali" con quelli "numerici".

5.2.3 SOVRAPPOSIZIONE DEGLI SPETTRI DI FOURIER

Al fine di verificare la bontà del modello numerico, si pone ora l'attenzione sulla sovrapposizione degli spettri di Fourier, cercando in fine di individuare quale dei modelli ha la meglio.

E' immediato osservare dalle Figura 5.22 e Figura 5.23 che per il sisma di Febbraio il modello con la molla approssima molto bene quello reale e dunque la scelta tra i modelli è ovvia. L'altro evento invece mette in discussione tale scelta dal momento che in direzione Y (Figura 5.21) c'è una grande amplificazione rispetto all'altra direzione e rispetto ai dati sperimentali.

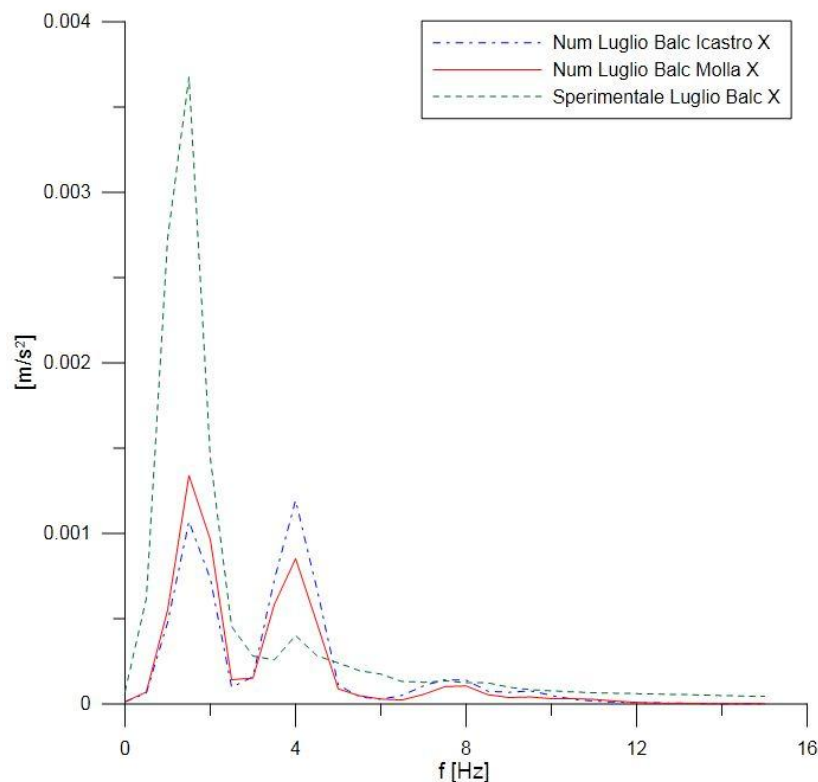


Figura 5.20: Sovrapposizione degli spettri "sperimentale" e "numerici" al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X.

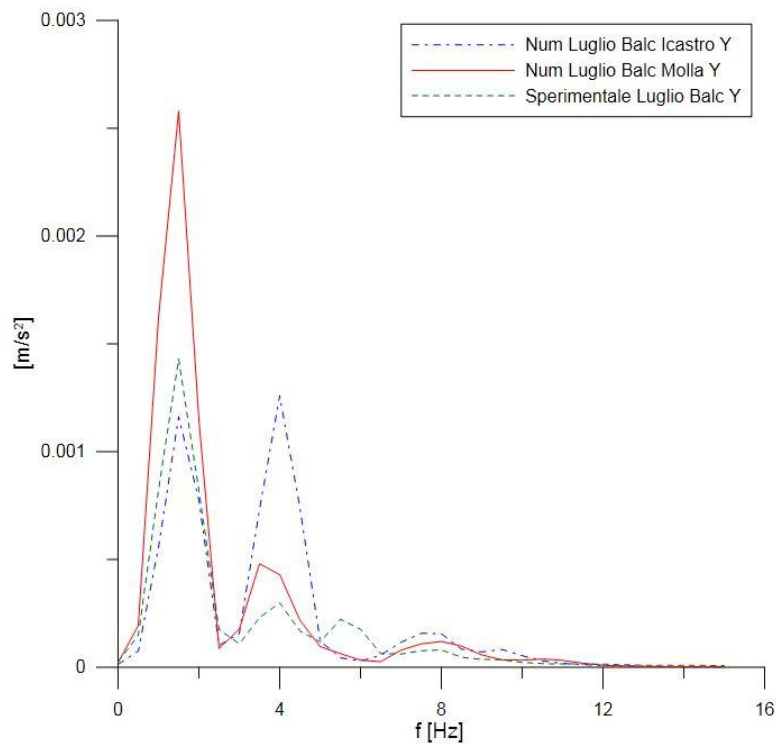


Figura 5.21: Sovrapposizione degli spettri “sperimentale” e “numerici” al Livello 1, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y.

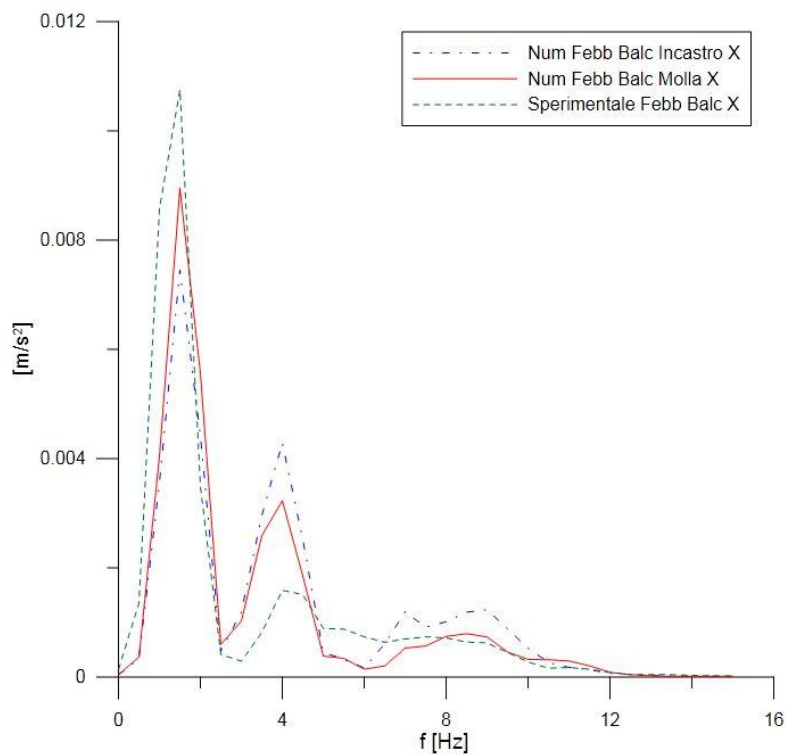


Figura 5.22: Sovrapposizione degli spettri “sperimentale” e “numerici” al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione X.

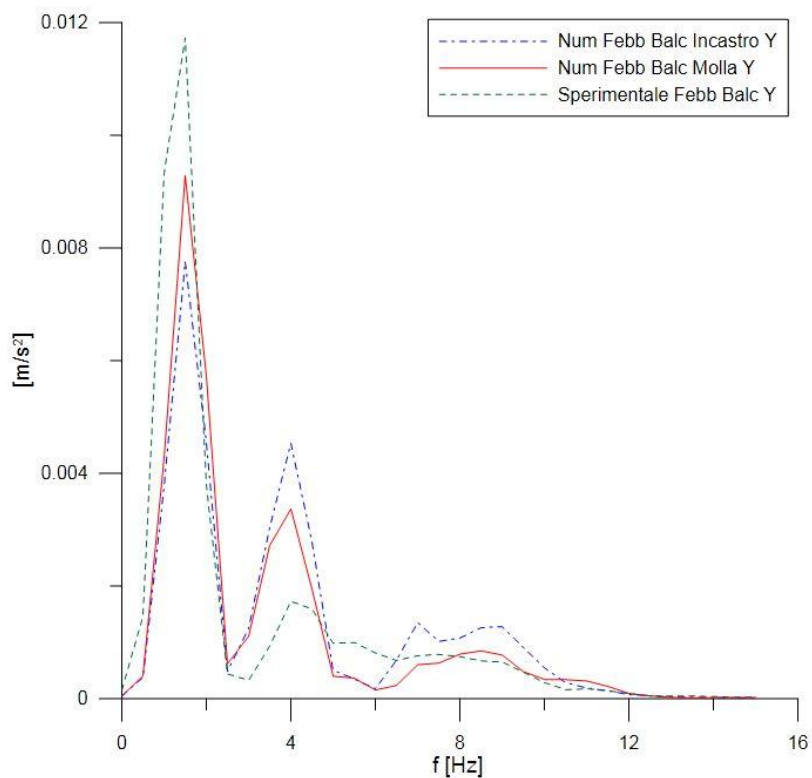


Figura 5.23: Sovrapposizione degli spettri “sperimentale” e “numerici” al Livello 1, sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione Y.

E' strettamente necessario analizzare l'interazione che si verifica tra la Guglia e la parte sottostante e tenerne conto nel modello. Questo per il momento non è possibile, come già ripetuto precedentemente, per mancanza di dati relativi alla struttura portante la Guglia. Le uniche storie temporali al pian terreno registrate sono quelle dell' INGV (Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia) che però, è posizionato a una distanza di circa 3 km rispetto dalla posizione geografica del Duomo (Figura 5.1). Pertanto il confronto, ammessa la sua legittimità, è molto qualitativo e inoltre è possibile solo per il sisma di Luglio, dal momento che durante l'altro evento non l'accelerometro non era in funzione.

I picchi degli spettri dell'INGV sono di ampiezza modesta rispetto a quelli dei dati misurati al Livello 1, però sono approssimativamente in corrispondenza delle frequenze dei primi modi della Guglia (1,59 Hz e 3,77 Hz in X e 1,62 Hz e 3,77 Hz in Y). Pertanto è intuibile che vi sia stata una grande amplificazione del primo modo in direzione X, come si è verificato sperimentalmente, oppure in direzione Y, visto

numericamente. Infatti l'azione sismica anche se caratterizzata da una piccola intensità, sembra avere una frequenza prossima a quella della Guglia.

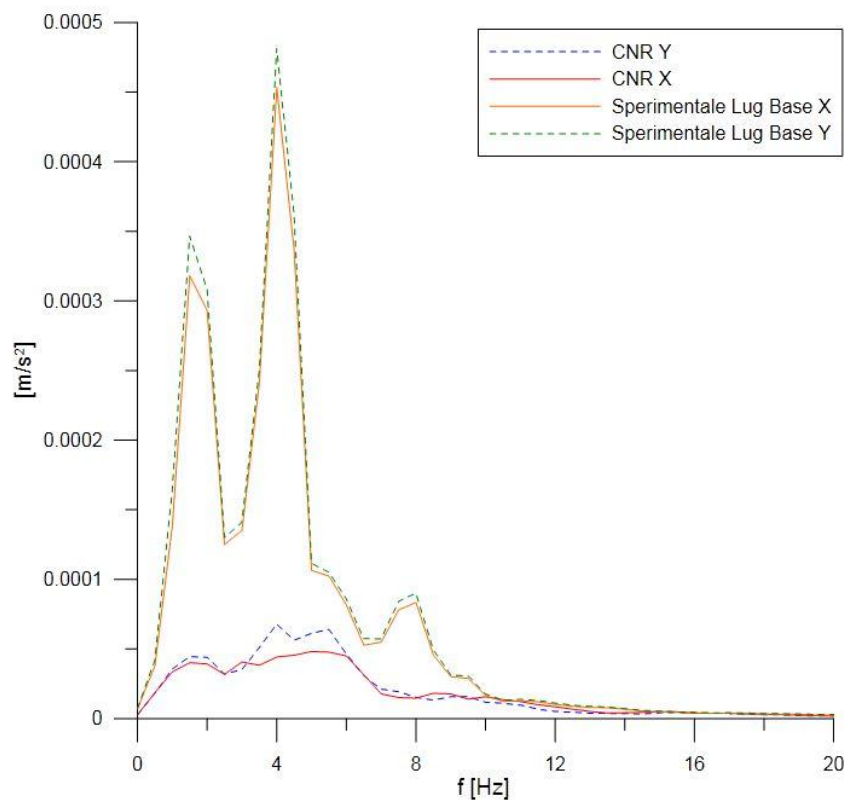


Figura 5.24: Dati sperimentali: misurati in situ al Livello 3 e dall'INGV, sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X e Y.

E' necessario verificare e giustificare numericamente questa intuizione, che, si ribadisce, si fonda su alcune forti ipotesi.

5.3 CONFRONTO DEGLI SPETTRI DI RISPOSTA.

Vista la risposta in frequenza della struttura soggetta a due specifici eventi sismici, si pone ora l'obiettivo di effettuare una caratterizzazione più ampia dei singoli eventi e inserirli in un contesto più ampio, ovvero quello della Normativa Tecnica Italiana del 2008. In altre parole si farà una analisi degli spettri di risposta per i sismi del 17 Luglio 2011 e del 25 Febbraio 2012 e verranno confrontati con quello delle Norme Tecniche, relative al Comune di Milano.

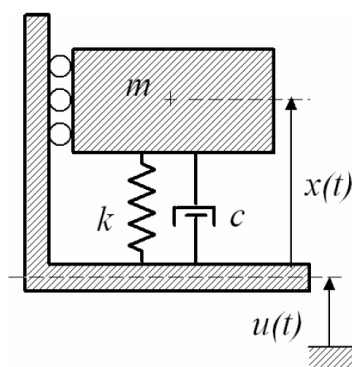
Prima di procedere con il confronto si riportano dei brevi accenni sul significato di tali spettri.

5.3.1 SPETTRO DI RISPOSTA: OSCILLATORE SEMPLICE

Gli effetti strutturali di un terremoto vengono valutati da un accelerometro che in sostanza può essere schematizzato come un "oscillatore semplice" (

Figura 5.25). L'equazione che lo governa è tipica di un sistema dinamico smorzato ad un grado di libertà soggetto a una forzante proporzionale alla accelerazione assoluta del suolo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{u} \quad (5.1)$$



m = massa

k = rigidezza della molla

c = coefficiente di smorzamento (0,05)

$\ddot{u} = a_g$ = accelerazione assoluta del suolo.

Figura 5.25: Oscillatore semplice.

Il sistema ha una sua frequenza naturale f_0 che dipende dal rapporto tra la rigidità della molla e l'entità m della massa vibrante. Per $c=0$ viene detta frequenza propria naturale e vale:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.2)$$

Con il corrispondente periodo proprio naturale di vibrazione T_0 :

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.3)$$

Se si suppone di rappresentare l'accelerazione del terreno mediante una unica armonica sinusoidale allora si dovrebbe scrivere:

$$a_g = \ddot{u}_i = \bar{a}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (5.4)$$

Con $\bar{a}_i = \bar{a}_i(f_i/f_0)$. Ovviamente, come noto da letteratura, la risposta in termini di accelerazioni sarà massima quando $f_i = f_0$ e cioè in risonanza. Per tale valore della frequenza dell'armonica si avrà pertanto $\bar{a}_i = \bar{a}_{imax}$.

Se si immagina di fare lo stesso ragionamento per diversi valori di f_0 dell'oscillatore semplice si otterrà un insieme di valori massimi in funzione di f_0 . Il diagramma che riporta in ascissa il periodo proprio $T_0 (= 1/f_0)$ e in ordinata il valore della accelerazione massima \bar{a}_{imax} corrispondente si chiama Spettro di Risposta, per come è stato costruito, permette di caratterizzare un evento sismico in tutto l'intervallo di impiego strutturale.

A titolo di esempio, si riportano in gli spettri di risposta dei sismi in considerazione. In ascissa c'è la sigla PSA (Pseudo accelerazione) poiché la risposta è in termini di accelerazione.

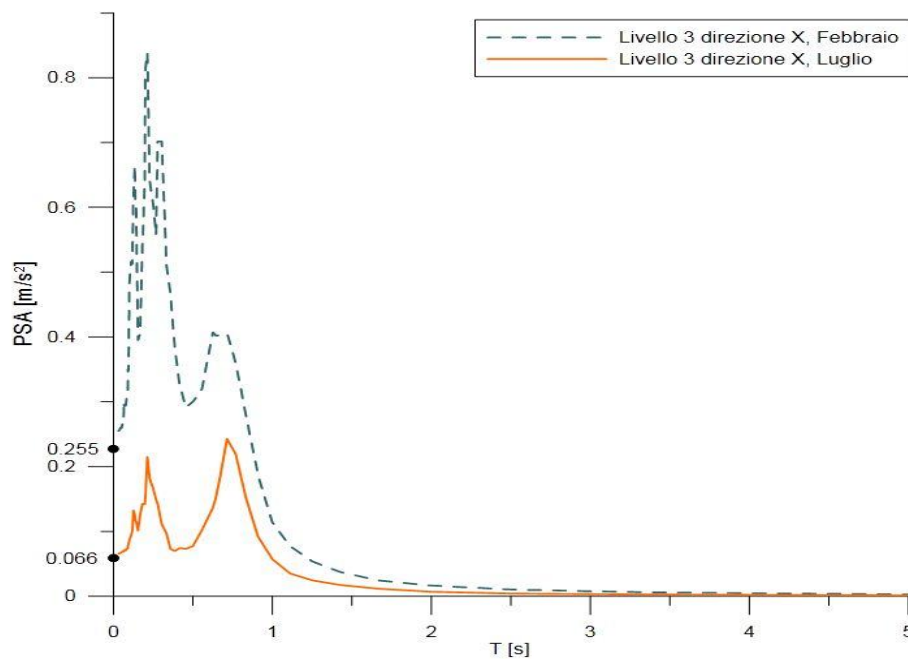


Figura 5.26: Spettro di risposta dei sismi del 17 Luglio 2011 e 25 Febbraio 2012 in direzione X.

5.3.2 Spettro della normativa tecnica italiana (2008).

Ai fini della determinazione della azione sismica per il calcolo strutturale, le forme spettrali vengono definite, per ciascuna probabilità di superamento P_V nel periodo normalizzato di osservazione a partire dai seguenti parametri:

- $\alpha_g = a_g/g$ accelerazione orizzontale massima del terreno in superficie;
- $\sigma_{emax} = S_{emax}/g$ risposta spettrale massima in accelerazione orizzontale;
- T_C^* periodo corrispondente alla fine del tratto ad accelerazione costante.

Il modello normalizzato dello spettro di risposta elastico dell'oscillatore semplice, riferito allo smorzamento convenzionale del 5%, è espresso da una forma spettrale \bar{S}_e moltiplicata per l'accelerazione a_g che caratterizza il sito.

$$S_e(T) = a_g \bar{S}_e(T)$$

Indipendentemente dalla probabilità di superamento considerata, lo spettro di risposta elastico normalizzato della componente orizzontale è definito dalle espressioni seguenti:

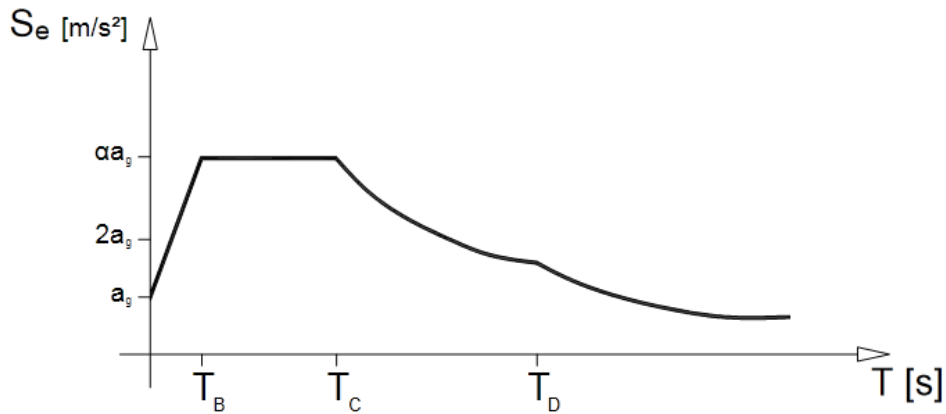


Figura 5.27: Spettro elastico normalizzato

$$\bar{S}_e(T) = S \left[1 + (F_0 - 1) \frac{T}{T_B} \right] \quad \text{per } 0 \leq T < T_B$$

$$\bar{S}_e(T) = SF_0 \quad \text{per } T_B \leq T < T_C$$

$$\bar{S}_e(T) = SF_0 \frac{T_C}{T} \quad \text{per } T_C \leq T < T_D$$

$$\bar{S}_e(T) = SF_0 \frac{T_C T_D}{T^2} \quad \text{per } T_D \leq T$$

Dove :

S : coefficiente stratigrafico quantificato in base alla categoria del suolo

F_0 : fattore che quantifica l'amplificazione spettrale massima, in termini di rapporto

$$F_0 = \sigma_{emax} / \alpha_g = S_{emax} / \alpha_g$$

T_B : è il periodo corrispondente all'inizio del tratto dello spettro ad accelerazione costante determinato mediante la relazione $T_B = T_C / 3$

T_C : è il periodo corrispondente alla fine del tratto dello spettro ad accelerazione costante determinato dalla relazione $T_C = C_C T_C^*$ nella quale $C_C = c(T_C^*)^{-d}$ con c e d parametri che variano a seconda della categoria del suolo di riferimento.

T_D : è il periodo corrispondente all'inizio dell'ultimo tratto dello spettro determinato mediante la relazione $T_D = 4 \alpha_g + 1,6$

L'azione sismica potrà dunque essere rappresentata da una forza orizzontale pari a

$$F_{he} = \alpha_g \bar{S}_e(T_1) M = \alpha_g \bar{S}_e(T_1) W$$

Le azioni sismiche sono assunte con riferimento a due principali stati limite:

1. *Stato limite di limitazione del danno (SLD)* a cui è associata una probabilità di superamento $P_V = 10\%$ nel periodo di riferimento di $V=10$ anni.
2. *Stato limite di salvaguardia della vita (SLV)* a cui è associata una probabilità di superamento $P_V = 10\%$ nel periodo di riferimento di $V = 50$ anni.

Per lo stato limite SLD e SLV sono richieste verifiche rispettivamente di deformazione e resistenza.

5.3.3 SPETTRI DI RISPOSTA RELATIVI AL SUOLO DEL DUOMO DI MILANO

Come specificato nel precedente capitolo, il territorio nazionale è suddiviso in zone di pericolosità sismica opportunamente codificati. Pertanto, sono stati individuati in Tabella 5.5. i parametri relativi al Comune di Milano (secondo la Normativa Tecnica del 2008) a seconda del tipo di verifica che si vuole effettuare: SLV (Stato limite di salvaguardia della vita) e SLD (Stato limite di limitazione dei danni).

| | <i>SLV</i> | <i>SLD</i> |
|--------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| <i>Vita nominale:</i> | <i>100 anni</i> | <i>100 anni</i> |
| <i>Tempo di ritorno:</i> | <i>949 anni</i> | <i>101 anni</i> |
| a_g | <i>0,6768 m/s²</i> | <i>0,33354 m/s²</i> |
| F_0 | <i>2,596</i> | <i>2,56</i> |
| T_c^* | <i>0,292 s</i> | <i>0,225 s</i> |

Tabella 5.5: Parametri della pericolosità sismica, Milano

Si riportano in Figura 5.28 gli spettri di risposta elastici relativi ai due terreni in riferimento al terreno del Comune di Milano.

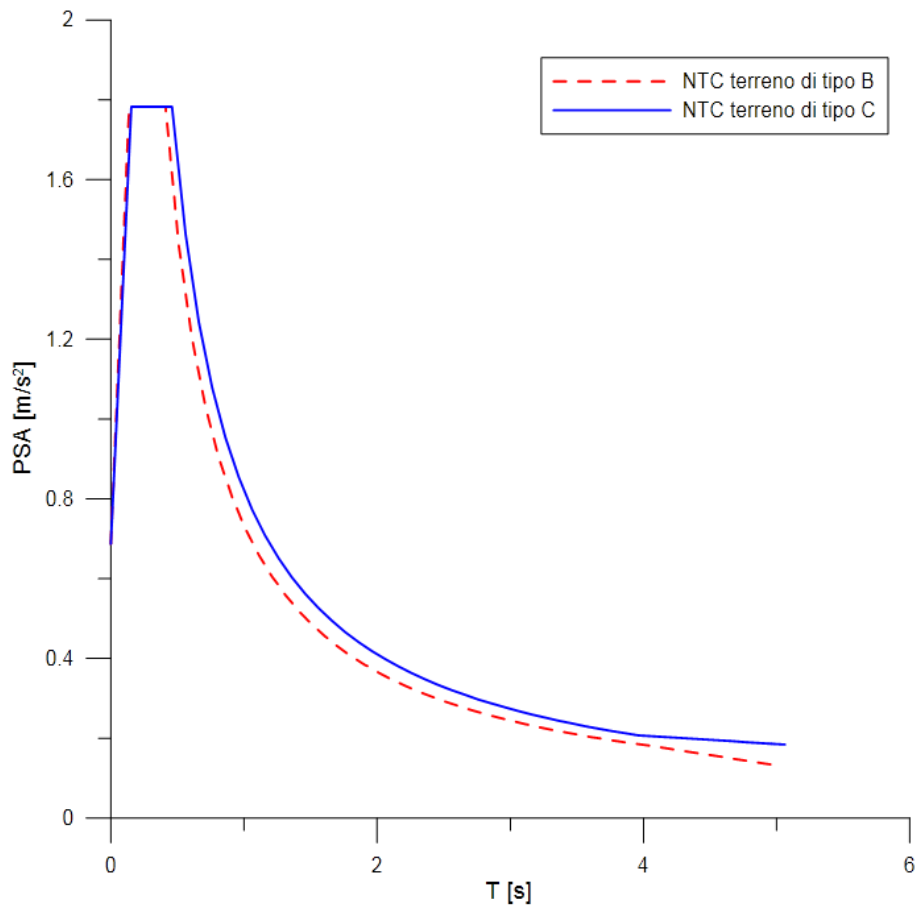


Figura 5.28: Spettro di risposta elastico secondo la Normativa Tecnica Italiana (2008) relativa al Comune di Milano.

Come si diceva pocanzi, tale spettro di progetto include in se stesso anche quelli dei singoli eventi sismici. Infatti si confronti in Figura 5.29 e Figura 5.30 la sovrapposizione dello spettro della NTC (identico per le due direzioni) con quelli di risposta relativi ai singoli eventi.

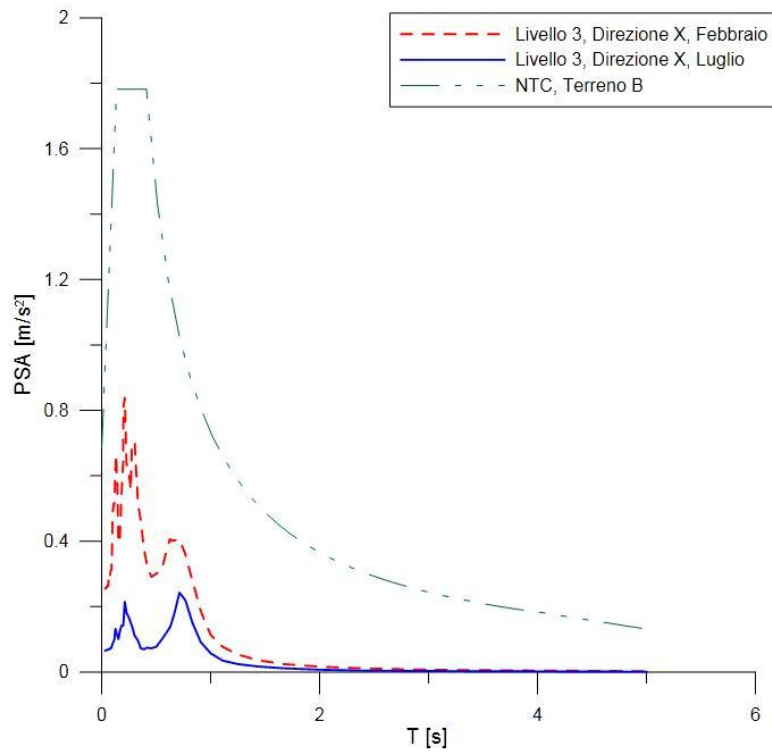


Figura 5.29: Spettro di progetto e spettri di risposta dei sismi del 17 Luglio 2011 e 25 Febbraio 2012 in direzione X.

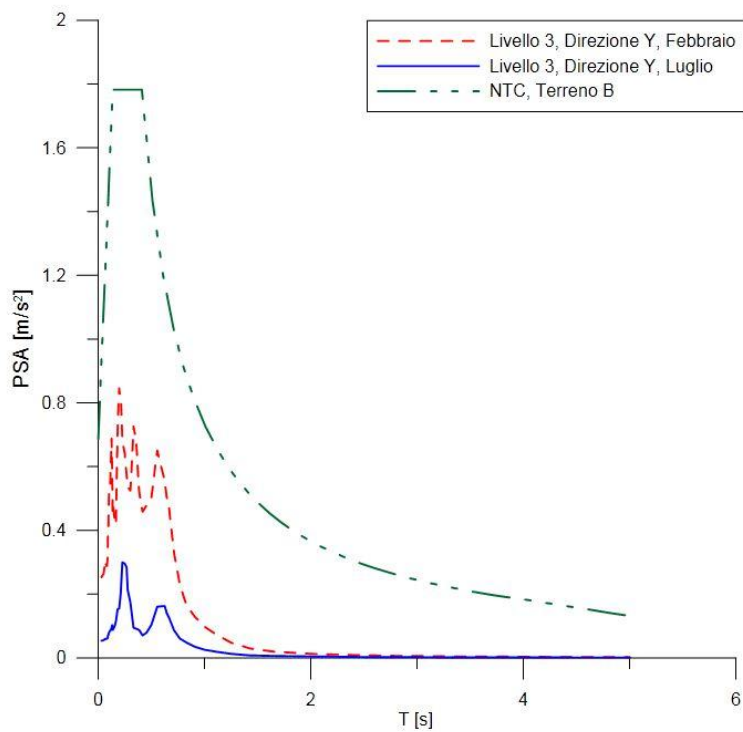


Figura 5.30: Spettri di progetto e spettri di risposta dei sismi del 17 Luglio 2011 e 25 Febbraio 2012 in direzione Y.

In realtà gli spettri di risposta dei due terremoti sono relativi alla base del modello, cioè al Livello 3 e non al piano terreno, pertanto sono affetti da una amplificazione per il momento non quantificabile. Gli unici dati a disposizione a tale quota sono quelli misurati al CNR (Centro Nazionale di Ricerca) dall'Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia che però è collocato a una distanza di 3 km come precedentemente accennato. Supponendo che valga la terza ipotesi, ovvero che sia lecito considerare tali dati come rappresentativi del piano terreno del Duomo di Milano, allora si confrontino in Figura 5.31 e Figura 5.32 i dati del CNR con quelli misurati al Livello 3. E' immediato osservare che gli spettri risposta (in direzione X e Y) alla base della Guglia sono sempre al di sopra di quelli al piano terreno. Pertanto lo saranno sempre anche rispetto allo spettro elastico di progetto da Normativa.

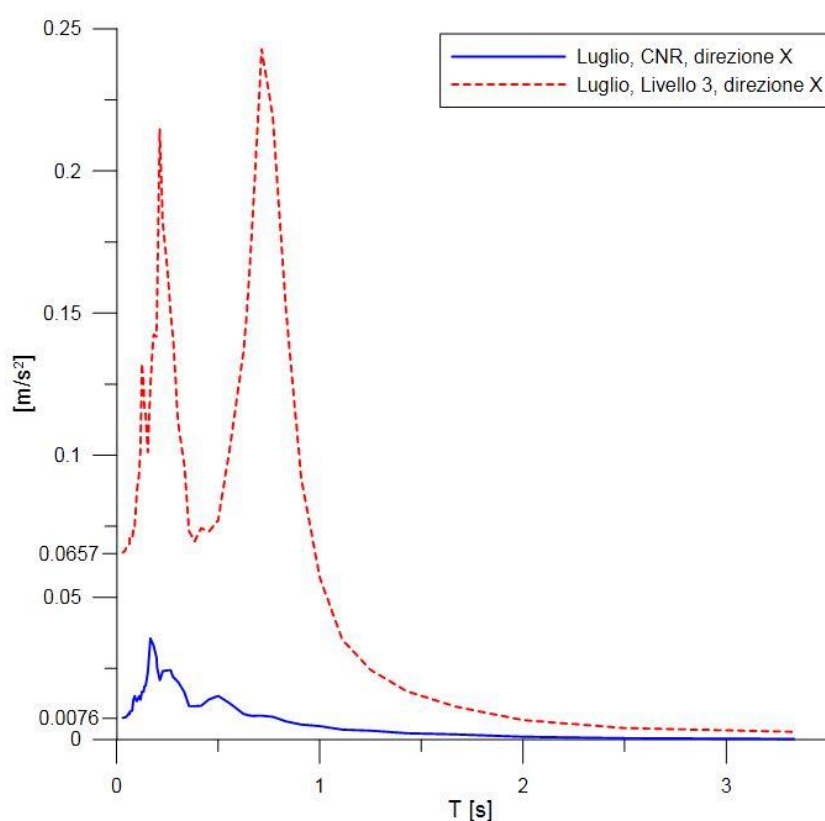


Figura 5.31: Spettro di risposta al Livello 3 e al CNR (o INGV) per il sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X.

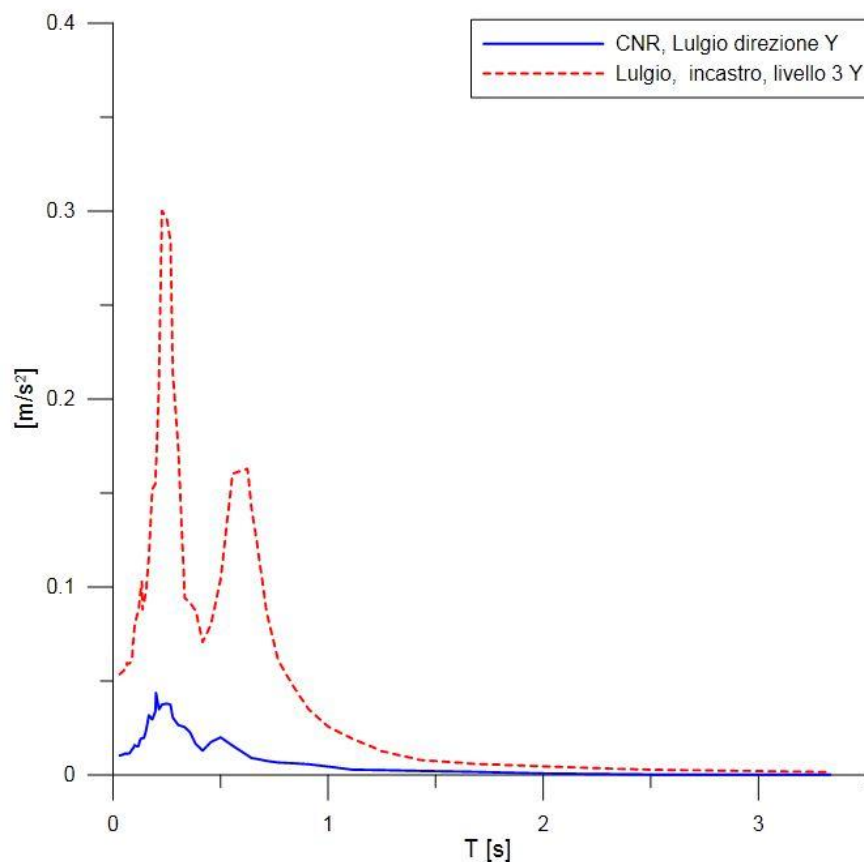


Figura 5.32: Spettro di risposta al Livello 3 e al CNR (o INGV) per il sisma del 17 Luglio 2011 in direzione Y.

Visti i recenti sismi che si sono verificati ne Comune di Milano, si è deciso di confrontare lo spettro della NTC con quelli relativi ai nuovi eventi. In particolare i sismi che sono stati scelti sono quelli del 20 Maggio 2012 delle h: 13.18 (Intensità 5.1) e 29 Maggio 2012 delle h: 11.00 (Intensità 5.2). Anche in questi casi lo spettro elastico di progetto è al di sopra degli spettri di risposta dei singoli eventi (Figura 5.33 e Figura 5.34).

Si può dunque affermare che la NTC definisce il peggiore caso che teoricamente si possa verificare per un certo periodo di riferimento: ovviamente per lo stato limite di salvaguardia della vita lo spettro di progetto raggiungerà valori di accelerazione più alti rispetto allo stato limite di danno, come riportato in Figura 5.34 e Figura 5.35.

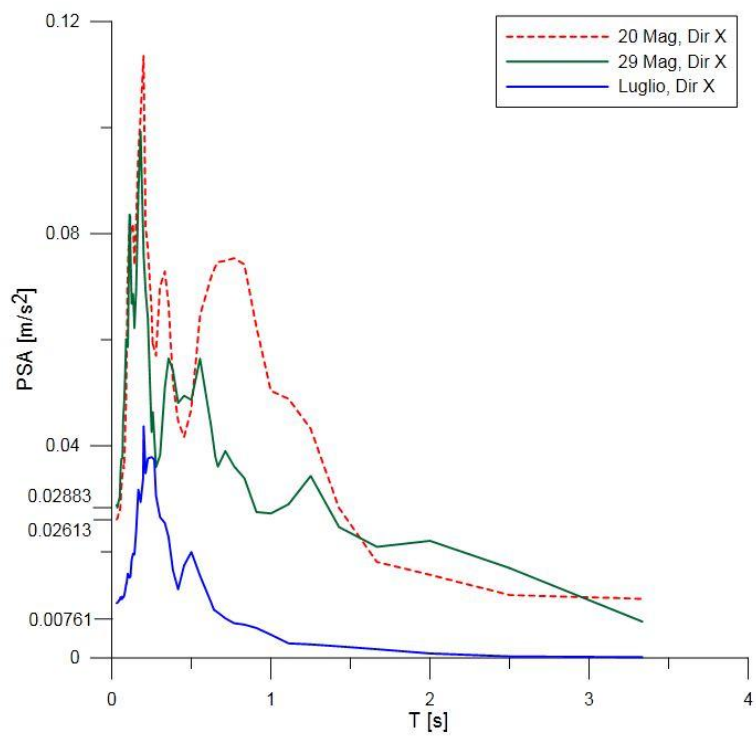


Figura 5.33: Spettri di risposta dei sismi del 20 e 29 Maggio in direzione X

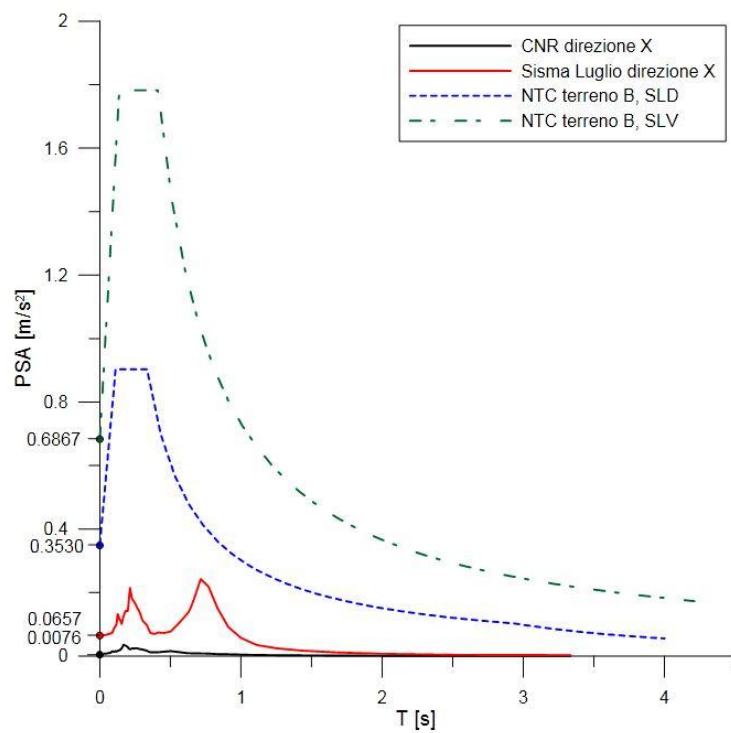


Figura 5.34: Spettri di progetto SLD e SLV e spettri di risposta del sisma del 17 Luglio 2011 in direzione X al Livello 3

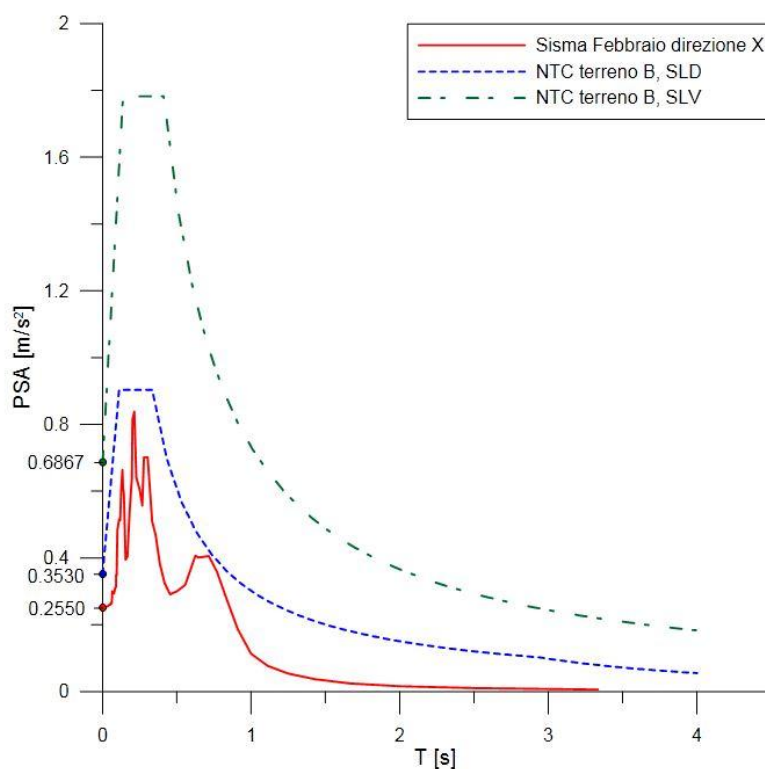


Figura 5.35: Spettri di progetto SLD e SLV e spettri di risposta del sisma del 25 Febbraio 2012 in direzione Y al Livello 3 della Guglia

L'azione sismica che conseguente allo spettro di progetto porterà effetti massimi sulla struttura. E' necessario verificare che l'entità di tali effetti sia nel rispetto della struttura principalmente secondo due criteri: Stato limite di salvaguardia della vita (SLV) e Stato limite di limitazione dei danni (SLD). Queste verifiche strutturali verranno effettuate ne prossimo capitolo.

6 VERIFICHE STRUTTURALI

Ci si propone ora di effettuare, sia a pur a titolo largamente orientativo, alcune verifiche strutturali sugli elementi maggiormente sollecitati. Sono stati verificati quindi il corpo centrale cavo e i pilastri che lo circondano.

Per quanto riguarda il corpo centrale cavo, è stato considerato come modello sul quale effettuare le verifiche quello con la molla alla base in quanto risulta avere, come si evince dalla Tabella 6.1, le azioni interne maggiori. In particolare è stato considerato il sisma di febbraio 2012 essendo quello di maggiore intensità.

| | Nodo | Modulo elastico modello incastrato | | Modulo elastico modello con molla | |
|-----------------------|------|---------------------------------------|---------|--------------------------------------|---------|
| | | M1 | M2 | M1 | M2 |
| <i>Sisma Luglio</i> | 52 | 22,4661 | 24,7765 | 25,4096 | 27,2345 |
| <i>Sisma Febbraio</i> | 52 | 89,1013 | 78,3361 | 96,3581 | 83,4576 |

Tabella 6.1 Momenti nella direzione del piano orizzontale, dei modelli incastrato e con molla

La sezione in cui sono presenti le azioni interne maggiori è quella (si veda la posizione indicata in Figura 6.1) situata al di sopra dell'allargamento della sezione della torre.

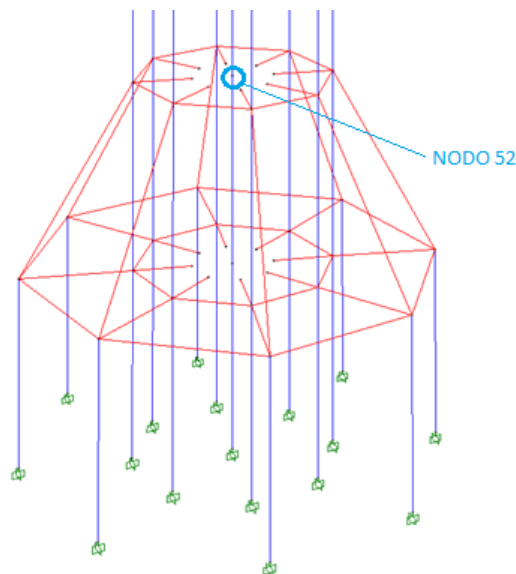


Figura 6.1: Posizione del nodo 52 nel modello

Tutti gli elementi (elemento centrale e pilastri) verranno verificati per lo stato limite di pressoflessione.

Nella calcolo dei domini limite è stata sempre trascurata la presenza di elementi metallici di rinforzo; poiché è stata trascurata la resistenza a trazione del materiale, la resistenza a flessione delle sezioni è legata alla presenza del carico assiale di compressione.

In tutte le verifiche si è ipotizzato, in via conservativa, che i valori estremi dei momenti flettenti nei due piani principali di flessione si verificano contemporaneamente; ciò si verifica, nella realtà, quando tali valori sono ascrivibili allo stesso modo principale di oscillazione.

Di seguito vengono riportate le verifiche effettuate sul corpo centrale cavo e sul pilastro.

6.1 VERIFICA CORPO CENTRALE

Sono state effettuate due verifiche per questo elemento strutturale: è stato costruito un dominio di interazione M – N ed è stata poi verificato lo sforzo di taglio agente sulla sezione compressa.

Per quanto riguarda la prima è stato verificato che le azioni interne sollecitati date dai sismi e quelle derivanti dagli spettri di risposta della normativa tecnica rimangono all'interno del dominio limite a pressoflessione costruito numericamente.

Per quanto riguarda la seconda, anche per questa sono stati considerati gli sforzi sollecitanti derivati dai sismi e quelli derivati dalla normativa, considerando per questi la combinazione di carico che produce gli sforzi maggiori.

6.1.1 DOMINIO DI INTERAZIONE M – N

Per la verifica a pressoflessione la sezione è stata approssimata ad un cilindro cavo avente lo stesso momento d'inerzia della sezione di partenza. Essendo la sezione approssimata assialsimmetrica è possibile condurre la verifica in flessione retta, ottenendo il momento sollecitante come risultante dei momenti intorno ai due assi della sezione.

Per la verifica nei confronti del sisma di febbraio è stata considerata la seguente situazione:

$$N_s = 440 \text{ KN}$$

$$M_x = 96,36 \text{ KNm}$$

$$M_y = 83,46 \text{ KNm}$$

Il momento sollecitante totale, che sarà utilizzato in seguito per la verifica dell'elementi, dato dalla loro somma vale:

$$M_{sd} = \bar{M}_x + \bar{M}_y = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 127,6 \text{ KNm} \quad (6.1)$$

È stato costruito un dominio M-N limite. A tal fine, l'azione globale sulla zona compressa è stata valutata ipotizzando che il materiale sia soggetto ad uno sforzo limite di compressione pari a 10 MPa. Per costruire il diagramma, viene fatta variare la posizione dell'asse neutro per tutta l'altezza della sezione. Il diagramma viene costruito per punti; per ogni posizione dell'asse neutro si calcola la risultante dagli sforzi di compressione (pari all'azione assiale) ed il suo braccio rispetto al baricentro (che fornisce il momento limite).

Deve essere calcolata la posizione del baricentro della sezione considerata. Questa cambia nelle tre situazioni indicate in Figura 6.2

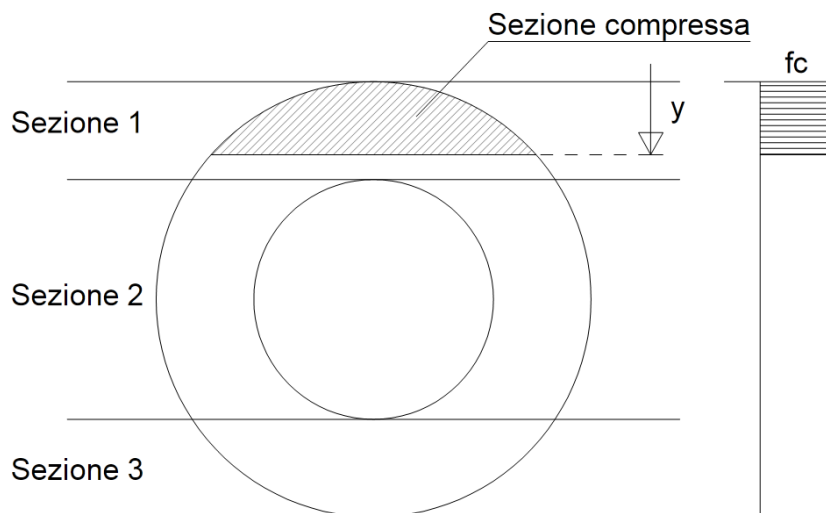


Figura 6.2: Sezione pilastro con individuazione dei punti in cui cambia la sezione per il calcolo di area e baricentro

Le aree e i baricentri sono stati calcolati con le formule seguenti:

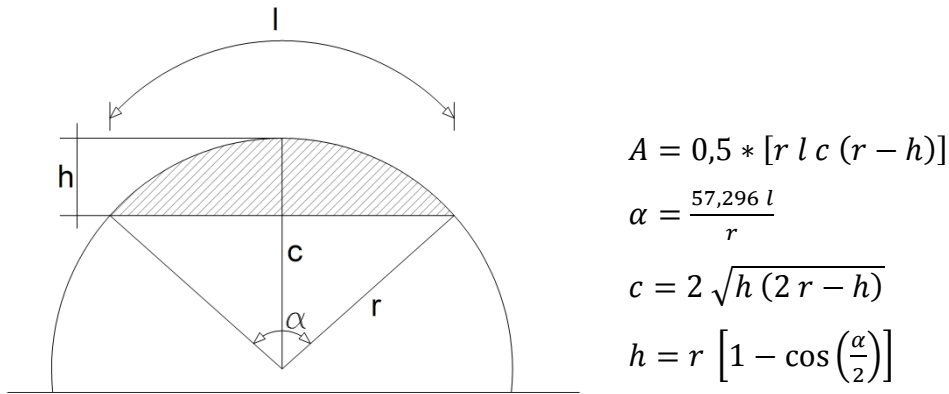


Figura 6.3: segmenti circolari per il calcolo di aree e baricentri

Nel momento in cui l'asse neutro è al di sotto dello spessore t del cilindro, viene effettuata una sottrazione di aree e il baricentro viene calcolato come media pesata,

Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.:

$$Y_G = \frac{A_1 * y_{G1} - A_2 * y_{G2}}{A_1 - A_2} \quad (6.2)$$

È stato così costruito il diagramma di interazione $N - M$ ed al suo interno è stato inserito il punto che rappresenta la coppia delle azioni sollecitanti per il sisma di Febbraio, Figura 6.4 e 6.5 (punti in blu) calcolato con la **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata..**

Inoltre in questo dominio di interazione sono stati inseriti i punti relativi alle azioni interne calcolate per effetto della combinazione peggiore ottenuta avendo come input lo spettro della Normativa Tecnica (14.12.2008 s.d.) la quale prevede di combinare i seguenti effetti:

$$E x + 0,3 E y$$

$$E y + 0,3 E x$$

In cui $E x$ rappresenta le azioni interne della struttura dovute all'azione dello spettro di risposta dato dalla normativa per un terreno di tipo B in direzione x ; lo stesso vale per $E y$ con la correzione che viene considerata la direzione y .

La verifica sotto riportata riguarda lo stato limite di salvaguardia della vita (SLV) con i seguenti parametri:

vita nominale = 100 anni

tempo di ritorno = 949 anni

$a_g = 0,6768 \text{ m/s}^2$

$F_0 = 2,596$

$T_c^* = 0,292 \text{ s}$

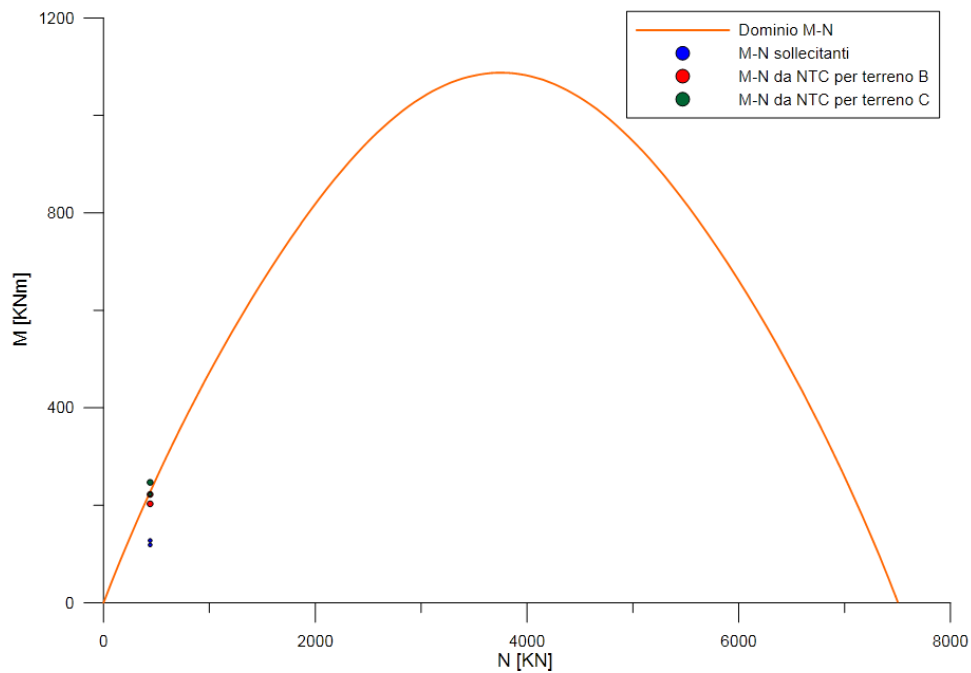


Figura 6.4: Dominio M-N relativo al corpo centrale con le azioni interne relative al nodo 52 dell'asta 45

Da questo grafico si nota che i punti che rappresentano le azioni sollecitanti dovute al sisma registrato in Febbraio ricadono all'interno del dominio di interazione. Per facilitare la visualizzazione di questi risultati si riporta un ingrandimento della zona interessata del grafico, Figura 6.5.

I punti riportati nel dominio sono due per ogni azione sollecitante; questi rappresentano i risultati ottenuti per i due modelli costruiti. I valori relativi al modello con la molla alla base sono quelli con il momento flettente maggiore tra i due.

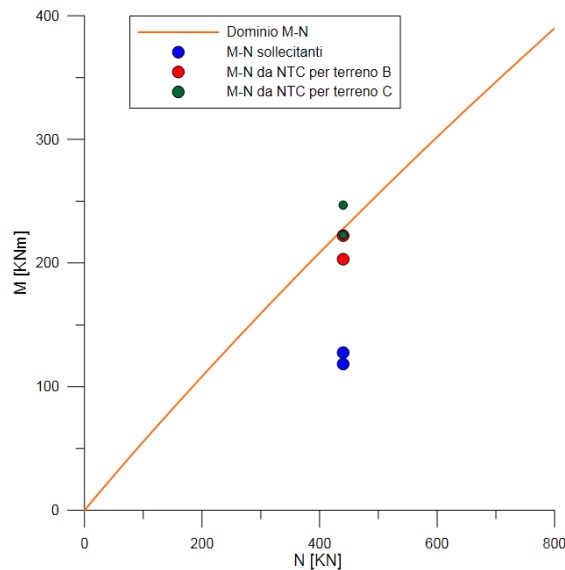


Figura 6.5: Ingrandimento diagramma N – M allo SLV

Per quanto riguarda i valori relativi alle combinazioni previste dalla NTC, possiamo notare che questi si trovano all'incirca sul dominio limite per terreni di tipo B. Per terreni di tipo C, nel caso di modello con molla alla base, questo valore ricade al di fuori del dominio limite. Si osservi che in questa verifica, per quanto riguarda le azioni relative alla NTC, non è stata considerata l'amplificazione data dalla struttura al di sotto della guglia: ciò vuol dire che è stata considerata la guglia come se fosse vincolata a terra. Va tuttavia considerato, d'altra parte, che non è stata qui considerata la capacità della struttura di evolvere in campo "plastico", capacità normalmente sfruttata nella progettazione per azioni di tipo sismico.

Si ricorda che la verifica appena effettuata riguarda i risultati ottenuti per l'SLV quindi con un tempo di ritorno pari a 949 anni; in Figura 6.6 viene riportato il grafico relativo allo stato limite di danno per terreni di tipo B e C, avente i seguenti parametri:

$$vita\ nominale = 100\ anni$$

$$tempo\ di\ ritorno = 101\ anni$$

$$a_g = 0,33354\ m/s^2$$

$$F_0 = 2,56$$

$$T_c^* = 0,225\ s$$

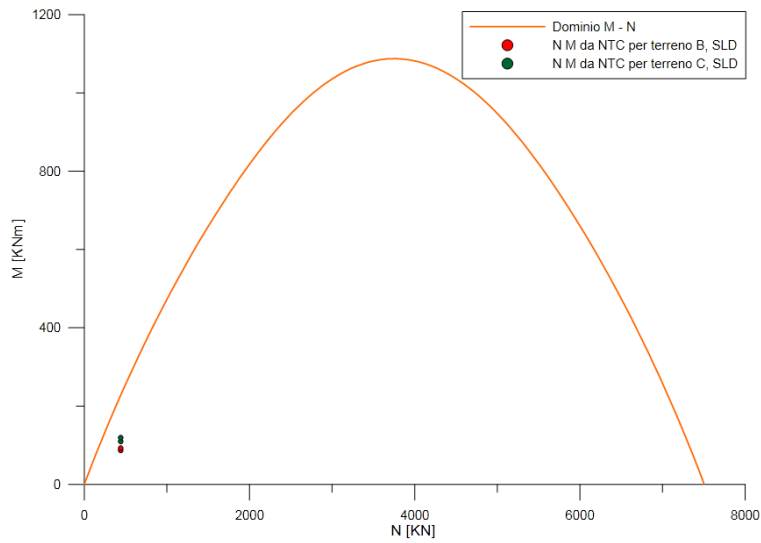


Figura 6.6: Diagramma M–N con le azioni allo SLD aventi la peggiore combinazione prevista dalla stessa

In questo caso i valori restano all'interno del dominio di interazione, ma anche qui non si è tenuto conto dell'amplificazione della struttura sottostante la Guglia. Viene comunque riportato in Figura 6.7 un ingrandimento della parte di grafico in oggetto.

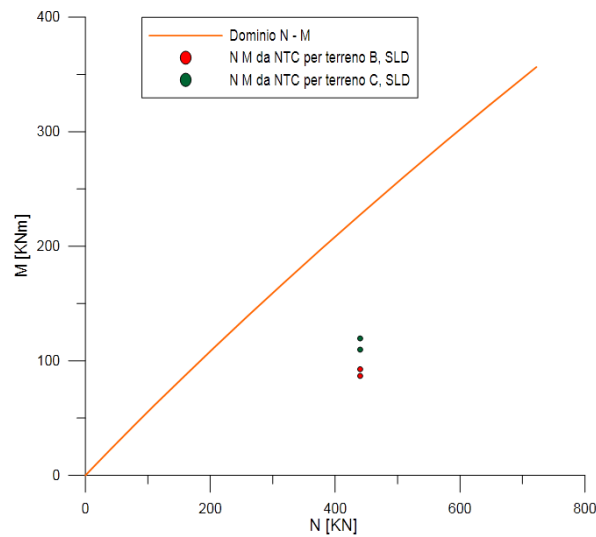


Figura 6.7: Ingrandimento del diagramma N M allo SLD

Si ricorda che o due punti rappresentano i due modelli costruiti: quello con il valore di momento più basso, con l'incastro alla base e quello con M maggiore, con la molla rotazionale.

6.1.2 VERIFICA SEMPLIFICATA PER AZIONI TAGLIANTI

Questa verifica è stata effettuata per due diversi tagli sollecitanti. Il primo calcolato avendo come input del programma la storia temporale del sisma di febbraio (quello che fornisce le maggiori azioni interne rispetto a quello di luglio) ed il secondo calcolato avendo come input lo spettro di risposta dato dalla normativa.

INPUT ACCELEROGRAMMA FEBBRAIO

Avendo come condizione di carico la storia temporale del sisma di febbraio, è stata effettuata una verifica del taglio (T) nella sezione maggiormente sollecitata del corpo centrale.

In Tabella 6.2 Tabella 6.2: Azioni interne di Taglio nelle aste in cui è stato suddiviso il corpo centrale.vengono riportate le azioni interne nelle aste in cui è stato suddiviso l'elemento in oggetto.

| TAGLIO NEL CORPO CENTRALE MODELLO INCASTRATO ALLA BASE (COMBINAZIONE FEBBRAIO) | | | | TAGLIO NEL CORPO CENTRALE MODELLO CON MOLLA (COMBINAZIONE FEBBRAIO) | | | |
|--|------|-------|-------|---|------|-------|-------|
| Asta | Nodo | Tx | Ty | Asta | Nodo | Tx | Ty |
| 12 | 1 | 33,17 | 33,74 | 12 | 1 | 33,77 | 34,93 |
| 12 | 18 | 31,25 | 35,01 | 12 | 18 | 29,68 | 35,17 |
| 44 | 18 | 8,61 | 10,89 | 44 | 18 | 14,02 | 17,69 |
| 44 | 52 | 10,47 | 11,12 | 44 | 52 | 16,65 | 17,73 |
| 45 | 52 | 36,17 | 41,62 | 45 | 52 | 37,24 | 44,39 |
| 45 | 53 | 39,07 | 40,32 | 45 | 53 | 40,34 | 44,26 |
| 46 | 53 | 32,18 | 39,22 | 46 | 53 | 32,45 | 41,19 |
| 46 | 54 | 38,12 | 35,30 | 46 | 54 | 38,93 | 41,06 |
| 47 | 54 | 29,60 | 35,31 | 47 | 54 | 30,76 | 37,28 |
| 47 | 55 | 34,20 | 32,32 | 47 | 55 | 35,66 | 36,32 |
| 48 | 55 | 28,91 | 30,57 | 48 | 55 | 29,79 | 31,71 |
| 48 | 56 | 29,41 | 28,47 | 48 | 56 | 31,19 | 31,44 |
| 49 | 56 | 21,27 | 21,84 | 49 | 56 | 22,19 | 23,31 |
| 49 | 57 | 20,86 | 20,47 | 49 | 57 | 22,24 | 21,94 |

Tabella 6.2: Azioni interne di Taglio nelle aste in cui è stato suddiviso il corpo centrale.

Si nota da questa che il nodo nel quale sussistono le azioni interne maggiori è il nodo 52 dell'asta 45. Le azioni interne appena riportate sono state rappresentate in un grafico per facilitare la lettura dell'andamento lungo l'altezza dell'elemento nei due modelli costruiti (Figura 6.8). È stato riportato in figura solo Ty essendo i tagli nelle due direzioni molto simili.

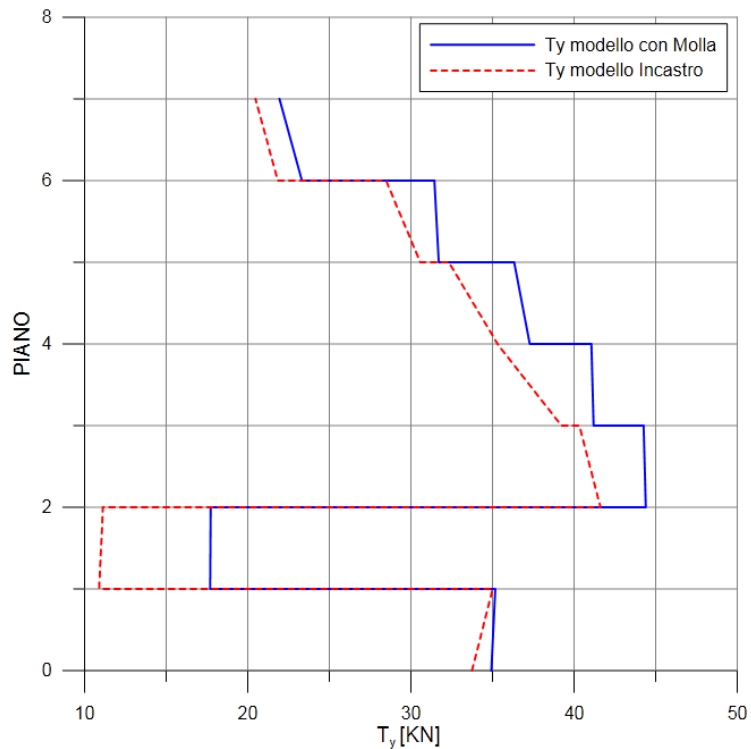


Figura 6.8: Andamento del taglio nei due modelli

Il taglio massimo è pari a 44,259 KN

La verifica del taglio limite è stata condotta, in via semplificata, assumendo un meccanismo resistente ad attrito; secondo indicazioni di letteratura (Castellani 1981) è stato considerato come taglio limite il valore ottenuto dalla seguente equazione:

$$T_{LIM} = \mu N$$

Dove μ è il valore di attrito tra i blocchi di marmo e N è il valore della forza assiale sollecitante nella sezione considerata; questo valore è pari a 440 KN.

Vengono riportati in Tabella 6.3 i valori di μ da letteratura secondo diversi autori:

| Autore | μ |
|---------------------|-------|
| Bayulke | 0,45 |
| Zelger | 0,45 |
| Benjamin e Williams | 0,73 |
| Yorulmas Atan | 0,34 |
| Benedetti - Casella | 0,45 |

Tabella 6.3: Valori di attrito secondo vari autori

Il valore peggiore è 0,34. Vengono effettuate le verifiche tenendo conto di questo numero.

Il taglio limite è dunque pari a:

$$T_{LIM} = \mu N = 0,35 * 440 = 150 \text{ KN}$$

Questo valore è maggiore di quello sollecitante per effetto del sisma di febbraio (44 KN) appena calcolato.

Il fattore di sicurezza a taglio vale dunque:

$$\frac{T_{LIM}}{T_{SOLL}} = \frac{150}{44} = 3,4$$

VERIFICA PER LE AZIONI DELLA NORMATIVA

Per questa verifica è stato considerato un terreno di tipo B e il modello nel quale sono state effettuate le verifiche è quello avente alla base la molla rotazionale. Questo sempre dovuto al fatto che è il modello nel quale le azioni interne risultano maggiori rispetto al primo modello costruito.

Le sollecitazioni ricavate dall'analisi con spettro di risposta sono state in seguito combinate secondo quanto riportato dalla Normativa Tecnica (14.12.2008 s.d.). Di seguito vengono riportate le combinazioni di previste:

$$E x + 0,3 E y$$

$$E y + 0,3 E x$$

In cui $E x$ rappresenta le azioni interne della struttura dovute all'azione dello spettro di risposta dato dalla normativa per un terreno di tipo B in direzione x ; lo stesso vale per $E y$ con la correzione che viene considerata la direzione y .

Queste combinazioni sono state calcolate per i due tagli in direzione x e y . Le combinazioni dei tagli nelle due direzioni risultano essere molto simili come si evince dalla Tabella 6.4.

| MODELLO CON MOLLA ALLA BASE | | | |
|-----------------------------|------|---------------|---------------|
| ASTA | NODO | T_x [KN] | T_y [KN] |
| | | $E_x+0,3 E_y$ | $E_y+0,3 E_x$ |
| 12 | 1 | 83,94 | 84,54 |
| 12 | 18 | 83,94 | 84,54 |
| 44 | 18 | 39,79 | 40,29 |
| 44 | 52 | 39,79 | 40,29 |
| 45 | 52 | 99,29 | 99,61 |
| 45 | 53 | 99,29 | 99,61 |
| 46 | 53 | 91,45 | 91,75 |
| 46 | 54 | 91,45 | 91,75 |
| 47 | 54 | 82,33 | 82,59 |
| 47 | 55 | 82,33 | 82,59 |
| 48 | 55 | 72,59 | 72,84 |
| 48 | 56 | 72,59 | 72,84 |
| 49 | 56 | 52,99 | 53,17 |
| 49 | 57 | 52,99 | 53,17 |

Tabella 6.4: Tagli T_x e T_y dovuti all'azione degli spettri della normativa con le combinazioni peggiori

Viene rappresentato inoltre l'andamento delle azioni taglianti lungo l'altezza del corpo centrale cavo in

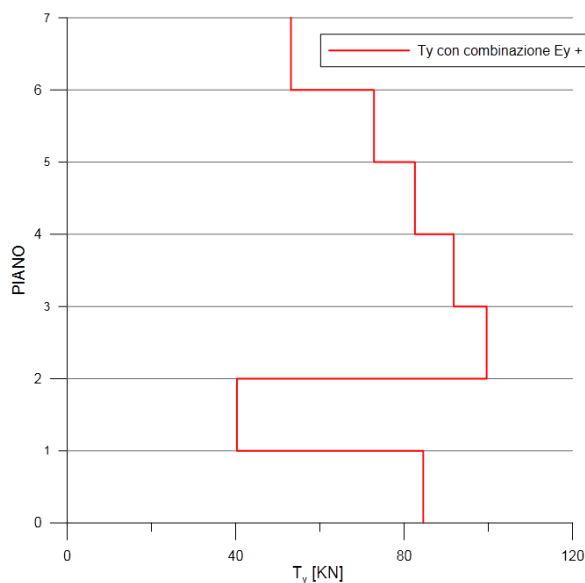


Tabella 6.5: Taglio T_y dato dalla combinazione massima prevista dalla norma NTC

Come si può notare, l'andamento del taglio è identico a quello precedente, e il valore massimo raggiunto per questa combinazione si trova anche in questo caso nel nodo 52 dell'asta 45 e il valore è pari a $T_y \cong 100 \text{ KN}$.

Il taglio limite è dunque pari a:

$$T_{LIM} = \mu N = 0,35 * 440 = 150 \text{ KN}$$

Questo valore è ancora superiore a quello sollecitante per effetto dello spettro di risposta della norma tecnica (100 KN).

Il fattore di sicurezza vale dunque:

$$\frac{T_{LIM}}{T_{SOLL}} = \frac{150}{100} = 1,5$$

Il corpo centrale cavo risulta verificato alla flessione e al taglio. Si ricorda che i valori ottenuti con lo spettro di risposta della norma non tengono conto dell'amplificazione della struttura sottostante la guglia e che non si considera la duttilità che si può sviluppare una volta usciti dal campo elastico. Queste verifiche infatti sono puramente verifiche elastiche lineari.

6.2 VERIFICA PILASTRI TELAIO ESTERNO

Per questa verifica si considerano i valori ottenuti dall'analisi numerica per le azioni del sisma registrato in Febbraio e per il modello avente la molla rotazionale alla base.

Si è quindi proceduto con la verifica degli otto pilastri che circondano il corpo centrale.

In questo caso la verifica è stata fatta alla pressoflessione deviata infatti il singolo pilastro è soggetto ad una forza assiale N, a due momenti Mx e My e possiede un solo asse di simmetria, Figura 6.9

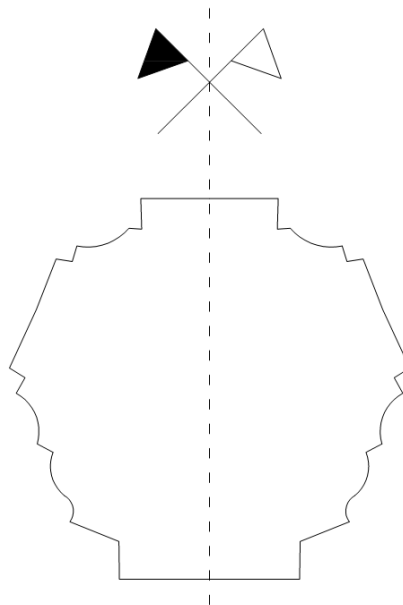


Figura 6.9: Sezione pilastro, avente un asse di simmetria

Per questa verifica è stato utilizzato un programma, scritto in linguaggio Fortran, che opera sulla sezione discretizzata in “areole” e può quindi trattare sezioni di geometria qualsiasi.

Per l’utilizzo di questo programma è stato pertanto necessario discretizzare la sezione del pilastro in una serie di aree, come mostrato in Figura 6.10.

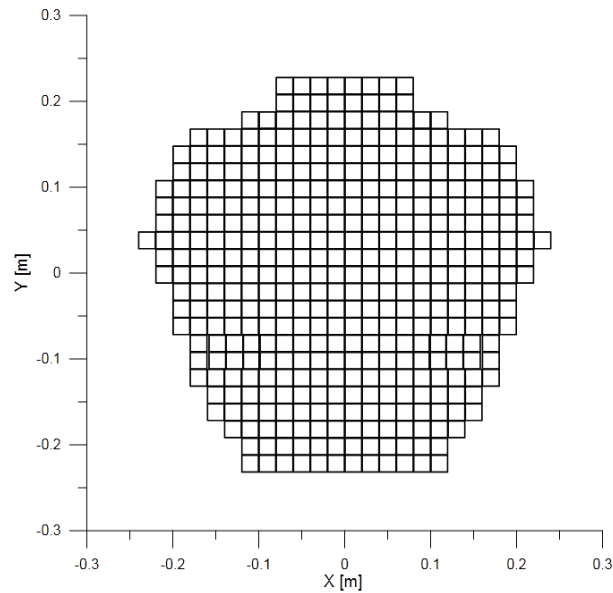


Figura 6.10: Divisione del pilastro in areole

Il programma legge in ingresso le coordinate dei baricentri delle aree, la loro superficie e le caratteristiche dei materiali; in uscita fornisce le coordinate della curva del diagramma $M_x - M_y$ per una N fissata. Per quanto riguarda il comportamento del marmo in compressione, si è qui assunto un diagramma “parabole-rettangolo”, con raggiungimento della resistenza a compressione ad una deformazione pari a 0.1% e valore di resistenza pari a 10 MPa.

I pilastri maggiormente sollecitati sono posti al secondo piano della torre, quello appena sopra dei contrafforti. Vengono riportati in Tabella 6.6 le azioni interne nei nodi.

| NODO | | Tx KN | Ty KN | N KN | Mx KNm | My KNm |
|------|-----|----------|----------|---------|-----------|-----------|
| 28 | Max | 1,57 | 1,82 | 210,25 | 3,38 | 2,84 |
| | Min | -1,72 | -1,89 | -0,58 | -3,22 | -3,09 |
| 34 | Max | 1,40 | 1,67 | 141,17 | 3,13 | 2,59 |
| | Min | -1,65 | -1,73 | 65,92 | -2,99 | -2,97 |
| 40 | Max | 1,77 | 1,66 | 216,25 | 3,22 | 3,13 |
| | Min | -1,84 | -1,79 | -5,60 | -2,98 | -3,28 |
| 46 | Max | 1,51 | 1,51 | 155,10 | 3,01 | 2,77 |
| | Min | -1,86 | -1,66 | 50,43 | -2,76 | -3,26 |
| 58 | Max | 1,66 | 1,43 | 156,58 | 3,03 | 2,96 |
| | Min | -1,69 | -1,68 | 51,71 | -2,66 | -3,05 |
| 64 | Max | 1,62 | 1,60 | 212,50 | 3,35 | 2,94 |
| | Min | -1,98 | -1,89 | -9,32 | -2,92 | -3,45 |
| 70 | Max | 1,46 | 1,51 | 141,16 | 3,32 | 2,67 |
| | Min | -1,55 | -1,87 | 65,66 | -2,80 | -2,83 |
| 76 | Max | 1,52 | 1,67 | 207,84 | 3,59 | 2,77 |
| | Min | -1,75 | -2,06 | -3,68 | -3,04 | -3,12 |

Tabella 6.6: Azioni interne nei nodi dei pilastri in seguito al sisma di Febbraio

Per una più facile lettura della tabella soprastante viene mostrata la Figura 6.11 in cui sono riportati i pilastri con i relativi valori massimi e minimi di azione assiale in seguito al sisma di Febbraio.

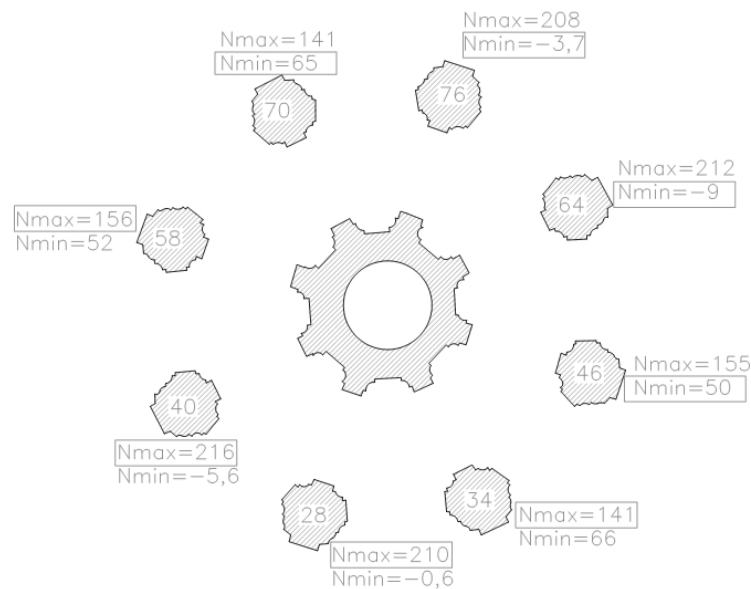


Figura 6.11: Pianta dei pilastri con relativi valori di N in seguito al sisma di Febbraio

Come si può osservare dalla distribuzione delle azioni assiali nei pilastri si può presumere che la direzione di inflessione predominante nella struttura è quella lungo la linea

inclinata di $\sim 45^\circ$. Le N massime infatti risultano sui pilastri 28 e 40 e quelle minime sui pilastri 64 e 76.

Per le verifiche si è scelto quindi di considerare le azioni interne evidenziate in Tabella 6.6. Si può notare che i pilastri 64 e 76 sono soggetti a trazione infatti il loro valore di azione assiale, se pur di modesta intensità, è minore di 0; per questi due pilastri non è stata fatta alcuna verifica strutturale, in quanto la loro resistenza a flessione, in tali condizioni, è nulla.

Si presenta pertanto il problema di come ridistribuire l'azione sismica totale che viene sollecita i pilastri, la quale tende ad essere assorbita dagli elementi fortemente compressi. A tal fine è stato adottato il procedimento semplificato riassunto nel seguito.

È stato quindi creato un dominio $M_x - M_y$ per ogni pilastro ad N costante, pari a quella evidenziata (nel rettangolo) in Figura 6.11.

In ogni dominio creato, è stato inserito il punto che rappresenta la coppia di momenti sollecitanti. Inoltre, si è determinato per ogni pilastro il valore di \bar{M}_x e \bar{M}_y , cioè dei momenti che si trovano sulla curva limite nel punto in cui intercetta la retta che unisce l'origine con la coppia dei momenti sollecitanti. È stato scelto come punto appartenente alla retta l'origine in quanto rappresenta lo stato di sollecitazione con il solo peso proprio, prima dell'applicazione dell'azione sismica.

Si riportano di seguito i diagrammi appena descritti per i sei pilastri soggetti ad azione assiale di compressione.

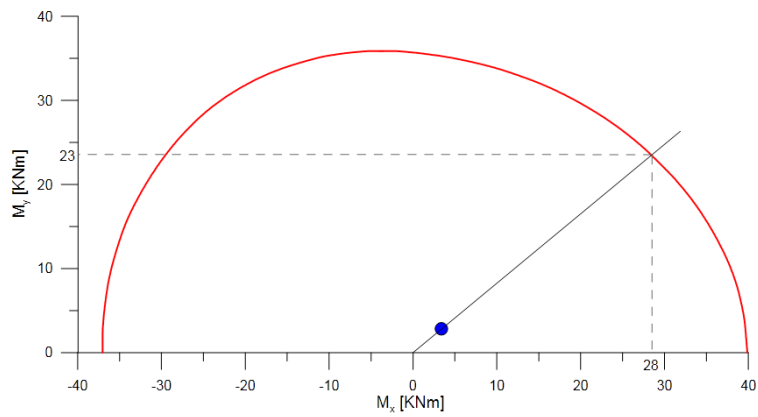


Figura 6.12: Momenti limite per il pilastro 28

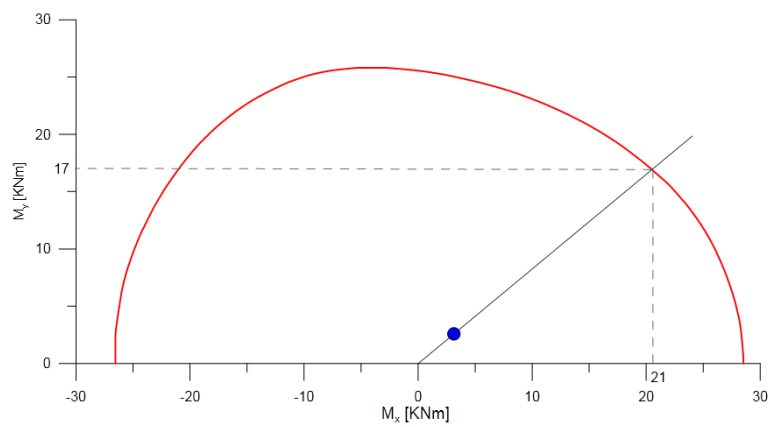


Figura 6.13: Momenti limite per il pilastro 34

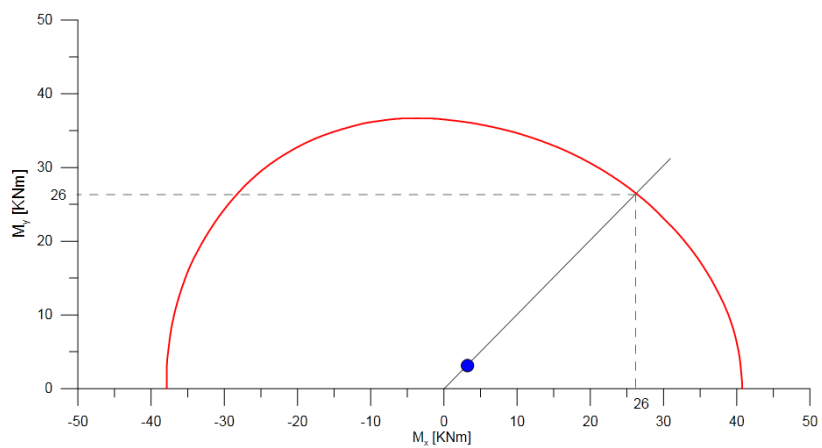


Figura 6.14: Momenti limite per il pilastro 40

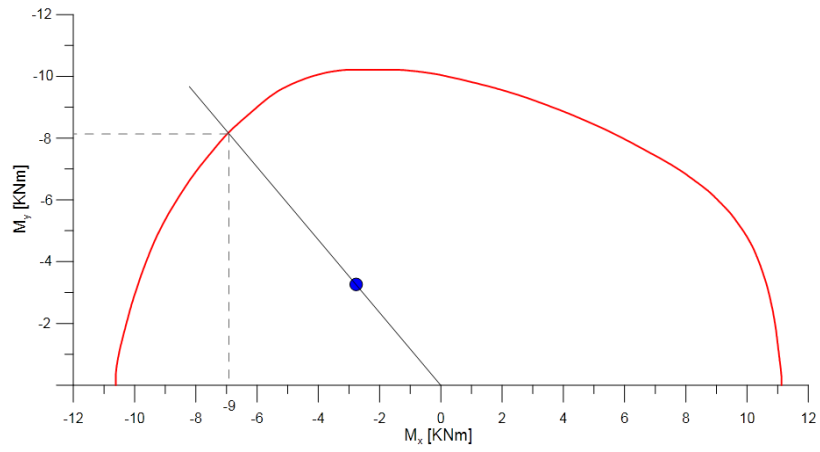


Figura 6.15: Momenti limite per il pilastro 46

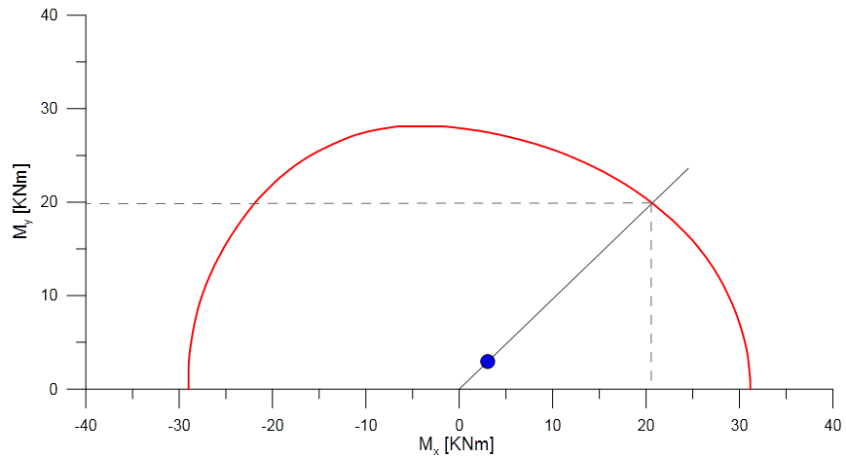


Figura 6.16: Momenti limite per il pilastro 58

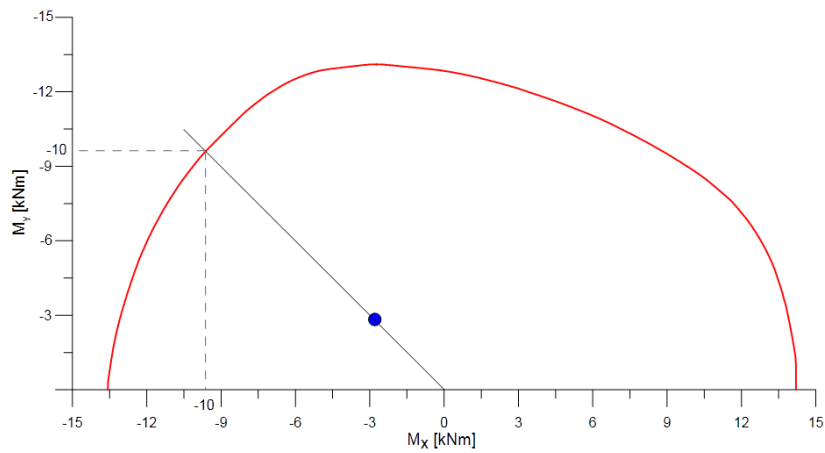


Figura 6.17: Momenti limite per il pilastro 70

Sono quindi stati ricavati i valori dei momenti \bar{M}_x e \bar{M}_y .

Il programma di analisi strutturale che è stato utilizzato riporta le azioni interne in un sistema di riferimento locale, quindi è stato necessario ruotarle in quello globale, come mostrato nella Figura 6.18.

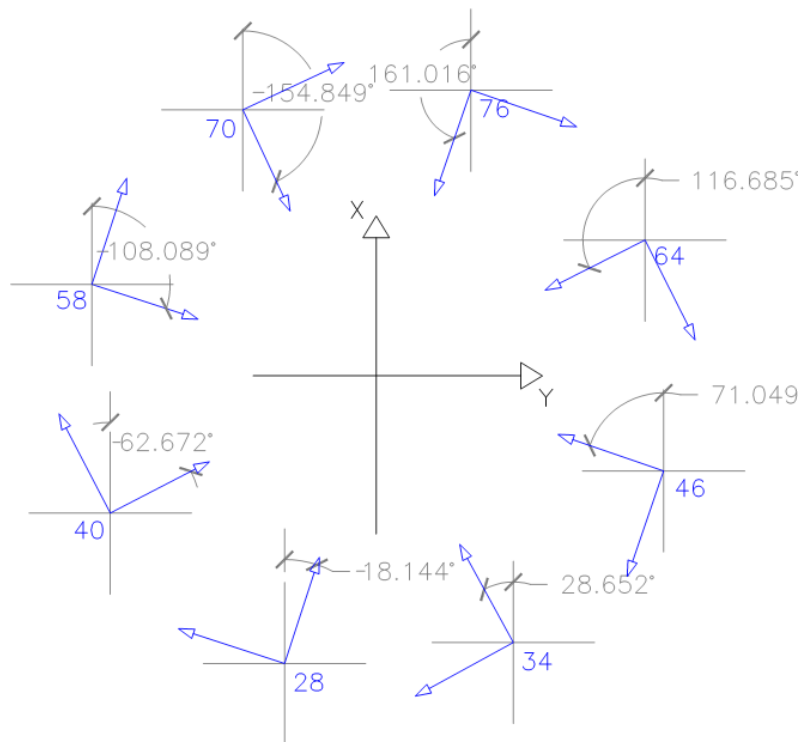


Figura 6.18: Mappa pilastri con le rispettive rotazioni per trasformare il sistema di riferimento locale in globale

La verifica dell'azione totale sopportabile dai pilastri viene fatta in termini di taglio limite, derivato dai momenti limite appena calcolati. Ipotizzando un meccanismo di collasso di piano in cui le sezioni di testa e di base dei pilastri raggiungono lo stesso momento limite si ottiene

$$\bar{T}_x = \frac{2\bar{M}_y}{h}$$

$$\bar{T}_y = \frac{2\bar{M}_x}{h}$$

Nelle formule precedenti \bar{T}_x e \bar{T}_y sono i tagli limite ed h è l'altezza del pilastro considerato, pari a 2,795 m. Vengono riportati in Tabella 6.7 i momenti e i tagli limite nel sistema di riferimento locale e i tagli limite ruotati nel sistema di riferimento globale.

| PILASTRO | M e T limite nel riferimento locale | | | | ANGOLO IN RADIANTI | RIFERIMENTO GLOBALE | |
|----------|-------------------------------------|----------|---------|---------|--------------------|---------------------|----------------|
| | M1 [kNm] | M2 [kNm] | T1 [KN] | T2 [KN] | | Tx [KN] limite | Ty [KN] limite |
| 28 | 28 | 23 | 16,458 | 20,036 | -1,2541 | 24,165 | 9,400 |
| 34 | 21 | 17 | 12,165 | 15,027 | -2,0709 | 7,354 | 17,880 |
| 40 | 26 | 26 | 18,605 | 18,605 | -0,4770 | 25,069 | 7,987 |
| 46 | -9 | -8 | -5,725 | -6,440 | -2,8108 | 3,323 | 7,950 |
| 58 | 20 | 20 | 14,311 | 14,311 | 0,3157 | 9,160 | 18,048 |
| 70 | -10 | -10 | -7,156 | -7,156 | 1,1320 | 3,438 | 9,518 |
| TOTALE | | | | | | 72,509 | 70,783 |

Tabella 6.7: Momenti e Tagli nel sistema di riferimento locale e globale

La verifica viene fatta considerando la somma dei tagli sollecitanti nei singoli pilastri (Tabella 6.6), confrontata con la somma dei tagli limite appena calcolati (Tabella 6.7).

| PILASTRO | Nel sistema globale | |
|----------|---------------------|---------|
| | Tx [KN] | Ty [KN] |
| 28 | 1,21125 | 1,60722 |
| 34 | 1,19780 | 2,19467 |
| 40 | 1,72472 | 0,62957 |
| 46 | 1,61202 | 2,95689 |
| 58 | 1,60342 | 0,53941 |
| 70 | 1,81319 | 0,62209 |
| TOT | 9,16241 | 8,54985 |

Tabella 6.8: Tagli sollecitanti nei pilastri nel riferimento globale

Quindi:

$$T_x = 9,16kN < 72kN = \bar{T}_x$$

$$T_y = 8,55kN < 70kN = \bar{T}_y$$

Il fattore di sicurezza per i pilastri è dunque pari a:

$$\frac{\bar{T}_x}{T_x} = 7,91$$

$$\frac{\bar{T}_y}{T_y} = 8,28$$

6.3 RIEPILOGO

Per il sisma di febbraio i pilastri e il corpo centrale cavo risultano verificati al taglio. Si ricorda comunque che le verifiche sono verifiche elastiche che non tengono conto della duttilità che potrebbe crearsi nel materiale una volta uscito dal campo elastico. Per questa verifica si rimanda ad uno sviluppo futuro.

Per quanto riguarda le verifiche effettuate, si può comunque affermare che il corpo centrale è l'elemento che assorbe la maggior parte del taglio nella struttura (su di esso ricade l'80% del taglio totale) quindi sarà il primo elemento che andrà in crisi. Ciò vuol dire che in seguito ad una sua eventuale perdita di resistenza, il taglio si potrà ancora ridistribuire sui pilastri i quali saranno in grado di ridistribuirlo. Per questo motivo è stato trovato un coefficiente di sicurezza dei pilastri così elevato (pari a 8 in entrambe le direzioni)

7 CONCLUSIONI

La Guglia Maggiore del Duomo di Milano, visto il suo degrado nel corso del tempo, vive una fase di restauro. E' pertanto doveroso un monitoraggio continuo dell'opera al fine di cogliere sperimentalmente il comportamento della struttura ed eventuali criticità.

Il lavoro qui esposto si è concentrato nella costruzione di un modello numerico semplificato che potesse rappresentare in modo esaustivo la risposta della Guglia Maggiore soggetta ad azioni sismiche (nello specifico due eventi recenti, 17 Luglio 2011 e 25 Febbraio 2012) seguito dalla sua validazione e infine da una verifica strutturale di massima.

Pertanto, c'è stata una prima fase di costruzione del modello numerico. Sono state fatte diverse proposte, ma solo due sono state considerate significative: il Modello 3, in un primo momento con la base rigida e il suo successivo sviluppo con le molle rotazionali. Tale scelta è dettata dal fatto che questi due modelli, in seguito all'analisi modale "numerica", presentano valori di frequenze che si riferiscono ai primi modi di vibrare della struttura molto vicini a quelli rilevati sperimentalmente dal Dipartimento di Meccanica del Politecnico di Milano. Questo non avveniva per gli altri modelli nei quali solo alcuni elementi che compongono la Guglia (come il corpo centrale e i pilastri laterali insieme al il sistema di travi che li collegano) erano considerati come strutturali.

Tale corrispondenza, raggiunta considerando man mano il contributo di rigidità degli elementi (Capitolo 3), se da una parte fa emergere lo stupore per trovarsi di fronte a un'opera in cui l'ornamentale, fino ai punti meno visibili dalla quota terreno, si sposa con grande ingegno con la funzione strutturale, dall'altra parte rivela informazioni vertiginose e non trascurabili per la Guglia Maggiore che recentemente vive una fase di restauro.

I modelli sono stati costruiti con riferimento a condizioni ambientali della Guglia Maggiore. Infatti, nella prima fase, il riscontro con i dati sperimentali riguardava valori delle frequenze dei primi modi propri di vibrare della struttura. Il passo successivo è stato quello di validare i modelli numerici simulando due sismi reali (Capitolo 4) con conseguente confronto delle risposte in frequenza sperimentali e numeriche in

corrispondenza del belvedere alto della Guglia Maggiore del Duomo di Milano (Capitolo 5).

Si è visto che generalmente le risposte nelle due direzioni si sposano bene in entrambi i casi, confermando da un lato il buon funzionamento degli strumenti e dall'altro una certa ragionevolezza dei modelli numerici.

Per l'evento di Febbraio si è visto che il modello con la molla, oltre a presentare valori delle frequenze delle armoniche principali più vicini a quelli reali rispetto all'altro modello, approssima meglio anche le rispettive ampiezze. Si rimanda alla Tabella 5.4 dove si riportano le amplificazioni che si verificano tra i due livelli.

Per il sisma di Luglio invece si riscontra una anomalia sia per i dati sperimentali che per quelli numerici: c'è una grande amplificazione per la frequenza del primo modo "sperimentale" in direzione X rispetto a Y che si rispecchia anche numericamente nel caso della molla, però invertendo le direzioni. Non si conosce la ragione d'essere di tale fenomeno: si può solo intuire che esso sia legato all'interazione tra Guglia e Duomo e alla natura dell'azione sismica, non tanto in termini di intensità del fenomeno quanto di frequenza delle sue prime armoniche che si avvicinano molto a quelle della struttura e ne amplificano le oscillazioni. Non è stato possibile giustificare numericamente tale intuizione per la mancanza di dati relativi a tale parte della struttura. Il Dipartimento di Meccanica si sta adoperando per un nuovo sistema di monitoraggio che comprenda anche questa parte della Cattedrale. Il modello numerico che coglie questa anomalia è comunque quello con le molle alla base, anche se inverte le direzioni di massima amplificazione: infatti quello con l'incastro sembrerebbe non coglierlo affatto. Dal momento che le frequenze dei primi due modi sono uguali nelle due direzioni, sia nel caso sperimentale che in quello numerico, è plausibile che l'amplificazione massima vi sia in una delle direzioni anche se fisicamente vi sarebbe una grande differenza.

Pertanto, alla luce dei soli dati che si dispongono, si può concludere che il modello migliore tra quelli proposti è quello con molle rotazionali alla base. Questo è un risultato ragionevole dal momento che quest'ultimo rispetta la relazione tra rotazioni medie che si verificano ai livelli del belvedere basso e quello alto, e pertanto più realistico di quello con la base rigida che invece la trascura.

Infine il lavoro si è concluso con una verifica strutturale di carattere globale il cui scopo non è certamente quello di trarre conclusioni affrettate. Nel corso del lavoro infatti sono state fatte ipotesi più o meno forti a cui si unisce la mancanza di determinati dati. Si è voluto infatti semplicemente determinare l'impegno delle strutture negli ultimi sismi e si è visto che la massima sollecitazione si ha con l'evento di Febbraio. La struttura rimane comunque ben lontana, in termini di taglio e momento flettente, dalle curve del limite elastico sia in riferimento al corpo centrale che ai pilastri esterni (Capitolo 6).

Si suggerisce in futuro di ampliare il modello numerico nella parte inferiore, inserendo una struttura semplificata che tenga in conto del comportamento del Duomo, una volta rilevato sperimentalmente.

Tale accorgimento influenzerebbe certamente la risposta numerica della Guglia con conseguente chiarimento sulle incertezze viste durante il lavoro.

APPENDICE 1

INPUT PROGRAMMA

Viene mostrato in seguito come è stata creata la sollecitazione nel modello accompagnando la descrizione da uno schema illustrativo. **Errore. L'autoriferimento non è valido per un segnalibro.:**

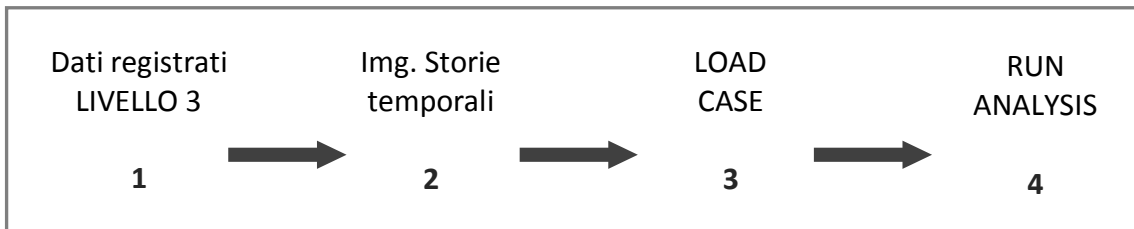


Figura 0.1 Schema illustrativo della creazione dell'input nel software.

DATI REGISTRATI AL LIVELLO 3.

Tra i dati accelerometrici a disposizione si è deciso di inserire nel modello le storie temporali relative al Livello 3 per ciascun sisma registrato. Questa scelta è giustificata dal fatto che questa altezza della Guglia Maggiore, come precedentemente specificato, corrisponde alla base del nostro modello. Pertanto queste registrazioni sono identificabili con il sisma verificato al "terreno del modello".

Gli accelerometri di cui disponiamo misurano accelerazioni lungo la loro linea d'asse, come mostrato in rosso in Figura 0.2.



Figura 0.2 Accelerometri e rispettivi assi

Questi due strumenti sono posizionati in modo tale che i loro assi siano perpendicolari tra loro coincidendo allo stesso tempo con le direzioni radiale e tangente, come si evince dalla Figura 0.3.

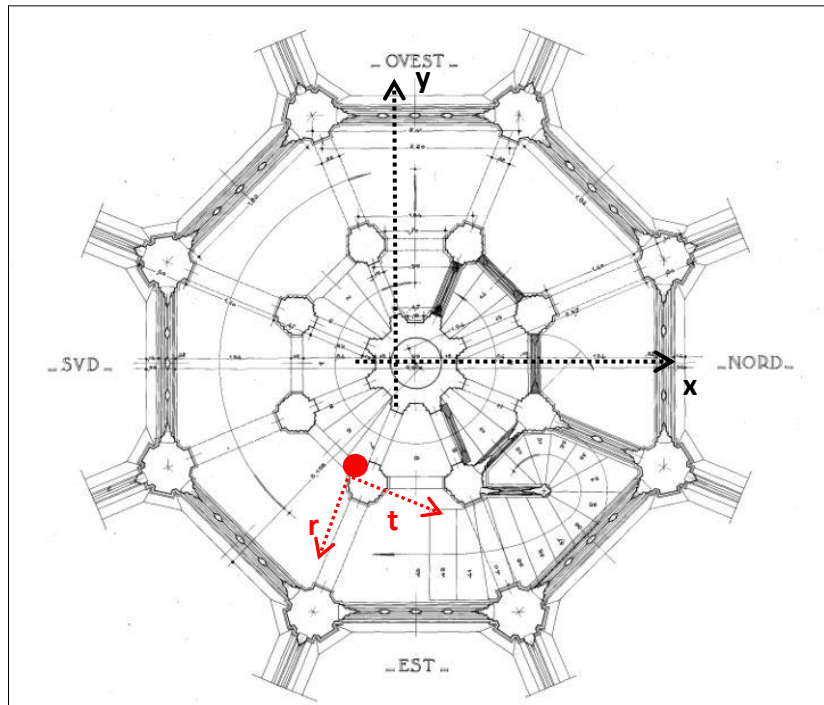


Figura 0.3 Direzione degli assi degli accelerometri in pianta, Livello 3

Il sistema di riferimento globale del nostro modello è quello indicato in nero nella medesima immagine.

La trasformazione adottata per riferire i sismi al nuovo sistema di riferimento (x, y) è la seguente:

$$\mathbf{a}_x = t \cos(18^\circ) - r \sin(18^\circ) = t_x - r_x$$

$$\mathbf{a}_y = -t \sin(18^\circ) - r \cos(18^\circ) = -t_y - r_y$$

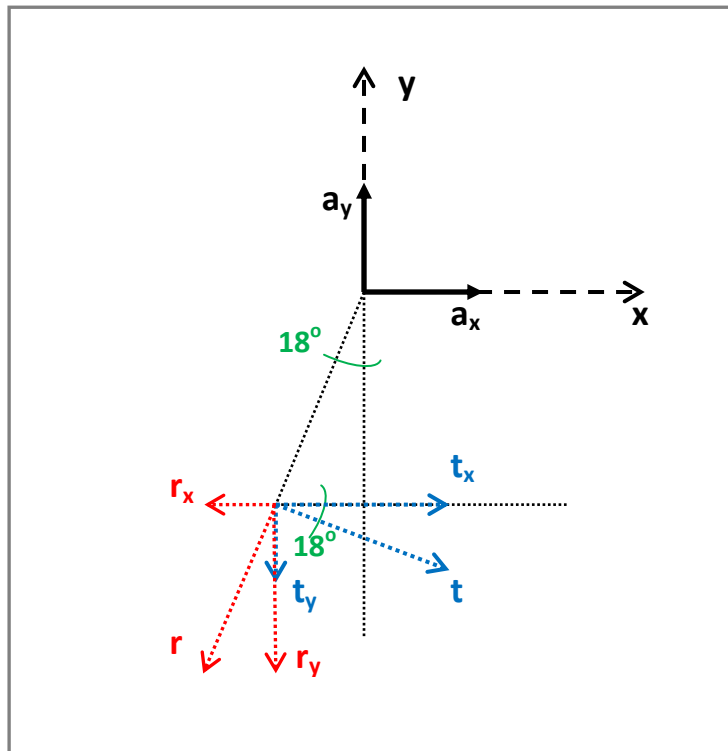


Figura 0.4 Scomposizione delle storie temporali

Avendo indicato

- r la storia temporale in direzione radiale
- r_x componente lungo x della storia temporale radiale
- r_y componente lungo y della storia temporale radiale
- t la storia temporale in direzione tangente
- t_x componente lungo x della storia temporale tangente
- t_y componente lungo y della storia temporale tangente
- a_x risultante delle componenti lungo x
- a_y risultante delle componenti lungo y

CONVERSIONE FILE

In seguito le storie temporali a_x e a_y sono state convertite da un file di tipo *.mat, caratteristico del codice di calcolo Matlab con cui si è effettuata la scomposizione precedentemente descritta, in un tipo di file leggibile per il nostro software: *.txt. Questo tipo di file, a differenza di quello iniziale, ci risparmia errori nel passaggio di dati da un programma all'altro dovuti alle differenti convenzioni sui numeri scientifici. Pertanto non permette né perdite né modifiche delle informazioni registrate.

Quindi è stata definita la storia temporale nel software che considera solamente i valori delle accelerazioni. L'asse dei tempi nel Software è stato ricostruito in modo tale da essere identico a quello originario ovvero a intervalli fissati di $1/64 \cong 0,0156$ s.

Mostriamo a titolo di esempio nella Figura 0.5 il comando appena descritto.

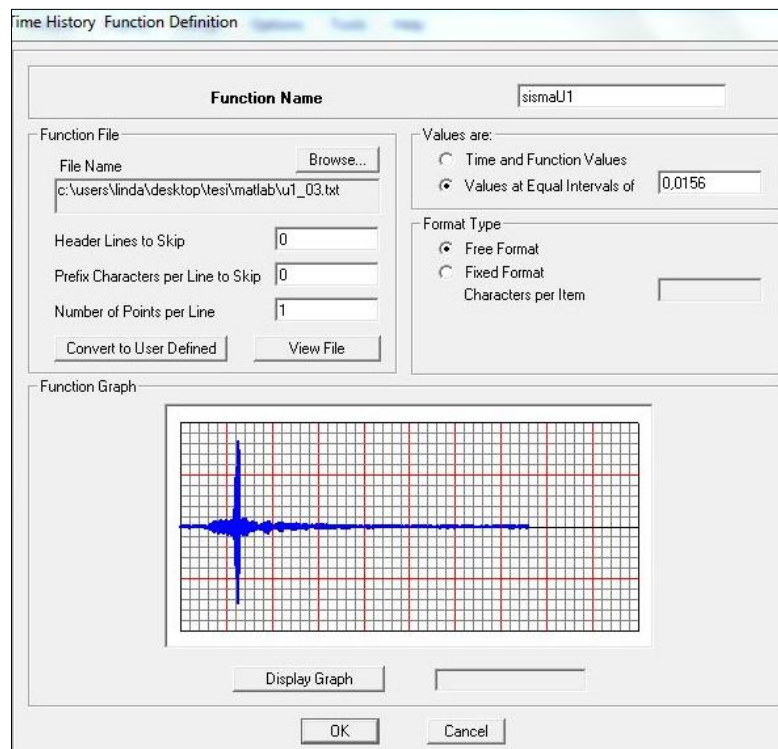


Figura 0.5 Definizione della storia temporale relativa al sisma del 17 Luglio 2011, direzione x.

DEFINIZIONE LOAD CASES

Definita la storia temporale ci proponiamo ora di definire la sollecitazione che ne consegue. Il comando Define Load Cases del software ci permette di fare questo.

Riportiamo a titolo esemplificativo la finestra di interfaccia del software, Figura 0.6 , per giustificare l'input inserito.

| Load Type | Load Name | Function | Scale Factor |
|-----------|-----------|----------|--------------|
| Accel | U1 | sismaU1 | 1. |
| Accel | U1 | sismaU1 | 1. |

Figura 0.6 Definizione della sollecitazione conseguente al Sisma del 17 Luglio 2011, direzione x

In Figura 0.6 cerchiamo in rosso le voci che non variano a seconda del sisma considerato e in giallo quelle invece che vanno modificate e adattate al sisma corrispondente. Le voci non cerciate invece sono selezionate di default.

- Loads applied:
 - **Load type:** è chiaramente una accelerazione poiché in ingresso abbiamo quel dato misurato e scomposto lungo le due direzioni. E' lo stesso per tutti i casi poiché sono tutte storie temporali di accelerazione.
 - **Load name:** si riferisce alla direzione del sisma. Ovviamente cambia a seconda della direzione: U1 se lungo x e U2 se lungo y.

- **Function:** è la storia temporale che dipende chiaramente dal sisma in considerazione.
- **Scale factor:** nel nostro caso ha valore unitario poiché i dati misurati sono già accelerazioni e non normalizzate in g (accelerazione di gravità).
- **Output Time Step Size:** è la lunghezza dell'intervallo temporale in cui viene stampata la risposta. Ha valore $1/64 \cong 0,0156 \text{ s}$ (al denominatore troviamo la frequenza di campionamento) esattamente quanto fatto per la definizione della storia temporale.
- **Number of output time steps:** è il numero di passi temporali necessari per un corretto output. Il numero di step deve essere uguale alla dimensione del vettore riportante l'informazione accelerometrica registrata e inserita nel modello numerico. Pertanto il valore **19450** è giustificato da questa osservazione. Questo numero equivale una storia temporale di circa cinque minuti, più che sufficiente per un fenomeno di breve durata quali i sismi.
- **Load Case Type: Time History,** poiché come puntualizzato precedentemente, i dati sono in funzione del tempo.
- **Analysis Type:** Le analisi effettuate sono di tipo di **lineare**.
- **Time History Type: Modale** poiché l'Integrazione Diretta risulta onerosa per la quantità di passi temporali necessari senza migliorare l'analisi. Inoltre la nostra analisi è di tipo modale.
- **Time History Motion Type:** il sisma è per natura un fenomeno di breve durata, pertanto la scelta di un moto di tipo **transitorio** è ovvia.

ESEGUI ANALISI

Il passo successivo è quello di eseguire le analisi del software avendo definito per ciascuna storia temporale il corrispondente Load Case.

BIBLIOGRAFIA

- [1] 14.12.2008, NTC. s.d.
- [2] B.P. Leftheris, M.E. Stavroulaki, A.C. Sapounaki, G.E. Stavrouakis. *Computational Mechanics for heritage structures*. WIT Press, 2006.
- [3] Castellani, A. *Costruzioni in zona sismica*. Milano: Masson Italia Editore, 1981.
- [4] Heyman, Jaques. *The stone skeleton. Structural Engineer of masonry architecture*. Brossura, 1997.
- [5] Nascimbene, Roberto, et al. "Realizzazione di un ponteggio metallico per la Gran Guglia del Duomo di Milano: analisi, modellazione, verifica ed identificazione dinamica." 2011.
- [6] Perotti, Federico. *Dispense di Dinamica delle Strutture*. s.d.
- [7] Toniolo, G. *Progetto agli stati limite delle strutture di calcestruzzo in zona sismica*. Milano, 2011.