

# POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione



## METODI BASATI SULLA RANDOMIZZAZIONE PER IL CONTROLLO IN AMBITO STOCASTICO CON VINCOLI SULL'INGRESSO E SULLO STATO

Relatore: Prof. Simone GARATTI

Correlatore: Prof.ssa Maria PRANDINI

Tesi di Laurea di:

Luca DEORI Matr. 765653

Anno Accademico 2011-2012

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>11</b>
1.1	Controllo su orizzonte finito con vincoli in ambito stocastico .	11
1.2	Definizione del problema di controllo . . . . .	14
1.2.1	Obiettivo del controllo . . . . .	14
1.2.2	Parametrizzazione della legge di controllo . . . . .	17
1.2.3	Riscrittura come problema di ottimizzazione finito-dimensionale . . . . .	24
1.3	Obiettivi della tesi . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Controllo con vincoli solo sulla variabile di controllo</b>	<b>31</b>
2.1	Introduzione . . . . .	31
2.2	Vincoli garantiti in modo robusto: soluzione mediante saturazione del disturbo . . . . .	32
2.2.1	Scelta di $\bar{\varphi}$ per l'approccio robusto . . . . .	34
2.3	Vincoli garantiti in probabilità: soluzione mediante l'approccio a scenario . . . . .	37
2.3.1	La tecnica dello scenario . . . . .	37
2.3.2	Politica affine nel disturbo . . . . .	40
2.3.3	Politica affine nel disturbo saturato . . . . .	42
2.4	Confronto tra i metodi mediante esempi numerici . . . . .	44
2.4.1	Sistema scalare . . . . .	45
2.4.2	Sistemi di secondo ordine . . . . .	58
2.4.3	Osservazioni sulle indicazioni emerse dalle prove . . . . .	76

<b>3</b>	<b>Controllo con vincoli su entrambe le variabili di stato e di controllo</b>	<b>84</b>
3.1	Introduzione . . . . .	84
3.2	Definizione del problema . . . . .	85
3.3	Soluzione mediante penalizzazione della cifra di merito . . . . .	87
3.3.1	Scelta del coefficiente $\mu$ . . . . .	90
3.3.2	Esempi numerici . . . . .	91
3.4	Soluzione in due passi con degrado prefissato della cifra di merito . . . . .	104
3.4.1	Esempi numerici . . . . .	109
3.5	Equivalenza tra le due soluzioni proposte . . . . .	112
3.5.1	Proprietà . . . . .	114
3.5.2	Stretta convessità di J . . . . .	129
<b>4</b>	<b>Esempio riassuntivo: controllo di un sistema meccanico</b>	<b>134</b>
4.1	Descrizione del sistema meccanico e del problema di controllo	134
4.2	Vincoli solo sulla variabile di controllo . . . . .	138
4.3	Vincoli su entrambe le variabili di stato e di controllo . . . . .	142
4.4	Controllo receding horizon . . . . .	148
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>154</b>

# Elenco delle figure

2.1	Sistema (2.35). Valori della cifra di merito $J_{\bar{\varphi}}^{\circ}$ per diversi valori di $\bar{\varphi}$ ; in rosso il minimo. . . . .	71
2.2	Sistema (2.36). Valori della cifra di merito $J_{\bar{\varphi}}^{\circ}$ per diversi valori di $\bar{\varphi}$ ; in rosso il minimo. . . . .	72
2.3	Sistema (2.35). Valori della cifra di merito $J_{\bar{\varphi}}^{\circ}$ per diversi valori di $\bar{\varphi}$ ; in rosso il minimo. . . . .	74
2.4	Sistema (2.36). Valori della cifra di merito $J_{\bar{\varphi}}^{\circ}$ per diversi valori di $\bar{\varphi}$ ; in rosso il minimo. . . . .	75
2.5	Curve di livello della varianza dello stato (2.43) (linee sottili). In blu marcato $\theta = \frac{ab_w}{b} \frac{L_{\varphi w}}{L_{\varphi \varphi}}$ . In rosso marcato $\theta = \frac{U_M}{\bar{\varphi}}$ . In verde $\theta = \frac{ab_w}{b}$ , $\bar{\varphi} = \frac{U_M b}{ab_w}$ . Il minimo della varianza dato un $\bar{\varphi}$ si trova sulla linea blu: aumentando $\bar{\varphi}$ questo diminuisce, ma ad un certo punto intervengono i vincoli (il punto in cui la linea blu passa sopra la linea rossa), non è quindi più possibile seguire la linea blu per diminuire la varianza. Proseguendo lungo la linea rossa si trova un unico punto di minimo corrispondente ai valori di $\bar{\varphi}$ e $\theta$ calcolati. . . . .	82
3.1	Sistema (3.15). Andamenti delle soluzioni ottenute risolvendo il problema di ottimizzazione (3.12) (prima colonna) o (3.13) (seconda colonna) per diversi valori di $\mu$ , con $Q = I_2$ $R = 1$ . . .	94
3.2	Sistema (3.15). Andamenti delle soluzioni ottenute risolvendo il problema di ottimizzazione (3.12) (prima colonna) o (3.13) (seconda colonna) per diversi valori di $\mu$ , con $Q = 0_2$ $R = 1$ . . .	95

3.3	Sistema (3.15). Andamenti delle soluzioni ottenute risolvendo il problema di ottimizzazione (3.12) (prima colonna) o (3.13) (seconda colonna) per diversi valori di $\mu$ , con $Q = I_2$ $R = 0$ . . . . .	96
3.4	Sistema (3.16). Andamenti delle soluzioni ottenute risolvendo il problema di ottimizzazione (3.12) (prima colonna) o (3.13) (seconda colonna) per diversi valori di $\mu$ , con $Q = I_2$ $R = 1$ . . . . .	97
3.5	Sistema (3.30). Risultati ottenuti risolvendo i problemi in cascata (3.25) e (3.26), al variare di $\alpha$ espresso come frazione di $J_{\bar{\varphi}}^*$ . . . . .	110
3.6	Sistema (3.31). Risultati ottenuti risolvendo i problemi in cascata (3.25) e (3.26), al variare di $\alpha$ espresso come frazione di $J_{\bar{\varphi}}^*$ . . . . .	111
3.7	Andamenti qualitativi di $J_\alpha$ , $h_\alpha$ e $J_\mu$ , $h_\mu$ . . . . .	123
3.8	Possibili andamenti di $J_\mu$ (rosso) e $h_\mu$ (blu). . . . .	127
4.1	Schema del sistema meccanico. . . . .	135
4.2	Simulazione del sistema non controllato soggetto a diverse realizzazioni del disturbo: andamento delle posizioni delle quattro masse. . . . .	138
4.3	Andamento della norma del vettore delle posizioni delle masse con orizzonte di controllo $k = 1$ : parametrizzazione a 4 bande con vincoli sulla variabile di ingresso in probabilità (linea blu) e robusti (linea azzurra), nessun vincolo (linea rossa); parametrizzazione con $\Theta$ nulla con vincoli sulla variabile di ingresso (linea verde), nessun vincolo (linea magenta). . . . .	149
4.4	Andamento della norma del vettore delle posizioni delle masse con orizzonte di controllo $k = 3$ : parametrizzazione a 4 bande con vincoli sulla variabile di ingresso in probabilità (linea blu) e robusti (linea azzurra), nessun vincolo (linea rossa); parametrizzazione con $\Theta$ nulla con vincoli sulla variabile di ingresso (linea verde), nessun vincolo (linea magenta). . . . .	150

4.5	Andamento della norma del vettore delle posizioni delle masse con orizzonte di controllo $k = 5$ : parametrizzazione a 4 bande con vincoli sulla variabile di ingresso in probabilità (linea blu) e robusti (linea azzurra), nessun vincolo (linea rossa); parametrizzazione con $\Theta$ nulla con vincoli sulla variabile di ingresso (linea verde), nessun vincolo (linea magenta). . . . .	151
4.6	Andamento di $V = \sum_{j=0}^t (d_{1,j}^2 + d_{2,j}^2 + d_{3,j}^2 + d_{4,j}^2)$ : parametrizzazione a 4 bande con vincoli sulla variabile di ingresso in probabilità (linea blu) e robusti (linea azzurra), nessun vincolo (linea rossa); parametrizzazione con $\Theta$ nulla con vincoli sulla variabile di ingresso (linea verde), nessun vincolo (linea magenta). . . . .	153

# Elenco delle tabelle

2.1	Prima serie di prove: risultati dell'approccio robusto. . . . .	48
2.2	Prima serie di prove: risultati dell'approccio a scenario con politica affine nel disturbo. . . . .	49
2.3	Prima serie di prove: risultati dell'approccio a scenario con politica affine nel disturbo saturato. . . . .	50
2.4	Seconda serie di prove: risultati dell'approccio robusto. . . . .	55
2.5	Seconda serie di prove: risultati dell'approccio a scenario con politica affine nel disturbo. . . . .	56
2.6	Seconda serie di prove: risultati dell'approccio a scenario con politica affine nel disturbo saturato. . . . .	57
2.7	Sistema (2.33). Risultati ottenuti per $J^\circ$ o $J_{\bar{\varphi}}^\circ$ utilizzando diversi metodi e diverse parametrizzazioni della matrice $\Theta$ . . .	62
2.8	Sistema (2.34). Risultati ottenuti per $J^\circ$ o $J_{\bar{\varphi}}^\circ$ utilizzando diversi metodi e diverse parametrizzazioni della matrice $\Theta$ . . .	64
2.9	Valori della cifra di merito normalizzata ( $J^\circ$ per Sp e $J_{\bar{\varphi}}^\circ$ per Ss e R) per il sistema (2.35). . . . .	67
2.10	Valori della cifra di merito normalizzata ( $J^\circ$ per Sp e $J_{\bar{\varphi}}^\circ$ per Ss e R) per il sistema (2.36). . . . .	68
3.1	Sistema (3.20). Andamento di $h_1+h_2$ e $J_{\bar{\varphi}}$ per diversi valori di $Q$ e $\mu$ ; $U_M = 3$ . In blu il valore minimo per $h_1+h_2$ raggiunto al variare di $Q$ e in corrispondenza di un fissato valore di $\mu$ . . .	100

3.2	Sistema (3.20). Andamento di $h_1 + h_2$ e $J_{\bar{\varphi}}$ per diversi valori di $Q$ e $\mu$ ; $U_M = 0.8$ . In blu il valore minimo per $h_1 + h_2$ raggiunto al variare di $Q$ e in corrispondenza di un fissato valore di $\mu$ . . . . .	101
3.3	Sistema (3.20). Andamento di $h_1 + h_2$ e $J_{\bar{\varphi}}$ per diversi valori di $Q$ e $\mu$ ; $U_M = 0.3$ . In blu il valore minimo per $h_1 + h_2$ raggiunto al variare di $Q$ e in corrispondenza di un fissato valore di $\mu$ . . . . .	102
4.1	Varianze delle prime 4 componenti dello stato $d_1, d_2, d_3$ e $d_4$ all'istante $t = 5$ e cifra di merito $J$ per il sistema non controllato.	137
4.2	Risultati dell'approccio robusto per diverse parametrizzazioni di $\Theta$ e due valori per $\bar{\varphi}$ . . . . .	140
4.3	Risultati dell'approccio chance-constrained per diverse parametrizzazioni di $\Theta$ e due valori per $\bar{\varphi}$ . . . . .	141
4.4	Risultati dell'approccio chance-constrained senza saturazione del disturbo per diverse parametrizzazioni di $\Theta$ . . . . .	142
4.5	Risultati dell'approccio con penalizzazione della cifra di merito, utilizzando il metodo robusto per i vincoli sulle variabili di controllo. . . . .	145
4.6	Risultati dell'approccio con penalizzazione della cifra di merito, utilizzando il metodo chance-constrained per i vincoli sulle variabili di controllo. . . . .	145
4.7	Risultati dell'approccio in due passi, utilizzando il metodo robusto per i vincoli sulle variabili di controllo. . . . .	146
4.8	Risultati dell'approccio in due passi, utilizzando il metodo chance-constrained per i vincoli sulle variabili di controllo. . .	147
4.9	Media quadratica campionaria (4.2) delle posizioni delle masse.	152



## Abstract

L'obiettivo di questo lavoro di tesi è sviluppare metodi per la risoluzione efficiente di problemi di controllo su orizzonte finito in ambito stocastico in presenza di vincoli sia sulle variabili di controllo (saturazione) sia sulle variabili di stato (condizioni sulla sicurezza del sistema). Il problema viene impostato come un problema di ottimizzazione in probabilità (ottimizzazione chance-constrained) in modo tale da tenere conto della presenza del disturbo additivo agente sullo stato senza fare ipotesi sul suo supporto che quindi può essere anche non limitato. I problemi di ottimizzazione di tipo chance-constrained che vengono formulati vengono risolti mediante l'applicazione dell'approccio a scenario, una tecnica recentemente introdotta che permette di ottenere soluzioni approssimate, ma con solide garanzie sulla loro qualità ad un costo computazionale relativamente ridotto.

L'elaborato di tesi si articola attorno alle seguenti tematiche.

- Dapprima si considera il problema con vincoli solo sulla variabile di controllo. Si analizza un approccio che consente il rispetto dei vincoli in modo robusto e viene proposto un approccio con vincoli in probabilità la cui risoluzione è ottenuta mediante l'approccio a scenario. Viene presentata un'estesa analisi comparativa dei metodi.
- Considerando problemi in cui vi sono vincoli anche sullo stato, si propongono ed analizzano due approcci innovativi: in entrambi si riformulano i vincoli per rendere i problemi di tipo chance-constrained sempre "feasible" e si fa nuovamente uso della tecnica a scenario per la loro risoluzione.
- Si effettua uno studio teorico delle proprietà degli approcci proposti nel caso di vincoli sullo stato, caratterizzando sia il comportamento al variare dei loro parametri sia il forte legame presente tra i due metodi.
- Le diverse tecniche presentate vengono applicate ad un sistema meccanico al fine di validarle su un esempio concreto. La validazione è

effettuata sia considerando un orizzonte di tempo finito, sia applicando la tecnica receding horizon per estendere il controllo ad un orizzonte più ampio, eventualmente infinito.

# Capitolo 1

## Introduzione

Nel presente elaborato si sviluppano metodi per la risoluzione di problemi di controllo con vincoli su orizzonte finito per sistemi stocastici. Ciò comporta la risoluzione di problemi di ottimizzazione che, nel caso in cui si voglia tenere esplicitamente in considerazione la presenza del disturbo stocastico, risultano difficilmente trattabili. A tale proposito è stato considerato un nuovo approccio, l'approccio a scenario, che consente di trovare una soluzione con un costo computazionale limitato. Si è analizzata l'applicazione di questa teoria a varie tipologie di problemi, valutando diverse configurazioni possibili e le conseguenti prestazioni.

### **1.1 Controllo su orizzonte finito con vincoli in ambito stocastico**

I problemi di controllo su orizzonte finito costituiscono un primo passo nella realizzazione di metodi di controllo MPC, una tecnica di controllo, diffusamente applicata in ambito industriale, in cui ad ogni istante di tempo si ottimizza l'evoluzione del sistema su un orizzonte finito e si implementa solo il primo campione della politica di controllo così ottenuta, in accordo ad una metodologia chiamata a finestra mobile (receding horizon). La caratteristica peculiare di MPC è la possibilità di includere facilmente dei vincoli

sulla variabile di controllo e sullo stato, in quanto tali vincoli sono facilmente inclusi nel problema di controllo su orizzonte finito. Tale problema viene tipicamente formulato come un problema di ottimizzazione in cui si vuole minimizzare un funzionale di costo quadratico nello stato e nella variabile di controllo, con in aggiunta i vincoli sui limiti da imporre a tali variabili. Il problema risultante nel caso di sistemi lineari a tempo discreto è convesso e può essere facilmente trattato a livello computazionale trovando una soluzione per mezzo di risolutori standard.

Nonostante i notevoli sviluppi di MPC ottenuti negli ultimi anni [12], [1], [5], [9] l'applicazione di tale metodologia a sistemi affetti da disturbi stocastici è in larga misura un problema aperto. Gli ostacoli maggiori sono legati alla difficoltà di come trattare la componente stocastica, data in questo caso da un disturbo additivo sullo stato, all'interno del problema di ottimizzazione e alla difficoltà di far sì che il nuovo problema di ottimizzazione ottenuto risulti ancora trattabile dal punto di vista computazionale. Da un punto di vista pratico ciò corrisponde spesso al fatto che il problema di ottimizzazione risulti convesso e con un numero limitato di vincoli.

Ad un livello generale, sono due i possibili paradigmi che possono essere utilizzati per affrontare i problemi di ottimizzazione su orizzonte finito in ambito stocastico.

Un primo approccio è quello di considerare un problema di ottimizzazione robusto del tipo:

$$\begin{aligned} \min_{\theta} f(\theta) & \tag{1.1} \\ \text{soggetto a : } g(\theta, \delta) \leq 0 & \quad \forall \delta \in \Delta, \end{aligned}$$

dove  $\theta$  rappresenta il vettore delle variabili di ottimizzazione,  $\delta \in \Delta$  è la componente stocastica,  $f(\theta)$  è il funzionale di costo, mentre  $g(\theta, \delta)$  rappresenta un generico vincolo sulle variabili di ottimizzazione in corrispondenza di una realizzazione dell'elemento stocastico  $\delta$ . Come si vede in questo caso è richiesto che il vincolo sia soddisfatto per ogni realizzazione di  $\delta$  in modo tale da contrastare anche il caso peggior.

Sebbene sia indubbio il vantaggio di ottenere una soluzione garantita per

ogni istanza dell'elemento stocastico, l'approccio robusto può soffrire di alcuni inconvenienti qui delineati. Molto spesso il supporto  $\Delta$  della componente stocastica risulta essere un insieme continuo, contenente un numero infinito di istanze dell'incertezza: questo comporta che nel problema di ottimizzazione si debbano considerare un numero infinito di vincoli per cui il problema può risultare difficilmente trattabile, anche nel caso in cui, per ogni valore di  $\delta$ , il vincolo  $g(\theta, \delta) \leq 0$  nelle variabili  $\theta$  sia convesso. In secondo luogo il problema robusto può risultare facilmente “unfeasible”. Nello specifico dei problemi di controllo su orizzonte finito, come si vedrà in dettaglio successivamente, questo capita in presenza di disturbi a supporto non limitato e di vincoli sullo stato. In generale l'approccio robusto richiede nella maggior parte dei casi, che il supporto dell'incertezza sia in qualche modo limitato. Infine anche nel caso in cui si riesca, nonostante le difficoltà sopra esposte, a trovare una soluzione, è piuttosto probabile che essa risulti conservativa e non particolarmente performante a causa del fatto che nel problema si considera il caso pessimo tra tutte le possibili realizzazioni dell'incertezza, senza tenere conto in alcun modo della sua distribuzione di probabilità, ma considerando tutte le realizzazioni ugualmente probabili. Potrebbe quindi accadere che istanze estremamente poco probabili vadano ad incidere sulle prestazioni generali, peggiorandole in modo significativo.

Per superare, in parte, le limitazioni di un approccio di tipo robusto, un secondo possibile paradigma è quello in cui si considera un problema di ottimizzazione nel quale si minimizza il funzionale di costo, soggetto a vincoli in probabilità. Tali vincoli vengono anche chiamati “soft” a differenza di quello dell'approccio robusto chiamato vincolo “hard”.

$$\begin{aligned} \min_{\theta} f(\theta) & \tag{1.2} \\ \text{soggetto a : } \mathbb{P}(g(\theta, \delta) \leq 0) & \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

In tale approccio si accetta una violazione del vincolo  $g(\theta, \delta) \leq 0$ , ma solamente per una piccola parte delle possibili realizzazioni dell'incertezza in quanto si ha violazione dei vincoli con probabilità non maggiore di una deter-

minata soglia  $\epsilon$ . Il problema così ottenuto viene chiamato *chance-constrained* e consente di tenere conto della distribuzione di probabilità delle realizzazioni dell'incertezza e quindi di ottenere delle soluzioni meno conservative di quella robusta. In genere, violando anche solamente una piccola parte dei vincoli è possibile incrementare di molto le prestazioni della soluzione. Purtroppo anche i problemi di tipo *chance-constrained* sono, tranne in casi molti particolari, difficili da risolvere. Si pensi che i vincoli in probabilità risultano essere non convessi anche nel caso in cui il vincolo  $g(\theta, \delta) \leq 0$  lo sia per ogni valore di  $\delta$  fissato. Nella letteratura riguardante il controllo MPC stocastico, problemi *chance-constrained* sono risolti solamente nel caso in cui l'incertezza abbia distribuzioni particolari, come ad esempio gaussiana. Nella prossima sezione vengono definiti in modo preciso i diversi problemi che si vogliono trattare per valutare nello specifico le diverse difficoltà che presentano e per proporre poi metodi per risolverli in modo efficiente.

## 1.2 Definizione del problema di controllo

Si consideri un sistema lineare a tempo discreto in cui lo stato  $x_t \in \mathbb{R}^n$  evolve secondo l'equazione alle differenze:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + B_w w_t \quad (1.3)$$

dove  $u_t \in \mathbb{R}^m$  è la variabile di controllo e  $w_t \in \mathbb{R}^{n_w}$  è un disturbo stocastico con supporto non limitato, a media nulla, la cui distribuzione di probabilità è nota.

Si suppone che il vettore di stato  $x_t$  sia perfettamente misurabile e disponibile per il controllo.

### 1.2.1 Obiettivo del controllo

L'obiettivo è quello di progettare una legge di controllo in retroazione sullo stato in modo da minimizzare un certo funzionale di costo su un orizzonte finito, soddisfacendo al tempo stesso dei vincoli sulla variabile di controllo

ed eventualmente anche sullo stato.

In questo lavoro di tesi, si considera come cifra di merito quella utilizzata nel controllo di tipo LQG su orizzonte finito e cioè:

$$J = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^M x_{\tau+i}^T Q_i x_{\tau+i} + \sum_{i=0}^{M-1} u_{\tau+i}^T R_i u_{\tau+i} \right], \quad (1.4)$$

in cui le matrici  $Q_i$  e  $R_i$  che pesano i contributi dei termini quadratici nello stato e nella variabile di controllo sono semidefinite positive. Nell'equazione (1.4),  $\tau$  rappresenta l'istante attuale e  $M$  è la lunghezza dell'orizzonte di predizione considerato. Il valore atteso è calcolatoo rispetto alla distribuzione di probabilità del disturbo  $w_\tau, w_{\tau+1}, \dots, w_{\tau+M}$  che influenza l'evoluzione dello stato e che a seconda del tipo di legge di controllo adottata, influenza anche l'ingresso  $u_{\tau+i}$  (ad esempio se si sceglie una legge in retroazione sullo stato  $u_{\tau+i}$  dipende da  $x_{\tau+i}$  e quindi a sua volta anche dal disturbo stocastico).

Per quanto riguarda i vincoli, consideriamo dapprima il caso in cui siano presenti solo vincoli sulla variabile di controllo. Successivamente discuteremo il caso in cui sono presenti anche vincoli sullo stato.

In questa tesi si trattano vincoli sulla variabile di controllo esprimibili tramite la condizione

$$\|S_{\tau+i}^u u_{\tau+i}\|_\infty \leq 1, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (1.5)$$

dove  $S_{\tau+i}^u, i = 0, 1, \dots, M-1$ , sono opportune matrici di pesi. Se per esempio si vuole imporre che le singole componenti della variabile di controllo siano inferiori ad un certo valore  $U_M$  ad ogni istante lungo l'orizzonte predittivo basta scegliere

$$S_{\tau+i}^u = U_M^{-1} I_m, \quad i = 0, 1, \dots, M-1,$$

dove  $I_m$  indica la matrice identità di ordine  $m$ . Si possono imporre tramite (1.5) anche vincoli di saturazione diversi sulle singole componenti della variabile di controllo per i vari istanti, oppure esprimere vincoli sulla combinazione lineare delle componenti della variabile di controllo.

In generale, come discusso in precedenza, il valore assunto dalla variabile di controllo  $u_{\tau+i}$  dipenderà da (una parte del) vettore dei disturbi  $w = [w_\tau, w_{\tau+i}, \dots, w_{\tau+M}]$ , ovvero  $u_{\tau+i} = u_{\tau+i}(w)$ . Per tenere conto dell'incertezza dovuta alla presenza di  $w$  si considerano vincoli di due tipi: quelli di tipo hard, che devono cioè essere verificati per ogni realizzazione del disturbo e quelli di tipo soft che devono essere verificati con una certa (alta) probabilità. Più precisamente, se indichiamo con  $\mathcal{F}$  le leggi in retroazione sullo stato, il problema di progetto del controllore può essere espresso nel modo seguente:

$$\min_{u \in \mathcal{F}} J \tag{1.6}$$

$$\text{soggetto a: } \|S_{\tau+i}^u u_{\tau+i}(w)\|_\infty \leq 1, i = 0, 1, \dots, M-1, \forall w;$$

nel caso in cui si considerino vincoli hard sulla variabile di controllo, che devono valere per ogni realizzazione  $w$  del disturbo nell'orizzonte  $[\tau, \tau + M - 1]$ . Nel caso in cui si utilizzino vincoli soft, si ottiene un problema di tipo chance-constrained:

$$\min_{u \in \mathcal{F}} J \tag{1.7}$$

$$\text{soggetto a: } \mathbb{P}\left(\|S_{\tau+i}^u u_{\tau+i}(w)\|_\infty \leq 1, i = 0, 1, \dots, M-1\right) \geq 1 - \epsilon,$$

dove  $\mathbb{P}$  indica la misura di probabilità con cui sono estratte le realizzazioni  $w$  del disturbo da  $\mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_w} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_w}$  ed  $\epsilon \in (0, 1)$  indica la probabilità di violazione del vincolo massima ammissibile.

In modo simile a quanto fatto per i vincoli sulla variabile di controllo, possono essere espressi vincoli sullo stato o su componenti lineari di variabili di stato. Si noti che questa possibilità presenta delle forti potenzialità sia per poter garantire che il sistema si mantenga in una zona di sicurezza sia per poter tenere conto attraverso le combinazioni lineari di esigenze diverse da quelle esprimibili dalla cifra di merito  $J$ . Una forma in cui possono essere espressi i vincoli sullo stato è:

$$\|S_{\tau+i}^x x_{\tau+i}\|_\infty \leq 1, i = 1, 2, \dots, M, \tag{1.8}$$



in cui si è escluso lo stato attuale  $x_\tau$  che, essendo dato, non è possibile modificare.

È possibile formulare i problemi di ottimizzazione includendo i nuovi vincoli sullo stato sia imponendo vincoli hard ottenendo il seguente problema robusto:

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathcal{F}} J & (1.9) \\ \text{soggetto a: } & \begin{cases} \|S_{\tau+i}^u u_{\tau+i}(w)\|_\infty \leq 1, & i = 0, 1, \dots, M-1 \\ \|S_{\tau+i}^x x_{\tau+i}(w)\|_\infty \leq 1, & i = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad \forall w \end{aligned}$$

sia imponendo vincoli di tipo soft ottenendo un problema di tipo chance-constrained:

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathcal{F}} J & (1.10) \\ \text{soggetto a: } & \mathbb{P} \left( \begin{aligned} & \|S_{\tau+i}^u u_{\tau+i}(w)\|_\infty \leq 1, & i = 0, 1, \dots, M-1 \wedge \\ & \|S_{\tau+i}^x x_{\tau+i}(w)\|_\infty \leq 1, & i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \right) \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

## 1.2.2 Parametrizzazione della legge di controllo

In assenza di vincoli su stato e controllo, il problema di minimizzazione della cifra di merito (1.4) può essere risolto in modo analitico e la variabile di controllo risulta una funzione affine dello stato (controllo LQG su orizzonte finito). Si può pensare, quindi, di adottare anche in presenza di vincoli una legge di controllo affine nello stato e data da:

$$u_{\tau+i} = \sum_{j=0}^i L_{i,j} x_{\tau+j} + g_i, \quad (1.11)$$

dove  $L_{i,j} \in \mathbb{M}^{m,n}$  e  $g_i \in \mathbb{R}^m$  sono parametri di scelta ( $\mathbb{M}^{m,n}$  indica lo spazio delle matrici di ordine  $m \times n$ ). Come si può dimostrare facilmente questa scelta, tuttavia, rende il problema di ottimizzazione con vincoli non convesso e difficilmente trattabile. Una scelta equivalente, come è stato dimostrato in [10] e per comodità riportato successivamente, è quella di utilizzare una

legge di controllo affine dei valori passati del disturbo:

$$u_{\tau+i} = \sum_{j=0}^{i-1} \theta_{i,j} w_{\tau+j} + \gamma_i, \quad (1.12)$$

dove  $\theta_{i,j} \in \mathbb{M}^{m,n_w}$  e  $\gamma_i \in \mathbb{R}^m$  sono i parametri di progetto. In questo modo la cifra di merito che si ottiene risulta convessa, come verrà mostrato successivamente. I valori passati del disturbo possono essere ricostruiti utilizzando l'equazione:

$$B_w w_{\tau+i} = x_{\tau+i+1} - Ax_{\tau+i} - Bu_{\tau+i}.$$

Se  $B_w$  è una matrice a rango pieno per colonne, allora  $B_w^T B_w$  è invertibile e quindi si ricava:

$$w_{\tau+i} = (B_w^T B_w)^{-1} B_w^T (x_{\tau+i+1} - Ax_{\tau+i} - Bu_{\tau+i}).$$

Si noti che il rango pieno per la matrice  $B_w$  può essere sempre ottenuto pur di ridefinire opportunamente il disturbo  $w$ . Grazie alla presenza della matrice  $B_w$  è possibile ridurre il numero di variabili di ottimizzazione nel caso in cui la dimensione del disturbo  $n_w$  sia inferiore alla dimensione dello stato  $n$ . Ad esempio se in un sistema tutti gli stati fossero affetti dallo stesso disturbo stocastico la matrice  $B_w$  risulterebbe:

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi le matrici  $\theta_{i,j}$  che contengono le variabili di ottimizzazione avrebbero dimensioni  $m \times n_w$  con  $n_w = 1$  e non dimensioni  $m \times n$ .

## Equivalenza tra le leggi di controllo affini nello stato e nel disturbo

Per dimostrare l'equivalenza tra le due politiche di controllo, introduciamo una notazione più compatta vettoriale/matriciale.

Si osservi che l'evoluzione del sistema nell'orizzonte di predizione considerato può essere espressa utilizzando la formula di Lagrange:

$$x_{\tau+i} = A^i x_\tau + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j-1} B u_{\tau+j} + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j-1} B_w w_{\tau+j}.$$

Definendo i vettori e le matrici seguenti:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_\tau \\ x_{\tau+1} \\ x_{\tau+2} \\ \vdots \\ x_{\tau+M} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_\tau \\ u_{\tau+1} \\ u_{\tau+2} \\ \vdots \\ u_{\tau+M-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_\tau \\ w_{\tau+1} \\ w_{\tau+2} \\ \vdots \\ w_{\tau+M-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} I_n \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} & 0_{n \times m} & \dots & 0_{n \times m} \\ B & 0_{n \times m} & \dots & 0_{n \times m} \\ AB & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n \times m} \\ A^{M-1}B & \dots & AB & B \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n_w} & 0_{n \times n_w} & \dots & 0_{n \times n_w} \\ B_w & 0_{n \times n_w} & \dots & 0_{n \times n_w} \\ AB_w & B_w & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n \times n_w} \\ A^{M-1}B_w & \dots & AB_w & B_w \end{bmatrix}$$

si ricava la seguente equazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}x_\tau + \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{w}. \quad (1.13)$$

In modo analogo si ottiene che le leggi di controllo (1.11) e (1.12) possono essere scritte nella forma vettoriale:

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{g} \quad (1.14)$$

in cui:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ L_{0,M-1} & \dots & L_{M-1,M-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{M-1} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{u} = \Theta\mathbf{w} + \Gamma \quad (1.15)$$

in cui:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0_{m \times n_w} & 0_{m \times n_w} & \cdots & 0_{m \times n_w} \\ \theta_{0,0} & 0_{m \times n_w} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{m \times n_w} \\ \theta_{0,M-1} & \cdots & \theta_{M-1,M-2} & 0_{m \times n_w} \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{M-1} \end{bmatrix}.$$

Si ricordi che ogni  $\theta_{i,j}$  non è una variabile scalare, ma una matrice di dimensioni  $m \times n_w$  in cui ogni elemento è una diversa variabile di ottimizzazione. L'equivalenza tra le due politiche di controllo (1.14) e (1.15), si mostra considerando l'equazione vettoriale dell'evoluzione dello stato (1.13) in cui si sostituisce alla variabile di controllo la sua espressione in caso si scelga la politica di retroazione sullo stato (1.14):

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}x_\tau + \mathbf{G}\mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{g} + \mathbf{H}\mathbf{w},$$

isolando  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{F}x_\tau + \mathbf{G}\mathbf{g} + \mathbf{H}\mathbf{w})$$

e sostituendo la sua espressione in quella della variabile di controllo  $\mathbf{u}$  si ottiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{F}x_\tau + \mathbf{G}\mathbf{g} + \mathbf{H}\mathbf{w}) + \mathbf{g}. \quad (1.16)$$

Se ora si pongono:

$$\Theta = \mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{H} \quad \Gamma = \mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{g} + \mathbf{F}x_\tau) + \mathbf{g}$$

si può vedere l'equivalenza tra le due politiche di retroazione sullo stato e di retroazione sul disturbo per la generazione della variabile di controllo confrontando (1.16) con (1.15).

Procedendo in modo simile si può anche far vedere come sia possibile passare da una legge affine nel disturbo ad una legge equivalente affine nello stato. Per i dettagli si veda [10].

## Riduzione del numero dei parametri da ottimizzare

La matrice

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \theta_{1,0} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \theta_{M-1,0} & \dots & \theta_{M-1,M-2} & 0 \end{bmatrix}$$

che compare nell'espressione (1.15) della legge di controllo è strettamente triangolare inferiore a blocchi di dimensione  $m \times n_w$ , in cui tutti gli elementi sotto la diagonale principale sono parametri liberi da ottimizzare. È cioè possibile che ogni componente della variabile di controllo, ad ogni istante nell'orizzonte temporale considerato, dipenda da ognuna delle componenti del disturbo negli istanti passati, dall'istante iniziale  $\tau$  fino all'ultimo istante precedente a quello in cui la variabile di controllo dovrebbe essere applicata:

$$u_{\tau+i} = \gamma_i + \sum_{j=0}^{i-1} \theta_{i,j} w_{t+j}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1.$$

Tenendo conto della dimensionalità di  $\theta_{i,j}$  e di  $\gamma_i$ , il numero di parametri liberi da ottimizzare è dato da

$$d = mn_w \frac{M(M-1)}{2} + mM, \quad (1.17)$$

un numero che in certi casi può risultare eccessivo, portando a problemi ad alta dimensionalità ed ad alto peso computazionale.

Per ridurre il numero di variabili di ottimizzazione è possibile imporre alla matrice  $\Theta$  delle strutture particolari:

- una struttura in cui solamente le prime  $k$  sottodiagonali della matrice  $\Theta$  contengono variabili di ottimizzazione mentre la parte inferiore sinistra corrispondente alle altre sottodiagonali è imposta nulla. Questa scelta implica che le componenti dell'azione di controllo non siano realizzate utilizzando tutti i valori del disturbo passati, ma solamente



- Una struttura che prevede la combinazione delle due strutture precedenti, ovvero una matrice  $\Theta$  che risulti a bande a blocchi per le prime  $k$  sottodiagonali e sia nulla altrove.

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & & & 0 \\ \theta_1 & 0 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ \theta_k & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & \theta_k & \dots & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$u_{\tau+i} = \gamma_i + \sum_{j=i-k}^{i-1} \theta_{i-j} w_{t+j}. \quad (1.25)$$

In questo caso il numero di variabili di ottimizzazione risulta:

$$d = mn_w k + mM. \quad (1.26)$$

L'utilizzo delle strutture proposte per la matrice  $\Theta$  è giustificato dal fatto che è presumibile aspettarsi che l'azione di controllo dipenda in modo più forte dagli ultimi valori del disturbo ed in maniera meno forte da quelli più lontani nel tempo. Quindi togliere la dipendenza da questi ultimi non comporta un particolare peggioramento delle prestazioni. Una parametrizzazione che riduca il numero di variabili appare molto utile, se non necessaria, nel caso in cui si vogliano considerare orizzonti di predizione lunghi.

La struttura a bande deve essere utilizzata con maggiore attenzione: infatti il vincolo di utilizzare sempre la stessa dipendenza dell'azione di controllo dal disturbo costringe necessariamente a trovare un compromesso tra situazioni che possono essere diverse, tipicamente tra i primi istanti influenzati più fortemente dallo stato iniziale e gli istanti successivi.

La scelta della parametrizzazione di  $\Theta$  deve essere fatta tenendo conto del trade-off tra tempo di calcolo richiesto, critico per una possibile applicazione della logica receding-horizon, e prestazioni. Se con la parametrizzazione

completa si ottiene una  $\Theta$  che già presenta delle strutture particolari, è evidente che imporre quella stessa struttura non peggiora le prestazioni. Dato che in genere non è noto a-priori quale sia la struttura di  $\Theta$  ottima, si deve accettare un possibile deterioramento delle prestazioni, per ottenere un guadagno in termini di tempo di calcolo della legge di controllo.

### 1.2.3 Riscrittura come problema di ottimizzazione finito-dimensionale

Facendo riferimento alla notazione compatta in (1.13) e (1.15), scriviamo ora la cifra di merito (1.4) esplicitandone la dipendenza dai parametri  $\Theta$  e  $\Gamma$  della legge di controllo. A tale scopo, definiamo le matrici:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & \cdots & 0_{n \times n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n \times n} & \cdots & Q_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & \cdots & 0_{m \times m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m \times m} & \cdots & R_{M-1} \end{bmatrix}$$

e riscriviamo  $J$  come:

$$J = \mathbb{E} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}].$$

È possibile ora sfruttando l'equazione (1.13) e la legge di controllo sul disturbo (1.15) sviluppare la cifra di merito nel modo seguente:

$$\begin{aligned} J(\Theta, \Gamma) &= \mathbb{E} \left[ (\mathbf{F}x_\tau + \mathbf{G}(\Theta \mathbf{w} + \Gamma) + \mathbf{H} \mathbf{w})^T \mathbf{Q} (\mathbf{F}x_\tau + \mathbf{G}(\Theta \mathbf{w} + \Gamma) + \mathbf{H} \mathbf{w}) \right. \\ &\quad \left. + (\Theta \mathbf{w} + \Gamma)^T \mathbf{R} (\Theta \mathbf{w} + \Gamma) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ x_\tau^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} x_\tau + (\Theta \mathbf{w} + \Gamma)^T (\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R}) (\Theta \mathbf{w} + \Gamma) + \mathbf{w}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{w} \right. \\ &\quad \left. + 2x_\tau^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} (\Theta \mathbf{w} + \Gamma) + 2x_\tau^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{w} + 2\mathbf{w}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} (\Theta \mathbf{w} + \Gamma) \right] \\ &= x_\tau^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} x_\tau + 2x_\tau^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} \Gamma + \Gamma^T (\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R}) \Gamma \quad (1.27) \\ &\quad + \text{tr}(2\mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} \Theta \mathbb{E} [\mathbf{w} \mathbf{w}^T]) + \text{tr}(\Theta^T (\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{R} + \mathbf{R}) \Theta \mathbb{E} [\mathbf{w} \mathbf{w}^T]) \\ &\quad + \text{tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbb{E} [\mathbf{w} \mathbf{w}^T]) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'ipotesi che il disturbo sia a media nulla.



L'espressione  $J(\Theta, \Gamma)$  così ottenuta risulta quadratica e convessa nelle variabili di progetto contenute nella matrice  $\Theta$  e nel vettore  $\Gamma$ .

Per quanto riguarda i vincoli (1.5) sulla variabile di controllo, essi possono essere riscritti in modo compatto come segue:

$$\|\mathbf{S}_u \mathbf{u}\|_\infty \leq 1, \quad (1.28)$$

dove si è posto

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} S_\tau^u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{\tau+1}^u & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_{\tau+M-1}^u \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Sostituendo l'espressione di  $\mathbf{u}$  data in (1.15) si ottiene quindi

$$\|\mathbf{S}_u(\Theta \mathbf{w} + \Gamma)\|_\infty \leq 1,$$

ed i problemi (1.6) e (1.7) diventano problemi di ottimizzazione vincolata finito-dimensionali:

$$\min_{\Theta, \Gamma} J(\Theta, \Gamma) \quad (1.30)$$

$$\text{soggetto a: } \|\mathbf{S}_u(\Theta \mathbf{w} + \Gamma)\|_\infty \leq 1, \quad \forall \mathbf{w}$$

$$\min_{\Theta, \Gamma} J(\Theta, \Gamma) \quad (1.31)$$

$$\text{soggetto a: } \mathbb{P}\left(\|\mathbf{S}_u(\Theta \mathbf{w} + \Gamma)\|_\infty \leq 1\right) \geq 1 - \epsilon.$$

Se si considerano anche vincoli sulla variabile di stato nella forma (1.8), essi possono essere riscritti in modo compatto, come già fatto per i vincoli sulla variabile di controllo, come segue:

$$\|\mathbf{S}_x \mathbf{x}\|_\infty \leq 1, \quad (1.32)$$

dove si è posto

$$\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{\tau+1}^x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_{\tau+M}^x \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Sostituendo l'espressione di  $\mathbf{x}$  data in (1.13) e tenendo presente la politica di generazione della variabile di controllo in (1.15) si ottiene

$$\|\mathbf{S}_x(\mathbf{F}x_\tau + \mathbf{G}(\Theta\mathbf{w} + \Gamma) + \mathbf{H}\mathbf{w})\|_\infty \leq 1. \quad (1.34)$$

I problemi (1.9) e (1.10) diventano problemi di ottimizzazione vincolata finito-dimensionali:

$$\begin{aligned} & \min_{\Theta, \Gamma} J(\Theta, \Gamma) & (1.35) \\ \text{soggetto a: } & \begin{cases} \|\mathbf{S}_u(\Theta\mathbf{w} + \Gamma)\|_\infty \leq 1 \\ \|\mathbf{S}_x\mathbf{x}(\mathbf{w})\|_\infty \leq 1 \end{cases} \quad \forall \mathbf{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min_{\Theta, \Gamma} J(\Theta, \Gamma) & (1.36) \\ \text{soggetto a: } & \mathbb{P}\left(\|\mathbf{S}_u(\Theta\mathbf{w} + \Gamma)\|_\infty \leq 1 \wedge \|\mathbf{S}_x\mathbf{x}(\mathbf{w})\|_\infty \leq 1\right) \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

### 1.3 Obiettivi della tesi

Nonostante la loro indubbia rilevanza da un punto di vista concettuale, i problemi formulati nella sezione precedente, sia quelli di tipo robusto sia quelli di tipo chance-constrained, risultano di difficile risoluzione e difficilmente trattabili a livello computazionale. Più precisamente, il problema robusto con vincoli solo sulla variabile di controllo (1.30) risulta convesso, ma con un numero infinito di vincoli: problemi in cui vi sono un numero finito di variabili di ottimizzazione e un numero infinito di vincoli sono chiamati semi-infiniti ed è noto che, nonostante la forma dei vincoli sia convessa, risultano molto difficili da risolvere [4], [3]. Non si vogliono imporre ipotesi sul supporto del disturbo che quindi può essere, in generale, anche non limitato, situazione che può comportare ulteriori difficoltà: nel caso il disturbo sia illimitato una soluzione consiste nel porre l'azione di controllo sempre nulla, imponendo i coefficienti  $\theta_{i,j}$  nulli, ma questa soluzione risulta estremamente conservativa e inutile ai fini pratici. Il corrispondente problema di tipo chance-constrained (1.31) in cui ancora sono considerati

vincoli solo sulla variabile di controllo può eliminare la conservatività rispetto all'approccio robusto, tuttavia risulta molto difficile capire quale sia la probabilità  $\epsilon$  di violazione dei vincoli più opportuna da imporre. Infatti non è sufficiente considerare solamente la distribuzione di probabilità del disturbo, ma bisognerebbe tenere conto anche di come il disturbo si combina con la dinamica del sistema così che la valutazione diventa difficoltosa. Anche i problemi chance-constrained sono difficili da risolvere: si pensi che nonostante i vincoli sotto il segno di probabilità siano convessi il problema chance-constrained in generale non lo è ed è stato dimostrato che risulta NP-hard [15], [14]. Per questo tipo di problema sono note in letteratura possibili soluzioni che, però, richiedono specifiche ipotesi sul disturbo, ad esempio è richiesto che esso sia gaussiano [9].

I problemi in cui si considerano vincoli sullo stato (1.35) e (1.36) presentano ulteriori difficoltà: infatti è facile rendersi conto che in presenza di un disturbo a supporto non limitato additivo sullo stato e di un'azione di controllo anch'essa vincolata non sia possibile mantenere lo stato limitato in una data regione; per questo il problema potrebbe risultare unfeasible e quindi essere di fatto mal posto. Si pensi che l'azione di controllo può arrivare a compensare il disturbo che agisce sullo stato sempre con almeno un istante di tempo di ritardo, così che il disturbo illimitato non è immediatamente compensato e quindi almeno in un istante di tempo lo stato potrebbe uscire dalla regione entro cui lo si vuole confinare. Inoltre altre limitazioni sono dovute al fatto che la variabile di controllo è anch'essa vincolata e quindi in generale non è detto che riesca a contrastare il disturbo in modo sufficientemente efficace per confinare lo stato in una data regione. Si noti che anche nel caso si imponessero vincoli di tipo soft valgono le stesse considerazioni e il problema potrebbe risultare unfeasible: sebbene sia possibile la violazione dei vincoli non è detto che si sia possibile limitare lo stato e la variabile di controllo con la probabilità richiesta.

A fronte di queste problematiche questa tesi si focalizza su problemi di controllo su orizzonte finito con vincoli in ambito stocastico e ha l'obiettivo di

proporre tecniche risolutive computazionalmente efficienti per risolvere in modo approssimato i problemi robusto e chance-constrained introdotti nella sezione precedente. Vengono inoltre proposte alcune riformulazioni dei problemi per ridurre il conservativismo di certe soluzioni e per eliminare i problemi di feasibility che i due approcci comportano.

Più precisamente:

- nel Capitolo 2 si considerano problemi in cui sono presenti solo i vincoli sulla variabile di controllo.
  - Dapprima viene analizzata una tecnica mediante la quale è possibile calcolare in modo efficiente una soluzione che rispetta i vincoli in modo robusto in presenza di un supporto del disturbo anche non limitato e che non sia eccessivamente conservativa.
  - In seguito viene proposto un nuovo metodo per la risoluzione di problemi chance-constrained basato sull'approccio a scenario, un metodo randomizzato che in questo elaborato viene applicato in maniera innovativa ai problemi di controllo presentati. L'approccio a scenario non richiede ipotesi di alcun tipo sulla distribuzione di probabilità dell'incertezza, ma solamente che la cifra di merito  $f(\theta)$  e le funzioni che definiscono i vincoli  $g(\theta, \delta)$  all'interno del segno di probabilità siano convesse. In questo caso l'approccio a scenario consente di trovare una soluzione attraverso la risoluzione di un problema convesso e quindi facilmente trattabile e di stabilire un forte legame tra la soluzione ottenuta e la soluzione del problema originario chance-constrained. È così possibile ottenere una soluzione con buone prestazioni e non eccessivamente conservativa, ma con un sforzo computazionale relativamente basso.
  - Un terzo metodo viene proposto nel quale si utilizzano le idee alla base dei due approcci precedenti cercando di sfruttare le potenzialità di ciascuno per ridurre la conservatività della soluzione e

superare parzialmente i punti deboli evidenziati dagli approcci precedenti.

- È stato effettuato uno studio estensivo di valutazione e di comparazione dei vari approcci proposti, individuando le influenze dei parametri sulla soluzione e i casi in cui si evidenziano differenze tra i metodi, attraverso esempi numerici.
- Nel Capitolo 3 viene preso in considerazione il problema in cui sono presenti vincoli anche sullo stato.
  - Dapprima è stata necessaria una riformulazione dell'espressione dei vincoli sullo stato in modo che il problema risultasse sempre feasible.
  - Sono proposte due diverse riformulazioni del problema, entrambe con vincoli in probabilità. In entrambi i casi si utilizza l'approccio a scenario per la risoluzione efficiente di tali problemi.
  - Uno studio estensivo è stato effettuato attraverso esempi numerici in cui si valuta l'influenza dei vari parametri che gestiscono i diversi obiettivi espressi nella cifra di merito e nei vincoli.
  - È stata effettuata un'analisi teorica dei due approcci proposti andando a valutare le rispettive proprietà e il legame presente tra di essi.
- Nel Capitolo 4 è sviluppato un esempio in cui le tecniche presentate sono applicate ad un sistema meccanico.
  - Dapprima si considera il problema di controllo su orizzonte finito sia con vincoli solamente sull'ingresso sia con vincoli su ingresso e stato. Viene mostrato il confronto tra i vari metodi e come attraverso i vincoli sullo stato sia possibile tenere conto di diverse esigenze presenti nell'applicazione.
  - Successivamente, a titolo di esempio, si è applicata la tecnica receding horizon per estendere l'orizzonte di controllo e valutare, sep-

pur solamente in alcune simulazioni, l'impatto delle metodologie proposte in questo tipo di schema di controllo.

## Capitolo 2

# Controllo con vincoli solo sulla variabile di controllo

### 2.1 Introduzione

In questo capitolo si considera il problema di controllo descritto nel Capitolo 1, in cui si vuole minimizzare una cifra di merito quadratica su orizzonte finito per un sistema lineare stocastico soggetto ad un disturbo additivo con supporto non limitato che agisce sullo stato, in presenza di vincoli sulla variabile di controllo. Sono presentati tre diversi metodi attraverso i quali è possibile risolvere il problema rendendolo computazionalmente trattabile; a seconda del metodo utilizzato i vincoli possono essere rispettati in modo robusto (vincoli hard) o con una data probabilità (vincoli soft). Tutti e tre i metodi progettano i parametri di una legge di controllo in retroazione sul disturbo ricostruito sulla base dello stato supposto perfettamente misurabile. I tre metodi e le possibili scelte dei parametri coinvolti sono messi a confronto con l'obiettivo di valutarne le diverse prestazioni.

## 2.2 Vincoli garantiti in modo robusto: soluzione mediante saturazione del disturbo

L'approccio descritto in questa sezione è stato originariamente proposto in [11] e consente di risolvere problemi di tipo robusto in cui i vincoli sulla variabile di controllo sono rispettati in modo hard, senza richiedere l'ipotesi che il supporto del disturbo sia limitato.

L'idea alla base di questo approccio è quella di introdurre una funzione di saturazione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [-\bar{\varphi}, \bar{\varphi}]$  e applicarla alle singole componenti del disturbo  $w_t$  agente sul sistema, prima di retroazionarlo. L'espressione risultante per la legge di controllo è:

$$\mathbf{u} = \Theta\varphi(\mathbf{w}) + \Gamma, \quad (2.1)$$

dove con la scrittura  $\varphi(\mathbf{w})$  si intende la funzione  $\varphi(\cdot)$  applicata alle singole componenti scalari di  $\mathbf{w}$ . Una possibile scelta per la funzione di saturazione è la seguente:

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} -\bar{\varphi}, & \alpha \leq -\bar{\varphi} \\ \alpha, & -\bar{\varphi} < \alpha < \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi}, & \alpha \geq \bar{\varphi} \end{cases} . \quad (2.2)$$

Il fatto di ottenere con l'introduzione della funzione  $\varphi(\cdot)$  una politica non lineare nel disturbo fa sì che l'equivalenza tra politica in feedback sullo stato e politica in feedback sul disturbo non sia più valida. Si noti comunque che in presenza di vincoli una politica di feedback lineare non risulta ottima [2]. Grazie alla saturazione introdotta è possibile rispettare i vincoli sulla variabile di controllo in modo hard poiché i valori del disturbo considerati nell'azione in feedback sono limitati da  $\pm\bar{\varphi}$ , anche se il disturbo ha supporto non limitato. Il vincolo hard (1.28) diventa:

$$\|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}(\Theta\varphi(\mathbf{w}) + \Gamma)\|_{\infty} \leq 1,$$

e può essere tradotto in una condizione (seppur conservativa) sui parametri di progetto  $\Theta$  e  $\Gamma$ . Ad esempio nel caso in cui  $\mathbf{S}_{\mathbf{u}} = U_M^{-1}I_{mM}$ , cioè quando si vuole imporre che ogni componente del vettore  $\mathbf{u}$  sia inferiore in modulo



a  $U_M$ , si può utilizzare la condizione

$$\begin{cases} -U_M \leq \gamma_j + \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M \\ -U_M \leq \gamma_j - \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, mM,$$

in cui  $\Theta_j$  indica la  $j$ -esima riga della matrice  $\Theta$  e  $\gamma_j$  il termine di  $\Gamma$  corrispondente, mentre  $\|\Theta_j\|_1$  è la norma 1 (somma dei moduli) del vettore  $\Theta_j$ . In questo modo si tiene conto dei casi pessimi in cui l'azione di controllo assume il modulo massimo, indipendentemente dai segni dei coefficienti contenuti nella matrice  $\Theta$  e nel vettore  $\Gamma$ . Il caso pessimo si verifica effettivamente solo per particolari realizzazioni del disturbo, quelle in cui si ha modulo sempre maggiore di  $\bar{\varphi}$  e segni opportuni. La struttura proposta per i vincoli consente di selezionare il caso pessimo senza necessità di considerare nei vincoli tutte le possibili combinazioni di segno dei coefficienti in ognuna delle righe di  $\Theta$ : questo porterebbe ad un numero di vincoli esponenziale ed ad un problema che risulta computazionalmente intrattabile in quanto il numero di vincoli risulterebbe troppo elevato.

Per quanto riguarda la cifra di merito da ottimizzare, la sua espressione in funzione di  $\Theta$  e  $\Gamma$  può essere ricavata con passaggi analoghi a quelli del Capitolo 1 e ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) = & x_\tau^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} x_\tau + 2x_\tau^T \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} \Gamma + \Gamma^T (\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} + \mathbf{R}) \Gamma \quad (2.3) \\ & + \text{tr}(2\mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{G} \Theta L_{\varphi w}) + \text{tr}(\Theta^T (\mathbf{G}^T \mathbf{Q} \mathbf{R} + \mathbf{R}) \Theta L_{\varphi \varphi}) \\ & + \text{tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{Q} \mathbf{H} L_{ww}) \end{aligned}$$

in cui le matrici

$$L_{ww} = \mathbb{E}[\mathbf{w} \mathbf{w}^T] \quad L_{\varphi w} = \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{w}) \mathbf{w}^T] \quad L_{\varphi \varphi} = \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{w}) \varphi(\mathbf{w})^T] \quad (2.4)$$

possono essere calcolate in modo campionario effettuando una serie di estrazioni di realizzazioni in accordo alla probabilità del disturbo e sostituendo all'operatore di valore atteso la media campionaria  $\frac{1}{N} \sum$ .

Si ottiene ancora una cifra di merito quadratica in  $\Theta$  e  $\Gamma$  ed un problema di

ottimizzazione convessa da risolvere:

$$\begin{aligned} & \min_{\Theta, \Gamma} J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) & (2.5) \\ & \text{soggetto a : } \begin{cases} -U_M \leq \gamma_j + \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M \\ -U_M \leq \gamma_j - \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M \end{cases}, & j = 1, 2, \dots, Mm. \end{aligned}$$

Questo metodo garantisce il rispetto dei vincoli sull'azione di controllo in modo hard, ma la soluzione risulta spesso troppo conservativa a discapito delle prestazioni. È necessario utilizzare valori per la matrice  $\Theta$  ed il vettore  $\Gamma$  prudenti per tutelarsi nel caso pessimo considerato. La probabilità di avere effettivamente una realizzazione del disturbo pessima è generalmente poco elevata così che la soluzione risulta spesso eccessivamente conservativa. Vi sono, tuttavia, casi particolari in cui ciò non accade: ad esempio se si sceglie un  $\bar{\varphi}$  piccolo o in presenza di particolari strutture della matrice  $\Theta$ . Un problema che emerge riguarda la scelta della funzione  $\varphi(\cdot)$  e soprattutto del limite di saturazione  $\bar{\varphi}$  che deve essere coerente rispetto alla distribuzione del disturbo, ai vincoli che si vogliono imporre sull'azione di controllo e alla struttura del sistema stesso.

### 2.2.1 Scelta di $\bar{\varphi}$ per l'approccio robusto

Nel caso si decida di utilizzare un metodo che prevede la presenza di una funzione di saturazione del disturbo  $\varphi(\mathbf{w})$  uno dei problemi che si pone è quello di definire questa funzione. In questa tesi si sceglie sempre di utilizzare la seguente funzione di saturazione del disturbo:

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} -\bar{\varphi}, & \alpha \leq -\bar{\varphi} \\ \alpha, & -\bar{\varphi} < \alpha < \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi}, & \alpha \geq \bar{\varphi} \end{cases} \quad (2.6)$$

applicandola a tutte le componenti del vettore  $\mathbf{w}$ . Un'altra possibilità è quella di utilizzare anche altre funzioni che diano la saturazione dei valori del disturbo, ma che allo stesso tempo siano biunivoche, come ad esempio la funzione  $\arctan(\cdot)$ . Un problema che si pone nel caso di sistemi non scalari

è la possibilità di definire la funzione  $\varphi(\cdot)$  in modo diverso per ogni componente del disturbo o in modo diverso a seconda della componente della variabile di controllo che contribuisce a generare. Questa differenziazione della funzione  $\varphi(\cdot)$ , seppur possa risultare utile soprattutto nel caso in cui i limiti sulle componenti dell'azione di controllo siano diversi tra loro, nel seguito non appare mai necessaria e non viene mai adottata, preferendo non andare ad aggiungere ulteriore complessità e ulteriori parametri ai problemi considerati.

È invece stata oggetto di specifiche analisi la scelta del valore di saturazione  $\bar{\varphi}$  il quale sembra essere il parametro che può maggiormente andare a incidere sulle prestazioni. Sicuramente il valore ottimo per  $\bar{\varphi}$  deve essere in qualche modo dipendente dai parametri del sistema, dai vincoli imposti sull'azione di controllo e dalla distribuzione di probabilità del disturbo. Una possibile scelta, nel caso il disturbo sia gaussiano, per il valore per  $\bar{\varphi}$  è quella di porlo uguale a  $k\sigma$  con  $k = 1, 2, 3$ , scelto anche in accordo a quanto stringenti risultino i vincoli, come viene fatto nelle prove della Sezione 2.4. In un caso semplificato, tuttavia, si è andati a ricavare il valore di  $\bar{\varphi}$  ottimo in modo analitico: il risultato ottenuto vale solamente sotto ipotesi piuttosto limitanti e non è di validità generale; risulta comunque interessante e può essere usato come punto di riferimento iniziale per casi più complessi in cui la scelta di  $\bar{\varphi}$  viene fatta in modo euristico.

Nel caso in cui si consideri un sistema scalare del tipo  $x(t+1) = ax(t) + bu(t) + b_w w(t)$ , con stato iniziale nullo, una cifra di merito in cui il peso sull'azione di controllo è nullo e un orizzonte di predizione  $M = 1$  si è ricavata l'espressione per i valori di  $\theta$  e di  $\bar{\varphi}$  ottimi in presenza di vincoli; la legge di controllo nel caso scalare con stato iniziale nullo risulta  $u_\tau = \gamma_\tau = 0$ ,  $u_{\tau+1} = \theta w_\tau$ . I passaggi necessari a ricavare questo risultato e una sua possibile estensione ad orizzonti di predizione più estesi sono riportati nell'appendice di questo capitolo. Considerato che il vettore  $\Gamma$  risulta sempre nullo dato lo stato iniziale nullo, si è potuto verificare che in assenza di

vincoli il valore ottimo di  $\theta$  è:

$$\theta = -\frac{ab_w}{b} \frac{L_{\varphi w}}{L_{\varphi\varphi}} \quad (2.7)$$

dove

$$L_{\varphi w} = \mathbb{E}[\varphi(w)w] \quad L_{\varphi\varphi} = \mathbb{E}[\varphi(w)^2]. \quad (2.8)$$

Si noti che in questo caso il risultato suggerisce, come ci si può aspettare, di non utilizzare la saturazione o comunque utilizzare un  $\bar{\varphi}$  più elevato possibile, avvicinandosi al risultato del controllo a minima varianza  $\theta = -\frac{ab_w}{b}$ . Nel caso in cui siano presenti vincoli, invece, il valore ottimo di  $\bar{\varphi}$  è:

$$\bar{\varphi}^* = U_M \left| \frac{b}{ab_w} \right|, \quad (2.9)$$

a cui corrisponde il valore di  $\theta$ :

$$\theta = -\frac{ab_w}{b}. \quad (2.10)$$

Questo risultato mette in evidenza come, in questo caso semplificato, il valore ottimo  $\bar{\varphi}^*$  non dipende dalla distribuzione di probabilità del disturbo, ma solamente dal sistema e dal valore  $U_M$  con il quale si vuole limitare la variabile di controllo. In particolare l'ottimo corrisponde a quel valore di  $\bar{\varphi}$  per cui i valori del disturbo che possono essere perfettamente compensati con l'azione di controllo a disposizione non vengono saturati, mentre i valori del disturbo non compensabili perfettamente rispettando i vincoli vengono invece saturati.

Nonostante le ipotesi sotto cui viene ricavato il risultato siano molto stringenti e limitino la sua validità a pochi semplici casi, quanto ottenuto fornisce elementi per una scelta più avveduta di  $\bar{\varphi}$  anche per casi maggiormente complessi; in particolare, suggerisce di effettuare una scelta di  $\bar{\varphi}$  in accordo soprattutto alle possibilità effettive di compensazione del disturbo da parte dell'azione di controllo, dando minore importanza alla distribuzione di probabilità del disturbo. La scelta deve essere poi affinata anche con metodi basati sull'esperienza fornita dalla valutazione delle prestazioni in prove

specifiche su sistemi più complessi, come è stato fatto nella Sezione 2.4.2. Le indicazioni ottenute dalle prove risultano in linea e coerenti con quanto viene suggerito nei casi più semplici per la scelta migliore di  $\bar{\varphi}$ .

## 2.3 Vincoli garantiti in probabilità: soluzione mediante l'approccio a scenario

In questo approccio si affronta un problema di tipo chance-constrained (1.31) in cui i vincoli sulla variabile di controllo sono imposti in probabilità, come descritto nel Capitolo 1, risolvendolo attraverso l'utilizzo della tecnica a scenario.

### 2.3.1 La tecnica dello scenario

L'approccio a scenario è una nuova tecnologia che è stata sviluppata per risolvere problemi convessi con un numero infinito di vincoli o problemi di tipo chance-constrained, classi di problemi in cui ci si imbatte spesso quando si vogliono trattare problemi che comprendono dell'incertezza; tale tecnica si basa sull'estrazione di un numero limitato di vincoli. In generale, come visto nell'introduzione, il problema di tipo chance-constrained può essere scritto nella forma:

$$\begin{aligned} \min_{\theta} f(\theta) & \qquad \qquad \qquad (2.11) \\ \text{soggetto a : } \mathbb{P}(g(\theta, \delta) \leq 0) & \geq 1 - \epsilon \end{aligned}$$

in cui la cifra di merito  $f(\theta)$  e la funzione che definisce i vincoli  $g(\theta, \delta)$  sono convesse rispetto a  $\theta$ ,  $\forall \delta \in \Delta$ . L'approccio a scenario presuppone una descrizione probabilistica dell'incertezza che deve essere caratterizzata da un supporto  $\Delta$  anche non limitato e da una distribuzione di probabilità definita su  $\Delta$  che può essere interpretata come la probabilità che le diverse istanze dell'incertezza si verifichino. L'idea algoritmica alla base dell'approccio a scenario è piuttosto semplice: dal momento che non è possibile considerare tutte le realizzazioni di  $\delta \in \Delta$ , si decide di considerare solo un campione

finito di esse, estraendo  $N$  realizzazioni indipendenti  $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(N)}$  dell'incertezza in accordo alla distribuzione di probabilità  $\mathbb{P}$ . Si considera poi il problema di ottimizzazione in cui sono presenti solo i vincoli corrispondenti alle realizzazioni dell'incertezza estratte:

$$\begin{aligned} \min_{\theta} f(\theta) & \quad (2.12) \\ \text{soggetto a : } g(\theta, \delta^{(i)}) \leq 0 & \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Il problema (2.12) risulta convesso e con un numero finito di vincoli, stante il fatto che  $f(\theta)$  e  $g(\theta, \delta)$  siano convesse  $\forall \delta \in \Delta$ . Questo tipo di problemi, purché  $N$  e quindi il numero di vincoli non sia eccessivo, può essere facilmente risolto con risolutori standard, ad esempio Sedumi [16] utilizzato tramite YALMIP [13]. Dato che nel problema (2.12) si sono considerati un numero limitato di vincoli è necessario tuttavia andare a stabilire quale sia il legame della soluzione trovata estraendo solo alcune realizzazioni dell'incertezza, rispetto alla soluzione del problema chance-constrained in cui tutte le realizzazioni sono considerate. Il teorema seguente fornisce delle garanzie sul legame tra le due soluzioni e costituisce il fondamento teorico dell'approccio a scenario.

**Teorema 1** *Sia  $\epsilon \in (0, 1)$  un parametro di violazione e  $\beta \in (0, 1)$  un parametro di confidenza. Se la relazione:*

$$\sum_{i=0}^d \binom{N}{i} \epsilon^i (1 - \epsilon)^{N-i} \leq \beta, \quad (2.13)$$

*in cui  $d$  è il numero di variabili di ottimizzazione, è rispettata, allora, con probabilità non minore di  $1 - \beta$  la soluzione del problema (2.12) in cui si considerano solamente  $N$  realizzazioni dell'incertezza rispetta tutti i vincoli ottenuti al variare di  $\delta$  in  $\Delta$  tranne al più una frazione di probabilità  $\epsilon$  di essi.*

Per una dimostrazione del problema si veda [7] [8].

La relazione (2.13) può essere resa esplicita rispetto ad  $N$ . In particolare si può mostrare che se

$$N \geq \frac{1}{\epsilon} \left( d + 1 + \ln \frac{1}{\beta} + \sqrt{2(d+1) \ln \frac{1}{\beta}} \right) \quad (2.14)$$

allora anche la relazione (2.13) è verificata. In questo modo scelti  $\epsilon$  e  $\beta$ , è possibile trovare il numero di estrazioni per soddisfare le ipotesi del teorema. Il parametro  $\epsilon$  rappresenta la probabilità di violazione dei vincoli da parte della soluzione trovata risolvendo il problema (2.12) e può essere visto come il parametro che regola la robustezza della soluzione. Affinché sia possibile avere garanzie sulla violazione dei vincoli in  $\Delta$  da parte della soluzione basata su un numero finito di istanze dell'incertezza ottenuta risolvendo il problema (2.12), è necessario, però, che le estrazioni dell'incertezza considerate siano sufficientemente rappresentative dell'intero ammontare delle istanze dell'incertezza in  $\Delta$ . Questa rappresentatività, tuttavia, non è sempre garantita. Si pensi, ad esempio, al caso in cui si estragga sempre la stessa realizzazione  $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = \dots = \delta^{(N)}$ . La probabilità di avere una estrazione non rappresentativa è regolata dal parametro  $\beta$ . Nonostante questo abbia una forte importanza teorica, da un punto di vista pratico la sua rilevanza è piuttosto limitata. Dalla (2.14) infatti si può notare che esso influisce su  $N$  attraverso la funzione logaritmo. Il valore di  $\beta$  può essere scelto estremamente ridotto, anche  $10^{-10}$  aumentando solo di poco  $N$ . Ponendo  $\beta = 10^{-10}$  si ha che la probabilità di estrarre un set non rappresentativo sia praticamente nulla. Nel complesso si ottiene che la soluzione rispetta i vincoli con probabilità maggiore o uguale a  $1 - \epsilon$ , al di là di ogni ragionevole dubbio, in quanto questo accade se il set di realizzazioni  $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(N)}$  dell'incertezza estratte è buono e ciò si verifica con probabilità maggiore o uguale di  $1 - \beta$ . Si noti che entrambi i parametri possono essere scelti arbitrariamente e quindi il grado di robustezza della soluzione può essere controllato e che l'unica ipotesi richiesta è quella di convessità. La soluzione ottenuta può essere collegata sia ad un problema robusto per il quale, però, si decide di accettare un certo livello di violazione dei vincoli, sia in modo più immediato ad un problema di tipo chance-constrained.

### 2.3.2 Politica affine nel disturbo

Nel Capitolo 1 è stato considerato un problema dove la variabile di controllo viene generata attraverso una funzione affine del disturbo in cui è presente una componente in retroazione sommata ad una componente in anello aperto:

$$\mathbf{u} = \Theta \mathbf{w} + \Gamma$$

e i vincoli vengono posti in probabilità mediante il problema chance-constrained seguente:

$$\min_{\Theta, \Gamma} J(\Theta, \Gamma) \quad (2.15)$$

$$\text{soggetto a : } \mathbb{P}(\|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}(\Theta \mathbf{w} + \Gamma)\|_{\infty} \leq 1) \geq 1 - \epsilon$$

dove  $J(\Theta, \Gamma)$  è la solita cifra di merito quadratica data in (1.27). Il problema (2.15) risulta del tipo descritto in (2.11): all'incertezza  $\delta$  corrisponde il disturbo stocastico  $\mathbf{w}$  e alle variabili di ottimizzazione  $\theta$  corrispondono le variabili contenute in  $\Theta$  e  $\Gamma$ . Nonostante  $J(\Theta, \Gamma)$  e  $\|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}(\Theta \mathbf{w} + \Gamma)\|_{\infty} \leq 1$  siano convessi in  $(\Theta, \Gamma)$ , il problema di ottimizzazione (2.15) risulta non convesso per la presenza del vincolo in probabilità. Per risolvere tale problema si può applicare la tecnica dello scenario presentata nella sezione precedente. Per fare questo è necessario calcolare il numero di realizzazioni del disturbo  $\mathbf{w}$  da estrarre in accordo alla formula:

$$N \geq \frac{1}{\epsilon} \left( d + 1 + \ln \frac{1}{\beta} + \sqrt{2(d+1) \ln \frac{1}{\beta}} \right) \quad (2.16)$$

dove  $d$  indica il numero delle variabili di ottimizzazione ed effettuare le estrazioni  $\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \dots, \mathbf{w}^{(N)}$  in accordo alla distribuzione di probabilità  $\mathbb{P}$  del disturbo. Si noti che in virtù della definizione di  $\mathbf{w}$  questo equivale ad estrarre  $N$  realizzazioni di lunghezza  $M$  del processo  $w_t$ . Quindi si risolve il problema in cui si considerano solamente i vincoli in corrispondenza delle  $N$  realizzazioni del disturbo estratte  $\mathbf{w}^{(i)}$ :

$$\min_{\Theta, \Gamma} J(\Theta, \Gamma) \quad (2.17)$$

$$\text{soggetto a : } \|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}(\Theta \mathbf{w}^{(i)} + \Gamma)\|_{\infty} \leq 1 \quad i = 1 \dots N.$$



Questo problema risulta convesso e con un numero finito di vincoli e può essere risolto mediante risolutori numerici standard. L'applicazione di tale metodo inoltre non richiede l'ipotesi che il supporto del disturbo sia limitato e non richiede alcuna ipotesi sulla sua distribuzione di probabilità, se non quella di essere in grado di estrarre i  $\mathbf{w}^{(i)}$  in accordo a  $\mathbb{P}$ .

Il problema a scenario (2.17) risulta convesso, con un numero finito di vincoli e quindi computazionalmente trattabile. Grazie alla teoria dello scenario è possibile mettere in relazione la soluzione  $(\Theta^*, \Gamma^*)$  così ottenuta con la soluzione del problema chance-constrained originario e avere garanzie rigorose sul legame tra di esse. Più precisamente si ha che

$$\mathbb{P}(\|S_u(\Theta^* \mathbf{w} + \Gamma^*)\|_\infty \leq 1) \geq 1 - \epsilon,$$

con probabilità maggiore o uguale ad  $1 - \beta$ . La soluzione risulta feasible per il problema chance-constrained di livello  $\epsilon$ .

Per  $\epsilon$  piccolo, prossimo a 0, si può approssimare la soluzione robusta, con alta confidenza  $1 - \beta$ . Tuttavia anche nel caso robusto se il disturbo è illimitato, la soluzione ottenuta porta ad annullare il contributo in retroazione ottenendo un valore per  $\Theta$  prossimo a zero. È inoltre necessario tenere presente che  $\epsilon$  piccoli comportano un aggravio computazionale che può diventare notevole: il numero di estrazioni necessario per avere le garanzie sulla soluzione, infatti, aumenta sensibilmente al diminuire di  $\epsilon$  e con esso il numero di vincoli e lo sforzo computazionale necessario. Come già discusso, il numero di estrazioni, invece, è meno sensibile rispetto a  $\beta$  che può raggiungere valori estremamente ridotti senza che vi sia un forte aggravio computazionale, così che la soluzione del problema a scenario risulti feasible per il problema chance-constrained con una probabilità molto prossima a 1. Da notare che quando  $\epsilon$  viene scelto sensibilmente diverso da 0 ( $\epsilon = 0.05$  o  $\epsilon = 0.1$ ), se tra le realizzazioni del disturbo estratte è presente anche un solo valore che sia critico per il rispetto dei vincoli si è costretti per soddisfare i vincoli ad utilizzare dei valori dei coefficienti nella matrice  $\Theta$  eccessivamente prudenti, al limite tutti nulli e la compensazione del disturbo risulta

peggiore anche per tutte le altre realizzazioni possibili. La soluzione trovata utilizzando l'approccio a scenario infatti è solamente feasible per il problema chance-constrained e potrebbe risultare in questo caso eccessivamente conservativa, andando a compromettere le prestazioni. Per ovviare a questo problema si può utilizzare il metodo a scenario in [6] che però comporta un aggravio del peso computazionale eccessivo per i problemi di controllo considerati. In alternativa, si propone qui di seguito un altro approccio.

### 2.3.3 Politica affine nel disturbo saturato

In questa sezione viene presentato un approccio in cui si combinano le proprietà dei due approcci delle sezioni precedenti, quello robusto della Sezione 2.2 e quello a scenario della Sezione 2.3.2. Dal primo viene ripresa la generazione della variabile di controllo mediante una funzione affine del disturbo saturato secondo l'equazione (2.1); come nella sezione precedente, però, il problema è formulato con vincoli in probabilità e risolto mediante l'approccio a scenario. Il problema chance-constrained risultante è:

$$\begin{aligned} \min_{\theta} J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) & \quad (2.18) \\ \text{soggetto a : } \mathbb{P}(\|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}(\Theta\varphi(\mathbf{w}) + \Gamma)\|_{\infty} \leq 1) & \geq 1 - \epsilon \end{aligned}$$

dove  $J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma)$  è data dall'equazione (2.3).

Per ottenere una soluzione si utilizza la tecnica dello scenario: si effettuano, quindi, le estrazioni in numero tale da rispettare la (2.16) e si vanno a considerare solamente i vincoli in corrispondenza di ognuna delle realizzazioni estratte  $\mathbf{w}^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} \min_{\theta} J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) & \quad (2.19) \\ \text{soggetto a } \|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}(\Theta\varphi(\mathbf{w}^{(i)}) + \Gamma)\|_{\infty} & \leq 1 \quad i = 1 \dots N. \end{aligned}$$

Con questo metodo la soluzione trovata risolvendo il problema a scenario (2.19) può essere messa in relazione con la soluzione del problema chance-constrained (2.18) con le stesse garanzie (la soluzione risulta feasible per il

problema chance-constrained con confidenza non inferiore a  $1 - \beta$ ) presentate nel caso di risoluzione del problema a scenario senza la presenza della funzione  $\varphi(\cdot)$  (Sezione 2.3.2). In questo senso la soluzione si presenta ancora come un compromesso tra sicurezza e prestazioni, con i vincoli che sono rispettati solamente con probabilità maggiore o uguale a  $1 - \epsilon$ .

Per  $\epsilon$  piccolo, la soluzione approssima quella del problema robusto della Sezione 2.2 e quindi presenta una conservatività ridotta rispetto alla soluzione approssimata dal metodo della Sezione 2.3.2, nella quale si tendeva a ridurre i coefficienti della matrice  $\Theta$  fino ad annullare l'azione di controllo; questo non accade se si utilizza una funzione di saturazione del disturbo e si genera l'azione di controllo come funzione affine del disturbo saturato. Inoltre, in generale, con questo metodo si evita la conservatività del metodo robusto della Sezione 2.2 poiché tra le realizzazioni estratte per costruire i vincoli non è detto che vi sia il caso pessimo considerato nel metodo robusto, specie quando questo è poco probabile. Rispetto alla soluzione a scenario senza saturazione del disturbo, con l'accorgimento adottato è possibile risentire meno della componente aleatoria dovuta alle estrazioni: infatti nel caso in cui si estragga un valore del disturbo particolarmente elevato in modulo, questo viene saturato al valore  $\bar{\varphi}$  e non si è costretti ad utilizzare nella matrice  $\Theta$  coefficienti eccessivamente piccoli e prudenti.

Come per l'approccio robusto in Sezione 2.2, il valore di  $\bar{\varphi}$  va scelto in modo opportuno: in presenza di  $\bar{\varphi}$  piccoli o di strutture particolari della matrice  $\Theta$  le estrazioni pessime potrebbero non avere una probabilità estremamente ridotta. In questo caso, quindi, i vincoli ottenuti dalle estrazioni risultano simili a quelli considerati nel metodo robusto e le soluzioni ottenute tendono a diventare equivalenti.

Se si considera un  $\bar{\varphi}$  tale per cui i vincoli considerati nell'approccio robusto sono estratti con probabilità maggiore di  $\epsilon$ , l'utilizzo dell'approccio proposto porta ad una soluzione coincidente con quella dell'approccio robusto.

In conclusione, questo approccio sembra essere quello con potenzialità maggiori per una buona gestione del trade-off tra prestazioni e rispetto dei

vincoli, ma per essere sfruttato al meglio richiede che i suoi parametri in particolare la struttura di  $\Theta$  e il valore  $\bar{\varphi}$  siano ben tarati.

## 2.4 Confronto tra i metodi mediante esempi numerici

In questa sezione si riportano i risultati di prove effettuate su sistemi di primo e secondo ordine utilizzando i metodi descritti nelle Sezioni 2.2, 2.3.2 e 2.3.3. Nelle prove si utilizzano diverse parametrizzazioni per la matrice  $\Theta$  (si veda la Sezione 1.2.2), diversi valori del limite  $U_M$  per l'azione di controllo e diversi valori della saturazione  $\bar{\varphi}$  per il disturbo in retroazione. L'obiettivo è quello di valutare l'influenza dei parametri sulle prestazioni, in modo da stabilire quali siano le configurazioni più opportune da utilizzare e di confrontare tra di loro i metodi. Nel caso di sistema del primo ordine, la semplicità del sistema permette una più facile ed immediata comprensione dei risultati, anche se rischia di non mettere sufficientemente in evidenza alcune differenze tra le prestazioni dei diversi approcci. Per ovviare a questo inconveniente è stato considerato anche il caso di sistemi del secondo ordine.

Nel presentare i risultati delle prove, per semplicità di notazione si indicheranno le parametrizzazioni della matrice  $\Theta$  con una lettera, 'P' per la parametrizzazione in cui le sottodiagonali sono costituite da elementi diversi e 'B' nel caso di struttura a bande, seguita da un numero che indica quante sottodiagonali vengono utilizzate. Tale numero assumerà quindi dei valori interi da 0, nel caso in cui non si utilizza la componente in feedback sul disturbo, ad  $M - 1$ , dove  $M$  è l'orizzonte di predizione considerato. Inoltre si adotteranno le seguenti sigle per indicare i metodi adottati: 'Ss' per l'approccio a scenario con politica affine nel disturbo saturato, 'Sp' per l'approccio a scenario con politica affine nel disturbo, e 'R' per l'approccio robusto.

### 2.4.1 Sistema scalare

Il sistema preso in considerazione è il seguente:

$$x_{t+1} = ax_t + bu_t + b_w w_t$$

con  $a = 0.9$ ,  $b = 0.5$ , e  $b_w = 1$ . Il disturbo  $w_t$  è un processo bianco gaussiano con media nulla e deviazione standard  $\sigma = 0.2$ . Le matrici  $Q_i$  e  $R_i$  nella cifra di merito (1.4) sono costanti e pari a  $Q_i = 1$ ,  $R_i = 0$ , ovvero si è deciso di non pesare l'azione di controllo ma solamente lo stato; l'orizzonte di predizione è  $M = 5$ . Negli approcci basati sulla tecnica a scenario sono stati utilizzati come parametro di violazione dei vincoli  $\epsilon = 0.025$  e come parametro di confidenza  $\beta = 10^{-10}$ .

#### Soluzione ottima in assenza di vincoli

In assenza di vincoli, la politica ottima si può esprimere in forma analitica ed è data da:

$$u_{\tau+i} = -\frac{a}{b}x_{\tau+i}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.20)$$

Questa è la legge di controllo ottima tra tutte le politiche (lineari e non lineari) di feedback sullo stato.

La dinamica in anello chiuso risultante è

$$x_{t+1} = w_t$$

e la cifra di merito  $J$  ottima assume l'espressione:

$$J = x_\tau^2 + Mb_w^2 E[w_\tau^2]. \quad (2.21)$$

La politica in retroazione sul disturbo equivalente a (2.20) è data da:

$$u_\tau = -\frac{a}{b}x_\tau \quad (2.22)$$

$$u_{\tau+i} = -\frac{ab_w}{b}w_{\tau+i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1.$$

Si ottiene quindi che il vettore  $\Gamma$  nell'espressione matriciale della legge di controllo affine nel disturbo (1.15) risulta con solamente la prima componente non nulla, mentre la matrice  $\Theta$  risulta con la sola prima sottodiagonale non nulla e tutta con lo stesso valore:

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{ab_w}{b} & 0 & & \\ 0 & -\frac{ab_w}{b} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & -\frac{ab_w}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -\frac{a}{b}x_\tau \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

### Parametrizzazioni di $\Theta$

Nelle prove si sono considerate 6 possibili parametrizzazioni della matrice  $\Theta$ :

1. P4: corrisponde alla parametrizzazione completa, ogni elemento della matrice  $\Theta$  è libero di variare indipendentemente e sono utilizzate tutte le 4 sottodiagonali.
2. P2: ogni elemento è libero di variare indipendentemente, ma sono utilizzate solamente le prime 2 sottodiagonali.
3. P1: ogni elemento è libero di variare indipendentemente, ma è utilizzata solamente la prima sottodiagonale.
4. B4: gli elementi sono vincolati ad essere uguali lungo le 4 sottodiagonali che sono tutte utilizzate.
5. B2: gli elementi sono vincolati ad essere uguali lungo le prime 2 sottodiagonali, le altre sono nulle.
6. B1: gli elementi sono vincolati ad essere uguali lungo la prima sottodiagonale, le altre sono nulle.

### Prima serie di prove

In questa serie di prove lo stato iniziale è nullo. Nei vincoli il limite consentito per la variabile di controllo è stato posto a due diversi valori:  $U_M = \frac{3}{2}\sigma = 0.30$  e  $U_M = \frac{3}{5}\sigma = 0.12$ .

Per gli approcci che utilizzano una politica di controllo affine nel disturbo saturato sono stati considerati 4 valori per  $\bar{\varphi}$  pari a  $k\sigma$ ,  $k = 1, 2, 3$ , e a  $\bar{\varphi}^* = \frac{U_M b}{ab_w}$  dove  $a = 0.9$ ,  $b = 0.5$  e  $b_w = 1$ . Quest'ultimo è il valore ottimo trovato nella Sezione 2.2.1.

Si riportano ora in forma tabulare i risultati ottenuti con l'approccio robusto della Sezione 2.2 (Tabella 2.1) e con gli approcci a scenario delle Sezioni 2.3.2 e 2.3.3 (Tabelle 2.2 e 2.3, rispettivamente).

Tabella 2.1: Prima serie di prove: risultati dell'approccio robusto.

$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$U_M$	$J_{\bar{\varphi}}$	$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$U_M$	$J_{\bar{\varphi}}$
P4	$3\sigma$	–	0.2002	P4	$\sigma$	–	0.2258
P4	$3\sigma$	0.30	0.304	P4	$\sigma$	0.30	0.2593
P2	$3\sigma$	0.30	0.34	P2	$\sigma$	0.30	0.2589
P1	$3\sigma$	0.30	0.34	P1	$\sigma$	0.30	0.2589
B4	$3\sigma$	0.30	0.34	B4	$\sigma$	0.30	0.259
B2	$3\sigma$	0.30	0.34	B2	$\sigma$	0.30	0.2591
B1	$3\sigma$	0.30	0.34	B1	$\sigma$	0.30	0.2592
P4	$3\sigma$	0.12	0.41	P4	$\sigma$	0.12	0.36
P2	$3\sigma$	0.12	0.41	P2	$\sigma$	0.12	0.36
P1	$3\sigma$	0.12	0.41	P1	$\sigma$	0.12	0.36
B4	$3\sigma$	0.12	0.41	B4	$\sigma$	0.12	0.36
B2	$3\sigma$	0.12	0.41	B2	$\sigma$	0.12	0.36
B1	$3\sigma$	0.12	0.41	B1	$\sigma$	0.12	0.36
P4	$2\sigma$	–	0.2029	P4	$\bar{\varphi}^*$	–	0.2343
P4	$2\sigma$	0.30	0.2978	P4	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2579
P2	$2\sigma$	0.30	0.2978	P2	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2579
P1	$2\sigma$	0.30	0.2978	P1	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2579
B4	$2\sigma$	0.30	0.2978	B4	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2579
B2	$2\sigma$	0.30	0.2978	B2	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2579
B1	$2\sigma$	0.30	0.2978	B1	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2579
P4	$2\sigma$	0.12	0.389	P4	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.35
P2	$2\sigma$	0.12	0.389	P2	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.35
P1	$2\sigma$	0.12	0.389	P1	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.35
B4	$2\sigma$	0.12	0.389	B4	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.35
B2	$2\sigma$	0.12	0.389	B2	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.35
B1	$2\sigma$	0.12	0.389	B1	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.35



Tabella 2.2: Prima serie di prove: risultati dell'approccio a scenario con politica affine nel disturbo.

$\Theta$	$U_M$	$J$
P4	–	0.2
P4	0.30	0.3230
P2	0.30	0.3375
P1	0.30	0.3558
B4	0.30	0.3372
B2	0.30	0.3441
B1	0.30	0.3588
P4	0.12	0.4057
P2	0.12	0.4091
P1	0.12	0.4196
B4	0.12	0.4092
B2	0.12	0.4134
B1	0.12	0.4238

Tabella 2.3: Prima serie di prove: risultati dell'approccio a scenario con politica affine nel disturbo saturato.

$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$U_M$	$J_{\bar{\varphi}}$	$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$U_M$	$J_{\bar{\varphi}}$
P4	$3\sigma$	-	0.2	P4	$\sigma$	-	0.2264
P4	$3\sigma$	0.30	0.3235	P4	$\sigma$	0.30	0.2593
P2	$3\sigma$	0.30	0.3248	P2	$\sigma$	0.30	0.2597
P1	$3\sigma$	0.30	0.3401	P1	$\sigma$	0.30	0.2587
B4	$3\sigma$	0.30	0.3313	B4	$\sigma$	0.30	0.2593
B2	$3\sigma$	0.30	0.3359	B2	$\sigma$	0.30	0.2592
B1	$3\sigma$	0.30	0.3400	B1	$\sigma$	0.30	0.2587
P4	$3\sigma$	0.12	0.4029	P4	$\sigma$	0.12	0.3604
P2	$3\sigma$	0.12	0.4050	P2	$\sigma$	0.12	0.3609
P1	$3\sigma$	0.12	0.4137	P1	$\sigma$	0.12	0.3599
B4	$3\sigma$	0.12	0.4069	B4	$\sigma$	0.12	0.3643
B2	$3\sigma$	0.12	0.4083	B2	$\sigma$	0.12	0.3610
B1	$3\sigma$	0.12	0.4104	B1	$\sigma$	0.12	0.3626
P4	$2\sigma$	-	0.2029	P4	$\bar{\varphi}^*$	-	0.2340
P4	$2\sigma$	0.30	0.2951	P4	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2574
P2	$2\sigma$	0.30	0.2966	P2	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2570
P1	$2\sigma$	0.30	0.2984	P1	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2582
B4	$2\sigma$	0.30	0.2974	B4	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2581
B2	$2\sigma$	0.30	0.2967	B2	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2583
B1	$2\sigma$	0.30	0.2983	B1	$\bar{\varphi}^*$	0.30	0.2574
P4	$2\sigma$	0.12	0.3885	P4	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.3538
P2	$2\sigma$	0.12	0.3897	P2	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.3512
P1	$2\sigma$	0.12	0.3899	P1	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.3547
B4	$2\sigma$	0.12	0.3900	B4	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.3518
B2	$2\sigma$	0.12	0.3878	B2	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.3545
B1	$2\sigma$	0.12	0.3912	B1	$\bar{\varphi}^*$	0.12	0.3513

Nel caso in cui non vi siano vincoli sulla variabile di controllo, la cifra di merito risulta  $J = M\sigma^2 = 0.2$ , in accordo a (2.21). È importante notare per valutare correttamente le prestazioni che i valori raggiunti dalla cifra di merito possono variare solamente tra 0.2, valore ottenuto in assenza di vincoli e 0.468, valore ottenuto nel caso di sistema non controllato, soggetto solamente all'azione del disturbo (tale valore si può ricavare iterando l'equazione di Lyapunov per sistemi a tempo discreto o direttamente calcolando la cifra di merito considerando nulla l'azione di controllo). Si nota che il valore 0.2, raggiunto nel caso non sia presente la saturazione del disturbo, non viene quasi mai ottenuto in presenza di saturazione, le prestazioni peggiorano tanto più quanto è piccolo il valore scelto per  $\bar{\varphi}$ : per  $\bar{\varphi} = 3\sigma$  il peggioramento è minimo o nullo nel caso dell'approccio a scenario perché la saturazione non interviene quasi mai; per valori minori di  $\bar{\varphi}$  il peggioramento è più marcato. Si ha la conferma che il valore di saturazione  $\bar{\varphi}$  deve essere scelto in relazione al valore di  $U_M$  e che in assenza di vincoli una forte azione di saturazione degrada le prestazioni.

Nel caso dell'approccio robusto (Tabella 2.1), la parametrizzazione scelta ha un'influenza limitata sulle prestazioni. Anche in caso di parametrizzazione completa la matrice  $\Theta$  risulta con solamente la prima sottodiagonale non nulla e con tutti gli elementi uguali. È quindi evidente che imporre le strutture previste per la matrice  $\Theta$  nelle varie prove non vada a cambiare la soluzione e quindi le prestazioni ottenute. Si nota che il valore della cifra di merito che si ottiene varia oltre che con il limite sulla variabile di controllo  $U_M$ , anche con la scelta di  $\bar{\varphi}$  adottata. Le prestazioni migliori sono ottenute in corrispondenza del  $\bar{\varphi}^*$  ottimo ricavato nella Sezione 2.2.1, inoltre in questo caso gli elementi della prima sottodiagonale di  $\Theta$  risultano  $-1.8 = -\frac{abw}{b}$  in accordo alla legge ottima (2.22). Il fatto che con questo approccio la matrice  $\Theta$  risulti sempre con una sola banda si può in parte giustificare analizzando la struttura dei vincoli: infatti se si utilizza un solo elemento non nullo per ogni riga di  $\Theta$  la conservatività dell'approccio risulta di molto diminuita

perché il caso pessimo diventa molto probabile.

Per quanto riguarda le prove in cui si è utilizzato l'approccio a scenario senza saturazione del disturbo (Tabella 2.2), nella prova con politica affine nel disturbo, se non sono presenti vincoli si ottiene una matrice  $\Theta$  con solamente la prima sottodiagonale non nulla composta da elementi tutti uguali e pari a  $-1.8 = -\frac{ab_w}{b}$ , il valore ottimo calcolato in (2.22). In presenza di vincoli e con parametrizzazione completa, la matrice  $\Theta$  risulta piena e con elementi tutti diversi: questo implica che sia la riduzione del numero di sottodiagonali utilizzate sia l'imposizione di una struttura a bande peggiorano le prestazioni; la riduzione del numero di sottodiagonali risulta più limitante specialmente quando i vincoli sono meno stringenti.

Per quanto riguarda le prove in cui si è utilizzato l'approccio a scenario con saturazione del disturbo (Tabella 2.3), per valori di  $\bar{\varphi}$  alti la matrice  $\Theta$  ottenuta risulta piena (quando la parametrizzazione scelta lo permette); al diminuire di  $\bar{\varphi}$ , invece, tende a risultare con un sola banda anche utilizzando la parametrizzazione completa. Di conseguenza per  $\bar{\varphi}$  piccoli, la parametrizzazione scelta per  $\Theta$  influenza poco le prestazioni. Per esempio, nel caso  $\bar{\varphi} = \sigma$  le matrici  $\Theta$  risultano sempre con una sola banda, la cifra di merito cambia leggermente; le variazioni comunque possono ritenersi non significative. Le prestazioni migliori si ottengono ancora utilizzando il valore di  $\bar{\varphi}^*$  ottimo.

Confrontando i diversi metodi adottati si nota come gli approcci che utilizzano il disturbo saturato abbiano prestazioni molto simili tra di loro nei casi in cui per entrambi gli approcci la matrice  $\Theta$  risulta con una sola banda, in questo caso di fatto si ottengono delle soluzioni quasi equivalenti. Nei casi, invece, in cui la matrice  $\Theta$  risulta piena per l'approccio che usa la tecnica a scenario ma non per l'approccio robusto, il primo ha prestazioni migliori. Tuttavia questa situazione si verifica solamente per i valori di  $\bar{\varphi}$  più elevati

ai quali non corrispondono le prestazioni migliori.

Il metodo a scenario senza saturazione del disturbo risulta sempre meno efficace di quello a scenario con saturazione del disturbo. È in grado di ottenere prestazioni migliori dell'approccio robusto solo nel caso in cui  $\bar{\varphi}$  è elevato, risulta invece meno efficace negli altri casi.

Per quanto riguarda i tempi di calcolo l'approccio robusto è risultato meno oneroso da risolvere rispetto ai metodi che utilizzano l'approccio a scenario: a seconda della parametrizzazione utilizzata per l'approccio robusto sono stati impiegati da 0.5 secondi con la parametrizzazione meno onerosa fino a 2 secondi con la parametrizzazione completa, mentre per gli approcci a scenario sono necessari da 15 a 25 secondi. Emerge quindi come tempo di calcolo e prestazioni ottenute siano spesso in conflitto tra loro e quindi come sia necessario trovare un giusto compromesso tra i due, scegliendo il metodo e la parametrizzazione più opportuni.

Questi risultati sono in linea con quanto ci si aspettava e con quanto è stato anticipato nelle sezioni in cui sono stati presentati i tre metodi. Unica eccezione è l'approccio robusto che si è rivelato meno conservativo del previsto poiché le matrici  $\Theta$  sono risultate con una sola banda non nulla.

### **Seconda serie di prove**

In questa seconda serie di prove si è considerato uno stato iniziale non nullo  $x_0 = 2$  e come valori limite per l'azione di controllo  $U_M = 1.80$  e  $U_M = 0.72$ . Gli altri parametri sono invariati rispetto alla serie di prove precedente, nelle tabelle risasuntive dei risultati 2.4, 2.5, 2.6 la cifra di merito è riportata sottraendovi il contributo dovuto allo stato iniziale  $x_0^2$ .

A differenza delle prove in cui  $x_0 = 0$ , in questa serie di prove il contributo all'azione di controllo dato da  $\Gamma$  (equazioni (2.1) e (1.15)) è non nullo

e influenza in modo significativo la matrice  $\Theta$ .  $\Gamma$  è infatti necessario per compensare lo stato iniziale.

Più precisamente, i risultati ottenuti con l'approccio robusto mostrano come il termine  $\Gamma$  sia prevalente soprattutto nei primi istanti. Nel caso in cui si sono considerati vincoli più stringenti ( $U_M = 0.72$ ), la matrice  $\Theta$  risulta nulla tranne che nell'ultima riga, corrispondente all'unico istante in cui l'azione di controllo non è completamente saturata dal contributo di  $\Gamma$ . Nel caso di vincoli meno stringenti ( $U_M = 1.80$ ), la matrice  $\Theta$  presenta elementi non nulli anche corrispondenti ad altri istanti temporali. A differenza di quanto accade nel caso in cui lo stato iniziale è nullo, gli elementi non nulli sono presenti anche fuori dalla prima sottodiagonale e il loro modulo è maggiore nelle parte inferiore della matrice  $\Theta$ ; nel caso di struttura a bande talvolta accade che la seconda sottodiagonale contenga valori maggiori rispetto alla prima: quest'ultima potrebbe essere limitata all'istante  $\tau + 1$  da un valore elevato di  $\Gamma$  e data la struttura a banda risulta limitata per gli istanti successivi, la seconda banda avendo il suo istante iniziale a  $\tau + 2$  risulta meno limitata dalla presenza di  $\Gamma$  che tende a diminuire nel tempo.

La Tabella 2.4 evidenzia il fatto che il limite di saturazione  $\bar{\varphi}$  non influenza in modo apprezzabile le prestazioni. Le prestazioni non migliorano molto quando esso è posto uguale a  $\bar{\varphi}^*$ ; nel caso di vincoli poco stringenti ( $U_M = 1.80$ ),  $\bar{\varphi}^*$  risulta ben oltre  $3\sigma$  e la saturazione non interviene praticamente mai.

Per quanto riguarda l'approccio a scenario senza saturazione del disturbo (Tabella 2.5) in assenza di vincoli si ottiene il risultato previsto: la cifra di merito, tolto il termine legato allo stato iniziale  $x_0^2$ , vale 0.2, i termini  $\Theta$  e  $\Gamma$  assumono i valori ricavati nella (2.23).

Nel caso in cui vi siano vincoli si nota che il termine  $\Gamma$  risulta prevalente rispetto al termine in feedback sul disturbo. Nel caso di vincoli meno stringenti il termine  $\Gamma$  si annulla dopo 2 o 3 istanti; contemporaneamente le prime righe della matrice  $\Theta$  risultano con coefficienti ridotti rispetto a quelli presenti nelle righe successive. In caso di parametrizzazione che imponga

Tabella 2.4: Seconda serie di prove: risultati dell'approccio robusto.

$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$U_M$	$J_{\bar{\varphi}} - x_0^2$	$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$U_M$	$J_{\bar{\varphi}} - x_0^2$
P4	$3\sigma$	–	0.2002	P4	$\sigma$	–	0.2258
P4	$3\sigma$	1.80	1.0548	P4	$\sigma$	1.80	1.0548
P2	$3\sigma$	1.80	1.0560	P2	$\sigma$	1.80	1.0557
P1	$3\sigma$	1.80	1.0809	P1	$\sigma$	1.80	1.0808
B4	$3\sigma$	1.80	1.1008	B4	$\sigma$	1.80	1.1002
B2	$3\sigma$	1.80	1.1004	B2	$\sigma$	1.80	1.1008
B1	$3\sigma$	1.80	1.1729	B1	$\sigma$	1.80	1.1729
P4	$3\sigma$	0.72	3.6368	P4	$\sigma$	0.72	3.6363
P2	$3\sigma$	0.72	3.6367	P2	$\sigma$	0.72	3.6370
P1	$3\sigma$	0.72	3.6384	P1	$\sigma$	0.72	3.6381
B4	$3\sigma$	0.72	3.6442	B4	$\sigma$	0.72	3.6428
B2	$3\sigma$	0.72	3.6551	B2	$\sigma$	0.72	3.6561
B1	$3\sigma$	0.72	3.6568	B1	$\sigma$	0.72	3.6557
P4	$2\sigma$	–	0.2028	P4	$\bar{\varphi}^*$	–	0.2
P4	$2\sigma$	1.80	1.0546	P4	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.0547
P2	$2\sigma$	1.80	1.0560	P2	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.0558
P1	$2\sigma$	1.80	1.0860	P1	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.0807
B4	$2\sigma$	1.80	1.1005	B4	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.1008
B2	$2\sigma$	1.80	1.1007	B2	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.1009
B1	$2\sigma$	1.80	1.1730	B1	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.1737
P4	$2\sigma$	0.72	3.6358	P4	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6134
P2	$2\sigma$	0.72	3.6370	P2	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6154
P1	$2\sigma$	0.72	3.6375	P1	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6230
B4	$2\sigma$	0.72	3.6434	B4	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6358
B2	$2\sigma$	0.72	3.6566	B2	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6560
B1	$2\sigma$	0.72	3.6562	B1	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6563

Tabella 2.5: Seconda serie di prove: risultati dell'approccio a scenario con politica affine nel disturbo.

$\Theta$	$U_M$	$J - x_0^2$
P4	–	0.2
P4	1.80	1.0301
P2	1.80	1.0323
P1	1.80	1.0662
B4	1.80	1.0784
B2	1.80	1.0833
B1	1.80	1.1347
P4	0.72	3.6046
P2	0.72	3.6207
P1	0.72	3.6301
B4	0.72	3.6412
B2	0.72	3.656
B1	0.72	3.656



Tabella 2.6: Seconda serie di prove: risultati dell'approccio a scenario con politica affine nel disturbo saturato.

$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$U_M$	$J_{\bar{\varphi}} - x_0^2$	$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$U_M$	$J_{\bar{\varphi}} - x_0^2$
P4	$3\sigma$	–	0.2003	P4	$\sigma$	–	0.2256
P4	$3\sigma$	1.80	1.0299	P4	$\sigma$	1.80	1.0432
P2	$3\sigma$	1.80	1.0301	P2	$\sigma$	1.80	1.0433
P1	$3\sigma$	1.80	1.0613	P1	$\sigma$	1.80	1.0491
B4	$3\sigma$	1.80	1.0712	B4	$\sigma$	1.80	1.0513
B2	$3\sigma$	1.80	1.0732	B2	$\sigma$	1.80	1.0499
B1	$3\sigma$	1.80	1.1069	B1	$\sigma$	1.80	1.0533
P4	$3\sigma$	0.72	3.6021	P4	$\sigma$	0.72	3.5985
P2	$3\sigma$	0.72	3.6170	P2	$\sigma$	0.72	3.6033
P1	$3\sigma$	0.72	3.6290	P1	$\sigma$	0.72	3.6179
B4	$3\sigma$	0.72	3.6407	B4	$\sigma$	0.72	3.6325
B2	$3\sigma$	0.72	3.6579	B2	$\sigma$	0.72	3.6557
B1	$3\sigma$	0.72	3.6573	B1	$\sigma$	0.72	3.6534
P4	$2\sigma$	–	0.2026	P4	$\bar{\varphi}^*$	–	0.2
P4	$2\sigma$	1.80	1.0280	P4	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.0326
P2	$2\sigma$	1.80	1.0271	P2	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.0331
P1	$2\sigma$	1.80	1.0455	P1	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.0623
B4	$2\sigma$	1.80	1.0517	B4	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.0706
B2	$2\sigma$	1.80	1.0514	B2	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.0727
B1	$2\sigma$	1.80	1.0649	B1	$\bar{\varphi}^*$	1.80	1.1229
P4	$2\sigma$	0.72	3.6030	P4	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6036
P2	$2\sigma$	0.72	3.6153	P2	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6141
P1	$2\sigma$	0.72	3.6207	P1	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6218
B4	$2\sigma$	0.72	3.6358	B4	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6332
B2	$2\sigma$	0.72	3.6585	B2	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6568
B1	$2\sigma$	0.72	3.6547	B1	$\bar{\varphi}^*$	0.72	3.6563

una struttura a bande le prestazioni peggiorano: una politica P1, ottiene prestazioni, seppur di poco, migliori di una parametrizzazione B4. Questo è giustificato dal fatto che la struttura a bande costringe a trovare un compromesso tra i primi istanti in cui è presente un forte contributo da parte di  $\Gamma$  e gli istanti successivi in cui il contributo dovuto a  $\Gamma$  diminuisce fino ad annullarsi. Nel caso di vincoli maggiormente stringenti, quasi tutta l'azione di controllo è determinata da  $\Gamma$  che compensa lo stato iniziale; le prestazioni peggiorano se si vincola la struttura di  $\Theta$  fino al punto in cui, utilizzando le parametrizzazioni più stringenti (struttura a bande con solamente una o due sottodiagonali), si ottiene una matrice  $\Theta$  di fatto quasi completamente nulla.

Gli stessi andamenti sono riscontrati nelle prove effettuate con il metodo a scenario con saturazione del disturbo: il termine  $\Gamma$  risulta prevalente rispetto a  $\Theta$ , parametrizzazioni stringenti peggiorano le prestazioni soprattutto nel caso si sia imposta una struttura a bande. La Tabella 2.6 mostra come una scelta di  $\bar{\varphi}$  piccolo porti ad un livellamento delle prestazioni tra le diverse parametrizzazioni.

Dal confronto tra le tre tabelle sembra che il metodo a scenario con saturazione del disturbo dia prestazioni migliori rispetto agli altri due, anche se spesso l'entità del miglioramento è limitata. Le prestazioni dei tre metodi sono infatti comparabili per la presenza dello stato iniziale non nullo, che determina un'azione di controllo prevalentemente volta alla sua compensazione in tutti e tre i metodi.

### 2.4.2 Sistemi di secondo ordine

In questa sezione sono illustrati i risultati ottenuti utilizzando sistemi del secondo ordine con variabile di ingresso scalare. L'obiettivo è mettere maggiormente in evidenza le differenze tra i tre metodi proposti.

Con una struttura del sistema più complessa, la componente di feedback sul disturbo presenta una matrice  $\Theta$  con un maggior numero di elementi non

nulli, così che la legge di controllo ottima per il problema senza vincoli non sfrutti soltanto la prima sottodiagonale di  $\Theta$  come accadeva invece nel caso scalare. Questo dovrebbe meglio evidenziare la conservatività dell'approccio robusto a cui si è accennato nella Sezione 2.2.

In tutte le prove sono stati scelti  $\beta = 10^{-10}$ ,  $\epsilon = 0.025$ , i pesi utilizzati nella cifra di merito (1.4) sono  $Q_i = I_2$ ,  $R_i = 1$ , l'orizzonte di predizione  $M = 8$ .

### Soluzione ottima in assenza di vincoli

È possibile nel caso in cui non si considerino vincoli di alcun tipo trovare la legge di controllo ottima per minimizzare la cifra di merito  $J$ :

$$J = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^M x_{\tau+i}^T Q x_{\tau+i} + \sum_{i=0}^{M-1} u_{\tau+i}^T R u_{\tau+i} \right]. \quad (2.24)$$

Questo risultato è noto e corrisponde al controllo LQ su orizzonte finito, in cui, come si è assunto in questa tesi, si considera lo stato del sistema perfettamente misurabile ad ogni istante di tempo. Inoltre si considera che sul sistema agisce un disturbo  $w$  a media nulla, con matrice covarianza  $\mathbb{E}[w_t w_t^T] = L_{ww}$ , incorrelato ad istanti di tempo diversi  $\mathbb{E}[w_i w_j^T] = 0 \forall i \neq j$ . La legge di controllo ottima risulta ad ogni istante di tempo in feedback sullo stato:

$$u_t = K_t x_t \quad \tau \leq t < M \quad (2.25)$$

$$K_t = -(R + B^T P_{t+1} B)^{-1} B^T P_{t+1} A, \quad (2.26)$$

in cui la matrice  $P_t$  può essere calcolata ad ogni istante di tempo in modo da soddisfare l'equazione di Riccati:

$$P_t = Q + A^T P_{t+1} A - A^T P_{t+1} B (R + B^T P_{t+1} B)^{-1} B^T P_{t+1} A. \quad (2.27)$$

Data la condizione:

$$P_M = Q \quad (2.28)$$

è possibile iterare all'indietro l'equazione di Riccati e ricavare tutte le matrici  $K_t$ .

La cifra di merito utilizzando questa politica ottima risulta:

$$J = x_\tau^T P_\tau x_\tau + \sum_{i=1}^M \text{tr}(L_{ww} P_i). \quad (2.29)$$

Se ora si adotta la notazione vettoriale compatta per la variabile di controllo e lo stato la legge di controllo ottima trovata risulta:

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} K_\tau & 0 & & 0 \\ 0 & K_{\tau+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_{\tau+M-1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{0}. \quad (2.30)$$

La legge di controllo ottenuta risulta affine nello stato, è possibile utilizzando il risultato di equivalenza in [10] riscrivere tale legge come funzione affine del disturbo ottenendo la matrice  $\Theta$  e il vettore  $\Gamma$  ottimi, come già mostrato nel Capitolo 1.

$$\mathbf{u} = \Theta \mathbf{w} + \Gamma \quad (2.31)$$

$$\Theta = \mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{L})^{-1} \mathbf{H} \quad \Gamma = \mathbf{L}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{L})^{-1} (\mathbf{G}\mathbf{g} + \mathbf{F}x_\tau) + \mathbf{g}. \quad (2.32)$$

### Analisi dell'effetto sulle prestazioni della parametrizzazione di $\Theta$

Il primo sistema considerato è stato:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

in cui i disturbi  $w_1$ ,  $w_2$  sono due processi bianchi gaussiani indipendenti, ognuno con media nulla e deviazione standard  $\sigma = 0.5$ . Il parametro  $\bar{\varphi}$  che interviene nella saturazione del disturbo è stato posto uguale a  $2\sigma$ . In Tabella 2.7(a) sono riportati i risultati in caso di vincoli sull'azione di controllo con  $U_M = 0.30$  e stato iniziale nullo; in Tabella 2.7(b) con  $U_M = 0.1$  e stato iniziale nullo; in Tabella 2.7(c) con  $U_M = 0.30$  e stato iniziale  $x_0 = [0.5 \ 0.5]^T$ . Per ogni prova sono riportati i risultati ottenuti con parametrizzazioni di  $\Theta$  diverse.

Per evidenziare meglio le differenze tra gli approcci, le cifre di merito  $J$  e

$J_{\bar{\varphi}}$  riportate nelle tabelle sono depurate dei termini costanti dovuti a stato iniziale e disturbo che compaiono nelle espressioni (1.27) e (2.3). Per questo vengono indicate con i simboli  $J^\circ$  e  $J_{\bar{\varphi}}^\circ$ , rispettivamente.

Nel caso in cui si utilizza il metodo dello scenario con saturazione del disturbo si ottiene una matrice  $\Theta$  che presenta elementi non nulli su tutte le sottodiagonali (questo accade anche nel caso in cui non vi siano vincoli sulla variabile di controllo): le prime sottodiagonali comunque rimangono quelle che forniscono il maggiore contributo, infatti presentano dei coefficienti numericamente maggiori rispetto a quelli delle sottodiagonali relative ai valori del disturbo più lontani nel tempo. Si può notare, inoltre, che le prestazioni migliorano di poco passando da una parametrizzazione a 3 sottodiagonali ad una con tutte le 7 sottodiagonali. Una parametrizzazione che imponga gli elementi delle sottodiagonali uguali tra loro non sembra particolarmente penalizzante, le prestazioni ottenute non peggiorano molto. Questo è vero anche nel caso in cui lo stato iniziale non è nullo, quello più critico per parametrizzazioni a bande: l'azione in anello aperto dovuta al vettore  $\Gamma$  è utilizzata con maggiore moderazione rispetto a quanto accadeva nel sistema scalare e non risulta prevalente rispetto all'azione in feedback sul disturbo.

Nel caso dell'approccio robusto, invece, si ottiene una matrice  $\Theta$  con molti elementi nulli. In particolare anche con una parametrizzazione completa i contributi significativi vengono solamente dalla prima sottodiagonale e in parte dalla seconda. Data questa particolare struttura le parametrizzazioni influiscono poco sulle prestazioni ottenute, quasi sempre simili tra di loro in quanto difficilmente la struttura imposta va effettivamente a modificare la matrice  $\Theta$  soluzione del problema di ottimizzazione vincolato.

Confrontando i due approcci si nota che lo scenario con saturazione ha prestazioni sempre migliori dell'approccio robusto in caso di parametrizzazione con molte sottodiagonali, mentre le prestazioni si allineano e diventano qua-

Tabella 2.7: Sistema (2.33). Risultati ottenuti per  $J^\circ$  o  $J_\varphi^\circ$  utilizzando diversi metodi e diverse parametrizzazioni della matrice  $\Theta$ .

(a) $U_M = 0.30 \quad x_0 = 0$					
Sp	$J^\circ$	Ss	$J_\varphi^\circ$	R	$J_\varphi^\circ$
P7	-0.7337	P7	-0.8147	P7	-0.6942
P3	-0.7273	P3	-0.7764	P3	-0.6978
P1	-0.5761	P1	-0.6657	P1	-0.6642
B7	-0.7266	B7	-0.7591	B7	-0.6785
B3	-0.7041	B3	-0.7460	B3	-0.6772
B1	-0.5624	B1	-0.6661	B1	-0.6656

(b) $U_M = 0.1 \quad x_0 = 0$					
Sp	$J^\circ$	Ss	$J_\varphi^\circ$	R	$J_\varphi^\circ$
P7	-0.2957	P7	-0.3186	P7	-0.2675
P3	-0.2957	P3	-0.3076	P3	-0.2693
P1	-0.2256	P1	-0.2696	P1	-0.2648
B7	-0.2751	B7	-0.3028	B7	-0.2646
B3	-0.2798	B3	-0.2830	B3	-0.2656
B1	-0.2178	B1	-0.2643	B1	-0.2648

(c) $U_M = 0.30 \quad x_0 = (0.5, 0.5)$					
Sp	$J^\circ$	Ss	$J_\varphi^\circ$	R	$J_\varphi^\circ$
P7	-0.8352	P7	-0.8724	P7	-0.7615
P3	-0.8175	P3	-0.8544	P3	-0.7561
P1	-0.6161	P1	-0.7303	P1	-0.7308
B7	-0.7922	B7	-0.8527	B7	-0.7450
B3	-0.7893	B3	-0.8181	B3	-0.7420
B1	-0.6247	B1	-0.6902	B1	-0.6845

si equivalenti in caso di parametrizzazioni con poche (una) sottodiagonali. Questo accade perché solamente l'approccio a scenario con saturazione del disturbo riesce a sfruttare tutte le sottodiagonali a disposizione nella matrice  $\Theta$  per migliorare le prestazioni. L'approccio robusto sembra utilizzare sempre poche sottodiagonali per ridurre la conservatività dei vincoli. Quando la parametrizzazione obbliga all'utilizzo di una sola sottodiagonale, i vincoli considerati nei due approcci diventano di fatto quasi equivalenti e così anche le soluzioni ottenute e le prestazioni.

Utilizzando il metodo a scenario senza saturazione del disturbo si ottengono prestazioni sempre peggiori rispetto a quelle ottenute utilizzando il metodo a scenario con saturazione. Questo è dovuto alla presenza nelle estrazioni di valori elevati del disturbo che costringono a soluzioni più prudenti. Rispetto al metodo robusto, quello a scenario senza saturazione ha prestazioni peggiori con parametrizzazioni con poche bande, invece in caso di parametrizzazione completa riesce a fare meglio, probabilmente perché con molte sottodiagonali i valori più critici del disturbo possono essere meglio compensati.

La stessa serie di prove è stata ripetuta con gli stessi parametri considerando il sistema:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} -0.30 & -0.45 \\ 1.2 & 1.2 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

I risultati sono riportati in Tabella 2.8.

Tabella 2.8: Sistema (2.34). Risultati ottenuti per  $J^\circ$  o  $J_\varphi^\circ$  utilizzando diversi metodi e diverse parametrizzazioni della matrice  $\Theta$ .

(a) $U_M = 0.30 \quad x_0 = 0$					
Sp	$J^\circ$	Ss	$J_\varphi^\circ$	R	$J_\varphi^\circ$
P7	-1.4693	P7	-1.6208	P7	-1.5327
P3	-1.4303	P3	-1.6161	P3	-1.5306
P1	-1.2352	P1	-1.5183	P1	-1.5067
B7	-1.2473	B7	-1.4401	B7	-1.4138
B3	-1.2217	B3	-1.4300	B3	-1.4035
B1	-1.1348	B1	-1.4072	B1	-1.3981

(b) $U_M = 0.1 \quad x_0 = 0$					
Sp	$J^\circ$	Ss	$J_\varphi^\circ$	R	$J_\varphi^\circ$
P7	-0.5804	P7	-0.6535	P7	-0.6258
P3	-0.5587	P3	-0.6477	P3	-0.6194
P1	-0.4941	P1	-0.6248	P1	-0.6259
B7	-0.5140	B7	-0.5844	B7	-0.5828
B3	-0.4828	B3	-0.5837	B3	-0.5799
B1	-0.4399	B1	-0.5832	B1	-0.5825

(c) $U_M = 0.30 \quad x_0 = (0.5, 0.5)$					
Sp	$J^\circ$	Ss	$J_\varphi^\circ$	R	$J_\varphi^\circ$
P7	-2.4156	P7	-2.5496	P7	-2.4666
P3	-2.3912	P3	-2.5626	P3	-2.4520
P1	-2.2415	P1	-2.4536	P1	-2.4452
B7	-2.2396	B7	-2.3935	B7	-2.3318
B3	-2.2677	B3	-2.3864	B3	-2.3419
B1	-2.1006	B1	-2.3340	B1	-2.3328



In questo caso si ottiene per l'approccio a scenario con saturazione del disturbo una matrice  $\Theta$  che sfrutta prevalentemente le prime sottodiagonali; con l'approccio robusto, invece, si ottiene  $\Theta$  che utilizza solo la prima sottodiagonale. Le differenze tra i due approcci emergono in modo meno marcato rispetto al caso precedente: in caso di parametrizzazione completa il metodo a scenario con saturazione ottiene valori della cifra di merito di poco migliori rispetto a ciò che si ottiene con il metodo robusto, con parametrizzazioni ridotte si assiste ad un livellamento delle prestazioni tra i due approcci.

Si nota ancora come parametrizzazioni più vincolate comportino un peggioramento delle prestazioni: una struttura a bande ha sempre prestazioni peggiori della parametrizzazione libera, anche nel caso in cui la prima abbia a disposizione più sottodiagonali rispetto alla seconda.

L'approccio a scenario senza saturazione del disturbo in questo sistema ha prestazioni sempre peggiori rispetto agli altri due.

Se si considera per i due sistemi (2.33) e (2.34) il problema in cui nessun vincolo è presente e lo stato iniziale è nullo, si ottengono soluzioni equivalenti risolvendo il problema convesso con variabile di controllo generata come funzione affine del disturbo o sfruttando la soluzione del controllo LQ su orizzonte finito. La cifra di merito normalizzata risulta -1.28 per il sistema (2.33), mentre risulta -2.52 per il sistema (2.34).

Se si esprime la legge di controllo come funzione affine dello stato (2.30) si ha per entrambi i sistemi una matrice  $\mathbf{L}$  diagonale a blocchi, mentre il vettore  $\mathbf{g}$  è nullo. Se, invece, si esprime la legge di controllo come funzione affine del disturbo (2.31), il vettore  $\Gamma$  risulta nullo, mentre emergono alcune differenze tra le matrici  $\Theta$ . Per il sistema (2.33) gli elementi più significativi sono presenti nella prima e nella seconda sottodiagonale, un contributo minore ma significativo è dato dalla terza sottodiagonale, gli altri elementi risultano con valori ridotti rispetto ai precedenti; per il sistema (2.34) gli elementi con modulo più elevato sono presenti solamente nella prima sottodiagonale, la seconda sottodiagonale presenta un contributo limitato, gli altri elementi

seppur non nulli hanno moduli molto ridotti. Queste stesse caratteristiche si riscontrano anche se in maniera più attenuata nelle matrici  $\Theta$  ottenute in presenza di vincoli con gli approcci a scenario.

Dalle prove effettuate si può concludere che le migliori prestazioni si ottengono utilizzando il metodo a scenario con saturazione del disturbo ed una parametrizzazione completa della matrice  $\Theta$ . Per far sì che questa configurazione sia veramente efficace è necessario che la parametrizzazione e le caratteristiche dell'approccio siano effettivamente sfruttate nella soluzione. Se la struttura del sistema è tale per cui la matrice  $\Theta$  ottenuta anche nel caso in cui tutti i suoi parametri siano lasciati liberi utilizza solamente la prima sottodiagonale, le limitazioni imposte dall'utilizzo di una struttura vincolata di  $\Theta$  e la conservatività dell'approccio robusto non emergono e si possono raggiungere prestazioni quasi equivalenti, con il vantaggio che parametrizzazioni ridotte e l'approccio robusto comportano un minore sforzo computazionale.

### **Analisi dell'effetto sulle prestazioni del valore di saturazione del disturbo $\bar{\varphi}$**

È stata effettuata una nuova serie di prove con l'obiettivo di valutare l'effetto sulle prestazioni di diverse scelte per il valore del parametro di saturazione del disturbo  $\bar{\varphi}$ .

Per fare questo, si è adottata una parametrizzazione completa per la matrice  $\Theta$  così da rendere i risultati delle prove indipendenti dalla scelta della parametrizzazione di  $\Theta$ .

Unico parametro, oltre a  $\bar{\varphi}$ , a variare in questa serie di prove è il limite imposto sull'azione di controllo  $U_M$ . Questo parametro sembrerebbe infatti essere quello ad avere una maggiore influenza sul valore di  $\bar{\varphi}$  più opportuno, anche alla luce del risultato ottenuto nella Sezione 2.2.1.

Le prove sono state effettuate su due sistemi di secondo ordine: i poli hanno modulo pari a 0.9 e sono reali per il primo sistema (2.35), mentre hanno

modulo  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  e sono complessi coniugati per il secondo (2.36); su entrambi i sistemi agiscono i disturbi  $w_1$  e  $w_2$  processi bianchi gaussiani, entrambi con media nulla e deviazione standard  $\sigma = 0.5$ ; lo stato iniziale è nullo.

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

I risultati sono riportati nelle Tabelle 2.9 e 2.10. In esse sono riportate anche le prestazioni ottenute anche con il metodo a scenario senza la saturazione del disturbo, per avere un termine di paragone che evidenzi l'effetto della presenza della saturazione del disturbo.

Tabella 2.9: Valori della cifra di merito normalizzata ( $J^\circ$  per Sp e  $J_\varphi^\circ$  per Ss e R) per il sistema (2.35).

		$\bar{\varphi}$		
		$\sigma$	$2\sigma$	$3\sigma$
$U_M = 300$	Sp	-3.2686	-3.2686	-3.2686
	Ss	-2.9453	-3.2184	-3.2628
	R	-2.9453	-3.2184	-3.2628
$U_M = 0.30$	Sp	-1.8295	-1.8325	-1.8415
	Ss	-2.4101	-2.0943	-1.8864
	R	-2.4044	-1.9677	-1.4873
$U_M = 0.03$	Sp	-0.2309	-0.2335	-0.23
	Ss	-0.3464	-0.2694	-0.2373
	R	-0.3462	-0.2453	-0.1725

Tabella 2.10: Valori della cifra di merito normalizzata ( $J^\circ$  per Sp e  $J_{\bar{\varphi}}^\circ$  per Ss e R) per il sistema (2.36).

		$\bar{\varphi}$		
		$\sigma$	$2\sigma$	$3\sigma$
$U_M = 300$	Sp	-1.2843	-1.2843	-1.2843
	Ss	-1.1616	-1.2738	-1.2864
	R	-1.1616	-1.2738	-1.2864
$U_M = 0.30$	Sp	-0.7827	-0.7827	-0.7827
	Ss	-0.8761	-0.8137	-0.7852
	R	-0.8629	-0.6959	-0.5203
$U_M = 0.1$	Sp	-0.3083	-0.3083	-0.3083
	Ss	-0.3719	-0.3237	-0.3100
	R	-0.3690	-0.2685	-0.1910

Se si considera il caso in cui il valore  $U_M$  è molto elevato e quindi di fatto i vincoli non intervengono, si può notare come le prestazioni ottenute utilizzando l'approccio a scenario con saturazione e l'approccio robusto si mantengono essenzialmente allineate al variare di  $\bar{\varphi}$ : avendo dei limiti sull'azione di controllo molto blandi è sempre possibile scegliere il valore ottimale dei coefficienti della matrice  $\Theta$ , anche considerando nei vincoli il caso pessimo come nell'approccio robusto. Le prestazioni migliorano per valori di  $\bar{\varphi}$  maggiori; non avendo di fatto vincoli sull'azione di controllo non sembra esserci motivo per dovere applicare una saturazione stringente al disturbo. Questa osservazione trova conferma nel fatto che il metodo a scenario senza saturazione del disturbo abbia prestazioni migliori rispetto agli altri due metodi quando si sceglie un  $\bar{\varphi}$  piccolo, mentre in caso di  $\bar{\varphi} = 3\sigma$  le prestazioni dei tre approcci risultano simili.

La saturazione, seppur molto elevata, rimane necessaria per il metodo robusto ed appare utile anche nel caso si utilizzi lo scenario con saturazione per

evitare gli effetti di valori del disturbo molto elevati ed improbabili.

Nel caso di vincoli più stringenti si nota che con un  $\bar{\varphi}$  stretto si ottengono le prestazioni migliori: il metodo a scenario con saturazione ottiene prestazioni di poco migliori rispetto al metodo robusto. Questo si giustifica andando ad esaminare la struttura della matrice  $\Theta$  che risulta in questo caso per entrambi i metodi non nulla quasi esclusivamente sulla prima sottodiagonale. Andando ad aumentare il valore di  $\bar{\varphi}$  si ottiene un progressivo peggioramento delle prestazioni e si nota una separazione tra le prestazioni ottenute con i due metodi: l'approccio robusto presenta un peggioramento decisamente più marcato rispetto a quello a scenario con saturazione. Ancora l'andamento delle prestazioni è rispecchiato dalla struttura delle matrici  $\Theta$  ottenute: nel primo caso si mantiene la struttura con la sola prima sottodiagonale non nulla; nel secondo caso la matrice risulta con un numero maggiore di elementi non nulli anche fuori dalla prima sottodiagonale.

Nel caso di vincoli stringenti, il metodo a scenario senza saturazione del disturbo ha sempre prestazioni peggiori di quello a scenario con saturazione, e riesce a ottenere prestazioni migliori dell'approccio robusto solamente in presenza di  $\bar{\varphi}$  elevati, caso in cui le prestazioni dell'approccio robusto peggiorano di molto.

Complessivamente si nota che in caso di vincoli molto blandi conviene utilizzare un valore elevato per  $\bar{\varphi}$ , e il metodo robusto visto che si ottengono prestazioni simili con tutti i metodi considerati e quello robusto è meno oneroso da un punto di vista computazionale. In caso di vincoli stringenti è più conveniente una scelta di  $\bar{\varphi}$  piccolo e lo scenario con saturazione ottiene prestazioni migliori, anche se di poco, rispetto al robusto.

Fatto interessante è che l'approccio a scenario con saturazione ha prestazioni migliori o al più simili di quello robusto, per ogni valore di  $\bar{\varphi}$  scelto.

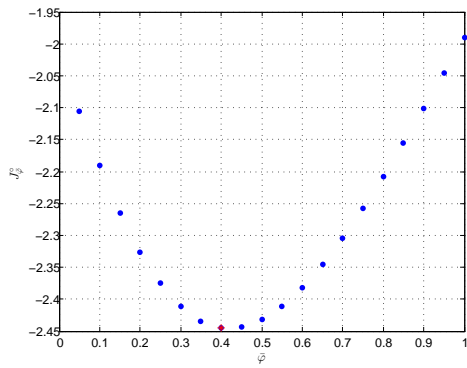
Quanto riscontrato nelle prove risulta in accordo con quanto detto nella Sezione 2.2.1 a riguardo dell'approccio robusto. Il valore  $\bar{\varphi}$  deve essere scelto tenendo presente i vincoli sull'azione di controllo: l'obiettivo è avvicinarsi ad una situazione in cui valori del disturbo che possono essere compensati

con l'azione di controllo disponibile non vengano inutilmente saturati e, contemporaneamente, valori del disturbo troppo elevati per essere compensati rispettando i vincoli, vengano invece saturati. Questa situazione, però, è piuttosto difficile da tradurre in formule in quanto la variabile di controllo è la somma pesata tramite  $\Theta$  della variabile disturbo che è a più componenti e valutata a più istanti, la struttura ottimale per  $\Theta$  è inoltre influenzata dalla presenza di una eventuale condizione iniziale non nulla e dai pesi di stato e controllo nella cifra di merito da minimizzare.

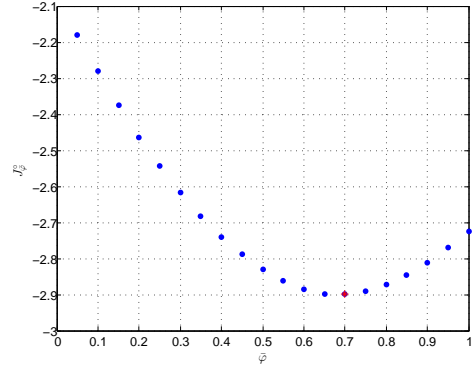
### **Ricerca del valore di $\bar{\varphi}$ a cui corrispondono prestazioni migliori**

Di seguito sono riportati i grafici dell'andamento della cifra di merito normalizzata  $J_{\bar{\varphi}}^o$  in funzione di  $\bar{\varphi}$  per l'approccio robusto, evidenziando in rosso il punto di minimo corrispondente al valore ottimo per  $\bar{\varphi}$ .

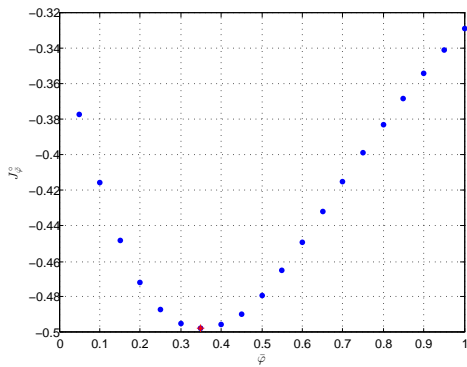
La Figura 2.1 si riferisce al sistema (2.35), nei casi in cui  $U_M = 0.3$  o  $U_M = 0.5$ . I grafici riportati nelle due figure sono ottenuti per diversi valori della deviazione standard  $\sigma$  ( $\sigma = 0.2, 0.5, 0.8$ ) del disturbo. La Figura 2.2 si riferisce invece al sistema (2.36).



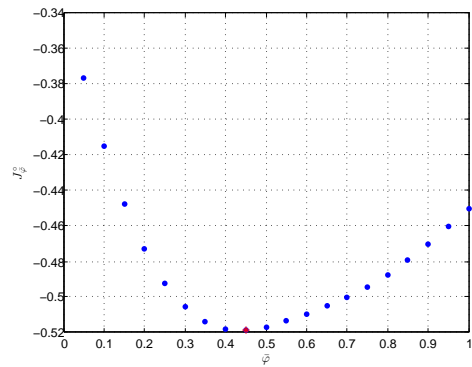
(a) Metodo robusto,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.5$ .



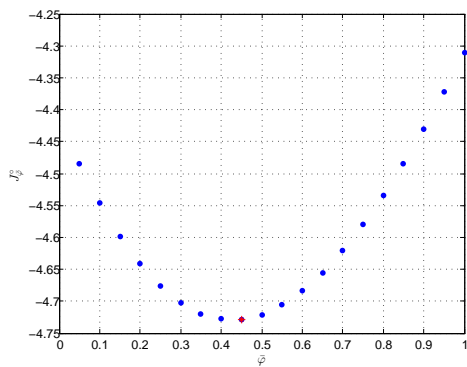
(b) Metodo robusto,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.5$ .



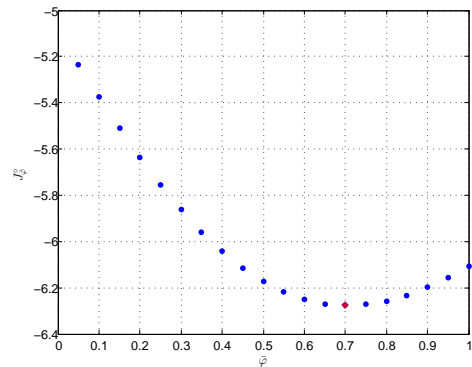
(c) Metodo robusto,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.2$ .



(d) Metodo robusto,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.2$ .

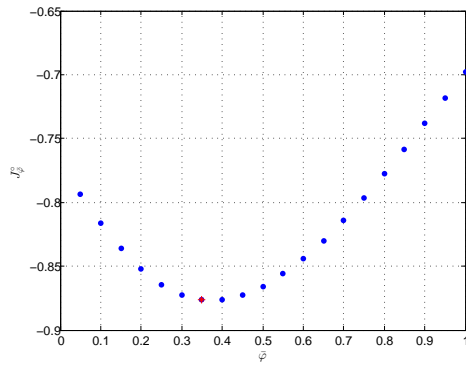


(e) Metodo robusto,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.8$ .

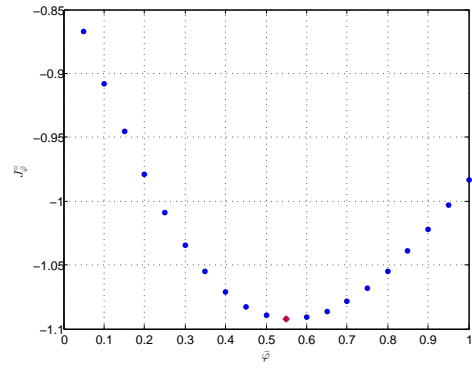


(f) Metodo robusto,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.8$ .

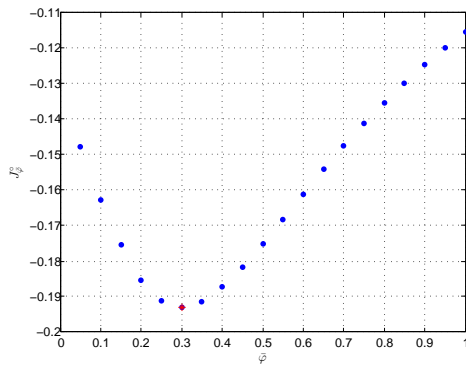
Figura 2.1: Sistema (2.35). Valori della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}^o$  per diversi valori di  $\bar{\varphi}$ ; in rosso il minimo.



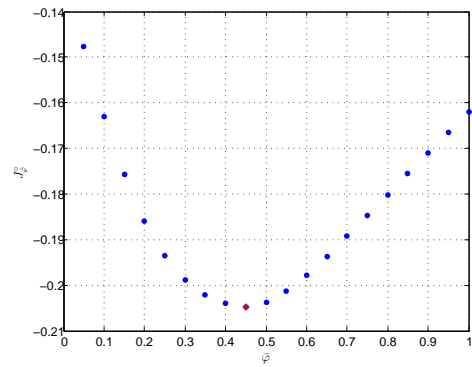
(a) Metodo robusto,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.5$ .



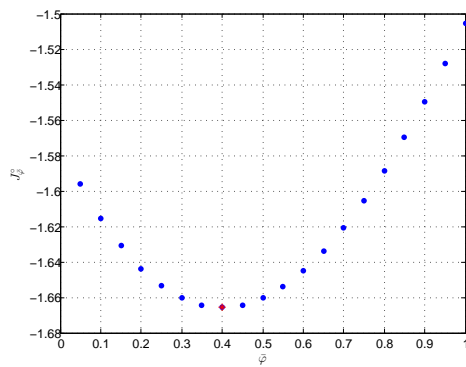
(b) Metodo robusto,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.5$ .



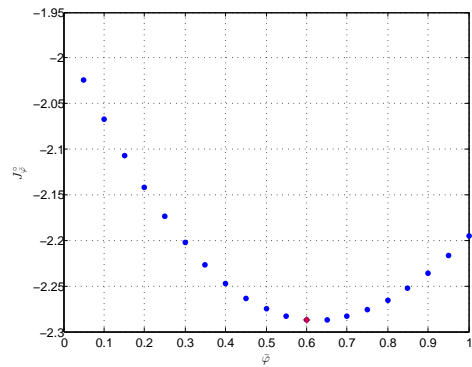
(c) Metodo robusto,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.2$ .



(d) Metodo robusto,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.2$ .



(e) Metodo robusto,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.8$ .



(f) Metodo robusto,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.8$ .

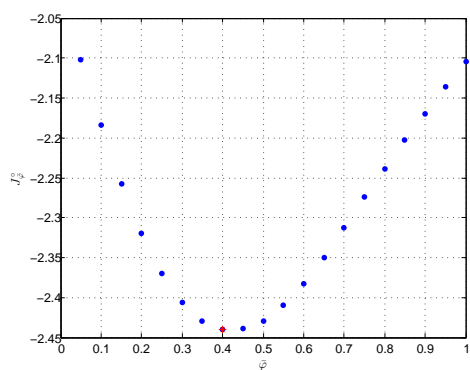
Figura 2.2: Sistema (2.36). Valori della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}^o$  per diversi valori di  $\bar{\varphi}$ ; in rosso il minimo.



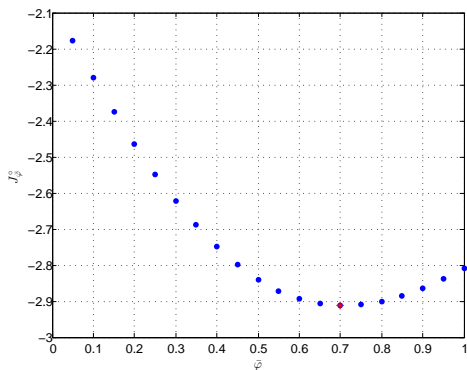
Dalle Figure 2.1 e 2.2 si nota come il valore di  $\bar{\varphi}$  a cui corrisponde minimo della cifra di merito sia condizionato dalla scelta di  $U_M$  e in misura minore dalla deviazione standard del disturbo  $\sigma$ . Le variazioni del valore di  $\bar{\varphi}$  ottimo sono più marcate quando si utilizzano  $U_M$  diversi, sono invece inferiori le variazioni ottenute modificando il valore di  $\sigma$ . Nel caso in cui  $\sigma = 0.2$  le variazioni di  $\bar{\varphi}$  ottimo rispetto ad  $U_M$  sono più limitate che negli altri casi. Dalle prove sembra emergere che nel scegliere il valore di  $\bar{\varphi}$  è necessario tenere conto anche della distribuzione del disturbo e non solo del valore  $U_M$  nei vincoli sulla variabile di controllo, anche se è confermato che quest'ultimo mantiene una influenza maggiore.

Le stesse figure sono state tracciate utilizzando l'approccio a scenario con saturazione del disturbo, Figura 2.3 per il sistema (2.35) e Figura 2.4 per il sistema (2.36).

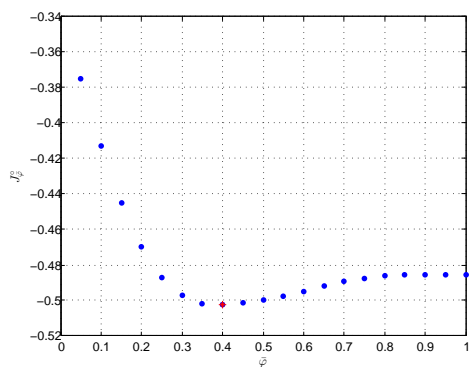
Utilizzando l'approccio a scenario generalmente i valori di  $\bar{\varphi}$  ottimi non si scostano molto da quelli ottenuti con il metodo robusto. La maggiore differenza rispetto all'approccio robusto è nell'andamento di  $J_{\bar{\varphi}}^o$  per valori di  $\bar{\varphi}$  maggiori di quello ottimo: mentre con l'approccio robusto la cifra di merito cresce velocemente, con l'approccio a scenario  $J_{\bar{\varphi}}^o$  peggiora in modo meno rapido o si assesta nel caso  $\sigma = 0.2$ . Questo comportamento rispecchia quanto rilevato nelle prove precedenti in cui per valori di  $\bar{\varphi}$  elevati si riscontra una differenza tra le prestazioni ottenute con l'approccio robusto e quelle ottenute con l'approccio a scenario a favore di quest'ultimo.



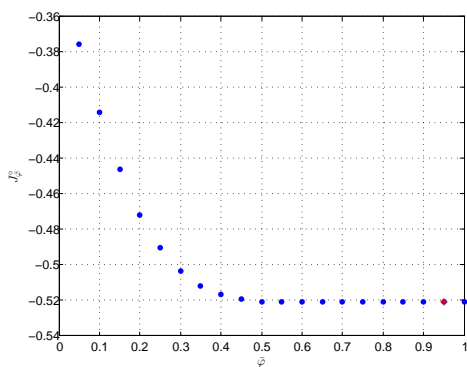
(a) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.5$ .



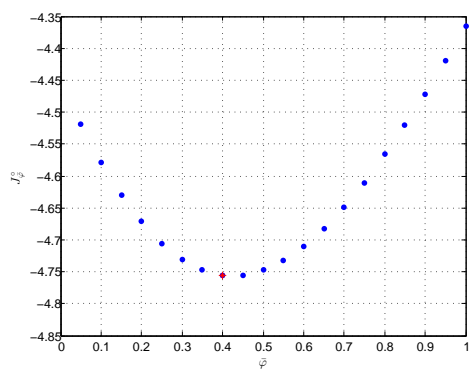
(b) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.5$ .



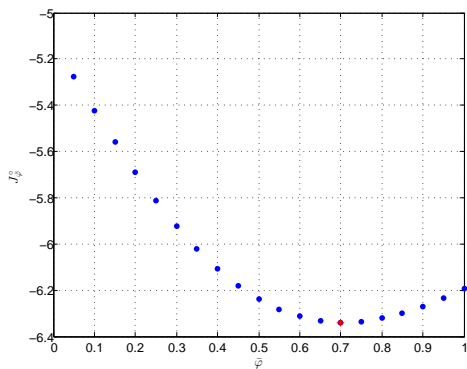
(c) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.2$ .



(d) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.2$ .

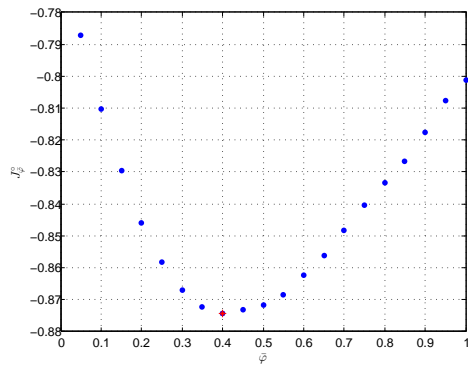


(e) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.8$ .

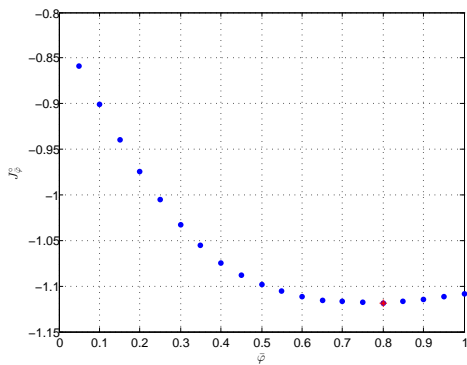


(f) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.8$ .

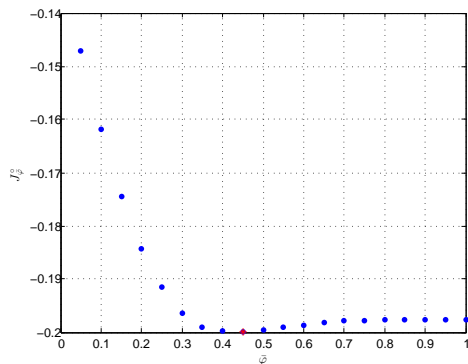
Figura 2.3: Sistema (2.35). Valori della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}^0$  per diversi valori di  $\bar{\varphi}$ ; in rosso il minimo.



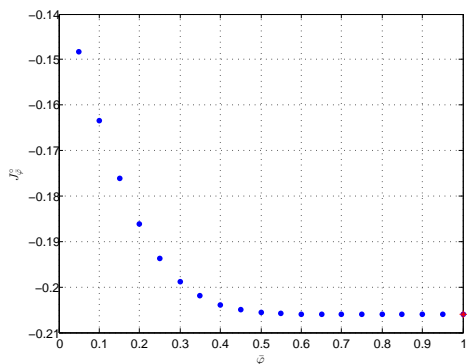
(a) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.5$ .



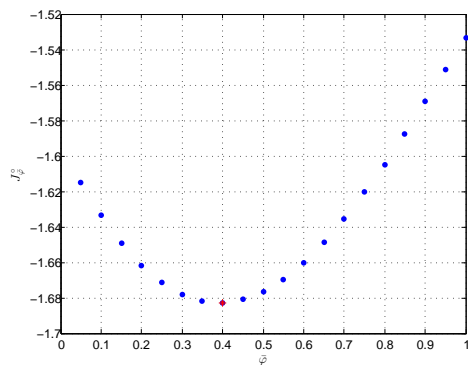
(b) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.5$ .



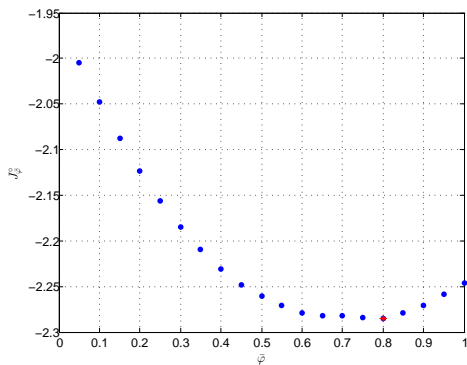
(c) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.2$ .



(d) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.2$ .



(e) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.3$   $\sigma = 0.8$ .



(f) Metodo scenario con saturazione del disturbo,  $U_M = 0.5$   $\sigma = 0.8$ .

Figura 2.4: Sistema (2.36). Valori della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}^o$  per diversi valori di  $\bar{\varphi}$ ; in rosso il minimo.

### 2.4.3 Osservazioni sulle indicazioni emerse dalle prove

Dalle prove è emerso, per quanto riguarda l'approccio robusto, che esso presenta prestazioni peggiori o, in alcuni casi, simili all'approccio a scenario con saturazione; in particolare presenta una forte sensibilità al parametro di saturazione del disturbo  $\bar{\varphi}$  per cui risulta piuttosto problematica la scelta stessa di  $\bar{\varphi}$ : solo quando questo è ben tarato si ottengono prestazioni simili o di poco peggiori all'approccio a scenario con saturazione, mentre in caso di scelta di valori non ottimali per  $\bar{\varphi}$ , specie se elevati, le prestazioni peggiorano in modo significativo. Le soluzioni presentano spesso una matrice  $\Theta$  con poche sottodiagonali non nulle così che parametrizzazioni molto ridotte possono essere utilizzate, riducendo il tempo di calcolo richiesto che risulta comunque inferiore a quello necessario per l'approccio a scenario.

L'approccio a scenario è preferibilmente da utilizzare con la funzione di saturazione del disturbo, eventualmente scegliendo un  $\bar{\varphi}$  elevato con lo scopo di evitare gli effetti di valori del disturbo elevati ed improbabili nelle estrazioni. L'approccio a scenario con saturazione del disturbo presenta una minore sensibilità al parametro  $\bar{\varphi}$  che può quindi essere scelto con maggiore facilità; le prestazioni risultano sempre migliori o al più simili a ciò che si ottiene con l'approccio robusto. Il fatto di avere i vincoli rispettati solamente con data probabilità non inficia le prestazioni, come viene mostrato nel Capitolo 4, poiché la probabilità di violazione è mantenuta sempre molto ridotta. La parametrizzazione della matrice  $\Theta$  va scelta tenendo conto che spesso la matrice  $\Theta$  risulta piena: tuttavia l'utilizzo delle sole prime sottodiagonali risulta sufficiente per ottenere buone prestazioni e ridurre così il tempo di calcolo richiesto, soprattutto in presenza di orizzonti di predizione lunghi.

## Appendice al Capitolo 2

Si prende in considerazione un sistema scalare, nella cifra di merito il peso sull'azione di controllo è nullo mentre quello sullo stato è posto uguale a 1, si considera lo stato iniziale nullo. La variabile di controllo è generata a partire dal disturbo saturato con la funzione  $\varphi(\cdot)$  definita in (2.6) e da un termine in anello aperto che non viene utilizzato poiché lo stato iniziale è nullo. Si considera come sempre un disturbo a media nulla, incorrelato a istanti di tempo diversi, ma con una qualsiasi distribuzione di probabilità simmetrica  $f(w)$ .

$$x_{t+1} = ax_t + bu_t + b_w w_t \quad (2.37)$$

$$u_t = \theta_t \varphi(w_{t-1}) + \gamma_t \quad (2.38)$$

$$J = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^M x_{t+i}^2\right]. \quad (2.39)$$

Si può scrivere l'espressione della varianza dello stato all'istante  $t+2$  sfruttando le equazioni del sistema e tenendo conto che lo stato iniziale è nullo e quindi risulta nulla anche  $u_0$ :

$$x_0 = 0 \quad (2.40)$$

$$x_1 = ax_0 + bu_0 + b_w w_0 = b_w w_0 \quad (2.41)$$

$$x_2 = ab_w w_0 + bu_1 + b_w w_1 = ab_w w_0 + b\theta_1 \varphi(w_0) + b_w w_1 \quad (2.42)$$

$$\mathbb{E}[x(t+2)^2] = a^2 b_w^2 L_{ww} + b^2 \theta^2 L_{\varphi\varphi} + 2ab_w b\theta L_{\varphi w} + b_w^2 L_{ww}, \quad (2.43)$$

in cui:

$$L_{ww} = \mathbb{E}[w^2] \quad L_{\varphi w} = \mathbb{E}[\varphi(w)w] \quad L_{\varphi\varphi} = \mathbb{E}[\varphi(w)^2]. \quad (2.44)$$

Si può notare come sia stata sfruttata l'ipotesi di non correlazione e che i termini che non dipendono da  $\theta$  sono ininfluenti per la minimizzazione.

Dapprima si considera il caso in cui non sono presenti vincoli, in questo caso si può minimizzare la cifra di merito rispetto a  $\theta$ . Il valore di  $\theta$  per cui

si ottiene il minimo dipende da  $\bar{\varphi}$ , si nota che in realtà la cifra di merito risulta tanto minore quanto più elevato si sceglie  $\bar{\varphi}$ , come ci si può aspettare dato che sull'azione di controllo non vi sono né vincoli né penalizzazioni nella cifra di merito considerata.

Nel caso in cui siano presenti vincoli, si decide di scegliere  $\theta$  in modo da sfruttare la massima azione di controllo disponibile senza violare i vincoli:  $\theta$  risulta funzione di  $\bar{\varphi}$ . Si procede minimizzando la cifra di merito che, però, data la scelta di  $\theta$  non dipende più esplicitamente da questo parametro, ma solamente da  $\bar{\varphi}$ , ottenendo così il valore di  $\bar{\varphi}$  per cui si ha il minimo.

Nel caso in cui i vincoli sulla variabile di controllo non fossero presenti o fossero inefficaci la varianza (2.43) sarebbe minimizzata uguagliando a 0 la sua derivata rispetto a  $\theta$ .

$$2b^2\theta L_{\varphi\varphi} + 2ab_w b L_{\varphi w} = 0 \quad (2.45)$$

$$\theta = -\frac{ab_w}{b} \frac{L_{\varphi w}}{L_{\varphi\varphi}}. \quad (2.46)$$

Il risultato rispecchia quanto si otterrebbe con un controllo a minima varianza cioè  $\theta = -\frac{ab_w}{b}$ , con l'aggiunta del fattore correttivo  $\frac{L_{\varphi w}}{L_{\varphi\varphi}}$  dovuto alla presenza della funzione  $\varphi(w)$ . Andando ora a sostituire il valore di  $\theta$  ottenuto nella varianza dello stato (2.43) (in cui sono stati rimossi i termini costanti ininfluenti) si ottiene:

$$-a^2 b_w^2 \frac{L_{\varphi w}^2}{L_{\varphi\varphi}} = -2a^2 b_w^2 \frac{\left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi} w f(w) dw \right)^2}{\int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi}^2 f(w) dw}. \quad (2.47)$$

Se si deriva la (2.47) rispetto a  $\bar{\varphi}$  risulta che la varianza dello stato (2.43) è monotona decrescente rispetto a  $\bar{\varphi}$ . Il risultato è coerente con quanto ci si aspetta: scegliendo un  $\bar{\varphi}$  più ampio ci si avvicina al caso di compensazione

ideale del disturbo.

$$-4a^2b_w^2 \left[ \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi} w f(w) dw \right) \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} w f(w) dw \right. \quad (2.48)$$

$$\left. \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi}^2 f(w) dw \right) - \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi} w f(w) dw \right)^2 \right. \\ \left. \bar{\varphi} \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} f(w) dw \right] \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi}^2 f(w) dw \right)^{-2} \leq 0$$

$$- \left[ \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} w f(w) dw \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi}^2 f(w) dw \right) - \right. \quad (2.49) \\ \left. \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi} f(w) dw \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi}^2 f(w) dw \right) \right] \leq 0$$

$$\underbrace{\int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw}_{\geq 0} \underbrace{\left( \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} w f(w) dw - \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi} f(w) dw \right)}_{\geq 0} \geq 0. \quad (2.50)$$

Se ora si prendono in considerazione vincoli effettivamente limitanti per la variabile di controllo, considerando che il termine  $\gamma$  è nullo, il massimo valore che può essere raggiunto da  $\theta$  è:

$$u = \theta \bar{\varphi} = U_M \quad \theta = \frac{U_M}{\bar{\varphi}}. \quad (2.51)$$

Il valore di  $\theta$  ricavato in (2.51) viene sostituito nella (2.43) (in cui sono stati rimossi i termini costanti), si ottiene:

$$2b^2 \frac{U_M^2}{\bar{\varphi}^2} \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi}^2 f(w) dw \right) - \quad (2.52) \\ -4|ab_w b| \frac{U_M}{\bar{\varphi}} \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w) dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi} w f(w) dw \right).$$

La presenza del segno ‘-’ è dovuta al fatto che già è noto che  $\theta$  assumerà il segno opportuno per far sì che il secondo termine complessivamente risulti

negativo. Si procede ora derivando la (2.52) rispetto a  $\bar{\varphi}$ :

$$\begin{aligned}
& 2b^2U_M^2 \frac{-2}{\bar{\varphi}^3} \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w)dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi}^2 f(w)dw \right) + \quad (2.53) \\
& + 2b^2U_M \frac{1}{\bar{\varphi}^2} \left( 2\bar{\varphi} \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} f(w)dw \right) - \\
& - 4|ab_w b|U_M \frac{-1}{\bar{\varphi}^2} \left( \int_0^{\bar{\varphi}} w^2 f(w)dw + \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} \bar{\varphi} w f(w)dw \right) - \\
& - 4|ab_w b|U_M \frac{1}{\bar{\varphi}} \left( \int_{\bar{\varphi}}^{+\infty} w f(w)dw \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Si pone come soluzione di tentativo:

$$\bar{\varphi} = U_M \left| \frac{b}{ab_w} \right| \tilde{\varphi} \quad (2.54)$$

ottenendo (la notazione di valore assoluto è stata omessa  $a$ ,  $b$  e  $b_w$  sono da intendersi in modulo):

$$\begin{aligned}
& - \frac{4a^3b_w^3}{bU_M\tilde{\varphi}^3} \left( \int_0^{\tilde{\varphi}} w^2 f(w)dw + \int_{\tilde{\varphi}}^{+\infty} \tilde{\varphi}^2 f(w)dw \right) + \quad (2.55) \\
& + \frac{4a^3b_w^3}{bU_M\tilde{\varphi}^3} \int_{\tilde{\varphi}}^{+\infty} \tilde{\varphi}^2 f(w)dw + \\
& + \frac{4a^3b_w^3}{bU_M\tilde{\varphi}^2} \left( \int_0^{\tilde{\varphi}} w^2 f(w)dw + \int_{\tilde{\varphi}}^{+\infty} \tilde{\varphi} w f(w)dw \right) - \\
& - \frac{4a^3b_w^3}{bU_M\tilde{\varphi}^2} \int_{\tilde{\varphi}}^{+\infty} \tilde{\varphi} w f(w)dw \geq 0
\end{aligned}$$

$$- \frac{4a^3b_w^3}{bU_M\tilde{\varphi}^3} \int_0^{\tilde{\varphi}} w^2 f(w)dw + \frac{4a^3b_w^3}{bU_M\tilde{\varphi}^2} \int_0^{\tilde{\varphi}} w^2 f(w)dw \geq 0. \quad (2.56)$$

Se si impone  $\tilde{\varphi} = 1$  si ottiene che la derivata si annulla, inoltre valutando la funzione:

$$- \frac{K}{\tilde{\varphi}^3} + \frac{K}{\tilde{\varphi}^2} \geq 0 \quad K = \frac{4a^3b_w^3}{bU_M} \int_0^{\tilde{\varphi}} w^2 f(w)dw > 0 \quad (2.57)$$

si nota come essa sia positiva per  $\tilde{\varphi} > 1$  e negativa per  $\tilde{\varphi} < 1$ . Quindi il punto corrispondente a:

$$\bar{\varphi} = U_M \left| \frac{b}{ab_w} \right| \quad (2.58)$$



è l'unico punto di minimo per la funzione (2.52) considerata. Sostituendo il valore di  $\bar{\varphi}$  nella (2.51) si ottiene il valore di  $\theta$  corrispondente:

$$\theta = -\frac{ab_w}{b}. \quad (2.59)$$

Si può vedere come altri valori portino a un peggioramento della varianza (ricordando che fissato  $\bar{\varphi}$  la (2.43) risulta una parabola in  $\theta$ ).

Riassumendo si è dimostrato che: in caso i vincoli non siano presenti si ha:

$$\theta = -\frac{ab_w}{b} \frac{L_{\varphi w}}{L_{\varphi\varphi}}, \quad (2.60)$$

in questo caso conviene utilizzare la saturazione del disturbo più larga possibile.

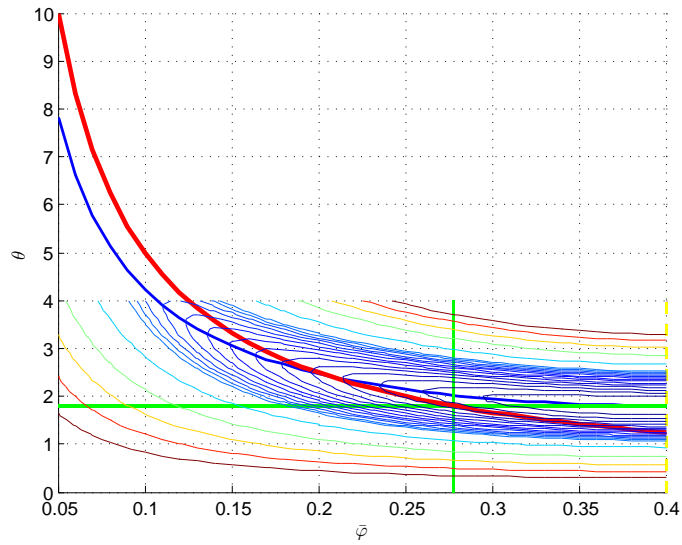
In presenza di vincoli si ha:

$$\theta = \pm \frac{U_M}{\bar{\varphi}}, \quad (2.61)$$

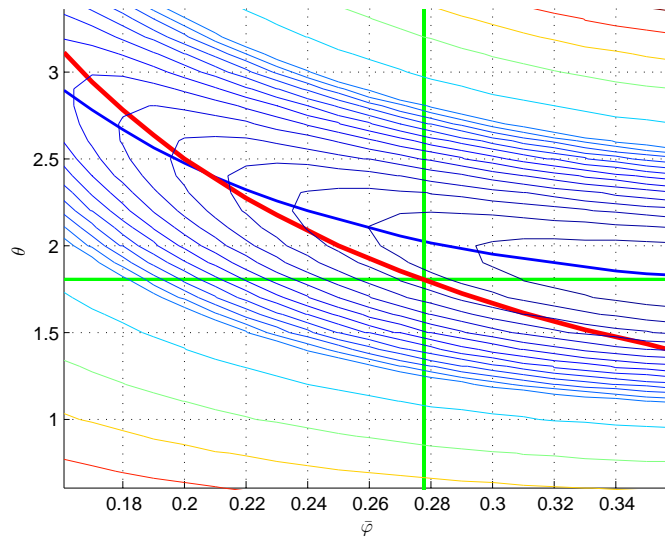
in questo caso il minimo della varianza (2.43) si ottiene ponendo:

$$\bar{\varphi} = U_M \left| \frac{b}{ab_w} \right|. \quad (2.62)$$

Per visualizzare in modo più chiaro e diretto quanto è stato sviluppato nel procedimento si riporta la Figura 2.5 in cui sul piano  $(\bar{\varphi} \theta)$  sono state riportate le curve di livello della varianza dello stato (2.43). Si è considerato un disturbo con distribuzione uniforme e tutto è stato riportato nel primo quadrante per maggiore chiarezza.



(a)



(b)

Figura 2.5: Curve di livello della varianza dello stato (2.43) (linee sottili). In blu marcato  $\theta = \frac{ab_w}{b} \frac{L_{\varphi w}}{L_{\varphi \varphi}}$ . In rosso marcato  $\theta = \frac{U_M}{\bar{\varphi}}$ . In verde  $\theta = \frac{ab_w}{b}$ ,  $\bar{\varphi} = \frac{U_M b}{ab_w}$ . Il minimo della varianza dato un  $\bar{\varphi}$  si trova sulla linea blu: aumentando  $\bar{\varphi}$  questo diminuisce, ma ad un certo punto intervengono i vincoli (il punto in cui la linea blu passa sopra la linea rossa), non è quindi più possibile seguire la linea blu per diminuire la varianza. Proseguendo lungo la linea rossa si trova un unico punto di minimo corrispondente ai valori di  $\bar{\varphi}$  e  $\theta$  calcolati.

Una possibile estensione non dimostrata, ma che emerge chiaramente dalle prove è il fatto che questo risultato si estende anche a orizzonti di predizione più lunghi, ovvero si trova che la politica ottima risulta quella di spendere il massimo possibile dell'azione di controllo per compensare al meglio l'ultimo valore del disturbo e, quindi, non considerare ciò che potrebbe essere stato lasciato in eredità dagli istanti precedenti in quanto non perfettamente compensato.

Il risultato ottenuto seppur molto parziale, è interessante soprattutto perché mette in luce che il valore ottimo di  $\bar{\varphi}$  non dipende dalla distribuzione di probabilità del disturbo, ma solamente dalle caratteristiche del sistema e soprattutto dai vincoli. In particolare suggerisce di compensare in modo esatto i valori del disturbo fino a quando questo è consentito dai vincoli, mentre per i valori del disturbo che superano questo limite e che non possono essere compensati, conviene intervenire con la saturazione. Questo consente di mantenere i coefficienti  $\theta$  al valore per cui si ottiene una compensazione ottimale: non è conveniente scegliere un  $\bar{\varphi}$  maggiore e di conseguenza ridurre i  $\theta$  ottenendo una compensazione peggiore per i valori del disturbo minori di  $\bar{\varphi}$ ; non è conveniente nemmeno scegliere un  $\bar{\varphi}$  minore: valori del disturbo compensabili verrebbero saturati senza che ce ne sia necessità.

Come detto rimuovendo le ipotesi iniziali, il risultato perde di validità: nel caso di stato iniziale non nullo e non perfettamente compensato da  $\gamma_\tau$  non c'è più la possibilità da parte del termine in feedback di utilizzare tutta l'azione di controllo a disposizione, come invece è stato assunto nei passaggi precedenti. Anche in caso sia presente nella cifra di merito un peso sulla variabile di controllo la soluzione trovata non risulta più valida.

## Capitolo 3

# Controllo con vincoli su entrambe le variabili di stato e di controllo

### 3.1 Introduzione

In questo capitolo si affronta il tema della risoluzione di problemi di controllo su orizzonte finito nel caso in cui siano presenti vincoli anche sullo stato e non solamente sull'azione di controllo.

Rispetto al caso del capitolo precedente, in cui si trattavano solo vincoli sull'azione di controllo, il problema risulta ulteriormente complicato dal fatto che i vincoli sullo stato possono far sì che il problema risulti unfeasible sia nel caso in cui esso è impostato come problema robusto sia nel caso in cui è impostato come problema chance-constrained. Questo perché l'azione di controllo è limitata e sullo stato agisce un disturbo additivo che può addirittura essere a supporto non limitato.

Vengono proposti metodi per la riformulazione del problema che consentono di renderlo feasible e anche computazionalmente trattabile.

Per ogni metodo proposto sono state effettuate delle prove su semplici esempi numerici ai fini di valutare l'influenza sulle prestazioni ottenute di alcuni

parametri che intervengono nella riformulazione del problema.

### 3.2 Definizione del problema

I problemi di controllo da cui si è partiti sono quelli definiti nella Sezione 1.2 descritti in (1.35) e in (1.36) e qui di seguito riportati:

$$\begin{aligned} & \min_{\Theta, \Gamma} J(\Theta, \Gamma) & (3.1) \\ \text{soggetto a: } & \begin{cases} \|\mathbf{S}_u(\Theta \mathbf{w} + \Gamma)\|_\infty \leq 1 \\ \|\mathbf{S}_x \mathbf{x}(\mathbf{w})\|_\infty \leq 1 \end{cases} \quad \forall \mathbf{w} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \min_{\Theta, \Gamma} J(\Theta, \Gamma) & (3.2) \\ \text{soggetto a: } & \mathbb{P}\left(\|\mathbf{S}_u(\Theta \mathbf{w} + \Gamma)\|_\infty \leq 1 \wedge \|\mathbf{S}_x \mathbf{x}(\mathbf{w})\|_\infty \leq 1\right) \geq 1 - \epsilon, \end{aligned}$$

in cui si suppone di voler imporre dei vincoli per lo stato (o una sua combinazione lineare), con l'obiettivo di confinarlo entro una certa regione limitata. La possibilità di imporre vincoli sullo stato può essere utile per mantenere lo stato stesso entro una regione di sicurezza o ad esempio per far sì che esso non si allontani troppo dalla zona in cui vale l'approssimazione lineare del sistema. Un'applicazione in cui è presente una necessità di questo tipo è presentata nel Capitolo 4.

Purtroppo il problema risulta in generale unfeasible poiché  $x_t$  dipende da un disturbo a valori non limitati e non è possibile imporre che lo stato sia confinato in una data regione limitata robustamente rispetto alle realizzazioni del disturbo. Anche imporre il vincolo solamente con una alta probabilità come nei problemi chance-constrained può in ugual modo portare a problemi unfeasible in quanto, date le limitazioni sulla variabile di controllo non è possibile sapere a priori se si dispongono dei gradi di libertà necessari per mantenere lo stato in una data regione a fronte della maggior parte delle realizzazioni del disturbo.

Per evitare problemi relativi alla impossibilità di soddisfare i vincoli aggiuntivi sullo stato, in questa tesi si propone di trattarli in modo differente,

adottando la seguente espressione, modificata rispetto a quella presentata nel Capitolo 1:

$$\|S_{\tau+i}^x x_{\tau+i}\|_\infty \leq h, \quad i = 1, \dots, M, \quad (3.3)$$

dove  $h$  non è una costante, ma rappresenta un valore di saturazione da ottimizzare e per questo viene esplicitata a destra del segno di minore o uguale e non più inglobata nella matrice  $S_{\tau+i}^x$  che diventa quindi una matrice di selezione per le componenti dello stato. In questo modo si cerca di limitare il più possibile il valore delle variabili di stato pesate da una matrice opportuna compatibilmente con gli altri vincoli sulla variabile di controllo e con la dinamica del sistema.

Da notare che in (3.3) si è escluso lo stato attuale  $x_\tau$  perché non è possibile influenzarne il valore agendo sulla variabile di controllo.

I vincoli sullo stato possono essere riscritti in modo compatto come segue:

$$\|\mathbf{S}_x \mathbf{x}\|_\infty \leq h \quad (3.4)$$

dove si è posto:

$$\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{\tau+1}^x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_{\tau+M}^x \end{bmatrix}.$$

Per imporre vincoli su  $p$  diverse combinazioni lineari dello stato, si possono considerare vincoli aggiuntivi della forma (3.4):

$$\|\mathbf{S}_x^j \mathbf{x}\|_\infty \leq h_j \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (3.5)$$

dove l'indice  $j$  indica diverse matrici  $\mathbf{S}_x$  di selezione e diversi valori di saturazione  $h$ . Ad esempio se  $x \in \mathbb{R}^3$  e si volesse limitare ognuna delle componenti dello stato con una variabile di ottimizzazione  $h$  diversa si costruirebbe la matrice:

$$S_{\tau+i}^{x(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, M \quad (3.6)$$

che seleziona la prima componente dello stato. Quindi si ottiene:

$$\mathbf{S}_x^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{\tau+1}^{x(1)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_{\tau+M}^{x(1)} \end{bmatrix}.$$

Procedendo similmente per la seconda e la terza componente dello stato si hanno le matrici:

$$S_{\tau+i}^{x(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, M \quad (3.7)$$

$$S_{\tau+i}^{x(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, M \quad (3.8)$$

$$\mathbf{S}_x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{\tau+1}^{x(2)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_{\tau+M}^{x(2)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_x^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{\tau+1}^{x(3)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_{\tau+M}^{x(3)} \end{bmatrix}.$$

I vincoli sullo stato risulteranno:

$$\|\mathbf{S}_x^1 \mathbf{x}\|_\infty \leq h_1 \quad (3.9)$$

$$\|\mathbf{S}_x^2 \mathbf{x}\|_\infty \leq h_2$$

$$\|\mathbf{S}_x^3 \mathbf{x}\|_\infty \leq h_3$$

### 3.3 Soluzione mediante penalizzazione della cifra di merito

L'idea di questo primo metodo è di introdurre una nuova cifra di merito data dalla somma pesata attraverso un coefficiente  $\mu > 0$  della funzione quadratica  $J$  in (1.4) con la somma delle variabili  $h_j$  in (3.5):

$$J_\mu = J + \mu \sum_{j=1,2,\dots,p} h_j$$

e di definire i problemi di tipo chance-constrained:

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathcal{F}, h_1, h_2, \dots, h_p} J_\mu & (3.10) \\ \text{soggetto a : } & \begin{cases} \|S_{\mathbf{u}}\mathbf{u}(w)\|_\infty \leq 1 & \forall w \\ \mathbb{P}\left(\|\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^j \mathbf{x}(w)\|_\infty \leq h_j \quad j = 1, 2, \dots, p\right) \geq 1 - \epsilon \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathcal{F}, h_1, h_2, \dots, h_p} J_\mu & (3.11) \\ \text{soggetto a : } & \mathbb{P}\left(\|S_{\mathbf{u}}\mathbf{u}(w)\|_\infty \leq 1 \wedge \|\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^j \mathbf{x}(w)\|_\infty \leq h_j \quad j = 1, 2, \dots, p\right) \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

La presenza di  $h_1, h_2, \dots, h_p$  nella cifra di merito fa sì che si cerchi di limitare le componenti dello stato selezionate dalle matrici  $\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^j$  il più possibile, compatibilmente con gli altri vincoli.  $\mu$  è un coefficiente mediante il quale si può modulare il peso relativo tra il valore della cifra di merito originaria  $J$  e la somma dei limiti sulle variabili di stato  $h_j$  nell'ottimizzazione.

Si noti che nel problema (3.10) i vincoli sulla variabile di controllo sono di tipo robusto, invece nel problema (3.11) i vincoli sull'ingresso sono in probabilità, in entrambi i problemi i vincoli sullo stato sono in probabilità.

Il problema (3.10) può essere risolto utilizzando per i vincoli sulla variabile di controllo l'approccio robusto presentato nella Sezione 2.2, basato sull'utilizzo per la generazione della variabile di controllo di una funzione affine nel disturbo saturato; per i vincoli in probabilità sullo stato viene utilizzato l'approccio a scenario. Il problema (3.11) può essere reso trattabile mediante la tecnica dello scenario sia per l'implementazione dei vincoli sullo stato sia per quelli sulla variabile di controllo che può essere generata come funzione del disturbo o del disturbo saturato. L'approccio a scenario richiede solamente che la cifra di merito e le funzioni che rappresentano i vincoli siano convesse per ogni realizzazione del disturbo. Pur di adottare come già fatto una funzione affine del disturbo (saturato o non saturato) per la generazione della variabile di controllo, la cifra di merito risulta ancora quadratica, avendo semplicemente aggiunto un termine lineare nelle nuove variabili  $h_j$  al funzionale di costo  $J(\Theta, \Gamma)$  in (1.27) o  $J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma)$  in (2.3) già



presi in considerazione in precedenza. Anche i vincoli:

$$\|\mathbf{S}_u \mathbf{u}\|_\infty \leq 1 \text{ e } \|\mathbf{S}_x^j \mathbf{x}\|_\infty \leq h_j \quad j = 1, \dots, p$$

risultano convessi per come sono stati definiti. Occorre inoltre notare che il numero  $d$  di variabili di ottimizzazione da considerare per determinare il numero di estrazioni necessario, deve essere aumentato comprendendo anche le variabili  $h_j$ . Quindi è possibile effettuare le estrazioni delle realizzazioni del disturbo  $\mathbf{w}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , in accordo alla sua distribuzione di probabilità in numero tale da soddisfare la relazione (2.16) e definire il problema in cui si considerano solamente i vincoli in corrispondenza delle realizzazioni estratte.

Quindi il problema corrispondente al problema (3.10) in cui si applica l'approccio robusto della Sezione 2.2 per i vincoli sulla variabile di controllo e l'approccio a scenario per i vincoli sullo stato risulta:

$$\begin{aligned} \min_{\Theta, \Gamma, h_1, \dots, h_p} J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) + \mu \sum_{j=1, \dots, p} h_j & \quad (3.12) \\ \text{soggetto a : } \begin{cases} -U_M \leq \gamma_j + \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M, & j = 1, \dots, Mm \\ -U_M \leq \gamma_j - \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M, & j = 1, \dots, Mm \\ \|\mathbf{S}_x^j \mathbf{x}(\mathbf{w}^{(i)})\|_\infty \leq h_j, & j = 1, \dots, p, i = 1 \dots N \end{cases} \end{aligned}$$

Il problema corrispondente al problema (3.11) risolto con l'approccio a scenario e variabile di controllo generata come funzione affine del disturbo saturato risulta:

$$\begin{aligned} \min_{\Theta, \Gamma, h_1, \dots, h_p} J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) + \mu \sum_{j=1, \dots, p} h_j & \quad (3.13) \\ \text{soggetto a : } \begin{cases} \|\mathbf{S}_u(\Theta \varphi(\mathbf{w}^{(i)}) + \Gamma)\|_\infty \leq 1 \\ \|\mathbf{S}_x^j \mathbf{x}(\mathbf{w}^{(i)})\|_\infty \leq h_j, & j = 1, \dots, p \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

oppure è possibile generare la variabile di controllo come funzione affine del disturbo non saturato ottenendo il problema:

$$\begin{aligned} \min_{\Theta, \Gamma, h_1, \dots, h_p} J(\Theta, \Gamma) + \mu \sum_{j=1, \dots, p} h_j & \quad (3.14) \\ \text{soggetto a : } \begin{cases} \|\mathbf{S}_u(\Theta \mathbf{w}^{(i)} + \Gamma)\|_\infty \leq 1 & i = 1, \dots, N, \\ \|\mathbf{S}_x^j \mathbf{x}(\mathbf{w}^{(i)})\|_\infty \leq h_j & j = 1, \dots, p \end{cases} \end{aligned}$$

I tre problemi risultano convessi e possono essere risolti facilmente purché il numero di vincoli non sia eccessivamente elevato. Valgono inoltre le garanzie previste dalla teoria dello scenario: la soluzione trovata risolvendo il problema con i vincoli corrispondenti alle realizzazioni estratte è feasible per il problema chance-constrained (3.10) o (3.11) con probabilità maggiore o uguale a  $1 - \beta$  e quindi con tale confidenza i vincoli sono rispettati con probabilità non minore di  $1 - \epsilon$ . Nel caso della soluzione al problema (3.12), questa garanzia in probabilità vale solo per i vincoli sullo stato mentre quelli sull'azione di controllo sono garantiti in modo robusto.

Rimangono ancora valide le osservazioni fatte alla fine della Sezione 2.3.2 relative alla possibile conservatività della tecnica a scenario se implementata senza rimozione dei vincoli.

### 3.3.1 Scelta del coefficiente $\mu$

Come accennato in precedenza la scelta del peso  $\mu$  regola l'importanza relativa da attribuire ai due diversi obiettivi di minimizzazione rappresentati dalla cifra di merito  $J$  e dalla somma dei limiti sullo stato  $h_j$ . Chiaramente la scelta di  $\mu$  deve essere ben ponderata per non privilegiare eccessivamente un obiettivo a discapito dell'altro, ma, purtroppo, a-priori risulta difficile individuare quale sia il valore di  $\mu$  opportuno da utilizzare per ottenere il migliore trade-off tra i due.

Una possibilità è quella di prefissare a-priori un insieme di  $K$  valori per  $\mu$  in modo da coprire un intervallo di interesse, risolvere i problemi a scenario corrispondenti tutti sulle stesse realizzazioni e poi scegliere la soluzione che fornisce il miglior compromesso tra il valore di  $J$  ottenuto e i valori del-

le variabili  $h_1, h_2, \dots, h_p$ . In questo approccio si usa la tecnica a scenario ripetutamente per  $K$  volte, riutilizzando gli stessi scenari estratti per problemi con differente cifra di merito. In virtù dei risultati teorici a riguardo dell'approccio a scenario, si può affermare che ognuna delle soluzioni trovate risulta feasible per il problema chance-constrained corrispondente con confidenza non minore di  $1 - \beta$ . È possibile stabilire un bound per la confidenza complessiva delle soluzioni trovate attraverso la somma dei parametri  $\beta$ . Quindi se si scelgono  $K$  valori la confidenza complessiva delle soluzioni risulta  $1 - K\beta$ : questo tuttavia non rappresenta un grave problema in quanto è sufficiente scegliere il coefficiente  $\beta$  pari alla confidenza complessiva desiderata diviso per  $K$  per ottenere la confidenza complessiva voluta. Si noti che poiché nella formula per ricavare il numero di scenari necessari (2.16)  $\beta$  compare con il logaritmo questo non incide molto su  $N$ .

Una problematica legata a questo approccio è che i valori di  $\mu$  devono essere scelti in numero finito e a-priori: il valore del coefficiente  $\mu$  tuttavia non è di scelta immediata e a-priori non è facile quantificare quale sia il suo impatto sui diversi obiettivi dati dalla cifra di merito  $J$  e dalle variabili  $h_1, h_2, \dots, h_p$ . Bisogna scegliere i valori  $\mu$  senza sapere se ad essi corrisponderanno le soluzioni desiderate di compromesso tra gli obiettivi, ovvero se per i valori di  $\mu$  scelti si vada effettivamente ad esplorare il trade-off tra i due obiettivi in una zona di interesse.

In alternativa, questa problematica può essere ovviata ricorrendo ad un approccio differente, in cui si fissa a-priori il livello di degrado accettabile per  $J$  e si ottimizza poi la somma degli  $h_j$ .

Questo approccio è presentato nella Sezione 3.4

### 3.3.2 Esempi numerici

#### Analisi della dipendenza della soluzione dal peso $\mu$

L'obiettivo degli esempi numerici presentati in questa sezione è quello di valutare l'andamento della cifra di merito  $J$  e delle variabili  $h_j$  che limitano lo stato al variare del parametro  $\mu$ . Le prove sono state effettuate sui sistemi

di secondo ordine, già utilizzati nelle prove del Capitolo 2, dati da:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.45 \\ 1.2 & 1.2 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

in cui  $w_1$  e  $w_2$  sono due rumori bianchi gaussiani indipendenti, a media nulla e con varianza pari per entrambi a  $\sigma^2 = 0.5^2$ .

I parametri scelti sono  $\beta = 10^{-10}$ ,  $\epsilon = 0.025$ ,  $\bar{\varphi} = \sigma$ , mentre l'orizzonte temporale è  $M = 8$ . La matrice  $\mathbf{S}_u = I_8 \frac{10}{3}$  è definita in modo tale che la variabile di controllo debba risultare in tutti gli istanti di tempo considerati minore in modulo del valore  $U_M = 0.3$ . La parametrizzazione della matrice  $\Theta$  è stata scelta in modo che fossero utilizzate le prime 3 sottodiagonali con elementi liberi. I vincoli sullo stato sono costruiti attraverso le matrici  $\mathbf{S}_x^1$  e  $\mathbf{S}_x^2$  in modo che ogni componente dello stato sia limitata da una distinta variabile di ottimizzazione  $h_1$   $h_2$ , ad ogni istante di tempo partendo da uno stato iniziale nullo.

$$S_{\tau+i}^{x(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, M \quad (3.17)$$

$$S_{\tau+i}^{x(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, M \quad (3.18)$$

$$\mathbf{S}_x^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{\tau+1}^{x(1)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_{\tau+M}^{x(1)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{\tau+1}^{x(2)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_{\tau+M}^{x(2)} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Sono stati fatti variare oltre al parametro  $\mu$  anche i pesi  $Q$  ed  $R$  nella cifra di merito  $J$ . Per analizzare la dipendenza della soluzione da  $\mu$ , sono stati fissati 10 valori di  $\mu$ :

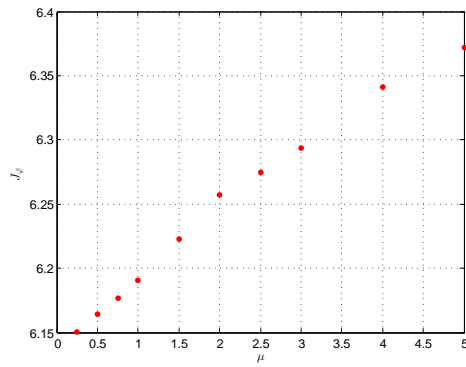
$$\mu \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5\}$$

e risolti i problemi di ottimizzazione (3.12), (3.13) per i due sistemi (3.15) e (3.16), utilizzando per ogni scelta di  $Q$  ed  $R$  e dell'approccio utilizzato le

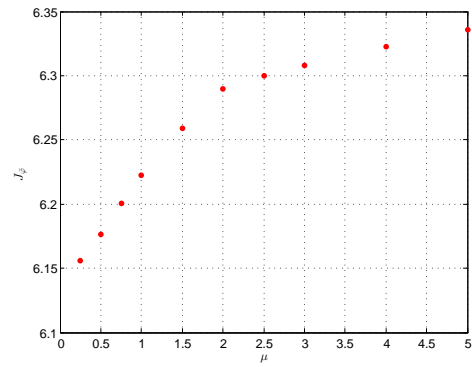
stesse realizzazioni del disturbo per la risoluzione dei problemi corrispondenti ai 10 diversi valori di  $\mu$ .

Nelle Figure dalla 3.1 alla 3.4 si può osservare, come previsto, il trade-off tra i due diversi obiettivi:  $J$  risulta crescente in  $\mu$  mentre la somma di  $h_1$  e  $h_2$  risulta decrescente per valori di  $\mu$  crescenti. In tutte le prove si nota come inizialmente per valori di  $\mu$  piccoli vi sia una forte crescita per  $J$  a cui corrisponde una rapida discesa di  $h_1$   $h_2$ , mentre al crescere di  $\mu$  si assiste ad un progressivo assestamento dei valori di  $h_1$   $h_2$ ; come ci si poteva aspettare non è possibile ridurre  $h_1$   $h_2$  oltre un certo limite visto che sullo stato agisce un disturbo additivo stocastico con una certa varianza. Anche la cifra di merito  $J$  tende ad assestarsi, ma più lentamente e raggiunge un valore quasi costante per valori di  $\mu$  più elevati: si può vedere come vi sia una forte sensibilità di  $J$  che cresce in modo significativo anche in corrispondenza di piccoli miglioramenti per  $h_1$   $h_2$ , questo soprattutto quando  $h_1$   $h_2$  si avvicinano al loro valore limite. È possibile, talvolta, individuare un punto abbastanza netto in cui  $h_1$   $h_2$  si assestano ad un valore quasi costante dopo una rapida discesa e per lo stesso valore di  $\mu$ ,  $J$  pur non assestandosi del tutto subisce un cambio di pendenza rallentando il suo peggioramento.

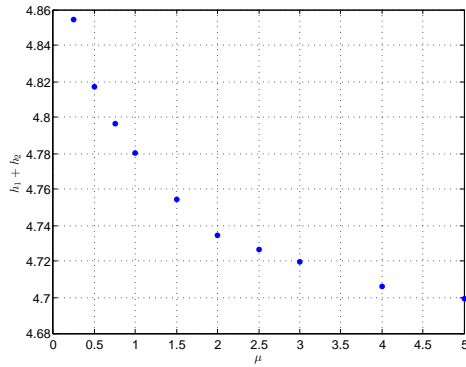
Questi andamenti si riscontrano sia per la soluzione del problema (3.12) sia per la soluzione del problema (3.13) ed in entrambi i sistemi (3.15) (3.16). Si nota anche che gli stessi andamenti si riscontrano (con piccole differenze) anche al variare dei pesi  $Q$  e  $R$  nella cifra di merito  $J$ : questo sia nel caso in cui sia presente solamente la matrice  $R$ , e quindi di fatto il trade-off riguarda la salvaguardia dell'azione di controllo e il miglioramento dei vincoli sullo stato dato da  $h_1$ ,  $h_2$ , sia nel caso in cui si utilizzi solamente la matrice  $Q$ . In questo ultimo caso poiché si è scelto di limitare le singole variabili di stato e non delle loro combinazioni lineari, il trade-off riguarda due diverse azioni, quella dovuta al peso  $Q$  e quella dovuta al peso  $\mu$ , entrambe volte ad agire sullo stato. Data la scelta del tipo di vincoli sullo stato il peso  $Q$  e il peso  $\mu$  tendono entrambi ad andare nella direzione della riduzione dello stato tut-



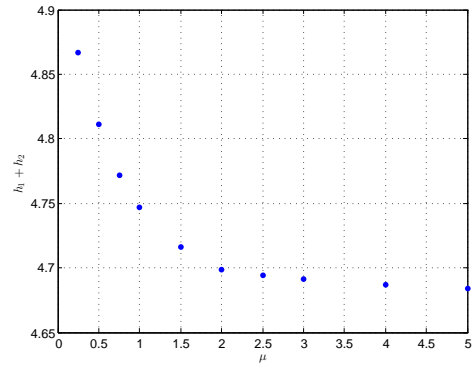
(a) Andamento di  $J_{\bar{\varphi}}$



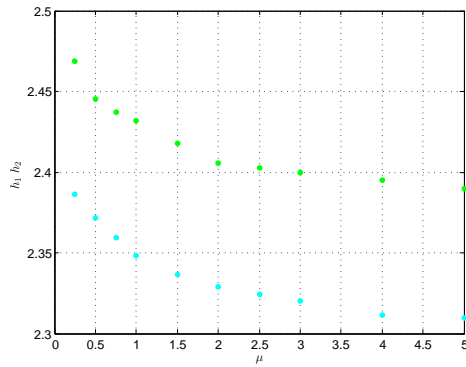
(b) Andamento di  $J_{\bar{\varphi}}$



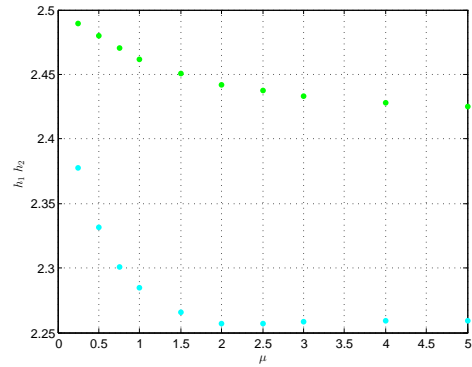
(c) Andamento di  $h_1 + h_2$



(d) Andamento di  $h_1 + h_2$

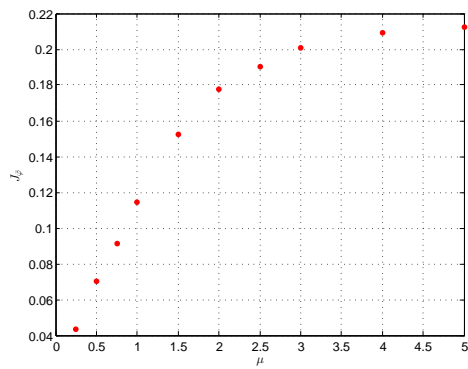


(e) Andamento di  $h_1$  in azzurro e  $h_2$  in verde

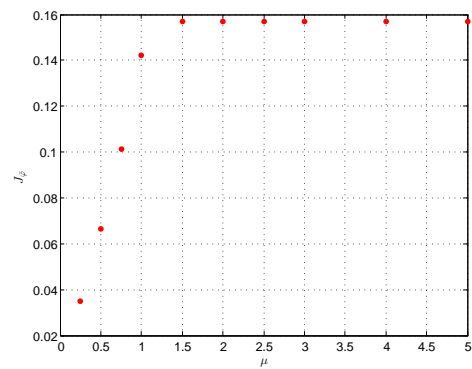


(f) Andamento di  $h_1$  in azzurro e  $h_2$  in verde

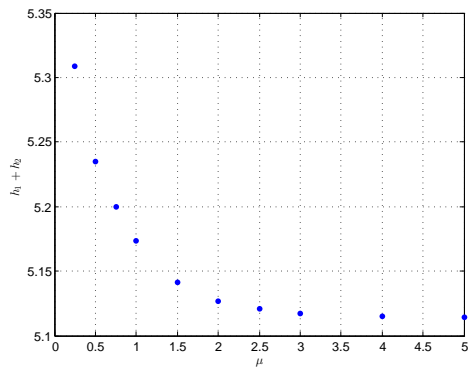
Figura 3.1: Sistema (3.15). Andamenti delle soluzioni ottenute risolvendo il problema di ottimizzazione (3.12) (prima colonna) o (3.13) (seconda colonna) per diversi valori di  $\mu$ , con  $Q = I_2$   $R = 1$ .



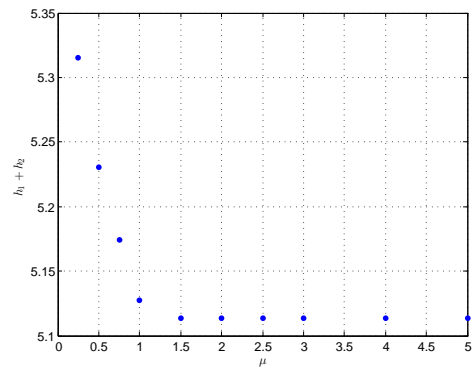
(a) Andamento di  $J_{\bar{\varphi}}$



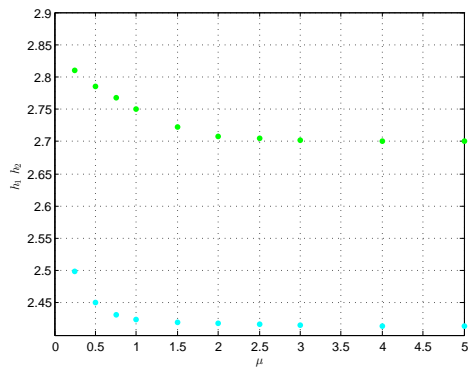
(b) Andamento di  $J_{\bar{\varphi}}$



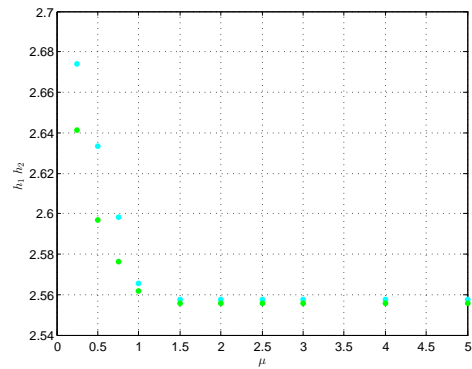
(c) Andamento di  $h_1 + h_2$



(d) Andamento di  $h_1 + h_2$

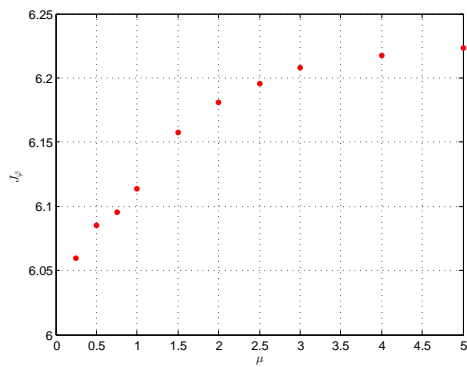


(e) Andamento di  $h_1$  in azzurro e  $h_2$  in verde

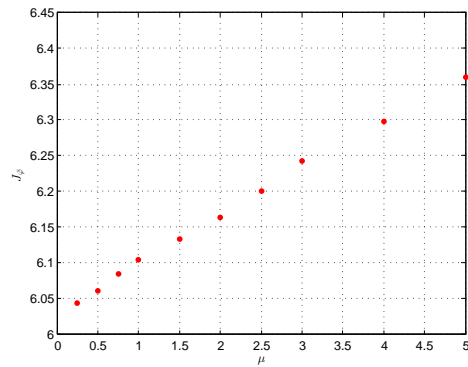


(f) Andamento di  $h_1$  in azzurro e  $h_2$  in verde

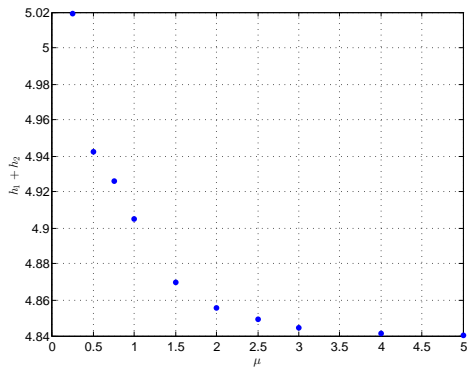
Figura 3.2: Sistema (3.15). Andamenti delle soluzioni ottenute risolvendo il problema di ottimizzazione (3.12) (prima colonna) o (3.13) (seconda colonna) per diversi valori di  $\mu$ , con  $Q = 0_2$   $R = 1$ .



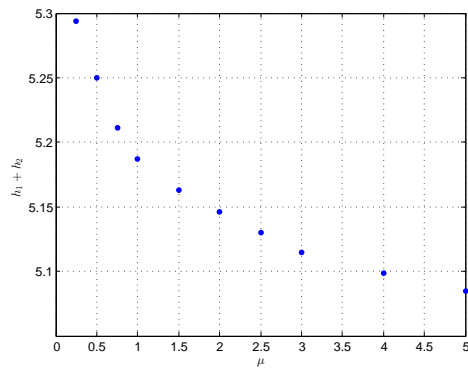
(a) Andamento di  $J_{\bar{\varphi}}$



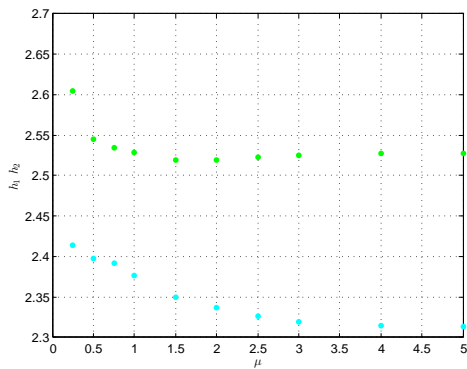
(b) Andamento di  $J_{\bar{\varphi}}$



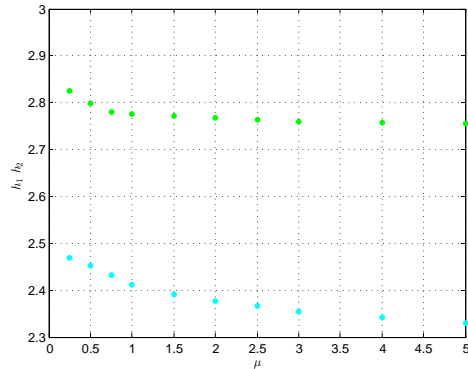
(c) Andamento di  $h_1 + h_2$



(d) Andamento di  $h_1 + h_2$



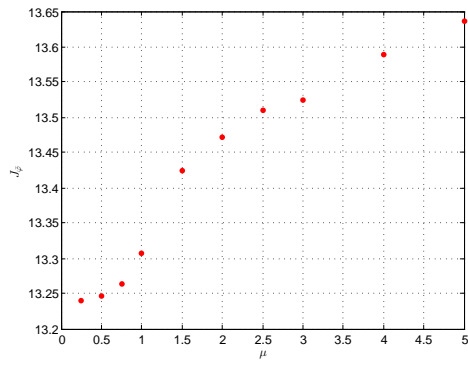
(e) Andamento di  $h_1$  in azzurro e  $h_2$  in verde



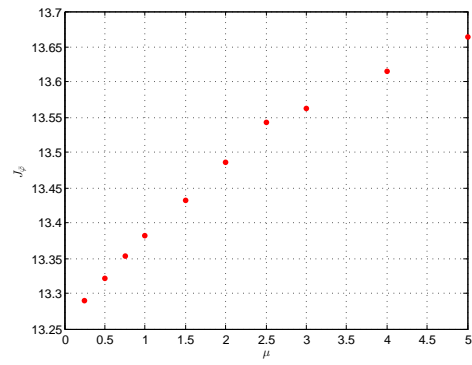
(f) Andamento di  $h_1$  in azzurro e  $h_2$  in verde

Figura 3.3: Sistema (3.15). Andamenti delle soluzioni ottenute risolvendo il problema di ottimizzazione (3.12) (prima colonna) o (3.13) (seconda colonna) per diversi valori di  $\mu$ , con  $Q = I_2$   $R = 0$ .

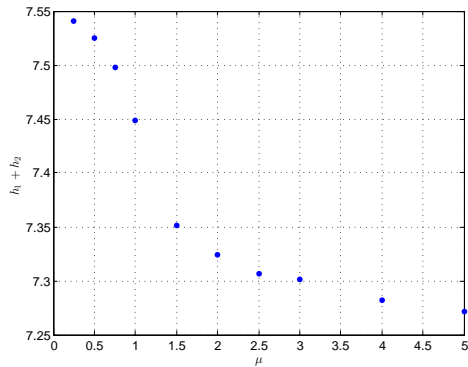




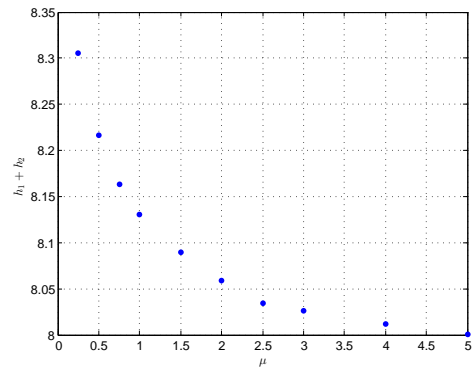
(a) Andamento di  $J_{\bar{\varphi}}$



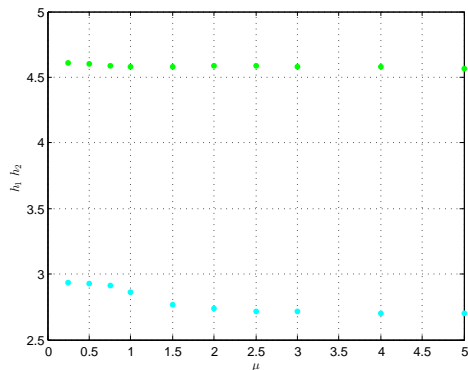
(b) Andamento di  $J_{\varphi}$



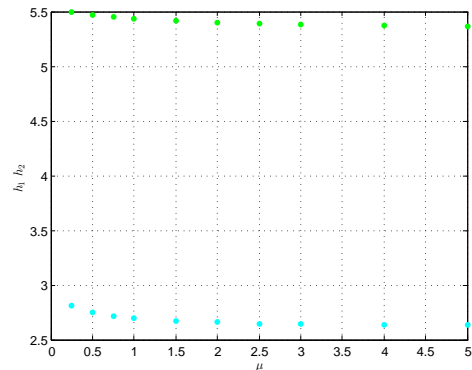
(c) Andamento di  $h_1 + h_2$



(d) Andamento di  $h_1 + h_2$



(e) Andamento di  $h_1$  in azzurro e  $h_2$  in verde



(f) Andamento di  $h_1$  in azzurro e  $h_2$  in verde

Figura 3.4: Sistema (3.16). Andamenti delle soluzioni ottenute risolvendo il problema di ottimizzazione (3.12) (prima colonna) o (3.13) (seconda colonna) per diversi valori di  $\mu$ , con  $Q = I_2$   $R = 1$ .

tavia con azioni differenti, come confermato dal fatto che al variare di  $\mu$   $J$  peggiori in favore del miglioramento di  $h_1, h_2$ ; nel caso gli obiettivi espressi dai due pesi fossero esattamente gli stessi si otterrebbero, invece, gli stessi valori costanti per tutti i  $\mu$  considerati, cosa che non accade. Quest'ultimo aspetto riguardante i diversi ruoli dei pesi  $Q$  e  $\mu$  è oggetto di una specifica serie di prove.

### **Analisi dell'effetto dei termini dipendenti dallo stato che compaiono in $J_\mu$**

In questa sezione sono riportate una serie di prove il cui obiettivo è quello di evidenziare il diverso ruolo svolto dai pesi  $Q$ , peso sullo stato nella cifra di merito  $J$ , e  $\mu$ , peso sulle variabili  $h_j$ .

Tale diverso ruolo risulta chiaro nel momento in cui si considerino vincoli sulle combinazioni lineari dello stato, ma non è così evidente quando invece si considerano vincoli sulle singole componenti dello stato.

In questa sezione si utilizzano le matrici  $\mathbf{S}_x^1$  e  $\mathbf{S}_x^2$  della sezione precedente in cui si vincola ogni componente dello stato singolarmente attraverso le variabili  $h_1$  e  $h_2$ . In questo modo sia la cifra di merito  $J$  sia le variabili  $h_1$  e  $h_2$  vanno ad agire sullo stato con un obiettivo che sembra piuttosto simile ovvero il mantenimento dello stato entro una regione la più limitata possibile. È possibile cogliere fin da subito alcune diversità: nella cifra di merito  $J$  viene considerata quella che risulta essere la norma 2 dello stato al quadrato, pesata attraverso la matrice  $Q$ , mentre le variabili  $h_1$  e  $h_2$  limitano, per come sono costruiti i vincoli, quella che risulta essere la norma infinito di ogni componente dello stato. Inoltre un'altra differenza è il fatto che la cifra di merito  $J$  consideri la presenza del disturbo stocastico solamente attraverso il valore atteso e quindi svolga un'azione sull'andamento medio. Le variabili  $h_1$  e  $h_2$ , invece, dipendono dalle realizzazioni del disturbo, non dal loro valore medio. Alla luce di queste differenze ci si aspetta che l'azione dei pesi  $Q$  e  $\mu$  sia diversa, pur con degli effetti comuni e un'influenza reciproca poiché agiscono entrambe sullo stato.

Le prove sono svolte proprio per cercare di mettere in luce e trovare conferma delle differenze tra diverse scelte per  $Q$  e  $\mu$ , in questo caso particolare. Le prove sono state tutte svolte sullo stesso insieme di realizzazioni estratte, per rendere il confronto possibile. I parametri utilizzati sono:  $\beta = 10^{-10}$ ,  $\epsilon = 0.025$ , orizzonte di predizione  $M = 8$ ,  $\bar{\varphi} = 0.5$ . La matrice  $\Theta$  ha 3 sottodiagonali di elementi distinti da progettare. Il sistema considerato è di secondo ordine, con poli reali entrambi in 0.95:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ -0.2 & 0.95 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

in cui i disturbi  $w_1$  e  $w_2$  sono rumori bianchi gaussiani indipendenti a media nulla e con varianza  $\sigma^2 = 0.25$ . Lo stato iniziale è nullo. Nelle prove variano, come detto, i pesi  $Q$  e  $\mu$ , mentre il peso  $R$  è fissato al valore 1. Altro parametro a variare è il limite sulla variabile di controllo  $U_M$  che inizialmente è elevato per poi diventare sempre più stringente. Ciò per valutare i diversi comportamenti nel caso in cui l'azione di controllo possa essere scelta liberamente, senza vincoli e nei casi in cui, data la presenza di vincoli molto stringenti, nell'ottimizzazione si è necessariamente costretti a scegliere come utilizzare la limitata azione di controllo disponibile: se per ridurre la norma 2 dello stato in media piuttosto che ridurre la sua norma infinito. I risultati riportati si riferiscono alla soluzione del problema (3.12).

Tabella 3.1: Sistema (3.20). Andamento di  $h_1 + h_2$  e  $J_{\bar{\varphi}}$  per diversi valori di  $Q$  e  $\mu$ ;  $U_M = 3$ . In blu il valore minimo per  $h_1 + h_2$  raggiunto al variare di  $Q$  e in corrispondenza di un fissato valore di  $\mu$ .

$\mu$	$Q = I10^{-6}$		$Q = I0.1$		$Q = I$		$Q = I100$	
	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$
$10^{-6}$	9.8829	0	7.6962	1.3487	7.1749	10.6727	<b>6.9765</b>	950.4
0.05	8.6912	0.0260	7.4326	1.3543	7.0952	10.6745	<b>6.9711</b>	950.4
0.1	8.0906	0.0702	7.2827	1.3654	7.0434	10.6783	<b>6.9686</b>	950.4
0.2	7.4487	0.1609	7.1106	1.3912	6.9728	10.6888	<b>6.9637</b>	950.4
0.3	7.1496	0.2313	6.9497	1.4307	<b>6.9038</b>	10.7061	6.9587	950.4
0.4	6.9639	0.2964	<b>6.8284</b>	1.4732	6.8347	10.7302	6.9537	950.4
0.6	6.6360	0.4579	<b>6.6300</b>	1.5715	6.6966	10.7993	6.9438	950.4
0.8	6.5401	0.5222	<b>6.5059</b>	1.6556	6.5712	10.8869	6.9338	950.4
1	6.4905	0.5668	6.4594	1.6971	<b>6.4562</b>	10.9903	6.9239	950.4
1.5	6.4104	0.6661	6.3865	1.7877	<b>6.3239</b>	11.1510	6.8990	950.5
2	6.3599	0.7529	6.3392	1.8690	<b>6.2604</b>	11.2610	6.8860	950.5
2.5	6.3206	0.8418	6.2940	1.9710	<b>6.2178</b>	11.3565	6.8758	950.5
3	6.2700	0.9808	6.2472	2.0997	<b>6.1939</b>	11.4220	6.8656	950.5
4	6.1907	1.2525	6.1881	2.3003	<b>6.1670</b>	11.5124	6.8477	950.6
6	6.1559	1.4203	6.1521	2.4746	<b>6.1456</b>	11.6190	6.8183	950.7
10	6.1148	1.7265	<b>6.1144</b>	2.7558	6.1253	11.7765	6.7721	951.1

Tabella 3.2: Sistema (3.20). Andamento di  $h_1 + h_2$  e  $J_{\bar{\varphi}}$  per diversi valori di  $Q$  e  $\mu$ ;  $U_M = 0.8$ . In blu il valore minimo per  $h_1 + h_2$  raggiunto al variare di  $Q$  e in corrispondenza di un fissato valore di  $\mu$ .

$\mu$	$Q = I10^{-6}$		$Q = I0.1$		$Q = I$		$Q = I100$	
	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$
$10^{-6}$	9.8829	0	7.6962	1.3487	7.1855	10.678	<b>7.0491</b>	964.6
0.05	8.6912	0.0260	7.4326	1.3543	7.1115	10.6796	<b>7.0482</b>	964.6
0.1	8.0906	0.0702	7.2827	1.3654	7.0586	10.6836	<b>7.0473</b>	964.6
0.2	7.4487	0.1609	7.1106	1.3912	<b>6.9898</b>	10.6937	7.0455	964.6
0.3	7.1496	0.2313	6.9497	1.4307	<b>6.9266</b>	10.7094	7.0435	964.6
0.4	6.9680	0.2949	<b>6.8354</b>	1.4706	6.8635	10.7315	7.0415	964.6
0.6	6.6920	0.4301	<b>6.6572</b>	1.5585	6.7416	10.7923	7.0375	964.6
0.8	6.5654	0.5156	<b>6.5408</b>	1.6384	6.6401	10.8632	7.0349	964.6
1	6.5159	0.5599	<b>6.4875</b>	1.6861	6.5474	10.9466	7.0327	964.6
1.5	6.4368	0.6564	<b>6.4164</b>	1.7732	6.4418	11.0766	7.0274	964.6
2	6.3867	0.7434	<b>6.3700</b>	1.8536	6.3781	11.1871	7.0230	964.6
2.5	6.3520	0.8214	<b>6.3401</b>	1.9207	6.3531	11.2431	7.0187	964.7
3	6.3315	0.8770	<b>6.3170</b>	1.9840	6.3331	11.2979	7.0138	964.7
4	6.2979	0.9903	<b>6.2974</b>	2.0500	6.3173	11.3513	7.0057	964.7
6	<b>6.2878</b>	1.0369	6.2892	2.0885	6.3044	11.4155	6.9898	964.7
10	<b>6.2825</b>	1.0798	6.2837	2.1331	6.2924	11.5012	6.9605	965.0

Tabella 3.3: Sistema (3.20). Andamento di  $h_1 + h_2$  e  $J_{\bar{\varphi}}$  per diversi valori di  $Q$  e  $\mu$ ;  $U_M = 0.3$ . In blu il valore minimo per  $h_1 + h_2$  raggiunto al variare di  $Q$  e in corrispondenza di un fissato valore di  $\mu$ .

$\mu$	$Q = I10^{-6}$		$Q = I0.1$		$Q = I$		$Q = I100$	
	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h_1 + h_2$	$J_{\bar{\varphi}}$
$10^{-6}$	9.8829	0	8.1124	1.3692	<b>7.9640</b>	12.4132	8.0060	1216.6
0.05	8.6912	0.0260	8.0037	1.3707	<b>7.9524</b>	12.4134	8.0003	1216.6
0.1	8.2305	0.0587	7.9589	1.3740	<b>7.9449</b>	12.414	8.0000	1216.6
0.2	7.9794	0.0930	7.9396	1.3769	<b>7.9325</b>	12.4158	7.9992	1216.6
0.3	7.9320	0.1043	7.9227	1.3811	<b>7.9200</b>	12.4189	7.9985	1216.6
0.4	7.9100	0.1120	<b>7.9059</b>	1.3870	7.9075	12.4233	7.9978	1216.6
0.6	<b>7.8743</b>	0.1294	7.8867	1.3962	7.8955	12.4288	7.9963	1216.6
0.8	<b>7.8606</b>	0.1389	7.8743	1.4049	7.8934	12.4303	7.9949	1216.6
1	<b>7.8490</b>	0.1493	7.8639	1.4142	7.8913	12.4322	7.9934	1216.6
1.5	<b>7.8304</b>	0.1718	7.8391	1.4449	7.8860	12.4387	7.9898	1216.6
2	<b>7.8254</b>	0.1804	7.8314	1.4582	7.8814	12.4468	7.9861	1216.6
2.5	<b>7.8220</b>	0.1881	7.8259	1.4705	7.8795	12.4511	7.9817	1216.7
3	<b>7.8203</b>	0.1927	7.8224	1.4800	7.8776	12.4563	7.9774	1216.7
4	<b>7.8194</b>	0.1956	7.8197	1.4895	7.8729	12.4727	7.9687	1216.7
6	<b>7.8178</b>	0.2036	7.8179	1.4979	7.8634	12.519	7.9528	1216.8
10	<b>7.8166</b>	0.2127	7.8169	1.5053	7.8480	12.6430	7.9327	1216.9

Non sorprendentemente, dalle tabelle riassuntive dei risultati si può notare che le cifre di merito  $J_{\bar{\varphi}}$  ottenute utilizzando  $Q$  diverse non sono direttamente confrontabili; per la valutazione ci si baserà quindi maggiormente sugli andamenti della somma di  $h_1$  e  $h_2$ .

Nel caso in cui sia  $\mu$  sia  $Q$  siano molto piccoli, la cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}$  risulta pari a 0, ovvero la soluzione ottima si ottiene ponendo uguale a zero la variabile di controllo (che è la sola a determinare  $J_{\bar{\varphi}}$ ), lasciando evolvere il sistema soggetto solamente all'azione del disturbo stocastico. In questo caso le variabili  $h_1$  e  $h_2$  rappresentano il valore massimo raggiunto dallo stato con probabilità maggiore o uguale ad  $1 - \epsilon$ .

Se si aumenta solamente il peso  $Q$ , mantenendo  $\mu$  piccolo e quindi l'effetto dell'ottimizzazione di  $h_1$  ed  $h_2$  trascurabile, l'azione di controllo non è più posta a zero e la cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}$  aumenta, anche perché il peso  $Q$  sullo stato non è più nullo. Contemporaneamente si assiste ad un miglioramento della somma di  $h_1$  e  $h_2$ : questo non deve sorprendere. È lecito aspettarsi che se il sistema viene controllato con una strategia volta alla minimizzazione in norma 2 dello stato come quella dettata dal peso  $Q$ , lo stato presenti anche una norma infinito migliore, misurata dalle variabili  $h_1$  e  $h_2$ . Se, invece, si procede mantenendo la matrice  $Q$  nulla e si incrementa il peso  $\mu$  si nota ancora che la cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}$  aumenta per effetto del contributo della variabile di controllo pesata da  $R$ ; ovviamente la somma di  $h_1$  e  $h_2$  diminuisce. Si noti che il valore minimo assoluto per la somma di  $h_1$  e  $h_2$  è ottenuto sempre per valori di  $\mu$  elevati e in corrispondenza di  $Q \simeq 0$ . Si nota inoltre che non è possibile ottenere gli stessi valori per  $h_1 + h_2$  con  $Q$  elevate e  $\mu \simeq 0$  o anche utilizzando entrambi i due pesi elevati. Questo mostra che per ottenere i risultati migliori su  $h_1$  e  $h_2$  si è costretti ad usare il peso  $\mu$ ; le stesse prestazioni non possono essere raggiunte utilizzando solo il peso  $Q$  e che quindi ai diversi pesi corrispondono azioni diverse.

Per quanto riguarda i risultati con diversi valori di  $U_M$  si nota che la somma di  $h_1$  e  $h_2$  raggiunge valori più bassi quando  $U_M$  è più elevato. Inoltre si nota che per valori di  $U_M$  elevati il valore minimo di  $h_1 + h_2$  si trova spesso

nelle colonne in cui la matrice  $Q$  è piccola, ma non nulla. In questo caso il trade-off principale sembra essere quello tra il peso  $R$  che cerca di risparmiare sull'azione di controllo e i pesi  $Q$  e  $\mu$  che invece tendono ad utilizzare, in modo diverso tra loro, una maggiore azione di controllo per ridurre lo stato. Questo non accade nel caso in cui il valore di  $U_M$  risulti più stringente: il peso  $R$  perde parzialmente di importanza in quanto il valore della variabile di controllo è già limitato dai vincoli. È in questo caso che le differenze tra le azioni di  $Q$  e  $\mu$  emergono con maggiore evidenza: il valore minore per la somma di  $h_1$  e  $h_2$  si sposta sulla colonna corrispondente ad una  $Q$  quasi nulla, per valori di  $\mu$  non molto elevati. Nel complesso si può dire che le azioni di  $Q$  e  $\mu$ , da una parte hanno un effetto comune, contrapposto all'azione del peso  $R$  sulla variabile di controllo, nel cercare di limitare lo stato; d'altra parte le azioni di  $Q$  e  $\mu$  risultano contrapposte in obiettivi diversi seppur entrambi riguardanti lo stato: soprattutto quando i vincoli sulla variabile di controllo sono stringenti, i valori di  $J_{\bar{\varphi}}$  e  $h_1 + h_2$  corrispondenti sono significativamente diversi a seconda dei pesi utilizzati, sintomo che le modalità di riduzione dello stato imposte nei due casi sono diverse e di conseguenza anche la legge di controllo.

### 3.4 Soluzione in due passi con degrado prefissato della cifra di merito

In questo secondo approccio al controllo ottimo con vincoli sia sulla variabile di controllo sia sullo stato, la possibile mancanza di feasibility è superata, come nel precedente approccio, considerando i limiti raggiunti dallo stato come variabili di ottimizzazione da minimizzare e non come valori fissati a priori. Si gestiscono, però, in modo diverso i due obiettivi di minimizzazione rappresentati dalla cifra di merito  $J$  del controllo e dalle variabili  $h_j$  sui vincoli per lo stato. Questo metodo prevede infatti la risoluzione di due problemi in cascata: nel primo si minimizza  $J$  considerando solamente i vincoli sulla variabile di controllo; nel secondo, si minimizza la somma degli



$h_j$  soggetta, oltre ai vincoli sullo stato e la variabile di controllo, anche al vincolo aggiuntivo relativo al degrado massimo ammissibile per  $J$  rispetto al valore  $J^*$  calcolato nel primo problema:  $J \leq J^* + \alpha$ , con  $\alpha > 0$ . Si noti che è possibile scegliere  $\alpha$  come una frazione di  $J^*$  in modo che il degrado non sia espresso in termini assoluti, ma invece in termini relativi rispetto a quanto ottenuto, ponendo cioè  $J \leq J^*(1 + \alpha)$ .

Più precisamente, nel caso in cui si vogliano imporre vincoli robusti sulla variabile di controllo, si definisce il primo problema:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{F}} J & \quad (3.21) \\ \text{soggetto a : } \|\mathbf{S}_u \mathbf{u}(w)\|_\infty \leq 1 \quad \forall w. \end{aligned}$$

Dalla soluzione di (3.21) si ottiene il valore ottimo della cifra di merito  $J^*$ ; si definisce ora il secondo problema, con vincoli robusti sulla variabile di controllo e vincoli in probabilità sullo stato:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{F}, h_1, h_2, \dots, h_p} \sum_{j=1, \dots, p} h_j & \quad (3.22) \\ \text{soggetto a : } \begin{cases} \|\mathbf{S}_u \mathbf{u}(w)\|_\infty \leq 1 \quad \forall w \\ \mathbb{P} \left( \|\mathbf{S}_x^j \mathbf{x}(w)\|_\infty \leq h_j \quad j = 1, \dots, p \right) \geq 1 - \epsilon \\ J \leq J^* + \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Nel caso in cui, invece, si vogliano imporre vincoli in probabilità sulla variabile di controllo si definisce il primo problema:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{F}} J & \quad (3.23) \\ \text{soggetto a : } \mathbb{P} (\|\mathbf{S}_u \mathbf{u}(w)\|_\infty \leq 1) \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Dalla soluzione di (3.23) si ottiene il valore ottimo della cifra di merito  $J^*$ ; si definisce il secondo problema:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{F}, h_1, h_2, \dots, h_p} \sum_{j=1, \dots, p} h_j & \quad (3.24) \\ \text{soggetto a : } \begin{cases} \mathbb{P} \left( \|\mathbf{S}_u \mathbf{u}(w)\|_\infty \leq 1 \wedge \|\mathbf{S}_x^j \mathbf{x}(w)\|_\infty \leq h_j \quad j = 1, \dots, p \right) \geq 1 - \epsilon \\ J \leq J^* + \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Si noti che i vincoli sullo stato devono essere espressi come vincoli in probabilità e quindi il secondo problema deve essere formulato come problema di ottimizzazione chance-constrained.

Il vantaggio di questo metodo rispetto a quello descritto nella Sezione 3.3 è che è possibile definire il trade-off tra gli obiettivi di minimizzazione di  $J$  e il rispetto dei vincoli sullo stato tramite la minimizzazione degli  $h_j$  a-priori, attraverso una scelta accurata del parametro  $\alpha$ . Esso definisce il deterioramento ammissibile per  $J$  a favore di  $h_j$  e risulta di comprensione ed applicazione più immediata rispetto al parametro  $\mu$ . Si noti che in questo caso in molte applicazioni potrebbe essere sufficiente l'utilizzo di un solo valore di  $\alpha$  una volta stabilito il deterioramento di  $J$  ammissibile; inoltre è possibile anche eventualmente andare ad esplorare il trade-off tra cifra di merito  $J$  e variabili  $h_1, h_2, \dots, h_p$  in modo più diretto e comprensibile dato che si riesce a gestire esplicitamente il degrado di  $J$ .

Si formula dapprima il problema in cui i vincoli sulla variabile di controllo sono robusti e vengono trattati secondo l'approccio della Sezione 2.2, con parametrizzazione della legge di controllo come funzione affine del disturbo saturato:

$$\mathbf{u} = \Theta\varphi(\mathbf{w}) + \Gamma.$$

Vengono, quindi, risolti in cascata i seguenti due problemi:

$$\begin{aligned} \min_{\Theta, \Gamma} J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) & \quad (3.25) \\ \text{soggetto a : } & \begin{cases} -U_M \leq \gamma_j + \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M & j = 1, \dots, Mm \\ -U_M \leq \gamma_j - \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M, & j = 1, \dots, Mm \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{\Theta, \Gamma, h_1, \dots, h_p} \sum_{j=1, \dots, p} h_j & \quad (3.26) \\ \text{soggetto a : } & \begin{cases} -U_M \leq \gamma_j + \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M & j = 1, \dots, Mm \\ -U_M \leq \gamma_j - \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M, & j = 1, \dots, Mm \\ \mathbb{P} \left( \|\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^j \mathbf{x}(w)\|_{\infty} \leq h_j \quad j = 1, 2, \dots, p \right) \geq 1 - \epsilon \\ J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) \leq J_{\bar{\varphi}}^* + \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

dove  $J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma)$  è data dall'espressione (2.3) e  $J_{\bar{\varphi}}^*$  indica il valore di  $J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma)$  ottenuto risolvendo il problema (3.25).

Si noti che il problema (3.25) è convesso, mentre il problema (3.26) può essere ricondotto ad un problema convesso utilizzando la tecnica a scenario: si effettuano le estrazioni del disturbo in accordo alla (2.16) considerando nel numero di variabili  $d$  sia le variabili in  $\Theta$  e  $\Gamma$  sia le variabili  $h_j$  e si risolve il problema:

$$\begin{aligned} \min_{\Theta, \Gamma, h_1, \dots, h_p} \sum_{j=1, \dots, p} h_j & \quad (3.27) \\ \text{soggetto a : } & \begin{cases} -U_M \leq \gamma_j + \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M, & j = 1, \dots, Mm \\ -U_M \leq \gamma_j - \|\Theta_j\|_1 \bar{\varphi} \leq U_M, & j = 1, \dots, Mm \\ \|\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^j \mathbf{x}(\mathbf{w}^{(i)})\|_{\infty} \leq h_j, & j = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, N \\ J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) \leq J_{\bar{\varphi}}^* + \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Per la soluzione ottenuta dal problema (3.27) valgono le garanzie della teoria dello scenario: la soluzione risulta con confidenza non minore di  $1 - \beta$  feasible per il problema chance-constrained di partenza (3.26) e quindi i vincoli sullo stato rispettati con probabilità non minore di  $1 - \epsilon$  con la stessa confidenza. Questo risultato continua a valere in quanto il primo problema viene risolto in modo deterministico: il vincolo sul peggioramento della cifra di merito nel secondo problema presenta a destra del segno di minore o uguale una quantità deterministica, seppur scelta in modo accurato ed in modo da garantire l'esistenza di almeno una soluzione per il problema; la teoria dello scenario continua a valere inalterata.

Dal punto di vista computazionale, il metodo della Sezione 3.3 è meno oneroso, perché consta della risoluzione di un solo problema di ottimizzazione della stessa tipologia del problema (3.26), mentre nel metodo proposto in questa sezione bisogna risolvere anche il problema (3.25), che, seppur meno oneroso, comporta un aggravio del peso computazionale.

I problemi (3.23) e (3.24) entrambi di tipo chance-constrained in cui anche i vincoli sulla variabile di controllo sono in probabilità possono essere

resi trattabili utilizzando la tecnica a scenario sia per i vincoli sulla variabile di controllo sia per i vincoli sullo stato. Si utilizza una legge di controllo affine nel disturbo saturato; sarebbe possibile ovviamente formulare in modo simile i problemi in cui la legge di controllo è affine nel disturbo senza saturazione. Il primo problema risulta:

$$\begin{aligned} & \min_{\Theta, \Gamma} J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) & (3.28) \\ & \text{soggetto a : } \|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}(\Theta\varphi(\mathbf{w}^{(i)}) + \Gamma)\|_{\infty} \leq 1 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

e il secondo problema risulta:

$$\begin{aligned} & \min_{\Theta, \Gamma, h_1, \dots, h_p} \sum_{j=1, \dots, p} h_j & (3.29) \\ & \text{soggetto a : } \begin{cases} \|\mathbf{S}_{\mathbf{u}}(\Theta\varphi(\mathbf{w}^{(i)}) + \Gamma)\|_{\infty} \leq 1 \\ \|\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^j \mathbf{x}(\mathbf{w}^{(i)})\|_{\infty} \leq h_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, N. \\ J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma) \leq J_{\bar{\varphi}}^* + \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Si noti che è necessario utilizzare le stesse estrazioni in entrambi i problemi, infatti è facile immaginare che con estrazioni diverse possa accadere che il secondo problema possa non avere soluzione. Il numero di estrazioni è determinato in accordo alla (2.16), considerando anche nel primo problema il numero di variabili di ottimizzazione del secondo; in questo modo il primo problema potrebbe avere un numero di vincoli che potrebbe essere maggiore del necessario. Si noti che sulla soluzione trovata nel primo problema continuano a valere le garanzie date dalla teoria dello scenario, ma che, a differenza di quanto accadeva con l'approccio in cui i vincoli sulla variabile di controllo erano robusti, la soluzione trovata è a sua volta non deterministica, ma aleatoria e dipendente dalle estrazioni.

$$J^* = J^*(w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(N)}).$$

Il secondo problema può essere risolto dal punto di vista implementativo anch'esso a scenario e risulta convesso e in tutto simile agli altri problemi risolti con la tecnica dello scenario; tuttavia data la presenza nel vincolo sul

peggiore di  $J$  di una quantità aleatoria e dipendente da tutti i vincoli quale è  $J^*$  le garanzie previste dalla teoria in questo caso non sono più valide. Il problema, quindi, diventa semplicemente risolto con una tecnica randomizzata. Sarebbe necessaria una estensione della teoria dello scenario per dare una forte giustificazione teorica di questo approccio e per fornire garanzie a-priori sulla soluzione ottenuta.

Nella sezione seguente sono riportati alcuni esempi numerici in cui si applica il metodo in due passi proposto, con vincoli robusti sulla variabile di controllo.

### 3.4.1 Esempi numerici

In questa serie di prove si vuole analizzare l'andamento delle soluzioni ottenute risolvendo il problema in due passi (3.25) e (3.26) per diversi valori del parametro  $\alpha$ , mantenendo le stesse realizzazioni del disturbo nella versione a scenario (3.27) del problema chance-constrained (3.26). Il parametro  $\alpha$  viene scelto come frazione di  $J_{\bar{\varphi}}$  in modo da imporre un peggioramento relativo rispetto a quanto ottenuto dalla soluzione del primo problema (3.25).

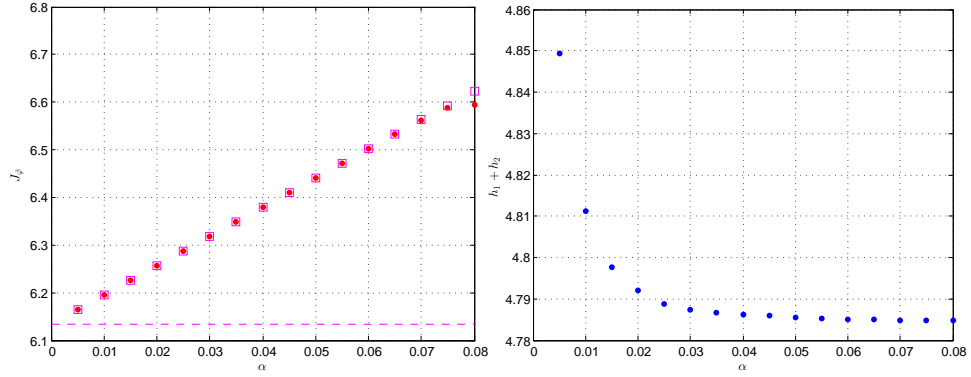
Per le prove si sono utilizzati due sistemi di secondo ordine:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

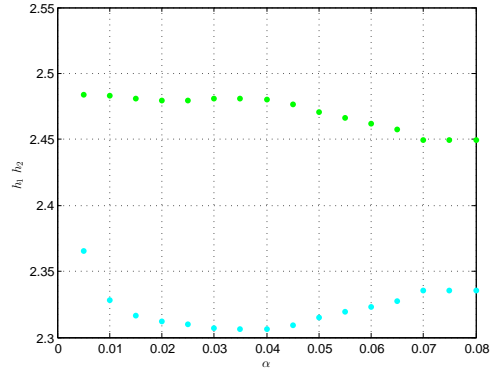
$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.45 \\ 1.2 & 1.2 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

in cui  $w_1$  e  $w_2$  sono due rumori gaussiani indipendenti, la deviazione standard di entrambi è  $\sigma = 0.5$ , il parametro  $\bar{\varphi}$  è posto uguale a  $\sigma$  e lo stato iniziale è sempre nullo. Gli altri parametri, in accordo con quanto impiegato nelle prove della Sezione 3.3.2, sono  $\beta = 10^{-10}$ ,  $\epsilon = 0.025$ , orizzonte di previsione  $M = 8$ , i pesi nella cifra di merito sono  $Q = I_2$ ,  $R = 1$ , il limite sulla variabile di controllo è  $U_M = 0.3$ ,  $\bar{\varphi} = 1$ , la parametrizzazione per  $\Theta$  prevede

l'utilizzo delle prime 3 sottodiagonali con elementi liberi. L'unico parametro a variare è  $\alpha$ , sono ancora utilizzate le matrici  $\mathbf{S}_x^1$  e  $\mathbf{S}_x^2$  nella forma (3.19) per limitare con  $h_1$  e  $h_2$  la norma infinito di ogni componente dello stato singolarmente.



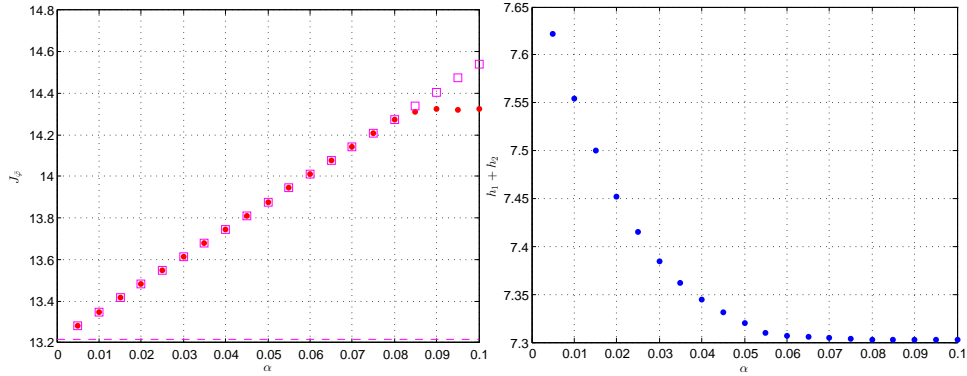
(a) Andamento della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma)$  (in rosso), in magenta  $J_{\bar{\varphi}}^*$  e  $J_{\bar{\varphi}}^*(1 + \alpha)$ . (b) Andamento di  $h_1 + h_2$  (in blu).



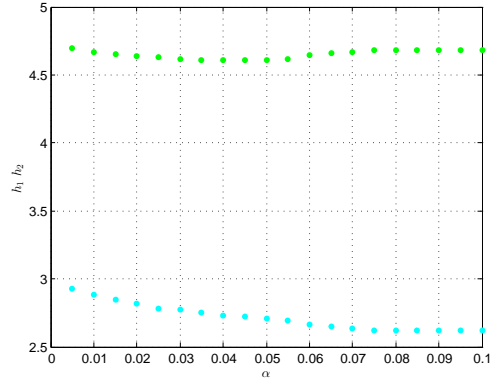
(c) Andamento di  $h_1$  (in azzurro) e  $h_2$  (in verde).

Figura 3.5: Sistema (3.30). Risultati ottenuti risolvendo i problemi in cascata (3.25) e (3.26), al variare di  $\alpha$  espresso come frazione di  $J_{\bar{\varphi}}^*$ .

Dalle Figure 3.5 e 3.6 in cui sono riportati gli andamenti di  $J_{\bar{\varphi}}$  e  $h_1, h_2$  per diversi valori di  $\alpha$  si nota che, come previsto, al crescere di  $\alpha$  si ha un peggioramento della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma)$  e un contemporaneo miglioramento di  $h_1$  e  $h_2$ . Questo fino al raggiungimento del valore minimo possibile



(a) Andamento della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma)$  (in rosso), in magenta  $J_{\bar{\varphi}}^*$  e  $J_{\bar{\varphi}}^*(1 + \alpha)$ .  
 (b) Andamento di  $h_1 + h_2$  (in blu).



(c) Andamento di  $h_1$  (in azzurro) e  $h_2$  (in verde).

Figura 3.6: Sistema (3.31). Risultati ottenuti risolvendo i problemi in cascata (3.25) e (3.26), al variare di  $\alpha$  espresso come frazione di  $J_{\bar{\varphi}}^*$ .

per la somma  $h_1 + h_2$ ; oltre questo punto sia  $h_1$  e  $h_2$  sia  $J_{\bar{\varphi}}$  si assestano a valori costanti indipendentemente dal valore di  $\alpha$  utilizzato, non essendo possibile migliorare ulteriormente la soluzione. Un comportamento simile si è riscontrato anche nelle prove in Sezione 3.3.2 che si riferiscono all'approccio con penalizzazione della cifra di merito con peso  $\mu$ . In tale approccio, tuttavia, non è possibile stabilire un valore di  $\mu$  in corrispondenza del quale la soluzione si assesta. Inoltre si nota che per i valori di  $\alpha$  in cui non si è ancora raggiunto il minimo di  $h_1 + h_2$  il vincolo sul peggioramento di  $J_{\bar{\varphi}}$

è sempre rispettato con l'uguale (vincolo attivo) e quindi il peggioramento effettivamente raggiunto dalla cifra di merito risulta sempre esattamente quello massimo concesso scegliendo  $\alpha$ . Questo non è più vero dopo che il minimo di  $h_1 + h_2$  viene raggiunto e il vincolo non è più attivo. Per quanto riguarda l'andamento delle variabili  $h_1$  e  $h_2$  si nota come la loro discesa sia piuttosto irregolare e spesso lenta: può accadere talvolta che una delle due cresca leggermente al crescere di  $\alpha$  per favorire una maggiore discesa dell'altra; la somma risulta comunque sempre decrescente in  $\alpha$ .

Nel complesso emerge che rispetto al metodo trattato nella Sezione 3.3, quello descritto nella Sezione 3.4 consente un miglior controllo sul trade-off tra cifra di merito e vincoli sullo stato, ma per quanto riguarda le prestazioni i risultati ottenuti sono molto simili.

Nella sezione seguente viene in effetti dimostrata l'equivalenza tra i due problemi, sotto opportune ipotesi sulla convessità stretta di  $J_{\bar{\varphi}}(\Theta, \Gamma)$  rispetto ai parametri  $(\Theta, \Gamma)$ .

### 3.5 Equivalenza tra le due soluzioni proposte

Nelle precedenti sezioni sono state messe in luce alcune proprietà dei due approcci proposti per limitazioni sulle variabili di stato in ambito stocastico. In questo capitolo viene presentata un'analisi teorica dei due approcci, volta a porre su base rigorosa quanto visto empiricamente tramite esempi. In particolare si vogliono mettere in evidenza:

- le proprietà di monotonia degli andamenti dei valori di  $J$  e della somma di  $h_1, h_2, \dots, h_p$  ottenuti risolvendo i problemi nell'approccio con penalizzazione della cifra di merito o nell'approccio con problemi in cascata rispetto ai parametri  $\mu$  e  $\alpha$ . Questa proprietà mostra come i parametri  $\mu$  ed  $\alpha$  siano effettivamente parametri di tuning attraverso i quali è possibile gestire il trade-off tra i due diversi obiettivi dati da  $J$  e dalla somma di  $h_1, h_2, \dots, h_p$ , andando a migliorarne uno a discapito dell'altro.



- le proprietà di continuità degli andamenti dei valori di  $J$  e della somma di  $h_1, h_2, \dots, h_p$  ottenuti risolvendo i problemi nell'approccio con penalizzazione della cifra di merito o nell'approccio con problemi in cascata rispetto ai parametri  $\mu$  e  $\alpha$ . Questa proprietà mostra come andando ad utilizzare tutti i diversi possibili valori di  $\mu$  ed  $\alpha$  sia possibile ottenere tutti i possibili valori ammissibili per  $J$  e per la somma di  $h_1, h_2, \dots, h_p$
- la proprietà di equivalenza tra i due problemi, ovvero che sotto le opportune ipotesi di convessità per ogni scelta di  $\mu$  esiste un valore di  $\alpha$  per cui si ottengono lo stesso valore di  $J$  e della somma di  $h_1, h_2, \dots, h_p$ ; viceversa per ogni scelta di  $\alpha$  esiste un valore di  $\mu$  per cui si ottengono lo stesso valore di  $J$  e della somma di  $h_1, h_2, \dots, h_p$ .

Nel seguito si considerano i problemi scritti in forma generale: la cifra di merito e i vincoli sono visti solamente come elementi di un generico problema di ottimizzazione, indipendentemente da quale sia il loro significato nell'applicazione specifica.

**Definizione 1** *Problema  $\mu$ :*

$$\begin{aligned} \min_{\theta, h} J(\theta) + \mu h & \quad (3.32) \\ \text{soggetto a : } (\theta, h) \in \mathbb{S} & \end{aligned}$$

e sia una qualsiasi sua soluzione:  $\theta_\mu, h_\mu, J_\mu = J(\theta_\mu)$ .

**Definizione 2** *Sia  $J_0 = J_\mu|_{\mu=0}$  ovvero la soluzione del problema 0:*

$$\begin{aligned} \min_{\theta, h} J(\theta) & \quad (3.33) \\ \text{soggetto a : } (\theta, h) \in \mathbb{S} & \end{aligned}$$

**Definizione 3** *Problema  $\alpha$ :*

$$\begin{aligned} \min_{\theta, h} h & \quad (3.34) \\ \text{soggetto a : } \begin{cases} (\theta, h) \in \mathbb{S} \\ J(\theta) \leq J_0 + \alpha \end{cases} & \end{aligned}$$

e sia una qualsiasi sua soluzione:  $\theta_\alpha, h_\alpha, J_\alpha = J(\theta_\alpha)$ .

I vincoli non sono scritti in forma esplicita, ma rappresentati da un generico insieme  $\mathbb{S}$ , il funzionale di costo  $J$  viene espresso solo come funzione di un generico set di variabili di ottimizzazione  $\theta$  mentre il ruolo di secondo obiettivo di minimizzazione è riassunto in un'unica variabile di ottimizzazione  $h$ . È evidente la corrispondenza con i problemi trattati nelle Sezioni 3.3 e 3.4 in cui i vincoli erano rappresentati esplicitamente per limitare variabili di controllo e stato, si era esplicitata la dipendenza di  $J$  dalle variabili di ottimizzazione e il secondo obiettivo era rappresentato dalla somma di  $h_1, h_2, \dots, h_p$  e non da un'unica variabile.

I risultati presentati hanno una validità più ampia di quella dell'applicazione in problemi di controllo qui considerata, in particolare la maggior parte delle proprietà non dipendono dalla particolare forma dei vincoli e quindi valgono in generale. Le ipotesi richieste in alcune proprietà riguardanti la convessità della cifra di merito  $J$  e dei vincoli  $\mathbb{S}$  sono spesso verificate ed in particolare lo sono nel caso dei problemi trattati nelle Sezioni 3.3 e 3.4 risolti con la tecnica dello scenario, considerati in precedenza.

In questo senso è interessante andare a valutare il legame tra un problema ( $\mu$ ) che presenta un insieme di vincoli fissato, ma una cifra di merito che cambia a seconda del parametro  $\mu$  utilizzato e un problema ( $\alpha$ ) che presenta viceversa una cifra di merito fissa, ma un insieme di vincoli che cambia al variare del parametro  $\alpha$ . Si prende in considerazione la versione a scenario dei due problemi con un numero finito di vincoli e non la versione chance-constrained.

**Assunzione 1** *Si assume l'esistenza di almeno una soluzione per tutti i problemi  $\mu$  e i problemi  $\alpha$  considerati.*

Si noti che questa assunzione non è particolarmente stringente ed è in generale verificata, almeno per i problemi trattati nelle sezioni 3.3 e 3.4.

### 3.5.1 Proprietà

La proprietà 1 riguarda la monotonia degli andamenti di  $J_\mu$  e  $h_\mu$ . Come detto questa proprietà è necessaria per mostrare che il parametro  $\mu$  sia

effettivamente in grado di gestire il trade-off tra i due diversi obiettivi.

**Proprietà 1**  $J_\mu$  è crescente in  $\mu$ ;  $h_\mu$  è decrescente in  $\mu$ .

### Dimostrazione

Sia  $\mu_1 < \mu_2$  e siano  $\theta_{\mu_1}, h_{\mu_1}, J_{\mu_1}$  e  $\theta_{\mu_2}, h_{\mu_2}, J_{\mu_2}$  le corrispondenti soluzioni dei problemi  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Vale che  $(\theta_{\mu_1}, h_{\mu_1}) \in \mathbb{S}$  e  $(\theta_{\mu_2}, h_{\mu_2}) \in \mathbb{S}$ , quindi la soluzione ottenuta risolvendo uno dei problemi è ammissibile (sebbene non ottima in generale) anche per l'altro. Vale quindi la seguente relazione:

$$J_{\mu_1} + \mu_1 h_{\mu_1} \leq J_{\mu_2} + \mu_1 h_{\mu_2} < J_{\mu_2} + \mu_2 h_{\mu_2} \leq J_{\mu_1} + \mu_2 h_{\mu_1}. \quad (3.35)$$

Infatti  $J_{\mu_1} + \mu_1 h_{\mu_1} \leq J_{\mu_2} + \mu_1 h_{\mu_2}$  in quanto  $J_{\mu_1}, h_{\mu_1}$  sono i valori di ottimo per il problema (3.32) con  $\mu = \mu_1$ . Analogamente  $J_{\mu_2} + \mu_2 h_{\mu_2} \leq J_{\mu_1} + \mu_2 h_{\mu_1}$  poiché  $J_{\mu_2}, h_{\mu_2}$  rappresentano l'ottimo per  $\mu = \mu_2$ . Infine  $J_{\mu_2} + \mu_1 h_{\mu_2} < J_{\mu_2} + \mu_2 h_{\mu_2}$  in virtù dell'ipotesi iniziale sull'ordinamento di  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Dalla (3.35) si ottiene:

$$\mu_1(h_{\mu_1} - h_{\mu_2}) \leq J_{\mu_2} - J_{\mu_1} \leq \mu_2(h_{\mu_1} - h_{\mu_2}) \quad (3.36)$$

da cui, essendo  $\mu_1$  e  $\mu_2$  positivi, si evince che:

$$J_{\mu_2} \geq J_{\mu_1} \iff h_{\mu_1} \geq h_{\mu_2}. \quad (3.37)$$

Se per assurdo si avesse  $J_{\mu_2} < J_{\mu_1}$  e quindi  $h_{\mu_1} < h_{\mu_2}$  poiché

$$\mu_1(h_{\mu_1} - h_{\mu_2}) \leq \mu_2(h_{\mu_1} - h_{\mu_2}) \quad (3.38)$$

risulterebbe

$$\mu_2 \leq \mu_1 \quad (3.39)$$

in contraddizione con l'ipotesi iniziale  $\mu_1 < \mu_2$ .  $\square$

La proprietà 2 riguarda la continuità della cifra di merito del problema  $\mu$  rispetto al parametro  $\mu$ .

**Proprietà 2**  $J_\mu + \mu h_\mu$  è continua e crescente in  $\mu$ .

### Dimostrazione

Si considerino ancora  $\mu_1, \mu_2$  distinti e le corrispondenti soluzioni. Dalla prima diseguaglianza in (3.35) si ha che

$$J_{\mu_1} \leq J_{\mu_2} + \mu_1(h_{\mu_2} - h_{\mu_1}) \quad (3.40)$$

e quindi:

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} J_{\mu_1} + \mu_1 h_{\mu_1} \leq \lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} J_{\mu_2} + \mu_1(h_{\mu_2} - h_{\mu_1}) + \mu_1 h_{\mu_1} \leq J_{\mu_2} + \mu_2 h_{\mu_2}. \quad (3.41)$$

Procedendo in modo analogo, dalla terza diseguaglianza in (3.35)

$$J_{\mu_1} \geq J_{\mu_2} + \mu_2(h_{\mu_2} - h_{\mu_1}) \quad (3.42)$$

e quindi:

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} J_{\mu_1} + \mu_1 h_{\mu_1} \geq \lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} J_{\mu_2} + \mu_2(h_{\mu_2} - h_{\mu_1}) + \mu_1 h_{\mu_1} \geq J_{\mu_2} + \mu_2 h_{\mu_2}. \quad (3.43)$$

Dalla 3.41 e dalla 3.43 si ottiene che

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \mu_2} J_{\mu_1} + \mu_1 h_{\mu_1} = J_{\mu_2} + \mu_2 h_{\mu_2}, \quad (3.44)$$

che corrisponde alla continuità di  $J_{\mu} + \mu h_{\mu}$  in  $\mu$ .

Sia ora  $\mu_1 < \mu_2$  e poniamo per assurdo:

$$J_{\mu_1} + \mu_1 h_{\mu_1} \geq J_{\mu_2} + \mu_2 h_{\mu_2}. \quad (3.45)$$

In virtù dell'ordinamento tra  $\mu_1$  e  $\mu_2$  si ha che

$$J_{\mu_2} + \mu_2 h_{\mu_2} > J_{\mu_2} + \mu_1 h_{\mu_2}, \quad (3.46)$$

da cui si avrebbe

$$J_{\mu_1} + \mu_1 h_{\mu_1} > J_{\mu_2} + \mu_1 h_{\mu_2}. \quad (3.47)$$

Poiché il primo termine della (3.45) è il minimo per  $\mu_1$ , si ottiene una contraddizione, di conseguenza deve valere:

$$J_{\mu_1} + \mu_1 h_{\mu_1} \leq J_{\mu_2} + \mu_2 h_{\mu_2}, \quad \mu_1 < \mu_2 \quad (3.48)$$

ovvero che  $J_\mu + \mu h_\mu$  è monotona crescente in  $\mu$ .  $\square$

La proprietà seguente mostra la monotonia dell'andamento di  $h_\alpha$  al variare di  $\alpha$ . Non è invece direttamente possibile definire la monotonia di  $J_\alpha$  in quanto  $J_\alpha$  non è unica ma potrebbe assumere valori multipli, per questo vengono considerati i valori estremi tra i possibili assunti da  $J_\alpha$  e vengono date le proprietà di monotonia su di essi.

**Proprietà 3**  $h_\alpha$  è decrescente in  $\alpha$ . Inoltre se:

$$\bar{J}_\alpha = \max J_\alpha \quad \underline{J}_\alpha = \min J_\alpha, \quad (3.49)$$

dove massimo e minimo sono presi rispetto alle soluzioni del problema  $\alpha$ , le funzioni  $\bar{J}_\alpha$  e  $\underline{J}_\alpha$  sono crescenti in  $\alpha$ .

### Dimostrazione

Si noti che essendo la soluzione in generale non unica per  $J_\alpha$  è stato necessario introdurre le funzioni  $\bar{J}_\alpha$  e  $\underline{J}_\alpha$  per poter definire la proprietà di monotonia, questa distinzione non è necessaria invece per  $h_\alpha$ , che risulta unico.

Sia  $\alpha_1 < \alpha_2$  e si considerino i problemi  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  con le rispettive soluzioni. Ogni soluzione  $(\theta_{\alpha_1}, h_{\alpha_1})$  è feasible per il problema  $\alpha_2$  infatti  $J_{\alpha_1} \leq J_0 + \alpha_1 < J_0 + \alpha_2$ ; di conseguenza  $h_{\alpha_2} \leq h_{\alpha_1}$  poiché  $h_{\alpha_2}$  è il minimo possibile per il problema  $\alpha_2$  per definizione.

Sia  $(\theta_{\alpha_2}, h_{\alpha_2})$  una soluzione per  $\alpha_2$ . Vale che:

$$\text{se } J_{\alpha_2} < J_0 + \alpha_1 \text{ allora necessariamente } h_{\alpha_1} = h_{\alpha_2}. \quad (3.50)$$

Se  $J_{\alpha_2} < J_0 + \alpha_1$ , infatti, la soluzione di  $\alpha_2$  risulta feasible per  $\alpha_1$  e inoltre, essendo  $h_{\alpha_2} \leq h_{\alpha_1}$  risulta anche soluzione ottima per  $\alpha_1$ . Poiché l'ottimo per il problema  $\alpha_1$  è dato da  $h_{\alpha_1}$  si deduce che  $h_{\alpha_2} = h_{\alpha_1}$ . Da questa proprietà segue che esiste una soluzione del problema  $\alpha_2$  tale che  $J_{\alpha_2} \leq J_0 + \alpha_1$ , allora in virtù di  $h_{\alpha_2} = h_{\alpha_1}$ , tutte le soluzioni di  $\alpha_1$  sono anche soluzioni per  $\alpha_2$ . Quindi, se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  non hanno soluzioni comuni cioè se  $J_{\alpha_2} > J_0 + \alpha_1$  vale

sicuramente che  $\bar{J}_\alpha$  e  $\underline{J}_\alpha$  sono crescenti in  $\alpha$ , in quanto  $J_{\alpha_1} \leq J_0 + \alpha_1$ . Se invece  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  hanno soluzioni comuni tutte le soluzioni di  $\alpha_1$  sono anche soluzioni di  $\alpha_2$  e quindi vale ancora la proprietà poiché il massimo e il minimo in (3.49) per il problema  $\alpha_2$  sono calcolati in un insieme di soluzioni allargato rispetto a quello per il problema  $\alpha_1$ .  $\square$

Le proprietà seguenti descrivono il comportamento delle soluzioni dei problemi  $\mu$  e  $\alpha$  per i valori estremi dei parametri ovvero per  $\mu = 0$ ,  $\alpha = 0$  e per  $\mu \rightarrow \infty$  e  $\alpha \rightarrow \infty$ .

**Proprietà 4** *Sia  $\mu = 0$  e la corrispondente soluzione  $(\theta_0, h_0)$  tale che  $J_{\mu=0} = J_0$ , in cui vi può essere molteplicità di  $h_{\mu=0}$ . Allora  $J_{\alpha=0} = J_0$  e  $h_{\alpha=0} = \min h_{\mu=0}$ .*

#### Dimostrazione

Il valore  $J_{\mu=0} = J_0$  è il minimo valore  $J(\theta)$  dati i vincoli in  $\mathbb{S}$ , infatti nel problema  $\mu$  con  $\mu = 0$  l'unico obiettivo da minimizzare è la cifra di merito  $J$ . Tuttavia è possibile in generale che in corrispondenza dello stesso valore  $J_0$  della cifra di merito il problema  $\mu$  con  $\mu = 0$  ammetta una molteplicità di valori di  $h_{\mu=0}$ . Se ora si considera il problema  $\alpha$  con  $\alpha = 0$  si può notare che  $J_0$  è l'unico valore di  $J(\theta)$  ammissibile data la presenza del vincolo  $J(\theta) \leq J_0$  e dato che  $J_0$  è il minimo di  $J(\theta)$  in  $\mathbb{S}$ . Di conseguenza gli unici valori di  $h$  ammissibili per il problema  $\alpha$  con  $\alpha = 0$  sono quelli in corrispondenza di  $J_0$  e quindi gli  $h_{\mu=0}$ . Di questi per costruzione stessa del problema  $\alpha$  si va a scegliere il minimo, ottenendo per questo problema un valore unico per  $h_{\alpha=0} = \min h_{\mu=0}$ .  $\square$

**Definizione 4** *Si definisce problema  $\infty$  il seguente problema:*

$$\begin{aligned} \min_{\theta, h} h & \qquad (3.51) \\ \text{soggetto a : } & (\theta, h) \in \mathbb{S}. \end{aligned}$$

$\theta_\infty, h_\infty$ , rappresenta una generica soluzione e inoltre  $J_\infty = J(\theta_\infty)$ . In virtù della non unicità della soluzione  $J_\infty$  può assumere una molteplicità di valori, siano:

$$\bar{J}_\infty = \max J_\infty \quad \underline{J}_\infty = \min J_\infty, \quad (3.52)$$

dove massimo e minimo sono presi rispetto alle soluzioni del problema  $\infty$ .

**Proprietà 5** Il limite per  $\alpha$  che tende a infinito di  $h_\alpha$  è uguale a  $h_\infty$ ; il limite per  $\alpha$  che tende a infinito di  $\bar{J}_\alpha$  è uguale a  $\bar{J}_\infty$ ; il limite per  $\alpha$  che tende a infinito di  $\underline{J}_\alpha$  è uguale a  $\underline{J}_\infty$ .

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} h_\alpha = h_\infty \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \bar{J}_\alpha = \bar{J}_\infty \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \underline{J}_\alpha = \underline{J}_\infty$$

### Dimostrazione

Si noti che  $\forall \alpha$  si ha che  $h_\alpha \geq h_\infty$ , infatti l'insieme di feasibility di  $\alpha$  è sempre contenuto nell'insieme di feasibility del problema  $\infty$ .

Inoltre, nell'ipotesi qui presa per buona che  $\underline{J}_\infty$  sia limitato,  $\forall \alpha$  tale che  $\alpha \geq \underline{J}_\infty - J_0$  la soluzione  $(\theta_\infty, h_\infty)$  corrispondente a  $\underline{J}_\infty$  risulta feasible per il problema  $\alpha$  e, poiché  $h_\infty \leq h_\alpha$ , è anche una soluzione ottima. Conseguentemente,  $h_\alpha = h_\infty \forall \alpha \geq \underline{J}_\infty - J_0$ . Inoltre si ha che  $J_\alpha \geq \underline{J}_\infty \forall \alpha \geq \underline{J}_\infty - J_0$ . Se così non fosse, infatti, si avrebbe che  $\theta_\alpha, h_\alpha$  è una soluzione del problema  $\infty$   $(\theta_\infty, h_\infty)$  tale che  $J_\alpha < \underline{J}_\infty$ , violando la definizione di  $\underline{J}_\infty$ . Si ha quindi:

$$\underline{J}_\alpha = \underline{J}_\infty \quad \forall \alpha \geq \underline{J}_\infty - J_0.$$

Al crescere di  $\alpha$  tutte le soluzioni del problema  $\infty$  tali che  $J_\infty \leq J_0 + \alpha$  diventano soluzioni per il problema  $\alpha$  e così anche  $\bar{J}_\alpha \rightarrow \bar{J}_\infty$ .  $\square$

**Proprietà 6** Il limite per  $\mu$  che tende a infinito di  $h_\mu$  è uguale a  $h_\infty$ ; il limite per  $\mu$  che tende a infinito di  $J_\mu$  è uguale a  $\underline{J}_\infty$ .

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} h_\mu = h_\infty \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} J_\mu = \underline{J}_\infty$$

### Dimostrazione

Ogni soluzione del problema  $\infty$  risulta feasible anche per il problema  $\mu$  e viceversa, infatti i due problemi pur avendo cifre di merito diverse hanno lo stesso insieme di vincoli. Essendo  $h_\infty$  il minimo per  $h$  in  $\mathbb{S}$  risulta necessariamente  $h_\mu \geq h_\infty$  e così anche:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} h_\mu \geq h_\infty. \quad (3.53)$$

D'altra parte ricordando che la soluzione del problema  $\mu$  dà il minimo per la somma  $J + \mu h$  si può scrivere:

$$J_\mu + \mu h_\mu \leq \underline{J}_\infty + \mu h_\infty \quad (3.54)$$

$$h_\mu \leq \frac{\underline{J}_\infty - J_\mu}{\mu} + h_\infty \quad (3.55)$$

e quindi:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} h_\mu \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\underline{J}_\infty - J_\mu}{\mu} + h_\infty \leq h_\infty \quad (3.56)$$

con nell'ipotesi che  $\underline{J}_\infty$  sia limitata. Dalla (3.53) e dalla (3.56) si ottiene:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} h_\mu = h_\infty. \quad (3.57)$$

Si può assumere che il limite di  $J_\mu$  esista poiché  $J_\mu$  è monotona e limitata. Utilizzando ancora la (3.54) si può scrivere:

$$J_\mu \leq \underline{J}_\infty + \mu(h_\infty - h_\mu) \leq \underline{J}_\infty. \quad (3.58)$$

Se per assurdo si pone:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} J_\mu = \tilde{J} < \underline{J}_\infty \quad (3.59)$$

sia  $\tilde{\alpha} = \tilde{J} - J_0$  e sia  $(\theta_{\tilde{\alpha}}, h_{\tilde{\alpha}})$  una corrispondente soluzione del problema  $\tilde{\alpha}$ . Si ottiene che  $h_{\tilde{\alpha}} = h_\infty$  infatti poiché  $\forall \mu$  le soluzioni del problema  $\mu$  sono feasible per il problema  $\tilde{\alpha}$  risulta  $h_{\tilde{\alpha}} \leq h_\mu \forall \mu$  ma  $h_\mu \rightarrow h_\infty$  (come da (3.57)) e  $h_{\tilde{\alpha}} \geq h_\infty$  di conseguenza risulta necessariamente  $h_{\tilde{\alpha}} = h_\infty$ . Allora la soluzione del problema  $\tilde{\alpha}$  risulta ammissibile e ottima per il problema  $\infty$ , con  $J_{\tilde{\alpha}} = \tilde{J}$  ma  $\tilde{J} < \underline{J}_\infty$  in contraddizione con la definizione di  $\underline{J}_\infty$ . Quindi deve necessariamente accadere che:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} J_\mu = \underline{J}_\infty. \quad (3.60)$$



Si noti che questo è possibile solo nel caso la soluzione del problema  $\alpha$  esista e sia sempre ben definita, in caso contrario può accadere qualsiasi cosa e in particolare si potrebbe avere che  $J_\mu \not\rightarrow \underline{J}_\infty$ .  $\square$

La proprietà 7 mostra come presi dei valori della cifra di merito  $J$  e di  $h$  ottenuti dalla soluzione di un problema  $\mu$ , sia possibile ottenere gli stessi valori di  $J$  e  $h$  attraverso la risoluzione di un problema  $\alpha$ . Questa proprietà rappresenta quindi un primo passo per stabilire l'equivalenza tra i problemi  $\mu$  ed  $\alpha$ .

**Proprietà 7** *Per ogni valore di  $\mu$  e per ogni soluzione  $(\theta_\mu, h_\mu)$  del problema  $\mu$  è possibile trovare un valore di  $\alpha$  tale che tutte le soluzioni del problema  $\alpha$  corrispondente siano equivalenti alla soluzione  $(\theta_\mu, h_\mu)$  rispetto ai valori di  $J$  e  $h$  ottenuti. In formule:*

$$\forall \mu \quad \forall (\theta_\mu, h_\mu) \quad \exists \bar{\alpha} : \forall (\theta_{\bar{\alpha}}, h_{\bar{\alpha}}) \quad J_{\bar{\alpha}} = J_\mu \quad h_{\bar{\alpha}} = h_\mu$$

### Dimostrazione

Sia  $\bar{\alpha} = J_\mu - J_0$  e sia la  $(\theta_{\bar{\alpha}}, h_{\bar{\alpha}})$  una soluzione del problema  $\alpha$  per  $\alpha = \bar{\alpha}$ , risulta ovviamente:

$$J_{\bar{\alpha}} \leq J_0 + \bar{\alpha} = J_\mu. \quad (3.61)$$

Poiché  $(\theta_\mu, h_\mu) \in \mathbb{S}$  e  $J_\mu \leq J_0 + \bar{\alpha} = J_\mu$  la soluzione del problema  $\mu$  risulta feasible anche per il problema  $\bar{\alpha}$ . Deve essere:

$$h_{\bar{\alpha}} \leq h_\mu \quad (3.62)$$

dato che  $h_{\bar{\alpha}}$  è il valore di minimo per il problema  $\bar{\alpha}$ . Si può quindi scrivere che:

$$J_{\bar{\alpha}} + \mu h_{\bar{\alpha}} \leq J_\mu + \mu h_\mu, \quad (3.63)$$

ma, ricordando che la somma  $J_\mu + \mu h_\mu$  deve essere minima, risulta necessariamente:

$$J_{\bar{\alpha}} + \mu h_{\bar{\alpha}} = J_\mu + \mu h_\mu. \quad (3.64)$$

Utilizzando ancora (3.61) e (3.62) si ha

$$J_{\bar{\alpha}} = J_{\mu} \quad h_{\bar{\alpha}} = h_{\mu} \quad \forall (\theta_{\bar{\alpha}}, h_{\bar{\alpha}}) \text{ soluzione al problema } \bar{\alpha} \quad (3.65)$$

□

Si noti che per i valori di  $\alpha$  in cui vi è corrispondenza con un problema  $\mu$  la soluzione del problema  $\alpha$  presenta un unico valore per  $J_{\alpha}$  e quindi se il problema  $\alpha$  presentasse per alcuni valori di  $\alpha$  molteplici valori di  $J_{\alpha}$ , tali valori non possono essere assunti da  $J_{\mu}$  per nessun valore di  $\mu$ . In particolare è possibile mostrare che la soluzione dei problemi  $\alpha$  presenta zone in cui il valore di  $J_{\alpha}$  non è unico, considerando un insieme  $\mathbb{S}$  non convesso.

### Esempio

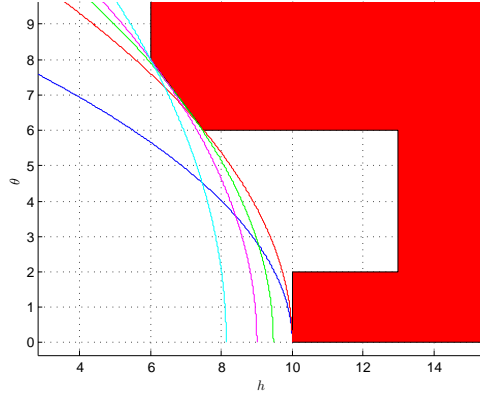
Si riporta un esempio in cui si mostra in modo qualitativo cosa può accadere nel caso in cui l'insieme  $\mathbb{S}$  sia non convesso. In questo caso si ottiene che  $J_{\alpha}$  ha zone in cui può assumere valori multipli.

Si è considerato il semplice caso in cui  $J = \theta^2$  ( $\theta$  scalare), l'insieme  $\mathbb{S}$  è rappresentato in Figura 3.7(a) sul piano  $(h, \theta)$  dalla regione rossa non convessa. La soluzione del problema  $\alpha$  si può facilmente ottenere: è sufficiente scegliere il minimo  $h$ , cioè il punto con ascissa minore, nella regione rossa, con il solo vincolo  $\theta \leq \sqrt{\alpha}$  ovvero considerando solo i punti di ordinata inferiore a  $\sqrt{\alpha}$ .

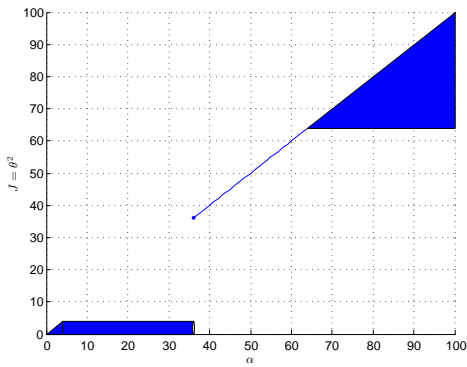
La soluzione del problema  $\mu$  è meno immediata, ma può essere trovata tracciando le curve di livello della cifra di merito del problema  $\mu$ :  $\theta^2 + \mu h = K$ . Così facendo si individuano delle parabole ad asse orizzontale  $h = \frac{K - \theta^2}{\mu}$ : il minimo per la cifra  $\mu$ :  $\theta^2 + \mu h$  si trova in corrispondenza del minimo valore di  $K$  per cui la parabola  $h = \frac{K - \theta^2}{\mu}$  ammette un punto nella regione  $\mathbb{S}$ .

Così procedendo è possibile tracciare almeno in modo qualitativo gli andamenti di  $J_{\alpha}$ ,  $h_{\alpha}$  e  $J_{\mu}$ ,  $h_{\mu}$ . Si noti che nella zona compresa tra  $\alpha = 4$  e  $\alpha = 36$  è possibile scegliere valori di  $\theta$  compresi tra 0 e 2 ottenendo sempre lo stesso  $h = 10$  cioè in questa zona  $J_{\alpha}$  assume valori multipli. Questo non accade

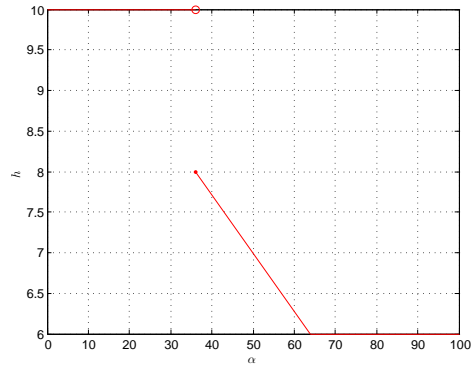
nel problema  $\mu$  in cui nella zona corrispondente si ottiene sempre  $\theta = 0$  e  $h = 10$  come unica soluzione.



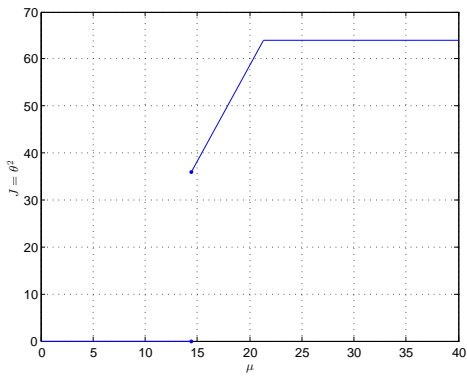
(a) La regione rossa  $\mathbb{S}$ . Le curve  $h = \frac{K-\theta^2}{\mu}$



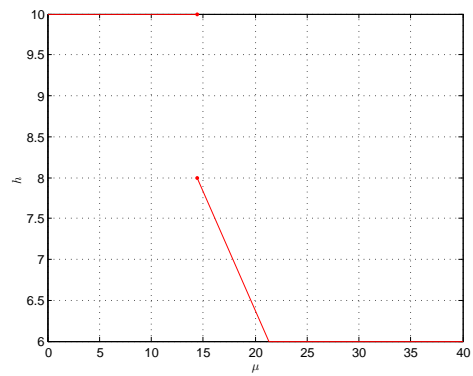
(b)  $J_\alpha$



(c)  $h_\alpha$



(d)  $J_\mu$ . Si noti che non è detto che  $J_\mu$  cresca linearmente con  $\mu$ .



(e)  $h_\mu$ . Si noti che non è detto che la discesa di  $h_\mu$  sia lineare.

Figura 3.7: Andamenti qualitativi di  $J_\alpha$ ,  $h_\alpha$  e  $J_\mu$ ,  $h_\mu$ .

Come è mostrato nell'esempio precedente la continuità di  $J_\mu$ ,  $J_\alpha$  e di  $h_\mu$ ,  $h_\alpha$  non è in generale garantita, inoltre  $J_\alpha$  può assumere più valori. La proprietà di continuità, tuttavia, serve per poter affermare che è possibile coprire attraverso la scelta di  $\mu$  ed  $\alpha$  tutti i valori tra  $J_0$  e  $\underline{J}_\infty$  e tra  $h_0$  e  $h_\infty$ , in questo modo è possibile gestire il trade-off tra  $J$  e  $h$  in qualsiasi punto.

La continuità viene garantita se si introducono le seguenti ipotesi: l'insieme  $\mathbb{S}$  è convesso e compatto e la cifra di merito  $J(\theta)$  è convessa e continua rispetto al suo argomento  $\theta$ .

L'ipotesi sull'insieme  $\mathbb{S}$  è soddisfatta nel caso si prenda in considerazione una struttura dei vincoli come quelle considerate per i problemi nei Capitoli 2 e 3, definita in modo da ottenere vincoli convessi. La cifra di merito  $J(\theta)$  nel caso specifico in cui  $J$  abbia la struttura ricavata nel Capitolo 1 e utilizzata nei seguenti Capitoli 2 e 3 risulta convessa; un'ulteriore analisi viene ripresa al termine di questo capitolo, ricavando le condizioni in cui essa risulta strettamente convessa.

**Proprietà 8** *Nell'ipotesi in cui  $\mathbb{S}$  è un insieme convesso e che  $J(\theta)$  è una funzione convessa e continua di  $\theta$ , per ogni valore  $\bar{J}$  compreso tra  $J_0$  e  $\underline{J}_\infty$  esiste un valore di  $\mu$  tale per cui in corrispondenza di una soluzione si ottiene  $J(\theta_\mu) = J_\mu = \bar{J}$ . Analogamente per ogni valore  $\bar{h}$  compreso tra  $h_0$  e  $h_\infty$  esiste un valore di  $\mu$  e una soluzione corrispondente tale per cui  $h_\mu$  è uguale a  $\bar{h}$ . In formule:*

$$\begin{aligned} \forall \bar{J} \in [J_0, \underline{J}_\infty) & \quad \exists \mu : \exists (\theta_\mu, h_\mu) : J(\theta_\mu) = J_\mu = \bar{J} \\ \forall \bar{h} \in [h_0, h_\infty) & \quad \exists \mu : \exists (\theta_\mu, h_\mu) : h_\mu = \bar{h}. \end{aligned}$$

### Dimostrazione

Si fissi un valore qualsiasi di  $\mu$  e, al solito, si denoti con  $(\theta_\mu, h_\mu)$  una delle soluzioni corrispondenti al problema  $\mu$  e sia  $J(\theta_\mu) = J_\mu$ . Siano inoltre:

$$\bar{J}_\mu = \sup_{\theta_\mu, h_\mu} J_\mu \quad \underline{J}_\mu = \inf_{\theta_\mu, h_\mu} J_\mu \quad \bar{h}_\mu = \sup_{\theta_\mu, h_\mu} h_\mu \quad \underline{h}_\mu = \inf_{\theta_\mu, h_\mu} h_\mu$$

dove sup e inf sono presi rispetto a tutte le soluzioni del problema  $\mu$ .

Si consideri ora la successione  $\mu_n = \mu + \frac{1}{n}$  che tende a  $\mu$  da destra e sia

$(\theta_{\mu_n}, h_{\mu_n})$  una qualsiasi soluzione per il problema  $\mu_n$ . Per le proprietà di crescita e decrescenza di  $J_\mu$  e  $h_\mu$  risulta:

$$\cdots \leq J(\theta_{\mu_n}) \leq J(\theta_{\mu_{n-1}}) \leq \cdots \leq J(\theta_{\mu_1}) \quad (3.66)$$

$$\cdots \geq h_{\mu_n} \geq h_{\mu_{n-1}} \geq \cdots \geq h_{\mu_1}. \quad (3.67)$$

Essendo l'insieme  $\mathbb{S}$  compatto, esiste una sottosuccessione convergente che con abuso di notazione verrà ancora indicata con  $\theta_{\mu_n}, h_{\mu_n}$ . Siano quindi

$$\theta^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{\mu_n} \quad h^* = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\mu_n}. \quad (3.68)$$

In virtù dell'ipotesi di continuità risulta anche che  $J(\theta_{\mu_n}) \rightarrow J(\theta^*)$ . È un fatto che  $(\theta^*, h^*)$  è una soluzione del problema  $\mu$  infatti, ricordando che  $J_\mu + \mu h_\mu = J(\theta_\mu) + \mu h_\mu$ , risulta:

$$J(\theta^*) + \mu h^* = \lim_{n \rightarrow \infty} J(\theta_{\mu_n}) + \mu_n h_{\mu_n} = J_\mu + \mu h_\mu \quad (3.69)$$

dove l'ultima uguaglianza segue in virtù della continuità di  $J_\mu + \mu h_\mu$  come funzione di  $\mu$  dimostrata nella Proprietà 2. Inoltre si ha che:

$$J(\theta^*) = \sup_{\theta_\mu, h_\mu} J_\mu = \bar{J}_\mu, \quad h^* = \inf_{\theta_\mu, h_\mu} h_\mu = \underline{h}_\mu, \quad (3.70)$$

cioè  $(\theta^*, h^*)$  corrisponde alla soluzione del problema  $\mu$  in cui si ottengono i valori estremali  $\bar{J}_\mu$  e  $\underline{h}_\mu$ . Infatti se così non fosse si avrebbe  $J(\theta_\mu) > J(\theta^*)$  e  $h_\mu < h^*$ , rispettivamente in contraddizione con  $J(\theta_{\mu_n}) \rightarrow J(\theta^*)$ ,  $J(\theta_{\mu_n}) \geq J(\theta_\mu)$  e con  $h_{\mu_n} \rightarrow h^*$ ,  $h_{\mu_n} \leq h_\mu$ . Per quanto riguarda  $\underline{J}_\mu$  e  $\bar{h}_\mu$  si procede in modo analogo a quanto già fatto. Si consideri quindi la successione  $\mu_n = \mu - \frac{1}{n}$  che tende a  $\mu$  da sinistra e sia  $(\theta_{\mu_n}, h_{\mu_n})$  una qualsiasi soluzione per il problema  $\mu_n$ . Per le proprietà di crescita e decrescenza di  $J_\mu$  e  $h_\mu$  risulta:

$$\cdots \geq J(\theta_{\mu_n}) \geq J(\theta_{\mu_{n-1}}) \geq \cdots \geq J(\theta_{\mu_1}) \quad (3.71)$$

$$\cdots \leq h_{\mu_n} \leq h_{\mu_{n-1}} \leq \cdots \leq h_{\mu_1}. \quad (3.72)$$

Essendo l'insieme  $\mathbb{S}$  compatto, esiste una sottosuccessione convergente che con abuso di notazione verrà ancora indicata con  $\theta_{\mu_n}, h_{\mu_n}$ . Siano quindi:

$$\theta_\star = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{\mu_n} \quad h_\star = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{\mu_n}. \quad (3.73)$$

In virtù dell'ipotesi di continuità risulta anche che  $J(\theta_{\mu_n}) \rightarrow J(\theta_*)$ . È un fatto che  $(\theta_*, h_*)$  è una soluzione del problema  $\mu$  infatti risulta:

$$J(\theta_*) + \mu h_* = \lim_{n \rightarrow \infty} J(\theta_{\mu_n}) + \mu_n h_{\mu_n} = J_\mu + \mu h_\mu \quad (3.74)$$

dove l'ultima uguaglianza segue in virtù della continuità di  $J_\mu + \mu h_\mu$  come funzione di  $\mu$  dimostrata nella Proprietà 2. Inoltre si ha che:

$$J(\theta_*) = \inf_{\theta_\mu, h_\mu} J_\mu = \underline{J}_\mu, \quad h_* = \sup_{\theta_\mu, h_\mu} h_\mu = \bar{h}_\mu, \quad (3.75)$$

cioè  $J(\theta_{\mu_n}) \rightarrow J(\theta_*)$  corrisponde alla soluzione del problema  $\mu$  in cui si ottengono i valori estremali  $\underline{J}_\mu$  e  $\bar{h}_\mu$ . Infatti se così non fosse si avrebbe  $J(\theta_\mu) < J(\theta_*)$  e  $h_\mu > h_*$ , rispettivamente in contraddizione con  $J(\theta_{\mu_n}) \rightarrow J(\theta_*)$ ,  $J(\theta_{\mu_n}) \leq J(\theta_\mu)$  e con  $h_{\mu_n} \rightarrow h_*$ ,  $h_{\mu_n} \geq h_\mu$ .

Sia ora  $\theta_x = x\theta^* + (1-x)\theta_*$  e  $h_x = xh^* + (1-x)h_*$ ,  $x \in [0, 1]$ .  $(\theta_x, h_x) \in \mathbb{S}$  in virtù dell'ipotesi di convessità di  $\mathbb{S}$ . Per ogni valore di  $x$  si ha che  $\theta_x, h_x$  è soluzione del problema  $\mu$ . Infatti:

$$\begin{aligned} J(\theta_x) + \mu h_x &= J(x\theta^* + (1-x)\theta_*) + \mu[xh^* + (1-x)h_*] & (3.76) \\ &\leq \text{[sfruttando la convessità di } J\text{]} \\ &\leq xJ(\theta^*) + (1-x)J(\theta_*) + x\mu h^* + (1-x)\mu h_* \\ &= x[J(\theta^*) + \mu h^*] + (1-x)[J(\theta_*) + \mu h_*] \\ &= [J(\theta^*) + \mu h^* = J(\theta_*) + \mu h_* = J(\theta_\mu) + \mu h_\mu] \\ &= J(\theta_\mu) + \mu h_\mu. \end{aligned}$$

Essendo, tuttavia,  $J(\theta_\mu) + \mu h_\mu$  minimo, deve necessariamente capitare che  $J(\theta_x) + \mu h_x = J(\theta_\mu) + \mu h_\mu$ . Inoltre poiché  $h_x = xh^* + (1-x)h_*$  per definizione si ha  $J(\theta_x) = xJ(\theta^*) + (1-x)J(\theta_*)$ . Cioè, al variare di  $x$  la soluzione ottenuta è tale per cui  $J(\theta_x)$  assume tutti i valori compresi tra  $\underline{J}_\mu$  e  $\bar{J}_\mu$  e  $h_x$  tutti i valori compresi tra  $\underline{h}_\mu$  e  $\bar{h}_\mu$ .  $\square$

Riassumendo il teorema mostra che in generale  $J_\mu$  e  $h_\mu$  sono funzioni a più valori, ma che in corrispondenza di un  $\mu$  fissato assumono tutti i valori

nell'intervallo  $[\underline{J}_\mu, \overline{J}_\mu]$  e  $[\underline{h}_\mu, \overline{h}_\mu]$  e che per  $\mu$  diversi soddisfano una proprietà di crescita/decrecenza e una proprietà di continuità verso i valori estremali. Questo permette di concludere che al variare di  $\mu$  tutti i valori compresi tra  $J_0$  e  $\underline{J}_\infty$  e tra  $h_0$  e  $h_\infty$  sono assunti. Un possibile andamento di  $J_\mu$  e  $h_\mu$  è mostrato in Figura 3.8.

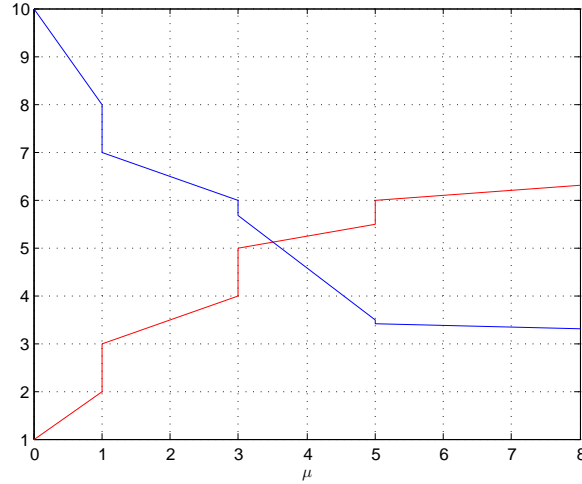


Figura 3.8: Possibili andamenti di  $J_\mu$  (rosso) e  $h_\mu$  (blu).

Si può notare che in virtù dei risultati ottenuti nelle proprietà precedenti  $J_\alpha$  e  $h_\alpha$  devono essere funzioni continue di  $\alpha$  e che, inoltre,  $J_\alpha$  cresce linearmente in  $\alpha$ .

**Proprietà 9** *Se  $J(\theta)$  è convessa e continua e l'insieme  $\mathbb{S}$  è convesso compatto,  $J_\alpha$  non può avere più valori per uno stesso  $\alpha$  o avere salti e cresce linearmente con pendenza unitaria da  $J_0$  a  $\underline{J}_\infty$  al variare di  $\alpha$ .*

### Dimostrazione

Si può notare che in virtù della Proprietà 7 per cui  $\forall \mu, \exists \alpha$  tale per cui si ottengono soluzioni equivalenti per  $J$  e  $h$  e in virtù della Proprietà 8 per cui tutti i valori nell'intervallo  $[\underline{J}_\mu, \overline{J}_\mu]$  e  $[\underline{h}_\mu, \overline{h}_\mu]$  sono assunti da  $J_\mu$  e  $h_\mu$  segue che  $J_\alpha$  e  $h_\alpha$  devono essere funzioni continue di  $\alpha$ . Inoltre  $J_\alpha$  cresce linearmente in  $\alpha$  infatti nell'intervallo  $[J_0, \underline{J}_\infty]$   $J_\alpha$  assume sempre il valore

$J_0 + \alpha$ .  $\square$

La proprietà 10 mostra come presi dei valori della cifra di merito  $J$  e di  $h$  ottenuti dalla soluzione di un problema  $\alpha$ , sia possibile ottenere gli stessi valori di  $J$  e  $h$  attraverso la risoluzione di un problema  $\mu$ . Questa proprietà insieme alla Proprietà 7 stabilisce l'equivalenza, sotto opportune ipotesi, dei problema  $\mu$  e  $\alpha$ .

**Proprietà 10** *Se  $J(\theta)$  è convessa e continua e l'insieme  $\mathbb{S}$  è convesso compatto allora per ogni valore di  $\alpha$  e per ogni soluzione corrispondente esiste un valore di  $\mu$  tale per cui la corrispondente soluzione è equivalente a quella del problema  $\alpha$  rispetto ai valori di  $J$  e  $h$  ottenuti.*

$$\forall \alpha \quad \forall (\theta_\alpha, h_\alpha) \quad \exists \mu : \exists (\theta_\mu, h_\mu) \quad J(\theta_\mu) = J(\theta_\alpha) = J_\alpha, \quad h_\mu = h_\alpha.$$

### Dimostrazione

Si consideri un valore di  $\alpha$  e la soluzione  $(\theta_\alpha, h_\alpha)$  e  $J_\alpha$  corrispondente. Grazie alla proprietà precedente è possibile scrivere che:

$$\exists \mu : J_\mu = J_\alpha.$$

La soluzione del problema  $\mu$   $(\theta_\mu, h_\mu)$  con  $J_\mu = J_\alpha$  è feasible per il problema  $\alpha$  e conseguentemente  $h_\alpha \leq h_\mu$ . Tuttavia la soluzione del problema  $\alpha$  è feasible per il problema  $\mu$  e quindi poiché  $h_\alpha \leq h_\mu$  si ha che

$$J_\mu + \mu h_\mu \geq J_\mu + \mu h_\alpha = J_\alpha + \mu h_\alpha. \quad (3.77)$$

Ricordando, però, che il termine a sinistra è il minimo per la somma  $J + \mu h$  risulta necessariamente:

$$J_\mu + \mu h_\mu = J_\mu + \mu h_\alpha \quad (3.78)$$

e quindi  $h_\mu = h_\alpha$ .  $\square$

Si noti che sotto le ipotesi di convessità,  $J_\alpha$  e  $h_\alpha$  sono funzioni a un valore e continue che coprono tutti i valori in  $[J_0, \underline{J}_\infty]$  e in  $[h_0, h_\infty]$ . Invece



$J_\mu$  e  $h_\mu$  sono funzioni che coprono gli stessi intervalli, ma sono a più valori quindi per gestire il trade-off tra  $J$  ed  $h$  non è sufficiente risolvere il problema  $\mu$ , ma è necessario anche cercare e ordinare tutte le differenti soluzioni. In realtà, sotto ipotesi leggermente più stringenti, ovvero richiedendo che  $J(\theta)$  sia strettamente convessa in  $\theta$ ,  $J_\mu$  e  $h_\mu$  risultano funzioni a un valore e continue.

**Proprietà 11** *Se  $J(\theta)$  è strettamente convessa e continua e l'insieme  $\mathbb{S}$  è convesso compatto allora  $J_\mu$  e  $h_\mu$  sono funzioni ad un valore e continue in  $\mu$ .*

### Dimostrazione

Riprendendo la dimostrazione della Proprietà 8 dalla (3.76), se  $J(\theta)$  è strettamente convessa si avrebbe, se  $\theta^* \neq \theta_*$  e  $h^* \neq h_*$ , che:

$$J(\theta_x) + \mu h_x < J_\mu + \mu h_\mu \quad (3.79)$$

che è un assurdo in quanto  $J_\mu + \mu h_\mu$  è minimo per il problema  $\mu$ . Quindi necessariamente  $\theta^* = \theta_*$  e  $h^* = h_*$  per ogni valore di  $\mu$ . Di conseguenza le funzioni  $J_\mu$  e  $h_\mu$  risultano ad un valore e continue in  $\mu$ .  $\square$

### 3.5.2 Stretta convessità di J

Come accennato in precedenza le ipotesi di convessità di  $\mathbb{S}$  di  $J(\theta)$  sono in generale verificate nei problemi affrontati. In conclusione del capitolo si ricavano le condizioni necessarie a garantire che  $J(\theta)$  risulti strettamente convessa al fine di poter garantire anche la Proprietà 11, partendo dalla sua espressione ricavata nel Capitolo 1. Si noti che, tuttavia, gli stessi risultati si otterrebbero considerando cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}$  (2.3) in cui la variabile di controllo viene generata come funzione affine del disturbo saturato; nel procedimento seguente sarebbe necessario considerare il disturbo saturato  $\varphi(w)$  invece del disturbo  $w$ . Come vedremo la stretta convessità è garantita

mediante blande ipotesi sul disturbo che affligge il sistema stocastico da controllare. Si noti che essendo  $J(\theta)$  quadratica dimostrare la stretta convessità è equivalente a dimostrare che il suo nucleo è definito positivo. Si consideri il funzionale di costo  $J$  scritto nella forma:

$$J = \mathbb{E}[\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] = \mathbb{E}[\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}] + \mathbb{E}[\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}]. \quad (3.80)$$

È sufficiente dimostrare che solamente uno dei due termini risulti definito positivo; si decide di prendere in considerazione il secondo. Ora ricordando che  $\mathbf{u} = \Theta \mathbf{w} + \Gamma$  e la dipendenza della variabile di controllo dalle variabili di ottimizzazione si può andare a riscrivere la variabile di controllo in una forma in cui le variabili di ottimizzazione appaiono tutte in un unico vettore, premoltiplicato per una matrice che contiene i valori del disturbo opportunamente disposti al suo interno. Più precisamente si riscrive:

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}_E \theta_E \quad (3.81)$$

dove nel vettore  $\theta_E$  si sono incolonnate le variabili di ottimizzazione seguendo le righe della matrice  $\Theta$  e infine incolonnando il vettore  $\Gamma$ ; la matrice  $\mathbf{W}_E$  sia così costruita (gli elementi bianchi vanno intesi come nulli, 0 è indicato esplicitamente solamente in alcuni casi per maggiore chiarezza):

$$w_j = \begin{bmatrix} w_j^{(1)} \\ w_j^{(2)} \\ \vdots \\ w_j^{(n_w)} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.82)$$

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_i & & & \\ & \mathbf{w}_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{w}_i \end{bmatrix}}_m \quad i = 1, 2, \dots, M-1 \quad (3.83)$$

$$\mathbf{W}_E = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & & & & \\ W_1^T & & & & \\ & W_2^T & & & \\ & & \dots & & \\ & & & W_{M-1}^T & \\ \hline & & & & I_{Mm \times Mm} \end{array} \right]. \quad (3.84)$$

Si ottiene quindi, utilizzando la nuova espressione di  $\mathbf{u}$ , che:

$$\mathbb{E}[\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] = \mathbb{E}[\theta_E^T \mathbf{W}_E^T \mathbf{R} \mathbf{W}_E \theta_E] = \theta_E^T \mathbb{E}[\mathbf{W}_E^T \mathbf{R} \mathbf{W}_E] \theta_E \quad (3.85)$$

Svolgendo i calcoli si ottiene che:

$$\mathbf{W}_E^T \mathbf{R} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & W_1 R & & & \\ & 0 & W_2 R & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & W_{M-1} R \\ \hline & & & & \mathbf{R} \end{array} \right] \quad (3.86)$$

e che:

$$\mathbf{W}_E^T \mathbf{R} \mathbf{W}_E = \left[ \begin{array}{cccc|c} W_1 R W_1^T & & & & \tilde{Q} \\ & W_2 R W_2^T & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & W_{M-1} R W_{M-1}^T & \\ \hline & & & & \mathbf{R} \\ \tilde{Q}^T & & & & \end{array} \right] \quad (3.87)$$

dove  $\tilde{Q}$  rappresenta il blocco superiore della matrice  $\mathbf{W}_E^T \mathbf{R}$ . Andando ora a considerare l'operatore di valore atteso e, ricordando che  $w_i$  ha valore atteso

nullo, si ha che:

$$\mathbb{E}[\mathbf{W}_E^T \mathbf{R} \mathbf{W}_E] = \left[ \begin{array}{ccc|c} L_1 & & & 0 \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{M-1} \\ \hline & & & \mathbf{R} \\ & 0 & & \end{array} \right], \quad L_i = \mathbb{E}[W_i R W_i^T]. \quad (3.88)$$

Più esplicitamente,

$$L_i = \left[ \begin{array}{cccc} R_{11} \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] & R_{12} \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] & \dots & R_{1m} \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] \\ R_{21} \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] & R_{22} \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] & \dots & R_{2m} \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{m1} \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] & R_{m2} \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] & \dots & R_{mm} \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] \end{array} \right] = R \otimes \mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T] \quad (3.89)$$

in cui  $R_{jk}$  indica gli elementi scalari della matrice  $R$  ed il simbolo  $\otimes$  indica il prodotto di Kronecker.

Per stabilire se la matrice  $\mathbb{E}[\mathbf{W}_E^T \mathbf{R} \mathbf{W}_E]$  è definita positiva è necessario valutare i suoi autovalori: essendo una matrice diagonale a blocchi, i suoi autovalori sono tutti gli autovalori dei blocchi che compongono la diagonale. Questi, a loro volta sono costituiti, da matrici che sono il risultato di prodotti di Kronecker. Vale la seguente proprietà: siano  $A$  e  $B$  due matrici quadrate, allora gli autovalori di  $A \otimes B$  sono dati dalle moltiplicazioni tra un autovalore di  $A$  e un autovalore di  $B$  scegliendo tutte le coppie possibili. In formule, detti  $\lambda_i$  gli autovalori di una matrice, si ha che:

$$\lambda_{ij}(A \otimes B) = \lambda_i(A) \lambda_j(B) \quad \forall i \forall j.$$

Quindi affinché il risultato dei prodotti di Kronecker sia definito positivo è necessario, in questo caso, che siano definite positive entrambe le matrici presenti nel prodotto.

Affinché tutti gli autovalori della matrice  $\mathbb{E}[\mathbf{W}_E^T \mathbf{R} \mathbf{W}_E]$  siano positivi è necessario che la matrice  $L_{M-1} = \mathbb{E}[W_{M-1} R W_{M-1}^T] = R \otimes \mathbb{E}[\mathbf{w}_{M-1} \mathbf{w}_{M-1}^T]$  sia

definita positiva. Per fare in modo che  $L_{M-1}$  sia definita positiva è necessario che  $R$  sia definita positiva, e quindi risulta definito positivo anche il blocco  $\mathbf{R}$ . È inoltre necessario che sia definita positiva la matrice  $\mathbb{E}[\mathbf{w}_{M-1}\mathbf{w}_{M-1}^T]$ . Si noti che questo implica che siano definiti positivi anche tutti i suoi minori di nord ovest  $\mathbb{E}[\mathbf{w}_i\mathbf{w}_i^T]$  che compaiono nei prodotti di Kronecker che definiscono le matrici  $L_i$  sulla diagonale di  $\mathbb{E}[\mathbf{W}_E^T\mathbf{R}\mathbf{W}_E]$  che quindi risultano a loro volta con autovalori tutti positivi.

Quindi, la cifra di merito  $J$  risulta strettamente convessa se si sceglie una matrice  $R$  definita positiva e se il disturbo è tale per cui  $\mathbb{E}[\mathbf{w}_{M-1}\mathbf{w}_{M-1}^T]$  è definita positiva.

Questo accade se, ad esempio, il disturbo ha matrice covarianza tra le componenti definita positiva e è incorrelato ad istanti di tempo diversi.

Come detto in precedenza il risultato è valido anche nel caso in cui si utilizzi una saturazione del disturbo per generare la variabile di controllo, in questo caso deve risultare definita positiva, oltre alla matrice  $R$ , la matrice  $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{w}_{M-1})\varphi(\mathbf{w}_{M-1})^T]$  in cui con la scrittura  $\varphi(\mathbf{w}_{M-1})$  si intende la funzione di saturazione applicata a tutti gli elementi scalari del vettore  $\mathbf{w}_{M-1}$ .

Si noti che anche in caso di parametrizzazioni di  $\Theta$  ridotte, le condizioni trovate continuano ad essere valide: è possibile sviluppare nuovamente i calcoli effettuati tenendo conto nella matrice  $\mathbf{W}_E$  della nuova parametrizzazione, ottenendo gli stessi risultati. Oppure più semplicemente si può notare che una parametrizzazione ridotta si può imporre fissando a 0 o imponendo uguali alcuni elementi del vettore  $\theta_E$ . In questo caso le condizioni trovate si estendono immediatamente semplicemente notando che dato che il nucleo è definito positivo la forma quadratica risulta nulla solamente se tutte le componenti del vettore  $\theta_E$  sono nulle.

## Capitolo 4

# Esempio riassuntivo: controllo di un sistema meccanico

In questo capitolo si applicano i metodi proposti nei capitoli precedenti ad un sistema meccanico costituito da masse e molle. Inizialmente vengono presi in considerazione solo vincoli sulle variabili di controllo, successivamente si introducono anche dei vincoli sullo stato.

L'esempio è un'elaborazione di quello presentato in [9] e ha lo scopo di evidenziare le potenzialità dei metodi proposti in questa tesi, basati sulla riformulazione del problema di controllo con vincoli come un problema di ottimizzazione chance-constrained e sulla sua soluzione mediante l'approccio a scenario.

### 4.1 Descrizione del sistema meccanico e del problema di controllo

Il sistema meccanico considerato è rappresentato in Figura 4.1. Esso è composto da quattro masse e quattro molle. Lo stato è costituito dalle variabili  $d_1, d_2, d_3, d_4$  che rappresentano gli scostamenti delle masse rispetto

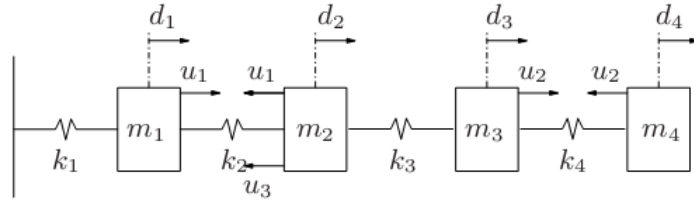


Figura 4.1: Schema del sistema meccanico.

alla posizione di equilibrio a fronte di ingresso nullo e dalle loro derivate  $\dot{d}_1, \dot{d}_2, \dot{d}_3, \dot{d}_4$ . Le variabili di ingresso sono le forze  $u_1, u_2, u_3$  rappresentate in Figura 4.1. Le masse e le rigidzze delle molle sono tutte unitarie:  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$  e  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ . Il modello a tempo discreto del sistema viene ottenuto a partire dal modello a tempo continuo, supponendo che le variabili di controllo rimangano costanti in ogni intervallo di tempo  $[t, t + 1]$ ,  $t = \dots, 0, 1, 2, \dots$ , e che le forze di attrito siano trascurabili. Al modello a tempo discreto si aggiunge un disturbo di dimensione  $n_w = 8$  costituito da un processo bianco gaussiano con media nulla e matrice di covarianza pari a  $\sigma^2 I_8$  con  $\sigma = 1$ . Ognuna delle 8 componenti del disturbo è quindi un processo gaussiano bianco a media nulla e varianza unitaria, indipendente dalle altre componenti. In formule:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t$$

dove

$$x = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{d}_4 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} \sim WGN(0, I_8)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1899 & 0.3516 & 0.0340 & 0.0012 & 0.7057 & 0.1360 & 0.0072 & 0.0002 \\ 0.3516 & 0.2239 & 0.3529 & 0.0352 & 0.1360 & 0.7129 & 0.1362 & 0.0074 \\ 0.0340 & 0.3529 & 0.2251 & 0.3868 & 0.0072 & 0.1362 & 0.7131 & 0.1434 \\ 0.0012 & 0.0352 & 0.3868 & 0.5767 & 0.0002 & 0.0074 & 0.1434 & 0.8490 \\ -1.2754 & 0.4409 & 0.1217 & 0.0070 & 0.1899 & 0.3516 & 0.0340 & 0.0012 \\ 0.4409 & -1.1536 & 0.4480 & 0.1288 & 0.3516 & 0.2239 & 0.3529 & 0.0352 \\ 0.1217 & 0.4480 & -1.1466 & 0.5697 & 0.0340 & 0.3529 & 0.2251 & 0.3868 \\ 0.0070 & 0.1288 & 0.5697 & -0.7057 & 0.0012 & 0.0352 & 0.3868 & 0.5767 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.3868 & 0.0012 & -0.0364 \\ -0.3881 & 0.0352 & -0.4245 \\ -0.0352 & 0.3868 & -0.0356 \\ -0.0012 & -0.4233 & -0.0013 \\ 0.5697 & 0.0070 & -0.1360 \\ -0.5769 & 0.1288 & -0.7129 \\ -0.1289 & 0.5697 & -0.1362 \\ -0.0072 & -0.7057 & -0.0074 \end{bmatrix}.$$

L'obiettivo del controllo è quello di contrastare il disturbo, mantenendo il più possibile il sistema attorno all'equilibrio senza eccedere nell'azione di controllo e limitando la deformazione delle molle, in modo da mantenerle ad operare nel regime lineare di funzionamento. Nelle prove si è sempre considerato lo stato iniziale nullo, cioè il sistema di molle inizializzato all'equilibrio.

Allo scopo di regolare il sistema attorno all'equilibrio, si considera la cifra di merito quadratica media  $J$  in (1.4) con matrici dei pesi :

$$Q = \begin{bmatrix} I_4 & 0_4 \\ 0_4 & 0_4 \end{bmatrix} \quad R = 10^{-6}I_3.$$

Il peso  $Q$  è scelto in modo da considerare nella cifra di merito solamente le variabili di stato relative alle posizioni delle masse e non quelle relative alle velocità. Il valore di  $R$  è scelto in modo tale che il suo effetto sia praticamente nullo, ma risulti  $R$  definita positiva, in modo da rispettare la condizione per ottenere una cifra di merito  $J$  strettamente convessa ricavata nella Sezione 3.5. L'orizzonte di predizione considerato è  $M = 5$ .

Nei risultati mostrati qui di seguito in cui si utilizza l'approccio a scenario,



il parametro di violazione dei vincoli  $\epsilon$  ed il parametro di confidenza  $\beta$  sono stati posti uguali a  $\epsilon = 0.1$  e  $\beta = 10^{-5}$ .

Per avere un termine di confronto, prima di procedere con le prove si valuta la risposta del sistema soggetto solamente all'azione del rumore, ponendo la variabile di controllo sempre nulla. Si noti che il sistema, non avendo inserito smorzamento, è semplicemente stabile e tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno modulo unitario; questo fa sì che la varianza dello stato aumenti ad ogni istante di tempo. È stata calcolata la cifra di merito che si ottiene in questo caso e la varianza delle prime quattro componenti dello stato, quelle pesate nella cifra di merito, all'istante  $t = 5$  che è l'ultimo considerato nell'orizzonte di predizione.

Per fare questo si è utilizzata l'equazione di Lyapunov per calcolare la matrice varianza dello stato ad ogni istante nell'orizzonte di predizione. Infatti

$$\mathbb{E}[x_{t+1}x_{t+1}^T] = \mathbb{E}[Ax_t x_t^T A^T] + \mathbb{E}[w_t w_t^T] + 2\mathbb{E}[Ax_t w_t^T]$$

cioè

$$P_{t+1} = AP_t A^T + I$$

con la condizione  $P_0 = 0$  dato che lo stato iniziale, nullo, è noto. Dai primi quattro elementi sulla diagonale della matrice  $P_i$  si possono quindi ricavare le varianze di  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  e  $d_4$  per  $t = 5$  e la cifra di merito complessiva.

I risultati sono riportati in Tabella 4.1. Alcune realizzazioni delle prime quattro componenti dello stato sono riportate in Figura 4.2.

Tabella 4.1: Varianze delle prime 4 componenti dello stato  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  e  $d_4$  all'istante  $t = 5$  e cifra di merito  $J$  per il sistema non controllato.

$\sigma_{d_1}^2$	$\sigma_{d_2}^2$	$\sigma_{d_3}^2$	$\sigma_{d_4}^2$	$J$
5.02	7.17	9.46	11.73	82.33

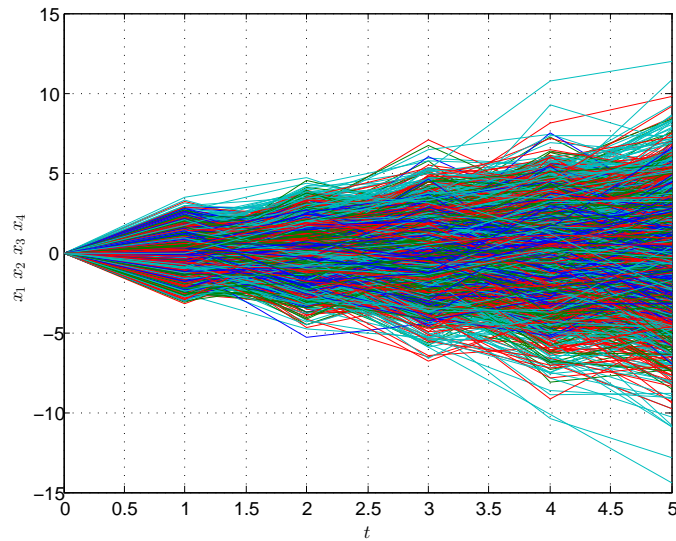


Figura 4.2: Simulazione del sistema non controllato soggetto a diverse realizzazioni del disturbo: andamento delle posizioni delle quattro masse.

## 4.2 Vincoli solo sulla variabile di controllo

Come anticipato in precedenza, si suppone in questo problema che vi siano dei limiti intrinseci nei possibili valori assunti dalla variabile di controllo e, più precisamente, supponiamo che ognuna delle variabili di controllo sia soggetta allo stesso valore di saturazione  $U_M = 5$ , ad ogni istante di tempo considerato, cioè  $\mathbf{S}_u = U_M^{-1} I_{mM}$  con  $m = 3$  e  $\|\mathbf{S}_u \mathbf{u}\|_\infty \leq 1$ .

Dapprima è stata considerata la legge di controllo LQG ottima che minimizza la cifra di merito  $J$  senza considerare vincoli nel controllo e verificando a posteriori se questi erano automaticamente verificati. Purtroppo si è verificato per simulazione su 5000 prove che, se si applica tale legge ottima, si ottiene che almeno una componente della variabile di controllo supera in modulo almeno in un istante il valore  $U_M$  in corrispondenza del 92% delle realizzazioni del disturbo. Chiaramente è possibile ottenere una legge di controllo che soddisfi i vincoli a partire dalla legge LQG ottima post-saturando la variabile di controllo ai valori  $\pm 5$  ogni volta che nella legge LQG si eccede il limite dato da  $U_M$ . Tuttavia il valore della cifra di merito  $J$  campionario ottenuto applicando la legge di controllo ottenuta con tale post-saturazione

è pari a 45.79, con un peggioramento sensibile rispetto al valore ottimo di  $J$  ottenuto dalla legge LQG, pari a 30.76.

Vengono ora illustrati i risultati ottenuti con gli approcci delle Sezioni 2.2 e 2.3.3, che utilizzano entrambi la legge di controllo in retroazione sul disturbo saturato (2.1), ma trattano i vincoli sulla variabile di ingresso rispettivamente in modo robusto ed in probabilità. La funzione di saturazione  $\varphi(\cdot)$  utilizzata è quella descritta in (2.2) e cioè:

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} -\bar{\varphi}, & \alpha \leq -\bar{\varphi} \\ \alpha, & -\bar{\varphi} < \alpha < \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi}, & \alpha \geq \bar{\varphi} \end{cases} . \quad (4.1)$$

Nelle prove effettuate sono stati utilizzati due diversi valori per  $\bar{\varphi}$  ovvero  $\bar{\varphi} = \sigma$  e  $\bar{\varphi} = 2\sigma$  e quattro diverse possibili parametrizzazioni per la matrice  $\Theta$ : parametrizzazione completa (P4), parametrizzazione con una sola sottodiagonale di elementi liberi (P1), parametrizzazione con quattro bande (B4) e con una banda (B1). I risultati ottenuti per l'approccio robusto sono riportati nella Tabella 4.2 dove  $T_{calc}$  rappresenta il tempo di calcolo della soluzione del problema (2.5) misurato in secondi. I risultati ottenuti con l'approccio chance-constrained risolto mediante la tecnica a scenario sono invece riportati in Tabella 4.3. In essa sono dettagliati anche il numero  $N$  di scenari estratti e la stima  $\hat{\epsilon}$  della probabilità di violazione del vincolo di saturazione sull'ingresso in quanto il metodo a scenario non garantisce il soddisfacimento del vincolo robustamente, ma con alta probabilità maggiore o uguale a  $1 - \epsilon$ . Se questo metodo fosse utilizzato in un'applicazione reale sarebbe necessaria una post-saturazione delle variabili di controllo in caso eccedano in modulo  $U_M$  e quindi per valutare le prestazioni effettive dell'approccio si è calcolata la stima campionaria  $\hat{J}_{\bar{\varphi}}$  della funzione  $J_{\bar{\varphi}}$  ottenuta applicando la legge di controllo con tale post-saturazione. Per il calcolo delle stime campionarie si sono utilizzati i dati ottenuti da 5000 simulazioni. Da notare che la stima  $\hat{\epsilon}$  è sempre inferiore a  $\epsilon = 0.1$ , come garantito dalla teoria a scenario con confidenza  $1 - 10^{-5}$ . In tutti i casi riportati la percentuale

delle realizzazioni del disturbo che violano il vincolo è in effetti inferiore al 4%. Anche per questo motivo, la cifra di merito campionaria  $\hat{J}_{\bar{\varphi}}$  riportata nella Tabella 4.3 mostra che il peggioramento rispetto a  $J_{\bar{\varphi}}$  causato dalla post-saturazione dell'ingresso è piuttosto limitato e di fatto le prestazioni dell'approccio a scenario sono pressoché uguali a quelle previste teoricamente. Dalla Tabella 4.2 si osserva come i valori della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}$  ottenuti

Tabella 4.2: Risultati dell'approccio robusto per diverse parametrizzazioni di  $\Theta$  e due valori per  $\bar{\varphi}$ .

$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$J_{\bar{\varphi}}$	$T_{calc}[s]$
P4	$\sigma$	43.62	12.11
P1	$\sigma$	49.78	3.10
B4	$\sigma$	46.09	4.09
B1	$\sigma$	51.28	2.52
P4	$2\sigma$	45.83	12.07
P1	$2\sigma$	50.56	3.12
B4	$2\sigma$	49.07	4.02
B1	$2\sigma$	51.85	2.52

con l'approccio robusto risultino comparabili con il valore 45.79 stimato per la cifra di merito  $J$  nel caso in cui si applichi la legge di controllo ottima per il problema senza vincoli, post-saturando la variabile di controllo a  $\pm 5$  quando eccede in modulo il limite  $U_M = 5$ . Questo può essere giustificato notando che la saturazione interviene nel 22% delle 75000 realizzazioni delle variabili di controllo considerate nelle 5000 prove effettuate, sebbene le realizzazioni del disturbo che portano alla violazione di un vincolo da parte di almeno una variabile di controllo in almeno un istante di tempo siano il 92%.

Confrontando i valori della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}$  nella Tabella 4.2 con quelli di  $\hat{J}_{\bar{\varphi}}$  nella Tabella 4.3, si vede come utilizzando l'approccio chance-constrained risolto con la tecnica a scenario si abbiano prestazioni migliori, in alcuni casi

Tabella 4.3: Risultati dell'approccio chance-constrained per diverse parametrizzazioni di  $\Theta$  e due valori per  $\bar{\varphi}$ .

$\Theta$	$\bar{\varphi}$	$J_{\bar{\varphi}}$	$T_{calc}[s]$	$N$	$\hat{J}_{\bar{\varphi}}$	$\hat{\epsilon}$
P4	$\sigma$	40.08	48.39	3443	40.25	0.0288
P1	$\sigma$	49.03	10.59	1743	49.32	0.0046
B4	$\sigma$	41.31	11.98	1743	41.37	0.0212
B1	$\sigma$	50.91	4.56	819	51.09	0.0022
P4	$2\sigma$	36.90	47.23	3443	37.08	0.0322
P1	$2\sigma$	46.77	10.53	1743	46.81	0.0118
B4	$2\sigma$	38.24	12.26	1743	38.49	0.0296
B1	$2\sigma$	48.45	4.44	819	48.90	0.0074

in modo molto netto, rispetto a quelle che si ottengono utilizzando l'approccio robusto: si noti, ad esempio, il valore 37.08 ottenuto con parametrizzazione completa e  $\bar{\varphi} = 2\sigma$  o il valore 38.49 ottenuto con parametrizzazione con quattro bande e  $\bar{\varphi} = 2\sigma$ . In questo esempio utilizzare  $\bar{\varphi} = \sigma$  comporta un peggioramento delle prestazioni, il valore di saturazione del disturbo risulta troppo ridotto. Nel caso di altre parametrizzazioni ridotte, le prestazioni peggiorano per entrambi gli approcci, dando risultati addirittura peggiori rispetto alla soluzione LQG ottenuta non considerando i vincoli sull'ingresso e post-saturando la variabile di controllo. Questo tuttavia non deve stupire in quanto le parametrizzazioni P1 e B1 limitano troppo i gradi di libertà nella scelta dell'azione di controllo (nel caso LQG la variabile di controllo è libera).

La scelta della parametrizzazione e dell'approccio adottato determinano il trade-off tra tempo di calcolo e prestazioni: scegliendo parametrizzazioni ridotte o il metodo robusto è possibile ridurre di molto il tempo di calcolo, a discapito delle prestazioni. In questo esempio una parametrizzazione con tutte le sottodiagonali, ma a bande, consente di ridurre di un fattore 3 o 4 il tempo di calcolo della soluzione chance-constrained, con un peggioramento

contenuto delle prestazioni. Con il metodo robusto si può ridurre molto il tempo di calcolo, ma le prestazioni ottenute sono spesso significativamente peggiori. Si noti anche che a seconda del metodo scelto cambia il valore di  $\bar{\varphi}$  con il quale si ottengono le prestazioni migliori. Ciò è dovuto alla diversa struttura dei vincoli considerata nei due metodi.

Tabella 4.4: Risultati dell'approccio chance-constrained senza saturazione del disturbo per diverse parametrizzazioni di  $\Theta$ .

$\Theta$	$J$	$T_{calc}[s]$	$N$	$\hat{J}$	$\hat{\epsilon}$
P4	37.07	48.26	3443	37.25	0.0330
P1	46.79	9.46	1743	47.08	0.0066
B4	38.23	12.21	1743	38.35	0.0322
B1	48.66	4.43	819	48.96	0.0066

Per quanto riguarda l'approccio chance-constrained senza saturazione del disturbo presentato nella Sezione 2.3.2, i risultati sono illustrati in Tabella 4.4. I risultati sono molto vicini a quanto ottenuto con l'approccio chance-constrained con saturazione del disturbo utilizzando  $\bar{\varphi} = 2\sigma$ , come ci si poteva aspettare dato che per questo valore di  $\bar{\varphi}$  la saturazione del disturbo interviene in un numero molto limitato di casi.

### 4.3 Vincoli su entrambe le variabili di stato e di controllo

Si considerano ora vincoli aggiuntivi sullo stato della forma (3.4), introdotti per limitare la deformazione delle molle. Per fare questo si definiscono nel modo seguente le matrici  $S_{\tau+i}^x$  che compaiono nella matrice diagonale a

blocchi  $\mathbf{S}_x$  :

$$S_{\tau+i}^x = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0_4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \end{array} \right], \quad i = 1, \dots, M$$

in modo che

$$S_{\tau+i}^x x_{\tau+i} = \begin{bmatrix} d_{1,\tau+i} \\ d_{2,\tau+i} - d_{1,\tau+i} \\ d_{3,\tau+i} - d_{2,\tau+i} \\ d_{4,\tau+i} - d_{3,\tau+i} \end{bmatrix}$$

restituisca la deformazione delle molle all'istante  $\tau + i$ .

Si è scelto di limitare tutte le deformazioni con un'unica variabile di ottimizzazione  $h$ ; in alternativa si sarebbe potuto limitare ogni deformazione singolarmente con una diversa variabile. I vincoli risultano quindi:

$$\|\mathbf{S}_x \mathbf{x}\|_\infty \leq h.$$

Le prove sono state effettuate utilizzando prima il metodo con penalizzazione della cifra di merito descritto nella Sezione 3.3 e successivamente il metodo in due passi descritto nella Sezione 3.4.

Per entrambi i metodi si sono considerati sia l'approccio robusto, problemi (3.12) e (3.25),(3.27), sia quello chance-constrained risolto mediante l'approccio a scenario con saturazione del disturbo, problemi (3.13) e (3.28),(3.29), per l'implementazione dei vincoli sulle variabili di controllo. Sono inoltre state considerate due parametrizzazioni per la matrice  $\Theta$ : la parametrizzazione completa indicata nelle prove con l'acronimo 'P4' e la parametrizzazione più ridotta con una sola banda indicata con 'B1'. Il parametro  $\bar{\varphi}$  è posto sempre uguale a  $2\sigma$ .

Per il metodo con penalizzazione della cifra di merito (Tabelle 4.5 e 4.6), in ognuna delle configurazioni utilizzate si è risolto il problema per 4 valori diversi del peso  $\mu$  con lo scopo di valutare come cambiano le prestazioni ottenute rispetto ai due obiettivi considerati, cioè la regolazione del sistema

attorno all'equilibrio e la limitazione della deformazione delle molle.

Si nota dai risultati nelle Tabelle 4.5 e 4.6 come sia possibile privilegiare maggiormente l'uno o l'altro degli obiettivi utilizzando valori diversi per il peso  $\mu$ : con valori di  $\mu$  piccoli si ottengono per  $J_{\bar{\varphi}}$  valori simili a quelli ottenuti nel caso in cui si considerano solo i vincoli sulla variabile di controllo; per valori di  $\mu$  più elevati si ottiene, invece, una significativa riduzione di  $h$  a discapito di  $J_{\bar{\varphi}}$  che peggiora sensibilmente. Si noti che questo avviene anche nel caso di parametrizzazioni particolari della legge di controllo come B1, con la quale è possibile ridurre molto il tempo di calcolo, compromettendo parzialmente le prestazioni ottenute. Si nota inoltre che, nel caso in cui si adottò l'approccio chance-constrained risolto mediante la tecnica a scenario anche per tenere conto dei vincoli sulle variabili di ingresso, i valori della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}$  cambiano di pochissimo nel caso in cui le variabili di controllo vengano saturate in caso di violazione del vincolo (la cifra di merito in questo ultimo caso è stata calcolata empiricamente ed è stata riportata nelle tabelle come  $\hat{J}_{\bar{\varphi}}$ ). La colonna  $\hat{\epsilon}$  nelle tabelle indica la percentuale, calcolata empiricamente, di rumore che porta alla violazione del vincolo sullo stato (Tabella 4.5) o alla violazione del vincolo su ingresso e stato (Tabella 4.6). Le realizzazioni che portano alla violazione di un vincolo sulla variabile di controllo e/o di un vincolo sullo stato sono ancora in percentuale sempre minori di  $\epsilon = 0.1$  scelto, tuttavia per valori di  $\mu$  elevati  $\hat{\epsilon}$  si avvicina molto a  $\epsilon$ . Le prestazioni migliori si raggiungono con parametrizzazione completa e l'approccio con vincoli in probabilità sull'azione di controllo.

Le stesse prove sono state ripetute con il metodo in due passi presentato nella Sezione 3.4, mantenendo lo stesso set di estrazioni utilizzato nei corrispondenti problemi del metodo con penalizzazione della cifra di merito. I risultati sono riportati nelle Tabelle 4.7 e 4.8. Si sono utilizzati ancora 4 valori di  $\alpha$  intesi come frazione di  $J_{\bar{\varphi}}^*$  soluzione ottima ottenuta dal primo dei due problemi in cascata, in questo modo il peggioramento della cifra di merito risulta espresso in termini relativi e non assoluti. Si può notare il



Tabella 4.5: Risultati dell'approccio con penalizzazione della cifra di merito, utilizzando il metodo robusto per i vincoli sulle variabili di controllo.

$\Theta$	$\mu$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h$	$T_{calc}[s]$	$N$	$\hat{\epsilon}$
P4	0	45.80	9.82	210.16	3455	0.0002
P4	0.1	45.84	9.16	221.76	3455	0.0004
P4	1	46.42	7.62	235.41	3455	0.0056
P4	10	50.88	6.38	254.51	3455	0.0272
P4	100	61.99	5.94	271.97	3455	0.0812
B1	0	51.89	9.83	13.20	833	0.0014
B1	0.1	51.89	9.68	13.78	833	0.0014
B1	1	52.36	8.74	12.96	833	0.0042
B1	10	58.94	7.05	13.11	833	0.0264
B1	100	72.11	6.54	12.84	833	0.0762

Tabella 4.6: Risultati dell'approccio con penalizzazione della cifra di merito, utilizzando il metodo chance-constrained per i vincoli sulle variabili di controllo.

$\Theta$	$\mu$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h$	$T_{calc}[s]$	$N$	$\hat{J}_{\bar{\varphi}}$	$\hat{\epsilon}$
P4	0	37.29	9.05	292.43	3455	37.49	0.0298
P4	0.1	37.31	8.57	288.62	3455	37.51	0.0324
P4	1	38.00	7.15	289.20	3455	38.15	0.0322
P4	10	43.37	5.78	289.71	3455	43.37	0.0520
P4	100	48.94	5.40	285.46	3455	48.66	0.0942
B1	0	48.65	9.59	16.31	833	48.94	0.0048
B1	0.1	48.67	9.38	15.96	833	48.94	0.0058
B1	1	49.10	8.55	15.88	833	49.29	0.0084
B1	10	55.79	7.04	15.47	833	55.92	0.0360
B1	100	72.23	6.41	15.87	833	72.01	0.0986

forte legame e la corrispondenza tra i risultati, in accordo al risultato di equivalenza dimostrato nella Sezione 3.5.

Tabella 4.7: Risultati dell'approccio in due passi, utilizzando il metodo robusto per i vincoli sulle variabili di controllo.

$\Theta$	$\alpha$	$J_{\bar{\varphi}}$	$h$	$T_{calc}[s]$	$N$	$\hat{\epsilon}$
P4	0	45.80	9.82	254.25	3455	0.0004
P4	0.05	48.10	6.82	226.26	3455	0.0120
P4	0.1	50.39	6.44	236.23	3455	0.0226
P4	0.2	54.97	6.11	240.48	3455	0.0496
P4	0.5	67.60	5.92	226.73	3455	0.0948
B1	0	51.89	9.83	13.87	833	0.0014
B1	0.05	54.48	7.75	13.59	833	0.0118
B1	0.1	57.08	7.28	13.48	833	0.0206
B1	0.2	62.27	6.80	13.18	833	0.0414
B1	0.5	77.83	6.52	13.00	833	0.0862

Di nuovo, i risultati migliori si ottengono con l'utilizzo dei vincoli in probabilità anche per l'ingresso e parametrizzazione completa; la riduzione della parametrizzazione consente di ridurre il tempo di calcolo a discapito delle prestazioni. Sono presenti notevoli cambiamenti nei valori di  $h$  e di  $J_{\bar{\varphi}}$  a seconda dell' $\alpha$  utilizzato: si noti che si raggiunge un livello di degrado della cifra di merito  $J_{\bar{\varphi}}$  piuttosto elevato per contemporaneamente ridurre significativamente il valore di  $h$ .

Anche in questo caso, se si adotta l'approccio chance-constrained risolto con la tecnica a scenario per tenere conto dei vincoli sulla variabile di controllo, la cifra di merito  $\hat{J}_{\bar{\varphi}}$  ottenuta post-saturando la variabile di ingresso e calcolata campionariamente, risulta simile a quella calcolata risolvendo il problema. La violazione effettiva dei vincoli, calcolata campionariamente e indicata con  $\hat{\epsilon}$ , è nuovamente ridotta, soprattutto quando si utilizzano valori di  $\alpha$  piccoli, e inferiore a  $\epsilon = 0.1$ , anche quando si adottino vincoli sul

Tabella 4.8: Risultati dell'approccio in due passi, utilizzando il metodo chance-constrained per i vincoli sulle variabili di controllo.

$\Theta$	$\alpha$	$J_{\hat{\varphi}}$	$h$	$T_{calc}[s]$	$N$	$\hat{J}_{\hat{\varphi}}$	$\hat{\epsilon}$
P4	0	37.29	9.05	328.86	3455	37.51	0.0300
P4	0.05	39.16	6.50	315.92	3455	39.50	0.0330
P4	0.1	41.03	6.08	326.81	3455	41.41	0.0342
P4	0.2	44.77	5.66	328.39	3455	45.25	0.0550
P4	0.5	55.87	5.40	259.42	3455	56.39	0.0870
B1	0	48.65	9.59	17.54	833	48.69	0.0058
B1	0.05	51.09	7.74	17.52	833	51.34	0.0180
B1	0.1	53.52	7.31	17.53	833	53.85	0.0276
B1	0.2	58.39	6.82	17.49	833	58.79	0.0452
B1	0.5	72.89	6.41	17.04	833	73.14	0.0984

controllo in probabilità trattati con la tecnica a scenario. Questo risultato è particolarmente significativo poiché nel metodo a due passi in cui si utilizza l'approccio a scenario sia per i vincoli sulla variabile di controllo sia per i vincoli sullo stato, la teoria dell'approccio a scenario non dava garanzie a-priori sul soddisfacimento dei vincoli in probabilità sulle variabili di stato e di controllo. Come si evince dalle tabelle la verifica a posteriori ha dato esito positivo.

In conclusione, questa sezione mette in luce le potenzialità dei metodi proposti nel Capitolo 3: essi danno la possibilità di tenere conto, mediante l'utilizzo di opportuni vincoli sullo stato, di esigenze diverse da quelle espresse dalla cifra di merito per il controllo e che difficilmente possono essere inglobate in essa.

## 4.4 Controllo receding horizon

In questa sezione si valutano le prestazioni dei metodi proposti quando utilizzati su di un orizzonte temporale lungo, potenzialmente infinito, secondo la logica di tipo receding horizon. Questo comporta risolvere il problema di controllo con vincoli su orizzonte finito, di lunghezza  $M$ , sulla base della misura corrente dello stato e applicare la legge di controllo ottenuta solamente al primo istante di tempo; ripetere la stessa procedura all'istante successivo e così via. È possibile anche non limitarsi ad applicare la legge di controllo ottenuta solamente per un istante di tempo, ma, invece, per i primi  $k$  istanti, con  $k \leq M$  ovviamente, prima di risolvere un nuovo problema su orizzonte finito.  $k$  viene detto orizzonte di controllo.

Si sono considerati  $k = 1, 3, 5$  come valori per l'orizzonte di controllo, mentre l'orizzonte di predizione considerato è in tutti i casi  $M = 5$ .

Nelle prove effettuate si è simulato il sistema in un intervallo di lunghezza 100 e si sono considerati solo vincoli di saturazione con  $U_M = 5$  sulla variabile di controllo. Sono stati utilizzati sia il metodo robusto che quello chance-constrained risolto mediante la tecnica a scenario con saturazione del disturbo per risolvere i problemi di controllo su orizzonte finito. Nel caso del metodo chance-constrained, la soluzione viene implementata saturando la variabile di controllo quando eccede il vincolo. La parametrizzazione della matrice  $\Theta$  adottata è quella con 4 bande.

Ai fini di confronto, alcune simulazioni sono state fatte imponendo la matrice  $\Theta$  completamente nulla: questo corrisponde ad utilizzare una legge di controllo senza componenti in feedback sul disturbo. Inoltre, si è considerato anche il caso in cui nel problema di ottimizzazione, sia per  $\Theta$  a quattro bande sia per  $\Theta$  nulla, non si impone alcun vincolo sulla variabile di ingresso. Anche in questo caso la variabile di controllo è stata post-saturata al valore limite ogni qualvolta la  $\mathbf{u}$  restituita violi il vincolo.

L'andamento ottenuto per la norma del vettore composto dalle prime quattro variabili di stato, che rappresentano lo scostamento dalla posizione di equilibrio delle quattro masse, è mostrata in Figura 4.3 per  $k = 1$ , in Figura

4.4 per  $k = 3$ , e in Figura 4.5 per  $k = 5$ , con riferimento ad una stessa realizzazione del disturbo.

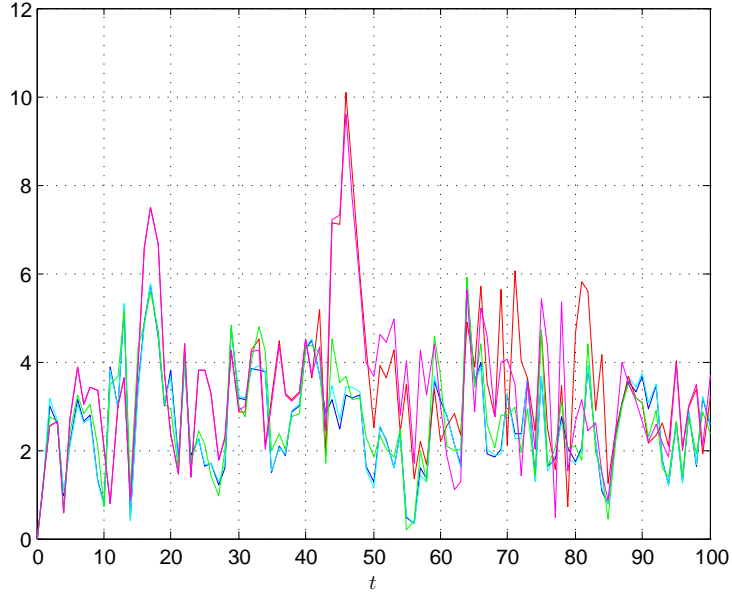


Figura 4.3: Andamento della norma del vettore delle posizioni delle masse con orizzonte di controllo  $k = 1$ : parametrizzazione a 4 bande con vincoli sulla variabile di ingresso in probabilità (linea blu) e robusti (linea azzurra), nessun vincolo (linea rossa); parametrizzazione con  $\Theta$  nulla con vincoli sulla variabile di ingresso (linea verde), nessun vincolo (linea magenta).

I risultati migliori si hanno nel caso in cui si utilizza un orizzonte di controllo  $k = 1$ ; nel caso in cui  $k = 3$  o  $k = 5$  le prestazioni peggiorano, ma rimangono ancora buone per i due metodi che considerano esplicitamente i vincoli sul controllo. Si noti che in quest'ultimo caso, utilizzando la parametrizzazione di  $\Theta$  a 4 bande i risultati sono sempre migliori rispetto al caso in cui si utilizzi  $\Theta$  nulla cosicché l'azione di controllo è determinata solamente dalla componente in anello aperto dovuta al vettore  $\Gamma$ : per  $k = 1$  il peggioramento è meno marcato rispetto ai casi  $k = 3, 5$  in cui le differenze tra le due parametrizzazioni diventano notevoli. L'approccio chance-constrained ottiene prestazioni migliori rispetto all'approccio robusto soprattutto quan-

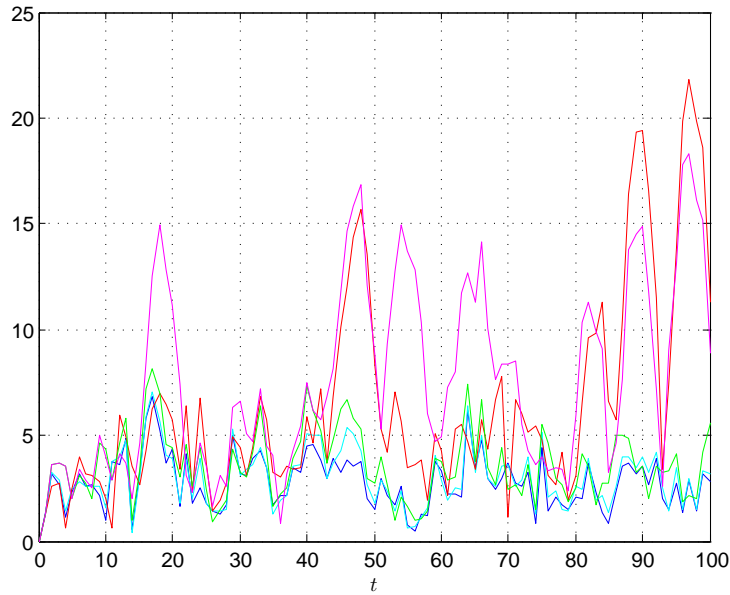


Figura 4.4: Andamento della norma del vettore delle posizioni delle masse con orizzonte di controllo  $k = 3$ : parametrizzazione a 4 bande con vincoli sulla variabile di ingresso in probabilità (linea blu) e robusti (linea azzurra), nessun vincolo (linea rossa); parametrizzazione con  $\Theta$  nulla con vincoli sulla variabile di ingresso (linea verde), nessun vincolo (linea magenta).

do  $k = 3, 5$  e soprattutto in quegli istanti in cui la norma dello stato risulta più elevata. Nel caso, invece, in cui non si considerano vincoli nei problemi di ottimizzazione, ma la variabile di controllo viene saturata, si ottengono prestazioni degradate, ma accettabili per  $k = 1$  mentre per  $k = 3, 5$  si rilevano forti scostamenti dello stato dalla posizione di equilibrio; i risultati sono sempre peggiori rispetto al controllo ottenuto considerando esplicitamente i vincoli.

A conferma di tutto ciò, nella Tabella 4.9 è riportata la media quadratica

$$\bar{d}_i^2 := \frac{1}{100} \sum_{t=1}^{100} d_{i,t}^2 \quad (4.2)$$

degli scostamenti  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$  delle masse rispetto all'equilibrio ottenuti nei vari casi, calcolati utilizzando una realizzazione del disturbo.

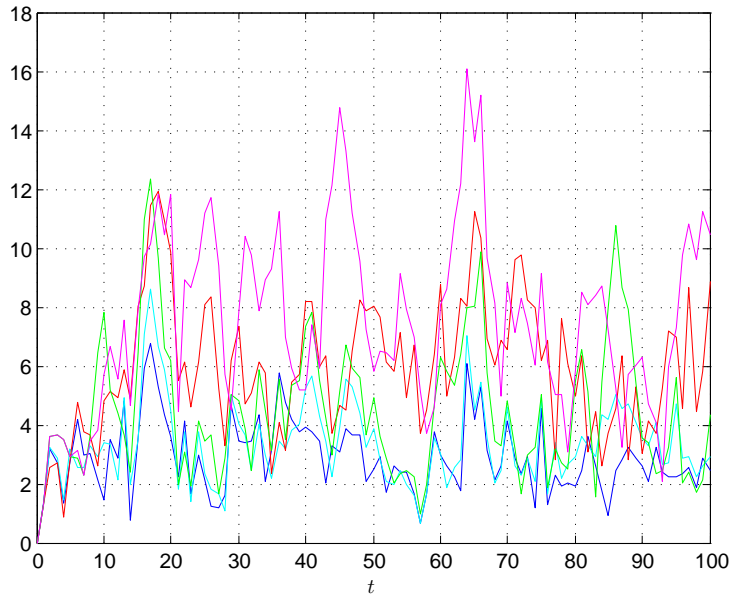


Figura 4.5: Andamento della norma del vettore delle posizioni delle masse con orizzonte di controllo  $k = 5$ : parametrizzazione a 4 bande con vincoli sulla variabile di ingresso in probabilità (linea blu) e robusti (linea azzurra), nessun vincolo (linea rossa); parametrizzazione con  $\Theta$  nulla con vincoli sulla variabile di ingresso (linea verde), nessun vincolo (linea magenta).

Inoltre sono riportati nella Figura 4.6 i grafici di  $V = \sum_{j=0}^t (d_{1,j}^2 + d_{2,j}^2 + d_{3,j}^2 + d_{4,j}^2)$  in funzione di  $t$  lungo i 100 istanti presi in considerazione nelle simulazioni, per i diversi orizzonti di controllo. Si notano in modo ancora più immediato le differenze tra i risultati ottenuti: utilizzando l'approccio a scenario con parametrizzazione di  $\Theta$  a 4 bande si hanno sempre i risultati migliori; l'approccio robusto con la stessa parametrizzazione ottiene risultati simili per  $k = 1$ , il divario tra i metodi aumenta notevolmente per  $k = 3, 5$ . Con la parametrizzazione che prevede  $\Theta$  nulla si ottengono risultati ulteriormente degradati; con le leggi di controllo progettate non considerando vincoli sulla variabile di controllo che viene post-saturata si ottengono le prestazioni peggiori.

Tabella 4.9: Media quadratica campionaria (4.2) delle posizioni delle masse.

(a) Vincoli robusti sull'ingresso, parametrizzazione con 4 bande.

$k$	1	3	5
$\bar{d}_1^2$	1.63	2.48	3.10
$\bar{d}_2^2$	1.83	2.71	2.94
$\bar{d}_3^2$	2.19	2.68	3.60
$\bar{d}_4^2$	2.56	3.02	3.57

(b) Vincoli in probabilità sull'ingresso, parametrizzazione con 4 bande.

$k$	1	3	5
$\bar{d}_1^2$	1.59	2.09	2.32
$\bar{d}_2^2$	1.88	2.18	1.92
$\bar{d}_3^2$	2.19	2.45	2.79
$\bar{d}_4^2$	2.47	2.76	2.86

(c) Nessun vincolo, parametrizzazione con 4 bande.

$k$	1	3	5
$\bar{d}_1^2$	1.70	5.76	6.32
$\bar{d}_2^2$	4.60	13.66	10.16
$\bar{d}_3^2$	3.91	19.83	10.97
$\bar{d}_4^2$	4.49	25.04	12.84

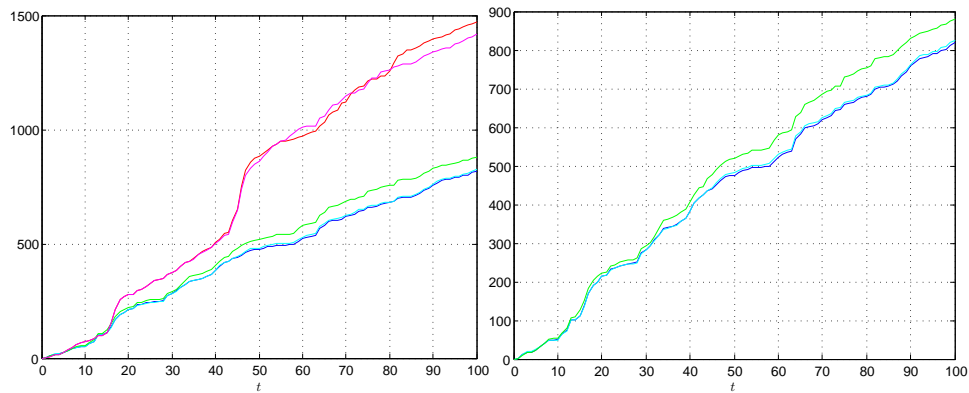
(d) Vincoli sull'ingresso, parametrizzazione con  $\Theta$  nulla.

$k$	1	3	5
$\bar{d}_1^2$	2.09	3.09	4.36
$\bar{d}_2^2$	2.04	3.93	4.55
$\bar{d}_3^2$	2.29	3.97	8.94
$\bar{d}_4^2$	2.34	4.75	7.91

(e) Nessun vincolo, parametrizzazione con  $\Theta$  nulla.

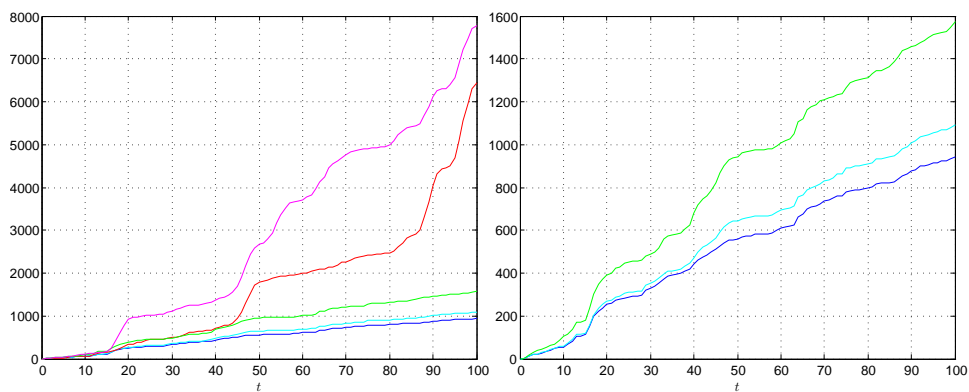
$k$	1	3	5
$\bar{d}_1^2$	2.07	7.39	8.36
$\bar{d}_2^2$	4.29	14.70	13.53
$\bar{d}_3^2$	3.78	23.27	19.73
$\bar{d}_4^2$	4.00	31.08	24.96





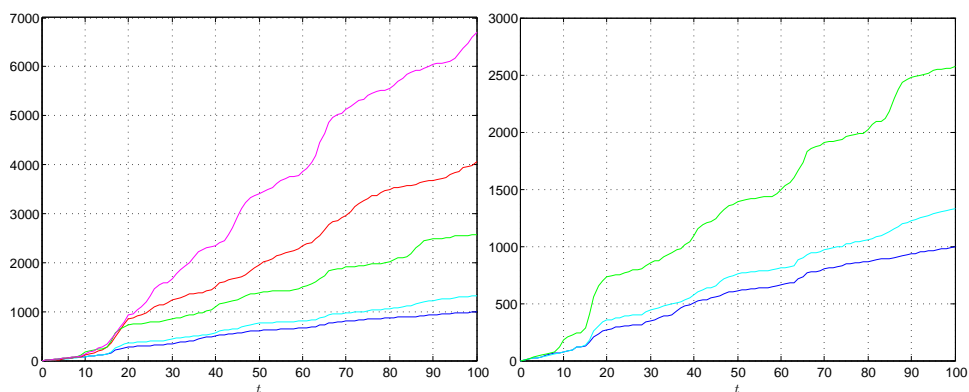
(a) Orizzonte di controllo  $k = 1$ .

(b) Particolare ingrandito  $k = 1$ .



(c) Orizzonte di controllo  $k = 3$ .

(d) Particolare ingrandito  $k = 3$ .



(e) Orizzonte di controllo  $k = 5$ .

(f) Particolare ingrandito  $k = 5$ .

Figura 4.6: Andamento di  $V = \sum_{j=0}^t (d_{1,j}^2 + d_{2,j}^2 + d_{3,j}^2 + d_{4,j}^2)$ : parametrizzazione a 4 bande con vincoli sulla variabile di ingresso in probabilità (linea blu) e robusti (linea azzurra), nessun vincolo (linea rossa); parametrizzazione con  $\Theta$  nulla con vincoli sulla variabile di ingresso (linea verde), nessun vincolo (linea magenta).

## Capitolo 5

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi si sono proposti alcuni approcci per la risoluzione di problemi di ottimizzazione nell'ambito del controllo stocastico. Considerando problemi di controllo su orizzonte finito si è posta particolare attenzione a come tenere conto esplicitamente del disturbo stocastico nel problema di ottimizzazione con vincoli su ingresso e stato. Non si sono imposte limitazioni sul disturbo che può essere a supporto anche non limitato ed è stato necessario utilizzare metodi in grado di rendere il problema di ottimizzazione computazionalmente trattabile. Per questo è stato utilizzato l'approccio a scenario, una tecnica randomizzata, che consente di trovare, attraverso la risoluzione di un problema convesso e con numero finito di vincoli, una soluzione approssimata, ma con solide garanzie, per problemi di tipo chance-constrained come quelli ottenuti in presenza di incertezza.

Dapprima questa tecnica è stata applicata a problemi in cui si considerano vincoli solamente sulla variabile di controllo, ottenendo soluzioni che rispettano i vincoli con un data probabilità. Questo metodo è stato confrontato con un metodo che consente il rispetto dei vincoli in modo hard. L'approccio a scenario, se i parametri che intervengono nei problemi sono ben tarati, consente di raggiungere prestazioni migliori rispetto al metodo che prevede il rispetto dei vincoli in modo robusto, anche se spesso il primo

richiede un sforzo computazionale maggiore.

Successivamente si sono considerati problemi in cui sono presenti vincoli anche sulle variabili di stato. La possibilità di includere vincoli sullo stato consente di tenere conto di esigenze specifiche e differenti da quelle espresse nella cifra di merito quadratica. In particolare è possibile limitare lo stato per ragioni di sicurezza: per mantenersi nella zona di approssimazione lineare del sistema. Limitando, invece, combinazioni lineari di variabili di stato si possono esprimere obiettivi di controllo diversi da quelli presenti nella cifra di merito. In questo tipo di problemi per garantire la feasibility è stato necessario considerare i limiti entro cui si vuole confinare lo stato come variabili di ottimizzazione ed è stato necessario utilizzare l'approccio a scenario per la risoluzione dei problemi chance-constrained ottenuti. Due diversi metodi sono stati proposti: il primo prevede la penalizzazione nella cifra di merito delle variabili di ottimizzazione che limitano lo stato; il secondo la risoluzione di due problemi in cascata in cui nel secondo è possibile esprimere un prefissato degrado della cifra di merito che si accetta al fine di ridurre le variabili che restituiscono i limiti entro cui lo stato è confinato.

Per mezzo di esempi è stato mostrato come sia effettivamente possibile gestire attraverso i due metodi proposti obiettivi di minimizzazione diversi. È stata effettuata un'analisi teorica in cui si è mostrato come, con entrambi gli approcci, sia possibile esplorare tutti i possibili compromessi tra l'obiettivo espresso dalla cifra di merito e quello dato dalla riduzione dei limiti nei vincoli sullo stato. Inoltre si è mostrato che, sotto le opportune ipotesi, i metodi risultano equivalenti.

Infine le tecniche proposte sono state validate mediante applicazione ad un sistema meccanico. I risultati hanno mostrato come ottime prestazioni possono essere ottenute in caso di vincoli solo sulla variabile di controllo. Si è evidenziata inoltre anche la possibilità di gestire obiettivi diversi, includendo

vincoli sulle variabili di stato. Particolarmente interessante e promettente è stata l'applicazione dei metodi proposti in un contesto di tipo MPC a finestra mobile. In effetti, i problemi su orizzonte finito che sono stati oggetto della tesi sono alla base per l'applicazione pratica di metodi MPC a finestra mobile. In questa direzione sono possibili ulteriori studi per ricercare garanzie sul risultato complessivo ottenuto e per garantire qualche tipo di stabilità del sistema controllato.

# Bibliografia

- [1] A. Bemporad, M. Morari. Robust model predictive control : a survey. In *Robustness in Identification and Control* , volume 245 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 207-226. Springer, 1999.
- [2] A. Bemporad, M. Morari, V Dua, E.N. Pistikopoulos. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica* 38(1): 3-20, 2002.
- [3] A. Ben-Tal A. Nemirovski. Robust optimization - methology and applications. *Mathematical Programming Series B*, 92:453-480, 2002.
- [4] A. Ben-Tal, A. Nemirovski. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, 88:411-424, 2000.
- [5] I. Bitina. Model predictive control for stochastic systems by randomized algorithms. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2004.
- [6] M.C. Campi, S. Garatti. A Sampling-and-Discarding Approach to Chance-Constrained Optimization: Feasibility and Optimality. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 148(2): 257-280, 2011.

- [7] M.C. Campi, S. Garatti. The exact feasibility of randomized solution of uncertain convex programs. *SIAM Journal on control and optimization*, 19(3): 1211-1230, 2008.
- [8] M.C. Campi, S. Garatti, M. Prandini. The scenario approach for systems and control design. *Annual Reviews in Control*, 33(2): 149-157, 2009.
- [9] E. Cinquemani, M. Agarwal, D. Chatterjee, J. Lygeros. Convexity and convex approximations of discrete-time stochastic control problems with constraints. *Automatica* 47(9): 2082-2087, 2011.
- [10] P.J. Goulart, E.C. Kerrigan, J.M. Maciejowski. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints. *Automatica*, 42(4):523-533, April 2006.
- [11] P. Hokayem, D. Chatterjee, J. Lygeros. On stochastic model predictive control with bounded control inputs. In *Proceedings of the combined 48th IEEE CDC and 28th CCC*, 2009: 6359-6364.
- [12] M. Kothare, V. Balakrishnan, M. Morari. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10): 1361-1379, 1996.
- [13] J. Löfberg. Yalmip: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- [14] A. Prékopa. Probabilistic programming. In A. Ruszczyński and A. Shapiro, editors, *Stochastic programming volume 10 of handbooks in operations research and management science*, London, UK, 2003. Elsevier.
- [15] A. Prékopa. *Stochastic programming*. Kluwer, Boston, MT, USA, 1995.

- [16] J.F. Sturm. Using SEDUMI 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software* 11-12 (1999) 625-653.