

**POLITECNICO DI MILANO**

**Facoltà di Ingegneria Civile, Ambientale e del Territorio**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile**



**ANALISI A LUNGO TERMINE DI EDIFICI ALTI A STRUTTURA IN  
CALCESTRUZZO ARMATO IN PRESENZA DI NON OMOGENEITÀ  
REOLOGICHE ASSOCIATE ALLE MODALITÀ COSTRUTTIVE**

Relatore: Prof. Franco Mola

Correlatore: Ing. Laura Maria Pellegrini

Tesi di Laurea Magistrale di:

Giorgio D'Agostino Matr. n. 771414

Giuseppe Galassi Sconocchia Matr. n. 771376

Anno accademico 2011/2012

# INDICE

<b>1</b>	<b>GLI EDIFICI ALTI.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>BREVI NOTE STORICHE .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>STORIA DEGLI EDIFICI ALTI IN ITALIA E PROGETTI FUTURI.....</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>IL CALCESTRUZZO STRUTTURALE PER LA COSTRUZIONE DEGLI EDIFICI ALTI.....</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>IL PROBLEMA VISCOELASTICO .....</b>	<b>11</b>
<b>2.1</b>	<b>LA LEGGE COSTITUTIVA VISCOELASTICA LINEARE .....</b>	<b>11</b>
<b>2.2</b>	<b>LA LEGGE DI VISCOSITA' INTEGRALE.....</b>	<b>17</b>
<b>2.3</b>	<b>LA LEGGE DI RILASSAMENTO INTEGRALE .....</b>	<b>18</b>
<b>2.4</b>	<b>CALCOLO DELLA FUNZIONE DI RILASSAMENTO .....</b>	<b>20</b>
<b>2.5</b>	<b>METODI DI ANALISI PER STRUTTURE VISCOSE.....</b>	<b>22</b>
<b>2.6</b>	<b>MODELLI VISCOELASTICI LINEARI SUGGERITI DAI CODICI DI SICUREZZA.....</b>	<b>23</b>
2.6.1	CEB - MODEL CODE 90 .....	23
2.6.2	Fib - MODEL CODE 2010 .....	35
2.6.3	CONFRONTO TRA I MODELLI ([26], 2012) .....	44
<b>3</b>	<b>ANALISI VISCOELASTICA DI STRUTTURE OMOGENEE .....</b>	<b>51</b>
<b>3.1</b>	<b>CLASSIFICAZIONE DELLE STRUTTURE.....</b>	<b>51</b>
<b>3.2</b>	<b>SOLUZIONE DI STRUTTURE OMOGENEE IN CALCESTRUZZO.....</b>	<b>52</b>
3.2.1	STRUTTURA VISCO-ELASTICA OMOGENEA SOGETTA AD AZIONI STATICHE .....	52
3.2.2	STRUTTURA VISCOELASTICA OMOGENEA CON DISTORSIONI IMPRESSE .....	54
3.2.3	STRUTTURA OMOGENEA CON VINCOLO POSTICIPATO .....	56
3.2.3.1	Rappresentazioni grafiche delle funzioni di riacquisto .....	60
3.2.4	STRUTTURA OMOGENEA CON VINCOLI POSTICIPATI AD ISTANTI DIVERSI .....	63
3.2.5	ESEMPI APPLICATIVI .....	66
3.2.5.1	Azioni statiche (I Teorema della viscosità lineare) .....	66
3.2.5.2	Azioni geometriche (II teorema della viscosità lineare).....	68
3.2.5.3	Vincolo posticipato.....	70
3.2.5.4	Struttura con più vincoli posticipati ad istanti diversi.....	72
3.2.6	METODO DI TROST.....	75
3.2.6.1	Rappresentazioni grafiche del coefficiente di invecchiamento .....	82
3.2.7	FORMULAZIONE ALTERNATIVA DELLA SOLUZIONE DI TROST .....	82
3.2.7.1	Rappresentazioni grafiche del coefficiente di miscelazione .....	87
3.2.8	CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI.....	88
3.2.8.1	Esempi applicativi.....	93
3.2.8.1.1	Vincoli posticipati allo stesso istante (caso monodimensionale).....	93
3.2.8.1.2	Vincoli posticipati allo stesso istante (caso generale) .....	95
3.2.8.1.3	Vincoli posticipati ad istanti diversi.....	96
<b>4</b>	<b>ANALISI VISCOELASTICA DI STRUTTURE OMOGENEE CON VINCOLI ELASTICI .....</b>	<b>101</b>

<b>4.1</b>	<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>101</b>
<b>4.2</b>	<b>CASO MONODIMENSIONALE .....</b>	<b>101</b>
4.2.1	AZIONI STATICHE .....	101
4.2.1.1	Soluzione esatta.....	101
4.2.1.2	Soluzione algebrica di Trost .....	104
4.2.2	AZIONI GEOMETRICHE.....	105
4.2.2.1	Soluzione esatta.....	105
4.2.2.2	Soluzione algebrica di Trost .....	106
4.2.3	CALCOLO DELLE FUNZIONI DI VISCOSITA' VARIATE E DI RILASSAMENTO RIDOTTE .....	106
4.2.3.1	Funzioni di Viscosità Variate.....	106
4.2.3.2	Funzioni di Rilassamento Ridotte .....	108
4.2.4	VINCOLI POSTICIPATI.....	111
4.2.4.1	Soluzione esatta.....	111
4.2.4.2	Soluzione algebrica di Trost .....	116
4.2.5	CONFRONTO FRA LE SOLUZIONI PROPOSTE.....	117
4.2.6	ESEMPI APPLICATIVI .....	120
4.2.6.1	Azioni statiche .....	120
4.2.6.2	Azioni geometriche .....	126
4.2.6.3	Confronto fra le soluzioni proposte.....	131
4.2.6.4	Vincolo posticipato.....	134
<b>4.3</b>	<b>CASO GENERALE .....</b>	<b>138</b>
4.3.1	AZIONI STATICHE .....	138
4.3.2	AZIONI GEOMETRICHE.....	141
4.3.3	VINCOLI POSTICIPATI.....	144
4.3.4	CONFRONTO FRA LE SOLUZIONI PROPOSTE.....	146
4.3.5	ESEMPI APPLICATIVI .....	150
4.3.5.1	Azioni statiche .....	150
4.3.5.2	Azioni geometriche .....	154
4.3.5.3	Confronto fra le soluzioni proposte.....	157
4.3.5.4	Vincoli posticipati .....	163
<b>4.4</b>	<b>CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI .....</b>	<b>167</b>
4.4.1	AZIONI STATICHE .....	167
4.4.2	AZIONI GEOMETRICHE.....	169
4.4.3	ESEMPI APPLICATIVI .....	170
4.4.3.1	Azioni statiche (caso monodimensionale).....	170
4.4.3.2	Azioni geometriche (caso monodimensionale).....	171
<b>5</b>	<b>IL PROBLEMA DELL'ABBASSAMENTO DELLE COLONNE NEGLI EDIFICI ALTI .....</b>	<b>173</b>
<b>5.1</b>	<b>GENERALITA' .....</b>	<b>173</b>
<b>5.2</b>	<b>SEQUENZA COSTRUTTIVA.....</b>	<b>173</b>
5.2.1	SOLLECITAZIONI FLETTENTI.....	174
5.2.2	ACCORCIAMENTO DELLE COLONNE.....	176
5.2.2.1	Analisi elastica .....	176
5.2.2.2	Analisi visco-elastica .....	179
5.2.2.2.1	Colonna in solo calcestruzzo senza compensazione.....	179
5.2.2.2.2	Colonna in solo calcestruzzo con compensazione.....	181
5.2.2.2.3	Colonna in calcestruzzo armato .....	182
5.2.2.3	Esempi applicativi.....	183
5.2.2.3.1	Struttura in solo calcestruzzo .....	183
5.2.2.3.2	Struttura in calcestruzzo armato.....	191
5.2.2.3.3	Confronto tra le soluzioni.....	203

<b>5.3</b>	<b>INDICAZIONI PROGETTUALI .....</b>	<b>206</b>
<b>6</b>	<b>LE ANALISI STRUTTURALI MEDIANTE IL PROGRAMMA DI CALCOLO - MIDAS GEN .....</b>	<b>208</b>
<b>6.1</b>	<b>GENERALITA' .....</b>	<b>208</b>
<b>6.2</b>	<b>MODELLAZIONE ELEMENTI .....</b>	<b>209</b>
6.2.1	ELEMENTO BEAM.....	210
6.2.2	ELEMENTO WALL.....	211
<b>6.3</b>	<b>ANALISI SVOLTE DAL PROGRAMMA DI CALCOLO .....</b>	<b>212</b>
6.3.1	LINEAR STATIC ANALYSIS .....	212
6.3.2	EIGENVALUE ANALYSIS.....	212
6.3.3	RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS.....	212
6.3.4	TIME HISTORY ANALYSIS .....	213
6.3.5	NON LINEAR ANALYSIS - PDelta .....	213
6.3.6	NON LINEAR ANALYSIS WITH NON LINEAR ELEMENT .....	214
6.3.7	CONSTRUCTION SEQUENCE ANALYSIS.....	214
<b>6.4</b>	<b>VALIDAZIONE DEL PROGRAMMA DI CALCOLO .....</b>	<b>215</b>
6.4.1	ELEMENTI SOGGETTI A FLESSIONE.....	215
6.4.1.1	Rispetto del primo teorema della viscosità.....	215
6.4.1.2	Rispetto del secondo teorema della viscosità .....	218
6.4.1.3	Strutture viscoelastiche omogenee con vincolo rigido posticipato .....	221
6.4.1.4	Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli rigidi posticipati ad istanti diversi .....	226
6.4.1.5	Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni statiche .....	229
6.4.1.6	Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni geometriche ....	233
6.4.1.7	Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici posticipati .....	237
6.4.1.8	Stima degli errori .....	240
6.4.2	ELEMENTI SOGGETTI A COMPRESSIONE.....	242
6.4.2.1	Struttura in solo calcestruzzo .....	242
6.4.2.2	Struttura in calcestruzzo armato.....	247
6.4.2.3	Stima degli errori .....	254
<b>6.5</b>	<b>CONCLUSIONI .....</b>	<b>257</b>
<b>7</b>	<b>TORRE ISOZAKI.....</b>	<b>258</b>
<b>7.1</b>	<b>DESCRIZIONE DELL'OPERA.....</b>	<b>258</b>
7.1.1	TRAVI DI CINTURA .....	260
7.1.2	PILASTRI .....	262
7.1.3	SETTI, PARETI, NUCLEI DI CONTROVENTO .....	265
7.1.4	IMPALCATI .....	266
<b>7.2</b>	<b>ANALISI DEI CARICHI .....</b>	<b>267</b>
7.2.1	PESI PROPRI STRUTTURALI .....	267
7.2.2	CARICHI PERMANENTI PORTATI E VARIABILI .....	267
<b>7.3</b>	<b>MODELLI STRUTTURALI PER LE ANALISI A LUNGO TERMINE .....</b>	<b>276</b>
7.3.1	COLONNA SINGOLA.....	277
7.3.1.1	Descrizione del modello.....	277
7.3.1.2	Risultati ottenuti .....	280
7.3.1.3	Analisi dei risultati .....	282
7.3.2	COLONNA SINGOLA CON ARMATURA .....	285
7.3.2.1	Descrizione del modello.....	285
7.3.2.2	Risultati ottenuti .....	291

7.3.2.3	Analisi dei risultati .....	293
7.3.3	QUINTA SENZA BELT TRUSSES .....	295
7.3.3.1	Descrizione del modello .....	295
7.3.3.2	Risultati ottenuti .....	296
7.3.3.3	Analisi dei risultati .....	308
7.3.4	QUINTA CON BELT TRUSS IN ACCIAIO .....	313
7.3.4.1	Descrizione del modello .....	313
7.3.4.2	Risultati ottenuti .....	315
7.3.4.3	Analisi dei risultati .....	335
7.3.5	STRUTTURA TRIDIMENSIONALE CON BELT TRUSS IN ACCIAIO .....	347
7.3.5.1	Descrizione del modello .....	347
7.3.5.2	Risultati ottenuti .....	351
7.3.5.3	Analisi dei risultati .....	361
7.3.6	CONFRONTO FRA QUINTA CON BELT TRUSS IN ACCIAIO E QUINTA CON BELT TRUSS IN CALCESTRUZZO ARMATO .....	362
7.3.6.1	Descrizione del modello .....	362
7.3.6.2	Risultati ottenuti .....	363
7.3.6.3	Analisi dei risultati .....	373
7.3.6.3.1	Vincolo elastico posticipato .....	374
7.3.6.3.2	Vincolo visco-elastico posticipato .....	376
<b>7.4</b>	<b>CALCOLO DELLE TENSIONI .....</b>	<b>382</b>
7.4.1	RISULTATI OTTENUTI .....	382
7.4.1.1	Colonna interna .....	383
7.4.1.2	Colonna laterale .....	390
7.4.2	TEORIA ALLA BASE DEI METODI DI ANALISI .....	395
7.4.2.1	Analisi in campo elastico .....	395
7.4.2.2	Analisi in campo visco - elastico .....	396
<b>APPENDICE A</b>	<b>.....</b>	<b>400</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>.....</b>	<b>410</b>
<b>INDICE DELLE FIGURE</b>	<b>.....</b>	<b>413</b>
<b>INDICE DELLE TABELLE</b>	<b>.....</b>	<b>424</b>

# 1 GLI EDIFICI ALTI

## 1.1 BREVI NOTE STORICHE

A partire dall'inizio del XX secolo gli edifici alti sono entrati nella storia delle costruzioni e la loro presenza, inizialmente confinata nei tessuti urbani degli Stati Uniti, si è allargata a gran parte delle città del pianeta. Varie sono le motivazioni che hanno guidato questo interessante e continuo sviluppo dell'edificio alto, all'interno di una scala di altezze che, iniziata da circa 50 m, oggi ha raggiunto 800 m, con un incremento, mediato su circa 110 anni, pari a circa 6.8 m/anno. Un simile parametro non è tuttavia indicativo in quanto l'altezza degli edifici non è progredita in maniera costante, bensì si è espressa attraverso marcate accelerazioni, conseguenza di vari e differenti fattori, fra i quali i predominanti sono da ricercarsi nel progresso dell'ingegneria strutturale, dell'ingegneria dei materiali e delle tecnologie costruttive.

Relativamente alle motivazioni di tipo architettonico e urbanistico, possono ricordarsi la necessità di concentrare su aree ridotte un'elevata volumetria a causa della limitata disponibilità di superfici edificabili, nonché la forte caratterizzazione che l'edificio alto conferisce al profilo di una città, sino a diventarne tipico elemento connotante. È a questo proposito significativo il caso della Tour Eiffel, che fu costruita quale struttura provvisoria per l'Esposizione Universale di Parigi del 1889 e di cui fu reclamata dai cittadini la definitiva presenza, diventando primo landmark cittadino. Allo stesso modo possono citarsi i casi del Chrysler Building e dell'Empire State Building, che costruiti fra la fine degli anni '20 e l'inizio degli anni '30 in New York divennero rapidamente punti di riferimento inconfondibili del profilo urbano di quella città.

Il primo edificio alto in calcestruzzo armato può identificarsi nell'*Ingalls Building*, costruito a Cincinnati, Ohio, tra il 1902 e il 1903 da Elzner e Anderson. A quel tempo la tecnologia del calcestruzzo armato stava muovendo i primi passi e la costruzione di un edificio di 16 piani, per una altezza di 67 m, costituì fatto eccezionale che spinse larga parte dell'opinione pubblica a paventare il crollo subito dopo le operazioni di disarmo. La cosa non avvenne e attualmente l'edificio continua a svolgere egregiamente le sue funzioni.



**Figura 1.1 - Ingalls Building, Cincinnati, Ohio, Usa**



**Figura 1.2 - Woolworth Building, New York City, NY, Usa**



**Figura 1.3 - Chrysler Building, Empire State Building e Ge Building, New York City, NY, Usa**

Malgrado il brillante risultato conseguito da Elzner e Anderson, il rapido incremento della altezza che si manifestò con gli edifici della così detta Prima New York Era, conclusasi verso la fine degli Anni '20, splendidamente rappresentata dal *Woolworth Building*, avente altezza 241.4 m, richiese l'utilizzo dell'acciaio strutturale, in quanto la resistenza e la tecnologia del calcestruzzo di quel tempo non permettevano il raggiungimento di tali altezze.

Analogamente, la Seconda New York Era, conclusasi alla fine degli Anni '30, nella quale si ritrovano tre fra gli edifici alti di maggior fascino mai realizzati e precisamente il *Chrysler Building*, *L'Empire State Building* e il *Ge Building* a Rockefeller Centre, segnò il superamento dell'altezza di 300 m e pose all'altezza di 381 m il limite massimo di altezza degli edifici che si mantenne per ben 43 anni, fino al 1973. Anche per questi edifici l'acciaio strutturale si dimostrò essere l'unico materiale utilizzabile.

La presenza del calcestruzzo quale materiale strutturale degli edifici alti iniziò a manifestarsi alla fine degli anni '50, allorchè la tecnologia di questo materiale e le metodologie di trasporto, permisero di ottenere resistenze sufficienti per costruire strutture portanti che fossero in grado di far fronte alle azioni verticali e orizzontali mantenendo sufficientemente contenuta la sezione trasversale degli elementi strutturali.

Nei successivi 50 anni il calcestruzzo armato ha assunto un ruolo di sempre maggiore importanza. A tale riguardo si osservi che nel 1998 l'edificio di maggiore altezza fino ad allora costruito, le *Torri Petronas*, in Kuala Lumpur, avente altezza totale misurata sulla guglia pari a 451,9 m, presentava strutture verticali in calcestruzzo armato. Infine l'edificio *Burj Dubai*, recentemente costruito, avente altezza 800 m, è prevalentemente a struttura portante in calcestruzzo armato.



**Figura 1.4 - Petronas Towers, Kuala Lumpur, Malesia e Burj Dubai, Dubai, Emirati Arabi**

Le brevi note storiche qui espone hanno permesso di evidenziare il lungo cammino, che attraverso un miglioramento tecnologico che ne ha incrementato drasticamente le prestazioni, ha portato il calcestruzzo a passare dal materiale di dubbia affidabilità con cui fu costruito l'Ingalls Building, al materiale di elevata resistenza e garantita qualità, che si è imposto in maniera netta nella costruzione degli edifici alti.

## **1.2 STORIA DEGLI EDIFICI ALTI IN ITALIA E PROGETTI FUTURI**

Attualmente in Italia i grattacieli non superano i 161 m di altezza (primato detenuto dal Palazzo Lombardia). Ciononostante, non sono comunque pochi gli edifici che superano i 100 m, primo dei quali, in ordine cronologico, la *Torre Piacentini* di Genova, disegnata dall'architetto Marcello Piacentini e dall'ingegner Angelo Invernizzi, che venne eretta nel 1940. Tale costruzione, a struttura in cemento armato, ha conservato il suo primato, inizialmente anche europeo, fino al 1958.



**Figura 1.5 - Torre Piacentini, Genova, Italia**



Figura 1.6 - Torre Velasca, Milano, Italia

In questo anno fu realizzata la Torre Velasca con altezza 106 m e struttura a nucleo, caratterizzata dal suggestivo incremento di superficie planimetrica al 18° piano, assicurato dalla presenza di colonne inclinate.

Nel 1960 la *Torre Pirelli*, con altezza 127.1 m e struttura a nucleo e telai in calcestruzzo armato, ottenne il primato di altezza per le costruzioni in calcestruzzo armato. I quattro pilastri che percorrono a coppie l'altezza delle facciate alla base hanno larghezza 2 m, che si riduce a 50 cm in sommità.

Travi orizzontali, colleganti i pilastri, fungono da elementi portanti per i solai dei piani. La superficie del grattacelo è di 1900 m<sup>2</sup>, la sua pianta è lunga 75.5 m e larga 20.5 m. Si stima che per la sua costruzione siano stati utilizzati 30000 m<sup>3</sup> di calcestruzzo e l'edificio complessivamente pesi 70000 tonnellate, per un volume di 125324 m<sup>3</sup>.

Ciò comporta un peso specifico dell'edificio superiore allo 0.5 t / m<sup>3</sup>; tale valore, che oggi può ritenersi al quanto elevato, trae la sua giustificazione nelle misure resistenti dei calcestruzzi a quel tempo disponibili e nelle differenti modalità di misura della sicurezza adottate. Il Grattacelo Pirelli, simbolo tra i più celebri di Milano, è stato per quasi 50 anni l'edificio più alto della città, superato nel 2010 dal Palazzo Lombardia che sorge poco lontano da questo.



Figura 1.7 - Torre Pirelli, Milano, Italia



**Figura 1.8 - Palazzo Lombardia, Milano, Italia**

Il *Palazzo Lombardia*, è un complesso unitario di edifici, tra cui una torre, che rientra nel piano di riqualificazione del quartiere milanese di Garibaldi - Repubblica. La torre, con struttura a nucleo e altezza 161.3 m, vanta tuttora il primato del solaio calpestabile più alto d'Italia. All'estensione in altezza corrisponde da una parte la progressiva rastremazione degli elementi portanti colonna e trave, dall'altra restrizioni concentrate della pianta dell'edificio. La struttura è interamente costruita in calcestruzzo armato ad eccezione degli ultimi piani in sommità della torre, il cosiddetto velario.



**Figura 1.9 - Masterplan Garibaldi - Repubblica**



**Figura 1.10 - Complesso edilizio di Citylife, Milano, Italia  
e Torre Regione Piemonte, Torino, Italia**



**Figura 1.11 - Torre Isozaki;  
Torre Regione Piemonte**

Nella città di Milano, anche in vista dell'Expo 2015, sono in corso d'opera due grandi progetti di riqualificazione: Citylife e Porta Nuova. Quando questi progetti saranno completati, lo skyline milanese diventerà il primo in Italia per varietà e numero di torri.

*Citylife*, il più grande progetto del 2006, riqualificherà la vecchia zona della Fiera. Nel 2014 in questa zona sorgeranno molti nuovi edifici, tra cui tre imponenti grattacieli, Il Dritto, Lo Storto e Il Curvo, alti, rispettivamente, 202, 170 e 150 metri.

Il progetto di Porta Nuova, dal canto suo, trasformerà la zona compresa tra la Stazione di Milano Centrale e la Stazione di Porta Garibaldi nella nuova *city* milanese. Qui è prevista la costruzione di una decina di moderni grattacieli la cui altezza sarà compresa tra i 94 e i 161 metri. Quando il progetto sarà completato, la zona diventerà il maggiore *cluster* urbano di grattacieli del Paese.

Insieme al capoluogo lombardo, anche Torino presenta una grande varietà di progetti che, se pur non andranno a costituire un vero e proprio *cluster*, cambieranno decisamente lo scenario della città. Tra i progetti più interessanti figura il *Grattaciolo della Regione Piemonte* (191 metri di altezza), progettato dall'architetto Massimiliano Fuksas.

La costruzione di alcuni moderni grattacieli è prevista anche nella città di Roma (quartiere EUR) e lungo il lido di Jesolo.

### 1.3 IL CALCESTRUZZO STRUTTURALE PER LA COSTRUZIONE DEGLI EDIFICI ALTI

Gli obiettivi che devono essere perseguiti per costruire edifici alti in calcestruzzo armato sono molteplici e fra questi quelli di maggiore importanza riguardano la resistenza, la robustezza, la durabilità, nonché la possibilità di sviluppare tecniche costruttive innovative ed efficaci, assicurando una migliore gestione dei tempi di costruzione.

A fianco di questi obiettivi primari ne sussistono altri, in particolare la possibilità di conseguire raffinati livelli estetici e forme di complessa geometria.

A partire dagli anni '80 si sono iniziati a studiare e a produrre i calcestruzzi a raffinate prestazioni; i risultati di questi studi, per quanto riguarda la resistenza del materiale, sono riportati nel grafico seguente, ove è rappresentata l'efficienza statica  $h_s$  del materiale calcestruzzo al variare della sua resistenza caratteristica a compressione, misurata su cilindri. Tale parametro, indicando con  $f_{ck}$  la resistenza e con  $\rho_c$  il peso specifico del materiale, è dato dal rapporto  $h_s = f_{ck} / \rho_c$ .

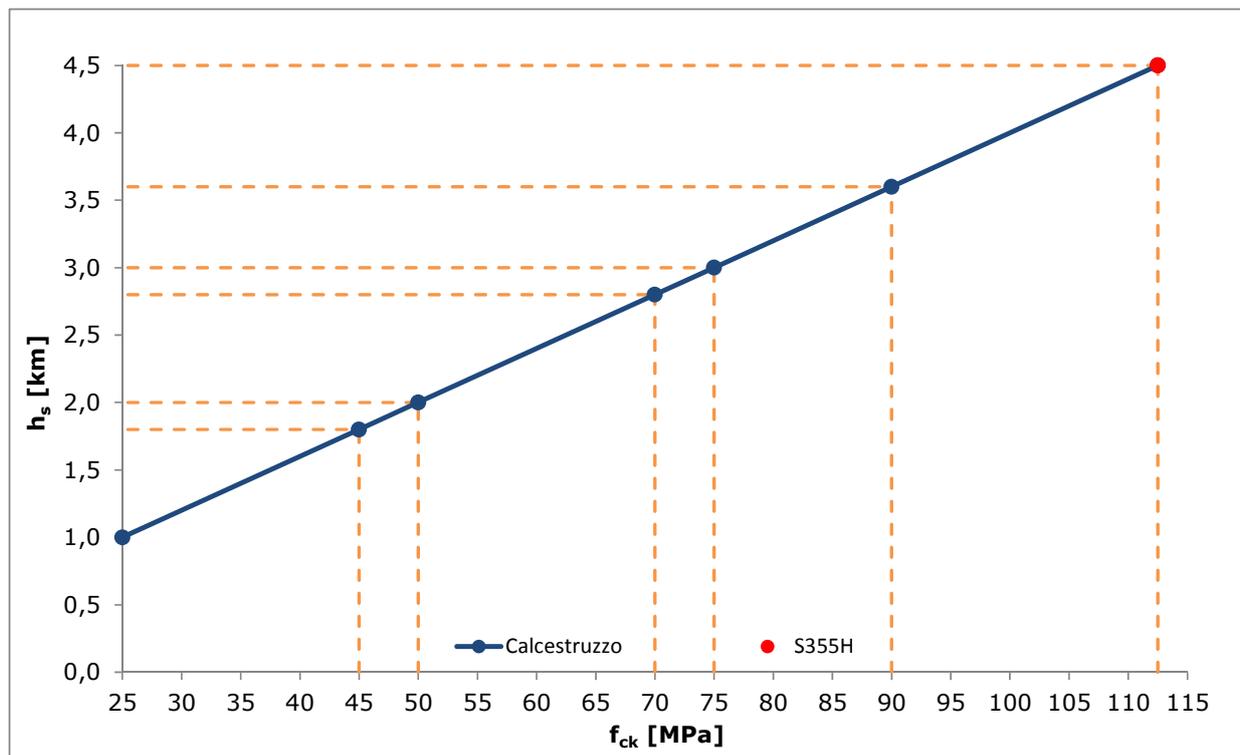


Figura 1.12 - Efficienza statica del calcestruzzo al variare di  $f_{ck}$

Esso rappresenta l'altezza raggiunta la quale, nella sezione di base di una colonna di calcestruzzo di assegnata resistenza caratteristica  $f_{ck}$ , la tensione indotta dal peso proprio del materiale ne eguaglia la resistenza. Il parametro  $h_s$  può essere assunto, in prima approssimazione, quale indicatore dell'efficienza del calcestruzzo nel far fronte alle sollecitazioni applicate.



**Figura 1.13 - Westin Building, Boston, Massachusetts, Usa; Messertum Tower, Francoforte, Germania; Two Prudential Plaza, Chicago, Illinois, Usa**

Dalla Figura 1.12, ove è riportato anche il valore di  $h_s$  per l'acciaio strutturale S355h che risulta pari a circa 4,5 km, si rileva che per calcestruzzi di normale resistenza con  $f_{ck} = 55$  MPa, la efficienza statica del calcestruzzo non supera 2.2 km, cosicché a confronto di tale materiale l'acciaio strutturale si dimostra insostituibile per la costruzione di edifici di grande altezza. Se si utilizzano invece calcestruzzi di alta resistenza, con  $f_{ck} = 90$  MPa, l'efficienza statica sale a 3,6 km, pari all'80% di quella dell'acciaio. Il pareggio è ottenuto per calcestruzzi con resistenza pari a 112.5 MPa, attualmente realizzabili in laboratorio, ove si sono prodotti calcestruzzi con resistenze dell'ordine di 140 MPa. Tenendo conto dei fenomeni di instabilità che penalizzano le sezioni in acciaio e del fatto che nella pratica costruttiva l'efficienza statica del materiale non viene mai utilizzata nella sua interezza, l'utilizzo di calcestruzzi con resistenze dell'ordine di 75 - 85 Mpa è sufficiente per la costruzione di edifici, quali il Burj Dubai.

È pertanto possibile affermare che l'avanzamento tecnologico che ha permesso la produzione di calcestruzzi di alta resistenza ha posto questo materiale in posizione privilegiata per la costruzione di edifici alti.

L'alta resistenza è fattore che favorisce la durabilità del materiale per il cui pieno raggiungimento sono comunque necessari altri prerequisiti quali la facilità di posa e la riduzione delle deformazioni da ritiro. A questo riguardo si mostrano efficaci i calcestruzzi autocompattanti e i calcestruzzi espansivi con additivi riduttori di ritiro. Questi materiali sono oggi disponibili e possono essere vantaggiosamente impiegati con costi nettamente inferiori a quelli dell'acciaio strutturale.

Un'altra caratteristica di grande importanza consiste nella capacità di sviluppare resistenze elevate in tempi relativamente brevi. Questa proprietà permette di accrescere la velocità del processo costruttivo, sia per quanto riguarda la costruzione degli elementi costituenti i nuclei scale - servizi sia relativamente alla realizzazione delle strutture di impalcato. Calcestruzzi che siano in grado di sviluppare resistenze dell'ordine di 30 - 35 MPa a due giorni dal getto

accompagnate da un valore di modulo elastico sufficientemente elevato sono oggi disponibili, anche in presenza di basse temperature. Questa peculiarità permette di minimizzare i tempi relativi alle operazioni di avanzamento dei casseri impiegati per la costruzione dei nuclei e di quelle relative alla rimozione e al successivo posizionamento dei casseri di sostegno degli impalcati. In questo modo è possibile ridurre drasticamente il tempo di costruzione degli impalcati, che risulta migliorato rispetto a quello impiegato per il montaggio e il completamento degli impalcati realizzati con struttura metallica. La filiera costruttiva di un edificio alto in calcestruzzo armato risulta così composta, nella sua essenzialità, da un cassero autoavanzante atto alla costruzione del nucleo scale - servizi, cui è fissata la via lungo la quale avanza la pompa del calcestruzzo che alimenta sia il cantiere posto alla quota di getto della struttura verticale del vano scale - servizi, sia il sottostante impalcato. Il sistema operativo utilizzato per la costruzione del Burj Dubai fornisce una chiara esemplificazione di quanto brevemente esposto.

Vi è da osservare che un simile procedimento costruttivo, che prevede l'innalzamento del calcestruzzo a quote assai elevate per mezzo di pompe, richiede particolari attenzioni sia per quanto riguarda il progetto dell'impasto, sia relativamente alle prescrizioni da osservare per garantire un corretto funzionamento della pompa. Relativamente al progetto dell'impasto le proprietà reologiche del materiale assumono importanza decisiva, superiore a quella che contraddistingue il materiale nella fase di trasporto o di getto, mentre per il corretto funzionamento della pompa deve assicurarsi la lubrificazione delle tubazioni mediante pasta fluida di cemento, alimentata dal calcestruzzo stesso, durante l'intero ciclo di operazioni. Queste necessità richiedono attenzione particolare nel proporzionamento dell'impasto che, se non correttamente progettato, può dar luogo al bloccaggio della pompa con arresti del ciclo costruttivo o a riduzioni della lavorabilità del calcestruzzo durante la sua messa in opera. La tecnologia del calcestruzzo ha risolto adeguatamente i problemi connessi al sollevamento del calcestruzzo, ricorrendo per elevate altezze all'introduzione di stazioni intermedie di pompaggio.

Gli attuali calcestruzzi si rivelano pertanto capaci sia di soddisfare le necessità connesse alla loro resistenza e durabilità, sia a quelle relative alla loro posa in opera, permettendo di costruire edifici di grande altezza in tempi brevi e con costi sufficientemente limitati.



**Figura 1.14 - Water Tower Place**



**Figura 1.15 - Central Plaza, Hong Kong, Cina**

A questi evidenti vantaggi le strutture in calcestruzzo associano altre prerogative che le rendono in molti casi preferibili a quelle a ossatura metallica. Un primo aspetto riguarda la resistenza al fuoco, che è molto più elevata per le strutture in calcestruzzo, per le quali la corretta progettazione degli spessori del copriferro è condizione in genere sufficiente, mentre per le strutture metalliche sono obbligatorie opere di protezione ai cui costi immediati devono sommarsi quelli relativi alla manutenzione. Infine, sotto l'aspetto statico - deformativo, la monoliticità della costruzione in calcestruzzo e il suo elevato grado di iperstaticità ne accrescono la sicurezza mentre la maggiore massa e l'elevato smorzamento riducono la percezione delle vibrazioni incrementando il livello di comfort degli occupanti.

## 2 IL PROBLEMA VISCOELASTICO

Nel calcestruzzo esistono due tipi di deformazioni differite:

- il ritiro, deformazione libera ( $\varepsilon$ ) che avviene spontaneamente se la matrice cementizia si trova in ambiente non saturo e che provoca una diminuzione di volume del materiale;
- la viscosità, deformazione tensionale ( $\varepsilon_\sigma$ ) che interviene nel legame sforzi - deformazioni, influenzando la Legge Costitutiva del materiale, che necessita di un'adeguata modellazione.

In condizioni di esercizio tali deformazioni sono la causa di diverse problematiche quali: deflessioni eccessive, riduzione di sforzi dovuti a deformazioni imposte, perdita di pretesione, redistribuzione degli sforzi sia in una sezione non omogenea per la presenza di componenti strutturali / vincoli in acciaio o di parti aventi età differenti, che in strutture soggette a cambio di schema statico.

Il comportamento reologico del calcestruzzo influenza notevolmente le prestazioni delle strutture in calcestruzzo armato ed in calcestruzzo armato presollecitato; di conseguenza risulta importante stabilire sia modelli attendibili per descrivere la viscosità ed il ritiro del materiale, che metodi computazionali adeguati alla determinazione della risposta strutturale.

Nel presente capitolo si ha come obiettivo la descrizione degli aspetti e dei teoremi fondamentali della viscoelasticità lineare, trattando modelli adeguati per descrivere il comportamento nel tempo del calcestruzzo sia in termini di ritiro che di viscosità.

### 2.1 LA LEGGE COSTITUTIVA VISCOELASTICA LINEARE

Per determinare il legame sforzi-deformazioni del calcestruzzo si considera un provino sollecitato da una tensione  $\sigma_0$  costante applicata al tempo  $t_0$ , registrando l'andamento delle deformazioni a diversi istanti.

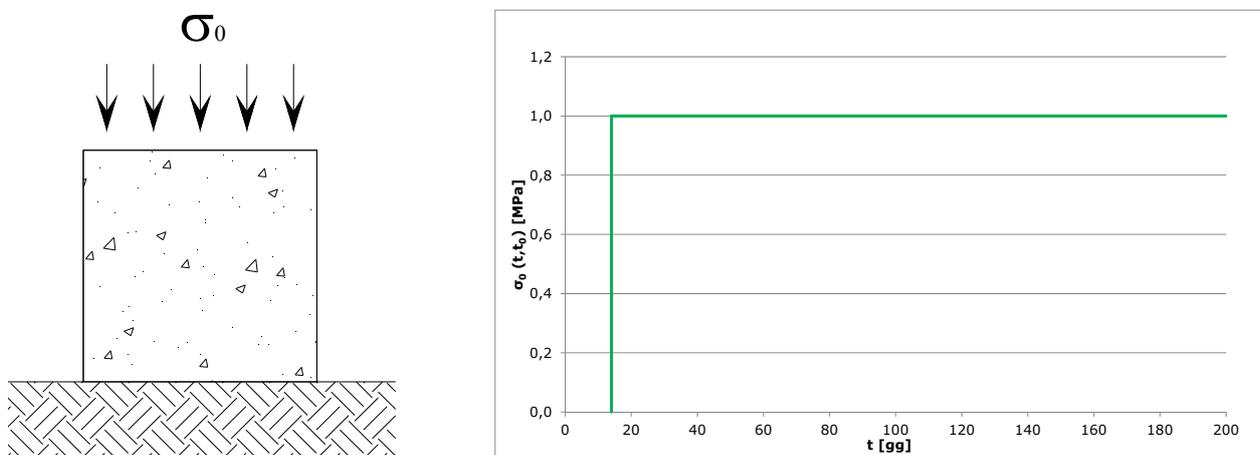


Figura 2.1 Andamento della tensione nel provino

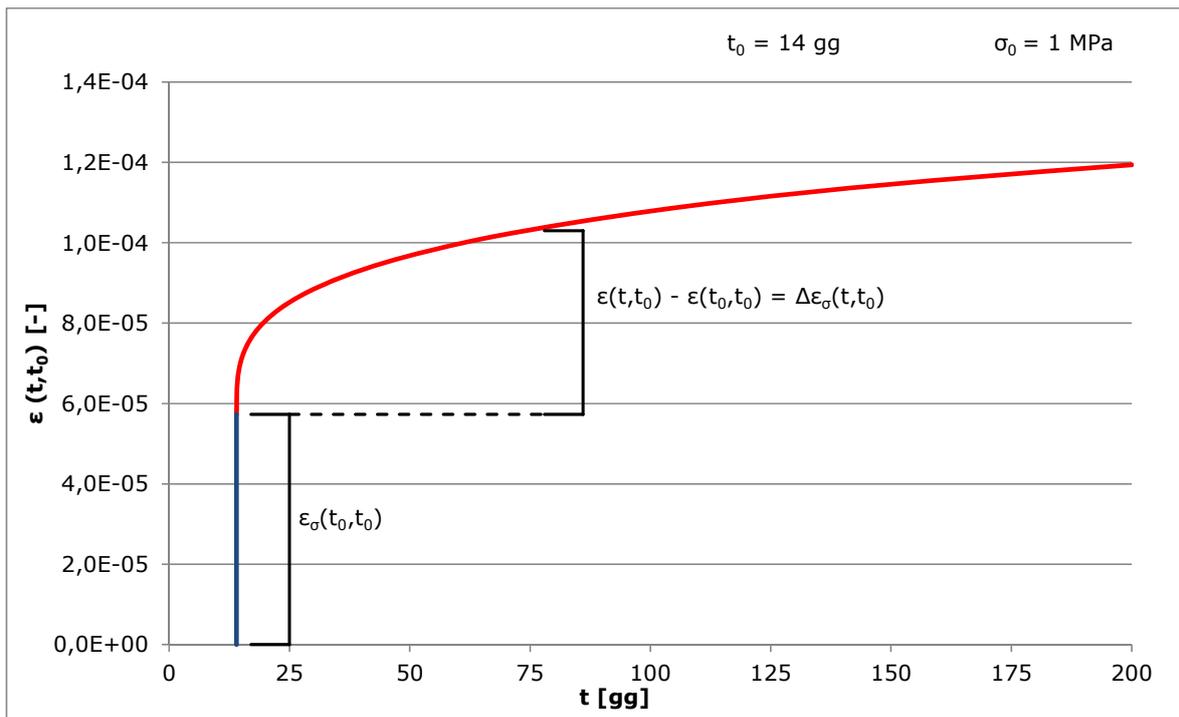


Figura 2.2 - Deformazione di un provino sottoposto a tensione costante

Come illustrato in Figura 2.2 si osserva un incremento della deformazione nel tempo che può scomporsi in una parte istantanea  $\epsilon_\sigma(t_0, t_0)$  che si sviluppa all'istante di applicazione della tensione ed in una parte differita  $\Delta\epsilon_\sigma(t, t_0)$  di origine viscosa crescente monotonamente nel tempo.

Considerando gli  $n$  provini di Figura 2.3, caricati con carico costante  $\sigma_0$  applicato a diversi istanti di tempo  $t_{0i}$ , si ottengono le seguenti curve:

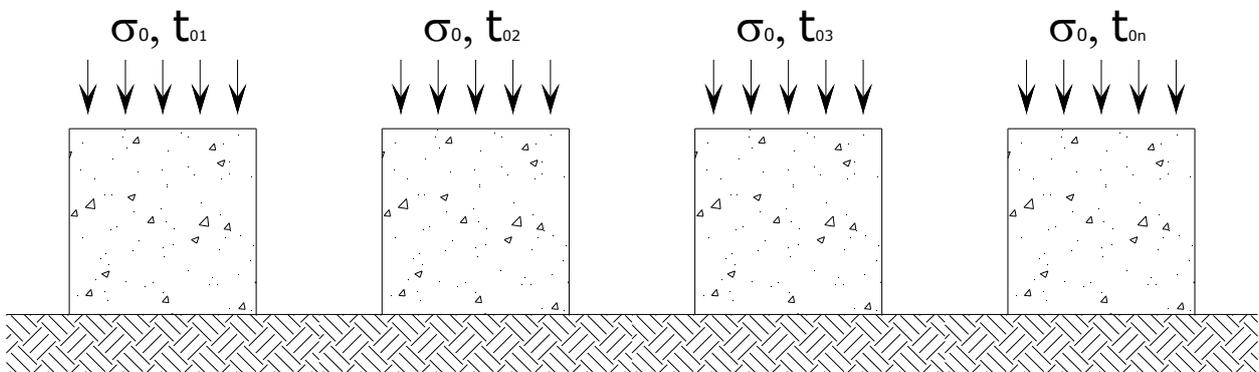


Figura 2.3 - Caratterizzazione della prova

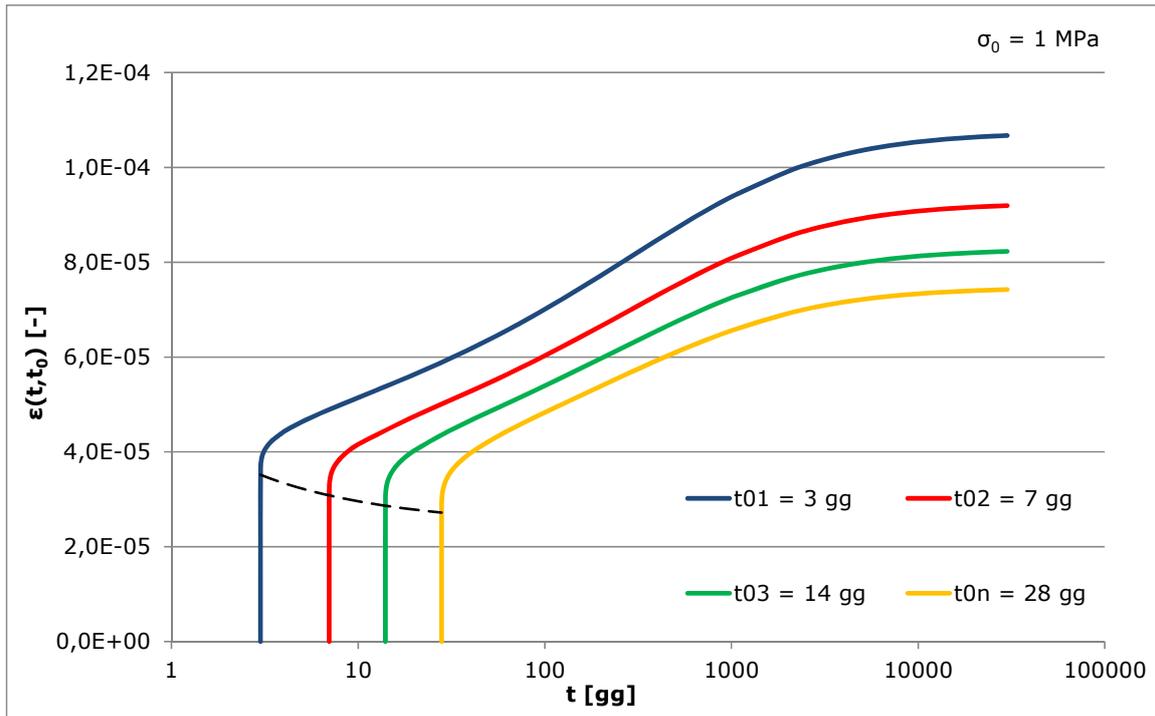


Figura 2.4 - Deformazione di n provini sottoposti a diversi carichi costanti

Dall'esperimento della Figura 2.4 possono trarsi diverse considerazioni:

- la deformazione del materiale diminuisce al crescere del tempo di carico  $t_{0i}$ ;
- per i diversi tempi di misura sono valide le relazioni:

$$\varepsilon_{\sigma 1} = \varepsilon_{\sigma}(t_{01}, t_{01}) + \Delta\varepsilon_{\sigma}(t, t_{01}) \geq \varepsilon_{\sigma 2} = \varepsilon_{\sigma}(t_{02}, t_{02}) + \Delta\varepsilon_{\sigma}(t, t_{02}) \geq$$

$$\geq \varepsilon_{\sigma 3} = \varepsilon_{\sigma}(t_{03}, t_{03}) + \Delta\varepsilon_{\sigma}(t, t_{03}) \geq \varepsilon_{\sigma n} = \varepsilon_{\sigma}(t_{0n}, t_{0n}) + \Delta\varepsilon_{\sigma}(t, t_{0n})$$

essendo  $\varepsilon_{\sigma}(t_i, t_i) = \frac{\sigma_0}{E(t_i)}$  la deformazione elastica e  $\Delta\varepsilon_{\sigma}(t, t_i)$  quella differita;

In particolare si rileva che:

- tutte le curve crescono in maniera monotona;
- al crescere del tempo di carico non vi è mai intersezione tra le diverse curve;
- le deformazioni istantanee decrescono al crescere del tempo di carico.

La deformazione  $\varepsilon_\sigma(t, t_0, \sigma_0)$  dipende dall'entità  $\sigma_0$  della tensione applicata, dal tempo  $t$  di misura e dal tempo  $t_0$  di messa in carico.

Per evidenziare la dipendenza da  $\sigma_0$ , si consideri l'esperimento illustrato in Figura 2.5 consistente nel sottoporre  $n$  provini a carichi costanti diversi tra loro, fissato il tempo di applicazione del carico  $t_0$ .

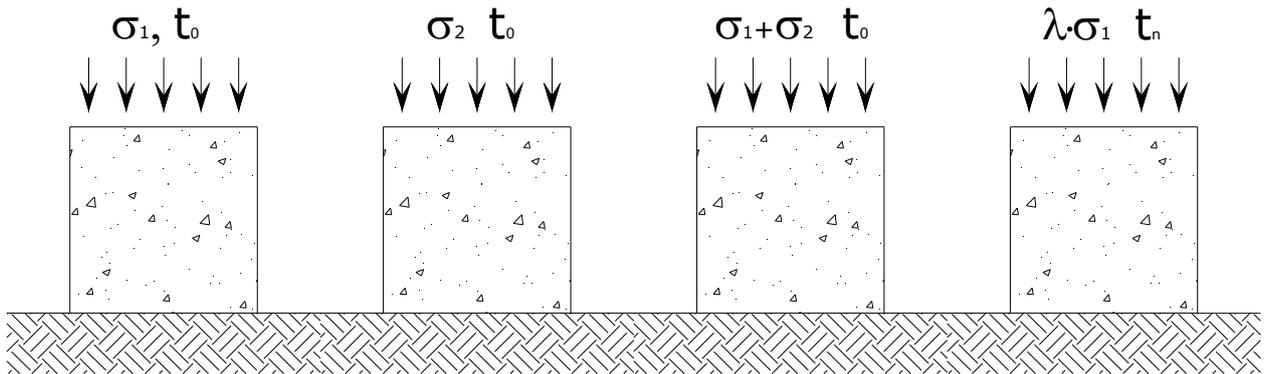


Figura 2.5 - Caratterizzazione della prova

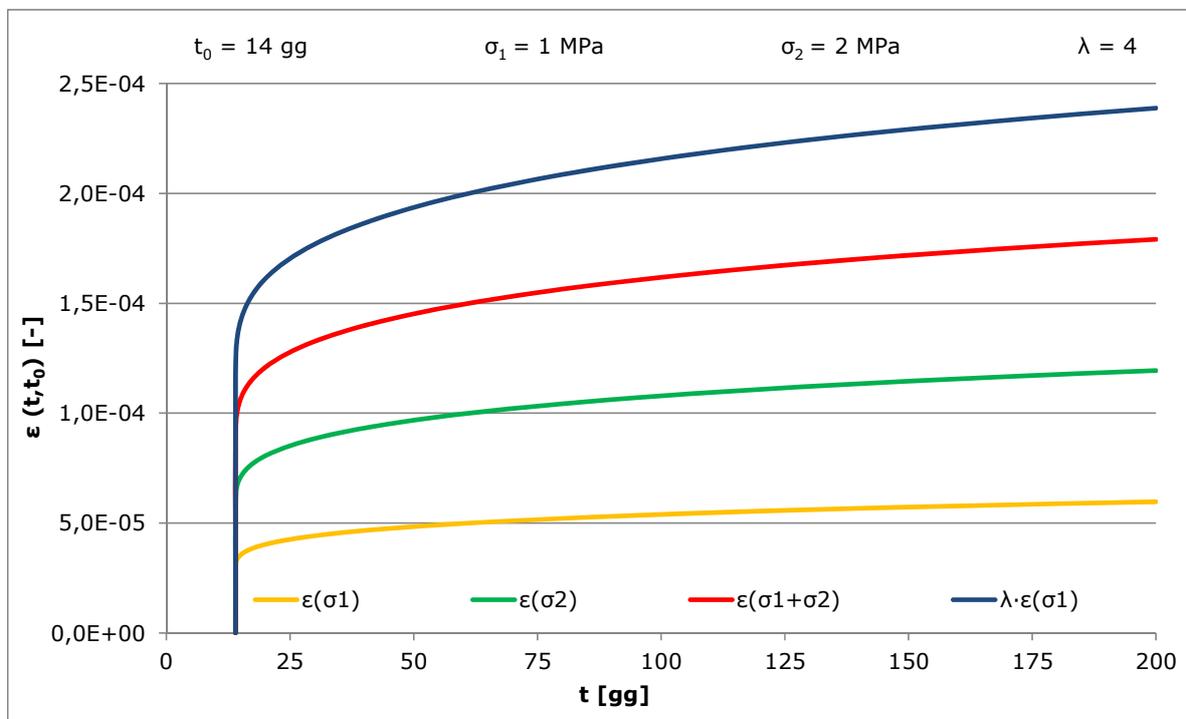


Figura 2.6 - Deformazione di  $n$  provini sottoposti a diversi carichi costanti

Considerando  $\sigma$  come causa ed  $\varepsilon$  come effetto, se:

- $\varepsilon_{1+2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  , il provino sotto la somma delle cause dà la somma degli effetti delle singole cause;
- $\varepsilon_{\lambda\sigma_1} = \lambda\varepsilon_1$  , la causa comunque amplificata dà l'effetto della causa moltiplicata per lo stesso parametro;

allora risulta valido il Principio di Sovrapposizione degli Effetti, pertanto si può esprimere  $\varepsilon_\sigma(t, t_i, \sigma_0)$  come  $\varepsilon_\sigma(t, t_i, 1) \cdot \sigma_0$ , esiste dunque un legame lineare tra  $\sigma_0$  e  $\Delta\varepsilon_\sigma$  poiché  $\Delta\varepsilon_\sigma(t, t_i, \sigma_0) = \sigma_0 \cdot \Delta\varepsilon_\sigma(t, t_i, 1)$  ed il materiale rispetta la Legge Costitutiva Viscoelastica Lineare:

$$\varepsilon_\sigma(t, t_i) = \frac{\sigma_0}{E(t_i)} + \sigma_0 \cdot \Delta\varepsilon_\sigma(t, t_i, 1) \quad (2.1)$$

Raccogliendo  $\sigma_0$ :

$$\varepsilon_\sigma(t, t_i) = \frac{\sigma_0}{E(t_i)} \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta\varepsilon_\sigma(t, t_i, 1)}{1/E(t_i)} \right] \quad (2.2)$$

Si definisce coefficiente di viscosità:

$$\varphi(t, t_i) \triangleq \frac{\Delta\varepsilon_\sigma(t, t_i, 1)}{1/E(t_i)} \quad (2.3)$$

che rappresenta il rapporto tra la deformazione viscosa e quella elastica, entrambe per sforzo unitario.

Si definisce inoltre la funzione di viscosità:

$$J(t, t_i) \triangleq \frac{1}{E(t_i)} \left[ 1 + \frac{\Delta\varepsilon_\sigma(t, t_i, 1)}{1/E(t_i)} \right] = \frac{1}{E(t_i)} [1 + \varphi(t, t_i)] \quad (2.4)$$

che rappresenta la deformazione totale al tempo  $t$  prodotta da una tensione unitaria applicata al tempo  $t_i$

All'istante iniziale si ha:  $\varepsilon_\sigma(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)}$ , poiché  $\varphi(t, t_0) = 0 \rightarrow J(t, t_0) = 1/E(t_0)$

La (2.1) si può esprimere brevemente come:

$$\varepsilon_\sigma(t, t_i) = \sigma_0 \cdot J(t, t_i) \quad (2.5)$$

La (2.5) risulta valida per valori di tensione non superiori a  $0,45 f_{ck}$ .

La funzione di viscosità è caratterizzata da due possibili formulazioni: quella sperimentale oppure quella teorica, cioè un modello che deve rispettare le seguenti condizioni:

- $\frac{\partial J(t, t')}{\partial t} \geq 0$ , curva monotona;
- $\frac{\partial J(t, t')}{\partial t'} \leq 0$ , assenza di intersezioni tra le diverse curve;
- $J(t, t') = 1/E(t')$ ;
- postulato:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial J(t, t')}{\partial t} = 0$ , condizione di asintoticità.

## 2.2 LA LEGGE DI VISCOSITA' INTEGRALE

Si considera il caso generico di tensione variabile nel tempo, ad esempio come quella rappresentata in Figura 2.7:

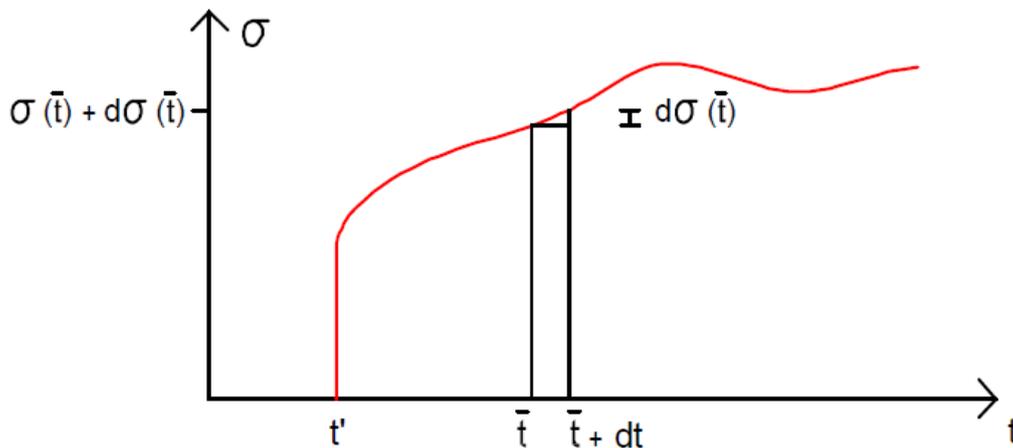


Figura 2.7 - Andamento dello sforzo nel tempo

Ad ogni istante  $t'$  è applicato un gradino di carico costante, pertanto per calcolare l'effetto finale si sommano i singoli effetti utilizzando un integrale; si ottiene così il Principio di Sovrapposizione nella forma di McHenry ([17], 1943):

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t d\sigma(t') \cdot J(t, t') \quad (2.6)$$

Essendo le  $d\sigma$  applicate tutte ad istanti differenti la legge risulta valida solo se la risposta del sistema è indipendente dalla storia di carico; sperimentalmente si dimostra che tale principio di sovrapposizione nel tempo è applicabile se la variazione di  $\sigma$  è tale da non generare brusche inversioni di segno nella  $\varepsilon_{\sigma}$ .

Inoltre, data la funzione generica di  $\sigma$ , se in essa è presente un insieme a misura nulla di punti di discontinuità, tali salti si portano fuori dall'integrale (poiché il differenziale risulta applicabile anche alle funzioni quasi continue), calcolando l'integrale stesso per campi e sommando poi gli scarti diretti:

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sum \Delta\sigma_i \cdot J(t, t_i) + \int_{t_0}^t d\sigma(t') \cdot J(t, t') \quad (2.7)$$

Brevemente la Legge Costitutiva Generalizzata o Legge di Viscosità Integrale può esprimersi attraverso l'integrale di Stieltjes - Lebesgue :

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \int_0^t d\sigma(t') \cdot J(t, t') \quad (2.8)$$

Risulta :

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \int_0^t d\sigma(t') \cdot J(t, t') + \bar{\varepsilon}(t) \quad (2.9)$$

con il secondo addendo che rappresenta la deformazione anelastica indipendente dallo stato di sforzo.

### 2.3 LA LEGGE DI RILASSAMENTO INTEGRALE

La legge costitutiva generalizzata permette di calcolare le deformazioni, noto l'andamento delle tensioni nel tempo. Nel caso speculare in cui risulta noto l'andamento delle deformazioni nel tempo mentre sono incognite le tensioni, è necessario risolvere l'equazione (2.9) come equazione integrale di Volterra non omogenea ([31], 1913) avente:

- $\varepsilon(t)$  = termine noto;
- $d\sigma(t)$  = incognita;
- $J(t, t')$  = nucleo integrale.

Sfruttando i teoremi fondamentali del calcolo integrale:

- Un'equazione integrale di Volterra omogenea ammette solo e soltanto soluzione nulla;
- Se la funzione  $J(t, t')$  è continua e limitata con la sua prima derivata su  $t$ , allora esiste una ed una sola soluzione dell'equazione integrale di Volterra;

si considera  $\varepsilon_\sigma(t) = 1 = \int_0^t d\sigma(t') \cdot J(t, t')$ , pertanto la soluzione di tale equazione è la tensione che nasce in un materiale soggetto ad una distorsione unitaria, che viene detta Funzione di Rilassamento  $R(t, t')$ .

L'equazione risolvente della (2.9) risulta essere la Legge di Rilassamento Integrale:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t, t') \cdot d[\varepsilon(t') - \bar{\varepsilon}(t')] \quad (2.10)$$

Qualsiasi sperimentazione orientata alla definizione di  $R$  non risulta affidabile: infatti non è possibile applicare una deformazione unitaria costante poiché o il calcestruzzo si ritira, oppure si introducono disomogeneità;  $J$  invece risulta determinabile sperimentalmente misurando la deformazione di provini sottoposti ad uno stato di sforzo unitario.

Le proprietà viscosse del materiale sono interamente caratterizzate da  $J(t, t')$  o da  $R(t, t')$  e la relazione tra queste due funzioni può essere calcolata nel caso:

$$\begin{cases} \varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}(t) = 0 & \text{per } t < t_0 \\ \varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}(t) = 1 & \text{per } t \geq t_0 \end{cases}$$

Essendo  $\sigma(t_0, t_0) = R(t_0, t_0) = E(t_0)$ , dall'equazione (2.6) si ricava:

$$1 = J(t, t_0) \cdot E(t_0) + \int_{t_0}^t dR(t', t_0) \cdot J(t, t') \quad (2.11)$$

questa è un'equazione integrale di Volterra non omogenea, che permette di determinare  $R$  dalla funzione  $J$ .

Analogamente nel caso:

$$\begin{cases} \sigma(t) = 0 & \text{per } t < t_0 \\ \sigma(t) = 1 & \text{per } t \geq t_0 \end{cases}$$

Essendo  $\varepsilon(t_0, t_0) - \bar{\varepsilon}(t_0) = J(t_0, t_0) = 1/E(t_0)$ , dall'equazione (2.10) si ricava:

$$1 = \frac{R(t, t_0)}{E(t_0)} + \int_{t_0}^t R(t, t') \cdot dJ(t', t_0) \quad (2.12)$$

Per la formulazione delle equazioni costitutive di viscosità e ritiro si assumono generalmente modelli di viscosità lineare, in modo tale che le deformazioni viscose indotte da sforzi costanti siano linearmente correlate al livello di sforzo e sia applicabile il Principio di Sovrapposizione degli Effetti nella forma di McHenry. Tale scelta è motivata dal fatto che le deviazioni dalla linearità non sono trascurabili solo per strutture sottoposte a sforzi, umidità, variazioni termiche o inversioni di deformazione particolarmente elevati, mentre per le condizioni tipiche di esercizio dell'ingegneria civile la linearità è ben applicabile (vedi [3], 1984).

## 2.4 CALCOLO DELLA FUNZIONE DI RILASSAMENTO

Si considera la legge di viscosità integrale:

$$\varepsilon_\sigma(t) = \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t d\sigma(t') \cdot J(t, t') \quad (2.13)$$

sostituendo nella (2.13) una deformazione costante  $\varepsilon_\sigma = 1$  si ottiene l'equazione integrale di Volterra non omogenea necessaria alla determinazione della Funzione di Rilassamento  $R(t, t')$ , essendo nota la Funzione di Viscosità  $J(t, t')$ :

$$1 = R(t_0, t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t dR(t') \cdot J(t, t') \quad (2.14)$$

Tale equazione può essere risolta per via numerica attraverso una procedura passo-passo che si basa sull'approssimazione dell'integrale di sovrapposizione in una somma finita con la regola dei trapezi.

Si suddivide il tempo  $t$ , considerato convenzionalmente di 30000 giorni, in intervalli finiti  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  con  $i=1 \dots k$ , dove  $t_0 = t_1$ ;  $\Delta t_1 = 0 \rightarrow \Delta \varepsilon_\sigma(t_1) = 1$ ; l'espressione (2.14) diventa:

$$1 = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \cdot [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})] \cdot \Delta R(t_i) \quad (2.15)$$

Riscrivendo la medesima equazione per un tempo  $t = t_{k-1}$  si ottiene:

$$1 = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} \cdot [J(t_{k-1}, t_i) + J(t_{k-1}, t_{i-1})] \cdot \Delta R(t_i) \quad (2.16)$$

Sottraendo l'equazione (2.16) alla (2.15) si ha:

$$\begin{aligned} \text{per } k > 1 \quad \Delta R(t_k) &= \frac{\sum_{i=1}^{k-1} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1}) - J(t_{k-1}, t_i) - J(t_{k-1}, t_{i-1})] \cdot \Delta R(t_i)}{J(t_k, t_k) + J(t_k, t_{k-1})} \\ \text{per } k = 1 \quad \Delta R(t_1) &= \frac{1}{J(t_1, t_1)} = \frac{1}{J(t_0, t_0)} = E_c(t_0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Tale formulazione permette di considerare:

- la particolarità della deformazione impressa (costante e di valore unitario), che ha un solo punto di discontinuità in corrispondenza dell'istante di messa in carico; infatti la Funzione di Rilassamento viene calcolata con un salto iniziale, per poi decrescere negli step successivi;
- l'andamento particolare delle curve di viscosità, caratterizzate da incrementi significativi negli intervalli immediatamente successivi al tempo di applicazione del carico, aumentando gradualmente la durata dei  $\Delta t_k$  per determinare il comportamento a lungo termine con un numero accettabile di step di calcolo.

Per comodità computazionale si discretizza l'intervallo di tempo utilizzando una progressione geometrica, in modo tale che:

$$\frac{(t_k - t_0)}{(t_{k-1} - t_0)} = q = \text{costante} \quad (2.18)$$

Ponendo  $q = 1/10^{1/m}$ , la relazione (2.18) può essere espressa in scala logaritmica come:

$$\log(t_k - t_0) = \frac{1}{m} + \log(t_{k-1} - t_0) \quad (2.19)$$

Per la determinazione di  $R(t,t')$  si utilizzano generalmente:

- $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 0.01$  giorni;
- $m=8 \rightarrow q=1.3335$ ;
- Numero di passi di calcolo per coprire un periodo di 30000 giorni:  $N=53$ .

## 2.5 METODI DI ANALISI PER STRUTTURE VISCOSE

L'analisi di strutture elasto-viscose è particolarmente complessa perché risulta legata a tre diversi aspetti da considerare:

- una corretta modellazione (analisi strutturale), basata su ipotesi cinematiche come le sezioni piane nel caso di travi oppure la normale rettilinea nel caso di piastra alla Kirchoff, etc. Solitamente, utilizzando un calcolatore, la descrizione della struttura è eseguita attraverso un software;
- l'utilizzo di leggi costitutive dei materiali che descrivano in modo adeguato il legame sforzi-deformazioni nel tempo (problema di sperimentazione e di materiale);
- la risoluzione di un complesso problema matematico, data la presenza di equazioni integrali.

Si può dire che, in base a come vengono affrontati i punti descritti in precedenza, si hanno tre approcci differenti:

- i *metodi semplificati*, che, per ovviare alla difficoltà di leggi costitutive sperimentali con espressioni analitiche complesse, risolvono in modo matematicamente esatto le equazioni integrali, ma con formulazioni semplificate di tali leggi che derivano sia da modelli teorici che da ipotesi sperimentali;
- i *metodi algebrici*, che risolvono in maniera approssimata le equazioni integrali, riducendole a semplici equazioni algebriche lineari in presenza di leggi costitutive generali;
- il *metodo generale*, applicabile solo con il supporto di programmi di calcolo automatico, risolve le equazioni integrali con leggi costitutive esatte.

Tra i metodi semplificati vi sono, ad esempio, il modello di invecchiamento di Dischinger ([6], 1937) o il modello ereditario di Boltzmann ([2], 1876), che permettono di ricondurre la legge costitutiva elasto-viscosa del calcestruzzo di tipo integrale di Volterra ad una relazione differenziale del primo ordine (funzione di viscosità  $J$  degenere).

In tal modo il problema si presenta sotto forma di equazioni differenziali, la cui soluzione è affrontata in forma generale per problemi ad una incognita e in forma numerica (con il metodo delle differenze finite) nel caso di problemi a più incognite. Questo metodo di analisi è da un lato formalmente esatto, perché permette la risoluzione analitica delle equazioni integrali, dall'altro decisamente approssimato perché le leggi costitutive utilizzate non descrivono correttamente il comportamento del materiale nel tempo, essendo ricavate da associazioni in serie o in parallelo di modelli di Hooke o di Newton.

Il procedimento descritto dalla metodologia generale è senza dubbio il migliore tra i tre perché considera contemporaneamente tutti gli aspetti posti all'inizio, ma in tal modo l'analisi risulta molto dispendiosa.

Per ovviare a questo inconveniente l'approccio ingegneristico è il secondo, che tende a privilegiare il comportamento del materiale, ma semplifica il legame integrale tra sforzi e deformazioni previsto dal principio di sovrapposizione, riconducendolo ad un legame algebrico lineare. In questo modo si adottano leggi costitutive corrette e si risolve in modo approssimato l'equazione integrale, trascurando così l'influenza della storia di carico sulla risposta della struttura; tale metodo risulta esatto nel caso in cui la struttura venga sottoposta a tensione costante nel tempo.

## 2.6 MODELLI VISCOELASTICI LINEARI SUGGERITI DAI CODICI DI SICUREZZA

In questo paragrafo vengono presentati e confrontati il CEB MC90 ([4], 1993) e il fib MC2010 ([5], 2012), entrambi determinati dalla sperimentazione (approccio ingegneristico). Tali modelli sono definiti Modelli Viscoelastici Lineari, pertanto rispettano il Principio di Sovrapposizione degli Effetti di Mc Henry:

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t d\sigma(t') \cdot J(t, t') \quad (2.20)$$

### 2.6.1 CEB - MODEL CODE 90

Il seguente modello è stato sviluppato con l'obiettivo di descrivere il comportamento del materiale calcestruzzo nel tempo, in funzione di diversi parametri:

$f_{ck}$  = resistenza cilindrica caratteristica a compressione del calcestruzzo al tempo  $t_0 = 28$  giorni, [MPa];

$f_{cm}$  = resistenza cilindrica media a compressione del calcestruzzo al tempo  $t_0 = 28$  giorni, [MPa];

$t_0$  = età del calcestruzzo al tempo di carico, [giorni];

$t_s$  = età del calcestruzzo al tempo di inizio ritiro, [giorni];

$t$  = età del calcestruzzo al tempo considerato, [giorni];

RH = percentuale di umidità relativa dell'ambiente, [%];

$A_c$  = area della sezione trasversale dell'elemento considerato;

$u$  = perimetro dell'elemento strutturale a contatto con l'atmosfera.

La funzione di viscosità viene espressa con la seguente forma:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,28}} \quad (2.21)$$

dove il primo termine rappresenta la deformazione elastica istantanea al tempo di carico  $t_0$ , mentre il secondo è la deformazione viscosa differita in riferimento al modulo elastico a 28 giorni, che può essere valutato come:

$$E_{c,28} = 2.15 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{1/3} \quad (2.22)$$

essendo nota la relazione tra la resistenza cilindrica caratteristica e quella media:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad (2.23)$$

Dall'espressione (2.22), nota l'equazione (2.23) è possibile rappresentare l'andamento crescente di  $E_{c,28}$  in funzione di  $f_{cm}$ :

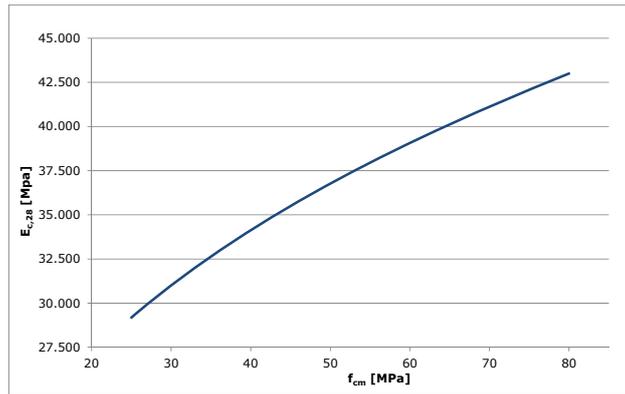


Figura 2.8 - Andamento di E<sub>c,28</sub> in funzione di f<sub>cm</sub>

Per valutare il modulo elastico [MPa] ad un tempo generico t<sub>0</sub> diverso da 28 giorni, si può utilizzare la relazione:

$$E_c(t_0) = \beta_E(t_0) \cdot E_{c,28} \quad (2.24)$$

Con:

$\beta_E$  = coefficiente dimensionale che dipende dall'età del calcestruzzo, espresso in [giorni], secondo la relazione:

$$\beta_E(t_0) = \left\{ e^{[s \cdot (1 - \sqrt{28/t_0})]} \right\}^{1/2}$$

s = coefficiente che dipende dal tipo di cemento, in particolare esso assume i seguenti valori:

0.20 per calcestruzzo ad alta resistenza, rapido indurimento;

0.25 per calcestruzzo normale, indurimento rapido;

0.38 per calcestruzzo con indurimento lento.

Si riporta l'andamento del parametro  $\beta_E$ , determinato per diversi valori di s, in funzione del tempo t<sub>0</sub>:

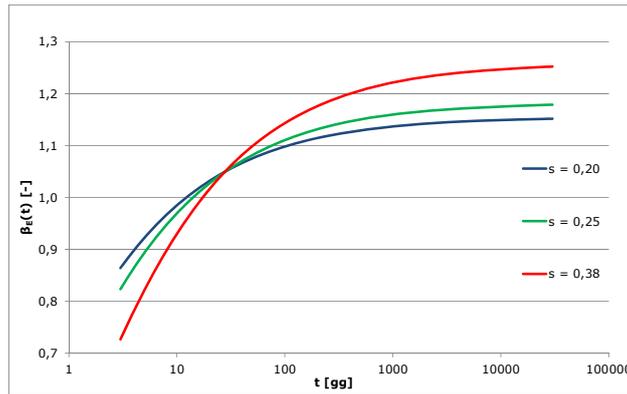


Figura 2.9 - Andamento di  $\beta_E$  in funzione di  $t_0$

Data l'equazione (2.24) si vede, in Figura 2.10, come il modulo elastico del cls ad un generico tempo  $t_0$  risulta funzione dei valori di  $f_{cm}$ ,  $s$  e  $t_0$ :

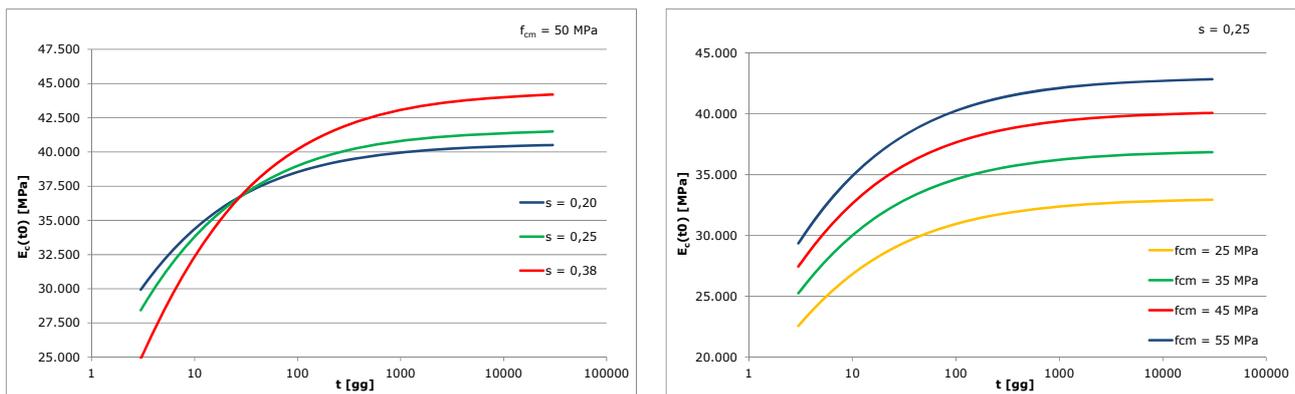


Figura 2.10 - Andamento di  $E_c$  in funzione del tipo di cemento e del valore di  $f_{cm}$

Il coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$  si calcola mediante l'espressione:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t - t_0) \quad (2.25)$$

con

$\varphi_0$  = coefficiente di viscosità teorico, definito come:  $\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0)$

$\beta_c$  = coefficiente che descrive l'andamento della viscosità dopo il tempo di carico secondo la relazione:

$$\beta_c(t - t_0) = \left[ \frac{t - t_0}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0.3}$$

Per il calcolo dei termini che compaiono nelle definizioni di tali coefficienti si definiscono le seguenti quantità:

- $$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0.46 \cdot \sqrt[3]{h_0/100}} \quad \text{essendo: } h_0 = \frac{2A_c}{u}$$

Tale parametro, come mostrato in Figura 2.11, decresce all'aumentare di RH (fissato  $h_0$ ) o all'aumentare di  $h_0$  (fissata la percentuale di umidità):

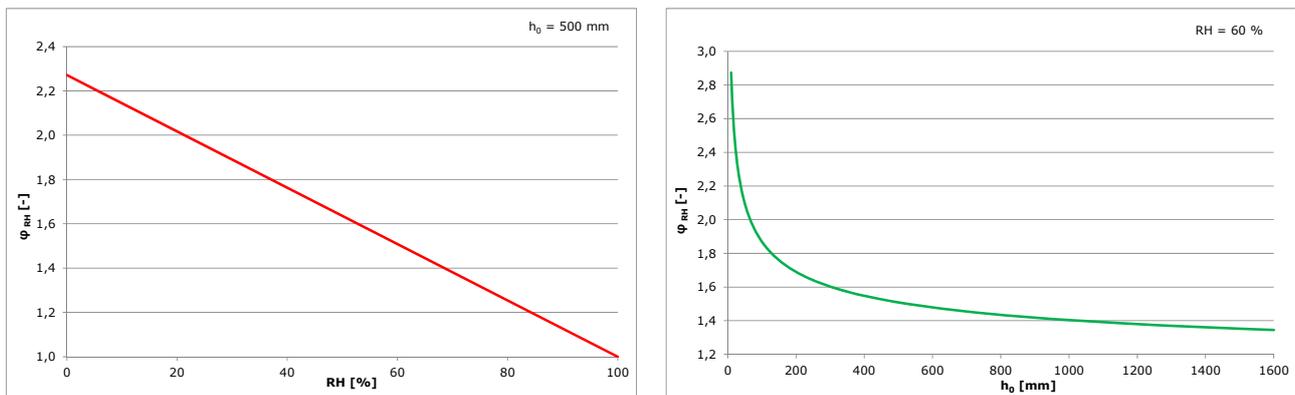


Figura 2.11 - Andamento di  $\varphi_{RH}$  in funzione di RH ed  $h_0$

- $$\beta(f_{cm}) = \frac{5.3}{\sqrt{f_{cm}/10}}, \text{ parametro che decresce all'aumentare di } f_{cm}$$

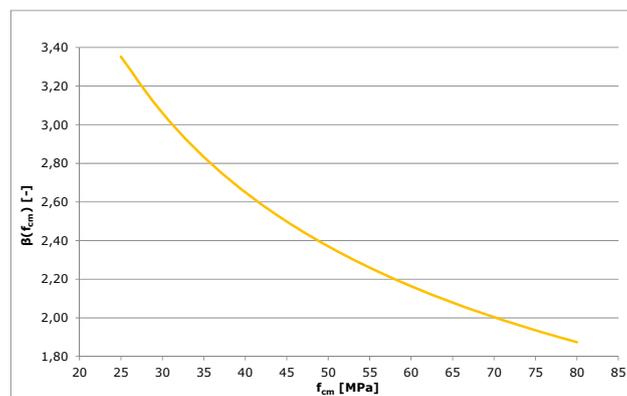


Figura 2.12 - Andamento di  $\beta(f_{cm})$  in funzione di  $f_{cm}$

- $\beta(t_0) = \frac{1}{0.1+(t_0)^{0.2}}$  , parametro che decresce con  $t_0$ :

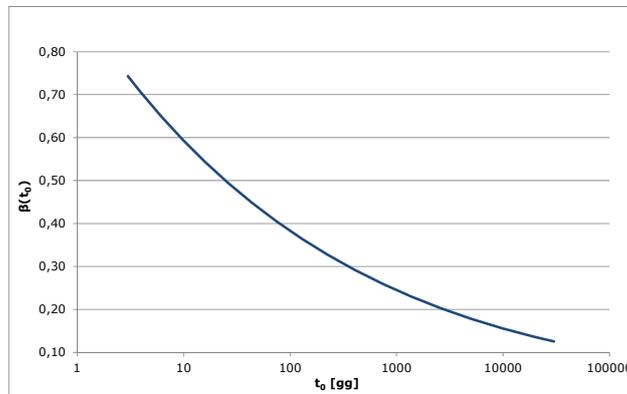


Figura 2.13 - Andamento di  $\beta(t_0)$  in funzione di  $t_0$

- $\beta_H = 150 \cdot \left[ 1 + \left( 1.2 \cdot \frac{RH}{100} \right)^{18} \right] \cdot \frac{h_0}{100} + 250 \leq 1500$  , parametro che aumenta al crescere sia della percentuale di umidità che di  $h_0$ :

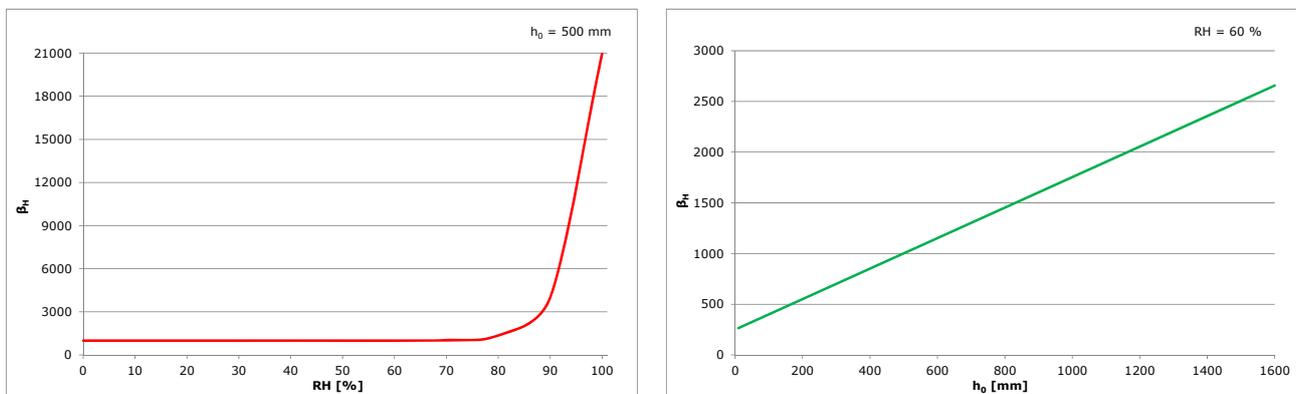


Figura 2.14 - Andamento di  $\beta_H$  in funzione di RH e  $h_0$

Nelle figure seguenti si nota come il coefficiente di viscosità e di conseguenza la funzione di viscosità, risultino dipendenti dai valori di  $t_0$ ,  $f_{cm}$ , RH ed  $h_0$  ( $s=0,25$ ):

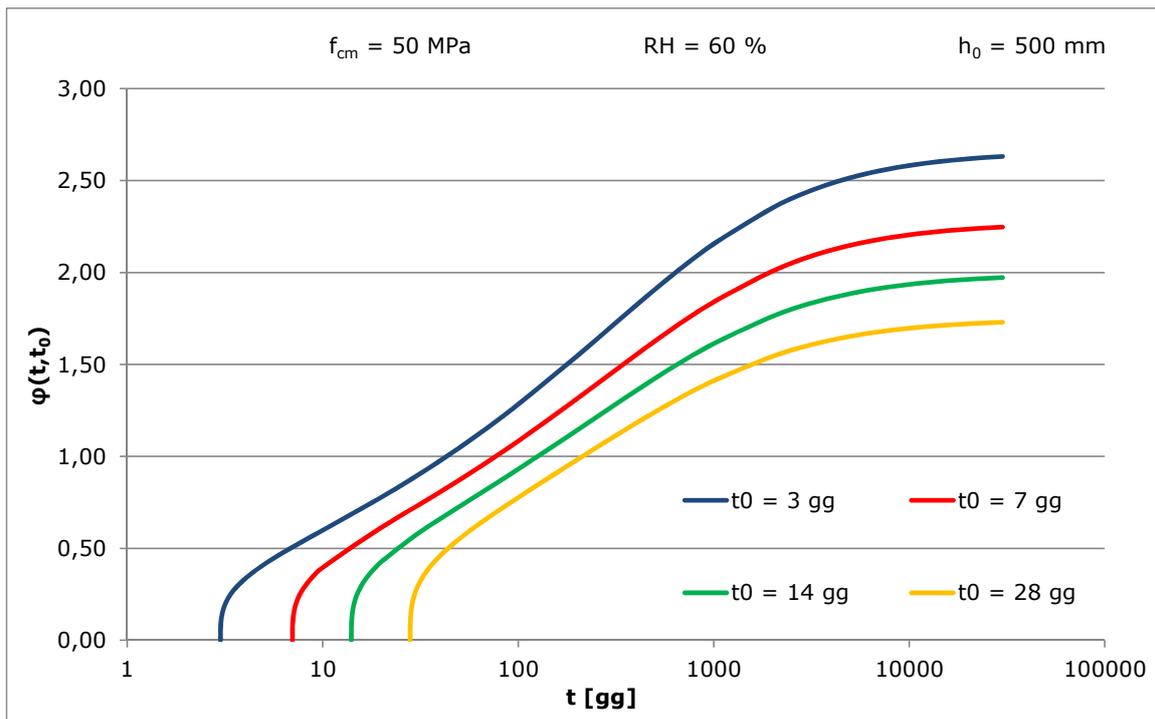


Figura 2.15 - Andamento di  $\varphi(t, t_0)$  per diversi tempi di carico

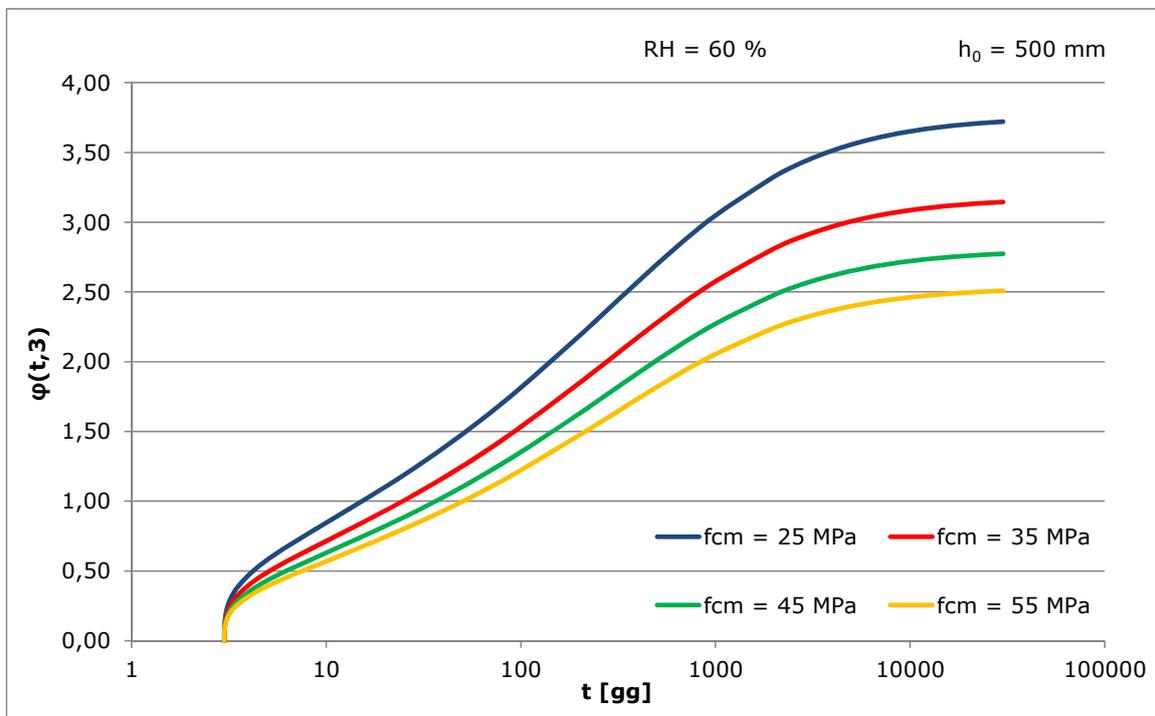


Figura 2.16 - Andamento di  $\varphi(t, t_0)$  per diversi valori di  $f_{cm}$

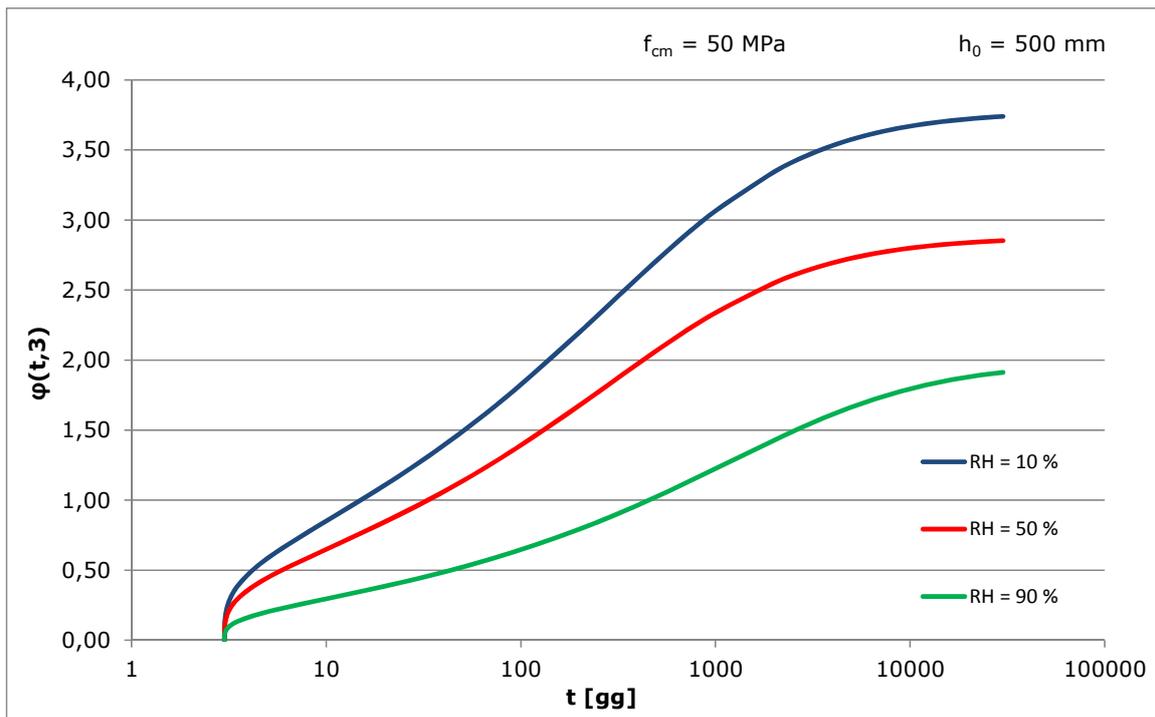


Figura 2.17 - Andamento di  $\varphi(t,t_0)$  per diversi valori di RH

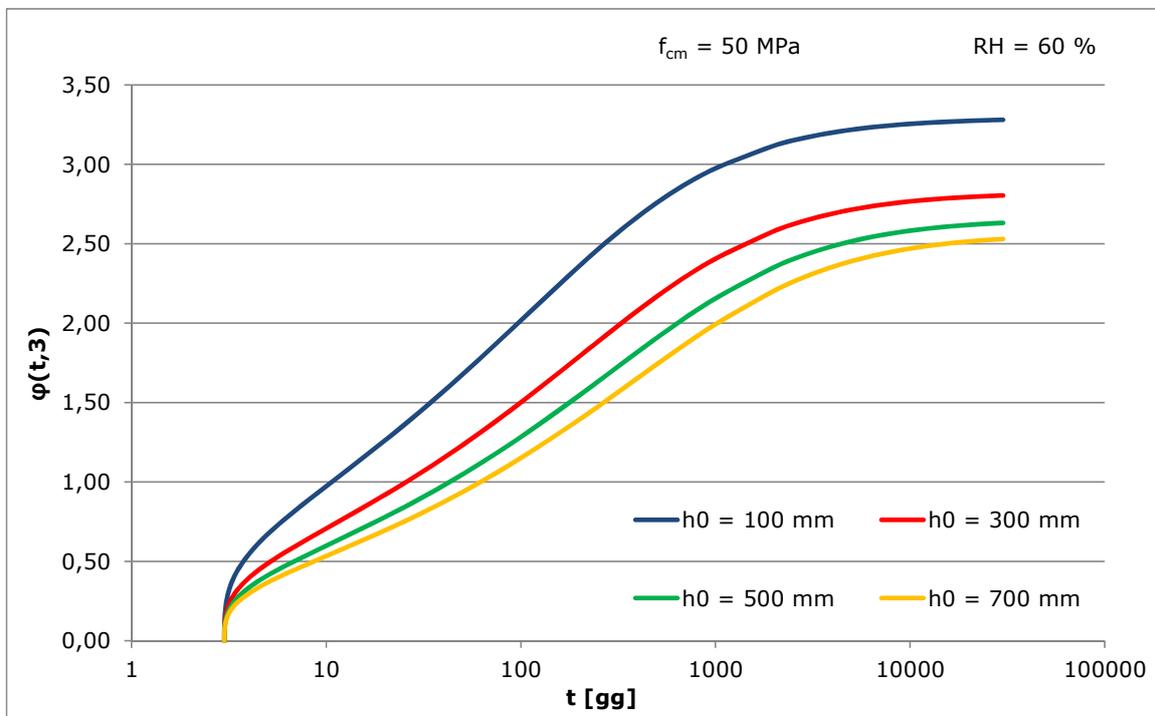


Figura 2.18 - Andamento di  $\varphi(t,t_0)$  per diversi valori di  $h_0$

I parametri citati variano dunque al variare delle caratteristiche meccaniche, reologiche e geometriche della struttura da analizzare.

Il modulo elastico  $E_c(t)$  evolve nel tempo in modo direttamente proporzionale al valore di  $f_{cm}$  e cresce con velocità variabile in funzione del tipo di cemento in uso.

Il coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$  ha un andamento affine a quello della funzione di viscosità  $J(t, t_0)$  e presenta nel tempo le stesse proprietà (funzione monotona, assenza di intersezioni per tempi di carico diversi ed asintoticità a tempo infinito). Tale coefficiente è inversamente proporzionale all'umidità relativa dell'ambiente  $RH$  [%], alla resistenza cilindrica media  $f_{cm}$  ed al parametro  $h_0$ .

Data l'equazione (2.21), è significativo rappresentare l'andamento della funzione di viscosità  $J(t, t_0)$  per differenti istanti di carico:

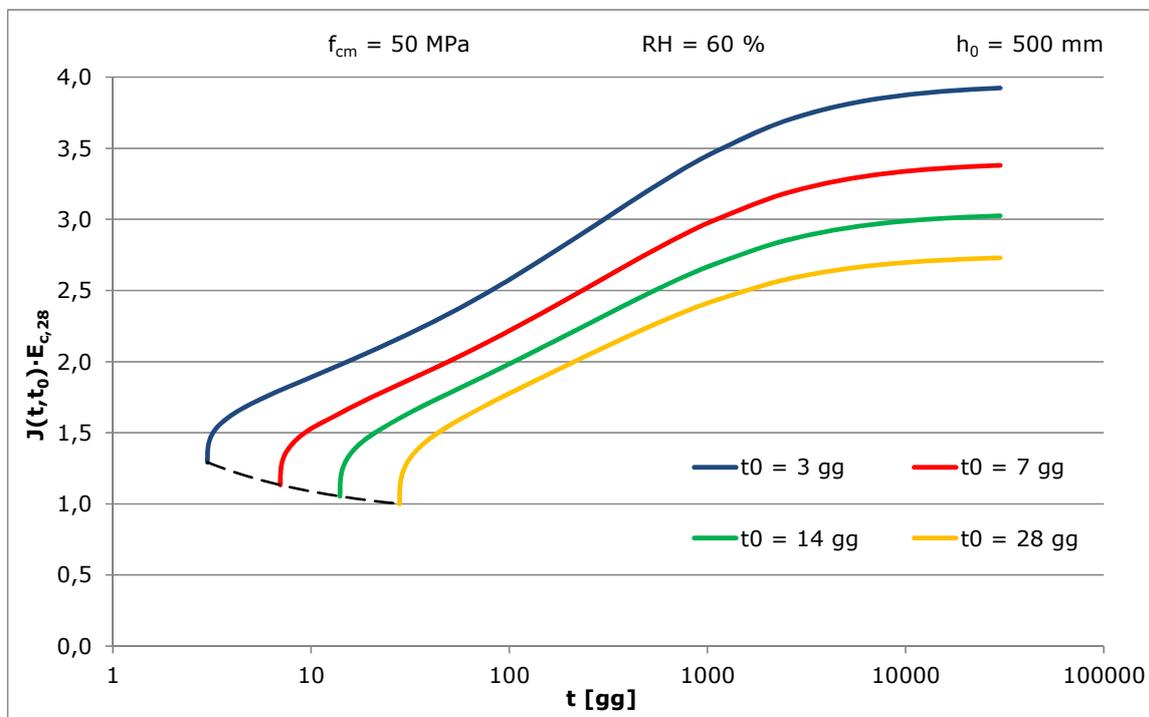


Figura 2.19 - Andamento di  $J(t, t_0)$  per diversi valori di  $t_0$

Nota la funzione di viscosità, dall'integrazione passo - passo dell'equazione (2.13) presentata nel paragrafo 2.4, è possibile rappresentare la funzione di rilassamento  $R(t, t_0)$  per differenti istanti di carico:

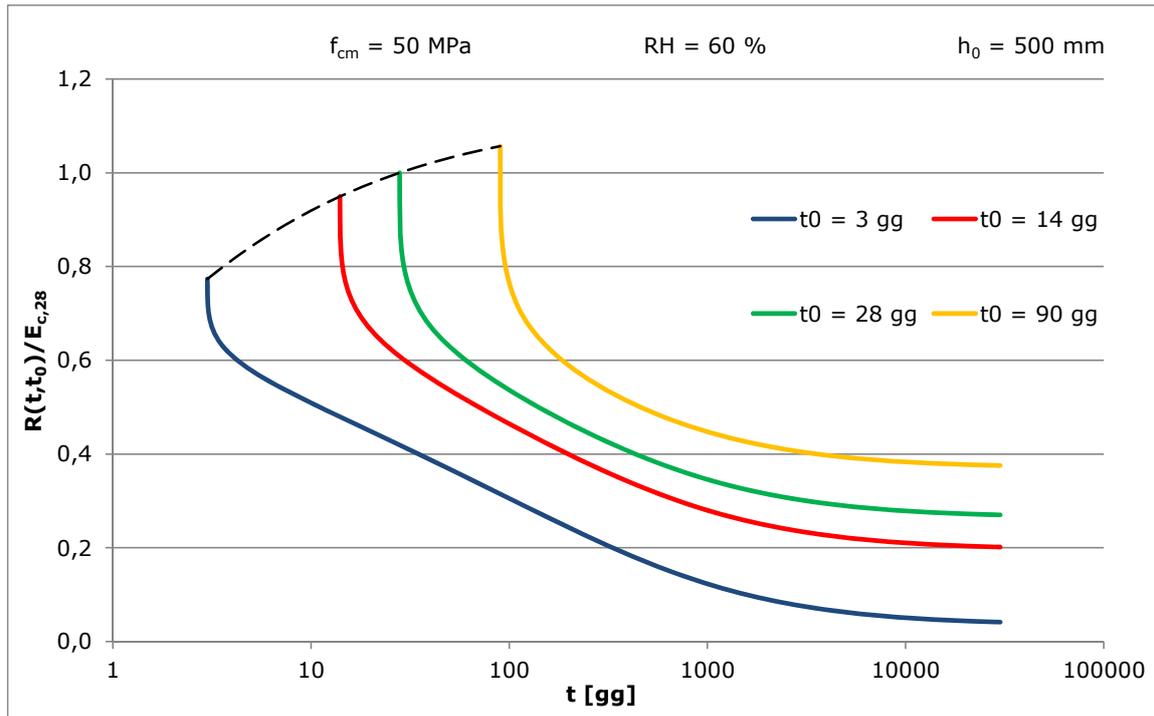


Figura 2.20 - Andamento di  $R(t, t_0)$  per diversi valori di  $t_0$

Si riporta inoltre la formulazione per descrivere il comportamento del materiale sottoposto alla deformazione imposta causata dal ritiro. E' importante sottolineare come tale modellazione risulti valida solo per calcestruzzo ordinario ( $R_{ck} = 20 - 88 \text{ MPa}$ ), maturato a vapore per non più di 14 giorni ed esposto ad  $RH = 40 - 100 \%$  e temperature  $T = 5 - 30 \text{ }^\circ\text{C}$ .

La definizione della deformazione da ritiro è:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs0} \cdot \beta_s(t - t_0) \quad (2.26)$$

con:

$\varepsilon_{cs0}$  = coefficiente teorico di ritiro, definito come:  $\varepsilon_{cs0} = \varepsilon_s(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}$  ;

$\beta_s$  = coefficiente che descrive l'andamento del ritiro nel tempo secondo la relazione:

$$\beta_s(t - t_0) = \left[ \frac{t - t_0}{350 \cdot \left( \frac{h_0}{100} \right)^2 + t - t_0} \right]^{1/2}$$

Per il calcolo dei termini che compaiono nelle definizioni di tali coefficienti si definiscono le seguenti quantità:

- $\varepsilon_s(f_{cm}) = \left[ 160 + 10 \cdot \beta_{sc} \cdot \left( 9 - \frac{f_{cm}}{10} \right) \right] \cdot 10^{-6}$

essendo  $\beta_{sc}$  un coefficiente che dipende dal tipo di cemento e che assume i seguenti valori:

- 4 per cementi ad indurimento lento;
- 5 per cementi con normale o rapido indurimento;
- 8 per cementi ad alta resistenza, rapido indurimento.

- $\beta_{RH} = -1.55 \cdot \beta_{SRH}$  se  $10\% \leq RH \leq 99\%$ ;
- $\beta_{RH} = 0.25$  se  $RH > 99\%$

essendo  $\beta_{SRH} = 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3$ .

L'andamento della deformazione atensionale causata dal ritiro del calcestruzzo nel tempo è funzione di  $t_s$ ,  $f_{cm}$ ,  $RH$  ed  $h_0$ :

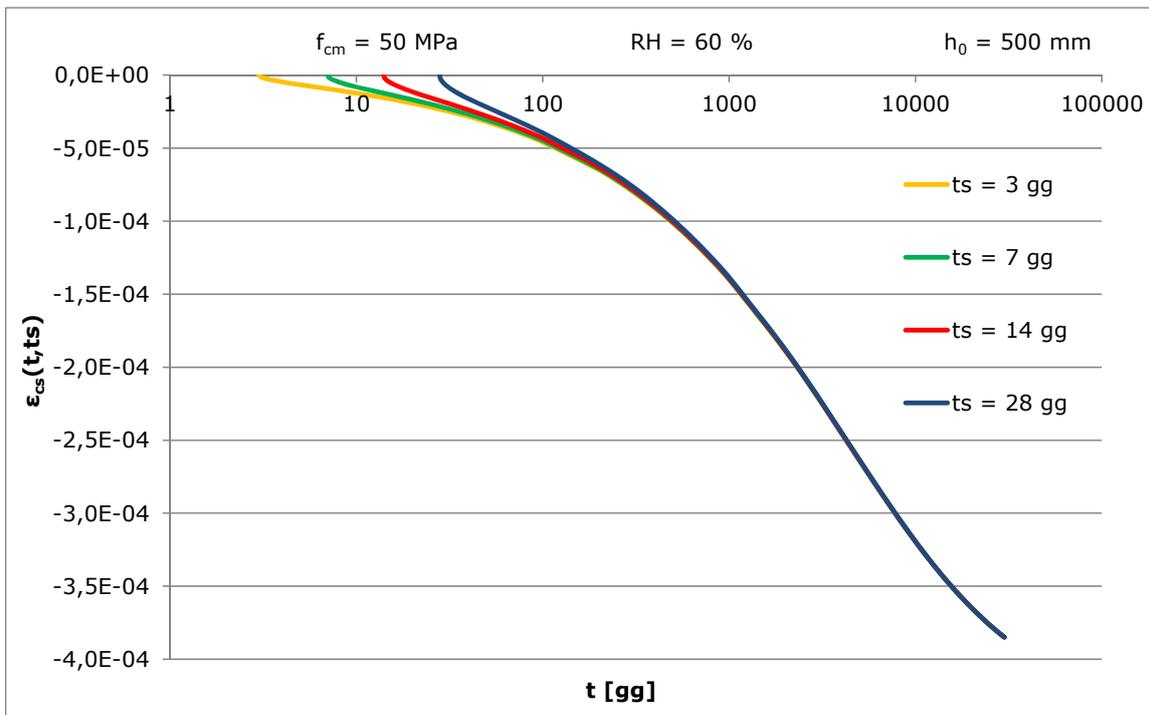


Figura 2.21 - Andamento di  $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$  per diversi valori di  $t_s$

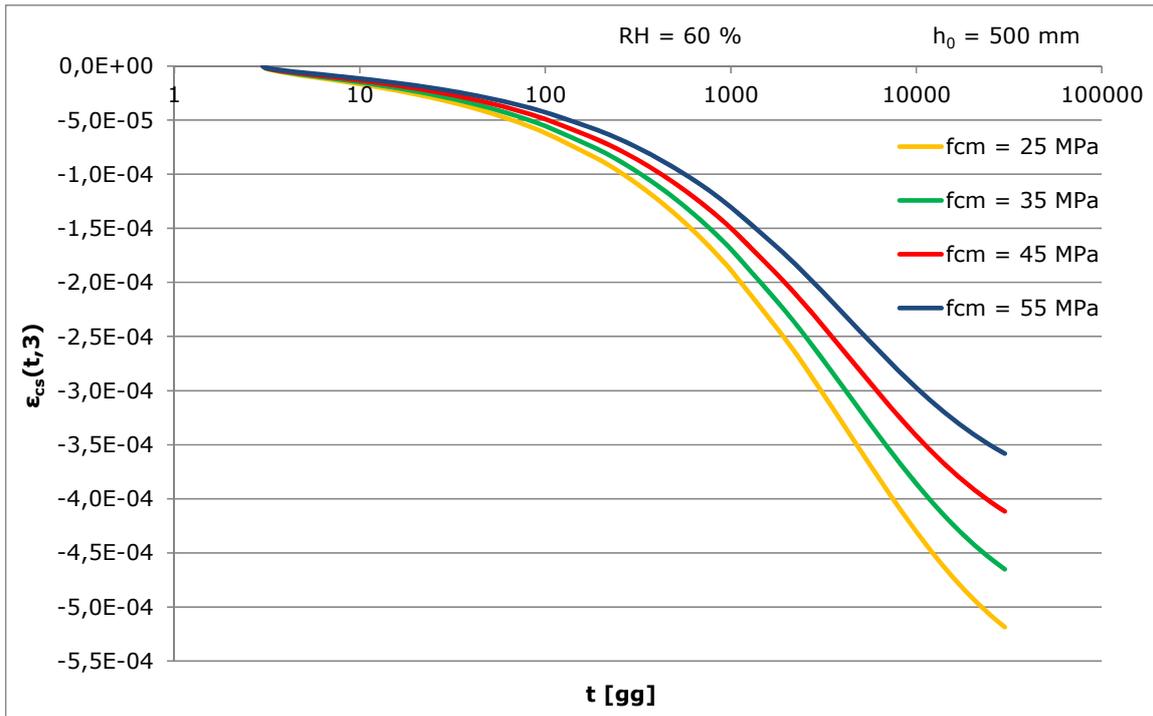


Figura 2.22 - Andamento di  $\epsilon_{cs}(t,3)$  per diversi valori di  $f_{cm}$

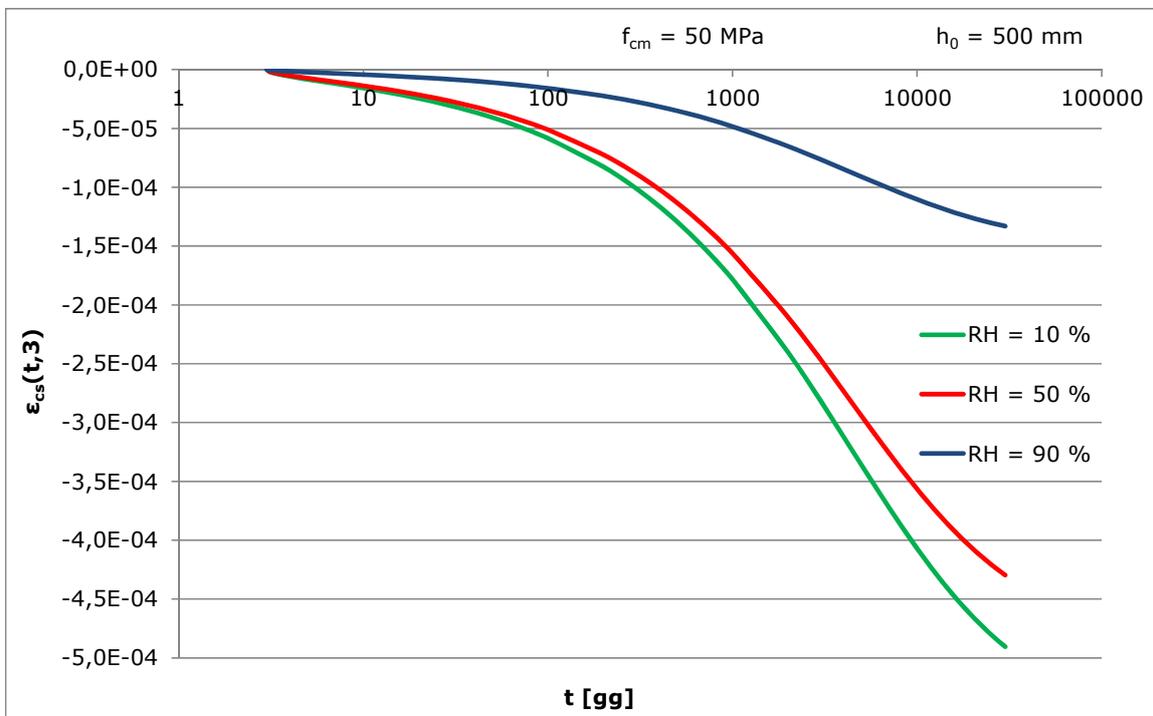
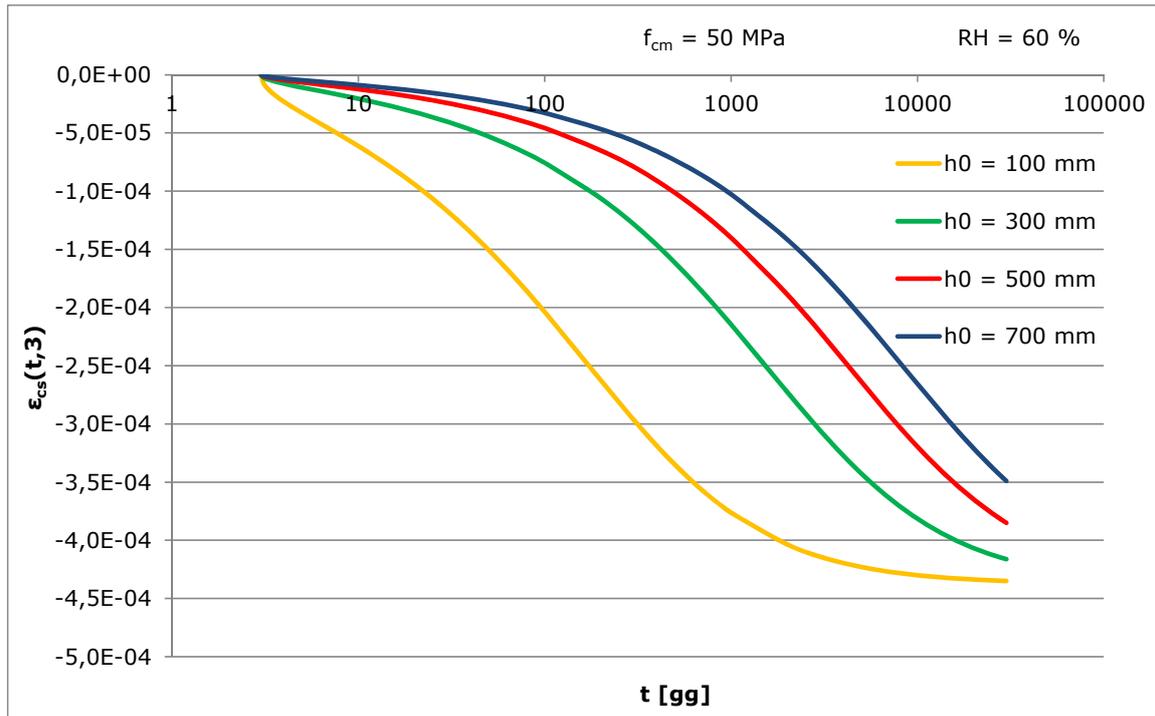


Figura 2.23 - Andamento di  $\epsilon_{cs}(t,3)$  per diversi valori di RH


 Figura 2.24 - Andamento di  $\varepsilon_{cs}(t,3)$  per diversi valori di  $h_0$ 

### 2.6.2 Fib - MODEL CODE 2010

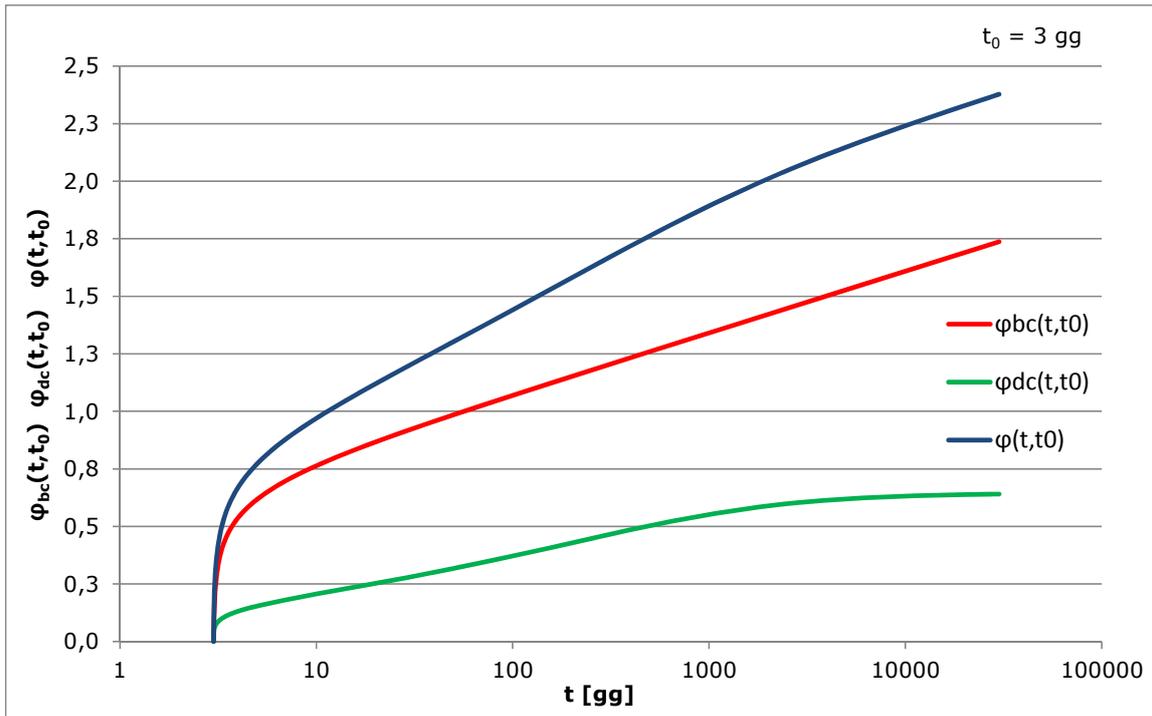
Anche nel nuovo modello la funzione di viscosità viene espressa con la seguente forma:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,28}} \quad (2.27)$$

dove il primo termine rappresenta la deformazione elastica istantanea al tempo di carico  $t_0$ , mentre il secondo è la deformazione viscosa differita rapportata al modulo elastico a 28 giorni.

Il coefficiente di viscosità rappresenta la vera novità del modello e si ottiene sommando due contributi: basic creep  $\varphi_{bc}(t, t_0)$  e drying creep  $\varphi_{dc}(t, t_0)$ :

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{bc}(t, t_0) + \varphi_{dc}(t, t_0) \quad (2.28)$$


 Figura 2.25 - Andamento di  $\varphi_{bc}(t, t_0)$ ,  $\varphi_{dc}(t, t_0)$ ,  $\varphi(t, t_0)$  nel tempo

Il coefficiente di viscosità di base può essere valutato come:

$$\varphi_{bc}(t, t_0) = \beta_{bc}(f_{cm}) \cdot \beta_{bc}(t, t_0) \quad (2.29)$$

con

$$\beta_{bc}(f_{cm}) = \frac{1,8}{(f_{cm})^{0,7}}$$

$$\beta_{bc}(t, t_0) = \ln \left[ \left( \frac{30}{t_0} + 0,035 \right)^2 \cdot (t - t_0) + 1 \right]$$

Il parametro  $\beta_{bc}(f_{cm})$ , come mostrato in Figura 2.26, decresce all'aumentare di  $f_{cm}$ :

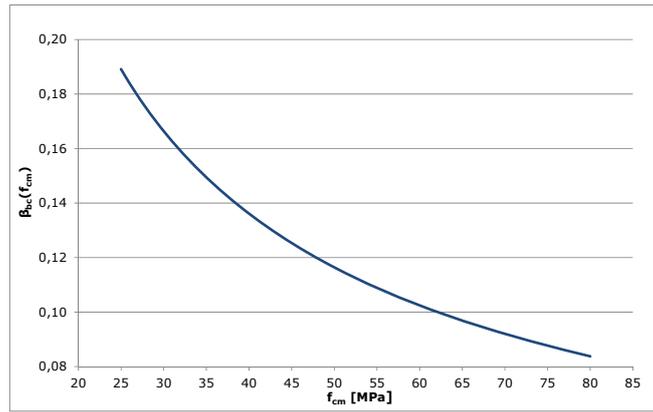


Figura 2.26 - Andamento di  $\beta_{bc}$  in funzione di  $f_{cm}$

L'andamento del coefficiente di viscosità di base è funzione di  $t_0$ , ed  $f_{cm}$ :

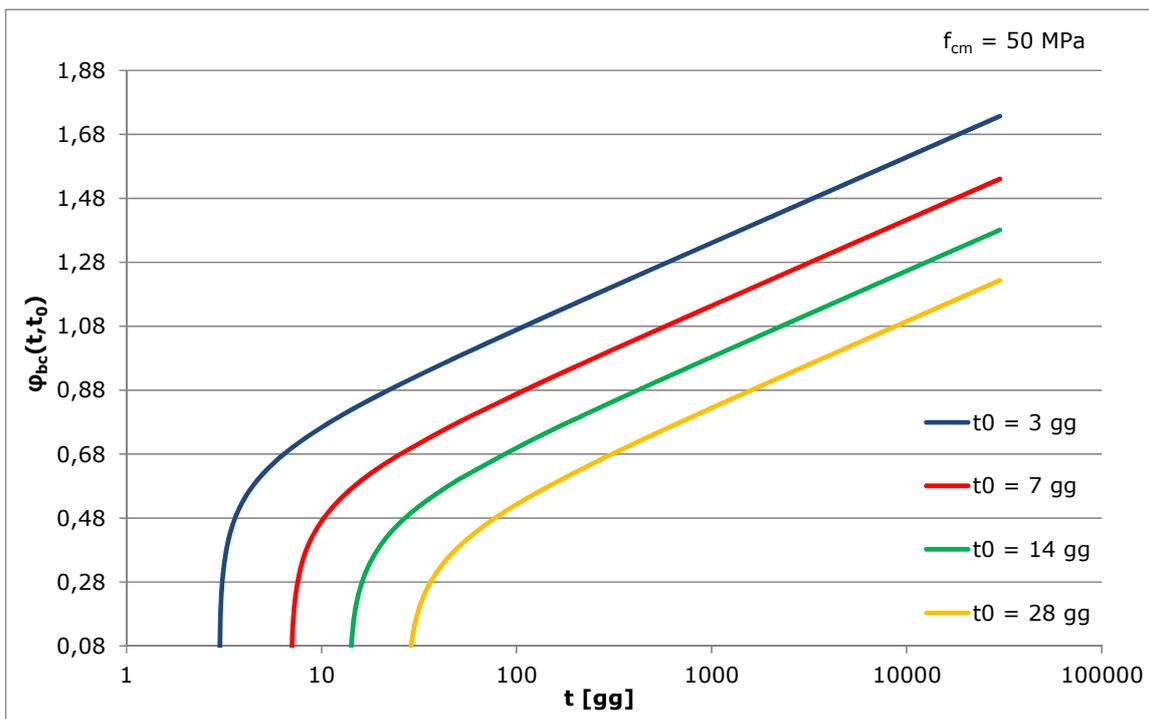


Figura 2.27 - Andamento di  $\varphi_{bc}(t, t_0)$  per diversi tempi di carico

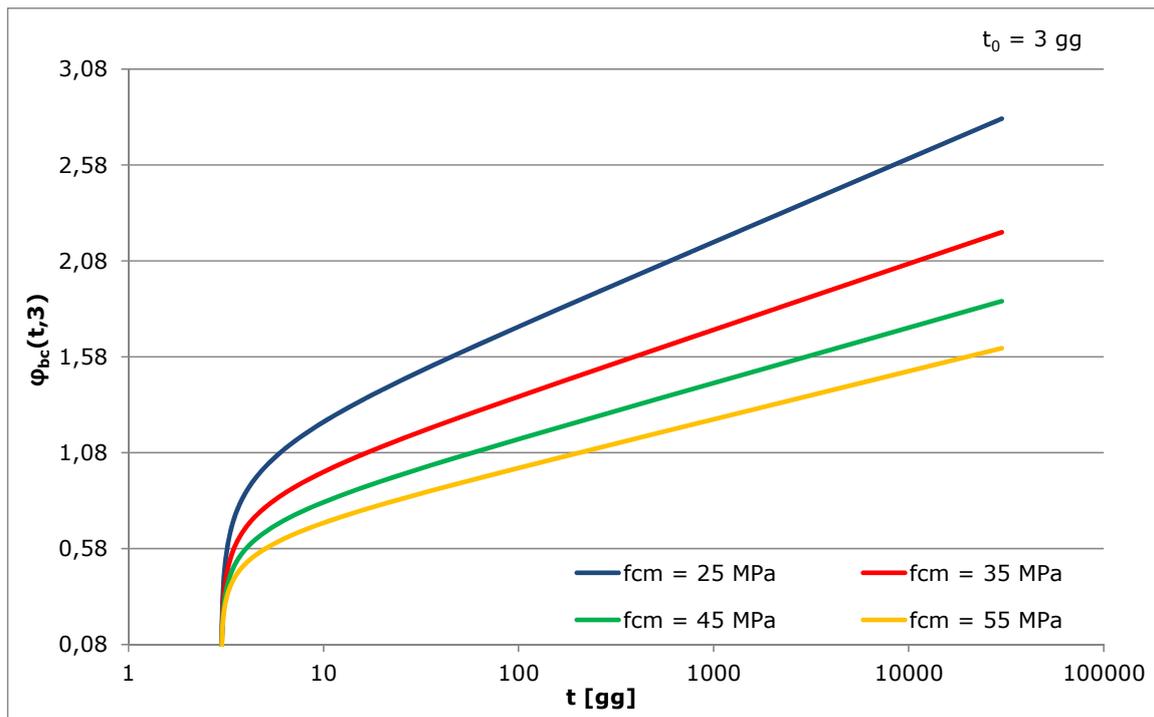


Figura 2.28 - Andamento di  $\varphi_{dc}(t,3)$  per diversi valori di  $f_{cm}$

Per quanto concerne il coefficiente di viscosità da essiccamento  $\varphi_{dc}(t,t_0)$ , esso si calcola mediante l'espressione:

$$\varphi_{dc}(t, t_0) = \beta_{dc}(f_{cm}) \cdot \beta(RH) \cdot \beta_{dc}(t, t_0) \quad (2.30)$$

con

- $\beta_{dc}(f_{cm}) = \frac{412}{(f_{cm})^{1,4}}$

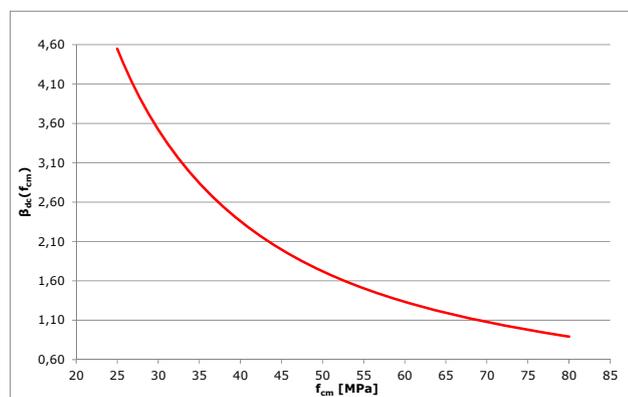
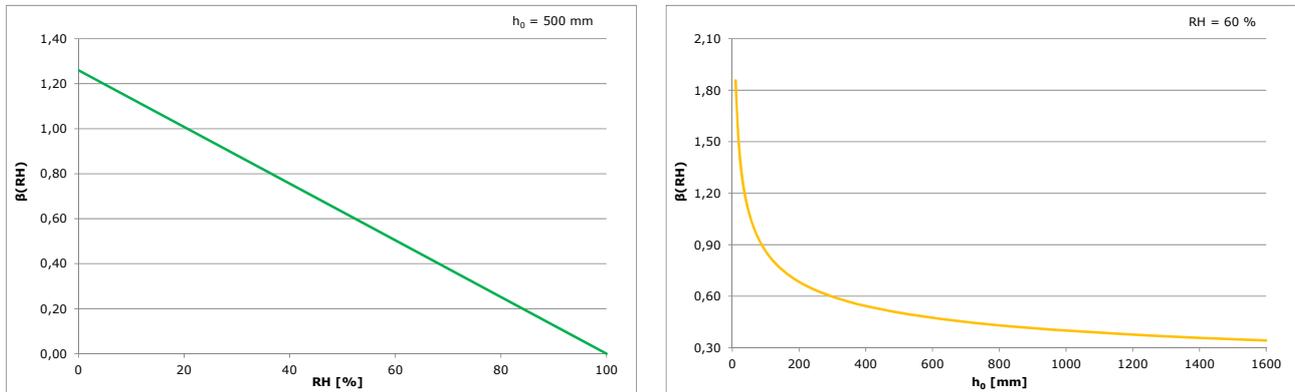


Figura 2.29 - Andamento di  $\beta_{dc}$  in funzione di  $f_{cm}$

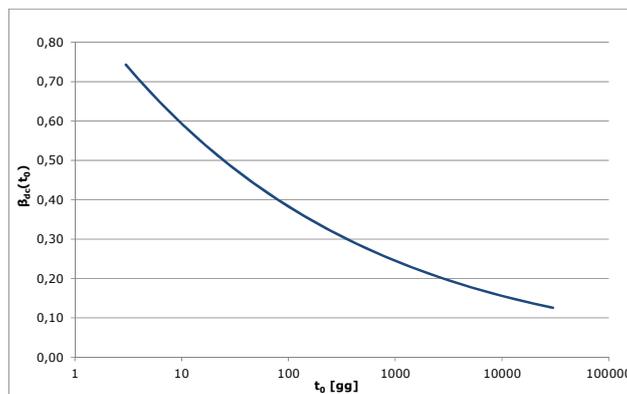
- $$\beta(RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{0,1 \cdot \frac{h}{100}}}$$



**Figura 2.30 - Andamento di  $\beta(RH)$  in funzione di RH e  $h_0$**

Dalla Figura 2.30, si nota che  $\beta(RH)$  decresce all'aumentare di RH (fissata la dimensione nominale della sezione  $h_0$ ) o all'aumentare di  $h_0$  (fissata la percentuale di umidità):

- $$\beta_{dc}(t_0) = \frac{1}{0,1 + t_0^{0,2}}$$



**Figura 2.31 - Andamento di  $\beta_{dc}(t_0)$  in funzione di  $t_0$**

Lo sviluppo del creep da essiccamento nel tempo è descritto da:

$$\beta_{dc}(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{\beta_h + (t - t_0)} \right]^{\gamma(t_0)}$$

Con

$$\gamma(t_0) = \frac{1}{2,3 + \frac{3,5}{\sqrt{t_0}}}$$

$$\beta_h = 1,5 \cdot h + 250 \cdot \alpha_{f_{cm}} \leq 1500 \cdot \alpha_{f_{cm}}$$

con

$$\alpha_{f_{cm}} = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0,5}$$

In definitiva il coefficiente di viscosità da essiccamento  $\varphi_{dc}(t, t_0)$  è inversamente proporzionale all'età di messa in carico, alla resistenza media a compressione, all'umidità relativa ed alla dimensione nominale della sezione.

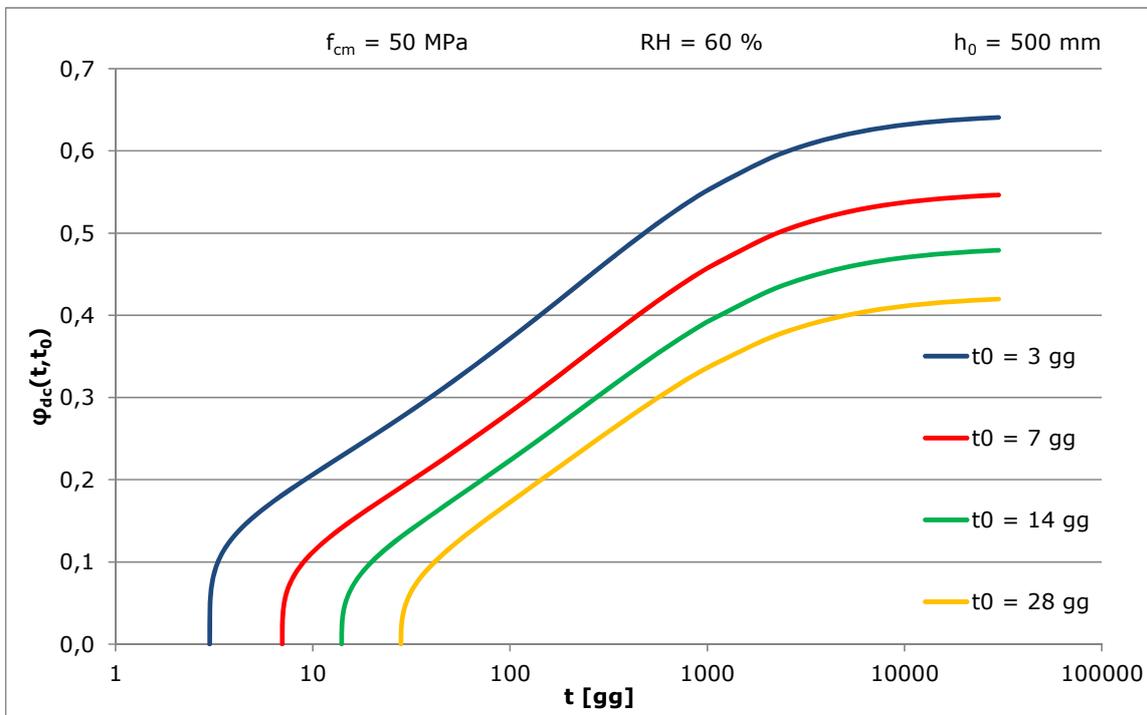


Figura 2.32 - Andamento di  $\varphi_{dc}(t, t_0)$  per diversi tempi di carico

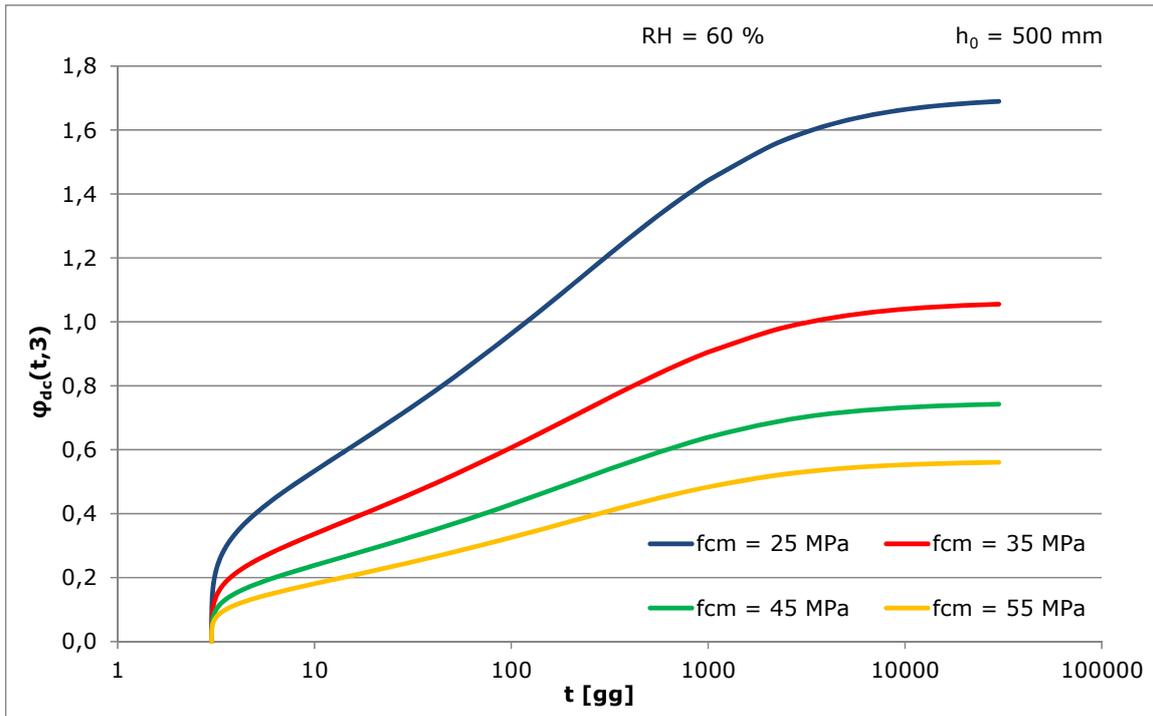


Figura 2.33 - Andamento di  $\varphi_{dc}(t,3)$  per diversi valori di  $f_{cm}$

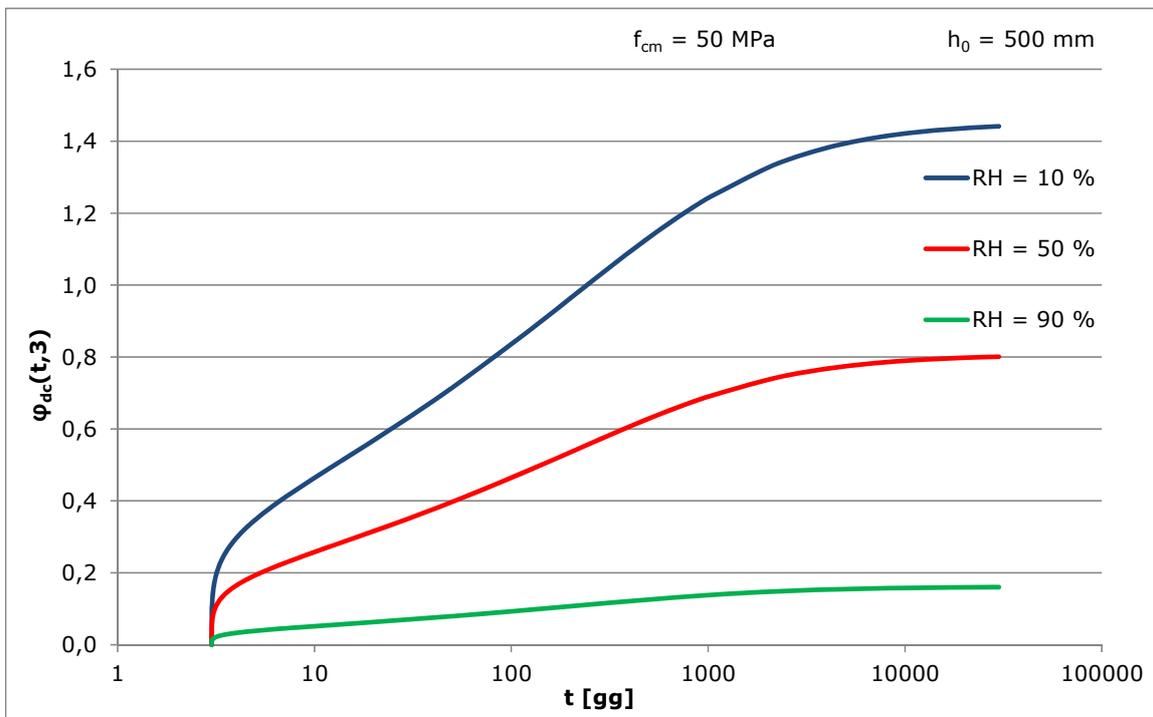


Figura 2.34 - Andamento di  $\varphi_{dc}(t,3)$  per diversi valori di  $RH$

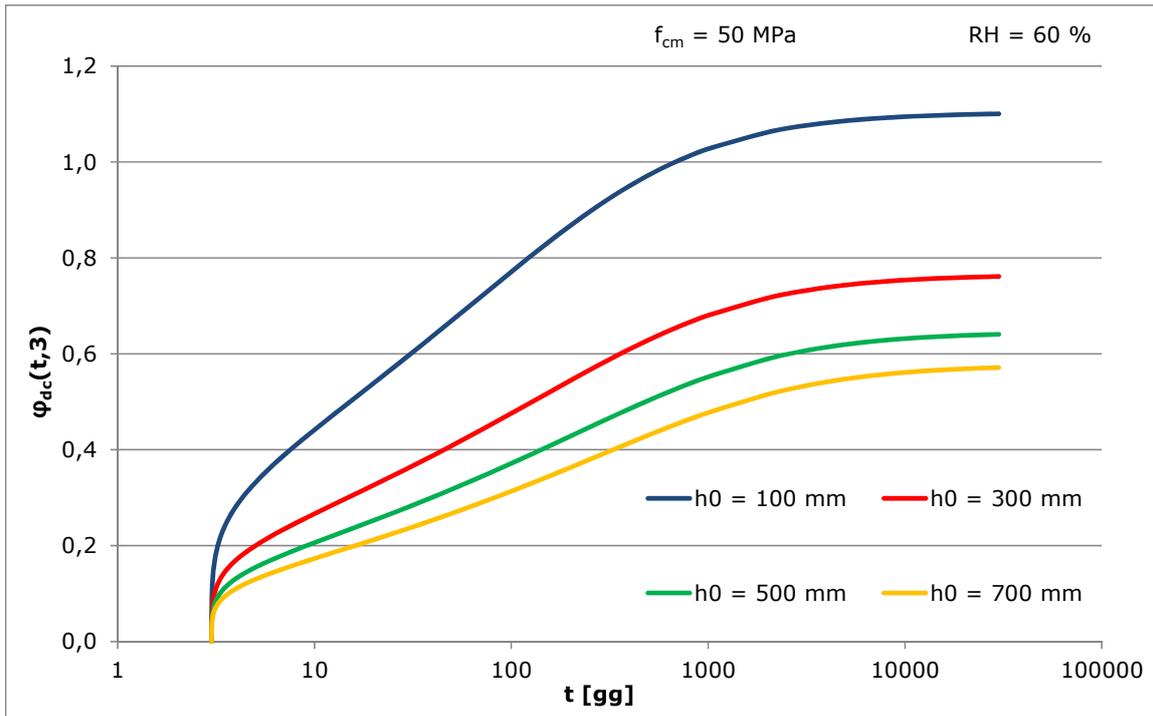


Figura 2.35 - Andamento di  $\varphi_{dc}(t,3)$  per diversi valori di  $h_0$

Di seguito si riportano i diversi andamenti del coefficiente di viscosità al variare dei parametri  $t_0$ ,  $f_{cm}$ ,  $RH$ ,  $h_0$  considerando un calcestruzzo normale ad indurimento rapido ( $s=0,25$ ).

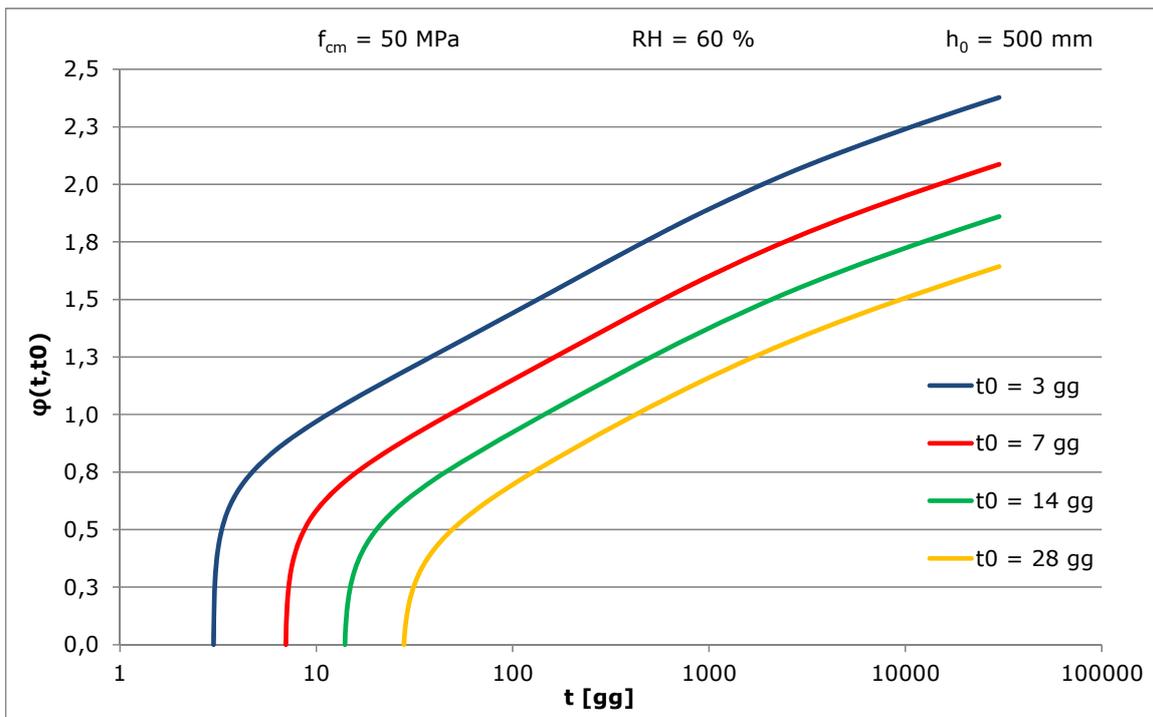


Figura 2.36 - Andamento di  $\varphi(t,t_0)$  per diversi tempi di carico

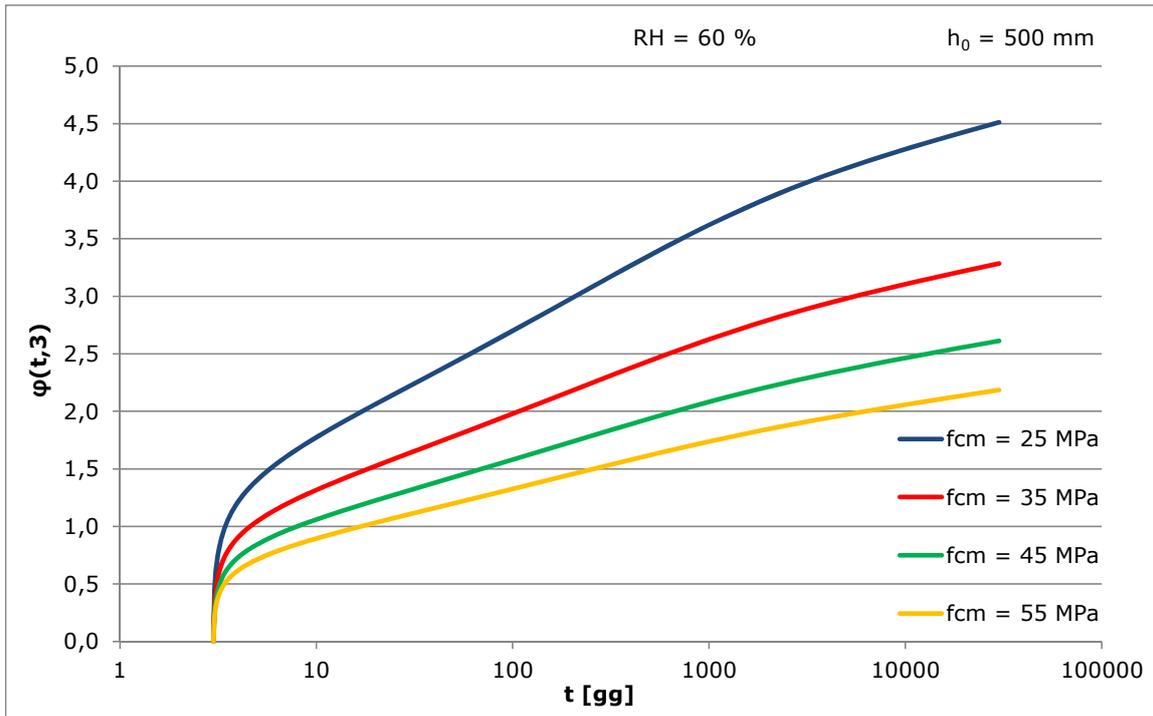


Figura 2.37 - Andamento di  $\varphi(t,3)$  per diversi valori di  $f_{cm}$

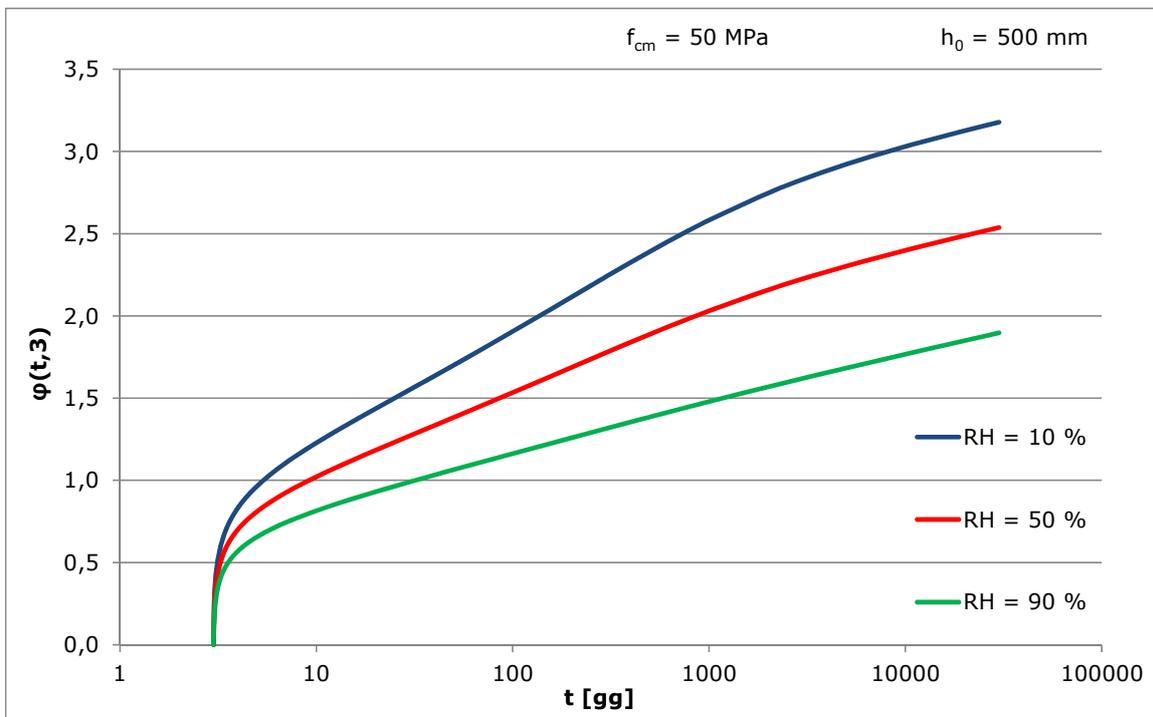


Figura 2.38 - Andamento di  $\varphi(t,3)$  per diversi valori di  $RH$

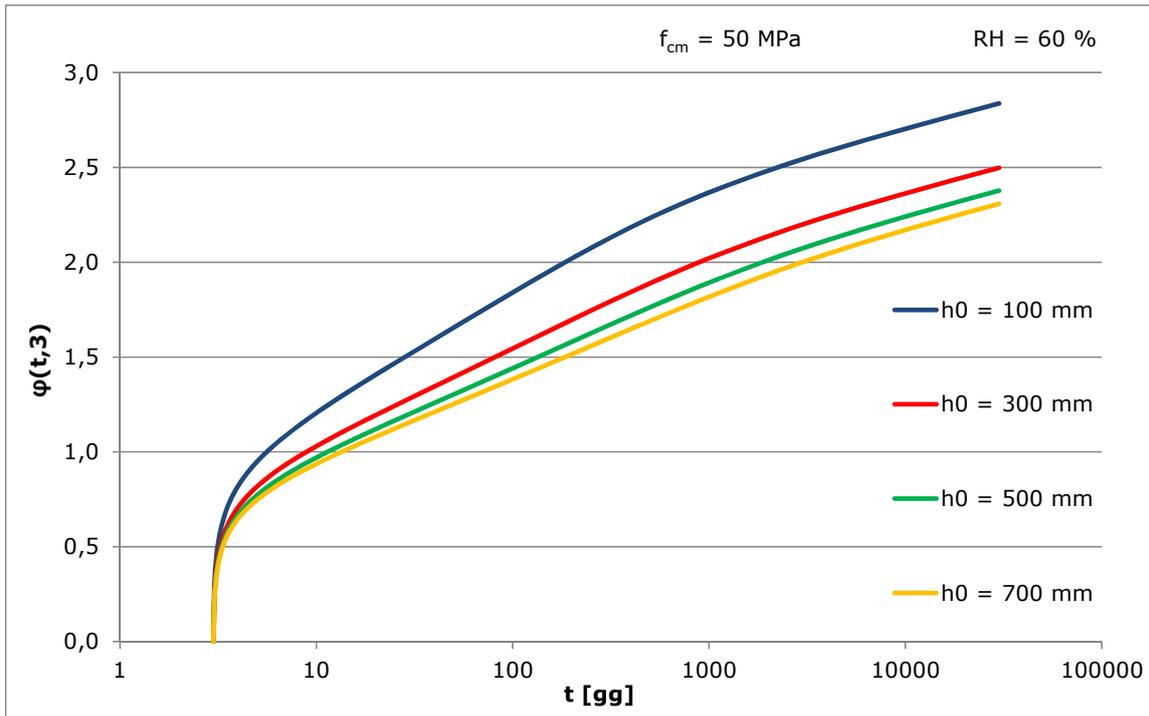


Figura 2.39 - Andamento di  $\varphi(t,3)$  per diversi valori di  $h_0$

### 2.6.3 CONFRONTO TRA I MODELLI ([26], 2012)

Alla fine degli anni Settanta il CEB/FIP introdusse il *Model Code 78*, basato su una generalizzazione dei modelli di Kelvin-Voigt e Dischinger, per tenere in conto del rapido incremento della deformazione viscosa agli istanti iniziali. Tale problema fu risolto tramite l'introduzione di una deformazione istantanea che si sommava a quella elastica (Figura 2.40).

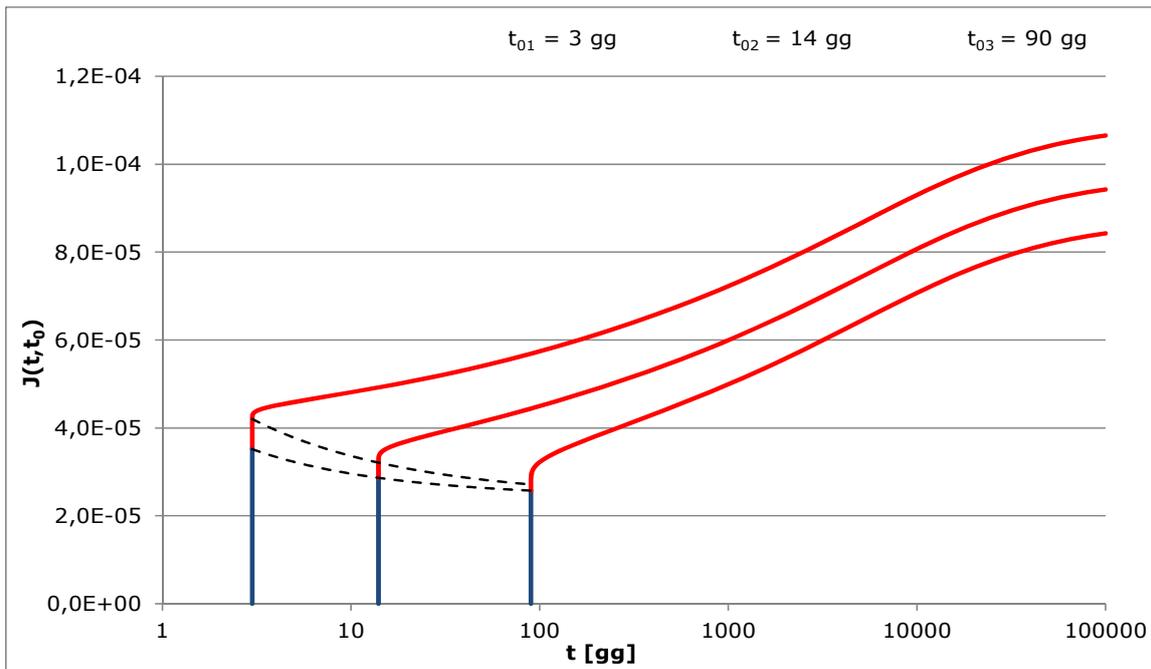


Figura 2.40 - Andamento di  $\varphi(t,t_0)$  per diversi tempi di carico

Questo modo di operare fu contestato poiché la viscosità non procura deformazioni istantanee; tuttavia questa assunzione ha permesso di considerare il fenomeno della viscosità come costituito da una parte invecchiante ed una non invecchiante.

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,28}} \quad (2.31)$$

$$\varphi(t, t_0) = \beta_a(t_0) + \varphi_d \cdot \beta_d(t - t_0) + \varphi_f \cdot [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] \quad (2.32)$$

I tre termini al membro di destra dell'eq. (2.32) rappresentano rispettivamente:

- $\beta_a(t_0)$  la deformazione viscosa istantanea all'istante di carico;
- $\beta_d(t - t_0)$  lo sviluppo nel tempo della parte non invecchiante della viscosità;
- $\beta_f(t) - \beta_f(t_0)$  lo sviluppo nel tempo della parte invecchiante della viscosità.

Gli inconvenienti derivanti dall'introduzione della deformazione viscosa iniziale furono eliminati nel *CEB FIP Model Code 90*, nel quale il modello di viscosità fu calibrato su una funzione prodotto avente la seguente forma:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E(t')} + \frac{1}{E_{28}} \cdot \varphi(t, t_0) \quad (2.33)$$

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0(t_0) \cdot \beta_c(t - t_0) \quad (2.34)$$

Per le espressioni di  $\varphi_0(t_0)$  e  $\beta_c(t, t_0)$  si rimanda al paragrafo (2.6.1).

Si osserva che:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\partial J(t, t_0)}{\partial t} = \infty$$

E tramite l'integrale di convoluzione eq (2.10)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\partial R(t, t_0)}{\partial t} = -\infty .$$

Il rapido incremento della viscosità per tempi ridotti, come illustrato in Figura 2.15, è tenuto in conto tramite la verticalità della tangente nella curva di viscosità per  $t \rightarrow t_0$ . Come secondo punto si osserva che le due funzioni  $\beta_0(t_0), \beta_c(t - t_0)$ , la prima che esprime il coefficiente di viscosità per  $t \rightarrow \infty$  e la seconda che descrive lo sviluppo nel tempo della funzione di viscosità, dipendono entrambe dall'umidità relativa e dalla dimensione nominale. Questo significa che la deformazione viscosa è considerata interamente come "da essiccamento", essendo nulla la parte di base delle deformazioni.

Il modello di viscosità MC 90, sebbene rappresentò un'evoluzione del MC 78, era ancora deficiente di alcuni importanti presupposti. Le incoerenze del MC 90 sono state risolte nel nuovo modello di viscosità del *Fib MC 10*. Le due più importanti novità introdotte riguardano la scomposizione della viscosità totale in due contributi legati alla viscosità di base ed alla viscosità da essiccamento, e l'assenza di un limite asintotico per la funzione che esprime l'evolvere nel tempo della viscosità di base. La forma analitica della funzione di viscosità del fib MC 10 è:

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t_0)} + \frac{1}{E_{28}} \cdot [\varphi_{bc}(t, t_0) + \varphi_{dc}(t, t_0)] \quad (2.35)$$

con  $\varphi_{bc}(t, t_0)$ ,  $\varphi_{dc}(t, t_0)$  rispettivamente la parte di base e quella da essiccamento del coefficiente  $\varphi(t, t_0)$ . Per le espressioni di tali coefficienti si rimanda al paragrafo 2.6.2.

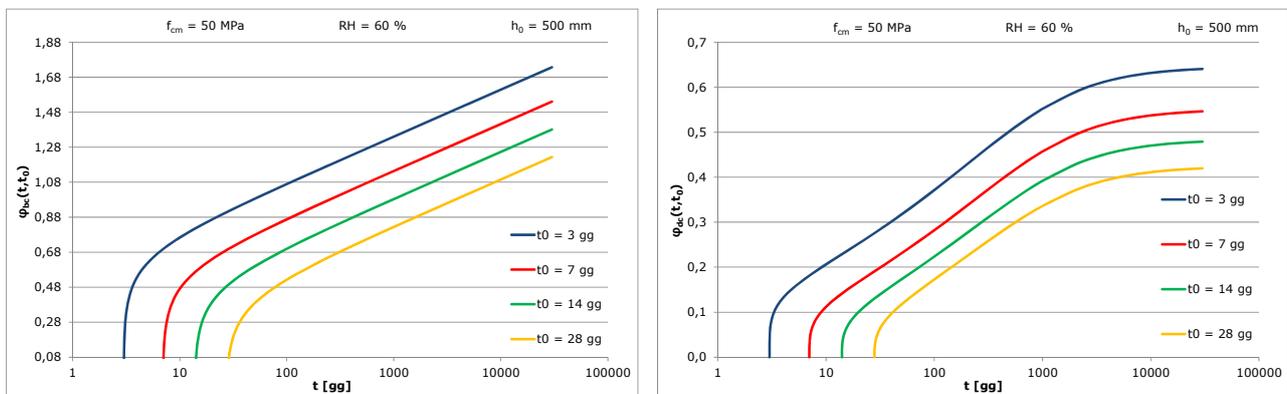


Figura 2.41 - Andamento di  $\varphi_{bc}(t, t_0)$  e  $\varphi_{dc}(t, t_0)$  per diversi tempi di carico

La Figura 2.41 mostra che la parte di base non è limitata nel tempo poichè risulta  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_{bc}(t, t') = \infty$ , mentre per la viscosità da essiccamento si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_{ac}(t, t') = 1$ . Infatti non è noto se la viscosità tende ad un valore finito, cosicchè l'introduzione di un coefficiente di viscosità espresso da un logaritmo è stata proposta al fine di predire con buona approssimazione il comportamento del calcestruzzo fino a 50 anni di tempo di carico. Da un punto di vista matematico l'introduzione di una funzione di viscosità non limitata non garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'eq. (2.10). In ogni caso una funzione di viscosità non limitata porta ad i seguenti risultati:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t_0) = 0 \quad (2.36)$$

Si nota che lo sforzo indotto da una deformazione unitaria applicata all'istante  $t_0$  viene ad annullarsi all'istante finale. D'altro lato, tenendo conto del fatto che la funzione di rilassamento è monotona decrescente nel tempo, l'eq. (2.36) permette di osservare che per un modello di viscosità che presenta una funzione di viscosità illimitata, la relativa funzione di rilassamento deve soddisfare la disuguaglianza:

$$R(t, t_0) \geq 0, \quad \text{per } t_0 \leq t \leq \infty \quad (2.37)$$

Inoltre, poichè la funzione logaritmica cresce molto lentamente nel tempo, si nota che l'aumento di viscosità dai 50 ai 150 anni di durata di carico non eccede il 10% della viscosità raggiunta ai 50 anni. Si può inoltre concludere che l'introduzione di una funzione di viscosità illimitata permette una migliore approssimazione del comportamento del calcestruzzo, non introduce particolari problemi di carattere numerico nella soluzione numerica dell'eq. (2.10) ed evita il risultato assurdo in termini fisici del raggiungimento di valori negativi di  $R(t, t')$ .

Qualche confronto tra il MC 90 ed il MC 10 mostrerà nel dettaglio i concetti appena esposti. Nelle Figura 2.42 -Figura 2.43 sono riportati i diagrammi delle funzioni di viscosità per due tempi di carico,  $t_0 = 14$  gg e  $t_0 = 28$  gg. La Figura 2.42 si riferisce ad un calcestruzzo con:  $f_{ck} = 32$  MPa;  $h_0 = 200$  mm; RH = 70%. Si osserva che le curve del MC 10 evolvono nel tempo in maniera più lineare e danno un leggero aumento del coefficiente di viscosità per  $t = 10^5$  giorni, mentre il MC 90 procede più velocemente fino  $10^4$  giorni, per poi diventare quasi orizzontale. Al contrario le curve di viscosità del MC 10 mostrano pendenza non nulla per  $t = 10^5$  giorni. Tali caratteristiche si riscontrano anche in un calcestruzzo con  $f_{ck} = 60$  MPa, e sono visibili in Figura 2.43. In questo caso tuttavia, i valori finali sono inferiori nel MC 10. Questo risultato mostra che per questo modello c'è una più alta inversa proporzionalità tra viscosità e resistenza a compressione.

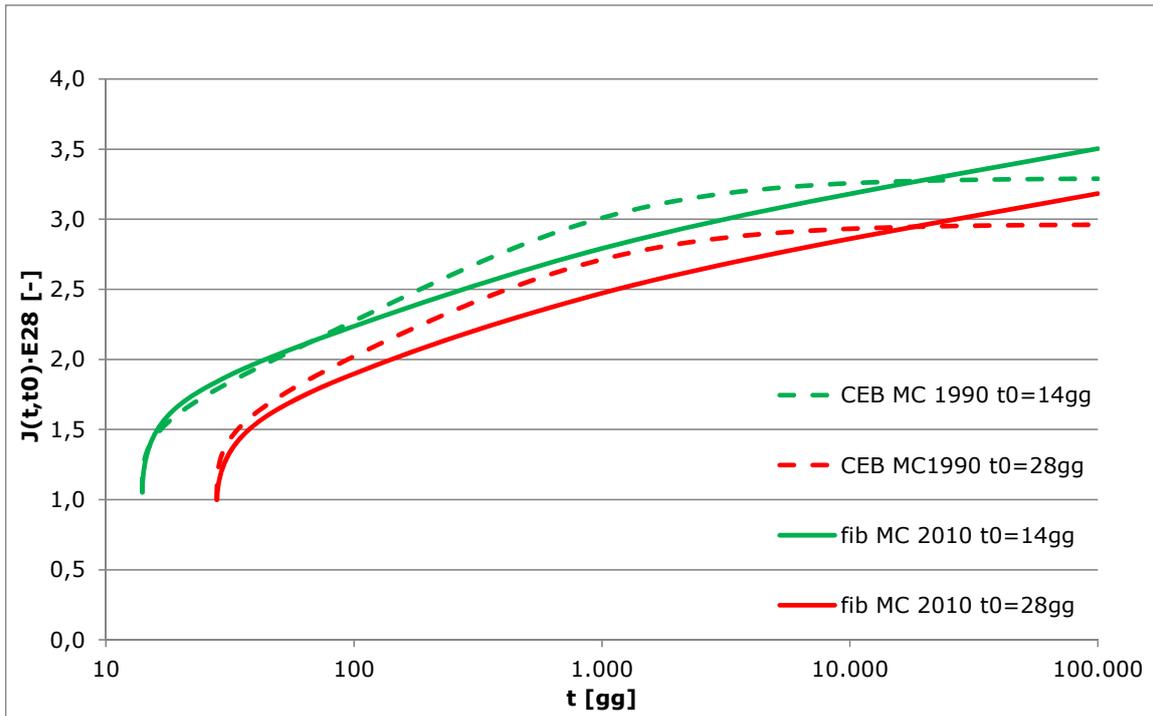


Figura 2.42 - Funzioni di Viscosità,  $f_{ck} = 32\text{MPa}$

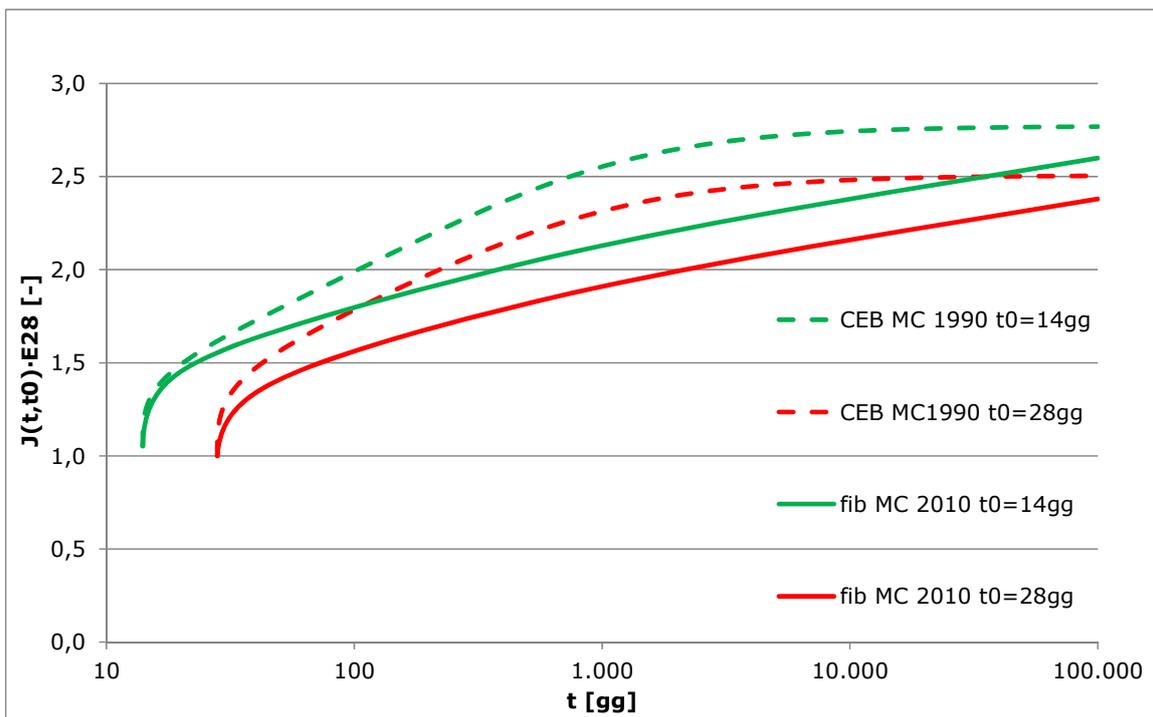


Figura 2.43 - Funzioni di Viscosità,  $f_{ck} = 60\text{MPa}$

Nelle Figura 2.44 -Figura 2.45 sono riportate le funzioni di rilassamento per i due stessi materiali. In questo caso si osserva che per il calcestruzzo di classe C32/40, i valori finali della funzione di rilassamento sono più piccoli per il MC 90, anche alla luce del fatto che per questo modello i valori finali di viscosità sono più alti. Al contrario per calcestruzzo C60/75 questo andamento è invertito e per  $t_0 = 14$  gg i valori finali di  $R(t,t_0)/E_{28}$  sono più alti nel MC 10.

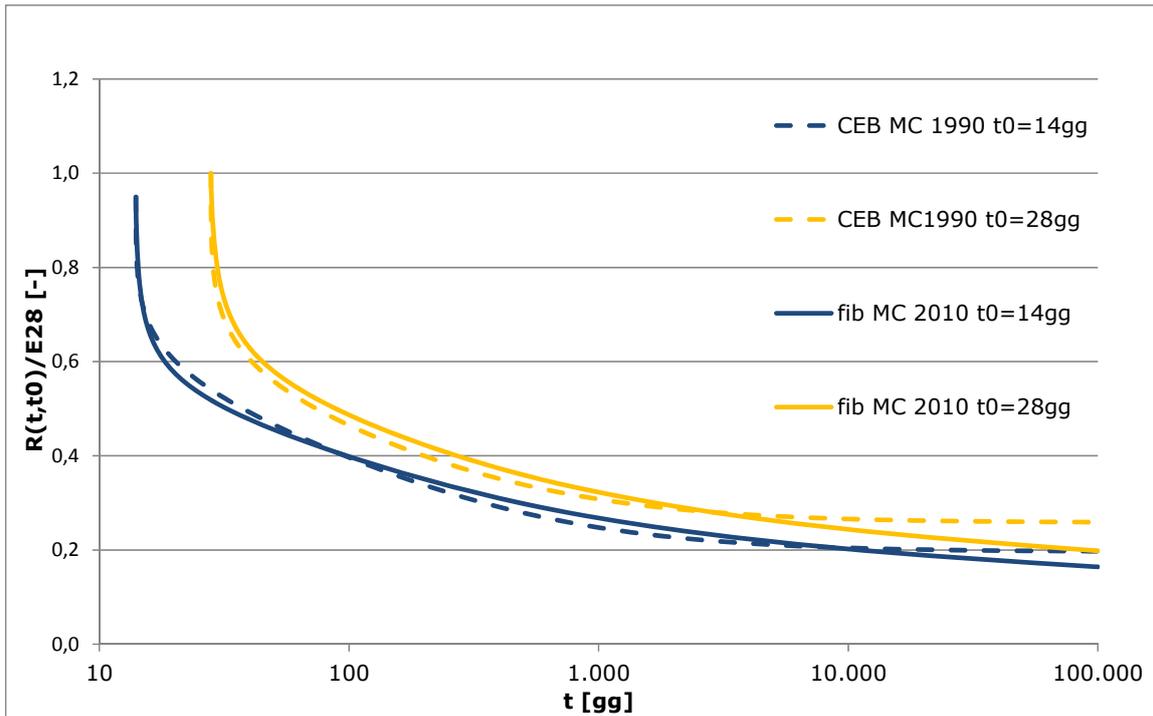


Figura 2.44 - Funzioni di Rilassamento,  $f_{ck} = 32$  MPa

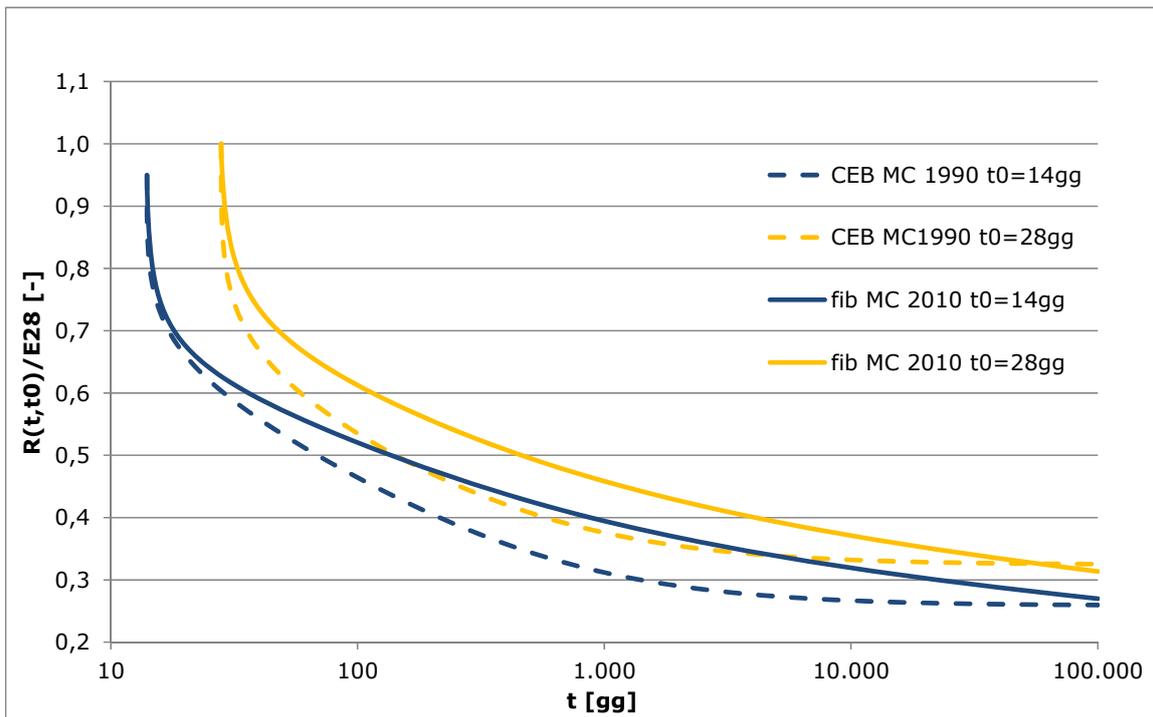


Figura 2.45 - Funzioni di Rilassamento,  $f_{ck} = 60$  MPa

Infine le Figura 2.46 -Figura 2.47 evidenziano due incoerenze presenti nel MC 90 e mostrano i miglioramenti introdotti nel MC 10. In Figura 2.46 sono riportati per entrambi i modelli l'andamento della deformazione adimensionale durante un ciclo di carico-scarico. Si nota che per il MC 90 l'andamento nel tempo della deformazione dopo la rimozione del carico è inizialmente decrescente e successivamente crescente fino ad un valore asintotico. Il modello

mostra dunque un'elasticità ritardata negativa che non è possibile da un punto di vista termodinamico. Al contrario il MC 10 mostra un continuo decremento della deformazione connessa ad un'elasticità ritardata positiva. In Figura 2.47 si nota che nel MC 90 per un calcestruzzo C30/37 caricato ad un'età relativamente ridotta la funzione di rilassamento può diventare negativa, violando così i principi della termodinamica. Diversamente il MC 10 mostra un diagramma monotonamente decrescente della funzione di rilassamento che rimane positiva, come richiesto dai principi base della viscoelasticità lineare.

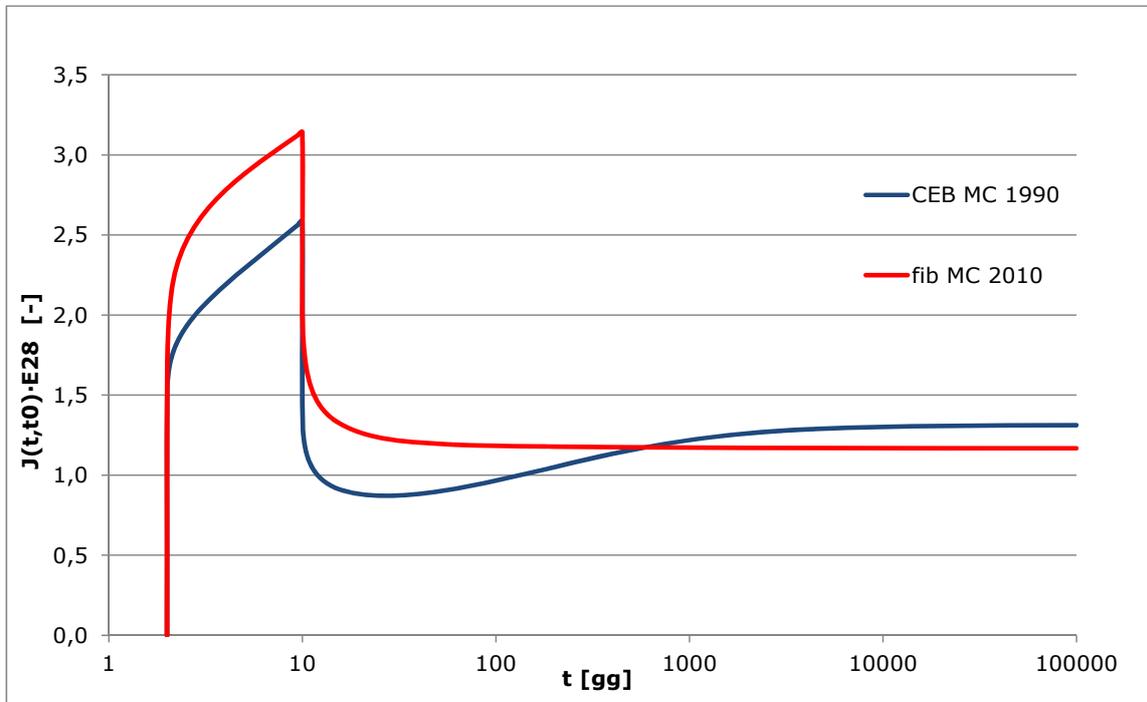


Figura 2.46 - Ciclo di carico-scarico

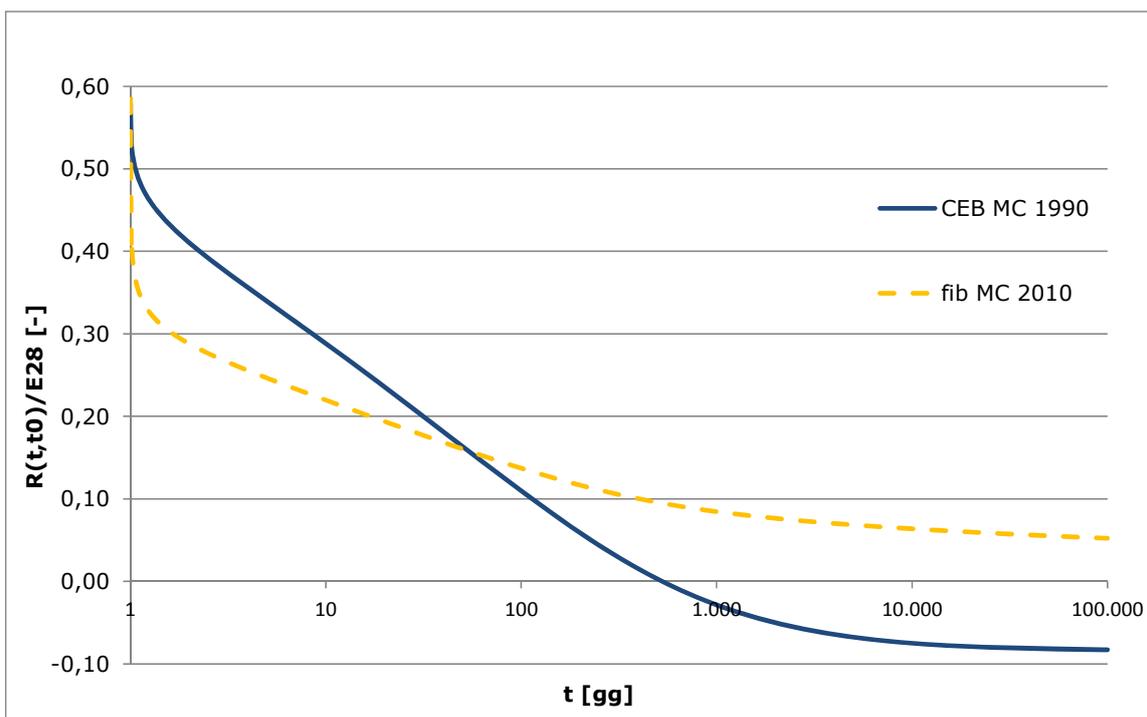


Figura 2.47 - Funzione di rilassamento

## **3 ANALISI VISCOELASTICA DI STRUTTURE OMOGENEE**

### **3.1 CLASSIFICAZIONE DELLE STRUTTURE**

Per procedere all'analisi delle strutture si devono estendere le relazioni integrali calcolate in campo viscoelastico tra sforzi e deformazioni (2.8; 2.9) alle relazioni esistenti fra carichi applicati e spostamenti, che variano a seconda del tipo di struttura ed in particolare a seconda del grado di eterogeneità della struttura in esame rispetto a quella ideale in calcestruzzo omogeneo.

Nelle strutture in C.A. l'eterogeneità è data dalle differenti proprietà reologiche del materiale dovute a diverse caratteristiche del calcestruzzo nei vari componenti strutturali oppure alla presenza di: sezioni differenti tra loro per dimensioni, temperatura, mix-design ed età di getto; armatura lenta o pretesa ed elementi in acciaio; vincoli esterni ([26], 1974).

Le strutture vengono generalmente suddivise in tre classi di appartenenza:

- strutture omogenee con vincoli rigidi;
- strutture internamente omogenee con vincoli esterni elastici;
- strutture internamente eterogenee.

Una struttura appartiene alla prima classe se ha le medesime proprietà viscosse in ciascun punto (materiale isotropo) e non presenta supporti deformabili; la trattazione pertanto risulta indipendente dal contenuto d'acqua, dalla temperatura e dall'età di getto e si può applicare correttamente il principio di sovrapposizione degli effetti nella forma di McHenry.

Le strutture realizzate in calcestruzzo armato o calcestruzzo armato precompresso possono essere trattate come strutture in solo calcestruzzo (e quindi di classe 1), a condizione che le armature presenti siano distribuite in modo uniforme e simmetrico sulle diverse sezioni.

Per le normali percentuali di armatura delle sezioni, l'eterogeneità sezionale può essere trascurata ed è dunque possibile uno studio di tali strutture come omogenee, sulla base del I e II Teorema della Viscoelasticità Lineare.

Le strutture miste sono invece dotate di sezioni che, dato il quantitativo e la distribuzione non omogenea di acciaio, necessitano di considerare la presenza di due materiali differenti, uno a comportamento elastico e l'altro a comportamento viscoso. L'omogeneità strutturale viene dunque a mancare e cadono le ipotesi di base dei due teoremi fondamentali. Per lo studio di tali strutture è quindi necessaria una trattazione in grado di considerare i contributi deformativi di materiali con leggi costitutive molto discoste.

Siccome in molti casi le eterogeneità a livello sezionale e strutturale possono essere trascurate e data la trattazione più complessa delle strutture appartenenti alla seconda ed alla terza classe, nel presente capitolo si tratterà solo la prima classe, utilizzando i due teoremi fondamentali della viscoelasticità lineare.

## 3.2 SOLUZIONE DI STRUTTURE OMOGENEE IN CALCESTRUZZO

### 3.2.1 STRUTTURA VISCO-ELASTICA OMOGENEA SOGETTA AD AZIONI STATICHE

Si tratta un generico caso monodimensionale, ad esempio il seguente sistema iperstatico costituito da una trave viscoelastica omogenea soggetta a carichi statici:

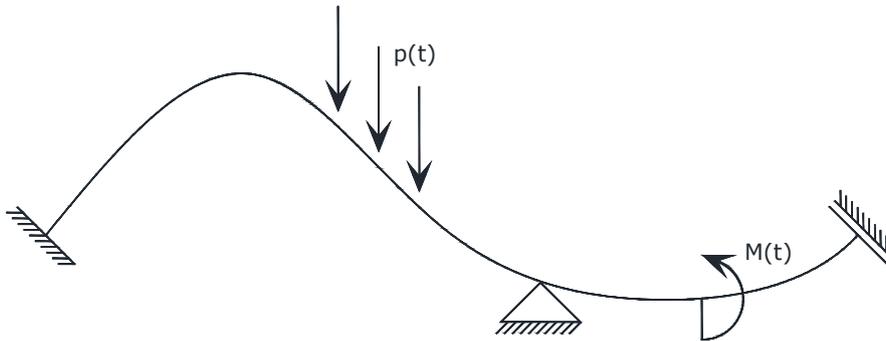


Figura 3.1 - Struttura omogenea soggetta a carichi statici

Per il teorema di Volterra la soluzione esiste ed è unica; note le forze applicate ed il legame costitutivo del materiale in campo viscoelastico:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t d\sigma(t')J(t, t')$$

si devono determinare le incognite  $\sigma(t)$  ed  $\varepsilon(t)$ .

Si considera un corpo elastico identico al precedente, con modulo elastico costante  $E_0$ ; per il legame costitutivo alla Hooke si ha:

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma_e(t)}{E_0}$$

e per il teorema di Kirchoff la soluzione  $\sigma_e(t)$ ,  $\varepsilon_e(t)$  esiste ed è unica, con  $\sigma_e(t)$ ,  $\varepsilon_e(t)$  equilibrate e congruenti.

Se all'istante iniziale  $J(t, t_0) = 1/E_0$ , le due soluzioni sarebbero coincidenti, altrimenti si avrebbero soluzioni proporzionali.

Differenziando il legame costitutivo elastico, si ottiene:

$$d\sigma_e(t') = E_0 \cdot d\varepsilon_e(t')$$

Per il corpo viscoelastico si postula una stato di sforzo coincidente a quello in campo elastico:

$$\sigma = \sigma_e \tag{3.1}$$

Pertanto il campo di deformazioni risulta essere pari a:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t d\sigma_e(t') \cdot J(t, t') = \int_0^t d\varepsilon_e(t') \cdot E_0 \cdot J(t, t') \tag{3.2}$$

Si ottiene dunque che, postulando l'esistenza di un sistema di sforzi in equilibrio con le forze esterne, le deformazioni viscosse vengono a dipendere da gradini di deformazione elastica; il sistema è affine al sistema elastico, perciò si hanno deformazioni congruenti, che comportano esistenza e unicità della soluzione (sistema equilibrato e congruente).

In presenza di carichi costanti nel tempo si ha un'amplificazione della deformazione elastica dipendente dal coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$ , infatti:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \int_0^t d\varepsilon_e(t') \cdot E_0 \cdot J(t, t') = \varepsilon_e(t_0) \cdot E_0 \cdot J(t, t_0) = \varepsilon_e(t_0) \cdot E_0 \cdot \frac{1}{E_0} [1 + \varphi(t, t_0)] = \\ &= \varepsilon_e(t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

*1° Teorema della Viscoelasticità Lineare:* In una struttura viscoelastica omogenea soggetta ad azioni statiche lo stato tensionale coincide con quello calcolabile in campo elastico, mentre lo stato deformativo si ottiene sovrapponendo incrementi dello stato deformativo elastico attraverso l'integrale di sovrapposizione.

Nel caso particolare di azioni costanti nel tempo lo stato deformativo varia in affinità con quello elastico ed il coefficiente di affinità è pari a  $[1 + \varphi(t, t_0)]$ .

Nel caso di carichi statici impressi si deve dunque risolvere un problema di deformazione, poiché nel tempo le tensioni rimangono costanti e sono calcolabili in campo elastico.

### 3.2.2 STRUTTURA VISCOELASTICA OMOGENEA CON DISTORSIONI IMPRESSE

Si tratta una generica trave viscoelastica omogenea vincolata iperstaticamente a cui si impongono delle distorsioni:

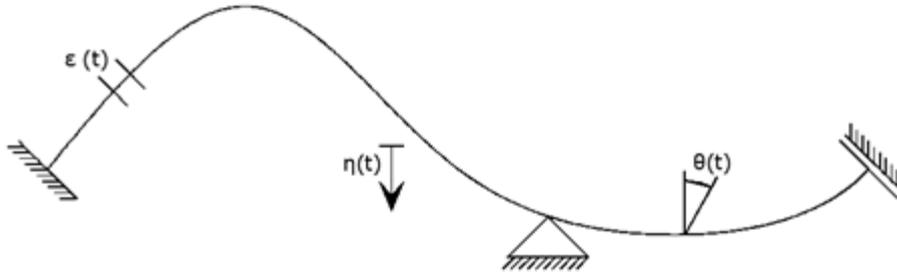


Figura 3.2 - Struttura omogenea soggetta a distorsioni

Per il teorema di Volterra la soluzione esiste ed è unica; note le distorsioni ed il legame costitutivo del materiale in campo viscoelastico:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t d\sigma(t') \cdot J(t, t') + \bar{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \sigma(t) = \int_0^t d[\varepsilon(t') - \bar{\varepsilon}(t')] \cdot R(t, t')$$

si devono determinare le incognite  $\sigma(t)$  ed  $\varepsilon(t)$ .

Si considera un corpo elastico identico al precedente, con modulo elastico costante  $E_0$ ; per il legame costitutivo alla Hooke si ha:

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma_e(t)}{E_0} + \bar{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \sigma_e(t) = E_0 \cdot [\varepsilon(t) - \bar{\varepsilon}(t)]$$

mentre per il teorema di Kirchoff la soluzione  $\sigma_e(t)$ ,  $\varepsilon_e(t)$  esiste ed è unica, con  $\sigma_e(t)$ ,  $\varepsilon_e(t)$  equilibrate e congruenti.

Differenziando il legame costitutivo elastico, si ottiene:

$$d[\varepsilon(t') - \bar{\varepsilon}(t')] = \frac{d\sigma_e(t')}{E_0}$$

Per il corpo viscoelastico si postula uno stato di deformazione coincidente a quello in campo elastico:

$$\varepsilon = \varepsilon_e \tag{3.4}$$

Pertanto il campo di deformazioni risulta essere pari a:

$$\sigma(t) = \int_0^t d[\varepsilon(t') - \bar{\varepsilon}(t')] \cdot R(t, t') = \int_0^t \frac{d\sigma_e(t')}{E_0} \cdot R(t, t') \tag{3.5}$$

Si ottiene dunque che, postulando l'esistenza di uno stato deformativo congruente ed essendo le tensioni  $\sigma_e$  in campo elastico in equilibrio, lo stato tensionale in campo viscoelastico si ottiene dalla somma di gradini di  $\sigma_e$  tutti equilibrati moltiplicati per il medesimo rapporto  $\frac{R(t, t')}{E(t_0)}$ . Siccome le risultanti vettoriali delle reazioni vincolari sono in equilibrio ed essendo il sistema privo di forze applicate, esso risulta autoequilibrato, anche se moltiplicato per  $\frac{R(t, t')}{E(t_0)}$  e presente sotto forma di integrale. Dato che lo stato di sforzo è equilibrato e quello di deformazione è congruente, la soluzione esiste ed è unica e corrisponde a quella esposta in precedenza.

In presenza di distorsioni costanti nel tempo lo stato di sforzo risulta pari a :

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{d\sigma_e(t')}{E(t_0)} \cdot R(t, t') = \sigma_e(t_0) \cdot \frac{R(t, t_0)}{E(t_0)} \tag{3.6}$$

*II° Teorema della Viscoelasticità Lineare:* In una struttura viscoelastica omogenea sottoposta alle sole azioni geometriche lo stato deformativo totale si calcola come in campo elastico; lo stato tensionale si ottiene sovrapponendo nel tempo incrementi di tensione elastica  $d\sigma_e(t)$  moltiplicati per il fattore  $\frac{R(t, t')}{E(t_0)}$ .

Nel caso di distorsioni impresse si deve dunque risolvere un *problema di sforzi*, poiché nel tempo le deformazioni rimangono costanti e sono calcolabili in campo elastico. E' necessario

però calcolare la funzione di rilassamento  $R(t,t')$ , utilizzando il legame  $R - J$  che si ricava sostituendo l'equazione (3.5) nel legame costitutivo:

$$\int_0^t d\sigma(t') \cdot J(t,t') = \varepsilon(t)$$

Si applica il II° Teorema postulando  $\varepsilon = \varepsilon_e$  e si ottiene:

$$\frac{\sigma_e(t)}{E(t_0)} \cdot \int_0^t \frac{\partial R(t',t_0)}{\partial t'} \cdot J(t,t') \cdot dt' = \frac{\sigma_e(t)}{E(t_0)}$$

Si ricava pertanto l'Integrale di Convoluzione:

$$\int_0^t \frac{\partial R(t',t_0)}{\partial t'} \cdot J(t,t') \cdot dt' = 1 \quad (3.7)$$

### 3.2.3 STRUTTURA OMOGENEA CON VINCOLO POSTICIPATO

Una modifica delle condizioni di vincolo dopo l'applicazione dei carichi agenti sulla struttura non ha effetti sulla distribuzione degli sforzi solo se il comportamento del materiale è indipendente dal tempo.

Nel caso in esame invece un vincolo addizionale, inizialmente con reazione vincolare nulla, viene caricato da una reazione crescente indotta dalla viscosità.

Si considera dunque la seguente struttura iperstatica, omogenea, con forze costanti applicate al tempo  $t_0$ :



Figura 3.3 - Struttura omogenea sottoposta a carichi costanti

Per il I° Teorema della viscoelasticità lineare si ha uno stato tensionale pari a:  $\sigma = \sigma_e$ , mentre per quanto riguarda lo stato deformativo:  $v(z, t) = v_e(z, t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)]$ .

Dopo aver caricato la trave, si pone un vincolo nel punto A ad un tempo generico  $t_0^* > t_0$ : tale vincolo impedisce gli spostamenti  $v_A$  ed ha una reazione incognita  $X_1(t)$ :

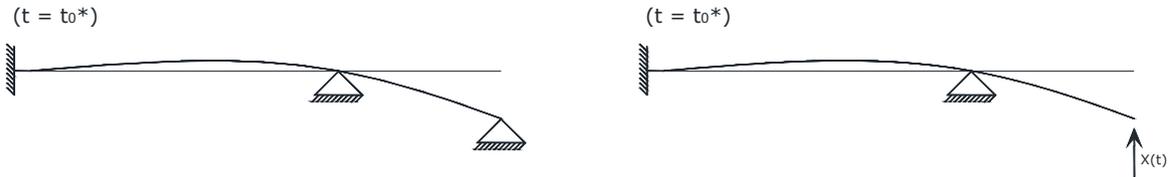


Figura 3.4 - Reazione del vincolo posticipato

Tale incognita è in funzione del tempo poiché lo è anche lo spostamento  $v$  e si può determinare imponendo la congruenza nel punto A per ( $t \geq t_0^*$ ):

$$-v_{Ae}(t_0) \cdot \{1 + \varphi(t, t_0) - [1 + \varphi(t_0^*, t_0)]\} + \int_{t_0^*}^t dX_1(t') \cdot \delta_{11}(t_0) \cdot E(t_0) \cdot J(t, t') = 0 \quad (3.8)$$

Si riportano alcune osservazioni che permettono la scrittura di tale congruenza:

- Per istanti di tempo precedenti a  $t_0^*$  ( $t < t_0^*$ ), la struttura è viscoelastica omogenea ed è soggetta ad azioni statiche; pertanto vale il primo teorema, che nel caso di azioni costanti nel tempo permette di scrivere  $v_A(t) = v_{Ae}(t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)]$ ;
- (2) Per istanti di tempo successivi a  $t_0^*$  ( $t \geq t_0^*$ ), la struttura può essere vista come somma di due strutture:
  - Una struttura senza vincolo posticipato con il solo carico esterno agente; tale struttura è formalmente identica a quella del punto (1) e, valendo ancora il I° Teorema, si può scrivere  $v_A(t) = v_{Ae}(t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)]$ ;
  - Una struttura senza vincolo posticipato, al quale viene sostituito la reazione vincolare iperstatica  $X(t)$ ; anche in questo caso è valido il I° Teorema:

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0^*}^t d\sigma(t') \cdot J(t, t') = \int_{t_0^*}^t d\sigma_e(t') \cdot J(t, t') = \int_{t_0^*}^t E_0 \cdot d\varepsilon_e(t') \cdot J(t, t')$$

che, esteso alle grandezze globali di forze e spostamenti, diventa:

$$v_A(t) = \int_{t_0^*}^t dX_1(t') \cdot \delta_{11}(t_0) \cdot E(t_0) \cdot J(t, t')$$

essendo  $dX_1(t') \cdot \delta_{11}(t_0)$  lo spostamento elastico prodotto da  $dX_1(t)$ . L'integrazione parte da  $t_0^*$  perché prima non vi è il vincolo.

Sviluppando l'equazione (3.8) si ha:

$$\int_{t_0^*}^t dX_1(t') \cdot E(t_0) \cdot J(t, t') = \frac{v_{Ae}(t_0)}{\delta_{11}(t_0)} \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)] \quad (3.9)$$

dove il rapporto  $\frac{v_{Ae}(t_0)}{\delta_{11}(t_0)} = X_{1e}$ , che rappresenta la reazione in campo elastico del vincolo aggiunto se esso fosse preesistente ai carichi.

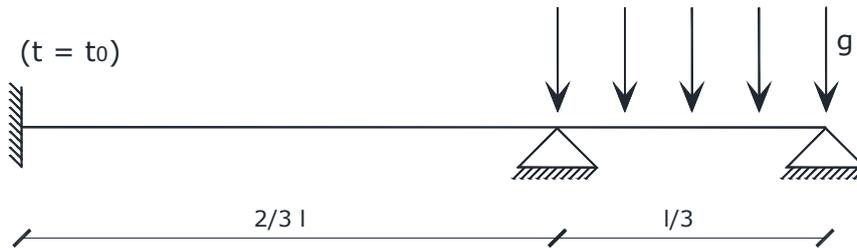


Figura 3.5 - Rappresentazione di  $X_{1e}$

Si ottiene quindi che:

$$\int_{t_0^*}^t dX_1(t') \cdot E(t_0) \cdot J(t, t') = X_{1e} \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)] \quad (3.10)$$

Essendo il modulo elastico costante lo si porta fuori dal segno di integrale e poi a secondo membro:

$$\int_{t_0^*}^t dX_1(t') \cdot J(t, t') = \frac{X_{1e}}{E(t_0)} \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)] \quad (3.11)$$

L'equazione ha un'espressione analoga alla legge di viscosità integrale (2.7), pertanto si ricava la soluzione dalla (2.9):

$$X_1(t) = X_{1e} \cdot \int_{t_0^*}^t \frac{\partial \varphi(t', t_0)}{\partial t'} \cdot \frac{R(t, t')}{E(t_0)} \cdot dt' = X_{1e} \cdot \xi(t, t_0, t_0^*) \quad (3.12)$$

La funzione  $\xi(t, t_0, t_0^*)$  ha le seguenti proprietà:

- monotona crescente, poiché somma di quantità sempre positive;
- asintotica:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t, t_0, t_0^*) = \xi_{MAX}$
- $\max(\xi_{max}) = \xi(t, t_0, t_0^+)$  , poiché se l'integrazione parte da  $t_0^*$  e gli integrandi sono sempre positivi l'integrale è maggiore quanto più  $t_0^* - t$  sono distanti;
- $\max(\xi_{max}) < 1$ , la reazione infatti non supera mai la reazione in campo elastico con vincolo preesistente.

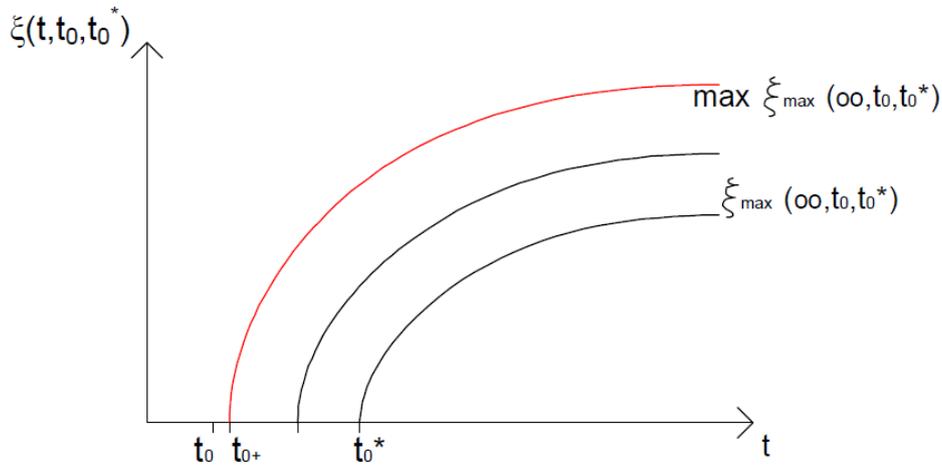


Figura 3.6 - Rappresentazione di  $\xi(t, t_0, t_0^*)$  al variare di  $t_0^*$

*Principio del Riacquisto del Regime principale:* la struttura, in presenza di vincoli posticipati, tende verso la situazione in campo elastico con vincoli preesistenti ed il riacquisto è maggiore se  $t \rightarrow \infty$  e  $t_0^* \rightarrow t_0^+$ .

Per il calcolo della funzione di riacquisto  $\xi(t, t_0, t_0^*)$  si ricava dalla (3.11) l'equazione:

$$\int_{t_0^*}^t d\xi(t', t_0, t_0^*) \cdot J(t, t') = \frac{1}{E(t_0)} \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)] \quad (3.13)$$

Dalla quale si può scrivere:

$$\int_{t_0^*}^t d\xi(t', t_0, t_0^*) \cdot J(t, t') = J(t, t_0) - J(t_0^*, t_0) \quad (3.14)$$

Tale espressione è un'equazione integrale di Volterra, che può essere risolta per via numerica attraverso la procedura passo-passo già descritta, che si basa sull'approssimazione dell'integrale di sovrapposizione in una somma finita con la regola dei trapezi.

Si suddivide il tempo  $t$  (solitamente pari a 30000giorni), in intervalli finiti  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  con  $i=1\dots k$ , dove  $t_0^* = t_1 =$  tempo di posizionamento del vincolo posticipato,  $\Delta t_1 = 0 \rightarrow \Delta\xi(t_1, t_0, t_0^*)$ ; l'espressione (3.14) diventa:

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \cdot \Delta\xi(t_i, t_0, t_0^*) \cdot [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})] = [J(t_k, t_0) - J(t_0^*, t_0)] \quad (3.15)$$

Dalla quale si determina:

$$\text{per } k > 1 \quad \Delta\xi(t_k, t_0, t_0^*) = \frac{2 \cdot [J(t_k, t_0) - J(t_0^*, t_0)] - \sum_{i=1}^k [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})] \cdot \Delta\xi(t_i, t_0, t_0^*)}{J(t_k, t_k) - J(t_k, t_{k-1})} \quad (3.16)$$

$$\text{per } k = 1 \quad \Delta\xi(t_k, t_0, t_0^*) = 0 \quad (3.17)$$

### 3.2.3.1 Rappresentazioni grafiche delle funzioni di riacquisto

Per esplicitare differenze ed analogie delle funzioni di riacquisto, ricavabili utilizzando le Funzioni di Viscosità descritte nei due modelli viscoelastici lineari del Cap.2, si riportano di seguito gli andamenti di  $\xi(t, t_0, t_0^*)$ , considerando dei valori standard per i parametri di base ( $f_{ck}=40$  MPa,  $RH=70\%$ ,  $h_0=200$  mm, classe di calcestruzzo standard, tempo di carico  $t_0=7$  giorni) e diversi istanti di posizionamento del vincolo posticipato ( $t_0^*=7, 14, 28, 90$  gg).

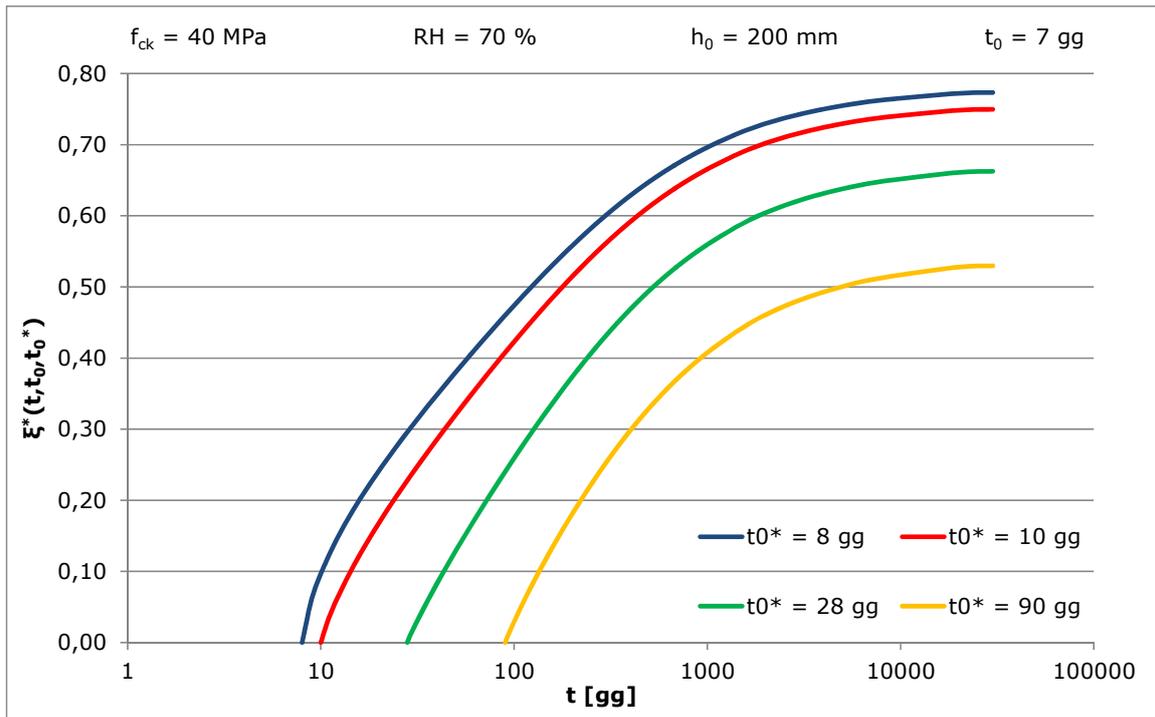


Figura 3.7 - Andamento di  $\xi(t, t_0, t_0^*)$  al variare di  $t_0^*$  - CEB MC90

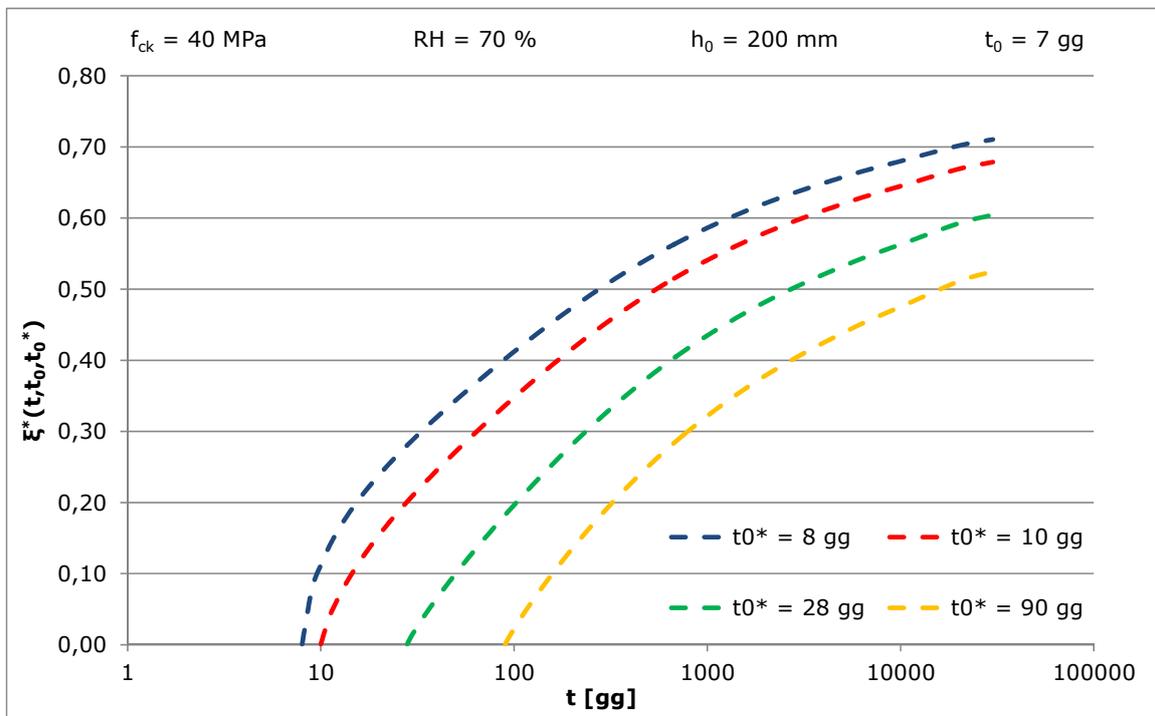


Figura 3.8 - Andamento di  $\xi(t, t_0, t_0^*)$  al variare di  $t_0^*$  - Fib MC2010

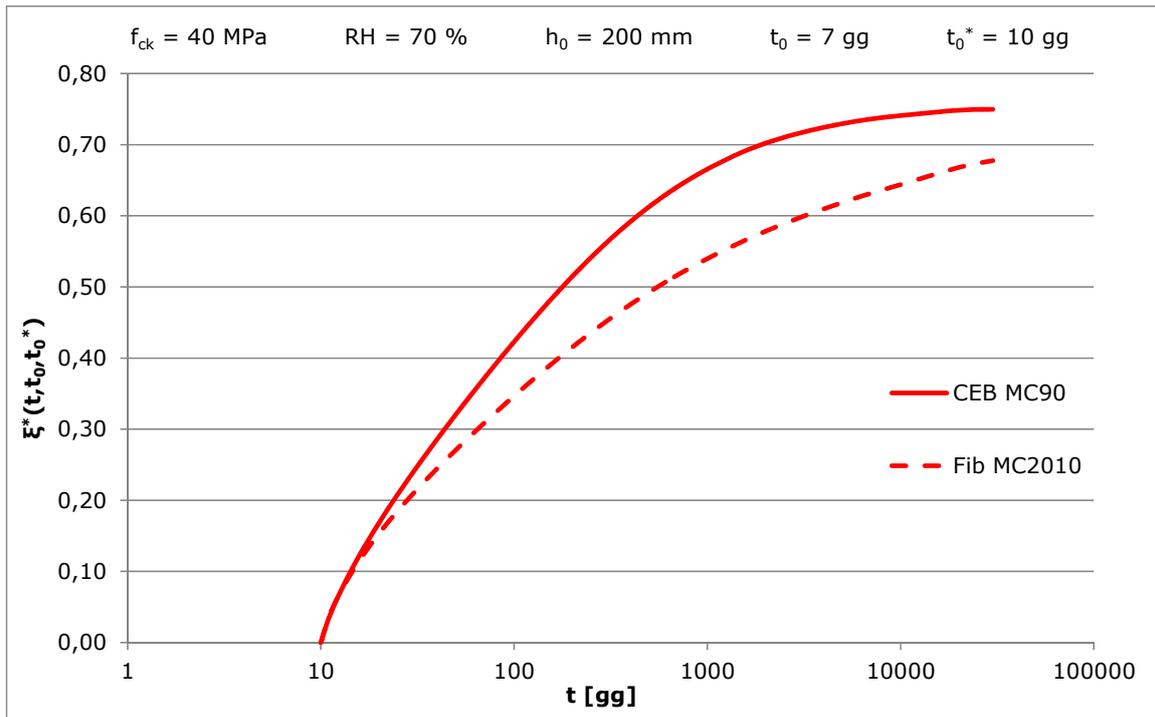


Figura 3.9 - Confronto fra modelli

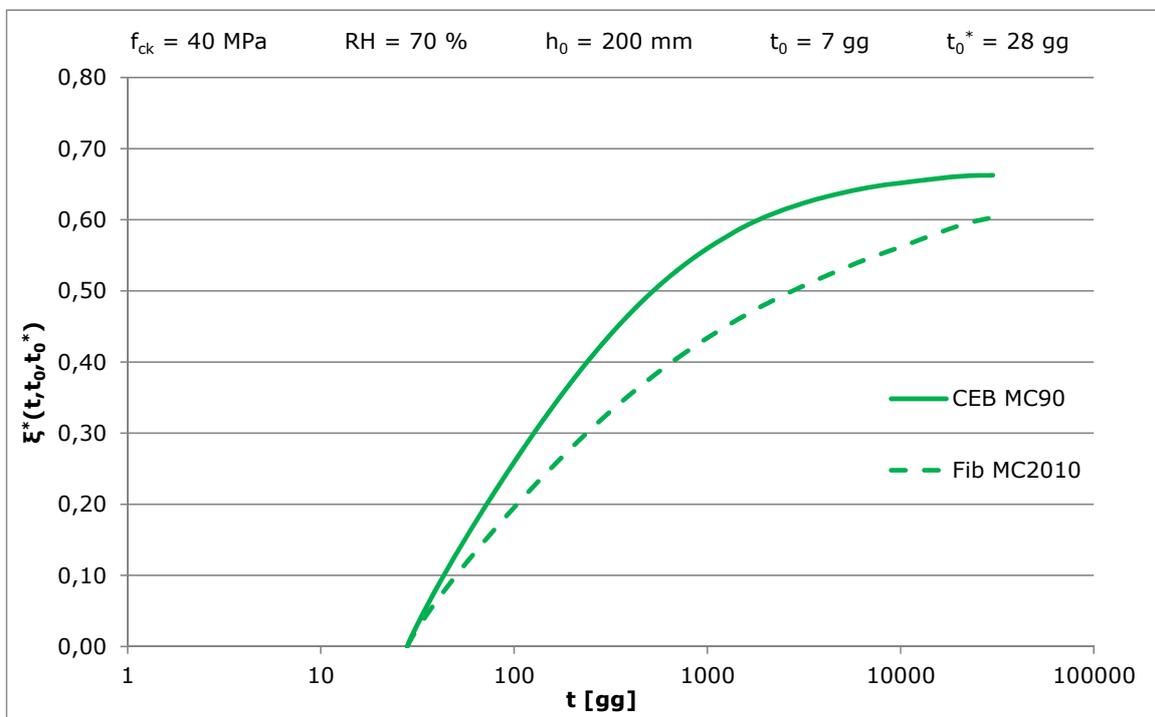


Figura 3.10 - Confronto fra modelli

### 3.2.4 STRUTTURA OMOGENEA CON VINCOLI POSTICIPATI AD ISTANTI DIVERSI

Si considera la seguente struttura omogenea, con forze costanti applicate al tempo  $t_0$ , alla quale vengono applicati gruppi di  $m_i$  vincoli ai tempi  $t_{0i}^*$ ; i gruppi di vincoli individuati dall'indice  $i$  sono in numero di  $n$  (Figura 3.11).

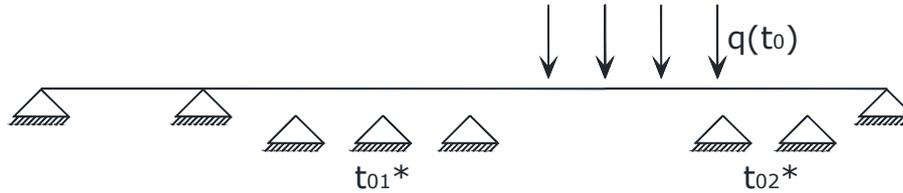


Figura 3.11 - Variazione dello schema strutturale nel tempo

Di seguito si riportano le soluzioni per i diversi intervalli di tempo:

- Soluzione per  $t_0 \leq t \leq t_{01}^*$

$$\underline{X} = \underline{X}_e \quad (3.18)$$

$$S = S_e \quad (3.19)$$

dove :

$\underline{X}_e$  è il vettore delle reazioni iperstatiche elastiche

$S$  è un generico stato di sforzo

- Soluzione per  $t_{01}^* \leq t \leq t_{02}^*$

Detta  $\underline{\delta}_{c1}$  la matrice elastica degli  $m_i$  vincoli aggiuntivi e  $\underline{\delta}_{01}$  il vettore dei termini noti si ha:

$$\int_{t_{01}^*}^t \underline{\delta}_{c1} \cdot d\underline{X}_1(t') \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') = -\underline{\delta}_{01} \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t_{01}^*, t_0)]$$

essendo  $\underline{X}_1$  il vettore a  $m_1$  componenti delle reazioni dei vincoli aggiuntivi.

Risolviendo si ha:

$$\int_{t_{01}^*}^t d\underline{X}_1(t') \cdot J(t, t') = \underline{X}_{e1} \cdot [J(t, t_0) - J(t_{01}^*, t_0)]$$

e dunque:

$$\underline{X}_1 = \underline{X}_{e1} \cdot \xi_1(t, t_0, t_{01}^*) \quad (3.20)$$

$$S_1 = S_0 + S_{ex_1} \cdot \xi_1(t, t_0, t_{01}^*) \quad (3.21)$$

Con  $\underline{X}_{e1}$  vettore delle reazioni a vincoli preesistenti.

Essendo:

$$S_{e1} = S_0 + S_{ex_1} \quad \rightarrow \quad S_{ex_1} = S_{e1} - S_0$$

$$S_1 = S_0 \cdot (1 - \xi_1(t, t_0, t_{01}^*)) + S_{e1} \cdot \xi_1(t, t_0, t_{01}^*) \quad (3.22)$$

dove  $S_{e1}$  rappresenta lo stato di sollecitazione elastico nello schema preesistente con i vincoli aggiuntivi.

- Soluzione per  $t_{02}^* \leq t \leq t_{03}^*$

Detta  $\underline{\delta}_{c2}$  la matrice elastica degli  $m_2$  vincoli aggiuntivi e  $\underline{\delta}_{02}$  il vettore dei termini noti, calcolati con riferimento alla struttura in cui sono già attivi i precedenti  $m_1$  vincoli si ha:

$$\int_{t_{01}^*}^t \underline{\delta}_{c2} \cdot d\underline{X}_2(t') \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') = -\underline{\delta}_{02} \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t_{02}^*, t_0)]$$

essendo  $\underline{X}_2$  il vettore a  $m_2$  componenti delle reazioni dei vincoli aggiuntivi applicati in  $t_{02}^*$

Risolvendo si ha:

$$\int_{t_{01}^*}^t d\underline{X}_2(t') \cdot J(t, t') = \underline{X}_{e2} \cdot [J(t, t_0) - J(t_{02}^*, t_0)]$$

e dunque:

$$\underline{X}_2 = \underline{X}_{e2} \cdot \xi_2(t, t_0, t_{02}^*) \quad (3.23)$$

$$S_2 = S_1 + S_{ex_2} \cdot \xi_2(t, t_0, t_{01}^*) = S_0 + S_{ex_1} \cdot \xi_1(t, t_0, t_{01}^*) + S_{ex_2} \cdot \xi_2(t, t_0, t_{02}^*) \quad (3.24)$$

essendo:

$\underline{X}_{e2}$  il vettore delle reazioni degli  $m_2$  vincoli calcolate assumendoli preesistenti

$S_1$  lo stato di sforzo preesistente

$S_{ex_2}$  lo stato di sforzo elastico prodotto nello schema statico con gli  $m_1$  vincoli preesistenti, dalle reazioni dei vincoli aggiuntivi  $m_2$

- Generalizzando le precedenti espressioni, per l'intervallo  $t_{0k}^* \leq t \leq t_{0k+1}^*$  si può scrivere:

$$\underline{X}_k = \underline{X}_{ek} \cdot \xi_k(t, t_0, t_{0k}^*) \quad (3.25)$$

$$S_k = S_0 + \sum_{h=1}^k S_{ex_h} \cdot \xi_h(t, t_0, t_{0h}^*) \quad (3.26)$$

essendo:

$\underline{X}_{ek}$  il vettore delle reazioni degli  $m_k$  vincoli aggiuntivi applicati in  $t_{0k}^*$ , calcolato assumendo preesistenti tutti i vincoli applicati fino a  $t_{0k}^*$  e assumendo un comportamento elastico per i materiali.

$S_0$  lo stato di sforzo elastico generato dal carico esterno in assenza dei vincoli posticipati

$S_{exh}$  lo stato di sforzo elastico prodotto dalle reazioni degli  $m_k$  vincoli aggiuntivi assumendo tutti i vincoli fino a  $m_{k-1}$  preesistenti.

$$\xi_h = \int_{t_{0h}^*}^t \frac{\partial J(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R(t, t') \cdot dt' \quad (3.27)$$

### 3.2.5 ESEMPI APPLICATIVI

#### 3.2.5.1 Azioni statiche (I Teorema della viscosità lineare)

Si considera la seguente trave con rigidezza flessionale  $EI$ , sottoposta ad un carico concentrato  $p$  costante nel tempo.

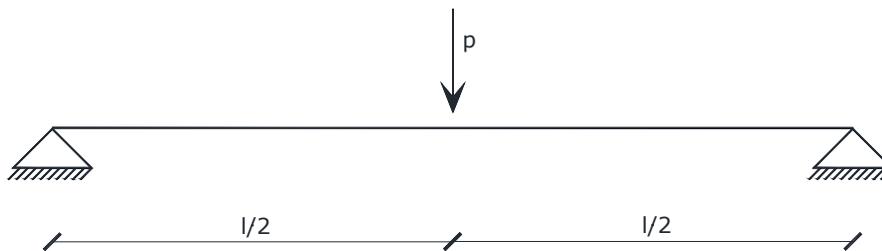


Figura 3.12 - Struttura omogenea con carico  $p$

Per il primo teorema della viscosità lineare:

- $M(t) = M_e$
- $v(t) = v(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0)$

Si riportano gli andamenti nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  e  $v(t)/v(t_0)$  per  $t_0 = 7$  e 28 giorni.

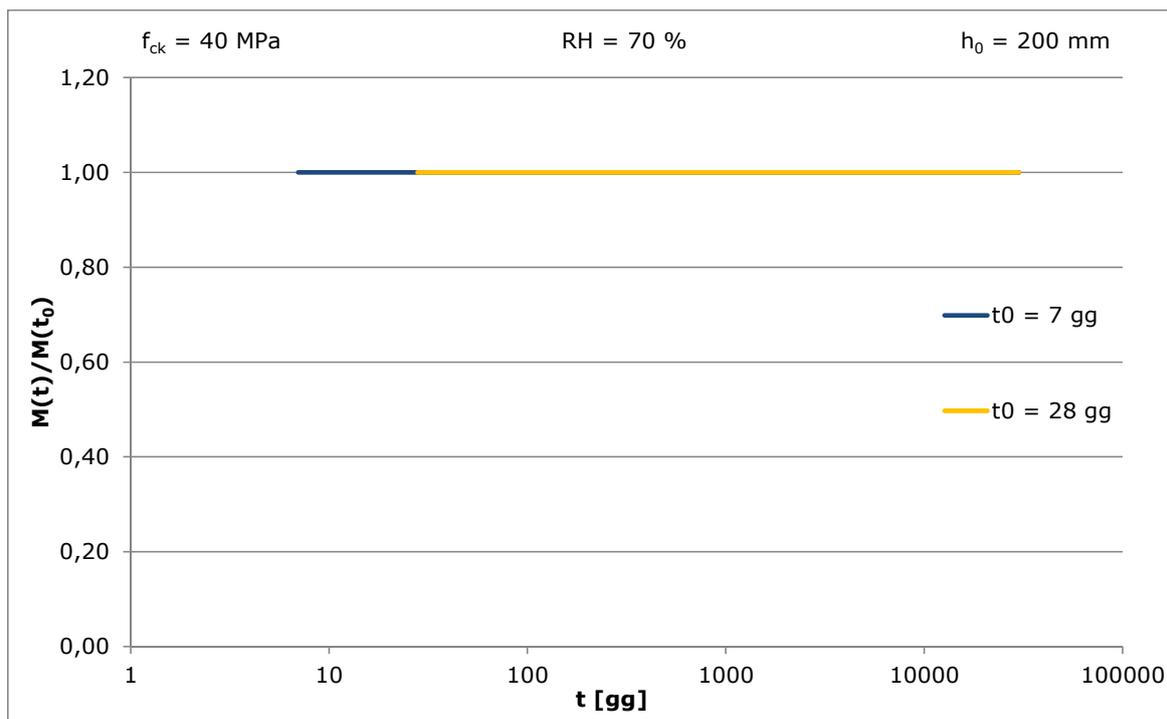


Figura 3.13 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  (CEB MC90)

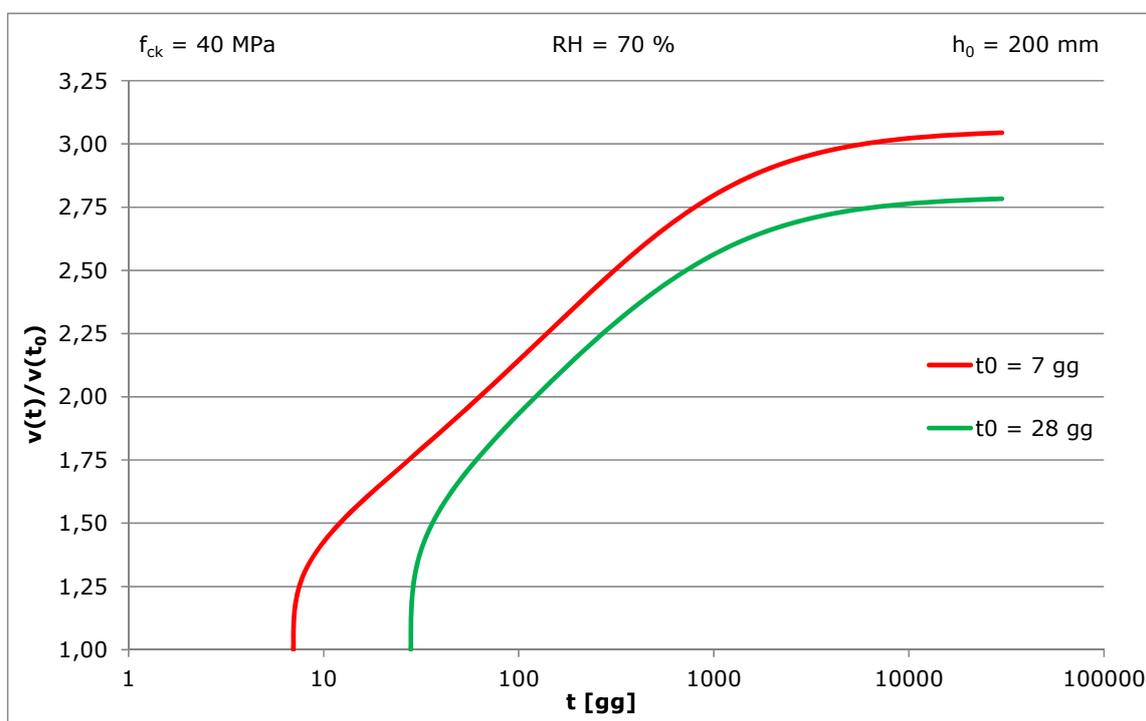


Figura 3.14 - Andamento nel tempo di  $v(t)/v(t_0)$  (CEB MC90)

Dalla Figura 3.14 si evince che al diminuire dell'età del calcestruzzo all'istante di messa in carico l'abbassamento e tempo infinito aumenta; ciò è imputabile alla maggiore deformabilità della trave in calcestruzzo di giovane età.

**3.2.5.2 Azioni geometriche (II teorema della viscosità lineare)**

Si considera la seguente trave con rigidezza flessionale EI, sottoposta ad un cedimento g.



**Figura 3.15 - Struttura omogenea con cedimento imposto**

Si sceglie come iperstatica la forza agente nel vincolo centrale (Figura 3.15), pertanto la soluzione del problema proposto è data dall'equazione:

$$X(t) = X_e(t_0) \cdot \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)}$$

essendo:

$$X_e(t_0) = -\frac{g}{\delta_{11}^{(c)}(t_0)} = -\frac{g}{\frac{l^3}{48 \cdot E_c(t_0) \cdot I}}$$

Si può quindi calcolare l'azione iperstatica utilizzando la funzione di rilassamento opportuna e diagrammare l'andamento nel tempo di  $X(t) / X_{er}$ .

Essendo inoltre l'azione flettente in mezzeria di trave pari a:

$$M(t) = \frac{X(t) \cdot l}{4}$$

è evidente che l'andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  risulta isomorfo rispetto alla funzione  $R(t, t_0)/E_c(t_0)$  ed al rapporto  $X(t)/X_{er}$ , come si vede in figura:

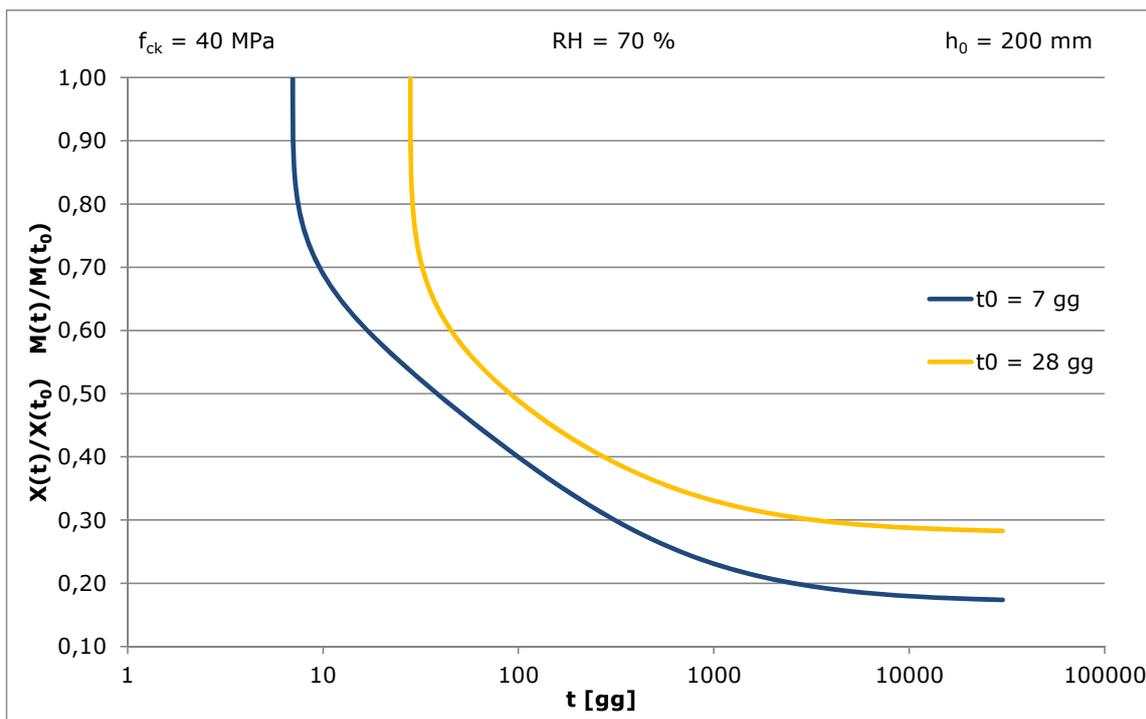


Figura 3.16 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X(t_0)$  e  $M(t)/M(t_0)$ (CEB MC90)

In accordo al secondo teorema della viscosità lineare l'abbassamento rimane costante nel tempo e pari a quello elastico.

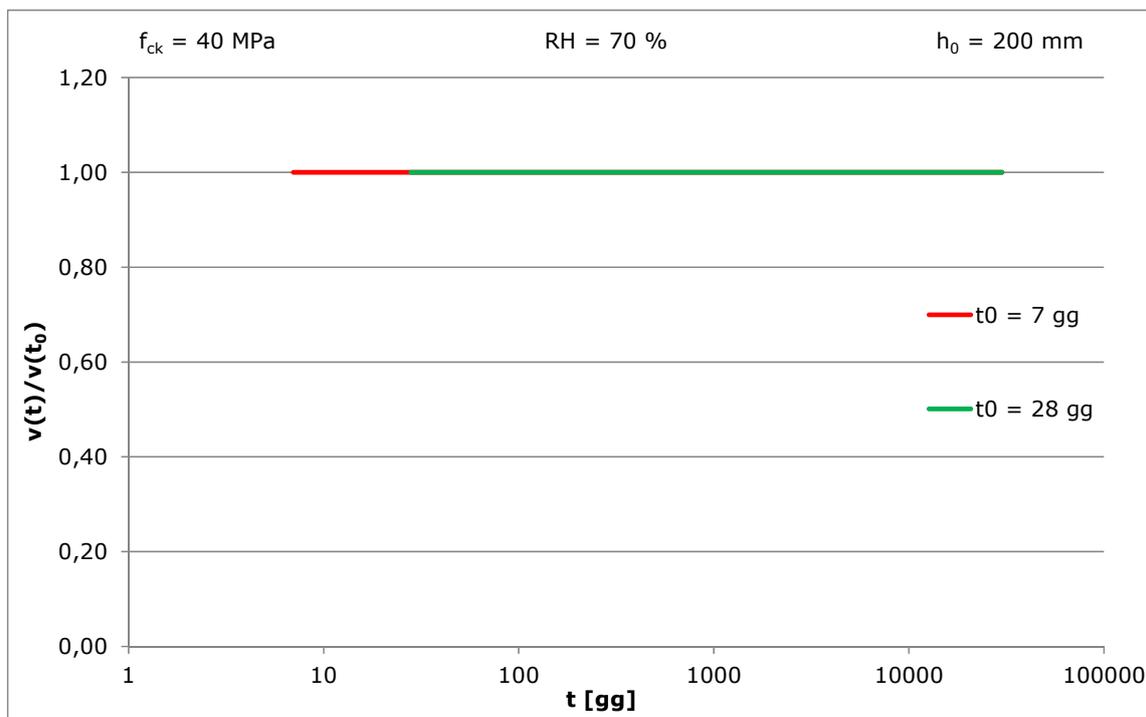


Figura 3.17 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$ (CEB MC90)

### 3.2.5.3 Vincolo posticipato

Si considera la struttura con rigidità flessionale  $EI$ , sottoposta al carico concentrato  $p$ , costante nel tempo applicato al tempo  $t_0 = 7$  giorni; successivamente, al tempo  $t_0^* = 10$  giorni per il primo esempio e 28 giorni per il secondo, in corrispondenza del punto di applicazione del carico, viene posto un vincolo rigido.

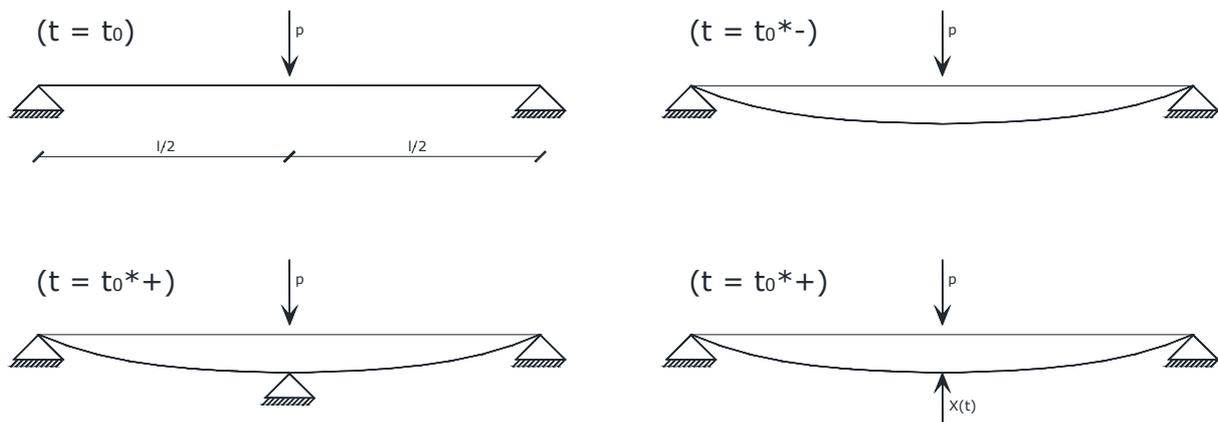


Figura 3.18 - Variazione di schema statico della struttura

Si considera come iperstatica la forza  $X$  agente nel vincolo rigido posticipato (Figura 3.18), pertanto la soluzione si ricava dall'equazione (3.12):

$$X(t) = X_e \cdot \left[ \int_{t_0^*}^t \frac{\partial J(t', t_0)}{\partial t'} \cdot J(t, t') \cdot dt' \right]$$

Dove:  $X_e = p$

Di seguito si riportano gli andamenti nel tempo di  $X(t)/X_e$  e  $M(t)/M(t_0)$ :

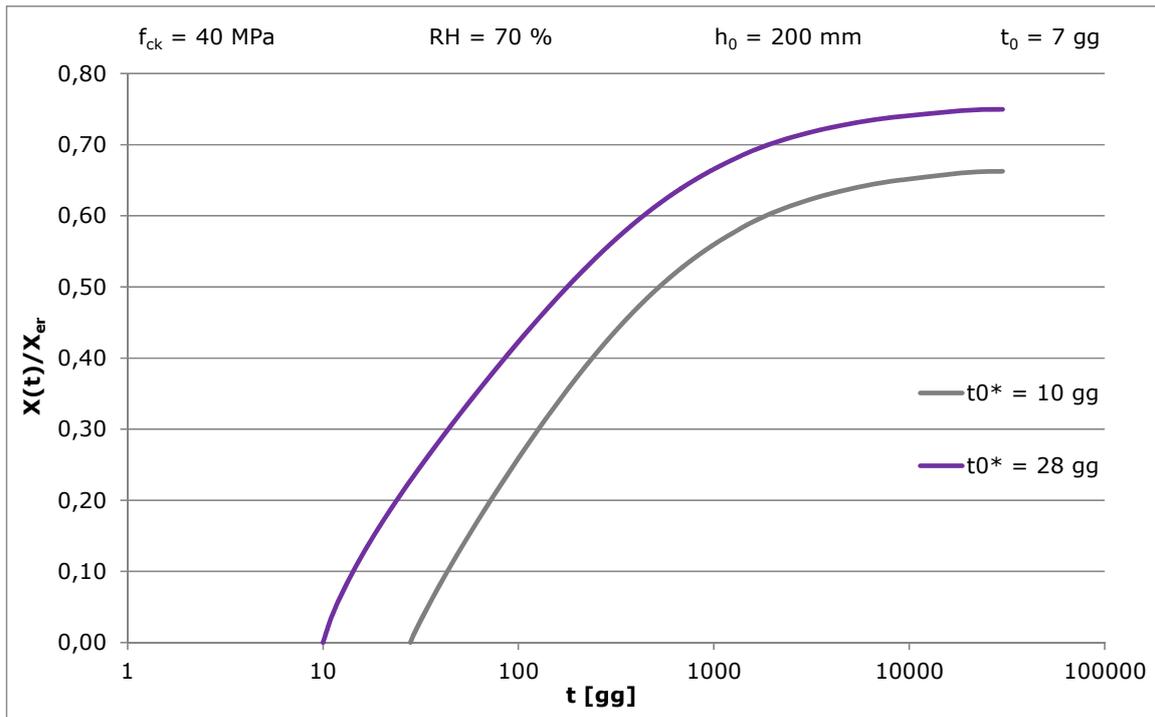


Figura 3.19 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  (CEB MC90)

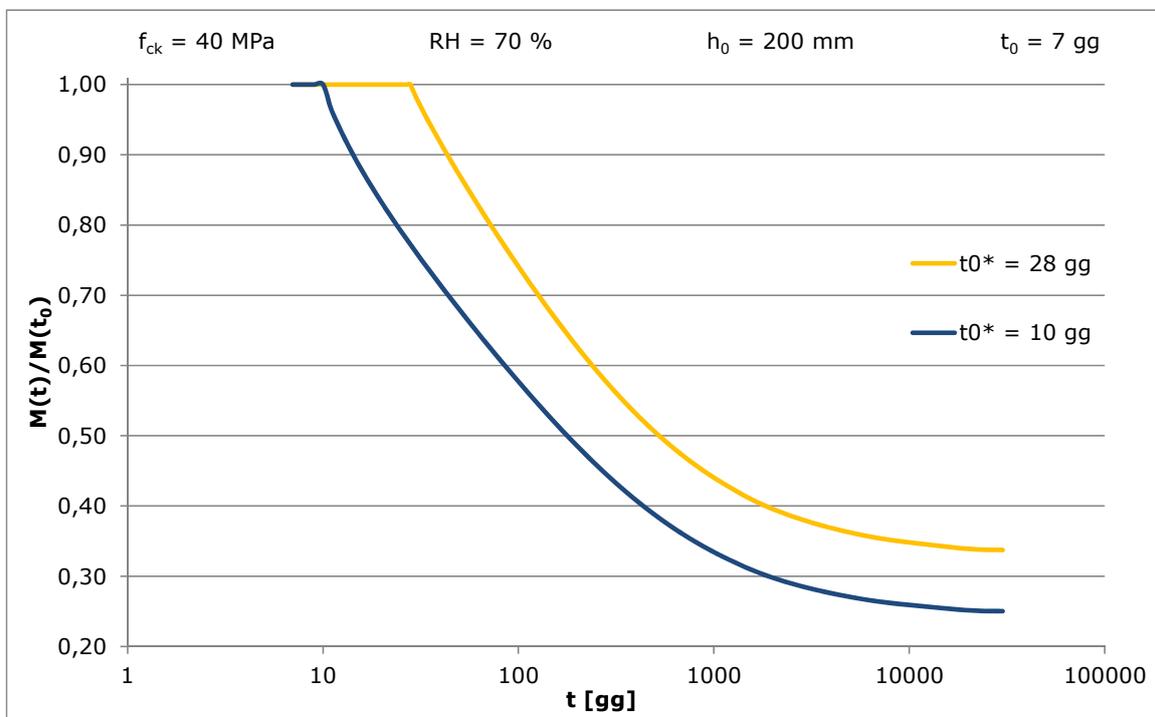
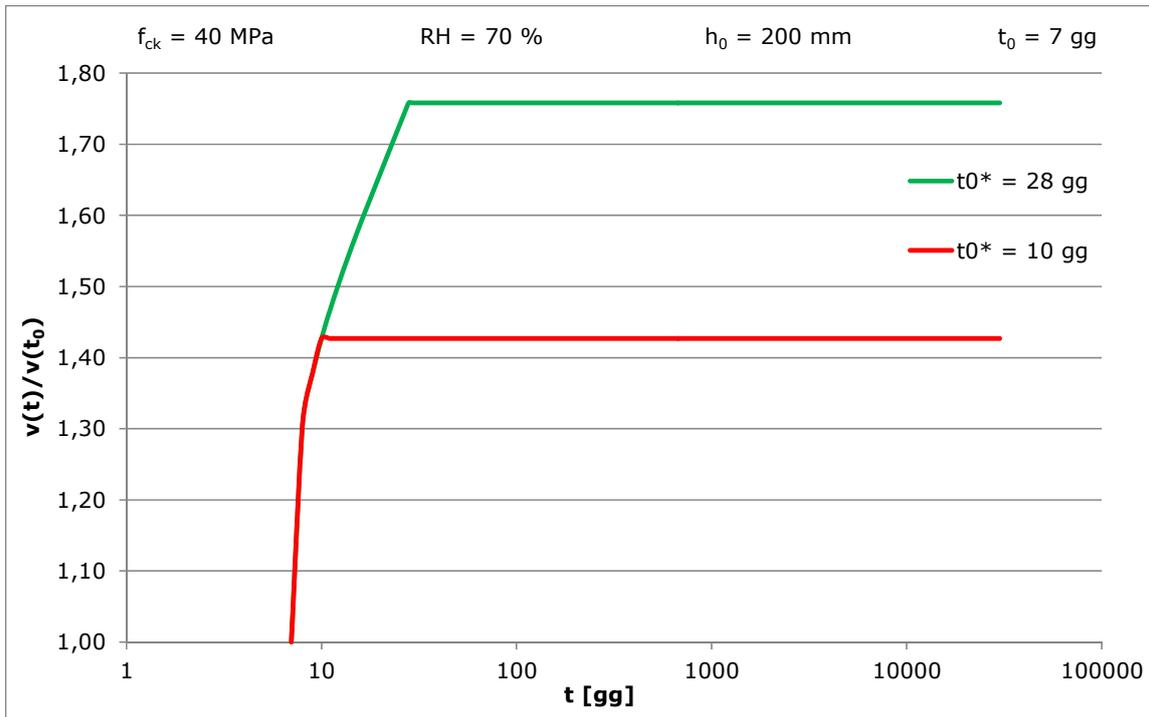


Figura 3.20 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  (CEB MC90)

Si riporta inoltre l'andamento nel tempo dell'abbassamento ad  $l/2$



Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  (CEB MC90)

### 3.2.5.4 Struttura con più vincoli posticipati ad istanti diversi

Si considera la struttura con rigidezza flessionale  $EI$ , sottoposta al carico distribuito  $q$ , costante nel tempo applicato al tempo  $t_0 = 3$  giorni. Successivamente per  $t = 7, 14$  e  $28$  giorni vengono applicati in serie tre vincoli posticipati rispettivamente ad  $l/4, l/2$  e  $3/4 l$ .

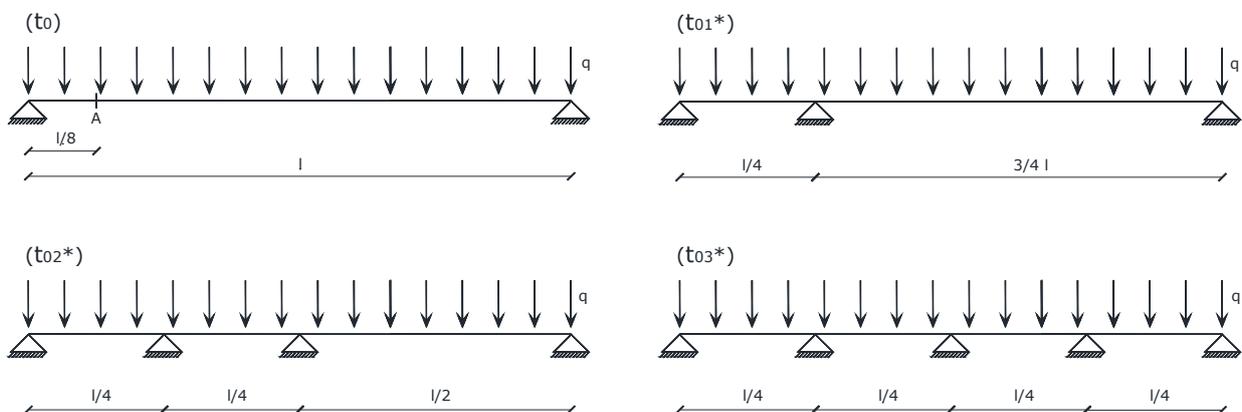


Figura 3.21 - Variazione dello schema strutturale nel tempo

Di seguito gli schemi strutturali per il calcolo delle varie grandezze e i risultati ottenuti:

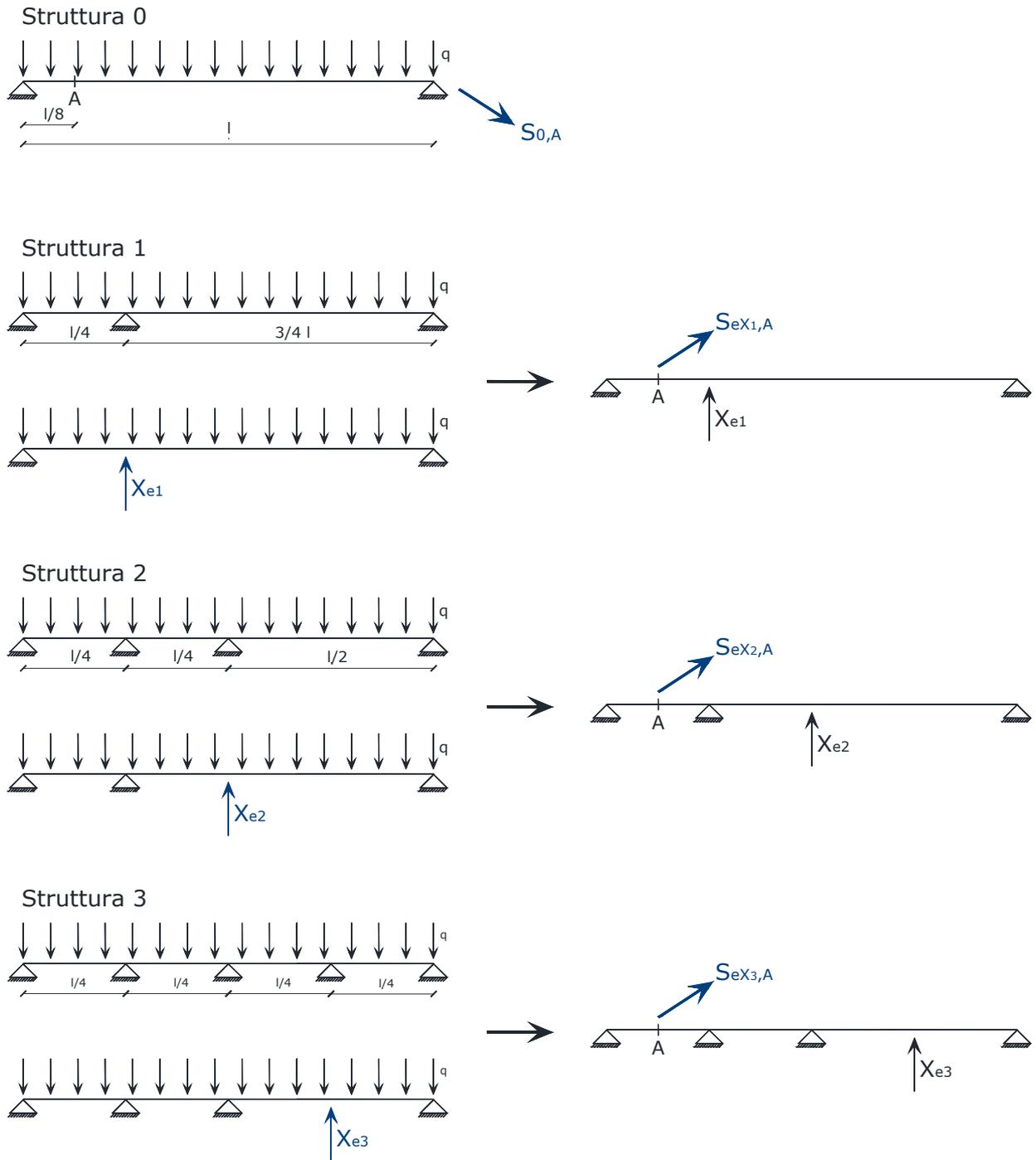


Figura 3.22 - Schemi strutturali per il calcolo delle varie grandezze

	Struttura 0	Struttura 1	Struttura 2	Struttura 3
$X_e$ [kN]	-	341,8	280	341,8
$M_{e,A}$ [kNm]	787,3	-1067	376	-31,7

Tabella 1 - Risultati ottenuti dall'analisi elastica

Tramite le espressioni del paragrafo 3.2.4 si calcolano i valori delle iperstatiche dei vincoli aggiuntivi e gli andamenti del momento flettente nel punto A.

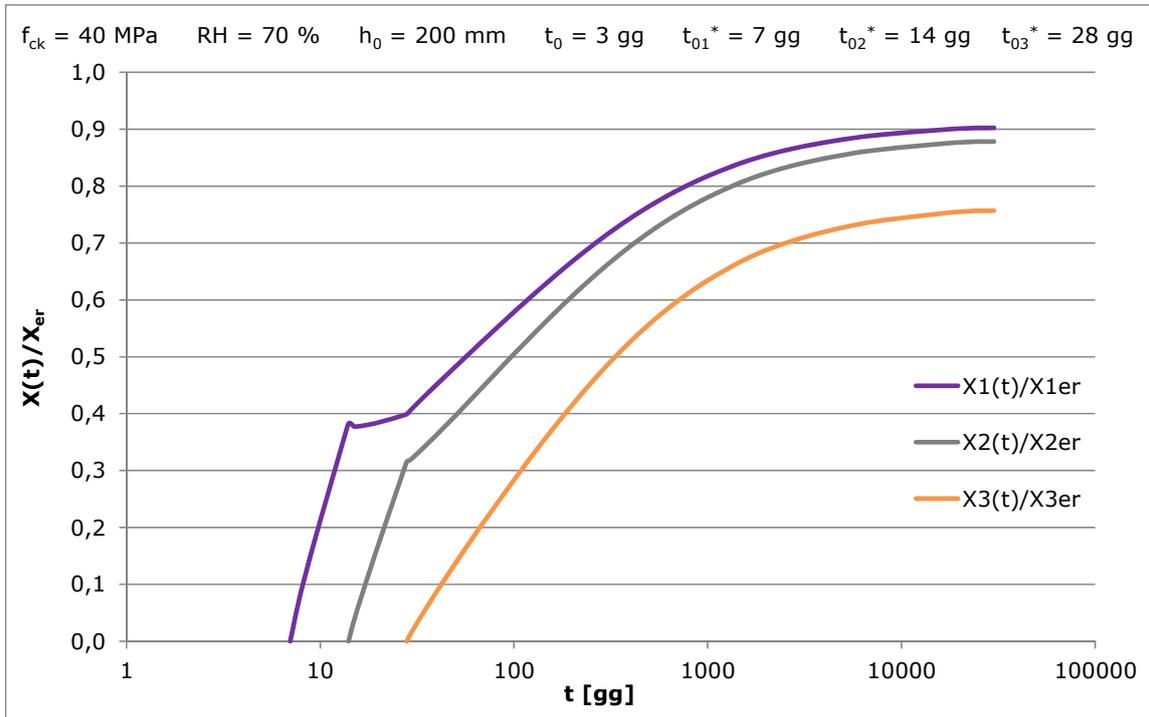


Figura 3.23 - Andamento delle iperstatiche nel tempo (CEB MC90)

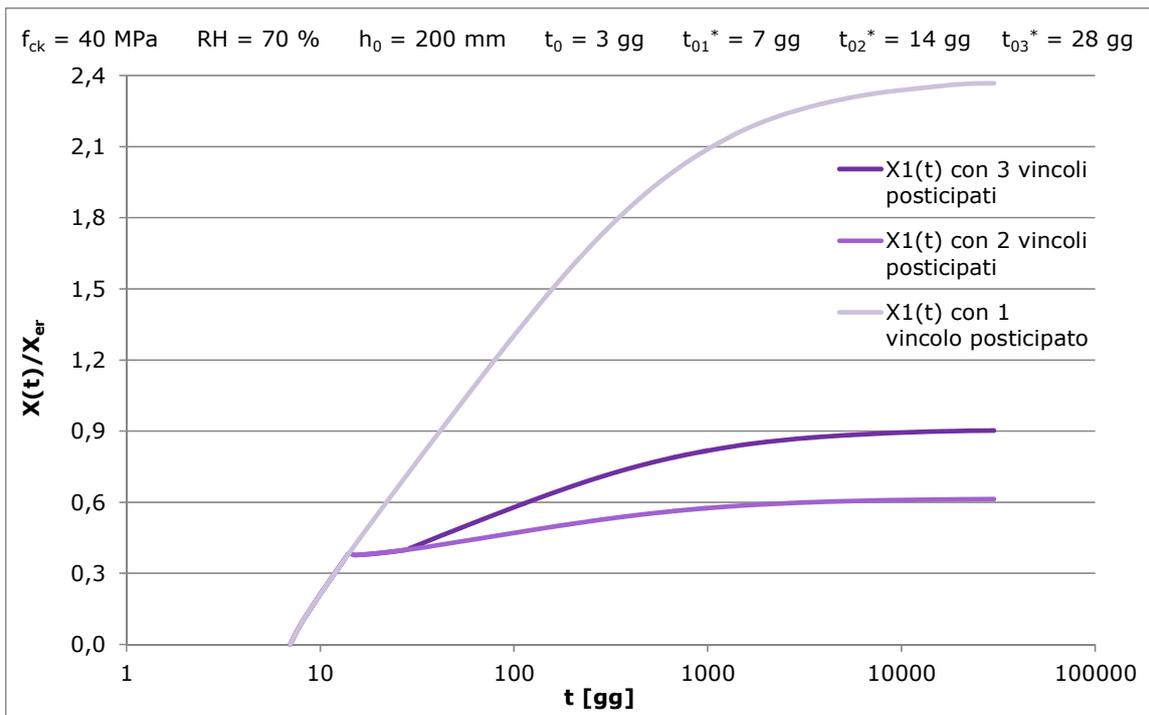


Figura 3.24 - Andamento dell'iperstatica  $X_1(t)$  per diversi schemi strutturali (CEB MC90)

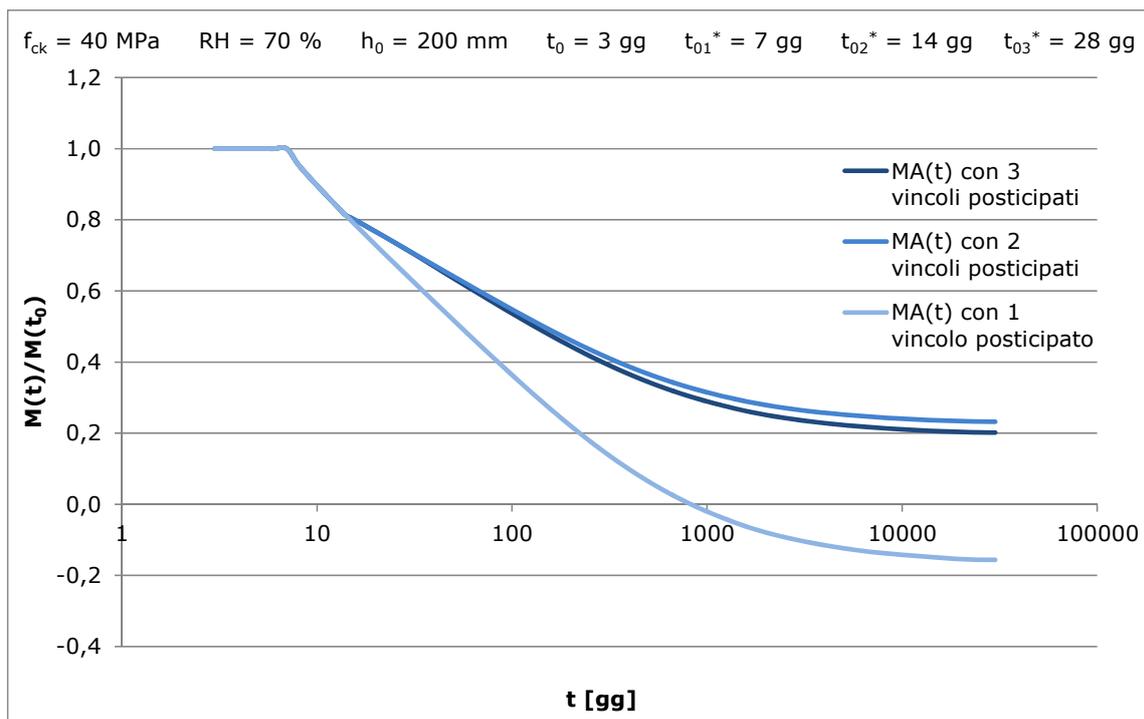


Figura 3.25 - Andamento di  $M(t)/M(t_0)$  nel punto A per diversi schemi strutturali (CEB MC90)

### 3.2.6 METODO DI TROST

I metodi algebrici consentono di ottenere una soluzione approssimata della Equazione Integrale di Volterra attraverso la sostituzione dei termini integrali con espressioni algebriche, che sfruttano le formule di quadratura con diversi livelli di precisione. In particolare Trost ([30],1967) utilizza il Teorema di Lagrange o Teorema del valor medio per esprimere la legge di viscosità del calcestruzzo che, in assenza di deformazioni impresse, risulta:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t d\sigma(t') \cdot J(t, t') = \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) + [\sigma(t) - \sigma(t_0)] \cdot \eta(t, t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.28)$$

La complessità di tale relazione è dovuta alla presenza del parametro  $\eta(\sigma(\varepsilon))$ , risulta quindi necessario assegnare a priori una famiglia di  $\varepsilon$ , adeguata a descrivere la maggior parte degli stati deformativi possibili, per ottenere  $\sigma$  e  $\eta$  corrispondenti.

L'ipotesi di base di tale metodo è quella di considerare la deformazione del calcestruzzo  $\varepsilon(t)$  come funzione lineare del coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$ ; in questo modo viene considerata una famiglia di curve rappresentabili attraverso la relazione:

$$\varepsilon(t) = a + b \cdot \varphi(t, t_0) \quad (3.29)$$

E' opportuno sottolineare come, al variare dei parametri indipendenti  $a$  e  $b$ , si possano ottenere infinite al quadrato storie di carico senza però riuscire a cogliere tutti i punti del piano: l'approssimazione risulta figlia della storia di  $\varepsilon$  parziale.

Inoltre, attraverso tale ipotesi, vengono rispettati i due teoremi fondamentali della viscoelasticità lineare, poiché risulta possibile rappresentare correttamente sia deformazioni costanti con  $\varepsilon = a$  e  $b = 0$ , che deformazioni variabili come  $(1+\varphi)$  essendo  $a = b = \text{costante}$ .

Dalla definizione stessa di funzione di viscosità:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E(t_0)}$$

si ricava:

$$\varphi(t, t_0) = E(t_0) \cdot J(t, t_0) - 1 \quad (3.30)$$

Sostituendo la (3.30) nella (3.29) si può esprimere la deformazione del calcestruzzo  $\varepsilon(t)$  come somma di due contributi, attraverso l'applicazione del Principio di Sovrapposizione:

$$\varepsilon(t) = (a - b) + b \cdot E(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.31)$$

Considerando separatamente i due termini ed utilizzando l'Integrale di Convoluzione (3.7), che esprime il legame mutuo tra le funzioni di viscosità e quelle di rilassamento, si ottiene la soluzione del problema, unica per il Principio di Esistenza ed Unicità:

$$\varepsilon(t) = (a - b) \quad \rightarrow \quad \sigma(t) = (a - b) \cdot R(t, t_0)$$

$$\varepsilon(t) = b \cdot E(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad \rightarrow \quad \sigma(t) = b \cdot E(t_0)$$

$$\varepsilon(t) = (a - b) + b \cdot E(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad \rightarrow \quad \sigma(t) = (a - b) \cdot R(t, t_0) + b \cdot E(t_0) \quad (3.32)$$

All'istante iniziale si ha:

$$\sigma(t_0) = a \cdot E(t_0) \quad \rightarrow \quad a = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)} = \sigma(t_0) \cdot J(t_0, t_0) \quad (3.33)$$

Sostituendo la (3.33) nella (3.29) si ricava il parametro b:

$$\varepsilon(t) = a + b \cdot \varphi(t, t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)} + b \cdot \varphi(t, t_0) \quad \rightarrow \quad b = \frac{\varepsilon(t) - \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)}}{\varphi(t, t_0)} \quad (3.34)$$

Sostituendo la 3.33 e la 3.34 nella 3.32 si può esprimere il legame  $\sigma(t) - \varepsilon(t)$ ,  $\forall a, b$  come:

$$\sigma(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)} \cdot R(t, t_0) + \frac{\varepsilon(t) - \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)}}{\varphi(t, t_0)} \cdot [E(t_0) - R(t, t_0)] \quad (3.35)$$

In forma semplificata la legge (3.35) si può scrivere nella seguente forma:

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot R + \frac{\varepsilon - \frac{\sigma_0}{E_0}}{\varphi} \cdot [E_0 - R] \quad (3.36)$$

Ricavando la deformazione  $\varepsilon$  dall'espressione precedente risulta valida l'equazione:

$$\varepsilon = \frac{\sigma \cdot \varphi}{E_0 - R} + \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \left[ 1 - \frac{R \cdot \varphi}{E_0 - R} \right] = \int_0^t d\sigma \cdot J \quad (3.37)$$

Considerando l'equazione (3.28) si può ricavare:

$$\eta(t, t_0) = \frac{\varepsilon(t) - \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0)}{[\sigma(t) - \sigma(t_0)] \cdot J(t, t_0)} \quad (3.38)$$

noto che:

- $\varepsilon(t) = a + b \cdot \varphi(t, t_0)$
- $[\sigma(t) - \sigma(t_0)] = (a - b)[R(t, t_0) - E(t_0)]$
- $J(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E(t_0)}; \quad a = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)}$

Sostituendo nell'espressione (3.38) si ottiene:

$$\eta(t, t_0) = \frac{-\varphi(t, t_0)}{[R(t, t_0) - E(t_0)] \cdot J(t, t_0)} \quad (3.39)$$

Da tale equazione si vede come il parametro  $\eta(t, t_0)$  è indipendente da  $a$  e  $b$ , pertanto non risulta funzione delle storie di carico.

La legge di viscosità del calcestruzzo secondo l'equazione (3.35) può essere riscritta in funzione del coefficiente di viscosità e di un nuovo parametro  $\chi(t, t_0)$  detto Coefficiente di Invecchiamento.

Se si esprime la famiglia di curve  $\varepsilon(t)$  attraverso la relazione:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) + \varepsilon_{c1} \cdot \varphi(t, t_0) \quad (3.40)$$

equivalente alle (3.29) con:  $\varepsilon(t_0) = a$ ;  $\varepsilon_{c1} = b$ .

Per la legge di viscosità in assenza di deformazioni impresse si può scrivere:

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) \cdot R(t, t_0) \cdot J(t_0, t_0) + \varepsilon_{c1} \cdot \int_{t_0}^t \frac{\partial \varphi(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R(t, t') \cdot dt' \quad (3.41)$$

Essendo  $\frac{\partial \varphi(t, t_0)}{\partial t'} = \frac{1}{J(t_0, t_0)} \cdot \frac{\partial J(t, t_0)}{\partial t'}$ , sostituita nella (3.41) si ottiene che:

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) \cdot R(t, t_0) \cdot J(t_0, t_0) + \frac{\varepsilon_{c1}}{J(t_0, t_0)} \cdot \int_{t_0}^t \frac{\partial J(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R(t, t') \cdot dt' \quad (3.42)$$

Sostituendo l'integrale  $\int_{t_0}^t \frac{\partial J(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R(t, t') \cdot dt' = 1 - \frac{R(t, t_0)}{E(t_0)} = 1 - R(t, t_0) \cdot J(t_0, t_0)$  si può ricavare:

$$\varepsilon_{c1} = \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0) \cdot R(t, t_0) \cdot J(t_0, t_0)}{[1 - R(t, t_0) \cdot J(t_0, t_0)]} \cdot J(t_0, t_0) \quad (3.43)$$

La deformazione  $\varepsilon(t)$  può dunque essere riscritta, sostituendo le espressioni ottenute per  $\varepsilon(t_0)$  ed  $\varepsilon_{c1}$ , come:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) \cdot J(t_0, t_0) + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0) \cdot R(t, t_0) \cdot J(t_0, t_0)}{[1 - R(t, t_0) \cdot J(t_0, t_0)]} \cdot J(t_0, t_0) \cdot \varphi(t, t_0) \quad (3.44)$$

Definendo il coefficiente:

$$\chi(t, t_0) = \frac{1}{1 - \frac{R(t, t_0)}{E(t_0)}} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)} \quad (3.45)$$

la deformazione  $\varepsilon(t)$  assume la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)} \cdot \varphi(t, t_0) \cdot [1 - \chi(t, t_0)] + \frac{\sigma(t)}{E(t_0)} [1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)] \\ &= \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \varphi \cdot [1 - \chi] + \frac{\sigma}{E_0} [1 + \chi \cdot \varphi] \end{aligned} \quad (3.46)$$

E' possibile dimostrare che:

- le funzioni  $\chi$  sono tutte limitate dal valore 1;

$$\bullet \lim_{t \rightarrow t_0} \chi(t, t_0) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{dE(t)}{dt} \right)_{t=t_0}}{\left( \frac{\partial R(t, t_0)}{\partial t} \right)_{t=t_0}} + 1 \right]$$

La seconda considerazione mostra che essendo il modello di Trost a modulo costante, il numeratore della frazione è nullo e risulta  $0,5 \leq \chi \leq 1$ .

Esistono tre diversi metodi algebrici per la soluzione del problema viscoelastico che si basano sulla formulazione alla Trost:

- Effective Modulus Method (E.M.M.), che pone  $\chi(t, t_0) = 1$ , pari al limite superiore;
- Mean Stress Method (M.S.M.), che pone  $\chi(t, t_0) = 0,5$ , pari al limite inferiore;
- Age-Adjusted Effective Modulus Method (A.A.E.M.M.), che pone  $\chi(t, t_0) = \frac{1}{1 - \frac{R(t, t_0)}{E(t_0)}} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)}$

Per dimostrare la migliore accuratezza del metodo A.A.E.M.M. si utilizza il caso in cui la variazione dello stato di sforzo  $\sigma(t_0) - \sigma(t)$  è istantanea per  $t=t_0$ :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (3.47)$$

Dal confronto delle due espressioni (3.46) e (3.47) si evidenzia la funzione correttiva del coefficiente  $\chi(t, t_0)$ , atto a considerare la variazione graduale nel tempo della tensione nel passare da  $\sigma(t_0)$  a  $\sigma(t)$ , poiché non è presente un salto improvviso  $\Delta\sigma$  in  $t_0$ ; siccome lo stato tensionale è variabile nel tempo, i  $d\sigma(t')$  agiscono su un materiale di età sempre maggiore, che risponde alle sollecitazioni in funzione di  $J$  sempre più piccole: per questo  $\chi(t, t_0)$  viene detto coefficiente di invecchiamento.

Se si introduce nella trattazione la presenza di deformazioni atensionali risulta valida la relazione:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \varphi \cdot [1 - \chi] + \frac{\sigma}{E_0} [1 + \chi \cdot \varphi] + \bar{\varepsilon}(t) \quad (3.48)$$

Nella pratica generalmente si considera  $E_0 \approx E_{c28}$  = modulo elastico del calcestruzzo a 28 giorni costante, poiché se il calcestruzzo non viene caricato in età giovanissima tale assunzione non

causa errori rilevanti; spesso si introduce un'ulteriore semplificazione al problema considerando  $\chi$  costante, pari al suo valor medio 0.8, in modo tale che:

$$\varepsilon(t) = 0,2 \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \varphi + \frac{\sigma}{E_{c28}} [1 + 0,8 \cdot \varphi] + \bar{\varepsilon}(t) \quad (3.49)$$

Dalla formula (3.48), ponendo  $\varepsilon = 1$  e deformazioni atensionali nulle, risulta possibile ricavare la funzione di rilassamento:

$$R(t, t_0) = E_0 \cdot \left[ 1 - \frac{\varphi}{1 + \chi\varphi} \right] \quad (3.50)$$

Se invece le deformazioni atensionali, presenti ad esempio sotto forma di ritiro, risultano impedito dalla presenza di vincoli, si ha  $\bar{\varepsilon}(t) \neq 0$  ed  $\varepsilon(t) = 0$ .

All'istante  $t=t_0$ , essendo  $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \bar{\varepsilon}(t_0) = 0$  con  $\bar{\varepsilon}(t_0) = 0 \rightarrow \sigma(t_0) = 0$

Al generico istante  $t$ , dalla (3.48) si ha:

$$\sigma(t) = -\frac{\bar{\varepsilon}(t) \cdot E_0}{1 + \chi\varphi} = \frac{\bar{\sigma}_e(t)}{1 + \chi\varphi}$$

con  $\bar{\sigma}_e(t) = \bar{\varepsilon}(t) \cdot E_0 =$  tensione in campo elastico.

Tale formulazione di  $\sigma(t)$  può essere considerata quindi un'espressione approssimata dell'integrale di Volterra (II° teorema della viscoelasticità lineare):

$$\bar{\sigma}(t) = \int_0^t \frac{R(t, t')}{E(t_0)} d\bar{\sigma}_e(t') \cong \frac{\bar{\sigma}_e(t)}{1 + \chi\varphi} \quad (3.51)$$

In particolare l'equazione (3.51) risulta esatta se viene rispettata l'ipotesi di base del modello di Trost  $\bar{\varepsilon}(t) = a + b \cdot \varphi(t, t_0)$ ;  $\bar{\varepsilon}(t_0) = 0 \rightarrow \bar{\varepsilon}(t) = b \cdot \varphi(t, t_0)$ , cioè la teoria approssimata di Trost vale in modo esatto se il ritiro risulta affine alla viscosità.

### 3.2.6.1 Rappresentazioni grafiche del coefficiente di invecchiamento

Dalla definizione di  $\chi(t, t_0)$  data dall'espressione (3.45) è evidente che anch'esso dipende dalla scelta del modello viscoelastico lineare (Cap.2). Si riportano di seguito gli andamenti di tale coefficiente per il MC90, considerando i parametri di base con valori standard ( $f_{ck}=40$  MPa, RH=70%,  $h_0=200$  mm, classe di calcestruzzo standard) e diversi tempi di messa in carico ( $t_0=3, 14, 28, 90$  gg).

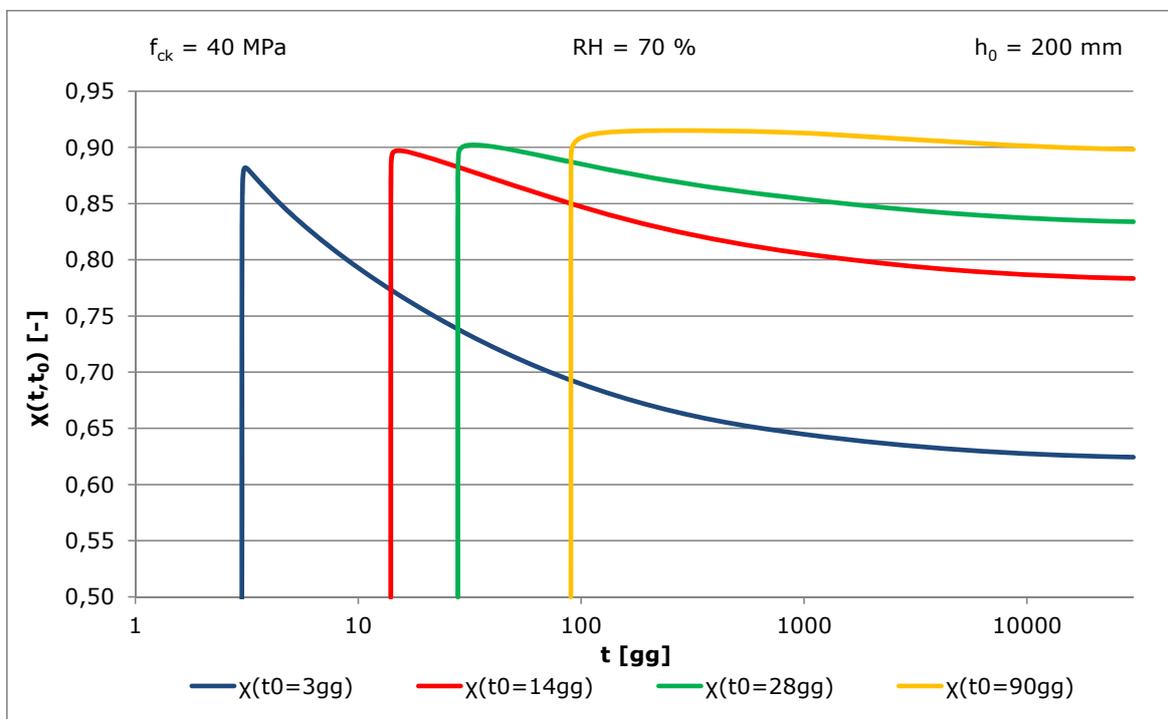


Figura 3.26 - Andamento di  $\chi(t, t_0)$  per  $f_{ck} = 40$  MPa, RH = 70%,  $h_0 = 200$  mm

### 3.2.7 FORMULAZIONE ALTERNATIVA DELLA SOLUZIONE DI TROST

Attraverso la modellazione di Trost del problema viscoelastico è possibile ottenerne la soluzione attraverso tre successivi passi elastici ([18], 1979; [23], 1996), ipotizzando semplicemente la linearità tra deformazioni e coefficiente di viscosità (assunzione non verificata nel caso di calcestruzzo fessurato).

Tale metodo è fondamentale nel campo della progettazione, dove risulta possibile determinare le soluzioni cercate in modo semplice e computazionalmente non oneroso.

Si considera dunque l'equazione fondamentale del metodo di Trost:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \varphi \cdot [1 - \chi] + \frac{\sigma}{E_0} [1 + \chi \cdot \varphi] + \bar{\varepsilon}(t) \quad (3.52)$$

dove:

$E_0$  = modulo elastico del materiale viscoelastico al tempo  $t_0$ ;

$\sigma_0$  = tensione presente al tempo  $t_0$ ;

$\bar{\varepsilon}$  = deformazione atensionale.

Al tempo  $t=t_0$  la funzione di viscosità  $\varphi$  è nulla, pertanto:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_0} + \bar{\varepsilon}_0 \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = (\varepsilon_0 - \bar{\varepsilon}_0) \cdot E_0 \quad (3.53)$$

che rappresenta la soluzione elastica nota al tempo iniziale.

Dalla relazione di Trost (3.52), per inversione, si ricava lo stato tensionale al generico tempo  $t$ :

$$\sigma(t) = \frac{E_0}{1 + \chi \cdot \varphi} \cdot (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) - \sigma_0 \cdot \frac{\varphi \cdot (1 - \chi)}{1 + \chi \cdot \varphi} \quad (3.54)$$

Per il Principio di Sovrapposizione delle Tensioni è possibile considerare  $\sigma(t)$  come somma di due contributi tensionali:

- $\sigma_1 = \frac{E_0}{1 + \chi \varphi} \cdot (\varepsilon - \bar{\varepsilon})$  che equivale ad una soluzione elastica al tempo  $t$  con modulo elastico variato  $\frac{E_0}{1 + \chi \varphi}$ ;
- $\sigma_2 + \mu \sigma_0 = -\sigma_0 \cdot \frac{\varphi \cdot (1 - \chi)}{1 + \chi \cdot \varphi}$ , si ricava pertanto che:  $\sigma_2 = -\sigma_0 \cdot \left[ \frac{\varphi \cdot (1 - \chi)}{1 + \chi \cdot \varphi} + \mu \right]$

Definendo:

$$\mu = -\frac{(1-\chi)}{\chi} \quad (3.55)$$

Si ottiene:

$$\sigma_2 = \sigma_0 \cdot \frac{(1-\chi)}{\chi(1+\chi \cdot \varphi)} \quad (3.56)$$

Sostituendo nella (3.56) le definizioni (3.55) e (3.53) si ottiene.

$$\sigma_2 = -\mu \cdot (\varepsilon_0 - \bar{\varepsilon}_0) \cdot \frac{E_0}{(1+\chi \cdot \varphi)} = -\mu \sigma_{10} \quad (3.57)$$

Ponendo  $\mu = -1$  nella (3.57) si avrebbe  $\sigma_2 = \sigma_{10}$ , cioè la soluzione elastica con modulo variato calcolata per i carichi iniziali che hanno causato le deformazioni elastiche iniziali.

Il contributo tensionale dato dalla (3.57) può essere espresso in modo equivalente come:

$$\sigma_2 + \mu \sigma_0 = -\mu \sigma_{10} + \mu \sigma_0 = \mu(\sigma_0 - \sigma_{10}) \quad (3.58)$$

La soluzione fondamentale risulta pertanto la somma dei due contributi a. e (3.58):

$$\sigma = \sigma_1 + \mu \cdot (\sigma_0 - \sigma_{10}) \quad (3.59)$$

Essa rappresenta la soluzione approssimata in termini di tensioni di un qualsiasi problema viscoelastico ed è ricavabile attraverso la soluzione consecutiva di tre problemi elastici:

- Soluzione elastica iniziale al tempo  $t_0$ :

$$E_c = E_0; \quad F(t) = F(t_0) \quad \rightarrow \quad \sigma_0 = (\varepsilon_0 - \bar{\varepsilon}_0) \cdot E_0;$$

- Soluzione elastica al tempo  $t$  con modulo variato e carichi iniziali:

$$E_{c1} = \frac{E_0}{(1+\chi \cdot \varphi)}; \quad F(t) = F(t_0) \quad \rightarrow \quad \sigma_{10};$$

- Soluzione elastica al tempo  $t$  con modulo variato e carichi al tempo  $t$ :

$$E_{c1} = \frac{E_0}{(1+\chi \cdot \varphi)}; \quad F(t) \quad \rightarrow \quad \sigma_1;$$

Se i carichi rimangono costanti nel tempo le ultime due soluzioni elastiche coincidono  $\sigma_{10} \equiv \sigma_1$ , pertanto le tensioni calcolate al tempo  $t$  con modulo elastico variato dovute a carichi applicati al tempo  $t_0$  sono uguali a quelle calcolate sempre con modulo variato, nello stesso tempo  $t$ , con carichi presenti al tempo  $t$ . Perciò in questo caso si ha:

$$\sigma = \sigma_1 \cdot (1 - \mu) + \mu \cdot \sigma_0.$$

Per le deformazioni è possibile ricavare una formulazione analoga a quella delle tensioni, considerando i seguenti contributi:

$$(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) = \left[ \frac{\sigma}{E_0} \cdot (1 + \chi \cdot \varphi) \right] + \left[ \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \varphi \cdot (1 - \chi) \right] \quad (3.60)$$

- $\varepsilon_1 = \left[ \frac{\sigma}{E_0} \cdot (1 + \chi \cdot \varphi) \right]$  = deformazione elastica con modulo variato, calcolata al tempo  $t$  e dovuta ai carichi presenti al tempo  $t$  stesso;
- $\varepsilon_2 = \left[ \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \varphi \cdot (1 - \chi) \right]$  = deformazione elastica al tempo iniziale.

Essendo

$$\mu = -\frac{(1-\chi)}{\chi}$$

moltiplicando e dividendo per  $\chi$  il secondo contributo, si ottiene:

$$\varepsilon_2 = \left[ -\frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \varphi \cdot \mu \cdot \chi \right] \quad (3.61)$$

Sostituendo nella (3.60) risulta quindi:

$$\varepsilon - \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \mu \cdot (1 + \chi \cdot \varphi - 1) = \varepsilon_1 - \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \mu \cdot (1 + \chi \cdot \varphi) + \varepsilon_0 \cdot \mu \quad (3.62)$$

Definendo  $\varepsilon_{10} = \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \mu \cdot (1 + \chi \cdot \varphi)$  = deformazione calcolata con modulo elastico variato, dovuta ai carichi presenti al tempo  $t$ , si ottiene la formulazione del problema in termini di deformazioni:

$$\varepsilon - \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \mu \cdot (\varepsilon_0 - \varepsilon_{10}) \quad (3.63)$$

Se i carichi rimangono costanti nel tempo risulta:  $\varepsilon_{10} \equiv \varepsilon_1$ , pertanto le deformazioni calcolate al tempo  $t$  con modulo elastico variato dovute a carichi applicati al tempo  $t_0$  sono uguali a quelle calcolate sempre con modulo variato, nello stesso tempo  $t$ , con carichi presenti al tempo  $t$ .

Perciò in questo caso si ha:

$$\varepsilon - \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 \cdot (1 - \mu) + \mu \cdot \varepsilon_0 \quad (3.64)$$

Anche la risoluzione del problema deformativo, in analogia a quello tensionale, può avvenire attraverso il calcolo di tre soluzioni elastiche, aventi il medesimo schema visto in precedenza

per le tensioni; nel caso particolare di carichi costanti nel tempo il problema si riconduce a soli due passi elastici.

Il coefficiente di miscelazione  $\mu$  è legato a quello di invecchiamento  $\chi$  dalla relazione:

$$\mu = -\frac{(1 - \chi)}{\chi}$$

### 3.2.7.1 Rappresentazioni grafiche del coefficiente di miscelazione

Dalla definizione di  $\mu(t,t_0)$  data dall'espressione (3.55) risulta che anch'esso dipende dalla scelta del modello viscoelastico lineare (Cap.2), pertanto si riportano di seguito gli andamenti di tale coefficiente per il MC90, considerando i parametri di base con valori standard ( $f_{ck} = 40$  MPa, RH = 70%,  $h_0 = 200$  mm, classe di calcestruzzo standard) e diversi tempi di messa in carico ( $t_0 = 3, 14, 28, 90$  gg).

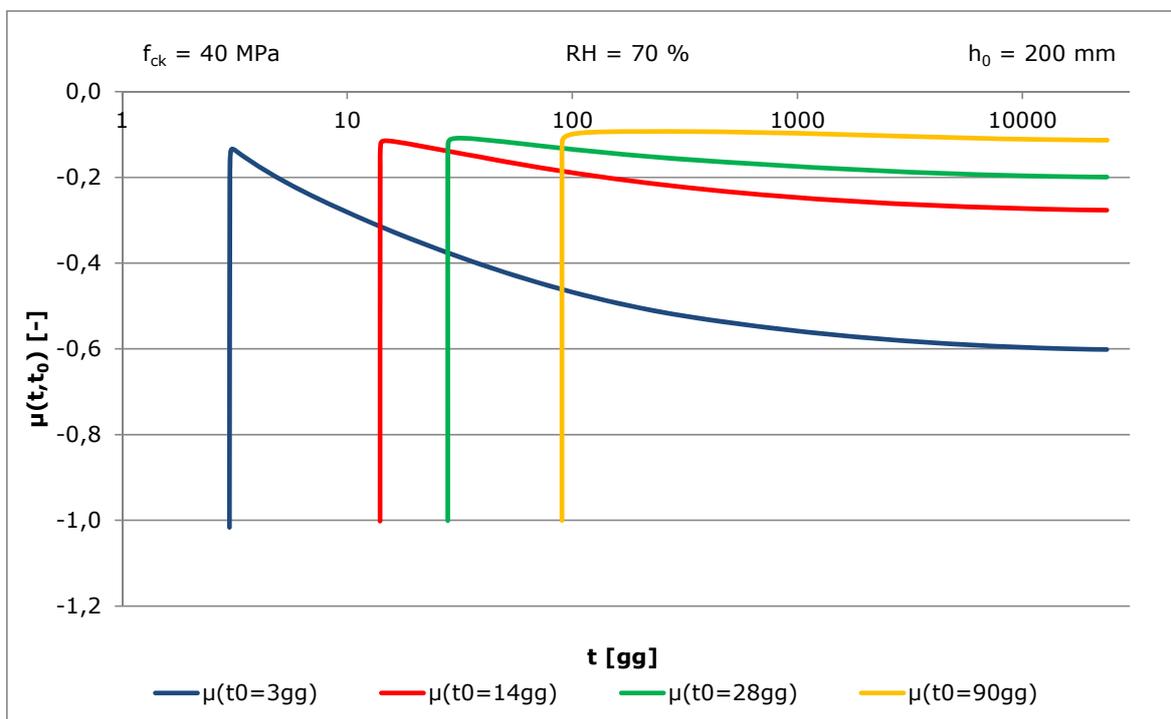


Figura 3.27 - Andamento di  $\mu(t,t_0)$  per  $f_{ck} = 40$  MPa, RH = 70%,  $h_0 = 200$  mm

### 3.2.8 CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI

Come visto nei paragrafi 3.2.1 e 3.2.2, nel caso di struttura viscoelastica omogenea con azioni statiche o geometriche imposte, il calcolo degli spostamenti è immediato.

Se la struttura rispetta il primo teorema l'abbassamento nel tempo risulta:

$$v(x, t) = v_e(x, t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (3.65)$$

mentre nel caso in cui è soggetta a cedimenti impressi l'abbassamento rimane costante nel tempo e pari a quello elastico.

Quando alla struttura sono applicati dei vincoli posticipati rispetto all'istante di messa in carico è opportuno fare alcune considerazioni al fine di, ove possibile, semplificare il calcolo.

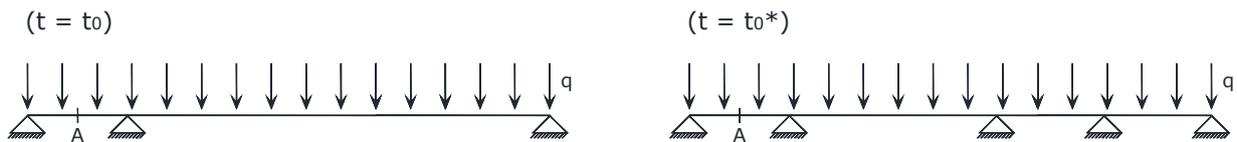


Figura 3.28 - Variazione di schema statico della struttura

Si vuole determinare lo spostamento di un generico punto appartenente ad una struttura viscoelastica omogenea (ad esempio il punto A di Figura 3.28) alla quale vengono aggiunti N vincoli all'istante  $t_0^*$  e soggetta ad un carico costante nel tempo applicato al tempo  $t_0$ .

A tal fine si scrive la congruenza ad un istante generico  $t > t_0^*$  nei punti di applicazione dei vincoli posticipati:

$$\int_{t_0^*}^t \underline{\delta}_c(t_0) \cdot d\underline{X}(t') \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \underline{\delta}_0(t_0) \cdot E_c(t_0) [J(t, t_0) - J(t, t_0^*)] = 0 \quad (3.66)$$

dove:

$\underline{\delta}_c$  è la matrice di flessibilità all'istante  $t_0$ ;

$\underline{X}(t)$  è il vettore delle iperstatiche;

$\underline{\delta}_0(t_0)$  è il vettore degli abbassamenti dovuti al carico nella struttura resa isostatica.

Il primo termine della (3.66) rappresenta gli abbassamenti dei punti della trave in corrispondenza dei vincoli posticipati dovuti alle iperstatiche, mentre il secondo quelli dovuti al carico applicato  $q$  per tempi  $t > t_0^*$ .

Premoltiplicando ambo i termini per l'inversa della matrice di flessibilità  $\underline{\underline{\delta_c^{-1}}}(t_0)$  :

$$\int_{t_0^*}^t d\underline{X}(t') \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') = -\underline{\underline{\delta_c^{-1}}}(t_0) \cdot \underline{\delta_0}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t, t_0^*)] \quad (3.67)$$

Si nota come il termine  $-\underline{\underline{\delta_c^{-1}}}(t_0) \cdot \underline{\delta_0}(t_0)$  sia pari al vettore delle iperstatiche nel caso di vincoli pre-esistenti rispetto al carico  $\underline{X_e}(t_0)$ ; tale eguaglianza deriva dalla congruenza all'istante  $t_0$  nei punti di applicazioni delle reazioni vincolari iperstatiche.

Operando opportuni passaggi e definizioni si arriva a scrivere (come visto nel paragrafo 3.2.3):

$$\underline{X}(t, t_0, t_0^*) = \underline{X_e}(t_0) \cdot \xi(t, t_0, t_0^*)$$

Si può dunque scrivere il principio di sovrapposizione degli effetti per due strutture per le quali vale il I° Teorema: la struttura con le sole iperstatiche, e quella con il solo carico esterno; si ricava:

$$v_A(t, t_0, t_0^*) = \int_{t_0^*}^t \sum_{i=1}^N \delta_{Ai}(t_0) \cdot dX_i(t') \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \delta_{0A}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.68)$$

che, portando la sommatoria fuori dal segno di integrale, diventa:

$$v_A(t, t_0, t_0^*) = \sum_{i=1}^N \delta_{Ai}(t_0) \int_{t_0^*}^t dX_i(t') \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \delta_{0A}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.69)$$

Riscrivendo la congruenza (3.67) per l' $i$ -esimo punto di applicazione dei vincoli posticipati, e moltiplicando ambo i membri per  $\delta_{Ai}(t_0)$  si ottiene:

$$\delta_{Ai}(t_0) \int_{t_0^*}^t d\underline{X}(t') \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') = X_{ei}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t, t_0^*)] \cdot \delta_{Ai}(t_0) \quad (3.70)$$

Si nota che il termine integrale compare anche nella (3.69), per cui si può operare la sostituzione, ottenendo:

$$v_A(t, t_0, t_0^*) = \sum_{i=1}^N X_{ei}(t_0) \cdot \delta_{Ai}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t, t_0^*)] + \delta_{0A}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.71)$$

Il termine  $\sum_{i=1}^N X_{ei}(t_0) \cdot \delta_{Ai}(t_0)$  rappresenta l'abbassamento del punto A nel caso di struttura soggetta alle sole iperstatiche dovute ai vincoli pre-esistenti  $v_{Ae}^X(t_0)$ . Si riscrive dunque la (3.71) nella seguente forma:

$$v_A(t, t_0, t_0^*) = v_{Ae}^X(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t, t_0^*)] + \delta_{0A}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.72)$$

E tramite la definizione della funzione di viscosità:

$$v_A(t, t_0, t_0^*) = v_{Ae}^X(t_0) \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t, t_0^*)] + \delta_{0A}(t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (3.73)$$

La (3.73), utilizzata in alternativa alla (3.68), consente di non operare alcuna integrazione, rendendo superfluo il calcolo dell'andamento dell'iperstatica nel tempo.

Definendo  $\Delta\varphi(t, t_0, t_0^*) = \varphi(t, t_0) - \varphi(t, t_0^*)$  ed omettendo le variabili indipendenti la (3.73) diventa:

$$v_A = v_{Ae}^X \cdot \Delta\varphi + \delta_{0A}(1 + \varphi) = v_{Ae}^X \cdot (\varphi - \varphi^*) + \delta_{0A}(1 + \varphi) \quad (3.74)$$

dove

$$\varphi^* = \varphi(t, t_0^*) \quad (3.75)$$

Sommando e sottraendo  $v_{Ae}^X$  al secondo membro e raccogliendo a fattor comune  $(1 + \varphi)$  e  $(1 + \varphi^*)$  si ottiene:

$$v_A = v_{Ae}^X \cdot (1 + \varphi) + \delta_{0A}(1 + \varphi) + v_{Ae}^X \cdot (1 + \varphi^*) = (v_{Ae}^X + \delta_{0A}) \cdot (1 + \varphi) + v_{Ae}^X \cdot (1 + \varphi^*) \quad (3.76)$$

Il termine  $(v_{Ae}^X + \delta_{0A})$  rappresenta l'abbassamento del punto A della struttura con i vincoli preesistenti ed il carico esterno applicato  $v_{Ae}$ .

La (3.73) diventa dunque:

$$v_A = v_{Ae} \cdot (1 + \varphi) - v_{Ae}^X \cdot (1 + \varphi^*) \quad (3.77)$$

Si nota che la (3.77) è ancora applicabile nel caso in cui si adotti il MC90 a patto di moltiplicare il coefficiente di viscosità per il fattore  $E_c(t_0)/E_{28}$ .

Si riportano inoltre le relazioni per il calcolo degli spostamenti nel caso in cui i vincoli posticipati vengono attivati ad istanti diversi.

- Soluzione per  $t_0 \leq t \leq t_{01}^*$

$$v_0 = v_e \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.78)$$

- Soluzione per  $t_{01}^* \leq t \leq t_{02}^*$

In analogia al caso appena visto di vincoli aggiuntivi applicati allo stesso istante, si scrive:

$$v_1 = v_{e1} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - v_{eX_1} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{01}^*, t_0) \quad (3.79)$$

essendo:

$v_{e1}$  lo spostamento elastico calcolato a vincoli preesistenti

$v_{eX_1}$  rappresenta lo spostamento nel caso di struttura soggetta alle sole iperstatiche dovute ai vincoli pre-esistenti

- Soluzione per  $t_{02}^* \leq t \leq t_{03}^*$

Definito  $\delta_{z,j}$  il coefficiente di influenza elastico delle  $X_j$  lo stato di spostamento prodotto dalle nuove reazioni si ricava dalla relazione:

$$\begin{aligned} v_{2X} &= \int_{t_{02}^*}^t \sum_{j=1}^{m_2} \delta_{z,j} \cdot dX_j \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') = \sum_{j=1}^{m_2} \delta_{z,j} \cdot X_{e2,j} \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t_{02}^*, t_0)] = \\ &= v_{eX_2} \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t_{02}^*, t_0)] \end{aligned} \quad (3.80)$$

ma essendo:

$$v_{e2} = v_{e1} + v_{eX_2}$$

si può scrivere:

$$v_{2X} = (v_{e2} - v_{e1}) \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t_{02}^*, t_0)] \quad (3.81)$$

cosicché per lo spostamento totale risulta:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + v_{2X} = v_{e1} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - v_{eX_1} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{01}^*, t_0) + v_{e2} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \\ &- v_{e1} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - v_{eX_2} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{02}^*, t_0) = \\ &= v_{e2} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - v_{eX_1} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{01}^*, t_0) - v_{eX_2} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{02}^*, t_0) \end{aligned} \quad (3.82)$$

- Generalizzando le precedenti espressioni per l'intervallo  $t_{0k}^* \leq t \leq t_{0k+1}^*$  si può scrivere

$$v_k = v_{ek} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - \sum_{h=1}^k v_{eX_h} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{0h}^*, t_0) \quad (3.83)$$

essendo:

$v_{ek}$  lo stato di spostamento elastico prodotto dal carico esterno assumendo preesistenti tutti i vincoli fino a quelli applicati in  $t_{0k}^*$ .

$v_{eX_h}$  lo stato di spostamento elastico prodotto dalle reazioni  $X_{eh}$  assumendo attivi tutti i vincoli fino a h-1.

### 3.2.8.1 Esempi applicativi

#### 3.2.8.1.1 Vincoli posticipati allo stesso istante (caso monodimensionale)

Si considera la trave con rigidezza flessionale  $EI$ , sottoposta al carico distribuito  $q(t) = 10 \text{ kN/m}$  applicato al tempo  $t_0 = 7$  giorni; successivamente al tempo  $t_0^* = 10$  giorni viene posto un vincolo rigido in corrispondenza della mezzeria.

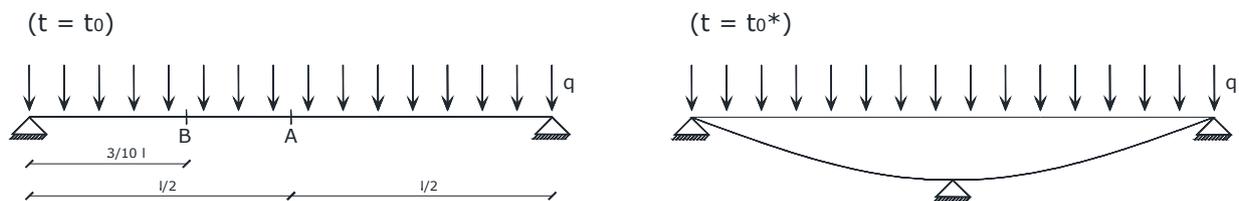


Figura 3.29 - Struttura omogenea con vincolo posticipato soggetta a carichi costanti

Lo spostamento in un punto generico è dato dall'espressione (3.77):

$$v_A = v_{Ae} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] - v_{Ae}^X \cdot [1 + \varphi(t_0^*, t_0)]$$

Di seguito si riporta la deformata della struttura per  $t = 7, 10, 200, 30000$  giorni e l'andamento degli spostamenti del punto A e B.

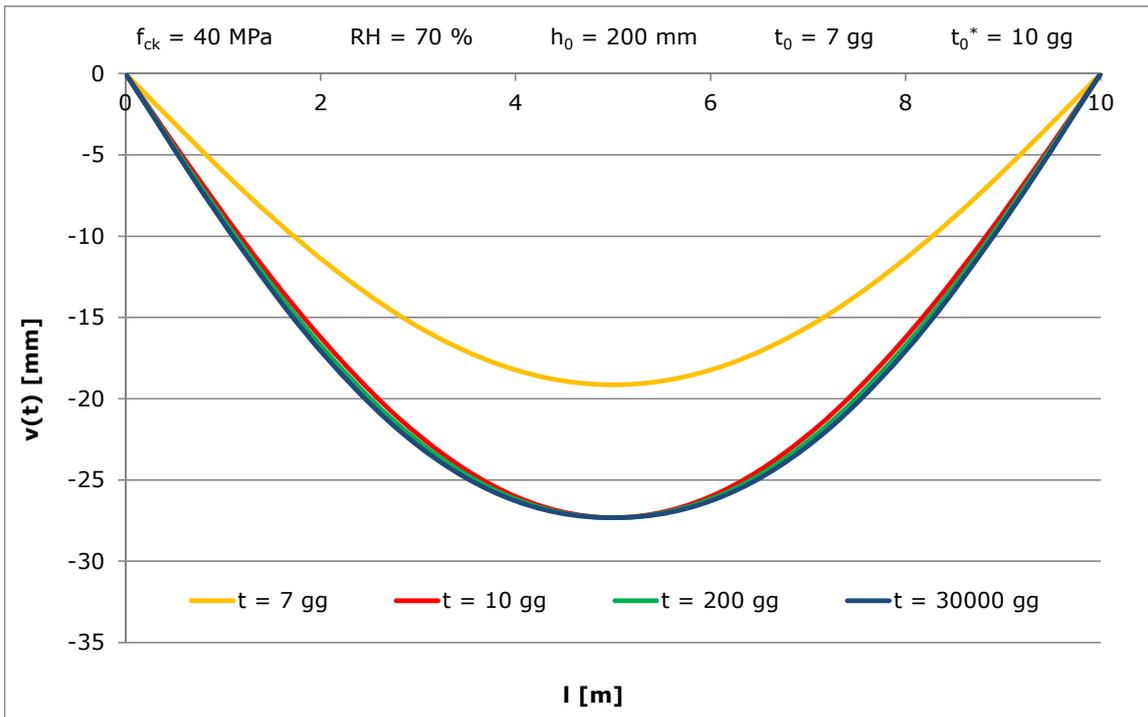


Figura 3.30 - Deformata nel tempo

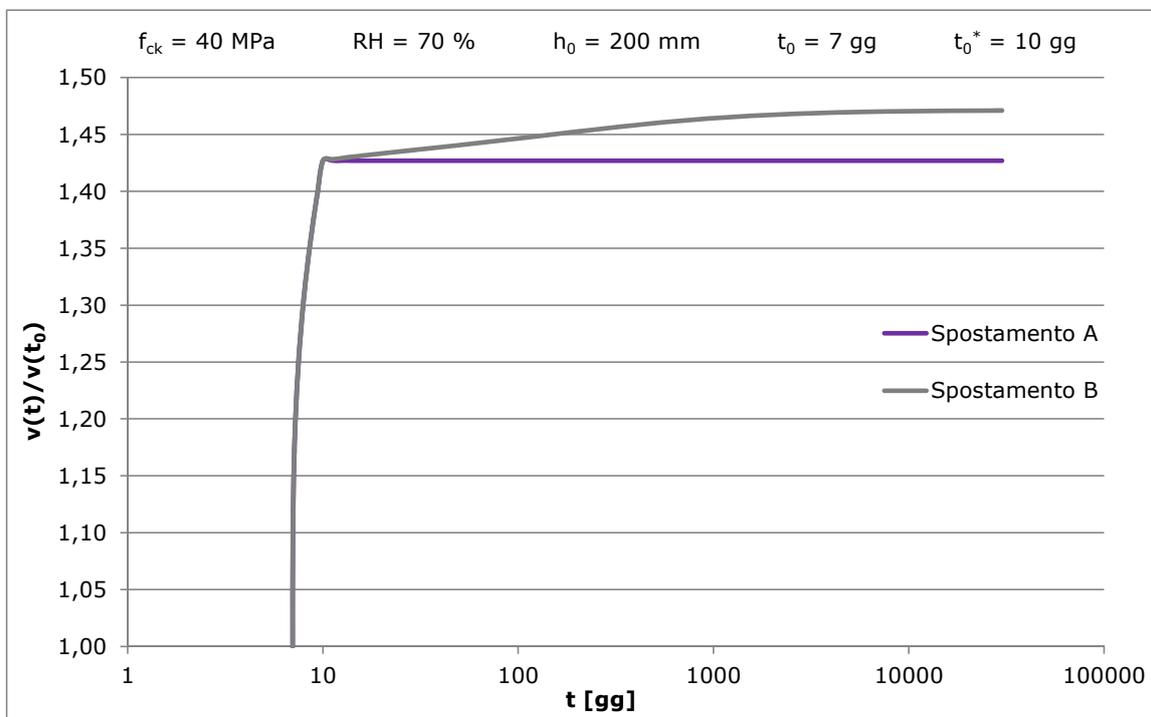


Figura 3.31 - Spostamento dei punti A e B nel tempo

3.2.8.1.2 Vincoli posticipati allo stesso istante (caso generale)

Si considera la trave con rigidità flessionale  $EI$ , sottoposta ad un carico concentrato  $p(t) = 20$  kN costante nel tempo applicato al tempo  $t_0 = 7$  giorni; successivamente al tempo  $t_0^* = 10$  gg vengono posti due vincoli rigidi (Figura 3.32).

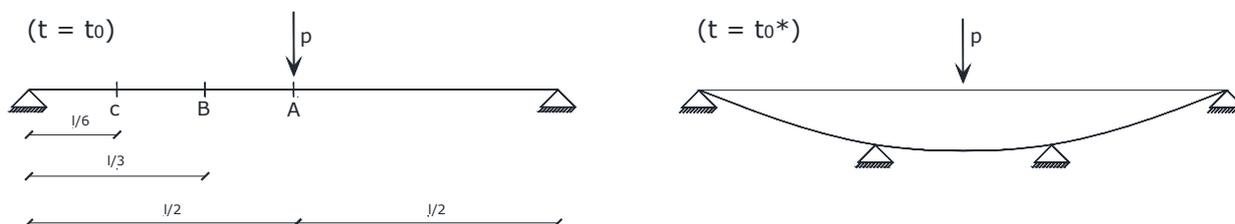


Figura 3.32 - Struttura omogenea con vincoli posticipati soggetta a carichi costanti

Lo spostamento in un punto generico è dato dall'espressione:

$$v_A = v_{Ae} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] - v_{Ae}^X \cdot [1 + \varphi(t_0^*, t_0)]$$

Di seguito si riporta la deformata della struttura per  $t = 7, 10, 200, 30000$  giorni e gli spostamenti nel tempo dei punti A, B e C.

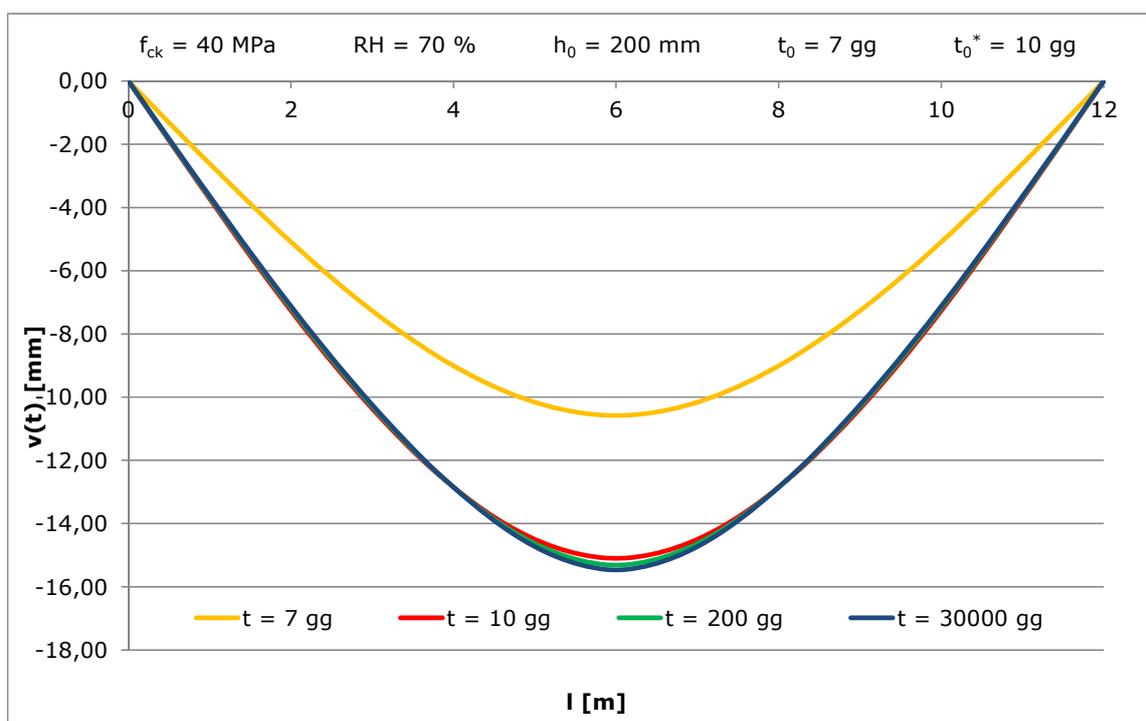


Figura 3.33 - Deformata nel tempo

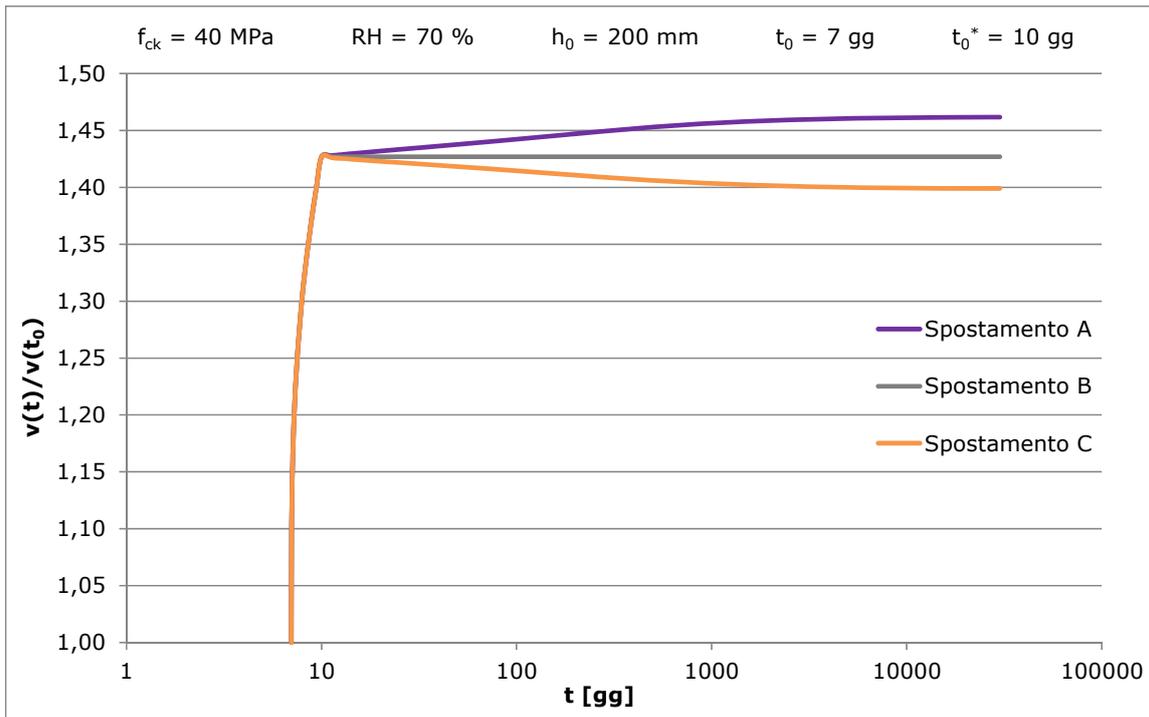


Figura 3.34 - Spostamento dei punti A e B nel tempo

3.2.8.1.3 Vincoli posticipati ad istanti diversi

Si considera una trave semplicemente appoggiata con un carico distribuito  $q(t) = 100\text{kN/m}$  applicato a 3 giorni. Successivamente per  $t = 7, 14$  e  $28$  giorni vengono applicati in serie tre vincoli posticipati rispettivamente ad  $l/4, l/2$  e  $3/4 l$  (Figura 6.25).

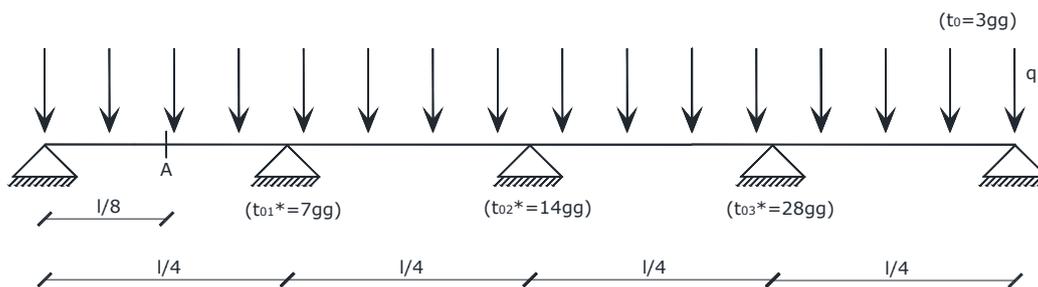


Figura 3.35 - Struttura omogenea con vincoli posticipati ad istanti diversi soggetta a carichi costanti

Di seguito si riporta la deformata della struttura per  $t = 7, 10, 200, 30000$  giorni e lo spostamenti nel tempo del punto A.

Di seguito gli schemi strutturali per il calcolo delle varie grandezze e i risultati ottenuti:

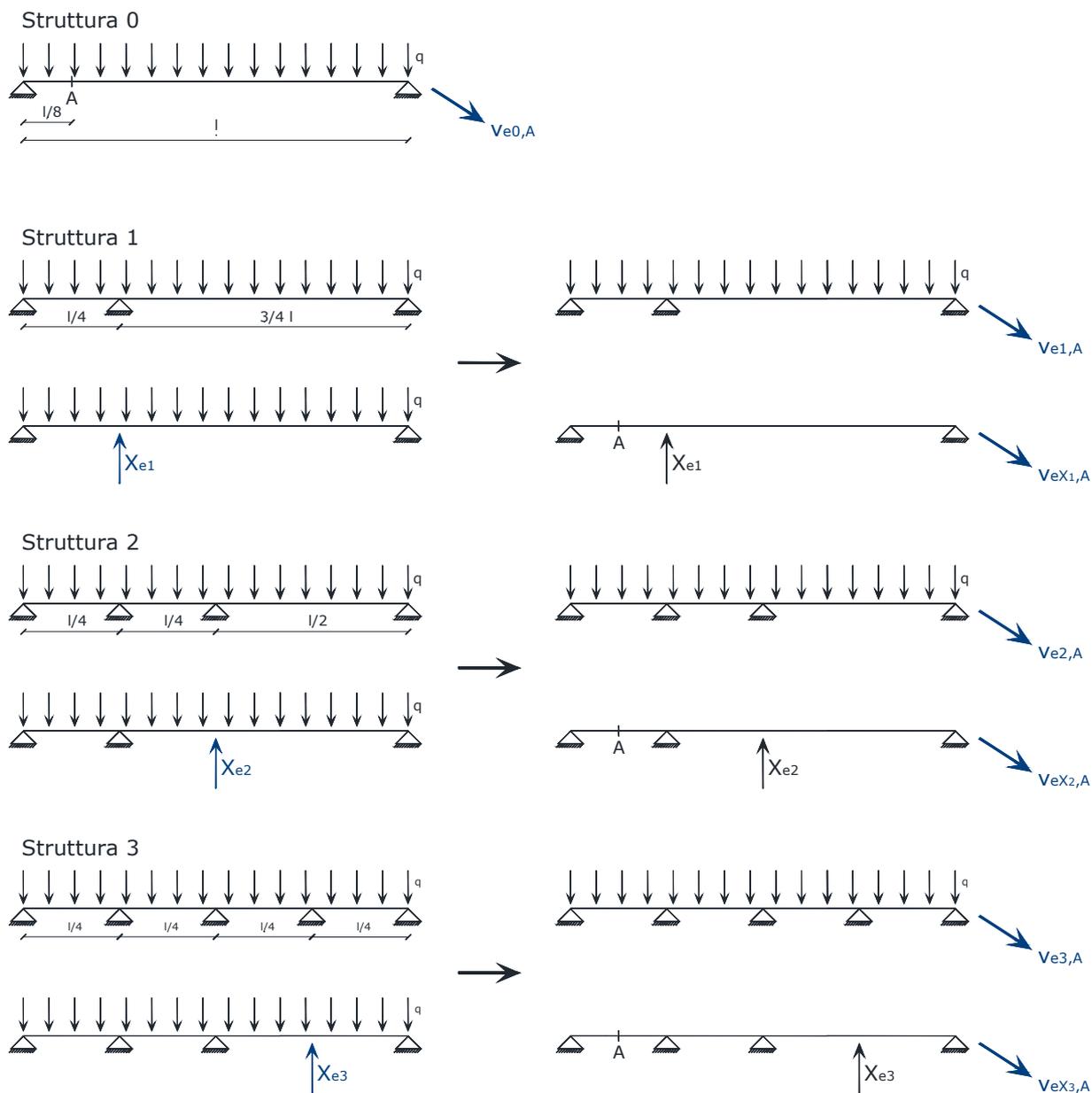


Figura 3.36 - Schemi strutturali per il calcolo delle varie grandezze

	Struttura 0	Struttura 1	Struttura 2	Struttura 3
$X_e$ [kN]	-	341,8	280	341,8
$v_{e,A}$ [mm]	175,7	-5,5	1,5	0,9
$v_{eX,A}$ [mm]	-	-181,3	7,1	-0,6

Tabella 2 - Risultati ottenuti dall'analisi elastica

Tramite le espressioni del paragrafo 3.2.8 si calcolano la deformata della struttura per  $t = 3, 7, 14, 28$  giorni e l'andamento dello spostamenti del punto A nel tempo.

- Per  $t_0 \leq t \leq t_{01}^*$

$$v_A(t) = v_{e0,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0)$$

- Per  $t_{01}^* \leq t \leq t_{02}^*$

$$v_A(t) = v_{e1,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - v_{eX1,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{01}^*, t_0)$$

- Per  $t_{02}^* \leq t \leq t_{03}^*$

$$v_A(t) = v_{e2,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - [v_{eX1,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{01}^*, t_0) + v_{eX2,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{02}^*, t_0)]$$

- Per  $t > t_{03}^*$

$$v_A(t) = v_{e3,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) +$$

$$- [v_{eX1,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{01}^*, t_0) + v_{eX2,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{02}^*, t_0) + v_{eX3,A} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t_{03}^*, t_0)]$$

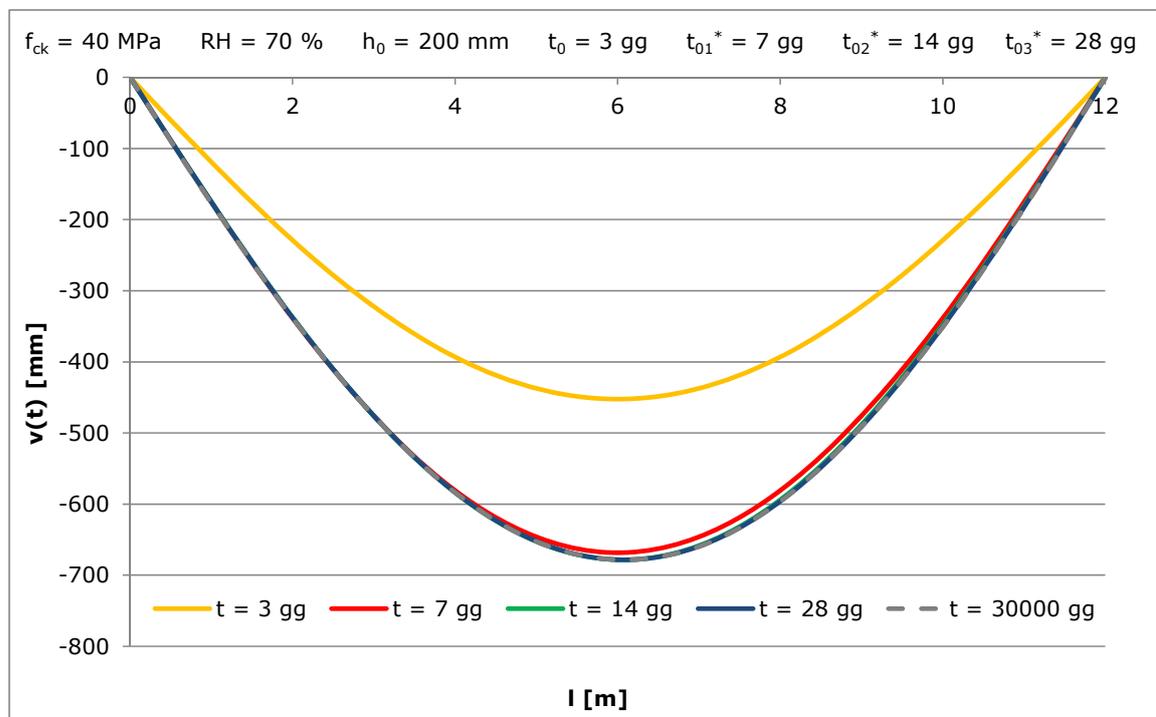


Figura 3.37 - Deformata nel tempo

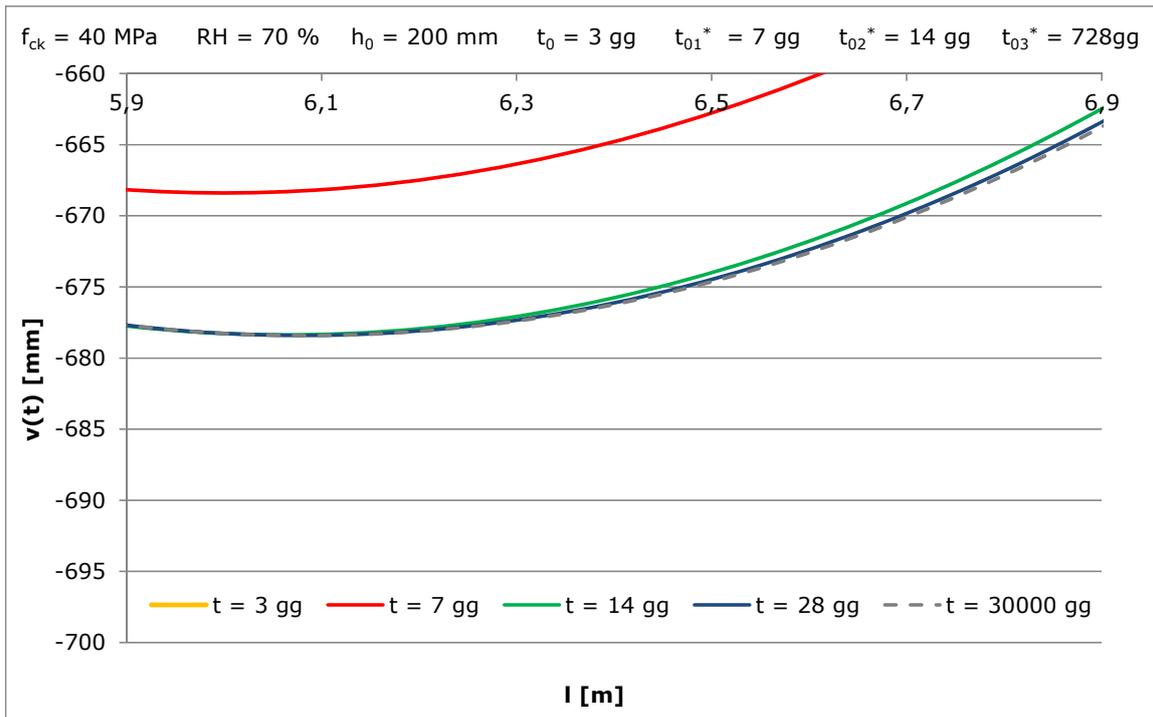


Figura 3.38 - Dettaglio deformata

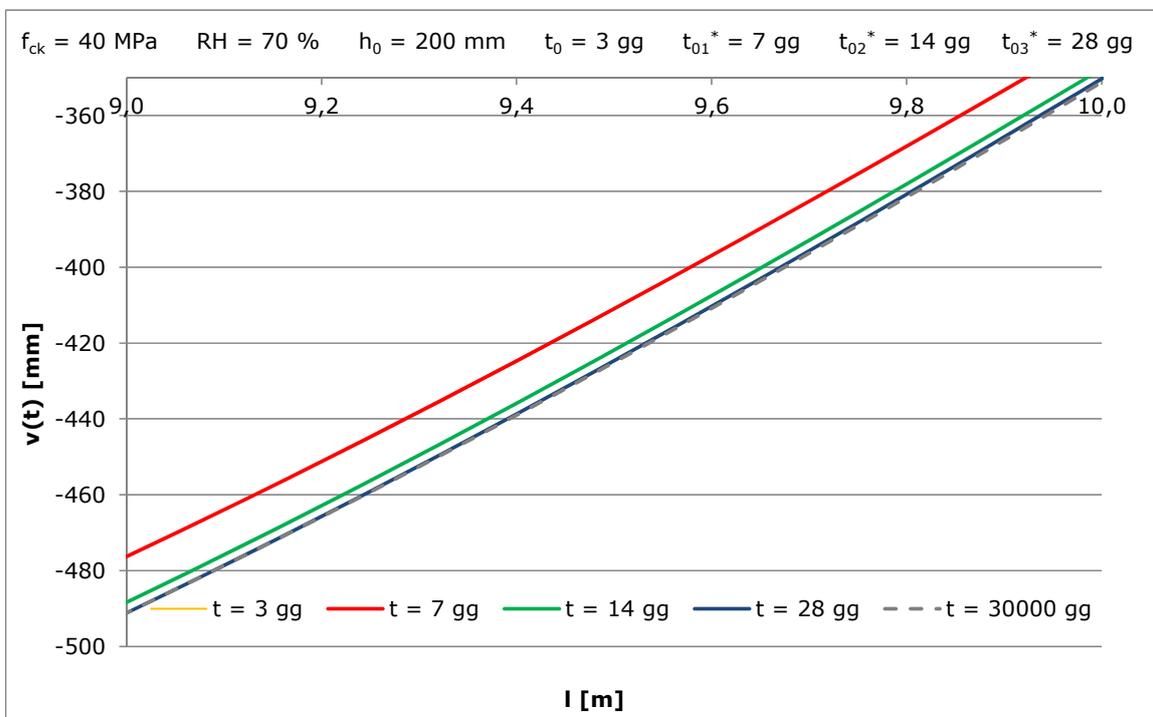


Figura 3.39 - Dettaglio deformata

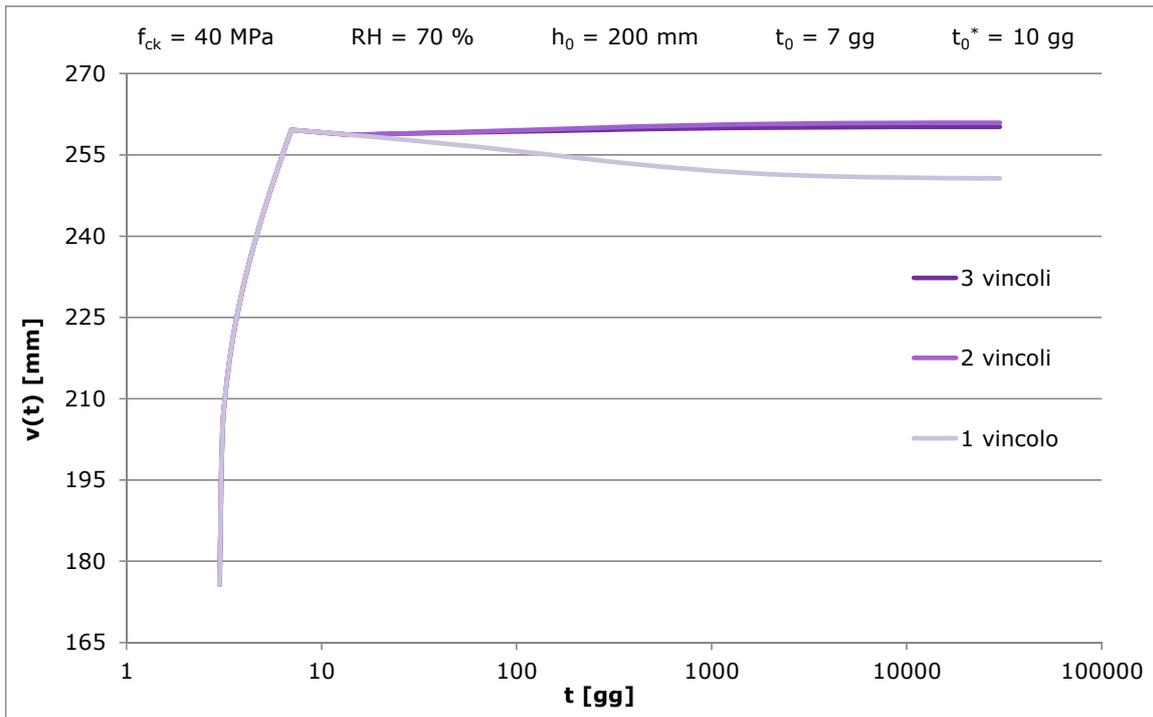


Figura 3.40 - Spostamento del punto A nel tempo

## 4 ANALISI VISCOELASTICA DI STRUTTURE OMOGENEE CON VINCOLI ELASTICI

### 4.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo si vuole analizzare lo stato di deformazione e sollecitazione di strutture costituite da una parte viscoelastica omogenea che interagisce con parti a comportamento puramente elastico. Avviene così l'accoppiamento di due materiali, dei quali il calcestruzzo è caratterizzato dalle deformazioni tensionali e atensionali (viscosità e ritiro) descritte nei capitoli precedenti, mentre l'acciaio presenta un comportamento essenzialmente elastico lineare. Data l'eterogeneità reologica dei due materiali, imponendo stati di sforzo o deformazione, lo stato tensionale nell'acciaio e nel calcestruzzo varia nel tempo, diversamente da quanto si osserverebbe nell'ipotesi di comportamento elastico di entrambi.

La trattazione delle strutture omogenee con vincoli elastici avviene dapprima considerando la presenza di un unico vincolo, trattando così il caso monodimensionale. Successivamente viene introdotta la formulazione pluridimensionale, basata sul metodo delle forze ([19] e [20], 1981; [21] 1982; [22], 1986). In tal modo si ottengono soluzioni generali del problema viscoelastico, valide per qualunque legge costitutiva del calcestruzzo e per qualsiasi situazione connessa all'analisi di strutture eterogenee, per le quali è necessario introdurre le funzioni di viscosità variate e le funzioni di rilassamento ridotte.

### 4.2 CASO MONODIMENSIONALE

Si analizza come primo caso quello di strutture omogenee aventi un solo vincolo elastico, considerando diverse situazioni: presenza di azioni statiche, applicazione di azioni geometriche oppure imposizione di vincoli posticipati. Nella risoluzione del problema si applica il metodo delle forze, poiché è quello generalmente utilizzato per l'analisi strutturale; si ricorda che in fase elastoviscosa lineare esso è equivalente al metodo degli spostamenti ([22], 1986).

#### 4.2.1 AZIONI STATICHE

##### 4.2.1.1 Soluzione esatta

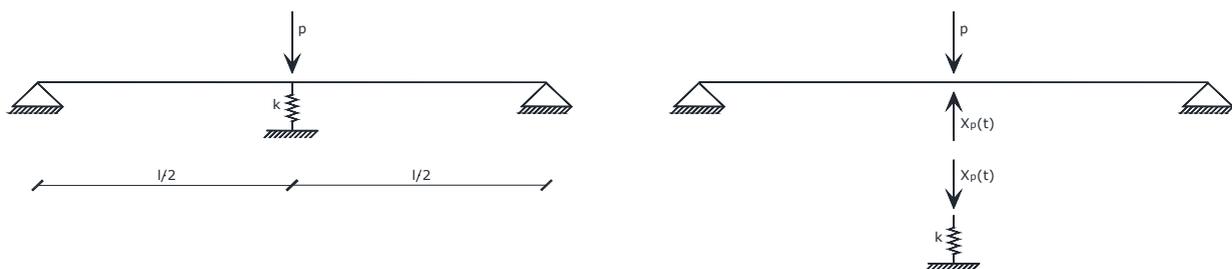


Figura 4.1 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e carico  $p$

Per il primo teorema della viscoelasticità lineare, l'equazione di congruenza al tempo  $t$  della struttura, avente una sola iperstatica posta in corrispondenza del vincolo elastico, può essere scritta come:

$$\left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \delta_{11}^{(s)} \right] + \int_{t_0}^t \left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \delta_{11}^{(s)} \right] \cdot dX(t') +$$

$$-\delta_0(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) = 0 \quad (4.1)$$

dove:

$X(t)$  = incognita, reazione del vincolo elastico sovrabbondante;

$\delta_{11}^{(c)}(t_0)$  = coefficiente di flessibilità, valutato al tempo  $t_0$  di applicazione delle azioni;

$\delta_{11}^{(s)}$  = coefficiente di flessibilità del vincolo elastico;

$\delta_0(t_0)$  = spostamento nella direzione dell' iperstatica, provocato dalle azioni applicate sulla struttura in esame resa isostatica.

Definite le quantità:

$X_e(t_0)$  = reazione all'istante  $t_0$ ;

$X_{er}(t_0)$  = reazione all'istante  $t_0$  nell'ipotesi di vincolo rigido;

sono valide le relazioni:

$$\left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)} \right] \cdot X_e(t_0) = \delta_0(t_0) \quad (4.2)$$

$$\delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot X_{er}(t_0) = \delta_0(t_0) \quad (4.3)$$

Nota dunque il fattore di accoppiamento:

$$\omega(t_0) = \frac{\delta_{11}^{(c)}(t_0)}{\delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)}} \quad (4.4)$$

si può scrivere la relazione che lega le due reazioni  $X_e(t_0)$  e  $X_{er}(t_0)$ :

$$X_e(t_0) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \quad (4.5)$$

Sostituendo le relazioni (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5) nell'equazione di congruenza (4.1) divisa per il termine  $[\delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)}]$ , essa assume la forma:

$$\begin{aligned} & [\omega(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + 1 - \omega(t_0)] \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^t [\omega(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega(t_0)] \cdot dX(t') = \\ & = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si possono definire le funzioni di viscosità variate  $J^*(t, t')$  attraverso la relazione:

$$E_c(t_0) \cdot J^*(t, t') = \omega(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega(t_0) \quad (4.7)$$

In tal modo l'espressione di congruenza (4.1) viene scritta nella forma definitiva:

$$J^*(t, t_0) \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^t J^*(t, t') \cdot dX(t') = X_{er}(t_0) \cdot \left[ J^*(t, t_0) - \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (4.8)$$

si ottiene così un'equazione integrale di Volterra, che è possibile risolvere direttamente, utilizzando come funzione risolvente la funzione di rilassamento ridotta  $R^*(t, t')$ , sfruttando la seguente proprietà:

$$R^*(t', t') \cdot J^*(t, t') + \int_{t'}^t \frac{\partial R^*(\tau, t')}{\partial \tau} \cdot J^*(t, \tau) \cdot d\tau = 1 \quad (4.9)$$

Si ricava:

$$X(t) = X_{er}(t_0) \cdot \left[ 1 - R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (4.10)$$

#### 4.2.1.2 Soluzione algebrica di Trost

Analogamente al paragrafo 4.2.1.1 si scrive l'equazione di congruenza al tempo  $t$  della struttura:

$$\delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot X(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) [1 - \chi(t, t_0)] + \delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot X(t) \cdot [1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)] + \delta_{11}^{(s)} \cdot X(t) + \\ -\delta_0(t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] = 0 \quad (4.11)$$

con

$$\chi(t, t_0) = \frac{1}{R(t, t_0) / E_c(t_0)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)} \quad (4.12)$$

Utilizzando le relazioni (4.2), (4.4), (4.5) l'equazione (4.11) si può esprimere come:

$$[1 + \omega(t_0) \cdot \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)] \cdot X(t) = \\ = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot [1 + \varphi(t, t_0) - \omega(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) + \chi(t, t_0) \cdot \omega(t_0) \cdot \varphi(t, t_0)]$$

da cui si ricava la soluzione:

$$X(t) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot \left[ 1 + \frac{\varphi(t, t_0) \cdot (1 - \omega(t_0))}{1 + \omega(t_0) \cdot \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)} \right] \quad (4.13)$$

## 4.2.2 AZIONI GEOMETRICHE

### 4.2.2.1 Soluzione esatta

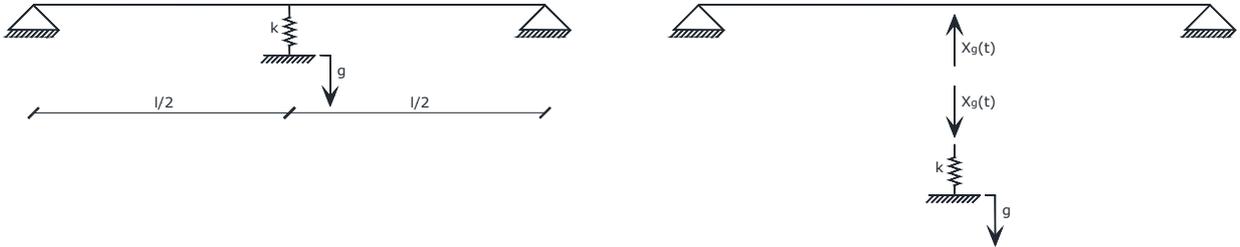


Figura 4.2 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e cedimento imposto

Definito  $g$  lo spostamento impresso alla molla nella direzione dell'azione iperstatica  $X$ , l'equazione di congruenza al tempo  $t$  risulta:

$$\left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \delta_{11}^{(s)} \right] \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \delta_{11}^{(s)} \right] \cdot dX(t') + g = 0 \quad (4.14)$$

Mentre all'istante iniziale, per  $t = t_0$ , si ha:

$$\left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)} \right] \cdot X_e(t_0) = -g \quad (4.15)$$

Vengono inoltre definite le seguenti quantità:

- fattore di accoppiamento:  $\omega(t_0) = \frac{\delta_{11}^{(c)}(t_0)}{\delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)}} \quad (4.16)$

- funzione di viscosità variata:  $E_c(t_0) \cdot J^*(t, t') = \omega(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega(t_0) \quad (4.17)$

Essendo sempre valida la proprietà (4.9), che lega le funzioni di viscosità variata a quelle di rilassamento ridotte, si può calcolare la soluzione del problema come:

$$X(t) = X_{er}(t_0) \left[ \omega(t_0) \cdot \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (4.18)$$

#### 4.2.2.2 Soluzione algebrica di Trost

Analogamente al paragrafo 4.2.2.1 si scrive l'equazione di congruenza al tempo  $t$  della struttura:

$$\begin{aligned} & \delta_{11}^{(C)}(t_0) \cdot X(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) [1 - \chi(t, t_0)] + \delta_{11}^{(C)}(t_0) \cdot X(t) \cdot [1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)] + \\ & + \delta_{11}^{(S)} \cdot X(t) + g = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Utilizzando le relazioni (4.15), (4.16) l'equazione (4.19) si può esprimere come:

$$[1 + \omega(t_0) \cdot \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)] \cdot X(t) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot [1 - \omega(t_0) \cdot \varphi(t, t_0) \cdot (1 - \chi(t, t_0))] \quad (4.20)$$

da cui si ricava la soluzione:

$$X(t) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot \frac{1 + \varphi(t, t_0) \cdot \omega(t_0) \cdot (\chi(t, t_0) - 1)}{1 + \omega(t_0) \cdot \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)} \quad (4.21)$$

### 4.2.3 CALCOLO DELLE FUNZIONI DI VISCOSITA' VARIATE E DI RILASSAMENTO RIDOTTE

#### 4.2.3.1 Funzioni di Viscosità Variate

Dalla relazione (4.7) si nota come le funzioni di viscosità variare  $J^*(t, t')$  siano legate alla funzione di viscosità  $J(t, t')$  ed al fattore di accoppiamento  $\omega$ . Per il valore  $\omega = 0$  si ha il caso di vincolo infinitamente deformabile, mentre per  $\omega = 1$  si ha il caso di vincolo rigido. Si riportano quindi i grafici delle funzioni  $J^*(t, t')$  per i due modelli analizzati nel Cap.2, sia in funzione di diversi valori di  $\omega$  che in funzione del modello ( $\omega$  fissati); anche in questo caso si considerano valori standard per i parametri utilizzati:  $f_{ck} = 40$  MPa,  $RH = 70\%$ ,  $h_0 = 200$  mm, classe di calcestruzzo standard e tempo di carico  $t_0 = 7$  giorni.

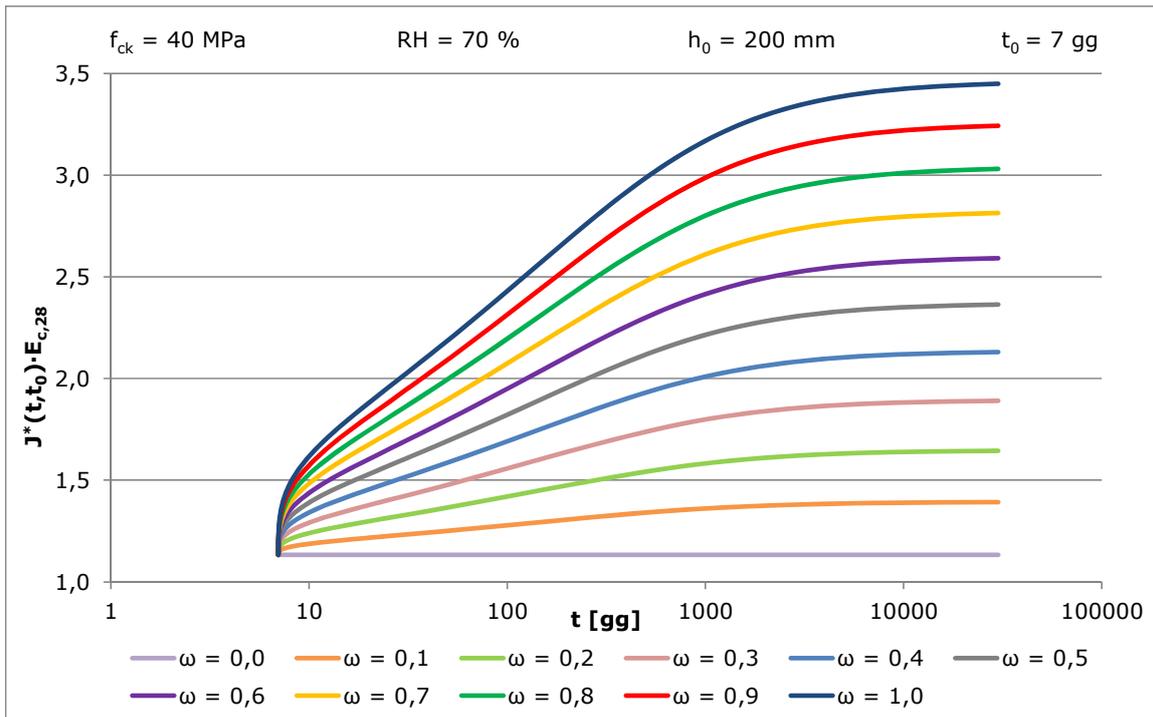


Figura 4.3 - Andamento di  $J^*(t,t_0) \cdot E_{c28}$  - CEB MC90 al variare di  $\omega$

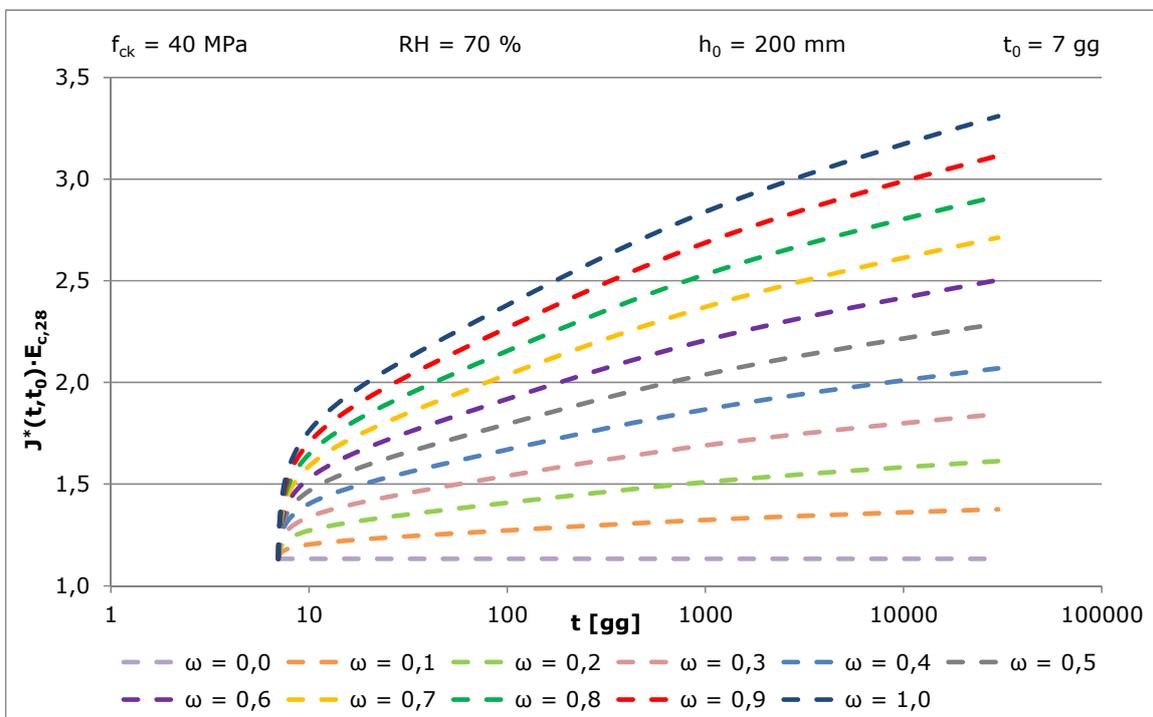
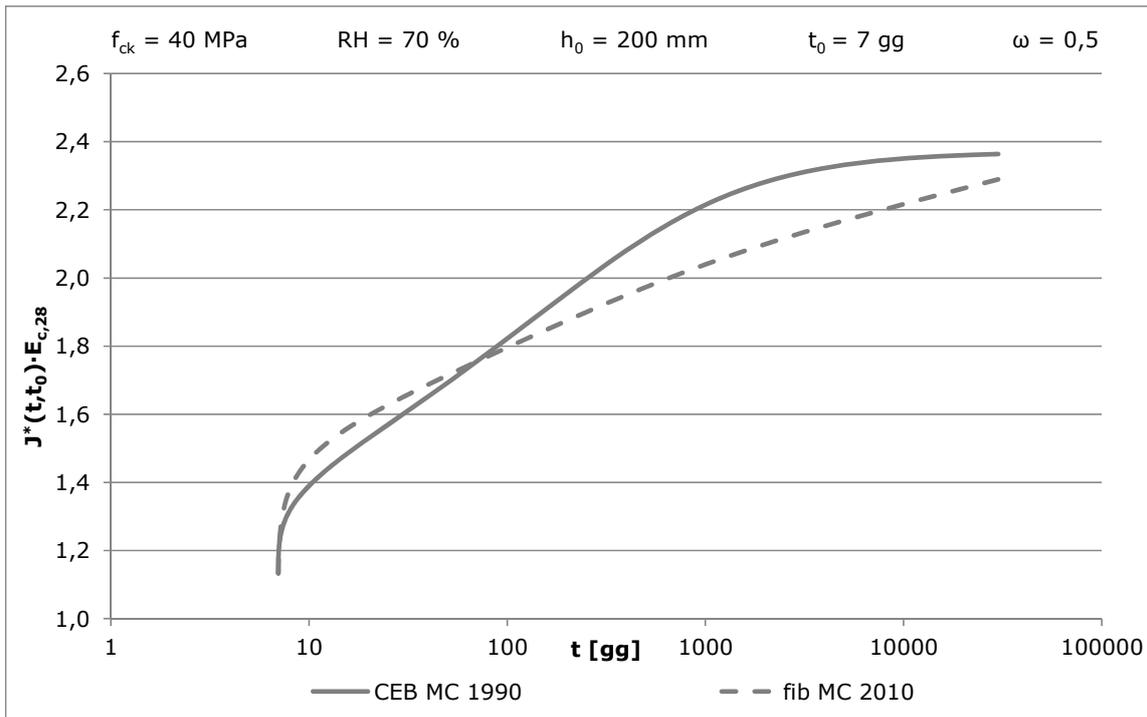


Figura 4.4 - Andamento di  $J^*(t,t_0) \cdot E_{c28}$  - Fib MC2010 al variare di  $\omega$



**Figura 4.5 - Confronto di  $J^*(t,t_0) \cdot E_{c,28}$  fissato  $\omega = 0.5$**

L'andamento nel tempo delle funzioni di viscosità variate dipende dall'istante di messa in carico  $t_0$ , dal coefficiente di accoppiamento  $\omega(t_0)$  e dal comportamento reologico del calcestruzzo.

Dai grafici riportati si nota come, in presenza di accoppiamento nullo:  $\omega(t_0) = 0$  (vincoli infinitamente deformabili) non si hanno fenomeni viscosi nel materiale, cioè la deformazione coincide in ogni istante considerato con quella elastica e la funzione di viscosità corrisponde ad una retta orizzontale; all'aumentare del coefficiente di accoppiamento le curve continuano a crescere, fino ad arrivare al caso di vincoli rigidi: in  $\omega(t_0) = 1$  si ha il raggiungimento della massima deformazione viscosa nel materiale e la funzione di viscosità variata coincide con la funzione di viscosità delle strutture omogenee a vincoli rigidi.

Entrambi i modelli partono con tangente verticale, tuttavia il CEB MC90 raggiunge l'asintoto orizzontale per tempi che tendono all'infinito mentre il fib 2010 continua a crescere monotonamente.

#### 4.2.3.2 Funzioni di Rilassamento Ridotte

Per lo studio delle strutture in esame è fondamentale la trattazione delle funzioni di rilassamento ridotte che, come indicato nell'equazione (4.9) sono determinabili risolvendo un'equazione integrale di Volterra. Anche in questo caso non risulta possibile una risoluzione per via analitica, invertendo l'equazione integrale; si è quindi deciso di utilizzare un algoritmo passo-passo, che consente di discretizzare l'integrale di Volterra ottenendo una somma integrale, nota la formula dei trapezi.

Si procede alla suddivisione dell'intervallo di integrazione dell'espressione (4.9) in un numero finito di sottointervalli in modo tale che, detti:  $t = t_k$  e  $t_0 = t_1$ , l'applicazione della regola dei trapezi porti all'equazione:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{p=1}^k \Delta R^{*(p)} \cdot [J^*(t_k, t_p) + J^*(t_k, t_{p-1})] = 1 - E_c(t_0) \cdot J^*(t_k, t_0) \quad (4.22)$$

Essendo valida, all'istante iniziale, la relazione:  $R^*(t_0, t_0) = E_c(t_0)$  e definito l'incremento della funzione di rilassamento ridotta ad un generico sottointervallo p-esimo :

$$\Delta R^{*(p)} = R^*(t_p, t_0) - R^*(t_{p-1}, t_0) \quad (4.23)$$

Scritta la sommatoria per tutti i tempi  $t_p$  in cui risulta suddiviso l'intervallo  $t_1 - t_k$  gli incrementi corrispondenti risultano determinabili, pertanto è possibile calcolare il valore della funzione di rilassamento ridotta ad un generico tempo  $t$ :

$$R^*(t_k, t_0) = E_c(t_0) + \sum_{p=1}^k \Delta R^{*(p)} \quad (4.24)$$

Si sottolinea che, avendo inizializzato  $p$  ad 1, risulta  $\Delta R^{*(1)} = 0$ , essendo  $t_1 = t_0$ .

Si riportano in seguito i grafici delle funzioni  $R^*(t, t')$  per i due modelli analizzati nel Cap.2, sia in funzione di diversi valori di  $\omega$  che in funzione del tipo di modello ( $\omega$  fissato); anche in questo caso si considerano valori standard per i parametri utilizzati:  $f_{ck} = 40$  MPa,  $RH = 70\%$ ,  $h_0 = 200$  mm, classe di calcestruzzo standard e tempo di carico  $t_0 = 7$  giorni.

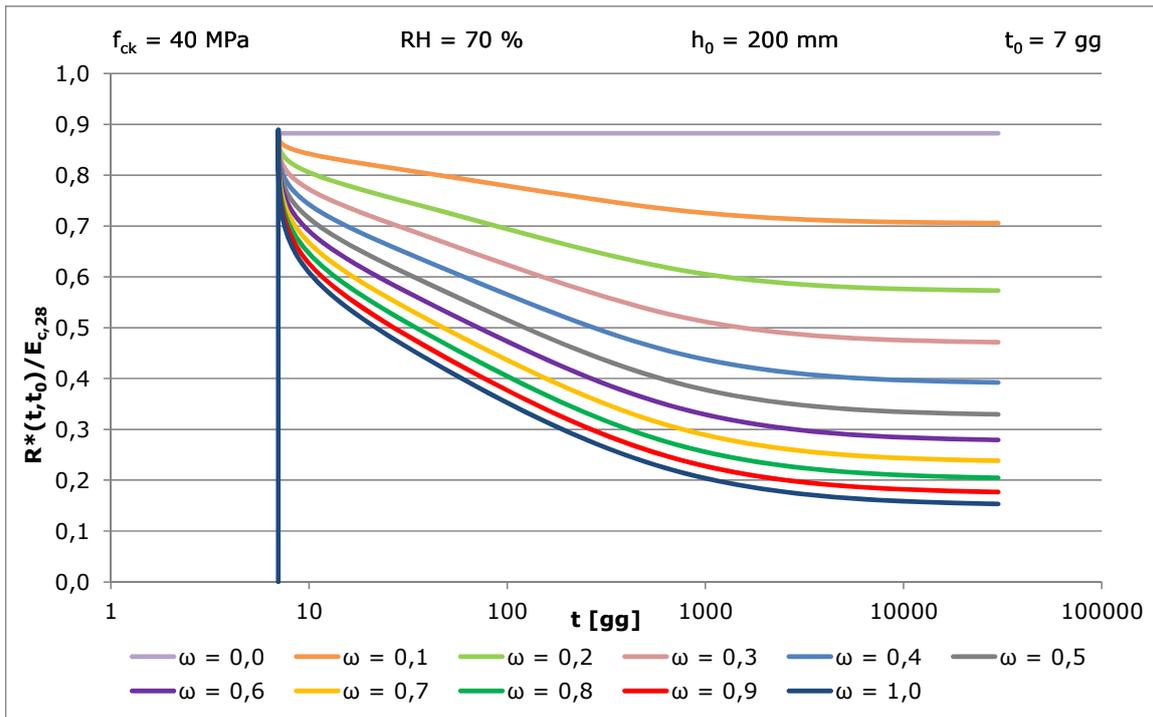


Figura 4.6 - Andamento di  $R^*(t, t') / E_{c28}$  - CEB MC90 al variare di  $\omega$

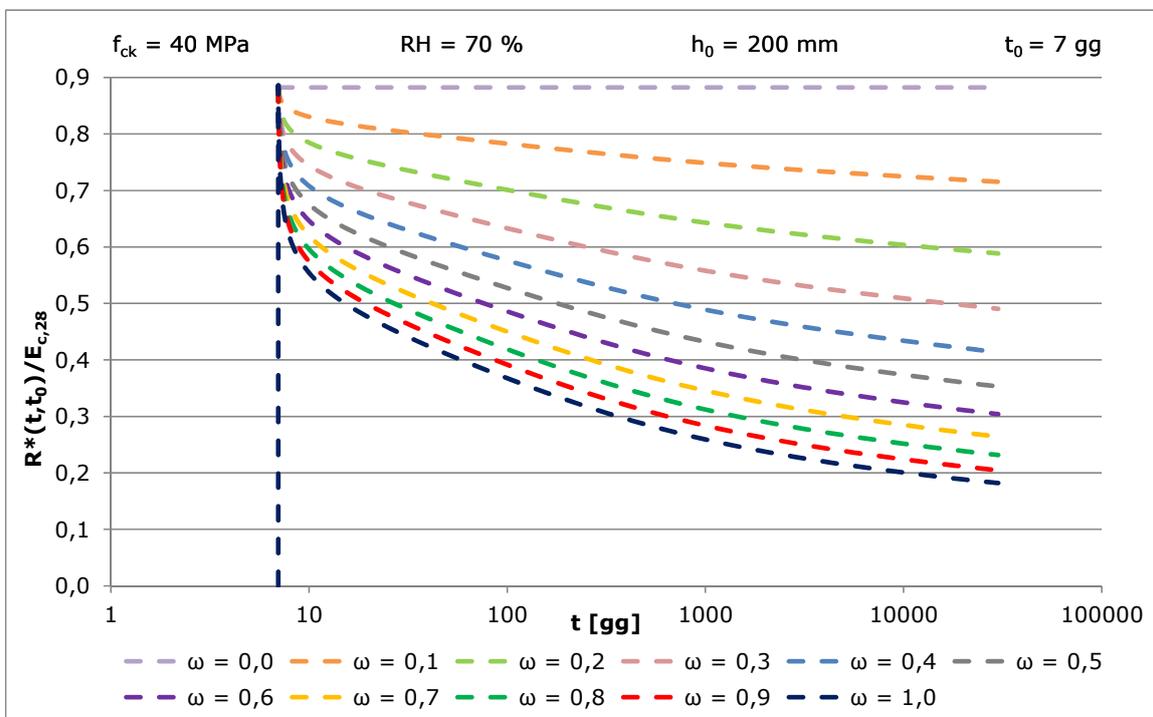
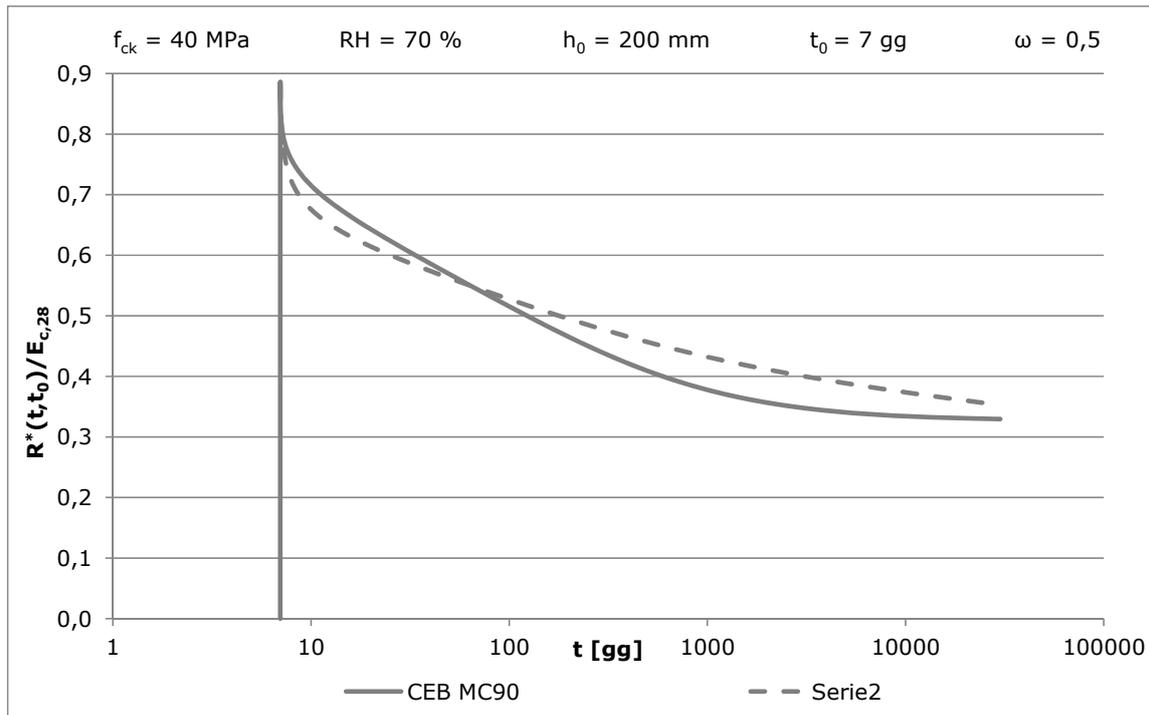


Figura 4.7 - Andamento di  $R^*(t, t') / E_{c28}$  - fib MC2010 al variare di  $\omega$



**Figura 4.8 - Confronto di  $R^*(t,t') \cdot E_{c,28}$  fissato  $\omega = 0.5$**

Anche l'andamento delle funzioni di rilassamento ridotte nel tempo dipende essenzialmente da tre parametri: il tempo di messa in carico  $t_0$ , il coefficiente di accoppiamento  $\omega(t_0)$  ed il comportamento reologico del calcestruzzo.

Dai grafici riportati si nota come, in presenza di accoppiamento nullo:  $\omega(t_0) = 0$  (vincoli infinitamente deformabili) non si ha rilassamento del materiale, cioè la tensione in esso rimane costante e la funzione di rilassamento corrisponde ad una retta orizzontale; all'aumentare del coefficiente di accoppiamento le curve continuano ad abbassarsi, fino ad arrivare al caso di vincoli rigidi:  $\omega(t_0) = 1$ , dove si ha il massimo abbassamento di tensione nel materiale.

Entrambi i modelli presentano un decremento rapido negli istanti successivi all'applicazione del cedimento; la funzione di rilassamento ridotta secondo il CEB MC90 raggiunge un valore asintotico non nullo per tempi che tendono all'infinito; mentre per il fib MC2010 tende ad annullarsi.

#### 4.2.4 VINCOLI POSTICIPATI

##### 4.2.4.1 Soluzione esatta

Si considera una struttura viscoelastica omogenea alla quale si applica un sistema di azioni statiche al tempo  $t = t_0$ , costanti; al tempo  $t_0^* > t_0$  si impone alla medesima struttura un vincolo elastico non forzato.

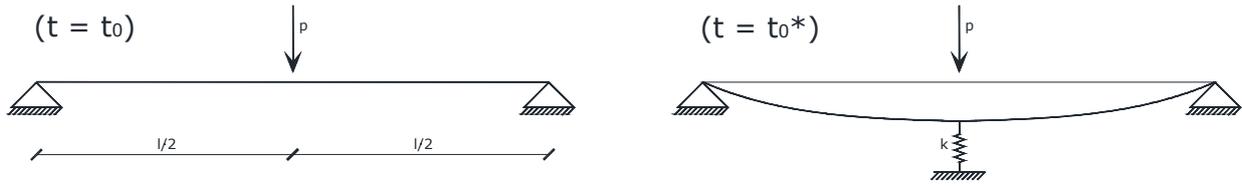


Figura 4.9 - Struttura omogenea con vincolo posticipato soggetta a carichi costanti

Per il primo teorema della viscoelasticità lineare l'equazione di congruenza può essere ricavata dalla relazione utilizzata per le azioni statiche, noto che al tempo  $t_0^*$  di applicazione della reazione  $X$ , coincidente col tempo di imposizione dei vincoli, non si devono computare gli effetti delle azioni esterne, da valutarsi solo per  $t > t_0^*$ .

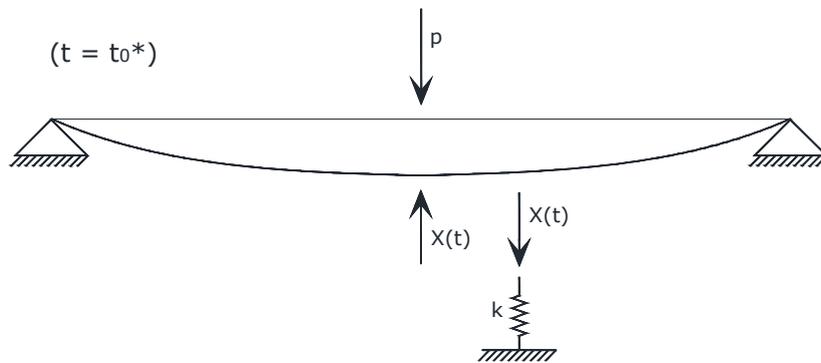


Figura 4.10 - Reazione del vincolo posticipato

Si scrive l'equazione di congruenza al tempo  $t$ :

$$\int_{t_0^*}^t [\delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \delta_{11}^{(s)}] \cdot dX(t') - \delta_0(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t_0^*, t_0)] = 0 \quad (4.25)$$

Se i vincoli fossero preesistenti rispetto alle azioni, risulterebbero valide le seguenti relazioni:

$$[\delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)}] \cdot X_e(t_0) = \delta_0(t_0) \quad (4.26)$$

$$\delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot X_{er}(t_0) = \delta_0(t_0) \quad (4.27)$$

Definiti inoltre:

- ratore di accoppiamento:  $\omega(t_0) = \frac{\delta_{11}^{(c)}(t_0)}{\delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)}} \quad (4.28)$

- relazione che lega i valori  $X_e(t_0)$  e  $X_{er}(t_0)$ :  $X_e(t_0) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \quad (4.29)$

- funzione di viscosità variata:  $E_c(t_0) \cdot J^*(t, t_0) = \omega(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + 1 - \omega(t_0) \quad (4.30)$

L'equazione di congruenza (4.25) si può esprimere come:

$$\int_{t_0^*}^t J^*(t, t') \cdot dX(t') = X_{er}(t_0) \cdot [J^*(t, t_0) - J^*(t_0^*, t_0)] \quad (4.31)$$

Considerando la relazione tra  $J^*(t, t')$  e  $R^*(t, t')$  data dall'equazione (4.9) e la definizione di funzione di viscosità variata (4.30) con  $t_0 = t_0^*$ , si ricava la soluzione:

$$X(t) = X_{er}(t_0) \cdot \left[ \int_{t_0^*}^t \frac{\partial J^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R^*(t, t') \cdot dt' \right] \quad (4.32)$$

Se il vincolo aggiuntivo viene posto immediatamente dopo l'applicazione dei carichi, con  $t_0^* = t_0 + \Delta t$ , la relazione integrale tra le funzioni di viscosità e rilassamento, per la teoria viscoelastica lineare, risulta:

$$\int_{t_0^*}^t \frac{\partial J^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R^*(t, t') \cdot dt' = 1 - J^*(t_0, t_0) \cdot R^*(t, t_0) \quad (4.33)$$

Noto che  $J^*(t_0^*, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)}$ , la soluzione risulta:

$$X(t) = \left[ 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot X_{er}(t_0) \quad (4.34)$$

Dall'equazione (4.32) si può definire la funzione di riacquisto variata:

$$\xi^*(t, t_0, t_0^*) = \int_{t_0^*}^t \frac{\partial J^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R^*(t, t_0) \cdot dt' \quad (4.35)$$

Per il calcolo di tale funzione però, non essendo possibile effettuare l'integrazione passo-passo due volte (una per risolvere l'equazione integrale di Volterra e l'altra per calcolare i valori  $R^*(t, t')$  in tutti gli istanti  $t'$ ), si utilizza l'equazione (4.31) considerando che  $X(t_0^*)=0$ :

$$\int_{t_0^*}^t d\xi^*(t', t_0, t_0^*) \cdot J^*(t, t') = [J^*(t, t_0) - J^*(t_0^*, t_0)] \quad (4.36)$$

Tale espressione è un'equazione integrale di Volterra, che può essere risolta per via numerica attraverso la procedura passo-passo descritta nel Cap.2, che si basa sull'approssimazione dell'integrale di sovrapposizione in una somma finita con la regola dei trapezi.

Si suddivide il tempo  $t$  (pari a 30000giorni), in intervalli finiti  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  con  $i=1\dots k$ , dove  $t_0^* = t_1 =$  tempo di posizionamento del vincolo posticipato,  $\Delta t_1 = 0 \rightarrow \Delta \xi^*(t_1, t_0, t_0^*) = 0$ ; l'espressione (4.26) diventa:

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \Delta \xi^*(t_i, t_0, t_0^*) \cdot [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})] = [J(t_k, t_0) - J(t_0^*, t_0)] \quad (4.37)$$

Dalla quale si determina:

$$\text{per } k > 1 \quad \Delta \xi^*(t_k, t_0, t_0^*) = \frac{2 \cdot [J^*(t_k, t_0) - J^*(t_0^*, t_0)] - \sum_{i=1}^{k-1} [J^*(t_k, t_i) + J^*(t_k, t_{i-1})] \cdot \Delta \xi^*(t_i, t_0, t_0^*)}{[J^*(t_k, t_k) - J^*(t_k, t_{k-1})]}$$

$$\text{per } k=1 \quad \Delta \xi^*(t_k, t_0, t_0^*) = 0 \quad (4.38)$$

Anche la funzione di riacquisto variata dipende dai due modelli viscoelastici lineari presentati nel Cap.2 e dal fattore di accoppiamento  $\omega(t_0)$ , pertanto si riportano di seguito gli andamenti di  $\xi^*(t, t_0, t_0^*)$  per ciascuna modellazione, considerando dei valori standard per i parametri di base ( $f_{ck} = 40$  MPa,  $RH = 70\%$ ,  $h_0 = 200$  mm, classe di calcestruzzo standard, tempo di carico  $t_0 = 7$  giorni,  $t_0^* = 28$  giorni) e diversi valori di  $\omega(t_0)$ ; si esegue infine un confronto tra i modelli per  $\omega(t_0)$  fissato.

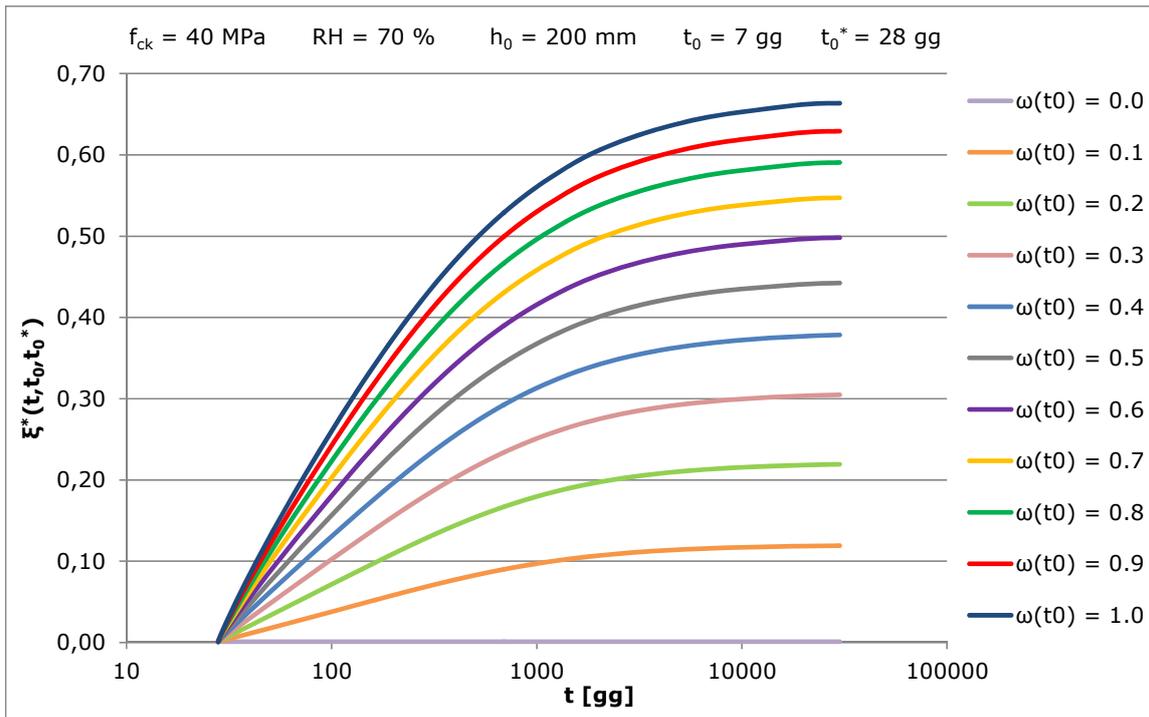


Figura 4.11 - Andamento di  $\xi^*(t,7,28)$  - CEB MC90 al variare di  $\omega$

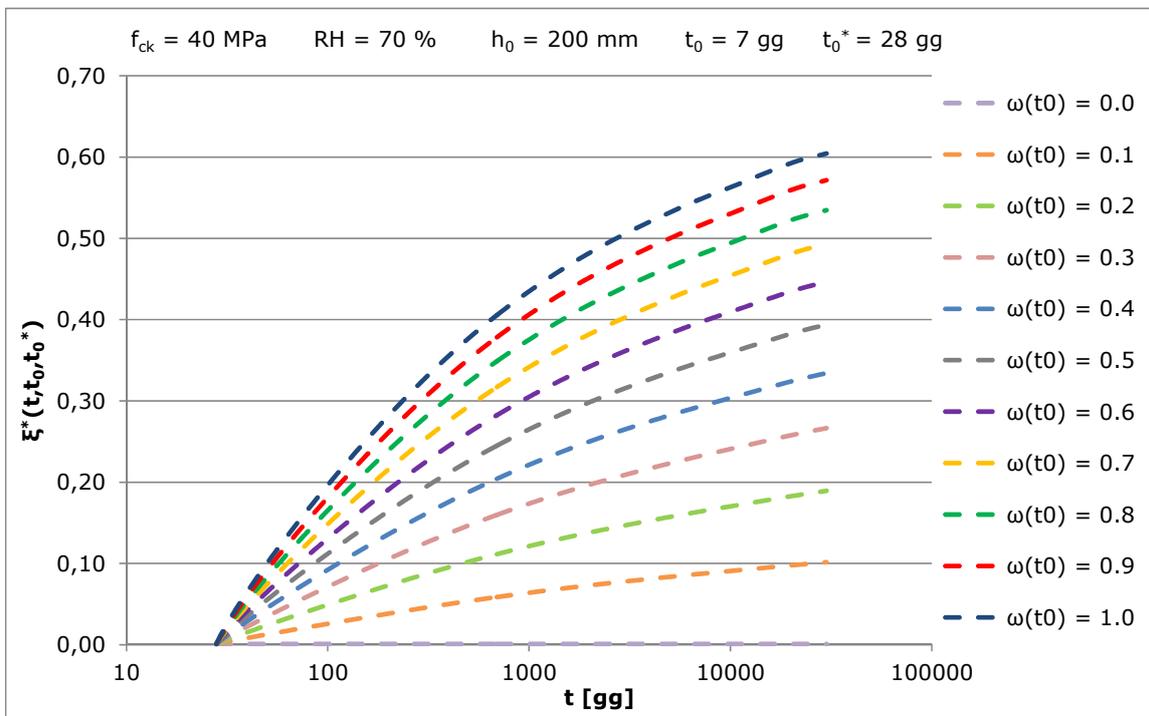


Figura 4.12 - Andamento di  $\xi^*(t,7,28)$  - Fib MC2010 al variare di  $\omega$

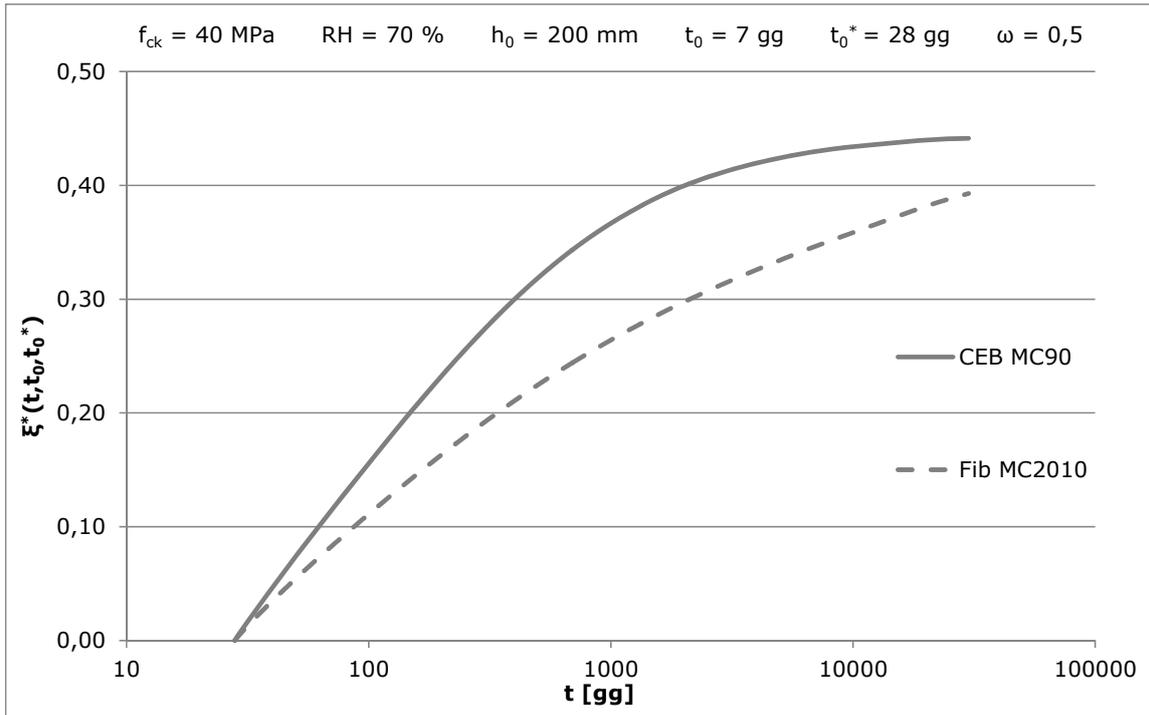


Figura 4.13 - Confronto di  $\xi^*(t,7,28)$  fissato  $\omega = 0.5$

#### 4.2.4.2 Soluzione algebrica di Trost

Si considera una struttura analoga a quella del paragrafo 4.2.4.1 e si scrive l'equazione di congruenza al tempo  $t$ , utilizzando la formulazione di Trost:

$$\left[ \delta_{11}^{(C)}(t_0^*) \cdot (1 + \chi(t, t_0^*) \cdot \varphi(t, t_0^*)) + \delta_{11}^{(S)} \right] \cdot X(t) - \delta_0(t_0) \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)] = 0 \quad (4.39)$$

con

$$\chi(t, t_0^*) = \frac{1}{R(t, t_0^*) / E_c(t_0^*)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0^*)} \quad (4.40)$$

Ipotizzando  $E_c(t_0^*) \cong E_c(t_0)$  (ipotesi accettabile nel caso in cui  $(t_0, t_0^*) > 28$  giorni poiché dal ventottesimo giorno in poi il modulo elastico si modifica poco nel tempo) e utilizzando le relazioni (4.27), (4.28), (4.29) l'equazione (4.39) si può esprimere come:

$$[\omega(t_0) \cdot (1 + \chi(t, t_0^*) \cdot \varphi(t, t_0^*) + 1 - \omega(t_0))] \cdot X(t) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)]$$

da cui si ricava la soluzione:

$$X(t) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot \frac{\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)}{1 + \omega(t_0) \cdot \chi(t, t_0^*) \cdot \varphi(t, t_0^*)} \quad (4.41)$$

#### 4.2.5 CONFRONTO FRA LE SOLUZIONI PROPOSTE

Per stabilire delle relazioni tra le soluzioni proposte nei casi di azioni statiche, azioni geometriche e vincoli posticipati, si possono definire i seguenti coefficienti:

$$C_P(t, t_0) = 1 - (1 - \omega(t_0)) \cdot \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (4.42)$$

$$C_G(t, t_0) = \omega(t_0) \cdot \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (4.43)$$

$$\bar{C}_P(t, t_0) = 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (4.44)$$

Le soluzioni dei rispettivi problemi assumono dunque la forma:

$$X(t) = C_P(t, t_0) \cdot X_{er}(t_0) \quad (4.45)$$

$$X(t) = C_G(t, t_0) \cdot X_{er}(t_0) \quad (4.46)$$

$$X(t) = \bar{C}_P(t, t_0) \cdot X_{er}(t_0) \quad (4.47)$$

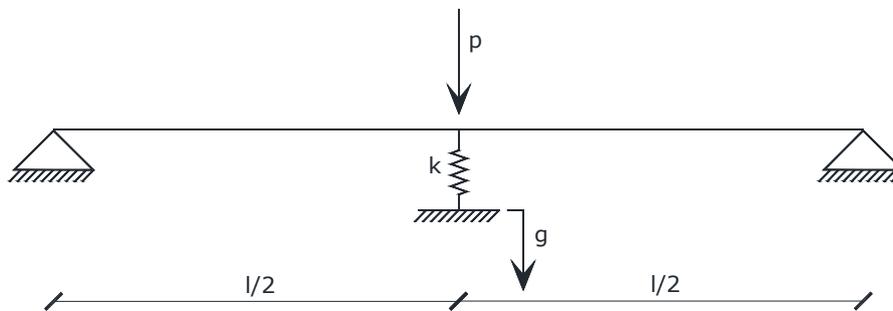
Dalle relazioni esistenti tra i coefficienti definiti in precedenza si ricava che:

$$C_P(t, t_0) = C_G(t, t_0) + 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (4.48)$$

$$\bar{C}_p(t, t_0) = 1 - \frac{C_g(t, t_0)}{\omega(t_0)} \quad (4.49)$$

$$C_p(t, t_0) = \omega(t_0) \cdot [1 - \bar{C}_p(t, t_0)] + 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (4.50)$$

si evidenzia dunque la stretta interconnessione tra i tre problemi studiati e la possibilità di analizzare situazioni miste nelle quali siano contemporaneamente presenti i tre casi proposti. Siccome sia la soluzione per azioni statiche che quella per vincoli posticipati dipendono dalla funzione  $C_g(t, t_0)$  (4.48, 4.49), risulta semplice assegnare valori alle azioni geometriche tali da rendere costanti nel tempo le soluzioni per azioni statiche o vincoli posticipati, garantendo l'invariabilità delle reazioni.



**Figura 4.14 - Struttura omogenea con vincolo elastico, carico e cedimento imposti**

Si considera la struttura in Figura 4.14 soggetta ad azioni statiche fissate ed azione geometrica arbitraria, applicate al tempo  $t_0$ .

Definite:

$X_p(t)$  = incognita iperstatica al tempo  $t$  prodotta dall'azione statica;

$X_g(t)$  = incognita iperstatica prodotta dall'azione geometrica arbitraria;

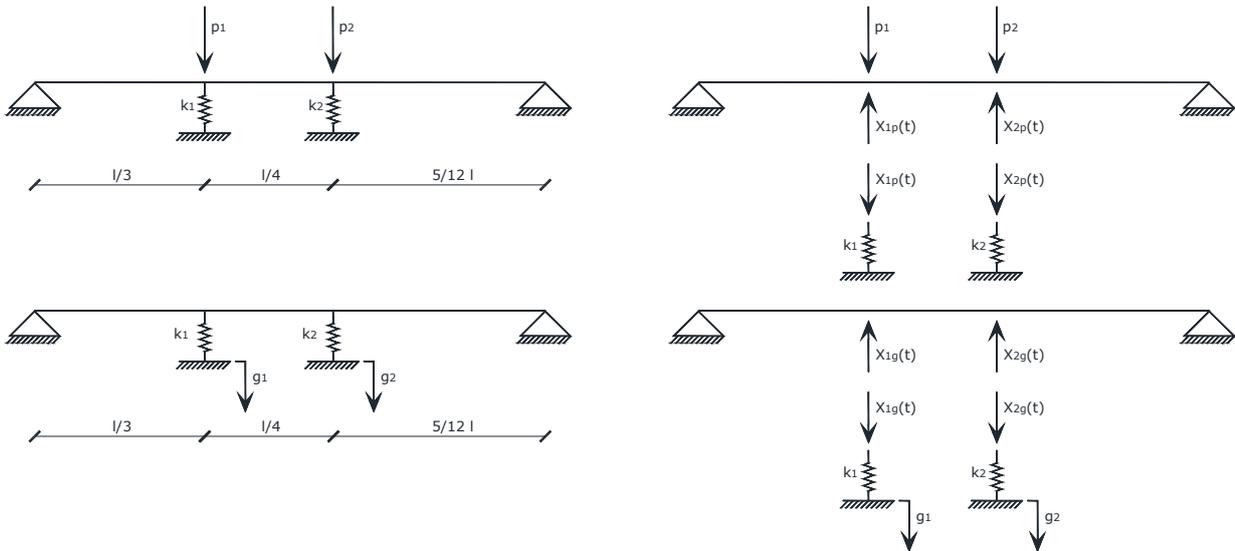


Figura 4.15 - Sovrapposizione degli effetti

la soluzione al tempo  $t$  risulta:

$$\begin{aligned}
 X(t) &= X_p(t) + X_g(t) = \left[ c_g(t, t_0) + 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot X_{per}(t_0) + c_g(t, t_0) \cdot X_{ger}(t_0) = \\
 &= X_{per}(t_0) + \left[ \omega(t_0) \cdot \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot X_{per}(t_0) + \omega(t_0) \cdot \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \cdot X_{ger}(t_0)
 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Tale espressione, calcolata utilizzando le relazioni (4.48), (4.42), (4.43) fornisce una soluzione costante nel tempo  $X(t) = X_{per}(t_0)$  solo se:

$$X_{ger}(t_0) = \left( \frac{1}{\omega(t_0)} - 1 \right) \cdot X_{per}(t_0) \quad \rightarrow \quad X_{ge}(t_0) = \left( 1 - \omega(t_0) \right) \cdot X_{per}(t_0) \quad (4.52)$$

Da quest'ultima equazione è possibile determinare il valore  $g_s$ , cioè lo spostamento geometrico da imporre al vincolo elastico, mediante l'equazione:

$$\left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)} \right] \cdot X_{ge}(t_0) = -g_s \quad \rightarrow \quad g_s = -\delta_{11}^{(s)} \cdot X_{per}(t_0) \quad (4.53)$$

Risulta dunque che, tramite l'imposizione della distorsione  $g_s$ , il vincolo si comporta inizialmente come rigido, in modo da mantenere nel tempo l'invariabilità della reazione  $X(t) = X_{per}(t_0)$ . Operando questo forzamento la struttura, nonostante sia eterogenea, si comporta rispettando il I Teorema della viscoelasticità lineare.

## 4.2.6 ESEMPI APPLICATIVI

### 4.2.6.1 Azioni statiche

Si considera la seguente trave con rigidità flessionale  $EI$ , avente un vincolo elastico in mezzzeria rappresentato da una molla di rigidità  $k = c \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$  e sottoposta ad un carico concentrato  $Q$  costante nel tempo.

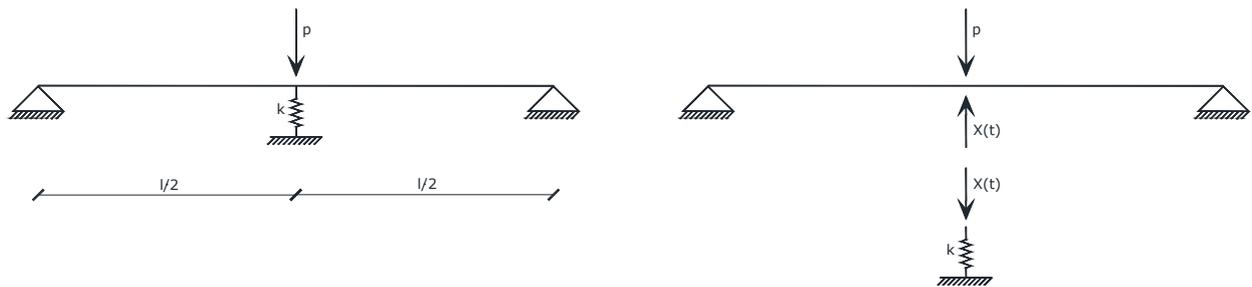


Figura 4.16 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e carico  $Q$

Si considera come iperstatica la forza agente nel vincolo elastico (vedi Figura 4.16), pertanto la soluzione del problema proposto è data dall'equazione (4.10):

$$X(t) = X_{er}(t_0) \cdot \left[ 1 - R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right]$$

essendo:

$X_{er}(t_0) = p$ , reazione a vincolo rigido; infatti ponendo un vincolo rigido al posto della molla risulta evidente che il carico viene preso totalmente dall'appoggio

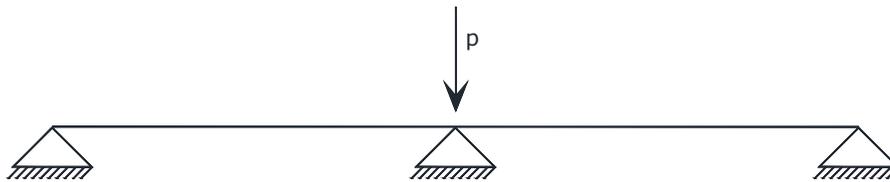


Figura 4.17 - Reazione iperstatica a vincolo rigido

$$\omega(t_0) = \frac{\delta_{11}^{(c)}(t_0)}{\delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)}} = \frac{\frac{l^3}{48 \cdot E_c(t_0) \cdot I}}{\frac{l^3}{48 \cdot E_c(t_0) \cdot I} + \frac{1}{k}} = \frac{c}{c + 48}$$

Si riporta in seguito l'andamento della funzione  $\omega(c)$ :

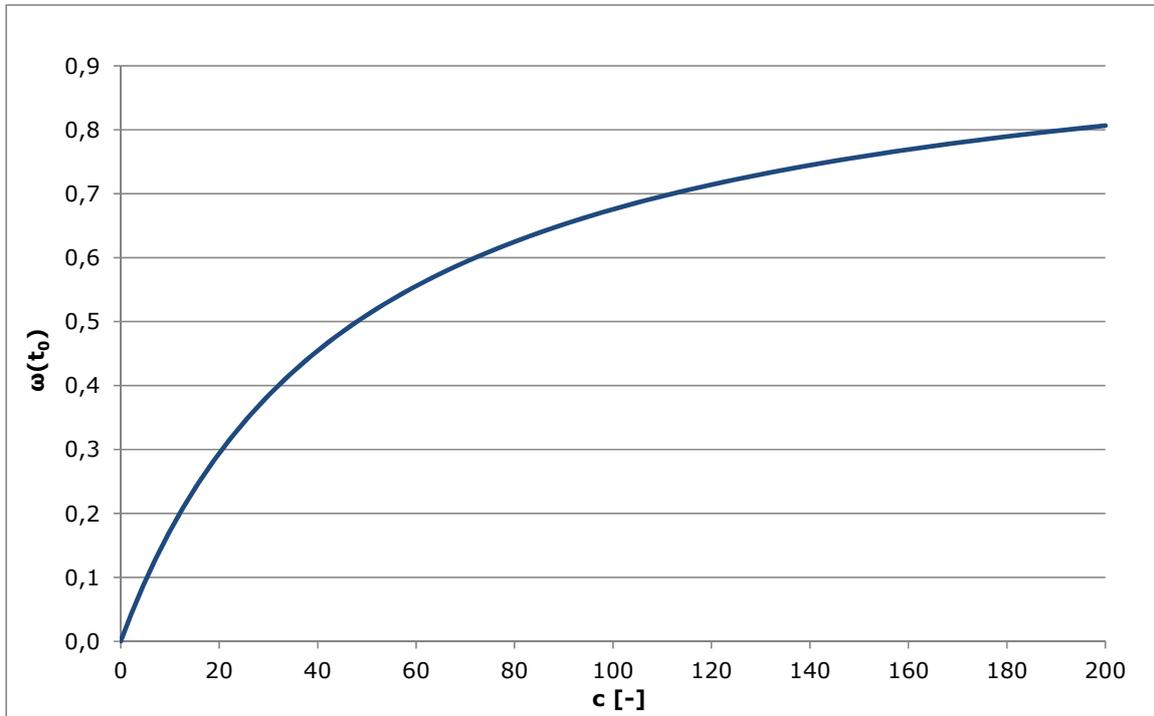


Figura 4.18 - Andamento del fattore di accoppiamento  $\omega$  al variare di  $c$

Si può quindi calcolare l'azione iperstatica come:

$$X(t) = Q \cdot \left[ 1 - R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \frac{c}{c + 48}}{E_c(t_0)} \right]$$

e diagrammare l'andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  in funzione di diversi valori della rigidità del vincolo elastico, al variare di  $c$ :

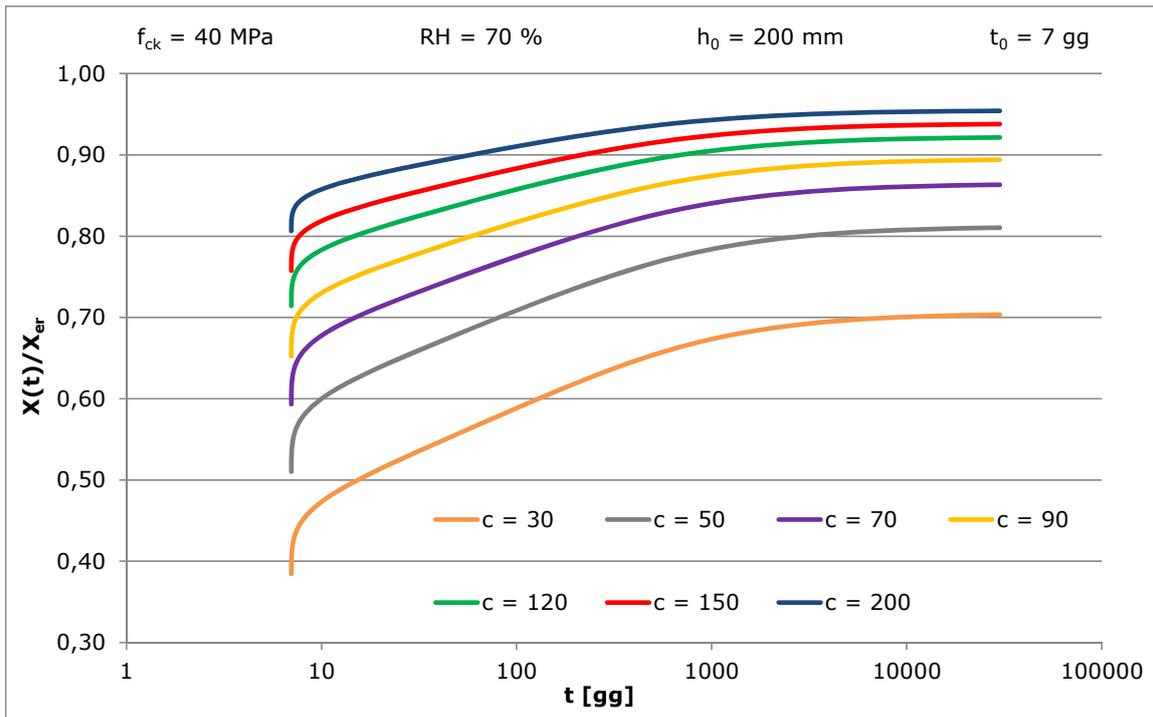


Figura 4.19 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

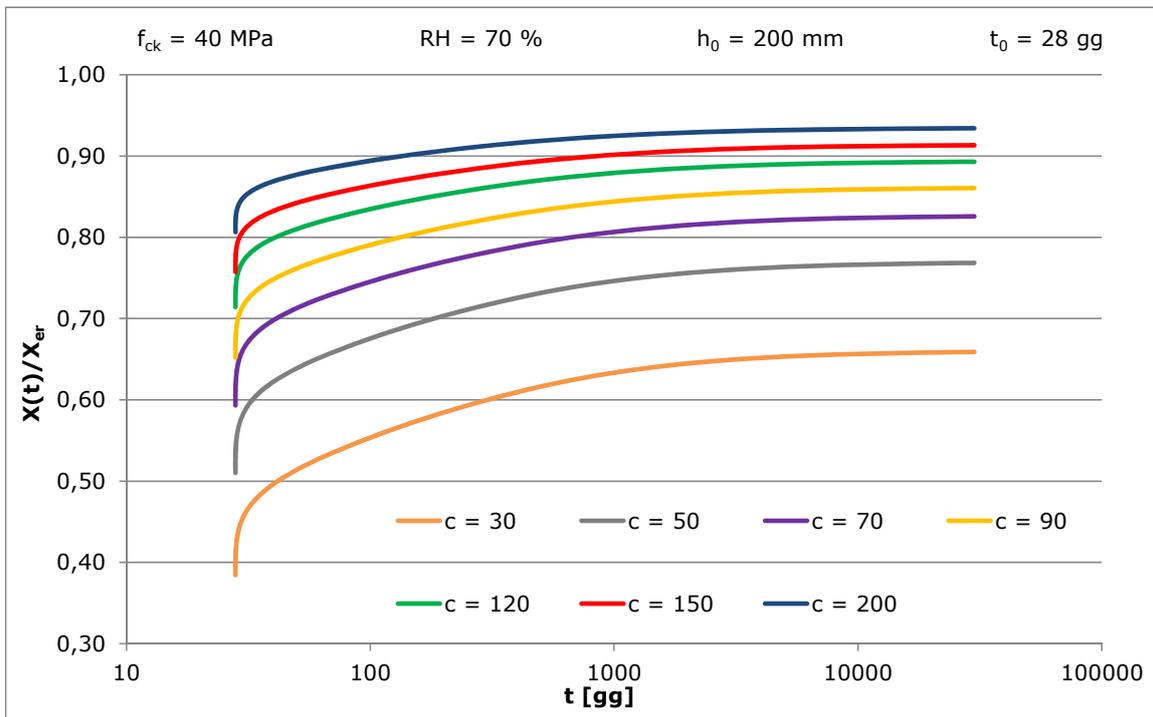


Figura 4.20 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

L'azione flettente in mezzeria di trave risulta pari a:

$$M(t) = \frac{Q \cdot l}{4} - \frac{X(t) \cdot l}{4}$$

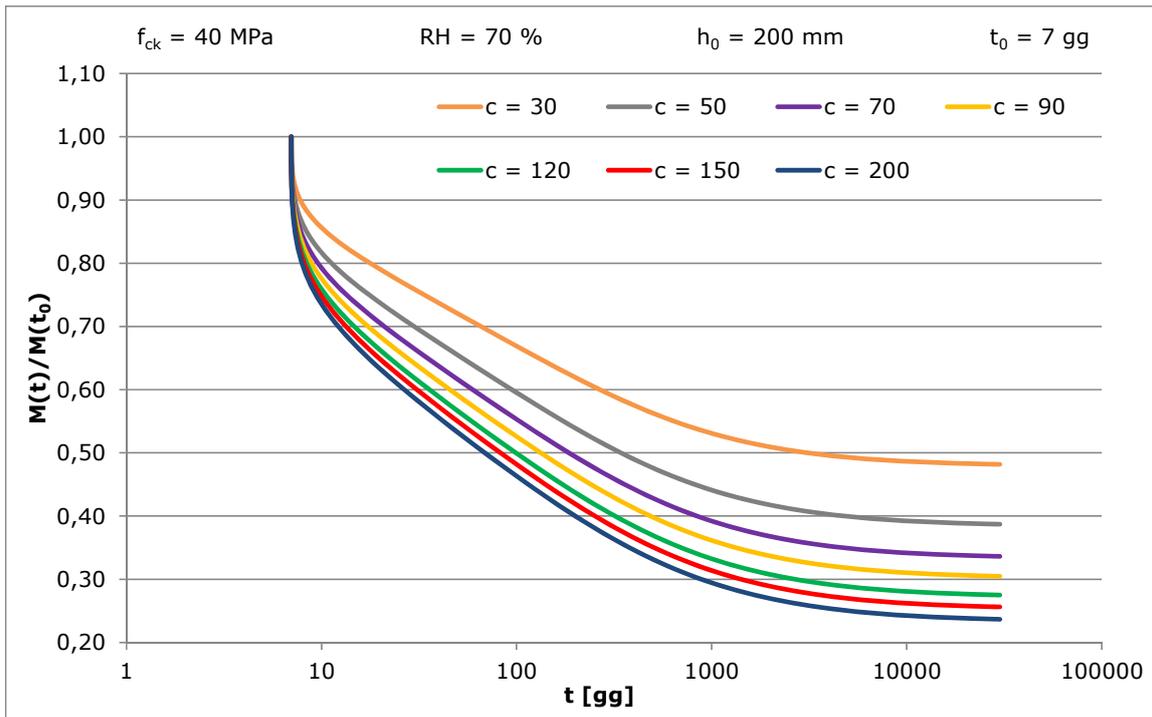


Figura 4.21 - Andamento di  $M(t)/M(t_0)$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

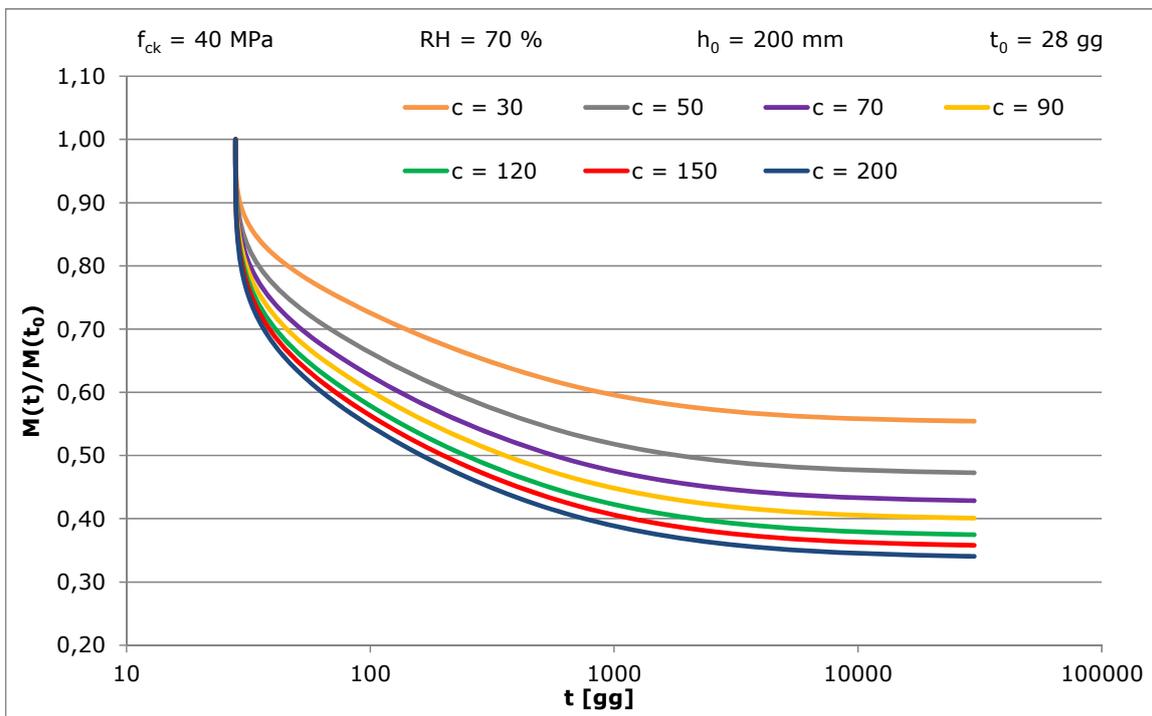


Figura 4.22 - Andamento di  $M(t)/M(t_0)$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

Dalle Figura 4.21 - Figura 4.22 si evince che al diminuire dell'età del calcestruzzo all'istante di messa in carico il momento totale agente sulla sezione di mezzeria diminuisce; ciò è imputabile alla maggiore deformabilità del materiale in giovane età che comporta una maggiore reazione del vincolo elastico.

All'aumentare del parametro  $c$  la struttura tende alla condizione di vincolo rigido, per questo il rapporto  $X(t)/X_{er}$  tende ad assumere valore unitario. Per valori bassi di  $c$  si ha un vincolo sempre più deformabile, perciò  $M(t)/M(t_0)$  rimane prossimo all'unità.

Utilizzando la (4.13) si ricavano le soluzioni di Trost ( $X = X(t, t_0)$ ,  $X = 0,8$ ) che risultano essere molto prossime a quella esatta

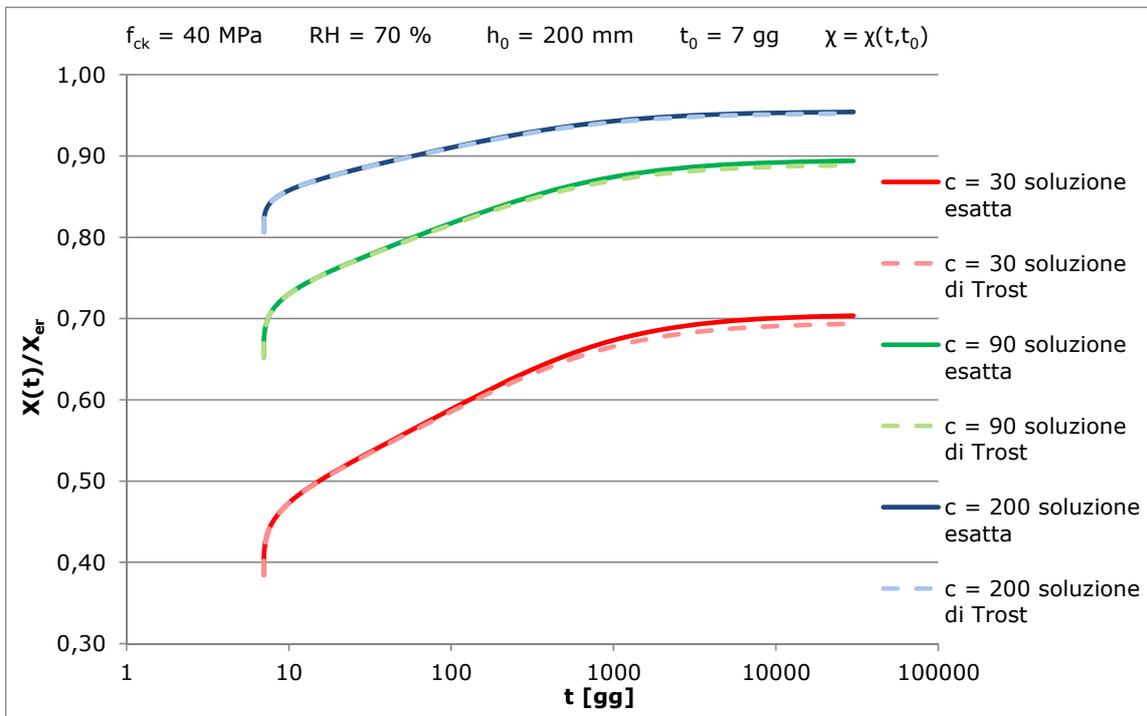


Figura 4.23 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  con le soluzioni esatta e di Trost

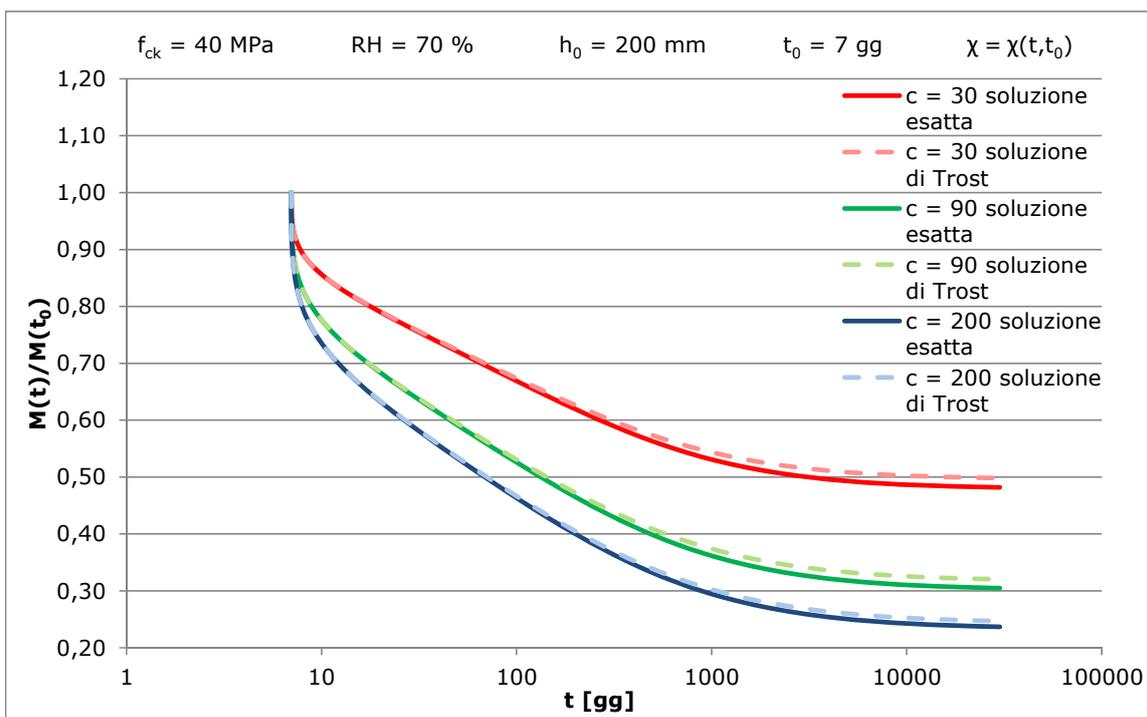


Figura 4.24 - Andamento di  $M(t)/M(t_0)$  con le soluzioni esatta e di Trost

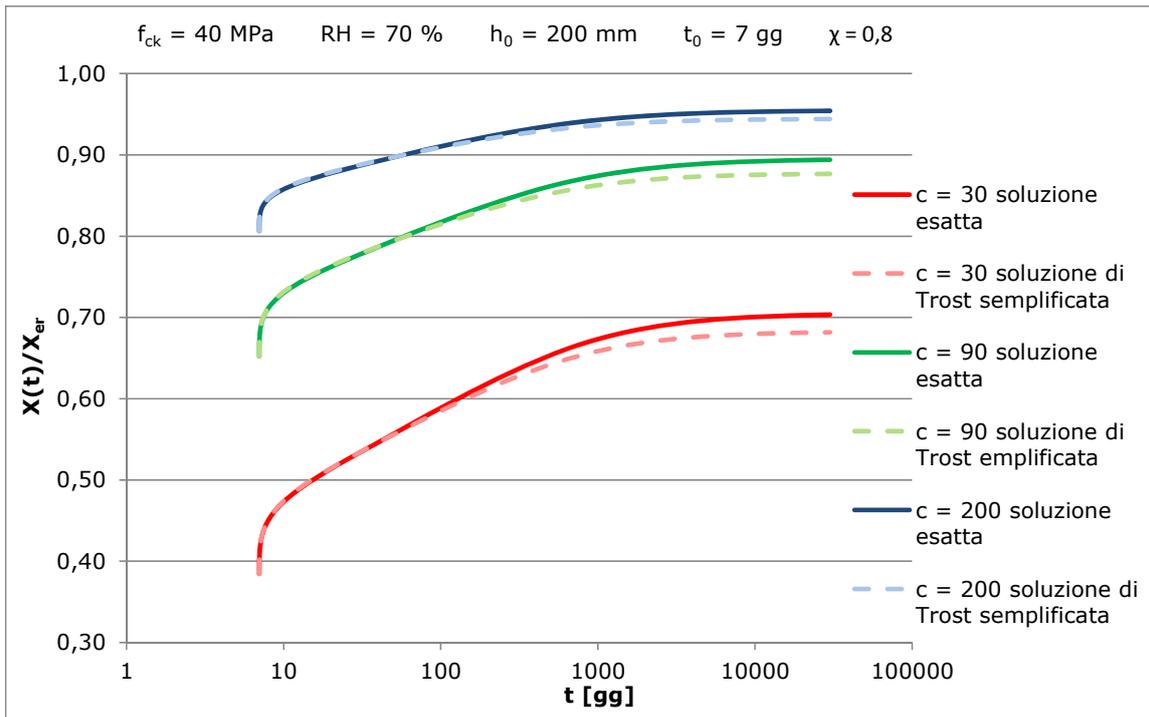


Figura 4.25 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  con le soluzioni esatta e di Trost semplificata

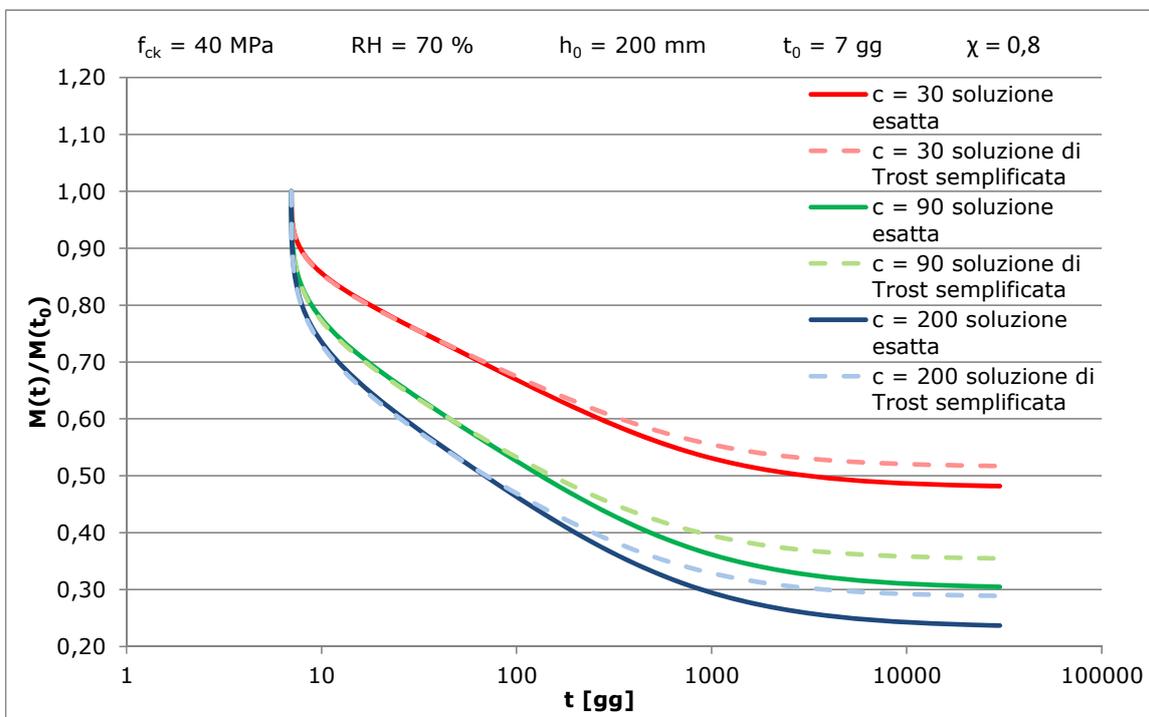


Figura 4.26 - Andamento di  $M(t)/M(t_0)$  con le soluzioni esatta e di Trost semplificata

#### 4.2.6.2 Azioni geometriche

Si considera la medesima trave con rigidezza flessionale  $EI$ , avente un vincolo elastico in mezzzeria rappresentato da una molla di rigidezza  $k = c \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$ , ma sottoposta ad un cedimento  $g$ .

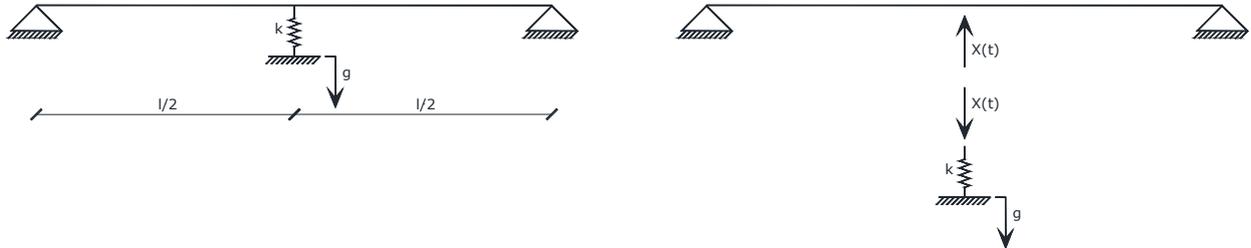


Figura 4.27 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e cedimento imposto

Si sceglie come iperstatica la forza agente nel vincolo elastico (Figura 4.27), pertanto la soluzione del problema proposto è data dall'equazione (4.18):

$$X(t) = X_{er}(t_0) \left[ \omega(t_0) \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right]$$

essendo:

$$X_{er}(t_0) = - \frac{g}{\delta_{11}^{(c)}} = - \frac{g}{\frac{l^3}{48 \cdot E_c(t_0) \cdot I}}$$

$$\omega(t_0) = \frac{\delta_{11}^{(c)}(t_0)}{\delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)}} = \frac{\frac{l^3}{48 \cdot E_c(t_0) \cdot I}}{\frac{l^3}{48 \cdot E_c(t_0) \cdot I} + \frac{1}{k}} = \frac{c}{c + 48}$$

Si può quindi calcolare l'azione iperstatica utilizzando la funzione di rilassamento ridotta opportuna e diagrammare l'andamento nel tempo di  $X(t) / X_{er}$  in funzione di diversi valori della rigidezza del vincolo elastico, al variare di  $c$ .

Essendo inoltre l'azione flettente in mezzzeria di trave pari a:

$$M(t) = \frac{X(t) \cdot l}{4}$$

è evidente che l'andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  al variare di  $c$  risulta isomorfo rispetto alla funzione  $R^*(t, t_0)/E_c(t_0)$  ed al rapporto  $X(t)/X_{er}$ , come si vede in figura:

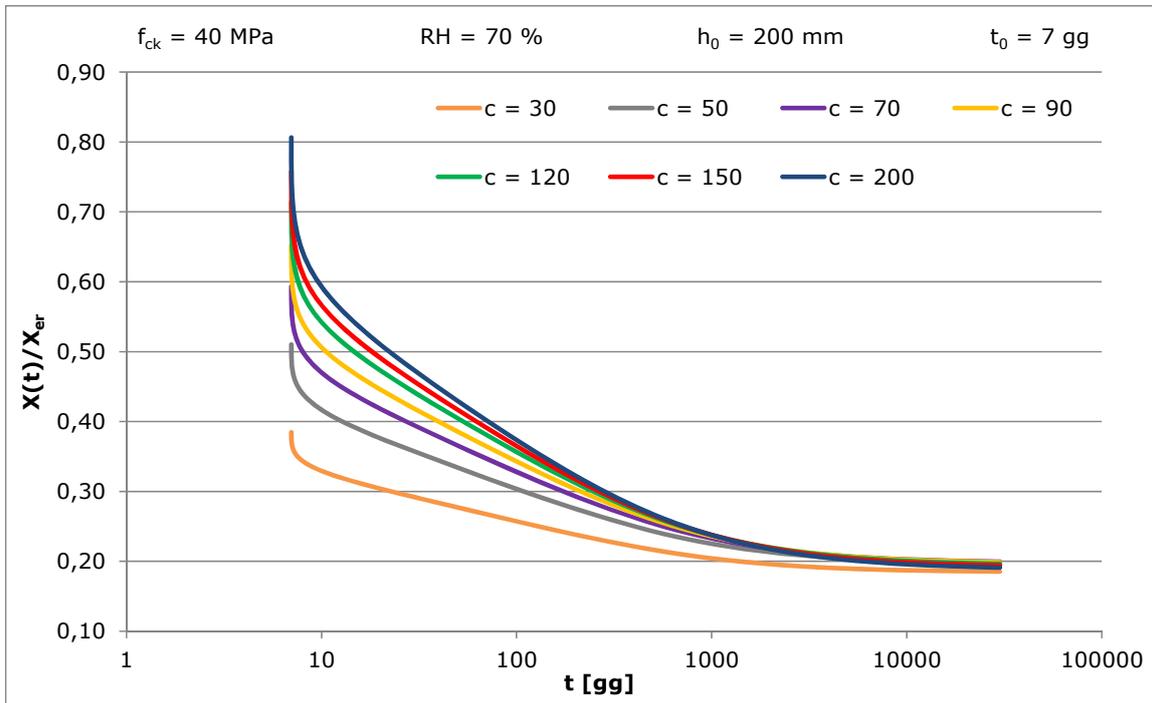


Figura 4.28 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

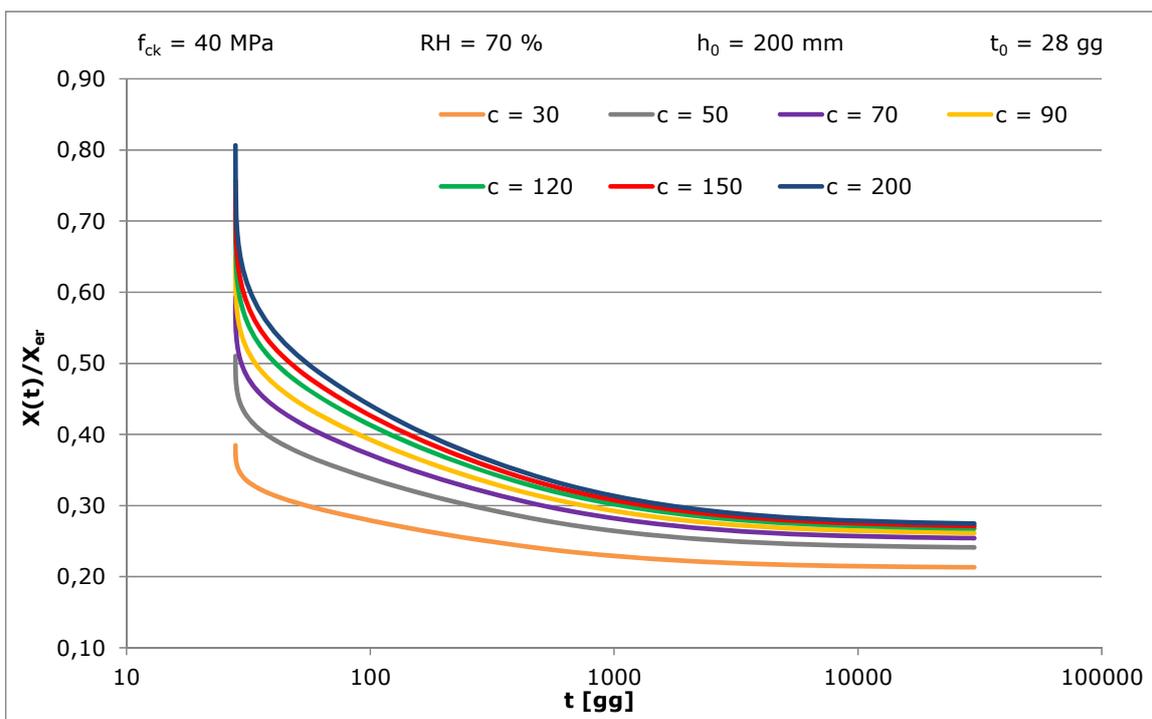


Figura 4.29 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

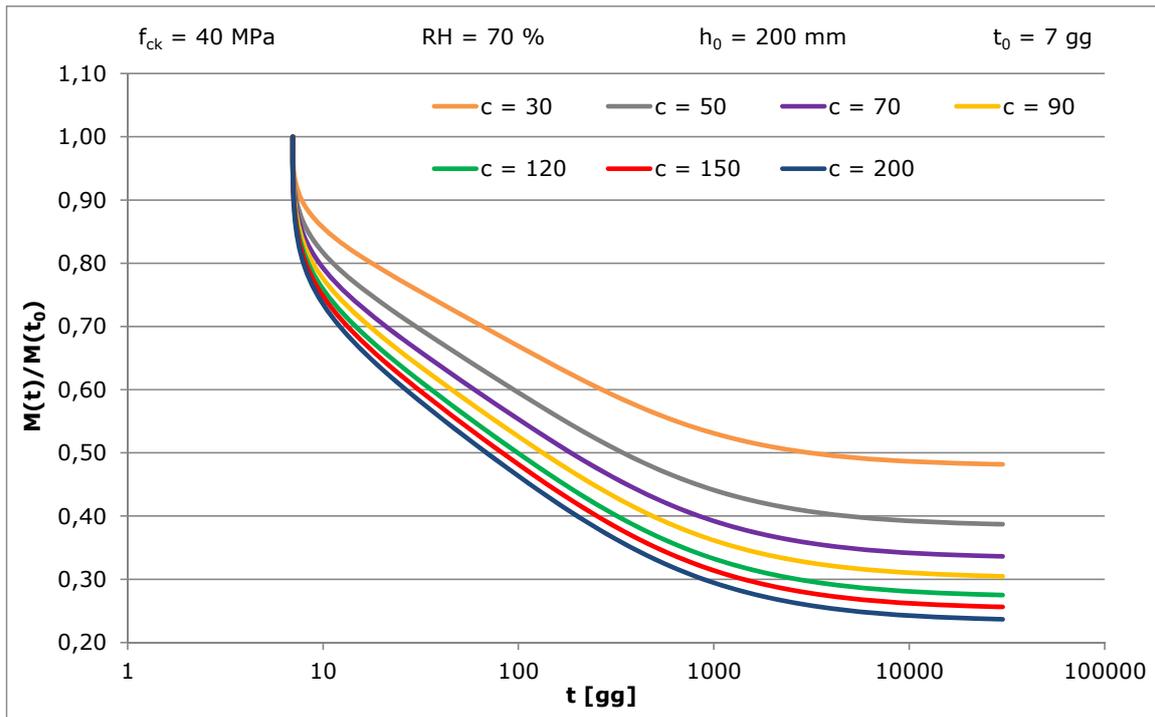


Figura 4.30 - Andamento di  $M(t)/M(t_0)$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

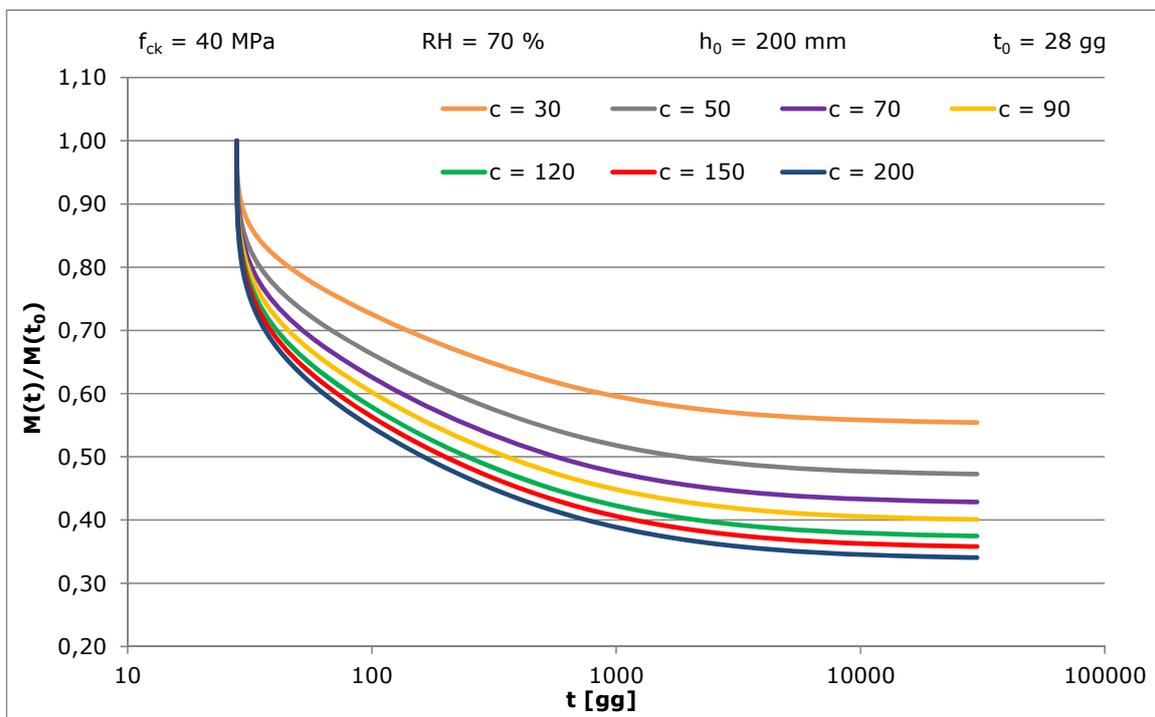


Figura 4.31 - Andamento di  $M(t)/M(t_0)$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

Utilizzando la (4.21) si ricavano le soluzioni di Trost ( $X = X(t, t_0)$ ,  $X = 0,8$ ) che risultano essere molto prossime a quella esatta

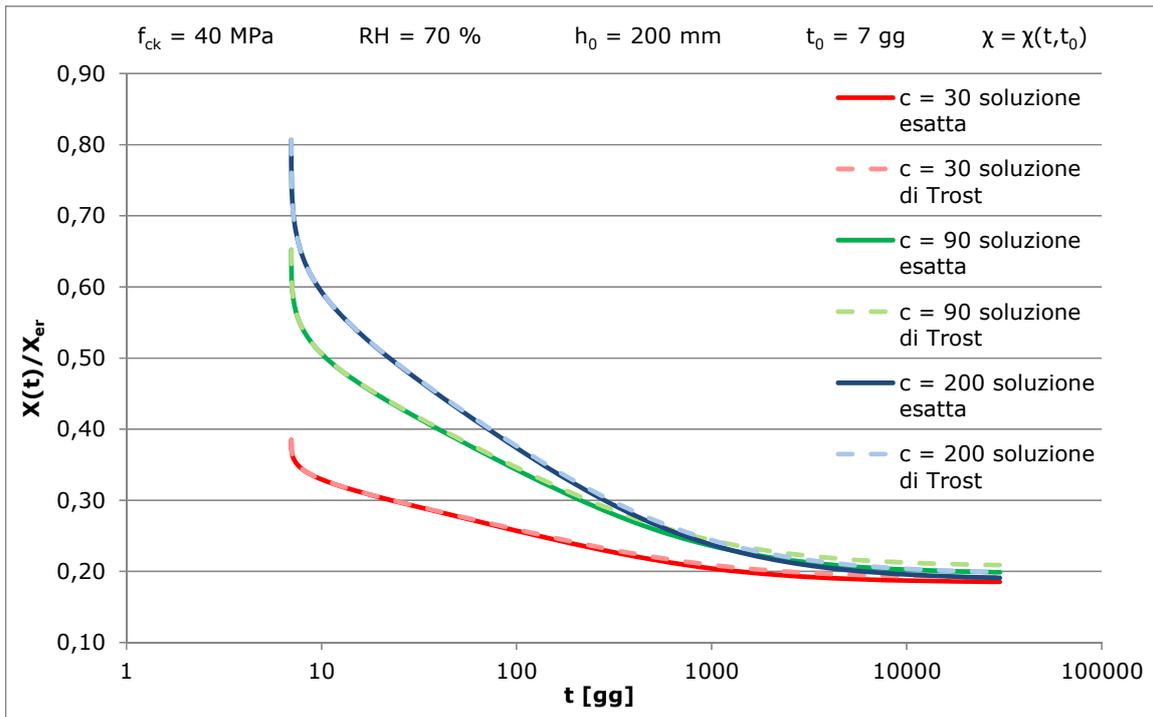


Figura 4.32 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  con le soluzioni esatta e di Trost

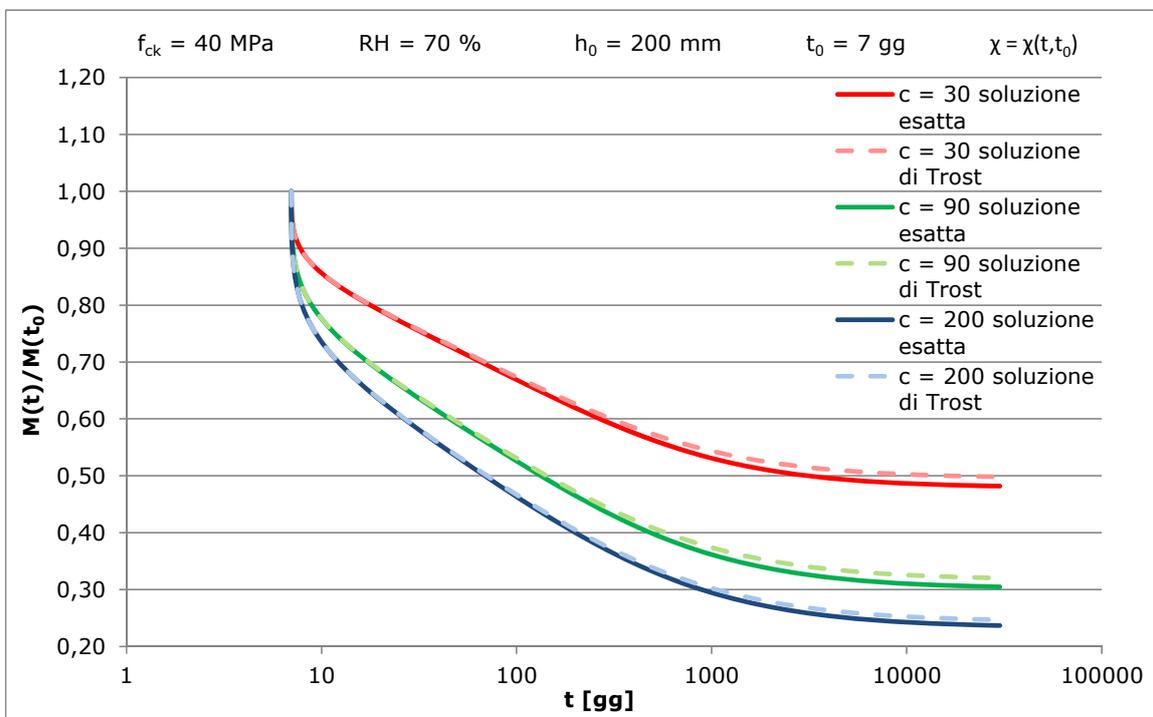


Figura 4.33 - Andamento di  $M(t)/M(t_0)$  con le soluzioni esatta e di Trost

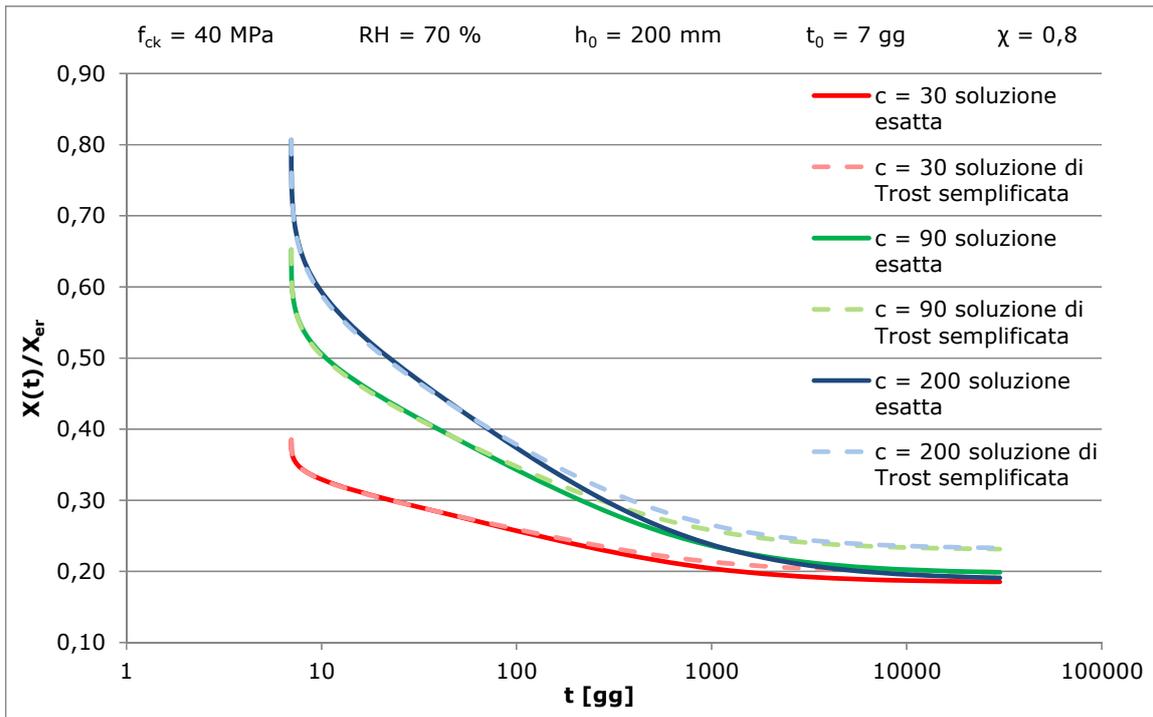


Figura 4.34 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  con le soluzioni esatta e di Trost semplificata

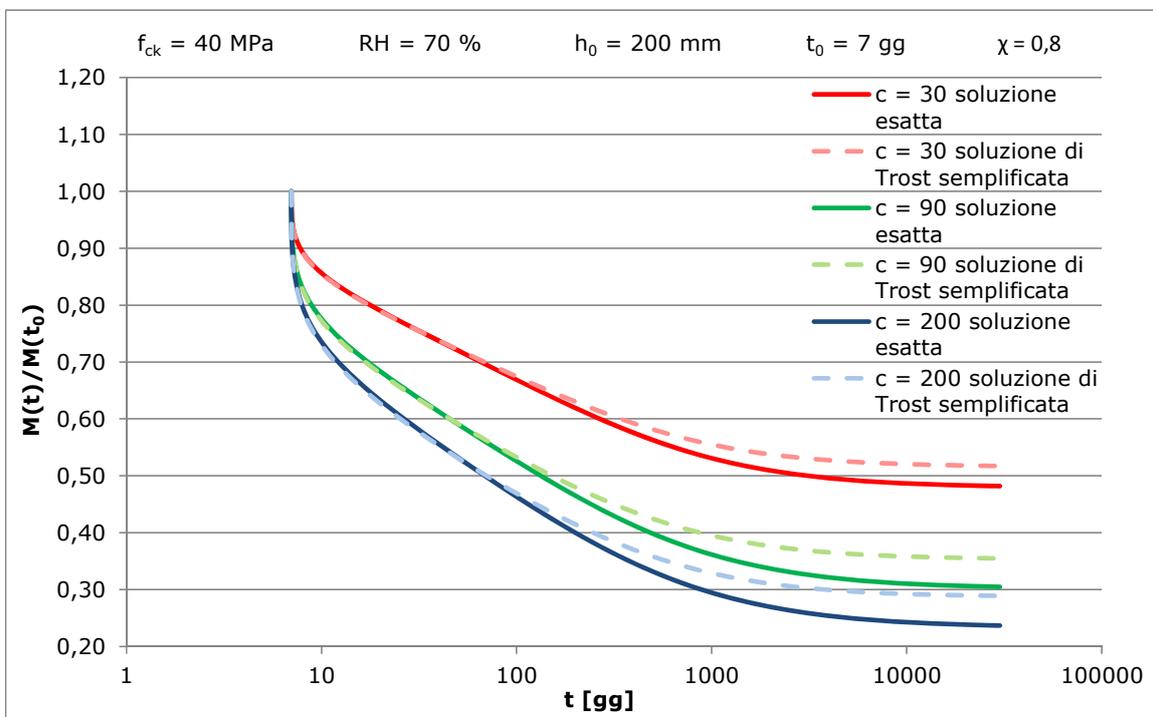


Figura 4.35 - Andamento di  $M(t)/M(t_0)$  con le soluzioni esatta e di Trost semplificata

#### 4.2.6.3 Confronto fra le soluzioni proposte

Nel paragrafo 4.2.5 si è evidenziata la relazione esistente tra i problemi con carichi e deformazioni impressi e la possibilità di studiare situazioni miste nelle quali siano presenti entrambe le tipologie di azioni.

In particolare si vuole sottolineare come, assegnando un particolare valore all'azione geometrica, si possa rendere costante nel tempo la soluzione, garantendo così l'invariabilità della reazione iperstatica.

Si considera quindi la trave trattata in precedenza, soggetta all' azione statica  $p$  ed una deformazione arbitraria  $g$ , applicate al tempo  $t_0$ :

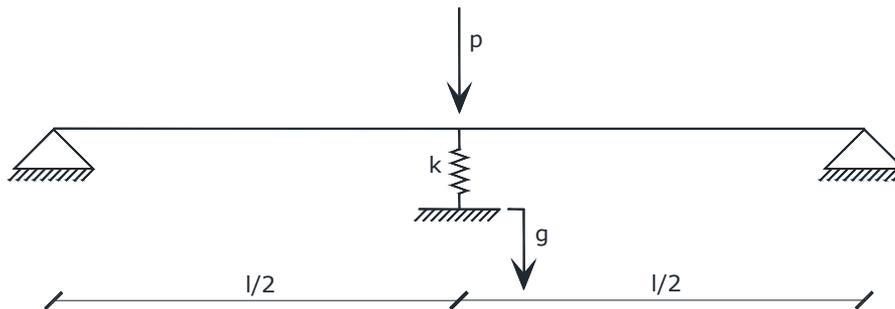


Figura 4.36 - Struttura omogenea con vincolo elastico, carico e cedimento imposti

Definiti:

$X_p(t)$  = incognita iperstatica al tempo  $t$  prodotta dall'azione statica;

$X_g(t)$  = incognita iperstatica prodotta dall'azione geometrica arbitraria;

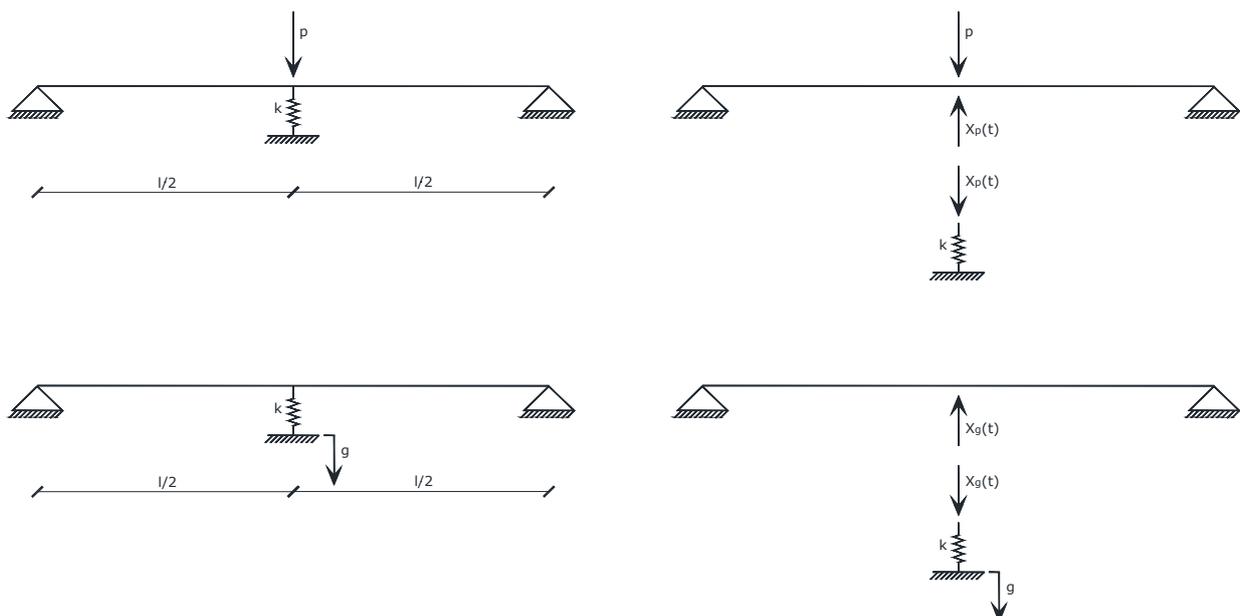


Figura 4.37 - Sovrapposizione degli effetti

la soluzione al tempo  $t$  è espressa dall'equazione (4.51)

$$X(t) = X_{per}(t_0) + \left[ \omega(t_0) \cdot \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot X_{per}(t_0) + \omega(t_0) \cdot \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \cdot X_{ger}(t_0)$$

pertanto si ha una soluzione costante nel tempo  $X(t) = X_{per}(t_0)$  se viene rispettata la condizione (4.52):

$$X_{ger}(t_0) = \left( \frac{1}{\omega(t_0)} - 1 \right) \cdot X_{per}(t_0) \quad \rightarrow \quad g_s = -\delta_{11}^{(s)} \cdot X_{per}(t_0)$$

essendo  $g_s$  lo spostamento geometrico da imporre al vincolo elastico affinché esso si comporti inizialmente come rigido, mantenendo nel tempo l'invariabilità della reazione.

Per evidenziare tale invarianza si rappresentano in seguito gli andamenti delle azioni adimensionalizzate  $\frac{X_p(t)}{X_{per}}$  ;  $\frac{X_g(t)}{X_{per}}$  , calcolate utilizzando per la molla in esame una rigidezza  $k = c \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$  , con  $c = 70$ .

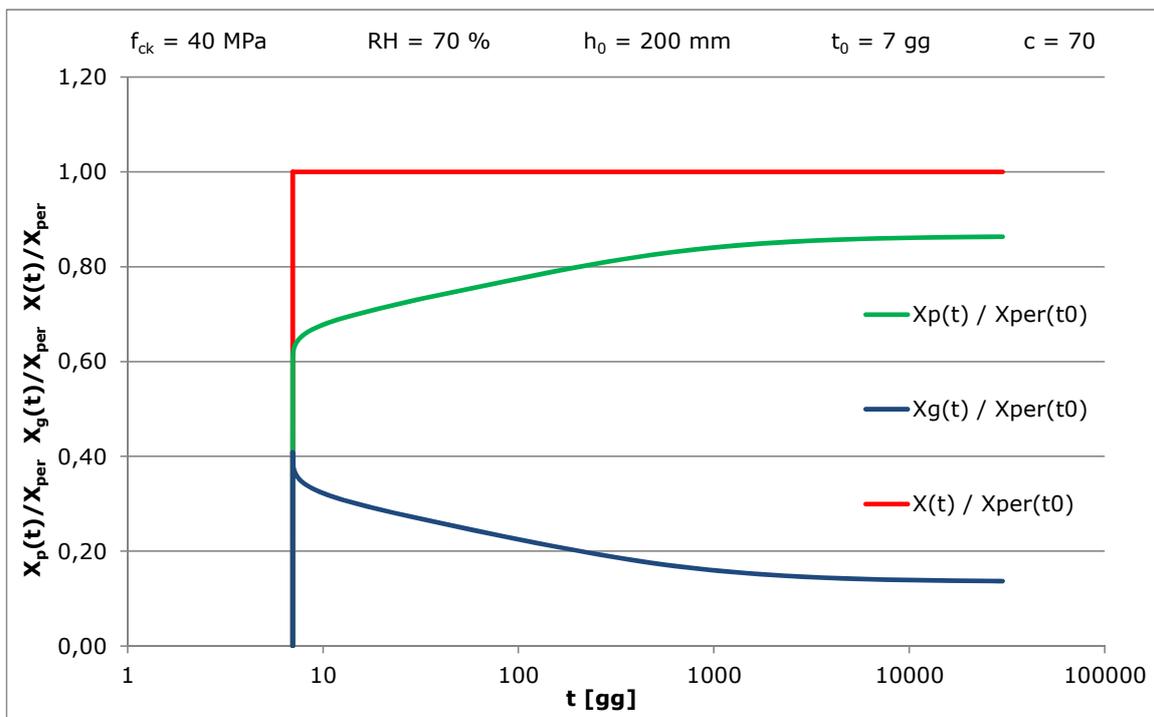


Figura 4.38 - Andamento delle iperstatiche in presenza di carico e cedimento imposti (CEB MC90)

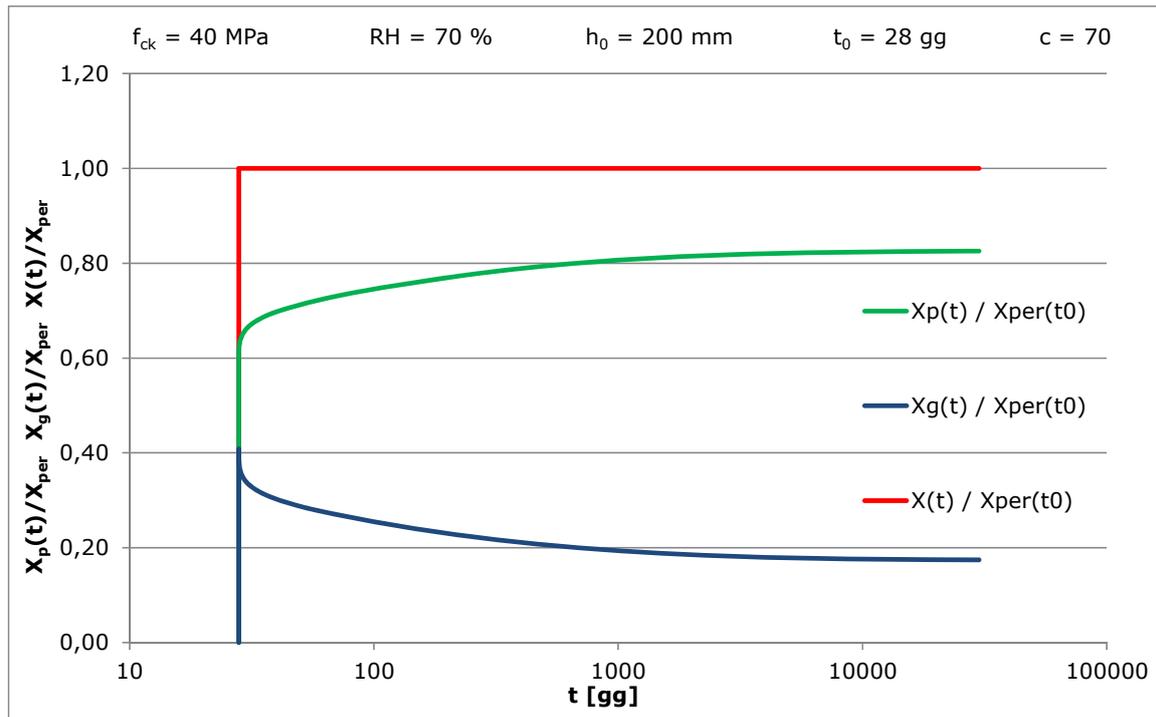


Figura 4.39 - Andamento delle iperstatiche in presenza di carico e cedimento imposti (CEB MC90)

La linea orizzontale rappresentata nel grafico indica la costanza della somma dei due rapporti indicati, pertanto si evince che la reazione iperstatica adimensionalizzata è pari all'unità, cioè alla reazione a vincolo rigido, come volevasi dimostrare.

Al crescere dell'iperstatica dovuta al carico si ha un decremento corrispondente dell'iperstatica causata dall'azione geometrica, che comporta l'invarianza nel tempo della risposta strutturale alle sollecitazioni; essendo infatti:

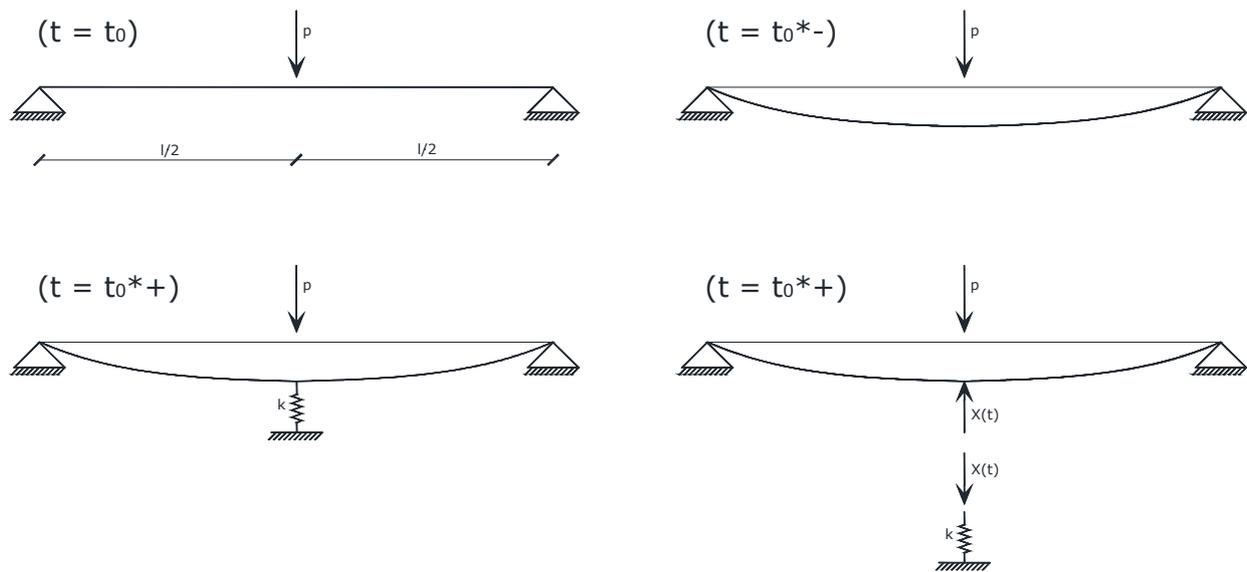
$$\frac{\Delta X_p(t)}{X_{per}} = \frac{X_p(t) - X_p(t_0)}{X_{per}} = \left[ \left( 1 - R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right) - \omega(t_0) \right] = [1 - \omega(t_0)] \cdot \left[ 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right]$$

$$\frac{\Delta X_g(t)}{X_{per}} = \frac{X_g(t) - X_g(t_0)}{X_{per}} = \left[ \left( R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right) - [1 - \omega(t_0)] \right] = [1 - \omega(t_0)] \cdot \left[ \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} - 1 \right]$$

risulta evidente che le due quantità, in modulo, si mantengono uguali nel tempo.

**4.2.6.4 Vincolo posticipato**

Si considera la struttura con rigidità flessionale  $EI$ , sottoposta al carico concentrato  $p$ , costante nel tempo applicato al tempo  $t_0 = 7$  giorni; successivamente, al tempo  $t_0^* = 10$  giorni per il primo esempio e 28 giorni per il secondo, in corrispondenza del punto di applicazione del carico, viene posto un vincolo elastico di rigidità  $k = c \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$ .

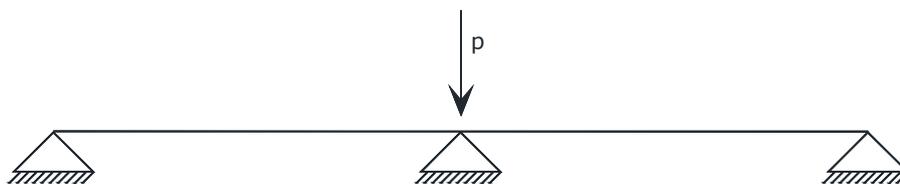


**Figura 4.40 - Variazione di schema statico della struttura**

Si considera come iperstatica la forza  $X$  agente nel vincolo elastico posticipato (Figura 4.40), pertanto la soluzione si ricava dall'equazione (4.32):

$$X(t) = X_{er}(t_0^*) \cdot \left[ \int_{t_0^*}^t \frac{\partial J^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R^*(t, t') \cdot dt' \right]$$

Per il calcolo di tale soluzione si deve ricavare la reazione a vincolo rigido che, come si vede dalla figura seguente, risulta pari a:  $X_{er} = p$



**Figura 4.41 - Struttura con vincoli rigidi**

Di seguito si riporta l'andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  in funzione di diversi valori della rigidità del vincolo elastico, al variare di  $c$ :

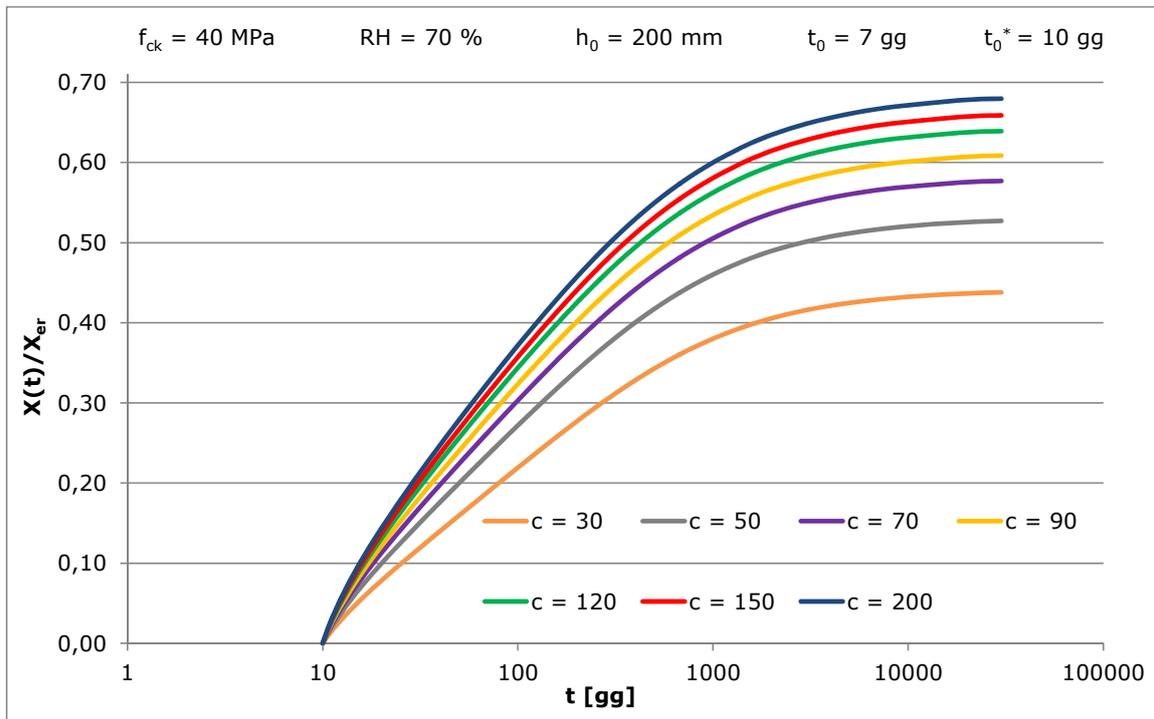


Figura 4.42 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

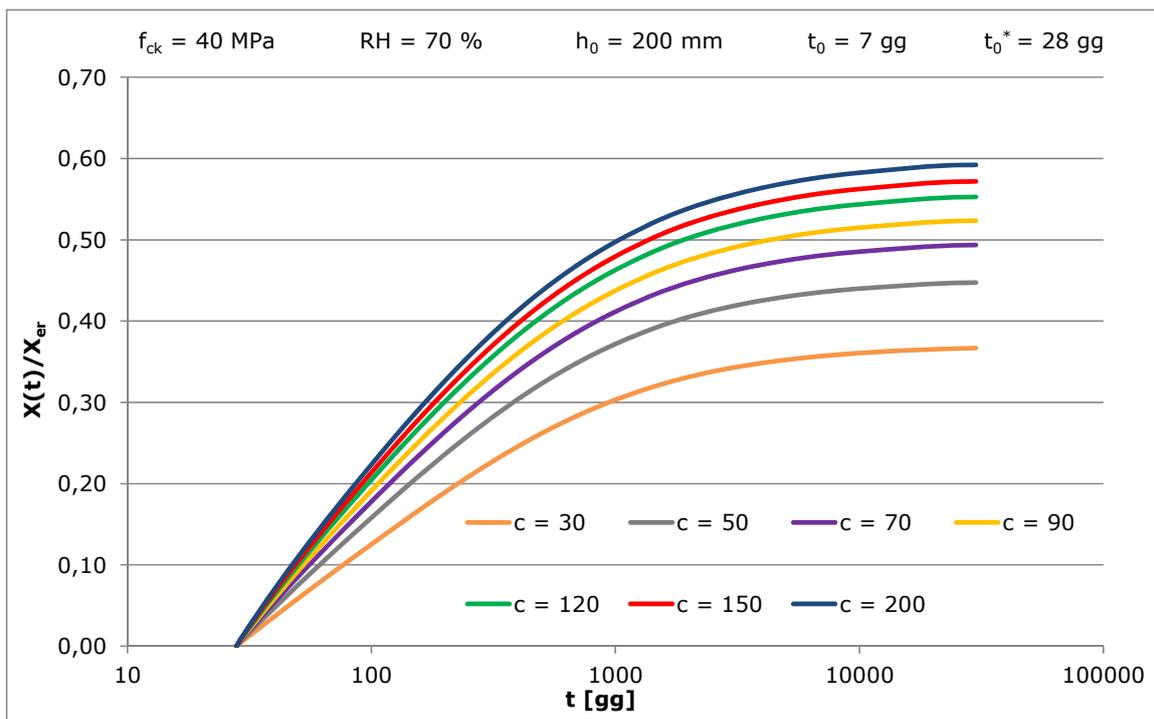


Figura 4.43 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  al variare di  $c$  (CEB MC90)

Utilizzando la (4.41) si ricavano le soluzioni di Trost ( $X = X(t, t_0)$ ,  $X = 0,8$ ). Come visibile il Figura 4.44 e in Figura 4.45 in questo caso le soluzioni di Trost introducono degli errori non trascurabili poiché non è verificata la condizione di  $(t_0, t_0^*) > 28$  giorni.

Si è comunque ritenuto opportuno riportare tali soluzioni poiché esse si riferiscono ad una situazione molto improbabile nella realtà e rappresentano una buona stima della soluzione esatta.

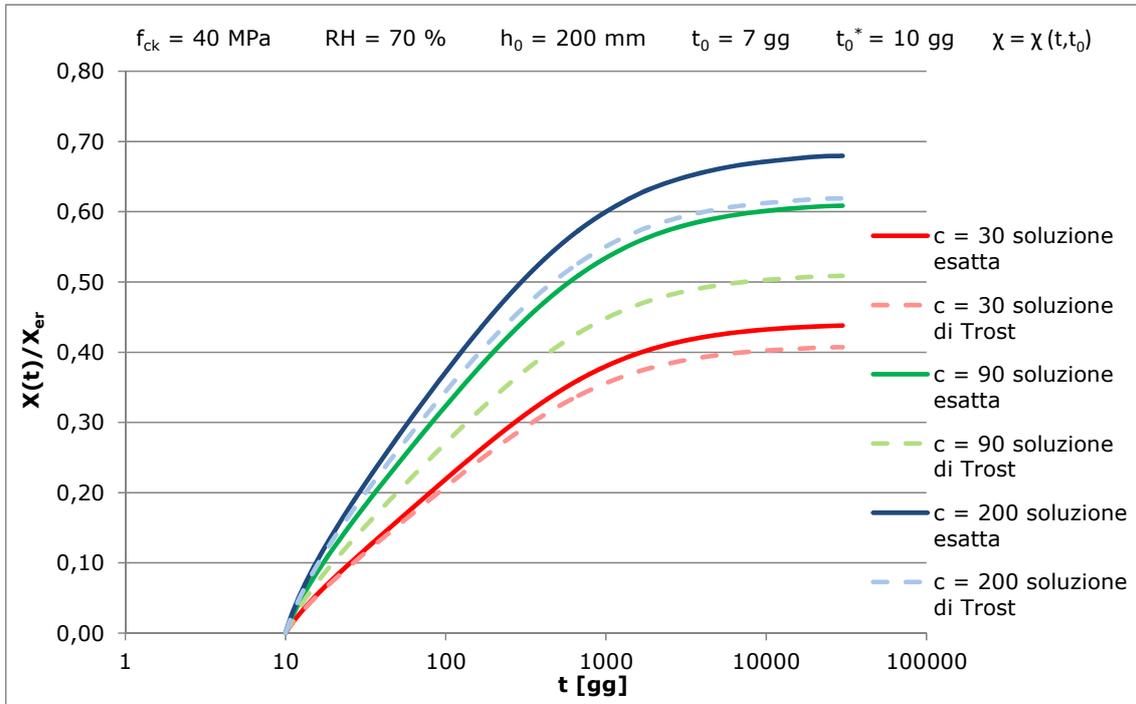


Figura 4.44 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  con le soluzioni esatta e di Trost

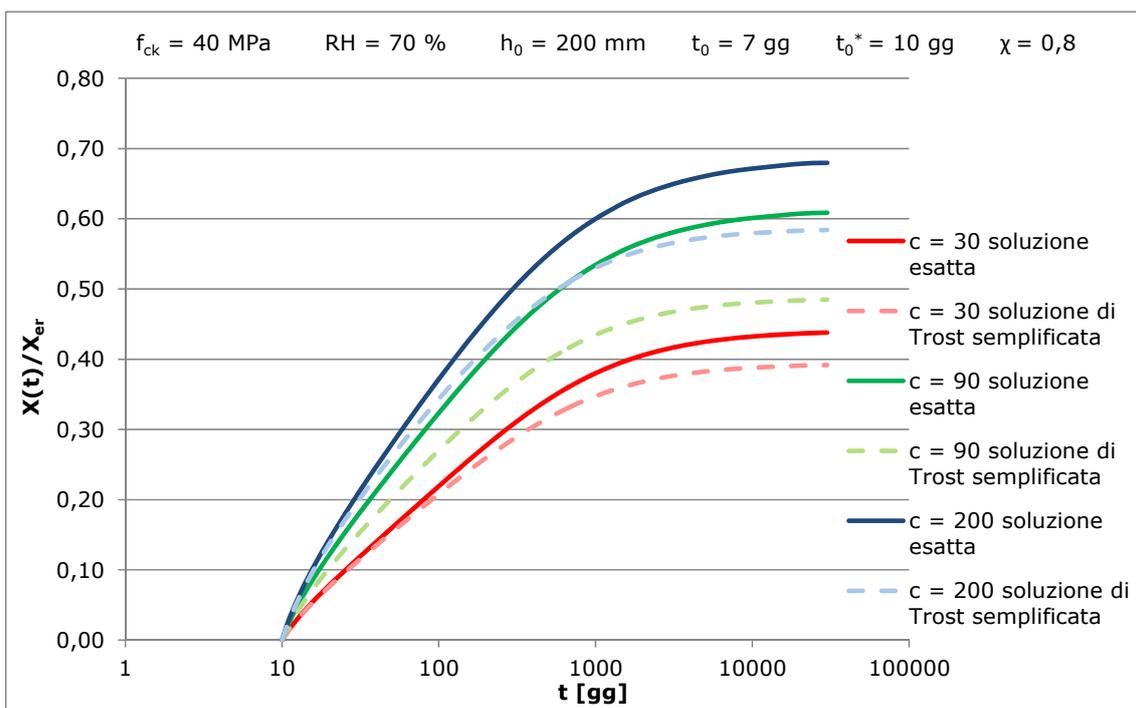


Figura 4.45 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  con le soluzioni esatta e di Trost semplificata

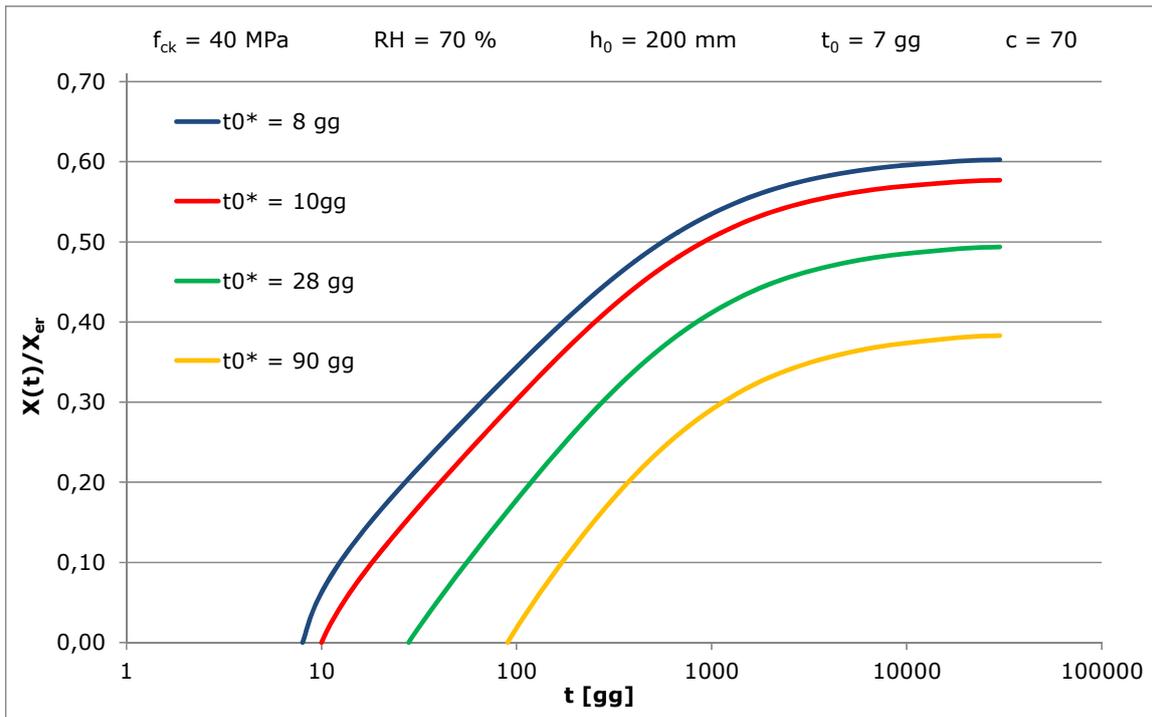


Figura 4.46 - Andamento di  $X(t)/X_{er}$  al variare di  $t_0^*$  (CEB MC90)

Dalla Figura 4.42 è evidente come a parità di istante di applicazione del vincolo, all'aumentare di  $\omega$  si ha un maggior riacquisto della reazione.

A parità di  $\omega$  (Figura 4.46), minore è l'intervallo di tempo che intercorre tra l'applicazione del carico e l'attivazione del vincolo posticipato, maggiori sono i valori di  $\xi(t, t_0, t_0^*)$ .

### 4.3 CASO GENERALE

Si analizzano ora strutture omogenee aventi n vincoli elastici, considerando diversi casi: presenza di azioni statiche, applicazione di azioni geometriche oppure imposizione di vincoli posticipati.

Nella risoluzione del problema viene usato, come nel paragrafo precedente, il metodo delle forze, poiché è quello generalmente applicato per l'analisi strutturale; si ricorda che in fase elastoviscosa lineare esso è equivalente al metodo degli spostamenti ([22], 1986).

#### 4.3.1 AZIONI STATICHE

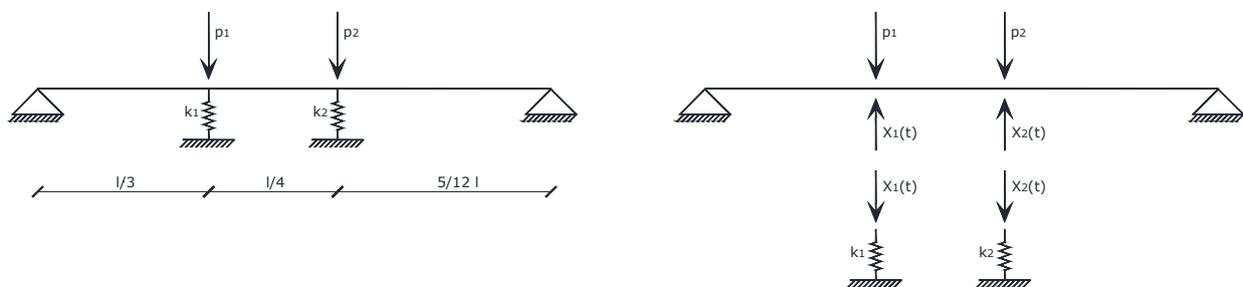


Figura 4.47 - Struttura omogenea con vincoli elastici e carichi applicati

Per il primo teorema della viscoelasticità lineare, l'equazione di congruenza al tempo t della struttura può essere scritta come:

$$\left[ \underline{\underline{\delta_{11}^{(C)}}}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \underline{\underline{\delta_{11}^{(S)}}} \right] \cdot \underline{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \underline{\underline{\delta_{11}^{(C)}}}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \underline{\underline{\delta_{11}^{(S)}}} \right] \cdot d\underline{X}(t') +$$

$$-\underline{\underline{\delta_0}}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) = 0 \quad (4.54)$$

dove:

$\underline{X}(t)$  = vettore delle incognite, reazioni dei vincoli elastici sovrabbondanti;

$\underline{\underline{\delta_{11}^{(C)}}}(t_0)$  = matrice di flessibilità della parte viscoelastica, valutata al tempo  $t_0$  di applicazione delle azioni;

$\underline{\underline{\delta_{11}^{(S)}}}$  = matrice di flessibilità dei vincoli elastici;

$\underline{\delta}_0(t_0)$  = vettore degli spostamenti nella direzione delle iperstatiche  $\underline{X}$ , provocato dalle azioni applicate sulla struttura in esame, resa isostatica.

Definiti i seguenti vettori:

$\underline{X}_e(t_0)$  = vettore delle reazioni all'istante  $t_0$ ;

$\underline{X}_{er}(t_0)$  = vettore delle reazioni all'istante  $t_0$  nell'ipotesi di vincoli rigidi;

sono valide le relazioni:

$$\left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right] \cdot \underline{X}_e(t_0) = \underline{\delta}_0(t_0) \quad (4.55)$$

$$\underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) \cdot \underline{X}_{er}(t_0) = \underline{\delta}_0(t_0) \quad (4.56)$$

Definita anche la matrice di accoppiamento:

$$\underline{D}(t_0) = \left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right]^{-1} \cdot \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) \quad (4.57)$$

si può scrivere la relazione che lega i due vettori  $\underline{X}_e(t_0)$  e  $\underline{X}_{er}(t_0)$ :

$$\underline{X}_e(t_0) = \underline{D}(t_0) \cdot \underline{X}_{er}(t_0) \quad (4.58)$$

Sostituendo le relazioni (4.55), (4.56), (4.57) e (4.58) nell'equazione di congruenza (4.54)

moltiplicata per il termine  $\left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right]^{-1}$ , essa assume la forma:

$$\begin{aligned} & \left[ \underline{D}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \underline{I} - \underline{D}(t_0) \right] \cdot \underline{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \underline{D}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \underline{I} - \underline{D}(t_0) \right] \cdot d\underline{X}(t') = \\ & = \underline{D}(t_0) \cdot \underline{X}_{er}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Con la trasformazione lineare:

$$\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \underline{Y}(t) \quad (4.60)$$

nota  $\underline{K}(t_0)$  = matrice modale di  $\underline{D}(t_0)$ , premoltiplicando ambo i membri per  $\underline{K}(t_0)^{-1}$ , l'equazione (4.59) diventa:

$$\begin{aligned} & \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \left[ \underline{D}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \underline{I} - \underline{D}(t_0) \right] \cdot \underline{K}(t_0) \cdot \underline{Y}(t_0) + \\ & + \int_{t_0}^t \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \left[ \underline{D}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \underline{I} - \underline{D}(t_0) \right] \cdot \underline{K}(t_0) \cdot d\underline{Y}(t') = \\ & = \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{D}(t_0) \cdot \underline{K}(t_0) \cdot \underline{Y}_{er}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Essendo  $\omega_i$  gli autovalori della matrice  $\underline{D}(t_0)$ , organizzati nella matrice spettrale:

$$\underline{\Omega}(t_0) = \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{D}(t_0) \cdot \underline{K}(t_0) \quad (4.62)$$

l'equazione di congruenza (4.61) può essere scritta come:

$$\begin{aligned} & [\omega_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + 1 - \omega_i(t_0)] \cdot Y_i(t_0) + \int_{t_0}^t [\omega_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega_i(t_0)] \cdot dY_i(t') = \\ & = \omega_i(t_0) \cdot Y_{eri}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad \text{con } i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.63)$$

Definite le funzioni di viscosità variate  $J_i^*(t, t')$  attraverso la relazione:

$$E_c(t_0) \cdot J_i^*(t, t') = \omega_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega_i(t_0) \quad (4.64)$$

La congruenza può essere riscritta nella forma definitiva:

$$J_i^*(t, t_0) \cdot Y_i(t_0) + \int_{t_0}^t J_i^*(t, t') \cdot dY_i(t') = Y_{eri}(t_0) \cdot \left[ J_i^*(t, t_0) - \frac{1 - \omega_i(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (4.65)$$

si ottengono così n equazioni integrali di Volterra indipendenti, di soluzione immediata, utilizzando come funzioni risolventi di ogni equazione le funzione di rilassamento ridotta  $R_i^*(t', t')$ , sfruttando la proprietà:

$$R_i^*(t', t') \cdot J_i^*(t, t') + \int_{t'}^t \frac{\partial R_i^*(\tau, t')}{\partial \tau} \cdot J_i^*(t, \tau) \cdot d\tau = 1 \quad (4.66)$$

Attraverso il Principio di Sovrapposizione si ricavano le incognite:

$$Y_i(t) = Y_{eri}(t_0) \cdot \left[ 1 - R_i^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega_i(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (4.67)$$

Organizzando le funzioni di rilassamento ridotte  $R_i^*(t, t')$  in una opportuna matrice diagonale  $\underline{\underline{R}}^*(t, t_0)$  e utilizzando la trasformazione lineare (4.60), la soluzione finale risulta:

$$\underline{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{K}}(t_0) \cdot \left[ \underline{\underline{I}} - \left( \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Omega}}(t_0) \right) \cdot \frac{\underline{\underline{R}}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \underline{\underline{K}}(t_0)^{-1} \cdot \underline{\underline{X}}_{er}(t_0) \quad (4.68)$$

### 4.3.2 AZIONI GEOMETRICHE

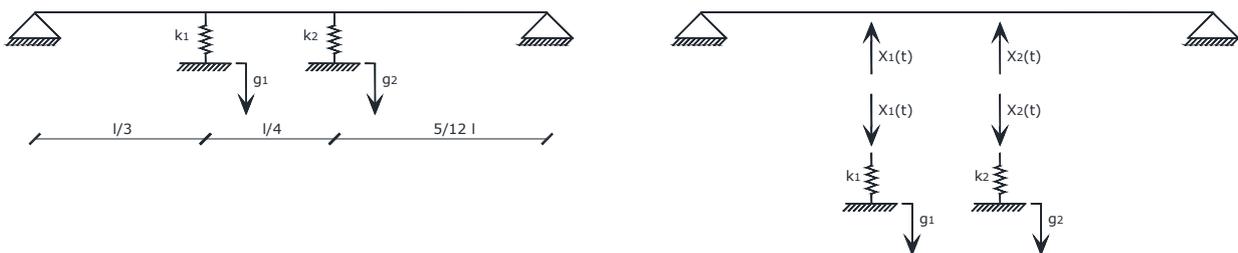


Figura 4.48 - Struttura omogenea con vincoli elastici e cedimenti imposti

Definito il vettore  $\underline{G}$  come il vettore degli spostamenti impressi alle molle nella direzione delle azioni iperstatiche  $\underline{X}$ , l'equazione di congruenza al tempo  $t$  risulta:

$$\left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right] \cdot \underline{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right] \cdot d\underline{X}(t') + \underline{G} = 0 \quad (4.69)$$

Mentre all'istante iniziale per  $t = t_0$ , si ha:

$$\left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right] \cdot \underline{X}_e(t_0) = -\underline{G} \quad (4.70)$$

Vengono inoltre definiti:

- matrice di accoppiamento:  $\underline{D}(t_0) = \left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right]^{-1} \cdot \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0)$  (4.71)

- matrice spettrale:  $\underline{\Omega}(t_0) = \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{D}(t_0) \cdot \underline{K}(t_0)$  (4.72)

- funzioni di viscosità variate:  $E_c(t_0) \cdot J_i^*(t, t') = \omega_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega_i(t_0)$  (4.73)

Utilizzando sempre la trasformazione lineare:

$$\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \underline{Y}(t) \quad (4.74)$$

con un procedimento analogo a quello esposto per le azioni di natura statica si perviene, con i passaggi elencati, ad un sistema di equazioni disaccoppiate:

$$\begin{aligned} & \left[ \underline{D}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \underline{I} - \underline{D}(t_0) \right] \cdot \underline{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \underline{D}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \underline{I} - \underline{D}(t_0) \right] \cdot d\underline{X}(t') = \\ & = -\frac{\underline{G}}{\underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)}} = \underline{X}_e(t_0) \end{aligned}$$

$$\underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \left[ \underline{D}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \underline{I} - \underline{D}(t_0) \right] \cdot \underline{K}(t_0) \cdot \underline{Y}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \left[ \underline{D}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \underline{I} - \underline{D}(t_0) \right] \cdot \underline{K}(t_0) \cdot d\underline{Y}(t') = \underline{Y}_e(t_0)$$

$$[\omega_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + 1 - \omega_i(t_0)] \cdot Y_i(t_0) + \int_{t_0}^t [\omega_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega_i(t_0)] \cdot dY_i(t') = Y_{ei}(t_0)$$

$$J_i^*(t, t_0) \cdot Y_i(t_0) + \int_{t_0}^t J_i^*(t, t') \cdot dY_i(t') = \frac{Y_{ei}(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (4.75)$$

Essendo la relazione tra funzione di viscosità variata e funzione di rilassamento ridotta pari a :

$$R_i^*(t', t') \cdot J_i^*(t, t') + \int_{t'}^t \frac{\partial R_i^*(\tau, t')}{\partial \tau} \cdot J_i^*(t, \tau) \cdot d\tau = 1 \quad (4.76)$$

Si può calcolare la soluzione del problema come:

$$Y_i(t) = Y_{eri}(t_0) \left[ \omega_i(t_0) \cdot \frac{R_i^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (4.77)$$

Organizzando le funzioni di rilassamento ridotte  $R_i^*(t, t')$  in una opportuna matrice diagonale  $\underline{R}^*(t, t_0)$  e utilizzando la trasformazione lineare (4.74), la soluzione finale risulta:

$$\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \left[ \underline{\Omega}(t_0) \cdot \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{X}_{er}(t_0) \quad (4.78)$$

### 4.3.3 VINCOLI POSTICIPATI

Si considera una struttura viscoelastica omogenea alla quale si applica un sistema di azioni statiche al tempo  $t = t_0$ , costanti; al tempo  $t_0^* > t_0$  si impongono alla stessa struttura  $n$  vincoli elastici non forzati.

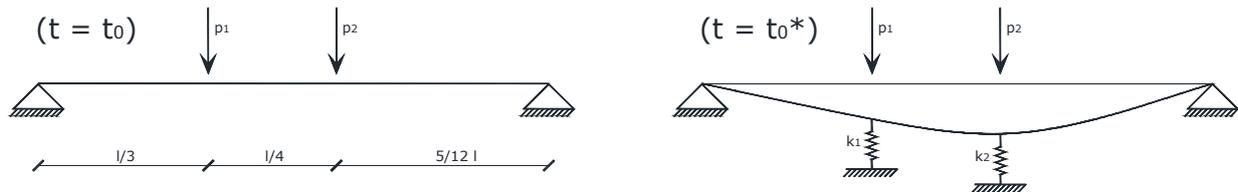


Figura 4.49 - Struttura omogenea con vincoli posticipati soggetta a carichi costanti

Per il primo teorema della viscoelasticità lineare l'equazione di congruenza può essere ricavata dalla relazione valida per azioni statiche, noto che al tempo  $t_0^*$  di applicazione del vettore  $\underline{X}$ , coincidente col tempo di imposizione dei vincoli, non si devono computare gli effetti delle azioni esterne, da valutarsi solo per  $t > t_0^*$ .

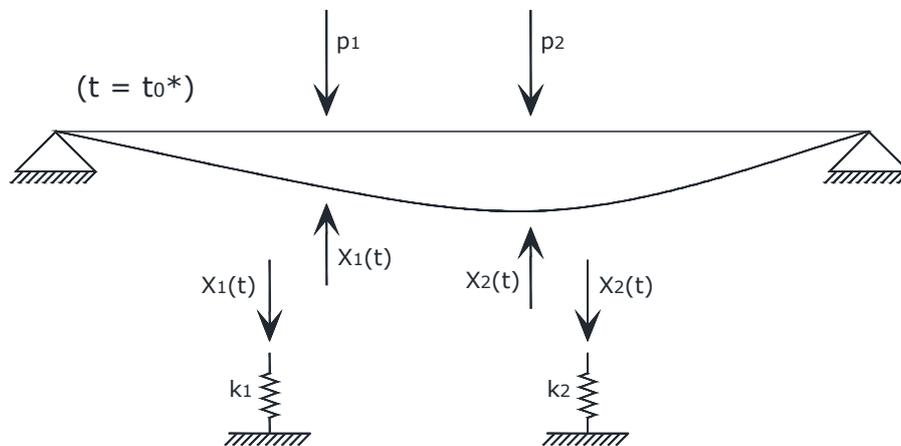


Figura 4.50 -Reazioni dei vincoli posticipati

Scritta l'equazione di congruenza al tempo  $t$ :

$$\int_{t_0}^t \left[ \underline{\delta}_{11}^{(C)}(t_0^*) \cdot E_c(t_0^*) \cdot J(t, t') + \underline{\delta}_{11}^{(S)} \right] \cdot d\underline{X}(t') - \underline{\delta}_0(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot [J(t, t_0) - J(t_0^*, t_0)] = 0 \quad (4.79)$$

si definisce:

$\underline{X}_e(t_0)$  = vettore delle reazioni elastiche nell'ipotesi di vincoli preesistenti;

$\underline{X}_{er}(t_0)$  = vettore delle reazioni nell'ipotesi di vincoli rigidi e preesistenti;

Se i vincoli fossero preesistenti rispetto alle azioni, risulterebbero valide le seguenti relazioni:

$$\left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right] \cdot \underline{X}_e(t_0) = \underline{\delta}_0(t_0) \quad (4.80)$$

$$\underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) \cdot \underline{X}_{er}(t_0) = \underline{\delta}_0(t_0) \quad (4.81)$$

Definiti inoltre:

- la matrice di accoppiamento:  $\underline{D}(t_0) = \left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right]^{-1} \cdot \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0)$  (4.82)

- la relazione che lega i vettori  $\underline{X}_e(t_0)$  e  $\underline{X}_{er}(t_0)$ :  $\underline{X}_e(t_0) = \underline{D}(t_0) \cdot \underline{X}_{er}(t_0)$  (4.83)

- la matrice spettrale:  $\underline{\Omega}(t_0) = \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{D}(t_0) \cdot \underline{K}(t_0)$  (4.84)

- le funzioni di viscosità variate:  $E_c(t_0) \cdot J_i^*(t, t') = \omega_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega_i(t_0)$  (4.85)

- la trasformazione lineare:  $\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \underline{Y}(t)$  (4.86)

si ottiene, con un procedimento analogo ai due paragrafi precedenti, la seguente equazione di congruenza:

$$\int_{t_0^*}^t J_i^*(t, t') \cdot dY_i(t') = Y_{eri}(t_0) \cdot [J_i^*(t, t_0) - J_i^*(t_0^*, t_0)] \quad (4.87)$$

Considerando la relazione (4.76) tra funzione di viscosità variata e funzione di rilassamento ridotta e la definizione di  $J_i^*(t, t')$  con  $t_0 = t_0^*$ , si ricava la soluzione:

$$Y_i(t) = Y_{eri}(t_0) \cdot \left[ \int_{t_0^*}^t \frac{\partial J_i^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R_i^*(t, t') \cdot dt' \right] \quad (4.88)$$

Sfruttando la trasformazione lineare (4.86) si ricava:

$$\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \left[ \int_{t_0^*}^t \frac{\partial J_i^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R_i^*(t, t') \cdot dt' \right] \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{X}_{er}(t_0) \quad (4.89)$$

Se i vincoli aggiuntivi sono posti immediatamente dopo l'applicazione delle azioni, con  $t_0^* = t_0 + \varepsilon$ , la relazione integrale tra le funzioni di viscosità e rilassamento, per la teoria viscoelastica lineare, risulta:

$$\int_{t_0^*}^t \frac{\partial J_i^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R_i^*(t, t') \cdot dt' = \underline{I} - \underline{J}^*(t_0, t_0) \cdot \underline{R}^*(t, t_0) \quad (4.90)$$

Noto che  $\underline{J}^*(t_0, t_0) = \frac{\underline{I}}{E_c(t_0)}$ , la soluzione in termini del vettore  $\underline{X}$  risulta:

$$\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \left[ \underline{I} - \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{X}_{er}(t_0) \quad (4.91)$$

#### 4.3.4 CONFRONTO FRA LE SOLUZIONI PROPOSTE

Per stabilire delle relazioni tra le soluzioni proposte nei casi di azioni statiche, azioni geometriche e vincoli posticipati, si possono definire le seguenti matrici:

$$\underline{C}_p(t, t_0) = \underline{K}(t_0) \cdot \left[ \underline{I} - \left( \underline{I} - \underline{\Omega}(t_0) \right) \cdot \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \quad (4.92)$$

$$\underline{\underline{C}}_g(t, t_0) = \underline{\underline{K}}(t_0) \cdot \left[ \underline{\underline{\Omega}}(t_0) \cdot \frac{\underline{\underline{R}}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \underline{\underline{K}}(t_0)^{-1} \quad (4.93)$$

$$\underline{\underline{C}}_p(t, t_0) = \underline{\underline{K}}(t_0) \cdot \left[ \underline{\underline{I}} - \frac{\underline{\underline{R}}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \underline{\underline{K}}(t_0)^{-1} \quad (4.94)$$

Le soluzioni dei rispettivi problemi assumono dunque la forma:

$$\underline{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{C}}_p(t, t_0) \cdot \underline{\underline{X}}_{er}(t_0) \quad (4.95)$$

$$\underline{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{C}}_g(t, t_0) \cdot \underline{\underline{X}}_{er}(t_0) \quad (4.96)$$

$$\underline{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{C}}_p(t, t_0) \cdot \underline{\underline{X}}_{er}(t_0) \quad (4.97)$$

Dalle relazioni esistenti tra le matrici definite in precedenza si ricava che:

$$\underline{\underline{C}}_p(t, t_0) = \underline{\underline{C}}_g(t, t_0) + \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}}(t_0) \cdot \frac{\underline{\underline{R}}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \cdot \underline{\underline{K}}(t_0)^{-1} \quad (4.99)$$

$$\underline{\underline{C}}_p(t, t_0) = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}}(t_0)^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}_g(t, t_0) \quad (4.99)$$

$$\underline{\underline{C}}_p(t, t_0) = \underline{\underline{D}}(t_0) \cdot \left[ \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}_p(t, t_0) \right] + \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{K}}(t_0) \cdot \frac{\underline{\underline{R}}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \cdot \underline{\underline{K}}(t_0)^{-1} \quad (4.100)$$

si evidenzia dunque la stretta interconnessione tra i tre problemi studiati e la possibilità di analizzare situazioni miste nelle quali siano contemporaneamente presenti i tre casi proposti. Siccome sia la soluzione per azioni statiche che quella per vincoli posticipati dipendono dalle medesima matrice  $\underline{\underline{C}}_g(t, t_0)$  (4.98, 4.99), risulta semplice assegnare valori alle azioni geometriche tali da rendere costanti nel tempo le soluzioni per azioni statiche o vincoli posticipati, garantendo l'invariabilità delle reazioni.

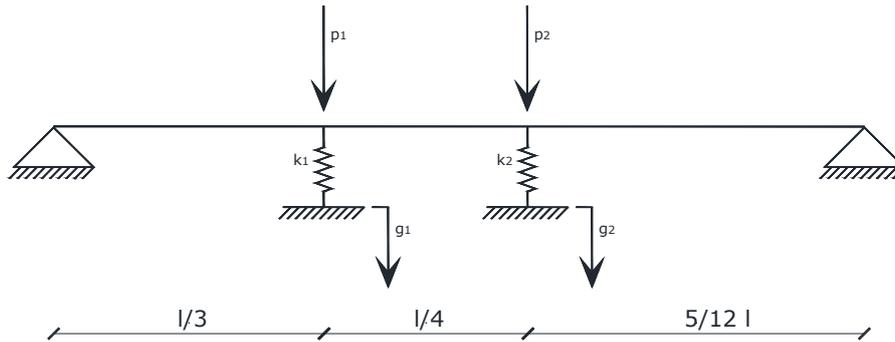


Figura 4.51 - Struttura omogenea con vincoli elastici, carichi e cedimenti imposti

Si considera una struttura soggetta ad azioni statiche fissate ed azioni geometriche arbitrarie, applicate al tempo  $t_0$ .

Definiti:

$\underline{X}_p(t)$  = vettore delle incognite iperstatiche al tempo  $t$  prodotte dalle azioni statiche;

$\underline{X}_g(t)$  = vettore delle incognite iperstatiche prodotte dalle azioni geometriche arbitrarie;

la soluzione al tempo  $t$  risulta:

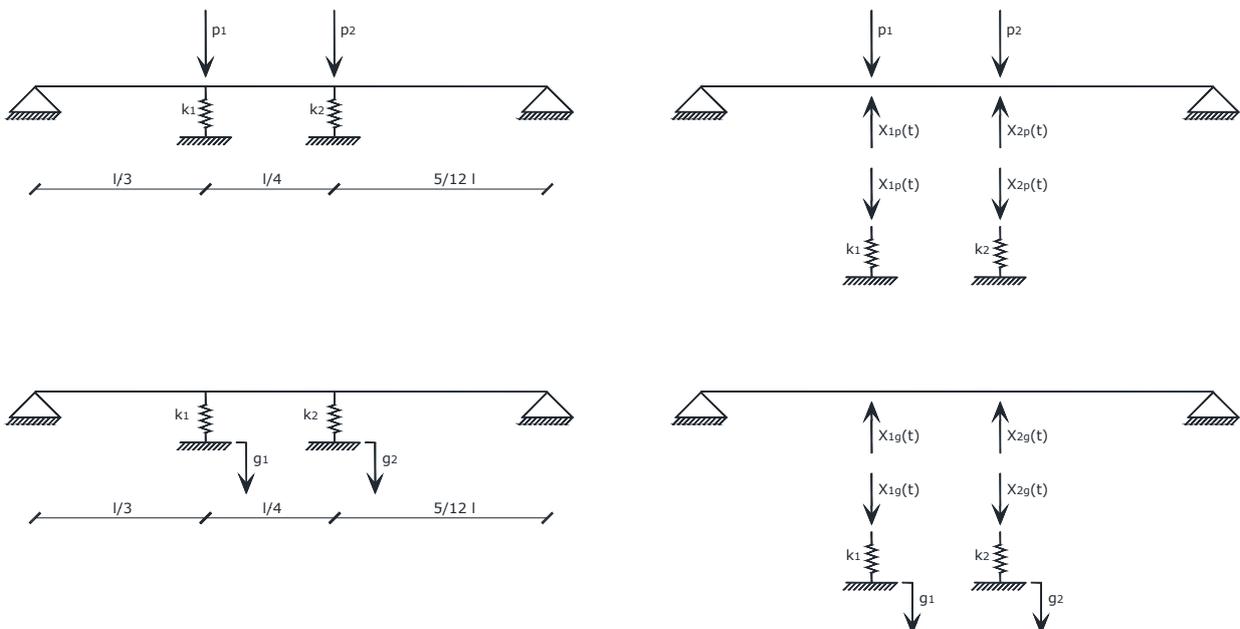


Figura 4.52 - Sovrapposizione degli effetti

$$\begin{aligned}
 \underline{X}(t) = \underline{X}_p(t) + \underline{X}_g(t) &= \left[ \underline{C}_g(t, t_0) + \underline{I} - \underline{K}(t_0) \cdot \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{\underline{E}_c(t_0)} \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \right] \cdot \underline{X}_{per}(t_0) + \underline{C}_g(t, t_0) \cdot \underline{X}_{ger}(t_0) = \\
 &= \underline{X}_{per}(t_0) + \left[ \underline{K}(t_0) \cdot \underline{\Omega}(t_0) \cdot \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{\underline{E}_c(t_0)} \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} - \underline{K}(t_0) \cdot \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{\underline{E}_c(t_0)} \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \right] \cdot \underline{X}_{per}(t_0) + \\
 &+ \underline{K}(t_0) \cdot \underline{\Omega}(t_0) \cdot \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{\underline{E}_c(t_0)} \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{X}_{ger}(t_0)
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Tale espressione fornisce una soluzione costante nel tempo  $\underline{X}(t) = \underline{X}_{per}(t_0)$  solo se:

$$\underline{X}_{ger}(t_0) = \left[ \underline{D}(t_0) - \underline{I} \right] \cdot \underline{X}_{per}(t_0) \quad \rightarrow \quad \underline{X}_{ge}(t_0) = \left[ \underline{I} - \underline{D}(t_0) \right] \cdot \underline{X}_{per}(t_0) \tag{4.102}$$

Da quest'ultima relazione è possibile determinare il vettore  $\underline{G}_s$ , cioè il vettore di spostamenti geometrici da imporre ai vincoli elastici, mediante l'equazione:

$$\left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right] \cdot \underline{X}_{ge}(t_0) = -\underline{G}_s \quad \rightarrow \quad \underline{G}_s = -\underline{\delta}_{11}^{(s)} \cdot \underline{X}_{per}(t_0) \tag{4.103}$$

In questo modo lo spostamento totale dei vincoli sotto le azioni statiche applicate e quelle geometriche fornite mediante l'imposizione di  $\underline{G}_s$  risulta:

$$\underline{\eta}_s(t_0) = \underline{\delta}_{11}^{(s)} \cdot \underline{D}(t_0) \cdot \underline{X}_{per}(t_0) - \underline{\delta}_{11}^{(s)} \cdot \underline{X}_{per}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \cdot \underline{X}_{ge}(t_0) = 0 \tag{4.104}$$

A tale spostamento corrispondono le reazioni:

$$\underline{X}(t_0) = \underline{D}(t_0) \cdot \underline{X}_{per}(t_0) + \underline{X}_{ge}(t_0) = \underline{X}_{per}(t_0) \tag{4.105}$$

Risulta dunque che, tramite l'imposizione degli spostamenti  $\underline{G}_s$ , i vincoli si comportano inizialmente come rigidi, in modo da mantenere nel tempo l'invariabilità delle reazioni  $\underline{X}(t) = \underline{X}_{per}(t_0)$ . Operando questo forzamento la struttura, nonostante sia eterogenea, si comporta rispettando il I Teorema della viscoelasticità lineare.

### 4.3.5 ESEMPI APPLICATIVI

#### 4.3.5.1 Azioni statiche

Si considera la seguente trave con rigidezza flessionale  $EI$ , avente due vincoli elastici rappresentati da due molle di rigidezze rispettivamente pari a:  $k_1 = c_1 \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$  e  $k_2 = c_2 \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$  con  $c_1 = 2 \cdot c_2$ ; in corrispondenza dei due vincoli la struttura è sottoposta ai carichi concentrati  $p_1$  e  $p_2$ , costanti nel tempo, tali che  $p_2 = 2 \cdot p_1$ .

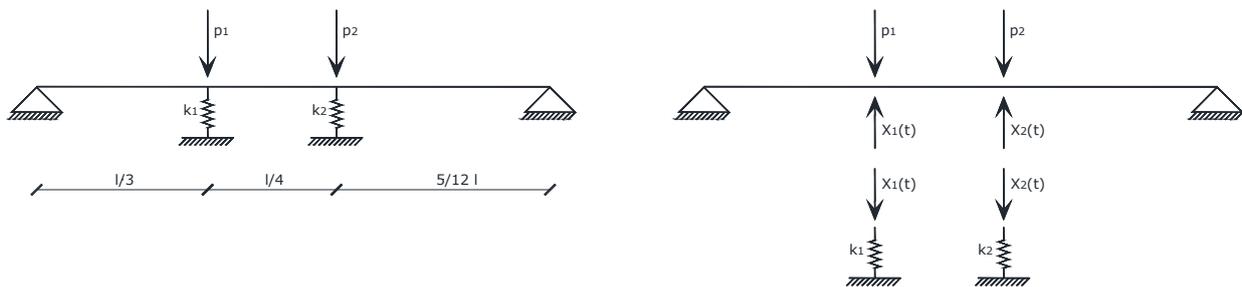


Figura 4.53 - Struttura omogenea con vincoli elastici e carichi applicati

Si considerano come iperstatiche le forze  $X_1$  e  $X_2$  agenti nei vincoli elastici (vedi Figura 4.53), pertanto la soluzione si ricava dall'equazione (4.68):

$$\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \left[ \underline{I} - \left( \underline{I} - \underline{\Omega}(t_0) \right) \cdot \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{X}_{er}(t_0)$$

Per il calcolo di tale soluzione si devono ricavare:

- le reazioni a vincolo rigido che, come si vede dalla figura seguente, risultano pari a:  $X_{1er}=p_1$  e  $X_{2er}=p_2=2p_1$ ;

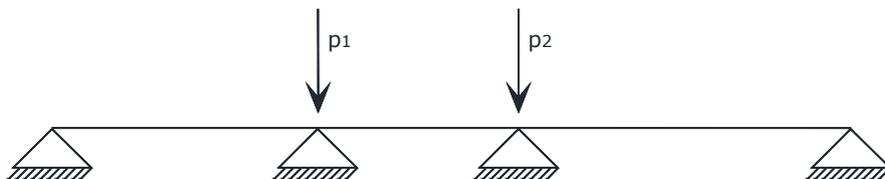


Figura 4.54 - Struttura con vincoli rigidi

- le matrici  $\underline{\underline{K}}(t_0)$  = matrice modale di  $\underline{\underline{D}}(t_0)$

$\underline{\underline{\Omega}}(t_0)$  = matrice spettrale formata dagli autovalori  $\omega_i$  di  $\underline{\underline{D}}(t_0)$

$$\underline{\underline{D}}(t_0) = \left[ \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(s)} \right]^{-1} \cdot \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(c)}(t_0).$$

Determinate:

$$\underline{\underline{\delta}}_{11}^{(c)}(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot l^3}{243 \cdot E_c(t_0) \cdot I} & \frac{515 \cdot l^3}{31104 \cdot E_c(t_0) \cdot I} \\ \frac{515 \cdot l^3}{31104 \cdot E_c(t_0) \cdot I} & \frac{1225 \cdot l^3}{62208 \cdot E_c(t_0) \cdot I} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(s)} = \begin{bmatrix} l^3 & 0 \\ c_1 E_c(t_0) \cdot I & \frac{2 \cdot l^3}{c_1 \cdot E_c(t_0) \cdot I} \end{bmatrix}$$

ipotizzando un valore di  $c_1$  pari a 200, è possibile calcolare la matrice di accoppiamento  $\underline{\underline{D}}(t_0)$  e le matrici  $\underline{\underline{\Omega}}(t_0)$ ,  $\underline{\underline{K}}(t_0)$ .

Dalla soluzione del problema di autovalori e autovettori si ottengono:

$$\underline{\underline{\Omega}}(t_0) = \begin{bmatrix} 0,8357 & 0 \\ 0 & 0,1686 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{K}}(t_0) = \begin{bmatrix} 0,8819 & -0,7304 \\ 0,4715 & 0,6830 \end{bmatrix}$$

Si riportano dunque le soluzioni adimensionalizzate sia in termini di incognite principali  $\frac{Y(t)}{Y_{er}}$ , che in termini di iperstatiche generali  $\frac{X(t)}{X_{er}}$ .

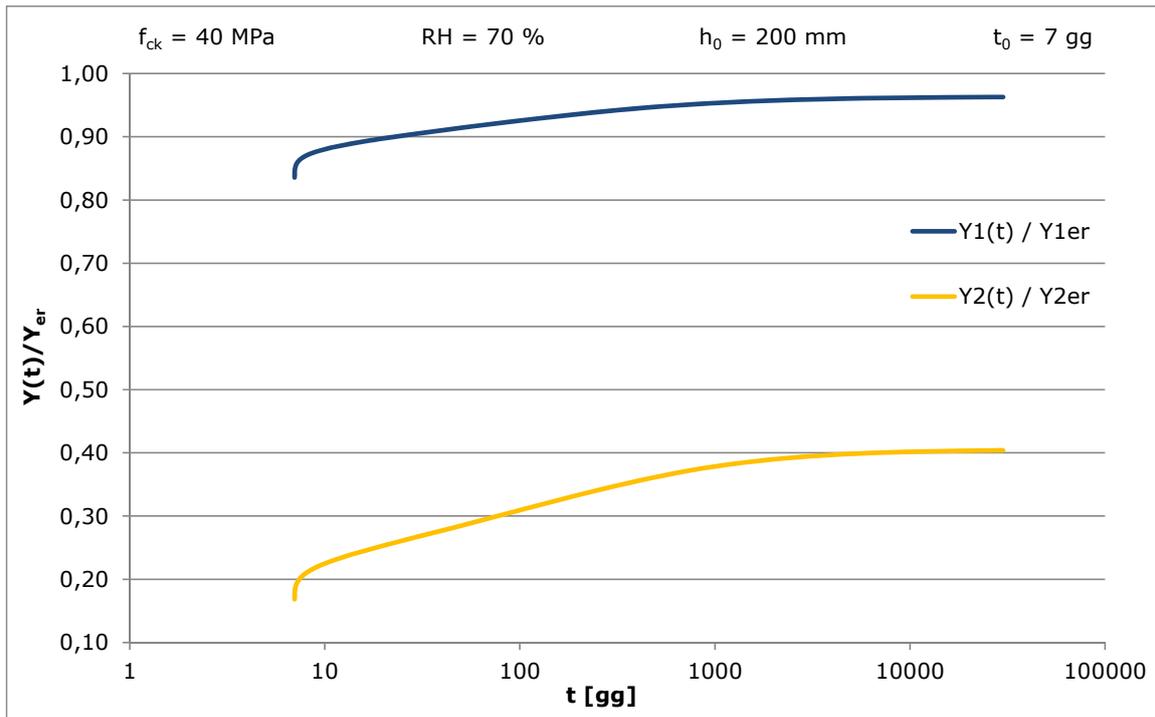


Figura 4.55 - Andamento delle incognite principali nel tempo per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  (CEB MC90)

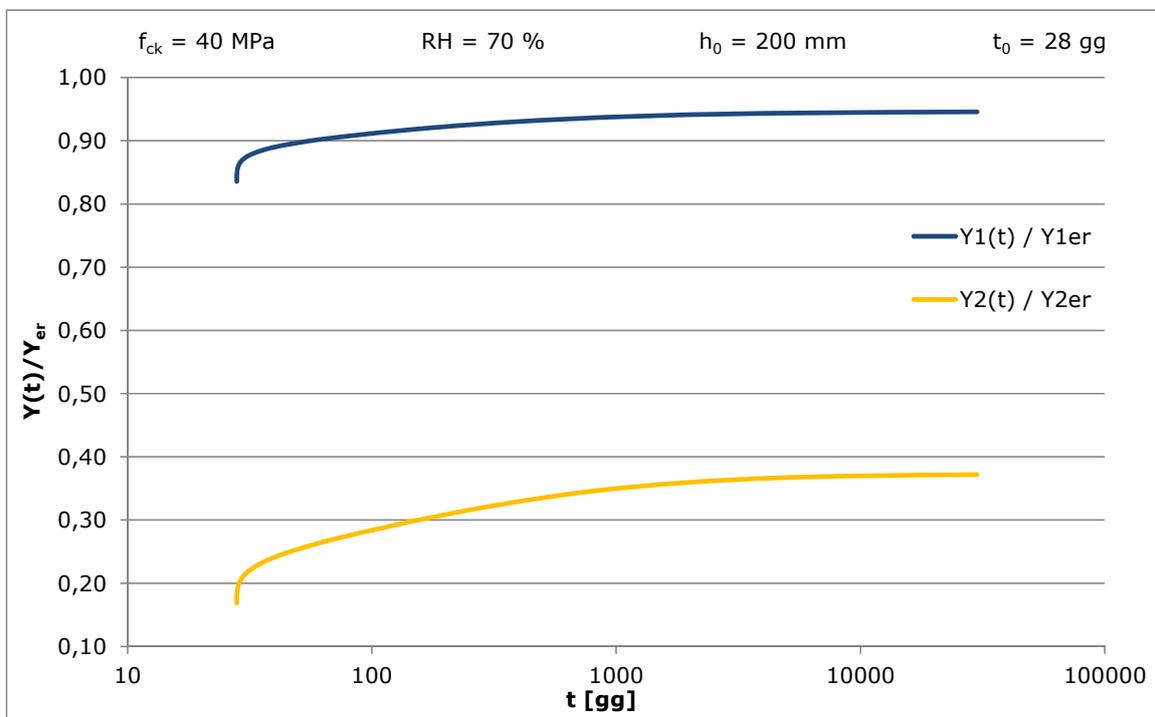


Figura 4.56 - Andamento delle incognite principali nel tempo  $t_0 = 28 \text{ gg}$  (CEB MC90)

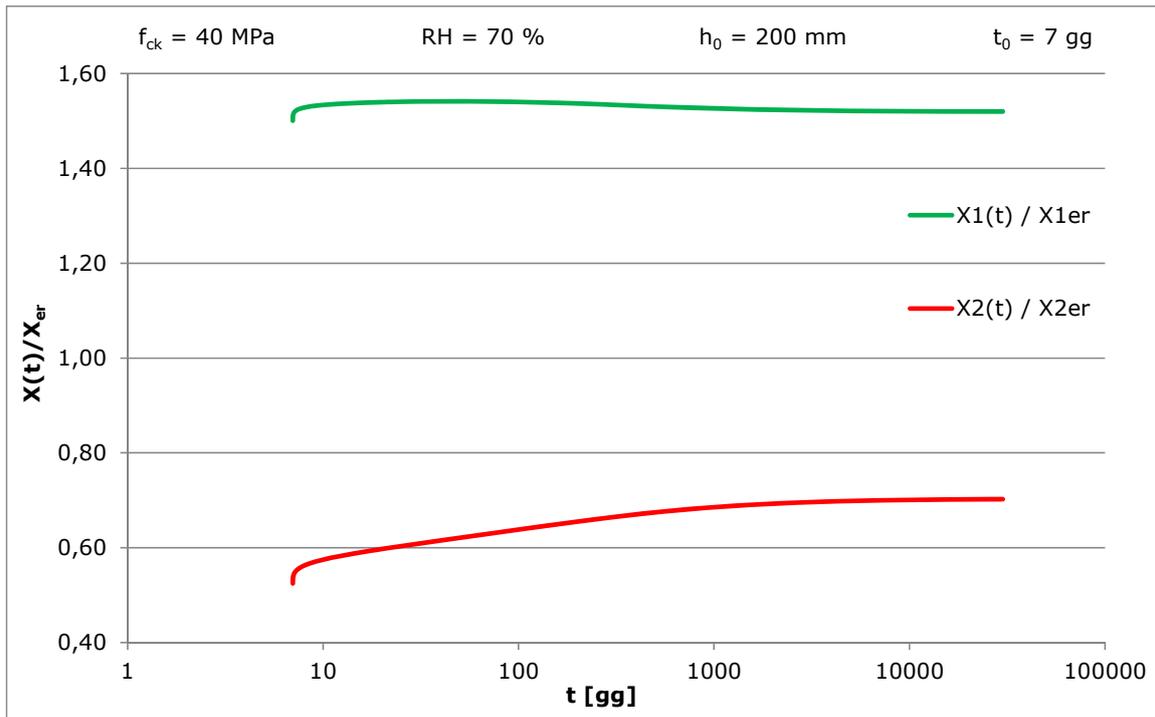


Figura 4.57 - Andamento delle due reazioni iperstatiche nel tempo per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  (CEB MC90)

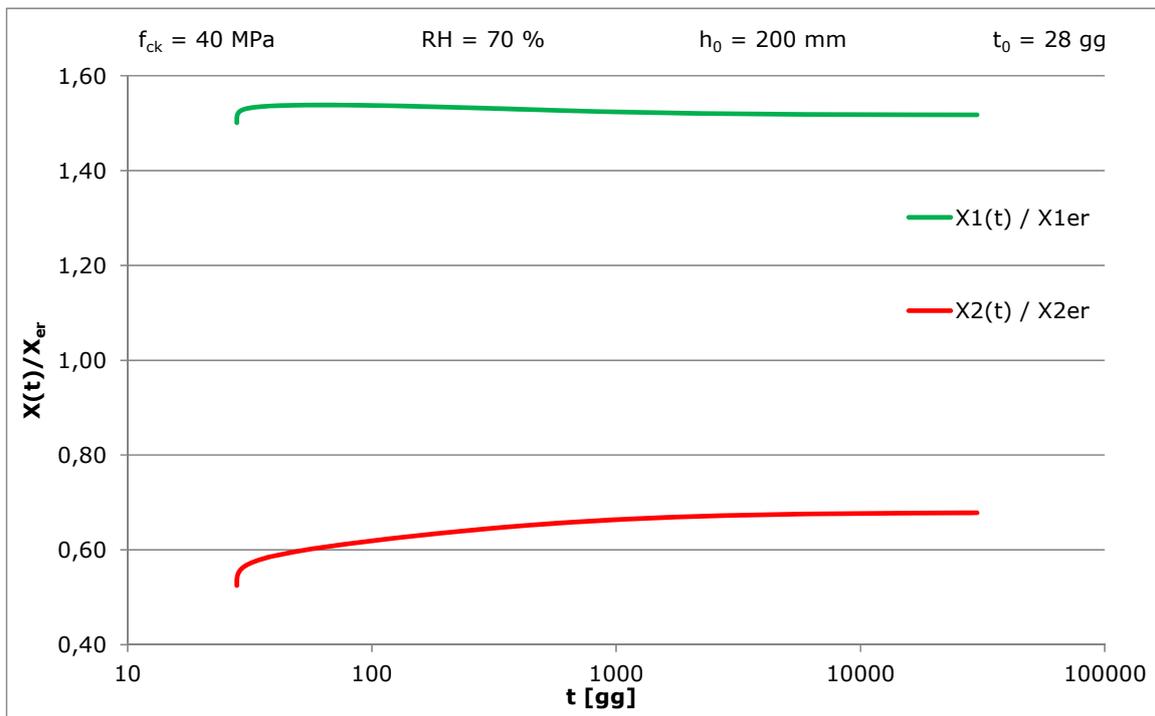


Figura 4.58 - Andamento delle due reazioni iperstatiche nel tempo per  $t_0 = 28 \text{ gg}$  (CEB MC90)

Si può notare che, a differenza delle variabili disaccoppiate  $\underline{Y}(t)$ , le reazioni iperstatiche  $\underline{X}(t)$  non hanno un andamento monotono crescente.

#### 4.3.5.2 Azioni geometriche

Si considera la medesima trave con rigidezza flessionale  $EI$ , avente due vincoli elastici rappresentati da molle con  $k_1 = c_1 \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$ ;  $k_2 = c_2 \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$  e  $c_1 = 2 \cdot c_2$ ; in corrispondenza dei due vincoli la struttura è sottoposta ai cedimenti imposti  $g_1$  e  $g_2$  tali che  $g_2 = 2 \cdot g_1$ .

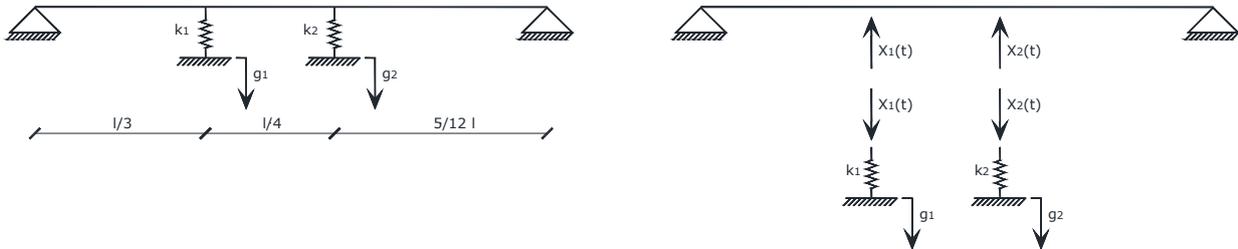


Figura 4.59 - Struttura omogenea con vincoli elastici e cedimenti imposti

Si considerano come iperstatiche le forze  $X_1$  e  $X_2$  agenti nei vincoli elastici (vedi Figura 4.59), pertanto la soluzione si ricava dall'equazione (4.78):

$$\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \left[ \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{X}_e(t_0)$$

Per il calcolo di tale soluzione si devono ricavare:

- le reazioni iniziali elastiche, che si calcolano come:

$$X(t_0) = \left[ \underline{\delta}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\delta}_{11}^{(s)} \right]^{-1} \cdot (-\underline{G})$$

essendo  $\underline{G}$  il vettore degli spostamenti impressi alle molle nella direzione delle azioni iperstatiche  $\underline{X}$ .

- le matrici  $\underline{K}(t_0) =$  matrice modale di  $\underline{D}(t_0)$

$$\underline{\Omega}(t_0) = \text{matrice spettrale formata dagli autovalori } \omega_i \text{ di } \underline{D}(t_0)$$

$$\underline{\underline{D}}(t_0) = \left[ \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(s)} \right]^{-1} \cdot \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(c)}(t_0).$$

Determinate: 
$$\underline{\underline{\delta}}_{11}^{(c)}(t_0) = \begin{bmatrix} \frac{4 \cdot l^3}{243 \cdot E_c(t_0) \cdot I} & \frac{515 \cdot l^3}{31104 \cdot E_c(t_0) \cdot I} \\ \frac{515 \cdot l^3}{31104 \cdot E_c(t_0) \cdot I} & \frac{1225 \cdot l^3}{62208 \cdot E_c(t_0) \cdot I} \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(s)} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{c_1 \cdot E_c(t_0) \cdot I} & 0 \\ 0 & \frac{2 \cdot l^3}{c_1 \cdot E_c(t_0) \cdot I} \end{bmatrix}$$

ipotizzando un valore di  $c_1$  pari a 200, è possibile calcolare la matrice di accoppiamento  $\underline{\underline{D}}(t_0)$  e le matrici  $\underline{\underline{\Omega}}(t_0)$ ,  $\underline{\underline{K}}(t_0)$ .

Dalla soluzione del problema di autovalori e autovettori si ottengono:

$$\underline{\underline{K}}(t_0) = \begin{bmatrix} 0,8817 & -0,7306 \\ 0,4717 & 0,6828 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{K}}(t_0) = \begin{bmatrix} 0,8351 & 0 \\ 0 & 0,1649 \end{bmatrix}$$

Si riportano dunque le soluzioni adimensionalizzate sia in termini di incognite principali  $\frac{Y(t)}{Y_{er}}$ , che in termini di iperstatiche generali  $\frac{X(t)}{X_{er}}$ .

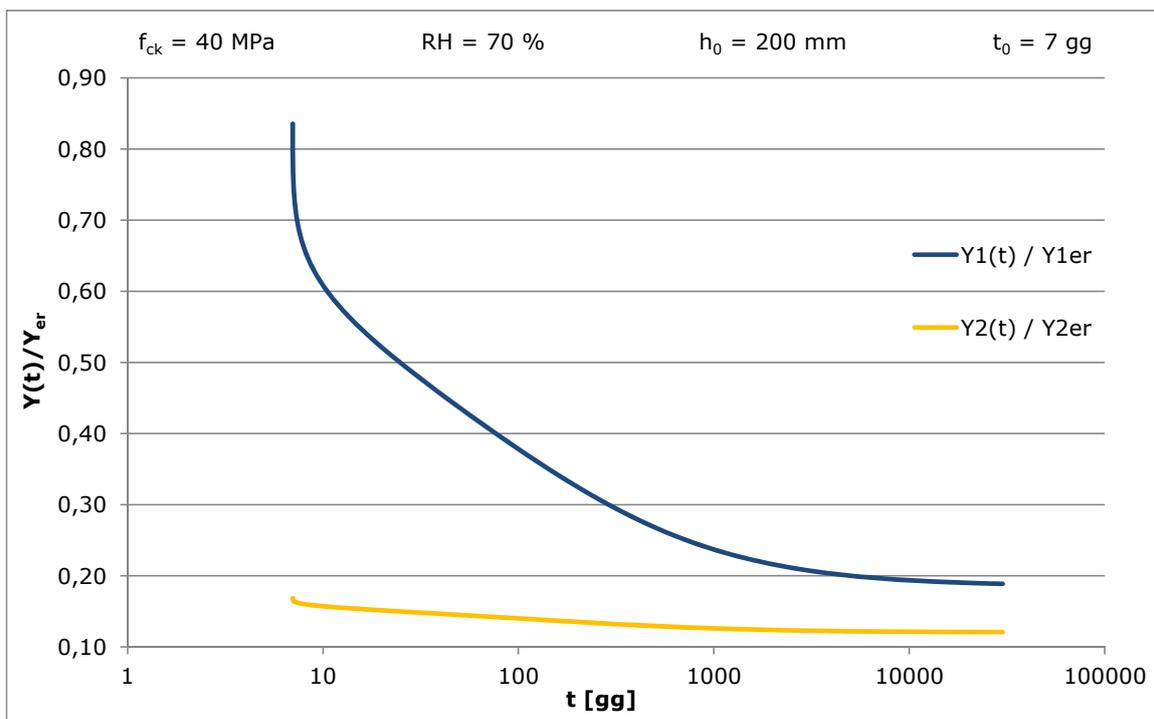


Figura 4.60 - Andamento delle incognite principali nel tempo per  $t_0 = 7$  gg (CEB MC90)

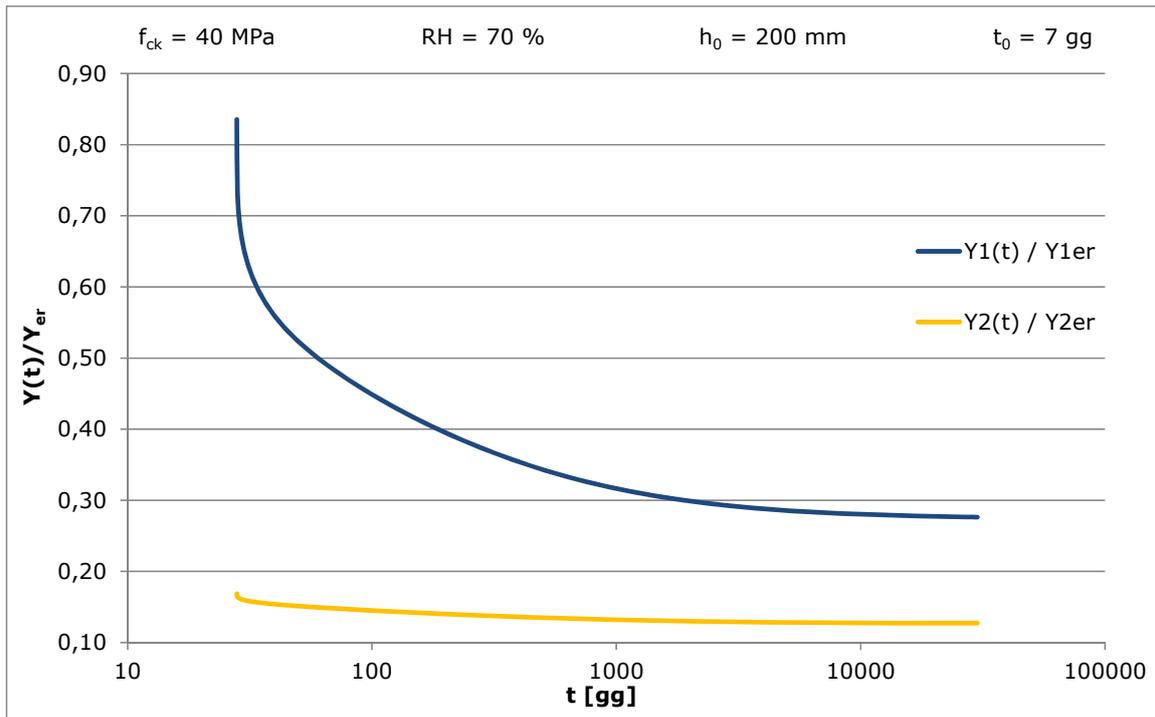


Figura 4.61 - Andamento delle incognite principali nel tempo per  $t_0 = 28 \text{ gg}$  (CEB MC90)

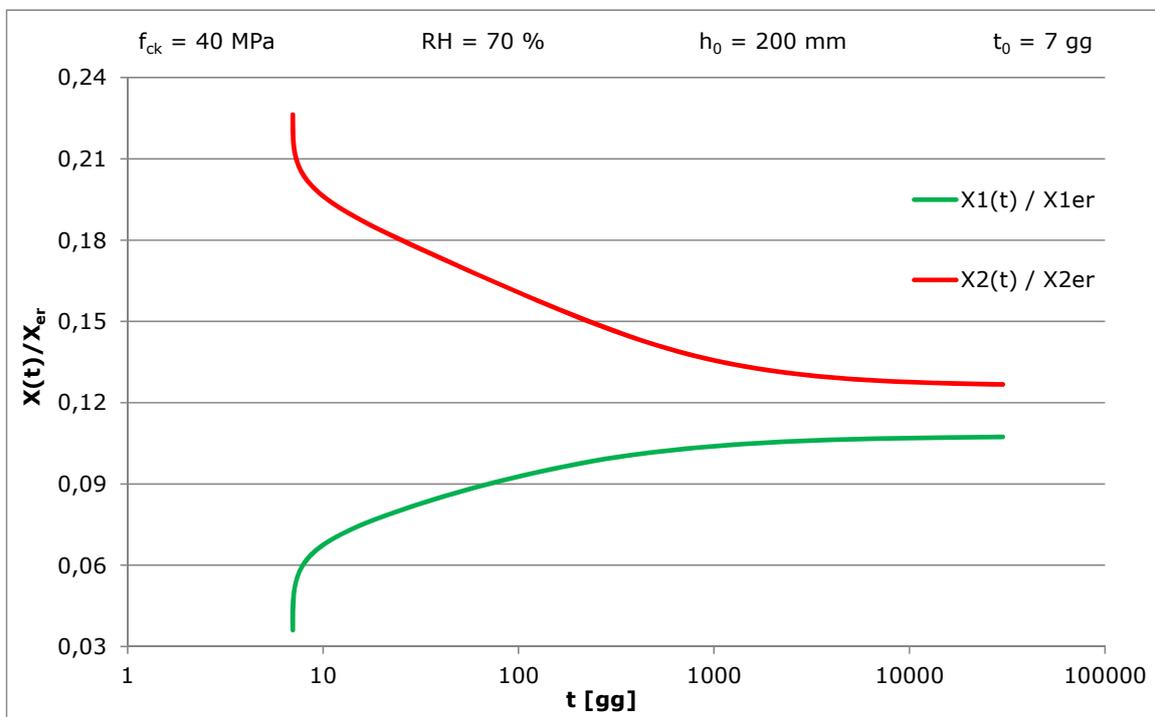


Figura 4.62 - Andamento delle due reazioni ipertatiche nel tempo per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  (CEB MC90)

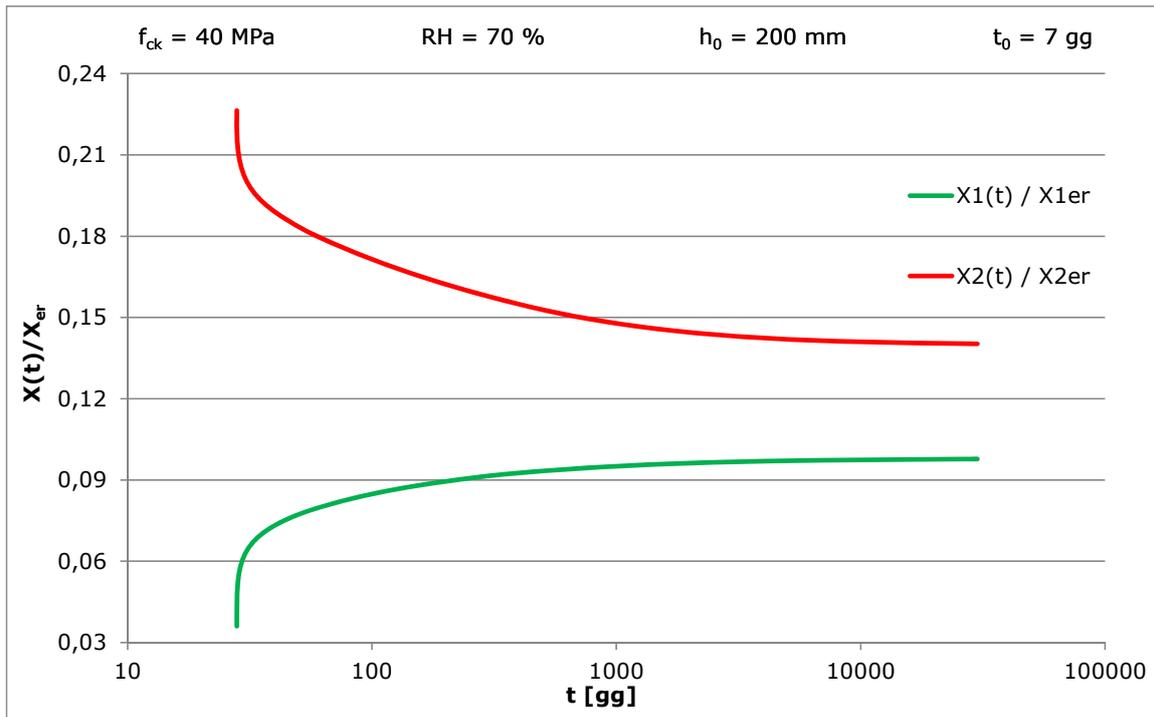


Figura 4.63 - Andamento delle due reazioni ipertatiche nel tempo per  $t_0 = 28$  gg (CEB MC90)

#### 4.3.5.3 Confronto fra le soluzioni proposte

Nel paragrafo 4.3.4 si è evidenziata la relazione esistente tra i problemi con carichi e deformazioni impressi e la possibilità di studiare situazioni miste nelle quali siano presenti entrambe le tipologie di azioni.

In particolare si vuole sottolineare come, assegnando un particolare valore alle deformazioni, si possa rendere costante nel tempo la soluzione, garantendo così l'invariabilità delle reazioni iperstatiche.

Si considera quindi la trave trattata in precedenza, soggetta ai carichi statici  $Q_1$ ;  $Q_2$  ed alle distorsioni arbitrarie  $g_1$ ;  $g_2$ , applicate al tempo  $t_0$ :

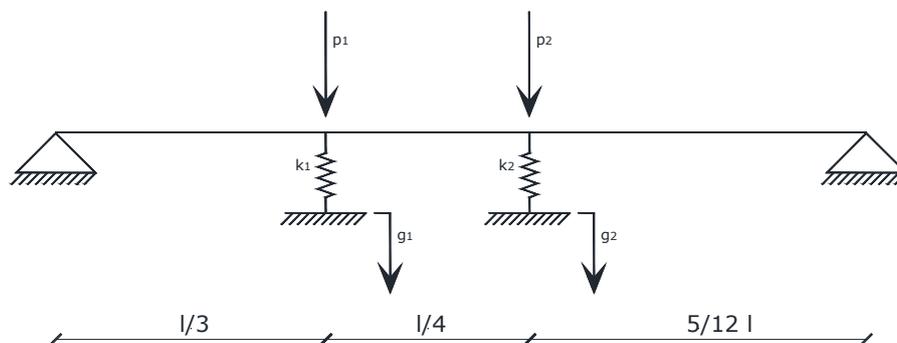


Figura 4.64 - Struttura omogenea con vincoli elastici, carichi e cedimenti impressi

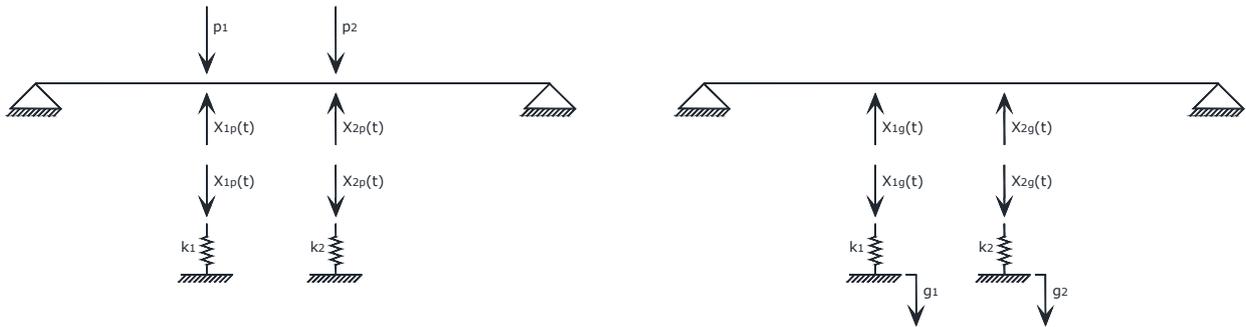


Figura 4.65 - Sovrapposizione degli effetti

Definiti:

$\underline{X}_p(t)$  = vettore delle incognite iperstatiche al tempo  $t$  prodotte dalle azioni statiche;

$\underline{X}_g(t)$  = vettore delle incognite iperstatiche prodotte dalle azioni geometriche arbitrarie;

nota l'equazione risolvente al tempo  $t$ , si ha una soluzione costante nel tempo  $X(t) = X_{per}(t_0)$  se viene rispettata la condizione (4.87):

$$\underline{X}_{ge}(t_0) = [\underline{I} - \underline{D}(t_0)] \cdot \underline{X}_{per}(t_0) \quad \rightarrow \quad \underline{G}_s = -\underline{\delta}_{11}^{(s)} \cdot \underline{X}_{per}(t_0)$$

Essendo  $\underline{G}_s$  il vettore degli spostamenti geometrici da imporre ai vincoli elastici, affinché questi si comportino inizialmente come rigidi, per mantenere l'invariabilità della reazione nel tempo.

Per evidenziare tale invarianza si rappresentano gli andamenti delle seguenti azioni adimensionalizzate:  $\frac{Y_p(t)}{Y_{per}}$ ;  $\frac{Y_g(t)}{Y_{per}}$  e  $\frac{X_p(t)}{X_{per}}$ ;  $\frac{X_g(t)}{X_{per}}$ .

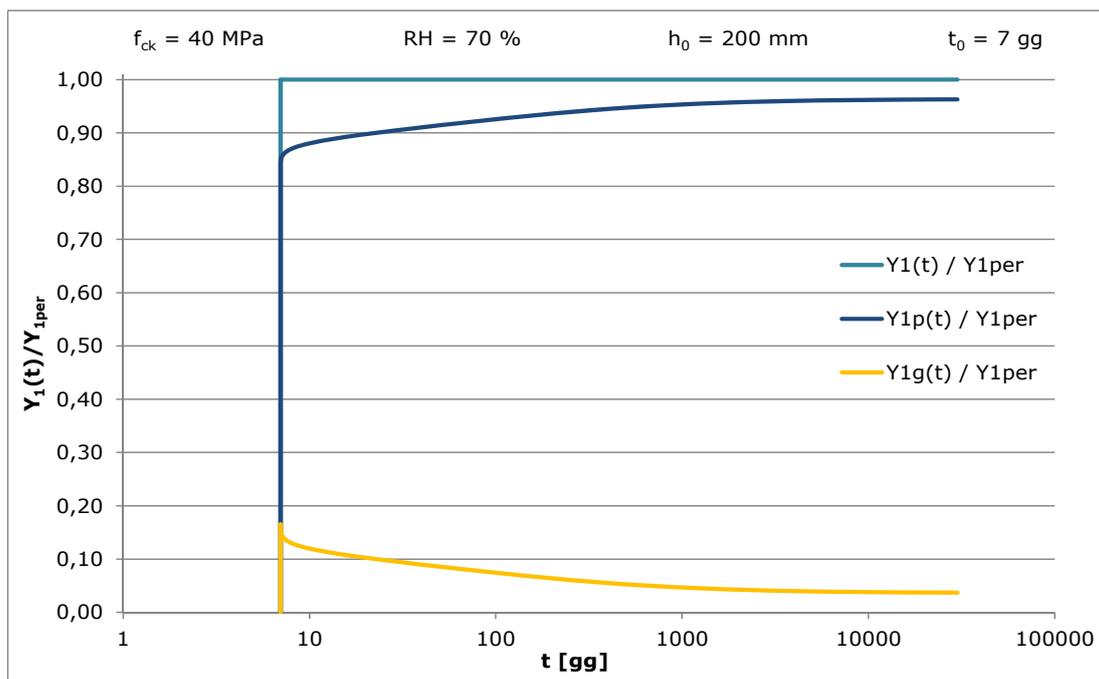


Figura 4.66 - Andamento delle azioni principali  $Y_1$  in presenza di carico e cedimento imposti

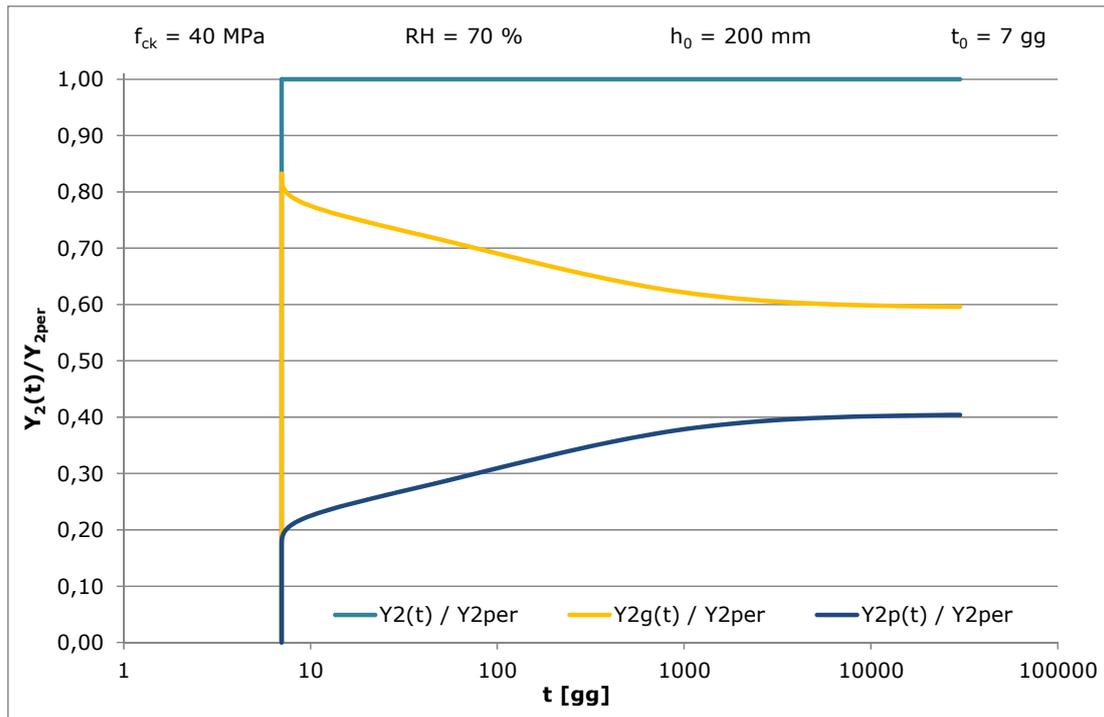


Figura 4.67 - Andamento delle azioni principali  $Y_2$  in presenza di carico e cedimento imposti

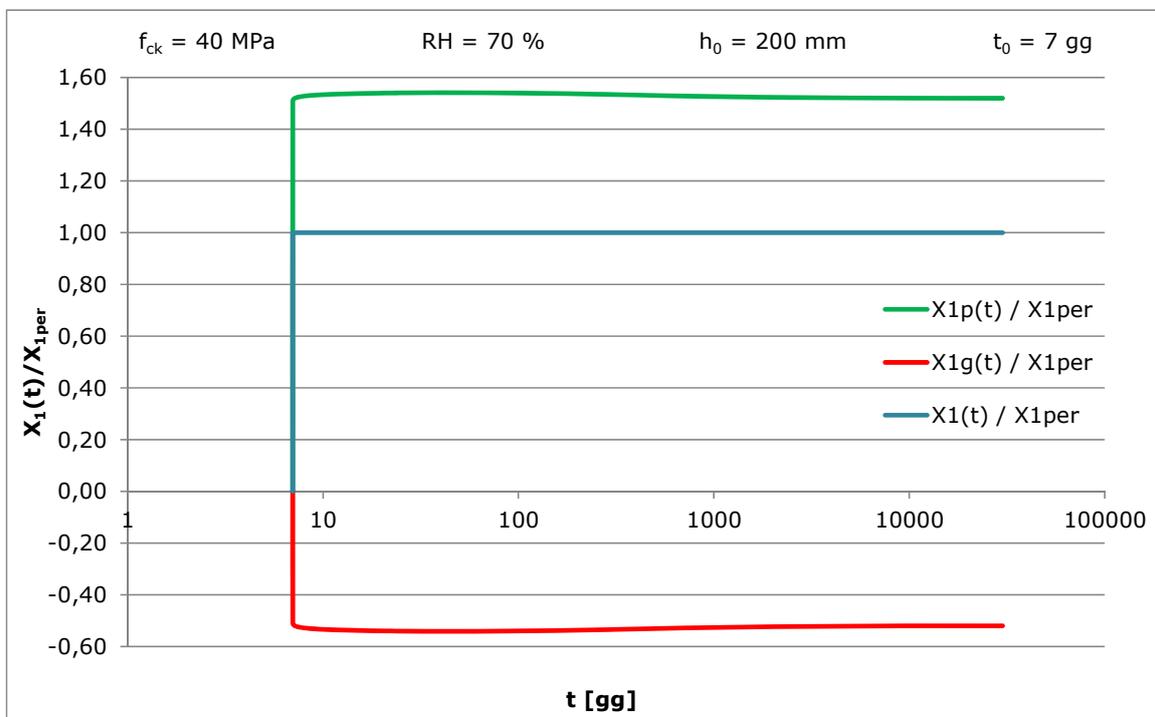


Figura 4.68 - Andamento delle iperstatiche  $X_1$  in presenza di carico e cedimento imposti

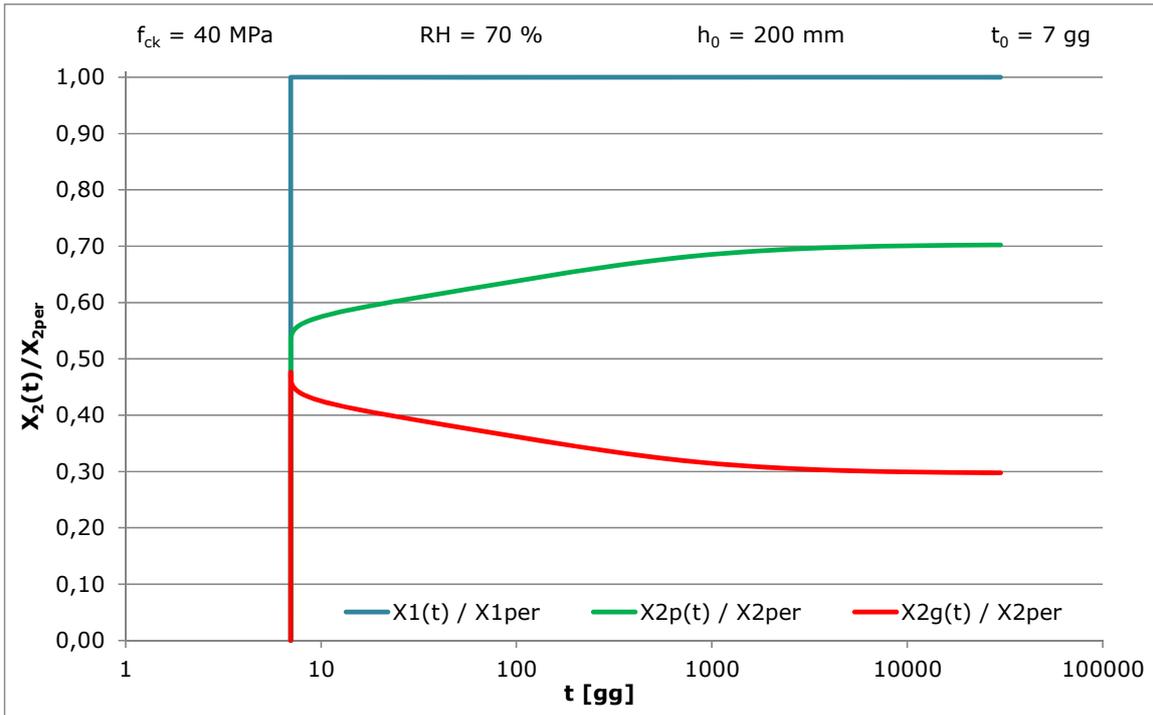


Figura 4.69 - Andamento delle iperstatiche  $X_2$  in presenza di carico e cedimento imposti

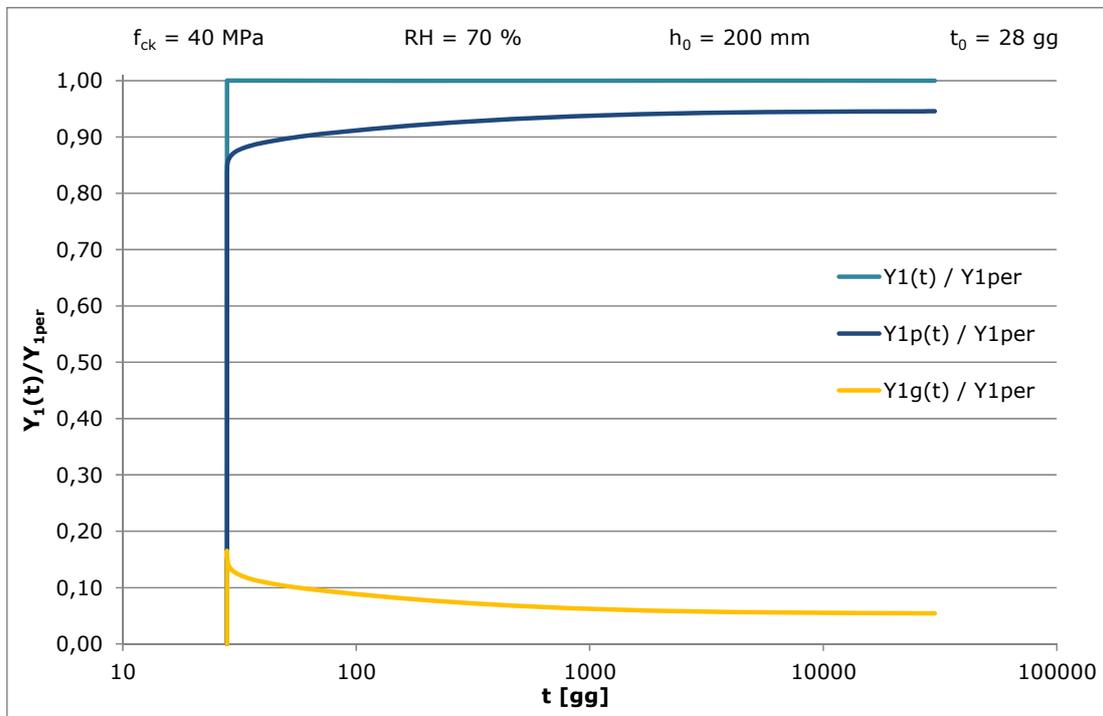


Figura 4.70 - Andamento delle azioni principali  $Y_1$  in presenza di carico e cedimento imposti

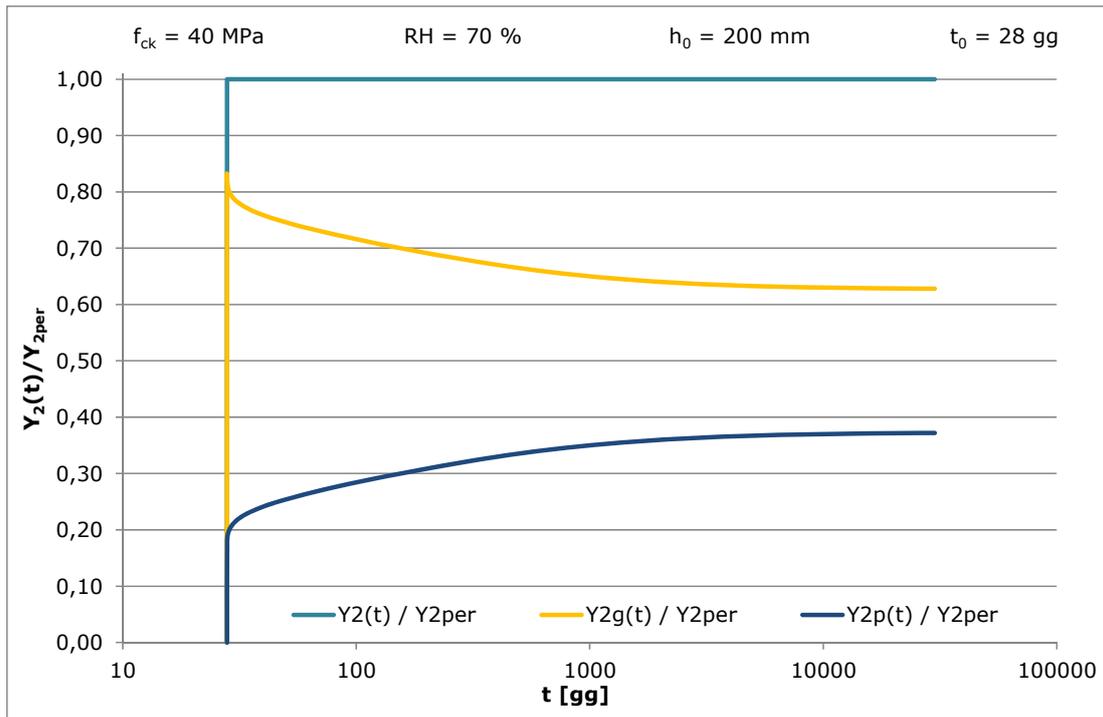


Figura 4.71 - Andamento delle azioni principali  $Y_2$  in presenza di carico e cedimento imposti

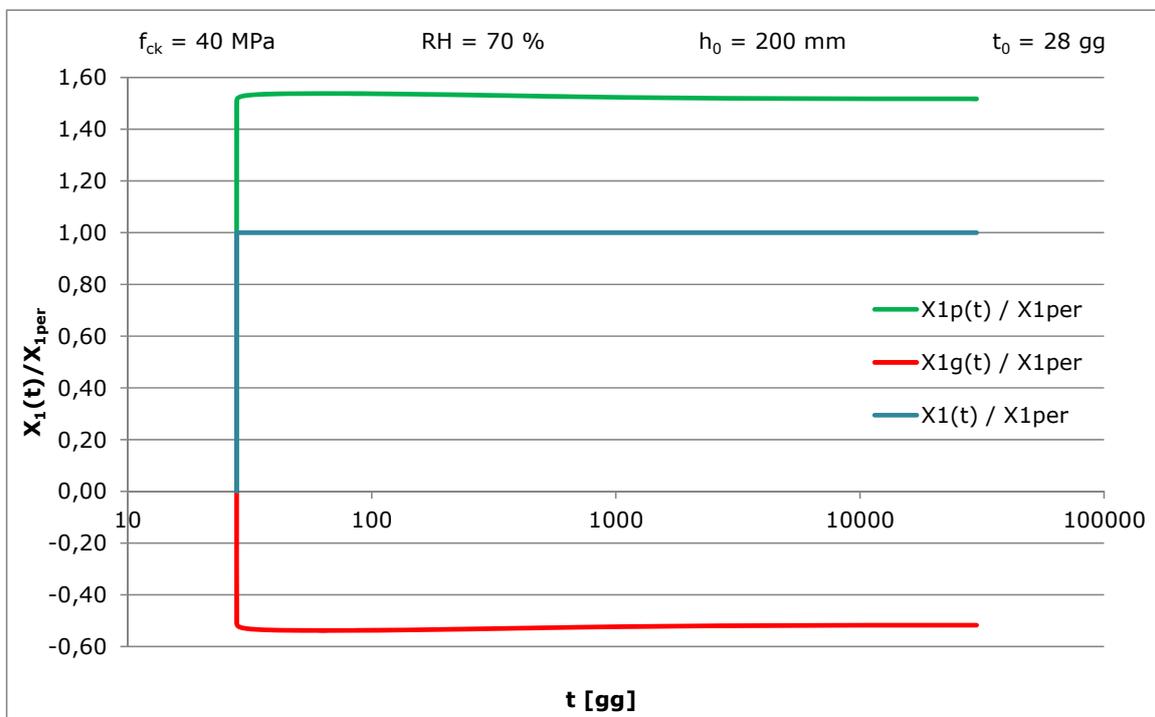


Figura 4.72 - Andamento delle iperstatiche  $X_1$  in presenza di carico e cedimento imposti

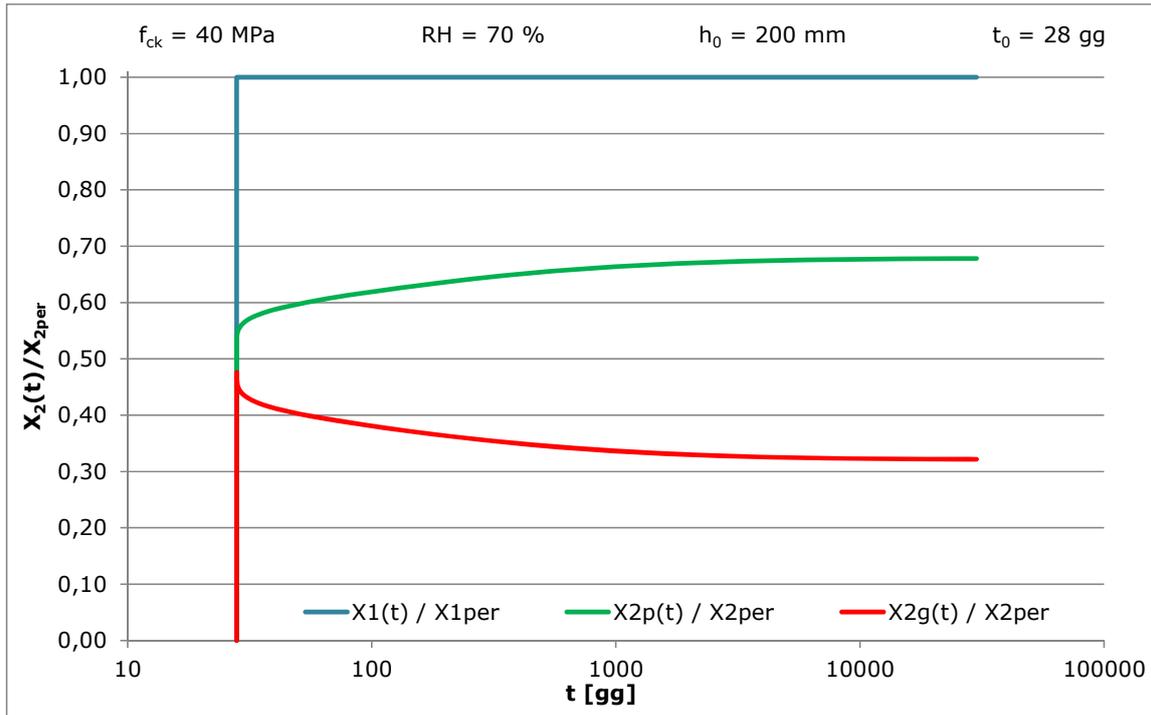


Figura 4.73 - Andamento delle iperstatiche  $X_2$  in presenza di carico e cedimento imposti

Le linee orizzontali rappresentate nei grafici precedenti indicano la costanza della somma dei rapporti indicati per le rispettive reazioni in esame, pertanto si evince che le iperstatiche adimensionalizzate, sia in coordinate principali che in coordinate generali, sono unitarie, come volevasi dimostrare.

In ciascun diagramma, al crescere dell'iperstatica relativa ai carichi, si ha un decremento corrispondente dell'iperstatica causata dalle azioni geometriche, che comporta l'invarianza nel tempo della risposta strutturale alle sollecitazioni; essendo infatti:

$$\frac{\Delta Y_{ip}(t)}{Y_{iper}} = \frac{Y_{ip}(t) - Y_{ip}(t_0)}{Y_{iper}} = \left[ \left( 1 - R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega_i(t_0)}{E_c(t_0)} \right) - \omega_i(t_0) \right] = [1 - \omega_i(t_0)] \cdot \left[ 1 - \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right]$$

$$\frac{\Delta Y_{ig}(t)}{Y_{iper}} = \frac{Y_{ig}(t) - Y_{ig}(t_0)}{Y_{iper}} = \left[ \left( R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega_i(t_0)}{E_c(t_0)} \right) - [1 - \omega_i(t_0)] \right] = [1 - \omega_i(t_0)] \cdot \left[ \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} - 1 \right]$$

risulta evidente che le due quantità, in modulo, si mantengano uguali nel tempo; siccome le iperstatiche  $\underline{X}(t)$  derivano da una trasformazione lineare delle  $\underline{Y}(t)$ , anch'esse soddisfano alla medesima proprietà.

4.3.5.4 Vincoli posticipati

Si considera sempre la trave con rigidezza flessionale  $EI$ , sottoposta ai carichi concentrati  $p_1$  e  $p_2$ , costanti nel tempo, tali che  $p_2 = 2p_1$ , applicati al tempo  $t_0 = 7$  giorni; successivamente, al tempo  $t_0^* = 10$  giorni (I esempio) e 28 giorni (II esempio), in corrispondenza dei punti di applicazione dei carichi, vengono posti due vincoli elastici di rigidezze rispettivamente pari a:  $k_1 = c_1 \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$  e  $k_2 = c_2 \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$  con  $c_1 = 2 \cdot c_2$ .

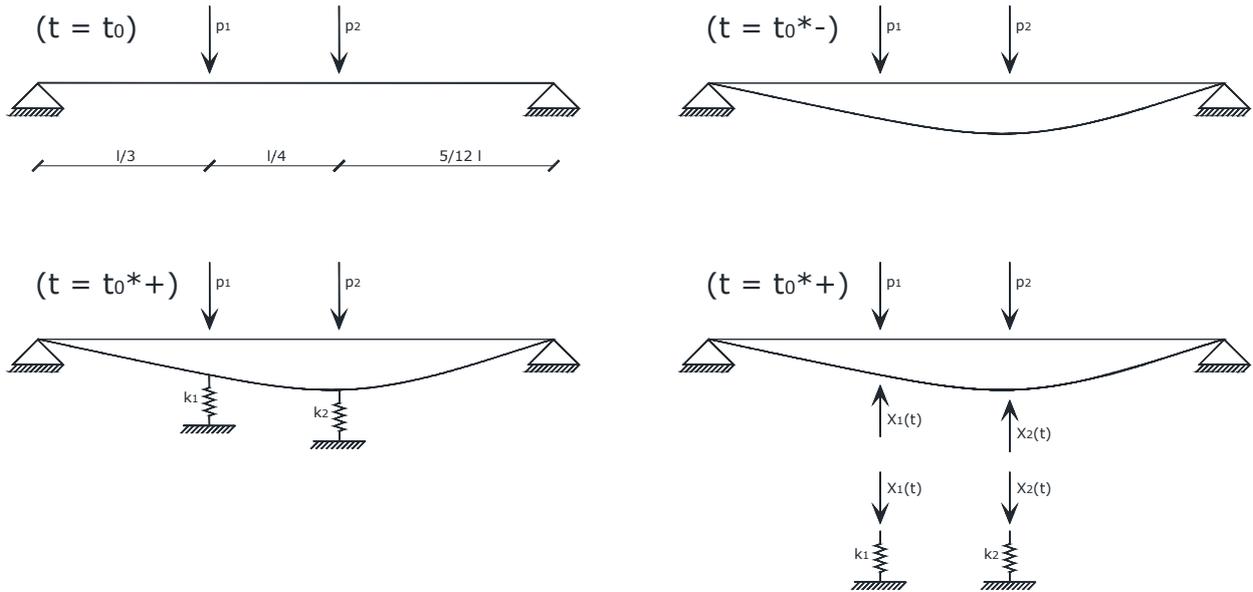


Figura 4.74 - Variazione di schema statico della struttura

Si considerano come iperstatiche le forze  $X_1$  e  $X_2$  agenti nei vincoli elastici posticipati (vedi, Figura 4.74) pertanto la soluzione si ricava dall'equazione (4.91):

$$\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \left[ \int_{t_0^*}^t \frac{\partial J_i^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot R_i^*(t, t') \cdot dt' \right] \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{X}_{er}(t_0)$$

Per il calcolo di tale soluzione si devono ricavare:

- le reazioni a vincolo rigido che, come si vede dalla figura seguente, risultano pari a:  $X_{1er} = p_1$  e  $X_{2er} = p_2 = 2p_1$ ;

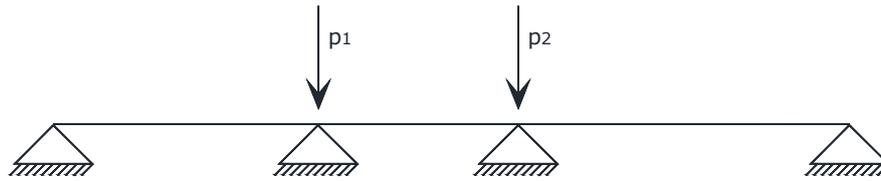


Figura 4.75 - Struttura con vincoli rigidi

- le matrici  $\underline{\underline{K}}(t_0) =$  matrice modale di  $\underline{\underline{D}}(t_0)$

$\underline{\underline{\Omega}}(t_0) =$  matrice spettrale formata dagli autovalori  $\omega_i$  di  $\underline{\underline{D}}(t_0)$

$$\underline{\underline{D}}(t_0) = \left[ \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(c)}(t_0) + \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(s)} \right]^{-1} \cdot \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(c)}(t_0).$$

Determinate: 
$$\underline{\underline{\delta}}_{11}^{(c)}(t_0) = \begin{bmatrix} 4 \cdot l^3 & 515 \cdot l^3 \\ 243 \cdot E_c(t_0) \cdot l & 31104 \cdot E_c(t_0) \cdot l \\ 515 \cdot l^3 & 1225 \cdot l^3 \\ 31104 \cdot E_c(t_0) \cdot l & 62208 \cdot E_c(t_0) \cdot l \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\delta}}_{11}^{(s)} = \begin{bmatrix} l^3 & 0 \\ c_1 \cdot E_c(t_0) \cdot l & 2 \cdot l^3 \\ 0 & c_1 \cdot E_c(t_0) \cdot l \end{bmatrix}$$

ipotizzando un valore di  $c_1$  pari a 200, è possibile calcolare la matrice di accoppiamento  $\underline{\underline{D}}(t_0)$  e le matrici  $\underline{\underline{\Omega}}(t_0)$ ,  $\underline{\underline{K}}(t_0)$ .

Dalla soluzione del problema di autovalori e autovettori si ottengono:

$$\underline{\underline{K}}(t_0) = \begin{bmatrix} 0,8817 & -0,7306 \\ 0,4717 & 0,6828 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Omega}}(t_0) = \begin{bmatrix} 0,8351 & 0 \\ 0 & 0,1649 \end{bmatrix}$$

Si riportano dunque le soluzioni adimensionalizzate sia in termini di incognite principali  $\frac{Y(t)}{Y_{er}}$ , che in termini di iperstatiche generali  $\frac{X(t)}{X_{er}}$ .

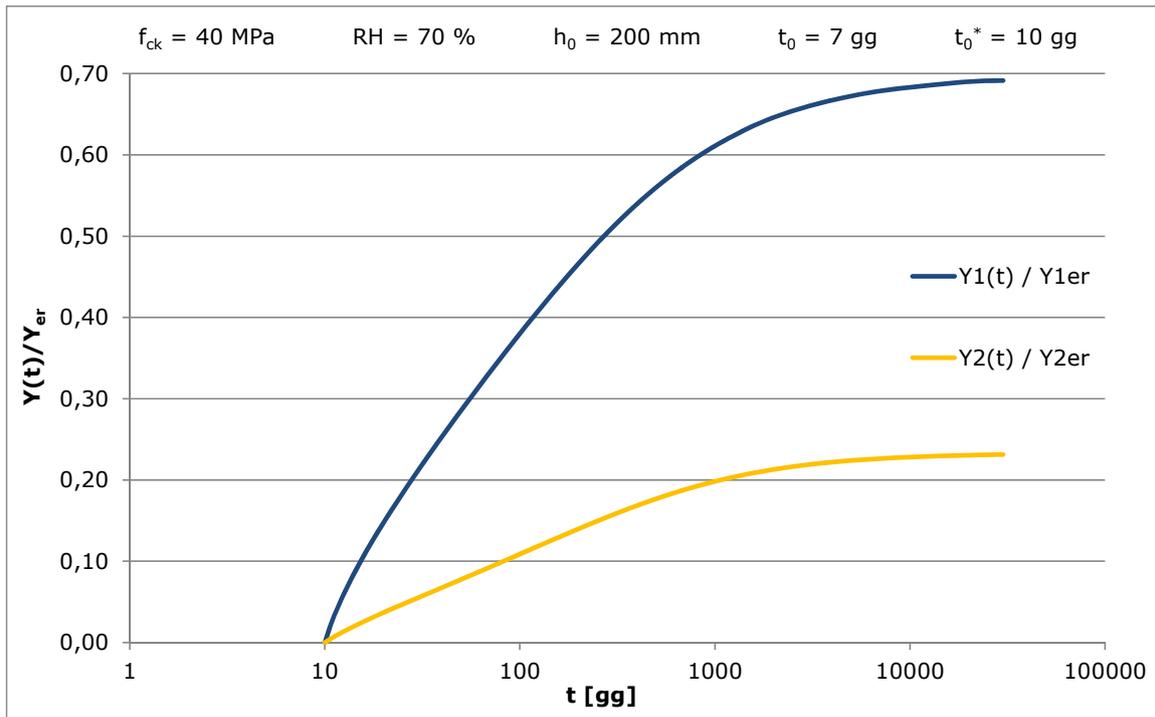


Figura 4.76 - Andamento delle incognite principali nel tempo per  $t_0^* = 10 \text{ gg}$

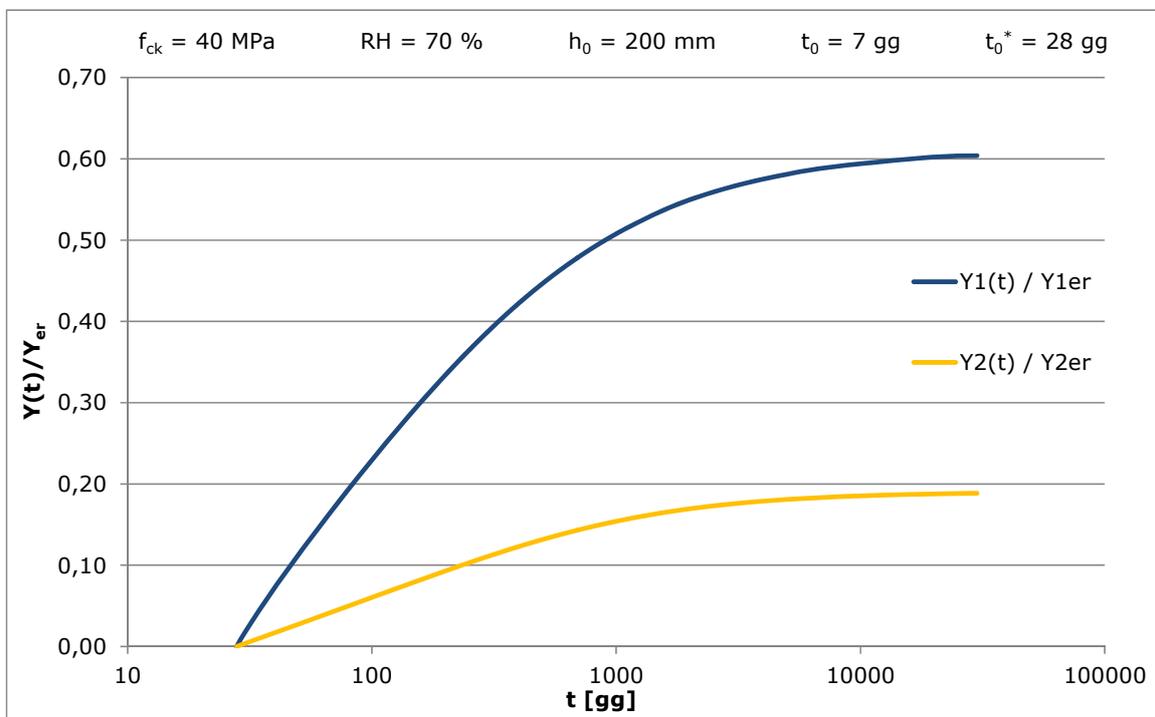


Figura 4.77 - Andamento delle incognite principali nel tempo per  $t_0^* = 28 \text{ gg}$

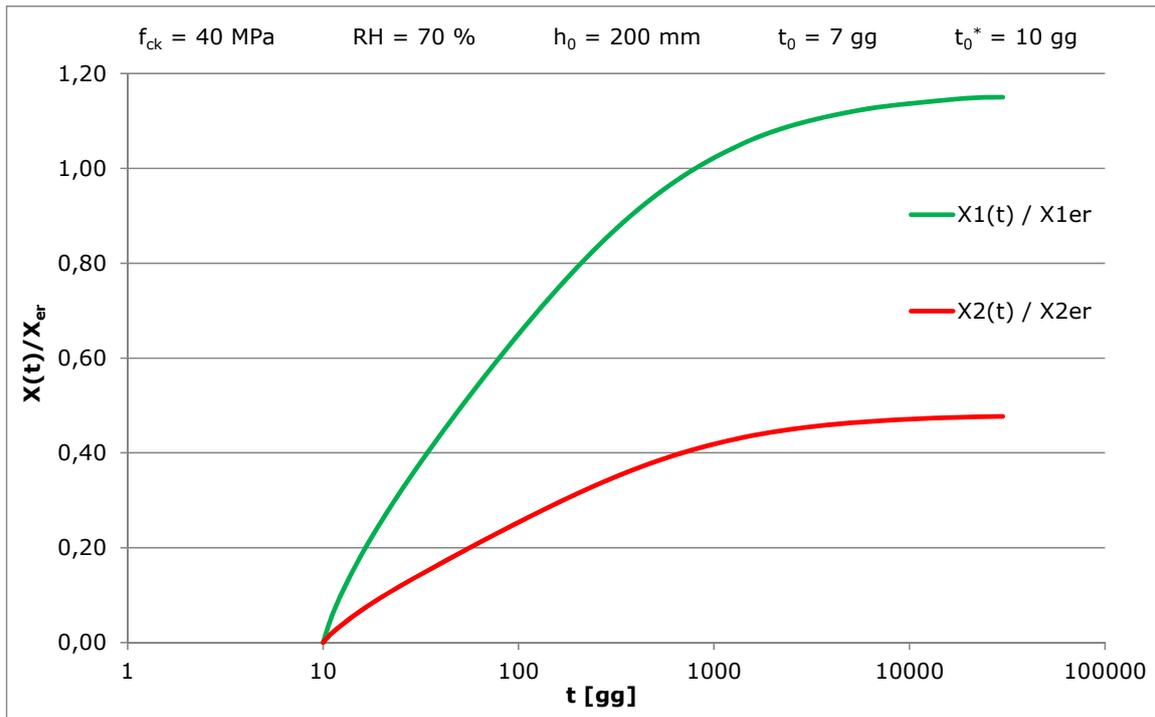


Figura 4.78 - Andamento delle due reazioni iperstatiche nel tempo per  $t_0^* = 10 \text{ gg}$

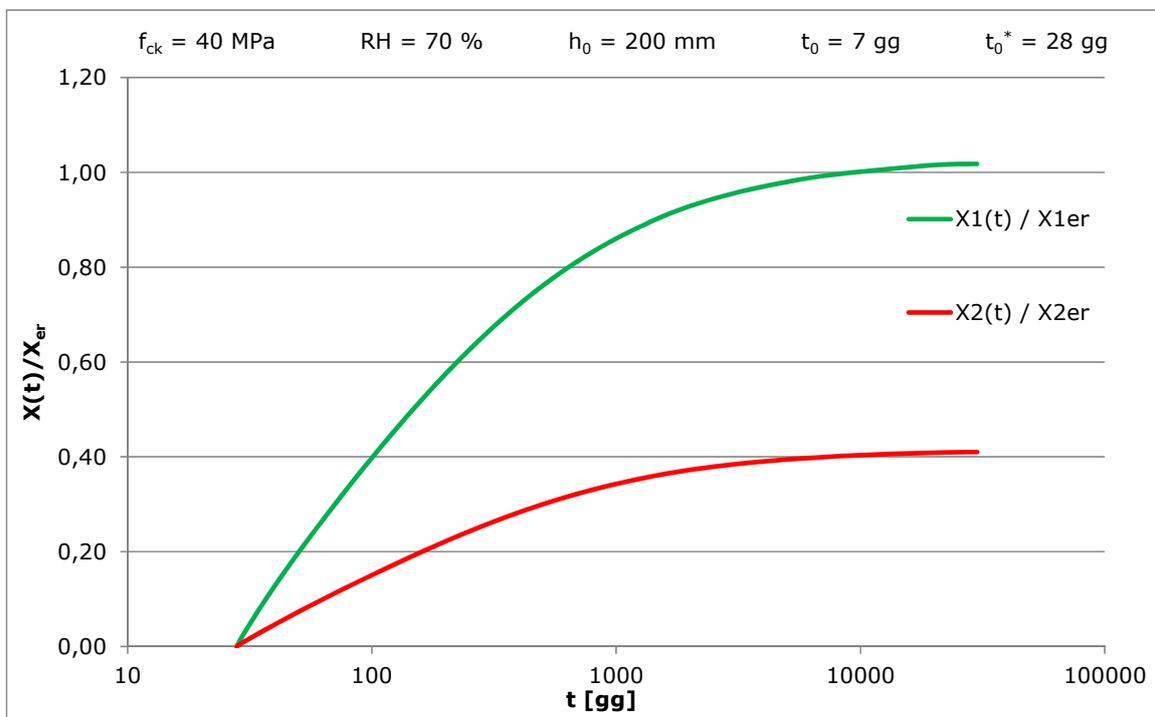


Figura 4.79 - Andamento delle due reazioni iperstatiche nel tempo per  $t_0^* = 28 \text{ gg}$

## 4.4 CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI

Determinato il valore delle iperstatiche, essendo la struttura omogenea, gli spostamenti sono facilmente ricavabili applicando il primo teorema della viscosità lineare, imponendo alla struttura stessa, resa isostatica, le azioni e le iperstatiche ad essa trasmesse dai vincoli.

Considerando la variabilità nel tempo dello stato tensionale, a causa della variazione di  $\underline{X}(t)$ , si considerano i diversi casi:

### 4.4.1 AZIONI STATICHE

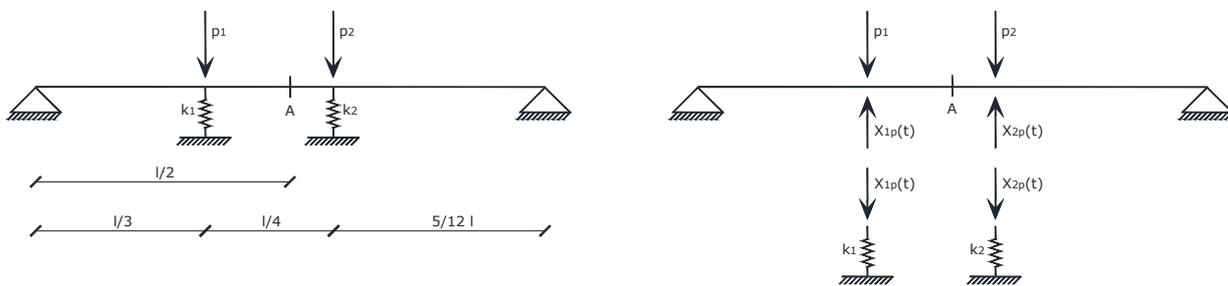


Figura 4.80 - Struttura omogenea con vincoli elastici e carichi applicati

Definiti:

$v_{ep}(t_0)$  = spostamenti elastici prodotti sulla struttura resa isostatica dalle azioni statiche;

$v_j(t_0)$  = spostamenti elastici prodotti sulla struttura resa isostatica dalle azioni iperstatiche unitarie;

$v(t)$  = spostamento presente in una sezione arbitraria secondo la direzione prescelta;

$v_e(t_0)$  = spostamento elastico iniziale della struttura.

Si possono scrivere le seguenti equazioni:

$$v(t) = v_{ep}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \sum_{j=1}^n X_j(t_0) \cdot v_j(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n dX_j(t') \cdot v_j(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') \quad (4.106)$$

$$v_e(t_0) = v_{ep}(t_0) + \sum_{j=1}^n X_j(t_0) \cdot v_j(t_0) \quad (4.107)$$

Pertanto il generico spostamento al tempo  $t$ , calcolato il vettore soluzione:

$$\underline{X}(t) = \underline{K}(t_0) \cdot \left[ \underline{I} - \left( \underline{I} - \underline{\Omega}(t_0) \right) \cdot \frac{\underline{R}^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \underline{K}(t_0)^{-1} \cdot \underline{X}_{er}(t_0) \quad (4.108)$$

Può essere scritto come:

$$v(t) = v_e(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n K_{jl}(t_0) \cdot Y_{erl}(t_0) \cdot v_j(t_0) \cdot (1 - \omega_l) \cdot \frac{\partial R_l^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot J(t, t') \cdot dt' \quad (4.109)$$

Definendo:

$$\frac{Y_{erl}(t_0)}{X_{erj}(t_0)} = \mu_{jl}(t_0) \quad (4.110)$$

e ricordando che:

$$E_c(t_0) \cdot J_i^*(t, t') = \omega_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega_i(t_0) \quad (4.111)$$

$$R_i^*(t', t') \cdot J_i^*(t, t') + \int_{t'}^t \frac{\partial R_i^*(\tau, t')}{\partial \tau} \cdot J_i^*(t, \tau) \cdot d\tau = 1 \quad (4.112)$$

la scrittura finale dello spostamento risulta:

$$v(t) = v_e(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n K_{jl}(t_0) \cdot \mu_{jl}(t_0) \cdot X_{erj}(t_0) \cdot v_j(t_0) \cdot \frac{(1 - \omega_l)}{\omega_l} \cdot \left[ 1 - \omega_l \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - (1 - \omega_l) \cdot \frac{R_l^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (4.113)$$

#### 4.4.2 AZIONI GEOMETRICHE

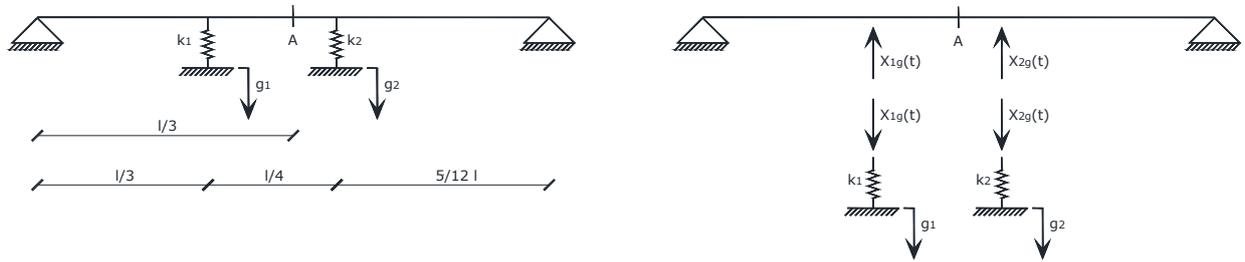


Figura 4.81 - Struttura omogenea con vincoli elastici e cedimenti imposti

Analogamente al caso precedente lo spostamento risulta:

$$v(t) = \sum_{j=1}^n X_j(t_0) \cdot v_j(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n K_{jl}(t_0) \cdot \mu_{jl} \cdot X_{erj}(t_0) \cdot v_j(t_0) \cdot (1 - \omega_l) \cdot \frac{\partial R_l^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot \omega_l \cdot J(t, t') \cdot dt'$$

$$v(t) = \sum_{j=1}^n X_j(t_0) \cdot v_j(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n K_{jl}(t_0) \cdot \mu_{jl}(t_0) \cdot X_{erj}(t_0) \cdot v_j(t_0) \cdot \left[ 1 - \omega_l \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - (1 - \omega_l) \cdot \frac{R_l^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (4.114)$$

### 4.4.3 ESEMPI APPLICATIVI

#### 4.4.3.1 Azioni statiche (caso monodimensionale)

Si considera la seguente trave con rigidezza flessionale  $EI$ , avente un vincolo elastico in mezzzeria rappresentato da una molla di rigidezza  $k = c \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot I}{l^3}$  e sottoposta ad un carico concentrato  $p$  costante nel tempo.

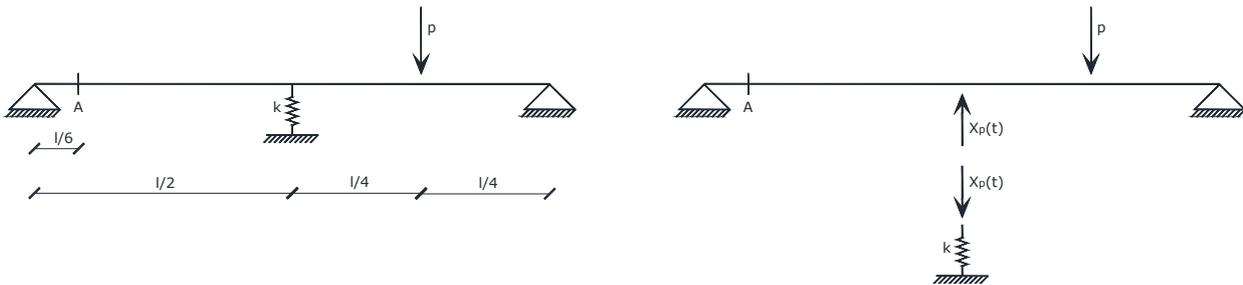


Figura 4.82 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e carico  $p$  imposto

Si considera come iperstatica la forza agente nel vincolo elastico (Figura 4.82), pertanto la soluzione del problema proposto è data dall'equazione (4.10):

$$X(t) = X_{er}(t_0) \cdot \left[ 1 - R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right]$$

calcolabile con le medesime osservazioni proposte nel paragrafo 4.2.6.1, essendo  $X_{er}$  pari a  $11/16 p$ , reazione di vincolo rigido. Fissato un valore di  $c = 70$  si ottiene  $\omega = 0.5932$ , pertanto, noto il valore di  $X(t)$ , si vuole determinare l'andamento temporale dello spostamento del punto A.

Utilizzando l'espressione:

$$v(t) = v_e(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + v_X \cdot X_{er} \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{\omega(t_0)} \cdot \left[ \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot R^*(t, t_0) - 1 \right]$$

calcolati lo spostamento elastico prodotto dal carico  $p$   $v_e$  e quello prodotto dall'azione iperstatica unitaria  $v_X$  si orriene il seguente andamento:

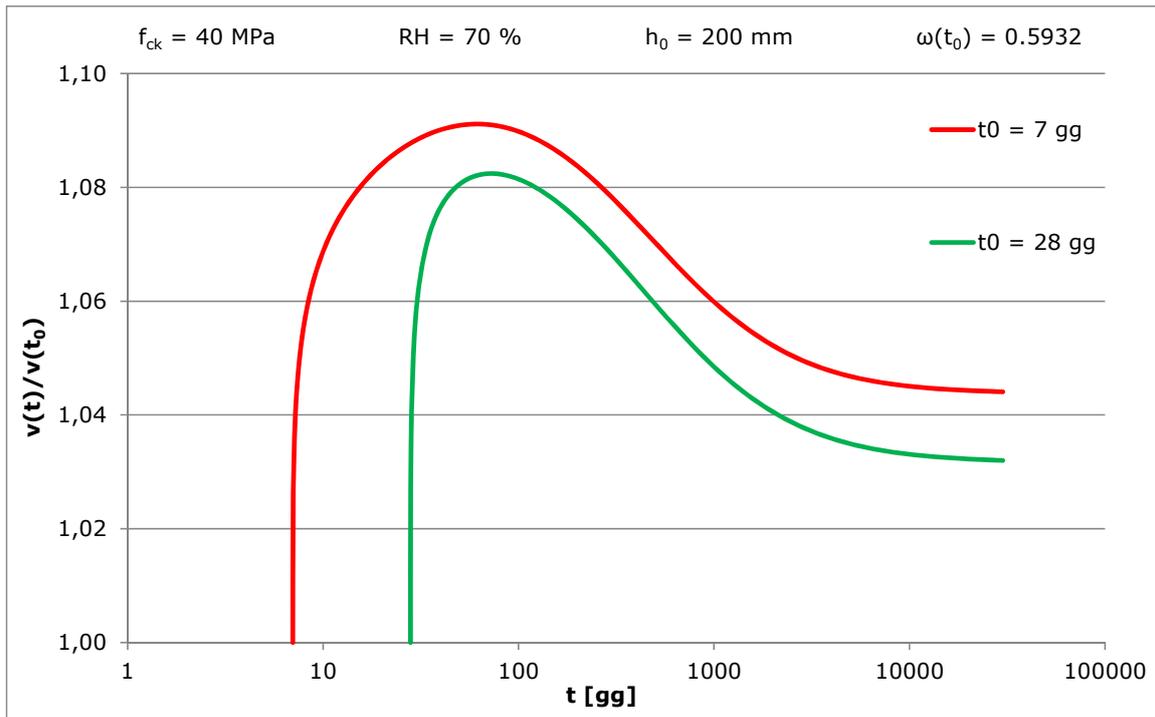


Figura 4.83 - Spostamento del punto A nel tempo

#### 4.4.3.2 Azioni geometriche (caso monodimensionale)

Si considera la seguente trave con rigidezza flessionale  $EI$ , avente un vincolo elastico in mezzzeria rappresentato da una molla di rigidezza  $k = c \cdot \frac{EI}{l^3}$  e sottoposta ad un cedimento imposto  $g$  come mostrato in figura:

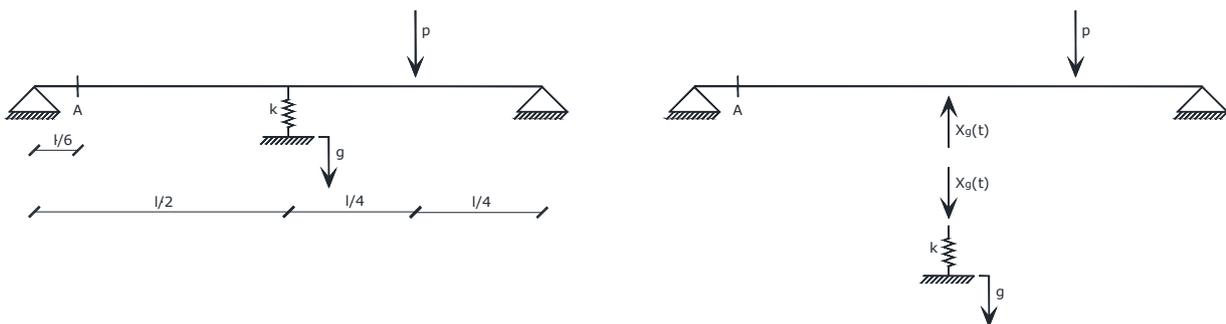


Figura 4.84 - Struttura omogenea con vincolo elastico e cedimento  $p$  imposto

Si considera come iperstatica la forza agente nel vincolo elastico (Figura 4.84), pertanto la soluzione del problema proposto è data dall'equazione (4.18):

$$X(t) = X_{er}(t_0) \left[ \omega(t_0) \cdot \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right]$$

Calcolabile con le medesime osservazioni proposte nel paragrafo 4.2.6.2, essendo  $X_{er}(t_0)$  la reazione iniziale elastica con vincolo rigido. Fissato un valore di  $C = 70$  si ottiene  $\omega = 0.5932$  pertanto, noto il valore di  $X(t)$ , si vuole determinare l'andamento temporale dello spostamento del punto A.

Utilizzando l'espressione:

$$v(t) = -v_X \cdot X_e(t_0) \cdot \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{\omega(t_0)}$$

calcolato lo spostamento elastico prodotto dall'azione iperstatica unitaria  $v_X$  si determina la soluzione cercata.

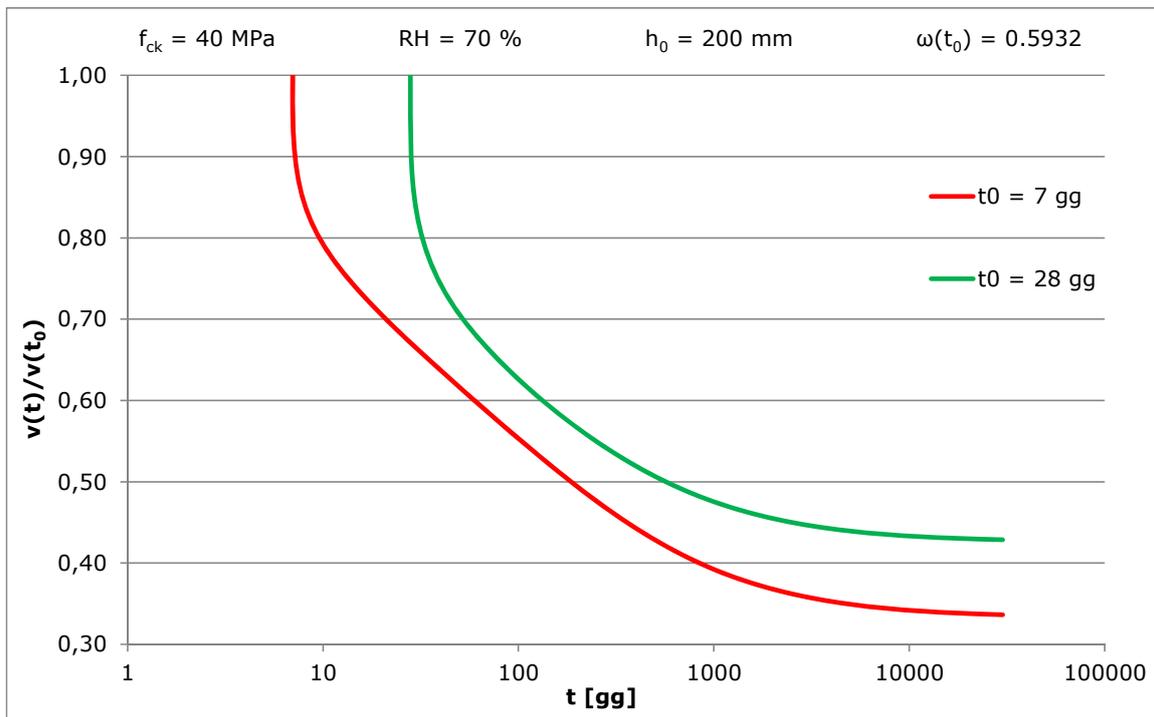


Figura 4.85 - Spostamento del punto A nel tempo

## **5 IL PROBLEMA DELL'ABBASSAMENTO DELLE COLONNE NEGLI EDIFICI ALTI**

### **5.1 GENERALITA'**

La valutazione e lo studio degli effetti strutturali connessi all'abbassamento delle colonne, o più in generale, degli elementi portanti verticali di edifici alti, nonché l'analisi delle tecniche atte a ridurre tali effetti, costituisce un problema importante in fase di progettazione, esecuzione ed esercizio di un edificio alto in calcestruzzo armato.

Lo sviluppo di questa problematica strutturale si deve a due ingegneri che fin dai primi anni '60 ne hanno analizzato gli aspetti di maggiore rilievo ai fini progettuali di grattacieli in cemento armato di elevate altezze: Mark Fintel e Fazlur Khan.

Il primo si laureò in Ingegneria nel 1950 all'università Tecnica di Monaco e rivestì, di seguito, la carica di direttore della Portland Cement Association in qualità di esperto di Edifici Speciali ed Edifici Alti.

Fazlur Khan conseguì la laurea in Ingegneria all'Università di Dacca in Pakistan, sempre nel 1950, successivamente si spostò negli Stati Uniti, dove, nel 1955, terminò il dottorato in Ingegneria Strutturale all'Università dell'Illinois. Khan, responsabile strutturale di SOM (Skidmore, Owings & Merrill), progettò numerosi edifici alti, sviluppando nuovi sistemi strutturali per edifici in cemento armato ed acciaio.

Una corretta impostazione del problema richiede, in primo luogo, di introdurre il concetto di Sequenza costruttiva, trattando successivamente nel dettaglio le modalità e le indicazioni progettuali attualmente disponibili in letteratura, derivando le espressioni utili alla previsione (Prediction) degli abbassamenti.

### **5.2 SEQUENZA COSTRUTTIVA**

Gli edifici alti vengono costruiti attraverso ben definite sequenze temporali costruttive. Un'analisi statica che prescindendo da questo aspetto può portare ad una errata valutazione in fase progettuale.

Risulta infatti irrealistico supporre che un edificio di 30 o più piani possa essere costruito in tempi "trascurabili", ovvero che la durata dell'esecuzione dei lavori possa essere approssimata ad un istante.

I motivi principali che conducono ad un differente comportamento dell'edificio tenendo conto della sequenza costruttiva sono principalmente:

- L'applicazione delle azioni verticali dovute al peso proprio avviene su una struttura che modifica il suo schema statico e la sua geometria nel tempo;
- Con l'avanzamento dei lavori gli abbassamenti elastici e parte di quelli differiti nel tempo dovuti ai carichi al di sotto del piano di getto vengono compensati allo step costruttivo successivo, riducendo, pertanto, l'entità degli abbassamenti.

Lo studio deve essere affrontato tenendo presente questi due aspetti, di carattere prettamente cantieristico. E ciò non solo per gli effetti istantanei, ma anche e soprattutto per gli effetti differiti di Ritiro e Viscosità.

Al fine di illustrare questi aspetti, si riportano tre esempi che evidenziano con chiarezza lo scostamento fra i risultati ottenuti attraverso un'analisi di tipo classico (*conventional analysis*) ed una che tenga conto della sequenza costruttiva (*erection sequence analysis*).

### **5.2.1 SOLLECITAZIONI FLETTENTI**

In riferimento alla [1], si illustra in Figura 5.1 un telaio in calcestruzzo armato di 2 piani in 2 dimensioni: ogni piano risulta di altezza e larghezza unitaria coi rispettivi solai sollecitati da un carico distribuito unitario.

Si mettono a confronto i risultati delle analisi effettuate secondo la *conventional analysis* Figura 5.1 e la *erection sequence analysis* Figura 5.2. La prima rappresenta il caso in cui i carichi sono contemporaneamente applicati sul telaio completo; nel secondo caso, invece, i carichi vengono applicati sulla struttura effettivamente costruita.

Facendo uso del principio di sovrapposizione degli effetti, si riportano i momenti flettenti relativi alle due tipologie di analisi considerate:

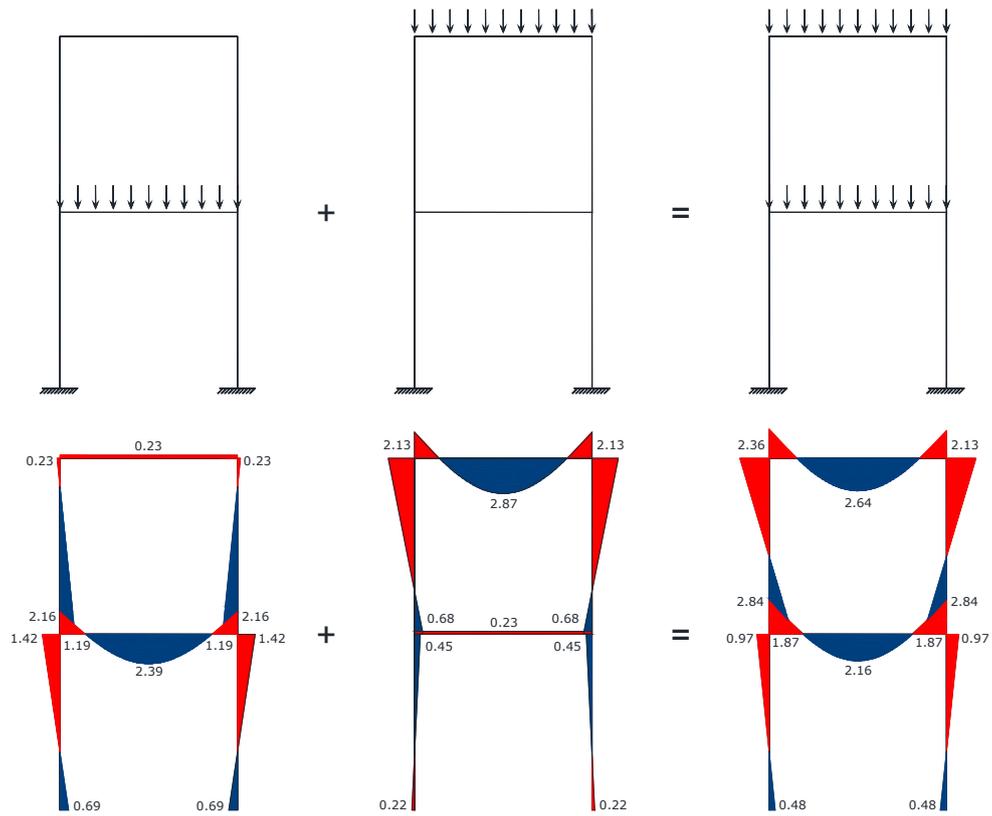


Figura 5.1 – Diagramma dei Momenti – Conventional Analysis

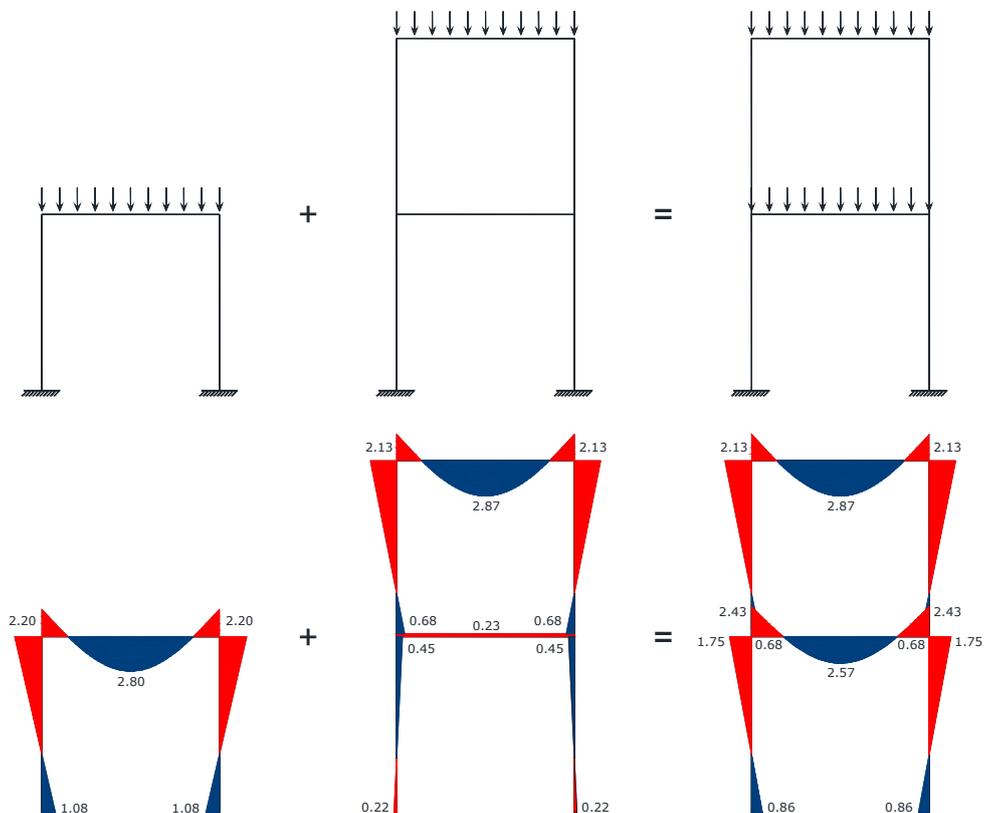


Figura 5.2 - Diagramma dei Momenti - Erection Sequence Analysis

Come riportato in Tabella 3, si osservano notevoli scostamenti tra i risultati dei due modelli mostrati. Si evidenzia, inoltre, come tale discrepanza sia interamente dovuta alla presenza o meno del piano superiore nel momento di carico del piano inferiore. La presenza della parte superiore del telaio porta, infatti, ad un significativo irrigidimento dell'intera struttura cui consegue una differente distribuzione delle sollecitazioni flessionali.

	Bending moment				Displacement	
	I stage column	I stage beam	II stage column	II stage beam	I stage beam	II stage beam
	(upper end)	(middle)	(upper end)	(middle)	(middle)	(middle)
Erection sequence analysis	1,75	2,57	2,13	2,87	0,00373	0,00429
Conventional analysis	0,97	2,16	2,36	2,64	0,00301	0,00401
Ratio [%]	180,4	118,5	90,3	108,7	123,9	104,4

Tabella 3 - Confronto *Conventional Analysis* - *Construction Sequence Analysis*

## 5.2.2 ACCORCIAMENTO DELLE COLONNE

### 5.2.2.1 Analisi elastica

Si effettua ora il confronto tra le tipologie di sequenze costruttive presentate per l'abbassamento delle colonne. Si prenda in considerazione, per esempio, una colonna di 5 piani (altezza di interpiano pari a 3 m) sollecitata ad ogni piano da un carico concentrato di valore 500 kN, e siano il modulo elastico e la l'area della sezione della colonna rispettivamente pari a 34525 MPa e 1600 cm<sup>2</sup>.

In Figura 5.3 viene riportato il confronto tra la *conventional analysis* e la *erection sequence analysis*, dove, come illustrato in precedenza, facendo uso del principio di sovrapposizione degli effetti, vengono caricati i singoli piani procedendo di seguito con la somma di tali abbassamenti. Nel primo caso i carichi vengono applicati alla struttura interamente costruita, nel secondo, invece, vengono applicati progressivamente con lo sviluppo in verticale della colonna.

Si riportano di seguito le espressioni con cui si calcolano gli abbassamenti:

**Analisi convenzionale:**

$$\Delta_n = \sum_{K=1}^n \frac{L_K}{E_K \cdot A_K} \sum_{i=K}^N P_i \quad (5.1)$$

**Analisi squenziale:**

$$\Delta_n = \sum_{K=1}^n \frac{L_K}{E_K \cdot A_K} \sum_{i=n}^N P_i \quad (5.2)$$

**Spostamenti dovuti ai carichi applicati sul piano corrente e sui piani inferiori:**

$$\Delta_n = \sum_{K=1}^n P_K \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{E_i \cdot A_i} \quad (5.3)$$

**Spostamenti dovuti ai carichi applicati ai piani superiori:**

$$\Delta_n = \sum_{K=1}^n \frac{L_K}{E_K \cdot A_K} \sum_{i=n+1}^N P_i \quad (5.4)$$

Dove:

n = Piano n-esimo

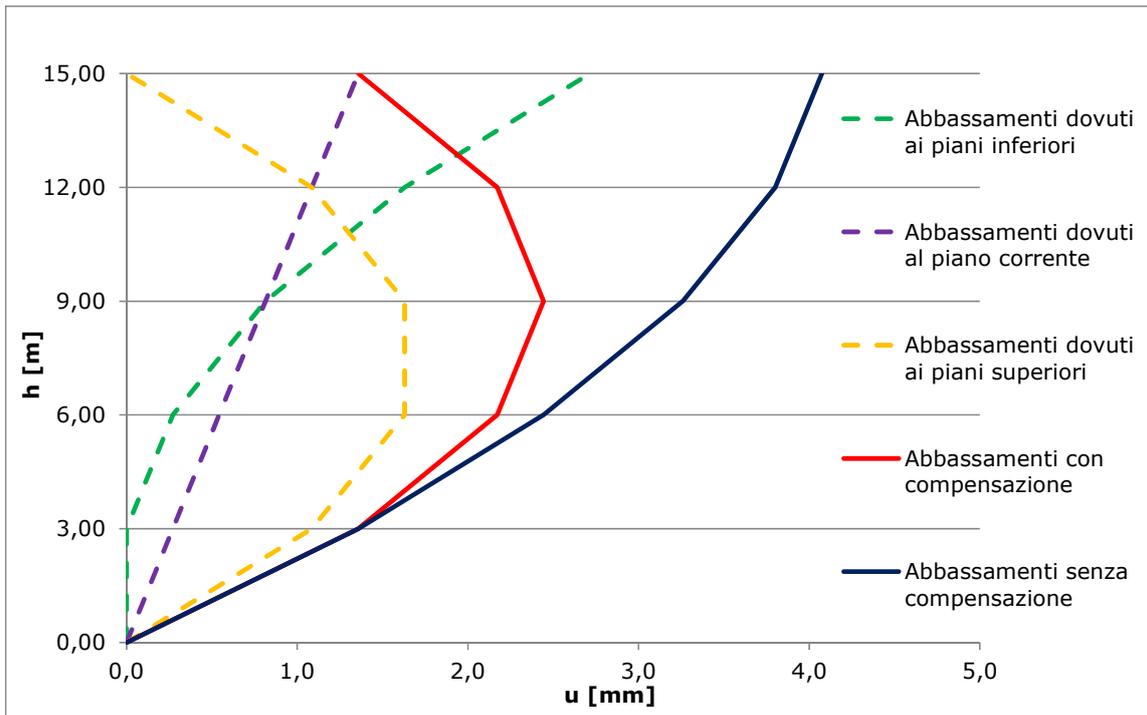
N = Numero totale di piani

$L_{i,k}$  = Altezza del piano i-esimo o k-esimo

$E_{i,k}$  = Modulo di Elasticità del piano i-esimo o k-esimo

$A_{i,k}$  = Area della sezione della colonna del piano i-esima o k-esima

$P_{i,k}$  = Carico concentrato situato in sommità della colonna i-esima o k-esima



**Figura 5.3 - Confronto dei risultati delle analisi (*Column Shortening*) tra *conventional analysis* ed *erection sequence analysis***

Dal grafico sopra riportato è possibile distinguere i due contributi che concorrono all'abbassamento complessivo della colonna: il primo dovuto ai carichi al di sopra del piano di getto (*Subsequent to casting*), mentre il secondo ai carichi al di sotto del piano di getto compreso (*Up to casting*).

Qualora lo studio di tali abbassamenti venga analizzato secondo la *conventional analysis*, l'accorciamento della colonna ad ogni piano sarà pari alla somma di entrambi i contributi; al contrario, secondo la *erection sequence analysis*, gli abbassamenti dovuti ai carichi al di sotto del piano di getto e in corrispondenza dello stesso livello vengono compensati ad ogni piano. Pertanto, l'abbassamento dei punti lungo la colonna sarà pari al solo contributo *Subsequent to casting*.

Anche in questo caso è di immediata constatazione la divergenza dei risultati provenienti dalle due diverse analisi: gli abbassamenti calcolati correttamente, ovvero attraverso la compensazione, risultano nettamente inferiori a quelli altrimenti stimati; inoltre l'abbassamento massimo non si verifica in sommità ma in un punto intermedio della colonna.

I principali effetti di un'analisi che non consideri l'effettiva sequenza costruttiva di un edificio alto sono pertanto:

- Errata valutazione degli abbassamenti degli elementi portanti dell'edificio;
- Errata valutazione delle azioni interne degli elementi che compongono l'edificio;
- Mancata considerazione della non omogeneità dell'edificio in quanto gli elementi che compongono l'edificio risultano di "età" diverse;
- Errata considerazione degli effetti differiti nel tempo (Ritiro, Viscosità, Variazione del Modulo Elastico).

### 5.2.2.2 Analisi visco-elastica

#### 5.2.2.2.1 Colonna in solo calcestruzzo senza compensazione

Si vuole determinare l'accorciamento della colonna in corrispondenza di ciascun piano. A tale scopo si consideri il seguente esempio: una colonna di 5 piani (Figura 5.4), con carichi assiali ( $P_1, \dots, P_5$ ), tempi di maturazione dei getti ( $t_1, \dots, t_5$ ), tempi di messa in carico ( $T_1, \dots, T_5$ ), altezze di interpiano ( $l_1, \dots, l_5$ ), ed infine aree delle sezioni trasversali ( $A_1, \dots, A_5$ ).

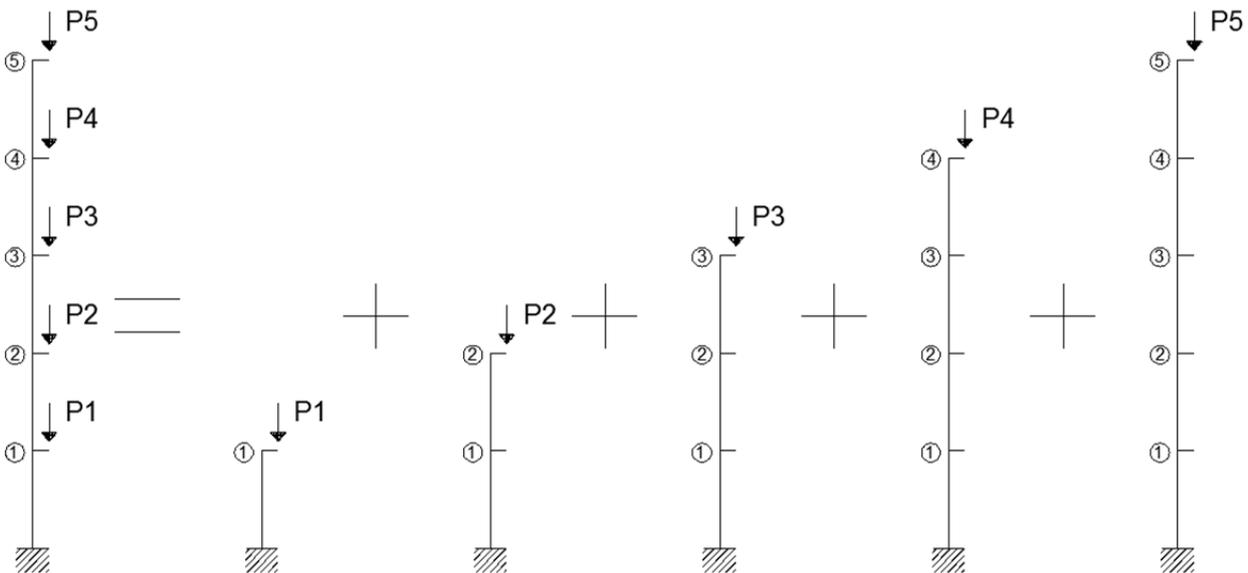


Figura 5.4 – Principio di sovrapposizione degli effetti

Si determina lo spostamento del punto 3, distinguendo i vari contributi:

- spostamento dovuto al carico applicato al piano corrente  $\Delta_3^{CORR}$
- spostamento dovuto ai carichi applicati ai piani inferiori  $\Delta_3^{INF}$
- spostamento dovuto ai carichi applicati ai piani superiori  $\Delta_3^{SUP}$

Si immagini che gli istanti di maturazione dei getti e quelli di messa in carico siano i seguenti:

$t_i$ [gg]	0	7	14	21	28
$T_i$ [gg]	7	14	21	28	35

Si può dunque scrivere per il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{aligned}\Delta_3^{CORR} &= \frac{P_3 \cdot l_3}{A_3} \cdot J(t - t_3, T_3 - t_3) + \frac{P_3 \cdot l_2}{A_2} \cdot J(t - t_2, T_3 - t_2) + \frac{P_3 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t - t_1, T_3 - t_1) = \\ &= \frac{P_3 \cdot l_3}{A_3} \cdot J(t - 14, 7) + \frac{P_3 \cdot l_2}{A_2} \cdot J(t - 7, 14) + \frac{P_3 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t, 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3^{INF} &= \frac{P_2 \cdot l_2}{A_2} \cdot J(t - t_2, T_2 - t_2) + \frac{P_2 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t - t_1, T_2 - t_1) + \frac{P_1 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t - t_1, T_1 - t_1) = \\ &= \frac{P_2 \cdot l_2}{A_2} \cdot J(t - 7, 7) + \frac{P_2 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t, 14) + \frac{P_1 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t, 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3^{SUP} &= \frac{P_4 \cdot l_3}{A_3} \cdot J(t - t_3, T_4 - t_3) + \frac{P_4 \cdot l_2}{A_2} \cdot J(t - t_2, T_4 - t_2) + \frac{P_4 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t - t_1, T_4 - t_1) + \frac{P_5 \cdot l_3}{A_3} \\ &\cdot J(t - t_3, T_5 - t_3) + \frac{P_5 \cdot l_2}{A_2} \cdot J(t - t_2, T_5 - t_2) + \frac{P_5 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t - t_1, T_5 - t_1)\end{aligned}$$

$$= \frac{P_4 \cdot l_3}{A_3} \cdot J(t - 14,14) + \frac{P_4 \cdot l_2}{A_2} \cdot J(t - 7,21) + \frac{P_4 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t, 28) + \frac{P_5 \cdot l_3}{A_3} \cdot J(t - 14,21) \\ + \frac{P_5 \cdot l_2}{A_2} \cdot J(t - 7,28) + \frac{P_5 \cdot l_1}{A_1} \cdot J(t, 35)$$

Dalle precedenti espressioni si ricavano le seguenti relazioni generali:

$$\Delta_K^{CORR} = P_K \cdot \sum_{i=1}^K \frac{l_i}{A_i} \cdot J(t - t_i, T_K - t_i) \quad (5.5)$$

$$\Delta_K^{INF} = \sum_{j=1}^{K-1} P_j \cdot \sum_{i=1}^j \frac{l_i}{A_i} \cdot J(t - t_i, T_j - t_i) \quad (5.6)$$

$$\Delta_K^{SUP} = \sum_{j=K+1}^N P_j \cdot \sum_{i=1}^K \frac{l_i}{A_i} \cdot J(t - t_i, T_j - t_i) \quad (5.7)$$

#### 5.2.2.2.2 Colonna in solo calcestruzzo con compensazione

Poiché solitamente l'operazione di scasseratura e rimozione dei puntelli (che equivale alla messa in carico) avviene appena prima della realizzazione della colonna al piano superiore, è possibile compensare sia gli abbassamenti dovuti ai carichi applicati ai piani inferiori che quelli dovuti al carico applicato al piano corrente; in tal caso le uniche componenti rimanenti di abbassamento sono quelle viscosi; le espressioni (5.5), (5.6) e (5.7) diventano dunque:

$$\Delta_K^{CORR,COMP} = P_K \cdot \sum_{i=1}^K \frac{l_i}{E_i(T_K - t_i) \cdot A_i} \cdot \varphi(t - t_i, T_K - t_i) \quad (5.8)$$

$$\Delta_K^{INF,COMP} = \sum_{j=1}^{K-1} P_j \cdot \sum_{i=1}^j \frac{l_i}{E_i(T_j - t_i) \cdot A_i} \cdot \varphi(t - t_i, T_j - t_i) \quad (5.9)$$

$$\Delta_K^{SUP,COMP} = \sum_{j=K+1}^N P_j \cdot \sum_{i=1}^K \frac{l_i}{A_i} \cdot J(t - t_i, T_j - t_i) \quad (5.10)$$

5.2.2.2.3 Colonna in calcestruzzo armato

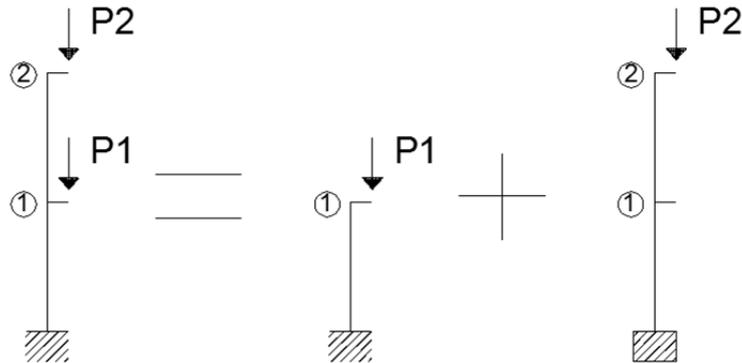


Figura 5.5 – Principio di sovrapposizione degli effetti

L'armatura presente nei pilastri costituisce un vincolo elastico che può talvolta ridurre significativamente l'accorciamento della colonna. Questo, unitamente alla compensazione degli abbassamenti dei piani inferiori, consente di valutare più accuratamente valori di tensione (si veda capitolo 7) ed abbassamenti differenziali di colonne e nuclei.

Per il calcolo degli abbassamenti di una colonna isolata come quella di Figura 5.5 è necessario dapprima ricavare l'andamento dell'iperstatica, che nel caso in questione rappresenta la forza che si scambiano calcestruzzo ed acciaio; applicando ad esempio l'iperstatica  $X$  alla barre d'armatura e  $(P - X)$  alla parte in calcestruzzo, dalla congruenza della sezione emerge la seguente espressione, analoga alla (4.10):

$$X(t) = X_{er}(t_0) \cdot \left[ 1 - R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right]$$

Nota la quota di carico agente sull'acciaio, l'accorciamento della colonna può essere valutato tramite il legame costitutivo elastico lineare (dell'acciaio).

### 5.2.2.3 Esempi applicativi

#### 5.2.2.3.1 Struttura in solo calcestruzzo

Si considera la struttura in Figura 5.6, con le seguenti caratteristiche:

	Asta 1	Asta 2	Asta 3	Asta 4	Asta 5
<b>d [cm]</b>	140	120	100	80	60
<b>l [m]</b>	37	37	37	37	37
<b>h<sub>0</sub> [mm]</b>	700	600	500	400	300
<b>f<sub>ck</sub> [MPa]</b>	60	60	50	50	50
<b>P [t]</b>	500	500	500	500	500
<b>t [gg]</b>	0	100	100	300	400
<b>T [gg]</b>	100	200	300	400	500
<b>RH [%]</b>	70				

Tabella 4 - Dati struttura



Figura 5.6 - Struttura in esame

Si riportano di seguito le storie di carico e gli abbassamenti compensati e non per ciascuna colonna:

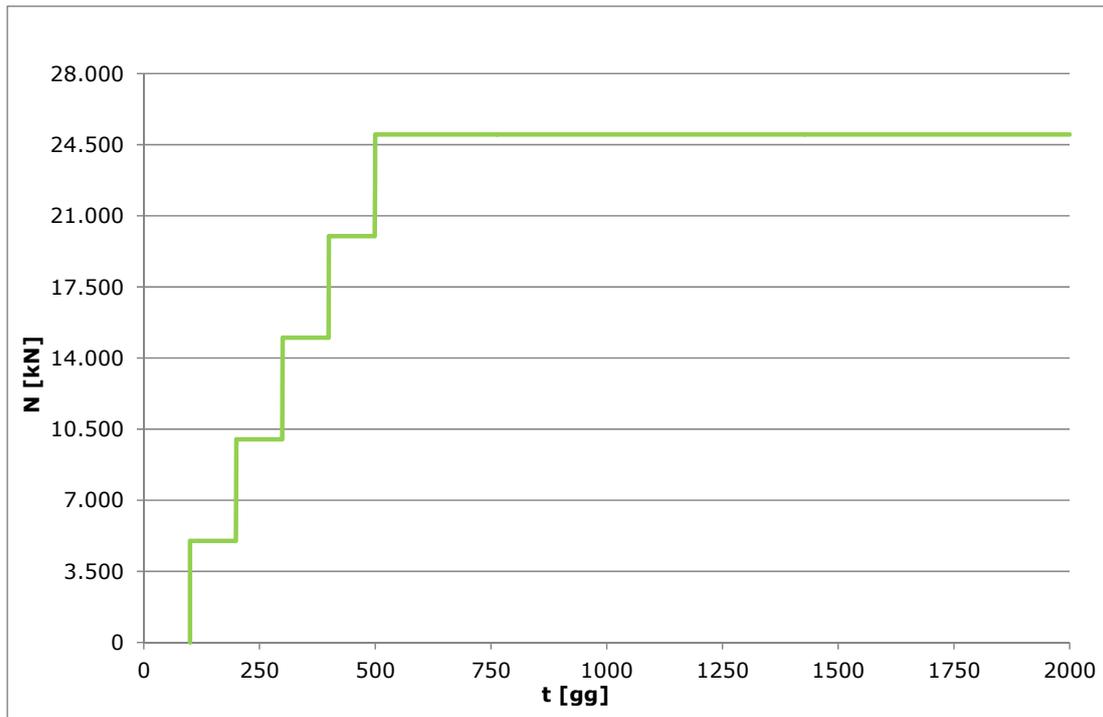


Figura 5.7 - Andamento del carico sulla prima asta

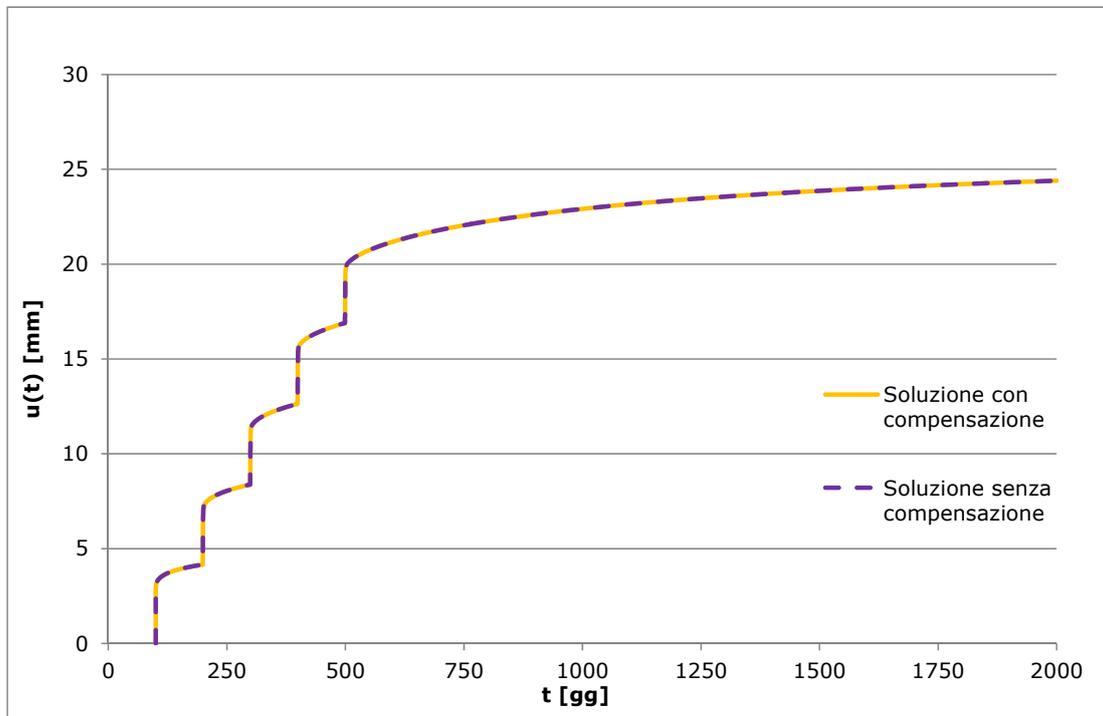


Figura 5.8 - Accorciamento in sommità della prima asta

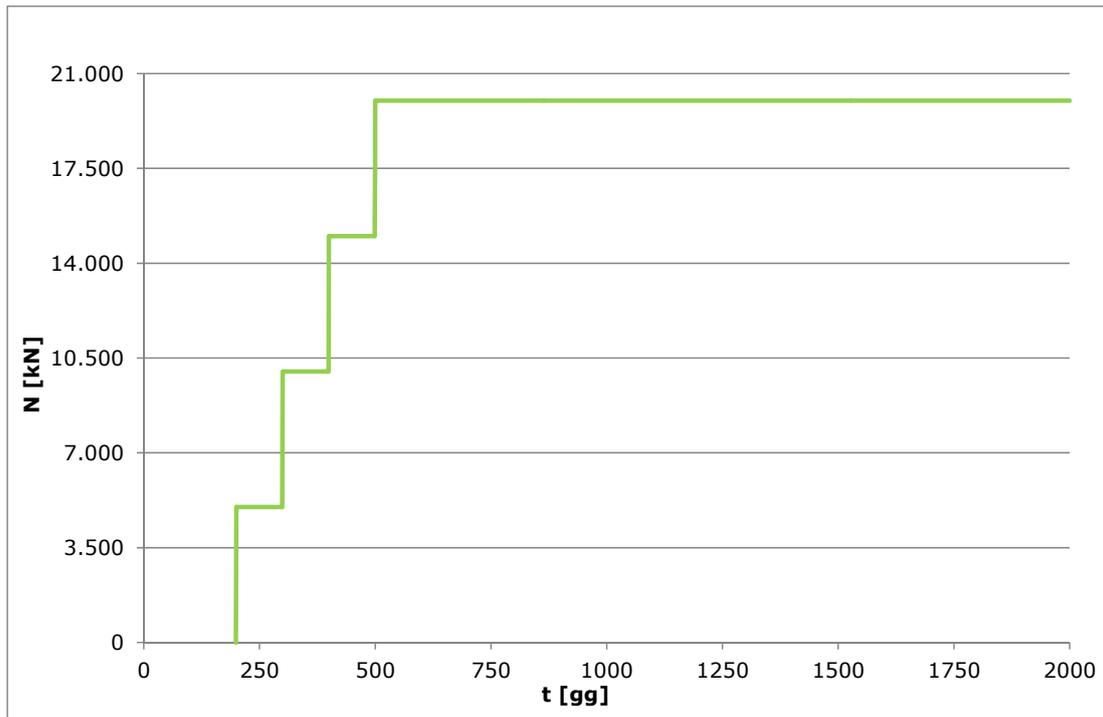


Figura 5.9 - Andamento del carico sulla seconda asta

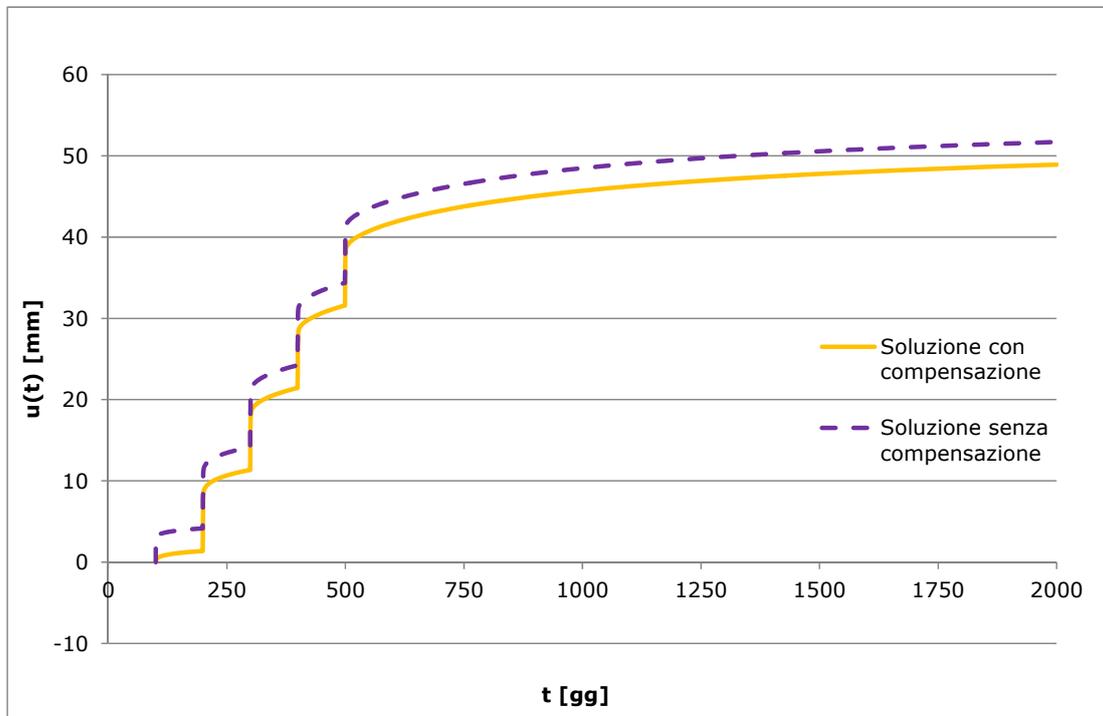


Figura 5.10 - Accorciamento in sommità della seconda asta

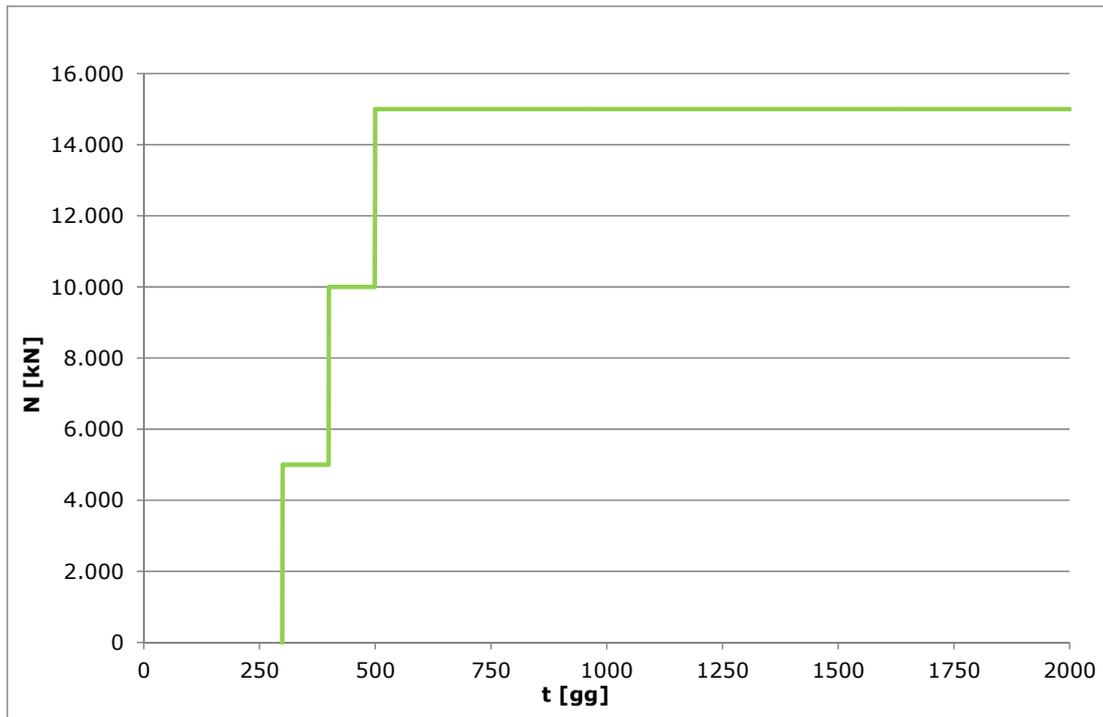


Figura 5.11 - Andamento del carico sulla terza asta

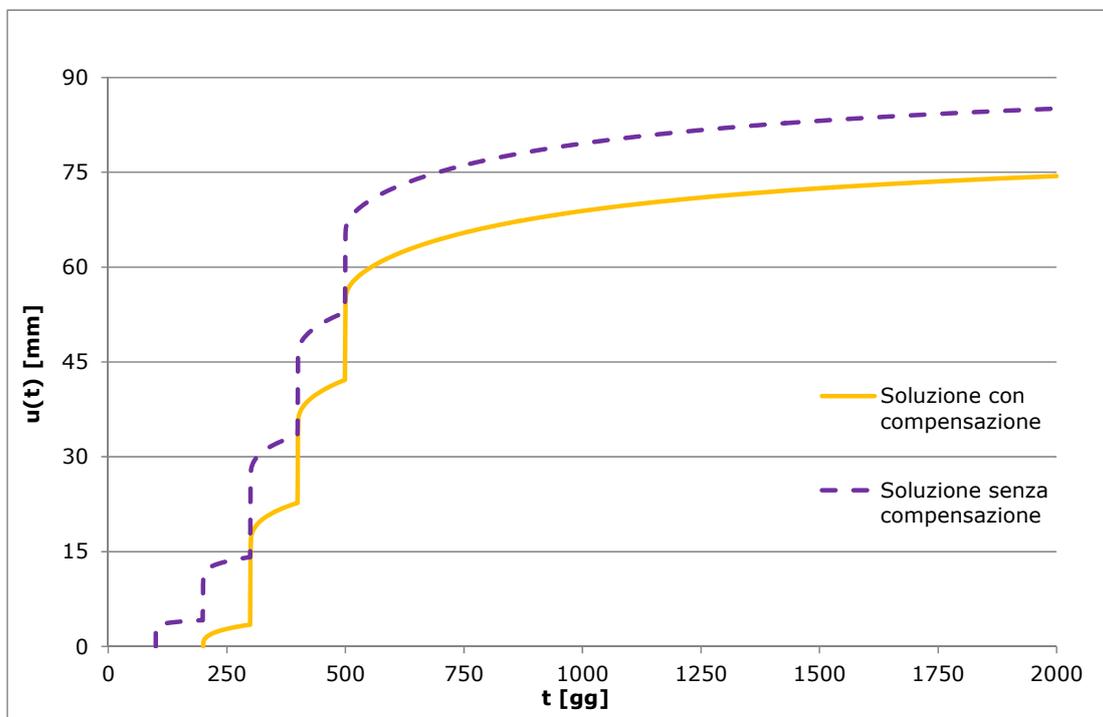


Figura 5.12 - Accorciamento in sommità della terza asta

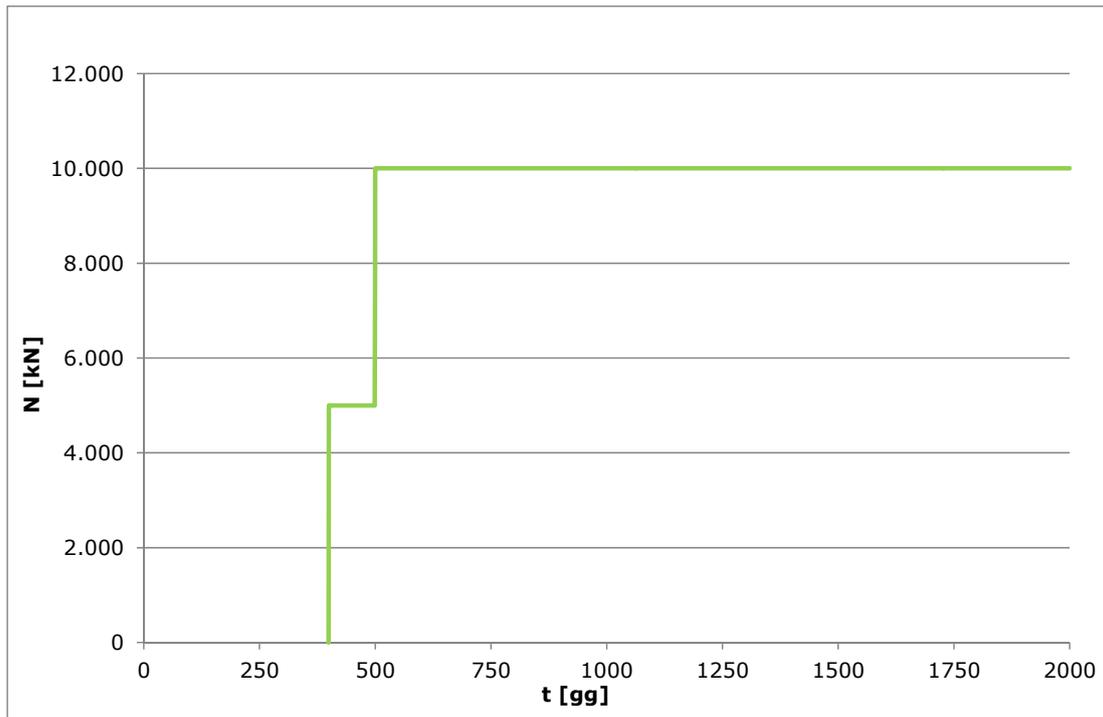


Figura 5.13 - Andamento del carico sulla quarta asta

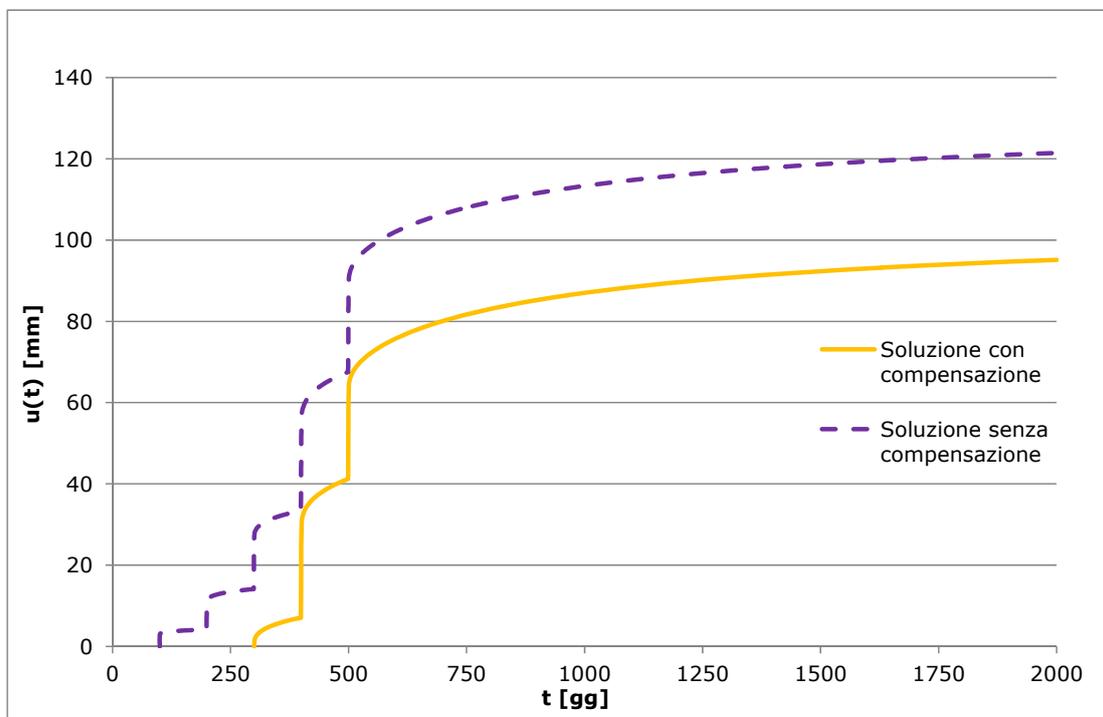


Figura 5.14 - Accorciamento in sommità della quarta asta

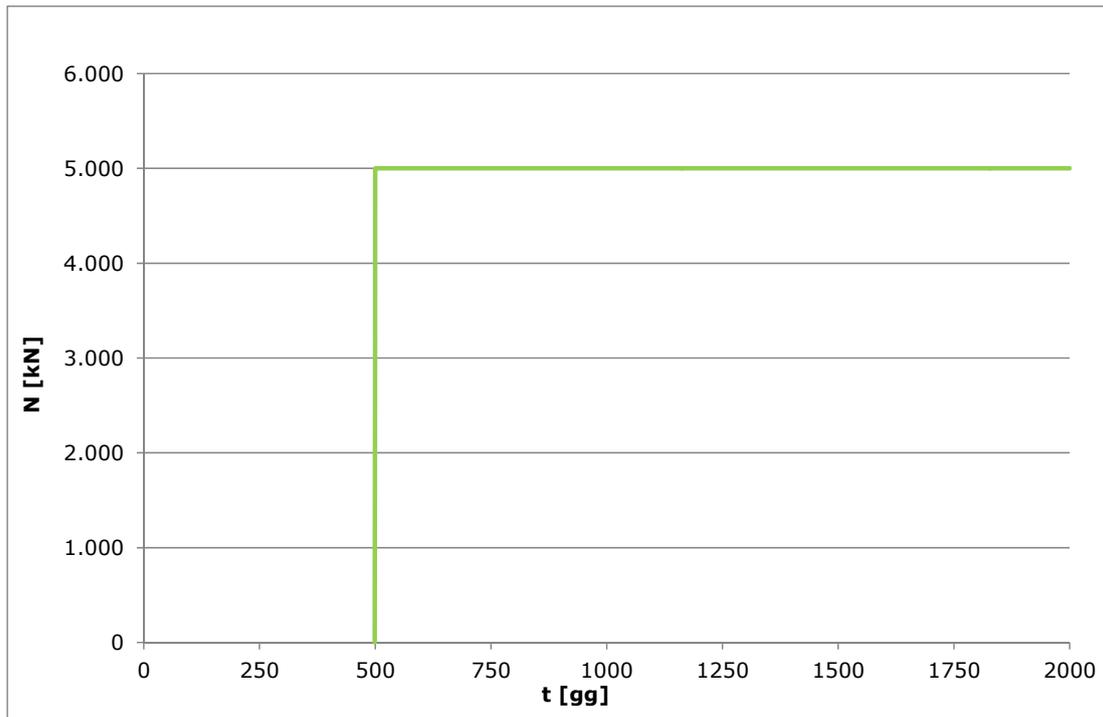


Figura 5.15 - Andamento del carico sulla quinta asta

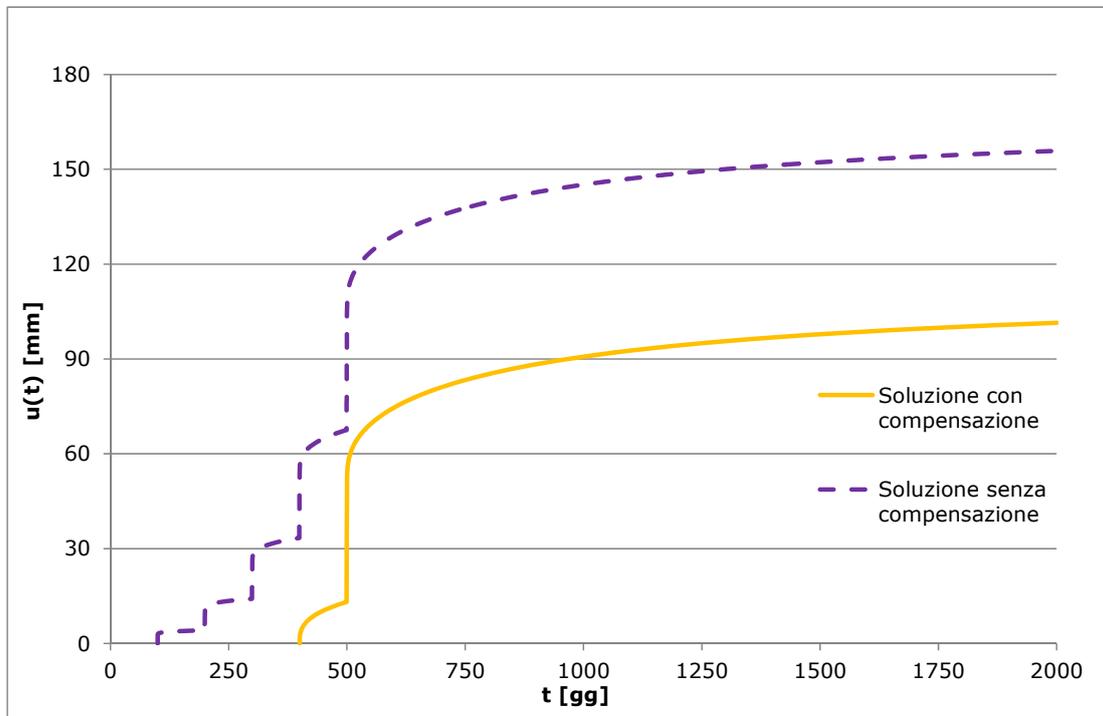


Figura 5.16 - Accorciamento in sommità della quinta asta

Di seguito i grafici del column shortening per  $t = 500, 2000, 30000$  gg.

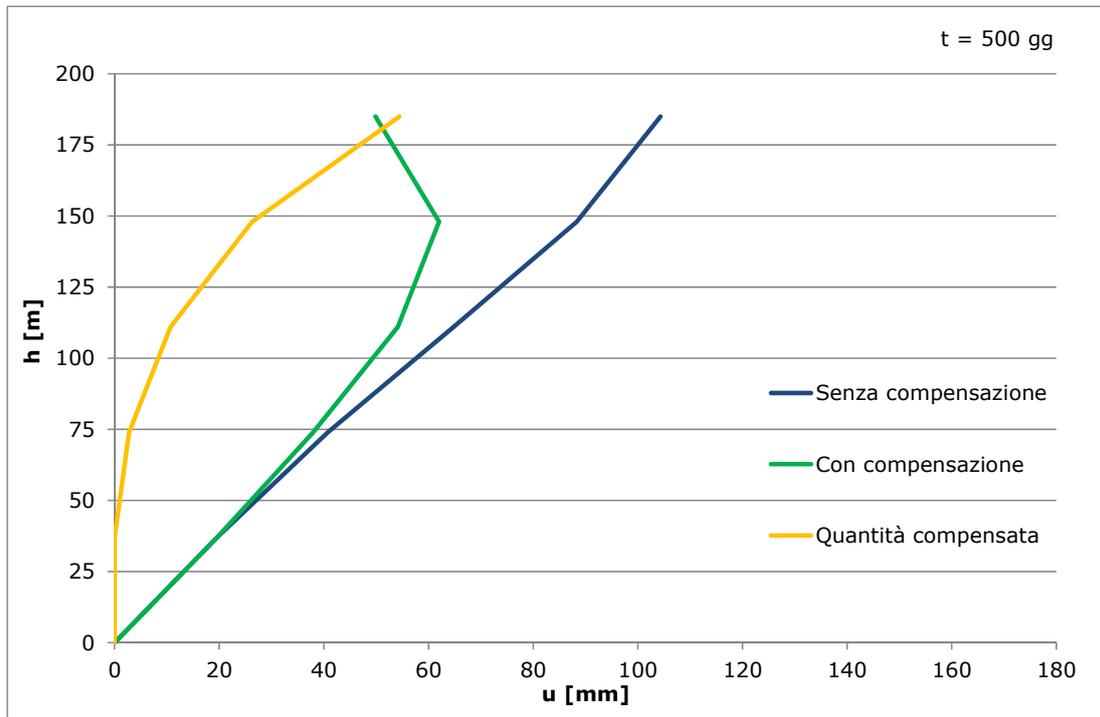


Figura 5.17 - Column shortening  $t = 500$  gg

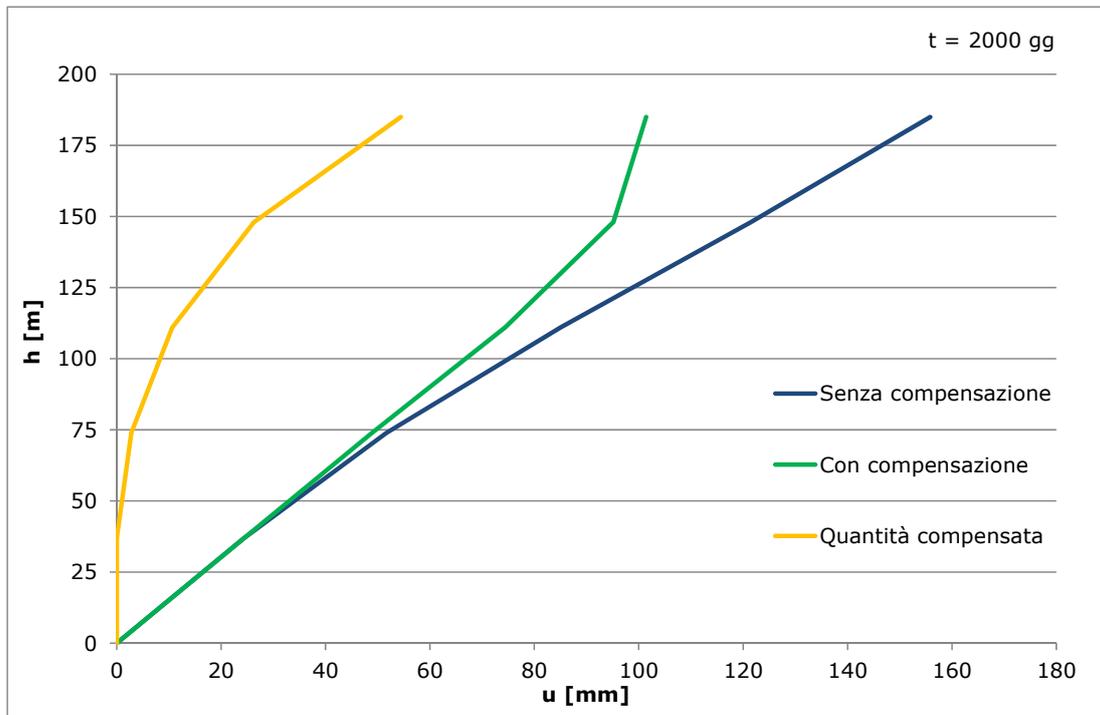


Figura 5.18 - Column shortening  $t = 2000$  gg

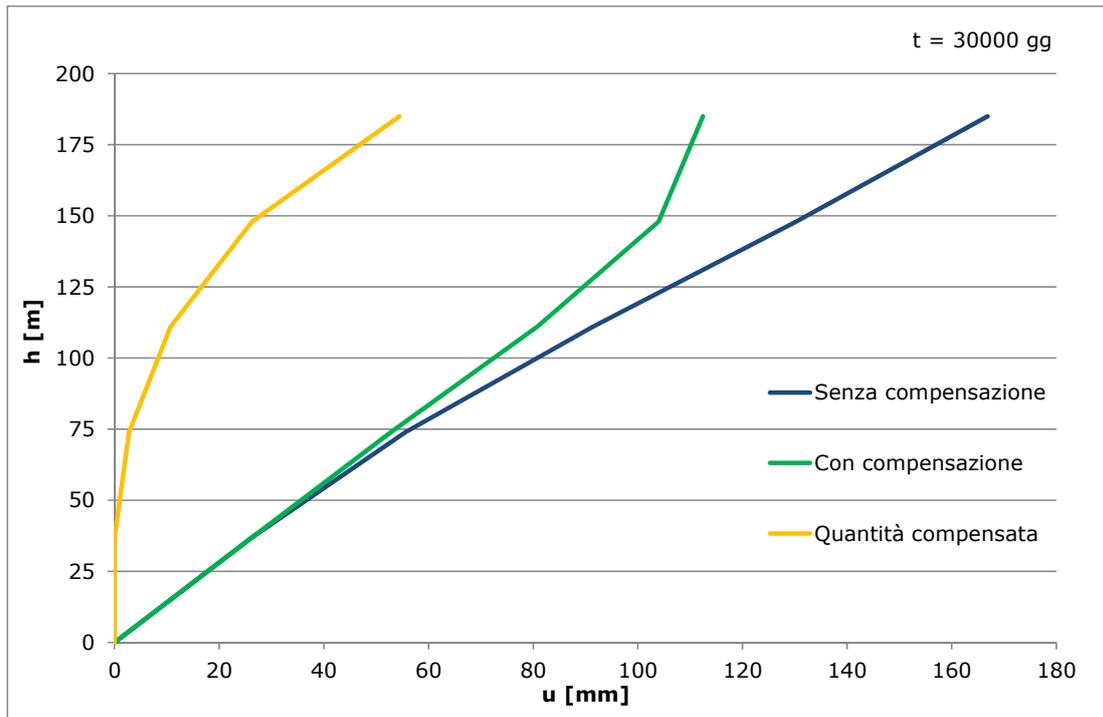


Figura 5.19 - Column shortening a t = 30000 giorni

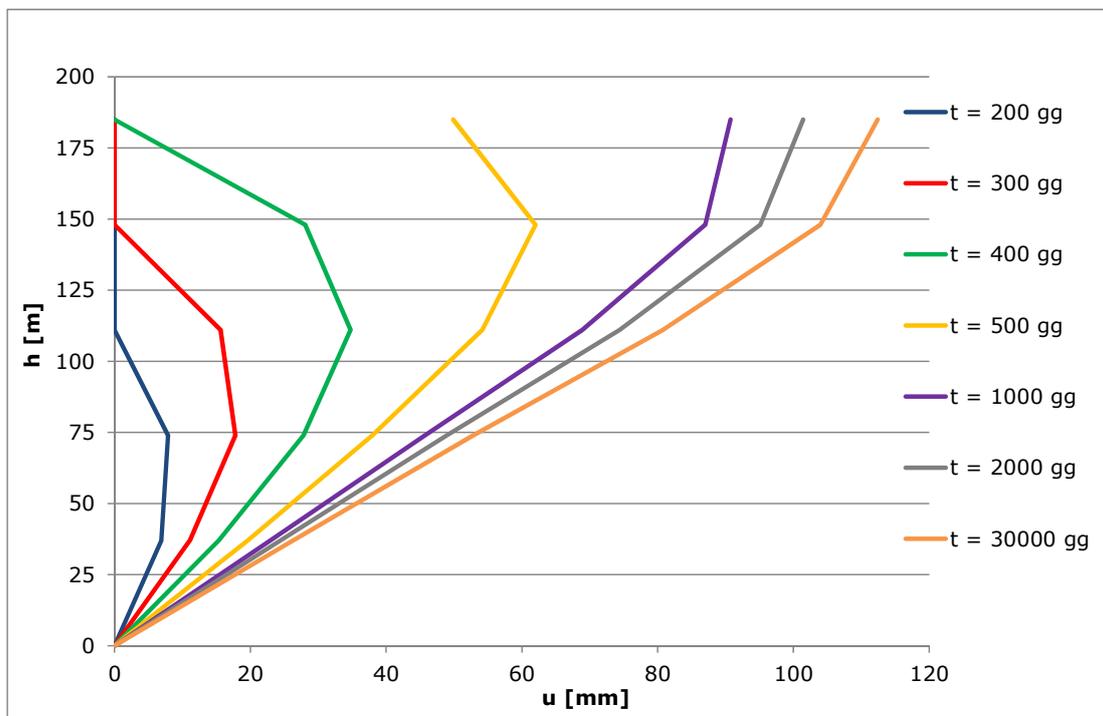


Figura 5.20 - Column shortening per diversi valori di t con compensazione

5.2.2.3.2 *Struttura in calcestruzzo armato*

Si considera una struttura analoga a quella dell'esempio precedente ma armata con un rapporto d'armatura pari al 3%.

Si riportano di seguito gli accorciamenti e la ripartizione dei carichi nel tempo per ciascuna asta. Inoltre il column shortening per  $t = 500, 2000$  e  $30000$  giorni.

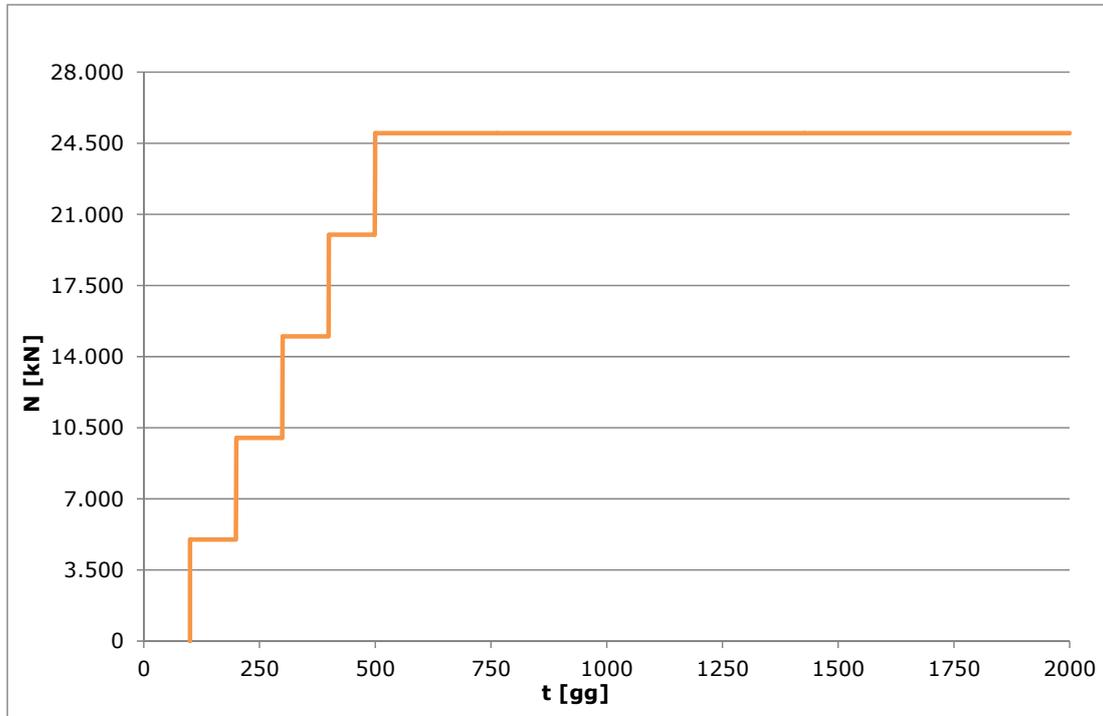


Figura 5.21 - Andamento del carico sulla prima asta

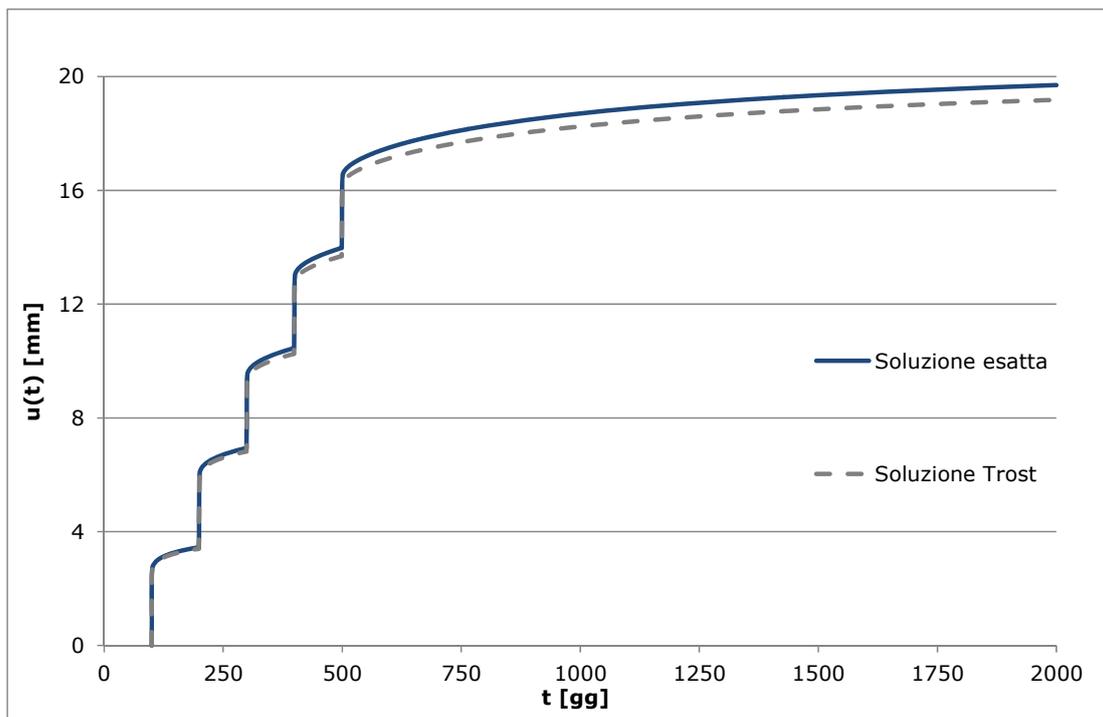


Figura 5.22 - Accorciamento in sommità della prima asta senza compensazione

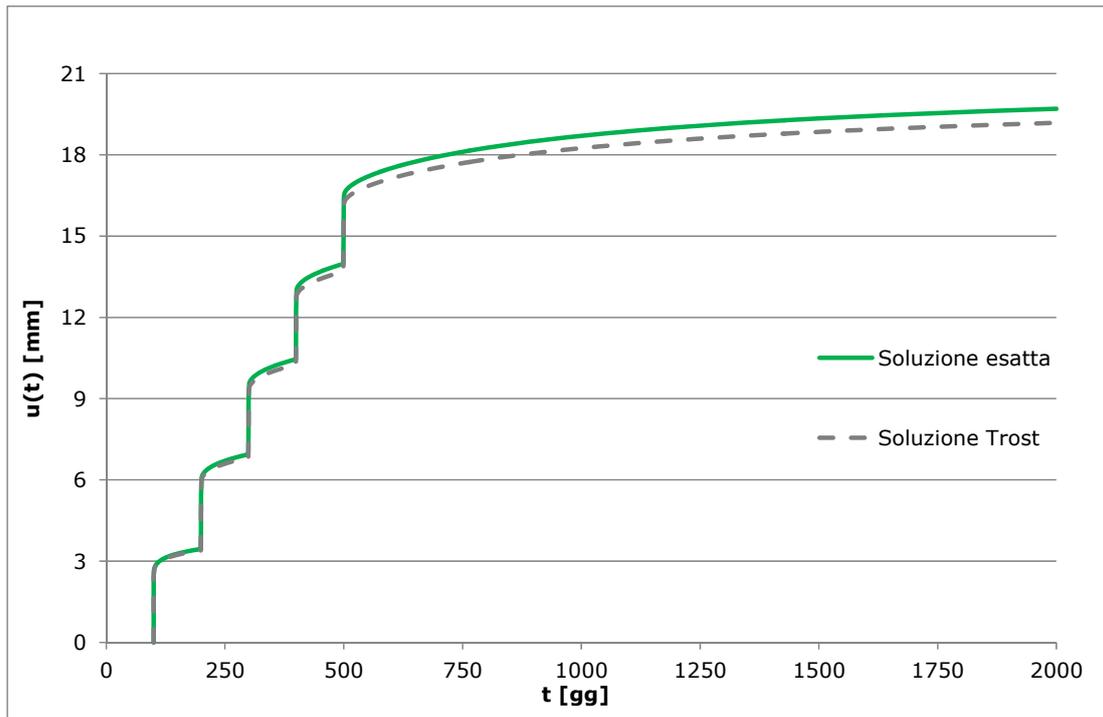


Figura 5.23 - Accorciamento in sommità della prima asta con compensazione

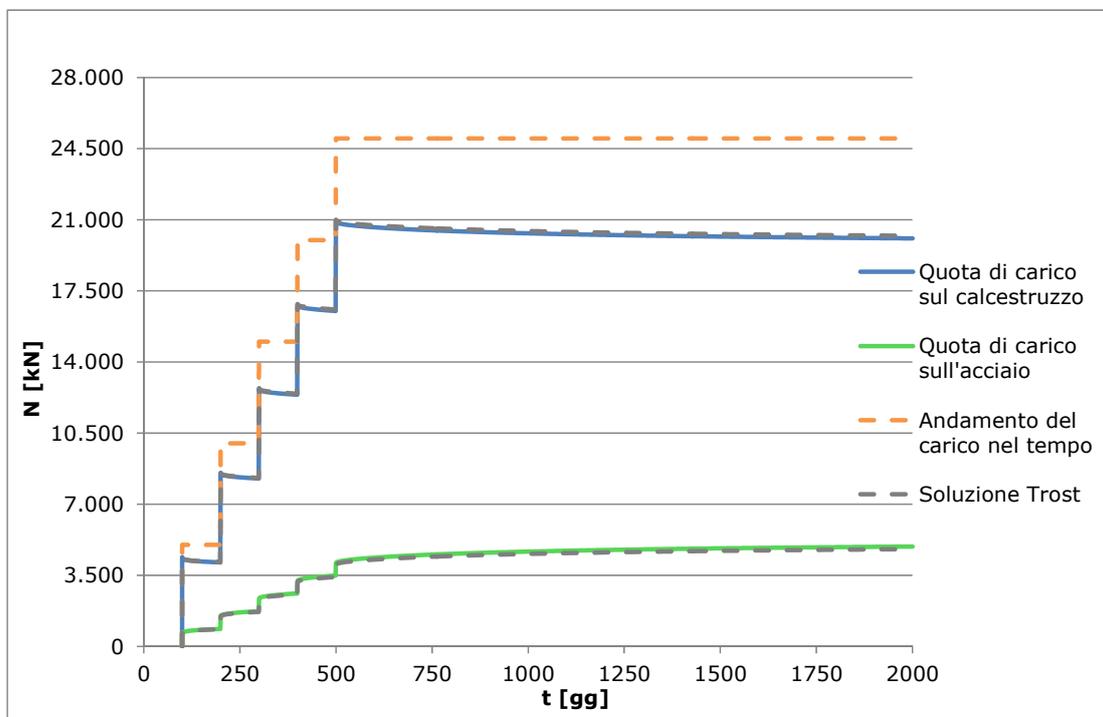


Figura 5.24 - Ripartizione del carico sulla prima asta

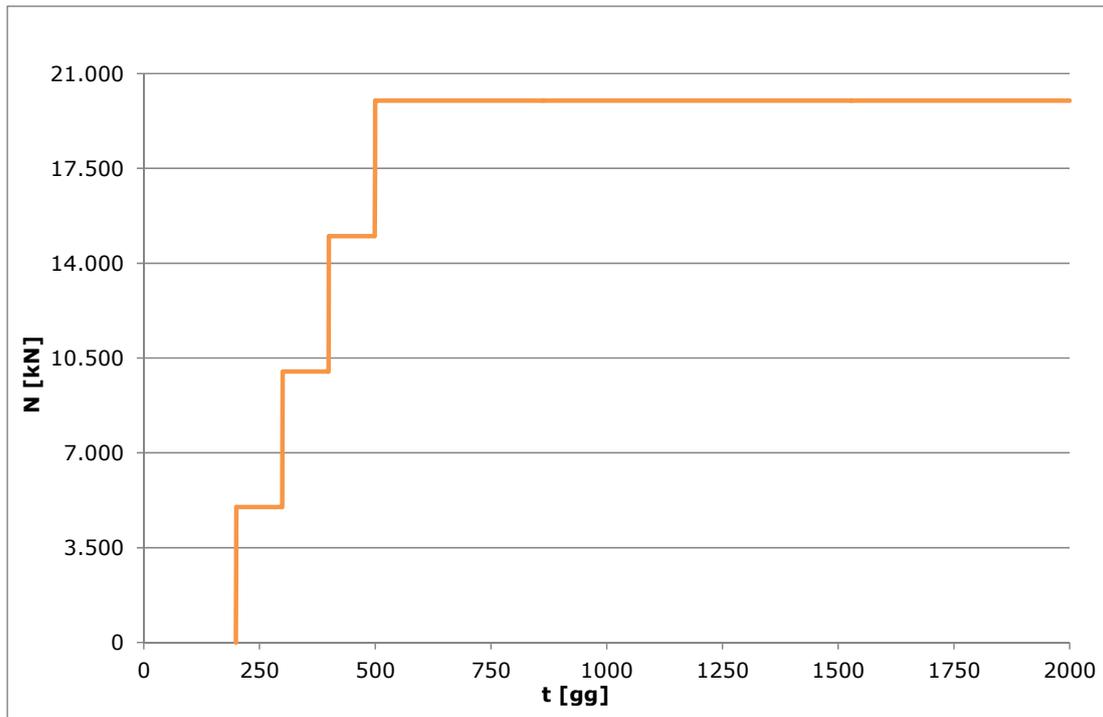


Figura 5.25 - Andamento del carico sulla seconda asta

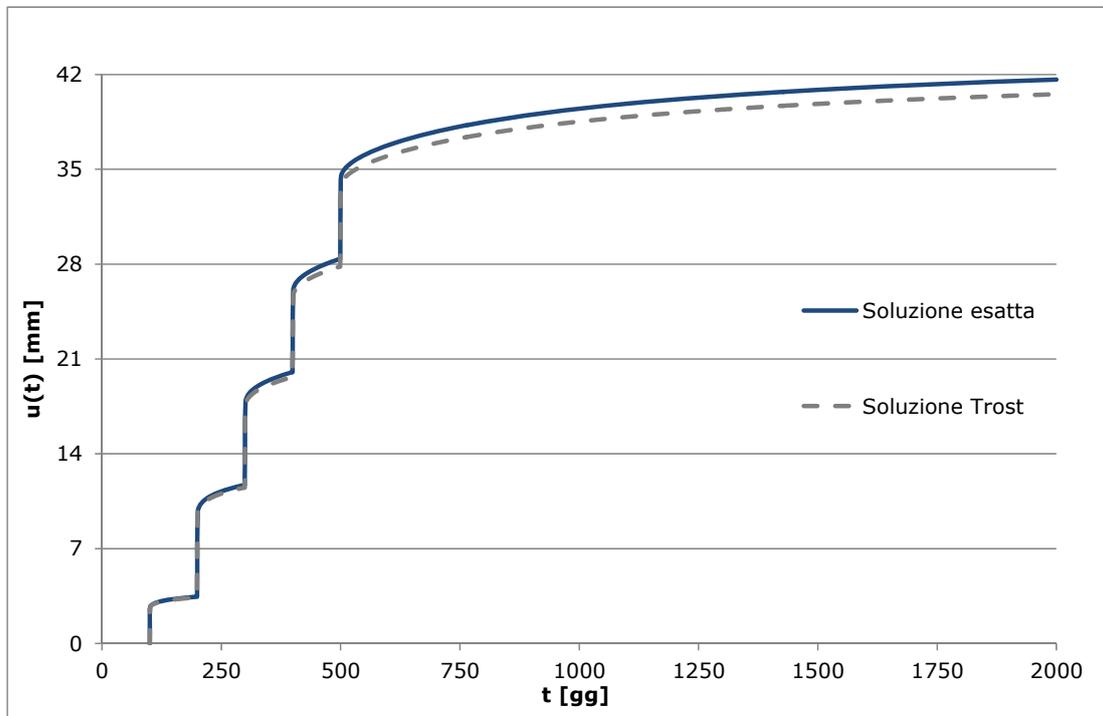


Figura 5.26 - Accorciamento in sommità della seconda asta senza compensazione

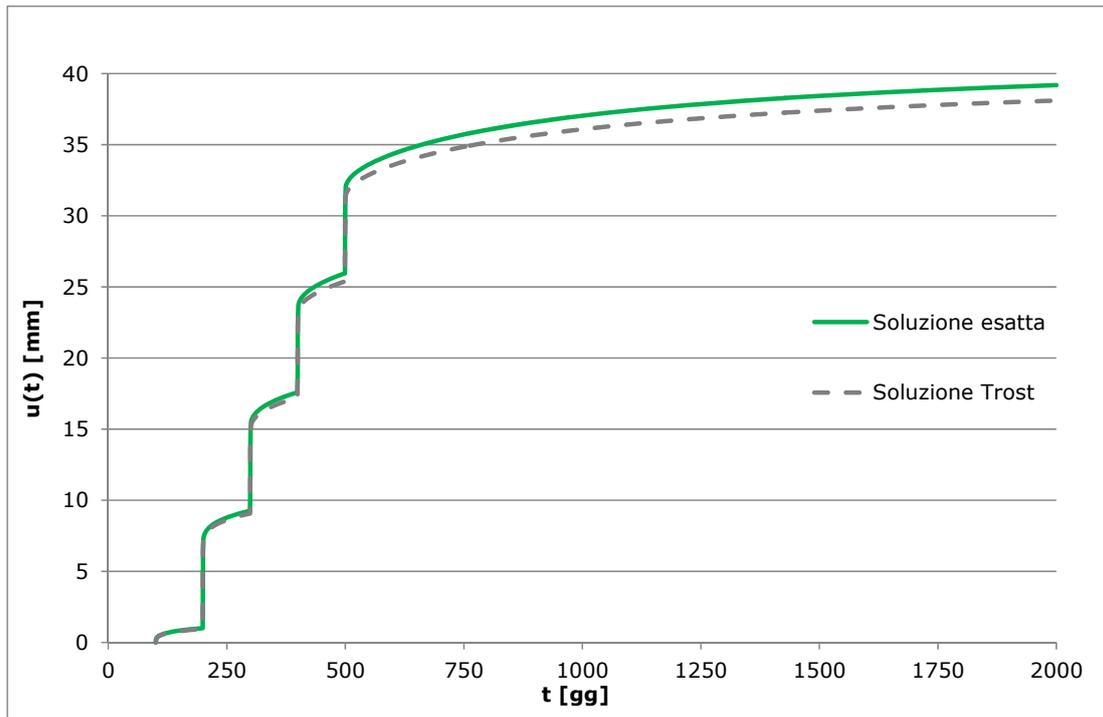


Figura 5.27 - Accorciamento in sommità della seconda asta con compensazione

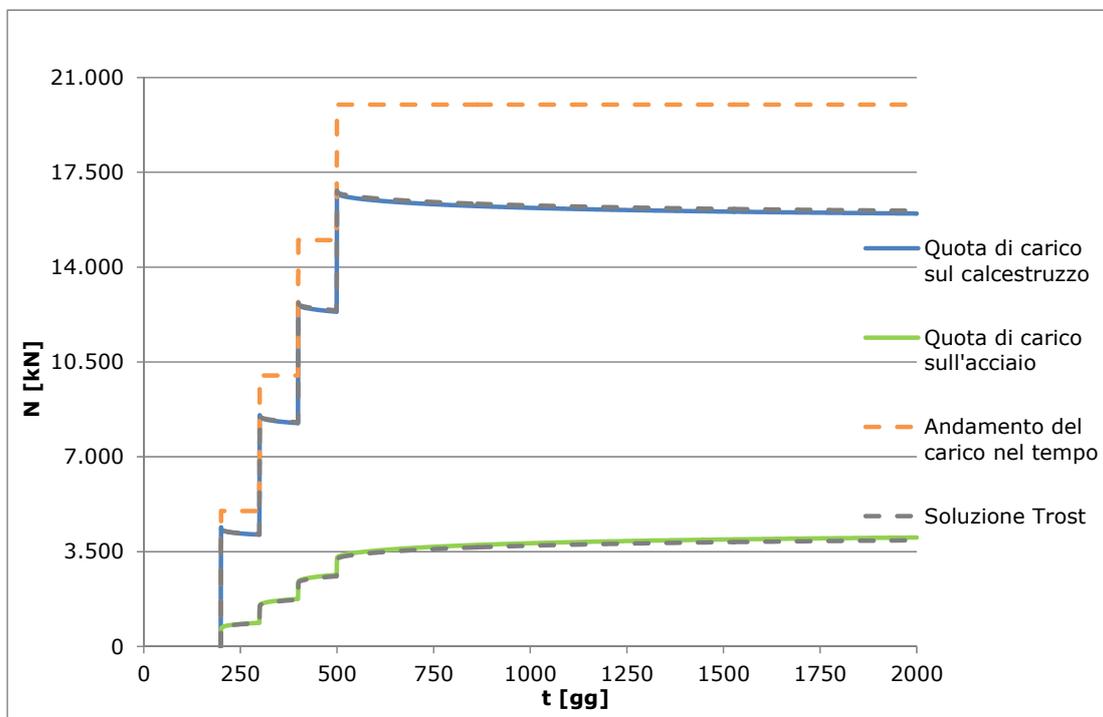


Figura 5.28 - Ripartizione del carico sulla seconda asta

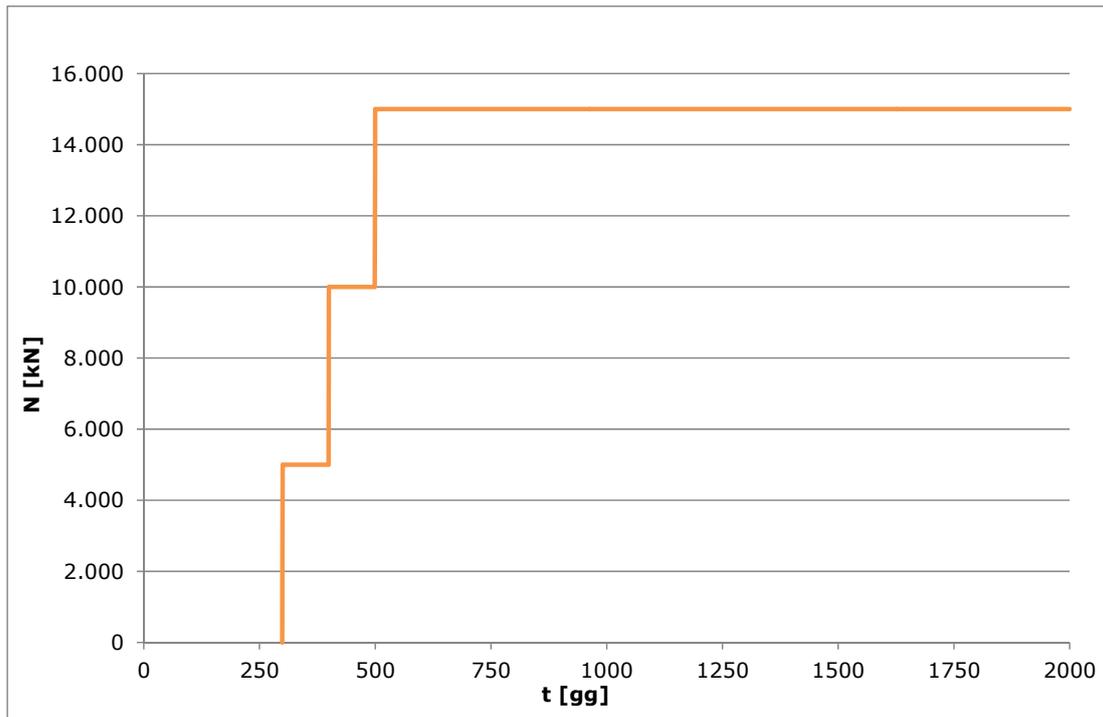


Figura 5.29 - Andamento del carico sulla terza asta

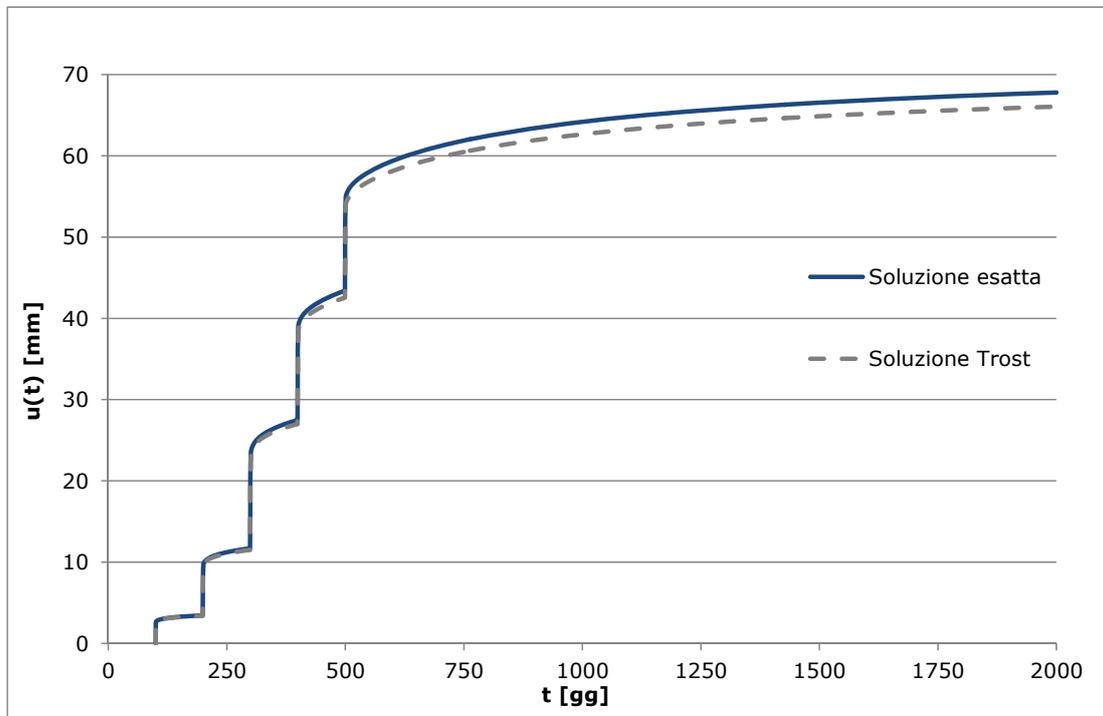


Figura 5.30 - Accorciamento in sommità della terza asta senza compensazione

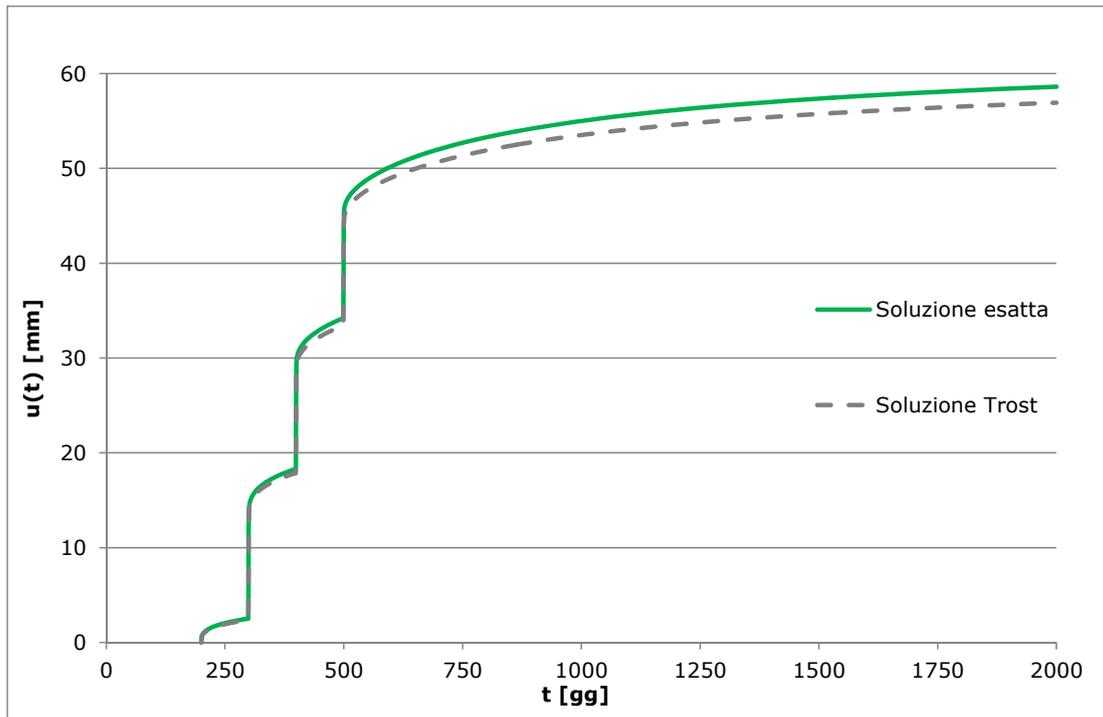


Figura 5.31 - Accorciamento in sommità della terza asta con compensazione

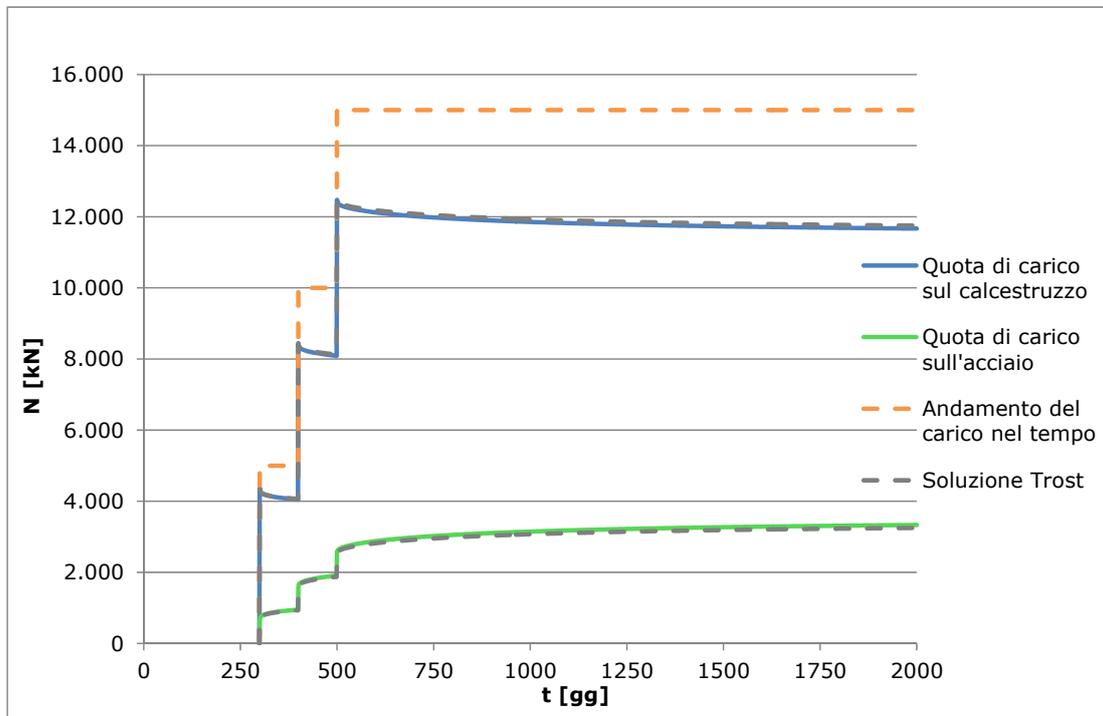


Figura 5.32 - Ripartizione del carico sulla terza asta

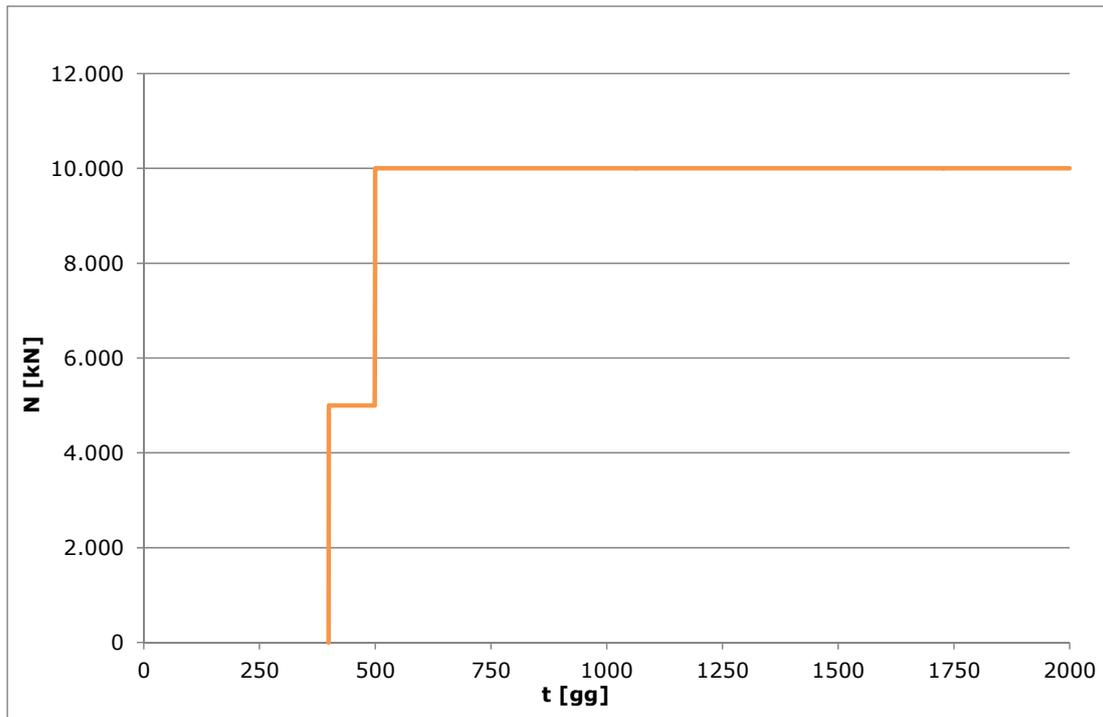


Figura 5.33 - Andamento del carico sulla quarta asta

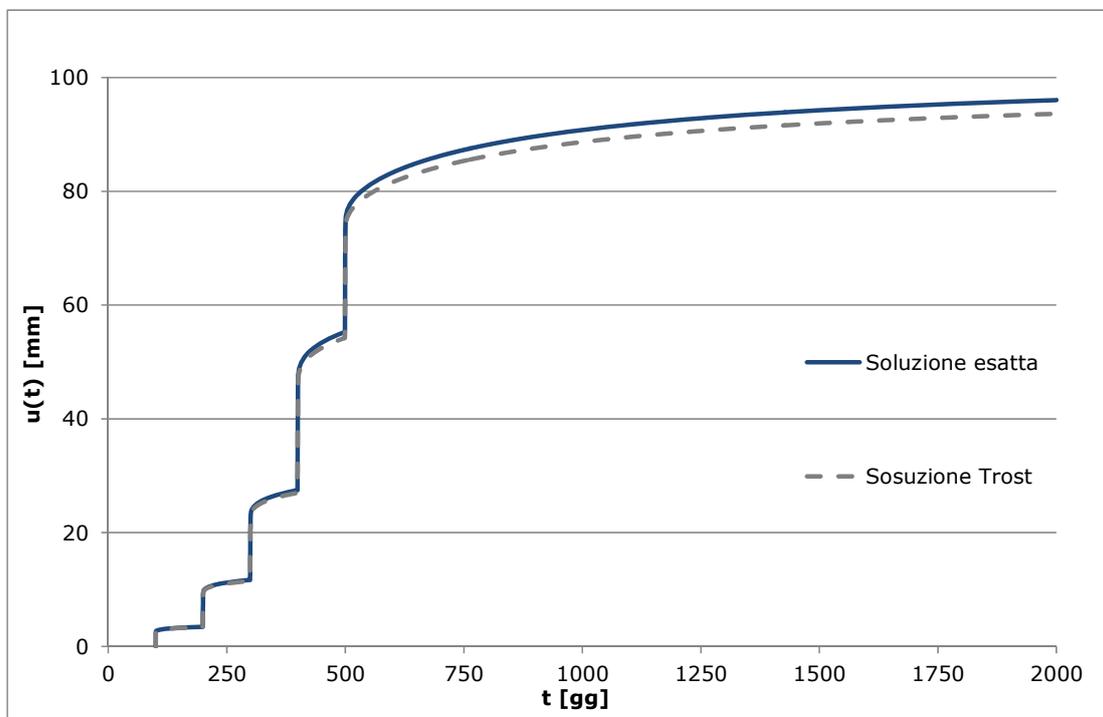


Figura 5.34 - Accorciamento in sommità della quarta asta senza compensazione

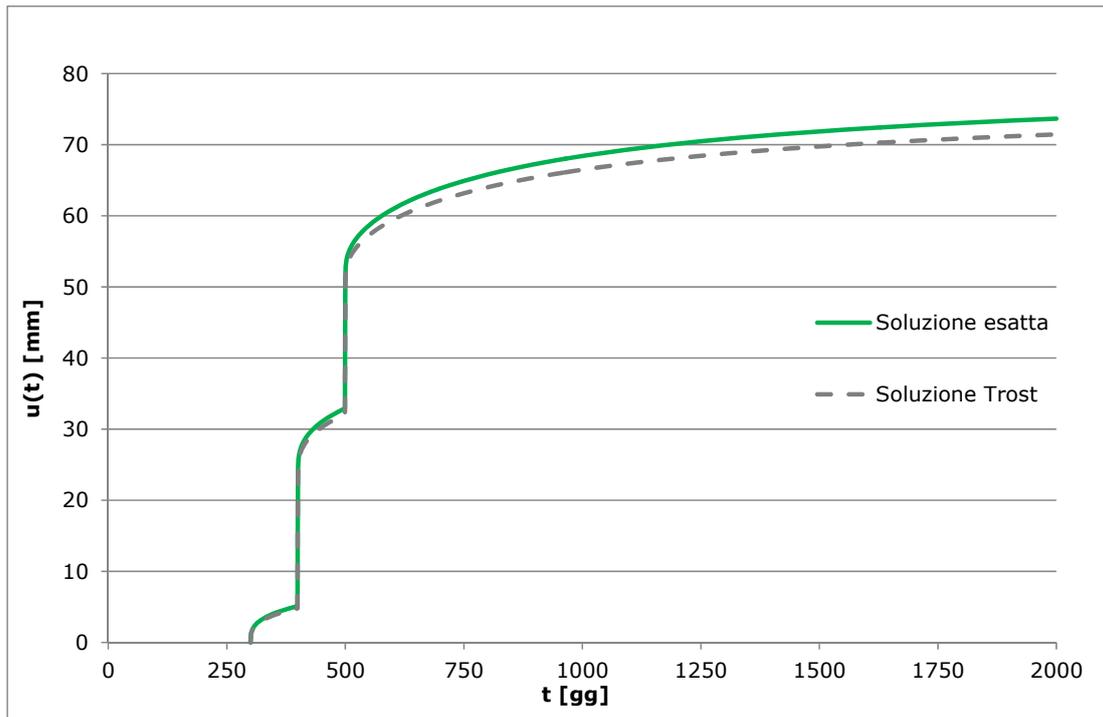


Figura 5.35 - Accorciamento in sommità della quarta asta con compensazione

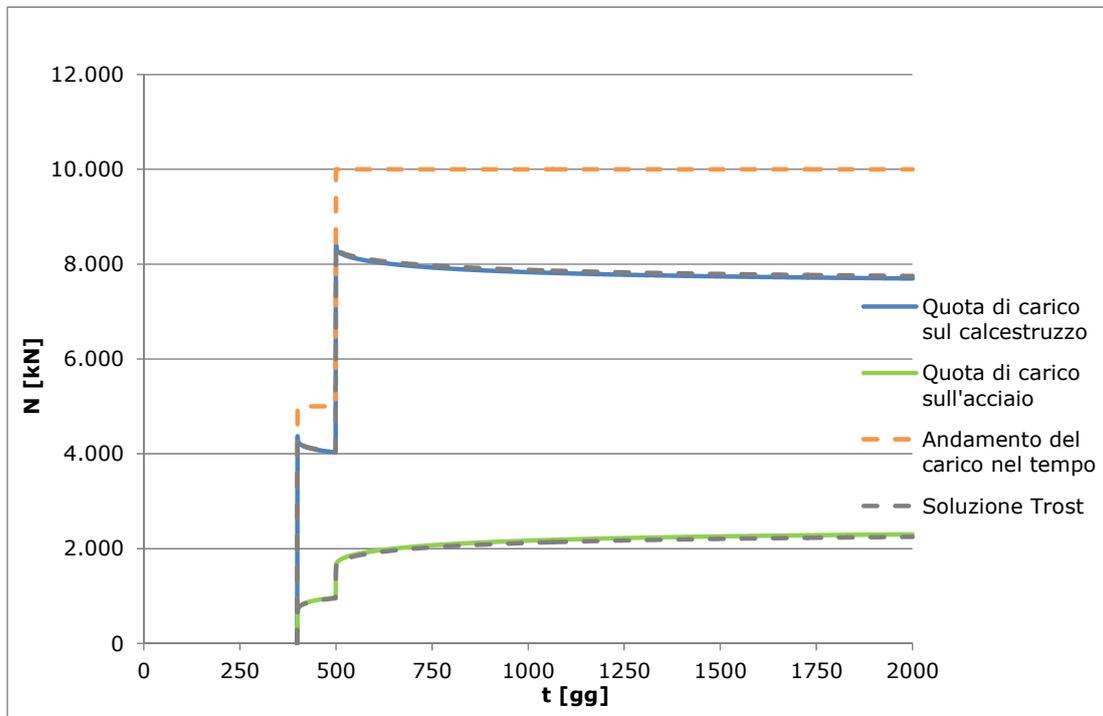


Figura 5.36 - Ripartizione del carico sulla quarta asta

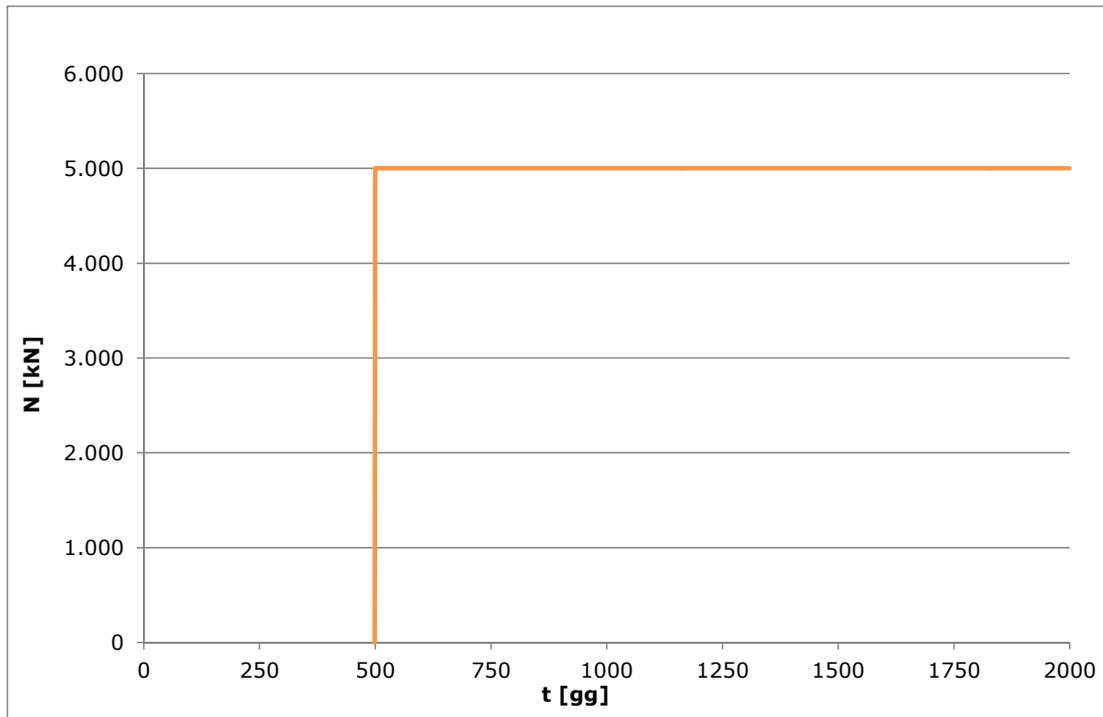


Figura 5.37 - Andamento del carico sulla quinta asta

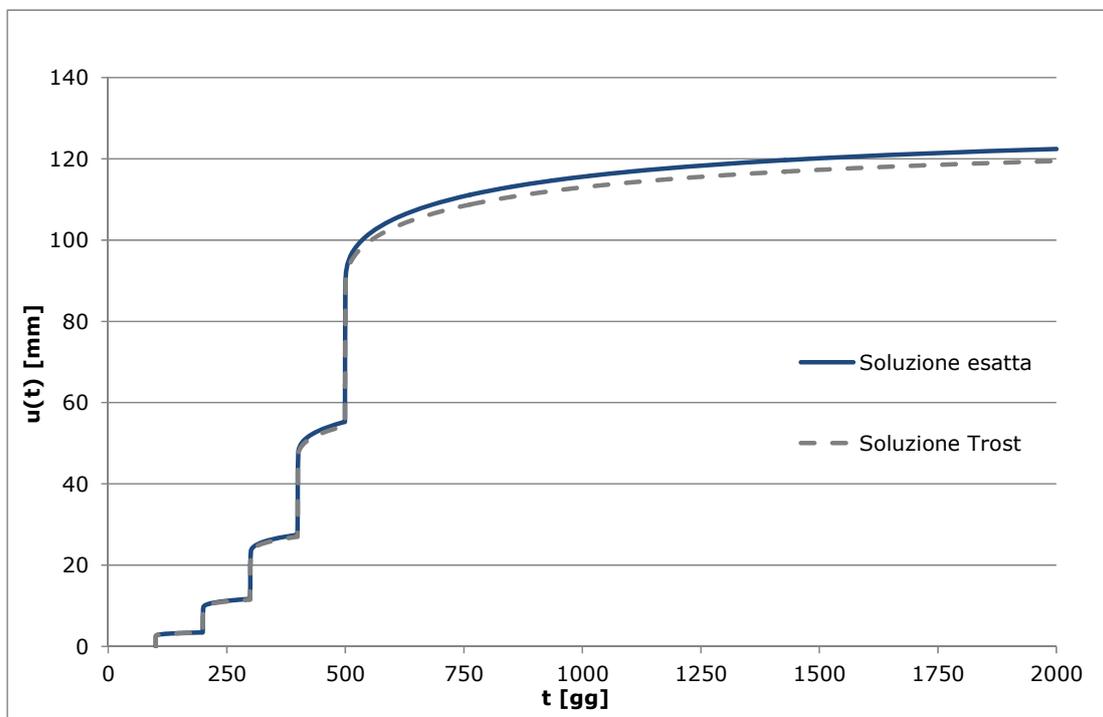


Figura 5.38 - Accorciamento in sommità della quinta asta senza compensazione

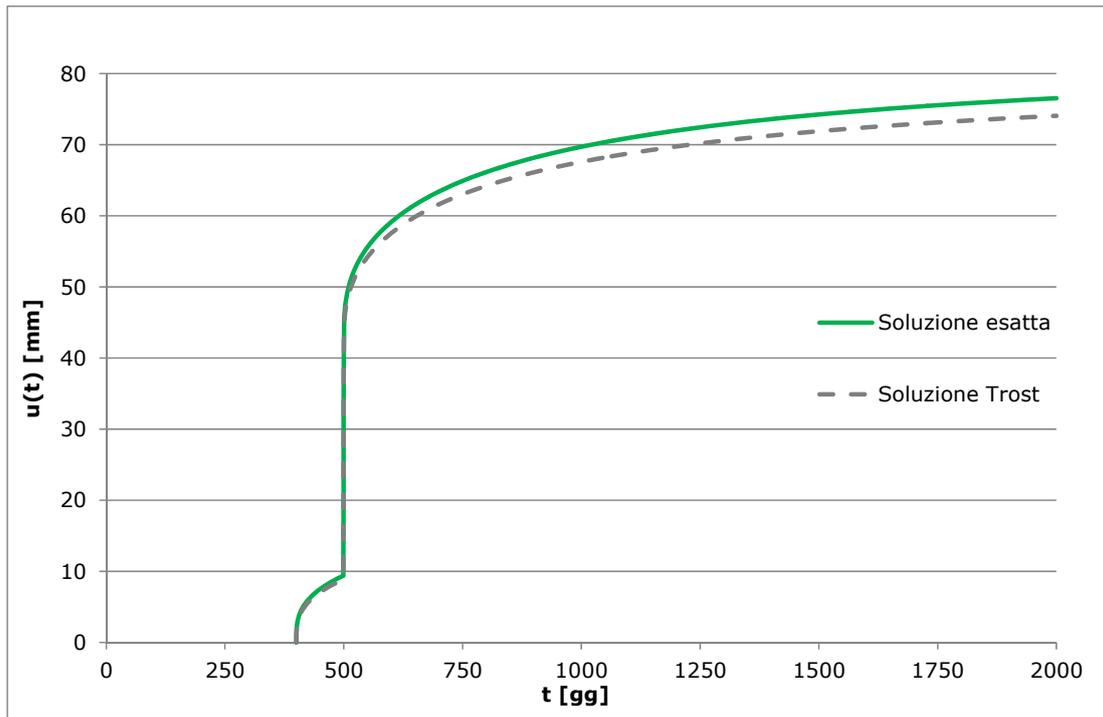


Figura 5.39 - Accorciamento in sommità della quinta asta con compensazione

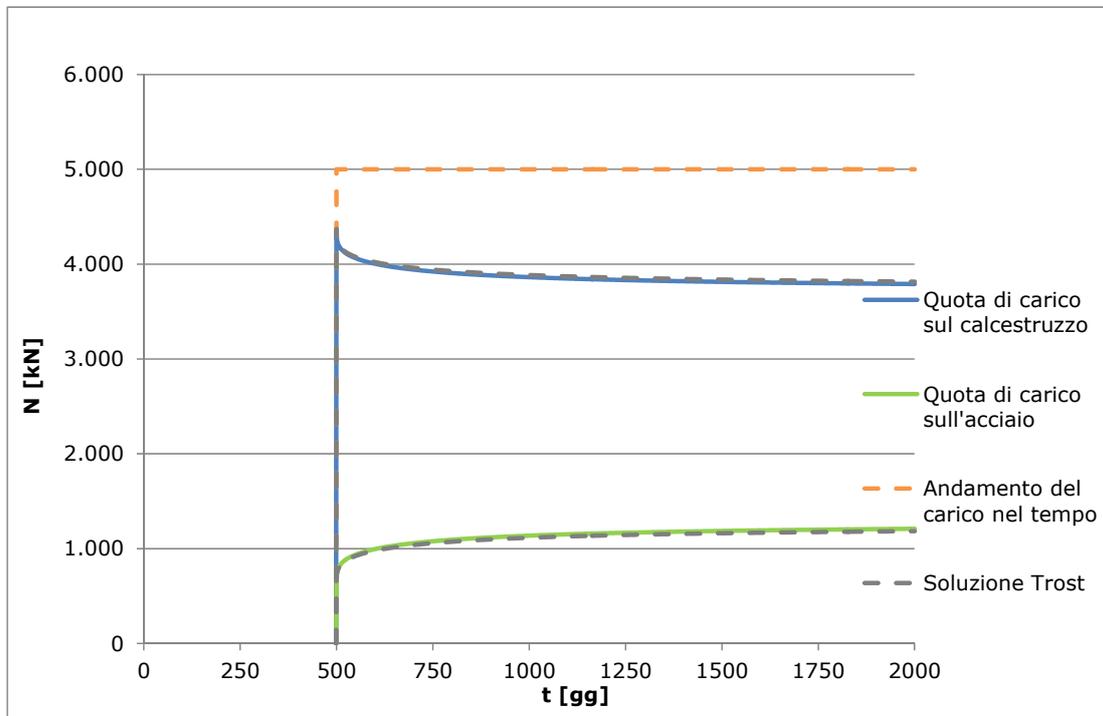


Figura 5.40 - Ripartizione del carico sulla quarta asta

Di seguito i grafici del column shortening per  $t = 500, 2000, 30000$  gg.

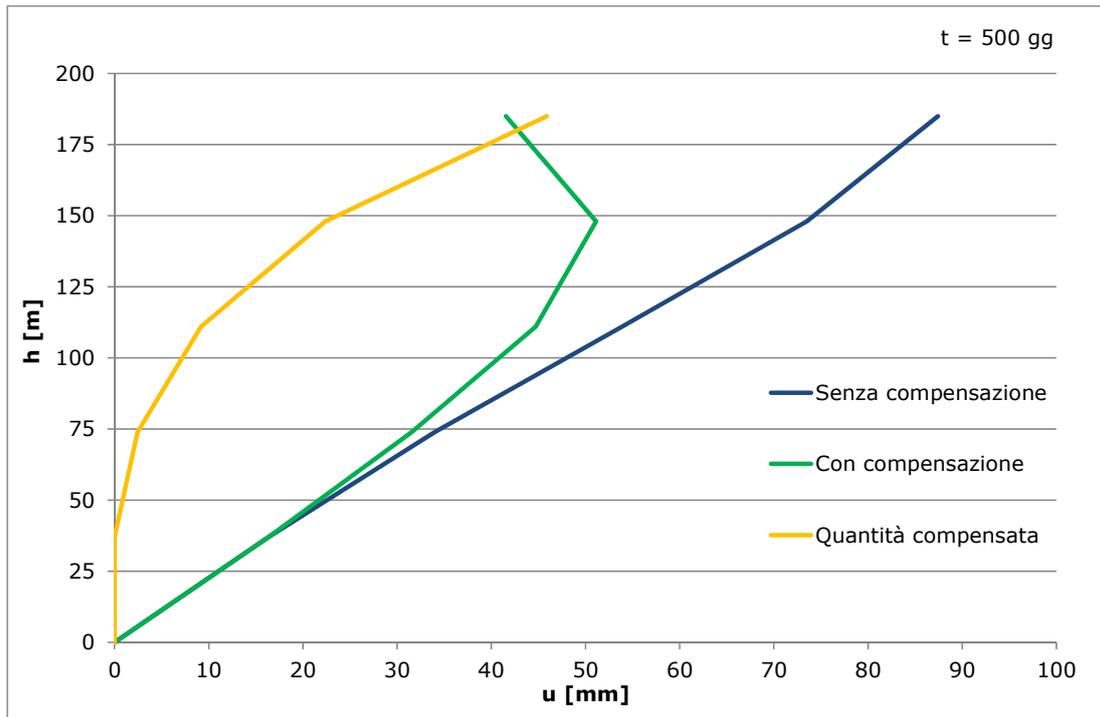


Figura 5.41 - Column shortening  $t = 500$  gg

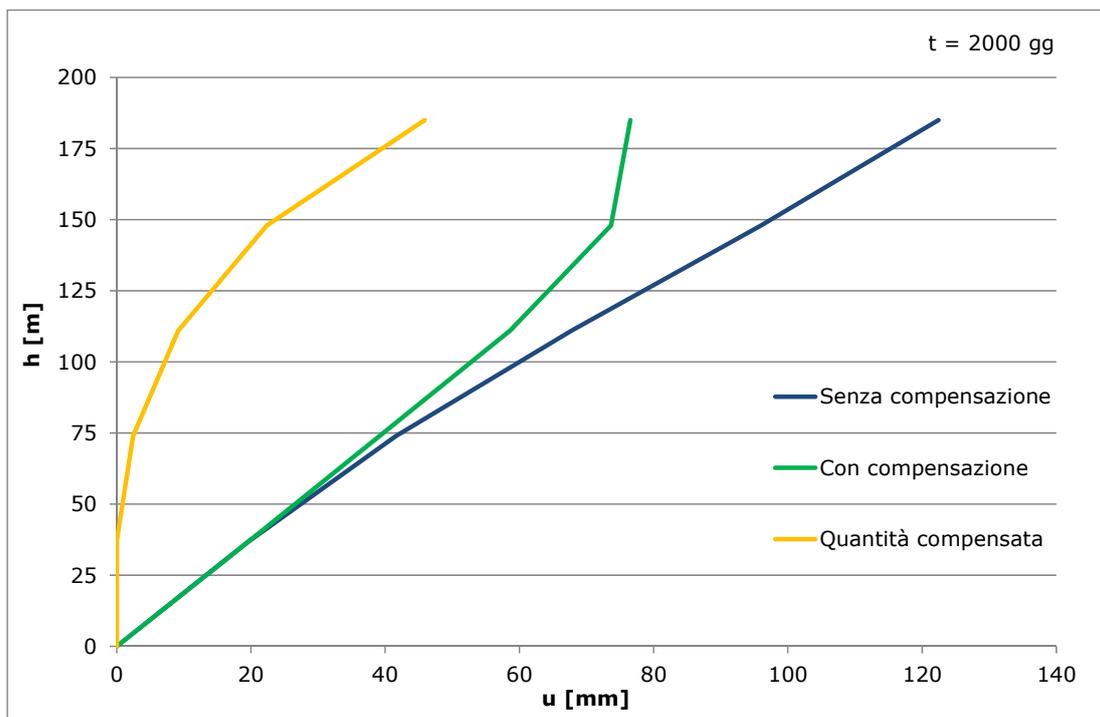


Figura 5.42 - Column shortening  $t = 2000$  gg

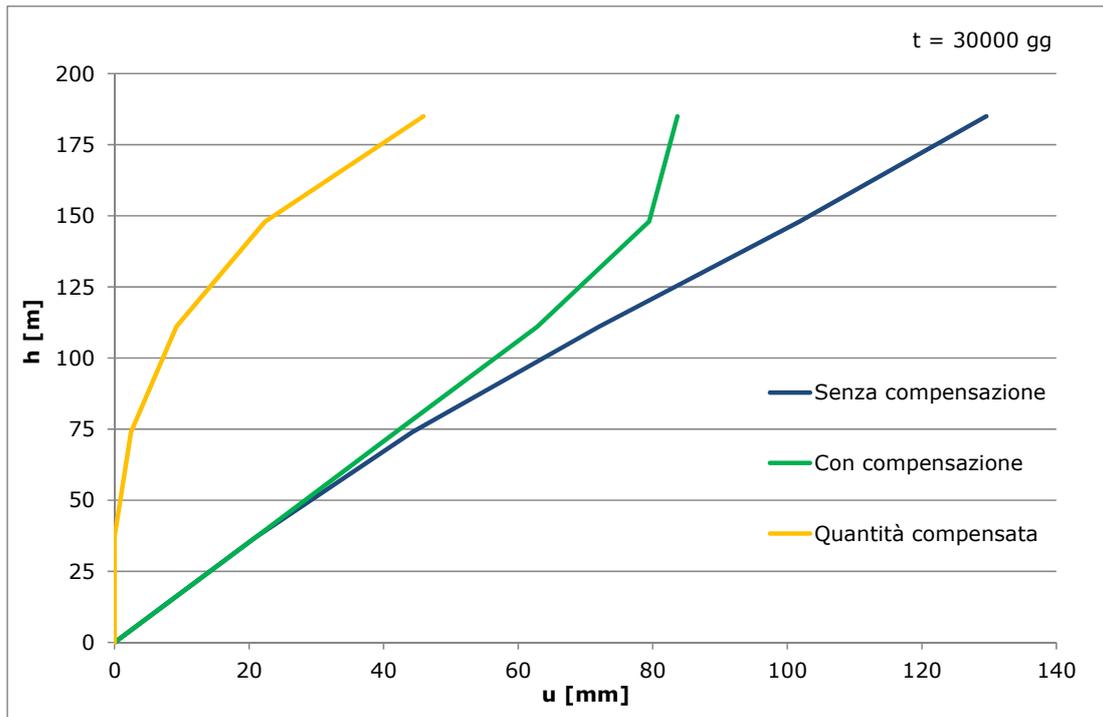


Figura 5.43 - Column shortening  $t = 30000$  gg

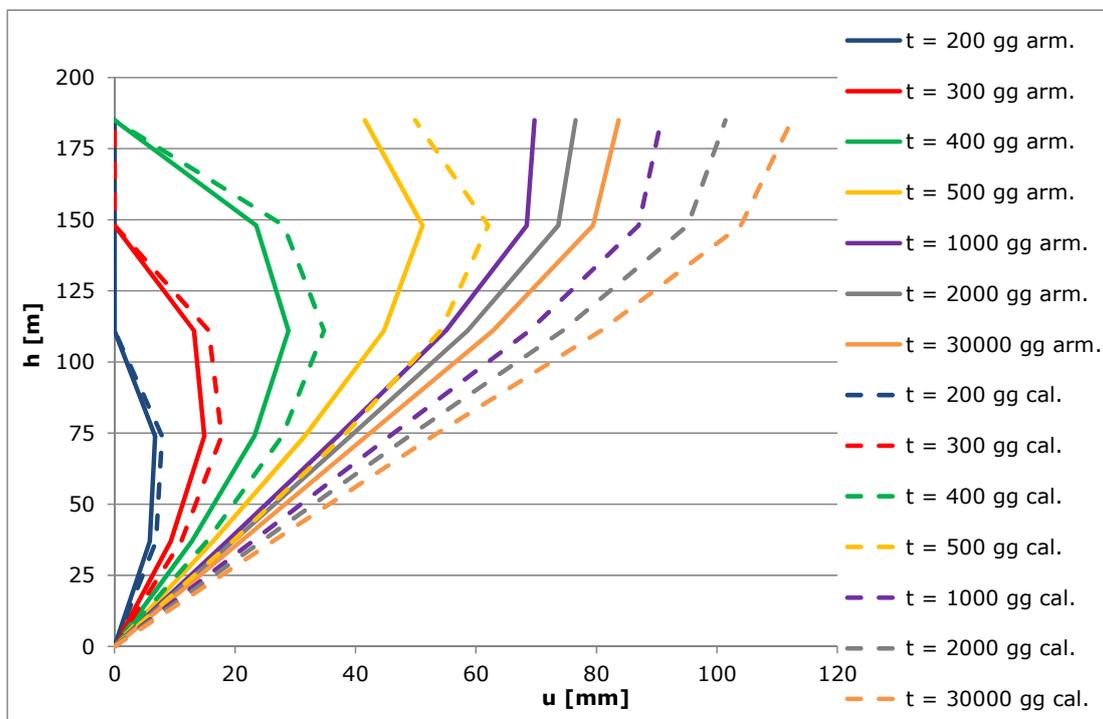


Figura 5.44 - Confronto column shortening con e senza armatura

5.2.2.3.3 Confronto tra le soluzioni

Per ciascuna asta, si evidenziano gli andamenti degli accorciamenti nel tempo con le diverse analisi precedentemente introdotte.

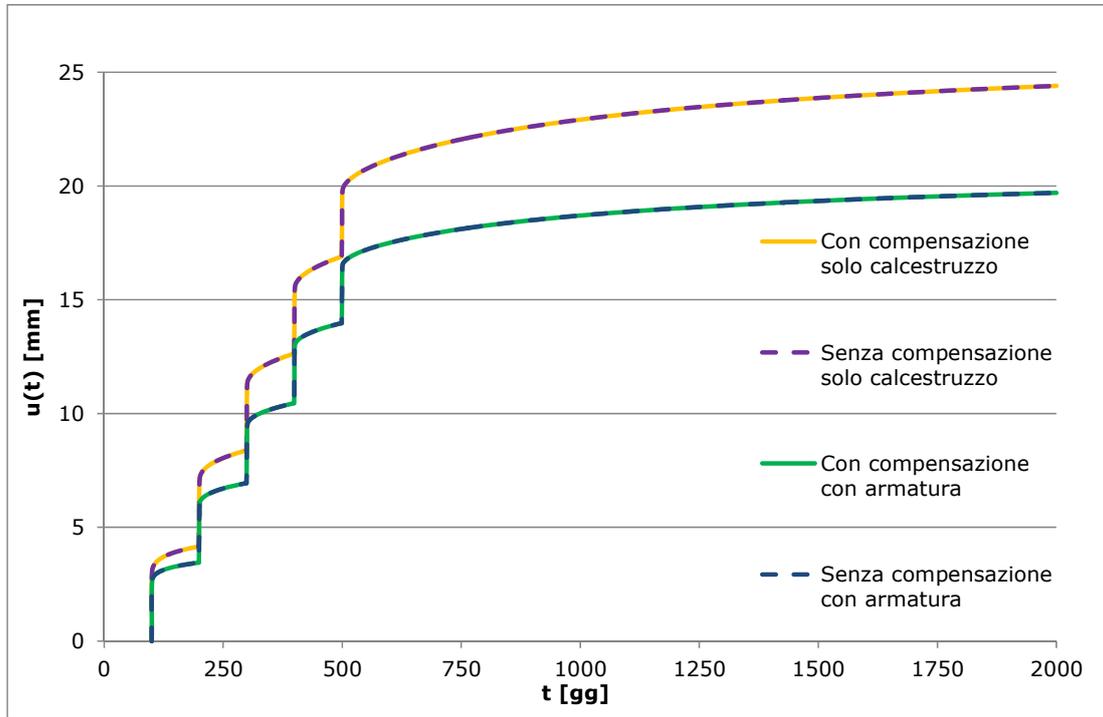


Figura 5.45 - Accorciamento in sommità della prima asta con diverse analisi

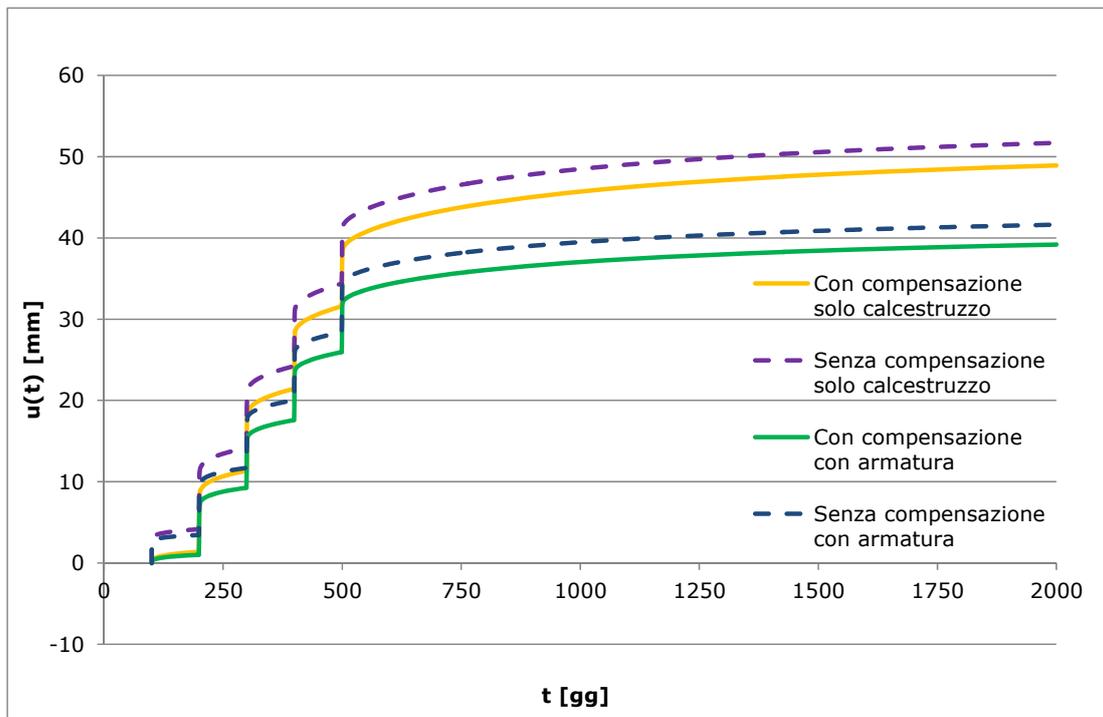


Figura 5.46 - Accorciamento in sommità della seconda asta con diverse analisi

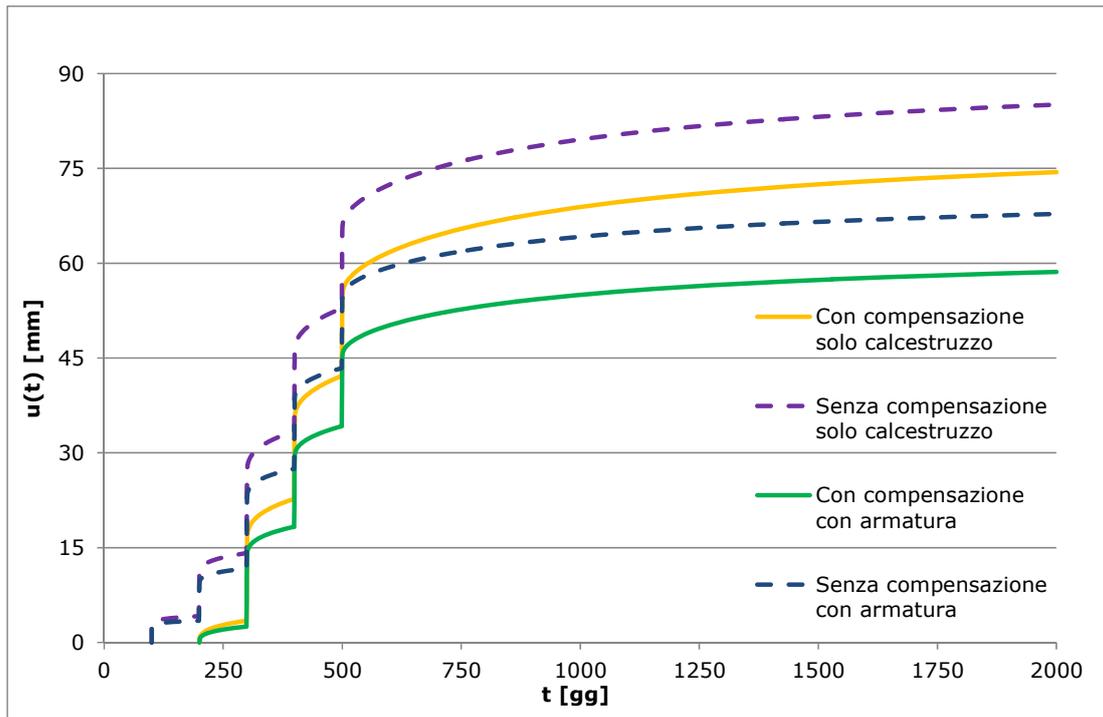


Figura 5.47 - Accorciamento in sommità della terza asta con diverse analisi

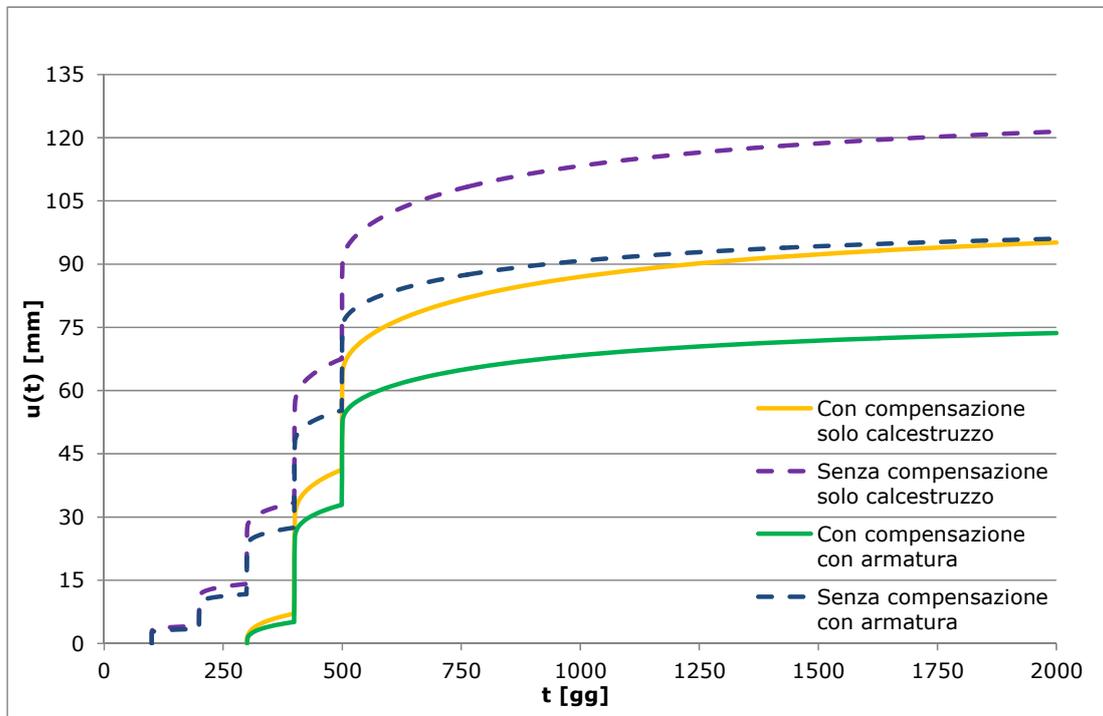


Figura 5.48 - Accorciamento in sommità della quarta asta con diverse analisi

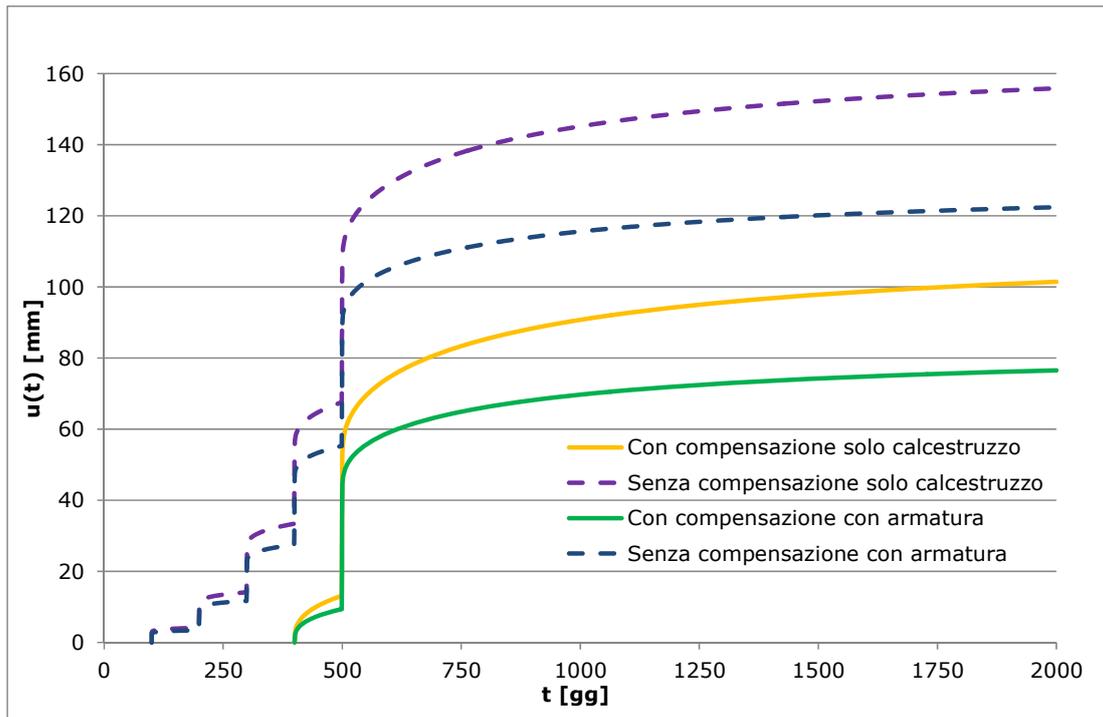


Figura 5.49 - Accorciamento in sommità della quinta asta con diverse analisi

Di seguito i grafici del column shortening per  $t = 500$  e 30000 giorni nel caso di analisi elastica e visco-elastica entrambe con o senza compensazione.

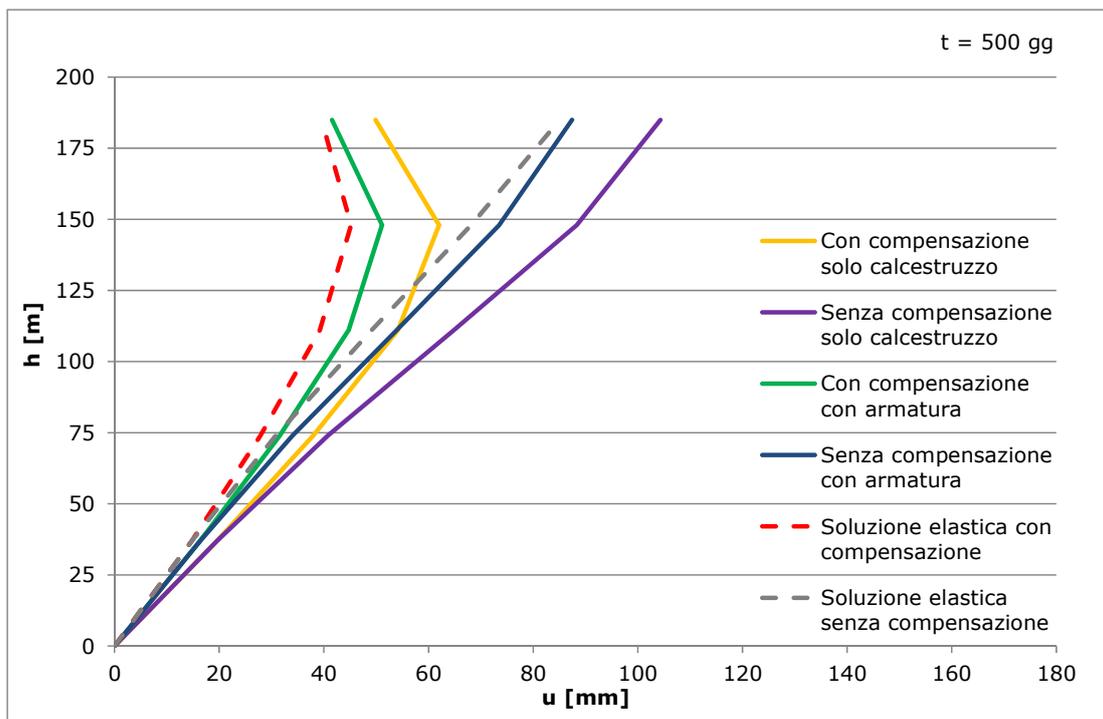


Figura 5.50 - Column shortening con diverse analisi  $t = 500$  giorni

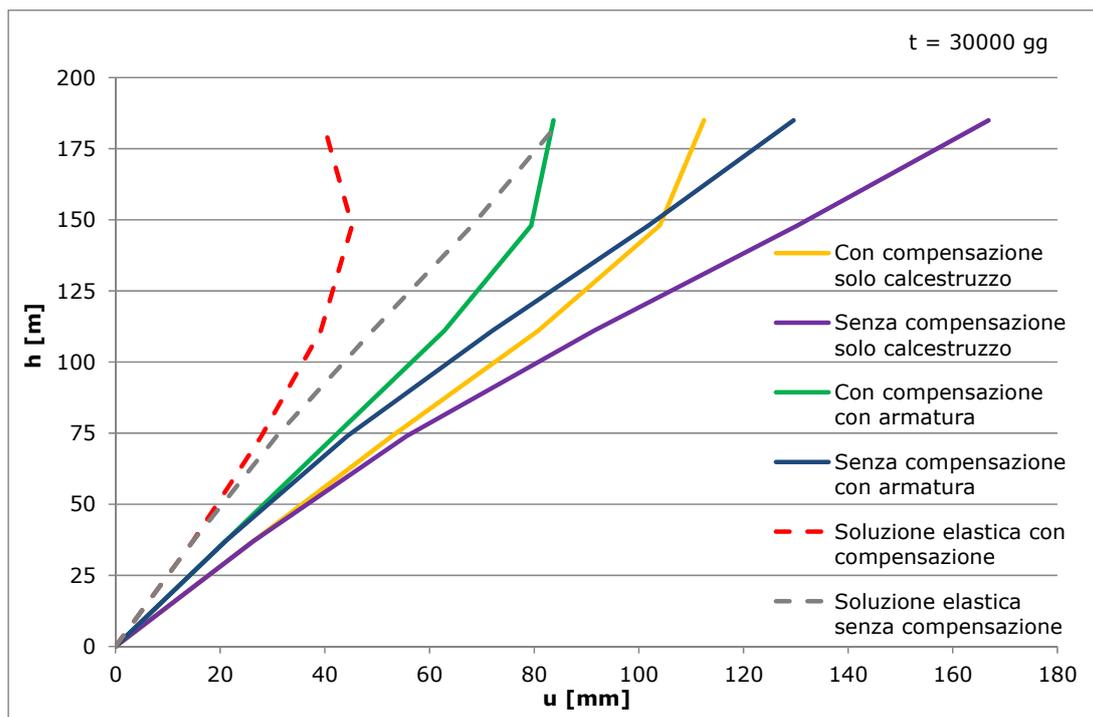


Figura 5.51 - Column shortening con diverse analisi t = 30000 giorni

Dagli ultimi due grafici si evince quanto sia importante considerare il comportamento viscoelastico del calcestruzzo nel campo degli edifici alti; infatti con un'analisi elastica si ottengono accorciamenti minori anche dell'ordine del 65%.

Per ridurre l'entità degli accorciamenti è necessario introdurre nella colonna l'armatura, la quale costituisce un vincolo elastico per la struttura; così facendo l'abbassamento in sommità passa da 112 a 84 mm con una riduzione del 25%.

### 5.3 INDICAZIONI PROGETTUALI

Si riportano di seguito, per la loro ancora elevata attualità, le indicazioni progettuali della *ACI Special Publication* del 1971 "Conceptual Details for Creep, Shrinkage and Temperature in Ultra High-Rise Buildings" di Fazlur, R. Khan e Mark Fintel [8]:

- Per gli edifici di altezza molto elevata gli effetti dell'abbassamento differenziale elastico e non di colonne e muri deve essere necessariamente considerato sia in fase di progettazione strutturale che di definizione dei dettagli architettonici;
- L'accorciamento differenziale può essere ridotto attraverso una corretta proporzione delle aree e delle percentuali di armatura delle colonne e muri adiacenti, al fine di

ottenere sforzi simili. Il rapporto Volume-Superficie non è decisivo quanto i due elementi appena riportati;

- A causa delle elevate incertezze sulla dipendenza degli effetti viscosi in funzione dei cambi di umidità relativa risultano sufficienti analisi semplificate per la valutazione dell'accorciamento differenziale;
- Fino alla conclusione degli effetti differiti nel tempo sull'accorciamento degli elementi portanti, i momenti flettenti delle travi si rilassano a causa degli effetti viscosi. Altri studi hanno dimostrato come, per distorsioni impresse alla struttura per un periodo maggiore di 30 giorni, la quantità di rilassamento è di circa il 50%.

## 6 LE ANALISI STRUTTURALI MEDIANTE IL PROGRAMMA DI CALCOLO - MIDAS GEN

### 6.1 GENERALITA'

Il programma di calcolo usato per gli sviluppi del presente lavoro di ricerca è il MIDAS GEN, strumento comunemente adottato da molti studi di ingegneria per le analisi strutturali, in particolare di edifici alti quali il Burji di Dubai o lo Spire di Chicago.

Tale programma, infatti, si presta non solo alla *conventional analysis* in regime elastico, ma soprattutto alla *construction sequence analysis* in regime visco-elastico, ed in presenza di vincoli elastici, dando così evidenza degli abbassamenti differiti nel tempo e delle variazioni delle azioni interne per effetto della non omogeneità della struttura.

A questo proposito risulta non di secondaria importanza la necessità di verificare la correttezza dei risultati dell'analisi visco-elastica di tale software. Infatti prima di procedere con l'analisi su modelli delle colonne dell'edificio Torre Isozaki si analizzano alcuni casi semplificati. In particolare le tipologie di strutture analizzate sono le seguenti:

- Strutture per le quali vale il I° Teorema della Viscoelasticità Lineare (strutture viscoelastiche omogenee soggette ad azioni statiche);
- Strutture per le quali vale il II° Teorema della Viscoelasticità Lineare (strutture viscoelastiche omogenee soggette ad azioni geometriche);
- Strutture viscoelastiche omogenee con vincolo posticipato
- Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni statiche
- Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni geometriche
- Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici posticipati

Nel software Midas Gen sono disponibili 6 soluzioni differenti per lo studio degli effetti di Creep e Shrinkage. La prima, User Defined, garantisce l'opportunità dell'utente di assegnare il coefficiente di viscosità per ogni elemento e per ogni *stage* costruttivo, le successive, invece, procedono con il calcolo automatico dei coefficienti a partire dai modelli normativi comunemente usati:

- CEB-FIP(1990);
- CEB-FIP(1978);

- ACI;
- PCA;
- Soluzione mista ACI&PCA.

Nel caso specifico è stato preferito il CEB-FIP(1990) (Par. 2.6.1), a cui si farà sempre riferimento nel seguito della tesi.

Prima di verificare la correttezza delle analisi svolte dal programma di calcolo si analizzano le caratteristiche dei principali strumenti di modellazione di cui si farà successivamente uso.

## **6.2 MODELLAZIONE ELEMENTI**

Il ventaglio di elementi tipologici di cui dispone il programma di calcolo Midas Gen ([1], 2011) è il seguente:

- Elemento "TRUSS";
- Elemento "ONLY TENSION";
- Elemento "ONLY COMPRESSION";
- Elemento "BEAM"
- Elemento "PLANE STRESS";
- Elemento "PLATE";
- Elemento "PLANE STRAIN 2D";
- Elemento "AXYSIMMETRIC 2D";
- Elemento "SOLID";
- Elemento "WALL".

Nelle analisi svolte verrà fatto uso dell'elemento BEAM e WALL, di cui si riportano le caratteristiche nei paragrafi successivi.

### 6.2.1 ELEMENTO BEAM

L'elemento Beam modella elementi 3-dimensionali prismatici e non prismatici; pertanto è tipicamente usato per travi e colonne di edifici comuni, ma anche per i conci di ponti in avanzamento.

La formulazione adottata dal MIDAS GEN si fonda sulla Teoria della Trave di Timoshenko, dunque tiene in considerazione la rigidità a trazione/compressione, taglio, momenti flettenti e torcenti.

Vengono, inoltre, strettamente rispettate le seguenti ipotesi di tale teoria:

- Lo studio viene effettuato in regime di piccoli spostamenti;
- Le sezioni trasversali si mantengono piane a deformazione avvenuta, ma, a differenza del modello di trave di Eulero-Bernulli, la normale non coincide con l'asse della trave per effetto delle azioni di taglio;
- Gli sforzi  $\sigma_y$  risultano trascurabili (Figura 6.1).

In Figura 6.1 se ne riportano i grafici e le espressioni caratteristiche.

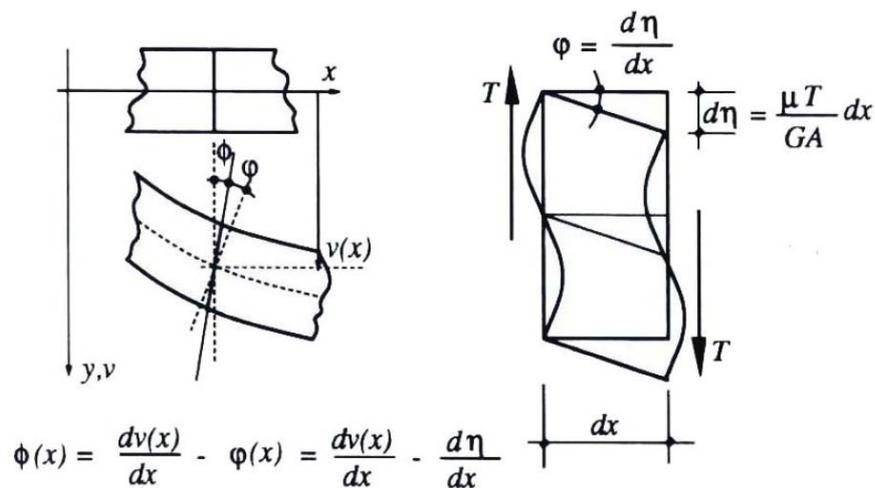


Figura 6.1 - Trave di Timoschenko

### 6.2.2 ELEMENTO WALL

L'elemento Wall modella le pareti di taglio, nello specifico programma di calcolo viene previsto di sola forma quadrata o rettangolare e si differenzia in funzione della rigidezza sul piano o fuori dal piano.

In particolare sono due le possibili soluzioni:

- **Tipo Membrane:** presenta rigidezza a trazione e compressione nella direzione verticale del piano su cui si sviluppa, rigidezza a taglio in direzione Z ed infine rigidezza rotazionale sul piano ortogonale all'elemento,  $M_y$  (Figura 6.2);
- **Tipo Plate:** presenta rigidezza anche nelle direzioni fuori dal piano, ovvero i tagli in direzione Y, il momento flettente  $M_z$  ed infine il momento torcente  $M_x$  (Figura 6.2).

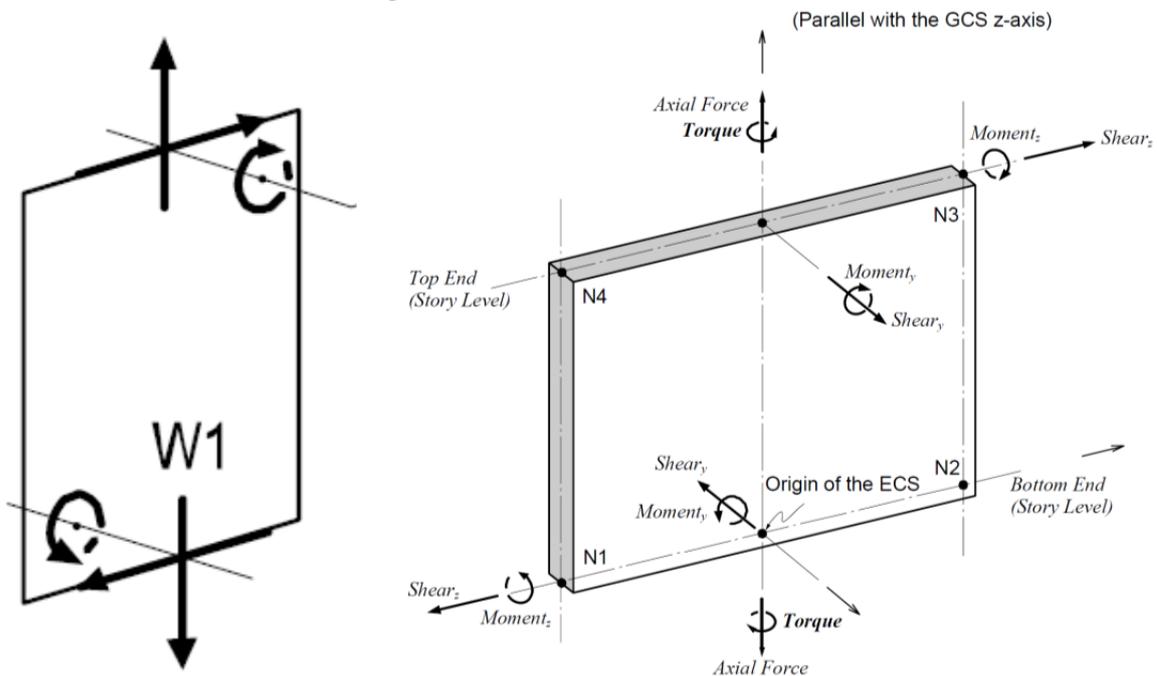


Figura 6.2 - Elementi WALL Membrane e WALL Plate

Nel prosieguo verrà fatto uso dell'elemento Wall del primo tipo, ovvero quello di comportamento membranale.

## 6.3 ANALISI SVOLTE DAL PROGRAMMA DI CALCOLO

Si riportano di seguito le principali analisi svolte dal programma di calcolo Midas Gen, seguite da una breve descrizione:

### 6.3.1 LINEAR STATIC ANALYSIS

L'equazione base adottata in MIDAS GEN per l'analisi statica lineare è la seguente:

$$[K]\{U\} = \{P\}$$

Dove:

$[K]$  rappresenta la matrice di rigidezza;

$\{U\}$  rappresenta il vettore degli spostamenti;

$\{P\}$  rappresenta il vettore dei carichi.

### 6.3.2 EIGENVALUE ANALYSIS

Per un sistema dinamico privo di smorzamento vengono ottenute le forme modali ed i periodi naturali di oscillazione dall'equazione:

$$[K]\{\Phi_n\} = \omega_n^2[M]\{\Phi_n\}$$

Dove:

$[K]$  rappresenta la matrice di rigidezza;

$[M]$  rappresenta la matrice delle Masse;

$\omega_n^2$  rappresenta l'autovalore relativo al modo n-esimo;

$\{\Phi_n\}$  rappresenta l'autovettore relativo al modo n-esimo.

### 6.3.3 RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS

Per strutture soggette a sollecitazioni di carattere sismico analizzate con l'uso dello spettro di risposta, l'equazione di equilibrio è la seguente:

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = -[M]w_g(t)$$

Dove:

$[K]$  rappresenta la matrice di rigidezza;

$[M]$  rappresenta la matrice delle Masse;

$[C]$  rappresenta la matrice di smorzamento;

$w_g(t)$  rappresenta l'accelerazione del terreno;

$u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)$  rappresentano rispettivamente gli spostamenti, le velocità e le accelerazioni.

Il risultato di tale analisi è dato dalla combinazione di più sistemi ad un grado di libertà (SDOF – *Single Degree of Freedom*).

#### 6.3.4 TIME HISTORY ANALYSIS

Tale analisi viene effettuata qualora il sistema sia sollecitato da carichi dinamici, la relativa equazione di equilibrio è la seguente:

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = -p(t)$$

Dove:

$[K]$  rappresenta la matrice di rigidezza;

$[M]$  rappresenta la matrice delle Masse;

$[C]$  rappresenta la matrice di smorzamento;

$p(t)$  rappresenta il carico dinamico;

$u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)$  rappresentano rispettivamente gli spostamenti, le velocità e le accelerazioni.

#### 6.3.5 NON LINEAR ANALYSIS - PDelta

Tale analisi prevede lo studio di sistemi che presentino non linearità geometriche, tenendo in considerazione gli effetti del secondo ordine dovuti alla simultanea applicazione di carichi assiali e trasversali. Tale effetto risulta maggiore per gli edifici alti che subiscono spostamenti trasversali causati dagli elevati carichi trasversali.

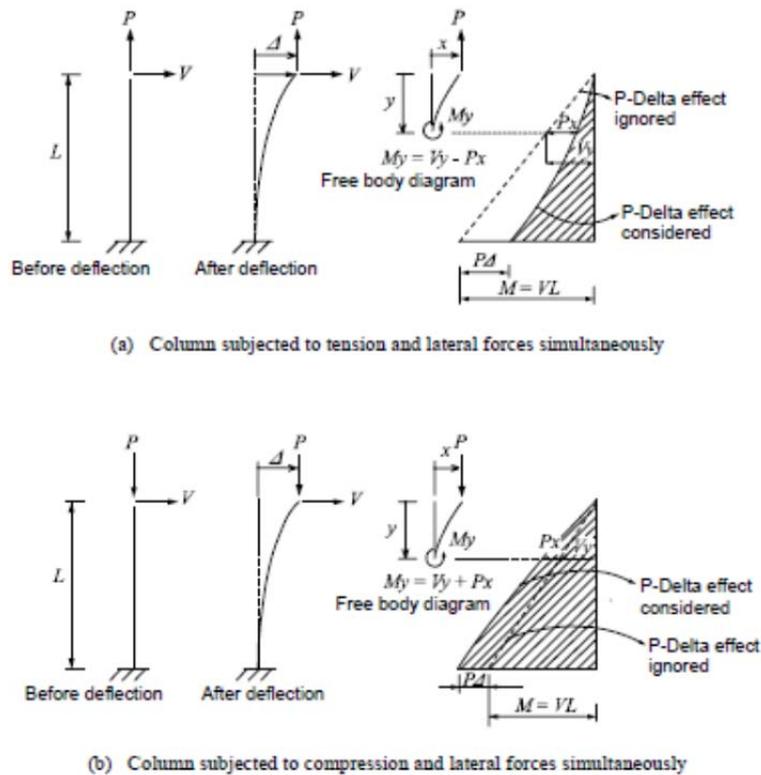


Figura 6.3 - Analisi P-Delta

### 6.3.6 NON LINEAR ANALYSIS WITH NON LINEAR ELEMENT

L'analisi non lineare in MIDAS GEN viene applicata all'analisi statica di una struttura nella quale siano presenti elementi non lineari. Tali elementi sono, per esempio, elementi TRUSS a sola trazione/compressione. L'equazione di equilibrio di tale sistema strutturale è data dalla seguente espressione:

$$[K + K_N]\{U\} = \{P\}$$

Dove:

$[K]$  rappresenta la rigidezza della struttura lineare;

$[K_N]$  rappresenta la rigidezza degli elementi non lineari.

### 6.3.7 CONSTRUCTION SEQUENCE ANALYSIS

Tale analisi è stata opportunamente spiegata nel capitolo 5.

Nelle modellazioni eseguite all'interno del presente lavoro di tesi si è fatto uso della *Linear Static Analysis* e della *construction sequence analysis*.

## 6.4 VALIDAZIONE DEL PROGRAMMA DI CALCOLO

### 6.4.1 ELEMENTI SOGGETTI A FLESSIONE

#### 6.4.1.1 Rispetto del primo teorema della viscosità

La verifica del primo teorema della viscosità richiede che vengano strettamente rispettati 2 fondamentali aspetti qualora il modello studiato sia omogeneo, ovvero con l'ipotesi che venga costruito nella sua completezza in un unico istante:

- Che l'andamento delle deformazioni nel tempo, nel caso studiato gli abbassamenti, segua la curva del coefficiente di viscosità assegnato da normativa;
- Che le azioni interne al modello restino costanti nel tempo.

Si considera una trave semplicemente appoggiata come quella di Figura 6.4, con un carico concentrato applicato in mezzeria a 7 e 28 gg. La trave è in calcestruzzo C40/50, la sezione è quadrata (40x40 cm), il calcestruzzo è di tipo normale ( $s=0,25$ ), e l'umidità relativa (RH) è pari a 70%.

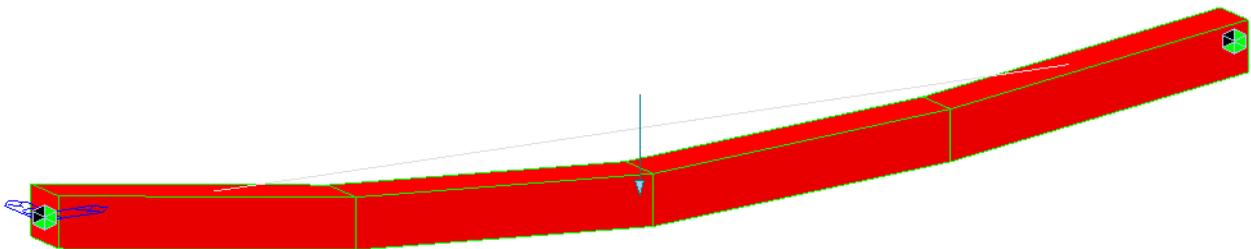


Figura 6.4 – Modello Midas Gen per la verifica del I° Teorema della Viscosità

Si riportano di seguito gli andamenti della freccia in mezzeria rapportata a quella elastica iniziale, ed il valore del momento in qualsiasi punto rapportato a quello elastico iniziale.

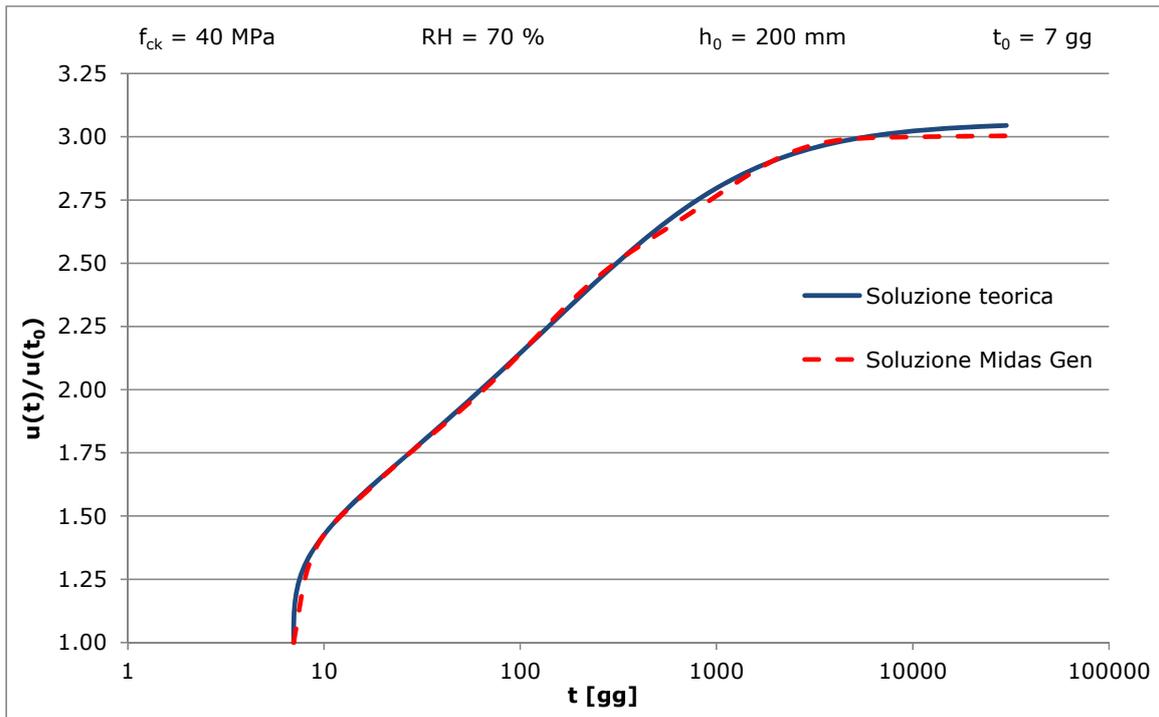


Figura 6.5 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 7$  giorni

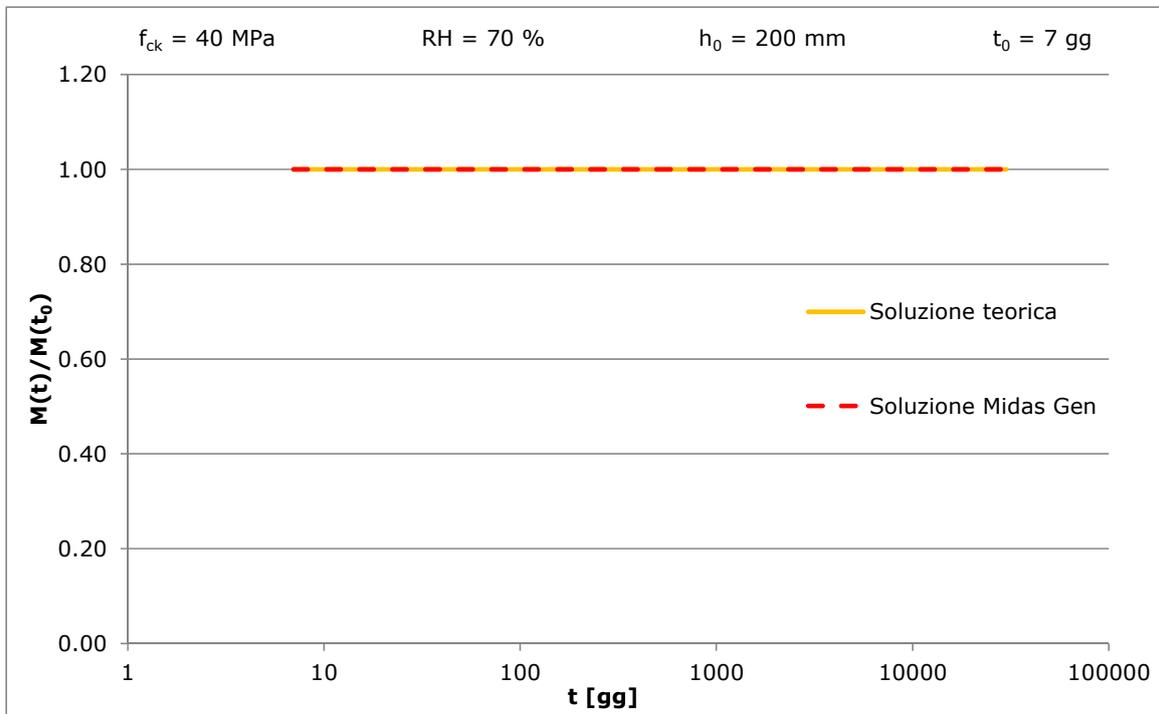


Figura 6.6 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 7$  giorni

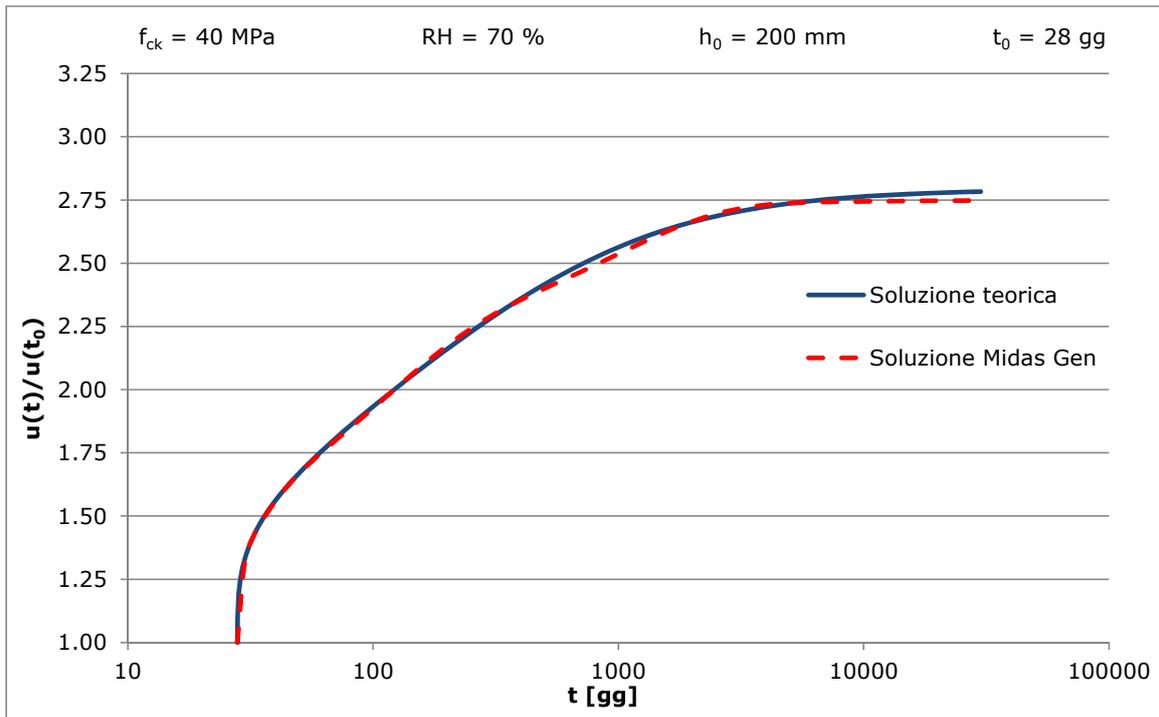


Figura 6.7 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 28$  giorni

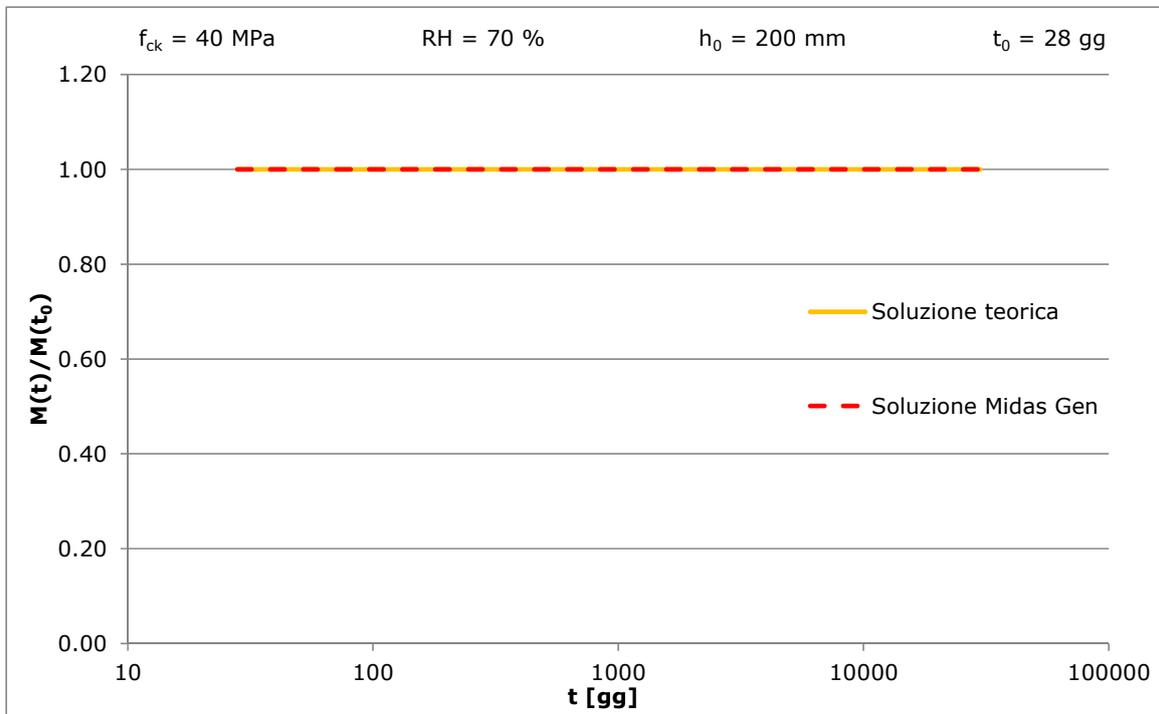


Figura 6.8 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 28$  giorni

#### 6.4.1.2 Rispetto del secondo teorema della viscosità

La verifica del II Teorema della Viscosità impone, invece, le seguenti condizioni da rispettare per una struttura omogenea:

- Una struttura a cui viene impressa una distorsione non deve presentare alcuna ulteriore deformazione oltre allo spostamento dei punti del modello per effetto della distorsione stessa;
- L'andamento delle azioni interne nel tempo deve presentare il medesimo andamento della funzione di rilassamento caratteristica.

Si considera una struttura eguale a quella del precedente punto 6.4.1.1; nella mezzeria è ora presente un vincolo cedevole verso il basso di 100 mm (Figura 6.9).

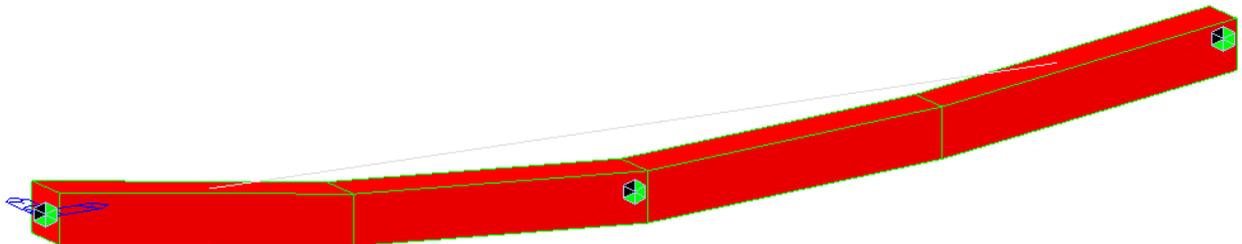


Figura 6.9 – Modello Midas Gen per la verifica del II° Teorema della Viscosità

Si riportano di seguito gli andamenti della freccia in qualsiasi punto rapportata a quella elastica iniziale, ed il valore del momento in mezzeria (o dell'iperstatica) rapportato a quello elastico iniziale.

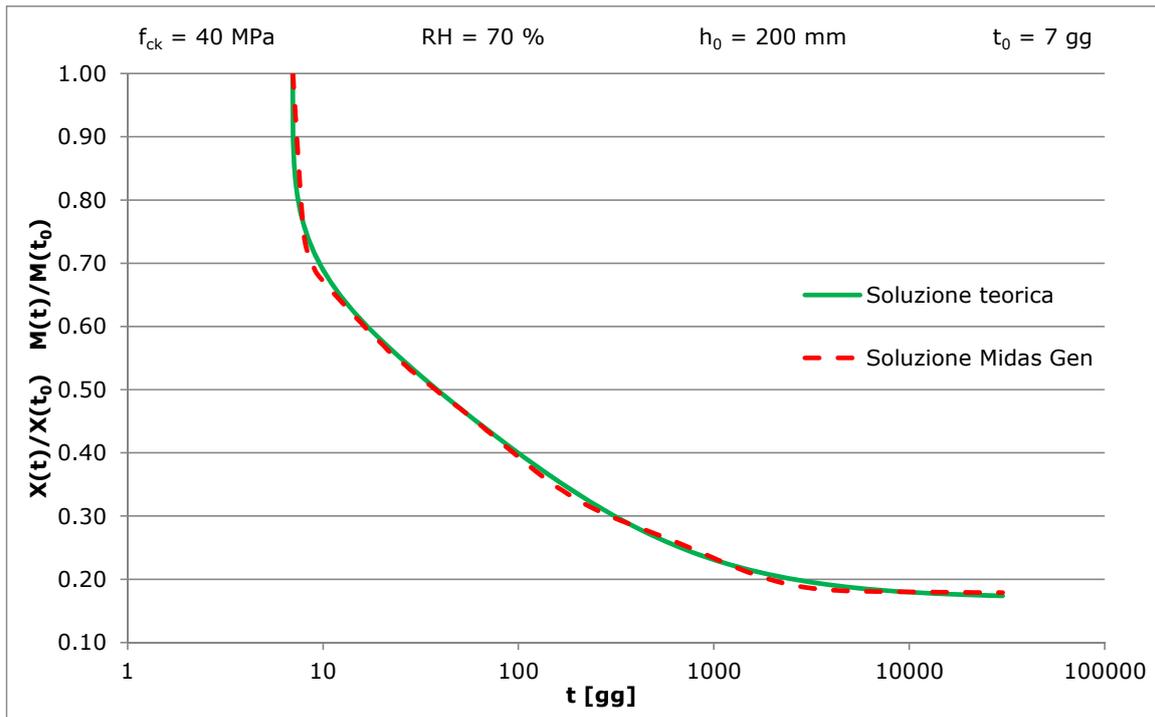


Figura 6.10 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X(t_0)$  e  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 7$  giorni

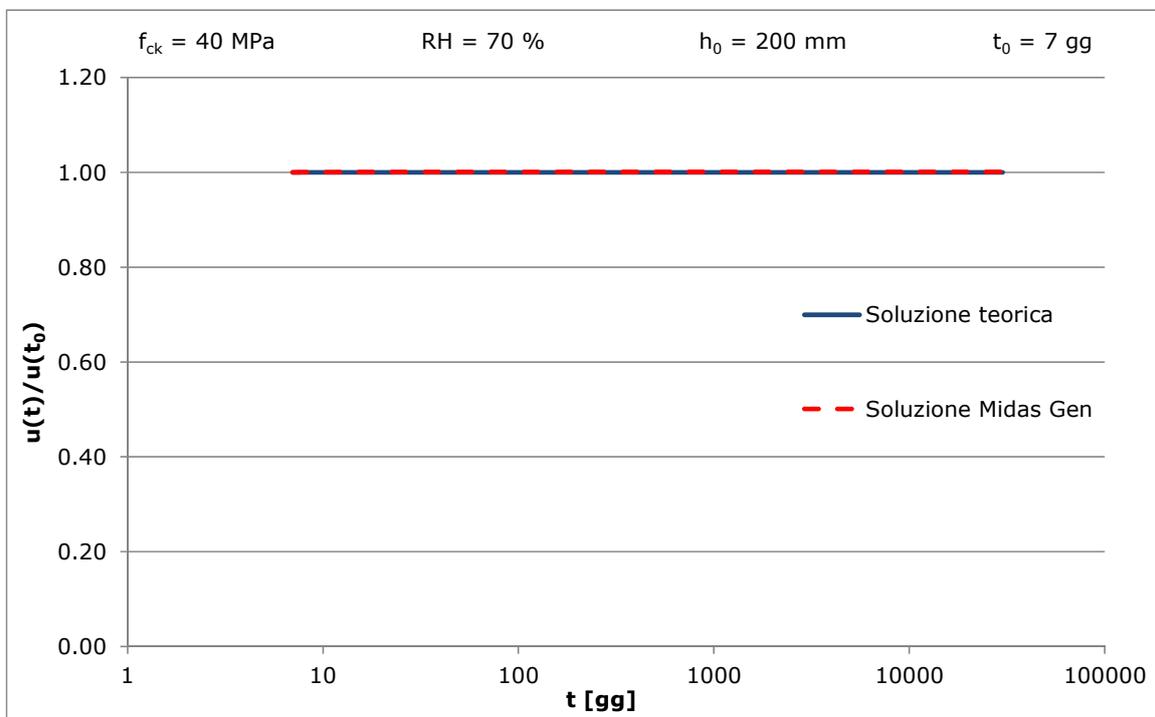


Figura 6.11 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 7$  giorni

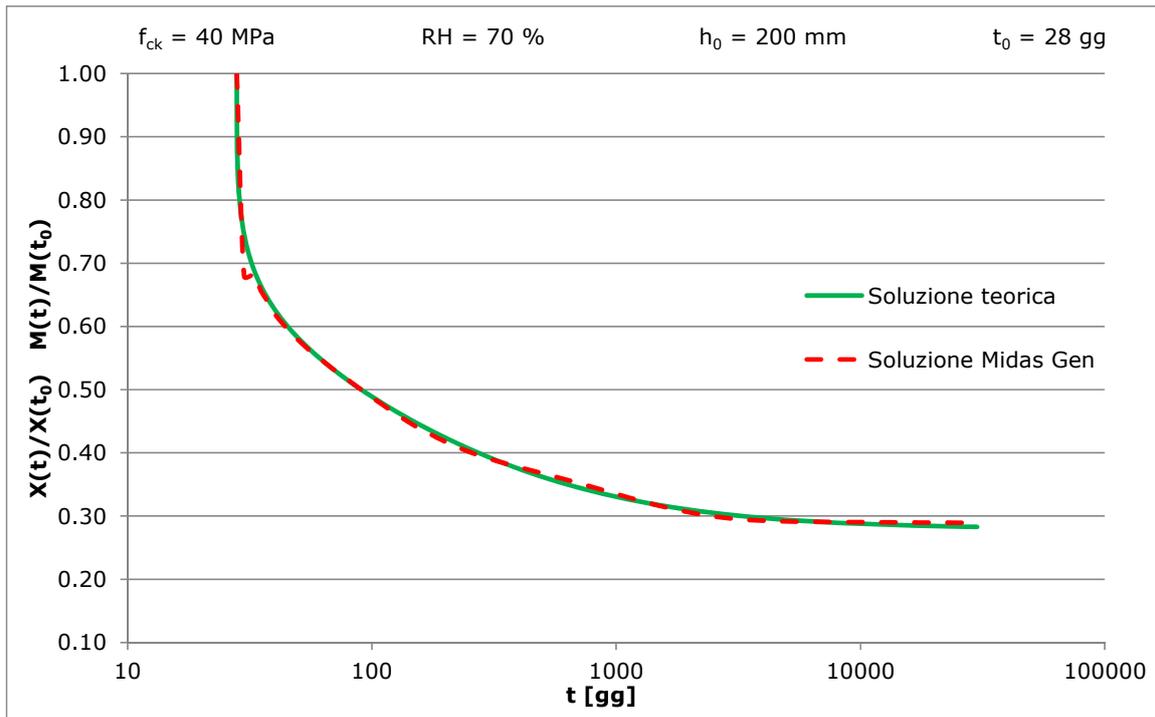


Figura 6.12 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X(t_0)$  e  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 28$  giorni

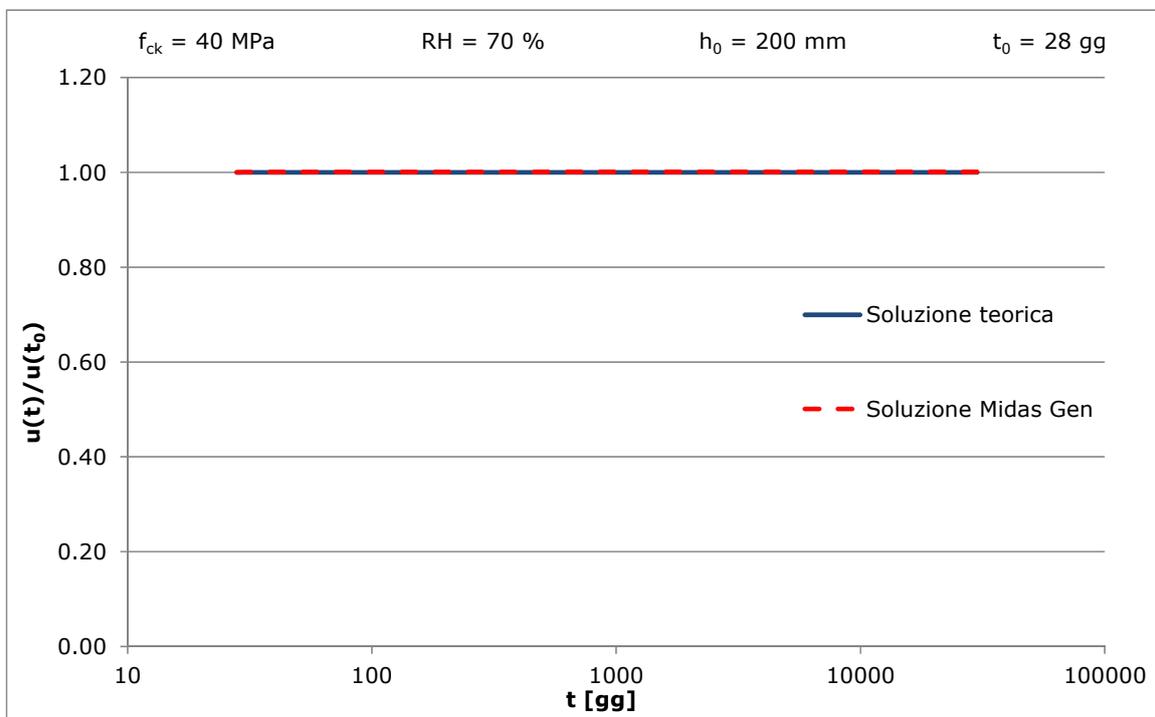


Figura 6.13 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 28$  giorni

### 6.4.1.3 Strutture viscoelastiche omogenee con vincolo rigido posticipato

Si considera una trave semplicemente appoggiata come quella di Figura 6.14, con un carico concentrato applicato in mezzeria a 7 gg. Nella mezzeria viene applicato un vincolo d'appoggio aggiuntivo a 10 e 28 gg. La trave è in calcestruzzo C40/50, la sezione è quadrata (40x40 cm), il calcestruzzo è di tipo normale ( $s=0,25$ ), e l'umidità relativa (RH) è pari a 70%.

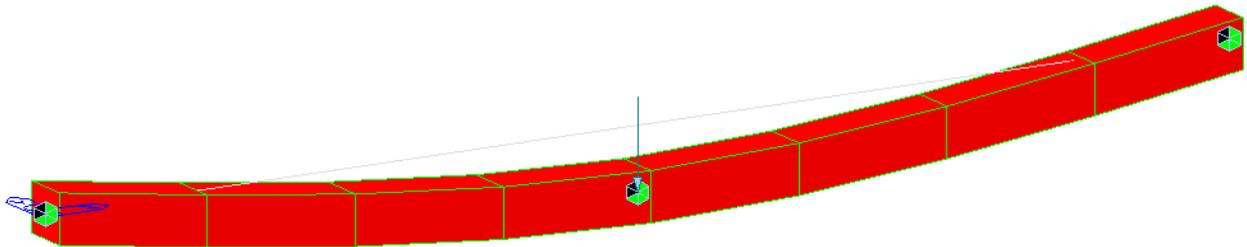


Figura 6.14 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincolo posticipato

Di seguito gli andamenti della freccia in qualsiasi punto rapportata a quella elastica iniziale, il valore dell'iperstatica del vincolo aggiuntivo rapportato al suo valore elastico iniziale, il valore del momento in mezzeria rapportato a quello elastico iniziale.

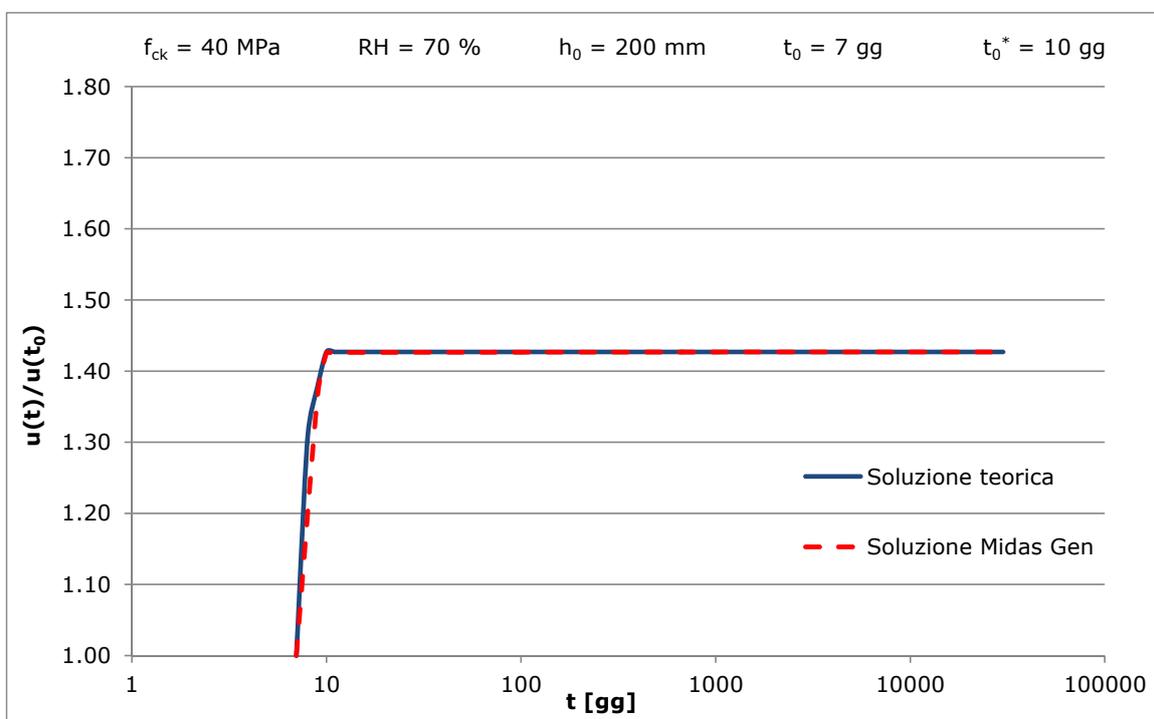


Figura 6.15 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 7$  gg e  $t_0^* = 10$  gg

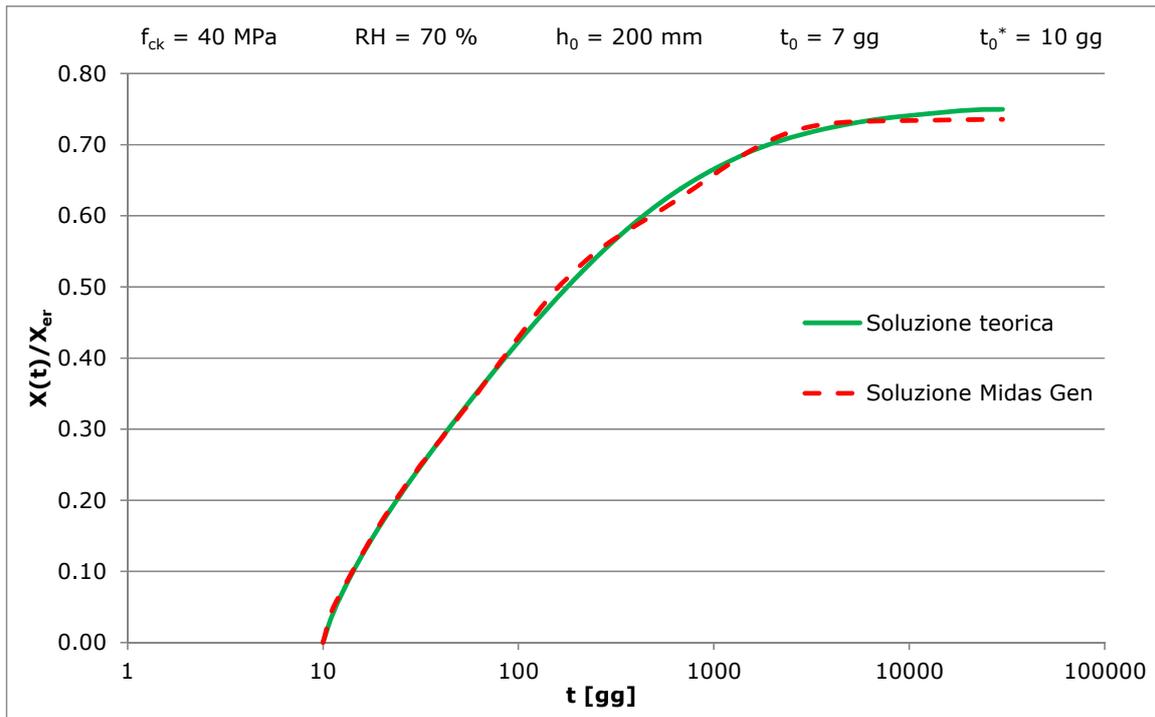


Figura 6.16 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  e  $t_0^* = 10 \text{ gg}$

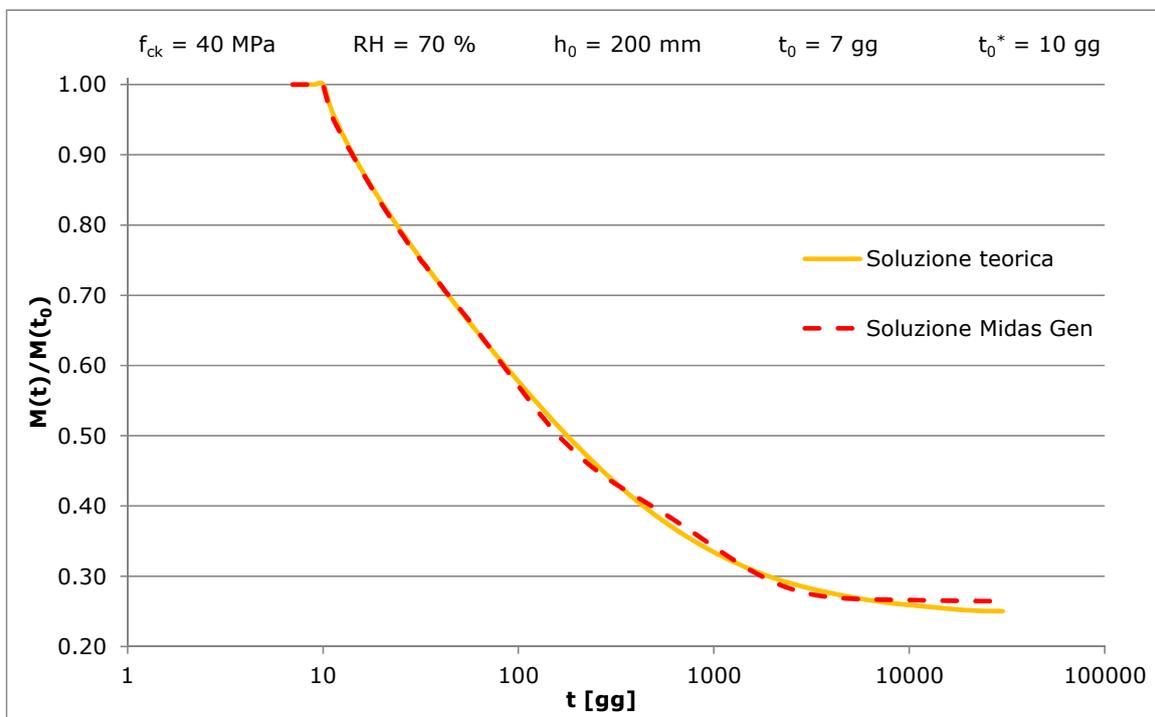


Figura 6.17 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  e  $t_0^* = 10 \text{ gg}$

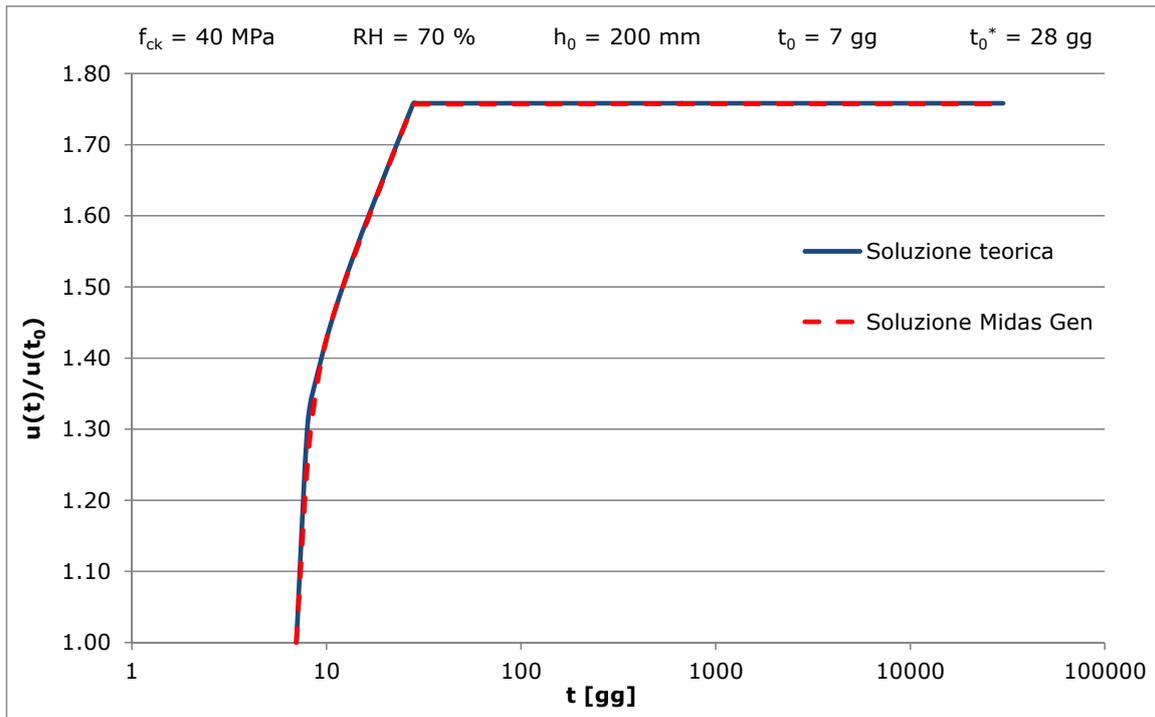


Figura 6.18 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  e  $t_0^* = 28 \text{ gg}$

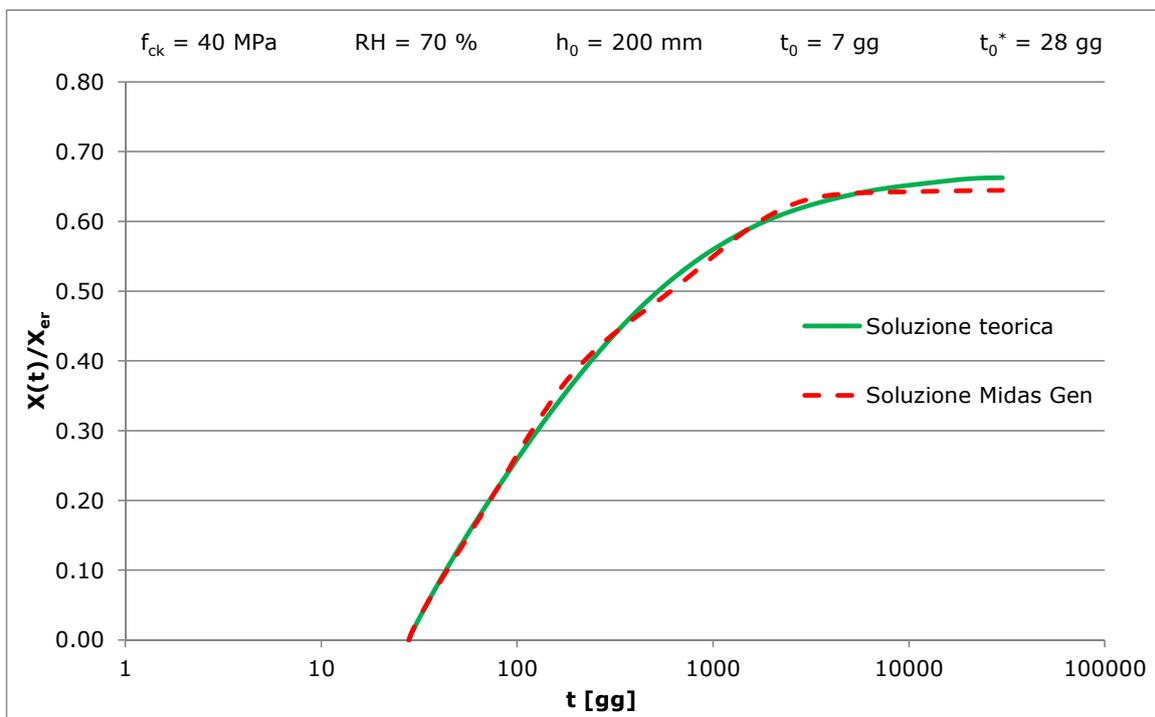


Figura 6.19 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  e  $t_0^* = 28 \text{ gg}$

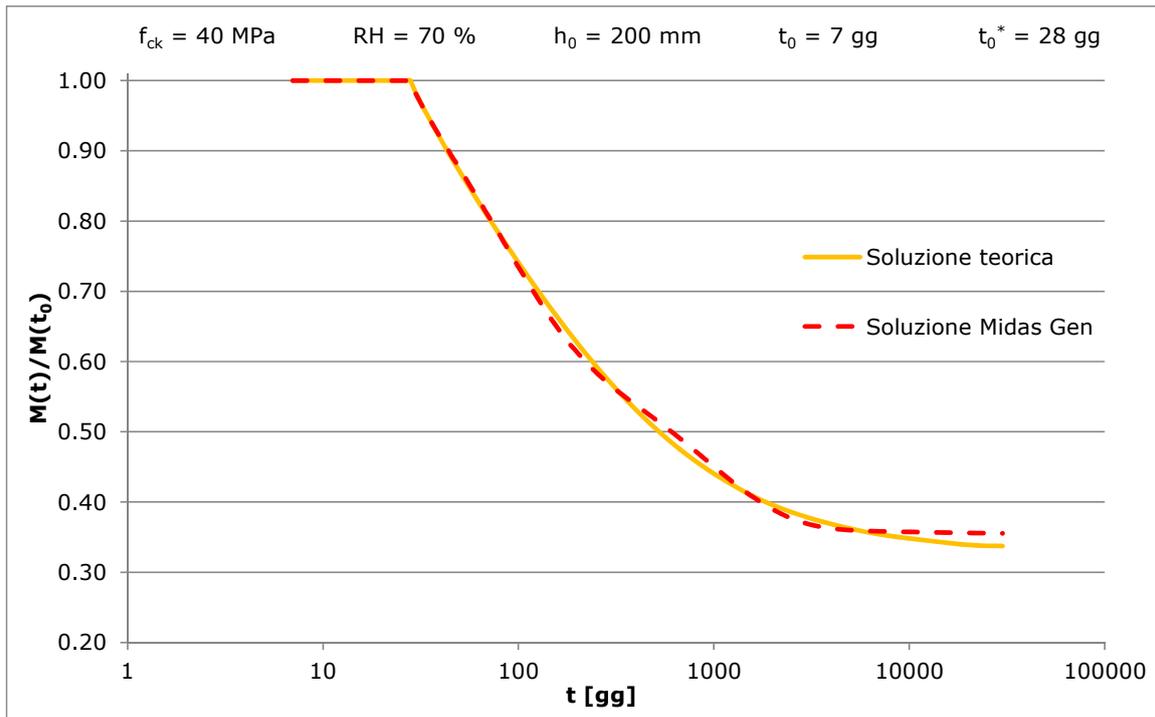


Figura 6.20 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 7$  gg e  $t_0^* = 28$  gg

Si noti che solo in questo particolare caso l'abbassamento di tutti i punti della trave rimane costante. Per generiche posizioni del carico questo non sarebbe verificato, e la deformata varierebbe nel tempo anche dopo l'applicazione del vincolo a causa della viscosità.

Si considera una nuova struttura analoga alla precedente ma con un carico distribuito, pari a 10 kN/m (Figura 6.21).

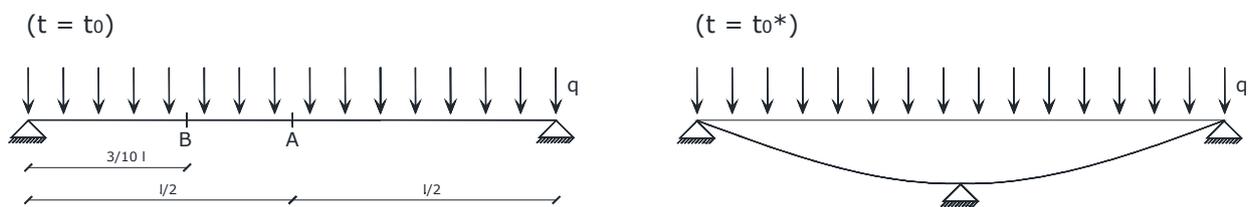
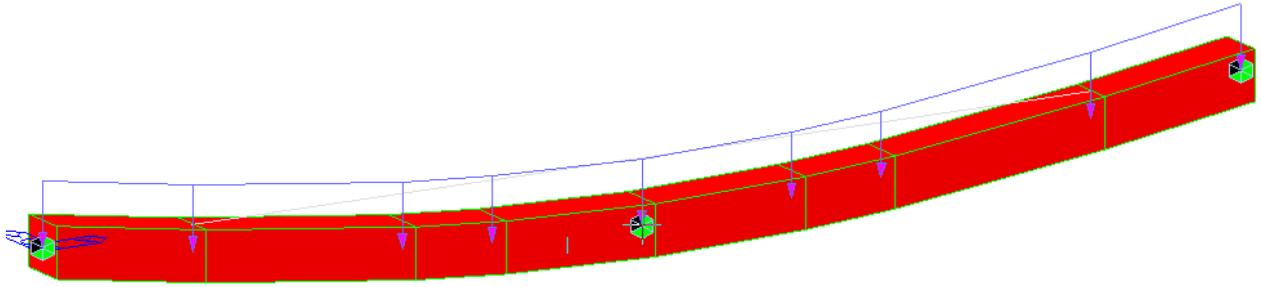
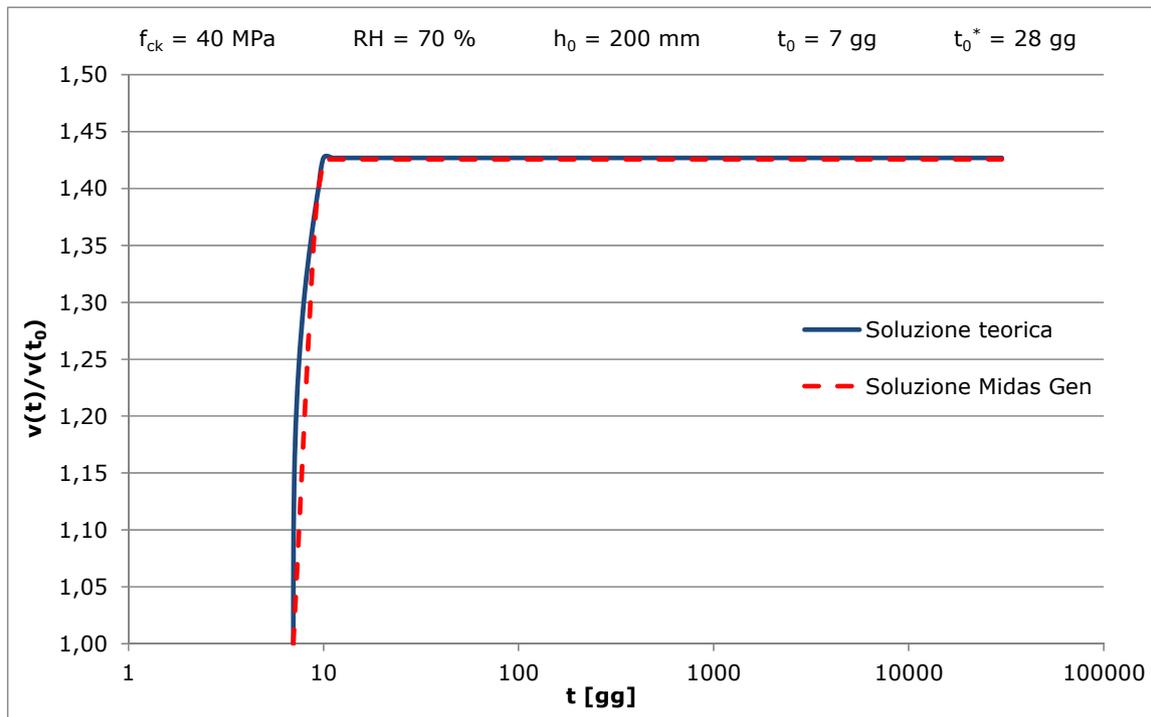


Figura 6.21 – Schemi statici prima e dopo l'applicazione del vincolo



**Figura 6.22 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincolo posticipato**

In questo caso si riportano gli andamenti dell'abbassamento del punto in mezzeria e l'abbassamento di un punto posto a  $(3/10) \cdot l$ , rispettivamente chiamati "A" e "B" (Figura 6.22).



**Figura 6.23 - Andamento nel tempo dello spostamento del punto A**

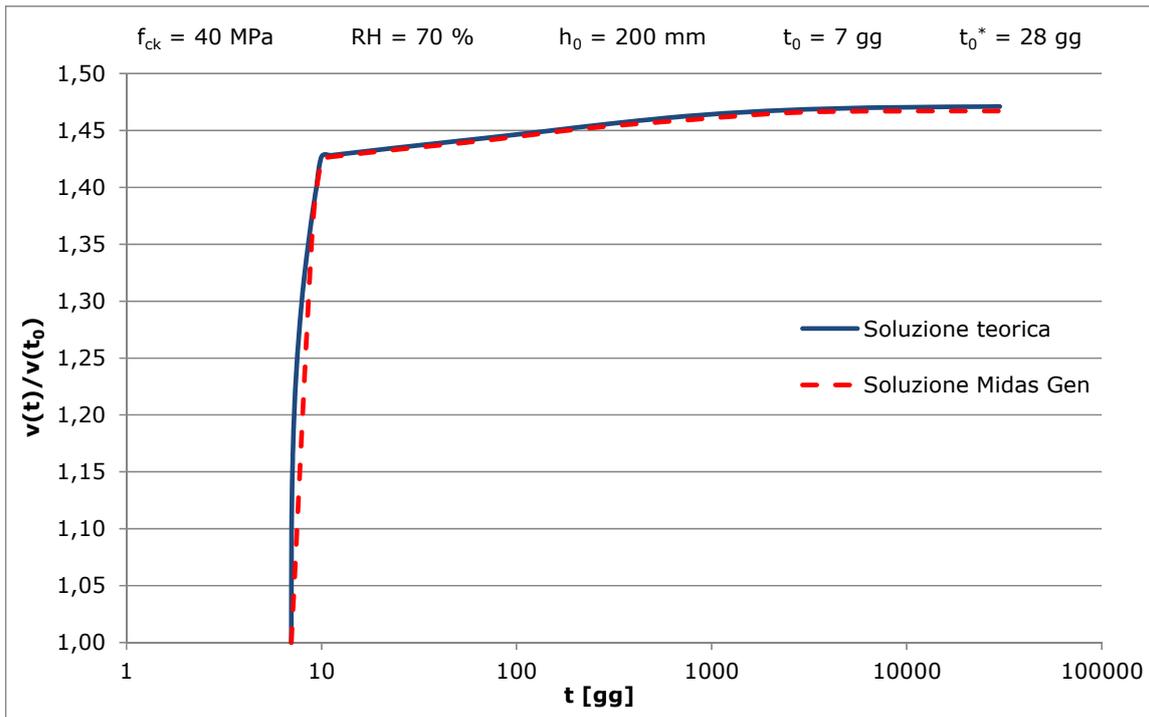


Figura 6.24 - Andamento nel tempo dello spostamento del punto B

A differenza del caso precedente l'abbassamento di un generico punto non si mantiene costante nel tempo a seguito dell'applicazione del vincolo aggiuntivo.

#### 6.4.1.4 Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli rigidi posticipati ad istanti diversi

Si considera una trave semplicemente appoggiata con un carico distribuito applicato a 3 giorni. Successivamente per  $t = 7, 14$  e  $28$  giorni vengono applicati in serie tre vincoli posticipati rispettivamente ad  $l/4, l/2$  e  $3/4 l$  (Figura 6.25). La trave è in calcestruzzo C40/50, la sezione è quadrata (  $40 \times 40$  cm), il calcestruzzo è di tipo normale ( $s=0,25$ ), e l'umidità relativa (RH) è pari a 70%.

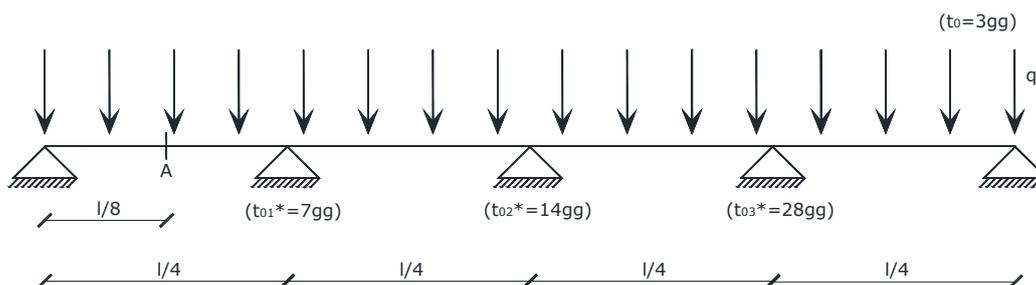
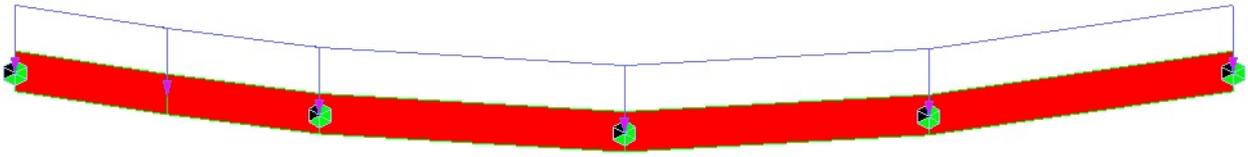
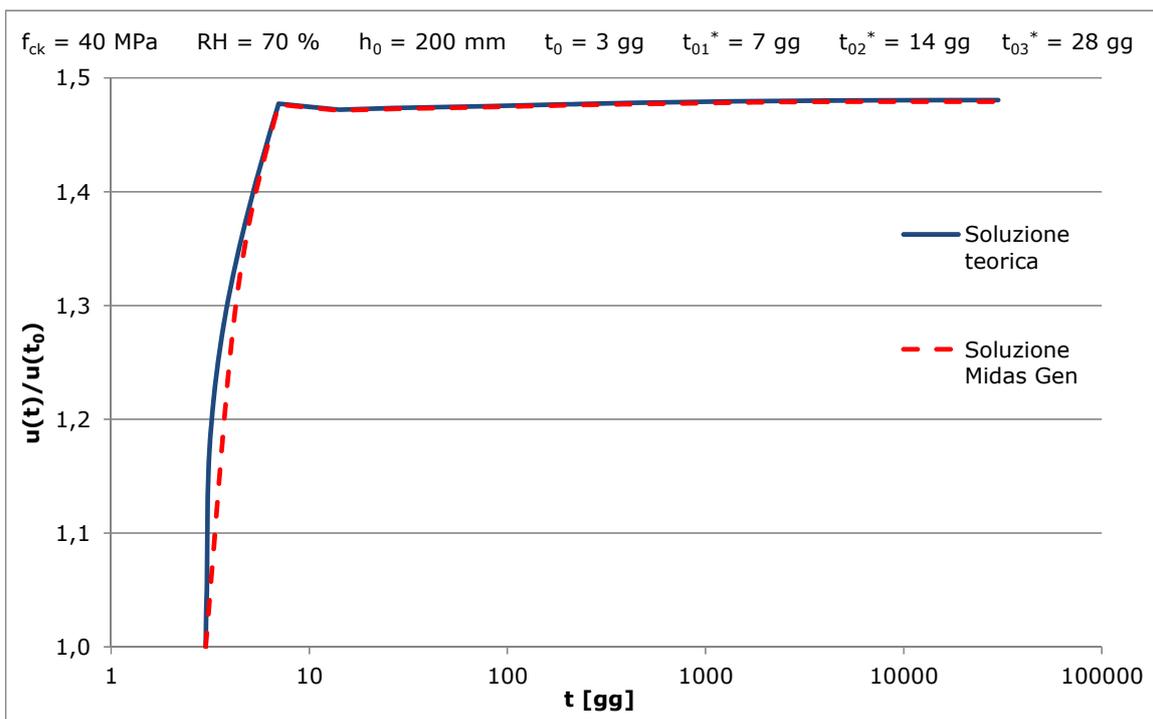


Figura 6.25 - Variazione di schema statico della struttura nel tempo ( $t > t_{03}^*$ )



**Figura 6.26 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincoli posticipati ad istanti diversi**

Di seguito gli andamenti dell'abbassamento e del momento flettente del punto A e i valori delle iperstatiche dei vincoli aggiuntivi.



**Figura 6.27 - Andamento nel tempo dello spostamento del punto A**

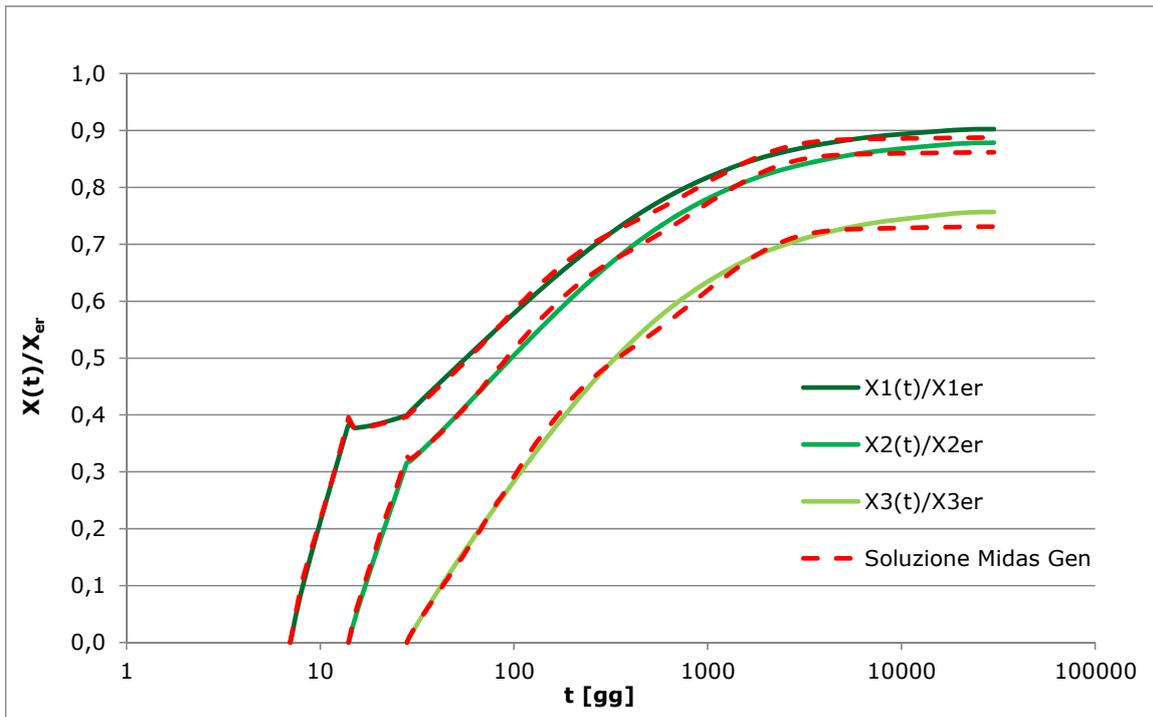


Figura 6.28 - Andamento nel tempo delle tre iperstatiche X1,X2 eX3

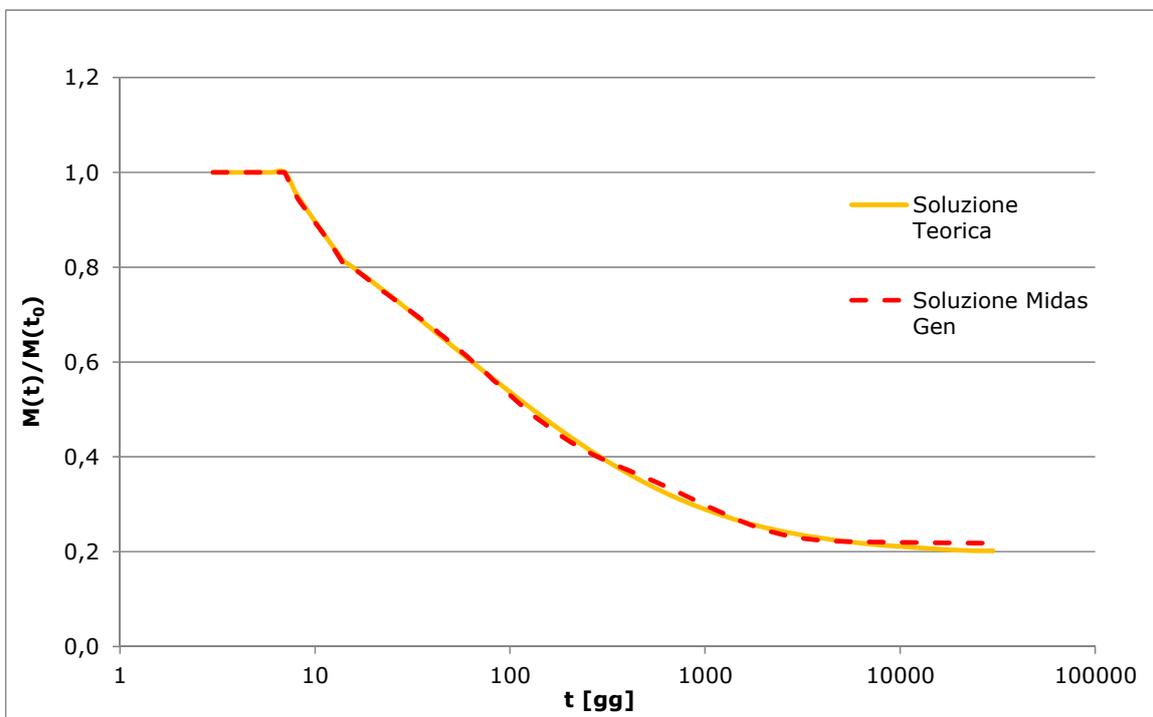
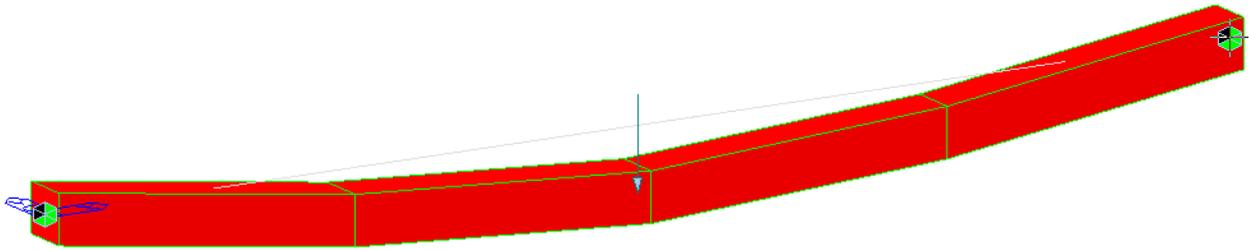


Figura 6.29 - Andamento nel tempo del momento flettente nel punto A

**6.4.1.5 Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni statiche**



**Figura 6.30 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni statiche**

Si considera una trave semplicemente appoggiata come quella di Figura 6.30, con un carico concentrato applicato in mezzzeria a 7 e 28 gg. La trave ha luce di 10 m, in calcestruzzo C40/50 di tipo normale ( $s=0,25$ ), la sezione è quadrata (40x40 cm), e l'umidità relativa (RH) è pari a 70%.

Nella mezzzeria è presente un vincolo elastico assialmente nella direzione di applicazione del carico; la sua rigidezza è pari a 0,8317 ton/mm nel caso di carico applicato a 7 gg e 0,9468 ton/mm nel caso di carico applicato a 28 gg.

I coefficienti di flessibilità della molla valgono dunque:

$$\delta_s(t_0 = 7 \text{ gg}) = \frac{1}{K_s} = 1,2024 \frac{\text{mm}}{\text{ton}}$$

$$\delta_s(t_0 = 28 \text{ gg}) = \frac{1}{K_s} = 1,0562 \frac{\text{mm}}{\text{ton}}$$

Quelli relativi alla trave in cls valgono invece:

$$\delta_c(t_0 = 7 \text{ gg}) = \frac{l^3}{48 \cdot E_c(7 \text{ gg}) \cdot I} = 2,9920 \frac{\text{mm}}{\text{ton}}$$

$$\delta_c(t_0 = 28 \text{ gg}) = \frac{l^3}{48 \cdot E_c(28 \text{ gg}) \cdot I} = 2,6404 \frac{\text{mm}}{\text{ton}}$$

Il valore del fattore di accoppiamento  $\omega$  è uguale in entrambi i casi e pari a:

$$\omega_7 = \omega_{28} = \omega \approx 0,71$$

Si illustrano gli andamenti della freccia in mezzeria rapportata a quella elastica iniziale, il valore dell'iperstatica del vincolo elastico rapportato al suo valore elastico nel caso di vincolo rigido, il valore del momento in mezzeria rapportato a quello elastico iniziale.

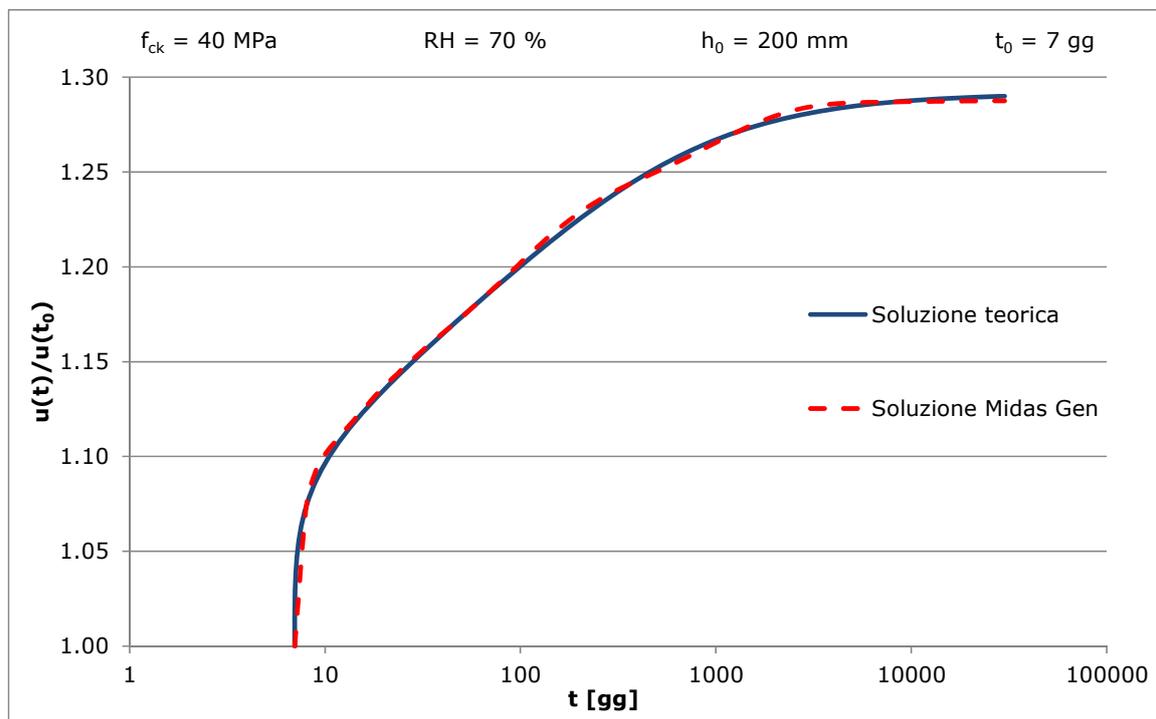


Figura 6.31 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 7$  giorni

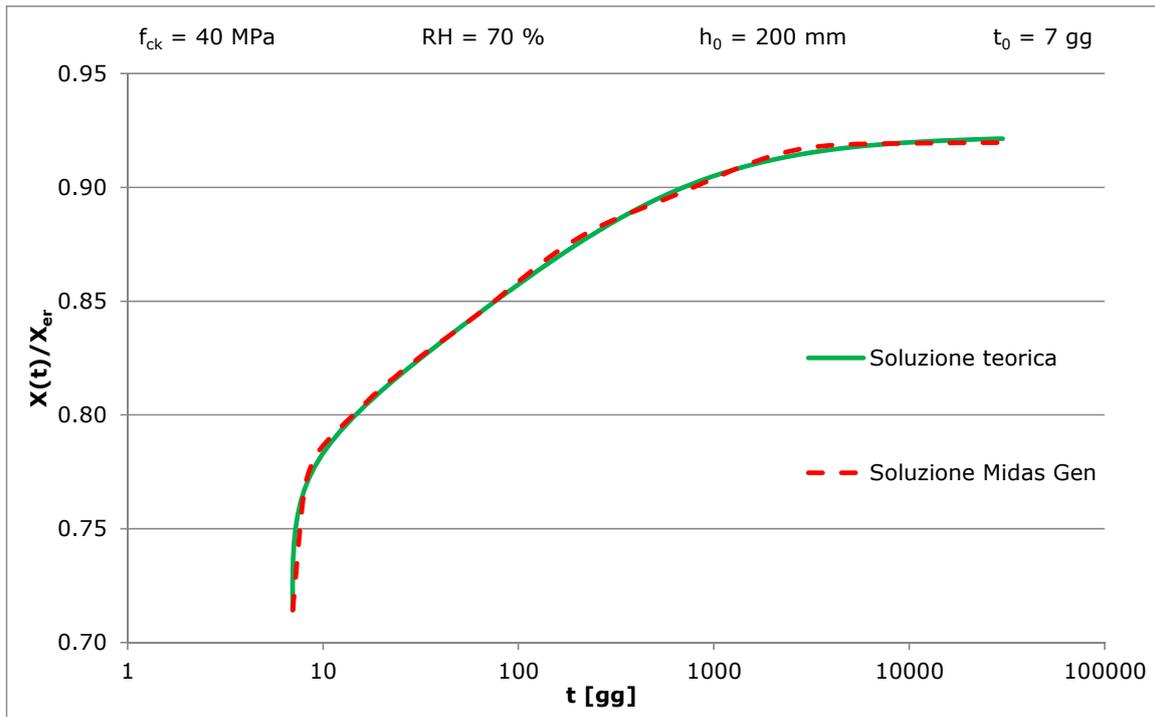


Figura 6.32 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  per  $t_0 = 7$  giorni

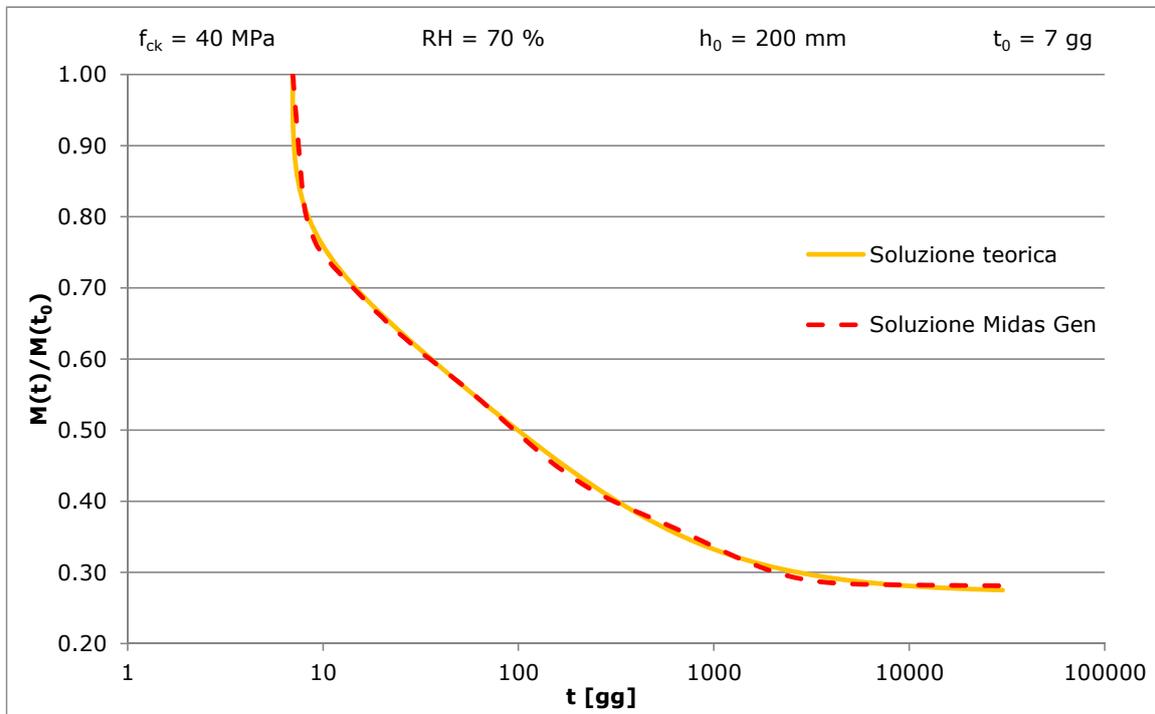


Figura 6.33 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 7$  giorni

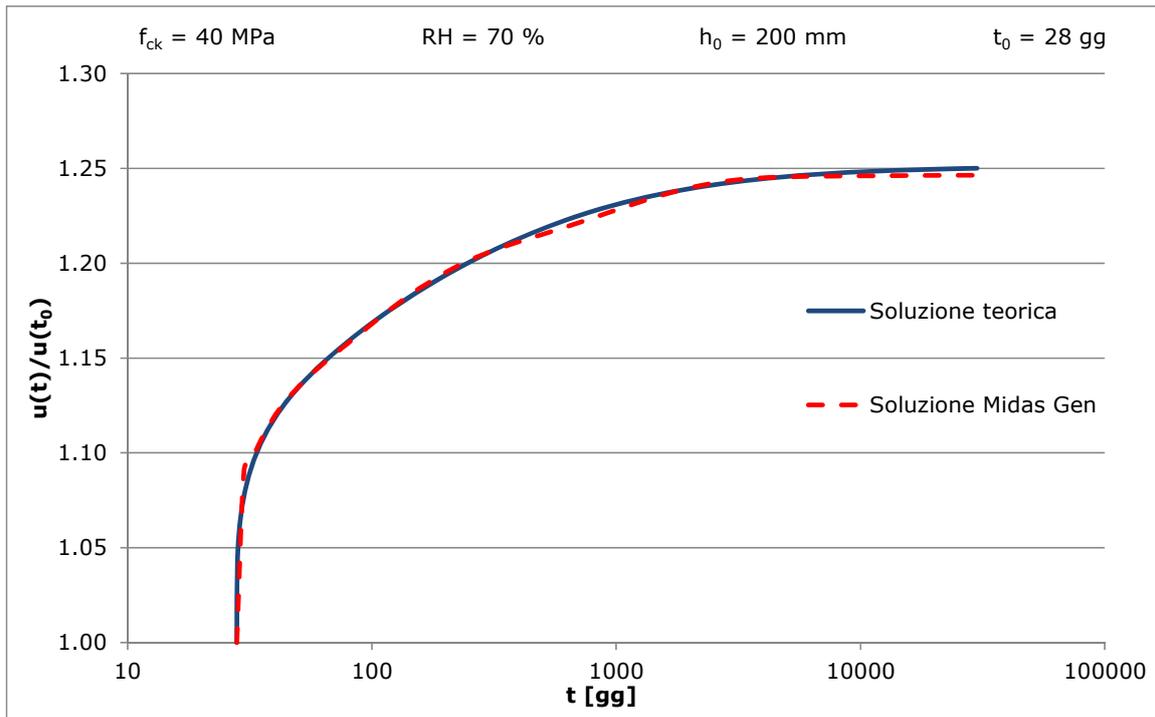


Figura 6.34 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 28$  giorni

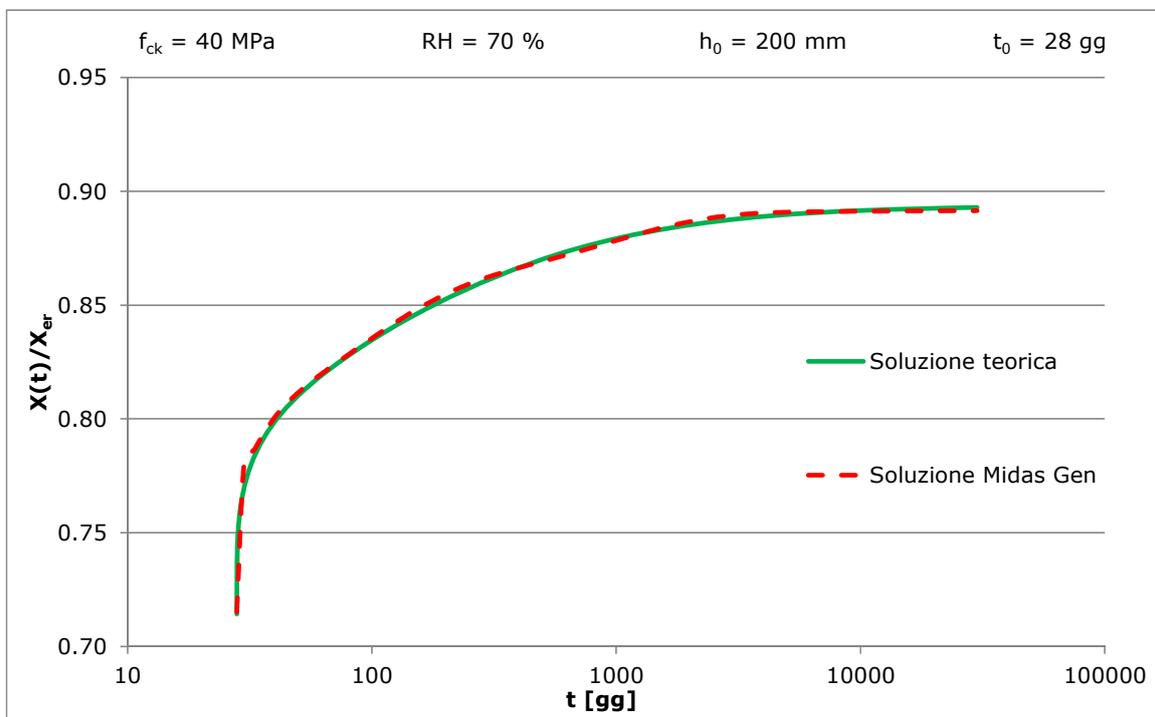


Figura 6.35 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  per  $t_0 = 28$  giorni

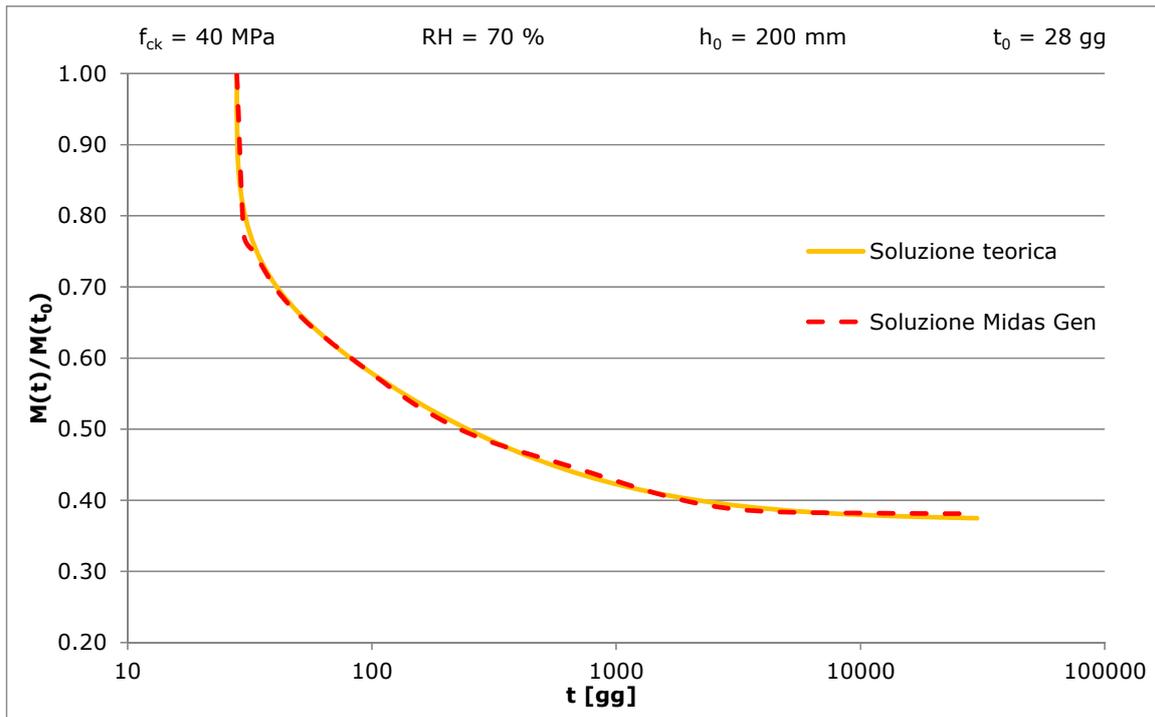


Figura 6.36 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 28$  giorni

#### 6.4.1.6 Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni geometriche

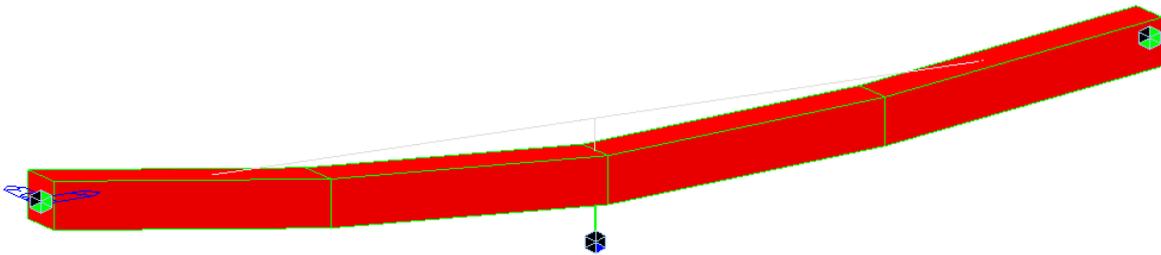


Figura 6.37 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni geometriche

Si considera una trave su tre appoggiata come quella di Figura 6.37. Si applica al vincolo elastico posto ad  $l/2$  un cedimento impresso  $g$ . Le rigidezze delle molle e le caratteristiche della trave in calcestruzzo sono le stesse del caso precedente (paragrafo 6.4.1.5).

Di seguito gli andamenti della freccia in mezzeria rapportata a quella elastica iniziale, il valore dell'iperstatica rapportato al suo valore elastico nel caso di vincolo rigido, il valore del momento in mezzeria rapportato a quello elastico iniziale.

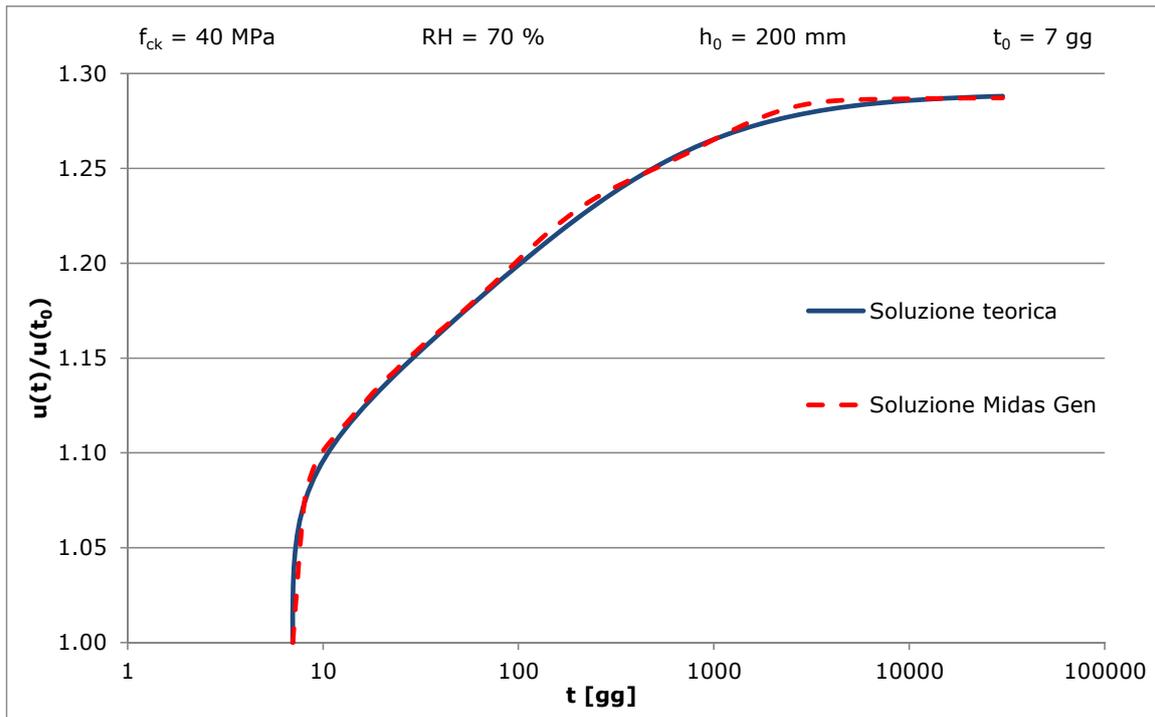


Figura 6.38 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 7$  giorni

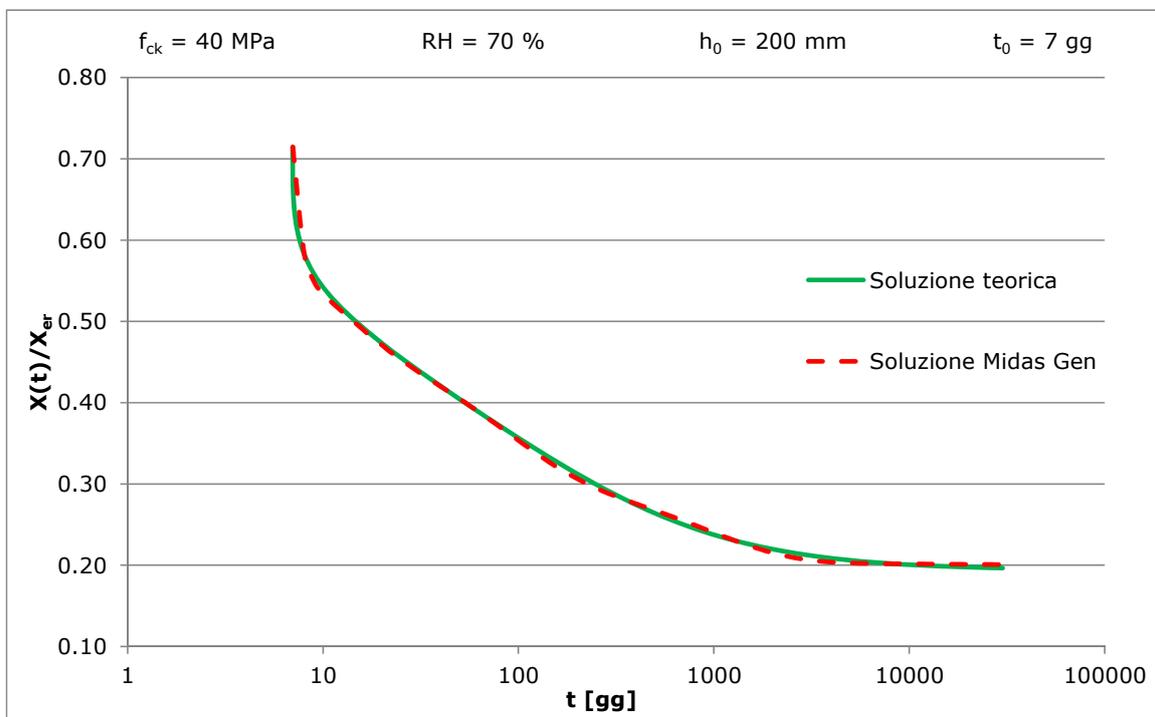


Figura 6.39 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  per  $t_0 = 7$  giorni

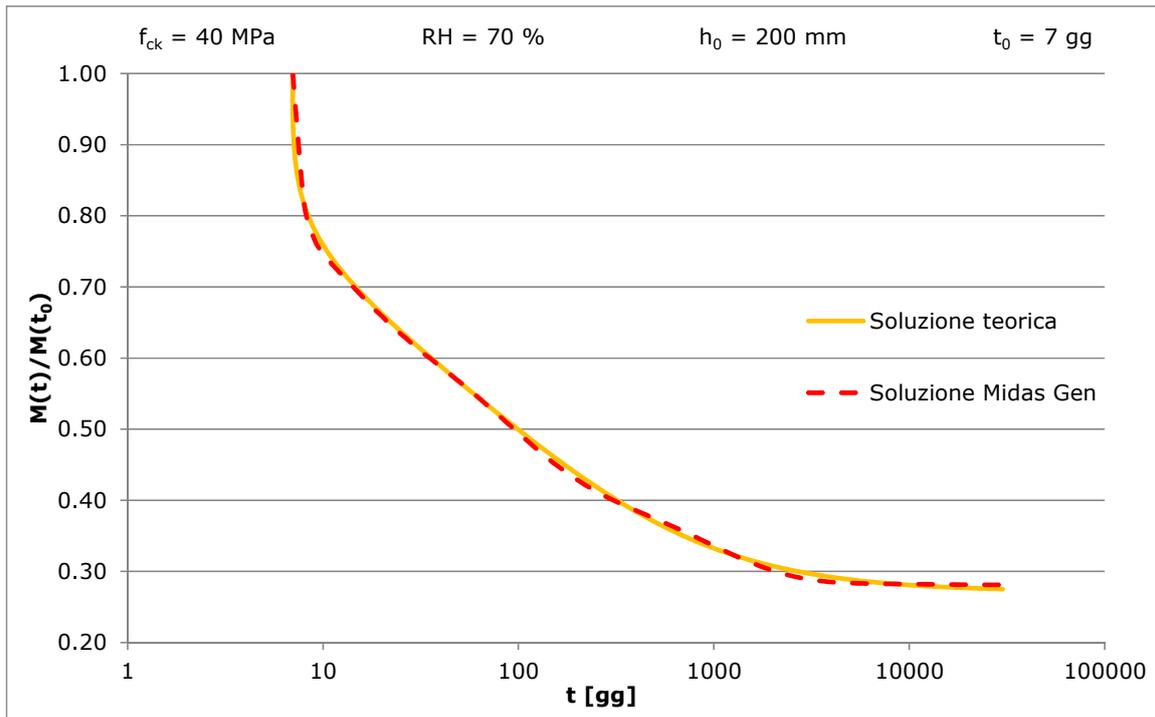


Figura 6.40 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 7$  giorni

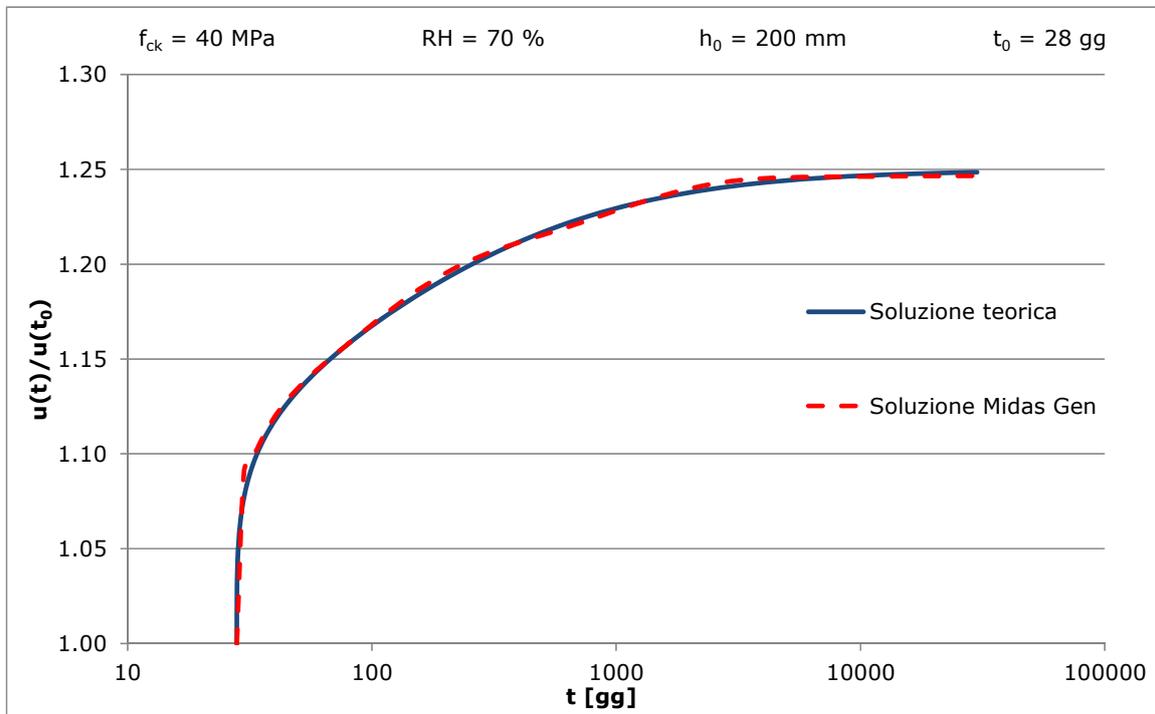


Figura 6.41 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 28$  giorni

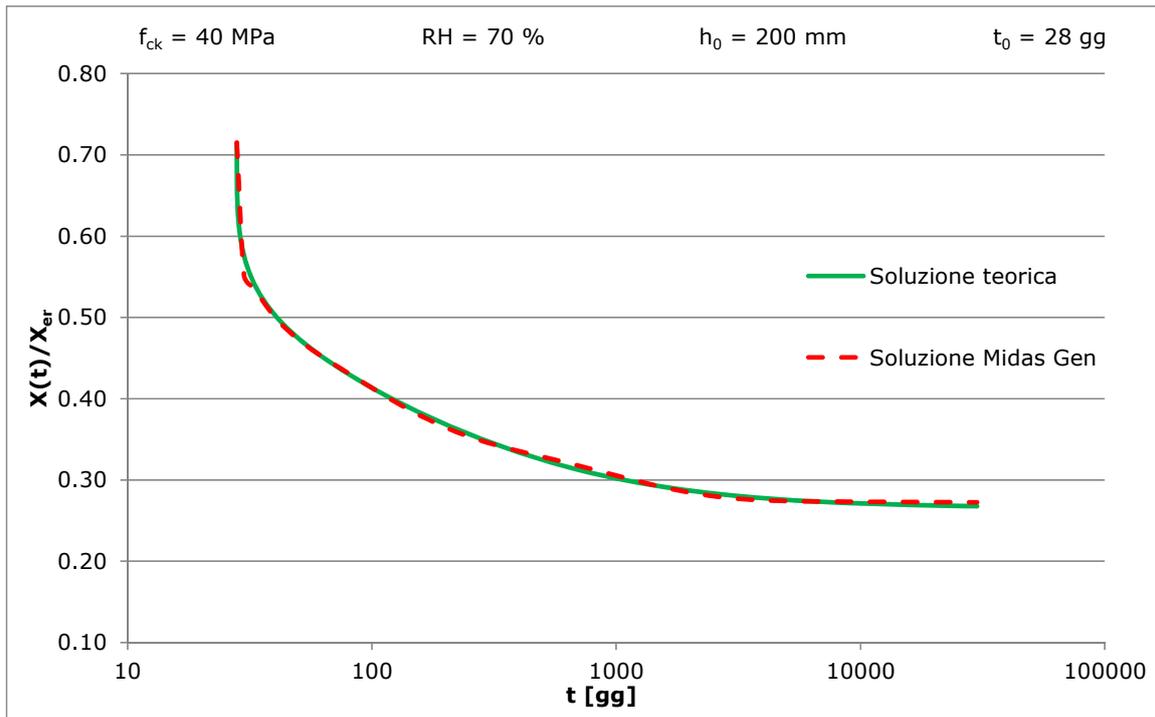


Figura 6.42 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  per  $t_0 = 28$  giorni

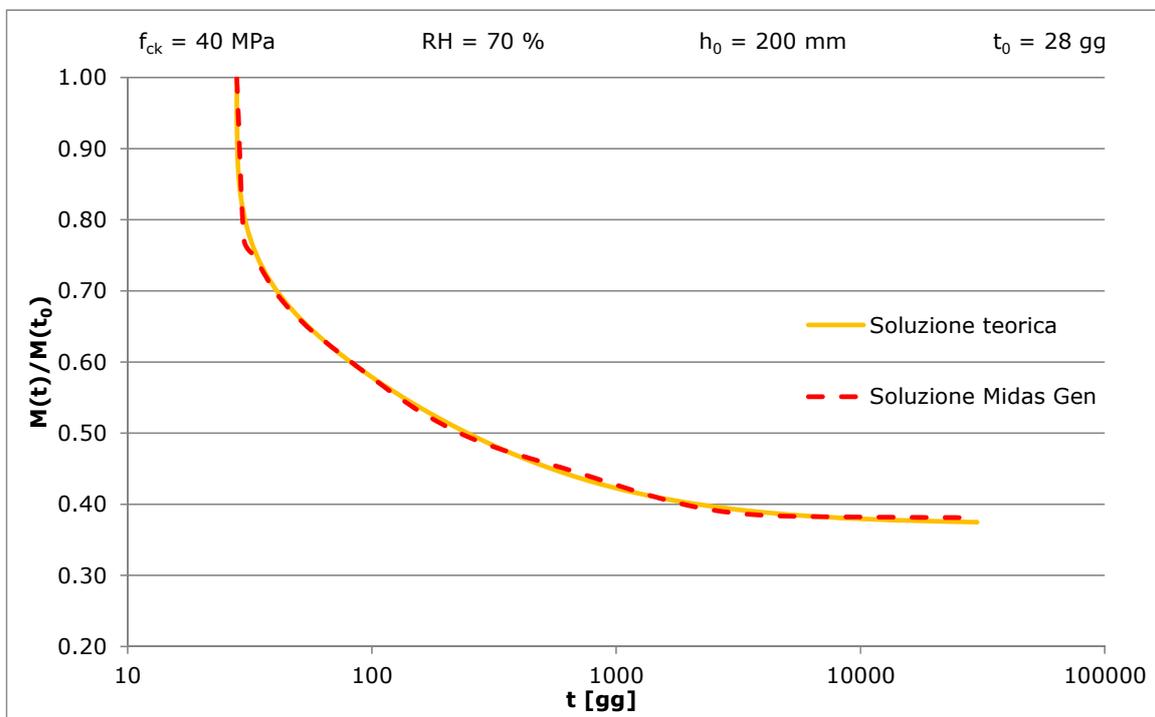
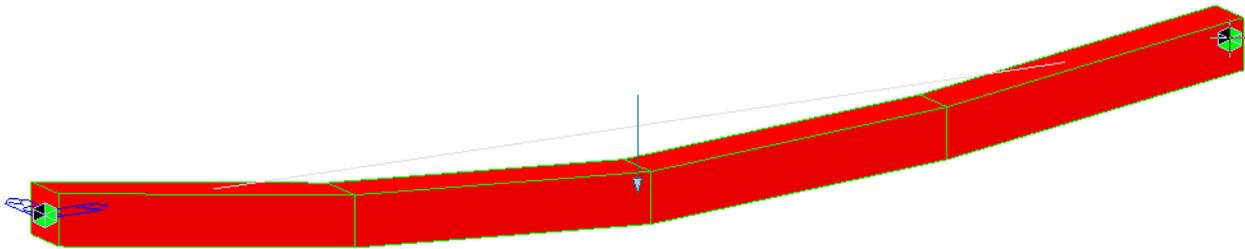


Figura 6.43 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 28$  giorni

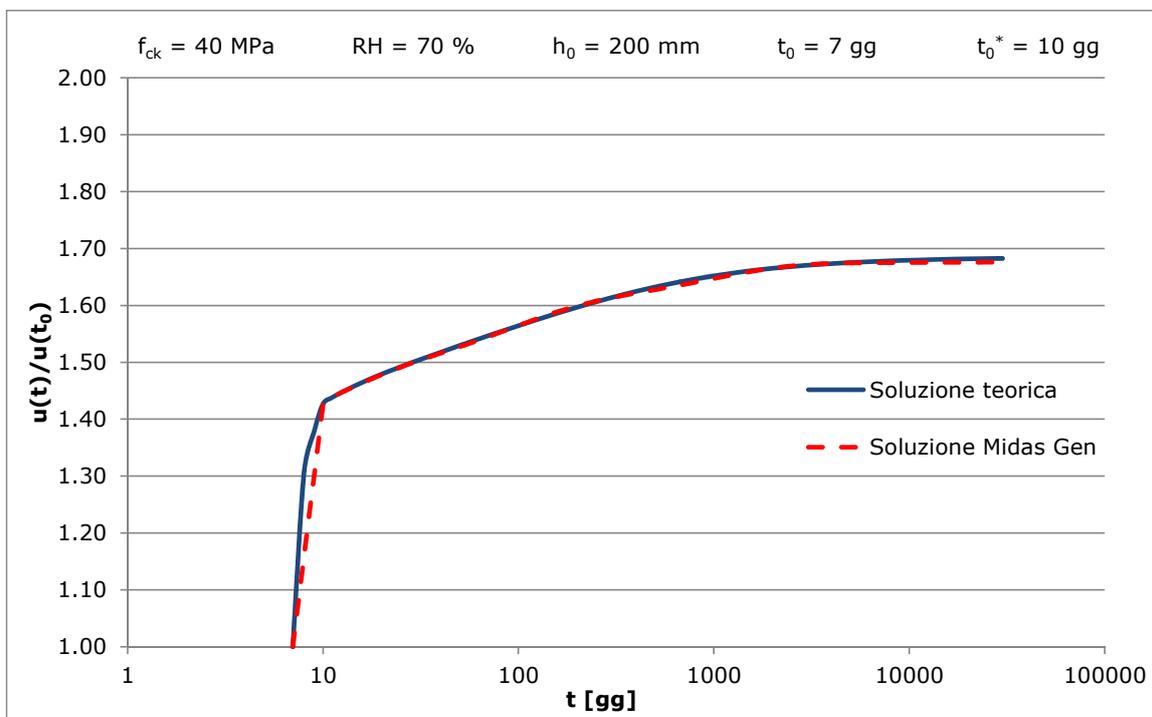
**6.4.1.7 Strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici posticipati**

Si considera la struttura in Figura 6.44; diversamente dalla struttura del paragrafo 6.4.1.5 si inserisce il vincolo elastico ai giorni 10 e 28. Le rigidezze delle molle e le caratteristiche della trave rimangono invece invariate.



**Figura 6.44 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni statiche**

Si riportano di seguito gli andamenti della freccia in mezzzeria rapportata a quella elastica iniziale, il valore dell'iperstatica del vincolo aggiuntivo rapportato al suo valore elastico nel caso di vincolo rigido preesistente, il valore del momento in mezzzeria rapportato a quello elastico iniziale.



**Figura 6.45 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 7$  gg e  $t_0^* = 10$  gg**

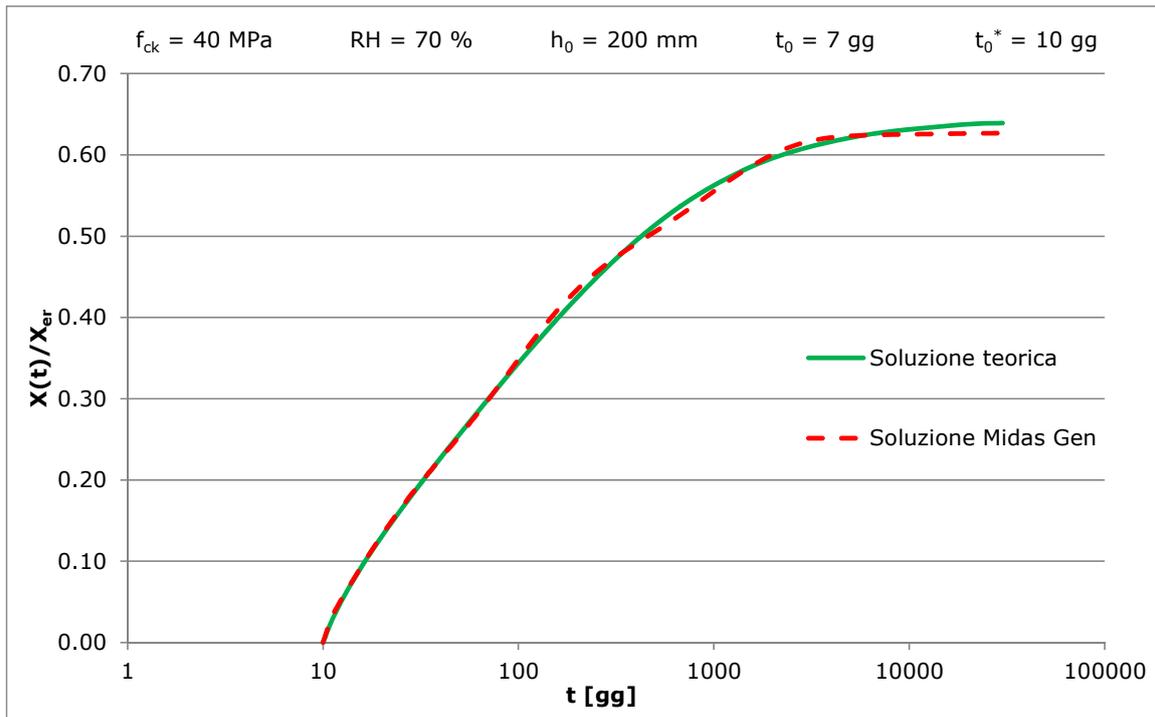


Figura 6.46 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  e  $t_0^* = 10 \text{ gg}$

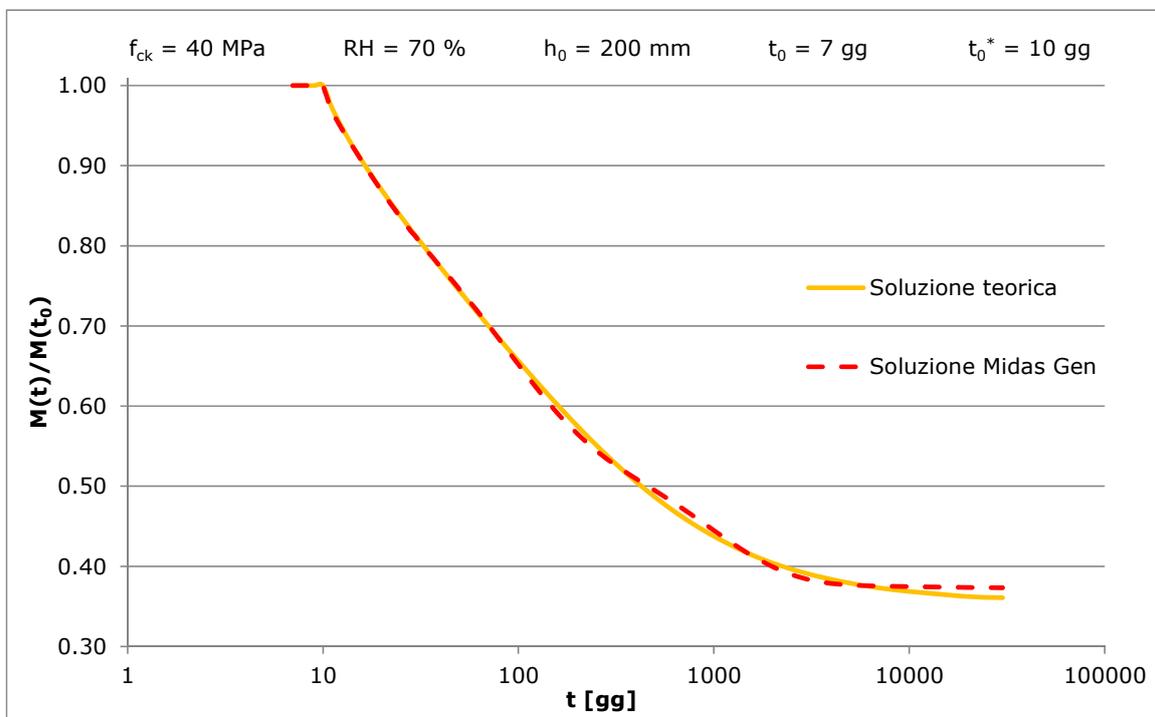


Figura 6.47 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  e  $t_0^* = 10 \text{ gg}$

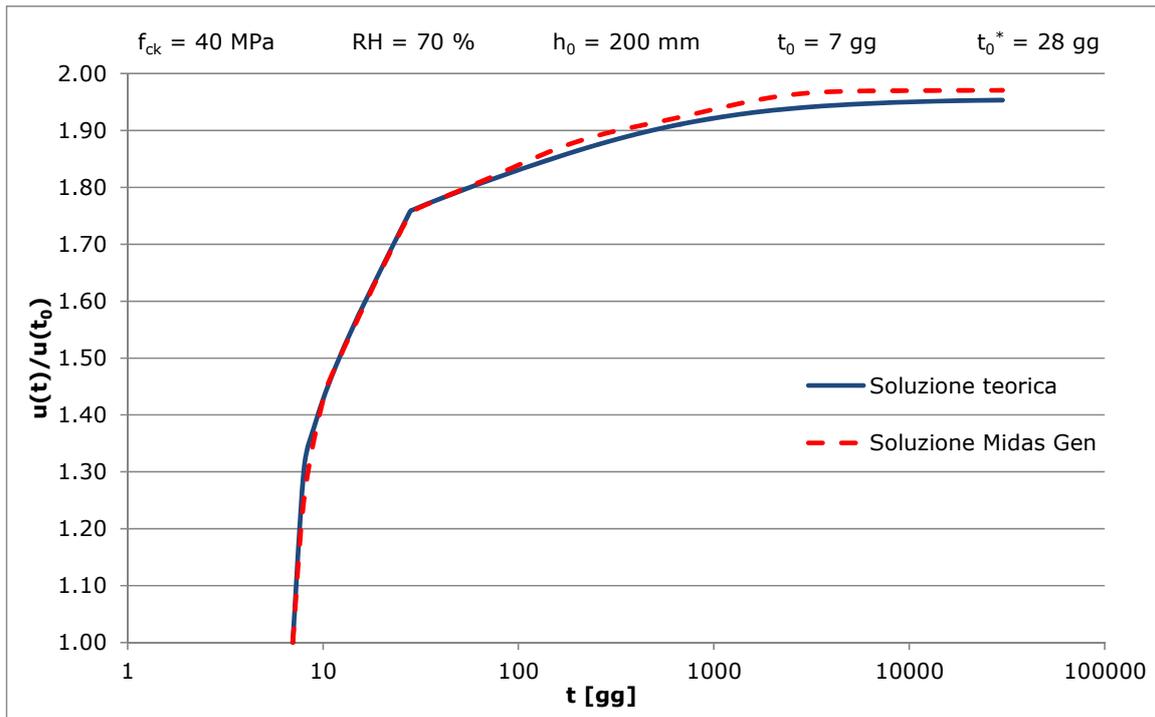


Figura 6.48 - Andamento nel tempo di  $u(t)/u(t_0)$  per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  e  $t_0^* = 28 \text{ gg}$

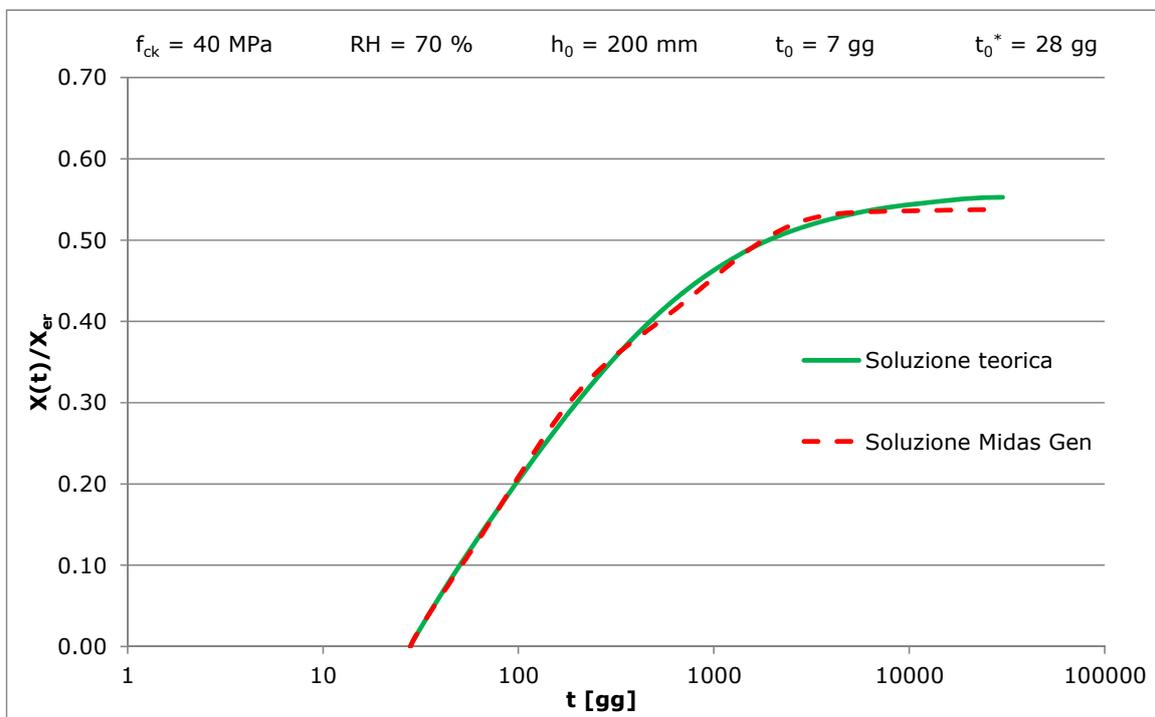


Figura 6.49 - Andamento nel tempo di  $X(t)/X_{er}$  per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  e  $t_0^* = 28 \text{ gg}$

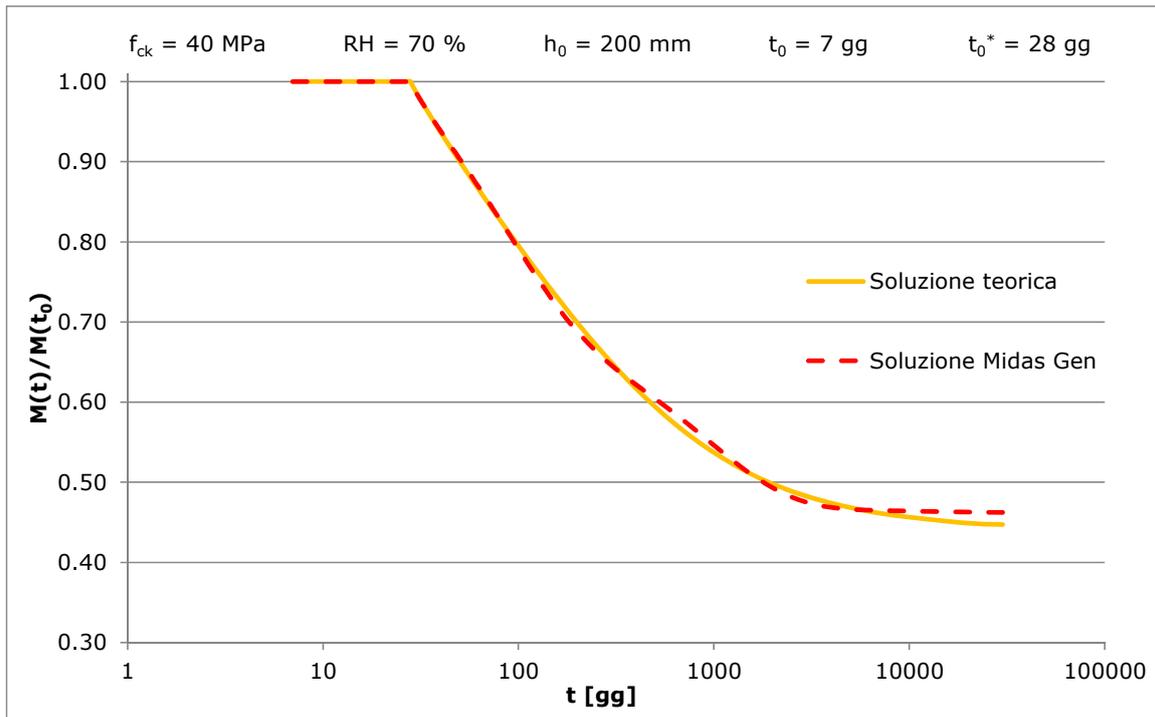


Figura 6.50 - Andamento nel tempo di  $M(t)/M(t_0)$  per  $t_0 = 7 \text{ gg}$  e  $t_0^* = 28 \text{ gg}$

#### 6.4.1.8 Stima degli errori

Si riportano di seguito gli errori massimi (a tempo infinito) introdotti dalle soluzioni ottenute mediante il software Midas Gen.

Le grandezze comparate sono:

- Reazioni iperstatiche;
- Momenti flettenti;
- spostamenti

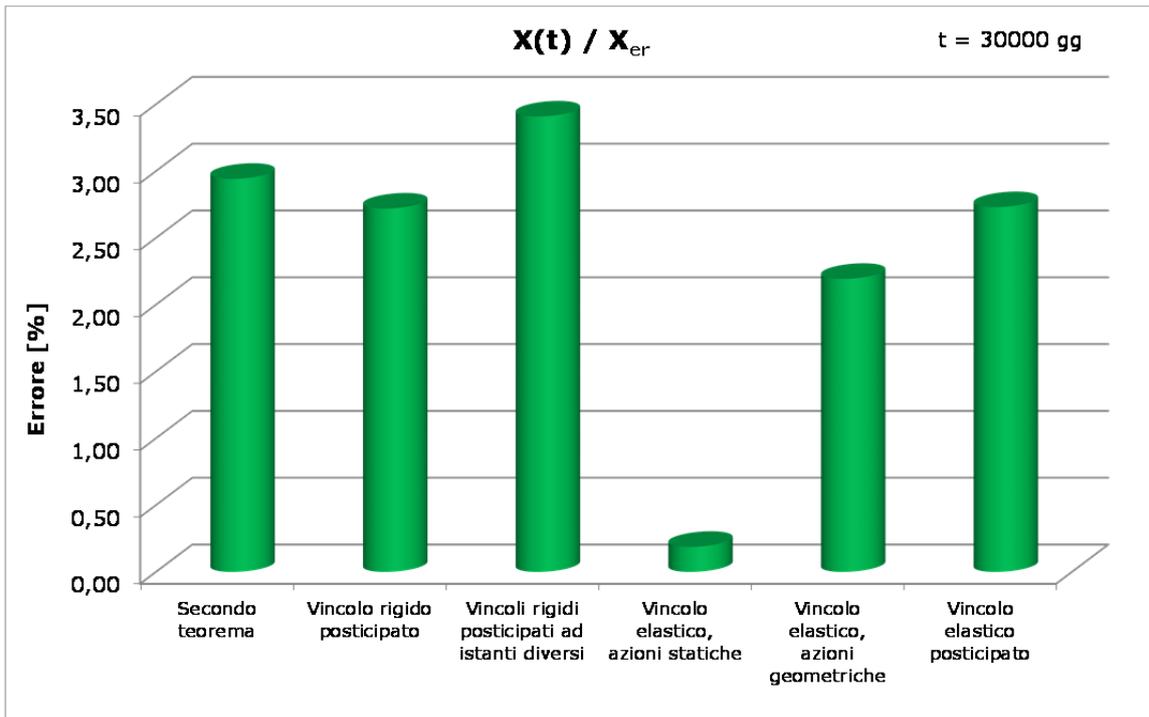


Figura 6.51 - Errori sulle reazioni iperstatiche

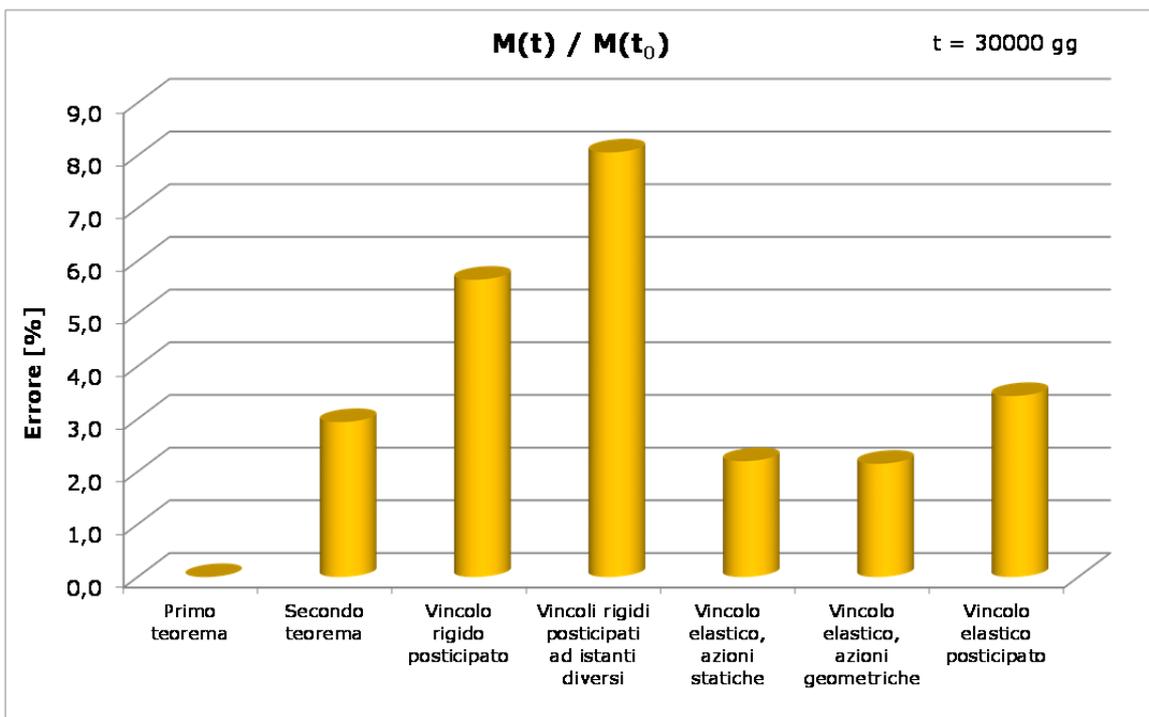


Figura 6.52 - Errori sui momenti flettenti

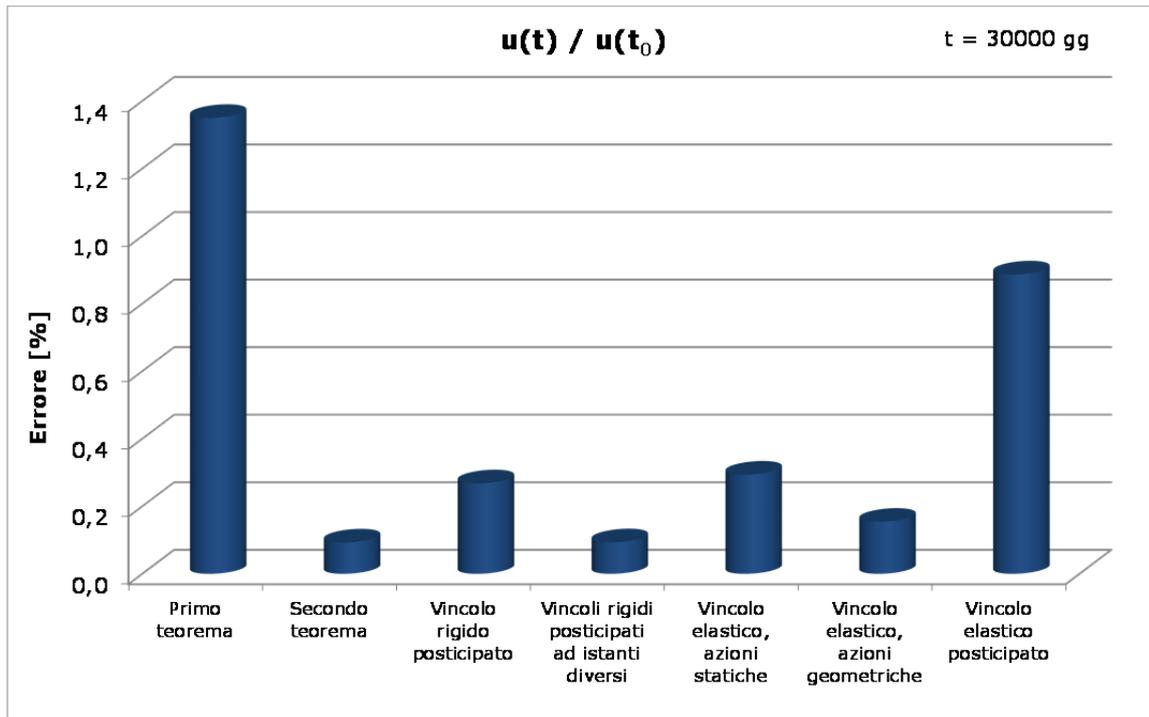


Figura 6.53 - errori sugli spostamenti

## 6.4.2 ELEMENTI SOGGETTI A COMPRESSIONE

### 6.4.2.1 Struttura in solo calcestruzzo

Si considera la struttura in Figura 6.54 le cui caratteristiche sono elencate nella tabella seguente:

	Asta 1	Asta 2	Asta 3	Asta 4	Asta 5
<b>d [cm]</b>	140	120	100	80	60
<b>l [m]</b>	37	37	37	37	37
<b>h<sub>0</sub> [mm]</b>	700	600	500	400	300
<b>f<sub>ck</sub> [MPa]</b>	60	60	50	50	50
<b>P [t]</b>	500	500	500	500	500
<b>t [gg]</b>	0	100	100	300	400
<b>T [gg]</b>	100	200	300	400	500
<b>RH [%]</b>	70				

Tabella 5 - Dati struttura

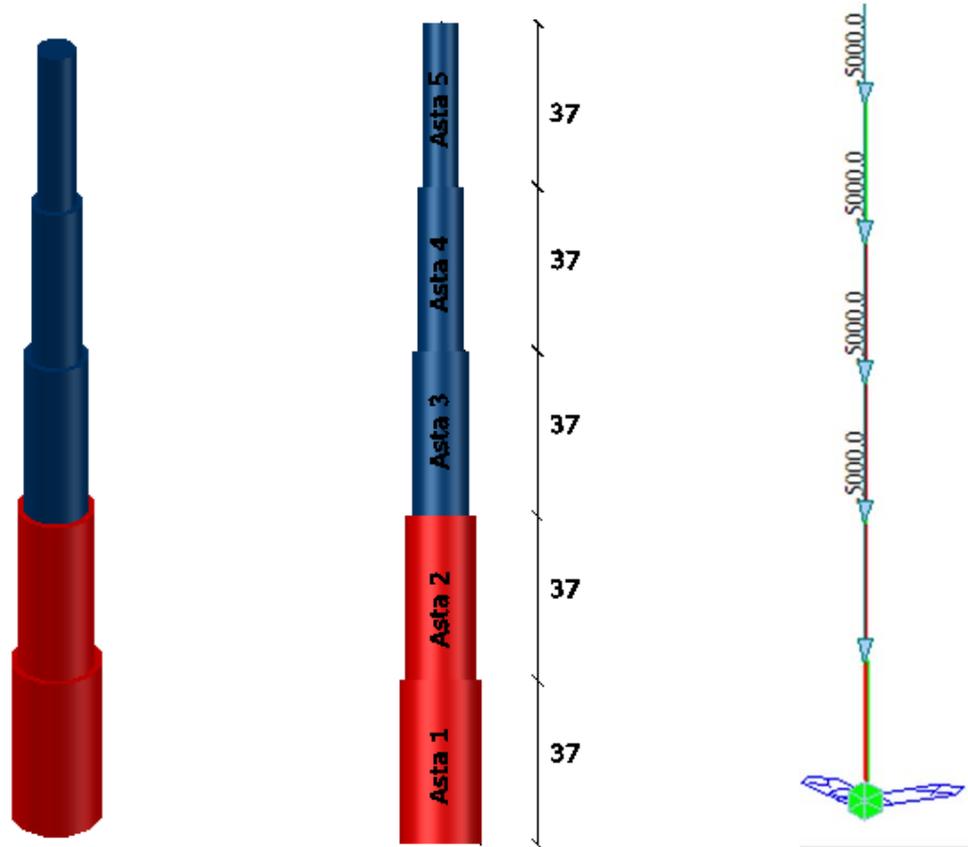


Figura 6.54 - Struttura in esame

Di seguito gli accorciamenti nel tempo delle varie aste ed il column shortening per  $t = 500, 2000$  e  $30000$  giorni.

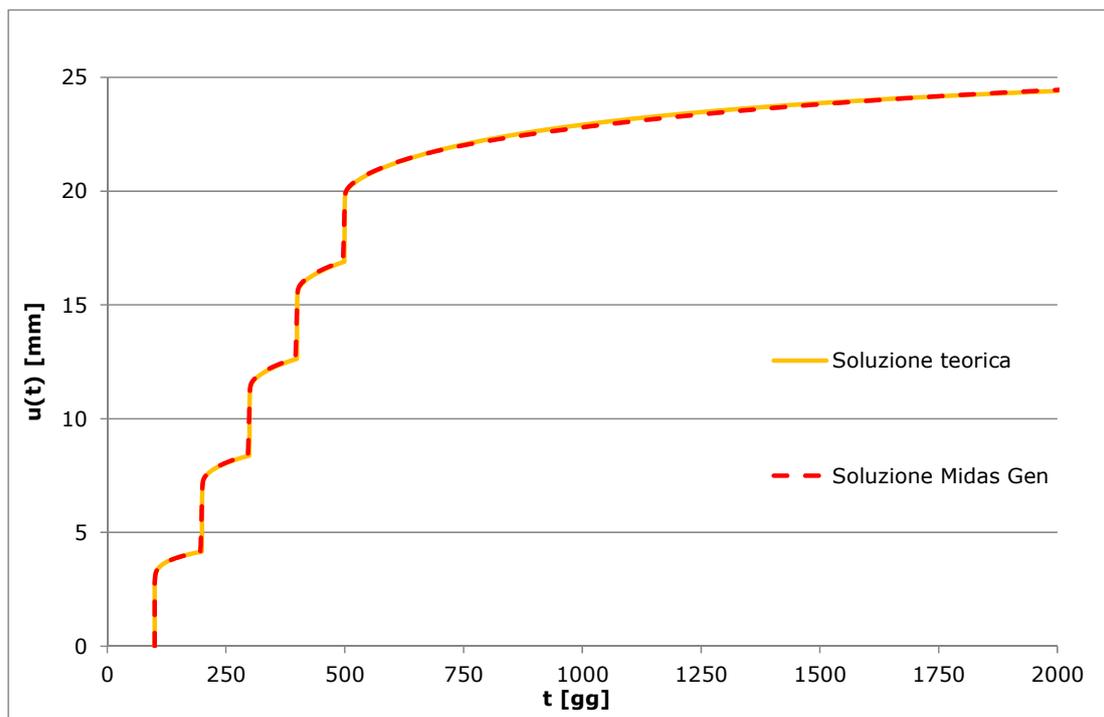


Figura 6.55 - Accorciamento in sommità della prima asta

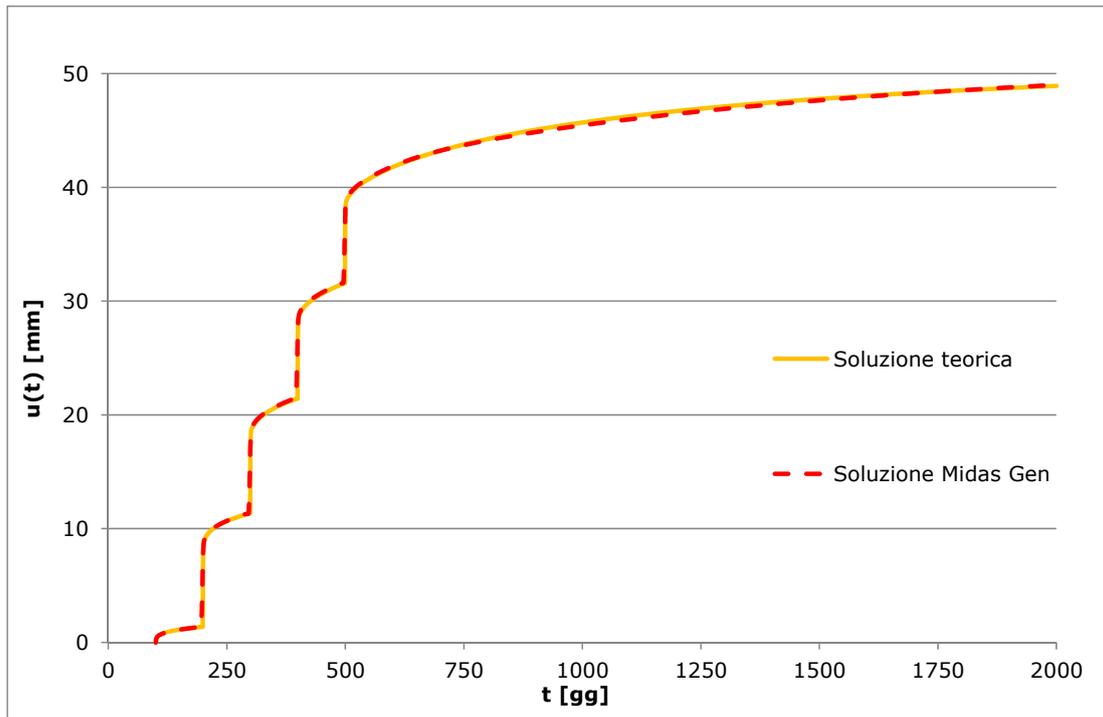


Figura 6.56 - Accorciamento in sommità della seconda asta

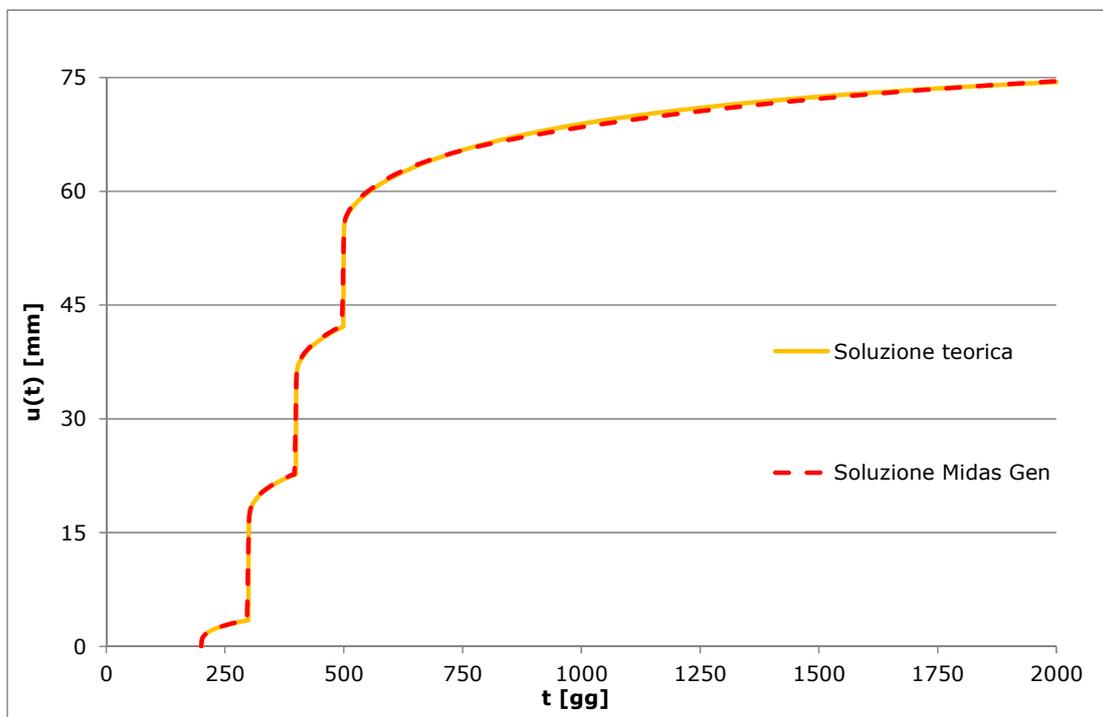


Figura 6.57 - Accorciamento in sommità della terza asta

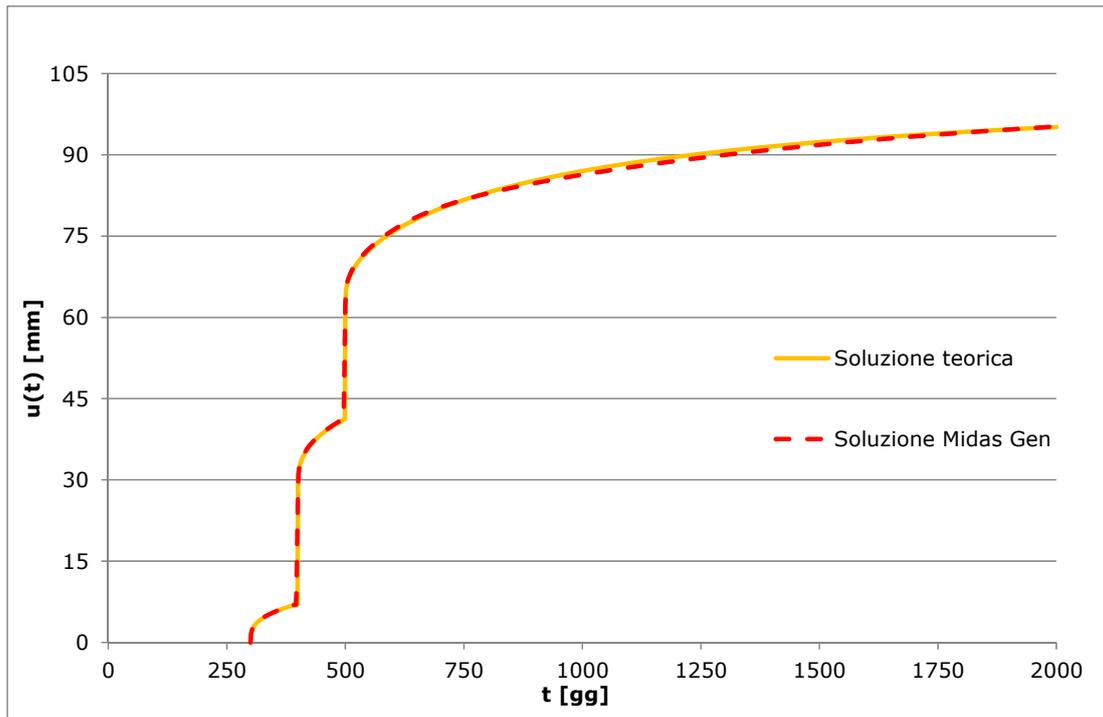


Figura 6.58 - Accorciamento in sommità della quarta asta

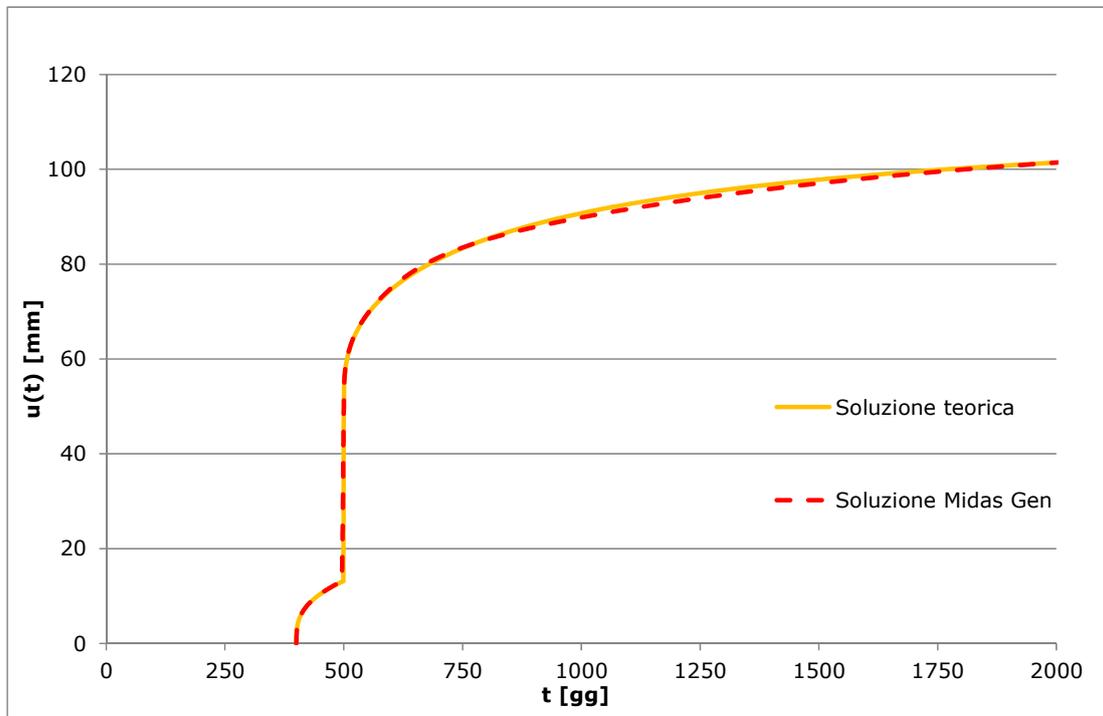


Figura 6.59 - Accorciamento in sommità della quinta asta

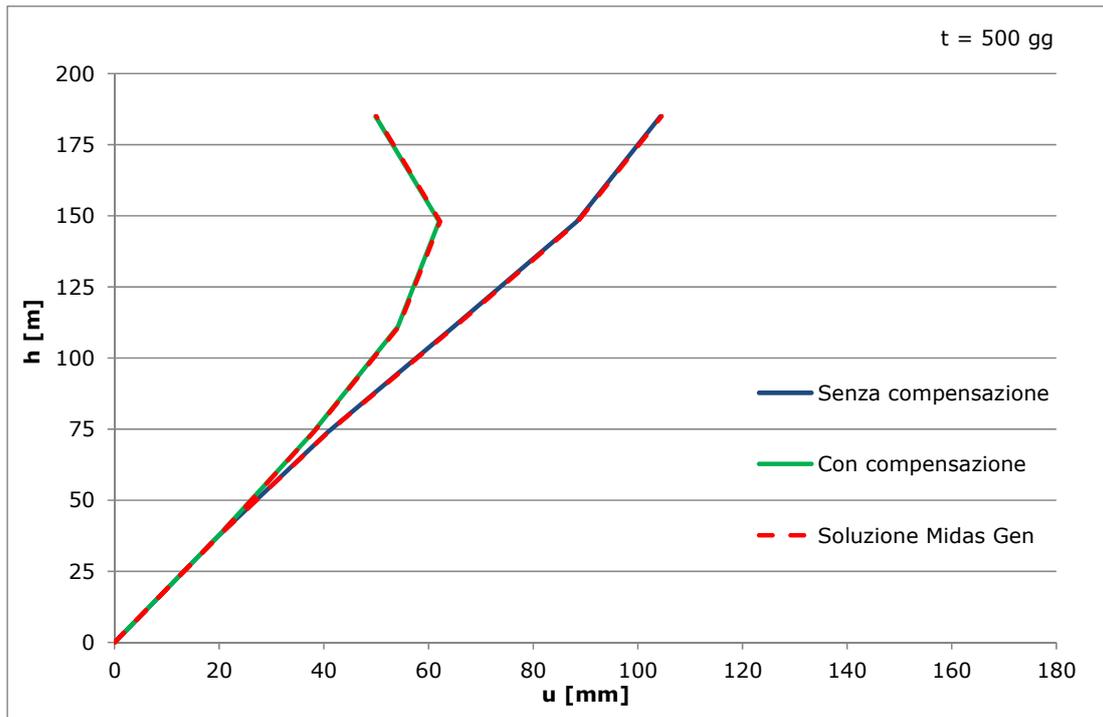


Figura 6.60 - Column shortening t = 500 gg

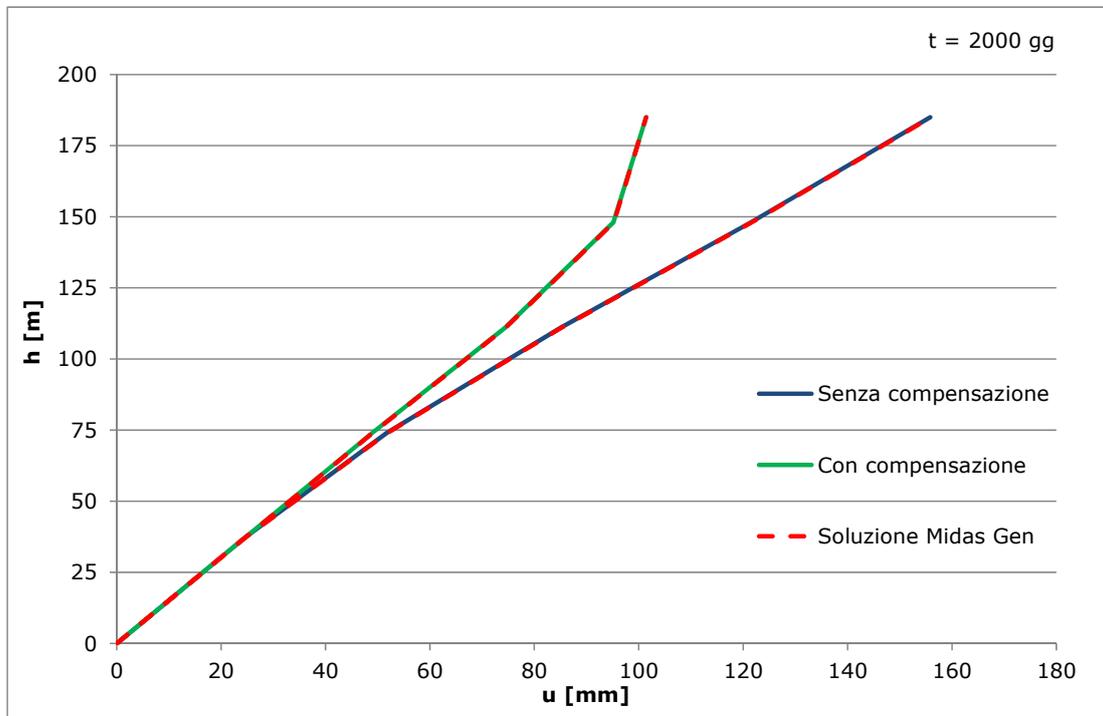


Figura 6.61 - Column shortening t = 2000 gg

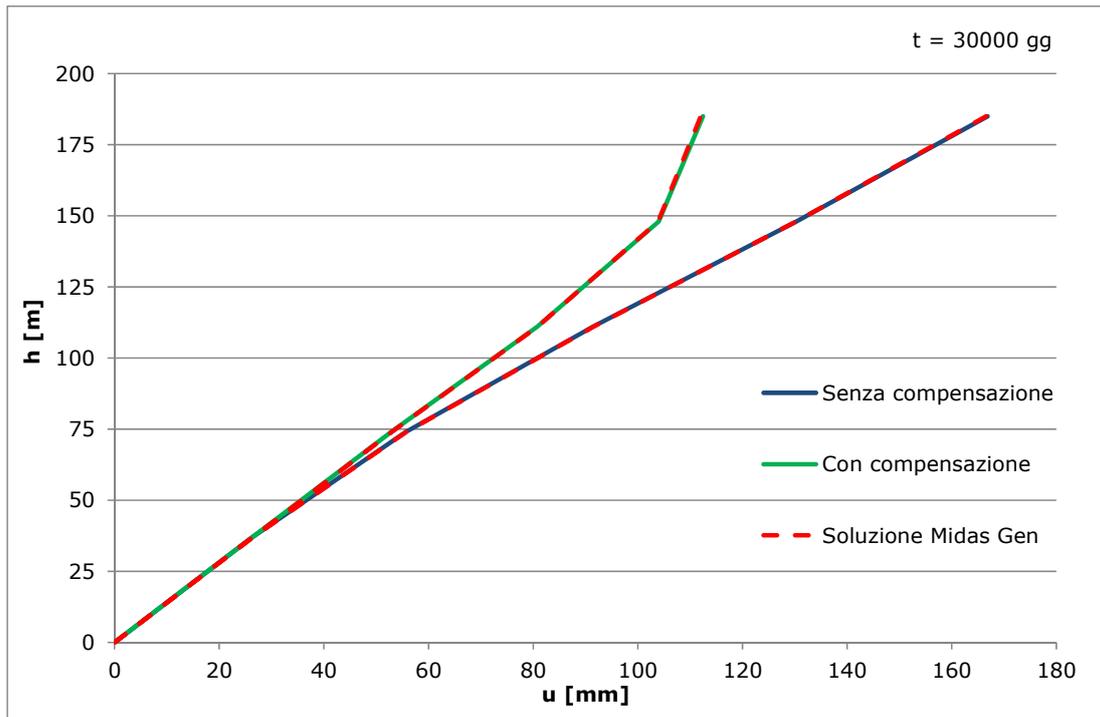


Figura 6.62 - Column shortening  $t = 30000$  gg

#### 6.4.2.2 Struttura in calcestruzzo armato

Si considera una struttura analoga a quella dell'esempio precedente ma armata con un rapporto d'armatura pari al 3%.

Si illustrano gli accorciamenti e la ripartizione dei carichi nel tempo per ciascuna asta ed il column shortening per  $t = 500, 2000$  e  $30000$  giorni.

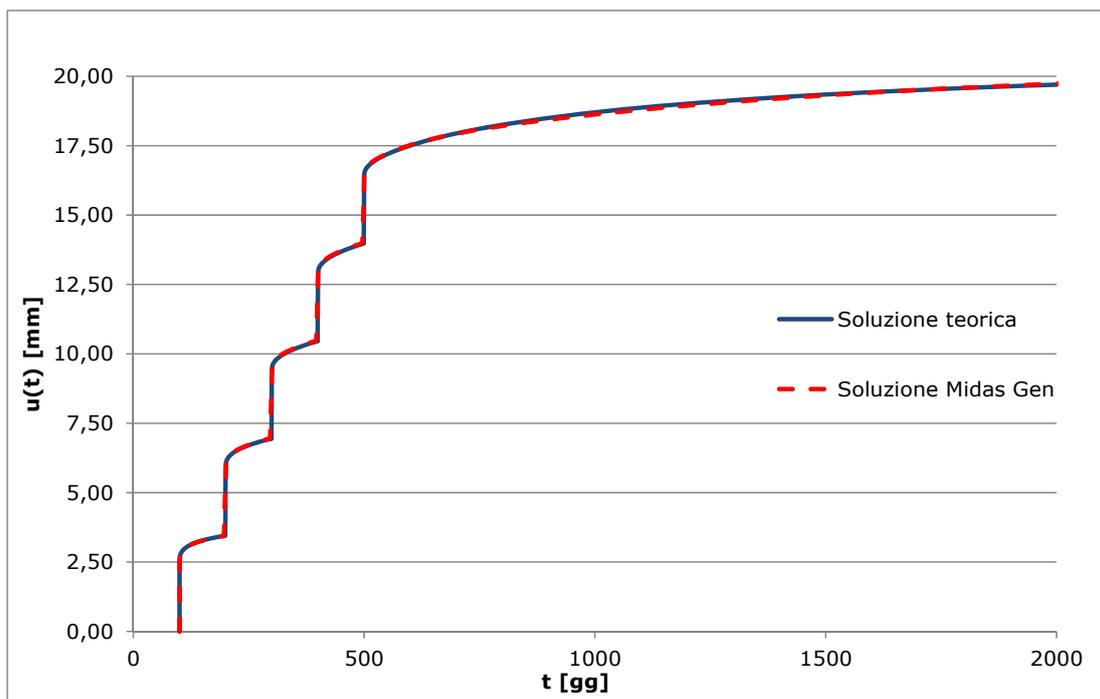


Figura 6.63 - Accorciamento in sommità della prima asta

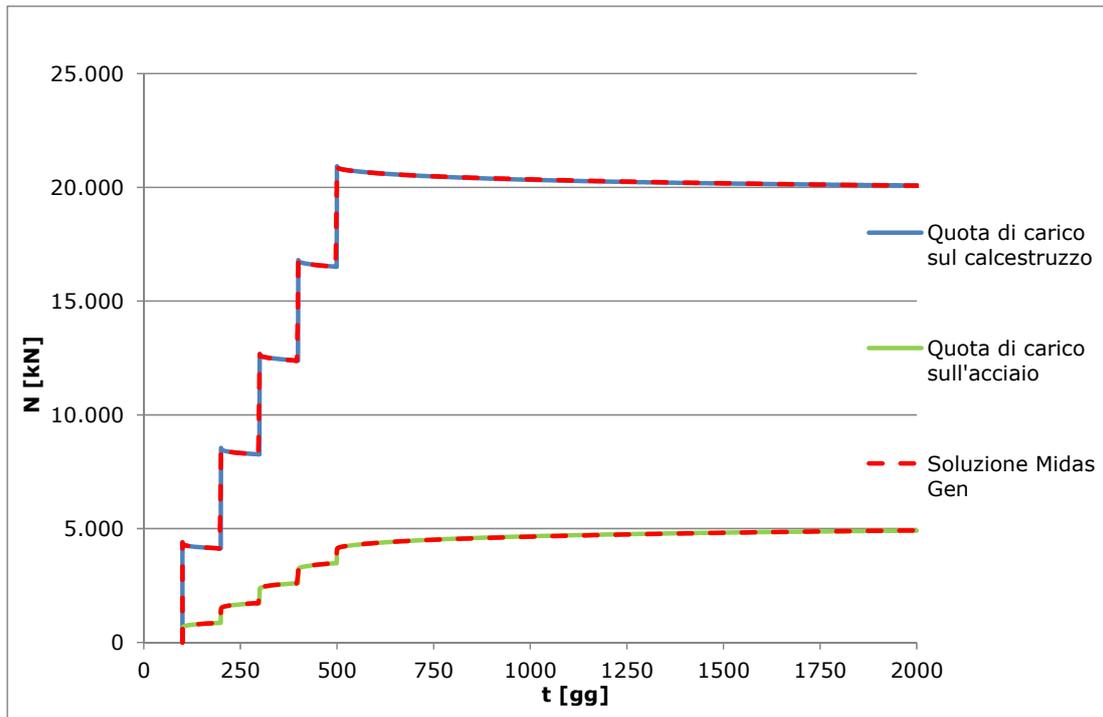


Figura 6.64 - Ripartizione del carico sulla prima asta

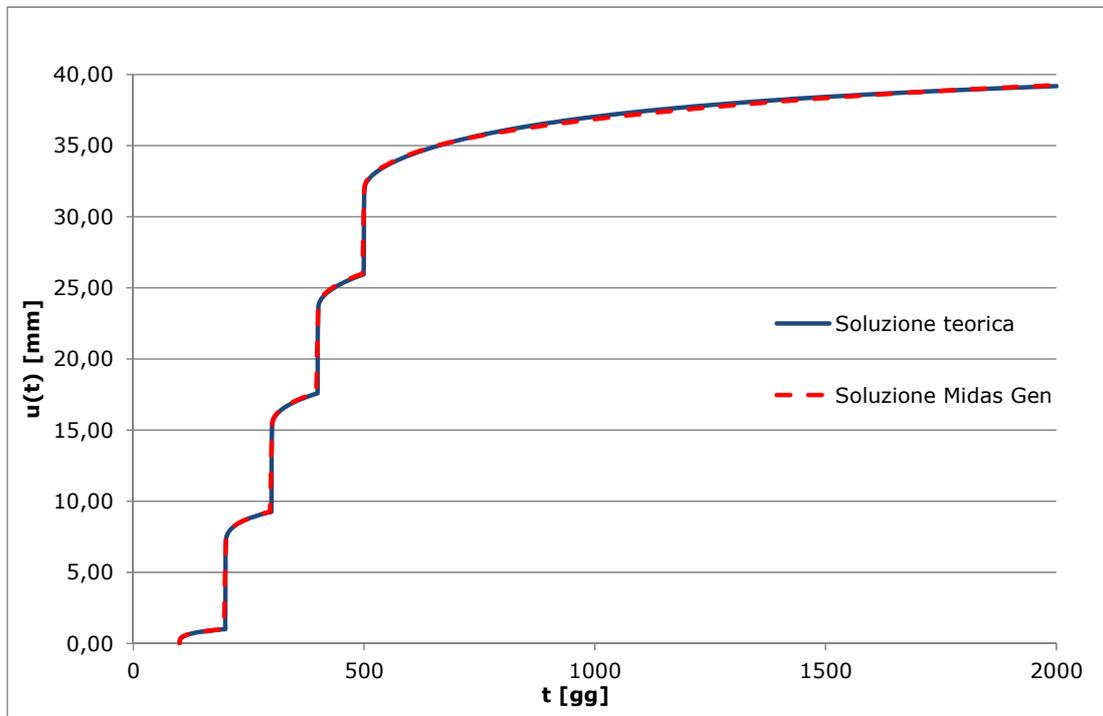


Figura 6.65 - Accorciamento in sommità della seconda asta

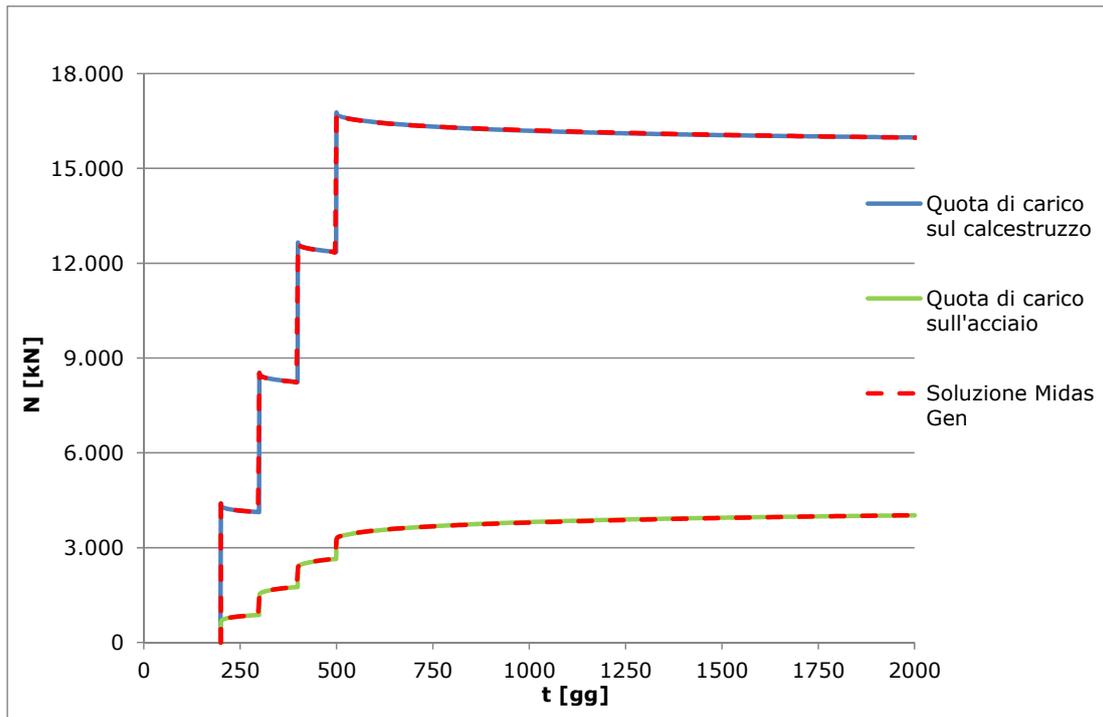


Figura 6.66 - Ripartizione del carico sulla seconda asta

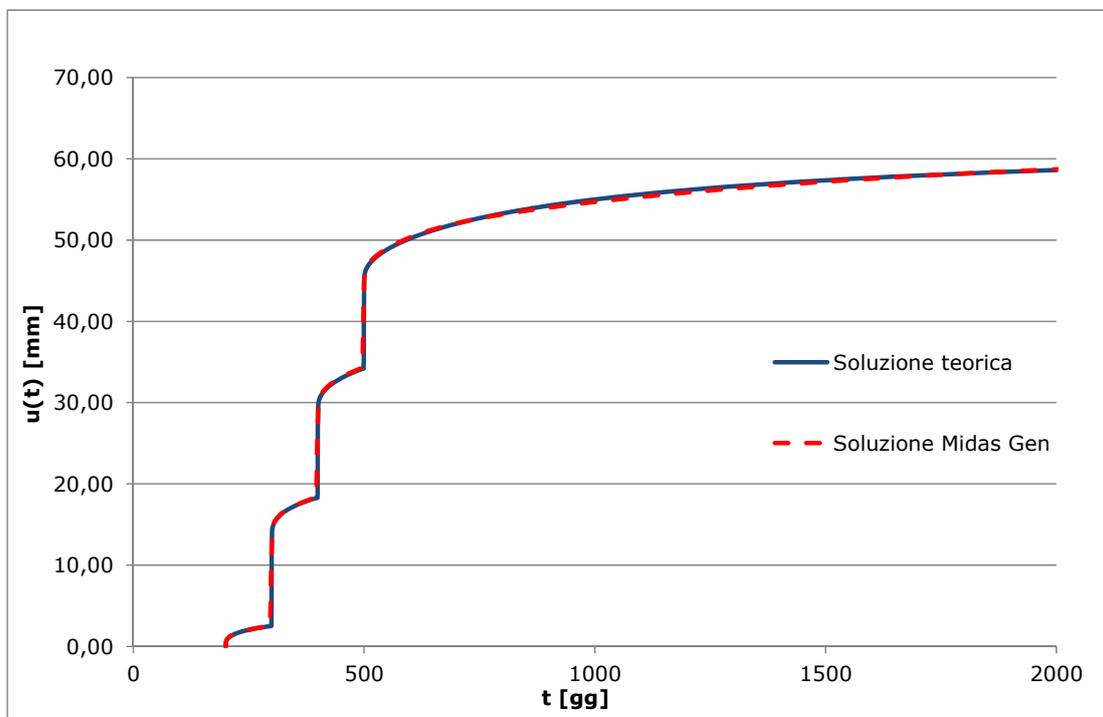


Figura 6.67 - Accorciamento in sommità della terza asta

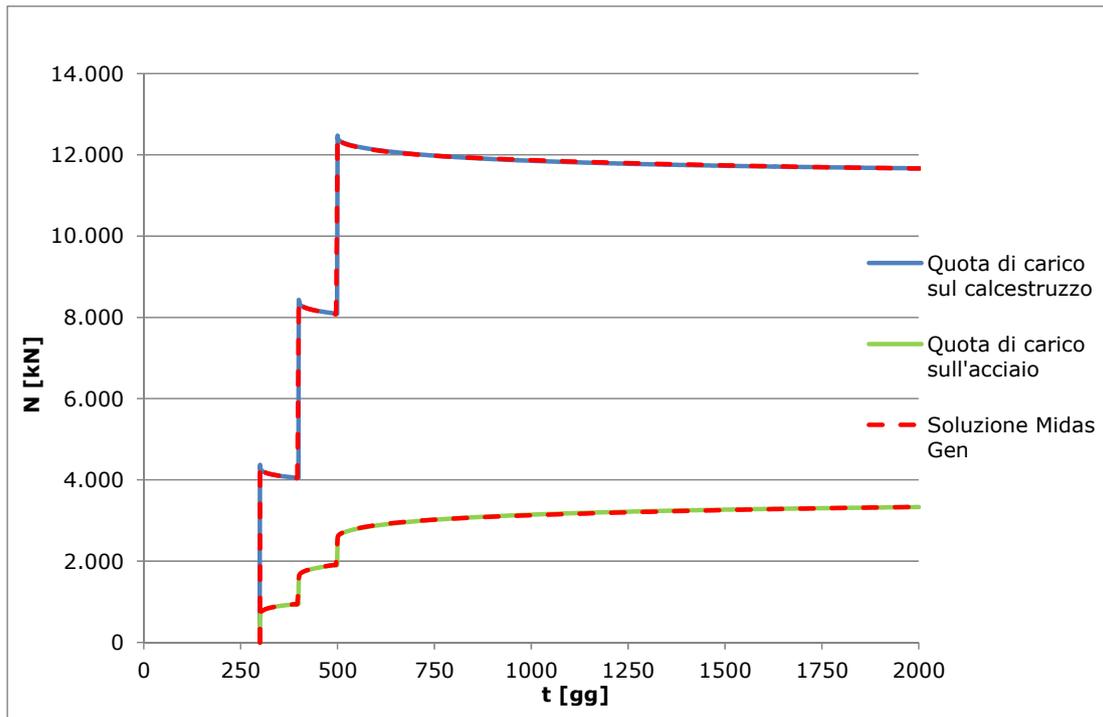


Figura 6.68 - Ripartizione del carico sulla terza asta

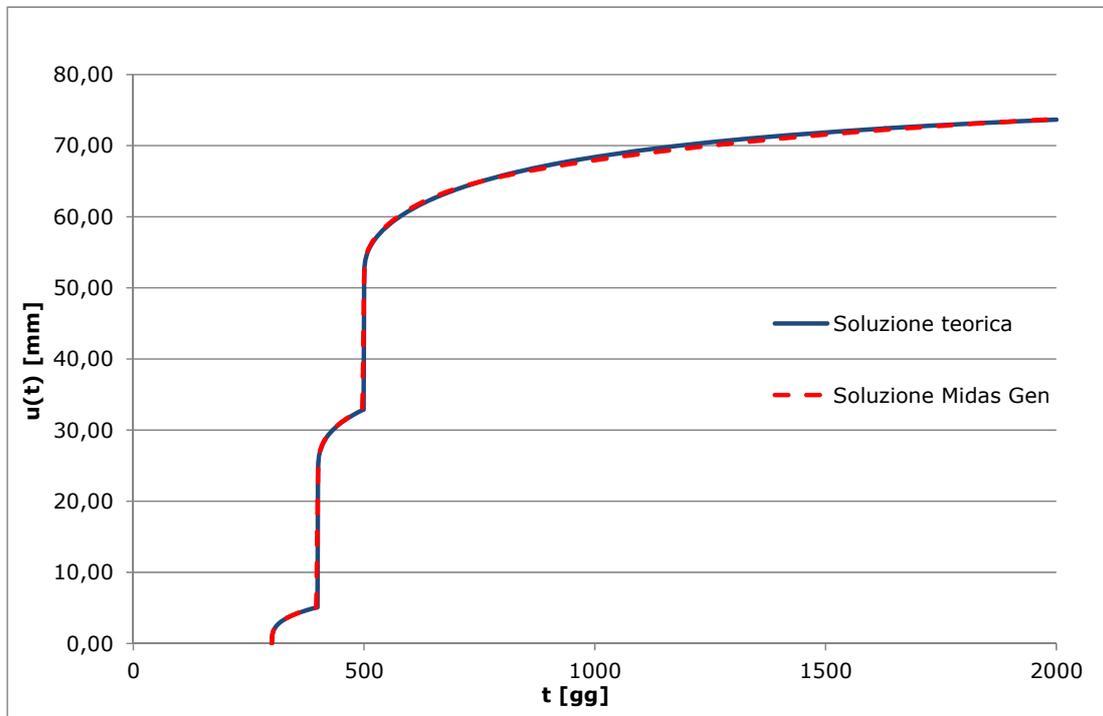


Figura 6.69 - Accorciamento in sommità della quarta asta

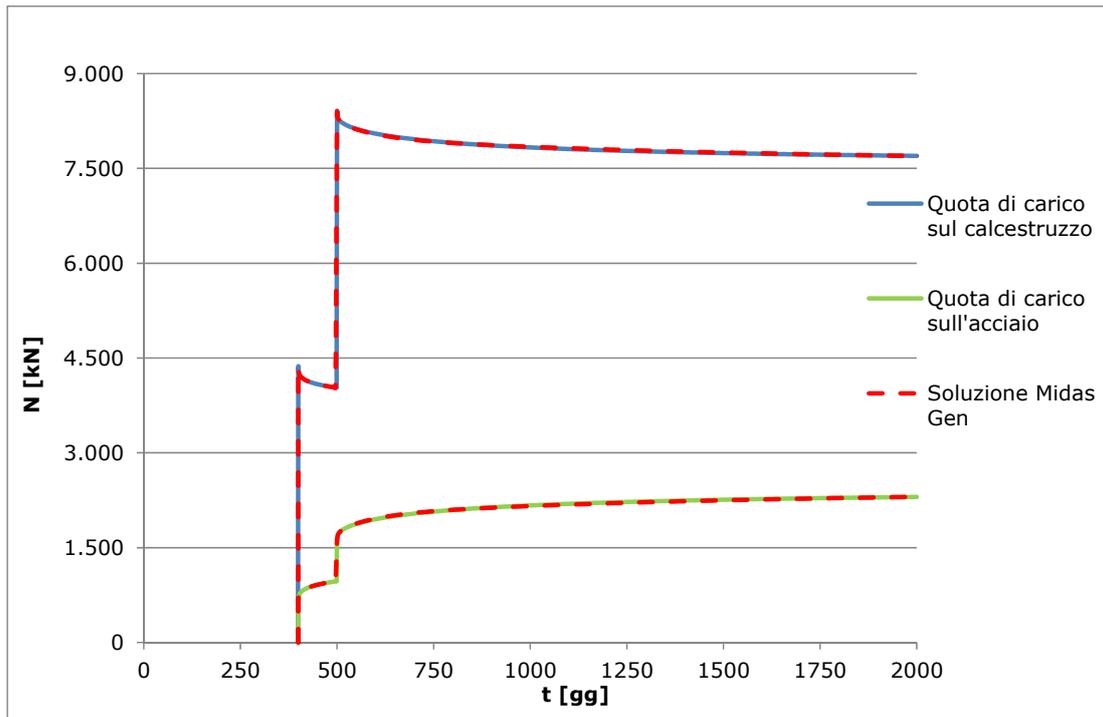


Figura 6.70 - Ripartizione del carico sulla quarta asta

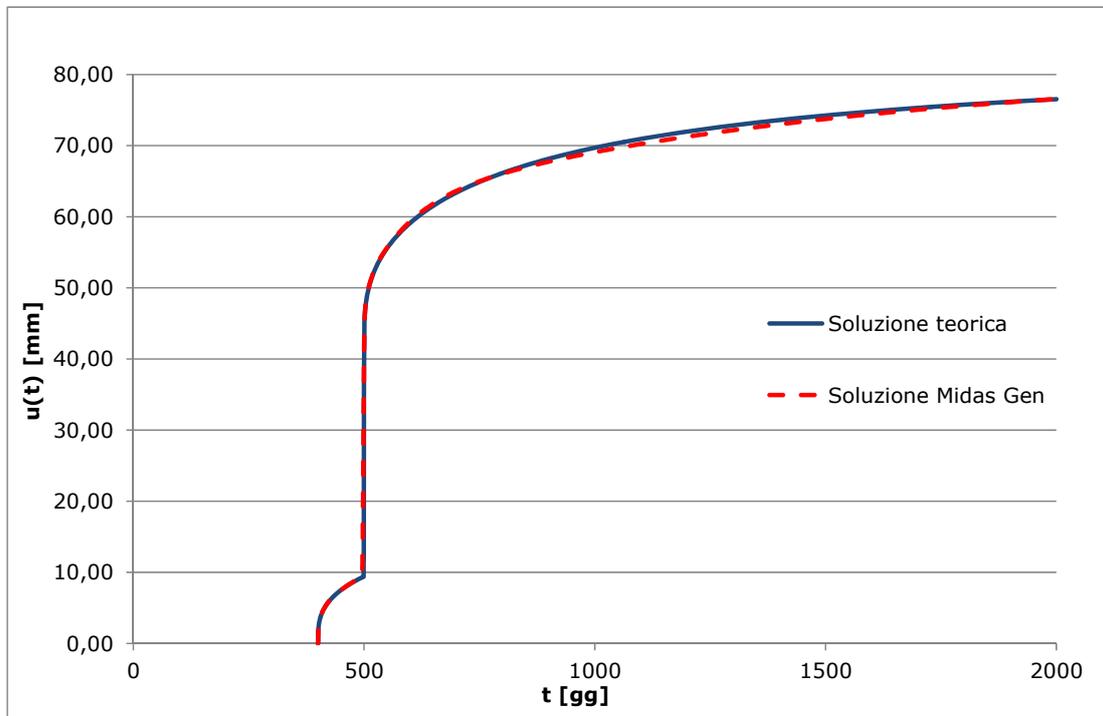


Figura 6.71 - Accorciamento in sommità della quinta asta

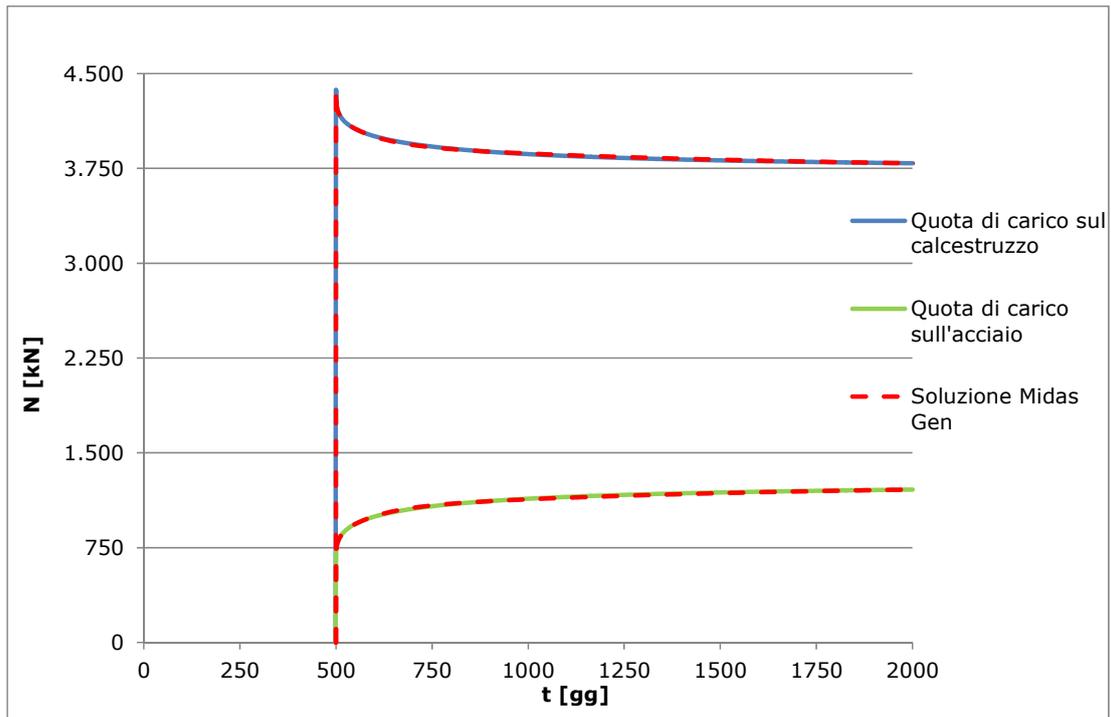


Figura 6.72 - Ripartizione del carico sulla quinta asta

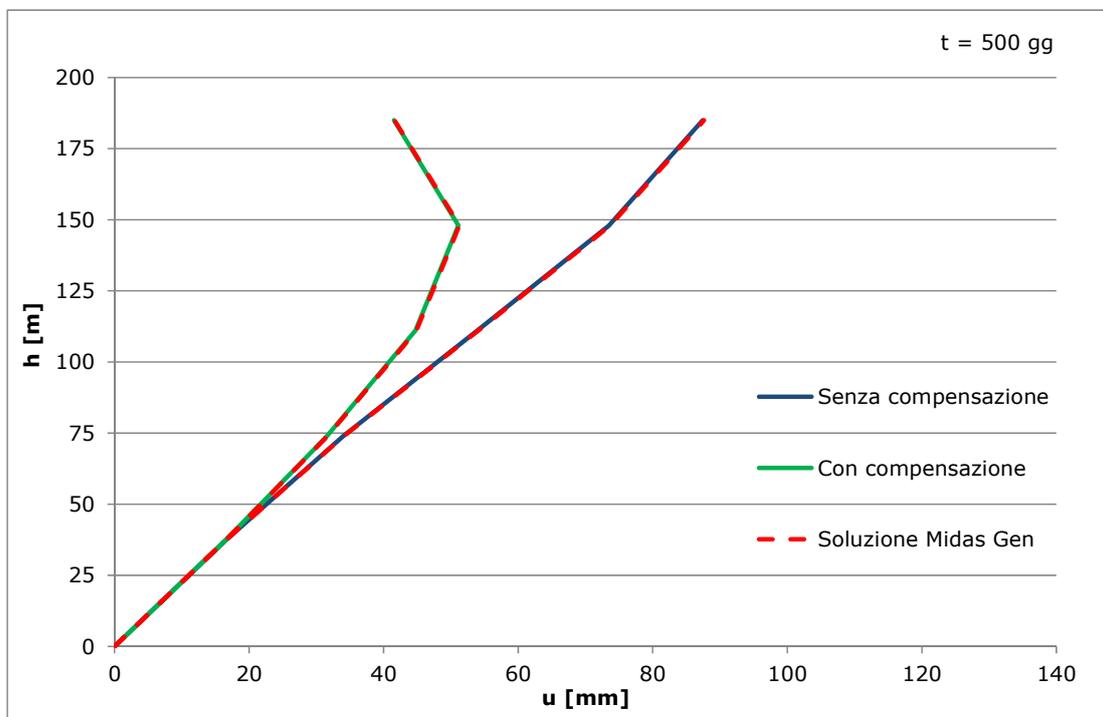


Figura 6.73 - Column shortening  $t = 500$  gg

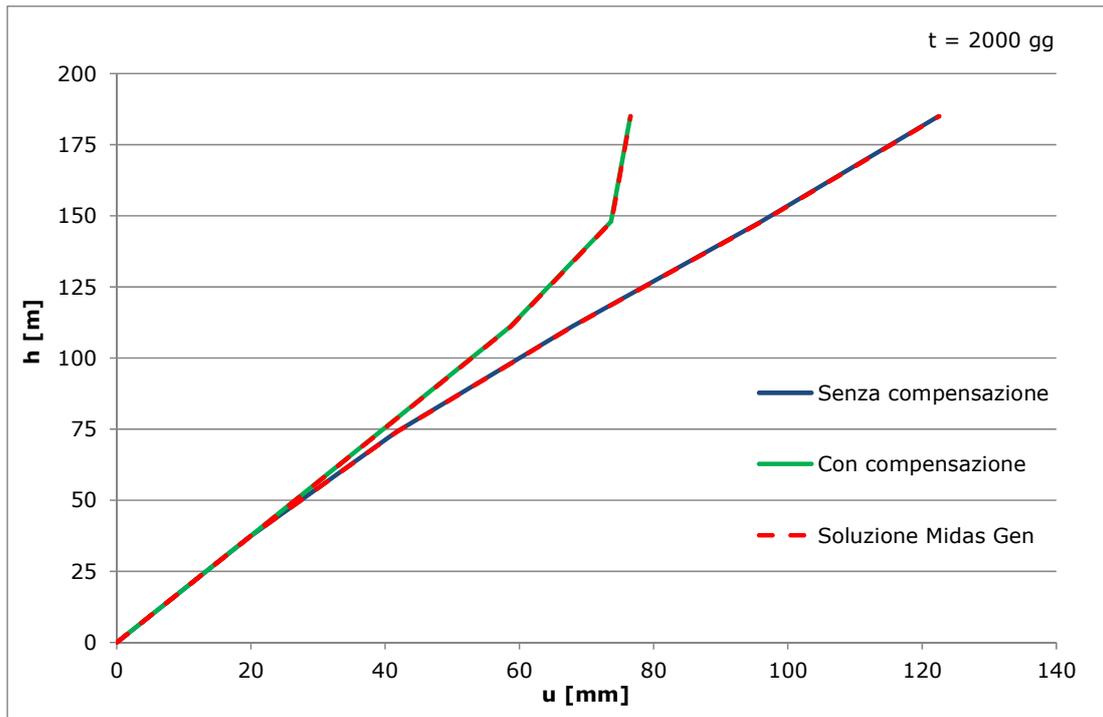


Figura 6.74 - Column shortening t = 2000 gg

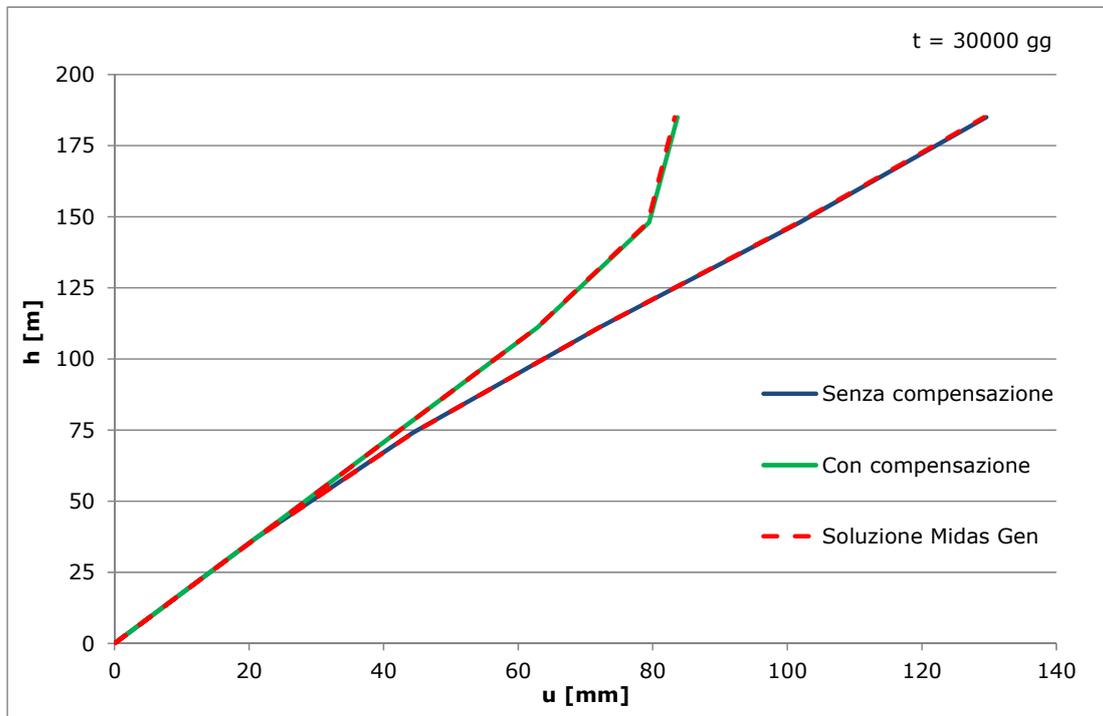


Figura 6.75 - Column shortening t = 30000 gg

### 6.4.2.3 Stima degli errori

Di seguito si analizzano gli errori che affliggono le quote di carico agenti sui due materiali a fine costruzione, 2000 e 30000 giorni; successivamente gli errori sugli abbassamenti valutati con o senza compensazione per la struttura in solo calcestruzzo e per la struttura in calcestruzzo armato.

Al fine di evidenziare un'eventuale sovrastima o sottostima da parte del software delle varie grandezze verranno riportati gli errori con il loro segno.

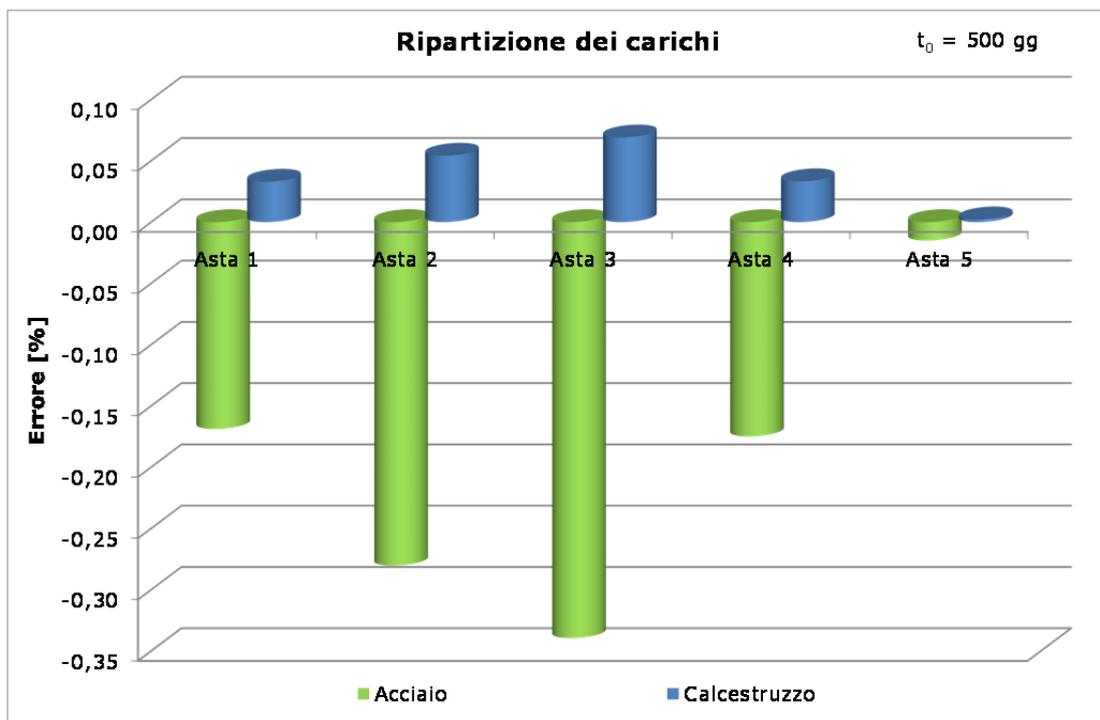


Figura 6.76 - Errori sulla ripartizione dei carichi

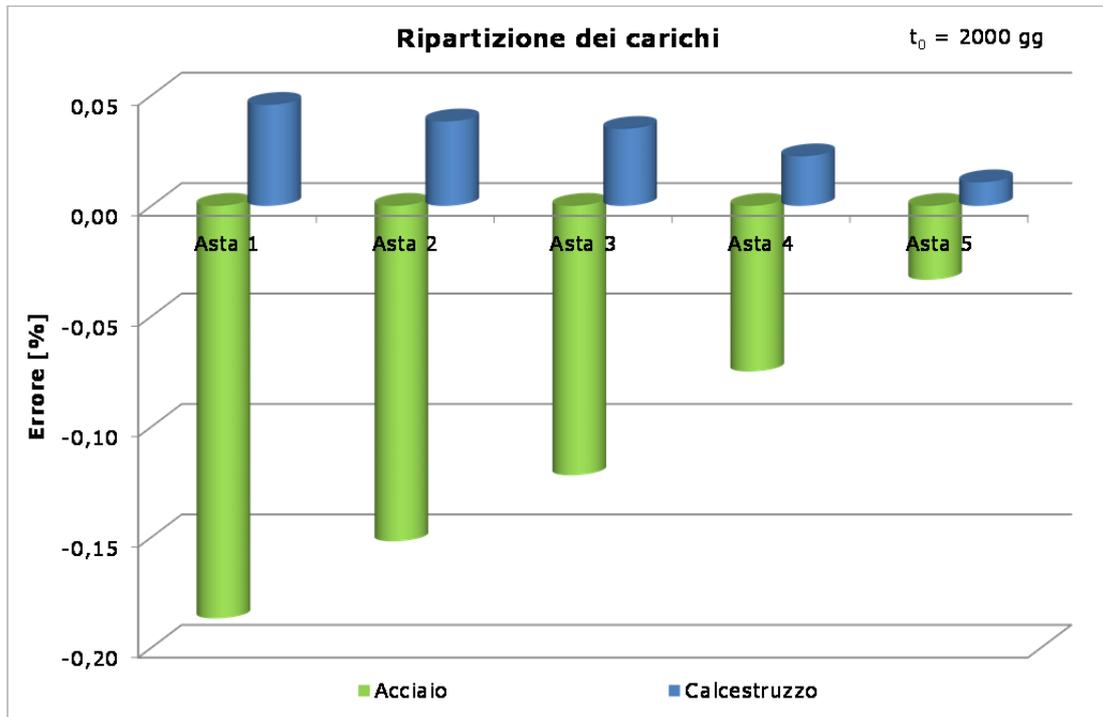


Figura 6.77 - Errori sulla ripartizione dei carichi

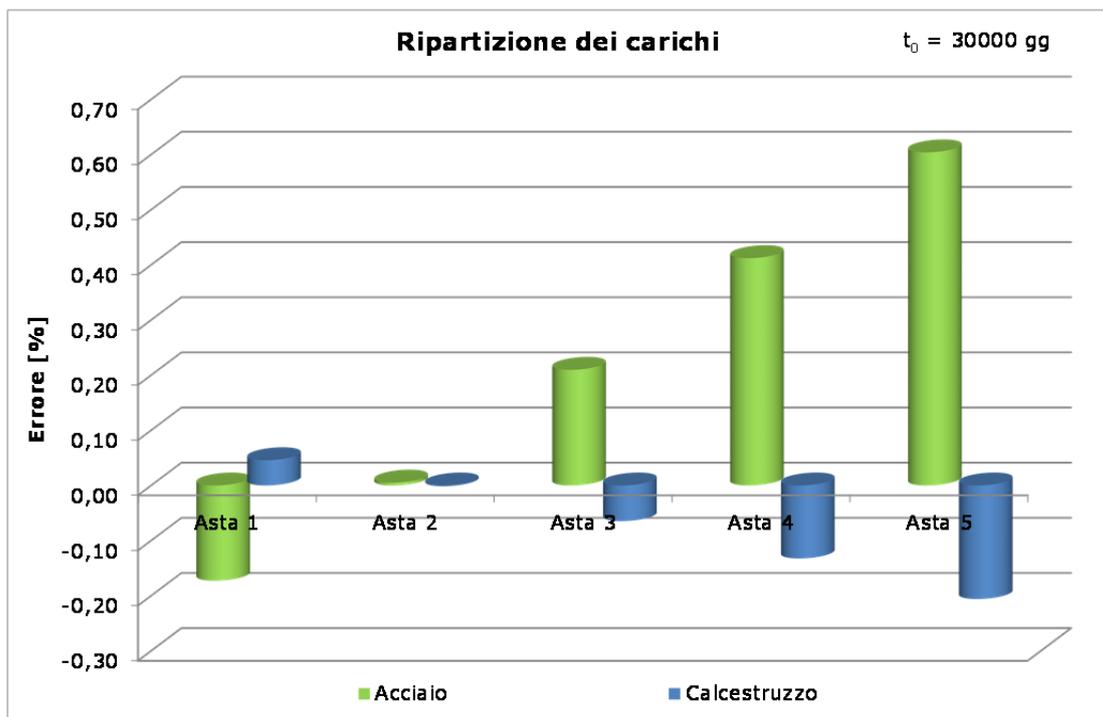


Figura 6.78 - Errori sulla ripartizione dei carichi

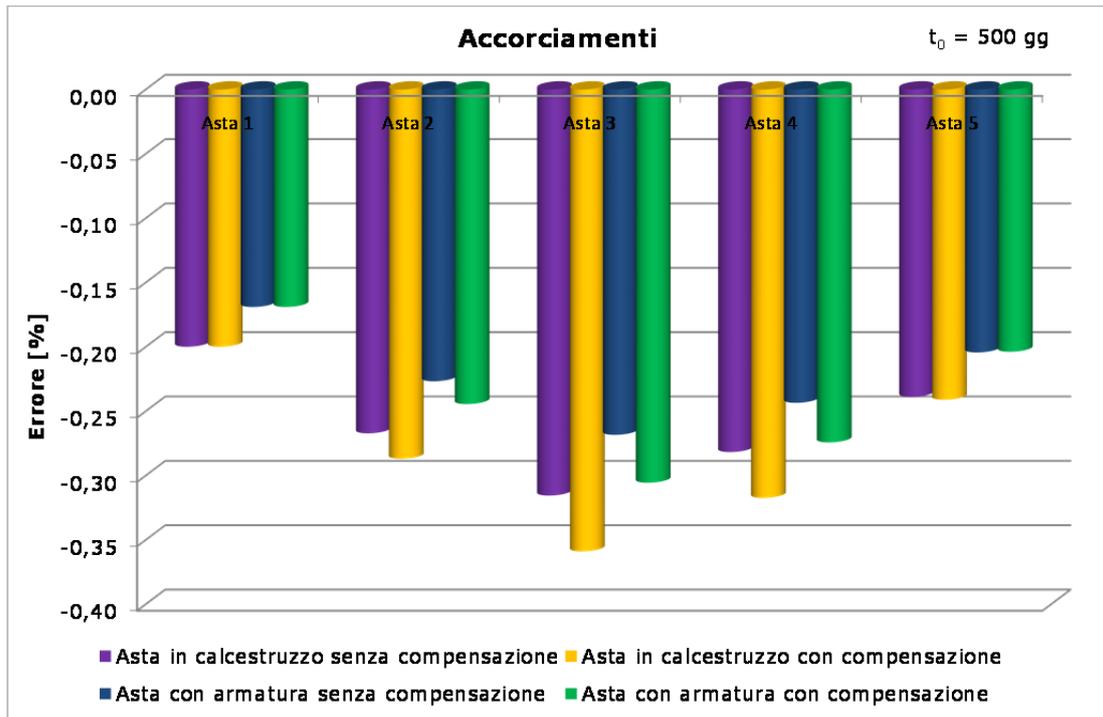


Figura 6.79 - Errori sugli abbassamenti

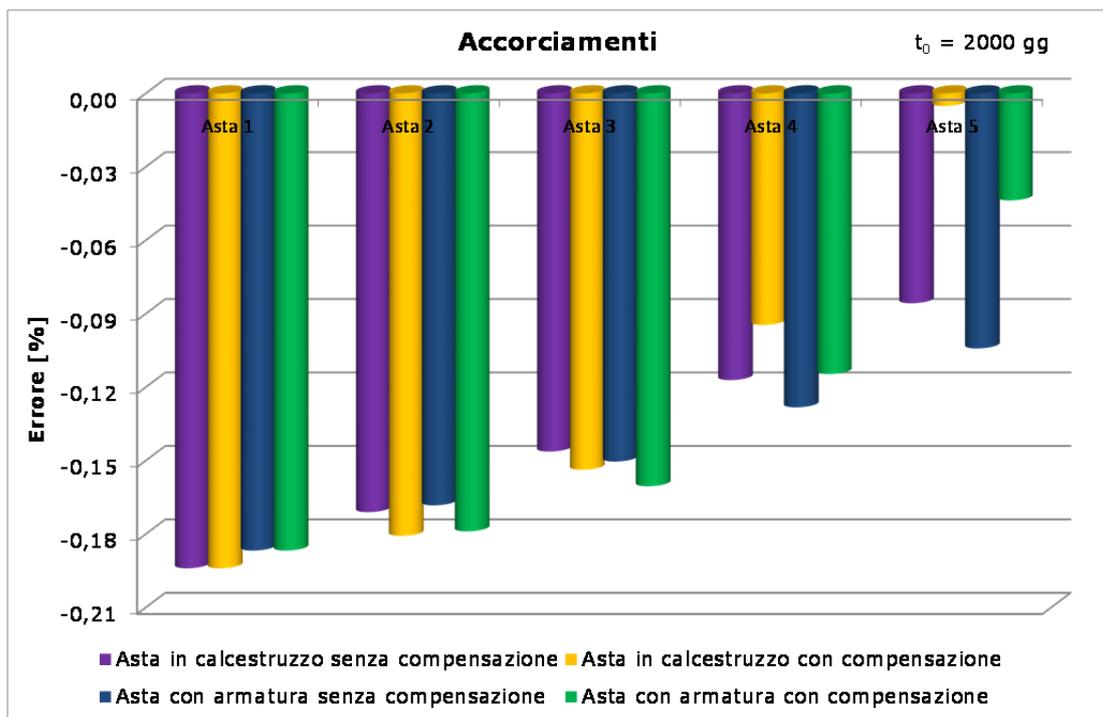


Figura 6.80 - Errori sugli abbassamenti

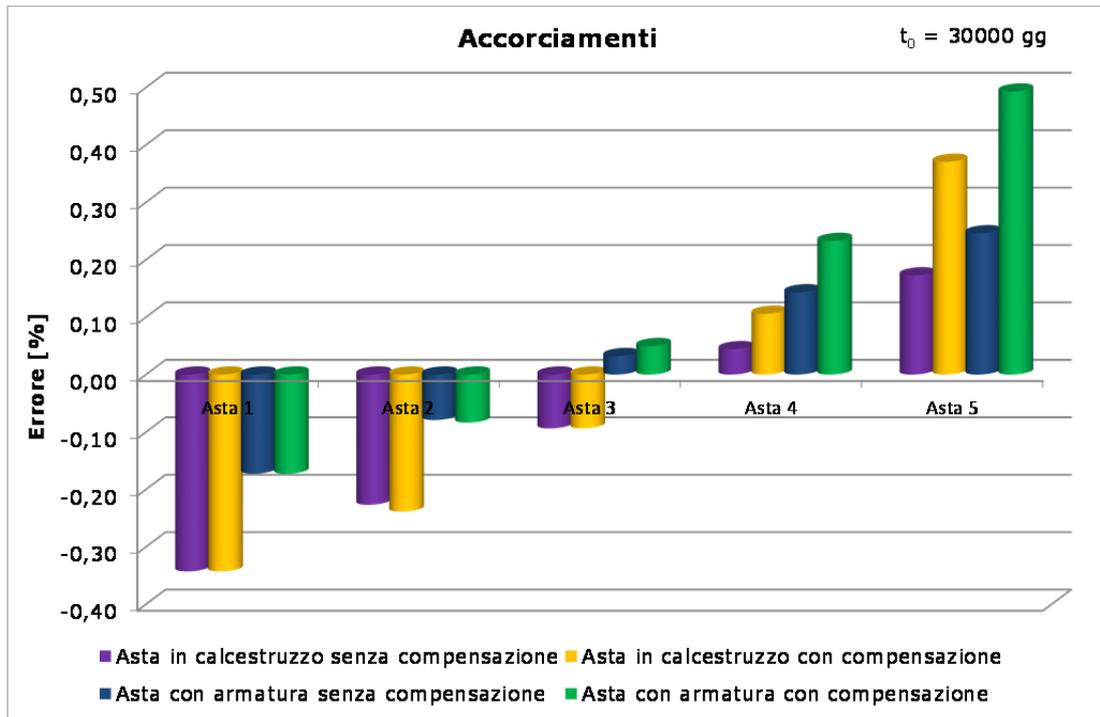


Figura 6.81 - Errori sugli abbassamenti

## 6.5 CONCLUSIONI

In conclusione, si può affermare che il programma di calcolo MIDAS GEN è uno strumento in grado di prevedere con più che sufficiente correttezza ed attendibilità i risultati calcolati secondo il modello CEB-FIP(1990). Pertanto, nel prosieguo, ci si riferirà ai valori calcolati da tale software come effettivamente calcolati da modello CEB-FIP(1990).

## 7 TORRE ISOZAKI

### 7.1 DESCRIZIONE DELL'OPERA

Nel seguito si illustrano le caratteristiche di Progetto Esecutivo delle strutture della "torre Isozaki", nell'ambito dell'intervento di riqualificazione dell'ex quartiere fieristico di Milano, denominato Citylife.



**Figura 7.1 - Quartiere Citylife, Milano**

Il sito di CityLife copre un'area di circa 500m in direzione Nord-Sud e circa 600m in direzione Est-Ovest., ubicato nell'area della vecchia Fiera Campionaria.

Le coordinate geografiche del sito ("torre Isozaki") sono:

- Longitudine: E 9° 09' 25"
- Latitudine: N 45° 28' 40"

La torre occupa un lotto baricentrico al Sito, di fronte all'edificio che ospitava il vecchio Palazzetto dello Sport che si affaccia su viale Cassiodoro.



Figura 7.2 - Torre Isozaki, Milano

La quota originaria del piano di campagna (p.c.) e di circa +124.00m sul livello medio del mare (s.l.m.).

La torre Isozaki si sviluppa, nella parte fuori terra, per complessivi 48 moduli da 3.90m e tre moduli da 5.00m ed un'altezza di circa 202.2m sul piano della piazza principale (a quota +129.0m slm) ovvero di 207.2m slm rispetto al piano stradale. Al di sotto della torre si sviluppa un piano di collegamento alla piazza commerciale ipogea (a quota +122.0m slm) e due livelli interrati prevalentemente destinati ad aree tecniche (livelli alle quote +117.0m slm, +113.2m slm con quote rustiche a +110.7/+111.7m slm).

La torre è prevalentemente destinata ad uffici (46 livelli complessivi) con alcune eccezioni secondo la seguente scansione:

- Livello terra Lobby a doppia altezza (i.e. due moduli, di cui uno da 5.0m e uno da 3.90m);
- Livello 24 Locale impianti (i.e. un modulo da 5.0m);
- Livelli 48 e 49 Locali impianti (i.e. un modulo da 3.90m ed un modulo da 5.0m).

L'accesso all'edificio avviene da due livelli alternativi: da quota +122.0m slm dove si trova anche il collegamento alla stazione della metropolitana M5 e da quota +129.0m slm.

Come meglio descritto dei paragrafi successivi, l'edificio è costituito da:

- Un sistema di stabilità globale composto da:
  - Due nuclei principali in c.a. con pareti di spessore variabile tra un massimo di 1200mm ad un minimo di 400mm;
  - Due strutture denominate travi di cintura o *belt-trusses* che accoppiano i due nuclei a formare un grande portale e due macro-piani;
  - Quattro puntoni esterni collegati a dissipatori viscosi che contribuiscono a contenere l'entità della componente risonante del vento e a controllare le condizioni di comfort nell'edificio;
- Colonne in struttura mista acciaio-calcestruzzo fino al livello P04, e in calcestruzzo armato fino in sommità;
- Un sistema di solaio tipico composto da una soletta piena in c.a. da 200mm e travi ribassate ovvero, ad alcuni piani, una soletta piana da 450mm di spessore;
- Vani ascensori in c.a. alle due estremità dell'edificio senza una funzione di stabilità principale ed una struttura leggera in acciaio a formare i vani degli ascensori panoramici in adiacenza a quelli tradizionali.

L'edificio ha una fondazione mista su platea palificata dove i pali, di diametro 1200mm e 1500mm, condividono con la platea la funzione di trasferimento dei carichi al terreno che avviene, quindi, sia a livello superficiale al di sotto della platea sia a livello profondo lungo il fusto e alla base dei pali.

La platea ha uno spessore variabile tra un minimo di 2500mm ed un massimo di 3500mm.

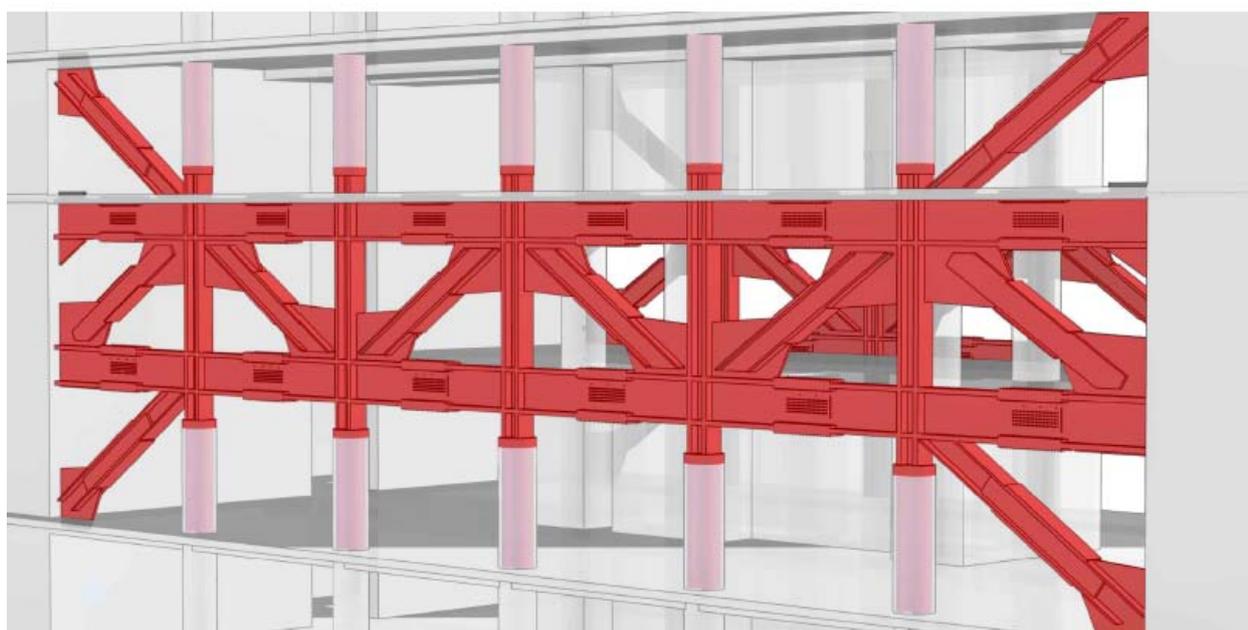
### **7.1.1 TRAVI DI CINTURA**

Come anticipato, le travi di cintura (o belt trusses) hanno lo scopo di accoppiare il funzionamento dei nuclei in direzione longitudinale alla dimensione prevalente della pianta della torre.

Le travi di cintura sono composte da elementi d'acciaio collegati ai nuclei per mezzo di una piastra annegata nel getto di calcestruzzo delle pareti e collaborante con esse per mezzo di una piolatura diffusa su entrambe le facce. Tutti gli elementi sono in acciaio tipo S460;



**Figura 7.3 - Belt truss di copertura in acciaio**



**Figura 7.4 - Belt truss intermedia in acciaio**

Attualmente è posta al vaglio una soluzione alternativa che prevede i Belt Truss in calcestruzzo armato.

In questo caso le travi di cintura occupano l'intera altezza dei piani compresi tra i livelli P24/P25 e P49/P50 con spessore 900 mm e sono costituite da calcestruzzo di classe C60/75 SCC fibrorinforzato.

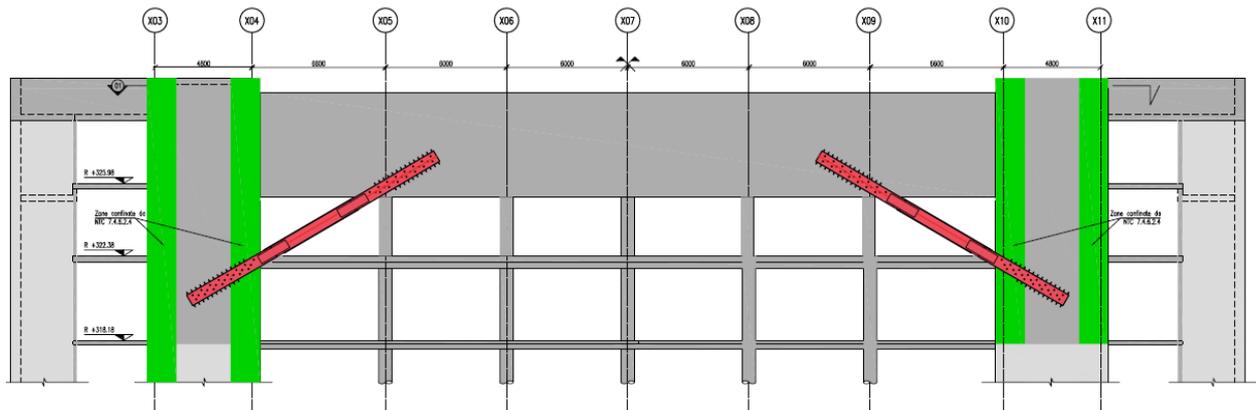


Figura 7.5 - Belt truss di copertura in calcestruzzo armato

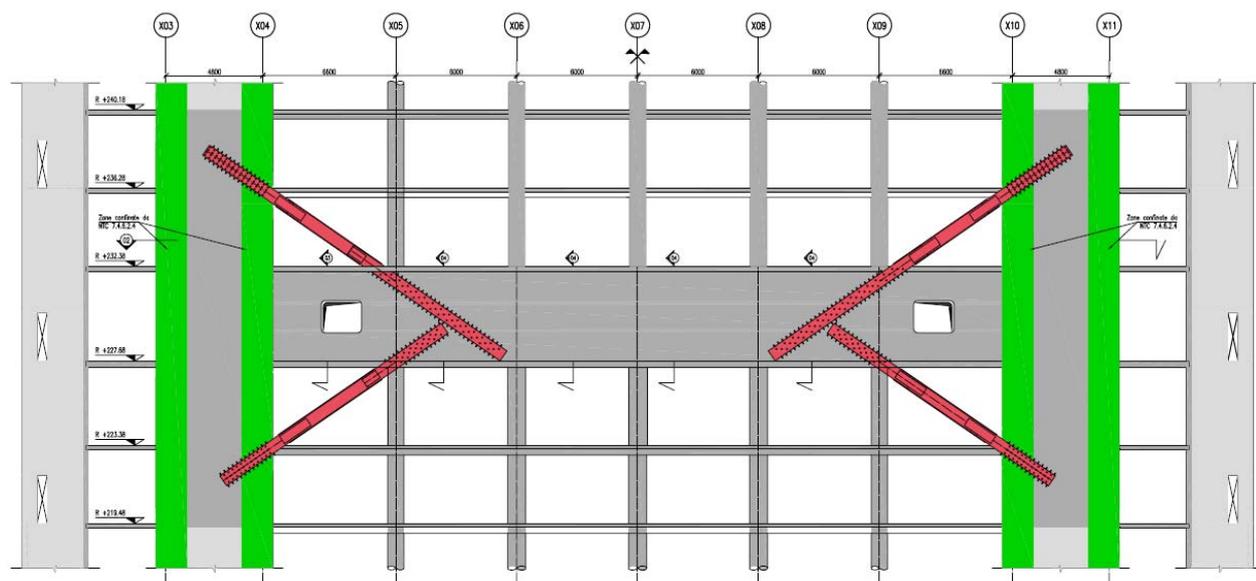
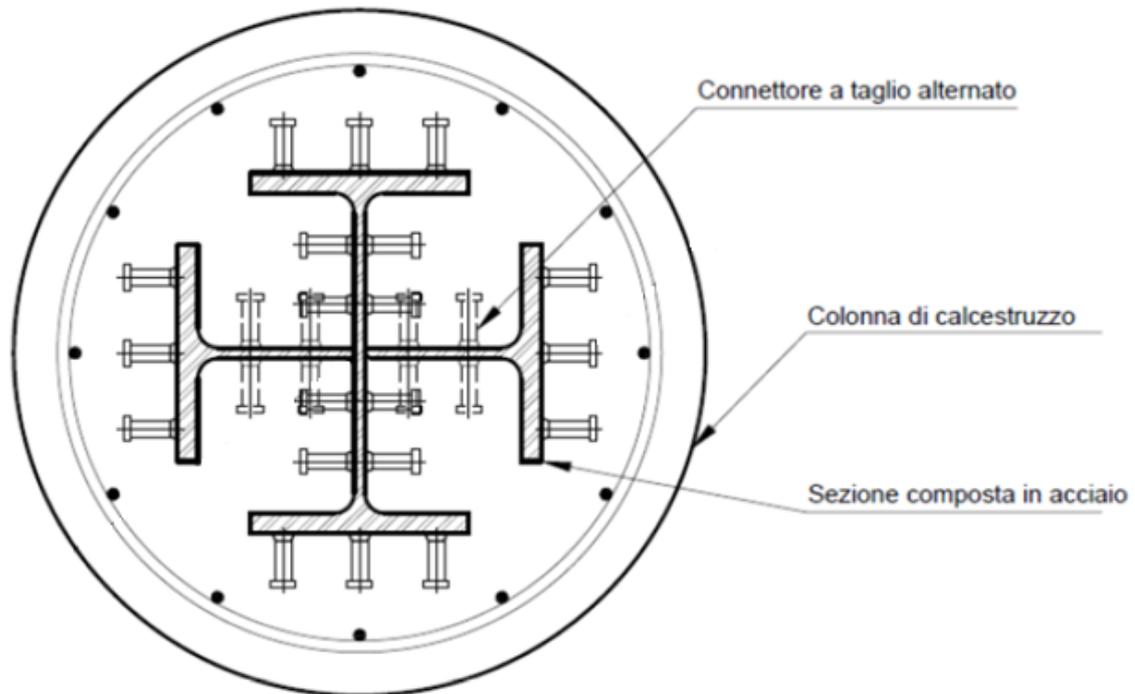


Figura 7.6 - Belt truss intermedia in calcestruzzo armato

### 7.1.2 PILASTRI

Tra le tecnologie costruttive disponibili, quella composita è ritenuta tra le più adatte per le colonne dei piani inferiori della torre dati gli elevati carichi verticali gravanti sulle stesse. In particolare, è stata scelta la soluzione con profilo metallico annegato all'interno di una sezione circolare in calcestruzzo armato (Figura 7.7). Al fine di garantire il comportamento "composito"

della sezione, verranno predisposti connettori a taglio lungo l'elemento d'acciaio per favorire l'aderenza tra questo ed il getto di completamento in calcestruzzo.



**Figura 7.7 - Colona mista acciaio - calcestruzzo**

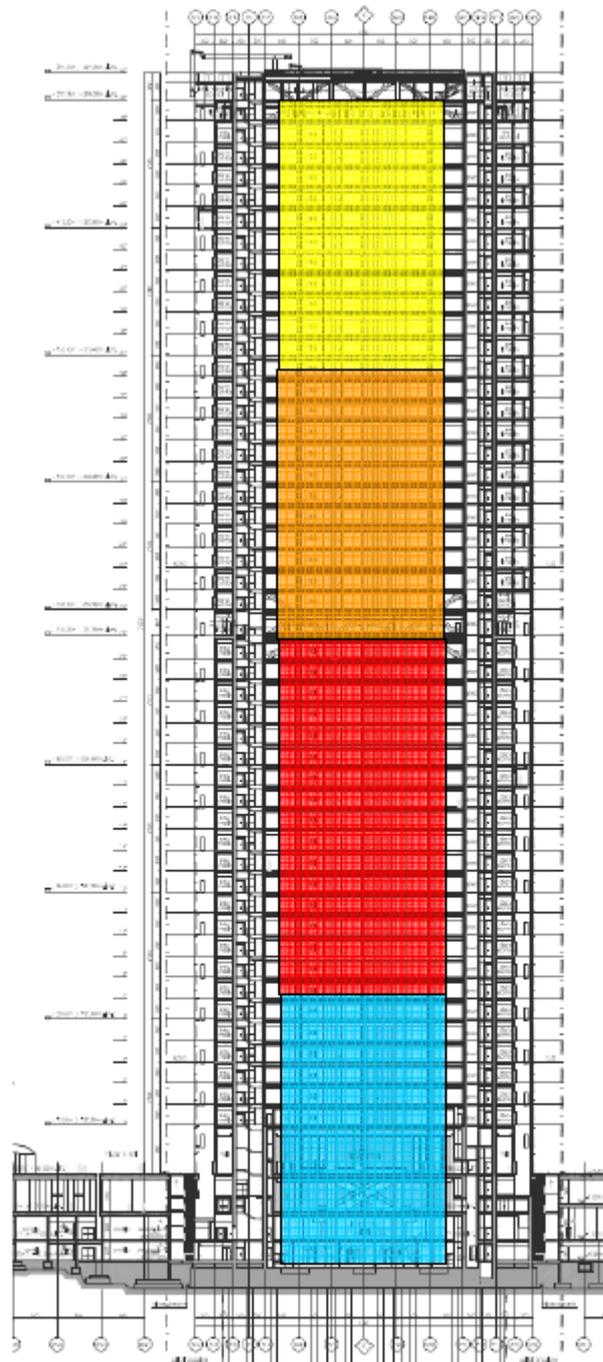
Oltre a quello dell'elevata resistenza meccanica, la colonna SRC presenta, tra gli altri, i seguenti vantaggi:

- Alta resistenza al fuoco;
- Riduzione dell'ingombro della sezione in pianta.

Per massimizzare la capacità resistente della sezione composta e minimizzare ulteriormente gli ingombri, sono stati adottati i seguenti materiali:

- calcestruzzo ad alta resistenza C50/60;
- acciaio da carpenteria metallica, classe S460.

Al di sopra del livello P04 le colonne sono in calcestruzzo armato con rapporto geometrico d'armatura pari al 3%. Nella figura seguente si riporta Figura 7.8 la variazione delle classi di calcestruzzo lungo l'altezza dell'edificio.



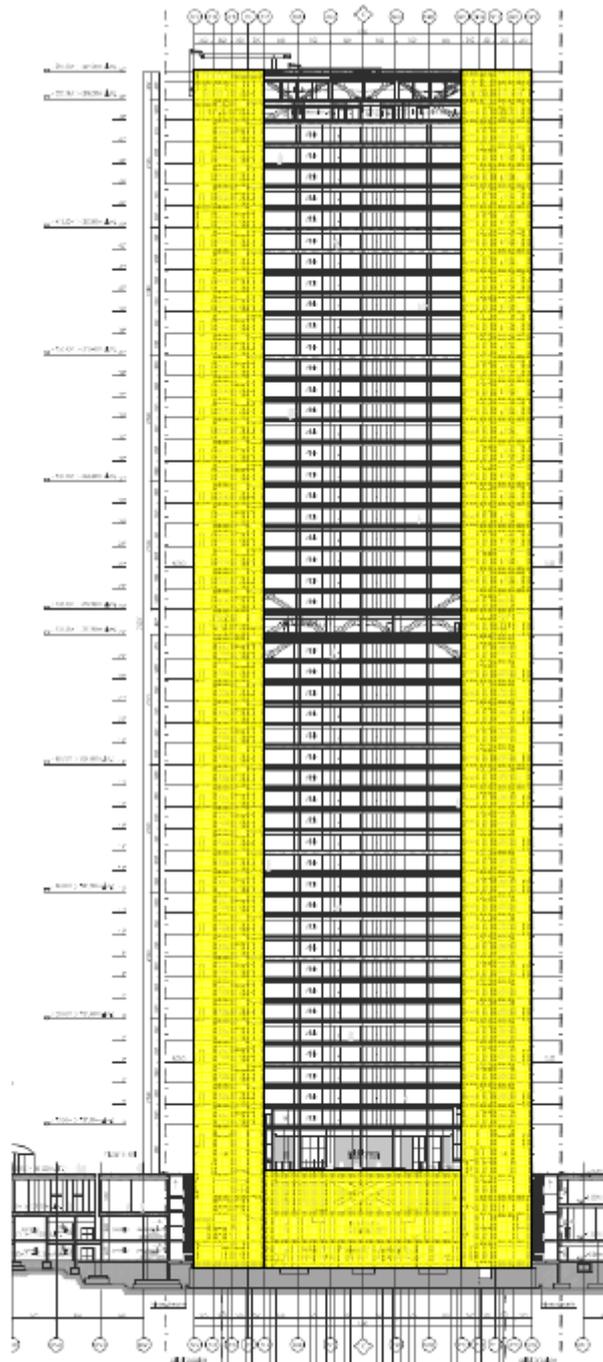
**LEGENDA**

- C40/50 sezione c.a.
- C50/60 sezione c.a.
- C70/85 sezione c.a.
- C50/60 sezione mista acciaio/clt (profili S355)

**Figura 7.8 - Variazione delle classi di calcestruzzo nei pilastri**

### 7.1.3 SETTI, PARETI, NUCLEI DI CONTROVENTO

Tutti i setti, pareti, nuclei controvento sono in calcestruzzo C40/50

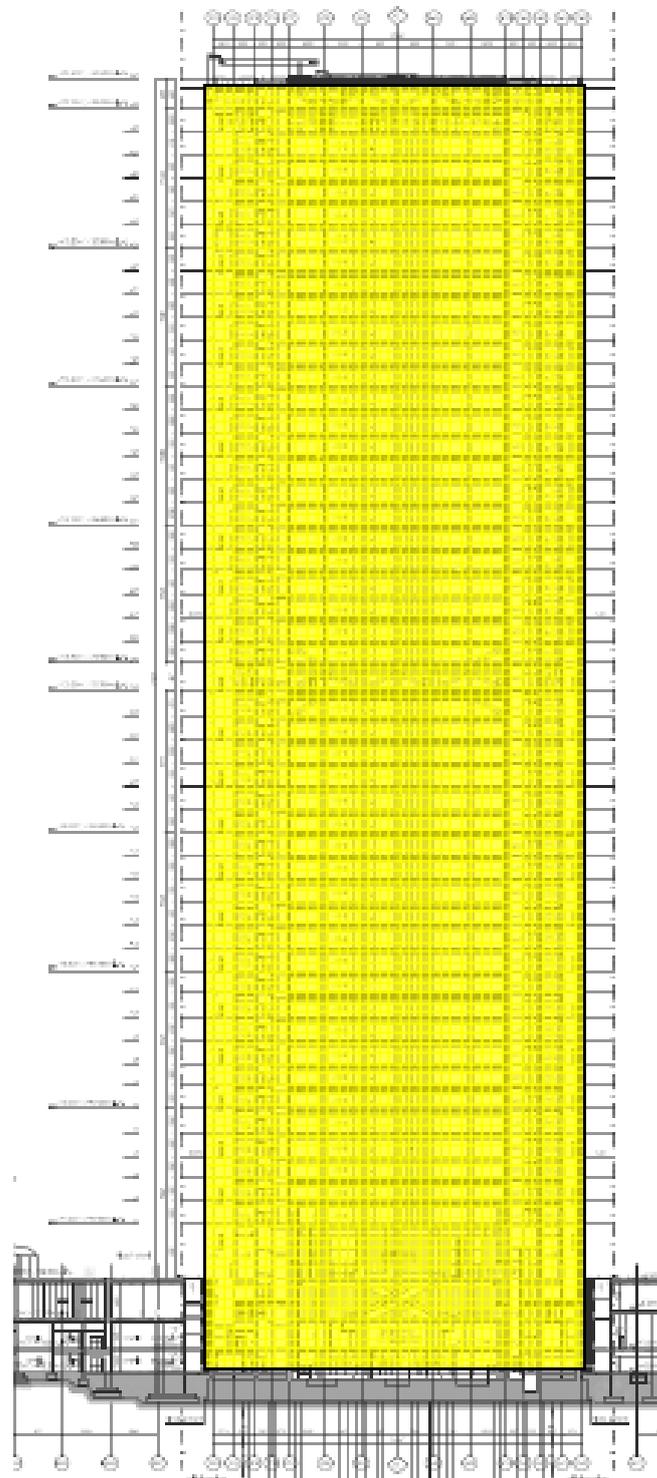


LEGENDA  
C40/50

Figura 7.9 - Variazione delle classi di calcestruzzo nei nuclei

### 7.1.4 IMPALCATI

Tutti gli impalcati sono in calcestruzzo C40/50 e sono prevalentemente di spessore 200 mm.



LEGENDA  
 C40/50

Figura 7.10 - Variazione delle classi di calcestruzzo negli impalcati

In alcuni livelli, in presenza di carichi elevati, tale spessore è stato portato a 300 mm. In tutti i piani fuori terra sono presenti delle travi ribassate (Figura 7.11);

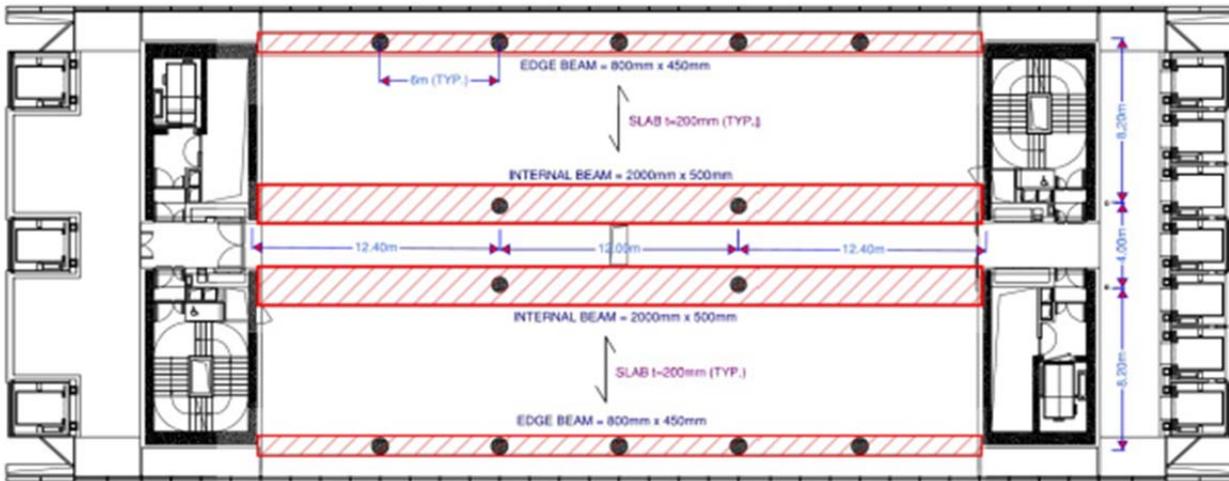


Figura 7.11 - Impalcato tipo

## 7.2 ANALISI DEI CARICHI

### 7.2.1 PESI PROPRI STRUTTURALI

I pesi propri degli elementi componenti le nuove strutture sono valutati in base alle sezioni geometriche ed ai pesi specifici corrispondenti qui di seguito riportati.

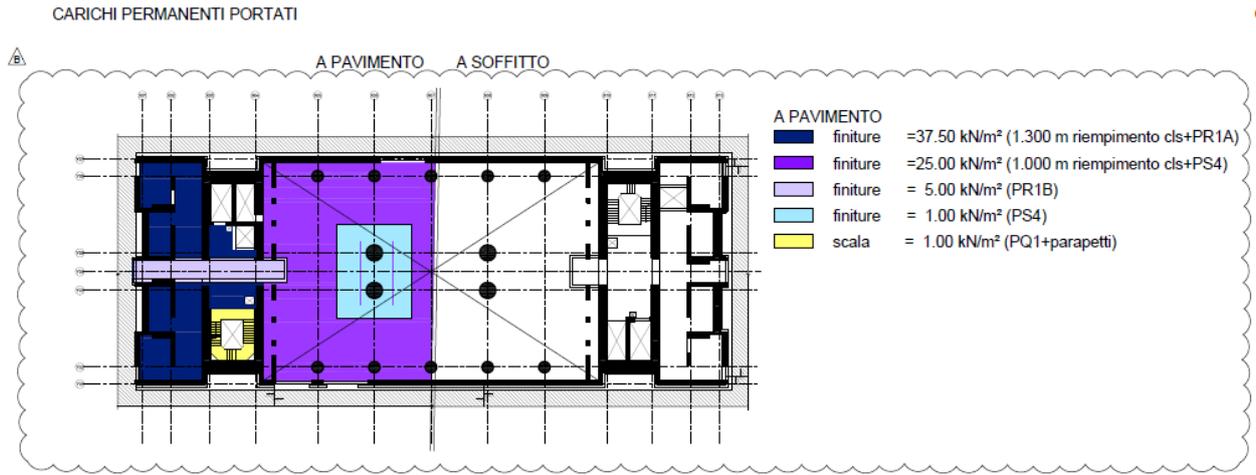
Pesi specifici materiali utilizzati (cfr. NTC, §3.1.3.1, Tab. 3.1.I)

- acciaio 78.5 kN/m<sup>3</sup>
- calcestruzzo armato 25.0 kN/m<sup>3</sup>
- calcestruzzo non armato 24.0 kN/m<sup>3</sup>

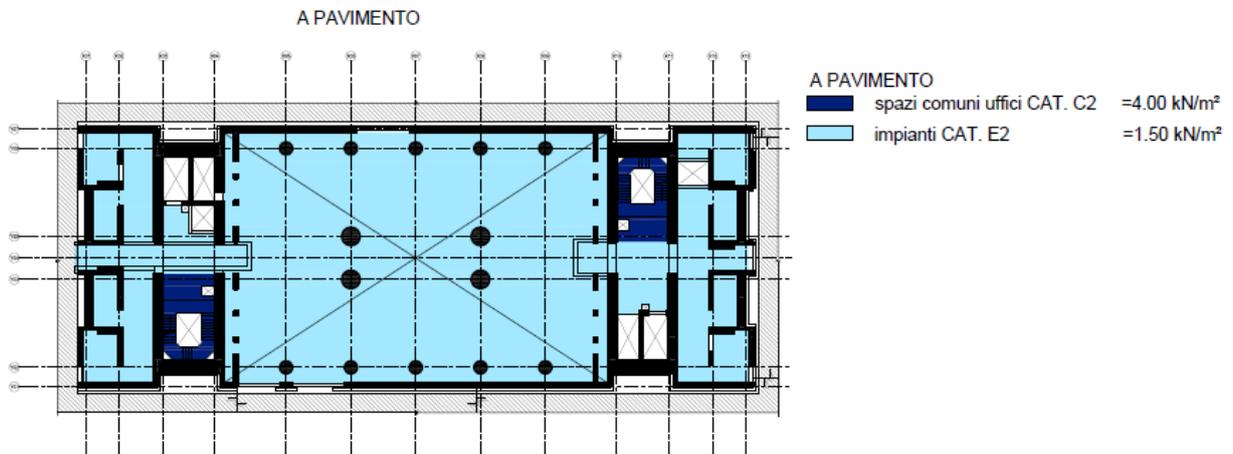
### 7.2.2 CARICHI PERMANENTI PORTATI E VARIABILI

I carichi sono stati sviluppati sulla base del progetto architettonico in appalto; qui di seguito si riportano le stratigrafie e le relative analisi dei carichi.

Come nel progetto strutturale, nei piani uffici (Low Rise ed High Rise) sono stati previsti carichi per divisori all'interno degli open space, considerando un carico equivalente in pianta di 0.80 kN/m<sup>2</sup> nelle campate laterali, verso le facciate vetrate (carico lineare tra 1.00 e 2.00 kN/m; vedere NTC08, par. 3.1.3.1) e di 1.20 kN/m<sup>2</sup> nelle campate laterali, verso le facciate vetrate (carico lineare tra 2.00 e 3.00 kN/m; vedere NTC08, par. 3.1.3.1).



CARICHI VARIABILI



CARICHI PERMANENTI IMPIANTI

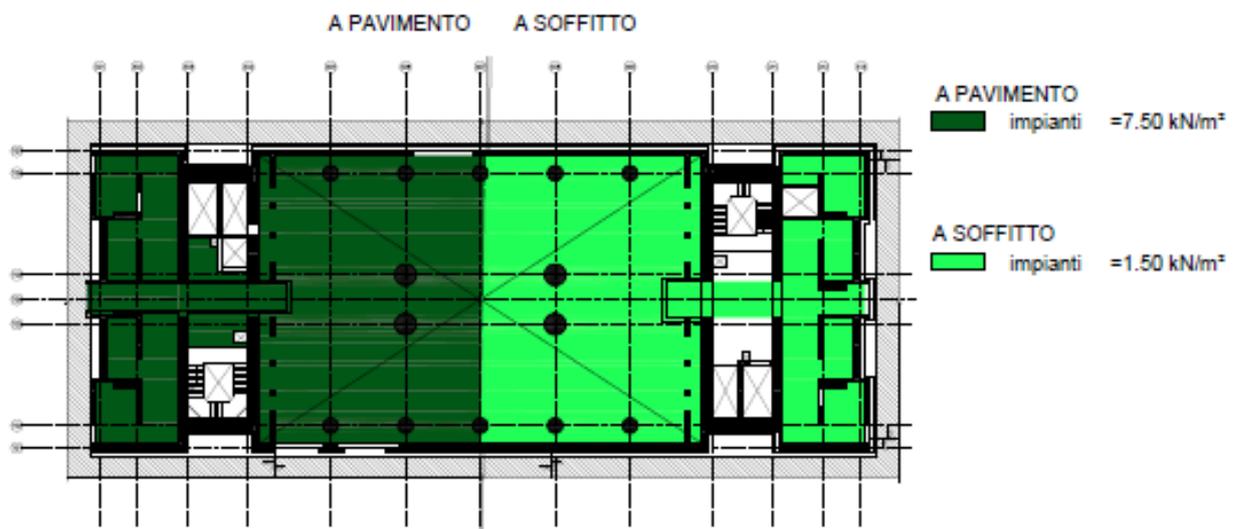
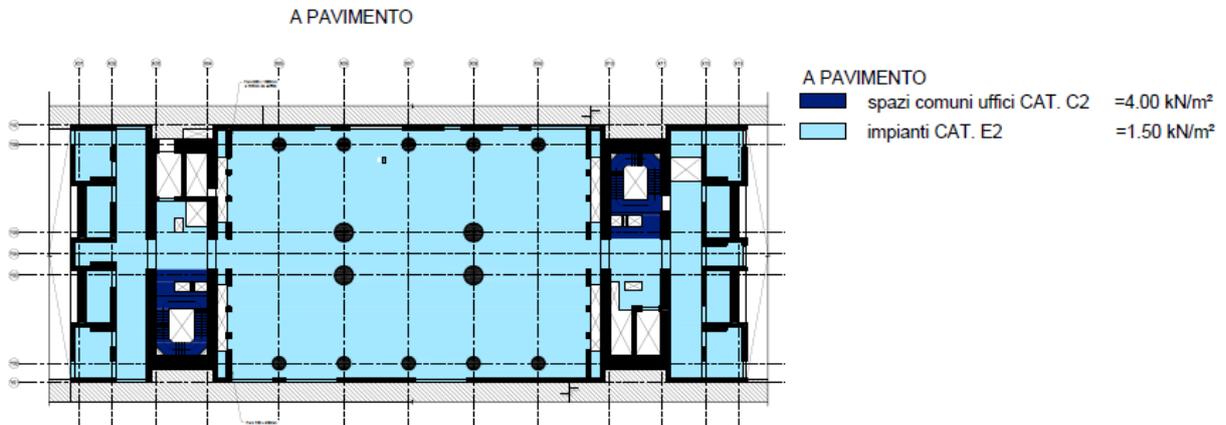


Figura 7.12 - Carichi livello PI2

CARICHI PERMANENTI PORTATI



CARICHI VARIABILI



CARICHI PERMANENTI IMPIANTI

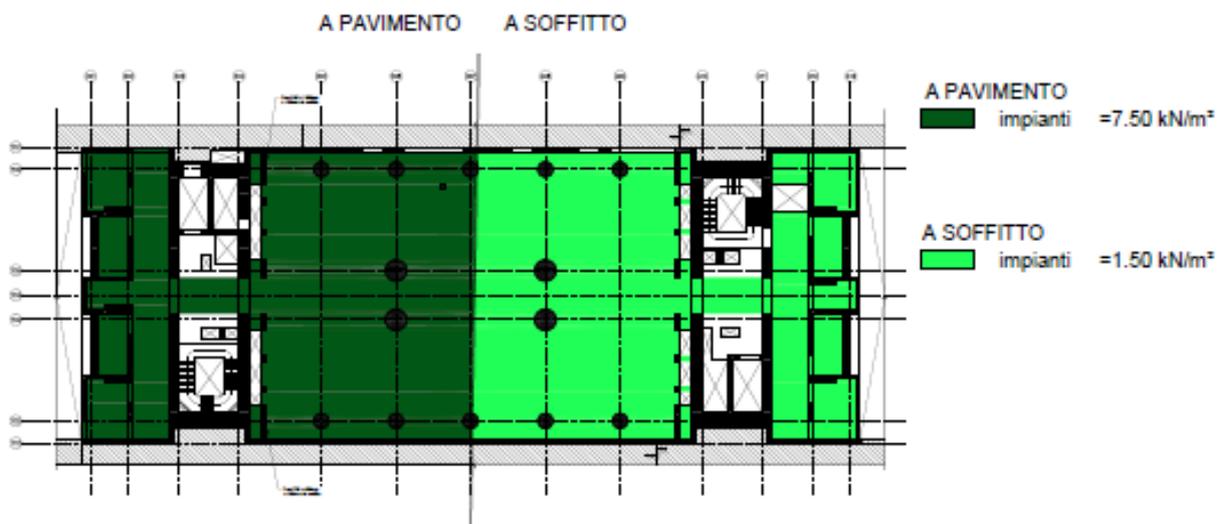
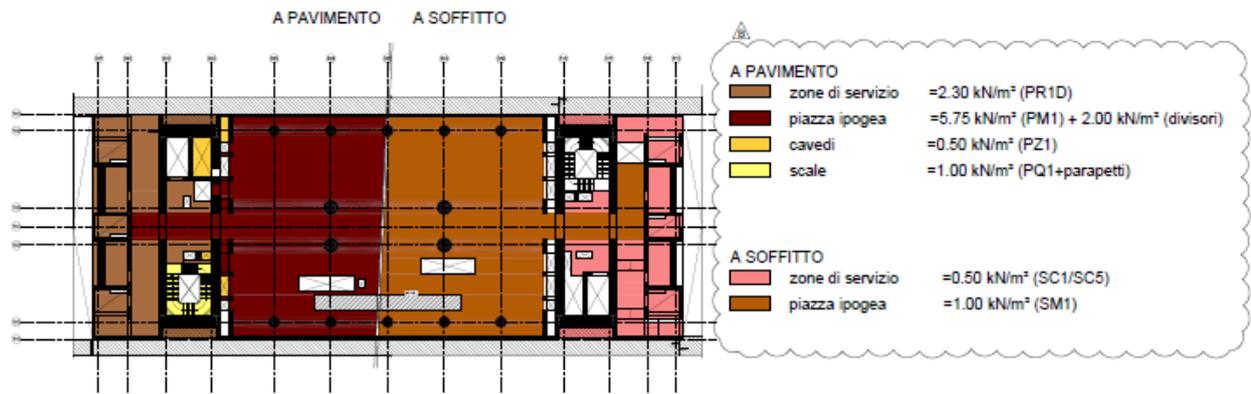


Figura 7.13 - Carichi livello PI1

CARICHI PERMANENTI PORTATI



CARICHI VARIABILI

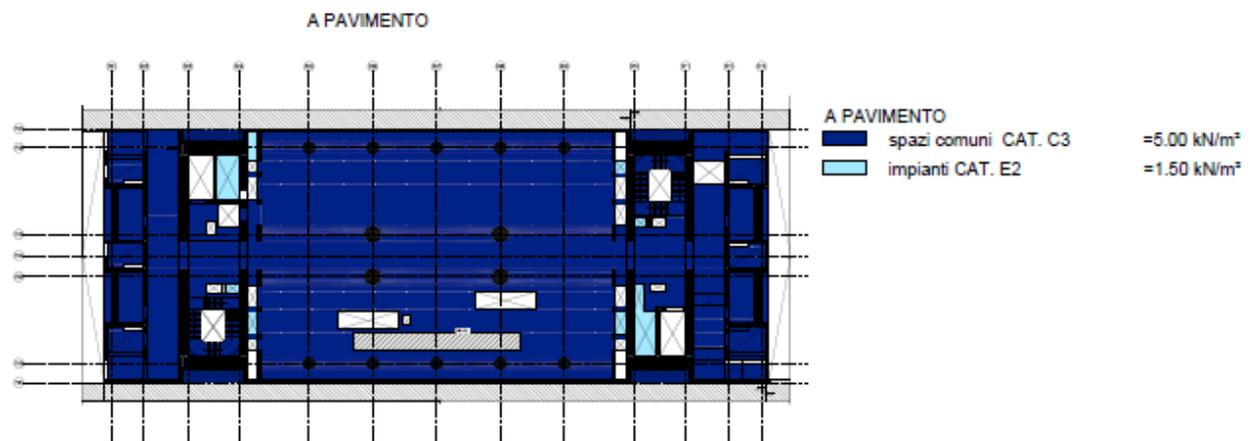
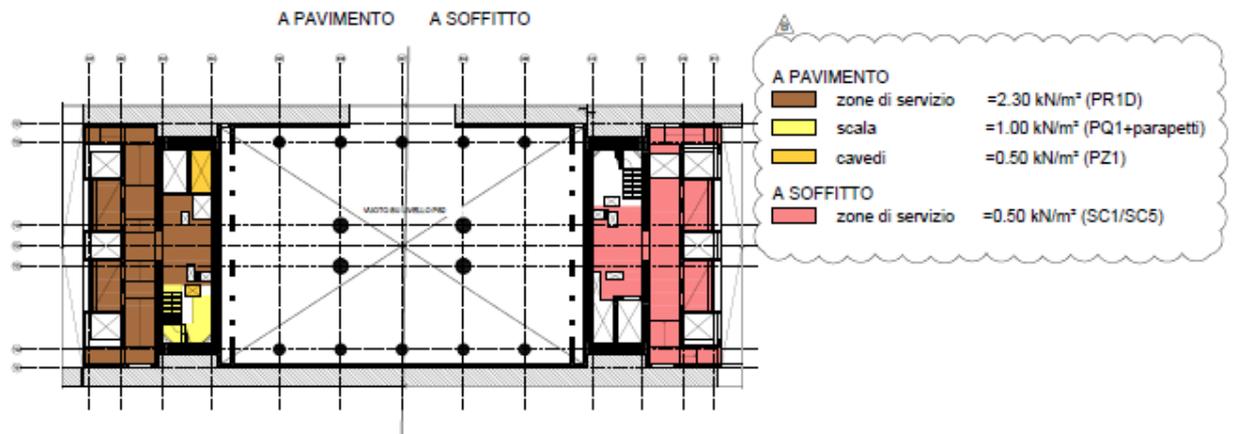


Figura 7.14 - Carichi livello PS2

CARICHI PERMANENTI PORTATI



CARICHI VARIABILI

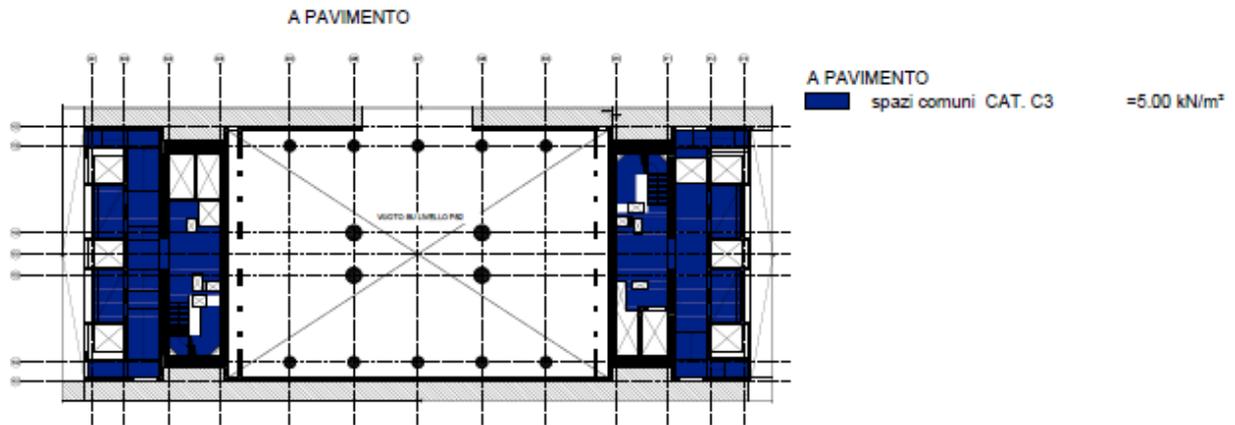
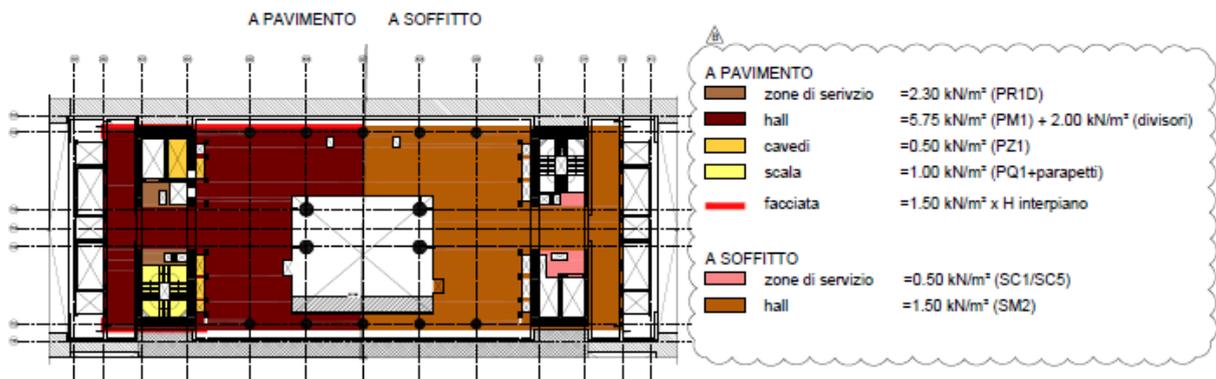


Figura 7.15 - Carichi livello PS1

CARICHI PERMANENTI PORTATI



CARICHI VARIABILI

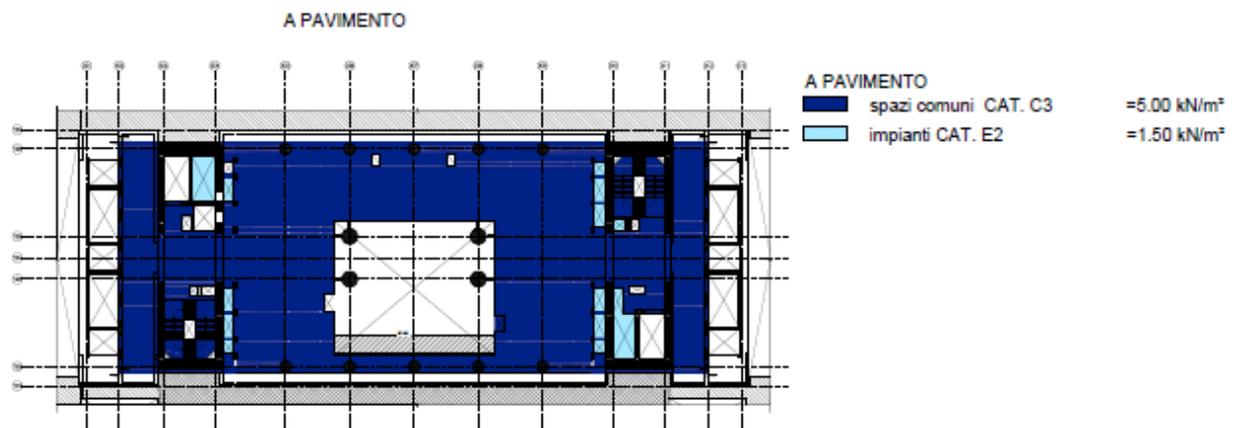
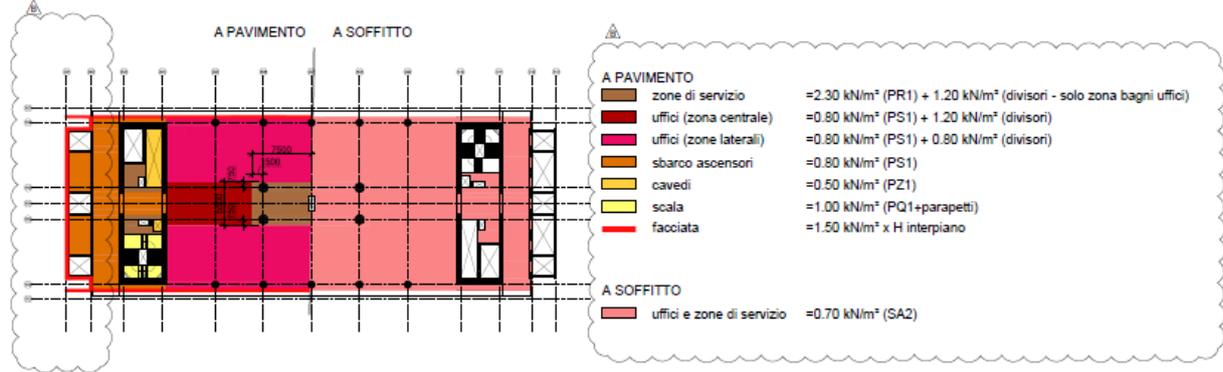


Figura 7.16 - Carichi livello P00

CARICHI PERMANENTI PORTATI



CARICHI VARIABILI

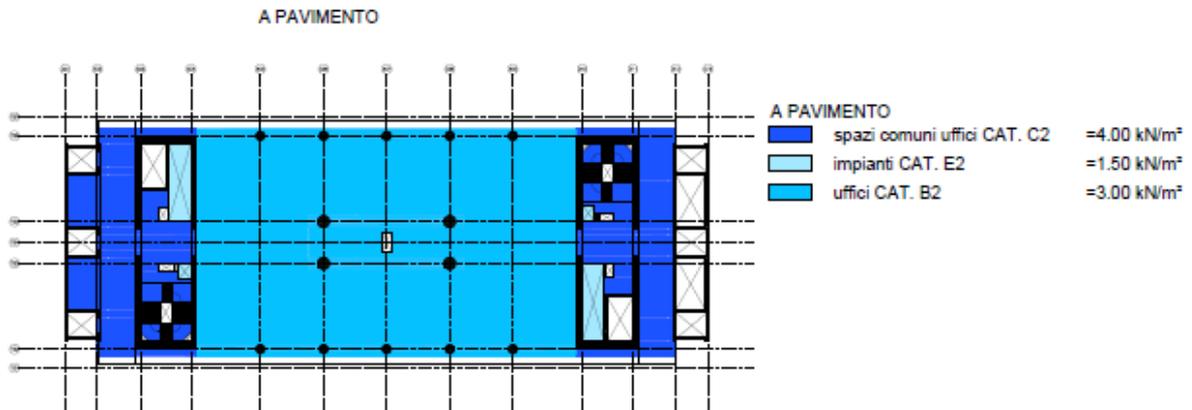
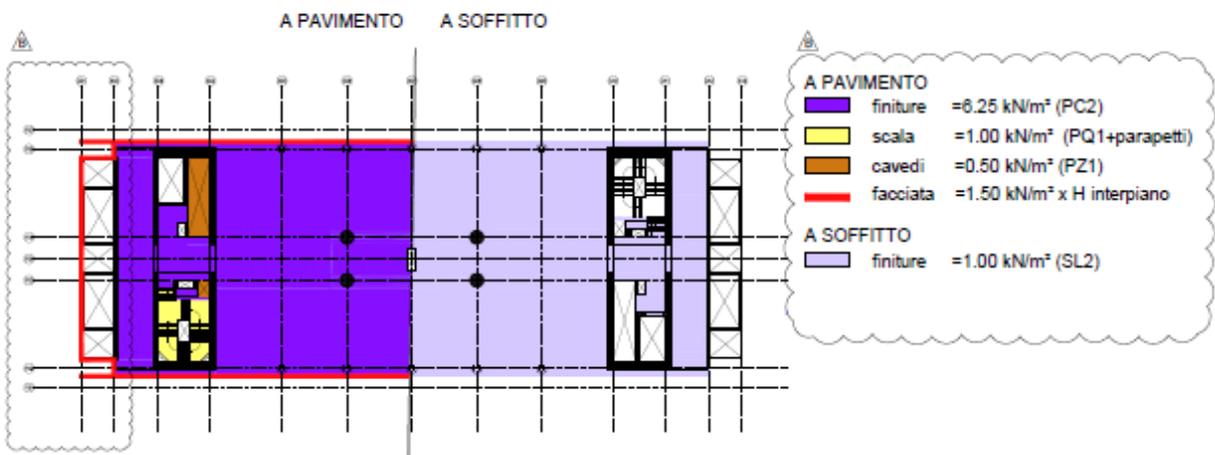
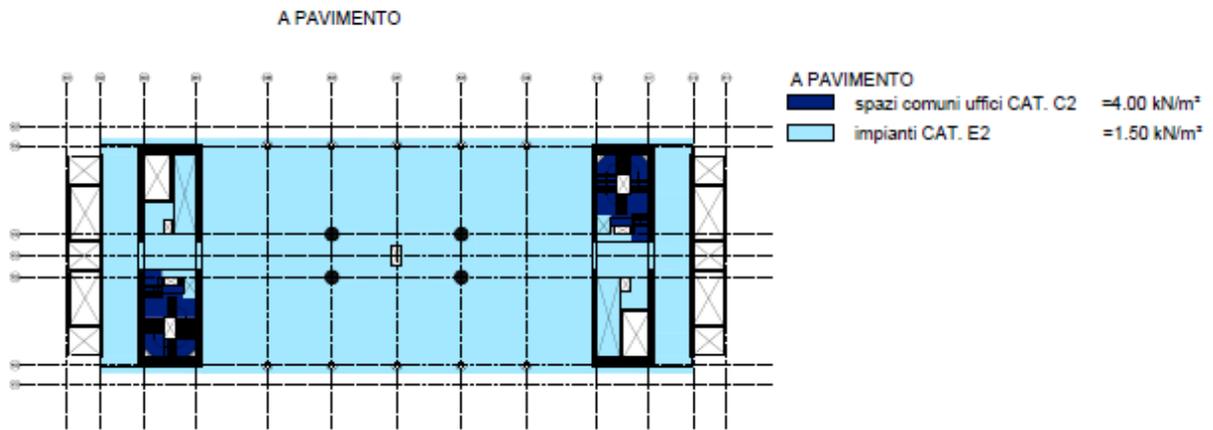


Figura 7.17 - Carichi livelli L.R., H.R.

CARICHI PERMANENTI PORTATI



CARICHI VARIABILI



CARICHI PERMANENTI IMPIANTI

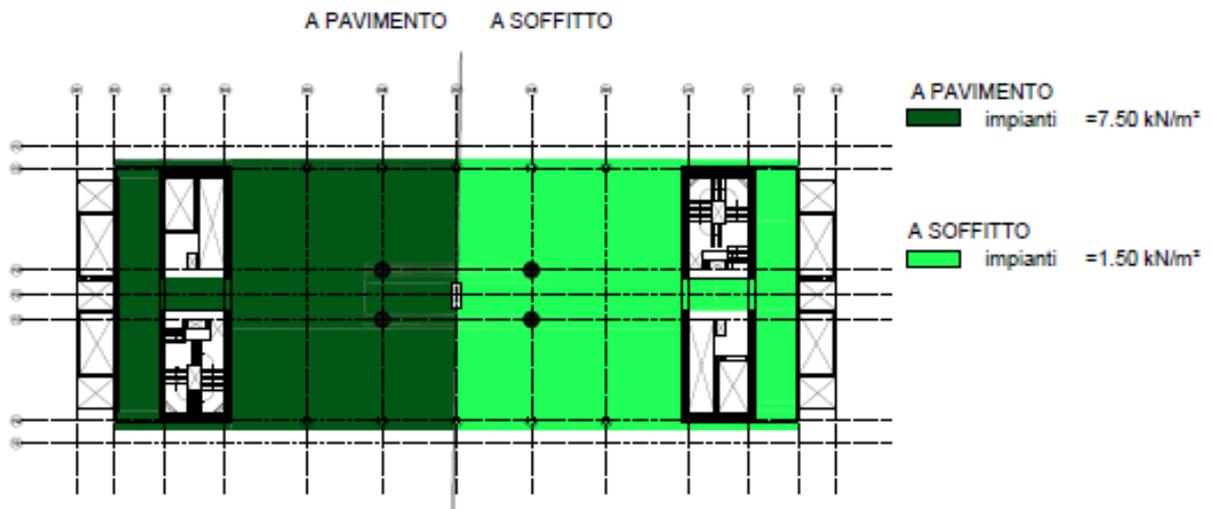
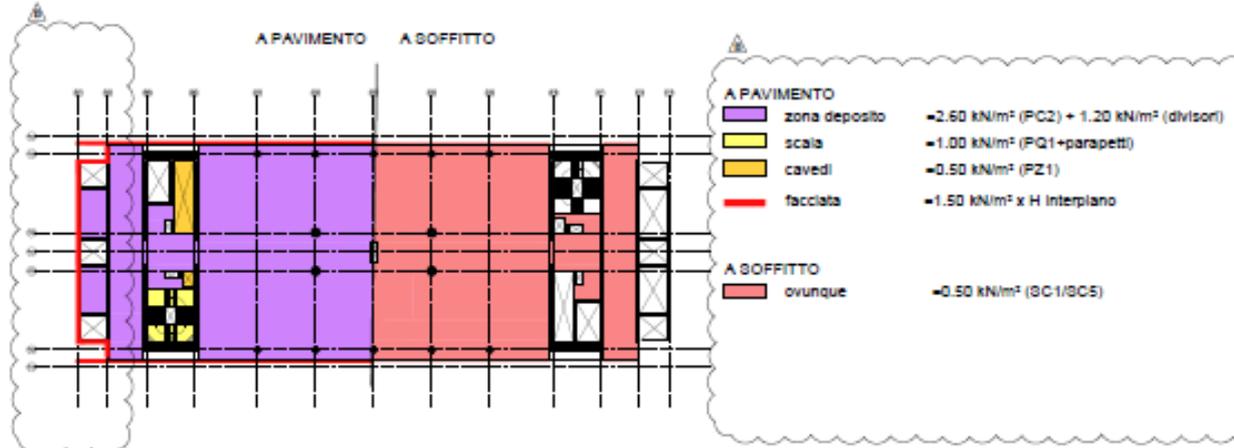


Figura 7.18 - Carichi livello P24

CARICHI PERMANENTI PORTATI



CARICHI VARIABILI

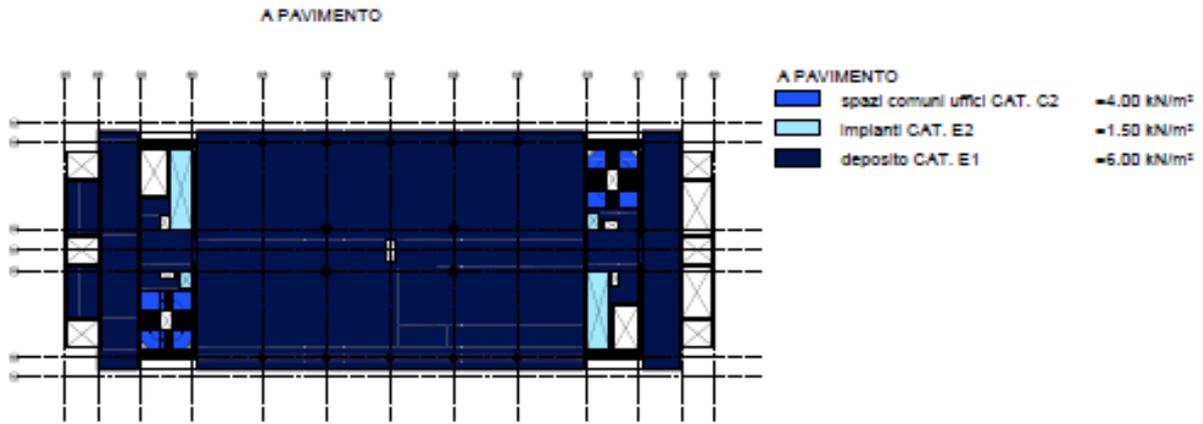
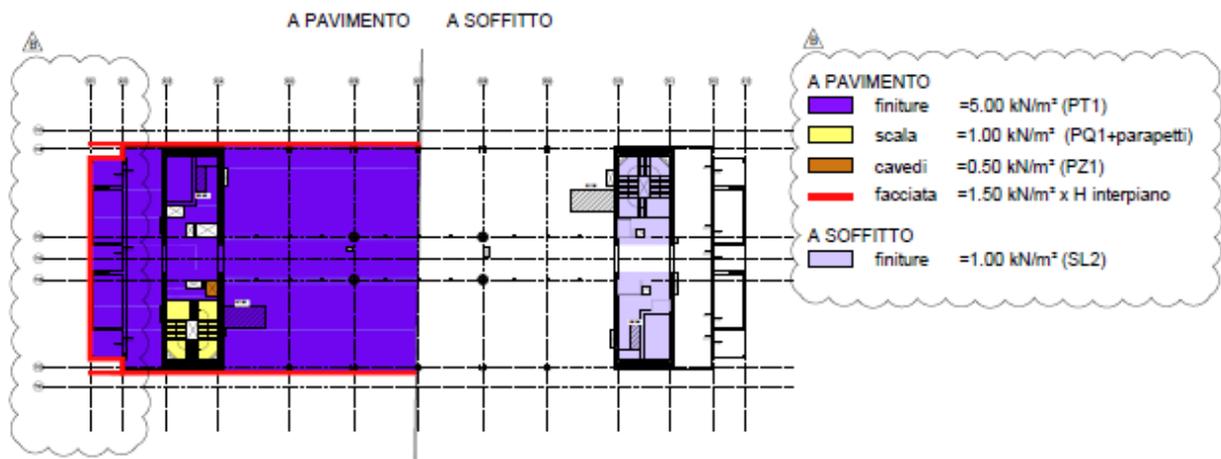
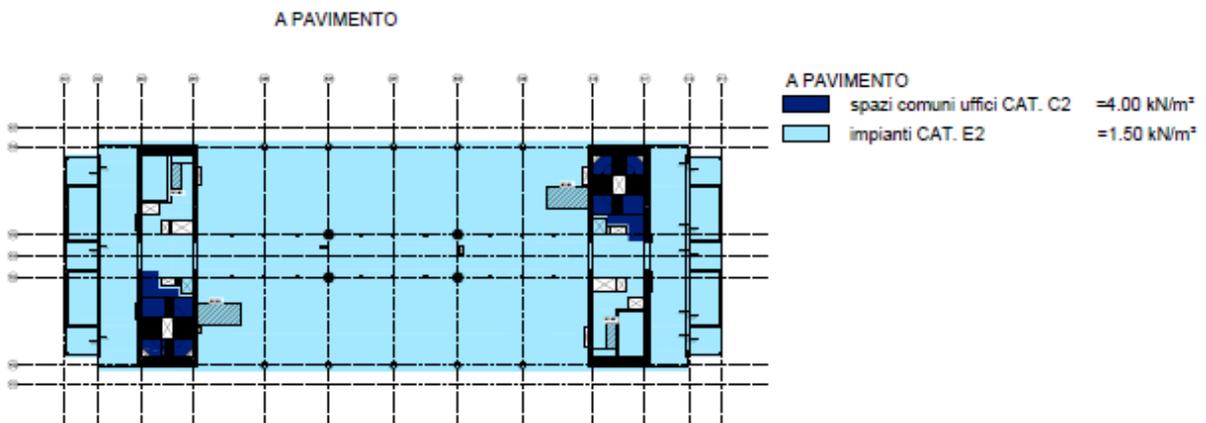


Figura 7.19 - Carichi livello P48

CARICHI PERMANENTI PORTATI



CARICHI VARIABILI



CARICHI PERMANENTI IMPIANTI

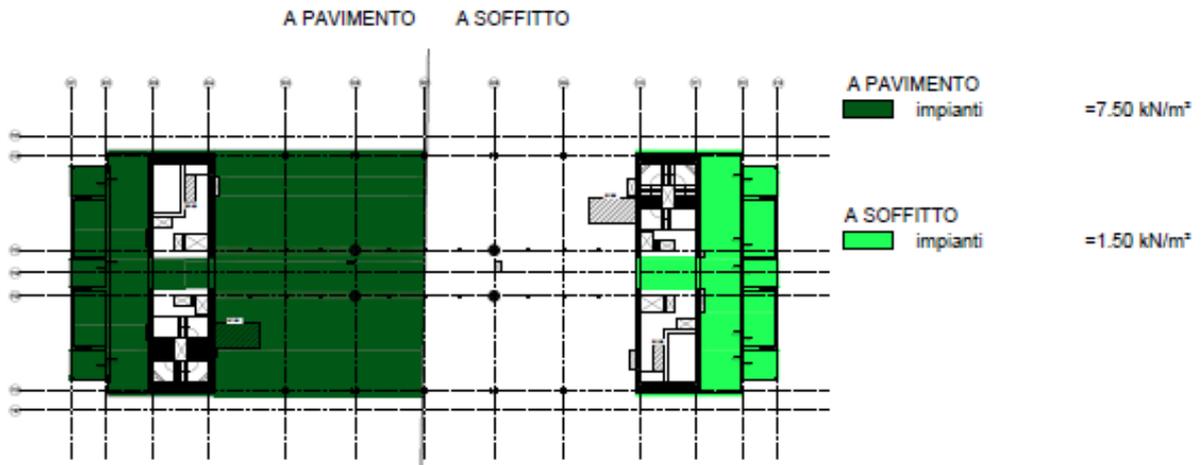
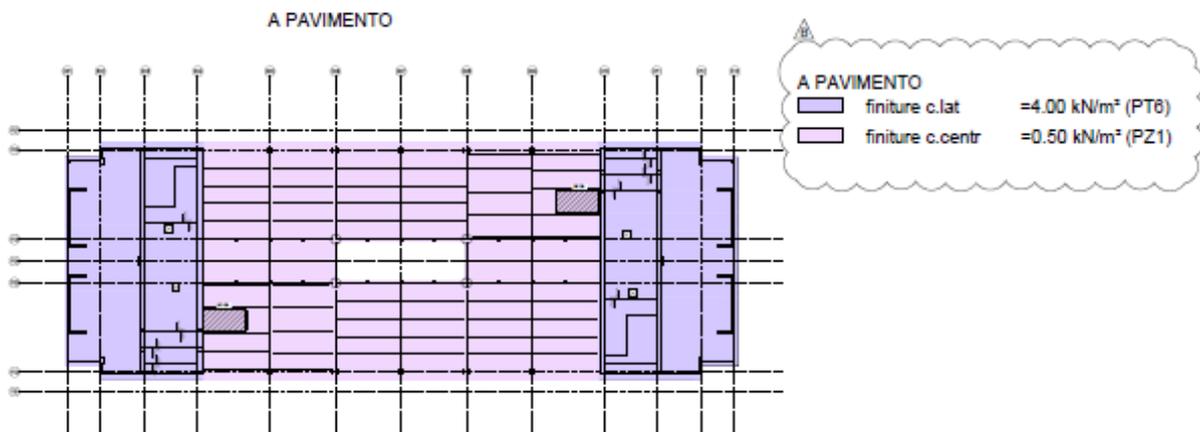


Figura 7.20 - Carichi livello P49

CARICHI PERMANENTI PORTATI



CARICHI VARIABILI



## CARICHI PERMANENTI IMPIANTI

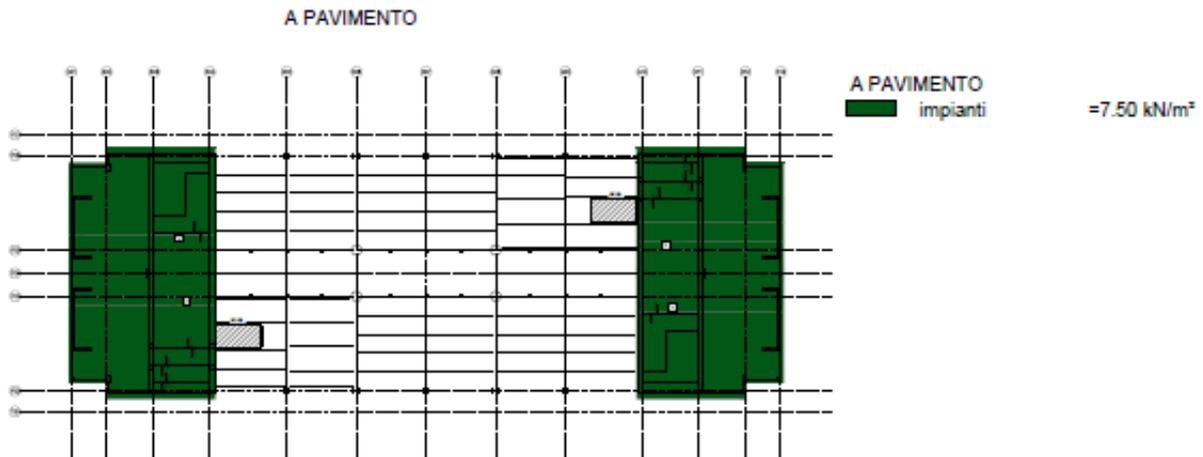


Figura 7.21 - Carichi livello P50

### 7.3 MODELLI STRUTTURALI PER LE ANALISI A LUNGO TERMINE

Sono state analizzate strutture di complessità via via crescente al fine di cogliere gli aspetti più importanti del comportamento della struttura nel suo complesso. I risultati sui quali si è posta maggiore attenzione sono il column shortening, le azioni assiali nelle colonne e nei nuclei e le sollecitazioni nelle travi per vari istanti di tempo .

La modellazione è stata implementata utilizzando il programma di calcolo MIDAS GEN, assumendo le seguenti ipotesi :

- tempo di costruzione dell'edificio pari a 715 giorni (circa due anni, come da cronoprogramma delle attività);
- comportamento viscoelastico lineare del calcestruzzo descritto dal modello CEB/FIP Code Code 90;
- compensazione delle deformazioni totali all'istante della realizzazione di ogni piano (*"Erection Sequence Analysis"*, par.6.3.7) ;

La prima struttura oggetto di analisi è stata una colonna di facciata considerata isolata dal resto dell'edificio. Successivamente tale colonna è stata inserita all'interno di un telaio bidimensionale, nel quale sono presenti tutte le 5 colonne esterne ed i due nuclei laterali. Sono state introdotte anche le travi che, per ogni piano fuori terra, corrono tra i due nuclei

collegando tutte le colonne. Il telaio in questione verrà denominato nel seguito "quinta di facciata" o più semplicemente "quinta".

Successivamente la modellazione ha previsto l'introduzione nella quinta delle due travi di cintura (7.1.1) tra i livelli P24-P25 e P49-P50. Queste travi rappresentano due vincoli elastici posticipati in tempi differenti nei confronti di una struttura viscoelastica non reologicamente omogenea.

I risultati ottenuti da questo modello sono stati comparati a quelli provenienti da un modello globale della struttura, che tiene conto del trasferimento delle azioni in direzione perpendicolare al piano della quinta.

Infine, come accennato nel paragrafo 7.1.1, è stata analizzata la soluzione del BT in calcestruzzo, e confrontata con i dati provenienti dal modello con BT in acciaio.

Parallelamente a queste analisi, si succedono studi di strutture molto semplici che hanno l'obiettivo di spiegare alcuni particolari comportamenti delle strutture di cui sopra.

### 7.3.1 COLONNA SINGOLA

Nel seguito verrà analizzata la colonna esterna centrale evidenziata in fig... al fine di evidenziare il suo comportamento in termini di column shortening e di azioni assili

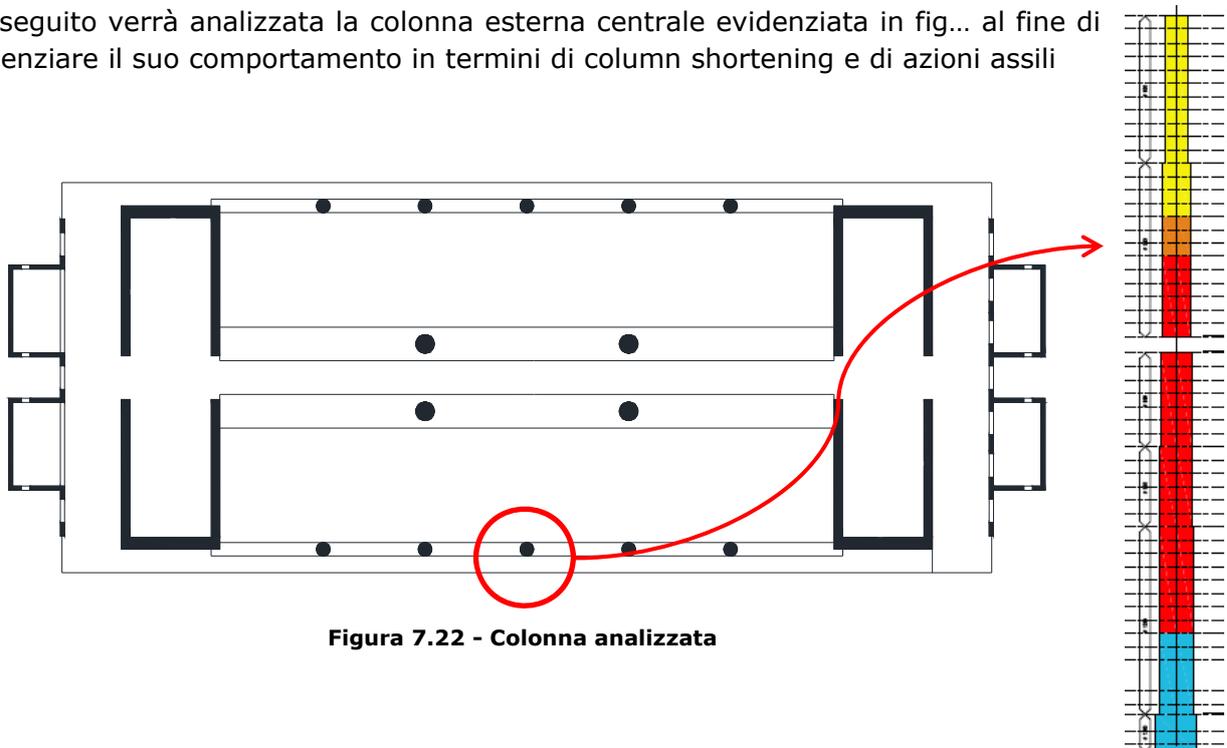


Figura 7.22 - Colonna analizzata

#### 7.3.1.1 Descrizione del modello

Il modello si compone di 56 nodi e 55 elementi BEAM, uno per ogni piano della torre. Poiché è assente l'armatura le sezioni degli elementi sono state prese pari a quelle lorde indicate in Tabella 6.

La prima modellazione è stata effettuata descrivendo il filo fisso corrispondenti ad una colonna esterna dell'edificio; tale operazione consiste principalmente nella definizione dei nodi e di conseguenza nel loro collegamento con elementi BEAM.

Successivamente sono state assegnate le caratteristiche geometriche e dei materiali come segue:

<b>Intervallo Livelli</b>	<b>Tipo di sezione</b>	<b>Diametro [cm]</b>	<b>Materiale</b>
P49 - P50	Acciaio	A = 1383.84 cm <sup>2</sup>	S460
P48 - P49	Mista acc-calc	65	C40/49
P38 - P48	Calcestruzzo armato	65	C40/50
P36 - P38	Calcestruzzo armato	80	C50/60
P26 - P36	Calcestruzzo armato	80	C50/60
P25 - P26	Mista acc-calc	80	C50/60
P24 - P25	Acciaio	A = 1383.84 cm <sup>2</sup>	S460
P23 - P24	Mista acc-calc	90	C70/85
P17 - P23	Calcestruzzo armato	90	C70/85
P11 - P17	Calcestruzzo armato	95	C70/85
P04 - P11	Calcestruzzo armato	100	C70/85
PS2 - P04	Mista acc-calc	100	C70/85
PI3 - PS2	Mista acc-calc	120	C50/60

**Tabella 6 - Sezioni colonne di facciata**

I carichi adottati per l'analisi effettuata sono dati dai pesi propri e portati e dal 30% dei variabili in quanto:

- In un'analisi che voglia studiare il regime di sforzi e deformazioni rispettando l'effettiva costruzione per stage, gli abbassamenti compensabili in fase di costruzione sono dati dai soli carichi della struttura messa in opera; il 30 % dei variabili viene conteggiato per tenere in conto dei sovraccarichi esistenti durante la costruzione per la presenza di macchinari e maestranze.
- Gli effetti viscosi diventano significativi per i soli carichi costanti nel tempo; si è ipotizzato dunque che il 30 % dei variabili sia costantemente agente in tutta la vita utile dell'edificio.

Questi carichi sono stati ricavati con il metodo delle aree di influenza (Tabella 7) e sono stati applicati come forza nodale alla sommità di ogni elemento; tale forza include a favore di sicurezza il peso proprio dell'elemento posto al di sotto del nodo; la forza in questione andrebbe più precisamente applicata come carico distribuito lungo l'elemento.

Livello	Carico [t]
P50	3,98
P49	92,18
P48	63,69
P47	44,24
P41 - P46	43,93
P26 - P40	45,66
P25	43,01
P24	218,07
P19 - P23	46,99
P13 - P18	47,7
P02 - P12	50,56
P01	63,1
P00	110,39
PS1	7,55
PS2	107,54
PI1	117,88
PI2	5,1
TOT	-2902,82

Tabella 7 - Carichi sulla colonna

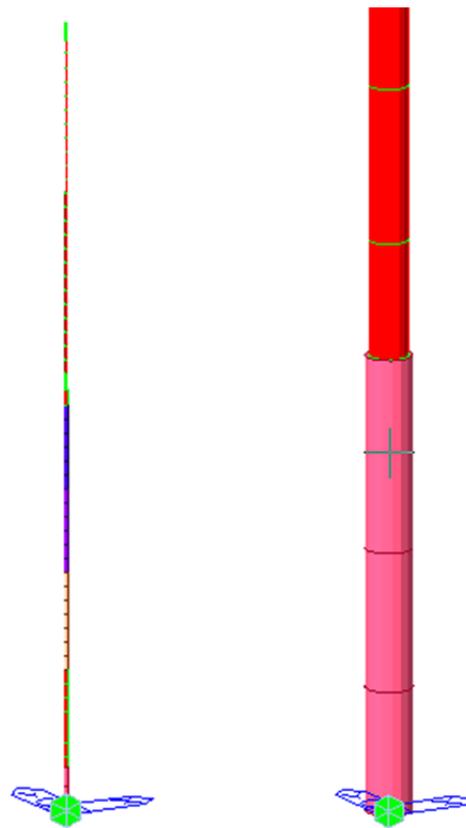


Figura 7.23 - Modello in Midas Gen della colonna

La struttura viene costruita per fasi (6.3.7); in particolar modo, in accordo con il cronoprogramma dei lavori la durata di una singola fase è di 13 gg. Ogni colonna infatti viene costruita e caricata dopo 13 giorni. Subito dopo l'applicazione del carico viene costruita la colonna sovrastante eventualmente compensando l'abbassamento della sommità della colonna inferiore; tale abbassamento è dovuto sia alle deformazioni viscosi dovute ai carichi applicati ai piani inferiori accumulate nei 13 giorni sia alle deformazioni elastiche dovute al carico applicato alla fine della fase.

7.3.1.2 Risultati ottenuti

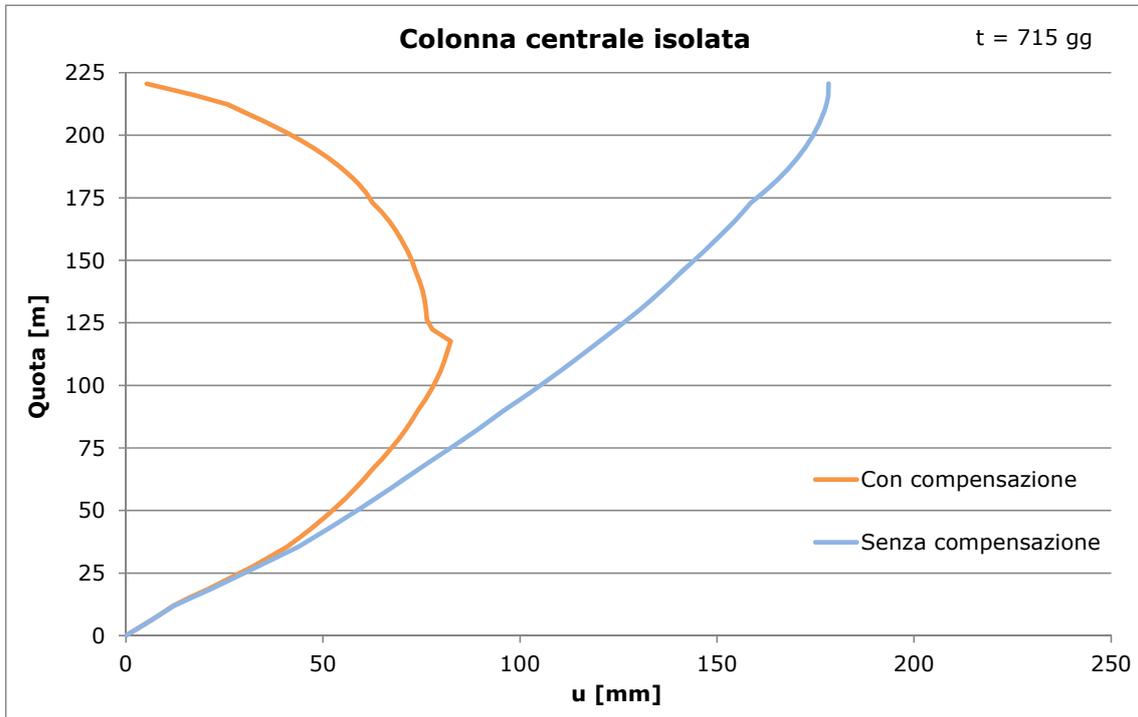


Figura 7.24 - Column shortening colonna centrale isolata

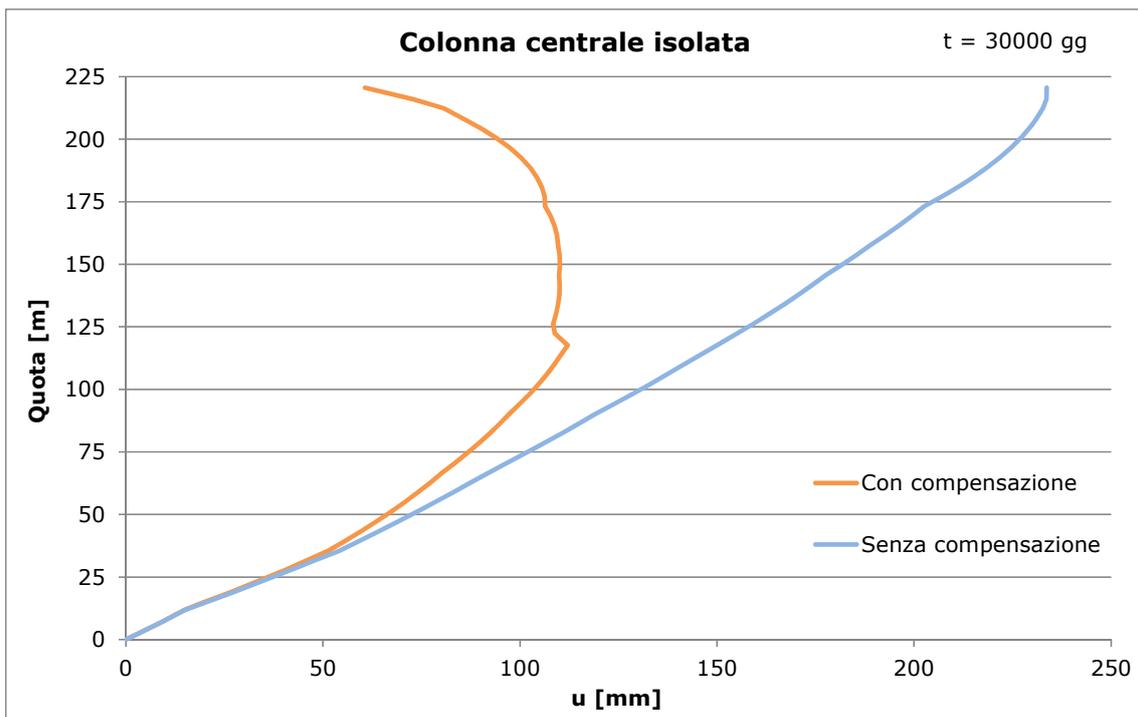


Figura 7.25 - Column shortening colonna centrale isolata

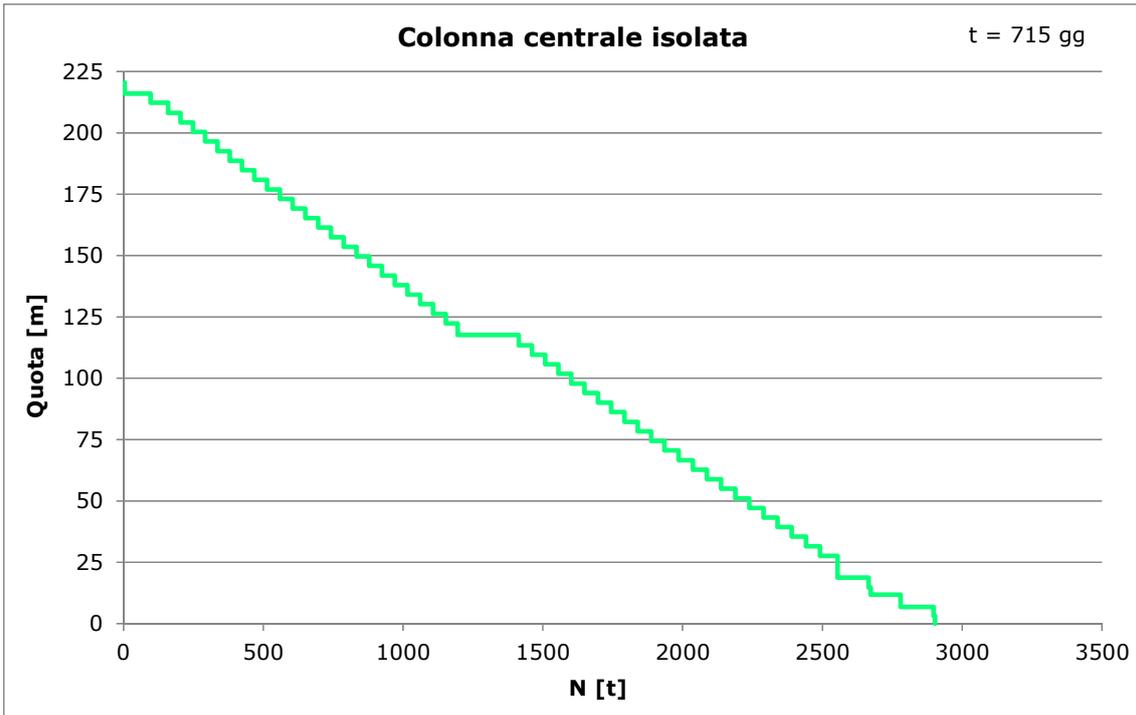


Figura 7.26 - Azioni assiali colonna centrale isolata

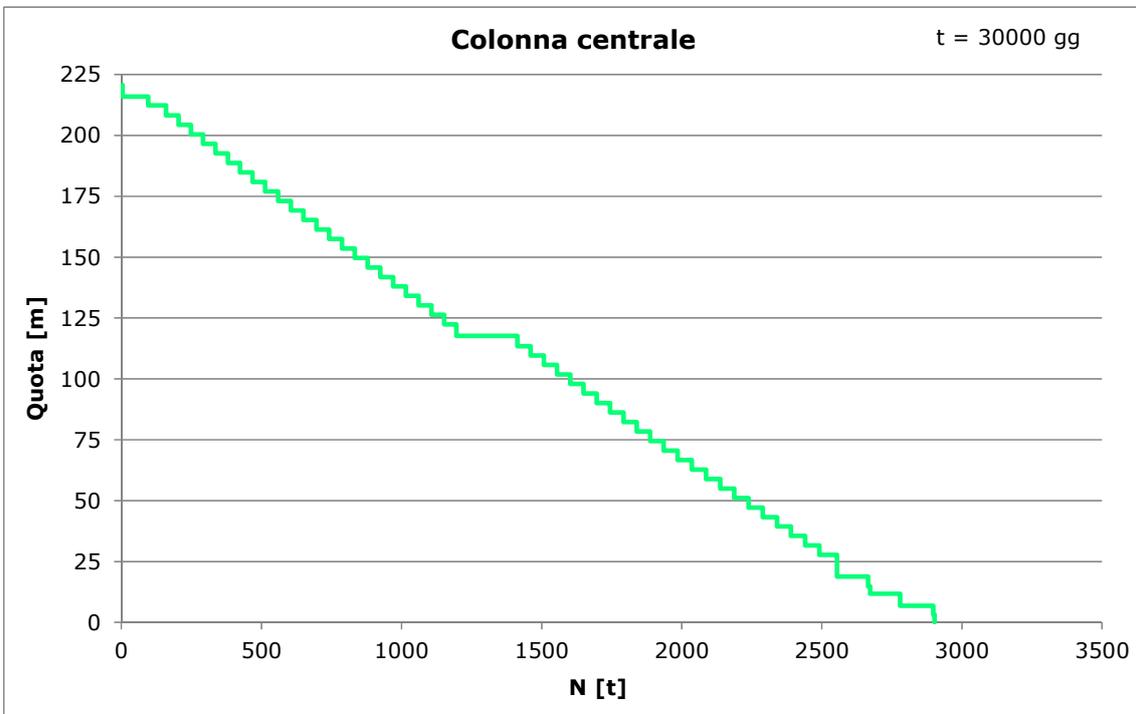


Figura 7.27 - Azioni assiali colonna centrale isolata

**7.3.1.3 Analisi dei risultati**

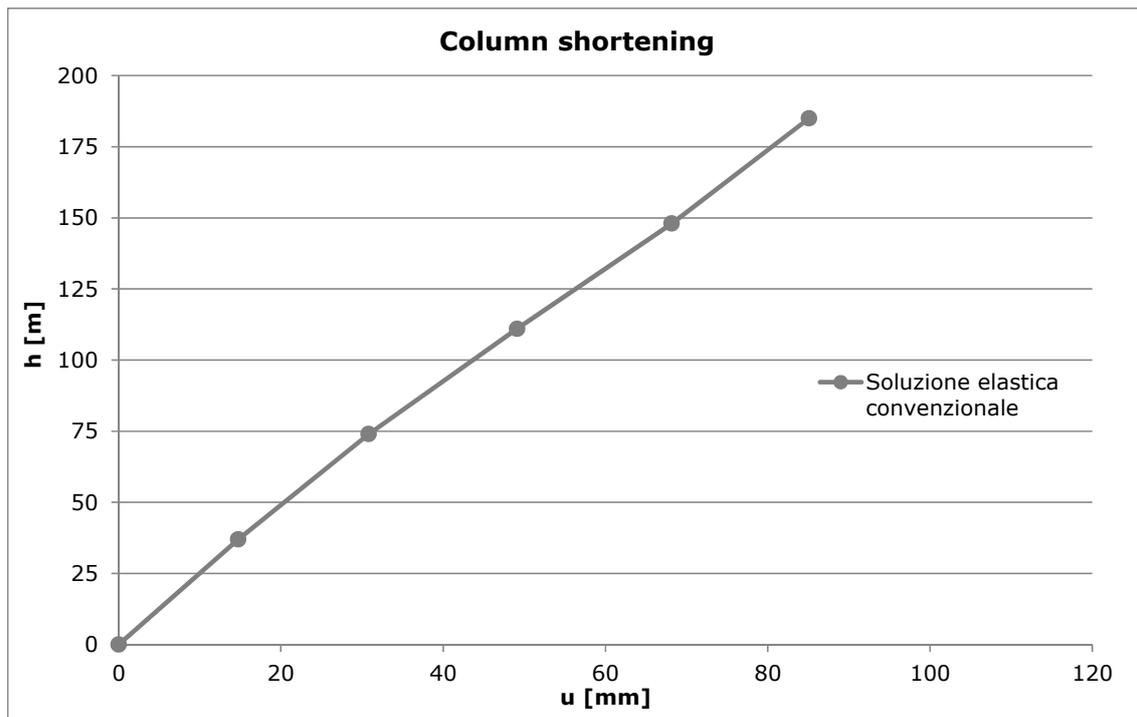
Per quanto la colonna singola appena analizzata possa apparire una struttura semplice, in seguito alle numerose disomogeneità dei materiali, delle caratteristiche geometriche e dei carichi, i risultati non sono di immediata interpretazione.

Per trarre alcune considerazioni di carattere generale sulle colonne di edifici alti in calcestruzzo armato, si analizza una struttura costituita da cinque elementi verticali a sezione circolare ciascuno di lunghezza pari a 37 m e caricato da una forza concentrata di entità pari a 500 tonnellate. Le caratteristiche di tale struttura sono riportate in



	Asta 1	Asta 2	Asta 3	Asta 4	Asta 5
<b>d [cm]</b>	140	120	100	80	60
<b>l [m]</b>	37	37	37	37	37
<b>h<sub>0</sub> [mm]</b>	700	600	500	400	300
<b>f<sub>ck</sub> [MPa]</b>	60	60	50	50	50
<b>P [t]</b>	500	500	500	500	500
<b>t [gg]</b>	0	100	100	300	400
<b>T [gg]</b>	100	200	300	400	500
<b>RH [%]</b>	70				

**Tabella 8 - Caratteristiche struttura (t istante di fine maturazione ,T istante di messa in carico)**



**Figura 7.28 - Column shortening con soluzione elastica convenzionale**

Le ipotesi di base dell'analisi elastica convenzionale di costruzione e messa in carico istantanee sono irrealistiche poiché come nel caso della Torre Isozaki l'avanzamento dei lavori può durare anche più di due anni. È necessario effettuare un'analisi per fasi con compensazione degli abbassamenti (par. 5.2) che, nel caso in esame, porta ad una soluzione come quella di Figura 7.29)

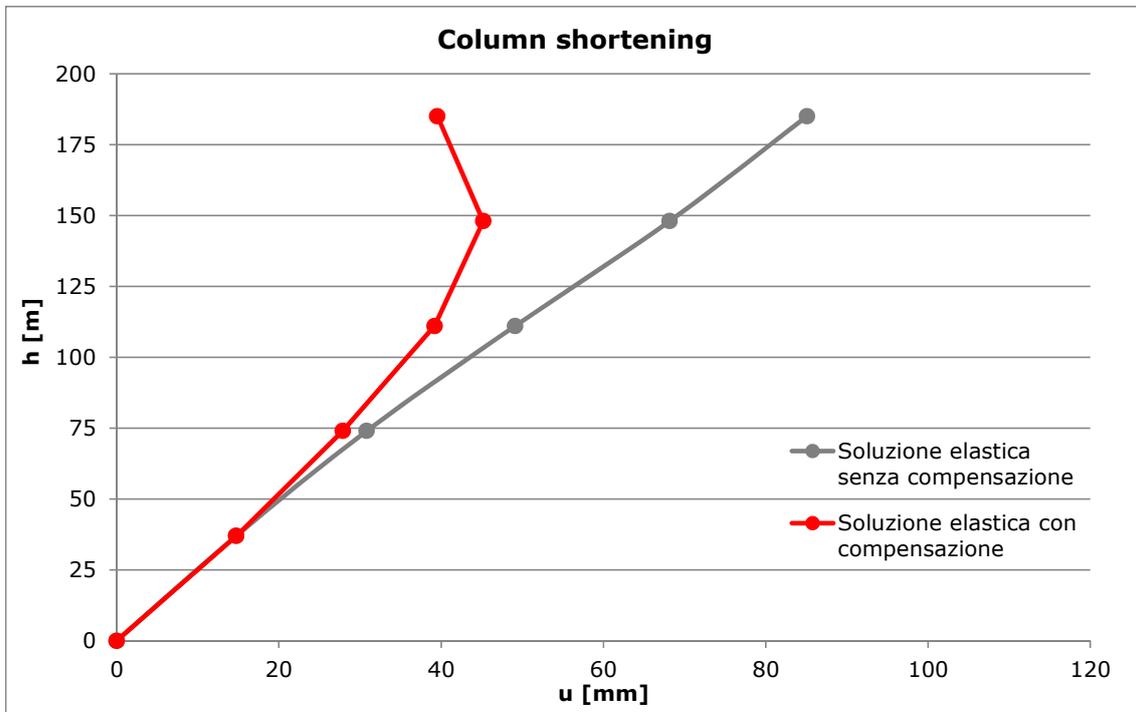


Figura 7.29 - Confronto fra soluzioni elastica convenzionale e elastica con compensazione

Nella struttura analizzata si ottengono degli abbassamenti in accordo a quanto esposto nel paragrafo 5.2.2, con notevole riduzione della loro entità e valore massimo in corrispondenza di un punto intermedio.

Un'analisi elastica per fasi, pur essendo più appropriata di quella convenzionale, non interpreta l'evoluzione nel tempo del comportamento della struttura.

Per ovviare a tale deficienza si può condurre un'analisi di tipo visco-elastica lineare per fasi (Figura 7.30 e Figura 7.31)

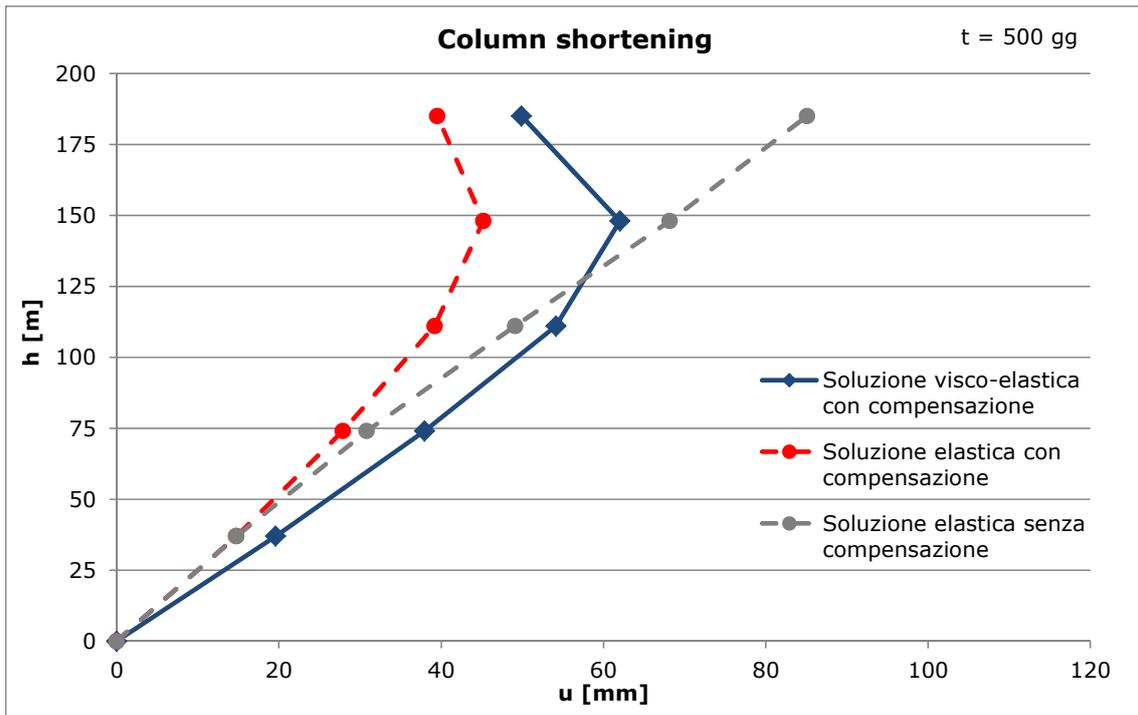


Figura 7.30 - Confronto fra soluzioni elastica e visco-elastica (t = 500 gg)

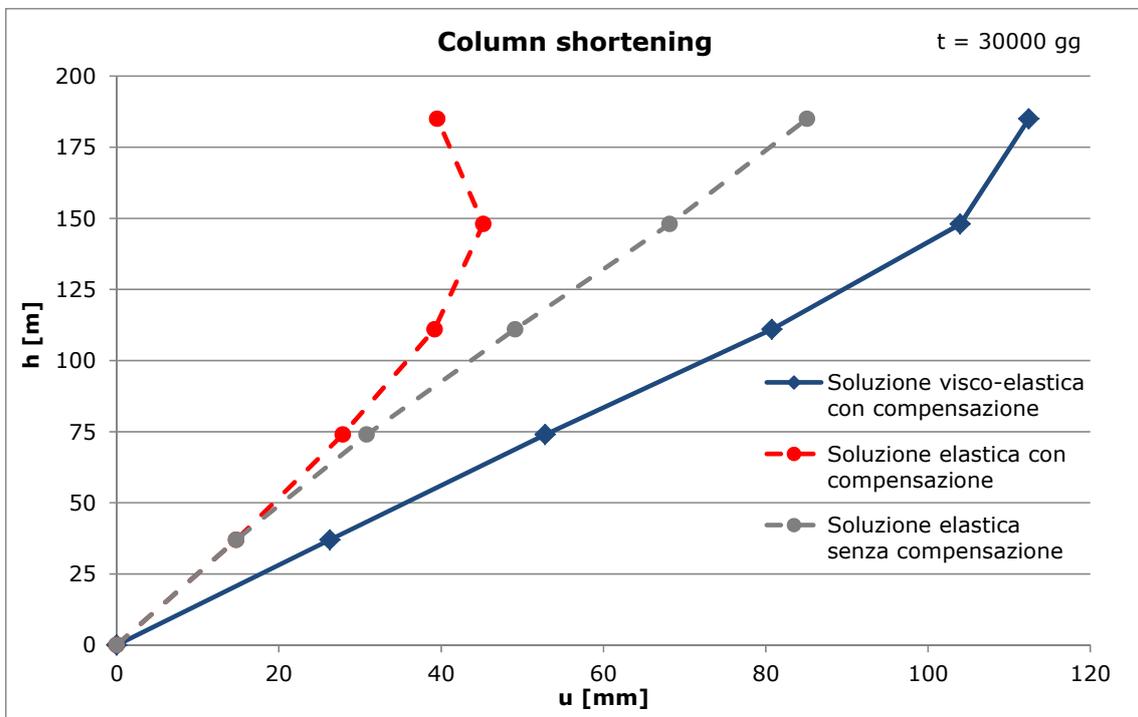


Figura 7.31 - Confronto fra soluzioni elastica e visco-elastica (t = 30000 gg)

Analizzando i risultati ottenuti si evince come gli spostamenti evolvono significativamente nel tempo e come a fine costruzione la soluzione visco-elastica differisca da quella elastica a causa della viscosità durante la costruzione

L'andamento della soluzione relativa alla colonna singola della Torre Isozaki rispecchia quanto visto fino ad ora per il caso semplificato.

Le differenze più significative si riscontrano:

- nella variazione di pendenza più graduale dovuta alla presenza di numerose fasi costruttive
- nella cuspide in corrispondenza del belt truss inferiore dovuta ad un carico elevato sul livello P24 (paragrafo 7.3.4.3).

Nel successivo paragrafo si studiano gli effetti della presenza di quantitativi più o meno elevati di armatura sul column shortening.

## **7.3.2 COLONNA SINGOLA CON ARMATURA**

### **7.3.2.1 Descrizione del modello**

Il software di calcolo Midas Gen non consente l'analisi per fasi e viscoelastica di strutture con membrature miste acciaio-calcestruzzo. I risultati che verranno esposti nel seguito sono frutto di un espediente che consiste nel sovrapporre due elementi BEAM (par. 6.2.1) con sezioni aventi aree equivalenti a quelle realmente presenti (nel caso di sezioni miste acciaio-calcestruzzo, visti gli elevati quantitativi d'armatura, si considera l'area netta di calcestruzzo). Così facendo si impone la congruenza dei nodi d'estremità di tali elementi e, nel caso esaminato di sola azione assiale centrata, questo corrisponde ad imporre la congruenza delle deformazioni dell'armatura e del calcestruzzo in ogni sezione dell'elemento.

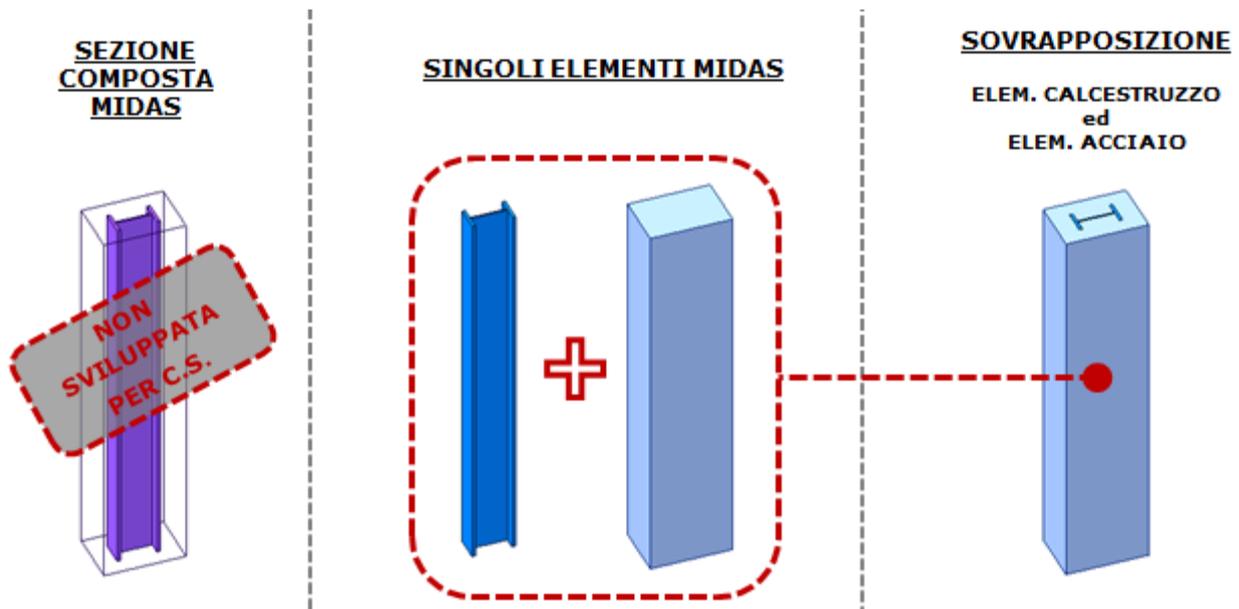


Figura 7.32 - Tecnica di modellazione

Per validare tale modellazione, i risultati del software (tensioni e deformazioni in una sezione) vengono confrontati con quelli teorici.

In analogia all'esempio applicativo visto nel par 4.2.6.1, una sezione in C.A. soggetta ad un'azione di compressione centrata  $P$  può essere vista come un sistema viscoelastico lineare nel quale è presente un vincolo elastico rappresentato dalle barre d'armatura  $\sigma$ , nel caso di sezione miste acciaio-calcestruzzo, dall'insieme delle barre d'armatura e dal profilo metallico.

L'ipotesi di perfetta aderenza tra l'armatura ed il calcestruzzo permette di scrivere un'equazione di congruenza analoga alla 4.1 che, con opportuni passaggi, diventa la (4.10):

$$X(t) = X_{er}(t_0) \cdot \left[ 1 - R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (4.10)$$

Nel caso specifico dell'analisi sezionale  $X(t)$  rappresenta la quota parte del carico  $P$  che agisce sulla parte metallica mentre sul calcestruzzo agisce una forza d'entità  $P-X(t)$ .

Il valore del fattore di accoppiamento si ricava tenendo conto dei coefficienti di flessibilità del calcestruzzo  $\delta_c$  e dell'acciaio  $\delta_s$ . Si ottiene dunque:

$$\omega(t_0) = \frac{\delta_c(t_0)}{\delta_c(t_0) + \delta_s} = \frac{1/[E_c(t_0)A_c]}{1/[E_c(t_0)A_c] + 1/(E_sA_s)}$$

Secondo quanto appena detto è possibile calcolare l'andamento delle tensioni nei due componenti di due sezioni come quelle di Figura 7.33 e Figura 7.34 . La prima è una sezione in calcestruzzo armato con percentuali geometriche d'armatura  $\rho$  variabili tra l'1 ed il 4%, mentre la seconda è una sezione mista acciaio-calcestruzzo con  $4 \% \leq \rho \leq 10 \%$  . Il calcestruzzo è caratterizzato da un  $f_{ck}$  pari a 40 MPa; la sezione ha uno spessore nominale pari a 500 mm ed è caricata a 7 gg; l'umidità relativa dell'ambiente circostante è del 70 %.

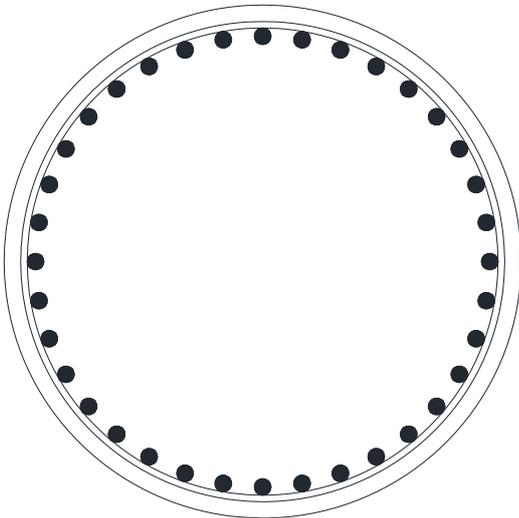


Figura 7.33 - Sezione in calcestruzzo armato

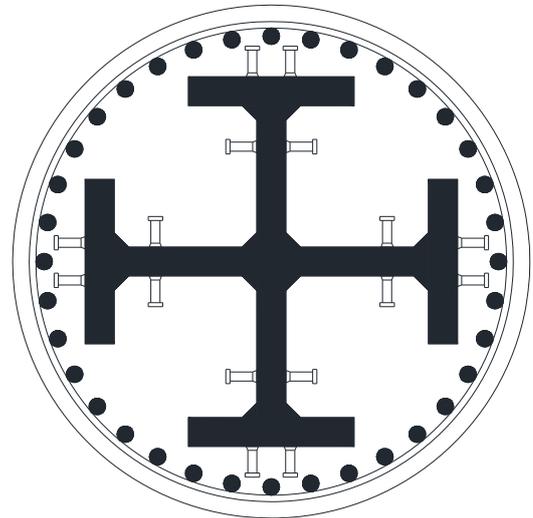


Figura 7.34 - Sezione mista acciaio - calcestruzzo

Di seguito vengono riportati gli andamenti delle tensioni nell'acciaio e nel calcestruzzo, l'andamento delle deformazioni ed il confronto con la soluzione di Midas Gen.

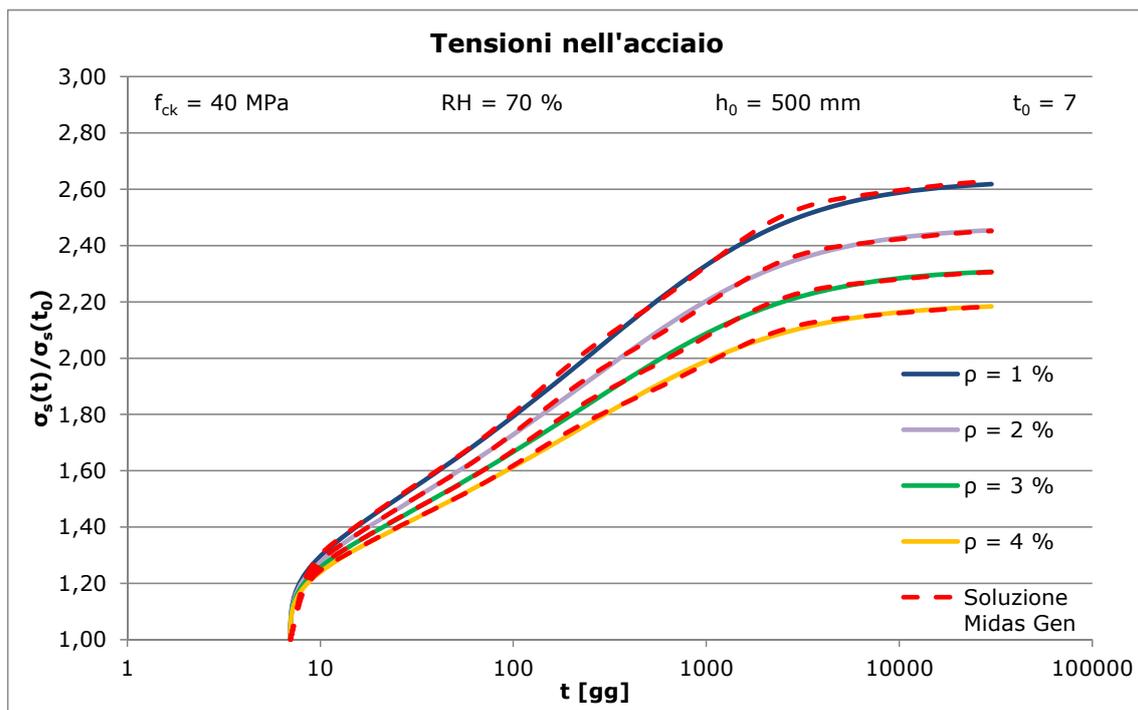


Figura 7.35 - Tensioni nelle barre d'armatura (sezione in c.a.)

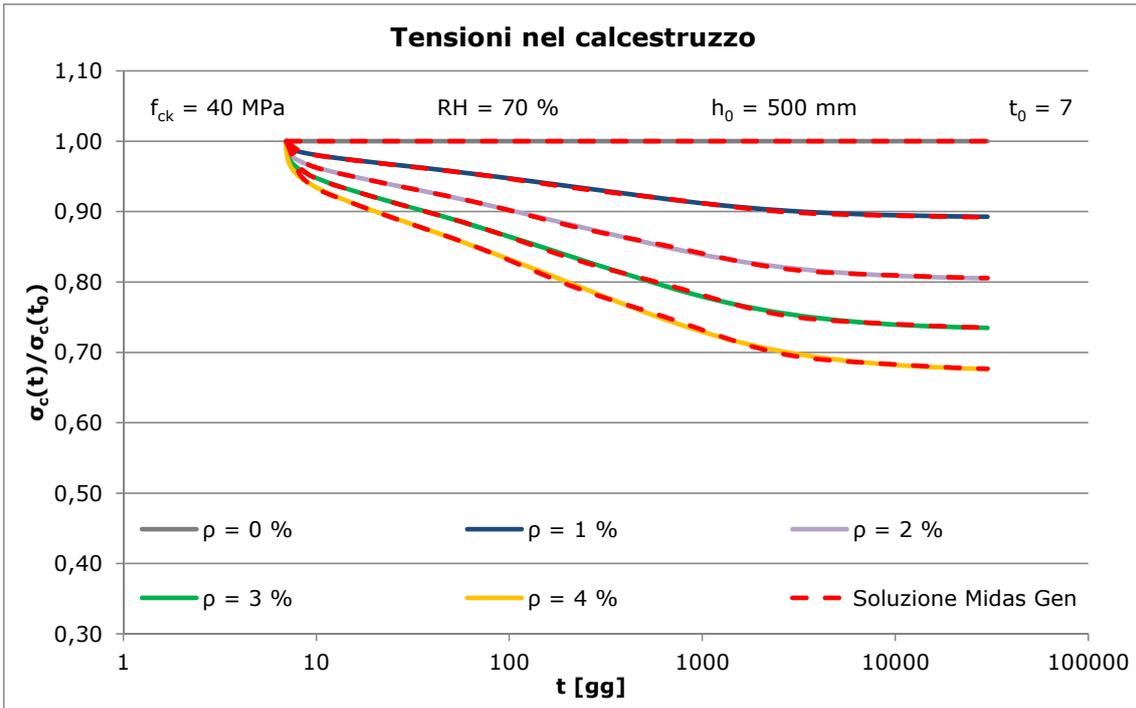


Figura 7.36 - Tensioni nel calcestruzzo (sezione in c.a.)

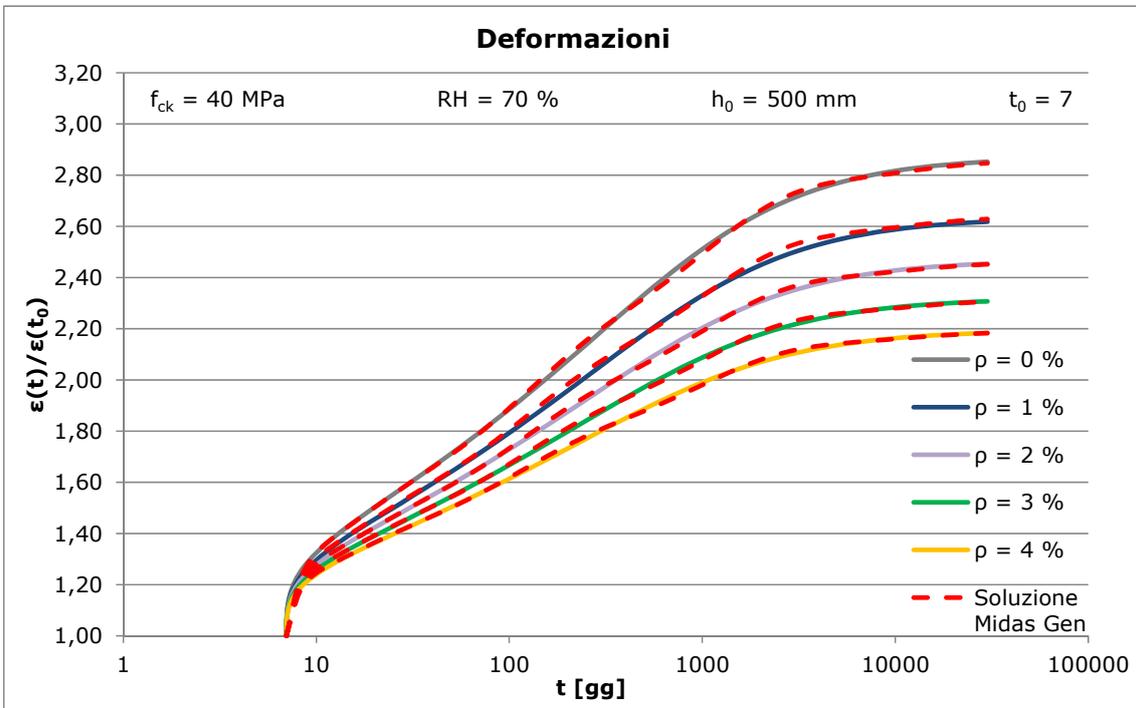


Figura 7.37 - Deformazioni (sezione in c.a.)

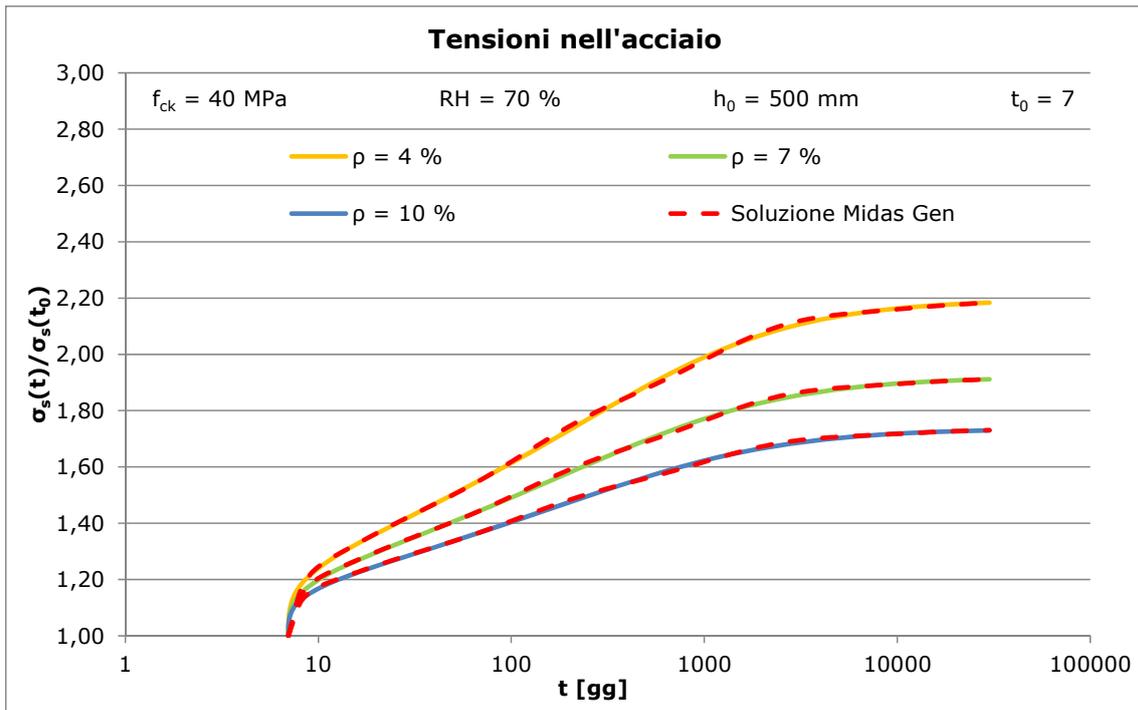


Figura 7.38 - Tensioni nel profilo metallico (sezione mista)

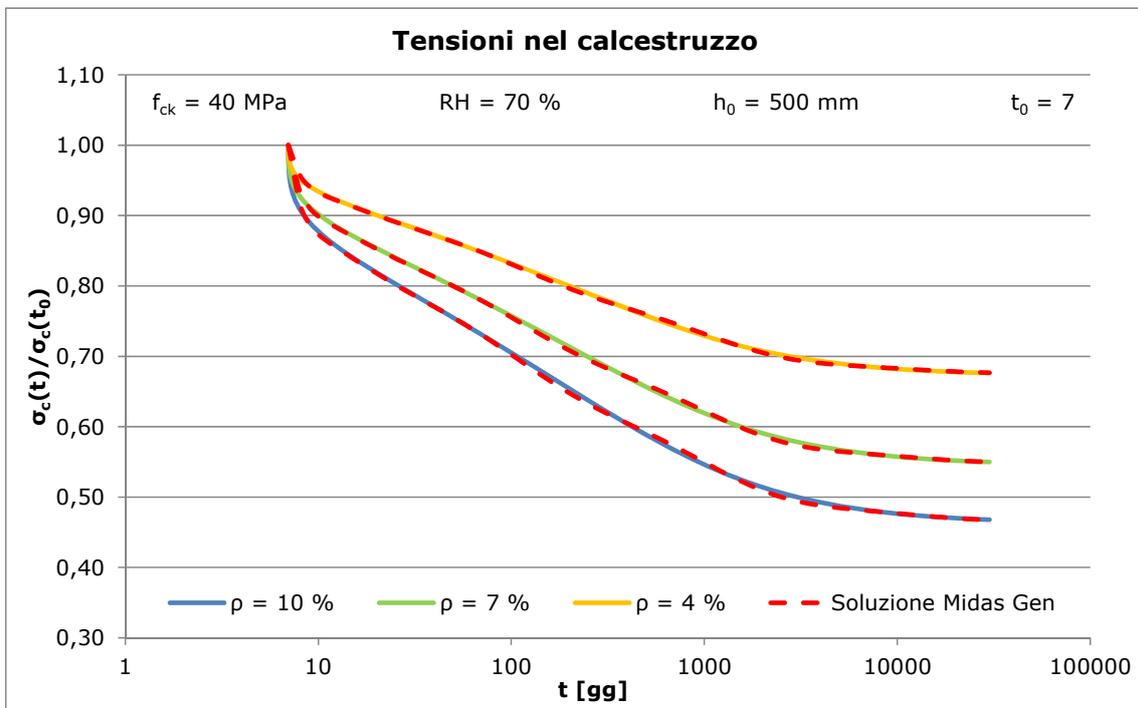


Figura 7.39 - Tensioni nel calcestruzzo (sezione mista)

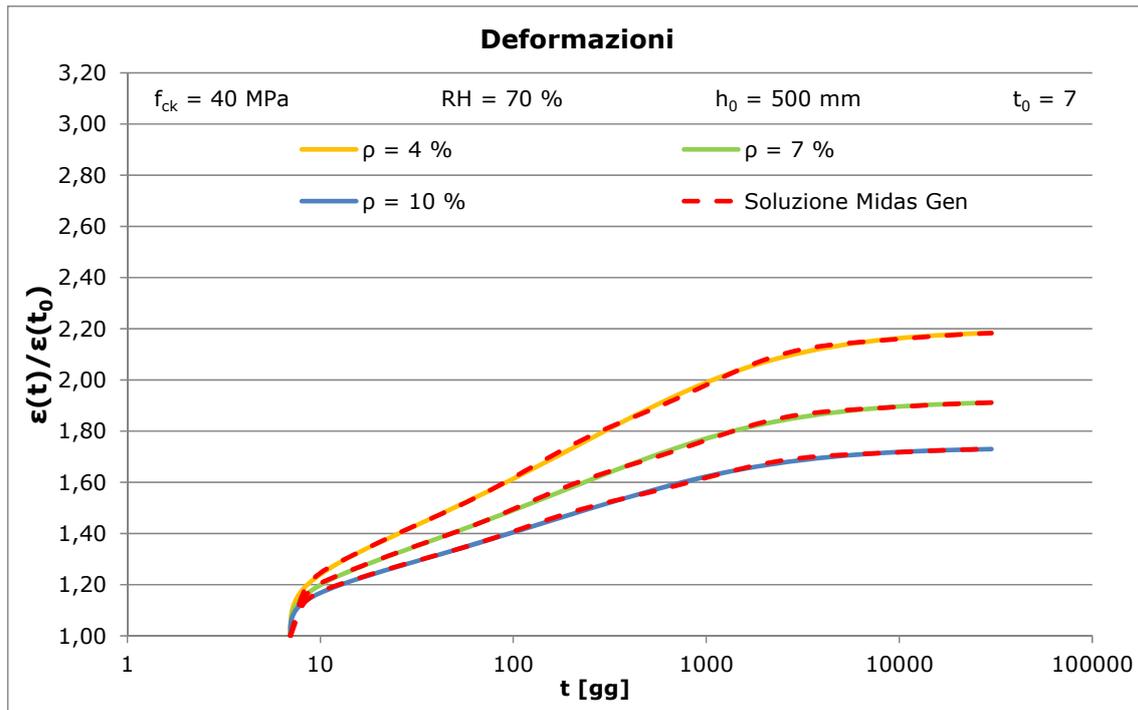


Figura 7.40 - Deformazioni (sezione mista)

Si nota come a tempo infinito le sezioni in calcestruzzo armato incrementino notevolmente la tensione nelle barre d'armatura e come le sezioni miste arrivino quasi a dimezzare la tensione nel calcestruzzo.

Per valori di  $\rho$  superiori al 4% (situazione tipica per le colonne di edifici alti in calcestruzzo armato) si hanno deformazioni a tempo infinito inferiori a circa 2,2 volte quelle elastiche iniziali; la presenza di elevati quantitativi d'armatura viene infatti riconosciuta come la principale soluzione a problemi legati all'accorciamento delle colonne negli edifici alti in c.a., visto anche il caso limite di assenza di armatura (Figura 7.37) che porterebbe a valori finali di deformazione superiori a 2,8 volte quelli elastici.

Dal confronto con la soluzione ricavata dal software di calcolo emerge che quest'ultimo, tramite la sovrapposizione degli elementi BEAM, è in grado di cogliere accuratamente l'andamento della ripartizione del carico tra gli elementi costituenti della sezione e quello delle deformazioni. Un calcolo così accurato delle tensioni consente di condurre verifiche agli SLE che, anche se non previsti dalle attuali normative, permettono di escludere con adeguata certezza fenomeni di viscosità non lineari.

La sovrapposizione di due elementi era stata utilizzata anche nel paragrafo 6.4.2.2 per l'analisi di una colonna in calcestruzzo armato con disomogeneità di materiali e sezioni.

In seguito all'esito positivo della validazione appena condotta per la sezione si studia un modello analogo a quello del paragrafo 7.3.1.1, con l'aggiunta di elementi BEAM sovrapposti caratterizzati da sezioni con area equivalente a quella dell'armatura e profili metallici presenti.

Nel caso di sezioni miste la sezione dell'elemento di calcestruzzo viene ridotta fino a diventare quella netta, mentre per le sezioni in calcestruzzo armato, si considera ancora quella lorda. Assegnando agli elementi sezioni circolari si ottengono diametri come quelli in Tabella 9.

Intervallo Livelli	Tipo di sezione	Diametro calc [cm]	Diametro acc [cm]	Materiale
P49 - P50	Acciaio		$A = 1383.840 \text{ cm}^2$	S460
P48 - P49	Mista acc-calc	60.4	23.9	C40/49
P38 - P48	Calcestruzzo armato	65	11.1	C40/50
P36 - P38	Calcestruzzo armato	80	15.7	C50/60
P26 - P36	Calcestruzzo armato	80	15.7	C50/60
P25 - P26	Mista acc-calc	75.8	25.5	C50/60
P24 - P25	Acciaio		$A = 1383.840 \text{ cm}^2$	S460
P23 - P24	Mista acc-calc	86	26.5	C70/85
P17 - P23	Calcestruzzo armato	90	16.9	C70/85
P11 - P17	Calcestruzzo armato	95	16.4	C70/85
P04 - P11	Calcestruzzo armato	100	18.1	C70/85
PS2 - P04	Mista acc-calc	919.2	39.4	C70/85
PI3 - PS2	Mista acc-calc	112.5	41.6	C50/60

Tabella 9 - Sezioni colonne di facciata

### 7.3.2.2 Risultati ottenuti

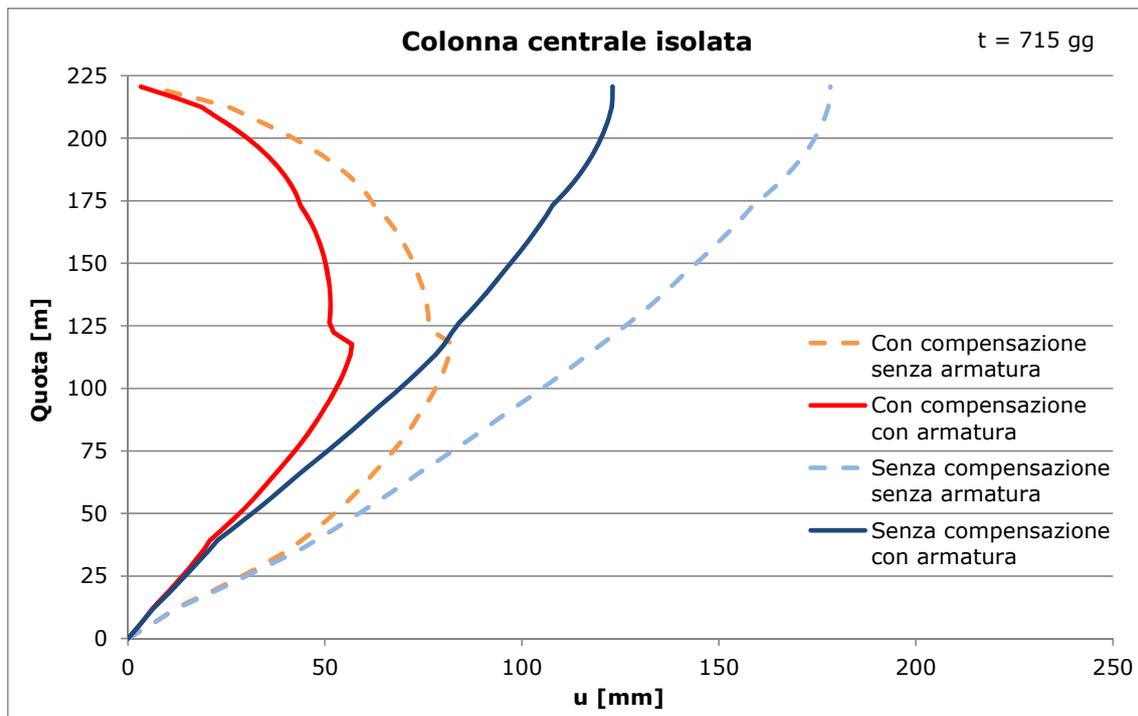


Figura 7.41 - Column shortening con e senza armatura (t = 715 gg)

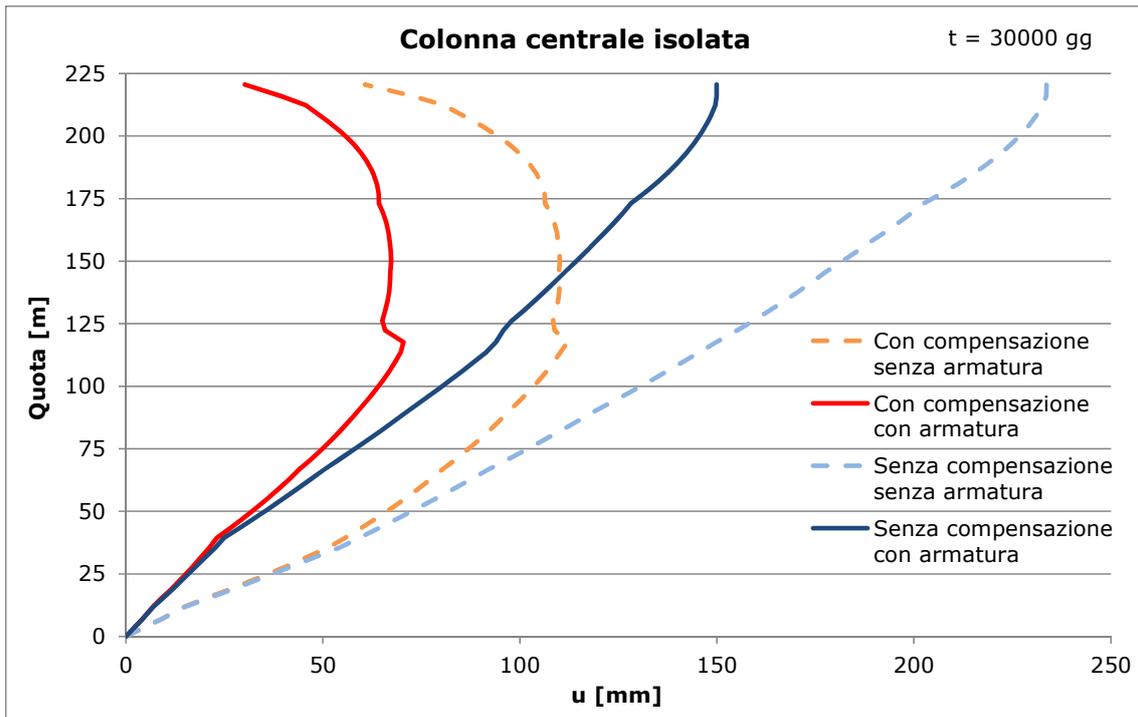


Figura 7.42 - Column shortening con e senza armatura (t = 30000 gg)

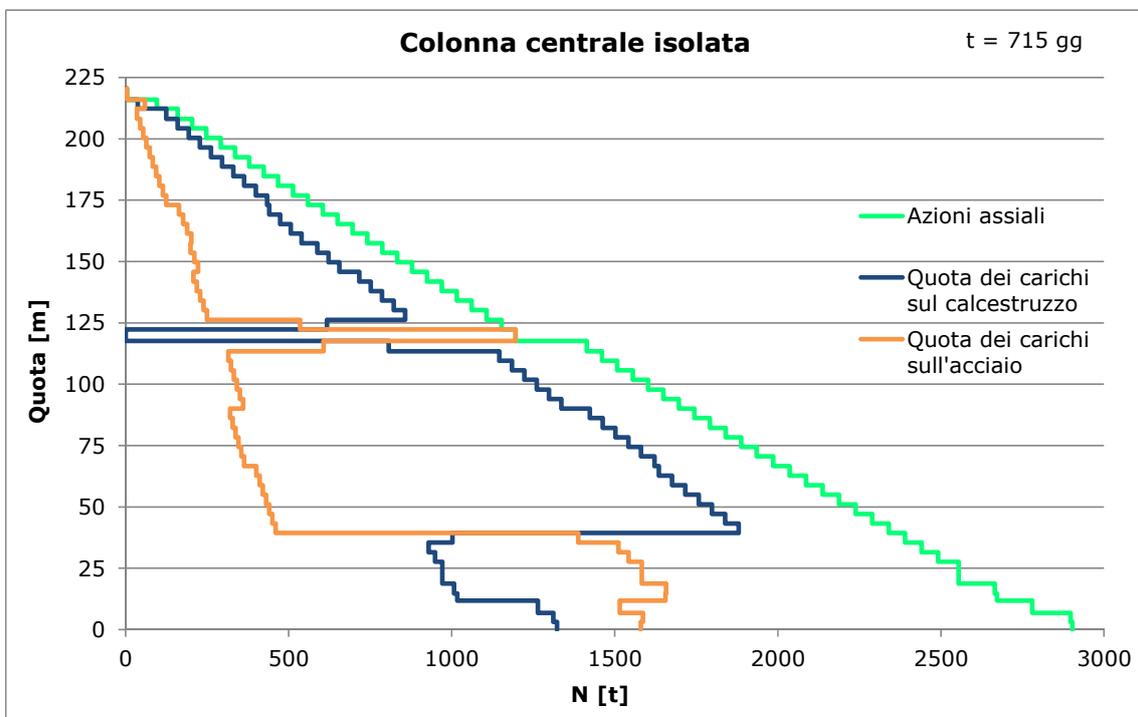


Figura 7.43 - Ripartizione dei carichi fra i due materiali (t = 715 gg)

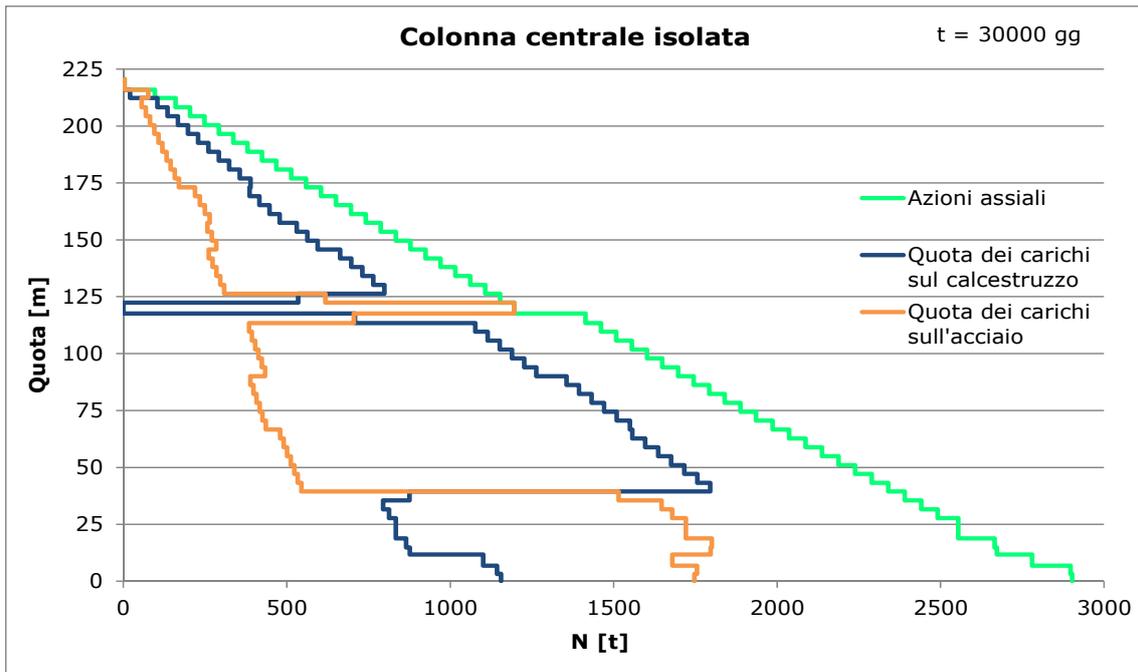


Figura 7.44 - Ripartizione dei carichi fra i due materiali (t = 30000 gg)

### 7.3.2.3 Analisi dei risultati

Si nota come il vincolo elastico costituito dall'armatura riduca sensibilmente gli spostamenti della struttura sia a fine costruzione che a 30000 giorni.

Per quanto riguarda la ripartizione dei carichi tra i due materiali le Figure Figura 7.43 Figura 7.44 sono di difficile interpretazione poiché lungo l'altezza variano i carichi e la percentuale di armatura. Per comprendere il fenomeno della migrazione del carico si considera la struttura semplificata del paragrafo 7.3.1.3.

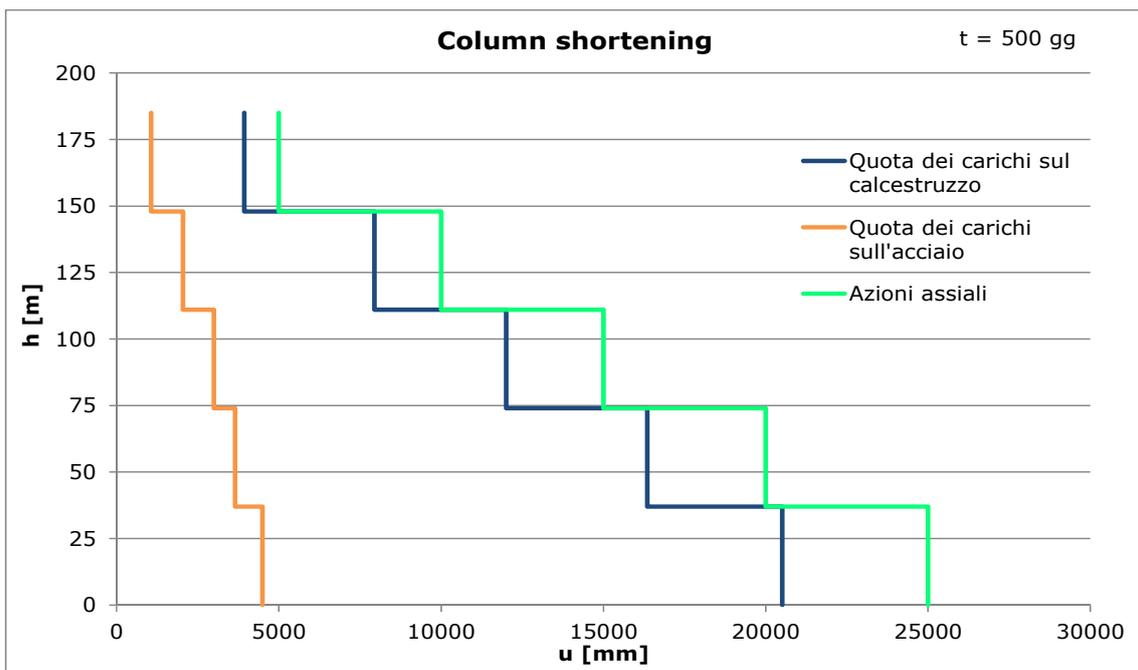


Figura 7.45 - Ripartizione dei carichi fra i due materiali (t = 715 gg)

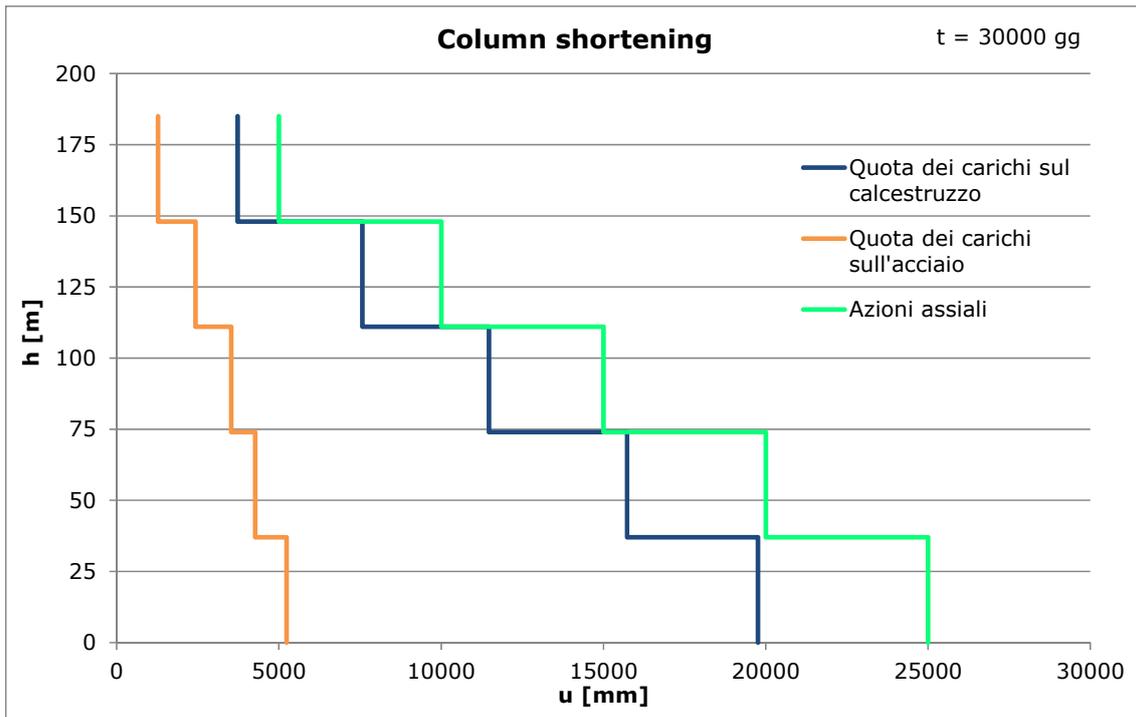


Figura 7.46 - Ripartizione dei carichi fra i due materiali (t = 30000 gg)

Si osserva come nel tempo parte del carico si trasferisce dal calcestruzzo all'acciaio.

Questo accade anche nella colonna della torre che presenta un andamento della ripartizione dei carichi analoga a quella della struttura semplificata fatta eccezione delle zone al piede e in corrispondenza della trave di cintura inferiore dove il quantitativo d'acciaio è molto elevato (Figura 7.47).

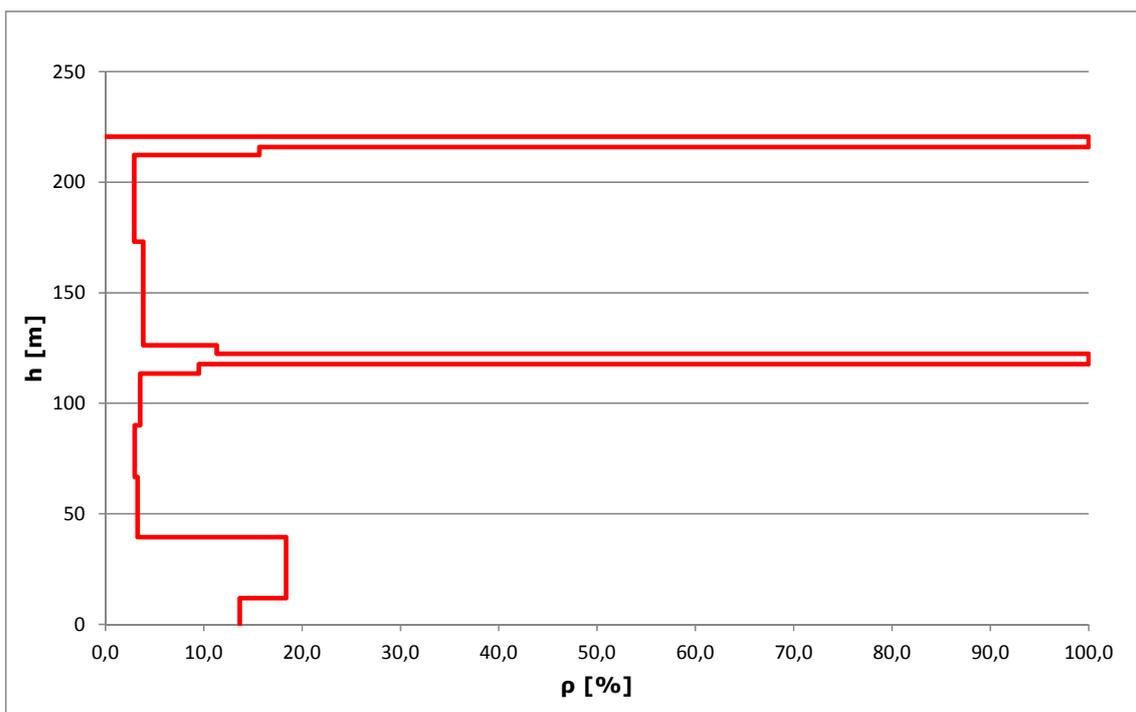


Figura 7.47 - Rapporto geometrico d'armatura

### 7.3.3 QUINTA SENZA BELT TRUSSES

#### 7.3.3.1 Descrizione del modello

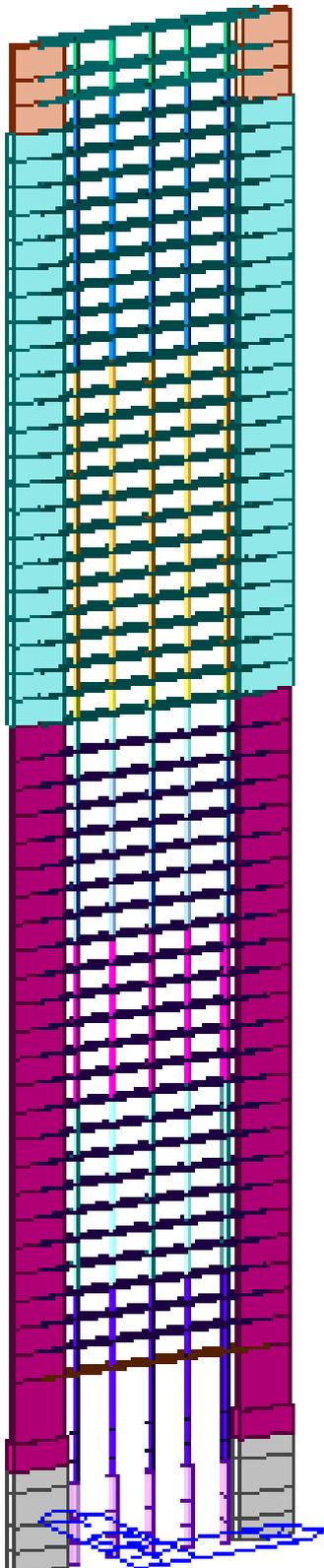


Figura 7.48 - Modello quinta

La modellazione della quinta prevede la combinazione di 985 elementi BEAM che rappresentano le 5 colonne della quinta di facciata, i nuclei e le travi di collegamento (Figura 7.48).

Le sezioni ed i materiali delle colonne sono quelle di Tabella 6 . Per la modellazione dei nuclei si sono adottati degli elementi BEAM; le dimensioni delle sezioni rettangolari assegnate a tali elementi sono state ricavate imponendo area e momento d'inerzia dei nuclei reali (Tabella 10)

Intervallo Livelli	b [cm]	h [cm]	Materiale [cm]
P13 - P00	237.9	863.9	C40/50
P00 - P25	166.8	804.5	C40/50
P25 - P47	149.0	822.6	C40/50
P47 - P50	150.2	771.9	C40/50

Tabella 10 - Caratteristiche dei nuclei

La validità di questa modellazione è stata comprovata da un modello nel quale per i nuclei sono stati adottati degli elementi WALL (paragrafo 6.2.2 ), il quale ha condotto a risultati molto prossimi alla soluzione con elementi BEAM.

I carichi che precedentemente erano stati applicati alla colonna singola come forze concentrate, vengono ora applicati come dei carichi uniformemente distribuiti sulle travi.

E' stata considerata una larghezza collaborante della soletta pari a 5 volte lo spessore di quest'ultima; le dimensioni delle sezioni delle travi ( Figura 7.49) sono riportate in Tabella 11.

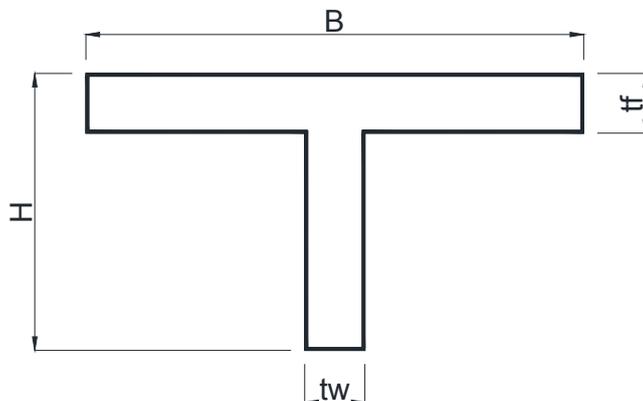


Figura 7.49 - Dimensioni delle sezioni a T delle travi

Intervallo Livelli	H [cm]	B [cm]	tw [cm]	tf [cm]
P01	45	255	80	20
P02 - P24	45	199	80	20
P25 - P47	45	279	80	20
P48 - P50	65	293.5	80	30

Tabella 11 - Caratteristiche delle travi

7.3.3.2 Risultati ottenuti

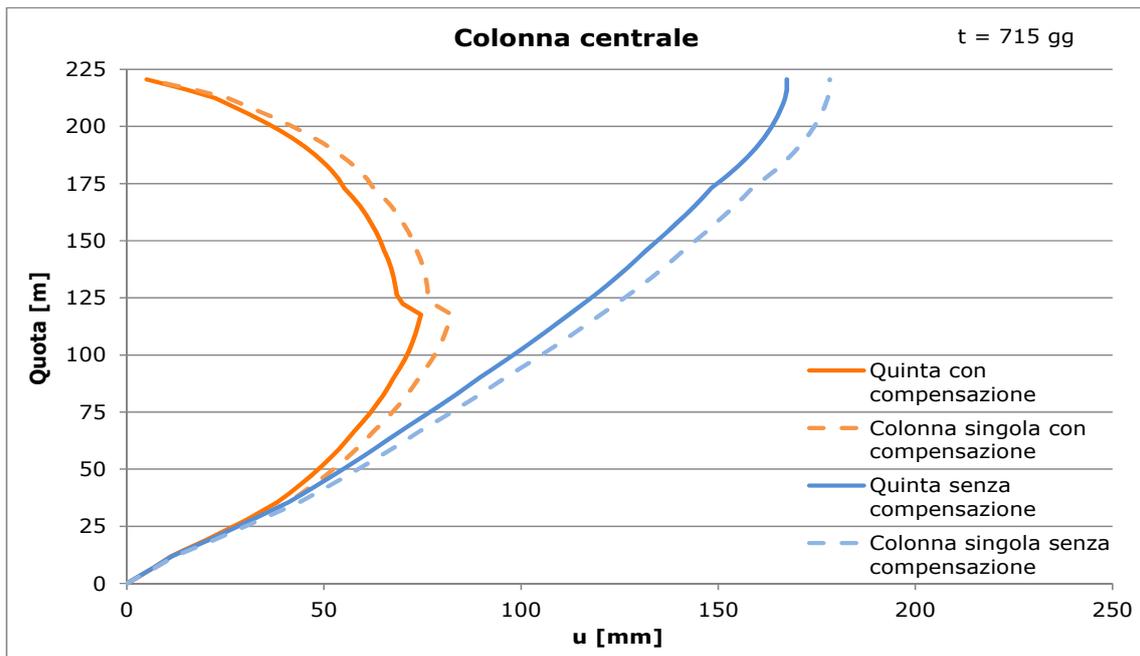


Figura 7.50 - Column shortening colonna centrale

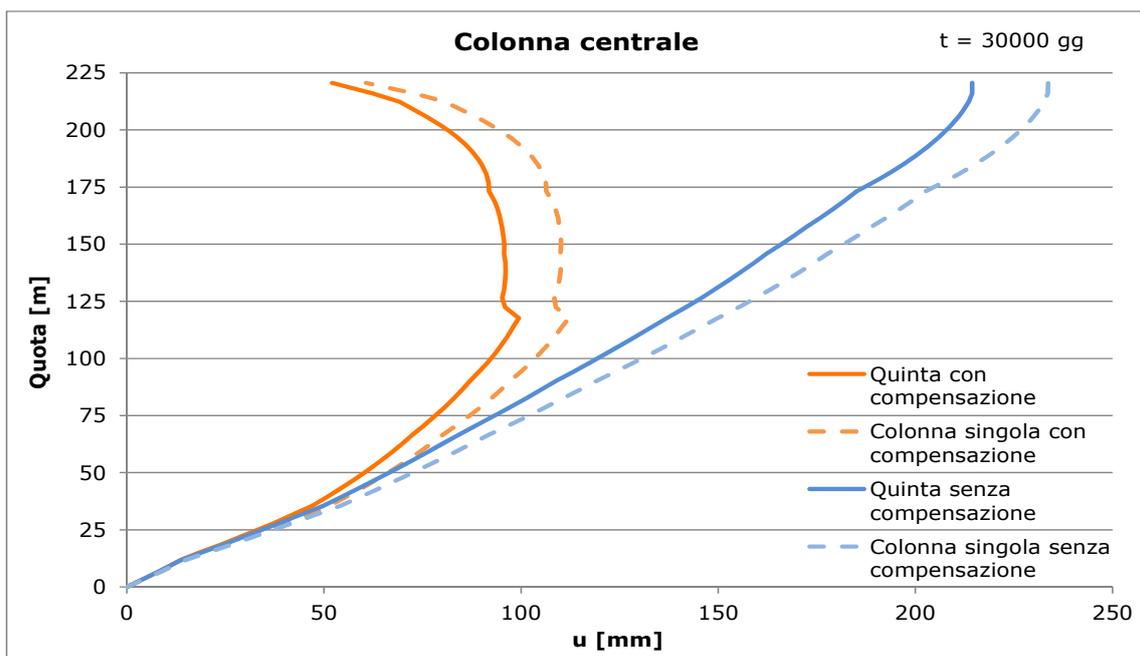


Figura 7.51 - Column shortening colonna centrale

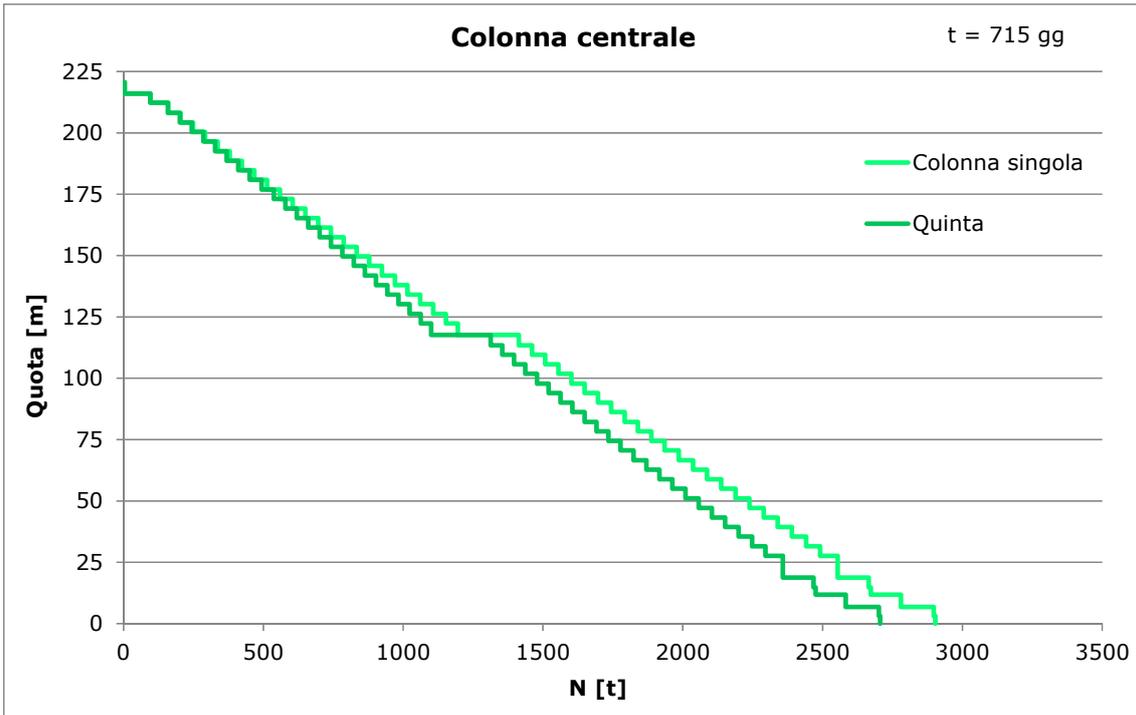


Figura 7.52 - Azini assiali colonna centrale

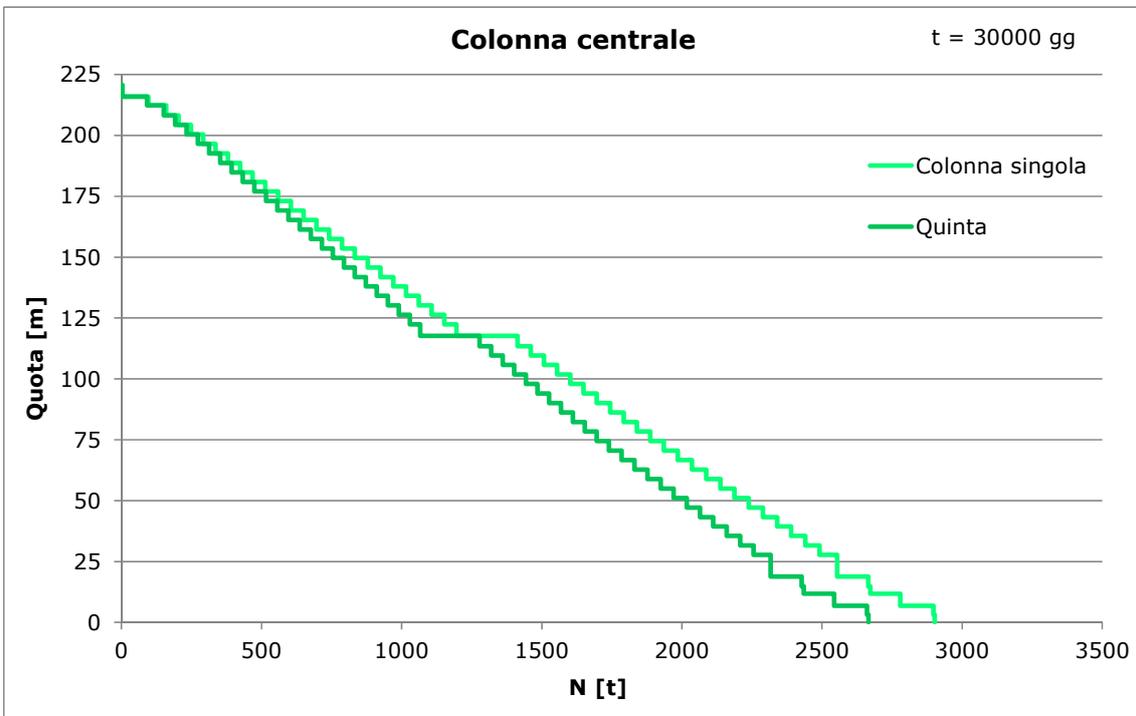


Figura 7.53 - Azioni assiali colonna centrale

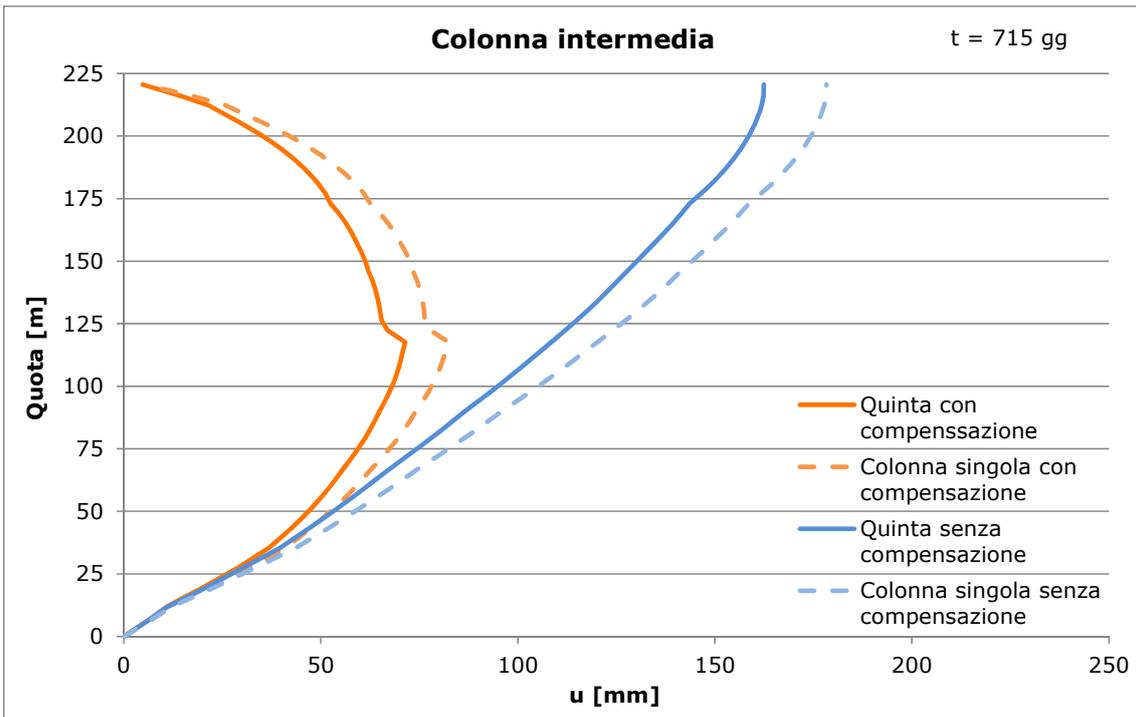


Figura 7.54 - Column shortening colonna intermedia

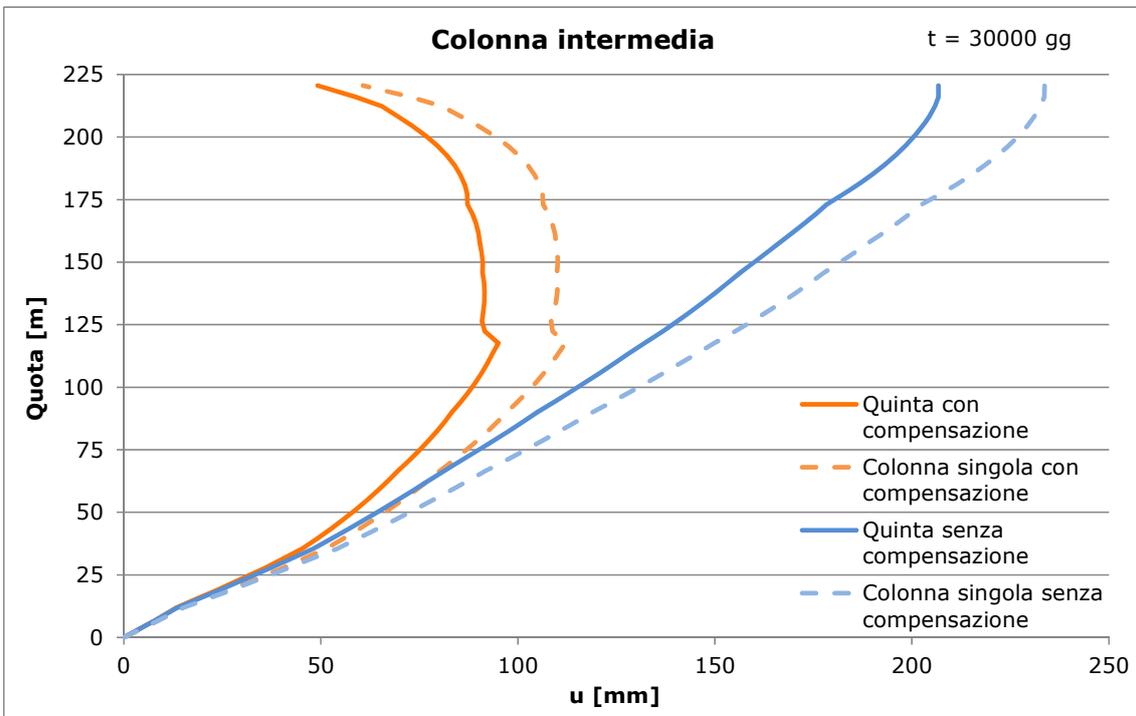
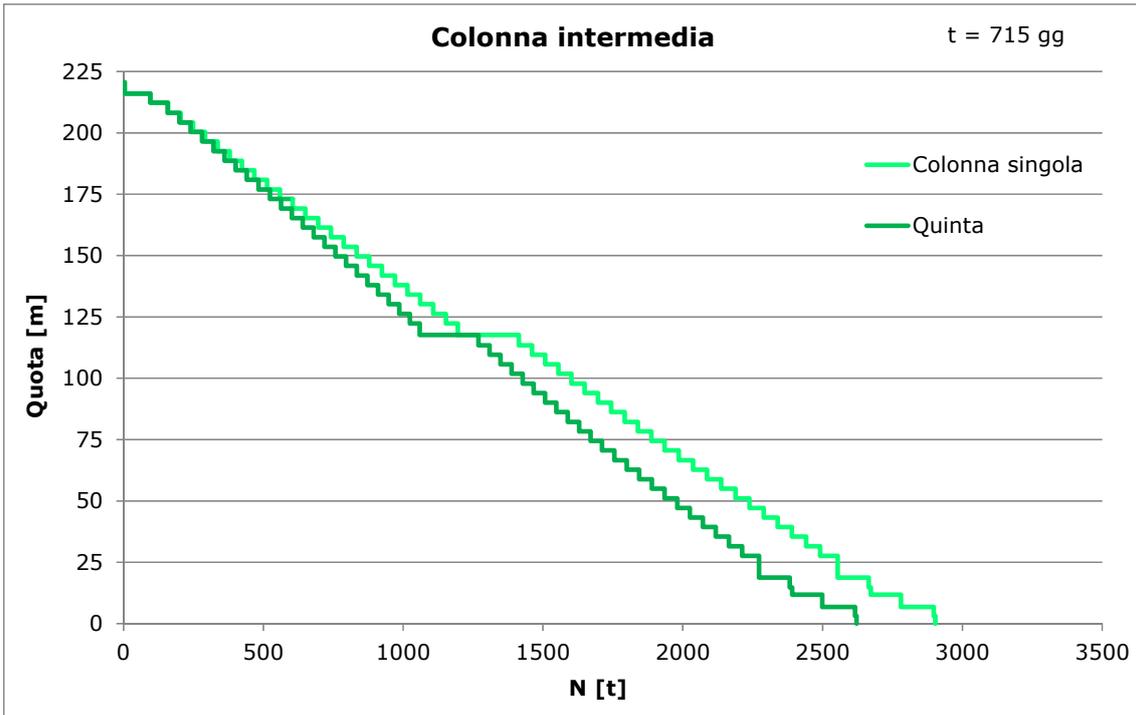
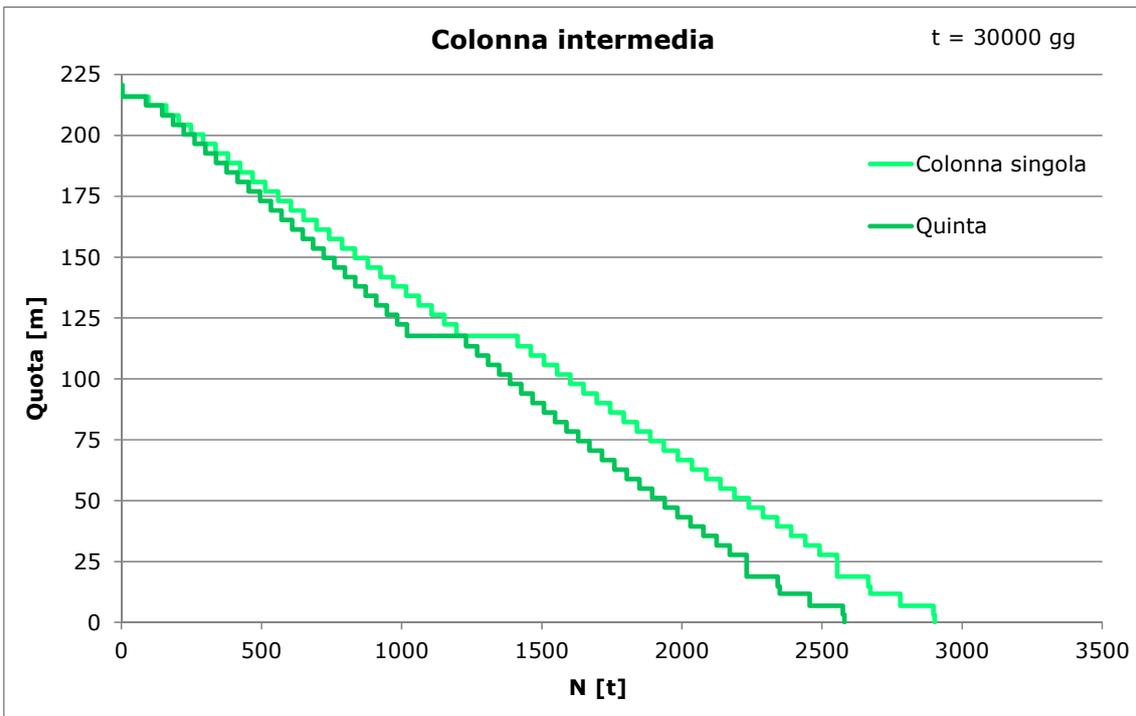


Figura 7.55 - Column shortening colonna intermedia



**Figura 7.56 - Azioni assiali colonna intermedia**



**Figura 7.57 - Azioni assiali colonna intermedia**

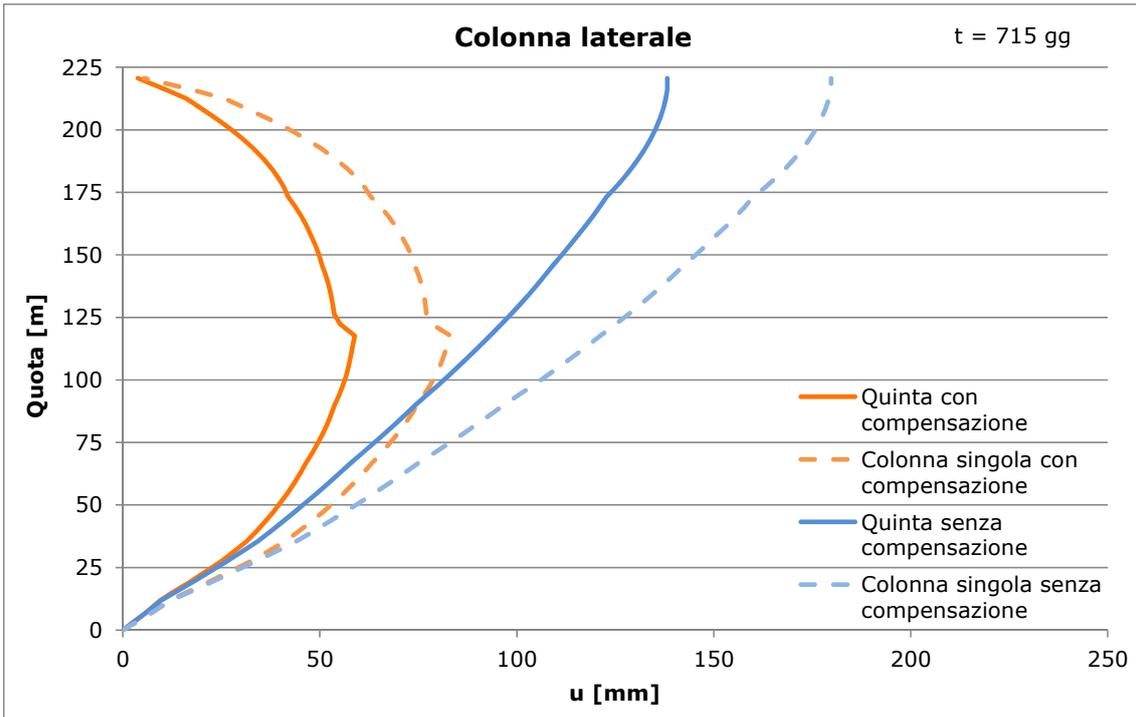


Figura 7.58 - Column shortening colonna laterale

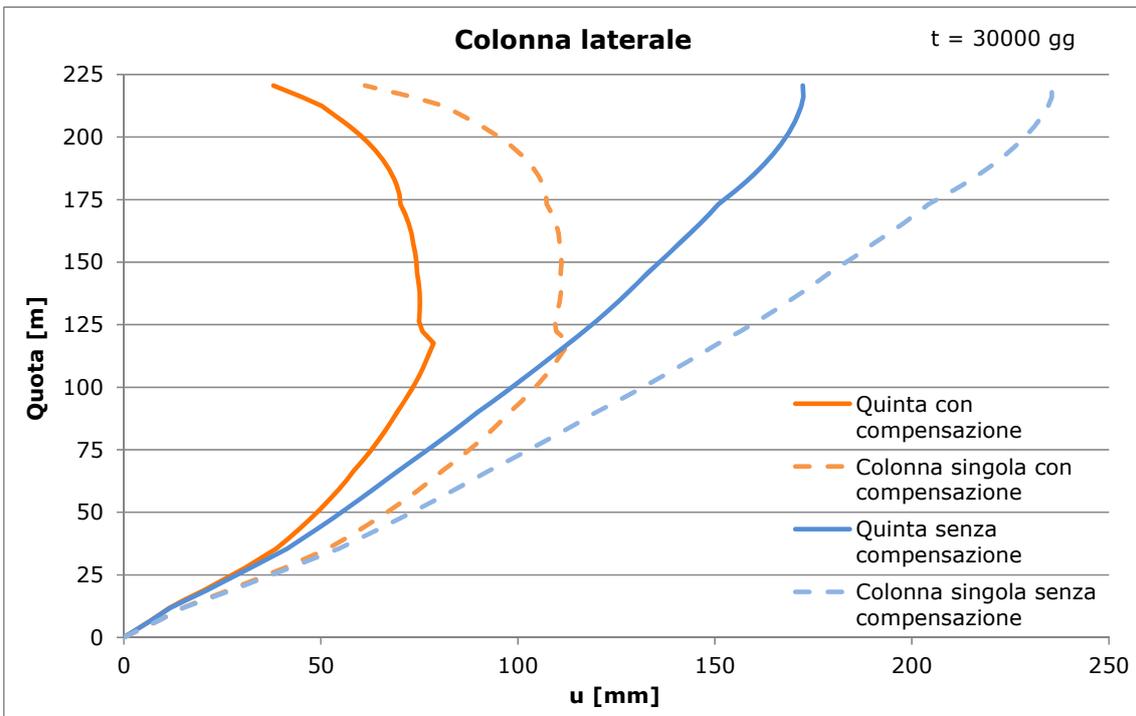


Figura 7.59 - Column shortening colonna laterale

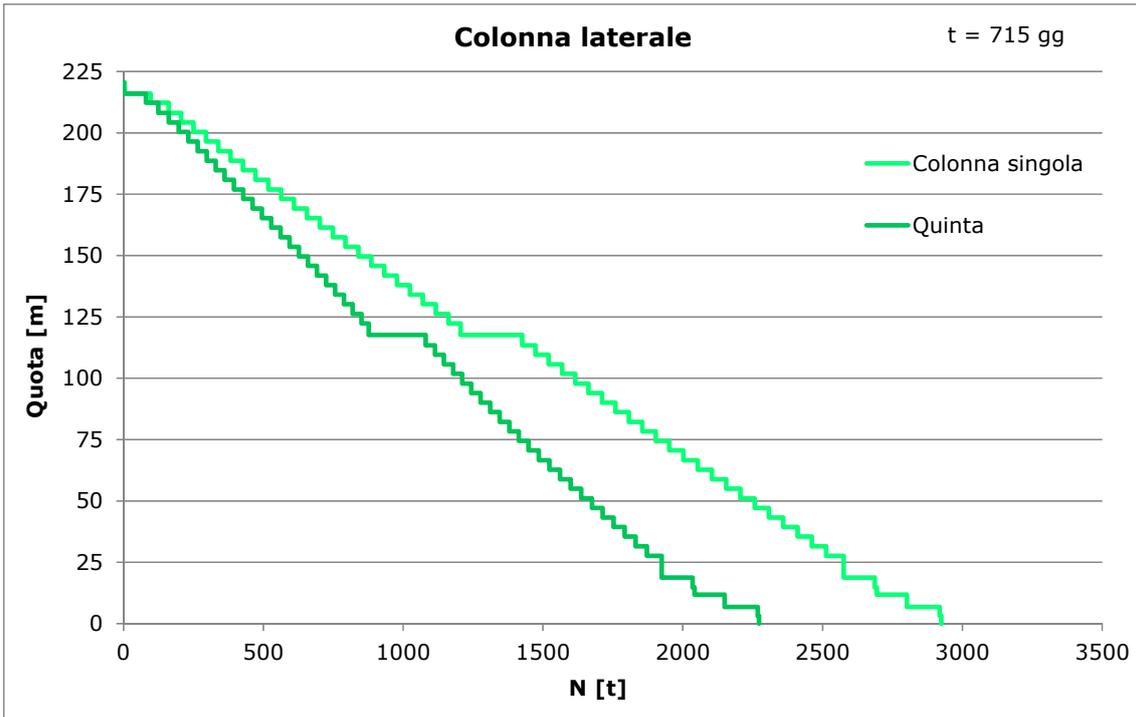


Figura 7.60 - Azioni assiali colonna laterale

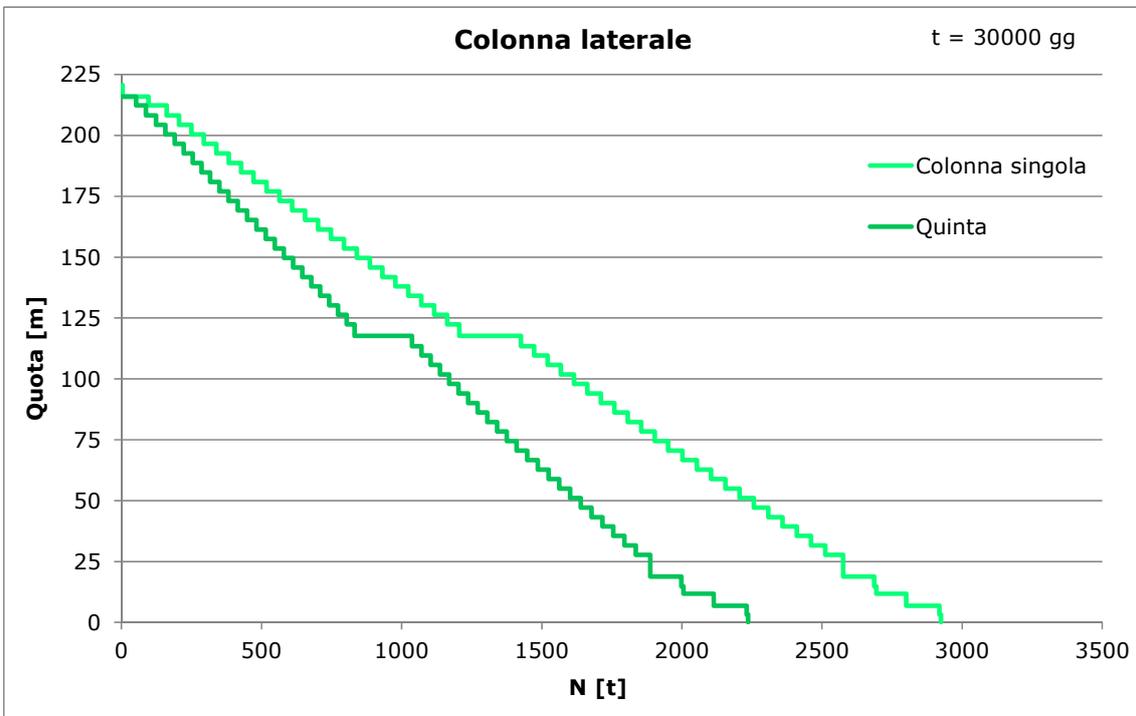


Figura 7.61 - Azioni assiali colonna laterale

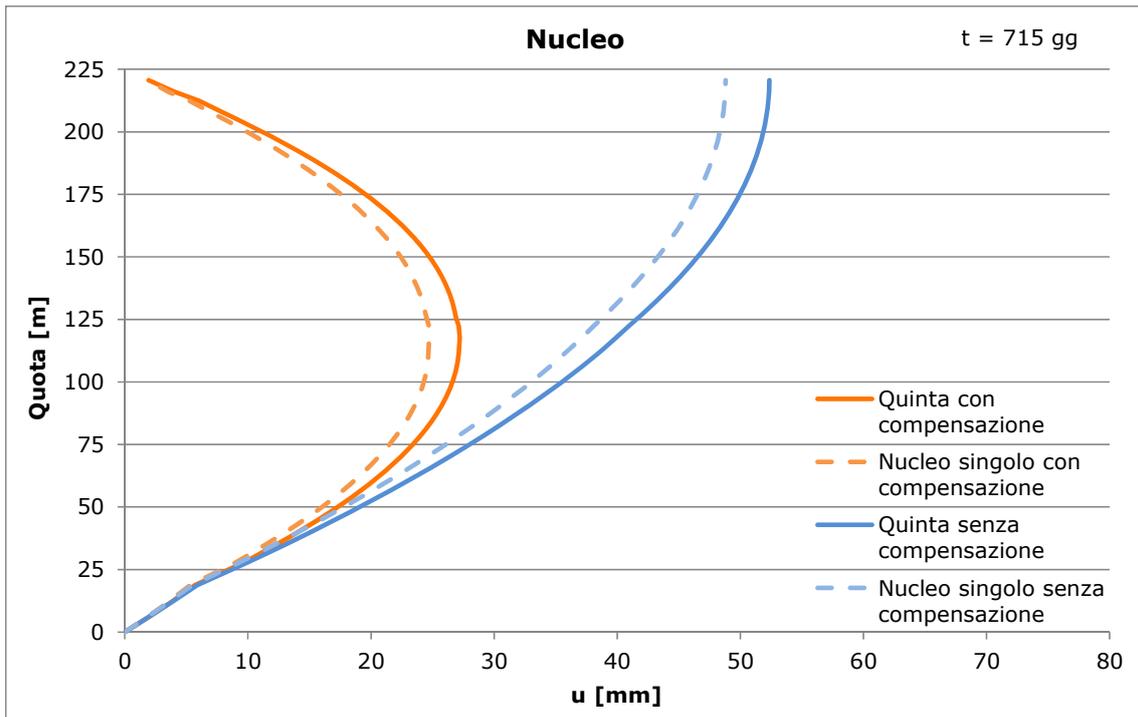


Figura 7.62 - Column shortening nucleo

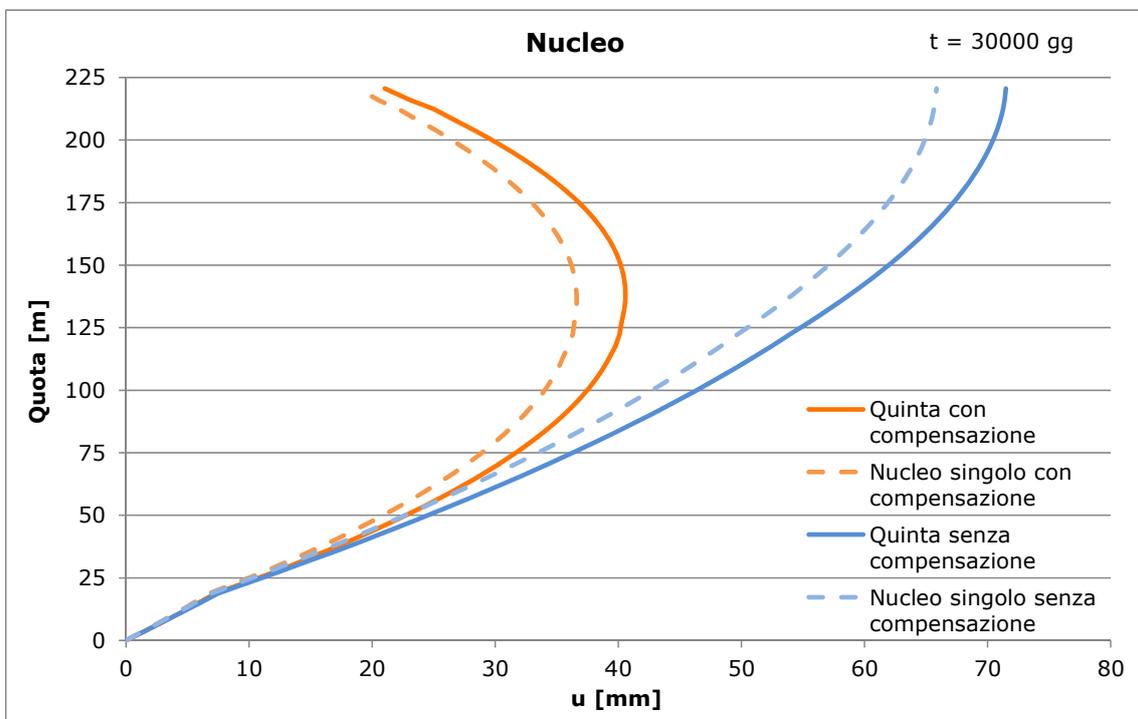


Figura 7.63 - Column shortening nucleo

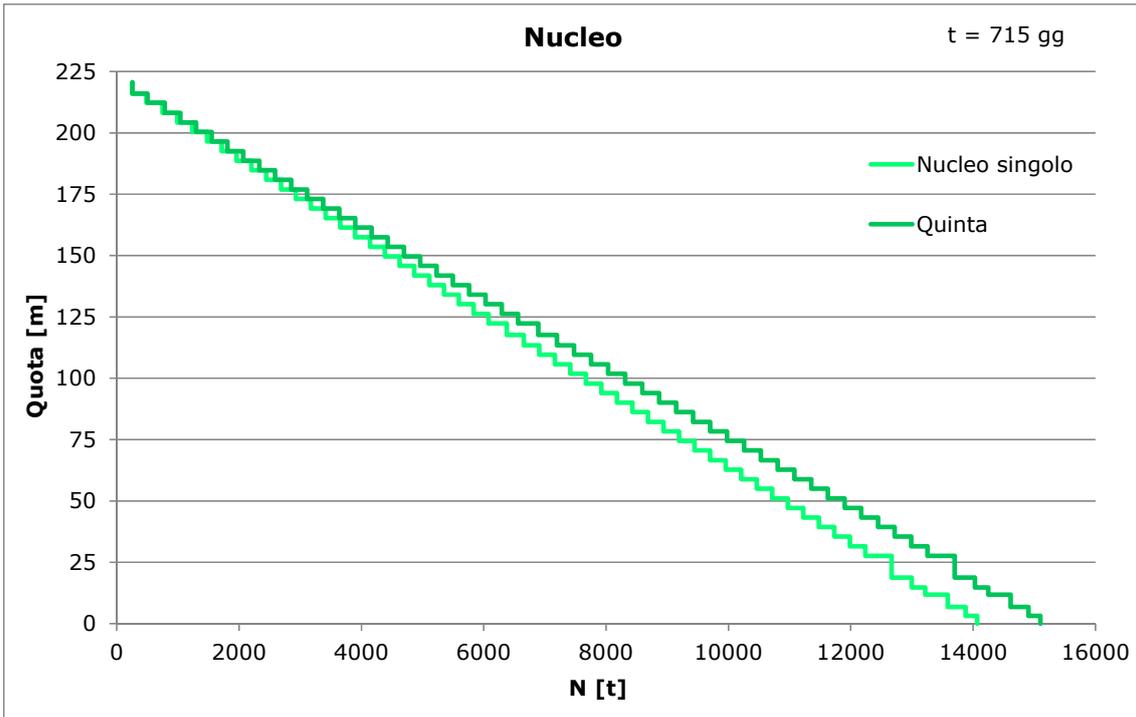


Figura 7.64 - Azioni assili nucleo

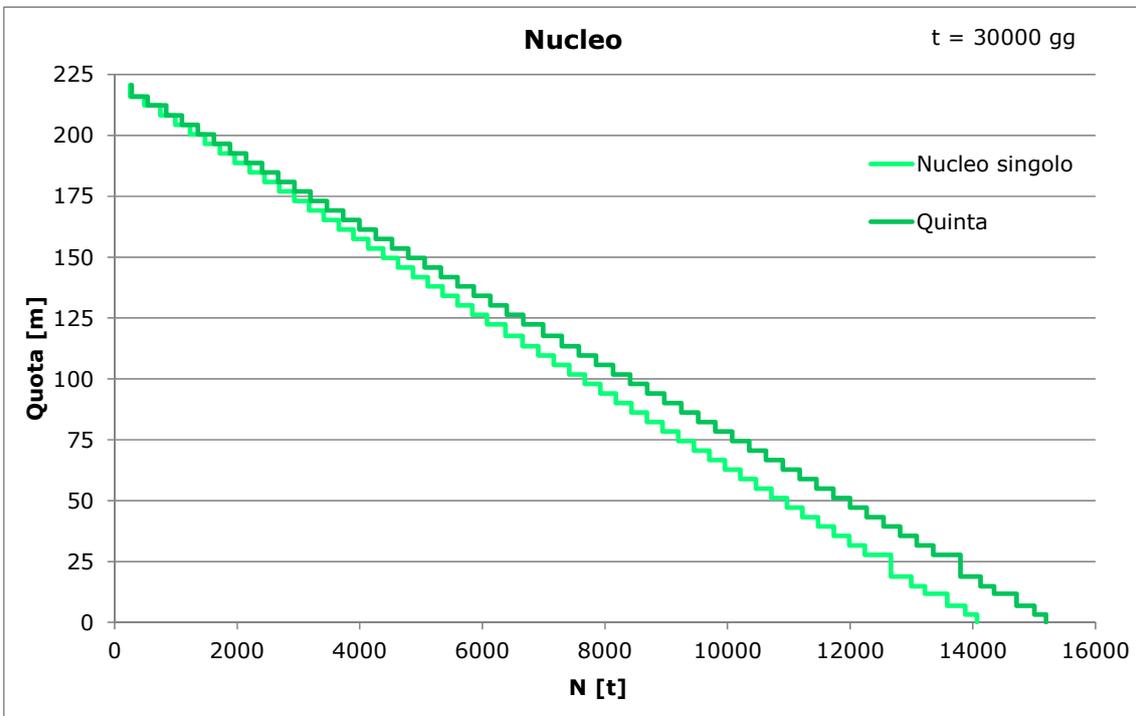


Figura 7.65 - Azioni assiali nucleo

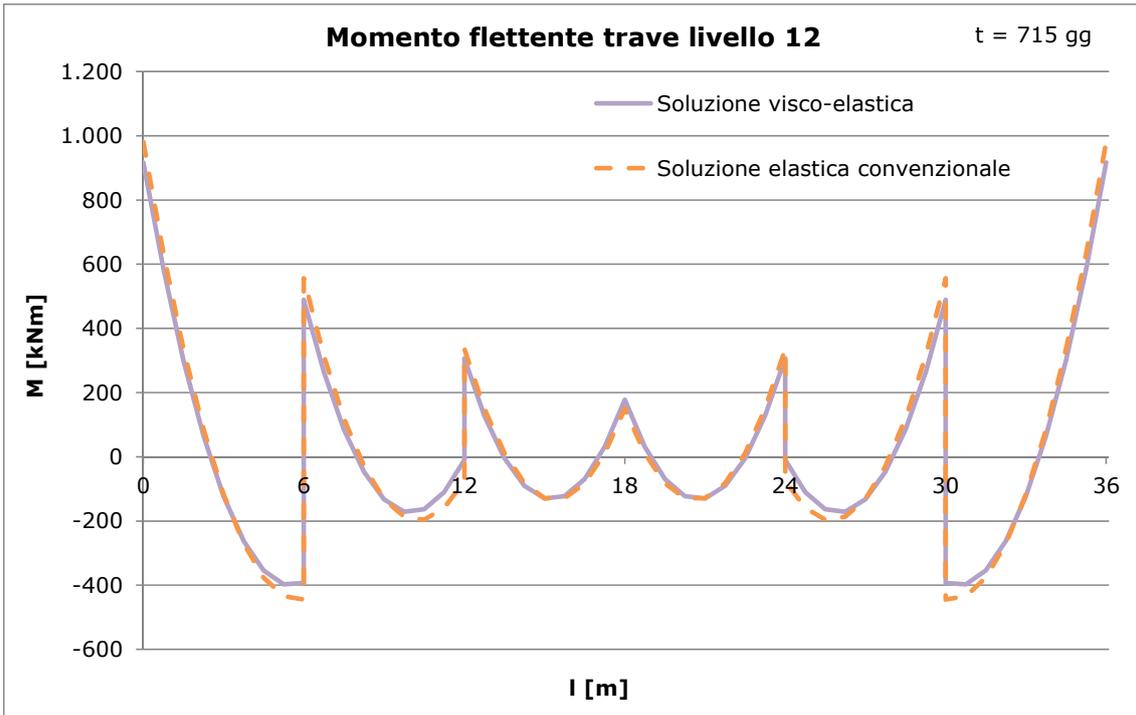


Figura 7.66 - Momento flettente trave livello 12

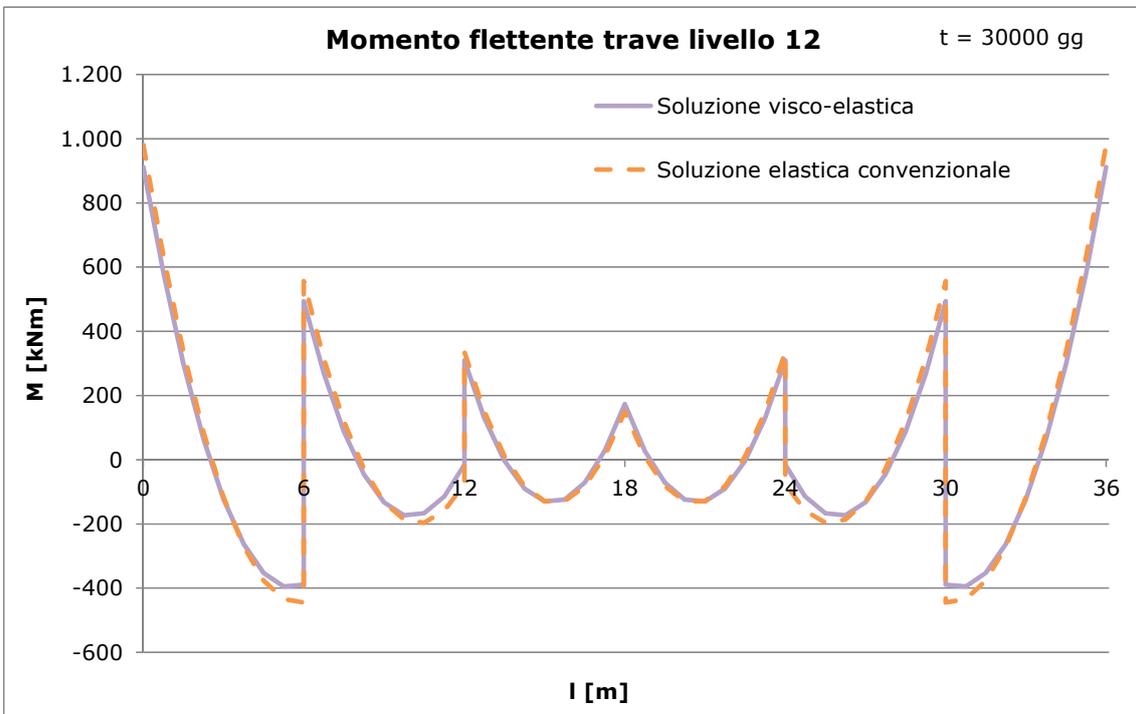


Figura 7.67 - Momento flettente trave livello 12

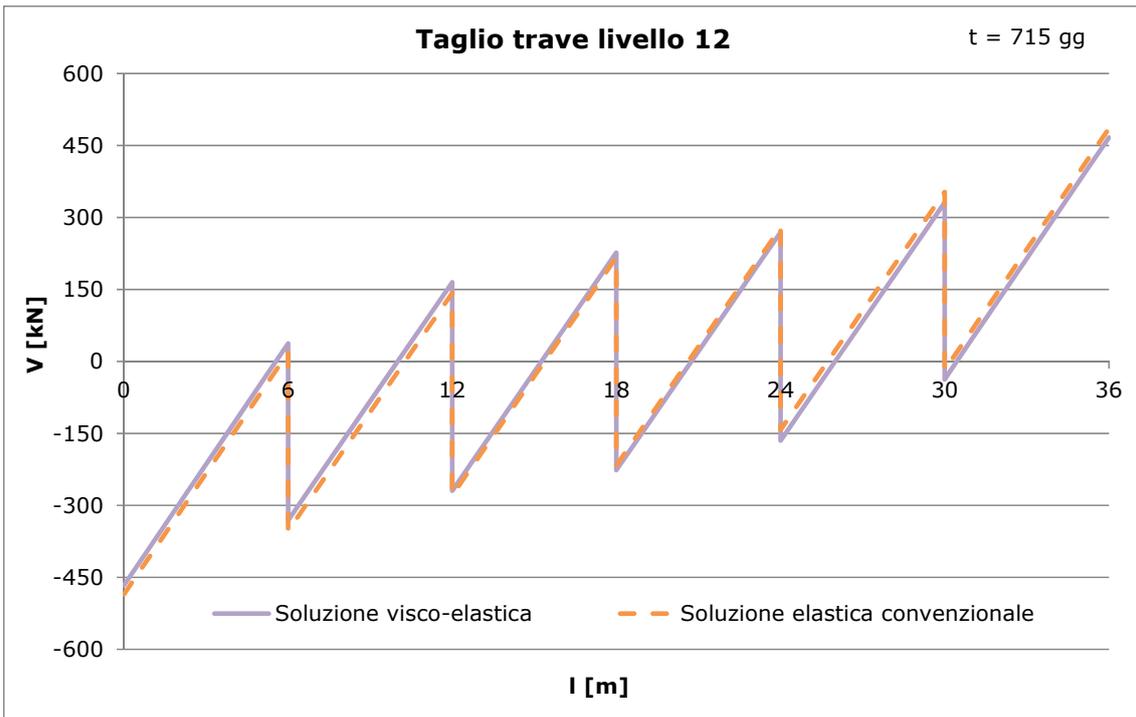


Figura 7.68 - Taglio trave livello 12

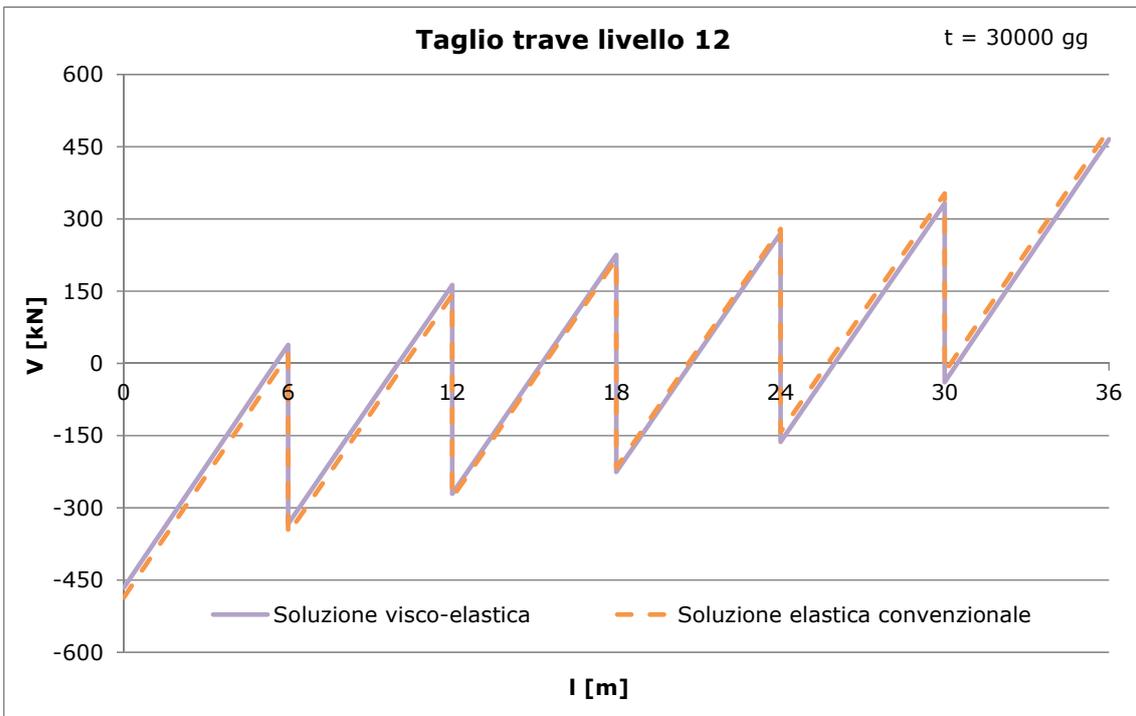


Figura 7.69 - Taglio trave livello 12

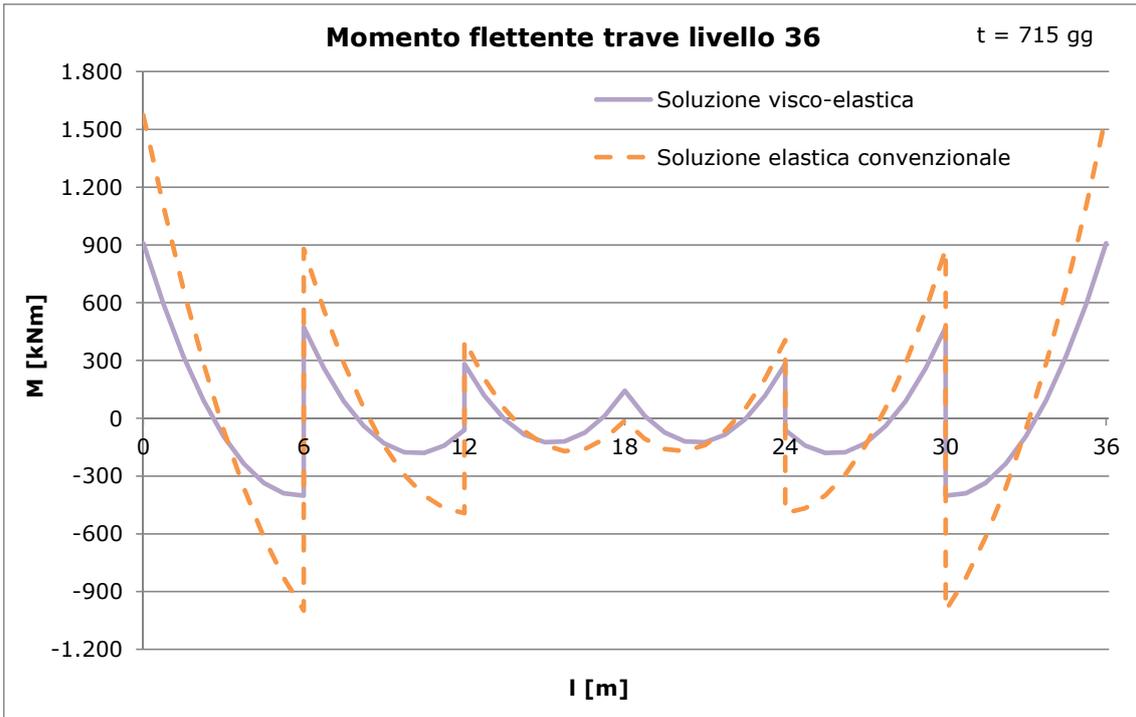


Figura 7.70 - Momento flettente trave livello 36

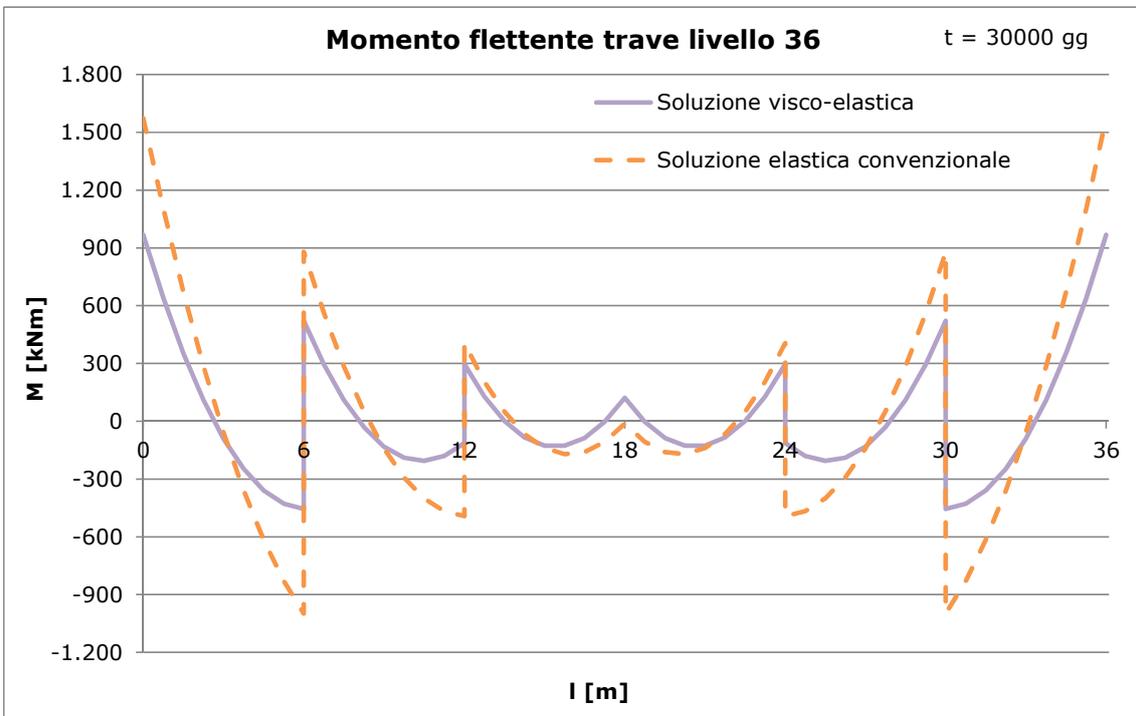


Figura 7.71 - Momento flettente trave livello 36

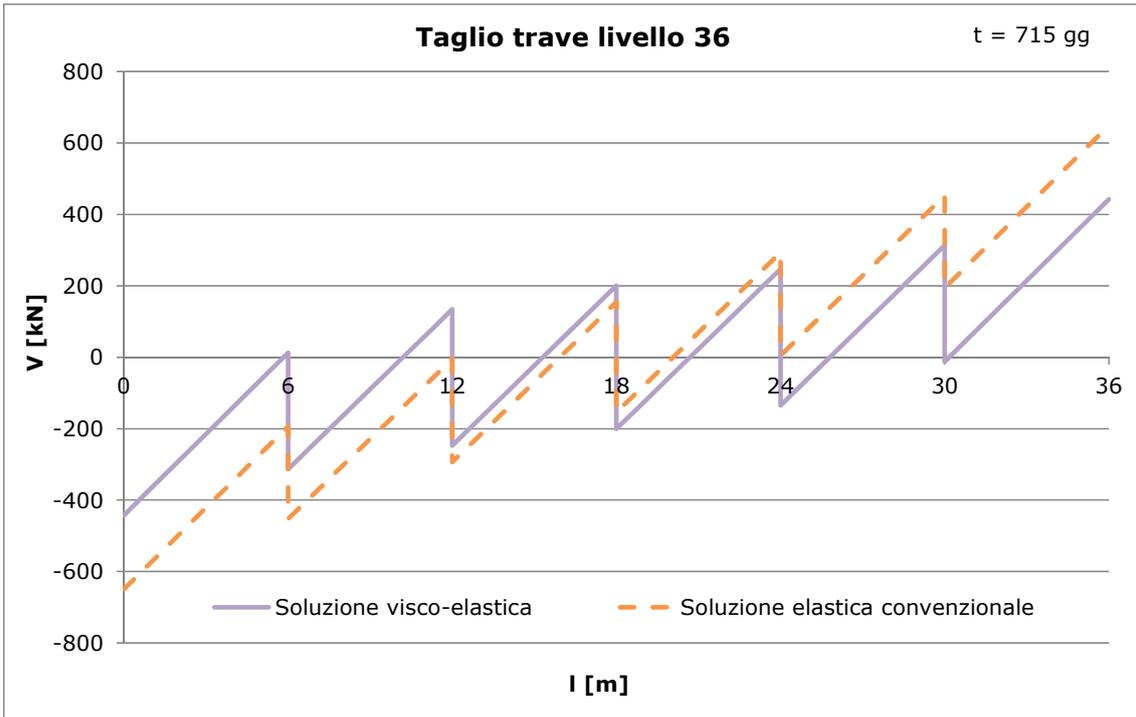


Figura 7.72 - Taglio trave livello 36

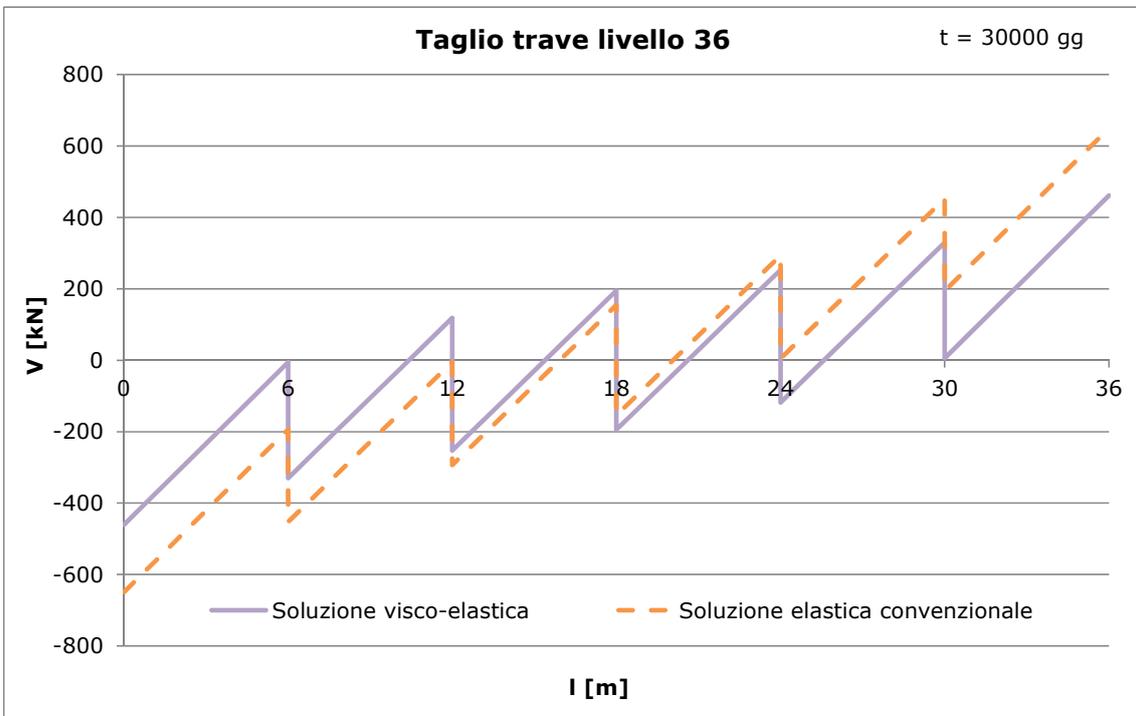


Figura 7.73 - Taglio trave livello 36

### 7.3.3.3 Analisi dei risultati

Dal column shortening a 715 giorni emerge che gli abbassamenti sono inferiori per le colonne appartenenti alla quinta rispetto a quella isolata. Tale differenza è tanto più accentuata quanto più le colonne sono vicine al nucleo.

Questa differenza di comportamento è imputabile alle differenti azioni assiali nelle colonne le quali vengono modificate, rispetto alla colonna isolata, dai tagli agenti nelle travi.

Come appena accennato, lo scostamento maggiore delle azioni assiali si ha per la colonna laterale a causa della condizione di vincolo delle travi che la collegano al nucleo il quale, vista l'elevata rigidezza flessionale, è assimilabile ad un incastro (Figura 7.70).

La ripartizione del carico tra le colonne si ripercuote anche sulle deformazioni a tempo infinito dove la differenza tra gli spostamenti della colonna singola e quelli della colonna all'interno della quinta è amplificata, essendo le deformazioni viscoso direttamente proporzionali al carico.

Al contrario delle colonne il nucleo quando inserito nella quinta presenta azioni assiali e spostamenti superiori.

Quanto dimostrato nel paragrafo 7.3.1.3 in termini di inadoperabilità della soluzione elastica convenzionale per la stima dell'accorciamento delle colonne vale anche per le sollecitazioni nelle travi.

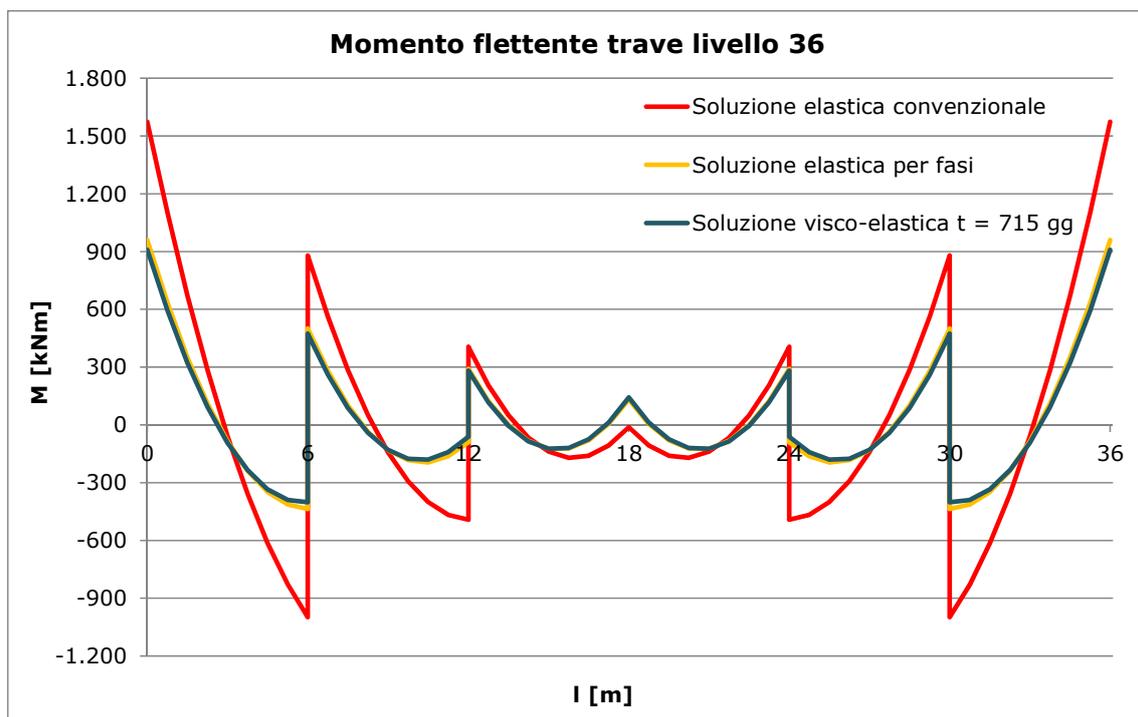


Figura 7.74 - Momenti flettenti secondo diverse analisi

In Figura 7.74 è evidente la differenza tra una soluzione elastica per fasi ed una elastica convenzionale.

Come precisato meglio nel seguito, il momento flettente può essere visto come somma di due contributi: il primo relativo al carico agente direttamente sulla trave, il secondo dovuto

all'accorciamento differenziale delle colonne. Sebbene il primo contributo produce effetti simili per entrambe le soluzioni, il secondo è maggiore nel caso di analisi elastica convenzionale come visibile dalla pendenza della spezzata rossa di Figura 7.75,

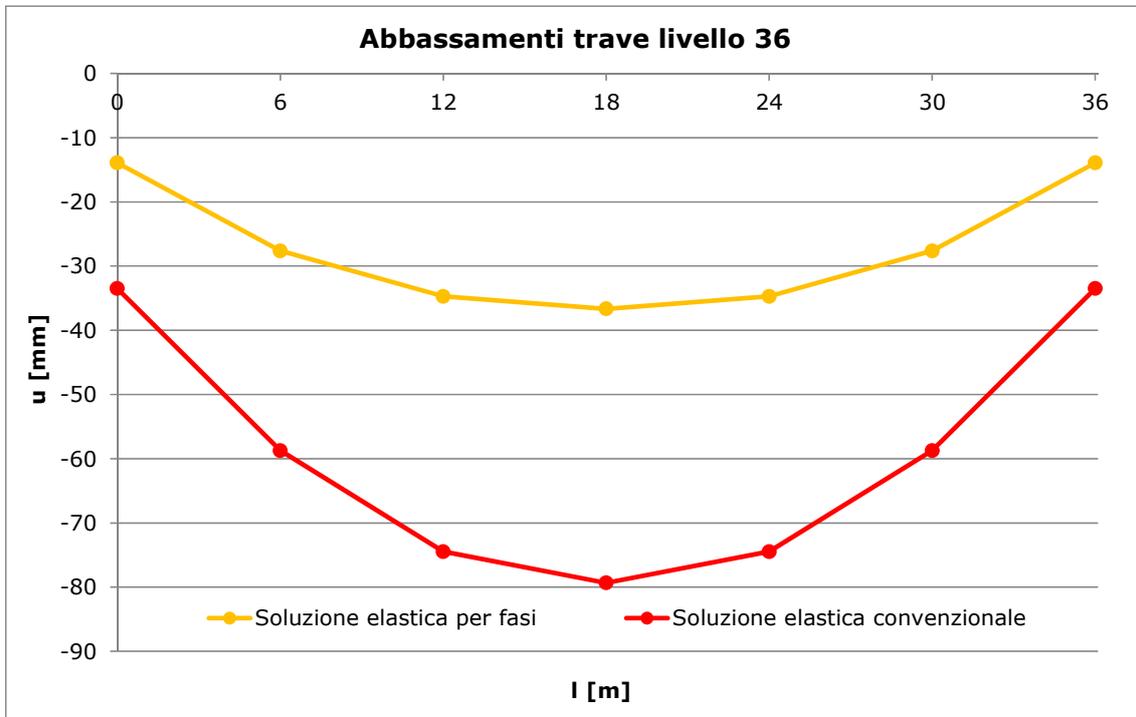


Figura 7.75 - Abbassamenti con analisi elastica convenzionale ed elastica per fasi

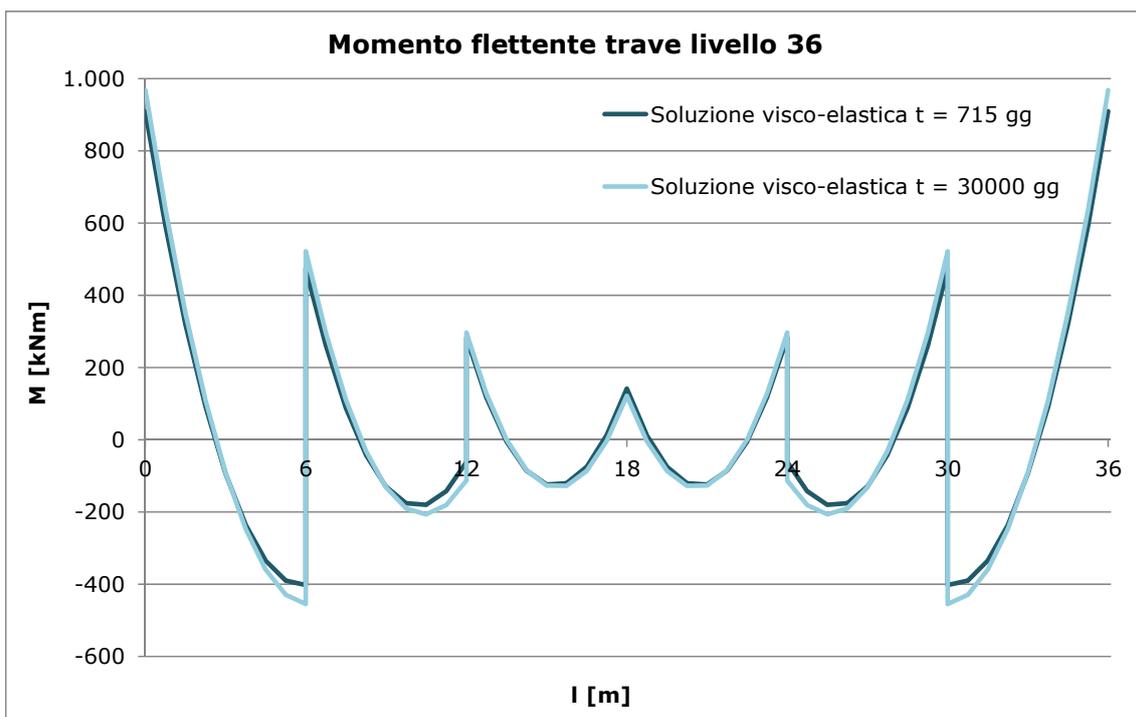
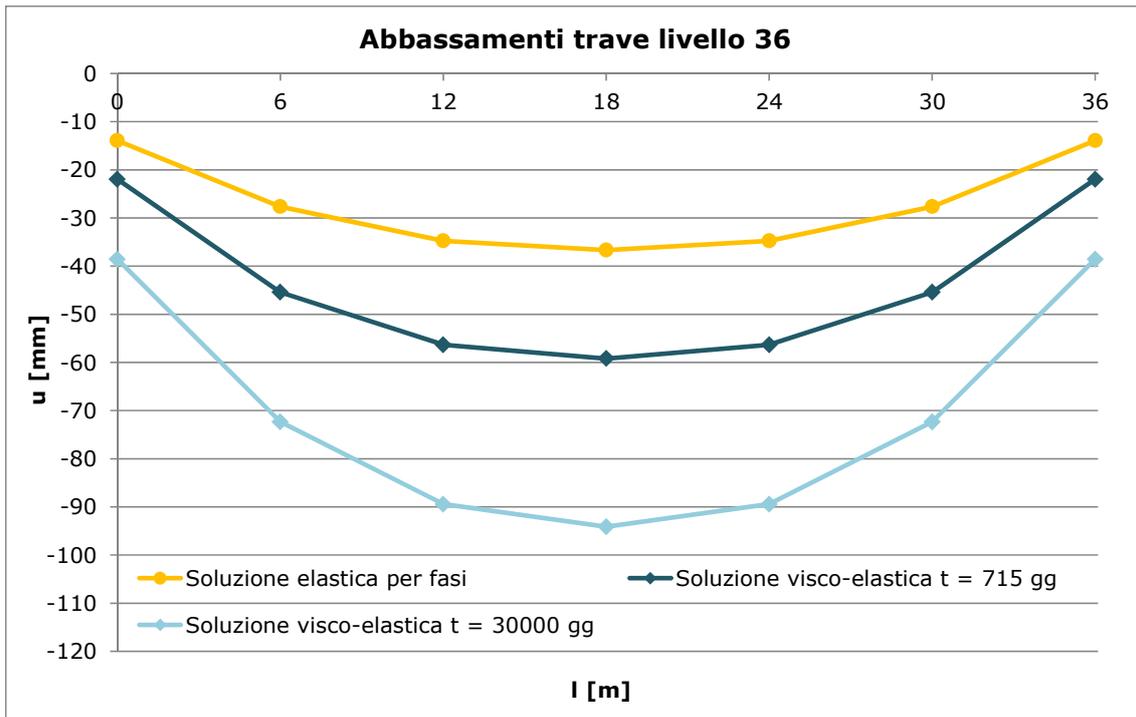


Figura 7.76 - Momenti flettenti con analisi visco-elastica per diversi valori di t



**Figura 7.77 - Abbassamenti con analisi elastica per fasi e viscoelastica per fasi**

Nonostante gli abbassamenti relativi evolvono nel tempo a causa della viscosità (Figura 7.77), le sollecitazioni nelle travi rimangono pressoché invariate e molto prossime a quelle di un'analisi elastica per fasi. Questo accade in quanto gli spostamenti differenziali sono causati da sole azioni statiche e poiché le differenti sezioni, classi di calcestruzzo ed età di maturazione sono poco influenti. La struttura è quindi molto prossima ad una per la quale valgono le ipotesi del primo teorema della viscosità lineare (paragrafo 3.2.1).

Se la quinta della Torre Isozaki rispettasse tutti i requisiti riportati nel paragrafo 3.2.1 qualsiasi spostamento dovuto alla sola viscosità non avrebbe alcuna conseguenza sulle sollecitazioni.

È inevitabile notare come sorgano differenze notevoli tra una soluzione visco - elastica per fasi ed una elastica convenzionale all'aumentare della quota. Infatti per una trave posta nei piani inferiori dell'edificio (P12) gli effetti della compensazione sono poco evidenti poiché la somma dei carichi agenti fino all'istante di costruzione è di modesta entità. Viceversa, per una trave nei piani alti della costruzione (P36), gran parte degli abbassamenti può essere compensata (Figura 7.70).

I momenti riportati in Figura 7.66 hanno un andamento che si discosta molto da quello relativo ad una trave continua su più appoggi ed incastrata alle estremità.

Per la comprensione dell'evoluzione dei momenti è stata analizzata la sollecitazione a 221 giorni, istante di applicazione del carico sulla trave studiata (P12). In tale istante i valori del momento alle estremità appaiono superiori di circa il 20% rispetto a quelli che si avrebbero nel

caso di trave continua con carico distribuito costante, luci di uguali lunghezze ed incastrati alle estremità.

I valori di abbassamento dei nodi della trave ricavati dal modello della quinta sono stati applicati ai vincoli di una trave di uguali geometria e carico, incastrata alle estremità ed appoggiata in corrispondenza delle colonne. Il momento dovuto a questi cedimenti è stato sommato a quello derivante da un carico di entità uguale a quello realmente agente. Questi due contributi sono visibili in Figura 7.78. e la loro somma fornisce valori di momento quasi identici a quelli derivanti dal modello della quinta. L'incremento di momento deriva dunque dalla presenza non trascurabile di abbassamenti relativi delle colonne.

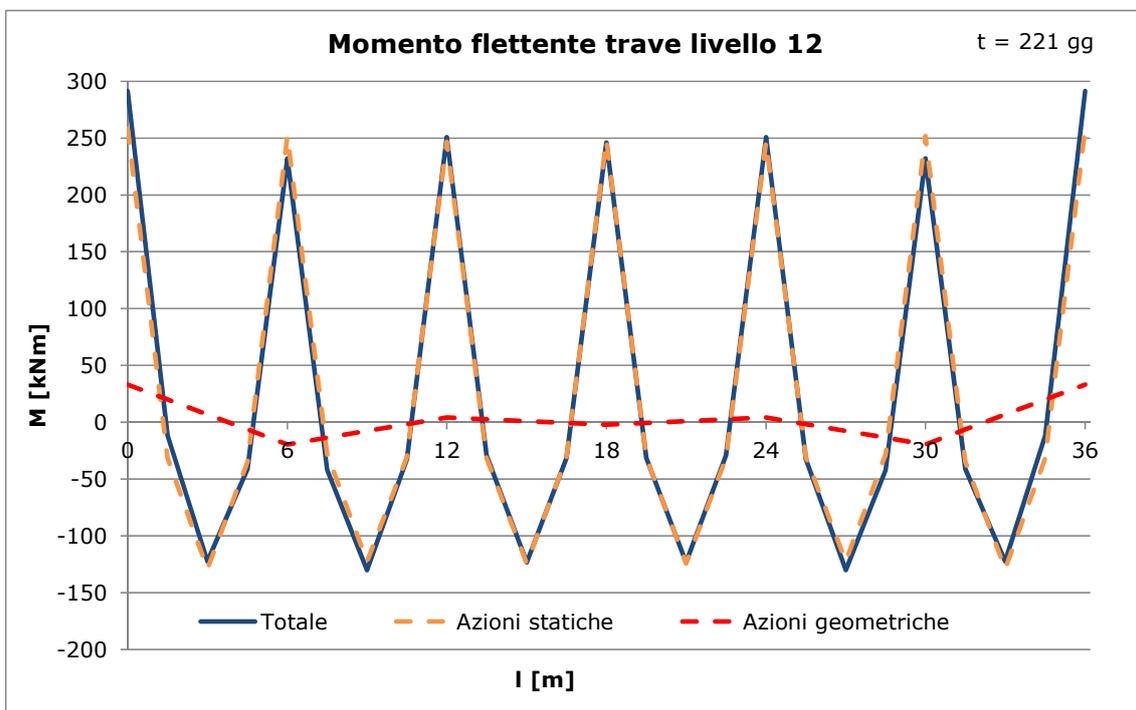


Figura 7.78 - Contributi del Momento flettente

Come visibile dalla Figura 7.79 nell'andamento dei momenti agenti sulla trave sono presenti delle discontinuità in corrispondenza dei nodi trave-colonna; l'entità di quest'ultime aumenta nel tempo a causa di un progressivo incremento degli spostamenti relativi delle colonne; tali spostamenti hanno una componente esclusivamente viscosa dovuta ai carichi applicati ai piani inferiori al P12 (di modesta entità poiché la struttura è prossima ad una per la quale vale il primo teorema) ed una sia elastica sia viscosa dovuta ai carichi applicati ai piani superiori. Questo column shortening provoca rotazioni nei nodi alle quali le colonne si oppongono tramite un momento non trascurabile, vista la loro rigidità relativa rispetto a quella delle travi.

Le discontinuità sono tanto maggiori quanto più il nodo trave-colonna è prossimo al nucleo; infatti, come visibile dalle linee tratteggiate di Figura 7.99, gli abbassamenti relativi maggiori si hanno tra il nucleo e la colonna ad esso più vicina.

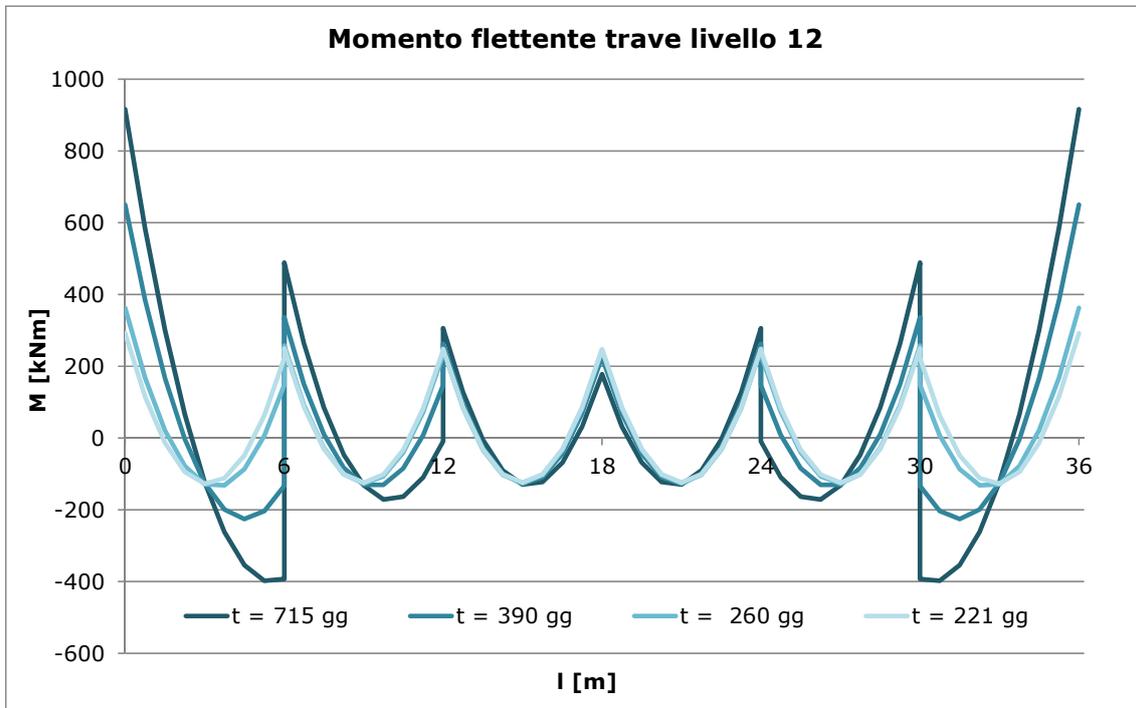


Figura 7.79 - Momento flettente trave livello 12 nel tempo

Quanto visto fino ad ora si può generalizzare per tutte le travi di facciata, compresa quella al livello 36 (Figura 7.70).

### 7.3.4 QUINTA CON BELT TRUSSES IN ACCIAIO

#### 7.3.4.1 Descrizione del modello

Il modello che viene ora analizzato è del tutto analogo a quello della quinta visto nel 7.3.3.1, rispetto al quale vengono però aggiunti 18 elementi BEAM per modellare le diagonali dei Belt Trusses, per un totale di 1003 elementi.

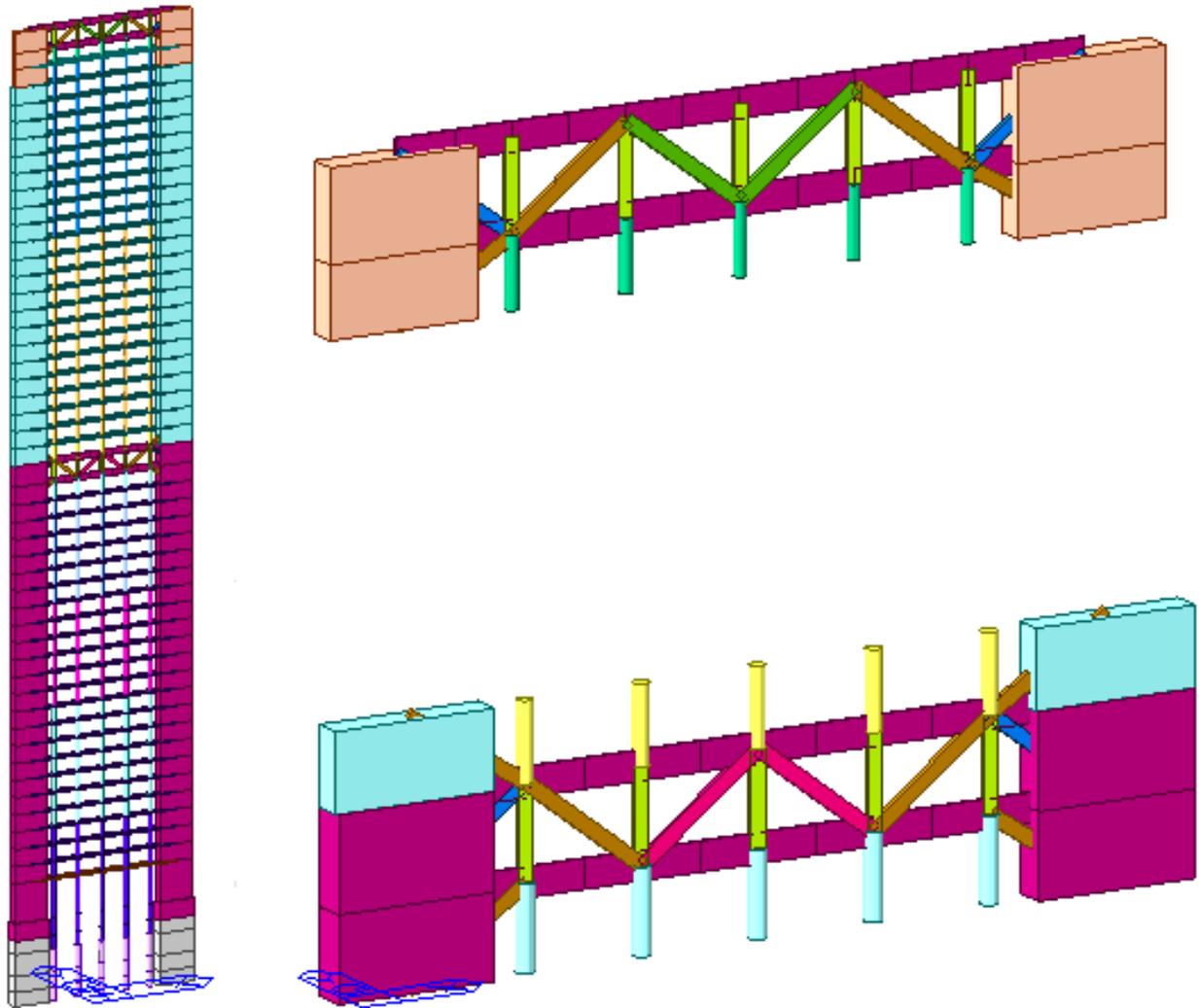
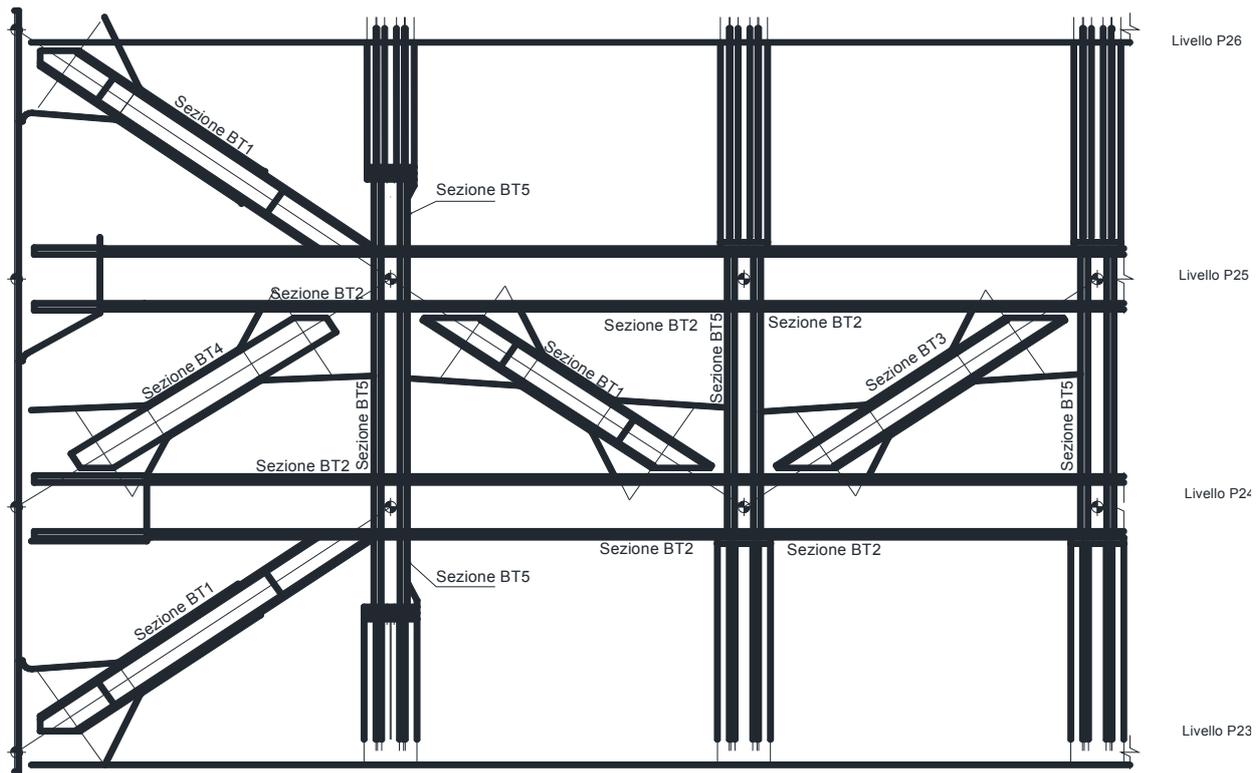


Figura 7.80 - Vista del modello e dettagli dei belt trusses

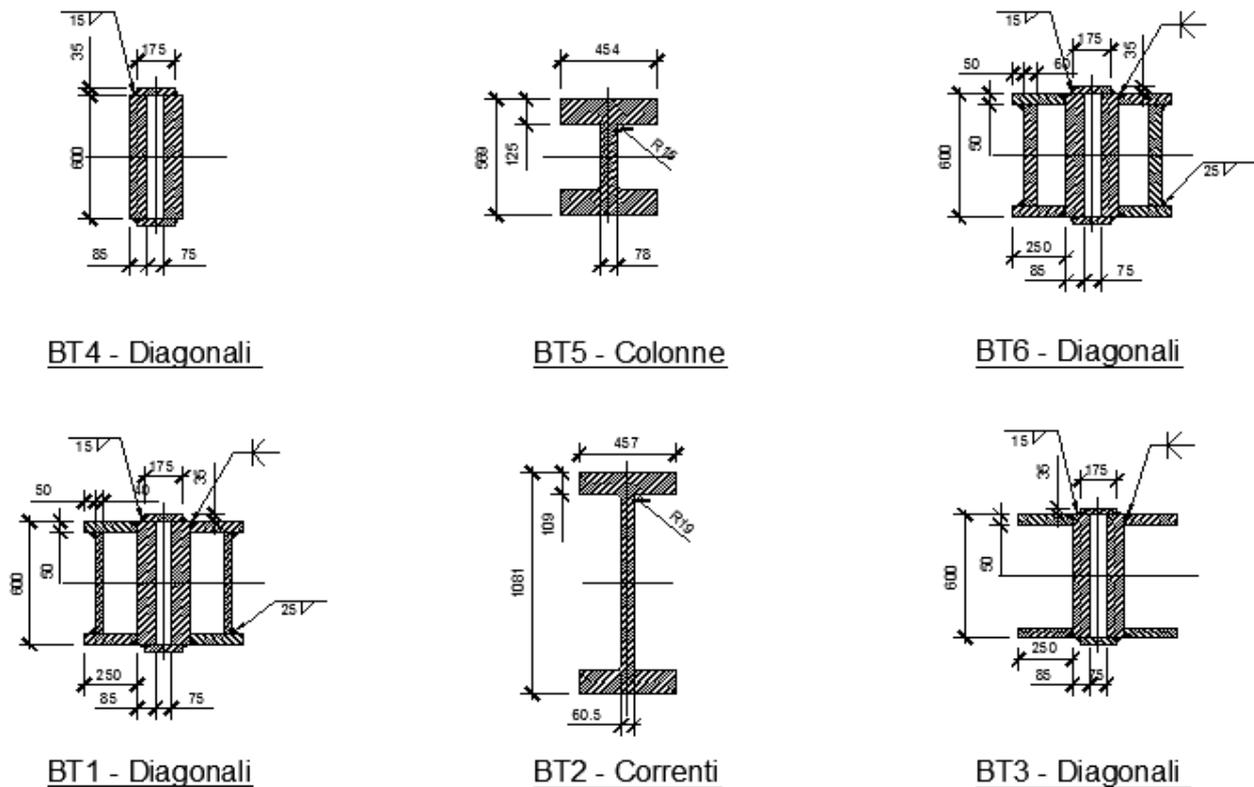
Le sezioni degli elementi sono indicate in Figura 7.81 e le dimensioni ad essi assegnate sono visibili in Figura 7.82.

Agli elementi dei Belt Trusses è stato assegnato il materiale Acciaio S460.



**Figura 7.81 - Vista del belt truss inferiore**

Le travi di cintura vengono costruite e caricate come dei normali piani dell'edificio in fasi da 13 giorni.



**Figura 7.82 - Dimensioni delle sezioni degli elementi dei belt trusses**

7.3.4.2 Risultati ottenuti

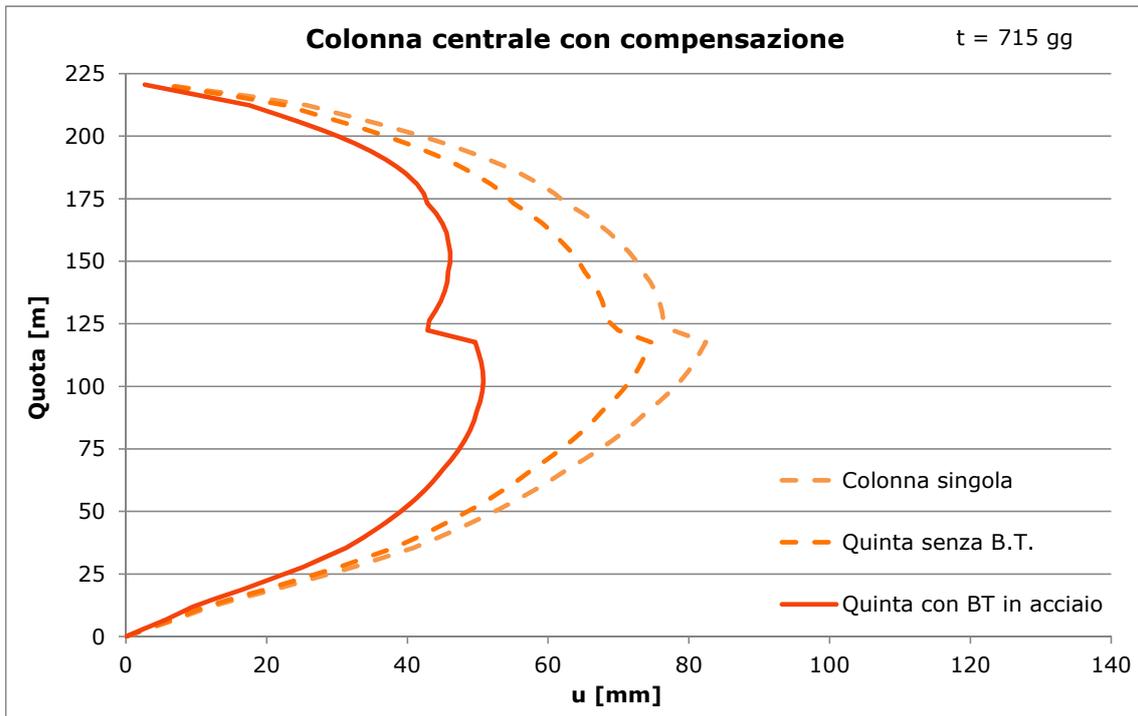


Figura 7.83 - Column shortening colonna centrale

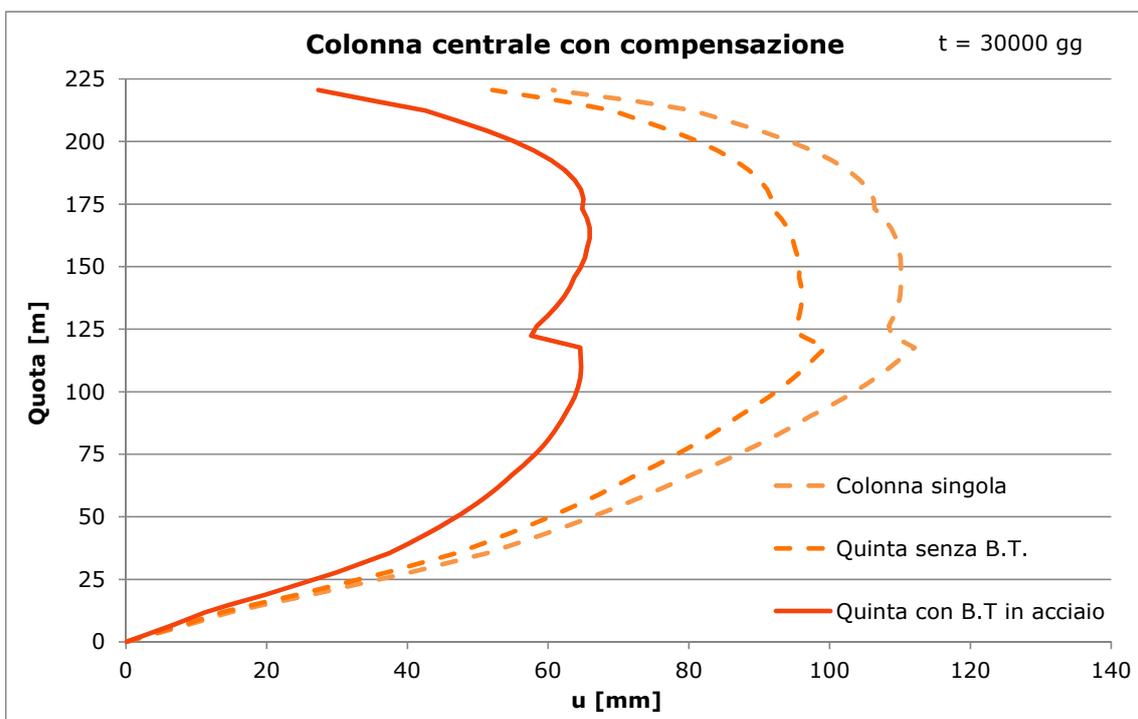


Figura 7.84 - Column shortening colonna centrale

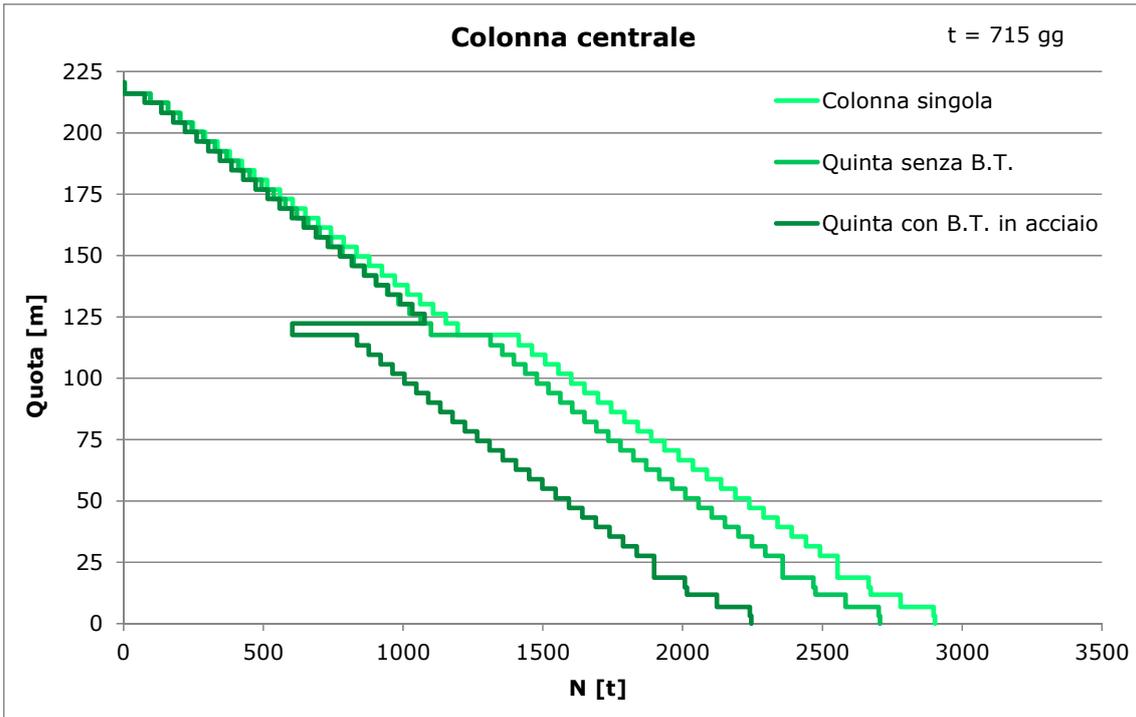


Figura 7.85 - Column shortening colonna centrale

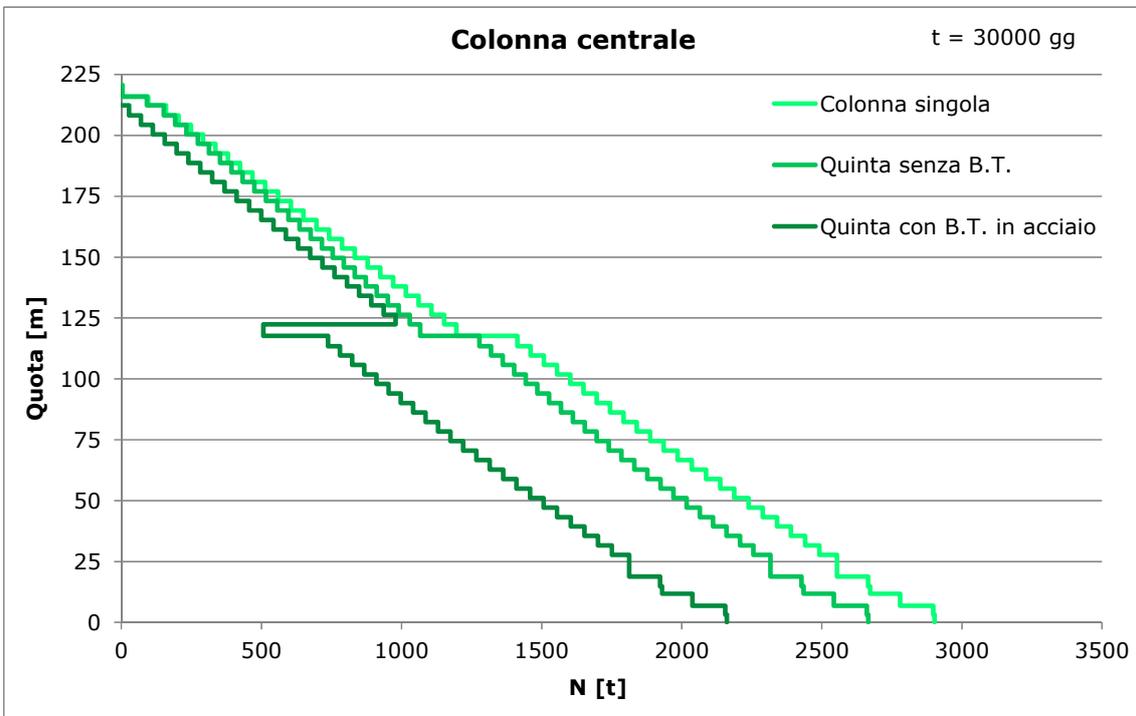


Figura 7.86 - Azioni assiali colonna centrale

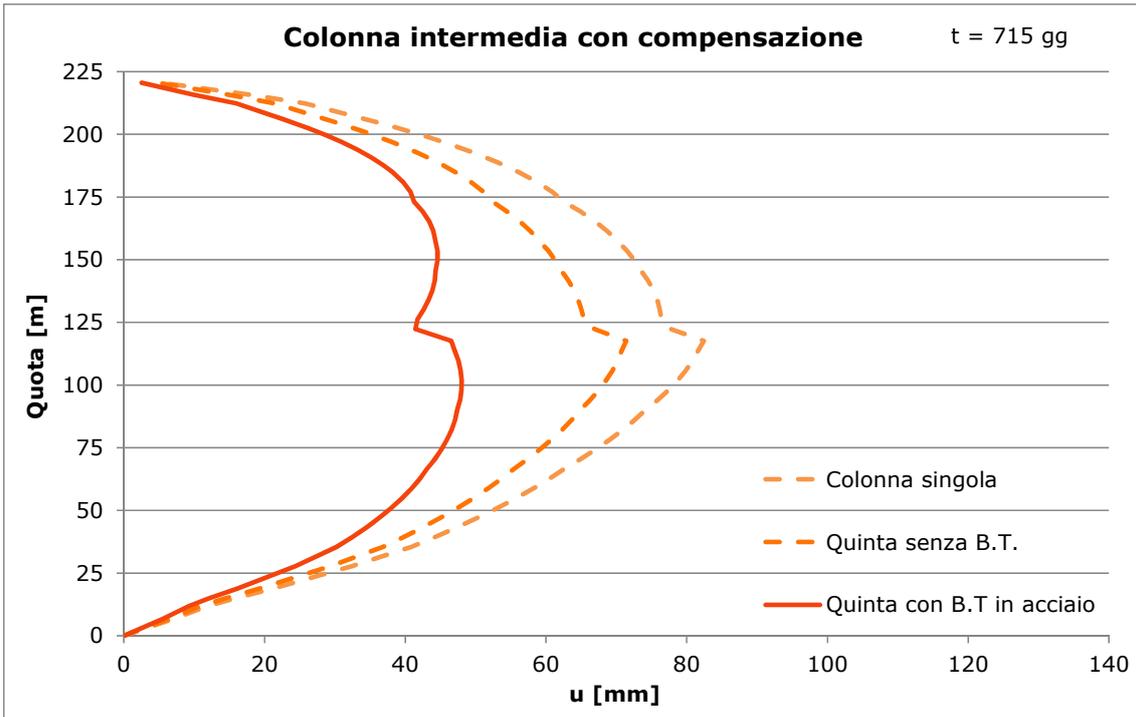


Figura 7.87 - Column shortening colonna intermedia

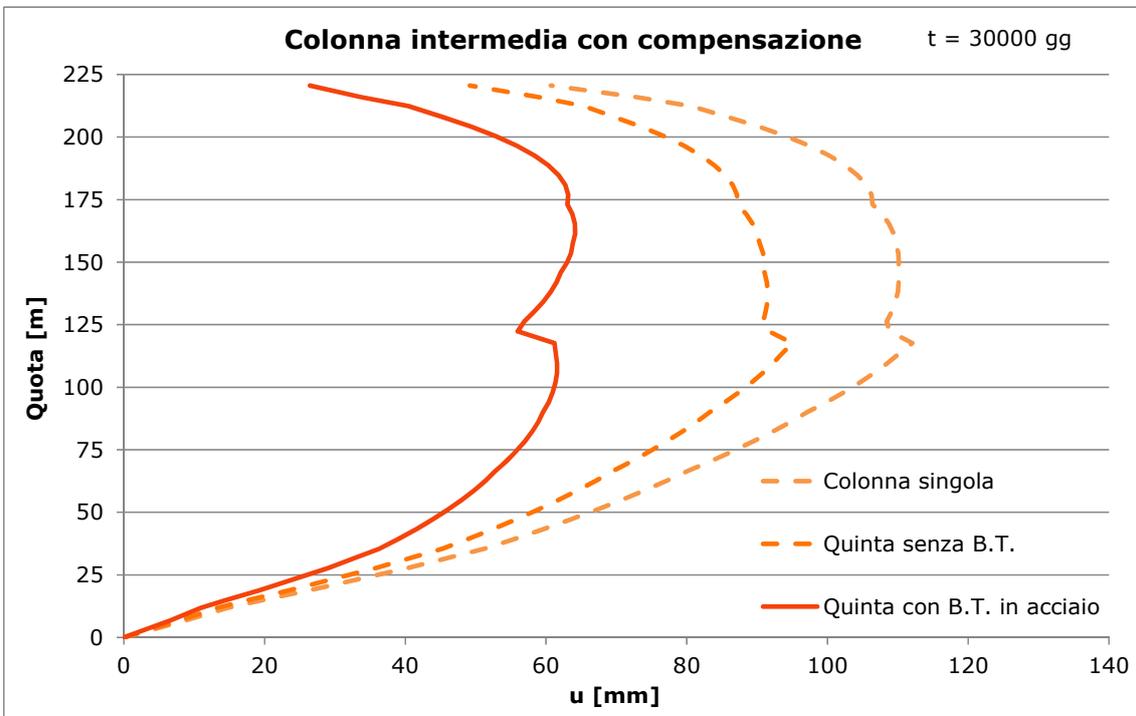


Figura 7.88 - Column shortening colonna intermedia

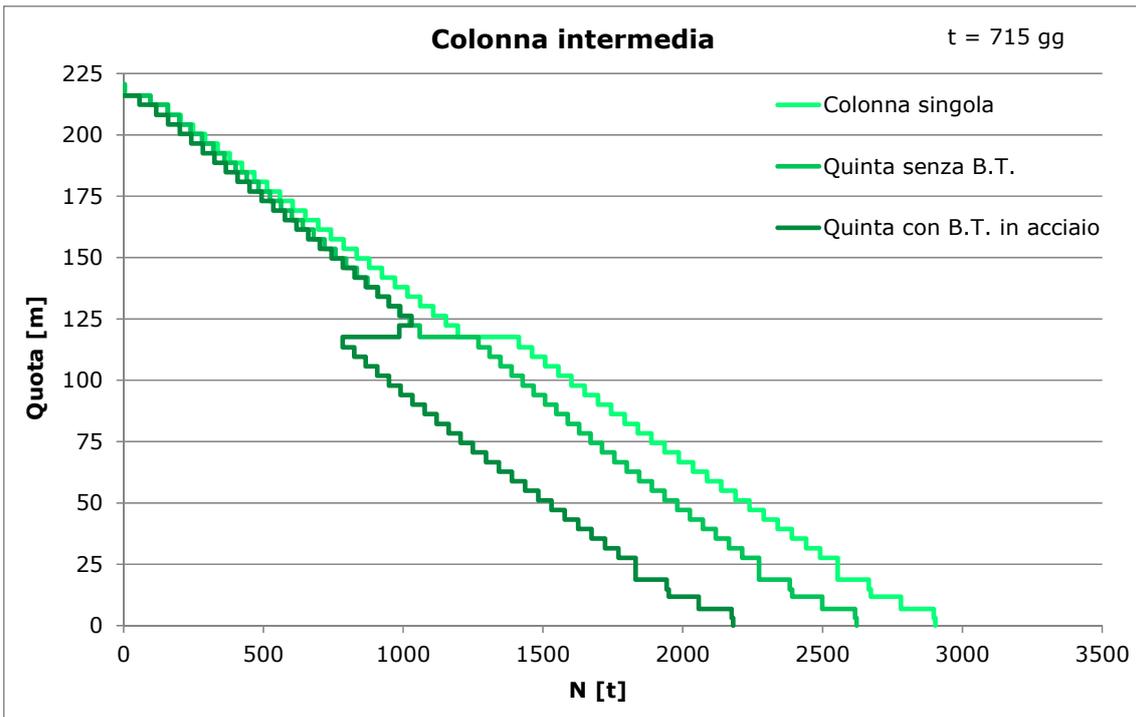


Figura 7.89 - Azioni assiali colonna intermedia

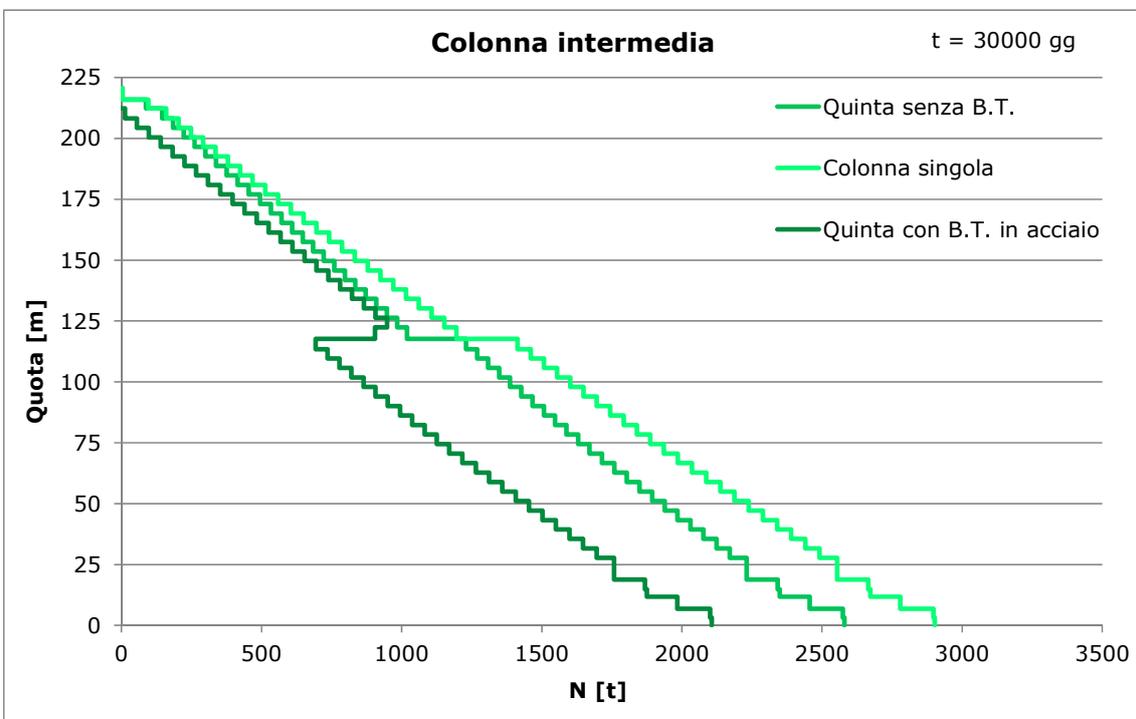


Figura 7.90 - Azioni assiali colonna intermedia

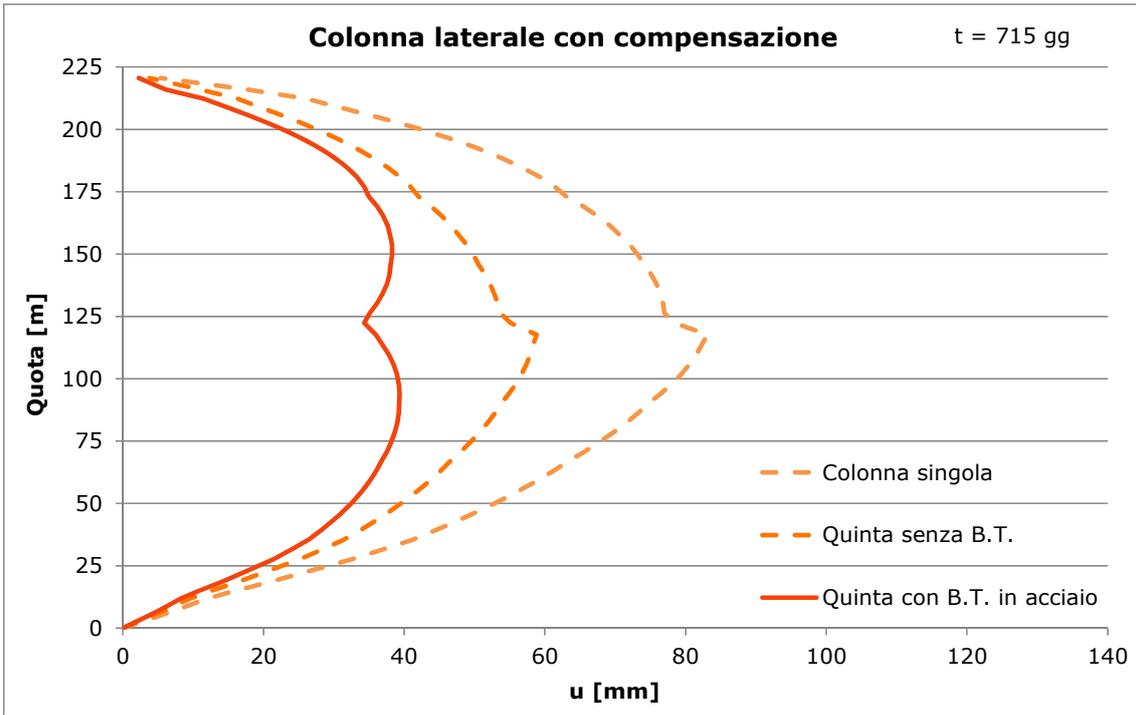


Figura 7.91 - Column shortening colonna laterale

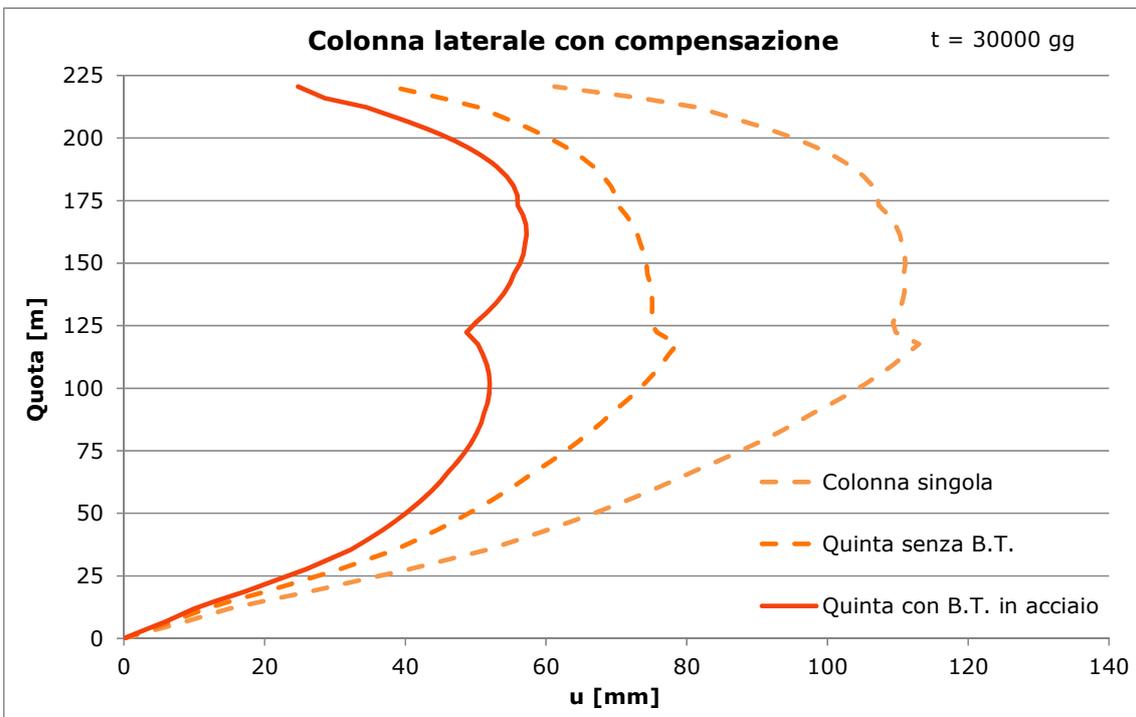


Figura 7.92 - Column shortening colonna laterale

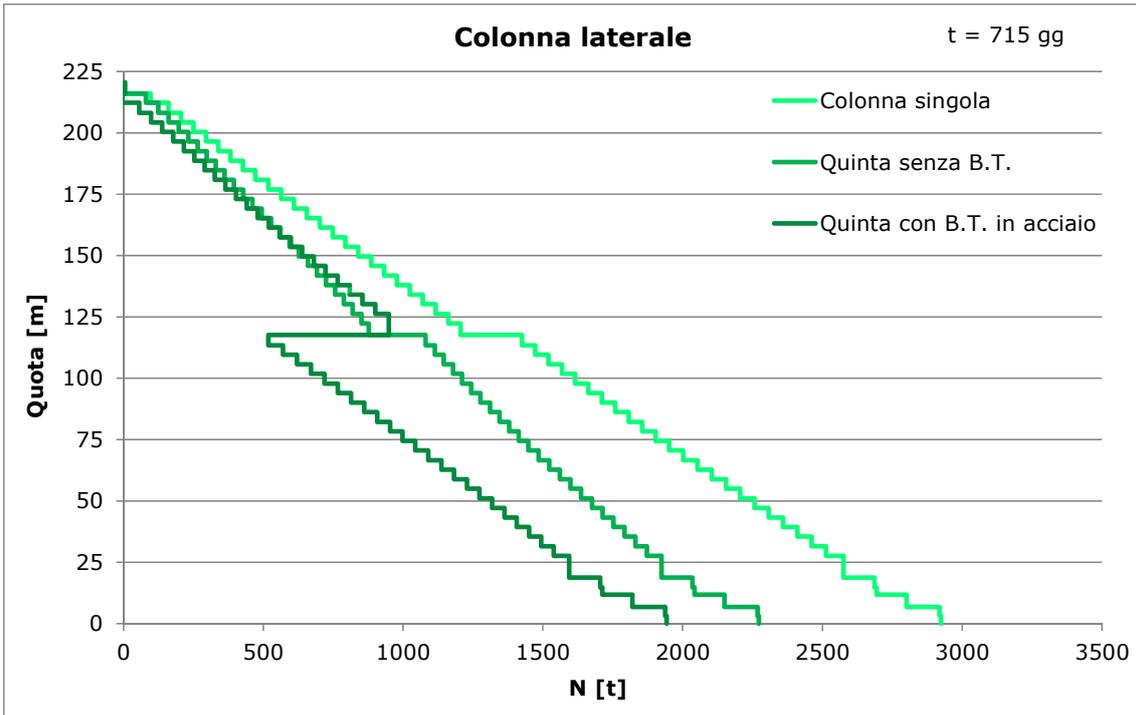


Figura 7.93 - Azioni assiali colonna laterale

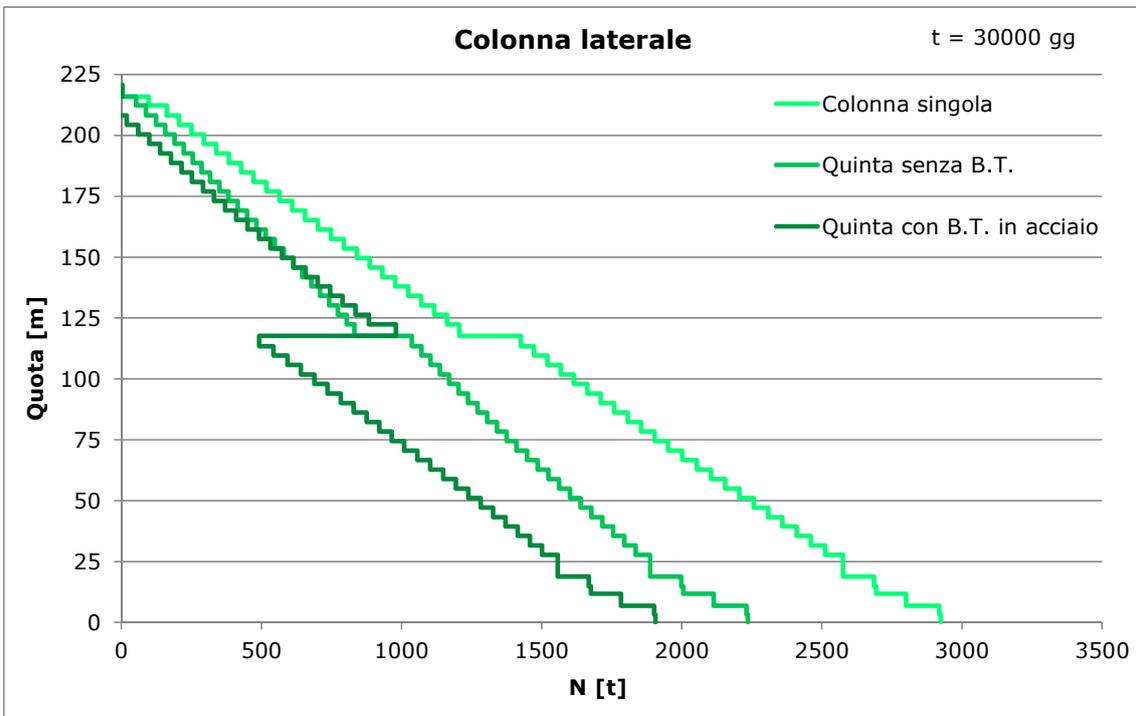


Figura 7.94 - Azioni assiali colonna laterale

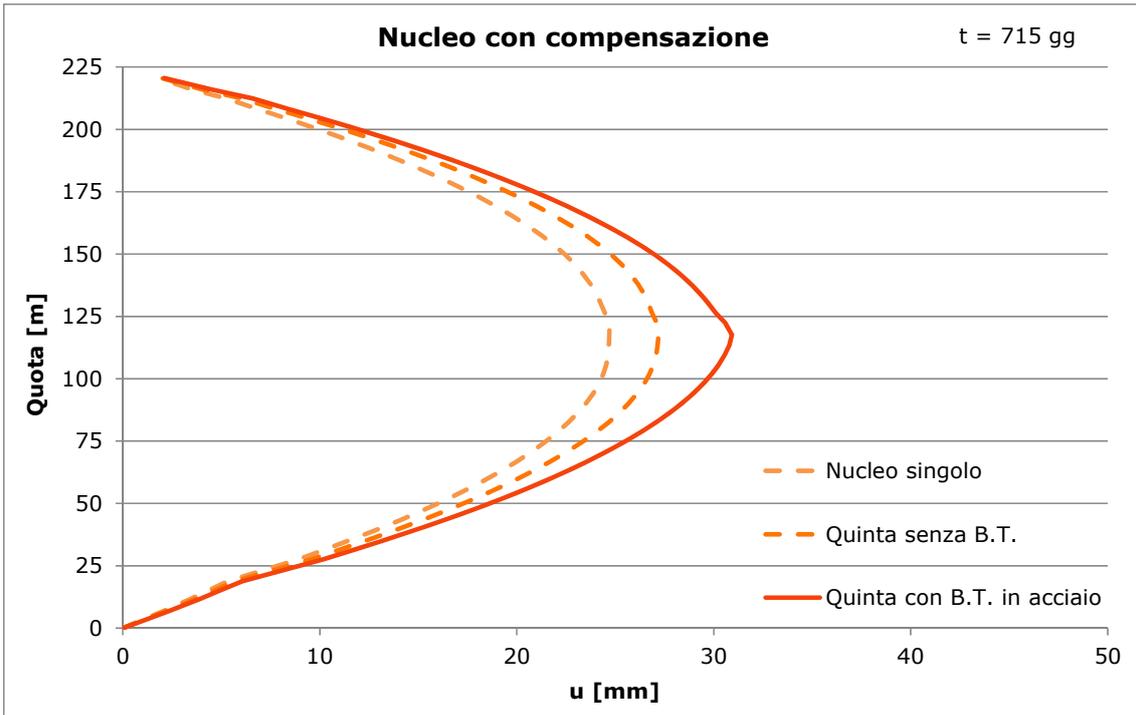


Figura 7.95 - Column shortening nucleo

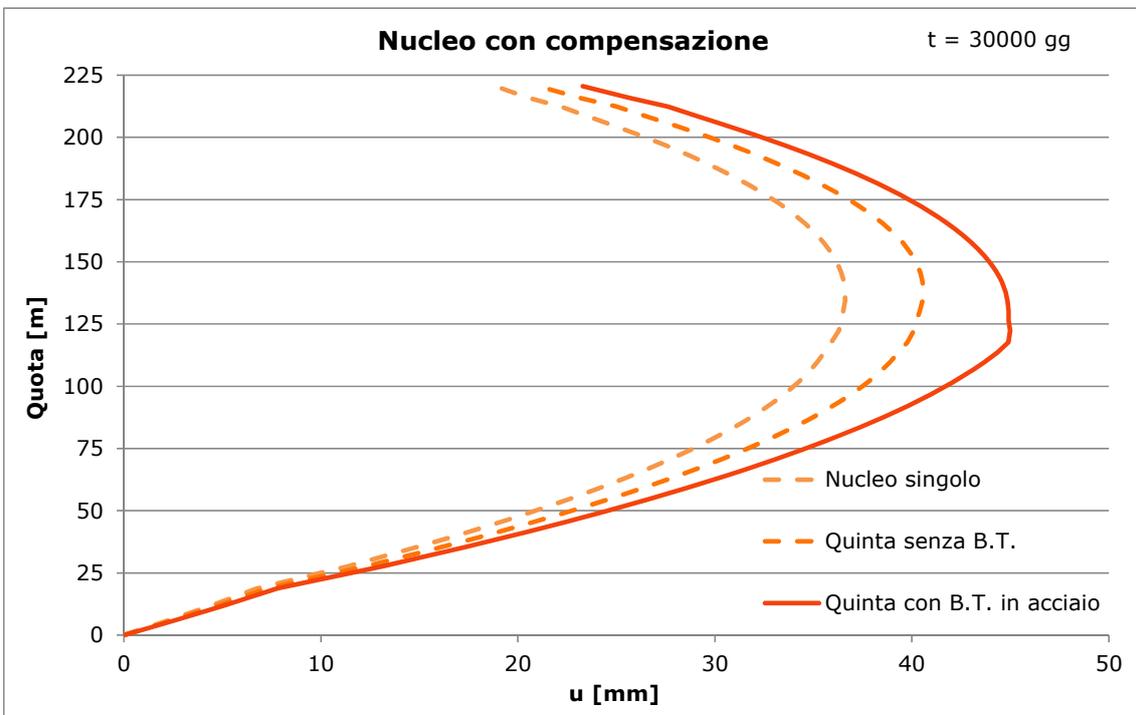


Figura 7.96 - Column shortening nucleo

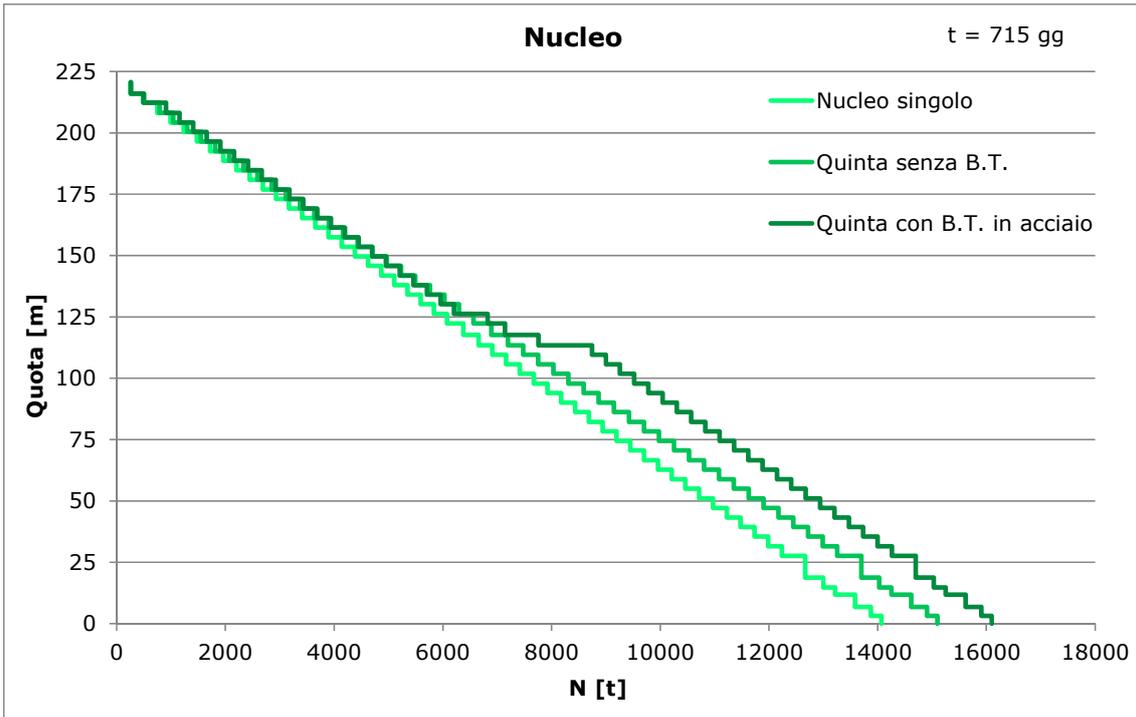


Figura 7.97 - Azioni assiali nucleo

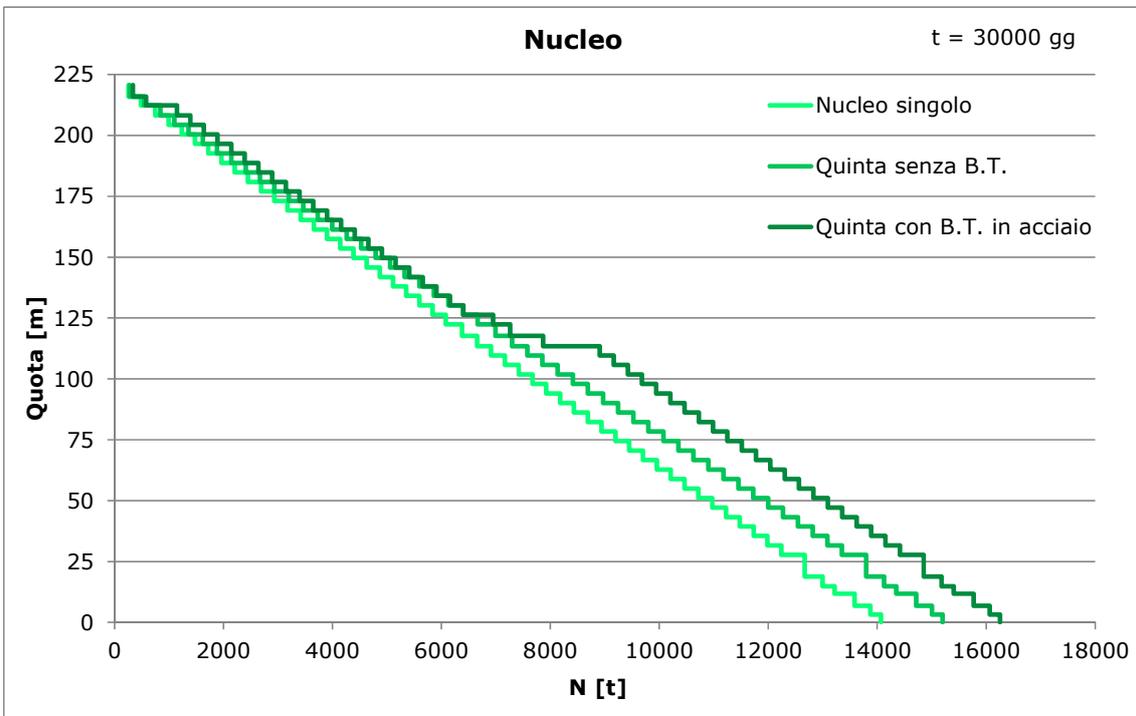


Figura 7.98 - Azioni assiali nucleo

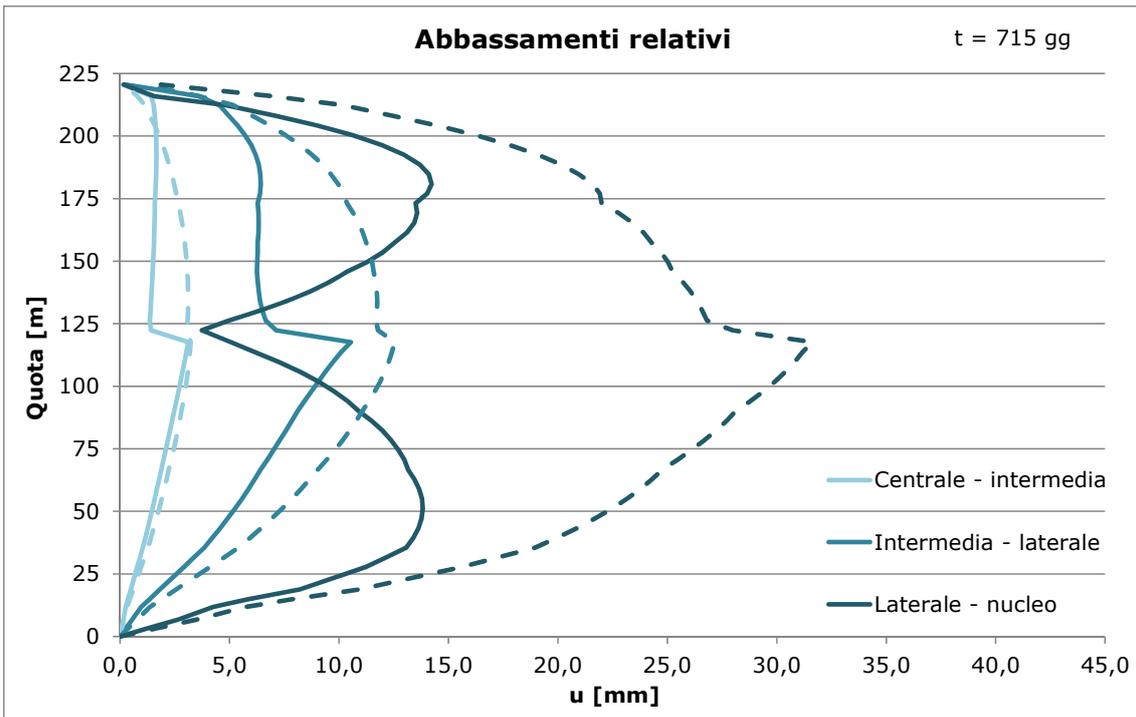


Figura 7.99 - Abbassamenti relativi (linea continua con belt truss, linea tratteggiata senza belt truss)

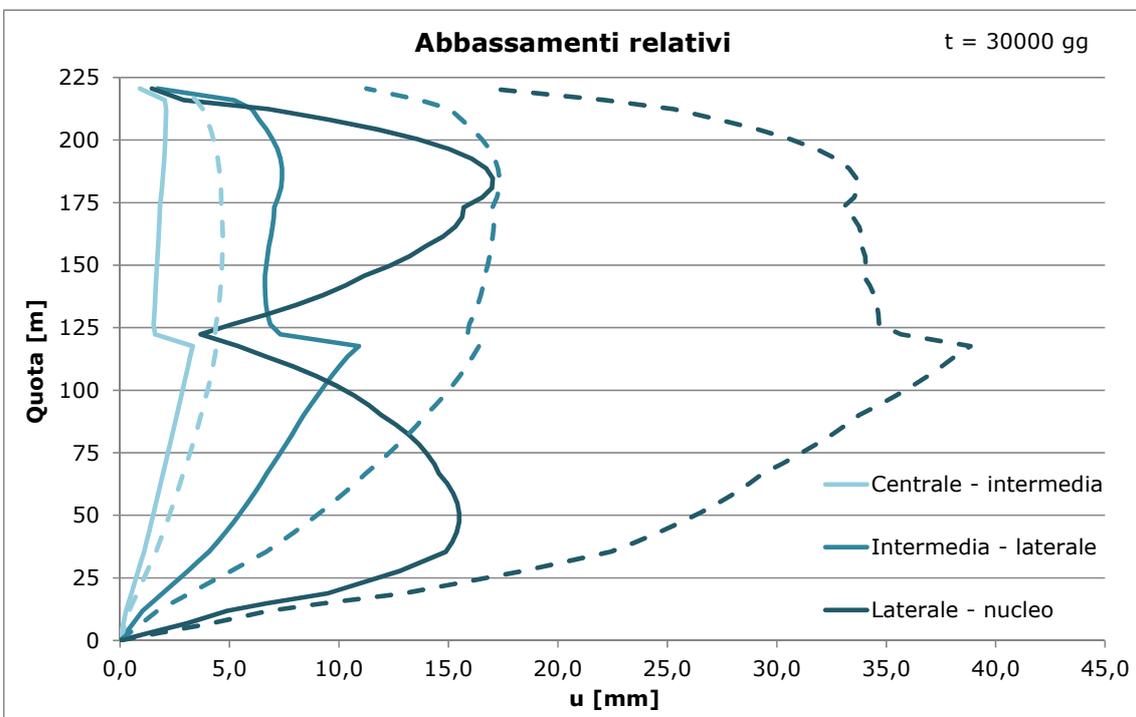


Figura 7.100 - Abbassamenti relativi (linea continua con belt truss, linea tratteggiata senza belt truss)

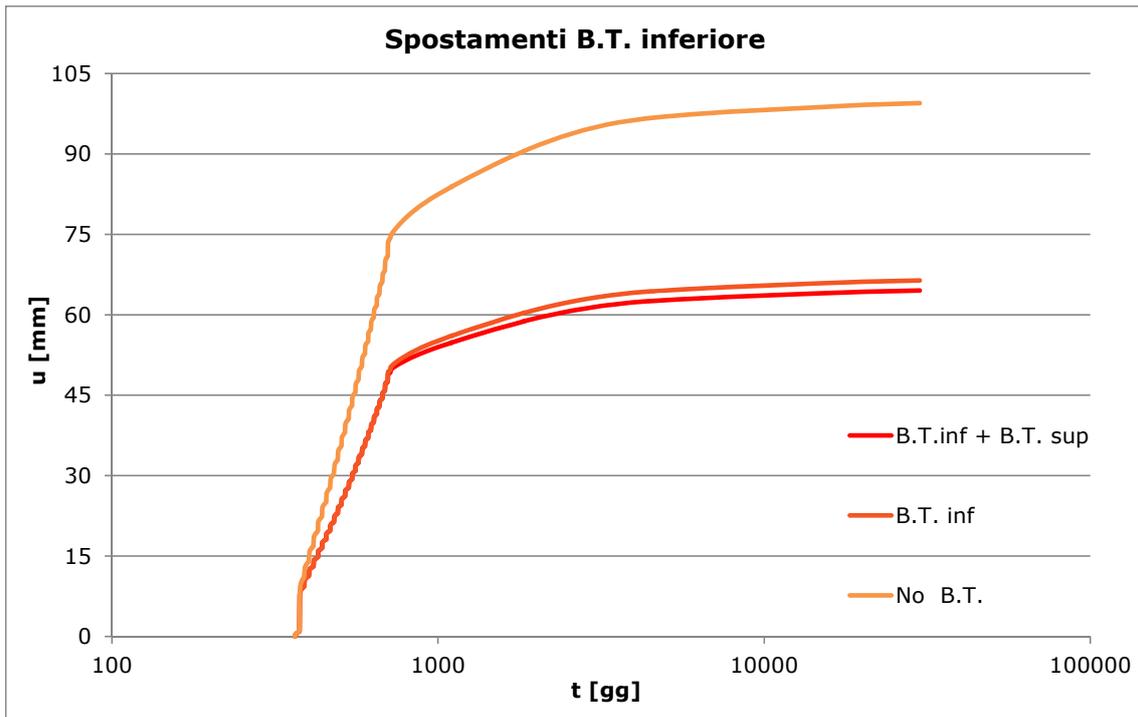


Figura 7.101 - Spostamenti nella mezzeria del corrente inferiore del B.T. inferiore

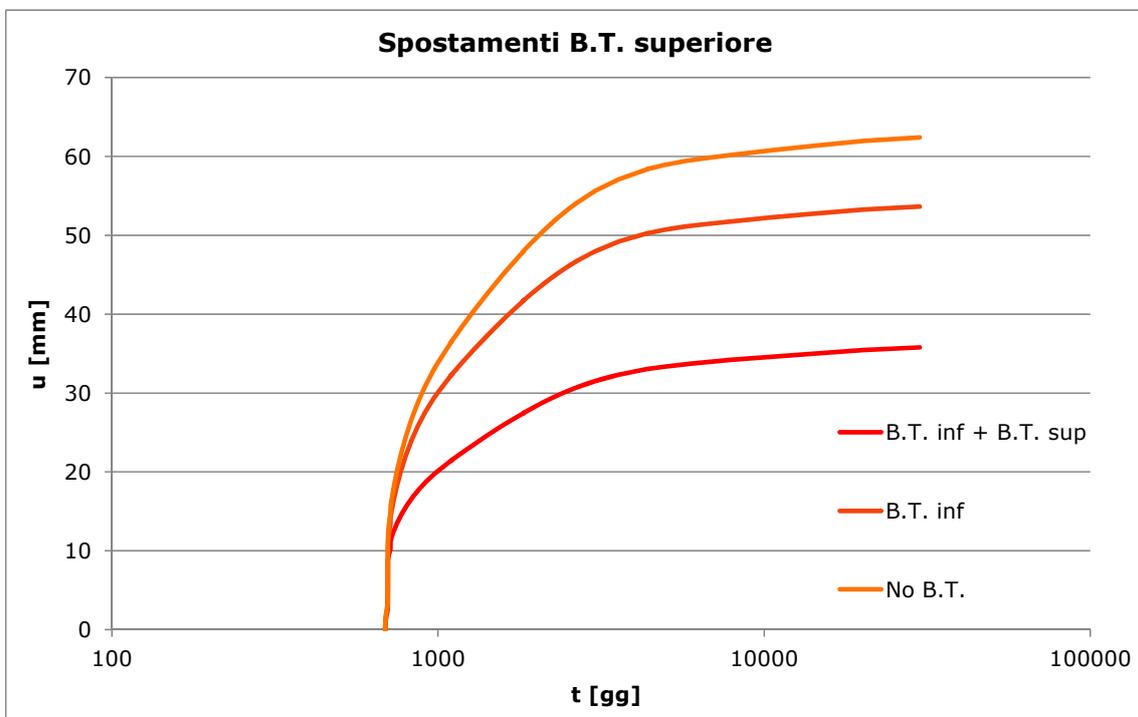


Figura 7.102 - Spostamenti nella mezzeria del corrente inferiore del B.T. superiore

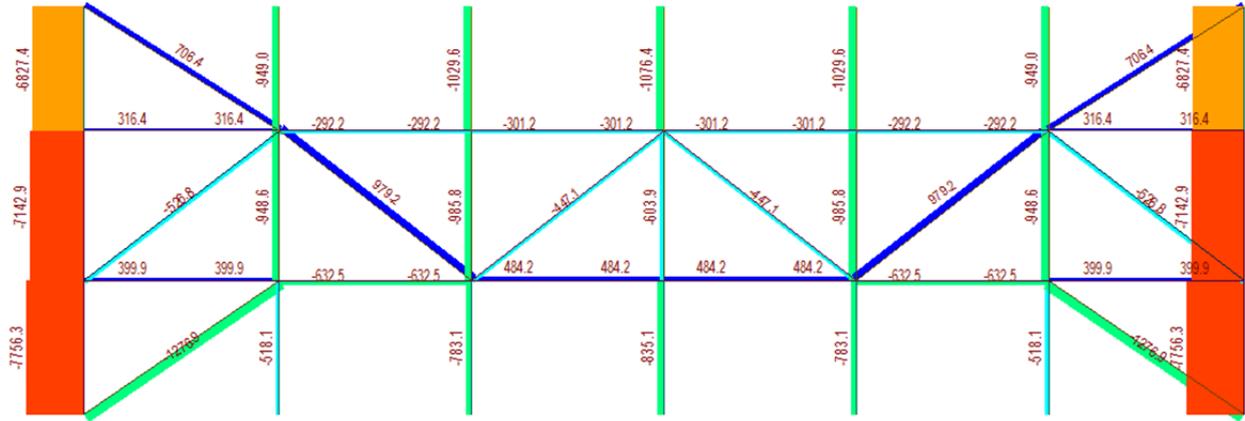


Figura 7.103 - Azioni assiali nel B.T. inferiore a fine costruzione (in tonnellate, compressioni negative)

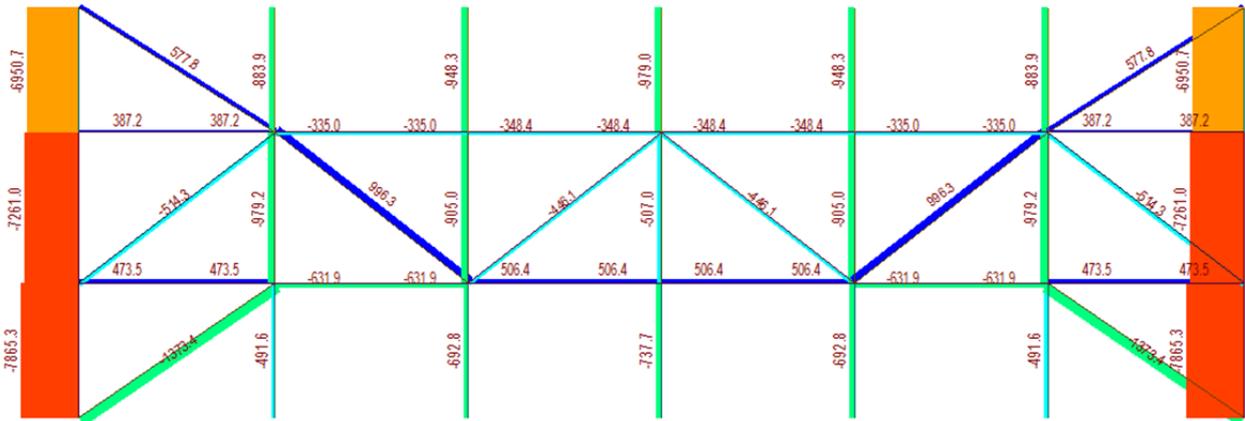


Figura 7.104 - Azioni assiali nel B.T. inferiore a 30000 giorni (in tonnellate, compressioni negative)

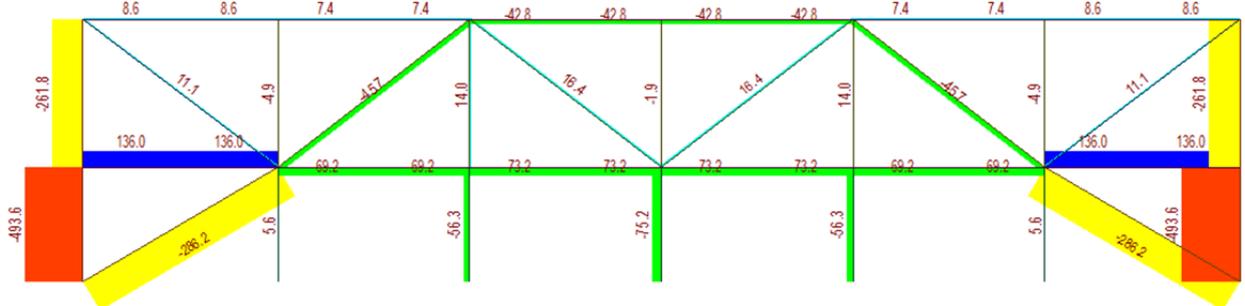


Figura 7.105 - Azioni assiali nel B.T. superiore a fine costruzione (in tonnellate, compressioni negative)

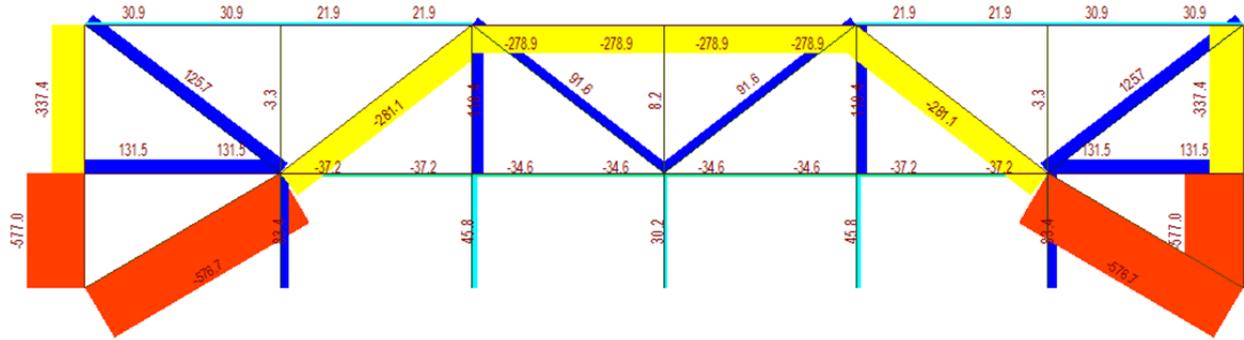


Figura 7.106 - Azioni assiali nel B.T. superiore a 30000 giorni (in tonnellate, compressioni negative)

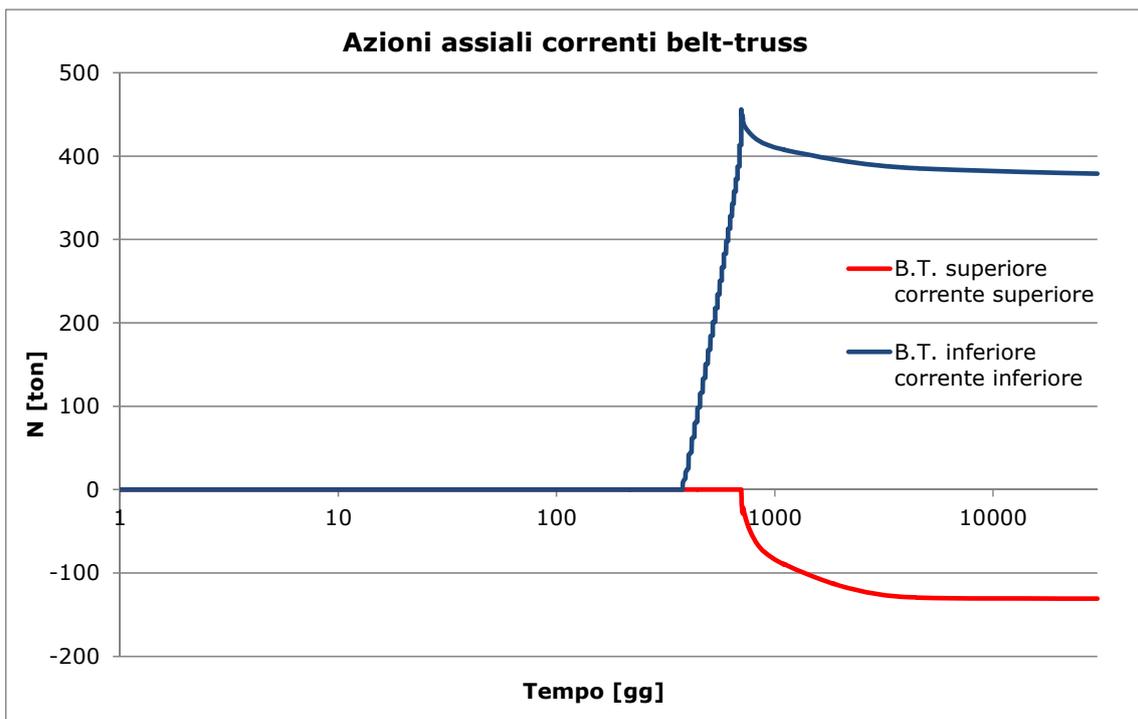


Figura 7.107 - Azioni assiali nella mezzeria dei belt truss

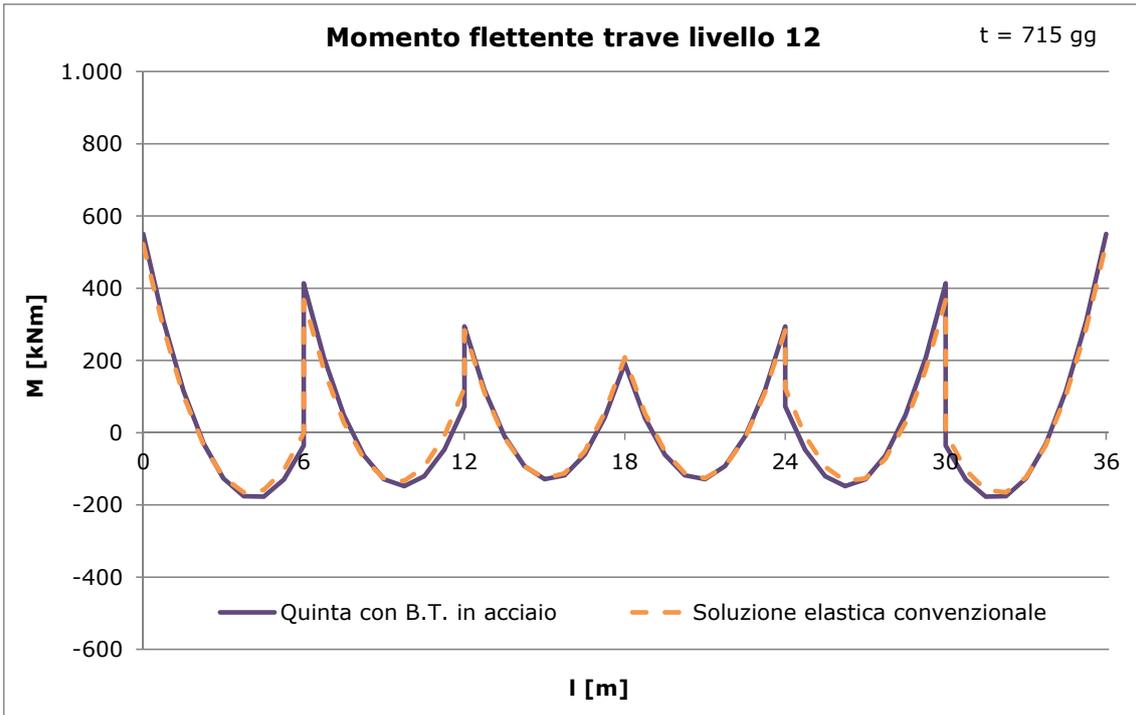


Figura 7.108 - Momento flettente trave livello 12

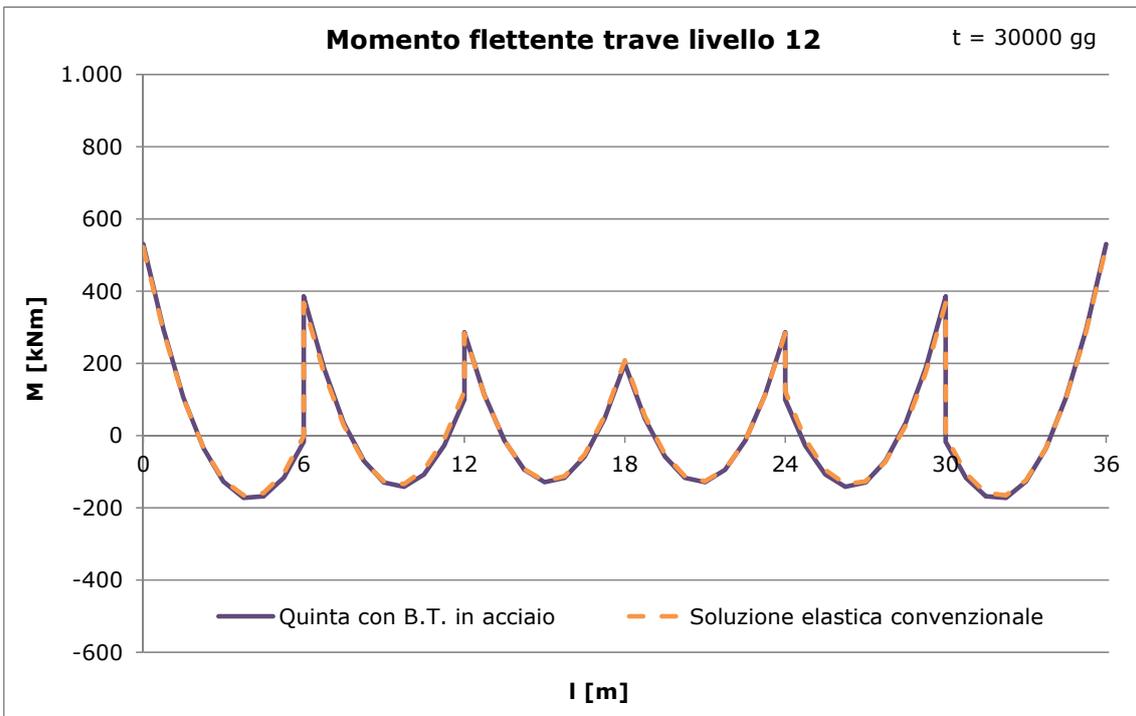


Figura 7.109 - Momento flettente trave livello 12

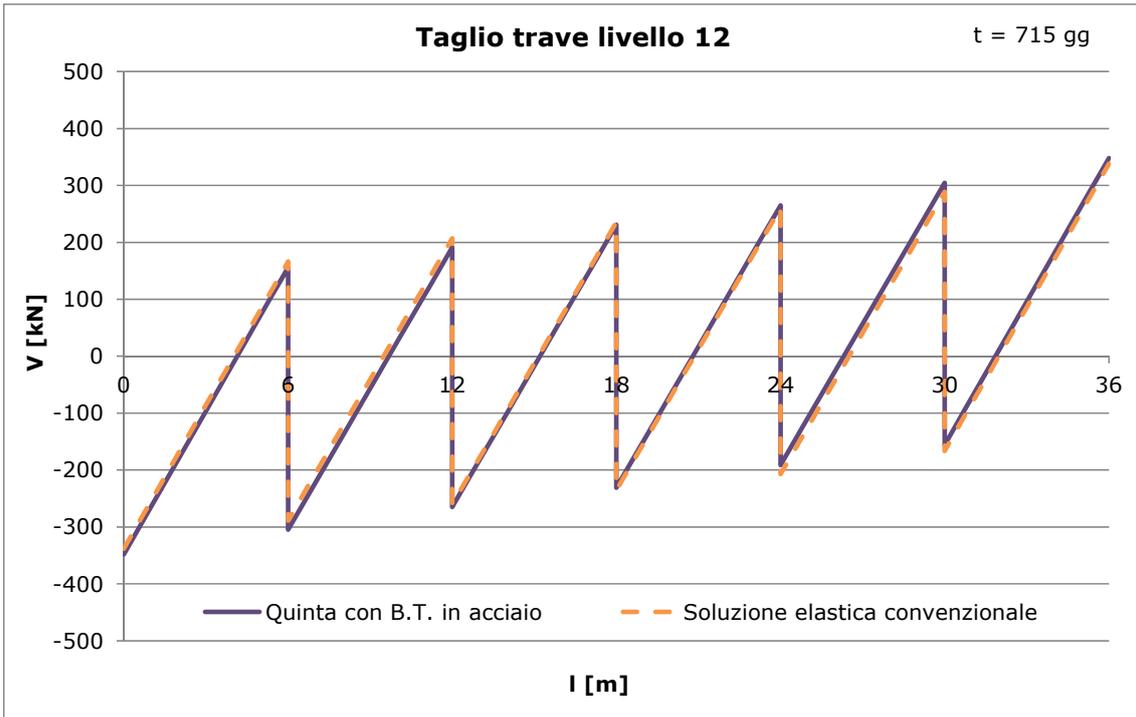


Figura 7.110 - Taglio trave livello 12

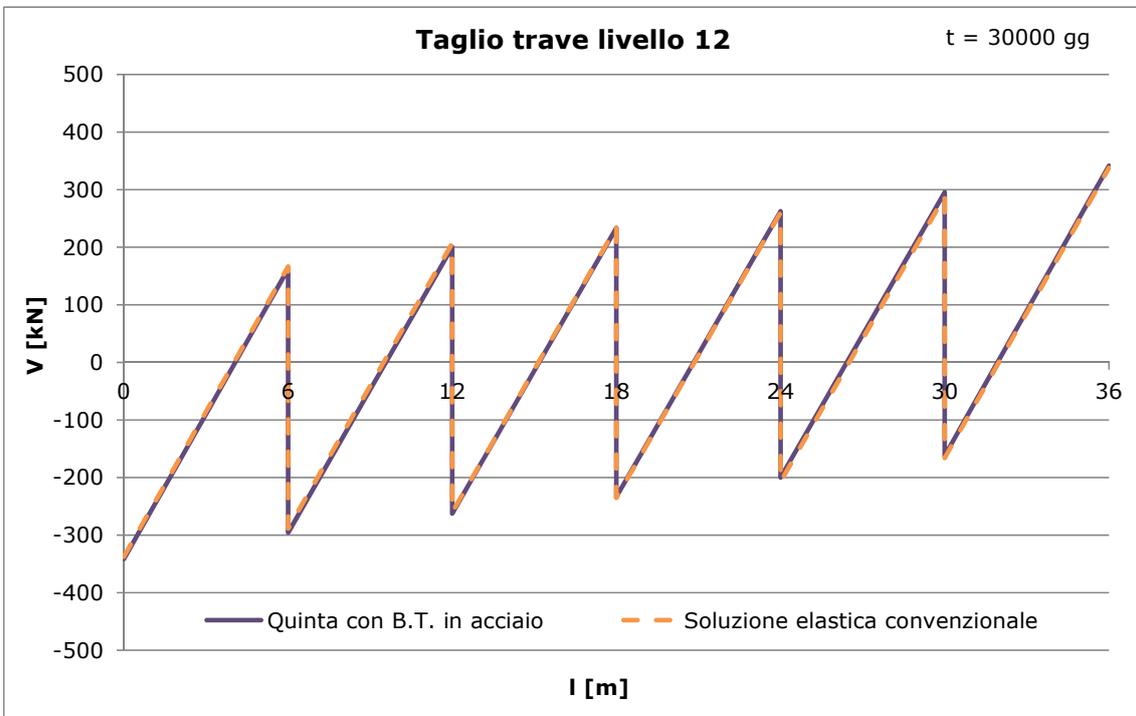


Figura 7.111 - Taglio trave livello 12

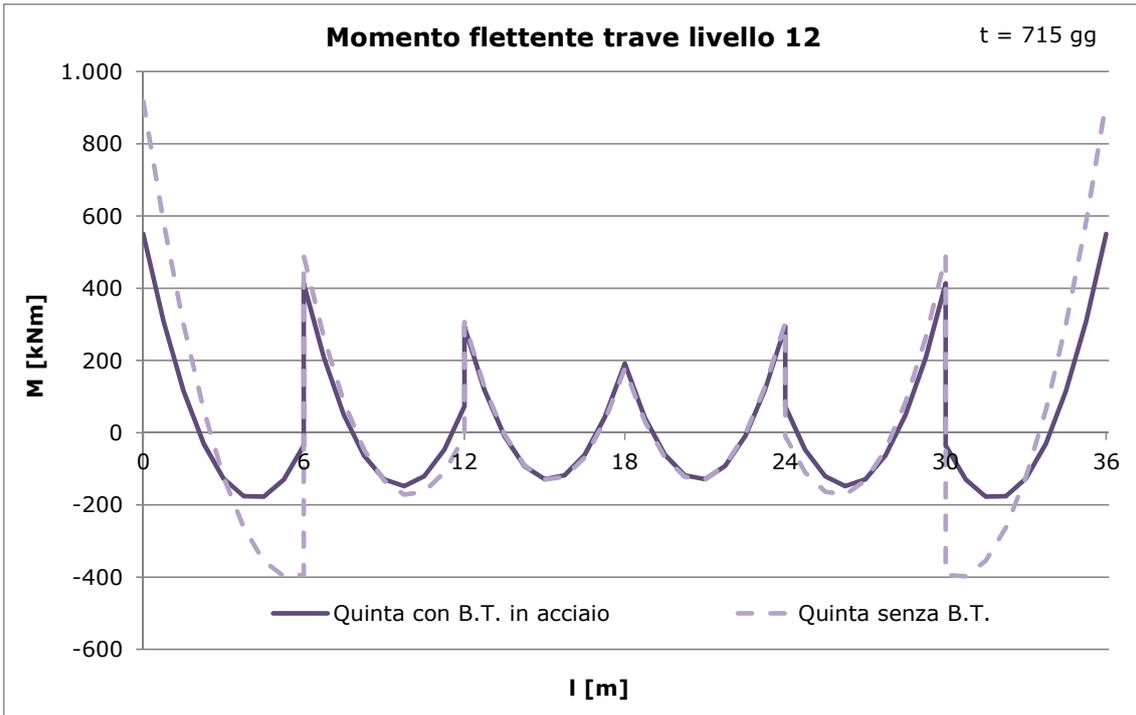


Figura 7.112 - Momento flettente trave livello 12 con e senza B.T.

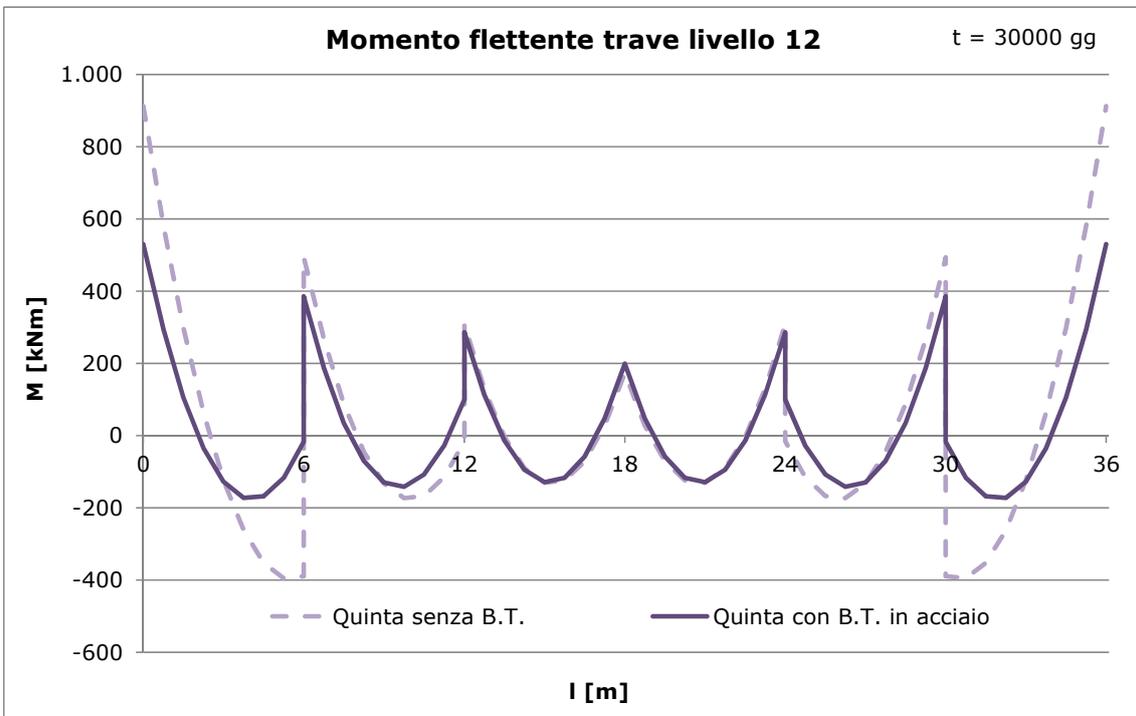


Figura 7.113 - Momento flettente trave livello 12 con e senza B.T.

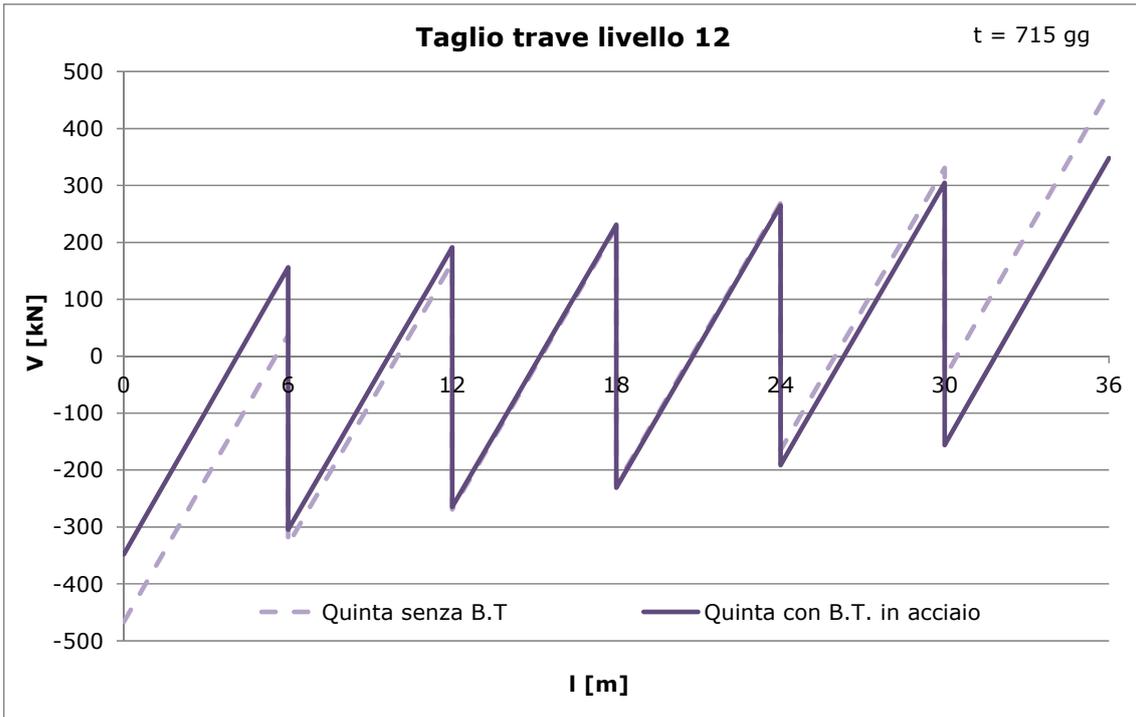


Figura 7.114 - Taglio trave livello 12 con e senza B.T.

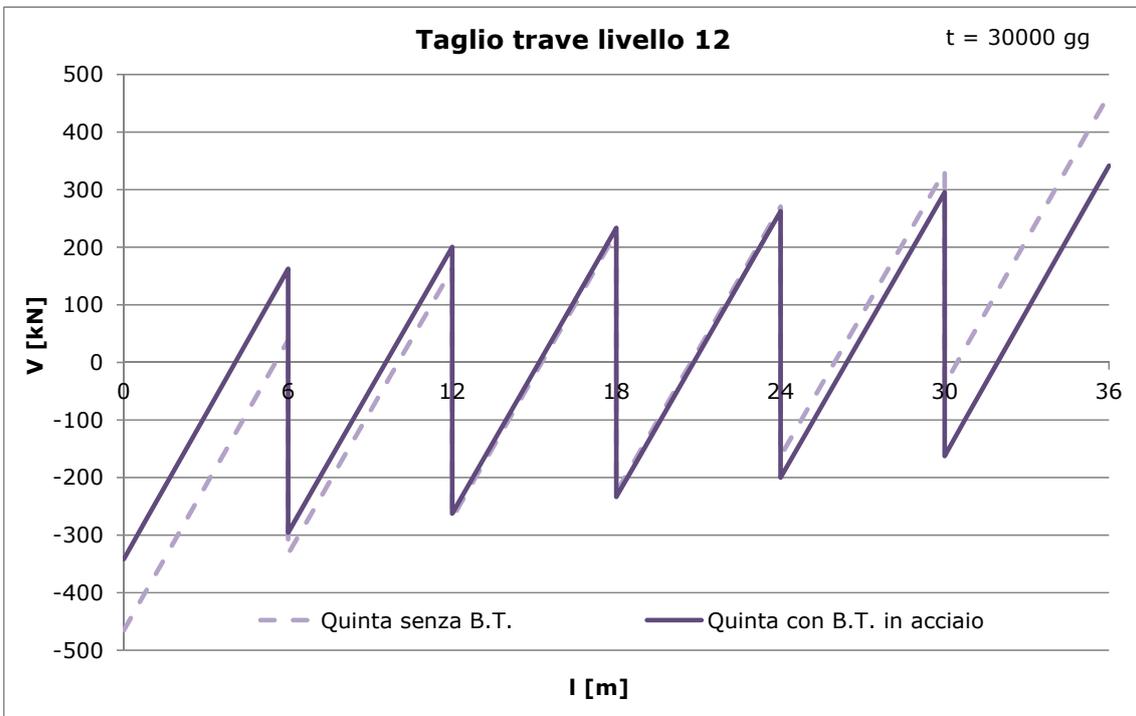


Figura 7.115 - Taglio trave livello 12 con e senza B.T.

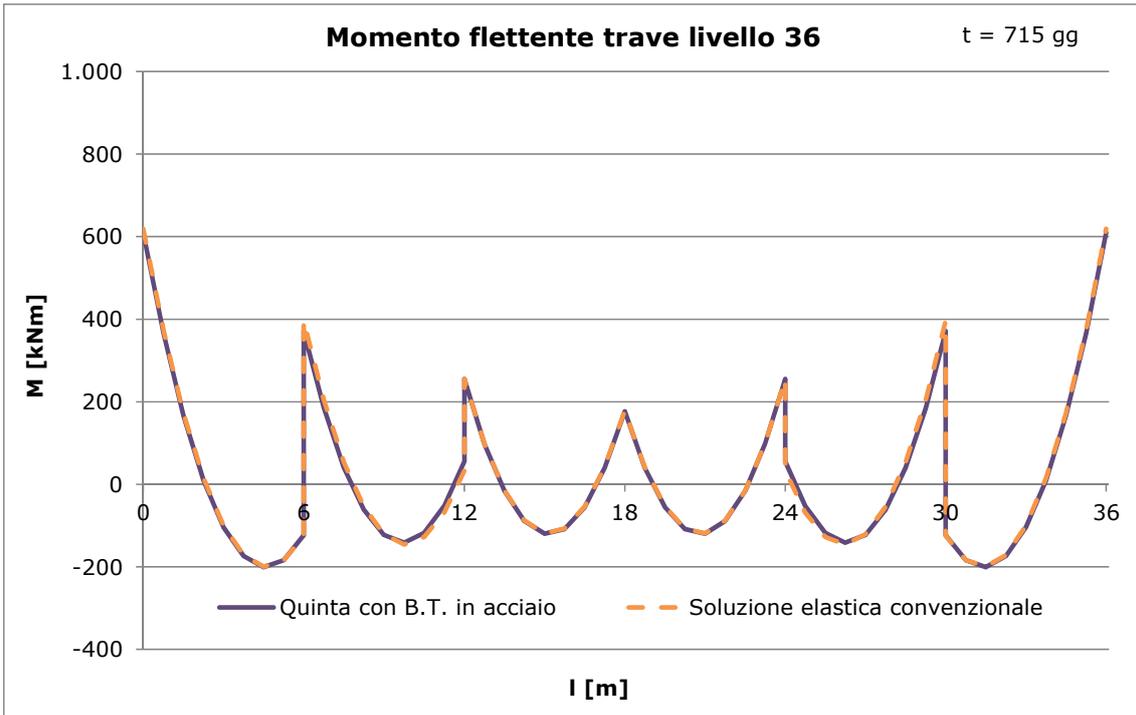


Figura 7.116 - Momento flettente trave livello 36

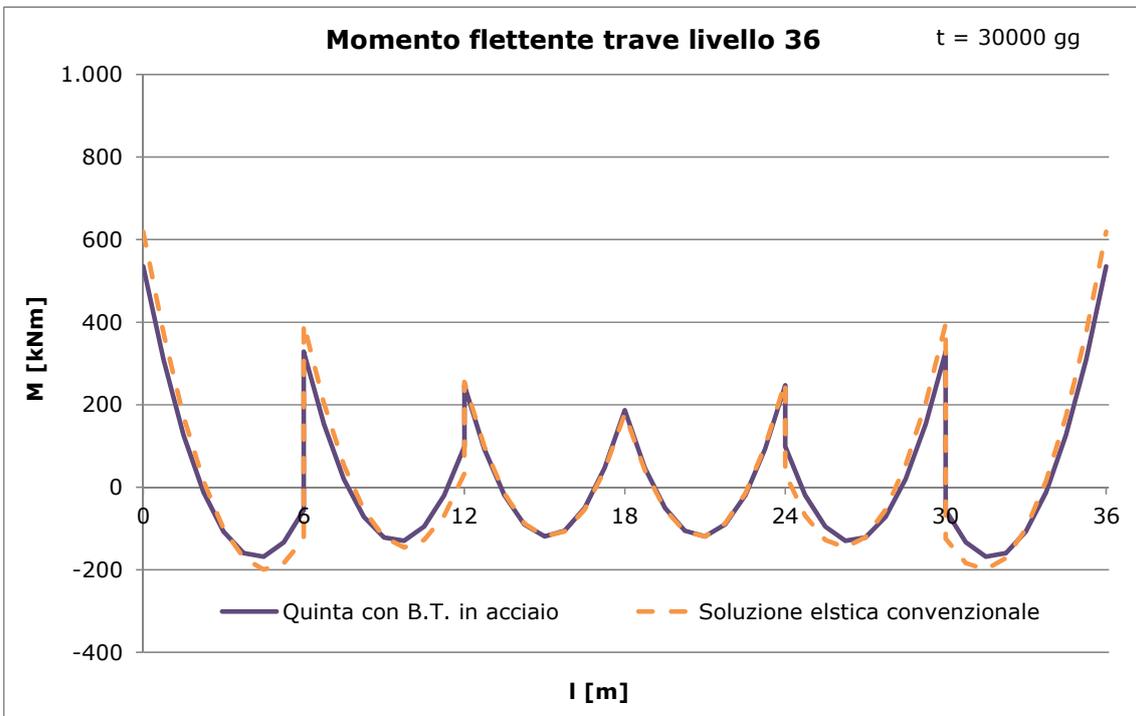


Figura 7.117 - Momento flettente trave livello 36

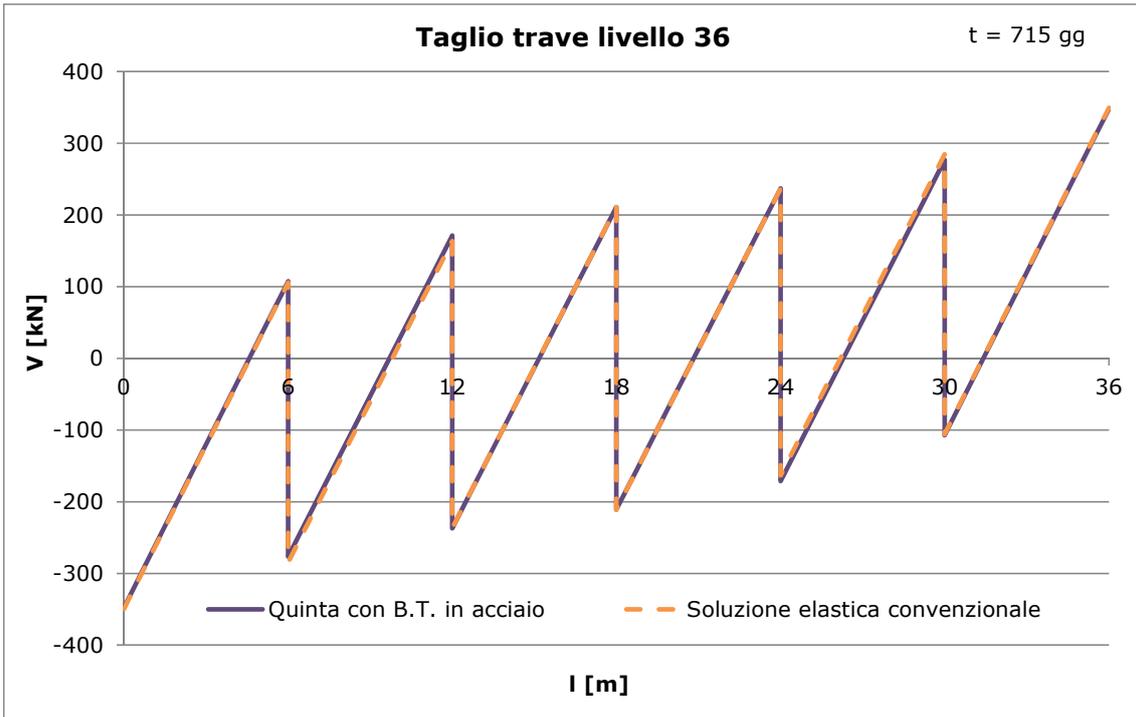


Figura 7.118 - Taglio trave livello 36

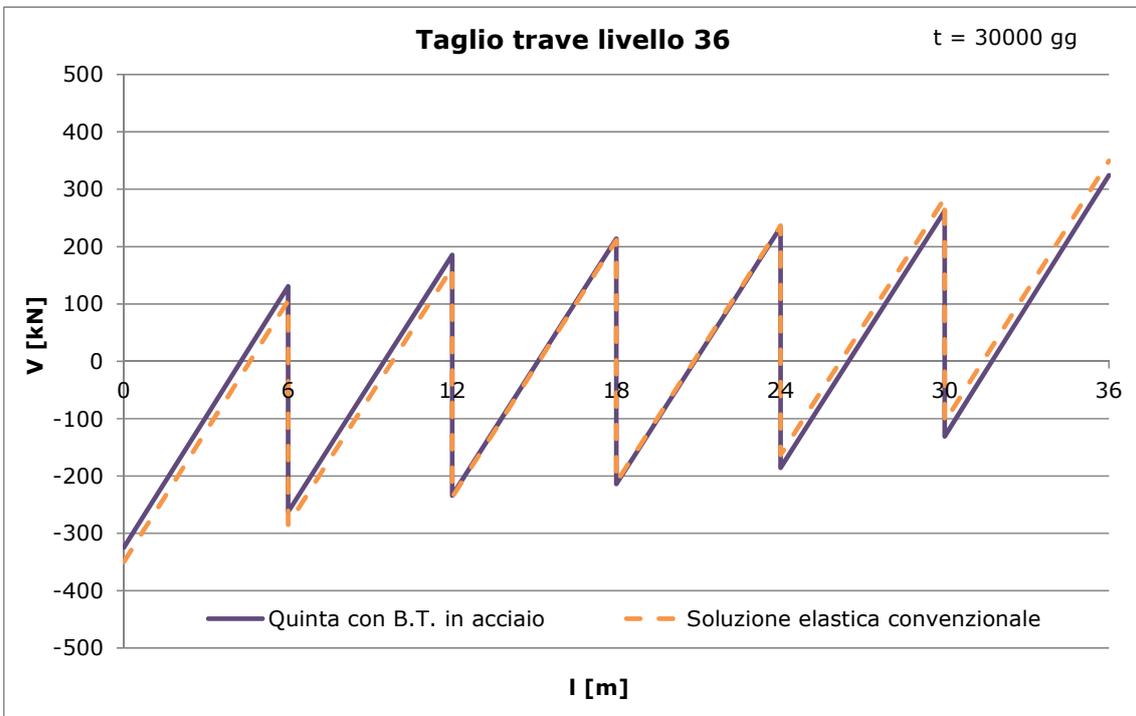


Figura 7.119 - Taglio trave livello 36

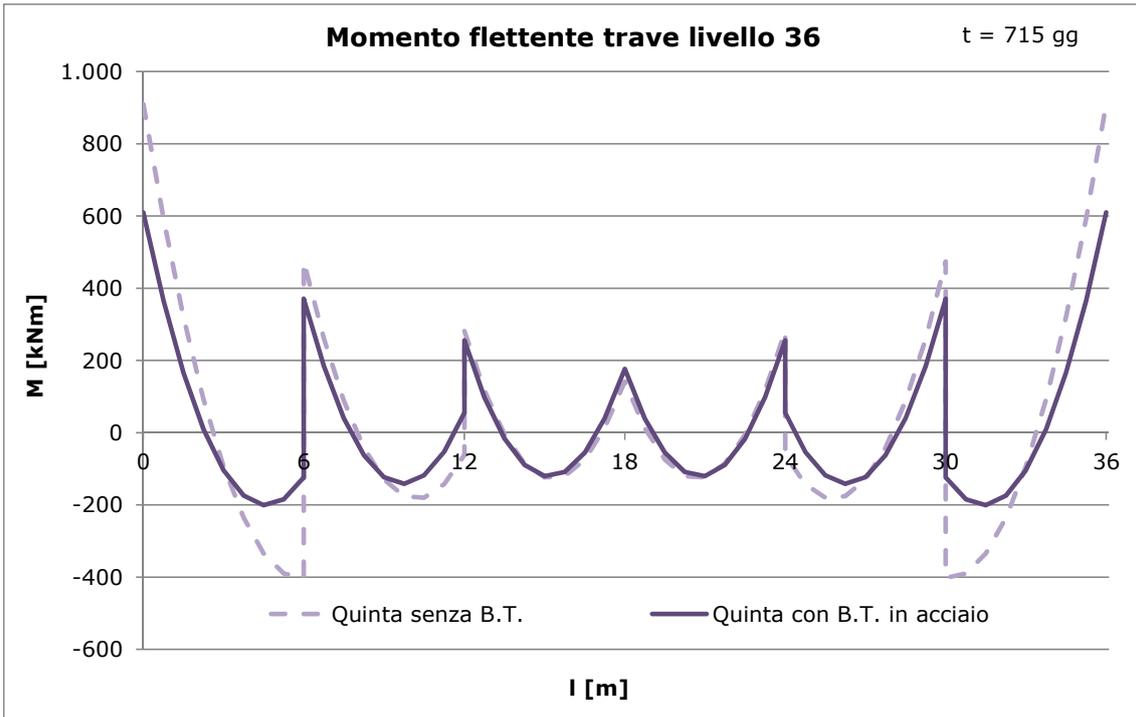


Figura 7.120 - Momento flettente trave livello 36 con e senza B.T.

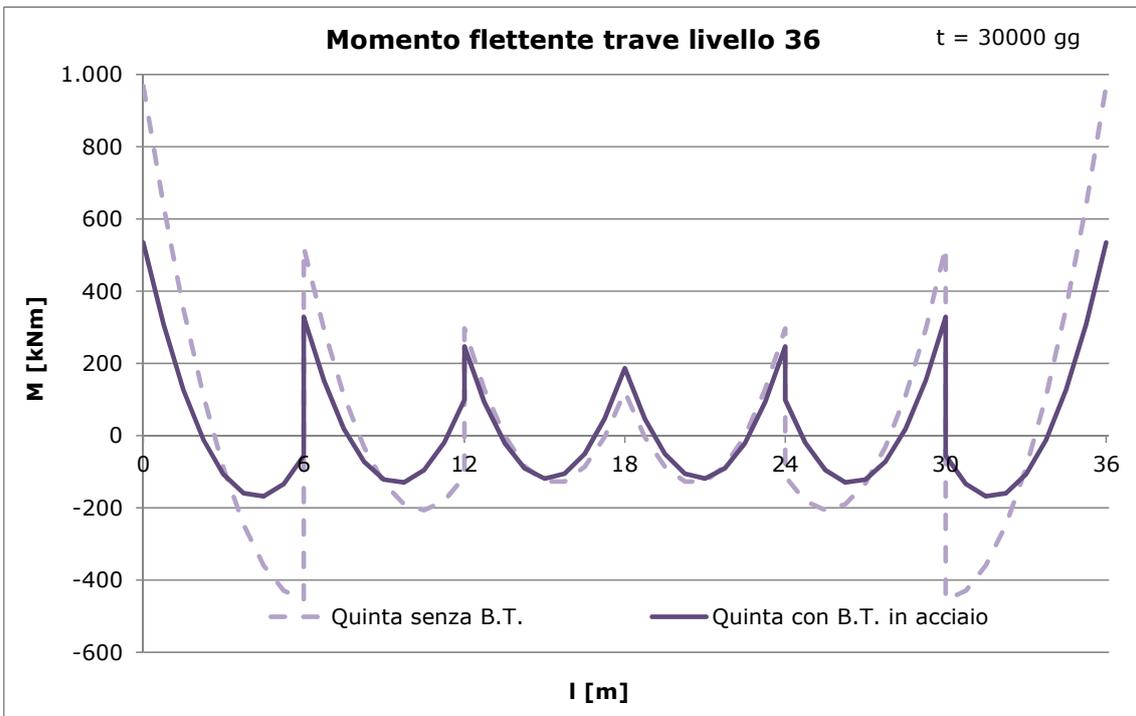


Figura 7.121 - Momento flettente trave livello 36 con e senza B.T.

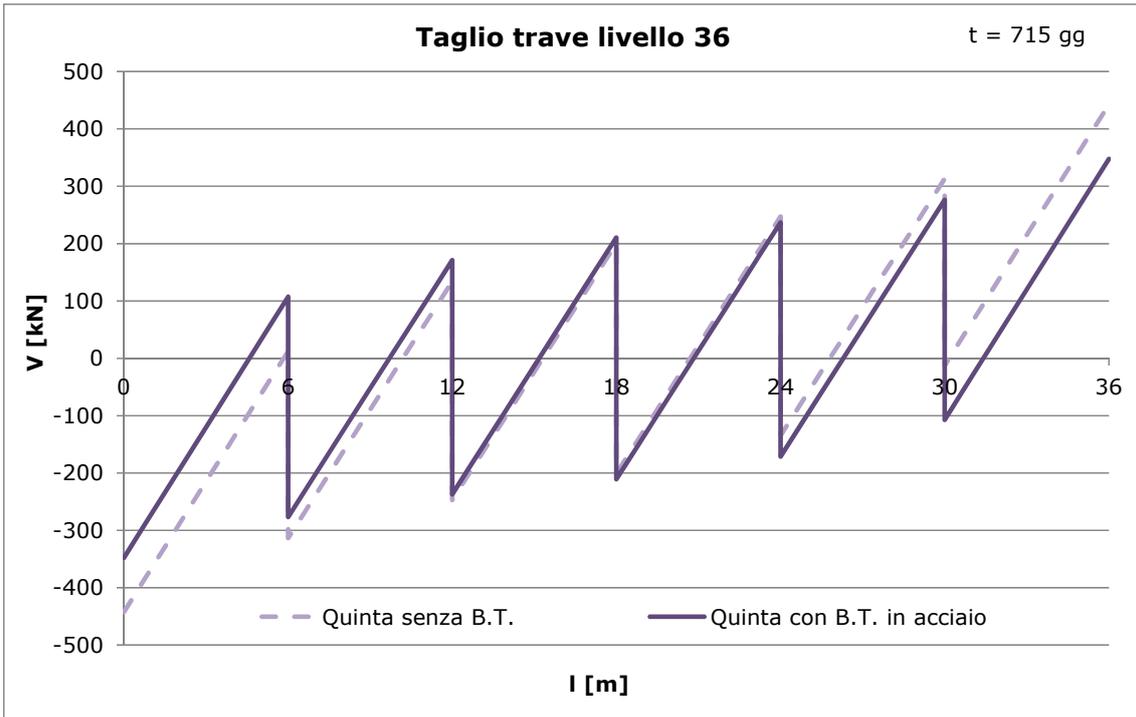


Figura 7.122 - Taglio trave livello 36 con e senza B.T.

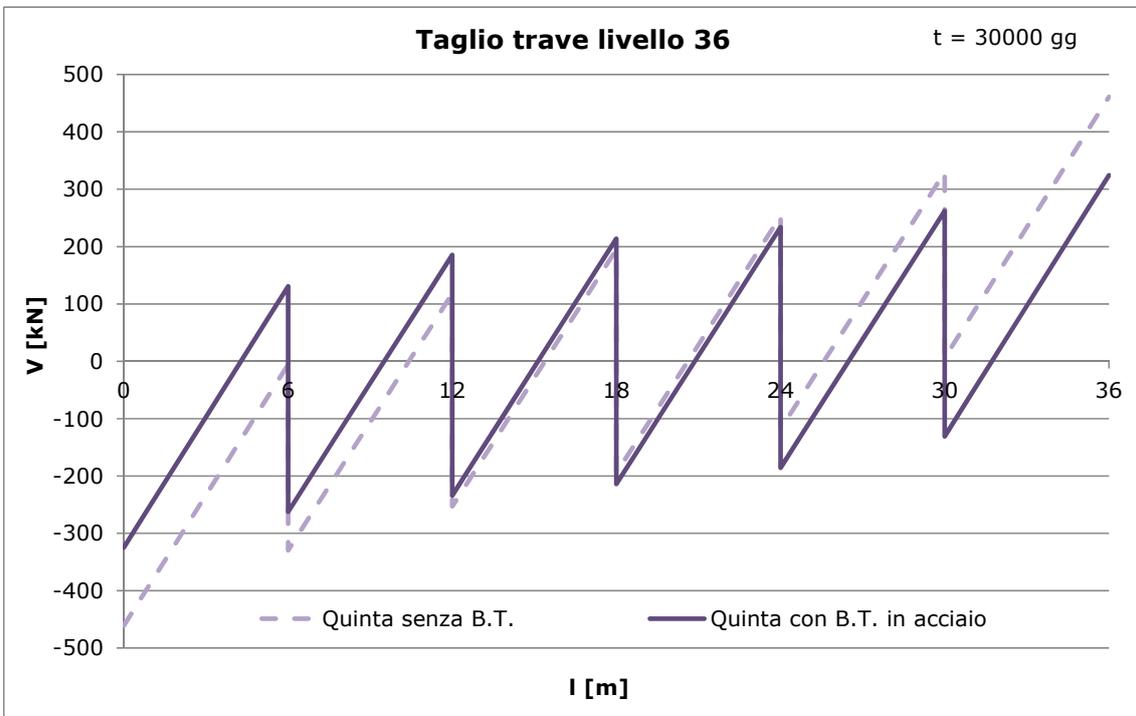


Figura 7.123 - Taglio trave livello 36 con e senza B.T.

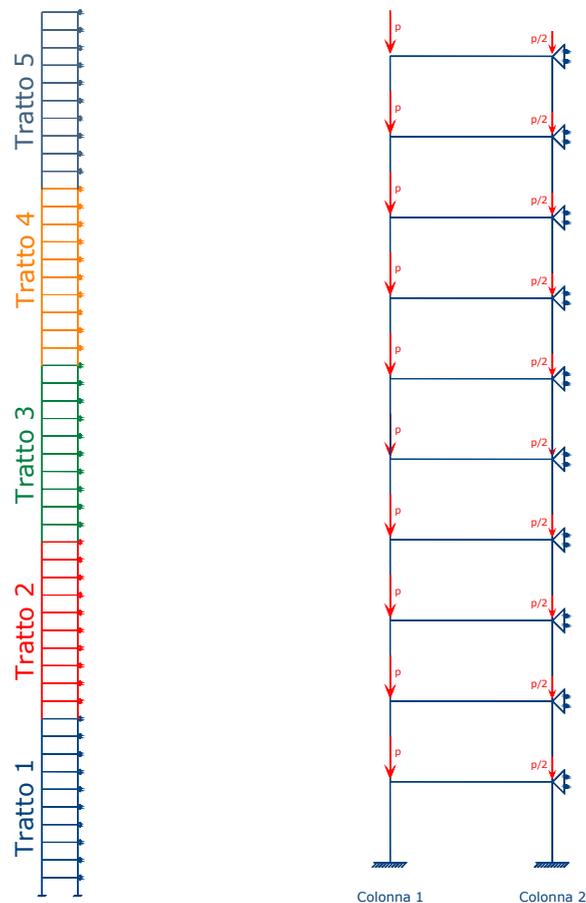
**7.3.4.3 Analisi dei risultati**

Quanto visto nel paragrafo 7.3.3.3 in termini di ripartizione dei carichi e accorciamento delle colonne viene amplificato nel caso di presenza dei belt trussis.

Come visibile da Figura 7.99 gli spostamenti relativi tendono a diminuire sensibilmente. Per comprendere questo fenomeno si considera una struttura ausiliaria composta da due colonne identiche (Figura 7.124) per geometria e materiali (Tabella 12) collegate da travi con sezione uguale ad ogni livello. Sono state effettuate numerose analisi facendo variare la rigidezza di quest'ultime. La colonna 1 è sottoposta a forze concentrate ad ogni livello pari a 50 tonnellate ciascuna; la colonna 2 ha lo stesso schema di carico ma le sollecitazioni sono dimezzate.

Dati colonne	Tratto 1	Tratto 2	Tratto 3	Tratto 4	Tratto 5
<b>d [cm]</b>	140	120	100	80	60
<b>I [m]</b>	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
<b>h0 [mm]</b>	700	600	500	400	300
<b>fck [MPa]</b>	60	60	50	50	50
<b>Durata fase [gg]</b>	10				
<b>RH [%]</b>	70				

**Tabella 12 - Caratteristiche struttura**



**Figura 7.124 - Struttura semplificata**

Si definisce  $\delta$  il rapporto tra le rigidezze della colonna e della trave

$$\delta = \frac{a^3 \cdot A_c}{3 \cdot I_b \cdot l}$$

con

$a$  = lunghezza della trave

$A_c$  = area della sezione trasversale della colonna

$I_b$  = momento d'inerzia della sezione della trave

$l$  = lunghezza della colonna

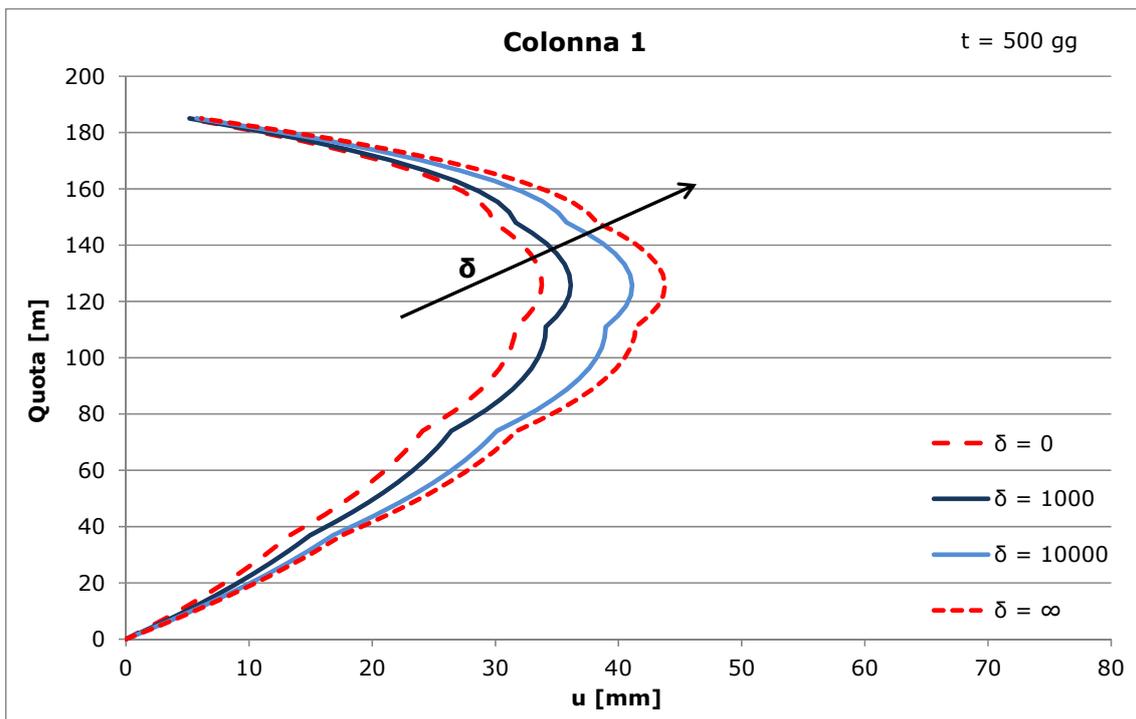


Figura 7.125 - Column shortening colonna 1 al variare del parametro  $\delta$

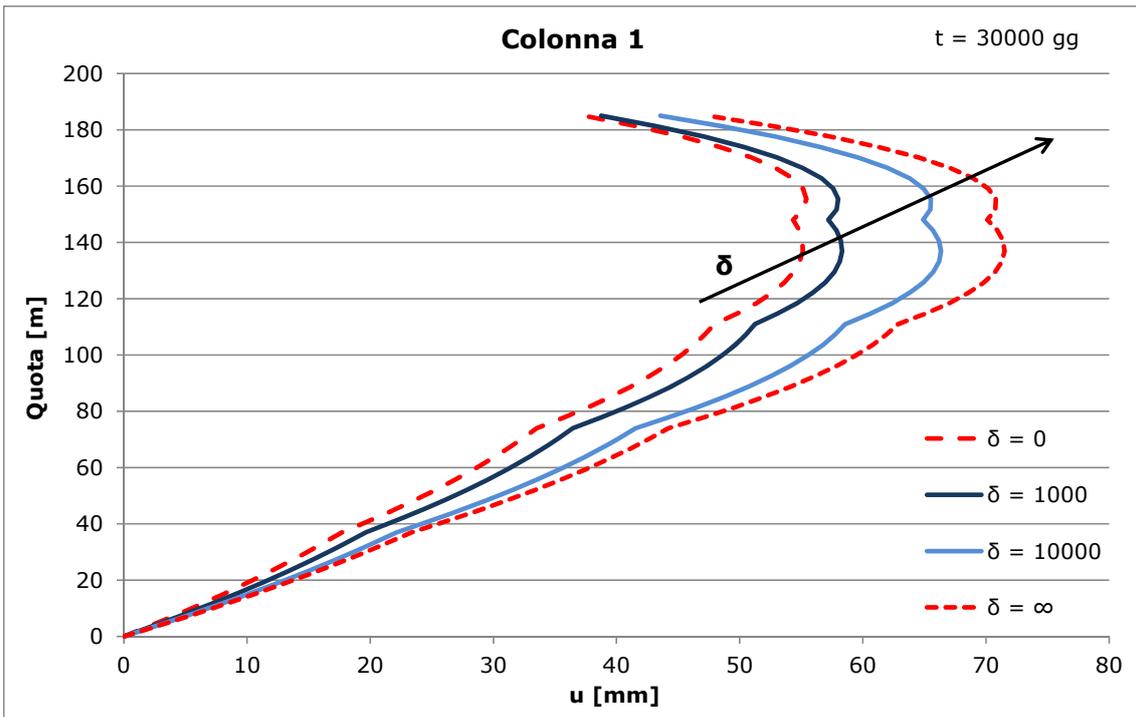


Figura 7.126 - Column shortening colonna 1 al variare del parametro  $\delta$

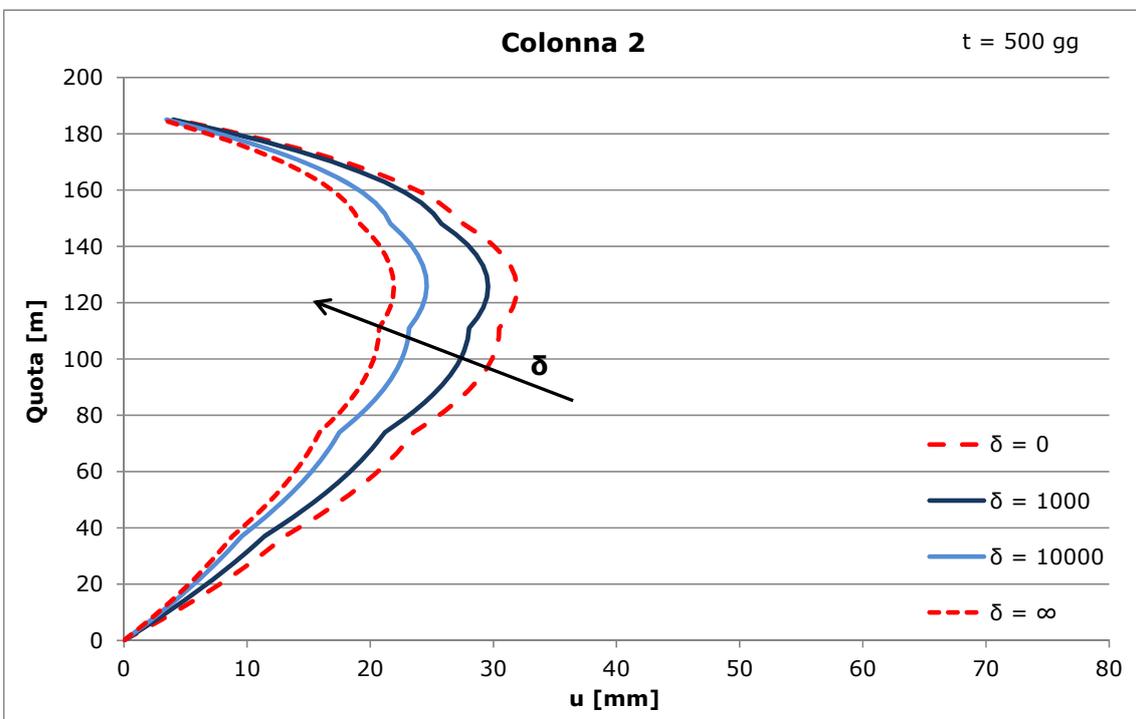


Figura 7.127 - Column shortening colonna 2 al variare del parametro  $\delta$

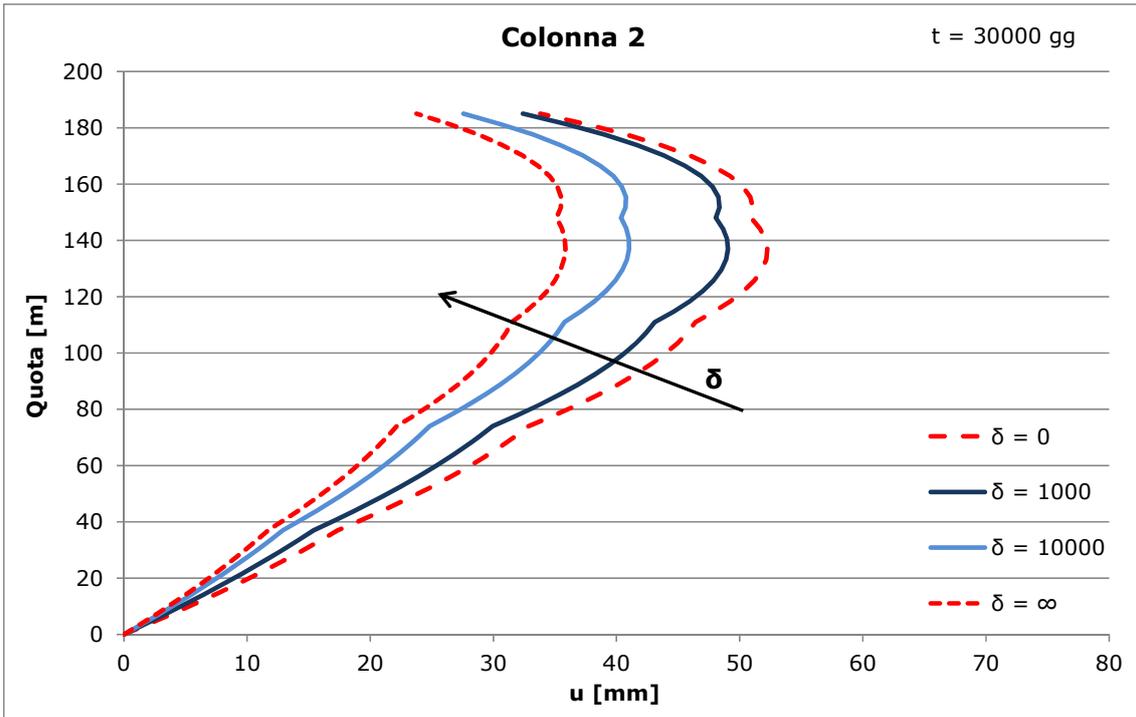


Figura 7.128 - Column shortening colonna 2 al variare del parametro  $\delta$

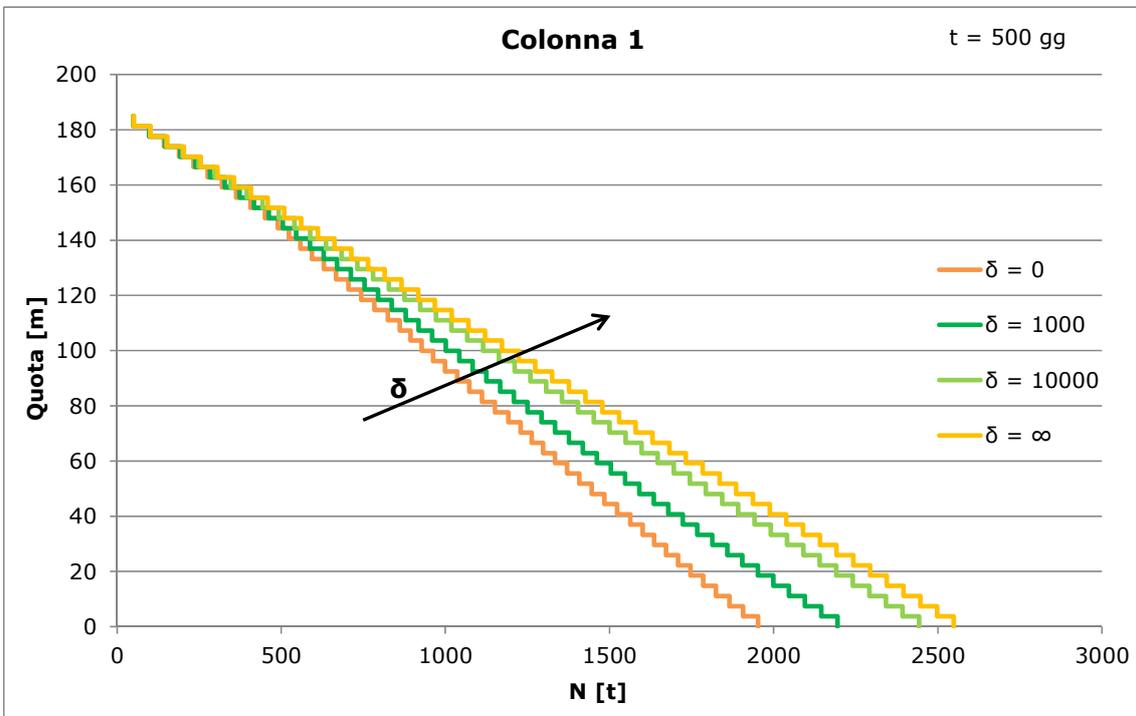


Figura 7.129 - Azioni assili colonna 1 al variare del parametro  $\delta$

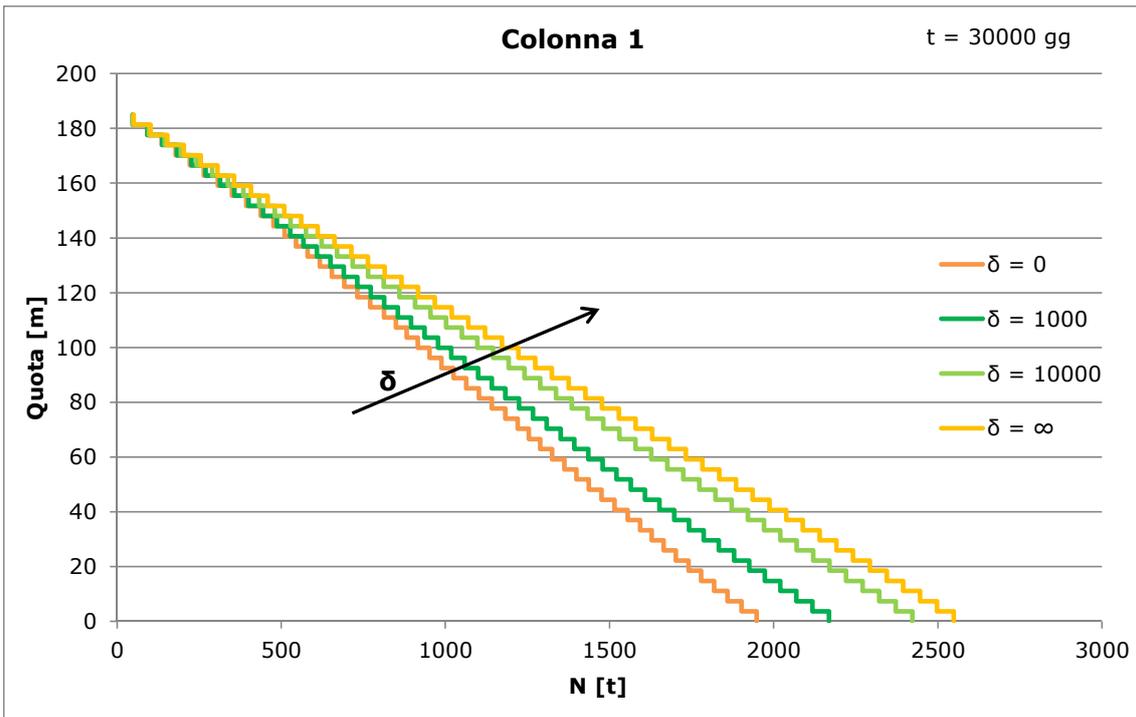


Figura 7.130 - Azioni assili colonna 1 al variare del parametro  $\delta$

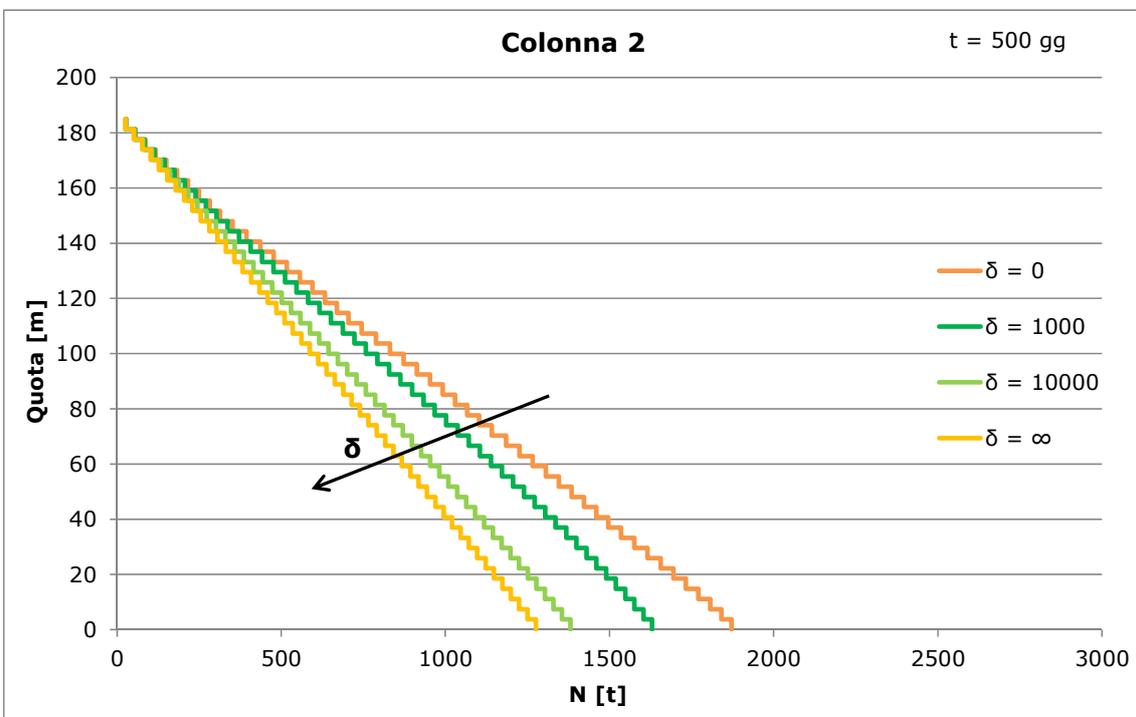


Figura 7.131 - Azioni assili colonna 2 al variare del parametro  $\delta$

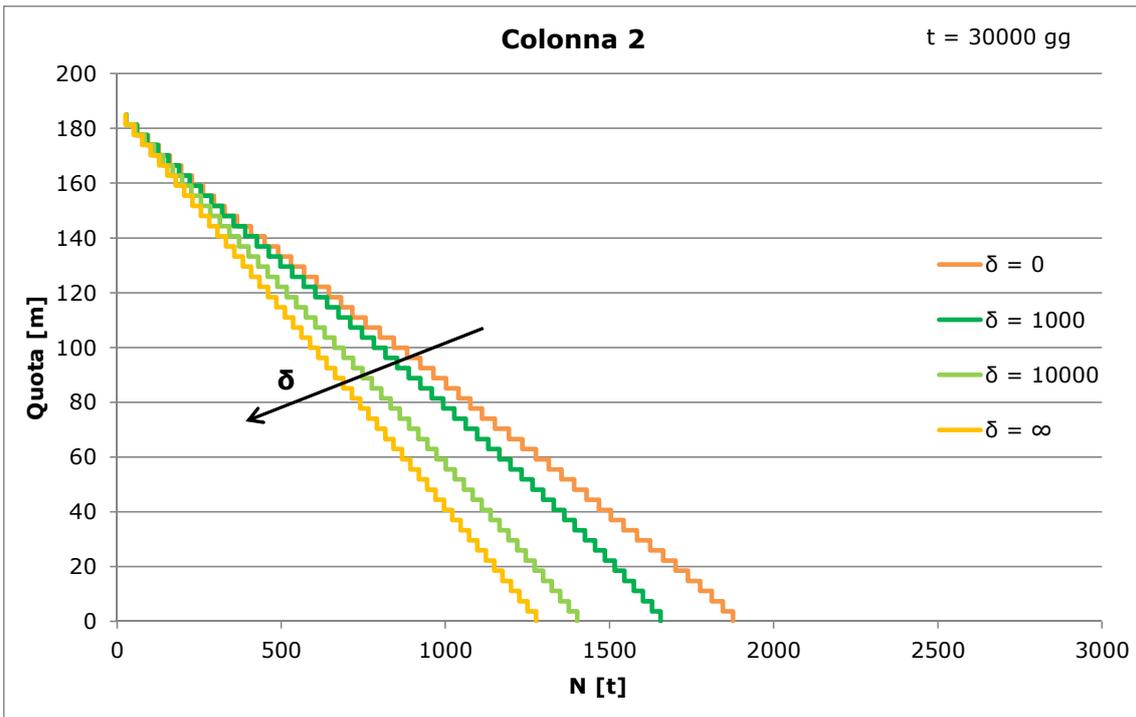


Figura 7.132 - Azioni assili colonna 2 al variare del parametro  $\delta$

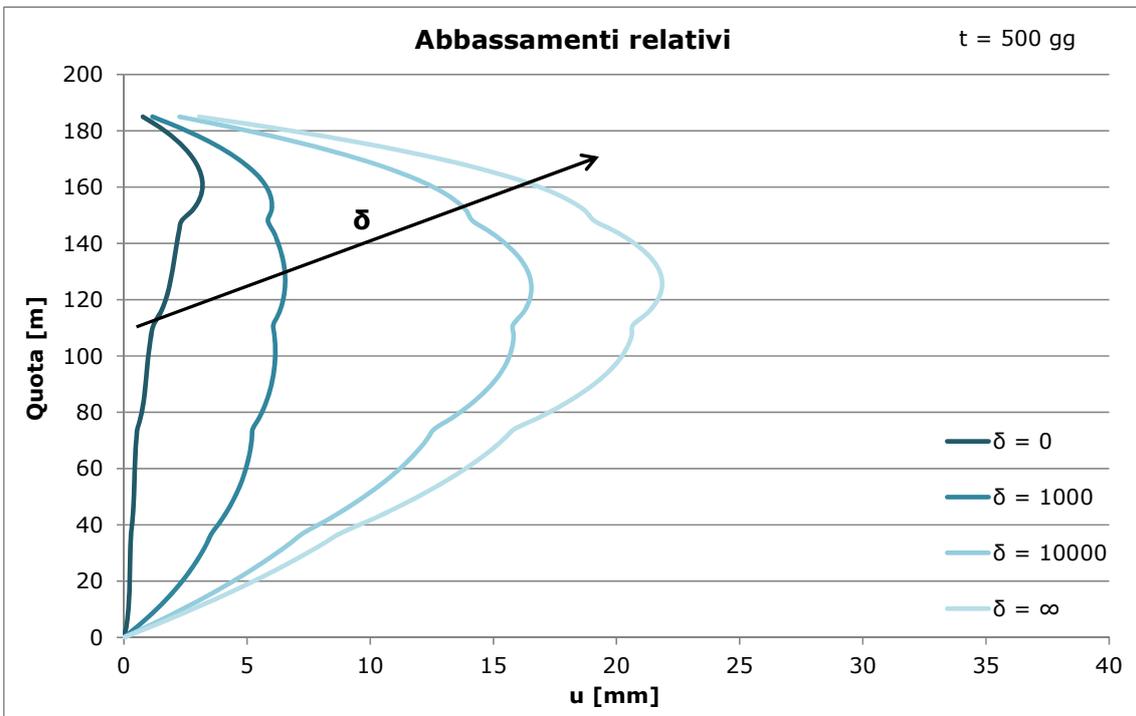


Figura 7.133 -Abbassamenti relativi al variare del parametro  $\delta$

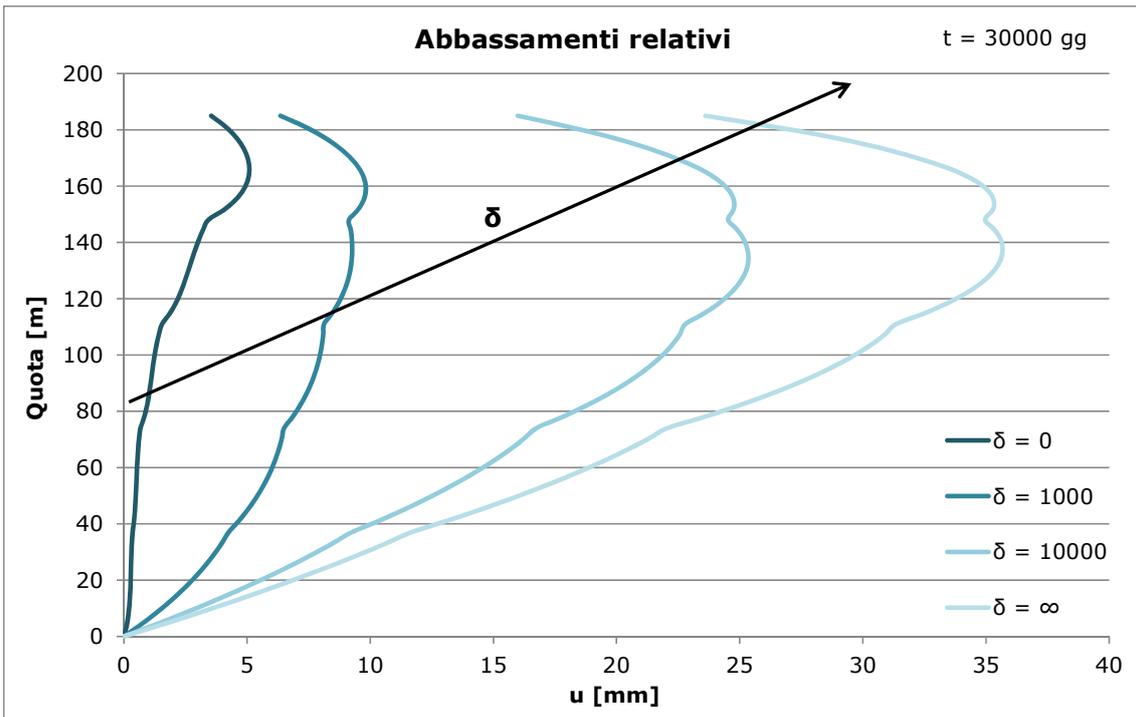


Figura 7.134 - Abbassamenti relativi al variare del parametro  $\delta$

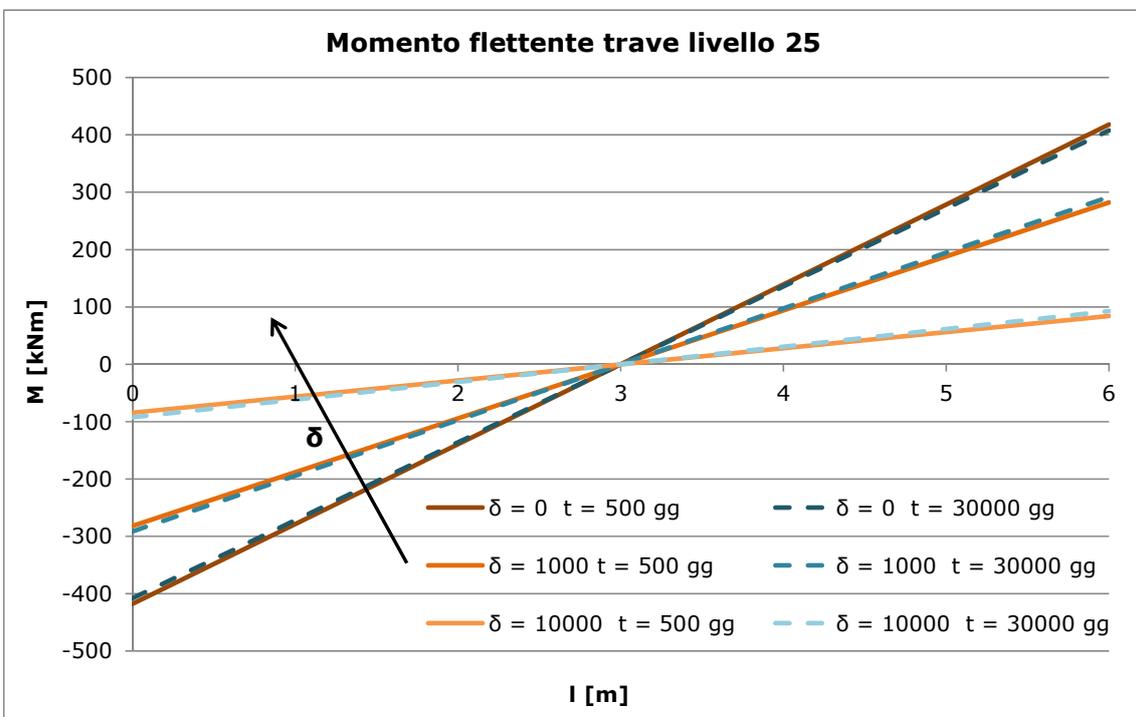


Figura 7.135 - Momento flettente trave livello 25 al variare del parametro  $\delta$

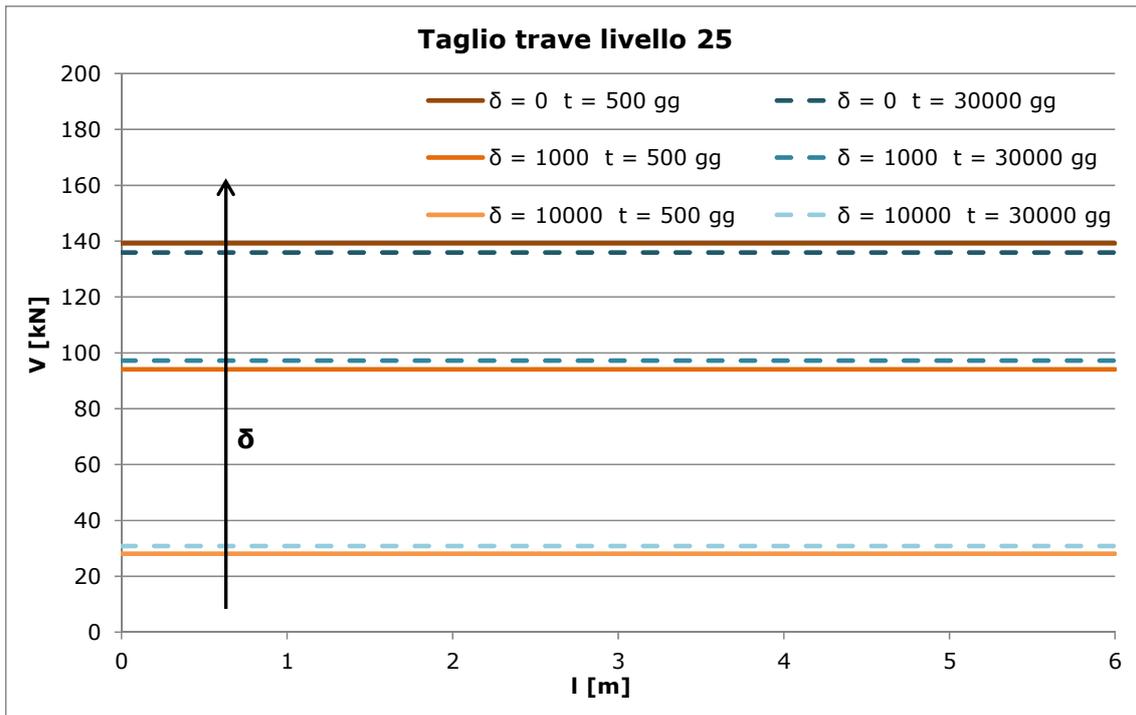


Figura 7.136 - Taglio trave livello 25 al variare del parametro  $\delta$

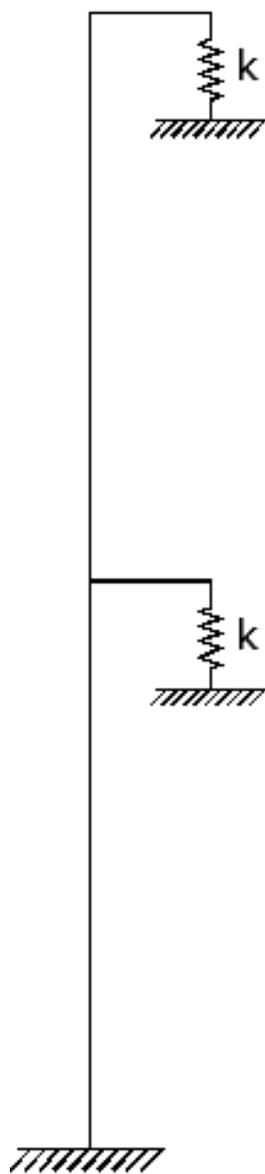
Dai grafici delle azioni assiali si nota come all'aumentare di  $\delta$  una quota sempre minore di carico si trasferisca dalla colonna 1 alla colonna 2.

Questo si ripercuote anche sull'entità degli spostamenti che aumentano per la colonna 1, diminuiscono per la colonna 2 con conseguente aumento degli abbassamenti relativi (Figura 7.133).

Dalla Figura 7.136 si nota che all'aumentare di  $\delta$ , a causa di una riduzione dei tagli nelle travi, si verifica un minor trasferimento dei carichi da una colonna all'altra.

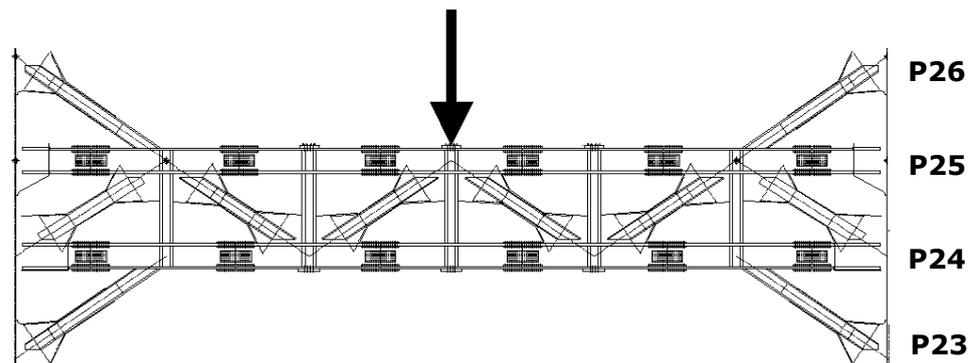
Come spiegato nel paragrafo 7.3.3.3, anche in questo caso, le differenti sezioni, classi di calcestruzzo e età di maturazione sono poco influenti sulla variazione delle sollecitazioni nel tempo.

La quinta con belt truss appena analizzata ha al suo interno elementi orizzontali a rigidità modesta come le travi ( $\delta$  elevato) ed elementi orizzontali a rigidità elevata come le travi di cintura ( $\delta$  piccoli).



Per comprendere la presenza della discontinuità della tangente alla curva di column shortening in corrispondenza del Belt Truss intermedio si consideri un modello semplificato come quello di Figura 7.138. Sia la colonna uguale a quella della quinta della torre Isozaki (paragrafo 7.3.1) per geometria, sezioni e carichi.

Si immagini che la colonna in questione sia quella centrale della quinta e che quindi le rigidità delle molle siano calcolate come le forze concentrate nella mezzeria dei belt trusses che provocano abbassamenti unitari dei punti di applicazione (Figura 7.137).



**Figura 7.137 - Belt truss inferiore**

Come visibile dalla Tabella 7 in corrispondenza del piano P24 si ha un carico elevato, circa 4 volte più grande dei carichi presenti sulla maggior parte dei piani.

Nella Figura 7.139 si mostra l'evolvere del column shortening per istanti di tempo prossimi a quelli di costruzione e messa in carico del Belt Truss intermedio.

**Figura 7.138 - Modello semplificato**

A 364 giorni è stato caricato il piano P23 (costruito 13 giorni prima); si riporta il column shortening al fine di evidenziare gli abbassamenti elastici in sommità sotto un carico di entità simile a quelli agenti sul resto della struttura.

A 377 giorni viene caricato il piano P24 (costruito 13 giorni prima, subito dopo l'applicazione del carico al P23). Il carico agente è elevato rispetto ai precedenti ed infatti il relativo abbassamento in sommità risulta di notevole entità rispetto a quello che si ha a 364 giorni.

Nell'istante di costruzione del piano P25 (377 giorni, subito dopo l'applicazione del carico al P24) l'abbassamento elastico elevato dovuto al carico sul piano P24 e quello viscoso dovuto a questo carico e a tutti quelli ai piani inferiori vengono compensati; la curva subisce per questo una forte variazione di pendenza per raggiungere valori nulli di abbassamento. In Figura 7.140 viene riportato il column shortening a 390 giorni, istante di applicazione del carico sul piano P25; tale carico ritorna ad essere di intensità simile a quella della maggior parte dei piani della struttura.

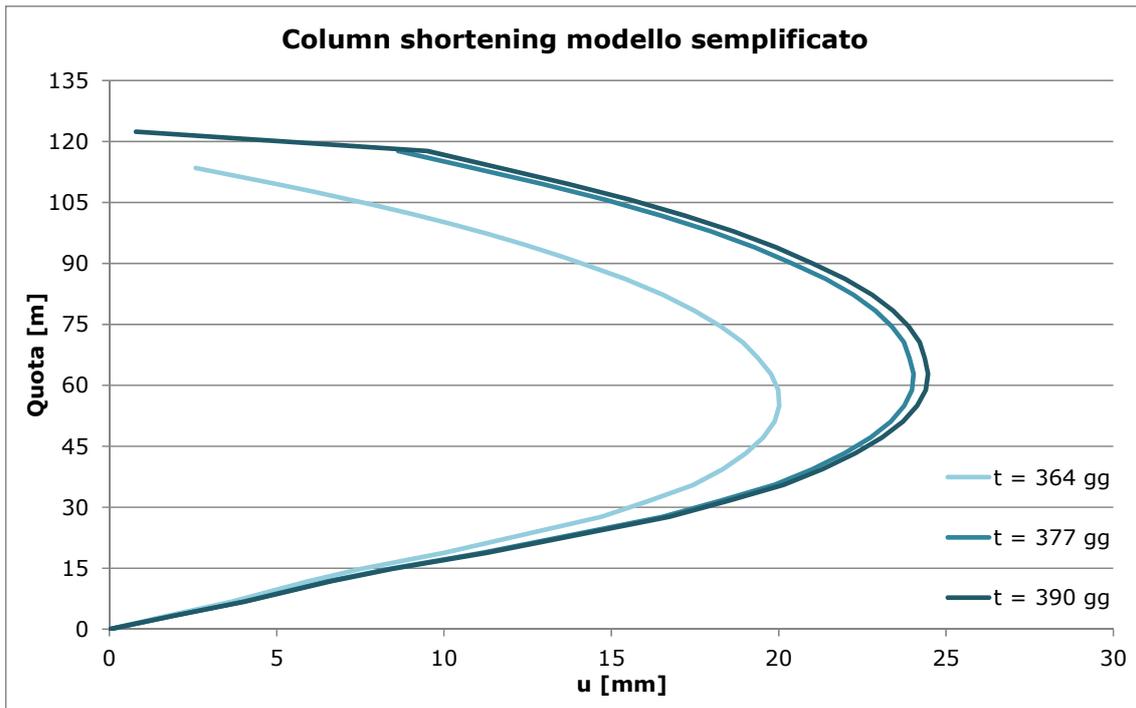


Figura 7.139 - C.S. per istanti precedenti e successivi all'applicazione del carico al livello 24

Si nota come dalla costruzione del Belt Truss in poi si abbia un andamento simile a quello che si aveva precedentemente in presenza di carichi di entità omogenea, ottenendo a fine costruzione l'andamento "a due pance" visibile nel caso di colonna singola (Figura 7.24) e nel caso della quinta (Figura 7.50 e Figura 7.83).

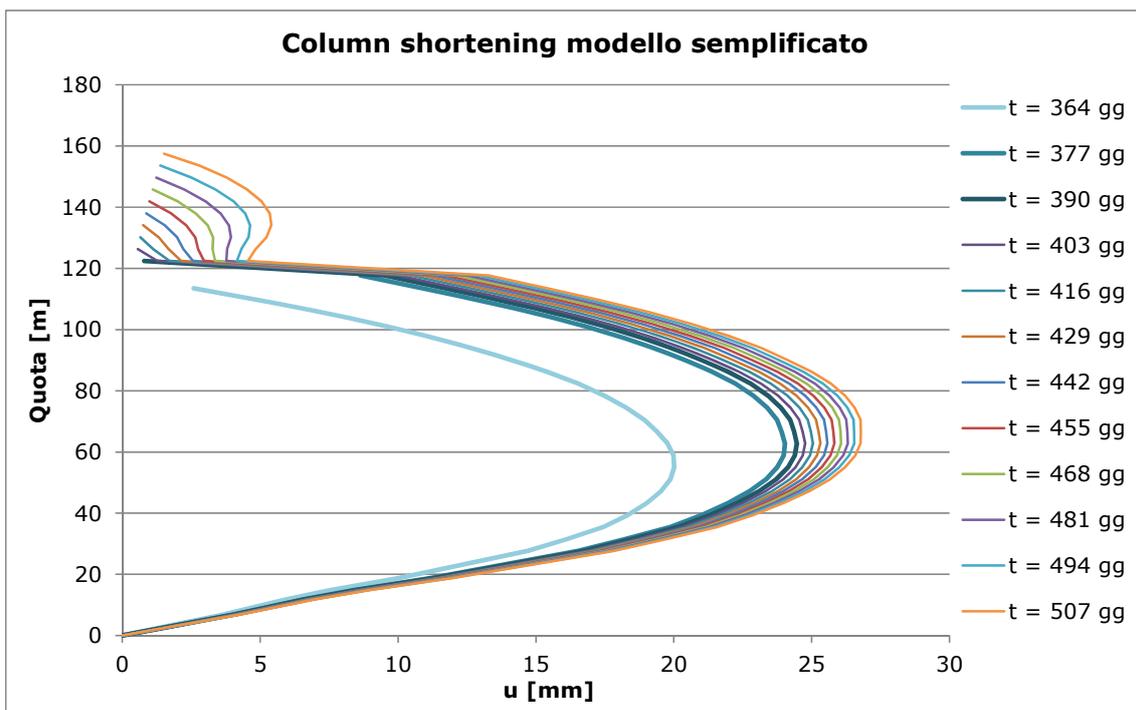


Figura 7.140 - C.S. per istanti precedenti e successivi all'applicazione del carico al livello 25

Per confermare che tale variazione di pendenza del column shortening è dovuta alla disomogeneità di carico è stata studiata sempre la stessa struttura (Figura 7.138) rendendo le rigidzze delle molle che rappresentano i Belt Trusses un parametro del problema. Esse sono state variate riducendole di determinate percentuali rispetto ai valori reali. Nella Figura 7.141 e nella Figura 7.142 si riportano i column shortening rispettivamente a fine costruzione ed a tempo infinito.

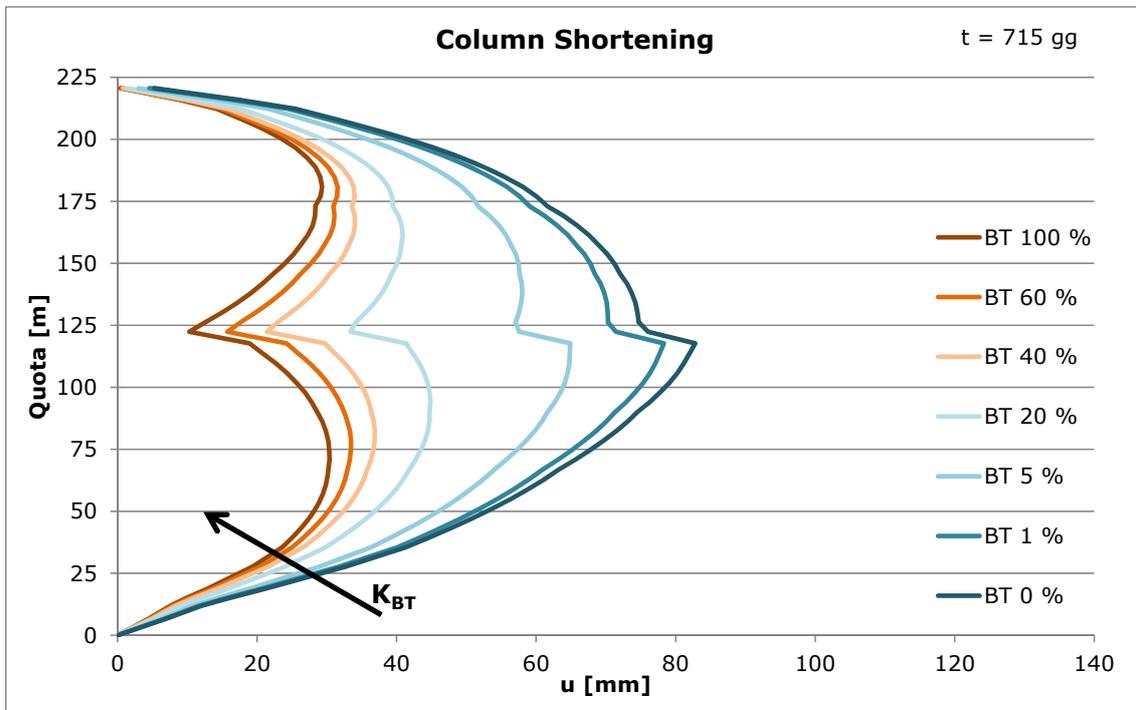


Figura 7.141 - Column shortening a fine costruzione

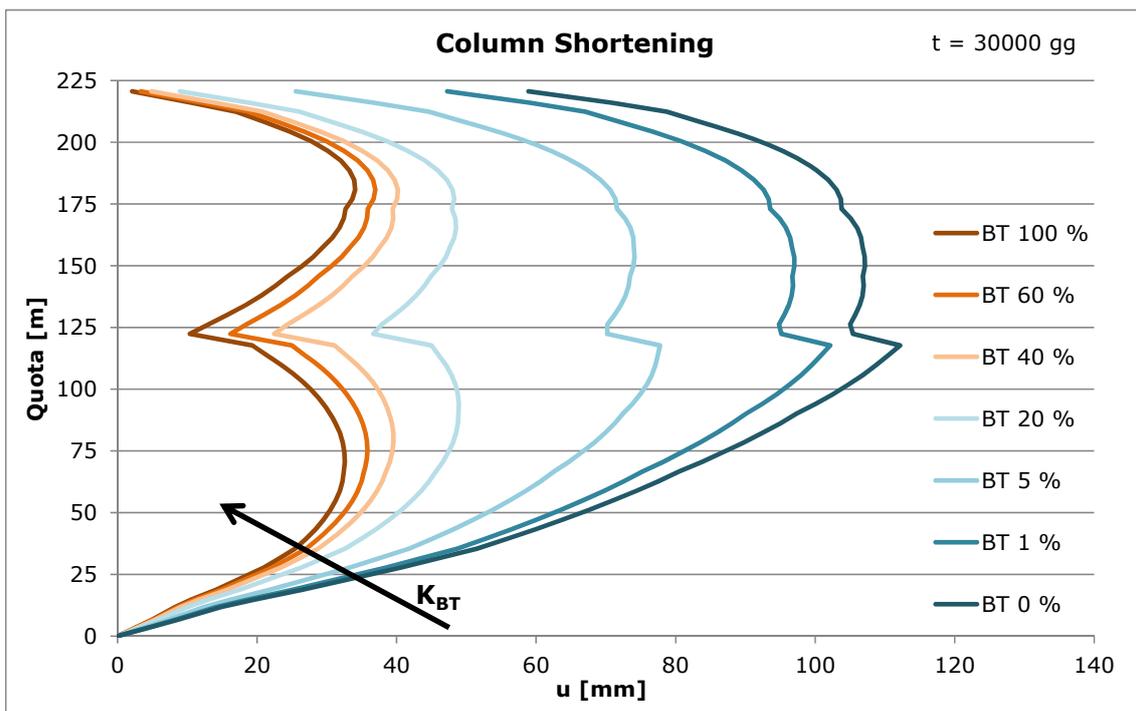


Figura 7.142 - Column shortening a fine costruzione

Dalle precedenti figure risulta che in corrispondenza del Belt Truss intermedio il tratto a tangente fortemente variata è presente indipendentemente dalla rigidezza della trave di cintura..

Come visibile dalla Figura 7.85 a fine costruzione le azioni assiali delle colonne nella parte dell'edificio sovrastante la trave di cintura inferiore hanno un andamento analogo in presenza o meno dei belt trusses.

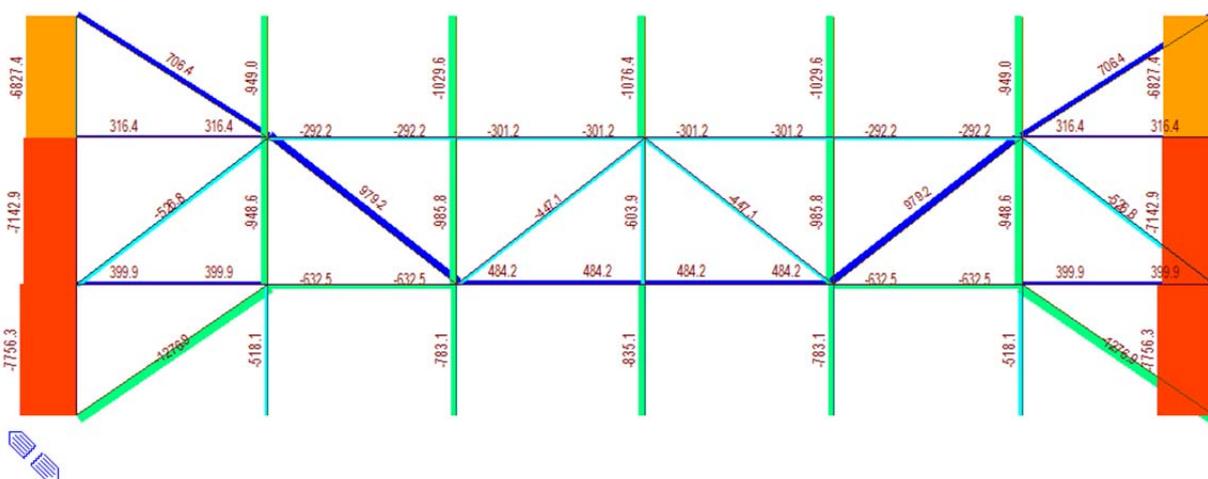
Questo accade poiché a 715 giorni il vincolo elastico posticipato (trave di cintura superiore) è in opera da soli 13 giorni e le colonne sottostanti non hanno subito un accorciamento viscoso elevato.

Le colonne al di sotto del livello P24 mostrano invece le conseguenze della presenza del bent truss inferiore che indirizza parte dei carichi applicati nei piani superiori verso i nuclei.

Nei confronti dei fenomeni lenti i vincoli posticipati contribuiscono alla migrazione del carico dalle colonne verso i nuclei; questo avviene in misura maggiore per le colonne comprese tra i belt trusses poiché, essendo di età inferiore, sono più sensibili agli effetti della viscosità.

Le differenze riguardanti i materiali e le geometrie delle sezioni comportano maggiori coefficienti di viscosità per le colonne rispetto a quelli dei nuclei; di conseguenza la trave di cintura per limitare gli abbassamenti relativi tende a ripartire ulteriormente il carico.

Come visibile dalle Figure Figura 7.85, Figura 7.89, Figura 7.93 l'andamento delle azioni assiali è simile per tutte le colonne appartenenti alla quinta fatta eccezione per l'intervallo P24 - P25 dove sono presenti i montanti della trave di cintura.



**Figura 7.143 - Azioni assiali negli elementi del belt truss inferiore per t = 715 giorni**

Dalla Figura 7.143 si apprende che la disposizione dei diagonalanti in corrispondenza del montante centrale tende a ridurre notevolmente l'azione assiale di quest'ultimo. Questo non accade per il montante intermedio vista la diversa configurazione dei diagonalanti.

Per il montante laterale ci si aspetterebbe un comportamento analogo a quello centrale, ma la presenza degli elementi nei piani P23 - P24 e P25 - P26 fa sì che l'azione assiale è uguale a quella del livello superiore.

In Figura 7.101 sono riportati gli spostamenti nel tempo del punto nella mezzeria del corrente inferiore del belt truss inferiore nei seguenti casi:

1. Assenza delle travi di cintura (par. 7.3.3);
2. Presenza del solo belt truss inferiore;
3. Presenza di entrambi i belt trusses.

La presenza di un vincolo elastico posticipato provoca nel caso 2 abbassamenti notevolmente inferiori in corrispondenza del livello P24; anche al livello P49 questo effetto è visibile, seppure in misura inferiore.

L'introduzione del secondo belt truss provoca una riduzione ulteriore degli spostamenti; questa è maggiore nella sommità (Figura 7.102) dell'edificio poiché la forza di interazione che nasce tra le colonne ed il belt truss superiore si risente sulle colonne in tutta la loro altezza che però, hanno età maggiore scendendo al piede.

Come illustrato nelle Figure Figura 7.112 e Figura 7.120 la presenza dei belt trusse induce una riduzione del momento flettente nelle travi a causa della diminuzione degli abbassamenti relativi alla quale si è accennato poco fa.

Dalla Figura 7.116 emerge come le travi di cintura rendano le soluzioni per fasi e convenzionale relative alla trave al livello P36 molto prossime.

## **7.3.5 STRUTTURA TRIDIMENSIONALE CON BELT TRUSSES IN ACCIAIO**

### **7.3.5.1 Descrizione del modello**

Per il modello globale della Torre Isozaki (Figura 7.144) sono stati utilizzati 109907 elementi, di cui 12127 BEAM e 97780 PLATE. Questo modello prevede la presenza dei muri periferici con i relativi fori per il collegamento alle altre strutture adiacenti nei piani interrati, dei quali sono visibili dei dettagli nelle Figure 7.145, Figura 7.146.

I solai e le travi sono stati modellati con elementi PLATE che aumentano il loro spessore in corrispondenza delle travi; a questi viene assegnato un offset del piano medio affinché l'estradosso di tali PLATE coincida con quello degli elementi che modellano i solai.

I materiali assegnati agli impalcati sono i medesimi di quelli assegnati alle travi, ed indicati al paragrafo 7.1.4.

Come visibile in Figura 7.145 e Figura 7.146 i nuclei sono stati modellati con elementi PLATE, al contrario dei modelli precedenti della quinta, nei quali questi erano dei BEAM. Per ricavare i valori di azione assiale nei nuclei in ogni livello è stata effettuata la somma delle forze nei nodi dei PLATE appartenenti ad un determinato impalcato.

La combinazione di carico adottata per l'analisi include i pesi propri e portati ed il 30% dei variabili; i valori dei carichi applicati (come distribuiti per unità di superficie) sono visibile delle Figure Figura 7.12 – Figura 7.21.

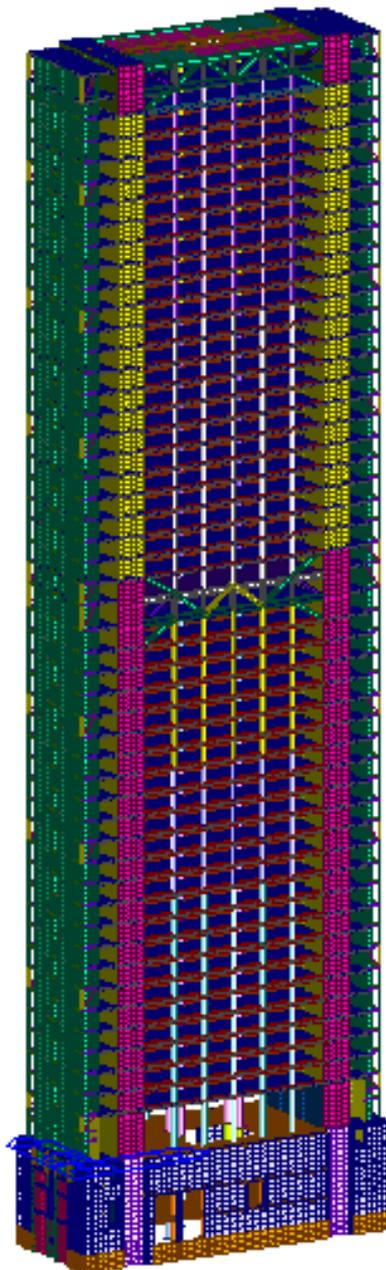


Figura 7.144 - Modello globale della struttura

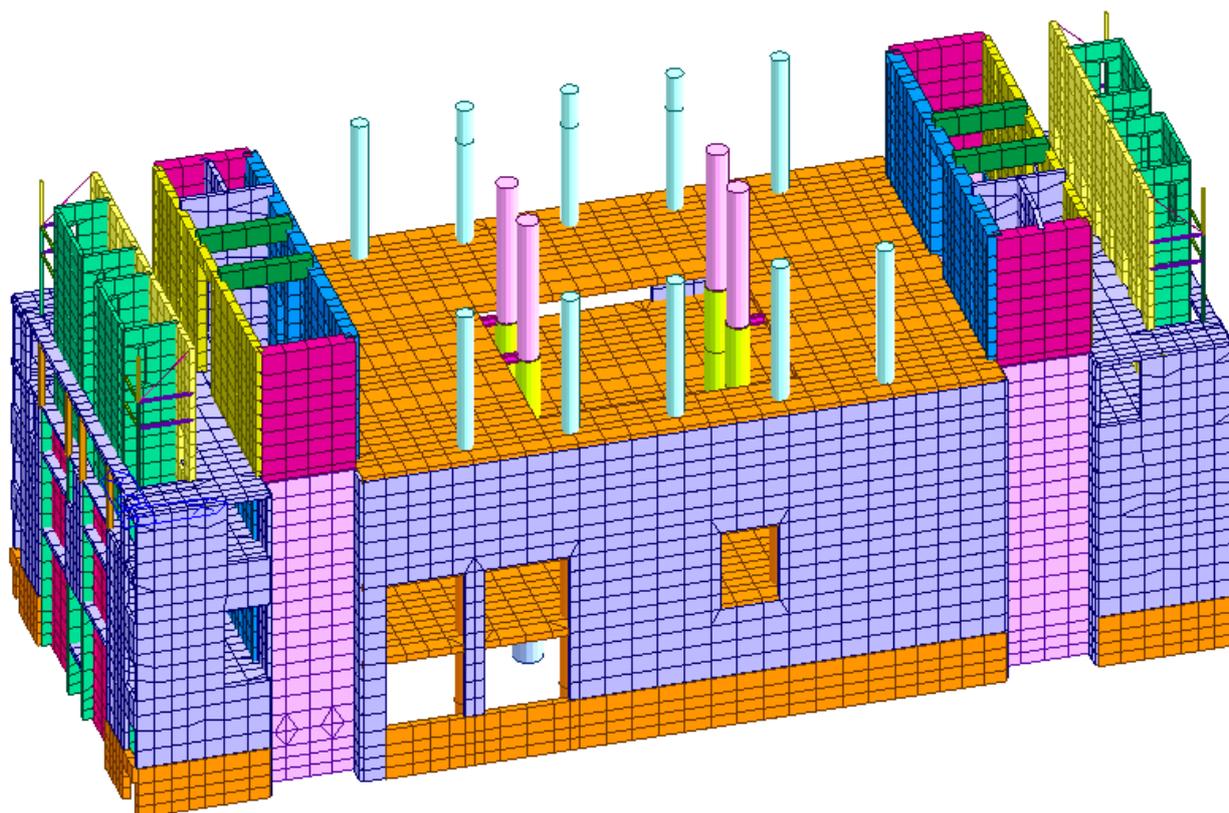


Figura 7.145 - Dettaglio piani interrati

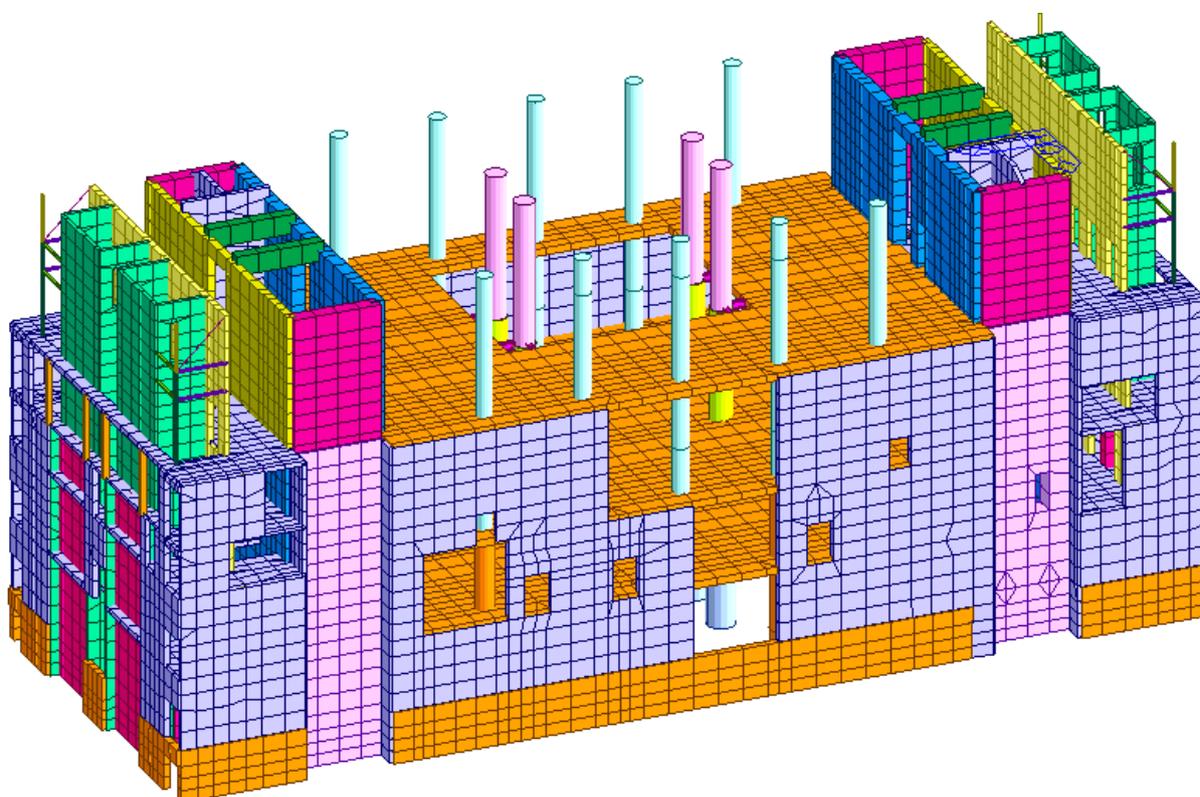
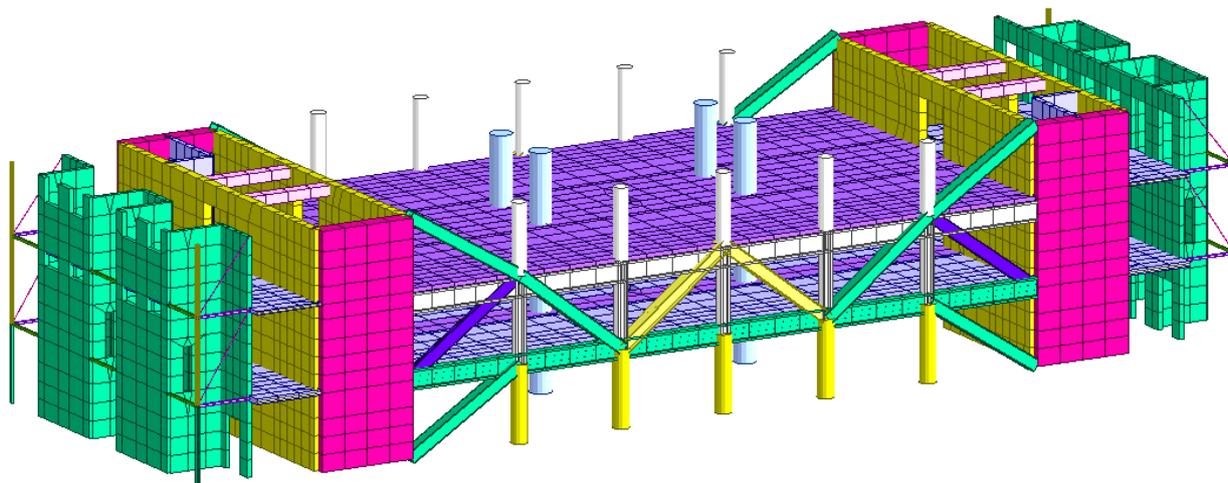
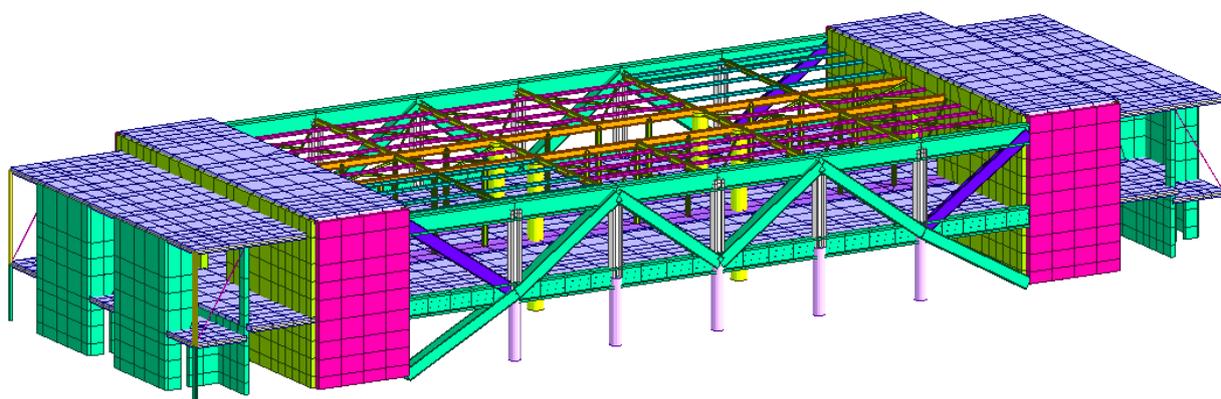


Figura 7.146 - Dettaglio piani interrati



**Figura 7.147 - Dettaglio in corrispondenza del belt truss inferiore**



**Figura 7.148 - Dettaglio in corrispondenza del belt truss superiore**

7.3.5.2 Risultati ottenuti

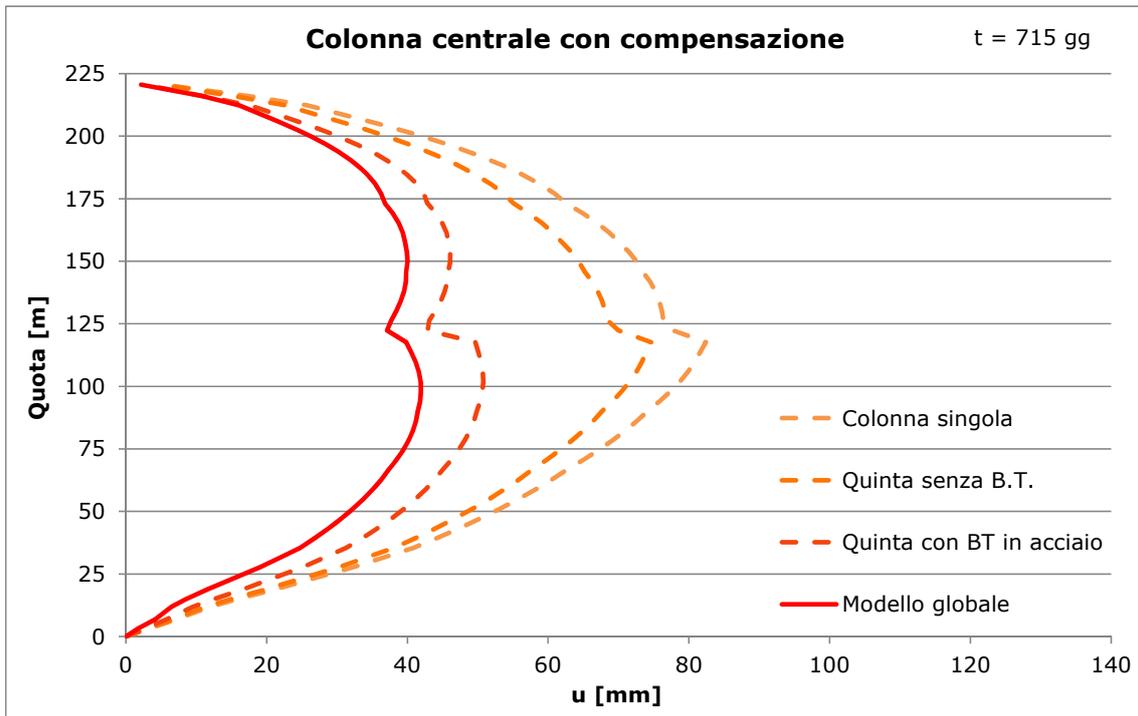


Figura 7.149 - Column shortening colonna centrale

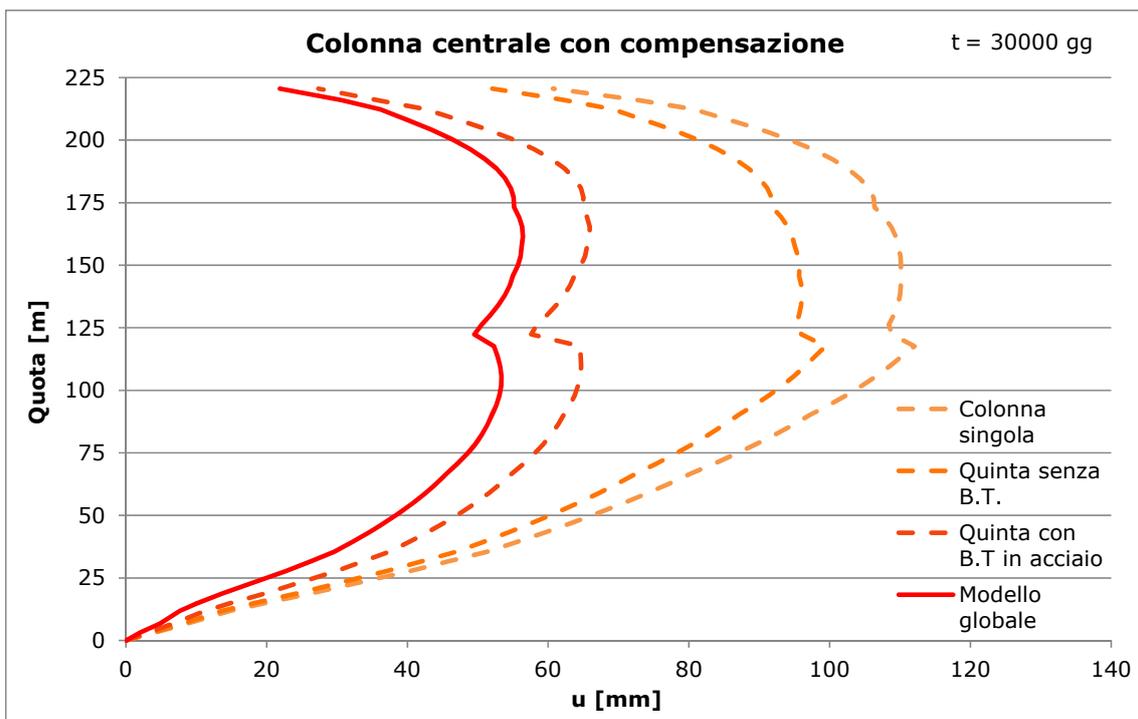


Figura 7.150 - Column shortening colonna centrale

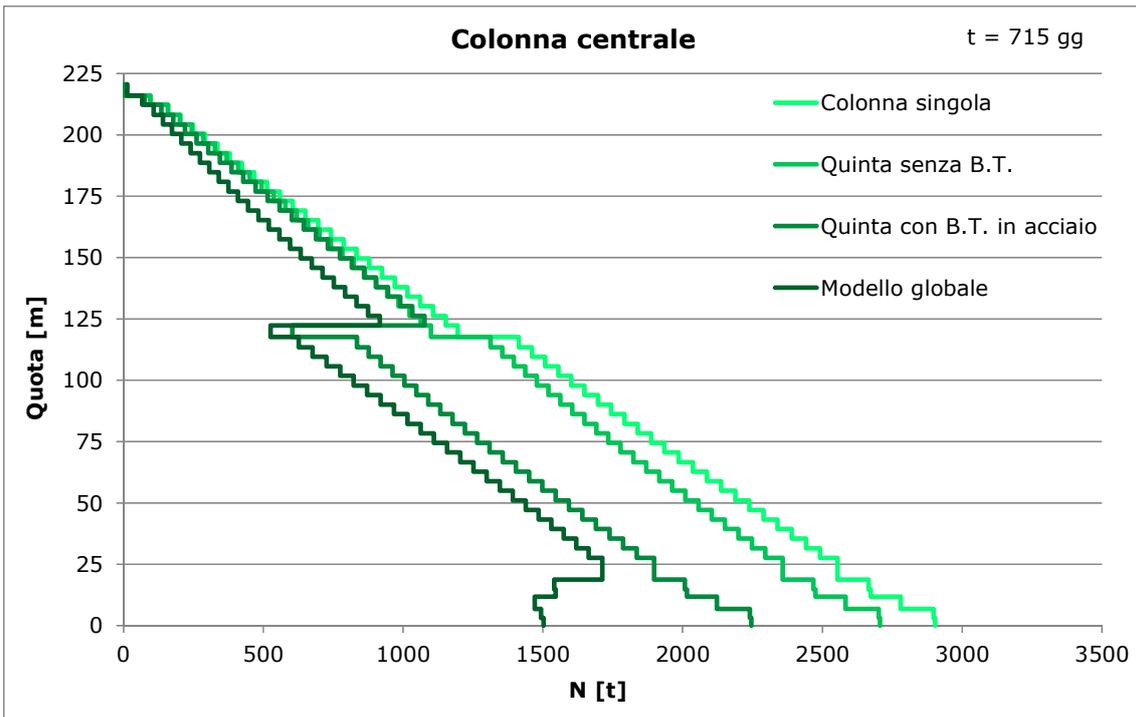


Figura 7.151 - Azioni assiali colonna centrale

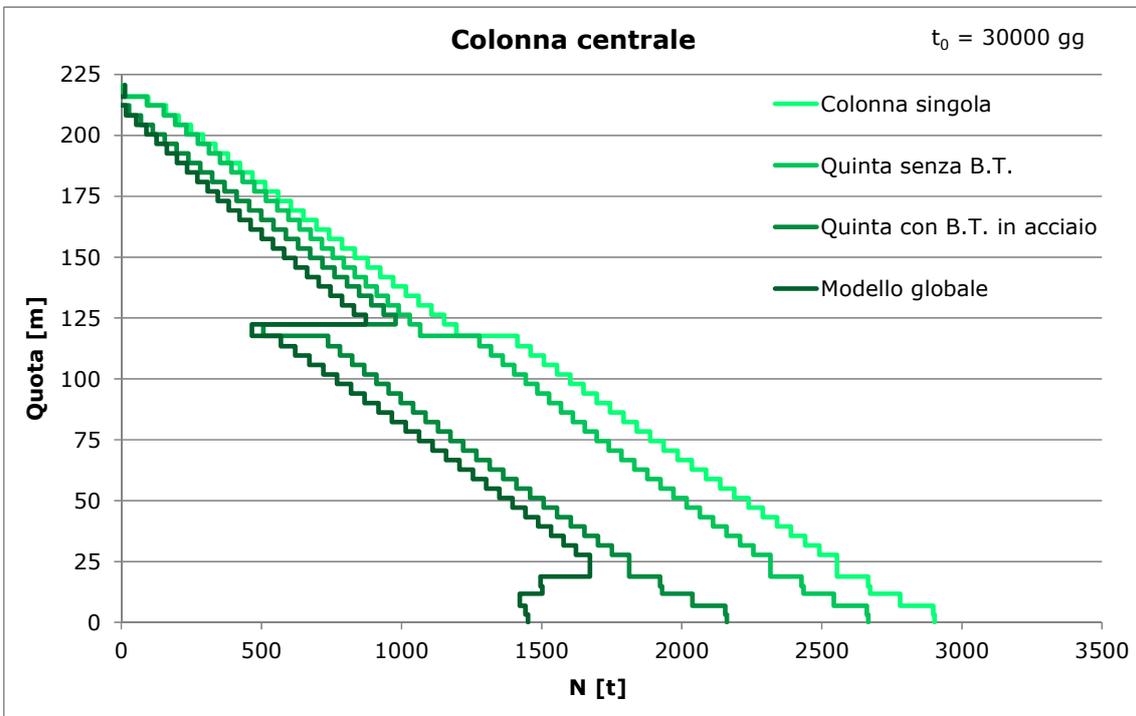


Figura 7.152 - Azioni assiali collonna centrale

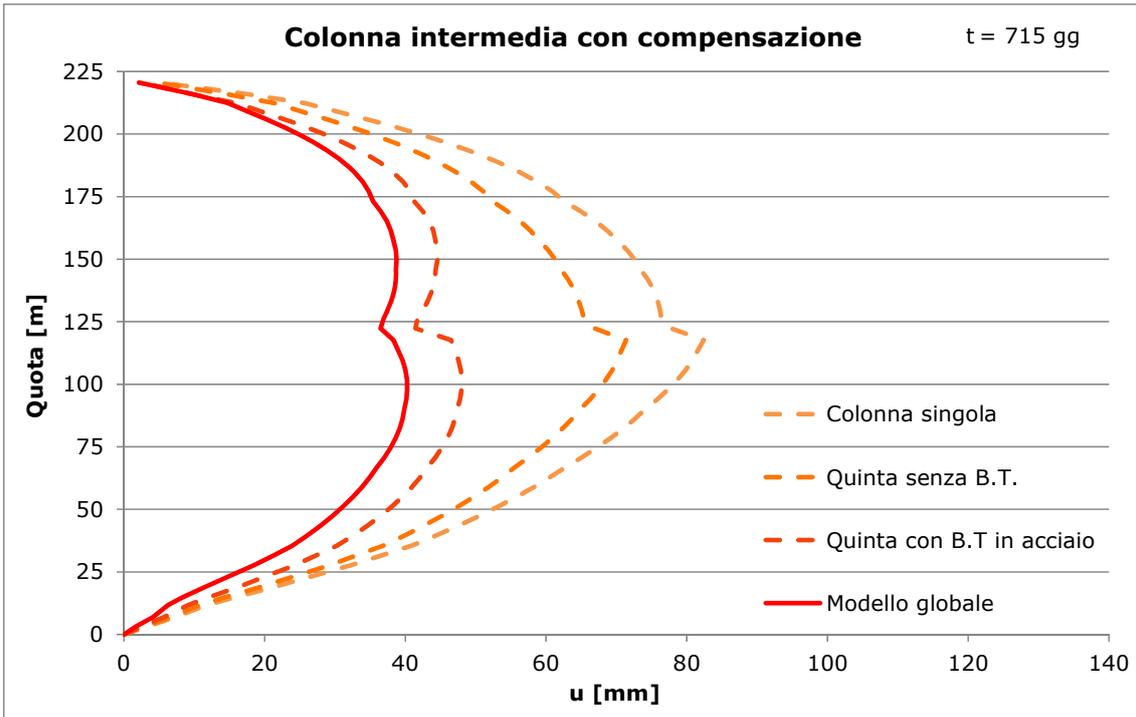


Figura 7.153 - Column shortening colonna intermedia

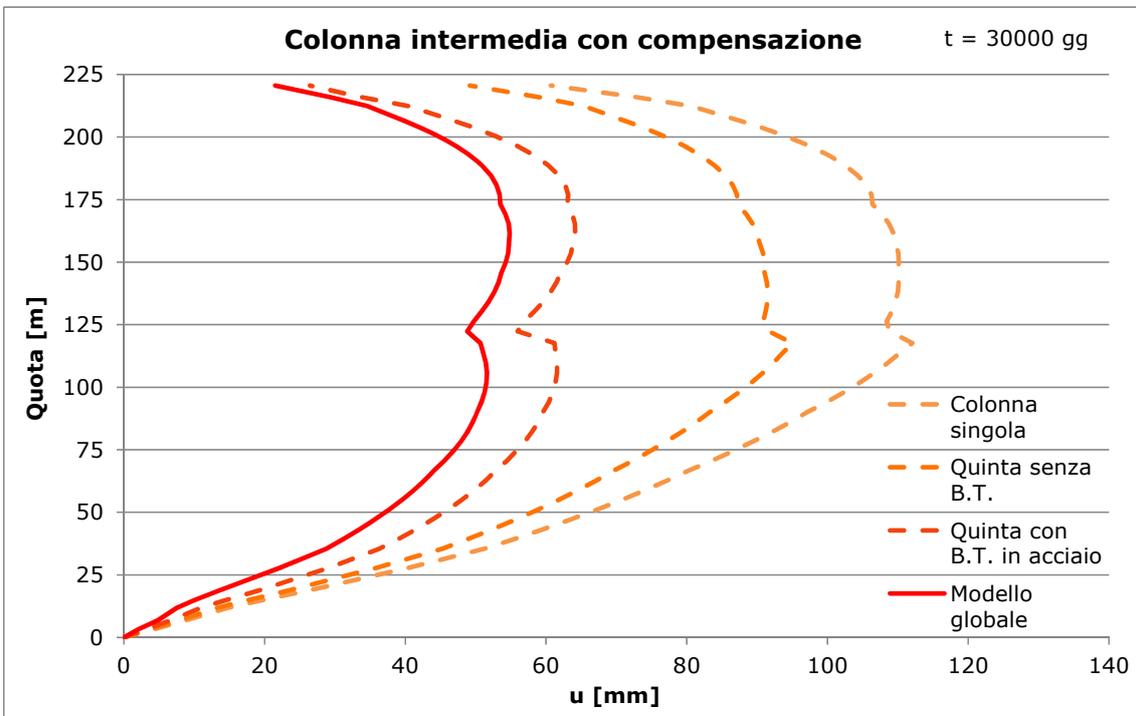


Figura 7.154 - Column shortening colonna intermedia

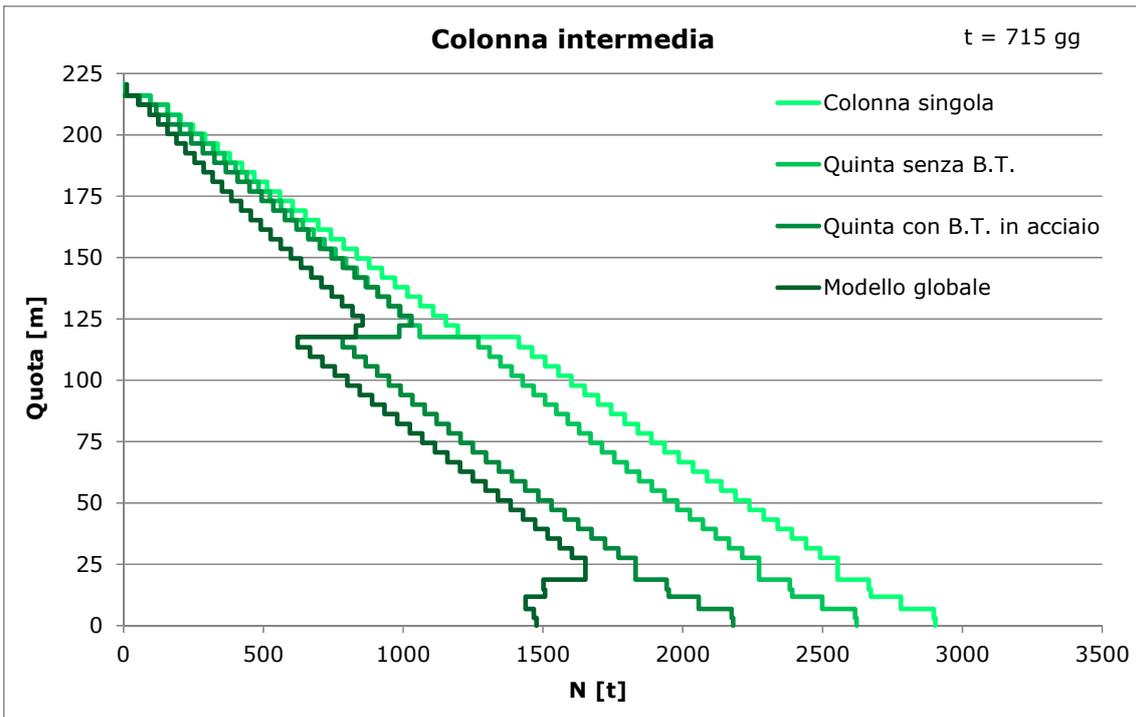


Figura 7.155 - Azioni assiali colonna intermedia

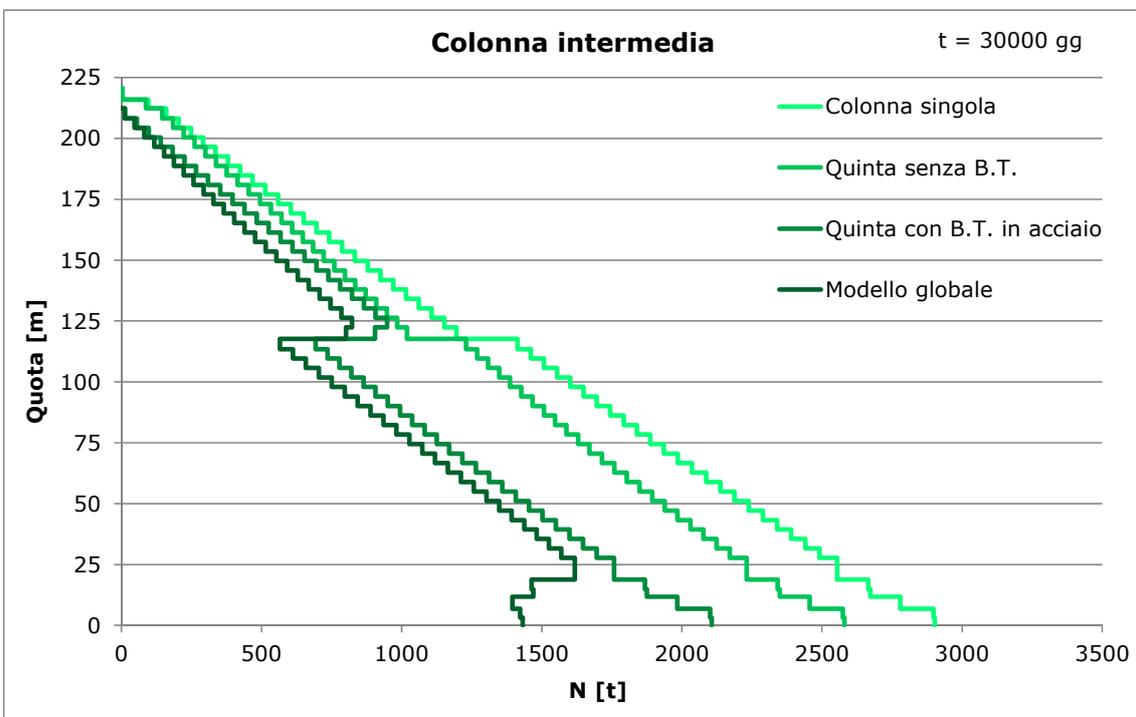


Figura 7.156 - Azioni assiali colonna intermedia

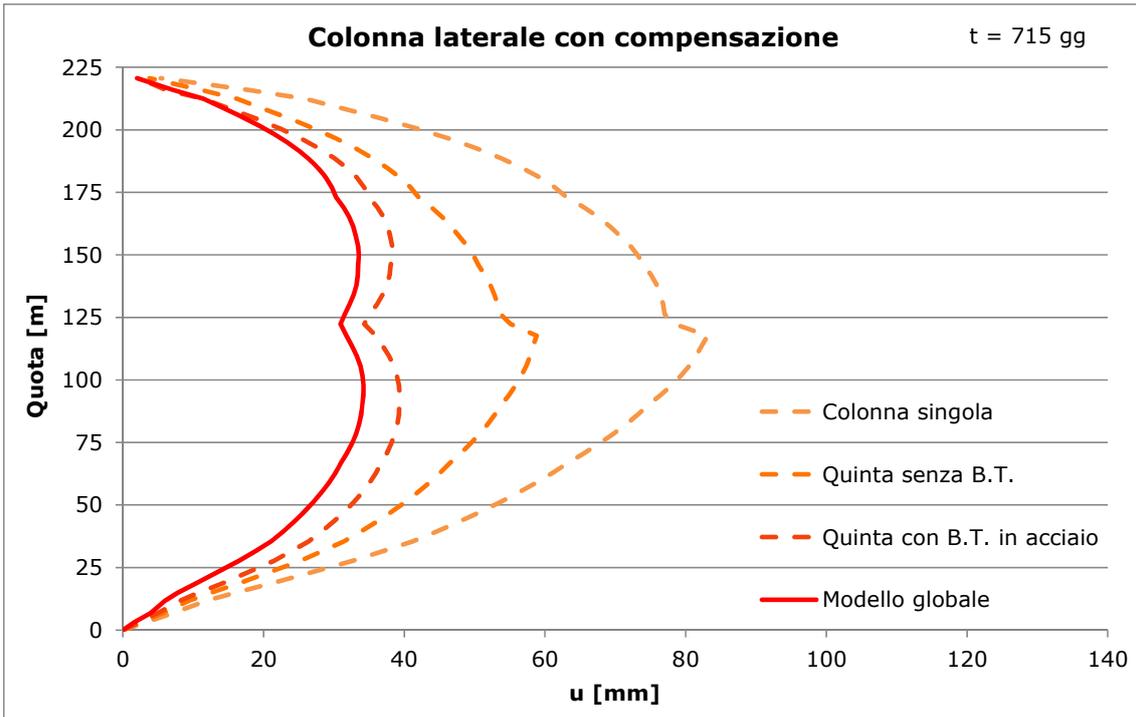


Figura 7.157 - Column shortening colonna laterale

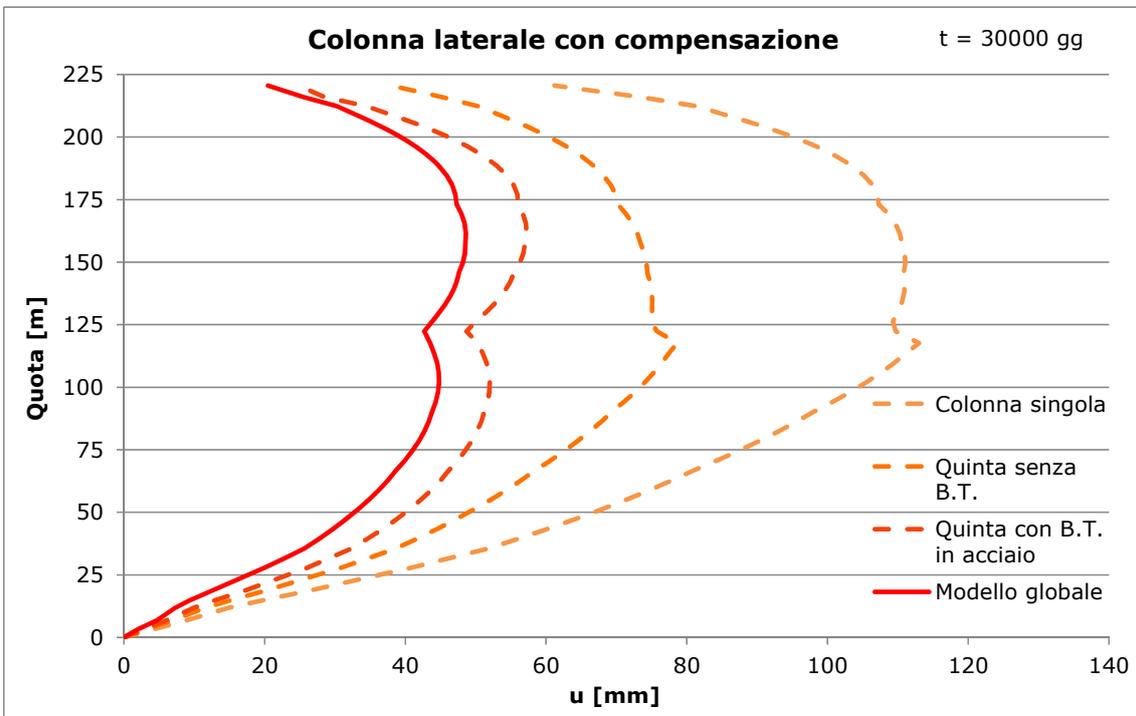


Figura 7.158 - Column shortening colonna laterale

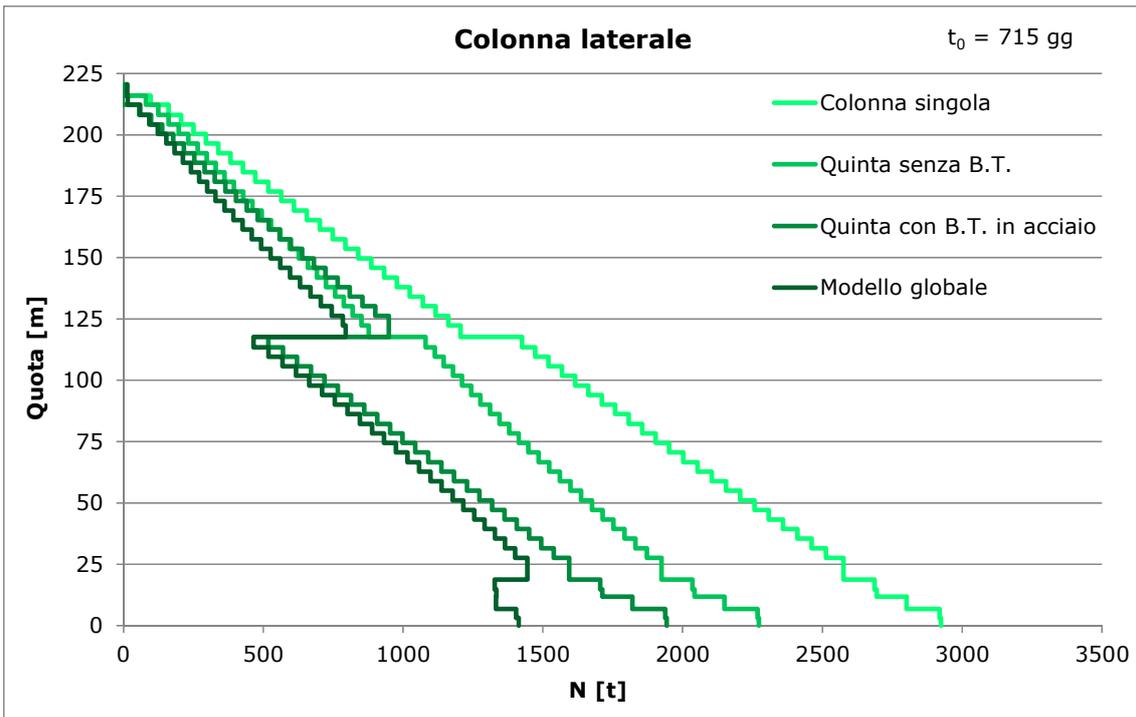


Figura 7.159 - Azioni assiali colonna laterale

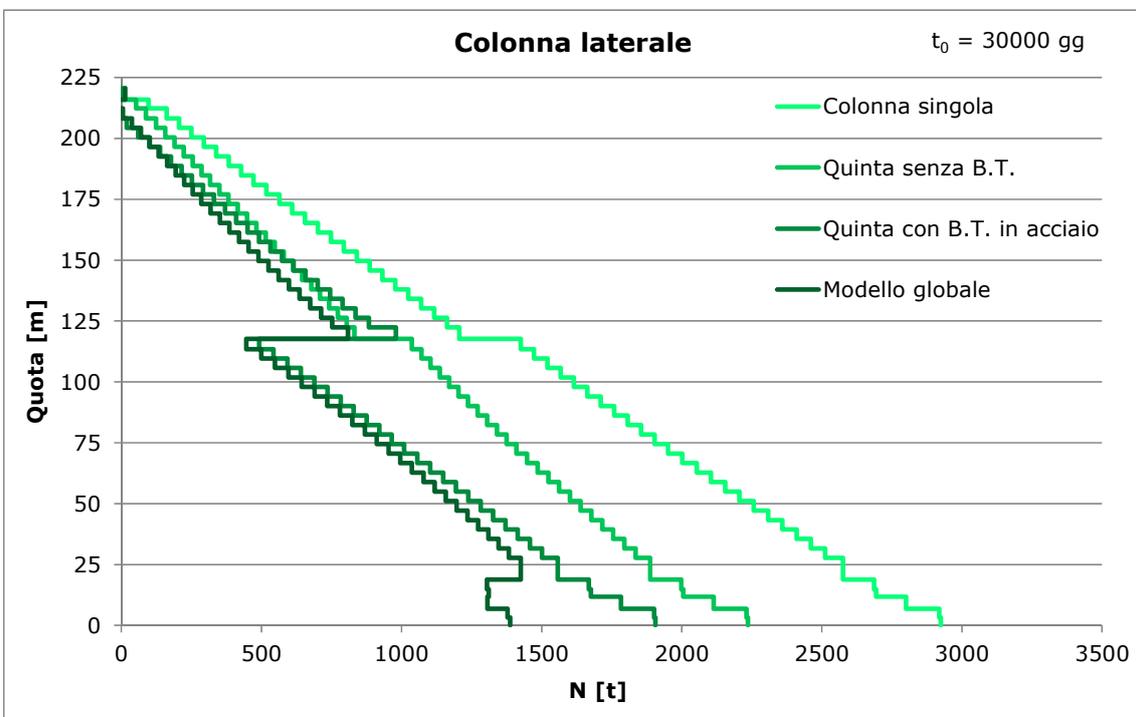


Figura 7.160 - Azioni assiali colonna laterale

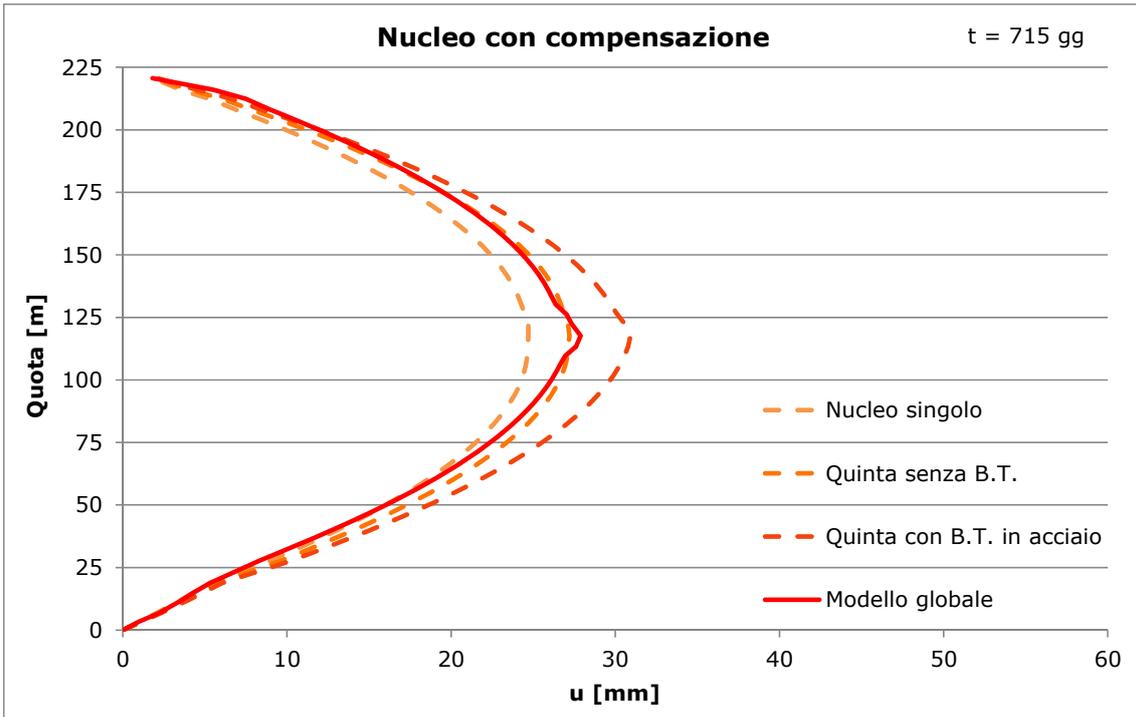


Figura 7.161 - Column shortening nucleo

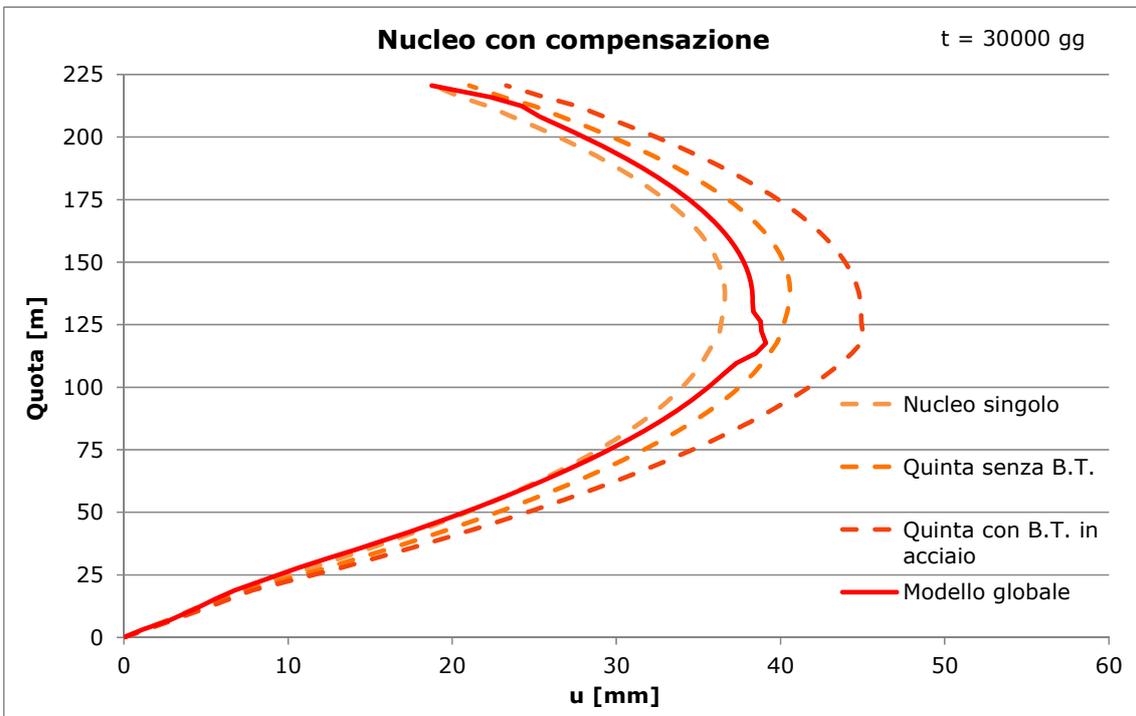


Figura 7.162 - Column shortening nucleo

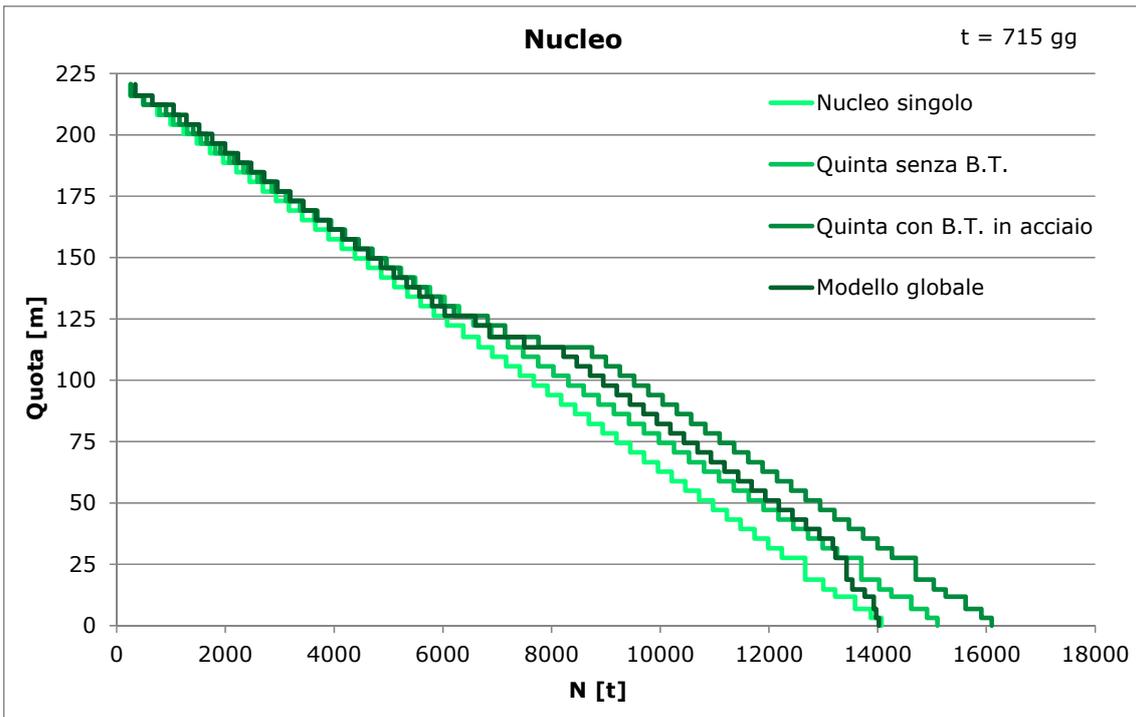


Figura 7.163 - Azioni assiali nucleo

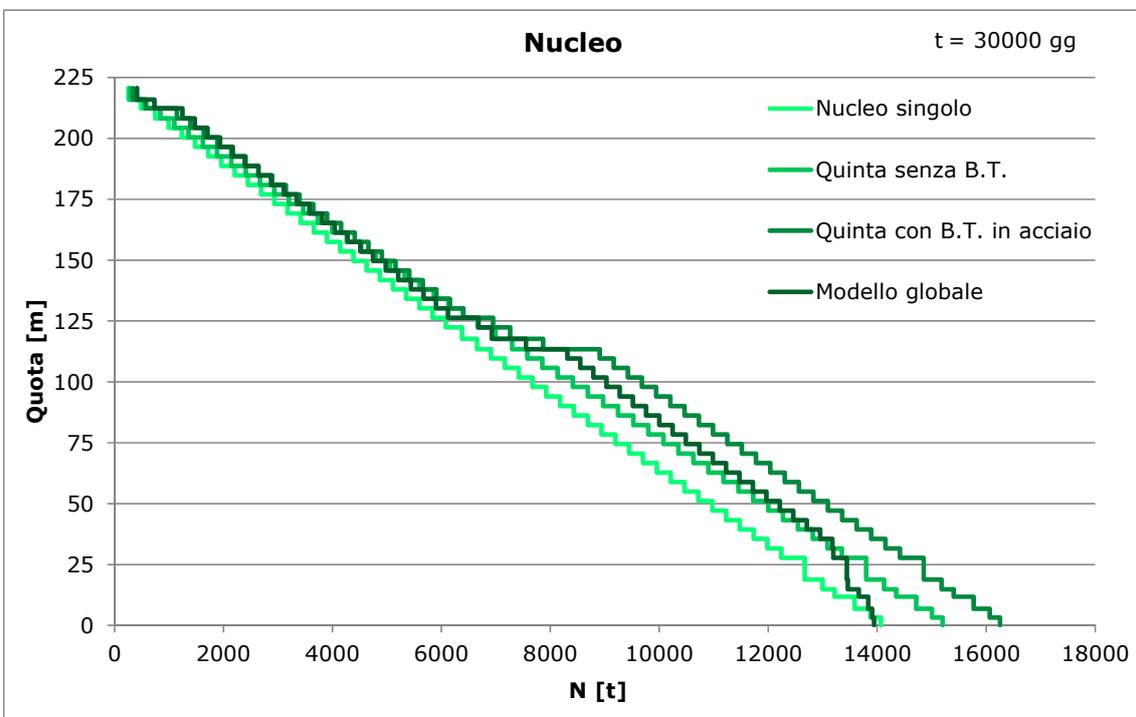


Figura 7.164 - Azioni assiali nucleo

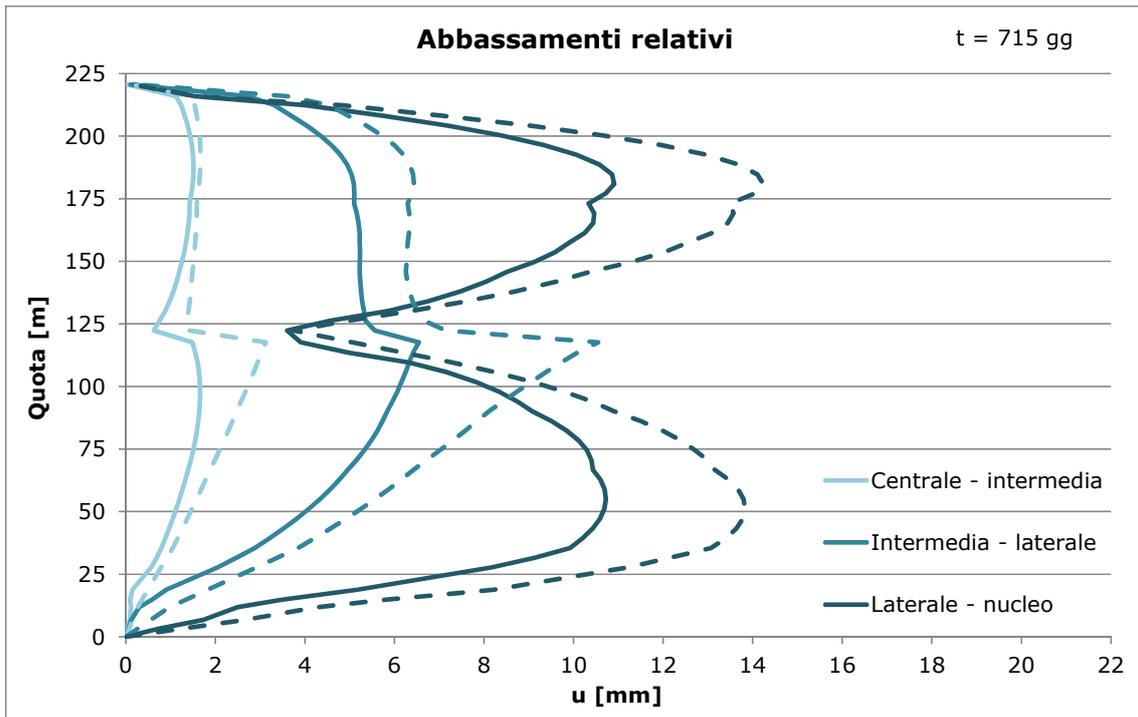


Figura 7.165 - Spostamenti relativi (linea continua modello globale, linea tratteggiata quinta con B.T.)

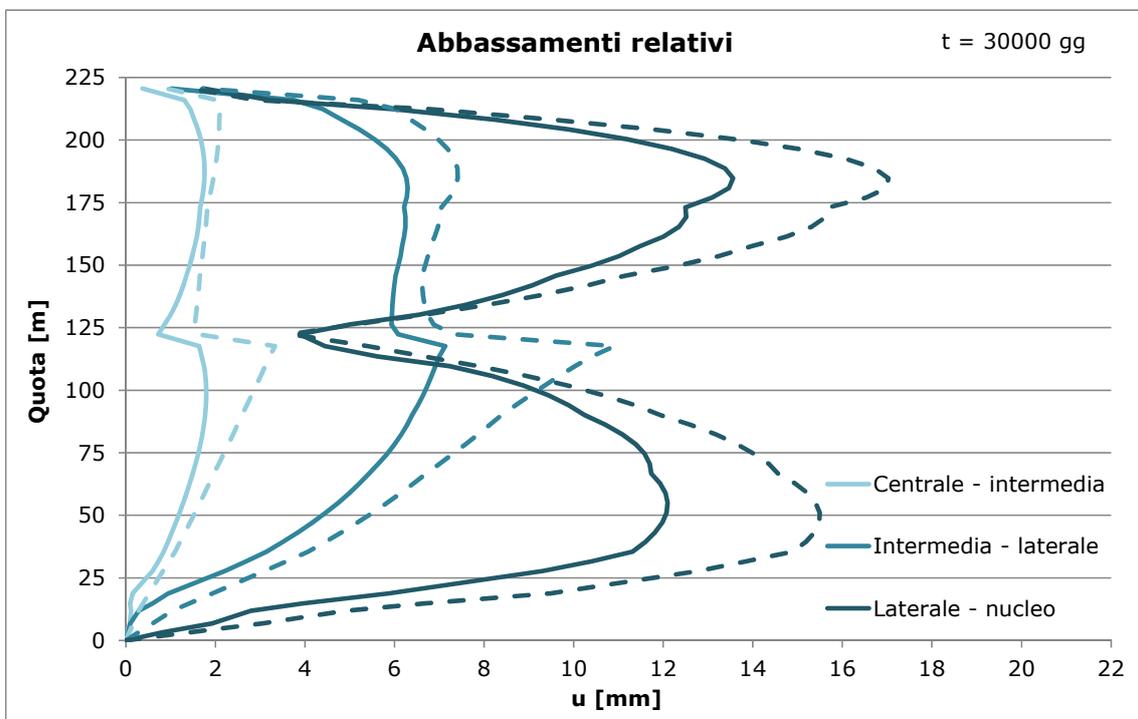


Figura 7.166 - Spostamenti relativi (linea continua modello globale, linea tratteggiata quinta con B.T.)

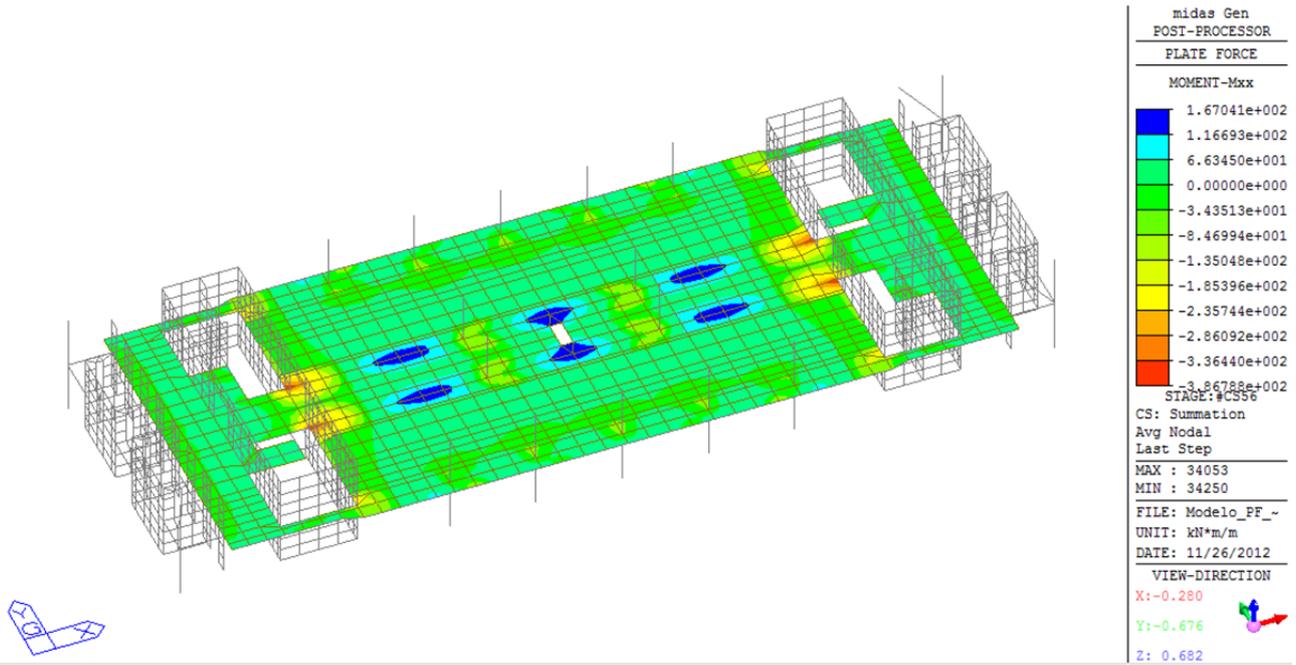


Figura 7.167 - Momento per unità di lunghezza in direzione longitudinale

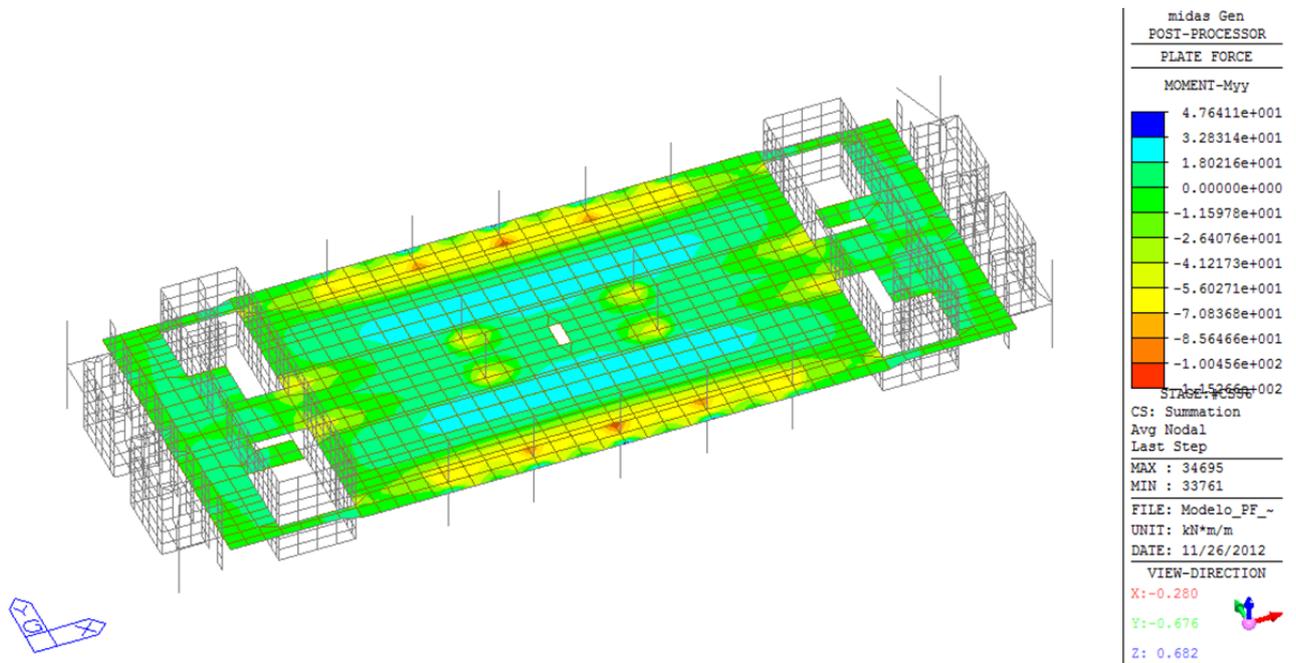


Figura 7.168 - Momento per unità di lunghezza in direzione trasversale

### **7.3.5.3 Analisi dei risultati**

Dal confronto delle azioni assiali e del column shortening ottenuti tramite il modello globale e quello della quinta di facciata, emerge come quest'ultimo fornisca valori molto accurati per una stima iniziale.

L'unico tratto in cui le soluzioni differiscono sensibilmente è quello compreso tra i livelli PI3 - P00. Questo è dovuto alla diversa modellazione dei piani interrati; nel modello globale infatti sono presenti dei setti in c.a. che, data la loro rigidità, tendono a scaricare le colonne di facciata.

Rispetto ai modelli precedenti, per quanto riguarda le colonne, si ha un'ulteriore riduzione delle azioni assiali e quindi del column shortening (FigureFigura 7.149Figura 7.164).

Nel passaggio dal modello bidimensionale a quello globale non si verifica più un aumento delle sollecitazioni nel nucleo, bensì una riduzione dovuta alla tendenza degli impalcati a trasferire i carichi verso le colonne interne.

### 7.3.6 CONFRONTO FRA QUINTA CON BELT TRUSSES IN ACCIAIO E QUINTA CON BELT TRUSSES IN CALCESTRUZZO ARMATO

#### 7.3.6.1 Descrizione del modello

Il modello della quinta con i Belt Trusses in calcestruzzo (Figura 7.169) è analogo a quello del paragrafo 7.3.4.1 (BT in acciaio) si compone di 1409 elementi di cui 957 BEAM e 452 PLATE. Le travi di cintura (Figura 7.169) occupano tutta l'altezza dei piani compresi tra i livelli P24/P25 e P49/P50, hanno spessore pari a 90 cm, e si compongono di calcestruzzo C60/75.

Poiché la modellazione dei Belt Trusses è avvenuta mediante una mesh di elementi PLATE, la sollecitazione di taglio in una determinata sezione è stata ricavata come somma di forze agenti sui nodi dei plate appartenenti a quella sezione; per il calcolo del momento è stato sufficiente sommare i contributi elementari di momento alla rotazione rispetto al punto medio della sezione.

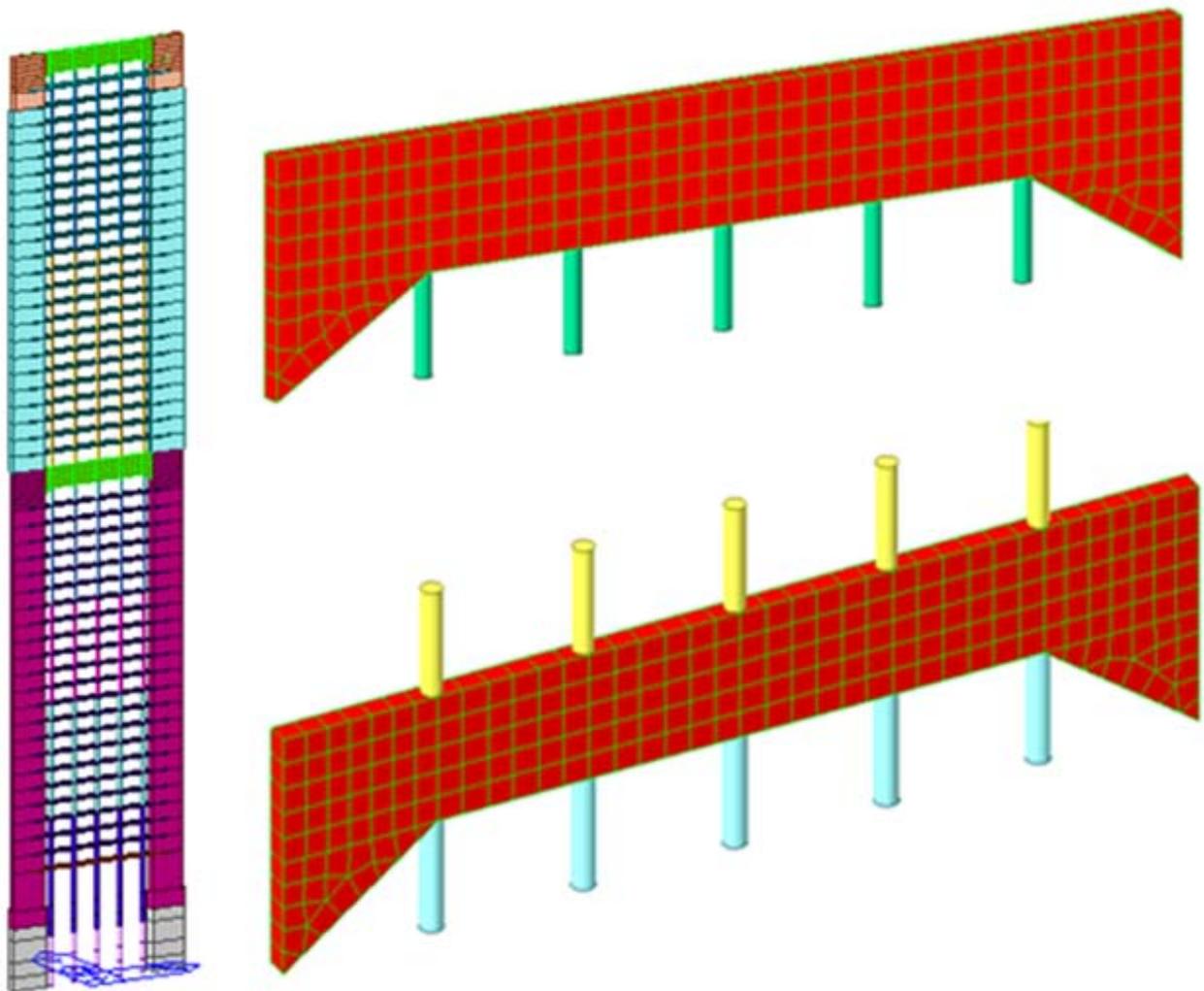


Figura 7.169 - Vista del modello e dettagli dei belt trusses in calcestruzzo

7.3.6.2 Risultati ottenuti

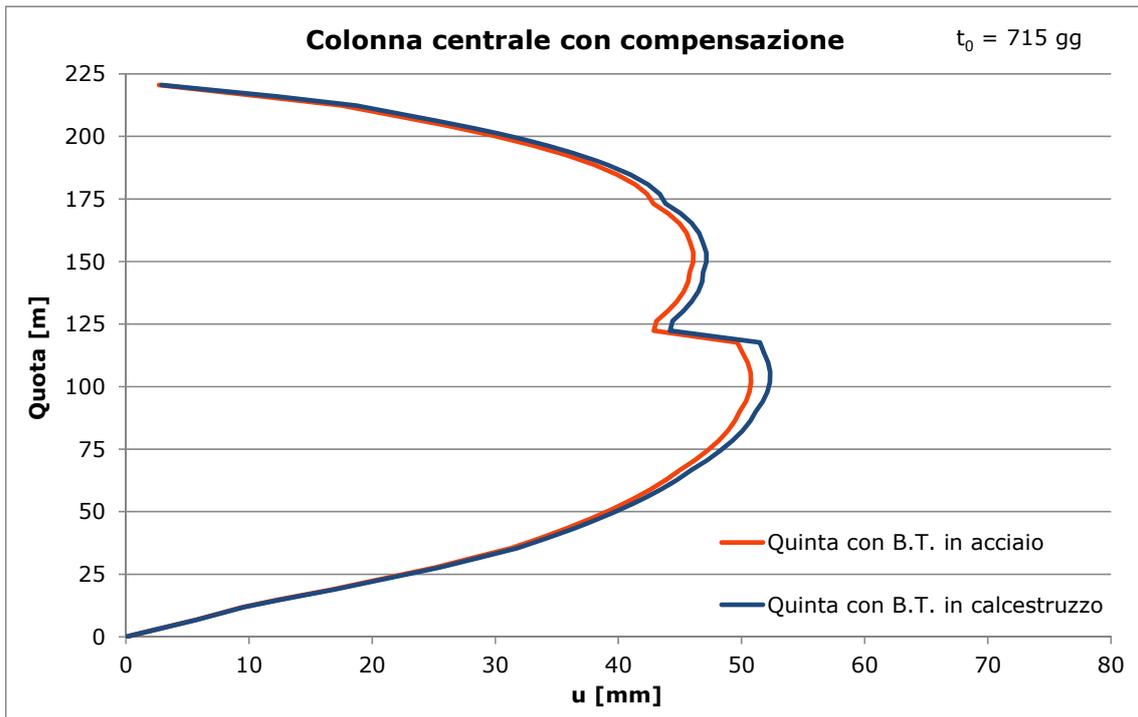


Figura 7.170 - Column shortening colonna centrale

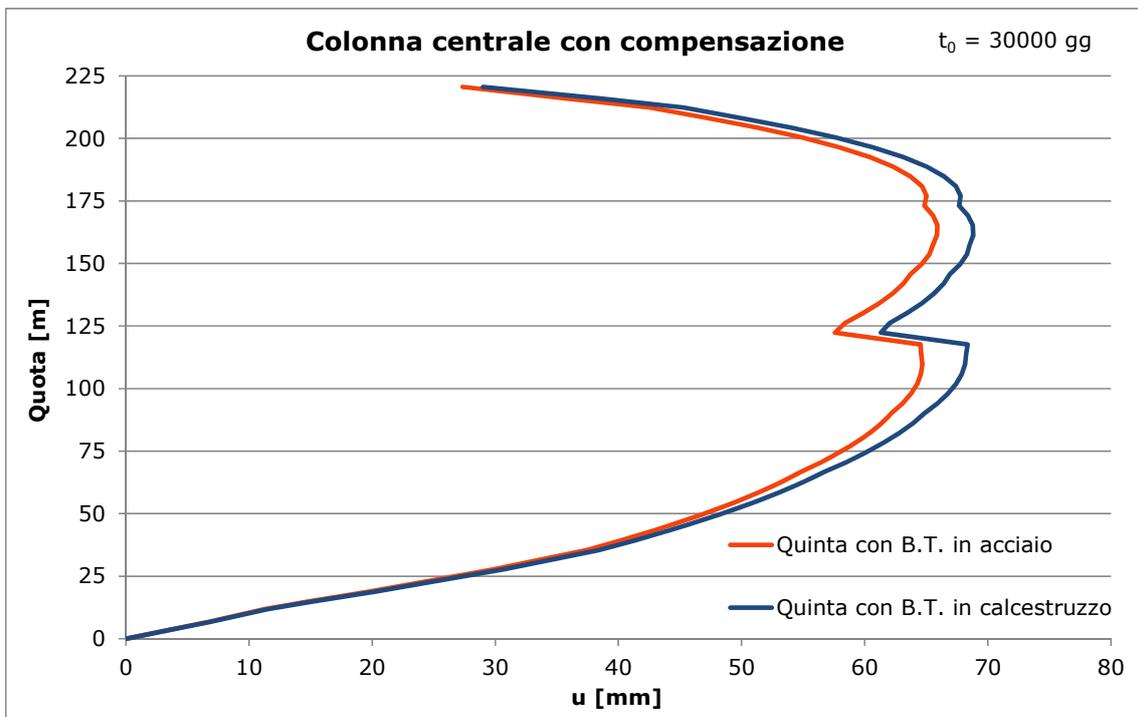


Figura 7.171 - Column shortening colonna centrale

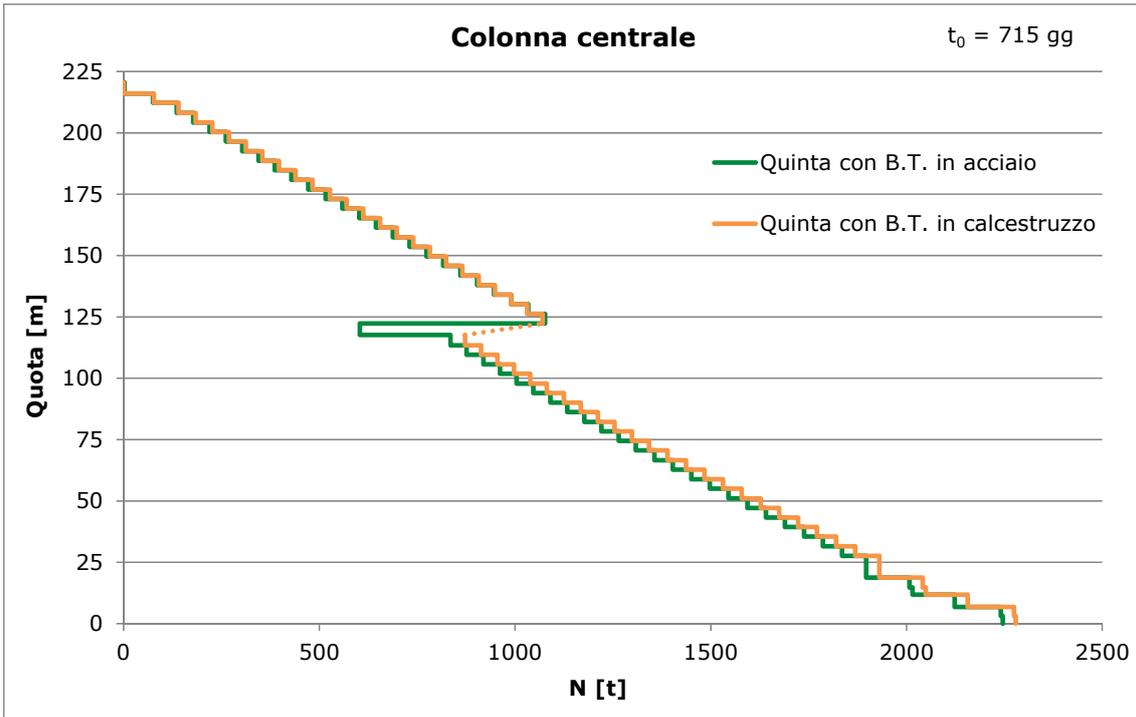


Figura 7.172 - Azioni assiali colonna centrale

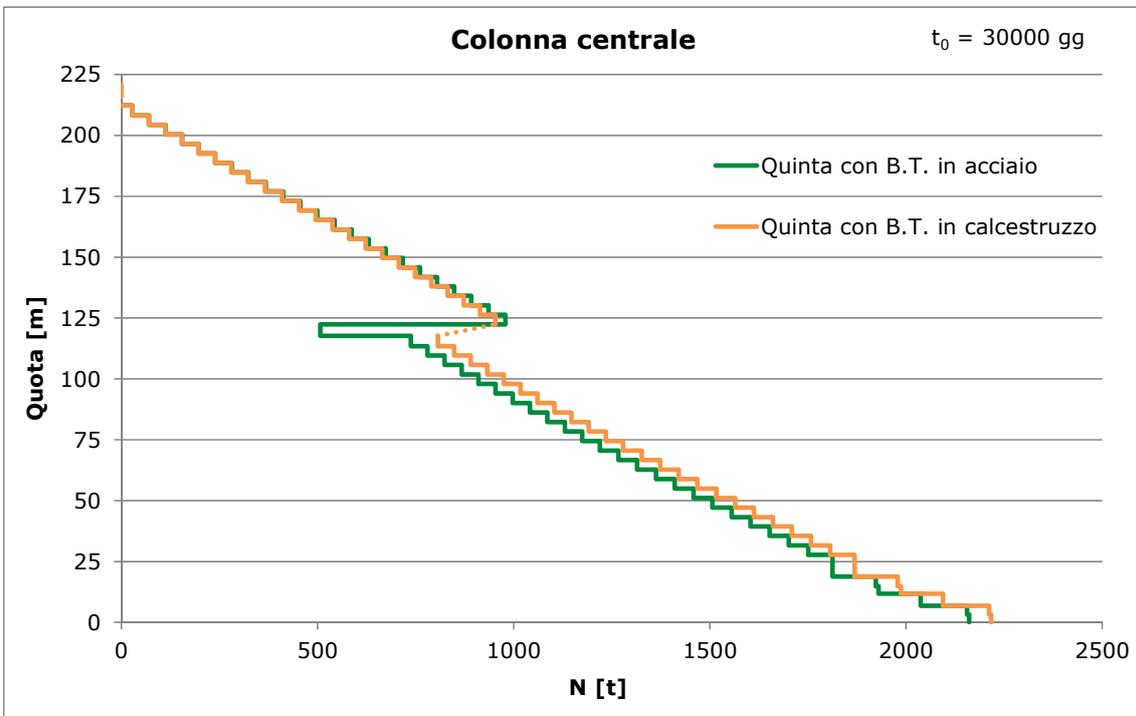


Figura 7.173 - Azioni assiali colonna centrale

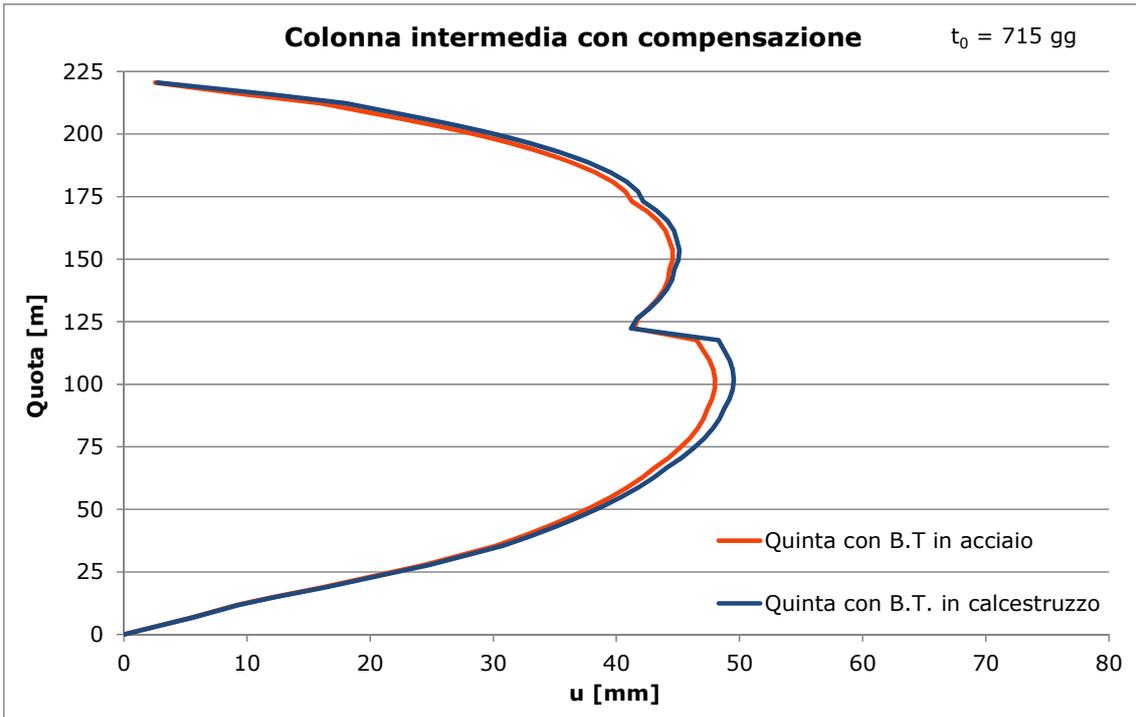


Figura 7.174 - Column shortening colonna intermedia

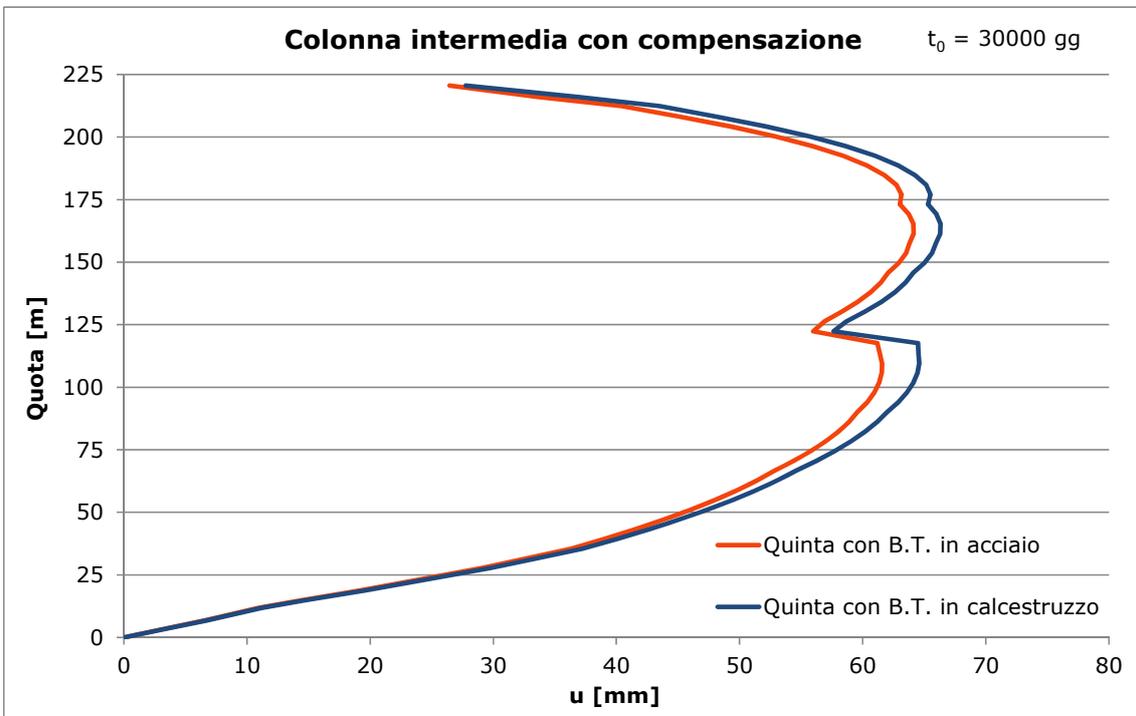


Figura 7.175 - Column shortening colonna intermedia

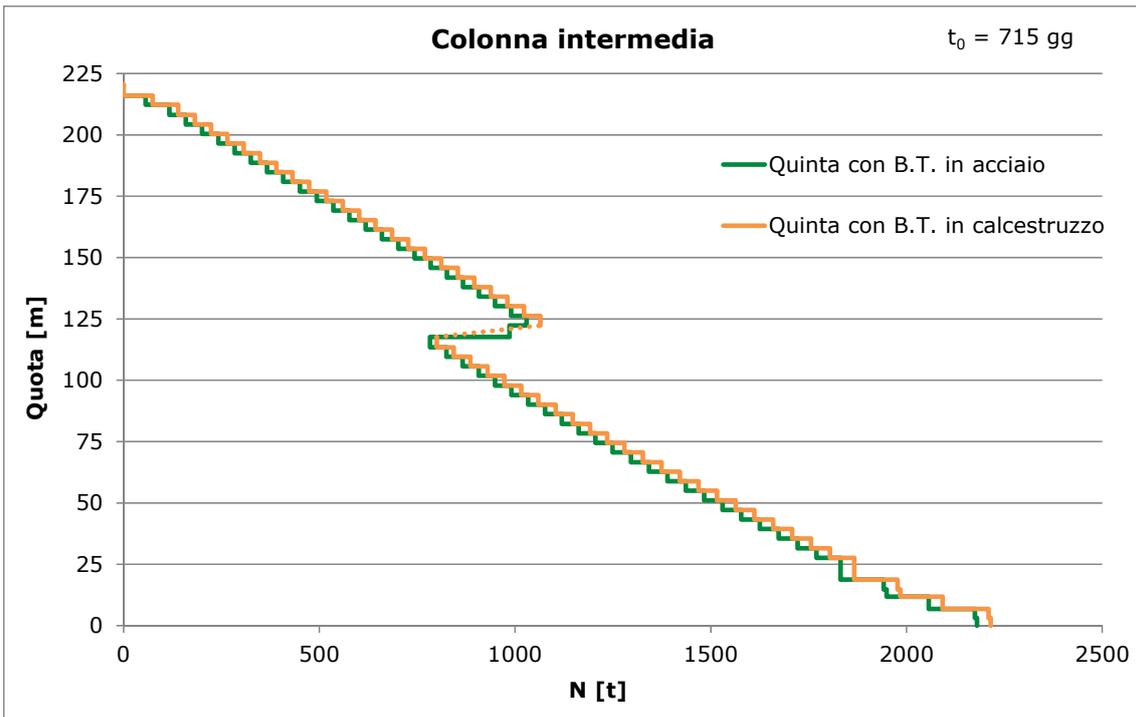


Figura 7.176 - Azioni assiali colonna intermedia

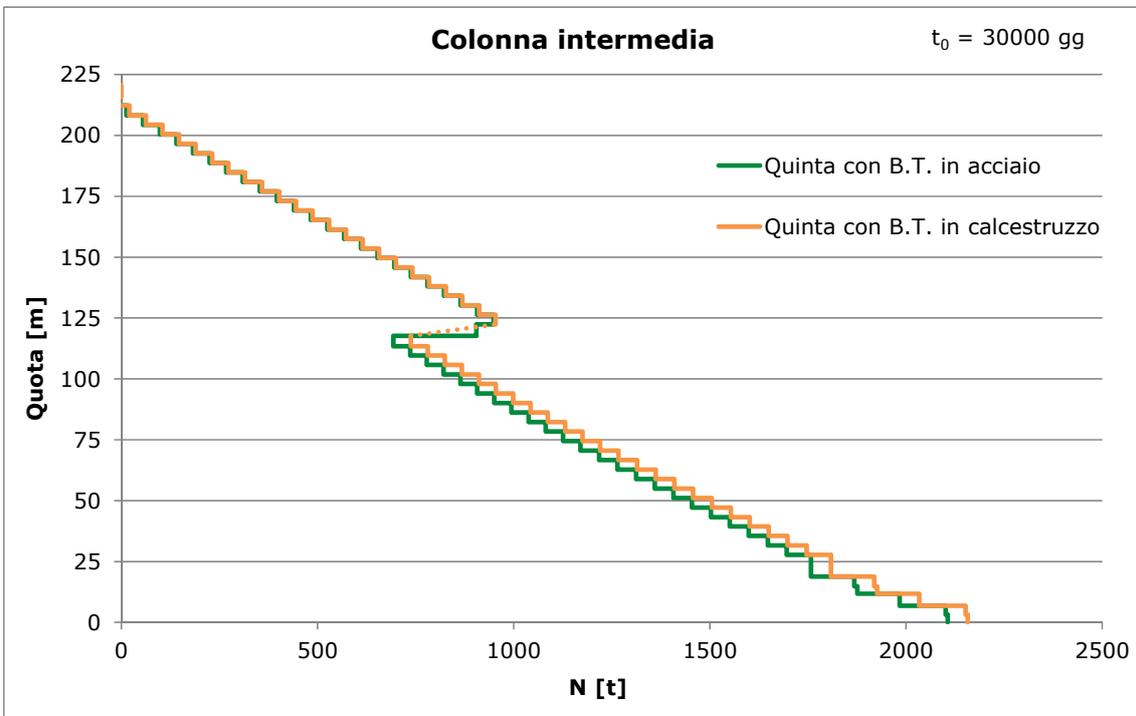


Figura 7.177 - Azioni assiali colonna intermedia

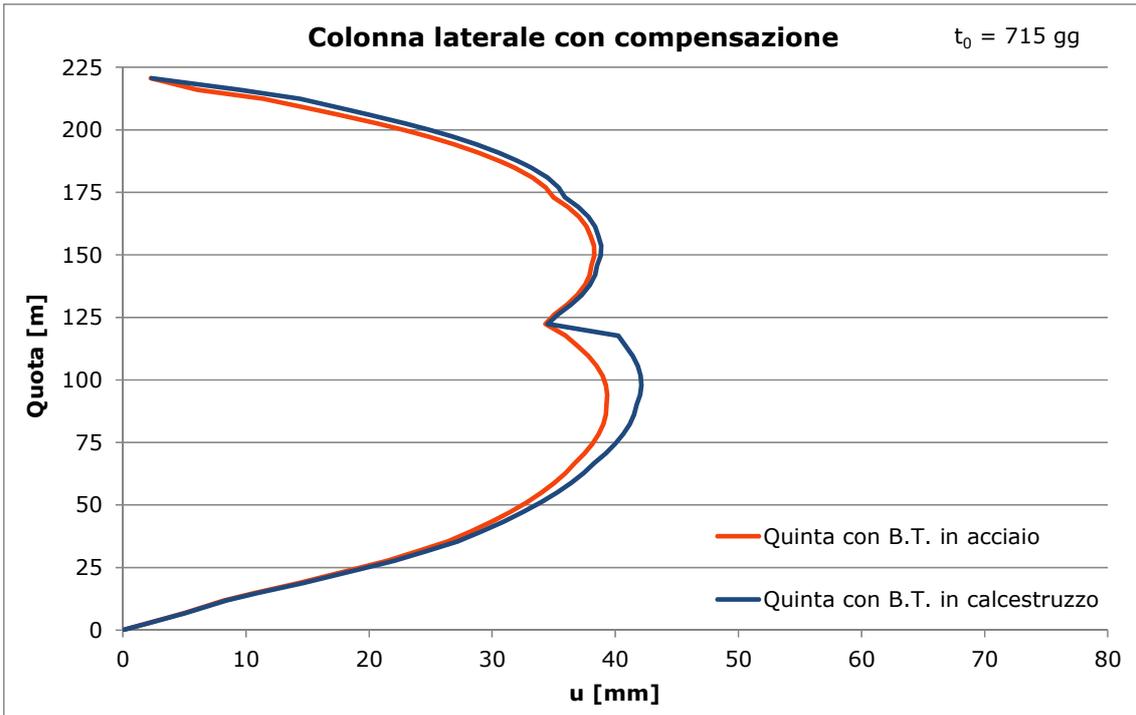


Figura 7.178 - Column shortening colonna laterale

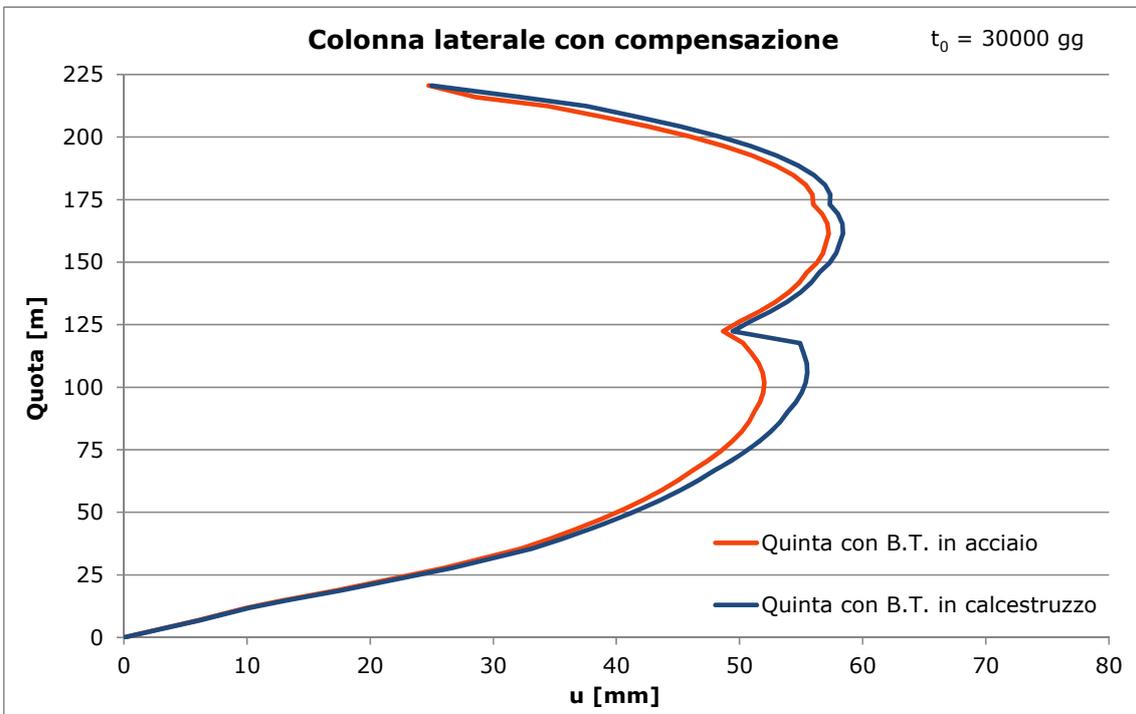


Figura 7.179 - Column shortening colonna laterale

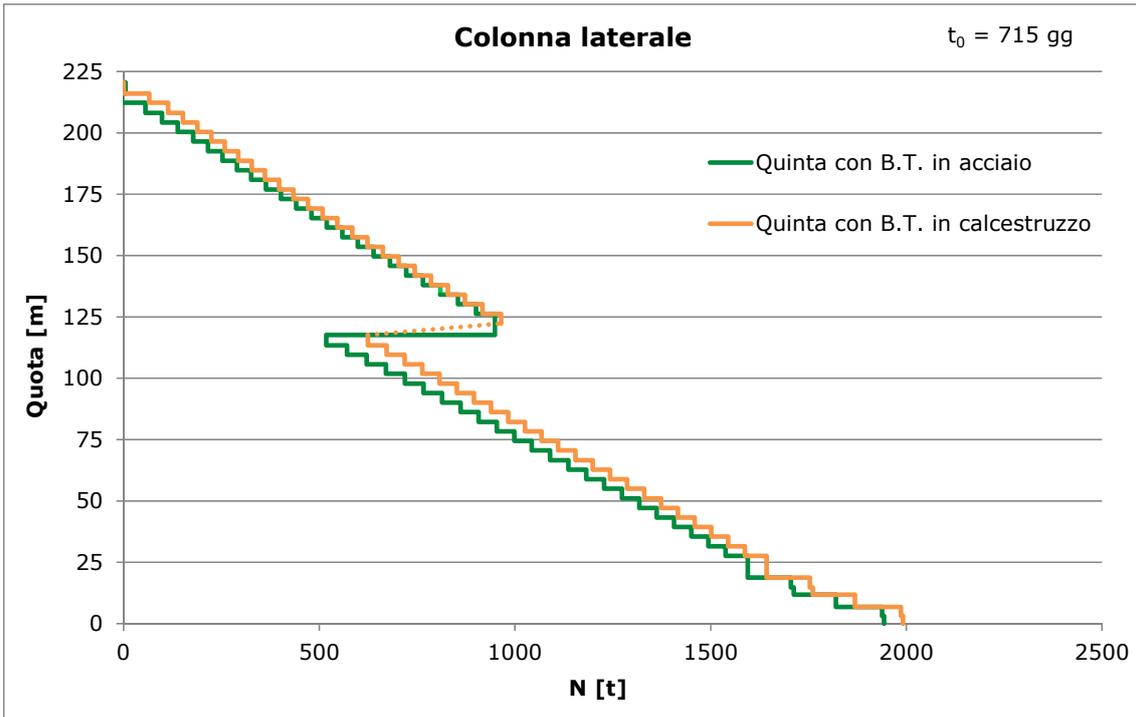


Figura 7.180 - Azioni assiali colonna laterale

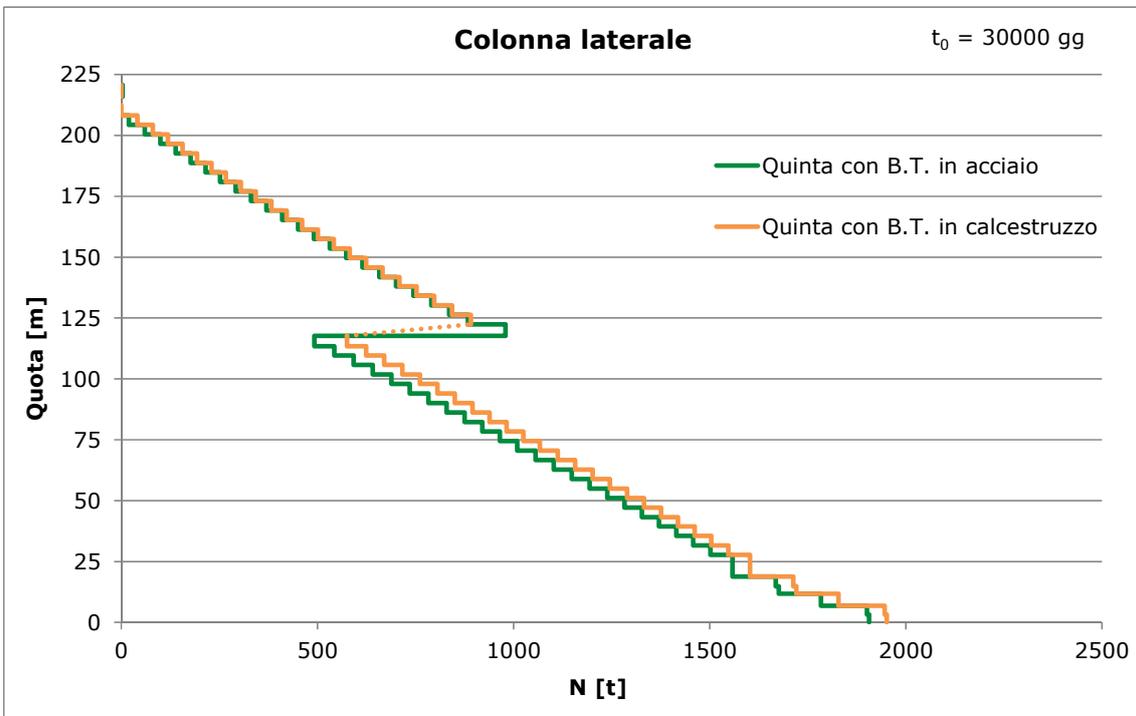


Figura 7.181 - Azioni assiali colonna laterale

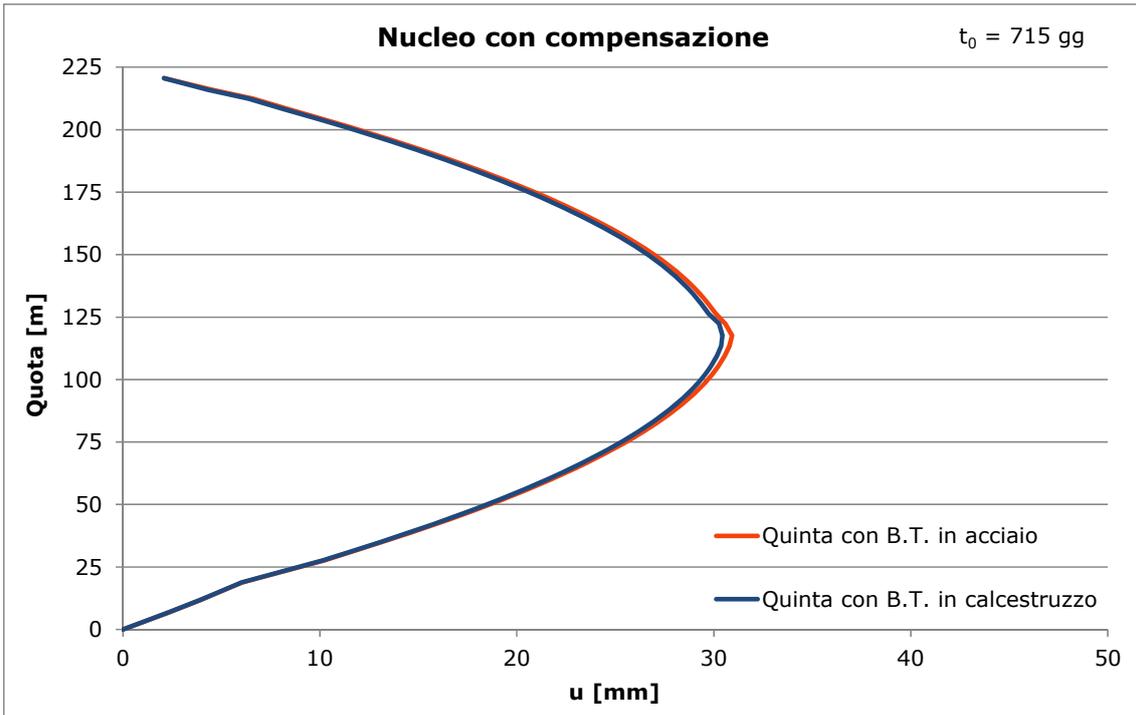


Figura 7.182 - Column shortening nucleo

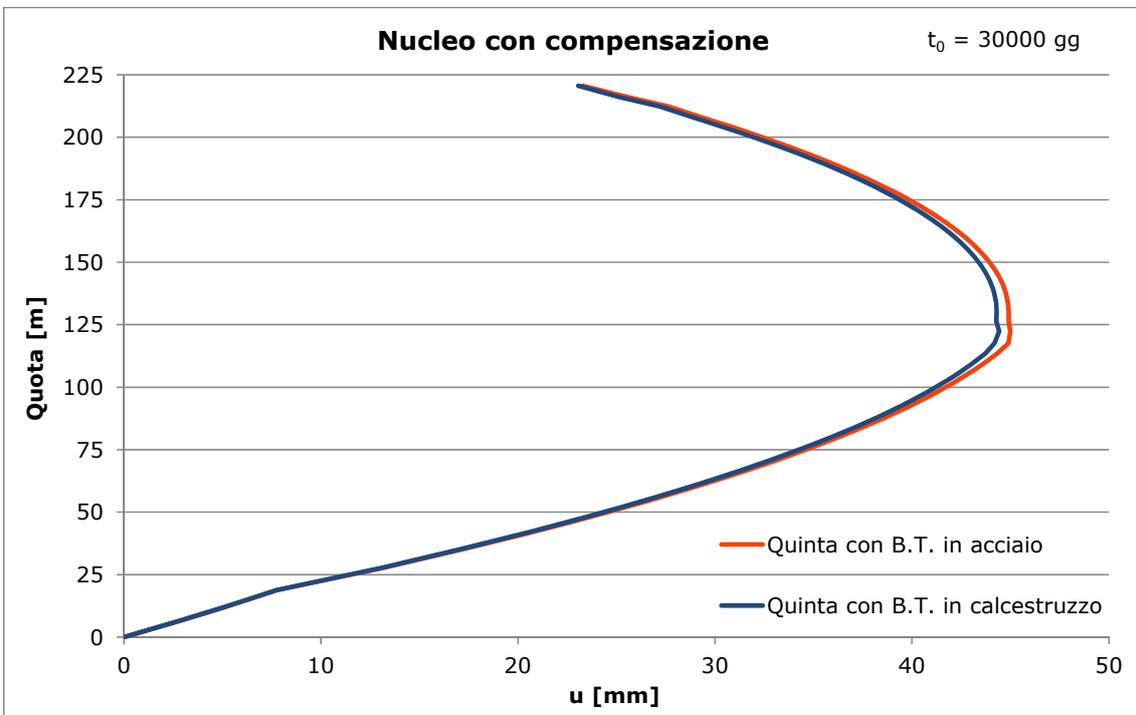


Figura 7.183 - Column shortening nucleo

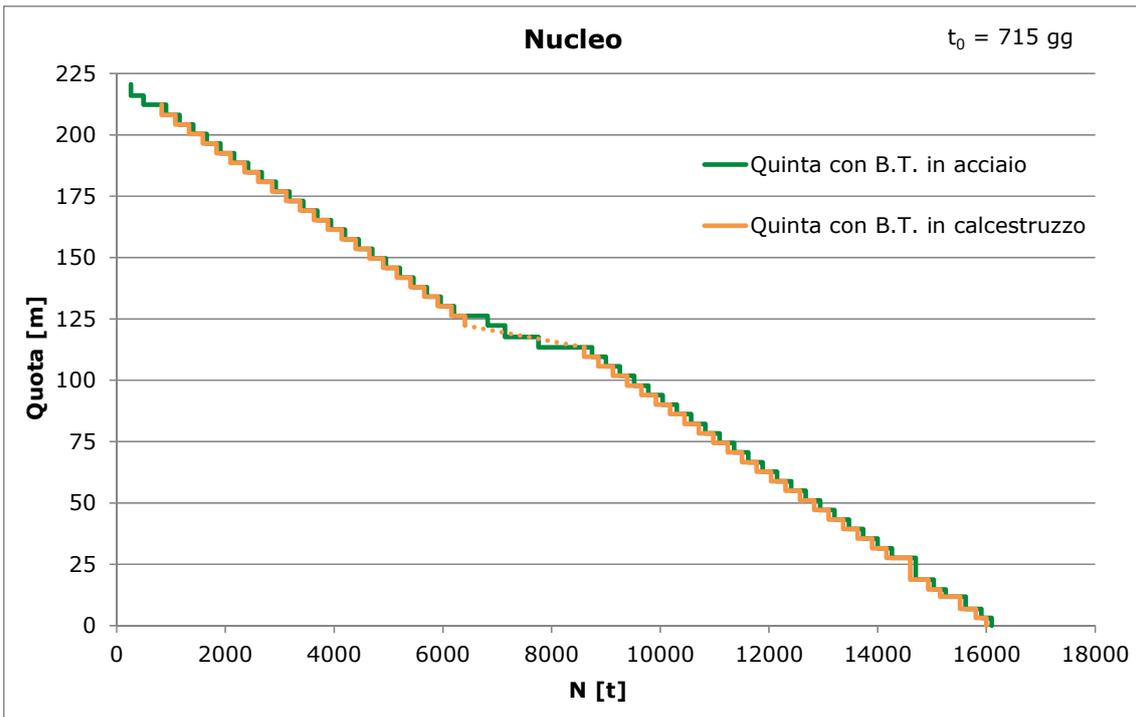


Figura 7.184 - Azioni assiali nucleo

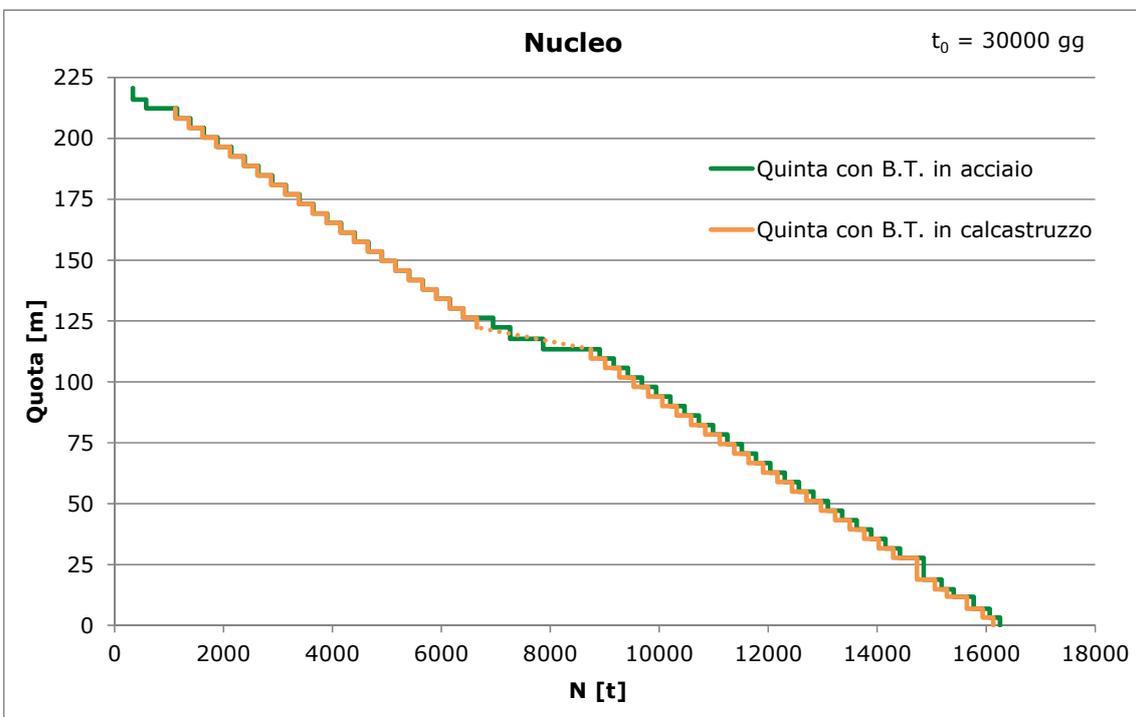


Figura 7.185 - Azioni assiali nucleo

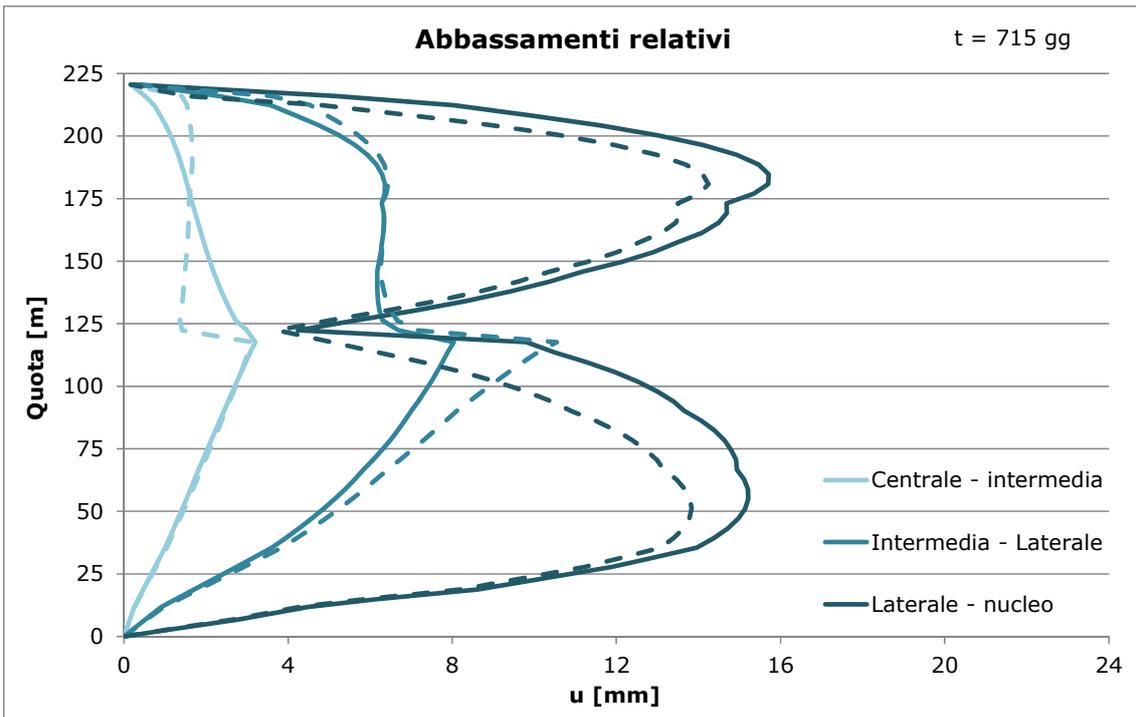


Figura 7.186 - Abbassamenti relativi (linea continua quinta con B.T. in calcestruzzo, linea tratteggiata quinta con B.T. in acciaio)

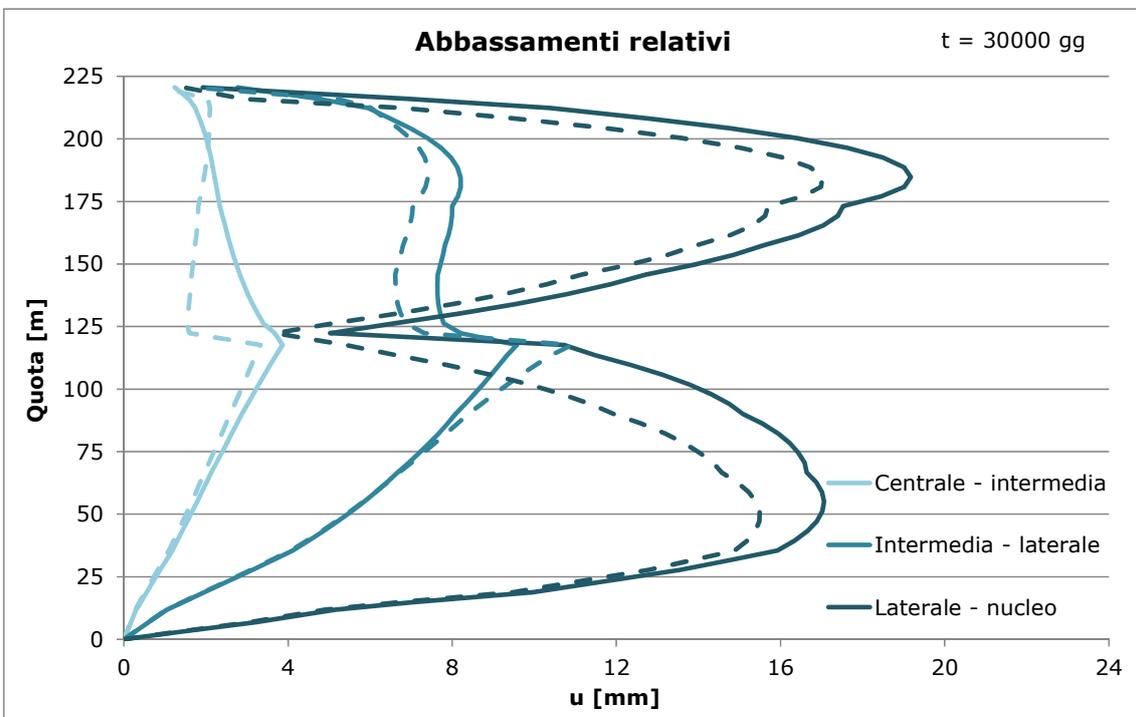


Figura 7.187 - Abbassamenti relativi (linea continua quinta con B.T. in calcestruzzo, linea tratteggiata quinta con B.T. in acciaio)

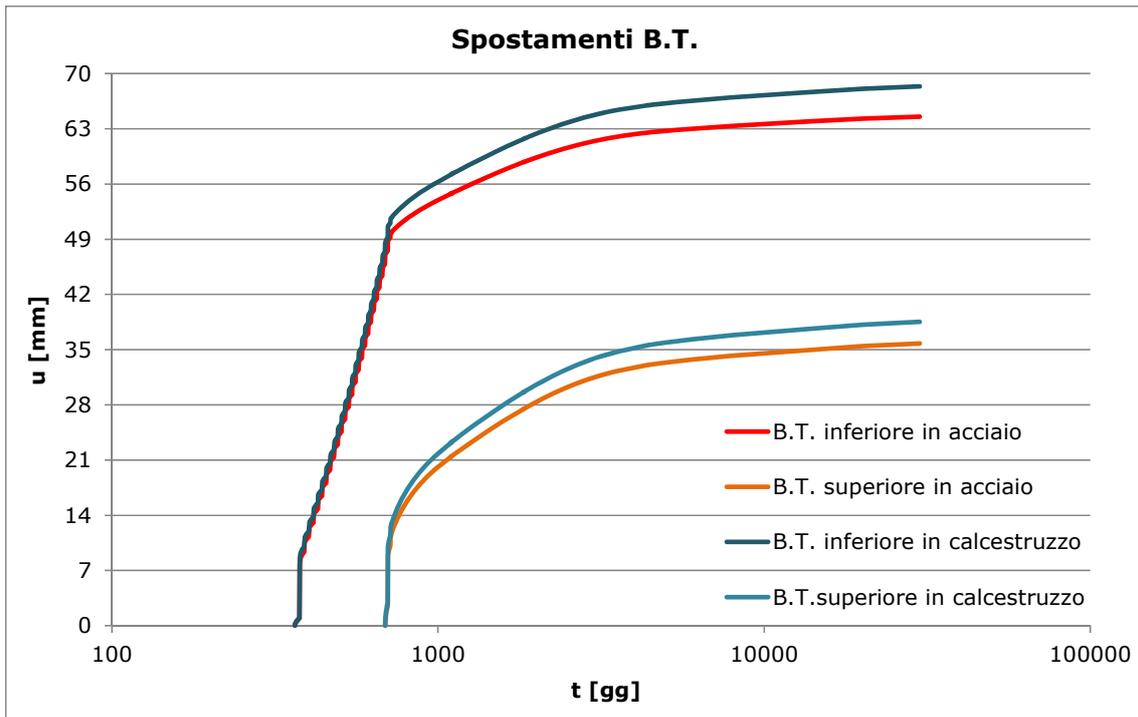


Figura 7.188 - Spostamenti nella dei belt trusses

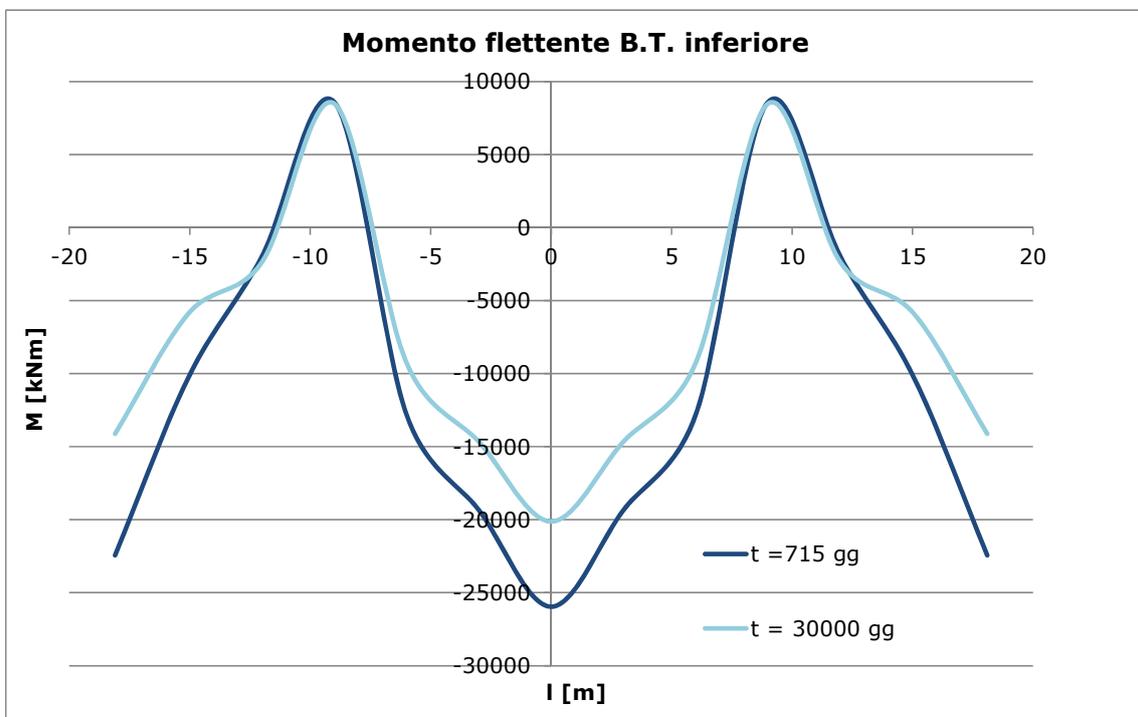


Figura 7.189 - Momento B.T. inferiore

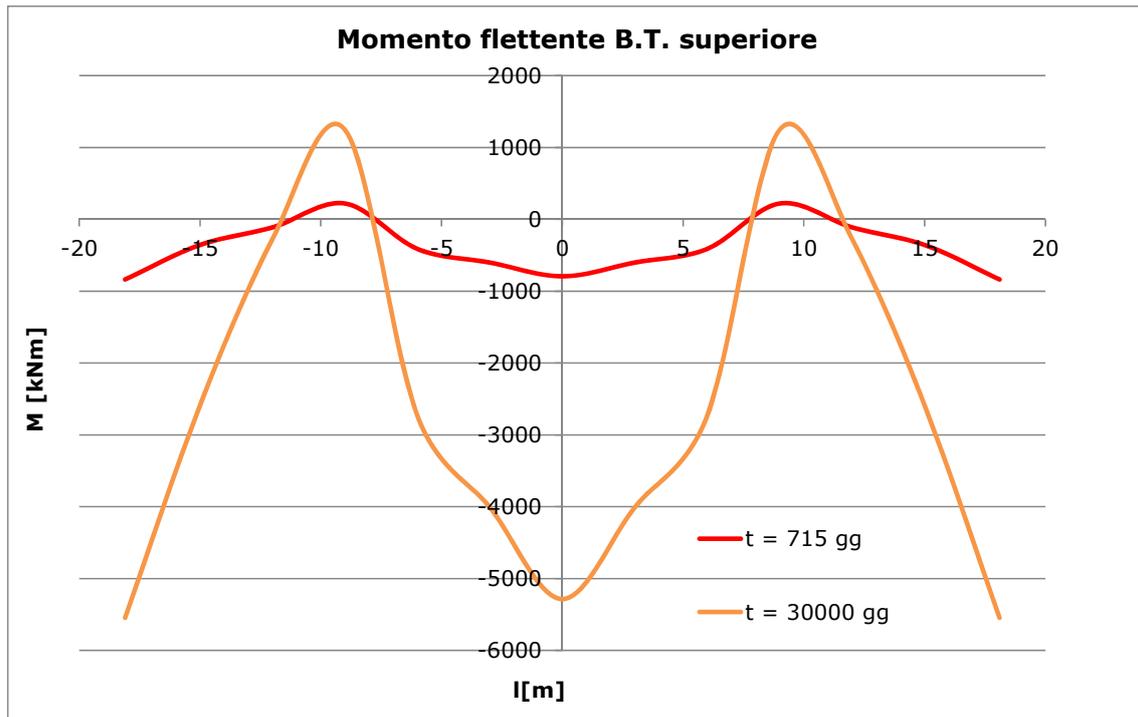


Figura 7.190 - Momento B.T. superiore

### 7.3.6.3 Analisi dei risultati

Dai risultati ottenuti emerge che le due soluzioni analizzate danno risultati pressoché equivalenti in termini di azioni assiali e column shortening.

In Figura 7.170 si nota come per effetto dei fenomeni viscosi avvenuti nei belt trusses durante la costruzione gli abbassamenti letti dal modello con travi di cintura in calcestruzzo risultino maggiori. Questo fenomeno risulta più accentuato quando i fenomeni lenti si esauriscono (Figura 7.171).

La diversa reologia dei materiali costituenti i belt trusses si riscontra anche nell'andamento delle azioni assiali che, in seguito ad una minore appensione delle colonne, sono maggiori nel caso di travi di cintura in calcestruzzo. In questo caso la rappresentazione tra i livelli P24 - P25 e P49 -P50, dove non sono presenti colonne, avviene tramite una linea tratteggiata.

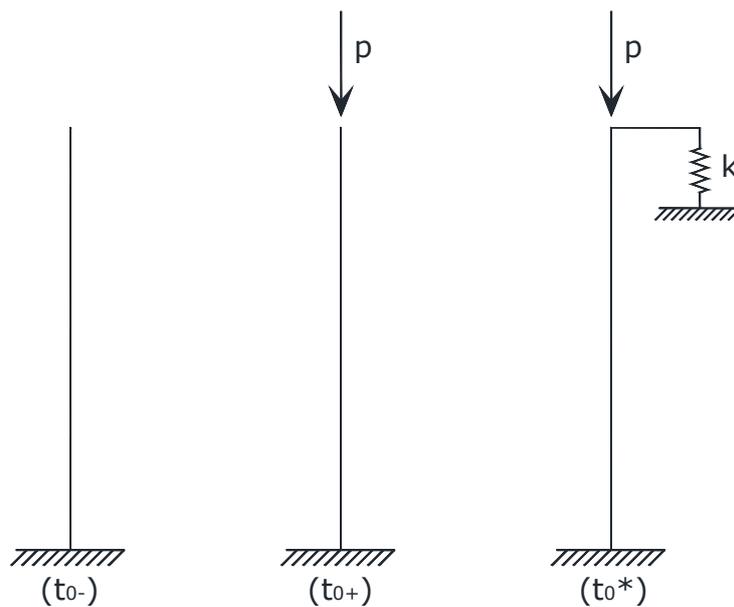
Dalle Figure Figura 7.174, Figura 7.178 si nota come la tangente alle curve di column shortening tra i livelli P24 e P25 sia diversa nelle colonne intermedia e laterale tra i due modelli. Questo accade a causa di un differente schema di carico al livello P24; nel caso di belt truss in calcestruzzo, invece di applicare un carico distribuito, è stato necessario utilizzare il metodo delle aree di influenza come nel caso della colonna singola.

Per comprendere come in questo caso due strutture diverse abbiano un comportamento molto simile sia in termini di spostamenti (Figura 7.170, Figura 7.171, Figura 7.188) che di

azioni (Figura 7.172, Figura 7.173, Figura 7.189, Figura 7.190, Figura 7.107), si analizza due aste diversamente vincolate tramite l'approccio algebrico di Trost ([30], 1967).

Dopo un breve richiamo teorico, si riportano i risultati ottenuti al variare del fattore di accoppiamento  $\omega$  (paragrafo 3.2.3).

### 7.3.6.3.1 Vincolo elastico posticipato



**Figura 7.191 - Struttura omogenea con un vincolo elastico posticipato ed azioni statiche**

Si scrive l'equazione di congruenza al tempo  $t$ , per la struttura in Figura 7.191, utilizzando la formulazione algebrica di Trost:

$$\left[ \delta_{11}^{(C)}(t_0^*) \cdot (1 + \chi(t, t_0^*) \cdot \varphi(t, t_0^*)) + \delta_{11}^{(S)} \right] \cdot X(t) - \delta_0(t_0) \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)] = 0 \quad (7.1)$$

dove:

$X(t)$  = incognita, reazione del vincolo elastico sovrabbondante;

$\delta_{11}^{(C)}(t_0^*)$  = coefficiente di flessibilità, valutato al tempo  $t_0^*$  di applicazione del vincolo posticipato;

$\delta_{11}^{(s)}$  = coefficiente di flessibilità del vincolo elastico;

$\delta_0(t_0)$  = spostamento nella direzione dell' iperstatica, provocato dalle azioni applicate sulla struttura in esame resa isostatica.

$\chi(t, t_0^*)$  = coefficiente di invecchiamento

$$\chi(t, t_0^*) = \frac{1}{R(t, t_0^*) / E_c(t_0^*)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0^*)} \quad (7.2)$$

Definiti:

- Il fattore di accoppiamento

$$\omega(t_0) = \frac{\delta_{11}^{(c)}(t_0)}{\delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)}} \quad (7.3)$$

- La relazione che lega la soluzione elastica con quella rigida

$$X_e(t_0) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \quad (7.4)$$

ipotizzando  $E_c(t_0^*) \cong E_c(t_0)$  (ipotesi accettabile nel caso in cui  $(t_0, t_0^*) > 28$  giorni poiché dal ventottesimo giorno in poi il modulo elastico si modifica poco nel tempo), l'equazione (7.1) si può esprimere come:

$$[\omega(t_0) \cdot (1 + \chi(t, t_0^*) \cdot \varphi(t, t_0^*) + 1 - \omega(t_0))] \cdot X(t) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)]$$

da cui si ricava la soluzione:

$$X(t) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot \frac{\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)}{1 + \omega(t_0) \cdot \chi(t, t_0^*) \cdot \varphi(t, t_0^*)} \quad (7.5)$$

7.3.6.3.2 Vincolo visco-elastico posticipato

Analogamente al caso precedente si scrive l'equazione di congruenza per la struttura seguente:

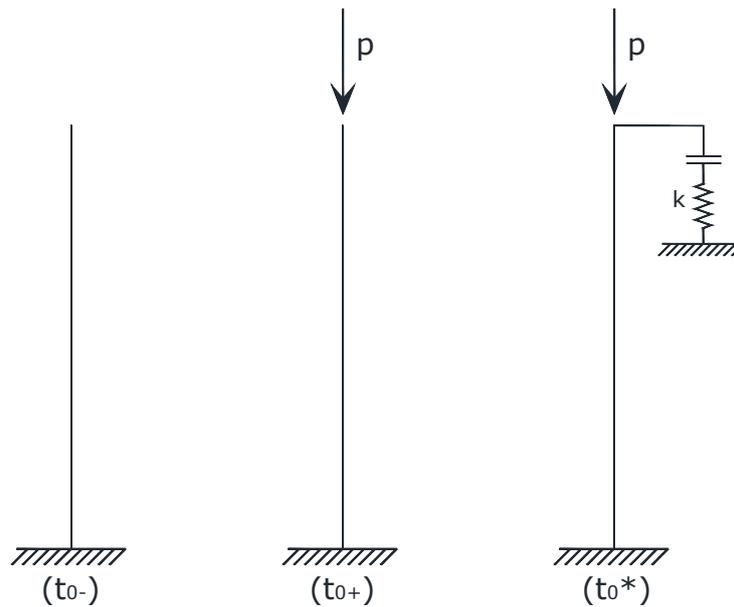


Figura 7.192 - Struttura omogenea con un vincolo visco - elastico posticipato ed azioni statiche

$$\begin{aligned}
 & [\delta_c(t_0^*) \cdot (1 + \chi \cdot \varphi_c(t, t_0^*)) + \delta_v(t_0^*) \cdot (1 + \chi \cdot \varphi_v(t - \Delta, t_0^* - \Delta))] \cdot X(t) = \\
 & = \delta_0(t_0) \cdot [\varphi_c(t, t_0) - \varphi_c(t_0^*, t_0)] \quad (4.10)
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

dove:

$$\delta_c(t_0^*) = \delta_{11}^{(c)}(t_0^*);$$

$\delta_v(t_0^*)$  = coefficiente di flessibilità del vincolo visco-elastico.

$$\Delta = t_{0,v}^* - t_{0,c}^*$$

- Se  $\varphi_c(t, t_0^*) = \varphi_v(t, t_0^*) = \varphi(t_0^*, t_0)$

$$(\delta_c(t_0^*) + \delta_v(t_0^*)) \cdot [1 + \chi \cdot \varphi(t, t_0^*)] \cdot X(t) = \delta_0(t_0) \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_0^*, t_0)] \quad (7.7)$$

Ipotizzando:

$$\delta_c(t_0^*) \cong \delta_c(t_0)$$

$$\delta_v(t_0^*) \cong \delta_v(t_0)$$

e dividendo ambo i membri per  $\delta_c(t_0^*) + \delta_v(t_0^*)$  si ottiene l'espressione:

$$[1 + \chi \cdot \varphi(t, t_0^*)] \cdot X(t) = X(t_0) \cdot [\varphi_c(t, t_0) - \varphi_c(t_0^*, t_0)]$$

La soluzione finale può essere scritta come:

$$X(t) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot \frac{\varphi_c(t, t_0) - \varphi_c(t_0^*, t_0)}{1 + \chi \cdot \varphi(t, t_0^*)} \quad (7.8)$$

- Se  $\varphi_c(t, t_0^*) \neq \varphi_v(t, t_0^*)$

Ipotizzando anche in questo caso:

$$\delta_c(t_0^*) \cong \delta_c(t_0)$$

$$\delta_v(t_0^*) \cong \delta_v(t_0)$$

e definendo:

$$\omega(t_0) = \frac{\delta_c(t_0)}{\delta_c(t_0) + \delta_v(t_0)} \quad (7.9)$$

La soluzione finale risulta:

$$X(t) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot \frac{\varphi_c(t, t_0) - \varphi_c(t_0^*, t_0)}{1 + \chi \cdot (1 - \omega(t_0)) \cdot \varphi_v(t - \Delta, t_0^* - \Delta) + \omega(t_0) \cdot \chi \cdot \varphi_c(t, t_0^*)} \quad (7.10)$$

Si riportano gli andamenti delle reazioni iperstatiche in corrispondenza del vincolo aggiuntivo e degli spostamenti per diversi valori del fattore di accoppiamento.

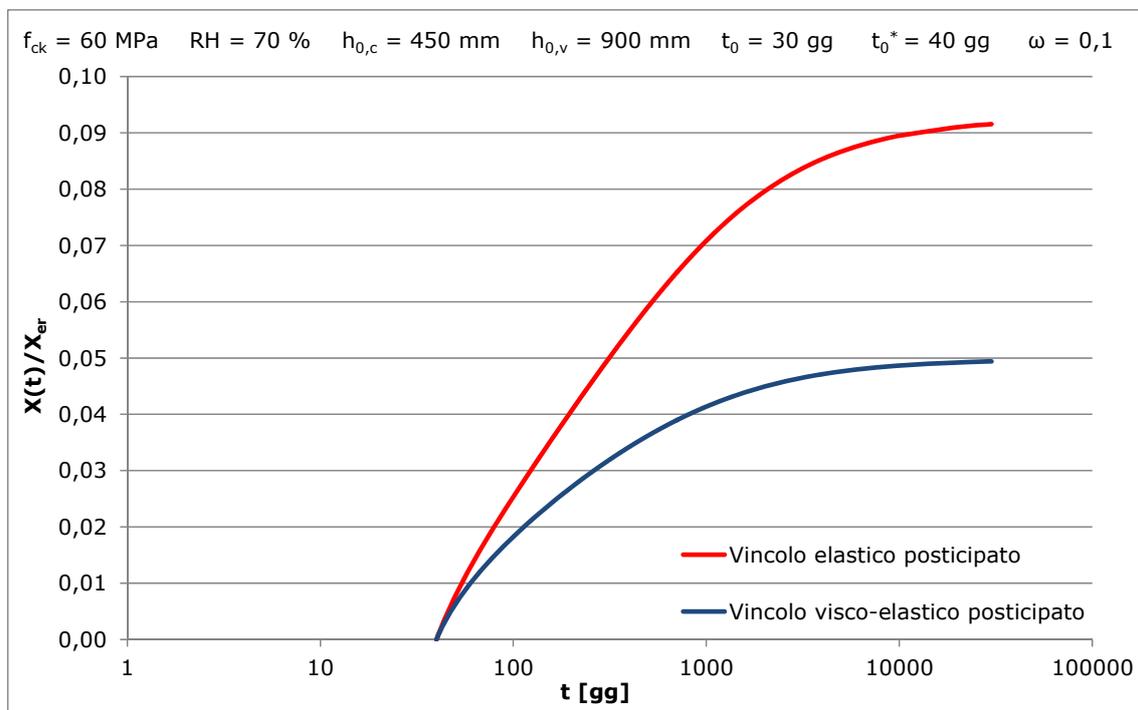


Figura 7.193 - Andamento dell' iperstatica per  $\omega = 0,1$

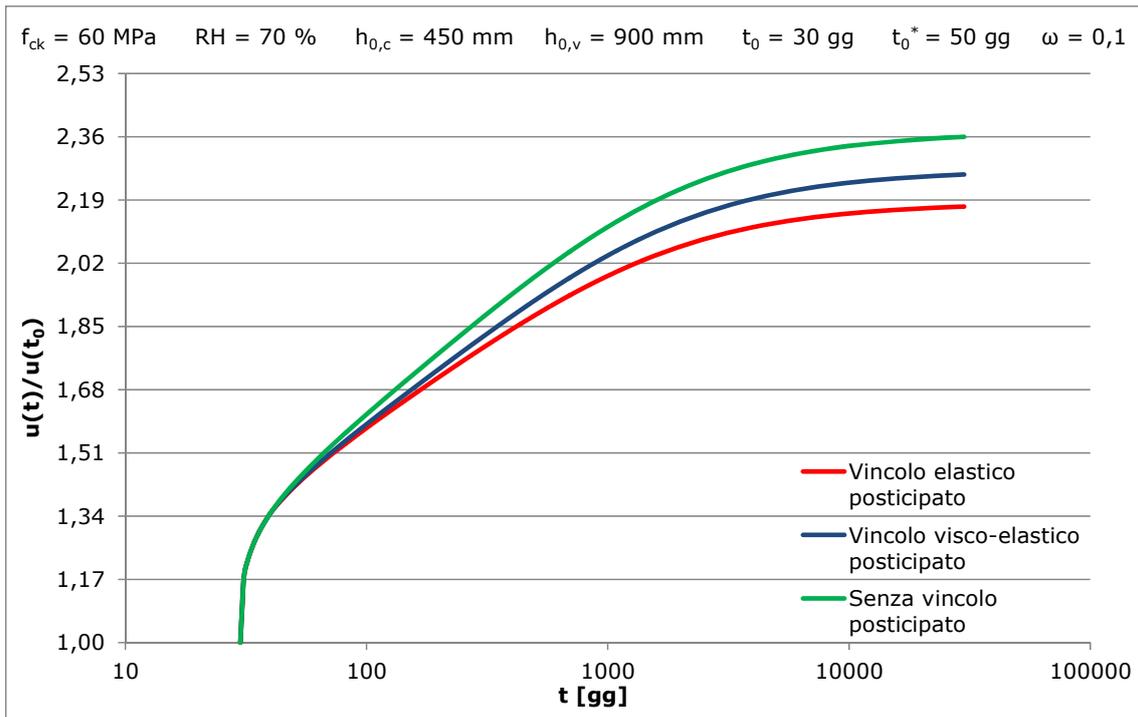


Figura 7.194 - Abbassamento della sommità della colonna per  $\omega = 0,1$

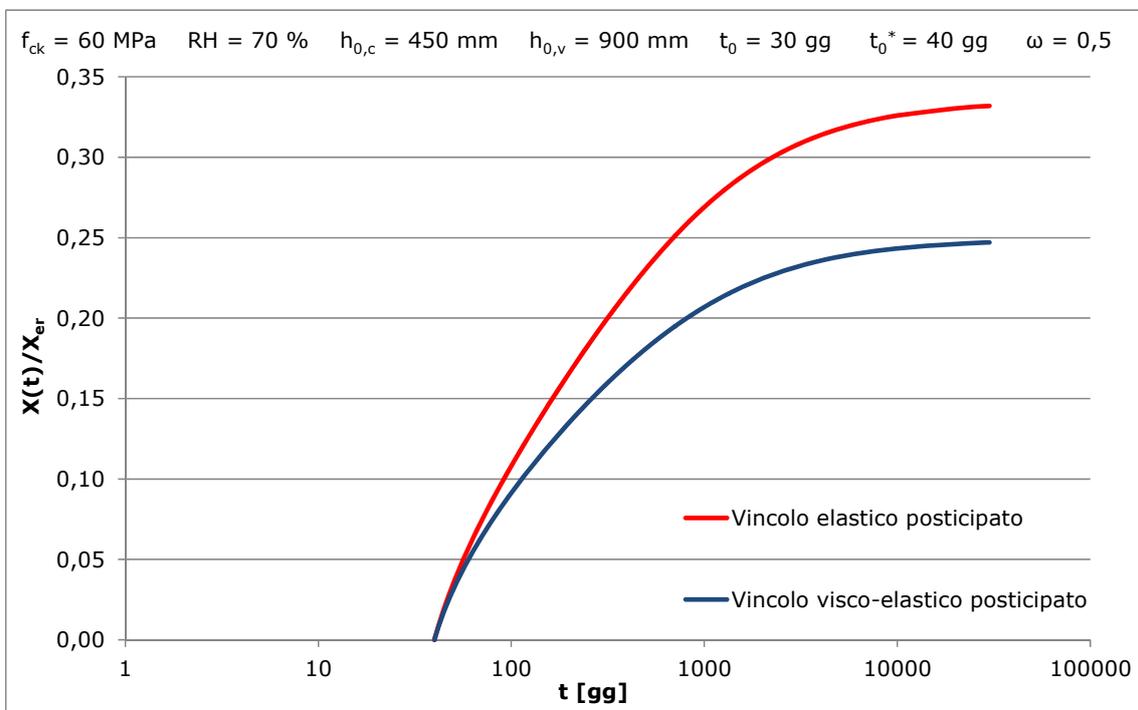


Figura 7.195 - Andamento dell' iperstatica per  $\omega = 0,5$

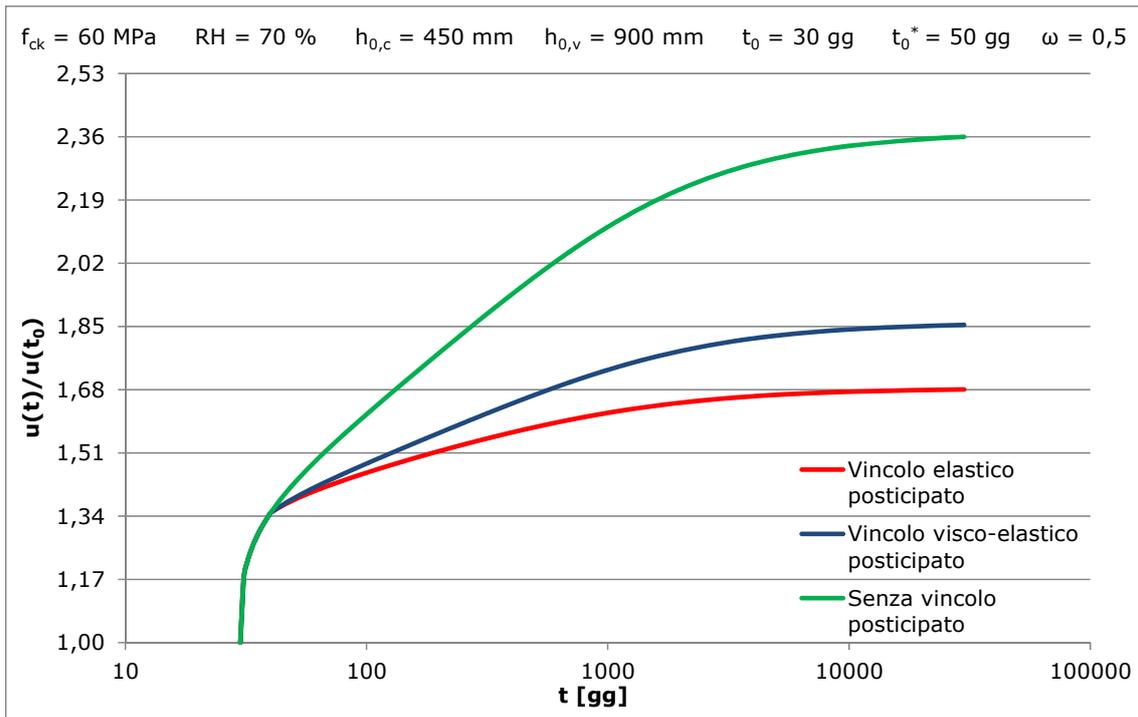


Figura 7.196 - Abbassamento della sommità della colonna per  $\omega = 0,5$

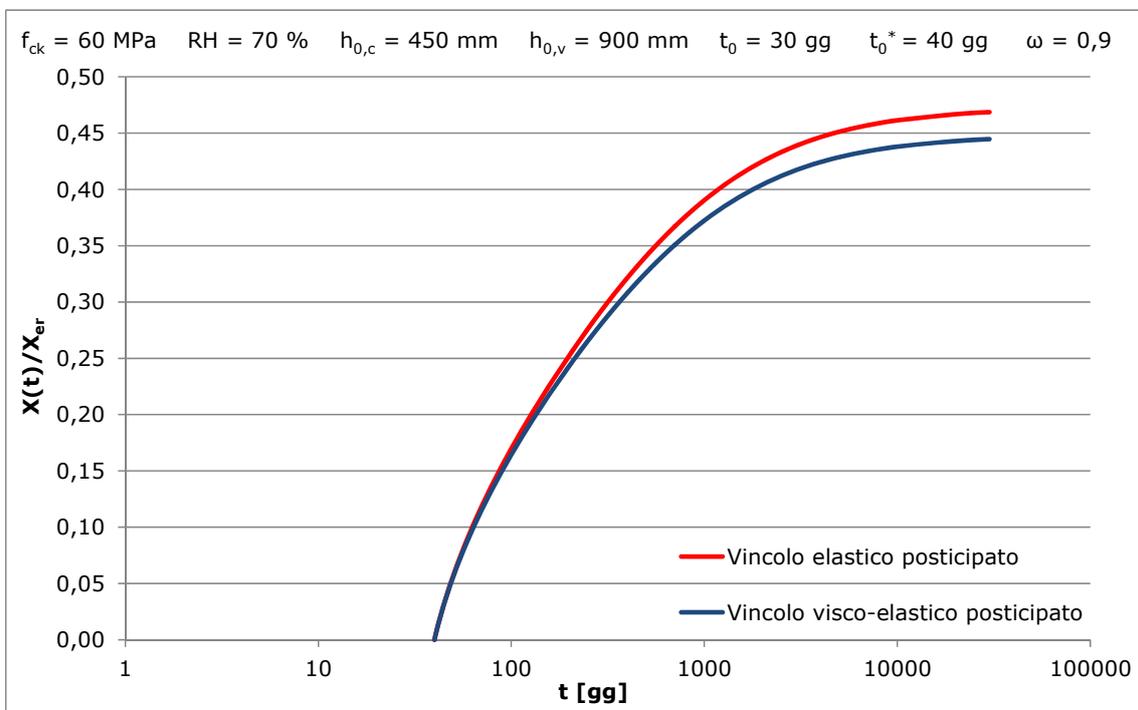


Figura 7.197 - Andamento dell' iperstatica per  $\omega = 0,9$

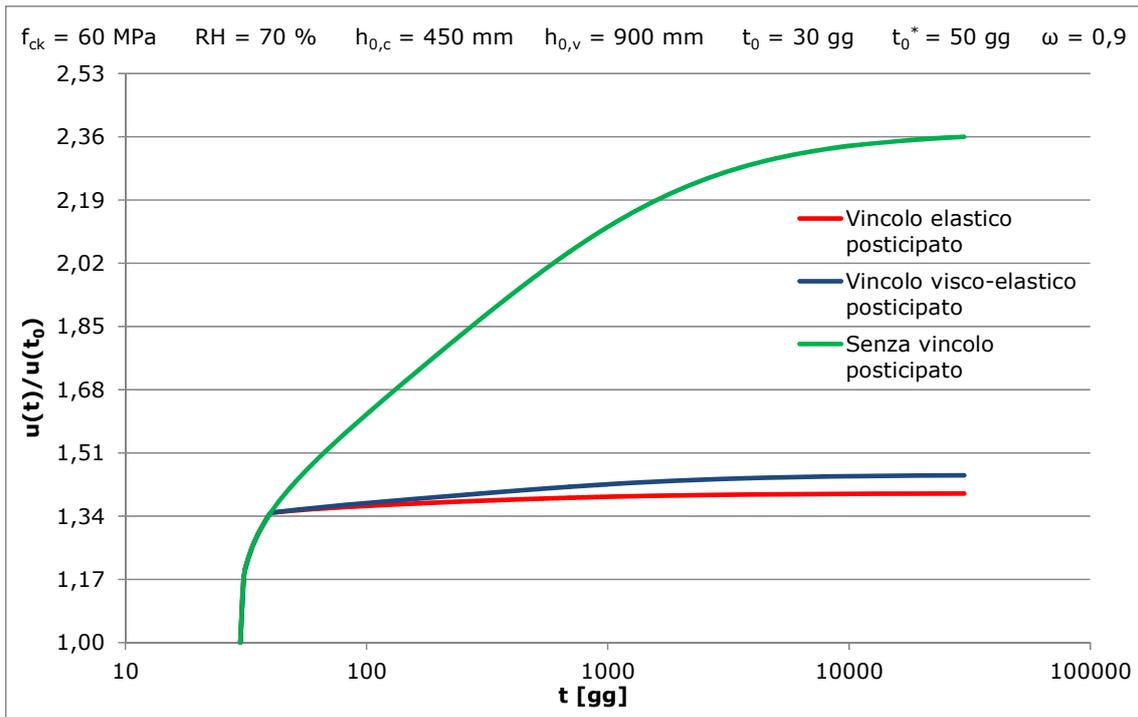


Figura 7.198 - Abbassamento della sommità della colonna per  $\omega = 0,9$

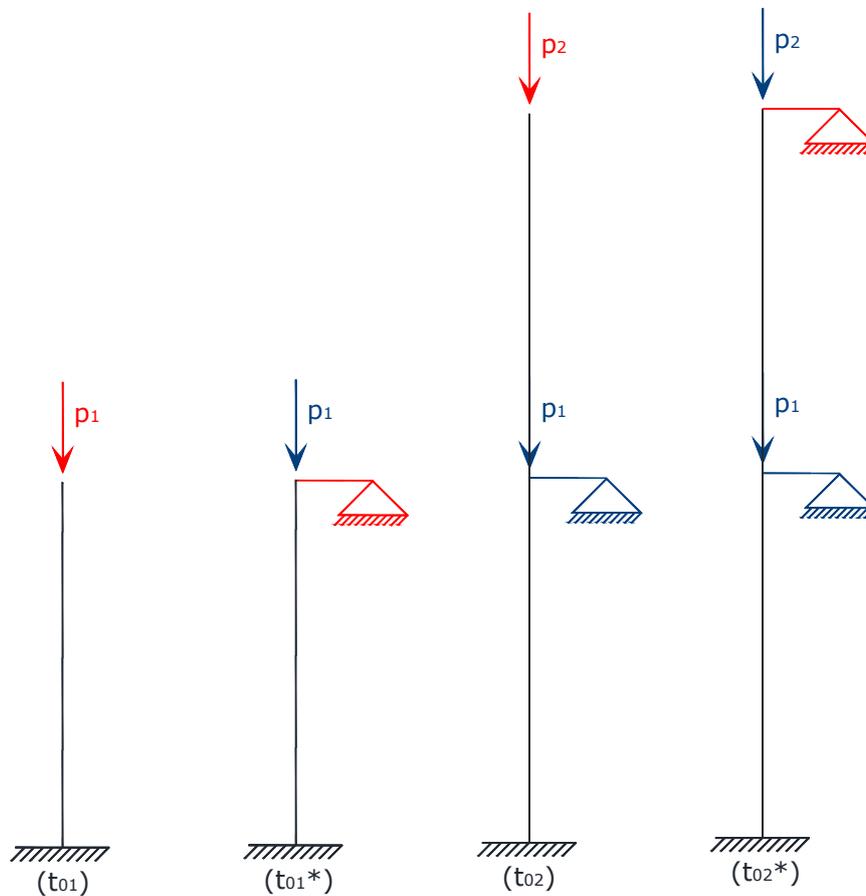


Figura 7.199 - Struttura con vincoli rigidi posticipati ad istanti diversi

Si nota che per valori elevati di  $\omega$  le due soluzioni hanno un andamento molto simile (Figura 7.197, Figura 7.198). Questo accade poiché tendendo alla condizione di vincolo rigido, la reologia del materiale del vincolo diventa ininfluente. La quinta della Torre Isozaki è assimilabile a questo caso poiché i Belt Trusses rappresentano dei vincoli con una rigidità tale da portare il fattore di accoppiamento a valori superiori a 0,9. E' dunque possibile in via preliminare effettuare delle analisi con il metodo di Trost ipotizzando i vincoli, posticipati ad istanti diversi, come rigidi (par. 3.2.4).

## **7.4 CALCOLO DELLE TENSIONI**

Le sezioni oggetto di verifica sono quelle di base e quelle in corrispondenza di una variazione di sezione nella zona in cui gli elementi sono misti. Sono state considerate una colonna interna e una di facciata.

Per esse le analisi strutturali sono state maggiormente approfondite allo scopo di perseguire una determinazione più precisa dello stato tensionale di esercizio. Allo scopo, sono state condotte analisi in campo elastico lineare e analisi in regime visco-elastico-lineare. La prima di esse si riferisce alle sollecitazioni applicate al tempo iniziale, mentre la seconda contempla la redistribuzione dello stato tensionale tra calcestruzzo e acciaio causata dal comportamento viscoelastico del calcestruzzo. Entrambe le trattazioni sono condotte per fasi di carico e considerano la variazione nel tempo del modulo elastico del calcestruzzo. Le analisi per fasi sono svolte con riferimento alle azioni determinate in combinazione di carico quasi-permanente. Gli effetti della quota parte di azioni variabili non inclusa nella combinazione vengono calcolati e sovrapposti nell'ultima fase di calcolo.

### **7.4.1 RISULTATI OTTENUTI**

Nei grafici di seguito riportati si presentano le soluzioni ottenute all'ultimazione della costruzione (720 giorni) e a lungo termine ( $t=\infty$ ), operate con il metodo RRFM.

7.4.1.1 Colonna interna

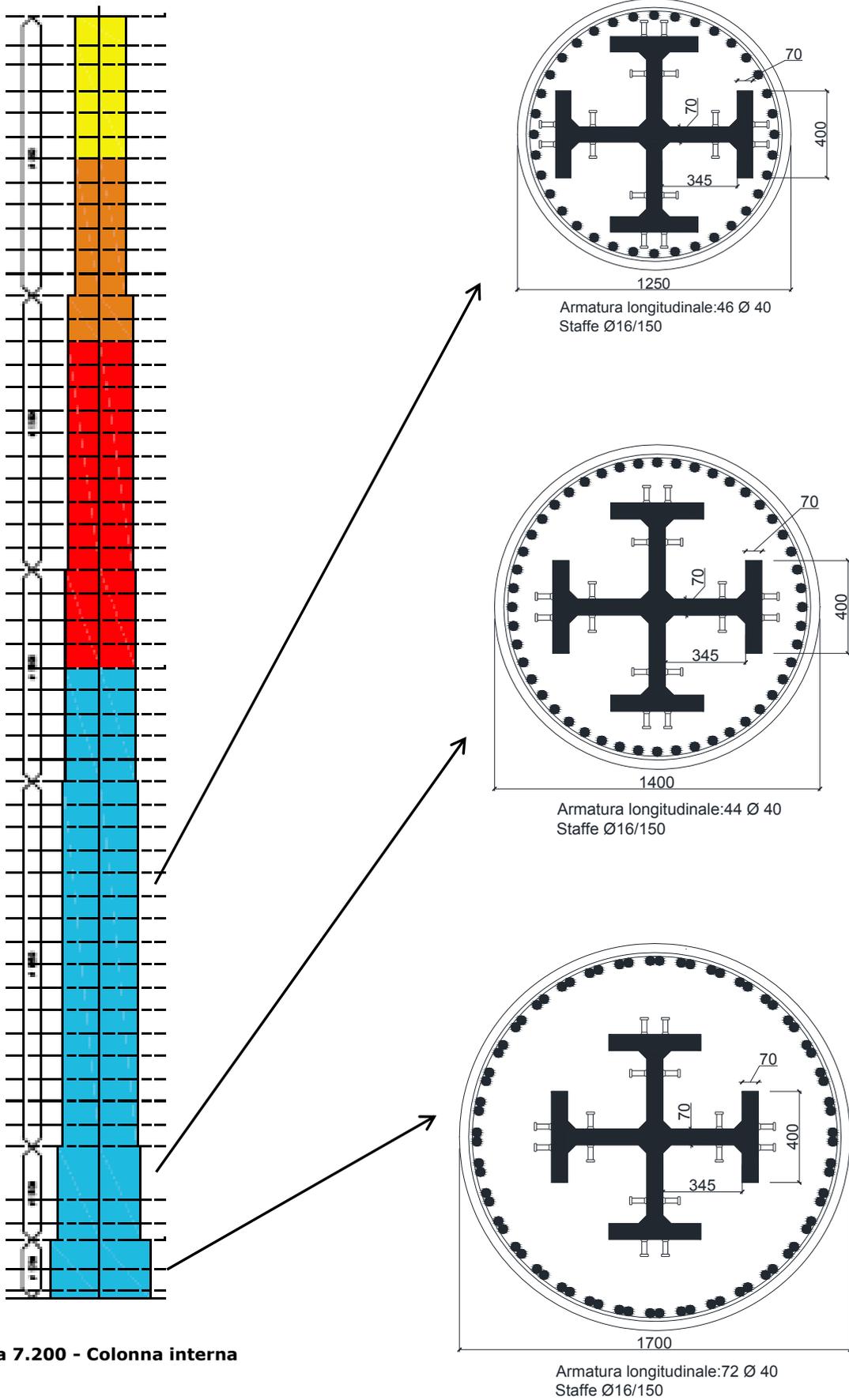


Figura 7.200 - Colonna interna

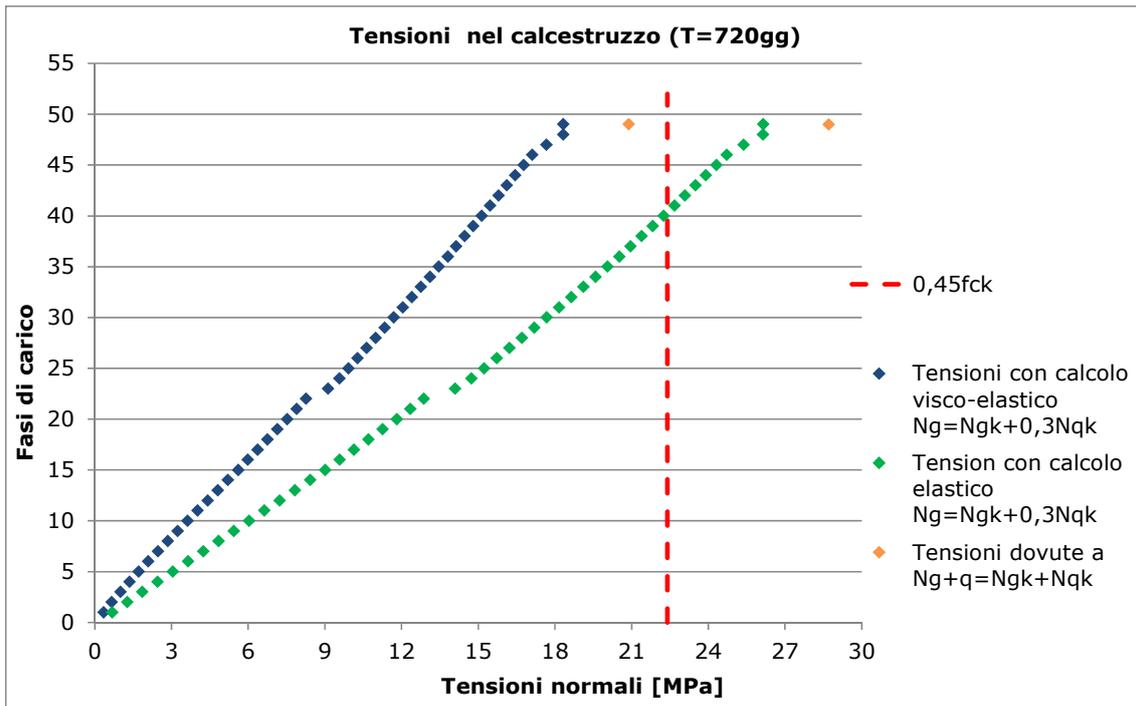


Figura 7.201 - Tensioni nel calcestruzzo per t = 720 gg (d = 125 cm)

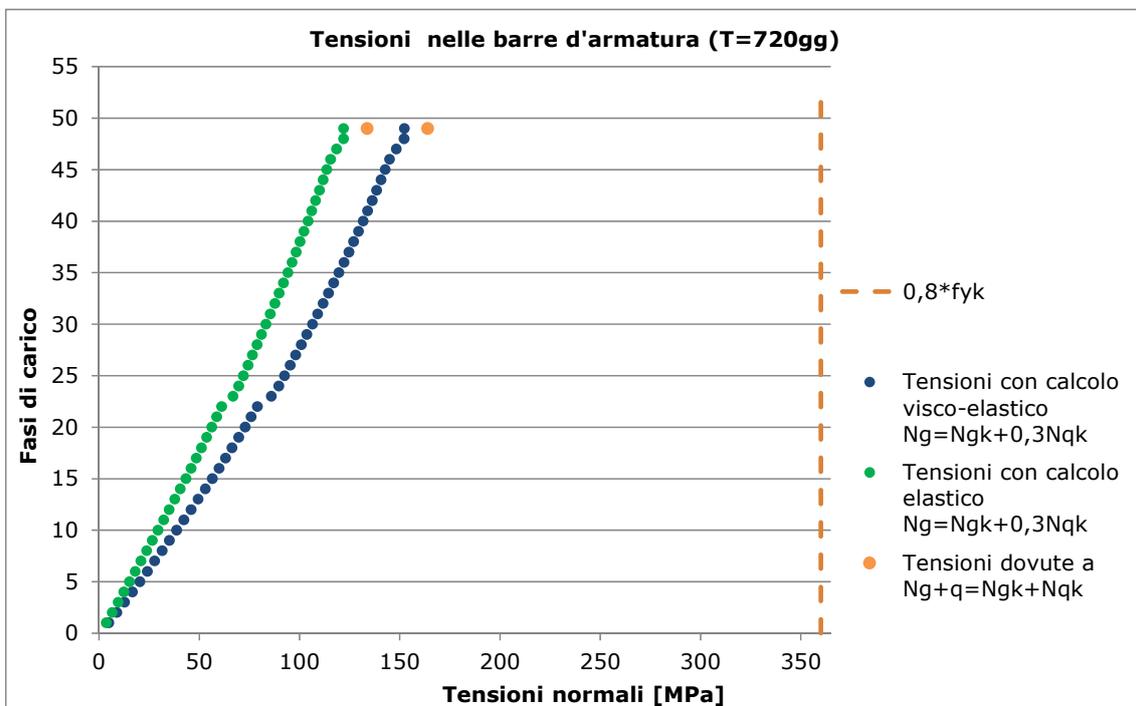


Figura 7.202 - Tensioni nelle barre d'armatura per t = 720 gg (d = 125 cm)

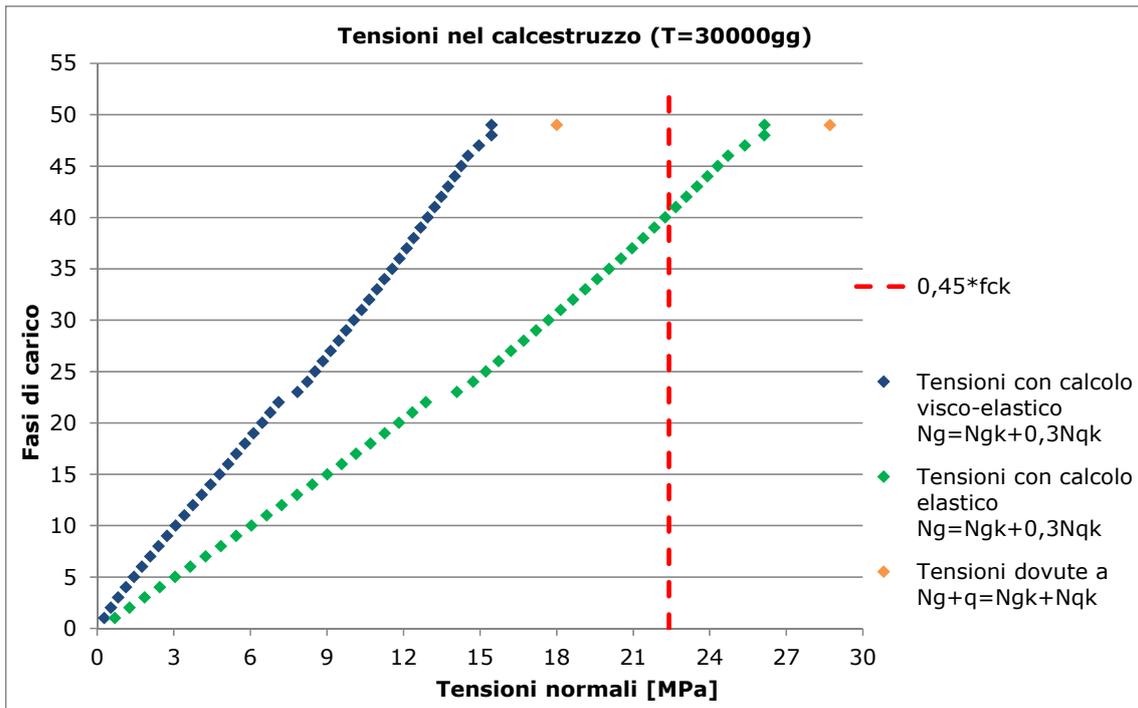


Figura 7.203 - Tensioni nel calcestruzzo per  $t = 30000$  gg ( $d = 125$  cm)

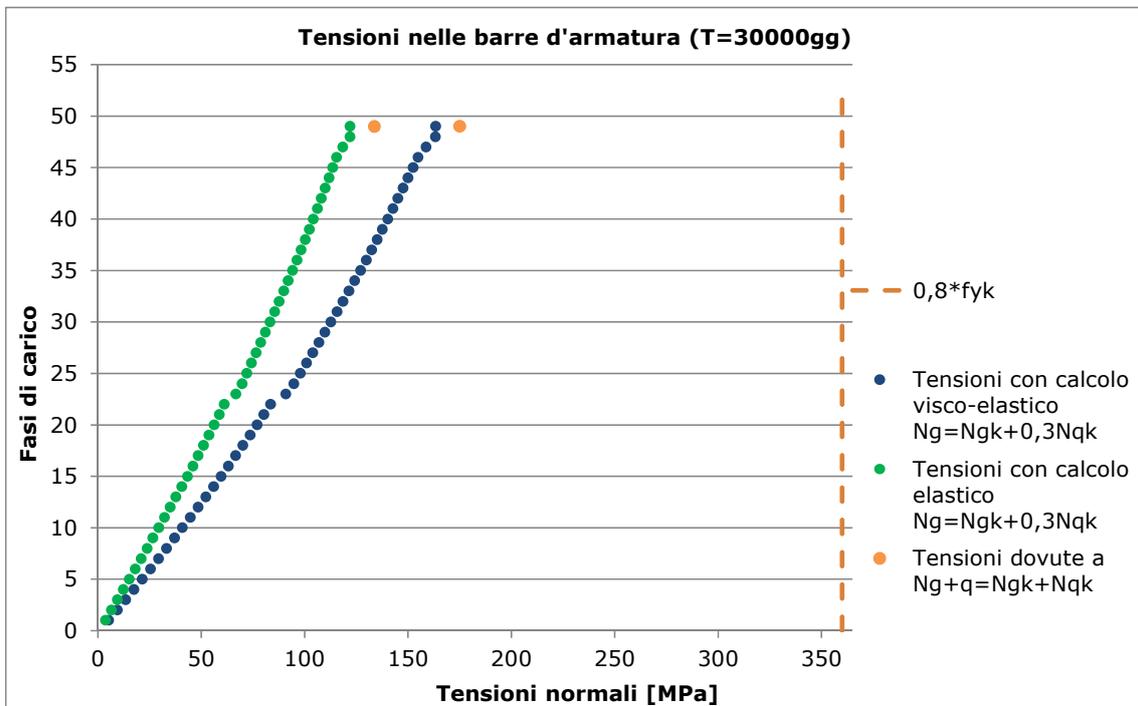


Figura 7.204 - Tensioni nelle barre d'armatura per  $t = 30000$  gg ( $d = 125$  cm)

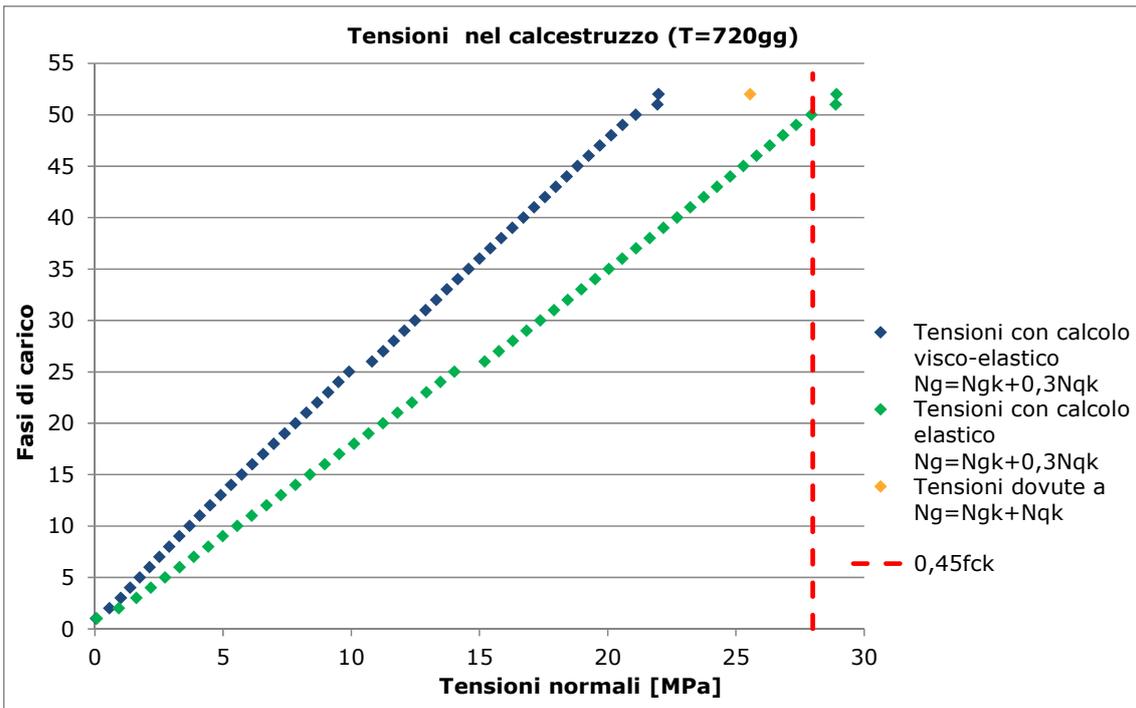


Figura 7.205 - Tensioni nel calcestruzzo per t = 720 gg (d = 140 cm)

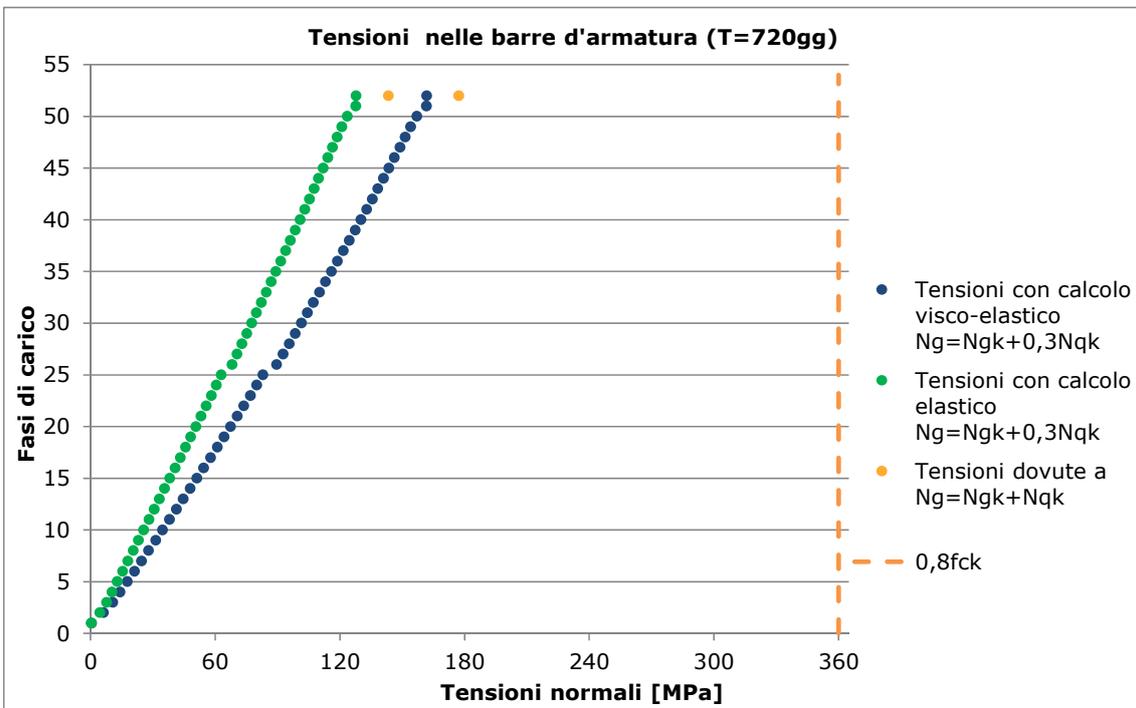


Figura 7.206 - Tensioni nelle barre d'armatura per t = 720 gg (d = 140 cm)

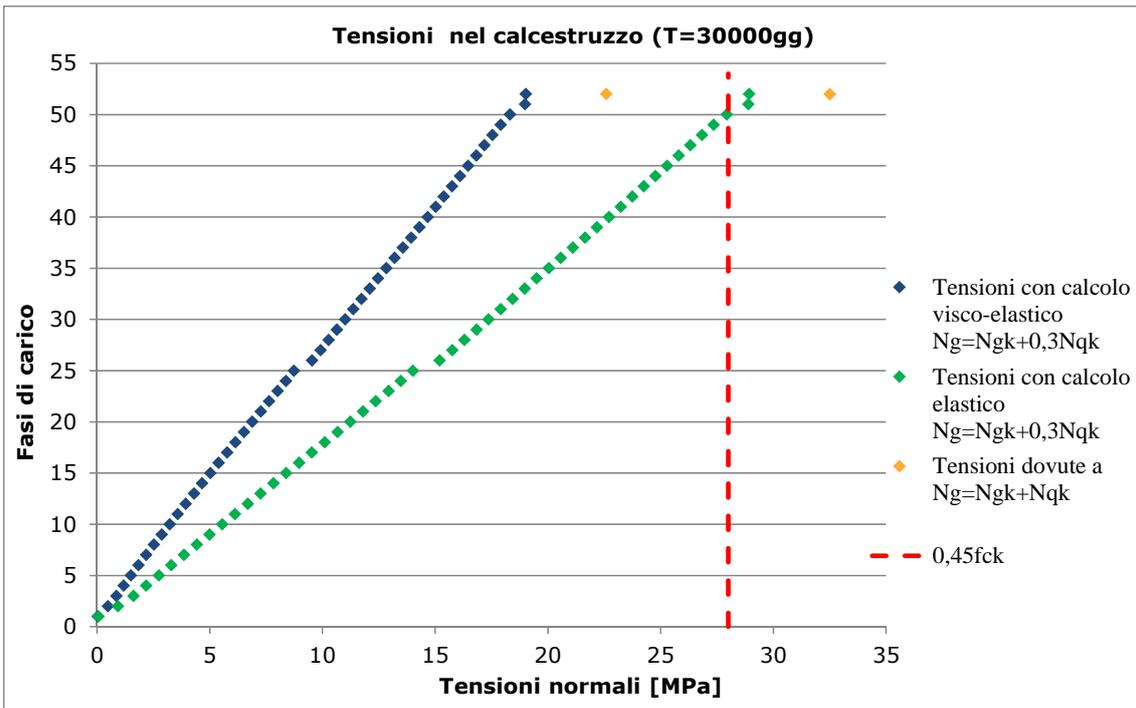


Figura 7.207 - Tensioni nel calcestruzzo per t = 30000 gg (d = 140 cm)

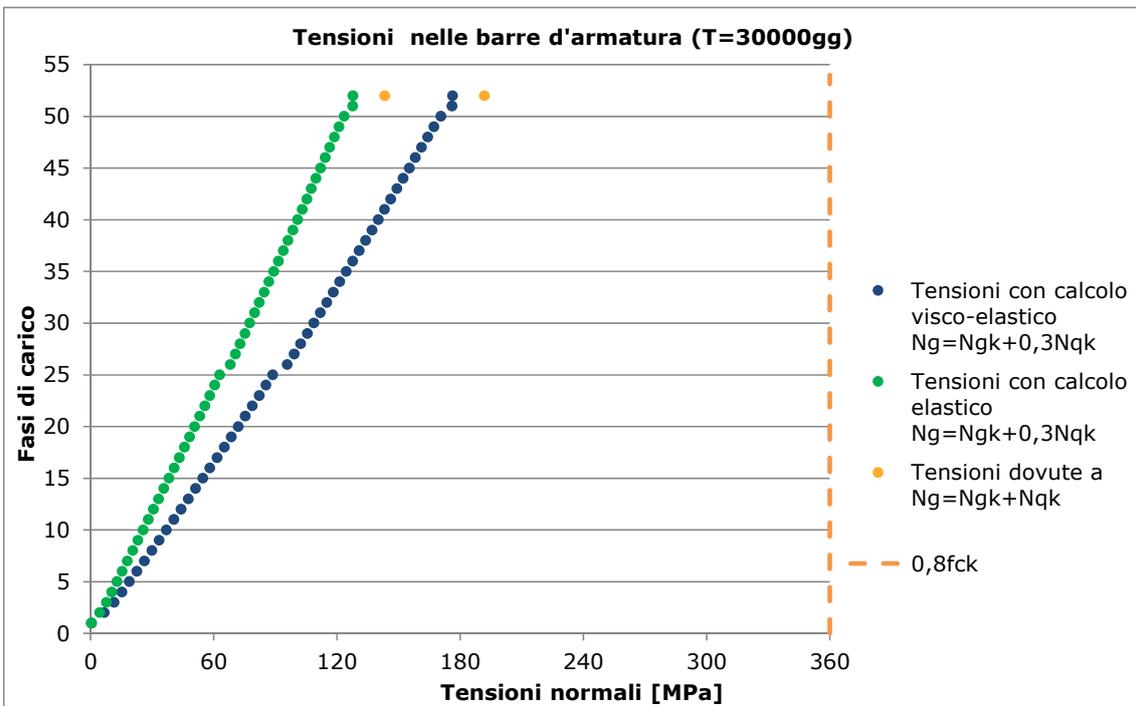


Figura 7.208 - Tensioni nelle barre d'armatura per t = 30000 gg (d = 140 cm)

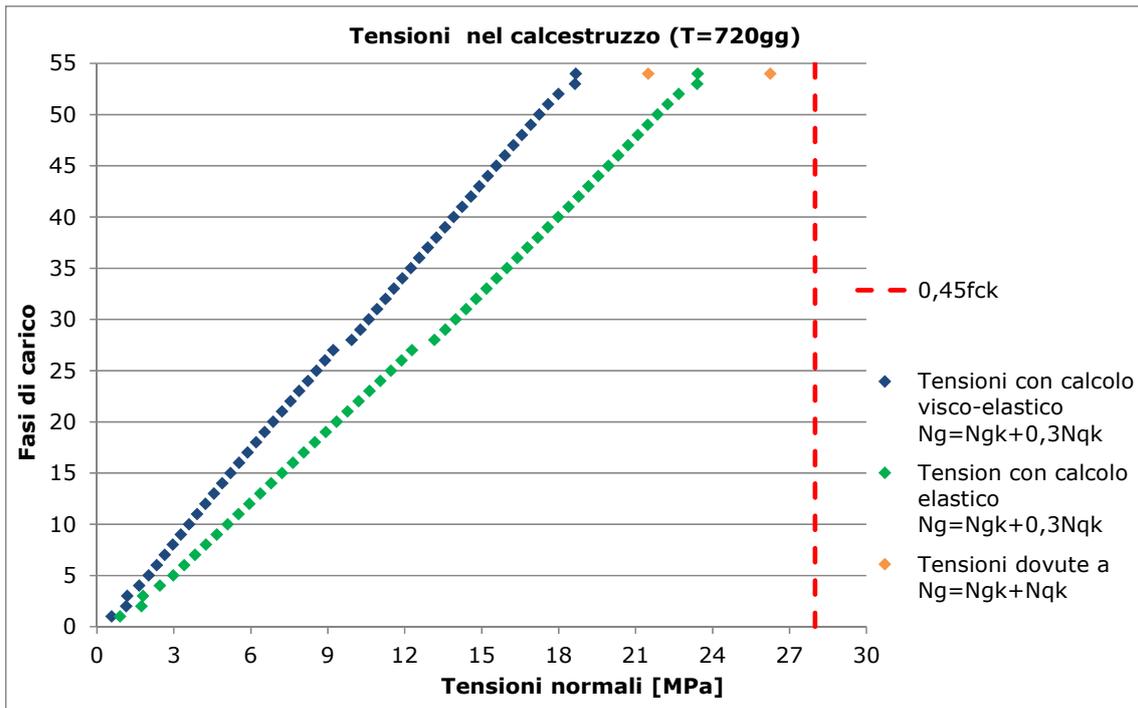


Figura 7.209 - Tensioni nel calcestruzzo per t = 720 gg (d = 170 cm)

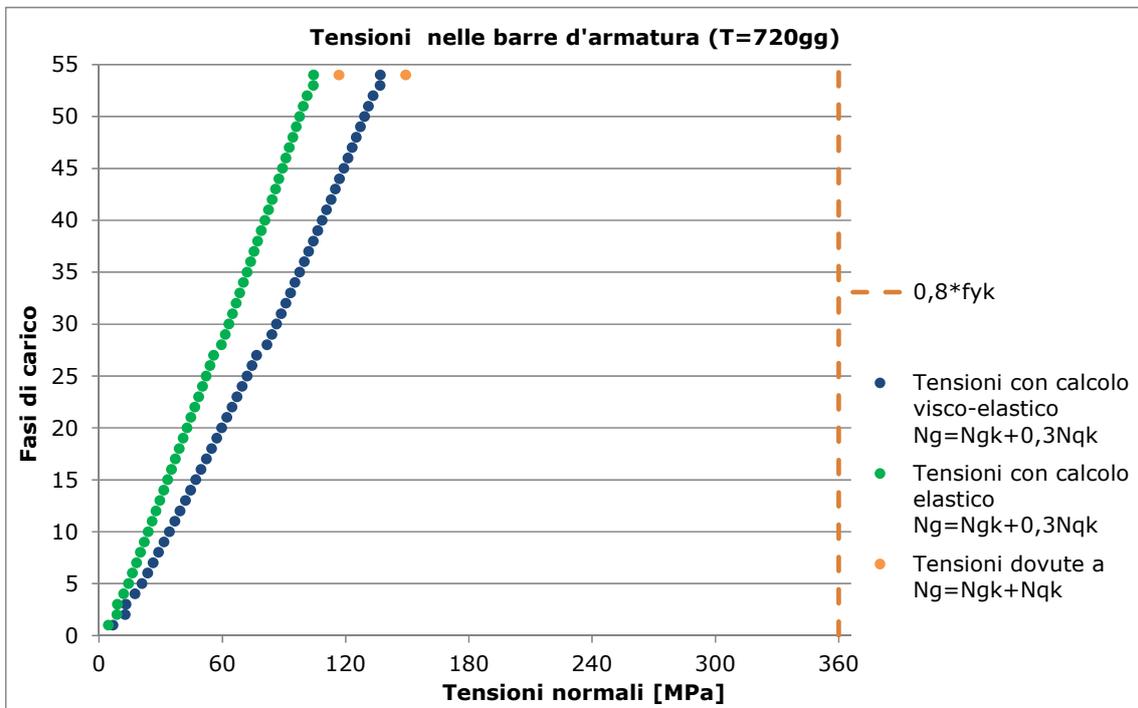


Figura 7.210 - Tensioni nelle barre d'armatura per t = 720 gg (d = 170 cm)

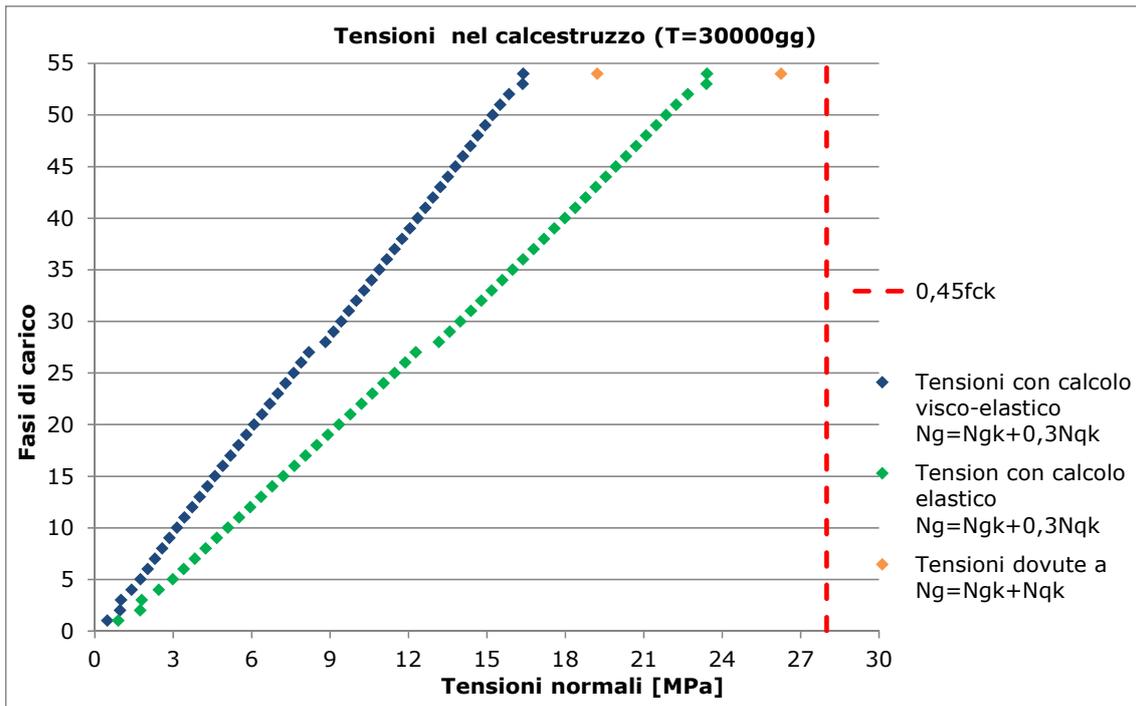


Figura 7.211 - Tensioni nel calcestruzzo per t = 30000 gg (d = 170 cm)

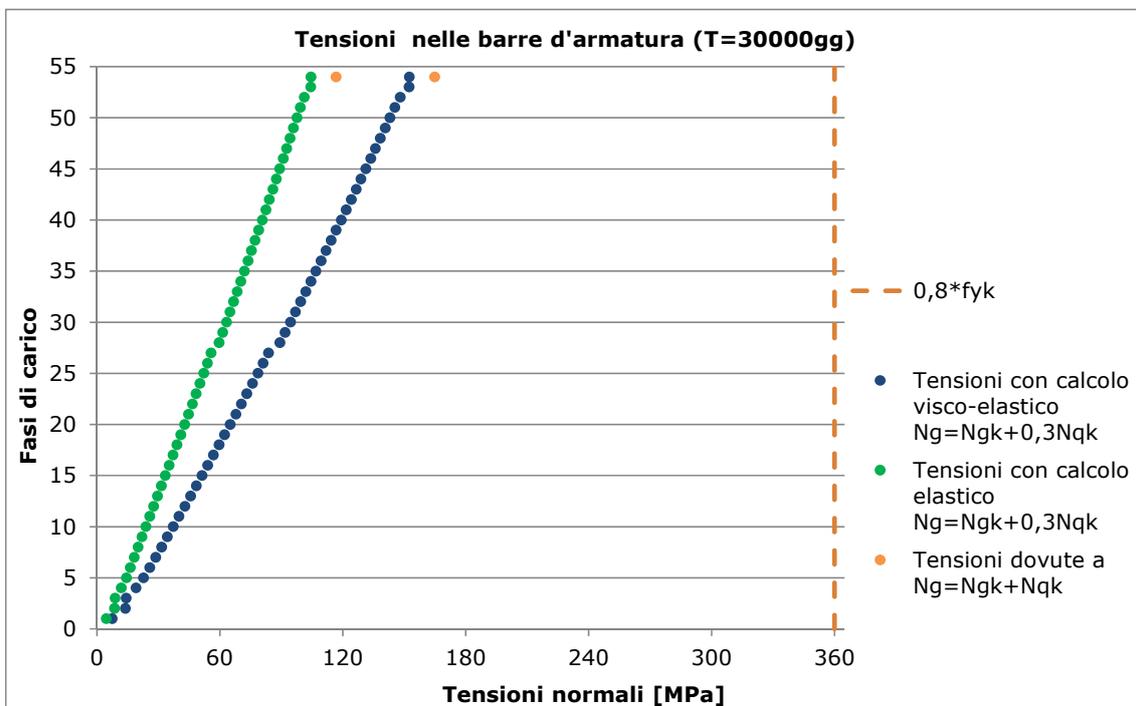


Figura 7.212 - Tensioni nelle barre d'armatura per t = 30000 gg (d = 170 cm)

7.4.1.2 Colonna laterale

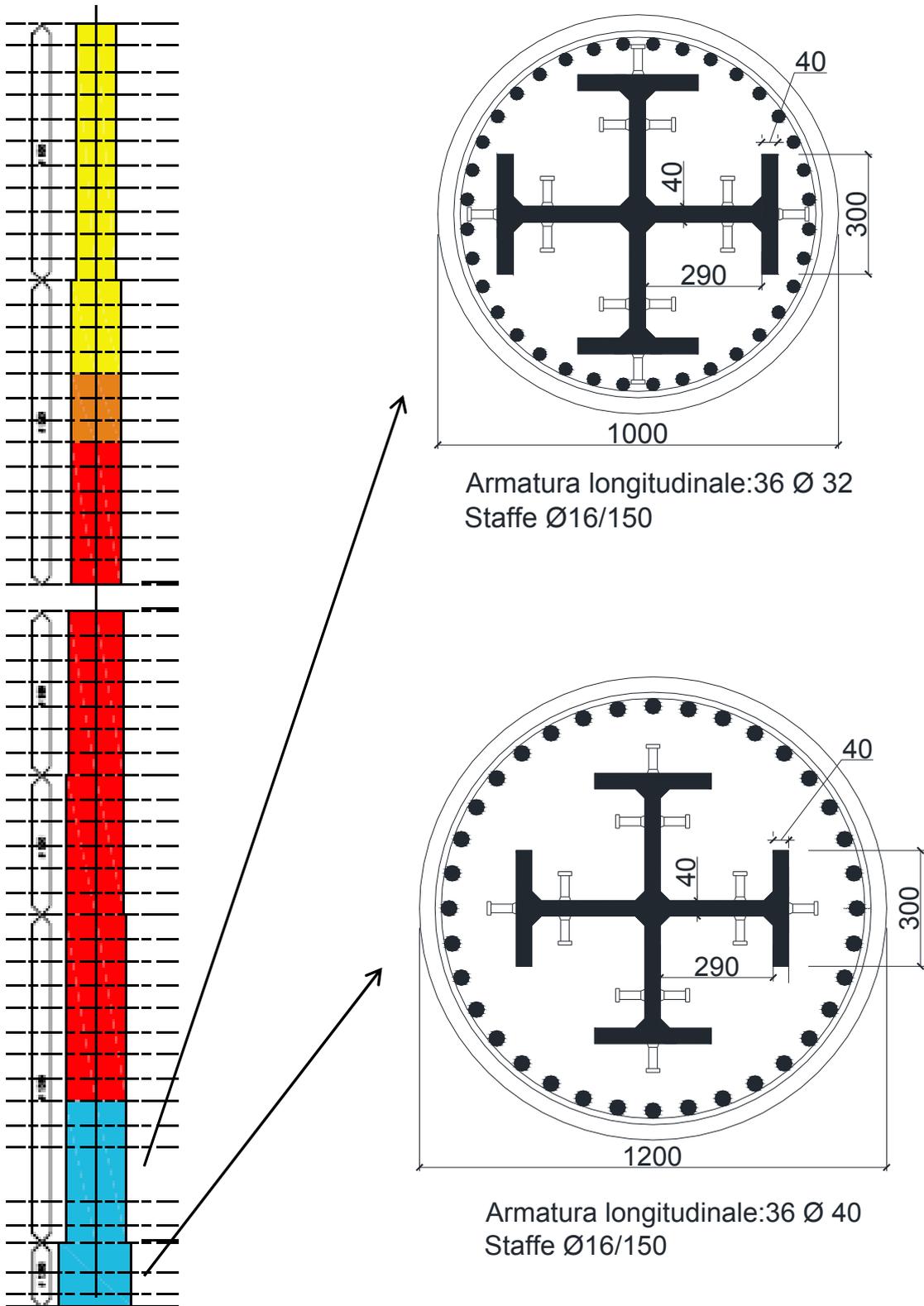


Figura 7.213 - Colonna laterale

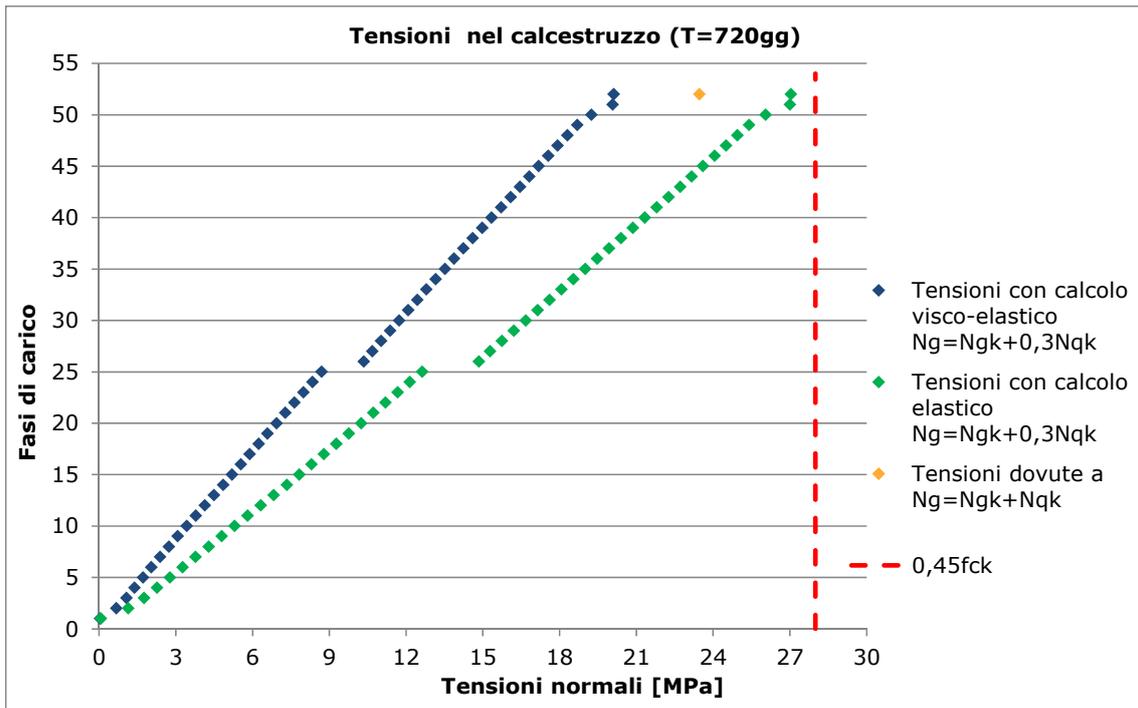


Figura 7.214 - Tensioni nel calcestruzzo per  $t = 720$  gg ( $d = 100$  cm)

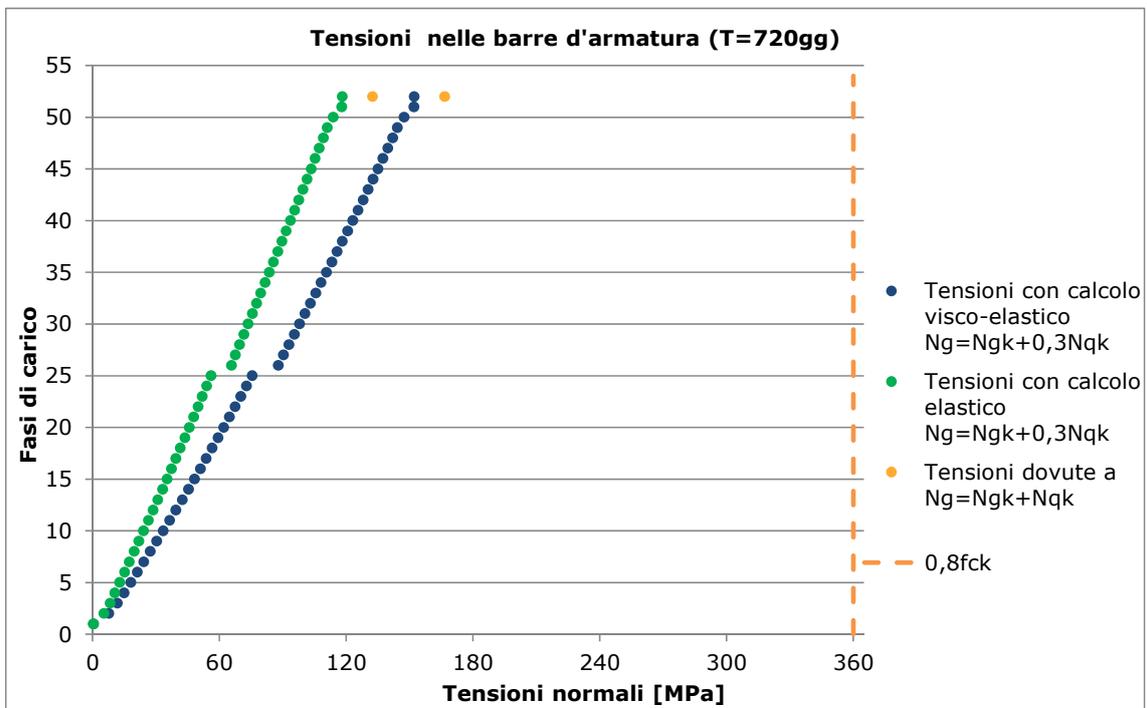


Figura 7.215 - Tensioni nelle barre d'armatura per  $t = 720$  gg ( $d = 100$  cm)

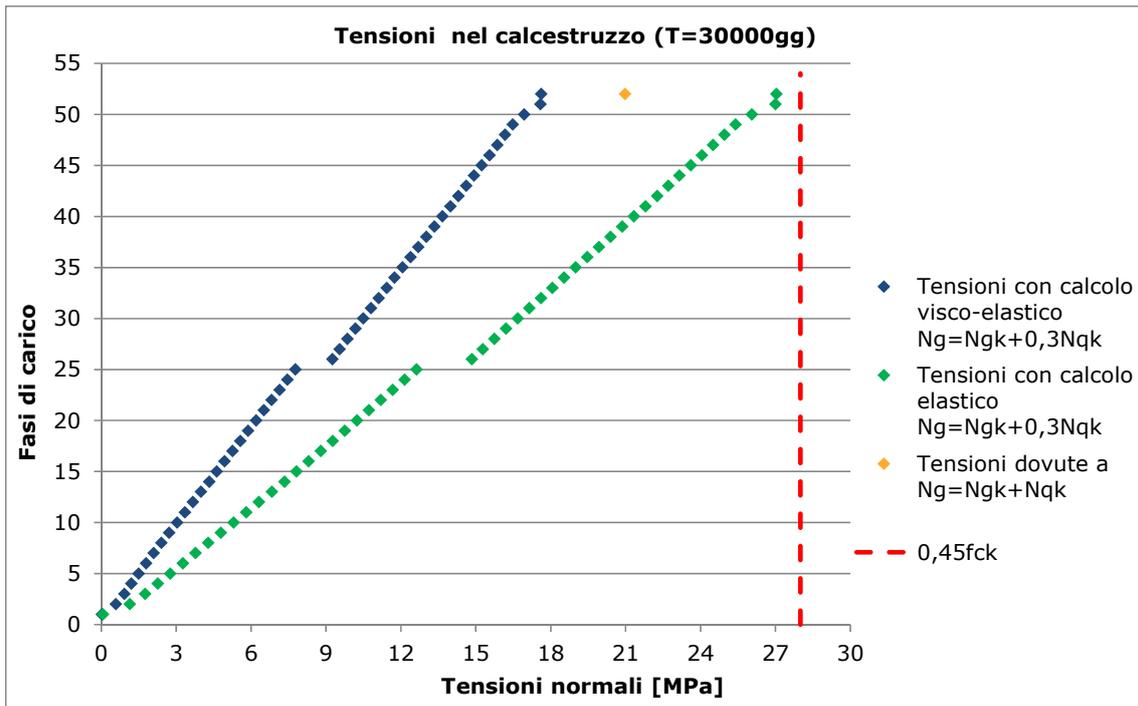


Figura 7.216 - Tensioni nel calcestruzzo per t = 30000 gg (d = 100 cm)

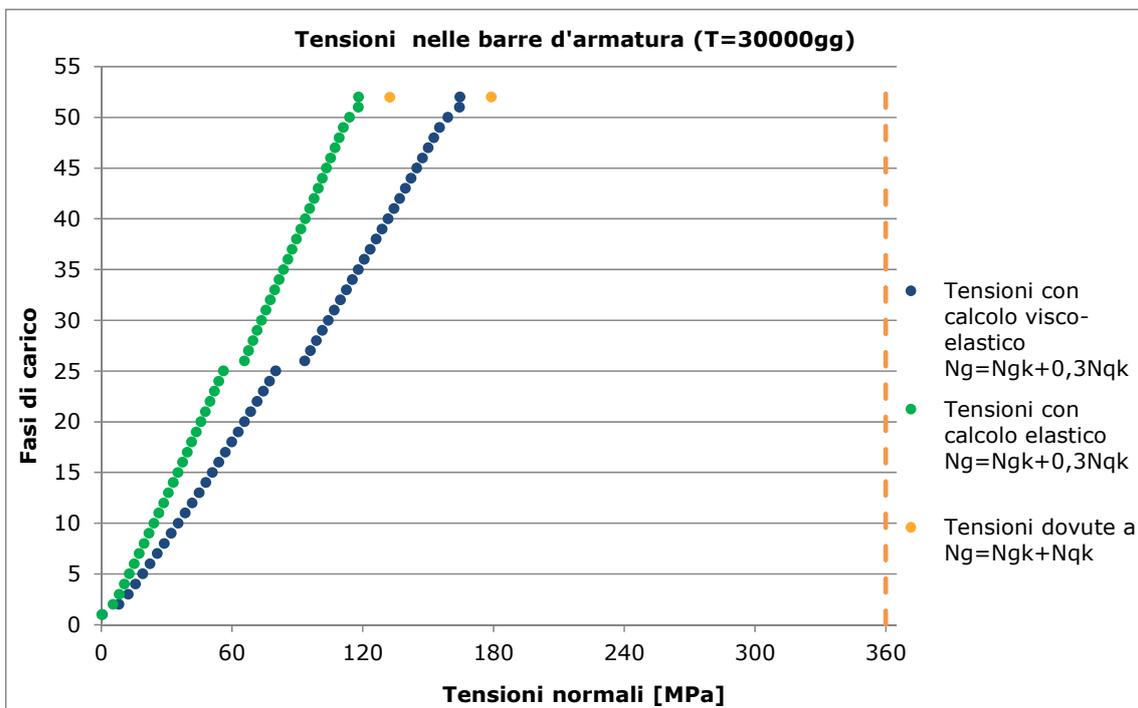


Figura 7.217 - Tensioni nelle barre d'armatura per t = 30000 gg (d = 100 cm)

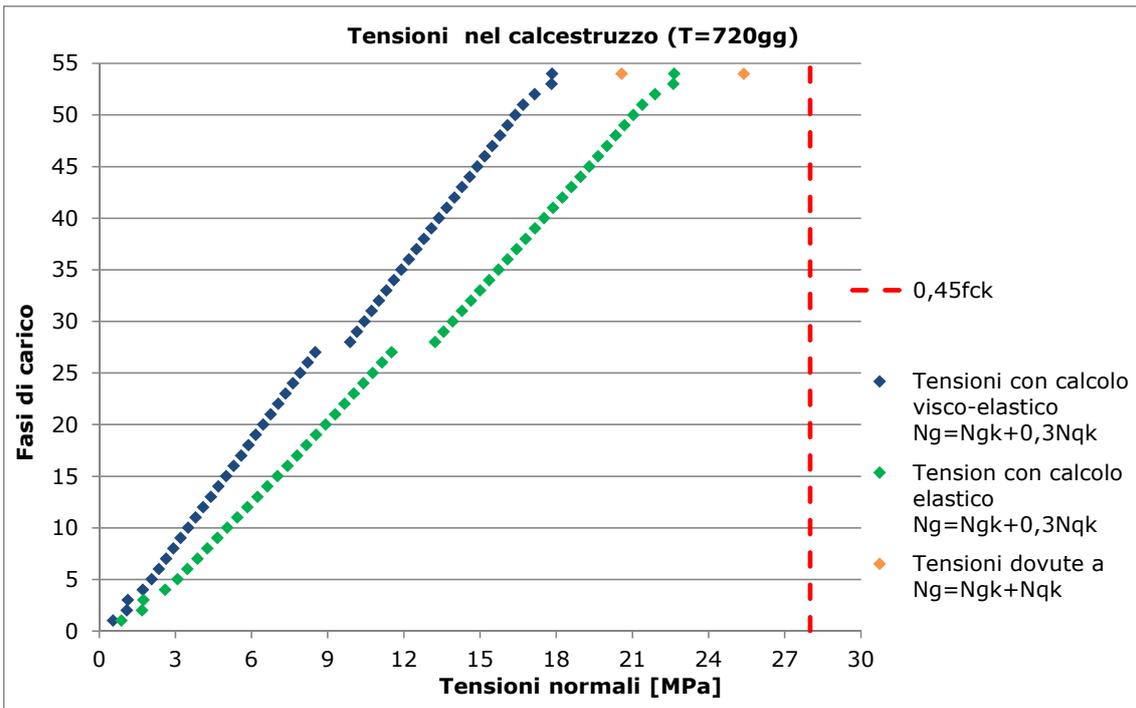


Figura 7.218 - Tensioni nel calcestruzzo per  $t = 720$  gg ( $d = 120$  cm)

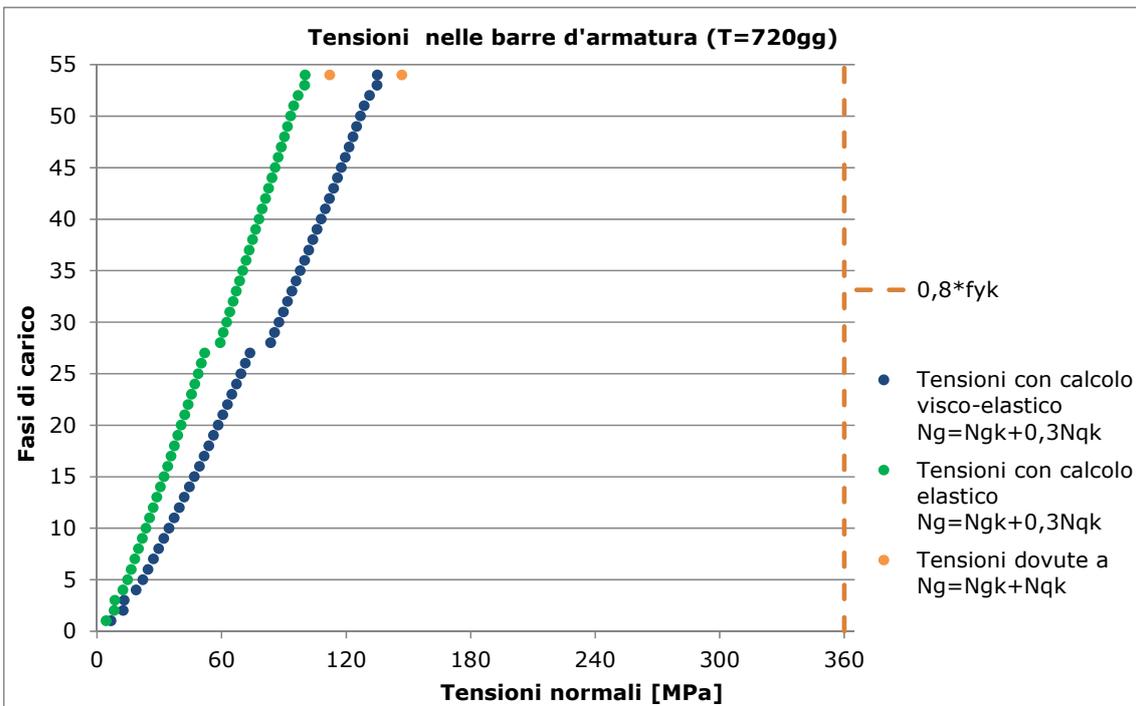


Figura 7.219 - Tensioni nelle barre d'armatura per  $t = 720$  gg ( $d = 120$  cm)

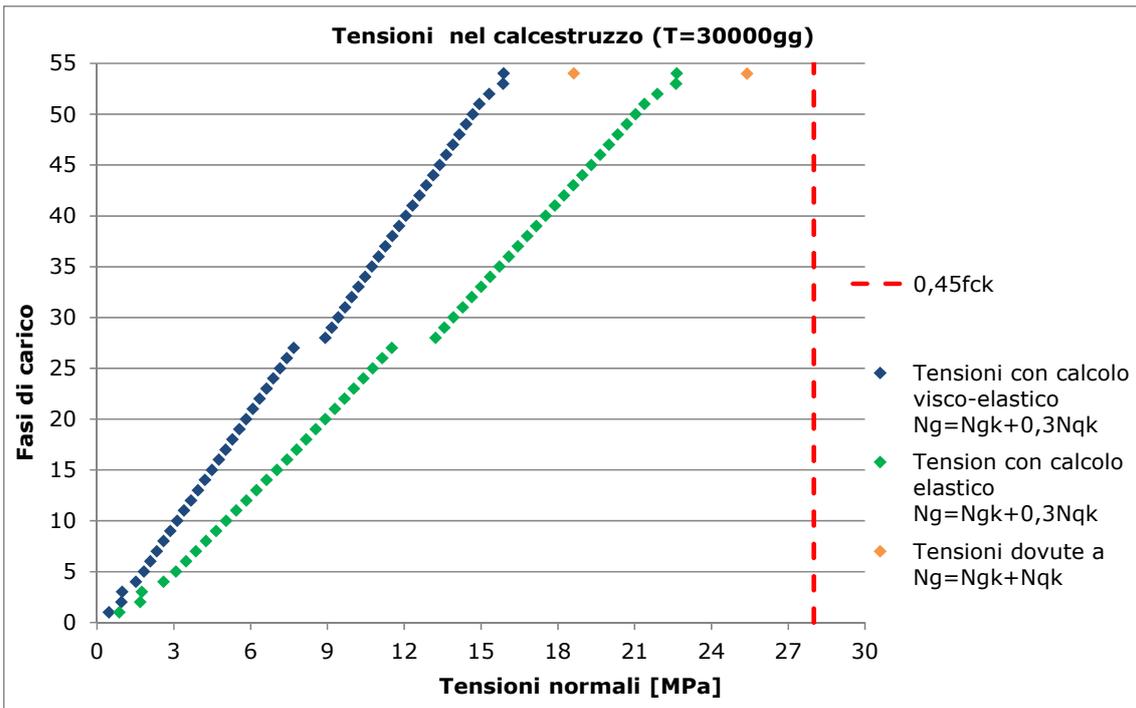


Figura 7.220 - Tensioni nel calcestruzzo per t = 30000 gg (d = 120 cm)

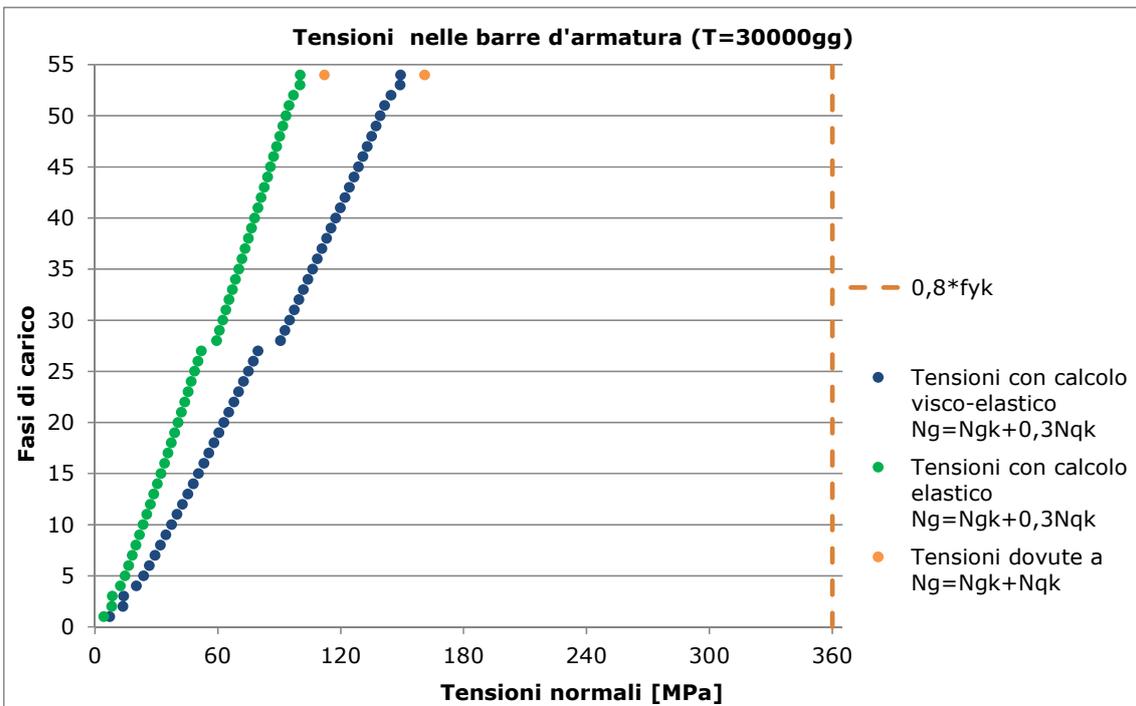


Figura 7.221 - Tensioni nelle barre d'armatura per t = 30000 gg (d = 120 cm)

Le verifiche di misura della sicurezza di tensione in esercizio risultano sempre soddisfatte con riferimento alle analisi svolte in regime visco-elastico-lineare, le quali interpretano correttamente l'effettivo comportamento degli elementi strutturali in esame.

## 7.4.2 TEORIA ALLA BASE DEI METODI DI ANALISI

Si riportano i passaggi significativi delle trattazioni teoriche che sono alla base delle calcolazioni svolte.

### 7.4.2.1 Analisi in campo elastico

Il modulo elastico è stato calcolato tramite le relazioni (2.1-57), (2.1-58) e (2.1-54) riportate nel CEB FIP MODEL CODE 1990.

$$E_{ci}(t) = \beta_E(t) \cdot E_{ci} \quad (\text{MC90 - 2.1-57})$$

$$\beta_E(t) = [\beta_{cc}(t)]^{0,5} \quad (\text{MC90 - 2.1-58})$$

$$E_{ci} = E_{c0} \left( \frac{f_{ck+\Delta f}}{f_{cm0}} \right)^{1/3} \quad (\text{MC90 - 2.2-16})$$

$$\beta_{cc}(t) = e^{\left\{ s \left[ 1 - \sqrt{\frac{28}{t/t_1}} \right] \right\}} \quad (\text{MC90 - 2.1-54})$$

dove:

$E_{ci}(t)$  è il modulo elastico ad un tempo di  $t$  giorni;

$E_{ci}$  è il modulo elastico a un'età di 28 giorni, eq. (2.1-16);

$\beta_E(t)$  è un coefficiente che dipende dall'età del calcestruzzo,  $t$  [giorni];

$\beta_{cc}(t)$  è un coefficiente in accordo alla (2.1-54);

$$t_1 = 1 \text{ gg};$$

$s$  è un coefficiente che dipende dal tipo di cemento, nel caso in esame  $s=0,25$ ;

$$\Delta f = 8 \text{ MPa};$$

$$f_{cm0} = 10 \text{ MPa};$$

$$E_{c0} = 2,15 \cdot 10^4 \text{ MPa}.$$

#### 7.4.2.2 Analisi in campo visco - elastico

Per il primo teorema della viscoelasticità lineare, l'equazione di congruenza al tempo  $t$  della struttura, avente una sola azione staticamente indeterminata, rappresentata dalla forza normale  $X(t)$  assunta dalla parte metallica della sezione corrispondente, si scrive:

$$\int_0^t \left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + \delta_{11}^{(s)} \right] \cdot dX(t') + \delta_0(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) = 0 \quad (7.11)$$

essendo:

$\delta_{11}^{(c)}(t_0)$  = coefficiente di flessibilità della parte in calcestruzzo, valutato al tempo  $t_0$  di applicazione delle azioni;

$\delta_{11}^{(s)}$  = coefficiente di flessibilità della parte metallica;

$\delta_0(t_0)$  = deformazione provocata dalle azioni esterne.

Definite le quantità:

$X_e(t_0)$  = reazione all'istante  $t_0$ ;

$X_{er}(t_0)$  = reazione all'istante  $t_0$  nell'ipotesi di assumere rigida la parte metallica;

sono valide le relazioni:

$$\left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) + \delta_{11}^{(s)} \right] \cdot X_e(t_0) = -\delta_0(t_0) \quad (7.12)$$

$$\left[ \delta_{11}^{(c)}(t_0) \right] \cdot X_{er}(t_0) = -\delta_0(t_0) \quad (7.13)$$

Introdotta il fattore di accoppiamento:

$$\omega(t_0) = \frac{\delta_{11}^{(c)}}{\delta_{11}^{(c)} + \delta_{11}^{(s)}} \quad (7.14)$$

risulta:

$$X(t_0) = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \quad (7.15)$$

e sostituendo le relazioni (7.12), (7.13), (7.14) e (7.15) nell'equazione (7.11) si ricava:

$$\int_0^t [\omega(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega(t_0)] \cdot dX(t') = \omega(t_0) \cdot X_{er}(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (7.16)$$

Indicate con  $J^*(t, t')$  le funzioni di viscosità variate definite dalla relazione:

$$E_c(t_0) \cdot J^*(t, t') = \omega(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t') + 1 - \omega(t_0) \quad (7.17)$$

la (7.11) assume la forma definitiva:

$$\int_0^t J^*(t, t') dX(t') = X_{er}(t_0) \cdot \left[ J^*(t, t_0) - \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (7.18)$$

Introdotte le funzioni di rilassamento ridotte  $R^*(t, t_0)$ , costituenti i nuclei risolvanti della (7.18), soluzioni della equazione integrale:

$$\int_0^t \frac{\partial R^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot J^*(t, t') \cdot dt' = 1 \quad (7.19)$$

Il Principio di Sovrapposizione di Mc Henry permette di scrivere la soluzione della (7.18) nella forma:

$$X(t) = X_{er}(t_0) \cdot \left[ 1 - R^*(t, t_0) \cdot \frac{1 - \omega(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (7.20)$$

Poiché nel caso di colonna soggetta a compressione semplice la reazione di vincolo rigido è pari al carico agente sulla colonna  $N$ , le tensioni si possono ricavare dalle seguenti relazioni:

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} \left[ 1 - (1 - \omega(t_0)) \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (7.21)$$

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c} \left[ (1 - \omega(t_0)) \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (7.22)$$

nelle quali il fattore di accoppiamento assume la forma:

$$\omega(t_0) = \frac{\frac{1}{E_c(t_0)A_c}}{\frac{1}{E_c(t_0)A_c} + \frac{1}{E_s A_s}} = 1 - \frac{A_c}{A^*(t_0)} = 1 - \frac{A_c}{A_c + \alpha_e(t_0)A_s} \quad (7.23)$$

Nello stesso modo allorché la colonna è soggetta ad un momento flettente dovuto ad una eccentricità  $e$  della forma iniziale, le relazioni (7.21), (7.22) divengono:

$$\sigma_s = \frac{N \cdot e}{W_s} \left[ 1 - (1 - \omega_M(t_0)) \frac{R^*_M(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (7.24)$$

$$\sigma_c = \frac{N \cdot e}{W_c} \left[ (1 - \omega_M(t_0)) \frac{R^*_M(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (7.25)$$

nelle quali il fattore di accoppiamento  $\omega_M$  vale:

$$\omega_M = 1 - \frac{I_c}{I^*} \quad (7.26)$$

Nella Figura 7.222 sono riportate, per tre differenti tempi di applicazione del carico, precisamente  $t_0 = 13\text{gg}$ ,  $t_0 = 312\text{gg}$ ,  $t_0 = 637\text{gg}$ , le funzioni  $R^*(t, t_0)$  adimensionalizzate rispetto al valore  $E_{28}$  del modulo elastico a 28 giorni. L'utilizzo dei grafici della Figura 7.222 e delle relazioni (7.21)÷(7.26) permette di ricavare i grafici delle Figure Figura 7.201 -Figura 7.221 e di formulare la misura della sicurezza nei riguardi dello stato limite di tensione in esercizio.

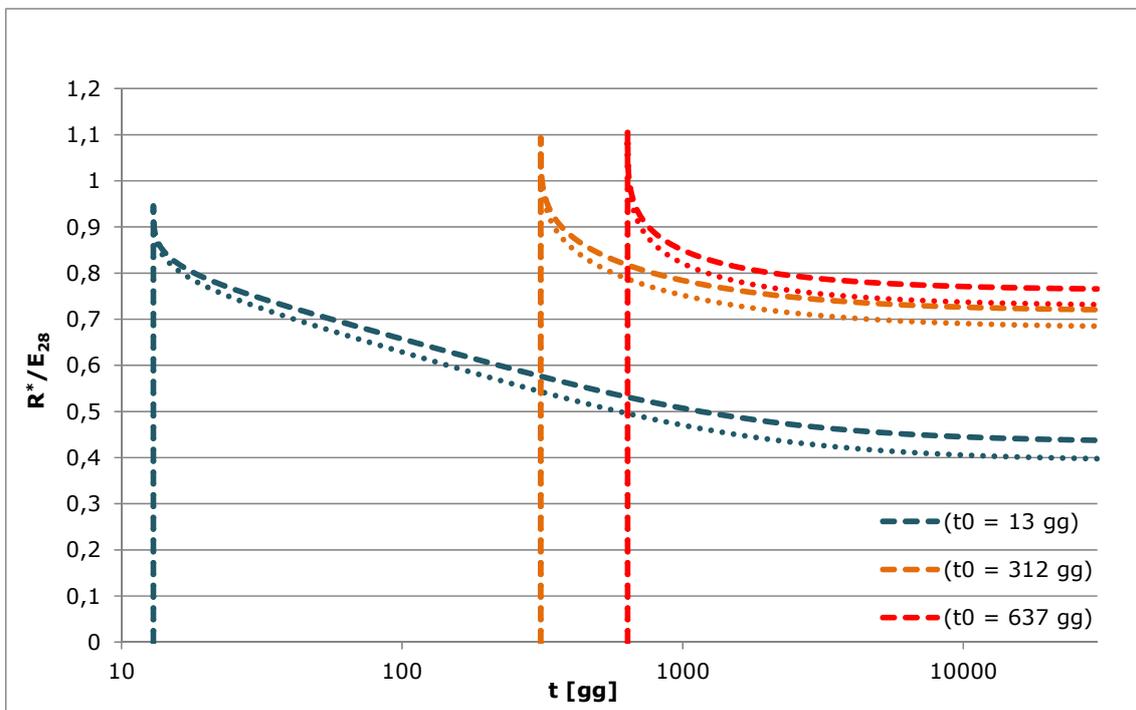


Figura 7.222 - Funzioni  $R^*(t, t_0)/E_{28}$  (linea tratteggiata  $R^*_M/E_{28}$ , linea puntinata  $R^*_N/E_{28}$ )

## APPENDICE A

### 1. CALCOLO DELLE FUNZIONI DI RIALSSAMENTO E RILASSAMENTO RIDOTTA SECONDO IL MC 1990

Si riporta di seguito il codice del sottoprogramma che consente di effettuare l'integrazione per il calcolo della funzione di rilassamento secondo il Model Code 90 ([4], 1993), in accordo alle relazioni (2.16) e (2.17) dimostrate nel paragrafo (2.4)

```
function [R] = Integrazione(J)

% Questo programma prende in ingresso la matrice J che ha sulla riga
% j-esima la funzione J(t,t(j,1)), e restituisce un vettore colonna con R
%Vettore colonna con numero di righe pari al numero di righe di J

R = zeros(size(J,1),1);

dR = [1/J(1,1);
zeros(size(J,1),1)];

for k=1:size(J,1)

if k==1

R(k,1) = 1/J(1,1);

else

for i=1:k-1

if i==1

g = 1;

else

g = i-1;
end

dR(k,1) = dR(k,1) - ((J(i,k)+J(g,k)-J(i,k-1)-J(g,k-1))
*dR(i,1))/(J(k,k)+J(k-1,k));

end

R(k,1) = R(k-1,1)+dR(k,1);
end

end

end
```

Il sottoprogramma appena riportato richiede che sia definita la scala dei tempi che, in accordo alle relazioni (2.18) e (2.19), viene calcolata dalla seguente funzione (denominata "Def\_tempi"):

```
function[t]=Def_tempi(t0)

dt2=0.01; %[gg]

q=1.3335;

N=54;

t(1,1) = t0;

t(2,1) = t0 + dt2;

for k=3:N

t(k,1)=q*(t(k-1,1)-t(1,1))+t(1,1);

end

t(N,1) = 30000;

end
```

Questa funzione restituisce un vettore colonna (54 x 1) t con elementi pari agli istanti di tempo.

$$t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{54} \end{bmatrix}$$

La matrice J che costituisce un input della funzione di integrazione ("Integrazione") è fatta come segue:

$$J = \begin{bmatrix} J(t_1, t_1) & J(t_2, t_1) & J(t_3, t_1) & \cdots & \cdots & J(t_{54}, t_1) \\ 0 & J(t_2, t_2) & J(t_3, t_2) & \cdots & \cdots & J(t_{54}, t_2) \\ 0 & 0 & J(t_3, t_3) & \cdots & \cdots & J(t_{54}, t_3) \\ \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & J(t_{54}, t_{54}) \end{bmatrix}$$

Questa matrice viene costruita nel seguente sottoprogramma, denominato ("SUB\_MAIN"); questa funzione opera tutti i calcoli necessari alla restituzione delle seguenti variabili:

- $\varphi(t, t_0)$  ;
- $E_{28}$  ;
- $J(t, t_0)$  ;
- $J^*(t, t_0)$  ;
- $R(t, t_0)$  ;
- $R^*(t, t_0)$  ;
- $\chi(t, t_0)$  ;
- $\omega(t_0)$  ;

```
function [ t, fi_t0, E28, J, J_RID, R, R_RID, CHI, OMEGA_t0 ] = SUB_MAIN( t0 )
```

```
%%%%%%%%%%%%% DATI %%%%%%%%%%%%%%
```

```
fck = 40;    %[MPa]
```

```
s = 0.25;
```

```
h0 = 200;   %[mm]
```

```
RH = 70;    %[%]
```

```
OMEGA28 = 0.11499243;
```

```
%%%%%%%%%%%%% PARAMETRI DEL CEB/FIP 1990 %%%%%%%%%%%%%%
```

```
fiRH = 1+(1-RH/100)/(0.46*(h0/100)^(1/3));
```

```
E28 = 2.15*10^4*((fck+8)/10)^(1/3); %[MPa]
```

```
BETAfcm = 5.3/(sqrt((fck+8)/10));
```

```
BETA_H = 150*(1+(1.2*RH/100)^18)*h0/100+250;
```

```
if BETA_H >1500;
```

```
BETA_H = 1500;
```

```
end
```

```
%%%%%%%%%%%%% CALCOLO DELLA SCALA DEI TEMPI %%%%%%%%%%%%%%
```

```
t = Def_tempi(t0);           %Vettore colonna
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% beta_t0 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j=1:size(t,1)
beta_t0(j,1) = 1/(0.1+t(j,1)^(0.2)); %Vettore colonna
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% fi0 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fi0 = beta_t0 .* fiRH * BETAfcm; %Vettore colonna

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% BETA_c %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Inizializzazione della matrice
BETA_c = zeros(size(t,1),size(t,1));
for j=1:size(t,1)
for k=j:size(t,1)
%Matrice BETA_c: sulla riga j-sima ha la funzione
%BETA_c(t-t(j,1))
BETA_c(j,k) = ((t(k,1)-t(j,1))/(BETA_H+t(k,1)-t(j,1)))^0.3;
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% fi %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:size(BETA_c,1)
%Matrice fi: sulla riga j-esima ha la funzione
%fi(t,t(j,1))
fi(i,:) = BETA_c(i,:).*fi0(i,1);
end

fi_t0(:,1) = fi(1,:); %Vettore Colonna con i valori del coefficienti di
viscosità nel tempo

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% E(t_0) %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j=1:size(t,1)
%Vettore colonna con i moduli elastici ai diversi istanti

```

```

%iniziali
E_t0(j,1)=E28*(exp(s*(1-sqrt(28/t(j,1))))^(0.5);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% J %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Inizializzazione della matrice
J=zeros(size(fi,1),size(fi,2));
for i=1:size(fi,1)
for j=i:size(fi,2)
%Matrice J: sulla riga j-esima ha la funzione
%J(t,t(j,1))
J(i,j) = fi(i,j)/E28+1/E_t0(i,1);
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% R %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
R = Integrazione(J);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CHI %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fi_per_CHI = E_t0(1,1)*J(1,:)-1;
for i=1:size(fi,2)
CHI(i,1) = 1/(1-R(i,1)/E_t0(1,1))-1/fi_per_CHI(1,i);    % Vettore colonna
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% J_RID %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k_t0 = E28/E_t0(1,1);
OMEGA_t0 = OMEGA28*k_t0/(OMEGA28*k_t0+1-OMEGA28);
%Inizializzazione della matrice
J_RID=zeros(size(J,1),size(J,2));
for i=1:size(J,1)
for j=i:size(J,2)

```

```
J_RID(i,j) = OMEGA_t0.*J(i,j)+(1-OMEGA_t0)/E_t0(1,1);
end
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% R_RID %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
R_RID = Integrazione(J_RID);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%R = R/E_t0(1,1);
%R_RID = R_RID/E_t0(1,1);
%J=J*E28;
%J_RID=J_RID*E28;
%R = R/E28;
%R_RID = R_RID/E28;
end
```

Le ultime righe di codice possono essere rese attive rimuovendo il simbolo di percentuale, e consentono di adimensionalizzare la funzione di rilassamento, la funzione di rilassamento ridotta per  $E(t_0)$  oppure per  $E28$ .

Il programma "MAIN" (di seguito) richiama più volte la funzione "SUB\_MAIN" ciclandola per diversi tempi di messa in carico, ordinati nel vettore riga  $t_0$ ;

```
clear all
close all
clc
t0 = [7 14 21 28 35];
figure
for i=1:size(t0,2)
    [t,fi_t0,E28,J,J_RID,R,R_RID,CHI,OMEGA_t0] = SUB_MAIN (t0(1,i));
    % Matrice le cui colonne sono i tempi di visura
    TEMPI(:,i) = t;
```

```

% Matrice le cui righe sono le funzioni J
J_MAT(:,i) = J(1,:)' ;

% Matrice le cui colonne sono le funzioni R
R_MAT(:,i) = R;

% Matrice le cui colonne sono le funzioni J_RID
J_RID_MAT(:,i) = J_RID(1,:);

% Matrice le cui colonne sono le funzioni R_RID
R_RID_MAT(:,i) = R_RID;

% Matrice le cui colonne sono le funzioni CHI
CHI_MAT(:,i) = CHI;

%Vettore riga con i vari valori di OMEGA_t0
OMEGA_t0_MAT(1,i) = OMEGA_t0;

% Matrice le cui colonne sono le funzioni fi
fi_MAT(:,i) = fi_t0(:,1);

semilogx(TEMPI(:,i),R_MAT(:,i),'-y')

hold on

semilogx(TEMPI(:,i),R_RID_MAT(:,i),'--b')

hold on

figure

semilogx(TEMPI(:,i),CHI_MAT(:,i),'--b')

hold on

hold on

xlabel ('t [gg]')

ylabel ('R*(t,t0)/Ec(t0)')

end

```

Il programma appena elencato si occupa anche dello storage dell'output del "SUB\_MAIN", che viene ordinato all'interno di matrici che hanno sulle righe o sulle colonne i risultati relativi ad un particolare tempo di messa in carico. Questi risultati vengono poi rappresentati in grafici con l'asse dei tempi in scala logaritmica.

I modelli utilizzati per il calcolo delle funzioni di viscosità sono quelli proposti nel paragrafo 2.6 ([7], [5]). Per il Model Code 2010 si è implementata un'ulteriore funzione che opera il calcolo del coefficiente di viscosità, denominata "CALCOLA\_FI"; essa è composta dalle seguenti righe di codice:

```
function [ fi ] = CALCOLA_FI( t,fck,h,RH )

%CALCOLA_FI La funzione restituisce una matrice fi che ha sulla riga j-
sima

%la funzione fi(t,t(j,1))

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% CALCOLO DELLA fi DI BASE %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%% fcm

fcm = fck +8;

%%% beta_bc_FCM

beta_bc_FCM = 1.8/fcm^0.7;

%%% beta_bc

beta_bc = zeros(size(t,1),size(t,1));

for i=1:size(t,1)
    for j=i:size(t,1)
        %Matrice che ha sulla i-esima riga la funzione beta_bc(t,t(i,1))
        beta_bc(i,j) = log((30/t(i,1)+0.035)^2*(t(j,1)-t(i,1))+1);
    end
end

%%% fi_bc

fi_bc = beta_bc_FCM.*beta_bc;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% CALCOLO DELLA fi DA ESSICAMENTO %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%% beta_dc_FCM
```

```

beta_dc_FCM = 412/(fcm)^1.4;

%%%% beta_RH
beta_RH = (1-RH/100)/((0.1*h/100)^(1/3));

%%%% beta_dc_t0
for i=1:size(t,1)
beta_dc_t0(i,1) = 1/(0.1+t(i,1)^0.2); % Vettore colonna
end

%%%% gamma_t0
for i=1:size(t,1)
gamma_t0(i,1) = 1/(2.3+3.5/sqrt(t(i,1))); % Vettore colonna
end

%%%% alfa_fcm
alfa_fcm = (35/fcm)^0.5;

%%%% beta_h
beta_h = 1.5*h+250*alfa_fcm;
if beta_h > 1500*alfa_fcm
    beta_h = 1500*alfa_fcm;
end

%%%% beta_dc
beta_dc = zeros(size(t,1),size(t,1));
for i=1:size(t,1)
    for j=i:size(t,1)
        %Matrice che ha sulla i-esima riga la funzione beta_dc(t,t(i,1))
        beta_dc(i,j) = ((t(j,1)-t(i,1))/(beta_h+t(j,1)-
t(i,1)))^gamma_t0(i,1);
    end
end

```

```

end

%%% fi_dc

fi_dc = zeros(size(t,1),size(t,1));

for i=1:size(t,1)
    for j=i:size(t,1)
        %Matrice che ha sulla i-esima riga la funzione fi_dc(t,t(i,1))
        fi_dc(i,j) = beta_dc_FCM * beta_RH * beta_dc_t0(i,1) *
beta_dc(i,j);
    end
end

end

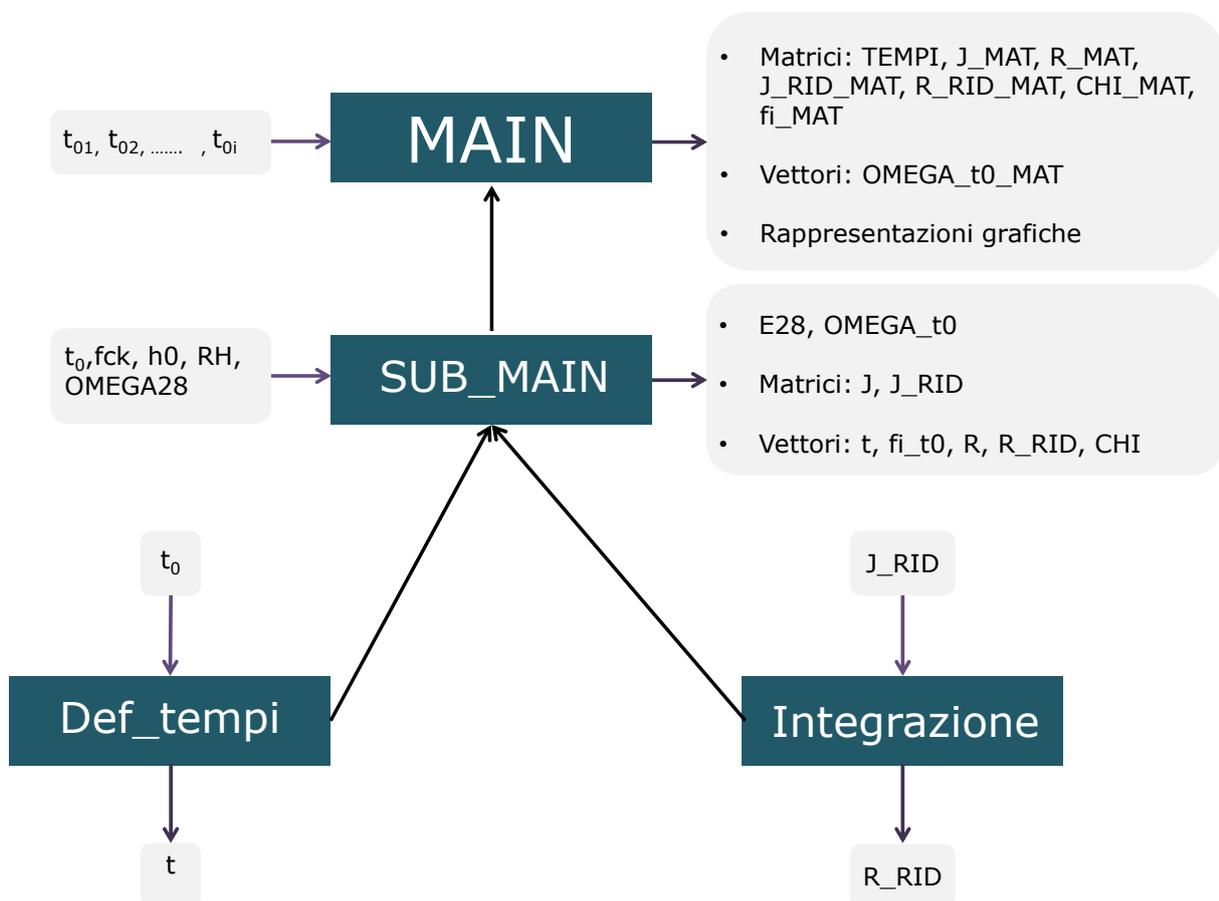
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% CALCOLO DELLA fi TOTALE %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Matrice che ha sulla i-esima riga la funzione fi(t,t(i,1))

fi = fi_bc + fi_dc;

end

```



## **BIBLIOGRAFIA**

1. *"Analysis Manual"*, MIDAS GEN 2011
2. Boltzmann L. - *Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung*, Annalen der Physik - Vienna 1876
- 3 - Comite Euro-International du Beton (CEB) - *Bulletin d'Information n° 142/142 Bis* - Parigi 1984
4. CEB/FIP - *Bulletin d'Information n° 215 (Model Code 90) - Structural Effects of Time Dependent Behaviour of Concrete* - 1993
5. CEB/Fib - *Bulletin d'Information n° 65 -66 (Model Code 2010)* - 2012
6. Dischinger F. - *Untersuchungen über die Knicksicherheit die elastische Verformung und das kriechen des Betons bei Bogenbrücken*, Der Bauingenieur, 18, H. 33/34 - 1937
7. Euocode 2, Part 1 - *General Rules and Rules for Building*, ENV 1992-1-1 - 1995 (appendice)
8. Fintel M., Khan F. - *"Effect of Column Creep and Shrinkage in Tall Structures – Analysis for Differential Shortening of Columns and Field Observation of Structures."* Paper SP 27-4, ACI Special Publication 27, 1971
9. Ghali A., Favre R. - *Concrete Structures – Stresses and Deformations (Second Edition)* - 1994
10. Giussani F., Minoretti A., Mola F., Savoldi C. - *Improvements in Long Term Structural Analysis of Cable-Stayed Bridges*, 29° Conf. on Our World in Concrete & Structures - Singapore, 25-26 Agosto 2004
- 11 - Giussani F., Mola F. - *Long Term Behaviour of Cable-Stayed Bridges, Part 1 Theoretical Approach*, Studi e Ricerche, Vol. 24 - Italcementi, Bergamo 2003

12. Jayasinghe M.T.R., Jayasena W.M.V.P.K., *"Effects of Axial Shortening of Columns on Design and Construction of Tall Reinforced Concrete Buildings"*, Practice Periodical on Structural Design and Construction, Vol. 9, No. 2, May 2004
13. Khan F, Fintel M., *"Effect of column Exposure in Tall Structures – Analysis for Length Changes of Exposed Columns."* ACI J. 63, 1966
14. Khan F., Fintel M., *"Conceptual Details for Creep, Shrinkage and Temperature in Ultra High-Rise Buildings."* Paper SP 27-9, ACI Special Publication 27, 1971
15. Kim H., Cho S., *"Column Shortening of Concrete Cores and Composite Columns in a Tall Building"*, The Structural Design of Tall and Special Buildings, June 2005, Volume 14, Issue 2
16. Kumaghai H, *"Prediction of Column Shortening due to Creep and Shrinkage in Tall Buildings."* Finite elements in civil engineering applications: Proceedings of the Third Diana World Conference, Tokyo, Japan, 9-11 October 2002, Max A. N. Hendriks, Jan G. Rots, AA Balkema Publishers, Rotterdam
17. McHenry D. - *A New Aspect of Creep in Concrete and its Application to Design*, Proceeding ASTM - 1943
18. Mola F. - *Metodo Generale e Metodo Approssimato per la Risoluzione di Strutture non Omogenee a Comportamento Elasto-Viscoso Lineare, I parte - teoria*, Studi e Ricerche Vol.1 - Italcementi, Bergamo 1979
19. Mola F. - *Metodi di Analisi di Strutture in C.A. e C.A.P. a Comportamento Elasto-Viscoso Lineare*, Studi e Ricerche Vol.3 - Italcementi, Bergamo 1981
20. Mola F. - *Il Metodo delle Funzioni di Rilassamento Ridotte nella Risoluzione di Strutture Elastoviscose non Omogenee a Modulo Elastico Variabile nel Tempo*, Studi e Ricerche Vol.3 - Italcementi, Bergamo 1981
21. Mola F. - *Applicazione del Metodo delle Funzioni di Rilassamento Ridotte all'Analisi di Strutture Viscoelastiche non Omogenee*, Studi e Ricerche Vol.4 - Italcementi, Bergamo 1982

- 
22. Mola F. - *Analisi generale in fase viscoelastica lineare di strutture e sezioni a comportamento reologico non omogeneo*, Studi e Ricerche Vol.8 - Italcementi, Bergamo 1986
23. Mola F., Malerba P., Pisani M. - *Creep and Shrinkage Effects on the Cable- Stayed Bridges Behaviour*, Innovation in Cable-Stayed Bridge - Fukoka, Japan 18-20 Novembre 1987
24. Mola F., Pisani M. - *Creep Effects on Long Term Behaviour of R.C. and P.C. Cable-Stayed Bridges*, Innovation in Cable-Stayed Bridge - Fukoka, Japan 18-19 Aprile 1991
25. Mola F., Gatti M. - *General and Approximate Approach for the Analysis of Composite Steel-Concrete Members with Deformables Connectors*, Studi e Ricerche Vol.17 - Italcementi, Bergamo 1996
26. Mola F., Pellegrini L.M., *The new model for creep of concrete in Fip Model 2010*, Owigs 2012
27. Rhodes J., Carreira D., *"Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures."* ACI manual of concrete practice 1990. Part 1: Use of Concrete in Buildings - Design, Specifications, and Related Topic - Detroit : ACI, 1990. 209R - 92
28. Sharma R. K., Nagpal A.K., *"A Procedure for Creep and Shrinkage Analysis of Frames with Low Beam Stiffness"*, The Structural Design of Tall and Special Buildings, November 2008, Volume 17, Issue 4
29. Smith B., Coull A., *"Creep, Shrinkage, and Temperature Effects."* Tall Building Structure - Analysis and Design, New York : John Wiley & Sons, 1991
30. Trost H. - *Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton*, Beton und Stahlbetonbau - Ottobre 1967
31. Volterra V. - *Leçons sur les Fonctions de Lignes*, Gauthier-Villars - Parigi 1913

## INDICE DELLE FIGURE

Figura 1.1 - Ingalls Building, Cincinnati, Ohio, Usa.....	1
Figura 1.2 - Woolworth Building, New York City, NY, Usa.....	1
Figura 1.3 - Chrysler Building, Empire State Building e Ge Building, New York City, NY, Usa .....	2
Figura 1.4 - Petronas Towers, Kuala Lumpur, Malesia e Burj Dubai, Dubai, Emirati Arabi.....	3
Figura 1.5 - Torre Piacentini, Genova, Italia.....	3
Figura 1.6 - Torre Velasca, Milano, Italia .....	4
Figura 1.7 - Torre Pirelli, Milano, Italia .....	4
Figura 1.8 - Palazzo Lombardia, Milano, Italia .....	5
Figura 1.9 - Masterplan Garibaldi - Repubblica .....	5
Figura 1.10 - Complesso edilizio di Citylife, Milano, Italia .....	6
Figura 1.11 - Torre Isozaki; .....	6
Figura 1.12 - Efficienza statica del calcestruzzo al variare di $f_{ck}$ .....	7
Figura 1.13 - Westin Building, Boston, Massachusetts, Usa; Messertum Tower, Francoforte, Germania;.....	8
Figura 1.14 - Water Tower Place .....	9
Figura 1.15 - Central Plaza, Hong Kong, Cina.....	9
Figura 2.1 Andamento della tensione nel provino .....	11
Figura 2.2 - Deformazione di un provino sottoposto a tensione costante .....	12
Figura 2.3 - Caratterizzazione della prova .....	12
Figura 2.4 - Deformazione di n provini sottoposti a diversi carichi costanti .....	13
Figura 2.5 - Caratterizzazione della prova .....	14
Figura 2.6 - Deformazione di n provini sottoposti a diversi carichi costanti .....	14
Figura 2.7 - Andamento dello sforzo nel tempo .....	17
Figura 2.8 - Andamento di $E_{c28}$ in funzione di $f_{cm}$ .....	25
Figura 2.9 - Andamento di $\beta_E$ in funzione di $t_0$ .....	26
Figura 2.10 - Andamento di $E_c$ in funzione del tipo di cemento e del valore di $f_{cm}$ .....	26
Figura 2.11 - Andamento di $\phi_{RH}$ in funzione di RH ed $h_0$ .....	27
Figura 2.12 - Andamento di $\beta(f_{cm})$ in funzione di $f_{cm}$ .....	27
Figura 2.13 - Andamento di $\beta(t_0)$ in funzione di $t_0$ .....	28
Figura 2.14 - Andamento di $\beta_H$ in funzione di RH e $h_0$ .....	28
Figura 2.15 - Andamento di $\phi(t, t_0)$ per diversi tempi di carico.....	29
Figura 2.16 - Andamento di $\phi(t, t_0)$ per diversi valori di $f_{cm}$ .....	29
Figura 2.17 - Andamento di $\phi(t, t_0)$ per diversi valori di RH .....	30
Figura 2.18 - Andamento di $\phi(t, t_0)$ per diversi valori di $h_0$ .....	30
Figura 2.19 - Andamento di $J(t, t_0)$ per diversi valori di $t_0$ .....	31
Figura 2.20 - Andamento di $R(t, t_0)$ per diversi valori di $t_0$ .....	32
Figura 2.21 - Andamento di $\epsilon_{cs}(t, t_s)$ per diversi valori di $t_s$ .....	33
Figura 2.22 - Andamento di $\epsilon_{cs}(t, 3)$ per diversi valori di $f_{cm}$ .....	34
Figura 2.24 - Andamento di $\epsilon_{cs}(t, 3)$ per diversi valori di RH.....	34
Figura 2.25 - Andamento di $\epsilon_{cs}(t, 3)$ per diversi valori di $h_0$ .....	35
Figura 2.26 - Andamento di $\phi_{bc}(t, t_0)$ , $\phi_{dc}(t, t_0)$ , $\phi(t, t_0)$ nel tempo .....	36
Figura 2.27 - Andamento di $\beta_{bc}$ in funzione di $f_{cm}$ .....	37
Figura 2.28 - Andamento di $\phi_{bc}(t, t_0)$ per diversi tempi di carico .....	37
Figura 2.29 - Andamento di $\phi_{bc}(t, 3)$ per diversi valori di $f_{cm}$ .....	38
Figura 2.30 - Andamento di $\beta_{dc}$ in funzione di $f_{cm}$ .....	38
Figura 2.31 - Andamento di $\beta(RH)$ in funzione di RH e $h_0$ .....	39
Figura 2.32 - Andamento di $\beta_{dc}(t_0)$ in funzione di $t_0$ .....	39
Figura 2.33 - Andamento di $\phi_{dc}(t, t_0)$ per diversi tempi di carico .....	40
Figura 2.34 - Andamento di $\phi_{dc}(t, 3)$ per diversi valori di $f_{cm}$ .....	41
Figura 2.35 - Andamento di $\phi_{dc}(t, 3)$ per diversi valori di RH .....	41
Figura 2.36 - Andamento di $\phi_{dc}(t, 3)$ per diversi valori di $h_0$ .....	42

Figura 2.37 - Andamento di $\phi(t, t_0)$ per diversi tempi di carico.....	42
Figura 2.38 - Andamento di $\phi(t, 3)$ per diversi valori di $f_{cm}$ .....	43
Figura 2.39 - Andamento di $\phi(t, 3)$ per diversi valori di RH .....	43
Figura 2.40 - Andamento di $\phi(t, 3)$ per diversi valori di $h_0$ .....	44
Figura 2.41 - Andamento di $\phi(t, t_0)$ per diversi tempi di carico.....	44
Figura 2.42 - Andamento di $\phi_{bc}(t, t_0)$ e $\phi_{dc}(t, t_0)$ per diversi tempi di carico.....	46
Figura 2.43 - Funzioni di Viscosità, $f_{ck} = 32\text{MPa}$ .....	48
Figura 2.44 - Funzioni di Viscosità, $f_{ck} = 60\text{MPa}$ .....	48
Figura 2.45 - Funzioni di Rilassamento, $f_{ck} = 32\text{MPa}$ .....	49
Figura 2.46 - Funzioni di Rilassamento, $f_{ck} = 60\text{MPa}$ .....	49
Figura 2.47 - Ciclo di carico-scarico .....	50
Figura 2.48 - Funzione di rilassamento .....	50
Figura 3.1 - Struttura omogenea soggetta a carichi statici .....	52
Figura 3.2 - Struttura omogenea soggetta a distorsioni .....	54
Figura 3.3 - Struttura omogenea sottoposta a carichi costanti .....	56
Figura 3.4 - Reazione del vincolo posticipato.....	57
Figura 3.5 - Rappresentazione di $X_{1e}$ .....	58
Figura 3.6 - Rappresentazione di $\xi(t, t_0, t_0^*)$ al variare di $t_0^*$ .....	59
Figura 3.7 - Andamento di $\xi(t, t_0, t_0^*)$ al variare di $t_0^*$ - CEB MC90.....	61
Figura 3.8 - Andamento di $\xi(t, t_0, t_0^*)$ al variare di $t_0^*$ - Fib MC2010.....	61
Figura 3.9 - Confronto fra modelli .....	62
Figura 3.10 - Confronto fra modelli .....	62
Figura 3.11 - Variazione dello schema strutturale nel tempo .....	63
Figura 3.12 - Struttura omogenea con carico p .....	66
Figura 3.13 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ (CEB MC90) .....	67
Figura 3.14 - Andamento nel tempo di $v(t)/v(t_0)$ (CEB MC90) .....	67
Figura 3.15 - Struttura omogenea con cedimento imposto .....	68
Figura 3.16 - Andamento nel tempo di $X(t)/X(t_0)$ e $M(t)/M(t_0)$ (CEB MC90).....	69
Figura 3.17 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ (CEB MC90) .....	69
Figura 3.18 - Variazione di schema statico della struttura .....	70
Figura 3.19 - Andamento nel tempo di $X(t)/X_e$ (CEB MC90).....	71
Figura 3.20 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ (CEB MC90) .....	71
Figura 3.21 - Variazione dello schema strutturale nel tempo .....	72
Figura 3.22 - Schemi strutturali per il calcolo delle varie grandezze.....	73
Figura 3.23 - Andamento delle iperstatiche nel tempo (CEB MC90) .....	74
Figura 3.24 - Andamento dell'iperstatica $X_1(t)$ per diversi schemi strutturali (CEB MC90) .....	74
Figura 3.25 - Andamento di $M(t)/M(t_0)$ nel punto A per diversi schemi strutturali (CEB MC90).....	75
Figura 3.26 - Andamento di $\chi(t, t_0)$ per $f_{ck} = 40\text{MPa}$ , RH = 70%, $h_0 = 200\text{mm}$ .....	82
Figura 3.27 - Andamento di $\mu(t, t_0)$ per $f_{ck} = 40\text{MPa}$ , RH = 70%, $h_0 = 200\text{mm}$ .....	87
Figura 3.28 - Variazione di schema statico della struttura .....	88
Figura 3.29 - Struttura omogenea con vincolo posticipato soggetta a carichi costanti.....	93
Figura 3.30 - Deformata nel tempo .....	94
Figura 3.31 - Spostamento dei punti A e B nel tempo .....	94
Figura 3.32 - Struttura omogenea con vincoli posticipati soggetta a carichi costanti .....	95
Figura 3.33 - Deformata nel tempo .....	95
Figura 3.34 - Spostamento dei punti A e B nel tempo .....	96
Figura 3.35 - Struttura omogenea con vincoli posticipati ad istanti diversi soggetta a carichi costanti .....	96
Figura 3.36 - Schemi strutturali per il calcolo delle varie grandezze.....	97
Figura 3.37 - Deformata nel tempo .....	98
Figura 3.38 - Dettaglio deformata .....	99
Figura 3.39 - Dettaglio deformata .....	99
Figura 3.40 - Spostamento del punto A nel tempo .....	100
Figura 4.1 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e carico p .....	101
Figura 4.2 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e cedimento imposto .....	105
Figura 4.3 - Andamento di $J^*(t, t') \cdot E_{c28}$ - CEB MC90 al variare di $\omega$ .....	107

Figura 4.4 - Andamento di $J^*(t,t') \cdot E_{c28}$ - Fib MC2010 al variare di $\omega$ .....	107
Figura 4.5 - Confronto di $J^*(t,t') \cdot E_{c28}$ fissato $\omega = 0.5$ .....	108
Figura 4.6 - Andamento di $R^*(t,t')/E_{c28}$ - CEB MC90 al variare di $\omega$ .....	110
Figura 4.7 - Andamento di $R^*(t,t')/E_{c28}$ - fib MC2010 al variare di $\omega$ .....	110
Figura 4.8 - Confronto di $R^*(t,t') \cdot E_{c28}$ fissato $\omega = 0.5$ .....	111
Figura 4.9 - Struttura omogenea con vincolo posticipato soggetta a carichi costanti .....	112
Figura 4.10 - Reazione del vincolo posticipato.....	112
Figura 4.11 - Andamento di $\xi^*(t,7,28)$ - CEB MC90 al variare di $\omega$ .....	115
Figura 4.12 - Andamento di $\xi^*(t,7,28)$ - Fib MC2010 al variare di $\omega$ .....	115
Figura 4.13 - Confronto di $\xi^*(t,7,28)$ fissato $\omega = 0.5$ .....	116
Figura 4.14 - Struttura omogenea con vincolo elastico, carico e cedimento imposti .....	118
Figura 4.15 - Sovrapposizione degli effetti.....	119
Figura 4.16 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e carico Q.....	120
Figura 4.17 - Reazione iperstatica a vincolo rigido .....	120
Figura 4.18 - Andamento del fattore di accoppiamento $\omega$ al variare di c.....	121
Figura 4.19 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ al variare di c (CEB MC90) .....	122
Figura 4.20 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ al variare di c (CEB MC90) .....	122
Figura 4.21 - Andamento di $M(t)/M(t_0)$ al variare di c (CEB MC90) .....	123
Figura 4.22 - Andamento di $M(t)/M(t_0)$ al variare di c (CEB MC90) .....	123
Figura 4.23 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ con le soluzioni esatta e di Trost.....	124
Figura 4.24 - Andamento di $M(t)/M(t_0)$ con le soluzioni esatta e di Trost .....	124
Figura 4.25 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ con le soluzioni esatta e di Trost semplificata .....	125
Figura 4.26 - Andamento di $M(t)/M(t_0)$ con le soluzioni esatta e di Trost semplificata.....	125
Figura 4.27 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e cedimento imposto .....	126
Figura 4.28 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ al variare di c (CEB MC90).....	127
Figura 4.29 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ al variare di c (CEB MC90).....	127
Figura 4.30 - Andamento di $M(t)/M(t_0)$ al variare di c (CEB MC90) .....	128
Figura 4.31 - Andamento di $M(t)/M(t_0)$ al variare di c (CEB MC90) .....	128
Figura 4.32 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ con le soluzioni esatta e di Trost.....	129
Figura 4.33 - Andamento di $M(t)/M(t_0)$ con le soluzioni esatta e di Trost .....	129
Figura 4.34 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ con le soluzioni esatta e di Trost semplificata .....	130
Figura 4.35 - Andamento di $M(t)/M(t_0)$ con le soluzioni esatta e di Trost semplificata.....	130
Figura 4.36 - Struttura omogenea con vincolo elastico, carico e cedimento imposti .....	131
Figura 4.37 - Sovrapposizione degli effetti.....	131
Figura 4.38 - Andamento delle iperstatiche in presenza di carico e cedimento imposti (CEB MC90) .....	132
Figura 4.39 - Andamento delle iperstatiche in presenza di carico e cedimento imposti (CEB MC90) .....	133
Figura 4.40 - Variazione di schema statico della struttura .....	134
Figura 4.41 - Struttura con vincoli rigidi.....	134
Figura 4.42 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ al variare di c (CEB MC90) .....	135
Figura 4.43 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ al variare di c (CEB MC90) .....	135
Figura 4.44 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ con le soluzioni esatta e di Trost.....	136
Figura 4.45 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ con le soluzioni esatta e di Trost semplificata .....	136
Figura 4.46 - Andamento di $X(t)/X_{er}$ al variare di $t_0^*$ (CEB MC90) .....	137
Figura 4.47 - Struttura omogenea con vincoli elastici e carichi applicati .....	138
Figura 4.48 - Struttura omogenea con vincoli elastici e cedimenti imposti .....	141
Figura 4.49 - Struttura omogenea con vincoli posticipati soggetta a carichi costanti .....	144
Figura 4.50 - Reazioni dei vincoli posticipati .....	144
Figura 4.51 - Struttura omogenea con vincoli elastici, carichi e cedimenti imposti .....	148
Figura 4.52 - Sovrapposizione degli effetti.....	148
Figura 4.53 - Struttura omogenea con vincoli elastici e carichi applicati .....	150
Figura 4.54 - Struttura con vincoli rigidi.....	150
Figura 4.55 - Andamento delle incognite principali nel tempo per $t_0 = 7$ gg (CEB MC90).....	152
Figura 4.56 - Andamento delle incognite principali nel tempo $t_0 = 28$ gg (CEB MC90).....	152
Figura 4.57 - Andamento delle due reazioni iperstatiche nel tempo per $t_0 = 7$ gg (CEB MC90).....	153
Figura 4.58 - Andamento delle due reazioni iperstatiche nel tempo per $t_0 = 28$ gg (CEB MC90) .....	153
Figura 4.59 - Struttura omogenea con vincoli elastici e cedimenti imposti .....	154

Figura 4.60 - Andamento delle incognite principali nel tempo per $t_0 = 7$ gg (CEB MC90).....	155
Figura 4.61 - Andamento delle incognite principali nel tempo per $t_0 = 28$ gg (CEB MC90).....	156
Figura 4.62 - Andamento delle due reazioni ipertatiche nel tempo per $t_0 = 7$ gg (CEB MC90) .....	156
Figura 4.63 - Andamento delle due reazioni ipertatiche nel tempo per $t_0 = 28$ gg (CEB MC90) .....	157
Figura 4.64 - Struttura omogenea con vincoli elastici, carichi e cedimenti imposti .....	157
Figura 4.65 - Sovrapposizione degli effetti.....	158
Figura 4.66 - Andamento delle azioni principali $Y_1$ in presenza di carico e cedimento imposti.....	158
Figura 4.67 - Andamento delle azioni principali $Y_2$ in presenza di carico e cedimento imposti.....	159
Figura 4.68 - Andamento delle iperstatiche $X_1$ in presenza di carico e cedimento imposti.....	159
Figura 4.69 - Andamento delle iperstatiche $X_2$ in presenza di carico e cedimento imposti.....	160
Figura 4.70 - Andamento delle azioni principali $Y_1$ in presenza di carico e cedimento imposti.....	160
Figura 4.71 - Andamento delle azioni principali $Y_2$ in presenza di carico e cedimento imposti.....	161
Figura 4.72 - Andamento delle iperstatiche $X_1$ in presenza di carico e cedimento imposti.....	161
Figura 4.73 - Andamento delle iperstatiche $X_2$ in presenza di carico e cedimento imposti.....	162
Figura 4.74 - Variazione di schema statico della struttura .....	163
Figura 4.75 - Struttura con vincoli rigidi .....	164
Figura 4.76 - Andamento delle incognite principali nel tempo per $t_0^* = 10$ gg.....	165
Figura 4.77 - Andamento delle incognite principali nel tempo per $t_0^* = 28$ gg.....	165
Figura 4.78 - Andamento delle due reazioni iperstatiche nel tempo per $t_0^* = 10$ gg.....	166
Figura 4.79 - Andamento delle due reazioni iperstatiche nel tempo per $t_0^* = 28$ gg.....	166
Figura 4.80 - Struttura omogenea con vincoli elastici e carichi applicati .....	167
Figura 4.81 - Struttura omogenea con vincoli elastici e cedimenti imposti .....	169
Figura 4.82 - Struttura omogenea con un vincolo elastico e carico p imposto.....	170
Figura 4.83 - Spostamento del punto A nel tempo .....	171
Figura 4.84 - Struttura omogenea con vincolo elastico e cedimento p imposto .....	171
Figura 4.85 - Spostamento del punto A nel tempo .....	172
Figura 5.1 - Diagramma dei Momenti - Conventional Analysis .....	175
Figura 5.2 - Diagramma dei Momenti - Erection Sequence Analysis.....	175
Figura 5.3 - Confronto dei risultati delle analisi ( <i>Column Shortening</i> ) tra <i>conventional analysis</i> ed <i>erection sequence analysis</i> .....	178
Figura 5.4 - Principio di sovrapposizione degli effetti .....	179
Figura 5.5 - Principio di sovrapposizione degli effetti .....	182
Figura 5.6 - Struttura in esame .....	183
Figura 5.7 - Andamento del carico sulla prima asta.....	184
Figura 5.8 - Accorciamento in sommità della prima asta.....	184
Figura 5.9 - Andamento del carico sulla seconda asta .....	185
Figura 5.10 - Accorciamento in sommità della seconda asta .....	185
Figura 5.11 - Andamento del carico sulla terza asta .....	186
Figura 5.12 - Accorciamento in sommità della terza asta .....	186
Figura 5.13 - Andamento del carico sulla quarta asta .....	187
Figura 5.14 - Accorciamento in sommità della quarta asta .....	187
Figura 5.15 - Andamento del carico sulla quinta asta .....	188
Figura 5.16 - Accorciamento in sommità della quinta asta .....	188
Figura 5.17 - Column shortening $t = 500$ gg.....	189
Figura 5.18 - Column shortening $t = 2000$ gg .....	189
Figura 5.19 - Column shortening a $t = 30000$ giorni .....	190
Figura 5.20 - Column shortening per diversi valori di $t$ con compensazione .....	190
Figura 5.21 - Andamento del carico sulla prima asta .....	191
Figura 5.22 - Accorciamento in sommità della prima asta senza compensazione .....	191
Figura 5.23 - Accorciamento in sommità della prima asta con compensazione .....	192
Figura 5.24 - Ripartizione del carico sulla prima asta .....	192
Figura 5.25 - Andamento del carico sulla seconda asta.....	193
Figura 5.26 - Accorciamento in sommità della seconda asta senza compensazione .....	193
Figura 5.27 - Accorciamento in sommità della seconda asta con compensazione .....	194
Figura 5.28 - Ripartizione del carico sulla seconda asta .....	194
Figura 5.29 - Andamento del carico sulla terza asta .....	195

Figura 5.30 - Accorciamento in sommità della terza asta senza compensazione .....	195
Figura 5.31 - Accorciamento in sommità della terza asta con compensazione .....	196
Figura 5.32 - Ripartizione del carico sulla terza asta .....	196
Figura 5.33 - Andamento del carico sulla quarta asta .....	197
Figura 5.34 - Accorciamento in sommità della quarta asta senza compensazione .....	197
Figura 5.35 - Accorciamento in sommità della quarta asta con compensazione .....	198
Figura 5.36 - Ripartizione del carico sulla quarta asta .....	198
Figura 5.37 - Andamento del carico sulla quinta asta .....	199
Figura 5.38 - Accorciamento in sommità della quinta asta senza compensazione.....	199
Figura 5.39 - Accorciamento in sommità della quinta asta con compensazione.....	200
Figura 5.40 - Ripartizione del carico sulla quarta asta .....	200
Figura 5.41 - Column shortening $t = 500$ gg .....	201
Figura 5.42 - Column shortening $t = 2000$ gg .....	201
Figura 5.43 - Column shortening $t = 30000$ gg .....	202
Figura 5.44 - Confronto column shortening con e senza armatura.....	202
Figura 5.45 - Accorciamento in sommità della prima asta con diverse analisi.....	203
Figura 5.46 - Accorciamento in sommità della seconda asta con diverse analisi.....	203
Figura 5.47 - Accorciamento in sommità della terza asta con diverse analisi.....	204
Figura 5.48 - Accorciamento in sommità della quarta asta con diverse analisi.....	204
Figura 5.49 - Accorciamento in sommità della quinta asta con diverse analisi .....	205
Figura 5.50 - Column shortening con diverse analisi $t = 500$ giorni .....	205
Figura 5.51 - Column shortening con diverse analisi $t = 30000$ giorni.....	206
Figura 6.1 - Trave di Timoschenko .....	210
Figura 6.2 - Elementi WALL Membrane e WALL Plate.....	211
Figura 6.3 - Analisi P-Delta .....	214
Figura 6.4 - Modello Midas Gen per la verifica del I° Teorema della Viscosità .....	215
Figura 6.5 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 7$ giorni .....	216
Figura 6.6 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 7$ giorni .....	216
Figura 6.7 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 28$ giorni.....	217
Figura 6.8 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 28$ giorni .....	217
Figura 6.9 - Modello Midas Gen per la verifica del II° Teorema della Viscosità .....	218
Figura 6.10 - Andamento nel tempo di $X(t)/X(t_0)$ e $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 7$ giorni.....	219
Figura 6.11 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 7$ giorni.....	219
Figura 6.12 - Andamento nel tempo di $X(t)/X(t_0)$ e $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 28$ giorni.....	220
Figura 6.13 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 28$ giorni.....	220
Figura 6.14 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincolo posticipato .....	221
Figura 6.15 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 10$ gg .....	221
Figura 6.16 - Andamento nel tempo di $X(t)/X_{er}$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 10$ gg.....	222
Figura 6.17 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 10$ gg.....	222
Figura 6.18 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 28$ gg .....	223
Figura 6.19 - Andamento nel tempo di $X(t)/X_{er}$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 28$ gg.....	223
Figura 6.20 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 28$ gg.....	224
Figura 6.21 - Schemi statici prima e dopo l'applicazione del vincolo .....	224
Figura 6.22 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincolo posticipato .....	225
Figura 6.23 - Andamento nel tempo dello spostamento del punto A .....	225
Figura 6.24 - Andamento nel tempo dello spostamento del punto B .....	226
Figura 6.25 - Variazione di schema statico della struttura nel tempo ( $t > t_{03}^*$ ).....	226
Figura 6.26 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincoli posticipati ad istanti diversi.....	227
Figura 6.27 - Andamento nel tempo dello spostamento del punto A .....	227
Figura 6.28 - Andamento nel tempo delle tre iperstatiche $X_1, X_2$ e $X_3$ .....	228
Figura 6.29 - Andamento nel tempo del momento flettente nel punto A.....	228
Figura 6.30 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni statiche .....	229

Figura 6.31 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 7$ giorni.....	230
Figura 6.32 - Andamento nel tempo di $X(t)/X_{er}$ per $t_0 = 7$ giorni .....	231
Figura 6.33 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 7$ giorni.....	231
Figura 6.34 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 28$ giorni.....	232
Figura 6.35 - Andamento nel tempo di $X(t)/X_{er}$ per $t_0 = 28$ giorni.....	232
Figura 6.36 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 28$ giorni .....	233
Figura 6.37 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni geometriche.....	233
Figura 6.38 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 7$ giorni.....	234
Figura 6.39 - Andamento nel tempo di $X(t)/X_{er}$ per $t_0 = 7$ giorni .....	234
Figura 6.40 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 7$ giorni.....	235
Figura 6.41 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 28$ giorni.....	235
Figura 6.42 - Andamento nel tempo di $X(t)/X_{er}$ per $t_0 = 28$ giorni.....	236
Figura 6.43 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 28$ giorni .....	236
Figura 6.44 - Modello Midas Gen per la verifica di strutture viscoelastiche omogenee con vincoli elastici soggette ad azioni statiche .....	237
Figura 6.45 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 10$ gg.....	237
Figura 6.46 - Andamento nel tempo di $X(t)/X_{er}$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 10$ gg.....	238
Figura 6.47 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 10$ gg.....	238
Figura 6.48 - Andamento nel tempo di $u(t)/u(t_0)$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 28$ gg.....	239
Figura 6.49 - Andamento nel tempo di $X(t)/X_{er}$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 28$ gg.....	239
Figura 6.50 - Andamento nel tempo di $M(t)/M(t_0)$ per $t_0 = 7$ gg e $t_0^* = 28$ gg.....	240
Figura 6.51 - Errori sulle reazioni iperstatiche .....	241
Figura 6.52 - Errori sui momenti flettenti .....	241
Figura 6.53 - Errori sugli spostamenti .....	242
Figura 6.54 - Struttura in esame.....	243
Figura 6.55 - Accorciamento in sommità della prima asta .....	243
Figura 6.56 - Accorciamento in sommità della seconda asta .....	244
Figura 6.57 - Accorciamento in sommità della terza asta .....	244
Figura 6.58 - Accorciamento in sommità della quarta asta .....	245
Figura 6.59 - Accorciamento in sommità della quinta asta .....	245
Figura 6.60 - Column shortening $t = 500$ gg.....	246
Figura 6.61 - Column shortening $t = 2000$ gg .....	246
Figura 6.62 - Column shortening $t = 30000$ gg .....	247
Figura 6.63 - Accorciamento in sommità della prima asta .....	247
Figura 6.64 - Ripartizione del carico sulla prima asta .....	248
Figura 6.65 - Accorciamento in sommità della seconda asta .....	248
Figura 6.66 - Ripartizione del carico sulla seconda asta .....	249
Figura 6.67 - Accorciamento in sommità della terza asta .....	249
Figura 6.68 - Ripartizione del carico sulla terza asta .....	250
Figura 6.69 - Accorciamento in sommità della quarta asta .....	250
Figura 6.70 - Ripartizione del carico sulla quarta asta .....	251
Figura 6.71 - Accorciamento in sommità della quinta asta .....	251
Figura 6.72 - Ripartizione del carico sulla quinta asta.....	252
Figura 6.73 - Column shortening $t = 500$ gg.....	252
Figura 6.74 - Column shortening $t = 2000$ gg .....	253
Figura 6.75 - Column shortening $t = 30000$ gg .....	253
Figura 6.76 - Errori sulla ripartizione dei carichi .....	254
Figura 6.77 - Errori sulla ripartizione dei carichi .....	255
Figura 6.78 - Errori sulla ripartizione dei carichi .....	255
Figura 6.79 - Errori sugli abbassamenti.....	256
Figura 6.80 - Errori sugli abbassamenti.....	256
Figura 6.81 - Errori sugli abbassamenti.....	257
Figura 7.1 - Quartiere Citylife, Milano .....	258
Figura 7.2 - Torre Isozaki, Milano.....	259
Figura 7.3 - Belt truss di copertura in acciaio .....	261

Figura 7.4 - Belt truss intermedia in acciaio.....	261
Figura 7.5 - Belt truss di copertura in calcestruzzo armato.....	262
Figura 7.6 - Belt truss intermedia in calcestruzzo armato.....	262
Figura 7.7 - Colona mista acciaio - calcestruzzo .....	263
Figura 7.8 - Variazione delle classi di calcestruzzo nei pilastri.....	264
Figura 7.9 - Variazione delle classi di calcestruzzo nei nuclei .....	265
Figura 7.10 - Variazione delle classi di calcestruzzo negli impalcati.....	266
Figura 7.11 - Impalcato tipo.....	267
Figura 7.12 - Carichi livello PI2 .....	268
Figura 7.13 - Carichi livello PI1 .....	269
Figura 7.14 - Carichi livello PS2 .....	270
Figura 7.15 - Carichi livello PS1 .....	271
Figura 7.16 - Carichi livello P00 .....	271
Figura 7.17 - Carichi livelli L.R., H.R. ....	272
Figura 7.18 - Carichi livello P24 .....	273
Figura 7.19 - Carichi livello P48 .....	274
Figura 7.20 - Carichi livello P49 .....	275
Figura 7.21 - Carichi livello P50 .....	276
Figura 7.22 - Colonna analizzata.....	277
Figura 7.23 - Modello in Midas Gen della colonna .....	279
Figura 7.24 - Column shortening colonna centrale isolata .....	280
Figura 7.25 - Column shortening colonna centrale isolata .....	280
Figura 7.26 - Azioni assiali colonna centrale isolata.....	281
Figura 7.27 - Azioni assiali colonna centrale isolata.....	281
Figura 7.28 - Column shortening con soluzione elastica convenzionale.....	282
Figura 7.29 - Confronto fra soluzioni elastica convenzionale e elastica con compensazione .....	283
Figura 7.30 - Confronto fra soluzioni elastica e visco-elastica (t = 500 gg) .....	284
Figura 7.31 - Confronto fra soluzioni elastica e visco-elastica (t = 30000 gg).....	284
Figura 7.32 - Tecnica di modellazione .....	286
Figura 7.33 - Sezione in calcestruzzo armato .....	287
Figura 7.35 - Tensioni nelle barre d'armatura (sezione in c.a.) .....	287
Figura 7.36 - Tensioni nel calcestruzzo (sezione in c.a.) .....	288
Figura 7.37 - Deformazioni (sezione in c.a.) .....	288
Figura 7.38 - Tensioni nel profilo metallico (sezione mista) .....	289
Figura 7.39 - Tensioni nel calcestruzzo (sezione mista) .....	289
Figura 7.40 - Deformazioni (sezione mista) .....	290
Figura 7.41 - Column shortening con e senza armatura (t = 715 gg).....	291
Figura 7.42 - Column shortening con e senza armatura (t = 30000 gg) .....	292
Figura 7.43 - Ripartizione dei carichi fra i due materiali (t = 715 gg).....	292
Figura 7.44 - Ripartizione dei carichi fra i due materiali (t = 30000 gg) .....	293
Figura 7.45 - Ripartizione dei carichi fra i due materiali (t = 715 gg).....	293
Figura 7.46 - Ripartizione dei carichi fra i due materiali (t = 30000 gg) .....	294
Figura 7.47 - Rapporto geometrico d'armatura.....	294
Figura 7.49 - Dimensioni delle sezioni a T delle travi.....	295
Figura 7.48 - Modello quinta .....	295
Figura 7.50 - Column shortening colonna centrale .....	296
Figura 7.51 - Column shortening colonna centrale .....	296
Figura 7.52 - Azioni assiali colonna centrale .....	297
Figura 7.53 - Azioni assiali colonna centrale .....	297
Figura 7.54 - Column shortening colonna intermedia .....	298
Figura 7.55 - Column shortening colonna intermedia .....	298
Figura 7.56 - Azioni assiali colonna intermedia.....	299
Figura 7.57 - Azioni assiali colonna intermedia.....	299
Figura 7.58 - Column shortening colonna laterale.....	300
Figura 7.59 - Column shortening colonna laterale.....	300
Figura 7.60 - Azioni assiali colonna laterale .....	301

Figura 7.61 - Azioni assiali colonna laterale .....	301
Figura 7.62 - Column shortening nucleo .....	302
Figura 7.63 - Column shortening nucleo .....	302
Figura 7.64 - Azioni assiali nucleo .....	303
Figura 7.65 - Azioni assiali nucleo .....	303
Figura 7.66 - Momento flettente trave livello 12 .....	304
Figura 7.67 - Momento flettente trave livello 12 .....	304
Figura 7.68 - Taglio trave livello 12 .....	305
Figura 7.69 - Taglio trave livello 12 .....	305
Figura 7.70 - Momento flettente trave livello 36 .....	306
Figura 7.71 - Momento flettente trave livello 36 .....	306
Figura 7.72 - Taglio trave livello 36 .....	307
Figura 7.73 - Taglio trave livello 36 .....	307
Figura 7.74 - Momenti flettenti secondo diverse analisi .....	308
Figura 7.75 - Abbassamenti con analisi elastica convenzionale ed elastica per fasi.....	309
Figura 7.76 - Momenti flettenti con analisi visco-elastica per diversi valori di t .....	309
Figura 7.77 - Abbassamenti con analisi elastica per fasi e viscoelastica per fasi.....	310
Figura 7.78 - Contributi del Momento flettente .....	311
Figura 7.79 - Momento flettente trave livello 12 nel tempo .....	312
Figura 7.80 - Vista del modello e dettagli dei belt trusses .....	313
Figura 7.81 - Vista del belt truss inferiore .....	314
Figura 7.82 - Dimensioni delle sezioni degli elementi dei belt trusses .....	314
Figura 7.83 - Column shortening colonna centrale .....	315
Figura 7.84 - Column shortening colonna centrale .....	315
Figura 7.85 - Column shortening colonna centrale .....	316
Figura 7.86 - Azioni assiali colonna centrale .....	316
Figura 7.87 - Column shortening colonna intermedia .....	317
Figura 7.88 - Column shortening colonna intermedia .....	317
Figura 7.89 - Azioni assiali colonna intermedia .....	318
Figura 7.90 - Azioni assiali colonna intermedia .....	318
Figura 7.91 - Column shortening colonna laterale.....	319
Figura 7.92 - Column shortening colonna laterale.....	319
Figura 7.93 - Azioni assiali colonna laterale .....	320
Figura 7.94 - Azioni assiali colonna laterale .....	320
Figura 7.95 - Column shortening nucleo .....	321
Figura 7.96 - Column shortening nucleo .....	321
Figura 7.97 - Azioni assiali nucleo .....	322
Figura 7.98 - Azioni assiali nucleo .....	322
Figura 7.99 - Abbassamenti relativi (linea continua con belt truss, linea tratteggiata senza belt truss) .....	323
Figura 7.100 - Abbassamenti relativi (linea continua con belt truss, linea tratteggiata senza belt truss) .....	323
Figura 7.101 - Spostamenti nella mezzeria del corrente inferiore del B.T. inferiore .....	324
Figura 7.102 - Spostamenti nella mezzeria del corrente inferiore del B.T. superiore.....	324
Figura 7.103 - Azioni assiali nel B.T. inferiore a fine costruzione (in tonnellate, compressioni negative) .....	325
Figura 7.104 - Azioni assiali nel B.T. inferiore a 30000 giorni (in tonnellate, compressioni negative) ...	325
Figura 7.105 - Azioni assiali nel B.T. superiore a fine costruzione (in tonnellate, compressioni negative) .....	325
Figura 7.106 - Azioni assiali nel B.T. superiore a 30000 giorni (in tonnellate, compressioni negative) ..	326
Figura 7.107 - Azioni assiali nella mezzeria dei belt truss.....	326
Figura 7.108 - Momento flettente trave livello 12 .....	327
Figura 7.109 - Momento flettente trave livello 12 .....	327
Figura 7.110 - Taglio trave livello 12 .....	328
Figura 7.111 - Taglio trave livello 12 .....	328
Figura 7.112 - Momento flettente trave livello 12 con e senza B.T.....	329

Figura 7.113 - Momento flettente trave livello 12 con e senza B.T.....	329
Figura 7.114 - Taglio trave livello 12 con e senza B.T.....	330
Figura 7.115 - Taglio trave livello 12 con e senza B.T.....	330
Figura 7.116 - Momento flettente trave livello 36 .....	331
Figura 7.117 - Momento flettente trave livello 36 .....	331
Figura 7.118 - Taglio trave livello 36 .....	332
Figura 7.119 - Taglio trave livello 36 .....	332
Figura 7.120 - Momento flettente trave livello 36 con e senza B.T.....	333
Figura 7.121 - Momento flettente trave livello 36 con e senza B.T.....	333
Figura 7.122 - Taglio trave livello 36 con e senza B.T.....	334
Figura 7.123 - Taglio trave livello 36 con e senza B.T.....	334
Figura 7.124 - Struttura semplificata .....	335
Figura 7.125 - Column shortening colonna 1 al variare del parametro $\delta$ .....	336
Figura 7.126 - Column shortening colonna 1 al variare del parametro $\delta$ .....	337
Figura 7.127 - Column shortening colonna 2 al variare del parametro $\delta$ .....	337
Figura 7.128 - Column shortening colonna 2 al variare del parametro $\delta$ .....	338
Figura 7.129 - Azioni assili colonna 1 al variare del parametro $\delta$ .....	338
Figura 7.130 - Azioni assili colonna 1 al variare del parametro $\delta$ .....	339
Figura 7.131 - Azioni assili colonna 2 al variare del parametro $\delta$ .....	339
Figura 7.132 - Azioni assili colonna 2 al variare del parametro $\delta$ .....	340
Figura 7.133 - Abbassamenti relativi al variare del parametro $\delta$ .....	340
Figura 7.134 - Abbassamenti relativi al variare del parametro $\delta$ .....	341
Figura 7.135 - Momento flettente trave livello 25 al variare del parametro $\delta$ .....	341
Figura 7.136 - Taglio trave livello 25 al variare del parametro $\delta$ .....	342
Figura 7.137 - Belt truss inferiore .....	343
Figura 7.138 - Modello .....	343
Figura 7.139 - C.S. per istanti precedenti e successivi all'applicazione del carico al livello 24 .....	344
Figura 7.140 - C.S. per istanti precedenti e successivi all'applicazione del carico al livello 25 .....	344
Figura 7.141 - Column shortening a fine costruzione.....	345
Figura 7.142 - Column shortening a fine costruzione.....	345
Figura 7.143 - Azioni assiali negli elementi del belt truss inferiore per $t = 715$ giorni .....	346
Figura 7.144 - Modello globale della struttura .....	348
Figura 7.145 - Dettaglio piani interrati .....	349
Figura 7.146 - Dettaglio piani interrati .....	349
Figura 7.147 - Dettaglio in corrispondenza del belt truss inferiore .....	350
Figura 7.148 - Dettaglio in corrispondenza del belt truss superiore.....	350
Figura 7.149 - Column shortening colonna centrale .....	351
Figura 7.150 - Column shortening colonna centrale .....	351
Figura 7.151 - Azioni assiali colonna centrale.....	352
Figura 7.152 - Azioni assiali colonna centrale .....	352
Figura 7.153 - Column shortening colonna intermedia.....	353
Figura 7.154 - Column shortening colonna intermedia.....	353
Figura 7.155 - Azioni assiali colonna intermedia .....	354
Figura 7.156 - Azioni assili colonna intermedia.....	354
Figura 7.157 - Column shortening colonna laterale .....	355
Figura 7.158 - Column shortening colonna laterale .....	355
Figura 7.159 - Azioni assiali colonna laterale.....	356
Figura 7.160 - Azioni assiali colonna laterale.....	356
Figura 7.161 - Column shortening nucleo .....	357
Figura 7.162 - Column shortening nucleo .....	357
Figura 7.163 - Azioni assiali nucleo .....	358
Figura 7.164 - Azioni assiali nucleo .....	358
Figura 7.165 - Spostamenti relativi (linea continua modello globale, linea tratteggiata quinta con B.T.) .....	359
Figura 7.166 - Spostamenti relativi (linea continua modello globale, linea tratteggiata quinta con B.T.) .....	359

Figura 7.167 - Momento per unità di lunghezza in direzione longitudinale .....	360
Figura 7.168 - Momento per unità di lunghezza in direzione trasversale.....	360
Figura 7.169 - Vista del modello e dettagli dei belt trusses in calcestruzzo .....	362
Figura 7.170 - Column shortening colonna centrale .....	363
Figura 7.171 - Column shortening colonna centrale .....	363
Figura 7.172 - Azioni assiali colonna centrale.....	364
Figura 7.173 - Azioni assiali colonna centrale.....	364
Figura 7.174 - Column shortening colonna intermedia.....	365
Figura 7.175 - Column shortening colonna intermedia.....	365
Figura 7.176 - Azioni assiali colonna intermedia .....	366
Figura 7.177 - Azioni assiali colonna intermedia .....	366
Figura 7.178 - Column shortening colonna laterale .....	367
Figura 7.179 - Column shortening colonna laterale .....	367
Figura 7.180 - Azioni assiali colonna laterale.....	368
Figura 7.181 - Azioni assiali colonna laterale.....	368
Figura 7.182 - Column shortening nucleo .....	369
Figura 7.183 - Column shortening nucleo .....	369
Figura 7.184 - Azioni assiali nucleo .....	370
Figura 7.185 - Azioni assiali nucleo .....	370
Figura 7.186 - Abbassamenti relativi (linea continua quinta con B.T. in calcestruzzo, linea tratteggiata quinta con B.T. in acciaio.....	371
Figura 7.187 - Abbassamenti relativi (linea continua quinta con B.T. in calcestruzzo, linea tratteggiata quinta con B.T. in acciaio.....	371
Figura 7.188 - Spostamenti nella dei belt trusses .....	372
Figura 7.189 - Momento B.T. inferiore .....	372
Figura 7.190 - Momento B.T. superiore.....	373
Figura 7.191 - Struttura omogenea con un vincolo elastico posticipato ed azioni statiche .....	374
Figura 7.192 - Struttura omogenea con un vincolo visco - elastico posticipato ed azioni statiche .....	376
Figura 7.193 - Andamento dell' iperstatica per $\omega = 0,1$ .....	378
Figura 7.194 - Abbassamento della sommità della colonna per $\omega = 0,1$ .....	379
Figura 7.195 - Andamento dell' iperstatica per $\omega = 0,5$ .....	379
Figura 7.196 - Abbassamento della sommità della colonna per $\omega = 0,5$ .....	380
Figura 7.197 - Andamento dell' iperstatica per $\omega = 0,9$ .....	380
Figura 7.198 - Abbassamento della sommità della colonna per $\omega = 0,9$ .....	381
Figura 7.199 - Struttura con vincoli rigidi posticipati ad istanti diversi.....	381
Figura 7.200 - Colonna interna .....	383
Figura 7.201 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 720$ gg ( $d = 125$ cm).....	384
Figura 7.202 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 720$ gg ( $d = 125$ cm).....	384
Figura 7.203 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 30000$ gg ( $d = 125$ cm) .....	385
Figura 7.204 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 30000$ gg ( $d = 125$ cm) .....	385
Figura 7.205 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 720$ gg ( $d = 140$ cm).....	386
Figura 7.206 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 720$ gg ( $d = 140$ cm).....	386
Figura 7.207 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 30000$ gg ( $d = 140$ cm) .....	387
Figura 7.208 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 30000$ gg ( $d = 140$ cm) .....	387
Figura 7.209 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 720$ gg ( $d = 170$ cm).....	388
Figura 7.210 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 720$ gg ( $d = 170$ cm).....	388
Figura 7.211 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 30000$ gg ( $d = 170$ cm) .....	389
Figura 7.212 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 30000$ gg ( $d = 170$ cm) .....	389
Figura 7.213 - Colonna laterale .....	390
Figura 7.214 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 720$ gg ( $d = 100$ cm).....	391
Figura 7.215 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 720$ gg ( $d = 100$ cm).....	391
Figura 7.216 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 30000$ gg ( $d = 100$ cm) .....	392
Figura 7.217 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 30000$ gg ( $d = 100$ cm) .....	392
Figura 7.218 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 720$ gg ( $d = 120$ cm).....	393
Figura 7.219 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 720$ gg ( $d = 120$ cm).....	393
Figura 7.220 - Tensioni nel calcestruzzo per $t = 30000$ gg ( $d = 120$ cm) .....	394

Figura 7.221 - Tensioni nelle barre d'armatura per $t = 30000$ gg ( $d = 120$ cm) .....	394
Figura 7.222 - Funzioni $R^*(t,t_0)/E_{28}$ (linea tratteggiata $R^*_M/E_{28}$ , linea puntinata $R^*_N/E_{28}$ ) .....	399

## INDICE DELLE TABELLE

Tabella 1 - Risultati ottenuti dall'analisi elastica .....	73
Tabella 2 - Risultati ottenuti dall'analisi elastica .....	97
Tabella 3 - Confronto <i>Conventional Analysis</i> - <i>Construction Sequence Analysis</i> .....	176
Tabella 4 - Dati struttura .....	183
Tabella 5 - Dati struttura .....	242
Tabella 6 - Sezioni colonne di facciata .....	278
Tabella 7 - Carichi sulla colonna.....	279
Tabella 8 - Caratteristiche struttura.....	282
Tabella 9 - Sezioni colonne di facciata .....	291
Tabella 10 - Caratteristiche dei nuclei .....	295
Tabella 11 - Caratteristiche delle travi .....	296
Tabella 12 - Caratteristiche struttura .....	335