

POLITECNICO DI MILANO  
Facoltà di Ingegneria dell'Informazione  
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica  
Dipartimento di Elettronica e Informazione



# **ALGORITMI PER IL CONTROLLO ATTIVO DELLE VIBRAZIONI NEGLI ELICOTTERI**

Relatore: Prof. Marco Lovera

Tesi di laurea specialistica di:  
Niccolò Moretti  
Matricola n. 739544

Anno accademico 2011-2012



# Sommario

In campo elicotteristico uno dei fattori che limita maggiormente lo sviluppo in termini di comfort, affidabilità e prestazioni sono le vibrazioni create dal rotore. Infatti ad ogni rivoluzione delle pale si creano una serie di forze aerodinamiche, date dall'impatto con l'aria, che si diffondono sotto forma di vibrazioni in tutta la fusoliera.

Per più di cinquant'anni questo problema è stato oggetto di studi che hanno portato allo sviluppo di diverse tecnologie per la riduzione delle vibrazioni. Le tecnologie più performanti e di sviluppo più recente sono le tecniche di controllo attivo: vengono utilizzati una serie di attuatori, posti o sul rotore o in varie parti della fusoliera, per controbilanciare e cancellare alla radice le vibrazioni create dalle dinamiche del rotore e delle pale. Gli attuatori sono gestiti da un sistema di controllo che, prendendo in ingresso le accelerazioni lungo la fusoliera, restituisce in uscita i segnali da inviare agli attuatori per cancellare le vibrazioni. Questi sistemi possono essere regolati da diversi algoritmi di controllo.

Scopo di questa tesi è analizzare uno di questi algoritmi dandone una formulazione lineare tempo invariante e conducendo un'analisi di stabilità robusta a fronte di un'incertezza parametrica.

Vengono infine presentati e discussi i risultati dell'analisi confrontati con due sistemi di controllo, con regolatore discreto e con regolatore continuo, applicati ad un modello a singola pala che approssima le dinamiche reali di un elicottero Agusta A-109.



# Indice

<b>Sommario</b>	<b>i</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Tecniche di controllo delle vibrazioni: stato dell'arte . . . . .	2
1.1.1 Tecniche di controllo passivo . . . . .	2
1.1.2 Tecniche di controllo attive . . . . .	4
1.2 Approccio considerato e contributi . . . . .	12
1.3 Organizzazione della tesi . . . . .	14
<b>2 Formulazione del problema di controllo</b>	<b>15</b>
2.1 Descrizione del modello dinamico . . . . .	15
2.2 L'algoritmo di controllo T-matrix . . . . .	18
2.3 Formulazione di Bernstein . . . . .	20
2.3.1 Analisi di convergenza dell'uscita del sistema . . . . .	22
2.4 Realizzazione dei blocchi per la conversione da tempo continuo a discreto . . . . .	24
<b>3 Robustezza del sistema di controllo</b>	<b>27</b>
3.1 L'incertezza parametrica . . . . .	27
3.1.1 Regolatore con incertezza parametrica . . . . .	28
3.1.2 Analisi di stabilità robusta . . . . .	30
3.2 Modello discreto-continuo: stabilità robusta e prestazioni nominali	34
3.3 Modello continuo-continuo . . . . .	40
3.3.1 Analisi di stabilità del modello continuo-continuo con in- certezza . . . . .	43
<b>4 Simulazioni e risultati</b>	<b>47</b>
4.1 Modello per singola pala . . . . .	47
4.1.1 Modello <i>out of plane</i> di pala del rotore . . . . .	47
4.1.2 L'equazione di base del momento flettente . . . . .	48
4.1.3 Risoluzione dell'equazione di pala attraverso l'espansione modale . . . . .	50

4.1.4	Carichi aerodinamici distribuiti . . . . .	51
4.1.5	Forza di taglio verticale . . . . .	52
4.1.6	Modello normalizzato nella forma di spazio di stato . . . . .	52
4.2	Simulazioni e risultati . . . . .	55
4.2.1	Casi di studio . . . . .	55
4.2.2	Parametri del modello: l'elicottero Agusta A-109 . . . . .	56
4.2.3	Scelta del parametro incerto . . . . .	56
4.2.4	Simulazioni . . . . .	57
4.3	Conclusioni . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>73</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>77</b>

# Elenco delle figure

1.1	Schema generico del sistema di isolamento.[1] . . . . .	3
1.2	Esempio di sistema passivo di assorbimento: BIFILAR della Sirkosky. . . . .	3
1.3	Schema generico del sistema di isolamento attivo.[1] . . . . .	6
1.4	Architettura del controllo HHC. . . . .	8
1.5	Attuatori sul rotore per il controllo di volo con in serie attuatori per il controllo HHC.[1] . . . . .	9
1.6	Attuatori sul rotore per il controllo di volo con gli attuatori per il controllo IBC sulla parte rotante.[1] . . . . .	9
1.7	Architettura del controllo ACSR. . . . .	12
2.1	Schema del sistema dinamico. . . . .	16
2.2	Schema a blocchi del sistema. . . . .	17
2.3	Diagramma a blocchi del sistema: in evidenza la struttura del controllore. . . . .	20
2.4	Architettura del controllo HHC. [2] . . . . .	21
2.5	Schema del blocco che scompone il segnale nei suoi coefficienti di Fourier. . . . .	25
2.6	Schema del blocco che ricompono il segnale dai coefficienti di Fourier. . . . .	25
2.7	Schema di controllo generale completo di blocchi per la gestione del passaggio tra tempo continuo e discreto. . . . .	26
2.8	Uscita del sistema di prova a fronte di un disturbo sinusoidale. . . . .	26
3.1	Uscita del sistema con incertezza caratterizzato da $\delta = 1$ , $\rho = 0.5$ e $r_p = 0.4$ . . . . .	35
3.2	Analisi della stabilità robusta al variare dei parametri $\delta$ e $\rho$ con $r_p = 0.4$ . . . . .	36
3.3	Analisi della stabilità al variare dei parametri $\delta$ e $r_p$ con $\rho = 0$ . . . . .	37
3.4	Guadagno a regime al variare dei parametri $\delta$ e $\rho$ . . . . .	38
3.5	Uscita $z$ del modello con parametro dell'incertezza $\delta = 0$ e parametro del controllore $\rho = 0.5$ . . . . .	39
3.6	Uscita $z$ del modello con parametro dell'incertezza $\delta = 0$ e parametro del controllore $\rho = 1$ . . . . .	39

3.7	Uscita $z$ del modello con $\delta = 1$ e parametro del controllore $\rho = 3$ .	39
3.8	Uscita $z$ del modello con $\delta = -1$ e parametro del controllore $\rho = 1$ .	39
3.9	Schema equivalente dell'algoritmo HHC nel dominio continuo.	40
3.10	Schema a blocchi del sistema continuo-continuo: il sistema da controllare $G(s)$ è in cascata al controllore continuo con funzione di trasferimento $H(s)$ .	41
3.11	Uscita del sistema con controllore continuo.	43
3.12	Schema a blocchi del sistema continuo-continuo con incertezza.	44
3.13	Schema a blocchi del sistema continuo-continuo con incertezza nella forma $M-\Delta$ .	44
4.1	Schema del modello <i>out of plane</i> della pala [3].	48
4.2	Uscita del sistema di controllo discreto-continuo, con sistema da controllare con $n = 1$ e peso del controllo $\rho=0$ .	58
4.3	Uscita del sistema di controllo continuo-continuo con sistema da controllare con $n = 1$ .	58
4.4	Analisi di stabilità robusta del modello di pala con $n = 1$ e con parametro di incertezza $r_\nu = 0.2$ .	59
4.5	Uscita del sistema di controllo discreto-continuo, modello con $n = 4$ e peso del controllo $\rho=0$ .	60
4.6	Uscita del sistema di controllo continuo con controllore a tempo continuo e modello con $n = 4$ .	61
4.7	Uscita del sistema con controllore discreto, modello del processo da controllare con $n = 4$ e peso del controllo $\rho = 1$ .	61
4.8	Analisi di stabilità robusta del modello di pala con $n = 4$ e con parametro di incertezza $r_\nu = 0.2$ .	62
4.9	Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ al variare del parametro $\delta$ .	62
4.10	Diagramma di Bode della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ al variare del parametro $\delta$ .	63
4.11	Particolare del diagramma di Bode del modulo di Figura 4.9.	63
4.12	Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ , al variare del parametro $\mu$ .	64
4.13	Diagramma di Bode della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ , al variare del parametro $\mu$ .	65
4.14	Particolare del diagramma di Bode in Figura 4.12.	65



4.15	Analisi di stabilità robusta al variare del parametro $\mu$ : sono evidenziati i punti per cui è stato effettuato il raffronto con il modello in simulazione; viene indicato, da sinistra a destra, prima la stabilità stimata dall'analisi e poi quella osservata nelle simulazioni. . . . .	67
4.16	Uscita del sistema caratterizzato da $\rho = 0.1$ e $\mu = 0.3$ . . . . .	67
4.17	Uscita del sistema caratterizzato da $\rho = 1$ e $\mu = 0.3$ . . . . .	68
4.18	Diagramma di Bode del modulo del peso dell'incertezza $W(s)$ e l'errore relativo $\frac{G_0(s)-G_{0.3}(s)}{G_0(s)}$ . . . . .	69
4.19	Raffronto tra il diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento $F_0$ e $\frac{1}{W(s)}$ . . . . .	70
4.20	Analisi di stabilità robusta al variare del parametro $\mu$ nel sistema con controllore continuo: sono evidenziati i punti per cui è stato effettuato il raffronto con il modello in simulazione; viene indicata, da sinistra a destra, prima la stabilità stimata dall'analisi e poi quella osservata nel sistema con il regolatore continuo. . . . .	70
4.21	Particolare del diagramma di Bode del modulo di $F_0$ e $\frac{1}{W(s)}$ nel caso in cui $\mu = 0.2$ . . . . .	71



# Elenco delle tabelle

3.1	Tabella riassuntiva dei valori di $\delta$ per i quali il sistema in simulazione perde la stabilità. . . . .	36
4.1	Caratteristiche meccaniche ed aerodinamiche del rotore dell'elicottero Agusta A-109. . . . .	56
4.2	Tabella riassuntiva delle prove di stabilità del sistema in simulazione al variare di $\mu$ e di $\rho$ . . . . .	66



# Capitolo 1

## Introduzione

L'elicottero è un velivolo unico nel suo genere e difficilmente sostituibile grazie alla sua abilità di decollare ed atterrare verticalmente e alla sua capacità di 'hovering' o volo a punto fisso. Questi aeromobili fin dai primi modelli hanno avuto un rapido progresso in termini di performance, maneggevolezza, comfort ed efficienza.

I moderni elicotteri soffrono di alcuni problemi che ne limitano l'ulteriore sviluppo. Gli aspetti che ne ostacolano maggiormente l'evoluzione sono gli alti livelli di vibrazioni e di rumore generati dal rotore. Il rumore limita la diffusione dell'elicottero sia per il trasporto pubblico sia per gli impieghi militari; le vibrazioni vanno a incidere sul comfort dell'equipaggio e dei passeggeri e sulla affidabilità di tutte le componenti elettroniche e meccaniche, il che si traduce nella necessità di una maggiore manutenzione e dunque in un aumento dei costi.

Per cercare di risolvere il problema delle vibrazioni, durante gli ultimi cinquanta'anni, sono stati studiati diversi approcci. Le prime tecnologie utilizzate erano di tipo passivo finché l'evoluzione tecnologica non ha permesso di passare alle più performanti tecnologie di controllo attivo.

Le tecnologie per il controllo attivo delle vibrazioni sono state studiate per lungo tempo e sono ancora tutt'ora sotto soggetto di numerose analisi. I primi studi si sono concentrati sulla tecnologia HHC - Higer Harmonic Control, poi evoluta in IBC - Individual Blade Control.

Queste tecnologie hanno l'obbiettivo di ridurre le vibrazioni direttamente alla loro fonte, il rotore, cercando di annullare le forze oscillatorie, che creano le vibrazioni, attraverso attuatori idraulici. Gli attuatori sono comandati da sistemi di controllo con retroazione che governano l'intero sistema attraverso specifici algoritmi di controllo.

Lo scopo di questa tesi è quello di analizzare questi algoritmi, studiando il problema di controllo nel caso in cui i modelli che descrivono la dinamica di funzionamento dell'elicottero presentino dei parametri incerti.

## 1.1. Tecniche di controllo delle vibrazioni: stato dell'arte

---

Inizialmente si presenta un'analisi di robustezza per questo tipo di algoritmi, successivamente applicata ad un modello rappresentativo delle dinamiche reali di un elicottero, dandone una validazione sperimentale a livello di simulazione.

## 1.1 Tecniche di controllo delle vibrazioni: stato dell'arte

Nell'ambito della riduzione delle vibrazioni vi sono due categorie di metodi: metodi passivi e metodi attivi. I metodi di riduzione passivi consistono sostanzialmente nell'inserire in diverse parti dell'elicottero elementi passivi (molle, isolatori, ammortizzatori), che non richiedono alcuna fonte di energia e che riducono le vibrazioni create dal rotore e dall'impatto delle pale con l'aria.

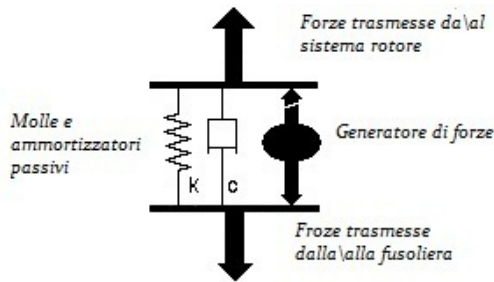
I metodi di riduzione attiva sono sistemi ad anello chiuso, che consistono invece in attuatori idraulici posti in punti critici del rotore e della fusoliera che controbilanciano l'effetto delle vibrazioni. Gli attuatori sono gestiti da un sistema di controllo, il quale acquisisce diverse misure delle vibrazioni da una serie di sensori localizzati in punti strategici della fusoliera; grazie a queste rilevazioni il sistema di controllo fornisce in tempo reale le forze che devono sviluppare gli attuatori per annullare le vibrazioni.

### 1.1.1 Tecniche di controllo passivo

Nel passato, gli sforzi per ridurre le vibrazioni negli elicotteri sono stati concentrati sullo sviluppo delle tecniche di controllo passive (cioè sull'aggiunta di smorzatori di vibrazioni e isolanti) poiché le tecnologie di calibrazione, di controllo e gli attuatori stessi non erano sufficientemente sviluppati. Questi dispositivi passivi influenzano le vibrazioni solo dopo che queste sono state generate e solitamente comportano una grande penalizzazione in termini di peso da trasportare.

I sistemi di riduzione passivi offrono una vasta varietà di tipologie ma possono essere classificati in due categorie: isolatori o assorbitori. Entrambi fondamentalmente consistono in molle ed ammortizzatori, dove, le molle supportano tutto il carico dell'elicottero e gli ammortizzatori sono usati per dissipare l'energia (Figura 1.1).

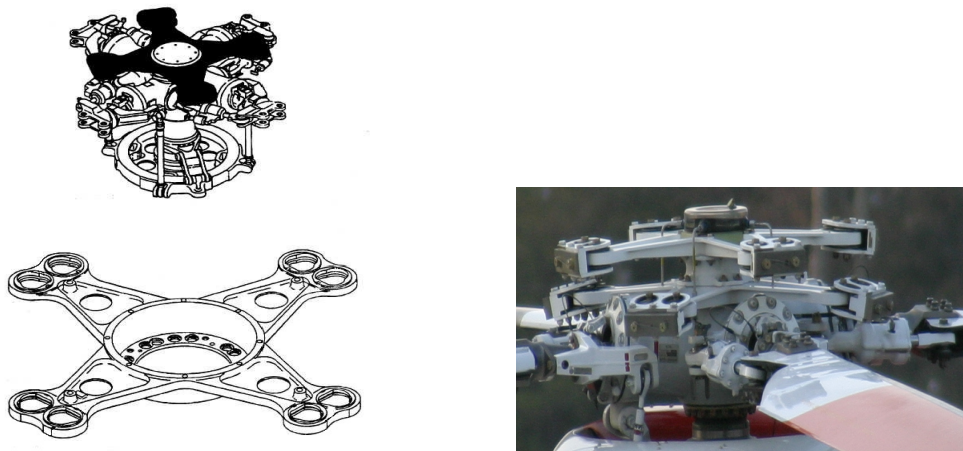
I sistemi di isolamento permettono di isolare la fusoliera dalla sorgente delle vibrazioni, il rotore, con la peculiarità di poter anche isolare solo alcune parti sensibili della fusoliera. I sistemi isolatori passivi principali attualmente disponibili sono: soft mounts, DAVI Mounts (Dynamic Antiresonant Vibration Isolator, Kaman Aircraft Company), IRIS Isolation System (Boeing), SARIB System (Aerospatial Helicopters Ltd.), focal pylon isolation system, nodal mounts (Bell-Nodamagic).



**Figura 1.1:** Schema generico del sistema di isolamento.[1]

I sistemi di assorbimento invece assorbono le vibrazioni generate; possono assorbire le vibrazioni direttamente alla sorgente, quindi sul rotore, oppure possono anche essere usati per ridurre le vibrazioni localmente, in aree specifiche della fusoliera.

I sistemi di assorbimento più utilizzati sono: BIFILAR absorber (Sirkosky)(in Figura 1.2), blade mounted absorber(with pendulums, Boeing), rotor head absorber, spring mass absorber, LIVE isolation system, cabin isolation absorber.



(a) Schema e posizionamento del sistema sul rotore.

(b) Dettaglio del rotore con BIFILAR a 4 elementi su un velivolo S-76.

**Figura 1.2:** Esempio di sistema passivo di assorbimento: BIFILAR della Sirkosky.

In passato si è fatto uso quasi esclusivamente dei sistemi di riduzione passiva poiché sono comunque dotati di una buona resa ed erano la migliore soluzione, se non l'unica, finché recentemente, sia i costi e le dimensioni dei computer sia gli sviluppi della tecnologia dei sistemi di controllo hanno reso disponibili i sistemi di controllo attivi.

Oggi gli elicotteri hanno fusoliera più leggere, maggiore velocità di crociera ed elevata manovrabilità e, associati a questi miglioramenti, vi sono anche crescenti e stringenti requisiti di comfort. Tutti questi fattori limitano l'utilità dei sistemi

## 1.1. Tecniche di controllo delle vibrazioni: stato dell'arte

---

passivi poiché aumentando gli standard di velocità, comfort e manovrabilità le performance di riduzione delle vibrazioni (a parità di sistema utilizzato) diminuiscono e questo rende necessario usare assorbitori o isolatori più grossi e più pesanti. Dunque cercando di costruire elicotteri più leggeri il peso di questi sistemi, che in teoria sarebbero capaci di ridurre le vibrazioni ai livelli richiesti, è troppo elevato; infatti per alcuni tipi di sistemi passivi il peso può essere davvero considerevole arrivando anche all'1% della massa totale dell'elicottero.

Oltre al peso considerevole, un ulteriore difetto altrettanto limitante, consiste nel fatto che questi sistemi sono caratterizzati da una totale mancanza di adattabilità rispetto alle condizioni di volo, alla frequenza di rotazione del rotore e alle dinamiche strutturali quali il peso del carico, il numero di passeggeri, il peso della benzina ecc. ; devono quindi essere tarati in fabbrica senza poi potersi adattare ad ogni singola condizione di volo specifica, fornendo in media prestazioni discrete, ma non ottimali.

Un ulteriore svantaggio è che alcuni di questi sistemi producono riduzioni delle vibrazioni localizzate solo vicino alla fonte di queste ultime, senza curarsi della loro diffusione in tutta la fusoliera.

In conclusione i sistemi passivi sono stati utilizzati poiché sono sistemi relativamente semplici, senza la necessità di collegarsi a fonti di energia e hanno una buona stabilità, senza però la possibilità di adattarsi minimamente alle condizioni di volo. Essendo questa limitazione particolarmente severa e penalizzante in questo ambito, con l'innovazione delle tecnologia di controllo si preferisce passare al più performante controllo attivo.[1]

### 1.1.2 Tecniche di controllo attivo

Negli ultimi anni sono state studiate diverse tecniche di controllo attivo, per superare gli ostacoli legati ai sistemi di riduzione passivi, e sono tuttora sotto un'attenta analisi delle industrie elicotteristiche[4] [5].

I sistemi attivi a differenza di quelli passivi, offrono il potenziale di poter soddisfare sia requisiti di comfort sempre più stringenti sulle varie aree della fusoliera, sia i crescenti requisiti di performance degli elicotteri moderni come velocità, maneggevolezza e leggerezza. Inoltre le tecniche di controllo attivo hanno l'ulteriore capacità di adattarsi ai cambiamenti di velocità, condizioni del rotore e dinamiche strutturali.

In linea di principio questi sistemi generano forze o momenti che si oppongono alle forze già esistenti prevenendo l'eccitazione delle dinamiche della fusoliera (che creano poi le sgradevoli vibrazioni per tutti i motivi precedentemente elencati) da parte delle forze vibratorie del rotore.

A seconda della sede in cui vengono applicate queste forze le tecniche di controllo attivo si distinguono in tre categorie principali:



- **Active Isolation:** le forze sono applicate al collegamento tra rotore e fusoliera in modo da isolare quest'ultima dalle vibrazioni del rotore;
- **Active Rotor Control:** le forze sono applicate al rotore in modo da controllare le vibrazioni prima che si diffondano alla fusoliera;
- **Active Control of Structural Response - ACSR:** le forze sono applicate direttamente nella struttura della fusoliera in modo da ridurre le vibrazioni dove è necessario.

In generale il vantaggio offerto dalle tecniche di controllo attivo offrono è che hanno il potenziale per sopperire a molti degli svantaggi delle tecniche passive. I punti di forza sono:

- i sistemi attivi possono erogare o assorbire energia tramite gli attuatori mentre i sistemi passivi possono solo dissipare o immagazzinare energia attraverso le molle o gli smorzatori;
- i sistemi attivi possono essere modificati a piacimento da algoritmi di controllo per stabilire particolari specifiche di performance al contrario dei sistemi passivi che non hanno questa possibilità;
- i sistemi attivi possono produrre forze localizzate in funzione di molte variabili, alcune delle quali possono essere misurate in qualsiasi punto dell'elicottero. Quindi, per esempio, è possibile generare una forza vicino al rotore che varia a seconda di un segnale che caratterizza una certa condizione localizzata in un punto critico del sistema, ad esempio il rotore di coda. I sistemi passivi al contrario assorbono le forze relative solo al movimento locale, cioè rispondono a stimoli circoscritti alla zona dove è posizionato il sistema.

I principali svantaggi dei sistemi attivi invece sono:

- richiedono una fonte esterna di energia (oltre ad altri componenti di vario genere come pompe, tubi, connettori ecc.);
- hanno una elevata complessità e un maggiore costo a causa della necessità di attuatori speciali, sensori e sistemi di calcolo (quindi costi hardware e software);
- in generale diminuiscono l'affidabilità. Essendoci infatti molti più componenti ed essendo alcuni di questi molto delicati, l'affidabilità totale del sistema è inferiore rispetto ad un elicottero che monta un sistema passivo. Questo si ripercuote direttamente sull'affidabilità complessiva del velivolo.

## 1.1. Tecniche di controllo delle vibrazioni: stato dell'arte

---

L'affidabilità è un importante fattore che contribuisce direttamente al costo effettivo dell'elicottero.

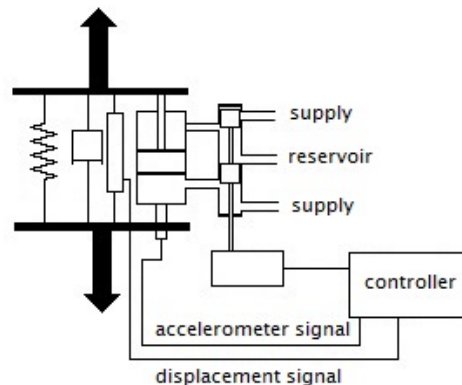
In ogni caso lo sviluppo delle tecnologie (nei relativi campi di interesse es. microprocessori, attuatori o sensori) potranno permettere ai sistemi attivi di sorpassare i sistemi passivi non solo in termini di peso e performance, ma anche in termini di prezzo e affidabilità.[1]

### Active Isolation

L'isolamento attivo, come quello passivo, cerca di dividere la fonte delle vibrazioni dal resto della fusoliera. Una delle difficoltà riscontrate nelle varie tecniche di isolamento è che lo stesso meccanismo deve sopportare sia i carichi verticali transitori (dati da manovre o condizioni del vento) sia i carichi verticali statici (il peso dell'elicottero stesso).

I sistemi passivi risolvono questo problema utilizzando i principi fisici antirisonanza; una soluzione alternativa è quella di usare delle tecniche di controllo attive. In questo caso la fusoliera è sospesa sotto il blocco del rotore attraverso degli attuatori.

In pratica l'isolamento attivo consiste in uno o più attuatori idraulici, controllati da una servo-valvola, e da un amplificatore in parallelo ad una molla, la quale funge da sospensione di riserva nel caso l'attuatore si guasti sostenendo i carichi stazionari principali.



**Figura 1.3:** Schema generico del sistema di isolamento attivo.[1]

Il problema principale dei sistemi di isolamento passivo è il conflitto tra i requisiti per provvedere all'isolamento e i requisiti per mantenere la disposizione statica tra il blocco rotore-trasmissione e il velivolo, rispettando limiti ragionevoli. Con un sistema attivo è possibile modificare la rigidità degli attuatori in modo che non ci sia alcuna resistenza al movimento alla frequenza di passaggio delle pale; così facendo il sistema appare molto smorzato rispetto alle eccitazioni sinusoidali

dovute al passaggio delle pale e molto rigido rispetto alle accelerazioni dovute alle manovre di volo e di atterraggio. Ciò può essere ottenuto usando un ciclo di controllo con feedback locale intorno ad ogni attuatore. Le leggi di controllo per annullare le vibrazioni solitamente sono progettate con segnali raccolti da sensori posti nelle aree della fusoliera destinate all'equipaggio o ai passeggeri.

Come mostrato in Figura 1.3 il sistema attivo è ottenuto sostituendo i meccanismi del sistema passivo (molle, pendoli e altri componenti smorzanti) con uno o più attuatori idraulici; la caratteristica dinamica dell'attuatore è determinata da un sistema di controllo che viene comandato da due segnali di feedback: il segnale delle accelerazioni trasmesse alla fusoliera e il segnale di spostamento, rilevato da un trasduttore montato lungo l'interfaccia tra la trasmissione e la fusoliera.

Gli obiettivi essenziali che un sistema di isolamento attivo deve poter raggiungere possono essere riassunti come segue:

- controllare le vibrazioni del velivolo, isolando la fusoliera dalle armoniche generate dal rotore, alla frequenza di passaggio delle pale, nel range di velocità a cui opera il motore;
- controllare gli spostamenti lungo l'interfaccia tra la trasmissione e la fusoliera, a causa delle limitazioni imposte dall'interfaccia stessa, usando un ciclo di controllo a bassa frequenza per limitare gli spostamenti statici o quasi-statici in volo e durante le manovre.

Purtroppo, come la maggior parte di questi sistemi, l'isolamento attivo ha pesanti svantaggi che ne compromettono spesso l'utilizzo; i più penalizzanti sono:

- non tutti gli elicotteri hanno strutture appropriate che permettono l'installazione del sistema di isolamento attivo, che può essere molto voluminoso;
- diversi tipi di collegamento tra il blocco trasmissione-rotore e la fusoliera possono compromettere le prestazioni del sistema di isolamento. Infatti per isolare completamente un rotore, ad esempio collegato alla fusoliera in 4 punti di assemblaggio, sono necessari 12 attuatori, uno per ogni asse per ogni montante. Di conseguenza il peso e la complessità della struttura che isola effettivamente la fusoliera dal rotore possono diventare proibitive;
- è necessario fare delle considerazioni riguardo ai problemi di sicurezza che possono sorgere connettendo la fusoliera al rotore tramite attuatori idraulici che non sono ovviamente robusti tanto quanto una struttura fissa.[1]

### **Active Rotor Control**

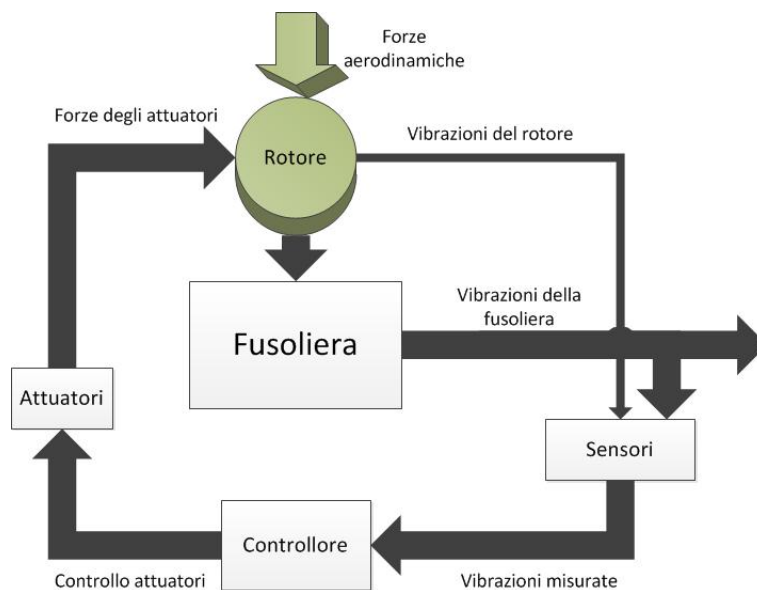
Il controllo attivo del rotore consiste nel cercare di eliminare le vibrazioni indesiderate direttamente sul mozzo che collega il rotore alle pale. Molte delle

## 1.1. Tecniche di controllo delle vibrazioni: stato dell'arte

prime ricerche nel controllo attivo e la maggior parte delle ricerche effettuate fino ad oggi sono state concentrate su una forma di controllo conosciuta come Higher Harmonic Control. L'HHC è una tecnica che punta a ridurre le forze vibratorie indesiderate direttamente nel rotore, attraverso la sovrapposizione di un'eccitazione controllata, sull'asse di pitch, all'eccitazione delle pale del rotore principale, alla prima risposta in frequenza delle vibrazioni incontrollate.[6]

Le forze date in input dall' HHC sono applicate in aggiunta e in modo totalmente separato al comando ciclico e collettivo del pilota usato per controllare l'elicottero; poiché esse lavorano a una frequenza maggiore rispetto a  $\Omega$  (dove  $\Omega$  è la velocità di rotazione del rotore), cioè la frequenza di controllo dei comandi ciclico e collettivo, l'HHC non interferisce con i comandi del pilota. Lo scopo del sistema è quello di creare delle oscillazioni delle pale che, adeguatamente sfasate, cancellino esattamente le forze oscillatorie indesiderate del rotore.

Cancellando queste forze alla sorgente si riducono le vibrazioni trasmesse al velivolo.

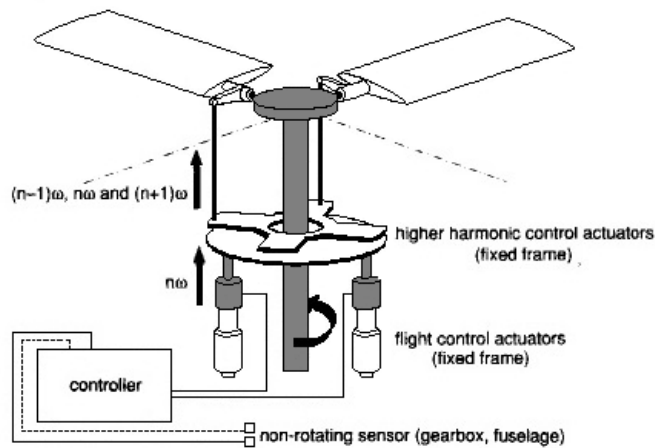


**Figura 1.4:** Architettura del controllo HHC.

Le vibrazioni vengono misurate con dei sensori montati nei punti chiave della fusoliera. Durante ogni ciclo di controllo l'algoritmo esegue un'analisi armonica delle variabili misurate (di solito le forze sull'albero del rotore o le vibrazioni sulla fusoliera). I risultati dell'analisi sono le componenti *seno* e *coseno* alla pulsazione  $N\Omega$  (dove  $N$  è il numero delle pale) delle forze o delle accelerazioni misurate che a loro volta forniscono ampiezza e fase del segnale. Basandosi su queste misurazioni un algoritmo di controllo determina l' ampiezza e la fase dei segnali che devono essere inviati agli attuatori per poter minimizzare le forze trasmesse alla fusoliera e di conseguenza minimizzare le vibrazioni (vedi Figura 1.4).

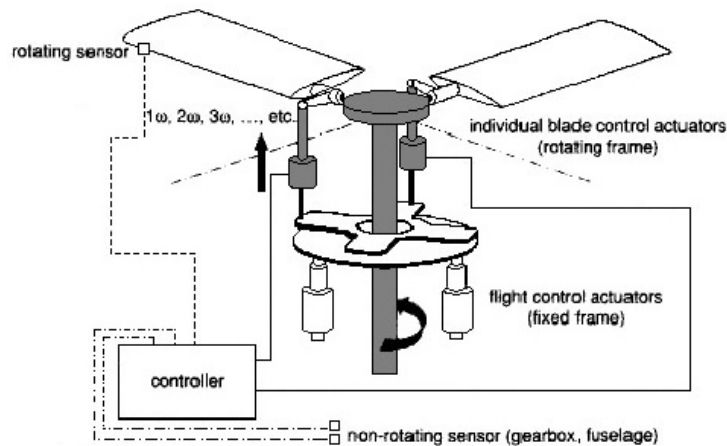
L'algoritmo di controllo usa una matrice di trasferimento, conosciuta come matrice T. Questa è un modello del controllo nel dominio della frequenza che collega i componenti  $N\Omega$  seno e coseno dell'input HHC ai componenti  $N\Omega$  seno e coseno della risposta in frequenza dell'elicottero.

Gli attuatori variano la forza di pitch delle pale alle armoniche superiori alla prima ( $2\Omega$ ,  $3\Omega$  etc.), armoniche che influenzano i carichi oscillatori del rotore e che a loro volta alterano le vibrazioni della fusoliera.



**Figura 1.5:** Attuatori sul rotore per il controllo di volo con in serie attuatori per il controllo HHC.[1]

I due metodi principali per implementare la tecnica HHC posizionano i servo attuatori in serie o con la sezione rotante (conosciuto come IBC individual blade control) o con quella non rotante (active swash plate control) del controllo di volo primario (vedi Figura 1.5).[7]



**Figura 1.6:** Attuatori sul rotore per il controllo di volo con gli attuatori per il controllo IBC sulla parte rotante.[1]

## 1.1. Tecniche di controllo delle vibrazioni: stato dell'arte

---

Il sistema IBC è una generalizzazione del sistema HHC e consiste nel posizionare gli attuatori direttamente sotto ogni pala per controllare le forze di pitch della singola pala. I segnali di controllo per gli attuatori provengono dal sistema di controllo e dall'algoritmo che usa i segnali in arrivo dai sensori posti sulla fusoliera e sulle pale stesse, per generare l'opportuno segnale di controllo.

Vi sono diverse implementazioni del sistema di controllo IBC: la più tradizionale, citata fino ad ora e riportata in Figura 1.6, è basata su attuatori di pitch posizionati alla base di ogni pala nella struttura rotante; una seconda opzione è basata su piccoli flaps integrati nelle pale controllati attivamente; un'ultima opzione è quella di far torcere, in modo controllato, l'intera pala sul proprio asse di roll tramite fibre piezoelettriche incorporate nella pala.

Poiché gli attuatori ruotano con le pale è possibile usare il controllo su tutta la banda di frequenza delle dinamiche delle pale al contrario dell' HHC che è limitato a un controllo discreto alle frequenze  $N\Omega$  e le sue armoniche. Quindi il controllo IBC è potenzialmente più versatile ed efficiente dell'HHC non rotante.[8] Benché la maggior parte della ricerca sia concentrata sull'uso di queste tecniche per la riduzione delle vibrazioni, le tecniche di controllo attive hanno anche le potenzialità di incrementare le performance di volo. In particolare applicando queste tecniche con feedback e controllando le pale individualmente è possibile tentare di aumentare le performance del rotore.

Poiché il rotore principale provvede a fornire la spinta verticale, la propulsione orizzontale e direzionale dell'elicottero, incrementando le sue prestazioni (ad esempio aumentando la reazione delle pale in risposta ai comandi di controllo del pilota e alle condizioni di volo o riducendo gli effetti di turbolenza o diminuendo la possibilità lo stallo delle pale) si otterrebbe un elicottero più agile e con una superiore capacità di manovra. La ricerca ha mostrato che l'HHC è un metodo efficace per ridurre le vibrazioni dell'elicottero in condizioni di volo stazionario. Ci sono comunque diversi rischi tecnici significativi che devono essere superati per poter definire l'HHC una tecnologia perfettamente affidabile e matura. I maggiori rischi che richiedono studi futuri sono:

- il transitorio della risposta del sistema: è importante che il sistema abbia un transitorio, quindi una velocità di risposta, rapido e adeguato in modo da riuscire a seguire i cambiamenti delle condizioni di volo, assicurando la stabilità del sistema;
- il sistema deve garantire buone performance anche con vincoli pratici ingegneristici come gli attuatori attualmente a disposizione (in particolare la loro potenza);
- l'HHC solleva importanti considerazioni sulla navigabilità. Questo riguarda qualsiasi tipo di opzione degli attuatori si scelga per l'HHC, ma ovviamente

è sempre più critico per le implementazioni che usano gli attuatori dei controlli di volo primari e l'IBC. Purtroppo è nella natura dell' HHC influire sui controlli primari, quindi il sistema di controllo e di calcolo dell'HHC deve essere progettato per rispettare gli standard di volo critici in modo da fornire sufficiente ridondanza. Nel caso di malfunzionamento del sistema HHC l'elicottero deve comunque essere in grado di operare e atterrare in sicurezza.

Un ulteriore svantaggio è che le performance dell'HHC sono strettamente legate alla potenza richiesta dal sistema; questa è molto elevata poiché le vibrazioni di pitch delle pale richiedono sforzi di controllo considerevoli che devono essere sostenuti dagli attuatori del controllo di volo primario. Poiché i carichi del rotore sono drammaticamente aumentati con la velocità di crociera le performance dell' HHC sono limitate ad alte velocità.[1]

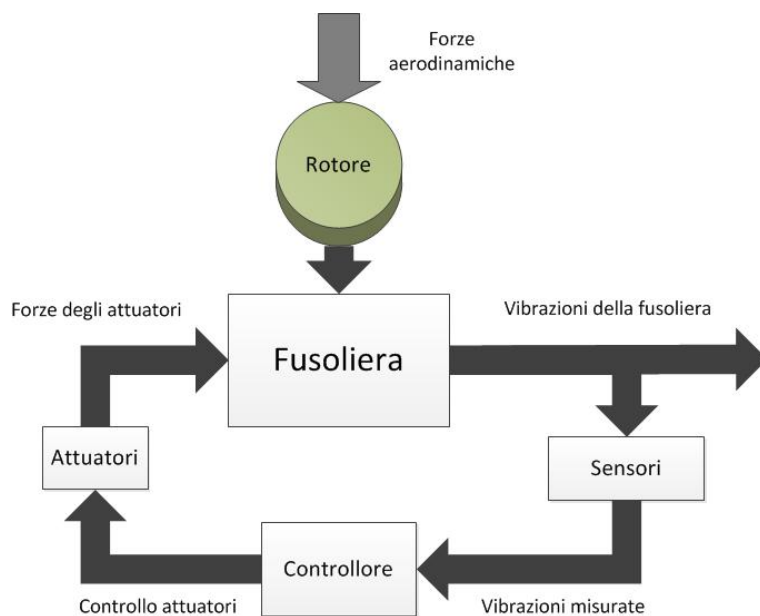
### **Active Control of Structural Response - ACSR**

L'ACSR è una delle tecniche più recenti studiata dalla Westland Helicopter.[9][10] Benché l'obbiettivo sia lo stesso dell'HHC e dell' Active Isolation questa tecnica si comporta in maniera totalmente diversa dalle precedenti. L'HHC tenta di ridurre i livelli delle vibrazioni alle frequenze di passaggio delle pale applicando delle oscillazioni verticali ad alta frequenza alle pale stesse attraverso il mozzo del rotore. Active Isolation cerca di ridurre le vibrazioni attraverso un'interfaccia di isolamento tra rotore e fusoliera. L'ACSR tenta invece di ridurre le vibrazioni generali in tutto l'elicottero applicando una serie di vibrazioni addizionali in punti strategici della fusoliera per eliminare le vibrazioni indesiderate. La strategia di controllo alla base dell'ACSR è la sovrapposizione di vibrazioni: un' eccitazione controllata secondaria è applicata in aggiunta a quella principale, a tutta la struttura, in modo da minimizzare la risposta della struttura stessa alle vibrazioni indesiderate (Figura 1.7).

Nel caso dell'elicottero la risposta di eccitazione della struttura è modificata da una vibrazione sovrapposta generata dagli attuatori; in pratica il principio consiste nel connettere un certo numero di attuatori idraulici in vari punti strategici della fusoliera e applicare forze che controllino le vibrazioni in ognuno di questi punti. L'ampiezza e la fase di ogni forza generata sono calcolate da un algoritmo di controllo ottimo che riceve dati da vari sensori, di solito accelerometri, sparsi lungo tutta la struttura, con l'intero sistema controllato da un algoritmo di controllo adattivo multivariabile.

La minimizzazione avviene poiché la sovrapposizione di vibrazioni con fasi diverse fa sì che i modi principali delle vibrazioni stesse si cancellino tra loro.

## 1.2. Approccio considerato e contributi



**Figura 1.7:** Architettura del controllo ACSR.

L'ACSR ha alcuni vantaggi:

- essendo gli attuatori posizionati lungo la fusoliera e non sul rotore non limitano in alcun modo il sistema di controllo di volo e hanno un impatto minimo sull'aerodinamica del velivolo.
- L'ACSR non richiede grossi dispendi di energia come l'HHC. Le vibrazioni aumentano all'aumentare della velocità di crociera e quindi anche l'energia per contrastarle ma l'incremento di energia richiesto è minore per ridurre le vibrazioni sulla fusoliera rispetto alle vibrazioni delle pale.[1]

## 1.2 Approccio considerato e contributi

Il sistema di controllo attivo HHC è stato, nel corso degli anni, oggetto di numerosi studi soprattutto per quanto riguarda le differenze in termini di robustezza delle sue varie versioni.

Esistono infatti tre principali tipologie: una versione con il controllore a guadagno fisso, che usa una linearizzazione locale dei livelli di vibrazione, una versione con controllore gain-scheduled, che seleziona automaticamente la migliore funzione di trasferimento per il controllore a seconda delle condizioni di volo e infine la versione che utilizza il controllo adattativo aggiornando automaticamente la matrice di trasferimento in tempo reale.

Con una prima serie di test ([11]) si giunse alla conclusione che il controllo a



guadagno fisso aveva un'ottima capacità di ridurre le vibrazioni. Una serie di studi successivi ([12],[13],[14]) osservarono alcuni comportamenti che portavano all'instabilità del sistema dando al controllo adattativo un vantaggio in termini di performance.

Alcuni test effettuati in volo, non in galleria del vento, su diversi tipi di elicottero ([15],[16],[17]), mostrano che sia il controllo adattativo sia il controllo a guadagno fisso riescono comunque entrambi a ridurre significativamente le vibrazioni. Da questi studi è emerso che il controllo a guadagno fisso ha delle performance soddisfacenti in termini di riduzione se il sistema viene tarato con condizioni sufficientemente simili a quelle di volo [18]. Il controllo adattativo, per sua natura, ha invece la capacità di evolversi partendo anche da condizioni di taratura iniziali improprie, adeguandosi alle condizioni di volo.

Questa tesi si pone l'obiettivo di effettuare un'analisi di stabilità robusta dell'algoritmo HHC con controllo a guadagno fisso, per la riduzione delle vibrazioni negli elicotteri, applicata ad un modello a singola pala che rappresenta approssimativamente le dinamiche che coinvolgono il rotore.

Il problema di controllo è formulato attraverso un modello lineare tempo invariante il cui controllore e il sistema da controllare sono entrambi realizzati a tempo discreto.

Gli obiettivi del progetto consistono nella ricerca dell'algoritmo di controllo T-matrix che garantisca la stabilità nominale del suddetto sistema in anello chiuso. Il modello viene perfezionato lasciando il controllore a tempo discreto e considerando il processo da controllare a tempo continuo. Viene inoltre presentata una variante in cui anche il controllore lavora a tempo continuo.

Successivamente viene svolta un'analisi di stabilità robusta dell'algoritmo rispetto ad un'incertezza di tipo parametrico.

Viene infine effettuato uno studio al fine di confrontare i risultati ottenuti nell'analisi teorica con il comportamento in simulazione di un modello a singola pala che approssima le dinamiche di pala dell'elicottero, attribuendo ai risultati dell'analisi un significato fisico reale. In particolare è stata valutata a livello di simulazione, sul sistema discreto-continuo e continuo-continuo, la stabilità robusta al variare di alcuni parametri fisici del modello.

## 1.3 Organizzazione della tesi

La tesi è strutturata nel seguente modo.

Nel *Capitolo 2* si presenta l'algoritmo T-Matrix, l'algoritmo di controllo alla base dell'HHC; si descrive come si ricava la legge di controllo partendo da un generico schema del sistema elicottero, in particolare dando la definizione della matrice T. Si presenta una seconda formulazione del problema di controllo ricavando una legge di controllo basata su una cifra di merito quadratica ed infine si mostra la realizzazione dei blocchi per l'interazione tra il controllore a tempo discreto e il processo da controllare a tempo continuo.

Nel *Capitolo 3* si illustra il concetto di incertezza parametrica all'interno dei sistemi dinamici e come questa viene introdotta all'interno dell'algoritmo T-Matrix attraverso la formulazione basata sulla cifra di merito. Viene presentata l'analisi di stabilità robusta per il problema di controllo trattato e vengono introdotti i due modelli utilizzati successivamente per le simulazioni: modello discreto-continuo e modello continuo-continuo.

Nel *Capitolo 4* viene descritto il modello a singola pala su cui vengono effettuate le simulazioni, partendo dall'equazione di torsione della pala e arrivando alla rappresentazione in forma di spazio di stato del modello linearizzato e normalizzato. Vengono definiti i parametri fisici di funzionamento e il parametro incerto. Si mostrano le simulazioni e i risultati dei sistemi discreto-continuo e continuo-continuo con le leggi di controllo ricavate in precedenza utilizzando il modello a singola pala come processo da controllare. Vengono infine effettuati dei confronti tra i risultati trovati tramite l'analisi teorica e quelli emersi dalle simulazioni.

Nel *Capitolo 5* si riassumono gli obiettivi del lavoro dando poi una valutazione dei risultati ottenuti e delle possibili prospettive di ricerca future.

# Capitolo 2

## Formulazione del problema di controllo

In questo capitolo vengono presentati gli aspetti fondamentali per la descrizione del sistema dinamico, che rappresenta l'elicottero, e delle forze di disturbo periodiche provenienti dal rotore che causano le vibrazioni nella struttura. Viene inoltre introdotto l'algoritmo necessario per il controllo delle suddette vibrazioni.

Nella Sezione 2.1 viene descritto il modello algebrico lineare che rappresenta il sistema dinamico e il disturbo esterno che influenza il sistema; nella Sezione 2.2 si ricava l'algoritmo di controllo T-Matrix che porta alla formulazione della legge di controllo utilizzata per la riduzione delle vibrazioni; nella Sezione 2.3 viene presentata la formulazione del problema considerando l'ipotesi di caratterizzare il controllore con una cifra di merito; nella Sezione 2.4 viene mostrata la formulazione dei blocchi all'interno del sistema di controllo per l'interazione del sistema a tempo continuo con il controllore a tempo discreto.

### 2.1 Descrizione del modello dinamico

Per studiare il comportamento del sistema è necessario creare un modello sul quale è possibile eseguire delle simulazioni e realizzare le analisi di stabilità robusta, scopo di questa tesi.

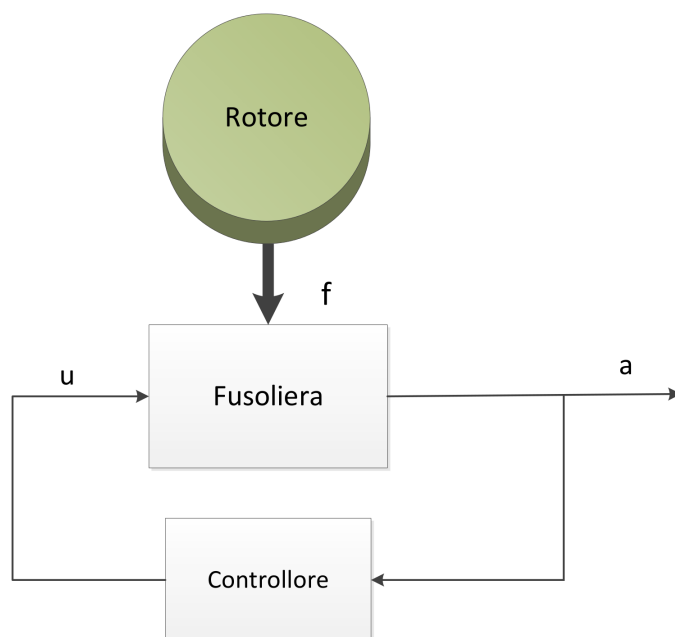
Per ogni rotazione del rotore durante il volo, le pale dell'elicottero, a causa dell'impatto con l'aria, sono sottoposte a carichi aerodinamici; definendo con  $\Omega$  la velocità di rotazione del rotore, questi carichi sono distribuiti alle frequenze  $\Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots, N\Omega$  dove  $N$  è il numero delle pale. Durante il trasferimento delle forze dal rotore alla fusoliera la maggior parte di questi carichi si riducono sensibilmente in modo autonomo; l'unico disturbo che non si attenua e che crea forti vibrazioni nella fusoliera è quello a frequenza di passaggio delle pale  $N\Omega$ . Dunque è necessario implementare un modello che rappresenti le dinamiche della

## 2.1. Descrizione del modello dinamico

fusoliera e il disturbo a questa frequenza.

Il modello algebrico lineare che rappresenta il sistema elicottero è quindi formato dalla fusoliera, la struttura principale di cui si vogliono minimizzare le vibrazioni, dal rotore, fonte delle forze periodiche di disturbo che interagendo con la fusoliera creano le oscillazioni e dal sistema di controllo, composto dal controllore e dagli attuatori che hanno lo scopo di limitare l'effetto delle forze di disturbo.

In base a questa semplice descrizione è possibile formulare il modello matematico.



**Figura 2.1:** Schema del sistema dinamico.

Si prenda in esame lo schema riportato nella Figura 2.1. In questo modello il segnale  $f$  rappresenta le forze trasmesse dal rotore alla fusoliera, descritte come un segnale di disturbo nella forma  $f = f_0 + f_n \sin(N\Omega + \varphi_n)$ , dove d'ora in avanti,  $N$  è il numero delle pale e  $\Omega$  è la velocità di rotazione del rotore;  $u$  è il segnale di controllo e  $a$  è l'uscita del sistema che contiene le  $N/rev$  armoniche di base delle vibrazioni, misurate, ad esempio, attraverso diversi accelerometri in vari punti della fusoliera. Data la rappresentazione di  $f$ , l'uscita  $a$  è quindi espressa nella forma  $a(t) = a_n \sin(N\Omega + \varphi_{a_n})$ . Date queste considerazioni si prende in esame il sistema che opera alla frequenza  $N\Omega$ .

Si consideri ora il solo segnale  $a$ : è possibile scomporlo nei due coefficienti di Fourier *coseno* e *seno*

$$\begin{bmatrix} a_{Cn} \\ a_{Sn} \end{bmatrix}.$$

Il segnale  $a$  così descritto entra nel controllore, dal quale esce quindi il segnale di controllo  $u$  nella forma

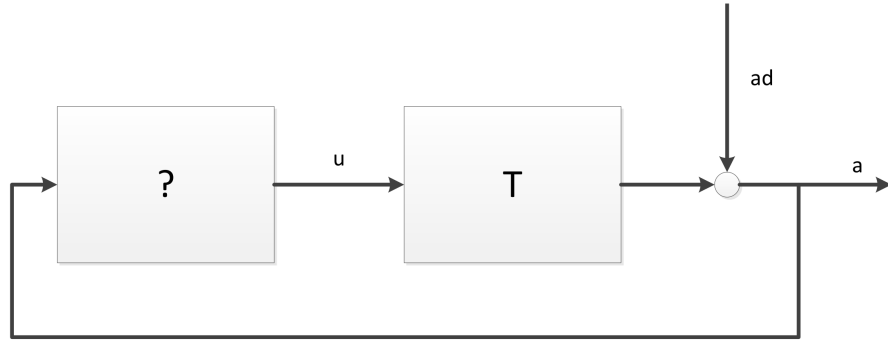
$$\begin{vmatrix} u_{Cn} \\ u_{Sn} \end{vmatrix}$$

che è possibile ricostruire nella sua versione originale tramite la serie di Fourier. Il segnale di uscita  $a(t)$  può essere scritto come

$$a(t) = a_d(t) + |G(jN\Omega)| u_n \sin(N\Omega t + \angle G(jN\Omega) + \varphi_{u_n}) \quad (2.1)$$

dove  $G$  è la funzione di trasferimento associata alla risposta dinamica della fusoliera ai carichi vibratori e  $a_d(t)$  è il disturbo che rappresenta la forza  $f$  trasmessa dal rotore; dunque il segnale  $a$  rappresenta l'uscita dell'intero sistema, cioè della fusoliera con ingresso il segnale di controllo  $u$ .

In Figura 2.2 viene mostrato lo schema a blocchi equivalente al modello generico considerato in Figura 2.1.



**Figura 2.2:** Schema a blocchi del sistema.

Nel modello,  $a$  è l'uscita del sistema,  $u$  è il segnale di controllo,  $a_d$  è il disturbo che rappresenta le vibrazioni, il blocco con il punto di domanda indica il controllore da realizzare e  $\mathbf{T}$  è una matrice di coefficienti costanti strettamente legati alla risposta in frequenza del sistema  $G(jN\Omega)$  così definita:

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} Re(G(jN\Omega)) & Im(G(jN\Omega)) \\ -Im(G(jN\Omega)) & Re(G(jN\Omega)) \end{vmatrix}$$

Considerando lo schema in Figura 2.2 è dunque possibile scrivere l'uscita del sistema di Equazione (2.1) come:

$$\begin{vmatrix} a_{Cn} \\ a_{Sn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{dCn} \\ a_{dSn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Re(G(jN\Omega)) & Im(G(jN\Omega)) \\ -Im(G(jN\Omega)) & Re(G(jN\Omega)) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{Cn} \\ u_{Sn} \end{vmatrix}$$

da cui:

$$a = a_d + \mathbf{T}u. \quad (2.2)$$

## 2.2 L'algoritmo di controllo T-matrix

In questo paragrafo viene mostrato il progetto del sistema di controllo tramite l'implementazione dell'algoritmo a tempo discreto T-matrix, al fine di limitare l'effetto dei disturbi esterni sul sistema; in particolare si ricerca un controllore discreto lineare tempo-invariante che garantisca la stabilità nominale del modello riportato in Figura 2.2 e ne minimizzi l'uscita.

Lo scopo è quello di ricavare la legge di controllo, in modo che, mantenendo il disturbo  $a_d$  costante, l'uscita  $a(t)$  del sistema venga stabilizzata e venga attenuato il più possibile l'effetto del disturbo  $a_d$  agente sul sistema.

Si valuti quindi un controllore la cui legge di controllo di feedback è:

$$u = \mathbf{T}^{-1}(-a_d)$$

in modo che il sistema descritto nell'Equazione (2.2) risulti:

$$a = \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}(-a_d) + a_d = 0$$

Si tenga conto, per ora, della seguente ipotesi semplificativa: prendendo in esame il sistema rappresentato in Figura 2.2, si consideri la matrice  $\mathbf{T}$ , che rappresenta la risposta in frequenza ai carichi vibratori della funzione di trasferimento del processo da controllare  $G(s)$ , come la matrice identità (di conseguenza per definizione anche la sua inversa  $\mathbf{T}^{-1}$  è la matrice identità).

Ipotizzando un modello a tempo discreto si prenda inoltre in considerazione un controllore la cui legge di controllo è del tipo:

$$u(k) = u(k-1) - a(k-1) \quad (2.3)$$

Con l'ipotesi  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  e tenendo presente la legge di controllo di Equazione (2.3) si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} a(k) = a_d + u(k) \\ u(k) = u(k-1) - a(k-1). \end{cases} \quad (2.4)$$

Partendo dalla seconda equazione della 2.4 si ricava:

$$\begin{aligned} u(k) - u(k-1) &= -a(k-1) \\ u(k) &= -\frac{a(k-1)}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove  $z^{-1}$  è l'operatore ritardo.

Sostituendo la (2.5) nella prima equazione del sistema (2.4) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 a(k) &= a_d - \frac{a(k-1)}{1-z^{-1}} \\
 a(k) + \frac{a(k-1)}{1-z^{-1}} &= a_d \\
 a(k) \left[ 1 + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \right] &= a_d \\
 a(k) \left[ \frac{1-z^{-1}+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right] &= a_d \\
 a(k) \left[ \frac{1}{1-z^{-1}} \right] &= a_d \\
 a(k) &= a_d (1-z^{-1}) \\
 a(k) &= a_d(k) - a_d(k-1)
 \end{aligned}$$

Con l'ipotesi che il disturbo sia costante, si ha  $a_d(k) = a_d(k-1)$  ottenendo dunque l'uscita  $a(k)$  uguale a zero.

Considerando nuovamente lo schema con la matrice  $\mathbf{T}$ , senza l'ipotesi  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ , con alcuni passaggi, si ricava un controllore discreto con una legge di controllo uguale a:

$$u(k+1) = u(k) - \mathbf{T}^{-1}a(k). \quad (2.6)$$

Infatti, ripetendo i calcoli partendo dallo stesso sistema di Equazione (2.4), si arriva alla medesima conclusione:

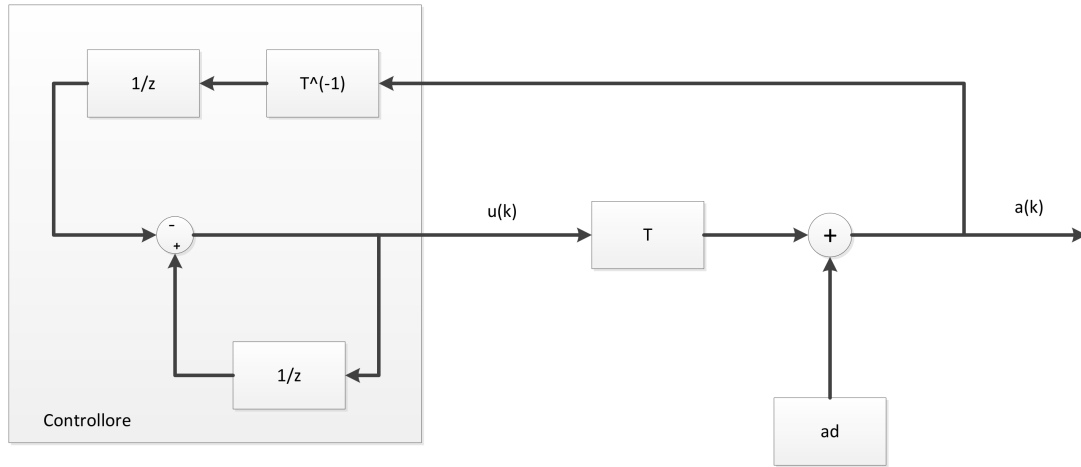
$$a(k) = a_d + \mathbf{T}u(k) \quad (2.7)$$

$$u(k) = u(k-1) - \mathbf{T}^{-1}a(k-1) \quad (2.8)$$

$$u(k) = -\mathbf{T}^{-1} \frac{a(k-1)}{1-z^{-1}}. \quad (2.9)$$

Sostituendo la (2.9) nella (2.7) si ottiene nuovamente  $a(k) = 0$ , come dimostrato in precedenza per la legge di controllo (2.3).

Avendo a disposizione la legge di controllo di Equazione (2.6) possiamo completare lo schema di controllo generale del nostro modello. In Figura 2.3 viene presentato il suo schema a blocchi.



**Figura 2.3:** Diagramma a blocchi del sistema: in evidenza la struttura del controllore.

Tale modello è composto dal controllore, da un disturbo costante  $a_d$  e dalla matrice  $T$  che in questo caso è stata utilizzata al posto della funzione di trasferimento  $G(s)$ , per essere coerenti con gli elementi usati nel calcolo della legge di controllo. Effettuando una simulazione, considerando come disturbo  $a_d$  un segnale costante, si può verificare che l'uscita  $a(k)$  viene portata a zero dopo un passo del ciclo di controllo.

## 2.3 Formulazione di Bernstein

L'algoritmo HHC è basato sull'ipotesi (utilizzata fino ad ora) che la risposta dell'elicottero ai carichi vibratorii possa essere rappresentata con un modello lineare che lega l'uscita del sistema  $z$  all'ingresso del controllo  $u$  [2]. Come considerato nella formulazione nel paragrafo precedente, il vettore  $z$  è formato dai componenti *seno* e *coseno* degli elementi armonici del segnale di output  $z(t)$ . Allo stesso modo il vettore  $u$  è formato dalle componenti *seno* e *coseno* del segnale di controllo  $u(t)$ . L'algoritmo HHC è un approccio nel dominio della frequenza applicato al disturbo che agisce sulla fusoliera.

Per poter dare una nuova formulazione dell'algoritmo prendiamo in considerazione l'architettura del sistema HHC implementata in un elicottero, come mostrato in Figura 2.4.



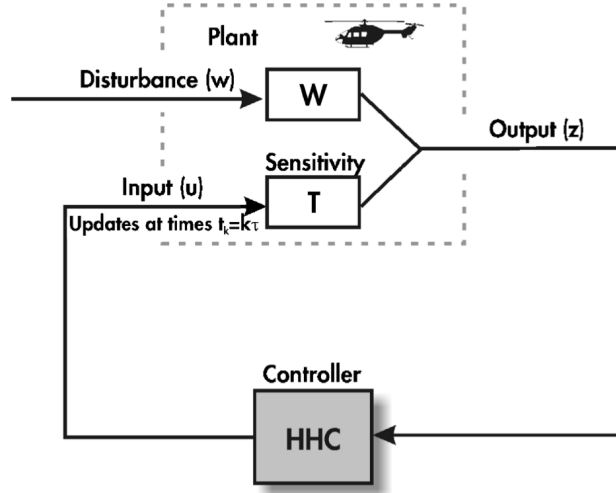


Figura 2.4: Architettura del controllo HHC. [2]

Con l'inserimento del disturbo  $w$ , che rappresenta le condizioni di operatività dell'elicottero, l'equazione che regola l'uscita  $z$  del sistema è la seguente

$$z_k = \mathbf{T}u_k + Ww \quad (2.10)$$

dove la sensibilità  $\mathbf{T}$  è data dalla matrice  $\mathbf{T}$  descritta nel Paragrafo 2.2. La condizione iniziale, con  $k = 0$  è uguale a:

$$z_0 = \mathbf{T}u_0 + Ww. \quad (2.11)$$

Sottraendo la (2.11) dalla (2.10) si ottiene precisamente il controllore trovato nella Sezione 2.2

$$z_k = z_0 + \mathbf{T}(u_k - u_0). \quad (2.12)$$

L'equazione (2.12) è riferita al modello globale di risposta in frequenza dell'elicottero. Il controllore, a differenza di quello trovato nel paragrafo precedente, è basato su una cifra di merito quadratica del tipo:

$$J(z_k, u_k) = z_k^T \mathbf{Q} z_k + 2z_k^T \mathbf{S} u_k + u_k^T \mathbf{R} u_k \quad (2.13)$$

dove  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{R}$  sono rispettivamente il peso dell'uscita, incrociato e del controllo. La legge di controllo ottima è determinata dal requisito

$$\frac{\partial J(z_k, u_k)}{\partial u_k} = 0 \quad (2.14)$$

che produce la legge di controllo ottima  $u_{k,\text{opt}}$  uguale a

$$u_{k,\text{opt}} = -(\mathbf{D})^{-1}(\mathbf{T}^T \mathbf{Q} + \mathbf{S}^T)(z_0 - \mathbf{T}u_0) \quad (2.15)$$

con  $\mathbf{D}$  definita come

$$\mathbf{D} \triangleq \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{T} + \mathbf{R}. \quad (2.16)$$

Combinando le equazioni (2.13) e (2.15) si ricava il costo minimo

$$J(z_k, u_k) = (z_0 - \mathbf{T}u_0)^T [\mathbf{Q} - \mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{M}] (z_0 - \mathbf{T}u_0) \quad (2.17)$$

con  $\mathbf{M}$  definita come

$$\mathbf{M} \triangleq \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{Q} + \mathbf{S}^T). \quad (2.18)$$

Se si vuole esprimere la legge di controllo in modo ricorsivo basta utilizzare la (2.15) e (2.12)

$$u_{k+1} = -(\mathbf{D})^{-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{Q} + \mathbf{S}^T) (z_k - \mathbf{T}u_k) \quad (2.19)$$

che si può anche scrivere come

$$u_{k+1} = -\mathbf{M} (z_k - \mathbf{T}u_k). \quad (2.20)$$

Questa è la nuova legge di controllo, che tiene conto della cifra di merito (2.13). Ottenuto questo controllore è stato aggiornato il modello costruito precedentemente, aggiungendo un blocco moltiplicativo per la matrice  $\mathbf{M}$  all'interno del controllore e sono stati modificati gli script delle impostazioni dei dati per le simulazioni in modo da calcolare i coefficienti della matrice  $\mathbf{M}$  ed impostare i valori di  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{Q}$ .

### 2.3.1 Analisi di convergenza dell'uscita del sistema

In questo paragrafo viene condotta un'analisi di convergenza che ha lo scopo di stabilire il valore dell'uscita del sistema a regime. Essendo infatti la nuova legge di controllo pesata, è possibile che l'uscita del sistema controllato sia diversa da zero, a differenza dell'uscita del sistema con la legge di controllo dell'algorithm T-Matrix descritto nel Paragrafo 2.2. Dunque è utile sapere a priori, senza effettuare simulazioni, il valore dell'uscita del sistema raggiunto a regime.

Si noti innanzitutto che l'equazione (2.15), essendo l'uscita ottima, è indipendente dall'istante  $k$  e dunque rimane costante per tutti i  $k \geq 1$ . Sostituendo la (2.15) nella (2.12), il valore ottimo dell'uscita per tutti i  $k \geq 1$  è dato da:

$$z_{\text{opt}} \triangleq z_{k,\text{opt}} = [\mathbf{I} - \mathbf{T} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{T}^T \mathbf{Q} + \mathbf{S}^T)] (z_0 - \mathbf{T}u_0). \quad (2.21)$$

Sostituendo l'Equazione (2.21) nella cifra di merito (2.17) si ha

$$J(z_{\text{opt}}, u_{\text{opt}}) = (z_0 - \mathbf{T}u_0)^T [\mathbf{Q} - \mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{M}] (z_0 - \mathbf{T}u_0). \quad (2.22)$$

Usando la (2.12) nella (2.15) la legge di controllo ottima può essere espressa ricorsivamente come

$$u_{k+1,\text{opt}} = -(\mathbf{D})^{-1}(\mathbf{T}^T \mathbf{Q} + \mathbf{S}^T)(z_{k,\text{opt}} - \mathbf{T}u_{k,\text{opt}}). \quad (2.23)$$

Si prenda ora in esame la rappresentazione nello spazio di stato della dinamica del sistema con la legge di controllo ottimo; si ha:

$$\begin{vmatrix} \bar{z}_{k+1,\text{opt}} \\ \hat{u}_{k+1,\text{opt}} \end{vmatrix} = \mathbf{A} \begin{vmatrix} \bar{z}_{k,\text{opt}} \\ \bar{u}_{k,\text{opt}} \end{vmatrix} \quad (2.24)$$

dove  $A \in \mathbb{R}^{2(p+m)(p+m)}$  (con  $p$  e  $m$  le lunghezze dei vettori dell'uscita  $z$  e del controllo  $u$ ) è uguale a

$$A \triangleq \begin{vmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{M} & -(\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{M})\mathbf{T} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{M}\mathbf{T} \end{vmatrix}.$$

In particolare si noti che questa matrice è idempotente cioè  $A = A^2 = A^3 = \dots$  e di conseguenza i suoi autovalori sono o 1 o 0. A questo punto la matrice  $A$  può essere fattorizzata come

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ 0 & \mathbf{I} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{M} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{T} \\ 0 & \mathbf{I} \end{vmatrix}$$

questa scomposizione evidenzia il fatto che lo spettro di  $A$  è uguale allo spettro di  $I$  unito allo spettro della matrice Zero ( $\text{spec}(A) = \text{spec}(I) \cup \text{spec}(0)$ ). Dunque con le condizioni iniziali  $z_0$  e  $u_0$  la (2.24) implica che

$$\begin{vmatrix} \bar{z}_{1,\text{opt}} \\ \hat{u}_{1,\text{opt}} \end{vmatrix} = \mathbf{A} \begin{vmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{u}_0 \end{vmatrix}$$

e che

$$\begin{vmatrix} \bar{z}_{2,\text{opt}} \\ \hat{u}_{2,\text{opt}} \end{vmatrix} = \mathbf{A}^2 \begin{vmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{u}_0 \end{vmatrix} = \mathbf{A} \begin{vmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{u}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{z}_{1,\text{opt}} \\ \bar{u}_{1,\text{opt}} \end{vmatrix}.$$

Dunque per ogni  $k = 1, 2, \dots$  si ha che

$$\begin{vmatrix} \bar{z}_{\text{opt}} \\ \bar{u}_{\text{opt}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{z}_{k,\text{opt}} \\ \bar{u}_{k,\text{opt}} \end{vmatrix} = \mathbf{A} \begin{vmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{u}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{M})(\bar{z}_0 - \mathbf{T}\bar{u}_0) \\ -\mathbf{M}(\bar{z}_0 - \mathbf{T}\bar{u}_0) \end{vmatrix}.$$

Di conseguenza, il valore ottimo del segnale di controllo  $\bar{u}_{\text{opt}}$  nella (2.15) e dell'uscita  $\bar{z}_{\text{opt}}$  nella (2.21) sono raggiunti dopo il primo aggiornamento del ciclo di controllo. Nell'eventualità in cui il controllore, come in questo caso, abbia  $S = 0$  allora  $\bar{z}_{\text{opt}}$  può essere espressa, con qualche semplificazione, tramite la seguente equazione

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\text{opt}} &= [\mathbf{I} - \mathbf{TR}^{-1/2}(\mathbf{I} + \mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{T}^T\mathbf{Q}\mathbf{TR}^{-1/2})^{-1}](\bar{z}_0 - \mathbf{T}\bar{u}_0) \\ &= \underbrace{\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{TR}^{-1}\mathbf{T}^T)^{-1}}_F (\bar{z}_0 - \mathbf{T}\bar{u}_0). \end{aligned} \quad (2.25)$$

## 2.4. Realizzazione dei blocchi per la conversione da tempo continuo a discreto

---

Il valore  $F$  trovato nell'Equazione (2.25) è il valore del guadagno a regime; indica cioè, di quanto viene alterato il segnale di uscita rispetto al valore zero, da parte della dinamica del controllore. Quindi, a fronte di un disturbo di ampiezza unitaria, è il valore dell'uscita del sistema a regime.

## 2.4 Realizzazione dei blocchi per la conversione da tempo continuo a discreto

I modelli utilizzati per ricavare le leggi di controllo nei Paragrafi 2.2 e 2.3 partono dal presupposto che il processo da controllare sia a tempo discreto.

In questa sezione si sviluppa il modello in modo che i regolatori a tempo discreto siano in grado di controllare un qualsiasi processo a tempo continuo.

Per fare questo sono necessari due ulteriori blocchi che permettano di passare dal dominio del continuo a quello del discreto e viceversa. Il primo blocco, posto a monte del regolatore, è il campionatore che scompone il segnale nelle sue componenti *seno* e *coseno* di Fourier ogni  $x$  secondi. Il secondo blocco, posto a valle del regolatore, ricostruisce il segnale  $u(t)$  dal segnale  $u(k)$  restituito dal controllore discreto; il segnale  $u(t)$  andrà in ingresso al blocco del processo da controllare  $G(s)$ .

**Blocco per la scomposizione in coefficienti di Fourier** Come è noto, un qualsiasi segnale  $f(t)$  di periodo  $T$  può essere scomposto con la serie di Fourier tramite la relazione nella forma trigonometrica

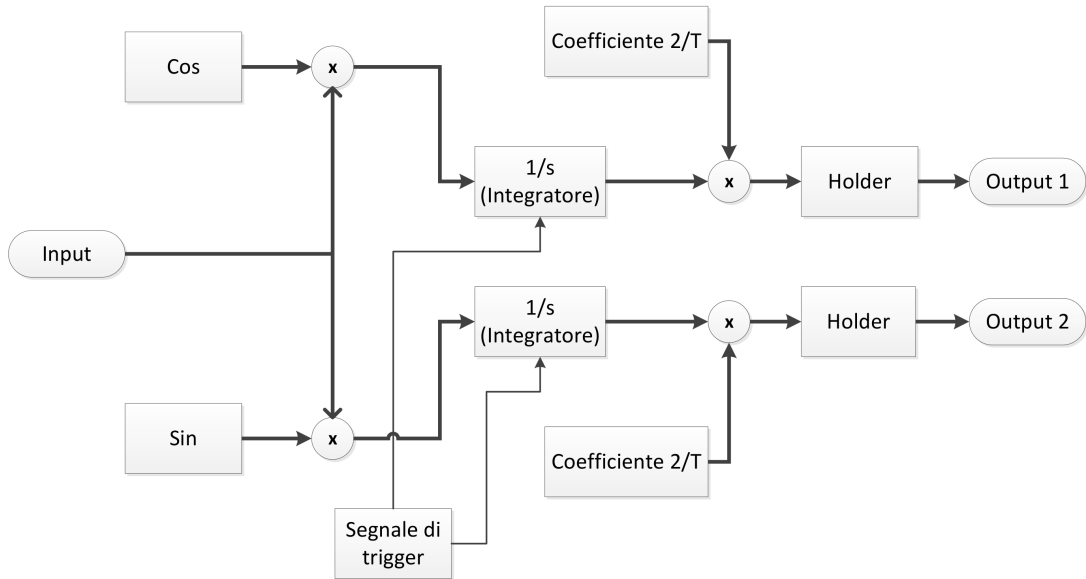
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]$$

dove  $a_0$  è la media del segnale e  $a_n$  e  $b_n$  sono i coefficienti moltiplicativi delle funzioni *coseno* e *seno* calcolati come:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt.$$

Il campionatore ha quindi in ingresso il segnale a tempo continuo e ne restituisce in uscita i due coefficienti di Fourier ogni  $T$  secondi dove  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  dove  $\Omega$  è la pulsazione del segnale in ingresso.

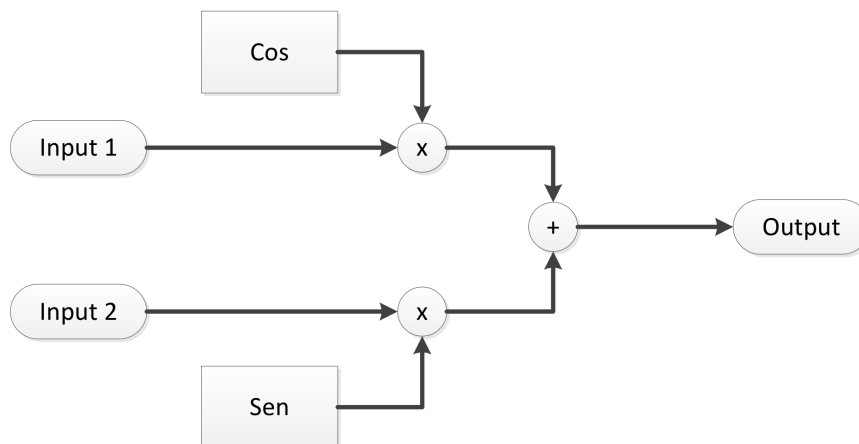
Il blocco è così costituito: il segnale in ingresso viene prima moltiplicato per la funzione *seno* e *coseno* (entrambe alla stessa frequenza del segnale in ingresso) poi entrambi i prodotti vengono integrati su un periodo uguale a  $T$  attraverso degli integratori con trigger; questi sono comandati da un generatore di impulsi, in modo da resettarsi ogni  $T$  secondi. Il risultato dell'integratore viene moltiplicato per il coefficiente  $\frac{2}{T}$  e dato in ingresso ad un holder che lo mantiene costante per tutto il periodo  $T$  fino all'integrazione successiva.



**Figura 2.5:** Schema del blocco che scompone il segnale nei suoi coefficienti di Fourier.

**Blocco per la ricostruzione del segnale dai coefficienti di Fourier** Il secondo blocco ha il compito ricostruire il segnale  $u(t)$  dai due segnali  $u(k)$ , sotto forma di coefficienti di Fourier, in uscita dal controllore.

Come detto in precedenza vale  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{2\pi n t}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi n t}{T})]$ , dunque il blocco è costituito dai due segnali in ingresso, in arrivo dal controllore, moltiplicati per le funzioni *seno* e *coseno* alla stessa frequenza del segnale e semplicemente sommati tra di loro essendo la media del segnale  $\frac{a_0}{2}$  uguale a zero. In uscita si ha quindi il segnale di controllo  $u(t)$  continuo ricostruito.

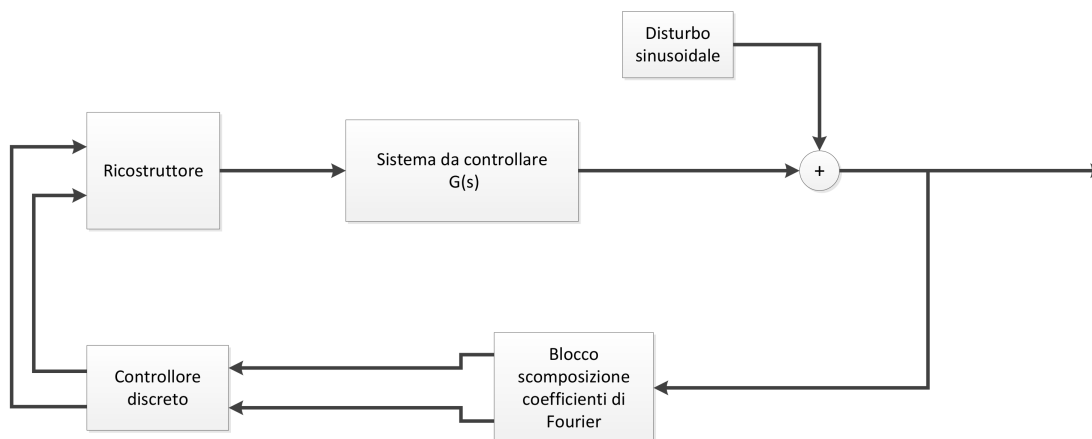


**Figura 2.6:** Schema del blocco che ricompone il segnale dai coefficienti di Fourier.

Avendo a disposizione tutti i blocchi è possibile realizzare il sistema completo.

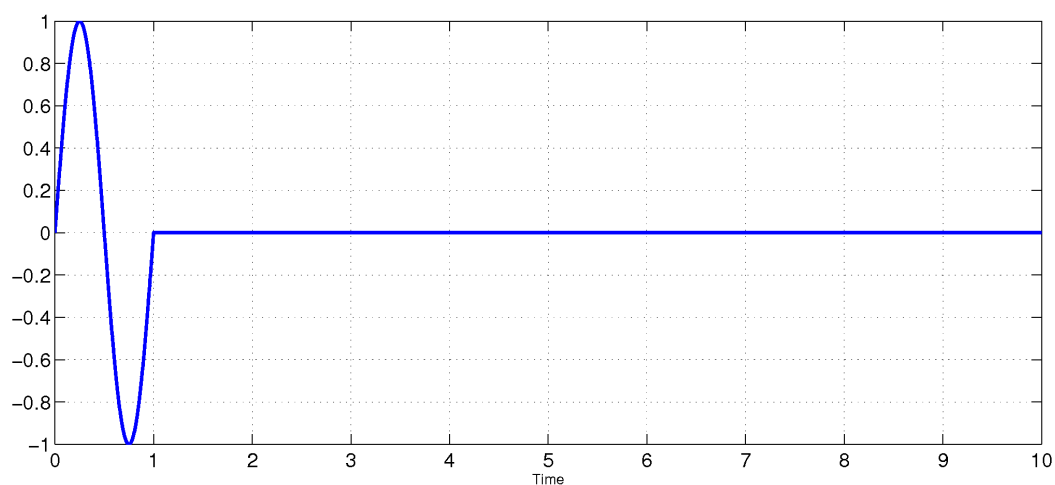
## 2.4. Realizzazione dei blocchi per la conversione da tempo continuo a discreto

Esso è formato dai blocchi appena implementati, il controllore e la funzione di trasferimento  $G(s)$  del processo da controllare.



**Figura 2.7:** Schema di controllo generale completo di blocchi per la gestione del passaggio tra tempo continuo e discreto.

Il sistema è stato testato utilizzando il controllore ricavato nel Paragrafo 2.2, un disturbo sinusoidale a frequenza  $\omega = 2\pi$  ed una semplice funzione di trasferimento di test del processo da controllare uguale a  $G(s) = \frac{1}{s+5}$ ; la durata della simulazione è stata impostata a 10 secondi. In Figura 2.8 è possibile osservare come l'uscita sinusoidale del sistema dopo un secondo venga portata a zero e mantenuta tale fino alla fine della simulazione.



**Figura 2.8:** Uscita del sistema di prova a fronte di un disturbo sinusoidale.

## Capitolo 3

# Robustezza del sistema di controllo

In generale l'algoritmo di controllo è efficace se si conosce con esattezza il sistema da controllare e se il regolatore è perfettamente calibrato su quest'ultimo; entrambe queste condizioni sono molto distanti dalla realtà, dove invece per svariati motivi pratici, di approssimazione o di mancanza di informazioni, la conoscenza di tutte le componenti del sistema è sempre affetta da incertezza. Per questi motivi è necessaria un'analisi della robustezza di questi algoritmi.

In questo capitolo si osserva come si comporta il sistema di controllo ipotizzando di avere un'incertezza parametrica all'interno del controllore dell'algoritmo HHC; in particolare si suppone di non conoscere precisamente la matrice  $\mathbf{T}$ , utilizzando una sua versione affetta da incertezza e lasciando il processo da controllare inalterato.

### 3.1 L'incertezza parametrica

La stabilità e le prestazioni di un sistema di controllo dipendono da quanto il modello matematico utilizzato nel progetto descriva in modo preciso il sistema reale. L'incertezza all'interno di un sistema di controllo rappresenta le differenze tra il sistema reale e il modello del sistema che viene usato per progettare il controllore. Queste differenze possono riferirsi a discrepanze tra il modello e il sistema o semplicemente ad incertezze del modello stesso.

Le incertezze all'interno di un modello possono avere diverse origini: possono essere dei parametri che nel modello lineare sono conosciuti solo approssimativamente o semplicemente errati, possono essere parametri che variano a seconda di non-linearità o a seconda delle condizioni di funzionamento, possono essere causate da errori di misura dei dispositivi di acquisizione dei dati, possono indicare il fatto che ad alte frequenze l'ordine del modello e della struttura possono variare e diventare sconosciuti oppure possono semplicemente rappresentare il fatto che è sempre

molto difficile lavorare con un modello complesso che rappresenti fedelmente il sistema reale e si scelga quindi di lavorare con un modello più semplice ma ovviamente meno accurato, ignorando alcune delle dinamiche del sistema.

Tutte queste cause possono essere riassunte in tre tipologie di incertezza:

- **Incetezza parametrica:** la struttura del modello è conosciuta e precisa ma alcuni parametri sono sconosciuti o approssimati
- **Incetezza di non-modellizzazione o di omissione:** l'errore è insito nel modello del sistema poiché vengono trascurate delle dinamiche, di solito ad alte frequenze, o per una scelta deliberata o per mancata conoscenza di alcuni dettagli del processo fisico.
- **Incetezza lumped:** la descrizione dell'incetezza è data da una o più fonti di incetezza parametrica e/o di incetezza di non-modellizzazione delle dinamiche, combinate in una singola perturbazione.

#### 3.1.1 Regolatore con incetezza parametrica

A questo punto del lavoro si vuole fornire una formulazione del problema per gestire un'incetezza parametrica all'interno del sistema di controllo.

Si suppone quindi di non conoscere esattamente la funzione di trasferimento del processo da controllare  $G(s)$  ma di avere una sua versione perturbata da incetezza, al variare di un parametro  $p$ . Definiamo dunque  $G(s, p)$  con  $p$  che varia da un minimo di  $p_{\min}$  ad un massimo di  $p_{\max}$ .

Il parametro  $p$  è definito come

$$p = \bar{p}(1 + r_p \delta) \quad (3.1)$$

dove  $\bar{p}$  è il valore medio di  $p$ , uguale a

$$\bar{p} = \frac{p_{\min} + p_{\max}}{2}$$

ed  $r_p$  è definito come

$$r_p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\max} + p_{\min}}.$$

Si stabilisce invece  $\delta$  come un parametro che varia tra  $-1$  e  $1$  quindi con  $|\delta| < 1$ .

Ciò permette il fatto che se  $\delta = -1$  allora  $p = p_{\min}$ , se  $\delta = 1$  allora  $p = p_{\max}$ .

Si consideri dunque la funzione di trasferimento  $G(s, p)$  definita come

$$G(s, p) = \bar{G}(s)(1 + r_p \delta)$$



dove  $\overline{G}(s)$  è la funzione di trasferimento del sistema da controllare nominale. A questa nuova funzione di trasferimento si associa una nuova matrice  $\mathbf{T}$  denominata  $\hat{\mathbf{T}}$  descritta nella forma  $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}$ , cioè la matrice  $\mathbf{T}$  associata alla funzione di trasferimento nominale più un certo  $\Delta\mathbf{T}$  che rappresenta la variazione dal valore nominale. La  $G(s, p)$  è dunque associata alla matrice  $\hat{\mathbf{T}}$ , mentre rimane il fatto che la matrice  $\mathbf{T}$  è associata alla funzione di trasferimento del processo da controllare senza incertezza.

Per definizione

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}$$

dunque  $\Delta\mathbf{T}$  è uguale a:

$$\Delta\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}. \quad (3.2)$$

Ora poiché  $G(s, p)$  è associata a  $\hat{\mathbf{T}}$  e  $\overline{G}(s)$  è associata a  $\mathbf{T}$  dalla (3.2) di conseguenza la matrice  $\Delta\mathbf{T}$  è associata alla funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} & G(s, p) - \overline{G}(s) \\ &= \overline{G}(s)(1 + r_p\delta) - \overline{G}(s) \\ &= \overline{G}(s)r_p\delta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dunque la matrice  $\Delta\mathbf{T}$  è associata alla funzione di trasferimento  $\overline{G}(s)$  semplicemente moltiplicata per il coefficiente  $r_p\delta$ .

Questo risultato è totalmente indipendente dalla forma di  $\delta$ , che in questo caso rappresenta un semplice scalare, ma come è noto dalla teoria dell'incertezza dei sistemi può essere una qualsiasi funzione di trasferimento stabile  $\Delta(j\omega)$ , con modulo minore di uno, che rappresenti dinamiche omesse o non modellizzate.

Vengono ora illustrate le modifiche della legge di controllo tenendo presente l'incertezza del sistema. L'algoritmo HHC presume che la matrice  $\mathbf{T}$  sia conosciuta senza errore. Una modellizzazione errata di  $\mathbf{T}$  può risultare degradante sia in termini di prestazioni sia in termini di stabilità. Se, come descritto in precedenza, stimiamo la matrice  $\mathbf{T}$  con la matrice  $\hat{\mathbf{T}}$ , la legge di controllo definita in (2.20) diventa:

$$\hat{u}_{k+1} = -\hat{\mathbf{M}}(z_k - \hat{\mathbf{T}}\hat{u}_k) \quad (3.4)$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &\triangleq \hat{\mathbf{D}}^{-1}(\hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{Q} + \mathbf{S}^T) \\ \hat{\mathbf{D}} &\triangleq \hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}^T\hat{\mathbf{T}} + \mathbf{R} \end{aligned} \quad (3.5)$$

con  $\hat{\mathbf{T}}$  definita come in precedenza.

### 3.1.2 Analisi di stabilità robusta

Dopo aver ottenuto la nuova legge di controllo con l'incertezza parametrica si studia ora una condizione che permetta di stabilire a priori la stabilità del sistema incerto a seconda della caratterizzazione del controllore e della definizione dei parametri incerti.

Si prenda in considerazione la rappresentazione nello spazio di stato della dinamica del sistema di controllo, aggiornata con la nuova legge di controllo (3.4):

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_{k+1} \\ \hat{u}_{k+1} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \hat{u}_k \end{bmatrix}$$

dove  $\hat{\mathbf{A}}$  è definita come

$$\hat{\mathbf{A}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{T}\hat{\mathbf{M}} & \mathbf{T}(\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{I}) \\ -\hat{\mathbf{M}} & \hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{T}} \end{bmatrix}.$$

In questo caso è utile poter fattorizzare  $\hat{\mathbf{A}}$  nel seguente modo:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\hat{\mathbf{M}} & \hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{T} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

così facendo si può notare che  $\text{spec}(\hat{\mathbf{A}}) = \text{spec}(\mathbf{I}) \cup \text{spec}(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T})$  dove  $\text{spec}$  indica lo spettro delle matrici.

Dunque si ricava che questo sistema di controllo è asintoticamente stabile se e solo se

$$\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}) < 1 \quad (3.6)$$

dove  $\rho$  indica il raggio spettrale.

Questa conclusione è molto significativa in quanto fornisce uno strumento di valutazione della stabilità piuttosto semplice da calcolare e che dipende solo dalla composizione delle matrici  $\hat{\mathbf{M}}$  e  $\Delta\mathbf{T}$ ; questo tipo di analisi può essere condotta senza alcun tipo di simulazione ma solo conoscendo il sistema e l'incertezza che lo distingue.

Si valuti ora il caso particolare in cui il peso incrociato della cifra di merito che caratterizza il controllore sia nullo, quindi  $\mathbf{S} = 0$ .

Dalla (3.5) segue che

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}} &\triangleq \hat{\mathbf{T}}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} + \mathbf{R} \\ \hat{\mathbf{M}} &\triangleq \hat{\mathbf{D}}^{-1} (\hat{\mathbf{T}}^T \mathbf{Q}) \end{aligned}$$

e partendo dalla (3.6), considerando una serie di maggiorazioni si ottiene

$$\begin{aligned}\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}) &= \rho((\hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{Q}\mathbf{T} + \mathbf{R})^{-1}(\hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{Q})\Delta\mathbf{T}) \\ &\leq \sigma_{\max}((\hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{Q}\mathbf{T} + \mathbf{R})^{-1}(\hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{Q})\Delta\mathbf{T}) \\ &\leq \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\sigma_{\max}(\mathbf{Q})\sigma_{\max}(\Delta\mathbf{T})}{\sigma_{\min}(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

dove  $\sigma_{\min}$  e  $\sigma_{\max}$  indicano rispettivamente il valore singolare massimo e minimo della matrice argomento.

Perciò con alcuni passaggi si ricava che se

$$\sigma_{\max}(\Delta\mathbf{T}) < \frac{-\sigma_{\max}(\mathbf{T})}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{\max}(\mathbf{T})^2 + 4\frac{\sigma_{\min}(\mathbf{R})}{\sigma_{\max}(\mathbf{Q})}} \quad (3.7)$$

allora

$$\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}) < 1.$$

Da questa disuguaglianza si può notare che se il termine  $\sigma_{\min}(\mathbf{R})/\sigma_{\max}(\mathbf{Q})$  è grande, cioè si utilizza un peso dell'azione di controllo elevato, si ottiene un considerevole grado di robustezza; invece se il termine è piccolo allora la (3.7) indica che il sistema di controllo è meno robusto e la stabilità può essere compromessa.[19] Per sfruttare quanto ricavato fino ad ora, in particolare la (3.7), sono state fatte alcune considerazioni per capire quale significato è possibile attribuire al valore  $\sigma_{\max}(\Delta\mathbf{T})$  nel caso trattato in questa tesi, in cui  $\mathbf{T}$  è legata alla funzione di trasferimento  $G(jN\Omega)$ .

Si valuti la matrice  $\mathbf{T}$  che sappiamo essere data da

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} R & I \\ -I & R \end{vmatrix}$$

dove  $R = Re(G(jN\Omega))$  ed  $I = Im(G(jN\Omega))$ .

Il calcolo dei suoi autovalori risulta

$$\begin{vmatrix} \lambda - R & -I \\ I & \lambda - R \end{vmatrix} = (\lambda - R)^2 + I^2$$

ottenendo quindi  $\lambda_i = R \pm jI$ .

L'operatore  $\sigma_{\max}$  indica il massimo dei valori singolari. I valori singolari di una generica matrice  $\mathbf{A}$  si calcolano come  $\sigma_i = \sqrt{\lambda(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ . Applicando questa formula alla matrice  $\mathbf{T}$  segue che

$$\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \begin{vmatrix} R & -I \\ I & R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R & I \\ -I & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R^2 + I^2 & 0 \\ 0 & R^2 + I^2 \end{vmatrix}$$

### 3.1. L'incertezza parametrica

---

i cui autovalori sono  $\lambda_i = R^2 + I^2 \quad \forall i$  perciò

$$\sigma(\mathbf{T}) = \sqrt{R^2 + I^2}$$

e poiché i due autovalori sono uguali si ha  $\sigma_{\max}(\mathbf{T}) = \sigma_{\min}(\mathbf{T}) = \sqrt{R^2 + I^2}$ .

Si noti ora che  $\sqrt{R^2 + I^2}$  non è altro che  $|G(jN\Omega)|$  cioè la risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento del sistema  $G(s)$ . Per cui si ha

$$\sigma(\mathbf{T}) = |G(jN\Omega)|. \quad (3.8)$$

Dunque calcolare i valori singolari della matrice  $\mathbf{T}$  significa lavorare con la risposta in frequenza del sistema alla pulsazione  $jN\Omega$ .

Nella disuguaglianza (3.7) non compare il termine  $\mathbf{T}$  ma il termine  $\Delta\mathbf{T}$ ; con alcuni passaggi algebrici si provvede quindi a calcolare  $\sigma(\Delta\mathbf{T})$ .

Partendo dalla definizione della matrice  $\Delta\mathbf{T}$  nella (3.3) si ha

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta\mathbf{T}) &= \sigma(r_p\delta\mathbf{T}) \\ &= \sqrt{\lambda(r_p\delta\mathbf{T}^T r_p\delta\mathbf{T})}. \end{aligned}$$

Per chiarezza di notazione nei calcoli si indica momentaneamente il coefficiente  $r_p\delta$  con la lettera  $k$ ; gli autovalori di  $k\mathbf{T}^T k\mathbf{T}$  sono:

$$k\mathbf{T}^T k\mathbf{T} = \begin{vmatrix} kR & -kI \\ kI & kR \end{vmatrix} \begin{vmatrix} kR & kI \\ -kI & kR \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2R^2 + k^2I^2 & 0 \\ 0 & k^2R^2 + k^2I^2 \end{vmatrix}.$$

ovvero sono  $\lambda_i = k^2R^2 + k^2I^2$ . Tornando alla definizione di valore singolare e sostituendo nuovamente  $r_p\delta$  a  $k$  si ottiene:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{r_p^2\delta^2R^2 + r_p^2\delta^2I^2} \\ &= \sqrt{r_p^2\delta^2(R^2 + I^2)} \\ &= r_p|\delta|\sqrt{R^2 + I^2} \end{aligned}$$

ed infine sempre tenendo presente che  $\sqrt{R^2 + I^2}$  è uguale a  $|G(jN\Omega)|$  si ricava

$$\sigma(\Delta\mathbf{T}) = r_p|\delta||G(jN\Omega)|$$

e dalla (3.8) si ottiene infine

$$\sigma(\Delta\mathbf{T}) = r_p|\delta|\sigma(\mathbf{T}). \quad (3.9)$$

Dunque i valori singolari di  $\Delta\mathbf{T}$  sono gli stessi di  $\mathbf{T}$  moltiplicati per il coefficiente  $r_p|\delta|$ . Si stabilisce ora, tramite la cifra di merito (2.13), un controllore con le seguenti caratteristiche: il peso incrociato tra uscita e controllo, come specificato

precedentemente  $\mathbf{S} = 0$ , il peso dell'uscita  $\mathbf{Q} = I$  ed il peso del controllo è definito in funzione di un parametro  $\rho$  dalla seguente relazione:  $\mathbf{R} = \rho^2 \sigma(\mathbf{T})^2 \mathbf{I}$ , dove  $\mathbf{I}$  indica la matrice identità. Con un controllore così definito la disuguaglianza (3.7) per la stabilità robusta risulta la seguente:

$$\sigma(\Delta \mathbf{T}) < \frac{-\sigma_{\max}(\mathbf{T})}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{\max}(\mathbf{T})^2 + 4 \frac{\rho^2 \sigma(\mathbf{T})^2 \mathbf{I}}{\mathbf{I}}} \quad (3.10)$$

sostituendo poi la (3.9) nella (3.10) si ricava

$$\begin{aligned} r_p |\delta| \sigma(\mathbf{T}) &< \frac{-\sigma(\mathbf{T})}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(\mathbf{T})^2 + 4 \frac{\rho^2 \sigma(\mathbf{T})^2 \mathbf{I}}{\mathbf{I}}} \\ r_p |\delta| &< -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma(\mathbf{T})} \sqrt{\sigma(\mathbf{T})^2 + 4 \frac{\rho^2 \sigma(\mathbf{T})^2 \mathbf{I}}{\mathbf{I}}} \\ |\delta| &< -\frac{1}{2r_p} + \frac{1}{2r_p} \sqrt{1 + 4\rho^2} \\ |\delta| &< \frac{1}{2r_p} \left( \sqrt{1 + 4\rho^2} - 1 \right) = \bar{\delta}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Così facendo si è ottenuta una condizione di stabilità sul parametro  $\delta$ , che caratterizza l'incertezza, in funzione del parametro  $\rho$  che caratterizza il controllore. Come verrà mostrato nelle simulazioni, più  $\rho$  è grande più il sistema di controllo diventa robusto e mantiene la stabilità a fronte di un'incertezza maggiore; quindi più è robusto il sistema di controllo più è possibile aumentare  $r_p$  che rappresenta la percentuale di errore sul parametro incerto, riuscendo a mantenere il sistema stabile a patto di ridurre le prestazioni di reiezione del disturbo.

Sostituendo alcuni particolari valori numerici alla (3.11) si ricava che

$$\text{per } \rho \rightarrow 0 \quad \text{allora} \quad \bar{\delta} \rightarrow 0$$

$$\text{per } \rho \gg \frac{1}{2} \quad \text{allora} \quad \bar{\delta} \cong \frac{\rho}{r_p}.$$

Da questi due esempi si noti come è possibile ottenere delle condizioni dirette tra i parametri di incertezza  $\delta$  e  $r_p$  e il parametro di caratterizzazione del controllore  $\rho$ .

In questa sezione è stato mostrato come ricavare una condizione per la valutazione della stabilità robusta del modello studiando la forma del modello stesso e sono stati ottenuti dei requisiti sui singoli parametri di caratterizzazione dell'incertezza o del controllore. D'altra parte questi requisiti, poiché definiti tramite una serie di maggiorazioni, sono condizioni più restrittive di quanto poi si possa verificare nel modello in simulazione; sono dunque condizioni con un certo margine di errore per la stabilità robusta del sistema.

## 3.2 Modello discreto-continuo: stabilità robusta e prestazioni nominali

Dopo aver descritto i metodi per valutare la stabilità robusta del sistema si presenta ora come questi metodi vengono utilizzati nella pratica. Il sistema che prendiamo in considerazione è quello di Figura 2.7 con la sola differenza che il regolatore è governato dalla legge di controllo con incertezza parametrica (3.4) descritta nel Paragrafo 3.1.1.

Il modello è definito discreto-continuo perché il processo da controllare ha una formulazione nel tempo continuo mentre il controllore lavora nel tempo discreto. Si presentano ora alcuni esempi di simulazione per mostrare il funzionamento del sistema di controllo; per queste prove sono stati utilizzati: come sistema da controllare la semplice funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{1}{s+5}$ , il disturbo è di tipo sinusoidale di ampiezza 1 e la simulazione ha una durata di 10 secondi. Per questi esempi è stato utilizzato un controllore la cui cifra di merito è caratterizzata dai parametri  $Q = I$  e  $S = 0$ ; l'unico parametro che viene modificato durante le varie simulazioni è il valore di  $R$ , il peso dell'azione di controllo all'interno della cifra di merito, che, per come è stato descritto nel paragrafo precedente, è dipendente da  $\rho$ .

Inizialmente si consideri un controllore con  $\rho = 0$  e  $\delta = 0$ .

Con queste caratteristiche si ottiene  $R = 0$  e  $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$ , il primo per effetto della scelta di  $\rho$  e il secondo per effetto della scelta di  $\delta = 0$ ; dunque il sistema è privo di incertezza. Dalla definizione di  $\hat{\mathbf{M}}$  e  $\hat{\mathbf{D}}$  della (3.5) si ricava

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{D}}^{-1}(\hat{\mathbf{T}}^T) \quad \hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{T}}^T \mathbf{T} \quad \hat{\mathbf{M}} = (\hat{\mathbf{T}}^T \mathbf{T})^{-1}(\hat{\mathbf{T}}^T) = \mathbf{T}^{-1} \underbrace{(\hat{\mathbf{T}}^T)^{-1} \hat{\mathbf{T}}^T}_1 = (\hat{\mathbf{T}})^{-1}$$

e sostituendo  $\hat{\mathbf{M}}$  nella (3.4) con  $\hat{\mathbf{T}}$  uguale a  $\mathbf{T}$  si ottiene

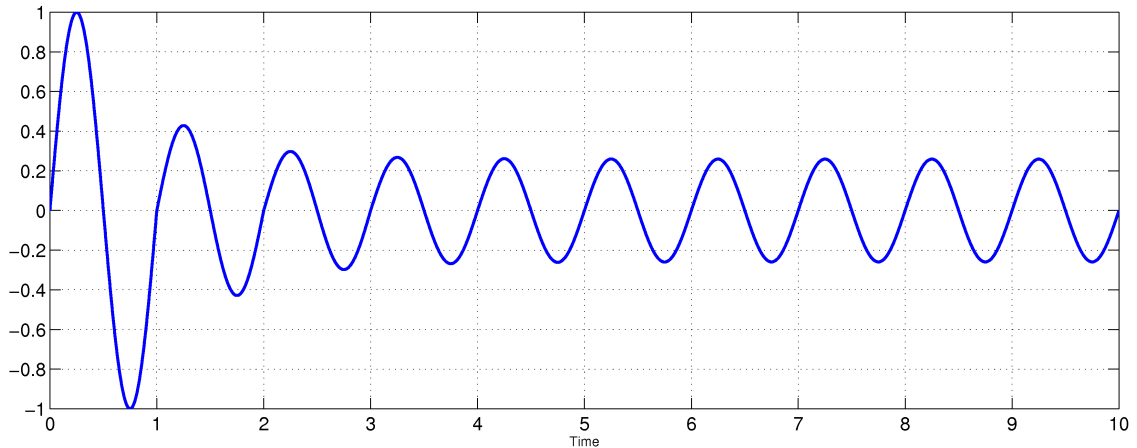
$$u_{k+1} = -(\mathbf{T})^{-1}(z_k - \mathbf{T}u_k) = -\mathbf{T}^{-1}z_k + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}}_1 u_k = u_k - \mathbf{T}^{-1}z_k$$

cioè una legge di controllo identica a quella presentata nel Capitolo 2, in particolare si faccia riferimento all'Equazione (2.6).

Quindi a fronte di uno stesso disturbo, l'uscita dei sistemi, con i due tipi di controllori fin qui presentati configurati con questi parametri, è la medesima ed in questo caso è mostrata in Figura 2.8.

Si prenda ora in esame invece un controllore dove  $\delta = 1$  e  $\rho = 0.5$  e  $r_p$ , il parametro che definisce la grandezza dell'errore, uguale a 0.4. Il sistema di controllo ottenuto con questi parametri ha una legge di controllo della forma (3.4); nonostante il controllore presenti un'incertezza riesce a ridurre ugualmente l'ampiezza del

disturbo, ma per come è strutturato, non è in grado di portarla perfettamente a zero come si nota dall'andamento dell'uscita riportato in Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Uscita del sistema con incertezza caratterizzato da  $\delta = 1$ ,  $\rho = 0.5$  e  $r_p = 0.4$ .

Con questi parametri l'uscita si attesta sul valore di circa 0.3. Come descritto in precedenza più il parametro  $\rho$  è grande più il controllore è robusto rispetto all'errore; cioè più è grande  $\rho$  più possiamo aumentare  $r_p$  mantenendo il sistema stabile, con la possibilità di gestire incertezze sempre più marcate senza che il sistema diventi instabile. D'altra parte però più il sistema è robusto più peggiorano le prestazioni in termini di reiezione del disturbo, con il valore dell'uscita sempre meno vicina allo zero.

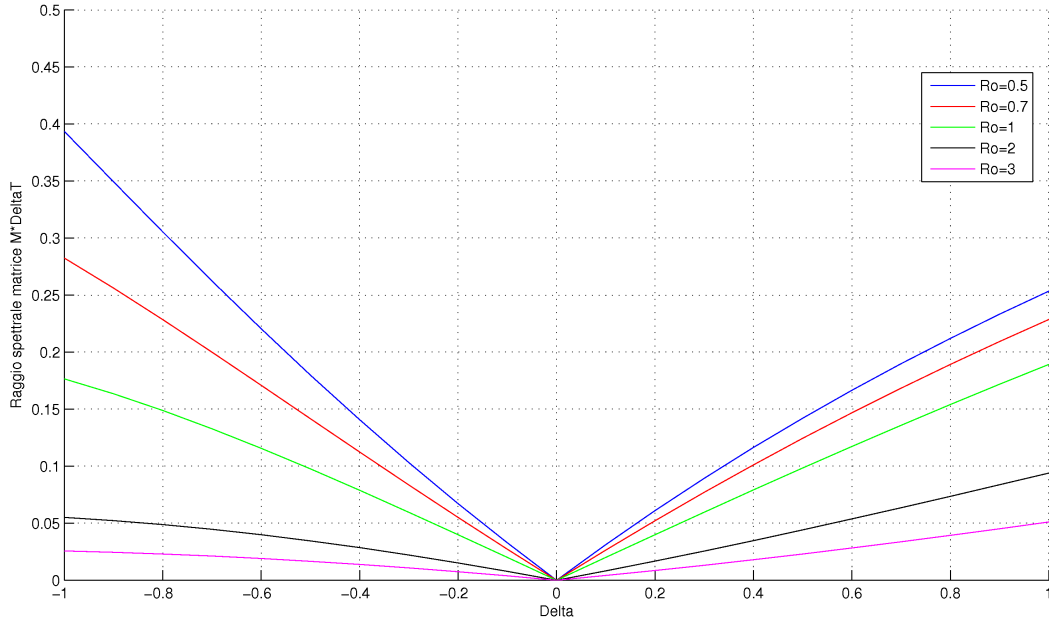
Per valutare la robustezza del sistema rispetto ai parametri incerti si presenta ora l'analisi di stabilità robusta del modello descritto per gli esempi precedenti. La condizione di stabilità robusta è data dalla (3.6); per capire se questa condizione viene violata o meno è interessante valutare come varia il raggio spettrale della matrice  $\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}$  in funzione dei parametri  $\delta$  e  $\rho$ . Questa relazione è rappresentata in Figura 3.2. Sull'asse delle ascisse è riportato il parametro  $\delta$  e sull'asse delle ordinate è rappresentato il raggio spettrale della matrice  $\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}$ . L'analisi è inoltre effettuata in funzione del parametro  $\rho$ , utilizzato nella cifra di merito che caratterizza il controllore. Si sono scelti valori di  $\rho$  ragionevoli per questo tipo di sistemi di controllo.

Dall'analisi rappresentata in Figura 3.2 è possibile notare che per i valori di  $\rho$  e  $r_p$  selezionati, la stabilità del sistema non è mai compromessa poiché i valori del raggio spettrale sull'asse delle ordinate non superano il valore 0.6 e dunque la condizione di stabilità  $\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}) < 1$  non viene mai violata.

Alla luce di questa considerazione, per confrontare l'analisi di stabilità con l'effettivo comportamento del modello in simulazione, è necessario selezionare un valore di  $\rho$  per il quale la condizione  $\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}) < 1$  venga violata.

Un valore che soddisfa questa richiesta è  $\rho = 0$ . Per effettuare il confronto sono

### 3.2. Modello discreto-continuo: stabilità robusta e prestazioni nominali



**Figura 3.2:** Analisi della stabilità robusta al variare dei parametri  $\delta$  e  $\rho$  con  $r_p = 0.4$ .

stati quindi presi in considerazione i risultati dell'analisi mantenendo il valore del parametro  $\rho$  costante e facendo variare  $r_p$ . In questo modo vengono confrontati i valori di  $\delta$ , dell'analisi e delle simulazioni, per i quali si perde la stabilità. Per il modello in simulazione i valori di  $\delta$  al variare di  $r_p$  per cui si perde la stabilità sono riassunti nella Tabella 3.1.

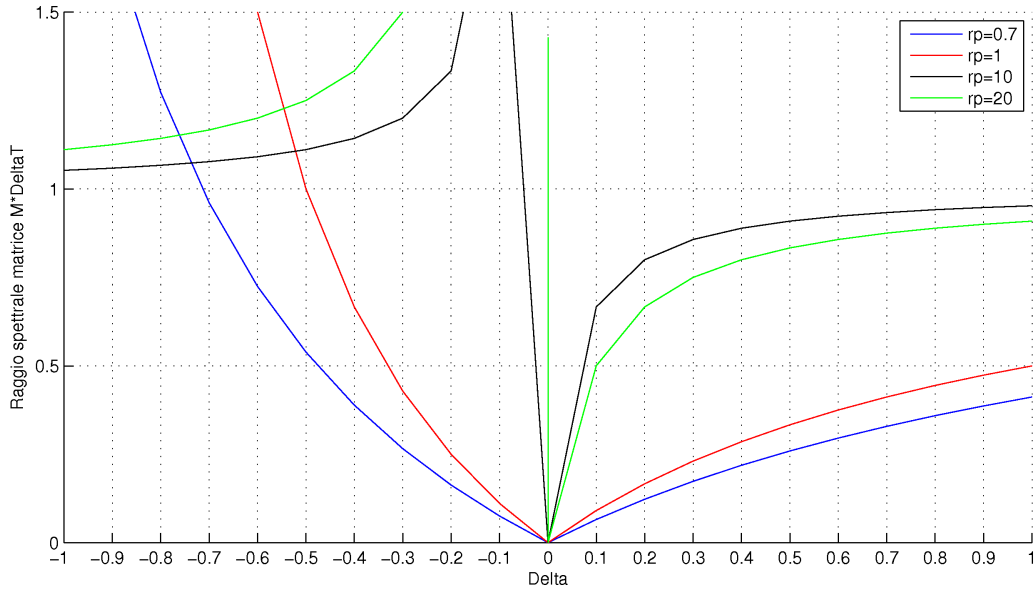
$r_p$	$\delta$
0.1	$\delta < -5$
0.4	$\delta < -1.25$
0.7	$\delta < -0.71$
1	$\delta < -0.5$
10	$\delta < -0.05$
20	$\delta < -0.025$

**Tabella 3.1:** Tabella riassuntiva dei valori di  $\delta$  per i quali il sistema in simulazione perde la stabilità.

I primi due valori di  $r_p$  (0.1 e 0.4) vengono scartati perché i relativi valori di  $\delta$  sono al di fuori dell'intervallo di definizione,  $|\delta| < 1$ . Per confrontare questi valori sperimentali con quelli risultanti dall'analisi, in Figura 3.3 viene rappresentato l'andamento di  $\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T})$  per  $\rho = 0$ , al variare di  $r_p$  e  $\delta$ .

Confrontando i dati di simulazione in Tabella 3.1 ed i valori di  $\delta$  in Figura 3.3 per cui il raggio spettrale è uguale a 1, si evidenzia che l'analisi di stabilità robusta modella abbastanza fedelmente il comportamento del sistema in simula-





**Figura 3.3:** Analisi della stabilità al variare dei parametri  $\delta$  e  $r_p$  con  $\rho = 0$ .

zione. Infatti i valori di  $\delta$  per cui  $\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}) = 1$  in Figura 3.3 sono praticamente gli stessi delle simulazioni riportati in Tabella 3.1.

Per valutare invece come si modifica l'uscita a regime al variare di  $\delta$  e rispetto alla scelta del parametro  $\rho$  si deve considerare l'analisi di convergenza condotta nel paragrafo 2.3.1.

Nell'analisi di convergenza è stato esaminato il sistema senza incertezza, infatti nei calcoli nel Paragrafo 2.3.1 compare sempre e solo la matrice  $\mathbf{T}$ . Nel sistema in esame è invece presente l'incertezza, dunque, per tenere conto di questa condizione, nella equazione del valore a regime (2.25), la matrice  $\mathbf{T}$  è stata sostituita con la matrice  $\hat{\mathbf{T}}$ .

Nonostante questo accorgimento il risultato che si ottiene dall'analisi non è perfettamente coincidente con l'uscita a regime del modello in simulazione. Questo perché nel sistema in simulazione il controllore è tarato con una matrice  $\hat{\mathbf{T}}$  associata ad una funzione di trasferimento  $G(s)$  diversa da quella del processo da controllare. L'analisi di convergenza non tiene conto di questa possibile configurazione del sistema: o si utilizza la matrice  $\mathbf{T}$  nominale o quella incerta  $\hat{\mathbf{T}}$ . Tuttavia, pur con questa limitazione, il valore  $F$  fornisce una buona approssimazione dell'uscita e dunque è stato sfruttato per avere una relazione tra il valore di uscita e i parametri del sistema di controllo  $\delta$  e  $\rho$ .

Questa relazione è rappresentata dall'analisi in Figura 3.4.

## 3.2. Modello discreto-continuo: stabilità robusta e prestazioni nominali

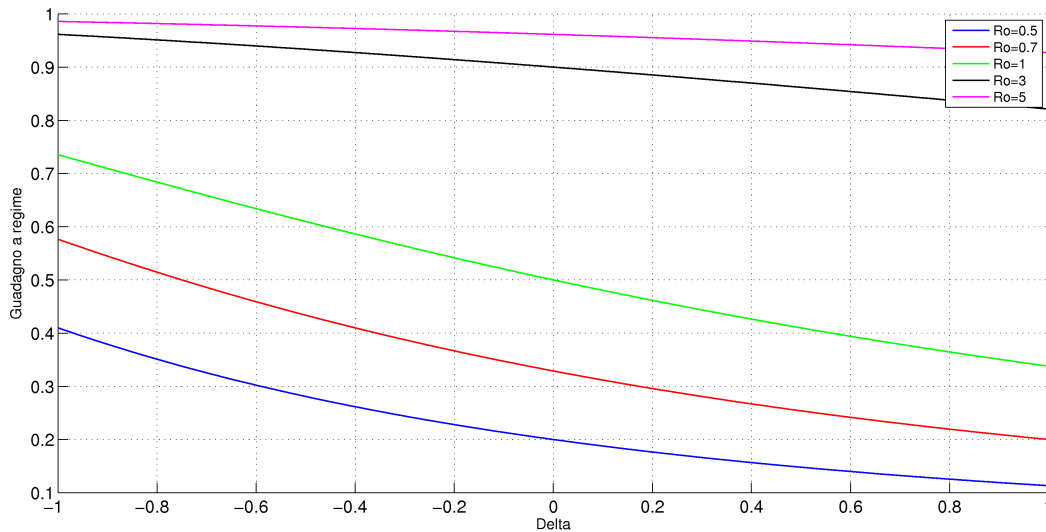


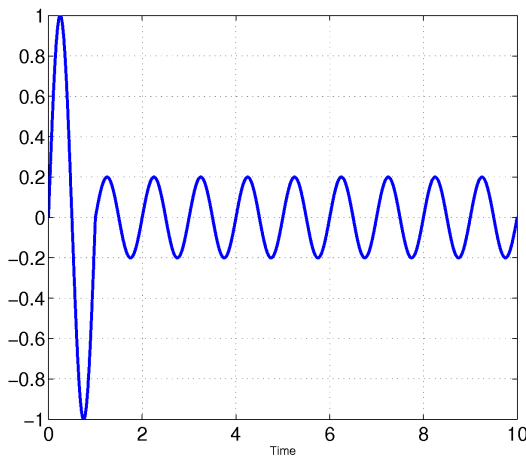
Figura 3.4: Guadagno a regime al variare dei parametri  $\delta$  e  $\rho$ .

Dall'analisi in Figura 3.4 è possibile fare alcune considerazioni: la prima è che al crescere di  $\delta$  il valore dell'uscita si attenua sempre di più, la seconda, più importante, è che più aumenta il parametro  $\rho$  più il disturbo che agisce sull'uscita viene lasciato inalterato, rendendo praticamente inutile il controllo delle vibrazioni. Questo d'altra parte è perfettamente coerente con quanto detto fino ad ora. Il parametro  $\rho$  infatti è quello che regola l'azione del controllo e come dimostrato in precedenza più è alto il suo valore più il sistema rimane stabile a fronte di incertezze più marcate ma a fare le spese di questa maggiore robustezza sono inevitabilmente le prestazioni sul segnale di uscita.

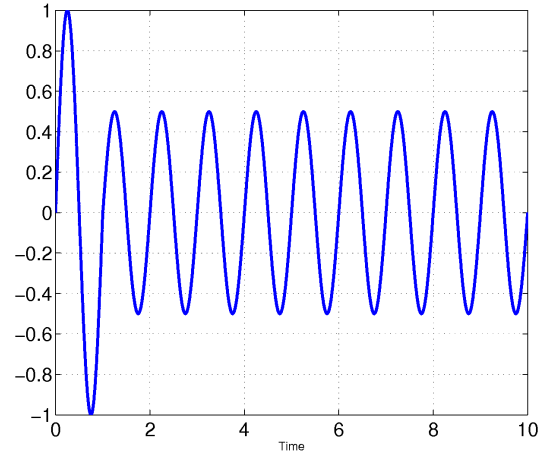
Si mostrano ora alcuni esempi di simulazioni per effettuare un confronto tra l'uscita del sistema di controllo con incertezza e l'uscita stimata nell'analisi di convergenza. Si considerino le uscite del sistema rappresentate in Figura 3.5 e in Figura 3.6

Come è possibile notare, con  $\delta = 0$  il modello è stato simulato senza incertezza dunque l'uscita del sistema è coincidente a quella stimata nell'analisi di convergenza. Infatti l'uscita del sistema in simulazione per  $\rho = 0.5$  ha un valore di 0.2 e per  $\rho = 1$  ha un valore di 0.5; questi stessi valori possono essere verificati in Figura 3.4 dove è rappresentata l'uscita a regime stimata dall'analisi di convergenza. Si prendano invece in esame le uscite del sistema in cui il parametro dell'incertezza  $\delta$  sia diverso da zero.

Nel primo caso, mostrato in Figura 3.7, per il valore del parametro  $\delta$  è stato scelto il suo estremo superiore 1; nel secondo caso, mostrato in Figura 3.8 è stato attribuito a  $\delta$  il valore -1, il suo estremo inferiore. Confrontando i valori delle uscite simulate con le uscite stimate dall'analisi di convergenza mostrate in



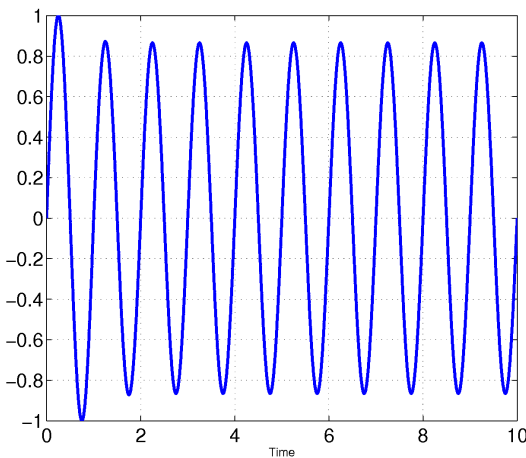
**Figura 3.5:** Uscita  $z$  del modello con parametro dell'incertezza  $\delta = 0$  e parametro del controllore  $\rho = 0.5$ .



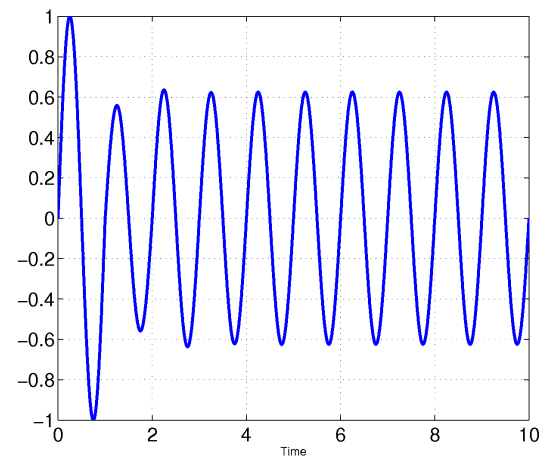
**Figura 3.6:** Uscita  $z$  del modello con parametro dell'incertezza  $\delta = 0$  e parametro del controllore  $\rho = 1$ .

Figura 3.4, con gli stessi parametri  $\delta$  e  $\rho$ , è possibile notare che sono leggermente differenti: in particolare nel primo caso l'uscita a regime calcolata nell'analisi è circa 0.82 mentre nel modello in simulazione è circa 0.88. Nel secondo caso l'uscita stimata ha un valore di 0.73 mentre l'uscita del modello simulato si attesta sul valore di 0.64. Nonostante queste piccole discrepanze tra i valori l'andamento generale delle uscite del modello in simulazione segue quello calcolato tramite l'analisi rappresentato in Figura 3.4.

In conclusione l'analisi proposta sul valore a regime che raggiunge l'uscita del sistema perde in accuratezza se si considera un modello a parametri incerti; malgrado questo aspetto è comunque utile per avere una stima qualitativa e



**Figura 3.7:** Uscita  $z$  del modello con  $\delta = 1$  e parametro del controllore  $\rho = 3$ .



**Figura 3.8:** Uscita  $z$  del modello con  $\delta = -1$  e parametro del controllore  $\rho = 1$ .

quantitativa di quanto l'uscita differisce da quella garantita dal modello nominale. Dunque è possibile avere una stima quanto vengono attenuate le vibrazioni dal sistema con incertezza, a seconda delle diverse configurazioni di parametri.

In conclusione l'analisi di stabilità robusta e l'analisi di convergenza, per le considerazioni tratte fino a questo punto, rappresentano un buono strumento per la valutazione della robustezza di un sistema di controllo affetto da incertezza.

### 3.3 Modello continuo-continuo

In alcuni studi precedenti [20] viene mostrato che trascurando gli effetti dello schema del campionatore 'sample and hold', utilizzato nell'implementazione digitale dell'algoritmo T-Matrix (come quello mostrato in questa tesi nel Capitolo 2 per l'acquisizione del segnale di uscita, da inviare al controllore discreto), l'intero algoritmo di controllo rappresentato dalla legge (2.6) può essere rappresentato dal diagramma a blocchi riportato in Figura 3.9.

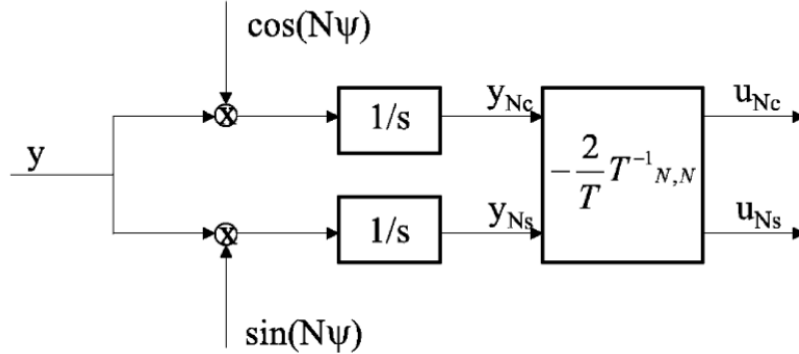


Figura 3.9: Schema equivalente dell'algoritmo HHC nel dominio continuo.

Inoltre è dimostrato che prendendo la matrice  $\mathbf{T}^{-1}$  uguale a

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

con

$$a = \frac{\text{Re}(G(jN))}{|G(jN)|^2} \quad b = \frac{\text{Im}(G(jN))}{|G(jN)|^2}$$

il controllore mostrato in Figura 3.9 ha la seguente funzione di trasferimento

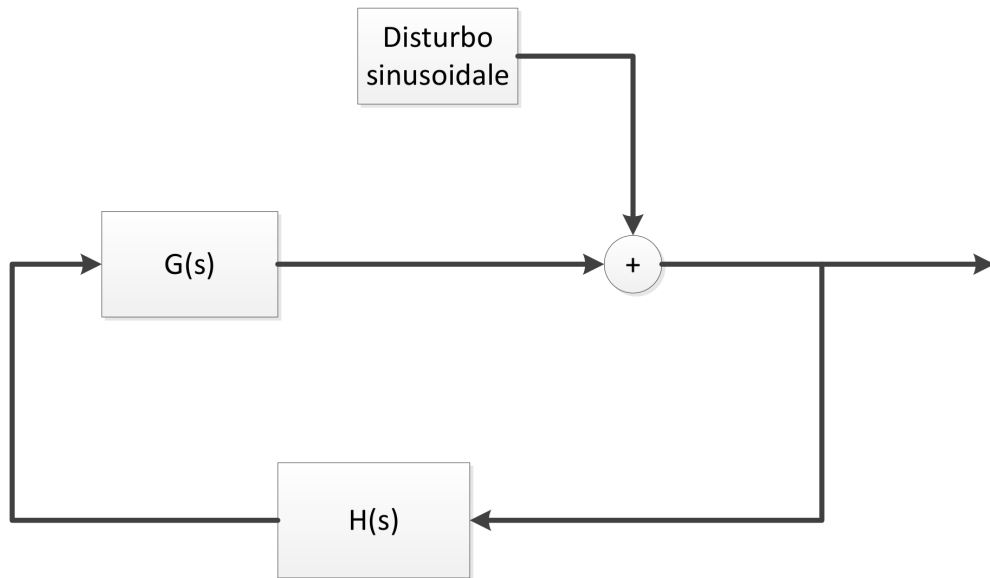
$$H(s) = -\frac{2}{T} \frac{as - bN}{s^2 + N^2} \quad (3.12)$$

dove come sempre  $N$  è il numero delle pale del rotore e in questo caso il parametro  $T$  al denominatore è il periodo di rotazione uguale a  $\frac{2\pi}{\Omega}$ .

Avendo dunque a disposizione la funzione di trasferimento del regolatore è stato realizzato un sistema di controllo con questa nuova formulazione.

Al posto del controllore discreto è stato inserito un blocco con la funzione di trasferimento  $H(s)$  (implementato con l'ausilio di un blocco di guadagno per il termine  $\frac{2}{T}$ ) e sono stati rimossi i blocchi per il campionamento e la ricostruzione del segnale continuo.

Il nuovo schema di controllo è riportato in Figura 3.10.



**Figura 3.10:** Schema a blocchi del sistema continuo-continuo: il sistema da controllare  $G(s)$  è in cascata al controllore continuo con funzione di trasferimento  $H(s)$ .

Questa formulazione coincide con la forma classica per i filtri notch nel dominio continuo, usati per l'attenuazione di una singola frequenza di disturbo [21]; si noti che è sempre possibile aggiungere un guadagno  $K$  alla funzione di trasferimento  $H(s)$  come parametro di regolazione per una messa a punto ottimale.

Questo risultato è ottenuto in [21] operando nel dominio della frequenza e in ogni caso il calcolo della funzione di trasferimento  $H(s)$  diventa molto semplice se si considera lo spazio di stato nel dominio del tempo, con l'ulteriore vantaggio che il calcolo nel dominio del tempo può facilmente essere esteso per gestire l'algoritmo PHHC (Periodic HHC - un ulteriore sviluppo/derivazione dell'algoritmo HHC). È chiaro dalla Figura 3.9 che scegliendo come variabili di stato la coppia  $y_{Nc}$  e  $y_{Ns}$ , cioè le componenti *seno* e *coseno* alla frequenza  $N\Omega$ , si ottiene il seguente

modello dello spazio di stato

$$\dot{y}_N = \mathbf{A}y_N + \mathbf{B}(\psi)y$$

$$u = \mathbf{C}(\psi)y_N$$

dove  $\psi = \Omega t$  con  $\Omega$  velocità angolare del rotore, mentre

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B}(\psi) = \begin{vmatrix} c_N \\ s_N \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\psi) = -\frac{2}{T} |c_N s_N| \begin{vmatrix} a - b \\ b & a \end{vmatrix}.$$

Il problema di questo modello è che ha l'apparenza di essere lineare tempo-variante periodico dato che nelle matrici  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  compaiono i termini  $c_N$  e  $s_N$ , i quali essendo in forma estesa uguali a  $\cos(N\psi)$  e  $\sin(N\psi)$ , sono dunque in funzione del tempo. Nonostante ciò è facile mostrare che applicando una trasformazione di Liapunov appropriata ([22]) è possibile eliminare dall'algoritmo le componenti di modulazione e demodulazione, lasciando un sistema tempo invariante. Effettivamente scegliendo la trasformazione

$$\mathbf{S}(\psi) = \begin{vmatrix} -c_N & -s_N \\ s_N & -c_N \end{vmatrix}$$

e calcolando la trasformazione degli stati

$$\begin{vmatrix} y_{N1} \\ y_{N2} \end{vmatrix} = \mathbf{S} \begin{vmatrix} y_{Nc} \\ y_{Ns} \end{vmatrix}$$

si ottiene che il sistema può essere equivalentemente descritto dal seguente modello tempo invariante

$$\dot{y}_{1,2} = \tilde{\mathbf{A}}y_{1,2} + \tilde{\mathbf{B}}y$$

$$u = \tilde{\mathbf{C}}y_{1,2}$$

dove

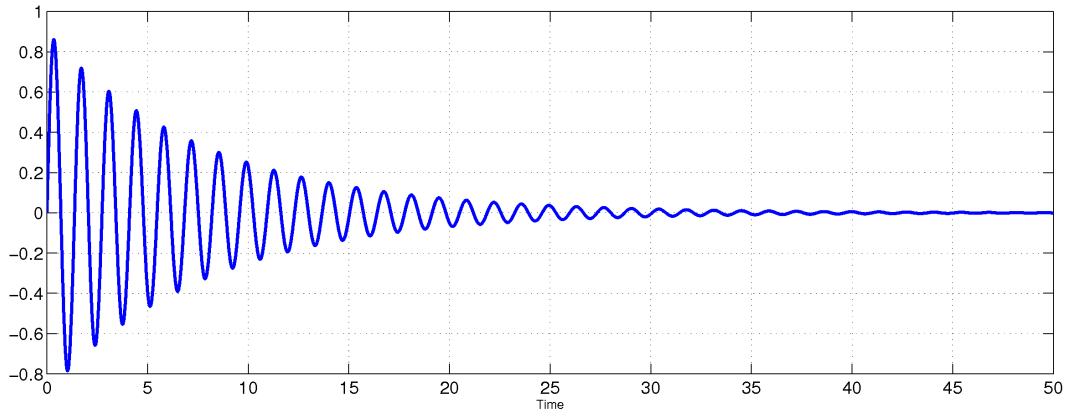
$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}(\psi)\mathbf{A}\mathbf{S}(\psi)^{-1} + \dot{\mathbf{S}}(\psi)\mathbf{S}(\psi)^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & N \\ -N & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{S}(\psi)\mathbf{B}(\psi) = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}(\psi)\mathbf{S}(\psi)^{-1} = \frac{2}{T}[a \quad -b].$$

In questo modo si ricava un sistema tempo invariante la cui funzione di trasferimento è comunque uguale alla (3.12) [23].

Si mostra ora come si comporta il sistema dotato di controllore continuo utilizzando l'esempio sfruttato fino ad ora: l'unico dato differente rispetto ai precedenti è la durata della simulazione, impostata a 50 secondi per evidenziare meglio il transitorio del segnale; il controllore è dunque realizzato secondo la formula (3.12). L'uscita del sistema è riportata in Figura 3.11.



**Figura 3.11:** Uscita del sistema con controllore continuo.

Come si può notare l'effetto del disturbo sull'uscita viene portato a zero gradualmente. Il disturbo viene attenuato istante per istante in modo continuo, al contrario del controllore discreto che, dopo un solo passo del ciclo di aggiornamento, attenua l'uscita del sistema.

### 3.3.1 Analisi di stabilità del modello continuo-continuo con incertezza

Si esamini ora il problema di dover gestire un'incertezza all'interno del sistema con il controllore a tempo continuo.

Dalla teoria del controllo robusto si consideri una generica funzione di trasferimento con un'incertezza moltiplicativa nella forma:

$$G_p(s) = G(s)(1 + w(s)\Delta(s)) \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (3.13)$$

dove  $G_p(s)$  è la funzione di trasferimento perturbata e  $G(s)$  è la funzione di trasferimento nominale e  $\Delta(j\omega)$  è una qualsiasi funzione di trasferimento stabile con modulo minore di uno per ogni frequenza  $\omega$ .

In questa analisi, data la natura scalare dell'incertezza, la funzione di trasferimento  $\Delta(s)$  viene sostituita dallo scalare  $\delta$ , con  $|\delta| < 1$ . Si prenda in esame lo schema a blocchi in Figura 3.10; la nuova formulazione del sistema di controllo con incertezza è rappresentata dallo schema a blocchi in Figura 3.12

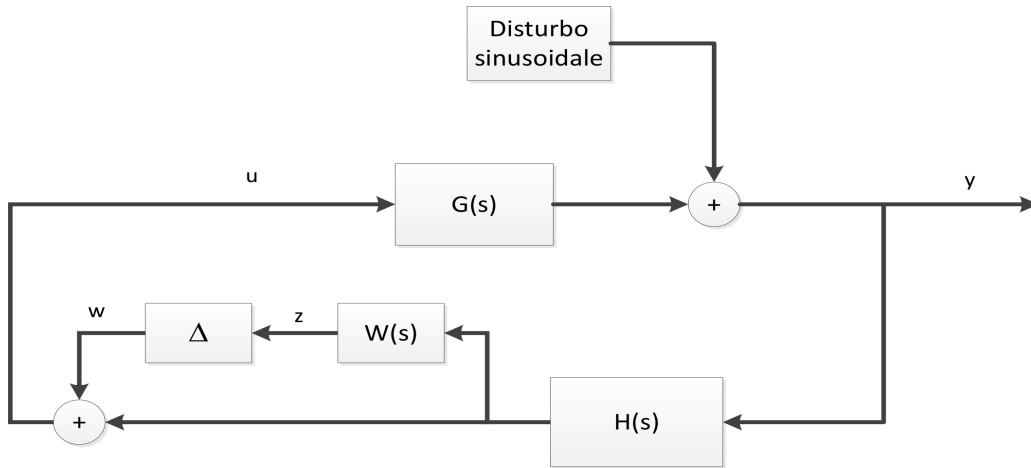


Figura 3.12: Schema a blocchi del sistema continuo-continuo con incertezza.

Dato lo schema a blocchi del sistema di controllo con incertezza in Figura 3.12 se ne presenta la sua versione  $M\Delta$ . In questo nuovo schema (in Figura 3.13) sono presenti due soli blocchi: il blocco con il parametro di incertezza  $\Delta$  e il blocco  $M$  che rappresenta tutto il resto del sistema.

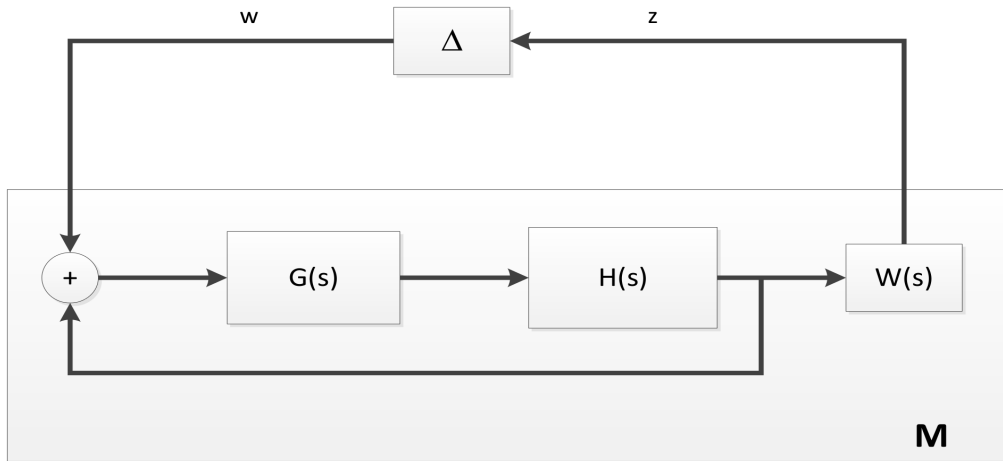


Figura 3.13: Schema a blocchi del sistema continuo-continuo con incertezza nella forma  $M\Delta$ .

Per studiare la stabilità robusta del sistema si sfrutta la norma  $H_\infty$  applicata alla funzione di trasferimento da  $z$  a  $w$ . Per il sistema di controllo rappresentato in Figura 3.12 la funzione di trasferimento da  $z$  a  $w$  è

$$G_{zw}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}W(s)$$



La condizione sufficiente ma non necessaria, data la formulazione dell'incertezza come scalare, per la stabilità robusta del sistema  $M\Delta$  è data dalla definizione 3.3.1.

**Definizione 3.3.1** (Stabilità robusta). *Il sistema di controllo di Figura 3.13, in presenza di incertezza  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ , è stabile asintoticamente se:*

$$\|G_{zw}(j\omega)\|_\infty < 1 \quad \forall \omega, \quad (3.14)$$

dove il blocco di incertezza  $\Delta$  è definito come

$$\Delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots, \delta_n\}, \quad (3.15)$$

e i parametri incerti  $|\delta| \leq 1, \forall k \quad 0 < k \leq n$ .

Nel caso in esame il blocco di incertezza  $\Delta$  è un semplice scalare, dunque  $\Delta = \delta_1$ . In termini di norma  $H_\infty$  corrisponde alla condizione

$$\|G_{zw}(s)\| = \max_{\omega} |G_{zw}(j\omega)| < 1. \quad (3.16)$$

Si noti che l'analisi di stabilità robusta trattata nel Paragrafo 3.1.2, per come è formulata, è valida solo alla frequenza  $\Omega N$  mentre l'analisi robusta tramite l'approccio  $H_\infty$  coinvolge tutto lo spettro di frequenze.

### 3.3. Modello continuo-continuo

---

# Capitolo 4

## Simulazioni e risultati

In questo capitolo si presentano alcuni risultati ottenuti attraverso delle simulazioni, prendendo in considerazione tutta la parte di analisi di stabilità robusta descritta nel Capitolo 3, applicata non più ad un sistema di prova ma ad un modello rappresentativo della dinamica delle pale di un elicottero. In primo luogo viene descritto il modello a singola pala usato per il caso di studio, definendo le equazioni e i parametri fisici che ne regolano il funzionamento.

In seguito, specificando la scelta dei parametri incerti, si mostrano alcuni confronti tra l'analisi di stabilità applicata al modello e delle simulazioni del sistema, con i relativi risultati.

### 4.1 Modello per singola pala

In questa sezione viene presentato il modello matematico a singola pala utilizzato successivamente per le analisi e le simulazioni. Di seguito si propone una descrizione concisa che permette di arrivare alla formulazione del modello descritto nello spazio di stato.

Inizialmente si considera l'equazione del momento flettente che fornisce una discreta approssimazione delle forze e delle dinamiche che agiscono sulla pala, successivamente si risolve l'equazione tramite la sua espansione modale tenendo presente sia i carichi aerodinamici sia le forze di taglio verticali. Infine il modello ottenuto viene normalizzato e messo in forma esplicita di spazio di stato.

#### 4.1.1 Modello *out of plane* di pala del rotore

Negli studi di aerodinamica degli elicotteri, viene utilizzato un modello di pala rigida e indeformabile, ipotesi accettabile in prima approssimazione, per fornire le basi teoriche usate per sviluppare semplici modelli per il calcolo delle prestazioni del rotore, leggi di controllo e studio della stabilità dei moti. Nonostante questa

## 4.1. Modello per singola pala

possibilità si è scelto di utilizzare un modello che tenga conto della flessibilità della pala, che influenza significativamente il comportamento del rotore dal punto di vista della stabilità dei moti della pala e delle vibrazioni trasmesse all'elicottero. Viene dunque ora presentato il classico modello del momento flettente *out of plane* (o *flapwise bending*) per una pala del rotore di un elicottero.

In generale l'approccio considerato è il seguente: tramite l'equilibrio newtoniano si scrivono le equazioni di moto della pala deformabile; le soluzioni delle equazioni di moto non è nota in forma chiusa e viene quindi adottato un approccio di tipo modale scrivendo l'equazione modale associata all'equazione di moto. [24]

### 4.1.2 L'equazione di base del momento flettente

L'equazione differenziale alle derivate parziali che governa la flessione fuori dal piano di una pala del rotore può essere derivata applicando la classica teoria della trave. Indicando con  $M(r, t)$  il momento flettente che agisce sulla trave nel punto di lunghezza  $r$  al tempo  $t$  e indicando con  $z(r, t)$  la deflessione corrispondente, la relazione tra quest due è data da:

$$M(r, t) = E(r)I(r) \frac{d^2 z(r, t)}{dr^2}. \quad (4.1)$$

In questa equazione i termini  $E$  ed  $I$  dipendenti dalla posizione  $r$  sono rispettivamente il coefficiente elastico dipendente dal materiale e il coefficiente dipendente dalla forma della pala nel punto  $r$ . Il momento flettente è il risultato di tutte le forze che agiscono sulla pala, come le forze inerziali, i carichi aerodinamici e le forze centrifughe.

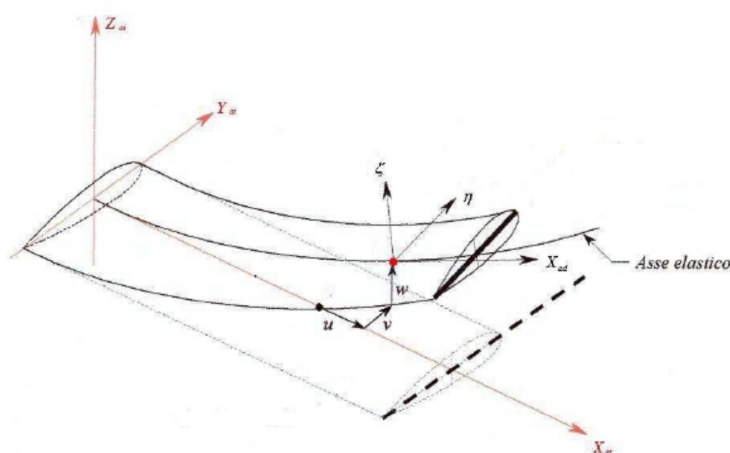


Figura 4.1: Schema del modello *out of plane* della pala [3].

I carichi aerodinamici rappresentano l'effetto globale dei carichi distribuiti  $L_s(r, t)$ , che tiene conto dell'effetto di sollevamento della pressione dell'aria sulla

pala; l'effetto inerziale può essere calcolato integrando su tutta la lunghezza della pala la forza d'inerzia a causa di un singolo elemento di massa a distanza  $r$  dal mozzo del rotore; infine la forza centrifuga può essere facilmente espressa come risultato di tutte le forze centrifughe che agiscono sugli elementi della singola pala.

Dunque riassumendo quanto detto fino ad ora si ricava la seguente equazione:

$$\begin{aligned}
 M(r, t) = \int_r^R L_s(\rho, t)(\rho - r)d\rho \\
 - \int_r^R m(\rho)\ddot{z}(\rho, t)(\rho - r)d\rho \\
 - \int_r^R m(\rho)\Omega^2\rho(z(\rho, t) - z(r, t))d\rho \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

dove

- $m(\cdot)$  è la massa radiale distribuita sulla pala
- $R$  è il raggio del rotore
- $L_s(\cdot, \cdot)$  è il carico aerodinamico distribuito
- $\Omega$  è la velocità angolare del rotore.

Ora si pospone l'analisi dei carichi distribuiti  $L_s$  ad un paragrafo successivo. Si noti che si assume la velocità angolare  $\Omega$  costante, che è una considerazione assolutamente lecita sotto condizioni di volo normali.

Sostituendo la (4.2) nella (4.1) e considerando la derivata seconda rispetto ad  $r$  si ottiene l'equazione alle derivate parziali:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left[ E(r)I(r) \frac{d^2 z(r, t)}{dr^2} \right] - \frac{d}{dr} \left[ \left( \int_r^R m(\rho)\Omega^2\rho d\rho \right) \frac{dz(r, t)}{dr} \right] + m(r)\ddot{z}(r, t) = L_s(r, t). \quad (4.3)$$

L'equazione (4.3) che descrive la risposta strutturale della pala ai carichi esterni applicati è detta *bending equation*. Se, al posto di modellare una pala flessibile, si considerasse la pala come un elemento rigido, allora la deflessione sarebbe una funzione lineare di  $r$ :  $z(r, t) = r\beta(t)$  dove  $\beta(t)$  è chiamato angolo di flappeggio. Di conseguenza la (4.3) può essere ridotta alla equazione differenziale ordinaria

$$mr\ddot{\beta}(t) - \frac{d}{dr} \left( \int_r^R m(\rho)\Omega^2\rho d\rho \right) \beta(t) = L_s(r, t)$$

che è conosciuta come equazione di flappeggio.[25]

### 4.1.3 Risoluzione dell'equazione di pala attraverso l'espansione modale

L'equazione (4.3) può essere ridotta ad un insieme di equazioni differenziali ordinarie ricorrendo al metodo di separazione delle variabili; la deflessione  $z(r, t)$  può essere espansa come

$$z(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(r) q_i(t) \quad (4.4)$$

dove le funzioni  $\eta_i(r)$  sono ortogonali tra di loro dunque vale

$$\int_r^R \eta_i(r) \eta_j(r) m(r) dr = 0 \quad \forall i \neq j$$

e si normalizza in modo di avere  $\eta_i(R) = R$ . Le funzioni  $\eta_i(r)$  sono associate alle vibrazioni libere della barra (pala nel nostro caso) come segue: si suppone che  $\nu$  sia la frequenza delle vibrazioni libere relative al modo  $\eta(r)$ , in altre parole

$$z(r, t) = \eta(r) e^{i\nu t}. \quad (4.5)$$

Sostituendo (4.5) nella (4.3) si ottiene

$$\frac{d^2}{dr^2} \left[ E(r) I(r) \frac{d^2 \eta(r)}{dr^2} \right] - \frac{d}{dr} \left[ \left( \int_r^R m(\rho) \Omega^2 \rho d\rho \right) \frac{d\eta(r)}{dr} \right] = \nu^2 m(r) \eta(r). \quad (4.6)$$

Vi è dunque un insieme numerabile infinito di frequenze  $\nu$  per le quali questa equazione ammette una soluzione: queste soluzioni, ordinate secondo i valori crescenti della frequenza  $\nu$ , sono indicati da  $\eta_i(r), i = 1, 2, \dots$ . Può essere dimostrato che la più piccola tra queste frequenze è  $\nu = \Omega$ ; inoltre risulta che la soluzione associata con  $\nu = \Omega$  è  $\eta_i(r) = r$ . Sostituendo l'espansione (4.4) nella (4.3) e combinando il risultato con la (4.6) risulta:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(r) \eta_i(r) (\ddot{q}_i(t) + \nu_i^2 q_i(t)) = L_s(r, t). \quad (4.7)$$

Applicando l'operatore  $\int_r^R (\dots) \eta_k(r) dr$  ad entrambi i membri della (4.7) ed utilizzando la condizione di ortogonalità di  $\eta$  si ottiene l'equazione modale fondamentale della pala:

$$I_{qk} (\ddot{q}_k(t) + \nu_k^2 q_k(t)) = \int_0^R \eta_k(r) L_s(r, t) dr, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

con

$$I_{qk} = \int_0^R m(r) \eta_k^2(r) dr.$$

#### 4.1.4 Carichi aerodinamici distribuiti

Nell'equazione (4.6) la variabile  $L_s(r, t)$  ha il ruolo di rappresentare le variabili esogene. Si presenta ora una breve traccia su come  $L_s(r, t)$  possa essere determinato secondo la teoria classica della pala.

Indicando con  $u_p(r, t)$  e con  $u_t(r, t)$  le componenti verticali ed orizzontali della velocità di una generica sezione della pala, è ben noto che il sollevamento della pala, cioè la componente della forza perpendicolare a  $u$ , è data dall'equazione

$$\Delta L(r, t) = \frac{1}{2} \rho u(r, t)^2 c_l(r, t) \quad (4.9)$$

dove  $c_l(r, t) = f(\alpha(r, t)) \approx a\alpha(r, t)$  è chiamato coefficiente di portanza. L'angolo  $\alpha(r, t)$  è l'angolo di attacco, che rappresenta la differenza tra l'angolo di pitch comandato e l'angolo della sezione creato dall'afflusso d'aria. Il carico aerodinamico verticale che agisce sulla sezione può essere determinato approssimativamente dalla seguente relazione:

$$L_S(r, t) \approx \Delta L(r, t) \cos(\phi(r, t)) = \frac{\Delta L(r, t) u_t(t)}{u(t)}. \quad (4.10)$$

In questa equazione si presume inoltre che gli angoli siano sufficientemente piccoli; questa ipotesi implica che lo stallo della sezione della pala non sia considerato in questo modello matematico poiché si suppone che l'angolo del giunto sia abbastanza piccolo affinché garantisca la presenza del solo flusso perpendicolare alla pala. Infine è possibile completare la descrizione del modello dando una descrizione adeguata delle velocità  $u_p(r, t)$  e  $u_t(r, t)$ , completando la formulazione del modello:

$$u_T(r, t) = \Omega r + V \cos \alpha \sin \psi \quad (4.11)$$

$$u_P(r, t) = V \sin \alpha + v_i + \dot{z}(r, t) + z'(r, t) V \cos \alpha \cos \psi \quad (4.12)$$

dove  $V$  è la velocità orizzontale dell'elicottero.

Le equazioni presentate fino ad ora sono tutte tempo-invarianti, con l'eccezione delle espressioni (4.10) e (4.11) per le velocità delle sezioni. Effettivamente queste sono indipendenti da  $t$  solo quando  $V = 0$  cioè quando la velocità di crociera è uguale a zero e dunque l'elicottero è in hovering o in volo verticale; nel caso di volo orizzontale le velocità locali diventano periodiche nel tempo rendendo il sistema tempo-variante.

Si noti inoltre che un ambiente con componenti periodiche può introdurre fenomeni aerodinamici instabili; questo modello non tiene conto di questi fenomeni e restringe la sua applicabilità a velocità di avanzamento molto ridotte.[25]

### 4.1.5 Forza di taglio verticale

La variabile di uscita del modello è la forza verticale impressa alla radice della pala con il rotore, indicata come  $S_Z(t)$ . Per il calcolo della sua stima vi sono due possibilità. La prima è quella di ricorrere all'approccio di integrazione delle forze che è una implementazione diretta della definizione di  $S_Z(t)$  come differenza tra il carico aerodinamico totale e il carico totale inerziale agenti sulla pala:

$$\begin{aligned} S_Z(t) &= \int_0^R L_S(r, t) dr - \int_0^R m(r) \ddot{z}(r, t) dr \\ &= \int_0^R L_S(r, t) dr - \sum_k \ddot{q}_k(t) \int_0^R m(r) \eta_k(r) dr. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La seconda possibilità è basata sulla tecnica di somma modale.  $S_Z(t)$  è ottenuta usando la seguente espansione modale di  $L_S(r, t)$ :

$$L_S(r, t) = \sum_k L_{S_k}(t) \eta_k(r) m(r) \quad (4.14)$$

con

$$L_{S_k}(t) = \left[ \int_0^R \eta_k(r) L_S(r, t) dr \right] \left[ \int_0^R \eta_k(r)^2 m(r) dr \right]^{-1}.$$

Sostituendo la (4.14) nella (4.8) e considerando sempre l'ortogonalità dei modi  $\eta_k$  si ottiene:

$$\ddot{q}_k(t) + \nu_k^2 q_k(t) = L_{S_k}(t). \quad (4.15)$$

Infine sostituendo l'espansione di  $L_S(r, t)$  nella definizione (4.13) si ricava:

$$S_Z(t) = \sum_k \left[ \nu_k^2 q_k(t) \int_0^R \eta_k(r) m(r) dr \right]. \quad (4.16)$$

Le espressioni (4.16) e (4.13) sono equivalenti se si considera un numero infinito di modi.[25]

### 4.1.6 Modello normalizzato nella forma di spazio di stato

#### Normalizzazione del modello

Una pratica comune nella letteratura riguardo agli elicotteri è quella di riscrivere tutti le equazioni dei modelli in una forma adimensionale: questa ha il vantaggio di concentrarsi fortemente sulle caratteristiche essenziali del sistema. La normalizzazione coinvolge le masse, che sono normalizzate rispetto alla densità dell'aria  $\rho$ , e le lunghezze, normalizzate rispetto alla lunghezza della pala  $R$ . Inoltre il



tempo  $t$  è sostituito dall'angolo di azimuth  $\psi$ . Alcuni semplici calcoli mostrano che le equazioni di modello diventano:

$$\ddot{q}_{kn}(\psi) + \nu_{kn}^2 q_{kn}(\psi) = \frac{\gamma}{I_{qk}^*} \int_0^1 \eta_{kn}(r_n) L_{S_n}(r_n, \psi) dr_n, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.17)$$

$$\frac{S_{Z_n}(\psi)}{I_{q1n}} = \gamma \int_0^1 \frac{L_{S_n}(r_n, \psi)}{ac_n} dr_n - \sum_k \ddot{q}_{kn}(\psi) S_{qk}^* \quad (4.18)$$

$$\frac{L_{S_n}(r_n, \psi)}{ac_n} \cong \frac{1}{2} (u_{tn}(r_n, \psi)^2 \vartheta(\psi) - u_{tn}(r_n, \psi) u_{pn}(r_n, \psi)). \quad (4.19)$$

Vengono inoltre introdotte le seguenti grandezze adimensionali:

$$\gamma = \frac{\zeta ac R^4}{I_{q1}} \quad \text{Lock number}$$

$$\mu = \frac{V \cos \alpha}{\omega R} \quad \text{Advance ratio}$$

$$\lambda = \frac{V \sin \alpha + v_i}{\Omega R} \quad \text{Inflow ratio.}$$

Il Lock number è una costante che caratterizza in particolare ogni rotore; valori tipici si attestano in un range tra 7 e 10; la deflessione la cui versione normalizzata compare nella (4.19) è data dalla (4.9). Nell'insieme di equazioni sopra descritto è possibile riconoscere le equazioni di stato (4.15) e l'equazione di output (4.16). Entrambe le equazioni dinamiche (4.15) e l'equazione di uscita (4.16) sono lineari tempo invarianti; solo la (4.17) potrebbe avere una dipendenza dal tempo. Più precisamente, solo in hovering o in volo verticale con  $V = 0$  tutto il modello è tempo invariante; al contrario in volo avanzato con velocità  $V > 0$  i coefficienti della (4.17) diventano periodici nel tempo. Le espressioni per le velocità verticali e orizzontali diventano:

$$u_{tn}(r_n, \psi) = r_n + \mu \sin \psi \quad (4.20)$$

$$u_{pn}(r_n, \psi) = \lambda + \dot{z}_n(r_n, \psi) + z'_n(r_n, \psi) \mu \cos \psi \quad (4.21)$$

dove il pedice  $n$  indica le variabili normalizzate.[25]

### Forma esplicita del modello

Sostituendo la (4.20) e la (4.21) nella (4.19) è possibile ottenere un'espressione analitica per gli integrali delle equazioni di carico (4.17) e (4.18):

$$\int_0^1 \eta_{kn}(r_n) \frac{L_{S_n}(r_n, \psi)}{ac_n} dr_n = M_\vartheta(\psi) \vartheta_n(\psi) + \sum_i M_{q_k q_i}(\psi) q_{in}(\psi) + \sum_i M_{q_k \dot{q}_i}(\psi) \dot{q}_{in}(\psi) \quad (4.22)$$

$$\int_0^1 \frac{L_{S_n}(r_n, \psi)}{ac_n} dr_n = T_\theta(\psi) \theta_n(\psi) + \sum_i T_{q_i}(\psi) q_{in}(\psi) + \sum_i T_{\dot{q}_i}(\psi) \dot{q}_{in}(\psi) \quad (4.23)$$

## 4.1. Modello per singola pala

dove  $M_\theta(\psi)$ ,  $M_{q_k q_i}(\psi)$ ,  $M_{q_k \dot{q}_i}(\psi)$ ,  $T_\theta(\psi)$ ,  $T_{q_i}(\psi)$ ,  $T_{\dot{q}_i}(\psi)$  sono quantità definite in funzione di  $\eta$  e  $u$  definite dalle seguenti formule:

$$\begin{aligned}
 M_\theta(\psi) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \eta_{kn}(r_n) u_{tn}^2(r_n, \psi) dr_n \\
 M_{q_k q_i}(\psi) &= \frac{1}{2} u_{rn}(\psi) \int_0^1 \eta_{kn}(r_n) \eta'_{ki}(r_n) u_{tn}(r_n, \psi) dr_n \\
 M_{q_k \dot{q}_i}(\psi) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \eta_{kn}(r_n) \eta_{ki}(r_n) u_{tn}(r_n, \psi) dr_n \\
 T_\theta(\psi) &= \frac{1}{2} \int_0^1 u_{tn}^2(r_n, \psi) dr_n \\
 T_{q_i}(\psi) &= \frac{1}{2} u_{rn}(\psi) \int_0^1 \eta'_{ki}(r_n) u_{tn}(r_n, \psi) dr_n \\
 T_{\dot{q}_i}(\psi) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \eta_{ki}(r_n) u_{tn}(r_n, \psi) dr_n.
 \end{aligned}$$

Sostituendo (4.22) e la (4.23) rispettivamente nella (4.17) e (4.18) e prendendo

$$\mathbf{q}_n = \begin{vmatrix} q_{1n} \\ q_{2n} \\ \vdots \\ q_{Kn} \end{vmatrix}, \quad \nu^2 = \text{diag} \begin{vmatrix} \nu_1^2 \\ \nu_2^2 \\ \vdots \\ \nu_K^2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{I}_q = \text{diag} \begin{vmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \\ \vdots \\ I_{qK} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\dot{q}}(\psi) &= \{M_{q_j \dot{q}_k}(\psi)\} = \mathbf{M}'_{\dot{q}}(\psi) \\
 \mathbf{M}_q(\psi) &= \{M_{q_j q_k}(\psi)\} = \mathbf{M}'_q(\psi), \quad j, k = 1, \dots, K \\
 \mathbf{M}_q(\psi) &= |M_{\vartheta_{q1}}(\psi) M_{\vartheta_{q2}}(\psi) \dots M_{\vartheta_{qK}}(\psi)| \\
 \mathbf{T}_q(\psi) &= |T_{q1}(\psi) T_{q2}(\psi) \dots T_{qK}(\psi)| \\
 \mathbf{T}_{\dot{q}}(\psi) &= |T_{\dot{q}1}(\psi) T_{\dot{q}2}(\psi) \dots T_{\dot{q}K}(\psi)| \\
 \mathbf{S} &= |S_{q1}^* S_{q2}^* \dots S_{qK}^*|
 \end{aligned}$$

si ottiene il seguente sistema

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{q}}_n(\psi) + \nu^2 \mathbf{q}_n(\psi) &= \gamma \mathbf{I}_q^{-1} [\mathbf{M}_{\vartheta}(\psi) \vartheta_n(\psi) + \mathbf{M}_q(\psi) \mathbf{q}_n(\psi) + \mathbf{M}_{\dot{q}}(\psi) \dot{\mathbf{q}}_n(\psi)] \\
 \frac{S_{Zn}(\psi)}{I_{q1n}} &= \gamma [\mathbf{T}_{\vartheta}(\psi) \vartheta_n(\psi) + \mathbf{T}_q(\psi) \mathbf{q}_n(\psi) + \mathbf{T}_{\dot{q}}(\psi) \dot{\mathbf{q}}_n(\psi)] - \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}}_n(\psi).
 \end{aligned}$$

Il sistema equivalente nella rappresentazione dello spazio di stato è:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\psi) = \mathbf{A}(\psi) \mathbf{x}(\psi) + \mathbf{B}(\psi) \mathbf{u}(\psi) \\ \mathbf{y}(\psi) = \mathbf{C}(\psi) \mathbf{x}(\psi) + \mathbf{D}(\psi) \mathbf{u}(\psi) \end{cases}$$

Dove il vettore di stato

$$\mathbf{x}(\psi) = \begin{vmatrix} \mathbf{q}_n(\psi) \\ \dot{\mathbf{q}}_n(\psi) \end{vmatrix}$$

ha dimensione  $2K$  dove  $K$  è il numero dei modi.

L'input  $u$  è dato dall'angolo di pitch

$$u(\psi) = \vartheta_n(\psi).$$

Le matrici del sistema sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\psi) &= \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\nu^2 + \gamma \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_q(\psi) & \gamma \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_{\dot{q}}(\psi) \end{vmatrix} \\ \mathbf{B}(\psi) &= \begin{vmatrix} 0 \\ \gamma \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_{\vartheta}(\psi) \end{vmatrix} \\ \mathbf{C}(\psi) &= \begin{vmatrix} \gamma \mathbf{T}_q(\psi) - \mathbf{S}(-\nu^2 + \gamma \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_{\vartheta}(\psi)) & \gamma(\mathbf{T}_{\dot{q}}(\psi) - \mathbf{S} \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_{\dot{q}}(\psi)) \end{vmatrix} \\ \mathbf{D}(\psi) &= \gamma(\mathbf{T}_{\vartheta}(\psi) - \mathbf{S} \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_{\vartheta}(\psi)). \end{aligned}$$

[25]

Le matrici  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  sono le matrici del modello che verrà utilizzato per le simulazioni e le analisi di stabilità. Questo modello non è particolarmente accurato dal punto di vista elicotteristico ed aerodinamico ma è una discreta prima approssimazione di un sistema reale sul quale ha senso fare delle analisi.

## 4.2 Simulazioni e risultati

Nella sezione corrente si espongono alcuni casi di studio al fine di valutare gli approcci di controllo robusto trattati. I parametri del modello sono definiti sulla base di un elicottero reale, l'Agusta A-109; la caratterizzazione del modello viene completata con le descrizioni delle variabili incerte presenti nel sistema.

### 4.2.1 Casi di studio

In questo paragrafo vengono presentati i casi di studio; dopo aver delineato brevemente i parametri che descrivono il modello di pala vengono espone le varie simulazioni effettuate specificandone le condizioni di funzionamento e illustrandone i risultati dedotti.

I casi di studio variano a seconda del parametro incerto o del modello utilizzato: inizialmente si esamina il caso in cui il parametro di incertezza è la frequenza delle vibrazioni libere  $\nu$  utilizzando il modello rigido; successivamente si analizza il modello flessibile considerando il terzo modo del parametro  $\nu$ ; infine sempre utilizzando il modello flessibile si effettua un'analisi con l'incertezza sul parametro di advance ratio  $\mu$ .

### 4.2.2 Parametri del modello: l'elicottero Agusta A-109

L'elicottero utilizzato per le simulazioni e rappresentato dal modello esposto nel Paragrafo 4.1 è l'Agusta A-109. L'A-109 è un elicottero biturbina multiruolo molto diffuso in tutto il mondo, che conta più di una ventina di versioni differenti con variazioni di equipaggiamento, motori e struttura a seconda dei vari utilizzi (militari, civili, soccorso, pattugliamento, trasporto ecc.).

In Tabella 4.1 vengono riportati i parametri che caratterizzano il funzionamento del modello utilizzato per le simulazioni.

Number of blades $N$	4
Rotor angular frequency $\Omega$	40.32 rad/s
Rotor radius $R$	5.5 m
Mass per unit length $m$	48.87 N
Stiffness $EI$	$1.8 \cdot 10^3 \text{ Nm}^2$
Lift curve slope $a$	$5.7 \text{ rad}^{-1}$
Lock number $\gamma$	7.8
Blade chord $c$	0.3 m

**Tabella 4.1:** Caratteristiche meccaniche ed aerodinamiche del rotore dell'elicottero Agusta A-109.

### 4.2.3 Scelta del parametro incerto

Per risolvere i problemi di controllo robusto è necessario specificare i parametri che, a livello pratico, potrebbero risultare incerti. Questa operazione dipende dal sistema in esame poiché è indispensabile valutare se è sensato definire l'incertezza per quel parametro in base alla natura del parametro stesso.

Per il primo caso si è scelto di utilizzare come parametro incerto la frequenza  $\nu$  che compare nella matrice  $\mathbf{A}$  del modello, cioè la frequenza delle le vibrazioni libere.

Richiamando la definizione di parametro incerto, di equazione (3.1) utilizzata nell'analisi condotta nel Capitolo 3, l'incertezza per il parametro  $\nu$  è definita come:

$$\nu = \bar{\nu}(1 + r_p \delta). \quad (4.24)$$

Questa definizione si riflette direttamente sulla struttura della matrice  $\mathbf{A}$  che diventa la seguente:

$$\mathbf{A}(\psi) = \bar{\mathbf{A}}(\psi) + \Delta \mathbf{A}(\delta)$$

$$\mathbf{A}(\psi) = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\nu^2 + \gamma \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_q(\psi) & \gamma \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_q(\psi) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\nu^2 r_\nu \delta & 0 \end{vmatrix}$$

dove d'ora in avanti  $\mathbf{A}$  è la matrice con il parametro incerto e  $\overline{\mathbf{A}}$  è la matrice del modello nominale. Il parametro  $r_\nu$  indica la percentuale di variazione dal valore nominale e  $\delta$  è il parametro che definisce il range di incertezza con l'ipotesi che  $|\delta| < 1$ .

#### 4.2.4 Simulazioni

Nella seguente sezione si mostrano alcuni risultati ottenuti attraverso la simulazione sia con il modello discreto-continuo sia con il modello continuo-continuo. Il sistema discreto-continuo utilizzato per le simulazioni è quello riportato nella Figura 2.7 mentre il sistema continuo-continuo è quello riportato in Figura 3.10; per tutti gli elementi di seguito specificati si fa dunque riferimento a questi due schemi.

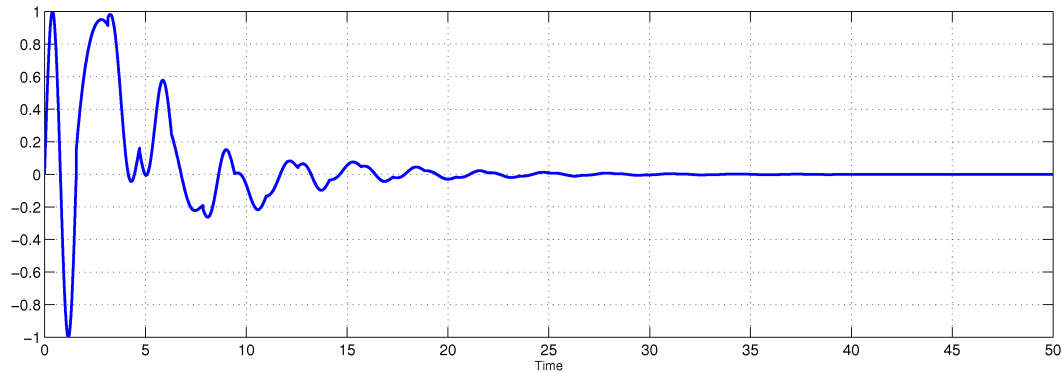
In primo luogo si riportano alcune considerazioni riguardo la configurazione del sistema in esame, definendo i parametri che caratterizzano il modello utilizzato e assegnando i valori ai parametri che definiscono l'incertezza:

- il modello a singola pala è stato impostato con il parametro  $\mu$  di advance ratio uguale a 0, quindi con l'elicottero in volo a punto fisso (hovering), ed è stato considerato il primo modo del sistema,  $n = 1$ ; di conseguenza la matrice  $\mathbf{A}$  è di dimensione  $2 \times 2$ .
- si è scelto di tarare il controllore discreto con il modello nominale; dunque la legge di controllo che ne regola il funzionamento è quella di equazione (2.20); le matrici  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{T}$ , che caratterizzano il controllore, sono calcolate prendendo in esame la funzione di trasferimento  $\overline{G}(s)$  del modello nominale, che nello spazio di stato è rappresentato dalle matrici  $[\overline{\mathbf{A}}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ . Inizialmente per il parametro  $\rho$ , il peso dell'azione di controllo, si è scelto il valore 0.
- al sistema da controllare è stato assegnato il modello di pala affetto da incertezza la cui funzione di trasferimento  $G(s)$  dipende dunque dalle matrici  $[\overline{\mathbf{A}} + \Delta\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ .
- il controllore continuo è tarato secondo con la funzione di trasferimento  $H(s)$  descritta dall'equazione (3.12) con i parametri  $a$  e  $b$  calcolati sulla funzione di trasferimento  $\overline{G}(s)$  del sistema nominale.
- i parametri di incertezza sono stati impostati con i valori di  $\delta = 1$  e  $r_\nu = 0.2$ .
- alla frequenza di rotazione del rotore  $\Omega$  è stato assegnato il valore 1 dunque la frequenza  $N\Omega$  a cui opera il sistema è uguale a 4.

## 4.2. Simulazioni e risultati

- il disturbo esterno che rappresenta le vibrazioni ha ampiezza unitaria e frequenza  $N\Omega = 4$  vista la considerazione al punto precedente.

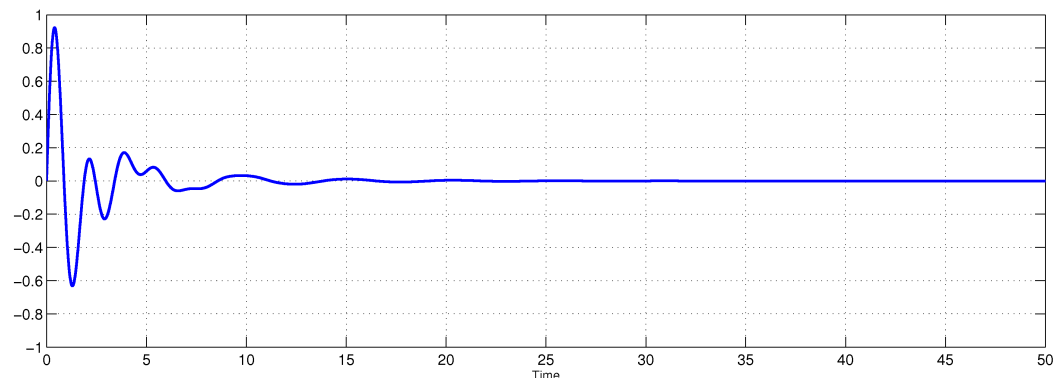
Si prenda in considerazione il sistema discreto-continuo configurato con le impostazioni appena presentate: si mostra una prima simulazione della durata di 50 secondi per osservare il comportamento dell'uscita  $z$  del sistema di controllo.



**Figura 4.2:** Uscita del sistema di controllo discreto-continuo, con sistema da controllare con  $n = 1$  e peso del controllo  $\rho=0$ .

Dall'andamento dell'uscita riportato in Figura 4.2 è possibile notare come nonostante l'incertezza presente all'interno del sistema e un peso dell'azione controllo nullo del regolatore, quest'ultimo riesca comunque a controllare il disturbo portandone a zero l'effetto sull'uscita.

A conferma del fatto che questa configurazione non sia particolarmente problematica dal punto di vista della stabilità si può osservare in Figura 4.3 l'andamento dell'uscita del sistema realizzato con il controllore a tempo continuo.

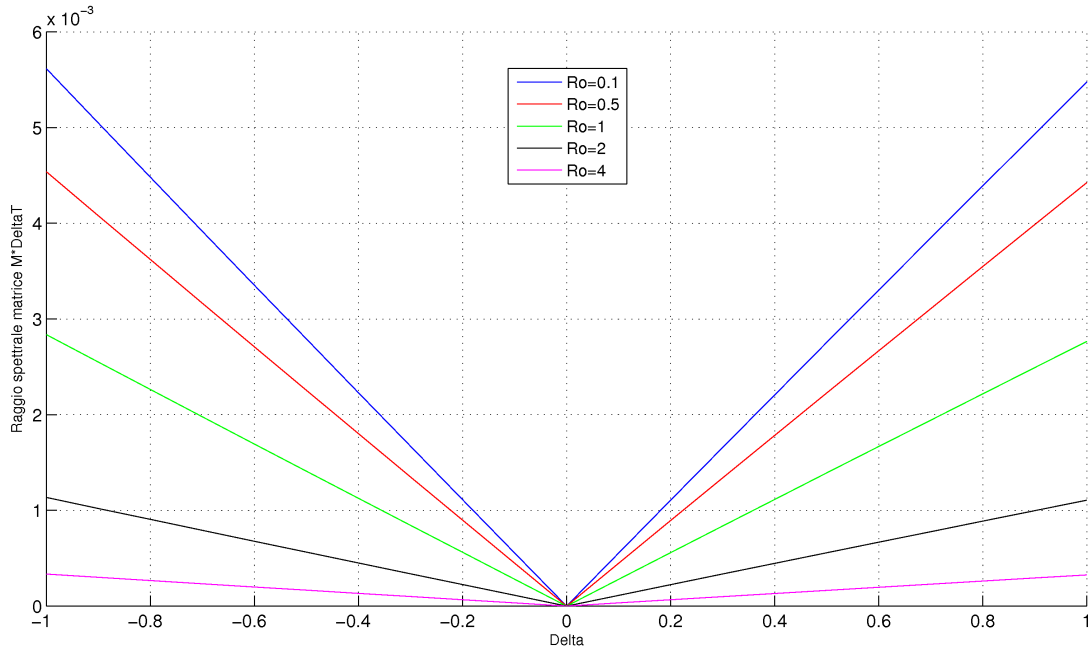


**Figura 4.3:** Uscita del sistema di controllo continuo-continuo con sistema da controllare con  $n = 1$ .

Si noti in Figura 4.3 come il controllore a tempo continuo, con questa configurazione di parametri, riesca ad abbattere l'azione del disturbo in circa la metà

del tempo del controllore discreto.

Per valutare l'analisi di stabilità robusta si prenda in esame il raggio spettrale della matrice  $\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}$  in funzione della variazione del parametro  $\delta$ , come è stato presentato nel Paragrafo 3.2.



**Figura 4.4:** Analisi di stabilità robusta del modello di pala con  $n = 1$  e con parametro di incertezza  $r_\nu = 0.2$ .

In Figura 4.4 è bene osservare che il raggio spettrale della matrice  $\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}$ , sull'asse delle ordinate, assume valori estremamente piccoli; considerato che per perdere la stabilità del sistema è necessario violare la condizione  $\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}) < 1$ , è evidente che questo sistema di controllo è robusto alle variazioni della frequenza delle vibrazioni libere. Il sistema con la configurazione corrente ha una ridottissima sensibilità alla variazione del parametro  $\nu$  ed è dunque poco indicato per fare un confronto tra l'analisi di stabilità e le simulazioni sul modello.

Viene dunque proposto il secondo caso di studio, dove si modifica la configurazione del sistema: invece di utilizzare il modello rigido valutando solo il primo modo, si prende in considerazione il modello flessibile analizzando i primi 4 modi. Il parametro  $N$  viene quindi impostato a 4 e di conseguenza la struttura della matrice  $\bar{\mathbf{A}}$  si modifica diventando una matrice  $8 \times 8$  diagonale a blocchi così strutturata:

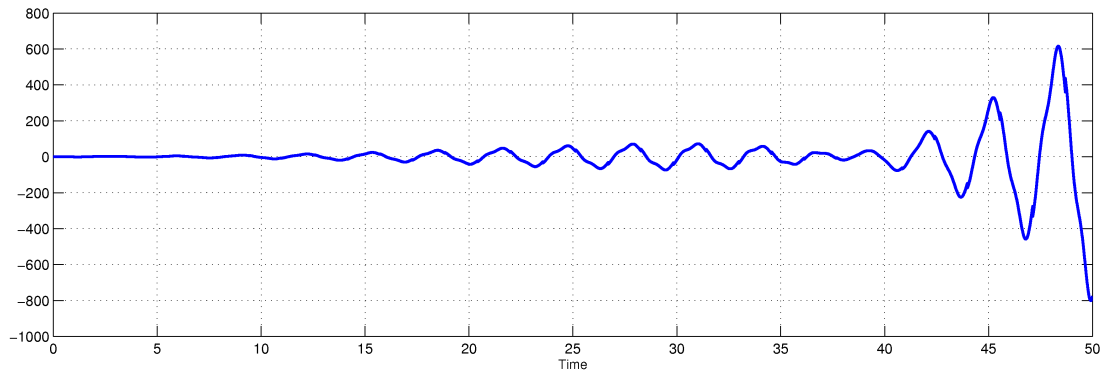
$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{P} \end{vmatrix}$$

dove  $\mathbf{K}$  è una matrice diagonale  $4 \times 4$  sulla cui diagonale vi sono gli elementi  $-\nu^2 + \gamma \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_q(\psi)$  relativi ad ogni modo e  $\mathbf{P}$  è una matrice  $4 \times 4$  piena con i coefficienti  $\gamma \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{M}_q(\psi)$ .

Esaminando il diagramma di Bode della risposta in frequenza del nuovo modello è stato selezionato come parametro incerto la frequenza  $\nu$  relativa al terzo modo; per soddisfare la formulazione dell'incertezza  $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + \Delta \mathbf{A}(\delta)$  definita precedentemente, la matrice  $\Delta \mathbf{A}(\delta)$  si modifica diventando una matrice  $8 \times 8$  della seguente forma:

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_\nu \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il resto del sistema rimane invariato; si ricorda che il controllore è tarato sul modello nominale  $[\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$  e la funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema da controllare è invece definita dal modello di pala affetto da incertezza  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ . Si prenda in considerazione il sistema dove il processo da controllare è il nuovo modello flessibile a 4 modi.

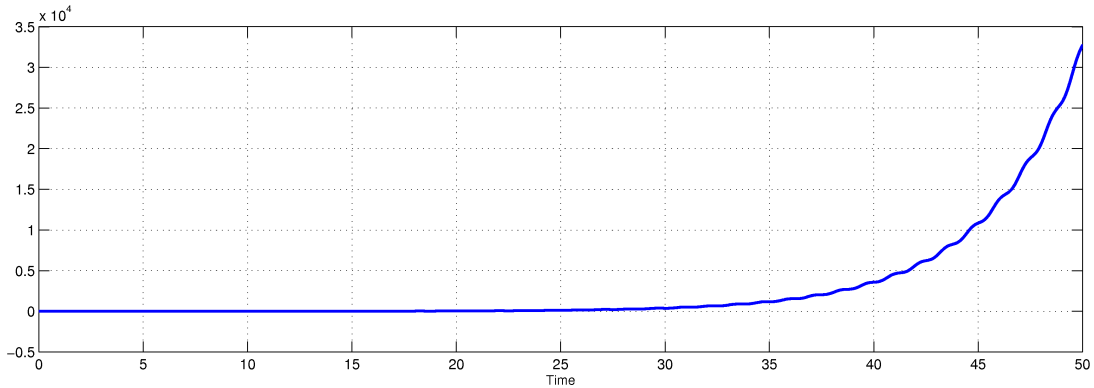


**Figura 4.5:** Uscita del sistema di controllo discreto-continuo, modello con  $n = 4$  e peso del controllo  $\rho=0$ .

Come è possibile notare dall'andamento dell'uscita in Figura 4.5 il sistema di controllo con la configurazione corrente non è in grado di ridurre l'effetto del disturbo, e il sistema perde la stabilità.

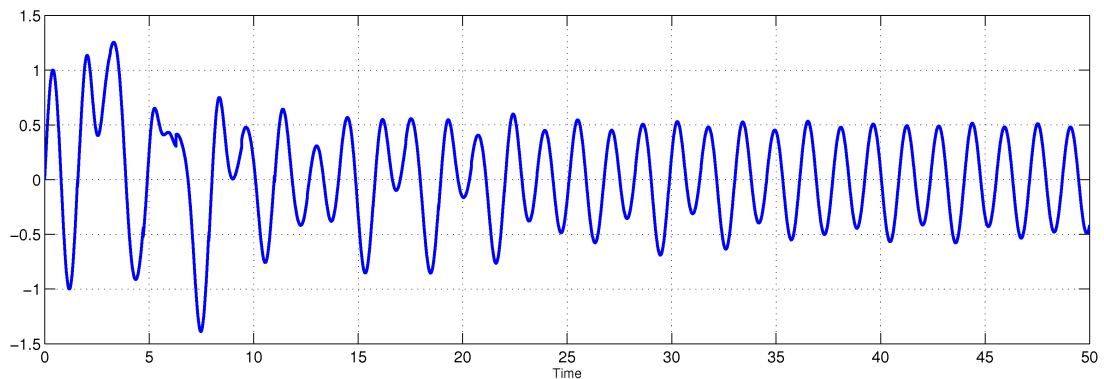
Osservandone l'uscita, in Figura 4.6, anche il sistema con il controllore a tempo continuo diventa instabile.





**Figura 4.6:** Uscita del sistema di con controllore a tempo continuo e modello con  $n = 4$ .

Per poter rendere il sistema stabile è necessario aumentare il valore del parametro  $\rho$  che regola il peso dell'azione di controllo. Per avere un'uscita stabile con una discreta attenuazione del disturbo si è impostato  $\rho = 1$ . Con questo valore l'effetto del disturbo sull'uscita viene ridotto di circa la metà come è possibile notare in Figura 4.7.



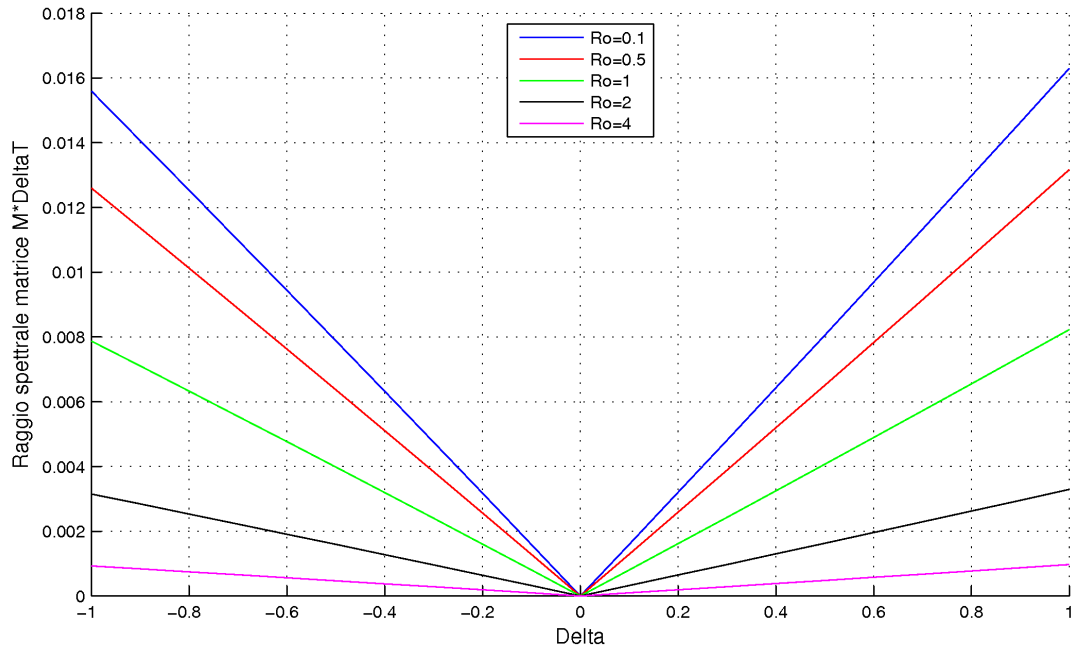
**Figura 4.7:** Uscita del sistema con controllore discreto, modello del processo da controllare con  $n = 4$  e peso del controllo  $\rho = 1$ .

Con il sistema adeguatamente controllato si presenta l'analisi di stabilità robusta del sistema in Figura 4.8.

Si noti che anche in questo caso benché i valori di  $\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T})$  siano circa tre volte quelli del modello con  $n = 1$ , la sensibilità all'incertezza della frequenza  $\nu$  è comunque molto modesta, quasi nulla. La stabilità del sistema non è mai compromessa con i valori di  $\delta$  e  $r_\nu$  definiti per questo caso.

Si tenga dunque presente la seguente considerazione: la risposta in frequenza del sistema è strettamente legata alla variazione del parametro  $\delta$ ; confrontando tra loro le diverse risposte in frequenza al variare di  $\delta$  è possibile dedurre se il sistema ha una sensibilità ampia o limitata rispetto a queste variazioni. Se la variazione delle diverse risposte in frequenza è minima è evidente che il regolatore tarato

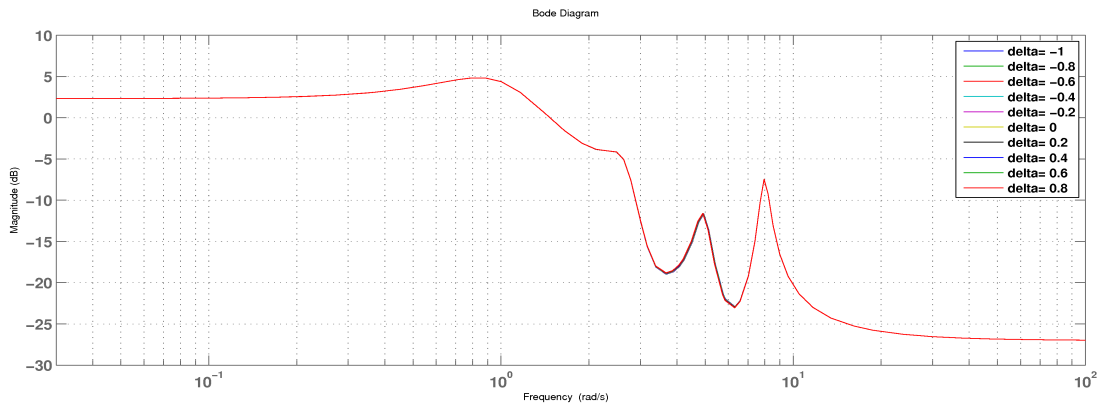
## 4.2. Simulazioni e risultati



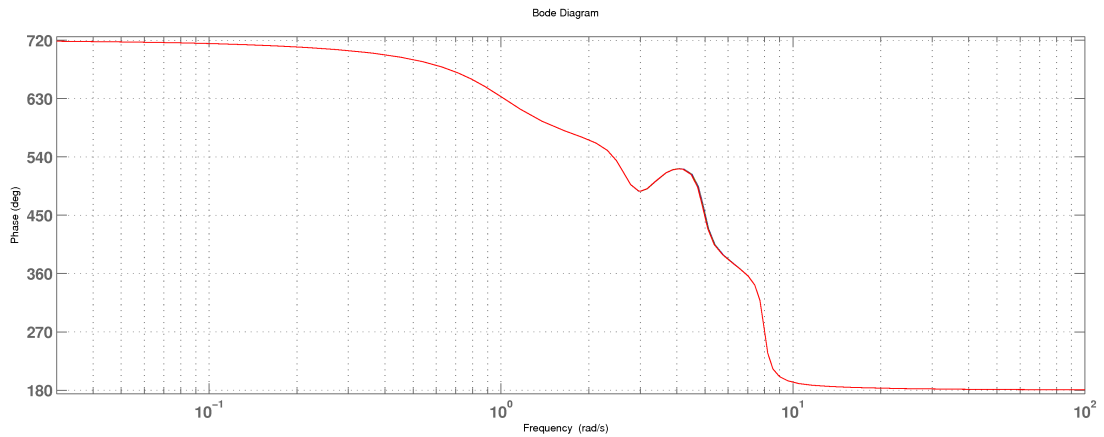
**Figura 4.8:** Analisi di stabilità robusta del modello di pala con  $n = 4$  e con parametro di incertezza  $r_\nu = 0.2$ .

sul modello nominale si dimostri ugualmente efficiente nel controllare il modello affetto da incertezza.

Per trarre questo tipo di conclusioni si considerino quindi i diagrammi di Bode di modulo e fase (in Figura 4.9 e 4.10) delle risposte in frequenza associate alla funzione di trasferimento  $G(s)$ , il processo da controllare incerto, al variare del parametro  $\delta$ .



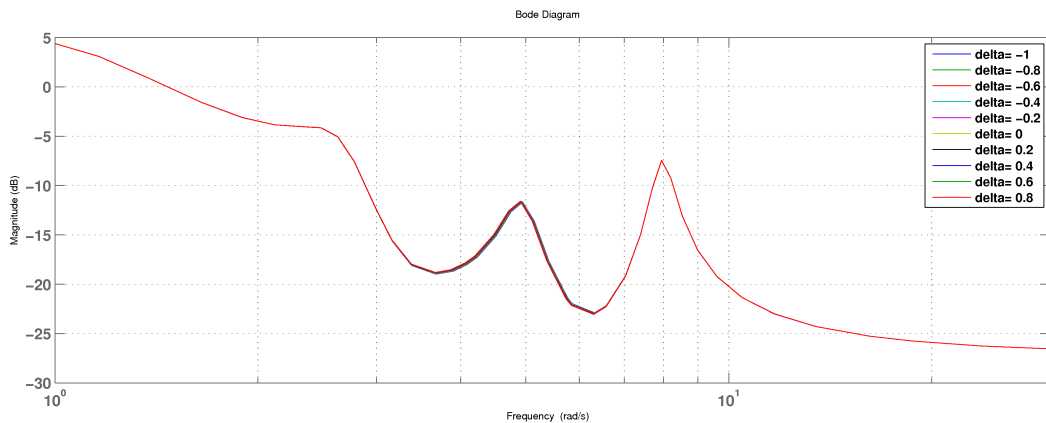
**Figura 4.9:** Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $G(s)$  al variare del parametro  $\delta$ .



**Figura 4.10:** Diagramma di Bode della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $G(s)$  al variare del parametro  $\delta$ .

Sono stati valutati dieci diagrammi di Bode di modulo e fase variando il parametro  $\delta$  dal valore minimo, consentito dalla definizione,  $\delta = -1$  fino al valore massimo di  $\delta = 0.8$  incrementando  $\delta$  di 0.2 per ogni diagramma.

Dai diagrammi del modulo in Figura 4.9 e nel particolare in Figura 4.11 si può osservare con chiarezza che le 10 risposte in frequenza, al variare di  $\delta$ , sono praticamente tutte sovrapposte; dunque la variazione del parametro incerto non modifica sostanzialmente la dinamica del sistema.



**Figura 4.11:** Particolare del diagramma di Bode del modulo di Figura 4.9.

La totale sovrapposizione delle risposte in frequenza è sintomo del fatto che questo sistema, ha una sensibilità estremamente modesta alla variazione della frequenza  $\nu$  e quindi è poco significativo per il confronto tra l'analisi teorica e le simulazioni.

Alla luce di queste valutazioni si presenta dunque il terzo caso di studio, nel quale viene considerato un parametro incerto differente rispetto ai casi precedenti: al posto della frequenza  $\nu$  si prende in esame il coefficiente di avanzamento  $\mu$ , sempre utilizzando il modello flessibile con  $n = 4$ .

Poiché le matrici del modello di pala nello spazio di stato vengono generate direttamente in funzione dei modi  $n$  e dell'advance ratio  $\mu$  non è più necessario descrivere esplicitamente la forma dell'incertezza.

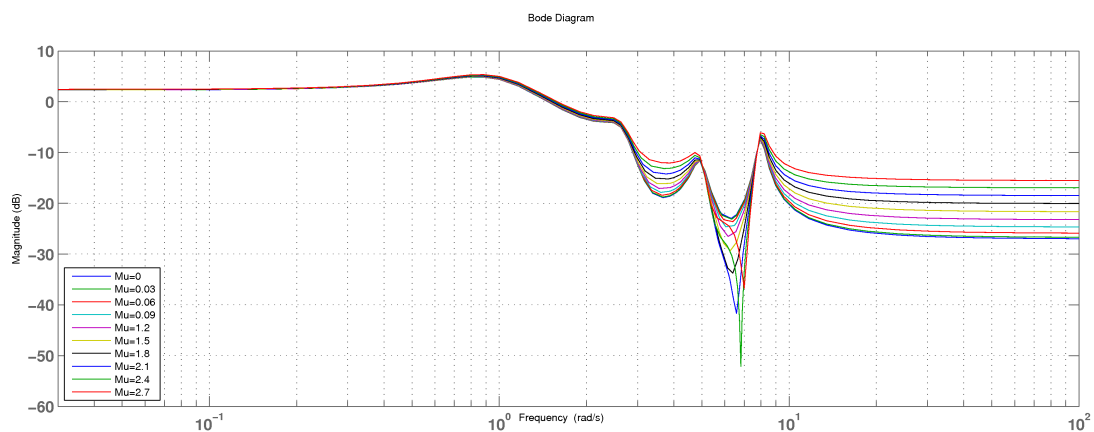
Come descritto nel Paragrafo 4.1 il modello con il parametro advance ratio  $\mu > 0$  diventa LTP, Lineare Tempo Periodico. Diventando tempo variante, il modello risulta inutilizzabile nell'analisi di stabilità e deve quindi essere approssimato.

Questa approssimazione, effettuata prendendo il valore medio, riporta il sistema in forma LTI, Lineare Tempo Invariante, adatta all'analisi di stabilità robusta.

Benché l'approssimazione non permetta di lavorare con un modello accurato è comunque ragionevole per il tipo di studio che si sta conducendo.

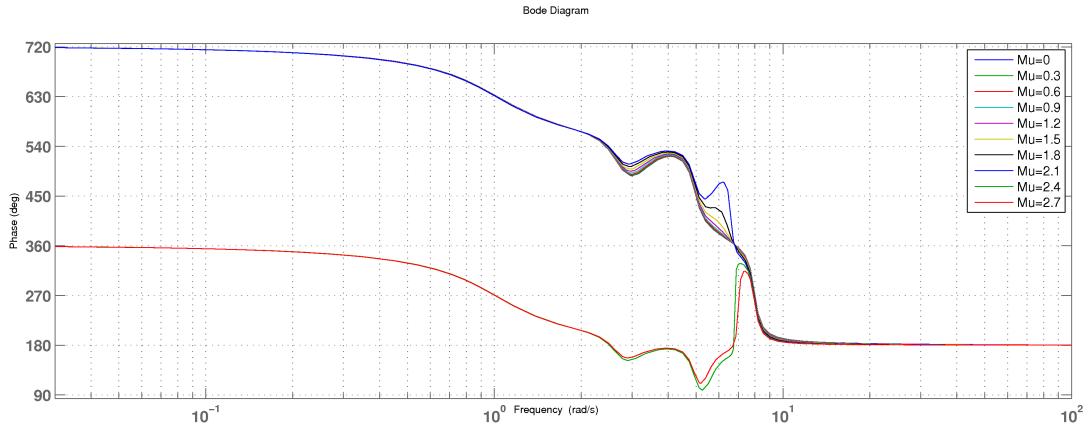
Le stesse considerazioni del caso precedente (per le quali è possibile valutare la sensibilità del sistema rispetto alla variazione di un parametro tramite il confronto delle risposte in frequenza del processo da controllare al variare del parametro), possono essere applicate al modello con il nuovo parametro incerto  $\mu$ .

Si mostrano quindi diagrammi di Bode del modulo (Figura 4.12) e della fase (Figura 4.13) sovrapposti, delle dieci risposte in frequenza associate alla funzione di trasferimento  $G(s)$  al variare del parametro  $\mu$ .



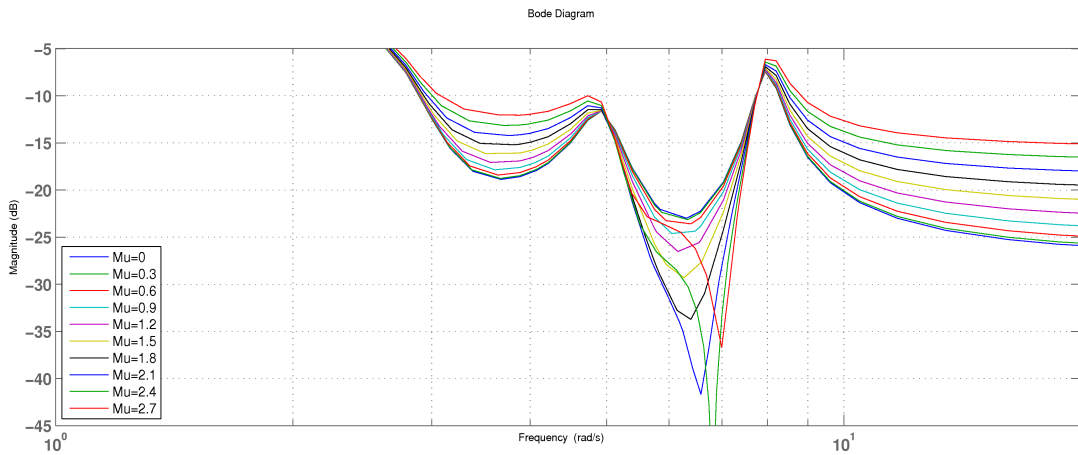
**Figura 4.12:** Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $G(s)$ , al variare del parametro  $\mu$ .

I diagrammi di Bode di modulo e fase variano a seconda del valore di  $\mu$  da un minimo di  $\mu = 0$  ad un massimo di  $\mu = 2.7$ , incrementando  $\mu$  di 0.03 per ogni risposta.



**Figura 4.13:** Diagramma di Bode della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $G(s)$ , al variare del parametro  $\mu$ .

Dai diagrammi del modulo in Figura 4.12 e nel particolare in Figura 4.14 si può notare che al variare del nuovo parametro di incertezza, le differenze tra le risposte in frequenza del sistema, associate alla funzione di trasferimento  $G(s)$ , sono più marcate ed evidenti rispetto al caso precedente. Quindi questa nuova configurazione del sistema può essere una buona base su cui operare.



**Figura 4.14:** Particolare del diagramma di Bode in Figura 4.12.

Si illustra ora l'analisi di stabilità robusta effettuata sul sistema con parametro di incertezza  $\mu$ ; in questo caso l'analisi è leggermente differente da quelle effettuate precedentemente. Infatti, selezionando  $\mu$  come parametro incerto, non vi è più la necessità di definire esplicitamente l'incertezza come è stato fatto per il parametro  $\nu$  (Equazione 4.24) attraverso i parametri  $\delta$  e  $r_\nu$ . La variazione rispetto al modello nominale è espressa direttamente dalla variazione dell'advance ratio; dunque i valori  $\delta$  ed  $r_\nu$  che caratterizzavano l'incertezza parametrica di  $\nu$  non sono più

presenti nella descrizione del modello incerto.

Questo implica che l'analisi di stabilità non è più effettuata in funzione di  $\delta$  e  $r_\nu$  ma in funzione di  $\mu$ .

L'analisi è stata effettuata considerando come sistema nominale quello associato al modello caratterizzato da  $\mu = 0$  e come sistema incerto quello associato al modello con  $\mu > 0$ . Il parametro  $\mu$  varia da un minimo di 0.05 a un massimo di 0.3; i valori del peso del controllo sono leggermente differenti da quelli valutati nelle analisi precedenti: 0,0.5,1,2,4.

Come è possibile notare in Figura 4.15, il raggio spettrale della matrice  $\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}$  assume valori decisamente più interessanti rispetto ai casi di studio precedenti: per alcune ipotesi la condizione di stabilità (3.6) viene violata, quindi è possibile effettuare un confronto con le simulazioni del sistema stesso.

Per il confronto sono stati selezionati alcuni valori significativi di  $\mu$  e di  $\rho$  nel range di definizione dell'analisi di stabilità; per queste configurazioni di valori sono state effettuate delle simulazioni del sistema.

I risultati delle simulazioni sono riassunti nella Tabella 4.2 dove sulle righe sono riportati i valori di  $\rho$  e sulle colonne i valori di  $\mu$ . Nella tabella viene indicato se il sistema in simulazione con la particolare combinazione di parametri risulta stabile o instabile.

$\rho \setminus \mu$	0.15	0.2	0.25	0.3
0.1	instabile	instabile	instabile	instabile
0.5	instabile	instabile	instabile	instabile
1	stabile	stabile	instabile	instabile
2	stabile	stabile	stabile	stabile

**Tabella 4.2:** Tabella riassuntiva delle prove di stabilità del sistema in simulazione al variare di  $\mu$  e di  $\rho$ .

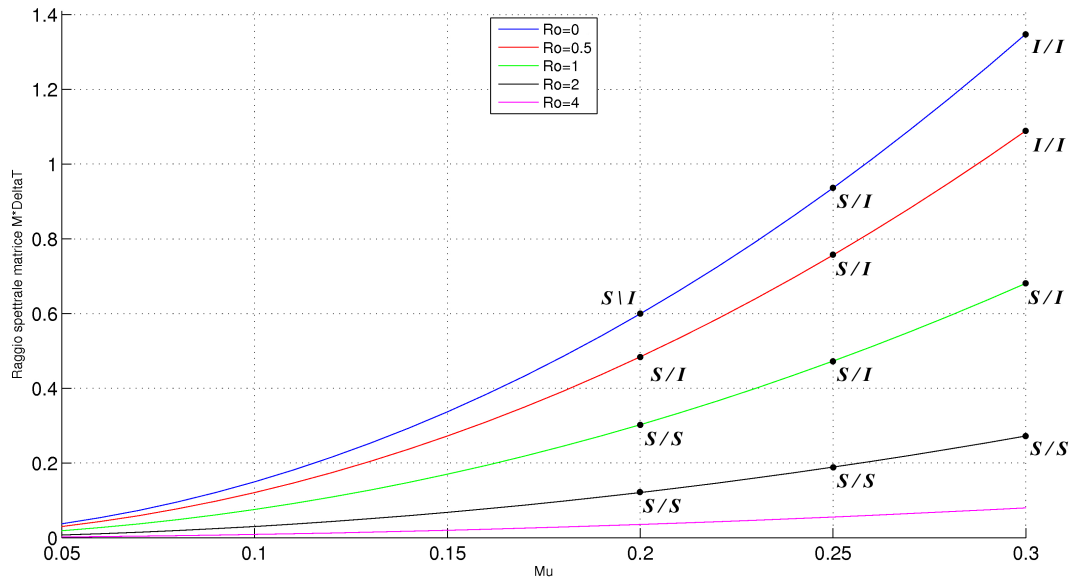
Si consideri ora il confronto tra l'analisi teorica e le simulazioni.

In Figura 4.15 viene mostrata la relazione tra  $\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T})$ , il peso del controllo e  $\mu$ ; contemporaneamente sono state evidenziate le combinazioni di  $\rho$  e  $\mu$  per le quali sono state effettuate le simulazioni.

Per ognuno di questi punti viene riportata la stabilità del sistema nei due casi. Il primo valore indica la stabilità stimata dall'analisi (deducibile dalla condizione  $\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}) < 1$ ); il secondo valore indica la stabilità valutata nelle simulazioni (ricavata dai dati della Tabella 4.2).

La lettera 'S' indica che il sistema è stabile, la lettera 'I' indica che il sistema è instabile.

Si confrontino i risultati dell'analisi e delle simulazioni riportati in Figura 4.15: è evidente che i due approcci danno, per molteplici combinazioni di  $\rho$  e  $\mu$ , esiti



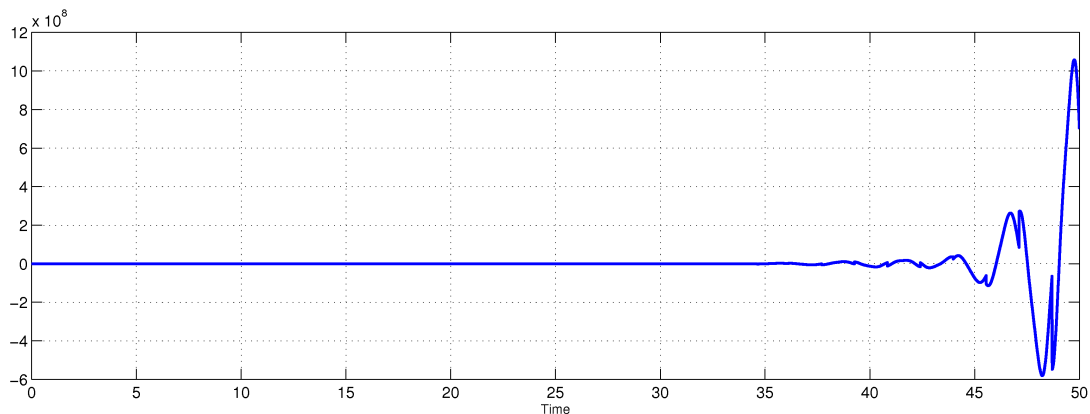
**Figura 4.15:** Analisi di stabilità robusta al variare del parametro  $\mu$ : sono evidenziati i punti per cui è stato effettuato il raffronto con il modello in simulazione; viene indicato, da sinistra a destra, prima la stabilità stimata dall'analisi e poi quella osservata nelle simulazioni.

differenti riguardo la stabilità del sistema.

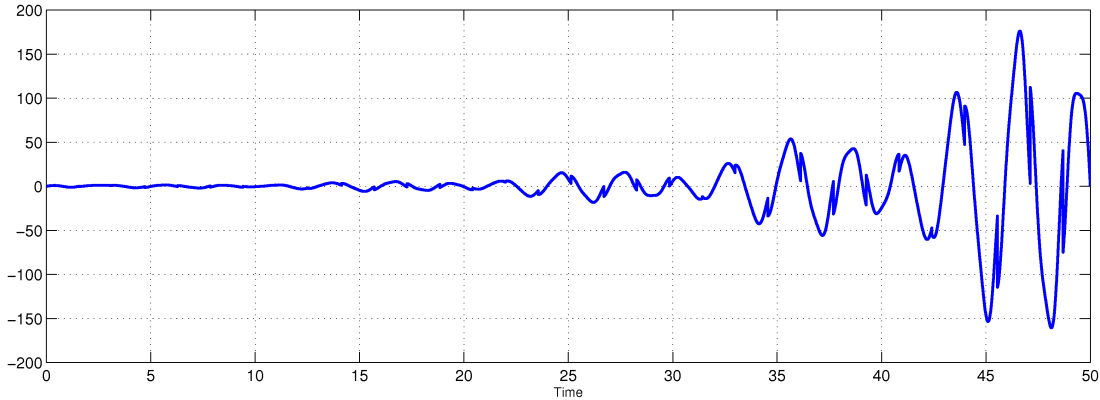
Vengono inoltre riportati alcuni andamenti dell'uscita nelle simulazioni per valori significativi di  $\rho$  e  $\mu$ .

In Figura 4.16 si mostra l'andamento dell'uscita per  $\rho = 0.1$  e  $\mu = 0.3$ ; il sistema in simulazione risulta instabile, lo stesso esito viene valutato mediante l'analisi di stabilità (in Figura 4.15 il valore di  $\rho(\hat{M}\Delta T)$  per  $\rho = 0.1$  e  $\mu = 0.3$  è maggiore di 1).

In Figura 4.17 si mostra l'andamento dell'uscita per  $\rho = 1$  e  $\mu = 0.3$ ; il sistema in simulazione risulta ancora instabile, mentre l'analisi di stabilità valuta il sistema stabile (in Figura 4.15 il valore di  $\rho(\hat{M}\Delta T)$  per  $\rho = 1$  e  $\mu = 0.3$  è minore di 1).



**Figura 4.16:** Uscita del sistema caratterizzato da  $\rho = 0.1$  e  $\mu = 0.3$ .



**Figura 4.17:** Uscita del sistema caratterizzato da  $\rho = 1$  e  $\mu = 0.3$ .

In conclusione, l'analisi di stabilità teorica proposta modella con scarsa accuratezza i limiti di stabilità del sistema in simulazione considerato (modello flessibile, con  $\mu$  come parametro incerto e controllore discreto) e dunque la condizione (3.6) non offre un valido strumento di valutazione della stabilità robusta.

Per completare lo studio viene effettuato un secondo confronto, tra l'analisi di stabilità robusta e il modello in simulazione, in questo caso realizzato con il controllore a tempo continuo, presentato nel Paragrafo 3.3. Il confronto, come in precedenza, avviene tra il modello a singola pala nominale, con 4 modi e advance ratio  $\mu = 0$ , usato per la taratura del regolatore e il modello incerto, con advance ratio  $\mu > 0$ , utilizzato come processo da controllare.

Il sistema da tenere in considerazione è rappresentato in Figura 3.12; la funzione di trasferimento  $H(s)$  del controllore è descritta dall'Equazione (3.12). Si tenga presente che il regolatore in questa forma, poiché è ricavato dall'algoritmo T-Matrix, equivale ad una versione discreta il cui parametro  $\rho$  assume il valore 0. La stabilità del sistema può essere valutata, anche per via grafica, attraverso la condizione data dalla Definizione 3.3.1, sfruttando la norma  $H_\infty$ .

Per valutare la stabilità del sistema continuo si prenda in esame il sistema incerto nella sua forma  $M\Delta$ , rappresentato in Figura 3.13. La funzione di trasferimento da  $z$  a  $w$  è uguale a

$$G_{zw}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}W(s) \quad (4.25)$$

dove  $G(s)H(s)$  è la funzione di trasferimento d'anello nominale  $L_0$ .

Dalla Definizione 3.3.1 si ha che il sistema è asintoticamente stabile se  $|G_{zw}(s)| < 1$  e quindi, dalla (4.25), solo se

$$\frac{|L_0|}{|1 + L_0|} |W(s)| < 1 \quad \forall \omega \quad (4.26)$$

$$\frac{|L_0|}{|1 + L_0|} < \frac{1}{|W(s)|} \quad \forall \omega \quad (4.27)$$



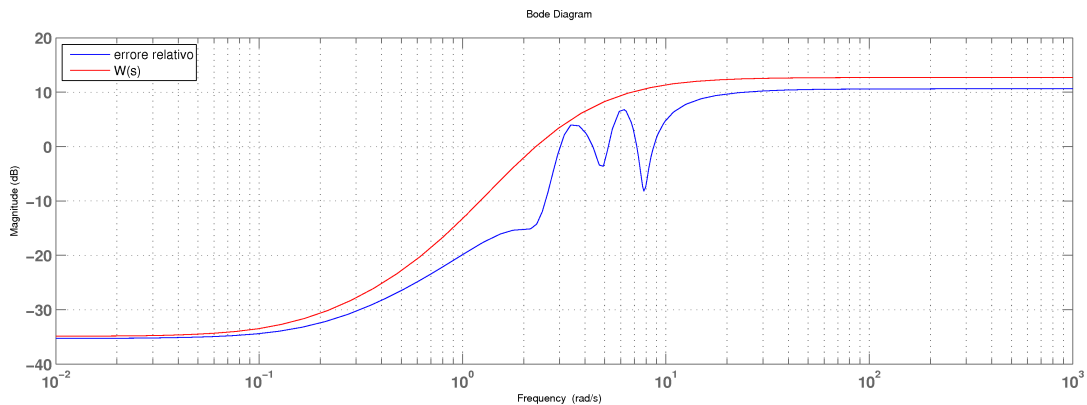
dove  $\frac{L_0}{1+L_0}$  è la funzione di sensitività complementare (chiamata anche  $F_0$ ) e  $W(s)$  è la funzione peso dell'incertezza dinamica.

Nella condizione di stabilità manca la funzione  $\Delta(s)$ : questo è dato dal fatto che nel caso in questione  $\Delta$  non è altro che uno scalare con modulo minore di 1.

Dunque per valutare la stabilità del sistema è sufficiente confrontare i diagrammi di Bode del modulo della funzione di sensitività complementare e della funzione di trasferimento  $\frac{1}{W(s)}$ .

Si prenda come esempio il sistema in cui il regolatore è tarato sul modello incerto con  $\mu = 0.3$ . Il peso dell'incertezza è stato calcolato sperimentalmente approssimando il modulo di  $W(s)$  al modulo dell'errore relativo tra la funzione di trasferimento nominale e quella incerta, uguale a  $\frac{G_0(s)-G_{0.3}(s)}{G_0(s)}$ ; in particolare per  $W(s)$  è stata utilizzata una funzione di trasferimento con quattro zeri e quattro poli.

In Figura 4.18 si può notare come il peso dell'incertezza approssimi l'errore relativo.



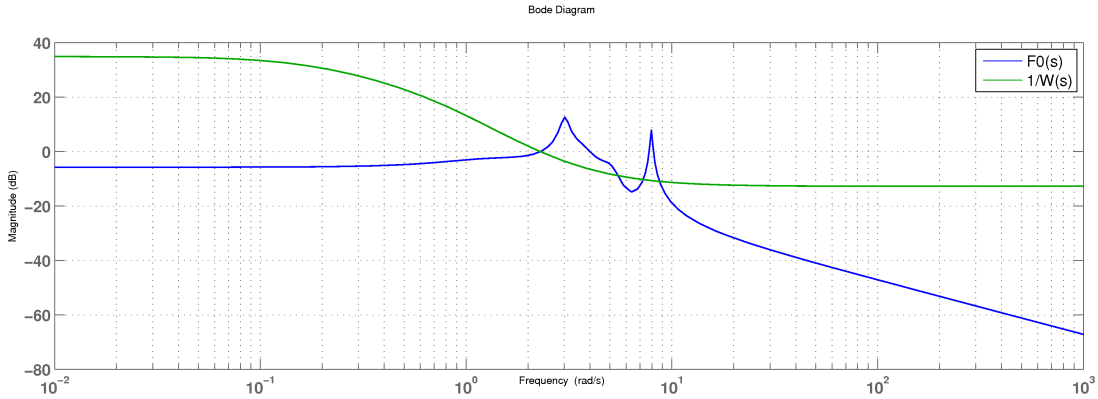
**Figura 4.18:** Diagramma di Bode del modulo del peso dell'incertezza  $W(s)$  e l'errore relativo  $\frac{G_0(s)-G_{0.3}(s)}{G_0(s)}$ .

In Figura 4.19 viene mostrato il raffronto tra il diagramma di Bode del modulo della sensitività complementare  $F_0$  del sistema nominale e l'inverso dell'incertezza  $W(s)$ .

Si osservi come per alcune frequenze il modulo di  $F_0$  superi quello di  $\frac{1}{W(s)}$ : per queste frequenze la condizione di stabilità (4.27) viene violata e il sistema risulta quindi instabile.

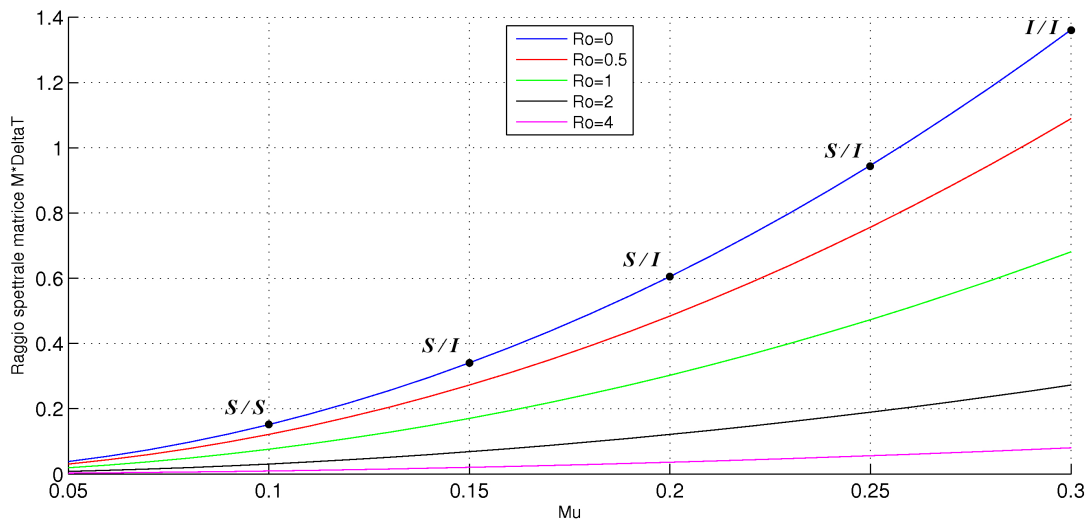
È bene notare che, considerando la norma infinita come strumento di valutazione per la stabilità, si prende in esame tutto lo spettro delle frequenze; questo comporta il fatto che, a differenza dell'analisi di stabilità presentata nel Paragrafo 3.1.2 che analizza il sistema solo alla frequenza  $N\Omega$ , la stima della stabilità è data dalla valutazione di tutta la risposta in frequenza, per tutto lo spettro, e non solo ad una specifica frequenza di lavoro.

## 4.2. Simulazioni e risultati



**Figura 4.19:** Raffronto tra il diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento  $F_0$  e  $\frac{1}{W(s)}$ .

La valutazione della stabilità, tramite il raffronto dei diagrammi di Bode, è stata effettuata variando il parametro  $\mu$ : sono stati selezionati gli stessi valori utilizzati nel confronto tra analisi di stabilità robusta e il sistema con il regolatore a tempo discreto, quindi  $\mu = 0.3, \mu = 0.25, \mu = 0.2, \mu = 0.15, \mu = 0.1$ .



**Figura 4.20:** Analisi di stabilità robusta al variare del parametro  $\mu$  nel sistema con controllore continuo: sono evidenziate i punti per cui è stato effettuato il raffronto con il modello in simulazione; viene indicata, da sinistra a destra, prima la stabilità stimata dall'analisi e poi quella osservata nel sistema con il regolatore continuo.

In Figura 4.20 viene mostrata la relazione tra  $\rho(\hat{M}\Delta T)$ , il peso del controllo e  $\mu$ ; contemporaneamente sono state evidenziate le combinazioni di  $\rho$  e  $\mu$  per le quali è stata valutata la stabilità del sistema con il regolatore continuo. Per ognuno di questi punti viene riportata la stabilità del sistema nei due casi. Il primo valore indica la stabilità stimata dall'analisi (deducibile dalla condizione

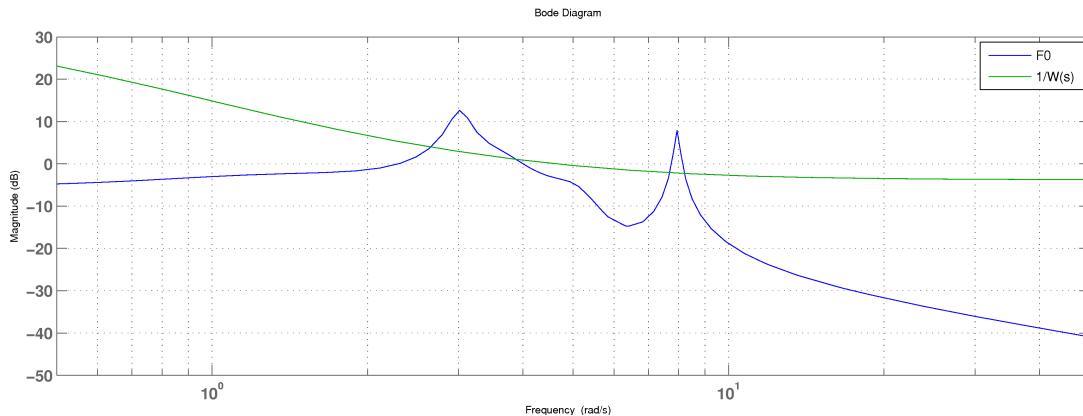
$\rho(\hat{\mathbf{M}}\Delta\mathbf{T}) < 1$ ); il secondo valore indica la stabilità valutata per il sistema con regolatore continuo (ricavata valutando la norma  $H_\infty$  tramite i diagrammi di Bode).

La lettera ‘S’ indica che il sistema è stabile, la lettera ‘I’ indica che il sistema è instabile.

Dalla Figura 4.20 si può notare come per quasi tutti i valori di  $\mu$  il sistema con il regolatore a tempo continuo sia instabile; questo significa che è decisamente meno robusto del sistema a tempo discreto.

D’altra parte questa conclusione è ammissibile poiché, valutando l’intero spettro delle frequenze con la norma  $H_\infty$ , anche se il sistema lavora ad una frequenza specifica ed è stabile per quella frequenza, è possibile che per qualche altra frequenza la norma infinita sia maggiore di 1. Si prenda ad esempio il particolare del raffronto tra i diagrammi di Bode del modulo di  $F_0$  e  $\frac{1}{W(s)}$  nel caso in cui  $\mu = 0.2$  in Figura 4.21.

Si può notare come il modulo di  $F_0$  alla frequenza 4 (frequenza di lavoro del modello specificata all’inizio di questo paragrafo) sia minore del modulo di  $\frac{1}{W(s)}$ . Da questo dato si potrebbe pensare che il sistema, che lavora a questa frequenza, sia stabile ma poiché la norma  $H_\infty$  valuta tutto lo spettro di frequenze, le componenti a frequenze 3 e 8 non soddisfano la condizione di stabilità e dunque il sistema risulta instabile.



**Figura 4.21:** Particolare del diagramma di Bode del modulo di  $F_0$  e  $\frac{1}{W(s)}$  nel caso in cui  $\mu = 0.2$ .

In conclusione, valutando la Figura 4.20 e dalle considerazioni che emergono dal confronto dei diversi studi della stabilità, l’analisi di stabilità robusta non modella in modo sufficientemente fedele la stabilità del sistema con il regolatore continuo preso in esame.

## 4.3 Conclusioni

In questo capitolo sono stati presentati diversi risultati relativi all'analisi di stabilità robusta. È stato definito un caso di studio sulla base di parametri fisici di un modello *out of plane* a singola pala e sull'ipotesi di incertezza della frequenza  $\nu$  e del parametro di advance ratio.

Per entrambi è stato effettuato un confronto tra l'analisi di stabilità robusta teorica e alcune simulazioni e nel caso del advance ratio è stata anche effettuata una comparazione tra l'analisi di stabilità e il sistema con regolatore a tempo continuo valutandone la stabilità tramite la norma  $H_\infty$ .

# Capitolo 5

## Conclusioni e sviluppi futuri

In questa tesi è stato affrontato il problema di controllo robusto per le tecniche di riduzione attiva delle vibrazioni negli elicotteri. In particolare, è stato proposto un approccio di analisi di stabilità robusta al fine di gestire una possibile incertezza dei parametri fisici presenti nel modello (frequenza delle vibrazioni libere o Advance Ratio) e limitare gli effetti che quest'ultima potrebbe avere sulla stabilità del sistema.

Il progetto di controllo è stato effettuato considerando il modello Lineare Tempo Invariante che approssima la dinamica del rotore. A partire da questo modello è stata calcolata la legge di controllo a tempo discreto per la riduzione delle vibrazioni, l'algoritmo T-Matrix.

Il sistema di controllo ottenuto è stato perfezionato presentandone una versione basata su una funzione di costo quadratica in modo da poter pesare l'uscita e l'azione di controllo; sono state realizzate le parti del sistema che permette l'utilizzo di un regolatore a tempo discreto per il controllo di un processo a tempo continuo ed è stata effettuata un'analisi di convergenza dell'uscita a regime.

Tenendo in considerazione questo sistema di controllo è stata rappresentata l'incertezza parametrica sulla matrice  $\mathbf{T}$  del modello.

È stata proposta un'analisi di stabilità robusta per il modello con incertezza e sono state presentate delle condizioni di stabilità del sistema in funzione dei parametri che caratterizzano l'incertezza ed il controllore. In questo modo è stato possibile sviluppare un approccio che minimizzi contemporaneamente le perturbazioni date dalla presenza di disturbi esterni e di parametri incerti. Inoltre è stata presentata una versione di questo sistema di controllo con un regolatore a tempo continuo, basata sull'algoritmo T-Matrix.

È stato considerato un modello a singola pala 'fuori dal piano' per rappresentare in modo soddisfacente le dinamiche che coinvolgono le pale ed il rotore dell'elicottero.

Uno studio sperimentale è stato condotto al fine di valutare l'analisi di stabilità

---

robusta esposta e di verificare la sensibilità del modello alla variazione di alcuni parametri incerti. Questa indagine ha permesso di osservare la differenza della stima della stabilità tra l'analisi di stabilità robusta e il comportamento del modello in simulazione. Sono stati considerati i casi in cui come parametro incerto è stata usata la frequenza delle vibrazioni  $\nu$  o l'advance ratio  $\mu$ .

Il regolatore del sistema è stato tarato con il modello nominale mentre il sistema affetto da incertezza è stato utilizzato come processo da controllare.

Lo studio ha evidenziato come questo modello sia alquanto insensibile alle variazioni della frequenza delle vibrazioni libere ed invece sia discretamente sensibile alla variazione del parametro di advance ratio  $\mu$ . Si è inoltre osservato come l'analisi di stabilità robusta non fornisca uno strumento con un sufficiente grado di precisione per determinare la stabilità di un sistema affetto da incertezza; conclusione tratta dai risultati del confronto tra l'analisi e i modelli in simulazione con il regolatore a tempo discreto e confermata dall'analisi del sistema a tempo continuo.

Nonostante l'esito negativo bisogna considerare il fatto che le comparazioni, per stabilire la validità dell'analisi, sono state effettuate solo per due parametri; è possibile che considerando altri parametri di incertezza o impostando il sistema in modo differente l'analisi proposta restituisca risultati diversi per la stima della stabilità.

I principali problemi riscontrati nel corso di questo lavoro riguardano l'implementazione del problema di controllo e la formulazione dell'analisi di stabilità robusta in funzione dei parametri che descrivono l'incertezza e caratterizzano il controllore.

Questo lavoro è un primo contributo ad un'analisi che in futuro può essere ampliata in diverse direzioni.

Per validare ulteriormente i risultati ottenuti, mantenendo il modello a singola pala utilizzato, si potrebbero considerare parametri incerti diversi da quelli scelti in questa tesi e confrontare l'analisi e le simulazioni con i nuovi parametri.

In alternativa è possibile considerare un sistema di controllo differente da quello lineare tempo invariante, utilizzando un sistema con dinamiche non lineari per effettuare le simulazioni.

Un ulteriore sviluppo possibile, invece per validare l'analisi proposta, riguarda l'utilizzo di un modello differente rispetto a quello a singola pala. In questo caso si potrebbe pensare di usare un modello che rappresenti in modo più accurato la pala, il rotore e le forze che interagiscono con questi elementi.

# Bibliografia

- [1] J. T. Pearson, R. M. Goodall, and I. Lyndon, “Active Control of Helicopter Vibration,” *Computing and Control Engineering Journal*, pp. 277 – 284, December 1994.
- [2] D. Patt, L. Liu, J. Chandrasekar, D. S. Bernstein, and P. Friedmann, “Higher-Harmonic-Control Algorithm for Helicopter Vibration Reduction Revisited,” *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 28, September-October 2005.
- [3] J. Serafini, *Modelli aeroservoelastici per lo studio della interazione elicottero-pilota*. Dottorato di ricerca in ingegneria meccanica e industriale, Università degli Studi Roma Tre, XXI Ciclo.
- [4] S. P. King, “The minimization of helicopter vibration through blade design and active control,” *Aeronautical society*, pp. 247 – 263, August/September 1988.
- [5] M. Kretz and M. Larche, “Future of helicopter rotor control,” *Vertica*, no. 4, pp. 13 – 22, 1980.
- [6] C. Kessler, “Active rotor control for helicopters: motivation and survey on higher harmonic control,” *CEAS Aeronautical Journal*, pp. 3–22, September 2011.
- [7] N. D. Ham, “A simple system for helicopter individual blade control using modal decomposition,” *Vertica*, no. 4, 1980.
- [8] C. Kessler, “Active rotor control for helicopters: individual blade control and swashplateless rotor design,” *CEAS Aeronautical Journal*, pp. 23–54, September 2011.
- [9] A. E. Staple, “An evaluation of active control of structural response as means of reducing helicopter vibrations,” in *15th European Rotorcraft Forum*, vol. Paper No.51, pp. 50.01 – 51.18, 1989.

- 
- [10] S. P. King and A. E. Staple, "Minimization of helicopter vibration through active control of structural response," in *AGARD 86 Proceedings*, vol. Paper Nř14, pp. 50.01 – 51.18, 1987.
- [11] J. Shaw, N. Albion, E. J. Hanker, and R. S. Teal, "Higher harmonic control: wind tunnel demonstration of fully effective vibratory hub force suppression," *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 34, no. 1, p. 14 – 25, 1989.
- [12] C. E. Hammond, "Wind tunnel results showing rotor vibratory loads reduction using higher harmonic blade pitch," *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 28, no. 1, pp. 10 – 15, 1983.
- [13] J. A. Molusis, C. E. Hammond, and J. H. Cline, "A unified approach to the optimal design of adaptive and gain scheduled controllers to achieve minimum helicopter rotor vibration," *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 28, no. 2, pp. 9 – 18, 1983.
- [14] J. A. Molusis, "The importance of nonlinearity on the higher harmonic control of helicopter vibration," *Proceedings of the 39th Annual Forum of the American Helicopter Society (St. Louis, MO)*, p. 624 – 647, 1983.
- [15] E. R. Wood, R. W. Powers, J. H. Cline, and C. E. Hammond, "On developing and flight testing a higher harmonic control system," *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 30, no. 1, pp. 3 – 20, 1985.
- [16] F. K. Straub and E. V. Byrns, "Application of higher harmonic blade feathering on the oh-6a helicopter for vibration reduction," *NASA CR 4031*, December 1986.
- [17] M. Polychroniadis, "Generalized higher harmonic control, ten years of aerospace experience," in *Proceedings of the Sixteenth European Rotorcraft Forum, Glasgow, Scotland, U.K.*, vol. 2, pp. 3.7.2.1 – 3.7.2.9, 1990.
- [18] K. P. Nygren and D. P. Schrage, "Fixed-gain versus adaptive higher harmonic control simulation," *Journal of the American Helicopter Society*, vol. 34, no. 3, pp. 51 – 58, 1989.
- [19] D. Patt, L. Liu, J. Chandrasekar, D. S. Bernstein, and P. Friedmann, "Adaptive Harmonic Steady-State Control for Disturbance Rejection," *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, pp. 993 – 1007, November 2006.
- [20] N. Wereley and S. Hall, "Frequency response of linear time periodic system," 1989.



- [21] L. Sievers and A. von Flotow, “Comparison and extension of control methods for narrow-band disturbance rejection,” *IEEE Transaction on signal processing*, pp. 2377–2391, October 1992.
- [22] T. Kailath, *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [23] M. Lovera, “Invariant and periodic filters for helicopter vibration attenuation,” in *16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, pp. 1–2, 2004.
- [24] M. Arra, *L’elicottero, aerodinamica, prestazioni, controllo, sistemi*. Biblioteca tecnica Hoepli, 2001.
- [25] M. Lovera, *Subspace Identification methods: Theory and Applications*. Tesi di dottorato, Politecnico di Milano, XX Ciclo, 1997.