

**POLITECNICO DI MILANO**

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in  
Ingegneria Meccanica



**UN MODELLO DI INTERAZIONE TRA  
PNEUMATICO DEFORMABILE E SUOLO  
AGRICOLA**

Relatore: Ing. Stefano Melzi  
Co-relatore: Ing. Edoardo Sabbioni  
Ing. Silvia Negrini

Tesi di Laurea di:  
Alberto Galli Matr 735564

Anno Accademico 2011 - 2012



# Indice

Indice.....	I
Indice delle figure .....	III
Sommario .....	1
Abstract .....	1
1 Introduzione .....	3
2 Identificazione dei modi di vibrare di uno pneumatico agricolo .....	7
2.1 Introduzione.....	7
2.2 Nozioni teoriche .....	8
2.2.1 Risoluzione di sistemi meccanici .....	8
2.2.2 Funzione di risposta in frequenza .....	16
2.2.3 Analisi modale .....	19
2.2.4 Complex exponential method .....	20
2.3 Misura della risposta a forzante impulsiva.....	25
2.3.1 Setup di misura.....	25
2.3.2 Elaborazione dei segnali acquisiti.....	29
2.4 Identificazione parametri modali.....	30
2.4.1 Validazione modello .....	33
2.5 Conclusioni.....	37
2.5.1 Funzione di risposta in frequenza .....	37
2.5.2 Parametri modali .....	39
3 Prove di caratterizzazione del terreno e della forza di trazione sviluppata dallo pneumatico .....	43
3.1 Introduzione.....	43
3.2 Proprietà costitutive del terreno agricolo .....	43
3.3 Caratterizzazione delle proprietà meccaniche dei terreni.....	46
3.3.1 Prova di penetrazione .....	46
3.3.2 Prove di taglio diretto.....	49

3.4	Prova di trazione .....	55
4	Modello .....	59
4.1	Introduzione .....	59
4.2	Modello dello pneumatico .....	60
4.3	Modello del terreno .....	63
4.4	Modello del contatto .....	66
4.5	Equazioni di moto .....	67
4.6	Limiti del modello.....	71
5	Validazione e risultati del modello.....	73
5.1	Confronto con la prova di trazione .....	73
5.2	Altri risultati del modello.....	78
5.2.1	Forza di trazione .....	78
5.2.2	Affondamento .....	80
5.2.3	Deviazione standard accelerazione del mozzo .....	82
5.2.4	Effetto della pressione di gonfiaggio.....	83
6	Effetto della geometria del battistrada sulle prestazioni dello pneumatico.	87
6.1	Effetto sulla forza di trazione.....	89
6.2	Effetto sulla compattazione del terreno .....	90
6.3	Effetto sul confort .....	91
6.4	Analisi con terreno morbido .....	94
7	Conclusioni.....	97
8	Bibliografia.....	101

## Indice delle figure

Figura 2.1 Equilibrio fune tesata.....	12
Figura 2.2 Schema di un sistema meccanico .....	17
Figura 2.3 Pneumatico montato sul veicolo.....	26
Figura 2.4 Pneumatico strumentato.....	27
Figura 2.5 Modi di vibrare articolo “Experimental modal analysis of tire”[18].	27
Figura 2.6 Curve caratteristiche del martello dinamometrico per differenti teste .....	28
Figura 2.7 Funzione di risposta in frequenza del canale 1 .....	31
Figura 2.8 Grafico delle possibili frequenze proprie del sistema.....	32
Figura 2.9 Forzamento .....	35
Figura 2.10 Confronto fra la storia temporale del nodo 3 con la sua ricostruzione .....	36
Figura 2.11 Confronto fra la storia temporale del nodo 3 con la sua ricostruzione nel dominio delle frequenze .....	36
Figura 2.12 Storie temporali del canale 1 e del martello dinamometrico .....	38
Figura 2.13 Stimatori H1 e H2 della FRF .....	38
Figura 2.14 Modi dello pneumatico identificati.....	40
Figura 3.1 Classificazione componenti terreno (tessitura).....	44
Figura 3.2 Classificazione del terreno in base alla tessitura .....	45
Figura 3.3 Penetrometro.....	47
Figura 3.4 Grafico del risultato della prova penetrometrica .....	48
Figura 3.5 Grafico del confronto fra la prova prima del passaggio del trattore e dopo.....	49
Figura 3.6 Schema prova di taglio diretto .....	50
Figura 3.7 Risultati prova di sforzo tangenziale .....	51
Figura 3.8 Andamento dello sforzo di taglio in funzione dello sforzo normale e dello scorrimento.....	52
Figura 3.9 Prova di taglio diretto 'primo ciclo'.....	54
Figura 3.10 Prova di taglio diretto 'residuo' .....	54
Figura 3.11 Veicolo dinamometrico .....	55
Figura 3.12 Grafico dei risultati della prova di trazione .....	57
Figura 3.13 Prove di penetrazione .....	58
Figura 4.1 Battistrada pneumatico agricolo .....	61
Figura 4.2 Battistrada con griglia per identificazione superfici di controllo .....	61
Figura 4.3 Discretizzazione del battistrada .....	62

Figura 4.4 Andamento dello sforzo normale $\sigma$ in funzione dell'affondamento $\xi$ .....	64
Figura 4.5 Grafico dei risultati della prova di taglio diretto e ricostruzione analitica.....	65
Figura 4.6 Schema delle coordinate dello pneumatico e del terreno.....	66
Figura 5.1 Andamento delle forze durante una simulazione della prova di trazione .....	75
Figura 5.2 Andamento dell'affondamento del centro ruota in funzione del tempo .....	75
Figura 5.3 Deformazione dello pneumatico ingrandita di 10 volte.....	76
Figura 5.4 Confronto fra i risultati sperimentali della prova di trazione e l'analisi numerica .....	77
Figura 5.5 Confronto fra i risultati sperimentali della prova di trazione e l'analisi numerica .....	78
Figura 5.6 Andamento delle forze normali alle superfici di riferimento.....	79
Figura 5.7 Andamento delle forze tangenziali alle superfici di riferimento.....	79
Figura 5.8 Rappresentazione pressione agente sul terreno.....	80
Figura 5.9 Affondamento massimo dello pneumatico in funzione dello slittamento.....	81
Figura 5.10 Profilo altimetrico di una sezione del terreno al termine della simulazione: le linee piene rappresentano il ritorno elastico e le linee tratteggiate l'affondamento massimo .....	82
Figura 5.11 Deviazione standard dell'accelerazione verticale del mozzo .....	83
Figura 5.12 Forza di trazione per differenti prove di trazione.....	84
Figura 5.13 Affondamento dello pneumatico.....	85
Figura 5.14 Deviazione standard della accelerazione verticale del mozzo .....	85
Figura 6.1 Andamento della forza di trazione in funzione del numero e dell'altezza dei tasselli .....	89
Figura 6.2 Affondamento dello pneumatico al variare del numero e dell'altezza dei tasselli .....	91
Figura 6.3 Deviazione standard dell'accelerazione verticale del mozzo ruota in funzione del numero e dell'altezza dei tasselli.....	92
Figura 6.4 Spettro dell'accelerazione verticale del mozzo per diversi valori del numero di tasselli.....	93
Figura 6.5 Distribuzione delle pressioni di contatto con il terreno per pneumatico con 6 tasselli per lato.....	93
Figura 6.6 Forza di trazione per il terreno morbido.....	94

Figura 6.7 Affondamento massimo dello pneumatico per terreno morbido .....	95
Figura 6.8 Deviazione standard dell'accelerazione verticale del mozzo per terreno morbido .....	95





## **Sommario**

Nell'interazione fra suolo agricolo e pneumatico occorre tenere in considerazione la deformabilità dei corpi in contatto, in quanto sia il terreno che lo pneumatico presentano elevate deformazioni che alterano la geometria del contatto. In questo lavoro di tesi si è voluto studiare un modello che fosse in grado di calcolare la forza di trazione di uno pneumatico per uso agricolo tenendo in considerazione le deformabilità presenti. Per caratterizzare la deformabilità dello pneumatico è stata effettuata un'analisi modale utilizzando il metodo complesso esponenziale ed identificando i modi di vibrare dello pneumatico nel range 0-60 Hz. Alcuni test sono stati condotti per caratterizzare le proprietà meccaniche di un suolo agricolo e determinare i dati in ingresso per il modello di calcolo. La validazione del modello proposto è stata eseguita confrontando i risultati delle simulazioni con i valori sperimentali della forza di trazione rilevati durante una prova in campo. In conclusione si è voluto impiegare il modello di simulazione per indagare l'effetto di alcuni parametri geometrici del battistrada sulle prestazioni dello pneumatico.

## **Abstract**

In the interaction between agricultural soil and pneumatic tire the deformability of the bodies in contact has to be taken into account, because both the terrain and the tire show a large deformation. In this work we want to study a model that can predict the force that an agricultural tire can produce considering the deformability of the bodies. We performed a modal analysis investigation using the complex exponential method to calculate the tire deformability. The natural modal vibrations are identified in the range 0-60 Hz. We did different tests to analyze the mechanical properties of the terrain. Results have been used in the analytical model. In order to evaluate the accuracy of the model we compared the model results with the experimental data collected during an outdoor test. In conclusion we used the numerical model to analyze the effects of some geometrical parameters of the tread surface on the performance of the tire.



# 1 Introduzione

Uno pneumatico per veicoli agricoli deve essere in grado di garantire una adeguata trazione per le operazioni in campo, ma non bisogna trascurare che il confort e l'affondamento nel terreno sono due proprietà importanti per gli agricoltori. L'obiettivo del lavoro è la creazione di un modello che simuli l'interazione tra pneumatico e suolo che tenga conto della deformabilità dei corpi in contatto e che ci permetta di valutare l'effetto sulle prestazioni della pressione di gonfiaggio dello pneumatico e del disegno del battistrada.

In letteratura lo studio dell'interazione fra pneumatico e terreno deformabile compare negli ultimi 60 anni, in quanto fino agli anni '50 tutti gli studi condotti sugli pneumatici prevedevano l'utilizzo di una strada indeformabile, quindi erano adatti a modellare il comportamento dello pneumatico in strada e non in fuori strada su terreni fortemente deformabili. A Partire dagli anni '50 grazie agli studi condotti da Bekker[1] [2] si è incominciato a studiare le forze in gioco fra il terreno e lo pneumatico rigido ed è nato un nuovo ramo della meccanica applicata definito 'Terramechanics', che si pone l'obiettivo di studiare le prestazioni di un veicolo in relazione al tipo di terreno su cui si trova ad operare. Con la maggior potenza di calcolo, resasi disponibile dagli anni '70, si sono sviluppati modelli più complessi che si basano su tecniche di calcolo agli elementi finiti (FE) o agli elementi discreti (DE).

I primi studi sull'interazione ruota-terreno si basano su metodi empirici, i quali derivano dagli studi effettuati da Bekker [1] [2] che a partire da prove sperimentali del terreno determina lo stato di sforzo normale causato dall'affondamento della ruota nel terreno. Bekker non prevede un legame fra lo sforzo normale e lo sforzo di taglio generati dal terreno, ma calcola lo sforzo di taglio in funzione di parametri ricavati sperimentalmente. Successivi sviluppi del metodo di Bekker dovuti agli studi di Janosi e Hanamoto [3] hanno introdotto nel calcolo dello sforzo di taglio il criterio di rottura di Mohr-Coulomb. Ulteriori miglioramenti alle equazioni di Bekker sono stati condotti da Reece [4] e Meyerhof [5] che hanno introdotto la soluzione dell'equazione di plasticità nel calcolo dello sforzo normale.

A partire dai risultati ottenuti da Reece [4] sono stati sviluppati modelli sull'interazione ruota-terreno che prevedevano pneumatici lisci, mentre per i primi modelli di pneumatici tassellati dobbiamo annoverare gli studi di El-Gawwad [6], che ha valutato l'influenza di tasselli dritti sulla forza di trazione in condizioni stazionarie, e successivamente dell'angolo di camber sulla forza di trazione e sulla forza laterale.

A partire dagli anni '60, con lo svilupparsi dei computer, sono stati formulati modelli numerici [7] [8] in grado di simulare il contatto fra ruota e terreno che utilizzano gli elementi finiti. Simulare la deformabilità di uno pneumatico attraverso un modello agli elementi finiti consente di ottenere risultati ottimi, a fronte di lunghi tempi di calcolo. Per migliorare il modello del terreno possono essere utilizzate le tecniche agli elementi discreti (DEM), come a dimostrato Nakashima [9] facendo interagire un modello FEM per la ruota con un modello DEM per il terreno.

Il terreno ben si presta all'utilizzo di un modello agli elementi discreti che simula con ottima approssimazione l'interazione delle singole particelle del terreno. Negli ultimi anni molti studi sono stati effettuati utilizzando modelli agli elementi discreti per lo studio del comportamento del terreno sotto l'azione di ruote indeformabili. Il problema delle simulazioni attraverso l'uso di metodi DEM o FEM risiede nel tempo di calcolo richiesto per ottenere pochi secondi di simulazione, ad esempio gli studi di Nakashima e Takatsu [10] si sono focalizzati nel rendere più pratici e veloci questi metodi per poter essere implementati anche su computer di livello medio.

Oltre all'utilizzo di un modello FEM è possibile considerare la deformabilità di uno pneumatico studiandone i modi di vibrare [11] o attraverso modelli che tramite l'uso di molle ne riproducano la deformabilità [12]. Lo scopo di questi studi è identificare il modo di vibrare di uno pneumatico [13] o lo smorzamento [14] da poter poi utilizzare in modelli dello pneumatico a parametri concentrati.

Il modello proposto utilizza l'approccio modale per includere la deformabilità dello pneumatico. Alcune prove sperimentali sono state effettuate al fine di identificare i modi di vibrare dello pneumatico e poterli inserire nel modello. Il suolo è invece stato modellato con un letto elastico caratterizzato da rigidità differenziate nella fase di schiacciamento e rilascio della forza peso. Questo consente l'introduzione di un "effetto memoria" del suolo, ovvero nel suolo rimane una deformazione residua dopo il passaggio dello pneumatico.

Lo sforzo massimo viene definito utilizzando il modello di Bekker e dipende dal carico normale agente sullo pneumatico e dalle proprietà del terreno. Prove sperimentali sono state condotte per identificare le caratteristiche meccaniche del terreno necessarie al modello.



## 2 Identificazione dei modi di vibrare di uno pneumatico agricolo

### 2.1 Introduzione

Si vuole studiare la deformabilità di uno pneumatico per trattore agricolo per poterne costruire un modello analitico. Per identificare come si deforma un corpo possiamo utilizzare l'approccio modale che consente di descrivere la deformabilità di un corpo tramite un numero finito di gradi di libertà. L'analisi modale consiste in una serie di processi che portano all'identificazione di quelli che vengono definiti modi di vibrare di un corpo e dei corrispondenti parametri modali (frequenza propria, massa modale, coefficiente di smorzamento) che verranno poi usati per definire un modello analitico.

L'identificazione dei parametri modali di un corpo può essere effettuata sia nel dominio del tempo sia nel dominio delle frequenze [15]. Nel nostro caso abbiamo scelto di effettuare l'analisi modale nel dominio del tempo utilizzando il metodo complesso esponenziale che si basa sul metodo di Prony.

I metodi d'identificazione modale nel dominio del tempo prevedono, come punto di partenza, di usare la funzione di risposta all'impulso (Impulse response function IRF). La IRF può essere calcolata a partire da dati sperimentali sulla risposta in frequenza (frequency response function FRF), effettuando la trasformazione inversa di Fourier. Al fine di ricavare la FRF di un corpo possono essere utilizzate differenti tecniche sperimentali che però si basano sul concetto di fornire una forza nota al corpo e di rilevare lo spostamento di alcuni punti del corpo stesso.

Per validare i parametri modali calcolati è stata riprodotta analiticamente la prova sperimentale di identificazione della FRF utilizzando il modello analitico dello pneumatico contenente i parametri modali identificati.

Il paragrafo 2.2 descrive le basi teoriche dell'identificazione modale ed il metodo (Complex Exponential) utilizzato per questo lavoro. I paragrafi seguenti

sono relativi alla descrizione delle prove impulsive ed ai risultati dell'identificazione.

### 2.2 Nozioni teoriche

La teoria presente dietro il concetto di analisi modale è molto ampia [15],[16], in questo paragrafo si vuole fornire i concetti di base per poter capire lo sviluppo del lavoro. Verrà esposta la linea guida dell'analisi modale a partire dalla risoluzione dei sistemi meccanici attraverso i parametri modali.

#### 2.2.1 Risoluzione di sistemi meccanici

I sistemi meccanici possono essere classificati in due famiglie, i sistemi discreti e i sistemi continui. I sistemi discreti sono costituiti da un numero finito di corpi rigidi ognuno dei quali presenta sei coordinate cartesiane nello spazio. Invece nei sistemi continui ad ogni corpo oltre alle coordinate del baricentro è associata anche la deformazione del corpo stesso.

Analizzando i sistemi discreti dobbiamo considerare che ogni corpo presenta sei gradi di libertà associati alle sei coordinate cartesiane, ogni corpo potrà poi essere vincolato a terra o ad un altro corpo riducendo così il numero totale dei gradi di libertà del sistema. Le equazioni che descrivono il moto del sistema discreto possono essere calcolate attraverso differenti metodi come le equazioni di Lagrange o le equazioni cardinali della dinamica [17]. Utilizzando le equazioni di Lagrange otteniamo un sistema così scritto (eq. 2.1):

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \underline{\dot{x}}_t} \right) \right\}^T - \left\{ \frac{\partial E_c}{\partial \underline{x}_t} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial D}{\partial \underline{\dot{x}}_t} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial V}{\partial \underline{x}_t} \right\}^T = \underline{Q}_t$$

2.1

Dove  $E_c$ ,  $D$  e  $V$  rappresentano rispettivamente l'energia cinetica, la funzione dissipativa e l'energia potenziale, infine  $Q_t$  rappresenta il lavoro delle forze generalizzate che non rientrano nei termini a sinistra dell'uguale. Le forme di energia appena descritte presentano differenti forme in base al tipo di sistema



che stiamo analizzando, se però sviluppiamo i calcoli dell'equazione di Lagrange (eq. 2.1), linearizzando i legami cinematici otteniamo un'equazione nella forma rappresentata dall'equazione 2.2.

$$[M]\ddot{\underline{x}} + [R]\dot{\underline{x}} + [K]\underline{x} = \underline{Q}$$

2.2

Dove  $[M]$  è la matrice di massa,  $[R]$  la matrice di smorzamento e  $[K]$  la matrice di rigidità, che raggruppano le proprietà del sistema in coordinate fisiche, e  $\underline{Q}$  che è il vettore delle forzanti.

L'equazione 2.2 rappresenta l'equazione lineare di un sistema a "n" gdl (multi degree of freedom MDOF) dove il vettore  $\underline{x}$  raggruppa le coordinate fisiche. Partendo dalla scrittura delle equazioni di moto del sistema (eq. 2.2) possiamo calcolarne la soluzione per il moto libero (eq. 2.3), ovvero senza termini smorzanti e di forzamento.

$$[M]\ddot{\underline{x}} + [K]\underline{x} = \underline{0}$$

2.3

Se analizziamo un sistema meccanico dissipativo perturbato nell'intorno della posizione di equilibrio statico le matrici  $[M]$  e  $[K]$  sono simmetriche e definite positive e otteniamo una soluzione del tipo:  $\underline{x} = \bar{\underline{X}}e^{i\omega t}$ . Sostituendo questa soluzione nell'equazione 2.3 ricaviamo:

$$[-\omega^2[M] + [K]]\bar{\underline{X}} = \underline{0}$$

2.4

Moltiplicando l'equazione 2.4 per  $[M]^{-1}$ , la matrice di massa inversa che esiste, in quanto  $[M]$  è per ipotesi simmetrica e definita positiva, otteniamo:

$$[-\omega^2[M]^{-1}[M] + [M]^{-1}[K]]\bar{\underline{X}} = \underline{0}$$

2.5

Il prodotto  $[M]^{-1}[M] = [I]$ , dove  $[I]$  indica la matrice identità, consente di riscrivere l'equazione 2.5 come un problema di autovalori ed autovettori. Si definisce autovalore  $\lambda$  di una matrice quel valore che sottratto alla diagonale principale della matrice stessa ne annulla il determinante.

$$[-\lambda[I] + [M]^{-1}[K]]\bar{\underline{x}} = \underline{0}$$

2.6

Il legame presente fra frequenze proprie e autovalori è:  $\lambda = \omega^2$ . Gli autovettori della soluzione dell'equazione 2.6 invece rappresentano i modi di vibrare del sistema. Possiamo raccogliere autovalori e autovettori in due matrici definite  $[\lambda^2]$  e  $[\Phi]$ . La matrice degli autovalori  $[\lambda^2]$  corrisponde alle frequenze proprie dei modi di vibrare, è una matrice diagonale. Al contrario nella matrice degli autovettori  $[\Phi]$  troviamo le corrispondenti forme dei modi di vibrare ordinate per colonna, inoltre essa ci consente di poter effettuare un cambio di variabili fra le coordinate modali ( $\underline{q}$ ) e le coordinate fisiche del problema ( $\underline{x}$ ).

$$\underline{x} = [\Phi]\underline{q}$$

2.7

Se però siamo nella condizione di avere un sistema smorzato il calcolo degli autovettori e autovalori segue una strada differente che prevede la risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} [M]\ddot{\underline{x}} + [R]\dot{\underline{x}} + [K]\underline{x} = 0 \\ [M]\dot{\underline{x}} = [M]\dot{\underline{x}} \end{cases}$$

2.8

Definendo la variabile di stato  $\underline{z}$  come:

$$\underline{z} = \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \underline{x} \end{Bmatrix}$$

2.9

Possiamo riscrivere l'equazione 2.8 effettuando un cambio di variabili ottenendo un problema agli autovettori e autovalori:

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \dot{\underline{z}} + \begin{bmatrix} [R] & [K] \\ -[M] & [0] \end{bmatrix} \underline{z} = \underline{0} \Rightarrow \dot{\underline{z}} + \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [R] & [K] \\ -[M] & [0] \end{bmatrix} \underline{z} = \underline{0}$$

2.10

Utilizzando gli autovettori per effettuare il cambio di variabile nell'equazione 2.2 otteniamo:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T[M][\Phi]\ddot{\underline{q}} + [\Phi]^T[R][\Phi]\dot{\underline{q}} + [\Phi]^T[K][\Phi]\underline{q} = \underline{0} \\ [\bar{M}]\ddot{\underline{q}} + [\bar{R}]\dot{\underline{q}} + [\bar{K}]\underline{q} = \underline{0} \end{aligned}$$

2.11

La matrice dei modi di vibrare  $[\Phi]$  ha la proprietà di disaccoppiare le equazioni del sistema scritte in coordinate fisiche, perché i modi principali di vibrare sono ortogonali fra loro. Il sistema scritto in coordinate modali (eq. 2.11) presenta quindi matrici diagonali. Per questo motivo le coordinate modali sono anche definite coordinate principali o ortogonali e sono spesso utilizzate, malgrado lo svantaggio di non avere nessun significato fisico.

Nei sistemi continui il numero di gradi di libertà non è finito, quindi è necessario risolvere un sistema alle derivate spaziali, inoltre le grandezze che definiscono il sistema sono funzione sia dello spazio sia del tempo. Tutti i sistemi reali sono sistemi continui, in molti casi però è possibile effettuare delle approssimazioni per semplificare il problema e poter risolvere il sistema come discreto.

I sistemi continui di più semplice trattazione sono funi tesate e travi. Poniamo alcune ipotesi per studiare i moti trasversali di una fune tesata: la fune deve avere una massa per unità di lunghezza costante lungo la direzione della fune stessa; supponiamo che la catenaria su cui la fune si attesta abbia una freccia piccola tanto da poter considerare la fune rettilinea, per questo occorre avere una tensione interna alla fune costante; il moto trasversale di un generico punto della fune viene descritto da una funzione  $w(\xi, t)$  dove  $\xi$  è l'ascissa del punto; infine il moto può avvenire in un generico piano contenente la fune stessa che quindi deve essere dotata di simmetria polare. Dall'ultima ipotesi possiamo affermare che un generico moto della fune nello spazio potrà essere descritto mediante la sua scomposizione su due piani ortogonali qualsiasi.

Per poter scrivere le equazioni di moto utilizziamo le equazioni degli equilibri dinamici sul generico elemento infinitesimo della fune  $d\xi$ . In assenza di forzanti esterne su questo elemento agiranno solo la forza di inerzia e la tensione dovuta al tiro impresso alla fune.

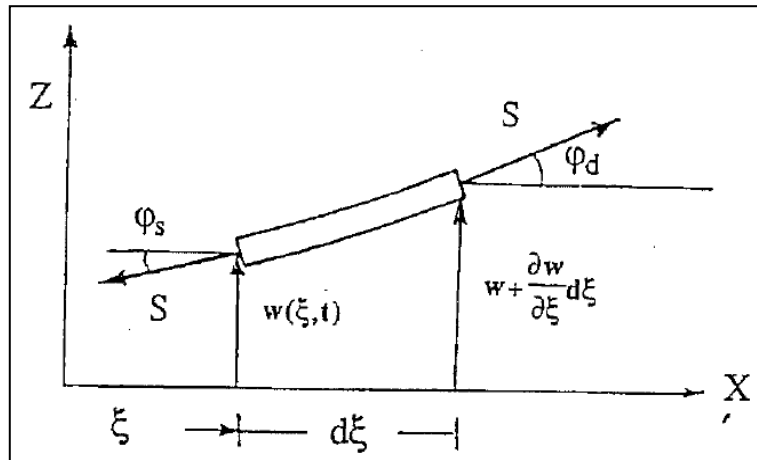


Figura 2.1 Equilibrio fune tesata

La forza d'inerzia viene scritta come il prodotto della massa infinitesima per l'accelerazione trasversale:

$$f_{in} = -md\xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

2.12

La fune tesata presenta una tensione  $S$  costante lungo tutta la fune perpendicolare alla sezione, per la scrittura delle equazioni di moto occorre proiettare  $S$  in direzione trasversale. L'equazione di moto del generico elemento di fune sarà:

$$-md\xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - S \sin \varphi_s + S \sin \varphi_d = 0$$

2.13

In generale gli angoli  $\varphi_s$  e  $\varphi_d$  sono diversi tra loro, ma dato che stiamo considerando piccole vibrazioni intorno alla posizione di equilibrio, è possibile linearizzare l'espressione dei loro seni come indicato nell'equazione 2.14.

$$\sin \varphi \approx \varphi \approx \tan \varphi = \frac{\partial w}{\partial \xi}$$

2.14

Possiamo calcolare la funzione  $w(\xi, t)$  per il lato destro dell'elemento infinitesimo come incremento rispetto al lato sinistro:

$$w_s = w(\xi, t) \tag{2.15}$$

$$w_d = w(\xi, t) + dw(\xi, t) = w(\xi, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right) d\xi \tag{2.16}$$

Quindi otteniamo:

$$\varphi_s \approx \frac{\partial w}{\partial \xi} \tag{2.17}$$

$$\varphi_d \approx \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) d\xi \tag{2.18}$$

Sostituendo l'espressione degli angoli nell'equazione 2.13 ed effettuando alcune semplificazioni otteniamo:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) \tag{2.19}$$

L'equazione 2.19 rappresenta il moto trasversale di un generico elemento della fune, è un'equazione alle derivate parziali di secondo ordine che viene definita equazione delle onde. Quest'equazione ricavata per le funi tesate è formalmente simile anche per gli altri casi di vibrazione nei continui.

Il moto a regime di una fune può essere visto come una forma d'onda stazionaria  $(\Psi_f(\xi))$  le cui ampiezze variano nel tempo secondo la funzione  $(G(t))$ . E' quindi possibile semplificare l'equazione 2.19 come segue:

$$w(\xi, t) = \Psi_f(\xi)G(t) \tag{2.20}$$

Occorre ora definire la forma delle due funzioni incognite dell'equazione 2.20, per questo calcoliamo le derivate parziali di  $w(\xi, t)$ :

$$\frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 (\Psi_f(\xi)G(t))}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \Psi_f(\xi)}{\partial \xi^2} G(t) = \Psi_f''(\xi)G(t)$$

2.21

$$\frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (\Psi_f(\xi)G(t))}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} \Psi_f(\xi) = \Psi_f(\xi)\ddot{G}(t)$$

2.22

Sostituendo le equazioni 2.21 e 2.22 nell'equazione 2.19 e separando le variabili otteniamo:

$$\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = \left(\frac{S}{m}\right) \frac{\Psi_f''(\xi)}{\Psi_f(\xi)} = -\omega^2$$

2.23

Nell'equazione 2.23 osserviamo che vi è una separazione fra le funzioni del tempo e le funzioni della variabile spaziale, affinché l'uguaglianza sia verificata occorre che le equazioni siano uguali ad una stessa costante ( $-\omega^2$ ). Si sceglie di porre la costante negativa ed elevata al quadrato per semplificare i passaggi successivi del calcolo. Per risolvere l'equazione 2.23 occorre separare l'equazioni e risolvere due sistemi separatamente.

$$\ddot{G}(t) + \omega^2 G(t) = 0$$

2.24

$$\frac{S}{m} \Psi_f''(\xi) + \omega^2 \Psi_f(\xi) = 0$$

2.25

Le equazioni 2.24 e 2.25 sono equazioni differenziali a coefficienti costanti. La soluzione dell'equazione 2.24 è:

$$G(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t = D \sin(\omega t + \varphi)$$

2.26

## Identificazione dei modi di vibrare di uno pneumatico agricolo

---

Prima di calcolare la soluzione dell'equazione 2.25 dobbiamo effettuare un cambio di variabile utilizzando:

$$\gamma^2 = \frac{m}{S} \omega^2 \rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{m}{S}} \omega$$

2.27

Quindi la soluzione dell'equazione 2.25 sarà:

$$\Psi_f(\xi) = F_1 \sin \gamma \xi + F_2 \cos \gamma \xi = F_1 \sin \frac{\omega}{C} \xi + F_2 \cos \frac{\omega}{C} \xi$$

2.28

Per calcolare le variabili  $F_1$  e  $F_2$  nell'equazione 2.28 e  $D$  nell'equazione 2.26 occorre imporre le condizioni al contorno.

$$w(0, t) = \Psi_f(0)G(t) = 0$$

2.29

$$w(L, t) = \Psi_f(L)G(t) = 0$$

2.30

Dove  $L$  è la lunghezza della fune. Dobbiamo tenere conto che le condizioni agli estremi della fune devono valere per tutti gli istanti temporali, quindi possiamo semplificare la funzione  $G(t)$ . Risolvendo la 2.29 otteniamo che  $F_2=0$  se la sostituiamo nell'equazione 2.20 avremo:

$$w(\xi, t) = \sin \gamma \xi (\bar{A} \sin \omega t + \bar{B} \cos \omega t)$$

2.31

Dove  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  comprendono anche la variabile  $F_1$ . Risolvendo la condizione al contorno 2.30 per  $t \neq 0$  abbiamo:

$$\Psi_f(L) = \sin \gamma L = \sin \frac{\omega}{C} L = 0 \Rightarrow \gamma_n L = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots \infty)$$

2.32

Sostituendo  $\gamma_n$  nell'equazione 2.27 otteniamo l'equazione che definisce la pulsazione propria del sistema:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{S}{m}} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

2.33

L'equazione 2.33 ci mostra come il sistema abbia infinite frequenze proprie, ognuna delle quali avrà il suo corrispondente modo di vibrare  $\phi^{(n)}(\xi)$ .

$$\phi^{(n)}(\xi) = \sin \frac{n\pi}{L} \xi = \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} \xi$$

2.34

Dove  $\lambda_n = 2L/n$  indica la lunghezza d'onda del modo n-esimo. A questo punto possiamo ricostruire l'equazione 2.20 come sommatoria degli infiniti modi di vibrare del sistema.

$$w(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi^{(i)}(\xi) q_i(t)$$

2.35

I coefficienti  $q_i$  sono le nuove coordinate, funzione del tempo, che descrivono il sistema.

### 2.2.2 Funzione di risposta in frequenza

Le tecniche di identificazione modale prevedono la conoscenza della funzione di risposta in frequenza (FRF) del sistema meccanico in esame.

La FRF di un sistema rappresenta la risposta del sistema nel dominio delle frequenze ad una forzante unitaria ed è possibile ricavarla dalla funzione di trasferimento del sistema (fdt), che rappresenta la risposta del sistema ad una forzante generica, effettuando la trasformazione di Laplace.





Figura 2.2 Schema di un sistema meccanico

Per l'identificazione della FRF del sistema ruota è necessario misurare lo spostamento della cintura dello pneumatico e la forza che viene fornita al sistema. In alternativa allo spostamento della cintura dello pneumatico è possibile considerare l'accelerazione della stessa andando a ricavare l'acceleranza invece della ricettanza. Infatti misurare le accelerazioni invece che gli spostamenti risulta di più facile realizzazione e meno soggetto ad errori, poiché gli accelerometri hanno il vantaggio, rispetto agli strumenti di misura degli spostamenti, di essere lineari per un più ampio range di frequenze, di dimensioni minori e di più facile montaggio nel punto desiderato. Inoltre per spostamenti molto piccoli, come nel caso delle vibrazioni, risulta difficile misurare lo spostamento.

Misurate le accelerazioni occorre convertirle in spostamento. Se effettuiamo questo cambiamento nel dominio del tempo avremo una integrazione doppia, se invece passiamo al dominio delle frequenze, otteniamo una moltiplicazione come esposto di seguito:

$$x(t) = X(f)e^{i\omega t}$$

$$v(t) = \int_t x(t) dt = i\omega X(f) e^{i\omega t}$$

$$a(t) = \iint_t x(t) dt = -\omega^2 X(f) e^{i\omega t}$$

2.36

Grazie a queste equazioni (eq. 2.36) possiamo facilmente ricavare il valore degli spostamenti nel dominio delle frequenze. Se però analizziamo la scrittura della FRF tenendo conto di quanto appena enunciato possiamo dire:

$$\text{FRF} = \frac{\text{Spostamento}}{\text{Forza}} = \frac{X(f)e^{i\omega t}}{F(f)e^{i\omega t}} = \alpha(\omega)$$

2.37

$$A(\omega) = \frac{\text{Accelerazione}}{\text{Forza}} = \frac{-\omega^2 X(f)e^{i\omega t}}{F(f)e^{i\omega t}} = -\omega^2 \alpha(\omega)$$

2.38

$$\alpha(\omega) = \frac{A(\omega)}{-\omega^2}$$

2.39

Questi passaggi matematici ci consentono di calcolare in maniera rapida la FRF a partire dalle misure di accelerazioni dello pneumatico, senza effettuare passaggi di integrazione numerica che possono generare errori di calcolo.

Al fine di calcolare analiticamente la funzione di risposta in frequenza possiamo analizzare la risposta del sistema ad una forzante armonica  $\underline{F}_0 e^{i\Omega t}$  (eq.2.40).

$$[M]\underline{\ddot{q}} + [R]\underline{\dot{q}} + [K]\underline{q} = \underline{F}_0 e^{i\Omega t}$$

2.40

Dove il vettore  $\underline{q}$  rappresenta le coordinate modali. Risolvendo il sistema forzato a regime, ossia la risposta del sistema passato il transitorio iniziale, la soluzione avrà una forma complessa del tipo:

$$q_i = q_{i0} e^{i\Omega t}$$

2.41

dove  $i=1,n$  (numero di modi).

Ponendo questa soluzione nell'equazione di moto (eq. 2.40) possiamo ottenere una soluzione  $H_{jk}(\omega)$  definita come il rapporto fra la  $i$ -esima coordinata modale e la forzante  $k$ -esima. Raggruppando tutte le soluzioni trovate è possibile definire una matrice detta "funzione di risposta in frequenza"  $[H(\omega)]$ . Questa matrice dipende dalla frequenza  $\omega$  ed ogni elemento è una risposta in frequenza della coordinata modale  $j$  a causa della forzante applicata alla coordinata  $k$ -

esima. L'importanza di questa matrice risiede nel fatto che siamo in grado, più o meno facilmente, di misurarla, inoltre può essere esplicitata in funzione dei parametri modali.

$$H_{jk}(\omega) = \frac{q_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{rA_{jk}}{\lambda_r^2 - \omega^2}$$

2.42

dove  $\lambda_r^2$  è l'autovalore del modo  $r$ ;  $rA_{jk}$  è definita la costante modale e dipende dall'autovettore  $r$ -esimo ed  $N$  è il numero di modi o coordinate modali.

L'espressione sopra riportata (eq.2.42) è l'equazione fondamentale a cui fanno capo tutti i metodi per l'identificazione modale, in quanto mette in relazione i parametri modali del sistema con la sua risposta dinamica.

### 2.2.3 Analisi modale

Con il termine analisi modale si intendono una serie di operazioni che ci portano al calcolo dei parametri modali del sistema in esame, infatti questa fase di lavoro può essere anche definita estrazione dei parametri modali. Lo scopo è quindi quello di trovare i coefficienti di un'espressione teorica della risposta in frequenza che meglio approssimi i valori misurati.

I parametri modali di nostro interesse sono: le frequenze proprie dei modi di vibrare, le forme dei modi di vibrare, le masse, le rigidità e gli smorzamenti delle coordinate modali. Con questi parametri siamo in grado di ricostruire il comportamento dello pneumatico analizzato per qualsiasi tipo di forzamento applicato. Bisogna notare che esistono alcuni problemi da affrontare durante l'analisi modale di un sistema, alcuni di questi possono essere ricondotti al calcolo dello smorzamento del sistema.

Il problema di determinare lo smorzamento di un sistema dipende dal fatto che esistono diversi comportamenti dello smorzamento stesso e che non siamo in grado di riconoscere, questo ci porta ad effettuare delle ipotesi iniziali che poi andranno verificate. Un altro problema che ci costringe ad effettuare delle ipotesi iniziali è che i modi di vibrare di un sistema possono essere sia reali che

complessi. Nella pratica i modi di una struttura sono quasi sempre complessi, ma con parte complessa trascurabile. Trascurando la parte complessa di un numero, anche se piccola, commettiamo un errore che può in alcuni casi diventare non trascurabile. Infine esiste un problema che merita l'attenzione e riguarda l'ordine del modello analizzato, ovvero quanti modi considerare nel modello del sistema. In teoria potremmo affermare che più alto è l'ordine del modello più accuratamente ricostruiamo il sistema, però dobbiamo tenere conto anche della potenza di calcolo disponibile e dell'accuratezza della ricostruzione che riteniamo soddisfacente.

I metodi utilizzabili per l'analisi modale sono molteplici e possono essere suddivisi in varie categorie in base alle condizioni di lavoro, possono essere ad esempio classificati in base al dominio in cui viene effettuata l'analisi, se si lavora nel dominio del tempo o delle frequenze. Un'altra importante divisione consiste nell'analizzare un modo di vibrare alla volta o tutti i modi contemporaneamente.

Il metodo utilizzato per la determinazione dei parametri modali si basa sulle teorie di Prony (matematico francese del 1700) e prende il nome di "Complex exponential method".

### 2.2.4 Complex exponential method

Il metodo che è stato scelto per effettuare l'analisi modale viene chiamato Complex exponential method e prevede di lavorare nel dominio del tempo. Il vantaggio di lavorare con questo metodo è che non è necessario effettuare una stima iniziale dei parametri modali.

Sviluppando la teoria presente nel metodo in esame occorre partire dalla FRF che deve essere riscritta mettendo in evidenza il fattore di smorzamento  $\zeta$  che corrisponde al rapporto fra lo smorzamento e lo smorzamento critico. Questo passaggio consentirà poi di effettuare ulteriori semplificazioni.

$$\zeta = \frac{c}{c_0} = \frac{c}{2\sqrt{k m}}$$

2.43

## Identificazione dei modi di vibrare di uno pneumatico agricolo

---

Dove  $c$  è lo smorzamento,  $c_0$  lo smorzamento critico,  $k$  la rigidezza e  $m$  la massa.

Lavorando con un sistema MDOF la risposta in frequenza corrisponde ad una matrice dove ogni elemento avrà la seguente formula:

$$\alpha_{jk} = \sum_{r=1}^N \frac{rA_{jk}}{\omega_r \zeta_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2})} + \frac{rA_{jk}^*}{\omega_r \zeta_r + i(\omega + \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2})} \quad 2.44$$

Dove  $rA_{jk}^* = r_{r+N}A_{jk}$  ossia ogni modo ne presenta uno complesso e coniugato, che per semplificare la risoluzione può essere semplificato.

A questo punto dobbiamo effettuare un passaggio dal dominio delle frequenze, in cui la FRF è definita, al dominio del tempo in cui otteniamo la funzione di trasferimento per forzante impulsiva (IRF Impulse Responce Function). Il cambio di dominio avviene attraverso la trasformata inversa di Fourier, ottenendo la seguente forma della risposta al forzamento:

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} rA_{jk} e^{s_r t} \quad 2.45$$

Bisogna tenere conto che se la FRF è stata misurata sperimentalmente in maniera discreta con una determinata frequenza di campionamento, la funzione  $h_{jk}(t)$  sarà anche lei discreta con valori equispaziati nel tempo, in quanto la trasformata inversa di Fourier non è in grado di rendere continua una funzione discreta. Per migliorare la scrittura dell'equazione 2.45 possiamo effettuare la seguente semplificazione:

$$rA_{jk} = A_r ; e^{s_r t} = V_r \quad 2.46$$



Se sommiamo tutte le equazioni della 2.50 otteniamo:

$$\sum_{i=0}^q \beta_i h_i = \sum_{j=1}^{2N} \left( A_j \sum_{i=0}^q \beta_i V_j^i \right)$$

2.51

I coefficienti  $\beta$  sono scelti in modo da rispettare la seguente equazione

$$\beta_0 + \beta_1 V^1 + \beta_2 V^2 + \dots + \beta_q V^q = 0$$

2.52

L'obiettivo ora è quello di determinare i coefficienti  $\beta$  tali per cui la soluzione della equazione 2.52 porti ai valori  $V_r$  e quindi alle frequenze proprie del sistema. Per fare questo occorre effettuare una semplificazione ponendo il numero dei campioni misurati della risposta all'impulso ( $q$ ) pari a  $2N$ , 2 volte il numero di gradi di libertà del sistema ossia 2 volte il numero di modi del sistema. L'equazione 2.52 può essere così semplificata

$$\sum_{i=1}^{2N} \beta_i V_r^i = 0 \text{ con } r = 1, 2N$$

2.53

Possiamo osservare come la parte a destra dell'equazione 2.51 sia nulla a causa dell'equazione 2.53 e quindi semplificando otteniamo

$$\sum_{i=0}^{2N} \beta_i h_i = 0$$

2.54

Se poniamo  $\beta_{2N} = 1$  possiamo riscrivere la 2.54 nel seguente modo

$$\sum_{i=0}^{2N-1} \beta_i h_i = -h_{2N}$$

2.55

$$\{h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{2N-1}\} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \end{Bmatrix} = -h_{2N}$$

2.56

Se adesso ripetiamo tutti i passaggi effettuati dall'equazione 2.47 in poi con un differente set di valori della risposta al forzamento impulsivo possiamo costruire un nuovo set di variabili che si sovrapponga al set precedente tranne che per un punto, ponendo uguale a 1 un differente coefficiente  $\beta_i$ .

$$\{h_1 \ h_2 \ h_3 \ \dots \ h_{2N}\} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \end{Bmatrix} = -h_{2N+1}$$

2.57

Applicando ripetutamente questa procedura possiamo ottenere un set di  $2N$  equazioni con variabile le nostre incognite  $\beta$ .

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & h_{2N+1} & \dots & h_{4N-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ \vdots \\ h_{4N-1} \end{Bmatrix}$$

2.58

Risolviendo il sistema 2.58 siamo in grado di calcolare i coefficienti  $\beta$  che poi sostituiti nell'equazione 2.52 ci consentono di calcolare i parametri  $V$  dai quali otteniamo le frequenze proprie del sistema usando la relazione

$$V_r = e^{s_r \Delta t}$$

2.59

Inoltre attraverso l'equazione 2.47 possiamo ricavare le costanti modali  $A_r$  dalle quali possiamo ricavare i modi di vibrare seguendo l'equazione seguente

$${}_r A_{jk} = {}_r \phi_j {}_r \phi_k$$

2.60

Dove  ${}_r \phi_j$  indica  $r$ -esimo modo di vibrare del nodo  $j$ , quindi possiamo ricavare il modo di vibrare  $r$ -esimo



$${}_r\phi_j = \frac{{}_rA_{jk}}{\sqrt{{}_rA_{kk}}}$$

2.61

Questa procedura è stata implementata in un codice Matlab, che è stato utilizzato per identificare i modi di uno pneumatico agricolo a partire dai risultati sperimentali di una prova di risposta a forzante impulsiva.

### 2.3 Misura della risposta a forzante impulsiva

#### 2.3.1 Setup di misura

L'identificazione dei parametri modali dello pneumatico richiede che la FRF rappresenti le caratteristiche proprie del sistema ruota non vincolato. Questo implica che lo pneumatico sia non vincolato e non sottoposto a carichi, in modo da poter ricavare anche le inerzie del sistema che corrispondono ai modi a frequenza nulla. Nella pratica non è però possibile avere un sistema non vincolato, sono quindi possibili due soluzioni: la prima consiste nell'utilizzo di vincoli molto cedevoli, mentre la seconda prevede l'uso di un supporto molto rigido. Risulta complicato creare un sistema di vincoli abbastanza cedevole da lasciare la libertà al sistema di muoversi senza disturbare gli spostamenti rigidi del sistema stesso, per cui si preferisce utilizzare vincoli molto rigidi con frequenze proprie al di fuori delle frequenze di interesse.

Per le prove in esame si è scelto di avere uno pneumatico montato sul suo cerchione e vincolato al mozzo della trattrice agricola, questo sistema ha il vantaggio che analizziamo la FRF del sistema nelle condizioni in cui si trova ad operare. Lo pneumatico è stato mantenuto sollevato da terra per eliminare l'interferenza ruota-terreno, la quale introdurrebbe un ulteriore vincolo che andrebbe a modificare le forme modali.

Le prove sono state eseguite su uno pneumatico (Figura 2.3) per veicolo agricolo con le seguenti misure: 460/85 R34.



**Figura 2.3** Pneumatico montato sul veicolo

La misura scelta rappresenta il tipico pneumatico montato sull'asse posteriore di un trattore agricolo di taglia media. Inoltre si è voluto utilizzare due valori della pressione di gonfiaggio per simulare le differenti condizioni di utilizzo, 0.8-1.2 bar nelle condizioni di lavoro in campo e 1.6-2.4 bar nell'utilizzo su strada. Le pressioni scelte sono state di 1 e 1.6 bar per le due condizioni di lavoro.

Lo pneumatico è stato strumentato attraverso l'uso di 8 accelerometri monoassiali incollati sulla cintura esterna, equispaziati fra di loro come rappresentato in Figura 2.4. Questa disposizione ci consente di identificare fino al modo di vibrare a 4 lobi, perché per i modi successivi commetteremmo errore di aliasing spaziale, non disponendo di abbastanza sensori per poter individuare una forma modale con più di quattro nodi.

## Identificazione dei modi di vibrare di uno pneumatico agricolo

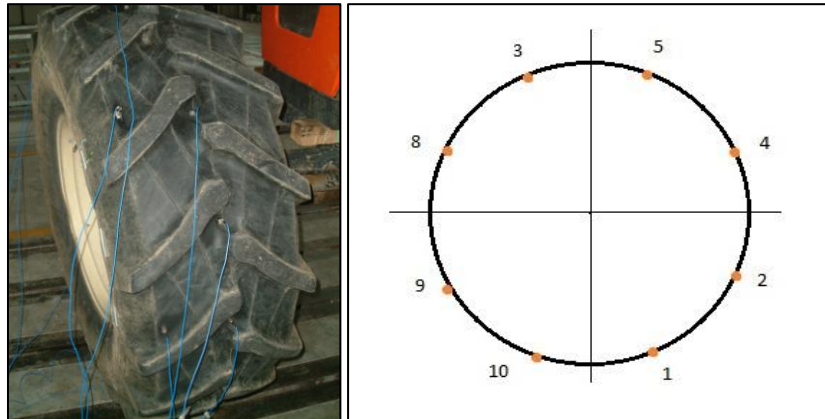


Figura 2.4 Pneumatico strumentato

Da precedenti studi sui modi di vibrare di uno pneumatico [18] ci aspettiamo le seguenti forme dei modi di vibrare Figura 2.5.

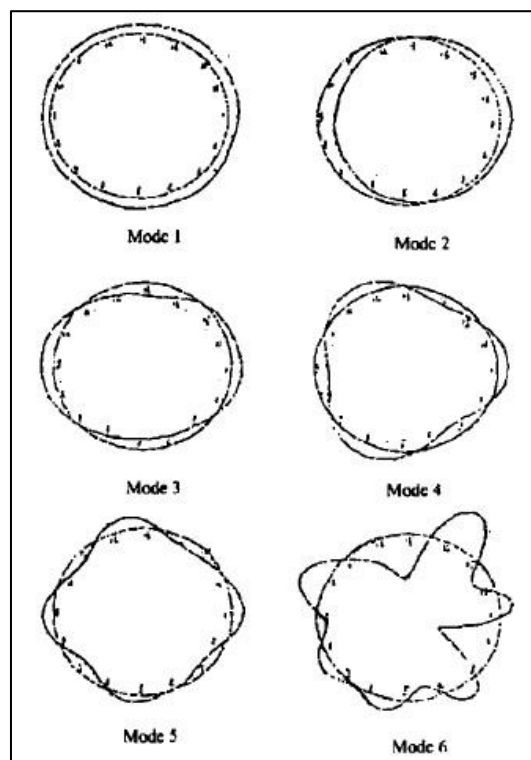


Figura 2.5 Modi di vibrare articolo “Experimental modal analysis of tire”[18]

## Capitolo 2

Gli accelerometri sono stati posizionati fra i ramponi, vedi Figura 2.4, per cercare di rilevare solo l'accelerazione della cintura, sono inoltre stati posizionati in maniera da presentare il loro asse di misura parallelo all'asse radiale dello pneumatico e positivo in direzione uscente dalla superficie dello stesso. La taratura degli strumenti viene fornita dal costruttore dello strumento stesso attraverso un foglio su cui sono riportate tutte le informazioni relative alla taratura.

La forza è stata fornita da un martello dinamometrico di piccola taglia, la cui curva caratteristica è riportata in Figura 2.6.

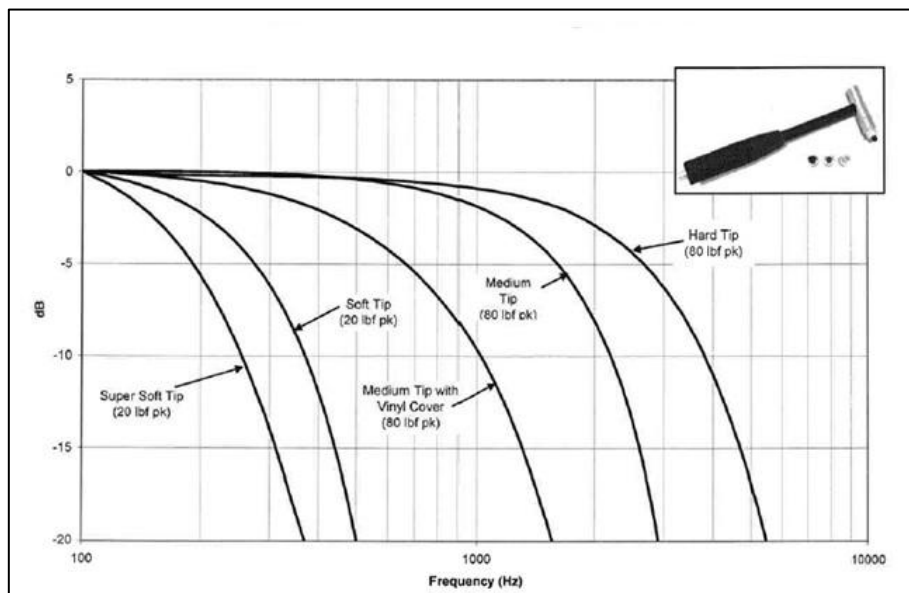


Figura 2.6 Curve caratteristiche del martello dinamometrico per differenti teste

L'uso del martello dinamometrico consente di fornire energia costante per un range di frequenze inferiore alla frequenza di taglio del martello oltre la quale l'energia fornita al sistema diminuisce. La frequenza di taglio del martello dinamometrico dipende principalmente dalla rigidità dei materiali in contatto e dalla massa del martello stesso. Più il martello è pesante e più la zona di contatto è rigida e maggiore sarà la frequenza perché l'impulso della forza è più breve.

La difficoltà nell'usare il martello dinamometrico è situata nella difficile ripetibilità delle prove in termini di posizione e angolazione del contatto fra martello e ruota ed inoltre nella magnitudine dell'impatto. Per questi motivi sono state ripetute più prove nelle stesse condizioni per poter avere dati sufficienti ad effettuare una media per eliminare il rumore random presente nei segnali. Oltre all'operazione di media è stato applicato un filtro per eliminare le frequenze superiori ai 100 Hz.

### 2.3.2 Elaborazione dei segnali acquisiti

La FRF, rapporto in frequenza fra uscita ed ingresso del sistema, non è stata calcolata direttamente, ma si è preferito usare degli stimatori della stessa per ridurre gli errori inevitabilmente presenti nei segnali. Gli stimatori della FRF, chiamati  $H_1$  e  $H_2$ , sono così calcolati:

$$H_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$
$$H_2 = \frac{S_{yy}}{S_{xy}}$$

2.62

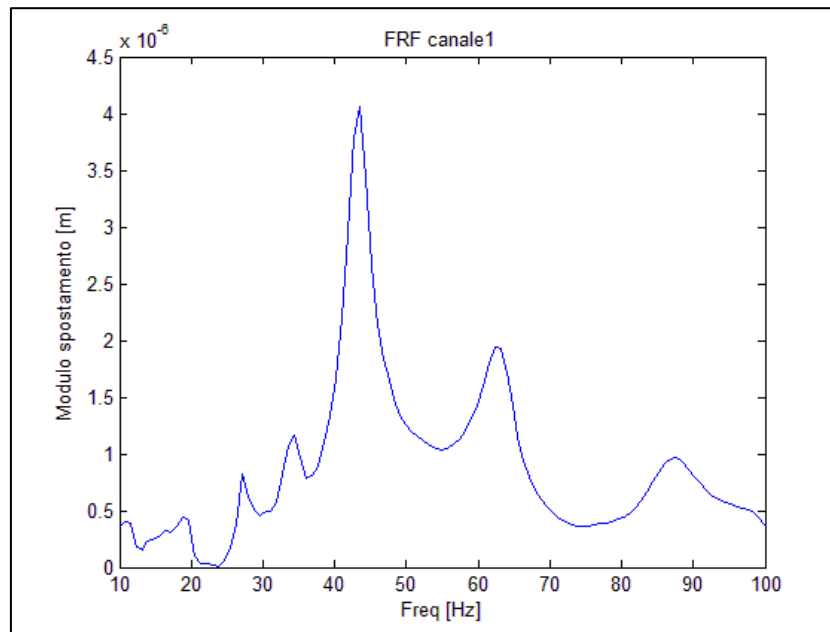
Dove  $S_{xx}$  e  $S_{yy}$  rappresentano le auto-correlazioni rispettivamente del segnale  $x$  in ingresso (nel nostro caso la forza del martello) e del segnale  $y$  in uscita (nel nostro caso l'accelerazione della cintura), invece  $S_{xy}$  rappresenta la cross-correlazione tra i due segnali. L'uso dello stimatore  $H_1$  consente di ridurre l'influenza del rumore presente nel segnale di risposta del sistema, al contrario  $H_2$  fornisce una stima migliore della FRF se il rumore è presente nel segnale di eccitazione del sistema. Se ad esempio ho un sistema con rumore presente sul segnale di uscita misuro un valore  $y$  dato dalla somma dell'uscita reale del sistema  $v$  più l'errore di misura  $n$ , in questa situazione  $S_{xx}$  non sarà affetta da errori, mentre  $S_{xy}$  sarà composta da due parti la correlazione fra  $y$  e  $v$  ( $S_{yv}$ ) e la correlazione fra  $x$  e il rumore sul segnale di uscita  $S_{xn}$ . Supponendo che il rumore in uscita non abbia alcuna relazione con il segnale di ingresso possiamo affermare che  $S_{xn}$  sia nullo. Gli stessi principi valgono nel caso in cui il rumore sia presente sul segnale di ingresso e si usi lo stimatore  $H_2$ . Nella pratica non

siamo mai in grado di stabilire a priori se il rumore sia predominante sull'ingresso o sull'uscita. In un sistema privo di rumore avremo che  $H1=H2$ , quindi dal rapporto fra  $H1$  e  $H2$ , detto coerenza, è possibile valutare l'attendibilità della stima della FRF. Più il valore della coerenza è prossimo ad 1 e migliore sarà la stima. Se la coerenza si allontana dal valore unitario avremo che i nostri segnali sono affetti da rumore.

### 2.4 Identificazione parametri modali

E' stato scelto l'utilizzo dell'ambiente di lavoro Matlab, in quanto si è già a conoscenza del linguaggio di programmazione. Il codice in esame riceve in ingresso la funzione di risposta in frequenza calcolata precedentemente dalle prove sperimentali, si è scelto di utilizzare lo stimatore  $H1$  in quanto riduce gli errori sulla risposta del sistema. Il segnale è stato tagliato per frequenze superiori ai 100 Hz, perché vogliamo osservare dei modi a frequenze inferiori.

Sul segnale della FRF (Figura 2.7) è stata applicata la trasformata di Fourier per ottenere la risposta al forzamento nel tempo. Dalla Figura 2.7 possiamo osservare più picchi indicanti la presenza di differenti modi di vibrare dello pneumatico.



**Figura 2.7 Funzione di risposta in frequenza del canale 1**

A questo punto è stato applicato il metodo di Prony così facendo possiamo meglio valutare quali siano realmente delle frequenze proprie del sistema e quali solo errori di calcolo. Dall'applicazione del metodo di Prony otteniamo il grafico di Figura 2.8, sul quale ogni asterisco corrisponde ad una possibile frequenza propria.

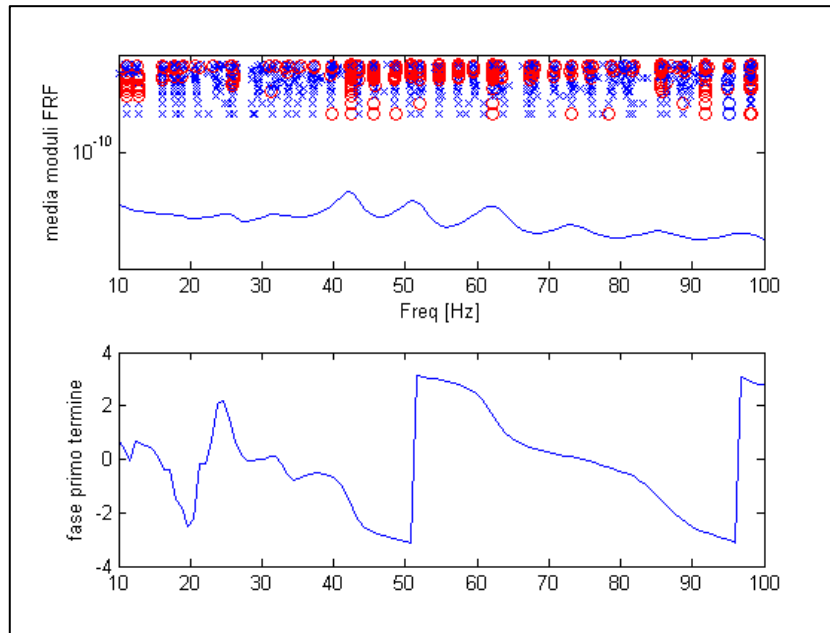


Figura 2.8 Grafico delle possibili frequenze proprie del sistema

Selezionate dal grafico quelle che riteniamo essere le frequenze proprie del sistema, il codice calcola dei valori di primo tentativo per le variabili fattore di smorzamento ( $\zeta$ ) e coefficiente modale ( $A_{jk}$ ). Con questi valori di primo tentativo affrontiamo un problema di minimizzazione in cui vogliamo che l'errore fra la ricostruzione della FRF e la FRF sperimentale sia il più piccolo possibile. Per effettuare la minimizzazione dobbiamo ricostruire la FRF usando l'equazione 2.63:

$$h_{jk}(\Omega) = \frac{A_{jk}}{-\Omega^2 + 2i\zeta\omega_0\Omega + \omega_0^2}$$

2.63

Nel processo di minimizzazione le variabili modali smorzamento critico ( $\zeta$ ), coefficiente modale ( $A_{jk}$ ) e frequenza propria ( $\omega_0$ ) possono essere cambiate per annullare la differenza fra FRF sperimentale e analitica.



Per completare le variabili necessarie a definire i parametri modali di un sistema occorre calcolare la massa e la rigidità dei modi identificati, ciò è possibile farlo con le formule seguenti.

$$massa_i = \frac{\sum_{j=1}^N A_{ji}}{\sum_{j=1}^N (2\omega_{0i}^2 \zeta_i * imag(h_{ji}))}$$

$$smorzamento = 2m_i 2\pi f_{0i} \zeta_i$$

$$rigidezza = m_i (2\pi f_{0i})^2$$

2.64

A questo punto sono note tutte le proprietà dei modi di vibrare ed è possibile proseguire con la validazione del modello.

### 2.4.1 Validazione modello

Per validare i risultati ottenuti nell'identificazione è stato sviluppato un modello numerico che replicasse le prove sperimentali svolte sullo pneumatico. Il modello dello pneumatico è schematizzato da una massa che rappresenta il cerchione in ferro ed il mozzo e da una cintura deformabile collegata al centro ruota attraverso i modi di vibrare analizzati. Le equazioni del sistema sono state scritte direttamente in coordinate modali per evitare di complicare la scrittura del sistema. Le uniche coordinate libere del sistema sono le coordinate modali ( $q_i$ ). Per replicare le condizioni della prova sperimentale si è scelto di vincolare gli spostamenti del mozzo. Le equazioni ottenute sono riportate di seguito:

$$[M]\underline{\ddot{q}} + [R]\underline{\dot{q}} + [K]\underline{q} = \underline{F}$$

2.65

$$\underline{q} = \{q_1 \quad \dots \quad q_n\}^T$$

2.66

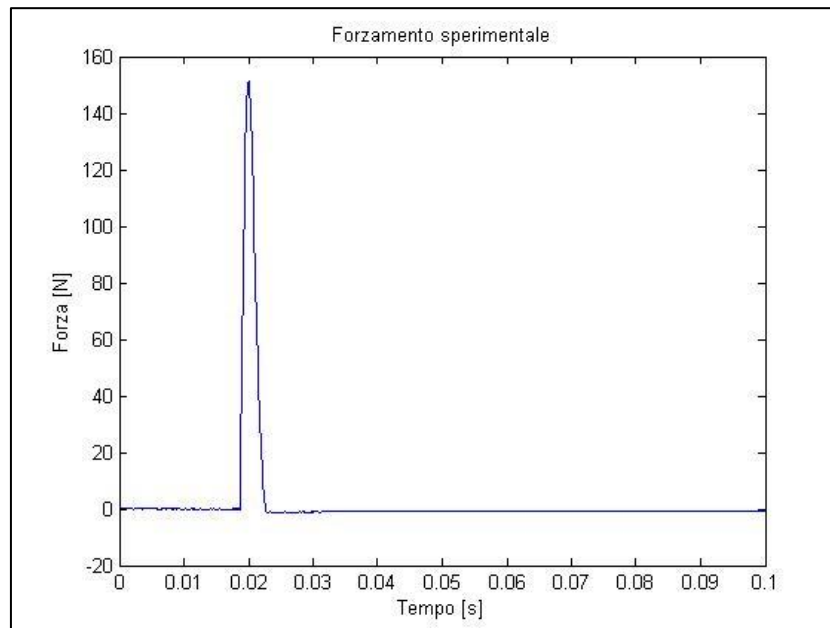
$$\begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} m_{q1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & m_{qn} \end{bmatrix} \\ [R] &= \begin{bmatrix} r_{q1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & r_{qn} \end{bmatrix} \\ [K] &= \begin{bmatrix} k_{q1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & k_{qn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.67

Il forzamento  $\underline{F}$  è stato costruito in modo tale che riproducesse il forzamento misurato dal martello dinamometrico durante le prove sperimentali (Figura 2.9), quindi è stato preso il valore sperimentale ed è stato applicato nel preciso punto in cui è stato applicato durante la prova utilizzando la matrice di trasformazione modale.

$$\underline{F} = [\phi] \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2.68



**Figura 2.9 Forzamento**

Dalla risoluzione del sistema così implementato abbiamo calcolato l'accelerazione dei nodi dello pneumatico dove abbiamo posizionato gli accelerometri. I dati sperimentali di accelerazione della carcassa dello pneumatico sono stati convertiti in spostamenti per poter effettuare il confronto con i valori di spostamento calcolati dal codice numerico. Il confronto dei risultati ottenuti è stato effettuato nel dominio del tempo e delle frequenze.

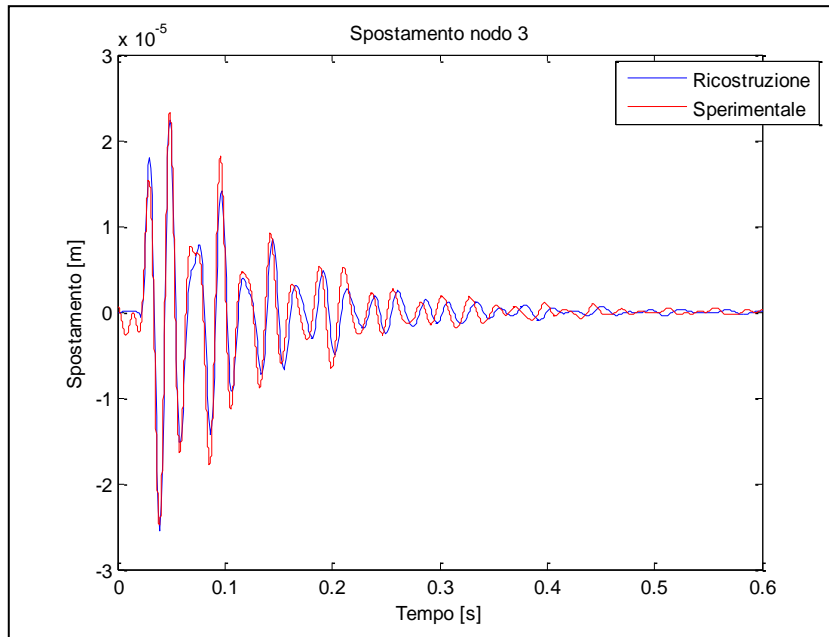


Figura 2.10 Confronto fra la storia temporale del nodo 3 con la sua ricostruzione

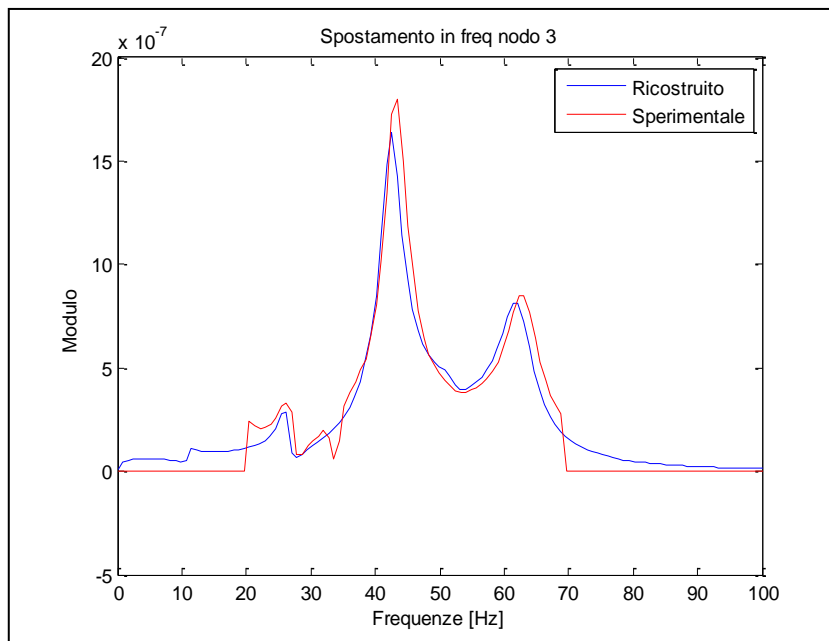


Figura 2.11 Confronto fra la storia temporale del nodo 3 con la sua ricostruzione nel dominio delle frequenze

In Figura 2.10 è riportato il confronto fra lo spostamento del nodo 3 (per conoscere la posizione del nodo vedere la Figura 2.4) misurato sperimentalmente e calcolato attraverso i modi di vibrare, possiamo osservare come vengano rispettati i valori di ampiezza delle oscillazioni. Nella Figura 2.11 abbiamo riportato il confronto degli spostamenti del nodo 3 nel dominio delle frequenze, il segnale sperimentalmente è stato filtrato fra 20 e 70 Hz. Dal confronto della Figura 2.11 possiamo osservare che i picchi della FRF sperimentalmente e ricostruita analiticamente risultano ben sovrapposti.

### 2.5 Conclusioni

Lo scopo della prima parte di questo lavoro consiste nell'identificare e validare le frequenze proprie ed i modi di vibrare di uno pneumatico per trattatrici agricole. Per ottenere i risultati voluti è stato utilizzato il metodo complesso esponenziale, al quale occorre fornire i valori della funzione di risposta in frequenza.

#### 2.5.1 Funzione di risposta in frequenza

Lo scopo iniziale del lavoro era di rilevare la FRF di un pneumatico, per fare questo sono state effettuate le prove sperimentali, in cui la ruota opportunamente vincolata è stata forzata da una forzante impulsiva. Nella Figura 2.12 vengono riportati i segnali di spostamento di un nodo dello pneumatico e del martello come acquisiti durante le prove.

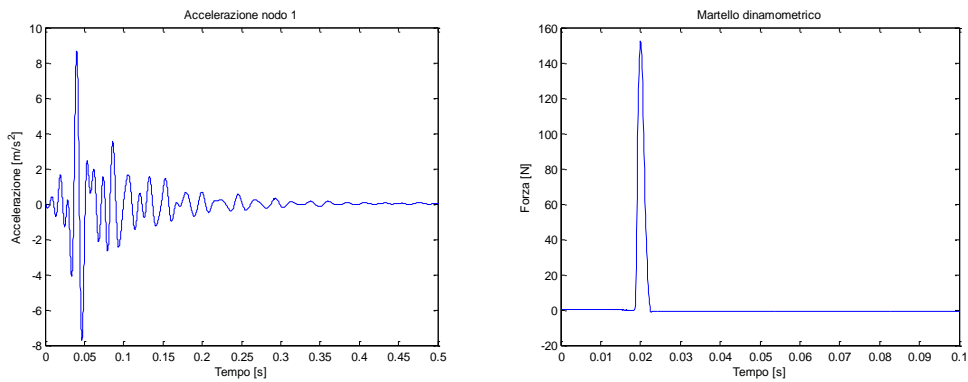


Figura 2.12 Storie temporali del canale 1 e del martello dinamometrico

Dai dati di forza e di accelerazione dei nodi della cintura della ruota è stato possibile ricavare gli stimatori H1 ed H2 della FRF, che vengono riportati nella Figura 2.13.

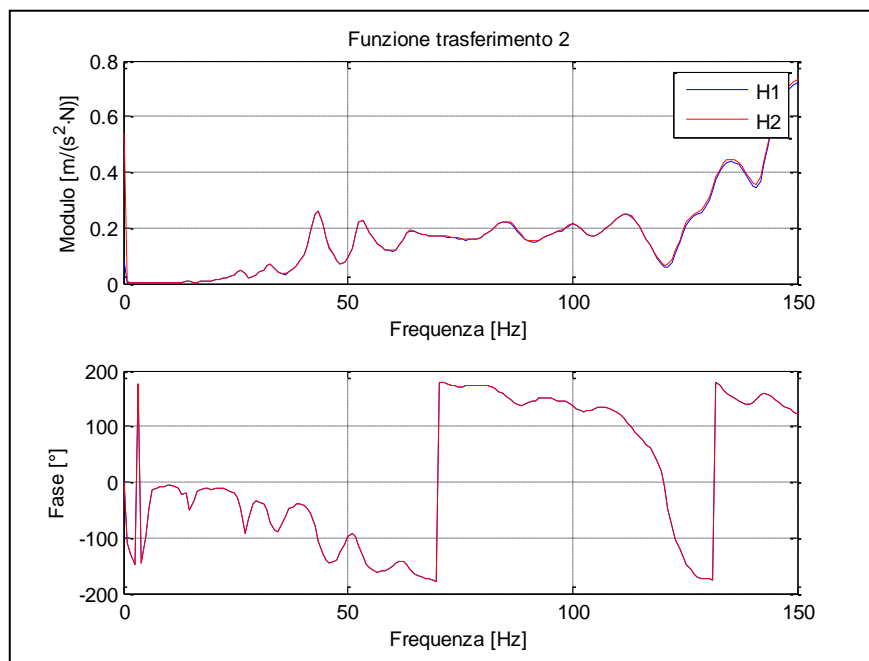


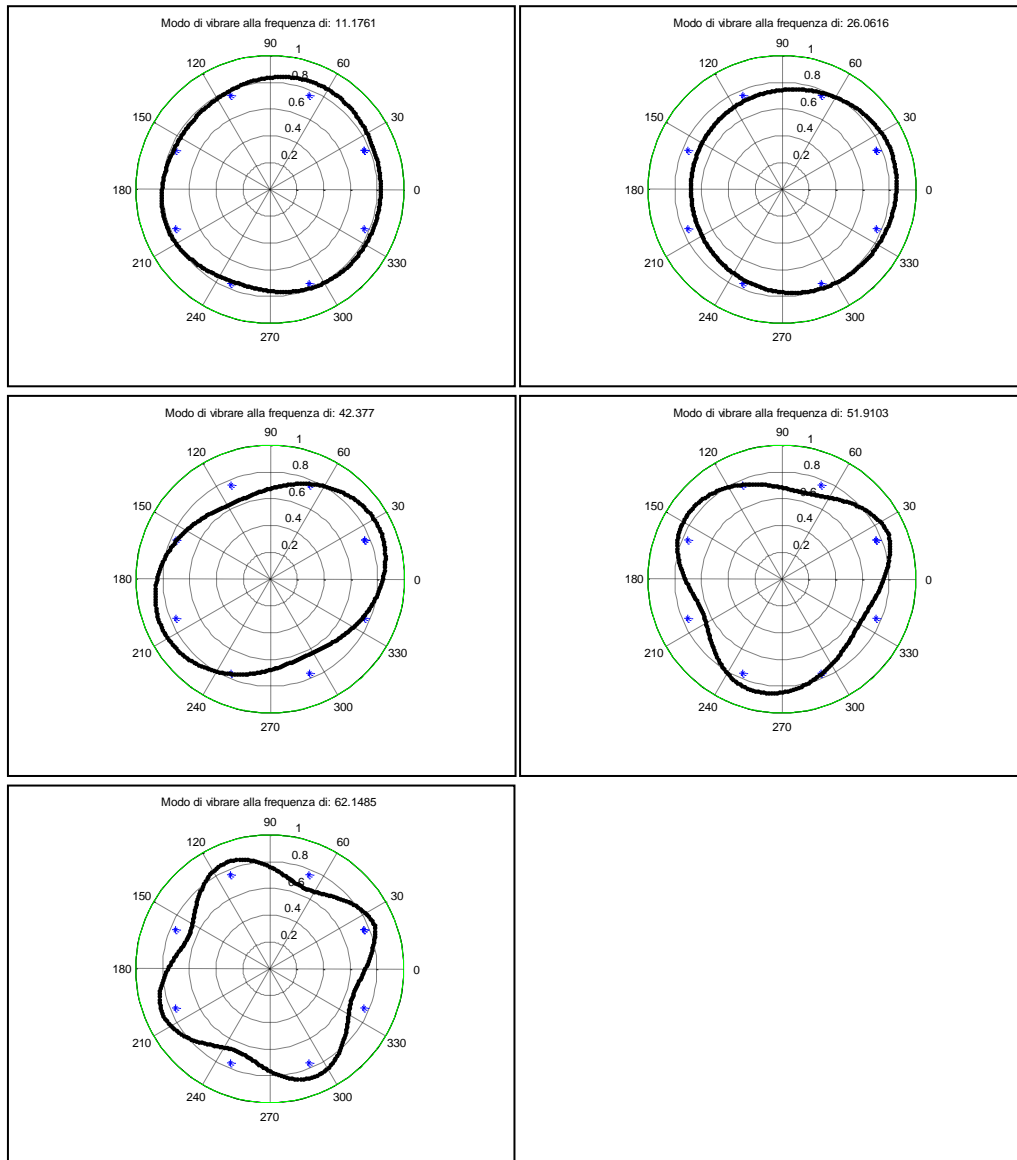
Figura 2.13 Stimatori H1 e H2 della FRF

Dall'osservazione della Figura 2.13 dove sono presenti gli stimatori della FRF, possiamo osservare come non vi sia una sostanziale differenza fra gli stimatori. Questo ci permette di poter scegliere fra i 2 stimatori in maniera autonoma, si è scelto di utilizzare lo stimatore H1.

### 2.5.2 Parametri modali

Utilizzando il complex exponential method sono stati identificati i modi di vibrare di una ruota per trattatrici agricole. I modi identificati sono cinque e presentano un range di frequenze fra 11 e 62 Hz. I modi identificati sono riportati nella Figura 2.14 da cui è possibile osservare che siamo stati in grado di identificare fino al modo a quattro lobi, oltre questo modo non possiamo andare per la mancanza di punti di misura sullo pneumatico in fase sperimentale. I modi riportati in Figura 2.14 risultano ingranditi rispetto alla realtà.

In Figura 2.14 possiamo osservare come il primo modo alla frequenza di circa 11 Hz rappresenta il modo di dilatazione dello pneumatico, il successivo modo a 26 Hz è il modo di traslazione rigido in cui tutto lo pneumatico trasla rigidamente senza deformarsi. I successivi modi alle frequenze di 42 Hz, 52 Hz e 62 Hz rappresentano i modi bi-lobato, tri-lobato e quadri-lobato.



**Figura 2.14 Modi dello pneumatico identificati**

Se confrontiamo i risultati ottenuti dalla nostra identificazione, Figura 2.14, con quelli riportati nella Figura 2.5 possiamo affermare di aver ottenuto lo stesso risultato, in quanto siamo stati in grado di ricostruire le prime cinque forme modali.



## Identificazione dei modi di vibrare di uno pneumatico agricolo

---

Nelle tabelle seguenti sono riportati i parametri modali identificati per lo stesso pneumatico gonfiato a 1 bar o a 1,6 bar.

1.6 bar	Frequenza [Hz]	Massa	Smorzamento	Rigidezza
1	11.17	2.72*1e-4	0.0022	1.341
2	26.06	4.25*1e-5	3.07*1e-4	1.141
3	42.38	1.43*1e-5	2.77*1e-4	1.016
4	50.64	1.62*1e-5	7.23*1e-5	1.640
5	62.14	7.04*1e-6	2.09*1e-4	1.073

Tabella 2.1 Parametri modali identificati per pneumatico gonfiato a 1.6 bar

1 bar	Frequenza [Hz]	Massa	Smorzamento	Rigidezza
1	11.22	2.08*1e-4	0.0017	1.035
2	26.50	3.53*1e-4	5.16*1e-5	0.098
3	39.27	2.77*1e-4	4.17*1e-4	1.689
4	46.27	2.85*1e-5	2.09*1e-4	2.409
5	57.34	8.96*1e-6	3.12*1e-4	1.163

Tabella 2.2 Parametri modali identificati per pneumatico gonfiato a 1 bar

Dai valori dell'identificazione possiamo osservare come i modi di vibrare dello pneumatico gonfiato a 1,6 bar presenti frequenze più alte ed uno smorzamento maggiore, dovuti alla maggiore pressione interna nello pneumatico che impedisce la deformazione.

Durante l'analisi modale è stata semplificata una parte dell'equazione 2.44, per rendere più semplice la soluzione. La porzione eliminata corrisponde al coniugato della parte restante, al fine di mantenere la simmetria radiale sono stati aggiunti 4 modi di vibrare. I nuovi modi di vibrare corrispondono ai coniugati di quelli già presenti, per questo sono stati presi in modulo uguali, ma sono stati ruotati nello spazio. L'entità della rotazione dipende dall'ordine del modo.

$$\theta = \frac{\pi}{2 * n}$$

2.69

Dove n indica l'ordine del modo di vibrare.



## **3 Prove di caratterizzazione del terreno e della forza di trazione sviluppata dallo pneumatico**

### **3.1 Introduzione**

Per validare il modello numerico occorre confrontare i risultati delle simulazioni numeriche con delle prove sperimentali. Quindi occorre impostare i dati della simulazione in maniera concorde con i dati sperimentali per verificare che fra la prova sperimentale e l'analisi numerica ci sia una congruenza. Si è scelto di effettuare un confronto fra la forza di trazione generata dal codice numerico con la reale forza generata da una trattoria dotata di pneumatici di forma uguale a quelli modellati. Per riprodurre analiticamente la prova è stato necessario prelevare un campione di terreno su cui è stata eseguita una serie di test che ne hanno misurato le caratteristiche principali come la granulometria, la resistenza alla penetrazione e la coesione.

In questo paragrafo si descrivono inizialmente le prove di caratterizzazione del terreno il cui fine è trarre dati per il modello numerico descritto nel capitolo 4. Successivamente verrà descritta la prova di trazione che ha consentito di misurare la forza di trazione sviluppata dallo pneumatico in funzione dello scorrimento.

### **3.2 Proprietà costitutive del terreno agricolo**

Un terreno è tipicamente composto da una parte solida e d'acqua e aria che ne riempiono le cavità. La quantità di acqua presente nel terreno è uno dei più importanti fattori che influenza le proprietà fisiche. Eliminando tutta l'acqua presente in un campione di terreno otteniamo la sola frazione solida, effettuando poi il rapporto fra il peso prima e dopo l'essiccazione ricaviamo la percentuale di acqua presente. Partendo dal campione di terra privo di acqua possiamo

## Capitolo 3

---

misurare le dimensioni delle particelle che lo compongono attraverso l'analisi granulometrica. Per la prova esistono differenti normative nazionali e internazionali[19] [20] che regolano le procedure di misura. In generale per misurare la granulometria si usa una serie di setacci sempre più fini fino a  $74\mu\text{m}$ , mentre per particelle più piccole occorre utilizzare metodi basati sulla sedimentazione. Ad ogni passaggio del terreno attraverso un setaccio vengono pesate le particelle trattenute per calcolare la frazione in peso rispetto alla massa del campione di terreno essiccato. Questa suddivisione per dimensione delle particelle consente di dare un nome ai componenti del terreno secondo la Figura 3.1. La composizione del terreno viene definita tessitura.

Classificazione	0,002	0,02	0,2	2 mm
Internazionale (dell'ISSS)	argilla	limo	sabbia	scheletro
			sabbia fine	sabbia grossa

**Figura 3.1 Classificazione componenti terreno (tessitura)**

Conoscendo la tessitura del terreno possiamo utilizzare il grafico di Figura 3.2 per classificare il terreno.

## Prove di caratterizzazione del terreno e della forza di trazione sviluppata dallo pneumatico

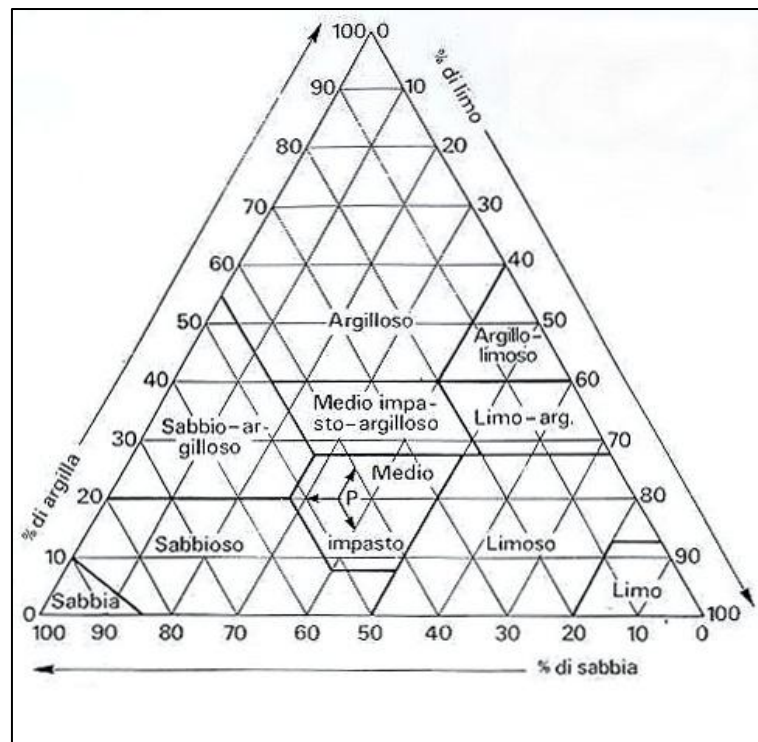


Figura 3.2 Classificazione del terreno in base alla tessitura

Una caratteristica importante del terreno è l'angolo di attrito interno, che indica la capacità di un terreno ad opporsi allo scorrimento lungo una superficie in presenza di una forza perpendicolare alla superficie stessa. L'angolo di attrito interno dipende dalla composizione delle particelle formanti il terreno, dalla loro rugosità superficiale e dalla coesione. Con particelle grosse e molto ruvide superficialmente avremo un angolo di attrito alto, a causa del più alto numero di punti di contatto fra le particelle. La coesione indica la forza con cui le particelle costituenti il terreno rimangono attaccate una all'altra e si oppongono al distacco. Anche il valore di coesione dipende dalla dimensione delle particelle del terreno, però per questa proprietà è anche molto importante la percentuale di acqua presente.

La percentuale di acqua nel terreno è misurata effettuando il rapporto fra un campione di terreno prima e dopo essiccazione. Esistono alcuni indici, definiti limiti di Atterberg, che indicano la percentuale di acqua limite oltre la quale avviene un cambiamento dello stato del terreno. In ordine crescente di

percentuale di acqua abbiamo i limiti di ritiro, plastico e liquido. Il limite di ritiro  $w_s$  segna il passaggio da terreno solido a semisolido, il limite plastico  $w_p$  indica l'inizio delle proprietà plastiche del terreno, e infine il limite liquido  $w_l$  ci fornisce il valore del contenuto d'acqua oltre il quale il terreno diviene liquido e perde le proprietà plastiche.

Esistono differenti prove che consentono la determinazione delle caratteristiche di un terreno, fra queste le più usate sono il penetrometro e il test per la determinazione dello sforzo di taglio diretto.

### **3.3 Caratterizzazione delle proprietà meccaniche dei terreni**

#### **3.3.1 Prova di penetrazione**

La prova di penetrazione è stata eseguita seguendo lo standard di riferimento ASAE S313.2 [21] che prevede l'utilizzo di un penetrometro con punta conica a  $30^\circ$  ed area di base di  $323 \text{ mm}^2$ . I dati da rilevare durante la prova sono l'affondamento della punta e la forza necessaria per ottenere tale affondamento. L'asta dello strumento è contrassegnata in modo da conoscere l'affondamento, mentre per misurare la forza di penetrazione si utilizza un comparatore che misura lo schiacciamento della molla circolare posta fra il manico dello strumento e l'asta (Figura 3.3).

## Prove di caratterizzazione del terreno e della forza di trazione sviluppata dallo pneumatico

---

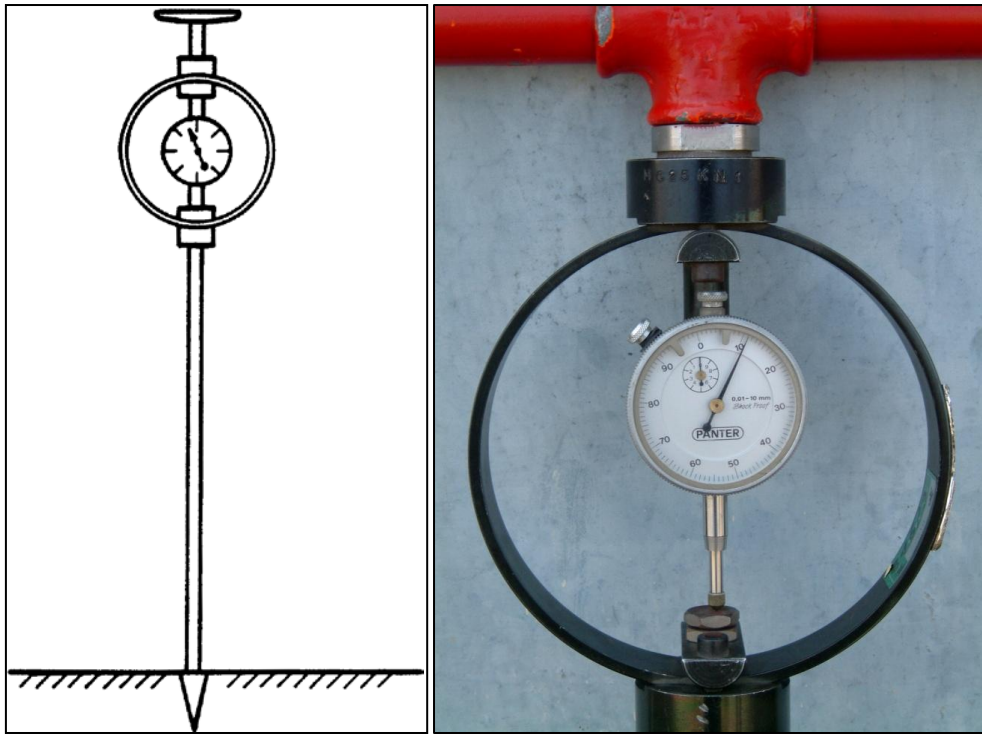
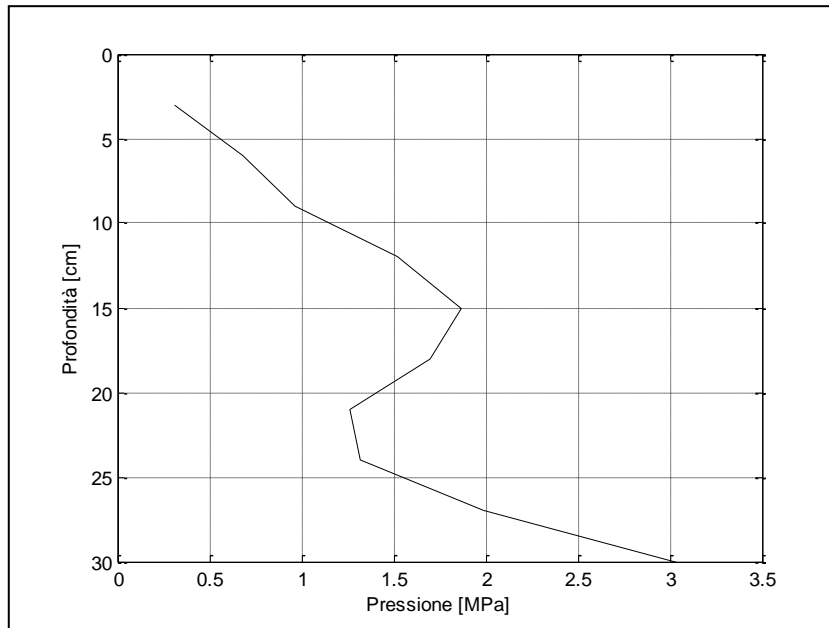


Figura 3.3 Penetrometro

Con i dati rilevati è stato possibile tracciare un andamento della resistenza alla penetrazione in funzione della profondità del terreno. Sono state effettuate più prove di penetrazione da cui attraverso l'operazione di media si è ottenuto un valore medio della pressione in punta riportato nella Figura 3.4 e nella Figura 3.5.



**Figura 3.4** Grafico del risultato della prova penetrometrica

Dal grafico di Figura 3.4 possiamo osservare come vi sia un primo strato superficiale di terreno morbido che ci consente di poter assumere il terreno come non compattato. Successivamente all'aumentare della profondità il terreno si indurisce finché non viene raggiunta la profondità di 15 cm, in corrispondenza della quale la resistenza alla penetrazione del terreno inizia a diminuire, per poi ritornare a crescere dopo i 21 cm. Questo comportamento può essere attribuito alla stratificazione del terreno, le cui proprietà variano al variare dello strato considerato.

Per analizzare le differenze fra terreno compattato e non, riportiamo in Figura 3.5 il grafico della prova penetrometrica effettuata dopo il passaggio della trattoria agricola. La compattazione dovuta al passaggio della trattoria fa sì che sia necessario il doppio della forza per penetrare il terreno nei primi 10 cm circa di affondamento.



## Prove di caratterizzazione del terreno e della forza di trazione sviluppata dallo pneumatico

---

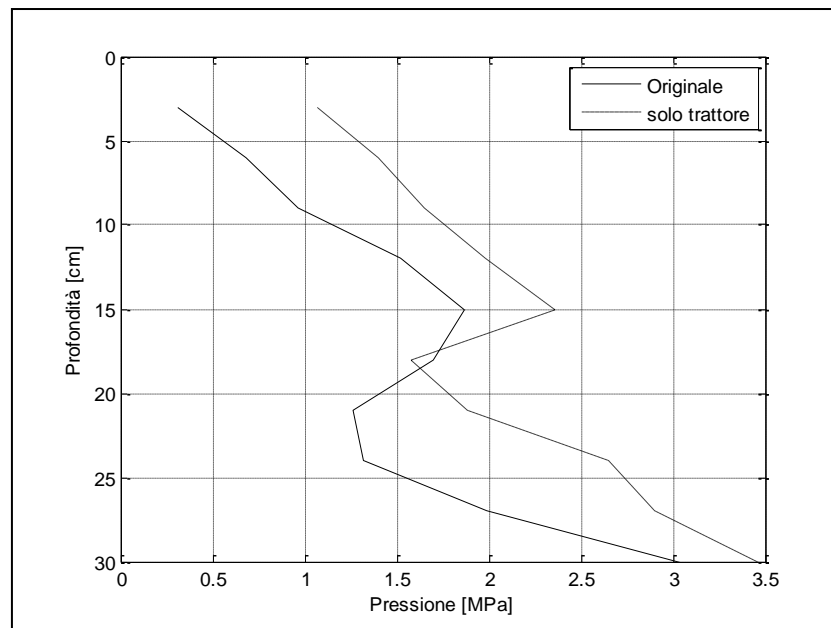


Figura 3.5 Grafico del confronto fra la prova prima del passaggio del trattore e dopo

### 3.3.2 Prove di taglio diretto

Durante le prove con il penetrometro è stato raccolto un campione di terreno su cui sono state condotte le prove di taglio diretto. Il terreno è stato conservato in un contenitore ermetico fino al momento delle prove in laboratorio, al fine di preservare l'umidità presente al momento del prelievo dal campo. Le prove di taglio diretto sono state condotte presso il laboratorio di prove materiali del dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Milano.

La prova di taglio diretto, normativa ASTM D3080 [22], consiste nel sottoporre un provino di terreno, opportunamente preparato, a uno scorrimento laterale. In Figura 3.6 è riportato lo schema dell'apparecchiatura [23] necessaria ad effettuare la prova che consiste in due scatole inferiore e superiore contenenti il terreno, sul terreno viene applicata una pressione verticale attraverso una piastra. La scatola inferiore viene spostata in direzione orizzontale generando uno stato di sforzo nella sezione di terreno fra le due scatole.

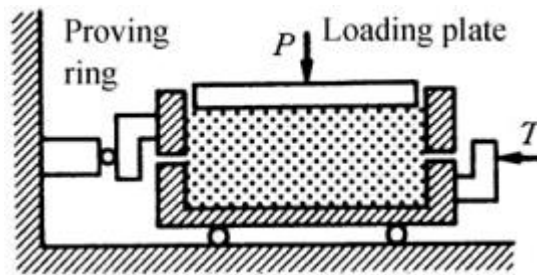


Figura 3.6 Schema prova di taglio diretto

La forza necessaria a spostare lateralmente la scatola inferiore corrisponde alla forza di taglio esercitata nel terreno, lo sforzo di taglio sarà quindi uguale a:

$$\tau = F/A$$

3.1

dove  $F$  è la forza di taglio ed  $A$  l'area della sezione orizzontale della scatola. Possiamo inoltre calcolare lo sforzo normale dividendo la forza applicata sul terreno per l'area.

$$\sigma = P/A$$

3.2

Da questa prova possiamo ricavare l'andamento dello sforzo di taglio in funzione dello scorrimento laterale, possiamo ripetere la prova di taglio per differenti valori dello sforzo normale. Se durante la prova il terreno raggiunge il punto di rottura o presenta un valore di sforzo massimo possiamo raccogliere i risultati in un grafico in cui poniamo in relazione i valori dello sforzo tangenziale massimo con il valore dello sforzo normale (vedi Figura 3.7). Attraverso il grafico di Figura 3.7 possiamo applicare il criterio di Mohr-Coulomb (eq. 3.3) per calcolare i valori di coesione e angolo di attrito interno del terreno.

$$\tau = c + \sigma \tan \phi$$

3.3

Dove  $c$  è la coesione,  $\phi$  è l'angolo di attrito interno e  $\sigma$  è lo sforzo normale.

## Prove di caratterizzazione del terreno e della forza di trazione sviluppata dallo pneumatico

---

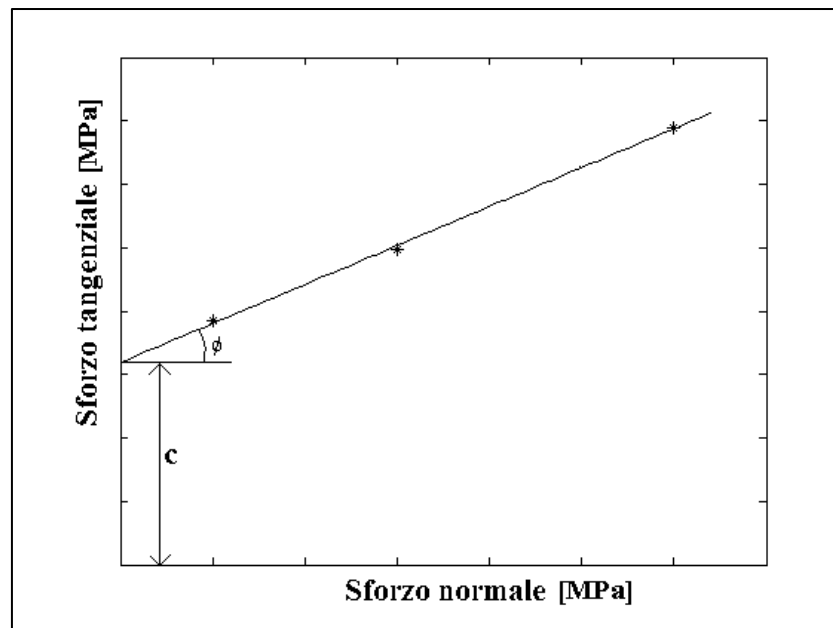


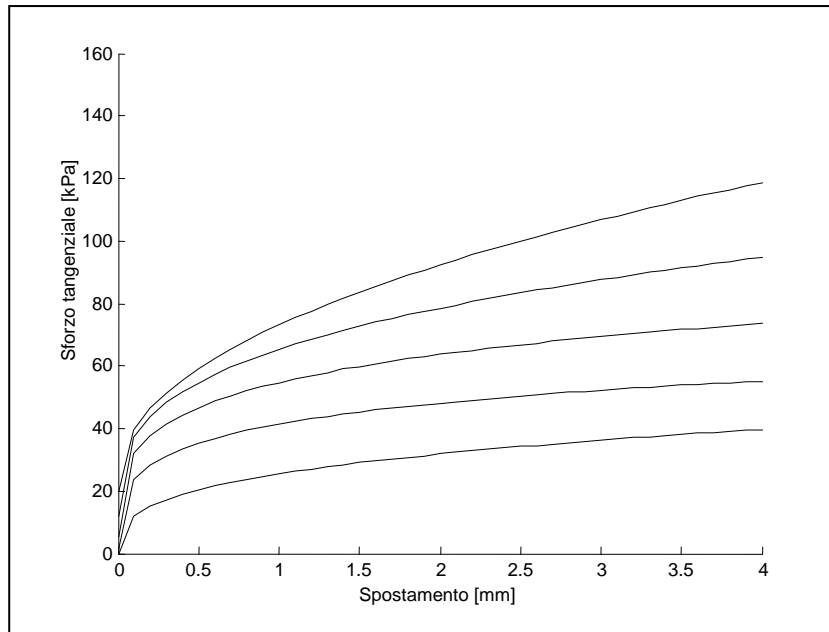
Figura 3.7 Risultati prova di sforzo tangenziale

Se durante la prova di taglio diretto non raggiungiamo il valore massimo o di rottura del terreno, otteniamo il grafico di Figura 3.8. Con i dati della prova di taglio possiamo individuare un'equazione numerica che approssimi l'andamento dello sforzo tangenziale in funzione dello sforzo normale e dello spostamento relativo.

Il test di taglio riproduce bene il reale comportamento del terreno sottoposto a forze di taglio che viaggiano a velocità prossime a 0.05 m/s, velocità a cui le norme prevedono di effettuare il test.

Le caratteristiche prima descritte del terreno valgono finché non viene applicata una deformazione permanente, poi devono essere ricalcolate perché le proprietà di un terreno dipendono dalla storia temporale delle deformazioni subite.

Prima di effettuare le prove di taglio diretto è stata eseguita l'analisi granulometrica sia per setacciatura (Tabella 3.1), sia per filtrazione per i grani di diametro inferiore ai 0.074 mm.



**Figura 3.8** Andamento dello sforzo di taglio in funzione dello sforzo normale e dello scorrimento

Analisi granulometrica per setacciatura (serie ASTM)		Analisi granulometrica per sedimentazione	
diametro (mm)	passante(%)	diametro (mm)	passante(%)
76.20	100.00	0.076	29.28
38.10	100.00	0.055	25.95
19.05	85.88	0.039	23.73
9.52	70.70	0.028	19.74
4.76	62.83	0.020	17.52
2.00	57.32	0.015	15.30
0.84	50.62	0.011	13.31
0.42	42.19	0.008	10.87
0.25	36.82	0.005	8.65
0.177	34.02	0.004	7.10
0.105	30.30	0.003	5.55
0.074	29.22	0.002	0.89

**Tabella 3.1** Analisi granulometrica

## **Prove di caratterizzazione del terreno e della forza di trazione sviluppata dallo pneumatico**

---

Escluse le particelle di dimensioni superiori a 2 mm (sono il 42,78% del campione) il terreno in esame è costituito per il 69% di sabbia, per il 29% di limo e per il 2% di argilla. Dalla Tabella 3.1 tenendo conto dei diagrammi riportati nella Figura 3.1 e nella Figura 3.2 possiamo affermare di essere in presenza di un terreno costituito da ghiaia e sabbia limosa.

Per effettuare la prova di taglio diretto occorre preparare il campione di terreno in modo che non siano presenti grani di dimensioni superiori ai 2 mm e che l'umidità sia la stessa che il terreno presentava allo stato naturale ( nel nostro caso del 10,45 %). Sono stati realizzati 3 provini, aventi una sezione quadrata di 3600 mm<sup>2</sup> ed una altezza di 25 mm. Ogni provino è stato sottoposto alla prova con un differente valore dello sforzo normale, il quale è stato applicato gradualmente a gradini ed il carico finale è stato mantenuto costante per almeno 18 ore prima di effettuare la prova di taglio diretto. I valori finali della pressione sui provini sono stati di: 50 kPa, 150 kPa e 300 kPa.

La prova di taglio diretto consiste nell'applicare uno spostamento controllato alla parte inferiore del provino (osservabile in Figura 3.6) fino al raggiungimento di un assestamento della sollecitazione di taglio o a 4 mm di spostamento. La velocità di spostamento è di 4 µm/min. Finito il primo ciclo il provino viene riportato nelle condizioni iniziali e si procede ad effettuare altri 5 cicli in cui lo spostamento avviene senza il controllo in spostamento. Al termine si effettua un ultimo ciclo in controllo di spostamento per valutare la resistenza residua del terreno. Nelle Figura 3.9 e Figura 3.10 sono riportati i risultati ottenuti.

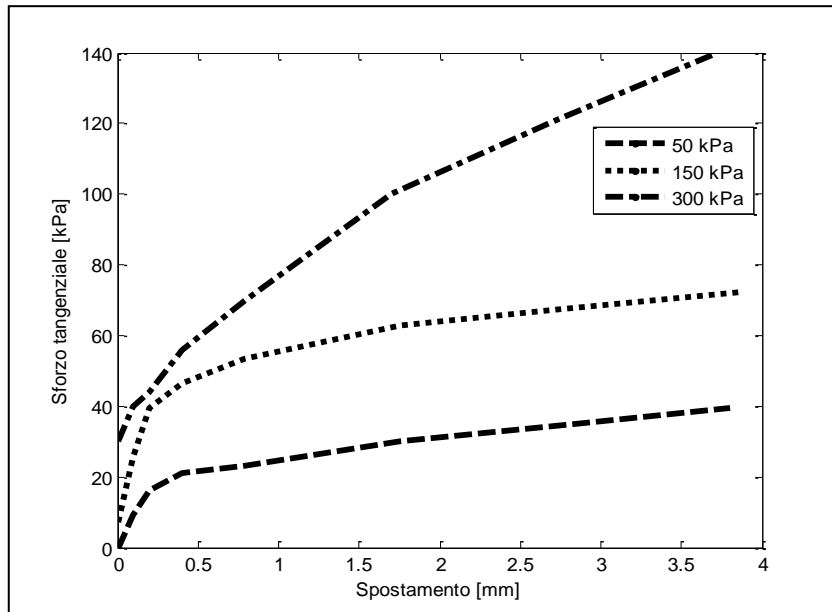


Figura 3.9 Prova di taglio diretto 'primo ciclo'

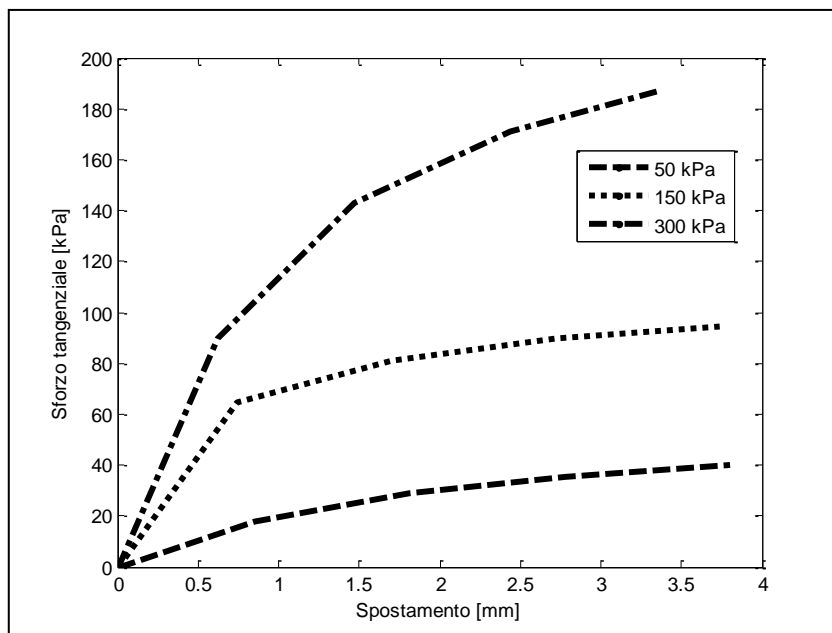


Figura 3.10 Prova di taglio diretto 'residuo'

## Prove di caratterizzazione del terreno e della forza di trazione sviluppata dallo pneumatico

---

Osservando la Figura 3.9 e la Figura 3.10 possiamo notare come, per entrambi i cicli di prova, il materiale incrudisca all'aumentare dello spostamento relativo, ossia il materiale aumenta la sua resistenza al taglio all'aumentare dello spostamento. Inoltre nel 'primo ciclo' abbiamo un valore iniziale del taglio maggiore che però tende rapidamente ad un asintoto orizzontale. Nel ciclo 'residuo' il valore iniziale di taglio risulta essere pari a zero, però aumenta rapidamente raggiungendo valori maggiori di sforzo di taglio per spostamenti superiori a 1 mm.

### 3.4 Prova di trazione

La prova di trazione viene eseguita per ottenere dei dati sperimentali da poter utilizzare per validare il modello sviluppato. Le prove di trazione consistono nel collegare alla trattrice un carro frenato in grado di opporsi alla forza di traino generata dalla trattrice, sono state effettuate con lo scopo di ottenere dei dati per poter validare il modello proposto. Le prove di trazione sono state svolte presso il CRA di Treviglio, con l'ausilio del personale dell'ente e della loro attrezzatura, in particolare il veicolo dinamometrico (Figura 3.11).



Figura 3.11 Veicolo dinamometrico

La prova consiste in una trattoria che traina un veicolo dinamometrico in grado di opporsi, frenando, alla forza di trazione. L'operatore presente sul veicolo dinamometrico imposta un valore di forza frenante che costringa la trattoria a marciare a velocità costante con il valore di slittamento delle ruote posteriori richiesto. Per misurare lo slittamento delle ruote posteriori della trattoria sono stati posizionati 2 encoder angolari sui mozzi ruota per rilevare la velocità angolari ( $\omega$ ) della trattoria, mentre per valutare la velocità assoluta ( $V$ ) è stata utilizzata una ruota folle posizionata sul retro del veicolo dinamometrico. Utilizzando l'equazione 3.4 viene calcolato lo slittamento delle ruote.

$$\text{slittamento} = \frac{\omega R - V}{\omega R} \%$$

3.4

La forza di trazione esercitata dalla trattoria in prova è stata rilevata attraverso una barra dinamometrica che collega i due veicoli.

Al fine di valutare l'influenza dello slittamento delle ruote traenti sulla forza di trazione disponibile è stata ripetuta la prova a differenti valori dello slittamento da 5% a 40%. Le prove di trazione vengono effettuate mantenendo il motore nel regime di coppia massima per poter generare la maggior forza di trazione possibile, di conseguenza le prove avvengono a velocità leggermente differenti. Prima delle prove sono state controllate le pressioni di gonfiaggio degli pneumatici della trattoria ed il peso gravante sugli assi, perché questi sono due parametri che influenzano la trazione sviluppabile da una trattoria [24]. La pressione degli pneumatici è stata portata al valore di 1 bar come per le prove di identificazione modale. La massa gravante sui due assi è stata misurata in 1935 kg per l'asse anteriore e in 2805 kg per l'asse posteriore.



## Prove di caratterizzazione del terreno e della forza di trazione sviluppata dallo pneumatico

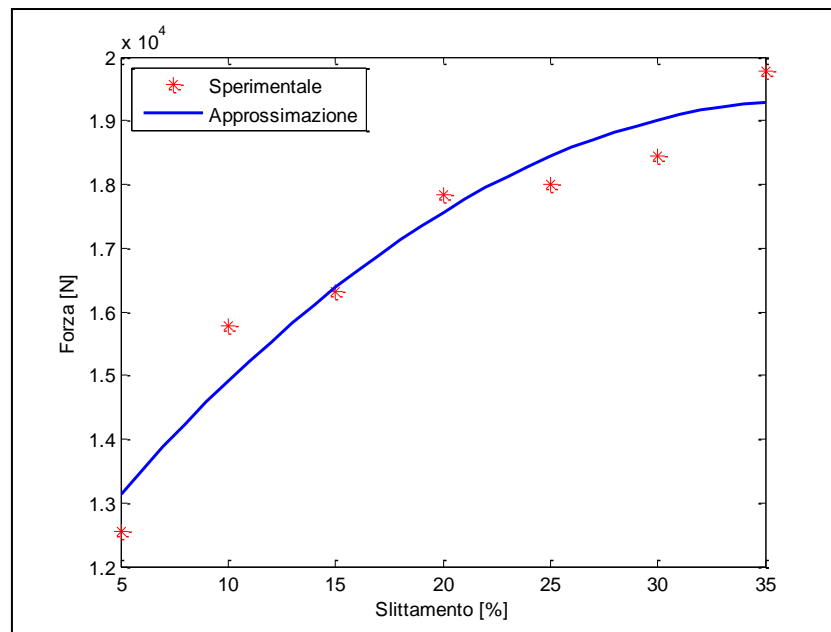


Figura 3.12 Grafico dei risultati della prova di trazione

In Figura 3.12 sono riportati i risultati della prova di trazione. Si può osservare che all'aumentare dello slittamento aumenta la forza di trazione disponibile fino a raggiungere un valore prossimo a 20 kN. Al termine delle prove di trazione abbiamo voluto valutare quanto in profondità le ruote della trattrice riuscissero a smuovere il terreno. Per fare questo abbiamo ripetuto le prove di trazione fermando la prova in modo tale che fosse possibile effettuare le misurazioni con il penetrometro fra la trattrice ed il carro freno. Da queste prove abbiamo ottenuto il grafico di Figura 3.13, in cui possiamo osservare come nel caso di slittamenti al 25 e 40 % abbiamo che il primo tratto di affondamento fino a circa 9 cm viene smosso e la durezza cala notevolmente fino al punto di non offrire resistenza alla penetrazione. Possiamo osservare, sempre nel grafico di Figura 3.13, che il solo passaggio della trattrice aumenta la resistenza alla penetrazione a causa della compattazione del terreno, mentre se applichiamo una forza di trazione abbiamo una minore compressione del terreno.

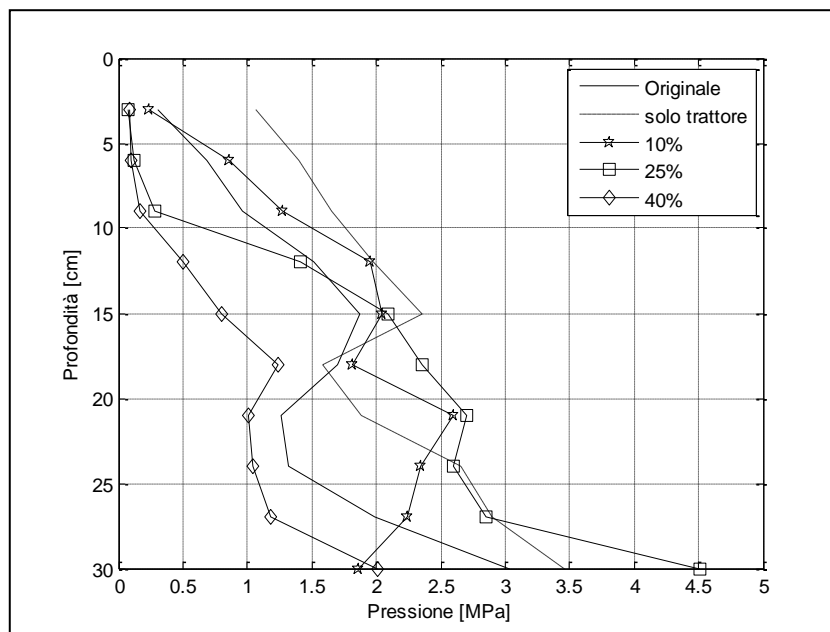


Figura 3.13 Prove di penetrazione

## 4 Modello

### 4.1 Introduzione

Si vuole realizzare il modello numerico di uno pneumatico per uso agricolo con l'obiettivo di valutare l'effetto della geometria del battistrada sulla forza di trazione al contatto, la compattazione del terreno ed il confort di marcia. La possibilità che un veicolo riesca a muoversi efficacemente su un terreno dipende da molti fattori inerenti la struttura del veicolo e le proprietà del terreno. Nelle caratteristiche strutturali che influenzano la trazione di un veicolo possiamo annoverare: la massa, la potenza disponibile alle ruote, la posizione del baricentro, le dimensioni delle ruote e le caratteristiche delle sospensioni. A differenza del caso in cui un veicolo percorra una strada asfaltata, non possiamo trascurare le deformazioni che vengono a generarsi nel terreno, in quanto sono di rilevante entità e quindi modificano la capacità di trazione delle ruote.

Il lavoro si concentra sulla modellazione dell'interazione fra lo pneumatico ed il terreno. A tal fine è necessario tenere in considerazione la deformabilità del terreno e la sua meccanica, la deformabilità dello pneumatico ed infine il disegno del battistrada. Per lo studio dell'interazione fra terreno e pneumatico non possiamo trascurare la geometria del battistrada, che con i suoi grandi tasselli deforma il terreno in maniera differente per ogni punto di appoggio. Sono stati condotti diversi studi riguardo l'influenza della pressione di gonfiaggio [24] e della geometria del battistrada [24] sia sulla massima forza generata al contatto sia sulla compattazione del terreno [25] [24] [7]. Da questi studi si può dedurre che l'aumento della pressione di gonfiaggio dello pneumatico influisce negativamente sia sulla forza di trazione che sulla compattazione del terreno. La compattazione del terreno è un fattore molto importante per gli agricoltori in quanto una elevata compattazione del terreno impedisce la corretta crescita delle piante.

Il problema può essere quindi suddiviso in tre sottomodelli affrontati nei paragrafi seguenti. I modelli sono: pneumatico, terreno e contatto tra pneumatico e terreno.

### 4.2 Modello dello pneumatico

Per poter modellare lo pneumatico prendiamo in considerazione la sua deformabilità e la forma del battistrada. Questa scelta è dovuta al fatto che siamo intenzionati a valutare nel piano l'interazione ruota terreno e come si deforma la ruota al contatto. La deformabilità di uno pneumatico può essere studiata mediante differenti metodi [13] [12], ogni metodo presenta vantaggi e svantaggi. Si è scelto di modellare la deformabilità dello pneumatico attraverso lo studio dei modi di vibrare dello stesso, i cui risultati sono riportati nel capitolo 2. Il modello dello pneumatico prevede quindi 9 modi di vibrare riferiti tutti ad un centro ruota in comune, il quale presenta due gradi di libertà, gli spostamenti verticale e orizzontale. Per imprimere il movimento rotatorio dello pneumatico viene ruotata, ad ogni istante temporale della simulazione, la superficie del battistrada che come vedremo nel seguito è discretizzata in un numero finito di nodi. Lo spostamento orizzontale della ruota è imposto per mantenere costante la velocità di avanzamento dello pneumatico, mentre la rotazione dello stesso è imposta per generare un determinato slittamento dello pneumatico.

Gli pneumatici destinati all'uso agricolo presentano un battistrada costituito da tasselli di grosse dimensioni. La forma complessa del battistrada richiede che sia sviluppato un programma in grado di ricavare le proprietà geometriche di uno pneumatico. Pur analizzando la dinamica nel piano verticale dello pneumatico non possiamo trascurare lo sviluppo in direzione trasversale del battistrada in quanto la presenza dei tasselli influenza le proprietà di trazione.

Per la scrittura delle matrici contenenti il profilo dello pneumatico è stato sviluppato un modello numerico in cui a partire da una immagine dello pneumatico (Figura 4.1), vista battistrada, viene sovrapposta una griglia equispaziata come in Figura 4.2.



Figura 4.1 Battistrada pneumatico agricolo

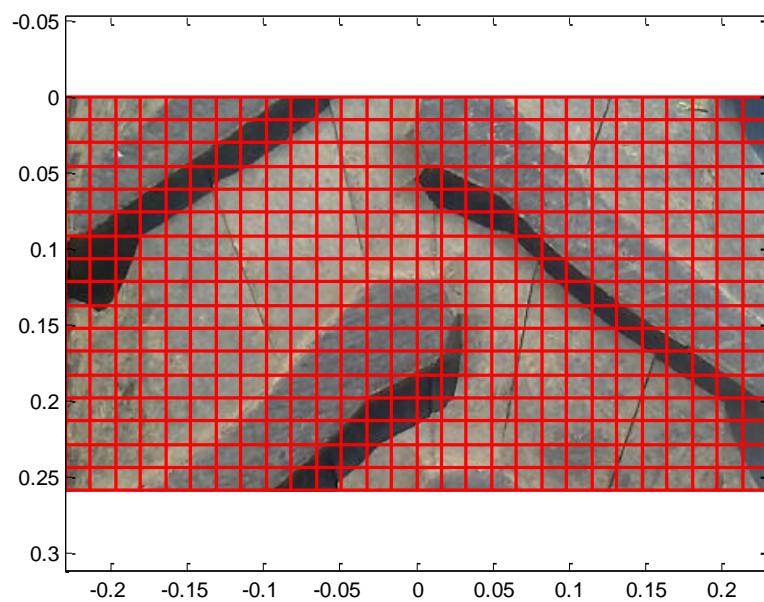


Figura 4.2 Battistrada con griglia per identificazione superfici di controllo

La dimensione della griglia utilizzata nella Figura 4.2 viene scelta in modo tale che, in direzione longitudinale, vi sia più di un elemento della griglia fra due tasselli consecutivi. Per lo studio del nostro pneumatico abbiamo utilizzato una griglia che prevede 23 elementi in direzione della larghezza del battistrada e 380 elementi lungo la circonferenza, quindi si è utilizzato una griglia di 16mm di altezza per 20mm di larghezza. Ogni elemento della griglia di Figura 4.2 è stato definito attraverso quattro superfici: la base, che rappresenta la superficie più esterna dei tasselli, il cielo, che rappresenta la porzione di battistrada fra i tasselli, il fronte ed il retro che rappresentano le superfici dei tasselli ortogonali alla base e al cielo. La superficie fronte è la prima ad entrare in contatto con il terreno. Ogni elemento della griglia può avere fino a quattro superfici di riferimento, ognuna delle quali può trasmettere forze di contatto normali e tangenziali con il terreno. Le forze calcolate rispetto alle superfici di riferimento vengono applicate nel centro della superficie stessa. Gli elementi sono vincolati rigidamente alla cintura dello pneumatico e ne seguono la rotazione. Nella Figura 4.3 viene rappresentata la posizione delle superfici di confronto del battistrada.

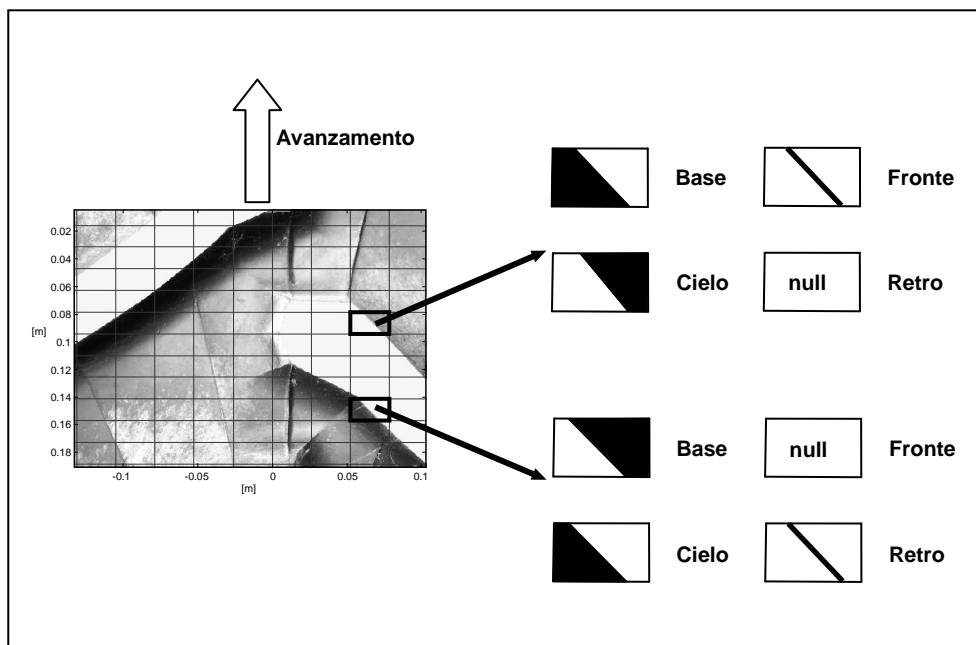


Figura 4.3 Discretizzazione del battistrada

Verranno create quattro matrici ognuna riferita ad una superficie di riferimento in cui viene registrato il profilo dello pneumatico. La dimensione di queste matrici dipende da quanto fitta viene creata la griglia della Figura 4.2, aumentare le dimensioni della griglia riduce i calcoli necessari all'integrazione delle equazioni di moto perché viene a ridursi il numero di superfici a contatto con il terreno, perdendo però in accuratezza nel calcolo del contatto.

### 4.3 Modello del terreno

In questo paragrafo è presentato il modello di suolo deformabile implementato. E' stato sviluppato un modello di terreno costituito da un letto di molle che generano una pressione proporzionale all'affondamento dello pneumatico. La pressione generata dal modello si distribuisce in maniera idrostatica sul battistrada dello pneumatico, quindi si generano delle pressioni di contatto che agiscono in direzione normale a tutte le superfici. Per tenere in considerazione che il terreno non avrà un comportamento perfettamente idrostatico, principalmente sulla superficie posteriore dei tasselli, è stato inserito un coefficiente di impegno che agisce sulla forza che può essere generata dalla superficie posteriore dei tasselli. In altri termini l'area della superficie retro viene scalata in modo opportuno per tenere conto del fatto che in caso di movimento relativo tra tassello e terreno potrebbe non esserci terreno in contatto con la superficie retro del tassello. Se applichiamo al terreno una forza avremo che esso subisce una deformazione che in parte rimarrà anche dopo aver rimosso la forza, per simulare questo effetto è stato adottato il modello di Figura 4.4. Nella Figura 4.4 possiamo osservare come il legame sforzo affondamento sia lineare con pendenza  $K_I$  per la prima fase di affondamento della ruota. Raggiunto l'affondamento  $\xi'$  e rimosso il carico agente non torniamo nella condizione iniziale ma arriviamo ad un affondamento  $\xi''$  dovuto ad una costante elastica  $K_{II}$  maggiore di  $K_I$ . Una successiva applicazione di carico seguirà la retta a pendenza  $K_{II}$  fino all'affondamento  $\xi'$  per poi seguire la retta a pendenza  $K_I$ .

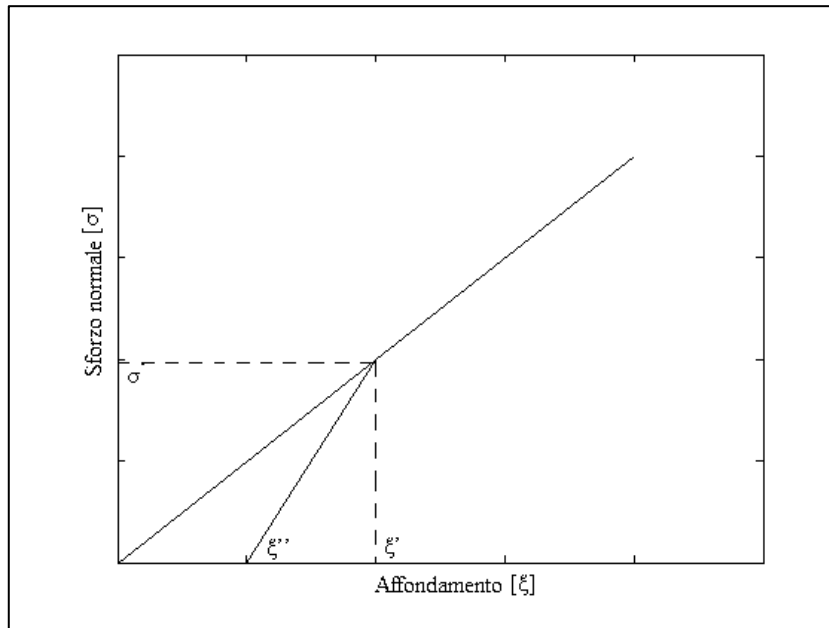


Figura 4.4 Andamento dello sforzo normale  $\sigma$  in funzione dell'affondamento  $\xi$

Le equazioni che regolano la Figura 4.1 sono:

$$\begin{aligned} & \text{Prima deformazione: } \sigma = K_I \xi \\ \text{Successive deformazioni: } & \begin{cases} \sigma = K_I \xi & \text{per } \xi > \xi' \\ \sigma = K_{II} (\xi - \xi'') & \text{per } \xi < \xi'' \end{cases} \end{aligned}$$

4.1

I valori di  $K_I$  e  $K_{II}$  sono stati calcolati con i dati raccolti durante le prove sperimentali con il penetrometro misurando l'affondamento del terreno, è stato misurato un valore di affondamento massimo ( $\xi'$ ) di 3 cm, mentre dopo che è stato rimosso il carico abbiamo un affondamento ( $\xi''$ ) di 15 cm. Quindi sono state utilizzate le equazioni 4.2.

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{\sigma}{\xi'} \\ K_{II} &= \frac{K_I \xi'}{(\xi' - \xi'')} \end{aligned}$$

4.2



I valori delle costanti di rigidità del terreno ottenute sono: 8300 kPa/m per  $K_I$  e 14300 kPa/m per  $K_{II}$ .

Noto lo sforzo normale alla superficie possiamo calcolare lo sforzo tangenziale utilizzando i risultati della prova di taglio diretto riportati in Figura 4.5 da cui è stata ricavata l'espressione analitica (eq. 4.3) di  $\tau$  in funzione dello sforzo normale e dello spostamento relativo.

$$\tau(\sigma, \xi) = (c_1\sigma + c_2)\xi^{\frac{1}{2}} + (c_3\sigma + c_4)\xi^{\frac{1}{3}} + c_5\sigma^2 + c_6\sigma$$

4.3

Nell'equazione 4.3 troviamo  $\sigma$  lo sforzo normale e  $\xi$  lo scorrimento relativo.

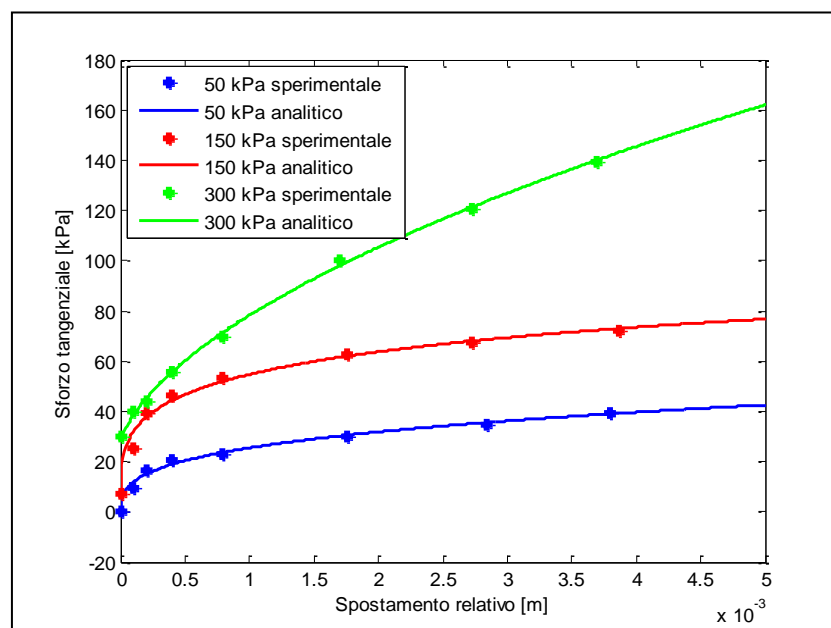


Figura 4.5 Grafico dei risultati della prova di taglio diretto e ricostruzione analitica

Nel grafico di Figura 4.5 osserviamo che la ricostruzione dell'equazione 4.3 rappresenta bene l'andamento dei dati sperimentali della prova di taglio diretto per un valore massimo di spostamento laterale di 5 mm. In entrambi i metodi per il calcolo dello sforzo di taglio dobbiamo inserire un limite al suo valore, in quanto il terreno non è in grado di resistere ad uno sforzo di taglio infinito ma

superato un determinato valore limite il terreno si rompe. Questo limite viene gestito imponendo che lo spostamento relativo fra terreno e pneumatico non possa superare un valore limite, se ciò accade il valore di forza viene imposto a zero e ritorna a crescere in funzione dello scorrimento.

### 4.4 Modello del contatto

Lo pneumatico è caratterizzato da  $N$  punti, rappresentanti i centri delle superfici di riferimento (Base, Cielo, Fronte e Retro) con cui è stato schematizzato lo pneumatico. Dobbiamo garantire che ogni punto del modello dello pneumatico abbia un corrispondente punto del terreno in direzione verticale, occorrerà poi verificare che vi sia il contatto valutando la coordinata verticale. Per garantire una discretizzazione sufficiente del terreno effettuiamo una interpolazione utilizzando le coordinate orizzontali delle superfici di riferimento. Nota la posizione verticale dello pneumatico rispetto al sistema di riferimento assoluto (vedi Figura 4.6), i punti in contatto con il terreno saranno quelli per cui la coordinata verticale sarà inferiore alla coordinata verticale del terreno alla pari coordinata longitudinale.

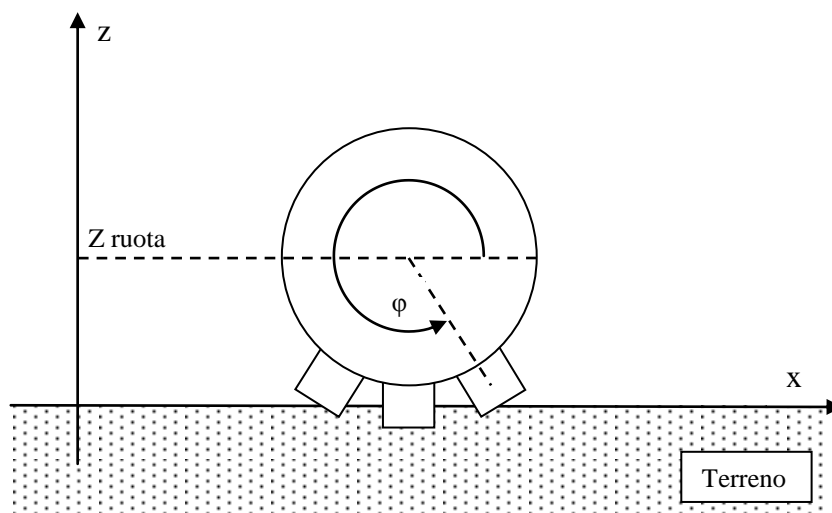


Figura 4.6 Schema delle coordinate dello pneumatico e del terreno

Per i punti in contatto possiamo calcolare lo sforzo normale agente su di essi usando l'equazione 4.4

$$\sigma = Kz$$

4.4

Dove  $z$  è l'affondamento del punto dello pneumatico rispetto alla superficie del terreno mentre il coefficiente  $K$  può assumere due valori differenti: se l'affondamento ( $z$ ) è inferiore al valore raggiunto dal terreno al passo di integrazione precedente si deve utilizzare il coefficiente  $K_{II}$ , se invece l'affondamento è maggiore applico  $K_I$ . Noto lo sforzo normale agente sulla superficie di riferimento lo sforzo tangenziale è calcolato utilizzando i dati sperimentali della prova di taglio diretto e la loro ricostruzione attraverso l'equazione 4.3.

Per limitare il valore massimo dello sforzo di taglio imponiamo un controllo sul valore massimo dello spostamento relativo, superato il valore limite imponiamo che lo sforzo di taglio rimanga costante.

### 4.5 Equazioni di moto

Il modello dello pneumatico è stato implementato in ambiente Matlab e prevede di avere come dati in ingresso le caratteristiche dello pneumatico e del terreno. Il codice prevede che si impongano le condizioni di moto in termini di velocità di avanzamento e slittamento della ruota.

Il terreno viene implementato nel codice come un vettore contenente il profilo cui sono associate le proprietà meccaniche. In questo modo il terreno viene rappresentato come un letto di molle con rigidità  $K_I$  nel caso di terreno non compattato e  $K_{II}$  quando il terreno risulta avere una deformazione preesistente non nulla, inoltre il terreno è in grado di fornire una forza di taglio che rispetta i dati sperimentali misurati durante lo shear test.

Lo pneumatico viene caratterizzato tramite le proprietà geometriche e viene considerata la deformabilità tramite i parametri modali. I parametri modali, già definiti nel capitolo 1, sono la massa, lo smorzamento e la rigidità dei modi di vibrare della carcassa dello pneumatico, mentre le proprietà geometriche

riguardano la forma del battistrada. Infatti per calcolare i punti di interazione fra la ruota ed il terreno occorre conoscere la geometria della ruota. Per quanto riguarda i dati della trattrice ci occorre conoscere solo il peso gravante su una ruota. Inoltre viene fornita la condizione della prova che vogliamo considerare in termini di velocità di avanzamento del veicolo, percentuale di slittamento della ruota e durata della prova.

Per la scrittura delle equazioni si è scelto di imporre la velocità di avanzamento della ruota, così facendo il grado di libertà dello spostamento orizzontale della ruota diviene vincolato. Come coordinate libere del sistema rimangono quindi: lo spostamento verticale del mozzo e le coordinate modali dello pneumatico. Le equazioni di moto assumono la forma:

$$\begin{bmatrix} m_{mozzo} & & & \\ & m_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_{mozzo} \\ \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & r_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & r_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_{mozzo} \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & k_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{mozzo} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{mozzo} \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}$$

4.5

In cui  $m_i$ ,  $r_i$  e  $k_i$  rappresentano la massa modale, lo smorzamento modale e la rigidità modale dei modi identificati e  $m_{mozzo}$  indica la massa di un quarto del veicolo. Con  $Q_{mozzo}$  e  $Q_i$  abbiamo raggruppato il lavoro delle forze esterne che agiscono sul mozzo e sui modi di vibrare dello pneumatico (eq. 4.6).

$$\partial L = \begin{Bmatrix} Q_{mozzo} \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \delta z_{mozzo} \\ \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_n \end{Bmatrix}$$

4.6

Le forze esterne raggruppano sia le forze peso sia le forze generate nel contatto. Lo pneumatico è stato discretizzato attraverso il modello descritto nel paragrafo 3.2 che prevede di dividere la superficie del battistrada in un numero finito di punti, definiti nodi, in cui vengono condensate le superfici di controllo dello pneumatico. Le forze di contatto sono calcolate rispetto al sistema di riferimento locale di ogni nodo della ruota in contatto con il terreno utilizzando il modello riportato nell'equazione 4.7.

$$\begin{aligned} F_{n_{ik}} &= \sigma_{ik} A_{ik} \\ F_{t_{ik}} &= \tau_{ik} A_{ik} \end{aligned}$$

4.7

Nell'equazione 4.7 i e k rappresentano rispettivamente i-esima superficie del k-esimo nodo della ruota. Le forze calcolate nell'equazioni 4.7 devono essere proiettate nelle direzioni x e z del sistema di riferimento globale utilizzando l'equazione 4.8, dove con il valore  $\varphi_{ik}$  intendiamo la posizione angolare rispetto all'asse orizzontale del centro della superficie ik corrispondente (vedi Figura 4.6).

$$\begin{aligned} F_{z_{ik}} &= \sigma_{ik} A_{ik} \sin \varphi_{ik} - \tau_{ik} A_{ik} \cos \varphi_{ik} \\ F_{x_{ik}} &= \sigma_{ik} A_{ik} \cos \varphi_{ik} + \tau_{ik} A_{ik} \sin \varphi_{ik} \end{aligned}$$

4.8

Aggiungendo il contributo della forza peso alla forza verticale possiamo calcolare il valore del lavoro virtuale per una superficie di un nodo.

$$\delta L_{ik} = [-m_{ik}g + (\sigma_{ik} \sin \varphi_{ik} - \tau_{ik} \cos \varphi_{ik})A_{ik}]\delta z_{ik} - [\sigma_{ik} \cos \varphi_{ik} + \tau_{ik} \sin \varphi_{ik}]A_{ik}\delta x_{ik}$$

4.9

Le variabili z ed x presenti nell'equazione 4.9 sono riferite al sistema di riferimento assoluto, se effettuiamo un cambio di riferimento utilizzando un sistema di riferimento posizionato nel centro ruota otteniamo:

$$\begin{cases} x_{ik} = x_{mozzo} + R_{ik} \cos \varphi_{ik} \\ z_{ik} = z_{mozzo} - R_{ik} \sin \varphi_{ik} \end{cases}$$

4.10

Studiando il moto di uno pneumatico deformabile avremo che il raggio non sarà costante, ma varierà in funzione dei modi di vibrare. I modi di vibrare, per come sono stati misurati sperimentalmente, ci indicano la variazione del raggio.

$$\begin{cases} x_{ik} = x_{mozzo} + \left( R_o + \sum_{j=1}^N \Phi_{ik,j} q_j \right) \cos \varphi_{ik} \\ z_{ik} = z_{mozzo} - \left( R_o + \sum_{j=1}^N \Phi_{ik,j} q_j \right) \sin \varphi_{ik} \end{cases}$$

4.11

Dove con  $N$  indichiamo il numero di modi di vibrare dello pneumatico utilizzati. Sostituendo l'equazione 4.11 nella 4.6 otteniamo l'espressione 4.12 del lavoro virtuale per un generico elemento della ruota.

$$\begin{aligned} \delta L_{ik} = & [-m_{ik}g + (\sigma_{ik} \sin \varphi_{ik} - \tau_{ik} \cos \varphi_{ik})A_{ik}] \left( \delta z_{mozzo} - \sum_{j=1}^N \Phi_{ik,j} \delta q_j \sin \varphi_{ik} \right) \\ & - [\sigma_{ik} \cos \varphi_{ik} + \tau_{ik} \sin \varphi_{ik}] A_{ik} \left( \delta x_{mozzo} + \sum_{j=1}^N \Phi_{ik,j} \delta q_j \cos \varphi_{ik} \right) \end{aligned} \quad 4.12$$

Se raggruppiamo il lavoro virtuale di ogni nodo della ruota in base al modo di vibrare che lo genera otteniamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} Q_j = & \sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{k=1}^4 \Phi_{ik,j} \sin \varphi_{ik} m_{ik}g - \sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{k=1}^4 (\sigma_{ik} \sin \varphi_{ik} - \tau_{ik} \cos \varphi_{ik}) A_{ik} \Phi_{ik,j} \sin \varphi_{ik} \\ & - \sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{k=1}^4 (\sigma_{ik} \cos \varphi_{ik} + \tau_{ik} \sin \varphi_{ik}) A_{ik} \Phi_{ik,j} \cos \varphi_{ik} \end{aligned} \quad 4.13$$

Con  $N_{elem}$  indichiamo il numero di elementi in cui la superficie del battistrada è stata discretizzata. Analogamente al calcolo di  $Q_j$  possiamo calcolare il lavoro virtuale dovuto alla forza peso agente sul mozzo.

$$Q_{mozzo} = -m_{mozzo}g - \sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{k=1}^4 m_{ik}g + \sum_{i=1}^{N_{elem}} \sum_{k=1}^4 (\sigma_{ik} \sin \varphi_{ik} - \tau_{ik} \cos \varphi_{ik}) A_{ik} \quad 4.14$$

Sostituendo le equazioni 4.13 e 4.14 nell'equazione 4.5 otteniamo l'equazione finale del nostro sistema, la cui risoluzione porta alla determinazione delle condizioni di moto del nostro sistema.

Per la risoluzione di qualsiasi sistema di equazioni occorre stabilire quali sono le condizioni iniziali. Nel nostro codice imponiamo che al tempo iniziale il sistema si trovi ad avanzare sul terreno ad una velocità imposta e costante con accelerazione nulla, inoltre la ruota si trova affondata nel terreno di una quantità determinata dal calcolo dell'affondamento statico, imponendo che la forza

generata dallo strato di molle di cui è composto il terreno sia in equilibrio con la forza peso dello pneumatico e del 1/4 di veicolo (Eq. 4.15).

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & k_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{\text{mozzo}} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{\text{mozzo}} \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix}$$

4.15

Le equazioni di moto sono state integrate con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine con passo di integrazione di un millisecondo.

#### 4.6 Limiti del modello

Il modello proposto ha lo scopo di identificare la dinamica verticale di uno pneumatico per uso agricolo; ogni modello è il risultato di un compromesso fra la complessità, la necessità di contenere il costo computazionale e di disporre di un numero limitato di parametri da identificare per il funzionamento del modello stesso. Per modellare la deformabilità dello pneumatico abbiamo utilizzato i modi di vibrare identificati nel range di frequenze fra 10 e 60 Hz. Utilizzare molti modi di vibrare nella ricostruzione rende la simulazione più accurata, ma richiede maggiore tempo di simulazione.

Per simulare il terreno abbiamo scelto di utilizzare un letto di molle con rigidità differenziata se siamo nel caso di terreno indeformato o nel caso di terreno che ha già subito una deformazione. Mentre lo pneumatico avanza nella zona anteriore viene a crearsi uno stato di sforzo di compressione che disturba l'avanzamento dello stesso, questo fenomeno viene trascurato. Nel caso di terreni molto coesivi può succedere che il terreno, raggiunto il limite della forza di rottura, si rompa formando delle zolle di materiale molto compatto, il successivo passaggio della ruota deve utilizzare energia per rompere le zolle di terreno prima di poter generare una forza di trazione. Questo effetto della rottura del terreno non è simulato in quanto il modello di rottura utilizzato prevede che solo lo strato superficiale del terreno a contatto con la ruota si rompa. Il modello di terreno non prevede che vi possa essere una parte del terreno stesso che rimanga attaccato allo pneumatico andando a riempire lo spazio fra i tasselli, questo fenomeno si presenta principalmente per scorrimenti elevati.





## 5 Validazione e risultati del modello

### 5.1 Confronto con la prova di trazione

Utilizzando il modello presentato nei precedenti capitoli è stata simulata la prova di trazione, effettuando differenti simulazioni al variare della percentuale di slittamento dello pneumatico e registrando il valore di forza di trazione corrispondente. Lo scopo di queste simulazioni è di poter validare il modello proposto o, al limite, procedere ad una taratura dei suoi parametri per riprodurre i risultati della prova di trazione sperimentale. I dati utilizzati per le simulazioni sono stati identificati durante le prove sul campione di terreno e di trazione. Nella Tabella 5.1 sono riportati i parametri utilizzati per identificare il terreno e la trattrice.

<b>Parametri del modello</b>	<b>Valore</b>
Massa 1/4 della trattrice	1390 kg
Altezza barra trazione	560 mm
Passo della trattrice	2770 mm
Lunghezza di rottura del terreno	4 mm
KI	8300 kPa/m
KII	14300 kPa/m

**Tabella 5.1 Parametri del modello**

I parametri dello pneumatico sono stati impostati utilizzando i modi di vibrare identificati per la pressione di gonfiaggio di 1 bar in quanto questa è la pressione di gonfiaggio degli pneumatici durante le prove di trazione. Il coefficiente di impiego del retro, vedi paragrafo 4.3, è stato impostato al valore unitario in modo da simulare un terreno perfettamente idrostatico. Per riprodurre la prova sperimentale è stato inserito il trasferimento di carico che avviene durante l'avanzamento della trattrice a causa della presenza di una forza applicata al gancio di traino posteriore. Il trasferimento di carico è proporzionale alla posizione del gancio di traino rispetto al centro del mozzo della ruota posteriore e alla forza di trazione esercitata (eq. 5.1).

$$\Delta M = \frac{Tr * h}{l}$$

### 5.1

Dove  $\Delta M$  indica la variazione di forza peso sull'asse posteriore,  $Tr$  è la forza di trazione,  $h$  è la posizione verticale del punto di attacco alla trattrice della forza di trazione ed infine  $l$  è il passo della trattrice. Il valore di avanzamento dello pneumatico è stato impostato uguale alla velocità della trattrice rilevata durante la prova (Tabella 5.2).

Slittamento [%]	5	10	15	20	25	30
Velocità [km/h]	7.46	7.02	6.63	6.23	5.84	5.45

Tabella 5.2 Velocità di avanzamento della trattrice durante le prove di trazione

Ogni simulazione effettuata restituisce una serie di dati in cui possiamo trovare: le forze verticali e orizzontali al mozzo, il momento di rotazione, le forze sulle differenti superfici di controllo, la posizione verticale del centro ruota e la deformazione superficiale del terreno. In Figura 5.1 possiamo trovare l'andamento in funzione del tempo delle forze al mozzo calcolate durante la simulazione, possiamo osservare che il transitorio iniziale finisce molto velocemente, quindi possiamo considerare il sistema a regime dopo i 2 secondi di simulazione. I primi 2 secondi di simulazione non verranno considerati nelle successive rielaborazioni dei dati.

Osservando l'affondamento del mozzo dello pneumatico, Figura 5.2, possiamo osservare come continui ad oscillare seguendo una determinata sequenza dovuta alla presenza della tassellatura sullo pneumatico ed alla velocità di avanzamento.

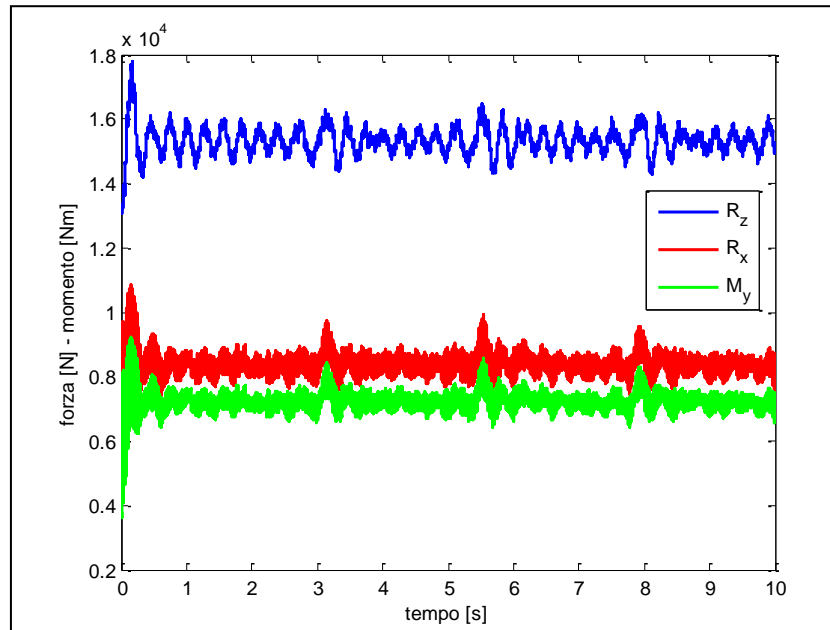


Figura 5.1 Andamento delle forze durante una simulazione della prova di trazione

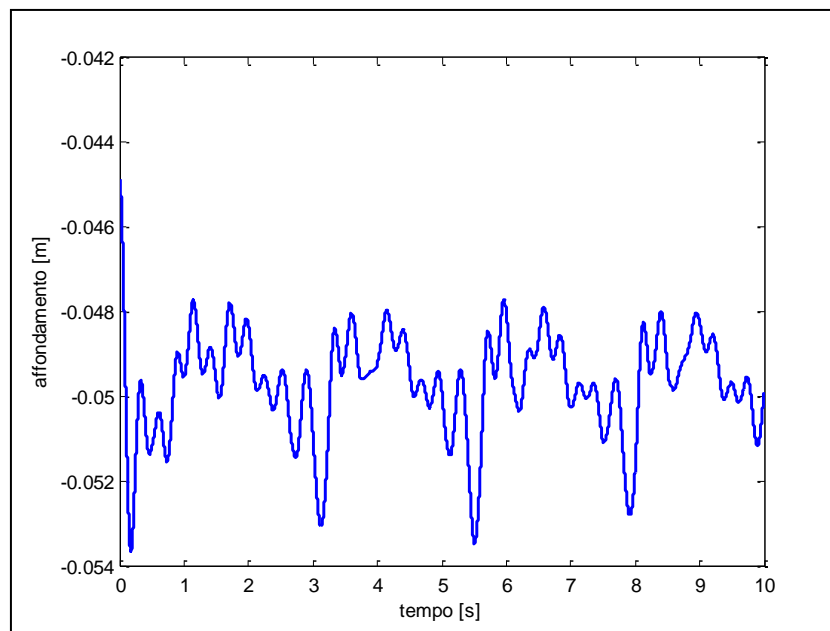


Figura 5.2 Andamento dell'affondamento del centro ruota in funzione del tempo

Se osserviamo la Figura 5.3 osserviamo come lo pneumatico si deforma durante la prova, per rendere visibile la deformazione è stato utilizzato un ingrandimento di 10 volte.

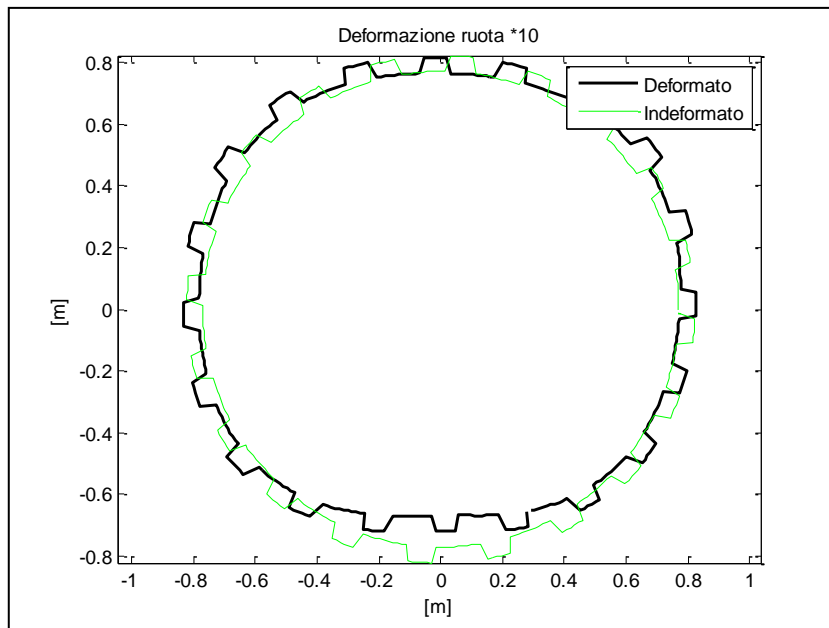


Figura 5.3 Deformazione dello pneumatico ingrandita di 10 volte

Raggruppando in un unico grafico (Figura 5.4) i risultati a differenti valori di scorrimento otteniamo la curva che rappresenta la prova di trazione. Nel confronto di Figura 5.4, in cui è presente la curva della prova di trazione dimezzata nei valori per confrontarla con la nostra simulazione di una ruota sola, è possibile osservare come l'andamento crescente della forza di trazione dei risultati numerici rispetta l'andamento crescente dei risultati sperimentali. Questo problema è dovuto all'ipotesi di terreno perfettamente idrostatico. Sulla superficie chiamata retro l'ipotesi di idrostaticità è debole in quanto il terreno avrà bisogno di alcuni istanti dopo il passaggio del tassello perché il ritorno elastico del terreno abbia effetto e poter avere del terreno in contatto con la superficie retro del tassello e poter generare uno stato di sforzo. Utilizzando il coefficiente di impiego del retro dei tasselli è possibile ridurre l'ipotesi di

idrostaticità del terreno riducendo il contributo alla forza totale della superficie retro.

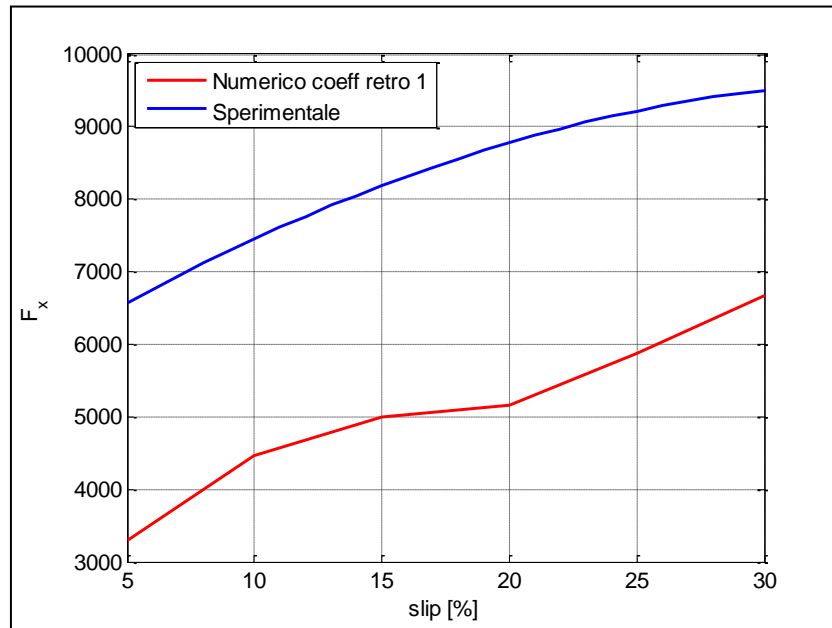


Figura 5.4 Confronto fra i risultati sperimentali della prova di trazione e l'analisi numerica

Per migliorare i risultati ottenuti sono stati ripetuti i calcoli al variare del coefficiente di impiego della superficie retro finché non sono stati ottenuti risultati soddisfacenti utilizzando un coefficiente pari a 0.52, vedi Figura 5.5, dove possiamo considerare che il nostro modello rappresenta bene il comportamento di uno pneumatico fino a slittamenti del 30%.

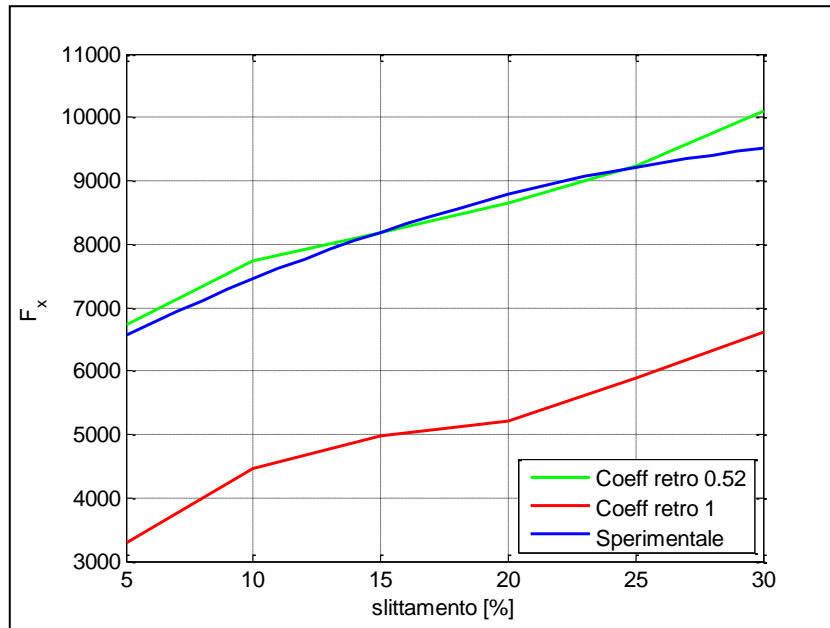


Figura 5.5 Confronto fra i risultati sperimentali della prova di trazione e l'analisi numerica

## 5.2 Altri risultati del modello

### 5.2.1 Forza di trazione

La forza di trazione rappresentata nei grafici precedenti è stata generata sulle quattro superfici di riferimento presentate nel paragrafo 4.2. Su ogni superficie si vengono a formare degli stati di sforzo normale e tangenziale che daranno origine a forze normali e tangenziali alla superficie stessa. Queste forze saranno poi orientate nel sistema di riferimento assoluto in direzione verticale ed orizzontale. Nella Figura 5.6 sono riportati i contributi alla forza di trazione delle forze generate dallo sforzo normale sulle superfici di riferimento, il maggior contributo lo fornisce la superficie fronte che si trova a comprimere il terreno di fronte a sé. Se invece osserviamo la Figura 5.7, dove sono riportati i contributi alla forza di trazione delle forze di taglio, abbiamo che la superficie cielo genera il maggior contributo a causa dell'elevato sforzo normale alla superficie generato dalla forza peso dello pneumatico che consente una maggiore forza di taglio.

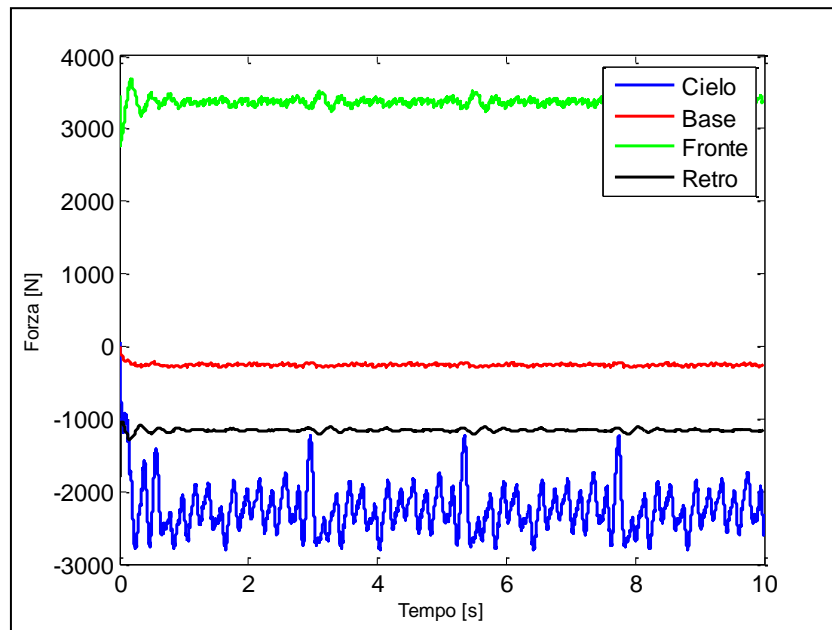


Figura 5.6 Andamento delle forze normali alle superfici di riferimento

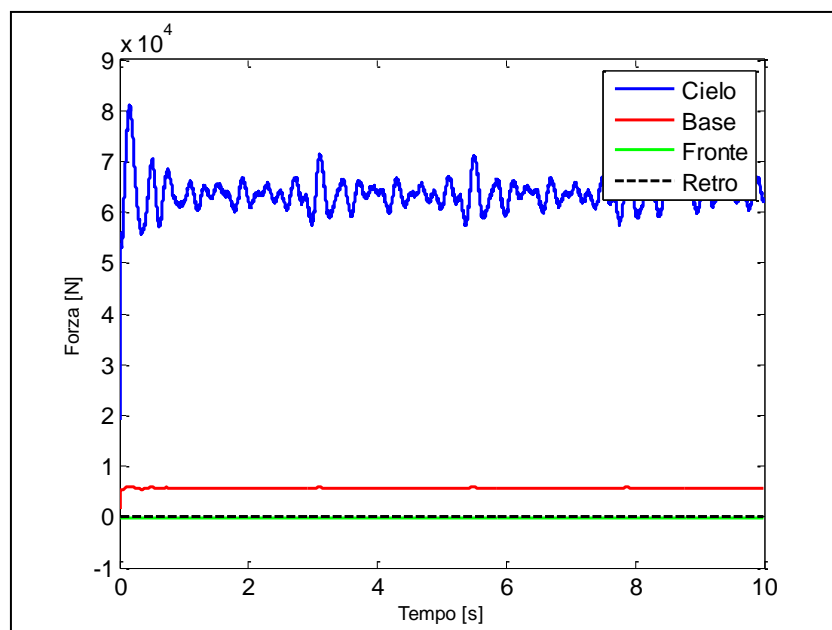
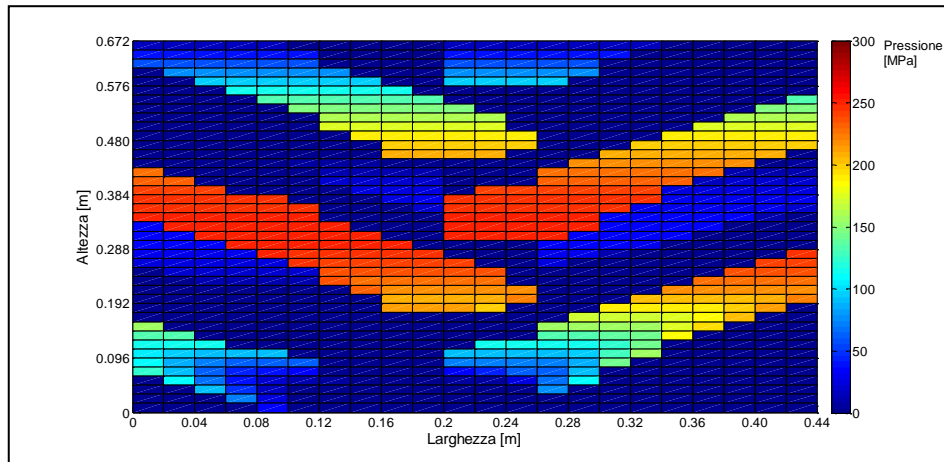


Figura 5.7 Andamento delle forze tangenziali alle superfici di riferimento



**Figura 5.8 Rappresentazione pressione agente sul terreno**

Inoltre se osserviamo la Figura 5.8, dove è riportata la pressione che viene esercitata dallo pneumatico sul terreno, possiamo notare come si ottenga una dimensione dell'impronta di 44 cm per 67 cm. Nella zona centrale dell'impronta, tra i 20 e i 45 cm di altezza, possiamo osservare che troviamo la maggiore concentrazione dello sforzo sul terreno con un picco di 250 MPa nella zona dei tasselli. Sempre in questa zona osserviamo che anche la superficie fra i tasselli genera uno sforzo con il terreno, però a causa dello slittamento si crea una zona dietro al tassello in cui il terreno è stato deformato e quindi non viene in contatto con lo pneumatico. Nei punto dove la pressione assume un valore nullo significa che il terreno non è in contatto lo pneumatico.

### 5.2.2 Affondamento

Passando ad analizzare l'affondamento massimo che lo pneumatico produce durante il suo passaggio, Figura 5.9, troviamo che in tutte le prove si raggiunga un valore di 18 mm.



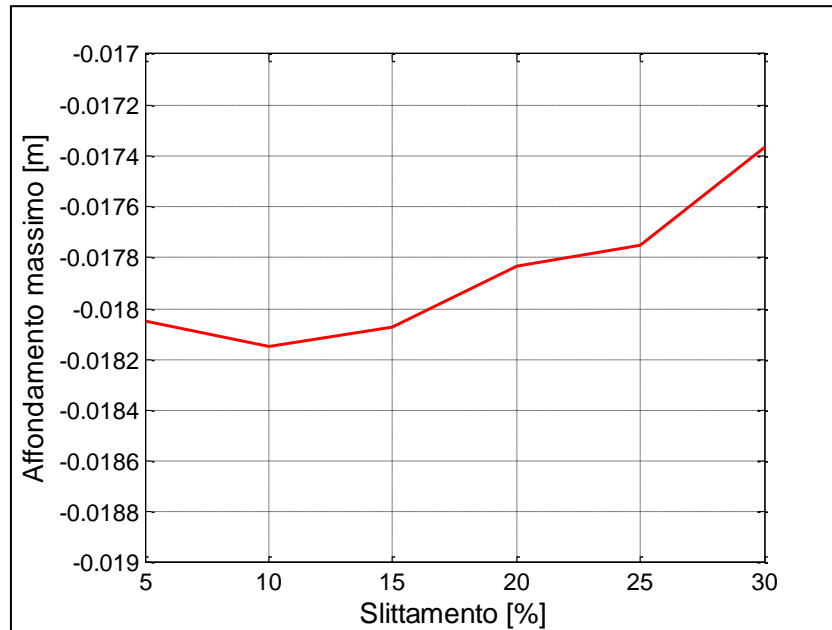
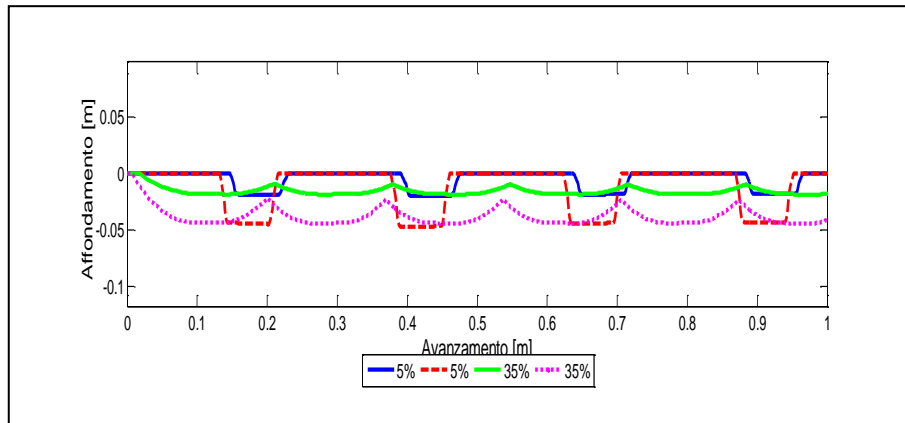


Figura 5.9 Affondamento massimo dello pneumatico in funzione dello slittamento

In Figura 5.10 possiamo osservare la deformazione che viene a crearsi nel terreno rappresentata nel grafico dalle linee a tratto pieno, invece con le linee tratteggiate sono rappresentati i valori massimi raggiunti prima della rimozione del carico. Le due coppie di curve rappresentano come varia il profilo del terreno al crescere dello slittamento dello pneumatico. Per lo slittamento del 5% possiamo notare la forma squadrata del tassello che deforma il terreno, se invece passiamo ad uno slittamento del 35% non troviamo più la forma del tassello ma una superficie ondulata.



**Figura 5.10** Profilo altimetrico di una sezione del terreno al termine della simulazione: le linee piene rappresentano il ritorno elastico e le linee tratteggiate l'affondamento massimo

### 5.2.3 Deviazione standard accelerazione del mozzo

Analizzare la deviazione standard dell'accelerazione verticale del mozzo consente di effettuare una stima del confort fornito dallo pneumatico. La deviazione standard rappresenta la variazione rispetto al valor medio di un segnale, quindi nel nostro caso analizziamo quanto sono ampie, in media, le oscillazioni della accelerazione verticale del mozzo. Osservando la Figura 5.11 in cui è riportata la deviazione standard dell'accelerazione del mozzo non siamo in grado di stabilire un trend univoco con lo scorrimento.

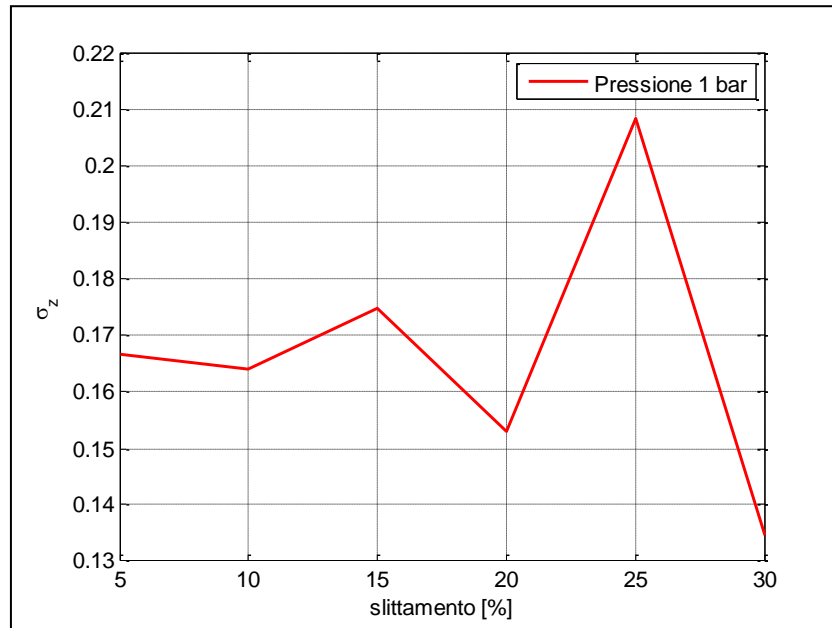
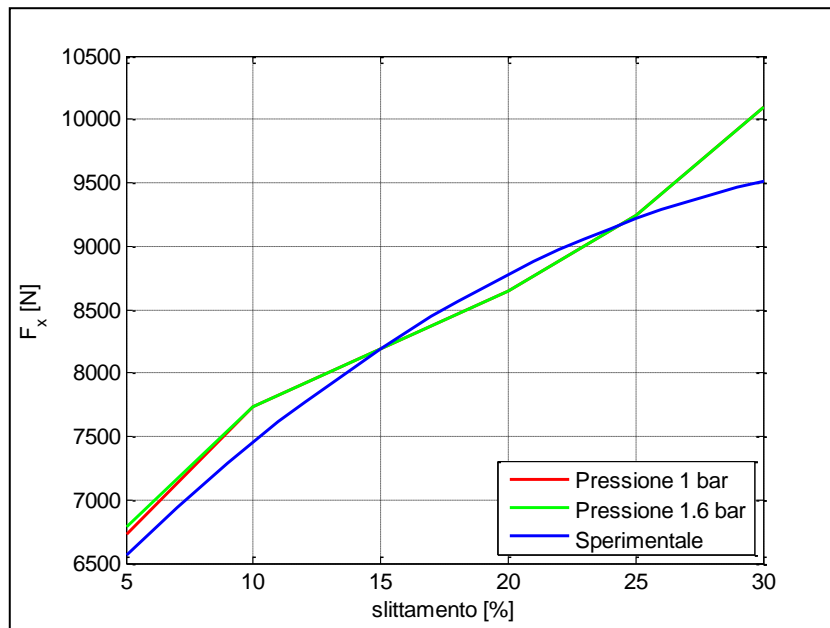


Figura 5.11 Deviazione standard dell'accelerazione verticale del mozzo

### 5.2.4 Effetto della pressione di gonfiaggio

Abbiamo infine valutato come si comporta un pneumatico con pressione di gonfiaggio di 1,6 bar nei confronti della pressione di gonfiaggio di 1 bar utilizzata normalmente durante le operazioni in campo. Sono state simulate le prove con gli stessi dati utilizzati per le prove precedenti a meno dei parametri dello pneumatico per cui sono stati adottati i valori ricavati durante l'analisi modale per lo pneumatico gonfiato a 1,6 bar.



**Figura 5.12 Forza di trazione per differenti prove di trazione**

In Figura 5.12 osserviamo come non vi sia differenza fra lo pneumatico a 1 bar e lo pneumatico a 1,6 bar. Se passiamo ad osservare l'affondamento dello pneumatico (Figura 5.13) possiamo osservare che lo pneumatico ad 1 bar di pressione affonda in media meno del 1% rispetto allo pneumatico ad 1,6 bar, questo rispetta quanto analizzato da altri studi [25]. Infine osservando la deviazione standard dell'accelerazione verticale, Figura 5.14, notiamo che una pressione maggiore aumenta le accelerazioni verticali perché lo pneumatico presenta una rigidità maggiore.

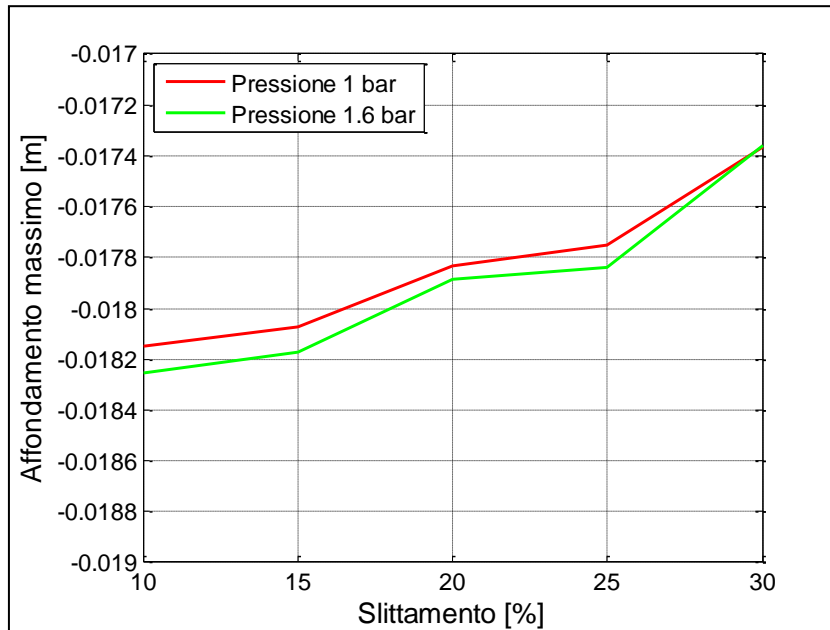


Figura 5.13 Affondamento dello pneumatico

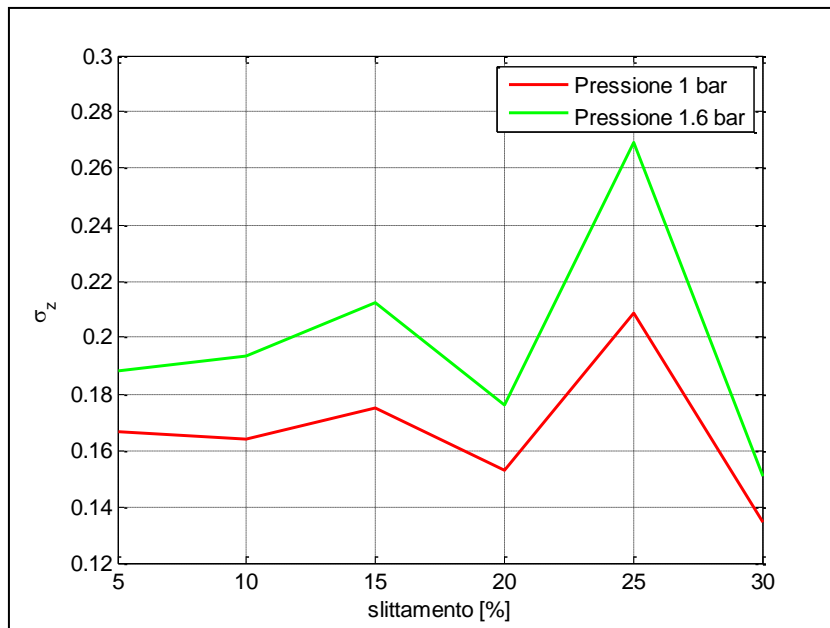


Figura 5.14 Deviazione standard della accelerazione verticale del mozzo



## **6 Effetto della geometria del battistrada sulle prestazioni dello pneumatico**

Una volta che il modello numerico ha rispettato i dati della prova di trazione è possibile utilizzarlo per analizzare condizioni di funzionamento differenti. L'analisi di sensitività consiste nel variare i parametri del modello per valutare la loro influenza sugli output della simulazione, in particolare si è indagato l'effetto di alcuni parametri della geometria del battistrada sulle prestazioni dello pneumatico in termini di: forza di trazione massima, massimo schiacciamento del terreno e deviazione standard dell'accelerazione del mozzo per valutare indicativamente il confort. Durante l'analisi di sensitività deve variare solo un parametro per volta, tutti gli altri parametri che caratterizzano il modello devono rimanere costanti, questo per poter poi confrontare i risultati ottenuti. Il primo parametro che abbiamo deciso di far variare è l'altezza dei ramponi con valori di +25% e -25% rispetto al valore nominale dello pneumatico: questo è uno dei parametri che influenza la forza di trazione [26]. Per generare gli pneumatici con un'altezza dei tasselli diversa dal valore standard è stato mantenuto costante il valore nominale del raggio esterno dello pneumatico ed è stato fatto variare il valore del raggio della superficie fra i tasselli, modificando così l'altezza complessiva dei tasselli. L'altro parametro di cui vogliamo studiare l'influenza è il numero di ramponi; lo pneumatico presenta 20 ramponi per lato nella configurazione originale, mentre per l'analisi di sensitività varieremo il loro numero da un minimo di 6 ad un massimo di 40 ramponi per lato. Incrementando il numero di ramponi otteniamo uno pneumatico con un'area tassellata molto grande da renderlo simile ad uno pneumatico liscio. Nelle differenti prove abbiamo deciso di mantenere inalterata la forma del singolo rampone in termini di geometria ed orientamento nello spazio, quindi diventerà importante per stimare la trazione dello pneumatico il rapporto fra l'area in cui sono presenti i tasselli e quella totale del battistrada. Nella Tabella 6.1 sono riportati i valori dell'area tassellata rispetto all'area dell'intero battistrada, l'aumento di area tassellata è lineare.

I dati del modello riguardanti il terreno sono stati presi uguali ai dati delle prove di confronto con la prova sperimentale. Abbiamo deciso di effettuare l'analisi di sensitività al valore di 25% di slittamento perché a questo valore di slittamento

la risposta del modello numerico riproduce nel modo migliore i dati sperimentali.

Numero Tasselli	Area tassellata [%]
6	8.47
8	11.3
10	14.13
12	16.94
15	21.16
18	25.35
20	28.21
23	32.45
25	35.21
28	39.44
30	42.26
35	49.24
40	56.25

**Tabella 6.1** Percentuale dell'area tassellata dello pneumatico

E' stata inoltre valutato come un diverso terreno, più cedevole, influenza la dimensione dei tasselli. La minore resistenza alla penetrazione del terreno è stata impostata variando il valore delle costanti  $K_I$  e  $K_{II}$  riportate nella Tabella 6.2.

Terreno	Standard	Morbido
KI	8300 kPa\m	4150 kPa\m
KII	14300 kPa\m	7150 kPa\m

**Tabella 6.2** Parametri del terreno



## 6.1 Effetto sulla forza di trazione

Se osserviamo l'andamento della forza di trazione al variare del numero e dell'altezza dei tasselli, Figura 6.1, possiamo osservare che se aumentiamo il numero dei tasselli riduciamo la forza disponibile, il range di variazione è di 1130 N fra il valor massimo e minimo. Il valore massimo della forza di trazione, 9940 N, si ottiene per uno pneumatico dotato di 12 tasselli con altezza di 0.052m ovvero quello con altezza nominale. Come osservato nella Figura 5.6 e nella Figura 5.7 i maggiori contributi alla forza di trazione derivano dalla forza normale alla superficie fronte dei tasselli e allo sforzo di taglio sulle superfici base e cielo. Aumentando il numero di tasselli viene ad aumentare l'area delle superfici denominate fronte del tassello, quindi avremo che la forza peso dello pneumatico si distribuisce su di un'area maggiore riducendo lo sforzo normale alle superfici e di conseguenza la forza che possono esercitare. Esiste però un valore di altezza dei tasselli e loro quantità al di sotto del quale l'aumento dello sforzo normale sulla superficie fronte non produce un aumento della forza di trazione perché si raggiunge il limite del terreno.

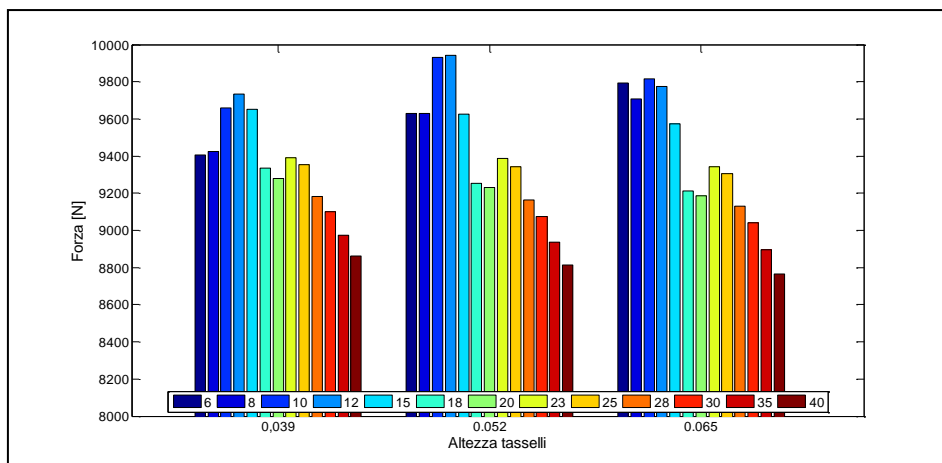


Figura 6.1 Andamento della forza di trazione in funzione del numero e dell'altezza dei tasselli

Se analizziamo la Figura 6.1 guardando come varia la forza di trazione in funzione dell'altezza dei tasselli notiamo che vi è una variazione di circa 200N fra la forza massima e minima a pari numero di tasselli. Possiamo spiegare questo fenomeno osservando, che in tutti i casi lo pneumatico affonda a sufficienza perché le superfici fra i tasselli, denominate cielo, tocchino il terreno, quindi la forza peso si scarica principalmente sulle superfici base e cielo. Variando l'altezza dei tasselli abbiamo un modesto effetto sulla forza di trazione dovuto ad un maggiore affondamento nel terreno all'interno del range esaminato.

### 6.2 Effetto sulla compattazione del terreno

Se invece passiamo ad osservare il valore dell'affondamento massimo, mostrato in Figura 6.2, che lo pneumatico genera durante la marcia possiamo notare che all'aumentare del numero dei tasselli l'affondamento diminuisce perché la pressione che si esercita tra il terreno e lo pneumatico si riduce. L'altezza dei tasselli influenza il valore di affondamento solo nel caso di pochi tasselli, provocando un affondamento maggiore in presenza di tasselli alti, perché il sostentamento della forza peso è, principalmente, fornito dalle superfici base e cielo dello pneumatico, la base entra subito in contatto con il terreno, ma non è sufficientemente grande da impedire un ulteriore affondamento finché la superficie cielo non tocca il terreno. I grafici di Figura 6.1 e Figura 6.2 ci dimostrano come non sia conveniente scendere al di sotto dei 10 tasselli in quanto diminuisce la forza di trazione disponibile ed aumenta l'affondamento dello pneumatico che è direttamente proporzionale alla compattazione del terreno.

# Effetto della geometria del battistrada sulle prestazioni dello pneumatico

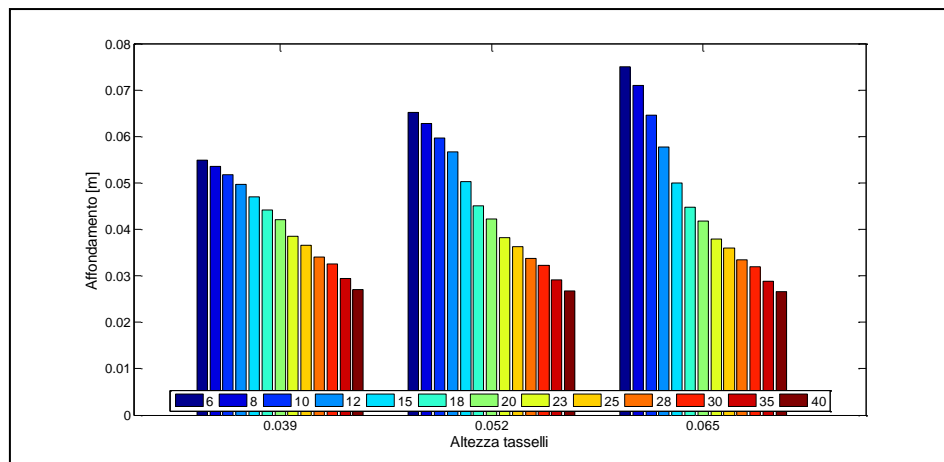
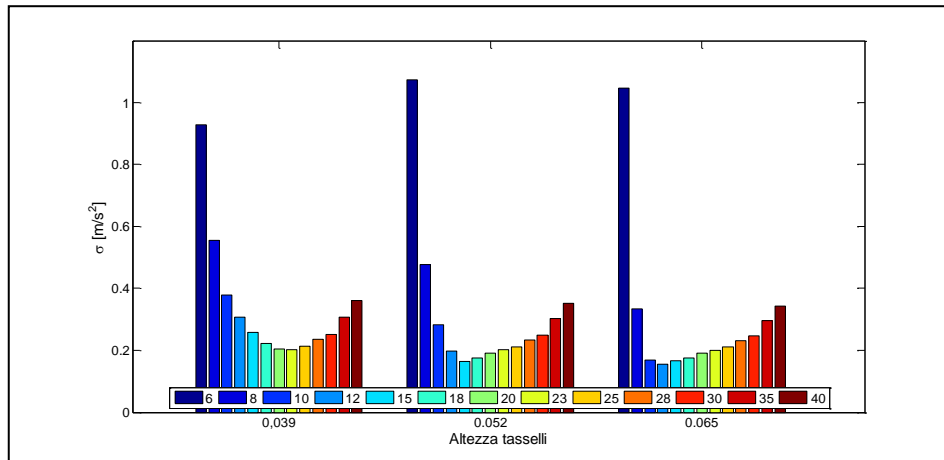


Figura 6.2 Affondamento dello pneumatico al variare del numero e dell'altezza dei tasselli

## 6.3 Effetto sul confort

Uno pneumatico oltre a fornire la forza di trazione necessaria deve essere in grado di mantenere un livello di accelerazioni verticali del mozzo il più basso possibile per garantire un miglior confort del veicolo. E' stata analizzata la deviazione standard dell'accelerazione verticale del centro ruota, in cui un valore minore indica una minore variazione del valor medio dell'accelerazione verticale del mozzo. Se osserviamo il grafico di Figura 6.3 vediamo come per un numero di tasselli piccolo la deviazione standard assuma valori molto più grandi che nei casi in cui abbiamo più di 10 tasselli. La dimensione dell'impronta dello pneumatico è di circa 50 cm che corrisponde alla distanza fra due tasselli nel caso di pneumatico con 10 tasselli per lato. Il minimo della deviazione standard dell'accelerazione del mozzo si raggiunge per un valore differente del numero dei tasselli in base alla loro altezza, per i tasselli alti la miglior deviazione standard si raggiunge con 12 tasselli che diventano 15 per i tasselli di altezza standard, mentre se vogliamo tasselli bassi il miglior risultato lo otteniamo a 20 e 23 tasselli, quindi con i valori di progetto. Questo risultati possono essere spiegati considerando che ogni volta che un tassello entra in contatto con il terreno lo possiamo assimilare ad una forza impulsiva che eccita lo pneumatico. Con pochi tasselli la forza che si scarica su un tassello sarà più grande che se abbiamo molti tasselli, però con molti tasselli andremo ad eccitare in maniera più costante nel tempo lo pneumatico.



**Figura 6.3** Deviazione standard dell'accelerazione verticale del mozzo ruota in funzione del numero e dell'altezza dei tasselli

Per spiegare meglio ciò che accade nella Figura 6.3 siamo passati ad analizzare lo spettro delle accelerazioni verticali del mozzo che abbiamo riportato nel grafico di Figura 6.4 al variare del numero di tasselli. Per prima cosa abbiamo analizzato quali siano le frequenze con cui i tasselli di una ruota entrano a contatto con il terreno considerando la velocità di avanzamento e la percentuale di slittamento dello pneumatico. Abbiamo ricavato che con 6 tasselli per lato si ha una frequenza propria di 5 Hz ed osservando la Figura 6.4 troviamo un picco in corrispondenza di questo valore di frequenza. Passando a numeri di tasselli maggiori troviamo valori di 8.3 Hz per 10 tasselli, 12.5 Hz per 15 tasselli e 16.7 Hz per 20 tasselli, nella Figura 6.4 troviamo i picchi a queste frequenze sulle rispettive curve in funzione del numero di tasselli. Inoltre troviamo anche due picchi comuni per tutte le curve ai valori di 2.5 e 3.37 Hz che corrispondono alla frequenza propria della vibrazione verticale della massa di  $\frac{1}{4}$  del peso della trattrice che abbiamo posizionate nel centro ruota.

## Effetto della geometria del battistrada sulle prestazioni dello pneumatico

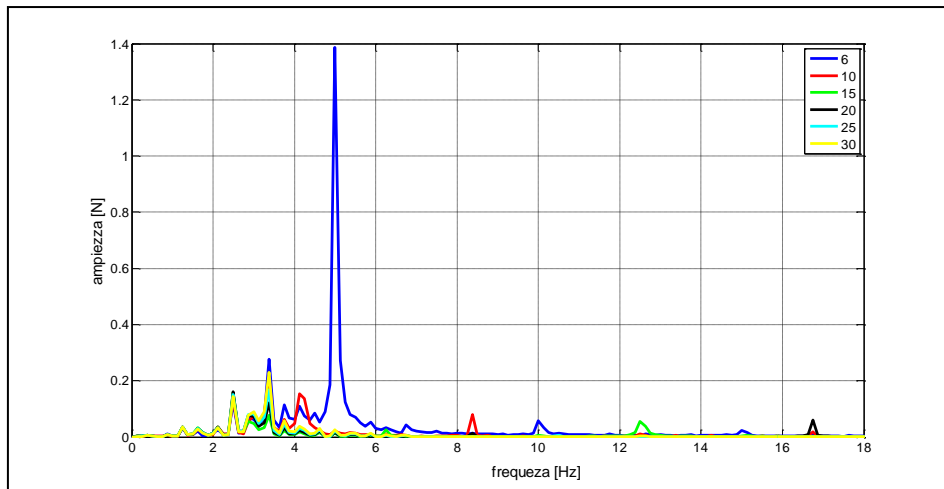


Figura 6.4 Spettro dell'accelerazione verticale del mozzo per diversi valori del numero di tasselli

Osservando la Figura 6.5 e confrontandola con la Figura 5.8 possiamo osservare come una diminuzione del numero di tasselli abbia provocato un aumento dello sforzo massimo generato sul tassello passando dai 250 MPa per 20 tasselli ai 300 MPa per soli 6 tasselli. Inoltre con meno tasselli è osservabile come si raggiunga un valore di 100 MPa sulla superficie del cielo dello pneumatico.

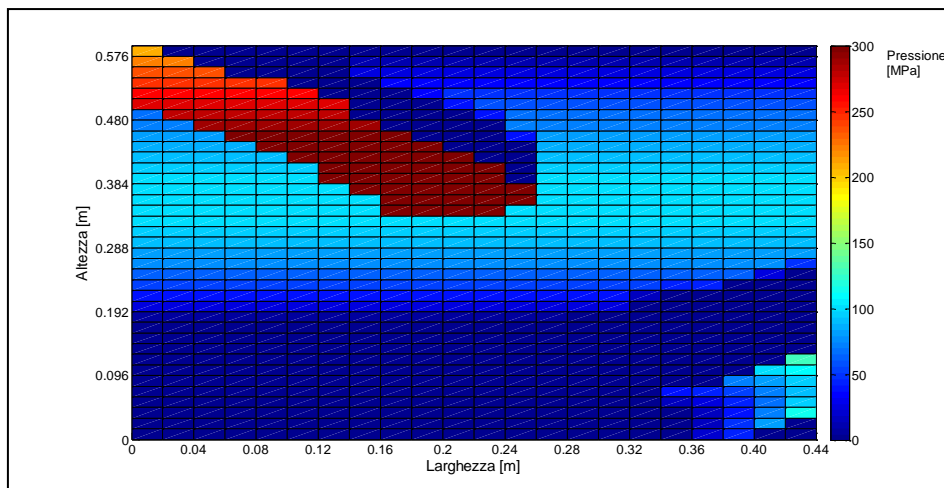


Figura 6.5 Distribuzione delle pressioni di contatto con il terreno per pneumatico con 6 tasselli per lato

### 6.4 Analisi con terreno morbido

Utilizzando il terreno più cedevole sono state ripetute le simulazioni al variare dell'altezza e del numero dei tasselli. Questa analisi ha il solo scopo di aiutare nell'interpretazione dei risultati del modello, in quanto ci si aspetta che un maggiore affondamento possa cambiare i parametri che massimizzano le prestazioni dello pneumatico. Per una più completa analisi dell'effetto di un terreno più cedevole sulla forza di trazione sarebbe necessario identificare tutti i parametri del terreno, tra cui la resistenza meccanica alla forza di taglio. Nel grafico di Figura 6.6 possiamo trovare i valori della forza di trazione al variare del numero di tasselli e della loro altezza. Rispetto al terreno duro le forze con un numero di tasselli di 20/23 sono più confrontabili rispetto alle forze ottenute con 12 tasselli soprattutto con tasselli bassi. L'altezza del tassello influenza di più la forza generata perché penetra di più nel terreno morbido.

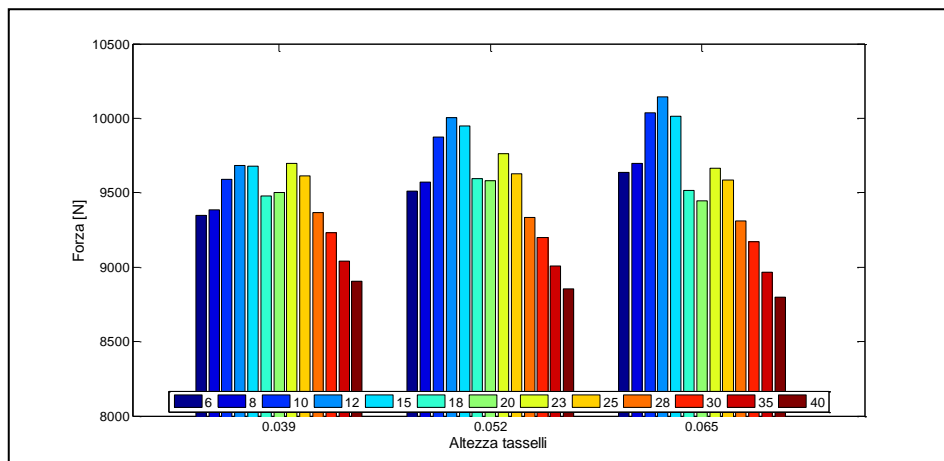


Figura 6.6 Forza di trazione per il terreno morbido

L'affondamento massimo, Figura 6.7, risulta essere maggiore di circa 1 cm rispetto al caso con terreno standard, ma presenta sempre l'andamento decrescente all'aumentare del numero di tasselli. Infine osservando la deviazione standard dell'accelerazione del mozzo, Figura 6.8, osserviamo lo stesso andamento ottenuto per il terreno standard ma i valori dei punti di minimo vengono raggiunti per un numero di tasselli maggiore. Questo perché un

## Effetto della geometria del battistrada sulle prestazioni dello pneumatico

maggiore affondamento si traduce in una variazione minore della forza sul singolo tassello rispetto al caso di terreno con rigidità standard

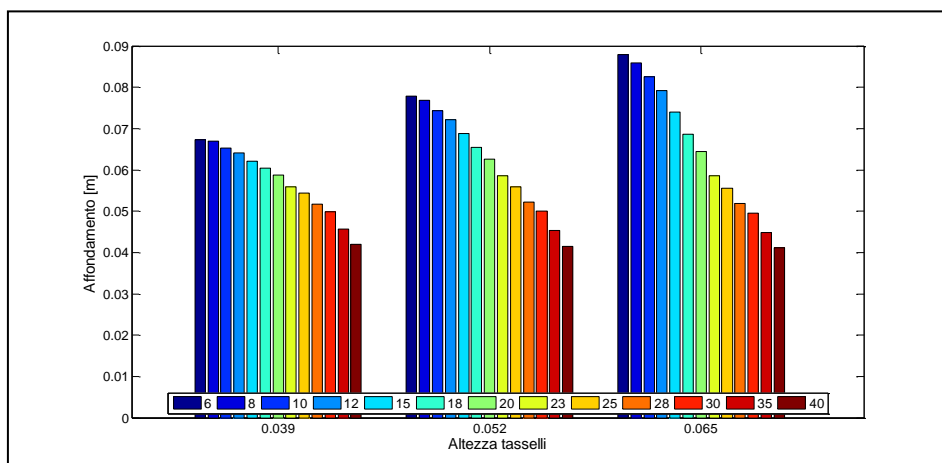


Figura 6.7 Affondamento massimo dello pneumatico per terreno morbido

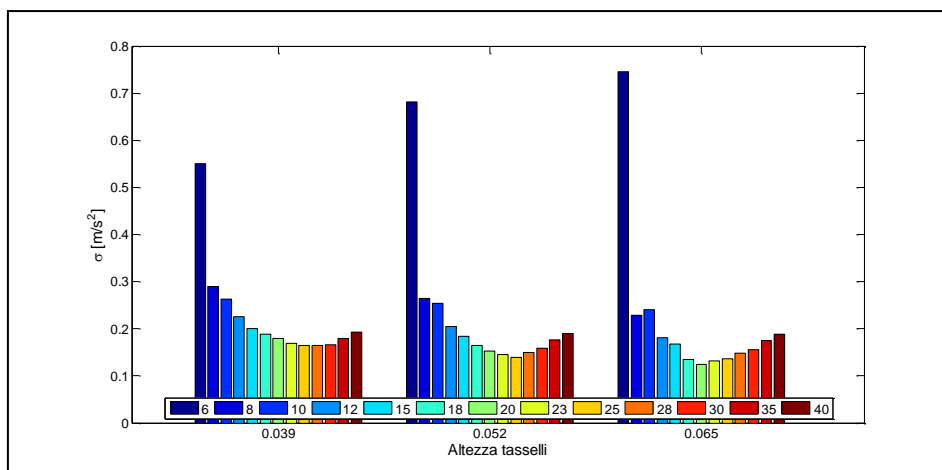


Figura 6.8 Deviazione standard dell'accelerazione verticale del mozzo per terreno morbido





## 7 Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro è consistito nello sviluppare un modello di interazione tra suolo agricolo e pneumatico deformabile, con l'obiettivo di poter valutare lo stato di sforzo presente nella zona di contatto e disporre di un modello in grado di stimare le prestazioni di uno pneumatico in termini di: forza di trazione disponibile, affondamento nel terreno e accelerazione verticale del mozzo ruota. Utilizzando il modello sviluppato è stata poi condotta una indagine per valutare l'influenza della geometria del battistrada sulle prestazioni dello pneumatico.

La deformabilità dello pneumatico è stata caratterizzata attraverso l'analisi dei modi di vibrare dello pneumatico stesso. Per compiere questo studio è stato strumentato, attraverso l'uso di 8 accelerometri, uno pneumatico per uso agricolo e mediante un martello dinamometrico sono stati eccitati i modi di vibrare radiali. Attraverso gli accelerometri posizionati sullo pneumatico sono state rilevate le accelerazioni della carcassa, da cui sono state ricavate le funzioni di trasferimento fra la forzante imposta dal martello e l'accelerazione dei nodi di misura dello pneumatico. Per l'identificazione delle frequenze proprie del sistema è stato utilizzato il metodo complesso esponenziale che utilizza il processo iterativo di Prony.

I risultati dell'identificazione modale hanno permesso di individuare i primi 5 modi di vibrare di uno pneumatico compresi nel range di frequenze 0-60 Hz. L'identificazione modale è stata effettuata sia alla pressione di gonfiaggio dello pneumatico di 1 bar, comunemente utilizzata per le operazioni in campo, sia al valore di 1.6 bar, utilizzata per gli spostamenti su strada. Questi due set di parametri modali ci hanno consentito di valutare quale sia l'influenza della pressione di gonfiaggio sulle prestazioni in termini di forza di trazione, affondamento nel terreno e confort.

Per la definizione delle proprietà del suolo agricolo sono state condotte due prove sperimentali: prova di penetrazione e prova di taglio diretto. La prova di penetrazione consiste nel misurare la resistenza che il terreno offre ad una punta conica che penetra nel terreno a velocità costante, questa prova ci ha permesso di stabilire la durezza del terreno. Nella prova di taglio diretto un campione di terreno è stato sottoposto ad uno scorrimento a velocità costante e viene rilevata

la forza necessaria al movimento. La prova di taglio diretto ci ha consentito di ottenere i valori dello sforzo di taglio, sopportabile dal terreno, al variare del carico verticale applicato al campione di terreno stesso. I dati acquisiti durante queste due prove sono stati utilizzati per settare i parametri del modello del terreno che prevede l'utilizzo di un letto di molle con rigidità differente in fase di carico e scarico per introdurre deformazioni permanenti del terreno dovute al passaggio dello pneumatico. Il terreno inoltre si comporta in maniera idrostatica, generando uno sforzo normale ad ogni superficie e proporzionale all'affondamento. Per lo sforzo di taglio sulle superfici è stato inserito un limite al valore massimo per rispettare i dati della prova di taglio diretto.

Una volta messo a punto il modello di interazione fra suolo agricolo e pneumatico deformabile i suoi risultati sono stati confrontati con i dati sperimentali raccolti in prove outdoor. In particolare come prova sperimentale è stata scelta la prova di trazione in cui uno pneumatico uguale a quello utilizzato per l'identificazione modale viene montato su di una trattoria agricola e viene misurata, attraverso un opportuno set-up di misura, la forza che riesce a generare lo pneumatico al variare dello scorrimento. La prova è stata effettuata sul terreno le cui caratteristiche sono state determinate con le prove di penetrazione e di taglio diretto. Utilizzando i dati ricavati sperimentalmente sul terreno e sullo pneumatico sono state riprodotte le prove di trazione attraverso il modello numerico sviluppato.

Il modello è stato utilizzato per simulare le prove di trazione per verificare la capacità del modello stesso di riprodurre il risultato della prova di trazione. Dal confronto numerico-sperimentale, sulla forza di trazione generata, è stato possibile ritenere il modello corretto fino ad uno slittamento della ruota pari al 30 %; oltre questo valore si hanno degli scostamenti tra modello e dati sperimentali legati ad alcune ipotesi semplificative introdotte nel modello stesso. Studiando come lo pneumatico si comporta con le due pressioni differenti abbiamo osservato che la forza di trazione rimane pressoché costante al diminuire della pressione, però l'affondamento diminuisce. Un minore affondamento dello pneumatico indica una minore compattazione del terreno che ha effetto sullo sviluppo delle radici delle colture e quindi sulla resa complessiva di una piantagione. Abbiamo considerato la deviazione standard dell'accelerazione verticale del mozzo come indice di riferimento per lo studio del confort di marcia in quanto non abbiamo creato un modello completo del

veicolo. Anche il confort diminuisce con la pressione di gonfiaggio dello pneumatico.

Con il modello numerico validato è stata effettuata una campagna di simulazioni per valutare l'influenza del numero e dell'altezza dei tasselli sulle prestazioni dello pneumatico sul terreno di cui abbiamo identificato le caratteristiche meccaniche. Dai risultati ottenuti si è potuto stabilire che esiste un valore di ottimo del numero di tasselli, circa 12 per lato, per cui uno pneumatico riesce a generare la massima forza di trazione. Questo valore è sensibilmente inferiore rispetto al numero di tasselli effettivamente presenti sullo pneumatico (20 per lato). Invece l'affondamento nel terreno minore si raggiunge per un elevato numero di tasselli perché la forza può distribuirsi più uniformemente sul terreno. Valutando la deviazione standard dell'accelerazione del mozzo notiamo che a pari altezza del tassello esiste un numero di tasselli ottimo che rende minima la deviazione standard, tra i 12 e i 15 tasselli per lato. Le simulazioni effettuate con il terreno più cedevole hanno mostrato come con questo tipo di terreni il massimo della forza di trazione si raggiunga tra i 12 e i 15 tasselli per lato e come anche le accelerazioni verticali del mozzo si riducano per un numero di tasselli elevato, mostrando un minimo per 20-23 tasselli. Però bisogna osservare che la differenza di forza fra 12 tasselli e 20 è piccola, rendendo preferibile scegliere un numero di tasselli maggiore ed ottenere un miglior confort ed un minore affondamento nel terreno.

In conclusione il modello presentato ricostruisce bene l'interazione di uno pneumatico deformabile in contatto con un terreno agricolo se lo pneumatico presenta uno scorrimento inferiore al 30% ed è inoltre in grado di valutare differenti geometrie del battistrada dello pneumatico sulle prestazioni dello stesso. Il modello ci suggerisce che la scelta del numero e delle dimensioni dei tasselli dipenda dal tipo di terreno utilizzato; per il terreno con le stesse caratteristiche di quello considerato in questo lavoro, conviene operare con pneumatici con un numero di tasselli inferiore rispetto a quello utilizzato per le prove di trazione. Il lavoro svolto in questa tesi costituisce quindi la base per un modello che consenta di guidare la progettazione della geometria del battistrada che consenta di ottimizzare le prestazioni di uno pneumatico su un dato terreno.



## 8 Bibliografia

- [1] M. G. Bekker, Introduction to Terrain-Vehicle Systems, University of Michigan Press, 1969.
- [2] M. Bekker, Theory of land locomotion, 1956.
- [3] Z. Janosi e B. Hanamoto, «The Analytical Determination of Drawbar Pull as a Function Of Slip for Tracked Vehicles,» in *1st ISTVS Conference Torino*, 1961.
- [4] A. Reece, «Problems of Soil-Vehicle Mechanics,» in *Land Locomotion Laboratory (USATACOM)*, Warren, MI., 1964.
- [5] G. G. Meyerhof, «The Ultimate Bearing Capacity of Foundations,» *Geotechnique*, 2(301), 1951.
- [6] K. El-Gawwad, D. Crolla, A. Soliman e F. El-Sayed, «Off-Road Tyre Modelling I: The Multi-Spoke Tyre Model Modified To Include The Effect Of Straight Lugs,» *Journal of Terramechanics*, vol. 36, pp. 3-24, 1999.
- [7] R. A. Ridha, «Computation of stresses, strains and deformation of tires,» *Rubber chemistry and technology*, 53(4), pp. 849-902, 1980.
- [8] P. Shoemaker, «Tire engineering by finite element modelling,» *SAE 840065*, SAE, 1984.
- [9] H. Nakashima e A. Oida, «Algorithm and Implementation of Soil-Tire Contact Analysis Code Based on Dynamic FE-DE Method,» in *Proceedings of the 14th ISTVS Conference ISTVS*, Vicksburg, MS, 2002.
- [10] H. Nakashima e Y. Takatsu, «Analysis of Tire Performance on Deformable Terrain by Finite Element-Discrete Element Method,» *Journal of Computational Science and Technology*, vol. 2, n. 4, pp. 423-434, 2008.
- [11] G. Potts, C. Bell, L. Charek e T. Roy, «Tire Vibrations,» *Tire Science and*

- Technology*, vol. 5, n. 4, pp. 202-225, 1977.
- [12] S. Gong, *Study of in-plane dynamics of tires*, Ph.D. Thesis Technische Univ., Delft (Netherlands).
- [13] D. Guan, L. Yam, M. Mignolet e Y. Liy, «Experimental modal analysis of tires,» *Experimental Techniques*, n. 39-45, 2000.
- [14] Z. Geng, A. Popov e D. Cole, «Measurement, identification and modelling of damping in pneumatic tyres,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 49, pp. 1077-1094, 2007.
- [15] C. F. Diana G., *Dinamica dei sistemi meccanici*.
- [16] D. Ewins, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Wiley: Reserch Study Press, 1984.
- [17] M. D. Vivarelli, *Appunti di meccanica razionale*, Zanichelli.
- [18] D. Guan, L. Yam, M. Mignolet e Y. Liy, «Techniques: experimental modal analysis of tires».
- [19] *ASTM Standard, D422-63(2007), Standard Test Method for Particle-Size Analysis of Soils*, ASTM Standard, 2007.
- [20] *ASTM Stadard, D421-85(2007), Standard Practice for Dry Preparation of Soil Samples for Particle-Size Analysis and Determination of Soil Constants*, ASTM Standard, 2007.
- [21] ASAE Standard S313.2, 1990.
- [22] *ASTM Standard, D3080-11, Standard test method for direct shear test of soils underconsolidated drained conditions*, 2011.
- [23] T. Muro e J. O'Brien, *Terramechanics land location mechanics*.
- [24] F. M. Zoz e R. Grisso, «Tractor and traction performance». *ASAE Distinguished Lecture Series, Tractor Design No. 27*.

- [25] R. L. Raper, A. C. Bailey, E. C. Burt, T. R. Way e P. L. Liberati, «The effects of reduced inflation pressure on soil-tire interface stresses and soil strength,» *Journal of Terramechanic*, vol. 32, n. 1, pp. 43-51, 1995.
- [26] D. Gee-Clough, M. McAllister e D. Evernden, «Tractive performance of tractor drive tyres: I. The effect of lug height,» *Journal of Agricultural Engineering Research*, vol. 22, n. 4, pp. 373-384, 1977.
- [27] G. Bekker, Off-the-road locomotion.