

POLITECNICO DI MILANO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DEI SISTEMI
CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA MATEMATICA



TESI DI LAUREA DI SECONDO LIVELLO

**Analisi di ellitticità nel modello elastico
di Knowles generalizzato**

Relatore: Prof. Paolo Biscari

Candidato:

Claudio Omati

matr. 739460

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il prof. Biscari, relatore di questa tesi, per la sua costante disponibilità, la sua continua attenzione e cortesia dimostratemi e l'aiuto fornito durante la stesura.

Un ringraziamento ai miei genitori, che, con il loro sostegno, mi hanno permesso di raggiungere questo obiettivo.

Un ringraziamento ai compagni di studi Chiara, Ilaria, Francesco, Federica, per il loro sostegno e incoraggiamento. Il mio grazie più sentito è per Valentina: sia nei momenti allegri che in quelli più difficili il suo sostegno mi ha aiutato a conseguire questo risultato.

Un ultimo ringraziamento va doverosamente ai miei amici Marco, Andrea, Paola, Matteo, Alessandra, Giorgia, Gianluca per il loro supporto in ogni situazione.

Indice

1	Introduzione	5
2	Continui iperelastici ed ellitticità	7
2.1	Fondamenti di meccanica dei continui	7
2.2	Materiali elastici ed iperelastici	8
2.3	Isotropia e solidi elastici isotropi	9
2.4	Materiali isotropi elastici vincolati	10
2.5	Ellitticità ed ellitticità forte	13
2.5.1	Ellitticità	13
2.5.2	Ellitticità forte	15
2.6	Ellitticità ed ellitticità forte nel caso isotropo	20
2.6.1	Condizioni necessarie di ellitticità	20
2.6.2	Condizioni sufficienti di ellitticità	29
2.6.3	Condizioni necessarie e sufficienti di ellitticità forte	32
3	Modello di Knowles generalizzato: deformazioni uniassiali	36
3.1	Modello di Knowles generalizzato	36
3.2	Analisi preliminare di ellitticità	38
3.3	Simmetria uniassiale: disequazione tipo I	41
3.3.1	Caso radici $\in \mathbb{C}$	42
3.3.2	Caso radici $\in \mathbb{R}^+$	45
3.3.3	Caso radice $\lambda = 0^+$	56
3.4	Simmetria uniassiale: disequazione tipo II	58
3.4.1	Caso radici $\in \mathbb{C}$	58
3.4.2	Caso radici $\in \mathbb{R}^+$	59
3.4.3	Caso radice $\lambda = 0^+$	59
3.5	Analisi conclusiva del caso uniassiale	60
3.5.1	Caso $\beta > 0$	60
3.5.2	Caso $\beta < 0$	61
3.5.3	Conclusioni	67

4	Modello di Knowles generalizzato: deformazioni biassiali	70
4.1	Condizioni sull'autovalore infinitesimo	72
4.2	Condizioni sull'autovalore finito	73
4.3	Condizioni sull'autovalore infinito	74
4.4	Conclusioni	75

Elenco delle figure

2.1	Regione Λ nello \mathbf{z} -spazio	22
3.1	Radici $\in \mathbb{C}$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$	42
3.2	Radici $\in \mathbb{C}$, $\alpha < 0$, $\beta > 1/3$	44
3.3	Valori di β_{cr} , $0 < \alpha < 1/2$	46
3.4	Valori di massimo(rosso) e minimo(blu) di $f(\lambda, \alpha, \beta)$	46
3.5	Radici $\in \mathbb{R}^+$, $\alpha < 0$, $0 < \beta < 1/3$	48
3.6	Valori di β_{cr} al variare di α	50
3.7	Valore del minimo di $f(\lambda, \alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta < \beta_{cr}$	51
3.8	Valore del minimo di $f(\lambda, \alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta > \beta_{cr}$	51
3.9	Valore del minimo di $f(\lambda, \alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta < \beta_{cr}$	52
3.10	Valore del minimo di $f(\lambda, \alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta > \beta_{cr}$	53
3.11	Radice $\lambda = 0^+$, $\alpha < 0$, $\beta = 1/3$	56
3.12	Caso $\alpha = 0.1$, $\beta < 0$	62
3.13	Caso $\alpha = 0.2$, $\beta < 0$	62
3.14	Caso $\alpha = 0.4$, $\beta < 0$	63
3.15	Caso $\alpha = 0.47$, $\beta < 0$	63
3.16	Caso $\alpha = 0.7$, $\beta < 0$	64
3.17	Caso $\alpha = 1.1$, $\beta < 0$	65
3.18	Caso $\alpha = 5$, $\beta < 0$	65
3.19	Sommario dell'ellitticità	67
3.20	Ellitticità in caso $\alpha \in (0, 1/2)$, $\beta > 1/3$	68
3.21	Ellitticità e comportamento di W	68
4.1	Positività e negatività nel caso $i=1$	72
4.2	Positività e negatività nel caso $i=2$	73
4.3	Positività e negatività nel caso $i=3$	74

Capitolo 1

Introduzione

Conoscere il comportamento dei materiali sottoposti a deformazioni è essenziale per prevedere la loro risposta dinamica a sollecitazioni generiche.

La sola conoscenza delle modalità con cui un corpo si deforma non è però sufficiente per ottenere un modello esaustivo del comportamento del materiale. Si rende quindi necessario lo studio della stabilità del materiale durante la deformazione, in modo tale da avere il quadro completo del problema fisico in esame. Più precisamente, il concetto di stabilità è reso esplicito attraverso lo studio dell'ellitticità delle equazioni che governano il comportamento materiale.

Lo scopo di questo elaborato è quello di introdurre i concetti di ellitticità ed ellitticità forte (e le relative condizioni) da applicare a modelli che simulano i comportamenti di solidi iperelastici isotropi incomprimibili.

Particolare importanza è stata data al significato fisico-matematico dell'ellitticità e alla sua applicazione sul modello in esame, cioè quello di Knowles generalizzato. Questo modello è caratterizzato dalla presenza contemporanea di due parametri caratteristici (α, β) e rappresenta un materiale reale che, per piccole deformazioni ha un comportamento lineare ma che per opportuni valori dei parametri possiede una deformazione massima consentita.

L'analisi si sviluppa secondo il seguente procedimento: vengono prima introdotte le condizioni di ellitticità ed ellitticità forte e in seguito applicate al modello di Knowles generalizzato.

Inizialmente è verificato il caso uniassiale che, al variare dei parametri caratteristici (α, β) del modello, ha prodotto numerosi sottocasi esaminati anche con l'ausilio di simulazioni numeriche. I risultati di ellitticità ottenuti sono stati comparati con il comportamento del modello già noto in precedenza, giungendo all'identificazione di regioni del piano (α, β) e di intervalli di valori degli allungamenti per cui vi è o meno stabilità durante particolari classi di deformazioni.

L'equivalente analisi è stata poi ripetuta nel caso biassale, arrivando a definire (almeno in particolari casi asintotici) delle regioni di ellitticità con il rispettivo comportamento del modello. In particolare si è notata una corretta corrispondenza di una zona del piano (α, β) di ellitticità per entrambi i casi in esame.

Capitolo 2

Continui iperelastici ed ellitticità

In questo capitolo verranno richiamati alcuni concetti base della meccanica dei continui, utili per la comprensione dei capitoli successivi.

2.1 Fondamenti di meccanica dei continui

Sia \mathcal{R} una regione tridimensionale aperta occupata da un corpo nella configurazione di riferimento. La deformazione del corpo è descritta dalla trasformazione:

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{su } \mathcal{R}, \quad (2.1)$$

dove $\mathbf{y} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^*$, \mathbf{x} è il vettore posizione di un generico punto in \mathcal{R} , $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ è la sua immagine deformata in \mathcal{R}^* , \mathbf{u} è il campo di spostamento.

Sia \mathbf{F} il *gradiente di deformazione*, tensore del secondo ordine invertibile:

$$\mathbf{F} = \nabla \hat{\mathbf{y}} = [\partial \hat{y}_i / \partial x_j] = [\delta_{ij} + \partial u_i / \partial x_j] \quad \text{su } \mathcal{R}, \quad (2.2)$$

e definiamo $J = \det(\mathbf{F})$ che rappresenta il rapporto volumetrico del solido o, più specificamente, la misura del volume corrente per unità di volume nella configurazione di riferimento.

La condizione di invertibilità locale della deformazione richiede che, durante il moto, non vi siano compenetrazioni di materia implicando quindi che $J = \det(\mathbf{F}) \neq 0$.

L'assunzione di *incomprimibilità* del materiale introduce un ulteriore vincolo sul determinante di \mathbf{F} , cioè:

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

dove $\{\lambda_i\}$ sono gli autovalori.

Il gradiente di deformazione \mathbf{F} si può decomporre (e la decomposizione vale localmente per ogni punto del corpo) in una dilatazione e una rotazione:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$$

dove \mathbf{R} è un *tensore di rotazione* ed è un tensore ortonormale (ortogonale a determinante unitario), mentre \mathbf{U} e \mathbf{V} sono i *tensori di dilatazione destro e sinistro*. Per eliminare il termine di rotazione rigida \mathbf{R} possono essere utilizzati i tensori \mathbf{C} e \mathbf{B} , definiti rispettivamente *tensori di deformazione di Cauchy-Green destro e sinistro*:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad \text{su } \mathcal{R}. \quad (2.3)$$

2.2 Materiali elastici ed iperelastici

Un materiale elastico di Cauchy è tale che, per ogni punto materiale, lo stato di sforzo nella configurazione attuale è determinato solo dallo stato di deformazione di questa configurazione relativa a una scelta arbitraria della configurazione di riferimento.

Inoltre, l'elasticità di Cauchy ha una struttura di tipo non-conservativo, cioè il lavoro dello sforzo dipende dal percorso compiuto e quindi non è possibile ottenere lo sforzo da una funzione potenziale scalare.

Si parla quindi di elasticità di Cauchy se i materiali sono caratterizzati dalla proprietà di reversibilità della risposta materiale in termini tensionali, cioè lo stato tensionale si riporta alla condizione iniziale se viene interrotta la deformazione (e di conseguenza se viene interrotta la sollecitazione il corpo ritorna alla configurazione iniziale).

Sia \mathbf{T} il *tensore di Cauchy* definito come:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{F})$$

dove \mathbf{H} rappresenta la funzione risposta del materiale elastico di Cauchy relativa ad una data configurazione di riferimento.

Utilizzando il teorema di decomposizione polare $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ e la richiesta di obiettività si ha:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\mathbf{H}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T$$

dove però le proprietà dei materiali elastici di Cauchy non sono influenzati dalla parte rotazionale \mathbf{R} .

Si arriva quindi a definire il *tensore di sforzo nominale* \mathbf{S} , definito su \mathcal{R} , come:

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}, \quad (2.4)$$

Per quanto riguarda i materiali iperelastici, è necessario introdurre il concetto di **energia di deformazione**, cioè una funzione scalare che misura l'energia racchiusa nel materiale come risultato di una deformazione.

Dunque un materiale elastico per il quale esiste una energia di deformazione che mette in relazione sforzo e deformazione si chiama materiale elastico di

Green o materiale iperelastico.

Indicata con $W = W(\mathbf{F})$ la funzione energia di deformazione, si può quindi riscrivere il tensore di sforzo nominale \mathbf{S} come:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) \quad (2.5)$$

La funzione W , come conseguenza della natura particolare derivante dalla elasticità di Cauchy, è una funzione obiettiva scalare di \mathbf{F} e fisicamente rappresenta l'energia elastica accumulata la quale non è influenzata da un moto rigido sovrapposto dopo la deformazione.

2.3 Isotropia e solidi elastici isotropi

La proprietà di isotropia esprime che, in una data configurazione di riferimento, la risposta meccanica del materiale non mostra direzioni preferenziali di deformazione. Da ciò segue che un materiale elastico isotropo è un materiale elastico il cui gruppo di simmetria¹ contiene l'adatto gruppo ortogonale per almeno una configurazione di riferimento.

Matematicamente, si ha che il tensore di Cauchy:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{F}) = \mathbf{H}(\mathbf{V}) = \mathbf{H}(\mathbf{V}\mathbf{Q}^T)$$

con \mathbf{Q} tensore ortogonale.

La funzione risposta \mathbf{H} relativa a questa configurazione è tale che:

$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{H}(\mathbf{V})\mathbf{Q}^T$$

per ogni \mathbf{Q} ortogonale.

A una funzione \mathbf{H} di questo tipo è riferita una funzione tensore isotropa definita su uno spazio di tensori simmetrici definiti positivi del secondo ordine. Si può allora definire:

Sia ϕ una funzione scalare definita su uno spazio di tensori simmetrici definiti positivi. Allora se

$$\phi(\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T) = \phi(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{Q} \text{ ortogonale}$$

si può dire che ϕ è una *funzione scalare isotropa*.

I seguenti teoremi forniscono importanti rappresentazioni e proprietà per funzioni scalari isotrope.

¹Un gruppo di simmetria \mathcal{G} è l'insieme di tutte le simmetrie del piano che lasciano invariata una figura. In questo caso queste isometrie sono rappresentate da tensori ortogonali, in relazione alla configurazione di riferimento scelta. In particolare, per materiali elastici di Cauchy il gruppo di simmetria non è influenzato dal cambiamento della configurazione di riferimento dovuta a una pura dilatazione arbitraria.

Teorema 1 Sia ϕ una funzione scalare definita su uno spazio di tensori simmetrici definiti positivi. Allora $\phi(\mathbf{V})$ è invariante scalare di \mathbf{V} se e solo se esiste una funzione $\hat{\phi}$ definita su $(0, \infty)^3$ tale che

$$\phi(\mathbf{V}) = \hat{\phi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

dove

$$\hat{\phi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \hat{\phi}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2) = \hat{\phi}(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2) \quad (2.6)$$

e λ_i sono i valori principali di \mathbf{V} . Una formulazione equivalente può essere data da

$$\phi(\mathbf{V}) = \Phi(I_1, I_2, I_3) \quad (2.7)$$

dove I_i sono gli invarianti principali di \mathbf{V} .

Teorema 2 Una funzione \mathbf{H} , stimatrice di tensori del secondo ordine simmetrici, definita su uno spazio di tensori simmetrici del secondo ordine, è isotropa se e solo se è rappresentabile come

$$\mathbf{H}(\mathbf{V}) = \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \mathbf{V} + \phi_2 \mathbf{V}^2 \quad (2.8)$$

dove ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 sono invarianti scalari di \mathbf{V} .

I tensori \mathbf{C} e \mathbf{B} sono entrambi simmetrici definiti positivi e quindi, grazie al teorema di decomposizione spettrale, si può scrivere che:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 c^{(i)} \otimes c^{(i)}$$

dove λ_i sono gli allungamenti principali. Utilizzando i teoremi appena presentati si arriva ad esplicitare i tensori definiti fino ad ora attraverso gli invarianti principali di \mathbf{C} :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] = \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2, \\ I_3 = \det(\mathbf{C}) = J^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{cases}$$

Ora, facendo riferimento al Teorema 1, possiamo considerare W come funzione degli invarianti principali I_1, I_2, I_3 , oppure equivalentemente come una funzione simmetrica degli allungamenti principali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Si può quindi adottare la notazione $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2.4 Materiali isotropi elastici vincolati

Durante una deformazione, i corpi possono presentare dei vincoli di inestensibilità oppure il loro cambiamento può avvenire a volume costante. Inizialmente consideriamo una funzione regolare C e una deformazione con vincolo locale tale che

$$C(\mathbf{F}) = 0$$

A causa del vincolo, lo sforzo ora non può più essere dipendente solo dalla deformazione. Allora è possibile aggiungere a \mathbf{S} un arbitrario scalare, multiplo di $\partial C/\partial \mathbf{F}$, che non comprometta la potenza dello sforzo. Quindi si ha che

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}(\mathbf{F}) + q \frac{\partial C}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) \quad (2.9)$$

La (2.9) rappresenta quindi la relazione sforzo-deformazione per un solido elastico soggetto a un singolo vincolo, dove q è uno scalare arbitrario e \mathbf{H} è la funzione risposta.

Nel caso di materiale isotropo iperelastico, la (2.9) si trasforma in:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) + q \frac{\partial C}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F})$$

e con il vincolo di incomprimibilità si ha

$$C(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}) - 1 = 0, \quad \partial C/\partial \mathbf{F} = \mathbf{F}^{-T},$$

per cui:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}) - p \mathbf{F}^{-T}, \quad S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}}(\mathbf{F}) - p F_{ji}^{-1}. \quad (2.10)$$

dove p , assunta differenziabile con continuità su \mathcal{R} , è il campo di pressione arbitraria necessario per soddisfare la richiesta di incomprimibilità.

Utilizzando l'equazione di bilancio della quantità di moto e l'equazione di bilancio del momento angolare in termini del tensore nominale \mathbf{S} si ha che, all'equilibrio e in assenza di forze esterne,

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{S} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S}^T \quad \text{su } \mathcal{R},$$

che porta quindi al sistema di equazioni alle derivate parziali

$$c_{ijkl}(\mathbf{F}) u_{k,lj} - p_{,j} F_{ji}^{-1} = 0, \quad J = \det(\mathbf{F}) = 1 \quad \text{su } \mathcal{R}. \quad (2.11)$$

dove $c_{ijkl}(\mathbf{F})$ sono le componenti del tensore del quarto ordine definito da:

$$c_{ijkl}(\mathbf{F}) = c_{klij}(\mathbf{F}) = \frac{\partial^2 W(\mathbf{F})}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}.$$

Nel caso isotropo consideriamo l'energia di deformazione W dipendente solo dai primi due invarianti di \mathbf{C} e quindi:

$$\frac{\partial I_1}{\partial F_{ij}} = 2F_{ij}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial F_{ij}} = 2I_1 F_{ij} - 2B_{il} F_{lj}, \quad \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} = J F_{ji}^{-1}. \quad (2.12)$$

Per convenienza si adotterà la notazione ristretta:

$$\hat{W}_\alpha = \frac{\partial \hat{W}(I_1, I_2)}{\partial I_\alpha}, \quad \hat{W}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \hat{W}(I_1, I_2)}{\partial I_\alpha \partial I_\beta}. \quad (2.13)$$

Si arriva quindi a definire le relazioni sforzo-deformazione per un solido isotropo iperelastico incomprimibile:

$$\begin{cases} \mathbf{S} = 2(\hat{W}_1 + I_1 \hat{W}_2) \mathbf{F} - 2\hat{W}_2 \mathbf{B} \mathbf{F} - p \mathbf{F}^{-T}, \\ S_{ij} = 2(\hat{W}_1 + I_1 \hat{W}_2) F_{ij} - 2\hat{W}_2 B_{il} F_{lj} - p F_{ji}^{-1}. \end{cases}$$

e, di conseguenza, il tensore di Cauchy \mathbf{T} può essere riscritto come:

$$\mathbf{T} = 2(\hat{W}_1 + I_1 \hat{W}_2) \mathbf{B} - 2\hat{W}_2 \mathbf{B}^2 \mathbf{F} - p \mathbf{I} \quad (2.14)$$

Da (2.14) si nota che gli assi principali di \mathbf{T} e \mathbf{B} coincidono. Inoltre, chiamati t_i gli sforzi principali associati agli allungamenti principali λ_i , si ha:

$$t_i = -p + 2\lambda_i^2 [\hat{W}_1 + (I_1 - \lambda_i^2) \hat{W}_2].$$

Nelle sezioni successive verranno utilizzate le *disuguaglianze di Baker-Ericksen*:

$$(t_i - t_j)(\lambda_i - \lambda_j) > 0 \quad \text{se } \lambda_i \neq \lambda_j$$

le quali implicano che il maggiore sforzo principale si manifesta nella direzione del maggior allungamento principale.

In termini di energia di deformazione, si ha l'equivalente:

$$\hat{W}_1 + (\lambda_i \lambda_j)^{-2} \hat{W}_2 > 0 \quad \text{se } \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (2.15)$$

2.5 Ellitticità ed ellitticità forte

Lo studio della stabilità di un materiale è di notevole importanza nell'analisi di un problema fisico. Attraverso l'indagine di particolari criteri formulati a partire dallo studio delle diverse condizioni di stabilità materiale è possibile descrivere il comportamento intrinseco dell'oggetto in esame.

La stabilità materiale si può dividere in due aspetti fondamentali: l'aspetto statico e l'aspetto dinamico.

In entrambi i casi della sollecitazione si analizza la risposta meccanica del materiale a variazioni infinitesime a partire dallo stato di deformazione finita del quale si indaga il carattere di stabilità.

In questa sezione verranno presentati i criteri di **ellitticità ed ellitticità forte**, seguendo lo schema illustrato in [2].

In particolare, l'analisi che verrà esplicitata nei capitoli successivi è rivolta ad un particolare modello, denominato *Knowles generalizzato*, al quale verranno applicati i criteri di stabilità.

2.5.1 Ellitticità

Per fornire una definizione di ellitticità per il sistema di equazioni alle derivate parziali (2.11), si consideri una superficie \mathcal{S} contenuta interamente all'interno di \mathcal{R} tale che ammetta una parametrizzazione biunivoca e due volte differenziabile

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2) \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \Sigma, \quad (2.16)$$

dove Σ è una regione del piano parametrizzato e (ξ_1, ξ_2) sono coordinate curvilinee ortogonali su \mathcal{S} . Sia P un punto arbitrario fissato su \mathcal{S} .

Allora, all'interno di un intorno tridimensionale di P, si possono introdurre le coordinate curvilinee ortogonali (ξ_1, ξ_2, ζ) tali che

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2, \zeta) = \hat{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2) + \zeta \mathbf{n}(\xi_1, \xi_2), \quad (2.17)$$

nel quale \mathbf{n} è il versore normale di \mathcal{S} e $|\zeta|$ è la distanza perpendicolare da \mathcal{S} di un punto con vettore di coordinate \mathbf{x} . La mappa (2.17) è localmente biunivoca e la sua inversa è data da:

$$\xi_\alpha = \hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \zeta = \hat{\zeta}(\mathbf{x}), \quad (2.18)$$

dove $\hat{\xi}_\alpha$ e $\hat{\zeta}$ sono definite e due volte differenziabili con continuità intorno a P.

Se si rilassa la richiesta iniziale di uniformità di \mathbf{u} e p , si può considerare la soluzione (\mathbf{u}, p) di (2.11) con \mathbf{u} differenziabile con continuità e solo a tratti due volte differenziabile con continuità, p continua ma solo a tratti differenziabile con continuità su \mathcal{R} .

Indicando questa soluzione (\mathbf{u}, p) come *soluzione rilassata* e definendo

$$\bar{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2, \zeta) = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2, \zeta)), \quad \bar{p}(\xi_1, \xi_2, \zeta) = p(\bar{\mathbf{x}}(\xi_1, \xi_2, \zeta)), \quad (2.19)$$

si conferma con l'aiuto di (2.18) che:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{k,lj} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \xi_\alpha} \hat{\xi}_{\alpha,lj} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \zeta} \hat{\zeta}_{l,j} + \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha} \hat{\xi}_{\alpha,l} \hat{\xi}_{\beta,j} + \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \zeta \partial \xi_\alpha} \hat{\xi}_{\alpha,l} \hat{\zeta}_{j} + \\ \quad + \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \xi_\alpha \partial \zeta} \hat{\zeta}_{l} \hat{\xi}_{\alpha,j} + \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \zeta^2} \hat{\zeta}_{l} \hat{\zeta}_{j}, \\ p_{,j} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi_\alpha} \hat{\xi}_{\alpha,j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \hat{\zeta}_{j}. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Dalla precedente assunzione di uniformità di \mathbf{u} , p e della mappa (2.17), le derivate parziali prime e seconde di $\bar{\mathbf{u}}_k$ e la derivata parziale prima di \bar{p} , tranne eventualmente $\partial^2 \bar{u}_k / \partial \zeta^2$ e $\partial \bar{p} / \partial \zeta$, sono continue in un intorno di P . Inoltre, le ultime due derivate possono avere al massimo discontinuità finite di tipo salto attraverso \mathcal{S} .

Peraltro, (2.20) e l'uniformità della mappa inversa (2.18) danno:

$$[u_{k,lj}] = [\partial^2 \bar{u}_k / \partial \zeta^2] \hat{\zeta}_l \hat{\zeta}_j, \quad [p_{,j}] = [\partial \bar{p} / \partial \zeta] \hat{\zeta}_j \quad \text{su } \mathcal{S}, \quad (2.21)$$

dove $[h]$ indica il salto di una funzione h attraverso \mathcal{S} .

La seconda condizione di (2.11) implica $J_{,j} = 0$, la quale, a causa del vincolo di incomprimibilità, è equivalente a

$$F_{lk}^{-1} u_{k,lj} = 0 \quad \text{su } \mathcal{B}. \quad (2.22)$$

Di conseguenza, da (2.21), (2.22) e dalla continuità di \mathbf{F} e c_{ijkl} , le equazioni (2.11) forniscono:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{ijkl}(\mathbf{F}) [\partial^2 \bar{u}_k / \partial \zeta^2] \hat{\zeta}_l \hat{\zeta}_j - [\partial \bar{p} / \partial \zeta] F_{ji}^{-1} \hat{\zeta}_j = 0, \\ F_{lk}^{-1} [\partial^2 \bar{u}_k / \partial \zeta^2] \hat{\zeta}_l \hat{\zeta}_j = 0 \quad \text{su } \mathcal{S}. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Inoltre, notando che $\nabla \hat{\zeta} / |\nabla \hat{\zeta}|$ su \mathcal{S} coincide con col versore normale \mathbf{n} di \mathcal{S} e definendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{ik}(\mathbf{F}; \mathbf{n}) = c_{ijkl}(\mathbf{F}) n_j n_l \quad \forall (\mathbf{F}, \mathbf{n}) \in \mathcal{L} \times \mathcal{U}, \\ \mathbf{v} = [\partial^2 \bar{u}_k / \partial \zeta^2], \quad q = |\nabla \hat{\zeta}|^{-1} [\partial \bar{p} / \partial \zeta] \quad \text{su } \mathcal{S}, \end{array} \right. \quad (2.24)$$

dove \mathcal{U} è l'insieme di tutti i versori, si deduce che:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{F}; \mathbf{n}) \mathbf{v} - q \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}) = 0 \quad \text{su } \mathcal{S}. \quad (2.25)$$

dove \mathbf{Q} è un tensore del secondo ordine chiamato *tensore acustico*, il quale viene analizzato nelle deformazioni incrementali per verificare la presenza di fenomeni biforcativi con discontinuità.

Chiaramente (2.25) crea quattro equazioni lineari algebrice omogenee nel salto (v_i, q) , le quali ammettono solo la soluzione banale $v_i = 0, q = 0$ se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti non si annulla.

Si può quindi dire che *il sistema di equazioni alle derivate parziali (2.11) è ellittico per una soluzione rilassata (\mathbf{u}, p) in un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$ se e solo se \mathbf{u} è due volte differenziabile con continuità e p è differenziabile con continuità in \mathbf{x} .*

Di conseguenza, quando (2.11) è ellittico per la soluzione (\mathbf{u}, p) in \mathbf{x} , non ci sarà nessuna superficie (della uniformità richiesta) passante per \mathbf{x} in cui la derivata seconda normale $\partial^2 \bar{\mathbf{u}} / \partial \zeta^2$ o la derivata normale $\partial \bar{p} / \partial \zeta$ è discontinua.

Dalla (2.25) è evidente che (2.11) è ellittico per una soluzione rilassata (\mathbf{u}, p) in un punto \mathbf{x} se e solo se:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mathbf{F}; \mathbf{n}) = \det \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & -\hat{n}_1 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & -\hat{n}_2 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & -\hat{n}_3 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{U}, \\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{F}; \mathbf{n}), \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}, \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}), \end{array} \right. \quad (2.26)$$

o equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\mathbf{F}; \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \hat{n}_i \hat{n}_l Q_{jm} Q_{kn} \neq 0 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{U}, \\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{F}; \mathbf{n}), \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}, \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}), \end{array} \right. \quad (2.27)$$

dove ϵ_{ijk} indica le componenti dell'alternatore tridimensionale.

Se (2.27) è violata per qualche versore \mathbf{n} , allora \mathbf{n} è normale ad una superficie caratteristica in \mathcal{R} passante per \mathbf{x} . Queste superfici caratteristiche sono le uniche possibili portatrici di discontinuità in $\partial^2 \bar{\mathbf{u}} / \partial \zeta^2$ o $\partial \bar{p} / \partial \zeta$, e l'ellitticità impedisce l'esistenza di queste superfici caratteristiche.

2.5.2 Ellitticità forte

Per quanto riguarda invece la definizione di **ellitticità forte** per il sistema (2.11), il materiale in esame si può definire stabile se la velocità di propagazione delle onde piane infinitesime, che si propagano nell' elemento di materiale omogeneamente deformato, è reale (non nulla).

La condizione di ellitticità forte può essere anche interpretata come una condizione di esclusione di modi di biforcazione di tipo *shear-band* (bande di taglio).

Una shear-band è una zona ristretta di intenso sforzo di taglio che si sviluppa durante una rilevante deformazione in particolari materiali duttili, come ad

esempio leghe, metalli, materiali granulari, plastiche, polimeri, elastomeri. Ciò che accade è che la presenza di tale fenomeno sia il preludio di ulteriori danni o fratture al materiale dovute alla localizzazione della deformazione, in quanto le variazioni nella conformazione delle molecole del materiale possono diventare permanenti portando quindi ad ampie deformazioni plastiche. Quest'ultime, pur essendo localizzate, possono anche estendersi in volume comportando una minore duttilità dell'oggetto ed assorbimento di energia di deformazione e tenacità.

A questo proposito si consideri un'onda piana di pressione-spostamento infinitesimale sovrapposta a una deformazione finita omogenea di un corpo iperelastico incomprimibile che occupa l'intero spazio 3D \mathcal{E} . Così, se t denota il tempo, $\tilde{\mathbf{F}}$ e \tilde{p} denotano il gradiente di deformazione costante e il campo di pressione associato alla pre-deformazione omogenea, siano:

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t) = \tilde{p} + r(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{E} \times (-\infty, +\infty), \quad (2.28)$$

con $|\nabla\mathbf{w}|$ e $|r|$ infinitesimi, e si prenda:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}\varphi(\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x} - ct), \quad r(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x} - ct), \quad (2.29)$$

dove \mathbf{a} e \mathbf{l} sono versori costanti che determinano, rispettivamente, la direzione di moto e di propagazione dell'onda piana in esame, mentre $c \neq 0$ è la sua velocità di propagazione.

Inoltre, φ e ψ sono funzioni a valori scalari, rispettivamente, due volte e una volta differenziabili con continuità in $(-\infty, +\infty)$.

Infine, si consideri che le derivate φ'' e ψ' non si annullino identicamente.

Da (2.28) e dalla condizione di incomprimibilità, si ha:

$$\mathbf{F} = \nabla\hat{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{F}} + \nabla\mathbf{w}, \quad J = \det(\mathbf{F}) = 1 \quad \text{su } \mathcal{E} \times (-\infty, +\infty), \quad \det(\tilde{\mathbf{F}}) = 1. \quad (2.30)$$

Gli sforzi nominali dipendenti dal tempo indotti dal moto (2.28) derivano dalla relazione costitutiva (2.10) e sono ora:

$$S_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{su } \mathcal{E} \times (-\infty, +\infty), \quad (2.31)$$

dove $\rho > 0$ è la densità di massa costante e \mathbf{u} è il campo di spostamento.

Dalla (2.28) si nota che

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \hat{y}_i(\mathbf{x}, t) - x_i = (\tilde{F}_{ij} - \delta_{ij})x_j + w_i(\mathbf{x}, t). \quad (2.32)$$

Ricordando le identità:

$$\det(\mathbf{F}) = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}F_{ip}F_{jq}F_{kr}, \quad \det(\mathbf{F})F_{ji}^{-1} = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jppq}F_{kp}F_{lq} \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{L}, \quad (2.33)$$

sostituendo (2.30) in (2.33) e linearizzando rispetto a $\nabla \mathbf{w}$, si arriva a:

$$\begin{cases} J = \det(\mathbf{F}) \approx \det(\tilde{\mathbf{F}}) + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pql} \tilde{F}_{ip} \tilde{F}_{jq} w_{k,l} = 1 + \tilde{F}_{lk}^{-1} w_{k,l} \\ F_{ji}^{-1} \approx \tilde{F}_{ji}^{-1} + \epsilon_{ikl} \epsilon_{j pq} \tilde{F}_{kp} w_{l,q}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Inoltre, espandendo $\partial W / \partial \mathbf{F}$ di (2.10) in serie di Taylor in \mathbf{F} rispetto a $\tilde{\mathbf{F}}$, e linearizzando rispetto a $\nabla \mathbf{w}$ e r si ottiene:

$$\sigma_{ij} \approx \left. \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial F_{ij}} \right|_{\mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}}} - \tilde{p} \tilde{F}_{ji}^{-1} + c_{ijkl}(\tilde{\mathbf{F}}) w_{k,l} - \tilde{p} \epsilon_{ikl} \epsilon_{j pq} \tilde{F}_{kp} w_{l,q} - r \tilde{F}_{ji}^{-1}. \quad (2.35)$$

Le (2.31), (2.30), assieme a (2.32), (2.34), (2.35), portano alla versione linearizzata delle equazioni del moto e alla condizioni linearizzata di incomprimibilità

$$\begin{cases} c_{ijkl}(\tilde{\mathbf{F}}) w_{k,lj} - r_{,j} \tilde{F}_{ji}^{-1} = \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \\ \tilde{F}_{lk}^{-1} w_{k,l} = 0 \quad \text{su } \mathcal{E} \times (-\infty, +\infty). \end{cases} \quad (2.36)$$

Per l'onda piana caratterizzata da (2.29), le equazioni (2.36) forniscono

$$\begin{cases} [R_{ik}(\tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{1}) a_k - \rho c^2 a_i] \varphi''(\mathbf{1} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} - ct) = l_i \psi'(\mathbf{1} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} - ct), \\ a_k l_k \varphi'(\mathbf{1} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} - ct) = 0, \end{cases} \quad (2.37)$$

nella quale

$$R_{ik}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbf{1}) = R_{ki}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbf{1}) = c_{ijkl}(\tilde{\mathbf{F}}) (\tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{1})_j (\tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{1})_l. \quad (2.38)$$

Da (2.37) segue che

$$a_k l_k = 0, \quad \psi'(\mathbf{1} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} - ct) = b \varphi''(\mathbf{1} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} - ct), \quad b = l_i a_k R_{ik}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbf{1}), \quad (2.39)$$

e dunque:

$$[\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbf{1}) - \rho c^2 \mathbf{1}] \mathbf{a} - b \mathbf{l} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{1} \cdot \mathbf{a} = 0. \quad (2.40)$$

Il sistema (2.40) è formato da quattro equazioni algebriche lineari omogenee in (a_i, b) e ha soluzioni non banali se e solo se il determinante della sua matrice dei coefficienti è nullo.

Il determinante della matrice dei coefficienti può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} R_{11} - \rho c^2 & R_{12} & R_{13} & -l_1 \\ R_{21} & R_{22} - \rho c^2 & R_{23} & -l_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} - \rho c^2 & -l_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 \end{bmatrix} &= \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} l_i l_p (R_{jq} - \rho c^2 \delta_{jq}) (R_{kr} - \rho c^2 \delta_{kr}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Espandendo il secondo membro di (2.41) si ha che l'equazione (2.40) ammette una soluzione non banale (a_i, b) se e solo se ρc^2 e il versore \mathbf{l} soddisfano l'equazione secolare:

$$\rho^2 c^4 - (R_{kk} - R_{ij}l_i l_j)\rho c^2 + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}l_i l_p R_{jq} R_{kr} = 0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbf{l}), \quad (2.42)$$

Si ha quindi che il discriminante di (2.42)

$$\Delta(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbf{l}) = (R_{kk} - R_{ij}l_i l_j)^2 - 2\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}l_i l_p R_{jq} R_{kr}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbf{l}), \quad (2.43)$$

è non negativo per ogni $\tilde{\mathbf{F}}$ non singolare e per ogni versore \mathbf{l} .

A questo scopo siano:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= R_{22} - R_{33}, & \alpha_2 &= R_{33} - R_{11}, & \alpha_3 &= R_{11} - R_{22}, \\ \gamma_1 &= 2R_{23}, & \gamma_2 &= 2R_{31}, & \gamma_3 &= 2R_{12} \end{aligned}$$

dove si nota che se $l_1 = l_3 = 0 \Rightarrow \Delta(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbf{l}) = \alpha_2^2 + \gamma_2^2 \geq 0$.

D'altra parte, se $l_1^2 + l_3^2 > 0$ si può verificare che, dopo una serie di calcoli (tenendo presente $l_i l_i = 1$):

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{\mathbf{F}}; \mathbf{l}) &= \left[\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 - \alpha_3 l_3^2 - \gamma_3 l_1 l_2 - \gamma_1 l_2 l_3 + \gamma_2 l_3 l_1 + \right. \\ &\quad \left. + 2(l_1^2 + l_3^2)^{-1}(\gamma_1 l_3 - \alpha_2 l_1)l_1 l_2^2 \right]^2 + \\ &\quad + \left[\gamma_1 l_1 - \gamma_2 l_2 - \gamma_3 l_3 + 2(l_1^2 + l_3^2)^{-1}(\gamma_2 l_3 - \alpha_2 l_1)l_2 l_3 \right]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Conseguentemente, $\forall \tilde{\mathbf{F}} \in \mathcal{L}$ e $\forall \mathbf{l} \in \mathcal{U}$ esistono due valori reali di ρc^2 , eventualmente coincidenti, che soddisfano l'equazione secolare.

Si può quindi dire che *il sistema di equazioni alle derivate parziali (2.11) è fortemente ellittico per una soluzione (\mathbf{u}, p) in un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$ se e solo se un corpo dello stesso materiale, occupante \mathcal{E} e soggetto a una deformazione omogenea con gradiente di deformazione $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$ e una pressione costante $\tilde{p} = p(\mathbf{x})$, ammette solo onde piane di pressione-spostamento infinitesimale della forma (2.29) col velocità di propagazione reali non nulle.*

Se (2.11) non è fortemente ellittico, allora esiste un \mathbf{l} tale che (2.42) è soddisfatta per due valori immaginari coniugati di c o per $c = 0$.

Nel primo caso, esisteranno dei moti infinitesimali sovrapposti della forma (2.29) con

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}e^{[i(\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} - ct)]}, \quad i^2 = -1,$$

che cresce senza limiti in tempo. Quando $c = 0$, a sua volta, si soddisfano le equazioni linearizzate del moto con

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}te^{[i\mathbf{l} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x}]},$$

in modo che in entrambi i casi il corpo è dinamicamente instabile.

E' quindi evidente che il sistema (2.11) per essere ellittico ha bisogno che entrambe le radici reali ρc^2 dell'equazione secolare (2.42) siano positive per $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$ e $\forall \mathbf{l}$.

Utilizzando la (2.42), si mostra che il caso precedentemente illustrato si verifica se e solo se

$$\begin{cases} \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}l_i l_p R_{jq} R_{kr} > 0, & F_{kk} - R_{ij}l_i l_j > 0 \quad \forall \mathbf{l} \in \mathcal{U}, \\ \mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{F}; \mathbf{l}), & \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (2.44)$$

Ma da (2.24) e (2.38) si ha

$$\mathbf{R}(\mathbf{F}; \mathbf{l}) = |\mathbf{F}^T \mathbf{l}|^2 \mathbf{Q}(\mathbf{F}; \mathbf{n}) \quad \forall (\mathbf{F}, \mathbf{l}) \in \mathcal{L} \times \mathcal{U}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^T \mathbf{l}}{|\mathbf{F}^T \mathbf{l}|}, \quad (2.45)$$

così che le condizioni di ellitticità forte (2.44) possono essere espresse in termini del tensore acustico \mathbf{Q} come:

$$\begin{cases} \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}\hat{n}_i \hat{n}_p Q_{jq} Q_{kr} > 0, & \hat{n}_l \hat{n}_l Q_{kk} - Q_{ij}\hat{n}_i \hat{n}_j > 0 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{U}, \\ \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{F}; \mathbf{n}), & \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (2.46)$$

Infine, confrontando (2.27) con (2.46), si ha la conferma che la ellitticità forte implica l'ellitticità.

Nella successiva sezione è presentata la derivazione da (2.27) e (2.46) di criteri di ellitticità specifici per la classe dei materiali *isotropi* in esame.

2.6 Ellitticità ed ellitticità forte nel caso isotropo

2.6.1 Condizioni necessarie di ellitticità

L'obiettivo è ora quello di ricavare da (2.27), la quale è condizione necessaria e sufficiente di ellitticità, un insieme di condizioni necessarie e sufficienti di ellitticità per il caso di un materiale isotropo. Questo insieme di condizioni coinvolge esclusivamente gli allungamenti principali λ_i , i quali entrano direttamente, così come attraverso la prima e seconda derivata parziale dell'energia di deformazione rispetto agli invarianti di deformazione o agli allungamenti principali. L'analisi seguirà il procedimento presente in [2].

Da (2.27) si ricava innanzitutto una condizione di ellitticità equivalente: considerando la matrice simmetrica $[C_{ij}] = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, avente autovalori λ_i^2 , esiste una matrice ortogonale $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{F})$ tale che

$$\mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M} = \mathbf{D}, \quad D_{ij} = \lambda_i^2 \delta_{ij}. \quad (2.47)$$

Per ogni \mathbf{F} non singolare e per ogni vettore \mathbf{m} , siano $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{F})$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{F}; \mathbf{m})$ le matrici ausiliarie in $\mathcal{R}^{3 \times 3}$ definite da

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^T \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{F}; \mathbf{m}) = \mathbf{N} \mathbf{Q}(\mathbf{F}; \mathbf{M} \mathbf{m}) \mathbf{N}^T, \quad (2.48)$$

dove \mathbf{Q} è la matrice delle componenti del tensore acustico.

Si nota che \mathbf{H} è simmetrica e, introducendo la notazione

$$\begin{cases} \mathbf{m} = \mathbf{M}^T \mathbf{n}, & \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}, & \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{n}}, \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{F}; \mathbf{m}), & \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{F}; \mathbf{n}) & \forall (\mathbf{F}, \mathbf{n}) \in \mathcal{L} \times \mathcal{U} \end{cases} \quad (2.49)$$

si ha la seguente equazione con matrici a blocchi in $\mathcal{R}^{4 \times 4}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\hat{\mathbf{m}} \\ \hat{\mathbf{m}}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -\hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{n}}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

dove $\mathbf{0}$ rappresenta il vettore colonna nullo in \mathcal{R}^3 .

Segue quindi che

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\hat{\mathbf{m}} \\ \hat{\mathbf{m}}^T & 0 \end{bmatrix} = (\det \mathbf{N})^2 \det \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -\hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{n}}^T & 0 \end{bmatrix} \quad \forall (\mathbf{F}, \mathbf{n}) \in \mathcal{L} \times \mathcal{U} \quad (2.51)$$

Da (2.26), (2.47) e (2.51) si ha che, per ogni \mathbf{F} ed \mathbf{m} ,

$$A(\mathbf{F}; \mathbf{M} \mathbf{m}) = \det \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & -\hat{m}_1 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & -\hat{m}_2 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & -\hat{m}_3 \\ \hat{m}_1 & \hat{m}_2 & \hat{m}_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{m}, \quad (2.52)$$

dove \mathbf{M} è ortogonale e \mathbf{D} diagonale.

Di conseguenza, una condizione necessaria e sufficiente di ellitticità, equivalente alla (2.27), è data da

$$A(\mathbf{F}; \mathbf{M}\mathbf{m}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}\hat{m}_i\hat{m}_p H_{jq}H_{kr} \neq 0 \quad \forall \mathbf{m} \in \mathcal{U}, \quad (2.53)$$

con $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{F}; \mathbf{m})$, $\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{m}$.

Quindi, utilizzando la (2.3) con l'ausilio della (2.13), si ha che per un materiale isotropo:

$$\begin{aligned} c_{ijkl}(\mathbf{F}) &= 2(\hat{W}_1 + I_1\hat{W}_2)\delta_{ik}\delta_{jl} + 4(\hat{W}_2 + \hat{W}_{11} + 2I_1\hat{W}_{12} + I_1^2\hat{W}_{22})F_{ij}F_{kl} \\ &\quad - 2\hat{W}_2(F_{il}F_{kj} + B_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ik}C_{jl}) - 4(\hat{W}_{12} + I_1\hat{W}_{22})(F_{ij}B_{km}F_{ml} \\ &\quad + B_{im}F_{mj}F_{kl}) + 4\hat{W}_{22}B_{im}F_{mj}B_{kn}F_{nl}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Inoltre, le componenti della matrice \mathbf{H} sono:

$$\begin{aligned} H_{ij}(\mathbf{F}; \mathbf{m}) &= 2[\hat{W}_1 + (I_1 - D_{kl}m_k m_l)\hat{W}_2]D_{ij}^{-1} \\ &\quad + 4\left(\frac{1}{2}\hat{W}_2 + \hat{W}_{11} + 2I_1\hat{W}_{12} + I_1^2\hat{W}_{22}\right)m_i m_j \\ &\quad - 2\hat{W}_2\delta_{ij} - 4(\hat{W}_{12} + I_1\hat{W}_{22})(m_i D_{jk}m_k + D_{il}m_l m_j) \\ &\quad + 4\hat{W}_{22}D_{ik}m_k D_{jl}m_l. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Siano β_i , w_i e Z_{ij} , Z definite da:

$$\begin{cases} \beta_i = \hat{W}_1 + \lambda_i^2 \hat{W}_2, \\ w_i = \lambda_i^2 (I_1 - \lambda_i^2) \beta_i + 2\lambda_i^2 (I_1^2 - 2I_2 - \lambda_i^4 - 2\lambda_i^{-2}) \\ \quad \times (\hat{W}_{11} + 2\lambda_i^2 \hat{W}_{12} + \lambda_i^4 \hat{W}_{22}), \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} Z_{11} = \lambda_1^{-2} \beta_2 \beta_3, \quad Z_{22} = \lambda_2^{-2} \beta_3 \beta_1, \quad Z_{33} = \lambda_3^{-2} \beta_1 \beta_2, \\ Z_{12} = \beta_2 w_3 + \lambda_1^{-2} \beta_1 \beta_3, \quad Z_{21} = \beta_1 w_3 + \lambda_2^{-2} \beta_2 \beta_3, \quad Z_{23} = \beta_3 w_1 + \lambda_2^{-2} \beta_2 \beta_1, \\ Z_{32} = \beta_2 w_1 + \lambda_3^{-2} \beta_3 \beta_1, \quad Z_{31} = \beta_1 w_2 + \lambda_3^{-2} \beta_3 \beta_2, \quad Z_{13} = \beta_3 w_2 + \lambda_1^{-2} \beta_1 \beta_2, \\ Z = 4\lambda_1^{-2} \beta_1^2 + 4\lambda_2^{-2} \beta_2^2 + 4\lambda_3^{-2} \beta_3^2 - \lambda_1^{-4} w_1^2 - \lambda_2^{-4} w_2^2 - \lambda_3^{-4} w_3^2 + 2\lambda_3^2 w_1 w_2 \\ \quad + 2\lambda_1^2 w_2 w_3 + 2\lambda_2^2 w_3 w_1. \end{cases} \quad (2.57)$$

A partire dalla (2.53), attraverso le (2.57), si verifica che per ogni \mathbf{F} e ogni vettore \mathbf{m} si ha:

$$A(\mathbf{F}; \mathbf{m}) = E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) \equiv 4Z_{ij}z_i^2 z_j + Zz_1 z_2 z_3, \quad z_k \equiv m_k^2. \quad (2.58)$$

Supponiamo ora che (2.11) sia ellittica in (\mathbf{u}, \mathbf{p}) e \mathbf{x} . Se $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{x})$ sono gli allungamenti principali corrispondenti, con $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, si ha che

$$E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \Lambda \quad (2.59)$$

dove $\Lambda = \{\mathbf{z} \mid z_i \geq 0, z_1 + z_2 + z_3 = 1\}$ è la regione chiusa del piano il cui bordo è il triangolo equilatero con vertici $\zeta_1 = (1, 0, 0)$, $\zeta_2 = (0, 1, 0)$, $\zeta_3 = (0, 0, 1)$.

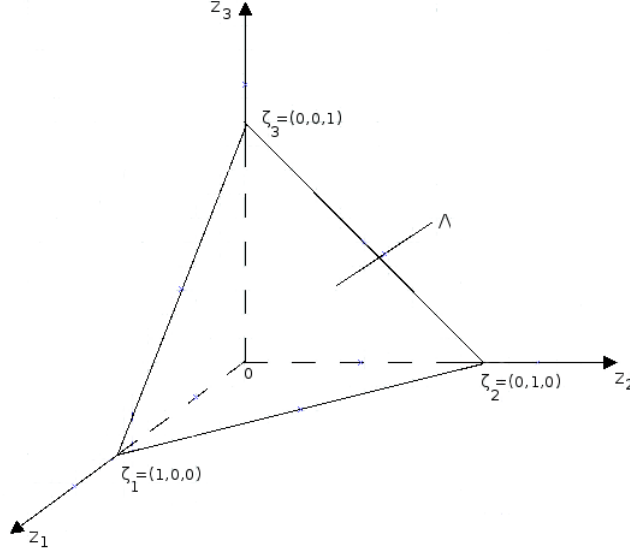


Figura 2.1: Regione Λ nello \mathbf{z} -spazio

Data la continuità di $E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z})$ in \mathbf{z} e la (2.59), in Λ si ha che:

$$E(\boldsymbol{\lambda}; \zeta_1)E(\boldsymbol{\lambda}; \zeta_3) > 0 \quad E(\boldsymbol{\lambda}; \zeta_2)E(\boldsymbol{\lambda}; \zeta_3) > 0 \quad (2.60)$$

che, grazie a (2.58) e (2.57), porta ad avere:

$$\beta_1\beta_3 > 0 \quad \beta_2\beta_3 > 0, \quad (2.61)$$

e

$$E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) > 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \Lambda. \quad (2.62)$$

Il seguente lemma servirà per dedurre le condizioni necessarie di ellitticità:

Lemma 1 *Siano a, b, c, d costanti reali, con $a > 0, d > 0$.*

Allora

$$as^3 + bs^2t + cst^2 + dt^3 > 0 \quad \forall s \geq 0, t \geq 0, s + t = 1$$

se e solo se

$$4ac^3 + 4db^3 - b^2c^2 - 18abcd + 27a^2d^2 > 0$$

oppure

$$b > 0, c > 0.$$

La disuguaglianza (2.62) richiede in particolare $E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) > 0$ sul lato del bordo triangolare di Λ con $z_1 = 0$, da cui, utilizzando la (2.58), si ha:

$$Z_{22}z_2^3 + Z_{23}z_2^2z_3 + Z_{32}z_2z_3^2 + Z_{33}z_3^2 > 0 \quad \forall z_2 \geq 0, z_3 \geq 0, z_2 + z_3 = 1 \quad (2.63)$$

dove, riconducendosi al Lemma, si è considerato

$$a = Z_{22}, b = Z_{23}, c = Z_{32}, d = Z_{33}, s = z_2, t = z_3.$$

Dal Lemma si può concludere che:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4Z_{22}Z_{32}^3 + 4Z_{33}Z_{23}^3 - Z_{23}^2Z_{32}^2 - 18Z_{22}Z_{23}Z_{32}Z_{33} + 27Z_{22}^2Z_{33}^2 > 0 \\ \text{oppure} \\ Z_{23} > 0, \quad Z_{32} > 0. \end{array} \right. \quad (2.64)$$

Ricordando la (2.61), si definiscono:

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{\lambda_i\beta_1\beta_2\beta_3} > 0, \quad \omega_i = \frac{w_i}{\lambda_i\beta_i}, \quad (2.65)$$

per cui, con l'aiuto delle (2.57) e (2.65), la (2.64) si trasforma in:

$$-\lambda_1^4\beta_1^4\beta_2^2\beta_3^2 [\omega_1 - (\rho_2\rho_3^{-1} + \rho_2^{-1}\rho_3)]^2 (\omega_1^2 - 4) > 0. \quad (2.66)$$

Si può quindi riscrivere la (2.64) come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^2 < 4 \\ \text{oppure} \\ \omega_1 + \rho_2\rho_3^{-1} > 0, \quad \omega_1 + \rho_2^{-1}\rho_3 > 0. \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Poichè la seconda alternativa in (2.67) implica

$$\omega_1 > -\min(\rho_2\rho_3^{-1}, \rho_2^{-1}\rho_3) \geq -1,$$

si ha che $\omega_1 + 2 > 0$.

Si arrivano a definire come condizioni necessarie di ellitticità le seguenti disuguaglianze:

$$\omega_i + 2 > 0 \quad (2.68)$$

e dall'utilizzo di $E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) > 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \Lambda$ in certi punti nell'interno $\dot{\Lambda}$ dell'area triangolare Λ , supponendo $z_i > 0$ e definendo le funzioni v_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = \rho_1(\omega_1 + \lambda_3\lambda_2^{-1}z_2z_3^{-1} + \lambda_2\lambda_3^{-1}z_3z_2^{-1}) + \rho_2\lambda_3\lambda_1^{-1}z_1z_3^{-1} + \rho_3\lambda_2\lambda_1^{-1}z_1z_2^{-1}, \\ v_2 = \rho_2(\omega_2 + \lambda_1\lambda_3^{-1}z_3z_1^{-1} + \lambda_3\lambda_1^{-1}z_1z_3^{-1}) + \rho_3\lambda_1\lambda_2^{-1}z_2z_1^{-1} + \rho_1\lambda_3\lambda_2^{-1}z_2z_3^{-1}, \\ v_3 = \rho_3(\omega_3 + \lambda_2\lambda_1^{-1}z_1z_2^{-1} + \lambda_1\lambda_2^{-1}z_2z_1^{-1}) + \rho_1\lambda_2\lambda_3^{-1}z_3z_2^{-1} + \rho_2\lambda_1\lambda_3^{-1}z_3z_1^{-1}. \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Attraverso numerosi passaggi algebrici che coinvolgono le equazioni precedentemente introdotte si ottiene:

$$E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) = -\beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 z_1 z_2 z_3 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2v_1 v_2 - 2v_2 v_3 - 2v_3 v_1) > 0 \quad \text{per } z_i > 0. \quad (2.70)$$

che porta ad avere

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2v_1 v_2 - 2v_2 v_3 - 2v_3 v_1 < 0 \quad \text{su } \dot{\Lambda}. \quad (2.71)$$

Perciò la (2.62) necessita come condizioni $v_3 < v_1 + v_2 + 2\sqrt{v_1 v_2}$, $v_i > 0$ su $\dot{\Lambda}$.

Introducendo la trasformazione

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha(\mathbf{z}; \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_3 \lambda_\alpha^{-1} z_\alpha z_3^{-1} \quad \forall \mathbf{z} \in \dot{\Lambda}, \quad (2.72)$$

essa è in realtà una mappa, dipendente da $\boldsymbol{\lambda}$, da $\dot{\Lambda}$ nel primo quadrante

$$\Pi = \{(\eta_1, \eta_2) | \eta_1 > 0, \eta_2 > 0\}$$

nel piano (η_1, η_2) .

Invertendo le (2.72) si ha che:

$$\begin{cases} z_\alpha = z_\alpha(\eta_1, \eta_2; \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_\alpha \eta_\alpha (\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \lambda_3)^{-1}, \\ z_3 = z_3(\eta_1, \eta_2; \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_3 (\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \lambda_3)^{-1} \quad \forall (\eta_1, \eta_2) \in \Pi. \end{cases} \quad (2.73)$$

Siano ora f e g due funzioni definite da

$$\begin{cases} f(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \rho_1, \rho_2, \rho_3) = \rho_1 (\omega_1 + \eta_2 + \eta_2^{-1}) + \rho_2 \eta_1 + \rho_3 \eta_1 \eta_2^{-1}, \\ g(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) = \rho_1 \omega_1 + \rho_2 \omega_2 + 2\rho_2 \eta_1 + 2\rho_1 \eta_2 \\ + 2 [f(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \rho_1, \rho_2, \rho_3) f(\eta_2, \eta_1; \omega_2, \rho_2, \rho_1, \rho_3)]^{1/2} \quad \forall (\eta_1, \eta_2) \in \Pi. \end{cases} \quad (2.74)$$

Da (2.69), (2.72), (2.74) si nota che

$$\begin{cases} f(\eta_1(\mathbf{z}; \boldsymbol{\lambda}), \eta_2(\mathbf{z}; \boldsymbol{\lambda}); \omega_1, \rho_1, \rho_2, \rho_3) = v_1 > 0, \\ f(\eta_2(\mathbf{z}; \boldsymbol{\lambda}), \eta_1(\mathbf{z}; \boldsymbol{\lambda}); \omega_2, \rho_2, \rho_1, \rho_3) = v_2 > 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \dot{\Lambda}. \end{cases} \quad (2.75)$$

Di conseguenza, (2.62) necessita

$$\rho_3 \omega_3 < g(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \quad \forall (\eta_1, \eta_2) \in \Pi. \quad (2.76)$$

Quest'ultima disequazione porta ad una ulteriore restrizione su ω_i, ρ_i scegliendo le η_1, η_2 che minimizzano $g(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$ su Π .

Infatti, fissate ω_α, ρ_i , prendiamo $(\eta_1, \eta_2) = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ dove

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \eta_\alpha} \right|_{(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)} = 0. \quad (2.77)$$

Sostituendo le (2.74) nella (2.77) si ha l'unica soluzione:

$$\bar{\eta}_1 = \chi(1 - \chi)^{-1}, \quad \bar{\eta}_2 = (1 - \chi)^{-1}, \quad \chi = [\rho_1(\omega_1 + 2)/\rho_2(\omega_2 + 2)]^{1/2} \quad (2.78)$$

e la (2.74) diviene

$$\begin{cases} f(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2; \omega_1, \rho_1, \rho_2, \rho_3) = \chi^2 f(\bar{\eta}_2, \bar{\eta}_1; \omega_2, \rho_2, \rho_1, \rho_3), \\ g(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2; \omega_1, \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) = 2\rho_3 + \left[\sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} + \sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)} \right]^2. \end{cases} \quad (2.79)$$

Segue quindi da (2.76) e (2.79) che

$$\begin{cases} \rho_1(\omega_1 - 2) < \left[\sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)} + \sqrt{\rho_3(\omega_3 + 2)} \right]^2, \\ \rho_2(\omega_2 - 2) < \left[\sqrt{\rho_3(\omega_3 + 2)} + \sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} \right]^2, \\ \rho_3(\omega_3 - 2) < \left[\sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} + \sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)} \right]^2. \end{cases} \quad (2.80)$$

Si è ora in grado di riassumere quanto fin ora analizzato:

per il caso specifico di isotropia, il sistema di equazioni alle derivate parziali (2.11) è ellittico per una soluzione (\mathbf{u}, p) in un punto \mathbf{x} solo se

$$A(\mathbf{F}; \mathbf{n}) > 0 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

dove $A(\mathbf{F}; \mathbf{n})$ è il determinante definito in (2.26) e coinvolge il tensore acustico introdotto nella (1.28).

Inoltre, ricordando le definizioni (2.56) e (2.65), un set di **condizioni necessarie di ellitticità** è dato da:

$$\begin{cases} \beta_1\beta_3 > 0, \quad \beta_2\beta_3 > 0, \\ \omega_i + 2 > 0, \\ \rho_1(\omega_1 - 2) < \left[\sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)} + \sqrt{\rho_3(\omega_3 + 2)} \right]^2, \\ \rho_2(\omega_2 - 2) < \left[\sqrt{\rho_3(\omega_3 + 2)} + \sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} \right]^2, \\ \rho_3(\omega_3 - 2) < \left[\sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} + \sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)} \right]^2. \end{cases} \quad (2.81)$$

Il set di disuguaglianze può essere riletto esprimendo β_i , w_i attraverso le derivate parziali dell'energia di deformazione \hat{W} (rispetto agli allungamenti principali λ_i). Per prima cosa, sfruttando il vincolo di incomprimibilità

$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, si ha che gli invarianti principali di possono riscrivere come:

$$\begin{cases} I_1 = \bar{I}_1(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}, \\ I_2 = \bar{I}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2}, \\ I_3 = J^2 = 1, \end{cases} \quad (2.82)$$

arrivando a definire la particolare energia di deformazione $\bar{W}(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\bar{W}(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{W}(\bar{I}_1(\lambda_1, \lambda_2), \bar{I}_2(\lambda_1, \lambda_2)), \quad (2.83)$$

continuando ad adottare le notazioni di derivate parziali in (2.13).

Introducendo (2.83) in (2.56), dopo opportuni passaggi algebrici, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \bar{\beta}_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)^{-1} \lambda_2 \bar{W}_2(\lambda_1, \lambda_2), \\ w_1 = \bar{w}_1(\lambda_1, \lambda_2) = -(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)^{-1} \lambda_2^{-1} \bar{W}_2(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{1}{2} \lambda_3^{-2} \bar{W}_{22}(\lambda_1, \lambda_2), \\ \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \quad (\lambda_2 \neq \lambda_3), \\ \\ \beta_2 = \bar{\beta}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^{-1} \lambda_1 \bar{W}_1(\lambda_1, \lambda_2), \\ w_2 = \bar{w}_2(\lambda_1, \lambda_2) = -(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^{-1} \lambda_1^{-1} \bar{W}_1(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{1}{2} \lambda_3^{-2} \bar{W}_{11}(\lambda_1, \lambda_2), \\ \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \quad (\lambda_3 \neq \lambda_1), \\ \\ \beta_3 = \bar{\beta}_3(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1} [\lambda_1 \bar{W}_1(\lambda_1, \lambda_2) - \lambda_2 \bar{W}_2(\lambda_1, \lambda_2)], \\ w_3 = \bar{w}_3(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1} [\lambda_2^{-1} \bar{W}_2(\lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1^{-1} \bar{W}_1(\lambda_1, \lambda_2)] \\ \quad + \frac{1}{2} [\lambda_2^{-2} \bar{W}_{11}(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_1^{-2} \bar{W}_{22}(\lambda_1, \lambda_2) \\ \quad - 2(\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \bar{W}_{12}(\lambda_1, \lambda_2)] \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2), \end{array} \right. \quad (2.84)$$

che valgono nel caso in cui gli allungamenti principali sono diversi fra loro. Viceversa, nel caso in cui due dei λ_i siano uguali tra loro, si ha che usando la (2.83):

$$\bar{W}(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{W}(\lambda_2, \lambda_1) = \bar{W}(\lambda_2, \lambda_3) = \bar{W}(\lambda_3, \lambda_1), \quad \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1},$$

dove le relative relazioni tra le derivate parziali sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{W}_1(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{W}_2(\lambda_2, \lambda_1), \quad \bar{W}_{11}(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{W}_{22}(\lambda_2, \lambda_1), \\ \bar{W}_{12}(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{W}_{12}(\lambda_2, \lambda_1) \\ \\ \lambda_2 \bar{W}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 \bar{W}_1(\lambda_2, \lambda_3) - \lambda_3 \bar{W}_2(\lambda_2, \lambda_3), \\ \lambda_1 \bar{W}_1(\lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_3 \bar{W}_1(\lambda_3, \lambda_1) + \lambda_1 \bar{W}_2(\lambda_3, \lambda_1), \\ \\ \lambda_2^2 \bar{W}_{22}(\lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda_3 \bar{W}_2(\lambda_2, \lambda_3) + \lambda_2^2 \bar{W}_{11}(\lambda_2, \lambda_3) \\ \quad \quad \quad + \lambda_3^2 \bar{W}_{22}(\lambda_2, \lambda_3) - 2\lambda_1^{-1} \bar{W}_{12}(\lambda_2, \lambda_3), \\ \\ \lambda_1^2 \bar{W}_{11}(\lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda_3 \bar{W}_1(\lambda_3, \lambda_1) + \lambda_3^2 \bar{W}_{11}(\lambda_3, \lambda_1) \\ \quad \quad \quad + \lambda_1^2 \bar{W}_{22}(\lambda_3, \lambda_1) - 2\lambda_2^{-1} \bar{W}_{12}(\lambda_3, \lambda_1), \quad \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \end{array} \right. \quad (2.85)$$

Perciò, dalla (2.85), tramite la (2.84) si arriva quindi a definire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta}_1(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{\beta}_3(\lambda_2, \lambda_3), \quad \bar{\beta}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{\beta}_3(\lambda_3, \lambda_1), \\ \bar{w}_1(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{w}_3(\lambda_2, \lambda_3), \quad \bar{w}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \bar{w}_3(\lambda_3, \lambda_1), \quad \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \end{array} \right. \quad (2.86)$$

A questo punto, i successivi passaggi serviranno per mostrare che le condizioni necessarie di ellitticità (2.81) si ritrovano anche permutando ciclicamente gli indici, arrivando dunque a riflettere l'isotropia del materiale.

Innanzitutto, da (2.85) si ha che:

$$\bar{\beta}_3(\lambda, \lambda) = \frac{1}{2} \lambda^2 \bar{w}_3(\lambda, \lambda) = \frac{1}{4} [\lambda^{-1} \bar{W}_1(\lambda, \lambda) + \bar{W}_{11}(\lambda, \lambda) - \bar{W}_{12}(\lambda, \lambda)] \quad (2.87)$$

e definendo:

$$\beta(\lambda_1, \lambda_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4} [\lambda^{-1} \bar{W}_1(\lambda, \lambda) + \bar{W}_{11}(\lambda, \lambda) - \bar{W}_{12}(\lambda, \lambda)] & \text{se } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ \frac{1}{2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1} [\lambda_1 \bar{W}_1(\lambda_1, \lambda_2) - \lambda_2 \bar{W}_2(\lambda_1, \lambda_2)] & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{array} \right. \quad (2.88)$$

$$w(\lambda_1, \lambda_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \lambda^{-2} [\lambda^{-1} \bar{W}_1(\lambda, \lambda) + \bar{W}_{11}(\lambda, \lambda) - \bar{W}_{12}(\lambda, \lambda)] & \text{se } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1} [\lambda_2^{-1} \bar{W}_2(\lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1^{-1} \bar{W}_1(\lambda_1, \lambda_2)] + \\ \frac{1}{2} [\lambda_2^{-2} \bar{W}_{11}(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_1^{-2} \bar{W}_{22}(\lambda_1, \lambda_2) - \\ 2\lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \bar{W}_{12}(\lambda_1, \lambda_2)] & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{array} \right. \quad (2.89)$$

si ha che (2.84), (2.86), (2.87) giustificano

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta(\lambda_2, \lambda_3), & \beta_2 = \beta(\lambda_3, \lambda_1), & \beta_3 = \beta(\lambda_1, \lambda_2), \\ w_1 = w(\lambda_2, \lambda_3), & w_2 = w(\lambda_3, \lambda_1), & w_3 = w(\lambda_1, \lambda_2), \end{cases} \quad (2.90)$$

che forniscono tutti $\lambda_i > 0$. Infine, sempre da (2.85) si ha che β, w possono essere scritti in modo più conveniente come:

$$\beta(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} \frac{1}{8} \bar{W}_{11}(\lambda, \lambda^{-2}) & \text{se } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ -\frac{1}{2} \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1} \bar{W}_1(\lambda_2, \lambda_3) & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \end{cases} \quad (2.91)$$

$$w(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} \lambda^{-2} \bar{W}_{11}(\lambda, \lambda^{-2}) & \text{se } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ \lambda_2^{-1} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1} \bar{W}_1(\lambda_2, \lambda_3) + \\ \frac{1}{2} \lambda_1^{-2} \bar{W}_{11}(\lambda_2, \lambda_3) & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \end{cases} \quad (2.92)$$

Le equazioni (2.91), (2.92) comprendono la rappresentazione intrinseca di β_i e w_i in termini di λ_i e delle derivate parziali di \bar{W} . Inoltre, β_i e w_i ora mostrano una simmetria circolare, visibile in (2.90).

Ognuna delle disequazioni delle condizioni di ellitticità (2.81) viene trasformata in sè stessa da una permutazione circolare degli indici. Infatti, riscrivendo le (2.81) come un set di disuguaglianze simmetriche rispetto a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, si possono definire le funzioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\beta(\lambda_2, \lambda_3) \beta(\lambda_3, \lambda_1)}, \\ \omega(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 w(\lambda_1, \lambda_2)}{\beta(\lambda_1, \lambda_2)}, \quad \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}, \\ \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2) = \beta(\lambda_2, \lambda_3) \beta(\lambda_3, \lambda_1), \quad \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \omega(\lambda_1, \lambda_2) + 2, \\ \varphi_3(\lambda_1, \lambda_2) = \rho(\lambda_1, \lambda_2) [2 - \omega(\lambda_1, \lambda_2)] + [\sqrt{\rho(\lambda_2, \lambda_3) \varphi_2(\lambda_2, \lambda_3)} \\ + \sqrt{\rho(\lambda_3, \lambda_1) \varphi_2(\lambda_3, \lambda_1)}]^2, \quad \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}. \end{array} \right. \quad (2.93)$$

Dalla (2.65) si ha che:

$$\begin{aligned} \rho(\lambda_1, \lambda_2) = \rho_3, \quad \rho(\lambda_2, \lambda_3) = \rho_1, \quad \rho(\lambda_3, \lambda_1) = \rho_2, \\ \omega(\lambda_1, \lambda_2) = \omega_3, \quad \omega(\lambda_2, \lambda_3) = \omega_1, \quad \omega(\lambda_3, \lambda_1) = \omega_2, \end{aligned}$$

dove, sfruttando (2.93), si definiscono:

$$\begin{cases} \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2) = \beta_1\beta_2, & \varphi_1(\lambda_2, \lambda_3) = \beta_2\beta_3, & \varphi_1(\lambda_3, \lambda_1) = \beta_3\beta_1 \\ \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \omega_3 + 2, & \varphi_2(\lambda_2, \lambda_3) = \omega_1 + 2, & \varphi_2(\lambda_3, \lambda_1) = \omega_2 + 2, \\ \\ \varphi_3(\lambda_1, \lambda_2) = \rho_3(2 - \omega_3) + \left[\sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} + \sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)} \right]^2, \\ \varphi_3(\lambda_2, \lambda_3) = \rho_1(2 - \omega_1) + \left[\sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)} + \sqrt{\rho_3(\omega_3 + 2)} \right]^2, \\ \varphi_3(\lambda_3, \lambda_1) = \rho_2(2 - \omega_2) + \left[\sqrt{\rho_3(\omega_3 + 2)} + \sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} \right]^2. \end{cases} \quad (2.94)$$

Quindi le condizioni necessarie di ellitticità (2.81) sono equivalenti alle nove disuguaglianze simmetriche

$$\varphi_i(\lambda_1, \lambda_2) > 0, \quad \varphi_i(\lambda_2, \lambda_3) > 0, \quad \varphi_i(\lambda_3, \lambda_1) > 0. \quad (2.95)$$

Osservando le (2.95), si nota che esse sono invarianti rispetto alla permutazione ciclica degli allungamenti principali $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ e da (2.85), (2.88), (2.89), (2.93) si evince che:

$$\begin{cases} \beta(\lambda_1, \lambda_2) = \beta(\lambda_2, \lambda_1), & w(\lambda_1, \lambda_2) = w(\lambda_2, \lambda_1), \\ \rho(\lambda_1, \lambda_2) = \rho(\lambda_2, \lambda_1), & \omega(\lambda_1, \lambda_2) = \omega(\lambda_2, \lambda_1), \end{cases} \quad (2.96)$$

Inoltre

$$\varphi_i(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi_i(\lambda_2, \lambda_1) \quad (2.97)$$

mostra che le condizioni (2.95) sono perciò invarianti rispetto ad ogni permutazione degli allungamenti principali, rivelando quindi l'assenza di direzioni di deformazioni preferenziali, cioè l'isotropia del materiale.

2.6.2 Condizioni sufficienti di ellitticità

In questa sezione si mostrerà che le condizioni necessarie di ellitticità (2.81) sono anche **sufficienti** in modo tale che il sistema di equazioni alle derivate parziali (2.11) sia ellittico, a condizione che il materiale in esame sia isotropo.

L'obiettivo è quindi dimostrare che $E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) > 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \Lambda$, supponendo vere le condizioni (2.81). Infatti, dalle prime disuguaglianze in (2.81), in unione con (2.57) e (2.65), si ha:

$$Z_{ii} > 0, \quad \rho_i > 0. \quad (2.98)$$

Inoltre, poichè $\omega_1 + 2 > 0$ da (2.81),

$$-2 < \omega_1 < 2 \quad \text{oppure} \quad \omega_1 \geq 2, \quad (2.99)$$

da cui

$$-2 < \omega_1 < 2 \leq \rho_2 \rho_3^{-1} + \rho_2^{-1} \rho_3 \quad \text{oppure} \quad \omega_1 + \rho_2 \rho_3^{-1} > 2, \omega_1 + \rho_2^{-1} \rho_3 > 2. \quad (2.100)$$

Sempre da (2.81) si ha quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_1^4 \beta_1^4 \beta_2^2 \beta_3^2 [\omega_1 - (\rho_2 \rho_3^{-1} + \rho_2^{-1} \rho_3)]^2 (\omega_1^2 - 4) > 0 \\ \text{oppure} \\ \lambda_1 \beta_1 \beta_3 (\omega_1 + \rho_2 \rho_3^{-1}) > 0, \quad \lambda_1 \beta_1 \beta_2 (\omega_1 + \rho_2^{-1} \rho_3) > 0. \end{array} \right. \quad (2.101)$$

Da (2.57),(2.65),(2.66), si ha l'identificazione di (2.101) con:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4Z_{22}Z_{32}^3 + 4Z_{33}Z_{23}^3 - Z_{23}^2Z_{32}^2 - 18Z_{22}Z_{23}Z_{32}Z_{33} + 27Z_{22}^2Z_{33}^2 > 0 \\ \text{oppure} \\ Z_{23} > 0, \quad Z_{32} > 0. \end{array} \right. \quad (2.102)$$

Con l'ausilio del Lemma della sezione 2.6.1 e della definizione (2.58), si ha:

$$E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) > 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \Lambda \quad \text{con } z_1 = 0. \quad (2.103)$$

e, ripetendo il ragionamento per le restanti disequazioni in (2.81), si ottiene

$$E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) > 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \partial\Lambda \equiv \Lambda - \dot{\Lambda}, \quad (2.104)$$

che vale sui bordi di Λ .

Manca ora da analizzare l'interno dei punti di Λ , cioè $\dot{\Lambda}$. Ricordando la funzione g introdotta in (2.74) si ha che:

$$g(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \geq g(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2; \omega_1, \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \quad \forall (\eta_1, \eta_2) \in \mathbf{\Pi}, \quad (2.105)$$

dove $\bar{\eta}_\alpha$ è dato da (2.78). Come precedentemente definito, $\mathbf{\Pi}$ rappresenta il primo quadrante del piano (η_1, η_2) . A questo punto l'obiettivo è quello di provare che la scelta $(\eta_1, \eta_2) = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2)$ minimizza la funzione g in $\mathbf{\Pi}$.

E' opportuno notare che (2.74) permette di scrivere

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \rho_1, \rho_2, \rho_3) = \psi_1^2 + \rho_1 \eta_2^{-1} (1 - \eta_2)^2 + \rho_2 \eta_1 + \rho_3 \eta_1 \eta_2^{-1}, \\ f(\eta_1, \eta_2; \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) = \psi_2^2 + \rho_2 \eta_1^{-1} (1 - \eta_1)^2 + \rho_1 \eta_2 + \rho_3 \eta_1^{-1} \eta_2 \end{array} \right. \quad (2.106)$$

a condizione che

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho_\alpha (\omega_\alpha + 2)}. \quad (2.107)$$

Dopo semplici passaggi si ha:

$$\begin{aligned}
& f(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \rho_1, \rho_2, \rho_3) f(\eta_1, \eta_2; \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \\
&= [\rho_3 + \psi_1 \psi_2 + \rho_1(1 - \eta_2) + \rho_2(1 - \eta_1)]^2 + \\
&\quad + (\rho_3 \rho_1 \eta_1^{-1} + \rho_2 \rho_3 \eta_2^{-1} + \rho_1 \rho_2 \eta_1^{-1} \eta_2^{-1})(\eta_1 + \eta_2 - 1)^2 + \\
&\quad + \rho_3 \eta_1^{-1} \eta_2^{-1} (\eta_2 \psi_1 - \eta_1 \psi_2)^2 + \rho_1 \eta_2 [\psi_1 - \eta_2^{-1}(1 - \eta_2) \psi_2]^2 + \\
&\quad + \rho_2 \eta_1 [\psi_2 - \eta_1^{-1}(1 - \eta_1) \psi_1]^2. \tag{2.108}
\end{aligned}$$

Poichè $\rho_i > 0, \psi_\alpha > 0$ da (2.81), tutti i termini a destra in (2.108) sono non-negativi, e

$$\begin{aligned}
& f(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \rho_1, \rho_2, \rho_3) f(\eta_1, \eta_2; \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \\
&\geq [\rho_3 + \psi_1 \psi_2 + \rho_1(1 - \eta_2) + \rho_2(1 - \eta_1)]^2 \quad \forall (\eta_1, \eta_2) \in \mathbf{\Pi}. \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Combinando (2.109) con (2.74) si ha:

$$g(\eta_1, \eta_2; \omega_1, \omega_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \geq 2\rho_3 + [\sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} + \sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)}]^2 \quad \forall (\eta_1, \eta_2) \in \mathbf{\Pi}. \tag{2.110}$$

Infine, da (2.79), è evidente che (2.110) è equivalente a (2.105).

Successivamente, da (2.110) e (2.81) si ha (2.76).

Inoltre, (2.81) garantisce che $v_i > 0$ su $\dot{\Lambda}$ se v_i sono le tre funzioni definite in (2.69). Ma (2.76), assieme a (2.74), (2.72), (2.75), (2.69), implicano

$$v_3 < v_1 + v_2 + 2\sqrt{v_1 v_2}, \quad v_i > 0 \quad \text{su } \dot{\Lambda}. \tag{2.111}$$

Considerazioni analoghe si possono fare sulle restanti disuguaglianze in (2.81):

$$v_1 < v_2 + v_3 + 2\sqrt{v_2 v_3}, \quad v_2 < v_3 + v_1 + 2\sqrt{v_3 v_1} \quad \text{su } \dot{\Lambda}. \tag{2.112}$$

Quindi, dato che $v_i > 0$

$$\sqrt{v_1} < \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}, \quad \sqrt{v_2} < \sqrt{v_3} + \sqrt{v_1} \quad \text{su } \dot{\Lambda}. \tag{2.113}$$

e così

$$(\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2})^2 < v_3 \quad \text{su } \dot{\Lambda}. \tag{2.114}$$

Le disuguaglianze (2.111) e (2.114), a loro volta, permettono di concludere che

$$-2\sqrt{v_1 v_2} < v_3 - v_1 - v_2 < 2\sqrt{v_1 v_2} \quad \text{su } \dot{\Lambda}, \tag{2.115}$$

da dove si arriva a (2.71).

Si ha dunque

$$E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) > 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \dot{\Lambda}$$

che corrisponde a ciò che si voleva dimostrare.

Si può quindi affermare che *il set di disuguaglianze (2.81), o il suo equivalente simmetrico (2.95) sono sia necessarie che sufficienti per l'ellitticità del sistema a di equazioni alle derivate parziali (2.11) per la soluzione rilassata (\mathbf{u}, p) in un punto \mathbf{x} , purchè $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{x})$ siano gli allungamenti principali.*

2.6.3 Condizioni necessarie e sufficienti di ellitticità forte

L'obiettivo è ora quello di ricavare un set di condizioni necessarie e sufficienti di ellitticità forte.

Ricordando (2.48),(2.49) e

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{N}^T \mathbf{m}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{N}^{-T}, \quad (2.116)$$

allora:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \text{tr}(\mathbf{Q}) - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{Q} \hat{\mathbf{n}} &= (\mathbf{N}^T \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{N}^T \mathbf{m}) \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{N}^{-T}) \\ &\quad - (\mathbf{N}^T \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{m}). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Da (2.3),(2.47),(2.48) si ha che

$$\mathbf{N} \mathbf{N}^T = \mathbf{D}^{-1}, \quad \text{tr}(\mathbf{N}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{N}^{-T}) = \text{tr}(\mathbf{D} \mathbf{H}), \quad (2.118)$$

per cui la (2.117) diventa:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \text{tr}(\mathbf{Q}) - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{Q} \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{m}) \text{tr}(\mathbf{D} \mathbf{H}) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{H} \mathbf{m}. \quad (2.119)$$

Si definisca ora una matrice $[L_{ij}]$, rispetto a β_i, w_i , ponendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{ii} = \lambda_i^{-2} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_i), \\ L_{12} = L_{21} = \frac{1}{2} (\lambda_1^{-2} \beta_1 + \lambda_2^{-2} \beta_2 + w_3), \\ L_{23} = L_{32} = \frac{1}{2} (\lambda_2^{-2} \beta_2 + \lambda_3^{-2} \beta_3 + w_1), \\ L_{31} = L_{13} = \frac{1}{2} (\lambda_3^{-2} \beta_3 + \lambda_1^{-2} \beta_1 + w_2), \end{array} \right. \quad (2.120)$$

Dopo numerosi passaggi algebrici basati su (2.47),(2.49),(2.120), si deduce che:

$$2K(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}) = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{m}) \text{tr}(\mathbf{D} \mathbf{H}) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{H} \mathbf{m}. \quad (2.121)$$

dove

$$K(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) = L_{ij} z_i z_j, \quad z_k = m_k^2 \quad (2.122)$$

Applicando (2.27),(2.58) alla prima disuguaglianza in (2.46) e (2.119),(2.121) alla seconda si ottiene un set di condizioni necessarie e sufficienti per la ellitticità forte:

$$E(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) > 0, \quad K(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) > 0 \quad \forall \quad \mathbf{z} \in \Lambda \quad (2.123)$$

Si può provare inoltre che il set di condizioni (2.81) vale *se e solo se* vale (2.123).

Infatti:

- *Dimostrazione* (2.123) \Rightarrow (2.81)
Supponendo (2.123) vere, la prima disuguaglianza coincide con (2.62) e, come mostrato nella sezione 2.6.1, essa implica (2.81). Per la seconda disuguaglianza invece si ha in particolare che

$$K(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\zeta}_1) > 0 \quad (2.124)$$

perciò (2.123) necessita

$$L_{11} = \lambda_1^{-2}(\beta_2 + \beta_3) > 0 \quad (2.125)$$

che, unito a (2.81), richiede $\beta_i > 0$. \diamond

- *Dimostrazione* (2.81) \Rightarrow (2.123)
Nella sezione 2.6.2 è stato dimostrato che (2.81) implica la prima disuguaglianza di (2.123). Ora, dalla definizione di w_i , sostituendola in (2.120) si arriva a ridefinire

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{z}) &= \beta_1(\lambda_2^{-1}z_2 - \lambda_3^{-1}z_3)^2 + \beta_2(\lambda_3^{-1}z_3 - \lambda_1^{-1}z_1)^2 \\ &\quad + \beta_3(\lambda_1^{-1}z_1 - \lambda_2^{-1}z_2)^2 \\ &\quad + [\lambda_1^{-2}\beta_1 + \lambda_2^{-2}\beta_2 + \lambda_3\beta_3(\omega_3 + 2)]z_1z_2 \\ &\quad + [\lambda_2^{-2}\beta_2 + \lambda_3^{-2}\beta_3 + \lambda_1\beta_1(\omega_1 + 2)]z_2z_3 \\ &\quad + [\lambda_3^{-2}\beta_3 + \lambda_1^{-2}\beta_1 + \lambda_2\beta_2(\omega_2 + 2)]z_3z_1. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Dal requisito $\beta_i > 0$ e da (2.81), la somma dei primi tre termini della precedente equazione è positiva su Λ tranne nei punti interni \dot{z} (definiti da $\dot{z}_i = \lambda_i(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2$), mentre la somma dei restanti tre termini è positiva su Λ tranne sui vertici $\boldsymbol{\zeta}_i$. \diamond

Si conclude quindi che un set di **condizioni necessarie e sufficienti di ellitticità forte** per il sistema di equazioni differenziali parziali (2.11) per la soluzione (\mathbf{u}, \mathbf{p}) in un punto \mathbf{x} è dato da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_i > 0, \\ \omega_i + 2 > 0, \\ \rho_1(\omega_1 - 2) < \left[\sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)} + \sqrt{\rho_3(\omega_3 + 2)} \right]^2, \\ \rho_2(\omega_2 - 2) < \left[\sqrt{\rho_3(\omega_3 + 2)} + \sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} \right]^2, \\ \rho_3(\omega_3 - 2) < \left[\sqrt{\rho_1(\omega_1 + 2)} + \sqrt{\rho_2(\omega_2 + 2)} \right]^2, \end{array} \right. \quad (2.127)$$

Utilizzando le definizioni (2.56),(2.65), si possono trovare le disuguaglianze equivalenti in termini degli allungamenti principali $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{x})$, arrivando a concludere scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_i > 0, \\ w_i + 2\lambda_i\beta_i > 0, \\ \lambda_1^{-2}(w_1 - 2\lambda_1\beta_1) < \left[\sqrt{\lambda_2^{-2}(w_2 + 2\lambda_2\beta_2)} + \sqrt{\lambda_3^{-2}(w_3 + 2\lambda_3\beta_3)} \right]^2, \\ \lambda_2^{-2}(w_2 - 2\lambda_2\beta_2) < \left[\sqrt{\lambda_3^{-2}(w_3 + 2\lambda_3\beta_3)} + \sqrt{\lambda_1^{-2}(w_1 + 2\lambda_1\beta_1)} \right]^2, \\ \lambda_3^{-2}(w_3 - 2\lambda_3\beta_3) < \left[\sqrt{\lambda_1^{-2}(w_1 + 2\lambda_1\beta_1)} + \sqrt{\lambda_2^{-2}(w_2 + 2\lambda_2\beta_2)} \right]^2. \end{array} \right. \quad (2.128)$$

Per mostrare l'invarianza delle (2.128) alla permutazione di $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ si definiscono le funzioni χ_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1(\lambda_1, \lambda_2) = \beta(\lambda_1, \lambda_2), \quad \chi_2(\lambda_1, \lambda_2) = w(\lambda_1, \lambda_2) + 2\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\beta(\lambda_1, \lambda_2), \\ \chi_3(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_3^{-2}[2\lambda_3\beta(\lambda_1, \lambda_2) - w(\lambda_1, \lambda_2)] \\ \quad + \left[\sqrt{\lambda_1^{-2}\chi_2(\lambda_2, \lambda_3)} + \sqrt{\lambda_2^{-2}\chi_2(\lambda_1, \lambda_2)} \right]^2, \quad \lambda_3 = (\lambda_1\lambda_2)^{-1} \end{array} \right. \quad (2.129)$$

dove β e w sono date da (2.91),(2.92). Di conseguenza:

$$\beta(\lambda_1, \lambda_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{8}\bar{W}_{11}(\lambda, \lambda^{-2}) & \text{se } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ -\frac{1}{2}\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1}\bar{W}_1(\lambda_2, \lambda_3) & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 = (\lambda_1\lambda_2)^{-1} \end{array} \right. \quad (2.130)$$

$$w(\lambda_1, \lambda_2) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4}\lambda^{-2}\bar{W}_{11}(\lambda, \lambda^{-2}) & \text{se } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \\ \lambda_2^{-1}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^{-1}\bar{W}_1(\lambda_2, \lambda_3) + \\ \frac{1}{2}\lambda_1^{-2}\bar{W}_{11}(\lambda_2, \lambda_3) & \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 = (\lambda_1\lambda_2)^{-1} \end{array} \right. \quad (2.131)$$

Dalla (2.90), le (2.128) si possono riscrivere come:

$$\chi_i(\lambda_1, \lambda_2) > 0, \quad \chi_i(\lambda_2, \lambda_3) > 0, \quad \chi_i(\lambda_3, \lambda_1) > 0. \quad (2.132)$$

Usando (2.129) in unione con (2.96) si ha che:

$$\chi_i(\lambda_1, \lambda_2) = \chi_i(\lambda_2, \lambda_1), \quad (2.133)$$

per cui si deduce che il set di condizioni di ellitticità forte (2.132) (così come quello di ellitticità (2.95)) è *simmetrico* rispetto agli allungamenti principali.

Dopo aver osservato e dimostrato il set di condizioni necessarie e sufficienti per la ellitticità forte (e la sua proprietà di simmetria), è opportuno considerare che *le condizioni di ellitticità ed ellitticità forte coincidono quando il materiale isotropo in esame obbedisce alle disuguaglianze di Baker-Eriksen (2.15) e, oltre a ciò, ha un modulo di taglio positivo per deformazioni infinitesimali.*

Chiaramente, nel caso di λ_i distinti, le disuguaglianze (2.15) implicano $\beta_i > 0$ e quindi l'equivalenza di (2.81) e (2.127). Invece, nel caso in cui si abbiano due allungamenti principali $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, si ha che (2.15), (2.56), (2.65) forniscono $\beta_1 = \beta_2 > 0$ e (2.81) è valida se e solo se (2.127) è vera.

Nel caso in cui i tre λ_i siano coincidenti tra loro (e quindi $\lambda_i = 1$), le (2.90), (2.91), (2.92) forniscono:

$$\beta_i = \frac{1}{2}w_i = \frac{1}{8}\bar{W}_{11}(1, 1), \quad \omega_i = 2. \quad (2.134)$$

A questo punto le condizioni (2.81), (2.127) si riducono rispettivamente a:

$$\bar{W}_{11}(1, 1) \neq 0 \quad \text{e} \quad \bar{W}_{11}(1, 1) > 0. \quad (2.135)$$

Si può confermare che se μ è il modulo di taglio del materiale per infinitesime deformazioni, allora:

$$\mu = 2[\hat{W}_1(3, 3) + \hat{W}_2(3, 3)] = \frac{1}{4}\bar{W}_{11}(1, 1). \quad (2.136)$$

Di conseguenza, quando $\mu > 0$, le due condizioni in (2.135) sono equivalenti. Ciò conclude quindi la dimostrazione dell'equivalenza tra ellitticità ed ellitticità forte.

Ricapitolando, le condizioni di ellitticità fino ad ora esposte valgono se e solo se:

$$\boxed{\begin{cases} \hat{W}_1 + \lambda_i^2 \hat{W}_2 > 0, \\ \hat{W}_1 + \lambda_i^2 \hat{W}_2 + 2(I_1 - \lambda_i^2 - 2\lambda_i^{-1})(\hat{W}_{11} + 2\lambda_i^2 \hat{W}_{12} + \lambda_i^4 \hat{W}_{22}) > 0 \end{cases}} \quad (2.137)$$

Le disuguaglianze (2.137) sono quindi il punto di partenza che verrà utilizzato nei capitoli successivi per l'analisi di ellitticità della energia di deformazione particolare posta in esame.

Capitolo 3

Modello di Knowles generalizzato: deformazioni uniassiali

In questo capitolo verrà introdotta l'energia di deformazione utilizzata nell'analisi e successivamente sarà sottoposta allo studio sull'ellitticità nel caso particolare di deformazioni a simmetria uniassiale.

3.1 Modello di Knowles generalizzato

Lo studio dei materiali elastici soggetti a deformazioni fornisce una vasta gamma di risultati che dipendono dalla geometria dell'oggetto, dalle sue proprietà, dalla tipologia delle sollecitazioni.

Per quanto riguarda i materiali iperelastici, lo studio di differenti comportamenti elastici dovuti a diverse deformazioni ha portato alla formulazione di numerose leggi costitutive o *energie di deformazione*.

Esistono molte tipologie di energie di deformazione che variano a seconda del comportamento del materiale e della sua natura.

L'energia di deformazione classica è il modello *neo-Hookean* che rappresenta la più semplice generalizzazione a deformazioni finite della risposta di materiali incomprimibili:

$$W_{nH}(I_1) = \frac{1}{2}(I_1 - 3).$$

dove I_1 è la traccia di \mathbf{C} .

Una possibile generalizzazione di Neo-Hookean (sempre all'interno di materiali incomprimibili) deriva dal modello *Mooney-Rivlin*, il quale dipende sia dal primo che dal secondo invariante principale di \mathbf{C} :

$$W_{MR}(I_1, I_2, \mu) = \frac{(I_1 - 3) + \mu(I_2 - 3)}{2(1 + \mu)}.$$

Per quanto riguarda la natura dell'oggetto, due ulteriori modelli che rappresentano i comportamenti di particolari materiali sono stati forniti da Fung e Gent. Entrambe le formulazioni dipendono dal primo invariante principale ma presentano dei parametri caratteristici che identificano la tipologia di materiale in esame.

Il modello di Fung presenta una struttura esponenziale che può descrivere la rigidità alla tensione che si ritrova nei tessuti biologici:

$$W_{Fu}(I_1, \beta) = \frac{1}{2\alpha} [e^{\alpha(I_1-3)} - 1].$$

Il modello di Gent invece presenta ha una struttura logaritmica che impone un limite finito alle deformazioni derivante dalla limitata estensibilità dei polimeri dei materiali gommosi (o elastomeri):

$$W_{Ge}(I_1, \beta) = -\frac{1}{2\beta} \ln[1 - \beta(I_1 - 3)].$$

Si può notare infatti che il modello Gent presuppone che esista una espansione massima consentita $I_1 = 3 + \beta^{-1}$.

Dopo aver presentato il panorama generale delle leggi costitutive ampiamente sviluppate nel corso degli anni, si può introdurre l'energia di deformazione in esame: essa è la generalizzazione del potenziale di Knowles, generalizzazione introdotta in [4] che permette di colmare il gap tra corpi che presentano proprietà elastiche differenti.

In particolare, i modelli neo-Hookean, Gent e Fung si ottengono come casi particolari o asintotici del modello proposto.

Il modello Knowles generalizzato può quindi essere scritto come:

$$W = W(I_1, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha\beta} \left[(1 + \beta(I_1 - 3))^\alpha - 1 \right] & \text{se } \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \\ \frac{1}{2\beta} \log(1 + \beta(I_1 - 3)) & \text{se } \alpha = 0, \beta \neq 0 \\ \frac{1}{2}(I_1 - 3) & \text{se } \beta = 0, \forall \alpha \end{cases} \quad (3.1)$$

Questa energia di deformazione è caratterizzata dalla presenza contemporanea dei due parametri caratteristici α e β che possono assumere qualunque valore reale.

Inoltre è da notare che, per come è definita, la (3.1) rappresenta un materiale reale che, per piccole deformazioni ha un comportamento lineare ma che per opportuni valori di α e β possiede una deformazione massima consentita.

La funzione W verrà valutata inizialmente nel caso di simmetria uniassiale, vale a dire nel caso in cui due degli autovalori di \mathbf{C} coincidono, mentre il terzo sarà banalmente collegato dalla richiesta di incomprimibilità.

In particolare verranno studiati i casi $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

3.2 Analisi preliminare di ellitticità

Utilizzando le disequazioni (2.137), si nota subito che è possibile in questo caso fare una semplificazione in quanto l'energia di deformazione (3.1) dipende dal solo invariante $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, perciò $W_2 = W_{12} = W_{22} = 0$. Tali semplificazioni portano a riscrivere le condizioni (2.137) come:

$$\boxed{\begin{cases} W_1 > 0, & (a) \\ W_1 + 2(I_1 - \lambda_i^2 - 2\lambda_i^{-1})W_{11} > 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 & (b) \end{cases}} \quad (3.2)$$

dove

$$W_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad W_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2}.$$

- **Analisi di (3.2)(a)**

La (a) della (3.2), con l'energia di deformazione W da studiare, diventa:

$$W_1 = \frac{1}{2}(1 + \beta(I_1 - 3))^{\alpha-1} > 0 \quad (3.3)$$

che, dipendendo dal solo parametro β , ha i seguenti risultati:

$$W_1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 > \underline{I}_1 = 3 - \beta^{-1} & \text{se } \beta > 0 \\ I_1 < \bar{I}_1 = 3 - \beta^{-1} & \text{se } \beta < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Dalla definizione di $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, insieme alla condizione di incomprimibilità, si nota che i tre casi di simmetria da studiare coincidono, arrivando quindi all'analisi delle seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} 2\lambda^6 + (\beta^{-1} - 3)\lambda^4 + 1 > 0 & \text{se } \beta > 0 \\ 2\lambda^6 + (\beta^{-1} - 3)\lambda^4 + 1 < 0 & \text{se } \beta < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Identificando con $f(\lambda, \beta) = 2\lambda^6 + (\beta^{-1} - 3)\lambda^4 + 1$, si ha che:

- **Caso $\beta > 0$**

La funzione $f(\lambda, \beta)$ ha un punto di minimo in $\lambda_{min} = \sqrt{\frac{3\beta-1}{\beta}}$ e, dato che l'analisi è effettuata con $\lambda > 0$, si ha che:

$$f(0^+, \beta) = 1 \\ f\left(\sqrt{\frac{3\beta-1}{\beta}}, \beta\right) = \frac{27\beta^2 - 9\beta + 1}{27\beta^3} > 0$$

perciò $f(\lambda, \beta)$ è sempre **positiva** $\forall \lambda > 0 \Rightarrow W_1 > 0 \forall \lambda > 0$.

– **Caso $\beta < 0$**

Il minimo della funzione $f(\lambda, \beta)$ in questo caso è negativo e quindi esistono due punti $\lambda_a \in (0, \lambda_{min})$, $\lambda_b \in (\lambda_{min}, +\infty)$ tali per cui:

$$f(\lambda, \beta) < 0 \Leftrightarrow \lambda_a < \lambda < \lambda_b$$

Perciò $W_1 > 0 \Leftrightarrow \lambda_a < \lambda < \lambda_b$.

• **Analisi di (3.2)(b)**

Per la seconda disequazione della (3.2) serve innanzitutto calcolare la derivata seconda di W rispetto a I_1 :

$$W_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} = \frac{1}{2}\beta(\alpha - 1)(1 + \beta(I_1 - 3))^{\alpha-2} \quad (3.6)$$

e quindi, unendo (3.3) a (3.6), si trova che:

$$\frac{1}{2}(1 + \beta(I_1 - 3))^{\alpha-1} \left[1 + 2(I_1 - \lambda_i^2 - 2\lambda_i^{-1})\beta(\alpha - 1)(1 + \beta(I_1 - 3))^{-1} \right] > 0. \quad (3.7)$$

Si può notare che il primo fattore della (3.7) corrisponde a (3.3) analizzata precedentemente. Lo studio più approfondito verrà quindi effettuato solo sul segno del secondo fattore, per poi venir messo in relazione con (3.3).

Dato che (3.7) deve valere $\forall i = 1, 2, 3$, studiando il caso $i = 1$ la (3.7) diventa:

$$1 + 2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1^{-1})\beta(\alpha - 1)(1 + \beta(I_1 - 3))^{-1} > 0 \quad (3.8)$$

e, dopo semplici passaggi algebrici, si riduce a:

$$(1 + \beta(I_1 - 3)) + 2\beta(\alpha - 1)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1^{-1}) > 0. \quad (3.9)$$

Dall'ipotesi di incomprimibilità $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = (\lambda_1\lambda_2)^{-1}$, si può semplificare ulteriormente la disequazione arrivando a definire:

$$\frac{\beta\lambda_1^3 + \lambda_1(1 - 3\beta) + \beta(2\alpha - 1)\lambda_1\lambda_2^2 + \beta(2\alpha - 1)\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-2} + 4\beta(1 - \alpha)}{\lambda_1} > 0. \quad (3.10)$$

Ripetendo analogamente lo stesso procedimento anche per i casi $i = 2$ ed $i = 3$, si arriva ad avere, rispettivamente

$$\frac{\beta\lambda_2^3 + \lambda_2(1 - 3\beta) + \beta(2\alpha - 1)\lambda_2\lambda_1^2 + \beta(2\alpha - 1)\lambda_2^{-1}\lambda_1^{-2} + 4\beta(1 - \alpha)}{\lambda_2} > 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\beta\lambda_3^3 + \lambda_3(1 - 3\beta) + \beta(2\alpha - 1)\lambda_3\lambda_1^2 + \beta(2\alpha - 1)\lambda_3^{-1}\lambda_1^{-2} + 4\beta(1 - \alpha)}{\lambda_3} > 0. \quad (3.12)$$

Si può notare come la struttura delle tre disequazioni (3.10),(3.11),(3.12) è identica a meno della scelta di $i = 1, 2, 3$.

Lo studio di (3.2)(b), nel caso uniassiale, richiede un'analisi approfondita che sarà trattata nelle sezioni 3.3 e 3.4.

In particolare, la disequazione (3.2)(b) racchiude in sé tre diverse disequazioni per $i = 1, 2, 3$ e, nel caso uniassiale, due disequazioni risultano coincidenti mentre la rimanente ha una struttura completamente diversa.

Si ha quindi la possibilità di ridurre ulteriormente le situazioni da investigare.

Nella sezione successiva verrà analizzato il caso delle due disequazioni coincidenti, mentre nella sezione 3.4 verrà analizzata la disequazione differente.

3.3 Simmetria uniassiale: disequazione tipo I

In questa sezione verrà analizzato il caso delle due disequazioni coincidenti e, per semplicità, si utilizzerà la (3.10) come relazione su cui eseguire i calcoli specifici. Vi quindi coincidenza di due disequazioni nei casi:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, & \lambda_3 = \lambda^{-2} \\ \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda, & \lambda_2 = \lambda^{-2}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Con l'ovvia ipotesi $\lambda > 0$, si ha da analizzare:

$$\boxed{f(\lambda, \alpha, \beta) = 2\alpha\beta\lambda^6 + (1 - 3\beta)\lambda^4 + (4\beta - 4\alpha\beta)\lambda^3 + \beta(2\alpha - 1) > 0} \quad (3.14)$$

che verrà indicata come **disequazione di tipo I**.

Il metodo utilizzato per lo studio della positività è quello della derivata prima di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ rispetto a λ , identificata con $f'(\lambda, \alpha, \beta)$:

$$f'(\lambda, \alpha, \beta) = 4\lambda^2 \underbrace{(3\alpha\beta\lambda^3 + (1 - 3\beta)\lambda + 3\beta(1 - \alpha))}_{g(\lambda, \alpha, \beta)} \geq 0 \quad (3.15)$$

E' necessario a questo punto proseguire con lo studio della derivata di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ rispetto a λ , in quanto è l'unico fattore da analizzare per il segno dell'equazione avendo considerato solo i valori $\lambda > 0$:

$$g'(\lambda, \alpha, \beta) = 9\alpha\beta\lambda^2 + (1 - 3\beta) \geq 0 \quad (3.16)$$

le cui radici sono:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{3\beta - 1}{9\alpha\beta}} \quad (3.17)$$

Al variare dei parametri α, β , la (3.17) assume i seguenti valori:

	$\beta < 0$	$0 < \beta < 1/3$	$\beta = 1/3$	$\beta > 1/3$
$\alpha < 0$	radici $\in \mathbb{C}$	radice $\in \mathbb{R}^+$	$\lambda = 0$	radici $\in \mathbb{C}$
$\alpha > 0$	radice $\in \mathbb{R}^+$	radici $\in \mathbb{C}$	$\lambda = 0$	radice $\in \mathbb{R}^+$

3.3.1 Caso radici $\in \mathbb{C}$

La (3.16) in questo caso è monotona crescente o monotona decrescente al variare del segno del coefficiente del termine λ^2 .

Caso $\alpha < 0, \beta < 0$

La (3.16) è sempre positiva $\Rightarrow g(\lambda, \alpha, \beta)$ sempre crescente $\forall \lambda > 0$.

Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$g(0^+, \alpha, \beta) = 3\beta(1 - \alpha) < 0$$

perciò vi è un valore $\tilde{\lambda}$ che rappresenta un punto di minimo della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$.

Quindi:

$$f(0^+, \alpha, \beta) = \beta(2\alpha - 1) \gg 0 \Rightarrow \lambda = 0^+ \text{ è un massimo relativo}$$

$$f(\tilde{\lambda}, \alpha, \beta) > 0 \Rightarrow \lambda = \tilde{\lambda} \text{ è minimo assoluto}$$

per cui la $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è **positiva** $\forall \lambda > 0$.

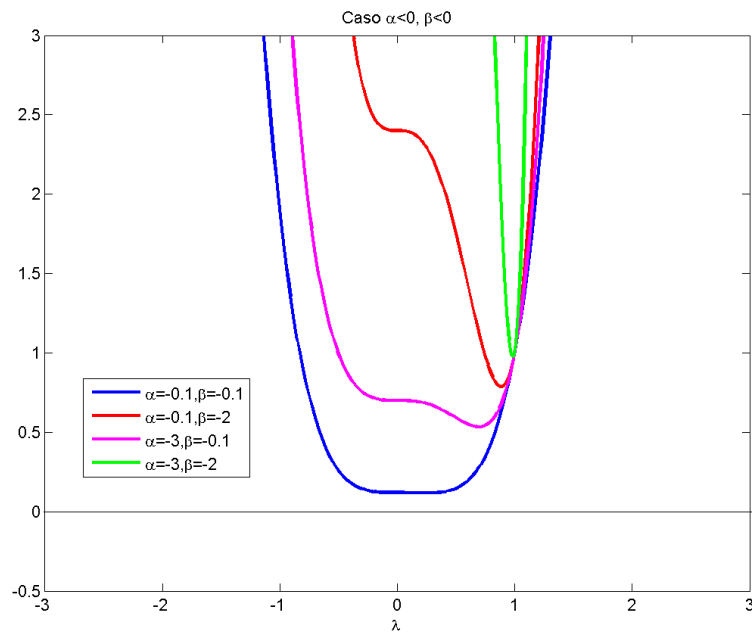


Figura 3.1: Radici $\in \mathbb{C}$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$

Caso $\alpha > 0, 0 < \beta < 1/3$

La disequazione (3.16) è sempre positiva $\Rightarrow g(\lambda, \alpha, \beta)$ sempre crescente $\forall \lambda > 0$. Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$g(0^+, \alpha, \beta) = \begin{cases} 3\beta(1 - \alpha) \geq 0 & \text{se } \alpha \in (0, 1] \\ 3\beta(1 - \alpha) < 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Si ha quindi la necessità di studiare i sottocasi $\alpha \in (0, 1]$ e $\alpha > 1$:

- Per $\alpha \in (0, 1]$

$g(\lambda, \alpha, \beta)$ è sempre positiva $\Rightarrow f(\lambda, \alpha, \beta)$ sempre crescente $\forall \lambda > 0$.

Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$f(0^+, \alpha, \beta) = \begin{cases} \beta(2\alpha - 1) < 0 & \text{se } \alpha \in (0, 1/2) \\ \beta(2\alpha - 1) \geq 0 & \text{se } \alpha \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Perciò, se $\alpha \in (0, 1/2)$ la $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è **positiva** per $\lambda > \tilde{\lambda}$, mentre se $\alpha \in [1/2, 1]$ la $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è **positiva** $\forall \lambda > 0$.

- Per $\alpha > 1$

$g(\lambda, \alpha, \beta)$ interseca l'asse delle ascisse in un valore $\tilde{\lambda}$ che rappresenta un punto di minimo della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$.

Quindi:

$$\begin{aligned} f(0^+, \alpha, \beta) = \beta(2\alpha - 1) >> 0 & \Rightarrow \lambda = 0^+ \text{ massimo relativo} \\ f(\tilde{\lambda}, \alpha, \beta) > 0 & \Rightarrow \lambda = \tilde{\lambda} \text{ minimo assoluto} \end{aligned}$$

che indica la **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta) \forall \lambda > 0$.

Caso $\alpha < 0, \beta > 1/3$

La disequazione (3.16) è sempre negativa $\Rightarrow g(\lambda, \alpha, \beta)$ sempre decrescente $\forall \lambda > 0$. Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$g(0^+, \alpha, \beta) = 3\beta(1 - \alpha) > 0$$

perciò vi è un valore $\tilde{\lambda}$ che rappresenta un punto di massimo della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$.

Quindi:

$$f(0^+, \alpha, \beta) = \beta(2\alpha - 1) < 0 \Rightarrow \lambda = 0^+ \text{ è un minimo relativo}$$

$$f(\tilde{\lambda}, \alpha, \beta) > 0 \Rightarrow \lambda = \tilde{\lambda} \text{ è un massimo assoluto}$$

Vi sono dunque due punti $\lambda_1 \in (0, \tilde{\lambda})$ e $\lambda_2 > \tilde{\lambda}$ di intersezione di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse.

La **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è quindi per $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

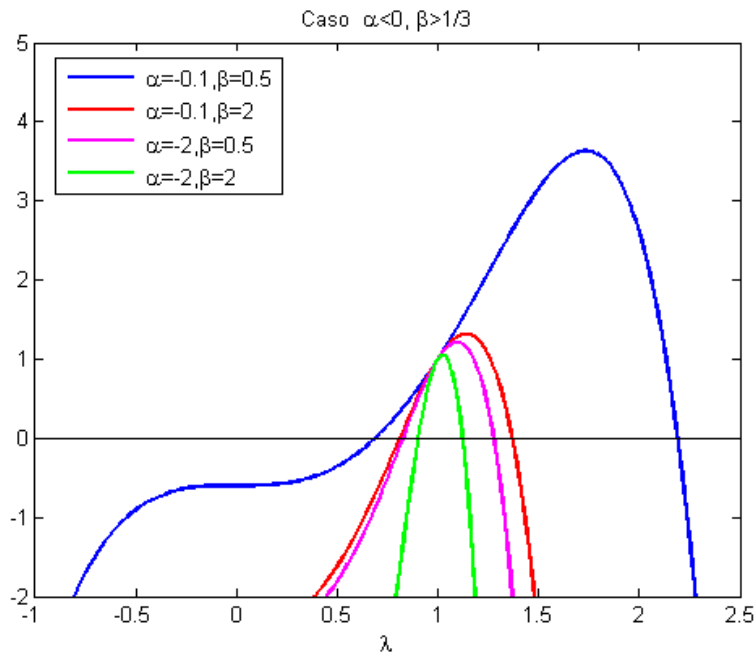


Figura 3.2: Radici $\in \mathbb{C}$, $\alpha < 0, \beta > 1/3$

3.3.2 Caso radici $\in \mathbb{R}^+$

Caso $\alpha > 0$, $\beta < 0$

La positività di (3.16) si riduce a:

$$g'(\lambda, \alpha, \beta) = 9\alpha\beta\lambda^2 + (1 - 3\beta) > 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$$

Dunque $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è crescente nell'intervallo $0 < \lambda < \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$.

E' necessario ora studiare il comportamento della funzione $g(\lambda, \alpha, \beta)$ al variare dei parametri α, β e, in particolare, identificare la posizione del suo punto di massimo in $\lambda = \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$.

Si calcola quindi:

$$g(0^+, \alpha, \beta) = \begin{cases} 3\beta(1 - \alpha) \leq 0 & \text{se } \alpha \in (0, 1] \\ 3\beta(1 - \alpha) > 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

mentre

$$g\left(\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta\right) = \frac{2}{3}(1 - 3\beta)\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}} + 3\beta(1 - \alpha) > 0 \quad \forall \alpha > 0, \forall \beta < 0.$$

Si ha quindi la necessità di studiare i sottocasi $\alpha \in (0, 1]$ e $\alpha > 1$:

- Per $\alpha \in (0, 1]$

La funzione $g(\lambda, \alpha, \beta)$ interseca l'asse delle ascisse in due punti $\tilde{\lambda}_a \in (0, \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}})$ e $\tilde{\lambda}_b > \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$ che rappresentano, rispettivamente, i punti di minimo e massimo della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$.

Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$f(0^+, \alpha, \beta) = \begin{cases} \beta(2\alpha - 1) > 0 & \text{se } \alpha \in (0, 1/2) \\ \beta(2\alpha - 1) \leq 0 & \text{se } \alpha \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Si necessita quindi lo sviluppo di questi ulteriori sottocasi:

- Per $\alpha \in (0, 1/2)$

In questo caso, al variare di β , il valore del minimo $f(\tilde{\lambda}_a, \alpha, \beta)$ cambia segno passando da positivo a negativo, mentre il valore del massimo $f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta) > 0 \quad \forall \beta < 0$. Esiste quindi un valore critico β_{cr} per il quale vi è il cambiamento di segno.

Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} f(\lambda, \alpha, \beta) = 2\alpha\beta\lambda^6 + (1 - 3\beta)\lambda^4 + (4\beta - 4\alpha\beta)\lambda^3 + \beta(2\alpha - 1) = 0 \\ g(\lambda, \alpha, \beta) = 3\alpha\beta\lambda^3 + (1 - 3\beta)\lambda + 3\beta(1 - \alpha) = 0 \end{cases}$$

si ricava

$$b_{cr} = \frac{1}{3} * ((1-2*a)*a^2)^{(1/3)} * (1/a^2 * ((1-2*a)*a^2)^{(2/3)} + 1/a * ((1-2*a)*a^2)^{(1/3)} + 1) / (3*a-1) / (1/a * ((1-2*a)*a^2)^{(2/3)} + ((1-2*a)*a^2)^{(1/3)} - 1 + a);$$

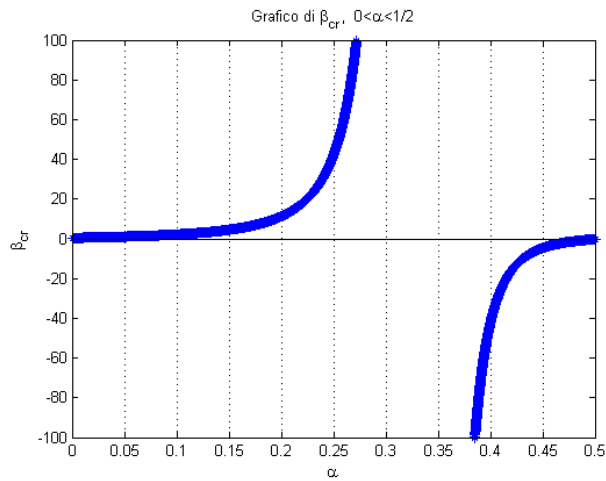


Figura 3.3: Valori di β_{cr} , $0 < \alpha < 1/2$

che è il β_{cr} per cui $f(\tilde{\lambda}_a, \alpha, \beta_{cr}) = 0$, per cui:

$$\begin{cases} f(\tilde{\lambda}_a, \alpha, \beta) > 0 & \text{se } \beta \in (\beta_{cr}, 0) \\ f(\tilde{\lambda}_a, \alpha, \beta) < 0 & \text{se } \beta \in (-\infty, \beta_{cr}) \end{cases}$$

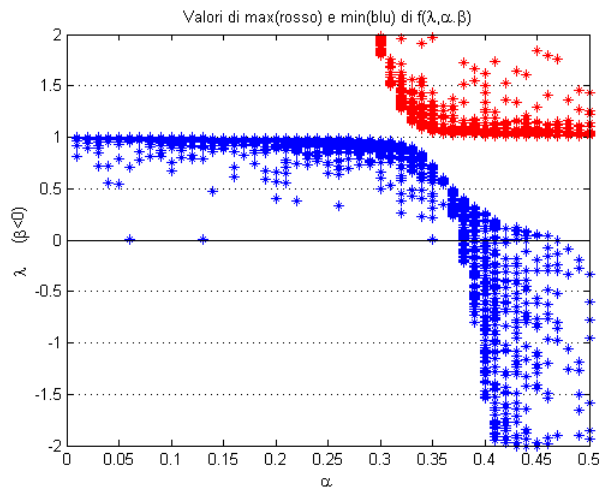


Figura 3.4: Valori di massimo(rosso) e minimo(blu) di $f(\lambda, \alpha, \beta)$

Perciò $f(\lambda, \alpha, \beta)$ interseca l'asse delle ascisse in un punto $\lambda_1 > \tilde{\lambda}_b$ se $\beta \in (\beta_{cr}, 0)$, in tre punti $\lambda_1 \in (0, \tilde{\lambda}_a)$, $\lambda_2 \in (\tilde{\lambda}_a, \tilde{\lambda}_b)$, $\lambda_3 > \tilde{\lambda}_b$ se $\beta \in (-\infty, \beta_{cr})$.

Dunque la **positività** di $f(\lambda, \beta)$ è per $\lambda < \lambda_1$ se $\beta \in (\beta_{cr}, 0)$, mentre è per $0 < \lambda < \lambda_1 \wedge \lambda_2 < \lambda < \lambda_3$ se $\beta \in (-\infty, \beta_{cr})$.

– Per $\alpha \in [1/2, 1]$

Si ha che $f(\tilde{\lambda}_a, \alpha, \beta) < 0$ e $f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta) > 0$, perciò la funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$ interseca l'asse delle ascisse in due punti $\lambda_1 \in (\tilde{\lambda}_a, \tilde{\lambda}_b)$, $\lambda_2 > \tilde{\lambda}_b$.

La **positività** di $f(\lambda, \beta)$ è quindi per $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

• Per $\alpha > 1$

$g(\lambda, \alpha, \beta)$ interseca l'asse delle ascisse in un valore $\tilde{\lambda} > \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}$ che rappresenta un punto di massimo della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$.

Quindi:

$$f(0^+, \alpha, \beta) = \beta(2\alpha - 1) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0^+ \text{ minimo relativo}$$

$$f(\tilde{\lambda}, \alpha, \beta) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \tilde{\lambda} \text{ massimo assoluto}$$

Vi sono dunque due punti $\lambda_1 \in (0, \tilde{\lambda})$ e $\lambda_2 > \tilde{\lambda}$ di intersezione di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse.

La **positività** di $f(\lambda, \beta)$ è quindi per $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

Caso $\alpha < 0$, $0 < \beta < 1/3$

La positività di (3.16) è la stessa del caso precedente, cioè:

$$g'(\lambda, \alpha, \beta) = 9\alpha\beta\lambda^2 + (1 - 3\beta) > 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$$

Dunque $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è crescente nell'intervallo $0 < \lambda < \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$, con $\lambda = \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$ punto di massimo.

Si calcola quindi:

$$g(0^+, \alpha, \beta) = 3\beta(1 - \alpha) > 0$$

$$g\left(\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta\right) = \frac{2}{3}(1 - 3\beta)\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}} + 3\beta(1 - \alpha) > 0$$

perciò vi è un valore $\tilde{\lambda} > \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$ che rappresenta un punto di massimo della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$.

Quindi:

$$f(0^+, \alpha, \beta) = \beta(2\alpha - 1) < 0 \Rightarrow \lambda = 0^+ \text{ minimo relativo}$$

$$f(\tilde{\lambda}, \alpha, 1/3) > 0 \Rightarrow \lambda = \tilde{\lambda} \text{ massimo assoluto}$$

Vi sono dunque due punti $\lambda_1 \in (0, \tilde{\lambda})$ e $\lambda_2 > \tilde{\lambda}$ di intersezione di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse. La **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è quindi per $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

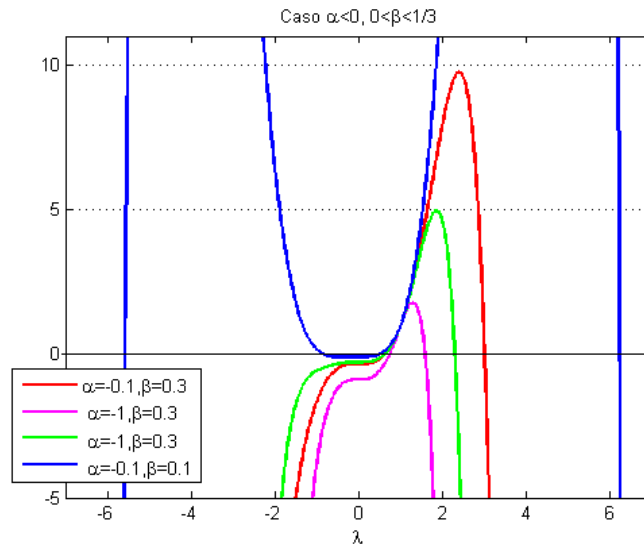


Figura 3.5: Radici $\in \mathbb{R}^+$, $\alpha < 0$, $0 < \beta < 1/3$

Caso $\alpha > 0$, $\beta > 1/3$

La positività di (3.16) si riduce a:

$$g'(\lambda, \alpha, \beta) = 9\alpha\beta\lambda^2 + (1 - 3\beta) > 0 \Leftrightarrow \lambda > \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$$

Dunque $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è crescente per $\lambda > \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$.

E' necessario ora studiare il comportamento della funzione $g(\lambda, \alpha, \beta)$ al variare dei parametri α, β .

Si calcola quindi:

$$g(0^+, \alpha, \beta) = \begin{cases} 3\beta(1 - \alpha) \geq 0 & \text{se } \alpha \in (0, 1] \\ 3\beta(1 - \alpha) < 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

mentre, per identificare la posizione del suo punto di minimo in $\lambda = \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$, è necessario valutarne il segno.

Infatti la funzione

$$g\left(\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta\right) = \frac{2}{3}(1 - 3\beta)\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}} + 3\beta(1 - \alpha)$$

ha un comportamento particolare per $\alpha \in (0, 1), \beta > \frac{1}{3}$: considerando il piano α, β , per studiare i suoi punti di annullamento si può riscrivere nella forma

$$\underbrace{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}_{h(\alpha)} = \frac{4}{27} \underbrace{\left(\frac{3\beta - 1}{\beta}\right)^3}_{k_\beta}$$

ed esaminare rispettivamente $h(\alpha)$ e $k(\beta)$.

La funzione $h(\alpha)$ si annulla per $\alpha = 0, \alpha = 1$ e presenta un massimo relativo in $\alpha = 1/3$, dove $h(1/3) = 4/27$. La funzione $k(\beta) \rightarrow \left(\frac{4}{27}\right)^-$ per $\beta \rightarrow +\infty$, perciò per $\alpha \in (0, 1)$ le funzioni $h(\alpha)$ e $k(\beta)$ si intersecano in due punti che indicheremo con α_1, α_2 , dipendenti da β .

Riassumendo, si ha che:

$$\begin{cases} g\left(\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta\right) > 0 & \text{se } \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2) \\ g\left(\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta\right) < 0 & \text{se } \alpha \in (0, \alpha_1) \wedge \alpha \in (\alpha_2, 1) \end{cases}$$

Analizziamo ora i seguenti sottocasi:

- Per $\alpha \in (0, 1/2)$

La funzione $f(0^+, \alpha, \beta) = \beta(2\alpha - 1) < 0$ e, al variare di β , nell'intervallo $\alpha \in (0, 1/2)$ la $g\left(\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta\right)$ presenta o solo α_1 oppure entrambi α_1, α_2 .

Si trova quindi che, sostituendo $\alpha = 1/2$ in $g\left(\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta\right) = 0$, vi è il valore $\beta = 6.0541$ tale che

$$\begin{cases} g(\sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta) > 0 & \text{se } \alpha \in (\alpha_1, 1/2), \beta \in (1/3, 6.0541] \\ g(\sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta) > 0 & \text{se } \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2), \beta > 6.0541 \end{cases}$$

Dunque, data la differente positività del minimo di $g(\lambda, \alpha, \beta)$, si ha che:

– Per $\alpha \in (0, \alpha_1)$, $\beta \in (1/3, 6.0541]$

In questo caso il minimo di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è negativo, quindi vi sono due punti $\tilde{\lambda}_a \in (0, \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}})$, $\tilde{\lambda}_b > \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}$ di intersezione di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse.

Si ha quindi che $\tilde{\lambda}_a$ e $\tilde{\lambda}_b$ rappresentano, rispettivamente, i punti di massimo e minimo della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$.

Dato che $f(0^+, \alpha, \beta) < 0$, vi è un punto di intersezione $\lambda_1 \in (0, \tilde{\lambda}_a)$ di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse.

Analogamente al caso $\alpha \in (0, 1/2)$, $\beta < 0$, al variare di β , il valore del minimo $f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta)$ cambia segno passando da positivo a negativo, mentre il valore del massimo $f(\tilde{\lambda}_a, \alpha, \beta)$ è sempre positivo.

Esiste quindi un valore critico β_{cr} tale per cui:

$$\begin{cases} f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta) > 0 & \text{se } \beta \in (1/3, \beta_{cr}) \\ f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta) < 0 & \text{se } \beta \in (\beta_{cr}, 6.0541] \end{cases}$$

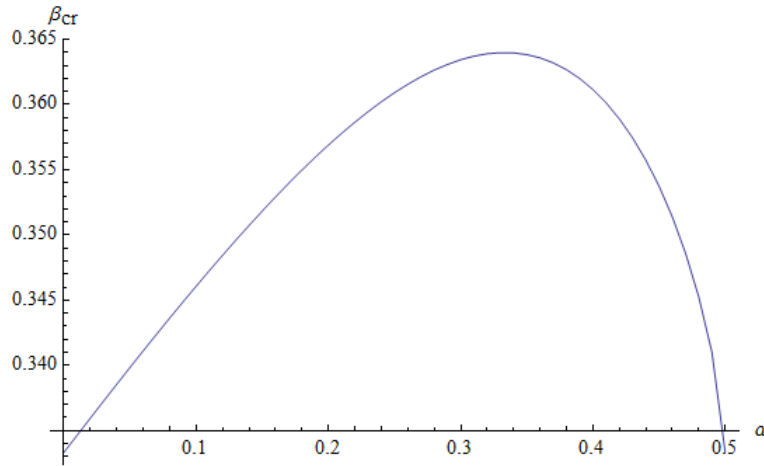


Figura 3.6: Valori di β_{cr} al variare di α

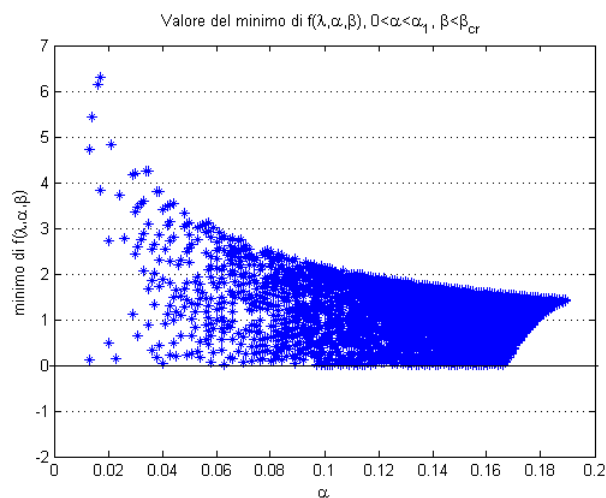


Figura 3.7: Valore del minimo di $f(\lambda, \alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta < \beta_{cr}$

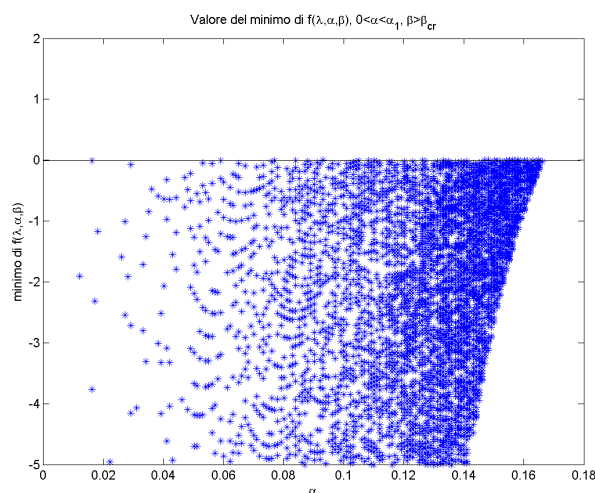


Figura 3.8: Valore del minimo di $f(\lambda, \alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta > \beta_{cr}$

Nel caso $\beta \in (\beta_{cr}, 6.0541]$ la $f(\lambda, \alpha, \beta)$ interseca in due ulteriori punti $\lambda_2 \in (\lambda_a, \lambda_b)$, $\lambda_3 > \lambda_b$ l'asse delle ascisse.

Riassumendo quanto detto fin ora, se $\beta \in (1/3, \beta_{cr})$ la $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è **positiva** per $\lambda > \lambda_1$, mentre se $\beta \in (\beta_{cr}, 6.0541]$ la $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è **positiva** per $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \wedge \lambda > \lambda_3$.

– Per $\alpha \in (\alpha_1, 1/2)$, $\beta \in (1/3, 6.0541]$

In questo caso il minimo di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è positivo, quindi $g(\lambda, \alpha, \beta)$ non ha intersezioni con l'asse delle ascisse. Se ne deduce che

$f(\lambda, \alpha, \beta)$ è sempre crescente $\forall \lambda > 0$ e, dato che $f(0^+, \alpha, \beta) < 0$, vi sarà un punto di intersezione λ_1 con l'asse delle ascisse. Perciò la **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è per $\lambda > \lambda_1$.

– Per $\alpha \in (0, \alpha_1)$, $\beta > 6.0541$

Il minimo di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è negativo, quindi vi sono due punti $\tilde{\lambda}_a \in (0, \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}})$, $\tilde{\lambda}_b > \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}$ di intersezione di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse.

Si ha quindi che $\tilde{\lambda}_a$ e $\tilde{\lambda}_b$ rappresentano, rispettivamente, i punti di massimo e minimo della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$. Inoltre, dato che $f(0^+, \alpha, \beta) < 0$, vi è un punto di intersezione $\lambda_1 \in (0, \tilde{\lambda}_a)$ di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse.

Analogamente al caso precedente $\alpha \in (0, \alpha_1)$, $\beta \in (1/3, 6.0541]$, al variare di β , il valore del minimo $f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta)$ cambia segno passando da positivo a negativo, mentre il valore del massimo $f(\tilde{\lambda}_a, \alpha, \beta)$ rimane sempre positivo.

Esiste quindi un valore critico β_{cr} tale per cui:

$$\begin{cases} f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta) > 0 & \text{se } \beta \in (6.0541, \beta_{cr}) \\ f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta) < 0 & \text{se } \beta \in (\beta_{cr}, +\infty) \end{cases}$$

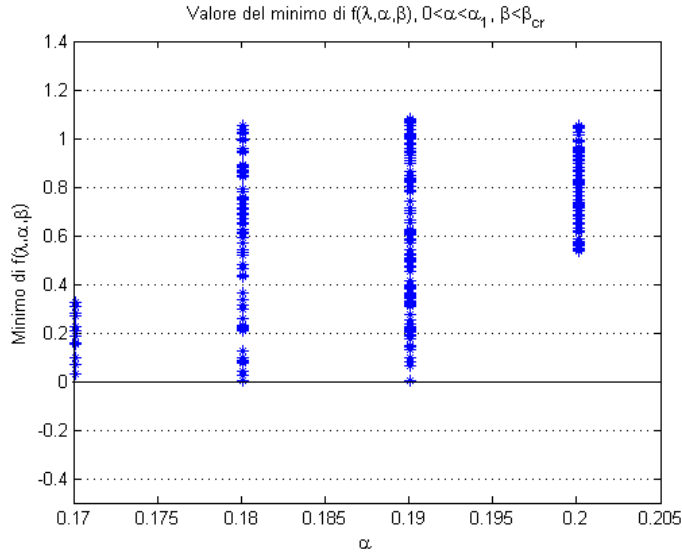


Figura 3.9: Valore del minimo di $f(\lambda, \alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta < \beta_{cr}$

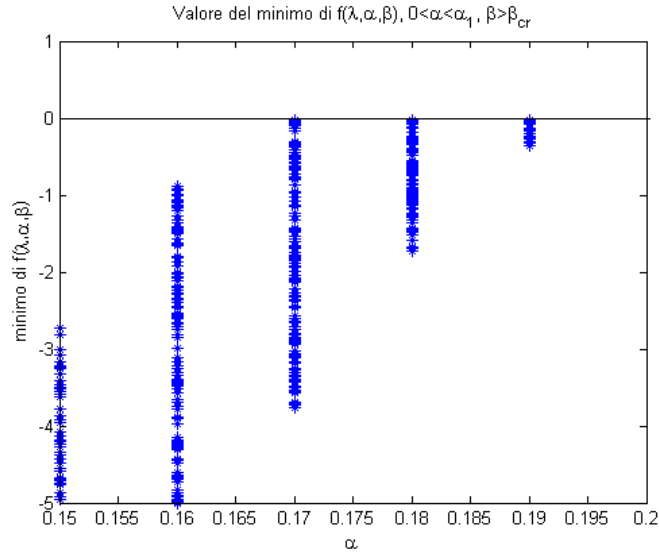


Figura 3.10: Valore del minimo di $f(\lambda, \alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta > \beta_{cr}$

Nel caso $\beta \in (\beta_{cr}, +\infty)$ la $f(\lambda, \alpha, \beta)$ interseca in due ulteriori punti $\lambda_2 \in (\lambda_a, \lambda_b)$, $\lambda_3 > \lambda_b$ l'asse delle ascisse.

Riassumendo quanto detto fin ora, se $\beta \in (6.0541, \beta_{cr})$ la $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è **positiva** per $\lambda > \lambda_1$, mentre se $\beta \in (\beta_{cr}, +\infty)$ la $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è **positiva** per $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \wedge \lambda > \lambda_3$.

- Per $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta > 6.0541$

Il minimo di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è positivo, $g(\lambda, \alpha, \beta)$ non ha quindi intersezioni con l'asse delle ascisse. Si ha che $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è sempre crescente $\forall \lambda > 0$ e, dato che $f(0^+, \alpha, \beta) < 0$, vi sarà un punto di intersezione λ_1 con l'asse delle ascisse.

Perciò la **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è per $\lambda > \lambda_1$.

- Per $\alpha \in (\alpha_2, 1/2)$, $\beta > 6.0541$

Il minimo di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è negativo, quindi vi sono due punti $\tilde{\lambda}_a \in (0, \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}})$, $\tilde{\lambda}_b > \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}$ di intersezione di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse. I valori $f(\tilde{\lambda}_a, \alpha, \beta)$ e $f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta)$ sono entrambi positivi e rappresentano, rispettivamente, il massimo relativo e il minimo assoluto della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$. Dato che $f(0^+, \alpha, \beta) < 0$, vi sarà un punto di intersezione $\lambda_1 \in (0, \tilde{\lambda}_a)$ con l'asse delle ascisse.

Perciò la **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è per $\lambda > \lambda_1$.

- Per $\alpha \in (1/2, 1)$

La funzione $f(0^+, \alpha, \beta) = \beta(2\alpha - 1) > 0$ e, al variare di β , nell'intervallo $\alpha \in (1/2, 1)$ la $g(\sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta)$ presenta o solo α_2 oppure nessuno valore critico.

Si trova quindi che, come nel caso precedente, vi è il valore $\beta = 6.0541$ tale che

$$\begin{cases} g(\sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta) > 0 & \text{se } \alpha \in (1/2, \alpha_2), \beta \in (1/3, 6.0541] \\ g(\sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta) < 0 & \text{se } \alpha \in (\alpha_2, 1), \beta \in (1/3, 6.0541] \\ g(\sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}, \alpha, \beta) < 0 & \text{se } \alpha \in (1/2, 1), \beta > 6.0541 \end{cases}$$

Dunque, data la differente positività del minimo di $g(\lambda, \alpha, \beta)$, si ha che:

- Per $\alpha \in (1/2, \alpha_2)$, $\beta \in (1/3, 6.0541]$

Il minimo di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è positivo, $g(\lambda, \alpha, \beta)$ non ha quindi intersezioni con l'asse delle ascisse. Si ha che $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è sempre crescente $\forall \lambda > 0$ e, dato che $f(0^+, \alpha, \beta) > 0$, non vi sono punti di intersezione con l'asse delle ascisse.

Perciò la **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è per $\forall \lambda > 0$.

- Per $\alpha \in (\alpha_2, 1)$, $\beta \in (1/3, 6.0541]$

Il minimo di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è negativo, quindi vi sono due punti $\tilde{\lambda}_a \in (0, \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}})$, $\tilde{\lambda}_b > \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}$ di intersezione di $g(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse. I valori $f(\tilde{\lambda}_a, \alpha, \beta)$ e $f(\tilde{\lambda}_b, \alpha, \beta)$ sono entrambi positivi e rappresentano, rispettivamente, il massimo relativo e il minimo assoluto della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$. Dato che $f(0^+, \alpha, \beta) > 0$, la **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è per $\forall \lambda > 0$.

- Per $\alpha \in (1/2, 1)$, $\beta > 6.0541$

Il comportamento è identico al caso precedente, quindi la **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è per $\forall \lambda > 0$.

- Per $\alpha > 1$

La positività di (3.16) si riduce a:

$$g'(\lambda, \alpha, \beta) = 9\alpha\beta\lambda^2 + (1 - 3\beta) > 0 \Leftrightarrow \lambda > \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\alpha\beta}}$$

Dunque $g(\lambda, \alpha, \beta)$ è crescente per $\lambda > \sqrt{\frac{3\beta-1}{3\alpha\beta}}$.

Studiando il comportamento della funzione $g(\lambda, \alpha, \beta)$ al variare dei parametri α, β si ha:

$$g(0^+, \alpha, \beta) = 3\beta(1 - \alpha) < 0$$

perciò vi è un valore $\tilde{\lambda}$ che rappresenta un punto di minimo della funzione $f(\lambda, \alpha, \beta)$.

Quindi:

$$f(0^+, \alpha, \beta) = \beta(2\alpha - 1) > 0$$

$$f(\tilde{\lambda}, \alpha, \beta) > 0 \Rightarrow \lambda = \tilde{\lambda} \text{ è un minimo assoluto.}$$

La **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è quindi $\forall \lambda > 0$.

3.3.3 Caso radice $\lambda = 0^+$

Caso $\alpha < 0$, $\beta = 1/3$

La (3.16) si riduce a:

$$g'(\lambda, \alpha, 1/3) = 3\alpha\lambda^2$$

Dunque $g'(\lambda, \alpha, 1/3) \leq 0 \Rightarrow g(\lambda, \alpha, 1/3)$ sempre decrescente $\forall \lambda > 0$.

Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $g(\lambda, \alpha, 1/3)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$g(0^+, \alpha, 1/3) = (1 - \alpha) > 0$$

perciò vi è un valore $\tilde{\lambda}$ che rappresenta un punto di massimo della funzione $f(\lambda, \alpha, 1/3)$.

Quindi:

$$f(0^+, \alpha, 1/3) = \frac{1}{3}(2\alpha - 1) < 0 \Rightarrow \lambda = 0^+ \text{ minimo relativo}$$

$$f(\tilde{\lambda}, \alpha, 1/3) > 0 \Rightarrow \lambda = \tilde{\lambda} \text{ massimo assoluto}$$

Vi sono dunque due punti $\tilde{\lambda}_1 \in (0, \tilde{\lambda})$ e $\tilde{\lambda}_2 > \tilde{\lambda}$ di intersezione di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ con l'asse delle ascisse.

La **positività** di $f(\lambda, \alpha, \beta)$ è quindi per $\tilde{\lambda}_1 < \lambda < \tilde{\lambda}_2$.

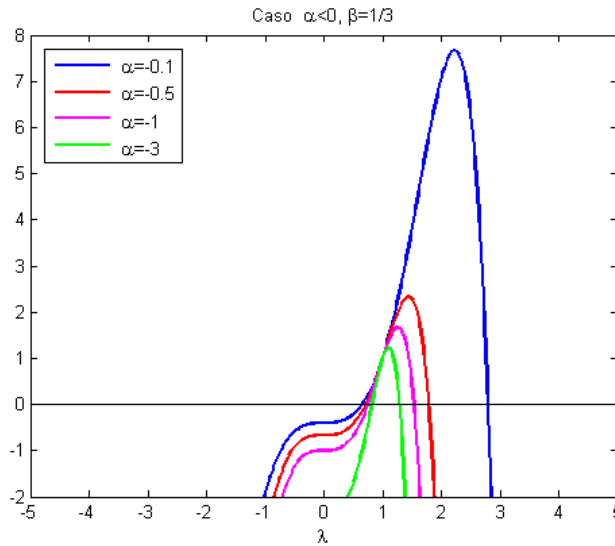


Figura 3.11: Radice $\lambda = 0^+$, $\alpha < 0$, $\beta = 1/3$

Caso $\alpha > 0$, $\beta = 1/3$

La (3.16) si riduce a:

$$g'(\lambda, \alpha, 1/3) = 3\alpha\lambda^2$$

Dunque $g'(\lambda, \alpha, 1/3) \geq 0 \Rightarrow g(\lambda, \alpha, 1/3)$ sempre crescente $\forall \lambda > 0$.

Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $g(\lambda, \alpha, 1/3)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$g(0^+, \alpha, 1/3) = \begin{cases} (1 - \alpha) \geq 0 & \text{se } \alpha \in (0, 1] \\ (1 - \alpha) < 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Si ha quindi la necessità di studiare i sottocasi $\alpha \in (0, 1]$ e $\alpha > 1$:

- Per $\alpha \in (0, 1]$
 $g(\lambda, \alpha, 1/3)$ è sempre positiva $\Rightarrow f(\lambda, \alpha, 1/3)$ sempre crescente $\forall \lambda > 0$.
Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $f(\lambda, \alpha, 1/3)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$f(0^+, \alpha, 1/3) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2\alpha - 1) < 0 & \text{se } \alpha \in (0, 1/2) \\ \frac{1}{3}(2\alpha - 1) \geq 0 & \text{se } \alpha \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Perciò, se $\alpha \in (0, 1/2)$ la $f(\lambda, \alpha, 1/3)$ è **positiva** per $\lambda > \tilde{\lambda}$, mentre se $\alpha \in [1/2, 1]$ la $f(\lambda, \alpha, 1/3)$ è **positiva** $\forall \lambda > 0$.

- Per $\alpha > 1$
 $g(\lambda, \alpha, 1/3)$ interseca l'asse delle ascisse in un valore $\tilde{\lambda}$ che rappresenta un punto di minimo della funzione $f(\lambda, \alpha, 1/3)$.
Quindi:

$$f(0^+, \alpha, 1/3) = \frac{1}{3}(2\alpha - 1) \gg 0 \Rightarrow \lambda = 0^+ \text{ massimo relativo}$$
$$f(\tilde{\lambda}, \alpha, 1/3) > 0 \Rightarrow \lambda = \tilde{\lambda} \text{ minimo assoluto}$$

che indica la **positività** di $f(\lambda, \alpha, 1/3) \forall \lambda > 0$.

3.4 Simmetria uniassiale: disequazione tipo II

In questa sezione verrà analizzata la disequazione, derivante da (3.2)(b), che ha struttura differente da quelle coincidenti nel caso uniassiale.

Prendendo sempre come riferimento la (3.10), nel caso

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \quad \lambda_1 = \lambda^{-2}$$

si ha la differente disequazione da analizzare, cioè:

$$\boxed{f(\lambda, \beta) = 2\beta\lambda^6 + (1 - 3\beta)\lambda^4 + \beta > 0} \quad (3.18)$$

che verrà indicata come **disequazione di tipo II**.

Il metodo utilizzato per lo studio della positività è quello della derivata prima di $f(\lambda, \beta)$ rispetto a λ , identificata con $f'(\lambda, \beta)$:

$$f'(\lambda, \beta) = 4\lambda^3 \underbrace{(3\beta\lambda^2 + (1 - 3\beta))}_{g(\lambda, \beta)} \geq 0 \quad (3.19)$$

E' necessario a questo punto proseguire con lo studio della funzione $g(\lambda, \beta)$, in quanto è l'unico fattore da analizzare per il segno dell'equazione avendo considerato solo i valori $\lambda > 0$.

Le cui radici sono:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\beta}} \quad (3.20)$$

Al variare di β , la (3.20) assume i seguenti valori:

$\beta < 0$	$0 < \beta < 1/3$	$\beta = 1/3$	$\beta > 1/3$
radice $\in \mathbb{R}^+$	radici $\in \mathbb{C}$	$\lambda = 0$	radice $\in \mathbb{R}^+$

3.4.1 Caso radici $\in \mathbb{C}$

Si è nel caso $0 < \beta < 1/3$ e $g(\lambda, \beta) > 0 \forall \lambda > 0$, perciò $f(\lambda, \beta) > 0$ è sempre crescente.

Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $f(\lambda, \beta)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$f(0^+, \beta) = \beta > 0$$

quindi $f(\lambda, \beta)$ è **positiva** $\forall \lambda > 0$.

3.4.2 Caso radici $\in \mathbb{R}^+$

- **Caso $\beta < 0$**

$$g(\lambda, \beta) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\beta}}.$$

Quindi $f(\lambda, \beta)$ ha un massimo in $\lambda = \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\beta}}$. Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $f(\lambda, \beta)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$\begin{aligned} f(0^+, \beta) &= \beta < 0 \\ f\left(\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\beta}}, \beta\right) &= \frac{27\beta^2 - 9\beta + 1}{27\beta^2} > 0 \end{aligned}$$

Vi sono dunque due punti $\lambda_1 \in (0, \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\beta}})$ e $\lambda_2 > \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\beta}}$ di intersezione di $f(\lambda, \beta)$ con l'asse delle ascisse.

La **positività** di $f(\lambda, \beta)$ è quindi per $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

- **Caso $\beta > 1/3$**

$$g(\lambda, \beta) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\beta}}.$$

Quindi $f(\lambda, \beta)$ ha un minimo in $\lambda = \sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\beta}}$ e:

$$\begin{aligned} f(0^+, \beta) &= \beta > 0 \\ f\left(\sqrt{\frac{3\beta - 1}{3\beta}}, \beta\right) &= \frac{27\beta^2 - 9\beta + 1}{27\beta^2} > 0 \end{aligned}$$

La $f(\lambda, \beta)$ è quindi **positiva** $\forall \lambda > 0$.

3.4.3 Caso radice $\lambda = 0^+$

- **Caso $\beta = 1/3$**

$g(\lambda, 1/3) \geq 0 \quad \forall \lambda > 0$, perciò $f(\lambda, 1/3)$ è sempre crescente.

Per controllare se vi sono eventuali punti di intersezione di $f(\lambda, 1/3)$ con l'asse delle ascisse, si calcola:

$$f(0^+, 1/3) = \frac{1}{3}$$

quindi $f(\lambda, 1/3)$ è **positiva** $\forall \lambda > 0$.

3.5 Analisi conclusiva del caso uniassiale

Dopo aver analizzato le tutti i casi di simmetria delle condizioni di ellitticità (3.2), è necessario ora fare il quadro risolutivo delle soluzioni trovate. Per quanto riguarda la condizione (3.2)(a), cioè $W_1 > 0$, viene di seguito riportato il risultato dell'analisi:

	Positività di W_1
$\beta > 0$	$\forall \lambda > 0$
$\beta < 0$	$\lambda_a < \lambda < \lambda_b$

Per quanto riguarda invece la seconda condizione (3.2)(b), essa è scomponibile nel prodotto dei due termini:

$$\frac{1}{2}(1 + \beta(I_1 - 3))^{\alpha-1} \left[1 + 2(I_1 - \lambda_i^2 - 2\lambda_i^{-1})\beta(\alpha - 1)(1 + \beta(I_1 - 3))^{-1} \right] > 0$$

il primo dei quali è proprio (3.2)(a).

Quindi per (3.2)(b) è necessario che **entrambi** i fattori siano positivi per soddisfare la richiesta di ellitticità. A tal proposito è opportuno dunque procedere con un'analisi differenziata dei casi critici $\beta > 0$ e $\beta < 0$ nei quali si differenzia la condizione (3.2)(a).

3.5.1 Caso $\beta > 0$

Questo caso è il più semplice in quanto la soluzione di (3.2)(a) è positiva $\forall \lambda > 0$, quindi il risultato finale combacia con quello trovato nelle precedenti due sezioni. Si ha quindi il seguente quadro riassuntivo:

Simmetria uniassiale, tipo I	Positività di (3.2)(b)
$\alpha > 0, 0 < \beta < 1/3$	$\forall \lambda > 0$
$\alpha < 0, \beta > 1/3$	$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$
$\alpha < 0, 0 < \beta < 1/3$	$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

e in particolare il caso $\alpha > 0, \beta > 1/3$:

Simmetria uniassiale, tipo I	Positività di (3.2)(b)
$\alpha \in (0, \alpha_1), \beta \in (1/3, \beta_{cr})$	$\lambda > \lambda_1$
$\alpha \in (0, \alpha_1), \beta \in (\beta_{cr}, 6.0541)$	$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \lambda > \lambda_3$
$\alpha \in (0, 1/2), \beta \in (1/3, 6.0541)$	$\lambda > \lambda_1$
$\alpha \in (0, \alpha_1), \beta \in (6.0541, \beta_{cr})$	$\lambda > \lambda_1$
$\alpha \in (0, \alpha_1), \beta > \beta_{cr}$	$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \lambda > \lambda_3$
$\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2), \beta > 6.0541$	$\lambda > \lambda_1$
$\alpha \in (\alpha_2, 1/2), \beta > 6.0541$	$\lambda > \lambda_1$
$\alpha \in (1/2, \alpha_2), \beta \in (1/3, 6.0541)$	$\forall \lambda > 0$
$\alpha \in (\alpha_2, 1), \beta \in (1/3, 6.0541)$	$\forall \lambda > 0$
$\alpha \in (1/2, 1), \beta > 6.0541$	$\forall \lambda > 0$
$\alpha > 1, \beta > 1/3$	$\forall \lambda > 0$

mentre per la restante tipologia si ha:

Simmetria uniassiale, tipo II	Positività di (3.2)(b)
$0 < \beta < 1/3$	$\forall \lambda > 0$
$\beta = 1/3$	$\forall \lambda > 0$
$\beta > 1/3$	$\forall \lambda > 0$

3.5.2 Caso $\beta < 0$

E' il caso più complesso in quanto (3.2)(a) è positiva solo in intervalli di valori di λ e quindi necessita di un'indagine approfondita.

Inizialmente sono riportati i casi per le disequazioni di tipo I e relativa tabella, e successivamente i casi per la disequazione di tipo II.

- **Caso $\alpha < 0, \beta < 0$**

In questa situazione il secondo termine di (3.2)(b) è positivo $\forall \lambda > 0$, dunque la positività di (3.2)(b) è per $\lambda_a < \lambda < \lambda_b$.

- **Caso $\alpha \in (0, 1/2], \beta < 0$**

In questo caso, e nei successivi, la positività del secondo termine di (3.2)(b) è tale sono in diversi intervalli di valori di λ . Sarà quindi indispensabile mettere a confronto, al variare del parametro β , gli intervalli di positività di **entrambi** i termini di (3.2)(b).

I successivi grafici sono stati realizzati facendo variare i parametri α, β e riportano simultaneamente gli intervalli di positività del secondo termine di (3.2)(b) (**rosso**) e gli intervalli di positività della condizione (3.2)(a) (**blu**). Come notazione si è scelto di identificare con pedici in lettere gli intervalli in blu (λ_a, λ_b) e con pedici numerici gli intervalli in rosso (λ_i).

In Figura 3.12 l'intervallo di positività del secondo termine di (3.2)(b) è $0 < \lambda < \lambda_1$ che intersecato con quello di (3.2)(a), cioè $\lambda_a < \lambda < \lambda_b$, fornisce dunque quest'ultimo come soluzione.

Stesso risultato si ha anche per quanto riguarda la Figura 3.13.

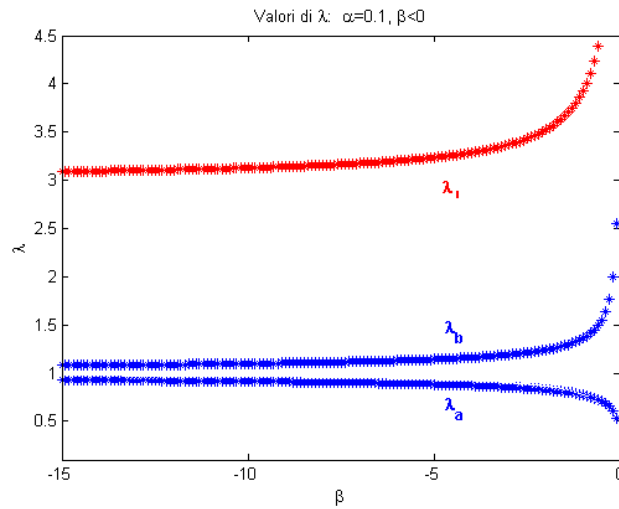


Figura 3.12: Caso $\alpha = 0.1, \beta < 0$

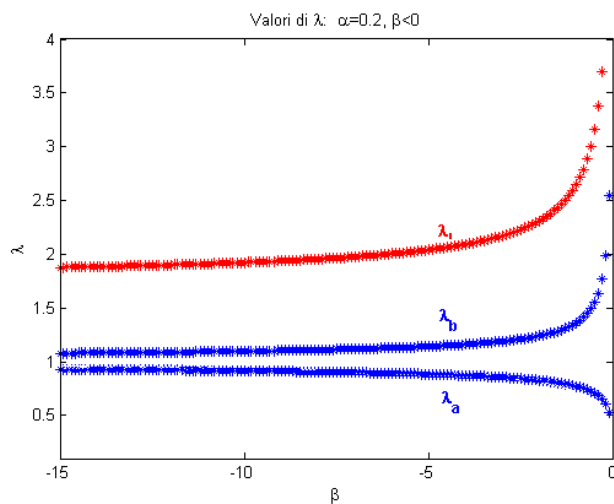


Figura 3.13: Caso $\alpha = 0.2, \beta < 0$

In Figura 3.14 invece vi è la comparsa del β_{cr} tale per cui la funzione del secondo termine di (3.2)(a) ha un minimo che cambia di segno, generando quindi due ulteriori punti di intersezione con l'asse delle ascisse (λ_1 e λ_2) e creando un ulteriore intervallo di positività ($0 < \lambda < \lambda_1$) oltre a $\lambda > \tilde{\lambda}_3$.

Si può notare che il valore di β_{cr} è quello tale per cui nasce la biforcazione dei valori di λ per $\beta \rightarrow -\infty$, mentre per $\beta > \beta_{cr}$ l'intersezione del minimo della funzione diventa positivo facendo scomparire i due valori λ_1 e λ_2 . Anche in questo caso però si può notare che il risultato

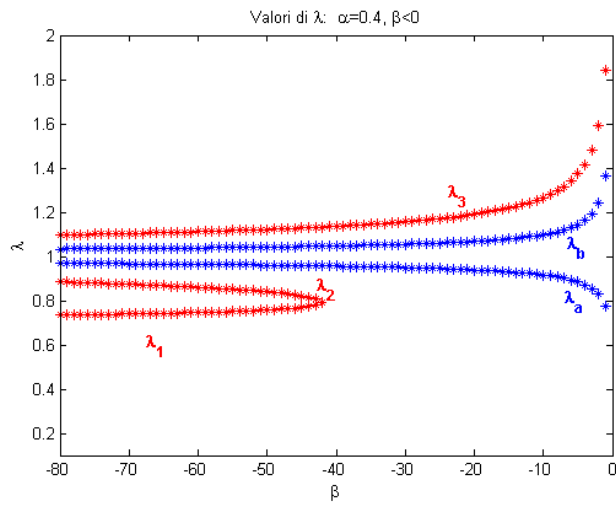


Figura 3.14: Caso $\alpha = 0.4, \beta < 0$

finale di confronto con l'intervallo blu è $\lambda_a < \lambda < \lambda_b$ in entrambi i casi $\beta \in (\beta_{cr}, 0)$, $\beta < \beta_{cr}$. Situazione identica si verifica in maniera più marcata, con $\alpha \approx 0.5$, in Figura 3.15.

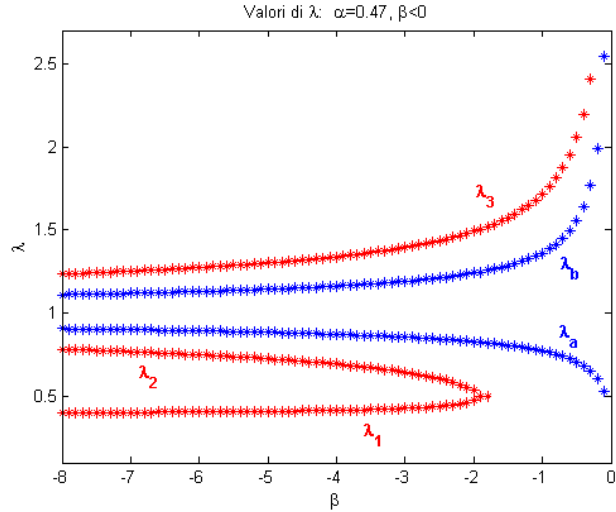


Figura 3.15: Caso $\alpha = 0.47, \beta < 0$

- **Caso $\alpha \in [1/2, 1]$, $\beta < 0$**

In questo caso non vi è più un β_{cr} e il grafico delle soluzioni di λ ha la struttura di quelli precedenti.

Infatti in Figura 3.16 si vede che la positività di (3.2)(b) è data da $\lambda_a < \lambda < \lambda_b$, cioè dall'intersezione di quest'ultima con la soluzione in rosso $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1$.

Per $\alpha \rightarrow 1$ si ha una progressiva espansione dell'intervallo in rosso verso quello in blu fino alla reciproca sovrapposizione per $\alpha = 1$.

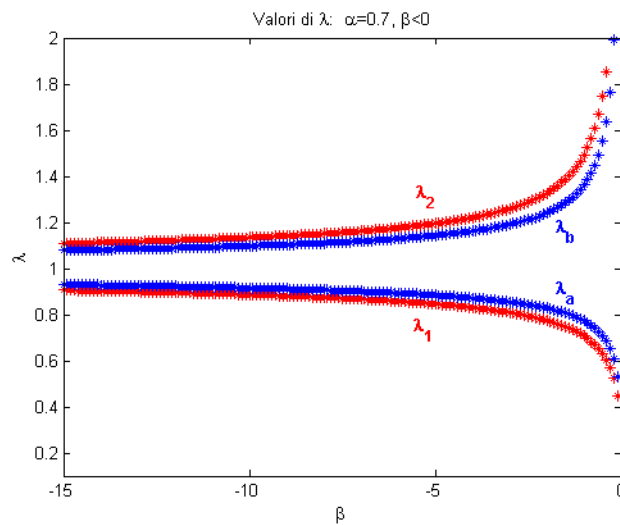


Figura 3.16: Caso $\alpha = 0.7, \beta < 0$

- **Caso $\alpha > 1$, $\beta < 0$**

In questa situazione lo scenario cambio: per $\alpha > 1$ si ha ora che l'intervallo in rosso è compreso in quello blu, fornendo quindi la condizione di positività $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

Le Figure 3.17 e 3.18 mostrano in dettaglio la situazione.

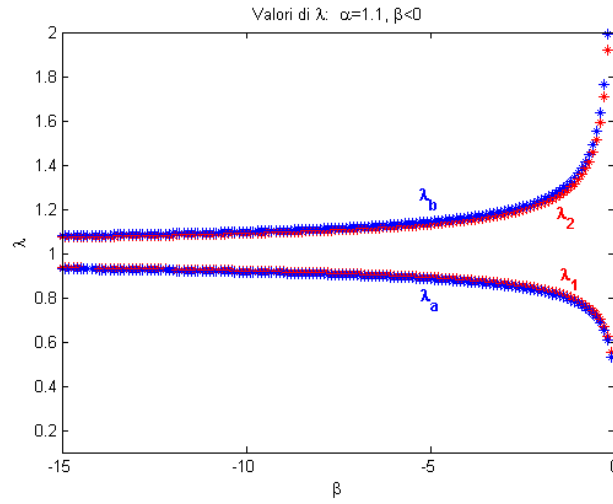


Figura 3.17: Caso $\alpha = 1.1, \beta < 0$

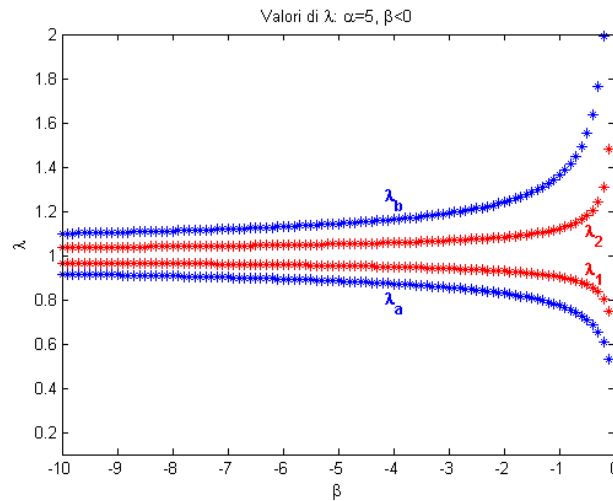


Figura 3.18: Caso $\alpha = 5, \beta < 0$

Si può quindi riassumere tutta l'analisi del caso di disequazione di tipo I, per $\beta < 0$, nella seguente tabella:

Simmetria uniassiale, tipo I	Positività di (3.2)(b)
$\alpha < 0, \beta < 0$	$\lambda_a < \lambda < \lambda_b$
$0 < \alpha < 1/2, \beta < 0$	$\lambda_a < \lambda < \lambda_b$
$1/2 \leq \alpha \leq 1, \beta < 0$	$\lambda_a < \lambda < \lambda_b$
$\alpha > 1, \beta < 0$	$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

Per quanto riguarda invece la disequazione di tipo II si ha che:

Simmetria uniassiale, tipo II	Positività di (3.2)(b)
$\beta < 0$	$\lambda_a < \lambda < \lambda_b$

3.5.3 Conclusioni

In questa sezione verranno commentati i risultati finali del caso uniassiale. In particolare, verranno inizialmente rappresentate graficamente le regioni del piano in cui la funzione W presenta ellitticità (con le eventuali restrizioni) e successivamente analizzate alla luce delle caratteristiche della generalizzazione considerata del modello di Knowles.

L'ellitticità della funzione W , al variare di α, β è riportata in Figura 3.19:

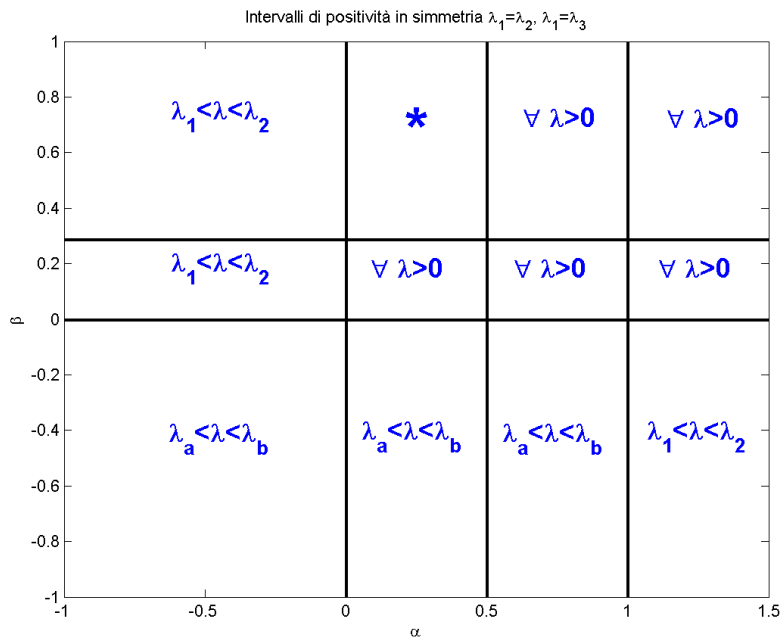


Figura 3.19: Sommario dell'ellitticità

Procediamo ora ad un commento del grafico.

Innanzitutto, si nota che esistono delle regioni del piano per cui non vi sono vincoli su λ affinché vi sia ellitticità e, in particolare, essi sono nel dislocati nel primo quadrante ($0 < \alpha < 1/2, 0 < \beta < 1/3$ e $\alpha > 1/2, \beta > 0$).

In tutte le restanti regioni vi è invece una restrizione sui valori di λ possibili per l'ellitticità: a prima vista sembrano essersi formati due macroblocchi distinti, ma in realtà il caso $\alpha > 1, \beta < 0$ fa cadere questa ipotesi.

Infine, la regione del piano $0 < \alpha < 1/2, \beta > 1/3$ contraddistinta dall'asterisco, data la sua complessità, è rappresentata a parte in Figura 3.20.

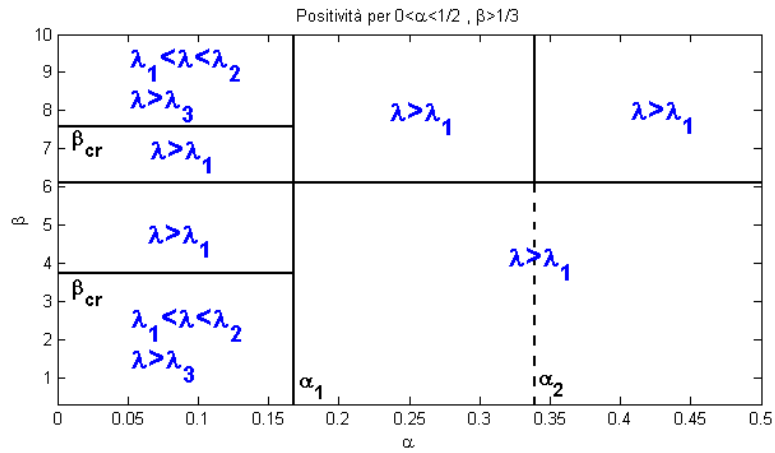


Figura 3.20: Ellitticit  in caso $\alpha \in (0, 1/2), \beta > 1/3$

In Figura 3.20 si possono notare le diverse regioni e la particolare eterogeneit  di intervalli di ellitticit  dovuti alla presenza dei valori di β_{cr} esaminati nelle sezioni precedenti.

A questo punto   possibile analizzare in parallelo le regioni di ellitticit  e il comportamento del materiale attraverso l'energia di deformazione W . In Figura 3.21   mostrato questo parallelismo:

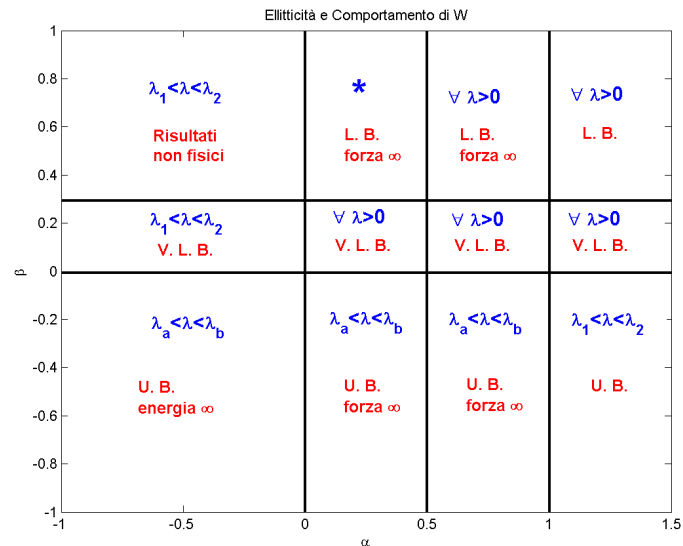


Figura 3.21: Ellitticit  e comportamento di W

In blu sono riportati gli intervalli di ellitticit  mentre in rosso   mostrata

la presenza di particolari “soglie superiori” (indicate in figura come **UB**, *upper bound*) e “soglie inferiori” (indicate in figura come **LB**, *lower bound*) $\mathbf{LB}=\underline{I}_1$, $\mathbf{UB}=\overline{I}_1$, e $\mathbf{VLB}=\underline{I}_{1v}$. In particolare si ricorda che la soglia **VLB** è virtuale in quanto $\underline{I}_1 < 0$ per $\beta > 0$ e I_1 è positivo per costruzione. Esaminando il grafico si possono osservare delle particolarità interessanti:

- per $\alpha > 1, \beta < 0$ il materiale è definito come strain-softening¹ e vi è un **UB** che rappresenta la soglia del materiale, cioè il valore oltre il quale il materiale subisce delle fratture e si può spezzare. Si può notare che in questo contesto l’ellitticità è garantita solo in un intervallo di valori di λ , cioè è necessario scegliere a priori degli opportuni λ per cui sia garantita la stabilità del materiale durante la deformazione. Discorso analogo è possibile farlo per il caso $\alpha < 0, \beta < 0$ dove il materiale durante la deformazione immagazzinerà una energia infinita portando ad un irridimento dello stesso, mentre nel caso $\alpha \in (0, 1), \beta < 0$ l’**UB** sarà raggiunto solo con l’impiego di una forza infinita.
- per $\alpha > 1, \beta > 1/3$ il materiale presenta una soglia inferiore ma, a differenza del caso precedente, l’ellitticità vale $\forall \lambda > 0$. Perciò in questo caso il materiale possiede stabilità senza limitazioni su λ (garantita dall’ellitticità) durante la deformazione ma possiede comunque un valore limite oltre il quale il modello descrive un comportamento che porta alla frattura del materiale. Discorso analogo si può fare per i casi di soglia inferiore virtuale **VLB**.
- per $\alpha < 0, \beta > 1/3$ il materiale non presenta una soglia inferiore e ciò porta a dei risultati non ammissibili fisicamente in quanto il collasso a una deformazione finita libererebbe energia infinita. L’ellitticità in questo caso, seppur vincolata per alcuni valori di λ , non è di nostro interesse.

Riassumendo, si evince che lo studio incrociato di comportamento e stabilità del materiale permette di avere una visione di insieme della modellizzazione e degli eventuali limiti che il corpo potrebbe avere durante la deformazione.

In particolare è importante notare che la modellizzazione di Knowles identifica delle precise risposte del materiale alla deformazione dando un significato fisico agli eventuali limiti del modello mentre l’ellitticità provvede a fornire delle restrizioni su alcuni valori di λ che potrebbero creare problemi di stabilità durante il processo di deformazione.

I due aspetti sono fondamentali e legati l’uno all’altro per poter dare una risposta seria e completa nello studio di una energia di deformazione che descrive le risposte a sollecitazioni di un particolare materiale.

¹Materiale che, una volta raggiunto il valore di soglia tra la deformazione elastica a quella plastica, ha bisogno di una diminuzione dello sforzo per potersi di nuovo deformare.

Capitolo 4

Modello di Knowles generalizzato: deformazioni biassiali

In questo capitolo, a differenza del precedente, verrà analizzato il caso particolare di estrema asimmetria.

Infatti, verrà considerato il caso in cui vi sia una direzione in cui l'allungamento è predominante rispetto alle altre due, in modo da osservare come varia l'ellitticità nei rispetti intervalli di α e β e di conseguenza il comportamento del materiale alla deformazione.

A questo proposito, introduciamo un parametro $\epsilon \rightarrow 0$ che ci consente di stabilire la direzione di allungamento predominante.

Dunque i nuovi allungamenti principali da considerare sono i seguenti:

$$\lambda_1 = \epsilon\lambda_1, \quad \lambda_2 = \lambda_2, \quad \lambda_3 = \lambda_3/\epsilon.$$

Si nota quindi che è stato scelto come allungamento dominante λ_3 , mentre λ_1 tenderà a diventare molto piccolo e λ_2 rimarrà finito.

A questo punto è possibile iniziare l'analisi della stabilità di W .

Richiamando le condizioni di ellitticità (3.2), si può notare che, a differenza del caso di simmetria uniassiale, è prevedibile che la (3.2)(b) dovrà essere studiata nei tre casi differenti $i = 1, 2, 3$ in quanto sono venute a mancare le possibilità di coincidenza di parte della formulazione.

Partendo dalla prima condizione (3.2)(a), che viene riportata di seguito:

$$W_1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 > \underline{I}_1 = 3 - \beta^{-1} & \text{se } \beta > 0 \\ I_1 < \bar{I}_1 = 3 - \beta^{-1} & \text{se } \beta < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

essa in questo caso di asimmetria diventa:

$$W_1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{\lambda_3^2}{\epsilon^2} > 3 - \beta^{-1} & \text{se } \beta > 0 \\ \epsilon\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{\lambda_3^2}{\epsilon^2} < 3 - \beta^{-1} & \text{se } \beta < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

E' necessario quindi procedere a uno studio diversificato in base ai valori positivi e negativi di β .

- **Caso $\beta > 0$**

Si nota che a primo membro della disequazione il termine λ_3^2/ϵ^2 , per $\epsilon \rightarrow 0$, è dominante rispetto agli altri.

La disequazione si può quindi ricondurre allo studio di

$$\frac{\lambda_3^2}{\epsilon^2} > 3 - \beta^{-1}$$

che è **sempre** verificata $\forall \lambda > 0, \epsilon \rightarrow 0$.

- **Caso $\beta < 0$**

Anche in questo caso il termine λ_3^2/ϵ^2 , per $\epsilon \rightarrow 0$, è dominante rispetto agli altri e la disequazione si riconduce a

$$\frac{\lambda_3^2}{\epsilon^2} < 3 - \beta^{-1}$$

che però non è **mai** verificata per $\epsilon \rightarrow 0$.

Questa sostanziale differenza di soluzione nei due casi avrà ripercussione sui risultati della seconda condizione di ellitticità (3.2)(b).

Infatti, come accennato in precedenza, bisogna analizzare singolarmente la seconda condizione di ellitticità nei casi $i = 1, 2, 3$.

Come accadeva nel caso uniassiale, la (3.2)(b) è possibile scomporla nel prodotto di due fattori nel quale il primo coincide con (3.2)(a).

Resta quindi da studiare solo il secondo fattore, e ciò verrà eseguito nelle successive sezioni.

4.1 Condizioni sull'autovalore infinitesimo

Per $i = 1$ il secondo fattore di (3.2)(b) diventa:

$$\frac{1}{\lambda_1} \left[\beta \epsilon^2 \lambda_1^3 + (1 - 3\beta) \lambda_1 + \beta(2\alpha - 1) \lambda_1 \lambda_2^2 + \frac{\beta}{\epsilon^2} (2\alpha - 1) \lambda_1 \lambda_3^2 + \frac{4\beta(1 - \alpha)}{\epsilon} \right] > 0 \quad (4.3)$$

In questo caso il termine dominante è rappresentato da $\frac{\beta}{\epsilon^2} (2\alpha - 1) \lambda_1 \lambda_3^2$ e, tenendo conto che si stanno considerando valori $\lambda_j > 0$, la disequazione può essere riscritta come:

$$\frac{\beta}{\epsilon^2} (2\alpha - 1) \lambda_1 \lambda_3^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(2\alpha - 1) > 0$$

In Figura 4.1 sono quindi riportate le regioni del piano dove vi è positività e negatività della disequazione al variare dei parametri α, β .

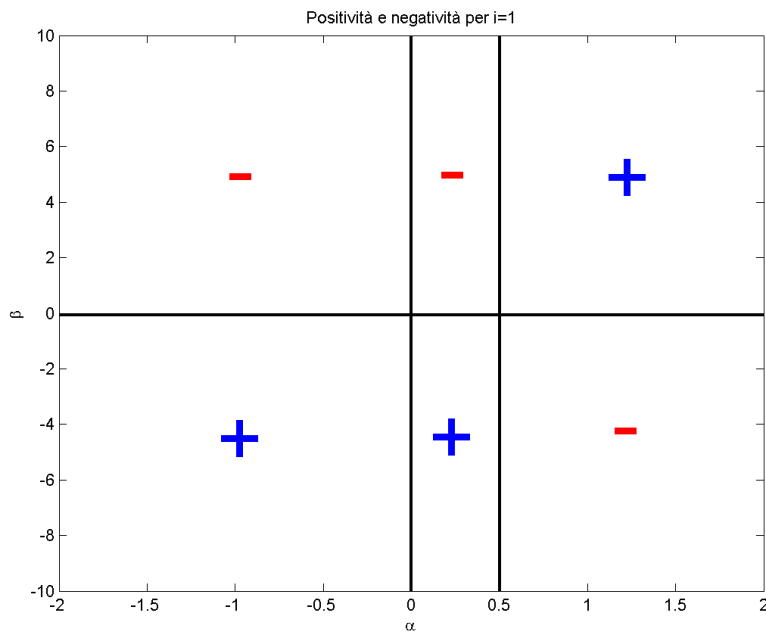


Figura 4.1: Positività e negatività nel caso $i=1$

4.2 Condizioni sull'autovalore finito

Per $i = 2$ il secondo fattore di (3.2)(b) diventa:

$$\frac{1}{\lambda_2} \left[\beta \lambda_2^3 + (1-3\beta) \lambda_2 + \beta \epsilon^2 (2\alpha-1) \lambda_2 \lambda_1^2 + \frac{\beta}{\epsilon^2} (2\alpha-1) \lambda_2 \lambda_3^2 + 4\beta(1-\alpha) \right] > 0 \quad (4.4)$$

In questo caso il termine dominante è uguale a quello del caso $i = 1$ precedentemente presentato e quindi la disequazione si riscrive come:

$$\frac{\beta}{\epsilon^2} (2\alpha - 1) \lambda_1 \lambda_3^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(2\alpha - 1) > 0$$

In Figura 4.2 sono quindi riportate le regioni del piano dove vi è positività e negatività della disequazione.

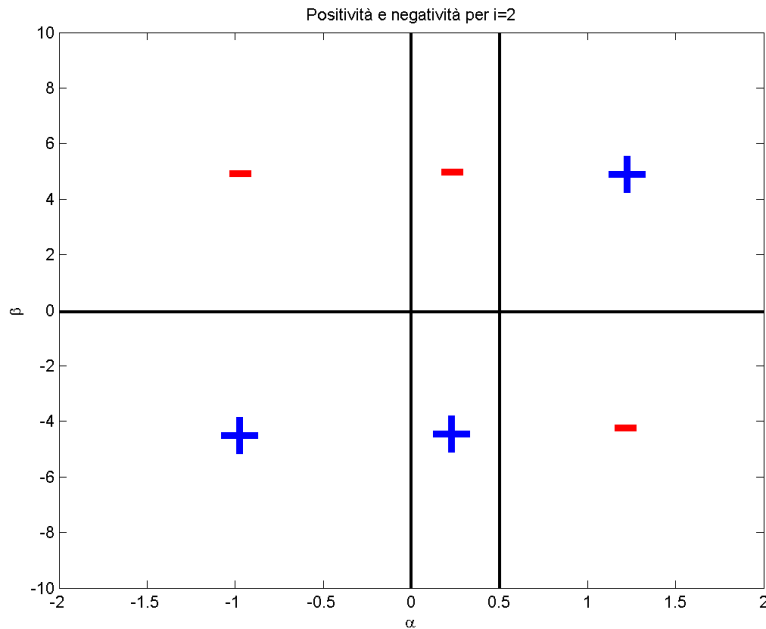


Figura 4.2: Positività e negatività nel caso $i=2$

4.3 Condizioni sull'autovalore infinito

Per l'ultimo caso $i = 3$ il secondo fattore di (3.2)(b) è:

$$\frac{1}{\lambda_3} \left[\frac{\beta}{\epsilon^2} \lambda_3^3 + (1 - 3\beta) \lambda_2 + \beta \epsilon^2 (2\alpha - 1) \lambda_3 \lambda_1^2 + \beta (2\alpha - 1) \lambda_3 \lambda_2^2 + 4\beta \epsilon (1 - \alpha) \right] > 0 \quad (4.5)$$

In questo caso il termine dominante è rappresentato da $\frac{\beta}{\epsilon^2} \lambda_3^3$ e quindi la disequazione si riscrive come:

$$\frac{\beta}{\epsilon^2} \lambda_3^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta > 0$$

Si noti che, a differenza dei casi precedenti, il discriminante per il segno della disequazione è dato dal solo parametro β .

Le regioni del piano di positività e negatività sono quindi riportate in Figura 4.3.

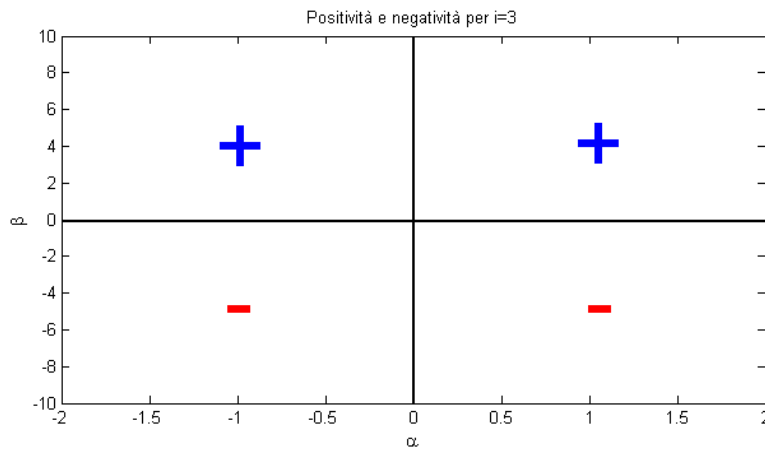


Figura 4.3: Positività e negatività nel caso $i=3$

4.4 Conclusioni

E' ora possibile riassumere le analisi effettuate nelle precedenti sezioni riguardo l'ellitticità.

Prima di tutto è necessario concludere la globalità della soluzione per quanto riguarda la seconda condizione (3.2)(b).

Dato che essa è formata da due termini moltiplicati, uno dei quali è identico alla condizione (3.2)(a), la soluzione completa della positività è data intersecando quest'ultime e il risultato finale è:

Caso asimmetrico	Positività di (3.2)(a)
$\beta > 0$	$\forall \lambda > 0$
$\beta < 0$	mai

Caso asimmetrico	Positività di (3.2)(b)
i=1, $\alpha > 1/2, \beta > 0$	$\forall \lambda > 0$
i=2, $\alpha > 1/2, \beta > 0$	$\forall \lambda > 0$
i=3, $\beta > 0$	$\forall \lambda > 0$

Le condizioni di ellitticità (3.2)(a)-(b), dovendo valere entrambe, portano a stabilire che la ellitticità nel caso biassiale è unicamente possibile solo per i valori dei parametri $\alpha > 1/2, \beta > 0$.

Questa regione è coerente con quella trovata nel caso uniassiale e visibile in Figura 3.21 perchè, avendo in questo caso un $\lambda \rightarrow 0$ e un $\lambda \rightarrow \infty$, deve sopravvivere una regione del piano (α, β) che le consenta entrambe.

La zona $\alpha < 1/2, \beta > 0$ nel caso biassiale non è accettabile, mentre lo era per il caso uniassiale.

Si può osservare inoltre che il modello Knowles nella regione $\alpha > 1/2, \beta > 0$ possiede comunque delle soglie inferiori (virtuali se $0 < \beta < 1/3$) oltre le quali emergono dei fenomeni di instabilità.

E' importante notare che l'eventuale presenza di limiti per λ indica solo l'esistenza di soglie superiori e inferiori alla deformazione, oltre le quali il materiale cambia radicalmente il suo comportamento. I valori di (α, β) per cui accadono questi fenomeni non sono quindi da ritenere non fisici.

Infatti il materiale è ben definito per tutti i valori di α e β ma vi sono intervalli di valori per cui esiste solo un range di deformazioni stabili.

Bibliografia

- [1] L.C. Evans, “*Partial Differential Equations*”, American Mathematical Society (2000)
- [2] L. Zee, E. Sternberg, “*Ordinary and Strong Ellipticity in the Equilibrium Theory of Incompressible Hyperelastic Solids*”, Arch. Rat. Mech. Anal., 83, 53-90 (1983)
- [3] J. K. Knowles, E. Sternberg, “*On the Failure of Ellipticity of the Equations for Finite Elastostatic Plane Strain*”, Arch. Rat. Mech. Anal., 63, 321-336 (1977)
- [4] P. Biscari, C. Omati, “*Stability of generalized Knowles solids*”, IMA J. App. Math., 75, 479-491 (2010)