

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile - Strutturale

Dipartimento di Ingegneria Strutturale



Sviluppo di uno strumento di calcolo
tridimensionale per l'analisi delle grandi
deformazioni di fluidi e solidi viscosi.

Relatore: Prof. Umberto Perego

Correlatore: Dott. Massimiliano Cremonesi

Tesi di Laurea di:

Francesco Ferri

Matr. 734699

Anno Accademico 2011–2012

alla mia famiglia

Abstract

The primary purpose of this master thesis is to develop an efficient and robust Lagrangian Finite Element Method for the analysis of incompressible flows. The adapted formulation is based on the Particle Finite Element Method, that is a powerful tool for resolution of fluid-dynamics problems, including free-surface flow and breaking waves. An existing code, developed at the Department of Structural Engineering of the Politecnico di Milano, has been used as starting point for the implementation. First of all, the code is analyzed to reduce the computing time and subsequently the program Tetgen is introduced for the continuous re-triangulation of the domain. Special attention is devoted to the mass conservation problem with a detailed study of different formulations of the Fractional Step Method. The model is applied to sloshing problems and to simulate the mass propagation on a complex topography. This work is part of a research activity, currently in progress at the Department of Structural Engineering, aimed to develop a 3D model for the simulation of fluid-structure interaction problems and of landslide runouts.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Motivazioni	1
1.2	Obiettivi	3
2	Modello matematico	5
2.1	Il problema fluidodinamico	5
2.2	Le equazioni di Navier-Stokes	6
2.2.1	Descrizione Euleriana	6
2.2.2	Descrizione Lagrangiana	7
2.2.3	Fluidi Newtoniani e non Newtoniani	10
2.2.4	Formula debole e discretizzazione del problema nello spazio	11
2.2.5	Integrazione temporale ed equazioni risolventi	13
2.2.6	Stabilizzazione della soluzione	16
2.2.7	Metodo iterativo di risoluzione	19
2.3	Descrizione del metodo e del codice di calcolo	21
2.3.1	Riassunto delle fasi principali	21
2.3.2	Identificazione delle condizioni al contorno	22
2.3.3	Struttura del codice di calcolo	23
3	Triangolatore <i>tetgen</i>	27
3.1	Introduzione	27
3.2	Triangolazione di Delaunay e dominio convesso	28

3.3	Applicazioni e risultati	31
4	Studio sulla conservazione della massa	41
4.1	Introduzione	41
4.2	Schema di risoluzione a Passi Frazionari Modificato	42
4.3	Calcolo della pressione di tentativo \mathbf{P}_g^{n+1}	44
4.3.1	Pressione di tentativo	44
4.4	Simulazioni bidimensionali di problemi di sloshing	47
4.5	Studio comparativo	52
4.6	Simulazione tridimensionale	60
5	Simulazioni 3D di test di laboratorio	65
6	Conclusioni	83
A	Metodo <i>Compressed Sparse Row</i> (CSR)	87
B	Condizioni al contorno di Dirichlet	89

Elenco delle figure

1.1	Vajont : porzione di montagna franata	3
2.1	Sfera e piano orizzontale: identificazione del contorno	22
2.2	(a) Insieme di punti, (b) triangolazione di Delaunay, (c) dominio reale	23
3.1	Il criterio di Delaunay e la triangolazione di Delaunay in due dimensioni. (a) i semplici di dimensione due abc e di dimensione 1 de sono entrambi di Delaunay. (b) La triangolazione di Delaunay dell'insieme di punti mostrato in (a) [5].	29
3.2	Relazione tra la triangolazione di Delaunay in \mathbf{R}^d e l'involuppo convesso in \mathbf{R}^{d+1} , ($d = 2$). (a) Alcuni punti 2D e i corrispondenti punti spostati 3D. (b) La triangolazione di Delaunay di un insieme di punti 2D e il piu piccolo dominio convesso dei punti spostati 3D [5].	31
3.3	Insieme di punti (a), triangolazione di Delaunay (b), involuppo convesso (c)	33
3.4	Simulazione con la versione attuale. Visualizzazione della superficie del problema tridimensionale (metà del dominio) e modulo della velocità in una sezione, $ \mathbf{v} $ agli istanti di tempo $t = 0s$, $t = 0.45s$, $t = 0.9s$ e $t = 1.35s$. Risoluzione tramite il metodo dei passi frazionari	35

3.5	Simulazione con la versione attuale. Visualizzazione della superficie del problema tridimensionale e modulo della velocità in una sezione, $ \mathbf{v} $ agli istanti di tempo $t = 0s$, $t = 0.1s$ e $t = 0.3s$. Risoluzione tramite il metodo dei passi frazionari	38
3.6	Simulazione con la versione precedente. Visualizzazione della superficie del problema tridimensionale agli istanti di tempo $t = 0s$, $t = 0.1s$ e $t = 0.3s$. Risoluzione tramite il metodo dei passi frazionari	39
4.1	<i>Metodo a passi frazionari standard</i> , modulo della velocità	47
4.2	<i>Metodo monolitico</i> , modulo della velocità	48
4.3	<i>Metodo a passi frazionari del secondo ordine</i> , modulo della velocità	49
4.4	<i>Metodo a passi frazionari del secondo ordine</i> , modulo della velocità ($t = 3 s$)	49
4.5	Variazione della massa	50
4.6	<i>Metodo a passi frazionari standard</i> , velocità \mathbf{v}_x	52
4.7	<i>Metodo monolitico</i> , velocità \mathbf{v}_x	53
4.8	<i>Metodo monolitico</i> con τ_{pspg} ridotto, velocità \mathbf{v}_x	53
4.9	<i>Metodo a passi frazionari del secondo ordine</i> , velocità \mathbf{v}_x	53
4.10	<i>Metodo a passi frazionari modificato</i> , velocità \mathbf{v}_x	54
4.11	Variazione della massa	54
4.12	Variazione della massa nel caso monolitico al variare del parametro $\tau_{pspg}(\alpha)$	55
4.13	<i>Metodo a passi frazionari standard</i> , velocità \mathbf{v}_x	56
4.14	<i>Metodo monolitico</i> , velocità \mathbf{v}_x	56
4.15	<i>Metodo a passi frazionari modificato</i> , velocità \mathbf{v}_x	57
4.16	Variazione della massa	57
4.17	<i>Metodo a passi frazionari standard</i> , velocità $ \mathbf{v} $	58
4.18	<i>Metodo monolitico</i> , velocità $ \mathbf{v} $	58
4.19	<i>Metodo a passi frazionari del secondo ordine</i> , velocità $ \mathbf{v} $	59

4.20	<i>Metodo a passi frazionari modificato</i> , velocità $ \mathbf{v} $	59
4.21	Variazione della massa	59
4.22	Simulazione di <i>sloshing</i> , fino ad 1.2 s, viene visualizzato il modulo della velocità	61
4.23	Simulazione di <i>sloshing</i> dopo le modifiche, fino ad 1.2 s, viene visualizzata la pressione	62
4.24	Variazione della massa totale	63
4.25	Variazione in percentuale della massa totale	63
5.1	Dominio 3D della simulazione	66
5.2	Immagini relative agli istanti $t = 0 - 0.2 - 0.4 - 0.8 - 2$ s. Rappresentazione del modulo e della componente y (orizzontale) della velocità	67
5.3	Immagini relative agli istanti $t = 0 - 0.1 - 0.2 - 0.4$ s. Rappresentazione del modulo e della componente y (orizzontale) della velocità	68
5.4	Immagini relative agli istanti $t = 0 - 0.1 - 0.2 - 0.4$ s. Rappresentazione del modulo e della componente y (orizzontale) della velocità	69
5.5	Modulo della velocità agli istanti $t = 0.5 - 1 - 1.5 - 2$ s	70
5.6	Rappresentazione del volume (nelle zone con un addensamento di nodi maggiore il colore è più marcato) negli istanti temporali $t = 0.5 - 1 - 1.5 - 2$ s	71
5.7	Vista 3D del deposito di materiale al tempo finale $t = 2s$ [6]	72
5.8	Propagazione e diffusione della massa durante la prova sperimentale (immagine sullo sfondo), mentre la linea bianca rappresenta il contorno di una simulazione descritta in [6]	72
5.9	<i>Set-up</i> dell'esperimento [6]	74
5.10	<i>Mesh</i> tridimensionale della simulazione	75

5.11	Immagini della prova sperimentale negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00 - 2.17 - 2.33 - 2.50$ s [6].	76
5.12	Rappresentazione della simulazione negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00 - 2.17 - 2.33 - 2.50$ s con 20711 nodi utilizzati nella discretizzazione. . .	77
5.13	Rappresentazione della simulazione negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00 - 2.17 - 2.33 - 2.50$ s con 36003 nodi utilizzati nella discretizzazione. . .	79
5.14	Immagini della prova sperimentale negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00$ s [6].	81
5.15	Rappresentazione della simulazione negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00$ s con 36003 nodi utilizzati nella discretizzazione.	81
A.1	Esempio di matrice sparsa	87

Elenco delle tabelle

2.1	Schema grafico del programma di calcolo	24
3.1	Schema grafico del programma di calcolo: in rosso i sottoprogrammi computazionalmente più onerosi	32
3.2	Tempi computazionali di una simulazione numerica con 5461 nodi, con $t_{end} = 1.5s$ e $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari	34
3.3	Tempi computazionali di una simulazione numerica con 15286 nodi, con $t_{end} = 0.3s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari	36
3.4	Percentuali sul tempo totale di una simulazione numerica con 15286 nodi, con $t_{end} = 0.3s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari	36
3.5	Tempi computazionali di una simulazione numerica con 15286 nodi, con $t_{end} = 0.3s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo monolitico	36
3.6	Percentuali sul tempo totale di una simulazione numerica con 15286 nodi, con $t_{end} = 0.3s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo monolitico	37
3.7	Tempi computazionali di una simulazione numerica con 9366 nodi, con $t_{end} = 1.2s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari	37
5.1	Caratteristiche del materiale granulare utilizzato nell'esperimento con deviazione	74

B.1	Tempi computazionali di una simulazione numerica con 17022 nodi, con $t_{end} = 0.003s$ e $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari	91
-----	---	----

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Motivazioni

Il presente lavoro si inserisce nell'ambito di un'attività di ricerca sull'interazione fluido-struttura attiva già da alcuni anni presso il Dipartimento di Ingegneria Strutturale con l'obiettivo di sviluppare un modello computazionale 3D robusto ed efficiente per questo tipo di problemi. Tali problemi coinvolgono due temi distinti: la meccanica dei fluidi e la meccanica dei solidi. La simulazione numerica di fenomeni di interazione fluido-struttura è molto importante in molti campi dell'ingegneria. In particolare, nell'ambito dell'ingegneria civile sono importanti le interazioni di masse fluide in movimento con strutture idrauliche di contenimento, quali ad es. le dighe. Di particolare rilevanza è l'interazione tra l'acqua di un bacino idroelettrico e la diga in presenza, ad es. di uno scuotimento sismico o di una frana, proveniente da una sponda, che possa sollevare un'onda di dimensioni tali da mettere a rischio la sicurezza della struttura. Negli ultimi anni sono stati presentati vari contributi scientifici nei quali le frane sono state trattate come fluidi viscosi in movimento, aprendo la strada a nuove applicazioni di modelli computazionali nati per la simulazione dell'interazione tra fluido e struttura. Una ulteriore applicazione recente, sempre trattata presso il DIS, riguarda la simulazione di getti di calcestruzzo, visti come fluidi viscosi e la loro interazione con le casseforme e con le barre di armatura. Nei problemi strutturali, l'enfasi è focalizzata sulle conseguenze

dell'interazione sulla struttura. Da questo punto di vista, anche allo scopo di poter meglio tenere in considerazione comportamenti costitutivi complessi dei materiali, appare preferibile un approccio Lagrangiano rispetto ad un più comune approccio Euleriano. Il PFEM (Particle Finite Element Method) [1] è un innovativo metodo numerico di tipo Lagrangiano per la soluzione di problemi che riguardano l'interazione fluido-struttura. Nel PFEM, le equazioni che governano il moto dei fluidi e delle strutture sono approssimate utilizzando una formulazione materiale (Lagrangiana) nella quale i nodi della maglia si muovono in accordo con le equazioni di moto. Per questo motivo, per sottolineare la natura materiale della descrizione, ai nodi viene attribuito il nome di *particelle*. Tutte le proprietà fisiche come densità, viscosità, conduttività ed altre variabili come la temperatura sono assegnate alle particelle e sono trasportate durante il moto dei nodi della maglia. Nella presente tesi sono trattati il problema fluidodinamico e la simulazione di eventi franosi. In particolare è stato studiato un Metodo Lagrangiano ad Elementi Finiti tridimensionale per la modellizzazione di problemi fluidodinamici con superficie libera. Il codice di partenza, scritto dal Dr. Massimiliano Cremonesi del Politecnico di Milano, vede implementato il PFEM per simulazioni bidimensionali [2]. Lavori successivi [3], [4], hanno impostato l'approccio del problema alle tre dimensioni. Spesso, semplici problemi fluidodinamici sono schematizzabili nelle due dimensioni; in altri casi invece, la geometria del problema non consente la riduzione bidimensionale ed obbliga ad un approccio realmente tridimensionale. Si pensi ad esempio alla simulazione di frane all'interno di un bacino, con l'individuazione del fronte d'onda, dell'effetto di tale onda su di una struttura e delle conseguenze di un eventuale stramazzo. L'utilizzo di un approccio tridimensionale, potrebbe in questo caso consentire lo studio di un'onda che propaghi trasversalmente al pendio sul quale ha avuto luogo la frana, come avvenuto ad es. in occasione della frana del monte Toc che ha portato alla tragedia del Vajont nel 1963. Un problema di questo tipo non potrebbe evidentemente essere trattato con un approccio bidimensionale.



Figura 1.1: Vajont : porzione di montagna franata

1.2 Obiettivi

L'obiettivo della modellazione numerica delle equazioni di Navier-Stokes nella formulazione Lagrangiana è la simulazione del moto di un fluido, o più in generale di fenomeni dove il materiale può essere trattato come un fluido. In particolare l'enfasi della ricerca è rivolta a problemi con superficie libera, variabile più o meno velocemente. Per la risoluzione del problema fluidodinamico viene utilizzato il metodo PFEM (Particle Finite Element Method). Per poter affrontare il problema fluidodinamico sono necessarie le seguenti fasi principali:

- Una continua ri-triangolazione del dominio
- Identificazione del contorno vincolato e della superficie libera
- Risoluzione del sistema non lineare di equazioni

Una volta costruito uno strumento di calcolo tridimensionale efficiente per la risoluzione del problema fluidodinamico può essere utile anche integrare la parte di analisi del problema solido ed ottenere uno strumento di calcolo per la risoluzione del problema di interazione fluido-struttura. L'obiettivo finale è quello di poter sviluppare un codice di calcolo che permetta la simulazione di frane e inondazioni dovute a terremoti e tsunami, consentendo il monitoraggio

continuo, ed eventualmente anche in tempo reale, di siti potenzialmente pericolosi.

In particolare questo studio focalizza l'attenzione sui seguenti punti:

- Analisi dei tempi di calcolo del codice esistente, modifica e sostituzione dei sottoprogrammi poco efficienti
- Analisi e stabilizzazione del fenomeno di *perdita* della massa
- Simulazione di test di laboratorio per verificare l'applicabilità del metodo

Il tempo di calcolo del codice tridimensionale costituisce, allo stato attuale, l'ostacolo principale per possibili sviluppi. Per ridurlo è stato sostituito il sottoprogramma di triangolazione utilizzando un algoritmo molto più efficiente (*Tetgen* [5]). Alla riduzione del tempo di calcolo contribuisce in maniera significativa la scelta del metodo a passi frazionari per la risoluzione del sistema di equazioni. Tale metodo viene studiato dettagliatamente dal punto di vista della conservazione della massa e vengono presentate alcune formulazioni distinte. Infine viene testato il codice tramite la simulazione di due esperimenti condotti presso l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne [6].

Capitolo 2

Modello matematico

2.1 Il problema fluidodinamico

La fluidodinamica è quella parte della meccanica che studia il comportamento dei fluidi (liquidi e gas) in movimento. Un fluido è una sostanza materiale e può essere descritto in termini dei suoi componenti elementari, atomi e molecole. Volendo applicare le leggi della meccanica classica a questo tipo di descrizione dobbiamo adottare un modello nel quale le molecole sono considerate come corpi rigidi che si muovono nello spazio e interagiscono tra di loro sia attraverso azioni di attrazione/repulsione a distanza sia urtandosi tra loro. Se calcoliamo il numero di molecole presenti in 1 cm^3 di gas (ad esempio aria) utilizzando la legge di stato $PV = nRT$ nelle condizioni standard ($P = 101325$, $T = 288\text{K}$) con $R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{molK}}$ otteniamo un numero di molecole pari a $N_m = 2.5 \times 10^{18}$. Un numero così grande ci fa capire che questo approccio non ha possibilità di essere adottato in queste condizioni. Anche se riuscissimo a determinare il moto di tutte le molecole, otterremmo una quantità di informazioni così grande da non poter essere utilizzata con profitto, inoltre, le scale spaziali dei fenomeni che vogliamo descrivere sono enormemente maggiori delle scale spaziali a livello molecolare. Adottiamo quindi un approccio macroscopico, in cui la materia è vista come un *mezzo continuo* caratterizzato, in ogni punto dello spazio ed in ogni istante di tempo, da proprietà meccaniche e fisiche macroscopiche come velocità, pressione, densità, ecc. A questa ipotesi del continuo è associato

immediatamente il concetto di campo, inteso come distribuzione spaziale di una certa grandezza fisica macroscopica, che può essere una quantità scalare, come la pressione, o vettoriale, come la velocità. Il modello fisico-matematico che descrive il comportamento dei fluidi, quindi, si riferisce ad una *rappresentazione macroscopica*. Ciononostante, in seguito, si utilizzerà il concetto di *particella fluida*, inteso quale insieme macroscopico di fluido con proprietà omogenee. Possiamo definire un fluido come una *sostanza che si deforma in modo continuo sotto l'azione di uno sforzo di taglio* [7]. Il fluido, che viene quindi considerato come un mezzo continuo, può essere modellato tramite equazioni di conservazione. La risoluzione del problema fluidodinamico trattato nel presente lavoro comporta la soluzione di equazioni per il calcolo della velocità e della pressione. Tali equazioni, formulate da Claude-Luis Navier e George Gabriel Stokes, possono essere espresse in maniera diversa. In particolare si ha la *formulazione Euleriana o spaziale* dove le proprietà del fluido sono funzione della posizione \mathbf{x} e del tempo t all'interno di un dominio definito, detto volume di controllo, e la *formulazione Lagrangiana o materiale* dove le proprietà vengono valutate seguendo l'evoluzione della singola particella in funzione della posizione iniziale \mathbf{X}_0 e del tempo t . Molti problemi fluidodinamici vengono risolti nel contesto Euleriano, si pensi ad esempio al moto di un fluido all'interno di una tubazione. Altri problemi invece sono caratterizzati da domini fortemente variabili e non definiti a priori, si pensi ad esempio al fronte di avanzamento di una frana o comunque problemi caratterizzati da una superficie libera variabile, più o meno velocemente. La scrittura delle equazioni in un contesto o nell'altro comporta alcune importanti differenze.

2.2 Le equazioni di Navier-Stokes

2.2.1 Descrizione Euleriana

Dato il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n = 2, 3$ ed il contorno Γ , le equazioni di Navier-Stokes con le condizioni al contorno ed iniziali formano il seguente sistema di

equazioni differenziali alle derivate parziali.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b} & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}_0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) & \text{su } \Gamma_D \times]0, T[\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) & \text{su } \Gamma_N \times]0, T[\end{array} \right. \quad (2.1)$$

dove $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è il campo delle velocità, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ è il tensore di sforzo di Cauchy, $\rho(\mathbf{x})$ la densità del materiale e $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ il campo delle forze esterne. L'equazione vettoriale in $\Omega \times [0, T]$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b} \quad (2.2)$$

traduce la condizione di conservazione della quantità di moto. D/Dt rappresenta l'operatore di derivata temporale mentre $\text{div}()$ definisce l'operatore divergenza rispetto alle coordinate correnti. L'equazione scalare in $\Omega \times [0, T]$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2.3)$$

traduce la condizione di conservazione della massa. Nel caso di fluido incomprimibile l'equazione diviene:

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2.4)$$

L'approccio Euleriano si basa sul concetto matematico di campo, e le proprietà del fluido (velocità, pressione, densità ecc.) sono definite in funzione dello spazio e del tempo. L'osservatore è solidale al sistema di riferimento fisso o inerziale e fotografa il campo delle velocità e della pressione in ciascun momento senza nessuna informazione sul movimento di ciascuna particella.

2.2.2 Descrizione Lagrangiana

Nella formulazione materiale le equazioni di Navier-Stokes descrivono il moto di una singola particella e le proprietà fisiche vengono attribuite direttamente

ad essa in funzione dei suoi spostamenti e del tempo. La differenza fra i due approcci si evidenzia matematicamente nei soli termini contenenti derivate temporali: data una grandezza M di una medesima particella si ha

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x}u_x + \frac{\partial M}{\partial y}u_y + \frac{\partial M}{\partial z}u_z \quad (2.5)$$

La derivata totale rispetto al tempo considera la variazione di M di una medesima particella al variare del tempo, dove i valori di M sono riferiti a posizioni spaziali diverse mentre la derivata parziale considera la variazione di M di uno stesso punto geometrico dell'intervallo dt ed è quindi riferita a particelle diverse. La derivata totale rispetto al tempo e quella parziale differiscono quindi per il cosiddetto termine convettivo che contiene le derivate spaziali della grandezza M moltiplicata per le corrispondenti componenti di velocità. Il fatto che nella descrizione Lagrangiana, il dominio (la *mesh*) varia con il moto delle particelle determina che la derivata materiale si riduce ad una semplice derivata temporale. Come si vedrà in seguito, ciò dà luogo ad un importante vantaggio rispetto alla formulazione Euleriana: gli effetti del termine convettivo spariscono.

Ora si consideri la configurazione \mathbf{X} che definisce la posizione iniziale delle singole particelle. Il moto di un punto materiale mette in relazione le coordinate materiali \mathbf{X} con quelle spaziali \mathbf{x} . Ciò avviene attraverso la trasformazione χ in modo che :

$$\chi : \Omega_{\mathbf{X}} \times [0, T[\longrightarrow \Omega_{\mathbf{x}} \times [0, T[\quad (2.6)$$

$$(\mathbf{X}, t) \longmapsto \chi(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

dove $\Omega_{\mathbf{x}}$ rappresenta il dominio spaziale ed $\Omega_{\mathbf{X}}$ la configurazione di riferimento materiale.

Partendo dalle equazioni formulate nel contesto Euleriano, si possono ricavare quelle nel contesto Lagrangiano. La trasformazione χ permette di relazionare la posizione della particella materiale ad un generico istante di tempo t nella configurazione $\Omega_{\mathbf{x}}$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad t = t$$

dove la coordinata spaziale \mathbf{x} dipende sia da quella materiale \mathbf{X} che dal tempo t . Il tempo fisico t è misurato dalla stessa variabile in entrambe le descrizioni [8]. Per ciascun istante fisso t , la trasformazione χ definisce la configurazione nel dominio spaziale.

Sia $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ il gradiente di deformazione. Se esiste la trasformazione inversa $(\mathbf{X}, t) = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ allora

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.8)$$

La variazione di volume al tempo t può essere calcolata come :

$$dx = J(\mathbf{X}, t)dX \quad (2.9)$$

dove J è il determinante di \mathbf{F} . Introducendo la formula di Nanson

$$\mathbf{n} \cdot ds = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N} \cdot dS \quad (2.10)$$

che rappresenta la trasformazione subita da un elemento orientato di superficie di area dS e orientazione normale \mathbf{N} nella configurazione iniziale e la superficie di area $ds\mathbf{n}$ nella configurazione corrente è possibile ottenere una relazione tra le divergenze del tensore di Cauchy rispetto alle configurazioni corrente e di riferimento:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{J}\operatorname{Div}(\boldsymbol{\Pi}) \quad (2.11)$$

dove $\boldsymbol{\Pi} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^T$ è il primo tensore di Piola-Kichhoff. Div è l'operatore di divergenza riferito alla configurazione iniziale. La presente relazione prende il nome di trasformazione di Piola. L'equazione di conservazione della quantità di moto allora assume la seguente forma

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{1}{J}\operatorname{Div}\boldsymbol{\Pi} + \rho\mathbf{b} \quad \text{in } \Omega_0 \quad (2.12)$$

dove Ω_0 è il volume occupato dalla massa fluida nella configurazione di riferimento e $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ è il campo di velocità riferito alla configurazione iniziale. Per un fluido incomprimibile la conservazione della massa implica la conservazione dei volumi

$$\frac{D(\rho(d\Omega))}{Dt} = \frac{DJ}{Dt} = J\mathbf{F}^{-T} : \operatorname{Grad}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

dove $\text{Grad}\mathbf{U} = \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{X}}$

$$J\mathbf{F}^{-T} : \text{Grad}\mathbf{U} = \text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U}) - \text{Div}(J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{U}) \quad (2.14)$$

poiché $\text{Div}(J\mathbf{F}^{-T}) = \mathbf{0}$ l'equazione di conservazione della massa nella versione Lagrangiana assume la seguente forma

$$\text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U}) = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \quad (2.15)$$

2.2.3 Fluidi Newtoniani e non Newtoniani

Per un fluido incompressibile Newtoniano il legame costitutivo

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.16)$$

mette in relazione il tensore degli sforzi di Cauchy con la velocità \mathbf{u} e la pressione p . Infatti

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu D(\mathbf{u}) \quad (2.17)$$

dove $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\text{grad}\mathbf{u} + \text{grad}\mathbf{u}^T)$ rappresenta la parte simmetrica del gradiente di velocità e μ è la viscosità dinamica. Pur essendo $D(\mathbf{u})$ un tensore del secondo ordine, viene indicato con un simbolo in corsivo perché il simbolo \mathbf{D} verrà utilizzato più avanti con un altro significato. Usando l'equazione costitutiva (2.17), l'equazione della conservazione della quantità di moto (2.12) nel contesto Lagrangiano assume la forma:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{J}\text{Div}(Jp\mathbf{F}^{-T}) + \frac{1}{J}\mu\text{Div}[J(\text{Grad}\mathbf{U})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}] + \rho\mathbf{b} \quad \text{in } \Omega_0 \quad (2.18)$$

L'ipotesi di linearità tra $\boldsymbol{\tau}$ e $D(\mathbf{u})$ attraverso la viscosità dinamica del fluido μ è propria dei fluidi Newtoniani, al venir meno di tale linearità è necessario riferirsi a fluidi non Newtoniani.

In generale per un fluido non Newtoniano si ha :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(D(\mathbf{u}), t) \quad (2.19)$$

Per definire il comportamento dei fluidi non Newtoniani si può ricorrere alla viscosità apparente $\bar{\mu}$. Nel presente lavoro si utilizza il modello di Bingham regolarizzato

$$\boldsymbol{\tau} = 2\bar{\mu}D(\mathbf{u}) \quad (2.20)$$

dove

$$\bar{\mu} = \mu + \frac{\tau_0}{2\|D(\mathbf{u})\|} (1 - e^{-2N\|D(\mathbf{u})\|}) \quad \text{per } \|D(\mathbf{u})\| \neq 0 \quad (2.21)$$

dove $\|D(\mathbf{u})\| = \sqrt{D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{u})}$ ed N è un parametro. Valori alti di N permettono una buona approssimazione alla legge di Bingham teorica (non regolarizzata):

$$\begin{aligned} 2D(\mathbf{u}) &= 0 & \text{per } \tau < \tau_0 \\ \tau &= \tau_0 + 2\mu D(\mathbf{u}) & \text{per } \tau > \tau_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Le equazioni (2.18) e (2.15) rappresentano la formulazione Lagrangiana delle equazioni di Navier-Stokes. Nell'equazione (2.18), il termine convettivo, che rappresenta la fonte di non linearità nel contesto Euleriano, non appare. La non linearità del problema nel contesto Lagrangiano è dovuta ai grandi spostamenti che subisce il fluido in movimento ed appare nell'equazione attraverso il gradiente di deformazione \mathbf{F} .

2.2.4 Formula debole e discretizzazione del problema nello spazio

Per la formulazione debole delle equazioni di Navier-Stokes si definiscono i seguenti spazi per le funzioni test e per la funzione \mathbf{U} di tentativo.

$$S = \{\mathbf{U} \in \mathbf{H}^1(\Omega) | \mathbf{U} = \mathbf{U}_0\} \quad \text{su } \Gamma_D \quad (2.23)$$

$$S_0 = \{\mathbf{W} \in \mathbf{H}^1(\Omega) | \mathbf{W} = 0\} \quad \text{su } \Gamma_D \quad (2.24)$$

$$Q = \{p, q \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \quad (2.25)$$

La formulazione debole si ottiene moltiplicando l'equazione della conservazione della quantità di moto (2.18) e della massa (2.15) per una funzione test $\mathbf{W} \in S_0$ e $q \in Q$ rispettivamente. Le equazioni ottenute devono essere integrate sul dominio Ω_0 , e applicata la formula di Green, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{D\mathbf{U}}{Dt} \cdot \mathbf{W} d\Omega_0 &= \int_{\Omega} Jp\mathbf{F}^{-T} : \text{Grad}(\mathbf{W}) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b}\mathbf{W} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_N} \mathbf{W} \cdot \mathbf{h} \\ &- \int_{\Omega_0} \mu J \text{Grad}(\mathbf{U}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} : \text{Grad}(\mathbf{W}) d\Omega_0 \quad \forall \mathbf{W} \in S_0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\int_{\Omega_0} \text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U})q d\Omega_0 = 0 \quad \forall q \in Q \quad (2.27)$$

La discretizzazione spaziale delle equazioni (2.26) e (2.27) comporta che la soluzione appartenga ai sottospazi $S_h \subset S$, $S_{h,0} \subset S_0$ e $Q_h \subset Q$, approssimazioni discrete degli spazi in cui sono inclusi. La discretizzazione scelta è quella di elementi finiti lineari sia per il campo delle velocità che per il campo delle pressioni.

$$U_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{a=1}^{N_{\text{node}}} N_a V_{ai}(t) \quad (2.28)$$

$$\text{Grad}(U_i(\mathbf{X}, t))_{ij} = \sum_{a=1}^{N_{\text{node}}} V_{ai}(t) \text{Grad}_j(N_a(\mathbf{X})) \quad (2.29)$$

$$p(\mathbf{X}, t) = \sum_{a=1}^{N_{\text{node}}} N_a P_a(t) \quad (2.30)$$

Il sistema semidiscretizzato che si ottiene è

$$\mathbf{M}(x) \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \mathbf{K}(x)\mathbf{V} + \mathbf{D}^T(x)\mathbf{P} = \mathbf{B} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{D}(x)\mathbf{V} = 0 \quad (2.32)$$

dove \mathbf{V} è il vettore delle velocità nodali, \mathbf{P} è il vettore delle pressioni nodali, \mathbf{M} è la matrice di massa, \mathbf{K} è la matrice secante della viscosità del fluido, \mathbf{D} è la forma discretizzata dell'operatore divergenza e \mathbf{B} è il vettore delle forze esterne equivalenti nodali.

$$M_{ab} = \int_{\Omega_0} \rho_0 N_a N_b \mathbf{I} d\Omega_0 \quad (2.33)$$

$$D_{ab} = \int_{\Omega_0} J N_a \text{Grad}(N_b) \mathbf{F}^{-1} d\Omega_0 \quad (2.34)$$

$$K_{ab} = \int_{\Omega_0} \mu J (\text{Grad}(N_a) \mathbf{F}^{-1}) \otimes (\text{Grad}(N_b) \mathbf{F}^{-1}) d\Omega_0 \quad (2.35)$$

$$B_a = \int_{\Omega_0} \rho_0 b N_a d\Omega_0 \quad (2.36)$$

$$(2.37)$$

2.2.5 Integrazione temporale ed equazioni risolventi

Il problema ottenuto deve essere discretizzato nel tempo al fine di ottenere la soluzione nel dominio $[0, T]$. Si utilizza un metodo della famiglia- θ :

$$f^{n+\theta} = \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n \quad (2.38)$$

dove f^n è l'approssimazione di $f(t_n)$ e $t_n = n \cdot \Delta t$ e $\theta \in [0, 1]$. Si consideri ora il generico passo di tempo $t^n \rightarrow t^{n+1}$ e si ponga l'equilibrio per $t = t^{n+1}$ e $\theta = 1$ (schema di integrazione di Eulero all'indietro). L'accelerazione e l'approssimazione della configurazione corrente sono espresse come

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} \\ \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + \mathbf{V}^{n+1} \Delta t \end{aligned} \quad (2.39)$$

Scegliendo come configurazione di riferimento la configurazione nota all'istante t^n il sistema finale discretizzato è :

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{x}^{n+1})(\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n) + \mathbf{K}(\mathbf{x}^{n+1})\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{D}^T(\mathbf{x}^{n+1})\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}^{n+1})\mathbf{V}^{n+1} = 0 \quad (2.41)$$

Il sistema che si ottiene allora può essere espresso come:

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1} \quad (2.42)$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{n+1} \\ \mathbf{P}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{F}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}\mathbf{V}^n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{K} \quad (2.46)$$

Il metodo di calcolo implementato permette di risolvere il sistema di equazioni con due metodi differenti: o risolvendo il sistema monolitico o mediante il *Fractional Step Method*. L'approccio monolitico prevede la soluzione del sistema di equazioni (2.42). Lo schema a passi frazionari [9], applicato alle equazioni (2.40) e (2.41) è equivalente a:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}[\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \mathbf{V}^n] + \mathbf{K}(\mathbf{x}^{n+1})\mathbf{V}^{n+1} + \gamma \mathbf{D}^T \mathbf{P}^n = \mathbf{B}^{n+1} \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}[\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \mathbf{V}^n] + \mathbf{D}^T(\mathbf{P}^{n+1} - \gamma \mathbf{P}^n) = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

dove \mathbf{V}^{n+1} è una variabile ausiliaria che chiameremo *velocità intermedia* e γ è un parametro numerico, con valori di interesse pari a 1 e 0. Per ora si considera $\gamma = 0$, tale metodo può essere classificato come uno schema al primo ordine $O(\Delta t)$. A questo punto può essere fatta la seguente approssimazione:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}^{n+1})\mathbf{V}^{n+1} \approx \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{x}}^{n+1})\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} \quad (2.50)$$

Utilizzando l'equazione (2.48) si può esprimere \mathbf{V}^{n+1} in termini di $\tilde{\mathbf{V}}^{n+1}$ ed inserendo i risultati nell'equazione (2.49) si ottiene:

$$\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}[\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \mathbf{V}^n] + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1} \quad (2.51)$$

$$\Delta t\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} \quad (2.52)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}[\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}^{n+1}] + \mathbf{D}^T\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.53)$$

che costituisce il sistema di equazioni risolventi del *Fractional Step Method*. Nella prima equazione si calcola la velocità *intermedia*, mentre nella seconda e nella terza si calcolano il campo di pressione e di velocità finale rispettivamente. Il disaccoppiamento delle variabili $\tilde{\mathbf{V}}^{n+1}$, \mathbf{P}^{n+1} e \mathbf{V}^{n+1} è possibile grazie alla (2.50). Questa approssimazione è interpretata in [10,11] come una fattorizzazione incompleta **LU**. Il *Metodo a Passi Frazionari* permette di risolvere il sistema con un onere ed un tempo computazionale inferiore rispetto all'approccio monolitico. È però responsabile del fenomeno di perdita di massa dovuto alla forte imposizione delle condizioni al contorno per la pressione sulla superficie libera. Il problema della conservazione della massa verrà descritto dettagliatamente nel capitolo 4.

Un ulteriore vantaggio dell'approccio ai passi frazionari è di natura numerica. Infatti nel metodo monolitico viene risolto ad ogni iterazione un unico sistema

lineare nelle incognite di velocità e pressione. A causa della diversa natura delle dimensioni delle incognite, i coefficienti della matrice \mathbf{A} (equazione 2.43) hanno valori che possono differire di diversi ordini di grandezza portando a un cattivo condizionamento della matrice.

2.2.6 Stabilizzazione della soluzione

Nell'approccio Lagrangiano un vantaggio importante rispetto alla formulazione Euleriana è la scomparsa del termine convettivo. Il problema dell'eccessiva distorsione degli elementi dovuto alle grandi deformazioni che subisce il fluido in movimento, è risolto adottando una ridefinizione continua e molto efficiente della maglia di elementi finiti. Tuttavia tale procedura rende necessario condensare tutte le informazioni sui nodi e di conseguenza si utilizzano delle funzioni di forma lineari. La scelta di uguali funzioni di forma sia per il campo delle pressioni che delle velocità però non rispetta la cosiddetta condizione LBB (*Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi*) [12]. Ciò determina delle oscillazioni spurie nel campo delle pressioni e quindi la necessità di aggiungere alle equazioni dei termini di stabilizzazione.

La stabilizzazione, nel caso di risoluzione tramite metodo monolitico (proposta da [13] per il problema Euleriano) come generalizzazione per fluidi con numero di Reynold finito della originaria stabilizzazione di *Petrov-Galerkin* proposta da Huges *et al.* [14] è stata modificata ed adattata alla formulazione Lagrangiana [2]. Nelle equazioni (2.26) e (2.27) viene aggiunta una serie di termini integrali che considerano il prodotto tra il termine stabilizzante ed il residuo dell'equazione di conservazione della quantità di moto. Come già menzionato nella formulazione Lagrangiana, il termine convettivo non compare e quindi non deve essere stabilizzato. La formulazione del problema (l'equazione (2.26) rimane invariata) con la stabilizzazione *pressure-stabilizing-Petrov-Galerkin* assume la seguente forma

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{DU}{Dt} \cdot \mathbf{W} d\Omega_0 &= \int_{\Omega} Jp\mathbf{F}^{-T} : \text{Grad}(\mathbf{W}) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \mathbf{W} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_N} \mathbf{W} \cdot \mathbf{h} \\
&- \int_{\Omega_0} \mu J \text{Grad}(\mathbf{U}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} : \text{Grad}(\mathbf{W}) d\Omega_0 \\
&\int_{\Omega_0} \text{Div}(J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U})q d\Omega_0 + \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_0^e} \tau_{pspg}^e \frac{1}{\rho_0} \text{Grad}q \left(\rho_0 \frac{DU}{Dt} + \frac{1}{J} \text{Div}(Jp\mathbf{F}^{-T}) \right. \\
&\left. - \frac{1}{J} \mu \text{Div}(J\text{Grad}\mathbf{U}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}) - \rho_0 \mathbf{b} \right) d\Omega_0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$\forall \mathbf{W} \in S_0$ e $\forall q \in Q$. Il parametro stabilizzante è definito come :

$$\tau_{pspg}^e = \frac{z_e}{2\|\mathbf{u}\|} \tag{2.55}$$

dove il parametro z_e è assunto pari al diametro del cerchio con area equivalente all'elemento e . Nell'implementazione del codice si ha:

$$\tau_{pspg}^e = \alpha \frac{z_e}{2\|\mathbf{u}\|} \tag{2.56}$$

dove α è un parametro adimensionale che verrà utilizzato per evidenziare l'effetto della stabilizzazione.

Le equazioni (2.26) e (2.54) assumono allora la seguente forma semi discretizzata:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{V} + \mathbf{D}^T(\mathbf{x})\mathbf{P} = \mathbf{B} \tag{2.57}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{V} + \mathbf{L}_\tau(\mathbf{x})\mathbf{P} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \tag{2.58}$$

dove le matrici \mathbf{C} , \mathbf{L}_τ , \mathbf{H} hanno il seguente significato :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x})_{ab} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_0^e} \tau_{pspg}^e \text{Grad}(\mathbf{N}_a) \mathbf{N}_b d\Omega_0 \tag{2.59}$$

$$\mathbf{L}_\tau(\mathbf{x})_{ab} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_0^e} \frac{\tau_{pspg}^e}{\rho} \text{Grad}(\mathbf{N}_a) \text{Grad}(\mathbf{N}_b) \mathbf{F}^{-1} d\Omega_0 \tag{2.60}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x})_a = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_0^e} \frac{\tau_{pspg}^e}{\rho} \mathbf{b} d\Omega_0 \quad (2.61)$$

Nel caso di risoluzione con il metodo a passi frazionari viene introdotto l'operatore di Laplace \mathbf{L} nella seconda equazione (2.52) [9]. Infatti si può osservare che $\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T$ rappresenta un'approssimazione dell'operatore Laplaciano.

$$\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T \approx \mathbf{L} \quad (2.62)$$

Il sistema di equazioni che si ottiene è il seguente:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}[\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \mathbf{V}^n] + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1} \quad (2.63)$$

$$\Delta t \mathbf{L}\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} \quad (2.64)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}[\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}^n] + \mathbf{D}^T \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.65)$$

Tale sostituzione migliora la stabilità della soluzione. Infatti si mostra che la pressione calcolata con le equazioni precedenti, risulta stabilizzata senza imporre nessun vincolo tra l'approssimazione del campo delle pressioni e delle velocità. Per capire meglio come ciò avviene si mostra che il sistema di equazioni (2.63)-(2.65) può essere interpretato come uno schema monolitico stabilizzato. Se riscriviamo le equazioni eliminando il termine \mathbf{V}^n :

$$\mathbf{V}^n = \tilde{\mathbf{V}}^n - \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{P}^n \quad (2.66)$$

le equazioni (2.63)-(2.65) possono essere riscritte nella seguente forma:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}[\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}^n] + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} + \mathbf{D}^T \mathbf{P}^n = \mathbf{B}^{n+1} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \Delta t \mathbf{L}\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

Questa formulazione può essere vista come una forma stabilizzata, dove l'effetto stabilizzante del prodotto tra l'operatore Laplaciano e la pressione agisce in

maniera simile al metodo di Galerkin/Least-Squares [14]. Un approccio diverso viene studiato in [15]. L'idea è di riscrivere il problema in termini di $\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} = \mathbf{V}^{n+1} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{P}^{n+1}$ le equazioni (2.63)-(2.65) possono essere riscritte come:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}[\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^n] + \mathbf{K}\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{E}(\mathbf{V}^{n+1}) + \mathbf{D}^T \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^{n+1} - \Delta t(\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T - \mathbf{L})\mathbf{P}^{n+1} = 0 \quad (2.70)$$

dove $\mathbf{E}(\mathbf{V}^{n+1})$ rappresenta l'errore di *ripartizione* che risulta di ordine $O(\Delta t)$. L'effetto di stabilizzazione in questo caso è dovuto al termine $\Delta t \mathbf{Q}\mathbf{P}^{n+1}$, dove $\mathbf{Q} := \mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T - \mathbf{L}$. In [16] si dimostra che questa matrice è *semi-definita positiva*. L'equazione (2.70) rappresenta la conservazione della massa e verrà riproposta nel capitolo 4.

2.2.7 Metodo iterativo di risoluzione

Le equazioni discretizzate sono non lineari per la presenza del gradiente di deformazione \mathbf{F} , quindi, devono essere risolte iterativamente ad ogni passo temporale. Si utilizza il metodo di Picard dove la configurazione di riferimento coincide con l'ultima configurazione nota (configurazione ottenuta nell'ultima iterazione). Dato il problema:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{x})$$

se la matrice \mathbf{A} è invertibile allora viene risolto il seguente sistema lineare per iterazione (approssimazioni successive)

$$\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{k-1}) \cdot \mathbf{x}^k = \mathbf{b}(\mathbf{x}^{k-1}) \quad (2.71)$$

Le matrici delle equazioni (2.54) e (2.31) nel caso monolitico o delle equazioni (2.51), (2.64) e (2.53) nel caso del metodo a passi frazionari, nell'iterazione k vengono valutate nella configurazione dell'iterazione $k-1$. Il metodo di Picard

viene preferito al metodo di Newton-Raphson al fine di avere un utilizzo minore della memoria della macchina. Il criterio di convergenza che si utilizza è il seguente:

$$\frac{\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\|}{\|\mathbf{u}^{k-1}\|} = \frac{\sqrt{\sum_{e=1}^{N_{el}} \Delta d_e^{k,k-1}}}{\sqrt{\sum_{e=1}^{N_{el}} d_e^{k-1}}} \leq 10^{-2} \quad (2.72)$$

dove

$$\Delta d_e^{k,k-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [\mathbf{N}_e(\mathbf{x}_G^{e,k}) (\mathbf{U}_{e,i}^k - \mathbf{U}_{e,i}^{k-1})]^2 \quad (2.73)$$

$$d_e^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [\mathbf{N}_e(\mathbf{x}_G^{e,k}) \mathbf{U}_{e,i}^{k-1}]^2 \quad (2.74)$$

dove \mathbf{U}_e^n indica le velocità nodali dell'elemento e e $\mathbf{N}_e(\mathbf{x}_G^{e,k})$ indica la matrice delle funzioni di forma relative al baricentro G . Si procede iterativamente fino a che la disequazione (2.72) non risulta soddisfatta.

2.3 Descrizione del metodo e del codice di calcolo

2.3.1 Riassunto delle fasi principali

Il metodo di calcolo che viene descritto in seguito viene normalmente denominato *Particle Finite Element Method*, infatti data la natura lagrangiana della formulazione del problema, ai nodi viene attribuito il nome di particelle. Il codice impostato da M. Cremonesi [2] per risolvere problemi fluidodinamici bidimensionali con fluidi incomprimibili Newtoniani e non Newtoniani è stato esteso ai problemi tridimensionali da O. Bettinotti [3].

La fasi operative del metodo sono:

1. Definizione del dominio fluido come un insieme di punti o *particelle*. L'accuratezza dei risultati dipende, come evidente, dal numero di particelle, numero che rimane invariato durante l'intera simulazione.
2. Generazione di una mesh ad elementi finiti tetraedrici (tramite algoritmo di Delaunay)
3. Definizione del bordo interno ed esterno al fine di valutare il dominio di integrazione e le condizioni al contorno da assegnare.
4. Risoluzione del sistema non lineare di equazioni dal quale otteniamo il valore della pressione e della velocità in ciascun nodo.
5. Definizione della nuova configurazione tramite i valori della pressione e della velocità ottenuti nella fase precedente.
6. Esecuzione di un controllo sulla distorsione degli elementi. In caso positivo, ritorno al punto 2 altrimenti al punto 4 e ripetizione delle fasi per il passo di tempo successivo.

Dal punto di vista computazionale le operazioni più onerose sono la soluzione numerica delle equazioni ma anche la generazione della mesh e l'identificazione delle condizioni al contorno. Come si vedrà nel capitolo 3 uno

degli obiettivi del presente lavoro è quello di ridurre il tempo di calcolo nella generazione della mesh.

2.3.2 Identificazione delle condizioni al contorno

Nella formulazione Lagrangiana del problema fluidodinamico il volume di riferimento Ω e la frontiera $\partial\Omega$ sono definite dalla posizione dei nodi o *particelle* in movimento. Pertanto è necessario, ogni volta che la mesh risulta eccessivamente distorta, aggiornare il volume e la frontiera, generando una nuova mesh. La triangolazione di Delaunay determina il minimo dominio convesso di un insieme di punti, nella maggior parte dei casi, tale dominio non coincide con il dominio reale del problema. Risulta quindi necessario introdurre un algoritmo che elimini gli elementi in eccesso. In Fig. 2.2(a) si mostra un insieme di punti, mentre nella figura 2.2(b) la triangolazione di Delaunay.

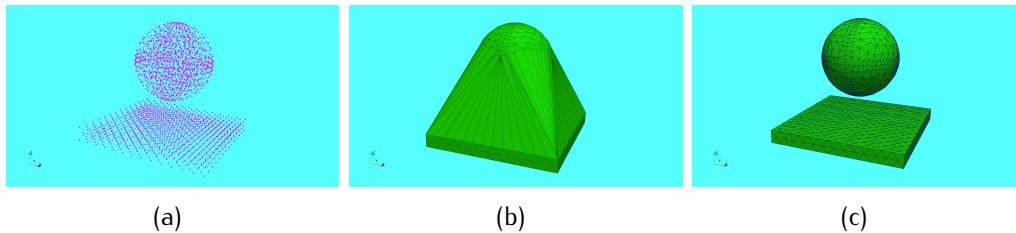


Figura 2.1: Sfera e piano orizzontale: identificazione del contorno

Per eliminare gli elementi in eccesso si utilizza il metodo α -*shape* [17]. Come già accennato l'idea è quella di rimuovere gli elementi che non soddisfano un criterio basato sulla distorsione degli stessi. Per ciascun tetraedro e della mesh si calcolano il lato minore h_e ed il raggio della sfera circoscritta R_e . Calcolata la media h dei lati più corti di tutti gli elementi, il fattore di distorsione viene definito come

$$\alpha_e = \frac{R_e}{h} \quad (2.75)$$

Fissato un valore di α , tutti gli elementi per i quali si ha $\alpha_e > \alpha$, con $\alpha > 1$, vengono rimossi. In figura 2.2(c) si mostra il dominio reale con l'identificazione

della frontiera ottenuto tramite il metodo α -*shape*. Tale metodo viene anche utilizzato per identificare le particelle che si separano dal resto del dominio. Quando un nodo del bordo appartiene ad un solo tetraedro distorto, l'elemento viene rimosso e la particella è separata dal resto del dominio. Dopo la separazione il moto della particella è governato esclusivamente dall'accelerazione di gravità e dalla velocità iniziale. Analogamente il metodo α -*shape* permette di aggiungere una particella isolata al dominio fluido quando essa si avvicina al bordo ed il tetraedro che si forma rispetta di nuovo la condizione $\alpha_e < \alpha$.

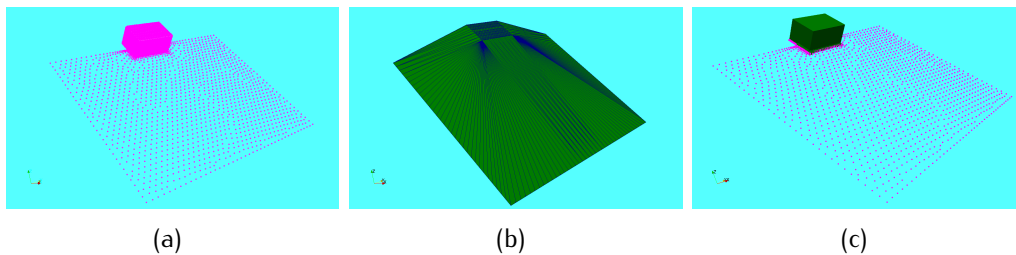


Figura 2.2: (a) Insieme di punti, (b) triangolazione di Delaunay, (c) dominio reale

2.3.3 Struttura del codice di calcolo

La struttura generale del codice di calcolo è riassunta dal grafico 2.1. Il programma **main** ha la sola funzione di calcolare i tempi di calcolo e chiamare il sottoprogramma **fluid_sol** nel quale viene letto l'input (dominio e parametri dell'analisi). Il sottoprogramma **fluid_solution_dt** è il vero e proprio algoritmo di calcolo nell'intervallo Δt . Nel sottoprogramma **tessalation** viene effettuata la triangolazione, l'algoritmo α -*shape* e quindi l'identificazione del contorno. Nel sottoprogramma **matrix** vengono calcolate le matrici delle equazioni risolventi e vengono imposte le condizioni al contorno sia per le pressioni (nodi appartenenti alla superficie libera) che per le velocità (nodi appartenenti al contorno vincolato o ad un eventuale corpo rigido in moto). Le matrici vengono memorizzate tramite il metodo *Compressed Sparse Row*. Successivamente nella routine **solver** viene calcolata la soluzione risolvendo il sistema monolitico o il sistema

di equazioni del *Fractional Step Method*. In entrambi i casi viene utilizzata la libreria PARDISO per risolvere i sistemi lineari [18].

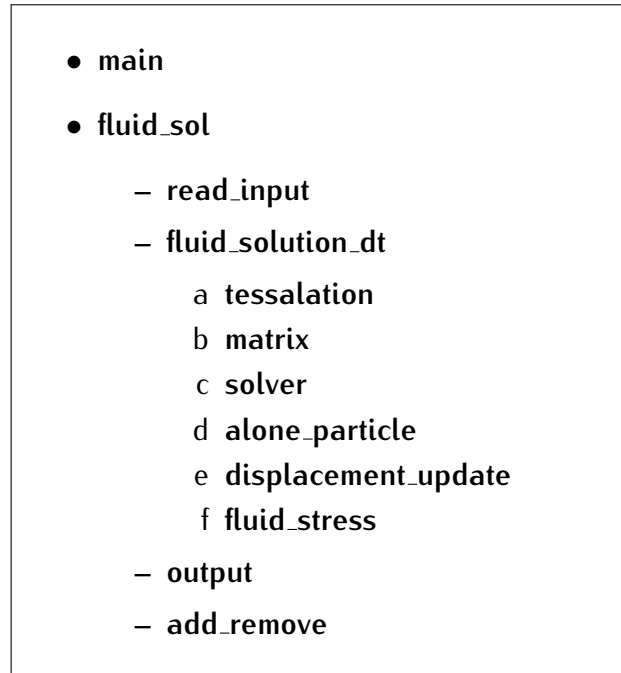


Tabella 2.1: Schema grafico del programma di calcolo

Nei sottoprogrammi **alone_particle**, **displacement_update** e **fluid_stress** si calcola il moto delle particelle che eventualmente si sono separate dal dominio, si aggiorna la posizione dei nodi della mesh utilizzando il vettore velocità di ciascun nodo e si calcola il campo tensionale del dominio. Dopo aver generato l'output viene eseguito un controllo sulla posizione dei nodi. Infatti anche partendo da una distribuzione omogenea delle *particelle* può accadere che, come conseguenza del moto, in alcune zone del dominio si addensino troppe particelle del fluido rispetto ad altre zone dove risultano troppo diradate. Il sottoprogramma **add_remove** rimuove i nodi dove sono troppo addensati e li ridistribuisce in altre zone del dominio. Le informazioni delle *particelle* rimosse vengono eliminate mentre i valori di pressione e velocità delle *particelle* aggiunte all'interno del dominio vengono ricavate tramite interpolazione lineare dei valori dei nodi vicini.

2.3. DESCRIZIONE DEL METODO E DEL CODICE DI CALCOLO 25

Durante il presente lavoro si è utilizzato come preprocessore il programma GID [19] e come post-processore sia GID che Paraview [20].

Capitolo 3

Triangolatore *tetgen*

3.1 Introduzione

Il tempo di calcolo troppo elevato del codice tridimensionale è stato il punto di partenza di questo lavoro. È stata effettuata un'analisi per determinare la distribuzione del tempo nei sottoprogrammi, dalla quale è emerso che la routine per la generazione della maglia non era efficiente, risultando uno dei sottoprogrammi più computazionalmente oneroso. Si è quindi deciso di sostituire questa routine. Tetgen è un programma di pubblico dominio che genera *mesh* tetraedriche mediante triangolazione di Delaunay [5]. Dato un insieme di punti appartenenti ad \mathbf{R}^3 o un dominio tridimensionale, viene calcolata una *mesh* tetraedrica mediante triangolazione esatta o vincolata di Delaunay. Nel presente lavoro si utilizza la triangolazione esatta di Delaunay.

Il codice del programma Tetgen è scritto in linguaggio C++ mentre il codice *Fluidi3D* è scritto in linguaggio *Fortran*. La modifica determina quindi che il programma *Fluidi3D* sarà ora scritto in linguaggio misto, ovvero con la maggior parte di routine scritte in *Fortran* ed alcune in C++.

Dopo una breve descrizione delle informazioni generate da Tetgen e delle applicazioni al codice del presente lavoro, vengono riportati i risultati in termini di risparmio di tempo di calcolo e di esattezza della soluzione. Si mostrano i risultati comparativi, tra la versione precedente e quella attuale, di una simulazione con un fluido non Newtoniano. La risoluzione del sistema linea-

rizzato di equazioni viene eseguita sia con il metodo monolitico che con quello ai passi frazionari. A conferma dei risultati ottenuti si riportano le tabelle con i tempi di calcolo di altre due simulazioni, questa volta considerando un fluido Newtoniano.

3.2 Triangolazione di Delaunay e dominio convesso

La triangolazione di Delaunay di un insieme di vertici, descritto da Delaunay nel 1934 [21], possiede diverse buone proprietà che ne hanno determinato un ampio utilizzo come struttura geometrica. Viene utilizzata frequentemente sia per l'implementazione di algoritmi efficienti sia in applicazioni pratiche. Di seguito si riportano alcune nozioni di base di topologia.

Inviluppo convesso

L'inviluppo convesso di un insieme di punti $V \subset \mathbf{R}^n$ è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono V . Poiché l'intersezione di insiemi convessi è a sua volta convessa, una definizione alternativa di inviluppo convesso è : *il più piccolo insieme convesso contenente V .*

Simplesso

Un semplice κ è l'inviluppo convesso di un insieme affinementemente indipendente di punti S . La dimensione di κ è una in meno di quella dei punti di S . I punti $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ sono affinementemente indipendenti se le $k - 1$ direzioni $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1$ sono linearmente indipendenti. In particolare in \mathbf{R}^3 il massimo numero di punti indipendenti affini è 4, quindi si hanno semplici non vuoti di dimensione 0, 1, 2 e 3 che corrispondono a vertici, lati, triangoli e tetraedri rispettivamente.

Complesso simpliciale

In matematica e in topologia un complesso simpliciale v è un'aggregazione

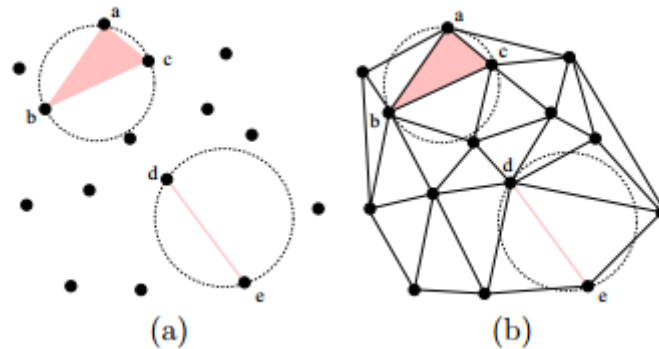


Figura 3.1: Il criterio di Delaunay e la triangolazione di Delaunay in due dimensioni. (a) i simplessi di dimensione due abc e di dimensione 1 de sono entrambi di Delaunay. (b) La triangolazione di Delaunay dell'insieme di punti mostrato in (a) [5].

ordinata di simplessi, ossia un'unione di un certo numero di simplessi che si intersecano fra loro solo su facce comuni. Un complesso simpliciale definisce quindi uno spazio topologico. Lo stesso spazio topologico è descritto da molti complessi simpliciali differenti; tale operazione indipendentemente dal semplice utilizzato, viene detta *triangolazione* dello spazio.

Subcomplesso

Un subcomplesso di v è un sottoinsieme di simplessi di v che è a sua volta un complesso simpliciale.

Sia V un insieme di n vertici, s un k -simpleso ($0 \leq k \leq n$) formato con i vertici di V . La circumsfera di s è una sfera che passa attraverso tutti i vertici di s . Se $k = n$ allora s possiede un'unica circumsfera, in caso contrario, esistono infinite circumsfere di s . Un simpleso s si dice di *Delaunay* se esiste una circumsfera di s tale che nessun vertice di V rimane interno alla stessa. La figura 3.1 (a) mostra i simplessi di Delaunay di un insieme di punti bidimensionale. La *triangolazione di Delaunay* \mathcal{D} di V è un complesso simpliciale costituito da simplessi di Delaunay. L'insieme di tutti i simplessi di \mathcal{D} contie-

ne l'involuppo convesso di V . La triangolazione bidimensionale di Delaunay è quella rappresentata in figura 3.1 (b).

In tre dimensioni, può anche essere chiamata *tetraedralizzazione di Delaunay*. La triangolazione di Delaunay in \mathbf{R}^d rappresenta un involuppo convesso in \mathbf{R}^{d+1} . Dato un punto $p = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbf{R}^d$ si definisce il punto $p^+ = (p_1, p_2, \dots, p_d, p_{d+1}) \in \mathbf{R}^{d+1}$, dove $p_{d+1} = \sum_{i=1}^d p_i^2$.

Per un insieme di punti $V \subset \mathbf{R}^d$ si ha $V^+ = \{p^+ | p \in V\}$. V^+ è l'insieme di punti *spostato* dai punti di V in \mathbf{R}^d ad un paraboloide in \mathbf{R}^{d+1} (figura 3.2 (a)). Quindi l'involuppo convesso $\text{con}(V^+)$ è un politopo convesso di dimensione $d + 1$. La triangolazione di Delaunay di V può essere riprodotta proiettando $\text{con}(V^+)$ in d dimensioni. La figura 3.2 illustra la relazione quando $d = 2$. Per questa ragione gli algoritmi sull'involuppo convesso possono essere utilizzati per generare triangolazioni di Delaunay.

Un'altra utile proprietà è la localizzazione della proprietà di Delaunay. Sia Υ una triangolazione arbitraria di V , e κ un semplice di Υ . Sia v un subcomplesso di Υ formato da semplici contenenti κ . κ è localmente di Delaunay se esiste una circumsfera di κ tale che nessun vertice di v rimane interno alla stessa. Se ogni semplice di Υ è localmente di Delaunay, allora Υ è la triangolazione di Delaunay. La triangolazione di Delaunay può essere costruita tramite una serie di operazioni che trasformano un insieme di semplici non-localmente di Delaunay in un altro insieme di semplici che sono localmente di Delaunay. L'idea è quella di partire da una triangolazione arbitraria e trasformare i semplici che non sono localmente di Delaunay fino a che tutti i semplici non siano localmente di Delaunay. L'algoritmo che realizza questa operazione viene chiamato *Flip Algorithm*. L'algoritmo di *flip* che viene utilizzato nel programma Tetgen è descritto in [22]. La triangolazione di Delaunay possiede numerose buone proprietà. Ad esempio, tra tutte le triangolazioni possibili in \mathbf{R}^2 , è quella che minimizza l'angolo e anche il massimo circumradio; inoltre è possibile ottenere un ottimo tempo di risoluzione utilizzando algoritmi complessi che dividono ricorsivamente il problema in sottoproblemi (*divide et impera* e

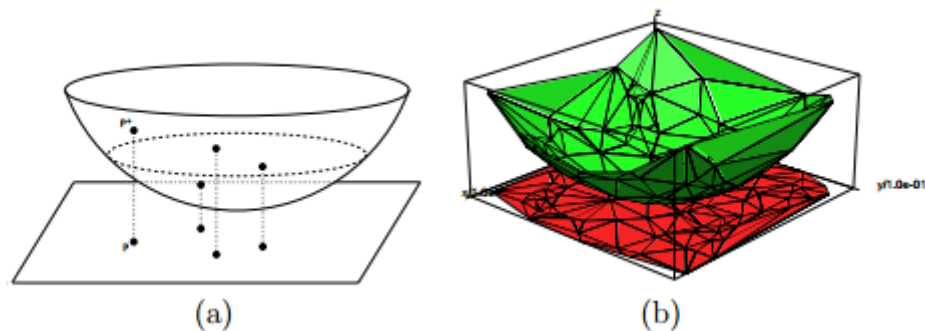


Figura 3.2: Relazione tra la triangolazione di Delaunay in \mathbf{R}^d e l'involuppo convesso in \mathbf{R}^{d+1} , ($d = 2$). (a) Alcuni punti 2D e i corrispondenti punti spostati 3D. (b) La triangolazione di Delaunay di un insieme di punti 2D e il più piccolo dominio convesso dei punti spostati 3D [5].

plane-sweep).

Il duale della triangolazione di Delaunay è il diagramma di Voronoi definito sullo stesso insieme di vertici. Per qualsiasi vertice $a \in V$ la cella di Voronoi è l'insieme di punti la cui distanza da a non è maggiore della distanza da qualunque altro vertice di V , per esempio è l'insieme $\{x \in \mathbf{R}^n \mid |x-a| \leq |x-b|, \forall b \in V\}$ dove $|\cdot|$ sta per la norma Euclidea. Il diagramma di Voronoi di V è la suddivisione dello spazio \mathbf{R}^n in celle di Voronoi (alcune delle quali possono essere illimitate).

La triangolazione di Delaunay ed il diagramma di Voronoi sono duali geometrici. Ad esempio un punto della triangolazione di Delaunay corrisponde ad una regione di Voronoi, un lato di Delaunay ad un lato di Voronoi ed un triangolo di Delaunay ad un vertice di Voronoi.

3.3 Applicazioni e risultati

Dato un insieme di punti 3D, TetGen calcola una triangolazione dell'involuppo convesso di Delaunay. Successivamente il dominio convesso (involuppo convesso) è ottenuto selezionando le facce più esterne del dominio convesso. La figura 3.3 (a) rappresenta un insieme V di punti tridimensionali, (b) la triangolazione

di Delaunay e in (c) è evidenziato l'involuppo convesso.

La sostituzione del precedente algoritmo di triangolazione con quello proposto nel codice Tetgen comporta un notevole risparmio del tempo di calcolo. Nelle tabelle seguenti si riportano i tempi computazionali di cinque fasi di calcolo del metodo. La tabella 3.1 mette in evidenza le fasi computazionalmente più onerose. Nel sottoprogramma **mesh_gen** avviene la generazione della *mesh* (triangolazione di Delaunay) mentre nel sottoprogramma **bc** si definiscono i contorni del dominio. Per gli altri sottoprogrammi si veda il paragrafo 2.3.3. Le routine evidenziate in rosso nella tabella 3.1 costituiscono più del 90% del tempo totale. Come prevedibile la fase computazionalmente più onerosa è la risoluzione iterativa del sistema linearizzato di equazioni (**solver**). Il tempo di calcolo di questa routine dipende dal numero di nodi della discretizzazione spaziale e dal numero di elementi tetraedrici.

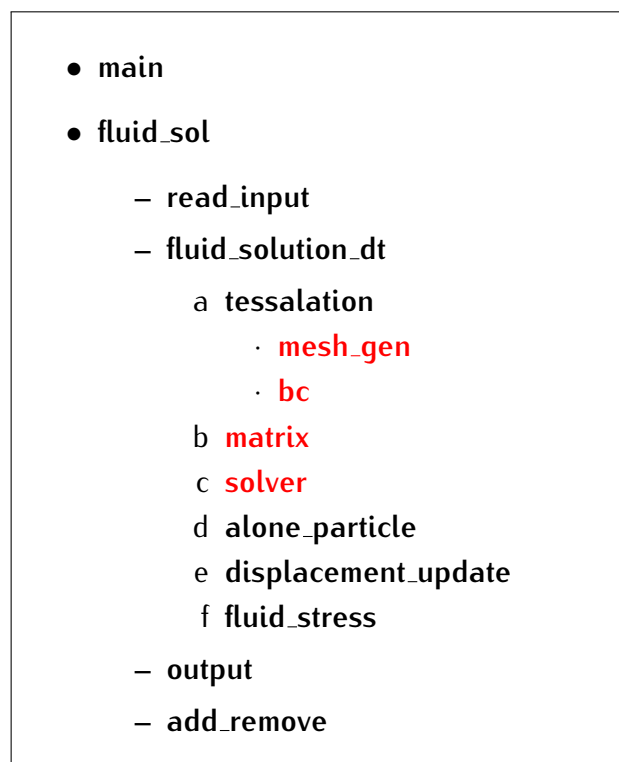


Tabella 3.1: Schema grafico del programma di calcolo: in rosso i sottoprogrammi computazionalmente più onerosi

La seconda informazione che ricaviamo dal triangolatore TetGen è l'involuppo convesso. Tale informazione può essere utilizzata per sostituire l'algoritmo che riconosce i nodi che appartengono al contorno vincolato o alla superficie libera. Nella maggior parte dei casi l'involuppo convesso non coincide con il dominio reale, come descritto nel paragrafo 2.3.2. Per problemi semplici, però, in cui tutti i nodi degli elementi eliminati dal metodo α -*shape* appartengono alla superficie libera e dove il dominio reale coincide con il dominio convesso, è stato possibile sostituire l'algoritmo per la definizione delle condizioni al contorno. Anche tale sostituzione determina una riduzione del tempo di calcolo.

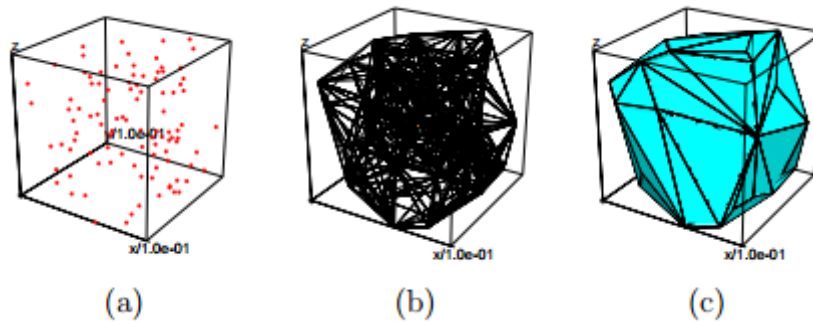


Figura 3.3: Insieme di punti (a), triangolazione di Delaunay (b), involuppo convesso (c)

Tempi computazionali

Le analisi seguenti sono state effettuate con un computer Dell Inspiron Intel i5-3450 3.10 Ghz 6 Gb di RAM.

La simulazione di figura 3.4 mostra una simulazione che viene normalmente indicata nella letteratura con il nome di *sloshing*. In questo caso il volume iniziale di acqua è un prisma triangolare. Tutte le particelle all'istante iniziale hanno velocità nulla e successivamente il fluido tende ad oscillare. Data la geometria del problema l'oscillazione è molto marcata e si forma una cresta d'onda. Ci riferiremo a questo caso col nome di *strong-sloshing*. Nella tabella 3.2 vengono riportati i tempi della simulazione. La routine che genera la triangolazione, che nella versione precedente impiegava un tempo complessivo

di circa il 30% ora si riduce notevolmente, impiegando circa l'1% del tempo totale.

routine	tempo <i>s</i>	% sul tempo totale
<i>mesh_gen</i>	157	1.0
<i>bc</i>	1065	6.7
<i>matrix</i>	3319	20.7
<i>FS_dt_solver</i>	8974	56.0
<i>altre</i>	2494	15.6
tempo totale		
4h 26min 49sec		

Tabella 3.2: Tempi computazionali di una simulazione numerica con 5461 nodi, con $t_{end} = 1.5s$ e $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari

Le tabelle 3.3 e 3.4 mostrano il tempo necessario per una simulazione di $t = 0.3s$ di una prova *Mini Slump* di un fluido non Newtoniano, vedi figura 3.5. Si è considerata una densità pari a $2252Kg/m^3$, viscosità di $4.018Pa \cdot s$ e limite di scorrimento $\tau_0 = 18.0182Pa$ [3].

Le dimensioni geometriche del dominio sono: $50mm$ l'altezza ed il raggio della base maggiore e $35mm$ il raggio della base minore.

Questa simulazione rappresenta la prova di abbassamento/spandimento del cono (detta anche *Slump Test*). Il fluido viscoso rappresenta il calcestruzzo fresco, ossia prima della presa e dell'indurimento, che si comporta come un fluido non Newtoniano alla Bingham.

Il programma che genera la triangolazione **mesh_gen** che impiegava $2115s$ si riduce a $37s$ che corrisponde ad una diminuzione dal 33% al 0.9% del tempo totale. La durata della simulazione di figura 3.5 allora da $1h 46min 59sec$ si riduce a $1h 5min 42sec$. Inoltre questa simulazione è stata effettuata con un programma alternativo per il calcolo dei contorni, ed anche questa modifica determina una riduzione del tempo di calcolo. La routine **bc** scende dal 7.6% allo 0.2% del tempo totale.

Anche nel caso di risoluzione del sistema di equazioni tramite il metodo monolitico, come prevedibile, la durata della simulazione si riduce. Nelle tabelle

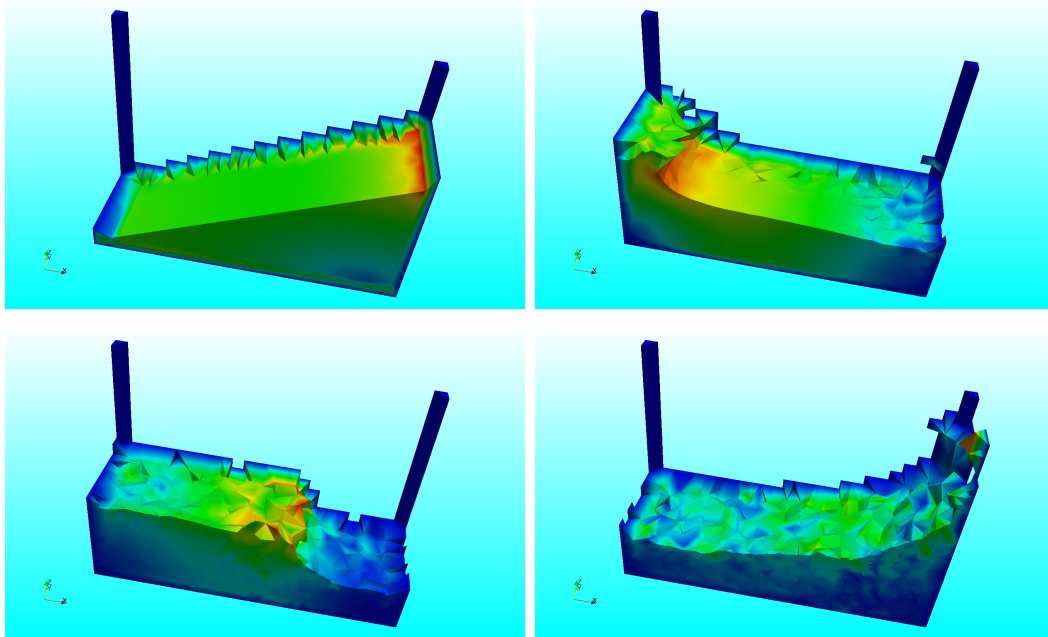


Figura 3.4: Simulazione con la versione attuale. Visualizzazione della superficie del problema tridimensionale (metà del dominio) e modulo della velocità in una sezione, $|\mathbf{v}|$ agli istanti di tempo $t = 0s$, $t = 0.45s$, $t = 0.9s$ e $t = 1.35s$. Risoluzione tramite il metodo dei passi frazionari

3.5 e 3.6 si mostra come il tempo impiegato nella triangolazione dell'insieme di punti si riduce da $1743s$ a $31s$ (dal 31% al 0.5% del tempo totale). I dati presentati sinora, sia con la versione precedente che con quella attuale, sia nel caso monolitico che nel caso del metodo a passi frazionari, si riferiscono alla stessa simulazione con uguali parametri. La triangolazione è stata effettuata costantemente ogni 20 passi temporali, ovvero ogni $0.01s$ ($\Delta t = 0.0005s$) oltre che ogni volta che gli elementi sono risultati troppo distorti.

routine	tempo <i>s</i>	
	versione precedente	versione attuale
<i>mesh_gen</i>	2115	37
<i>bc</i>	490	7
<i>matrix</i>	332	577
<i>FS_dt_solver</i>	2795	2711
<i>altre</i>	687	610
Totale	1h 46min 59sec	1h 5min 42sec

Tabella 3.3: Tempi computazionali di una simulazione numerica con 15286 nodi, con $t_{end} = 0.3s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari

routine	percentuale sul totale %	
	versione precedente	versione attuale
<i>mesh_gen</i>	33.0	0.9
<i>bc</i>	7.6	0.2
<i>matrix</i>	5.2	14.6
<i>FS_dt_solver</i>	43.5	68.8
<i>altre</i>	10.7	15.5

Tabella 3.4: Percentuali sul tempo totale di una simulazione numerica con 15286 nodi, con $t_{end} = 0.3s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari

routine	tempo <i>s</i>	
	versione precedente	versione attuale
<i>mesh_gen</i>	1743	31
<i>bc</i>	392	4
<i>matrix</i>	336	675
<i>FS_dt_solver</i>	4753	5019
<i>altre</i>	636	585
Totale	2h 11min 0sec	1h 45min 14sec

Tabella 3.5: Tempi computazionali di una simulazione numerica con 15286 nodi, con $t_{end} = 0.3s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo monolitico

routine	percentuale sul totale %	
	versione precedente	versione attuale
<i>mesh_gen</i>	22.2	0.5
<i>bc</i>	5.0	0.1
<i>matrix</i>	4.2	10.7
<i>FS_dt_solver</i>	60.5	80.5
<i>altre</i>	8.1	9.3

Tabella 3.6: Percentuali sul tempo totale di una simulazione numerica con 15286 nodi, con $t_{end} = 0.3s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo monolitico

Infine nella tabella 3.7 sono riportati i tempi di calcolo relativi ad una simulazione che verrà descritta nel capitolo successivo. In questo caso il fluido è Newtoniano (acqua) e la risoluzione del sistema di equazioni avviene attraverso il metodo dei passi frazionari. I valori ottenuti confermano i risultati mostrati precedentemente.

routine	tempo s	% sul tempo totale
<i>mesh_gen</i>	86	0.5
<i>bc</i>	13	0.1
<i>matrix</i>	2532	15.1
<i>FS_dt_solver</i>	11377	67.8
<i>altre</i>	2767	16.5
tempo totale		
4h 39min 35sec		

Tabella 3.7: Tempi computazionali di una simulazione numerica con 9366 nodi, con $t_{end} = 1.2s$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari

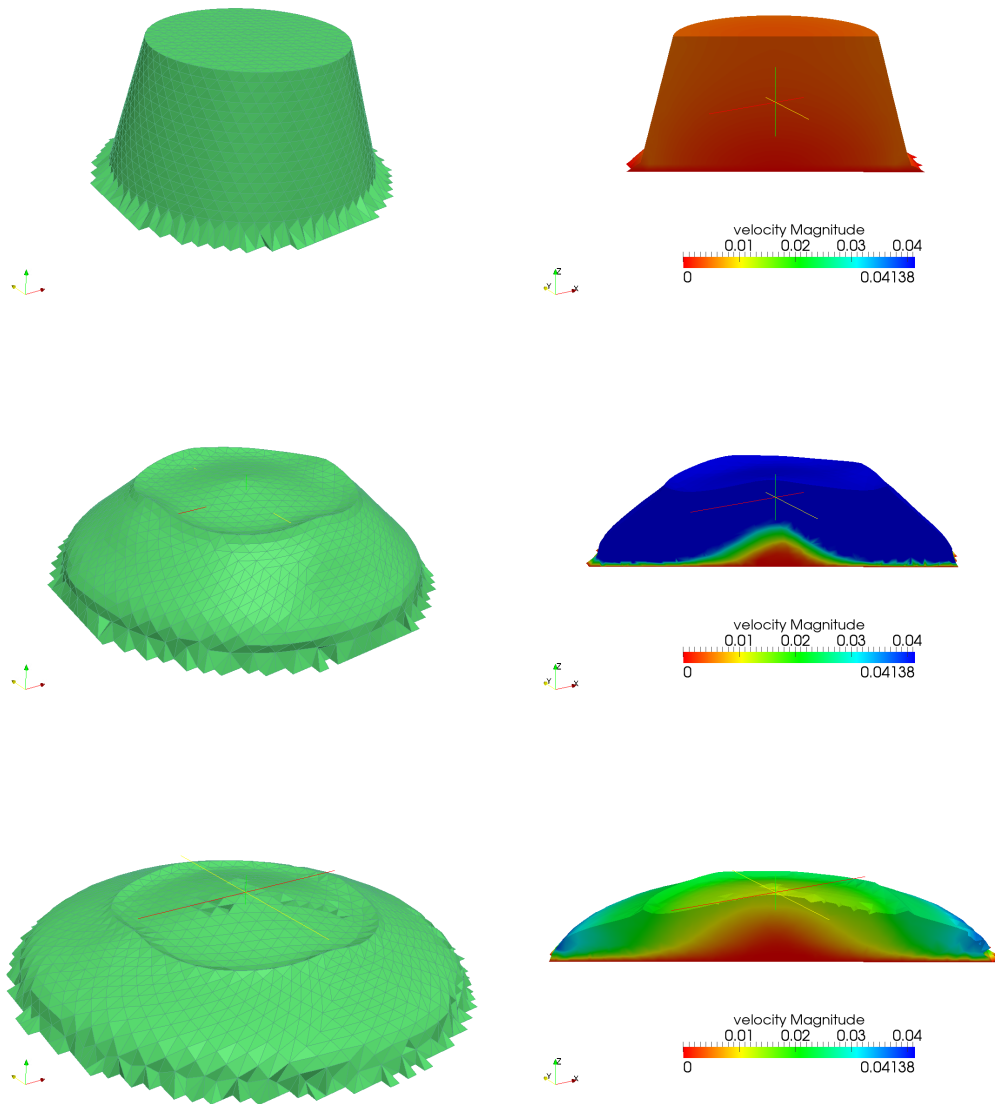


Figura 3.5: Simulazione con la versione attuale. Visualizzazione della superficie del problema tridimensionale e modulo della velocità in una sezione, $|\mathbf{v}|$ agli istanti di tempo $t = 0s$, $t = 0.1s$ e $t = 0.3s$. Risoluzione tramite il metodo dei passi frazionari

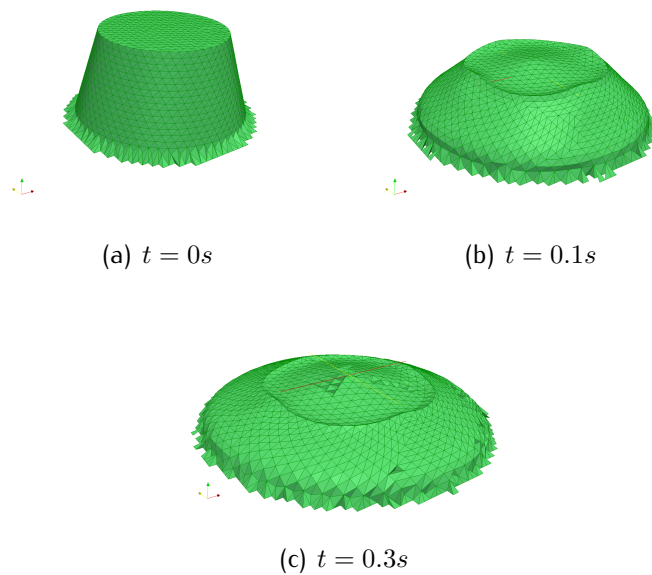


Figura 3.6: Simulazione con la versione precedente. Visualizzazione della superficie del problema tridimensionale agli istanti di tempo $t = 0s$, $t = 0.1s$ e $t = 0.3s$. Risoluzione tramite il metodo dei passi frazionari

Capitolo 4

Studio sulla conservazione della massa

4.1 Introduzione

Nel paragrafo 2.2.6 sono state descritte le tecniche di stabilizzazione sia nel caso di risoluzione tramite metodo monolitico sia tramite *Fractional Step Method*. La stabilizzazione del campo delle pressioni è necessaria per il mancato rispetto della cosiddetta condizione LBB (*Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi*) [12]. L'equazione discretizzata di conservazione della massa, nel caso monolitico assume la seguente forma:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{V} + \mathbf{L}_\tau(\mathbf{x})\mathbf{P} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

dove le matrici \mathbf{C} , \mathbf{D} e \mathbf{L}_τ ed il vettore \mathbf{H} sono stati definiti nel paragrafo 2.2.6. Il mancato rispetto del vincolo di incomprimibilità determina, però, una variazione della massa totale del fluido. Aumentando il parametro di stabilizzazione τ_{pspg} (equazioni (2.59–2.61)) il campo delle pressioni presenta meno oscillazioni, mentre la conservazione della massa risulta più approssimata. L'errore genera una variazione di volume totale (possiamo parlare indistintamente di conservazione della massa o del volume poiché la densità è costante) si propaga nel tempo e può dar luogo a perdite consistenti. Nel metodo a passi frazionari la stabilizzazione dell'equazione di conservazione della massa avviene tramite

l'utilizzo dell'operatore Laplaciano

$$\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T \approx \mathbf{L} \quad (4.2)$$

Questa approssimazione rilassa il vincolo di incomprimibilità e anche in questo caso si hanno fenomeni di perdita di massa. Il problema della conservazione della massa è relazionato all'introduzione delle condizioni al contorno essenziali per la pressione. Questo può essere spiegato considerando che la funzione test q scelte come *peso* per la condizione di incomprimibilità sono esattamente le stesse funzioni di forma N_p , utilizzate per approssimare la pressione. Introducendo una condizione al contorno essenziale ($N_p = 0$) in alcuni punti, l'equazione di incomprimibilità non è rispettata ($q = 0$) in quei punti. In questo capitolo viene eseguito uno studio comparativo sul *Fractional Step Method* del primo e del secondo ordine e viene descritta una formulazione modificata [23] che permette di migliorare la conservazione della massa. L'idea è quella di imporre la condizione di incomprimibilità già nella stima della velocità. Le modifiche necessarie non richiedono la risoluzione di nessun sistema addizionale di equazioni. L'efficienza del metodo viene presentata attraverso diversi esempi sia utilizzando il codice bidimensionale che tridimensionale. Lo schema di risoluzione monolitico, invece, non viene modificato.

4.2 Schema di risoluzione a Passi Frazionari Modificato

Le equazioni del metodo a passi frazionari (eq. (2.63-2.65)) con $\gamma \neq 0$ (si veda il paragrafo 2.2.5) diventano:

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}[\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \mathbf{V}^n] + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} + \gamma \mathbf{D}^T \mathbf{P}^n = \mathbf{B}^{n+1} \quad (4.3)$$

$$\Delta t \mathbf{L}(\mathbf{P}^{n+1} - \gamma \mathbf{P}^n) = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}[\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}^n] + \mathbf{D}^T(\mathbf{P}^{n+1} - \gamma \mathbf{P}^n) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

4.2. SCHEMA DI RISOLUZIONE A PASSI FRAZIONARI MODIFICATO 43

dove \mathbf{P}^n è la pressione in tutti i nodi al passo di tempo n . Se $\gamma = 1$, si parla di metodo a passi frazionari del secondo ordine $O(\Delta t^2)$ [9]. La formulazione monolitica stabilizzata equivalente che si ottiene (equazione 2.70) è:

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^{n+1} - \Delta t(\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T - \mathbf{L})(\mathbf{P}^{n+1} - \gamma\mathbf{P}^n) = 0 \quad (4.6)$$

La pressione nota \mathbf{P}^n , allora, diminuisce l'effetto del termine stabilizzante $\Delta t\mathbf{Q}$, dove $\mathbf{Q} := \mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T - \mathbf{L}$ mentre migliora la conservazione della massa. Lo schema modificato segue l'impostazione del metodo a passi frazionari. Le equazioni del metodo modificato sono:

$$\mathbf{M}\frac{\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} + \mu\mathbf{L}\tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{D}^T\mathbf{P}_g^{n+1} = \mathbf{F} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M}\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}}{\Delta t} + \mathbf{D}^T(\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}_g^{n+1}) = 0 \quad (4.8)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^{n+1} = 0 \quad (4.9)$$

dove \mathbf{P}_g^{n+1} è una previsione della pressione finale \mathbf{P}^{n+1} .

Si noti che assumendo ($\mathbf{P}_g^{n+1} = 0$) si ottiene il metodo a passi frazionari del primo ordine, mentre per ($\mathbf{P}_g^{n+1} = \mathbf{P}^n$) si ha il metodo a passi frazionari del secondo ordine. L'equazione delle pressioni di Poisson si ottiene applicando la condizione di incomprimibilità dell'equazione (4.9) nella (4.8). Si ottiene

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^{n+1} = \Delta t\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T(\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}_g^{n+1}) \quad (4.10)$$

Utilizzando l'approssimazione $\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T \approx \mathbf{L}$ si giunge al sistema finale

$$\mathbf{M}\frac{\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} - \mathbf{V}^n}{\Delta t} + \mu\mathbf{L}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} + \mathbf{D}^T\mathbf{P}_g^{n+1} = \mathbf{B} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{D}\tilde{\mathbf{V}}^{n+1} = \Delta t\mathbf{L}(\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}_g^{n+1}) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{M}\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{D}^T(\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{P}_g^{n+1}) = 0 \quad (4.13)$$

Per risolvere le equazioni del metodo modificato a passi frazionari bisogna prima calcolare \mathbf{P}_g^{n+1} .

4.3 Calcolo della pressione di tentativo \mathbf{P}_g^{n+1}

Il ruolo della pressione, nel metodo classico dei passi frazionari, è quello di assumere istantaneamente il valore che impone il vincolo di incomprimibilità al campo delle velocità.

Quando si utilizza il metodo dei passi frazionari al primo ordine, la pressione non è presente nell'equazione (4.11). La velocità intermedia $\tilde{\mathbf{V}}$ è calcolata senza considerare alcuna resistenza volumetrica. Il metodo dei passi frazionari del secondo ordine introduce la variazione della pressione rispetto al passo temporale precedente. Approssimare la pressione al passo $n + 1$ con quella del passo precedente può essere accettabile per bassi valori di dt mentre produce un deterioramento della soluzione per passi temporali più grandi. Nel metodo dei passi frazionari al primo ordine la velocità di tentativo quindi non è condizionata dalla pressione nella prima equazione (4.11). Questo non è un problema rilevante poiché la velocità finale è calcolata risolvendo l'equazione (4.13) nella quale compare il gradiente della pressione calcolata tramite l'equazione (4.12).

Questo passo però non può essere effettuato correttamente nei nodi con condizioni al contorno essenziali, come ad esempio nei nodi della superficie libera. Quindi, approssimare il comportamento incomprimibile già nella velocità intermedia riduce l'errore del campo di velocità di questi nodi.

Naturalmente per problemi con superficie libera, quali quelli affrontati in questa tesi, questo aspetto è molto rilevante. Inoltre, l'approssimazione del comportamento incomprimibile nella velocità intermedia ha importanti implicazioni per problemi di interazione fluido struttura (FSI).

4.3.1 Pressione di tentativo

È possibile effettuare una previsione della pressione di tentativo \mathbf{p}_g^{n+1} assumendo una leggera comprimibilità. In accordo con questa ipotesi la pressione di tentativo può essere calcolata aggiungendo la divergenza della velocità alla

pressione del passo precedente [24].

$$P_g^{n+1} = P^n + k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla \cdot \mathbf{V} dt \quad (4.14)$$

dove k è la costante di comprimibilità del fluido. La forma discreta dell'equazione precedente, utilizzando elementi finiti lineari sia per la velocità che la pressione, è

$$\mathbf{M}_p \mathbf{P}_g^{n+1} = \mathbf{M}_p \mathbf{P}^n + k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{D}\mathbf{V} dt \quad (4.15)$$

dove

$$M_p = \int_{\Omega_0} \mathbf{N}\mathbf{N}^T d\Omega_0 \quad (4.16)$$

Per ottenere la pressione di tentativo del passo corrente senza effettuare l'inversione della matrice \mathbf{M}_p , questa deve essere calcolata in forma concentrata ai nodi (*lumped*). L'equazione (4.15) allora diventa

$$\mathbf{M}_{p,diag} \mathbf{P}_g^{n+1} = \mathbf{M}_p \mathbf{P}_n + k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{D}\mathbf{V} dt \quad (4.17)$$

L'equazione 4.17 permette di calcolare la pressione \mathbf{P}_g^{n+1} come

$$\mathbf{P}_g^{n+1} = \mathbf{M}_{p,diag}^{-1} \mathbf{M}_p \mathbf{P}_n + \mathbf{M}_{p,diag}^{-1} k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{D}\mathbf{V} dt \quad (4.18)$$

Si dimostra che $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{D}\mathbf{V} dt = \mathbf{\Lambda}_{n+1} - \mathbf{\Lambda}_n$ dove $\mathbf{\Lambda}$ è il vettore dei volumi nodali [25]. Dato un nodo i il volume riferito V_i è

$$\Lambda_i = \sum_j \frac{1}{3} \Lambda_j^{el} \quad (4.19)$$

dove j è l'indice degli elementi che contengono il nodo i e Λ^{el} è il volume dell'elemento.

Infine, la pressione \mathbf{P}_g^{n+1} può essere scritta come segue:

$$\mathbf{P}_g^{n+1} = \mathbf{M}_{p,diag}^{-1} \mathbf{M}_p \mathbf{P}_n + \mathbf{M}_{p,diag}^{-1} k (\mathbf{\Lambda}_{n+1} - \mathbf{\Lambda}_n) \quad (4.20)$$

Una volta nota la pressione di tentativo è possibile risolvere il sistema di equazioni (4.11)–(4.13). Vogliamo ora riscrivere l'equazione di conservazione

della massa nella formulazione monolitica equivalente:

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^{n+1} - \Delta t(\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T - \mathbf{L})(\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{M}_{p,diag}^{-1}\mathbf{M}_p\mathbf{P}_n - \mathbf{M}_{p,diag}^{-1}k(\boldsymbol{\Lambda}_{n+1} - \boldsymbol{\Lambda}_n)) = 0 \quad (4.21)$$

Se consideriamo che $\mathbf{M}_{p,diag}^{-1}\mathbf{M}_p \simeq \mathbf{I}$ l'equazione (4.21) è equivalente alla (4.6), con l'aggiunta del termine $\mathbf{M}_{p,diag}^{-1}k(\boldsymbol{\Lambda}_{n+1} - \boldsymbol{\Lambda}_n)$.

4.4 Simulazioni bidimensionali di problemi di sloshing

Di seguito si riportano alcuni esempi bidimensionali di problemi a superficie libera. La geometria consiste in un recipiente con un fluido la cui superficie libera ha la forma di un coseno. Il dislivello tra il punto più alto della superficie e il più basso è il 20% della profondità media del fluido, pari ad 1 m. Il numero dei nodi utilizzati nella discretizzazione è 2982. Il passo temporale scelto è di 10^{-4} , il fluido newtoniano (acqua) con densità di $1000 \text{Kg}/\text{m}^3$ e viscosità di $0.001 \text{Pa} \cdot \text{s}$. Il criterio di convergenza per il sistema di equazioni non lineari è posto uguale a $\frac{\Delta \mathbf{V}}{\mathbf{V}} = 10^{-2}$.

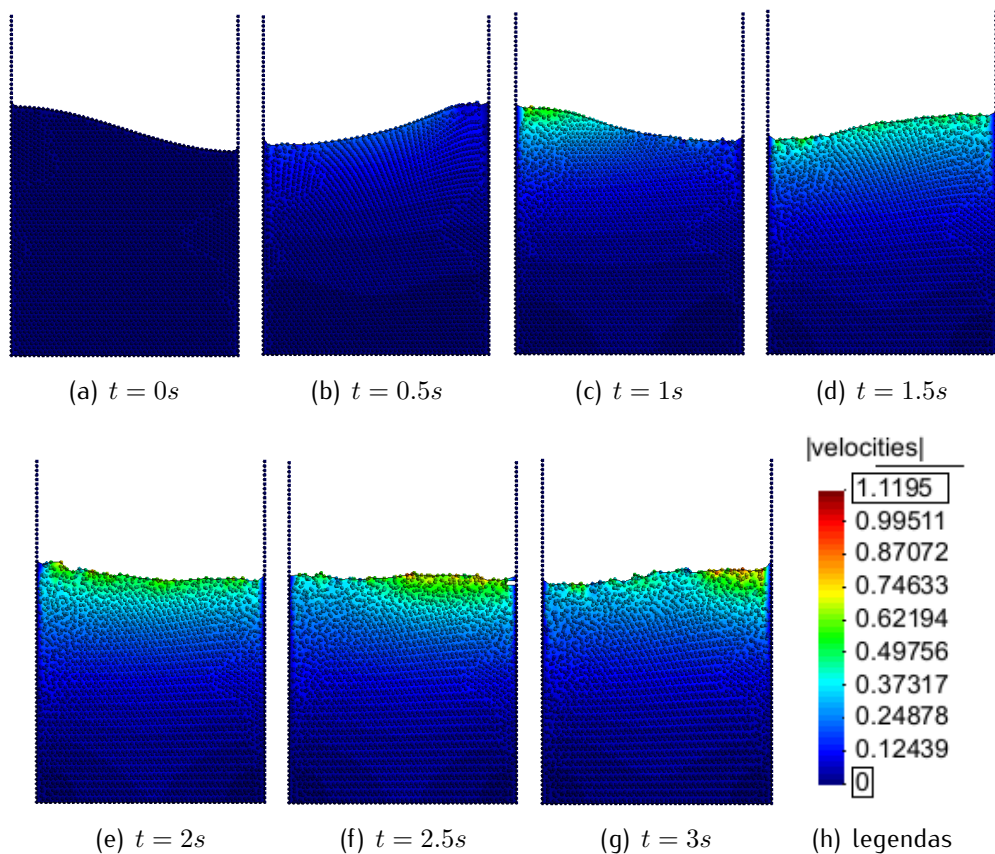


Figura 4.1: Metodo a passi frazionari standard, modulo della velocità

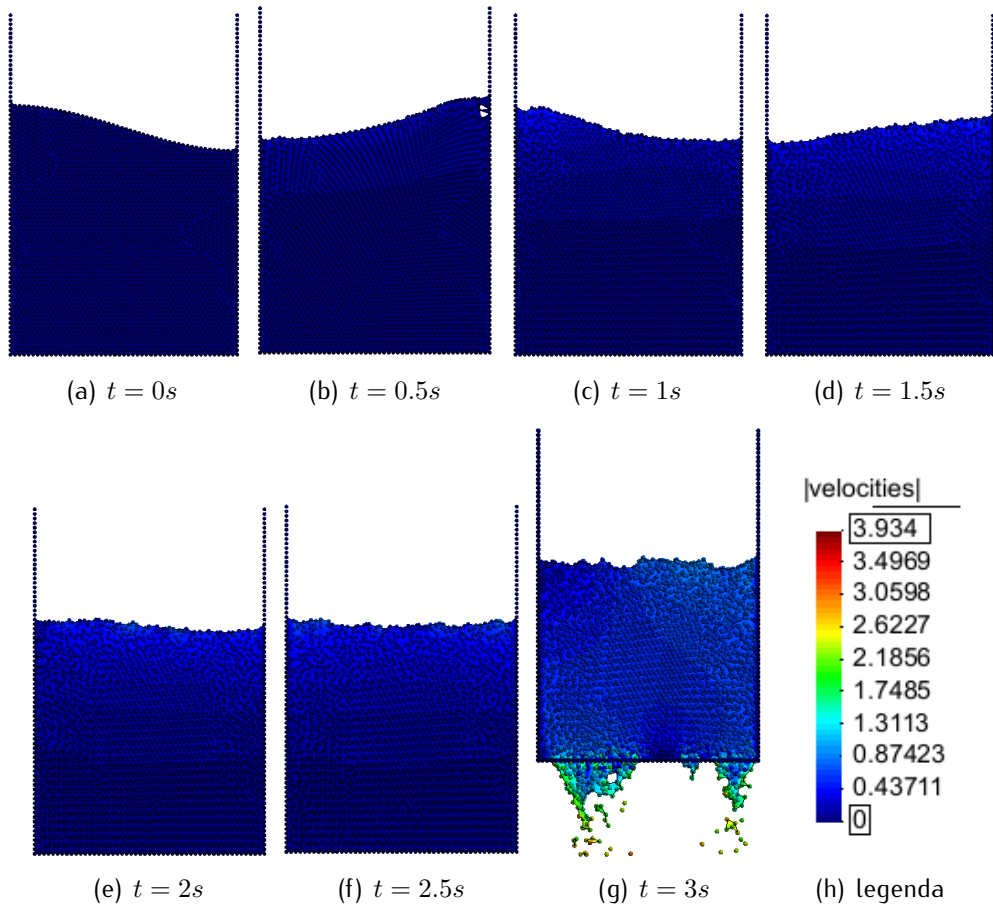


Figura 4.2: *Metodo monolitico*, modulo della velocità

Le figure 4.1 e 4.2 mostrano i risultati in termini di $|\mathbf{v}|$ di due simulazioni effettuate con il Metodo dei passi frazionari e con Metodo monolitico. Il tempo di calcolo necessario nel caso di risoluzione tramite il metodo monolitico è superiore di circa il 20% rispetto alla risoluzione tramite *Fractional Step*. Inoltre sempre nel caso monolitico, la soluzione si deteriora dall'istante $t = 2.8s$ circa. Considerando un passo di tempo abbastanza basso $dt = 0.0001$ il metodo *FS* risulta più stabile oltre che più veloce.

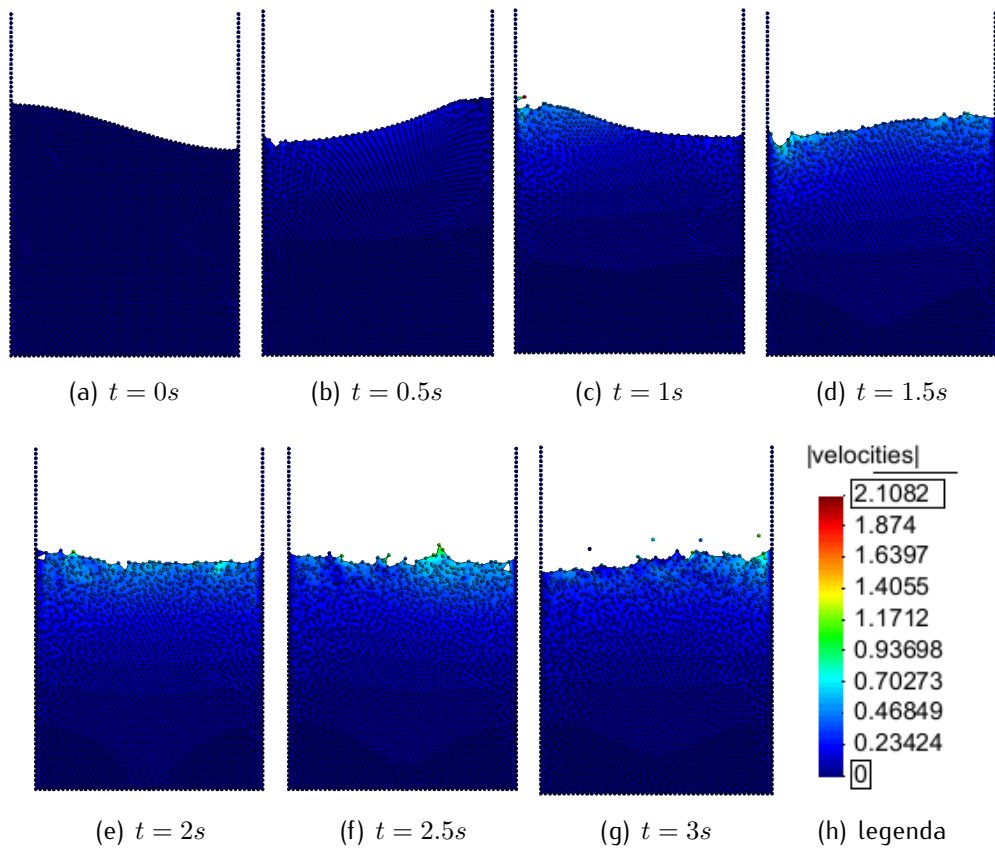


Figura 4.3: Metodo a passi frazionari del secondo ordine, modulo della velocità

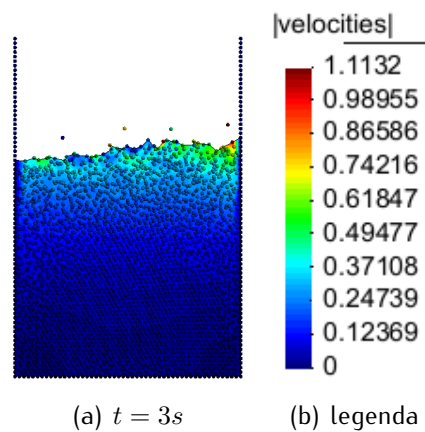


Figura 4.4: Metodo a passi frazionari del secondo ordine, modulo della velocità ($t = 3s$)

La figura 4.3 mostra la soluzione ottenuta utilizzando come risolutore il Me-

tudo a passi frazionari del secondo ordine. I nodi (*particelle*) che compongono la superficie libera assumono valori di velocità che oscillano eccessivamente. Infatti è noto che il metodo dei passi frazionari del secondo ordine ha bisogno di essere stabilizzato. La figura 4.4 mostra il risultato della simulazione con il metodo dei passi frazionari del secondo ordine al tempo $t = 3s$ con una legenda diversa, più facilmente confrontabile con i risultati precedenti.

L'introduzione di una procedura di stabilizzazione non è stata realizzata durante lo svolgimento di questo lavoro ma viene lasciata come futura linea di studio. Ciononostante si mostra di seguito, Fig. 4.5, che la conservazione della massa risulta molto più stabile nel caso di risoluzione tramite *FS2* (Metodo dei passi frazionari del secondo ordine).

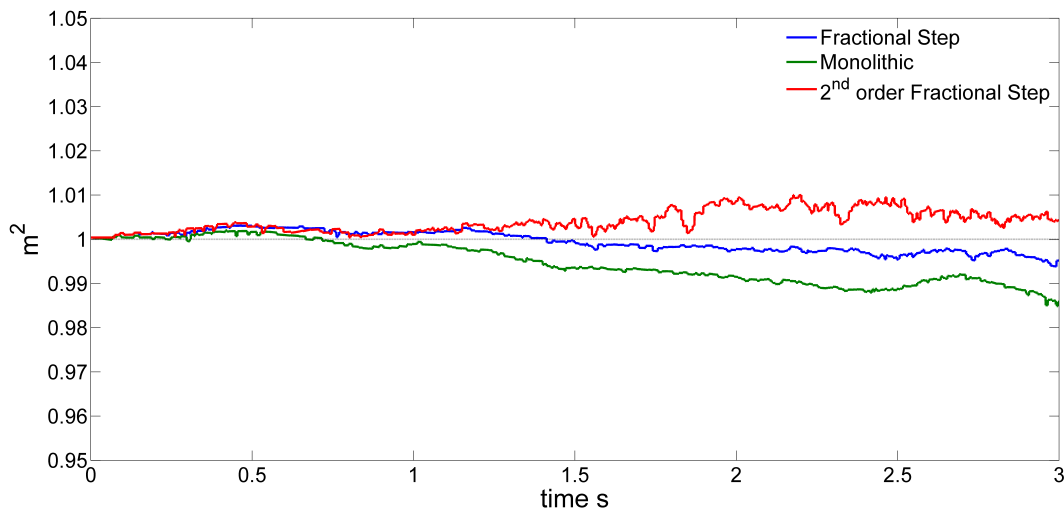


Figura 4.5: Variazione della massa

Nel caso di risoluzione tramite metodo monolitico, la variazione della massa totale è dipendente dal valore del parametro τ_{pspg} , equazione (2.54). Nella simulazione mostrata nella figura 4.2 si è utilizzato $\alpha = 1$ (equazione 2.60). L'effetto della stabilizzazione determina una riduzione delle oscillazioni nel campo delle pressioni mentre rende più approssimata l'equazione di incomprimibilità, accentuando il fenomeno della perdita di massa. Nel paragrafo successivo viene mostrato l'effetto del parametro τ_{pspg} sulla variazione della massa. Infine si

fa notare che non è stato utilizzato il metodo modificato poiché, essendo il passo temporale piccolo ($\Delta t = 10^{-4}$), la soluzione delle equazioni viene calcolata quasi sempre in un'unica iterazione, quindi il termine $(\Lambda_{n+1} - \Lambda_n)$, per come è stato definito, risulta nullo. La variazione della massa del metodo modificato, per simulazioni con un passo temporale piccolo, in questo tipo di problemi, risulta equivalente al metodo a passi frazionari del secondo ordine.

4.5 Studio comparativo

Fluido Newtoniano

Le stesse simulazioni sono state effettuate con un passo di tempo più grande, pari a 0.0005 s . Nelle immagini è rappresentato il valore della componente orizzontale della velocità al tempo $t = 0.3\text{s}; 1.5\text{s}; 2.7\text{s}$ anche se le simulazioni sono state effettuate sempre nell'intervallo $t = [0; 3\text{s}]$. Nel caso di figura 4.6 l'aumento del passo temporale determina un errore nella soluzione al tempo $t = 1.9\text{s}$, ovvero le particelle attraversano il contorno vincolato. In tutti i casi si nota come la soluzione tende ad essere meno precisa rispetto ai risultati del paragrafo precedente. Il metodo dei passi frazionari modificato (*FSmod*), ha bisogno di uno stabilizzatore come nel caso del metodo al secondo ordine (vedi eq. 4.22) però ne risulta meno influenzato e la soluzione non è degradata eccessivamente al tempo finale.

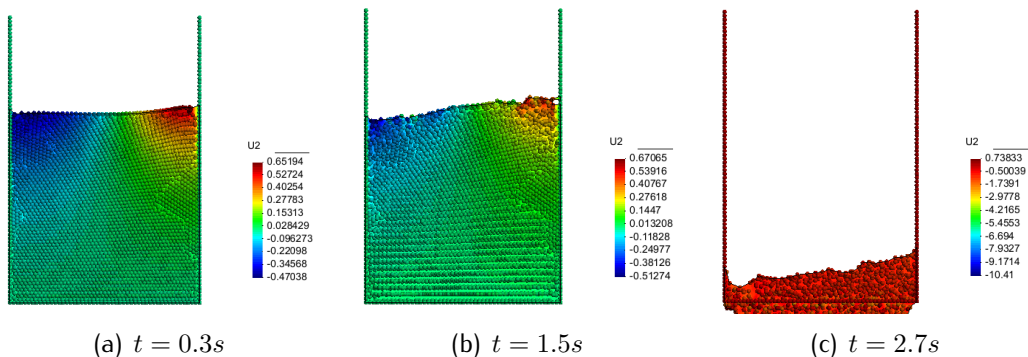


Figura 4.6: Metodo a passi frazionari standard, velocità \mathbf{v}_x

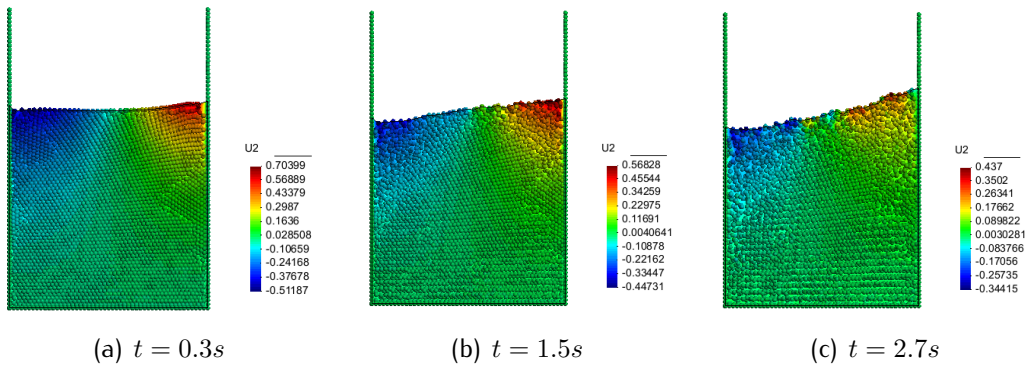


Figura 4.7: Metodo monolitico, velocità v_x

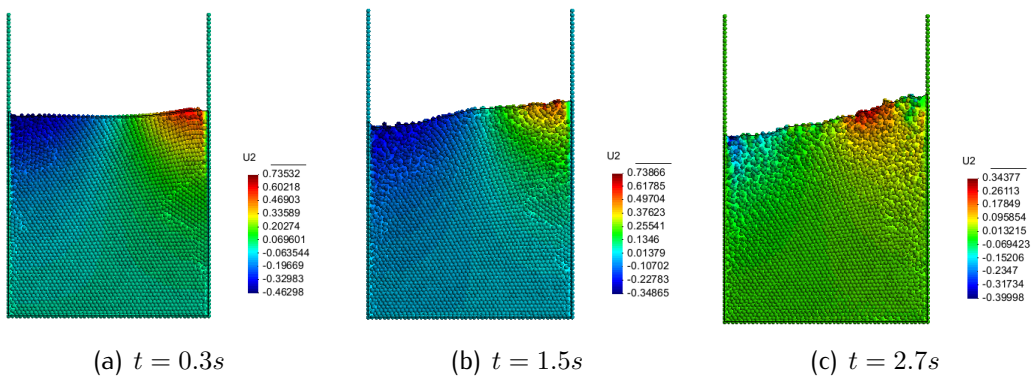


Figura 4.8: Metodo monolitico con τ_{pspg} ridotto, velocità v_x

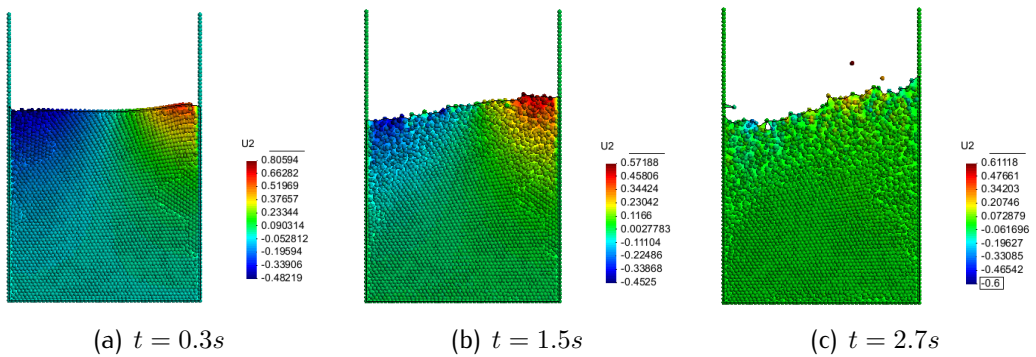


Figura 4.9: Metodo a passi frazionari del secondo ordine, velocità v_x

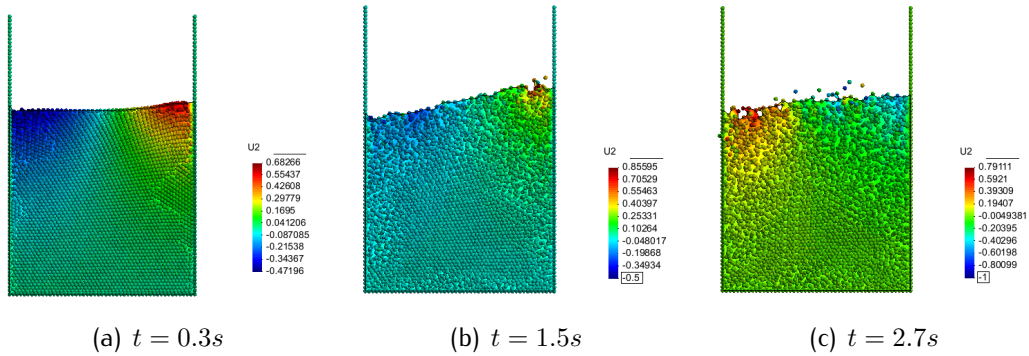


Figura 4.10: Metodo a passi frazionari modificato, velocità v_x

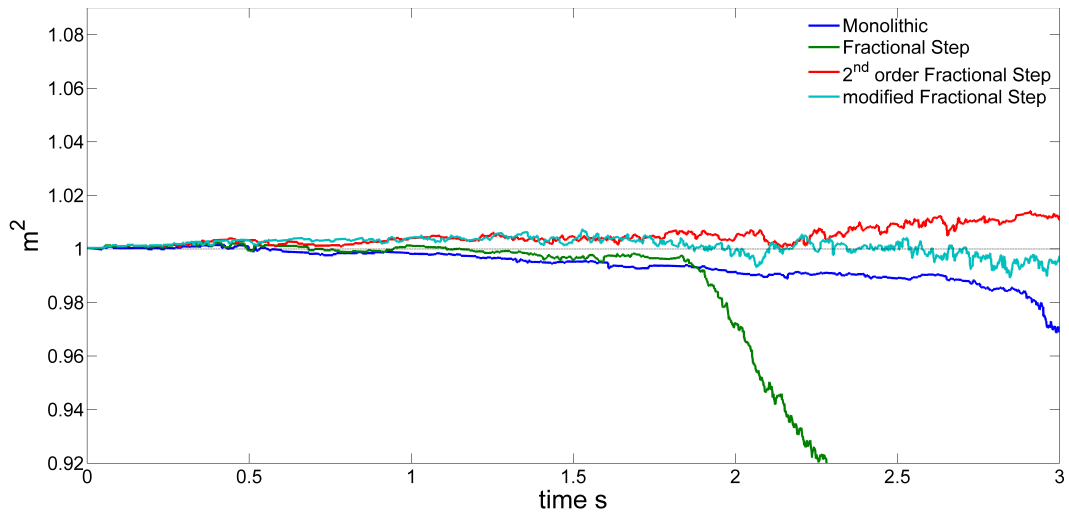


Figura 4.11: Variazione della massa

La figura 4.12 mostra la variazione della massa nel caso di risoluzione tramite metodo monolitico, delle simulazioni delle figure 4.7 e 4.8. Riducendo l'effetto del termine stabilizzante ($\alpha = 10^{-4}$) il fenomeno della perdita di massa si riduce.

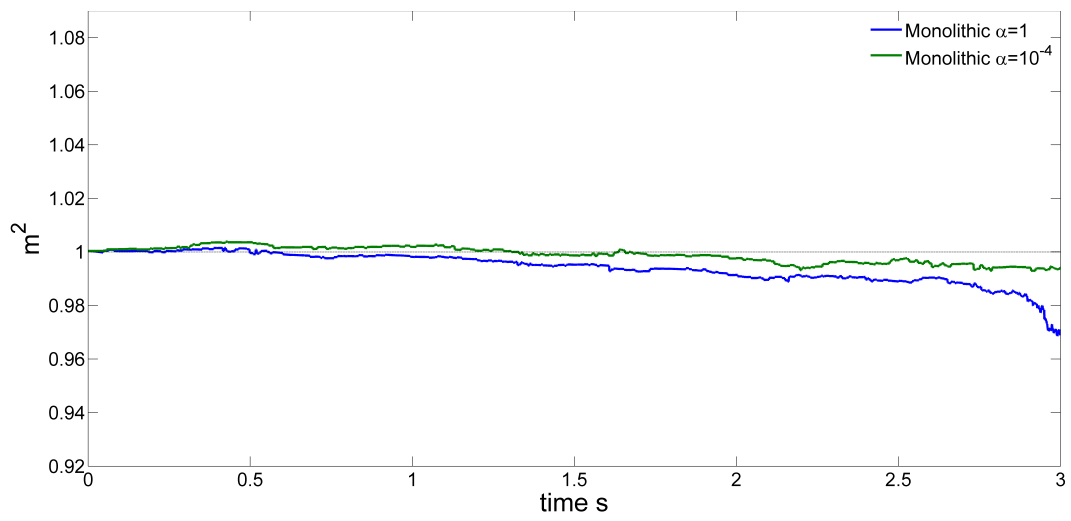


Figura 4.12: Variazione della massa nel caso monolitico al variare del parametro $\tau_{pspg}(\alpha)$

Applicazione della tecnica *add_remove*

La routine *add_remove* ha il compito di rimuovere le particelle dove sono troppo addensate per ridistribuirle dove sono più diradate al fine di ottenere una soluzione di accuratezza omogenea nel dominio di calcolo (vedi paragrafo 2.3.3). Inoltre la routine permette in molti casi di effettuare simulazioni per un intervallo di tempo più lungo senza che la soluzione si deteriori e svolge quindi una funzione molto importante.

Nelle immagini che seguono si nota però come l'aggiunta di detta routine determini una perdita della massa molto più accentuata. Anche in questo caso il metodo di risoluzione tramite *modified Fractional Step* risulta il più efficiente dal punto di vista della conservazione della massa.

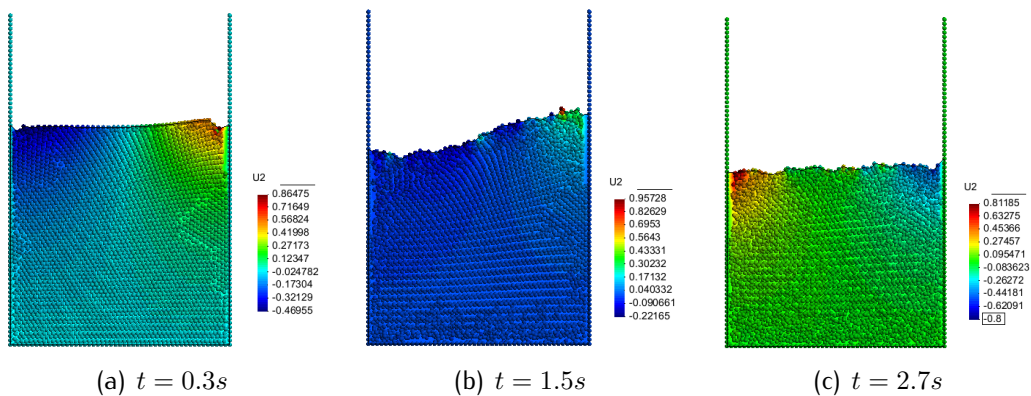


Figura 4.13: Metodo a passi frazionari standard, velocità v_x

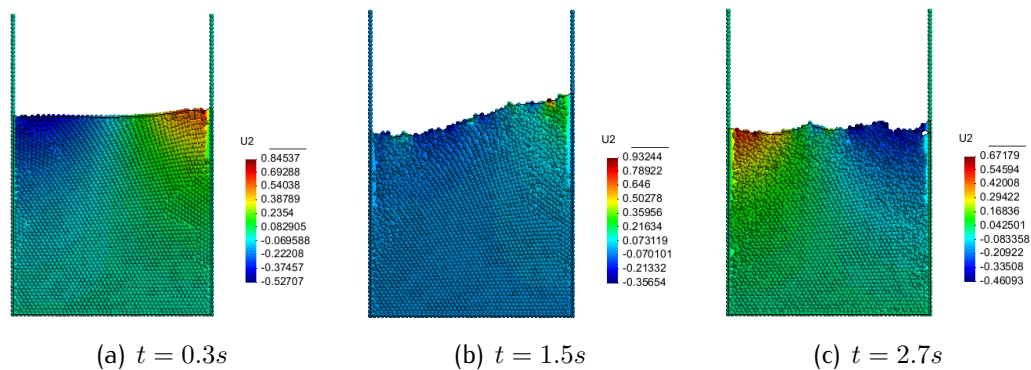


Figura 4.14: Metodo monolitico, velocità v_x

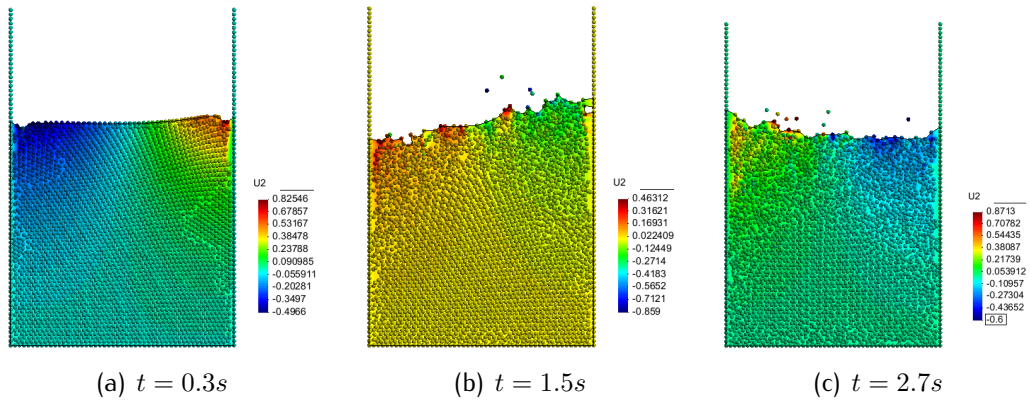


Figura 4.15: Metodo a passi frazionari modificato, velocità v_x

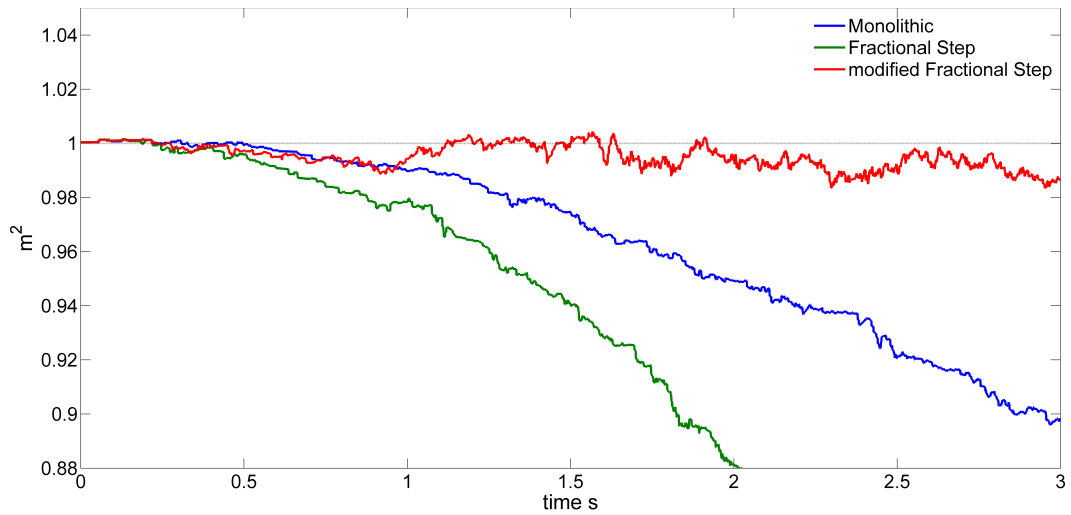


Figura 4.16: Variazione della massa

Fluido non Newtoniano

Le caratteristiche del fluido in questo caso sono : viscosità $\mu = 0.3Pa\ s$, densità $\rho = 2 \cdot 10^3 Kg/m^2$, $\tau_0 = 30Pa$. In questo caso la routine *add_remove* non è stata attivata. La perdita di massa di un fluido non Newtoniano risulta di circa un'ordine di grandezza inferiore rispetto al caso di fluido Newtoniano. Tuttavia, il metodo modificato presentato in questo capitolo risulta sempre quello con meno oscillazioni di massa.

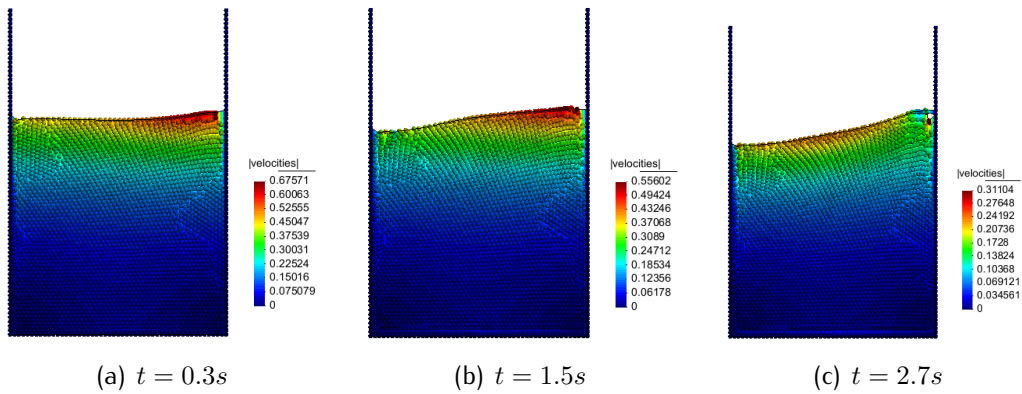


Figura 4.17: *Metodo a passi frazionari standard*, velocità $|\mathbf{v}|$

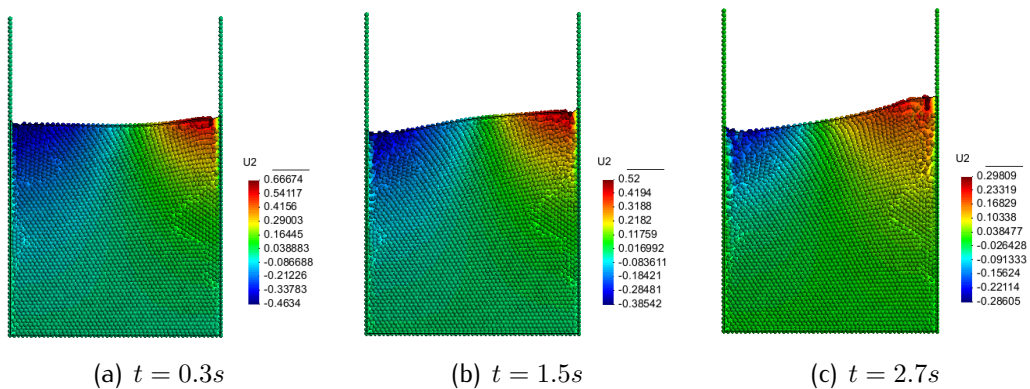


Figura 4.18: *Metodo monolitico*, velocità $|\mathbf{v}|$

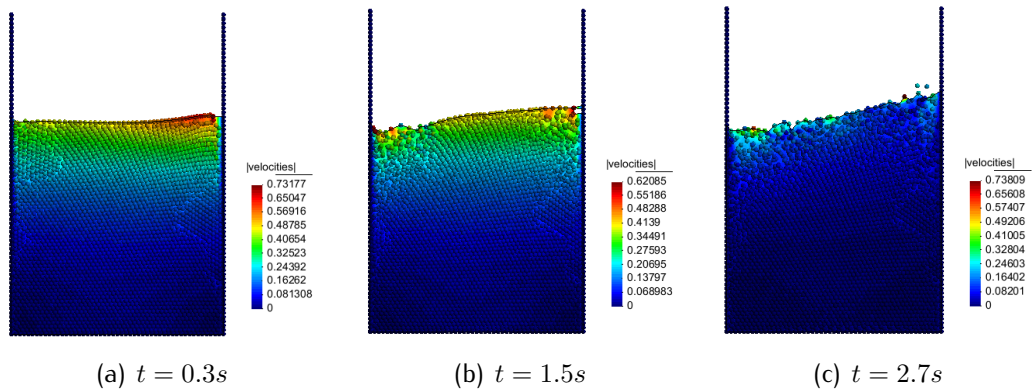


Figura 4.19: Metodo a passi frazionari del secondo ordine, velocità $|\mathbf{v}|$

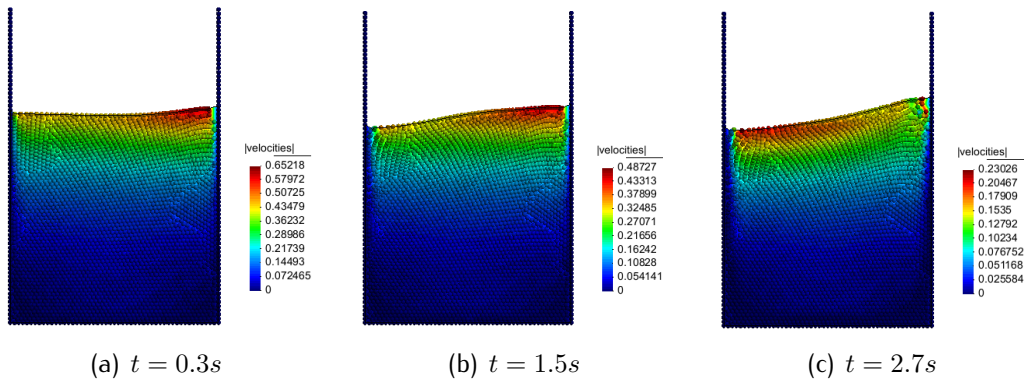


Figura 4.20: Metodo a passi frazionari modificato, velocità $|\mathbf{v}|$

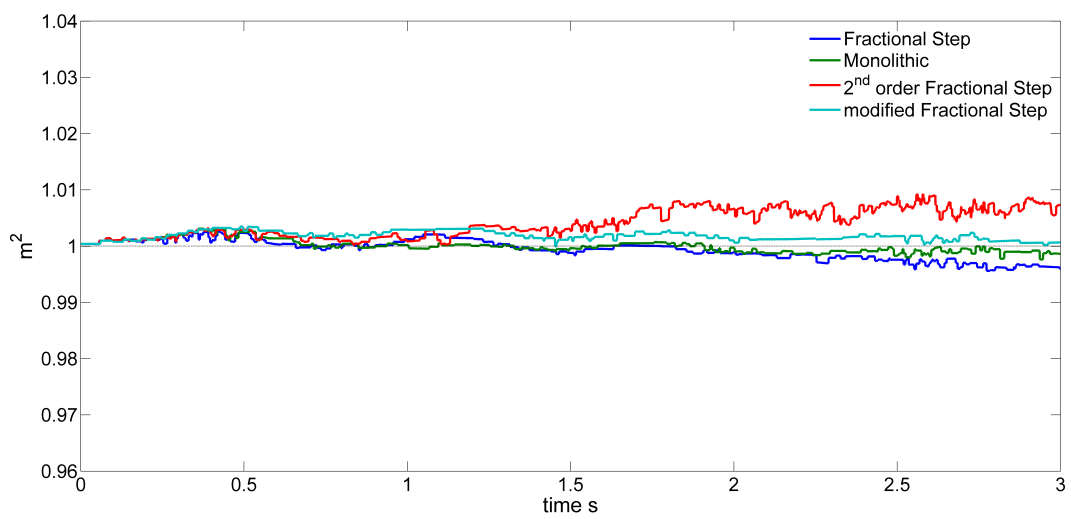


Figura 4.21: Variazione della massa

4.6 Simulazione tridimensionale

Anche nel caso tridimensionale la risoluzione approssimata delle equazioni genera una diminuzione del volume totale del fluido. Come già accennato, il tempo di calcolo di una simulazione tridimensionale è molto maggiore di quello bidimensionale. Però grazie alla routine implementata, che utilizza il triangolatore *Tetgen*, si sono potute eseguire diverse simulazioni, che verranno presentate anche nel capitolo seguente. Le figure 4.22 e 4.23 rappresentano un problema di *sloshing* tridimensionale. Il numero dei nodi utilizzati nella discretizzazione è di 9366 ed il passo temporale pari a $5 \cdot 10^{-4}$. Il tempo di calcolo è di circa 4 h e 30 min. Nella simulazione della figura 4.22, la risoluzione del sistema di equazioni avviene tramite il metodo a passi frazionari. Mentre nella simulazione della figura 4.23 si è optato per il metodo a passi frazionari modificato. In questo caso però non si è utilizzato il metodo al secondo ordine bensì quello al primo ordine ($\mathbf{P}^n = 0$) al fine di evitare le oscillazioni del campo delle pressioni che nel caso tridimensionale tendono ad essere maggiori di quelle nel caso bidimensionale. La pressione di tentativo allora viene calcolata come:

$$\mathbf{P}_g^{n+1} = \mathbf{M}_{p,diag}^{-1} k(\Lambda_{n+1} - \Lambda_n) \quad (4.22)$$

con $k = 10^5 Pa$

L'equazione di conservazione della massa nella formulazione monolitica equivalente allora assume la seguente forma:

$$\mathbf{D}\mathbf{V}^{n+1} - \Delta t(\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^T - \mathbf{L})(\mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{M}_{p,diag}^{-1} k(\Lambda_{n+1} - \Lambda_n)) = 0 \quad (4.23)$$

Nelle immagini 4.24 e 4.25 si può notare come la pendenza della retta che indica il volume totale del fluido sia minore, il che significa una migliore conservazione della massa. Per $t = t_{fin} = 1.2 s$ si passa da una perdita di circa il 4% ad una perdita dell' 1% della massa su quella totale. Inoltre sono state implementate alcune modifiche all'algoritmo α -*shape* per evitare che vengano rimossi gli elementi appartenenti al contorno dove la velocità è nulla, anche nel

caso in cui risultino eccessivamente distorti. Tale modifica evita che si formino dei *fori* nel contorno, come è stato visto nei precedenti studi bidimensionali.

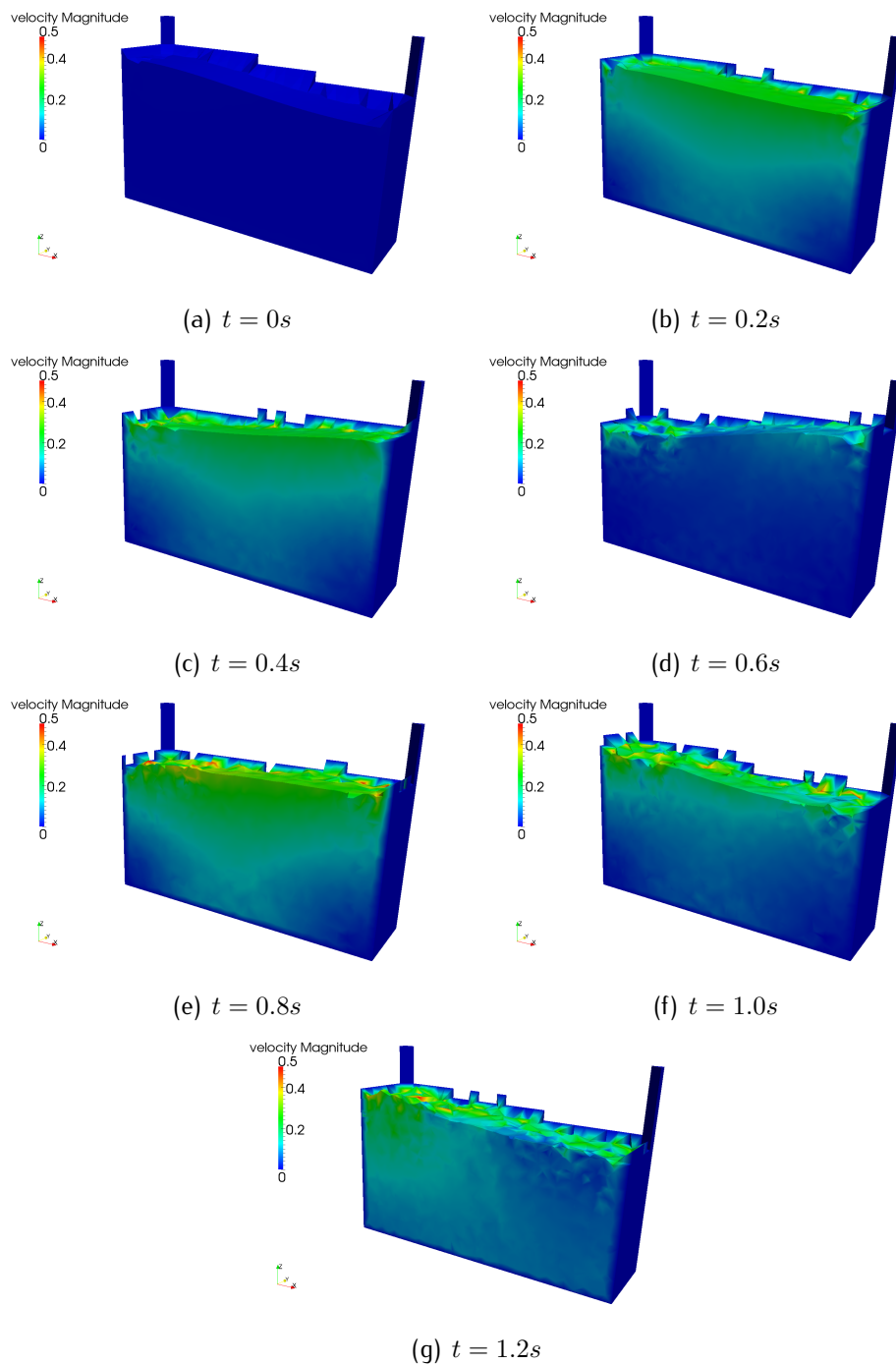


Figura 4.22: Simulazione di *sloshing*, fino ad $1.2 s$, viene visualizzato il modulo della velocità

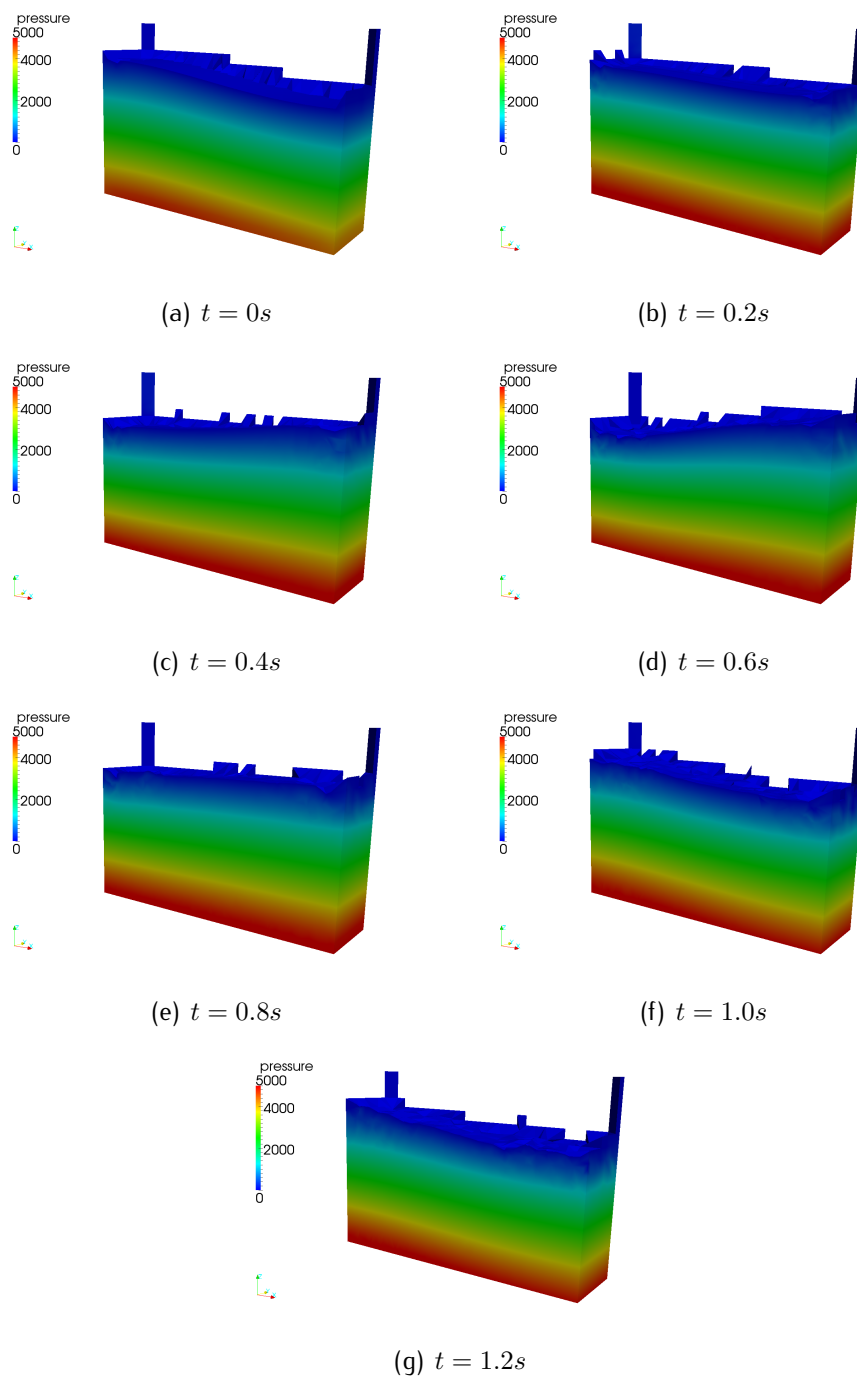


Figura 4.23: Simulazione di *sloshing* dopo le modifiche, fino ad 1.2 s, viene visualizzata la pressione

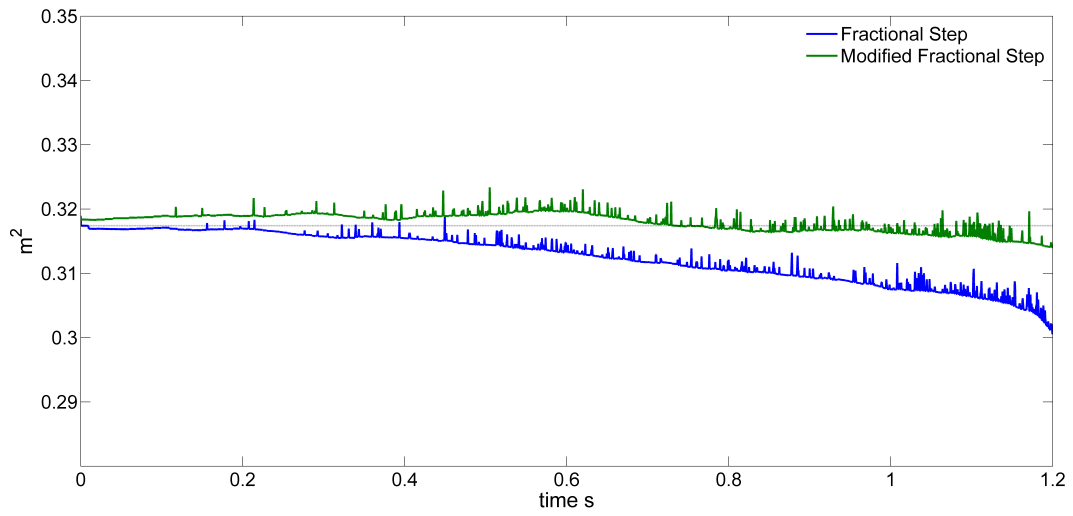


Figura 4.24: Variazione della massa totale

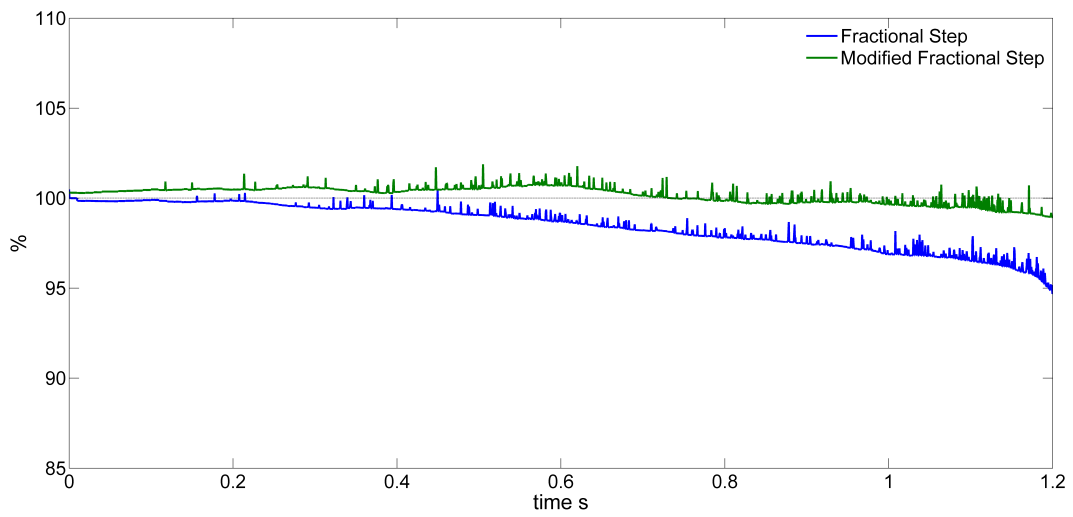


Figura 4.25: Variazione in percentuale della massa totale

Capitolo 5

Simulazioni 3D di test di laboratorio

Le frane rappresentano un importante tema globale [26]. Negli ultimi decenni, gli eventi franosi hanno causato numerose vittime ed importanti danni all'economia in tutto il mondo. Prevedere il percorso, la velocità e la profondità di tali eventi è essenziale per individuare adeguate misure di protezione. Gli eventi franosi con caratteristiche simili a quelle di un flusso avvengono sistematicamente in alcune parti dell'Italia, normalmente durante eventi catastrofici (inondazioni o sismi) come drammaticamente confermato dagli eventi dell'Italia centrale nel 1996 [27] e nella regione della Campania nel 1910, 1924, 1954 e 1998 [28], [29]. In questo capitolo si vuole testare l'applicazione del codice implementato alla simulazione di eventi franosi. Negli studi seguenti si farà sempre riferimento ad un fluido non Newtoniano per descrivere il comportamento del materiale franoso. Questa analogia vale soprattutto per colate detritiche macroviscose, con caratteristiche fluidodinamiche dipendenti da concentrazione volumetrica, assortimento granulometrico, densità della miscela, pendenza e morfologia del pendio [3], [30]. In questo capitolo verranno presentate delle simulazioni di alcuni test condotti presso l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne [6] su valanghe di materiale granulare. Come descritto nel capitolo 2, i modelli basati sulla meccanica dei continui considerano la massa in movimento come un mezzo omogeneo continuo. In questa situazione, diventa possibile sostituire il movimento della reale miscela delle fasi solide e fluide con un fluido *equivalente*, le cui proprietà reologiche devono approssimare il

comportamento della miscela reale [31]. In questo modo il comportamento della massa fluente può essere descritto dalle leggi di conservazione. L'esperimento sul quale viene testato inizialmente il codice di calcolo ha le seguenti semplici caratteristiche geometriche: un volume di 20l di *aquarium gravel*, all'altezza di un metro, viene fatta scorrere su un piano inclinato di 45° di legno con una forte discontinuità in corrispondenza dell'intersezione con il piano orizzontale, vedi figura 5.1. Come mostrato nella tabella 5.1, il materiale utilizzato, *aquarium*

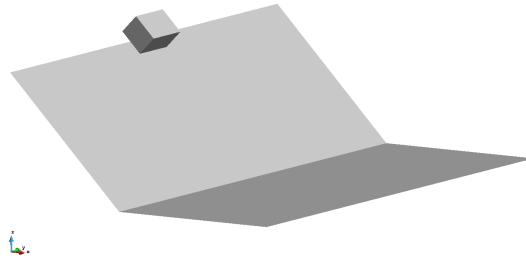


Figura 5.1: Dominio 3D della simulazione

gravel è composto da una distribuzione delle dimensioni dei grani abbastanza omogenea con un diametro con valori compresi tra $D = 0.5 - 3 \text{ mm}$. Il peso per unità di volume è di 14.3 KN/m^3 . L'angolo di attrito interno è $\phi_i = 34^\circ$ e quello tra ghiaia/piano è $\phi_i = 32^\circ$ [6]. Il problema è stato discretizzato con 21267 nodi e sono stati simulati 2 s con un passo temporale di $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$. Nelle figure (5.2-5.3-5.4) sono rappresentati tre problemi con differenti valori della viscosità. Nella figura 5.2 i parametri del fluido alla Bingham descritto nel paragrafo 2.2.3 (eq. 2.21) sono: $\mu = 70 \text{ Pa s}$, $\tau_0 = 30 \text{ Pa}$ ed $N = 10$. Invece nella simulazione rappresentata nell'immagine 5.3 si è posto $\mu = 0.7 \text{ Pa s}$, $\tau_0 = 30 \text{ Pa}$ ed $N = 10$ e quella relativa alla figura 5.4, $\mu = 7 \text{ Pa s}$, $\tau_0 = 30 \text{ Pa}$ ed $N = 10$.

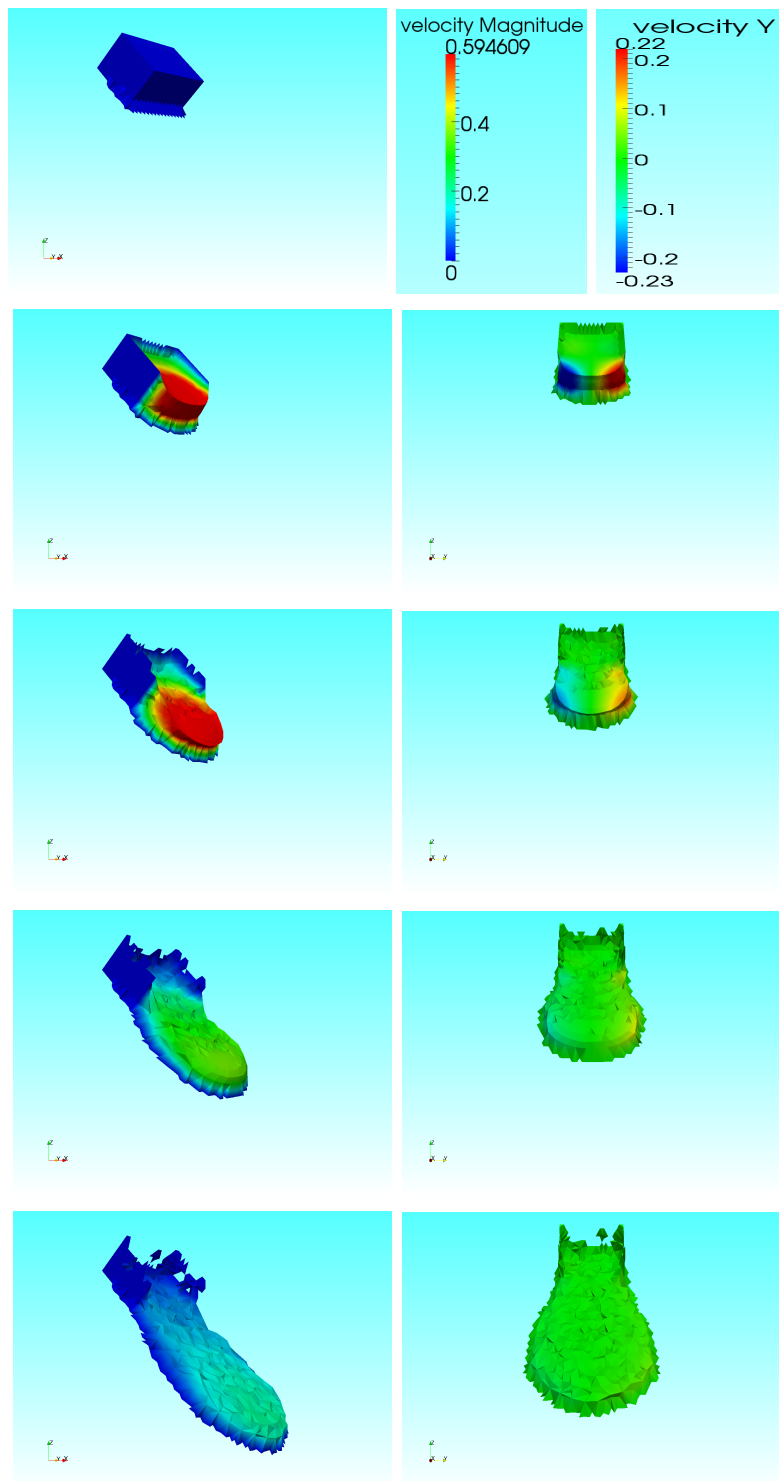


Figura 5.2: Immagini relative agli istanti $t = 0 - 0.2 - 0.4 - 0.8 - 2$ s. Rappresentazione del modulo e della componente y (orizzontale) della velocità

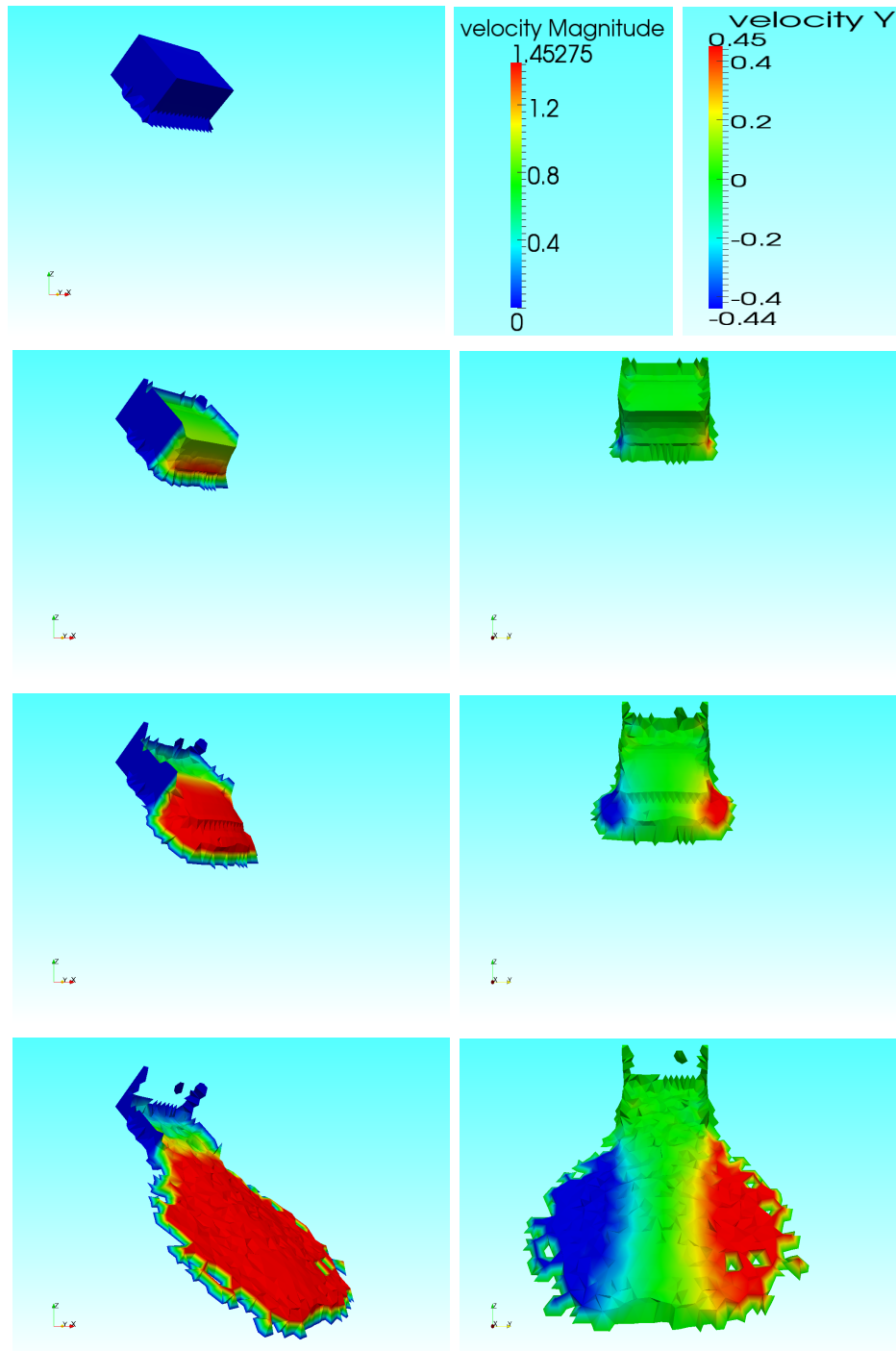


Figura 5.3: Immagini relative agli istanti $t = 0 - 0.1 - 0.2 - 0.4$ s. Rappresentazione del modulo e della componente y (orizzontale) della velocità

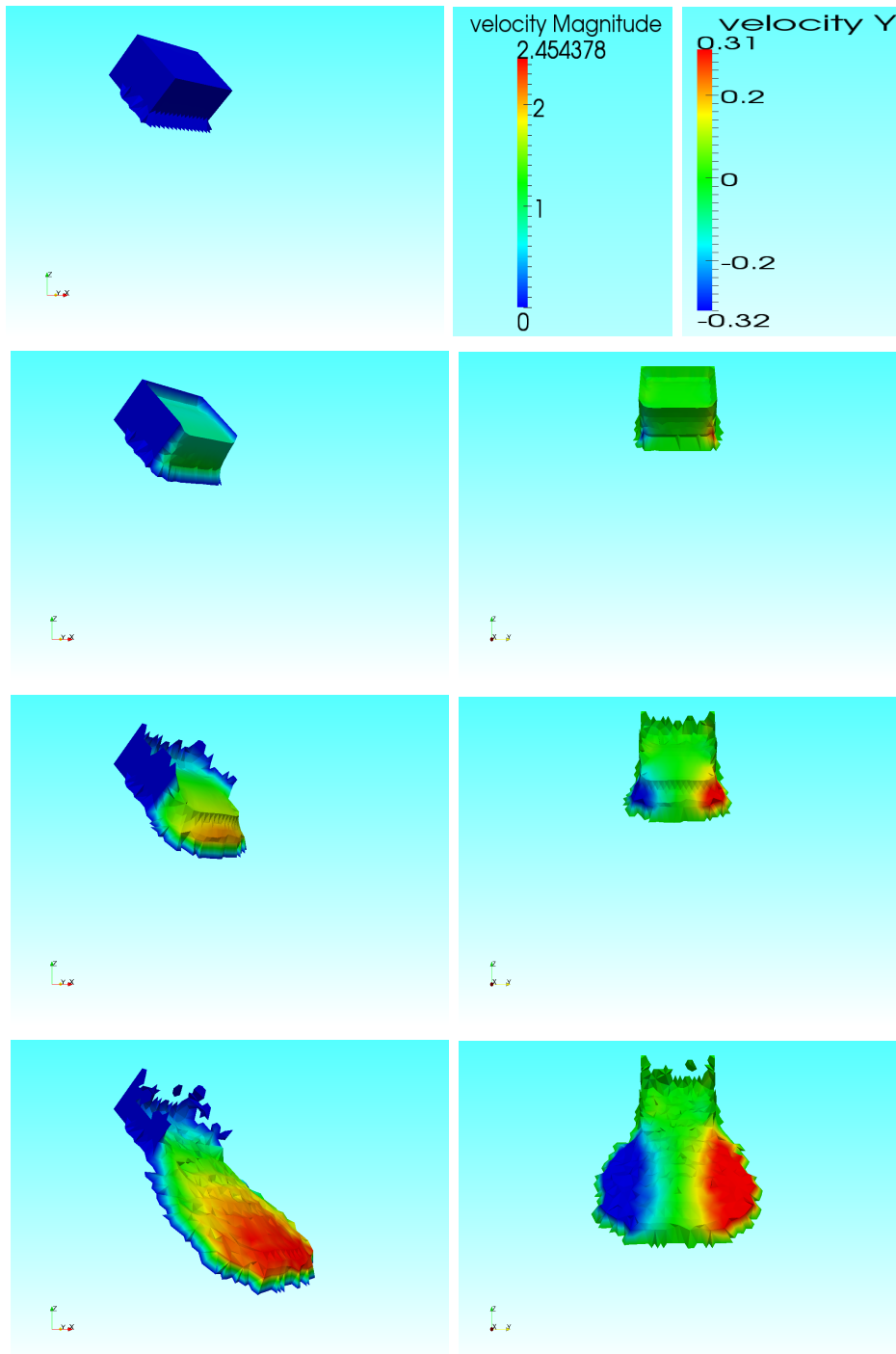


Figura 5.4: Immagini relative agli istanti $t = 0 - 0.1 - 0.2 - 0.4$ s. Rappresentazione del modulo e della componente y (orizzontale) della velocità

Dalle simulazioni condotte si nota come la propagazione del fluido è molto

lenta nel caso di un valore della viscosità alto (figura 5.2). Il fluido viscoso non ha ancora raggiunto il piano orizzontale nell'istante finale $t = 2 s$ mentre il moto risulta più veloce con valori della viscosità minori. Dal confronto con i risultati sperimentali si è ricavato un valore di $\mu = 7Pa$. Nelle figure 5.5 e 5.6 è rappresentata la simulazione con $\mu = 7Pa$ s fino all'istante finale $t = 2 s$. Dal confronto con i risultati sperimentali si nota che il codice sviluppato è in grado di simulare con sufficiente accuratezza la velocità e la traiettoria della frana. La configurazione del deposito all'istante finale $t = 2s$, invece, non risulta ben simulato. Infatti la configurazione del deposito (figura 5.7) non viene riprodotta adeguatamente. Ciò è dovuto al fatto che il materiale granulare viene descritto come un fluido non Newtoniano tramite il modello di Bingham regolarizzato.

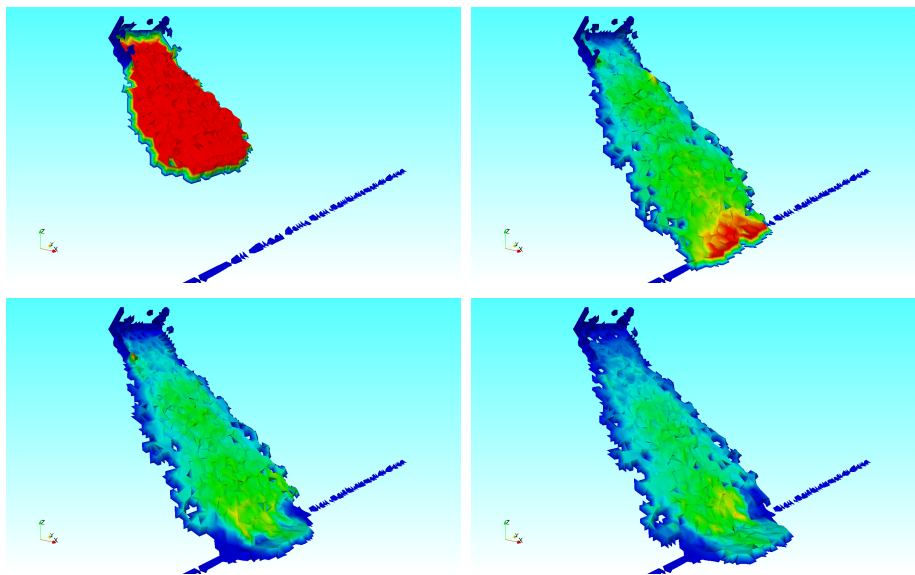


Figura 5.5: Modulo della velocità agli istanti $t = 0.5 - 1 - 1.5 - 2 s$

La figura 5.7 rappresenta il deposito del materiale al tempo finale $t = 2s$ ottenuto in laboratorio. La simulazione del volume e della forma del deposito non è stata possibile per alcuni motivi. In primo luogo il numero dei nodi che appartengono al dominio fluido non è sufficientemente elevato. Infatti dei 21267 nodi utilizzati per la discretizzazione solo 1841 nodi non appartengono al contorno vincolato. Inoltre parte di questi nodi rimangono lungo il piano



Figura 5.6: Rappresentazione del volume (nelle zone con un addensamento di nodi maggiore il colore è più marcato) negli istanti temporali $t = 0.5 - 1 - 1.5 - 2$ s

inclinato. Questo fenomeno può essere spiegato considerando un piano sul quale scorre un fluido, il piano dopo il passaggio rimane comunque bagnato. Nella figura 5.8, invece, si mostra la propagazione e la diffusione della massa durante la prova sperimentale.

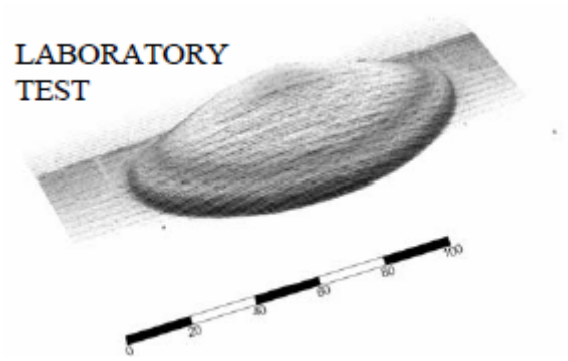


Figura 5.7: Vista 3D del deposito di materiale al tempo finale $t = 2s$ [6]

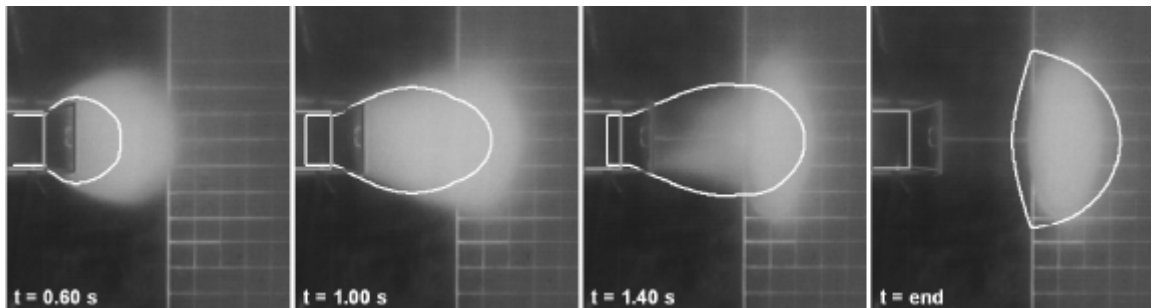


Figura 5.8: Propagazione e diffusione della massa durante la prova sperimentale (immagine sullo sfondo), mentre la linea bianca rappresenta il contorno di una simulazione descritta in [6]

Si vuole ora simulare un altro test, sempre condotto nel laboratorio dell' Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, in cui tra il piano inclinato e quello orizzontale il materiale incontra un ostacolo che ne modifica la direzione di moto. La particolarità di questo esperimento è la presenza di una deviazione che costituisce un ostacolo nella direzione di flusso. Questo permette di convalidare il codice su una topografia particolare per verificare se possono essere effettuate simulazioni con sufficiente accuratezza anche nel caso di forti deviazioni della traiettoria della frana. Quando una massa è deviata, essa tende a rallentare e l'effetto sulla morfologia del deposito dipende dall'angolo di impatto [32]. Se il piano di deviazione è ortogonale alla direzione del moto, il fronte di avanzamento è diviso in due parti con volume simile, invece se l'angolo è obliquo la divisione non è uguale e l'intero volume può essere deviato. Inoltre le deviazioni, spesso, danno luogo a fenomeni di *runup* e di compattazione della massa in movimento [33]. Testare l'abilità di modelli matematici per predire il comportamento di valanghe di materiale granulare ideale che si muove su una superficie irregolare è un passo necessario per la validazione del modello ai fini del suo utilizzo per comprendere la propagazione di un evento franoso [34]. La configurazione dell'esperimento, descritta in [6], è mostrata nella figura 5.9. Il piano su cui è posizionato inizialmente il fluido (*piano di avanzamento*) è inclinato di 37.5° rispetto al piano orizzontale. Altri due angoli sono necessari per definire l'inclinazione del piano di deviazione:

- δ : l'angolo di deviazione, che corrisponde all'angolo piano tra la direzione di *avanzamento* e l'intersezione tra il piano di deviazione e quello di avanzamento.
- α_d : inclinazione del piano di deviazione

In questo caso δ è uguale a 62° e α_d a 22.6° . I piani sono ricoperti di materiale *forex*. La massa posizionata sul piano inclinato è composta da *Hostun sand*, le cui caratteristiche sono riportate nella Tabella 5.1. Il materiale è posizionato in un recipiente riempito completamente in altezza e in larghezza, con la

profondità variabile a causa dell'inclinazione del piano di avanzamento. Nella parte posteriore rispetto alla direzione di moto il materiale è inclinato di circa 70° . L'esperimento ha inizio rimuovendo velocemente la parete inferiore del recipiente.

Material	Dimensione dei grani [mm]	Peso [kN/m ³]	angolo di attrito	
			Interno [°]	con il piano [°]
<i>Aquarium Gravel</i>	D=0.5-3	14.3	34±1	28±1
<i>Hostun sand</i>	D=0.32-0.8	12.6	34±1	32±1

Tabella 5.1: Caratteristiche del materiale granulare utilizzato nell'esperimento con deviazione

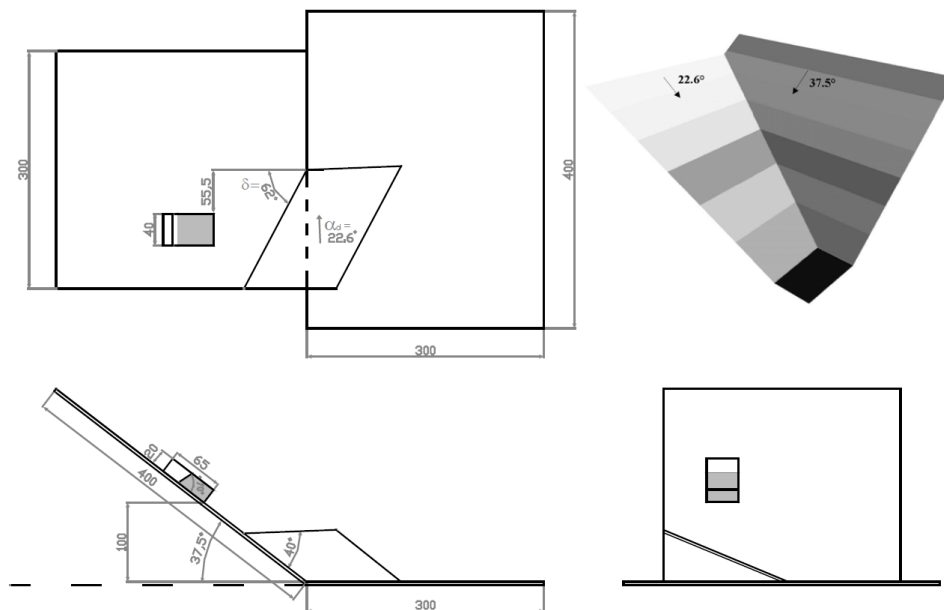


Figura 5.9: *Set-up* dell'esperimento [6]

I risultati dell'esperimento eseguito con il piano di deviazione confermano il fatto che la topografia del percorso può indurre ad importanti perdite di energia nella massa.

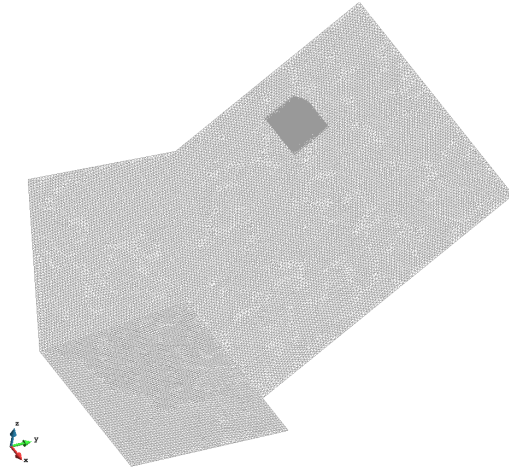


Figura 5.10: *Mesh* tridimensionale della simulazione

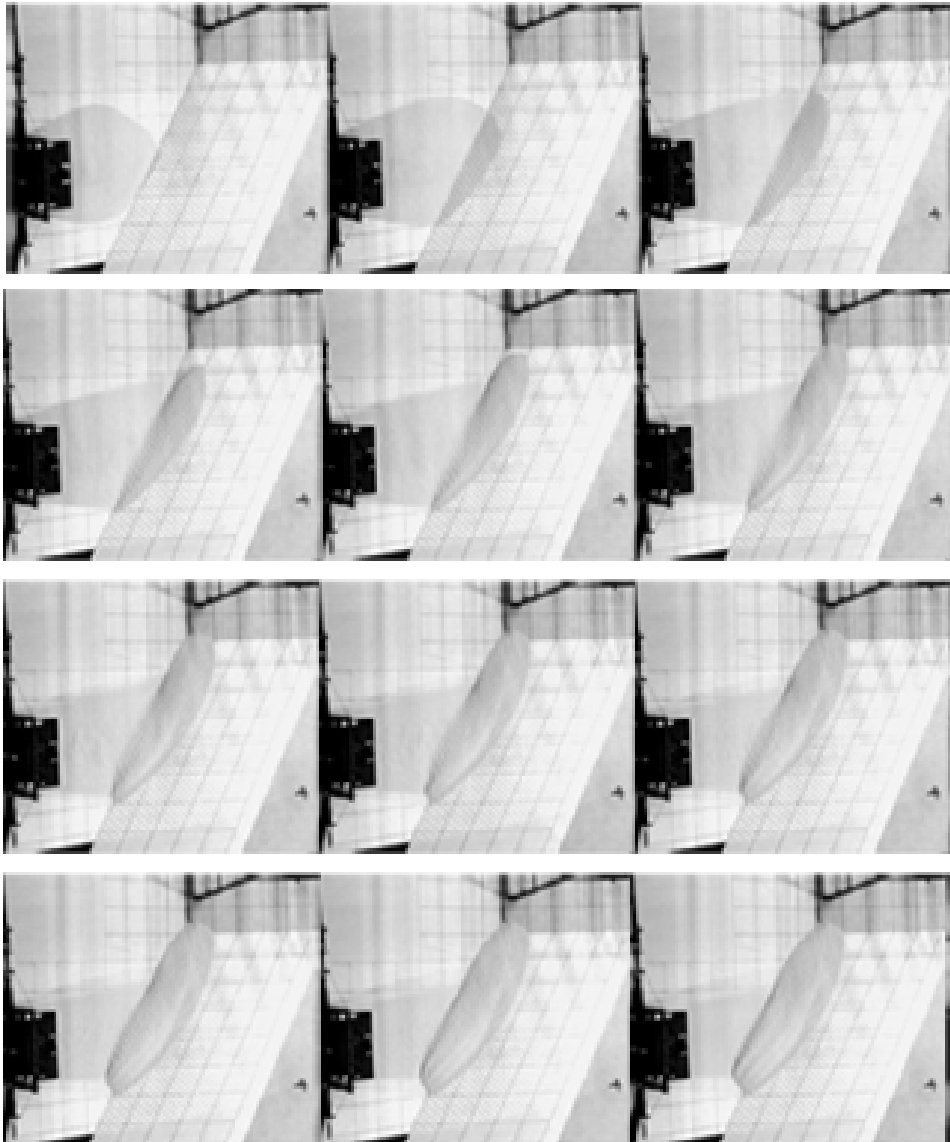


Figura 5.11: Immagini della prova sperimentale negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00 - 2.17 - 2.33 - 2.50$ s [6].

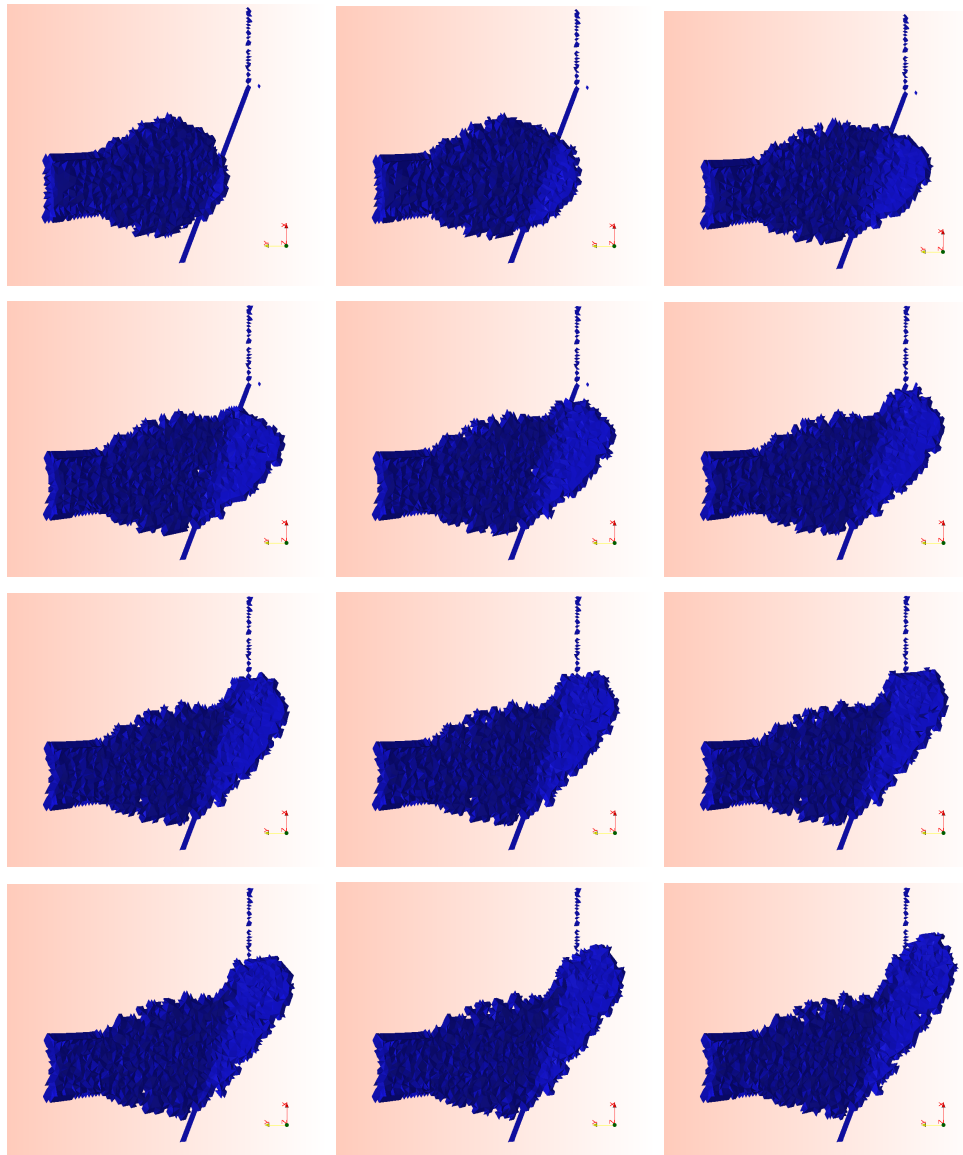


Figura 5.12: Rappresentazione della simulazione negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00 - 2.17 - 2.33 - 2.50$ s con 20711 nodi utilizzati nella discretizzazione.

Nella simulazione rappresentata in figura 5.12 i parametri utilizzati sono stati i seguenti: $\mu = 5Pa$ s, $\tau_0 = 30Pa$ ed $N = 10$ e la risoluzione del sistema di equazioni avviene tramite il metodo a passi frazionari. Dal confronto con i risultati sperimentali si nota che nell'istante $t = 0.67$ s (figura 5.11) il materiale non ha ancora raggiunto il piano di deviazione mentre nella simulazione lo

ha già raggiunto. Nella seconda simulazione (figura 5.13), invece, si è posto $\mu = 7Pa\ s$, $\tau_0 = 30Pa$ ed $N = 10$ e si è utilizzata la risoluzione tramite il metodo a passi frazionari modificato. Come è stato visto nel capitolo precedente nel caso di fluidi non Newtoniani i due metodi di risoluzioni danno luogo a soluzioni equivalenti. Anche in questo caso, ovvero con la presenza di un piano di deviazione, si nota che il codice sviluppato è in grado di simulare con sufficiente accuratezza la velocità e la traiettoria della frana.

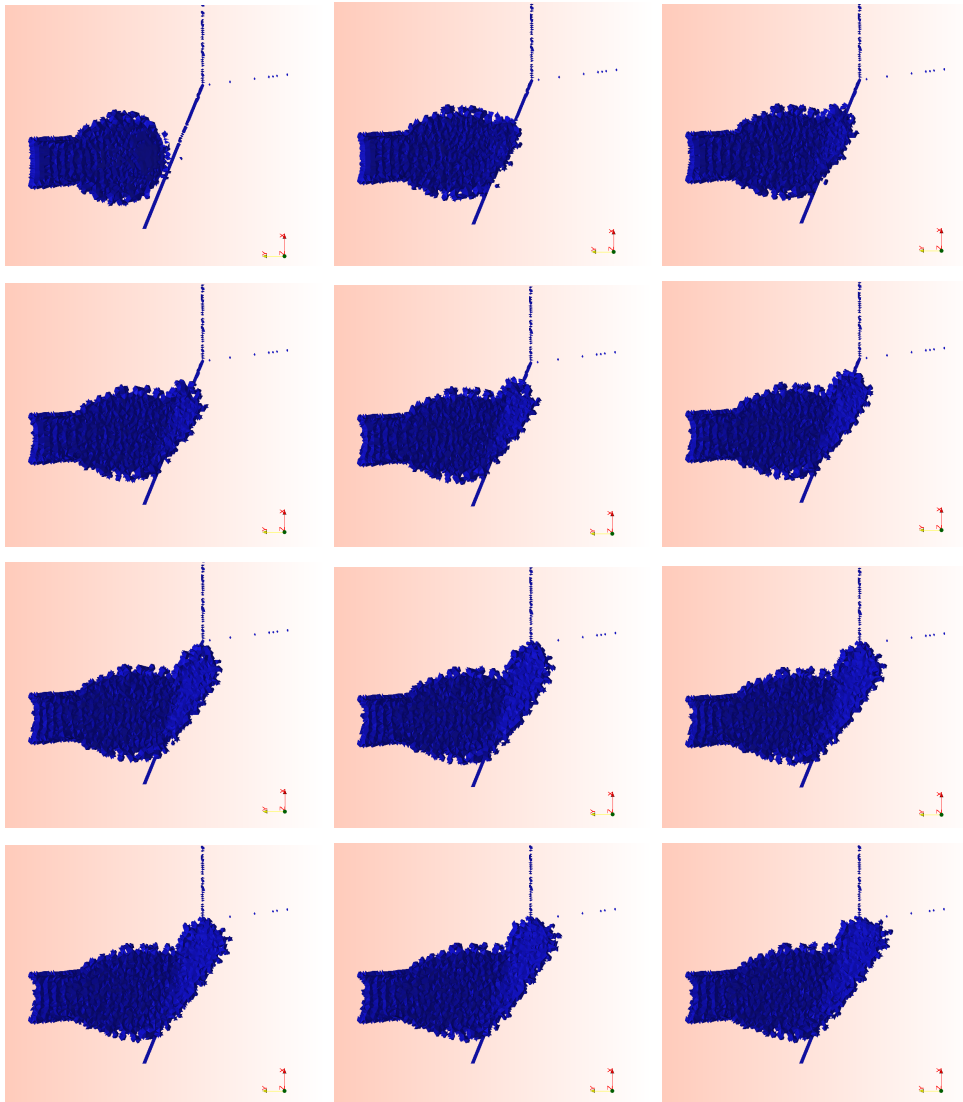


Figura 5.13: Rappresentazione della simulazione negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00 - 2.17 - 2.33 - 2.50$ s con 36003 nodi utilizzati nella discretizzazione.

Infine per poter considerare leggi costitutive dipendenti dalle caratteristiche proprie del materiale (angolo di attrito interno φ , tabella 5.1) è stato implementato il modello costitutivo dei fluidi attritivi. La legge reologica per il presente modello può essere espressa nella seguente forma:

$$\begin{aligned} 2D(\mathbf{u}) &= 0 && \text{per } \tau < \tau_0 \\ \tau &= -p \tan(\varphi) && \text{per } \tau > \tau_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Anche nel caso di fluidi attritivi, analogamente al caso dei fluidi alla Bingham, la legge reologica viene espressa nella forma regolarizzata:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\bar{\mu}D(\mathbf{u}) \quad (5.2)$$

dove

$$\bar{\mu} = \mu + \frac{p \tan(\varphi)}{2\|D(\mathbf{u})\|} (1 - e^{-2N\|D(\mathbf{u})\|}) \quad \text{per } \|D(\mathbf{u})\| \neq 0 \quad (5.3)$$

Come si è visto nelle simulazioni precedenti, la superficie libera del problema si estende velocemente. Ciò determina che a partire da un certo istante la maggior parte dei nodi ha pressione nulla poiché appartiene alla superficie libera. Per tale motivo anche nel caso di fluidi attritivi è stata aggiunta la viscosità μ nel calcolo della viscosità apparente. Utilizzando questo modello è stata condotta un'ultima simulazione della durata di 2 s utilizzando sempre la stessa maglia. Dopo aver effettuato alcune simulazioni e confrontato la propagazione della frana con i risultati sperimentali si è optato per un valore di $\mu = 3Pa$. Il materiale utilizzato è *Aquarium Gravel* (tabella 5.1) il cui angolo di attrito interno è $\varphi = 34^\circ$.

Anche in questo caso la simulazione riproduce adeguatamente la velocità e la traiettoria della frana. Inoltre nell'istante finale più particelle hanno raggiunto il piano orizzontale e meno particelle sono rimaste nel piano di avanzamento iniziale. Il legame costitutivo del tipo dell'equazione (5.3) oltre a permettere di utilizzare caratteristiche proprie del terreno risulta essere vantaggioso ai fini della simulazione.

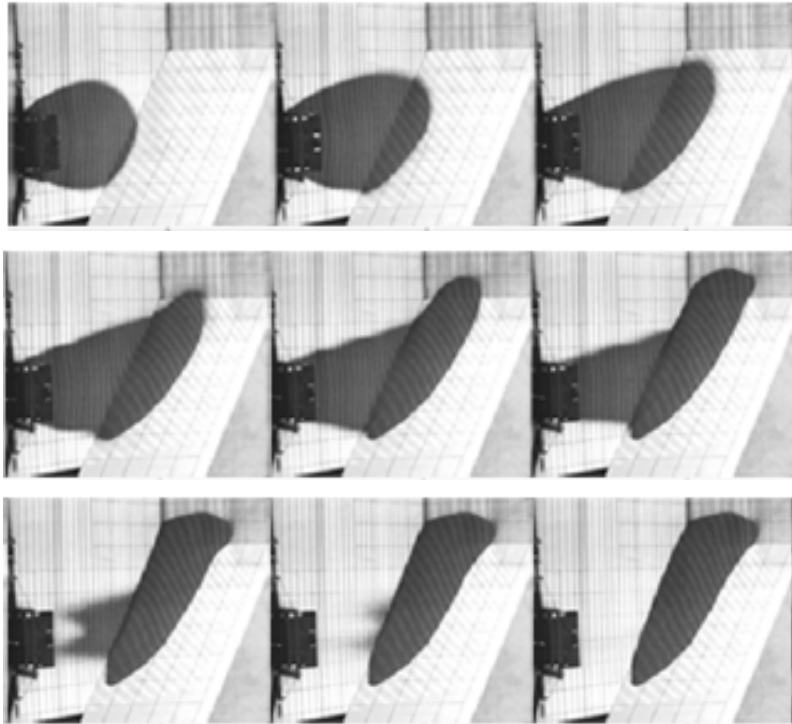


Figura 5.14: Immagini della prova sperimentale negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00$ s [6].

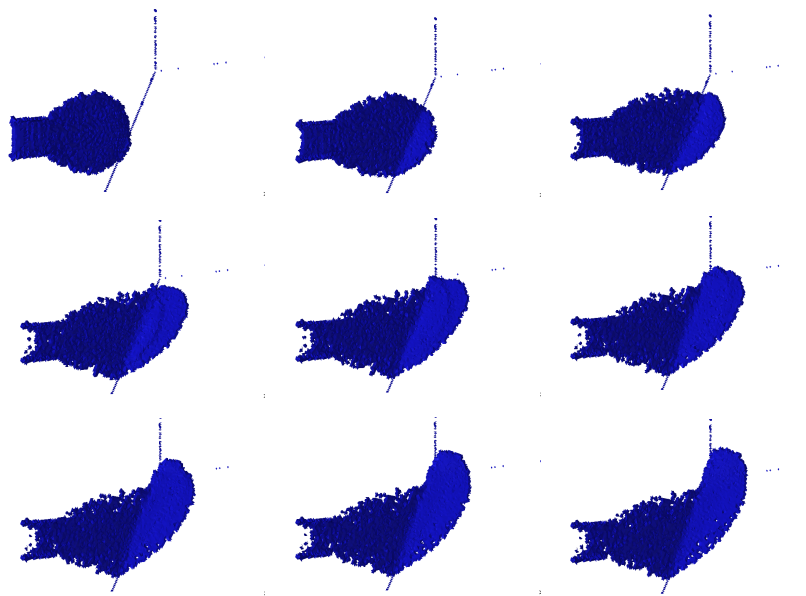


Figura 5.15: Rappresentazione della simulazione negli istanti di tempo $t = 0.67 - 0.83 - 1.00 - 1.17 - 1.33 - 1.50 - 1.67 - 1.83 - 2.00$ s con 36003 nodi utilizzati nella discretizzazione.

Capitolo 6

Conclusioni

Nel presente lavoro è stato sviluppato uno strumento tridimensionale per l'analisi delle grandi deformazioni di fluidi e solidi viscosi. In particolare è stato studiato un metodo Lagrangiano per la risoluzione di problemi fluidodinamici con superficie libera caratteristici dell'Ingegneria Civile. Il codice iniziale sviluppato dal Dott. Massimiliano Cremonesi ed esteso al caso tridimensionale in lavori successivi è stato modificato al fine di rendere il metodo più efficiente e di migliorare il fenomeno della *perdita di massa*. Infine è stato possibile effettuare delle simulazioni numeriche di alcuni test condotti presso l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Dal presente lavoro si possono trarre le seguenti conclusioni:

Riduzione del tempo di calcolo

Il tempo di calcolo troppo elevato del codice tridimensionale, è stato il primo punto affrontato in questo lavoro. Dopo aver effettuato un'analisi del codice dalla quale è emerso che la routine per la generazione della maglia non era efficiente, questa è stata sostituita con il programma *Tetgen*. Le modifiche eseguite hanno richiesto inoltre che il codice tridimensionale fosse scritto in linguaggio misto (*Fortran* e *C++*) con un lieve incremento della complessità della programmazione richiesta. Il risparmio in termini di percentuale sul tempo totale può essere riassunto nella tabella seguente. Il costo computazionale per la generazione della maglia viene ridotto considerevolmente. Inoltre sono

stati svolti degli studi anche per ridurre l'onere delle fasi di individuazione del contorno e di soluzione del sistema non lineare di equazioni che potrebbero essere sviluppate in futuro.

Implementazione di formulazioni alternative del *Fractional Step Method*

E' stato effettuato uno studio su tre diverse formulazioni del metodo a passi frazionari, utilizzato per la risoluzione del sistema non lineare di equazioni, e sulla scrittura dell'equazione di conservazione della massa. Le modifiche necessarie sono state implementate sia nel codice bidimensionale che tridimensionale. Tramite i risultati di alcune simulazioni che evidenziano una riduzione del fenomeno di perdita di massa, è stata verificata l'efficacia dei metodi proposti.

Simulazioni tridimensionali di valanghe di materiale detritico

Una parte fondamentale nel problema della simulazione delle frane è la geometria complessa del problema. La massa franosa deve essere in grado di adattare il moto alla topografia. Grazie alle modifiche al codice tridimensionale è stato possibile eseguire delle simulazioni numeriche di due test condotti all'École Polytechnique Fédérale de Lausanne e verificare il codice su una topografia particolare. E' stata quindi accertata l'accuratezza del codice anche nei casi di forti deviazioni del letto di forma.

L'esperienza acquisita durante lo svolgimento del presente lavoro di tesi ha determinato l'identificazione delle seguenti linee di possibili studi futuri:

- Nel caso della formulazione modificata del metodo a passi frazionari, deve essere introdotto un termine stabilizzante nell'equazione di conservazione della massa al fine di evitare le oscillazioni spurie che si producono nel campo delle pressioni.
- Svolgere uno studio che riduca il costo computazionale dei sottoprogrammi per l'individuazione del contorno e per la soluzione del sistema non

lineare di equazioni. Nel primo caso è stato proposto un metodo per domini semplici, questa modifica può essere estesa al caso generale. Per la riduzione del tempo di calcolo della risoluzione del sistema non lineare di equazioni, invece, bisogna cercare un metodo di risoluzione più efficiente ad esempio studiando modelli di *ordine ridotto*.

Appendice A

Metodo *Compressed Sparse Row* (CSR)

Nei problemi ad elementi finiti, la discretizzazione del dominio comporta, nella maggior parte dei casi, di lavorare con matrici che hanno un gran numero di termini nulli. Una matrice popolata principalmente da termini nulli viene detta *sparsa*.

Il metodo *Compressed Sparse Row* è un algoritmo per la memorizzazione di matrici *sparsa*, e nel caso di problemi ad elementi finiti con un gran numero di gradi di libertà, e quindi con un gran numero di termini nulli, permette un considerevole risparmio di tempo e di memoria rispetto ad una classica memorizzazione di tutti gli elementi della matrice. La memorizzazione della matrice viene sostituita da quella di tre vettori, che chiameremo \vec{A} , \vec{IA} , \vec{JA} .

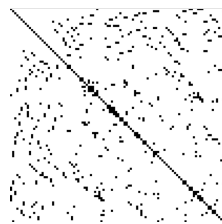


Figura A.1: Esempio di matrice sparsa

Nell'esempio seguente, sia \mathbf{A} una matrice *sparsa*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

allora :

$$\vec{A} = [2 \ 1 \ 4 \ 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 9 \ 1 \ 7]$$

$$\vec{IA} = [1 \ 3 \ 4 \ 6 \ 8 \ 12 \ 14]$$

$$\vec{JA} = [1 \ 5 \ 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 6 \ 5 \ 6 \ 2 \ 5 \ 6]$$

Come si può intuire dall'esempio, i tre vettori sono definiti come:

- \vec{A} : vettore dei termini non nulli
- \vec{IA} : vettore con gli indici degli elementi di \vec{A} che sono il primo termine non nullo di ciascuna riga della matrice
- \vec{JA} : vettore con il numero della colonna della matrice relativo a ogni termine non nullo del vettore \vec{A}

Il metodo permette di risparmiare memoria senza perdere nessuna informazione. Si noti che se le dimensioni della matrice \mathbf{A} sono uguali ad n , allora le dimensioni di \vec{IA} sono $n + 1$, mentre \vec{A} e \vec{JA} hanno le stesse dimensioni.

Appendice B

Condizioni al contorno di Dirichlet

Le condizioni al contorno di Dirichlet (o *essenziali*) sono valori prescritti delle variabili (velocità e pressione) che devono essere imposti al contorno che rappresenta un corpo rigido fermo o in moto (imposizione dei valori prescritti di velocità), e nella superficie libera (pressione nulla). Considerando un problema generico scalare nell'incognita c , dopo la discretizzazione l'imposizione delle condizioni al contorno di Dirichlet ha la seguente forma.

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_D \quad \text{su } \Gamma_D \quad (\text{B.1})$$

Data la presenza delle condizioni al contorno di Dirichlet, è necessario fare una distinzione tra il numero dei nodi appartenenti al contorno di Dirichlet n_D ed il numero delle incognite, ad esempio il numero delle equazioni n_{eq} . Si noti che $n_{eq} = n_{no} - n_D$ dove n_{no} è il numero dei nodi della maglia. Si definisce $\beta = 1, 2, \dots, n_D$ e si fissano i coefficienti che corrispondono ai valori noti per le condizioni essenziali.

$$c^h(\mathbf{x}) = \sum_{j \notin \beta} c_j N_j(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \beta} c_D(\mathbf{x}_i) N_i(\mathbf{x}) \quad (\text{B.2})$$

In questa forma si discretizza la parte dove si impongono le condizioni di Dirichlet ed il resto. E' utile ricordare che:

- $c^h(\mathbf{x})$ verifica (a meno dell'errore associato all'interpolazione) la condizione essenziale al contorno $c = c_D$ su Γ_D

- $N_i(\mathbf{x}) = 0$ su Γ_D per $i \in \beta$

Applicazione alternativa delle condizioni al contorno essenziali

Per trattare in maniera più diretta e più facile le condizioni al contorno essenziali si utilizza il metodo dei moltiplicatori di Lagrange [35]. Si considera il sistema in forma matriciale completo con l'applicazione classica delle condizioni essenziali:

$$\mathbf{K}\mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (\text{B.3})$$

dove \mathbf{c} è il vettore incognito di dimensioni n_{eq} .

Però, se non si trattano le condizioni di Dirichlet come spiegato anteriormente, ovvero se si discretizza tutto il problema senza distinguere i nodi appartenenti al contorno:

$$c^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{nodi}} c_i N_i(\mathbf{x}) \quad (\text{B.4})$$

allora il sistema risolvete che si ottiene è il seguente:

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (\text{B.5})$$

dove l'incognita $\bar{\mathbf{c}}$ ha dimensioni $n_{np} = n_{eq} + n_D$ dando luogo ad un sistema più grande e in generale singolare. Se si utilizza la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, i valori prescritti della porzione di contorno di Dirichlet sono introdotti per mezzo di un vincolo nel sistema originale. Per ciascun nodo appartenente al contorno essenziale si aggiunge un vincolo λ , che sono i moltiplicatori di Lagrange

$$\mathbf{r}(\mathbf{c}, \lambda) = \begin{cases} \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{c}} + \mathbf{A}^T \lambda - \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{K}\mathbf{c} - \bar{\mathbf{b}} \end{cases} = 0 \quad (\text{B.6})$$

dove λ è un vettore di dimensioni n_D che contiene i moltiplicatori di Lagrange, la matrice \mathbf{A} ha le dimensioni $n_{eq} \times n_D$ ed il vettore $\bar{\mathbf{b}}$ contiene i valori prescritti

della variabile c sul contorno di Dirichlet. Come descritto in [8] la nuova matrice del sistema è:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Nel presente lavoro sono state effettuate delle modifiche al codice di calcolo per eliminare dal sistema risolvete i valori noti della velocità. Infatti, come visto nel capitolo 3, il sottoprogramma più oneroso dal punto di vista computazionale è quello relativo alla risoluzione del sistema non lineare di equazioni. Le modifiche apportate non determinano un significativo risparmio di tempo (Tabella B.1):

routine	tempo s	
	versione precedente	versione attuale
<i>mesh_gen</i>	116	116
<i>bc</i>	41	42
<i>matrix</i>	19	17
<i>FS_dt_solver</i>	207	197
<i>altre</i>	30	31

Tabella B.1: Tempi computazionali di una simulazione numerica con 17022 nodi, con $t_{end} = 0.003s$ e $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$, con il metodo dei passi frazionari

Infatti nelle presenti modifiche, vengono sì eliminati dal sistema risolvete i valori prescritti della velocità, però solo dei nodi che non appartengono a nessun elemento tetraedrico, ovvero nodi isolati come ad es. nodi appartenenti al contorno vincolato non a contatto con il fluido, o nodi che si sono *staccati* dal dominio fluido. Le presenti modifiche possono costituire uno studio preliminare per successivi sviluppi. Infatti, un punto fondamentale per l'efficienza del metodo descritto in questo lavoro sarà lo studio di modelli di *ordine ridotto*. Le modifiche apportate possono essere riassunte come segue:

- **fluid_solution_dt**

.....

↓

remove_nodesD

⇓

matrix

⇓

solver

⇓

add_nodesD

⇓

.....

dove nei sottoprogrammi *remove_nodesD* e *add_nodesD* vengono eseguite le seguenti operazioni

remove_nodesD

- **1 ciclo sui nodi** : viene assegnata una nuova numerazione ai nodi non appartenenti al contorno essenziale
- **1 ciclo sugli elementi** : vengono aggiunti anche i nodi appartenenti al contorno che sono i vertici dei tetraedri

⇓

I nodi assegnati sino ad ora costituiscono i nodi del sistema con dimensioni

⇓

- **1 ciclo sui nodi** : assegno la nuova numerazione a tutti i nodi rimanenti

add_nodesD

- **1 ciclo sui nodi** : riassegno la numerazione completa a tutti i nodi

Bibliografia

- [1] S. R. Idelsohn, E. Oñate, F. Del Pin, and Nestor Calvo. Fluid–structure interaction using the particle finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18):2100–2123, March 2006.
- [2] M. Cremonesi, A. Frangi, and U. Perego. A Lagrangian finite element approach for the analysis of fluid – structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in engineering*, 84(April):610–630, 2010.
- [3] Omar Bettinotti. Un metodo ad elementi finiti per l’interazione fluido struttura in problemi di ingegneria civile. *Dipartimento di Ingegneria Strutturale*, (Politecnico di Milano), 2010.
- [4] S. Bucca and A. Franci. Formulazione tridimensionale ad elementi finiti lagrangiani per problemi di interazione fluido struttura. *Dipartimento di Ingegneria Strutturale*, (Politecnico di Milano), 2011.
- [5] Hang Si. A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional delaunay triangulator. *Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (WIAS)*, 2006.
- [6] I. Manzella. Dry rock avalanche propagation: Unconstrained flow experiments with granular materials and blocks at small scale. *École Polytechnique Fédérale de Lausanne*, 4032, 2008.
- [7] L. Vigevano. Lezioni di Fluidodinamica I. *Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale*, 2003.

- [8] J. Donea and A. Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, April 2003.
- [9] R. Codina. Pressure Stability in Fractional Step Finite Element Methods for Incompressible Flows. *Journal of Computational Physics*, 170(1):112–140, June 2001.
- [10] J.B. Perot. An analysis of the fractional step method. *Journal of Computational Physics*, 108:51–58, 1993.
- [11] A. Quarteroni, F. Saleri, and A. Veneziani. Factorization methods for the numerical approximation of Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(1–3):505–526, July 2000.
- [12] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Method*. Springer-Verlag, 1991.
- [13] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray, and R. Shih. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Computer Methods in Applied . . .*, 95:221–242, 1992.
- [14] M. Balestra, T. J. R. Hughes, and L. P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the ba-buška-brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1):85–99, 1986.
- [15] O. C. Zienkiewicz and R. Codina. A general algorithm for compressible and incompressible flow–Part I. The split, characteristic-based scheme. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 20(869), 1995.
- [16] O. C. Zienkiewicz, R. Codina, and M. Vázquez. A general algorithm for compressible and incompressible flow–Part III. The semi-implicit form. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 27(13), 1998.

- [17] H. Edelsbrunner and E. P. Mücke. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 13(1):43–72, 1994.
- [18] O. Schenk and K. Gärtner. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO. *Future Generation Computer Systems*, 20(3):475–487, April 2004.
- [19] [Www.gid.cimne.upc.es](http://www.gid.cimne.upc.es). GID- The personal Pre and Post Processor.
- [20] [Www.paraview.org](http://www.paraview.org). Paraview.
- [21] B. Delaunay. Sur la sphere vide. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka*, 1934.
- [22] H. Edelsbrunner and N. R. Shah. Incremental topological flipping works for regular triangulations. *Algorithmica*, 15:223–241, 1996.
- [23] P. B. Ryzhakov, E. Oñate, R. Rossi, and S. R. Idelsohn. Improving mass conservation in simulation of incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(March):1435–1451, 2012.
- [24] P. B. Ryzhakov, R. Rossi, S. R. Idelsohn, and E. Oñate. A monolithic Lagrangian approach for fluid–structure interaction problems. *Computational Mechanics*, 46(6):883–899, August 2010.
- [25] P. Ryzhakov, E. Oñate, R. Rossi, and S. Idelson. Lagrangian FE Methods for Coupled Problems in Fluid Mechanics. *CIMNE Edition: Barcelona*, 2010.
- [26] I. Alcantara-Ayala. Hazard assessment of rainfall-induced landsliding in Mexico. *Geomorphology*, 61:19–40, 2004.
- [27] G. D’Amato Avanzi, R. Giannecchini, and A. Puccinelli. The influence of the geological and geomorphological settings on shallows landslides. An example in a temperate climate environment: the June 19, 1996 event in the northwestern Tuscany (Italy). *Engineering Geology*, 73:215:228, 2004.

- [28] L. Cascini. The flowslides of May 1998 in the Campania region, Italy: the scientific emergency management. *Italian Geotechnical Journal*, 2:11–44, 2004.
- [29] L. Cascini, S. Cuomo, and G. Sorbino. Flow-like mass movements in pyroclastic soils: remarks on the modelling of triggering mechanisms. *Italian Geotechnical Journal*, 4:11–31, 2005.
- [30] M. Mancini. Sistemazioni di Bacini Idrografici. *DIAR-Politecnico di Milano*.
- [31] O. Hungr. A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows, and avalanches. *Canadian geotechnical journal*, pages 610–623, 1995.
- [32] P. G. Nicoletti and M. Sorriso-Valvo. Geomorphic controls of the shape and mobility of rock avalanches. *Geological Society of America Bulletin*, 103(10):1365–1373, 1991.
- [33] J. Corominas. The angle of reach as a mobility index for small and large landslides. *Canadian Geotechnical Journal*, 33(2):260–271, 1996.
- [34] R. M. Iverson, M. Logan, and R. P. Denlinger. Granular avalanches across irregular three-dimensional terrain: 2. Experimental tests. *J. Geophys Res.*, 109(F1), 2004.
- [35] I. Babuška. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20:179–192, 1973.