

POLITECNICO DI MILANO



Facoltà di Ingegneria dei Sistemi
Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

**MERCATI FINANZIARI IN EQUILIBRI
SUNSPOT
CON PRESENZA DI NOISE TRADERS**

Relatore: Prof. Emilio BARUCCI

Tesi di Laurea Magistrale di:
Maria Vincenza CAPASSO – Matr. 771081
Michele CATELLA – Matr. 754826

Anno Accademico 2011-2012

INDICE

INDICE	II
INDICE FIGURE	IV
ABSTRACT	1
1. INTRODUZIONE	2
2. SELF-FULFILLING RISK	6
2.2 ANALISI DEL MODELLO DI BACCHETTA ET AL.(2011).....	9
2.2.1 PURO SUNSPOT	10
2.2.2 EQUILIBRI SUNSPOT-LIKE.....	13
2.2.3 RISCHIO PANICO	15
3. MERCATI FINANZIARI IN PRESENZA DI NOISE TRADERS	18
3.1 BEHAVIORAL FINANCE	18
3.2 ANALISI DEL MODELLO DI DE LONG ET AL. (1990).....	22
3.3 CONFRONTO CON ALTRI LAVORI	27
4. EQUILIBRI SUNSPOT CON NOISE TRADERS	30
4.1 SCELTA DI PORTAFOGLIO MEDIA-VARIANZA	30
4.2 EQUILIBRI SUNSPOT	33
4.2.1 PROCESSO AUTOREGRSSIVO	34
4.2.2 PROCESSO DI MARKOV A DUE STATI	39
4.3 EQUILIBRI SUNSPOT LIKE E RISCHIO PANICO.....	44
4.3.1 PROCESSO AUTOREGRESSIVO.....	44
4.3.2 PROCESSO DI MARKOV A DUE STATI	49
4.3.3 RISCHIO PANICO	55
5. CONCLUSIONI	59

6. APPENDICI.....	61
6.1 PROPOSIZIONE 1	61
6.2 PROPOSIZIONE 2	62
6.3 PROPOSIZIONE 3	64
6.4 PROPOSIZIONE 4	66
6.5 PROPOSIZIONE 5	68
6.6 CODICI MATLAB	72
6.6.1 FIGURA 2.....	72
6.6.2 FIGURA 3.....	74
6.6.3 FIGURE 4 e 5.....	76
6.6.4 FIGURA 6.....	77
6.6.5 FIGURA 7.....	79
6.6.6 FIGURA 8.....	81
6.6.7 FIGURE 9 e 10.....	83
6.6.8 FIGURA 11.....	85
6.6.9 FIGURA 12.....	86
BIBLIOGRAFIA	90

INDICE FIGURE

Figura 1	Fonte:Datastream, dati giornalieri. Prezzi:indice DJ, 1/1/07=100; Tasso d'interesse: buono del tesoro US a 3mesi; Rischio: volatilità CBOE SPX,VIX; volatilità del rischio: dev.std. a 30gg del VIX.....	7
Figura 2	Grafici dei risultati della proposizione 1 al variare di η , nel caso $\rho_1 > \rho$ && $\sigma_1 < \sigma$. Nel terzo grafico $Q=Q(t)$	36
Figura 3	Grafici dei risultati della proposizione 1 al variare di η , nel caso $\rho_1 < \rho$ && $\sigma_1 > \sigma$. Nel terzo grafico $Q=Q(t)$	37
Figura 4	Valori dell'equilibrio sunspot e dell'equilibrio fondamentale della prop. 2 al variare di η , nel caso $pN > pNn$	40
Figura 5	Valori dell'equilibrio sunspot e dell'equilibrio fondamentale della prop. 2 al variare di η , nel caso $pN < pNn$	41
Figura 6	Variare dell'asset price e dell'asset price risk all'equilibrio sunspot al variare di pB . Il rischio è definito come deviazione standard del prezzo per il prossimo periodo diviso il prezzo attuale. $pN = 0.99$.I valori sono moltiplicati per un fattore 100 per renderli più leggibili. I primi due grafici sono del nostro modello, i secondi sono di Bacchetta (2011).....	43
Figura 7	Valori dell'equilibrio sunspot-like e dell'equilibrio fondamentale della prop. 3 al variare di η , nel caso $\rho_1 > \rho$ && $\sigma_1 < \sigma$	46
Figura 8	Valori dell'equilibrio sunspot-like e dell'equilibrio fondamentale della prop. 3 al variare di η , nel caso $\rho_1 < \rho$ && $\sigma_1 > \sigma$	47
Figura 9	Valori dell'equilibrio sunspot-like e dell'equilibrio fondamentale della prop. 4 al variare di η . I valori sono moltiplicati per un fattore 100 per renderli più leggibili, nel caso $pN > pNn$	51

Figura 10 Valori dell'equilibrio sunspot-like e dell'equilibrio fondamentale della prop. 4 al variare di η . I valori sono moltiplicati per un fattore 100 per renderli più leggibili, nel caso $pN < pNn$ 52

Figura 11 Variare dell'asset price e dell'asset price risk all'equilibrio sunspot al variare di pB . Il rischio è definito come deviazione standard del prezzo per il prossimo periodo diviso il prezzo attuale. $pN = 0.99$. I valori sono moltiplicati per un fattore 100 per renderli più leggibili54

Figura 12 Grafici dei risultati della proposizione 5 del nostro modello paragonati ai risultati del modello di Bacchetta et.al(2011). Sequenza degli stati: (N,1) (B,1) (B,2) (N,2) (N,1). Valori in termini assoluti per entrambi i grafici. Nel nostro modello in questo esempio abbiamo preso $\eta = 0.4$, e in entrambi $pNn < pN$ && $pn < p$ 57

ABSTRACT

In questo studio sviluppiamo un semplice modello media-varianza con la presenza di una variabile che influenza anche il valore del dividendo e gioca il ruolo di variabile sunspot e sunspot-like. In più aggiungiamo un'ulteriore processo che simula il rischio panico, così come è stato proposto da Bachetta et al. (2011). In questo scenario abbiamo inserito i noise traders oltre agli investitori razionali, e confrontato i risultati al variare della percentuale della loro presenza. Possiamo concludere che, per il nostro particolare modello, la presenza dei noise traders influenza i prezzi di equilibrio portandoli a variare secondo le loro credenze.

In this paper we develop a simple mean-variance model with the presence of a variable that influences the value of the dividend and also plays the role of sunspot and sunspot-like variable. We add a further process that simulates the risk panics, as it has been proposed by Bachetta et al. (2011). In this scenario, we have included noise traders in addition to rational investors, and compared the results varying the percentage of their presence. We can conclude that, for our particular model, the presence of noise traders influences equilibrium prices, making them varying according to their beliefs.

1. INTRODUZIONE

Ad alcuni anni dall'inizio della crisi che ha sconvolto l'andamento dell'economia globale il mondo è cambiato. Studiosi, operatori economici, semplici cittadini sono stati colti di sorpresa dalla stessa incapacità di prevedere la forza del terremoto e di difendersi in qualche modo. L'economia planetaria cresceva di quasi il 5% su base annua, i livelli di occupazione erano elevati e stabili, la liquidità era abbondante e a buon mercato, gli investimenti finanziari davano appetibili rendimenti. Ora il mondo si interroga per quanto tempo ancora la produzione mondiale è destinata a ridursi e in quali termini. Il mercato è in profonda crisi, la disoccupazione cresce di giorno in giorno, il denaro si è rarefatto, chi aveva contato su investimenti finanziari per assicurarsi risorse future ha rivisto le proprie aspettative. Nel mezzo di una crisi tanto improvvisa e grave ancora una volta riecheggia la tanta temuta incertezza. L'incertezza è sia effetto che causa della più severa crisi finanziaria che il mondo abbia attraversato dagli anni Trenta ad oggi. La crisi iniziata nella primavera-estate 2007 è stata per molti mesi sottovalutata dai responsabili della politica economica, dai banchieri e dagli economisti. Molti hanno accettato i loro errori di valutazione. Una delle lezioni che però traiamo dalle crisi è senz'altro che le strutture teoriche su cui poggia la disciplina scientifica rimangono tutt'altro che salde!

La crisi economica degli ultimi anni ha provocato una crisi di fiducia nella macroeconomia e negli economisti e ha aperto delle aspre divisioni. Da un lato si è tentato di scrivere nuovi modelli per giustificare l'origine e

l'andamento di tale crisi e per suggerire degli eventuali provvedimenti. Si possono riportare ad esempio alcuni modelli che come possibile causa della crisi considerano cambiamenti nella percezione del rischio cercando quindi di trovare il modo di schematizzarlo. A rendere realistici tali modelli ci sono prove empiriche che hanno dimostrato che un rischio tempo-variante è una delle caratteristiche rilevanti di tale crisi. Oppure si possono citare modelli che partendo da lavori pre-esistenti, fondati su ipotesi un po' troppo semplificate al fine di convergere a una soluzione stabile, introducono dei vincoli di budget e o finanziari al fine di renderli più realistici e adattabili alle esigenze reali.

D'altra parte inoltre, hanno preso vigore alcune branche alternative alla teoria finanziaria classica come la finanza comportamentale che, allentando alcune delle ipotesi della teoria dei mercati efficienti, sembra in grado di fornire risposte migliori al reale andamento dei mercati finanziari.

L'approccio della finanza comportamentale, consiste nel legare fattori economico finanziari con studi di psicologia e sociologia. I comportamentalisti ritengono che le fluttuazioni nei prezzi azionari possano essere legate ad un problema di aspettative degli investitori circa il valore futuro delle azioni, per esempio ad un eccesso di ottimismo conseguente all'ascolto di una serie di buone notizie sul futuro. Se un investitore ritiene che un'azione in futuro possa valere molto, sarà disposto oggi ad acquistare quell'azione ad un prezzo piuttosto alto, nella convinzione di poterla rivendere successivamente ad un prezzo superiore. Analogo discorso vale per l'acquirente futuro.

Pertanto le azioni possono aumentare di prezzo, solo perché l'investitore si aspetta che ciò accada. Cosa succede dopo un certo periodo? Questo lievitare dei prezzi, non essendo supportato da alcun dato effettivo, ma

essendo determinato solo dall'entusiasmo degli investitori, è destinato a spegnersi, e quindi si avrà il crollo e cioè la repentina discesa dei prezzi.

Questo eccesso di ottimismo degli individui è legato all'atteggiamento assunto dagli stessi nel fare delle previsioni: ossia non considerare le leggi della probabilità, a differenza di quanto sostenuto dalla tradizionale teoria dell'utilità attesa di Von Neumann - Morgenstern.

Tale teoria parte dal presupposto che l'individuo:

- è razionale;
- ha delle preferenze well-behaved;
- massimizza l'utilità attesa;

Ma secondo i sostenitori della Behavioral Finance, tali principi della teoria classica, sono poco realistici. Anomalie riscontrate nella realtà dei mercati, sono proprio il risultato di comportamenti irrazionali degli individui. Pertanto i comportamentalisti sostengono che gli individui non sono razionali, e:

- forniscono nuove assunzioni circa le preferenze (presentando una nuova teoria dell'utilità attesa)
- sottolineano che gli individui non cercano di ottenere il massimo valore atteso, ma il meglio per sé
- evidenziano come gli individui seguano principi euristici

Il nostro obiettivo è quello di seguire le strade introdotte: descrivere alcuni modelli sulla crisi finanziaria, analizzarne uno in dettaglio; spiegare le teorie della finanza comportamentale, riassumere alcuni modelli che considerano agenti irrazionali e analizzarne uno in dettaglio. Infine proveremo a sviluppare un modello che consideri le ipotesi di entrambi quelli analizzati.

Nel capitolo 2, introdurremo dei modelli di crisi e focalizzeremo la nostra attenzione sul modello "Self-fulfilling risk panic" di Bacchetta et al (2011).

Nel capitolo 3, spiegheremo perché ha senso considerare l'approccio della finanza comportamentale, e descriveremo in dettaglio il modello "Noise traders risk in financial market" di De Long et al (1990) confrontandolo con i risultati dei principali lavori sul tema. Nel capitolo 4, scriveremo un modello che introduca all'interno di "self-fulfilling risk panic" l'ipotesi che nel mercato esistano anche agenti irrazionali (noise traders) e analizzeremo i principali risultati.

2. SELF-FULFILLING RISK

2.1 *INTRODUZIONE*

Dal 2007 stiamo vivendo la più grave crisi finanziaria dal 1929, che in questi 6 anni ha attraversato diverse fasi. Dallo scoppio della bolla immobiliare che ha innescato l'escalation depressiva, il primo evento fondamentale, a settembre 2008, è stato il fallimento di Lehman Brothers che è oramai considerato l'inizio del panico finanziario a livello mondiale. Dalla fine del 2010, anche se sembrava esserci una lieve ripresa economica e finanziaria, è scaturita la seconda fase della crisi, la cosiddetta crisi dei debiti sovrani europei ben evidenziata dalla situazione di Portogallo, Irlanda e Grecia.

Gli economisti si sono trovati completamente impreparati nel prevedere e affrontare queste situazioni, e ciò è dovuto anche ad una inadeguatezza dei modelli classici quantitativi. Durante questi anni dunque l'obbiettivo degli studiosi è stato quello di sviluppare nuovi modelli che cerchino di tenere conto delle situazioni verificate, prevederne possibili sviluppi e loro implicazioni politiche. Possiamo citare ad esempio il modello di Basu (2009) che cerca, con una semplice teoria alla base, di spiegare come la crisi sia diventata planetaria e come le politiche intraprese siano state fallaci nel rimediare a queste situazioni.

Per regolare l'attività finanziaria e ottenere risultati coerenti con gli andamenti attuali alcuni economisti inoltre hanno ampliato i modelli già esistenti introducendo dei vincoli finanziari o di budget.

Altri modelli invece nascono come critica ai modelli finanziari classici come l'articolo di Colander et al (2009) che vede la crisi finanziaria come il fallimento degli economisti e dei loro modelli precedenti perché fondati su restrizioni forti e altamente irrealistiche al solo scopo di garantire stabilità.

Dalla prima parte della crisi è evidente che il crollo dei mercati è dovuto a un evento esogeno, il fallimento di Lehman. Nelle recenti ricerche viene offerta una spiegazione di ciò che si focalizza su cambiamenti della percezione del

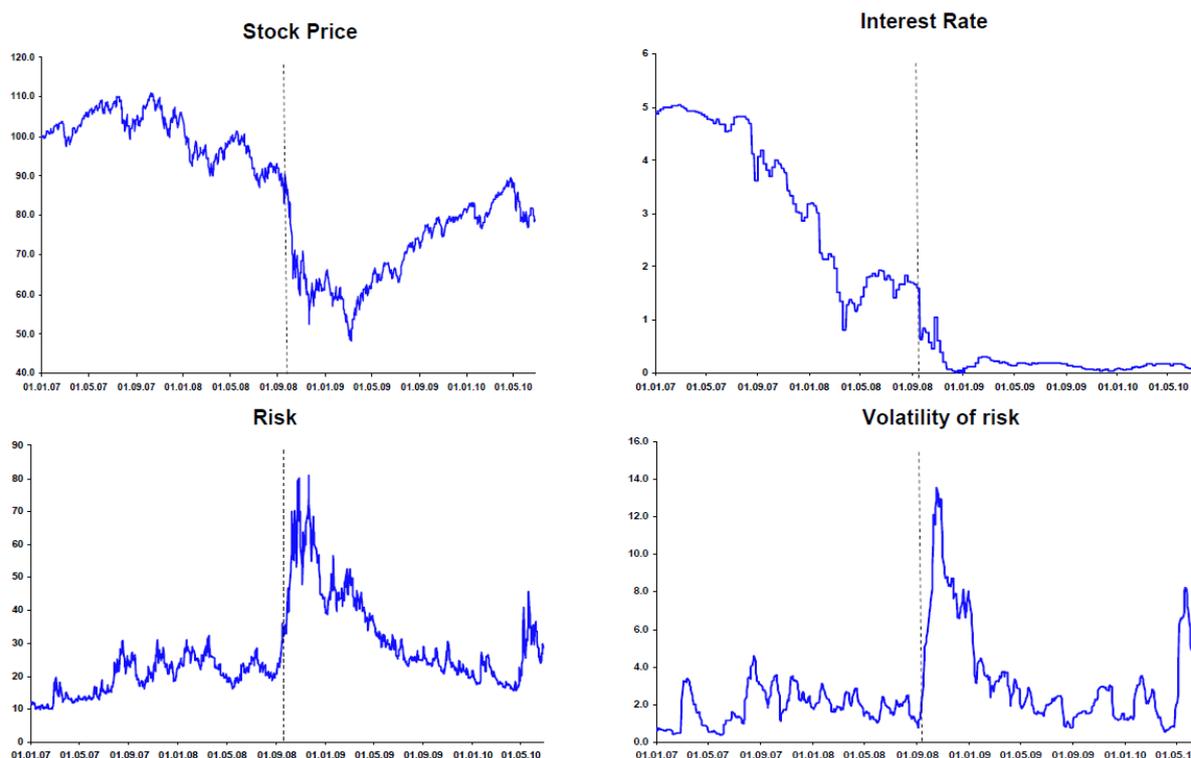


Figura 1 Fonte:Datastream, dati giornalieri. Prezzi:indice DJ, 1/1/07=100; Tasso d'interesse: buono del tesoro US a 3mesi; Rischio: volatilità CBOE SPX,VIX; volatilità del rischio: dev.std. a 30gg del VIX

rischio. Il rischio gioca un ruolo centrale, come illustrato in *Figura 1* che rappresenta la dinamica di alcune variabili finanziarie. La linea verticale rappresenta il fallimento di Lehman del 15 settembre 2008.

Dopo un modesto declino nei prezzi degli assets e un piccolo aumento dei rischi (prima del crollo), i prezzi dei titoli crollano (indice DJ) e il rischio (indice VIX) raggiunge alti livelli nel settembre 2008. Anche la volatilità del rischio (volatilità a 30gg del VIX) aumenta, mentre non ci sono variazioni significative nella prima parte. Certamente si nota che il declino nei prezzi è associato all'aumento del rischio. In aggiunta il rischio diventa più volatile nel periodo di crisi. Un rischio tempo-variante infatti è una delle caratteristiche principali di questa crisi. Per spiegare questo cambiamento repentino del rischio Bacchetta et al. (2011) propongono un modello che introduce il rischio panico che tiene conto di cambiamenti self-fulfilling nella percezione del rischio. Questi cambiamenti self-fulfilling possono accadere quando il prezzo corrente all'equilibrio dipende dal rischio legato al prezzo futuro dell'asset, questo significa che il rischio oggi è associato all'incertezza relativa al rischio di domani. Essi dimostrano che oltre al classico equilibrio fondamentale ci sono altri equilibri nei quali il rischio e la sua volatilità variano in maniera interamente self-fulfilling. C'è sempre una variabile che determina questi cambiamenti nelle credenze circa il rischio. Questa variabile può essere o una variabile estrinseca o una macro fondamentale del modello. Si riferiscono a tali equilibri come equilibri sunspot¹ e sunspot-like. Il rischio panico è legato alla presenza degli equilibri sunspot-like e viene modellato come un cambio tra un stato di basso e uno di alto rischio. Durante il panico una variabile macro diventa improvvisamente un punto centrale nei cambiamenti self-

¹ con il termine sunspot ci si riferisce ad una qualsiasi attività di incertezza estrinseca, la quale non è trasmessa attraverso i fondamentali economici, ma coinvolge tutti i fenomeni che possano in qualche modo influenzare le scelte degli agenti economici. L'equilibrio sunspot può essere dunque definito come equilibrio "distorto", un equilibrio per il quale non è più verificato il primo teorema dell'economia del benessere, secondo cui ad ogni equilibrio corrisponde una situazione di ottimo paretiano e viceversa.

fulfilling nelle credenze sul rischio. Analizzeremo questo modello in dettaglio nella sezione seguente.

2.2 ANALISI DEL MODELLO DI BACCHETTA ET AL.(2011)

Si considera un modello dove gli agenti hanno delle semplici preferenze media-varianza ogni agente ha una ricchezza iniziale W e deve decidere come allocare tale ricchezza tra un equity rischiosa e un asset privo di rischio che paga un dividendo $R > 1$. L'equity consiste di un credito su un albero con payoff stocastico. Ci son k alberi, ciascuno produce un output stocastico esogeno A_t (dividendo). Indicando con Q_t il prezzo della nostra equity, il suo rendimento tra t e $t + 1$ è:

$$R_{t+1} = \frac{A_{t+1} + Q_{t+1}}{Q_t}$$

Il dividendo è dato da:

$$A_t = A + mS_t$$

dove S_t è una variabile di stato esogena che segue un processo stocastico. Il dividendo è costante e pari ad A quando $m = 0$. In questo caso S_t è una variabile estrinseca, o puro sunspot, con nessun ruolo fondamentale. Quando $m > 0$, S_t ha un impatto sui dividendi. Per semplicità assumiamo che la distribuzione di S_{t+1} dipenda al più da S_t e sia tempo invariante. Inoltre assumiamo che la distribuzione incondizionata di S_t è tale che A_t è sempre non negativo.

Gli investitori nati al tempo t massimizzano una utilità media-varianza sul rendimento del loro portafoglio:

$${}_tE[R_{t+1}^P] - 0.5\gamma {}_t\text{Var}[R_{t+1}^P]$$

Dove γ misura l'avversione al rischio e il rendimento del portafoglio è:

$$R_{t+1}^P = \alpha_t R_{k,t+1} + (1 - \alpha_t)R$$

α_t denota la quota di portafoglio investita nell'equity. Il problema di massimizzazione dà come risultato:

$$\alpha_t = \frac{{}_tE[R_{k,t+1}] - R}{\gamma {}_t\text{Var}[R_{k,t+1}]}$$

La condizione di equilibrio da imporre è:

$$\alpha_t W = Q_t K$$

Sostituendo α_t e ponendo $\lambda = \frac{K\gamma}{W}$ si ottiene:

$$\frac{{}_tE[A_{t+1} + Q_{t+1} - RQ_t]}{{}_t\text{Var}[A_{t+1} + Q_{t+1}]} = \lambda$$

2.2.1 *PURO SUNSPOT*

Si considera il caso in cui S_t è un puro sunspot che corrisponde al caso in cui $m = 0$. Si ottiene una soluzione immediata per il prezzo dell'asset detto equilibrio fondamentale:

$$Q_t = \frac{A}{R-1}$$

Essi dimostrano che esistono tuttavia altri tipi di equilibri influenzati dalla variabile S_t . Questi equilibri sono detti equilibri sunspot. La loro esistenza non è garantita e dipende dal processo S_t , che viene modellato o con un processo autoregressivo (AR1) o con un processo di Markov asimmetrico a due stati.

- **S_t segue un processo AR1**

$$S_{t+1} = \rho S_t + \varepsilon_{t+1}$$

con $0 < \rho < 1$, ε_{t+1} ha una distribuzione simmetrica limitata a media zero $\varepsilon_{t+1} \in [-\epsilon, \epsilon]$. Viene indicata con σ^2 la varianza di ε_{t+1} mentre con ω^2 la varianza di ε_{t+1}^2 . Si ha per simmetria che $E[\varepsilon_{t+1}^3] = 0$.

Sotto specifiche ipotesi che garantiscono la non negatività del prezzo dell'asset, dimostrano che esistono due equilibri, l'equilibrio fondamentale e un equilibrio sunspot:

$$Q_t = Q - VS_t^2$$

dove:

$$V = \frac{R - \rho^2}{\lambda 4 \rho^2 \sigma^2}$$

$$Q = \frac{-\lambda V^2 \omega^2 - V \sigma^2 + A}{R - 1} < \frac{A}{R - 1}$$

Nell'equilibrio sunspot il rischio, calcolato come la varianza di Q_{t+1} , è tempo variante: dipende dalla varianza di S_{t+1}^2 , che dipende dalla varianza di S_t^2

quando $\rho > 0$. Le credenze circa il rischio sono quindi self-fulfilling e dipendono dalla variabile sunspot.

L'asset price è più basso nell'equilibrio sunspot che nell'equilibrio fondamentale e il rischio è più alto e più volatile. L'equazione per V mostra che un avversione al rischio più alta (che implica un più alto λ) riduce la sensibilità dell'asset price e del rischio dal sunspot.

- **S_t segue un processo di Markov asimmetrico a due stati**

Si considera ora il caso del processo di Markov asimmetrico a due stati. Ci si riferisce ai due stati come "normal" e "bad", denotati rispettivamente N e B . Si denota la probabilità di essere nello stato $k = N, B$ nel periodo successivo, condizionata ad essere in quello stato oggi, con p_k .

Si ha come ipotesi che $p_B, p_N \in [0.5; 1]$ e che lo stato normal è più persistente, cioè $p_N > p_B$.

Sono definiti:

$$p_D = p_B(1 - p_B) - p_N(1 - p_N)$$

$$k = 1 + R + (-p_N - p_B)$$

che sono entrambi positivi sotto le ipotesi di partenza.

Si dimostra che esistono ancora una volta due equilibri: l'equilibrio fondamentale e un equilibrio sunspot con:

$$0 < Q_B < Q_N < \frac{A}{R - 1}$$

$$Q_D = Q_N - Q_B = \frac{k}{\lambda p_D}$$

e

$$Q_B = \frac{1}{R-1} (A - \lambda p_B (1 - p_B) Q_D^2 + (1 - p_D) Q_D)$$

Ancora una volta nell'equilibrio sunspot il rischio è più alto e il prezzo è più basso rispetto all'equilibrio fondamentale, inoltre sotto le ipotesi fatte il rischio è più alto nello stato Bad con conseguente risultato di un prezzo più basso. Poiché S_t è un puro sunspot, l'alzarsi del rischio quando si passa dallo stato N a quello B è interamente self-fulfilling. La spiegazione di questo rischio self-fulfilling nell'equilibrio sunspot è ancora una volta legata alla relazione circolare tra il processo stocastico dell'asset price e l'asset price risk. Se gli agenti credono che l'asset price risk è più alto nello stato B e più basso nello stato N, allora sarà così. Esso conduce a un prezzo più basso nello stato B che in N. Questo a sua volta implica un rischio più alto nello stato B: poiché $p_N > p_B$ significa che nello stato B c'è più incertezza circa lo stato del nuovo periodo e quindi circa il prezzo del nuovo periodo. Cambiamenti nelle credenze circa il rischio tra i due stati sono quindi self-fulfilling.

2.2.2 *EQUILIBRI SUNSPOT-LIKE*

Si consideri ora il caso in cui $m > 0$, così che la variabile di stato S_t è un fondamentale che influenza i dividendi. Si mostrerà ancora una volta che oltre l'equilibrio fondamentale esiste un altro equilibrio denominato sunspot-like.

L'analisi verrà fatta considerando ancora una volta un processo autoregressivo e un processo di Markov a due stati.

- **S_t segue un processo AR1**

Se S_t segue un processo AR1 descritto in precedenza e se si impongono alcuni valori soglia affinché il dividendo A_t non sia negativo allora esistono due equilibri. Il primo è l'equilibrio fondamentale:

$$Q_t = \frac{1}{R-1} \left(A - \lambda \frac{R^2 m^2 \sigma^2}{(R-\rho)^2} \right) + \frac{\rho m}{R-\rho} S_t$$

Il secondo è un equilibrio sunspot-like:

$$Q_t = Q + v S_t - V S_t^2$$

dove:

$$V = \frac{R - \rho^2}{4\lambda\rho^2\sigma^2}$$

$$v = -\frac{m}{1-\rho}$$

$$Q = \frac{1}{R-1} (A - V\sigma^2 - \lambda(V^2\omega^2 + (v+m)^2\sigma^2))$$

In questo caso Q_t è influenzato da S_t anche nell'equilibrio fondamentale. Nell'equilibrio sunspot-like, S_t gioca sia il ruolo di un fondamentale sia il ruolo di sunspot che produce convizioni tempo variante circa il rischio. Si dimostra inoltre che quando $m \rightarrow 0$ l'equilibrio sunspot-like converge all'equilibrio sunspot calcolato in precedenza.

- **S_t segue un processo di Markov asimmetrico a due stati**

Il processo di Markov considerato è analogo a quello descritto in precedenza, con la differenza che il dividendo è più alto nello stato normal che in quello

bad: $A_N > A_B$. Si definisce $A_D = A_N - A_B$ che converge a zero quando $m \rightarrow 0$. Si dimostra che esistono ancora una volta due equilibri. I valori della differenza dell'asset price $Q_D = Q_N - Q_B$ nei due equilibri sono:

$$Q_D = \left[\frac{k}{2\lambda p_D} - A_D \right] \pm \frac{1}{2\lambda p_D} (k^2 - 4R\lambda p_D A_D)^{0.5} > 0$$

In corrispondenza di questi valori di Q_D , l'asset-price nello stato B è:

$$Q_B = \frac{A_B}{R-1} + \frac{(1-p_B)p_N(p_N+p_B-1)A_D - (1-p_B)[p_B(R-p_N) + p_N(1-p_N)]Q_D}{(R-1)p_D}$$

Poiché Q_D è positivo, l'asset price è più alto nello stato normal che nello stato bad. Inoltre sia nell'equilibrio fondamentale che nell'equilibrio sunspot-like il rischio è maggiore nello stato bad. Infine come già accennato in precedenza il rischio maggiore nello stato bad è dovuto a convinzioni self-fulfilling circa il rischio.

2.2.3 *RISCHIO PANICO*

Si prova infine a combinare aspetti relativi sia agli equilibri sunspot che agli equilibri sunspot-like. In aggiunta al processo di Markov per il dividendo si considera un nuovo processo di Markov a due stati, indicizzati con 1 e 2. Si può pensare allo stato 2 come ad uno stato di panico, così che il passaggio a quello stato implica un picco più largo nel rischio e un calo nell'asset price. Si assume che la variabile di stato sunspot sia incorrelata con il fondamentale. Sia in 1 che in 2, la probabilità di restare nello stesso stato è $p > 0.5$. Il modello ha ora quattro possibili stati, che dipendono dai valori del fondamentale e del sunspot: $(N, 1)$, $(N, 2)$, $(B, 1)$ e $(B, 2)$. Si definisce il

prezzo dell'asset in questi stati rispettivamente come $Q_N(1)$, $Q_N(2)$, $Q_B(1)$ e $Q_B(2)$.

Infine si determina il prezzo dell'asset in ogni stato risolvendo la condizione d'equilibrio per ciascun stato. Sia $Q_D(k) = Q_N(k) - Q_B(k)$ per $k = 1, 2$. Si dimostra che esistono quattro equilibri. I primi due sono quelli del caso precedente e non dipendono dal fatto di essere nello stato 1 o 2. Nel terzo equilibrio si ha:

$$Q_D(2) > Q_D(1) > 0$$

$$Q_B(2) - Q_B(1) < Q_N(2) - Q_N(1) < 0$$

Il quarto equilibrio è analogo al 3 dove i ruoli dello stato 1 e 2 sono invertiti. Tre caratteristiche evidenziano il ruolo del fondamentale durante e dopo un rischio di panico. Per prima cosa il panico non è causato da un cambiamento nel fondamentale poiché esso consiste in un passaggio dallo stato 1 allo stato 2, e non in un passaggio tra N e B. Secondo, il calo nell'asset price durante un panico è maggiore quando siamo nello stato B rispetto a quando siamo nello stato N. Infine dopo un panico l'asset price diventa più volatile. Anche se il panico non è causato da un cambiamento nei fondamentali, si può dimostrare che il livello del fondamentale gioca un ruolo chiave durante il rischio di panico. L'analisi appena fatta che sviluppa una teoria per cambiamenti self-fulfilling nel rischio è motivata da parecchi avvenimenti che hanno mostrato ampi picchi nel rischio ai quali non corrispondono degli ampi cambiamenti nei fondamentali. Questi cambiamenti possono essere generati o dall'ampiezza dei fondamentali come appena dimostrato oppure, se si amplia il modello introducendo la leva finanziaria e gli households, è la ricchezza delle istituzioni di leva che diventa il punto centrale della paura nei mercati durante il panico. Il modello infine può generare due stadi della crisi dove un deterioramento nel fondamentale dapprima genera un modesto impatto nel

rischio, sull'asset price e sulla liquidità del mercato, seguito poi da uno stadio di panico con movimenti molto più ampi poiché il fondamentale diventa il punto chiave per un picco self-fulfilling nel rischio. Questo è uguale agli sviluppi che si sono avuti proprio durante la crisi finanziaria del 2007-2008.

3. MERCATI FINANZIARI IN PRESENZA DI NOISE TRADERS

3.1 *BEHAVIORAL FINANCE*

La modellistica classica dell'asset pricing si basa sul concetto fondamentale che i traders rispettino l'ipotesi di razionalità delle loro scelte. Ciò implica in particolare che se un operatore recepisce nuove informazioni dal mercato debba aggiornare i suoi modelli bayesianamente; il suo obiettivo inoltre deve essere la massimizzazione dell'utilità attesa, basata sui valori medi delle aspettative future dell'asset, secondo il concetto di efficienza del mercato, il quale garantisce anche l'impossibilità di arbitraggi (possibilità di effettuare un investimento a costo nullo tale da comportare un profitto positivo).

Evidenze empiriche rivelano però che l'evoluzione dei mercati non rispecchia completamente le ipotesi esposte sopra; si è pertanto incominciato a mettere in discussione il fatto che il mercato sia composto solo da operatori razionali. Questa contro-ipotesi di irrazionalità degli investitori tuttavia, non basta, almeno apparentemente, a mettere in crisi la teoria dei mercati efficienti.

Nella teoria dei mercati efficienti infatti, si ammette la possibilità che gli individui non siano totalmente razionali. In questo caso si dice: ammesso che alcuni investitori siano irrazionali, i loro scambi, essendo casuali, hanno l'effetto di cancellarsi a vicenda, senza sortire effetti sui prezzi.

Ma gli studi di psicologia applicata ci mostrano che ciò non è vero. Gli individui infatti non si comportano “casualmente” ma tendono ad assumere un comportamento gregario. Per cui se un certo numero di persone acquista un titolo, spesso verrà seguito a ruota da altre persone. Si viene a creare pertanto “un effetto moda” che tende a introdurre spostamenti rilevanti nel valore dei fondamentali.

Questo atteggiamento comune permette di affrontare meglio un eventuale errore nella scelta di investimento. Il fatto di sapere che tante altre persone si sono comportate allo stesso modo (tutti hanno acquistato un determinato titolo), fa credere, se le cose dovessero andare male, che si sia trattato di un fatto sorprendente, non prevedibile. Si attribuisce così più facilmente l'errore al caso piuttosto che alle proprie credenze. Neanche questa osservazione degli studiosi di psicologia basta tuttavia a mettere ancora in discussione la teoria dei mercati efficienti che asserisce: qualora le strategie di investimento degli investitori irrazionali dovessero essere correlate, tali investitori incontrerebbero sul mercato gli arbitraggisti che elimineranno eventuali variazioni nei prezzi provocate da tali strategie.

Ma anche questa asserzione viene confutata dai comportamentalisti, i quali sostengono che ovviamente l'arbitraggio non è senza rischi e senza costi, e pertanto è limitato e quindi non sempre efficace. Vediamo infatti cosa può accadere. Ammettiamo che l'arbitraggista, seguendo la sua strategia, proceda all'acquisto di un titolo sottovalutato (titolo che tutti gli investitori irrazionali stanno vendendo, provocandone una notevole diminuzione del prezzo, a causa di idee pessimistiche sul futuro dell'azienda cui il titolo è legato) e alla contemporanea vendita di un titolo sostitutivo ma sopravvalutato. Se le idee pessimistiche degli investitori irrazionali dovessero continuare, gli arbitraggisti otterrebbero un rendimento negativo. Gli investitori, che hanno affidato la gestione dei loro fondi agli arbitraggisti, valutando le capacità dei

gestori sulla base del rendimento ottenuto, potrebbero considerarli incompetenti e pertanto potrebbero decidere di ritirare i loro fondi, costringendoli a liquidare anticipatamente le posizioni in essere. Questo timore induce gli arbitraggisti ad essere più cauti nell'uso di tale strategia. Quindi l'arbitraggio non riesce ad eliminare completamente il mispricing e il comportamento degli investitori influisce sull'equilibrio dei prezzi dei titoli.

La non prevedibilità delle idee di tali investitori crea un rischio sul prezzo del titolo che scoraggia gli investitori razionali dallo scommettere aggressivamente contro di loro. Come risultato, i prezzi possono divergere anche in modo significativo dai valori razionali anche in assenza di un rischio reale. Inoltre, sopportando un rischio spropositato che loro stessi hanno creato, non permettono agli investitori razionali di guadagnare un profitto più alto di quello razionale.

Se i noise traders sono pessimisti e portano un prezzo al ribasso, ovviamente gli arbitraggisti compreranno, ma se il pessimismo continua e i prezzi tardano a riprendersi, gli arbitraggisti sono costretti a liquidare le loro azioni prima della ripresa, soffrendo delle perdite. La paura di queste perdite può limitare l'azione di arbitraggio. Viceversa un arbitraggista che vende una azione mentre è in ripresa, calcolando che prima o poi il prezzo tornerà a scendere, potrebbe ricevere la sorpresa di un ulteriore rincaro del prezzo e quindi potrebbe subire una perdita nel dover acquistare quel titolo ad un prezzo più alto. E' proprio questo cambiamento di opinione dei noise traders che viene definito come noise traders risk.

I principali risultati vengono dall'osservazione che l'arbitraggista non elimina gli effetti di disturbo, perché il disturbo stesso crea il rischio. Il rischio risultante dal cambiamento di opinione aleatorio dei noise traders, che sono in media rialzisti, aumenta la possibilità che guadagnino un più alto profitto rispetto agli investitori sofisticati occupati nell'arbitraggio contro gli

stessi. Questo risultato è dovuto al fatto che il noise traders risk rende i beni meno attrattivi per gli arbitraggisti avversi al rischio e così abbassa il prezzo. Se i noise traders sovrastimano i profitti o sottostimano il rischio, allora investono di più sulle azioni rischiose rispetto agli investitori sofisticati e possono avere dei guadagni maggiori. In definitiva i noise traders possono guadagnare di più semplicemente perché si accollano il rischio da loro stessi creato. Poiché il noise traders risk limita l'effetto dell'arbitraggio, i prezzi sono eccessivamente volatili. Se le opinioni dei noise traders seguono un processo stazionario, c'è una componente di media-regressione nei profitti azionari, che nel lungo periodo permette agli investitori sofisticati di riportare il prezzo su posizioni stabili.

Per studiare il comportamento dei noise traders all'interno dei mercati finanziari è nata una nuova branca della ricerca, detta behavioral finance, che ha cominciato a studiare nuovi modelli che tengano conto della loro presenza. In particolare ci si è chiesti se tali operatori siano in grado di sopravvivere nel lungo periodo, e in secondo luogo se e come la loro presenza influenzi i prezzi.

Uno dei modelli più famosi è quello di De Long Et Al. (1990). Essi sono riusciti a dimostrare, seppur in un modello a orizzonte finito, che gli operatori irrazionali possano sopravvivere nel mercato in quanto addirittura capaci di ottenere in media guadagni più alti degli operatori razionali. Analizzeremo il modello nel dettaglio nel paragrafo seguente.

3.2 ANALISI DEL MODELLO DI DE LONG ET AL. (1990)

Il modello è a generazioni sovrapposte a due stati in cui la ricchezza iniziale degli operatori è completamente investita. Nel secondo periodo essi vendono tutto. L'unica decisione che gli agenti devono prendere è l'allocazione della ricchezza tra un titolo privo di rischio (s) con dividendo fisso r e un equity rischioso (u). Il prezzo del titolo privo di rischio è sempre fissato a 1. L'equity paga un dividendo pari a r ed è presente in quantità finita normalizzata a 1. Sia p_t il prezzo di u al tempo t .

Ci sono due tipi di agenti: gli investitori sofisticati (denotati con i) che hanno attese razionali, e noise traders (denotati con n). Si assume che i noise traders sono presenti in misura μ , gli investitori sofisticati in misura $1 - \mu$, e che gli agenti dello stesso tipo sono identici. Ogni agente sceglie il proprio portafoglio massimizzando l'utilità attesa date le proprie credenze circa la distribuzione del prezzo di u al tempo $t + 1$.

Si indica con

$$\rho_t \sim N(\rho^*, \sigma_p^2)$$

la media del prezzo di u nel periodo successivo malpercepita dal noise trader.

L'utilità di ogni agente è costante nell'avversione al rischio:

$$U = -e^{-(2\gamma)\omega}$$

dove γ è il coefficiente di avversione al rischio assoluto.

Massimizzare il valore atteso di questa utilità equivale a massimizzare:

$$\bar{\omega} - \gamma\sigma_\omega^2$$

dove \bar{w} è la ricchezza finale attesa e σ_{ω}^2 è la varianza di primo periodo della ricchezza. L'investitore sofisticato sceglie l'ammontare λ_t^i dell'asset rischioso u massimizzando:

$$E[u] = \bar{w} - \gamma\sigma_{\omega}^2 = c_0 + \lambda_t^i[r + {}_t p_{t+1} - p_t(1+r)] - \gamma(\lambda_t^i)^2({}_t\sigma_{p_{t+1}}^2)$$

Il noise trader invece massimizza:

$$\begin{aligned} E[u] &= \bar{w} - \gamma\sigma_{\omega}^2 \\ &= c_0 + \lambda_t^n[r + {}_t p_{t+1} - p_t(1+r)] - \gamma(\lambda_t^n)^2({}_t\sigma_{p_{t+1}}^2) \\ &\quad + \lambda_t^n(\rho_t) \end{aligned}$$

dove λ_t^n è l'ammontare dell'asset rischioso detenuto.

Risolvendo si ottiene:

$$\begin{aligned} \lambda_t^i &= \frac{r + {}_t p_{t+1} - p_t(1+r)}{2\gamma({}_t\sigma_{p_{t+1}}^2)} \\ \lambda_t^n &= \frac{r + {}_t p_{t+1} - p_t(1+r)}{2\gamma({}_t\sigma_{p_{t+1}}^2)} + \frac{\rho_t}{2\gamma({}_t\sigma_{p_{t+1}}^2)} \end{aligned}$$

Quando i noise traders sovrastimano il rendimento atteso, essi domandano di più dell'asset rischioso rispetto agli investitori sofisticati, se sottostimano avviene il contrario.

Per calcolare il prezzo d'equilibrio, si osserva che nell'ultimo periodo gli agenti vendono tutto ciò che detengono così che la domanda nel primo periodo deve sommare a uno nell'equilibrio.

Le equazioni precedenti implicano che:

$$p_t = \frac{1}{r+1} [r + {}_t p_{t+1} - 2\gamma({}_t\sigma_{p_{t+1}}^2) + \mu\rho_t]$$

L'equazione esprime il prezzo dell'asset rischioso come funzione della mal percezione dei noise traders (ρ_t), dei parametri r e γ del modello e dei momenti della distribuzione di p_{t+1} .

Si può riscrivere il prezzo:

$$p_t = 1 + \frac{\mu(\rho_t - \rho^*)}{r + 1} + \frac{\mu\rho^*}{r} - \frac{(2\gamma)\mu^2\sigma_\rho^2}{r(r + 1)^2}$$

Gli ultimi tre termini mostrano l'impatto dei noise traders sul prezzo di u . Poiché la distribuzione di ρ_t converge a un punto di massa 0, il prezzo p_t converge al suo valore fondamentale di 1. Il secondo termine dell'equazione cattura le fluttuazioni del prezzo di u dovute alle variazioni delle credenze erronee dei noise traders. Il terzo termine infine indica le deviazioni di p_t causate dal fatto che la mal percezione media dei noise traders non è zero.

È stato dimostrato che noise traders possono influenzare i prezzi anche se non ci sono incertezze sui fondamentali. Friedman (1953) argomenta che i noise traders hanno guadagni più bassi rispetto agli investitori sofisticati con cui interagiscono arrivando a scomparire nel lungo periodo. Questo modello invece dimostra che non si verifica questo. Cambiamenti collettivi di opinione dei noise traders aumentano il rischio degli asset. Se il portafoglio dei noise traders sono concentrati sugli assets soggetti al noise trader risk, allora questi possono ottenere guadagni in media più alti degli investitori sofisticati. Ciò si verifica facilmente studiando la differenza tra i rendimenti attesi.

La differenza tra i rendimenti totali dei noise traders e investitori sofisticati è il prodotto della differenza della loro quantità posseduta di asset rischioso u e il rendimento in eccesso pagato per unità dell'asset u .

Chiamiamo questa differenza ΔR_{n-i} :

$$\Delta R_{n-i} = (\lambda_t^n - \lambda_t^i)[r + p_{t+1} - p_t(1 + r)]$$

La differenza tra le quantità detenute è:

$$\lambda_t^n - \lambda_t^i = \frac{(1+r)^2 \rho_t}{(2\gamma)\mu^2 \sigma_p^2}$$

Si nota che quanto più μ diventa piccola tanto più la differenza sopra riportata aumenta. Al limite quando $\mu \rightarrow 0$ non esiste più equilibrio poiché i due gruppi scommettono aggressivamente l'uno contro l'altro.

Il valore atteso dei rendimenti in eccesso al tempo t è dato da:

$${}_t[r + p_{t+1} - p_t(1+r)] = \frac{(2\gamma)\mu^2 \sigma_p^2}{(r+1)^2} - \mu \rho_t$$

Quindi

$${}_t(\Delta R_{n-i}) = \rho_t - \frac{(1+r)^2 (\rho_t)^2}{2\gamma\mu(\sigma_p^2)}$$

Il guadagno in eccesso dei noise traders è positivo solo se essi sono ottimisti ($\rho_t > 0$) e il prezzo del titolo rischioso risulta inferiore al prezzo fondamentale.

Prendendo l'attesa globale incondizionata si ha:

$$E[\Delta R_{n-i}] = \rho^* - \frac{(1+r)^2 (\rho^*)^2 + (1+r)^2 \sigma_p^2}{2\gamma\mu(\sigma_p^2)}$$

Si nota quindi che affinché i noise traders abbiano rendimenti maggiori ρ^* deve essere positivo.

Il primo termine del numeratore incorpora l'impatto che i noise traders hanno sul prezzo dell'asset. Il secondo termine invece incorpora l' "effetto Friedman" (comprare alto-vendere basso). Il denominatore lega la variabilità

delle credenze con il prezzo, infatti più aumenta la volatilità delle credenze dei noise traders più il prezzo aumenta.

I noise traders non riescono ad ottenere rendimenti medi più alti sia se tendono al ribasso sia se sono troppo rialzisti. Solo nei casi intermedi infatti riescono ad ottenere rendimenti attesi più alti. Infatti come è chiaro dal valore atteso, più alta è l'avversione al rischio (γ), più è ampio l'intervallo di ρ^* in cui i noise traders ottengono in media rendimenti maggiori.

Da questa analisi inoltre si può concludere che la volatilità dei prezzi non è riconducibile totalmente alle notizie di mercato ma anche alla presenza e all'agire dei noise traders. Il modello ha come ipotesi fondamentale che gli investitori razionali agiscano univocamente con lo scopo di contrastare i noise traders. Una più realistica assunzione è quella per cui gli operatori razionali agiscano anche secondo loro passive strategie senza preoccuparsi degli altri. In questo se una larga frazione di investitori razionali alloca una quantità costante di ricchezza nei titoli, allora anche una piccola quota di noise traders può avere un grosso impatto. L'ipotesi di partenza quindi seppur può sembrare limitativa conferma nei risultati questa evidenza empirica. Ancora più realistico è considerare un modello completamente razionale (no noise traders) in cui gli agenti razionali hanno opinioni differenti ma si riesce a dimostrare che anche se quest'ipotesi non è presente nel modello i risultati continuano a valere qualora viene aggiunta. Si è scelto quindi un modello di irrazionalità per diverse ragioni. La prima, secondo gli autori, è che ha poco senso considerare il solo caso di agenti razionali con informazioni differenti perché uno può sempre considerare le opinioni di una persona come informazioni personali. La seconda è che è fondamentale tener conto in qualche modo che i prezzi tendono a riflettere le opinioni positive e negative degli operatori.

3.3 CONFRONTO CON ALTRI LAVORI

Proviamo ora ad analizzare il modello sopra descritto alla luce di altri modelli che considerino la presenza dei noise traders. Considereremo i modelli di Friedman (1953), Brock e Hommes (1998), Kogan et al. (2006), Barberis e Thaler (2003), Chang (2006), Blume e Easley(2006), Yan(2008).

Il fatto che i noise traders possano avere ritorni maggiori implica che le ipotesi del modello di Friedman siano incomplete. Poiché la loro ricchezza può crescere più rapidamente degli investitori razionali viene confutato il modello di Friedman. Friedman (1953) infatti spiega come gli operatori irrazionali non siano in grado di sopravvivere a lungo termine nel mercato e che i prezzi non vengano influenzati dalle loro scelte. Se essi provocano mispricing, cioè fanno variare il prezzo dal suo valore fondamentale (calcolato con ipotesi razionali), immediatamente gli operatori razionali ne intravedono l'opportunità di investimento e agiscono di conseguenza, coprendo il mispricing. Agire secondo le loro credenze li conduce a perdere nel tempo ricchezza nei confronti degli operatori razionali; pertanto essi non riescono a sopravvivere nel lungo periodo. Barberis e Thaler (2003) invece dimostrano che in alcuni casi può essere rischioso e troppo costoso per un trader coprire l'opportunità creata dal mispricing, e dunque può accadere che lo sfasamento dei prezzi non venga corretto e il mercato ne debba tener conto.

Brock e Hommes (1998), partendo da un mercato formato da operatori razionali e una varietà di operatori irrazionali, posto che essi sopravvivano, si sono domandati quanto le azioni dei secondi siano influenti. I noise traders possono scegliere tra un set finito di possibili evoluzioni sul prezzo; perciò, come gli autori stessi sostengono, si tratta di un modello con noise traders a razionalità limitata, in quanto tra le possibili scelte gli operatori scelgono

massimizzando le loro performance. La conclusione cui si giunge è che l'aumentare dei cambiamenti nelle scelte future crei instabilità nei prezzi.

Analogamente si sono soffermati sulla valutazione dell'influenza che possono avere gli operatori irrazionali anche Kogan et al. (2006), giungendo alla conclusione che questi ultimi abbiano sempre un impatto non nullo. In un modello senza consumazione intermedia è stato dimostrato infatti che i prezzi sono influenzati sia in presenza attiva dei noise traders, sia che essi a lungo termine non riescano a sopravvivere nel mercato. Blume e Easley(2006), Sandroni (2000) in un'analisi di equilibrio generale mostrano che in un modello di mercato completo a consumazioni intermedie con dividendi positivi limitati superiormente e inferiormente solo i traders con credenze corrette sopravvivono nel lungo periodo e che non riescano in quel caso a influenzare i prezzi.

Yan(2008) utilizzando ancora una volta un modello a consumazioni intermedie con processi lognormali e funzioni di utilità potenza, mostra che le preferenze degli agenti hanno importanza: la sopravvivenza dipende dal drift degli agenti, avversione a rischio e loro credenze. Quando tutti gli investitori hanno lo stesso tasso di sconto e stesso coefficiente di avversione al rischio, solo gli operatori razionali sopravvivono. In presenza di tassi di sconto eterogenei e/o avversioni al rischio differenti anche gli agenti irrazionali possono sopravvivere.

Concludendo si può facilmente notare che gli studiosi nell'ambito della behavioral finance non sono ancora giunti a una conclusione univoca sul ruolo dei noise traders, anche per il fatto che è solo da pochi decenni che si è ampliato l'interesse in questo campo. Ognuno con modelli di mercato in partenza diversi giungono a conclusioni che sono circoscrivibili alla loro particolare situazione. Si può dimostrare infatti che se si parte da assunzioni

lognormali la sopravvivenza dei noise traders è garantita cosa invece non valida se si utilizza un generico processo mean-reverting.

Da parte nostra pensiamo che le evidenze empiriche alla base sembrano giustificare l'introduzione di questi operatori nei mercati, e dunque siamo propensi a pensare che una trattazione modellistica che ne tenga conto sia più realistica, anche se ovviamente lo sviluppo dei modelli risulta più complicato di una trattazione classica.

4. EQUILIBRI SUNSPOT CON NOISE TRADERS

Vogliamo ora provare ad ampliare il modello di Bacchetta et Al (2011) introducendo un secondo tipo di agenti: i noise traders. Lo scopo è quello di determinare i prezzi di equilibrio ed effettuare poi un'analisi comparativa con i risultati ottenuti in precedenza per analizzare così l'impatto che i noise trader hanno nella determinazione dei prezzi.

4.1 *SCELTA DI PORTAFOGLIO MEDIA-VARIANZA*

Il modello è definito per rendere al minimo la complessità. Si considera un modello dove gli agenti hanno delle semplici preferenze media-varianza, costruito come un sistema a generazioni sovrapposte dove gli investitori sono nati con una ricchezza W . Essi vivono per due periodi e consumano solo quando vecchi.

Consideriamo in particolare due tipi di agenti:

- Investitori razionali (che indicheremo con i)
- Noise Traders (che indicheremo con n)

I primi sono presenti in misura $1 - \mu$ mentre i secondi sono presenti in misura μ e percepiscono delle credenze erranee. Gli agenti di uno stesso tipo sono identici. Il loro unico problema è di allocare la ricchezza fra un equity rischiosa e un asset risk-free dal rendimento $R > 1$. L'equity consiste di un credito su un albero con payoff stocastico. Ci son k alberi, ciascuno produce un output stocastico esogeno A_t (dividendo). Indicando con Q_t il prezzo della nostra equity, il suo rendimento tra t e $t+1$ è:

$$R_{t+1} = \frac{A_{t+1} + Q_{t+1}}{Q_t}$$

Il dividendo è uguale a:

$$A_t = A + mS_t$$

dove S_t è una variabile di stato esogena che segue un processo stocastico. Il dividendo è costante ad A quando $m = 0$. In questo caso S_t è una variabile estrinseca, o puro sunspot, con nessun ruolo fondamentale. Quando $m > 0$, S_t ha un impatto sui dividendi. Per semplicità assumiamo che la distribuzione di S_{t+1} dipenda al più da S_t ed è tempo invariante. Inoltre assumiamo che la distribuzione incondizionata di S_t è tale che A_t è sempre non negativo.

Investitori nati al tempo t massimizzano un'utilità media-varianza sul rendimento del loro portafoglio.

Indichiamo con α_t^i e α_t^n la quota di portafoglio investita nell'asset rischioso rispettivamente dall'agente i e dall'agente n .

Scriviamo il problema di massimizzazione per l'agente i :

$$\max_{\alpha_t^i} ({}_tE[R_{t+1}^p] - 0.5\gamma {}_t\text{Var}[R_{t+1}^p])$$

dove γ misura l'avversione al rischio e il rendimento del portafoglio è:

$$R_{t+1}^p = \alpha_t^i R_{k,t+1} + (1 - \alpha_t^i)R$$

Il problema di ottimo rispetto a α_t^i fornisce la quota di portafoglio ottimo per l'agente i:

$$\alpha_t^i = \frac{{}_tE[R_{k,t+1}] - R}{\gamma {}_t\text{Var}[R_{k,t+1}]}$$

Scriviamo ora il problema di massimizzazione per l'agente n:

$$\max_{\alpha_t^n} ({}_tE[R_{t+1}^p] - 0.5\gamma {}_t\text{Var}[R_{t+1}^p])$$

dove γ misura l'avversione al rischio e il rendimento del portafoglio è:

$$R_{t+1}^p = \alpha_t^n R_{k,t+1}^n + (1 - \alpha_t^n)R$$

Il problema di ottimo rispetto a α_t^n fornisce la quota di portafoglio ottimo per l'agente n:

$$\alpha_t^n = \frac{{}_tE[R_{k,t+1}^n] - R}{\gamma {}_t\text{Var}[R_{k,t+1}^n]}$$

Per determinare il prezzo di equilibrio Q_t imponiamo la seguente condizione di equilibrio:

$$((1 - \eta)\alpha_t^i + \eta\alpha_t^n)W = Q_tK$$

Ponendo $\lambda = \frac{K\gamma}{W}$ e riscrivendo la nostra equazione otteniamo:

$$(1 - \eta) \frac{{}_tE[A_{t+1} + Q_{t+1} - RQ_t]}{{}_t\text{Var}[A_{t+1} + Q_{t+1}]} + \eta \frac{{}_tE^n[A_{t+1} + Q_{t+1} - RQ_t]}{{}_t\text{Var}^n[A_{t+1} + Q_{t+1}]} = \lambda$$

All'equilibrio possiamo fare l'ipotesi che la varianza dei due agenti sia uguale:

$${}_t\text{Var}[A_{t+1} + Q_{t+1}] = {}_t\text{Var}^n[A_{t+1} + Q_{t+1}]$$

L'equazione che determina il prezzo di equilibrio diventa quindi:

$$(1 - \eta) {}_tE[A_{t+1} + Q_{t+1} - RQ_t] + \eta {}_tE^n[A_{t+1} + Q_{t+1} - RQ_t] = \lambda {}_t\text{Var}[A_{t+1} + Q_{t+1}]$$

4.2 EQUILIBRI SUNSPOT

Noi inizialmente consideriamo il caso in cui la variabile di stato S_t è puro sunspot che non influenza direttamente i dividendi. Questo corrisponde a considerare $m = 0$ con dividendo costante ad A . Una soluzione dell'asset price è immediata, è un equilibrio fondamentale:

$$Q_t = \frac{A}{R - 1}$$

L'asset price è costante ed è uguale al valore attuale del dividendo costante.

Tuttavia, possono esserci altri equilibri dove l'asset price è influenzato dalla variabile sunspot S_t . Questi sono definiti equilibri sunspot.

Definizione 1: *Assumiamo $m = 0$, così che S_t è una variabile estrinseca. Un puro equilibrio sunspot è un equilibrio con un asset price non costante $Q_t = f(S_t)$.* □

La loro esistenza non è garantita e dipende in particolare dal processo S_t . È stato dimostrato che la condizione necessaria per l'esistenza di tali equilibri è che la distribuzione di S_{t+1} dipende da S_t . Nel caso in cui $f(S_t)$ può essere rappresentato da un polinomio di ordine infinito, una condizione necessaria

per l'esistenza degli equilibri sunspot è che esista almeno una coppia $(n_1, n_2) \in N^* \times N^*$ tale che $\text{cov}_t(S_{t+1}^{n_1}, S_{t+1}^{n_2})$ dipende da S_t .

Noi considereremo due esempi specifici basati rispettivamente su un processo autoregressivo e di Markov per S_t .

4.2.1 *PROCESSO AUTOREGRSSIVO*

Noi assumiamo che il sunspot segua il seguente processo autoregressivo rispettivamente per l'agente i e n :

- L'agente i percepisce $S_{t+1} = \rho S_t + \varepsilon_{t+1}$ con $0 < \rho < 1$;
 ε_{t+1} ha distribuzione simmetrica limitata a media zero $\varepsilon_{t+1} \in [-\epsilon, \epsilon]$;
 Indichiamo con σ^2 la varianza di ε_{t+1} mentre con ω^2 la varianza di ε_{t+1}^2 ;
 Ricordiamo che per la simmetria $E[\varepsilon_{t+1}^3] = 0$.
- L'agente n percepisce $S_{t+1} = \rho_1 S_t + \varepsilon_{t+1}^n$ con $0 < \rho_1 < 1$;
 ε_{t+1}^n ha distribuzione simmetrica limitata a media zero
 $\varepsilon_{t+1}^n \in [-\epsilon, \epsilon]$;
 Indichiamo con σ_1^2 la varianza di ε_{t+1}^n mentre con ω_1^2 la varianza di $(\varepsilon_{t+1}^n)^2$;
 Ricordiamo che per la simmetria $E[(\varepsilon_{t+1}^n)^3] = 0$.

Imponiamo le seguenti condizioni per una scelta realistica dei parametri con cui simulare S_t :

- I processi per i due agenti hanno la stessa varianza:

$$\frac{\sigma_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2}$$

- I processi per i due agenti hanno la stessa covarianza prima ($Cov(S_{t+1}, S_t)$):

$$\rho_1 \sigma_1^2 = \rho \sigma^2$$

Proposizione 1: *Assumiamo che la variabile sunspot segue il processo autoregressivo sopra descritto e che $A > A_1$, calcolato numericamente. Allora ci sono due equilibri all'interno della classe dei polinomi finiti: l'equilibrio fondamentale e un equilibrio sunspot dato da*

$$Q_t = Q - VS_t^2$$

dove:

$$V = \frac{R - \eta\rho_1^2 - (1 - \eta)\rho^2}{\lambda 4\rho^2 \sigma^2}$$

$$Q = \frac{-\eta V \sigma_1^2 - \lambda V^2 \omega^2 - V \sigma^2 (1 - \eta) + A}{R - 1} < \frac{A}{R - 1} \quad \square$$

Dimostrazione in appendice 6.1.

La proposizione identifica un equilibrio sunspot per un particolare processo autoregressivo. In generale all'interno della classe di tali processi esiste un infinito numero di equilibri per qualche $\rho_1, \rho > 0$ e un infinito numero di valori di $\sigma_1^2, \sigma^2, \omega, \omega_1, \epsilon$. Nel rispetto delle condizioni imposte abbiamo analizzato i seguenti casi di relazione tra le variabili:

- Caso 1: $\rho_1 > \rho$ && $\sigma_1 < \sigma$

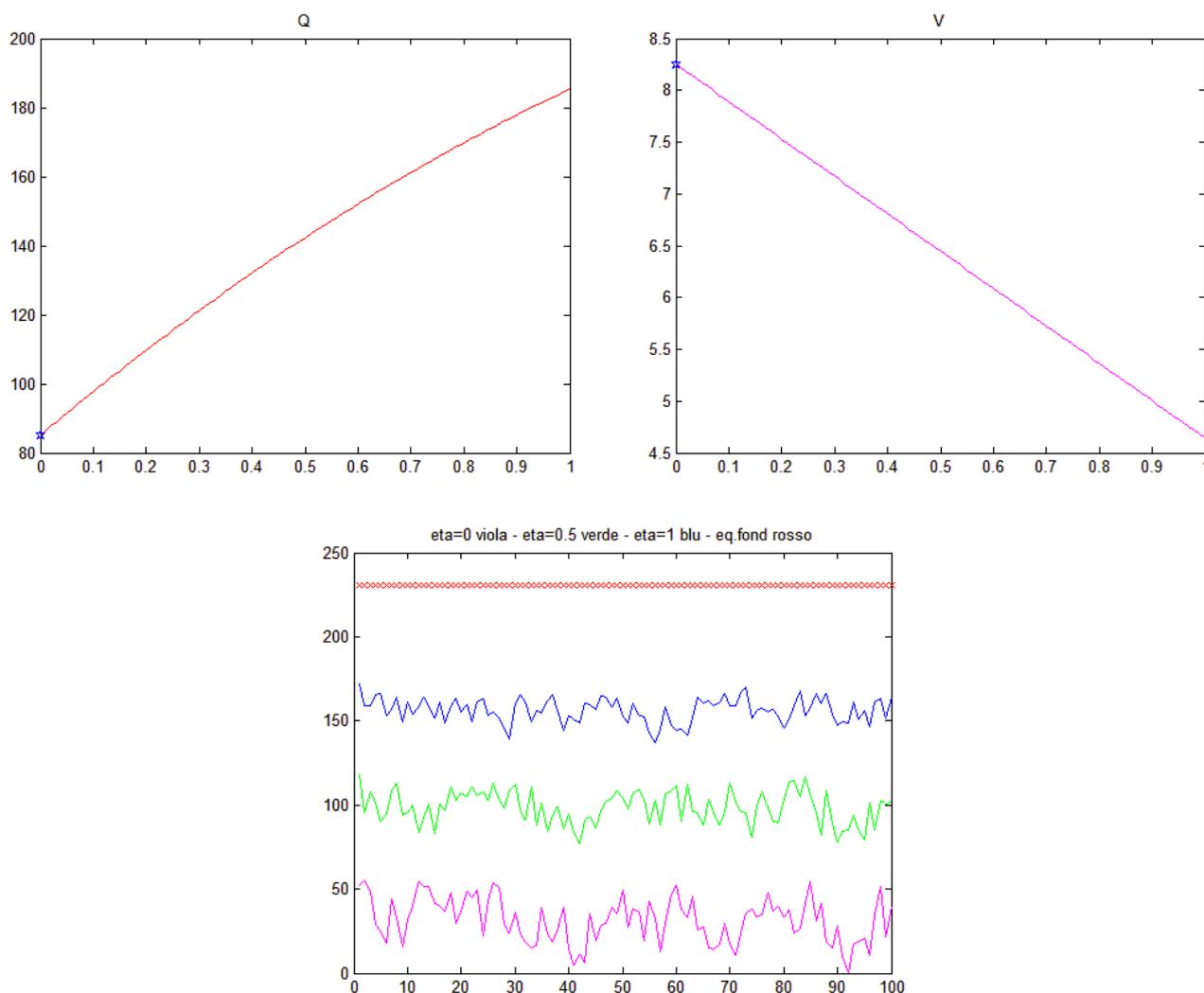


Figura 2 Grafici dei risultati della proposizione 1 al variare di η , nel caso $\rho_1 > \rho$ && $\sigma_1 < \sigma$. Nel terzo grafico $Q=Q(t)$

I primi due grafici della *Figura 2* mostrano l'andamento di Q e V al variare della percentuale di Noise traders. Si nota che con $\eta = 0$ si riproducono i risultati di Bacchetta et al. (2011). Il terzo grafico rappresenta l'andamento temporale del prezzo d'equilibrio sunspot e fondamentale per determinati valori di η ($\eta = 0$, $\eta = 0.5$, $\eta = 1$). Come già dimostrato precedentemente l'equilibrio fondamentale non dipende da η , inoltre è costante nel tempo. Si

nota che al crescere di η il prezzo di equilibrio sunspot, restando sempre sotto il valore fondamentale, aumenta.

- Caso 2: $\rho_1 < \rho$ && $\sigma_1 > \sigma$

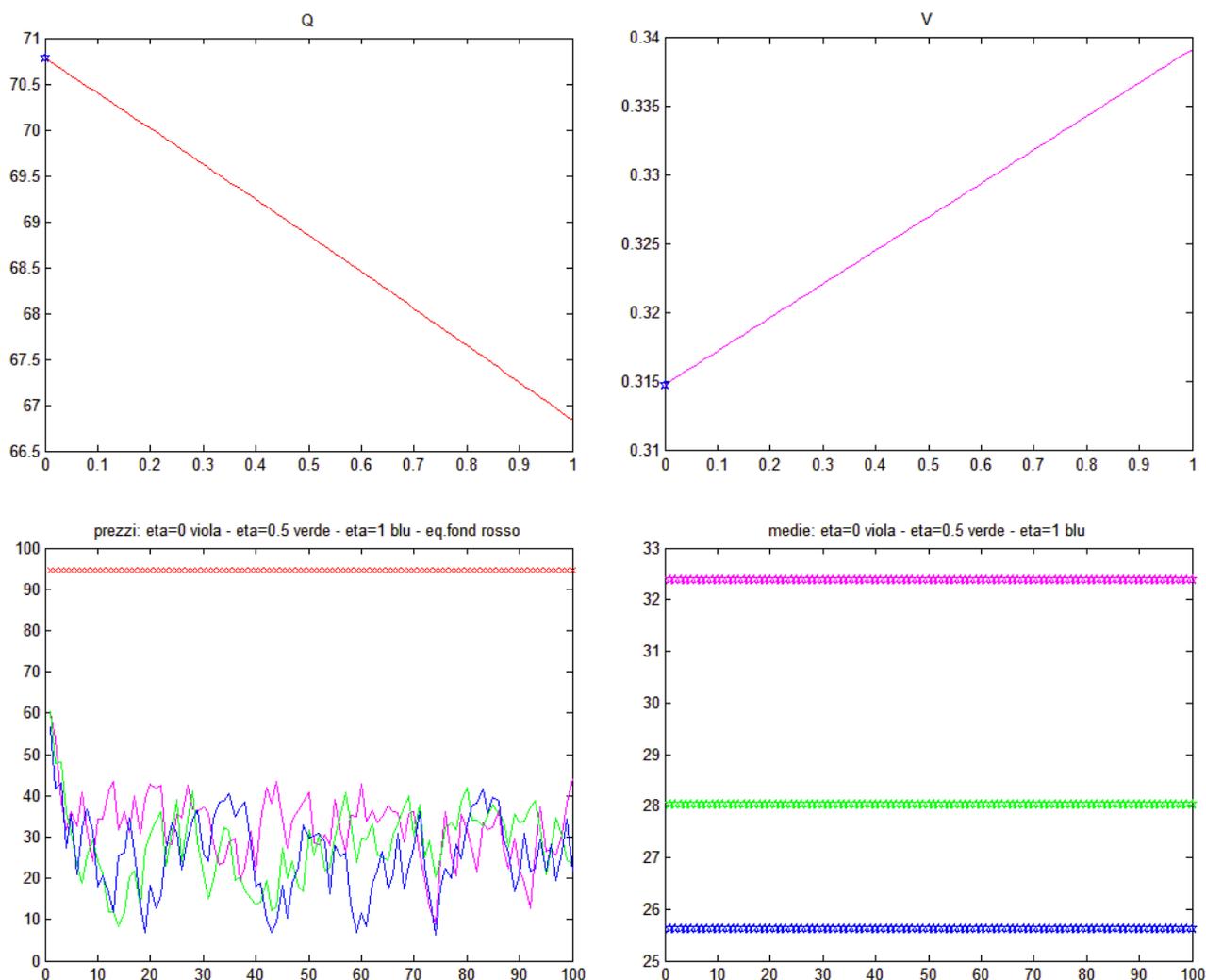


Figura 3 Grafici dei risultati della proposizione 1 al variare di η , nel caso $\rho_1 < \rho$ && $\sigma_1 > \sigma$. Nel terzo grafico $Q=Q(t)$

I primi due grafici della *Figura 3* mostrano l'andamento di Q e V al variare della percentuale di Noise traders. Si nota che con $\eta = 0$ si riproducono i risultati di Bacchetta et al.(2011). Il terzo grafico rappresenta l'andamento temporale del prezzo d'equilibrio sunspot e fondamentale per determinati

valori di η ($\eta = 0, \eta = 0.5, \eta = 1$). Il quarto grafico rappresenta i valori medi degli equilibri sunspot per gli stessi valori di η . Come già dimostrato precedentemente l'equilibrio fondamentale non dipende da η , inoltre è costante nel tempo. Ora la presenza dei noise traders abbassa il valor medio del prezzo di equilibrio sunspot, anche se in maniera meno significativa. Un risultato di questo tipo ci sembra plausibile confrontato al caso precedente in quanto abbiamo invertito le relazioni tra i parametri che definiscono il processo S_t .

In generale nell'equilibrio sunspot il rischio è tempo-variante:

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1}] = 4V^2\rho^2S_t^2\sigma^2 + V^2\omega^2$$

Ci sono quindi cambiamenti self-fulfilling nella percezione del rischio che dipendono dalla variabile sunspot. Questo è un equilibrio a causa della relazione circolare tra il processo stocastico dell'asset price e asset price risk.

L'asset price è più basso nell'equilibrio sunspot che in quello fondamentale e il rischio è più alto e più volatile. L'equazione per V mostra inoltre che un avversione al rischio più alta (che implica un più alto λ) riduce la sensibilità dell'asset price e del rischio dal sunspot.

Una caratteristica della soluzione sunspot sta nel fatto che è simmetrica nel sunspot: $f(S_t) = f(-S_t)$, così che il segno del sunspot è irrilevante. Questo è strettamente legato alla simmetria del processo stocastico per S_t . La simmetria è preservata nel ciclo self-fulfilling tra il rischio e il prezzo e di nuovo il rischio.

4.2.2 *PROCESSO DI MARKOV A DUE STATI*

Consideriamo l'esempio del processo di Markov asimmetrico a due stati. Ci riferiamo ai due stati come "normal" e "bad", denotati rispettivamente N e B. Denotiamo la probabilità di essere nello stato $k = N, B$ nel periodo successivo condizionata ad essere in quello stato oggi con p_k, p_k^n rispettivamente per gli agenti razionali e noise traders. Assumiamo che $p_B, p_N, p_B^n, p_N^n \in [0.5; 1]$ e che lo stato normale sia più persistente: $p_N > p_B, p_N^n > p_B^n$

Definiamo:

$$p_D = p_B(1 - p_B) - p_N(1 - p_N)$$

$$k = 1 + R + (1 - \eta)(-p_N - p_B) + \eta(-p_N^n - p_B^n)$$

che sono tutti positivi sotto le nostre ipotesi. Ricaviamo inoltre il seguente valore soglia per il dividendo:

$$A_2 = \frac{k}{\lambda p_D} \left[\frac{k}{p_D} p_B(1 - p_B) - (1 - (1 - \eta)p_B - \eta p_B^n) \right]$$

Il valore dell'asset price nello stato k è definito Q_k .

Proposizione 2: *Assumiamo che la variabile sunspot S_t segua il processo di Markov a due stati descritto sopra e $A > A_2$. Allora esistono due equilibri. Uno è l'equilibrio fondamentale che ha un prezzo costante e senza rischio. Il secondo è un equilibrio sunspot con*

$$0 < Q_B < Q_N < \frac{A}{R - 1}$$

$$Q_D = Q_N - Q_B = \frac{k}{\lambda p_D}$$

$$Q_B = \frac{1}{R-1} (A - \lambda p_B (1 - p_B) Q_D^2 + (1 - (1 - \eta) p_B - \eta p_B^n) Q_D) \quad \square$$

Dimostrazione in appendice 6.2.

- caso $p_N > p_N^n$

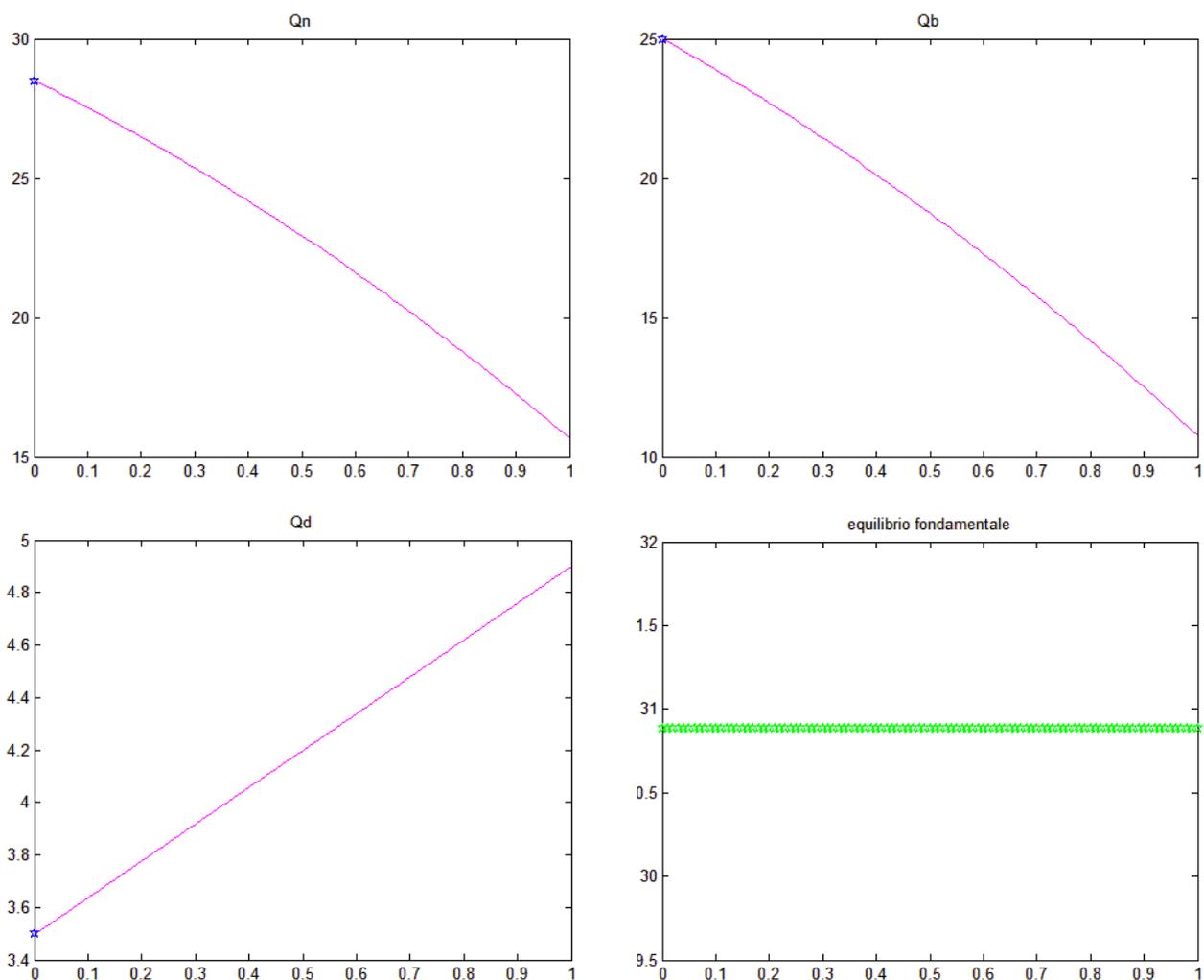


Figura 4 Valori dell'equilibrio sunspot e dell'equilibrio fondamentale della prop. 2 al variare di η , nel caso $p_N^{\square} > p_N^n$

I primi 2 grafici della *Figura 4* rappresentano l'andamento dell'equilibrio sunspot rispettivamente nello stato N e B al variare della percentuale di noise traders. Il terzo rappresenta la loro differenza, mentre il quarto grafico rappresenta l'equilibrio fondamentale. Ancora una volta con $\eta = 0$ i risultati coincidono con quelli di Bacchetta et al.(2011). Si vede che al crescere di η i prezzi di equilibrio sunspot in entrambi gli stati decrescono.

- Caso $p_N < p_N^n$

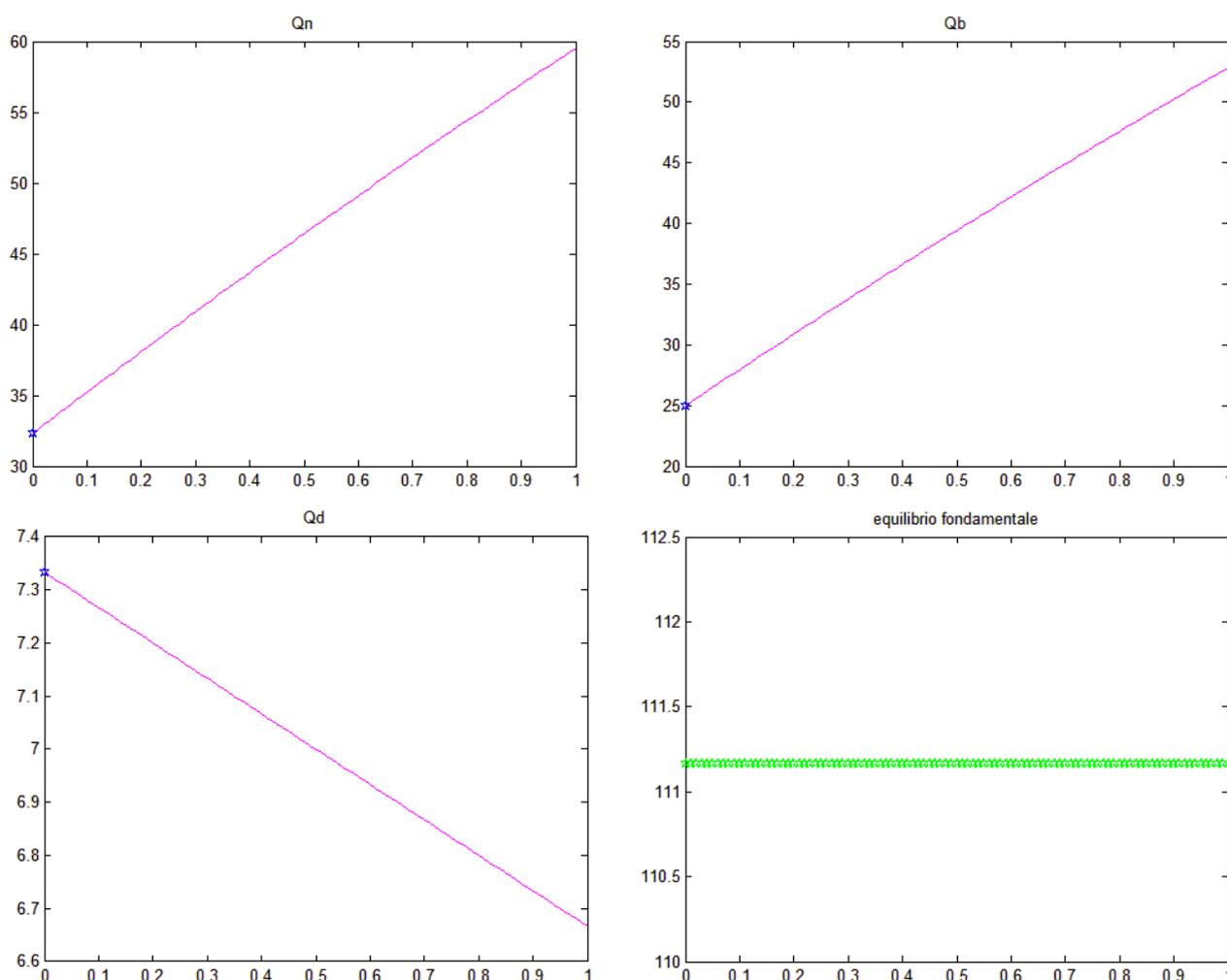


Figura 5 Valori dell'equilibrio sunspot e dell'equilibrio fondamentale della prop. 2 al variare di η , nel caso $p_N < p_N^n$

I primi 2 grafici della *Figura 5* rappresentano l'andamento dell'equilibrio sunspot rispettivamente nello stato N e B al variare della percentuale di noise traders. Il terzo rappresenta la loro differenza, mentre il quarto grafico rappresenta l'equilibrio fondamentale. Ancora una volta con $\eta = 0$ i risultati coincidono con quelli di Bacchetta et al.(2011). Si vede in questo caso, che al crescere di η i prezzi di equilibrio sunspot in entrambi gli stati crescono. Questo risulta coerente rispetto al caso precedente in quanto abbiamo invertito il segno della disuguaglianza.

L'asset price nell'equilibrio sunspot è sempre più basso che nell'equilibrio fondamentale, mentre il rischio è più alto. Nello stati k la varianza di Q_{t+1} è $p_k(1 - p_k)Q_D^2$. Poiché $p_B(1 - p_B) > p_N(1 - p_N)$ sotto le nostre ipotesi, il rischio è più alto nello stato bad, con conseguenza che il prezzo è più basso. Poiché S_t è puro sunspot, un più alto rischio quando passiamo dallo stato N allo stato B è interamente self-fulfilling. La spiegazione di questo rischio self-fulfilling nell'equilibrio sunspot è ancora una volta legata alla relazione circolare tra il processo stocastico dell'asset price e asset price risk.

Se gli agenti credono che l'asset price risk è più alto nello stato B e più basso nello stato N, allora sarà così. Esso conduce a un prezzo più basso nello stato B che N. Questo a sua volta implica un rischio più alto nello stato B, poiché $p_N > p_B$ significa che nello stato B c'è più incertezza circa lo stato del nuovo periodo e quindi circa il prezzo del nuovo periodo. Cambiamenti nelle credenze circa il rischio tra i due stati sono quindi self-fulfilling. Si parlerà di rischio panico quando l'aumento del rischio tra gli stati N e B è molto grande con caduta significativa del prezzo d'equilibrio, come si evince dalle figure.

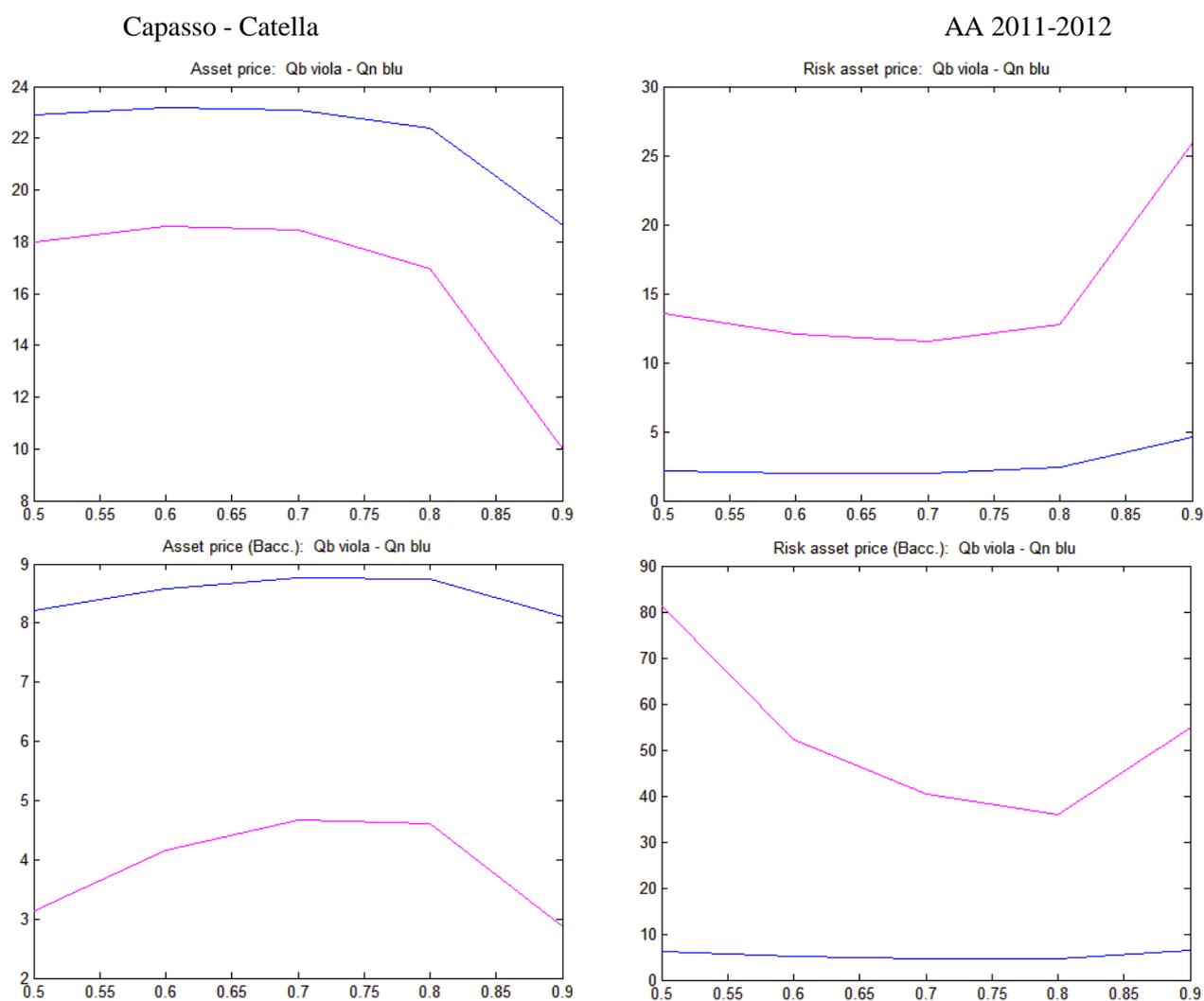


Figura 6 Variare dell'asset price e dell'asset price risk all'equilibrio sunspot al variare di p_B . Il rischio è definito come deviazione standard del prezzo per il prossimo periodo diviso il prezzo attuale. $p_N = 0.99$. I valori sono moltiplicati per un fattore 100 per renderli più leggibili. I primi due grafici sono del nostro modello, i secondi sono di Bacchetta (2011)

La *Figura 6* mostra sia il prezzo dell'asset, che il suo rischio. Il rischio è definito come la deviazione standard del prezzo per il prossimo periodo diviso il prezzo attuale. Si assume che $p_N = 0.99$ cosicché un passaggio allo stato Bad risulta abbastanza raro. La soluzione è fatta al variare di p_B . Indipendentemente dal valore di p_B si osserva che un passaggio dallo stato N a quello B porta a un enorme picco nel rischio e a un calo nel valore dell'asset. Queste conclusioni generali valgono sia nel caso di soli operatori razionali (caso di Bacchetta et al. (2011), grafici sotto) che nel caso di presenza di Noise traders (caso del nostro modello, primi due grafici). La principale

differenza è che la presenza dei Noise traders riduce la differenza di rischio tra gli stati, abbassando notevolmente il livello di rischio nello stato B. Inoltre, sono confermati i risultati già discussi in precedenza sull'asset price.

4.3 *EQUILIBRI SUNSPOT LIKE E RISCHIO PANICO*

Torniamo ora al caso in cui $m > 0$, così che la variabile di stato S_t è un fondamentale che influenza i dividendi. Si mostrerà che oltre l'equilibrio fondamentale esiste un equilibrio definito "sunspot-like". In questi equilibri S_t gioca il doppio ruolo di fondamentale che influenza i dividendi e di un sunspot che porta a cambiamenti self-fulfilling nel rischio. Consideriamo ancora il caso in cui S_t segue un processo autoregressivo del primo ordine e un processo di Markov asimmetrico a due stati.

4.3.1 *PROCESSO AUTOREGRESSIVO*

Assumiamo che il processo per S_t segue le stesse assunzioni fatte nel paragrafo 4.2.1.

Proposizione 3: *Assumiamo che S_t segue un processo autoregressivo e che $A > A_3$, calcolato numericamente. Allora ci sono due equilibri all'interno della classe dei polinomi finiti. Il primo è l'equilibrio fondamentale:*

$$Q_t = \frac{1}{R-1} \left(A - \lambda \frac{R^2 m^2 \sigma^2}{(R - (1-\eta)\rho - \eta\rho_1)^2} \right) + \frac{((1-\eta)\rho + \eta\rho_1)m}{R - (1-\eta)\rho - \eta\rho_1} S_t$$

Il secondo è un equilibrio sunspot-like:

$$Q_t = Q + vS_t - VS_t^2$$

dove:

$$V = \frac{R - (1 - \eta)\rho^2 - \eta\rho_1^2}{4\lambda\rho^2\sigma^2}$$

$$v = \frac{(\eta\rho_1 - R - \rho)m}{\rho - R\rho - \eta\rho_1 + R}$$

$$Q = \frac{1}{R-1}(A - (1 - \eta)V\sigma^2 - \eta V\sigma_1^2 - \lambda(V^2\omega^2 + (v + m)^2\sigma^2)) \quad \square$$

Dimostrazione in appendice 6.3.

Nel rispetto delle condizioni imposte abbiamo ancora analizzato i seguenti casi di relazione tra le variabili:

- Caso 1: $\rho_1 > \rho$ && $\sigma_1 < \sigma$

I primi tre grafici della *Figura 7* mostrano l'andamento di Q , V , v al variare della percentuale di Noise traders. Si nota che con $\eta = 0$ non si riproducono più i risultati di Bacchetta et al.(2011). Gli ultimi due grafici rappresentano rispettivamente l'andamento temporale del prezzo d'equilibrio sunspot-like e fondamentale per determinati valori di η ($\eta = 0$, $\eta = 0.5$, $\eta = 1$). Questa volta la variabile S_t influenza anche l'equilibrio fondamentale cosicché non è più costante. Si nota che al crescere di η il prezzo di equilibrio fondamentale diminuisce. Si riscontra invece un andamento opposto per quanto riguarda l'equilibrio sunspot-like.

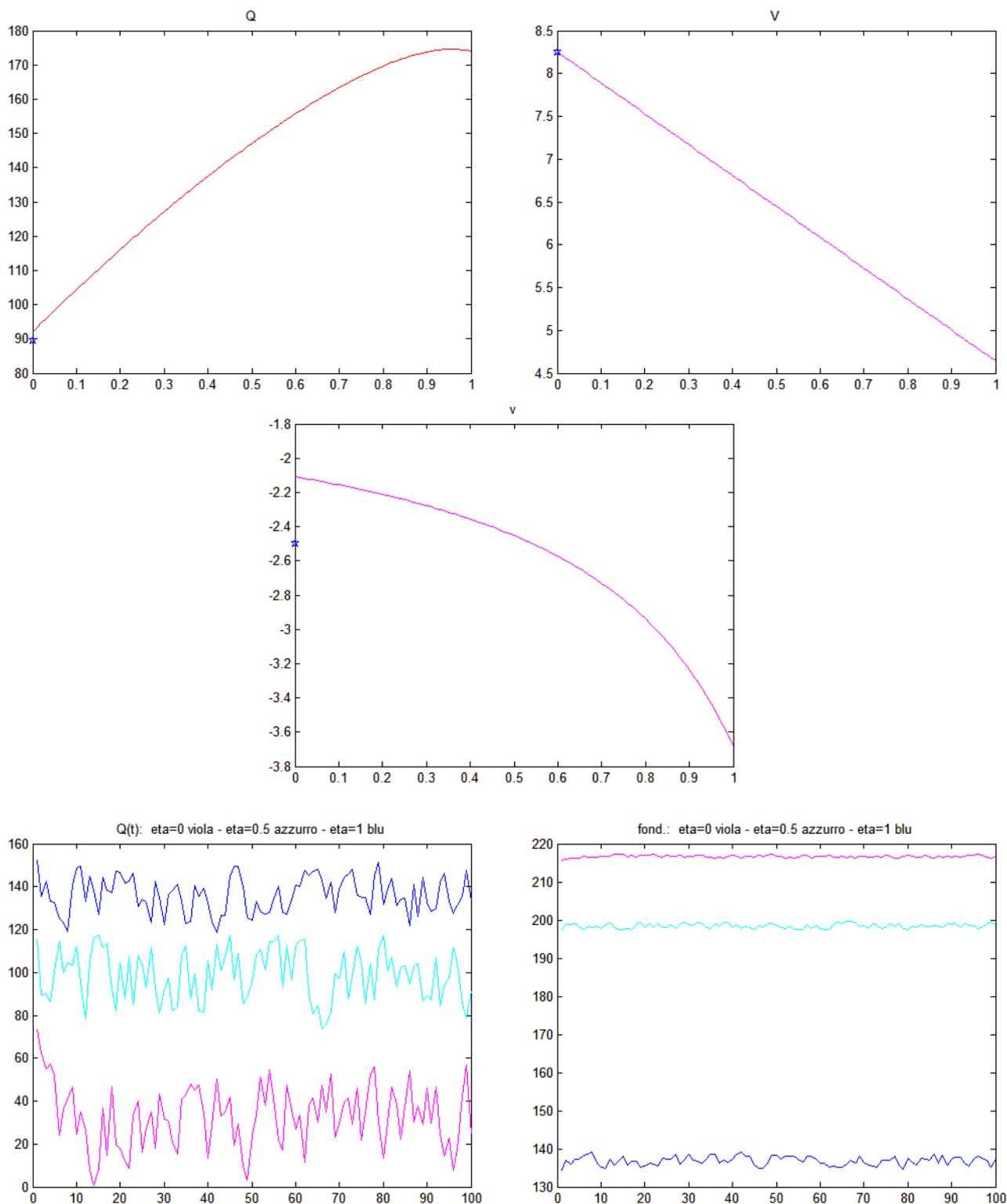


Figura 7 Valori dell'equilibrio sunspot-like e dell'equilibrio fondamentale della prop. 3 al variare di η , nel caso $\rho_1 > \rho$ && $\sigma_1 < \sigma$

- Caso 2: $\rho_1 < \rho$ && $\sigma_1 > \sigma$

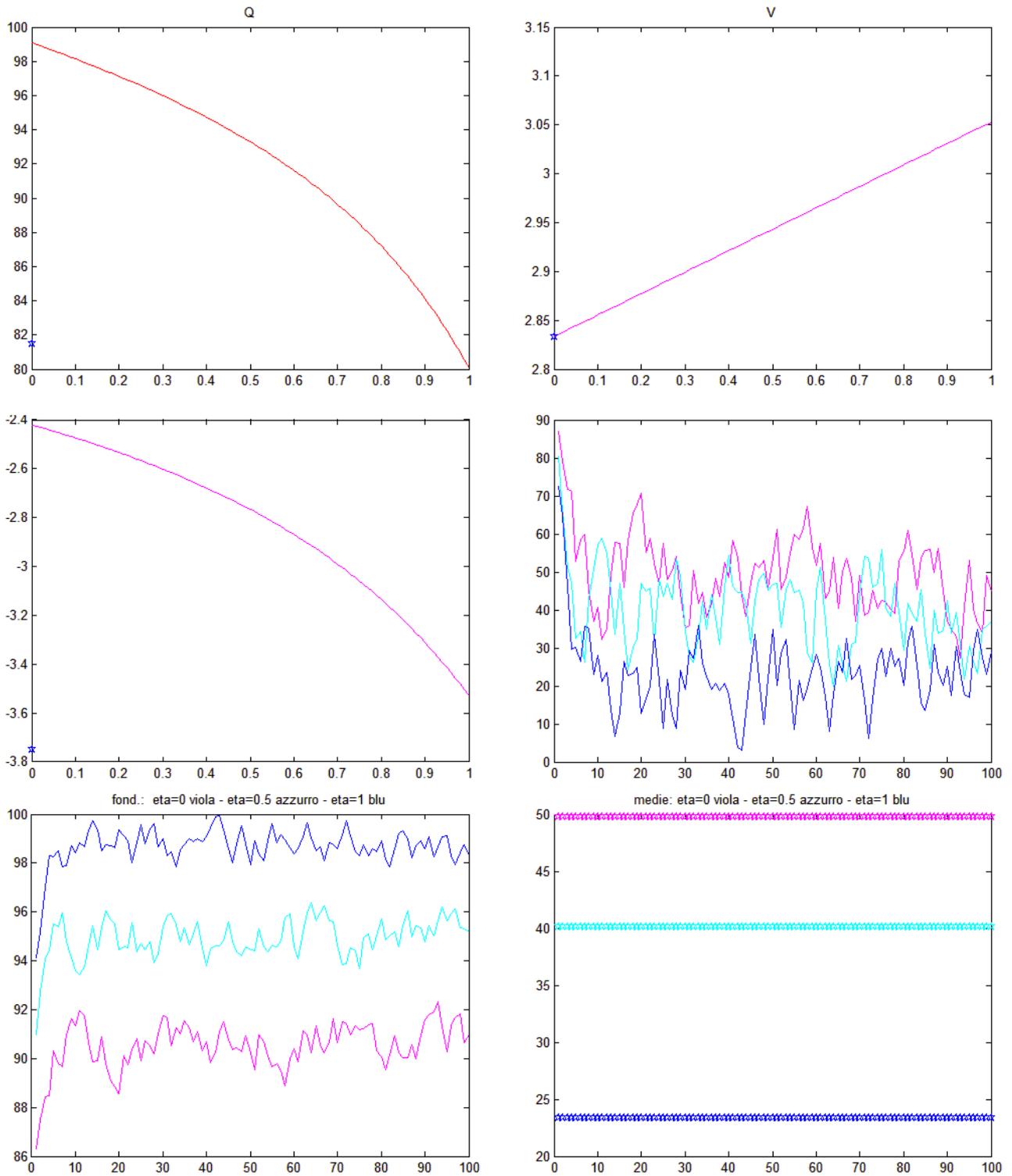


Figura 8 Valori dell'equilibrio sunspot-like e dell'equilibrio fondamentale della prop. 3 al variare di η , nel caso $\rho_1 < \rho$ && $\sigma_1 > \sigma$

I primi tre grafici della *Figura 8* mostrano l'andamento di Q , V , v al variare della percentuale di Noise traders. Si nota che con $\eta = 0$ non si riproducono più i risultati di Bacchetta et al.(2011). Gli ultimi tre grafici rappresentano rispettivamente l'andamento temporale del prezzo d'equilibrio sunspot-like, quello fondamentale e i valori medi di quelli sunspot-like, per determinati valori di η ($\eta = 0$, $\eta = 0.5$, $\eta = 1$). Questa volta la variabile S_t influenza anche l'equilibrio fondamentale cosicché non è più costante. Si nota che al crescere di η il prezzo di equilibrio fondamentale ora aumenta. Ora la presenza dei noise traders abbassa il valor medio del prezzo di equilibrio sunspot-like, anche se in maniera meno significativa. Un risultato di questo tipo ci sembra plausibile confrontato al caso precedente in quanto abbiamo invertito le relazioni tra i parametri che definiscono il processo S_t .

In questo caso, Q_t è ovviamente influenzato da S_t anche nell'equilibrio fondamentale. Nell'equilibrio sunspot-like, S_t gioca il doppio ruolo di un fondamentale e di un sunspot che conduce a convinzioni tempo varianti circa il rischio. Si ha

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1} + A_{t+1}] = (v + m - 2V\rho S_t)^2 \sigma^2 + V^2 \omega^2$$

Questo rischio tempo variante è self-fulfilling poiché non tende a zero quando il ruolo fondamentale di S_t svanisce con $m \rightarrow 0$. Questo perché V non dipende da m . Il coefficiente sul termine quadratico è lo stesso del puro equilibrio sunspot. Quando $m \rightarrow 0$ l'equilibrio sunspot-like converge all'equilibrio puro sunspot della proposizione precedente. La principale differenza è che quando $m > 0$, i cambiamenti self-fulfilling nelle credenze sul rischio sono coordinati da un macro-fondamentale piuttosto che da una variabile sunspot esterna. C'è un aspetto negativo dell'equilibrio sunspot-like, connesso con il processo simmetrico del sunspot. Questo processo simmetrico conduce a una soluzione simmetrica per asset price e rischio quando $m = 0$, che significa che il segno di S_t è irrilevante. Il rischio è ugualmente alto quando S_t è un alto numero

positivo come quando S_t è un alto numero negativo. Questa spiacevole caratteristica continua a valere per qualche $m > 0$ a causa della dominanza del ruolo sunspot di S_t .

4.3.2 *PROCESSO DI MARKOV A DUE STATI*

Il processo di Markov a due stati è analogo a quello trattato nel paragrafo 4.2.2, con la differenza che il dividendo è più alto nello stato normal che in quello bad: $A_N > A_B$. Definiamo $A_D = A_N - A_B$, che converge a zero quando $m \rightarrow 0$. Le assunzioni sulle probabilità di transizione sono le stesse del caso precedente, e ricaviamo la seguente soglia per i dividendi:

$$A_4 = -\frac{(1-p_B)}{p_D} \left[(1-\eta)(p_D - kp_B) \frac{1}{2\lambda p_D} (k + \sqrt{k^2 - 4R\lambda p_D A_D}) + RA_D p_B \right] - \eta(1 - p_B^n) \frac{1}{2\lambda p_D} (k + \sqrt{k^2 - 4R\lambda p_D A_D})$$

Proposizione 4: *Assumiamo che il fondamentale A_t segue un processo di Markov a due stati. Egli assume valore A_k nello stato $k = N, B$, con probabilità di transizione p_k, p_k^n di restare nello stato k rispettivamente per gli agenti razionali e noise traders. Assumiamo che $0 < p_B < p_N < 1$, $0 < p_B^n < p_N^n < 1$, $A_D < \frac{k^2}{4R\lambda p_D}$ e $A_B > A_4$. Allora ci sono due equilibri. I valori della differenza dell'asset price $Q_D = Q_N - Q_B$ nei due equilibri sono:*

$$Q_D = \left[\frac{k}{2\lambda p_D} - A_D \right] \pm \frac{1}{2\lambda p_D} (k^2 - 4R\lambda p_D A_D)^{0.5} > 0$$

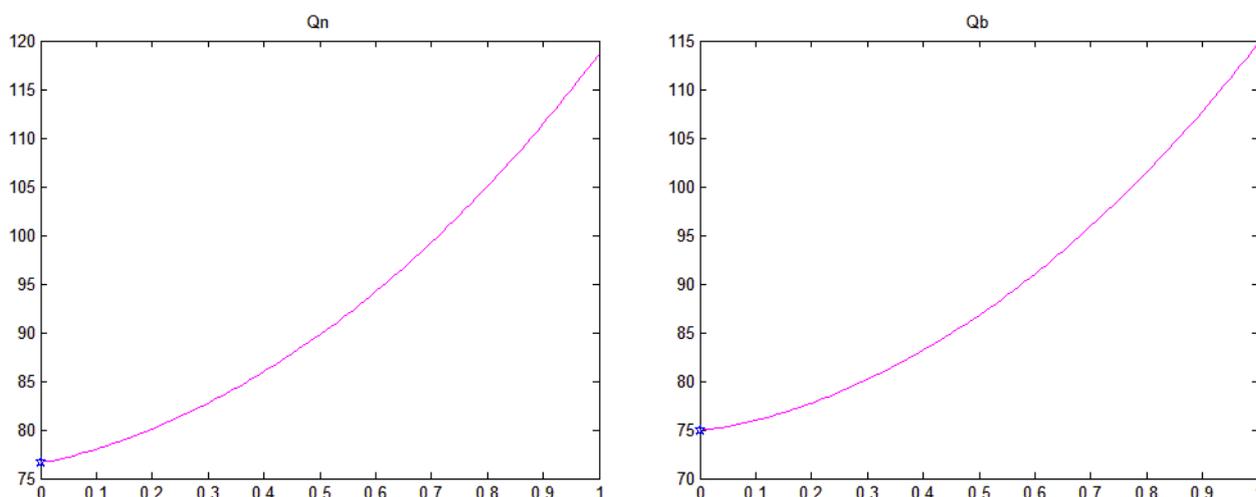
In corrispondenza di questi valori di Q_D , l'asset-price nello stato B è:

$$Q_B = \frac{A_B}{R-1} + \frac{(1-p_B)}{(R-1)p_D} [(1-\eta)(p_D - kp_B)(A_D + Q_D) + Rp_B A_D] + \frac{\eta(1-p_B^n)}{R-1} (A_D + Q_D) \quad \square$$

Dimostrazione in appendice 6.4.

- caso $p_N > p_N^n$

I primi 2 grafici della *Figura 9* rappresentano l'andamento dell'equilibrio sunspot-like rispettivamente nello stato N e B al variare della percentuale di noise traders. Il terzo rappresenta la loro differenza. Mentre quarto e quinto rappresentano l'equilibrio fondamentale rispettivamente nello stato N e B e l'ultimo rappresenta la loro differenza. Ancora una volta con $\eta = 0$ i risultati coincidono con quelli di Bacchetta et al.(2011). Si vede che al crescere di η i prezzi di equilibrio sunspot-like in entrambi gli stati crescono, per l'equilibrio fondamentale si riscontra lo stesso comportamento, indipendentemente dallo stato. Questa è l'unica anomalia del nostro modello, in quanto anche se gli agenti irrazionali hanno una minore probabilità di restare nello stato N, i prezzi d'equilibrio risultano comunque crescenti al crescere di η .



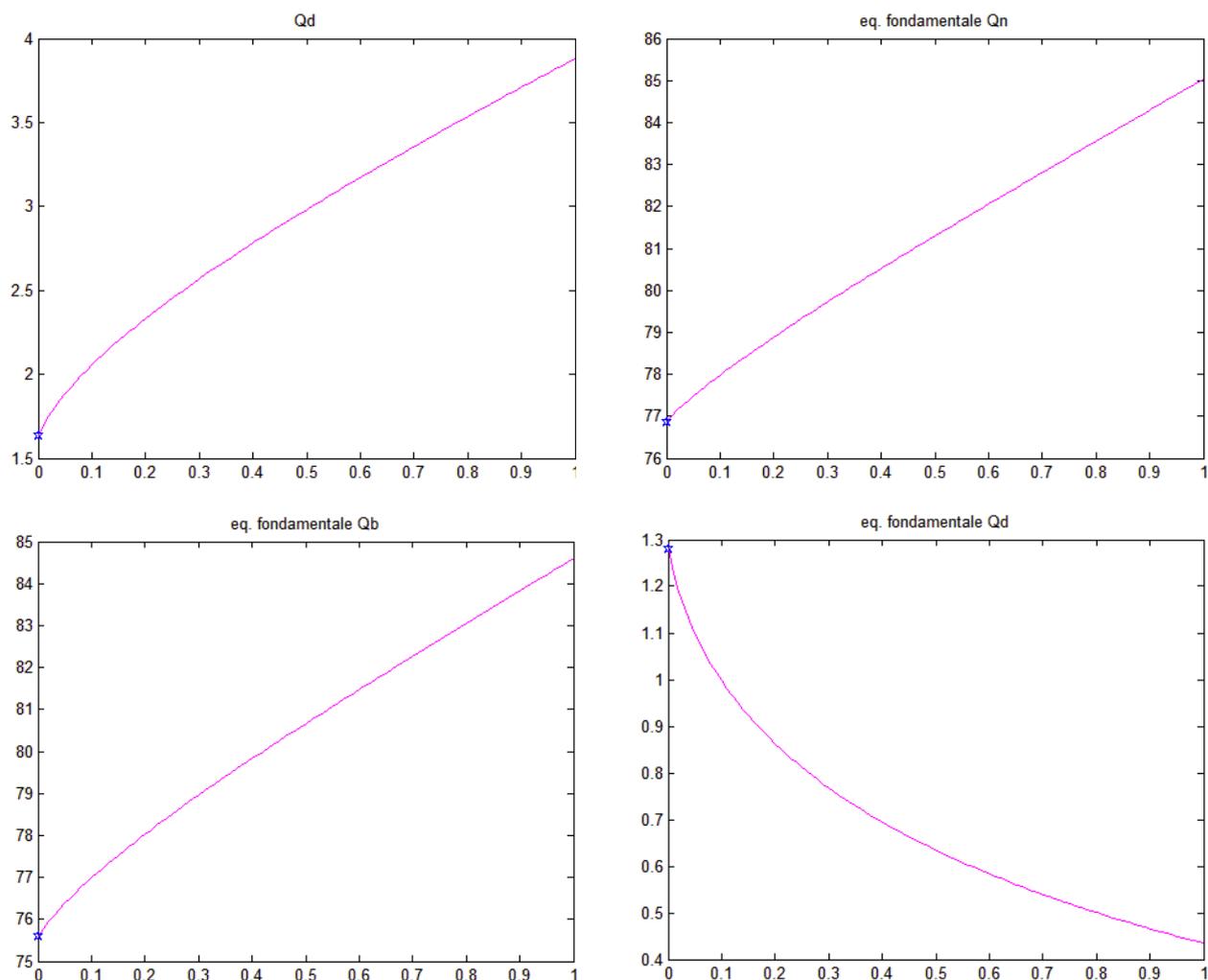


Figura 9 Valori dell'equilibrio sunspot-like e dell'equilibrio fondamentale della prop. 4 al variare di η . I valori sono moltiplicati per un fattore 100 per renderli più leggibili, nel caso $p_N^{\square} > p_N^n$

- caso $p_N < p_N^n$

I primi 2 grafici della *Figura 10* rappresentano l'andamento dell'equilibrio sunspot-like rispettivamente nello stato N e B al variare della percentuale di noise traders. Il terzo rappresenta la loro differenza. Mentre quarto e quinto rappresentano l'equilibrio fondamentale rispettivamente nello stato N e B e l'ultimo rappresenta la loro differenza. Ancora una volta con $\eta = 0$ i risultati coincidono con quelli di Bacchetta et al.(2011). Si vede che al crescere di η i

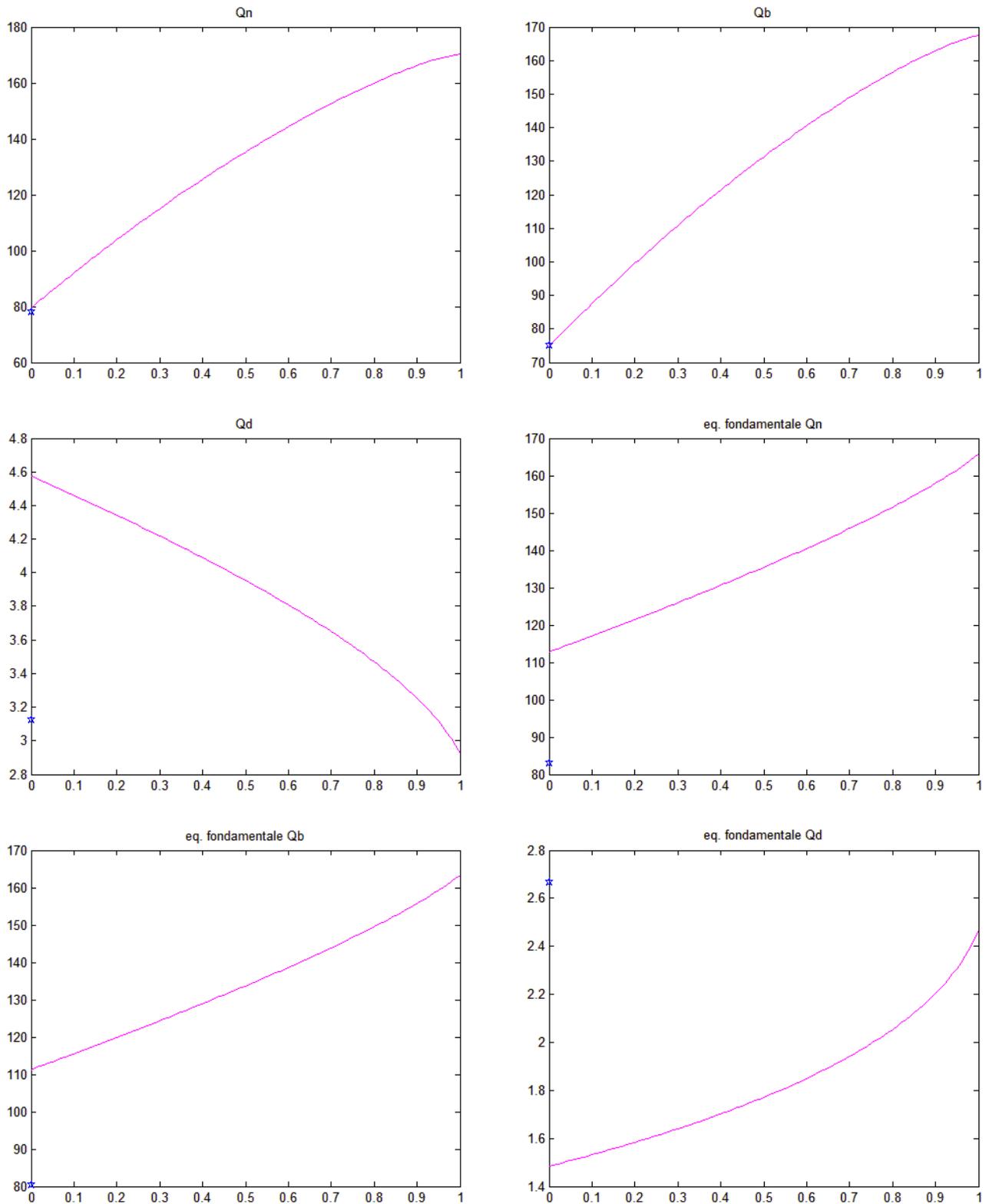


Figura 10 Valori dell'equilibrio sunspot-like e dell'equilibrio fondamentale della prop. 4 al variare di η .
I valori sono moltiplicati per un fattore 100 per renderli più leggibili, nel caso $p_N^{\square} < p_N^n$

prezzi di equilibrio sunspot-like in entrambi gli stati crescono, per l'equilibrio fondamentale si riscontra lo stesso comportamento, indipendentemente dallo stato. L'unica differenza con il caso precedente è la diversa concavità.

Poiché Q_D è positivo, l'asset price è più alto nello stato normal che nello stato bad. Ci riferiremo all'equilibrio dove Q_D assume il suo valore più basso come equilibrio fondamentale mentre l'altro lo denoteremo equilibrio sunspot-like.

Nell'equilibrio fondamentale, l'asset price risulta diverso tra lo stato normal e quello bad solo se il dividendo differisce tra i due stati ($Q_D \rightarrow 0$ quando $A_D \rightarrow 0$). Al contrario, l'asset price risulta diverso tra i due stati nell'equilibrio sunspot-like anche quando il dividendo rimane uguale. Quando $A_D \rightarrow 0$, Q_D converge a $k(\lambda p_D)^{-1}$, che è il valore dell'equilibrio puro sunspot ricavato già in precedenza.

Nell'equilibrio fondamentale nello stato $k = N, B$ si ha:

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_k(1 - p_k) \left(\frac{1}{2\lambda p_D} \right)^2 [k - (k^2 - 4R\lambda p_D A_D)^{0.5}]^2$$

L'equazione mostra che il rischio è più alto nello stato bad poiché $p_B(1 - p_B) > p_N(1 - p_N)$. Il rischio tende a zero quando il dividendo diventa identico nei due stati ($A_D \rightarrow 0$).

I determinanti del rischio sono differenti nell'equilibrio sunspot-like. Nello stato k si ha:

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_k(1 - p_k) \left(\frac{1}{2\lambda p_D} \right)^2 [k + (k^2 - 4R\lambda p_D A_D)^{0.5}]^2$$

Si ha ancora che il rischio è più alto nello stato bad ma il rischio aumenta in entrambi gli stati quando $A_D \rightarrow 0$.

La *Figura 11* mostra sia il prezzo dell'asset, che il suo rischio. Il rischio è definito come la deviazione standard del prezzo per il prossimo periodo diviso il prezzo attuale. Si assume che $p_N = 0.99$ cosicché un passaggio allo stato Bad risulta abbastanza raro. La soluzione è fatta al variare di p_B .

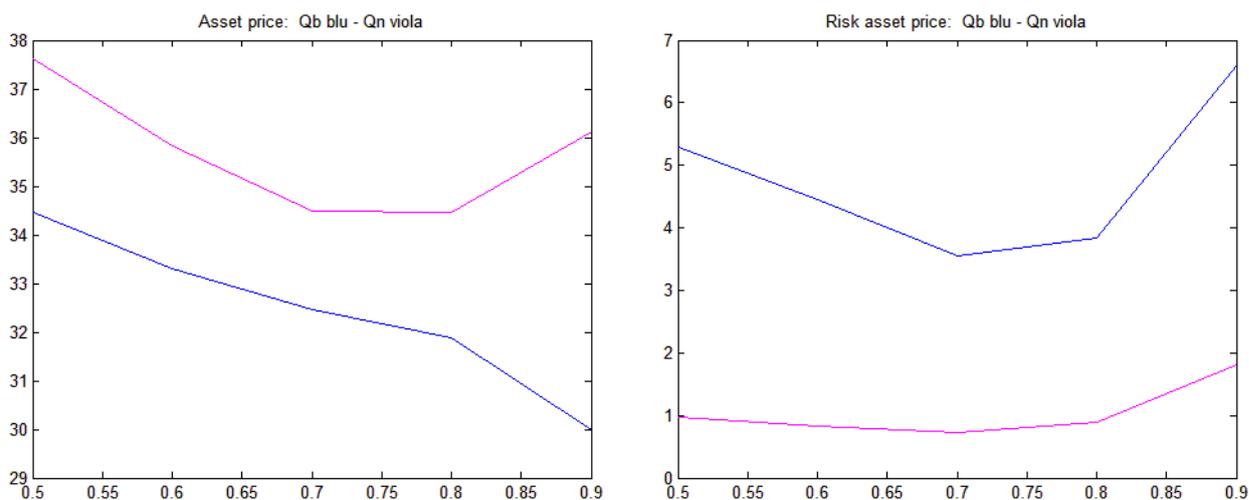


Figura 11 Variare dell'asset price e dell'asset price risk all'equilibrio sunspot al variare di p_B . Il rischio è definito come deviazione standard del prezzo per il prossimo periodo diviso il prezzo attuale. $p_N = 0.99$. I valori sono moltiplicati per un fattore 100 per renderli più leggibili

Indipendentemente dal valore di p_B si osserva che un passaggio dallo stato N a quello B porta a un enorme picco nel rischio e a un calo nel valore dell'asset.

4.3.3 *RISCHIO PANICO*

Infine consideriamo una situazione che combini elementi sia degli equilibri sunspot che “sunspot-like” analizzati finora. In aggiunta al processo di Markov per il fondamentale tra lo stato B e N, estendiamo il modello introducendo una variabile sunspot a due stati indicizzati come 1 e 2. Il dividendo non è influenzato dal fatto che siamo in 1 o in 2. La presenza della variabile sunspot a due stati ci permette un’analisi più ricca del rischio panico. È utile pensare a questa variabile come una variabile che cambia le attese tra basso rischio nello stato 1 ad alto rischio nello stato 2. Si può pensare allo stato 2 come ad uno “stato di panico”. Vogliamo mostrare che mentre questo stato di panico non è causato da un cambiamento nei fondamentali (i dividendi), l’entità del panico dipende dal livello del fondamentale.

Assumiamo che la variabile di stato sunspot sia incorrelata con il fondamentale. Sia in 1 che in 2, la probabilità di restare nello stesso stato è p , $p^n > 0.5$ rispettivamente per gli agenti razionali e i noise trader. Il modello ha ora quattro possibili stati, che dipendono dai valori del fondamentale e del sunspot: (N, 1), (N, 2), (B, 1) e (B, 2). Definiamo il prezzo dell’asset in questi stati rispettivamente come $Q_N(1)$, $Q_N(2)$, $Q_B(1)$ e $Q_B(2)$.

Determiniamo il prezzo dell’asset in ogni stato risolvendo la condizione d’equilibrio per ciascun stato. Definiamo infine $Q_D(k) = Q_N(k) - Q_B(k)$ per $k = 1, 2$.

Proposizione 5: *Assumiamo che il fondamentale A_t segue un processo di Markov come nella proposizione 4. Assumiamo inoltre che $A_D < A^{max}$ e che $A_B < A_5$. Allora esistono 4 equilibri. I primi due sono gli stessi equilibri della*

proposizione 4, indipendentemente dal fatto che si è nello stato 1 o 2. Nell'equilibrio 3 abbiamo:

$$Q_D(2) > Q_D(1) > 0$$

$$Q_B(2) - Q_B(1) < Q_N(2) - Q_N(1) < 0$$

Equilibrio 4 è analogo all'equilibrio 3, dove il ruolo dello stato 1 e 2 sono scambiati. □

Dimostrazione in appendice 6.5.

Un passaggio dallo stato 1 allo stato 2 comporta un aumento nel rischio e un calo nell'asset price, che risulta infatti più basso proprio nello stato 2. Ci sono aspetti che caratterizzano il ruolo del fondamentale durante e dopo un rischio di panico, cosa che già era presente nell'articolo di Bacchetta. Per prima cosa il panico non è causato da un cambiamento nel fondamentale, in quanto è causato solo da un passaggio di stato tra 1 e 2 e non da un passaggio tra lo stato N e B. Secondo, il panico ha un impatto più ampio quando inizialmente il fondamentale è debole (il calo nell'asset price durante il panico è maggiore quando siamo nello stato B piuttosto che nello stato N). Infine dopo un panico l'asset price diventa più volatile.

La *Figura 12* produce una illustrazione numerica dei risultati della proposizione 5 per una particolare parametrizzazione. La probabilità di restare nello stato N è $p_N = 0.99$ per gli agenti razionali e $p_N^n = 0.97$ per i noise traders, mentre la probabilità di restare nello stato B sono $p_B = 0.9$ e $p_B^n = 0.89$. Le probabilità che la variabile sunspot rimanga la stessa sono $p = 0.99$ e $p^n = 0.9$. La figura considera il seguente esperimento. Si inizia nello stato $(N, 1)$ nel periodo $[0,1]$ dove il dividendo è al suo valore normale di $A_N = 1$ e si è nello stato 1 di non panico. Al tempo 2, $(B, 1)$, il dividendo cala del

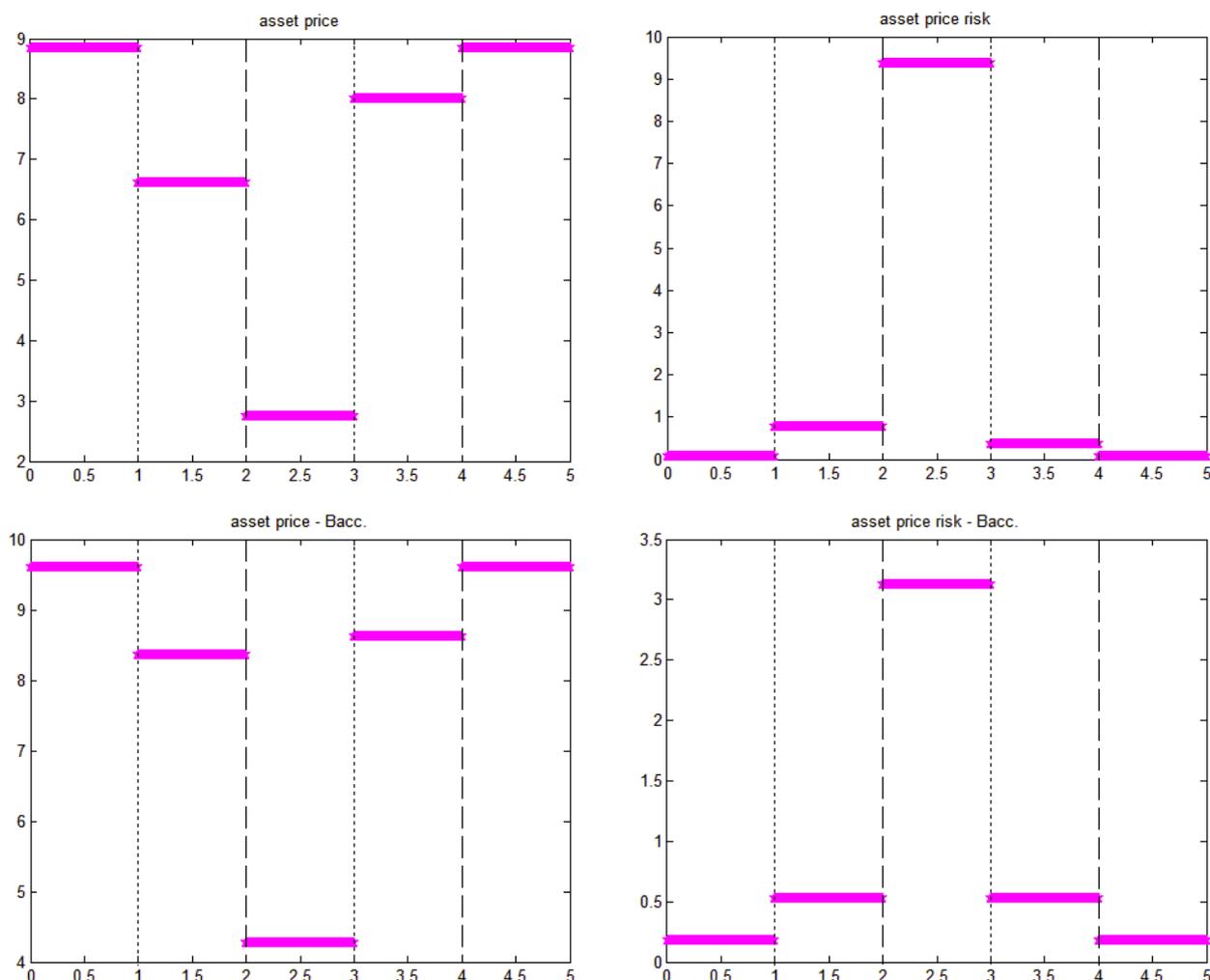


Figura 12 Grafici dei risultati della proposizione 5 del nostro modello paragonati ai risultati del modello di Bacchetta et.al(2011). Sequenza degli stati: (N,1) (B,1) (B,2) (N,2) (N,1). Valori in termini assoluti per entrambi i grafici. Nel nostro modello in questo esempio abbiamo preso $\eta = 0.4$, e in entrambi $p_N^n < p_N$ && $p^n < p$

10% cosicché il suo valore $A_B = 0.9$ ma si rimane nello stato 1 di non panico. Nel periodo 3 si passa allo stato di panico (B, 2), dove il fondamentale rimane ancora $A_B = 0.9$. Nel periodo 4 il fondamentale ritorna al suo valore normale $A_N = 1$ ma si rimane nello stato di panico (2), quindi si è nel caso (N, 2). Infine nell'ultimo periodo si ritorna allo stato (N, 1). Vengono riportati sia l'asset price che l'asset price risk per entrambi i modelli, dove abbiamo assunto $\eta = 0.4$. La figura evidenzia che il livello del fondamentale gioca un

ruolo chiave durante lo stato di panico. Il panico è maggiore quando il fondamentale è debole (nello stato B) al tempo in cui si verifica il panico. Tuttavia una volta raggiunto lo stato di panico, l'asset price diventa molto più sensibile ai cambiamenti nei fondamentali. Un passaggio del fondamentale dallo stato B allo stato N alza il prezzo molto di più quando siamo nello stato 2 (si guardi il passaggio da periodo 3 a 4) rispetto a quando siamo nello stato 1 (si guardi il passaggio da periodo 1 a 2). La differenza principale tra i due modelli sta nel fatto che la presenza dei Noise traders abbassa il prezzo di equilibrio e aumenta il rischio in valori assoluti, concorde con quanto abbiamo riscontrato finora dato che abbiamo considerato la situazione in cui i noise traders sottostimano le probabilità.

5. CONCLUSIONI

Abbiamo sviluppato un semplice modello media-varianza introducendo nel modello già proposto da Bacchetta et al. (2011) la presenza dei Noise traders in percentuale variabile. Abbiamo confrontato i nostri risultati con quelli di partenza del modello base, per tutte le situazioni proposte: presenza di equilibri sunspot e sunspot-like, che evolvono sia con processo autoregressivo che con processo di Markov a due stati. Infine abbiamo paragonato le due situazioni in presenza di rischio panico. Il nostro scopo principale è stato poi verificare quanto la presenza dei noise traders possa influire in situazione di rischio panico, che è una delle cause della crisi sottolineate da Bacchetta et al (2011) nel loro articolo.

Dallo studio della behavioral finance, e in particolare dal modello di De Long et al. (1990) abbiamo dedotto che è ragionevole credere che la presenza dei noise traders influenza l'andamento dei prezzi nel mercato. In particolare loro arrivano a concludere che in situazioni intermedie i Noise traders riescono anche a ottenere guadagni più alti (in un modello a massimizzazione dell'utilità attesa con utilità esponenziali).

Per quanto riguarda i nostri risultati, abbiamo ricavato che i noise traders influenzano i prezzi di equilibrio in modo che questi seguono le aspettative. Infatti nel caso in cui utilizziamo un processo autoregressivo, se i noise traders sottostimano la media e sovrastimano la varianza, la loro presenza determina un abbassamento dei prezzi di equilibrio sunspot e sunspot-like, mentre l'equilibrio fondamentale ha una tendenza inversa. Nel caso in cui

sovrastimano la media e sottostimano la varianza, gli andamenti si invertono. Con il singolo processo di Markov otteniamo che nel puro equilibrio sunspot se, indipendentemente dal valore di p_B , i noise traders sottostimano la probabilità p_N allora i prezzi d'equilibrio di entrambi gli stati decrescono all'aumentare della percentuale di noise traders; comportamento inverso si ha invece se sovrastimano la probabilità. L'unico risultato contro corrente è dato dal caso in cui il processo di Markov influenza i dividendi, in cui indipendentemente dalle relazioni tra le probabilità i prezzi di equilibrio sunspot-like e fondamentale aumentano con la presenza dei noise traders. Infine la presenza dei noise traders non influenza sensibilmente l'andamento dei prezzi in caso di rischio panico, si riscontra una lieve diminuzione nel caso in cui vengono sottostimate le probabilità.

Dalle nostre analisi rimane aperta la domanda se questi risultati sono legati strettamente al modello analizzato o se invece il fatto che i prezzi seguano le credenze distorte dei noise traders possa essere riottenuto in generale.

6.APPENDICI

6.1 *PROPOSIZIONE 1*

Ipotizziamo che la soluzione sia

$$Q_t = Q - VS_t^2.$$

Sostituiamo a S_t la sua espressione. Calcoliamo dapprima il valore atteso e la varianza di Q_{t+1} per l'agente i:

$${}_tE[Q_{t+1}] = Q - V\rho^2 S_t^2 - V\sigma^2$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1}] = 4V^2\rho^2 S_t^2 \sigma^2 + V^2\omega^2$$

Calcoliamo infine le stesse quantità per l'agente n:

$${}_tE[Q_{t+1}] = Q - V\rho_1^2 S_t^2 - V\sigma_1^2$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1}] = 4V^2\rho_1^2 S_t^2 \sigma_1^2 + V^2\omega_1^2$$

Sostituendo queste quantità all'interno della nostra equazione otteniamo:

$$(1 - \eta)(A + Q - V\rho^2 S_t^2 - V\sigma^2 - RQ + RVS_t^2) + \eta(A + Q - V\rho_1^2 S_t^2 - V\sigma_1^2 - RQ + RVS_t^2) = \lambda(4V^2\rho^2 S_t^2 \sigma^2 + V^2\omega^2)$$

Uguagliando la parte costante di ambo i lati della nostra equazione e facendo lo stesso con i termini proporzionali a S_t^2 si ha:

$$\begin{cases} A + Q - V\sigma^2(1 - \eta) - RQ - \eta V\sigma^2_1 = \lambda V^2\omega^2 \\ RV - \eta V\rho_1^2 - (1 - \eta)V\rho^2 = \lambda 4V^2\rho^2\sigma^2 \end{cases}$$

Questo sistema ha due soluzioni. La prima è data da:

$$V = 0$$

$$Q = \frac{A}{R - 1}$$

che costituiscono l'equilibrio fondamentale. La seconda soluzione è data da:

$$V = \frac{R - \eta\rho_1^2 - (1 - \eta)\rho^2}{\lambda 4\rho^2\sigma^2}$$

$$Q = \frac{-\eta V\sigma^2_1 - \lambda V^2\omega^2 - V\sigma^2(1 - \eta) + A}{R - 1}$$

che danno l'equilibrio sunspot. L'ultima condizione da rispettare è che il prezzo Q_t sia sempre positivo. A tal fine calcoliamo numericamente una soglia A_1 tale per cui per ogni $A > A_1$ il prezzo Q_t resta certamente positivo.

6.2 PROPOSIZIONE 2

Se siamo nello stato N al tempo t si ha per l'agente i:

$${}_tE[Q_{t+1}] = p_N Q_N + (1 - p_N) Q_B$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1}] = p_N(1 - p_N)(Q_N - Q_B)^2$$

Per l'agente n:

$${}_tE[Q_{t+1}] = p_N^n Q_N + (1 - p_N^n) Q_B$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1}] = p_N^n(1 - p_N^n)(Q_N - Q_B)^2$$

Similmente se siamo nello stato B al tempo t si ha per l'agente i:

$${}_tE[Q_{t+1}] = p_B Q_B + (1 - p_B)Q_N$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1}] = p_B(1 - p_B)(Q_N - Q_B)^2$$

Per l'agente n:

$${}_tE[Q_{t+1}] = p_B^n Q_B + (1 - p_B^n)Q_N$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1}] = p_B^n(1 - p_B^n)(Q_N - Q_B)^2$$

Sostituendo queste quantità nella condizione di equilibrio, rispettivamente per lo stato N e B, si ottiene:

$$\begin{aligned} (1 - \eta)(A + p_N Q_N + (1 - p_N)Q_B - RQ_N) + \eta(A + p_N^n Q_N + (1 - p_N^n)Q_B - RQ_N) \\ = \lambda p_N(1 - p_N)(Q_N - Q_B)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \eta)(A + p_B Q_B + (1 - p_B)Q_N - RQ_B) + \eta(A + p_B^n Q_B + (1 - p_B^n)Q_N - RQ_B) \\ = \lambda p_B(1 - p_B)(Q_N - Q_B)^2 \end{aligned}$$

Prendendo la differenza tra queste due relazioni abbiamo:

$$kQ_D = \lambda p_D Q_D^2$$

Questa equazione ha due soluzioni, la prima è data da:

$$Q_D = 0$$

$$Q_N = Q_B = \frac{A}{R - 1}$$

che fornisce l'equilibrio fondamentale. La seconda soluzione fornisce l'equilibrio sunspot con

$$Q_D = \frac{k}{\lambda p_D}$$

Sostituendo quest'ultima nell'equazione di equilibrio per lo stato B e usando $Q_N = Q_B + Q_D$ abbiamo:

$$Q_B = \frac{1}{R-1} (A - \lambda p_B (1 - p_B) Q_D^2 + (1 - (1 - \eta) p_B - \eta p_B^n) Q_D)$$

Usando l'espressione per Q_D , Q_B è positivo quando $A > A_2$. Poiché Q_N è più grande di Q_B , anche esso sarà positivo.

Infine bisogna mostrare che l'asset price è sempre più alto nell'equilibrio fondamentale. Per questo è sufficiente mostrare che $Q_N < \frac{A}{R-1}$. Usando l'espressione per Q_B e $Q_N = Q_B + Q_D$, questa condizione è soddisfatta quando $-\lambda p_B (1 - p_B) Q_D + R - (1 - \eta) p_B - \eta p_B^n < 0$ che è verificata sempre sotto le nostre assunzioni.

6.3 PROPOSIZIONE 3

Per prima cosa assumiamo che $Q_t = Q + vS_t - VS_t^2$. Sostituiamo a S_t la sua espressione.

Il valore atteso e la varianza di $Q_{t+1} + A_{t+1}$ per l'agente i sono:

$${}_t E[Q_{t+1} + A_{t+1}] = Q + A + (v + m)\rho S_t - V\rho^2 S_t^2 - V\sigma^2$$

$${}_t \text{Var}[Q_{t+1} + A_{t+1}] = (v + m - 2V\rho S_t)^2 \sigma^2 + V^2 \omega^2$$

Calcoliamo infine le stesse quantità per l'agente n:

$${}_t E[Q_{t+1} + A_{t+1}] = Q + A + (v + m)\rho_1 S_t - V\rho_1^2 S_t^2 - V\sigma_1^2$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1} + A_{t+1}] = (v + m - 2V\rho_1 S_t)^2 \sigma^2_1 + V^2 \omega^2_1$$

Sostituendo queste quantità nella condizione d'equilibrio otteniamo:

$$\begin{aligned} (1 - \eta)(Q + A + (v + m)\rho S_t - V\rho^2 S_t^2 - V\sigma^2 - R(Q + vS_t - VS_t^2)) \\ + \eta \left(Q + A + (v + m)\rho_1 S_t - V\rho_1^2 S_t^2 - V\sigma^2_1 \right. \\ \left. - R(Q + vS_t - VS_t^2) \right) = \lambda((v + m - 2V\rho_1 S_t)^2 \sigma^2_1 + V^2 \omega^2_1) \end{aligned}$$

Uguagliando i termini proporzionali a S_t^2 e i termini costanti del lato destro e sinistro della nostra equazione otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (RV - (1 - \eta)V\rho^2 - \eta V\rho_1^2) = 4\lambda V^2 \rho^2 \sigma^2 \\ (1 - \eta)(v + m)\rho + \eta(v + m)\rho_1 - Rv = -4\lambda \sigma^2 (v + m)V\rho \\ Q + A - RQ - (1 - \eta)V\sigma^2 - \eta V\sigma^2_1 = \lambda(\sigma^2 (v + m)^2 + V^2 \omega^2) \end{cases}$$

La prima equazione implica che $V=0$ oppure $V = \frac{R - (1 - \eta)\rho^2 - \eta\rho_1^2}{4\lambda\rho^2\sigma^2}$

Quando $V=0$ le altre due equazioni implicano che:

$$v = \frac{((1 - \eta)\rho + \eta\rho_1)m}{R - (1 - \eta)\rho - \eta\rho_1}$$

$$Q = \frac{1}{R - 1} \left(A - \lambda \frac{R^2 m^2 \sigma^2}{(R - (1 - \eta)\rho - \eta\rho_1)^2} \right)$$

Questo è l'equilibrio fondamentale.

Quando $V = \frac{R - (1 - \eta)\rho^2 - \eta\rho_1^2}{4\lambda\rho^2\sigma^2}$ le altre due equazioni implicano:

$$v = \frac{(\eta\rho_1 - R - \rho)m}{\rho - R\rho - \eta\rho_1 + R}$$

$$Q = \frac{1}{R-1} (A - (1-\eta)V\sigma^2 - \eta V\sigma_1^2 - \lambda(V^2\omega^2 + (v+m)^2\sigma^2))$$

Questo è l'equilibrio "sunspot-like". L'ultima condizione da rispettare è che il prezzo Q_t sia sempre positivo. A tal fine calcoliamo numericamente una soglia A_3 tale per cui per ogni $A > A_3$ il prezzo Q_t resta certamente positivo.

6.4 PROPOSIZIONE 4

Se siamo nello stato N al tempo t, allora si ha per l'agente i:

$${}_tE[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_N(Q_N + A_N) + (1 - p_N)(Q_B + A_B)$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_N(1 - p_N)(Q_D + A_D)^2$$

Mentre per l'agente n:

$${}_tE[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_N^n(Q_N + A_N) + (1 - p_N^n)(Q_B + A_B)$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_N^n(1 - p_N^n)(Q_D + A_D)^2$$

Similmente se siamo nello stato B al tempo t, allora per l'agente i:

$${}_tE[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_B(Q_B + A_B) + (1 - p_B)(Q_N + A_N)$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_B(1 - p_B)(Q_D + A_D)^2$$

Mentre per l'agente n:

$${}_tE[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_B^n(Q_B + A_B) + (1 - p_B^n)(Q_N + A_N)$$

$${}_t\text{Var}[Q_{t+1} + A_{t+1}] = p_B^n(1 - p_B^n)(Q_D + A_D)^2$$

Sostituendo queste quantità, usando $Q_N = Q_B + Q_D$ e $A_N = A_B + A_D$, la condizione d'equilibrio rispettivamente per lo stato N, B può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} & ((1 - \eta)p_N + \eta p_N^n)(A_D + Q_D) - RQ_D + A_B - (R - 1)Q_B \\ & = \lambda p_N(1 - p_N)(Q_D + A_D)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((1 - \eta)(1 - p_B) + \eta(1 - p_B^n))(A_D + Q_D) + A_B - (R - 1)Q_B \\ & = \lambda p_B(1 - p_B)(Q_D + A_D)^2 \end{aligned}$$

Prendendo la differenza e definendo $x = (A_D + Q_D)$ abbiamo:

$$\lambda p_D x^2 - kx + RA_D = 0$$

Questa equazione di secondo grado ha due soluzioni quando $A_D < \frac{k^2}{4k\lambda p_D}$.

Queste due soluzioni sono:

$$x = \frac{1}{2\lambda p_D} (k \pm (k^2 - 4R\lambda p_D A_D)^{0.5})$$

Usando $Q_D = x - A_D$ ricaviamo:

$$Q_D = \left[\frac{k}{2\lambda p_D} - A_D \right] \pm \frac{1}{2\lambda p_D} (k^2 - 4R\lambda p_D A_D)^{0.5}$$

Il corrispondente valore di Q_B può essere calcolato dall'equazione d'equilibrio per lo stato B. Sostituendo $Q_D = x - A_D$ e usando $x^2 = \frac{(kx - RA_D)}{\lambda p_D}$

l'equazione d'equilibrio per lo stato B diventa:

$$\begin{aligned} Q_B = & \frac{A_B}{R - 1} + \frac{(1 - p_B)}{(R - 1)p_D} [(1 - \eta)(p_D - kp_B)(A_D + Q_D) + Rp_B A_D] \\ & + \frac{\eta(1 - p_B^n)}{R - 1} (A_D + Q_D) \end{aligned}$$

L'ultima cosa che resta da verificare è che l'asset price è sempre positivo. Per prima cosa notiamo che Q_D è positivo in entrambi gli equilibri. Questo segue dall'equazione in x , che implica che $x = \frac{\lambda p_D}{k} x^2 + \frac{R}{k} A_D$, così che $Q_D = x - A_D = \frac{\lambda p_D}{k} x^2 + \frac{R-k}{k} A_D$. Questo è positivo poiché $A_D > 0$ e $R - k > 0$. L'asset price è sempre positivo se lo è nel valore più basso di Q_B . Sostituendo la più alta delle due radici di x nell'espressione

$$Q_B = \frac{A_B}{R-1} + \frac{(1-p_B)}{(R-1)p_D} [(1-\eta)(p_D - kp_B)x + Rp_B A_D] + \frac{\eta(1-p_B^n)}{R-1} x$$

l'espressione risultante è più grande di zero quando $A_B > A_4$.

6.5 PROPOSIZIONE 5

Denotiamo il payoff relativo tra gli stati $(N, 1)$, $(B, 1)$ con $x = Q_D(1) + A_D$ e il payoff relativo tra gli stati $(N, 2)$, $(B, 2)$ con $y = Q_D(2) + A_D$. Il payoff relativo tra $(B, 1)$ e $(B, 2)$ è $Q_B(1) - Q_B(2)$. Queste tre quantità vengono calcolate usando un sistema di tre equazioni relative di equilibrio. La prima è la differenza tra la condizione d'equilibrio nello stato $(N, 1)$ e la sua controparte nello stato $(B, 1)$:

(Equazione 1)

$$\begin{aligned}
 & (1 - \eta)\{p(1 - p_N - p_B)x + (1 - p)(1 - p_N - p_B)y\} \\
 & + \eta\{p^n(1 - p_N^n - p_B^n)x + (1 - p^n)(1 - p_N^n - p_B^n)y\} + Rx \\
 & - RA_D \\
 & = \lambda p_D(1 - p)y^2 + \lambda p_D p x^2 \\
 & + \lambda p(1 - p)\{[(1 - p_B)^2 - (p_N)^2](x - y)^2 \\
 & + 2(1 - p_N - p_B)(x - y)(Q_B(1) - Q_B(2))\}
 \end{aligned}$$

La seconda è la differenza tra la condizione d'equilibrio nello stato $(N, 2)$ e la sua controparte nello stato $(B, 2)$:

(Equazione 2)

$$\begin{aligned}
 & (1 - \eta)\{(1 - p)(1 - p_N - p_B)x + p(1 - p_N - p_B)y\} \\
 & + \eta\{(1 - p^n)(1 - p_N^n - p_B^n)x + (p^n)(1 - p_N^n - p_B^n)y\} + Ry \\
 & - RA_D \\
 & = \lambda p_D(1 - p)x^2 + \lambda p_D p y^2 \\
 & + \lambda p(1 - p)\{[(1 - p_B)^2 - (p_N)^2](x - y)^2 \\
 & + 2(1 - p_N - p_B)(x - y)(Q_B(1) - Q_B(2))\}
 \end{aligned}$$

La terza è la differenza tra la condizione d'equilibrio nello stato $(B, 1)$ e la sua controparte nello stato $(B, 2)$:

(Equazione 3)

$$\begin{aligned}
 & (1 - \eta)(2p - 1)(1 - p_B)(x - y) + \eta(2p^n - 1)(1 - p_B^n)(x - y) \\
 & - [R - (2p - 1)(1 - \eta) - \eta(2p^n - 1)](Q_B(1) - Q_B(2)) \\
 & = \lambda(2p - 1)p_B(1 - p_B)(x + y)(x - y)
 \end{aligned}$$

Queste tre equazioni insieme danno la soluzione per tutti i prezzi relativi. Per ottenere la soluzione per i prezzi assoluti utilizziamo la condizione d'equilibrio per lo stato $(N, 1)$:

(Equazione 4)

$$\begin{aligned}
 & (1 - \eta)\{p[(1 - p_N)(Q_B(1) + A_B) + p_N(Q_N(1) + A_N)] \\
 & \quad + (1 - p)[[(1 - p_N)(Q_B(2) + A_B) + p_N(Q_N(2) + A_N)]]\} \\
 & \quad + \eta\{p^n[p_N^n(Q_N(1) + A_N) + (1 - p_N^n)(Q_B(1) + A_B)] \\
 & \quad + (1 - p^n)[p_N^n(Q_N(2) + A_N) + (1 - p_N^n)(Q_B(2) + A_B)]\} \\
 & \quad - RQ_N(1) \\
 & = \lambda p_N(1 - p_N)(px^2 + (1 - p)y^2) + \lambda p(1 \\
 & \quad - p)[p_N(x - y) + (Q_B(1) - Q_B(2))]^2
 \end{aligned}$$

Iniziamo prendendo la differenza tra (1) e (2):

$$\begin{aligned}
 & [(1 - \eta)(2p - 1)(1 - p_N - p_B) + \eta(2p^n - 1)(1 - p_N^n - p_B^n) + R](x - y) \\
 & = \lambda(2p - 1)p_D(x + y)(x - y)
 \end{aligned}$$

Una soluzione è $x = y$. Insieme con (1) questo implica:

$$\lambda p_D x^2 - kx + RA_D = 0$$

Che ha due soluzioni:

$$x = y = \frac{k \pm [k^2 - 4R\lambda p_D A_D]^{0.5}}{2\lambda p_D}$$

(3) implica che $Q_B(1) = Q_B(2)$. Questi corrispondono ai primi due equilibri nella proposizione 5. In ogni equilibrio l'asset price è lo stesso nello stato 1 e 2, dipende solo se siamo nello stato N e B.

Quando $x \neq y$:

$$x + y = \frac{[(1 - \eta)(2p - 1)(1 - p_N - p_B) + \eta(2p^n - 1)(1 - p_N^n - p_B^n) + R]}{\lambda(2p - 1)p_D}$$

(3) implica:

$$Q_B(1) - Q_B(2) = \delta(y - x)$$

dove:

$$\delta = \frac{[(1-\eta)(2p-1)(1-p_B)(p_B(1-p_N-p_B)-p_D) + \eta(2p^n-1)(p_B(1-p_B)(1-p_N^n-p_B^n)-p_D(1-p_B^n)) + Rp_B(1-p_B)]}{p_D[R-(2p-1)(1-\eta)-\eta(2p^n-1)]}$$

Abbiamo dimostrato (numericamente: si veda codice *figura 12*) che $\delta > 1$.

La somma di (1) e (2) implica che:

(Equazione 5)

$$y - x = Q_D(2) - Q_D(1) = \pm[v(k(x+y) - 2RA_D - \lambda p_D(x^2 + y^2))]^{0.5}$$

dove:

$$v = \frac{1}{2\lambda p(1-p)[(1-p_B)^2 - (p_N)^2 - 2(1-p_N-p_B)\delta]}$$

Un equilibrio esiste solo se il termine sotto radice è positivo. Si dimostra (numericamente) che $v > 0$. Il numeratore invece è positivo quando:

$$A_D < A^{max} = \frac{[k(x+y) - \lambda p_D(x^2 + y^2)]}{2R}$$

Equilibrio 3 è il valore di (5) con il segno positivo mentre l'equilibrio 4 è quello col segno negativo. Dobbiamo ora dimostrare che l'asset price è positivo in tutti gli equilibri. Analizzeremo il caso dell'equilibrio 3, il quarto è analogo.

Da (5) ricaviamo: $Q_D(2) > Q_D(1)$ e $Q_B(1) - Q_B(2) = \delta(Q_D(2) - Q_D(1)) > 0$. Poiché $Q_D(1) > 0$ allora $Q_D(2) > 0$, cosicchè $Q_N(2) > Q_B(2)$. Infine si ricava che: $Q_N(1) > Q_B(1) > Q_B(2)$. Quindi è sufficiente mostrare che $Q_B(2)$ è positivo. Ricaviamo $Q_B(2)$ dall'equazione (4):

$$Q_B(2) = \frac{-A_B + \beta}{1 - R}$$

dove:

$$\begin{aligned} \beta = & -(1 - \eta)\{pp_N(x - y) + p_N y + p\delta(y - x)\} \\ & - \eta\{p^n p_N^n(x - y) + p_N^n y + p^n \delta(y - x)\} \\ & + \frac{R}{2}((x + y) + (x - y) + 2\delta(y - x) - 2A_D) \\ & + \lambda p_N(1 - p_N)(p(x - y)(x + y) + y^2) + \lambda p(1 \\ & - p)(p_N(x - y) + \delta(y - x))^2 \end{aligned}$$

$$Q_B(2) = \frac{A_B - \beta}{R - 1} > 0$$

$$A_B > \beta = A_5$$

6.6 CODICI MATLAB

6.6.1 FIGURA 2

```

%% Caso puro sunspot (m=0):
% Processo Autoregressivo, varia eta
% caso 1: rho1>rho  &&  sigma1^2<sigma^2

close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.04;
lambda=0.5;
rho=0.4;
sigma=sqrt(4/12);
rho1=0.738083;
    
```

```

signal=sqrt(sigma^2*rho/rho1);
epsilon=1;
omega=0.3;
eta=[0:0.01:1];

% processo autoregressivo
%si vuole simulare T=100 valori da un AR(1) S_t=rho*S_t-1+epsilon_t

e=-epsilon.*rand(length(eta),100)+2*epsilon;
S_t=zeros(length(eta),100);
S_t(:,1)=e(:,1);

for i=2:100
    S_t(:,i)=rho*S_t(:,i-1)+e(:,i);
end

%calcolo soglia
A=1;
b=-2;
V=(R-eta*rho1^2-(1-eta)*rho^2)/(lambda*4*rho^2*sigma^2);
while(b<0)
    Q=(A-lambda*V.^2*omega^2-eta.*V*sigma1^2-(1-eta).*V*sigma^2)/(R-1);
    Q_t = zeros(length(eta),100);
    for ii=1:length(eta)
        Q_t(ii,:)=Q(ii)-V(ii)*(S_t(ii,:)).^2;
    end
    a=min(Q_t,[],2);
    b=min(a);
    A=A+0.01;
end

%calcolo dei parametri del prezzo di equilibrio
V=(R-eta*rho1^2-(1-eta)*rho^2)/(lambda*4*rho^2*sigma^2);
Aloro=A;
Vloro=(R-rho^2)/(lambda*4*rho^2*sigma^2);
Qloro=(Aloro-lambda*Vloro.^2*omega^2-Vloro*sigma^2)/(R-1);
Q=(A-lambda*V.^2*omega^2-eta.*V*sigma1^2-(1-eta).*V*sigma^2)/(R-1);

%prezzo di equilibrio sunspot
Q_t = zeros(length(eta),100);
for ii=1:length(eta)
    Q_t(ii,:)=Q(ii)-V(ii)*(S_t(ii,:)).^2;
end

%prezzo equilibrio fondamentale
fond=A/(R-1);

%Plot dei risultati

%parametri del prezzo
figure;

```

```

plot(eta,V,'m',0,Vloro,'pb');
title('V');
figure;
plot(eta,Q,'r',0,Qloro,'pb');
title('Q');

%prezzo equilibrio sunspot
T=[1:100];
figure;
plot(T,Q_t(1,:), 'm', T,Q_t(50,:), 'g', T,Q_t(end,:), 'b', T,fond, 'xr');
title('eta=0 viola - eta=0.5 verde - eta=1 blu - eq.fond rosso');

```

6.6.2 FIGURA 3

```

%% Caso puro sunspot (m=0):
% Processo Autoregressivo, varia eta
% caso 2: rho1<rho && sigma1^2>sigma^2

close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.04;
lambda=0.5;
rho=0.6;
epsilon=3;
sigma=sqrt(((2*epsilon)^2)/12);
rho1=0.5544;
sigma1=sqrt(sigma^2*rho/rho1);
omega=0.3;
eta=[0:0.01:1];
% processo autoregressivo
%si vuole simulare T=100 valori da un AR(1) S_t=rho*S_t-1+epsilon_t

e=-epsilon.*rand(length(eta),100)+2*epsilon;
S_t=zeros(length(eta),100);
S_t(:,1)= e(:,1);

for i=2:100
    S_t(:,i)=rho*S_t(:,i-1)+e(:,i);
end

%calcolo soglia
A=1;
b=-2;

```

```

V=(R-eta*rho1^2-(1-eta)*rho^2)/(lambda*4*rho^2*sigma^2);
while (b<0)
    Q=(A-lambda*V.^2*omega^2-eta.*V*sigma1^2-(1-eta).*V*sigma^2)/(R-1);
    Q_t = zeros(length(eta),100);
    for ii=1:length(eta)
        Q_t(ii,:)=Q(ii)-V(ii)*(S_t(ii,:)).^2;
    end
    a=min(Q_t,[],2);
    b=min(a);
    A=A+0.01;
end

%calcolo dei parametri del prezzo di equilibrio
V=(R-eta*rho1^2-(1-eta)*rho^2)/(lambda*4*rho^2*sigma^2);
Aloro=A;
Vloro=(R-rho^2)/(lambda*4*rho^2*sigma^2);
Qloro=(Aloro-lambda*Vloro.^2*omega^2-Vloro*sigma^2)/(R-1);
Q=(A-lambda*V.^2*omega^2-eta.*V*sigma1^2-(1-eta).*V*sigma^2)/(R-1);

%prezzo di equilibrio sunspot
Q_t = zeros(length(eta),100);
for ii=1:length(eta)
    Q_t(ii,:)=Q(ii)-V(ii)*(S_t(ii,:)).^2;
end

%prezzo equilibrio fondamentale
fond=A/(R-1);

%calcolo medie prezzi
media0=mean(Q_t(1,:));
media05=mean(Q_t(50,:));
medial=mean(Q_t(end,:));

%Plot dei risultati

%parametri del prezzo
figure;
plot(eta,V,'m',0,Vloro,'pb');
title('V');
figure;
plot(eta,Q,'r',0,Qloro,'pb');
title('Q');

%prezzo equilibrio sunspot e fondamentale
T=[1:100];
figure;
plot(T,Q_t(1,:),'m',T,Q_t(50,:),'g',T,Q_t(end,:),'b',T,fond,'xr');
title('prezzi: eta=0 viola - eta=0.5 verde - eta=1 blu - eq.fond rosso');
figure;
plot(T,media0,'pm',T,media05,'pg',T,medial,'pb');
title('medie: eta=0 viola - eta=0.5 verde - eta=1 blu');

```

6.6.3 *FIGURE 4 e 5*

```

%% Caso puro sunspot (M=0):
% processo di Markov a due stati, varia eta
% al variare dei parametri del modello
% per diverse relazioni tra pn e pn1

close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.04;
pn=0.9;
pb=0.7;
pn1=0.99;
pb1=0.65;
pd=pb*(1-pb)-pn*(1-pn);
lambda=0.5;
eta=[0:0.01:1]';
k=zeros(length(eta),1);
kloro=1+R+(-pn-pb);
for ii=1:length(eta)
    k(ii)=1+R+(1-eta(ii))*(-pn-pb)+eta(ii)*(-pn1-pb1);
end

%Calcolo della soglia per i valori dei dividendi per il nuovo modello
%e per il modello originale
A2=(pb*(1-pb).*k./pd-(1-(1-eta).*pb-eta.*pb1)).*k./(lambda*pd);
A2_loro=(kloro*pb/pd-1)*((1-pb)*kloro)/(pd*lambda);
plot(eta,A2,'m',0,A2_loro,'pb');
title('A2')

%per rispettare certamente il vincolo
A=A2(1)+1;
Aloro=A2_loro+1;

%Calcolo del prezzo di equilibrio sunspot
Qd=k./(lambda*pd);
Qb=(A-lambda*pb*(1-pb).*Qd.^2+(1-(1-eta).*pb-eta.*pb1).*Qd)./(R-1);
Qn=Qd+Qb;
Qd_loro=kloro/(lambda*pd);
Qb_loro=(A-lambda*pb*(1-pb)*Qd_loro.^2+(1-pb)*Qd_loro)/(R-1);
Qn_loro=Qd_loro+Qb_loro;

%equilibrio fondamentale
fond=A/(R-1);

%Plot dei risultati
figure;

```

```

plot(eta,Qd,'m',0,Qd_loro,'pb');
title('Qd');
figure;
plot(eta,Qb,'m',0,Qb_loro,'pb');
title('Qb');
figure;
plot(eta,Qn,'m',0,Qn_loro,'pb');
title('Qn');
figure;
plot(eta,fond,'pg');
title('equilibrio fondamentale');

```

6.6.4 FIGURA 6

```

%% Caso puro sunspot:
% processo di Markov
% Asset Price e Asset price risk
close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.1;
pn=0.99;
pb=[0.5:0.1:0.99]';
pn1=0.9;
pb1=0.65;
pd=pb.*(1-pb)-pn.*(1-pn);
lambda=0.5;
eta=0.4;
k=zeros(length(pb),1);
for ii=1:length(pb)
    k(ii)=1+R+(1-eta)*(-pn-pb(ii))+eta*(-pn1-pb1);
end

%calcolo soglia dividendo
A2=(pb.*(1-pb).*k./pd-(1-(1-eta).*pb-eta.*pb1)).*k./(lambda.*pd);
% per rispettare certamente il vincolo
A=A2(end)+1;

%Calcolo prezzo di equilibrio
Qd=k./(lambda.*pd);
Qb=(A-lambda.*pb.*(1-pb).*Qd.^2+(1-(1-eta).*pb-eta.*pb1).*Qd)./(R-1);
Qn=Qd+Qb;

%Calcolo dell'asset price risk
asset_price_risk_n=((pn*(1-pn).*Qd.^2).^0.5)./Qn;

```

```

asset_price_risk_b=((pb.*(1-pb).*Qd.^2).^0.5)./Qb;

%Plot dei risultati
figure;
plot(pb,Qb,'m',pb,Qn,'b');
title('Asset price: Qb viola - Qn blu');
figure;
plot(pb,asset_price_risk_n*100,'b',pb,asset_price_risk_b*100,'m');
title('Risk asset price: Qb viola - Qn blu');

%% Caso puro sunspot:
% processo di Markov modello Bacchetta
% Asset price e Asset price risk
close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.1;
pn=0.99;
pb=[0.5:0.1:0.99]';
pd=pb.*(1-pb)-pn.*(1-pn);
lambda=0.5;
k=1+R+(-pn-pb);
A=1;

%calcolo soglia dividendo
A2=((k.*pb./pd)-1).*(1-pb.*k)./(pd.*lambda));

%Calcolo prezzo di equilibrio
Qd=k./(lambda.*pd);
Qb=(A-lambda.*pb.*(1-pb).*Qd.^2+(1-pb).*Qd)./(R-1);
Qn=Qd+Qb;

%Calcolo dell'asset price risk
asset_price_risk_n=((pn*(1-pn).*Qd.^2).^0.5)./Qn;
asset_price_risk_b=((pb.*(1-pb).*Qd.^2).^0.5)./Qb;

%Plot dei risultati
figure;
plot(pb,Qb,'m',pb,Qn,'b');
title('Asset price (Bacc.): Qb viola - Qn blu');
figure;
plot(pb,asset_price_risk_n*100,'b',pb,asset_price_risk_b*100,'m');
title('Risk asset price (Bacc.): Qb viola - Qn blu');

```

6.6.5 **FIGURA 7**

```

%% Caso sunspot_like (m~0)
% Processo Autoregressivo, varia eta
% caso 1: rho1>rho  &&  sigma1<sigma
close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.04;
lambda=0.5;
rho=0.4;
sigma=sqrt(4/12);
rho1=0.738083;
sigma1=sqrt(sigma^2*rho/rho1);
epsilon=1;
omega=0.3;
eta=[0:0.01:1];
m=1.5;

% processo autoregressivo
%si vuole simulare T=100 valori da un AR(1) S_t=rho*S_t-1+epsilon_t
e=-epsilon.*rand(length(eta),100)+2*epsilon;
S_t=zeros(length(eta),100);
S_t(:,1)=e(:,1);
for i=2:100
    S_t(:,i)=rho*S_t(:,i-1)+e(:,i);
end

%Calcolo della soglia
A=1;
b=-2;
V=(R-(1-eta).*rho^2-eta.*rho1^2)./(4*lambda*rho^2*sigma^2);
v=((eta.*rho1-R-rho).*m)./(rho-R*rho-eta.*rho1+R);
while(b<0)
    Q=(A-(1-eta).*V.*sigma^2-eta.*V.*sigma1.^2-lambda.*...
        (V.^2.*omega^2+(v+m).^2.*sigma^2))./(R-1);
    Q_t = zeros(length(eta),100);
    for ii=1:length(eta)
        Q_t(ii,:)=Q(ii)+v(ii)*S_t(ii,:)-V(ii)*(S_t(ii,:)).^2;
    end
    a=min(Q_t,[],2);
    b=min(a);
    A=A+0.01;
end

%calcolo dei parametri del prezzo di equilibrio
Aloro=A;

```

```

V=(R-(1-eta).*rho^2-eta.*rho1^2)/(4*lambda*rho^2*sigma^2);
v=((eta.*rho1-R-rho).*m)/(rho-R*rho-eta.*rho1+R);
Q=(A-(1-eta).*V.*sigma^2-eta.*V.*sigma1.^2-lambda.*...
    (V.^2.*omega^2+(v+m).^2.*sigma^2))/(R-1);
Vloro=(R-rho^2)/(4*lambda*rho^2*sigma^2);
vloro=-m/(1-rho);
Qloro=(Aloro-lambda*(Vloro^2*omega^2+(vloro+m)^2*sigma^2)...
    -Vloro*sigma^2)/(R-1);

%prezzo di equilibrio sunspot_like
Q_t = zeros(length(eta),100);
for ii=1:length(eta)
    Q_t(ii,:)=Q(ii)+v(ii)*S_t(ii,:)-V(ii)*(S_t(ii,:)).^2;
end

%equilibrio fondamentale
fond=zeros(length(eta),100);
for ii=1:length(eta)
    fond(ii,:)=(A-lambda.*(R^2.*m^2.*sigma^2)/...
        (R-(1-eta(ii)).*rho-eta(ii).*rho1).^2)/...
        (R-1)+(((1-eta(ii)).*rho+eta(ii).*rho1).*m)/(R-(1-eta(ii))...
        .*rho-eta(ii).*rho1)).*S_t(ii,:);
end

%Plot dei risultati

%parametri del prezzo
figure;
plot(eta,V,'m',0,Vloro,'pb');
title('V');
figure;
plot(eta,Q,'r',0,Qloro,'pb');
title('Q');
figure;
plot(eta,v,'m',0,vloro,'pb');
title('v');
%prezzo equilibrio sunspot-like
T=[1:100];
figure;
plot(T,Q_t(1,:), 'm',T,Q_t(50,:), 'c',T,Q_t(end,:), 'b');
title('Q(t): eta=0 viola - eta=0.5 azzurro - eta=1 blu');
%prezzo equilibrio fondamentale
figure;
plot(T,fond(1,:), 'm',T,fond(50,:), 'c',T,fond(end,:), 'b');
title('fond.: eta=0 viola - eta=0.5 azzurro - eta=1 blu');
    
```

6.6.6 FIGURA 8

```

%% Caso sunspot_like (m~=0)
% Processo Autoregressivo, varia eta
% caso 2: rho1<rho && sigma1>sigma
close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.04;
lambda=0.5;
rho=0.6;
sigma=sqrt(4/12);
rho1=0.5544;
sigma1=sqrt(sigma^2*rho/rho1);
epsilon=1;
omega=0.3;
eta=[0:0.01:1];
m=1.5;

% processo autoregressivo
%si vuole simulare T=100 valori da un AR(1) S_t=rho*S_t-1+epsilon_t
e=-epsilon.*rand(length(eta),100)+2*epsilon;
S_t=zeros(length(eta),100);
S_t(:,1)=e(:,1);
for i=2:100
    S_t(:,i)=rho*S_t(:,i-1)+e(:,i);
end

%Calcolo della soglia
A=1;
b=-2;
V=(R-(1-eta).*rho^2-eta.*rho1^2)./(4*lambda*rho^2*sigma^2);
v=((eta.*rho1-R-rho).*m)./(rho-R*rho-eta.*rho1+R);
while(b<0)
    Q=(A-(1-eta).*V.*sigma^2-eta.*V.*sigma1.^2-lambda.*...
        (V.^2.*omega^2+(v+m).^2.*sigma^2))./(R-1);
    Q_t = zeros(length(eta),100);
    for ii=1:length(eta)
        Q_t(ii,:)=Q(ii)+v(ii)*S_t(ii,:)-V(ii)*(S_t(ii,:)).^2;
    end
    a=min(Q_t,[],2);
    b=min(a);
    A=A+0.01;
end

%calcolo dei parametri del prezzo di equilibrio
Aloro=A;
V=(R-(1-eta).*rho^2-eta.*rho1^2)./(4*lambda*rho^2*sigma^2);

```

```

v=((eta.*rho1-R-rho).*m)./(rho-R*rho-eta.*rho1+R);
Q=(A-(1-eta).*V.*sigma^2-eta.*V.*sigma1.^2-lambda.*...
(V.^2.*omega^2+(v+m).^2.*sigma^2))./(R-1);
Vloro=(R-rho^2)/(4*lambda*rho^2*sigma^2);
vloro=-m/(1-rho);
Qloro=(Aloro-lambda*(Vloro^2*omega^2+(vloro+m)^2*sigma^2)...
-Vloro*sigma^2)/(R-1);

%prezzo di equilibrio sunspot_like
Q_t = zeros(length(eta),100);
for ii=1:length(eta)
    Q_t(ii,:)=Q(ii)+v(ii)*S_t(ii,:)-V(ii)*(S_t(ii,:)).^2;
end

%equilibrio fondamentale
fond=zeros(length(eta),100);
for ii=1:length(eta)
    fond(ii,:)=(A-lambda.*(R^2.*m^2.*sigma^2)./...
(R-(1-eta(ii)).*rho-eta(ii).*rho1).^2)./...
(R-1)+((((1-eta(ii)).*rho+eta(ii).*rho1).*m)./(R-(1-eta(ii))...
.*rho-eta(ii).*rho1)).*S_t(ii,:);
end

%calcolo medie prezzi
media0=mean(Q_t(1,:));
media05=mean(Q_t(50,:));
media1=mean(Q_t(end,:));

%Plot dei risultati

%parametri del prezzo
figure;
plot(eta,V,'m',0,Vloro,'pb');
title('V');
figure;
plot(eta,Q,'r',0,Qloro,'pb');
title('Q');
figure;
plot(eta,v,'m',0,vloro,'pb');
title('v');
%prezzo equilibrio sunspot-like
T=[1:100];
figure;
plot(T,Q_t(1,:),'m',T,Q_t(50,:),'c',T,Q_t(end,:),'b');
title('Q(t): eta=0 viola - eta=0.5 azzurro - eta=1 blu');
%prezzo equilibrio fondamentale
figure;
plot(T,fond(1,:),'m',T,fond(50,:),'c',T,fond(end,:),'b');
title('fond.: eta=0 viola - eta=0.5 azzurro - eta=1 blu');
%medie
figure;
plot(T,media0,'pm',T,media05,'pc',T,media1,'pb');

```

```
title('medie: eta=0 viola - eta=0.5 azzurro - eta=1 blu');
```

6.6.7 *FIGURE 9 e 10*

```
%% Caso sunspot_like (m~=0)
% processo di Markov a due stati
% al variare dei parametri del modello
% per diverse relazioni tra pn e pn1

close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.04;
pn=0.9;
pb=0.7;
pn1=0.99;
pb1=0.65;
pd=pb*(1-pb)-pn*(1-pn);
lambda=0.5;
eta=[0:0.01:1]';
k=zeros(length(eta),1);
kloro=1+R+(-pn-pb);
for ii=1:length(eta)
    k(ii)=1+R+(1-eta(ii))*(-pn-pb)+eta(ii)*(-pn1-pb1);
end

%Calcolo della soglia per i valori dei dividendi per il nuovo modello
%e per il modello originale
soglia=k.^2./(4*R*lambda*pd);
soglia_loro=kloro^2/(4*R*lambda*pd);
Adloro=soglia_loro-0.003;
Ad=min(soglia)-0.003;
A4=-(((1-eta).*(pd-k.*pb)./(2.*lambda.*pd)).*...
    (k+(k.^2-4*R*lambda*pd*Ad).^0.5)+R*Ad*pb).*(1-pb)./...
    pd-eta.*(1-pb1).*(k+(k.^2-4*R*lambda*pd*Ad).^0.5)./(2*lambda*pd);
A4_loro=(((pb*(R-pn)+pn*(1-pn))./(2.*lambda.*pd)).*...
    (kloro+(kloro.^2-4*R*lambda*pd*Adloro).^0.5)-R*Adloro*pb)...
    .*(1-pb)./pd;

%per rispettare certamente il vincolo
Ab=max(A4)+3;
Abloro=A4_loro+3;
plot(eta,Ab,'m',0,Abloro,'pb');
title('Ab')
```

```

%Calcolo del prezzo di equilibrio sunspot-like
Qd=(k./(2.*lambda.*pd)-Ad)+((k.^2-4.*R.*lambda.*pd.*Ad).^0.5)./...
    (2.*lambda.*pd);
Qb=Ab/(R-1)+((1-pb)./(R-1).pd))*((1-eta).*(pd-k.*pb).*...
    (Ad+Qd)+R.*pb.*Ad)+(eta.*(1-pb1).*(Ad+Qd))./(R-1);
Qn=Qd+Qb;
Qdfond_loro=(kloro/(2*lambda*pd)-Adloro)-...
    ((kloro^2-4*R*lambda*pd*Adloro)^0.5)/(2*lambda*pd);

%equilibrio fondamentale
Qdfond=(k./(2.*lambda.*pd)-Ad)-((k.^2-4.*R.*lambda.*pd.*Ad).^0.5)...
    ./ (2.*lambda.*pd);
Qbfond=Ab/(R-1)+((1-pb)./(R-1).pd))*((1-eta).*(pd-k.*pb).*...
    (Ad+Qdfond)+R.*pb.*Ad)+(eta.*(1-pb1).*(Ad+Qdfond))./(R-1);
Qnfond=Qdfond+Qbfond;
%equilibrio fondamentale modello di Bacchetta
Qbfond_loro=Abloro/(R-1)+((1-pb)*pn*(pn+pb-1)*Adloro-(1-pb)*...
    (pb*(R-pn)+pn*(1-pn))*Qdfond_loro)/(pd*(R-1));
Qnfond_loro=Qdfond_loro+Qbfond_loro;
Qd_loro=(kloro/(2*lambda*pd)-Adloro)+...
    ((kloro^2-4*R*lambda*pd*Adloro)^0.5)/(2*lambda*pd);
Qb_loro=Abloro/(R-1)+((1-pb)*pn*(pn+pb-1)*Adloro-(1-pb)*...
    (pb*(R-pn)+pn*(1-pn))*Qd_loro)/(pd*(R-1));
Qn_loro=Qd_loro+Qb_loro;

%Plot dei risultati
figure;
plot(eta,Qd,'m',0,Qd_loro,'pb');
title('Qd');
figure;
plot(eta,Qb,'m',0,Qb_loro,'pb');
title('Qb');
figure;
plot(eta,Qn,'m',0,Qn_loro,'pb');
title('Qn');
figure;
plot(eta,Qdfond,'m',0,Qdfond_loro,'pb');
title('eq. fondamentale Qd');
figure;
plot(eta,Qbfond,'m',0,Qbfond_loro,'pb');
title('eq. fondamentale Qb');
figure;
plot(eta,Qnfond,'m',0,Qnfond_loro,'pb');
title('eq. fondamentale Qn');

```

6.6.8 FIGURA 11

```

%% Caso sunspot_like (m~=0)
% processo di Markov a due stati
% Asset Price e Asset price risk

close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.1;
pn=0.99;
pb=[0.5:0.1:0.99]';
pn1=0.9;
pb1=0.65;
pd=pb.*(1-pb)-pn.*(1-pn);
lambda=0.5;
eta=0.4;
k=zeros(length(pb),1);
for ii=1:length(pb)
    k(ii)=1+R+(1-eta)*(-pn-pb(ii))+eta*(-pn1-pb1);
end

%calcolo soglia dividendo
soglia=k.^2./(4*R*lambda.*pd);
Ad=min(soglia)-0.003;
A4=-(((1-eta).*(pd-k.*pb)./(2.*lambda.*pd)).*(k+(k.^2-
4*R*lambda.*pd*Ad).^0.5)+R*Ad*pb).*(1-pb)./pd-eta.*(1-pb1).*(k+(k.^2-
4*R*lambda.*pd*Ad).^0.5)./(2*lambda.*pd);
Ab=max(A4)+3;

%Calcolo prezzo di equilibrio
Qd=(k./(2.*lambda.*pd)-Ad)+(k.^2-
4.*R.*lambda.*pd.*Ad).^0.5)./(2.*lambda.*pd);
Qb=Ab./(R-1)+((1-pb)./(R-1).*pd)).*((1-eta).*(pd-
k.*pb).*(Ad+Qd)+R.*pb.*Ad)+(eta.*(1-pb1).*(Ad+Qd))./(R-1);
Qn=Qd+Qb;
Q=(k+(k.^2-4.*R.*lambda.*pd.*Ad).^0.5)./(2.*lambda.*pd);

%Calcolo dell'asset price risk
asset_price_risk_n=((pn*(1-pn).*Q.^2).^0.5)./Qn;
asset_price_risk_b=((pb.*(1-pb).*Q.^2).^0.5)./Qb;

%Plot dei risultati
figure;
plot(pb,Qb,'b',pb,Qn,'m');
title('Asset price: Qb blu - Qn viola');
figure;
plot(pb,asset_price_risk_n*100,'m',pb,asset_price_risk_b*100,'b');
title('Risk asset price: Qb blu - Qn viola');

```

6.6.9 FIGURA 12

```

%% grafici di asset price e asset price risk
% nostro modello
% i noise trader sottostimano le probabilità

clc
clear all
close all
R=1.1;
pn=0.99;
pb=0.9;
p=0.99;
An=1;
Ab=0.9;
Ad=An-Ab;
pn1=0.97;
p1=0.9;
pb1=0.89;
pd=pb.*(1-pb)-pn.*(1-pn);
lambda=0.5;
eta=0.4;
k=1+R+(1-eta)*(-pn-pb)+eta*(-pn1-pb1);
delta=((1-eta)*(2*p-1)*(1-pb)*(pb*(1-pn-pb)-pd)+...
eta*(2*p1-1)*(pb*(1-pb)*(1-pn1-pb1)-pd*(1-pb1))+R*pb*(1-pb))/...
(pd*(R-(2*p-1)*(1-eta)-eta*(2*p1-1)));
nu=1/(2*lambda*p*(1-p)*((1-pb)^2-(pn)^2-2*(1-pn-pb)*delta));

%Calcolo dell'asset price
xpiuy=((1-eta)*(2*p-1)*(1-pn-pb)+eta*(2*p1-1)*(1-pn1-
pb1)+R)/(lambda*(2*p-1)*pd);
xmenoy=-sqrt((nu*(k*xpiuy-2*R*Ad-
0.5*lambda*pd*(xpiuy)^2))/(1+0.5*(nu*lambda*pd)));

Qb2=(1/(1-R))*(-Ab-(1-eta)*(p*pn*xmenoy+pn*(0.5*(xpiuy-xmenoy))-
p*delta*xmenoy)...
-eta*(pn1*p1*xmenoy+pn1*(0.5*(xpiuy-xmenoy))-p1*delta*xmenoy)...
+R*0.5*(xpiuy+xmenoy-2*delta*xmenoy-2*Ad)+lambda*pn*(1-
pn)*(p*(xmenoy*xpiuy)...
+(0.5*(xpiuy-xmenoy))^2)+lambda*p*(1-p)*(pn*xmenoy-delta*xmenoy)^2);
Qb1=Qb2-delta*xmenoy;
Qn1=0.5*(xpiuy+xmenoy+2*Qb1-2*Ad);
Qn2=Qn1-Qb1+Qb2-xmenoy;

%calcolo dell'asset price risk
asset_pricerisk_n1=(pn*(1-pn)*(p*(xmenoy*xpiuy)+...
(0.5*(xpiuy-xmenoy))^2)+p*(1-p)*(pn*xmenoy-delta*xmenoy)^2)/Qn1;
asset_pricerisk_b1=(pb*(1-pb)*(p*(xmenoy*xpiuy)+...
(0.5*(xpiuy-xmenoy))^2)+p*(1-p)*(pb*xmenoy-delta*xmenoy)^2)/Qb1;
asset_pricerisk_n2=(pn*(1-pn)*((1-p)*(xmenoy*xpiuy)+...
(0.5*(xpiuy-xmenoy))^2)+p*(1-p)*(pn*xmenoy-delta*xmenoy)^2)/Qn2;

```

```

asset_pricerisk_b2=(pb*(1-pb)*(1-p)*(xmenoy*xpiuy)+...
    (0.5*(xpiuy-xmenoy)^2)+p*(1-p)*(pb*xmenoy-delta*xmenoy)^2)/Qb2;

%grafico dell'asset price
figure;
T1=[0:0.01:1];
T2=[1:0.01:2];
T3=[2:0.01:3];
T4=[3:0.01:4];
T5=[4:0.01:5];
plot(T1,Qn1,'pm',T2,Qb1,'pm',T3,Qb2,'pm',T4,Qn2,'pm',T5,Qn1,'pm')
title('asset price')

%grafico dell'asset price risk
figure;
T1=[0:0.01:1];
T2=[1:0.01:2];
T3=[2:0.01:3];
T4=[3:0.01:4];
T5=[4:0.01:5];
plot(T1,asset_pricerisk_n1*10,'pm',T2,asset_pricerisk_b1*10,'pm',...
    T3,asset_pricerisk_b2*10,'pm',T4,asset_pricerisk_n2*10,...
    'pm',T5,asset_pricerisk_n1*10,'pm')
title('asset price risk')

%% grafici di asset price e asset price risk
% modello Bacchetta (2011)
% i noise trader sottostimano le probabilità
clc
clear all
close all
R=1.1;
pn=0.99;
pb=0.9;
p=0.99;
An=1;
Ab=0.9;
Ad=An-Ab; %si suppone sia <Ad visto che li hanno scelti loro così
pd=pb.*(1-pb)-pn.*(1-pn);
lambda=0.5;
k=1+R+(-pn-pb);
delta=(1-pb)*((2*p-1)*pn*(1-pn-pb)+pb*R)/(pd*(1+R-2*p));
nu=1/(0.5*lambda*pd+2*lambda*p*(1-p)*(1-pn-pb)*(1-pb+pn-2*delta));

xpiuy=((2*p-1)*(1-pn-pb)+R)/(lambda*(2*p-1)*pd);
ymenox=+sqrt(nu*(k*xpiuy-2*R*Ad-0.5*lambda*pd*(xpiuy)^2));
csi=R*Ad+(p-R)*delta*ymenox+0.5*xpiuy*(pn-R)-0.5*((2*p-1)*pn-R)*ymenox-
...
    lambda*p*(1-p)*(-pn*ymenox+delta*ymenox)^2-...

```

```

lambda*pn*(1-pn)*0.25*(xpiuy^2+ymenox^2-2*(2*p-1)*xpiuy*ymenox);

%Calcolo dell'asset price
realQb2=(Ab+csi)/(R-1);
realQb1=realQb2+delta*ymenox;
realQn1=0.5*(xpiuy-ymenox+2*realQb1-2*Ad);
realQn2=ymenox+realQb2+realQn1-realQb1;

Qn1=100;
Qb2=realQb2*100/realQn1;
Qn2=realQn2*100/realQn1;
Qb1=realQb1*100/realQn1;

%calcolo dell'asset price risk
asset_pricerisk_n1=sqrt(pn*(1-pn)*(p*(-ymenox*xpiuy)+...
    (0.5*(xpiuy+ymenox))^2)+p*(1-p)*(-
pn*ymenox+delta*ymenox)^2)/realQn1;
asset_pricerisk_b1=sqrt(pb*(1-pb)*(p*(-ymenox*xpiuy)+...
    (0.5*(xpiuy+ymenox))^2)+p*(1-p)*(-
pb*ymenox+delta*ymenox)^2)/realQb1;
asset_pricerisk_n2=sqrt(pn*(1-pn)*((1-p)*(-ymenox*xpiuy)+...
    (0.5*(xpiuy+ymenox))^2)+p*(1-p)*(-
pn*ymenox+delta*ymenox)^2)/realQn2;
asset_pricerisk_b2=sqrt(pb*(1-pb)*((1-p)*(-ymenox*xpiuy)+...
    (0.5*(xpiuy+ymenox))^2)+p*(1-p)*(-
pb*ymenox+delta*ymenox)^2)/realQb2;

%grafico dell'asset price
figure;
T1=[0:0.01:1];
T2=[1:0.01:2];
T3=[2:0.01:3];
T4=[3:0.01:4];
T5=[4:0.01:5];
plot(T1,realQn1,'pm',T2,realQb1,'pm',T3,realQb2,'pm',...
    T4,realQn2,'pm',T5,realQn1,'pm')
title('asset price - Bacc.')

%grafico dell'asset price risk
figure;
T1=[0:0.01:1];
T2=[1:0.01:2];
T3=[2:0.01:3];
T4=[3:0.01:4];
T5=[4:0.01:5];
plot(T1,asset_pricerisk_n1*10,'pm',T2,asset_pricerisk_b1*10,'pm',...
    T3,asset_pricerisk_b2*10,'pm',T4,asset_pricerisk_n2*10,'pm',...
    T5,asset_pricerisk_n1*10,'pm')
title('asset price risk - Bacc.')

```

```

%% verifica assunzioni parametri proposizione 5
close all
clear all
clc

%parametri del modello
R=1.04;
pb=[0.51:0.01:0.96];
pn=pb+0.01;
pb1=[0.52:0.01:0.97];
pn1=pb1+0.02;

pd=pb.*(1-pb)-pn.*(1-pn);
lambda=0.5;
eta=[0:0.022:1];
k=1+R+(1-eta).*(-pn-pb)+eta.*(-pn1-pb1);
p=[0.76:0.0051:0.99];
p1=[0.76:0.0051:0.99];
delta=(((1-eta).*(2.*p-1).*(1-pb).*(pb.*(1-pn-pb)-pd)+eta.*(2.*p1-1).*(pb.*(1-pb).*(1-pn1-pb1)-pd.*(1-pb1))+R.*pb.*(1-pb)))/...
      (pd.*(R-(2.*p-1).*(1-eta)-eta.*(2.*p1-1)));

nu=1./(2.*lambda.*p.*(1-p).*((1-pb).^2-(pn).^2-2.*(1-pn-pb).*delta));

provadelta=(delta>1)
provanu=(nu>0)

```

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bacchetta P., Tille C., Wincoop E., (2010) “Self-Fulfilling Risk Panics”,
<http://www.nber.org>
- [2] Bacchetta P., Tille C., Wincoop E., (2011) “Self-Fulfilling Risk Panics”,
<http://econpapers.repec.org>
- [3] Barberis N., Shleifer A., Vishny R., (1997) “A model of investor sentiment” Journal of Financial Economics n.49
- [4] Barberis N., Thaler R., (2003) “A Survey of Behavioral Finance”,
Handbook of the Economics of Finance
- [5] Barucci E. (2009) “On the market selection Hypothesis”
- [6] Basu K., (2009) “A Simple Model of the Financial Crisis of 2007-9”,
Bread Working Paper no.241
- [7] Black F., (1986) “Noise”, Journal of Finance no.41.
- [8] Blume L., Easley D., (1992) “Evolution and market behavior”, Journal of
Economic Theory.
- [9] Brock W., Hommes C., (1998) “Heterogeneous beliefs and routes to chaos
in a simple asset pricing model”, Journal of Economics Dynamics and
Control n.22

- [10] Chang S.K., (2006) “A simple asset pricing model with social interaction and heterogeneous beliefs”, *Journal of Economics Dynamics and Control* n.31
- [11] Colander D., Follmer H, Haas A., Goldberg M., Juselius K., Kirman A., Lux T., Sloth B., (2009) “The Financial Crisis and the Systemic Failure of Academic Economics”, <http://papers.ssrn.com>
- [12] De Long J., Shhleifer A., Summers L.H., Waldmann R., (1989) “The size and incidence of the losses from noise trading”, *The Journal of Finance*
- [13] De Long J., Shhleifer A., Summers L.H., Waldmann R., (1990) “Noise Trader Risk in Financial Market”, *The Journal of Political Economy* v.98
- [14] De Long J., Shhleifer A., Summers L.H., Waldmann R., (1990) “The Survival of Noise Traders in Financial Markets”, <http://www.jstor.org>
- [15] Friedman M., (1953) “The Case for Flexible Exchange Rates”, *Essays in Positive Economics*.
- [16] Gromb D., Vayanos D., (2002) “Equilibrium and welfare in market with financially constrained arbitrageurs”, *Journal of Financial Economics* 66
- [17] Hirshleifer D., (2001) “Investor Psychology and Asset Pricing”, *The Journal of Finance* v.56
- [18] Kogan L., Ross S., Wang J., Westerfield M., (2009) “Market Selection”, <http://www.nber.org>
- [19] Kogan L., Ross., Wang J., Westerfield M., (2006) “The Price Impact and Survival of Irrational Traders”, <http://stuff.mit.edu>
- [20] Manuelli R., Peck J., (1992) “Sunspot-like Effect of Random Endowments”, *Journal of Economic Dynamics and Control* 16, 193-206

- [21] Sandroni A., (2000) “Do markets favor agents able to make accurate predictions?”, *Econometrica*
- [22] Sewell M. (2010) “Behavioural Finance”, www.behaviouralfinance.net
- [23] Shleifer A., Summers L.H., (1990) “The Noise Trader Approach to Finance”, *Journal of Economic Perspectives* vol.4 no.2
- [24] Yan H., (2008) “Natural selection in financial markets: does it work?”, *Management Science* 54, pag. 1935–1950