

POLITECNICO DI MILANO
SCUOLA DI INGEGNERIA DEI SISTEMI
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica



**European Government Bonds: Derivatives and Inflation-Linked
Products.**

Relatore: Prof. Roberto BAVIERA

Tesi di laurea di:
Andrea DUCOLI
Matr. 766491

Anno Accademico 2011 - 2012

Ringraziamenti

Per prima cosa ringrazio il mio relatore Roberto Baviera: la pazienza che ha dimostrato nel sopportare le mie continue e assillanti domande è ammirevole, la grandissima disponibilità che mi ha sempre concesso in questi mesi lo è anche di più. Ma la cosa più importante per cui lo ringrazio, sono tutte le conoscenze che mi ha insegnato in questi mesi, e se qualcuna non l'ho acquisita è evidente che sia solo colpa mia.

Ringrazio la mia famiglia e la mia ragazza Marta senza il loro sostegno non sarei certo arrivato fin qui ma nemmeno sarei riuscito a portare a termine questa tesi.

Ringrazio tutti i miei amici che in questo periodo mi sono stati vicini e mi hanno aiutato tutti a modo loro: Lorenz per il continuo supporto nell'affrontare le sfide con qualsiasi linguaggio di programmazione, Pietro e Emanuele per le lunghe chiacchierate chiarificatrici, Mara per avermi sopportato in biblioteca di mate, Valeria, Mariangela, Luca, Ruben, Aurelio e Silvia per diversi motivi e via via tutti gli altri...

Infine ringrazio il Prof. Marazzina e Maurizio Spadaccino: il primo per la grande disponibilità e il secondo perché, nonostante avessi cominciato lo stage, mi ha permesso gentilmente di finire la tesi.

Indice

Introduzione	9
1 Modelli usati nel Pricing	13
1.1 Introduzione al Modello Gaussian Heath-Jarrow-Morton	13
1.2 Modello Hull-White	17
1.3 Multi-Curve Approach	18
1.4 Approssimazione Log-Normale per la dinamica dei Bond: Bond Market Model	20
1.5 Bond Market Model Generalizzato: Yield-Vol Costanti nel Basket Deliverable	23
2 Data Set	27
2.1 Emissioni Governative	27
2.2 Future	31
2.2.1 Opzione Cheapest to Deliver	32
2.3 Opzioni sui Future	34
2.4 Dati Storici	35
2.5 Contratti Inflation-Linked	35
2.5.1 Zero Coupon Indexed Inflation Swap	35
2.5.2 Bond Inflation-Linked	35
2.6 Inflation Data: HICP	35
3 Bond Future Pricing	37
3.1 Conversion Factor	37
3.2 Formula Generale: Multi-Curve e Multi Dimensionale	38
3.3 Single-Curve	40
3.3.1 Approccio Unidimensionale: Hull-White Model	40
3.3.2 BMM Generalizzato:Approccio N-Dimensionale	42
3.4 Multi Curve	43
3.4.1 BMM Generalizzato:Approccio N-Dimensionale	43
4 Pricing delle Bond Option	47
4.1 Formula Generale: Multi-Curve e Multidimensionale	47
4.2 Single-Curve	48
4.3 Multi Curve	50
4.3.1 BMM Generalizzato:Approccio N-Dimensionale	50
5 Pricing delle Bond Future Option	52
5.1 Formula Generale: Multi-Curve e Multi Dimensionale	52
5.2 Single-Curve	53
5.2.1 Approccio Unidimensionale: Hull-White	53
5.2.2 BMM Generalizzato:Approccio N-Dimensionale	55
5.3 Multi-Curve	56
5.3.1 BMM Generalizzato:Approccio N-Dimensionale	56

6	Risultati Numerici	59
6.1	Approccio Single Curve Unidimensionale con il Modello di Hull-White al Pricing delle Future Option	59
6.2	Approccio Single Curve Multidimensionale con il modello GBMM al Pricing delle Future Option	62
6.3	Confronto Modello Unidimensionale con Hull-White e Multi dimensionale GBMM	63
6.4	Approccio al Future Pricing Multidimensionale con GBMM	64
6.4.1	Risk-Free Bond Future	64
6.4.2	Defaultable Bond Future	65
7	Inflazione	68
7.1	Pricing dei Contratti Inflation-Linked	68
7.1.1	Zero Coupon Indexed Inflation Swap	68
7.1.2	Bond I-L	68
7.2	Curva della Forward Inflation attraverso ZCIIS	71
7.3	Studio dei Dati Storici dell'HICP	71
7.3.1	Algoritmo X11: estrazione del Trend e della Seasonality dai dati	73
7.3.2	Stima del Periodo della Seasonality	73
7.3.3	Analisi del Modello per la Seasonality	73
7.4	Curva della Forward Inflation	76
7.5	Risultati Numerici	77
7.5.1	Pricing Bond I-L	77
7.5.2	Break-even Inflation	78
8	Conclusioni	82
A	Dinamica del Tasso Forward sotto la misura Risk-Neutral nel modello HJM	86
B	Titoli di stato Tedeschi al 5/10/2012	88
C	Cambio di Misura tra la Risk-Neutral e la T-forward	89
D	Test-F, Test-t, Statistica R^2 e R^2_{adj}	91
	Notazione	92
	Riferimenti bibliografici	94

Elenco delle figure

1	Crescita del valore complessivo dei titoli emessi sul mercato dei titoli Governativi Europeo in migliaia di Miliardi di €(dati fonte Bloomberg)	10
2	Crescita del valore complessivo dei titoli Inflation-Linked emessi sul mercato dei titoli Governativi Europeo il Miliardi di €(dati fonte Bloomberg)	12
1.1	Curva del Tasso Yield dei Bund al 05-Ottobre-2012 (dati fonte Bloomberg)	24
2.1	Valore totale del debito Statale nell'Area Euro presente sui Mercati Finanziari e Valore Netto Emissioni Annuali sul Mercato Primario in migliaia di Miliardi € (dove per valore netto si intende la differenza tra debito emesso e debito arrivato a scadenza)(fonte http://epp.eurostat.ec.europa.eu).	27
2.2	Curva di Crescita del Debito Tedesco in migliaia di Miliardi € (fonte http://www.bundesbank.de)	28
2.3	Bund sul Mercato il 5-Ottobre 2012 (fonte Bloomberg).	29
2.4	Curva di Crescita del Debito Italiano in migliaia di Miliardi € (fonte http://www.dt.tesoro.it)	30
2.5	Curva di Crescita del Debito Francese in migliaia di Miliardi € (fonte http://www.aft.gouv.fr)	30
2.6	Prospetto del Bund con delivery nel Dic-2012 (fonte Bloomberg).	32
2.7	Configurazioni differenti dei valori dei Bond a data di delivery, create usando i dati relativi a tre Bund (la sigla DBR sta per Deutsche Bundesrepublik) con scadenza circa decennale e modificandone la varianza con il GBMM <i>ad hoc</i> per ottenere le immagini.	33
2.8	Prospetto delle Opzioni sui Bund con expiry nel Dic-2012 (fonte Bloomberg).	34
2.9	Dati Storici sull'HICP (fonte http://epp.eurostat.ec.europa.eu)	36
6.1	Valori ottenuti per i valori di diversi Deliverable Bond in Funzione di X	59
6.2	Volatilità del modello Unidimensionale di Hull-White per diversi contratti; è chiaro dall'immagine che Schatz, Bobl e Bund hanno volatilità molto differenti dipendenti dal Time to Maturity dei bond dei basket(come si può notare la volatilità maggiore è legata ai Bund, quella minore allo Schatz).	61
6.3	Volatilità integrali $\nu_{d,j}(t_i, t_{i+1})$ dei Forward ZC in funzione delle diverse scadenze T_j	66
7.1	Curva della Forward CPI costruita usando i ZCIIS.	71
7.2	Le Componenti dell'inflazione dedotte dai dati storici (vedi fig. (2.9)), tramite l'algoritmo X11 tra Giugno-1998 e Maggio-2012.	72
7.3	Errori sul Fit dei dati storici per la Seasonality.	72
7.4	Fit dei Modelli presentati sui dati storici.	75
7.5	Dati Completi sulla Curva dell'Inflazione: i dati Storici (Gen-1996 al Ott-2012) e i dati della Forward Inflation (Nov-2012 al Ott-2062) nell'Ottobre 2012	76
7.6	Seasonality Futura calcolata con il modello Multi Trend	77
7.7	Tassi nominali e reali a confronto per i tre paesi in esame al 5-Ott-2012.	79
7.8	Break Even Inflation di Germania, Francia e Italia in punti base al 5-Ottobre-2012	80
7.9	Spread in bps tra le Break Even Inflation preso il valore per i titoli tedeschi come riferimento, 5-Ottobre-2012	80

Elenco delle tabelle

2.1	Bond Deliverable per i contratti Future Front e Next in Ottobre-2012 (fonte Bloomberg).	31
6.1	Risultati numerici per i Future e le Future Option sui contratti Front e Next ottenuti con l'utilizzo del modello di Hull-White unidimensionale in ambito Single Curve.	60
6.2	Risultati della calibrazione numerica dei parametri del modello di Hull-White per le Future Option per i contratti Front (Dic-2012) e Next (Mar-2013).	61
6.3	Convexity Adjustment calcolati per le cedole del Bobl del Dic-2012.	62
6.4	Convexity Adjustment calcolati per le cedole del Bund del Dic-2012.	62
6.5	Risultati numerici per le Future Option sui contratti Front e Next ottenuti con l'utilizzo del modello GBMM in ambito Single Curve.	63
6.6	Confronto tra le probabilità di Delivery associate ai Bond dei Basket dei vari contratti Future su titoli tedeschi dal modello unidimensionale di Hull-White e dal modello Multi dimensionale GBMM in ambito Single Curve.	64
6.7	Risultati numerici per i Future sui contratti Front e Next ottenuti con l'utilizzo del GBMM in ambito Single Curve.	65
6.8	Deliverable Bond per il Future su titoli Italiani a scadenza triennale (BTSZ2 Comdty).	66
6.9	Probabilità di Delivery per i Bond del Future su titoli Italiani a scadenza triennale (BTSZ2 Comdty).	66
7.1	Risultati statistici ottenuti sui vari modelli per stimare la Seasonality.	76
7.2	Risultati numerici per il pricing dei Bond I-L.	77
7.3	Risultati numerici per il tassi e le BreakEven Inflation dei Bond I-L.	79
7.4	Spread tra le Break Even Inflation di Italia e Francia rispetto a quella Tedesca.	81

Abstract

Questo lavoro analizza il mercato dei Bond Governativi Europei: vengono trattati i titoli emessi dagli stati sovrani, i principali derivati a essi associati e infine i Bond Inflation-Linked.

In questo studio introduciamo un modello coerente con il nuovo contesto di mercato dove è impossibile considerare tutte le emissioni statali come Risk Free, cioè utilizzare un ambito Single-Curve per il loro studio. Alla luce dei recenti avvenimenti che hanno portato una forte insicurezza sulla stabilità dei Debiti Statali nell'area Euro, sembra più coerente passare a un modello che introduce il merito di credito dei diversi stati in ambito Multi Curve. Dopo aver introdotto un modello Single Curve per la valutazione dei Risk-Free Bond nel framework generale di Heath-Jarrow-Morton, costruiamo una generalizzazione del Bond Market Model nel contesto Multi Curve per i Defaultable Bond.

Nella seconda parte del nostro lavoro utilizziamo i modelli costruiti per la valutazione dei derivati scritti sui titoli statali e li calibriamo sui mercati di interesse utilizzando una base dati estratta da Bloomberg: Future, Bond Option e Bond Future Option. Bond Future e Bond Future Option presentano diverse caratteristiche che li rendono difficili da valutare, tra queste la più importante per i Future (e di conseguenza per le Future Option) è l'opzione "Cheapest to Deliver": i Bond Future non sono scritti su uno specifico Bond ma su un Basket di Bond con data di Maturity simile. A data di delivery il lato corto del contratto derivato può consegnare uno qualunque dei Bond nel Basket e di conseguenza consegna quello a prezzo "più basso". Il nuovo modello sviluppato da risultati corretti sia nel caso si studino le emissioni Risk-Free sia nel caso dei Defaultable. Viene anche sviluppato un confronto con il modello uni dimensionale di Hull-White che ci permette di valutare esplicitamente tutti i termini, ma che è dimostrato essere inadatto a modellare i fenomeni in studio.

Nella parte finale vengono trattate le emissioni statali legate all'inflazione: i Bond Inflation-Linked. Per questi titoli sono mostrate le caratteristiche principali e la modellistica che permette di ricostruirne il valore. Inoltre viene fatta un'analisi numerica basata sulla ricostruzione dell'inflazione futura del mercato, in parte con contratti quotati sul mercato, in parte con lo studio dei dati storici di inflazione al fine di modellare la Seasonality, per cui vengono confrontati i risultati ottenuti con alcuni modelli. Infine una volta costruita la curva di Inflazione futura corretta con la Seasonality, vengono valutati i Bond Inflation-Linked.

Abstract

In this work we analyze the European market of Government Bond: the securities issued by sovereign states, the main derivative written on them, and finally the Inflation-Linked Bond are treated.

During our analysis we introduce a model coherent with the new market context where it is impossible to consider all sovereign securities as Risk-Free products, i.e. to use a Single Curve approach. Because of the recent events that led to a strong uncertainty on the stability of the State debt in the euro area, it seems more coherent move to a model that introduces the creditworthiness of the various states within a Multi Curve approach. After introducing a Single Curve model for evaluation of Risk-Free Bond in general Heath-Jarrow-Morton framework, we construct a generalization of the Bond Market Model for the Multi Curve context for Defaultable Bonds.

In the second section of our work, we use models built for the evaluation of derivatives written on sovereign securities and we calibrate them on market of interest using a Bloomberg dataset: Future, Bond Option and Bond Future Option. Bond Future and Bond Future Option are difficult instrument to be priced, the most important feature of Future (and therefore for the Future Option) is Cheapest to Deliver option: Bond Futures are not written on a single specific underlying Bond but on a Basket of Bonds with similar Maturity. On Delivery date the short part of contract can deliver any of the Bond in the Basket and consequently delivers the "Cheapest". The new model developed gives correct results both in case of Risk-Free securities both in case of Defaultable ones. A comparison with Hull-White model uni-dimensional is also proposed, this last model allows us to evaluate explicitly all terms but is proved to be unsuitable to model the phenomena under study.

In the last part sovereign securities linked with inflation are treated: Bond Inflation-Linked. For these securities are shown the main features and modeling that allows to evaluate them. For these securities a numerical analysis is done based on the reconstruction of future inflation in the market, partly using contracts quoted on market, partly studying historical inflation data in order to model Seasonality, for this last quantity different models are compared. Finally, once constructed the curves of future inflation corrected with Seasonality, Inflation-Linked Bond are evaluated.

Introduzione

In questo lavoro viene analizzato il mercato delle emissioni Governative Europeo, in particolare la maggior parte della nostra analisi è effettuata sui 3 principali mercati obbligazionari relativi agli stati sovrani (Tedesco, Francese e Italiano) e i loro principali derivati.

Questo mercato negli ultimi anni ha vissuto grandi sconvolgimenti: solo 10 anni fa le emissioni statali di qualsiasi stato appartenente all'Eurozona erano considerate Risk-Free. Dal 2007 con l'inizio della crisi dei mutui subprime e soprattutto dopo il fallimento di Lehman Brothers nel Settembre del 2008, il mercato finanziario ha cominciato a fare più attenzione alla qualità creditizia dei vari prodotti sul mercato anche tra le emissioni Statali. Questa maggiore attenzione ha incominciato a manifestarsi nel mercato dei Governativi Europeo attraverso un aumento dei tassi concessi a quegli stati la cui situazione economica-finanziaria sembrava meno solida come Italia, Spagna, Irlanda, Portogallo e Grecia (PIIGS paesi cosiddetti periferici dell'area Euro). Il *Casus Belli* che ha scatenato una vera e propria crisi dei debiti sovrani che dura ancora oggi è stata l'ammissione del governo greco all'inizio del 2009 di aver conti pubblici molto peggiori di quelli stimati. Da quel momento il mercato dei Governativi Europeo ha vissuto grandi cambiamenti che non hanno interessato solo nazioni minori e economicamente meno sviluppate ma anche nazioni di primo piano, non solo nella scena Europea, come l'Italia e in misura minore la Francia. La reazione dei mercati alla notizia della situazione reale dei conti pubblici Greci è stata un repentino peggioramento delle condizioni a cui lo stato Greco poteva rifinanziare il proprio debito: i titoli dello stato ellenico hanno cominciato a essere venduti perdendo rapidamente valore e obbligando lo stato a rifinanziarsi con nuove emissioni a tassi sempre più alti e insostenibili. Quando si è capito che la Grecia non sarebbe mai riuscita a far fronte ai propri impegni, si è incominciato a porre l'attenzione su come il sistema bancario europeo avrebbe reagito, e quali banche sarebbero state più in difficoltà ma soprattutto a dubitare delle emissioni di altri stati Europei che già erano sotto pressione. Naturalmente i primi paesi a essere colpiti da un significativo rialzo dei tassi a cui potevano rifinanziarsi furono quelli con debiti pubblici o deficit più alti: Portogallo, Spagna e infine l'Italia.

Ad oggi la situazione della crisi è abbastanza fluida alcuni paesi come Italia e Spagna scontano ancora dei differenziali di rendimento molto alti per rifinanziarsi rispetto alla Germania, ma anche altri paesi con debiti più bassi come la Francia scontano ancora tassi più alti sul mercato per finanziarsi. Ultimamente la crisi è tornata d'attualità con le vicende legate al debito di Cipro che sembra avviato come la Grecia a un Default tecnico. Questo potrebbe portare ancora la volatilità dei tassi dei paesi più deboli economicamente dell'area Euro a salire, aumentando ancora il divario rispetto alla Germania.

La convinzione che sta alla base di questa tesi e che motiva questa lunga introduzione sulla situazione attuale del mercato, è che come il fallimento di Lehman Brothers ha evidenziato l'importanza del rischio di controparte nel mercato dei tassi di interesse e la conseguente differenziazione della curva Euribor a 3 mesi dalla curva Euribor 6 mesi, così anche nel mercato delle emissioni Governative si sta assistendo a cambiamenti che difficilmente verranno annullati in futuro. Questo determina la necessità di un cambiamento strutturale nei modelli rispetto a quelli utilizzati fin ora per studiare questo mercato: fino adesso si è sempre considerato le emissioni statali come emissioni Risk Free, analizzandole attraverso l'utilizzo di modelli Single Curve. Un modello Single Curve non permetterebbe più uno studio coerente per le emissioni di due paesi diversi come Germania e Italia: non potrebbe ne spiegare ne descrivere la fenomenologia di tutte le quantità osservabili sul mercato.

L'utilizzo di un modello classico di rischio di credito basato su Recovery e Survival Probability appare una strada difficile da intraprendere a causa di diversi motivi: primo fra tutti la difficoltà della calibrazione storica di un modello così fatto per gli stati sovrani, i default statali non sono eventi rari tuttavia sono eventi così catastrofici per l'economia del paese da essere spesso dovuti a cause molto particolari. Un modello classico dovrebbe inoltre fare assunzioni sui parametri da usare, come il recovery; normalmente queste assunzioni si rivelano sbagliate anche nel caso di mercati più liquidi dove sono possibili stime su un grande numero di eventi come quello dei

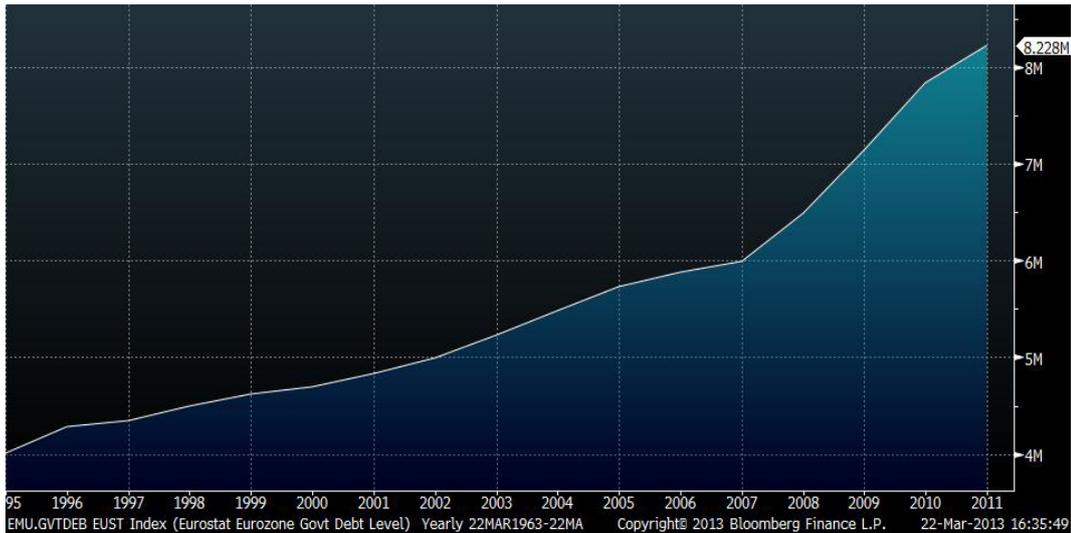


Figura 1: Crescita del valore complessivo dei titoli emessi sul mercato dei titoli Governativi Europeo in migliaia di Miliardi di € (dati fonte Bloomberg)

mutui. Infine non sarebbe chiara l'interpretazione delle quantità usate nel modello e il loro legame con i valori che si osservano nella nuova situazione del mercato.

Appare molto più sensato adattare la teoria alla nuova situazione del mercato passando formalmente da un modello Single-Curve a un modello Multi Curve, che preveda sul mercato la presenza di emissioni Risk-Free ma anche emissioni Defaultable. Un tale modello permetterebbe di interpretare facilmente le diverse quantità osservate sul mercato e di spiegare altrettanto facilmente la fenomenologia ad esse associata. Per questo motivo il nostro fine principale in questo lavoro è fornire un modello Multi Curve e multi dimensionale in modo da formalizzare gli aspetti fin qui sottolineati.

Nel primo capitolo dopo aver ricordato i risultati fondamentali del modello proposto da Heath-Jarrow-Morton in ambito Single Curve e soffermandoci in questo particolare ambito sul modello di Hull-White unidimensionale, introduciamo il modello Multi Curve sempre in ambito multi dimensionale attraverso una generalizzazione del modello Heath-Jarrow-Morton. Questo è un primo punto dove potremo osservare come il fatto di considerare solo un debito statale Risk-Free e tutti gli altri Defaultable, modifichi la dinamica degli Zero Coupon Bond: in un caso particolare ci si può ricondurre alla dinamica Single Curve in tutte le altre si deve utilizzarne una diversa. Successivamente passiamo a studiare il Bond Market Model. Il modello in ambito Single Curve è già stato studiato in [Baviera 2005], noi lo generalizziamo in ambito Multi Curve rendendolo in grado di valutare anche i Coupon Bond emessi da paesi che non sono Risk-Free. Anche in questo modello costruito sul modello Multi Curve precedente è ben visibile la diversità rispetto alla dinamica Single Curve, e i termini che la determinano.

Il capitolo si chiude con una delle parti più importanti di questo lavoro: viene generalizzato il Bond Market Model in ambito Multi dimensionale utilizzando delle ipotesi semplificative che però sono molto efficaci e perfettamente sensate da un punto di vista finanziario. Tramite queste ipotesi sarà possibile stabilire che le dinamiche di Bond con Maturity vicine nel tempo hanno lo stesso driver stocastico, questa considerazione faciliterà molto l'analisi successiva dei derivati scritti sui titoli di stato.

A questa prima parte segue una parte descrittiva dei contratti e dei dati usati per le successive valutazioni numeriche dei diversi modelli. In questa parte illustriamo le principali caratteristiche e convenzioni di mercato riguardanti gli strumenti trattati. In questo capitolo citiamo anche qualche informazione di carattere generale sui tre paesi dell'Eurozona che prenderemo in esame: Italia, Francia e Germania. Dalla spiegazione introduttiva precedente è chiara la scelta fatta sui paesi: utilizziamo la Germania come paese di riferimento per cui è possibile usare un modello Single Curve, mentre gli altri due paesi vengono studiati con il modello Multi Curve vista la sostanziale differenza dei tassi pagati rispetto alla Germania.

La seconda parte del nostro lavoro è dedicata allo studio e al pricing dei principali derivati scritti sulle emissioni governative: Bond Future, Bond Option e Bond Future Option. La parte più importante del nostro lavoro è costituita dall'analisi sul pricing di questi strumenti attraverso il nuovo modello proposto.

L'ambito in cui viene affrontata questa analisi è in un primo momento più generale possibile: utilizziamo il modello Multi Curve costruito sugli Zero Coupon Bond tramite HJM multi dimensionale, ottenendo delle

formule formalmente generali ma poco facili da usare in ambito numerico. Per questo motivo passiamo da prima a utilizzare il modello di Hull-White unidimensionale e successivamente il Bond Market Model Generalizzato sia in ambito Single Curve che Multi Curve per valutarli.

Tra i derivati in esame i più elementari da considerare sono sicuramente le Bond Option: hanno un funzionamento che è del tutto analogo alle Stock Option, e questo le rende valutabili anche con il modello HJM multidimensionale con una formula abbastanza immediata.

I Future e di conseguenza le Bond Future Option sono strumenti ben più difficili da prezzare, il motivo è che i Future su titoli Governativi non sono scritti solo su un'emissione particolare ma su un insieme di emissioni (Basket dei Deliverable), e alla data di Delivery del Future la parte corta nel contratto può consegnare uno qualunque dei titoli nel Basket. Questa opzione associata implicitamente ai Future è detta Opzione Cheapest to Deliver: la parte corta del contratto giunta la data di delivery consegna il Bond nel Basket dei Deliverable che ha valore minore. La metodologia standard unidimensionale per valutare quest'opzione è descritta nel lavoro di Henrard [Henrard 2006]. Nel suo lavoro Henrard studia il mercato americano associato a questi derivati. Tra il mercato Europeo e il mercato Americano ci sono sostanziali differenze che incidono molto sulla corretta valutazione di questa opzione, la principale è il numero di emissioni disponibili sul mercato e deriva da una differenza formale tra il meccanismo di emissione utilizzato dai paesi Europei e quello utilizzato dagli Stati Uniti. Come vedremo le conclusioni che Henrard raggiunge per il mercato americano sono quasi del tutto analoghe a quelle da noi trovate.

I tre capitoli centrali della nostra analisi trattano del pricing di questi strumenti, mentre per questioni di organizzazione l'opzione Cheapest to Deliver verrà illustrata nel secondo capitolo insieme alle convenzioni del mercato per i Bond Future. Dopo di che affronteremo il pricing dei Future nel terzo capitolo, delle Bond Option nel quarto, e infine delle Bond Future Option nel quinto capitolo.

Per questi ultimi derivati per passare dal modello generale alla valutazione tramite il Bond Market Model Generalizzato sia in ambito Single Curve che Multi Curve introduciamo un'approssimazione aggiuntiva: facciamo coincidere la data di delivery del Future con quella di Expiry dell'opzione, normalmente infatti nel mercato EUREX differiscono di 2 settimane, trasformando la Future Option in una Bond Option scritta su un Basket di Deliverable. Durante la nostra analisi trattiamo i motivi che ci spingono a fare questa approssimazione e della sua correttezza giustificata nel dettaglio nel caso unidimensionale. Questo è il motivo per cui si è deciso di presentare le Bond Option prima delle Bond Future Option, nonostante sia più facile associare queste ultime alla trattazione dei Bond Future.

La parte successiva riguarda i risultati numerici ottenuti dalla calibrazione delle formule da noi presentate nei capitoli sul pricing dei derivati. Insieme ai capitoli sul pricing teorico dei derivati costituisce la parte centrale del nostro lavoro perché ci permette di valutare la correttezza e la coerenza delle formule costruite ma anche di confrontare i diversi modelli utilizzati. Per prima cosa in questo capitolo vengono esposti e discussi i risultati sul pricing delle Bond Future Option ottenuti in ambito Single Curve dal modello unidimensionale con Hull-White e multi Dimensionale con il Bond Market Model Generalizzato. A queste due parti segue un confronto tra i risultati dei due modelli sulla valutazione dell'opzione Cheapest to Deliver nel Future.

La seconda parte del capitolo è dedicata al pricing dei Future con il Bond Market Model in ambito Single Curve e Multi Curve. In ambito multicurve proponiamo un metodo veloce e rapido per calibrare le Price-Vol dei Defaultable Bond in esame basandoci su dati storici dei prezzi dei Bond, a causa della mancanza delle opzioni su questi strumenti è impossibile fare una calibrazione diretta. Tramite l'esposizione dei risultati numerici discutiamo come questi sembrano confermare la bontà di questo metodo storico per valutare le volatilità di prezzo dei Defaultable Coupon Bond.

L'ultima parte del nostro lavoro tratta dei Bond Inflation-Linked emessi dagli stati sovrani: questo ramo del mercato è relativamente giovane e non ancora pienamente sviluppato, anche se va osservato che i ritmi di crescita soprattutto negli ultimi 10 anni dei volumi emessi è molto veloce, vedi fig (2). Nonostante la rapida crescita il valore complessivo di questo mercato costituisce solo una piccola frazione del mercato dei titoli governativi.

I motivi del successo di questi titoli Inflation-Linked sono diversi, i principali sono che questi strumenti anche in un contesto di grande insicurezza sulla sostenibilità dei debiti sovrani rimangono titoli molto ricercati in particolare dai fondi pensione. I fondi pensione hanno come principale preoccupazione di mantenere invariato il potere d'acquisto dei loro capitali, per questo motivo titoli statali che remunerano gli investitori per la perdita del potere d'acquisto subita nel periodo in questione a causa dell'inflazione sono strumenti ideali per le loro necessità.

Nell'ultimo capitolo trattiamo delle caratteristiche e delle convenzioni principali con cui questi strumenti sono emessi, studiando queste emissioni per i paesi in esame: Italia, Francia e Germania. Il punto centrale della nostra analisi su questi titoli è costruire un modello per valutare correttamente l'inflazione futura, per farlo individueremo il trend dell'inflazione futura tramite gli Zero Coupon Inflation Indexed Swap e la Stagionalità (Seasonality) attraverso i dati storici sul Harmonized Indices of Consumer Prices, principale indice di inflazione



Figura 2: Crescita del valore complessivo dei titoli Inflation-Linked emessi sul mercato dei titoli Governativi Europeo il Miliardi di €(dati fonte Bloomberg)

Europeo su cui si basa la valutazione dei titoli Inflation-Linked per i paesi che analizzeremo. In particolare per la corretta stima della Seasonality vengono proposti e discussi diversi modelli; la scelta del modello per modellare la Seasonality viene fatta in base alla significatività e alla capacità di fittare i dati storici.

Una volta ricostruita la curva di Inflazione Futura segue una parte di analisi numerica dei Bond Inflation-Linked: calcoliamo il loro valore confrontandolo con quello quotato sul mercato. Infine introduciamo e calcoliamo la Break Even Inflation, una quantità che permette di fare un confronto immediato tra i rendimenti dei titoli nominali e i Bond Inflation-Linked, per i tre paesi in esame.

Capitolo 1

Modelli usati nel Pricing

In questo primo capitolo sono esposti i principali modelli usati: nella prima sezione è esposto il Modello HJM, che costituisce il modello base su cui sono sviluppati i modelli successivi. Alcuni risultati sono validi per un generico modello HJM, in particolare ci concentreremo sul cosiddetto HJM Gaussiano (di seguito GHJM). L'analisi parte dai casi più semplici, modelli unidimensionali e Single-Curve fino ad arrivare al caso più complesso di Modello Multidimensionale e Multi-Curve, modello di riferimento introdotto in questo studio. Per il caso unidimensionale verrà esposto brevemente il modello Hull-White, una descrizione dettagliata di questo modello esula dalla nostra analisi (cfr. [Hull e White 1990]), e la relazione che lo associa al modello HJM. Infine nell'ultima sezione si discuterà di due ipotesi operative che riguardano la Yield-Vol molto utili per la successiva analisi numerica e per modellare le volatilità dei diversi Bond nell'ambito del modello Multi-Curve e Multidimensionale; le ipotesi si riveleranno essenziali nel pricing e nella gestione dei contratti derivati.

1.1 Introduzione al Modello Gaussian Heath-Jarrow-Morton

Il modello Heath-Jarrow-Morton (HJM) [Heath, Jarrow e Morton 1992], permette di descrivere la dinamica della struttura a termine dei tassi di interesse in un ambiente senza arbitraggio, il punto di partenza è la considerazione che la curva degli Zero Coupon (nel seguito ZC) $B(t, \cdot)$ è una quantità stocastica continua quindi esiste una funzione stocastica $f(t, u)$ definita come il tasso Forward tale che:

$$B(t, T) \doteq e^{-\int_t^T f(t, s) ds} \quad (1.1)$$

Il Discount Factor stocastico a sua volta è definito come:

$$D(0, t) \doteq e^{-\int_0^t r_s ds} \quad (1.2)$$

L'idea di Heath, Jarrow e Morton in [Heath, Jarrow e Morton 1992] è di fissare la dinamica del tasso Forward $f(t, s)$ disponibile a t sull'orizzonte temporale T , con una equazione differenziale stocastica dipendente da un termine di drift $\mu(t, T)$ e un termine stocastico la cui volatilità, nella nostra notazione, è definita come la derivata parziale della funzione $\sigma(t, T)$ rispetto a T .

Sia $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F})$ uno spazio di probabilità associato a una misura di probabilità, dove la filtrazione \mathcal{F}_t è la filtrazione aumentata associata al moto Browniano N -dimensionale: $(\underline{W}_t)_{0 \leq t \leq T} \in \mathbb{R}^N$. Heath, Jarrow e Morton suppongono data l'esistenza di μ e σ adeguate e dipendenti da t e T , che il tasso Forward $f(t, \cdot)$ abbia la seguente dinamica:

$$df(t, T) = \mu(t, T) dt - \frac{\partial}{\partial T} (\sigma(t, T)) \cdot d\underline{W}(t) \quad (1.3)$$

dove lo spot rate è definito come valore istantaneo del tasso Forward:

$$r_t \doteq f(t, t).$$

Inoltre ipotizzando il drift $\mu(t, T)$ e la volatilità $\sigma(t, s)$ (e di conseguenza anche la sua derivata parziale rispetto a T) come funzioni deterministiche del tempo si ottiene il modello HJM Gaussiano (GHJM). Il modello è definito Gaussiano perché, sotto questa ipotesi, l'unica quantità stocastica nella dinamica (1.3) è il moto Browniano, che per ogni istante t fissato è una appunto variabile Gaussiana.

Definiamo ora la dinamica del tasso Forward sotto la misura Risk-Neutral:

Definizione 1.1. *Sotto la Misura Risk-Neutral nel modello GHJM, il tasso Forward $f(t, T)$ ha la dinamica:*

$$df(t, T) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\underline{\sigma}(t, T) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(t, T) \right) dt - \frac{\partial}{\partial T} \left(\underline{\sigma}(t, T) \right) \cdot d\underline{W}(t) \quad (1.4)$$

dove $\underline{\sigma}(t, T)$ è un vettore N -dimensionale di funzioni deterministiche del tempo e tale per cui:

$$\underline{\sigma}(t, t) = \underline{0}$$

Infine $\underline{W}(t)$ è un moto Browniano N -dimensionale con una matrice di Correlazione costante $\underline{\rho}$ tale che:

$$dW_i(t)dW_j(t) = \rho_{i,j}dt$$

La dimostrazione di questa definizione è riportata nella Appendice A oppure si può fare riferimento all' articolo [Henrard 2006].

Il passo successivo è studiare la dinamica Risk-Neutral per il prezzo di uno ZC nel contesto GHJM, questa quantità è alla base di tutta la successiva analisi svolta. Introduciamo un primo Lemma che riguarda proprio la dinamica dello ZC, ma prima definiamo una notazione più immediata per la forma quadratica dipendente dal vettore $\underline{\sigma}$ e la matrice $\underline{\rho}$: prendendo $\underline{a} \in \mathfrak{R}^N$ e $\underline{\rho} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ poniamo

$$\underline{a}^2 \doteq \underline{a} \cdot \underline{\rho} \underline{a}$$

Lemma 1.1. *Sotto la misura Risk-Neutral per il modello GHJM illustrato precedentemente, la dinamica dello ZC Bond è data da:*

$$dB(t, T) = B(t, T)(r_t dt + \underline{\sigma}(t, T) \cdot d\underline{W}(t)) \quad (1.5)$$

o in forma integrale:

$$B(T, v) = B(t, v) e^{\left\{ \int_t^T r_s ds + \int_t^T \underline{\sigma}(s, v) \cdot d\underline{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^T \underline{\sigma}^2(s, v) ds \right\}} \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Usando (1.4) e la formula di derivazione dell'integrale:

$$\frac{d}{dt} \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) = f(t, t) - \int_t^T \frac{d}{dt} \left(f(t, s) \right) ds. \quad (1.7)$$

Ciò implica che nel modello GHJM abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{d}{dt} \left(f(t, s) \right) ds &= \frac{1}{2} \int_t^T \left(\frac{\partial}{\partial s} \underline{\sigma}^2(t, s) \right) ds - \int_t^T \left(\frac{\partial}{\partial s} \underline{\sigma}(t, s) \cdot d\underline{W}(t) \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \underline{\sigma}^2(t, s) dt - \underline{\sigma}(t, s) \cdot d\underline{W}(t) \end{aligned}$$

La dinamica dello ZC Bond in questo contesto può quindi essere ottenuta dall'espressione:

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= B(t, T) \left(\frac{d}{dt} \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) \right) + \frac{1}{2} B(t, T) \left(\frac{d}{dt} \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) \right)^2 = \\ &= B(t, T) \left(f(t, t) dt - \frac{1}{2} \underline{\sigma}^2(t, T) dt + \underline{\sigma}(t, T) \cdot d\underline{W}(t) \right) + \frac{1}{2} B(t, T) \left(\underline{\sigma}(t, T) \cdot d\underline{W}(t) \right) \left(\underline{\sigma}(t, T) \cdot d\underline{W}(t) \right) = \\ &= B(t, T) \left(r_t dt + \underline{\sigma}(t, T) \cdot d\underline{W}(t) \right) \end{aligned}$$

ricordando che

$$f(t, t) = r_t$$

$$\frac{1}{2}(\underline{\sigma}(t, T) \cdot d\underline{W}(t))(\underline{\sigma}(t, T) \cdot d\underline{W}(t)) \doteq \frac{1}{2}\underline{\sigma}(t, T) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(t, T) dt \doteq \frac{1}{2} \underline{\sigma}^2(t, T) dt .$$

□

Dalla formula precedente si può procedere derivando l'espressione del Forward ZC Bond tra t_1 e t_2 valutato a un generico T futuro in funzione del Forward ZC tra t_1 e t_2 valutato a t $B(t; t_1, t_2)$ dove $t < T \leq t_1 \leq t_2$. Successivamente da quest'ultima espressione è possibile calcolare anche la dinamica del Discount Factor sull'intervallo temporale (t_1, t_2) . Entrambe queste quantità come vedremo, sono molto utili per la successiva analisi.

Nei prossimi due Lemmi vengono riportati i risultati sul Forward ZC e il Discount Factor, che sono simili a quelli ottenuti da Henrard in [Henrard 2006] nel caso unidimensionale, viene inoltre fornita una veloce traccia della soluzione:

Lemma 1.2. [Henrard (1)] Prendiamo $0 \leq t < T \leq t_1 \leq t_2$ nel modello GHJM il prezzo del Forward ZC Bond sotto la misura Risk Neutral è:

$$B(T; t_1, t_2) = B(t; t_1, t_2) e \left\{ \int_t^T (\underline{\sigma}(u, t_2) - \underline{\sigma}(u, t_1)) \cdot d\underline{W}_u - \frac{1}{2} \int_t^T (\underline{\sigma}^2(u, t_2) - \underline{\sigma}^2(u, t_1)) du \right\} \quad (1.8)$$

o in forma differenziale:

$$dB(t; t_1, t_2) = B(t; t_1, t_2) (\underline{\sigma}(t, t_2) - \underline{\sigma}(t, t_1)) \cdot (d\underline{W}_t - \underline{\rho} \underline{\sigma}(t, t_1) dt) . \quad (1.9)$$

Dimostrazione. Partendo dall'espressione (1.6) la dimostrazione è una semplice applicazione di integrali tra t , t_1 and t_2 :

$$B(t_1, t_2) = B(t, t_2) e \left\{ \int_t^{t_1} r_s ds + \int_t^{t_1} \underline{\sigma}(s, t_2) \cdot d\underline{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^{t_1} \underline{\sigma}^2(s, t_2) ds \right\}$$

$$B(t_1, t_1) = 1 = B(t, t_1) e \left\{ \int_t^{t_1} r_s ds + \int_t^{t_1} \underline{\sigma}(s, t_1) \cdot d\underline{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^{t_1} \underline{\sigma}^2(s, t_1) ds \right\}$$

Dividendo termine a termine le espressioni precedenti si ottiene:

$$B(t_1, t_2) = B(t; t_1, t_2) e \left\{ \int_t^{t_1} (\underline{\sigma}(u, t_2) - \underline{\sigma}(u, t_1)) \cdot d\underline{W}_u - \frac{1}{2} \int_t^{t_1} (\underline{\sigma}^2(u, t_2) - \underline{\sigma}^2(u, t_1)) du \right\}$$

da cui si può agevolmente calcolare il valore di $B(T, t_1)$ e di $B(T, t_2)$

$$B(T, t_2) = B(t; T, t_2) e \left\{ \int_t^T (\underline{\sigma}(u, t_2) - \underline{\sigma}(u, T)) \cdot d\underline{W}_u - \frac{1}{2} \int_t^T (\underline{\sigma}^2(u, t_2) - \underline{\sigma}^2(u, T)) du \right\}$$

$$B(T, t_1) = B(t; T, t_1) e \left\{ \int_t^T (\underline{\sigma}(u, t_1) - \underline{\sigma}(u, T)) \cdot d\underline{W}_u - \frac{1}{2} \int_t^T (\underline{\sigma}^2(u, t_1) - \underline{\sigma}^2(u, T)) du \right\}$$

Dividendo ancora una volta termine a termine e semplificando:

$$B(T; t_1, t_2) = \frac{B(T, t_2)}{B(T, t_1)} = \frac{B(t; T, t_2)}{B(t; T, t_1)} e^{\left\{ \int_t^T (\underline{\sigma}(u, t_2) - \underline{\sigma}(u, t_1)) \cdot d\mathbf{W}_u - \frac{1}{2} \int_t^T (\underline{\sigma}^2(u, t_2) - \underline{\sigma}^2(u, t_1)) du \right\}}$$

dove:

$$\frac{B(t; T, t_2)}{B(t; T, t_1)} = \frac{B(t, t_2) B(t, T)}{B(t, T) B(t, t_1)} = B(t; t_1, t_2).$$

Per i dettagli della dimostrazione si può fare riferimento a [Henrard 2006]. □

Lemma 1.3. [Henrard (2)] Siano $0 \leq t_1 \leq t_2$, nel modello GHJM il Discount Factor sotto la misura Risk-Neutral è dato dall'espressione:

$$D(t_1, t_2) = e^{\left\{ - \int_{t_1}^{t_2} r_s ds \right\}} = B(t_1, t_2) e^{\left\{ \int_{t_1}^{t_2} \underline{\sigma}(s, t_2) \cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \underline{\sigma}^2(s, t_2) ds \right\}} \quad (1.10)$$

Dimostrazione. Nella misura Risk-Neutral abbiamo:

$$d(D(0, t)B(t, T)) = D(t)B(t, T)\underline{\sigma}(t, T) \cdot d\mathbf{W}_t$$

Con un semplice uso del Lemma di Ito:

$$\begin{aligned} d(\log(D(0, t)B(t, T))) &= \frac{d(D(0, t)B(t, T))}{D(0, t)B(t, T)} - \frac{1}{2} \left(\frac{d(D(0, t)B(t, T))}{D(0, t)B(t, T)} \right)^2 = \\ &= \underline{\sigma}(t, T) \cdot d\mathbf{W}_t - \frac{1}{2} \underline{\sigma}^2(t, T) dt. \end{aligned}$$

Ne segue che per t_2 , ma i medesimi passaggi si possono fare per t_1 :

$$\int_t^{t_2} d(\log(D(0, s)B(s, t_2))) ds = \int_t^{t_2} \underline{\sigma}(s, t_2) \cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^{t_2} \underline{\sigma}^2(s, t_2) ds$$

$$\frac{D(0, t_2)B(t_2, t_2)}{D(0, t)B(t, t_2)} = e^{\left\{ \int_t^{t_2} \underline{\sigma}(s, t_2) \cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^{t_2} \underline{\sigma}^2(s, t_2) ds \right\}}$$

$$D(0, t_2) = D(0, t)B(t, t_2) e^{\left\{ \int_t^{t_2} \underline{\sigma}(s, t_2) \cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^{t_2} \underline{\sigma}^2(s, t_2) ds \right\}}$$

e l'espressione analoga per t_1

$$D(0, t_1) = D(0, t)B(t, t_1) e^{\left\{ \int_t^{t_1} \underline{\sigma}(s, t_1) \cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^{t_1} \underline{\sigma}^2(s, t_1) ds \right\}}.$$

Facendo il rapporto delle espressioni precedenti e usando (1.8) si ricava l'ipotesi:

$$\begin{aligned} D(t_1, t_2) &= B(t_1, t_2) e^{\left\{ \int_{t_1}^{t_2} \underline{\sigma}(s, t_2) \cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \underline{\sigma}(s, t_2) \cdot \underline{\rho} \cdot \underline{\sigma}(s, t_2) ds \right\}} = \\ &= \frac{B(t, t_2)}{B(t, t_1)} e^{\left\{ \int_t^{t_1} (\underline{\sigma}(s, t_2) - \underline{\sigma}(s, t_1)) \cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^{t_1} (\underline{\sigma}^2(s, t_2) - \underline{\sigma}^2(s, t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \underline{\sigma}(s, t_2) \cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \underline{\sigma}^2(s, t_2) ds \right\}} \end{aligned}$$

□

Una immediata e utile conseguenza del primo Lemma è che sotto misura t_1 -forward il Forward ZC è martingala; infatti la relazione tra moto Browniano nella Risk-Neutral e nella t_1 -forward è data dal Teo. di Girsanov:

$$dW_t^{t_1} = dW_t - \underline{\rho} \sigma(t, t_1) dt \quad (1.11)$$

e sostituendo l'espressione del moto Browniano sotto la nuova misura nella formula (1.9) si ottiene:

Corollario 1.1. *Sotto la misura t_1 -forward la dinamica del Forward ZC Bond è:*

$$dB(t; t_1, t_2) = B(t; t_1, t_2) (\sigma(t, t_2) - \sigma(t, t_1)) \cdot dW_t^{t_1} \quad (1.12)$$

o in forma integrale:

$$B(T; t_1, t_2) = B(t; t_1, t_2) e \left\{ \int_t^T (\sigma(u, t_2) - \sigma(u, t_1)) \cdot dW_u^{t_1} - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma(u, t_2) - \sigma(u, t_1))^2 du \right\} \quad (1.13)$$

Ne segue che il Forward ZC Bond è una t_1 -forward martingala.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata sostituendo la (1.11) nella (1.9). □

1.2 Modello Hull-White

Il Modello proposto da Hull-White in [Hull e White 1990] sul tasso Spot appartiene alla classe dei modelli di tasso in assenza di arbitraggio. Il motivo per cui è usato nella nostra analisi è che in ambito unidimensionale, permette un'analisi veloce ma relativamente accurata dei tassi e di conseguenza degli ZC Bond. In seguito mostreremo tuttavia che il suo utilizzo in ambito unidimensionale per prezzare i derivati di cui ci occupiamo nella nostra analisi, non dà risultati soddisfacenti in particolare per quanto riguarda la calibrazione della volatilità implicita relativa a Future su diverse scadenze (Schatz, Bobl e Bund).

L'espressione più generale della dinamica del tasso Short nel modello di Hull-White è:

$$dr_t = (\theta_t - a_t r_t) dt + \sigma_t dW_t$$

con i coefficienti dipendenti tutti dal tempo.

Si può mostrare che imponendo alcune condizioni sui coefficienti (a, σ) e che il parametro θ_t sia una determinata funzione del tempo, il modello di Hull-White è un caso particolare del modello GHJM:

Lemma 1.4. *Ponendo (a, σ) come costanti rispetto al tempo e θ_t come funzione deterministica del tempo e pari a*

$$\theta_t = \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-2at} - 1) - f(0, t)$$

il modello di Hull-White è un caso particolare del modello GHJM unidimensionale imponendo semplicemente:

$$\sigma(t, T) = \frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) \quad (1.14)$$

Dimostrazione. In questa dimostrazione restiamo in un ambito unidimensionale che è quello in cui utilizzeremo questo modello in seguito, ma il procedimento è del tutto analogo in più dimensioni.

Si comincia ottenendo la (1.4) in questo contesto, derivando (1.14). Successivamente si integra rispetto a t :

$$df(t, T) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \sigma^2(t, T) dt - \frac{\partial}{\partial T} \sigma(t, T) dW_t$$

$$\int_0^T df(s, T) = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \sigma(s, T)^2 ds - \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \sigma(s, T) dW_s$$

$$f(T, T) - f(0, T) = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\sigma^2}{a} (1 - e^{-a(T-s)}) e^{-a(T-s)} ds - \int_0^T \frac{\sigma}{a} e^{-a(T-s)} dW_s$$

Quello che si ottiene è:

$$\begin{aligned} r_t &= f(0, t) + \frac{\sigma^2}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)} ds - \frac{\sigma^2}{a} \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds - \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s = \\ &= f(0, t) + \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-at}) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2at}) - \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s = \\ &= f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-at} - 1)^2 - \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} ds \end{aligned}$$

Derivando quest'ultima espressione rispetto a t e assumendo come costante il tasso Spot immediato $f(0, t)$:

$$\begin{aligned} dr_t &= -\frac{\sigma^2}{a} (e^{-at} - 1) e^{-at} dt + \left(\sigma a e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \right) dt + \sigma e^{-at} e^{at} dW_t = \\ &= -a \left(+ \frac{\sigma^2}{a^2} (e^{-2at} - e^{-at}) - \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \right) dt + \sigma dW_t = \\ &= -a \left(+ \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-2at} - 2e^{-at} + 1) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-2at} - 1) - \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Ricaviamo da quest'espressione l'espressione che deve avere θ_t :

$$\begin{aligned} \theta_t &= \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-2at} - 1) - f(0, t) \\ dr_t &= (\theta_t - a_t r_t) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Il risultato è la formula generale per lo spot-rate nel modello di Hull-White ottenuta dall'espressione del tasso Forward nel modello GHJM sotto la misura Risk-Neutral cioè la formula (1.4). □

1.3 Multi-Curve Approach

Il mercato delle emissioni Governative è molto variegato e comprende una vasta categoria di emittenti ciascuno con caratteristiche diverse. La crisi del mercato legato alle emissioni dei paesi nell'area Euro ha ridato particolare importanza a un aspetto della valutazione delle emissioni governative: l'affidabilità come debitori degli Stati Sovrani. I default degli stati sovrani sono eventi tutt'altro che rari nella storia moderna, basti pensare ai casi recenti della Russia nel 1998 o dell'Argentina nel 2001. Con l'avvento dell'area Euro, sembrava tuttavia che le grandi differenze in termini di affidabilità creditizia dei diversi paesi coinvolti fossero o comunque potessero essere superate. La crisi ha mostrato invece che il mercato valuta in modo molto diverso le condizioni economiche dei diversi paesi e di conseguenza anche la loro affidabilità come debitori, anche nel contesto di una moneta e una Banca Centrale comune.

Appare alla luce di queste considerazioni, riduttivo usare un modello Single-Curve per l'analisi dei diversi paesi dell'area Euro essendo le economie molto differenti, e più realistico passare a un modello Multi-Curve che consideri due tipologie di Bond Governativi: i Bond Risk-Free emessi dal paese, la Germania, a cui il mercato fa pagare un rischio di credito pressoché nullo, e i Defaultable Bond emessi dagli altri paesi a cui il mercato fa pagare uno spread sui tassi rispetto alla categoria precedente, riconducibile al rischio di credito. Questa descrizione è chiaramente molto semplificata ma analoga a quella attualmente utilizzata dal mercato.

Un approccio Multi-Curve simile a quello usato nel lavoro di Giesecke [Giesecke 2003] permette una valutazione semplice ma sostanzialmente corretta dei Defaultable Bond. Nel suo lavoro Giesecke introduce i defaultable ZC Bond $\tilde{B}(t, T)$ come prodotto dei Risk-free ZC Bond $B(t, T)$ e di un'altra quantità $G(t, T)$:

$$\tilde{B}(t, T) = B(t, T) G(t, T)$$

Questo approccio, usato frequentemente nella pratica, è estremamente conveniente per creare modelli sulle emissioni governative. E' formalmente equivalente a studiare un modello di default con un recovery nullo, o ad affermare che lo spread moltiplicativo $G(t,T)$ è un onere dovuto a uno yield aggiuntivo che il Mercato chiede per remunerare la possibilità che l'emittente fallisca prima della Maturity del Bond $\tilde{B}(t,T)$. Visto più nel dettaglio questo yield addizionale include in una informazione di mercato (prezzo del defaultable bond) due sorgenti di rischio: il fatto che l'emittente possa fallire prima della data di Maturity e che l'investitore possa recuperare solo una parte del capitale investito i.e. ci possa essere un recovery minore di uno.

Il maggior inconveniente dell' approccio classico che consiste nel modellare separatamente il recovery e la Survival Probability, è che in generale è complicato calibrare il recovery (tranne nel caso di mercati molto liquidi e maturi sia per il debito senior che per il debito subordinato); la calibrazione è anche più complicata nel caso in cui l'emittente sia uno Stato Sovrano per cui esistono un numero esiguo di casi precedenti su cui basare tecniche su dati storici e spesso ciascuno di questi casi con caratteristiche particolari che rendono poco coerente un'analisi complessiva. Per lo studio delle emissioni di stati sovrani, che è l'interesse principale della nostra analisi, un recovery nullo appare quindi essere più ragionevole di qualsiasi altro valore (come per esempio il 40% ipotizzato come standard nel mercato dei CDS) dopo il fallimento dell'Argentina, con un recovery trascurabile, o più recentemente il caso della Grecia nell'area Euro, dove gli investitori hanno avuto un recovery pari al 20% pagato con Bond di nuova emissione, e dopo aver assistito a un cambio *in itinere* nelle regole sulla priority tra i diversi investitori.

Come mostreremo in questo studio, già un modello base *à la* Giesecke permette di descrivere in maniera esaustiva tutte le caratteristiche principali nel mercato dei Bond Governativi.

La dinamica Multi-Curve in questo approccio (Modello di Giesecke o Multi-Curve GHJM nei capitoli successivi) deve considerare insieme con la dinamica del Risk-Free Bond - i.e. (1.5)-, la seguente dinamica per il Defaultable ZC Bond (DZC da qui in avanti):

$$d\tilde{B}(t,T) = \tilde{B}(t,T)(r_t dt + \tilde{\sigma}(t,T) \cdot d\mathbf{W}(t)) \quad (1.15)$$

o anche in forma integrale:

$$\tilde{B}(T,v) = \tilde{B}(t,v)e^{\left\{ \int_t^T r_s ds + \int_t^T \tilde{\sigma}(s,v) \cdot d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^T \tilde{\sigma}^2(s,v) ds \right\}}. \quad (1.16)$$

A questo punto possiamo fissare la nuova volatilità $\tilde{\sigma}(t,T)$ dei DZC come la somma della corrispondente volatilità del Risk-Free ZC Bond più una volatilità di spread che è funzione del livello di rischio del paese emittente percepito dal mercato:

$$\tilde{\sigma}(t,T) = \sigma(t,T) + \epsilon(t,T). \quad (1.17)$$

Otteniamo una formula per il Forward DZC Bond formalmente molto simile a quella già vista nel Lemma (1.2) con l'unica ma sensibile differenza del cambio di volatilità:

Lemma 1.5. *Usando l'approccio Multi-Curve e ponendo $0 \leq t < T \leq t_1 \leq t_2$ il prezzo del forward Defaultable ZC Bond nella misura Risk-Neutral è:*

$$\tilde{B}(T; t_1, t_2) = \tilde{B}(t; t_1, t_2)e^{\left\{ \int_t^T (\tilde{\sigma}(u, t_2) - \tilde{\sigma}(u, t_1)) \cdot d\mathbf{W}_u - \frac{1}{2} \int_t^T (\tilde{\sigma}^2(u, t_2) - \tilde{\sigma}^2(u, t_1)) du \right\}}. \quad (1.18)$$

In forma differenziale:

$$d\tilde{B}(t; t_1, t_2) = \tilde{B}(t; t_1, t_2) (\tilde{\sigma}(t, t_2) - \tilde{\sigma}(t, t_1)) \cdot (d\mathbf{W}_t - \underline{\rho} \tilde{\sigma}(t, t_1) dt) \quad (1.19)$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue sostanzialmente gli stessi passi fatti nel contesto Single-Curve partendo dalla formula associata al tasso Forward di un DZC:

$$d\tilde{f}(t,T) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} (\tilde{\sigma}(t,T) \cdot \underline{\rho} \tilde{\sigma}(t,T)) dt - \frac{\partial}{\partial T} (\tilde{\sigma}(t,T)) \cdot d\mathbf{W}(t)$$

□

Un'importante conseguenza è la valutazione nella misura t_1 -forward:

Corollario 1.2. *Sotto la misura t_1 -forward la dinamica del DZC è:*

$$\tilde{B}(T; t_1, t_2) = \tilde{B}(t; t_1, t_2) \Delta_{1,2}(t, T) e^{\left\{ \int_t^T (\tilde{\sigma}(u, t_2) - \tilde{\sigma}(u, t_1)) \cdot dW_u^{t_1} - \frac{1}{2} \int_t^T (\tilde{\sigma}(u, t_2) - \tilde{\sigma}(u, t_1))^2 du \right\}} \quad (1.20)$$

dove

$$\Delta_{1,2}(t, T) = e^{\left\{ - \int_t^T \epsilon(u, t_1) \cdot \underline{\rho} (\tilde{\sigma}(u, t_2) - \tilde{\sigma}(u, t_1)) du \right\}}$$

o in forma differenziale:

$$d\tilde{B}(t; t_1, t_2) = \tilde{B}(t; t_1, t_2) (\tilde{\sigma}(t, t_2) - \tilde{\sigma}(t, t_1)) \cdot (dW_t^{t_1} - \underline{\rho} \epsilon(t, t_1) dt). \quad (1.21)$$

Dimostrazione. Per dimostrare il Corollario è sufficiente inserire la formula (1.11) nelle formule del Lemma precedente. □

Questo modello ricorda l'approccio Multi-Curve per le curve interbancarie in [Baviera e Cassaro 2012], applicato a problemi di pricing di derivati su obbligazioni governative, tuttavia le formule che si ottengono non possono essere usate direttamente per l'analisi numerica. Per l'ambito multicurve e multidimensionale l'analisi numerica della formula generale ottenuta tramite questo modello, viene effettuata attraverso il modello trattato nella prossima sezione che permette di risalire dalla formula generale a una formula di più facile impiego.

1.4 Approssimazione Log-Normale per la dinamica dei Bond: Bond Market Model

In ambito multidimensionale useremo un modello elaborato da Baviera in [Baviera 2005] denominato Bond Market Model; come vedremo nelle seguenti sezioni, questo modello oltre a essere accurato nella valutazione dei Bond e dei loro derivati, è anche facile e veloce da usare nella parte numerica.

Inoltre un'altro importante aspetto di questo modello è la versatilità: si può adattare sia all'ambito Single-Curve per la valutazione di emissioni ritenute Risk-Free sia all'ambito Multi-Curve per la valutazione di emissioni in cui non si può trascurare la possibilità di Default.

Consideriamo per prima cosa nell'ambito Single-Curve il seguente modello per il valore in t di un generico Coupon Bond $P(\underline{C}^{(i)}, t)$ -Invoice Price o Dirty Price-, in cui consideriamo $T_{\alpha+1}$ come la prima data di pagamento della cedola dopo t e T_w come la data di ripagamento del Principal, con $w \geq \alpha + 1$; sia invece $B_j(t)$ il Forward ZC tra una generica data di delivery nel futuro e la j -esima data cedolare, valutato a t e infine $c^{(i)}$ il coupon nominale associato all' i -esimo Bond:

$$P(\underline{C}^{(i)}, t) \doteq \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t) \quad (1.22)$$

$$C_j^{(i)} \doteq \begin{cases} c^{(i)} \delta(T_{j-1}, T_j) & j < w \\ 1 + c^{(i)} \delta(T_{w-1}, T_w) & j = w \end{cases}$$

Le frazioni d'anno $\delta(T_{j-1}, T_j)$ sono in genere per le obbligazioni governative europee calcolate con la convenzione $\frac{act}{act}$. Usando la formula (1.12) dedotta prima per la dinamica di un Forward Risk-Free ZC nella misura T_d -forward, si può scrivere ciascun Forward ZC che compone il Coupon Bond come una T_d -forward martingala in questo modo:

$$dB_j(t) = B_j(t) \underline{v}_j(t) \cdot d\underline{W}_t^{T_d}$$

$$\underline{v}_j(t) = \begin{cases} \sum_{k=\alpha}^j (\underline{\sigma}(t, T_k) - \underline{\sigma}(t, T_{k-1})) & t \leq T_\alpha \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove per semplicità di notazione abbiamo posto T_α pari alla data di delivery T_d . Questa formula è del tutto equivalente alla (1.12), infatti si può facilmente notare che $\underline{v}_j(t)$ è data da una somma telescopica in cui tutti termini intermedi si semplificano lasciando:

$$\underline{v}_j(t) = \underline{\sigma}(t, T_j) - \underline{\sigma}(t, T_\alpha) \doteq \underline{\sigma}(t, T_j) - \underline{\sigma}(t, T_d)$$

Il cambio di notazione rende più facile valutare l'espressione differenziale di $P(\underline{C}^{(i)}, t)$, si può infatti provare che ha una dinamica molto simile a quella di una martingala nella misura T_d -forward:

$$d(P(\underline{C}^{(i)}, t)) = d\left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t)\right) = \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} dB_j(t)$$

da cui

$$d(P(\underline{C}^{(i)}, t)) = P(\underline{C}^{(i)}, t) \underline{U}_i(t) \cdot d\underline{W}_t^{T_d} \quad (1.23)$$

Dove:

$$\begin{cases} \underline{U}_i(t) = \sum_{j=\alpha+1}^w \gamma_j^{(i)}(t) \underline{v}_j(t) \\ \gamma_j^{(i)}(t) = \frac{C_j^{(i)} B_j(t)}{\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t)} \end{cases}$$

La formula è inutile a livello operativo a causa della stocasticità del termine di volatilità $\underline{U}_i(t)$, dovuta alla presenza delle quantità stocastiche $B_j(t)$ nei pesi $\gamma_j^{(i)}(t)$; questo rende la formula differenziale di $P(\underline{C}^{(i)}, t)$ precedente impossibile da integrare e quindi da usare per una valutazione numerica.

Un modo molto ingegnoso di risolvere l'inconveniente è fissare i coefficienti $\gamma_j^{(i)}(t)$ alla data di valutazione t_0 (mediante la *Freezing Technique*). L'approssimazione da risultati ottimi per diversi motivi, uno dei principali è legato al grande sbilanciamento nei valori dei diversi coefficienti in funzione delle diverse date T_j :

$$\gamma_j^{(i)}(t) \approx \begin{cases} 10^{-2} & \Leftrightarrow j \neq w \\ 1 & \Leftrightarrow j = w \end{cases}$$

Questa proprietà dei coefficienti $\gamma_j^{(i)}(t)$ è del tutto generale, vale cioè per qualsiasi Bond infatti si basa solamente sul fatto che a Maturity del Bond viene corrisposto un Cash Flow $C_w^{(i)}$ molto maggiore di tutti i precedenti, il che rende lecito aspettarsi che l'andamento del prezzo di un Coupon Bond sia fortemente collegato con l'andamento del tasso relativo alla data di Maturity. Un secondo motivo per cui l'approssimazione funziona è che su brevi periodi (non superiori a un paio di mesi) in regime di tassi relativamente bassi, quindi anche in una situazione di tassi più alti rispetto a quelli odierni che sono estremamente bassi, la struttura a termine degli ZC Bond $B(t, \cdot)$ ha variazioni minime rispetto al tempo t e di conseguenza anche il valore dei coefficienti $\gamma_j^{(i)}(t)$ a tempi diversi può essere considerato in prima approssimazione costante.

Utilizzando questa utile approssimazione, la dinamica del generico Coupon Bond diventa Log-normale con varianza deterministica: il prezzo di un generico Coupon Bond diventa martingala nella misura T_d -forward.

Lemma 1.6. [BMM: Baviera] *Nel contesto introdotto in questa sezione sotto la misura T_d -forward e approssimando la volatilità usando la Freezing Technique per fissare i coefficienti della volatilità nel tempo, a un dato t_0 fissato sia*

$$\begin{cases} \underline{V}_i(t) = \sum_{j=\alpha+1}^w \gamma_j^{(i)}(t_0) \underline{v}_j(t) \\ \gamma_j^{(i)}(t_0) = \frac{C_j^{(i)} B_j(t_0)}{\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t_0)} \end{cases}$$

Un generico Coupon Bond ha una dinamica Log-normale data da:

$$d(P(\underline{C}^{(i)}, t)) = P(\underline{C}^{(i)}, t) \underline{V}_i(t) \cdot d\underline{W}_t^{T_d} \quad (1.24)$$

o in forma integrale

$$P(\underline{C}^{(i)}, T) = P(\underline{C}^{(i)}, t) e^{\left\{ \int_t^T \underline{V}_i(s) \cdot d\underline{W}_s^{T_d} - \frac{1}{2} \int_t^T \underline{V}_i^2(s) ds \right\}}$$

con una volatilità deterministica $\underline{V}_i(t)$.

Dimostrazione. Per dimostrare il Lemma basta seguire i passi fatti in precedenza usando la *Freezing Technique* per fissare in modo deterministico la volatilità. \square

Un risultato simile vale in un approccio Multi-Curve per la valutazione di un Defaultable Coupon Bond, rifacendo tutti i passaggi precedenti sostituendo a $\underline{U}_i(t)$, $\underline{\tilde{U}}_i(t)$ e $\underline{V}_i(t)$ con $\underline{\tilde{V}}_i(t)$; dove $\underline{\tilde{U}}_i(t)$ e $\underline{\tilde{V}}_i(t)$ sono quantità costruite esattamente nello stesso modo ma usando la volatilità associata a un Defaultable ZC Bond : $\underline{\tilde{\sigma}}(t, T)$. Il valore di un generico Defaultable Coupon Bond è:

$$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \doteq \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) \quad (1.25)$$

Possiamo formulare l'analogo Lemma per la dinamica dei Coupon Bond emessi da paesi dove non si può trascurare il rischio di Default:

Lemma 1.7. [BMM: Baviera] Utilizzando il modello di Giesecke introdotto nella sezione precedente sotto la misura T_d -forward, approssimando la volatilità usando la *Freezing Technique* per fissare i coefficienti della volatilità nel tempo, a un dato t_0 fissato:

$$\begin{cases} \tilde{\underline{V}}_i(t) = \sum_{j=\alpha+1}^w \gamma_j^{(i)}(t_0) \tilde{\underline{v}}_j(t) \\ \gamma_j^{(i)}(t_0) = \frac{C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t_0)}{\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t_0)} \end{cases}$$

Un generico Defaultable Coupon Bond ha una dinamica Log-normale data da:

$$d(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t)) = \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \tilde{\underline{V}}_i(t) \cdot \left(d\underline{W}_t^{T_d} - \underline{\rho} \underline{\epsilon}(t, T_d) dt \right) \quad (1.26)$$

o in forma integrale

$$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) = \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_d) e^{\left\{ \int_t^{T_d} \tilde{\underline{V}}_i(s) \cdot d\underline{W}_s^{T_d} - \frac{1}{2} \int_t^{T_d} \tilde{\underline{V}}_i^2(s) ds \right\}}$$

$$\zeta_i(t, T_d) = e^{\left\{ - \int_t^{T_d} \tilde{\underline{V}}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\epsilon}(s, T_d) ds \right\}}$$

con una volatilità deterministica $\tilde{\underline{V}}_i(t)$.

Dimostrazione. Il punto di partenza della dimostrazione è riscrivere la formula differenziale del Corollario (1.2) nella nuova notazione:

$$d\tilde{B}_j(t) = \tilde{B}_j(t) \tilde{v}_j(t) \cdot \left(d\mathbb{W}_t^{T_d} - \underline{\rho} \underline{\epsilon}(t, T_d) dt \right)$$

Ora derivando l'espressione del Defaultable Coupon Bond si ottiene:

$$\begin{aligned} d\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) &= \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} d\tilde{B}_j(t) = \\ &= \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) \tilde{v}_j(t) \cdot \left(d\mathbb{W}_t^{T_d} - \underline{\rho} \underline{\epsilon}(t, T_d) dt \right) = \\ &= \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) \tilde{v}_j(t) \cdot d\mathbb{W}_t^{T_d} - \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) \tilde{v}_j(t) \cdot \underline{\rho} \underline{\epsilon}(t, T_d) dt = \\ &= \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \left(\sum_{j=\alpha+1}^w \frac{C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t)}{\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t)} \tilde{v}_j(t) \cdot d\mathbb{W}_t^{T_d} - \sum_{j=\alpha+1}^w \frac{C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t)}{\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t)} \tilde{v}_j(t) \cdot \underline{\rho} \underline{\epsilon}(t, T_d) dt \right) = \\ &= \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \left(\tilde{U}_i(t) \cdot d\mathbb{W}_t^{T_d} - \tilde{U}_i(t) \cdot \underline{\rho} \underline{\epsilon}(t, T_d) dt \right) \end{aligned}$$

Dove

$$\begin{cases} \tilde{U}_i(t) = \sum_{j=\alpha+1}^w \gamma_j^{(i)}(t) \tilde{v}_j(t) \\ \gamma_j^{(i)}(t) = \frac{C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t)}{\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t)} \end{cases}$$

Usando la *Freezing Technique*, si può arrivare a un'approssimazione analoga a quella fatta per i Risk-Free Coupon Bond, poniamo quindi per un t_0 fissato e blocchiamo i coefficienti $\gamma_j^{(i)}(t)$, in modo da avere ancora una volta una volatilità del Bond deterministica:

$$\begin{cases} \tilde{V}_i(t) = \sum_{j=\alpha+1}^w \gamma_j^{(i)}(t_0) \tilde{v}_j(t) \\ \gamma_j^{(i)}(t_0) = \frac{C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t_0)}{\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t_0)} \end{cases}$$

Di conseguenza l'espressione differenziale del Defaultable Coupon Bond diventa:

$$d\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) = \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \tilde{V}_i(t) \cdot \left(d\mathbb{W}_t^{T_d} - \underline{\rho} \underline{\epsilon}(t, T_d) dt \right)$$

Per ottenere la forma integrale da questa è un semplice esercizio di integrazione stocastica. □

1.5 Bond Market Model Generalizzato: Yield-Vol Costanti nel Basket Deliverable

Un'importante caratteristica dei Future Bond è la possibilità per la controparte corta del contratto di consegnare a scadenza non un Bond specifico ma uno scelto in un Basket di Bond con data di Maturity simile (Basket dei Deliverable).

Nella nostra analisi effettuata in ambito Multi-Curve e Multidimensionale attraverso il BMM, la presenza di un Basket Deliverable implica di dover studiare dei sottostanti che seppur molto simili sono diversi e di conseguenza ciascuno con volatilità diversa dagli altri. La soluzione a questo problema modellistico è data dall'

assunzione modellistica di ipotizzare che i tassi Yield dei Bond del Basket seppur diversi, abbiano la stessa volatilità, assunzione che giustificheremo in dettaglio in questa sezione.

Per definizione il tasso Yield y_i di un generico Bond è:

$$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \doteq \sum_{j=\alpha+1}^w \frac{C_j^{(i)}}{(1 + y_i)^{\delta(t, T_j)}} \quad (1.27)$$

Da un punto di vista teorico la curva dei tassi, ad esempio fig. (1.1), ha evidentemente un grande numero di gradi di libertà, basti pensare ai recenti fenomeni di inversione della curva durante la crisi, avvenuti per diversi paesi europei, durante i quali i tassi per brevi scadenze erano ben più alti di quelli a medio-lungo termine.

Il Basket dei Deliverable riguarda, come viene descritto più in dettaglio nella sezione (2.2), bond che hanno scadenze all'interno di una finestra temporale generalmente di 2 anni. Ad esempio il future più liquido, quello del Bund tradato nel mercato Eurex, prevede un Basket di Deliverable costituito da titoli governativi tedeschi con scadenza tra 8.5 e 10.5 anni dopo la delivery date.

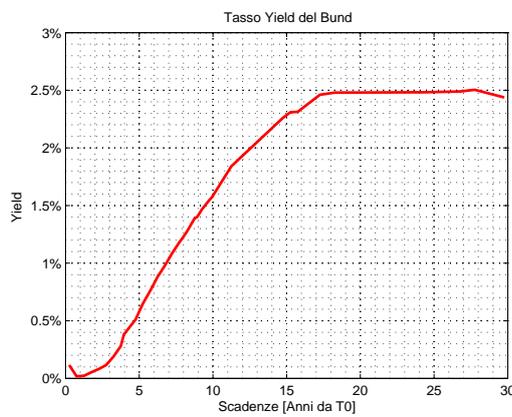


Figura 1.1: Curva del Tasso Yield dei Bund al 05-Ottobre-2012 (dati fonte Bloomberg)

Su scadenze all'interno di periodi brevi si osserva che gli yield si muovono in modo quasi perfettamente sincronizzato ovvero localmente la dinamica della curva degli yield è approssimabile da shift paralleli della curva. Per questo motivo nell'analisi dei Bond all'interno del Basket dei Deliverable possiamo assumere con buona approssimazione, che essendoci solo Shift paralleli della curva dei tassi Yield dei diversi Bond, le Yield-Vol dei diversi Bond siano uguali.

Ipotesi 1.1. Le volatilità dei Tassi Yield σ_{y_i} associate ai diversi Bond nel Basket dei Deliverable è unica:

$$dy_i = g_i(\dots)dt + \sigma_{y_i}(t, \dots) \cdot dW_t$$

$$\sigma_{y_i} = \sigma_y \quad \forall i \in (1, \dots, M)$$

Si osserva dai dati di mercato che all'interno del basket dei deliverable i movimenti delle curve dei tassi possono essere solo Shift paralleli, questa prima evidenza porta alla possibilità di modellare i tassi Yield dei Bond nel Basket con un solo processo stocastico multi dimensionale.

Tramite questa ipotesi possiamo risolvere il problema di aver diverse volatilità per i Bond nel Basket Deliverable: si può risalire a una relazione tra le diverse volatilità del basket sfruttando la relazione tra la Coupon Bond-Vol e la Yield Vol e il fatto che quest'ultima sia unica. La conseguenza modellistica è che basterà ottenere una sola volatilità nel Basket per avere tutte le altre da questa relazione: come verrà spiegato nel seguito l'utilizzo di un modello di pricing usando solo il Cheapest to Deliver al momento della valutazione da ottimi risultati, e tramite questo modello ridotto sarà possibile calibrare la volatilità di uno dei Bond nel Basket.

Illustriamo il risultato principale di questa sezione in termini della volatilità dei Defaultable Coupon Bond, ma il risultato è del tutto analogo per il contesto Single Curve:

Lemma 1.8. Sotto l'ipotesi 1.1 per volatilità di Bond diversi all'interno del Basket vale la relazione:

$$\tilde{V}_j(t) = \frac{(1 + y_i) MacD_j(t)}{(1 + y_j) MacD_i(t)} \tilde{V}_i(t) \quad i, j \in (1, \dots, M)$$

dove $MacD_j(t)$ sta per Macaulay Duration definita come:

$$MacD_j(t) = \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \delta(t, T_j) \frac{\tilde{B}_j(t)}{\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t)}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di tasso Yield abbiamo:

$$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \doteq \sum_{j=\alpha+1}^w \frac{C_j^{(i)}}{(1 + y_i)^{\delta(t, T_j)}} \quad (1.28)$$

Utilizzando il calcolo di Ito, derivando rispetto a y da entrambe le parti e trascurando i termini deterministici:

$$\begin{aligned} d\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) &= l(y_i, t) dt + \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{j=\alpha+1}^w \frac{C_j^{(i)}}{(1 + y_i)^{\delta(t, T_j)}} \right) dy_i = \\ &= l(y_i, t) dt - \left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \frac{\delta(t, T_j)}{(1 + y_i)} \left(\frac{1}{(1 + y_i)} \right)^{\delta(t, T_j)} \right) dy_i = \\ &= l(y_i, t) dt - \frac{1}{(1 + y_i)} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \delta(t, T_j) \frac{\tilde{B}_j(t)}{\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t)} \right) dy_i = \\ &= l(y_i, t) dt - \frac{1}{(1 + y_i)} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) MacD_i(t) dy_i \end{aligned}$$

Invertendo la relazione precedente, sostituendo la formula differenziale del Lemma (1.7) e raccogliendo tutti i termini deterministici in $g_i(\cdot)$ si può ottenere:

$$\begin{aligned} dy_i &= \frac{l(y_i, t) dt}{\frac{1}{(1 + y_i)} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) MacD_i(t)} - \frac{d\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t)}{\frac{1}{(1 + y_i)} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) MacD_i(t)} = \\ &= g_i(\cdot) dt - \frac{\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \tilde{V}_i(t) \cdot dW_t^{(T_d)}}{\frac{1}{(1 + y_i)} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) MacD_i(t)} = \\ &= g_i(\cdot) dt - (1 + y_i) \frac{\tilde{V}_i(t)}{MacD_i(t)} \cdot dW_t^{(T_d)} \end{aligned}$$

E' importante notare che in questa dimostrazione si è ignorato i termini in dt questo perché essendo deterministici, non concorrono al calcolo della volatilità. Ora basta imporre l'ipotesi (1.1):

$$(1 + y_i) \frac{\tilde{V}_i(t)}{MacD_i(t)} = \sigma_{y_i}(t, \dots) \quad \forall i \in (1, \dots, M)$$

E si ottiene la relazione tra le volatilità dei diversi Bond nel Basket. □

In realtà la variazione dell'ipotesi che è utilizzata nella pratica è l'espressione precedente cui è stata applicata una *Freezing Technique*:

Ipotesi 1.2. Il rapporto tra le Yield-Vol e delle Price-Vol nel Basket sia costante, ovvero che fissato un t_0 valga:

$$\tilde{V}_i(t) = \frac{MacD_i(t_0)}{(1 + y_i)} \sigma_{y_i}(t, \dots)$$

Questa ipotesi unita alla precedente assicura che nel Basket dei Deliverable c'è un solo driver stocastico. E' un ipotesi ragionevole perché i tassi yield si muovono nel tempo di ordini di grandezza molto piccoli, quindi stiamo facendo l'ipotesi che Macaulay Duration sia costante nel tempo; per come è definita al suo interno ci sono i coefficienti $\gamma_j^{(i)}$ già supposti costanti nella sezione precedente, il termine rimanente è $(T_j - t)$ e nella nostra analisi la situazione più comune sarà che $T_j \gg t$. Da cui segue che la Macaulay Duration può con buona approssimazione esser ritenuta costante.

Questo contesto modellistico che si basa sul BMM, visto nella sezione precedente e lo amplia con le ipotesi fatte sulla Yield-Vol costante nel Basket Deliverable, nel seguito sarà chiamato BMM Generalizzato (GBMM); come vedremo in seguito dal punto di vista teorico il GBMM è molto utile nella valutazione di Future e Future Option. Questo è un contributo originale di questo studio.

Capitolo 2

Data Set

In questo capitolo è illustrato il contenuto dei Data Set utilizzati durante l'analisi numerica, sia per quanto riguarda la parte legata ai derivati sui Bond che per la parte legata all'inflazione. Oltre a esporre le caratteristiche principali dei vari dati utilizzati saranno discusse anche le specifiche informazioni sulle convenzioni finanziarie con cui sono quotati i vari strumenti e che quindi ne determinano il metodo di utilizzo. Infine al termine del capitolo c'è la sezione che espone una breve analisi sul principale indice Europeo di Inflazione, Harmonised Index of Consumer Prices (nel seguito HICP), rilevato da Eurostat. Il calcolo del paniere pur essendo numericamente semplice richiede vari aggiustamenti annuali ai pesi che sono usati per calcolarlo: poiché queste tematiche esulano dalla nostra analisi non vengono trattate nel dettaglio.

2.1 Emissioni Governative

La situazione odierna dei debiti pubblici è molto variegata a livello mondiale. Da una parte si sta assistendo al deterioramento delle posizioni economiche degli stati che fino a qualche anno erano i più ricchi a causa di diversi fattori tra cui una crescita economica troppo lenta (Italia, Francia e in generale Area Euro), debiti non più sostenibili sul lungo periodo (USA, Italia, Giappone) e un quadro economico da troppi anni in recessione, e dall'altra, all'affermazione di nuovi protagonisti dell'economia mondiale, in particolare i paesi del BRICS (acronimo di Brasile, Russia, India, Cina e Sud Africa). In questo quadro macroeconomico l'ammontare totale delle emissioni sui Mercati Finanziari ha un trend crescente in parte dovuto al bisogno di rifinanziamento dei pesanti debiti dei paesi industrializzati in parte a causa dei debiti crescenti dei paesi in via di sviluppo.

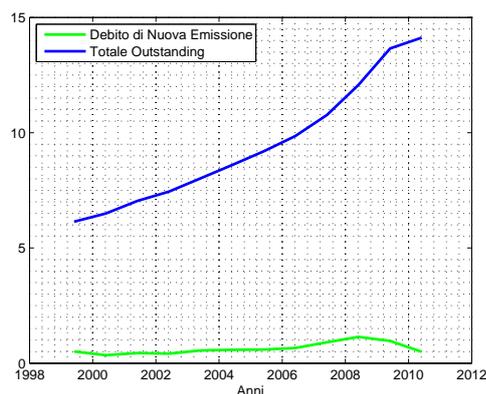


Figura 2.1: Valore totale del debito Statale nell'Area Euro presente sui Mercati Finanziari e Valore Netto Emissioni Annuali sul Mercato Primario in migliaia di Miliardi € (dove per valore netto si intende la differenza tra debito emesso e debito arrivato a scadenza)(fonte <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>).

In Europa come possiamo vedere da fig. (2.1), il valore totale del debito presente sui mercati sta aumentando; anche il Debito di nuova Emissione cioè la differenza tra valore emesso e valore giunto a scadenza è oltre i 500 Miliardi € e addirittura in crescita fino al 2009; sebbene poi ci sia una diminuzione.

Soffermiamoci ora sulla situazione e i dati relativi ai tre paesi che studieremo: Germania, Italia e Francia. Per ogni set di Bond sono forniti diversi dati, quelli principali sono:

- Descrizione dello strumento: tramite il codice, la data di scadenza e la cedola.
- Coupon.
- Data di Maturity.
- Prezzo Bid : prezzo a cui può essere acquistato il titolo.
- Prezzo Ask : prezzo a cui può essere venduto il titolo.
- Ammontare Outstanding : valore totale di tutti i titoli appartenenti a questa emissione.

I dati presi da "Bloomberg", sono relativi ai titoli disponibili sul Mercato Secondario il 5-Ottobre-2012 alle 16:30.

Ci sono diversi commenti da fare su questi dati: per prima cosa i prezzi quotati Bid e Ask sono Clean Price, da cui otteniamo un prezzo come media tra il prezzo Bid e il prezzo Ask; in realtà a questo prezzo, per ottenere il reale valore del Coupon Bond, va aggiunto l'Accrual o Rateo, i.e. gli Interessi Composti fino alla data di scambio sulla prima cedola, ottenendo l'Invoice Price: il prezzo reale a cui viene scambiato il Coupon Bond.

Un'ulteriore osservazione che vale la pena di fare è che l'Ammontare Outstanding sul mercato del titolo è un'informazione rilevante per gli investitori perché permette di distinguere emissioni più liquide, quindi più facili da scambiare, da quelle meno liquide. Infine va notato come questo valore possa cambiare nel corso della vita di un'emissione: nel mercato Europeo è consuetudine "Riaprire" le Tranche. Da parte degli stati c'è la necessità di emettere titoli con frequenza almeno mensile, in parte per rifinanziare il debito in parte per rispondere a voci di spesa pubblica. "Riaprire" una emissione significa proporre sul Mercato Primario un titolo con le stesse caratteristiche di un titolo già emesso e quindi già disponibile sul Mercato Secondario aumentandone l'outstanding.

Ben diverso è il caso del mercato americano dove ogni volta viene emesso un nuovo titolo, l'effetto è quello di avere una moltitudine di diverse emissioni disponibili per gli investitori e quindi un mercato molto più variegato di quello Europeo ma con emissioni con un outstanding più ridotto in termini relativi.

Germania

Nonostante la crescita costante in termini assoluti del debito in questi anni, vedi fig. (2.2), la Germania è considerata la nazione più affidabile come debitore non solo dell'area Euro ma a livello mondiale. Una delle ipotesi operative della nostra analisi è di considerare le emissioni tedesche come Risk-Free per poterle studiarle con un modello Single-Curve e costituire una base per lo studio di altre nazioni tramite un modello Multi-Curve.

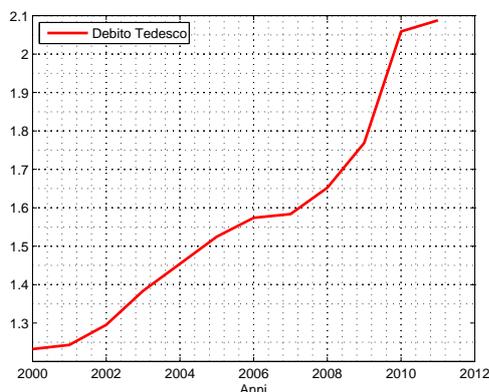


Figura 2.2: Curva di Crescita del Debito Tedesco in migliaia di Miliardi € (fonte <http://www.bundesbank.de>)

Questo approccio non si basa esclusivamente sull'ottima affidabilità creditizia dello stato tedesco ma anche sulla market-practise che utilizza i titoli tedeschi come "Benchmark" per le altre nazioni.

Come si può notare dalla fig (2.2), il debito Tedesco è superiore ai 2 Triloni di €, questo rende i titoli di stato ad esso associati una delle categorie di strumenti più liquide sul mercato mondiale dei Governativi. I titoli tedeschi si possono dividere all'emissione a seconda della loro data di scadenza:

- titoli a scadenza all'interno di un anno i Bubill.
- titoli a scadenza di medio termine: Schatz con una durata di 2 anni e i Bobl con una durata di 5 anni.
- titoli a scadenza lunga: i Bund con una durata di 10 anni e i Buxl con una durata di 30 anni.

Di questi tre strumenti nel nostro set di dati la maggior parte sono titoli a lunga scadenza Bund e Buxl, tuttavia sono presenti anche Schatz e Bobl perché presenti nei Basket dei Future su Bund e per questo essenziali per il corretto pricing di questi derivati. Per l'elenco completo si consulti l'appendice B.

Consultando il prospetto [Bundesbank 2013], si può avere un quadro generale delle emissioni tedesche negli ultimi anni e si può notare come solo per i primi due mesi del 2013, sono previste emissioni complessive per 47 Miliardi di €.

R	Name	Ticker	Coupon	Maturity	Series	BB Rtg	Mty Type	Announce	Curr	Ask Px	Source
1)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	4.500	01/04/2013	03	AAA	BULLE	12/30/2002	EUR	101.0700	BGN
2)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	3.750	07/04/2013	03	AAA	BULLE	06/24/2003	EUR	102.7600	BGN
3)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	4.250	01/04/2014	2003	AAA	BULLE	10/21/2003	EUR	105.2850	BGN
4)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	4.250	07/04/2014	2004	AAA	BULLE	05/18/2004	EUR	107.3300	BGN
5)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	3.750	01/04/2015	04	AAA	BULLE	11/16/2004	EUR	108.2850	BGN
6)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	3.250	07/04/2015	05	AAA	BULLE	05/10/2005	EUR	108.6550	MELI
7)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	3.500	01/04/2016	05	AAA	BULLE	11/15/2005	EUR	110.8350	BGN
8)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	6.000	06/20/2016	86	AAA	BULLE	05/28/1986	EUR	121.1750	BGN
9)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	4.000	07/04/2016	06	AAA	BULLE	05/09/2006	EUR	114.0150	MELI
10)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	5.625	09/20/2016	86	AAA	BULLE	09/02/1986	EUR	121.0650	BGN
11)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	3.750	01/04/2017	06	AAA	BULLE	11/07/2006	EUR	114.3600	BGN
12)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	4.250	07/04/2017	2007	AAA	BULLE	05/15/2007	EUR	117.8450	BGN
13)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	4.000	01/04/2018	07	AAA	BULLE	11/06/2007	EUR	117.7250	BGN
14)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	4.250	07/04/2018	2008	AAA	BULLE	05/20/2008	EUR	120.1200	BGN
15)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	3.750	01/04/2019	08	AAA	BULLE	11/04/2008	EUR	118.0500	BGN
16)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	3.500	07/04/2019	09	AAA	BULLE	05/12/2009	EUR	117.1100	BGN
17)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	3.250	01/04/2020	09	AAA	BULLE	11/03/2009	EUR	115.8250	BGN
18)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	3.000	07/04/2020		AAA	BULLE	04/20/2010	EUR	114.2800	BGN
19)	Bundesrepublik Deutschland	DBR	2.250	09/04/2020		AAA	BULLE	08/10/2010	EUR	108.5750	BGN

Figura 2.3: Bund sul Mercato il 5-Ottobre 2012 (fonte Bloomberg).

Italia

Analogamente al debito Tedesco anche quello italiano sta crescendo fig. (2.4), tuttavia la situazione economica Italiana è più difficile e di conseguenza l'affidabilità come debitore dello stato Italiano è peggiore di quella tedesca. In particolare l'ultima crisi ha posto sotto osservazione la sostenibilità del debito Italiano sul lungo periodo, con il conseguente innalzamento dello spread rispetto alle emissioni tedesche e il peggioramento del Rating a lungo termine.

A causa di questa minore affidabilità, per analizzare i titoli di stato Italiani si deve passare a un modello Multi-Curve usando i titoli tedeschi come titoli Risk-Free di riferimento. La ragione per la quale si è deciso di non considerare più le emissioni statali come Risk-Free, secondo il modello classico, non è basata solo sulla necessità di essere coerente con le valutazioni oggettive fatte dal mercato ma anche sull'osservazione empirica che i Tassi ottenuti dalla procedura di Bootstrapping sui titoli Italiani differiscono in maniera significativa da

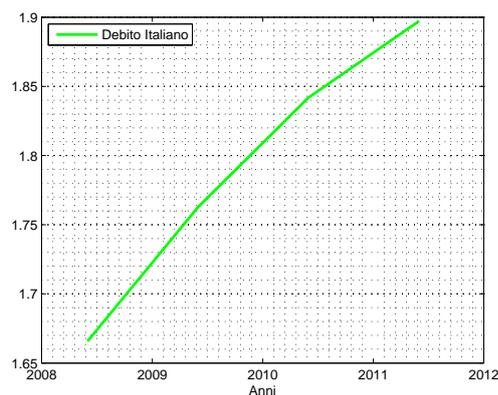


Figura 2.4: Curva di Crescita del Debito Italiano in migliaia di Miliardi € (fonte <http://www.dt.tesoro.it>)

quelli ottenuti con la stessa tecnica sui titoli Tedeschi considerati Risk-Free, rendendo irrealizzabile elaborare un modello Single-Curve che permetta di valutare in modo coerente entrambe le quantità.

Come per la Germania si può notare che anche il debito Italiano sfiora i 2000 Miliardi di €, per questo anche i titoli Italiani sono considerati liquidi sul mercato e similmente ai titoli Tedeschi, sono divisi all'emissione per durata:

- titoli a scadenza entro l'anno: Buoni Ordinari del Tesoro (BOT).
- titoli a scadenza entro due anni dall'emissione e ZC : Certificati del Tesoro Zero Coupon (CTZ).
- titoli di durata pari a / anni con tasso variabile: Certificati di credito del tesoro (CCT).
- titoli con scadenza a più anni: Buoni Poliennali del Tesoro (BTP).

Nel nostro set di dati è rappresentata solo l'ultima categoria cioè i Buoni Poliennali del Tesoro, perché avendo una durata poliennale sono i più adatti per la ricostruzione della curva dei tassi e sono strumenti liquidi. Una visione generale delle emissioni Italiane si può avere consultando i vari prospetti di emissione disponibili sul sito del Dipartimento del Tesoro.

Francia

La situazione Francese può essere considerata una via di mezzo tra i due paesi studiati in precedenza.

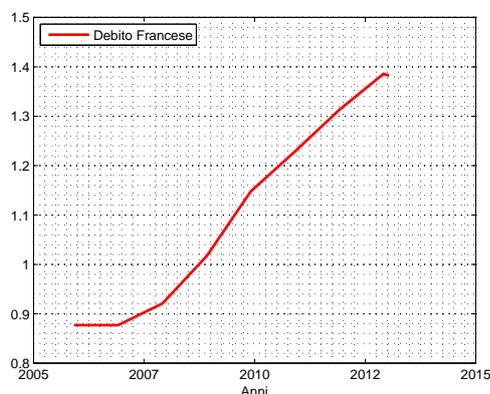


Figura 2.5: Curva di Crescita del Debito Francese in migliaia di Miliardi € (fonte <http://www.aft.gouv.fr>)

Prima della crisi la Francia poteva essere considerata un paese sostanzialmente Risk-Free, vista la sostanziale vicinanza delle curve dei Tassi Francesi a quelle dei titoli Tedeschi. Tuttavia nel difficile contesto della crisi l'elevato aumento del debito, fig 2.5, ha comportato un peggioramento sostanziale sia nella valutazione dell'affidabilità come debitore sia come nell'aumento del divario della curva dei tassi francesi rispetto a quella tedesca.

Per queste ragioni è più realistico considerare la Francia non più un paese Risk-Free, e valutarlo con un modello Multi-Curve. Il debito pubblico Francese è inferiore di quello tedesco e italiano. La suddivisione temporale è fatta con questi termini:

- titoli con scadenza entro l'anno: Bon du Trésor à taux fixe et à intérêt précompté (BTF).
- titoli con scadenza poliennale : Obligations assimilables du Trésor (OAT).

Anche in questo caso come per i titoli Italiani il nostro Set di dati si riferisce interamente ai buoni poliennali OAT, perché più adatti per lo scopo e rappresentano la gran parte del debito emesso.

2.2 Future

I Future su Governativi sono scambiati nel mercato EUREX ed i dati sono presi da "Bloomberg", il 5-Ottobre alle 16:25. I future hanno un valore di 100000€ e 4 date di delivery standardizzate per ogni anno solare corrispondenti al decimo giorno (se feriale altrimenti il primo giorno lavorativo successivo) dei mesi di marzo, giugno, settembre e dicembre. L'ultimo giorno di negoziazione (Last Trading Date) corrisponde a 2 giorni lavorativi antecedenti la data di delivery alle 12:30 C.E.T. Alla data di delivery l'investitore short sul titolo ha l'obbligo di consegnare una quantità di uno dei Bond che compongono il Basket dei Deliverable (Opzione "Cheapest to Deliver") per un valore pari al valore del Future moltiplicato per il Conversion Factor associato al particolare Bond consegnato. I Bond che compongono il Basket dei Deliverable vengono scelti prima dell'inizio delle contrattazioni da EUREX in base alla distanza tra la data di Maturity del bond e la data di Delivery del Future, la formula con cui viene calcolato il Conversion Factor è illustrata nel Capitolo sul pricing di questi strumenti. Per il contratti in esame i Basket dei deliverable sono riportati in tabella:

Front	Schatz	Bobl	Bund
	BKO 0 09/12/14	DBR 4 1/4 07/04/17	DBR 3 1/4 07/04/21
	OBL 2 1/2 10/10/14	DBR 4 01/04/18	DBR 2 1/4 09/04/21
	DBR 3 3/4 01/04/15	OBL 0 1/2 10/13/17	DBR 2 01/04/22
	OBL 2 1/2 02/27/15		DBR 1 3/4 07/04/22
			DBR 1 1/2 09/04/22
Next	Schatz	Bobl	Bund
	DBR 3 3/4 01/04/15	DBR 4 01/04/18	DBR 1 1/2 09/04/22
	OBL 2 1/4 04/10/15	DBR 4 1/4 07/04/18	DBR 1 3/4 07/04/22
	OBL 2 1/2 02/27/15	OBL 0 1/2 10/13/17	DBR 2 01/04/22
	BKO 0 12/12/14	OBL 0 1/2 02/23/18	

Tabella 2.1: Bond Deliverable per i contratti Future Front e Next in Ottobre-2012 (fonte Bloomberg).

Per i dati riguardanti questi contratti è necessario fare una distinzione tra quelli disponibili per la Germania e quelli per Italia e Francia. Il motivo di questa distinzione è abbastanza immediato, come detto prima, le emissioni di debito tedesche oltre a essere molto liquide sono sostanzialmente Risk-Free; l'unione di queste due caratteristiche rende i titoli tedeschi ottimi strumenti per essere sottostanti di Future, e la conseguenza è che il mercato sui Future tedeschi è uno dei più liquidi al mondo. I Future tedeschi, grazie al gran numero di dati disponibili hanno un'ottima attendibilità: per esempio la differenza tra prezzo Bid e prezzo Ask sul Front Schatz è minore di $\frac{1}{10^4}$ (1/2 tic). I dati sui Future Italiani e Francesi sono invece meno attendibili perché presi su un mercato meno liquido infatti la distanza Bid-Ask è mediamente maggiore.

In generale per i Future i dati disponibili, presi il 5-Ottobre-2012 alle 16:38, sono:

- Codice del contratto.
- Prezzo Bid.

- Prezzo Ask.
- Ultima data di Trading.
- Data di Collocamento.
- Si hanno inoltre dati sui relativi Basket:
 - Conversion Factor.
 - Codice del Deliverable Bond.
 - Descrizione del Deliverable Bond.

Vale la pena notare che di questi dati gli unici stabiliti dal trading di Mercato e variabili nel tempo sono i prezzi, tutti gli altri sono definiti in base a regolamenti del Mercato (Eurex in questo caso). Un'attenzione particolare va riservata al calcolo dei Conversion Factor che, come vedremo in seguito nel capitolo dedicato al pricing, sono studiati per fare in modo che alla data di delivery il valore del Bond corrispondente scontato con un tasso yield del 6% sia pari al Face Value.



Figura 2.6: Prospetto del Bund con delivery nel Dic-2012 (fonte Bloomberg).

Il contratto ha le consuete caratteristiche tipiche del Future, la più importante da citare è la "Daily Marging", cioè il meccanismo con cui le perdite o guadagni di valore del contratto vengono parificati di giorno in giorno fino alla data di Delivery, in modo che il contratto abbia a ogni apertura del mercato valore nullo. La spiegazione dettagliata di questo meccanismo esula dagli obbiettivi della nostra analisi ma per i dettagli si può consultare [Hull 1997].

Oltre alle tipiche caratteristiche dei Future è necessario valutare l'opzione Cheapest to Deliver: a delivery la parte corta consegna il Bond che pesato con il proprio Conversion Factor ha valore minore, è essenziale quindi per il pricing del Future determinare un metodo accurato per valutarla.

2.2.1 Opzione Cheapest to Deliver

Una corretta valutazione dell'opzione Cheapest to Deliver è fondamentale per il pricing dei Bond Future, per un'esauriente trattazione di questa opzione si può fare riferimento a [Henrard 2006]. All'interno della nostra

analisi è necessario solo introdurne le principali proprietà per poter modellare in modo coerente questa opzione nel pricing.

L'immediata conseguenza della presenza di questa opzione è la necessità di dover modellare o almeno simulare l'andamento dei Coupon Bond nel Basket durante la vita del Future, per confrontare tra loro i valori teorici a Delivery e stabilire quale di questi verrà consegnato. Una prima intuitiva soluzione può essere quella di considerare come unico Deliverable nel Basket il Bond che all'istante della valutazione è il Cheapest e spesso vedremo che questo metodo nell'area Euro è sostanzialmente corretto in particolare in un contesto di tassi molto bassi.

Un approccio più corretto è quello di valutare tramite il GBMM i vari Coupon Bond nel Basket come diverse variabili Log-normali, il cui valore a Delivery è funzione di una variabile aleatoria gaussiana comune a tutti i Bond nel Basket. A questo punto una valutazione dei Bond a scadenza può essere fatta in maniera numerica utilizzando un intervallo di valori ragionevoli per una Normale, e confrontando punto per punto i valori dei Coupon Bond su questo intervallo. Le situazioni che possiamo trovare sono diverse:

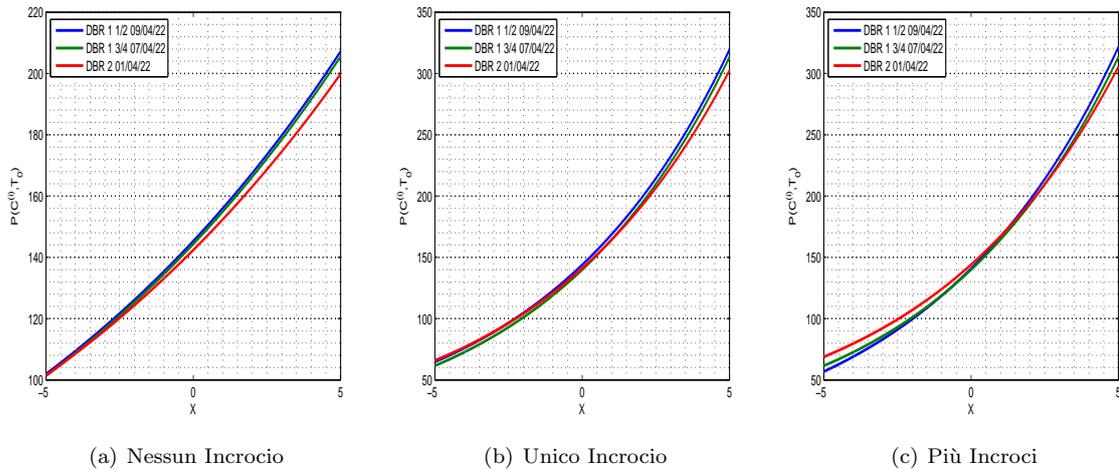


Figura 2.7: Configurazioni differenti dei valori dei Bond a data di delivery, create usando i dati relativi a tre Bund (la sigla DBR sta per Deutsche Bundesrepublik) con scadenza circa decennale e modificandone la varianza con il GBMM ad hoc per ottenere le immagini.

- Nessun punto di incrocio tra i valori dei Coupon Bond: c'è un unico Cheapest to Deliver per qualsiasi ragionevole scenario futuro, vedi fig (2.7(a)).
- Un solo incrocio: i Cheapest to Deliver nel Basket sono solo due, vedi fig (2.7(b)).
- Gli incroci possibili sono più di uno: è la situazione più complicata, per valutare correttamente l'opzione bisogna considerare più bond del Basket, vedi fig (2.7(c)).

Una volta confrontati i valori a scadenza in funzione della variabile aleatoria che ne determina la dinamica, si avrà l'intervallo di valori della variabile aleatoria per cui quello specifico Bond sarà a Delivery il Cheapest nel Basket, derivando anche le probabilità con cui ciò avviene.

In questo contesto è possibile fare anche considerazioni *a priori* sui comportamenti dei Basket: come abbiamo detto il punto di partenza è considerare una dinamica Log-normale per i Bond, la quantità ad esponente può essere considerata una forma di tasso molto simile alla curva dei tassi che nell'istante di valutazione viene scambiata sul mercato. In un contesto di tassi molto bassi e prezzi alti sono meno probabili grossi spostamenti dal valore di drift. La conseguenza è che il Bond con valore più basso a delivery è quasi sicuramente quello con volatilità più bassa e l'unico modo di avere una volatilità integrale più bassa è avere una data di Maturity più vicina, la volatilità, come visto nel primo capitolo, sono simili per tutti i Bond nel Basket, in compenso sono integrate su periodi diversi dipendenti dalla Maturity dei diversi Bond, vedi Lemma (1.6). Nel contesto di tassi bassi il Cheapest to Deliver è spesso il Coupon Bond con data di Maturity più vicina, come vedremo in seguito questo risultato funziona molto bene.

In un contesto di tassi più alti la situazione diventa più difficile da considerare *a priori* perché diventa molto più probabile un alto numero di incroci; si può tuttavia notare che a tassi alti corrispondono prezzi più bassi, in

maniera opposta rispetto a prima diventa più probabile che il Bond con la volatilità più alta subisca rendimenti negativi più pesanti e quindi a delivery sia il Cheapest.

Quest'ultima configurazione descritta è molto efficace per studiare l'opzione Cheapest, permette infatti un'opportuna valutazione non solo di tutti i possibili Deliverable Bond ma anche una valutazione sulle probabilità con cui vengono consegnati ed è proprio quello che ci serve nella nostra analisi per una corretta valutazione di questi derivati.

2.3 Opzioni sui Future

Le Future Option sono derivati che danno il diritto ma non l'obbligo, a una certa data nel futuro, di entrare in un contratto Future a un prezzo fissato. In particolare il possesso di un'opzione Call permette di entrare lungo in un Future, viceversa il possesso di un'opzione Put permette di entrare in un contratto Future dal lato corto all'Expiry dell'Opzione. A scadenza se l'opzione Call viene esercitata dal possessore, oltre ad entrare nel contratto Future sottostante dal lato lungo, riceve un cash flow pari al valore quotato più recente di questo contratto Future meno lo Strike (vale il viceversa per la Put), per i dettagli sul funzionamento di questo tipo di derivati si può consultare [Hull 1997]. I dati sulle Opzioni sui Bond Future sono disponibili solo per la Germania.

GRAB																	
Option Monitor: Option Monitor																	
EURO-BUND FUTURE Dec 141.2 - .38 - .2682% 141.29 / 141.30 Hi 141.54 Lo 141.21 Volm 217930 HV 6.89 91) News (CN)																	
Center 141.30 Strikes 5 Exch Eurex																	
295) Center Strike 296) Calls/Puts 297) Calls 298) Puts 299) Term Structure																	
Calls						Puts											
Ticker	Bid	Ask	Last	IVM	DM	Volm	OInt	Strike	Ticker	Bid	Ask	Last	IVM	DM	Volm	OInt	
Nov 12 (21d, 10/26/12); CSize 100000; RXZ2 141.								141.5	Nov 12 (21d, 10/26/12); CSize 100000; RXZ2 141.								
1) RXZ2C .72 .76 .75 6.10 .47 272 13610								141.5	17) RXZ2P .93 .96 .96 5.76 -.56 253 6611								
Dec 12 (49d, 11/23/12); CSize 100000; RXZ2 141.								140	Dec 12 (49d, 11/23/12); CSize 100000; RXZ2 141.								
2) RXZ2C 1.95 2.15 2.35y 6.60 .64 4048								140.5	18) RXZ2P .73 .78 .77 6.14 -.35 774 13577								
3) RXZ2C 1.63 1.82 2.01y 6.52 .59 2130								141	19) RXZ2P .91 .96 .84y 6.26 -.40 4539								
4) RXZ2C 1.41 1.46 1.44 6.15 .54 7 2559								141.5	20) RXZ2P 1.12 1.17 1.03y 6.21 -.46 1500 1517								
5) RXZ2C 1.16 1.20 1.16 6.36 .47 512 4495								142	21) RXZ2P 1.35 1.41 1.33 6.15 -.52 511 4075								
6) RXZ2C .93 .97 .93 6.10 .42 1015 5416								142.5	22) RXZ2P 1.62 1.68 1.49y 5.84 -.60 2413								
7) RXZ2C .74 .78 .74 6.12 .36 300 3652								143	23) RXZ2P 1.93 1.98 1.77y 5.77 -.66 701								
8) RXZ2C .57 .59 .59 6.14 .29 3150 12579								143	24) RXZ2P 2.08y								
Jan 13 (77d, 12/21/12); CSize 100000; RXH3 142.8								143	Jan 13 (77d, 12/21/12); CSize 100000; RXH3 142.								
9) RXF3C 1.56 1.66 1.87y 6.50 .49 500								141.5	25) RXF3P 1.68 1.79 1.59y 6.21 -.51 1								
Mar 13 (140d, 2/22/13); CSize 100000; RXH3 142.								142	Mar 13 (140d, 2/22/13); CSize 100000; RXH3 142.								
10) RXH3C 3.36y 28								142	26) RXH3P 1.62 1.76 1.58y 6.55 -.40 10								
11) RXH3C 3.05y 4								142.5	27) RXH3P 1.60 1.96 1.77y 6.10 -.43 1								
12) RXH3C 2.40 2.67 2.76y 6.69 .53 12								143	28) RXH3P 1.82 2.18 1.98y 6.07 -.47								
13) RXH3C 2.15 2.40 2.49y 6.71 .50 504								143.5	29) RXH3P 2.26 2.53 2.21y 6.50 -.50								
14) RXH3C 1.91 2.05 2.23y 6.51 .46 177								144	30) RXH3P 2.45y 6.18 -.54								
15) RXH3C 1.69 1.83 1.99y 6.46 .43 88								144.5	31) RXH3P 2.71y								
16) RXH3C 1.26 1.62 1.77y 6.13 .39									32) RXH3P 2.99y								

Figura 2.8: Prospetto delle Opzioni sui Bund con expiry nel Dic-2012 (fonte Bloomberg).

I dati disponibili per questi derivati, sempre presi coerentemente con i set precedenti il 5-Ottobre-2012 alle 16:25, sono analoghi a quelli dei Future:

- Codice del Contratto.
- Prezzo Bid.
- Prezzo Ask.
- Data di Scadenza.
- Strike.

Si tratta di Call e Put Americane con scadenza o a Dicembre-2012 (Opzioni sul Front) o a Marzo-2013 (Opzioni sul Next). In via teorica possono essere esercitate in un momento qualsiasi della loro vita, nella pratica nel mercato dei Governativi l'opzione anticipata non viene mai esercitata se non per esigenze particolari, per questo motivo nella nostra analisi vengono trattate come opzioni di tipo Europeo.

Un'ultima importante convenzione del mercato quotato Europeo di questi derivati, che come già citato riguarda solo i titoli Governativi Tedeschi, è che la data di Expiry dell'opzione è fissata a meno di una decina di giorni lavorativi dalla data di Delivery del Future. Come vedremo questa convenzione semplifica la valutazione di questi derivati.

2.4 Dati Storici

I dati storici sui prezzi dei Bond sono necessari per poter valutare il modello Multi-Curve sulla misura storica. I dati sono presi da "Bloomberg"; i dati storici sono i valori di chiusura giornalieri. I dati raccolti si riferiscono ai prezzi giornalieri quotati sul mercato per i Bond dei tre paesi in esame nel periodo che va dal 1-Novembre-2011 al 14-Dicembre-2012, per un totale 293 giorni lavorativi. Come vedremo nel capitolo dell'analisi numerica, con queste scadenze i dati relativi a Francia e Italia mostrano un andamento anomalo nei primi mesi di valutazione a causa delle forti oscillazioni dei prezzi di mercato durante l'autunno del 2011 quando la crisi Greca ha sollevato timori su un possibile contagio ad altri debiti dell'area Euro.

2.5 Contratti Inflation-Linked

2.5.1 Zero Coupon Indexed Inflation Swap

Gli Zero Coupon Indexed Inflation Swap (nel seguito ZCIIS) sono contratti swap scambiati sul mercato interbancario. Questi contratti prevedono un solo scambio di flussi di cassa tra le due controparti (A e B nel seguito) a scadenza: in questa data la controparte A (gamba fissa) paga a B (gamba variabile) il tasso fisso indicato nel contratto, e B paga ad A un importo variabile dipendente dall'inflazione nel periodo di vita del contratto. La caratteristica principale di questi contratti sono i tassi fissi, sono quindi quotati sui mercati attraverso questi tassi: per ogni scadenza sul mercato c'è un tasso Bid e un tasso Ask. I dati disponibili per questo tipo di contratti sono semplicemente tre:

- Tasso Bid.
- Tasso Ask.
- Descrizione Contratto con durata temporale.

I dati utilizzati si riferiscono al 5-Ottobre-2012 alle 16:28 e si riferiscono a scadenze fino a 50 anni non equispaziate nel tempo (fino a 10 anni c'è un contratto per ogni anno dopo ci sono 12,15,20,25,30 e 50).

2.5.2 Bond Inflation-Linked

I Bond Inflation-Linked hanno le stesse caratteristiche principali delle emissioni nominali (cedole, date di maturity, etc..) ma vengono rivalutati sull'inflazione del periodo. I dati disponibili per questi strumenti sono gli stessi dei Bond nominali visti in precedenza, l'unico dato aggiuntivo che serve per prezzarli è la data di riferimento a cui viene presa l'inflazione base che come vedremo in seguito è l'elemento indispensabile per calcolare i coefficienti con cui sono rivalutati i Cash-Flow. I dati sono presi anche essi nelle date già citate 5-Ottobre-2012 e 11-Gennaio-2013, e riguardano tutti i Bond Inflation-Linked disponibili sul Mercato per i tre paesi in esame.

2.6 Inflation Data: HICP

L'indice HICP è un indicatore dell'inflazione dei prezzi al consumo calcolato da Eurostat. L'algoritmo con cui è calcolato è stato concordato dai pesi aderenti e si può sintetizzare come una media pesata degli Indici dell'Inflazione nei diversi paesi appartenenti all'area Euro.

L'indice HICP viene pubblicato mensilmente da EuroStat. I primi dati disponibili risalgono al 1996, anche se va sottolineato che questi sono dati indiretti calcolati a posteriori : l'indice subisce periodiche revisioni e a ogni

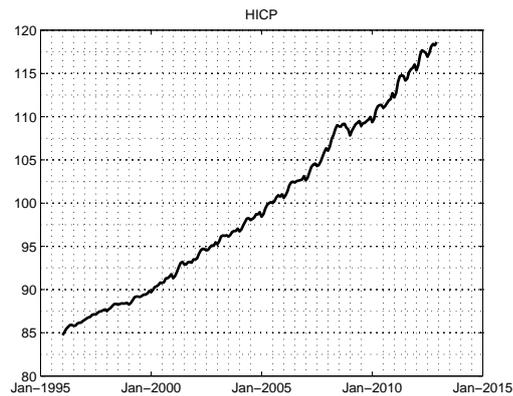


Figura 2.9: Dati Storici sull'HICP (fonte <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>)

revisione viene preso a riferimento un anno diverso, l'ultima revisione è stata nel 2006 quando si è passati da avere come valore base l'indice nel 1996, a un valore base nel 2005.

La serie dei nostri dati è la più lunga disponibile cioè quella con periodicità mensile che va dal Gennaio-1996 al Dicembre-2012. Come detto nell'introduzione del Capitolo il meccanismo con cui viene calcolato l'HICP è una media pesata di diversi prezzi al consumo sia nelle aree urbane sia nelle zone rurali; sebbene il meccanismo di calcolo di per se sia elementare il calcolo dei pesi e delle variazioni che mensilmente devono essere apportate ai pesi per tener conto della situazione economica, è molto articolato ed è estraneo agli interessi della nostra analisi. Per i dettagli si può consultare [Eurostat 2001].

Essendo il compito principale della Banca Centrale Europea quello di mantenere un'inflazione inferiore al 2% tramite la politica monetaria, ne deriva la grossa importanza finanziaria di questo indice a cui fa riferimento per le sue valutazioni.

Dall'analisi della fig 2.9, si può osservare che l'andamento dell'indice è circa lineare, con diverse componenti oscillatorie, la principale delle quali appare avere periodo circa annuale, tuttavia possono essere individuate altre componenti con frequenza diversa. Da una prima osservazione dell'immagine si può notare come l'ampiezza delle oscillazioni aumenti visibilmente al passare del tempo; la componente oscillatoria sembra avere due caratteristiche principali: una periodicità annuale e un trend positivo nell'ampiezza delle oscillazioni al passare del tempo per un totale di 204 dati mensili.

Capitolo 3

Bond Future Pricing

In questo capitolo tratteremo il pricing dei Future su Bond con i modelli descritti in precedenza. Per prima cosa vengono introdotte le principali caratteristiche di questi derivati, successivamente si passerà alla valutazione con il modello teorico più generale possibile (Multicurve e Multidimensionale) la cui formula non è utilizzabile dal punto di vista numerico. I passi successivi sono quindi di valutare la formula generale in ambito unidimensionale con Hull-White e multidimensionale con il GBMM rendendola utilizzabile dal punto di vista numerico.

3.1 Conversion Factor

Il Conversion Factor viene calcolato come il prezzo normalizzato per il Face Value ottenuto a Delivery scontando i flussi di cassa del Bond successivi con un tasso di sconto costante per tutti i Bond nel Basket, associato al Future che poniamo pari a C_n . Una prima formula sintetica per calcolare il Conversion Factor $K^{(i)}$ è :

$$K^{(i)} = \frac{1}{FV} \left(\sum_{j=\alpha+1}^w \frac{C_j^{(i)}}{(1 + C_n)^{\delta(T_d, T_j)}} \right) \quad (3.1)$$

dove FV è il face value del bond, pari a 100 in tutti i casi considerati. Ovviamente questa formula approssimata non è accurata perché non valuta correttamente il Rateo e eventuali ritardi nel pagamento delle cedole, in particolare eventuali ritardi nei pagamenti delle cedole sono più importanti nel caso in cui il periodo cedolare sia minore dell'anno.

Il Conversion Factor per gli Euro-denominated bonds (titoli Tedeschi e OAT), utilizzando la consueta notazione, è:

$$K^{(i)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\delta(T_d, T_{\alpha+1})}} \left(\frac{c^{(i)}}{C_n} \left(\left(1 + \frac{C_n}{100}\right) - \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{(w-\alpha-1)}} \right) + \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{(w-\alpha-1)}} \right) - \frac{c^{(i)}}{100} \delta(T_\alpha, T_d) . \quad (3.2)$$

Lemma 3.1. *La formula (3.2) è equivalente alla formula (3.1) con l'aggiunta del Rateo.*

Dimostrazione. Partendo dalla formula sintetica e normalizzando il tasso di sconto del Future C_n per il face value:

$$\begin{aligned} K^{(i)} &= \sum_{j=\alpha+1}^w \frac{C_j^{(i)}}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\delta(T_d, T_j)}} = \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\delta(T_d, T_{\alpha+1})}} \left(\sum_{j=\alpha+1}^w \frac{\frac{c^{(i)}}{100}}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^j} + \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{w-\alpha-1}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\delta(T_d, T_{\alpha+1})}} \left(\sum_{k=0}^{w-\alpha-1} \frac{\frac{c^{(i)}}{100}}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{k-\alpha-1}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{w-\alpha-1}} \right) = \\
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\delta(T_d, T_{\alpha+1})}} \left(\frac{c^{(i)}}{100} \frac{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{w-\alpha}}}{1 - \frac{1}{1 + \frac{C_n}{100}}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{w-\alpha-1}} \right) = \\
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\delta(T_d, T_{\alpha+1})}} \left(\frac{c^{(i)}}{100} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{w-\alpha}}\right) \frac{1 + \frac{C_n}{100}}{\frac{C_n}{100}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{w-\alpha-1}} \right) = \\
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\delta(T_d, T_{\alpha+1})}} \left(\frac{c^{(i)}}{C_n} \left(1 + \frac{C_n}{100}\right) - \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{w-\alpha-1}} \right) + \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{w-\alpha-1}}
\end{aligned}$$

□

Analogamente il Conversion Factor per gli Euro-BTP Future, ponendo la frequenza annuale dei pagamenti pari a f (nel caso dei BTP è 2), è:

$$\begin{aligned}
K^{(i)} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\frac{\delta(T_d, T_{\alpha+1})}{f}}} \left(\sum_{j=\alpha+1}^{f \cdot w} \frac{c^{(i)}}{100 f \left(\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\frac{j-\alpha-1}{f} + \frac{del(T_j)}{f \cdot \delta(T_j, T_{j+1})}} \right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\left(1 + \frac{C_n}{100}\right)^{\frac{(f \cdot w - \alpha - 1)}{f} + \frac{del(T_w)}{f \cdot \delta(T_w, T_{w+1})}}} \right) - \frac{c^{(i)}}{100} \delta(T_\alpha, T_d)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

dove $del(T_j)$ è numero effettivo di giorni tra T_j e la data di pagamento della j -esima cedola (se T_j cade durante un week-end). Anche questa formula è derivabile dalla formula sintetica con frequenza di pagamento non annuale:

$$\begin{aligned}
K^{(i)} &= \frac{1}{100} \left(\sum_{j=\alpha+1}^{f \cdot w} \frac{C_j^{(i)}}{f(1 + C_n)^{\frac{\delta(T_d, T_j)}{f}}} \right) = \\
&= \frac{1}{100} \frac{1}{\left(1 + C_n\right)^{\frac{\delta(T_d, T_{\alpha+1})}{f}}} \left(\frac{c^{(i)}}{f} \sum_{j=\alpha+1}^{f \cdot w} \frac{1}{\left(1 + C_n\right)^{\frac{j}{f}}} + \frac{1}{\left(1 + C_n\right)^{\frac{f \cdot w - \alpha - 1}{f}}} \right)
\end{aligned}$$

I calcoli procedono in maniera analoga a quanto fatto prima.

Come possiamo vedere dalle formule tratte da [Eurex 2013], per gli Euro-denominated Future cioè Bund, Schatz, Bobl e OAT Future con frequenza cedolare annuale la formula esatta (3.2) è simile a quella di valutazione sintetica presentata prima l'unica differenza è l'accurata valutazione del Rateo. Per gli Euro-BTP Future la formula (3.3) oltre alla valutazione del Rateo, tiene conto anche delle correzioni da fare per eventuali ritardi nei pagamenti delle cedole.

3.2 Formula Generale: Multi-Curve e Multi Dimensionale

[Giesecke 2003]

Sulla base dell'analisi fatta nel precedente capitolo, il valore di un generico Defaultable Coupon Bond nel Basket Deliverable alla data di Delivery T_d è pari a:

$$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) = \sum_{j=\alpha_i+1}^{w_i} C_j^{(i)} \tilde{B}(T_d, T_j) \quad i = 1, \dots, M$$

Da questa formula possiamo passare alla valutazione del Future a Delivery determinandola tramite l'opzione di Cheapest:

$$F(T_d, T_d) = \min_{i=1:M} \left(\frac{1}{K^i} \left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) \right) \right) = \min_{i=1:M} \left(\frac{1}{K^i} \left(\sum_{j=\alpha_i+1}^{w_i} C_j^{(i)} \tilde{B}(T_d, T_j) \right) \right) \quad (3.4)$$

Partendo da queste premesse si può arrivare al seguente risultato:

Proposizione 3.1. *In un contesto del tutto generale Multi-Curve e Multidimensionale, il valore di un Bond Future valutato in t con delivery in T_d con un Basket Deliverable che comprende M Bond sotto la misura Risk Neutral, è dato da:*

$$F(t, T_d) = E \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha_i+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) e \left\{ \int_t^{T_d} (\tilde{\sigma}(s, T_j) - \tilde{\sigma}(s, T_d)) \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_t^{T_d} (\tilde{\sigma}^2(s, T_j) - \tilde{\sigma}^2(s, T_d)) ds \right\} \right) \mathbf{1}_{i \text{ CtD}} | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.5)$$

Dimostrazione. Sotto la Misura Risk Neutral abbiamo che il valore di un generico Future valutato in t , con delivery in T_d è dato da:

$$F(t, T_d) \doteq E \left[F(T_d, T_d) | \mathcal{F}_t \right].$$

Risistemiamo ora la formula del valore del Future a delivery in modo più vantaggioso per la nostra analisi, scrivere (3.4) è del tutto equivalente a usare la sommatoria

$$F(T_d, T_d) = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) \mathbf{1}_{i \text{ CtD}} \right).$$

Sostituendo nell'espressione del Future sotto la misura Risk Neutral otteniamo:

$$\begin{aligned} F(t, T_d) &= E \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) \mathbf{1}_{i \text{ CtD}} \right) | \mathcal{F}_t \right] = \\ &= E \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha_i+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}(T_d, T_j) \mathbf{1}_{i \text{ CtD}} \right) | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Usando ora la formula integrale del Lemma (1.5), considerando

$$T = t_1 = T_d \quad t_2 = T_j$$

abbiamo:

$$\tilde{B}(T_d, T_j) = \tilde{B}(t; T_d, T_j) e \left\{ \int_t^{T_d} (\tilde{\sigma}(s, T_j) - \tilde{\sigma}(s, T_d)) \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_t^{T_d} (\tilde{\sigma}^2(s, T_j) - \tilde{\sigma}^2(s, T_d)) ds \right\}.$$

Usando la notazione già introdotta $\tilde{B}_j(t) = \tilde{B}(t; T_d, T_j)$ e sostituendo nella formula precedente si ottiene il risultato. □

3.3 Single-Curve

Nel modello Single-Curve gli stessi risultati precedenti possono essere ottenuti sostituendo la DZC-vol $\tilde{\sigma}$ con la Risk Free ZC-vol σ . Quest'approccio è usato nella nostra analisi per realizzare il modello legato alle emissioni tedesche, che sono considerate come Risk Free. In questo ambito si possono ottenere formule chiuse comodamente utilizzabili per l'analisi numerica tramite il modello unidimensionale di Hull-White e multidimensionale GBMM.

Nel primo caso le formule si semplificano facilmente grazie all'ipotesi di unidimensionalità del processo stocastico che governa l'andamento di tutti i Bond, successivamente basta calcolare attraverso la relazione tra il modello GHJM e il modello Hull-White le varie volatilità ottenute. Nel caso del modello Multidimensionale è cruciale l'ipotesi sulla Yield-Vol costante del GBMM.

3.3.1 Approccio Unidimensionale: Hull-White Model

Il processo stocastico in questo caso è unico per tutti i Deliverable Bond e per ciascuna scadenza, la logica conseguenza è che possiamo associare tutte le realizzazioni di questo processo a tempi diversi e per Bond diversi ad un'unica variabile aleatoria. Chiamiamo quest'unica variabile aleatoria che guida la dinamica dei valori dei Bond nel Basket X, assumiamo come spiegato nella sezione precedente l'esistenza di una serie di intervalli (κ_{i-1}, κ_i) dove $\kappa_i \in \mathfrak{R} \forall i = 1 : M$, se:

$$X \in (\kappa_{i-1}, \kappa_i)$$

allora l'i-esimo bond è il Cheapest to Deliver nel basket. Anche in questo caso occorre scrivere in maniera conveniente all'analisi il valore a Delivery del Future come sommatoria dipendente dalle κ_i invece che come minimo:

$$F(T_d, T_d) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \left(P(\underline{C}^{(i)}, T_d) \right) \mathbb{1}_{i \text{ CtD}} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B(T_d, T_j) \right) \mathbb{1}_{i \text{ CtD}}$$

Lemma 3.2. *In ambito unidimensionale e Single Curve usando il modello di Hull-White tramite la relazione (1.14) per calcolare la volatilità, sotto la misura Risk-Neutral l'espressione per il valore di un Future valutato in t con delivery in T_d è data da:*

$$F(t, T_d) = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \beta_{d,j}(t, T_d) B_j(t) \left(\mathcal{N}(\kappa_i - \nu_{d,j}(t, T_d) \sqrt{T_d - t}) - \mathcal{N}(\kappa_{i-1} - \nu_{d,j}(t, T_d) \sqrt{T_d - t}) \right) \right) \right) \quad (3.6)$$

dove la volatilità è data da:

$$\begin{aligned} \nu_{d,j}^2(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T \left(\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d) \right)^2 ds = \\ &= \frac{1}{(T-t)} \frac{\sigma^2}{a^2} \left(e^{-aT_d} - e^{-aT_j} \right)^2 \frac{(e^{2aT} - e^{2at})}{2a}. \end{aligned}$$

E il Convexity Adjustment da:

$$\begin{aligned} \beta_{d,j}(t, T) &= e \left\{ - \int_t^T \sigma(s, T_d) (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d)) ds \right\} = \\ &= e \left\{ - \frac{\sigma^2}{a^2} \left(e^{-aT_d} - e^{-aT_j} \right) \left(\frac{(e^{aT} - e^{at})}{a} - e^{-aT} \frac{(e^{2aT} - e^{2at})}{2a} \right) \right\} \end{aligned}$$

Dimostrazione. La dimostrazione parte dalla formula generale: usando la formula (3.5) e il completamento del quadrato già visto in precedenza

$$-\frac{1}{2} \int_t^{T_d} \left(\sigma^2(s, T_j) - \sigma^2(s, T_d) \right) ds = -\frac{1}{2} \int_t^{T_d} (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d))^2 ds - \int_t^{T_d} \sigma(s, T_d) (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d)) ds$$

si arriva a

$$F(t, T_d) = E \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t) e \left\{ - \int_t^{T_d} \sigma(s, T_d) (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d)) ds \right\} \right. \right. \\ \left. \left. e \left\{ \int_t^{T_d} (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d)) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^{T_d} (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d))^2 ds \right\} \right) \mathbf{1}_{i \in C_{tD}} | \mathcal{F}_t \right].$$

Possiamo definire $\beta_{d,j}(t, T)$ e $\nu_{d,j}^2(t, T)$, e calcolarli con Hull-White:

$$\begin{aligned} \sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d) &= \frac{\sigma}{a} \left(1 - e^{-a(T_j - s)} - 1 + e^{-a(T_d - s)} \right) = \\ &= \frac{\sigma}{a} e^a s \left(e^{-a T_d} - e^{-a T_j} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\nu_{d,j}^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \frac{\sigma^2}{a^2} e^{2a s} \left(e^{-a T_d} - e^{-a T_j} \right)^2 ds$$

la cui soluzione è immediata. In maniera analoga si calcola $\beta_{d,j}(t, T)$.

L'osservazione essenziale per la dimostrazione è che gli integrali stocastici in realtà sono tutti uguali a meno di pesi deterministici:

$$\begin{aligned} \int_t^{T_d} (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d)) dW_s &= \int_t^{T_d} \frac{\sigma}{a} e^a s \left(e^{-a T_d} - e^{-a T_j} \right) dW_s = \\ &= \frac{\sigma}{a} \left(e^{-a T_d} - e^{-a T_j} \right) \int_t^{T_d} e^a s dW_s \quad \forall j \end{aligned}$$

Nel valore atteso abbiamo quindi una doppia sommatoria di esponenziali tutti con la stessa variabile aleatoria solo pesata con coefficienti diversi dipendenti dalla j e dalla i . Per le proprietà dell'integrale stocastico

$$\int_t^{T_d} e^a s dW_s \approx \mathcal{N} \left(0, \frac{(e^{2a T_d} - e^{2at})}{2a} \right).$$

Questa è la variabile aleatoria comune a tutti i termini esponenziali nella sommatoria all'interno del valore atteso, per ciascun termine viene solo pesata da un coefficiente diverso. Definiamo quindi

$$\begin{aligned} \nu_{d,j}^2(t, T) &= \frac{1}{T-t} \frac{\sigma^2}{a^2} \left(e^{-a T_d} - e^{-a T_j} \right)^2 \int_t^T e^{-2a s} ds = \\ &= \frac{1}{(T-t)} \frac{\sigma^2}{a^2} \left(e^{-a T_d} - e^{-a T_j} \right)^2 \frac{(e^{2a T} - e^{2at})}{2a} \end{aligned}$$

per ottenere con $X \approx \mathcal{N}(0, 1)$:

$$F(t, T_d) = E \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t) \beta_{d,j}(t, T) e^{\left\{ \nu_{d,j}(t, T_d) \sqrt{T_d - t} X - \frac{1}{2} \nu_{d,j}^2(t, T_d) (T_d - t) \right\}} \right) \mathbf{1}_{i \text{ CtD}} \right]$$

Con la costruzione fatta prima con i κ_i , $\mathbf{1}_{i \text{ CtD}}$ diventa $\mathbf{1}_{X \in (\kappa_{i-1}, \kappa_i)}$.

$$\begin{aligned} F(t, T_d) &= \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t) \beta_{d,j}(t, T) E \left[e^{\left\{ \nu_{d,j}(t, T_d) \sqrt{T_d - t} X - \frac{1}{2} \nu_{d,j}^2(t, T_d) (T_d - t) \right\}} \mathbf{1}_{X \in (\kappa_{i-1}, \kappa_i)} \right] \right) = \\ &= \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t) \beta_{d,j}(t, T) \int_{\kappa_{i-1}}^{\kappa_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\left\{ \nu_{d,j}(t, T_d) \sqrt{T_d - t} x - \frac{1}{2} \nu_{d,j}^2(t, T_d) (T_d - t) \right\}} dx \right) \end{aligned}$$

Dall'immediato svolgimento dell'integrale interno si ottiene la formula desiderata. □

3.3.2 BMM Generalizzato: Approccio N-Dimensionale

Come risulta da un'analisi diretta sui dati, un modello unidimensionale non è in grado di descrivere il mercato dei future su titoli governativi. Per questo motivo è necessario estendere i risultati ad un caso N-dimensionale. L'utilizzo del modello GBMM permette una valutazione molto agevole dei derivati scritti sui Coupon Bond in ambito multi dimensionale perché presuppone per il loro valore un semplice andamento Log-Normale riducendo considerevolmente la difficoltà della valutazione del Future. Vediamo le formule ottenute nel caso di un solo Cheapest to Deliver e di un Basket:

Cheapest to Deliver

Lemma 3.3. *Nel caso ci sia un solo deliverable, usando il BMM un Bond Future in ambito Single Curve e multi dimensionale valutato in t con delivery in T_d è:*

$$F^{CtD}(t, T_d) = \frac{1}{K^{CtD}} \Sigma_i(t, T_d) P(\underline{C}^{CtD}, t) \quad (3.7)$$

dove il Convexity Adjustment è dato da:

$$\Sigma_i(t, T) = e^{\left\{ - \int_t^T \underline{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(s, T_d) ds \right\}}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata usando la formula di valutazione dei Future sotto la misura Risk Neutral:

$$F^{(CtD)}(t, T_d) \doteq E \left[F^{(CtD)}(T_d, T_d) | \mathcal{F}_t \right]$$

e la formula per la dinamica del Generico Risk Free Coupon Bond, cioè la formula integrale del Lemma (1.6) e infine la relazione tra moto Browniano nella misura T_d -forward e la Risk Neutral, vedi formula (1.11) con $T_d = t_1$. □

Basket Deliverable

Lemma 3.4. *In ambito Single-Curve e Multi dimensionale, usando il GBMM si può ottenere per un Bond Future valutato in t con delivery in T_d :*

$$F(t, T_d) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \Sigma_i(t, T_d) \left(N(\kappa_i - \xi_i(t, T_d) \sqrt{T_d - t}) - N(\kappa_{i-1} - \xi_i(t, T_d) \sqrt{T_d - t}) \right) P(\underline{C}^{(i)}, t) \quad (3.8)$$

dove la volatilità e il Convexity Adjustment sono dati da:

$$\xi_i^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \underline{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{V}_i(s) ds$$

$$\Sigma_i(t, T) = e \left\{ - \int_t^T \underline{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(s, T_d) ds \right\}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda al caso più generale Multi-Curve trattato, più avanti. \square

3.4 Multi Curve

Nell'ambito Multi-Curve continuano a valere i risultati generali trovati all'inizio del capitolo, tuttavia al fine di arrivare a una formula numericamente valutabile si deve passare dalle formule generali a formule costruite tramite il GBMM, che grazie alle ipotesi su cui si basa permette di scrivere più agevolmente le formule in questo contesto.

3.4.1 BMM Generalizzato: Approccio N-Dimensionale

Lemma 3.5. *In ambito Multi-Curve e Multi dimensionale, usando il modello GBMM il valore di un Bond Future, valutato in t con scadenza in T_d , ha l'espressione:*

$$F(t, T_d) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{\Sigma}_i(t, T_d) \left(\mathcal{N}(\kappa_i - \tilde{\xi}_i(t, T_d)(T_d - t)\sqrt{T_d - t}) - \mathcal{N}(\kappa_{i-1} - \tilde{\xi}_i(t, T_d)(T_d - t)\sqrt{T_d - t}) \right) P(\underline{C}^{(i)}, t) \quad (3.9)$$

dove la volatilità e il Convexity Adjustment sono definiti come:

$$\tilde{\xi}_i^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \tilde{V}_i(s) ds$$

$$\tilde{\Sigma}_i(t, T) = e \left\{ - \int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \tilde{\sigma}(s, T_d) ds \right\}$$

Dimostrazione. A delivery come già citato in precedenza, il valore del Future è:

$$F(T_d, T_d) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) \right) \mathbb{1}_{i \text{ CtD}}$$

ora dal Lemma (1.7) sappiamo che nella misura T_d -forward il generico Defaultable Coupon Bond Coupon ha la seguente dinamica:

$$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) = \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) e \left\{ - \int_t^{T_d} \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\epsilon}(s, T_d) ds \right\} e \left\{ \int_t^{T_d} \tilde{V}_i(s) \cdot d\tilde{W}_s^{T_d} - \frac{1}{2} \int_t^{T_d} \tilde{V}_i^2(s) ds \right\}$$

sostituendo l'espressione del moto Browniano nella misura Risk Neutral al posto di quello nella misura T_d -forward, vedi (1.11), si ottiene:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) = \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) e & \left\{ - \int_t^{T_d} \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\epsilon}(s, T_d) ds \right\} e \left\{ - \int_t^{T_d} \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(s, T_d) ds \right\} \\ & e \left\{ \int_t^{T_d} \tilde{V}_i(s) \cdot d\underline{W}_s^{T_d} - \frac{1}{2} \int_t^{T_d} \tilde{V}_i^2(s) ds \right\} \end{aligned}$$

avendo posto

$$\underline{\epsilon}(s, T_d) = \tilde{\sigma}(s, T_d) - \underline{\sigma}(s, T_d) .$$

Si ottiene la dinamica per il generico Coupon Bond nella misura Risk Neutral:

$$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) = \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) e \left\{ - \int_t^{T_d} \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \tilde{\sigma}(s, T_d) ds \right\} e \left\{ \int_t^{T_d} \tilde{V}_i(s) \cdot d\underline{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^{T_d} \tilde{V}_i^2(s) ds \right\}$$

definendo la quantità deterministica $\tilde{\Sigma}_i(t, T)$ come stabilito nell'enunciato e sostituendo nella formula teorica del valore di un Future nella misura Risk Neutral si ha

$$\begin{aligned} F(t, T_d) = E[F(T_d, T_d) | \mathcal{F}_t] &= E \left[\sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_d) \right) \mathbb{1}_{i \text{ CtD}} | \mathcal{F}_t \right] = \\ &= E \left[\sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \tilde{\Sigma}_i(t, T_d) e \left\{ \int_t^{T_d} \tilde{V}_i(s) \cdot d\underline{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^{T_d} \tilde{V}_i^2(s) ds \right\} \mathbb{1}_{i \text{ CtD}} | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Ora studiamo la relazione tra le diverse volatilità integrali dei Bond nel Basket Deliverable. Dalle ipotesi (1.1) e (1.2) abbiamo la relazione tra le volatilità che ci serve:

$$\sigma_y = \frac{(1 + y_i)}{MacD_i(t_0)} \tilde{V}_i(t) \quad \forall \text{ Bond } i\text{-esimo nel Basket}$$

da cui

$$\frac{(1 + y_i)}{MacD_i(t_0)} \tilde{V}_i(t) = \frac{(1 + y_j)}{MacD_j(t_0)} \tilde{V}_j(t) \quad \forall \text{ Bond } i\text{-esimo e } j\text{-esimo nel Basket.}$$

Facendo l'integrale stocastico da entrambe le parti abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + y_i)}{MacD_i(t_0)} \int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot d\underline{W}_s &= \frac{(1 + y_j)}{MacD_j(t_0)} \int_t^T \tilde{V}_j(s) \cdot d\underline{W}_s \\ \int_t^T \tilde{V}_j(s) \cdot d\underline{W}_s &= \frac{MacD_j(t_0)}{MacD_i(t_0)} \frac{(1 + y_i)}{(1 + y_j)} \int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot d\underline{W}_s . \end{aligned}$$

Come nel caso unidimensionale di Hull-White, fissato l'i-esimo Bond come riferimento

$$\int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot d\underline{W}_s = \mathcal{N} \left(0, \int_t^T \tilde{V}_i^2(s) ds \right)$$

possiamo osservare che tutte le variabili aleatorie che compaiono nel valore atteso come realizzazioni del processo stocastico a tempi diversi, sono la stessa variabile aleatoria associata al bond i-esimo, pesata con coefficienti diversi per ogni Bond:

$$\begin{aligned}\int_t^T \tilde{V}_j(s) \cdot d\mathbf{W}_s &= \mathcal{N}\left(0, \int_t^T \tilde{V}_j^2(s) ds\right) = \\ &= \left(\frac{\text{MacD}_j(t_0)}{\text{MacD}_i(t_0)} \frac{(1+y_i)}{(1+y_j)}\right) \mathcal{N}\left(0, \int_t^T \tilde{V}_i^2(s) ds\right).\end{aligned}$$

Definendo $\tilde{\xi}_i^2(t, T)$ come nell'enunciato, portando fuori dal valore atteso tutte le quantità deterministiche si ottiene, ponendo $X \approx \mathcal{N}(0, 1)$, scambiando valore atteso e sommatoria e infine usando i κ_i definiti precedentemente, si può svolgere il valore atteso come una semplice formula di pricing *à la* Black-Scholes:

$$\begin{aligned}F(t, T_d) &= \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \tilde{\Sigma}_i(t, T_d) E\left[e^{\left\{\tilde{\xi}_i(t, T_d)\sqrt{T_d-t} X - \frac{1}{2}\tilde{\xi}_i^2(t, T_d)(T_d-t)\right\}} \mathbb{1}_{X \in (\kappa_{i-1}, \kappa_i)}\right] = \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \tilde{\Sigma}_i(t, T_d) \int_{\kappa_{i-1}}^{\kappa_i} e^{\left\{\tilde{\xi}_i(t, T_d)\sqrt{T_d-t} x - \frac{1}{2}\tilde{\xi}_i^2(t, T_d)(T_d-t)\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \tilde{\Sigma}_i(t, T_d) \int_{\kappa_{i-1}}^{\kappa_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left\{-\frac{1}{2}\left(x - \tilde{\xi}_i(t, T_d)\sqrt{T_d-t}\right)^2\right\}} dx = \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \tilde{\Sigma}_i(t, T_d) \int_{\kappa_{i-1} - \tilde{\xi}_i(t, T_d)\sqrt{T_d-t}}^{\kappa_i - \tilde{\xi}_i(t, T_d)\sqrt{T_d-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left\{-\frac{1}{2}(y)^2\right\}} dy = \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{\Sigma}_i(t, T_d) \left(\mathcal{N}(\kappa_i - \tilde{\xi}_i(t, T_d)\sqrt{T_d-t}) - \mathcal{N}(\kappa_{i-1} - \tilde{\xi}_i(t, T_d)\sqrt{T_d-t})\right) P(\underline{C}^{(i)}, t)\end{aligned}$$

Questo è un risultato importante della nostra analisi. □

Un'ultima osservazione va fatta sui vari Convexity Adjustment che sono stati usati fino a questo momento nel GBMM:

- Un primo Convexity Adjustment è quello introdotto nella formula del Future nell'ambito Single-Curve che deriva dal cambio di misura tra la T_d -Forward dove si ha la dinamica del Risk-Free Coupon Bond alla misura Risk-Neutral dove valutare il Future:

$$\Sigma_i(t, T) = e^{\left\{-\int_t^T \underline{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(s, T_d) ds\right\}}$$

- Un Covexity Adjustment era stato introdotto nel modello GBMM nell'ambito Multi-Curve e derivava sempre dal aggiustamento ottenenuto dal cambio di misura tra la T_d -forward e la misura Risk Neutral, e dall'aggiustamento del quadrato:

$$\zeta_i(t, T_d) = e^{\left\{-\int_t^{T_d} \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\epsilon}(s, T_d) ds\right\}}$$

- Infine un Convexity Adjustment è stato introdotto come differenza di questi primi due per la valutazione dei Future su Defaultable Bond:

$$\tilde{\Sigma}_i(t, T) = e \left\{ - \int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \tilde{\sigma}(s, T_d) ds \right\}$$

In generale i tre Convexity Adjustment sono diversi, tuttavia il primo legato alla volatilità integrale di un Coupon Bond e di uno ZC Bond Risk free soprattutto sui brevi periodi, può essere considerato sostanzialmente unitario. Questa approssimazione a sua volta influisce sui secondi due Convexity Adjustment che possono essere considerati in prima approssimazione uguali.

Capitolo 4

Pricing delle Bond Option

Le Bond Option sono derivati scritti sui Titoli di stato che permettono di vendere o comprare a un prezzo fissato (Strike) un certo Bond in una data prefissata (Expiry dell'Opzione). L'opzione viene esercitata e quindi ha valore positivo, solo se il prezzo di mercato del Bond a Expiry ha valore più alto per le Call, più basso per le Put, dello Strike.

Questi derivati sono strumenti di tipo Americano. In realtà l'opzione anticipata non viene mai esercitata prima di scadenza per questo motivo sono valutate come Opzioni di tipo Europeo nella nostra analisi. In ambito unidimensionale o con il GBMM sono strumenti abbastanza facili da prezzare, hanno caratteristiche che ne permettono il pricing con passi standard *à la* Black-Scholes.

4.1 Formula Generale: Multi-Curve e Multidimensionale

Seguendo lo schema del capitolo precedente cominciamo valutando la formula più generale possibile, in modo poi da fare considerazioni che ci porteranno alla valutazione dei modelli particolari. Durante tutto il capitolo definiamo lo Strike dell'opzione in esame pari a \mathcal{K} e la data di expiry a T_e , abbiamo:

Lemma 4.1. *In ambito Multi-Curve e Multi Dimensionale, sotto la misura T_e -forward il valore di una Opzione scritta su un Defaultable Bond, con Strike \mathcal{K} e data di expiry a T_e è:*

$$C_P(t, T_e) = B(t, T_e) \left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) \Delta_{e,j}(t, T_e) \mathcal{N}(\tilde{\nu}_{e,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} - \tilde{X}) - \mathcal{K} \mathcal{N}(-\tilde{X}) \right) \quad (4.1)$$

$$\tilde{X} : \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) \Delta_{e,j}(t, T_e) e \left\{ \tilde{\nu}_{e,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} \tilde{X} - \frac{1}{2} \tilde{\nu}_{e,j}^2(t, T_e) (T_e - t) \right\} - \mathcal{K} = 0$$

dove, usando la stessa notazione del Cor.(1.2):

$$\Delta_{e,j}(t, T) = e \left\{ - \int_t^T \underline{\epsilon}(s, T_e) \cdot \underline{\rho} (\tilde{\sigma}(s, T_j) - \tilde{\sigma}(s, T_e)) ds \right\}$$

$$\underline{\epsilon}(s, T) = \tilde{\sigma}(s, T) - \underline{\sigma}(s, T) .$$

Mentre la volatilità è definita come:

$$\tilde{\nu}_{e,j}^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\tilde{\sigma}(s, T_j) - \tilde{\sigma}(s, T_e))^2 ds .$$

Dimostrazione. A Expiry il valore del payoff dell'opzione sarà dato da:

$$C_P(T_e, T_e) = \max \left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_e) - \mathcal{K}, 0 \right) .$$

Per la teoria dell'asset pricing, vedi [Barucci et al. 2009], il valore di una Opzione è dato dal valore atteso del discount factor moltiplicato per il Payoff finale:

$$C_P(t, T_e) \doteq E \left[D(t, T_e) \left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_e) - \mathcal{K} \right)^+ | \mathcal{F}_t \right]$$

ora passando nella T_e -forward (per i dettagli del cambio di misura si può consultare l'Appendice C) :

$$\begin{aligned} C_P(t, T_e) &= B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_e) - \mathcal{K} \right)^+ | \mathcal{F}_t \right] = \\ &= B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}(T_e, T_j) - \mathcal{K} \right)^+ \right]. \end{aligned}$$

Con la sostituzione della dinamica del Defaultable ZC sotto T_e -forward nella formula precedente, vedi il Cor. (1.2) :

$$\tilde{B}(T_e, T_j) = \tilde{B}_j(t) \Delta_{e,j}(t, T_e) e \left\{ \int_t^{T_e} (\tilde{\sigma}(u, T_j) - \tilde{\sigma}(u, T_e)) \cdot dW_u^{T_e} - \frac{1}{2} \int_t^{T_e} (\tilde{\sigma}(u, T_j) - \tilde{\sigma}(u, T_e))^2 du \right\}.$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} C_P(t, T_e) &= B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) \Delta_{e,j}(t, T_e) e \left\{ \int_t^{T_e} (\tilde{\sigma}(s, T_j) - \tilde{\sigma}(s, T_e)) \cdot dW_s^{T_e} \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. e \left\{ -\frac{1}{2} \int_t^{T_e} (\tilde{\sigma}(s, T_j) - \tilde{\sigma}(s, T_e))^2 ds \right\} - \mathcal{K} \right)^+ \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

introducendo il termine $\tilde{\nu}_{e,j}(t, T_e)$, fissando \tilde{X} e scambiando la somma con il valore atteso si arriva:

$$\begin{aligned} C_P(t, T_e) &= B(t, T_e) \left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) \Delta_{e,j}(t, T_e) \right. \\ &\quad \left. E^{T_e} \left[e \left\{ \tilde{\nu}_{e,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \tilde{\nu}_{e,j}^2(t, T_e) (T_e - t) \right\} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right] - E^{T_e} \left[\mathcal{K} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove, essendo $X \approx \mathcal{N}(0, 1)$, i due valori attesi sono semplici da svolgere. □

4.2 Single-Curve

In ambito Single-Curve la formula che si può ottenere è del tutto analoga a quella Multi-Curve, e anche i passaggi per ottenere la formula sono simili, in questo caso tuttavia non c'è il termine di Convexity Adjustment tra la misura T_e -forward e la Risk-Neutral perché si semplifica con il cambio di misura:

Lemma 4.2. *In ambito Single-Curve e Multi dimensionale il valore di una Opzione Call su un Risk-Free Bond con Strike \mathcal{K} e data di Expiry T_e è dato da:*

$$C_P(t, T_e) = B(t, T_e) \left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t) \mathcal{N}(\nu_{e,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} - \tilde{X}) - \mathcal{K} \mathcal{N}(-\tilde{X}) \right) \quad (4.4)$$

$$\tilde{X} : \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t) e \left\{ \nu_{e,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} \tilde{X} - \frac{1}{2} \nu_{e,j}^2(t, T_e) (T_e - t) \right\} - \mathcal{K} = 0$$

dove la volatilità è definita:

$$\nu_{e,j}^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\underline{\sigma}(s, T_j) - \underline{\sigma}(s, T_e))^2 ds$$

Dimostrazione. Partendo dall'espressione:

$$C_P(t, T_e) = B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t) e \left\{ \int_t^{T_e} (\underline{\sigma}(u, T_j) - \underline{\sigma}(u, T_e)) \cdot dW_u^{T_e} - \frac{1}{2} \int_t^{T_e} (\underline{\sigma}(u, T_j) - \underline{\sigma}(u, T_e))^2 du \right\} - \mathcal{K} \right)^+ \right] \quad (4.5)$$

I passi della dimostrazione sono del tutto analoghi a quelli fatti nel modello Multi-Curve e Multi dimensionale, (cfr. Lemma (4.5)). \square

Per utilizzare questa formula serve un modello per le volatilità: in modo simile a quanto fatto nel capitolo precedente utilizziamo inizialmente in ambito Single-Curve e unidimensionale il modello di Hull-White. In un secondo momento useremo il GBMM in ambito Multi dimensionale.

Modello Hull-White: Approccio Unidimensionale

Come trattato nella valutazione dei Future, in ambito unidimensionale il modello di Hull-White ci permette di modellare la volatilità del modello GHJM molto semplicemente:

Lemma 4.3. *In ambito unidimensionale il valore di un Opzione Call su un Risk-Free Coupon Bond è data dalla formula nel Lemma (4.2), valutando con il modello di Hull-White la volatilità secondo la formula (1.14), si ha inoltre:*

$$\nu_{e,j}^2(t, T) = \frac{1}{(T-t)} \frac{\sigma^2}{a^2} \left(e^{-aT_e} - e^{-aT_j} \right)^2 \frac{(e^{2aT} - e^{2at})}{2a}$$

Dimostrazione. I dettagli di questa dimostrazione sono tralasciati : si tratta di valutare la formula generale in ambito Single-Curve, fissando la variabile aleatoria in modo simile a quanto fatto per i Future in questo ambito,

$$\int_t^{T_e} (\underline{\sigma}(u, T_j) - \underline{\sigma}(u, T_e)) \cdot dW_u^{T_e} \approx \mathcal{N} \left(0, \int_t^{T_e} (\underline{\sigma}(u, T_j) - \underline{\sigma}(u, T_e))^2 du \right)$$

$$\nu_{e,j}^2(t, T_e) = \frac{1}{T_e - t} \int_t^{T_e} (\underline{\sigma}(u, T_j) - \underline{\sigma}(u, T_e))^2 du$$

anche in questo caso facendo i conti sugli integrali stocastici che compaiono nella formula, si ottiene un unico integrale stocastico comune a tutti i termini moltiplicato per pesi diversi:

$$\begin{aligned} \int_t^{T_d} (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d)) dW_s &= \int_t^{T_d} \frac{\sigma}{a} e^{as} (e^{-aT_d} - e^{-aT_j}) dW_s = \\ &= \frac{\sigma}{a} (e^{-aT_d} - e^{-aT_j}) \int_t^{T_d} e^{as} dW_s \quad \forall j \end{aligned}$$

$$\int_t^{T_d} e^{as} dW_s \approx \mathcal{N} \left(0, \frac{(e^{2aT_d} - e^{2at})}{2a} \right).$$

La formula iniziale diventa quindi:

$$C_P(t, T_e) = B(t, T_e) \left(\sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} B_j(t) E^{T_e} \left[\left(e^{\left\{ \nu_{e,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \nu_{e,j}^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} - \mathcal{K} \right)^+ \right] \right).$$

Il calcolo della volatilità integrale $\nu_{e,j}^2(t, T_e)$ attraverso la formula (1.14) è un semplice esercizio di calcolo integrale. □

BMM Generalizzato:Approccio N-Dimensionale

Il modello GBMM permette di valutare i Bond nel Basket sotto misura T_e -forward come variabili aleatorie Log-Normale dipendenti da un processo stocastico Multi dimensionale. La data T_e in questo caso è la data futura di expiry dell'opzione.

Lemma 4.4. *In ambito Single-Curve e Multi dimensionale, usando il modello GBMM il valore di una Bond Option con Strike \mathcal{K} e con data di expiry a T_e è dato da:*

$$C_P(t, T_e) = B(t, T_e) \left(P(\underline{C}^{(i)}, t) \mathcal{N}(d_1) - \mathcal{K} \mathcal{N}(d_2) \right) \quad (4.6)$$

dove

$$d_1 = \frac{1}{\xi_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}} \log \left(\frac{P(\underline{C}^{(i)}, t)}{\mathcal{K}} \right) + \frac{1}{2} \xi_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t} \quad d_2 = d_1 - \xi_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}$$

$$\xi_i^2(t, T) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \int_t^T \underline{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{V}_i(s) ds$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo lemma è immediata, per i dettagli si rimanda alla dimostrazione più generale in ambito Multi-Curve presentata nella prossima sezione. Per una dimostrazione rigorosa in ambito Single-Curve si può consultare [Baviera 2005]. □

4.3 Multi Curve

Il modello Multi dimensionale ottenuto utilizzando il GBMM fornisce una formula di pricing elegante e relativamente facile da ottenere seguendo un procedimento standard.

4.3.1 BMM Generalizzato:Approccio N-Dimensionale

Lemma 4.5. *In ambito Multi-Curve e Multi dimensionale sotto la misura T_e -forward, usando il GBMM il valore di un Opzione su un Defaultable Coupon Bond $\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t)$, con Strike \mathcal{K} e data di expiry T_e , è dato da:*

$$C_P(t, T_e) = B(t, T_e) \left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) \mathcal{N}(d_1) - \mathcal{K} \mathcal{N}(d_2) \right) \quad (4.7)$$

dove:

$$d_1 = \frac{1}{\tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}} \log \left(\frac{\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e)}{\mathcal{K}} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t} \quad d_2 = d_1 - \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t} \quad (4.8)$$

$$\tilde{\xi}_i^2(t, T) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \int_t^T \tilde{\underline{V}}_i(s) \cdot \underline{\rho} \tilde{\underline{V}}_i(s) ds \quad (4.9)$$

$$\zeta_i(t, T) = e \left\{ - \int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \in(s, T_e) ds \right\}$$

Dimostrazione. Riportiamo i passi principali della dimostrazione. Si comincia valutando la formula teorica di un'opzione valutata sotto la misura Risk-Neutral:

$$C_P(t, T_e) \doteq E \left[D(t, T_e) (\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_e) - \mathcal{K})^+ \right]$$

Passando nella misura T_e -forward e sfruttando il Lemma (1.7):

$$\begin{aligned} C_P(t, T_e) &= B(t, T_e) E^{T_e} \left[(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_e) - \mathcal{K})^+ \right] = \\ &= B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) e \left\{ \int_t^{T_e} \tilde{V}_i(s) \cdot dW_s^{T_e} - \frac{1}{2} \int_t^{T_e} \tilde{V}_i^2(s) ds \right\} - \mathcal{K} \right)^+ \right]. \end{aligned}$$

Usando la proprietà degli integrali stocastici

$$\int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot dW_s^{T_e} \approx \mathcal{N} \left(0, \int_t^T \tilde{V}_i^2(s) ds \right)$$

e ponendo

$$\tilde{\xi}_i^2(t, T) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \int_t^T \tilde{V}_i^2(s) ds$$

si ottiene

$$C_P(t, T_e) = B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) e \left\{ \tilde{\xi}_i(t, T) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \tilde{\xi}_i^2(t, T) (T_e - t) \right\} - \mathcal{K} \right)^+ \right].$$

Definiamo infine la variabile appoggio h

$$h = - \frac{1}{\tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}} \log \left(\frac{\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e)}{\mathcal{K}} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\xi}_i(t, T) \sqrt{T_e - t}.$$

Il resto della dimostrazione diventa una semplice risoluzione di due integrali:

$$\begin{aligned} C_P(t, T_e) &= B(t, T_e) \left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) \int_h^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \tilde{\xi}_i(t, T) \sqrt{T_e - t})^2}{2}} dx - \mathcal{K} \int_h^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \\ &= B(t, T_e) \left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) \int_{h - \tilde{\xi}_i(t, T) \sqrt{T_e - t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y)^2}{2}} dy - \mathcal{K} \int_h^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \\ &= B(t, T_e) \left(\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) \int_{-\infty}^{\tilde{\xi}_i(t, T) \sqrt{T_e - t} - h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz - \mathcal{K} \int_{-\infty}^{-h} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right). \end{aligned}$$

Da cui si ha comodamente la tesi ponendo

$$d_1 = \tilde{\xi}_i(t, T) \sqrt{T_e - t} - h \quad d_2 = -h$$

□

Capitolo 5

Pricing delle Bond Future Option

Le Future Option sono i derivati sui governativi più complicati da prezzare nella nostra analisi, infatti spostano le difficoltà della corretta valutazione del Future, in particolare dell'Opzione di Cheapest to Deliver alla data di Expiry dell'opzione.

5.1 Formula Generale: Multi-Curve e Multi Dimensionale

Come nei capitoli precedenti partiamo da una formula teorica generale, per poi studiare tramite i modelli presentati formule più semplici per la valutazione numerica:

Lemma 5.1. *In ambito Multi-Curve e Multi dimensionale, il valore di una Bond Future Option con expiry a T_e e Strike \mathcal{K} , scritta su un Future sottostante con data di Delivery T_d , con $T_d \geq T_e$ è:*

$$C_F(t, T_e) = E \left[D(t, T_e) \left(E \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(t) e^{\left\{ \int_{T_e}^{T_d} (\tilde{\sigma}(s, T_j) - \tilde{\sigma}(s, T_d)) \cdot dW_s \right\}} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. e^{\left\{ -\frac{1}{2} \int_{T_e}^{T_d} (\tilde{\sigma}^2(s, T_j) - \tilde{\sigma}^2(s, T_d)) ds \right\}} \right) \mathbf{1}_{i \text{ CtD} | \mathcal{F}_{T_e}} - \mathcal{K} \right]^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \right]$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo lemma è immediata si tratta solo di inserire nella formula di pricing delle opzioni tramite il valore atteso sotto la misura Risk-Neutral

$$C_F(t, T_e) = E \left[D(t, T_e) \left(F(T_e, T_d) - \mathcal{K} \right) \right]$$

la formula (3.5) trovata nel capitolo del pricing dei Future, valutata in T_e con data di delivery in T_d , vedi Prop (3.1):

$$F(T_e, T_d) = E \left[\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \tilde{B}_j(T_e) e^{\left\{ \int_{T_e}^{T_d} (\tilde{\sigma}(s, T_j) - \tilde{\sigma}(s, T_d)) \cdot dW_s \right\}} \right. \right. \\ \left. \left. e^{\left\{ -\frac{1}{2} \int_{T_e}^{T_d} (\tilde{\sigma}^2(s, T_j) - \tilde{\sigma}^2(s, T_d)) ds \right\}} \right) \mathbf{1}_{i \text{ CtD} | \mathcal{F}_{T_e}} \right] \quad (5.1)$$

□

5.2 Single-Curve

In ambito Single-Curve e Multi dimensionale la formula che si ottiene è del tutto simile a quella presentata precedentemente in ambito generale con la volatilità del Risk-Free Bond $\sigma(t, T)$. Per arrivare a scrivere una formula utilizzabile numericamente possiamo dapprima passare all'ambito unidimensionale, con volatilità calcolata tramite Hull-White. Successivamente viene proposta la soluzione Multi-Dimensionale nel modello GBMM.

5.2.1 Approccio Unidimensionale: Hull-White

La notazione usata in questa sezione è analoga a quella usata nella sezione dedicata al pricing dei Future nello stesso ambito.

Lemma 5.2. *In ambito Single-Curve e unidimensionale, il valore di una Opzione con data di Expiry T_e e Strike \mathcal{K} , su un Future su un Basket di Risk-Free Bond con delivery T_d , dove $T_d > T_e$, è dato da:*

$$C_F(t, T_e) = B(t, T_e) \left(\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \beta_{d,j}(T_e, T_d) \omega_{e,d}(t, T_e) B_j(t) \left(N(\kappa_i - \nu_{d,j}(T_e, T_d) \sqrt{T_d - T_e}) - N(\kappa_{i-1} - \nu_{d,j}(T_e, T_d) \sqrt{T_d - T_e}) \right) N(\nu_{d,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} - \tilde{X}) \right) - \mathcal{K} N(-\tilde{X}) \right) \quad (5.2)$$

$$\tilde{X} : \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \beta_{d,j}(T_e, T_d) \omega_{e,d}(t, T_e) B_j(t) \left(N(\kappa_i - \nu_{d,j}(T_e, T_d) \sqrt{T_d - T_e}) - N(\kappa_{i-1} - \nu_{d,j}(T_e, T_d) \sqrt{T_d - T_e}) \right) e^{\left\{ \nu_{d,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} \tilde{X} - \frac{1}{2} \nu_{d,j}^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} \right) - \mathcal{K} = 0$$

dove $\beta_{d,j}(t, T)$ e $\nu_{d,j}(t, T)$ sono quelli definiti in precedenza tramite il modello Hull-White nel capitolo del Future Pricing, e definiamo

$$\begin{aligned} \omega_{e,d}(t, T_e) &= e^{\left\{ - \int_t^{T_e} (\sigma(s, T_d) - \sigma(s, T_e)) \rho(\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d)) \right\}} = \\ &= e^{\left\{ \frac{\sigma^2}{a^2} (e^{-aT_d} - e^{-aT_j}) \left(\frac{e^{aT_e} - e^{-at}}{a} - e^{-aT_e} \frac{e^{2aT_e} - e^{2at}}{2a} \right) \right\}} \end{aligned}$$

Dimostrazione. La dimostrazione pur essendo abbastanza lunga in realtà è composta da passi elementari, ne riportiamo i principali: per prima cosa si può effettuare il calcolo del coefficiente $\omega_{e,d}(t, T_e)$ tramite un semplice integrale.

La valutazione a T_e del Future su un Basket di Risk-Free Bond con delivery a T_d è per Lemma (3.2)

$$F(T_e, T_d) = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \left(\sum_{j=\alpha+1}^{w_i} C_j^{(i)} \beta_{d,j}(T_e, T_d) B_j(T_e) \left(N(\kappa_i - \nu_{d,j} \sqrt{T_d - T_e}) - N(\kappa_{i-1} - \nu_{d,j} \sqrt{T_d - T_e}) \right) \right) \right) \quad (5.3)$$

usando il Lemma (1.2) per $B_j(T_e)$ nell'espressione di $F(T_e, T_d)$ sotto la misura Risk-Neutral e la stessa notazione del Lemma (3.2) si arriva all'espressione:

$$\begin{aligned}
B_j(T_e) &= B(T_e; T_d, T_j) = B(t; T_d, T_j) e^{\left\{ \int_t^{T_e} (\sigma(u, T_j) - \sigma(u, T_d)) \cdot dW_u - \frac{1}{2} \int_t^{T_e} (\sigma^2(u, T_j) - \sigma^2(u, T_d)) du \right\}} = \\
&= B(t; T_d, T_j) \beta_{d,j}(t, T_e) e^{\left\{ \int_t^{T_e} (\sigma(u, T_j) - \sigma(u, T_d)) \cdot dW_u - \frac{1}{2} \int_t^{T_e} (\sigma(u, T_j) - \sigma(u, T_d))^2 du \right\}}
\end{aligned}$$

sotto la misura T_d -forward. Utilizzando la relazione tra i moti Browniani (1.11), l'espressione di $B_j(T_e)$ sotto la misura T_e -forward diventa:

$$\begin{aligned}
B_j(T_e) &= B_j(t) e^{\left\{ - \int_t^{T_e} (\sigma(s, T_d) - \sigma(s, T_e)) \cdot \rho (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d)) \right\}} \\
&e^{\left\{ \int_t^{T_e} (\sigma(u, T_j) - \sigma(u, T_d)) \cdot dW_u - \frac{1}{2} \int_t^{T_e} (\sigma(u, T_j) - \sigma(u, T_d))^2 du \right\}} = \\
&= B_j(t) \omega_{e,d}(t, T_e) e^{\left\{ \int_t^{T_e} (\sigma(u, T_j) - \sigma(u, T_d)) \cdot dW_u - \frac{1}{2} \int_t^{T_e} (\sigma(u, T_j) - \sigma(u, T_d))^2 du \right\}}.
\end{aligned}$$

Arrivati a questo punto è utile richiamare la stessa osservazione fatta nel pricing dei Future: l'integrale stocastico legato a ciascun termine è uguale per tutti:

$$\begin{aligned}
\int_t^{T_d} (\sigma(s, T_j) - \sigma(s, T_d)) dW_s &= \int_t^{T_d} \frac{\sigma}{a} e^{-a s} (e^{-a T_d} - e^{-a T_j}) dW_s = \\
&= \frac{\sigma}{a} (e^{-a T_d} - e^{-a T_j}) \int_t^{T_d} e^{-a s} dW_s \quad \forall j
\end{aligned}$$

Quindi tutte le variabili aleatorie, realizzazioni dei diversi integrali stocastici, sono in realtà la stessa variabile aleatoria dal momento che gli integrali sono sempre gli stessi con un prefattore diverso. Utilizzando $\nu_{d,j}^2(t, T)$, definita precedentemente:

$$\nu_{d,j}^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\sigma(u, T_j) - \sigma(u, T_d))^2 du$$

definendo la variabile aleatoria $X \approx \mathcal{N}(0, 1)$, possiamo sostituirla nella formula per $F(T_e, T_d)$ e si ottiene la dinamica nella T_e -forward del Future tra T_e e T_d valutata in t

$$\begin{aligned}
F(T_e, T_d) &= \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \left(\sum_{j=\alpha_i+1}^{w_i} C_j^{(i)} \beta_{d,j}(T_e, T_d) B_j(t) \omega_{e,d}(t, T_e) e^{\left\{ \nu_{d,j}^2(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \nu_{d,j}^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} \right. \right. \\
&\left. \left. \left(\mathcal{N}(\kappa_i - \nu_{d,j} \sqrt{T_d - T_e}) - \mathcal{N}(\kappa_{i-1} - \nu_{d,j} \sqrt{T_d - T_e}) \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Ora valutando l'equazione dell'opzione sotto la misura Risk-Neutral e passando poi alla T_e -forward

$$\begin{aligned}
C_F(t, T_e) &= E \left[D(t, T_e) \left(F(T_e, T_d) - \mathcal{K} \right)^+ | \mathcal{F}_t \right] = \\
&= B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(F(T_e, T_d) - \mathcal{K} \right)^+ | \mathcal{F}_t \right] = \\
&= B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \left(\sum_{j=\alpha_i+1}^{w_i} C_j^{(i)} \beta_{d,j}(T_e, T_d) B_j(t) \omega_{e,d}(t, T_e) e^{\left\{ \nu_{d,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X \right\}} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. e^{\left\{ -\frac{1}{2} \nu_{d,j}^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} \right) \left(\mathcal{N}(\kappa_i - \nu_{d,j} \sqrt{T_d - T_e}) - \mathcal{N}(\kappa_{i-1} - \nu_{d,j} \sqrt{T_d - T_e}) \right) \right) \right) - \mathcal{K} \right)^+ \right]
\end{aligned}$$

fissata \tilde{X} si può scambiare il valore atteso con la sommatoria portando fuori dal valore atteso tutti i termini deterministici

$$\begin{aligned}
C_F(t, T_e) &= B(t, T_e) \left(\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \left(\sum_{j=\alpha_i+1}^{w_i} C_j^{(i)} \beta_{d,j}(T_e, T_d) B_j(t) \omega_{e,d}(t, T_e) E^{T_e} \left[e^{\left\{ \nu_{d,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X \right\}} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \left. e^{\left\{ -\frac{1}{2} \nu_{d,j}^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} \right] \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right) \left(\mathcal{N}(\kappa_i - \nu_{d,j} \sqrt{T_d - T_e}) - \mathcal{N}(\kappa_{i-1} - \nu_{d,j} \sqrt{T_d - T_e}) \right) \right) \right) - E^{T_e} \left[\mathcal{K} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right] \right)
\end{aligned}$$

Svolgendo i due integrali si arriva comodamente alla formula cercata:

$$\begin{aligned}
E^{T_e} \left[\mathcal{K} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right] &= \mathcal{K} \int_{-\infty}^{-\tilde{X}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
E^{T_e} \left[e^{\left\{ \nu_{d,j}^2(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \nu_{d,j}^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right] &= \int_{-\infty}^{\nu_{d,j}(t, T_e) \sqrt{T_e - t} - \tilde{X}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy
\end{aligned}$$

□

Riguardo a questa formula fa fatta una osservazione rilevante: sebbene sia possibile calcolare agilmente tutti i coefficienti che compaiono con Hull-White, essendo la differenza temporale tra T_e e T_d di un paio di settimane al massimo, è trascurabile in prima approssimazione. In particolare la corretta valutazione dei possibili cambi del Cheapest sull'intervallo (T_e, T_d) è trascurabile. Avremmo quindi potuto considerare come ipotesi ulteriore $T_e = T_d$ senza grossi problemi di accuratezza. Questa convinzione sembra sostenuta dai risultati numerici che mostreremo nel capitolo dei risultati numerici, in particolare i coefficienti di aggiustamento tra le due misure $\omega_{e,d}(t, T_e)$ risultano a tutti gli effetti pari a 1.

5.2.2 BMM Generalizzato: Approccio N-Dimensionale

In questo contesto utilizziamo una notazione simile a quella utilizzata per la valutazione del Future. La dinamica di un singolo Risk-Free Coupon Bond nel GBMM è:

$$P(\underline{C}^{(i)}, T) = P(\underline{C}^{(i)}, t) e^{\left\{ \xi_i(t, T) \sqrt{T - t} X - \frac{1}{2} (\xi_i)^2(t, T) (T - t) \right\}}$$

Per il Pricing ipotizziamo che le date di Delivery del Future e la data di Expiry della Future Option coincidano, avremo a data di Expiry:

$$F(T_e, T_d) \approx F(T_e, T_e) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} P(\underline{C}^{(i)}, T_e) \mathbf{1}_{i \text{ CtD}}$$

Questa è una buona approssimazione come mostreremo più dettagliatamente nella prossima sezione: l'Expiry dell'Opzione e la Maturity del Future differiscono solo di pochi giorni (a volte meno di una settimana lavorativa) quindi l'aggiustamento dovuto a questa differenza è trascurabile.

Lemma 5.3. *In ambito Single-Curve e Multi dimensionale, usando il modello GBMM e l'approssimazione di considerare la data di expiry T_e e di delivery T_d coincidenti, il valore di un Opzione Call su un Future è dato da*

$$C_F(t, T_e) = B(t, T_e) \left(\sum_{i=1}^M \left(\frac{P(\underline{C}^{(i)}, t)}{K^{(i)}} \left(\mathcal{N}(k_i - \xi_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}) - \mathcal{N}(\max(k_{i-1}, \tilde{X}) - \xi_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}) \right) - \mathcal{K} \left(\mathcal{N}(k_i) - \mathcal{N}(\max(k_{i-1}, \tilde{X})) \right) \right) \right)$$

con

$$\tilde{X} : \sum_{i=1}^M \left(\frac{P(\underline{C}^{(i)}, t)}{K^{(i)}} e \left\{ \xi_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \xi_i^2(t, T_e) (T_e - t) \right\} - \mathcal{K} \right) = 0$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo Lemma nel contesto discusso prima non è difficile ($T_d = T_e$ e GBMM), i dettagli possono essere dedotti dalla dimostrazione più generale fatta nel caso Multi-Curve nella prossima sezione. \square

5.3 Multi-Curve

In questo contesto valgono le stesse considerazioni fatte per i Future, anche in questo caso viene subito presentato il risultato ottenuto utilizzando il GBMM in ambito Multi dimensionale. La difficoltà ulteriore di fare il pricing diretto sul valore del Future a Expiry dell'Opzione è la lieve differenza tra le due date di delivery e expiry (tipicamente meno di un paio di settimane), che obbliga a utilizzare due misure diverse, per questo viene discussa l'approssimazione di considerare la data di Expiry uguale a quella di Delivery del Future. Di fatto l'utilità del modello uni dimensionale consta nella possibilità di verificare che la differenza tra le due date è con ottima approssimazione trascurabile: nei dati usati la differenza per il Front è di soli 11 giorni lavorativi.

5.3.1 BMM Generalizzato: Approccio N-Dimensionale

Per prima cosa discutiamo dell'approssimazione di considerare la data di Expiry dell'Opzione coincidente con la data di Delivery del Future:

$$T_e \approx T_d$$

Questa ipotesi ha origine in primo luogo dall'osservazione delle convezioni di mercato che fissano queste due date a non più di due settimane lavorative l'una dall'altra; in secondo luogo dalla notevole semplificazione nei conti e nel numero di parametri da considerare, a fronte di una perdita minima nell'accuratezza del modello.

I motivi per cui questa approssimazione da ottimi risultati sono diversi: la caratteristica principale che non è valutata rigorosamente è la possibilità che tra T_e e T_d possa cambiare il Cheapest to Deliver. In generale nel modello costruito potrebbero cambiare le probabilità con cui i vari Bond sono consegnati; tuttavia questo elemento può essere trascurato: anche in regime di tassi alti l'eventualità che avvengano drastici cambiamenti nei valori dei Bond in un lasso di tempo così breve è del tutto trascurabile nel mercato Europeo. Approfondiremo questi temi nell'analisi numerica dei risultati, per ora sfruttiamo l'approssimazione $T_e = T_d$ per la notevole semplificazione che offre dal punto di vista dei calcoli teorici:

Lemma 5.4. *In ambito Multi-Curve e Multi dimensionale, usando il modello GBMM e l'approssimazione*

$$T_e \approx T_d$$

il valore di un Opzione con Expiry T_e e Strike \mathcal{K} su un Future con delivery a T_d è dato da:

$$C_F(t, T_e) = B(t, T_e) \left(\sum_{i=1}^M \left(\frac{P(\underline{C}^{(i)}, t)}{K^{(i)}} \zeta_i(t, T_e) \mathbf{1}_{\kappa_i > \tilde{X}} \left(\mathcal{N}(k_i - \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \mathcal{N}(\max(k_{i-1}, \tilde{X}) - \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}) \right) - \mathcal{K} \mathbf{1}_{\kappa_i > \tilde{X}} \left(\mathcal{N}(k_i) - \mathcal{N}(\max(k_{i-1}, \tilde{X})) \right) \right) \right) \quad (5.4)$$

$$\tilde{X} : \sum_{i=1}^M \left(\frac{P(\underline{C}^{(i)}, t)}{K^{(i)}} \zeta_i(t, T_e) e \left\{ \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \tilde{\xi}_i^2(t, T_e) (T_e - t) \right\} - \mathcal{K} \right) = 0$$

dove la volatilità è definita:

$$\tilde{\xi}_i^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \tilde{V}_i(s) ds.$$

Dimostrazione. Usando l'approssimazione $T_e \approx T_d$ a data di Expiry dell'opzione avremo:

$$F(T_e, T_e) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_e) \mathbf{1}_{i \text{ CtD}}$$

Ora per il valore di una Call avremo

$$C_F(t, T_e) \doteq E \left[D(t, T_e) \left(F(T_e, T_e) - \mathcal{K} \right)^+ \right]$$

Seguendo passi analoghi a quelli già svolti in precedenza si può passare alla misura T_e -forward (che ora coincide con la T_d -forward)

$$C_F(t, T_e) = B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(F(T_e, T_e) - \mathcal{K} \right)^+ \right] = \\ = B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_e) \mathbf{1}_{i \text{ CtD}} - \mathcal{K} \right)^+ \right].$$

I passi successivi sono quelli standard: si sostituisce la dinamica del Defaultable Coupon Bond nell'equazione precedente, vedi Lemma (1.7):

$$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, T_e) = \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) e \left\{ \int_t^{T_e} \tilde{V}_i(s) \cdot d\mathbf{W}_s^{T_e} - \frac{1}{2} \int_t^{T_e} \tilde{V}_i^2(s) ds \right\}$$

per ottenere

$$C_F(t, T_e) = B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) e \left\{ \int_t^{T_e} \tilde{V}_i(s) \cdot d\mathbf{W}_s^{T_e} - \frac{1}{2} \int_t^{T_e} \tilde{V}_i^2(s) ds \right\} \mathbf{1}_{i \text{ CtD}} - \mathcal{K} \right)^+ \right].$$

Ora possiamo usare le ipotesi standard del GBMM sulle volatilità nel Basket; analogamente a quanto mostrato in precedenza la conseguenza di queste ipotesi è che le variabili aleatorie presenti nel valore atteso come realizzazioni dei vari integrali stocastici, in realtà sono la stessa variabile aleatoria pesata con coefficienti diversi per ogni Bond. Preso l' i -esimo Bond come riferimento, per le proprietà degli integrali stocastici, vedi [Baldi 2000]:

$$\int_t^{T_e} \tilde{V}_i(s) \cdot d\mathbf{W}_s^{T_e} \approx \mathcal{N} \left(\int_t^{T_e} \tilde{V}_i^2(s) ds \right)$$

e gli altri termini stocastici si possono scrivere in questo modo:

$$\int_t^T \tilde{V}_j(s) \cdot dW_s = \frac{MacD_j(t_0) (1 + y_i)}{MacD_i(t_0) (1 + y_j)} \int_t^T \tilde{V}_i(s) \cdot dW_s.$$

Osserviamo quindi che anche in questo caso i pesi dell'integrale stocastico sono gli stessi per tutti i Bond all'interno del paniere. Fissiamo per un generico j -esimo Bond nel Basket:

$$\tilde{\xi}_j^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T \tilde{V}_j^2(s) ds$$

e di conseguenza

$$\tilde{X} : \sum_{i=1}^M \left(\frac{P(\underline{C}^{(i)}, t)}{K^{(i)}} \zeta_i(t, T_e) e^{\left\{ \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t} \tilde{X} - \frac{1}{2} \tilde{\xi}_i^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} - \mathcal{K} \right) = 0$$

$$C_F(t, T_e) = B(t, T_e) E^{T_e} \left[\left(\sum_{i=1}^M \frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) e^{\left\{ \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \tilde{\xi}_i^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} \right) \mathbf{1}_{X \in (\kappa_{i-1}, \kappa_i)} - \mathcal{K} \right] \mathbf{1}_{X > \tilde{X}}.$$

Ora per semplificare l'espressione possiamo osservare che

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^M \mathcal{K} \mathbf{1}_{i \text{ CtD}}$$

ne otteniamo l'espressione

$$C_F(t, T_e) = B(t, T_e) \left(\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{K^{(i)}} \tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) \zeta_i(t, T_e) E^{T_e} \left[e^{\left\{ \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \tilde{\xi}_i^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} \right] \mathbf{1}_{X \in (\kappa_{i-1}, \kappa_i)} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right] - \mathcal{K} E^{T_e} \left[\mathbf{1}_{X \in (\kappa_{i-1}, \kappa_i)} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right] \right).$$

I due valori attesi ottenuti sono di facile soluzione:

$$\begin{aligned} E^{T_e} \left[\mathbf{1}_{X \in (\kappa_{i-1}, \kappa_i)} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right] &= \int_{\kappa_{i-1}}^{\kappa_i} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \mathbf{1}_{\kappa_i > \tilde{X}} \int_{\max(\kappa_{i-1}, \tilde{X})}^{\kappa_i} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \mathbf{1}_{\kappa_i > \tilde{X}} (\mathcal{N}(\kappa_i) - \mathcal{N}(\max(\kappa_{i-1}, \tilde{X}))) \\ E^{T_e} \left[e^{\left\{ \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t} X - \frac{1}{2} \tilde{\xi}_i^2(t, T_e) (T_e - t) \right\}} \mathbf{1}_{X \in (\kappa_{i-1}, \kappa_i)} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} \right] &= \\ &= \int_{\kappa_{i-1}}^{\kappa_i} \mathbf{1}_{X > \tilde{X}} e^{-\frac{(x - \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t})^2}{2}} dx = \\ &= \mathbf{1}_{\kappa_i > \tilde{X}} \int_{\max(\kappa_{i-1}, \tilde{X}) - \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}}^{\kappa_i - \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \mathbf{1}_{\kappa_i > \tilde{X}} (\mathcal{N}(\kappa_i - \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t}) - \mathcal{N}(\max(\kappa_{i-1}, \tilde{X}) - \tilde{\xi}_i(t, T_e) \sqrt{T_e - t})) \end{aligned}$$

sostituendo si ottiene comodamente la Formula cercata. □

Capitolo 6

Risultati Numerici

In questo capitolo riportiamo i risultati numerici ottenuti applicando le formule di pricing dimostrate nei capitoli precedenti ai dati disponibili, illustrati nel capitolo Dataset.

La presentazione dei risultati numerici ha la stessa impostazione dei capitoli teorici: per prima cosa vengono presentati i risultati numerici ottenuti per il pricing delle opzioni in ambito unidimensionale e Single Curve con il modello di Hull-White. Successivamente vengono presentati gli analoghi risultati ottenuti con il GBMM in ambito Single Curve e confrontati con i precedenti. Il confronto tra i due modelli viene effettuato sulle probabilità di delivery che assegnano ai vari Bond nel Basket dei Deliverable per i diversi Future.

Infine viene affrontata l'analisi sulla formula GBMM per i Future in ambito Multi dimensionale; in quest'ultimo caso alcune quantità sono calibrate sui dati storici per i Defaultable Bond.

6.1 Approccio Single Curve Unidimensionale con il Modello di Hull-White al Pricing delle Future Option

Il modello unidimensionale di Hull-White presentato e utilizzato nelle sezioni precedenti è un modello a due parametri : σ e a . I dati che abbiamo a disposizione per la calibrazione delle volatilità $\nu_{a,j}(t, T)$, relative alle varie cedole dei diversi Deliverable che compaiono nelle formule delle opzioni, sono i prezzi di mercato sulle Opzioni per i tre diversi Future (Schatz, Bobl e Bund), Front e Next. Le volatilità che stiamo studiando dipendono dalla Maturity dei Bond nel Basket del contratto, quindi è facile capire che Schatz, Bobl e Bund hanno volatilità diverse.

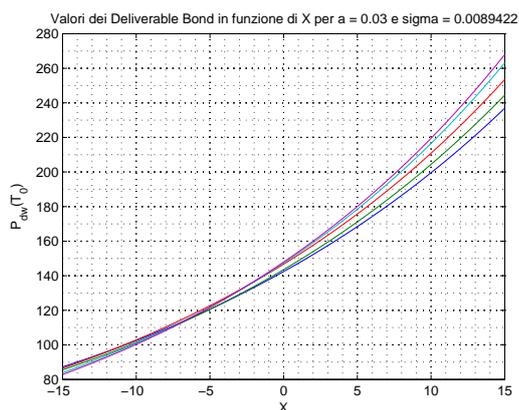


Figura 6.1: Valori ottenuti per i valori di diversi Deliverable Bond in Funzione di X

La soluzione per semplificare la calibrazione di questo modello è utilizzare il Cheapest to Deliver attuale come l'unico Bond Deliverable nel Basket: in questo modo abbiamo tre dati (prendiamo le tre opzioni Call per esempio) che dipendono dalle tre volatilità dei Cheapest to Deliver rispettivamente di Schatz, Bobl e Bund, queste a loro

volta dipendono dai parametri. Fissando dei valori di a si possono ottenere i valori di σ imponendo che i valori delle formule siano pari a quelli del mercato, derivando una relazione numerica tra a e σ sulla base dei dati.

A questo punto avendo la relazione tra i due parametri possiamo calcolare tutte le volatilità dei Bond nel Basket e ricalcolarci il valore dei derivati correttamente. Con l'introduzione del Basket dei Deliverable diventa essenziale valutare accuratamente l'opzione Cheapest to Deliver per stabilire le costanti che nel modello teorico sono definite come κ_i , cioè quei valori della variabile aleatoria, unico drift stocastico del sistema, tali per cui il Cheapest cambia, vedi fig. (6.1).

L'opzione Cheapest to Deliver viene valutata numericamente prendendo un intervallo ragionevole per una variabile aleatoria normale e confrontando i valori dei diversi Deliverable Bond su questo intervallo punto per punto, l'effetto è di ottenere i punti di incrocio, cioè quei valori della variabile aleatoria in corrispondenza dei quali cambia il Cheapest to Deliver, vedi fig. (6.1).

Riportiamo i risultati ottenuti applicando questo procedimento per il pricing dei derivati in esame, fissando dei valori della variabile: $a = (0.03 \ 0.04 \ 0.05)$.

Front	Strike	P_{mrk}	$P_{a=0.03}$	$P_{a=0.04}$	$P_{a=0.05}$	
Schatz	Future		110.6375	110.6556	110.6556	110.6556
	Call	110.7	0.0775	0.0775	0.0775	0.0775
	Put	110.7	0.1375	0.1219	0.1219	0.1219
Bobl	Future		125.3850	125.5193	125.5193	125.5193
	Call	125.5	0.4675	0.4676	0.4676	0.4676
	Put	125.5	0.5825	0.4480	0.4480	0.4480
Bund	Future		140.7950	140.8285	140.8285	140.8284
	Call	141.5	0.9450	0.9454	0.9455	0.9455
	Put	141.5	1.6500	1.6151	1.6151	1.6151
Next						
Schatz	Future		110.5625	110.6101	110.6101	110.6101
	Call	110.7	0.2150	0.2152	0.2152	0.2152
	Put	110.7	0.2200	0.3042	0.3042	0.3042
Bobl	Future		125.94	126.1258	126.1281	126.1305
	Call	126.25	0.9750	0.9943	0.9954	0.9974
	Put	126.25	1.2552	1.1086	1.1073	1.1058
Bund	Future		142.33	142.4146	142.4143	142.4140
	Call	143	1.9950	1.9984	1.9985	1.9986
	Put	143	2.2100	2.5704	2.5703	2.5702

Tabella 6.1: Risultati numerici per i Future e le Future Option sui contratti Front e Next ottenuti con l'utilizzo del modello di Hull-White unidimensionale in ambito Single Curve.

Da una prima osservazione sui risultati appaiono meglio stimati i prezzi delle opzioni Call, il motivo è che si è deciso di calibrare il modello su questi prodotti. In generale però il modello stima con sufficiente esattezza anche i prezzi dei Future e delle opzioni Put; tranne nel caso della Put sul Front Bobl: il modello sottostima in maniera

significativa questa opzione. Il motivo è dovuto al valore calcolato per il Bobl stesso: lo Strike di questa opzione è fissato a 125.5 e il prezzo del Future è molto vicino all' "at the money". Si può osservare che per il mercato la Call è "out of the money" e la Put "in the money", mentre per il valore del Future calcolato nel modello di Hull-White avviene il viceversa ed è questo il motivo della grande differenza riscontrata su questo contratto.

Passiamo ora a analizzare i valori del parametro σ ottenuti dalla calibrazione implicita del modello sul Cheapest to Deliver attuale in funzione del parametro a :

Front	a	σ_{Schatz}	σ_{Bobl}	σ_{Bund}
Front	0.03	0.0035	0.0063	0.0089
	0.04	0.0036	0.0064	0.0093
	0.05	0.0036	0.0065	0.0097
Next				
Next	0.03	0.0055	0.0081	0.0090
	0.04	0.0056	0.0083	0.0094
	0.05	0.0056	0.0085	0.0098

Tabella 6.2: Risultati della calibrazione numerica dei parametri del modello di Hull-White per le Future Option per i contratti Front (Dic-2012) e Next (Mar-2013).

Come si può vedere la volatilità di tasso σ del modello di Hull-White è con buona approssimazione costante in funzione dell'altro parametro, ma soprattutto i valori calcolati sono molto diversi a seconda del contratto usato per la calibrazione. Questo evidenzia come il modello unidimensionale di Hull-White sia poco coerente per la valutazione di questi contratti derivati: la volatilità di tasso cioè dell'unico driver stocastico del sistema dovrebbe essere costante nel modello, appare chiaro dai valori ottenuti nella relazione numerica $\sigma(a)$ che non è così.

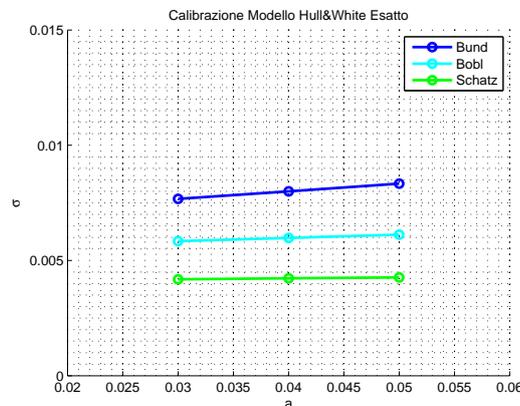


Figura 6.2: Volatilità del modello Unidimensionale di Hull-White per diversi contratti; è chiaro dall'immagine che Schatz, Bobl e Bund hanno volatilità molto differenti dipendenti dal Time to Maturity dei bond dei basket (come si può notare la volatilità maggiore è legata ai Bund, quella minore allo Schatz).

L'indicazione che possiamo trarre da questi risultati per le volatilità è che il modello unidimensionale è insufficiente per valutare coerentemente questi derivati, è necessario quindi passare a un modello multi dimensionale.

L'ultima analisi che deve essere effettuata per questo modello è quella che riguarda i diversi Convexity Adjustment $\omega_{e,d}(t, T_e)$ che costituiscono l'aggiustamento tra la misura T_e -forward e la T_d -forward. Questo modello è l'unico tra quelli presentati per cui si possono calcolare con esattezza queste quantità e che quindi permette di fare quest'analisi. E' importante discutere le proprietà dei Convexity Adjustment perché l'ipotesi che nel modello GBMM ($T_d \approx T_e$), ci permette di semplificare i conti per il pricing delle Future Option, è fatta ipotizzando che questi termini e di conseguenza le differenze tra le due misure siano trascurabili per l'accuratezza dei risultati calcolati dal modello.

I risultati presentati sono i coefficienti $\omega_{e,d}(t, T_e)$ ottenuti per i Deliverable Bond dei contratti del Front, il motivo per cui non sono presentati i risultati per i contratti Next è che i risultati sono totalmente analoghi e non aggiungerebbero nulla all'interpretazione ricavabile da questi. Per lo Schatz abbiamo un unico deliverable ('BKO 0 09/12/14') si hanno due cedole con Convexity Adjustment pari a 1,000000087 e 1,000000196. Per Bund e Bobl si hanno:

Bobl	'OBL 0 1/2 10/13/17'	'DBR 4 1/4 07/04/17'
1° Cedola	1,00000032	1,000000218
2° Cedola	1,000000677	1,000000582
3° Cedola	1,000001017	1,000000925
4° Cedola	1,00000134	1,000001252
5° Cedola	1,000001648	1,000001564

Tabella 6.3: Convexity Adjustment calcolati per le cedole del Bobl del Dic-2012.

Bund	'DBR 1 1/2 09/04/22'	'DBR 2 1/4 09/04/21'	'DBR 3 1/4 07/04/21'
1° Cedola	1,000000617	1,000000617	1,000000484
2° Cedola	1,000001408	1,000001408	1,000001275
3° Cedola	1,000002154	1,000002154	1,000002028
4° Cedola	1,000002864	1,000002864	1,000002745
5° Cedola	1,000003541	1,000003541	1,000003428
6° Cedola	1,000004185	1,000004185	1,000004078
7° Cedola	1,000004798	1,000004798	1,000004696
8° Cedola	1,000005381	1,000005381	1,000005287
9° Cedola	1,000005938	1,000005938	1,000005844
10° Cedola	1,000006464	-	-

Tabella 6.4: Convexity Adjustment calcolati per le cedole del Bund del Dic-2012.

Si può osservare dai risultati che i Convexity Adjustment tra le due misure sono totalmente trascurabili visto che in tutti i casi differisce da uno per una quantità inferiore a (10^{-5}). I risultati per i contratti Next sono esattamente analoghi.

Questi coefficienti possono essere considerati unitari senza alcuna perdita nell'accuratezza dell'analisi: i risultati numerici ottenuti confermano che l'approssimazione fatta per il pricing delle Future Option, di trascurare la differenza tra la data di Expiry dell'Opzione e quella di Delivery del Future, è sostanzialmente corretta.

6.2 Approccio Single Curve Multidimensionale con il modello GBMM al Pricing delle Future Option

Per l'approccio Single Curve in ambito multi dimensionale il metodo di calibrazione utilizzato è analogo a quello nel contesto unidimensionale: viene calibrata la volatilità del Bond Cheapest to Deliver attuale sul prezzo delle Opzioni Call riferite a ciascun Future. In pratica si trova la volatilità che rende il valore della formula valutata su un solo Deliverable pari al prezzo di mercato, i.e. la quantità $\xi_i(t, T_e)$ del Lemma (5.3) per il Cheapest to Deliver Bond attuale.

Una volta ottenute le volatilità dei Cheapest to Deliver attuali per ogni contratto, possiamo utilizzare questa quantità per calcolare le Price-Vol degli altri Bond nel Basket dei Deliverable tramite l'ipotesi (1.2), mettendoci nelle migliori condizioni per la corretta valutazione dell'opzione Cheapest to Deliver. La valutazione dell'opzione Cheapest to Deliver avviene ancora in modo numerico valutando punto per punto i Bond nel Basket.

I risultati ottenuti per il pricing delle Opzioni sono riportati nella tabella sottostante:

Front		Strike	P_{mrk}	P_{Num}	$\xi_i(t, T_e)$
Schatz	Call	110.7	0.0775	0.0775	0.0064
	Put	110.7	0.1375	0.1060	0.0068
Bobl	Call	125.5	0.4675	0.4675	0.0269
	Put	125.5	0.5825	0.5309	0.0313
Bund	Call	141.5	0.9450	0.9450	0.0608
	Put	141.5	1.6500	1.6233	0.0624
Next					
Schatz	Call	110.7	0.2150	0.2150	0.0078
	Put	110.7	0.2200	0.3088	0.0064
Bobl	Call	126.25	0.9750	0.9738	0.0327
	Put	126.25	1.2552	1.142	0.0292
Bund	Call	143	1.9950	1.9950	0.0625
	Put	143	2.2100	2.3597	0.0561

Tabella 6.5: Risultati numerici per le Future Option sui contratti Front e Next ottenuti con l'utilizzo del modello GBMM in ambito Single Curve.

I risultati per le opzioni Call sono sostanzialmente esatti, i risultati per le opzioni Put invece sono meno accurati come nel modello unidimensionale. Un'osservazione importante può essere fatta sul Bobl del Front: nel modello unidimensionale il risultato era di avere una stima pessima a causa della valutazione numerica del Future al di sopra dello Strike. Con l'utilizzo di questo modello la stima migliora perché almeno è concorde con la valutazione del mercato con l'opzione Put "in the money" ($P_{\text{Call}} < P_{\text{Put}}$).

Possiamo inoltre osservare come l'opzione di Cheapest sia trascurabile: abbiamo calibrato entrambi i modelli usando solo i Bond Cheapest to Deliver attuali in modo che il prezzo calcolato fosse uguale a quello di mercato e ricavandone le quantità che ci servivano per la corretta valutazione dell'opzione Cheapest to Deliver. Ricalcolando il valore dell'opzione, utilizzando questi parametri e valutando correttamente il Basket, non cambia il risultato a cui si arriva. Come vedremo meglio nel prossimo paragrafo questo fenomeno avviene perché le probabilità di delivery nel Basket sono molto concentrate in entrambi i modelli, proprio sul Cheapest to Deliver attuale.

6.3 Confronto Modello Unidimensionale con Hull-White e Multi dimensionale GBMM

In questa sezione facciamo un confronto tra i due modelli sulla base delle probabilità che attribuiscono ai vari Bond Deliverable nei Basket. Per il modello Hull-White visto che i risultati delle probabilità dei deliver sono i medesimi per i tre valori fissati di a , utilizziamo solo i valori per $a = 0.05$.

Schatz	Deliverable H-W	Probabilità H-W	Deliverable GBMM	Probabilità GBMM
Front	'BKO 0 09/12/14'	100%	'BKO 0 09/12/14'	100%
Next	'BKO 0 12/12/14'	100%	'BKO 0 12/12/14'	100%
Bobl	Deliverable H-W	Probabilità H-W	Deliverable GBMM	Probabilità GBMM
Front	'DBR 4 1/4 07/04/17'	100%	'DBR 4 1/4 07/04/17'	100%
Next	'DBR 4 01/04/18'	96.92%	'DBR 4 01/04/18'	99.11%
	'OBL 0 1/2 10/13/17'	3.08%	'OBL 0 1/2 10/13/17'	0.89%
Bund	Deliverable H-W	Probabilità H-W	Deliverable GBMM	Probabilità GBMM
Front	DBR 3 1/4 07/04/21	100%	DBR 3 1/4 07/04/21	100%
Next	DBR 2 01/04/22	100%	DBR 2 01/04/22	100%

Tabella 6.6: Confronto tra le probabilità di Delivery associate ai Bond dei Basket dei vari contratti Future su titoli tedeschi dal modello unidimensionale di Hull-White e dal modello Multi dimensionale GBMM in ambito Single Curve.

I due modelli hanno risultati perfettamente coerenti tra loro: attribuiscono agli stessi Bond nei vari Basket la stessa probabilità di Delivery.

La conclusione che possiamo derivare è che il fenomeno per cui il Cheapest to Deliver per tassi bassi è generalmente il Bond a Maturity più corta, ampiamente descritto in [Henrard 2006] usando un modello unidimensionale, vale anche nel mercato Europeo studiato con un modello multi dimensionale.

6.4 Approccio al Future Pricing Multidimensionale con GBMM

In questa sezione vengono esposti i risultati numerici ottenuti dalla formula dei Future su Risk Free e Defaultable Bond nel GBMM, vedi i Lemmi (3.4) e (3.5). Per ottenere i risultati deve essere calibrato il Convexity Adjustment dovuto al cambio di misura e allo spread, il coefficiente $\tilde{\Sigma}_i(t, T_d)$. Questa quantità non è facile da calibrare ne nel caso Risk-Free ne tanto meno nel caso Defaultable, quindi calcoleremo la formula trascurandola e faremo un'analisi a posteriori basata sulle differenze tra il valore riscontrato e il prezzo di mercato.

6.4.1 Risk-Free Bond Future

In questo caso abbiamo tutte le quantità necessarie che ci servono alla corretta valutazione della formula a parte i Convexity Adjustment $\Sigma_i(t, T_d)$. Le volatilità $\xi_i(t, T_d)$ contenute nella formula del Lemma (3.4) sono esattamente le stesse di quelle ottenute dalla calibrazione delle opzioni discussa prima, grazie all'approssimazione di trascurare il lasso temporale tra Delivery del Future e Expiry dell'Opzione.

Non avendo la possibilità di calibrare i Convexity Adjustment ricaviamo il valore numerico della formula (3.4) considerando unitari questi coefficienti per poi confrontare i valori ottenuti con i prezzi di mercato. In questo modo è possibile calcolarsi il Convexity Adjustment associato al Cheapest to Deliver, infatti nella sommatoria della formula del Lemma (3.4), abbiamo visto come le probabilità di Delivery sono fortemente concentrate. La logica conseguenza è che tra tutti i coefficienti in realtà solo quello associato al Cheapest to Deliver conta numericamente perché pesato per una probabilità prossima a 1, gli altri sono in prima approssimazione trascurabili.

	Contratto	F_{MRK}	F_{Num}	$\log(\Sigma_i(t, T_d))$
Front	Schatz	110.6375	110.6696	$-2.9020 \cdot 10^{-4}$
	Bobl	125.3850	126.2367	-0.0068
	Bund	140.7950	141.4673	-0.0048
Next	Schatz	110.5625	110.5201	$-3.8388 \cdot 10^{-4}$
	Bobl	125.9400	127.8602	-0.0151
	Bund	142.3300	143.5468	-0.0085

Tabella 6.7: Risultati numerici per i Future sui contratti Front e Next ottenuti con l'utilizzo del GBMM in ambito Single Curve.

E' impossibile discutere con così pochi dati a disposizione della correttezza dei risultati; ci limitiamo a rilevare che gli esponenti dei Convexity Adjustment erano degli integrali negativi di quantità positive, e i risultati sono in linea con la teoria essendo tutti negativi. Inoltre va notato come, anche non contando questi coefficienti, le formule siano sostanzialmente esatte al punto da portare a chiedersi se le quantità trovate numericamente come esponenti dei Convexity Adjustment siano dovuti a errori di calcolo. In questo senso è molto significativo il fatto che siano tutti negativi come la teoria sviluppata ipotizzava.

Infine proponiamo un metodo veloce per calibrare i Convexity Adjustment degli altri Bond nel Basket; si può utilizzare l'ipotesi (1.2) del GBMM per calcolare gli esponenti degli altri coefficienti utilizzando quello del Cheapest to Deliver come base attraverso questa formula:

$$\int_t^{T_d} \underline{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(s, T_d) ds = \frac{MacD_j(t_0)(1 + y_{ctd})}{MacD_{ctd}(t_0)(1 + y_j)} \int_t^{T_d} \underline{V}_{ctd}(s) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(s, T_d) ds$$

Infatti nell'espressione integrale dell'esponente sono solo le Price-Vol $\underline{V}_i(s)$ le uniche quantità che variano da un Bond all'altro. Una volta calcolati gli esponenti si possono facilmente ricavare gli altri Convexity Adjustment, essendo le Macaulay Duration circa costanti nel Basket il risultato atteso è che i coefficienti dovrebbero essere molto simili all'interno del Basket e quindi prossimi ma minori di 1.

6.4.2 Defaultable Bond Future

Per i Defaultable Coupon Bond il procedimento di valutazione numerica è più complicato: in questo caso infatti non essendoci le opzioni, non possiamo calibrare direttamente nemmeno le volatilità dei vari Bond nel Basket Deliverable sui dati di mercato.

E' possibile valutare la volatilità integrale $\tilde{\xi}_i(t, T_d)$ utilizzando i dati storici: possiamo calcolare la curva dei Discount Factor per ogni data tra 01-Nov-2011 e il 5-Oct-2012 e successivamente usarla per calcolarci la volatilità

$$\tilde{\nu}_{d,j}^2(t, T) = \frac{1}{T_d - t} \int_t^{T_d} \left(\tilde{\sigma}(t, T_j) - \tilde{\sigma}(t, T_d) \right)^2 ds$$

del Forward ZC secondo la formula del Lemma (1.5).

La formula è utilizzata in questi termini: t_i sono le date storiche a disposizione, t_1 verrà posta costante sulla data di Delivery T_d e invece vengono studiate diverse scadenze per t_2 . Ottenendo per le date t_i storiche le variabili aleatorie:

$$g_i = \frac{1}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \log\left(\frac{B(t_{i+1}; T_d, T_j)}{B(t_i; T_d, T_j)}\right) \approx \mathcal{N}(\dots, \nu_{d,j}^2(t_i, t_{i+1}))$$

Prendendo la deviazione standard di queste variabili aleatorie, calcolate per diverse scadenze T_j (da 1 a 10 anni) possiamo stimare la curva delle volatilità integrali dei Forward ZC $\nu_{d,j}(t_i, t_{i+1})$ su diversi intervalli temporali.

In fig. (6.3) vengono mostrati i risultati ottenuti seguendo questo procedimento in funzione delle diverse scadenze per i tre paesi in esame; come si può vedere la curva trovata per i titoli italiani è la più alta, questo è dovuto alla maggior volatilità dei prezzi dei titoli italiani.

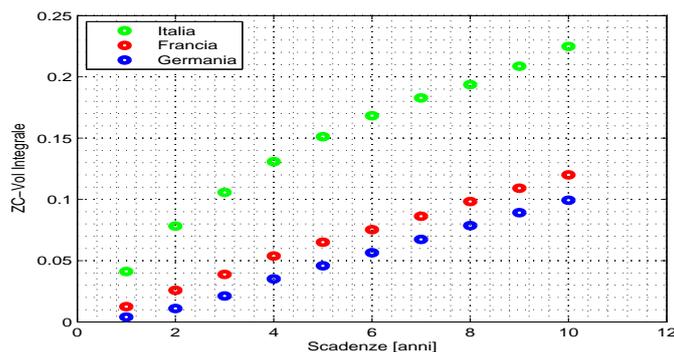


Figura 6.3: Volatilità integrali $\nu_{d,j}(t_i, t_{i+1})$ dei Forward ZC in funzione delle diverse scadenze T_j .

Per ottenere infine la Price-Vol integrale dei Defaultable Coupon Bond dalle volatilità calcolate per i Forward ZC possiamo utilizzare la formula della volatilità del Lemma (1.7): fissando i coefficienti $\gamma_j^{(i)}(t)$ all'istante di valutazione tramite la *Freezing Technique* e integrandola da entrambe le parti rispetto a t . La Price-Vol integrale diventa la somma dei quadrati dei diversi coefficienti $\gamma_j^{(i)}(t)$ per le volatilità integrali trovate per i Forward ZC alle varie scadenze.

Seguendo questo procedimento possiamo ottenerci la Price-Vol integrale per almeno un Bond nel Basket e usare le ipotesi del GBMM per ottenere le altre volatilità dei Bond nel Basket dei Deliverable in modo da poter valutare correttamente l'opzione Cheapest to Deliver. Per il Future Italiano su BTP a 3 anni (codice BTSZ2 Comdty), abbiamo i seguenti deliverable:

BTSZ2 Comdty	Descrizione	Clean Price	Yield to Maturity	Conversion Factor
	BTPS 4 1/4 02/01/15	104,123	2,414	0,966761
	BTPS 2 1/2 03/01/15	99,17	2,548	0,929663
	BTPS 3 04/15/15	100,905	2,643	0,93701
	BTPS 4 1/2 07/15/15	104,553	2,795	0,966387
	BTPS 3 06/15/15	100,855	2,684	0,932864
	BTPS 3 3/4 08/01/15	102,578	2,803	0,947434
	BTPS 3 11/01/15	100,585	2,816	0,923410

Tabella 6.8: Deliverable Bond per il Future su titoli Italiani a scadenza triennale (BTSZ2 Comdty).

Calcolata con il metodo indicato la volatilità relativa al Cheapest to deliver attuale (BTPS 2 1/2 03/01/15) è 0.0539. Ora possiamo utilizzare il GBMM per calcolare il valore del Future: utilizziamo le ipotesi (1.1) e (1.2) per calcolarci anche le volatilità degli altri Bond nel Basket.

Anche in questo caso per l'impossibilità di calibrarlo, il Convexity Adjustment è trascurato nella valutazione della formula ipotizzandolo unitario, a posteriori è possibile fare un confronto tra il prezzo calcolato e il prezzo di mercato discutendo se il Convexity Adjustment ottenuto può essere ragionevole.

L'opzione Cheapest to Deliver sui Bond a scadenza viene valutata ancora in modo numerico, confrontando punto per punto i valori ottenuti dalle dinamiche dei Bond derivate dal GBMM. Il procedimento seguito indica come possibili deliverable del Future:

BTSZ2 Comdty	Deliverable	Probabilità di Delivery
	BTPS 2 1/2 03/01/15	0,998042932
	BTPS 3 3/4 08/01/15	0,001950654

Tabella 6.9: Probabilità di Delivery per i Bond del Future su titoli Italiani a scadenza triennale (BTSZ2 Comdty).

Analogamente a quanto discusso per i Future sui titoli tedeschi, il Cheapest to Deliver rimane quasi certamente invariato durante il periodo in esame, nonostante i tassi dei titoli Italiani siano più alti. Questo rafforza le conclusioni del lavoro di Henrard, [Henrard 2006], dove si prende in considerazione il mercato americano; questo mercato è molto più vario di quello Europeo ma la conclusione a cui arriva Henrard è che per tassi bassi l'Opzione di Cheapest è quasi superflua perché la probabilità è completamente concentrata nel Bond con Maturity più breve.

Il prezzo del Future ottenuto numericamente è di 107.5215 a fronte di un prezzo di mercato di 106,95. La formula appare quindi coerente e sembra stimare correttamente il prezzo di mercato.

Infine come nella sezione precedente, non abbiamo valutato i Convexity Adjustment nella formula di pricing. Possiamo ottenere una stima di questo coefficiente almeno per il Cheapest, confrontando il valore calcolato con il valore di mercato del Future. In particolare facendo il logaritmo del rapporto tra prezzo di mercato del Future e il prezzo da noi calcolato possiamo trovare una stima dell'esponente di questa quantità: in linea con il segno negativo davanti all'integrale nelle formule il valore è -0.0051.

Oltre al segno negativo possiamo notare che il valore di questa quantità per i titoli tedeschi sui contratti a 2 anni ha un ordine di grandezza intorno a 10^{-4} , è lecito aspettarsi che per una scadenza sui 3 anni il valore non si modifichi molto. La quantità ottenuta per i titoli italiani ha un valore assoluto più grande della rispettiva quantità per i tedeschi, in linea con la teoria, infatti facendo i conti con le formule dei Lemmi (1.6) e (1.7):

$$-\left(\log\left(\tilde{\Sigma}_i(t, T)\right) - \log\left(\Sigma_i(t, T)\right)\right) = \int_t^T \left(\tilde{V}_i(s) \cdot \underline{\rho} \tilde{\sigma}(s, T_d) - V_i(s) \cdot \underline{\rho} \sigma(s, T_d)\right) ds > 0$$

L'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che sia le Price-Vol dei Defaultable Coupon che le volatilità di tasso dei Defaultable ZC sono più grandi delle rispettive volatilità per i Risk Free.

Capitolo 7

Inflazione

7.1 Pricing dei Contratti Inflation-Linked

Il mercato dei prodotti legati all'inflazione sta crescendo molto velocemente. I prodotti che contribuiscono maggiormente a questa crescita sono i titoli Governativi legati all'inflazione (nel seguito Bond I-L). Emessi per la prima volta in Inghilterra nel 1981, negli ultimi 10 anni il valore delle emissioni governative di questo tipo ha avuto una rapida crescita, i cui motivi principali sono molteplici: dal lato del emittente c'è il vantaggio che mediamente hanno un rendimento più basso dei nominali, -i.e. minori interessi da pagare-, dal lato dell'investitore sono ovvi i benefici per chi vuole salvaguardare sul medio-lungo periodo, il proprio potere d'acquisto (fondi pensione). Naturalmente ci sono anche caratteristiche che li rendono meno appetibili, per approfondire questi aspetti si può consultare [Barclays 2004].

7.1.1 Zero Coupon Indexed Inflation Swap

Gli Zero Coupon Indexed-Inflation Linked Swaps (ZCIIS) sono particolari contratti swap I-L, che servono a proteggersi dall'inflazione su un determinato orizzonte temporale. Gli ZCIIS prevedono un solo Cash Flow tra le due parti a maturity T_H , quando la Parte A paga alla Parte B un tasso r_{zciis} fisso e determinato alla stipula del contratto, sul nozionale N

$$N \left((1 + r_{zciis})^H - 1 \right)$$

dove H come il numero intero di anni tra la data di Settlement e la data di Maturity dello swap, vedi [Mercurio 2005]. In cambio la Parte B paga alla Parte A un ammontare variabile dipendente dall'inflazione durante la vita del contratto:

$$N \left(\frac{CPI_{T_H}}{CPI_{base}} - 1 \right)$$

Il metodo di calcolo per l'indice di riferimento CPI_t segue le stesse regole di quello per il mercato dei Bond I-L (è una media pesata degli indici di inflazione ufficiali HICP di due mesi e di tre mesi prima) che viene mostrato nel prossimo paragrafo. La ragione di questa coerenza tra i due mercati è non solo la tendenza alla standardizzazione nel mercato dei derivati dell'inflazione ma va ricercata nel fatto che lo stesso mercato degli swap I-L è nato come naturale completamento del mercato dei Bond I-L.

Uguagliando i Cash-Flow a scadenza si ottiene la curva della Forward-inflation nella misura Risk-Neutral all'istante di valutazione generico t :

$$E[CPI_{T_M} | T_0] = CPI_{T_0} \left((1 + r_{zciis})^H \right) \quad (7.1)$$

7.1.2 Bond I-L

I Bond Inflation-Linked (I-L) sono particolari emissioni governative il cui Yield to Maturity dipende dall'inflazione.

Nel nostro studio ci soffermiamo sui Bond I-L emessi da Italia (BTP€i), Francia (OAT€i) e Germania che sono legati al Harmonized Index of Consumer Prices all items excluding tobacco (HICP) nell'area Euro pubblicato da Eurostat. Questi tre prodotti hanno le stesse caratteristiche principali ai fini del calcolo del loro valore.

Ci sono inoltre Bond I-L legati all'inflazione nazionale: in Francia OATi legati all' 'Indice des Prix à la Consommation'(IPC) pubblicato dal INSEE (Institut National de la Statistique et des Études Économiques) e in Italia i BTPi legati al 'L'Indice Nazionale dei Prezzi al Consumo per famiglie di Operai e Impiegati'(FOI) pubblicato dall'Istat (Istituto Nazionale di Statistica).

Caratteristiche Principali

A Maturity è riconosciuta al possessore una remunerazione per la perdita nel potere d'acquisto determinata dalla crescita dell'inflazione durante la vita del prodotto.

In generale questi strumenti sono pensati con una scadenza medio-lunga (superiore ai 5 anni), più nello specifico si ha:

- L'Italia emette BTP€i con scadenze a 5y , 10y, 15y e 30y.
- La Francia emette OAT€i con scadenze a 5y, 10y 15y e 30y.
- La Germania emette Bund I-L con scadenze a 5y, 10y e 30y.

Per il calcolo dei diversi periodi è usata la convenzione $\frac{act}{act}$ e la data di pagamento è posticipata di tre giorni lavorativi.

Coefficiente di Indicizzazione

I Bond I-L garantiscono un interesse effettivo in termini di reale potere d'acquisto: l'ammontare variabile delle cedole è ottenuto dalla rivalutazione del tasso coupon fissato per il Coefficiente di Indicizzazione.

Il Coefficiente di Indicizzazione è calcolato sulla base dell'indice di inflazione sottostante, HICP all items excluding tobacco nell'area Euro per BTP€i, OAT€i e Bund I-L, ma non direttamente su questo bensì su un Indice di Riferimento (nel seguito CPI_t). Questo coefficiente permette di sapere in una particolare data T la rivalutazione del valore nominale. Il Coefficiente di Indicizzazione è così calcolato:

$$CI_T = \frac{CPI_T}{CPI_{base}} \quad (7.2)$$

Il valore esatto è troncato alla sesta cifra decimale e approssimato alla quinta.

Indice di Riferimento

In una data particolare T (che corrisponde al giorno d-esimo del mese m-esimo) , l'indice di riferimento è calcolato partendo dall'indice ufficiale Eurostat di due e di tre mesi precedenti a m, attraverso questa formula:

$$CPI_T = HICP_{m-3} + \frac{d-1}{gg_m} (HICP_{m-2} - HICP_{m-3}) \quad (7.3)$$

dove

- $CPI_{d,m}$: è l'indice di riferimento al giorno d-esimo del mese m-esimo.
- $HICP_{i-3}$: è l'indice pubblicato da Eurostat relativo a tre mesi prima del i-esimo mese (il che significa che se stiamo calcolando l'indice di riferimento per il 15 Settembre dobbiamo considerare l'HICP di Giugno).
- d: è il numero del giorno in cui l'indice di riferimento è calcolato.
- gg_m : è il numero di giorni effettivi del mese m-esimo.

Revisioni dell'indice HICP

Quando, durante la vita del Bond I-L, vengono decisi cambiamenti del riferimento dell'indice HICP, questo provoca un cambiamento anche nei valori dell'indice di riferimento su cui è calcolato il valore del Bond I-L. L'aggiornamento fatto da Eurostat come è ovvio, non influisce sul Coefficiente di Indicizzazione.

Per esempio partendo dal valore del Gennaio del 2006, Eurostat ha cambiato riferimento all'indice da $Index_{1996} = 100$ a $Index_{2005} = 100$ per questa ragione i parametri di indicizzazione dei Bond I-L sono stati rivisti: a partire dal 1 Marzo 2006 l'inflazione di riferimento è espresso nella nuova base, il coefficiente moltiplicativo per passare dalla vecchia base a quella nuova è ottenuto:

$$C = \frac{HICP_{Dec2005}^{base2005}}{HICP_{Dec2005}^{base1996}} \quad (7.4)$$

Un'importante osservazione da fare è che il coefficiente moltiplicativo non è approssimato.

Pagamento a Maturity

A Maturity il Principal è ottenuto moltiplicando il valore nominale per il Coefficiente di Indicizzazione al data di Maturity. Come detto prima se questo coefficiente è minore di uno il Principal è semplicemente pari al Nominale:

$$P = \begin{cases} 100 CI_T & CI_T > 1 \\ 100 & CI_T < 1 \end{cases} \quad (7.5)$$

In realtà la possibilità che ci sia deflazione e che quindi scatti la barriera inferiore a scadenza è improbabile e quindi questa opzione, implicita nel valore dei Bond I-L, non è valutata nel pricing.

Cedole

Il valore delle cedole (che sono semestrali per i BTP€ i, annuali per OAT€ i e Bund I-L) è determinato moltiplicando il nominale rivalutato con il Coefficiente di Indicizzazione alle date di stacco delle cedole con il tasso nominale garantito dall'emissione C:

$$\begin{aligned} C_{Italia} &= \frac{C}{2} (N CI_T) \\ C_{Francia} &= C_{Germania} = C (N CI_T) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Interessi

Gli interessi sono calcolati moltiplicando l'interesse, calcolato in maniera standard, maturato sulla cedola fissa per il Coefficiente di Indicizzazione del giorno in cui vengono calcolati. Questo significa che il calcolo del rateo può essere effettuato in due passaggi: prima si calcola l'Accrual Interest (AC) sulla cedola

$$AC(t) = C \frac{\delta(T_{j-1}, t)}{\delta(T_{j-1}, T_j)} \quad (7.7)$$

In seguito il rateo viene rivalutato con l'inflazione alla data t:

$$RC_t = AC_t (N CI_t) \quad (7.8)$$

Quotazione sul Mercato

Infine vale la pena di soffermarsi sulla metodologia con la quale sono quotati dei Bond I-L sul Mercato: i prezzi sono calcolati in modo da non considerare l'inflazione maturata fino all'istante di valutazione. Mantenendo una notazione analoga a quella utilizzata per i Bond nominali, si ha per un generico Bond I-L $IP(\underline{C}^{(i)}, T_0)$ a una generica data T_0 :

$$\begin{aligned}
IP(\underline{C}^{(i)}, T_0) &= \sum_{j=\alpha+1}^w c^{(i)} \delta(T_{j-1}, T_j) \frac{E[\text{CPI}(T_j)|T_0]}{\text{CPI}(T_0)} B(T_0, T_j) + \frac{E[\text{CPI}(T_w)|T_0]}{\text{CPI}(T_0)} B(T_0, T_w) = \\
&= \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \frac{E[\text{CPI}(T_j)|T_0]}{\text{CPI}(T_0)} B(T_0, T_j)
\end{aligned}$$

Per ottenere dal valore reale il prezzo quotato $P_q(T_0)$ è necessario moltiplicare il valore calcolato meno il rateo, per il rapporto tra il CPI_{base} e il $\text{CPI}(T_0)$:

$$P_q(T_0) = \frac{\text{CPI}(T_0)}{\text{CPI}_{base}} \left(IP(\underline{C}^{(i)}, T_0) - RC_{d,m} \right)$$

7.2 Curva della Forward Inflation attraverso ZCIIS

Usando la formula (7.1), i risultati per la Forward Inflation ricavati dai dati degli ZCIIS sono mostrati in fig.(7.1). Gli ZCIIS hanno una durata base annuale, ciò significa che la curva ha un solo punto per ciascun anno in cui scade uno degli ZCIIS quotati: per ciascuno di questi anni abbiamo quindi un unico valore di inflazione legato al mese di Ottobre.

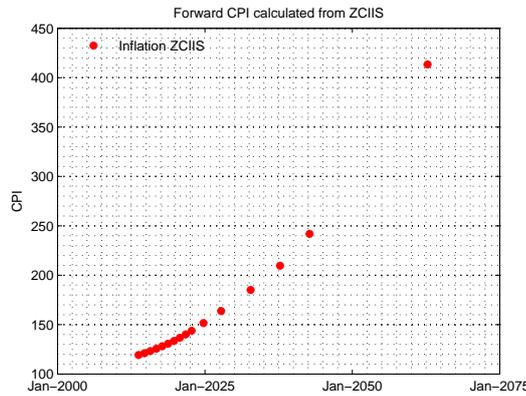


Figura 7.1: Curva della Forward CPI costruita usando i ZCIIS.

Naturalmente ci sono aggiustamenti che devono essere fatti prima di usare questa curva: il più importante riguarda la Seasonality, è troppo approssimativo usare la curva considerandola liscia, diversi mesi durante l'anno possono avere tassi d'inflazione sensibilmente differenti a causa della seasonality. Questa curva è quindi utile per determinare il solo trend della Forward Inflation nella misura Risk-Neutral per il Mercato.

7.3 Studio dei Dati Storici dell'HICP

Lo studio dei dati storici dell'inflazione si può cominciare identificando le varie quantità che la compongono; considerando queste componenti in un modello additivo abbiamo:

$$HICP_t = T_t + S_t + I_t$$

Le diverse componenti sono:

- T_t : Componente di Trend.
- S_t : Componente di Seasonality sul breve/medio periodo, tipicamente è collegato con la stagionalità durante l'anno di diversi generi di consumo come frutta e verdura o energia.
- I_t : Errore non prevedibile, di solito assunto essere un White Noise.

Una buona stima di queste componenti è fondamentale nel calcolo del valore dei Bond Inflation-Linked perché, come sottolineato nel lavoro di Belgrade e Behamou in [Belgrade e Benhamou 2004], la corretta valutazione dell'aggiustamento dovuto alla componente di Seasonality è un problema chiave per il pricing di questi contratti. Non è un metodo sufficientemente accurato considerare la curva liscia ottenuta tramite gli ZCIIS, è necessario correggerla con una buona stima della Seasonality.

Il nostro approccio è simile a quello sviluppato da Belgrade in [Belgrade 2004]: per prima cosa si estraggono dalla serie storica dell'HICP, vedi fig. (2.9), le varie componenti tramite l'algoritmo X11, successivamente si studia con particolare attenzione la Seasonality, in modo da elaborare un modello attendibile che permetta di prevederla.

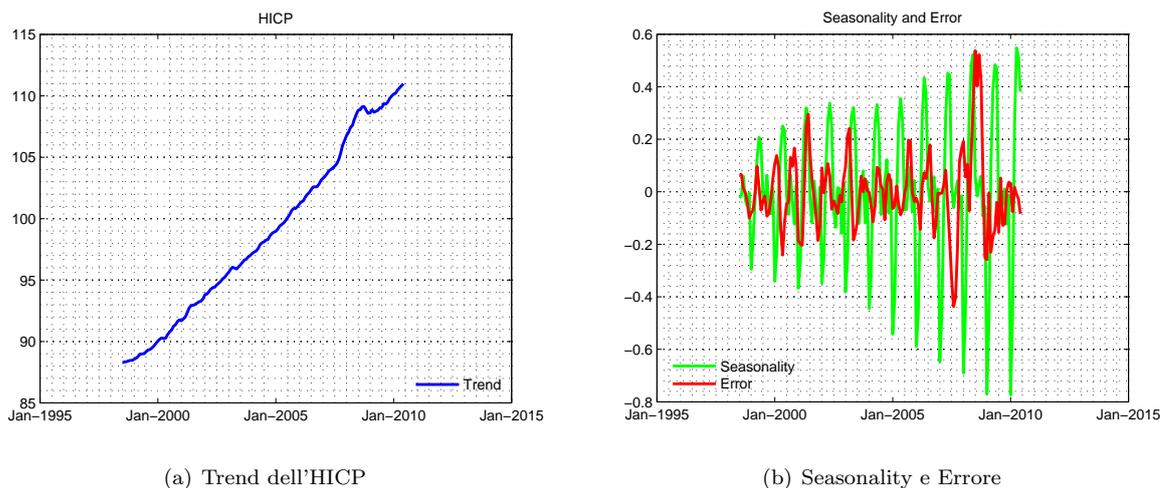


Figura 7.2: Le Componenti dell'inflazione dedotte dai dati storici (vedi fig. (2.9)), tramite l'algoritmo X11 tra Giugno-1998 e Maggio-2012.

Come possiamo osservare dalla fig. (7.2(b)) la componente di Seasonality appare avere un trend positivo nell'ampiezza delle oscillazioni, che sulle brevi scadenze appare poco rilevante, ma visto che l'orizzonte temporale dei Bond Inflation-Linked è molto lungo, non tenerne conto potrebbe portare a risultati meno accurati. Per questa ragione oltre a esporre la soluzione proposta da Belgrade, trattiamo anche due modelli che tengono conto dell'aumento dell'ampiezza delle oscillazioni, utilizzando come base il lavoro di Belgrade.

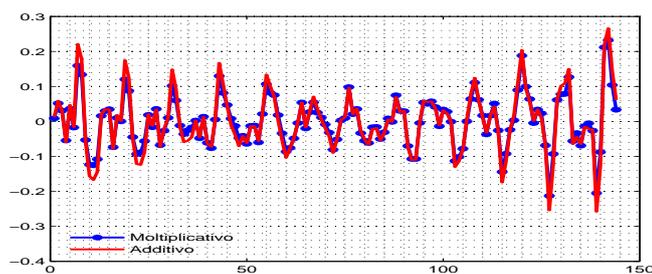


Figura 7.3: Errori sul Fit dei dati storici per la Seasonality.

Oltre al modello additivo c'è la possibilità di usare un modello Moltiplicativo del tipo:

$$HICP_t = T_t \cdot S_t \cdot I_t$$

L'analisi che viene fatta con questa impostazione è assolutamente analoga al modello additivo, infatti basta solo compiere una trasformazione logaritmica per passare da un modello all'altro. Le conclusioni per i dati studiati con i due modelli diversi sono equivalenti sia per quanto riguarda l'estrazione che per lo studio delle diverse componenti. La differenza tra i due approcci seppur minime ci sono: il modello moltiplicativo (con

termini logaritmici) limita leggermente meglio l'eteroschedasticità dei dati, cioè la tendenza dell'errore ad avere volatilità diversa a tempi diversi, vedi figura (7.3).

7.3.1 Algoritmo X11: estrazione del Trend e della Seasonality dai dati

Il primo passo per poter elaborare un modello accurato di Seasonality è riuscire a estrarre dai dati questa componente più precisamente possibile, in modo da poterla studiare in modo accurato.

Un algoritmo efficace per estrarre la Seasonality dai dati è l'X11, i cui passi principali sono:

1. Per prima cosa una stima della componente di Trend T_t dei dati:

$$T_t = M[(HICP_t)] = \sum_{i=-6}^{+6} \pi_i \cdot Z^i[HICP_t] \quad (7.9)$$

dove $M(\cdot)$ è l'Operatore di Media Mobile e Z l'Operatore Ritardo:

$$Z^i[X_t] = X_{t+1} \quad \pi_i = \begin{cases} \frac{1}{12} & i = -5, \dots, 5 \\ \frac{1}{24} & i = -6; 6 \end{cases} \quad (7.10)$$

I pesi della Media Mobile sono scelti in modo che il primo e l'ultimo elemento considerati nella somma, che si riferiscono entrambi allo stesso mese, ma a un anno di differenza, pesino la metà degli altri mesi considerati.

2. Stima della Seasonality e del Rumore:

$$y_t = HICP_t - T_t \quad (7.11)$$

3. Identificare la Seasonality S_t e separarla dal Rumore I_t , tramite l'applicazione di una seconda media mobile così fatta:

$$S_t = \frac{1}{9}y_{t-24} + \frac{2}{9}y_{t-12} + \frac{1}{3}y_t + \frac{2}{9}y_{t+12} + \frac{1}{9}y_{t+24} \quad (7.12)$$

$$I_t = y_t - S_t \quad (7.13)$$

4. Ricalcolare la componente di trend:

$$\widehat{HICP}_t = HICP_t - S_t \quad (7.14)$$

7.3.2 Stima del Periodo della Seasonality

Il periodo principale di oscillazione della componente Seasonality è ricavabile dalla teoria dei segnali: senza addentrarci in dettaglio, a ogni segnale (o serie storica) può essere associato uno spettro che è una funzione positiva delle frequenze associate al processo che si sta studiando. Intuitivamente lo spettro decompone il processo stocastico in base alla sua intensità alle varie frequenze, individuando la frequenza con lo spettro maggiore si considera la frequenza più importante del segnale, cioè quella che ne influenza maggiormente le caratteristiche.

L'analisi spettrale ci fornisce un veloce metodo per stabilire il periodo principale legato alla componente di Seasonality.

7.3.3 Analisi del Modello per la Seasonality

Belgrade nell'articolo [Belgrade 2004], propone di modellare l'inflazione dopo aver individuato il periodo T , con T variabili Dummies:

$$S_t = \gamma_0 + \sum_{i=1}^T \gamma_i \mathbb{1}_{(t \bmod T=i)} \quad (7.15)$$

Le Dummies sono delle variabili che valgono 1 solo se il mese della data t è il mese dell'anno a loro associato, altrimenti il loro valore è nullo (a livello matematico sono delle Delta di Kronecker).

Questo modello non può essere stimato con il metodo Ordinary Least Squares (OLS), a causa della palese Collinearità delle variabili: la Collinearità è un fenomeno che avviene quando la matrice dei dati che si utilizza nella regressione lineare non ha tutte le colonne linearmente indipendenti, intuitivamente è come avere due colonne di dati che danno la stessa identica informazione. Come possiamo vedere dalla formula (7.15), il modello proposto da Belgrade ha un termine noto costante, in più per ogni dato da regredire almeno una delle variabili dummies attive: la colonna dei termini noti non è che la somma algebrica delle altre (questo fenomeno è noto come "Dummies Trap").

Questo inconveniente in realtà è molto semplice da risolvere, eliminando una qualunque delle variabili Dummies si può tranquillamente operare la regressione; l'unica correzione va fatta sull'interpretazione dei coefficienti γ_i : prima γ_0 era uno shock medio presente durante tutto l'anno e i γ_i erano le variazioni mensili rispetto a questo shock medio, ora γ_0 è lo shock associato a quel particolare mese a cui abbiamo tolto la variabile dummy, e i restanti γ_i non sono altro che le differenze tra lo shock nel mese i -esimo e quello del mese di riferimento. Per una descrizione dettagliata di questo problema e delle possibili soluzioni si può consultare [Greene 2008].

Nel suo articolo Belgrade propone anche una soluzione che utilizza tutte le variabili dummies, definendo:

$$N = \left\lfloor \frac{M}{T} \right\rfloor \quad M : \text{Numerosità del Campione}$$

$$\bar{S}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_t \mathbb{1}_{(t \bmod T=i)}$$

\bar{S}_i è quindi la media sull' i -esimo periodo con $i \in 1, \dots, T$; allora una possibile soluzione per i coefficienti del modello (7.15), sono:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_i &= \bar{S}_i \\ \hat{\gamma}_0 &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \hat{\delta}_i \\ \hat{\gamma}_i &= \hat{\delta}_i - \hat{\gamma}_0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

I risultati della soluzione proposta precedentemente utilizzando OLS sono numericamente uguali a quelli di quest'ultima: solo i coefficienti, il numero di parametri e di conseguenza la loro interpretazione cambiano tra i due modelli.

Usando come base il modello proposto da Belgrade, si è deciso di studiarne alcuni altri per avere una visione più ampia di come il numero dei parametri influisca sulla significatività del modello. I modelli proposti sono tre: gli ultimi due sono pensati per tenere conto anche il trend di crescita dell'ampiezza delle oscillazioni, mentre per primo è trattato il modello più semplice possibile con solo due parametri:

1. Conoscendo il periodo di oscillazione principale del fenomeno la cosa più semplice da fare è usare una sinusoide per modellarlo:

$$S_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cos\left(\frac{2 \pi t}{T}\right)$$

Si è scelto solo il coseno perché il modello congiunto con il seno appare significativo nel complesso, ma il coefficiente del seno è molto poco significativo. Questo risultato va sottolineato perché implica che la fase del modello congiunto con seno e coseno, che si può scrivere in questo modo:

$$\gamma_0 + \gamma_1 \cos\left(\frac{2 \pi t}{T}\right) + \gamma_2 \sin\left(\frac{2 \pi t}{T}\right) = \gamma_1 \cos\left(\frac{2 \pi t}{T} + \gamma_3\right)$$

è nulla, ovvero $\gamma_3 = 0$. Questa conclusione è in linea con i dati che evidenziano come l'effetto della seasonality sia massimo nei primi mesi dell'anno: la sinusoidale che modella la seasonality non può che partire da un valore diverso da 0, annullando il termine del seno.

2. Si può tenere conto di un trend di crescita dell'ampiezza delle oscillazioni comune a tutti i mesi aggiungendo un parametro al modello di Belgrade:

$$S_t = \gamma_0 + \sum_{i=1}^T \gamma_i \mathbb{1}_{(t \bmod T=i)} + \alpha_1 t \quad (7.17)$$

3. Il modo più complesso per tenere conto del trend dell'ampiezza delle oscillazioni è pensare che ogni mese abbia un suo trend e quindi aggiungere al modello di Belgrade altri T parametri:

$$S_t = \gamma_0 + \sum_{i=1}^T \gamma_i \mathbb{1}_{(t \bmod T=i)} + \sum_{i=1}^T \alpha_i \cdot t \cdot \mathbb{1}_{(t \bmod T=i)} \quad (7.18)$$

La discussione viene fatta sul logaritmo della Seasonality secondo il modello Moltiplicativo, ma i risultati sono totalmente analoghi per S_t il modello Additivo. Dall'immagine fig (7.4), si possono fare subito due osservazioni importanti: per prima cosa il modello con unico trend e quello proposto da Belgrade sembrano sostanzialmente uguali, inoltre si può osservare come il modello che fitta meglio i dati sia quello Multi Trend.

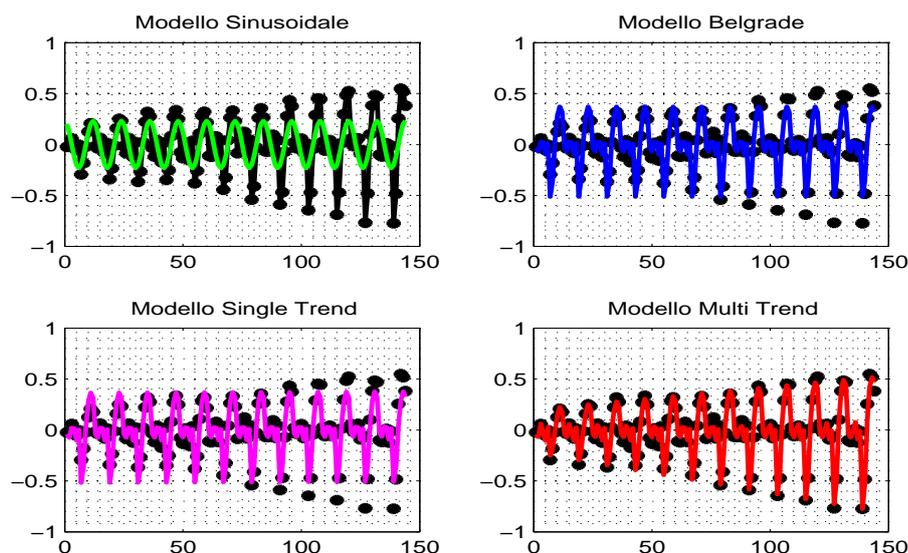


Figura 7.4: Fit dei Modelli presentati sui dati storici.

L'ottimo fit del modello Multi Trend potrebbe essere dovuto all'elevato numero di parametri che esso usa, abbassando di molto i gradi di libertà del problema; per questo si riportano i valori delle statistiche R^2 adjusted, e il test-F (per descrizioni vedi Appendice D) per la significatività del modello :

	Sinusoidale	Belgrade	Single Trend	Multi Trend
R^2	0.4098	0.9205	0.9207	0.9718
GdL	142	132	131	120
R^2 adj	0.4056	0.9139	0.9135	0.9664
Test-F				
f-test	98.5884	138.9603	126.7815	179.5622

p-val 0 0 0 0

Tabella 7.1: Risultati statistici ottenuti sui vari modelli per stimare la Seasonality.

Dai risultati generali sembrerebbe che tutti i modelli siano significativi: la penalizzazione per il numero di parametri inflitta dall'aggiustamento del valore R^2 adj è limitata per tutti i modelli e i valori dei test-F rifiutano tutti l'ipotesi nulla \mathcal{H}_0 . Per testare invece la significatività dei singoli coefficienti di ciascun modello occorre usare i test-t, analizziamone i risultati modello per modello:

- Per il modello Sinusoidale il parametro costante appare poco significativo (p-val : 0.9900), mentre il valore del parametro che moltiplica il coseno è molto significativo (p-val : 0).
- I valori di tutti i coefficienti del modello di Belgrade appaiono molto significativi: l'ipotesi nulla viene rigettata per tutti con p-value inferiori a 10^{-5} .
- I p-value dei test-t per questo modello evidenziano la totale similitudine con il precedente infatti per i coefficienti delle Dummies non può che essere rigettata l'ipotesi nulla; il coefficiente del trend invece è poco significativo (p-value : 0.5555), quindi questo modello coincide con il precedente.
- In questo ultimo modello ci sono diversi parametri poco significativi, utilizzando un livello di significatività del 2% si può dire che il coefficiente della prima Dummy (quella riferita a Febbraio, visto che la dummy Gennaio è stata tolta per evitare la Dummy Trap) è poco significativa (p-val : 0.0539). Anche alcuni dei coefficienti di trend hanno un p-value troppo alto per poter rifiutare l'ipotesi nulla: i coefficienti di Marzo (p-val : 0.0353), Luglio (p-val : 0.6014), Agosto (p-val : 0.8392), Settembre (p-val : 0.0680), Novembre (p-val : 0.3799) e Dicembre (p-val : 0.4429) possono quindi essere tolti dal modello. Tolle le colonne relative a questi parametri e rifatta la regressione, il risultato sembra migliorare: il test-F (test-f : 244.9430, p-val : 0) rimane molto significativo e i test-t sui singoli parametri rifiutano tutti l'ipotesi nulla \mathcal{H}_0 con un livello di significatività del 2%.

Per simulare la Seasonality futura sembrano essere più ragionevoli due modelli: il modello di Belgrade o il modello che tiene conto solo di alcuni trend mensili, ovvero il Multi Trend con le correzioni riportate nell'analisi dei test-t. L'incremento di ampiezza della Seasonality nei dati storici è chiaro, per questo motivo vista la lunghezza dell'orizzonte temporale in esame è più logico, a parità di significatività del modello, tenere conto del modello che incorpora i trend di crescita per alcuni mesi.

7.4 Curva della Forward Inflation

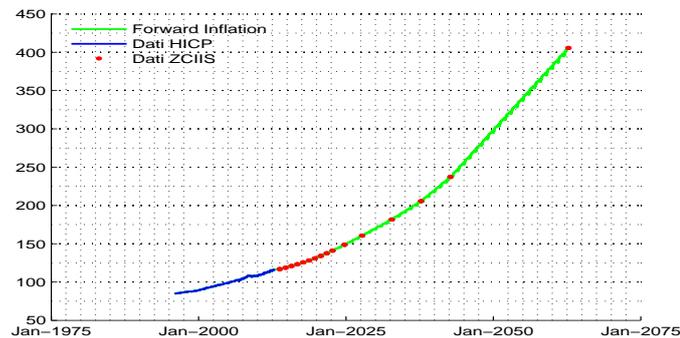


Figura 7.5: Dati Completi sulla Curva dell'Inflazione: i dati Storici (Gen-1996 al Ott-2012) e i dati della Forward Inflation (Nov-2012 al Ott-2062) nell'Ottobre 2012

L'unione del trend di mercato e del modello della Seasonality, calibrato sui dati storici e simulato per i dati futuri, ci permette di avere una valutazione attendibile della curva dell'inflazione Forward, con le giuste correzioni mensili rispetto ai valori allineati forniti dalla sola Curva liscia estratta dai tassi degli ZCIIIS.

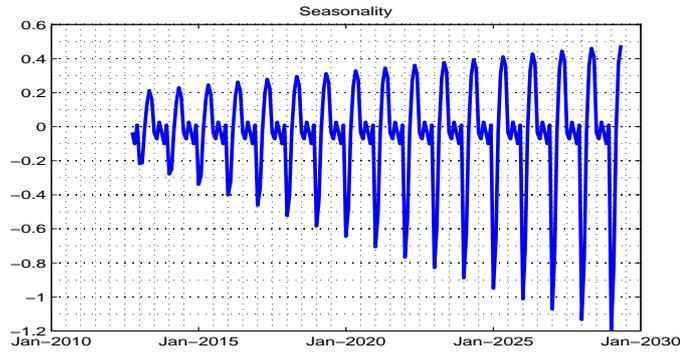


Figura 7.6: Seasonality Futura calcolata con il modello Multi Trend

La fig. (7.5) riporta tutti i dati a disposizione per il pricing dei Bond I-L, anche i dati precedenti alla data di valutazione sono fondamentali perché per ogni Bond va calcolato correttamente l'indice di riferimento base, che per tutte le emissioni sul mercato è ricavabile solo dai dati storici.

7.5 Risultati Numerici

7.5.1 Pricing Bond I-L

La prima cosa che possiamo fare è controllare la correttezza delle formule di pricing introdotte per i Bond I-L e della curva di Forward Inflation ricostruita nelle sezioni precedenti, tramite il confronto diretto con i prezzi di Mercato. Di seguito sono riportati i valori dei prezzi quotati ottenuti in funzione delle diverse Maturity dei Bond I-L, misurate in anni, e l'errore rispetto ai valori di mercato per i tre paesi in esame:

	Maturity	Prezzo Calcolato	Prezzo Quotato	Errore
Germania				
	0.5260	114.8952	114.1323	0.67%
	3.5288	125.8653	125.3443	0.41%
	7.5315	127.8017	127.5868	0.17%
	10.5315	105.8584	106.8473	0.93%
Italia (BTPi€)				
	1.9452	124.4611	125.3042	0.68%
	3.9479	106.5443	105.3284	1.15%
	4.9479	115.8451	114.5996	1.08%
	6.9479	109.1467	106.9227	2.06%
	8.9507	100.3747	97.1687	3.25%
	10.9507	106.5398	104.6448	1.79%
	13.9534	98.7985	96.8814	1.96%
	22.9589	99.7953	93.7487	6.25%
	28.9644	91.9651	84.5182	8.44%
Francia(OATi€)				
	2.8027	129.2378	129.7328	0.38%
	5.8055	106.5388	107.0200	0.45%
	7.8082	143.5951	144.8276	0.85%
	9.8082	114.7373	117.0946	2.03%
	14.8110	122.9884	125.1678	1.76%
	19.8164	175.8152	181.5288	3.20%
	27.8219	138.5349	146.7523	5.76%

Tabella 7.2: Risultati numerici per il pricing dei Bond I-L.

Considerando paese per paese la grandezza dell'errore sembra dipendere dalla distanza temporale della Maturity; a livello di confronto fra vari pesi si può invece osservare come i titoli tedeschi siano quelli con gli errori più bassi, mentre per la Francia e l'Italia gli errori sembrano più alti.

7.5.2 Break-even Inflation

Una volta appurato che le formule di pricing sono sostanzialmente corrette, si può procedere alla valutazione della Break Even Inflation e del Real Yield del Bond I-L. Nel caso dei Bond nominali possiamo infatti definire il Nominal Yield $Y_N(t)$, già introdotto in precedenza:

$$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t) = \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \frac{1}{(1 + Y_N(t))^{\delta(t, T_j)}}$$

Questo tasso è detto Nominale perché in realtà il tasso di remunerazione reale percepito dall'investitore deve essere scontato per l'inflazione sul periodo di vita del Bond. I Bond I-L garantiscono al contrario un tasso Yield Reale $Y_R(t)$ proprio perché sono rivalutati in base all'inflazione durante la loro vita. Per i Bond I-L si può scrivere definendo $Y_R(t)$ il tasso Yield reale alla data t :

$$IP(\underline{C}^{(i)}, t) = \sum_{j=\alpha+1}^w C_j^{(i)} \frac{1}{(1 + Y_R(t))^{\delta(t, T_j)}}$$

La relazione che lega le due quantità è l'Equazione di Fisher:

$$(1 + Y_N(t)) = (1 + Y_R(t))(1 + \Lambda(t))$$

Questa relazione ci permette di definire:

Definizione 7.1. *La Break Even Inflation (nel seguito BEI) è definita come il tasso d'Inflazione che si ottiene dal rapporto tra il tasso Yield dei Bond Nominali e il tasso Yield Reale associato ai Bond I-L, secondo l'Equazione di Fisher:*

$$\Lambda(t) = \frac{(1 + Y_N(t))}{(1 + Y_R(t))} - 1$$

Spesso l'equazione di Fisher, soprattutto se i tassi Nominali e Reali sono bassi, viene linearizzata in questo modo:

$$Y_N(t) \approx Y_R(t) + \Lambda(t)$$

Si può quindi trovare la definizione di BEI come la semplice differenza tra il tasso Nominale e il tasso Reale, e la differenza tra le due metodologie è trascurabile per tassi bassi.

Nella nostra analisi si possono utilizzare gli Invoice Price per ricavarne prima il tasso Yield Reale e poi la BEI dei paesi in esame:

Germania	Time to Maturity	Nominal Yield	Real Yield	Break Even Inflation
OBLI 2 1/4 04/15/13	0,5260	0,061370655%	-0,834290504%	0,903196441%
DBRI 1 1/2 04/15/16	3,5287	0,239522894%	-1,129009128%	1,384159306%
DBRI 1 3/4 04/15/20	7,5315	1,14341238%	-0,565476716%	1,718607421%
DBRI 0.1 04/15/23	10,5315	1,694302724%	-0,288110316%	1,988141079%
<hr/>				
Italia (BTP€i)				
BTPS 2.15 09/15/14	1,9452	2,272798513%	0,97723043%	1,293424055%
BTPS 2.1 09/15/16	3,9479	3,399615165%	1,79221344%	1,599470742%

BTPS 2.1 09/15/17	4,94794	3,86592016%	2,15908742%	1,695731982%
BTPS 2.35 09/15/19	6,9479	4,356124123%	2,51826328%	1,823243139%
BTPS 2.1 09/15/21	8,9506	4,897689708%	2,876055539%	2,002904511%
BTPS 2.6 09/15/23	10,9506	5,541320415%	3,322835267%	2,194134518%
BTPS 3.1 09/15/26	13,9534	6,003115503%	3,594185665%	2,380403034%
BTPS 2.35 09/15/35	22,9589	5,825525001%	3,399734855%	2,399467632%
BTPS 2.55 09/15/41	28,9643	6,105394506%	3,339265794%	2,739208523%
<hr/>				
Francia (OAT€i)				
FRTR 1.6 07/25/15	2,8027	0,332299543%	-1,203932226%	1,554952341%
FRTR 0 1/4 07/25/18	5,8054	1,293371426%	-0,504855156%	1,807351087%
FRTR 2 1/4 07/25/20	7,8082	1,894649361%	-0,0141913%	1,909111588%
FRTR 1.1 07/25/22	9,8082	2,436983084%	0,374979958%	2,054299913%
FRTR 1.85 07/25/27	14,8109	2,962937133%	0,660257995%	2,28757524%
FRTR 3.15 07/25/32	19,8164	3,279595102%	0,847941414%	2,411208056%
FRTR 1.8 07/25/40	27,8219	3,421305928%	0,934537828%	2,463743485%

Tabella 7.3: Risultati numerici per il tassi e le BreakEven Inflation dei Bond I-L.

Una prima osservazione sui risultati in tabella (7.3), è che i tassi Yield reali garantiti dai Bond I-L possono essere anche negativi: tutti i valori per i titoli tedeschi e i primi per i titoli francesi mostrano un segno negativo. In termini reali al netto dell'inflazione i Bond I-L possono avere rendimenti negativi, in termini nominali invece è chiaro che la remunerazione per l'inflazione aumenta il loro rendimento, in particolare per i titoli tedeschi il rendimento nominale sarà vicino a 0 come per i Bond nominali.

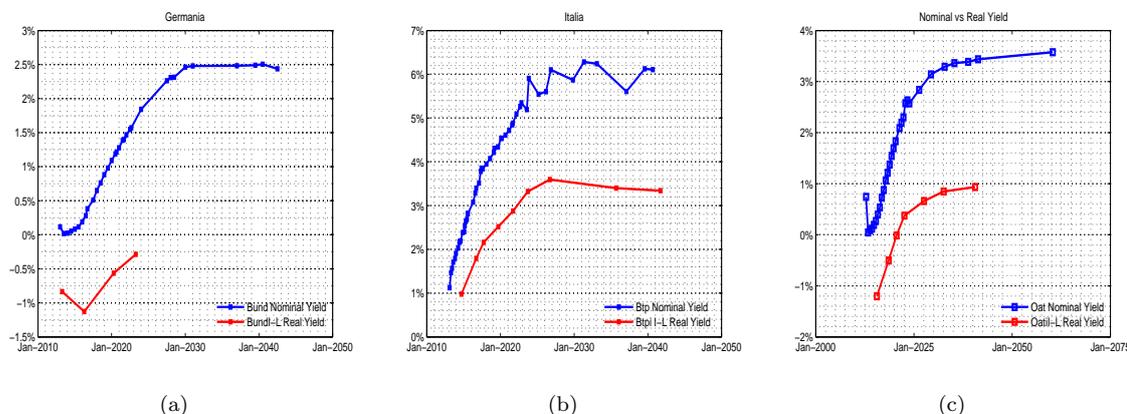


Figura 7.7: Tassi nominali e reali a confronto per i tre paesi in esame al 5-Ott-2012.

In secondo luogo si può osservare come i rendimenti reali tendano a crescere con la distanza dalla data di Maturity esattamente come i rendimenti nominali. Particolarmente significativo è confrontare le curve dei tassi nominali con quelle dei tassi reali: come si può vedere in figura (7.7), le due curve di tasso sono molto simili formalmente ma traslate l'una rispetto all'altra. La differenza tra queste due curve secondo l'Equazione approssimata di Fisher, vedi (7.5.2), è la BEI.

Nei nostri calcoli la BEI è calcolata con la formula esatta (7.1). La differenza tra le due formule per calcolare la BEI è minima per i tassi tedeschi e francesi; per i tassi italiani tuttavia le cedole sono pagate semestralmente e quindi la formula (7.1) diventa:

$$\Lambda(t) = \frac{\left(1 + \frac{Y_N(t)}{2}\right)^2}{\left(1 + \frac{Y_R(t)}{2}\right)^2} - 1$$

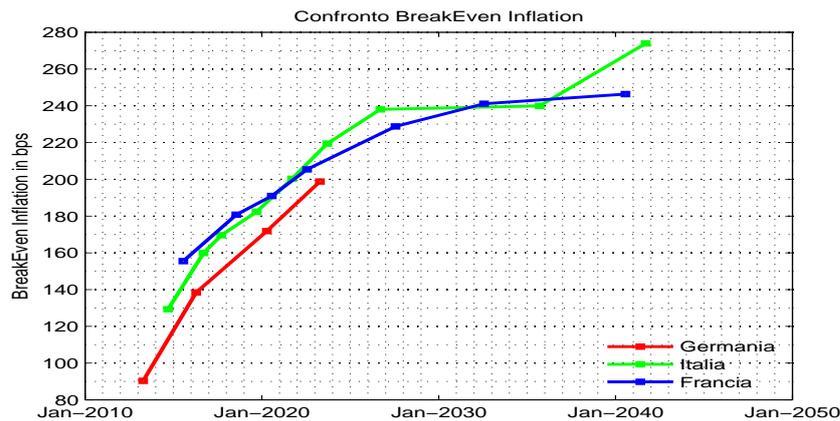


Figura 7.8: Break Even Inflation di Germania, Francia e Italia in punti base al 5-Ottobre-2012

I risultati, riportati in tabella (7.3) e in figura (7.8), mostrano una sostanziale coerenza tra le BEI dei vari paesi; l'unica osservazione da fare è che per i titoli Italiani questa grandezza sembra oscillare ma il problema è dovuto probabilmente ai rendimenti dei titoli nominali che sono stati presi in un momento di grande volatilità sul mercato.

E' utile ricordare che la BEI è una quantità puramente teorica nata per confrontare i rendimenti dei titoli nominali e quelli inflation-linked. Per fare in modo che i rendimenti nominali dei Bond I-L pareggino i rendimenti dei titoli nominali occorrerebbero dei tassi di inflazione pari a quelli ricavati che si attestano intorno alle stime ragionevoli di Inflazione futura nell'area Euro (circa 2%). La logica conseguenza è che i titoli Inflation-Linked garantiscono rendimenti simili ai rendimenti dei Bond nominali.

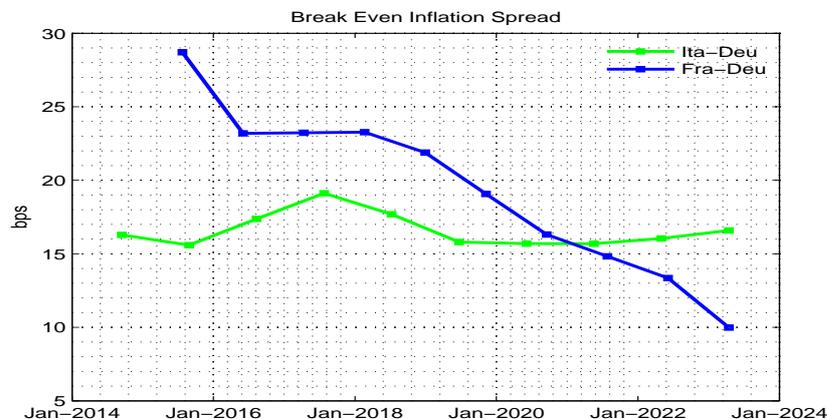


Figura 7.9: Spread in bps tra le Break Even Inflation preso il valore per i titoli tedeschi come riferimento, 5-Ottobre-2012

Infine le emissioni governative dei diversi paesi possono essere confrontate utilizzando la BEI: si può ricavare uno spread tra le BEI dei diversi paesi usando la Germania come riferimento, vedi fig. (7.9).

Italia	Distanza temporale	Spread (in basis point)
	1.9452	16.2911
	2.8992	15.5889
	3.8533	17.3730
	4.8073	19.1207
	5.7613	17.6889
	6.7154	15.8000
	7.6694	15.6967

	8.6234	15.6836
	9.5775	16.0409
	10.5315	16.5914
Francia		
	2.8027	28.7084
	3.6615	23.1887
	4.5202	23.2317
	5.3790	23.2748
	6.2377	21.8807
	7.0965	19.0688
	7.9553	16.3107
	8.8140	14.8293
	9.6728	13.3479
	10.5315	9.9885

Tabella 7.4: *Spread tra le Break Even Inflation di Italia e Francia rispetto a quella Tedesca.*

Le considerazioni possibili per spiegare questo spread possono essere varie: non solo il rischio di credito ma anche l'incertezza sulla reale inflazione che verrà misurata in futuro.

Capitolo 8

Conclusioni

Il nostro lavoro ha raggiunto diversi risultati importanti e molti di questi originali:

- E' stato introdotto un nuovo modello Multi Curve per la descrizione delle emissioni dei diversi paesi dell'area Euro sulla base del modello HJM in ambito Single Curve. Questo nuovo modello consente di prezzare in modo semplice tutti i principali derivati di questo mercato: Future, Bond Option e Bond Future Option.

Prendendo spunto dal lavoro Giesecke, l'idea sviluppata è stata di modellare i Defaultable ZC emessi dagli stati sovrani come strumenti con un recovery nullo, e quindi come prodotto dei corrispondenti ZC emessi da soggetti Risk Free moltiplicati per un termine esponenziale funzione della rischiosità del paese emittente. L'esponente di questo termine può essere visto come lo spread aggiuntivo sul tasso yield che il mercato fa pagare agli stati che hanno probabilità di Default non nulla, quindi funzione del livello di rischio di un paese rispetto a quello di un paese di riferimento Risk-Free.

Un modello così elaborato ha diversi vantaggi: le quantità su cui si basa hanno una facile interpretazione sul mercato e di conseguenza sono facili da calibrare, inoltre il modello formalizza un approccio regolarmente utilizzato nella pratica. Negli ultimi anni durante la crisi dei debiti sovrani in particolare nel mercato dei governativi europeo, hanno assunto sempre più importanza due quantità: il tasso pagato dai titoli governativi tedeschi normalmente preso come paese di riferimento Risk-Free e il conseguente spread di tasso che gli altri paesi devono pagare in più della Germania. Questo modello permette quindi la calibrazione diretta su grandezze di mercato: utilizzando i titoli emessi da paesi ritenuti Risk-Free (Germania) confrontandoli con emissioni di paesi invece dove lo spread di tasso dovuto alla rischiosità non è trascurabile (Italia, Francia).

Il modello ha il pregio di non aver bisogno di fare assunzioni, che spesso si rivelano sbagliate, sulle diverse quantità che servirebbero a calibrare un approccio classico basato su Recovery e Survival Probability, in più i default di stati sovrani sono eventi catastrofici ma rari per ciascun paese e la maggior parte delle volte questi eventi hanno caratteristiche molto particolari che rendono i dati ad essi associati poco aggregabili per un'analisi generale.

Una caratteristica importante di questo modello è che il suo utilizzo è affine a quello del modello Single Curve classico basato sulla convenzione che gli stati sovrani fossero emittenti privi di rischio: come abbiamo visto le formule derivate da questo modello sono del tutto analoghe a quelle del modello Single curve a parte alcuni coefficienti dipendenti da quantità funzione del rischio del particolare paese. Un'ultima caratteristica importante di questo modello è che costituisce la base teorica su cui poi elaborare la costruzione dell'estensione del Bond Market Model in ambito Multi Curve sui Bond emessi da paesi non Risk-Free, che costituisce il modello centrale della nostra analisi.

- Un risultato fondamentale della nostra analisi è la generalizzazione del BMM in ambito Multi dimensionale e Single Curve per una efficiente e accurata valutazione dei contratti derivati trattati nel mercato dei Governativi Europei: le ipotesi che permettono di valutare le volatilità dei Bond all'interno del Basket e la successiva valutazione dei derivati con esso effettuata.

In ambito Single Curve questo modello era già stato applicato alla valutazione delle Bond Option, vedi [Baviera 2005], ma non era mai stato applicato alla valutazione dei Future e delle Future Option per cui servivano delle ipotesi aggiuntive per la valutazione dell'opzione Cheapest to Deliver nel Basket. Le ipotesi

(vedi (1.1) e (1.2)) sono giustificate dal punto di vista teorico e sono avvalorate dai risultati numerici ottenuti.

La prima ipotesi che riguarda l'unicità del driver stocastico dei tassi Yield associati ai Coupon Bond con Maturity compresa in un breve periodo è stata ampiamente discussa ed è perfettamente logica nel framework introdotto nella nostra analisi. La seconda ipotesi, che si riassume nel postulare l'esistenza di una relazione che lega la volatilità dei tassi Yield alla Price-Vol dei diversi Bond nel Basket, è abbastanza ovvia. Il passo successivo di supporre questo legame costante è conseguenza delle diverse grandezze considerate nella relazione: il tasso Yield e la Macaulay Duration. Il tasso Yield ricavabile dalle diverse emissioni di uno stato in funzione della Maturity è una curva molto regolare: i tassi Yield di due emissioni con Maturity molto vicine sono molto simili e questo legame rimane costante nel tempo. Un discorso del tutto analogo può essere fatto per la Macaulay Duration: dal punto di vista finanziario è difficile che si verifichino grossi cambiamenti tra le Duration di due Bond con Maturity vicina.

Il GBMM offre molti vantaggi: per prima cosa le quantità che compaiono nel modello Single Curve hanno tutte un'interpretazione finanziaria immediata, per come è formulato il modello potrebbe essere applicato anche per lo studio diretto sui prezzi dei Bond osservati sul Mercato.

Le formule ottenute per le Future Option con l'utilizzo di questo modello, hanno il pregio di essere molto facili da ottenere seguendo passi standard per un sottostante con dinamica Log-Normale, inoltre queste formule permettono una calibrazione numerica efficace e accurata delle Price-Vol dei Bond nel Basket tramite l'approssimazione di utilizzare come unico Bond nel Basket il Cheapest to Deliver attuale e successivamente le ipotesi del GBMM.

Anche per i Future il GBMM è molto efficace nonostante l'approssimazione fatta sui Convexity Adjustment. La formula numerica, ponendo i Convexity Adjustment pari a 1, sopravvaluta leggermente il prezzo di mercato del Future ma è sostanzialmente corretta; per questa formula abbiamo inoltre indicato un metodo percorribile per lo studio di questi coefficienti: si possono ricavare le stime di questi coefficienti con procedimento di ottimizzazione dai prezzi di mercato dei Future ponendo al primo passo tutti i coefficienti unitari per ottenere dalla formula teorica il coefficiente del Cheapest to Deliver e successivamente gli altri dalle ipotesi del GBMM. Reinserendo i risultati nella formula del Future e iterando la procedura si può arrivare a una stima corretta di questi coefficienti. Il risultato numerico da noi ottenuto si ferma al primo passo di questo algoritmo ma è già in linea con le considerazioni fatte a priori su queste quantità.

Infine questo modello, grazie alla dinamica Log-Normale dei Coupon Bond, semplifica anche la valutazione dell'opzione Cheapest to Deliver, rendendo la valutazione dei valori finali dei Coupon Bond un confronto tra diverse esponenziali funzione di un'unica variabile aleatoria normale pesata per coefficienti che variano da un Bond all'altro.

- Un terzo risultato fondamentale e originale di questo lavoro è stato di estendere il modello BMM all'ambito Multi Curve: non considerare più solo i Risk Free Bond e i loro derivati, ma utilizzando come base teorica il modello Multi Curve e multi dimensionale HJM e seguendo passi analoghi a quelli compiuti in [Baviera 2005], abbiamo elaborato un modello analogo al BMM in ambito Multi Curve: si è ottenuto direttamente la dinamica del prezzo di un Defaultable Bond come una variabile Log-Normale.

L'interpretazione del modello è molto semplice: i Defaultable Bond hanno la stessa dinamica dei Risk-free utilizzando una volatilità diversa e moltiplicando la dinamica per un termine che tenga conto del differenziale in termini di tasso Yield pagato da un paese Defaultable rispetto a uno Risk-Free. Quest'interpretazione è ottima perché è molto semplice e permette di collegare le grandezze che compaiono nel modello a quantità visibili sul mercato e pertanto studiabili sulla base dei prezzi di mercato.

Il nuovo modello Multi Curve è stato sviluppato con le stesse ipotesi fondamentali fatte per il precedente modello Single Curve e non c'è nessun motivo per pensare che esse non valgano in un contesto Multi Curve. L'ipotesi base del BMM di usare la *Freezing Technique* per fissare la volatilità facendola diventare deterministica si basa esclusivamente sulla grandezza dei flussi di cassa pagati nel tempo da un Coupon Bond, e questa considerazione non cambia in ambito Multi Curve.

Riguardo alle due ipotesi che generalizzano il Bond Market Model, anch'esse sembra logico che continuino a valere in ambito Multi Curve: è logico pensare che il legame tra tasso Yield della singola emissione e tasso Yield generale pagato dal paese sulle diverse scadenze sia presente anche in ambito Multi Curve. La seconda ipotesi su cui si basa la generalizzazione invece quantifica solo una relazione tra la Yield-Vol e la

Price-Vol dello stesso Bond e possiamo assumere senza nessuna perdita di accuratezza che valga anche in un contesto Multi Curve.

In questo contesto abbiamo un unico risultato numerico, ottenuto con una stima indiretta della Price-Vol attraverso le volatilità dei Forward Coupon Bond sul periodo in esame tramite i dati storici, tuttavia il risultato ottenuto è sostanzialmente corretto. Questo modello è più difficile da calibrare del precedente: non esistono opzioni quotate sui Future scritti sui Bond non tedeschi quindi assunti come Defaultable nella nostra analisi, il che rende più difficile la valutazione della volatilità dei Bond nel Basket in base a dati di mercato; come abbiamo visto questo inconveniente può essere risolto ricorrendo ad un'analisi dei dati storici e alla volatilità dei Forward ZC, sommati poi opportunamente per i coefficienti $\gamma_j^{(i)}$. Anche in questo caso come in ambito Single Curve non abbiamo considerato i Convexity Adjustment nel pricing, abbiamo comunque ottenuto un risultato soddisfacente che ci permette di dire che i Convexity Adjustment nel caso Multi Curve sono più grandi del caso Single Curve, in linea con la teoria.

Il modello è coerente con il modello Single Curve che da risultati ottimi e il risultato accurato che abbiamo ottenuto per il Future sulle emissioni italiane a scadenza a tre anni conferma la bontà del modello elaborato in ambito Multi Curve.

- Un risultato importante è aver mostrato la sostanziale inadeguatezza di un modello unidimensionale per l'analisi del mercato dei derivati sulle emissioni Governative. Attraverso la calibrazione su dati di mercato della relazione tra i parametri del modello di Hull-White nel contesto unidimensionale con le formule dimostrate, abbiamo osservato come le volatilità di tasso sui diversi contratti siano ampiamente differenti tra loro. I tre contratti prezzati mostravano infatti, per tutti i valori del parametro fissato considerati, una volatilità significativamente diversa.

Il risultato raggiunto nella nostra analisi del modello unidimensionale evidenzia formalmente come per la valutazione dei derivati in esame con un unico driver stocastico, servirebbero volatilità di tasso diverse a seconda della Maturity dei Bond sottostanti al derivato in esame, quindi a seconda delle diverse scadenze della curva dei tassi che si stanno considerando. Appare chiaro che assumere un unico driver stocastico per il sistema non è adeguato, conviene passare a un modello multi dimensionale che permetta di cogliere con accuratezza maggiore i possibili comportamenti della curva dei tassi.

- Un importante risultato raggiunto è quello che riguarda la possibilità di trascurare la differenza tra la data di Expiry (T_e) e di Delivery (T_d) nella valutazione delle Future Option. Il modello unidimensionale permette di calcolare esattamente i valori dei Convexity Adjustment che si dovrebbero includere considerando $T_e \neq T_d$.

I risultati numerici ottenuti sono chiaramente a favore della trascurabilità di questo intervallo temporale nella valutazione delle Future Option: i Convexity Adjustment sono tutti con ottima approssimazione unitari, e l'ordine di grandezza dell'errore è sempre di gran lunga inferiore a 10^{-5} . Risultano quindi avere un peso perfettamente trascurabile nella valutazione dei contratti derivati. Questo risultato è coerente con il fatto che non rappresentano alcuna quantità finanziaria presente sul mercato e rilevante alla determinazione del prezzo, dal momento che è nulla la probabilità associata al cambio di Cheapest to Deliver Bond nell'intervallo compreso tra le due date (tipicamente inferiore alle 2 settimane).

- Il nostro lavoro ha raggiunto importanti risultati sulla valutazione dell'opzione Cheapest to Deliver. In primo luogo abbiamo mostrato come generalmente il Cheapest to Deliver sia il Bond nel Basket con la Maturity più breve, fenomeno studiato e discusso da Henrard in [Henrard 2006] per il mercato americano in regime di tassi bassi. Inoltre abbiamo osservato come questo effetto non sia necessariamente vero: nel future Bobl del Next (OEH3 Comdty) il Bond il più probabile da Deliverare era il Bund a Maturity più vicina (DBR 4 01/04/18), anche se nel Basket era presente un Bobl (OBL 0 1/2 10/13/17) con Maturity più breve ancora.

Le differenze dei nostri risultati rispetto a quelli del lavoro di Henrard sono probabilmente riconducibili al numero di emissioni sul mercato: sul mercato americano ci sono un numero di emissioni molto alto il che rende il mercato molto variegato. L'opzione Cheapest to Deliver diventa molto più importante da valutare in questo contesto, perché i possibili cambiamenti tra i vari Cheapest to Deliver sono molto più frequenti. Nel mercato europeo il numero di emissioni è molto più ridotto e già questo limita la possibilità di grossi cambiamenti nelle probabilità di delivery perché la curva dei tassi viene costruita su un numero minore di punti; in più frequentemente le nuove emissioni sono riaperture di vecchie emissioni e quindi il loro tasso Yield replica alla perfezione un punto della curva dei tassi associato a un'emissione già presente sul mercato.

Un altro considerevole risultato raggiunto nella nostra analisi associato alla valutazione dell'opzione Cheapest to Deliver è che il modello di pricing utilizzando solo il Cheapest Bond attuale nel Basket è sostanzialmente corretto. In tutti i modelli utilizzati e per tutti i contratti studiati le probabilità di delivery risultano sempre concentrate su un solo Deliverable, al massimo due ma con probabilità molto diverse tra loro. Da questo risultato si può dedurre che ai fini del pricing dei Future e delle Future Option considerare come solo deliverable il Cheapest Bond attuale è un'ottima approssimazione.

- Per quanto riguarda lo studio dell'inflazione e dei prodotti ad essa associata è importante sottolineare lo studio e la discussione dei vari modelli utilizzati per la Seasonality. Il modello che abbiamo utilizzato come base della nostra analisi, indicato da Belgrade in [Belgrade 2004], per la simulazione dell'effetto di Seasonality tramite delle variabili Dummies mensili, era già stato studiato e discusso in letteratura, infatti si basa su un modello meteorologico elaborato agli inizi secolo scorso.

Il modello Multi Trend proposto nella nostra analisi, sembra essere abbastanza significativo, almeno confrontato con quello base di Belgrade, e da risultati migliori sul fit dei dati storici per lunghi periodi. Possiamo ipotizzare che migliori anche sulla stima dei dati futuri.

Infine i risultati ottenuti sulla valutazione dei Bond I-L e sulla Break Even Inflation sembrano corretti: i risultati sui titoli tedeschi sono molto accurati anche perché hanno come Maturity massima 10 anni. Meno accurati appaiono i risultati sui Bond a lunga scadenza di Italia e Francia, il motivo potrebbe essere che le valutazioni di mercato generalmente non utilizzano la Seasonality, vedi [Barclays 2004]; a causa della grande soggettività che si può avere nei modelli proposti per simularla e sui risultati ottenuti, è ovvio che su lunghe scadenze considerarla o meno cambi significativamente il valore ottenuto.

Appendice A

Dinamica del Tasso Forward sotto la misura Risk-Neutral nel modello HJM

Partendo dalla generica equazione per la dinamica del tasso Forward 1.3, possiamo derivare il drift nella misura Risk-Neutral seguendo il consueto procedimento: ipotizzando che nella misura Risk-Neutral il prezzo scontato di uno ZC sia martingala dobbiamo solo annullare il termine di drift nell'espressione di $D(t)B(t, T)$:

$$D(t) = e^{\left\{ - \int_0^t r_s ds \right\}} \Rightarrow dD(t) = -r_t D(t) dt$$

Usando il Lemma di Ito per il prezzo dello ZC:

$$dB(t, T) = B(t, T) \left(d \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) \right) + \frac{1}{2} B(t, T) \left(d \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) \right)^2$$

Ora possiamo facilmente usare la formula di derivazione integrale vista in precedenza:

$$\frac{d}{dt} \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) = f(t, t) - \int_t^T \frac{d}{dt} (f(t, s)) ds$$

Per ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right) &= f(t, t) dt - \int_t^T (df(t, s)) ds = \\ &= r_t dt - \int_t^T (\mu(t, s) dt) ds + \int_t^T (\nu(t, s) \cdot dW_t) ds = \\ &= r_t dt - \eta(t, T) dt + \underline{\sigma}(t, T) \cdot dW_t \end{aligned}$$

dove

$$\eta(t, T) = \int_t^T (\mu(t, s)) ds \quad \underline{\sigma}(t, T) = \int_t^T (\nu(t, s) \cdot) ds$$

Entrambi sono funzioni deterministiche dipendenti solo da t e T. Imponendo di avere una matrice di correlazione costante, ne segue:

$$dB(t, T) = B(t, T) \left((r_t - \eta(t, T) + \frac{1}{2} \underline{\sigma}(t, T) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(t, T)) dt + \underline{\sigma}(t, T) \cdot dW_t \right)$$

Usando ancora una volta un Corollario al Lemma di Ito:

Once more using a Ito's Lemma corollary:

$$d(D(t)B(t, T)) = d(D(t))B(t, T) + d(B(t, T))D(t) + d(B(t, T))d(D(t))$$

L'ultimo termine è insignificante a causa dell'assenza del termine stocastico nella forma differenziale di $d(D(t))$, abbiamo:

$$\begin{aligned} d(D(t)B(t, T)) &= -r_t D(t)B(t, T)dt + D(t)B(t, T) \left((r_t - \eta(t, T) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \underline{\sigma}(t, T) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(t, T)) dt + \underline{\sigma}(t, T) \cdot d\underline{W}_t \right) = \\ &= D(t)B(t, T) \left((-\eta(t, T) + \frac{1}{2} \underline{\sigma}(t, T) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(t, T)) dt + \underline{\sigma}(t, T) \cdot d\underline{W}_t \right) \end{aligned}$$

Usando la notazione:

$$\underline{\sigma}^2(t, T) = \frac{1}{2} \underline{\sigma}(t, T) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(t, T)$$

E' immediato arrivare al risultato nella misura Risk-Neutral:

$$\eta(t, T) = \frac{1}{2} \underline{\sigma}^2(t, T)$$

Con un semplice cambio di notazione nella prima formula:

$$\mu(t, s) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \underline{\sigma}^2(t, T) \quad \nu(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \underline{\sigma}(t, T)$$

Infine abbiamo la dinamica Risk-Neutral nel modello HJM per il tasso Forward $f(t, T)$:

$$df(t, T) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \underline{\sigma}^2(t, T) dt - \frac{\partial}{\partial T} (\underline{\sigma}(t, T)) \cdot d\underline{W}(t)$$

dove $\underline{\sigma}(t, T)$ è un vettore N-Dimensionale di funzioni deterministiche del tempo perchè è integrale di $\underline{\nu}(t, T)$ con il ragionevole risultato già citato in precedenza che la varianza è nulla a tempo presente:

$$\underline{\sigma}(t, t) = \int_t^t \underline{\nu}(t, s) ds = \underline{0}$$

Appendice B

Titoli di stato Tedeschi al 5/10/2012

Descrizione	Cedola	Maturity	Annuncio	Bid	Ask	Outstanding
DBR 4 1/2 01/04/13	4,5	1/4/2013	12/30/2002	101,06	101,07	24,00
DBR 3 3/4 07/04/13	3,75	7/4/2013	6/24/2003	102,745	102,755	22,00
DBR 4 1/4 01/04/14	4,25	1/4/2014	10/21/2003	105,245	105,26	24,00
DBR 4 1/4 07/04/14	4,25	7/4/2014	5/18/2004	107,28	107,29	25,00
DBR 3 3/4 01/04/15	3,75	1/4/2015	11/16/2004	108,215	108,225	23,00
DBR 3 1/4 07/04/15	3,25	7/4/2015	5/10/2005	108,56	108,57	21,00
DBR 3 1/2 01/04/16	3,5	1/4/2016	11/15/2005	110,71	110,72	23,00
DBR 6 06/20/16	6	6/20/2016	5/28/1986	120,83	121,03	3,75
DBR 4 07/04/16	4	7/4/2016	5/9/2006	113,855	113,865	23,00
DBR 3 3/4 01/04/17	3,75	1/4/2017	11/7/2006	114,155	114,165	20,00
DBR 4 1/4 07/04/17	4,25	7/4/2017	5/15/2007	117,595	117,605	19,00
DBR 4 01/04/18	4	1/4/2018	11/6/2007	117,43	117,445	20,00
DBR 4 1/4 07/04/18	4,25	7/4/2018	5/20/2008	119,78	119,8	21,00
DBR 3 3/4 01/04/19	3,75	1/4/2019	11/4/2008	117,685	117,7	24,00
DBR 3 1/2 07/04/19	3,5	7/4/2019	5/12/2009	116,71	116,725	24,00
DBR 3 1/4 01/04/20	3,25	1/4/2020	11/3/2009	115,39	115,41	22,00
DBR 3 07/04/20	3	7/4/2020	4/20/2010	113,81	113,83	22,00
DBR 2 1/4 09/04/20	2,25	9/4/2020	8/10/2010	108,115	108,13	16,00
DBR 2 1/2 01/04/21	2,5	1/4/2021	11/16/2010	109,97	109,985	19,00
DBR 3 1/4 07/04/21	3,25	7/4/2021	4/26/2011	115,955	115,965	19,00
DBR 2 1/4 09/04/21	2,25	9/4/2021	8/23/2011	107,56	107,57	16,00
DBR 2 01/04/22	2	1/4/2022	11/22/2011	105,075	105,085	20,00
DBR 1 3/4 07/04/22	1,75	7/4/2022	4/10/2012	102,32	102,335	24,00
DBR 1 1/2 09/04/22	1,5	9/4/2022	9/4/2012	99,775	99,79	10,00
DBR 6 1/4 01/04/24	6,25	1/4/2024	12/28/1993	147,035	147,125	10,25
DBR 6 1/2 07/04/27	6,5	7/4/2027	7/1/1997	157,22	157,39	11,25
DBR 5 5/8 01/04/28	5,625	1/4/2028	1/20/1998	146,385	146,565	14,50
DBR 4 3/4 07/04/28	4,75	7/4/2028	10/6/1998	135,385	135,565	11,25
DBR 6 1/4 01/04/30	6,25	1/4/2030	1/11/2000	158,325	158,515	9,25
DBR 5 1/2 01/04/31	5,5	1/4/2031	10/17/2000	148,92	149,11	17,00
DBR 4 3/4 07/04/34	4,75	7/4/2034	1/21/2003	141,86	142,07	20,00
DBR 4 01/04/37	4	1/4/2037	1/18/2005	131,075	131,21	23,00
DBR 4 1/4 07/04/39	4,25	7/4/2039	1/16/2007	138,045	138,245	14,00
DBR 4 3/4 07/04/40	4,75	7/4/2040	7/15/2008	149,145	149,34	16,00
DBR 3 1/4 07/04/42	3,25	7/4/2042	7/13/2010	119,61	119,81	15,00
DBR 2 1/2 07/04/44	2,5	7/4/2044	4/24/2012	102,805	102,99	6,00

Appendice C

Cambio di Misura tra la Risk-Neutral e la T-forward

Il Cambio di misura tra la Risk-Neutral e la T-forward è particolarmente usato nella nostra analisi, in questa appendice riportiamo un veloce riepilogo dei risultati. Il concetto alla base del cambio di misura è il cambio di Numerario:

Definizione C.1. *Viene definito Numerario un processo stocastico positivo che viene utilizzato per normalizzare i processi di prezzo.*

L'unico vincolo a cui deve rispondere un numerario è ovviamente quello di essere un processo stocastico sempre positivo, infatti può essere interpretato come un'unità di valuta in cui gli altri prezzi vengono espressi sotto una certa misura ad esso associato.

Nella nostra analisi si usa la misura T-forward, dove in generale T può essere o la data di delivery del Future o la data di Expiry dell'Opzione, per questo particolare cambio di misura il Numerario da considerare è il Risk-Free ZC Bond con Maturity a T $B(t, T)$. Dalla teoria dei processi stocastici sappiamo che se definiamo come Q la misura Risk-Neutral di riferimento e Q^T la misura T-forward ottenuta con il Cambio di Numerario:

Proposizione C.1. *La derivata della misura Q rispetto alla misura Q^T è data da*

$$\frac{dQ}{dQ^T} = \frac{D(T)B(T, T)}{D(t)B(t, T)} = \frac{D(t, T)}{B(t, T)}$$

Per la dimostrazione o la spiegazione rigorosa di questa proposizione si può consultare [Barucci et al. 2009] o [Hull 1997]. Ora usando l'espressione ottenuta per il Discount Factor nel nostro modello, vedi (1.3), abbiamo:

$$D(t, T) = e^{\left\{ - \int_t^T r_s ds \right\}} = B(t, T) e^{\left\{ \int_t^T \sigma(s, T) \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s, T) ds \right\}} \quad (C.1)$$

Per il cambio di misura ne otteniamo:

$$\frac{dQ}{dQ^T} = e^{\left\{ \int_t^T \sigma(s, T) \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s, T) ds \right\}}$$

Da questo otteniamo una prima conseguenza importante che abbiamo usato diverse volte nella nostra analisi: convertire con il cambio di misura, il Discount Factor che come visto è sopra è una quantità stocastica, dentro un valore atteso sotto la misura Risk-Neutral nel Risk-Free ZC Bond che invece è una quantità deterministica e nota, nel valore atteso sotto la misura T-forward:

$$\begin{aligned}
E\left[D(t,T)(\cdot)|\mathcal{F}_t\right] &= E\left[B(t,T)e^{\left\{\int_t^T \underline{\sigma}(s,T) \cdot d\underline{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^T \underline{\sigma}^2(s,T) ds\right\}}(\cdot)|\mathcal{F}_t\right]= \\
&= E^T\left[B(t,T)e^{\left\{\int_t^T \underline{\sigma}(s,T) \cdot d\underline{W}_s - \frac{1}{2} \int_t^T \underline{\sigma}^2(s,T) ds\right\}}\right]_e \left\{-\int_t^T \underline{\sigma}(s,T) \cdot d\underline{W}_s + \frac{1}{2} \int_t^T \underline{\sigma}^2(s,T) ds\right\}(\cdot)|\mathcal{F}_t\right]= \\
&= B(t,T)E^T\left[(\cdot)|\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}$$

Infine una seconda importante conseguenza si può ottenere dall'uso del Teorema di Girsanov:

Teorema C.1. *Sia Z_t definita come:*

$$Z_t = e^{\left\{\int_t^T \Phi_s dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T \Phi_s^2 ds\right\}}$$

dove W_t è il moto Browniano nella misura Q , una Q -Martingala su (t, T) . Allora il processo

$$\underline{W}_t^T = \underline{W}_t - \int_t^T \Phi_s ds$$

è un \mathcal{F}_t -moto Browniano nella misura Q^T .

Per i dettagli di questo Teorema si può consultare [Baldi 2000].

La conseguenza rilevante per la nostra analisi è la relazione che si ottiene tra i moti Browniani nelle due misure in forma differenziale:

$$d\underline{W}_t^T = d\underline{W}_t - d\left(\int_t^T \underline{\sigma}(s,T) ds\right) = d\underline{W}_t - \underline{\sigma}(t,T) dt$$

Appendice D

Test-F, Test-t, Statistica R^2 e R^2_{adj}

Il Test-F è un test statistico che si utilizza per stabilire la significatività di un modello: testa l'ipotesi nulla \mathcal{H}_0 che tutti i parametri, stimati con il metodo OLS, nel modello siano nulli. Poniamo $\hat{\beta} \in \mathbb{R}^m$ il vettore di parametri stimato e I la matrice Identità n-dimensionale

$$I \cdot \hat{\beta} = 0$$

La statistica e la distribuzione che si utilizzano per fare il test sono diverse a seconda delle ipotesi che si usano per costruire il modello. Nel caso in cui le ipotesi standard della regressione lineare siano rispettate allora chiamata \underline{X} la matrice dei dati e σ la varianza dell'errore:

$$\hat{\beta}^T \cdot (\hat{\sigma}^2 (\underline{X}^T \cdot \underline{X})^{-1}) \hat{\beta} \approx \chi_n^2 \quad \text{sotto } \mathcal{H}_0.$$

Nel caso più frequente dove si conosce la varianza dell'errore e si debba stimarla con la varianza del residuo $\hat{\sigma}$, posto m il numero dei dati a disposizione, si ha:

$$\hat{\beta}^T \cdot (\hat{\sigma}^2 (\underline{X}^T \cdot \underline{X})^{-1}) \hat{\beta} \approx F_{n, m-(n+1)}^2 \quad \text{sotto } \mathcal{H}_0.$$

I test-t studiano invece la significatività di uno solo dei parametri: fissato $\hat{\beta}_i$ e \underline{Z} come il vettore tale che

$$\underline{Z} \cdot \hat{\beta} = \hat{\beta}_i$$

si ottiene che

$$\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \underline{Z} \cdot (\underline{X}^T \cdot \underline{X})^{-1} \underline{Z}^T}} \approx t_{m-(n+1)} \quad \text{sotto } \mathcal{H}_0.$$

Dove t è la distribuzione t di Student, per dettagli su questi test si può consultare il [Greene 2008].

La statistica R^2 è calcolata come la percentuale della varianza dei dati spiegata dal modello: presi n dati y_i , la loro media \bar{y} e il fit di questi dati realizzati attraverso il modello \hat{y}_i

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

E' chiaro che $R^2 \in (0, 1)$ e tanto più questa statistica si avvicina a 1 tanto più i dati sono meglio stimati dal modello. Per tenere conto del fatto che un modello con più parametri può meglio fittare i dati semplicemente riducendo i gradi di libertà del problema si può correggere la statistica R^2 per tener conto del maggior numero di parametri di un modello, definito k come il numero di parametri del modello:

$$R^2_{adj} = R^2 - (1 - R^2) \frac{k}{n - (k + 1)}$$

Quest'ultima statistica ha lo stesso significato di R^2 , ma penalizza un modello al crescere del numero di parametri che usa.

Notazione

Simboli	Significato
ZC	Zero Coupon Bond.
$B(t, T)$	Il Risk-Free Zero Coupon Bond che comincia in t e da 1 a Maturity T .
$f(t, T)$	Tasso Forward tra t e T .
$\mu(t, T)$	Drift del Tasso Forward nel Modello HJM.
r_t	Tasso Spot a t .
$\underline{\sigma}(t, T)$	Volatilità Integrale del Risk-Free Zero Coupon Bond nel Modello HJM, Single-Curve.
$\underline{\rho}$	Matrice di Covarianza del Moto Browniano.
$\underline{\mathcal{F}}_t$	La Filtrazione Aumentata associata al moto Browniano N-Dimensionale.
$D(t, T)$	Discount factor tra t e T .
$\underline{\sigma}^2(t, T)$	$= \underline{\sigma}(t, T) \cdot \underline{\rho} \underline{\sigma}(t, T)$
$B(t; t_1, t_2)$	Forward Zero Coupon Bond tra t_1 e t_2 valutato in t .
(σ, a)	Parametri del Modello Hull-White.
θ_t	Parametro funzione deterministica del tempo nel modello di Hull-White.
$\tilde{f}(t, T)$	Tasso Forward per un Defaultable Zero Coupon sul periodo tra t e T .
$P(\underline{C}^{(i)}, t)$	Risk-Free Coupon Bond con Cash Flow $\underline{C}^{(i)}$ valutato in t .
$\tilde{P}(\underline{C}^{(i)}, t)$	Defaultable Coupon Bond con Cash Flow $\underline{C}^{(i)}$ valutato in t .
$c^{(i)}$	Coupon dell' i -esimo Bond.
$C_j^{(i)}$	Ammontare del Cash Flow Amount del j -esimo coupon per l' i -esimo bond.
$T_j \quad j = (\alpha + 1, w)$	Date di pagamento dei Cash Flow del bond, dove $T_{\alpha+1}$ è la prima data tra queste dopo T_d .
$B_j(t) = B(t; T_d, T_j)$	Forward Risk Free Zero Coupon Bond tra la data di delivery e T_j , valutato in t .
$\delta(t, T)$	Frazione d'anno tra t e T , se non è specificato diversamente con convenzione $\frac{act}{act}$.
$\tilde{\sigma}(t, T)$	Volatilità integrale del Defaultable Zero Coupon Bond nel Modello HJM, Multi-Curve.
$v_j(t)$	Somma delle differenze tra $\underline{\sigma}(t, T)$ calcolate su diverse date T_j .
$\underline{U}_i(t)$	Volatilità stocastica del Risk-Free Coupon Bond nel modello GBMM.
$\underline{V}_i(t)$	Approssimazione deterministica della Volatilità di un Risk-Free Coupon Bond in BMM.
$\tilde{U}_i(t)$	Volatilità Stocastica del Defaultable Coupon Bond in GBMM.
$\tilde{V}_i(t)$	Approssimazione deterministica della Volatilità Stocastica di un Coupon Bond in BMM.
$\tilde{v}_j(t)$	Somma delle differenze tra $\tilde{\sigma}(t, T)$ calcolate su diverse date T_j .
$\zeta_i(t, T)$	Aggiustamento della dinamica dell' i -esimo Defaultable Bond tra la misura T_d -forward e la Risk Neutral, è la media esponenziale della volatilità dell' i -esimo Bond pesata per la volatilità di spread nell'intervallo (t, T) .
$\tilde{B}(t, T)$	Defaultable Zero Coupon Bond.
$\tilde{B}_j(t) = \tilde{B}(t; T_d, T_j)$	Forward Defaultable Zero Coupon Bond tra la data di delivery and T_j , valutato in t .
$G(t, T)$	Termine di Giesecke che moltiplicato per il Risk-Free ZC bond da il Defaultable ZC.
DZC	Defaultable Zero Coupon.
$g_i(\cdot)$	Funzione di drift deterministica dello yield dell' i -esimo bond nel Basket dei Deliverable.
CDS	Credit Default Swap.
Schatz	Titoli di Stato Tedeschi con scadenza biennale alla prima emissione, da cui prende il nome il Future con Basket composto da prodotti che scadono tra i 1.75 anni e i 2.25 anni.

Bobl	Titoli di Stato Tedeschi con scadenza quinquennale alla prima emissione, da cui prende il nome il Future con Basket composto da prodotti che scadono tra i 4.5 anni e i 5.5 anni.
Bund	Titoli di Stato Tedeschi con scadenza decennale alla prima emissione, da cui prende il nome il Future con Basket composto da prodotti che scadono tra i 8.5 anni e i 10.5 anni.
BOT	Buoni Ordinari del Tesoro.
BTP	Buoni Poliennali del Tesoro.
CCT	Certificati di credito del tesoro.
OAT	Obligations assimilables du Trésor.
OTC	Over the Counter.
C.E.T.	Central European Time.
$\epsilon(t, T)$	Volatilità di Spread sul periodo t-T.
$\Delta_{1,2}(t, T)$	Convexity Adjustment tra la misura Risk-Neutral e la t_1 -forward nel modello di Giesecke dovuto alla presenza della Spread-Vol.
y_i	Tasso Yield del Coupon Bond $P(C^{(i)}, t)$.
$MacD_j(t)$	Macaulay Duration del j-esimo Coupon Bond.
ZCIIS	Zero Coupon Indexed Inflation Swap.
T_H	Data di Maturity dello ZCIIS.
N	Nozionale.
r_{zciis}	Tasso ZCIIS.
CPI_t	Consumer Price Index di riferimento per la data t.
$IP(C^{(i)}, t)$	Inflation Linked Coupon Bond valutato a t, con Cash Flow futuri $C_j^{(i)}$.
$HICP_t$	Harmonised Index of Consumer Prices pubblicato mensilmente da Eurostat.
$CI_{d,m}$	Indexation Coefficient al giorno d del mese m.
$AC_{d,m}$	Frazione del Rateo Nominale maturato tra l'ultima data cedolare e il giorno d del mese m.
$RC_{d,m}$	Rateo reale di un Bond I-L al giorno d del mese m.
$K^{(i)}$	Conversion Factor dell' i-esimo bond nel basket.
FV	Face Value del Bond.
f	Frequenza Annuale delle Cedole.
C_n	Coupon Nozionale del Future.
T_α	Ultima data cedolare prima della data di Delivery.
$del(T_j)$	Numero di giorni effettivi tra T_j e la data di pagamento reale del j-esimo coupon (se T_j cade durante un week-end).
T_{w+1}	T_w più un periodo cedolare esatto.
$F(t, T)$	Un contratto Future valutato in t e con data di Delivery T.
$F^{(CtD)}(t, T)$	Un contratto Future valutato in t e con data di Delivery T solo sul Cheapest to Deliver attuale.
M	Numero dei bond nel Basket.
CtD	Cheapest to Deliver.
$\tilde{\beta}_{d,j}(t, T_d)$	Convexity Adjustment nel contesto Multi Curve .
$\mathcal{N}(\cdot)$	Cumulative Distribution Function della Normale.
$\beta_{d,j}(t, T_d)$	Convexity Adjustment nel contesto Single Curve.
$\nu_{d,j}^2(t, T)$	Media integrale della volatilità di un Risk-Free ZC sull'intervallo (t,T) nel modello Single Curve.
$\tilde{\nu}_{d,j}^2(t, T)$	Media integrale della volatilità di un Defaultable ZC sull'intervallo (t,T) nel modello Single Curve.
$Fwr(t, T)$	Contratto Forward valutato in t con delivery in T.
$\xi_i(t, T)$	Media integrale della volatilità di un Risk-Free Coupon Bond sull'intervallo (T,t) nel contesto Single Curve con GBMM.
$\Sigma_i(t, T)$	Convexity Adjustment del Risk-Free Coupon Bond Future nel contesto Single Curve con GBMM sull'intervallo (t,T).
$\tilde{\xi}_i(t, T)$	Media integrale della volatilità di un Defaultable Coupon Bond sull'intervallo (t,T) nel contesto Multi-Curve con GBMM.
$\tilde{\Sigma}_i(t, T)$	Convexity Adjustment del Defaultable Coupon Bond Future nel contesto Multi Curve con GBMM sull'intervallo (t,T).
\mathcal{K}	Strike.
T_e	Data di Scadenza dell'Opzione.
$C_P(t, T_e)$	Bond Call valutata in t con data di scadenza in T_e .

\tilde{X}	Valore della Variabile aleatoria che rende il valore del sottostante valutato in t pari allo Strike.
$C_F(t, T_e)$	Future Call valutata in t con data di scadenza in T_e .
$\tilde{\omega}_{e,d}(t, T)$	Convexity Adjustment relativo ai Defaultable Bond tra la misura T_e -forward e la T_d -forward.
$\omega_{e,d}(t, T)$	Convexity Adjustment relativo ai Risk-Free Bond tra la misura T_e -forward e la T_d -forward.
π_i	Moving Average weights.
Z^i	Lag Operator.
T	Periodo della componente Stagionale dell'inflazione.
M	Moving Average Operator.
OLS	Ordinary Least Square.
\mathcal{H}_0	Ipotesi nulla dei test statistici, di solito deve essere rifiutata.
$P_q(T_0)$	Prezzo Quotato Bond I-L.
Y_N	Tasso Yield Nominale associato ai Bond Nominali.
Y_R	Tasso Yield Reale associato ai Bond I-L.
$\Lambda(t)$	Break Even Inflation all'istante t .

Bibliografia

- Baldi, P. (2000). *Equazioni Differenziali Stocastiche e Applicazioni*. Ed. Pitagora.
- Barclays, cur. (2004). *Global Inflation-Linked Products: A User's Guide*.
Available at : <http://www.barcap.com/>.
- Barucci, E. et al. (2009). *Ingegneria Finanziaria*. Ed. Egea.
- Baviera, R. (2005). «Bond Market Model». In: *International Journal of Theoretical and Applied Finance* Vol 9, No. 4, pp 577–596.
- Baviera, R. e A. Cassaro (2012). «Mr. Crab's Bootstrap».
Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2158131> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2158131>.
- Belgrade, N. (2004). «Market Inflation Seasonality Management».
Available at : <ftp://mse.univ-paris1.fr/pub/mse/cahiers2004/B04051.pdf>.
- Belgrade, N. e E. Benhamou (2004). «Smart Modeling of the inflation market: Taking into account the seasonality». In: *Risk Magazine Inflation Risk*, July 2004 Supplement. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=577362>.
- Bundesbank, Deutsche, cur. (2013). *Prospetto Emissioni 1999-2013*.
Available at : <http://www.bundesbank.de>.
- Eurex (2013). «Deliverable Bonds and Conversion Factors».
Available at : <http://www.eurexchange.com/exchange-en/market-data/clearing-data/deliverable-bonds-and-conversion-factors/173146/>.
- Eurostat, cur. (2001). *Compendium of HICP*.
Available at : <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>.
- Giesecke, K. (2003). «A simple exponential model for dependent defaults». In: *Journal of Fixed Income* Vol 13, No. 3, pp 74–83.
- Greene, W.H. (2008). *Econometric Analysis*. Ed. Prentice Hall.
- Heath, D., R. Jarrow e A. Morton (1992). «Bond Pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation». In: *Econometrica* Vol 60, No. 1, pp 77–105.
- Henrard, M. (2006). «Bonds Futures and Their Options: More than the Cheapest-To-Deliver; Quality Option and Margining». Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=881741>.
- Hull, J. C. (1997). *Option, Futures and other Derivatives*. Ed. Pearson.
- Hull, J. C. e A. White (1990). «Pricing Interest-Rate Derivative Securities». In: *The Review of Financial Studies* Vol 3, No. 4, pp 573–592.
- Mercurio, F. (2005). «Pricing Inflation-Indexed Derivatives». In: *Quantitative Finance* 5.3, pp. 289–302.