POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aeronautica
Ingegneria Aeronautica

PROPOSTA DI UN CRITERIO DI QUALITA E DI UN METODO DI ADATTAZIONE DI MESH BASATI SULLA DERIVATA TOTALE DI FUNZIONI AERODINAMICHE RISPETTO ALLE COORDINATE DEI NODI DELLE MESH

Relatore Prof. Franco AUTERI

Tesi di Laurea di:
Dario MILANI Matr. 680063

Anno Accademico 2012-2013

Indice Generale

Introduzione **4**

1 Richiami teorici **5**
1.1 Le equazioni della fluidodinamica 5
1.2 Il calcolo dei gradienti nell'adattazione di forma 5
1.2.1 Differenze finite 6
1.2.2 Il metodo discreto diretto 6
1.2.3 Il metodo aggiunto discreto 7
1.3 La strategia proposta 7
1.4 Conclusioni 8

2 Il metodo basato su dF/dX **9**
2.1 Definizione del sensore locale e del sensore globale 9
2.2 Generazione di griglia e adattazione locale 10
2.3 Conclusioni 11

3 Gerarchia di cinque griglie di tipo C attorno al profilo RAE2822 **12**
3.1 Comportamento dei sensori 12
3.2 Influenza della taglia della griglia nel processo di adattazione 13
3.3 Conclusioni 13

4 Applicazione RANS attorno al profilo RAE2822 **14**
4.1 Processo di adattazione e software 14
4.2 Esempi di adattazioni su griglie bidimensionali 14
4.3 Adattazioni di griglia con una strategia feature-based 15
4.3.1 Esempi 16
4.4 Conclusioni 16

5 Studio dei criteri locale e globale in tre dimensioni **17**
5.1 Introduzione 17
5.2 Conclusioni 17

Conclusioni **18**

Nomenclatura

W	variabili conservative
W_b	variabili conservative sulla superficie solida
α	vettore di parametrizzazione geometrica
X	cordinate della griglia
F	funzioni obiettivo espresse in dipendenza di W e X
$\mathcal{F}$	funzioni obiettivo espresse in dipendenza di α
F	funzioni obiettivo espresse in dipendenza di X
R	equazioni dei residui dipendente da W e X
Λ	vettore adjoint
n_β	dimensione di un generico vettore β
f	flusso analitico
Ω	dominio
$\partial\Omega$	contorno di Ω
ρ	densità del fluido
u	velocità del fluido in direzione X
v	velocità del fluido in direzione Y
w	velocità del fluido in direzione Z
E	energia interna del fluido
$\wp$	operatore de proiezione
$D_{G,L}$	circonferenza centrata G con raggio L
$\theta i, j$	sensore locale
θ	criterio di qualificazione
$\theta[F]$	criterio di qualificatione calcolato per la funzione F
$g^{i,j}$	tensore metrico contra-variante
$x_{\xi_i \xi_j}$	tensore metrico covariante
P_k	funzioni di controllo
θ_{gb}	criterio di qualificazione per le adattazioni gradient-based
C	spazio computazionale
P	spazio dei parametri
D	spazio fisico

Introduzione

Questa tesi ha avuto luogo nel reparto Metodi e strumenti per l'aerodinamica Airbus Operations SAS che si trova nell'edificio (M01) nel sito di Saint Martin du Touch, Toulouse. Il Capo Dipartimento è Pascal Larrieu e gli obiettivi del dipartimento sono lo sviluppo di metodi e strumenti per simulazioni CFD. La squadra presso cui ho svolto il lavoro è EGAMT2, che insieme ad altre due squadre costituisce l'intero team. I vari strumenti che sono ora in fase di sviluppo da parte del team sono orientati all'ottimizzazione di forma e al miglioramento della qualità della griglia di calcolo per la stima di una funzione obiettivo.

Oggi, sono necessari un gran numero di simulazioni per valutare le prestazioni aerodinamiche con precisione sufficiente. Queste prestazioni sono direttamente collegate al consumo di carburante, che è uno dei più importanti aspetti per valutare la competitività delle macchine sviluppate e quindi le prestazioni devono essere previste con precisione sempre maggiore a un costo più basso possibile. Pertanto, accanto al riferimento costituito dai test in galleria del vento, la CFD è in una posizione di rilievo in ambito industriale.

Una delle fonti di errore della CFD è l'errore di discretizzazione, dovuta al fatto che abbiamo a disposizione un numero finito di punti di calcolo, e spesso non siamo in grado di trovare il modo migliore di distribuirli nel dominio. Una tecnica utile per ridurre l'errore di discretizzazione nella stima delle prestazioni è rappresentato dalle strategie di adattamento delle griglie, nelle quali si procede ad un riposizionamento dei punti di calcolo più proficuo per il calcolo di una funzione scelta.

In questo lavoro, intendiamo proporre una nuova strategia di adattazione mirata alla stima di una funzione obiettivo basato sulla derivata totale della funzione aerodinamica rispetto alle coordinate della griglia. Presentiamo in un primo passo, una revisione della teoria della letteratura collegata al nostro metodo. Successivamente, introduciamo la formulazione teorica della strategia di adattamento e, in particolare, definiamo il sensore per l'adattamento e criteri di qualità. Questi ultimi due aspetti sono discussi nel quarto passaggio. In una quinta fase verrà esposto un esempio di adattazione di griglia attorno ad un profilo bidimensionale sia seguendo la strategia da noi proposta sia utilizzandone una più classica di tipo gradient-based. Infine, proveremo l'efficacia del sensore proposto in un caso tridimensionale.

Capitolo 1

Richiami teorici

Oggi, le simulazioni CFD sono regolarmente utilizzate per valutare le prestazioni aerodinamiche e migliorare l'ottimizzazione di forma. Una delle principali cause di errore associate a queste simulazioni è la discretizzazione del dominio di calcolo da cui l'interesse nella ricerca di metodi di adattazione per ridurre questi errori. Tuttavia, non è sempre facile definire un processo e un indicatore per mostrare dove e come una griglia deve essere adattato per migliorare la qualità. Un approccio intuitivo è quello di tipo "feature based". Questo tipo di approccio però non garantisce direttamente un aumento di precisione nel calcolo delle funzioni aerodinamiche di interesse. Da qui, l'interesse nello sviluppare delle tecniche per ridurre l'errore associato al calcolo di funzioni aerodinamiche desiderate. Quindi le tecniche di adattazione più utili sono basate direttamente sulla funzione di interesse, per esempio utilizzando stime dell'errore. I metodi goal-oriented usano spesso la tecnica del vettore aggiunto per calcolare i gradienti delle funzioni di interesse. Questa tecnica è di recente sviluppo e comporta dei notevolo vantaggi di costo. I gradienti vengono calcolati come derivate delle funzioni di interesse rispetto ad un insieme di parametri di forma (nel caso dell'ottimizzazione di forma) e rispetto alle coordinate dei nodi della griglia (nel caso in cui si cerca di adattare la griglia di calcolo).

1.1 Le equazioni della fluidodinamica

La strategia proposta è applicabile a ogni tipo di modello fluidodinamico. In questo contesto si è deciso di mostrare i risultati calcolati usando un modello RANS che è senz'altro di maggiore interesse in campo industriale. A un certo numero di Reyonlds si osserva una transizione da flusso laminare a flusso turbolento. Questa transizione dà luogo a processi caotici e casuali che si verificano per diverse scale di tempo e di spazio. Quando vi è un grande divario tra le diverse scale, la risoluzione di ciascuna di esse è molto costosa e il costo aumenta con il numero di Reynolds. È per questo che viene operata la media delle equazioni di Navier-Stokes. Essa consiste nella decomposizione delle variabili in una parte media e un fluttuante. L'applicazione dell'operatore di media alle equazioni di Navier-Stokes porta alle cosiddette equazioni RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). Tuttavia, la turbolenza deve essere modellata. Diversi modelli di turbolenza sono stati proposti e utilizzati in letteratura. In questo lavoro si è utilizzato quello di Spalart-Allmaras [1].

1.2 Il calcolo dei gradienti nell'adattazione di forma

Questa sezione è dedicata a presentare e fornire una breve rassegna dei diversi metodi per il calcolo dei gradienti che sono alla base dei metodi sviluppati in questo lavoro.

Si indichi con α un vettore di dimensioni n_α contenente i parametri di forma. Le cordinate dei nodi della griglia sono X, W è un vettore di dimensioni n_W contenenti la soluzione CFD del problema (variabili conservativa collocate in centro cella) associato al modello matematico e W_B è il vettore contenente l'estrapolazione di W sulla superficie di contorno:

$$W = W(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$$
$$W_b = W_b(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)$$

Si indichi con R le equazioni discretizzate della fluidodinamica che legano il compo W e la griglia X tramite:

$$R(W, X) = 0,$$

e che è un sistema di n_W equazioni non lineari.

Consideriamo una funzione scalare di interesse (o funzione obiettivo), che indichiamo con F. Questa funzione può essere la portanza la resistenza o un'altra grandezza di interesse ed il suo calcolo dipende dalla posizione dei nodi X e dalle variabili W. Da $F = F(W, X)$ è possibile evidenziare la dipendenza dal parametro α

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(W(\alpha), X(\alpha))).$$

I metodi di ottimizzazione necessitano della valutazione della derivata della funzione $\mathcal{F}$ rispetto ai parametri di forma α:

$$\frac{d\mathcal{F}(\alpha)}{d\alpha}$$

Il gradiente può essere valutato in base a uno dei tanti approcci esistenti che saranno presentati nelle sezioni seguenti (tra cui le differenze finite, il metodo diretto o il metodo aggiunto discreto.

1.2.1 Differenze finite

La valutazione del gradiente con le differenze finite non richiede modifiche del solutore ma ha lo svantaggio di richiedere una valutazione della corrente per ciascun stato perturbato $\alpha + \delta\alpha$ più una per un totale di $n_\alpha + 1$ calcoli.

$$\frac{d\mathcal{F}(\alpha)}{d\alpha_i}\delta\alpha_i \simeq [\mathcal{F}(\alpha + \delta\alpha_i) - \mathcal{F}(\alpha)] = [f(W(\alpha + \delta\alpha_i), X(\alpha + \delta\alpha_i)) - f(W(\alpha), X(\alpha))]$$

Il costo del calcolo è dominato dal numero dei parametri di forma, ($n_{\alpha+1}$ calcoli fluidodinamici tramite la formula del primo ordine e $2n_\alpha$ calcoli fluidodinamici tramite la formula del secondo ordine).

1.2.2 Il metodo discreto diretto

Un altro metodo può essere ottenuto se consideriamo la dipendenza della funzione $\mathcal{F}$ da W e X in modo tale che la regola di derivazione delle funzioni composte fornisce:

$$\frac{d\mathcal{F}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial F}{\partial W}\frac{dW}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha}. \tag{1.1}$$

Le equazioni della meccanica dei fluidi possono essere riscritte nella forma $R(W(\alpha)), X(\alpha)) = 0$. Possiamo differenziare rispetto ad α per avere:

$$\frac{\partial R}{\partial W}\frac{dW}{d\alpha} = -\frac{\partial R}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha}, \tag{1.2}$$

che può essere considerato come un sistema lineare incognite $dW/d\alpha$. Dopo il calcolo di $dW/d\alpha$ è possibile effettuare una sostituzione in (1.1) per calcolare il gradiente. Bisogna risolvere n_α sistemi lineari (di dimensioni n_W) per potere calcolare $dW/d\alpha$. Il costo del calcolo dipende da $\partial R/\partial W$ e dal numero di parametri contenuti nel vettore α. Si può calcolare i gradienti con un calcolo non lineare più n_α calcoli lineari invece di almeno $n_\alpha + 1$ soluzioni del problema non lineare che sarebbero richieste dal metodo delle differenze finite.

1.2.3 Il metodo aggiunto discreto

L'equazione dei residui (1.2) può essere moltiplicata per un vettore arbitrario Λ^T di dimensioni n_W. Ciò conduce a:

$$\Lambda^T \frac{\partial R}{\partial W}\frac{dW}{d\alpha} + \Lambda^T \frac{\partial R}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha} = 0,$$
$$\forall \Lambda \in \Re^{n_w}.$$

Aggiungendo questa espressione alla formula per il calcolo dei gradienti (1.1) abbiamo:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial F}{\partial W}\frac{dW}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha} + \Lambda^T \frac{\partial R}{\partial W}\frac{dW}{d\alpha} + \Lambda^T \frac{\partial R}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha},$$
$$\forall \Lambda \in \Re^{n_W}.$$

Isolando il termine $dW/d\alpha$ otteniamo la seguente relazione:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = (\frac{\partial F}{\partial W} + \Lambda^T \frac{\partial R}{\partial W})\frac{dW}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha} + \Lambda^T (\frac{\partial R}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha}),$$
$$\forall \Lambda \in \Re^{n_W},$$

dove Λ^T (chiamato vettore aggiunto) è scelto per cancellare il primo termine dell'ultima equazione (è possibile evitare il calcolo dei n_α sistemi lineari necessari con il metodo diretto). Ciò conduce a:

$$\frac{\partial F}{\partial W} + \Lambda^T (\frac{\partial R}{\partial W}) = 0. \tag{1.3}$$

Il gradiente è allora dato da:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial F}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha} + \Lambda^T (\frac{\partial R}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha}). \tag{1.4}$$

Il calcolo di Λ (1.3) non dipende dal numero dei parametri n_α ma solamente dal numero di funzioni obiettivo (n_F).

Il punto cruciale è la differenza significativa di costo tra i diversi approcci. Infatti, nelle applicazioni aerodinamiche tipiche, il numero di parametri supera il numero di funzioni ($n_\alpha \gg n_F$) e il metodo aggiunto è per questo motivo spesso preferito rispetto agli altri.

1.3 La strategia proposta

Nel paragrafo 1.2.3 è stato mostrato che l'espressione di $dF/d\alpha$ può essere valutata utilizzando l'espressione:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial F}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha} + \Lambda^T (\frac{\partial R}{\partial X}\frac{dX}{d\alpha}). \tag{1.5}$$

Se raccogliamo in quest'ultima equazione il termine $dX/d\alpha$ abbiamo:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = (\frac{\partial F}{\partial X} + \Lambda^T \frac{\partial R}{\partial X})\frac{dX}{d\alpha}. \tag{1.6}$$

Ciò permette di identificare l'espressione della derivata totale di F rispetto alle coordinate dei nodi:

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = (\frac{d\mathrm{F}}{dX})\frac{dX}{d\alpha}. \tag{1.7}$$

Si può dimostrare anche che il termine tra parentesi nell'espressione (1.6) è dF/dX. Ossia:

$$\frac{d\mathrm{F}}{dX} = \frac{\partial F}{\partial X} + \Lambda^T \frac{\partial R}{\partial X}. \tag{1.8}$$

Questa derivata è il punto di partenza del nostro lavoro infatti rappresenta il legame tra F e le cordinate dei punti della griglia X che ci dà le informazioni essenziali per l'adattazione. Questa variabile viene calcolata per ciascun punto della griglia di calcolo e definisce l'influenza di questi punti sulla stima della funzione obiettivo.

Al fine di costruire la nostra strategia è necessario considerare una proiezione (chiamata $\wp$) di $d\mathrm{F}/dX$ per evitare di modificare la forma solida:

$$\begin{array}{ll} \wp(d\mathrm{F}/dX) = d\mathrm{F}/dX & \text{Sul volume} \\ \wp(d\mathrm{F}/dX) = d\mathrm{F}/dX - (d\mathrm{F}/dX \cdot \vec{n})\vec{n} & \text{Sulla superficie solida} \\ \wp(d\mathrm{F}/dX) = 0 & \text{Nei punti di discontinuità} \end{array}$$

Questa proiezione viene introdotta per mantenere solo le componenti $d\mathrm{F}/dX$ che sono effettivamente utilizzati per l'adattazione della griglia. Uno sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine fornisce:

$$\mathrm{F}(X + dX) \simeq \mathrm{F}(X) + \frac{d\mathrm{F}}{dX} dX.$$

Applicando la proiezione otteniamo anche:

$$\mathrm{F}(X + dX) - \mathrm{F}(X) \simeq \wp(\frac{d\mathrm{F}}{dX}) dX$$

Il termine di destra di questa equazione è il termine che di fatto viene utilizzato per la costruzione del sensore locale del quale discuteremo ampiamente nel prossimo capitolo. Oltre al sensore locale, abbiamo introdotto un criterio con lo scopo di definire la qualità complessiva della griglia. Tutte le spiegazioni e gli sviluppi del sensore locale e del criterio di qualità verranno proposti nel seguente capitolo.

1.4 Conclusioni

Il nostro metodo ha l'importante vantaggio di utilizzare l'adjoint per valutare la sensibilità $d\mathrm{F}/dX$, che riduce il costo rispetto ad altri metodi di calcolo dei gradienti. Il nostro obiettivo è quello di utilizzare questo come un indicatore delle zone in cui raffinare le griglia come discuteremo nel prossimo capitolo. Inoltre utilizzando Λ, che è anche spesso usata nel contesto di ottimizzazione di forma, dal momento che è già dato e non richiederebbe ulteriori calcoli.

Capitolo 2

Il metodo basato su dF/dX

Questo capitolo è dedicato alla presentazione teorica del sensore costruito a partire da $d\mathrm{F}/dX$ e alla procedura di adattazione sviluppata. Innanzi tutto vengono presentati il sensore locale, che sarà utilizzato per guidare l'adattamento della griglia, e il criterio globale, che viene usato come indicatore della qualità complessiva della griglia. Successivamente si discutera della strategia di adattazione che basata sulle equazioni differenziali ellittiche permette di utilizzare le informazioni del sensore per costruire una nuova griglia di calcolo.

2.1 Definizione del sensore locale e del sensore globale

Si parte da una considerazione di stabilità. Denotiamo una griglia volumetrica con X e con $X + dX$ una seconda griglia che è uno stato perturbato della prima. Il calcolo delle variabili W e la sua integrazione permette il calcolo delle funzioni obiettivo F che possono essere il coefficiente di portanza, il coefficiente di resistenza o altre grandezze di interesse:

$$X \rightarrowtail F(X)$$
$$X + dX \rightarrowtail F(X + dX)$$

La griglia X è considerata stabile se la differenza $F(X+dX)$ - $F(X)$ tende a zero. In realtà è necessario considerare che il disturbo dX nella direzione normale ai contorni solidi rappresenta un cambiamento nella forma e quindi deve essere escluso. Questa considerazione ha portato all'introduzione dell'operatore proiezione $\wp$ in 2.1 per cancellare le componenti di dF/dX che possono cambiare la forma. Diciamo dunque più precisamente che data una griglia X ed una seconda che rappresenta uno stato perturbato della prima ($X + dX$), asseriamo che essa è stabile se la differenza $\wp(F(X + dX))$ - $\wp(F(X))$ è piccola.

Per migliorare la precisione della stima della funzione obiettivo senza aumentare il numero di nodi e il tempo di calcolo, dobbiamo cercare di ripartire i punti e raggiungere una situazione in cui la sensibilità dF/dX sia uniformemente distribuita nel dominio.

E inoltre necessario ricordare che la regolarità delle griglie di calcolo è uno dei punti cruciali. Questa proprietà riveste un ruolo ancora più importante con l'ultilizzo di griglie strutturate, come nel nostro caso, quindi è necessario trovare degli espedienti che assicurino il verificarsi di questa proprietà. Con questo scopo è opportuno individuare una lunghezza caratteristica $r_{i,j}$ in ogni nodo della griglia. Questa grandezza moltiplicherà la sensibilità dF/dX. La quantità $(dF/dX)r_{i,j}$ permette di tener conto del fatto che nelle zone in cui la griglia è già molto fine, un'elevata sensibilità dF/dX viene pesata con un termine $r_{i,j}$ molto piccolo. Viene quindi preso in considerazione il fatto che laddove la griglia è già fine lo spazio disponibile per l'adattazione è limitato, e quindi si evita la formazione di eccessive discontinuità.

In ciò che segue, intendiamo illustrare gli aspetti pratici legati all'operatore di proiezione e alla lunghezza caratteristica che ha portato alla definizione del sensore e del criterio di qualità.

La moltiplicazione per una lunghezza caratteristica assicura che il sensore sarà in grado di prendere in considerazione le dimensioni degli elementi della griglia attuale essendo F ponderato per la dimensione locale degli elementi di griglia.

Definizione dei sensori

Dopo aver spiegato le ragioni del peso $r_{i,j}$ possiamo definire il sensore locale come:

$$\theta(i,j) = \|\wp(\frac{d\mathrm{F}}{dX})_{i,j}\| r_{i,j}, \tag{2.1}$$

che contiene le informazioni locali legate alla qualità della griglia.

Il criterio globale è invece definito come:

$$\theta = \frac{1}{N_i N_j} \sum_{i;j} \theta(i,j). \tag{2.2}$$

Laddove si osservano forti valori di θ lo spostamento dei nodi ha un impatto significativo sulla stima della funzione obiettivo ed in queste zone la griglia deve essere adatta.

Ulteriori informazioni sullo sviluppo di questo sensore saranno date nella prossima sezione.

Introduzione della media

La definizione dei criteri per l'adattamento locale può essere più efficace se viene introdotto un operatore di filtraggio. Ciò permette di uniformare campo $\theta(i,j)$ e di renderlo più rappresentativo soprattutto nelle zone che hanno un forte impatto sul calcolo di F, aspetto fondamentale perché permette di localizzare e analizzare *a priori* le aree maggiormente rilevanti. Altrimenti, non sarebbe possibile distinguerle chiaramente essendo $\wp(dF/dX)$ molto irregolare. Infatti, ci possono essere nodi vicini con vettori che puntano anche in direzioni opposte. Questo fatto provoca un effetto di compensazione locale in cui i nodi vengono spostati senza beneficio. Ne segue naturalmente la necessità di avere un campo più uniforme, per eliminare questi effetti di compensazione. Ciò porta a definire l'operatore di filtraggio.

Questo operatore è in realtà una media ponderata di di $\wp(dF/dX)$ effettuata su ciascun nodo della griglia. È possibile introdurre una lunghezza caratteristica del filtro, che chiameremo raggio, in modo che il valore filtrato di $\wp(dF/dX)$ su ciascun nodo si ottenga prendendo la media dei valori nei nodi contenuti in una sfera avente tale raggio.

Diversi studi sono stati effettuati ed è stato osservato che l'introduzione dell'operatore di filtraggio migliora le prestazioni del metodo proposto. Notiamo anche che il raggio del filtro deve essere scelto come compromesso tra il grado di regolarità desiderato e le risorse di calcolo a disposizione.

2.2 Generazione di griglia e adattazione locale

Un punto cruciale nel processo di adattazione è la regolarità della griglia, che è spesso generata mediante la risoluzione di equazioni differenziali ellittiche [2].

Equazioni ellittiche per la generazione di griglia

Ci riferiamo a tre sistemi di coordinate:

- Lo spazio di calcolo con coordinate $\boldsymbol{\xi}$.
- Lo spazio del parametri con coordinate $\boldsymbol{s}$.
- Il dominio fisico con coordinate $\boldsymbol{x}$.

Vengono inizialmente definite le trasformazioni da $\boldsymbol{\xi}$ a $\boldsymbol{s}$ e da $\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{\xi}$. Queste trasformazioni vengono composte per generare la trasformazione da $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{\xi}$ come segue:

$$\sum_{i,j=1}^{3} g^{ij} x_{\xi^i \xi^j} + \sum_{k=1}^{3} g^{kk} P_k x_{\xi^k} = 0, \tag{2.3}$$

dove x è il vettore posizione (in coordinate cartesiane), $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\xi^i = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ sono le coordinate curvilinee, $g^{ij}(i, j = 1, 3)$ è il tensore metrico contro-variante e P_k sono le funzioni di controllo.

Ciò porta alla definizione del sistema di equazioni differenziali parziali nelle quali il primo termine della (2.3) è un laplaciano.

Vi è una connessione univoca tra le funzioni di controllo e la griglia. Per esempio quando si genera la griglia è possibile calcolare le funzioni di controllo associate ($P_k^{initial}$) e viceversa.

È anche possibile indurre il cambiamento di funzioni di controllo di una griglia iniziale come segue,

$$P_k = P_k^{initial} + \epsilon P_k^{adapt}. \tag{2.4}$$

e calcolare la nuova griglia X.

P_k^{adapt} sono le funzioni di controllo modificate e $P_k^{initial}$ sono le funzioni di controllo iniziali calcolate sulla griglia iniziale ed ϵ è un parametro che controlla l'aggressività della modifica.

Calcolo di $P_k^{initial}$ e P_k^{adapt}

Il termine P_k^{adapt} è colui che contiene le informazioni fornite dal sensore. Per il calcolo di P_k^{adapt} si considerano le funzoni $s^i : X \rightarrow [0, 1](i = 1, 2)$. Ogni campo s^i è collegato ad una direzione geometrica ed ha valori grandi in aree in cui la griglia deve essere raffinata.

Infine, le funzioni di controllo sono definite come la derivata in ogni punto di questo campo scalare rispetto alle direzioni topologiche:

$$P_k^{adapt} = \frac{s_{\xi_k}}{s}. \tag{2.5}$$

dove

$$s = 1 + s^1 \oplus s^2 \oplus s^3. \tag{2.6}$$

Si osserva che nella pratica, i valori più alti di P_k^{adapt} sono nettamente maggiori alla media. Da qui la necessità di lisciare il sensore per evitare forte discontinuità e introdurre un valore di soglia per ridurre la forte dispersione attorno al suo valore medio.

2.3 Conclusioni

In questo capitolo, abbiamo fornito i dettagli del nostro metodo. In particolare, ci siamo concentrati sulla formulazione delle equazioni utilizzate per adattare la griglia. Le equazioni sviluppate sono state usate per costruire un processo di adattamento della griglia che si basa sul sensore locale e permette di aumentare la precisione nel calcolo di una funzione aerodinamica di interesse. Alcuni risultati rappresentativi sul sensore locale e su quello globale sono riportati nel seguente capitolo.

Capitolo 3

Gerarchia di cinque griglie di tipo C attorno al profilo RAE2822

Prima di presentare la procedura di adattazione (capitolo 4) abbiamo ritenuto di analizzare il comportamento del sensore θ su una gerarchia di cinque griglie. In primis discuteremo le proprietà di θ (paragrafo 3.1), successivamente, metteremo l'accento sul processo di adattazione (paragrafo 3.2).

3.1 Comportamento dei sensori

Con questo paragrafo intendiamo analizzare il comportamento del sensore locale e il criterio di qualità globale.

È interessante studiare il comportamento del sensore su una gerarchia di griglia di cui conosciamo *a priori* il livello di qualità. Sappiamo che a un aumento del numero di punti, senza modificare la topologia, corrisponde un aumento della qualità della soluzione. In questo caso la griglia di livello uno presenta il numero più basso di punti che è però viene incrementato progressivamente fino al livello cinque che corrisponde al più elevato numero punti. Osserviamo che i test da noi effettuati e che sono riportati in seguito indicano chiaramente che il sensore globale proposto presenta valori decrescenti all'aumentare della qualità.

Tabella 3.1: Gerarchia composta da cinque livelli di griglie (Il simbolo * significa che il calcolo è ritenuto troppo costoso)

Level	number of nodes	Cd	Clp	$\theta_1 * 10^{-7}$	$\theta_2 * 10^{-7}$	$\bar{\theta_1} * 10^{-7}$	$\bar{\theta_2} * 10^{-7}$
1	34 848	142.61	0.71837	41.265	61.380	28.659	40.369
2	135 200	123.93	0.73950	5.0184	7.7841	3.3888	5.2250
3	532 512	118.77	0.74988	0.8271	1.0175	0.5411	0.6693
4	2 113 568	118.33	0.75445	0.1861	0.1553	*	*
5	8 421 408	118.29	0.75583	0.0465	0.0203	*	*

Si studia ora il sensore locale $\theta_{i,j}$ sulla gerarchia. Si nota che la sensibilità è situata nelle stesse zone indipendentemente dal livello di griglia. Le zone evidenziate sono:

-La zona a monte.

-La zona superiore allo shock.

-Lo strato limite.

-Il bordo di uscita.

Il fatto che la sensibilità dipenda quindi dalla geometria della griglia, suggerisce che essa può essere ridotta tramite un'adattazione della geometria della griglia.

3.2 Influenza della taglia della griglia nel processo di adattazione

Con questa sezione, studieremo l'effetto del processo di adattazione su una gerarchia di griglie per dimostrare che il metodo è robusto. A questo fine abbiamo realizzato un'adattazione su due livelli di griglia e dimostrato che il nostro metodo è robusto e affidabile perchè tende ad adattare la griglia per il calcolo della funzione obiettivo per ogni griglia iniziale assegnata. I valori numerici delle funzioni in corso di iterazione possono essere recuperati nel rapporto di tesi ufficiale. Di seguito ne riportiamo la parte che concerne l'adattazione di Cd.

Tabella 3.2: Adattazione di Cd sul primo livello di mesh

Iteration	Cd*10^{-4}	Clp	$\bar{\theta_1} * 10^{-7}$	$\bar{\theta_2} * 10^{-7}$
0	142.61	0.71837	28.659	40.369
1	133.90	0.73475	22.552	35.428
2	133.75	0.73478	22.480	36.799
3	133.49	0.73288	21.861	35.713

Tabella 3.3: Adattazione di Cd sul secondo livello di mesh

Iteration	Cd*10^{-4}	Clp	$\bar{\theta_1} * 10^{-7}$	$\bar{\theta_2} * 10^{-7}$
0	123.93	0.73950	3.388	5.225
1	120.02	0.74438	2.431	4.287
2	119.45	0.74189	2.418	4.275
3	119.41	0.74194	2.437	4.203

3.3 Conclusioni

Con questo capitolo, abbiamo mostrato che il sensore globale è in grado di rilevare quando una griglia è più o meno adatta per il calcolo di F e valori decrescenti θ sono calcolati su griglie di qualità crescente ed il criterio locale $\theta_{i,j}$ è in grado di catturare le zone sensibili della griglia. Utilizzando griglie con la stessa topologia ed un diverso numero di punti, questi risultati confermano che il miglioramento della precisione può essere ottenuta ridistribuendo punti secondo la rilevata dai sensori aree locali. Diversi adattamenti per un diverso numero di punti della griglia hanno anche dimostrato che questo metodo è robusto perché consente un miglioramento della precisione della soluzione, anche quando la griglia è grossolana (prima griglia livello). Conclusione sintetica di questo capitolo è che la nostra strategia è affidabile e può effettivamente essere utilizzato per adattare una griglia per calcolare una funzione obiettivo F, come vi mostriamo nel prossimo capitolo.

Capitolo 4

Applicazione RANS attorno al profilo RAE2822

Ora presentiamo i passi del processo di adattazione e due esempi fatti su un profilo RAE2822. Nel capitolo precedente, abbiamo descritto i principi di questo metodo e affrontiamo tutti gli aspetti informatici per applicare il nostro metodo. Nella prima sezione, daremo al lettore una breve descrizione del software utilizzato e dei diversi aspetti e parametri utilizzati nel calcolo. Successivamente daremo evidenza numerica sul processo di adattamento. Prima di iniziare, occorre notare che il presente metodo è progettato per essere applicato a griglie strutturate, quindi l'esplicazione dei parametri numerici utilizzati è rilevante soltanto per questo particolare esempio e farne un'analisi appropriata.

4.1 Processo di adattazione e software

In questo paragrafo vengono date le nozioni base associate ai software da noi utilizzati:

- Il solver CFD che è stato utilizzato per il calcolo di W e Λ è denominato $elsA$. Lo schema utilizzato è lo schema Roe del secondo ordine nello spazio. Questa caratteristica è ottenuta mediante una ricostruzione di stati (MUSCL). Dettagli su questo metodo possono essere trovati in [4]. Il limitatore di flusso utilizzato è quello di van Albada [3].
- Il calcolo dei sensori è stato realizzato tramite un codice realizzato in questo lavoro di tesi e presentato nel capitolo 2 che abbiamo nominato grigliaSensor. Questo programma permette il calcolo di $\theta_{i,j}$, θ e P_k^{adapt}.
- L'ultima tappa del ciclo di adattazione comporta la generazione della nuova griglia. Ciò viene implementato nel codice Lama 3D utilizzando i metodi illustrati in precedenza.

4.2 Esempi di adattazioni su griglie bidimensionali

Vengono ora esposti i risultati numerici. Il criterio che abbiamo usato per fermare le iterazioni si basa sul sensore di qualità. Quando questo non cambia significativamente, fermiamo il processo. Un altro criterio di arresto è basato sull'evoluzione della funzione stimata quando questa non cambia significativamente.

Presentazione del caso test

Il profilo bidimensionale utilizzato per l'esempio di adattamento è il RAE2822. Si tratta di un profilo che viene spesso utilizzato in letteratura per confrontare i risultati. Questo esempio di adattazione viene eseguito su una griglia multi-blocco di circa 135.200 nodi. La dimensione del dominio è circa sessanta volte la lunghezza della corda. $\theta_1 = \theta_1[Cd]$ et $\theta_2 = \theta_2[Cl_p]$ sono le due funzioni obiettivo per le quali vogliamo adattare. Le condizioni adottate sono: Re=6.5 10^6, Mach $M_\infty = 0.725$, e $\alpha = 2.466$. Il modello di turbolenza adottato è quello di Spalart-Allmaras.

Risultati numerici

I risultati sono esposti per $\theta_1 = \theta_1[Cd]$ e $\theta_2 = \theta_2[Cl_p]$:

Tabella 4.1: Esempio di adattazione per Cd θ_1

Iteratione	Cd	Clp	θ_1	θ_2	$Cd_{Sp,rev}$	$Cd_{Sp,irr}$
0	123.93	0.73950	3.3875	5.2251	3.32	2.95
1	120.01	0.74423	2.7638	4.1711	3.42	2.71
2	119.97	0.73999	2.7542	4.1759	3.43	2.78
3	119.46	0.74152	2.8010	4.1881	3.49	2.93

Tabella 4.2: Esempio di adattazione per Clp

Iteratione	Cd	Clp	θ_1	θ_2	$Cd_{Sp,rev}$	$Cd_{Sp,irr}$
0	123.93	0.73950	3.3875	5.2251	3.32	2.95
1	120.87	0.74724	2.8044	3.9498	3.44	2.44
2	120.25	0.74708	2.6995	3.6656	3.49	2.34
3	119.92	0.74756	2.7211	3.6982	3.54	2.37

Queste tabelle mostrano che in entrambi i casi il metodo proposto permette di aumentare la precisione nel calcolo delle due funzioni obiettivo. Si conclude che le griglie vengono effettivamente adattate per il calcolo delle funzioni obiettivo scelte.

4.3 Adattazioni di griglia con una strategia feature-based

Le adattazioni mirate alla risoluzione di caratteristiche fisiche come i vortici e gli urti sono utilizzate in letteratura e prendono il nume di adattazioni feature-based. Una scelta possibile per il rilevamento di queste caratteristiche fisiche potrebbe essere di utilizzare una variabile (pressione, velocità o densità) o una sua derivata come sensore. Questo sensore rileverà zone del campo di moto, caratterizzate da forti valori di queste variabili o delle sue derivate che comportanto discontinuità importanti e che andranno raffinate in una fase successiva. Tra le varie scelte di variabili di flusso, come sensore può essere scelto il gradiente di pressione totale, il gradiente di densità e così via. In questo esempio abbiamo scelto il gradiente del numero di Mach. In questa sezione, intendiamo dare un esempio di adattazione feature-based. Questo studio è stato condotto in parallelo con l'esempio illustrato nella sezione 4.2.

Il criterio θ_{gb} utilizzato per in questo contesto è 4.1

$$\theta_{gb} = ||\nabla M||dX. \tag{4.1}$$

Dove ∇M è calcolato su tutti i nodi.

Prendiamo in conto un volume Ω sul quale integriamo il gradiente di Mach:

$$\int_\Omega \nabla M d\Omega = \int_{\partial\Omega} M \vec{n} d\Gamma. \tag{4.2}$$

$Mach_i$ è calcolato al centro delle cell, e $Mach_{i,j}$ è il valore interpolato sul loro bordo di normale $\vec{n}_{i,j}$

$$\Omega_i \nabla M_i = \sum_j M_{i,j} \overrightarrow{n}_{i,j}. \tag{4.3}$$

Dei valori importanti di θ_{gb} evidenziano le cell dove il gradiente di Mach moltiplicato per metà della distanza dal nodo più vicino presenta valori elevati.

4.3.1 Esempi

Si è proceduto ad un adattamento della stessa griglia iniziale che era stata utilizzata nel caso del metodo da noi proposto in modo da costruire un parallelo esatto tra i due metodi dove la sola differenza sta nelle differenti zone ritenute importanti da un metodo o dall'altro. Si sceglie di adattare seguendo il gradiente del numero di Mach. Si prende quindi:

$$||\nabla M||,$$

e lo si moltiplica per la stessa lunghezza caratteristica $r_{i,j}$ utilizzata per costruire il sensore θ. Osserviamo che il metodo permette una migliore definizione dello shock e dei vortici sul bordo di uscita.

Questo fatto però non è direttamente legato a una buona stima di Cl_p o Cd_p come viene esibito nei risultati numerici.

Tabella 4.3: Adattazione Gradient-based

Iteration	Cd	Cl_p	W
0	123.69	0.73993	2.24255
1	120.268	0.743502	2.13495
2	118.856	0.741779	2.30950
3	117.953	0.738592	2.38660

Feature based (θ_{gb}) Vs Output based (θ)

Il metodo feature based viene adottato per ottenere una migliore risoluzione delle caratteristiche del flusso. Prendiamo il classico esempio dell'onda d'urto. Immaginiamo di partire con una griglia uniforme in cui è stato fatto un calcolo CFD. L'adattazione basata sul gradiente, per esempio, comporterebbe un adattamento intorno all'onda d'urto e una sua migliore risoluzione a discapito della risoluzione di altre zone della griglia. L'aumento di errore associato alla zona a monte viene trasportato a valle per convezione conducendo a una stima erronea della posizione dell'urto, seppur ben risolto. Quindi un metodo basato sul gradiente favorirebbe sicuramente una migliore definizione dell'urto, ma in molti casi questo comporterà un degrado nella stima di altre quantità come la sua posizione, che sono più importanti per la corretta stima del funzione di interesse F.

Certamente, il nostro metodo non presenta questo errore.

4.4 Conclusioni

Osservando i valori delle due funzioni che sono stati calcolati nella mesh di quinto livello si verifica che il metodo da noi costruito conduce effettivamente ad un miglioramento della precisione del calcolo della funzione di interesse F utilizzando il sensore $\theta_{i,j}$. Lo studio è stato condotto su un caso di prova bidimensionale utilizzando le equazioni RANS. La nostra strategia permette di migliorare sia la stima del Cd sia quella del Cl_p, e la sua potenza è stata messa in evidenza grazie al confronto con il metodo feature-based.

Capitolo 5

Studio dei criteri locale e globale in tre dimensioni

5.1 Introduzione

La strategia viene ora estesa a problemi tridimensionali. Abbiamo utilizzato per questo scopo la configurazione XRF1.

Calcolo diretto e adjoint

Questo studio è stato condotto sulla configurazione ala-fusoliera XRF1. I parametri utilizzati per il calcolo sono: $M = 0.83$ e $Re = 49.92 * 10^6$. La griglia utilizzata presenta 21 millioni di punti. Le funzioni scelte per l'adattazione sono Cl_p e Cd.

Si parte dalla constatazione che il numero di punti è sufficiente per una buona predizione delle caratteristiche complessive della corrente in queste condizioni. Si può osservare che il sensore permette di evidenziare per ciascuna funzione selezionata, l'area dove la sensibilità è maggiore. Notiamo anche che la zona a monte viene rilevata come area sensibile per tutte le funzioni.

Dobbiamo ricordare che il sensore è costruito moltiplicando dF/dX per una lunghezza caratteristica. Questo fatto spiega perché la scia sembra essere trascurata, infatti su di essa la griglia iniziale è già abbastanza fine.

Comportamento del sensore θ

Per comprendere il comportamento del sensore θ è necessario sapere che la griglia iniziale presenta aree molto raffinate. In queste aree, il criterio θ ha piccoli valori in ragione di valori piccoli di $r_{i,j}$.

In questo caso è stato ben verificato che la regione a monte del corpo solido è molto importante per avere una buona stima delle due funzioni scelte, come è stato osservato nel caso bidimensionale. Il flusso a monte e la scia giocano il ruolo più importante nella stima delle due funzioni obiettivo.

5.2 Conclusioni

In questo capitolo è stato mostrato il funzionamento del sensore in un caso industriale 3D, dove il costo computazionale è maggiore e la griglia è più sofisticata essendo costituita da più blocchi non conformi.

Conclusioni

L'obiettivo di questo studio era quello di sviluppare una strategia per rispondere alle esigenze di precisione sulla valutazione delle prestazioni aerodinamiche, portanza e resistenza, che sono strettamente legate al consumo di carburante. Per raggiungere l'obiettivo è stato necessario elaborare una strategia che permette questo miglioramento senza aumentare il costo computazionale della soluzione CFD, e che quindi porta ad una ridistribuzione dei punti piuttosto che ad un'aggiunta. La costruzione di un tale metodo è stata preceduta da considerazioni teoriche sulla stabilità di una griglia, come descritto all'inizio del secondo capitolo. In questo stesso capitolo abbiamo descritto passo passo l'aspetto teorico che ha portato alla definizione di un sensore locale $\theta_{i,j}$ utilizzato per rilevare le aree dove è necessario adattare la griglia, e di un sensore locale θ utilizzato per qualificare la griglia. Con il quarto capitolo abbiamo concluso che possiamo usare dF/dX per il nostro scopo. Un algoritmo di adattamento della griglia è stato proposto nel capitolo quattro. Nel capitolo quattro sono stati scelti i coefficienti Cd e Cl_p come funzioni obiettivo e abbiamo confrontato la stima di queste variabili calcolate sulle mesh adattate con i valori calcolati su una mesh otto volte più fine. Il confronto ci ha permesso di verificare che l'adattazione permette di migliorare la precisione di calcolo. Nello stesso capitolo abbiamo fatto un confronto tra il nostro metodo e quello basato sul gradiente del numero di Mach, mostrando i benefici della nostra strategia. Nel quinto capitolo è stato affrontato un caso industriale tridimensionale, che mostra l'affidabilità del metodo proposto anche in casi complessi.

La strategia basata su dF/dX su presta a ulteriori sviluppi migliorativi. Le ipotesi di $\nu_T =$ fissata e di strato limite sottile fatte nel quadro della linearizzazione di $\partial R/\partial W$ provocano un degrado della precisione di dF/dX che può essere evitato con una linearizzazione completa. All'interno della griglia si possono trovare dei punti, come il bordo di uscita, che sono oggetto di particolare attenzione. Questi punti vengono chiamati punti fissi perchè non possono essere mossi in fase di adattazione della griglia per preservare la forma dell'oggetto. Essi costituiscono pertanto un limite geometrico perchè riducono le opportunità di adattazione. Esistono tuttavia dei metodi sofistiati che permettono il movimento della griglia in questi punti preservando la forma dell'oggetto solido. La maggior disponibilità di movimento della griglia si traduce in un aumento delle prestazioni del metodo di adattazione.

Bibliografia

[1] Allmaras Spalart. A one equation turbulence model for aerodinamic flows. *AIAA journal*.

[2] Stephanus Petrus Spekreijse. Elliptic grid generation based on laplace equations and algebraic transformations. *Journal of Computational Physics*, 1995.

[3] GD Van Albada, B Van Leer, and WW Roberts Jr. *A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics*. 1997.

[4] Bram Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov's method. *Journal of computational Physics*, 1979.