

**POLITECNICO DI MILANO**

**I Scuola di Ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale**

**Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile**

**Orientamento Strutture**



**IDENTIFICAZIONE SPERIMENTALE DEL  
COMPORTAMENTO A TRAZIONE DI CALCESTRUZZI  
FIBRORINFORZATI:**

**CONFRONTO FRA METODI DI MISURA TRADIZIONALI E  
DIGITAL IMAGE CORRELATION**

**Relatore: Prof. Ing. Liberato Ferrara**

**Correlatore: Ing. Marco Lamperti**

**Tesi di laurea di: Lorenzo Elli**

**Matricola: 734595**

**ANNO ACCADEMICO 2012-2013**



*Alla mia famiglia*



# *INDICE*

<i>INDICE DELLE FIGURE .....</i>	<i>VIII</i>
<i>INDICE DELLE TABELLE.....</i>	<i>VIII</i>
<i>ABSTRACT.....</i>	<i>XV</i>
<i>ABSTRACT (in lingua inglese).....</i>	<i>XVII</i>
<i>1 - IL CALCESTRUZZO FIBRORINFORZATO.....</i>	<i>19</i>
<i>1.1 Proprietà e Caratteristiche .....</i>	<i>21</i>
<i>1.1.1 La matrice cementizia.....</i>	<i>23</i>
<i>1.1.2 Le fibre.....</i>	<i>25</i>
<i>1.1.3 L'interfaccia Fibra - Matrice.....</i>	<i>29</i>
<i>1.2 Classificazione del calcestruzzo fibrorinforzato .....</i>	<i>31</i>
<i>1.3 Comportamento fessurativo .....</i>	<i>41</i>
<i>1.3.1 Le fessure.....</i>	<i>42</i>
<i>1.3.2 Meccanismi di rottura.....</i>	<i>44</i>
<i>1.4 Comportamento meccanico e sua identificazione sperimentale.....</i>	<i>49</i>
<i>1.4.1 Trazione diretta uniassiale (Direct Tensile Test).....</i>	<i>49</i>
<i>1.4.2 Trazione indiretta (prova brasiliana).....</i>	<i>51</i>

---

1.4.3	<i>Trazione indiretta per flessione</i> .....	55
1.4.4	<i>Wedge Splitting Test</i> .....	57
<b>1.5</b>	<b><i>Il Double Edge Wedge Splitting Test</i></b> .....	<b>62</b>
1.5.1	<i>Descrizione del test</i> .....	62
1.5.2	<i>Che cos'è un LVDT</i> .....	66
<b>2</b>	<b><i>- DIGITAL IMAGE CORRELATION</i></b> .....	<b>68</b>
2.1	<i>Cenni Storici</i> .....	70
2.2	<i>Il Problema dell' Image Matching</i> .....	72
2.2.1	<i>Metodo Differenziale</i> .....	74
2.2.2	<i>L'algoritmo di Lucas-Kanade</i> .....	77
2.2.3	<i>Funzioni di forma</i> .....	78
2.2.4	<i>Interpolazione sub-pixel</i> .....	80
2.3	<i>Calcolo delle deformazioni</i> .....	83
<b>3</b>	<b><i>- ATTIVITA' SPERIMENTALE SVOLTA</i></b> .....	<b>84</b>
3.1	<i>Preparazione dei campioni</i> .....	85
3.2	<i>Esecuzione Prove Meccaniche</i> .....	89
3.3	<i>Elaborazione delle immagini digitali</i> .....	92
3.3.1	<i>Modifica delle immagini</i> .....	92
3.3.2	<i>Calcolo degli spostamenti</i> .....	94
<b>4</b>	<b><i>- RISULTATI SPERIMENTALI</i></b> .....	<b>95</b>
4.1	<i>Confronto tra i valori di COD registrati</i> .....	96

<b>4.2</b>	<b><i>Analisi dei risultati sperimentali ottenuti</i></b> .....	<b>105</b>
<b>4.3</b>	<b><i>Casi Particolari</i></b> .....	<b>121</b>
4.3.1	<i>Pura Rotazione Fuori Piano</i> .....	121
4.3.2	<i>Fessurazione all'esterno della zona di rilevazione</i> .....	123
<b>4.4</b>	<b><i>Digital Image Correlation</i></b> .....	<b>125</b>
4.4.1	<i>Campione 112-L2</i> .....	125
4.4.2	<i>Campione 111-C2</i> .....	129
<b>5 -</b>	<b><i>CONCLUSIONI</i></b> .....	<b>137</b>
<b>APPENDICE</b>	.....	<b>140</b>
<b>RINGRAZIAMENTI</b>	.....	<b>190</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	.....	<b>192</b>

# INDICE DELLE FIGURE

<i>Figura 1.1: Confronto tra il comportamento a trazione di un normale calcestruzzo (Plain Matrix), un fibrorinforzato (Conventional FRC) ed un fibrorinforzato ad alte prestazioni (HPFRC) [3] .....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 1.2: Comportamento a compressione di un FRC in funzione della percentuale di fibre.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 1.3: Comportamento a trazione di un FRC in funzione della percentuale di fibre.....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 1.4: Varie tipologie di fibre: macrofibre di acciaio (a), fibre di polipropilene (b), fibre di vetro(c), macrofibre sintetiche (d), microfibre di polipropilene (e) e di acciaio (f). .....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 1.5: Classificazione del composto secondo la dispersione nella pasta cementizia [3] .....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 1.6: Varie tipologie di fibre: indeformate (a) ed uncinata (b) [3] .....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 1.7: Incremento di aderenza delle fibre in funzione della loro forma [43].....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 1.8: Schema di interfaccia tra fibre a matrice cementizia .....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 1.9: Tipica curva sforzo-deformazione di un comportamento “strain-hardening” (a); Tipica curva sforzo-COD relativa di comportamento “strain-softening”(b) [17] .....</i>	<i>31</i>
<i>Figura 1.10: Differenti tipologie di comportamento in fase post-fessurativa in funzione del tipo di sollecitazione .....</i>	<i>32</i>
<i>Figura 1.11: Schema riassuntivo delle principali risposte per i composti FRC [19].....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 1.12: Informazioni richieste sul diagramma sforzo deformazione per la classificazione di FRC.....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 1.13: Diverse classi di fibrorinforzati composti dalla risposta strain-hardening. ....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 1.14: Curva tipica carico-CMOD per calcestruzzi fibrorinforzati.....</i>	<i>36</i>
<i>Figura 1.15: Comportamento flessionale softening e relative aperture di fessura equivalenti secondo il model code 2010 .....</i>	<i>36</i>
<i>Figura 1.16: Generica curva Sforzo –CMOD e corrispondente legame costitutivo semplificato .....</i>	<i>37</i>



<i>Figura 1.17: Legame costitutivo a trazione pre-picco per calcestruzzo bianco e post-picco per calcestruzzi fibrorinforzati secondo il model code 2010.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 1.18: Possibili modelli di legame costitutivo sforzo- deformazione a trazione per FRC secondo il model code 2010 .....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 1.19: Classificazione dei calcestruzzi fibrorinforzati secondo il model code 2010.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 1.20: Fasi del processo di frattura di un calcestruzzo fibrorinforzato .....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 1.21: Diverse zone costituenti una frattura e la relativa distribuzione degli sforzi .....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 1.22: Rappresentazione delle zone costituenti una frattura nel FRC e la relativa distribuzione di sforzi (a); Distribuzione degli sforzi tra matrice cementizia e fibra in funzione dell'apertura di fessura (b) [9] .....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 1.23: Meccanismi di assorbimento di energia delle fibre [25].....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 1.24: Possibili stati di sforzo lungo la fibra di rinforzo (a); Diagramma di Pull – out (b) [3].....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 1.25: Risposta di Pull-out per differenti tipologie di fibre: rettilinea (a) ed uncinata (b).....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 1.26: Particolare di una fibra genericamente orientata soggetta a flessione e taglio (a); Grafico dell'efficienza della fibra in funzione dell'inclinazione (b) [3] .....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 1.27: Schema di un provino di un test DDT (a); Esecuzione di un test DDT (b) .....</i>	<i>50</i>
<i>Figura 1.28: Schema ed esecuzione di un test di trazione indiretta (“prova brasiliana”).....</i>	<i>51</i>
<i>Figura 1.29: Determinazione delle sollecitazioni in un cilindro sottoposto ad una prova brasiliana (a); Distribuzione delle sollecitazioni orizzontali nel piano di carico (b); Punto di massima sollecitazione dovuto a carichi concentrati su due generatrici diametralmente opposte (c) [5].....</i>	<i>52</i>
<i>Figura 1.30: Tipica curva P-COD ottenuta con i test di trazione indiretta. Modello strut-and-tie utilizzato per lo studio del regime pre-cracking(a); Propagazione della trazione nel regime post-picco(b), Situazione finale nel campione (c); Modello strut-and-tie per lo stato finale del cilindro.....</i>	<i>54</i>
<i>Figura 1.31: Prova indiretta per flessione: 3 point bending test (a) e 4 point bending test (b) .....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 1.32: Esempi di grafico Crack-COD per una prova a flessione.....</i>	<i>56</i>
<i>Figura 1.33: Schema di un provino secondo la norma UNI 11039 (a); Intaglio nella sezione (b).....</i>	<i>56</i>
<i>Figura 1.34: Significato grafico dei valori U1 ed U2.....</i>	<i>57</i>

<i>Figura 1.35: Possibili geometrie per provini di un di un test WTS.....</i>	<i>58</i>
<i>Figura 1.36: Fasi di configurazione di un wedge splitting test: provino su supporto lineare (a); sistemazione dei due dispositivi dotati di rulli (b); applicazione del cuneo nella scanalatura tra i rulli (c).....</i>	<i>58</i>
<i>Figura 1.37: Schema statico per un Wedge Splitting Test: vista frontale (a) e laterale (b).Esecuzione del test su provino cilindrico (c) .....</i>	<i>59</i>
<i>Figura 1.38: Due differenti curve sforzo-deformazione restituite dal test. ....</i>	<i>60</i>
<i>Figura 1.39: Grafici ottenuti tramite i due approcci di base per l'analisi inversa del Wedge Splitting Test.....</i>	<i>61</i>
<i>Figura 1.40: Analogia tra il wedge splitting test e il three point bending test (a); analogia tra il DEWS test e il direct tension test con rotazione (b); Geometria del provino per il DEWS test (c) [9].....</i>	<i>63</i>
<i>Figura 1.41: Geometria e schema di distribuzione delle forze nel Double Edge Wedge Splitting Test .....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 1.42: Schema di un provino con LVDT con geometria corrispondente ai test preliminari eseguiti (a) [9]; Fotogramma preso durante l'esecuzione di una prova (b) [14].....</i>	<i>65</i>
<i>Figura 1.43: Generico schema interno di un LVDT (a); Immagine di un LVDT (b) .....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 2.1: Problema dell'apertura. Il primo punto può corrispondere ad un qualunque punto della linea (a). L'apertura è stata allargata includendo gli estremi della linea. Il vettore di moto è ora unicamente definito (b) [37] .....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 2.2: Alcuni esempi di "speckle patterns" [37] .....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 2.3: Stima di un problema di movimento monodimensionale con il metodo differenziale .....</i>	<i>75</i>
<i>Figura 2.4: Fenomeno della decorrelazione in funzione dell'angolo di rotazione [37].....</i>	<i>80</i>
<i>Figura 2.5: Attenuazione dell'ampiezza(a) ed dell'errore di posizione(destra) dei vari filtri di interpolazione [37].....</i>	<i>81</i>
<i>Figura 2.6: Confronto dei risultati della simulazione e previsione teorica del rumore indotto. Algoritmo DIC e polinomiale cubica di interpolazione (a). Confronto tra algoritmo di interpolazione polinomiale cubica e algoritmo utilizzando un filtro ottimizzato (b) [37].....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 3.1: Schema di taglio dei campioni oggetto di studio .....</i>	<i>85</i>

<i>Figura 3.2: Mix design utilizzati per il confezionamento del calcestruzzo fibrorinforzato</i> .....	86
<i>Figura 3.3: Esempio di un campione predisposto con pattern e mire strumentali (a); Ingrandimento del pattern (b)</i> .....	88
<i>Figura 3.4: Pressa servo-controllata INSTRON modello 8562</i> .....	89
<i>Figura 3.5: Esempio di un campione pronto all'esecuzione di una prova DEWS</i> .....	90
<i>Figura 3.6: Esecuzione di una prova DEWS con l'utilizzo delle tecniche di Digital Image Correlation</i> .....	91
<i>Figura 3.7: Istogramma e curva di tono dell'immagine originale (a) e della stessa ritoccata (b)</i> .....	93
<i>Figura 3.8: Esempio di fotogramma catturato durante una prova DEWS (a); Esempio dello stesso fotogramma elaborato nella fase preparazione col software Rawtherapee (b)</i> .....	94
<i>Figura 3.0.9: Porzione di "speckle pattern" prima (a) e dopo (b) la modifica con Rawtherapee</i> .....	94
<i>Figura 4.1: Rilevazione delle aperture di fessura tramite tecniche di Digital Image Correlation</i> .....	96
<i>Figura 4.2: Confronto dei valori di COD registrati per il campione 111-C2</i> .....	97
<i>Figura 4.3: Immagini della prova meccanica eseguita sul campione 111-C2; all'inizio della prova (a) ed in fase finale (b)</i> .....	98
<i>Figura 4.4: Confronto dei valori di COD registrati per il campione 111-L2</i> .....	99
<i>Figura 4.5: Regressione lineare (a) e scarti (b) per il campione 112-L2</i> .....	101
<i>Figura 4.6: Regressione lineare (a) e scarti (b) per il campione 111-L3</i> .....	101
<i>Figura 4.7: Errore Medio ed Errore di Regressione standard per i campioni analizzati</i> .....	103
<i>Figura 4.8: Grafico Sforzo-COD per il campione 221-L3</i> .....	104
<i>Figura 4.9: Grafico Sforzo-COD per il campione 111-C2</i> .....	105
<i>Figura 4.10: Grafico Sforzo-COD per il campione 111-L2</i> .....	106
<i>Figura 4.11: Grafico Sforzo-COD per il campione 112-R3</i> .....	106
<i>Figura 4.12: Immagini al termine della prova per il campione 112-R3; vista frontale (a), vista dall'alto (b) e vista posteriore (c)</i> .....	107
<i>Figura 4.13: Test di Pearson per il campione 112-R3</i> .....	109
<i>Figura 4.14: Test di Pearson per il campione 111-L2</i> .....	109
<i>Figura 4.15: Deformazioni nel piano misurate per il campione 111-L2</i> .....	111
<i>Figura 4.16: Deformazioni nel piano misurate per il campione 112-L2</i> .....	111
<i>Figura 4.17: Deformazioni fuori piano misurate per il campione 111-C2</i> .....	112

---

<i>Figura 4.18: Deformazioni fuori piano misurate per il campione 111-L2.....</i>	<i>112</i>
<i>Figura 4.19: Confronto di deviazioni standard dentro e fuori dal piano per il campione 111-L2 ...</i>	<i>114</i>
<i>Figura 4.20: Andamento delle rotazioni prevalenti per il campione 111-L2.....</i>	<i>114</i>
<i>Figura 4.21: Esempio di grafico <math>\sigma</math>-<math>\epsilon/w</math> per il campione 111-L2.....</i>	<i>115</i>
<i>Figura 4.22: Correlazione tra tensione di picco e dispersione delle fibre.....</i>	<i>116</i>
<i>Figura 4.23: Campioni con minimo (a) ed elevato (b) indice di fibre.....</i>	<i>117</i>
<i>Figura 4.24: Correlazione tra dispersione delle fibre e tensione residua a 0,25 mm di apertura .....</i>	<i>117</i>
<i>Figura 4.25: Correlazione tra dispersione delle fibre e tensione residua a 1,25 mm di apertura .....</i>	<i>118</i>
<i>Figura 4.26: Correlazione tra dispersione delle fibre e tensione residua a 2,5 mm di apertura .....</i>	<i>119</i>
<i>Figura 4.27: Correlazione tra dispersione delle fibre e tensione di prima fessurazione.....</i>	<i>119</i>
<i>Figura 4.28: Correlazione tra <math>t</math> dispersione delle fibre e l'apertura di picco .....</i>	<i>120</i>
<i>Figura 4.29: Immagini al termine della prova per il campione 221-C1; vista frontale (a), vista dall'alto (c) e vista posteriore (c).....</i>	<i>121</i>
<i>Figura 4.30: Grafico Sforzo-COD per il campione 221-C1 .....</i>	<i>122</i>
<i>Figura 4.31: Grafico Sforzo-Tempo per il campione 221-C1 .....</i>	<i>122</i>
<i>Figura 4.32: Immagini al termine della prova per il campione 112-C2; vista frontale (a), vista dall'alto (c) e vista posteriore (c).....</i>	<i>123</i>
<i>Figura 4.33: Regressione lineare (a) e scarti (b) per il campione 112-C2.....</i>	<i>123</i>
<i>Figura 4.34: Grafico Sforzo-COD per il campione 112-C2.....</i>	<i>124</i>
<i>Figura 4.35: Confronto tra le deviazioni standard dentro e fuori dal piano per il campione 112- C2.....</i>	<i>124</i>

## ***INDICE DELLE TABELLE***

<i>Tabella 3.1: Schema riassuntivo dei campioni oggetto di studio .....</i>	<i>86</i>
<i>Tabella 3.2: Informazioni dimensionali dei singoli campioni .....</i>	<i>87</i>
<i>Tabella 4.1: Risultati degli errori relativi a Digital Image Correlation.....</i>	<i>102</i>



## ***ABSTRACT***

Nella sua storia ormai cinquantennale il calcestruzzo fibrorinforzato ha subito un notevole sviluppo in termini prestazionali come conseguenza di una evoluzione delle tecniche di confezionamento e dei materiali utilizzati. Anche i metodi per la verifica delle sue caratteristiche meccaniche hanno quindi dovuto adeguarsi alla crescita di questo materiale. Uno degli ultimi test introdotti dal Politecnico di Milano per la verifica della resistenza a trazione è il *Double Edge Wedge Splitting Test* (D.E.W.S. Test), letteralmente traducibile come “prova di spacco a doppio incuneamento”. Questa prova prevede la misurazione del *Crack Opening Displacement* (C.O.D.), ovvero dell’apertura di fessurazione in funzione dell’applicazione di un carico crescente di compressione. Tale carico genera, data la particolare geometria del campione, una tensione di trazione trasversale che porta alla fessurazione del materiale .

L’idea di questo lavoro sarà di analizzare i risultati sperimentali derivanti da tali prove combinandoli con le rilevazioni acquisite durante lo svolgimento delle stesse tramite *Digital Image Correlation* (D.I.C). Quest’ultima tecnologia è una tecnica “full-field image” che si basa sui valori di grigio di un’immagine digitale e che può determinare le deformazioni e gli spostamenti (tridimensionali e bidimensionali) di un oggetto sottoposto a sollecitazione. Si mostrerà come allo stato attuale è possibile ottenere ottimi riscontri anche con l’utilizzo di una fotocamera dotata di sufficiente risoluzione. Effettuato uno studio sulla precisione applicativa di tale tecnica si cercherà di costruire una procedura che consenta un’analisi matematica dei valori meccanici registrati. Lo scopo sarà di ottenere senza un onere computazionale particolarmente complesso dei parametri che ci permettano di definire il comportamento riscontrato nel materiale.





## ***ABSTRACT***

In its fifty-year history of the FRC has undergone a remarkable development in terms of performance as a result of an evolution of the packaging techniques and materials used. Also, methods for the verification of its mechanical characteristics have therefore had to adapt to the growth of this material. One of the last test introduced by the Politecnico di Milano to test the tensile strength is the Double Edge Wedge Splitting Test (Test DEWS). This test involves measuring the Crack Opening Displacement (COD ) as a function of the application of an increasing load of compression. This load generates, given the particular geometry of the specimen, a tensile stress transverse that leads to cracking of the material.

The idea of this work is to analyze the experimental results arising from these tests by combining them with the measurements obtained during the execution of the same by the Digital Image Correlation (DIC) . This latter technology is a technique " full-field image " that is based on the gray values of a digital image and which can determine the deformations and displacements ( three-dimensional and two-dimensional ) of an object subjected to stress . We show you how at present you can get excellent results with the use of a camera equipped with sufficient resolution. Carried out a study on precision application of this technique will try to build a procedure that allows a mathematical analysis of the mechanical values recorded. The aim will be to obtain without a particularly complex computational burden of the parameters that allow us to define the behavior found in the material.

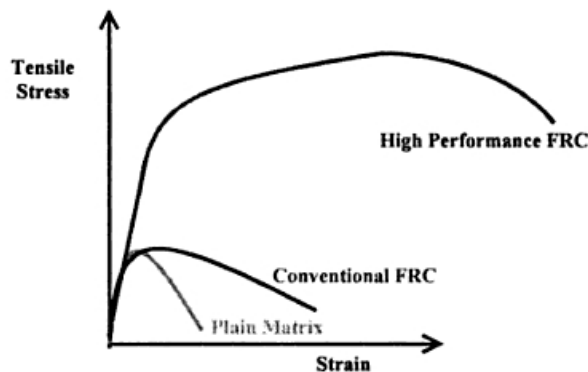


# 1

## ***IL CALCESTRUZZO FIBRORINFORZATO***

**N**ato agli inizi degli anni '60 il calcestruzzo fibrorinforzato ha col tempo acquistato sempre maggior importanza e diffusione, fino a diventare ai nostri giorni una importante e diffusa realtà nel mondo delle costruzioni. Fu denominato *Fibre Reinforced Concrete (FRC)*, perché nell'impasto cementizio di un normale calcestruzzo venivano disperse in maniera casuale delle fibre corte con l'intento di migliorarne la duttilità ed il comportamento a trazione [1]. Queste proprietà erano note fin dai tempi antichi; basti pensare alla paglia o ai crini di cavallo che venivano aggiunti all'argilla per formare mattoni e componenti per pavimentazioni. Nella tecnologia moderna le fibre di acciaio sono state per la prima volta proposte come rinforzo in dispersione all'interno del calcestruzzo da Romualdi e Batson nel 1963 e da Romualdi e Mandel nel 1964. Inizialmente, si era ipotizzato che fibre aumentassero la resistenza alla trazione dei compositi, al contrario Shah e Rangan (1971) hanno osservato che l'influenza principale delle fibre si verifica nella fase successiva allo sviluppo delle fessure. Da allora il calcestruzzo fibrorinforzato ha subito notevoli miglioramenti dovuti all'ampia sperimentazione di cui è stato oggetto e all'incremento delle capacità tecnologiche. Una delle innovazioni che portò alla decisiva

diffusione del nuovo prodotto è legata allo sviluppo degli additivi chimici, in grado di migliorare la lavorabilità della miscela fresca senza il bisogno di utilizzare eccessivi rapporti acqua/cemento che avrebbero compromesso la resistenza a compressione del materiale. Dal fibrorinforzato è stata poi derivata una categoria di composti cementizi denominati *High Performance Fibre Reinforced Concrete (HPFRC)*, i calcestruzzi fibrorinforzati ad alte prestazioni, caratterizzati da maggiori resistenze e capacità di dispersione energetica. L'avanzamento tecnologico ha portato anche ad una evoluzione delle fibre disponibili rispetto al passato; ora i materiali possibili sono diversi (sia di stampo siderurgica sia sintetica) e di diverse geometrie. Le fibre sintetiche va sottolineato che esse aumentano l'efficacia del rinforzo e riducono i problemi di corrosione.



*Figura 1.1: Confronto tra il comportamento a trazione di un normale calcestruzzo (Plain Matrix), un fibrorinforzato (Conventional FRC) ed un fibrorinforzato ad alte prestazioni (HPFRC) [3]*

Per queste sue caratteristiche il calcestruzzo fibrorinforzato è attualmente utilizzato diffusamente in tutte quelle costruzioni in cui si vuole limitare la fessurazione della matrice cementizia per effetto del ritiro o dei carichi esterni. Tra le applicazioni più diffuse possiamo quindi citare le pavimentazioni, sia industriali sia commerciali, dove le fibre metalliche si sono dimostrate efficaci nel sostituire la rete elettrosaldata comunemente impiegata. Un suo altro importante ambito di diffusione è sicuramente il mondo della prefabbricazione, per cui si adatta notevolmente alla costruzione di vari componenti quali cabine, tubazioni, frangiflutti, plinti di fondazione, pannelli murari, pozzetti per acquedotti ed elementi di copertura [10]. Anche il settore delle gallerie vede una sua ampia utilizzazione, nelle opere provvisorie così come nei rivestimenti finali (conci prefabbricati per i rivestimenti di gallerie idrauliche, stradali, ferroviarie e metropolitane). Ulteriore applicazione di questo materiale sono i calcestruzzi refrattari progettati per resistere a forti stress termici e per la produzione di barriere autostradali note come “new-jersey” a scopo di aumentarne la resistenza all’urto.

## 1.1 Proprietà e Caratteristiche

Il calcestruzzo fibrorinforzato, o FRC, è un conglomerato cementizio il cui impasto vede l'aggiunta di fibre al posto del tradizionale rinforzo con barre di acciaio. Tali fibre, a differenza delle barre d'acciaio di un normale calcestruzzo, non hanno la specifica funzione di aumentare la resistenza intrinseca della matrice cementizia, ma danno il loro contributo al fine di migliorare il comportamento post-fessurativo del materiale accrescendone la duttilità<sup>1</sup> e la capacità di controllo di apertura delle fessure. Un adeguato dosaggio di fibre infatti, soprattutto se di tipo metallico, può influenzare il comportamento sforzo-deformazione di un provino sottoposto ad una prova di schiacciamento rendendo più lunga e meno ripida la fase discendente della curva (il cosiddetto ramo degradante o di *softening*); così come mostrato in Fig. 1.2.

La resistenza a compressione del conglomerato non subisce tuttavia un vantaggio netto dalla presenza del rinforzo fibroso. Un evidente miglioramento si riscontra invece nel comportamento a trazione del materiale dove l'aggiunta di fibre, come già detto, aumenta la duttilità del conglomerato e la sua capacità di resistere alla propagazione delle fessure (tenacità).

Nella fase precedente all'innescio del fenomeno fessurativo il rinforzo fibroso non comporta significativi vantaggi; basti pensare a grandezze come il modulo elastico a trazione ( $E_t$ ) e la

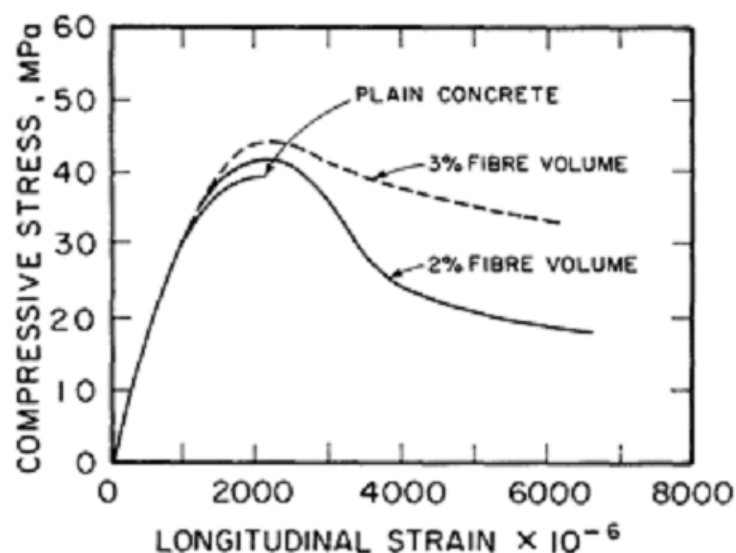


Figura 1.2: Comportamento a compressione di un FRC in funzione della percentuale di fibre

<sup>1</sup> La **duttilità** è una proprietà fisica della materia che indica la capacità di un corpo o di un materiale di assorbire energia e deformarsi plasticamente sotto carico prima di giungere a rottura.

deformazione in corrispondenza dell'innescò della fessura ( $\varepsilon_f$ ), che non vengono di fatto modificate. Le fibre svolgono quindi un "effetto di cucitura" delle aperture creando una sorta di ponte di collegamento (denominato *crack-bridging*) tra i lembi delle fessure stesse. Grazie a questo effetto la fibra garantisce al calcestruzzo una resistenza residua a trazione anche in fase post-fessurata consentendo il passaggio degli sforzi di trazione tra i due lembi delle aperture.

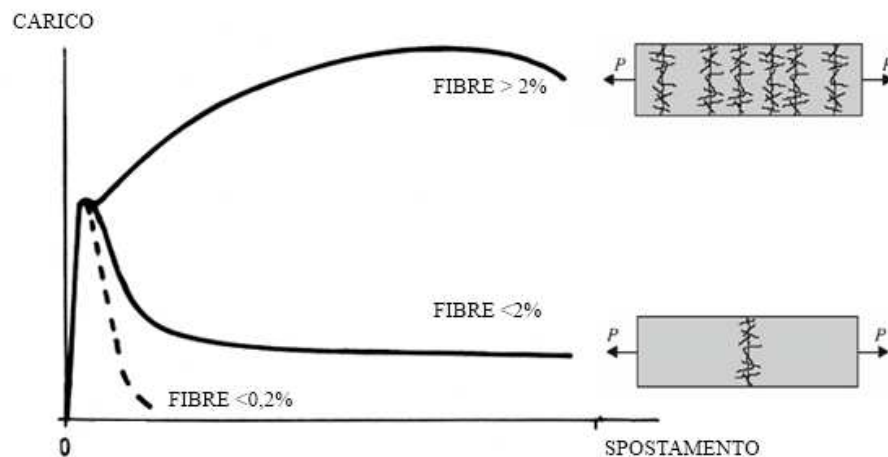


Figura 1.3: Comportamento a trazione di un FRC in funzione della percentuale di fibre

Il comportamento dei calcestruzzi fibrorinforzati è rappresentabile in un diagramma denominato "stress vs crack opening displacement (COD)" che mette in relazione la forza o lo sforzo applicato con l'apertura delle fessure riscontrate. Durante una prova di carico a trazione su un elemento in fibrorinforzato si hanno tre diversi comportamenti post-picco a seconda del contenuto di fibre (Fig. 1.3):

- 1) La rottura avviene immediatamente dopo il raggiungimento della resistenza massima con la propagazione di una singola frattura. In questo caso le fibre non riescono a evitare la propagazione instabile della fessura poiché la tensione trasmessa dalla matrice è superiore alla resistenza delle fibre stesse. Il ramo della curva è degradante (*softening*) ed è tipico di un quantitativo basso di fibre ( $< 0,2\%$ ) e di un composto fragile;
- 2) L'aumento della quantità di fibre non modifica la modalità di rottura locale, ma la propagazione delle fessure è controllata dalle fibre presenti nella matrice che si manifesta con una resistenza non nulla. Graficamente si avrà una rapida perdita di resistenza fino a giungere ad un assestamento verso un valore residuo costante. Il comportamento è quasi

fragile e si ha per un contenuto medio di fibre (con percentuali comprese tra lo 0,2 e 1-2%). Dopo l'innesco della frattura il materiale è in grado di sopportare sollecitazioni a trazione a patto che queste siano inferiori a quelle che hanno portato alla prima fessurazione del materiale. In questo caso nei provini si vede la formazione di un'unica frattura che aumenta progressivamente di ampiezza fino al collasso;

- 3) Aumentando ancora il contenuto di fibre (> 2%) si può superare il carico a rottura della matrice e incrementare ulteriormente la resistenza fino a raggiungere un valore costante. Il comportamento del materiale sarà perciò duttile ed aumenterà la dispersione di energia dovuta alla redistribuzione degli sforzi tra matrice e fibre. Il comportamento multifessurativo è definito in letteratura come *hardening*, e il calcestruzzo in grado di garantirlo prende il nome di HPFRC (*high performance fiber reinforced concrete*) o UHPFRC (*ultra high performance fiber reinforced concrete*) nel caso esso abbia la capacità di resistere a sforzi di compressione superiori a 150 N/mm<sup>2</sup>. Ne consegue l'innesco di una multifessurazione stabile fino all'innesco di una propagazione instabile di una singola fessura.

I diversi comportamenti del calcestruzzo fibrorinforzato dipendono com'è facilmente deducibile dalla sua struttura interna e dalle modalità tecnologiche di confezionamento [3] [8].

Nel seguito del lavoro verranno quindi analizzate nel dettaglio le tre componenti principali costituenti il composito; ovvero la matrice cementizia, le fibre e l'interfaccia fibre-matrice.

### 1.1.1 La matrice cementizia

La matrice cementizia di un elemento FRC non ha grandi differenze rispetto a quella di un comune calcestruzzo; in entrambe gli elementi principali sono costituiti da cemento Portland, acqua e aggregati di varie dimensioni. In generale sono le particolari richieste di resistenza, compattezza e lavorabilità che l'elemento finito dovrà soddisfare a far dipendere la scelta delle qualità dei singoli componenti. Se si vorrà prediligere la compattezza del prodotto si andranno ad

utilizzare aggregati a granulometria fine, che contribuiranno a creare un materiale più omogeneo e quindi maggiormente resistente a trazione. Inconveniente di tale scelta sarà la conseguente diminuzione della lavorabilità dell'impasto che può essere però migliorata aumentando il rapporto acqua/cemento; il tutto tenendo ben presente che questo rapporto influisce sulla resistenza a compressione. Come già menzionato in precedenza, questo problema è stato risolto dall'introduzione dai primi anni '70 di additivi chimici fluidificanti e superfluidificanti, che migliorano le proprietà allo stato fresco senza compromettere le caratteristiche del prodotto finito. Grande importanza hanno assunto negli anni in questo ambito i calcestruzzi autocompattanti (CSS) che, oltre a presentare il vantaggio di non aver bisogno di essere vibrati, sono in grado di gestire anche una grande quantità di fibre portando comunque ad una distribuzione omogenea senza fenomeni di segregazione.

Altra miglioria può essere compiuta, abbattendo anche i costi di produzione, sostituendo parte del cemento con aggregati minerali in particolato fine o con materiale pozzolanico come la loppa d'altoforno, la cenere volante e il fumo di silice che, oltre ad essere fini, durante il processo d'idratazione trasformano la calce  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ , altamente alcalina, in gel C-S-H (silicati di calcio idrati) responsabile della resistenza meccanica del calcestruzzo, creando così compositi UHPFRC (*Ultra High Performance Fibre Reinforced Concrete*) [16] [17]. Anche le modalità di confezionamento della matrice influenzano l'efficienza del rinforzo dato dalle fibre inserite nell'impasto. Nel caso di grossi volumi di fibre lunghe, infatti, esse hanno la tendenza a raggrupparsi in grovigli (*fiber balling*) che compromettono l'omogeneità di diffusione all'interno dell'impasto e possono anche ostacolare alcune fasi del procedimento di getto. La soluzione al fenomeno indicato consiste nel produrre una matrice maggiormente viscosa e introdurre le fibre gradualmente controllando la velocità di miscelazione. Utilizzando appieno le tecnologie produttive odierne si è inoltre in grado di ottenere una categoria di HPFRC che prende il nome di SIFCON (*Slurry Infiltrated Concrete*), nel quale all'interno della matrice è introdotta tramite sifonatura un reticolo di rinforzo costituito da una percentuale di fibre superiore al 20% senza correre il rischio di accumuli [7].



### 1.1.2 Le fibre

Esistono innumerevoli tipologie di fibre da poter utilizzare per la produzione di un calcestruzzo fibrorinforzato; esse possono essere classificate in base al materiale, alle caratteristiche chimiche/fisiche, alle caratteristiche meccaniche ed alla geometria [3] [18]. Per quanto riguarda l'efficienza delle stesse come rinforzo generalmente sono considerati determinanti alcuni parametri nel seguito elencati:

- La *lunghezza* ed il *diametro* delle fibre;
- Il *diametro equivalente*, ossia il diametro del cerchio equivalente alla sezione della fibra considerata;
- Il *rapporto d'aspetto*, definito come rapporto tra la lunghezza e il diametro della fibra. Esso influenza il trasferimento degli sforzi tra la matrice cementizia e la fibra stessa; è anche uno dei fattori responsabili della lavorabilità allo stato fresco;
- La *percentuale volumetrica* rispetto al totale (compresa di solito tra 0,2% e 2%), da cui dipende la distanza relativa tra le fibre all'interno del composito e quindi la diffusione dello sforzo che porta a livello macroscopico all'identificazione del comportamento di rottura (fragile o duttile);
- La *resistenza a trazione*, il *modulo elastico* e il *comportamento a rottura* che determinano il quantitativo di energia dissipata in fase fessurativa;
- La *rugosità* della superficie e la *sagomatura*, che vanno ad incidere sulla qualità del contatto meccanico tra matrice-fibra e determinano il meccanismo di pull-out.

Classificazione primaria può essere senz'altro considerata quella in funzione del materiale costituente. L'aggiunta di un diverso tipo di materiale all'impasto cementizio conferisce diverse proprietà ed un diverso comportamento all'elemento fibrorinforzato. I principali materiali costituenti le fibre sono:

- acciaio: in questo caso si parla di calcestruzzo rinforzato con fibre di acciaio (*Steel Fiber Reinforced Concrete o SFRC*);

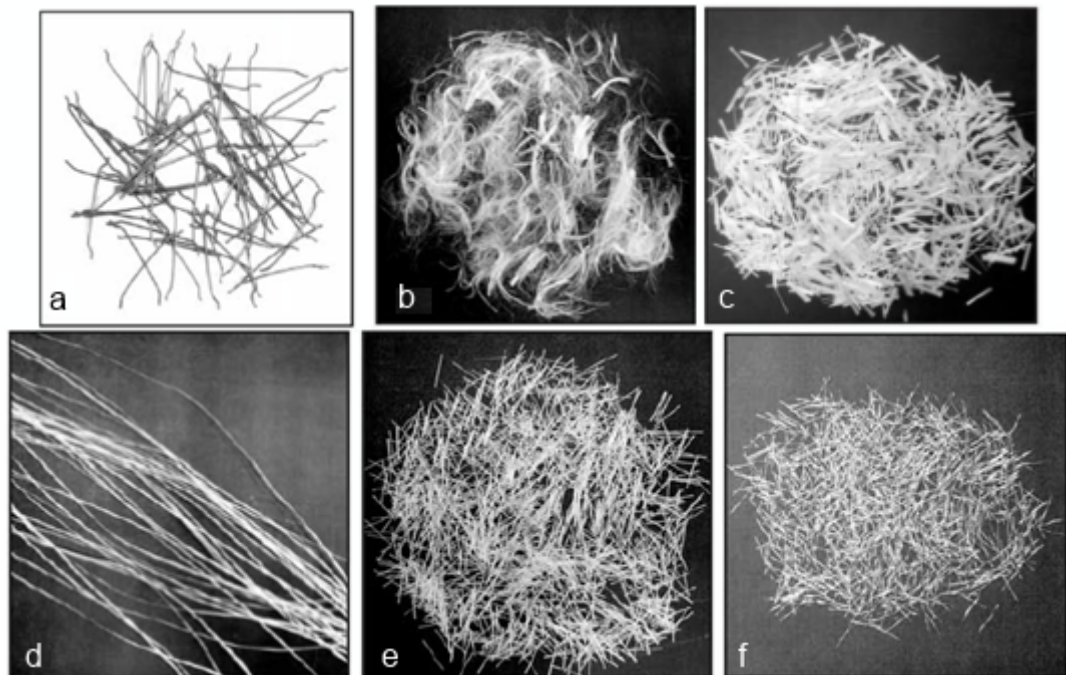


Figura 1.4: Varie tipologie di fibre: macrofibre di acciaio (a), fibre di polipropilene (b), fibre di vetro(c), macrofibre sintetiche (d), microfibre di polipropilene (e) e di acciaio (f).

- vetro: i calcestruzzi così rinforzati sono noti come GFRC (*Glass Fiber Reinforced Concrete*) e si deteriorano facilmente in ambiente alcalino.
- materiale polimerico: in questo caso il calcestruzzo fibrorinforzato viene definito SNFRC (*Synthetic Fiber Reinforced Concrete*). Tali fibre hanno una bassa resistenza al fuoco e ai raggi ultravioletti . Si dividono in:
  - *a basso modulo elastico*. Esse non contribuiscono ad accrescere la resistenza a trazione del materiale, migliorandone però la tenacità e il contrastare del fenomeno fessurativo della matrice cementizia. Tra le più utilizzate ci sono le fibre polipropileniche non strutturali, le fibre polietileniche, le fibre di poliestere e le fibre di nylon.
  - *ad alto modulo elastico*. Garantiscono anche un aumento della resistenza a trazione del calcestruzzo. Tra le più utilizzate ci sono le fibre polipropileniche strutturali, le fibre di carbonio, le fibre acriliche e le fibre aramidiche;

- materiali naturali: in questo caso si parla di NFRC (*Natural Fiber Reinforced Concrete*). Questi tipi di fibre sono ancora poco utilizzate poiché devono subire diversi trattamenti prima di essere impiegate.

Se consideriamo come caratteristica distintiva la grandezza delle fibre invece ci sono due diverse tipologie di fibre:

- le microfibre: incorporate nella matrice con metodi di spruzzatura e miscelazione sono idonee a contrastare le piccole fessure come quelle che si formano a seguito dell'azione del ritiro plastico. La tipologia di rinforzo prodotto è in generale classificabile secondo la dispersione all'interno della pasta cementizia (Fig. 1.5);
- macrofibre (*continuous reinforcement*): sono le fibre di grande lunghezza idonee a contrastare le fessure dovute ai carichi esterni e al ritiro igrometrico. Questa tipologia è adatta a poter essere orientata secondo direzioni preferenziali controllate dalla tipologia del processo produttivo.

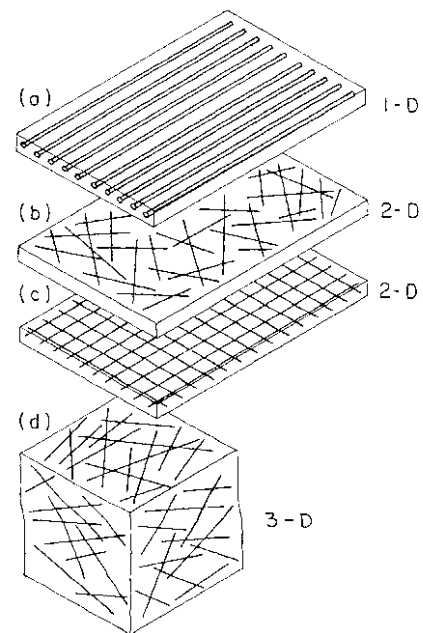


Figura 1.5: Classificazione del composito secondo la dispersione nella pasta cementizia [3]

Altra caratteristica fondamentale da assegnare alle fibre è senz'altro la geometria; oltre a quelle semplicemente rettilinee, infatti, esistono fibre ondulate, uncinato, nervate e anche ad estremità schiacciate. Si possono altresì presentare in *bundles* (ovvero in piccoli gruppi) o essere monofilamento (ogni fibra separata dalle altre). Le prime, dette placchettate, durante la miscelazione con la matrice tendenzialmente si separano tra di loro e diventano monofilamento.

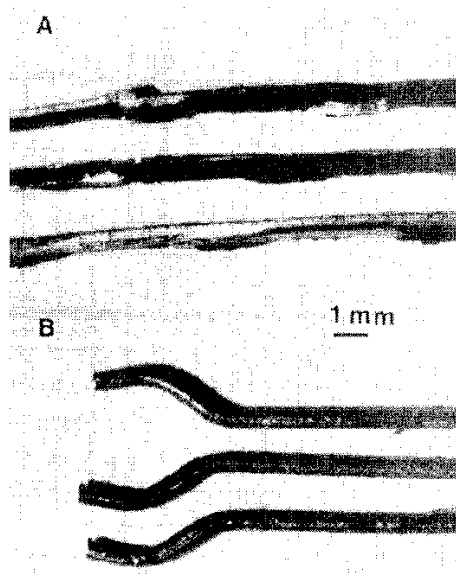


Figura 1.6: Varie tipologie di fibre: indeformate (a) ed uncinata (b) [3]

Le ultime raramente sono utilizzate con la loro forma caratteristica, ma vengono deformate in varie configurazioni per aumentare l'interazione con la matrice cementizia mediante ancoraggio meccanico (Fig. 1.6, Fig. 1.7). Se da un lato l'aggiunta di fibre contribuisce a migliorare le prestazioni a trazione del conglomerato e produce al contempo una riduzione della lavorabilità dell'impasto. La riduzione della lavorabilità dipende principalmente dal dosaggio e dal rapporto di aspetto delle fibre impiegate. A parità di rapporto d'aspetto, più alto è il dosaggio di fibre, più vi è riduzione di

lavorabilità mentre, a parità di dosaggio, fibre caratterizzate da un più elevato rapporto d'aspetto provocano una maggiore penalizzazione della lavorabilità.

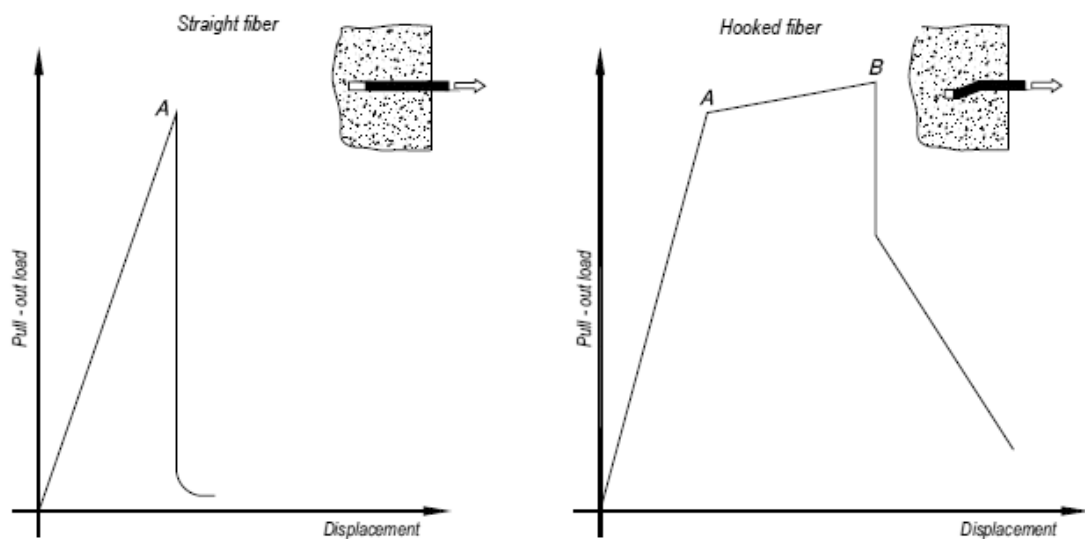


Figura 1.7: Incremento di aderenza delle fibre in funzione della loro forma [43]

### 1.1.3 L'interfaccia Fibra - Matrice

La microstruttura della matrice in prossimità delle fibre di rinforzo presenta una composizione particolare rispetto alle altre zone del conglomerato cementizio. Questa specifica area prende il nome di zona di transizione d'interfaccia, anche denominata ITZ [23]; la sua natura e la sua estensione dipendono fortemente dal tipo di fibre presenti e dal processo produttivo utilizzato. Nella descrizione del comportamento di questa zona andranno distinti due casi. Nel primo caso, quello di fibre monofilamento, le fibre sono isolate le une dalle altre; di conseguenza l'intera superficie della fibra è a contatto con la matrice cementizia. Con le fibre in bundles invece solo la parte esterna del mazzo di fibre ha un contatto diretto con la pasta. Per il caso di fibre monofilamento studi applicati hanno mostrato come la ITZ sia ricca di idrossido di calcio (CH) e molto più porosa rispetto al resto della matrice. La natura porosa della zona di transizione è il risultato dell'interazione tra il silicato di calcio idrato (CSH) e l'ettringite<sup>2</sup>. Il risultato della zona ricca di CH intorno alla superficie della fibra è dovuto alla sua precipitazione dalla soluzione nello spazio intorno alla fibra. Le particelle di acqua sono attratte sulla superficie dalle fibre all'interno della miscela e creano uno strato ad alta porosità nella zona d'interfaccia. A maturazione avvenuta l'acqua consumata dal processo chimico lascia dei vuoti che favoriscono la concentrazione dei cristalli di portlandite [2] (Fig. 1.8).

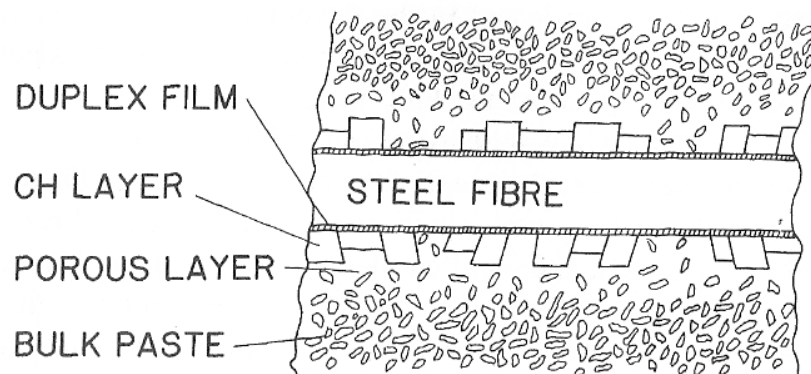


Figura 1.8: Schema di interfaccia tra fibre a matrice cementizia

<sup>2</sup> L'ettringite o sale di Candlot, (o più raramente *bacillo del cemento*) da un punto di vista chimico è un trisolfato di calcio idrato. La sua formazione può avere effetti positivi o negativi sul grado di durabilità del calcestruzzo. Nel primo caso si parla di ettringite primaria o non distruttiva ed è provocata volontariamente, la seconda invece è chiamata ettringite secondaria o distruttiva e la sua formazione è accidentale e non desiderata.

Nel caso di una matrice cementizia dalla composizione molto ben progettata, con fini riempitivi e inerti dal diametro contenuto, e con fibre di sezione trasversale molto contenuta, la zona di transizione prima descritta può essere tranquillamente eliminata. In quest'ottica la sezione trasversale del rinforzo fibroso diventa una caratteristica da tenere in considerazione per un buon mix design al fine di ottenere una matrice dalla microstruttura sufficientemente densa. Per quanto riguarda le fibre in bundle, se non si separano durante il processo produttivo, restano assestate in "mazzetti" di fibre. La microstruttura risultante è caratterizzata da spazi vuoti tra i filamenti in cui la pasta cementizia non riesce a penetrare, oppure da zone localizzate e non uniformi di deposito di prodotti d'idratazione. Le fibre avranno quindi libertà relativa di muoversi le une rispetto alle altre.

La componente più debole del legame fibra-matrice non è il contatto diretto tra i due materiali, ma lo strato immediatamente successivo ricco di cristalli. Questa è la zona responsabile della resistenza del materiale e la rottura a trazione avviene con la formazione contemporanea di fessure sia all'interfaccia sia nella matrice, le quali poi si uniscono e si propagano instabilmente fino al collasso. I principali tipi di interazione che ostacolano la fase di fessurazione in questa zona sono elencabili come:

- 1) adesione chimica e fisica;
- 2) frizione;
- 3) ancoraggio meccanico indotto dalla deformazione delle fibre.

L'adesione chimica viene migliorata introducendo forti percentuali di cenere volante o di fumo di silice, come già detto precedentemente, riducendo la cristallizzazione di CH e assottigliando la ITZ [6] [26]. In alcuni casi comunque anche un giusto dosaggio del mix design del composto non è sufficiente a garantire una resistenza adeguata. Per gli altri due aspetti è necessario trattare l'argomento nell'ambito della meccanica della frattura del materiale, così come nel seguito. È qui anticipato che la resistenza caratteristica può essere incrementata anche aggiungendo un legame di tipo meccanico, aumentando cioè la rugosità superficiale delle fibre o sagomando appositi ancoraggi.

## 1.2 Classificazione del calcestruzzo fibrorinforzato

La classificazione del calcestruzzo fibrorinforzato si basa sulla resistenza residua a trazione post-fessurativa. Come già mostrato in precedenza, le curve distintive di un composto fibrorinforzato presentano tutte un tratto ascendente fino al momento della prima fessurazione; indipendentemente dalla tipologia di rinforzo utilizzata. Sarà l'andamento del tratto successivo a questo punto a determinare il diverso comportamento del materiale composito. Le due diverse tipologie di comportamenti riscontrabili prendono il nome di “*strain-softening*” e “*strain-hardening*” (Fig. 1.9) [20]. In conformità a questo comportamento sono distinguibili i calcestruzzi fibrorinforzati ordinari da quelli ad alte prestazioni, caratterizzati da una risposta *strain-hardening* a trazione accompagnata dalla formazione di fessure multiple ed una grande capacità di assorbimento di energia [19]. Nella figura sono visibili i punti chiave alla definizione del comportamento del materiale. Per il primo comportamento (“*strain-hardening*”) si vede che dopo il raggiungimento della tensione di prima fessurazione ( $\sigma_{cc}$ ) la curva vede un aumento di tensione o tutt'al più è possibile avere la stessa sollecitazione. Il punto di tensione massima verrà indicato con le coordinate ( $\sigma_{pc}$ ,  $\epsilon_{pc}$ ).

Nel caso di “*strain-softening*” invece una volta raggiunta la fessurazione si ha una risposta tensionale decrescente con dei possibili parziali recuperi di rigidità durante la fase fessurativa a seconda dell'utilizzo di fibre di acciaio ad alto modulo elastico, oppure nel secondo caso di fibre polimeriche o a basso modulo elastico.

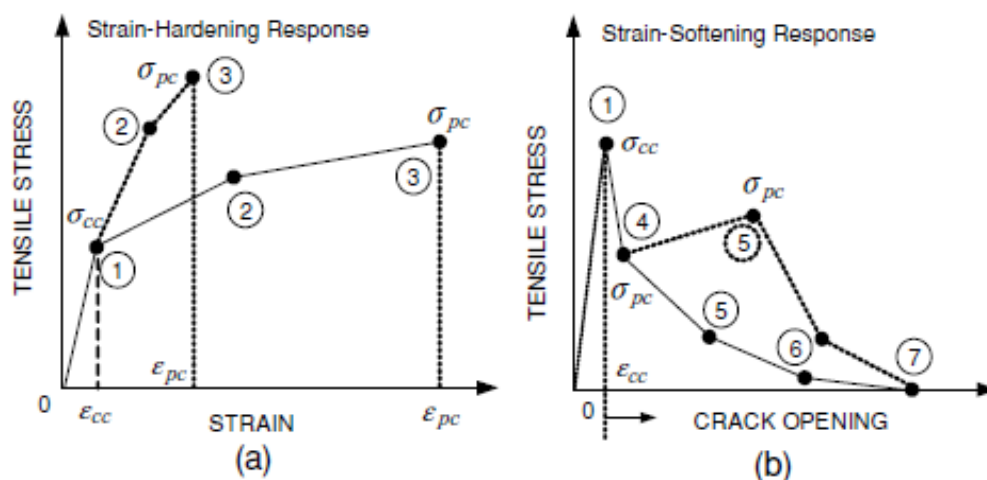


Figura 1.9: Tipica curva sforzo-deformazione di un comportamento “*strain-hardening*” (a); Tipica curva sforzo-COD relativa di comportamento “*strain-softening*”(b) [17]

Un composto dal comportamento hardening è da considerarsi molto più performante di uno dal comportamento softening. All'interno di quest'ultima categoria sono riscontrabili altri due differenti comportamenti denominati “*deflection-hardening*” e “*deflection-softening*” (Fig. 1.10).

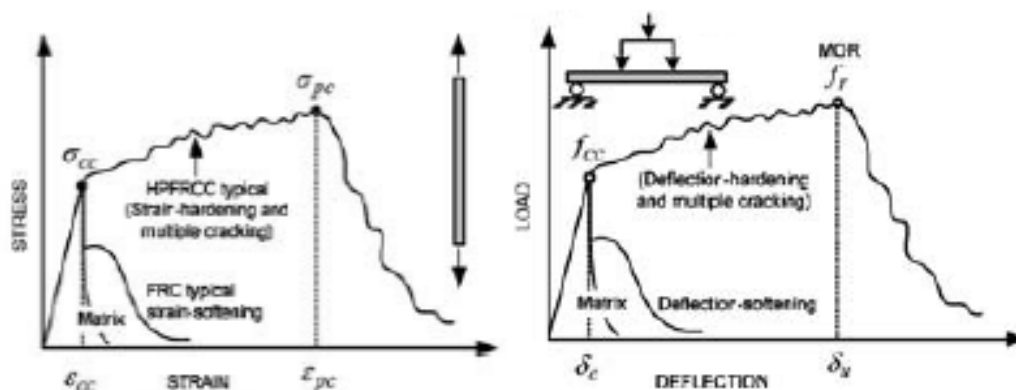


Figura 1.10: Differenti tipologie di comportamento in fase post-fessurativa in funzione del tipo di sollecitazione

La prima classe di risposte è apprezzata in quelle applicazioni strutturali in cui prevale la flessione, mentre l'altra può essere utilizzata in una vasta gamma di applicazioni pratiche, a partire dal controllo della fessurazione da ritiro plastico del calcestruzzo fino all'utilizzo nelle pavimentazioni in calcestruzzo. Secondo questo modello si può notare come tutti i composti dal comportamento *strain-hardening* sono anche *deflection-hardening*; d'altra parte invece, alcuni composti *strain-softening* possono anche essere *deflection-hardening* (Fig. 1.11) [17]. Poiché la caratteristica più importante dei FRC composti è la proprietà di resistenza a trazione, sembra logico classificarli in funzione di questa loro caratteristica, in modo simile a quanto fatto per la resistenza a compressione del calcestruzzo. Così ad un fibrorinforzato denominato dalla sigla T-10 corrisponderebbe una resistenza alla trazione di 10MPa.

Secondo la proposta di classificazione di Naaman e Reinhardt (2006) sarebbero necessari solamente due punti chiave della curva sforzo-deformazione in tensione; rispettivamente il punto di prima fessurazione di coordinate  $(\sigma_{cc}, \epsilon_{cc})$ , ed il punto di picco avente coordinate  $(\sigma_{pc}, \epsilon_{pc})$ , come mostrato in Fig. 1.12. Poiché lo stress e la deformazione a prima fessurazione sono più difficili da misurare, in alternativa è suggerito l'utilizzo di un modulo elastico minimo calcolato utilizzando le coordinate del punto di fessurazione da stimare a priori come specificato nell'immagine. Il modulo effettivo può essere misurato con l'utilizzo di prove effettuate secondo standard accettati, oppure stimato con formule proprie dalla meccanica dei composti.



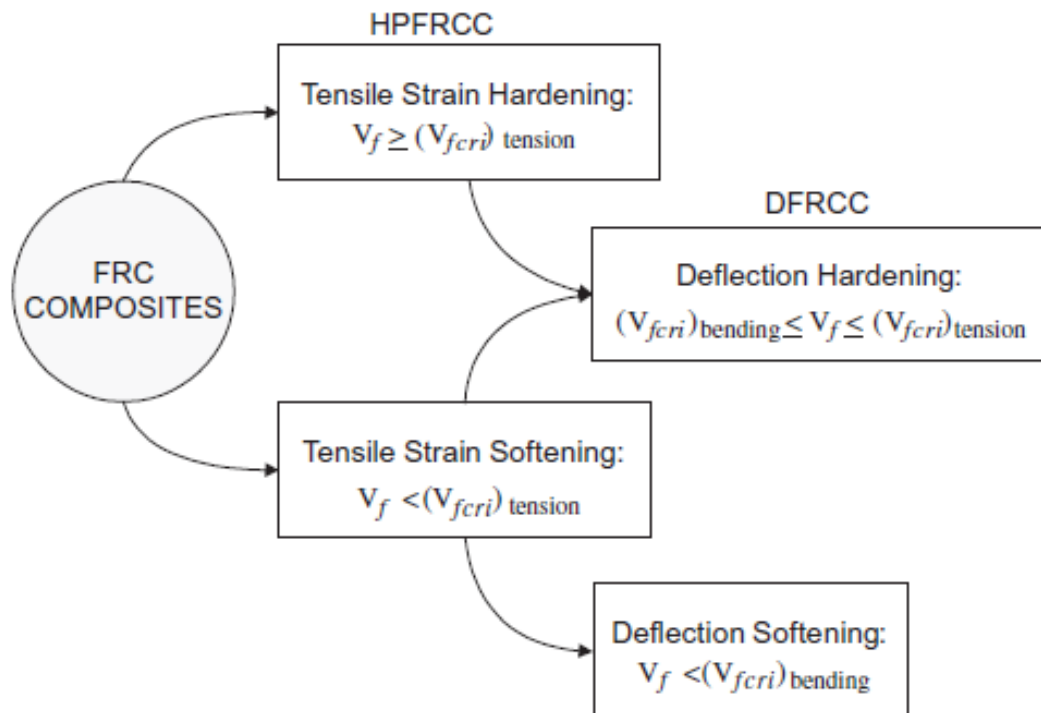


Figura 1.11: Schema riassuntivo delle principali risposte per i composti FRC [19]

In particolare la deformazione di prima fessurazione può essere impostata a priori intorno al ragionevole valore dello 0,2‰, mentre la sigma corrispondente può essere stimata tramite l'utilizzo di apposite equazioni. Il livello minimo di sforzo di picco raccomandato è dato da  $\epsilon_{pc} \geq 0,005$ . In questo modo ci assicuriamo che l'incrudimento del composto contribuisca sufficientemente alla resistenza nominale e alla duttilità, mentre induce rilevante presenza di fessure multiple lungo il ramo ascendente della risposta carico-deformazione.

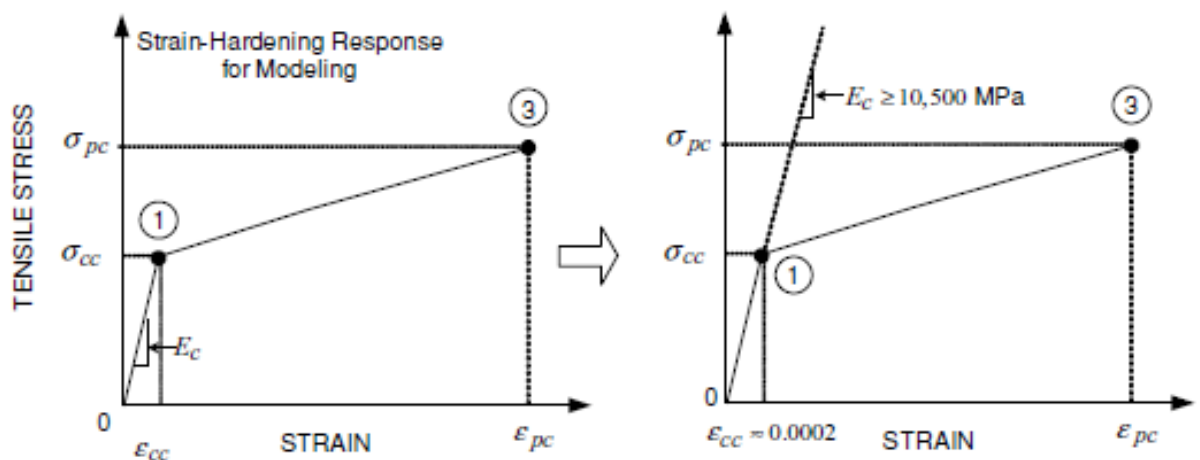


Figura 1.12: Informazioni richieste sul diagramma sforzo deformazione per la classificazione di FRC.

Una curva sforzo deformazione così idealizzata può essere utilizzata nelle fasi di design come rappresentato in Figura 1.13, in cui sono tracciate due differenti curve per ogni classe di resistenza, una a linea continua e una a linea tratteggiata. Sono riconoscibili le seguenti caratteristiche:

- **Classe di resistenza.** I FRC sono classificati in base alla loro resistenza a trazione, o alla resistenza a trazione dopo la fessurazione,  $\epsilon_{pc}$ . La Classe T-5 garantisce infatti una resistenza alla trazione post-fessurazione di 5MPa e una Classe T-15 dovrebbe garantirne una di 15MPa. Una prova di trazione diretta dovrebbe verificare tali risultati.
- **Minima deformazione alla tensione di picco:**  $\epsilon_{pc} \geq 0,005$ . Si noti che il 0.5% è più del doppio della resa di ferri di armatura standard.
- **Modulo minimo di 10.500 MPa.** Questo è il modulo tangente all'origine che dovrebbe essere misurato secondo i principi riconosciuti come procedura ASTM. La maggior parte dei materiali compositi in cemento dovrebbe facilmente soddisfare questo vincolo. Specificando un modulo minimo, noi non dobbiamo preoccuparci di determinare l'esatta tensione di prima fessurazione. Si noti che il valore di modulo minimo è stato selezionato come un valore limite inferiore di numerose prove sperimentali.
- **Livello di confidenza del 90%.** Per tenere conto della variabilità statistica, il seguente modello è dato a titolo di esempio: per qualificarsi come classe T-5, il 90% dei dati sperimentali dovrebbe avere un picco di stress ( $\epsilon_{pc}$ ) da 5 a 10MPa, un picco di stress ( $\epsilon_{pc}$ ) pari o superiore allo 0,5%, e un modulo elastico pari o superiore a 10.500 MPa.
- **Resistenza si cracking e di post-fessurazione.** Due differenti compositi con rispettivamente  $\epsilon_{pc} = 5,5$  MPa e  $\epsilon_{pc} = 9,9$  MPa sono qualificati entrambi in classe TR-5. Sono tuttavia necessarie informazioni sulle diverse coordinate per una valutazione accurata del contributo di un particolare composito. (punti 1 e 3 di Fig.1.13)

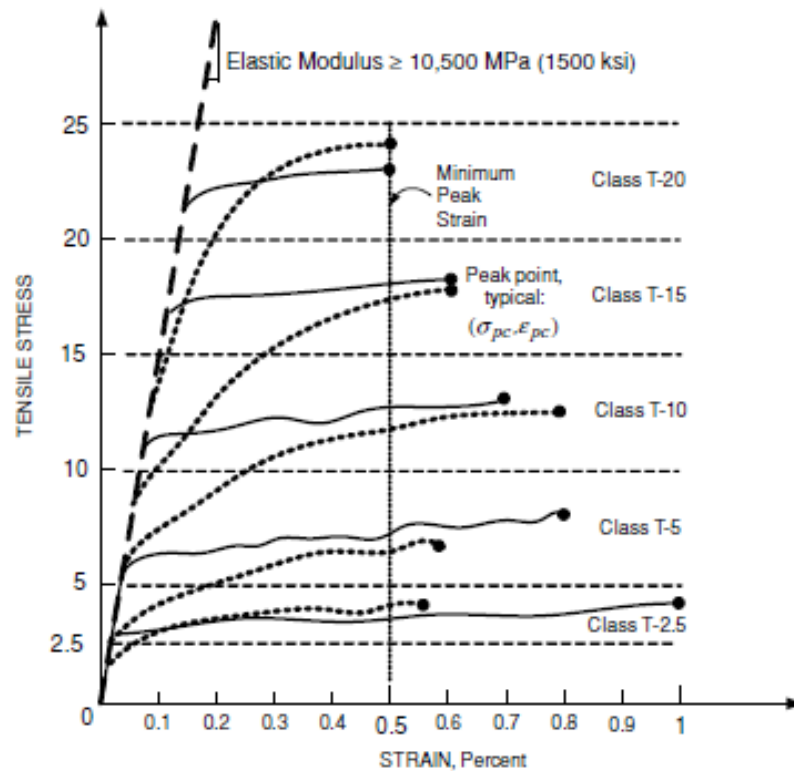


Figura 1.13: Diverse classi di fibrorinforzati composti dalla risposta strain-hardening.

In termini di classificazione va senz'altro citato come riferimento normativo il nuovo *Ceb-Fib Model Code 2010* [27]. Questo documento andrà ad aggiornare il *Ceb-Fib Model Code 1990* pubblicato nel 1993 con lo scopo di diventare il testo di riferimento per la definizione delle norme europee sul calcestruzzo. Una delle principali novità di questa versione riguarda la classificazione dei composti fibrorinforzati. La classificazione si basa sulle proprietà nominali riferite alla resistenza a trazione post-fessurativa, determinata da prove a flessione su prismi intagliati secondo quanto prescritto nella EN 14651 (2004) per il set-up della prova di flessione su 3 punti, sulla base delle quali si giunge alla definizione del grafico sforzo nominale – deformazione (Fig. 1.14). Per quanto riguarda la deformazione essa può essere espressa in termini di apertura di fessura all'apice dell'intaglio (Crack Mouth opening Displacement – CMOD) o di abbassamento in mezzera ( $\delta$ ). Sempre secondo la normativa si richiede la valutazione di quattro diversi valori di resistenza residua, corrispondenti a CMOD = 0,5 ; 1,5 ; 2,5 e 3,5 mm.

La resistenza residua a trazione per flessione è definita come:

$$f_{R,j} = \frac{3 \cdot F_j \cdot L}{2 \cdot b \cdot h_{sp}^2} \quad (1.1)$$

con:

- $F_j$  resistenza residua in corrispondenza della apertura di fessura CMOD<sub>j</sub>;
- $L$  distanza tra i coltelli inferiori;
- $b$  base del provino;
- $h_{sp}$  altezza del provino depurata dell'intaglio.

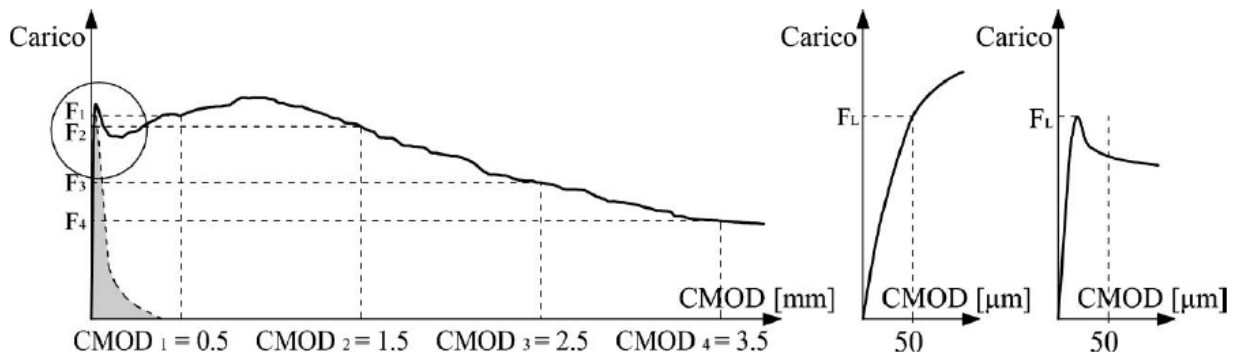


Figura 1.14: Curva tipica carico-CMOD per calcestruzzi fibrorinforzati

In particolare ci si limita a considerare le tensioni  $f_{R1}$  e  $f_{R3}$ , corrispondenti alle aperture di fessura 0,5 mm e 2,5 mm. Al fine del calcolo i modelli costitutivi utilizzati in termini di tensione – apertura di fessura sono simili a quelli definiti nelle istruzioni CNR DT 204, riscritti però introducendo nuovi parametri.

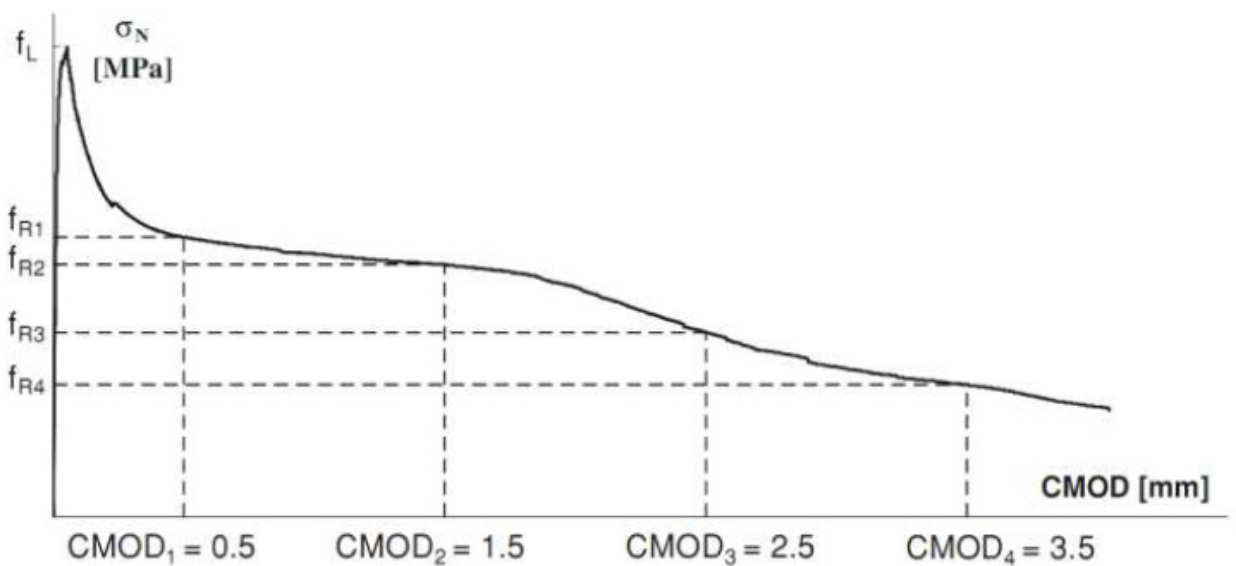


Figura 1.15: Comportamento flessionale softening e relative aperture di fessura equivalenti secondo il model code 2010

- Modello elastico lineare

Il modello elastico lineare individua due valori di riferimento,  $f_{Fts}$  e  $f_{Ftu}$ , sulla base del comportamento allo SLE ed allo SLU. Essi possono essere definiti sulla base di valori equivalenti delle resistenze a flessione mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} f_{Fts} = 0,45 \cdot f_{R1} \\ f_{Ftu} = k \cdot \left[ f_{Fts} - \frac{w_u}{CMOD_3} \cdot (f_{Fts} - 0,5 \cdot f_{R2} + 0,2 \cdot f_{R1}) \right] \end{cases} \quad (1.2),(1.3)$$

Dove,  $w_u$  corrisponde al valore ultimo di apertura di fessura, non superiore a  $CMOD_3 = 2,5$  mm

- Modello rigido plastico

Il modello rigido-plastico individua un unico valore di riferimento,  $f_{Ftu}$ , sulla base del comportamento ultimo. Tale valore si calcola come:

$$f_{Ftu} = \frac{f_{R1}}{3} \quad (1.4)$$

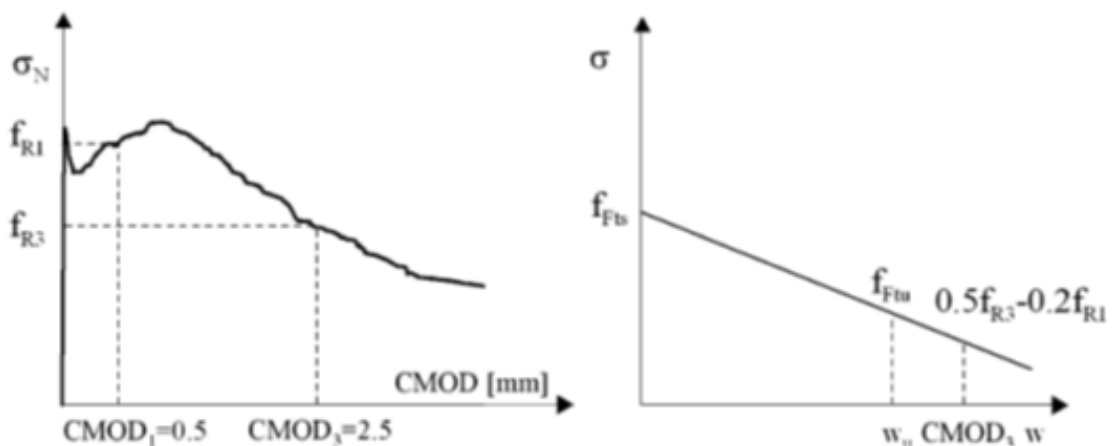


Figura 1.16: Generica curva Sforzo –CMOD e corrispondente legame costitutivo semplificato

Anche i legami sforzo-deformazione vengono individuati con la lunghezza caratteristica “ $l_{cs}$ ”, la cui definizione non varia rispetto a quanto definito dalla CNR DT 204/2006:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{l_{cs}} \quad (1.5)$$

con:  $l_{cs} = \min(s_{rm}, y)$  (1.6)

Le deformazioni corrispondenti alle tensioni notevoli sono:

$$\varepsilon_{SLE} = \frac{CMOD_1}{l_{cs}} \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_{SLU} = \frac{w_u}{l_{cs}} = \min\left(\varepsilon_{FU}, \frac{CMOD_3}{l_{cs}}\right) \tag{1.8}$$

Con  $\varepsilon_{FU}$  assunto pari al 2% in flessione e 1% in trazione pura.

Per le analisi numeriche il Model Code prevede una legge costitutiva che tiene conto del comportamento non fessurato del materiale. L'andamento Sforzo-Deformazione si considera nella fase pre-picco uguale alla relazione bilineare adottata dalla norma per il calcestruzzo bianco sottoposto a tensione uniassiale (Fig. 1.17), che dipende dalla resistenza a trazione  $f_{ctm}$  :

$$\begin{cases} f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{\frac{2}{3}} & \text{classe di resistenza} < C50 \\ f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln[1 + 0,1 \cdot (f_{ck} + 8)] & \text{classe di resistenza} > C50 \end{cases} \tag{1.9}$$

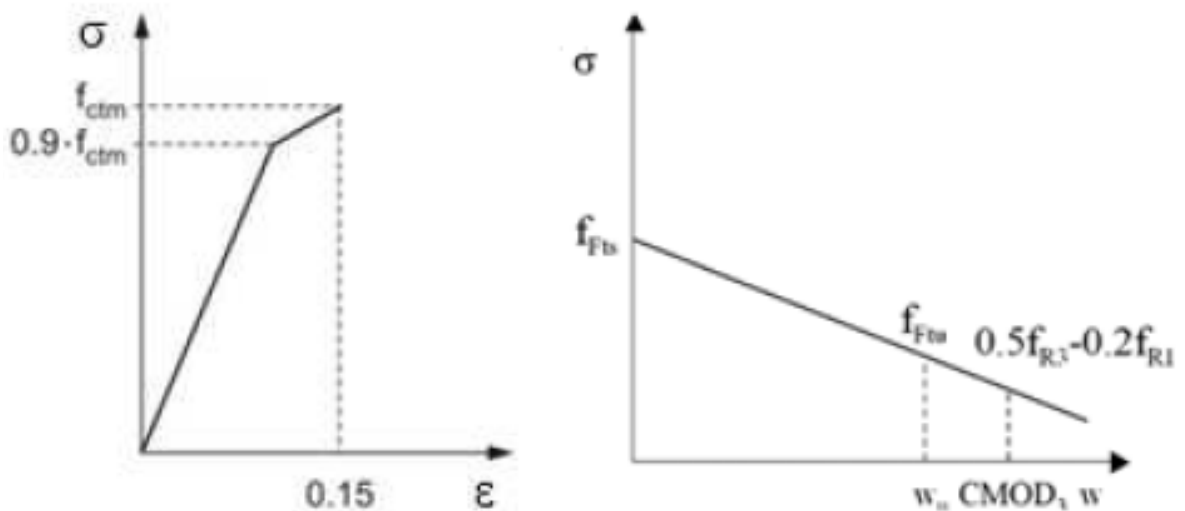


Figura 1.17: Legge costitutiva a trazione pre-picco per calcestruzzo bianco e post-picco per calcestruzzi fibrorinforzati secondo il model code 2010

Per descrivere il comportamento complessivo del materiale fibrorinforzato saranno usati i legami costitutivi di Fig. 1.18, a seconda se il comportamento del materiale sia softening o hardening.

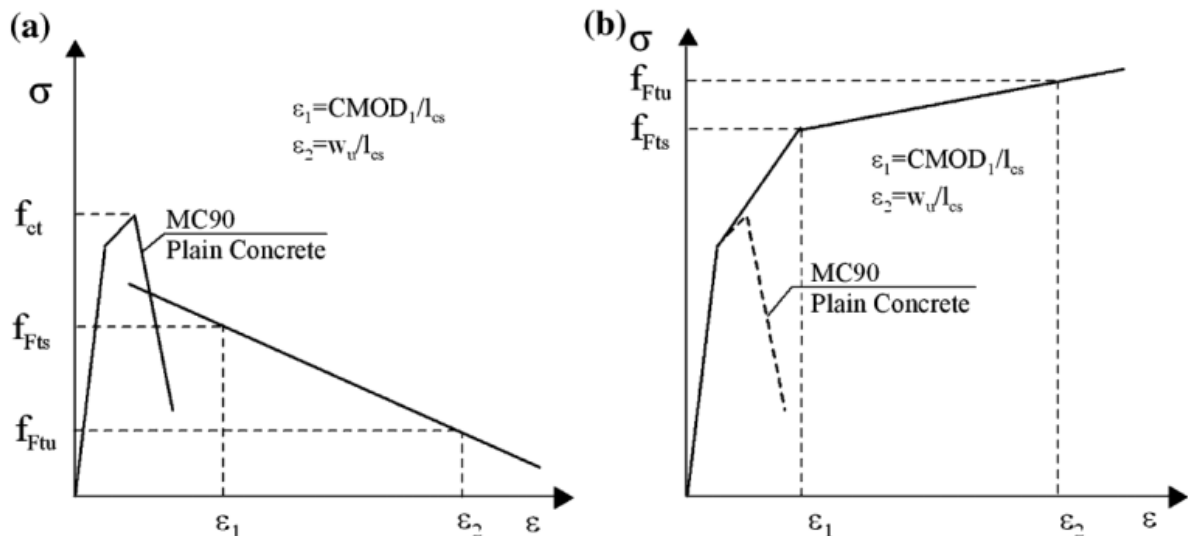


Figura 1.18: Possibili modelli di legame costitutivo sforzo- deformazione a trazione per FRC secondo il model code 2010

È anche necessario che il progettista tenga conto del fatto che il comportamento osservato nelle prove standard può discostarsi dal reale comportamento del FRC impiegato nella realizzazione di elementi strutturali. Per questo motivo il MC2010 consente di realizzare dei test su provini strutturali, come quelli descritti nella CNR DT 204, per valutare l'effetto dell'orientazione delle fibre e determinare il Fattore di Orientazione  $K$  con cui modificare i valori di sforzo equivalente.

La Classificazione avviene correlando il comportamento allo stato limite di esercizio, la cui resistenza caratteristica è  $f_{R1k}$ , con quello allo stato limite ultimo, rappresentato dal rapporto tra le resistenze caratteristiche  $f_{R3k} / f_{R1k}$ .

Il primo parametro consente di scegliere un numero all'interno di questo intervallo:

$$1,0 ; 1,5 ; 2,0 ; 2,5 ; 3,0 ; 4,0 ; 5,0 ; 6,0 ; 7,0 ; 8,0 [MPa]$$

Mentre il secondo parametro determina una lettera in funzione dell'intervallo in cui è compreso:

- lettera **a** se  $0,5 \leq f_{R3k} / f_{R1k} \leq 0,7$
- lettera **b** se  $0,7 \leq f_{R3k} / f_{R1k} \leq 0,9$
- lettera **c** se  $0,9 \leq f_{R3k} / f_{R1k} \leq 1,1$
- lettera **d** se  $1,1 \leq f_{R3k} / f_{R1k} \leq 1,3$
- lettera **e** se  $1,3 \geq f_{R3k} / f_{R1k}$

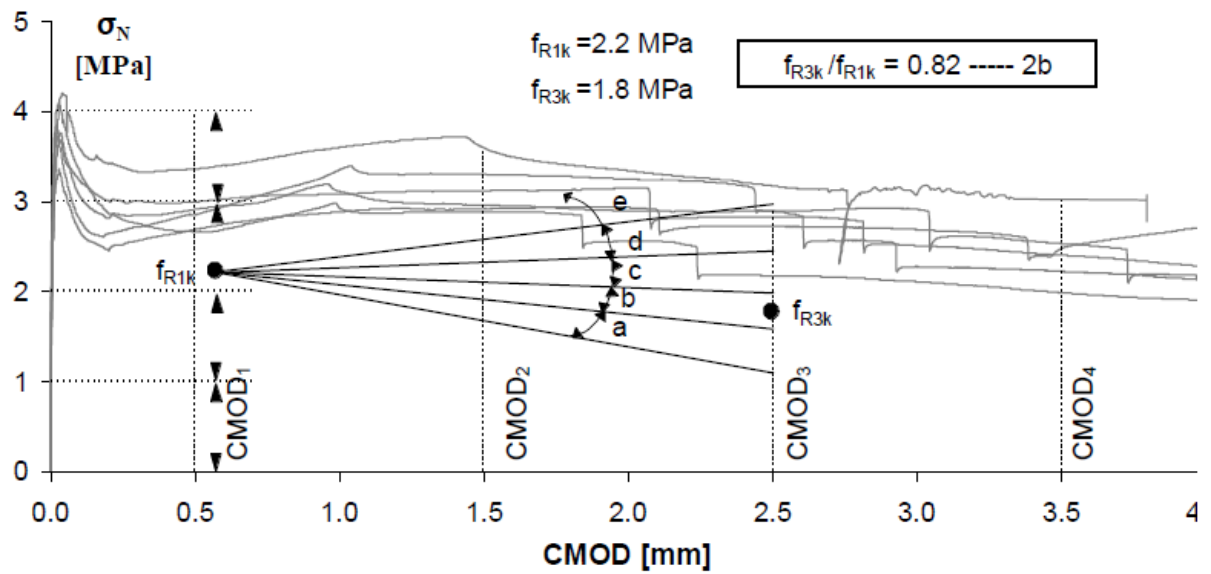


Figura 1.19: Classificazione dei calcestruzzi fibrorinforzati secondo il model code 2010

Come altra indicazione, al fine di evitare una rottura fragile per gli elementi strutturali, il rinforzo fibroso può sostituire (anche parzialmente) le barre o le reti saldate di armatura allo stato limite ultimo solo se sono soddisfatte le seguenti relazioni:

$$f_{R1k}/f_{Lk} \geq 0,4 \quad (1.10)$$

$$f_{R3k}/f_{R1k} \geq 0,5 \quad (1.11)$$

dove  $f_{Lk}$  è il valore caratteristico della resistenza nominale, corrispondente al carico di picco (o al valore di carico maggiore nell'intervallo 0-0.05 mm), determinato con la prova su travetto (Fig. 1.14).



### 1.3 Comportamento fessurativo

Il comportamento meccanico del calcestruzzo fibrorinforzato è influenzato da numerosi fattori che sono legati alla dimensione e alla geometria delle fibre, alla loro dispersione e orientamento, nonché alla composizione della matrice cementizia, alle dimensioni e alla geometria dell'elemento, ma anche dalle tecniche di produzione come ad esempio la cura tenuta nelle operazioni di getto e dal trattamento superficiale subito dal manufatto [8]. Il miglioramento del comportamento a trazione di un materiale di natura fragile come il calcestruzzo è possibile in funzione di come le fibre riescono a fungere da legante tra le fessure (effetto bridging).

Secondo Van Mier (2004) il comportamento meccanico che caratterizza un fibrorinforzato può essere diviso in quattro fasi principali distinte ognuna mediante una lettera (vedi Fig. 1.20):

- O: fase elastica
- A: fase di Microcracking (propagazione stabile)
- B: fase di Macrocracking (propagazione fondamentalmente instabile)
- C: fase di Bridging.

La fase A riguarda la micro fessurazione che avviene prima di raggiungere la massima capacità di carico. Se una microfrattura è attraversata da una fibra, inizia il debonding<sup>3</sup> tra la fibra e la matrice [21]. Questa fase influenza direttamente la resistenza del materiale. Il ramo post-picco è influenzato dalle sollecitazioni di attrito tra fibra e matrice circostante; la percentuale volumetrica di fibre, le caratteristiche delle stesse e l'orientamento. Per piccole percentuali di fibre (circa meno dell'1%), il legame costitutivo presenta ancora un ramo discendente. L'aggiunta di fibre potrebbe influenzare le fasi di fessurazione portando ad un confinamento interno che essenzialmente fornisce gli stessi risultati di confinamento esterno arrestando e stabilizzando la propagazione delle fessure [24]. Una grande quantità di fibre lunghe migliora la duttilità del materiale. L'utilizzo di basse quantità di fibre (meno del 2% in volume) ha una modesta influenza sulla fase elastica.

---

<sup>3</sup> Per **debonding** si intende la progressiva separazione della fibra dalla matrice cementizia che la circonda.

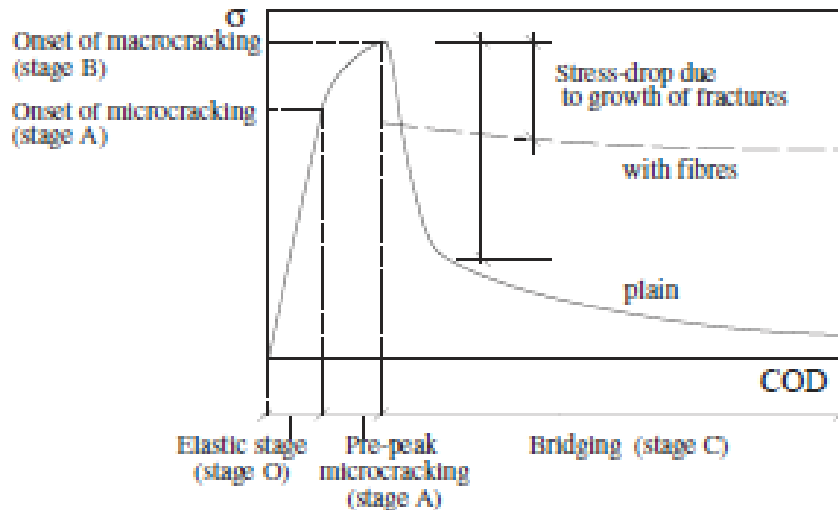


Figura 1.20: Fasi del processo di frattura di un calcestruzzo fibrorinforzato

### 1.3.1 Le fessure

La generica fessura all'interno del materiale privo di rinforzo fibroso si forma ogni qualvolta gli sforzi agenti oltrepassano la resistenza a trazione della matrice cementizia; la persistenza dello stato di sforzo porta inevitabilmente al propagarsi della fessura fino a giungere al collasso del materiale. In particolare analizzando lo schema di una fessura (Fig. 1.21) sono riconoscibili tre zone. Una prima zona denominata zona libera (free crack), in cui i lembi sono staccati tra loro e non vi è trasmissione degli sforzi.

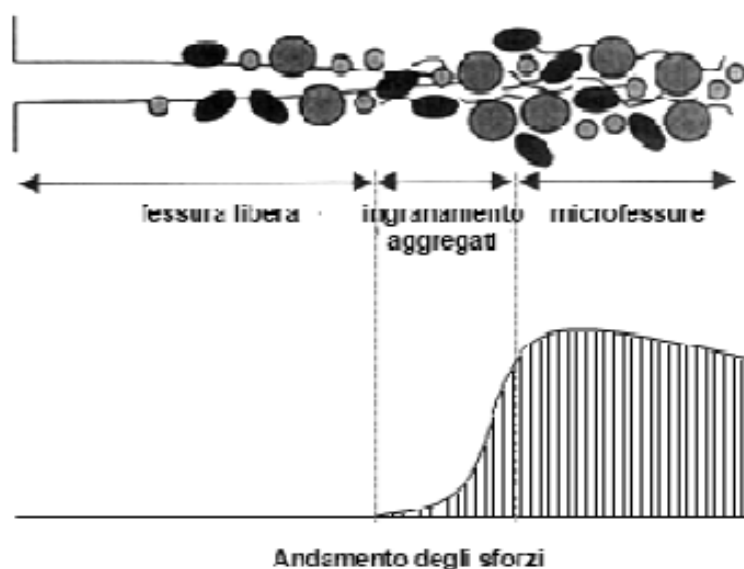


Figura 1.21: Diverse zone costituenti una frattura e la relativa distribuzione degli sforzi

Una zona intermedia dove l'ingranamento degli inerti consente la trasmissione (aggregate interlock) ed infine la zona più interna alla frattura che risulta microfessurata che è la più sollecitata e trasmette gli sforzi più importanti (process zone). Il comportamento fessurativo di un FRC invece è influenzato dal ruolo di cucitura svolto dalle fibre inserite all'interno della matrice cementizia. Tali fibre sfruttano la resistenza di contatto con la pasta cementizia per poter trasmettere gli sforzi di trazione e contrastare l'apertura delle fessure. La frattura della matrice che si crea al raggiungimento del massimo sforzo di trazione sopportabile dall'impasto è in grado di non propagarsi verso la parte interna a meno di immettere nuova energia nel sistema fibre/matrice cementizia. A livello macroscopico questo si traduce con un comportamento a rottura duttile avente una resistenza residua per delle basse concentrazioni di rinforzo.

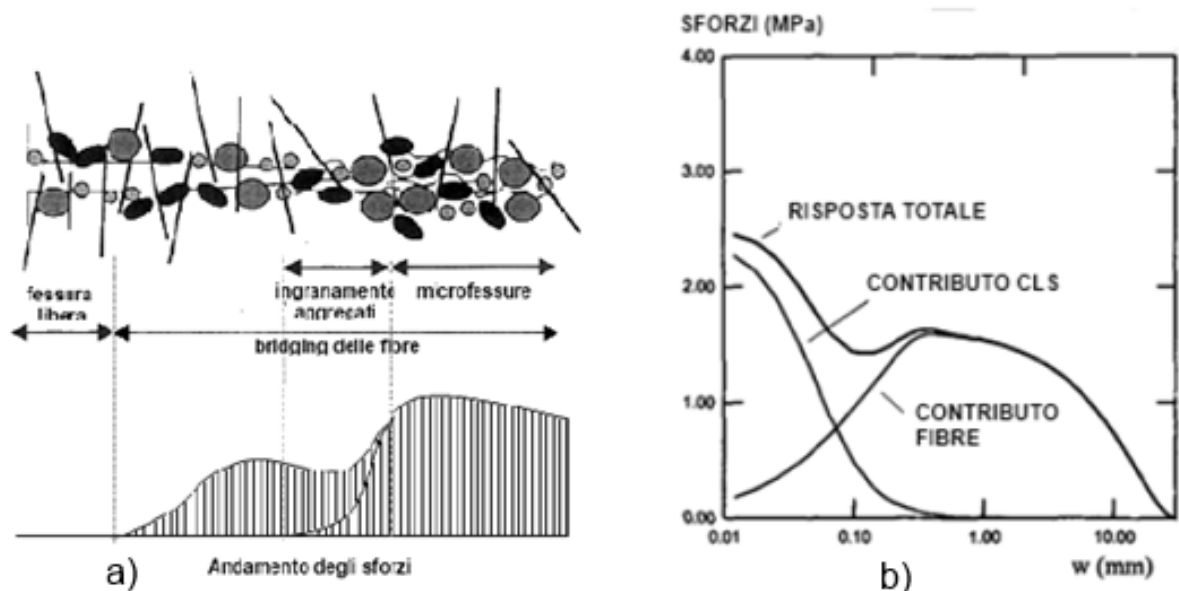


Figura 1.22: Rappresentazione delle zone costituenti una frattura nel FRC e la relativa distribuzione di sforzi (a); Distribuzione degli sforzi tra matrice cementizia e fibra in funzione dell'apertura di fessura (b) [9]

Aumentando la quantità di rinforzo si avrà invece la formazione di multifessure poiché la struttura dissipa meno energia per l'apertura di nuove fratture e ne concentra la maggior parte nel tentativo di rompere il legame tra fibre e matrice cementizia. La Figura 1.22 mostra come la risposta agli sforzi sia nella fase iniziale affidata quasi per intero al calcestruzzo. Con il crescere dell'apertura della fessura ( $w$ ) sono invece le fibre ad accollarsi totalmente il compito della trasmissione degli sforzi tra i due lembi ormai aperti.

### 1.3.2 Meccanismi di rottura

Il diagramma schematico di Figura 1.23 illustra i modi in cui le fibre agiscono all'interno della pasta cementizia per assorbire energia. Partendo da sinistra nella figura e procedendo verso destra è rappresentata la rottura della fibra, lo sfilamento della fibra, la trasmissione della tensione attraverso la fibra, la delaminazione dell'interfaccia fibra- matrice e la rottura della matrice. Questi meccanismi sono efficaci anche per una singola fibra. È l'effetto cumulativo, tuttavia, di un gran numero di fibre situate in una zona ristretta che ha dimostrato di essere significativo. A questi casi sono associati i principali meccanismi di rottura di un FRC che possono essere così elencati:

- Rottura della fibra;
- Pull-out (ovvero lo sfilamento della fibra);
- Debonding della fibra (perdita di aderenza tra fibra e matrice);
- Rottura della matrice cementizia;

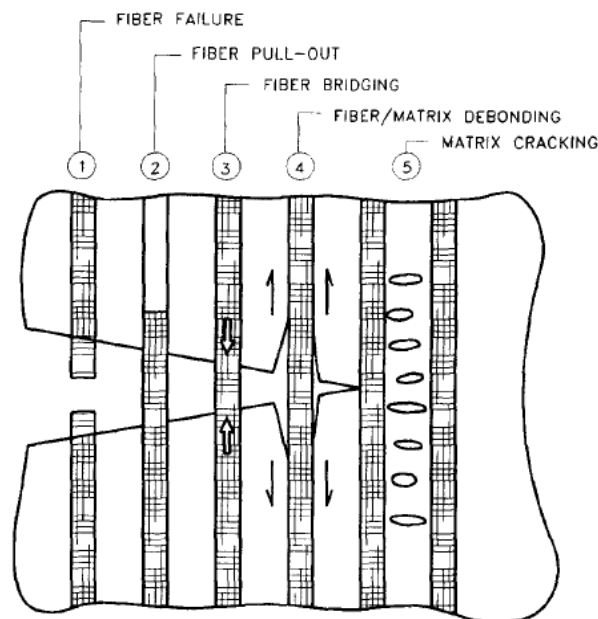


Figura 1.23: Meccanismi di assorbimento di energia delle fibre [25]

Importanza fondamentale per identificare i diversi meccanismi di rottura è la modalità di trasferimento degli sforzi tra la matrice cementizia e la fibra di rinforzo. Quando la prima è ancora integra infatti le due parti si deformano in modo congruente e la trasmissione degli sforzi avviene secondo le modalità rappresentate in Figura 1.24. Il contatto tra i due elementi, di tipo chimico,

segue un comportamento elastico. Nell'attimo in cui il legame suddetto viene rotto si hanno delle deformazioni relative tra fibra e matrice e l'adesione delle due parti è garantita solo fino alla rottura dell'attrito meccanico. Il brusco salto nel diagramma rappresenta difatti il passaggio da un meccanismo resistente all'altro.

Il cosiddetto meccanismo di pull-out, ossia il meccanismo per cui la fibra viene strappata dalla matrice, è il meccanismo di rottura principale che contribuisce a fornire elevata tenacità al materiale ed è anche il preferibile. Autori come Banthia e Trottier (1994), Groth (1996) e Naaman (2004) hanno studiato il comportamento di diversi tipi di fibra e hanno dimostrato che il comportamento a trazione del fibrorinforzato dipende dal comportamento di una singola fibra, nonché dal loro orientamento e dalla distribuzione sulla superficie della fessura. Le prove di pull-out portano alla definizione di una curva che lega il carico di pull-out allo slittamento.

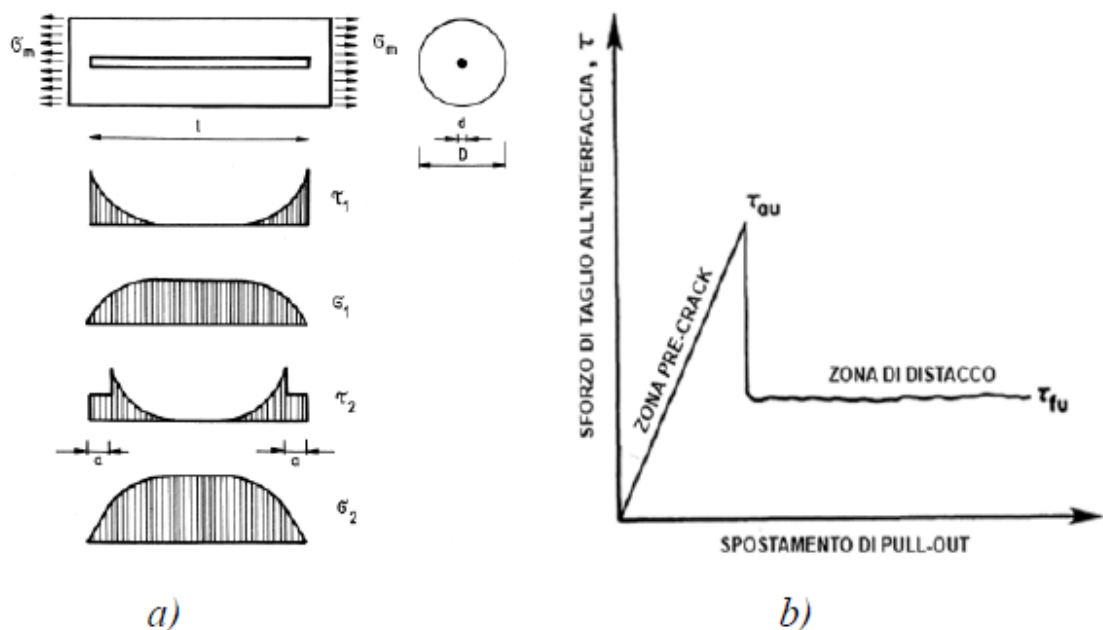


Figura 1.24: Possibili stati di sforzo lungo la fibra di rinforzo (a); Diagramma di Pull – out (b) [3]

Tali curve dipendono dalle caratteristiche geometriche e dal tipo di fibre utilizzate se dritte, lisce, corrugate o uncinata. La Fig. 1.25 (a,b) mostra le differenti risposte all'estrazione per una fibra di acciaio rettilinea ed uncinata; risposta caratterizzata da diverse fasi. Prima fra tutte un ramo ascendente iniziale fino al carico di picco (OA, OAB o OABB ' a seconda dell'attrito di adesione), successivamente un calo progressivo fino a un livello di carico (C). Tanto più è elevata la

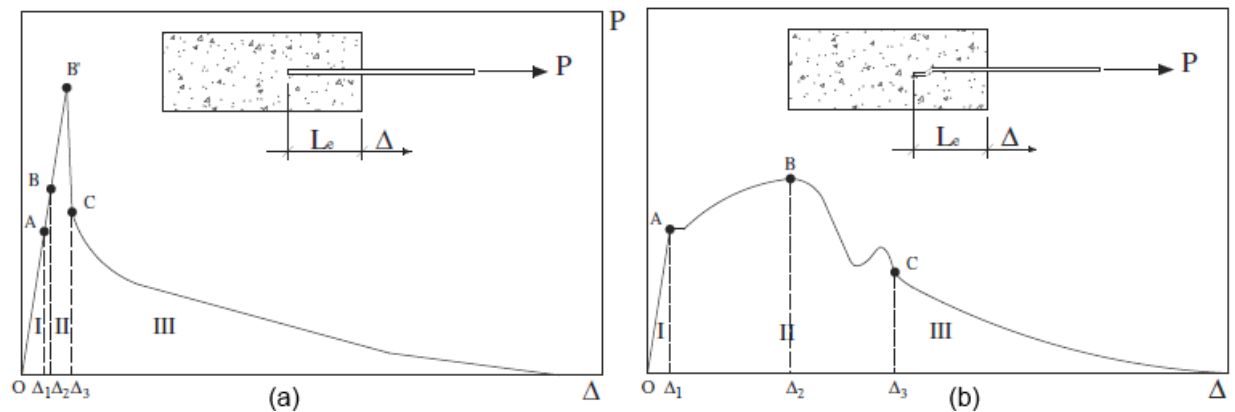


Figura 1.25: Risposta di Pull-out per differenti tipologie di fibre: rettilinea (a) ed uncinata (b)

resistenza della matrice tanto più veloce risulta la caduta del carico. L'area sotto ciascun ramo rappresenta l'energia consumata ed è identificato dai numeri romani in progressione.

I numeri I e II raffigurano il ramo ascendente con le sue varie fasi, al ramo discendente è invece assegnato il numero III. Per le fibre uncinata si ha una risposta simile al caso delle fibre rettilinee, ma la fase ascendente vede il contributo del gancio (tratto ABC), corrispondente al contributo del legame meccanico. L'attrito statico e di adesione controlla il ramo ascendente, mentre l'attrito dinamico quello discendente. Il punto B di picco corrisponde anche alla formazione di due cerniere plastiche nel gancio, mentre nel punto C il gancio è completamente raddrizzato e la fibra è pronta a scivolare generando un meccanismo di attrito del tutto simile a quello verificatosi per la fibra rettilinea. Le forze d'attrito decrescono non solo per il degrado dell'interfaccia fibra-matrice indotta da elevati valori di slittamento, ma anche perché la lunghezza aderente della fibra si riduce. La grande differenza tra le due risposte è l'energia assorbita rappresentata dalla zona II, molto più grande nelle fibre uncinata.

Altro aspetto importante per la trasmissione degli sforzi in fase di rottura è il parametro della *lunghezza critica* delle fibre, definibile come la minima lunghezza che la fibra deve avere affinché lo sforzo trasferito e la resistenza a trazione del materiale si equivalgano. Se difatti la fibra ha lunghezza minore di tale parametro, essa non riesce a sfruttare appieno le sue potenzialità di rinforzo dissipando una minor quantitativo di energia, la rottura del materiale avviene quindi per sfilamento. Studi specifici in proposito hanno dimostrato che per raggiungere un'efficienza pari al 90% del rinforzo fibroso occorre utilizzare fibre avente lunghezza pari a 5-10 volte il valore della lunghezza critica. A tal proposito negli ultimi tempi l'attenzione degli studi è volto alla

realizzazione di fibrorinforzati aventi fibre di diversi materiali e dimensioni; i cosiddetti HFRC, *Hibrid fibre reinforced concrete*. Questi calcestruzzi “ibridi” infatti permettono di sfruttare le fibre lunghe per migliorare il comportamento in fase post-fessurata, ma grazie all’inserimento di fibre corte anche di controllare la fase microfessurativa.

Nella trattazione finora effettuata la fibra è sempre stata considerata perpendicolare alla linea di frattura. Questa condizione però non è per niente corrispondente alla reale disposizione in un elemento fibrorinforzato. Le fibre, essendo inserite all’interno del getto del calcestruzzo, presentano in linea teorica una distribuzione ed un orientamento casuali. In queste nuove condizioni vengono a formarsi anche degli sforzi di flessione e di compressione localizzate. Questi sforzi dipendono dall’angolo di orientamento delle fibre e vanno ad influire positivamente o negativamente sulla capacità di rinforzo fornita dalle fibre, in funzione del tipo di materiale. Con materiali fragili, come le fibre di vetro e di carbonio, tale condizione dà un contributo negativo; per materiali più resistenti e duttili come l’acciaio invece, il contributo di questi sforzi può essere positivo andando a migliorare il meccanismo di adesione e di plasticizzazione delle fibre. L’efficienza massima si ha per un’angolazione variabile tra i 30° ed i 50°. (Fig. 1.26). È stato dimostrato che a influenzare la dispersione e l’orientamento delle fibre nel calcestruzzo è un abbinamento bilanciato tra le proprietà della miscela allo stato fresco e un accurato procedimento delle operazioni di getto [12] [13]. Grazie a questo “approccio integrato” è possibile raggiungere anche a livello industriale un superiore rendimento meccanico anche per basse percentuali di concentrazione di fibre. Queste operazioni possono ostacolare la dispersione omogenea delle fibre e quindi influenzare le prestazioni strutturali dell’elemento indurito. In particolare la miscela allo stato fresco deve essere caratterizzata da una viscosità adeguata al fine di poter guidare ed orientare le fibre lungo la direzione del flusso di getto. Anche il valore della tensione limite di scorrimento (*yield stress*) deve essere attentamente calibrata per controllare la dispersione delle fibre a causa del loro peso specifico superiore a quello della malta. Ultimo accorgimento sarà il progetto del procedimento di getto in modo che la direzione prevalente delle fibre possa coincidere con la direzione in cui sarà applicata la trazione principale nell’elemento. Le fibre si disporranno infatti allineate secondo questo andamento. Nel corso degli anni varie ricerche sono state svolte con l’intento di trovare dei metodi efficaci al fine di verificare l’effettiva disposizione delle fibre

all'interno della pasta cementizia. Nei metodi sviluppati per primi e classificati come "distruttivi" era prevista la frantumazione dell'elemento e la verifica effettiva del numero di fibre presenti, e il loro effettivo orientamento. Le informazioni ottenute erano precise, ma presentavano lo svantaggio della demolizione del provino e spesso della necessità di dover contare in maniera manuale le fibre presenti. Dalla fine degli anni '70 si è cercato di sviluppare altri metodi "non distruttivi" che consentissero di arrivare agli stessi risultati.

Questa lunga ricerca tuttavia solo negli ultimi anni ha portato a soluzioni che non abbiano un eccessivo costo di messa in opera. Una metodologia di applicazione attuabile per i fibrorinforzati con fibre ferrose è quella basata sul comportamento ferromagnetico del calcestruzzo. Con determinate apparecchiature è difatti possibile misurare la permeabilità magnetica del manufatto analizzato e ricostruire l'orientamento prevalente delle fibre al suo interno [15].

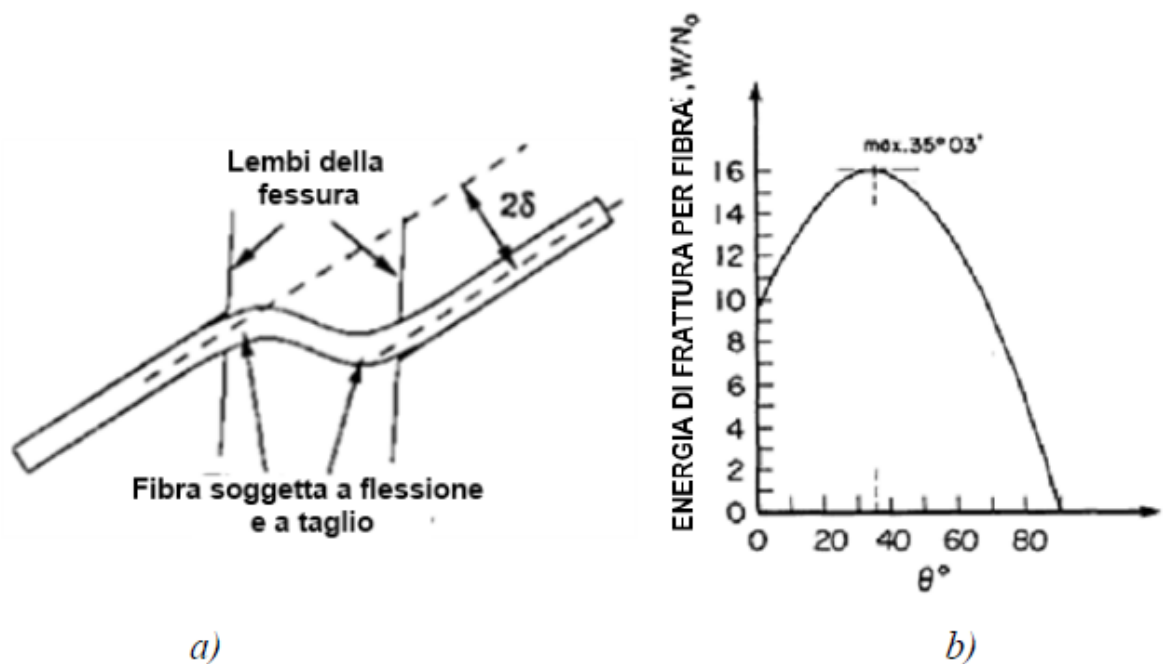


Figura 1.26: Particolare di una fibra genericamente orientata soggetta a flessione e taglio (a); Grafico dell'efficienza della fibra in funzione dell'inclinazione (b) [3]



## 1.4 Comportamento meccanico e sua identificazione sperimentale

La conoscenza della natura fisica dei processi di frattura dei compositi cementizi ha un ruolo centrale nella progettazione di strutture e nello sviluppo di nuovi materiali ad alte prestazioni. Come già descritto in precedenza il comportamento meccanico del calcestruzzo fibrorinforzato dipende da una moltitudine di fattori; tuttavia, come ha dimostrato la sperimentazione avvenuta negli anni, è molto difficile prevedere la reale capacità meccanica del materiale basandosi sulle informazioni preliminari riguardanti i diversi materiali utilizzati e le tecniche di getto. La verifica delle caratteristiche meccaniche può essere difatti compiuta solo grazie ad opportune prove su campioni estratti dal materiale già preparato; alcune di queste prove sono simili a quelle utilizzate per il semplice calcestruzzo, altre sono state concepite appositamente per il calcestruzzo fibrorinforzato. La differenza più significativa tra calcestruzzo normale e il fibrorinforzato è la capacità di assorbimento di energia. Quest'ultimo è utilizzato in strutture per questa sua capacità specifica, che a sua volta spinge i tentativi di determinare tipologie di prove più adeguate per la caratterizzazione della sua tenacità.

Le principali tipologie di prove che saranno descritte nel seguito sono:

- Trazione diretta uniassiale (Direct tensile test – DTT);
- Trazione indiretta per splitting (prova brasiliana);
- Trazione indiretta per flessione (4PBT e 3PBT);
- Wedge Splitting Test.

### 1.4.1 Trazione diretta uniassiale (Direct Tensile Test)

Ideato per verificare la resistenza dei normali calcestruzzi, la prova di trazione diretta (DTT) è impiegata anche nella ricerca delle caratteristiche meccaniche di calcestruzzi fibrorinforzati ordinari ed ad alte prestazioni. Fornisce in modo esplicito la relazione tra lo sforzo applicato e l'apertura di fessura nel campione.

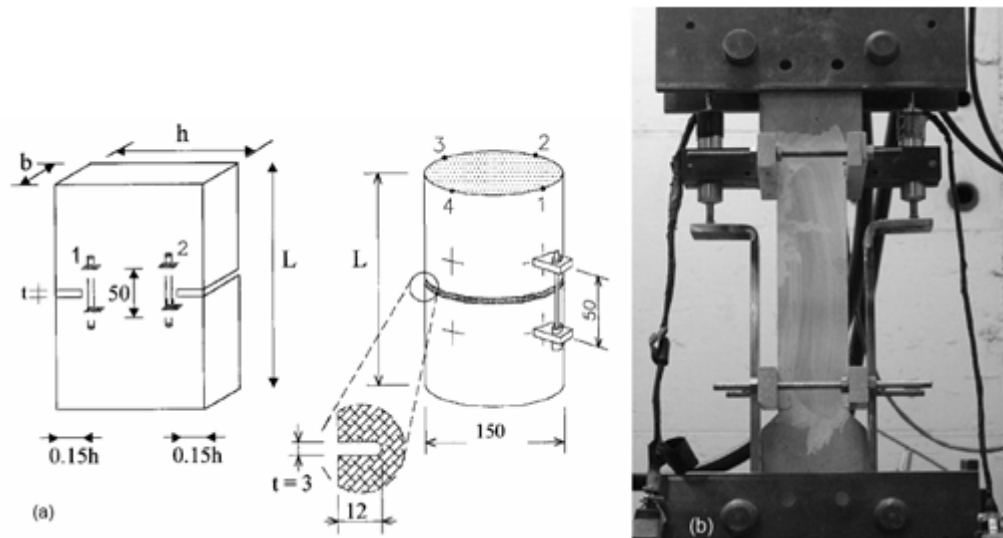


Figura 1.27: Schema di un provino di un test DDT (a); Esecuzione di un test DDT (b)

Secondo questa prova il materiale è sottoposto ad un incremento graduale di carico applicato ai due estremi del provino, partendo da uno sforzo nullo fino ad arrivare allo sforzo massimo che determina la rottura del provino. Il comportamento a trazione uniassiale del fibrorinforzato è fortemente influenzato dalla presenza delle fibre, specie nella fase seguente la prima fessurazione. Soltanto utilizzando elevati dosaggi, soprattutto di microfibre, si possono ottenere rilevanti incrementi del valore di picco entrando nel campo di applicazione dei calcestruzzi fibrorinforzati ad alte prestazioni (HPFRCC) dove il comportamento diventa di tipo incrudente. La geometria e le dimensioni del provino sono standardizzate per i diversi tipi di materiale; in particolare per il calcestruzzo fibrorinforzato bisogna far riferimento alle dimensioni illustrate in Fig. 1.27a. Nel caso di comportamento incrudente la prova di trazione diretta del calcestruzzo fibrorinforzato è di non facile esecuzione. Sebbene essa presenti il vantaggio di fornire direttamente la correlazione tra lo sforzo applicato e lo stato fessurativo del materiale si riscontra tuttavia una certa difficoltà nella preparazione dei campioni, che spesso devono essere gettati contemporaneamente ma in forme separate e maturati con le stesse modalità dell'elemento principale.

Attualmente in Italia è in vigore la norma UNI 11188 nella quale si forniscono alcune indicazioni sulle dimensioni del campione da utilizzare e sulla profondità dell'intaglio; tuttavia le già citate difficoltà di estrazione di questo dal manufatto, non rendono semplice utilizzare tale tipologia di test per l'analisi del comportamento a trazione di campioni aventi diverso orientamento di fibre indotto dalla colata di getto.

### 1.4.2 Trazione indiretta (prova brasiliana)

Le difficoltà pratiche di eseguire la prova di trazione diretta hanno portato a procedimenti alternativi, come ad esempio la prova di trazione indiretta per splitting, anche detta “prova brasiliana”. È definita indiretta in quanto sfruttando la geometria del provino si applica una forza di compressione per ottenere le caratteristiche di resistenza a trazione del materiale.

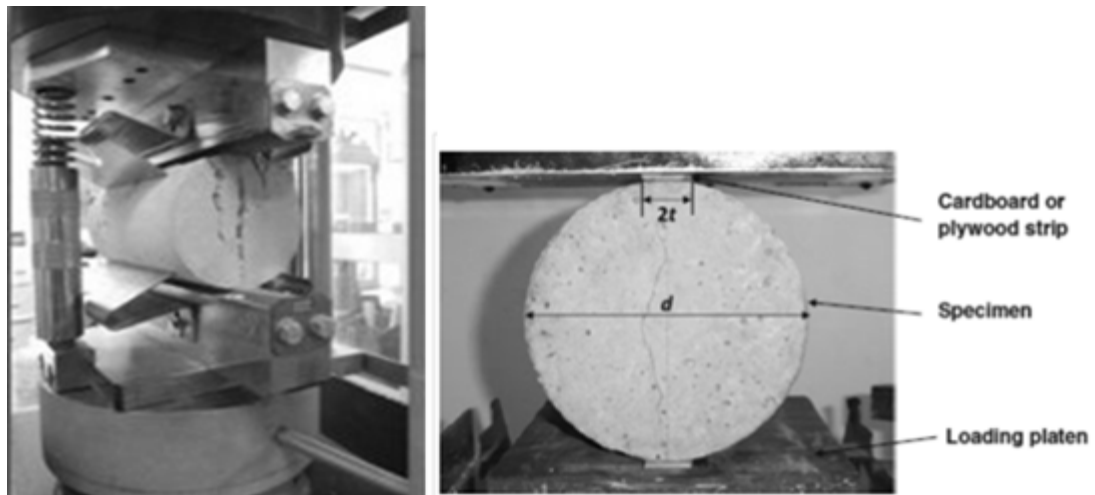


Figura 1.28: Schema ed esecuzione di un test di trazione indiretta (“prova brasiliana”)

La prova nello specifico consiste nel sottoporre un provino cilindrico (ma possono essere utilizzati anche provini cubici o prismatici) ad una forza di compressione applicata ad una zona ristretta per tutta la lunghezza del cilindro. La rottura avviene per raggiungimento della massima resistenza a trazione in direzione ortogonale alla direzione di applicazione dello sforzo di compressione. Dal carico massimo si ricava la resistenza a trazione indiretta del materiale. Per la determinazione di tale proprietà si può fare riferimento alla ASTM C496 ed alla EN 12390-6. Per calcestruzzi ordinari, si può dedurre la resistenza a trazione diretta a partire da quella indiretta (EC 2, NT Italiane, ACI). Non sono codificate, al momento, analoghe correlazioni per i calcestruzzi fibrorinforzati. Generalmente questa tipologia di prova è utilizzata per la ricerca delle caratteristiche di prima fessurazione e termina con un’improvvisa e violenta rottura del campione. Come prova risulta quindi inadatta all’analisi del comportamento del materiale nella fase successiva alla fessurazione, aspetto cruciale dei materiali fibrorinforzati. Per estenderne la validità alcuni ricercatori hanno effettuato sperimentazioni utilizzando come variabile di controllo l’apertura di fessura (COD) ottenuta nel piano di carico una volta raggiunta la massima resistenza

a trazione del materiale [53]. In questo modo è possibile determinare la curva sforzo-deformazione a trazione sulla base dei risultati di compressione diametrale ottenuti dal test brasiliano e quindi estendere la prova ad esempio ai calcestruzzi fibrorinforzati. Nel test brasiliano, come già detto, il carico è applicato lungo due generatrici diametralmente opposte del campione oggetto di prova.

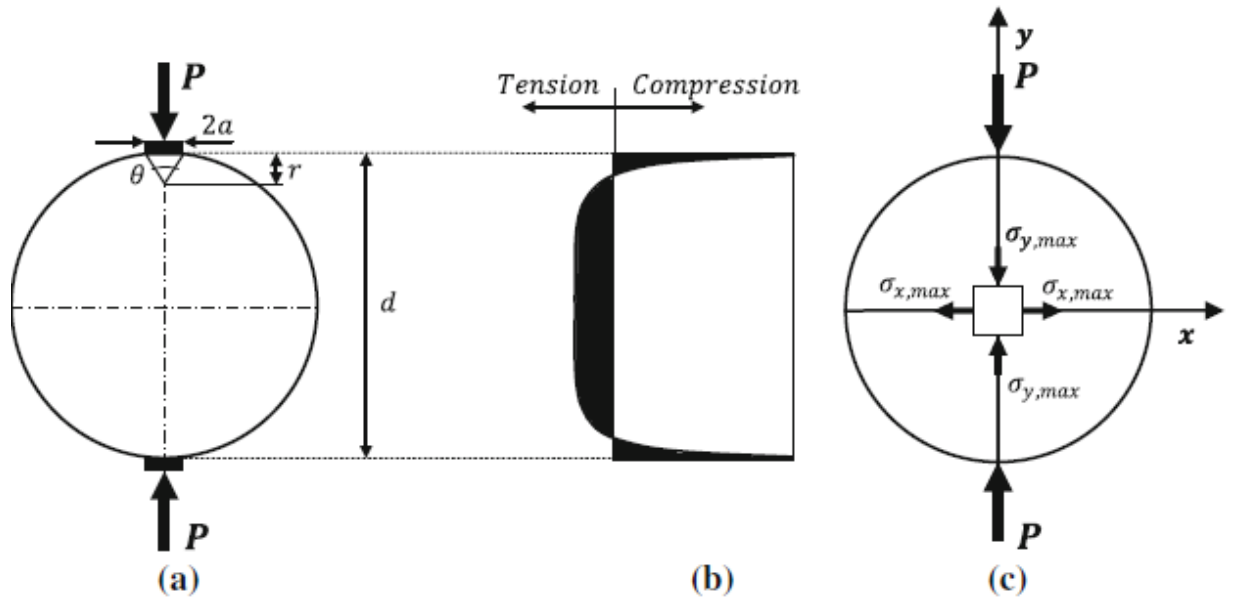


Figura 1.29: Determinazione delle sollecitazioni in un cilindro sottoposto ad una prova brasiliana (a); Distribuzione delle sollecitazioni orizzontali nel piano di carico (b); Punto di massima sollecitazione dovuto a carichi concentrati su due generatrici diametralmente opposte (c) [5].

Questa sollecitazione crea uno stato di sforzo biassiale all'interno del cilindro. Tenendo conto che il carico (P) è applicato uniformemente per un tratto di larghezza  $2t$  su un cilindro di diametro  $d$  e di lunghezza  $l$  (Fig. 1.29), si può dimostrare che la sollecitazione elastica nel diametro verticale può essere approssimata attraverso le espressioni seguenti:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi ld} \cdot \left[ \frac{d}{4t} (\theta + \sin\theta) + \frac{d}{d-r} - 1 \right] \quad \text{per } 2t < d/10 \quad (1.12)$$

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi ld} \cdot \left[ 1 - \frac{d}{4t} (\theta - \sin\theta) \right] \quad (1.13)$$

Il termine  $\theta$  corrisponde all'angolo che copre l'area caricata fino al punto analizzato (Fig. 1.29a). La tensione di trazione agente lungo la sezione sollecitata è pressoché uniforme per il 75% del diametro, come indicato in Figura 1.29b; mentre i massimi sforzi ortogonali prodotti al centro

del cilindro dal sistema di carico (Fig. 1.29c) sono calcolabili con le seguenti formule:

$$\sigma_{x,max} = \frac{2P}{\pi ld} \quad \sigma_{y,max} = -\frac{6P}{\pi ld} \quad (1.14), (1.15)$$

Se osserviamo le tipiche curve carico-apertura di fessura (P-COD) ottenute con le prove di trazione indiretta comprese le fasi successive alla fase di carico massimo, possiamo identificare quattro differenti fasi nel seguito descritte (Fig. 1.30):

- **Tratto OA – Fase pre-fessurativa**

Come nel caso della risposta osservata nelle prove di trazione uniassiale, nel regime pre-fessurazione si osserva una fase chiaramente lineare fino ad un valore approssimativamente pari all' 85% del valore di carico massimo (Pmax).

- **Tratto AB – Fase pre-picco non lineare**

Al formarsi della prima fessura (punto A) inizia un tratto in cui la risposta risulta non lineare a causa della perdita di rigidità del calcestruzzo. Questo tratto si estende fino al raggiungimento del carico massimo. Il comportamento pre-picco del calcestruzzo sottoposto al test brasiliano può essere analizzata per mezzo di un modello “*strut and tie*”, (Fig. 1.30a). Due puntoni trasmettono la compressione dovuta ai carichi applicati verticalmente, mentre due tiranti posti in direzione ortogonale al carico bilanciano l'equilibrio.

- **Tratto BC - Softening**

Dopo aver raggiunto il carico massimo (punto B), il carico diminuisce gradualmente, mentre la fessura si apre e si estende lungo l'intera sezione (Fig. 1.30b). A differenza di quanto si osserva in trazione diretta o in prove di flessione il carico non diminuisce fino ad un valore nullo in cui le sollecitazioni non riescono più a trasmettersi tra i lembi aperti della fessura.

- **Tratto CD - Plateau**

Le fessure sono ora diffuse per tutta la lunghezza della sezione caricata e in corrispondenza della zona di carico appaiono dei cunei (Fig. 1.30c). Le due metà del campione continuano la

fase di separazione e continuano ad essere sottoposte ad un carico di compressione pari a circa il 40% del carico di picco dando origine al plateau osservato alla fine della curva. Il campione a questo punto è completamente diviso e non ha più senso parlare di trazione lungo i due lembi della fessura. Il nuovo modello di analisi dovrà quindi essere costituito secondo la nuova situazione (Fig. 1.30d).

Si presenta pertanto un “effetto colonna” sul cilindro sottoposto compressione diametrale, in altre parole, le due metà del provino rimangono sotto un carico relativamente costante mentre continuano a separarsi. Questo effetto può essere quantificato mediante prove del tutto simili alle precedenti effettuate però su campioni precedentemente tagliati lungo il piano di carico. Questo approccio è interessante perché, se l'effetto colonna prodotto nel cilindro viene quantificato e poi sottratto dalla curva totale è possibile ottenere la componente di trazione direttamente agente sul provino (area scura nel diagramma). La curva sforzo-deformazione a trazione del campione è così determinata.

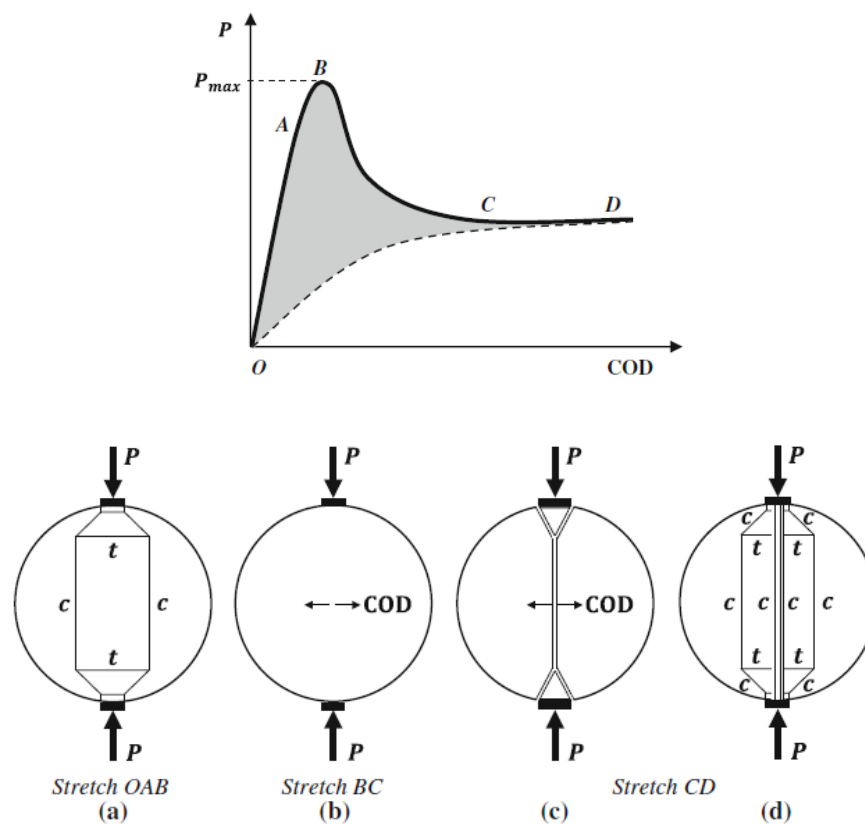
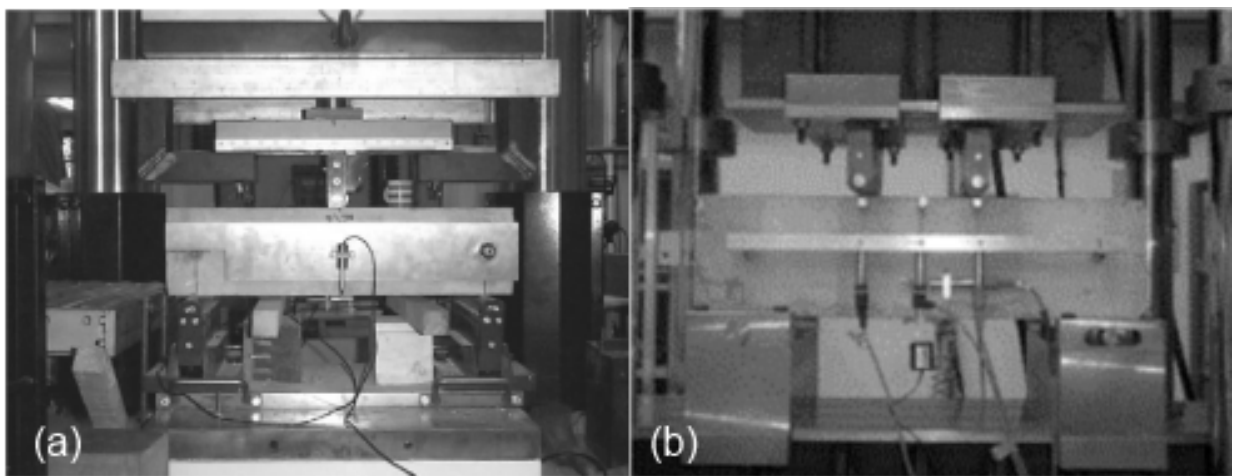


Figura 1.30: Tipica curva  $P$ - $COD$  ottenuta con i test di trazione indiretta. Modello strut-and-tie utilizzato per lo studio del regime pre-cracking (a); Propagazione della trazione nel regime post-picco (b); Situazione finale nel campione (c); Modello strut-and-tie per lo stato finale del cilindro.

### 1.4.3 Trazione indiretta per flessione

La prova di flessione è certamente la più diffusa per la sua relativa facilità di esecuzione e perché è rappresentativa di molte situazioni pratiche. Un altro motivo del successo di questa prova si deve al maggior grado d'iperstaticità della prova, che mette in miglior evidenza la duttilità apportata dal rinforzo fibroso, più di quanto non avvenga nelle prove precedenti. Lo scopo di tale prova è la determinazione della tenacità apportata dalle fibre al calcestruzzo. Il provino è appoggiato su due punti, ed è caricato in uno o due punti: nel primo caso si parla di Three Point Bending Test (3PBT), nel secondo di Four Point Bending Test (4PBT). La prova di carico su tre punti prevede che il travetto sia caricato a metà luce, mentre per quello a quattro punti di carico la luce è divisa in tre parti di ugual lunghezza. I risultati possono essere rappresentati da una curva Carico – Spostamento verticale (misurato sotto i punti di carico) oppure, nel caso il provino sia intagliato, da una curva Carico – Apertura di fessura (Crack Opening Displacement), come si vede in Fig. 1.31.

Le dimensioni dei travetti nelle principali normative non sono molto diverse tra di loro. La norma Italiana UNI 11039 si basa su prove di flessione su quattro punti in controllo di apertura di fessura. Tramite dei traduttori di forza e spostamento verranno valutati il carico applicato e gli spostamenti CMOD (Apertura di fessura alla bocca dell'intaglio) e CTOD (Apertura di fessura all' apice dell'intaglio).



*Figura 1.31: Prova indiretta per flessione: 3 point bending test (a) e 4 point bending test (b)*

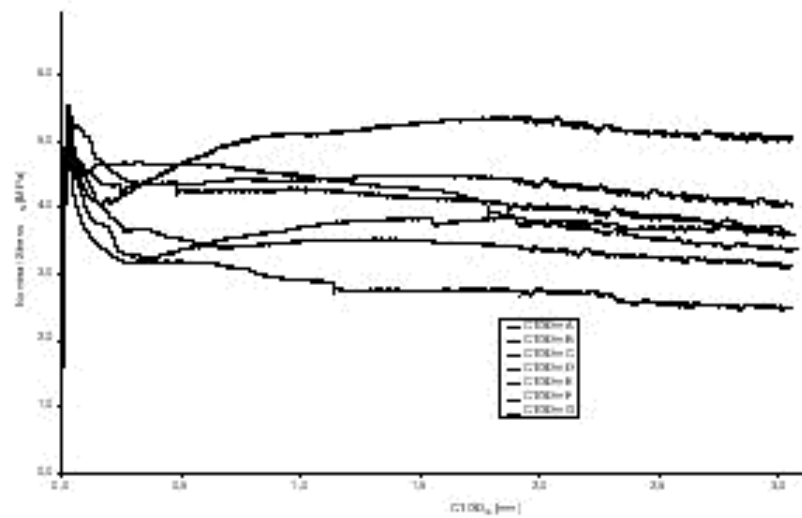


Figura 1.32: Esempi di grafico Crack-COD per una prova a flessione

La resistenza di prima fessurazione è fornita dalla relazione:

$$f_{If} = \frac{P_{If} \cdot L}{b \cdot (h-a)^2} \tag{1.16}$$

Nella quale:

- L è la distanza tra gli appoggi inferiori
- b è la larghezza della trave
- h è l'altezza della trave
- a è la profondità dell'intaglio

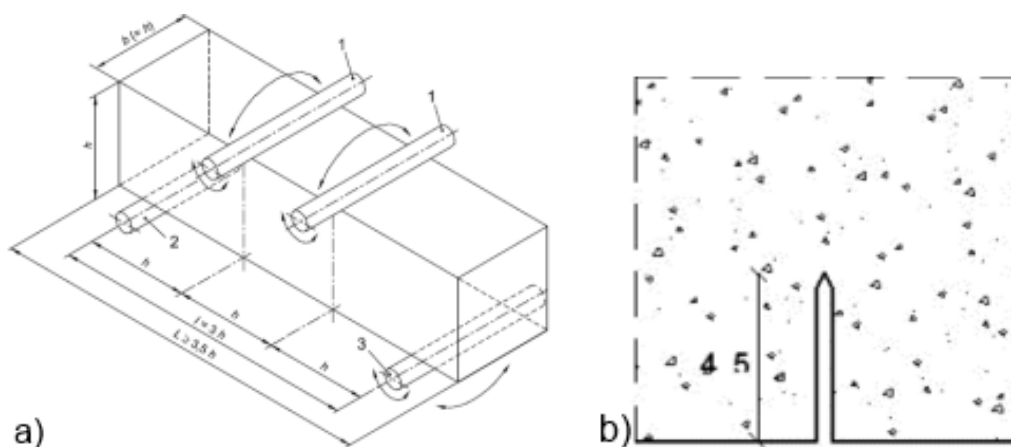


Figura 1.33: Schema di un provino secondo la norma UNI 11039 (a); Intaglio nella sezione (b)



Saranno calcolate due differenti resistenze post-fessurazione: la prima, tipica per le condizioni di esercizio, è la tensione media nel tratto con apertura di fessura all'apice dell'intaglio (variabile tra 0 e 0.6 mm); la seconda, tipica delle condizioni di collasso, è la tensione media nel tratto di apertura di fessura variabile tra 0,6 e 3 mm. Tali resistenze possono essere calcolate secondo le formule:

$$f_{eq(0-0.6)} = \frac{L}{b \cdot (h-a)^2} \cdot \frac{U_1}{0,6} \quad (1.17)$$

$$f_{eq(0,6-3)} = \frac{L}{b \cdot (h-a)^2} \cdot \frac{U_2}{2,4} \quad (1.18)$$

Con  $U_1$  ed  $U_2$  le aree sottese alla curva Carico – CTODm (valore medio dei CTOD valutati sui diversi lati del provino) nelle formule (1.17) e (1.18).

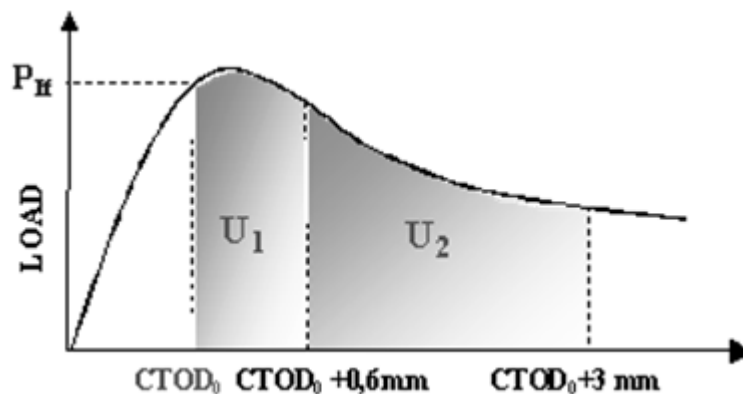


Figura 1.34: Significato grafico dei valori  $U_1$  ed  $U_2$

#### 1.4.4 Wedge Splitting Test

Un buon test, per essere univocamente accettato e ampiamente utilizzato dovrebbe avere alcuni requisiti fondamentali: restituire risultati affidabili facendo uso preferibilmente di piccoli campioni facili da maneggiare e non richiedere sistemi di prova avanzati ed eccessivamente costosi. La prova di spacco per incuneamento, questa la traduzione letterale, originariamente proposta da Linsbauer & Tschegg (1986) e successivamente sviluppata da Brühwiler & Wittmann (1990) [4], soddisfa questi requisiti di base e può essere utilizzato da anche da piccole e medie imprese nella loro produzione giornaliera senza dover investire in costose attrezzature di

prova . La configurazione della prova si basa sull'utilizzazione di campioni dalla geometria di solito prismatica; altre possibili geometrie sono raffigurate in Figura 1.35. Caratteristica del test è però l'intaglio di una scanalatura di forma rettangolare nella parte superiore del provino ed una tacca sottostante.

Le dimensioni dei due intagli vengono definite in modo tale da creare una frattura verticale nella parte centrale del provino. La preparazione della prova prevede che i campioni vengano poggiati su un supporto

lineare fissato sulla piastra di base della macchina di prova (Fig. 1.36a). Due dispositivi di caricamento equipaggiati con rulli sono applicati alla parte superiore del campione (Fig. 1.36b) ed un profilo di acciaio rigido a forma di cuneo , collegato direttamente alla macchina di prova, viene alloggiato all'interno della scanalatura prodotta precedentemente (Fig. 1.36c). La prova è pronta per essere eseguita (Fig. 1.36c); il cuneo viene spinto verso il basso dall'apparecchiatura che applicherà una forza verticale.

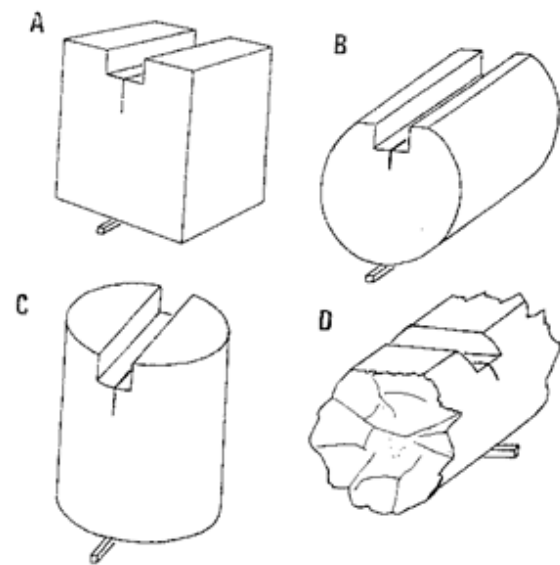


Figura 1.35: Possibili geometrie per provini di un di un test WTS

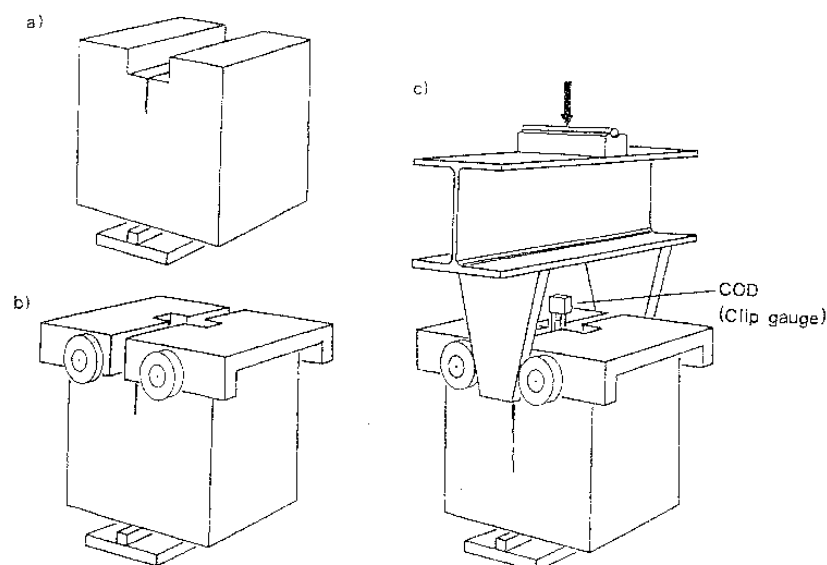


Figura 1.36: Fasi di configurazione di un wedge splitting test: provino su supporto lineare (a); sistemazione dei due dispositivi dotati di rulli (b); applicazione del cuneo nella scanalatura tra i rulli (c)

La forza che farà dividere il provino è calcolabile tramite una semplice analisi statica delle forze in gioco (Fig. 1.37 a,b) ed analiticamente con la formula.

$$F_S = \frac{F_V}{(2 \cdot \tan \alpha)} \quad (1.19)$$

dove:

- $F_V$  è la forza verticale applicata;
- $F_S$  è la forza di trazione orizzontale instauratasi nel provino;
- $\alpha$  è l'angolo di inclinazione del cuneo.

I valori di apertura di fessurazione verranno misurati tramite dei trasduttori. L'obiettivo del test è la misurazione dell'energia di frattura ( $G_F$ ) necessaria per dividere il provino in due metà. Tale energia è rappresentata dall'area sottostante la curva sforzo-apertura di fessura (Fig. 1.38). Prove di questo tipo normalmente presentano alcune difficoltà, quali ad esempio le piccole deformazioni a rottura dell'elemento in calcestruzzo e l'estrema rigidità dei provini in rapporto a quella della macchina di prova. L'utilizzazione di cunei porta però al superamento di queste problematiche.

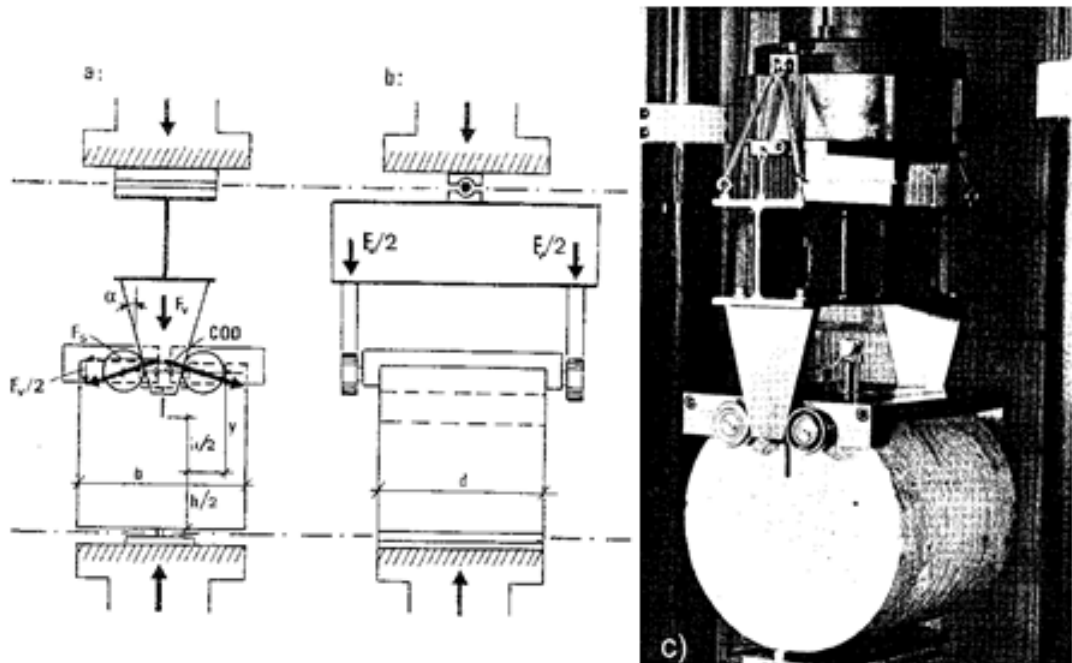


Figura 1.37: Schema statico per un Wedge Splitting Test: vista frontale (a) e laterale (b).Esecuzione del test su provino cilindrico (c)

Durante la prova infatti il telaio della macchina è sottoposto alla sola forza di compressione  $F_v$ . Grazie all'utilizzo di un ridotto angolo di inclinazione del cuneo questa forza viene ridotta ed applicata come forza di splitting al provino ( $F_s$ ). Tali considerazioni ci portano all'utilizzazione consigliabile di un angolo di modesta entità, di solito pari a  $15^\circ$ . Data la natura del test, dopo che la prova è stata eseguita è necessario eseguire un'analisi inversa al fine di arrivare a determinare le caratteristiche del materiale [22]. Tale analisi consiste di tre parti principali:

1. l'analisi dei dati ottenuti da prove di laboratorio o in sito;
2. la simulazione della prova secondo i parametri da determinare;
3. un processo di ottimizzazione per minimizzare le discrepanze tra i dati di test e i corrispondenti dati ottenuti dalla simulazione.

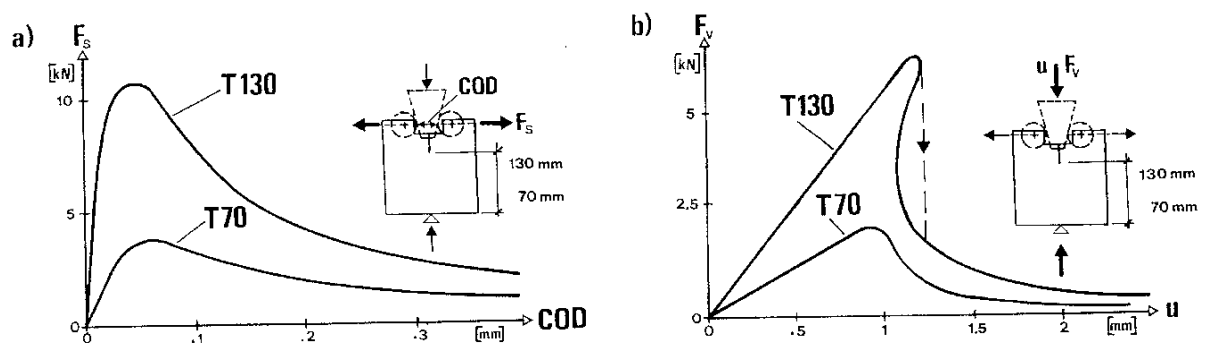


Figura 1.38: Due differenti curve sforzo-deformazione restituite dal test.

Molti approcci sono stati sviluppati negli ultimi decenni per ottenere le proprietà di frattura; approcci che in generale possono essere divisi in due gruppi principali.

Il primo gruppo comprende quei metodi che sfruttano un'analisi inversa passo-passo in cui il punto sulla curva di softening è ottenuto dalla minimizzazione della differenza tra il carico calcolato e l'effettivo carico misurato per l'apertura di fessura indagata. Tra questi metodi va citato il metodo polilineare introdotto da Kitsutaka. Il vantaggio di questo metodo risiede nella sua generalità, nessuna ipotesi deve essere fatta in fase precedente all'esperimento. D'altra parte il rapporto determinato è fortemente influenzato da eventuali errori di misura in ogni punto. In particolare, quando si determina un punto specifico, esso non è soltanto una funzione del punto determinato; il suo valore infatti è una funzione di tutti i punti precedentemente determinati.

Tutti gli errori precedentemente commessi si accumulano così nel punto considerato. Inoltre, la resistenza alla trazione e la parte iniziale della curva di softening non possono essere determinate con precisione, come mostrato negli studi compiuti prima da Uchida e Barr e successivamente da Planas.

Per il secondo gruppo invece il processo di analisi viene effettuato in maniera differente, con lo scopo di determinare i valori dei parametri che descrivono l'andamento della curva di softening, curva la cui forma è nota a priori. Definita il tipo di curva il procedimento seguito è di ottimizzazione globale. Quest'ottimizzazione può essere fatta in due modi: o con la determinazione di tutte le variabili incognite in un solo passaggio, oppure tramite una sequenza di sotto-ottimizze che determinano le variabili selezionate in un procedimento a cascata. Questo secondo tipo di analisi inversa fornisce una maggiore robustezza dovuta ad un minor rischio di raggiungere minimi locali. Uno di questi metodi, che richiede la conoscenza di alcuni valori è la tecnica di conformità lanciata da Hu e Mai.

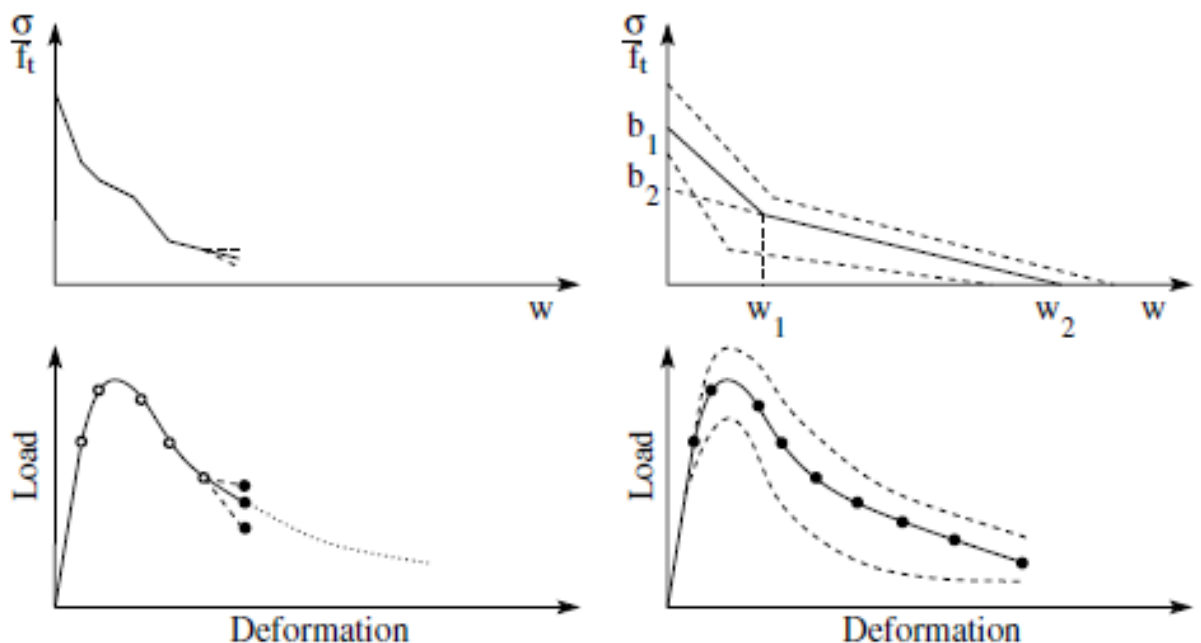


Figura 1.39: Grafici ottenuti tramite i due approcci di base per l'analisi inversa del Wedge Splitting Test

## 1.5 Il Double Edge Wedge Splitting Test

Tra i test di caratterizzazione del comportamento meccanico appositamente creati per il calcestruzzo fibrorinforzato troviamo Il *Double Edge Wedge Splitting Test*, denominato anche con l'acronimo di *D.E.W.S Test*. Recentemente proposto dal Politecnico di Milano si va a classificare tra quelle prove di trazione indiretta come la prova brasiliana, il Four Point Bending Test ed il Wedge Splitting Test. La resistenza a trazione viene infatti calcolata applicando in determinate condizioni un carico di compressione. Nato da un'evoluzione dei test prima citati il D.E.W.S Test punta a restituire direttamente (senza la necessità di analisi successive) il comportamento a trazione del materiale evitando le difficoltà prima discusse. Tra i punti a favore di questa tipologia di test vi è sicuramente la facilità di preparazione dei provini, che potranno essere facilmente estratti dai vari manufatti e non creati appositamente come succede per altre prove (ad esempio il DTT). Questa caratteristica, una volta nota l'orientazione prevalente delle fibre all'interno della matrice cementizia, può essere sfruttata per ricavare in maniera veloce e precisa indicazioni sul comportamento a trazione del materiale in funzione del diverso orientamento di fibre. Altro vantaggio fondamentale è la presenza di un meccanismo di rottura del provino puramente in modo I<sup>4</sup>; con un piano di frattura "predeterminato" dalla presenza di appositi intagli.

### 1.5.1 Descrizione del test

Il Test D.E.W.S viene effettuato su un provino di geometria generalmente quadrata che può essere facilmente intagliato e preparato partendo da una qualunque tipologia di elemento fibrorinforzato. Tale geometria è stata ricercata partendo dall'analogia tra il Three Point Bending Test ed il Wedge Splitting Test, inizialmente proposta nel lavoro di Bruhwiler e Wittman (Fig. 1.40a,b); la geometria definitiva è presentata in Figura 1.40c.

Il provino, di forma quadrata avente lato di 150 mm, presenta su due facce opposte due scanalature triangolari, inclinate con un angolo di 45° che consentono sia l'alloggiamento di due

---

<sup>4</sup> Per **modo I** si intende una delle differenti modalità di fessurazione nel quale la tensione è applicata ortogonalmente alla fessura.

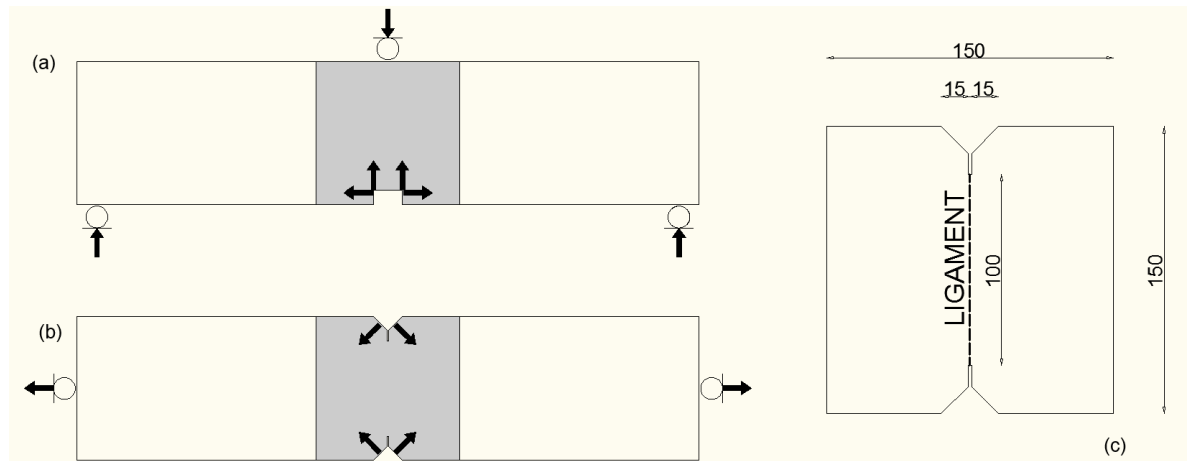


Figura 1.40: Analogia tra il wedge splitting test e il three point bending test (a); analogia tra il DEWS test e il direct tension test con rotazione (b); Geometria del provino per il DEWS test (c) [9]

cilindri direttamente collegati al meccanismo di applicazione del carico, nonché la trasmissione degli sforzi all'interno del provino. Grazie a questa inclinazione gli sforzi di compressione applicati dal macchinario sono deviati lontano dalla linea di rottura creando un netto disaccoppiamento tra compressione longitudinale e trazione in direzione trasversale. In questo modo è possibile calcolare l'effettivo sforzo di trazione lungo la linea di rottura ( $F_{SP}$ ) grazie ad un semplice equilibrio delle forze in gioco (Fig. 1.41), secondo la generica relazione:

$$F_{SP} = P \cdot \frac{\cos\theta - \mu \cdot \sin\theta}{\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta} \quad (1.20)$$

dove:

- $P$  è la forza di compressione applicata dalla macchina;
- $\theta$  è l'angolo di inclinazione delle scanalature (in questo caso  $45^\circ$ );
- $\mu$  è il coefficiente di attrito tra il cilindro del macchinario e la scanalatura.

L'effettiva tensione applicata al materiale è semplicemente ottenibile dividendo la Forza di splitting prima calcolata ( $F_{SP}$ ) per l'area di applicazione dello sforzo di trazione. Tale area risulta pari allo spessore del provino moltiplicata per l'effettiva distanza i due intagli (ligament) (Fig. 1.40) secondo la formula nella pagina seguente:

$$\sigma_{SP} = \frac{F_{SP}}{A_{SP}} = \frac{F_{SP}}{(s \cdot l)} \quad (1.21)$$

dove:

- $F_{SP}$  è la forza di splitting calcolata;
- $s$  è lo spessore del provino
- $l$  è la lunghezza del ligament.

Il coefficiente di attrito presente nella formula (1.20) dipende dalle condizioni di interfaccia tra la scanalatura del provino e il cilindro di applicazione del carico. Questo aspetto della prova deve essere infatti particolarmente curato in modo da minimizzare l'attrito delle due parti e di conseguenza l'apporto che questo fenomeno può avere sulla risultante finale degli sforzi. Il coefficiente di attrito può essere quantificato con precisione mediante l'utilizzazione di una apposita prova. Sulla superficie delle scanalature vengono applicate delle piastre in ottone e durante la sperimentazione sono state utilizzate tre differenti tipologie di contatto tra la piastra stessa ed il trasmettente il carico; rispettivamente il contatto diretto, l'interposizione di uno strato

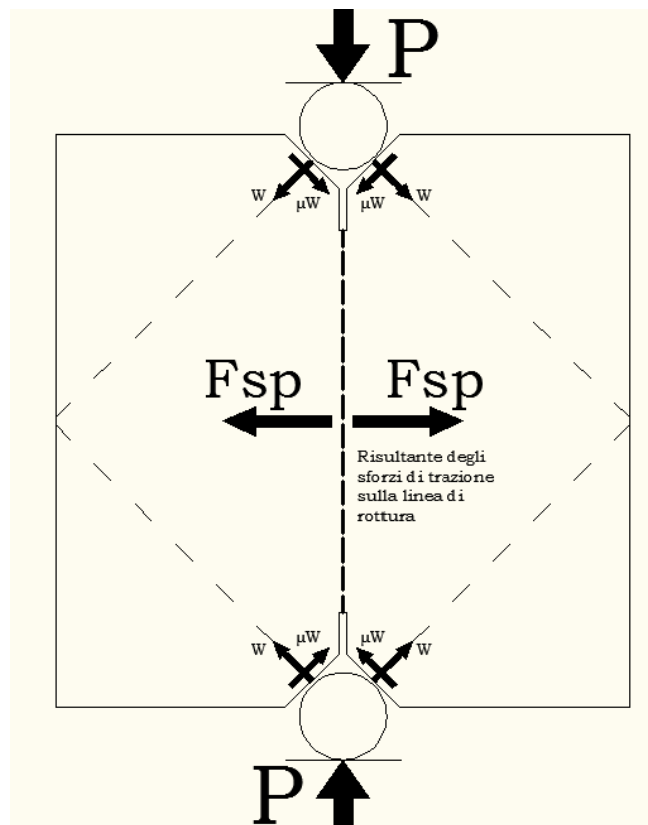


Figura 1.41: Geometria e schema di distribuzione delle forze nel Double Edge Wedge Splitting Test



di Teflon e l'utilizzo di grafite come lubrificante. Sulle facce laterali del provino vengono applicate speciali apparecchiature LVDT che hanno il compito di misurare, per ciascuna faccia gli spostamenti che caratterizzano la fase fessurativa del campione. Questi dati, uniti alle misure di carico applicato dalla macchina di prova, ci forniscono il legame tra sforzo di trazione applicato e l'apertura di fessurazione (COD).

Il disaccoppiamento spaziale tra sollecitazioni di compressione e trazione rappresenta una caratteristica distintiva del test, che, inoltre, evita lo sviluppo di deformazioni plastiche nella piccola zona sottostante il dispositivo di caricamento; fenomeno che può essere rilevante nel caso di materiali fibrorinforzati altamente duttili. In queste particolari zone vi è la formazione della linea di frattura del provino, come mostrato in figura, ed indotta dalla geometria dello stesso. La presenza delle scanalature e l'applicazione del carico infatti conferiscono la possibilità di indurre una tipologia di frattura in puro modo uno tra i due apici dell'intaglio; cosa che non può essere garantita in altre tipologie di prove (come ad esempio la brasiliana). Quest'ultima può essere utilizzata per identificare solo la tensione di prima fessurazione sopportata dal materiale, e solo nel caso in cui le fibre non contribuiscano ad una propagazione stabile della fessura.

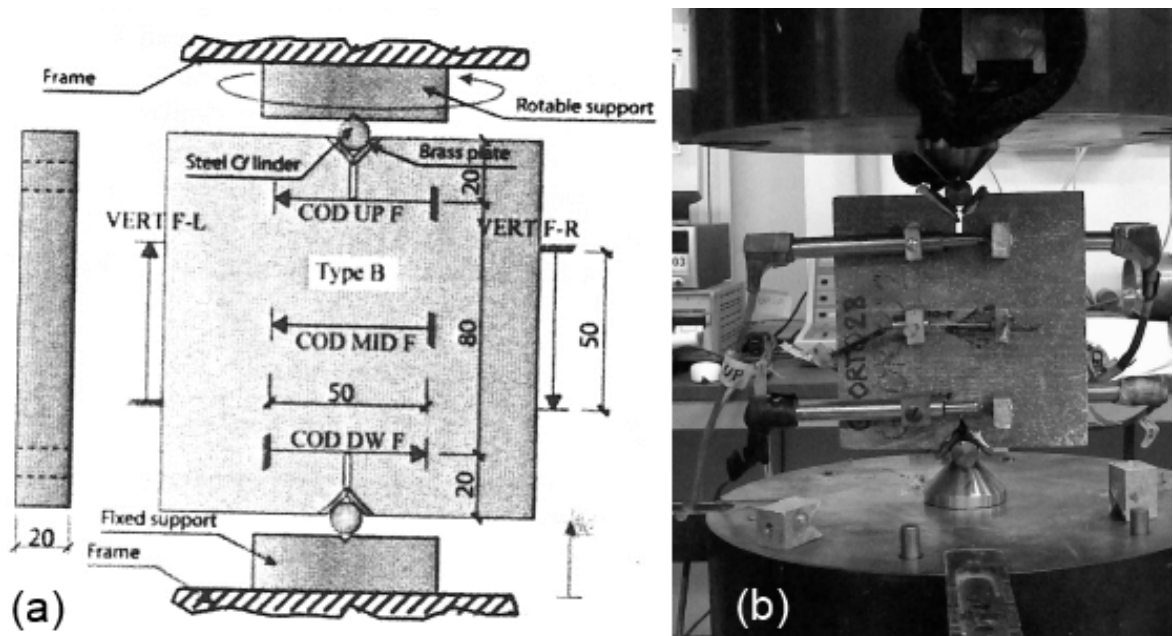


Figura 1.42: Schema di un provino con LVDT con geometria corrispondente ai test preliminari eseguiti (a) [9];  
Fotogramma preso durante l'esecuzione di una prova (b) [14]

### 1.5.2 Che cos'è un LVDT

Per LVDT (*Linear Variable Displacement Transducer*), anche noto con il nome di *trasduttore di spostamento induttivo*, si intende un' apparecchiatura elettromagnetica estremamente sensibile in grado di misurare spostamenti lineari dell'ampiezza di frazioni di micron. Una sua variante, il Rotary Variable Displacement Transducer, permette di misurare le rotazioni angolari. La sua forma più comune prevede la presenza di un tubo su cui sono presenti tre avvolgimenti disposti con assi paralleli e con all'interno un nucleo ferromagnetico mobile, normalmente caratterizzato da un'alta permeabilità magnetica. L'avvolgimento centrale è detto primario e viene eccitato da un segnale sinusoidale di opportuna frequenza.

Gli altri due avvolgimenti, denominati secondari, opportunamente collegati in controfase tra loro servono invece a misurare la tensione d'uscita. Quando è applicata la tensione all'avvolgimento primario, sugli altri due viene indotta una forza elettromotrice per via delle mutue induzioni tra gli avvolgimenti. In particolare quando il nucleo magnetico è posto al centro (e quindi non vi è nessuno spostamento) il segnale mandato sull'avvolgimento primario passa ai due avvolgimenti secondari che, essendo però in controfase, non restituiranno nessun segnale. Allo spostarsi del nucleo le mutue induttanze cambiano, e a seconda che si sposti a sinistra o a destra risulterà maggiore l'accoppiamento induttivo con il secondario rispettivamente di sinistra o destra.

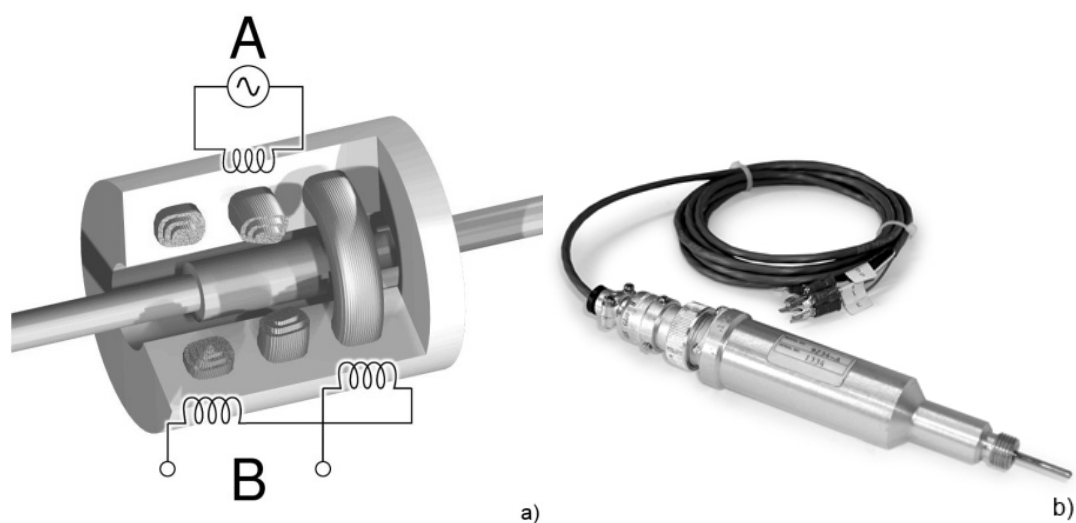


Figura 1.43: Generico schema interno di un LVDT (a); Immagine di un LVDT (b)

Di conseguenza il segnale in uscita varierà proporzionalmente allo spostamento del nucleo. Per tradurre il segnale di uscita del LVDT si usano i cosiddetti *demodulatori discriminatori di fase*; dei dispositivi elettronici che permettono di estrarre il valore efficace della tensione che rappresenta lo spostamento, e interpretare da quale parte dello zero avviene lo spostamento.

Il più noto di tutti utilizza un doppio ponte di Graetz che raddrizza il segnale alternato proveniente dagli avvolgimenti secondari e ne fa la somma algebrica; a seconda del segno della somma si è in grado di capire da quale parte dello zero è avvenuto lo spostamento. Secondo la frequenza di alimentazione del primario e della massa del nucleo si hanno frequenze di taglio di alcune centinaia di hertz e quindi buone risposte dinamiche a spostamenti velocemente variabili nel tempo.

# 2

## *DIGITAL IMAGE CORRELATION*

**P**er *Digital Image Correlation* (DIC) si fa riferimento alla classe di metodi ottici di non contatto che utilizzano le tecniche di registrazione e tracciamento delle immagini per effettuare misurazioni accurate 2D e 3D di deformazioni e spostamenti basandosi sulle variazioni di immagini. Tale tecnologia nasce dalla necessità di superare le difficoltà riscontrate durante la post-elaborazione dei dati di misura fotograficamente registrati. Le procedure di base consistono nell'acquisizione delle immagini digitali di un oggetto in momenti successivi tramite l'ausilio di una camera digitale (2D-DIC), oppure di due differenti camere disposte in visuale stereoscopica (3D-DIC), e nell'esecuzione di un'analisi tramite speciali algoritmi che correlando tra loro le immagini riescono a determinare spostamenti e deformazioni, sia nel campo bidimensionale sia in quello tridimensionale [37]. Queste tecniche, di recente sviluppo, hanno dimostrato di essere ampiamente applicabili in settori quali l'ingegneria civile e meccanica, la scienza dei materiali e risultano essere molto utili anche in ambito elettronico, biomedico, manifatturiero e fotogrammetrico.

Per la fase di acquisizione verranno utilizzate fotocamere matriciali, il cui sensore riceve le informazioni di luminosità che sono tradotte nel valore corrispondente sulla scala dei grigi<sup>5</sup> secondo l'intensità della luce riflessa dalla superficie studiata. La correlazione delle immagini per la tecnologia DIC è stata eseguita con molti tipi di modelli; modelli generalmente basati su oggetti, tra cui linee, griglie, punti e matrici casuali. Uno degli approcci più comuni impiega modelli casuali e confronta le diverse sottoregioni appartenenti all'intera immagine per ottenere una piena campionatura delle misure ottenute sia con illuminazione di luce coerente o mediante applicazione di un modello ad alto contrasto con illuminazione incoerente. Le campionature possono verificarsi su superfici solide o possono essere una collezione di particelle in un mezzo fluido. A tale proposito un grande vantaggio rispetto all'utilizzo degli estensimetri è di non avere una valutazione della deformazione puntuale relativa alla posizione in cui è applicato lo strumento, bensì di poter disporre di un campo di deformazioni caratterizzato da una risoluzione compatibile con il setup di misura su tutta la superficie ripresa dalla telecamera. Se invece si esegue un confronto con altre tecniche non a contatto per la rilevazione delle deformazioni, quali le tecniche interferometriche, si ha il vantaggio di avere dei vincoli meno restrittivi in termini di setup e di condizioni di sperimentazione [34].

---

<sup>5</sup> Per **scala dei grigi** si intende una scala monocromatica con 256 livelli di grigio avente estremi numerici i valori 0 e 255. Si ricorda che l'occhio umano è in grado di distinguere nettamente in media 16 livelli di grigio.

## 2.1 Cenni Storici

Le prime misurazioni basate su immagini sono state sviluppate nel campo della fotogrammetria, anche se le prime discussioni di prospettiva sono presenti anche negli scritti di Leonardo da Vinci fin dalla fine del quindicesimo secolo. Di notevole importanza sono state anche l'invenzione della fotografia all'inizio del 1800 ed il lavoro di Heinrich Lambert, che nella sua opera *La prospettiva Libera* del 1759 ha sviluppato la matematica di base della vista prospettica.

Lo sviluppo tecnologico durante gli anni è stato accompagnato anche da uno sviluppo teorico; in particolare tra i vari studi ricordiamo la relazione tra geometria proiettiva e di imaging prospettiva sviluppata da Sturms e Haick (1883), la geometria della fotogrammetria descritto da Sebastian Finsterwald (1899) e le equazioni proiettive e dei loro differenziali per stereo-immagini che sono fondamentali per la fotogrammetria analitica sviluppata da Otto von Gruber (1924).

Grande merito è dovuto al lavoro del Dr. Hellmut Schmid (1953) che si è occupato dello sviluppo dei principi della moderna multi-stazione della fotogrammetria analitica, non solo dal punto di vista algebrico, ma anche per aver eseguito un corretta soluzione dei minimi quadrati con un qualsiasi numero di viste prospettiche nonché per il suo studio dettagliato della propagazione degli errori.

Alcuni dei primi lavori nel campo della correlazione di immagini sono stati eseguiti nei primi anni '50 da Gilbert Hobrough, che ha confrontato le rappresentazioni analogiche di fotografie per registrarne le caratteristiche da vari punti di vista. Nel 1961, Hobrough ha inoltre progettato e costruito uno strumento per correlare fotografie ad alta risoluzione, al fine di consentire una misura ad alta precisione delle mutevoli condizioni dei terreni. Una delle prime applicazioni portò a tentare una forma di correlazione di immagini digitali per estrarre delle informazioni di posizione. Tra il 1960 e 1970, i ricercatori nel campo dell'intelligenza artificiale e della robotica hanno iniziato a sviluppare algoritmi di visione basati su metodologie di stereo-visione in parallelo con le applicazioni fotogrammetriche per le riprese aeree.

Le aree d'interesse primarie durante i primi anni di elaborazione delle immagini digitali sono state in ordine: il riconoscimento dei caratteri, la microscopia, la medicina e la radiologia ed infine la fotogrammetria/fotografia aerea, con successive applicazioni anche in ambito ingegneristico.

Più recenti i lavori di Peters e Ranson che nei primi anni 80 proposero l'utilizzo delle immagini digitali per la misura delle deformazioni. L'idea originale prevedeva di sviluppare e registrare digitalmente un modello a pieno campo sottoponendo un oggetto a delle onde ultrasoniche sia prima del caricamento (l'immagine di riferimento) e durante il processo di caricamento (l'immagine deformata). Con la registrazione in fasi successive del processo di applicazione del carico è stato proposto un metodo per analizzare i dati "registrati" dalle immagini digitali. Il metodo suggeriva un confronto tra le stesse per varie piccole regioni (note come sottoinsiemi) e l'individuazione delle posizioni di ciascun sottoinsieme dopo l'avvenuta deformazione. Per questo "processo di matching" gli autori hanno utilizzato dei concetti fondamentali della meccanica dei continui che regolano la deformazione di piccole aree.

Usando quest'approccio, nel 1983 Sutton et al. hanno sviluppato e sperimentato algoritmi numerici utilizzando immagini registrate otticamente per mostrare che la tecnologia conosciuta oggi come 2D Digital Image Correlation (2D-DIC) era possibile utilizzando le immagini registrate otticamente. In seguito varie sperimentazioni sono state eseguite per dimostrare che tale metodo può essere applicato per quantificare rotazioni e deformazioni nei solidi (Chu et al. nel 1985); e che l'uso di metodi di ricerca dei gradienti nella procedura di corrispondenza, eseguita con precisione sub-pixel, migliorasse la velocità del processo (1986 Sutton et al. nel 1986).

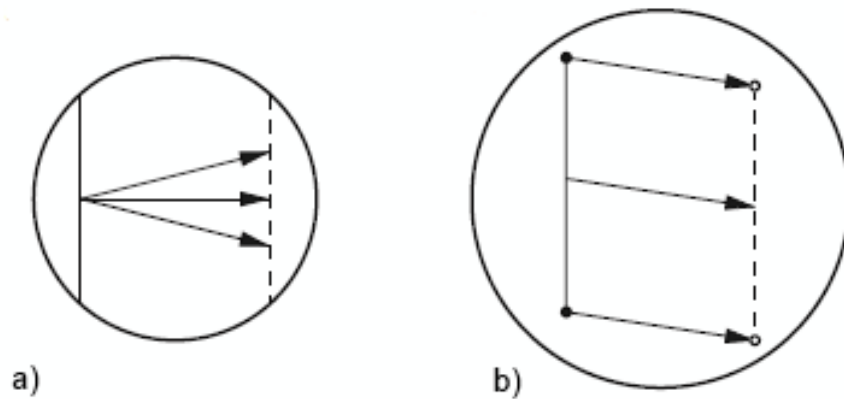
Nei decenni successivi tali procedure sono state validate e migliorate raffinando gli algoritmi numerici.

## 2.2 Il Problema dell' Image Matching

L'*Image Matching*, ossia le tecniche per individuare la corrispondenza tra immagini, è una disciplina propria della computer vision, che è attualmente di fondamentale importanza per un gran numero di applicazioni pratiche. Essa viene ad esempio utilizzata per risolvere i problemi nel controllo dei processi industriali; per il riconoscimento automatico della targa nei garage; per i fenomeni di crescita biologica e di mappatura geologica; per le apparecchiature di visione stereo e di compressione video e per l'automazione robotica nell'esplorazione spaziale. Poiché le applicazioni sono così diverse, esistono una varietà di approcci e algoritmi in uso, ognuno specializzato nel suo determinato compito. Basti pensare che per misurare con precisione la curva sforzo-deformazione di molti problemi in ingegneria dei materiali, caratterizzati da variazioni di lunghezza dell'ordine di qualche micron, anche solamente i requisiti di risoluzione sono molto più alti che per la maggior parte delle altre applicazioni. Sebbene alla presenza di tutta questa diversità le nozioni che stanno alla base di questo mondo sono comunque uniche. Proseguendo nel testo saranno presentati gli aspetti fondamentali nella ricerca di corrispondenza tra immagini prestando una particolare attenzione alle problematiche dei movimenti sulla superficie delle strutture deformanti.

Non è possibile trovare la corrispondenza di un singolo pixel di una determinata immagine in una seconda immagine. In generale l'abbinato valore di grigio del pixel in questione può essere ritrovato in moltissimi altri pixel della seconda immagine. Non vi è quindi un'unica corrispondenza. Di maggiore aiuto può essere considerare una piccola zona intorno al singolo pixel, ma pur avendo così maggiori informazioni disponibili il problema di corrispondenza ancora non può essere unico. Ci sono molte situazioni in cui una singolare corrispondenza tra funzioni di due immagini non può essere stabilita e ci si trova di fronte al cosiddetto *problema dell'apertura* (Fig. 2.1). Per una struttura ripetuta, ad esempio, come una griglia di piccoli punti, la corrispondenza non può essere risolta fino a quando non sarà considerata la griglia nella sua interezza ed il problema della corrispondenza ridiventa unico. I vettori di movimento possono quindi essere risolti. Il problema della corrispondenza diventa ancora più difficile da risolvere se non ci limitiamo ad un moto rigido, ma consideriamo i casi in cui l'oggetto subisce deformazioni. In questo caso, a causa delle deformazioni, è addirittura impossibile determinare tali vettori sul



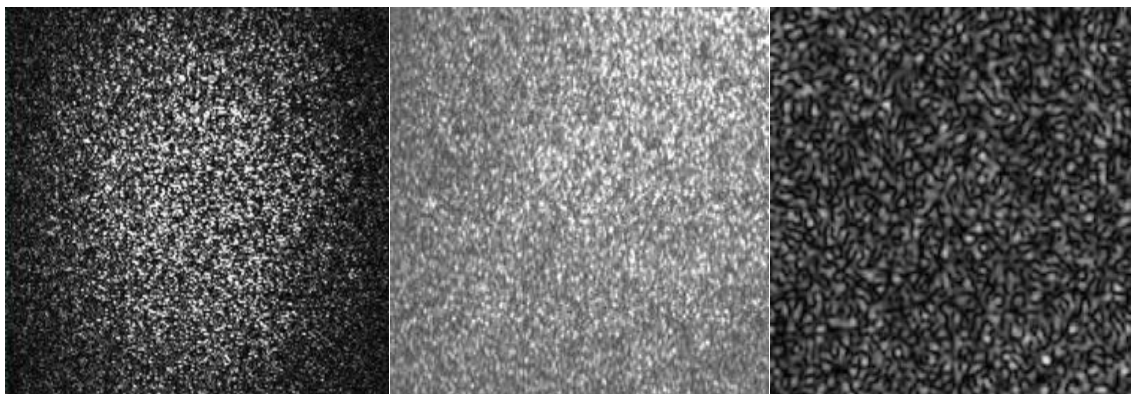


*Figura 2.1: Problema dell'apertura. Il primo punto può corrispondere ad un qualunque punto della linea (a). L'apertura è stata allargata includendo gli estremi della linea. Il vettore di moto è ora unicamente definito (b) [37]*

contorno della struttura. Per risolvere il problema della corrispondenza univocamente, la superficie ideale deve avere alcune proprietà:

- 1) essere *isotropa*, cioè non avere una direzione prevalente per poter ovviare al problema dell'apertura
- 2) la ripetizione delle texture deve essere *non periodica*.

Questi requisiti conducono entrambi all'uso di motivi casuali, denominati “*speckle pattern*”, ovvero un modello a macchie casuali [36] (Fig. 2.2). Caratteristica principale di un buon speckle pattern è l'elevato contenuto di informazioni, che sono disponibili ovunque sulla superficie e non solo su una griglia relativamente sparsa.



*Figura 2.2: Alcuni esempi di “speckle patterns” [37]*

Questo permette l'utilizzo di un'apertura relativamente piccola, comunemente indicata come un sottoinsieme o finestra. Il riconoscere il movimento in immagini successive è un procedimento che può essere relativamente semplice se svolto da un osservatore umano, ma la sua formulazione in termini matematici è di notevole complessità. Esistono numerosi approcci al problema e nel proseguimento della trattazione si cercherà di esporne i principali partendo dal metodo più semplice, basato sul flusso ottico, per poi estendere il discorso ai metodi che consentono la corrispondenza in diverse condizioni d'illuminazione e di prendere in considerazione le deformazioni degli oggetti.

### 2.2.1 Metodo Differenziale

Il metodo ora descritto per determinare movimenti locali che avvengono tra due immagini è stato derivato da semplici considerazioni geometriche. Nella sua derivazione bisogna considerare due ipotesi fondamentali:

- 1) il movimento deve essere sufficientemente piccolo per poter garantire l'approssimazione data dal primo ordine del polinomio di Taylor.
- 2) il movimento deve essere approssimativamente costante in tutta la zona utilizzata per la stima del movimento.

Per dare dimostrazione al problema del movimento andremo a considerare il caso più semplice ovvero un problema unidimensionale (Fig. 2.3). Indicando con  $G(x, t)$  la distribuzione d'intensità sull'oggetto come funzione di tempo si possono approssimare i valori di grigio nell'intorno di un punto di nostro interesse con i termini al primo ordine di una serie di Taylor.

$$G(x + \Delta x, t) = G(x, t) + \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x \quad (2.1)$$

Una variazione di questa distribuzione sarà quindi calcolabile con la formula:

$$\Delta G = G(x + \Delta x, t) - G(x, t) = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x \quad (2.2)$$

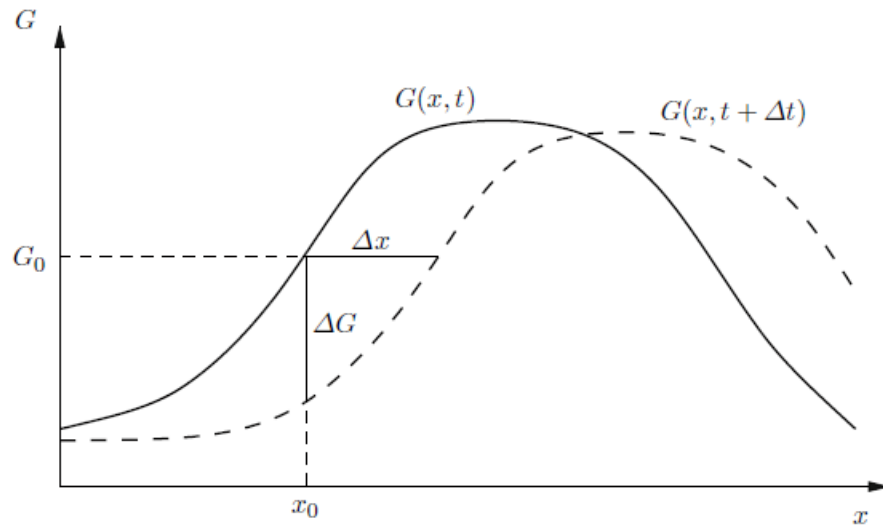


Figura 2.3: Stima di un problema di movimento monodimensionale con il metodo differenziale

Ricaveremo quindi il movimento che sarà dato dalla variazione dell'intensità diviso la pendenza della configurazione di intensità secondo la formula:

$$\Delta x = \Delta G / \frac{\partial G}{\partial x} \quad (2.3)$$

Se consideriamo ora lo spostamento pari alla velocità per la differenza di tempo ( $\Delta x = \dot{u} \cdot \Delta t$ ) possiamo ottenere una stima della velocità ( $\dot{u}$ ) che risulta:

$$\dot{u} \cdot \Delta t = \Delta G / \frac{\partial G}{\partial x} \quad (2.4)$$

Imponendo il limite di  $\Delta t \rightarrow 0$  arriveremo alla formula:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

In caso di velocità bidimensionale l'espressione sarà:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + v \cdot \nabla G = 0 \quad (2.6)$$

Questa equazione (2.6), che negli ultimi decenni è stata oggetto di un gran numero di ricerche, è comunemente nota come “*equazione di vincolo della variazione di luminosità*” per il flusso ottico. Senza entrare approfonditamente nella teoria ottica è qui presentato un semplice metodo per determinare gli spostamenti utilizzando come base l’equazione (2.5). Riscrivendola nel campo discreto e moltiplicando per il passo temporale intercorrente tra le immagini otterremo:

$$\Delta x \cdot \nabla G = -\Delta G \quad (2.7)$$

Quest’ultima equazione rivela che generalmente non è possibile stabilire il movimento bidimensionale senza altre informazioni. In particolare se i gradienti d’intensità sono pari a zero, il movimento non può essere determinato. Anche per gradienti non nulli si è comunque in presenza di una sola equazione per due differenti incognite. Il prodotto scalare al primo membro rappresenta l’intensità del gradiente moltiplicata per la componente di spostamento orientata nella direzione del valore di grigio corrispondente alla direzione del gradiente. Se andassimo ad isolare quindi la componente perpendicolare al bordo ( $\Delta \perp$ ), potremmo risolvere il movimento lungo questa direzione.

$$\Delta \perp = -\Delta G / |\nabla G| \quad (2.8)$$

Il problema di apertura di questa espressione matematica può essere risolto utilizzando una piccola zona, ad esempio un sottoinsieme quadrato dell’immagine, invece di un singolo punto. Riscrivendola per un insieme di N punti (maggiori di due) all’interno della prossimità della zona adiacente al punto di nostro interesse otterremo un sistema sovradeterminato che può essere risolto con il metodo dei minimi quadrati secondo l’espressione:

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 & \sum \left( \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \right) \\ \sum \left( \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x} \right) & \sum \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Che può essere riscritta come:

$$\Delta \bar{x} = -(G^T \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot g \quad (2.10)$$

Il sistema può essere risolto finché la matrice  $G^T \cdot G$  è non singolare, ovvero non tutte le derivate dei valori di grigio devono essere nulli. Banalmente quindi la stima del movimento non è possibile in regioni in cui il valore di grigio sia costante. Identico risultato si avrebbe se tutte sfumature di grigio fossero allineate secondo la stessa direzione.

### 2.2.2 L'algoritmo di Lucas-Kanade

Per arrivare ad una stima del movimento tra due immagini è possibile minimizzare la differenza tra i valori di grigio di un piccolo sottoinsieme di un'immagine (*template*) e una copia spostata di un'altra immagine. Per quest'operazione tra le due immagini non vi devono essere variazioni di illuminazione.

L'immagine di riferimento iniziale verrà indicata con la lettera F, e l'immagine dopo lo spostamento con G. Tra le due immagini sarà possibile scrivere la somma dei quadrati di deviazione (SSD) per una singola zona, e successivamente risolverlo con un metodo iterativo basato un'approssimazione al primo grado della SSD in serie di Taylor. I procedimenti fin qui descritti porteranno alla formazione di un sistema lineare di equazioni in termini dei valori incrementali  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 & \sum \left(\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y}\right) \\ \sum \left(\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}\right) & \sum \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial G}{\partial x} (F - G) \\ \sum \frac{\partial G}{\partial y} (F - G) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

L'equazione (2.11) può essere utilizzata per migliorare iterativamente la stima del moto medio finché l'iterazione porti alla convergenza con il vettore dato da SSD. Questo tipo di tecnica iterativa è il ben noto algoritmo di Lucas-Kanade [32].

Il metodo differenziale prima illustrato è equivalente ad una singola iterazione del metodo di Lucas-Kanade effettuato con un movimento iniziale pari a zero. La particolarità di questo algoritmo è che può essere utilizzato anche per vettori di spostamento grandi, finché la stima iniziale rientra all'interno del raggio di convergenza del metodo.

### 2.2.3 Funzioni di forma

Gli algoritmi di Image Matching finora descritti hanno la funzione di determinare gli spostamenti subiti da un sottoinsieme tra due differenti immagini. In molte applicazioni ingegneristiche, tuttavia, un sottoinsieme inizialmente quadrato potrebbe assumere una forma notevolmente distorta in una successiva immagine dopo la deformazione. Uno dei vantaggi principali dell'algoritmo iterativo è che esso non è limitato alla determinazione delle sole traslazioni pure, ma può essere facilmente esteso per tenere conto di deformazioni. Questo si ottiene introducendo una funzione di forma  $\xi(x, p)$  che trasforma le coordinate dei pixel nel sottoinsieme di riferimento in coordinate nell'immagine dopo la deformazione. La funzione SSD così composta può essere scritta come:

$$\chi_{(p)}^2 = \sum (G(\xi(x, p)) - F(x))^2 \quad (2.12)$$

Tale funzione di forma deve essere ottimizzata rispetto al parametro caratteristico  $p$ .

Nel caso semplice di pura traslazione la funzione di forma può essere espressa dall'equazione:

$$\xi(x, p) = x + \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

in cui  $x$  è un vettore contenente le due coordinate  $x$  e  $y$ , mentre  $p_0$  e  $p_1$  rappresentano rispettivamente lo spostamento medio del subset nelle direzione  $x$  ed in direzione  $y$ .

In modo del tutto analogo è possibile definire una funzione di forma del primo ordine associata ad una trasformazione affine:

$$\xi(x, p) = \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 + p_2 & p_3 \\ p_4 & 1 + p_5 \end{Bmatrix} x \quad (2.14)$$

La minimizzazione dell'equazione (2.12) prevede il calcolo delle derivate della funzione rispetto ai parametri del vettore  $p$  presente nella funzione di forma. In linea generale l'introduzione di funzioni di forma di ordine elevato complica il problema della corrispondenza.

Un semplice approccio adottabile nel caso di deformazioni complesse può essere condotto attraverso l'uso di funzioni di forma polinomiali del tipo

$$\phi = p_0 + p_1 \cdot x + \dots + p_n \cdot x^n \quad (2.15)$$

Matematicamente i parametri  $p$  della funzione di forma sono ottenibili dalla formula seguente:

$$p_{opt} = \operatorname{argmin} \sum |\phi(x, p) - u(x)|^2 \quad (2.16)$$

con  $u(x)$  il campo di spostamento.

Nonostante le funzioni di ordine minore presentino vantaggi in termini computazionali e di sensibilità al rumore, esse risultano maggiormente soggette al fenomeno della *decorrelazione*, ovvero quella tendenza che porta un'immagine ruotata rispetto al proprio centro ad apparire sempre meno somigliante a quella originale.

Quando l'angolo di rotazione aumenta, la somiglianza tra il sottoinsieme originale ed il sottoinsieme ruotato diminuisce. Come si può vedere in Figura 2.4 la decorrelazione si verifica rapidamente anche per piccoli angoli di rotazione; già a  $10^\circ$  la perdita di correlazione diventa molto marcata, manifestando un abbassamento del picco massimo di correlazione o un innalzamento marcato della funzione di errore. L'ottimizzazione dell'equazione (3.16) diventa difficoltosa.

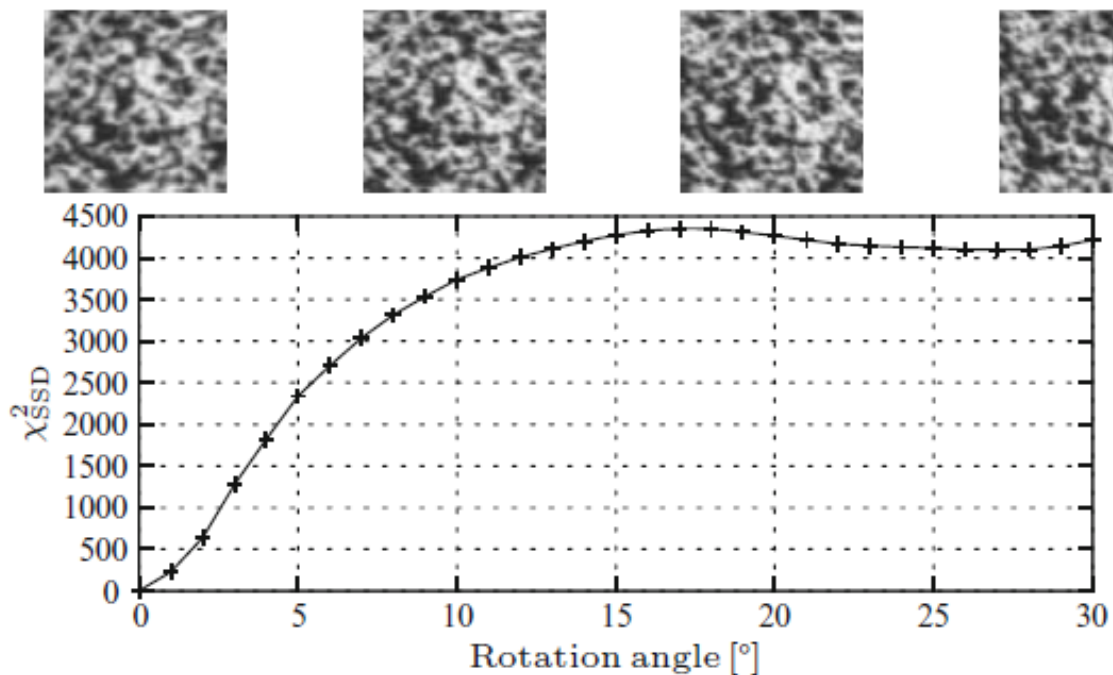


Figura 2.4: Fenomeno della decorrelazione in funzione dell'angolo di rotazione [37]

#### 2.2.4 Interpolazione sub-pixel

Considerando la possibilità di deformarsi caratteristica del subset di riferimento, appare chiaro come le coordinate dei punti della griglia appartenenti a tale subset possano trovarsi in posizioni sub-pixel (posizioni sottomultiple del pixel) nelle immagini deformate. Si rende dunque necessario un metodo d'interpolazione tra i valori di intensità dei pixel che fornisca l'intensità dei punti in posizioni sub-pixel. Operazione che deve essere eseguita prima dell'operazione di valutazione della somiglianza tra i subset, in altre parole il matching.

L'interpolazione può avvenire mediante funzioni polinomiali o B-spline. L'ordine della funzione interpolante può essere scelto pari a zero per la misura di spostamenti puri; uno per trasformazioni affini; due o superiore per campi di spostamento di maggiore complessità [31]. Ragionando sul campo delle frequenze entrambi i metodi non riescono ad adattarsi alle alte frequenze, quindi l'interpolazione equivale all'applicazione di un filtro passa basso<sup>6</sup>. Poiché l'interpolazione è un metodo di approssimazione di una certa funzione tra due successivi valori

<sup>6</sup> Un **filtro passa basso** è costituito da un circuito che permette il solo passaggio di frequenze al di sotto di una data soglia detta frequenza di taglio.



campionati, ci si aspetta che l'uso di questa tecnica applicata ai valori di grigio introduca un certo errore. La valutazione di tal errore riveste grande importanza per la corretta interpretazione dei dati, ma presenta delle difficoltà.

Eseguiamo a titolo di esempio il matching tra due onde monocromatiche, lo spostamento tra le due onde campionate misurato mediante image correlation utilizzando un'interpolazione dei livelli di grigio introduce un errore sistematico (*bias*) dipendente dalla posizione sub pixel che a sua volta è conseguenza dell'errore di fase introdotto dall'interpolatore utilizzato [30]. L'interpolazione può essere paragonata in linea teorica ad uno spostamento assegnato al segnale, come se il valore sub pixel cercato fosse spostato in una posizione intera. Se si procede ad interpolare valori campionati mediante un operatore polinomiale lineare questa operazione mantiene il wave number<sup>7</sup> dell'onda ma potenzialmente presenta un'alterazione di ampiezza e fase. La Figura 2.5 mostra gli errori sulla fase e sull'ampiezza nel caso di interpolazione con un polinomio di ordine tre.

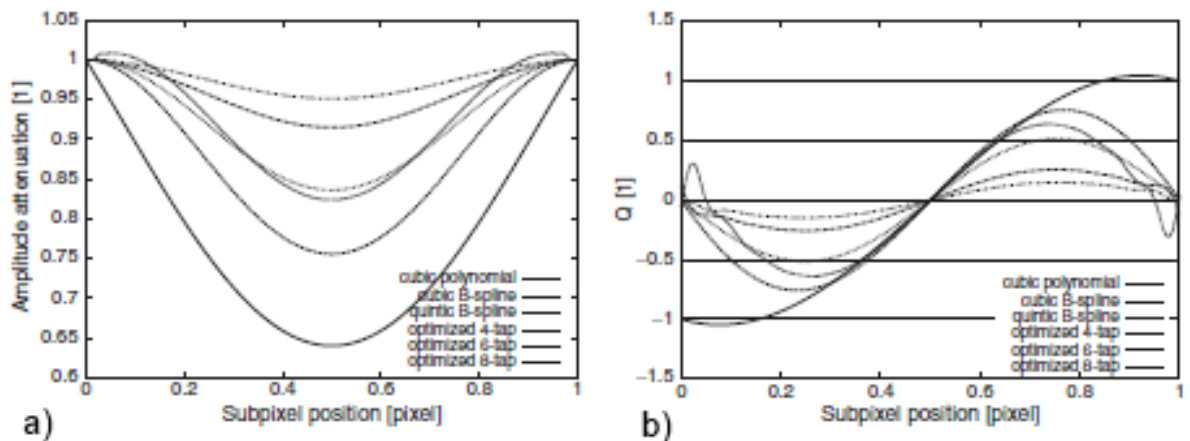


Figura 2.5: Attenuazione dell'ampiezza(a) ed dell'errore di posizione(destra) dei vari filtri di interpolazione [37]

Per l'errore sull'ampiezza si ha un andamento parabolico con un picco massimo in corrispondenza di uno spostamento nullo. L'errore di posizione invece presenta un andamento sinusoidale con l'annullamento dell'errore in corrispondenza di  $k$  pari a 0, -0.5 e 0.5 con un aumento dell'errore al crescere del wave number  $k$ . Quest'andamento è lo stesso per qualsiasi altro interpolatore polinomiale o B-spline, con differenze legate soltanto al modulo degli errori.

<sup>7</sup> In fisica il **wave number** è il numero di oscillazioni di un'onda nell'unità di lunghezza, e corrisponde quindi al reciproco della lunghezza d'onda.

È importante notare come l'aumento dell'ordine del polinomio interpolante debba essere seguito dall'aumento del numero di pixel necessari per la determinazione dei coefficienti polinomiali, che si traduce nell'utilizzo di sottoregioni di dimensioni maggiori; ciò porta ad un conseguente calo della risoluzione nella stima del campo di spostamento. L'ordine del polinomio va quindi scelto in base ad una compensazione dei fattori in considerazione.

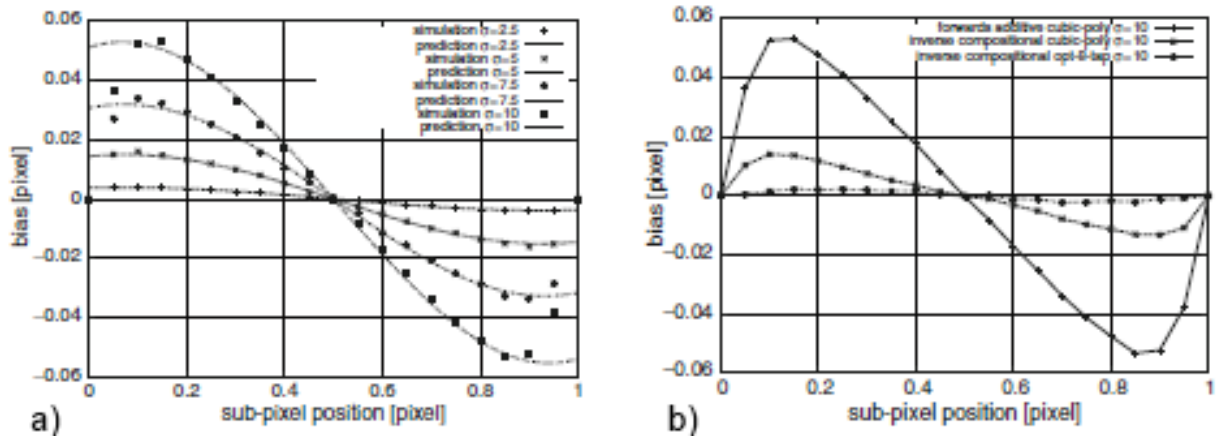


Figura 2.6: Confronto dei risultati della simulazione e previsione teorica del rumore indotto. Algoritmo DIC e polinomiale cubica di interpolazione (a). Confronto tra algoritmo di interpolazione polinomiale cubica e algoritmo utilizzando un filtro ottimizzato (b) [37]

Un altro accorgimento da considerare nella scelta del tipo di funzione è rappresentato dal compromesso tra tempi di esecuzione ed errore di misura. Generalmente più è alto il numero di coefficienti della funzione interpolante, cioè del filtro di interpolazione, più il bias verrà ridotto e più si allungheranno i tempi di calcolo. La possibilità di ricostruire il campo di spostamento con una buona accuratezza dipende quindi da vari fattori, alcuni interni al processo di elaborazione quali l'algoritmo di correlazione scelto e il tipo di funzione interpolante ed altri invece esterni quali la scelta dell'immagine che realizza il pattern di misura o il rumore .

## 2.3 Calcolo delle deformazioni

I valori di spostamento ottenuti a seguito del matching possono in seguito essere utilizzati per il calcolo diretto delle componenti di deformazione. Nonostante la relazione tra le deformazioni e gli spostamenti sia matematicamente descrivibile da un'operazione di differenziazione, a livello numerico quest'operazione risulta non priva di rischi e spesso instabile. Esiste la possibilità di amplificare il rumore presente negli spostamenti calcolati [29] [41].

Il calcolo diretto delle deformazioni prevede un errore spesso inaccettabile nelle applicazioni concrete. Una prima applicazione, presentata da Sutton [39], Wang [40] e Tong [38], utilizza un processo di smoothing degli spostamenti e una successiva differenziazione per giungere al calcolo delle deformazioni (metodo dei *penalty finite element*). Questo consente di diminuire il livello di rumore contenuto nel campo di spostamento e quindi si ha una miglior stima delle deformazioni. Di più recente sviluppo è il metodo *moving least square* (MLS) [42], derivato utilizzando le bande di Portevin-Le Chatelier (PLC).

La tecnica più utilizzata invece, sviluppata da Wattrisse [33] e Pan [28] [35], prevede la definizione di una finestra di calcolo utilizzata per un fitting locale dei valori di spostamento.

I valori di spostamento calcolati all'interno di questa finestra vengono interpolati assegnando un peso minore al crescere della distanza dal centro dell'area. La deformazione è invece calcolata differenziando la funzione interpolante.

La dimensione di quest'area deve essere sufficientemente grande da permettere una riduzione del rumore. L'ambito sperimentale ha determinato che per deformazioni omogenee è da preferire una finestra di grandi dimensioni; mentre per deformazioni non omogenee è necessario trovare un giusto compromesso. Una finestra di dimensioni troppo piccole non permette difatti un'adeguata riduzione del rumore sugli spostamenti, mentre una finestra troppo grande può portare ad una eccessiva approssimazione all'interno della finestra di calcolo. Questa tecnica è quella inclusa nel software VIC2D che sarà utilizzato per la definizione del campo di spostamenti e deformazioni nel presente lavoro.

# 3

## ***ATTIVITA' SPERIMENTALE SVOLTA***

**I**n questo capitolo verranno descritte le operazioni sperimentali svolte al fine della preparazione e dell'esecuzione del lavoro oggetto della presente tesi. Come già accennato nei capitoli precedenti, saranno eseguite delle prove meccaniche su campioni in calcestruzzo fibrorinforzato, al fine di determinarne lo specifico comportamento a trazione. La tipologia di test adottata sarà quella denominata “*DEWS Test*”, descritta nel Capitolo 1. Alle misurazioni convenzionali saranno affiancate quelle ottenute tramite l'analisi delle immagini digitali registrate durante l'esecuzione delle prove. A tal scopo verranno sfruttate le tecniche di *Digital Image Correlation*. La trattazione degli argomenti in questo capitolo è stata divisa in funzione delle procedure messe in atto secondo i seguenti punti:

- Preparazione dei campioni;
- Esecuzione delle prove meccaniche;
- Elaborazione immagini digitali;

### 3.1 Preparazione dei campioni

I campioni oggetto del presente lavoro sono stati ricavati da blocchi in calcestruzzo fibrorinforzato aventi dimensioni 400x150x50 mm, estratti a loro volta da travi secondo le indicazioni di Figura 3.1. A fini identificativi ogni campione è stato numerato secondo una sigla composta da una parte comune ad ogni provino (BH400P) e da una serie di tre numeri variabili da campione a campione. Secondo questa classificazione il primo numero della serie corrisponde al tipo di mix design tra i due utilizzati per il getto corrispondente (Figura 3.2). Il secondo numero della serie corrisponde alla zona da cui sono state estratte le sezioni corrispondenti, diverse tra loro per la direzione di taglio. L'ultimo numero rappresenta il numero effettivo del blocco, accompagnato dalla posizione specifica da cui è stato ricavato (Right, Center o Left).

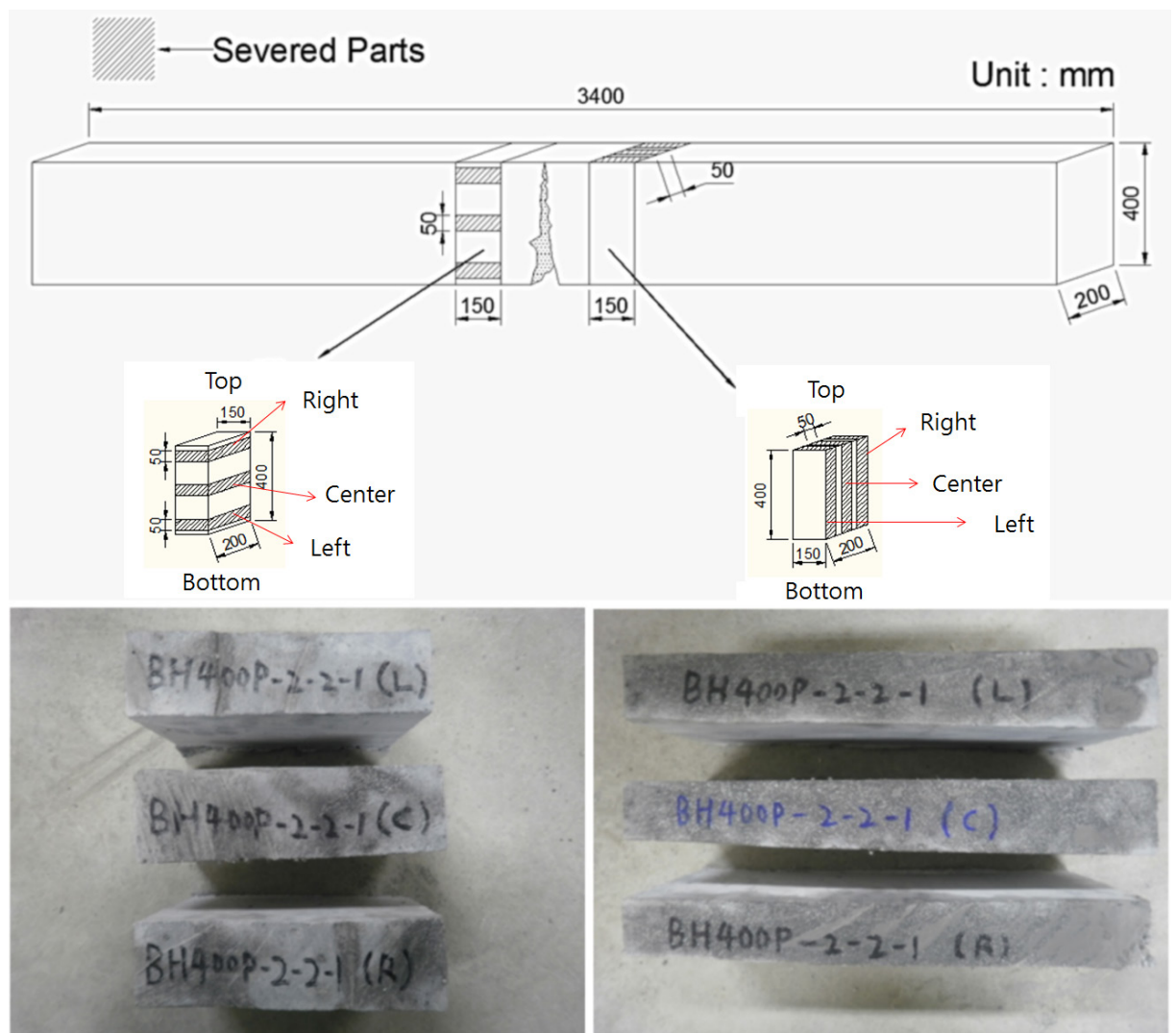


Figura 3.1: Schema di taglio dei campioni oggetto di studio

Mix	Steel Fiber		Relative weight ratio to cement					
	Length (mm)	Volume fraction (%)	Cement	Water	Silica fume	Fine aggregates	Filler	Super-plasticizer
Mix1	13.0	2.0	1.00	0.25	0.25	1.10	0.30	0.018
Mix2	16.3	0.5						
	19.5	1.0						

Figura 3.2: Mix design utilizzati per il confezionamento del calcestruzzo fibrorinforzato

Da ogni blocco prima descritto sono stati poi successivamente tagliati 35 differenti campioni con dimensioni approssimative di 150 x 150 x 50 mm (Tabella 3.1) e numerati con numerazione progressiva.

	L (Left)	C (Center)	R (Right)	N°
<b>BHP400P 1-1-1</b>	3	2	3	8
<b>BHP400P 1-1-2</b>	3	2	3	8
<b>BHP400P 2-2-1</b>	3	3	3	9
<b>BHP400P 2-2-2</b>	4	2	4	10
<b>TOTALE PROVINI</b>				<b>35</b>

Tabella 3.1: Schema riassuntivo dei campioni oggetto di studio

Per ognuno, in fase preliminare, sono state misurate nel dettaglio alcune caratteristiche fondamentali come le dimensioni (altezza, larghezza e spessore), l'effettivo peso e la lunghezza del cosiddetto "ligament"; ovvero la distanza rettilinea misurata tra l'apice interno dei due intagli verticali praticati nei campioni (Tabella 3.2). Per consentire l'utilizzo delle tecniche di *Digital Image Correlation* su ogni campione è stato creato un pattern simile a quelli presentati nel Capitolo 2. Per ogni campione è stato steso uno strato uniforme di tempera bianca su una delle facciate aventi dimensioni 150x150 mm. In un secondo passaggio è stato ricreato lo schema di macchioline casuali ("speckle pattern") tramite l'utilizzo di una bomboletta spray di colore nero. Il getto della bomboletta non è stato indirizzato in modo diretto verso il provino, bensì verso l'aria sovrastante, così da permettere una ricaduta casuale del colore sulla superficie del campione. Questo accorgimento è stato necessario per evitare la formazione di macchie di dimensioni eccessive e localizzate dal getto della bomboletta.

	PROVINO	Larghezza [mm]	Altezza [mm]	Spessore [mm]	Ligament [mm]	Peso [Kg]
TRAVETTO 1-1-1	1-1-1 L - 1	143	146	46	107	2,54
	1-1-1 L - 2	156	147	52	103	2,74
	1-1-1 L - 3	148	147	50	103	2,57
	1-1-1 C - 1	145	147	55	100	2,71
	1-1-1 C - 2	152	147	53	101	2,78
	1-1-1 R - 1	154	146	52	102	2,64
	1-1-1 R - 2	151	148	46	101	2,45
	1-1-1 R - 3	145	146	53	102	2,69
	TRAVETTO 1-1-2	1-1-2 L - 1	148	150	53	96
1-1-2 L - 2		148	150	49	98	2,73
1-1-2 L - 3		148	154	53	105	2,57
1-1-2 C - 1		147	155	50	103	2,64
1-1-2 C - 2		150	152	54	97	2,85
1-1-2 R - 1		146	152	52	100	2,62
1-1-2 R - 2		148	146	49	99	2,48
1-1-2 R - 3		150	150	53	100	2,69
TRAVETTO 2-2-1		2-2-1 L - 1	152	147	55	102
	2-2-1 L - 2	151	147	53	101	2,88
	2-2-1 L - 3	151	148	55	101	2,73
	2-2-1 C - 1	150	148	58	102	3,05
	2-2-1 C - 2	150	148	47	107	2,54
	2-2-1 C - 3	156	147	53	98	2,98
	2-2-1 R - 1	147	153	52	100	2,64
	2-2-1 R - 2	153	149	57	102	3,09
	2-2-1 R - 3	150	149	48	100	2,44
TRAVETTO 2-2-2	2-2-2 L - 1	146	158	52	105	2,88
	2-2-2 L - 2	150	155	56	109	3,06
	2-2-2 L - 3	145	158	49	108	2,71
	2-2-2 L - 4	148	154	55	102	2,59
	2-2-2 C - 1	148	154	52	104	2,78
	2-2-2 C - 2	150	148	51	101	2,62
	2-2-2 R - 1	151	156	53	98	2,95
	2-2-2 R - 2	144	157	58	108	2,91
	2-2-2 R - 3	155	152	55	104	3,12
2-2-2 R - 4	147	153	52	102	2,81	

*Tabella 3.2: Informazioni dimensionali dei singoli campioni*

Il risultato finale è stato la formazione di una leggerissima puntinatura nera sullo sfondo bianco in precedenza steso. L'effetto ottico macroscopicamente visibile non prevedeva la netta distinzione di colore bianco-nero sulla superficie, ma una colorazione complessivamente grigiastria. Per verificare l'efficienza del pattern creato per ogni campione sono state effettuate due fotografie tramite l'utilizzo di fotocamera digitale.

Questi scatti sono stati successivamente elaborati tramite l'utilizzo del software VIC-2D, predisposto al riconoscere gli spostamenti dei vari punti del pattern. Una volta avuto riscontro positivo dal software, tramite il pieno riconoscimento della puntinatura, sono state predisposte

delle etichette con delle mire strumentali allo scopo di evidenziare alcuni punti sulla faccia anteriore del provino. Queste mire sono costituite da due cerchi concentrici di colore bianco e nero avente diametro rispettivamente di 1,5 e 6 mm. Esse sono state apposte in corrispondenza delle sezioni terminali degli intagli del provino (ad una distanza di 25 mm dalla linea di ligament), ed anche in corrispondenza degli spigoli del campione. Su due angoli opposti le etichette presentavano inoltre il codice identificativo di ogni pezzo (Fig. 3.3).

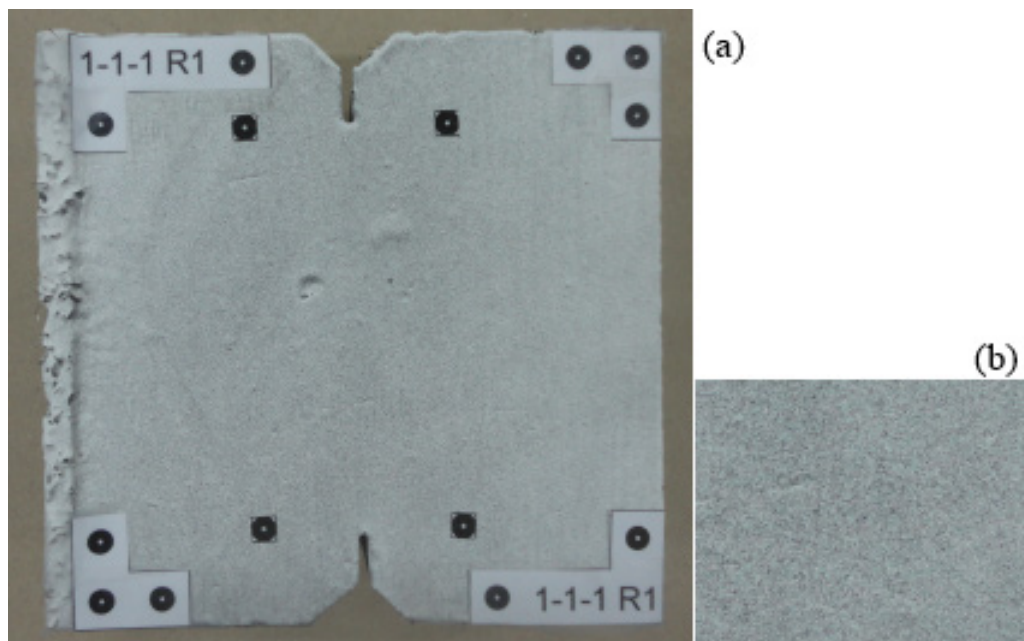


Figura 3.3: Esempio di un campione predisposto con pattern e mire strumentali (a), Ingrandimento del pattern (b)



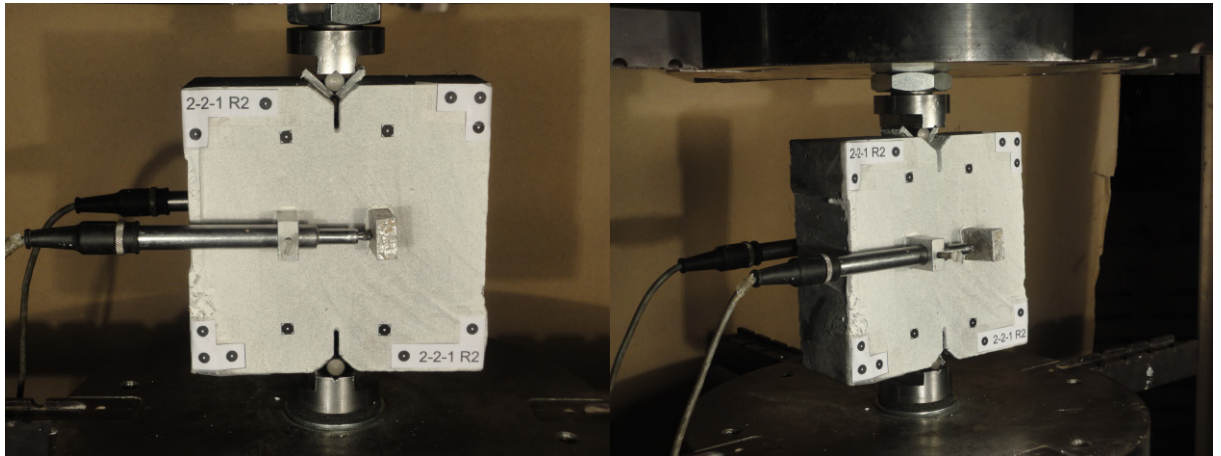
## 3.2 Esecuzione Prove Meccaniche

L'esecuzione delle prove meccaniche è stata eseguita tramite la pressa elettromeccanica servo-controllata INSTRON (modello 8562), presente nel laboratorio Prove Materiali del Politecnico di Milano (Fig. 3.4); macchina che è in grado di eseguire prove sia in controllo di spostamento, sia in controllo di carico.



*Figura 3.4: Pressa servo-controllata INSTRON modello 8562*

Le prove DEWS, descritte nel Capitolo 1, sono state eseguite in controllo di spostamento. La macchina di prova ritratta in Figura 4.2, collegata ad un terminale di ricezione consente la registrazione di tutti i dati inerenti lo sviluppo della prova. Sono stati misurati per ciascun campione i valori riguardanti il tempo di sviluppo della prova, i valori di carico raggiunti, lo stato di avanzamento dei piatti di carico e i valori di apertura di fessura tramite l'utilizzo di estensimetri LVDT (descritti anch'essi nel Capitolo 1). Per ogni campione sono stati applicati due estensimetri, uno per ogni faccia; a metà altezza rispetto all'apertura dei due intagli. Sulle facce superiori ed inferiori, in corrispondenza degli intagli obliqui, sono state incollate delle piastre di acciaio in modo da fornire una base di appoggio per i cilindri incaricati di trasmettere il carico al campione (Fig. 3.5).



*Figura 3.5: Esempio di un campione pronto all'esecuzione di una prova DEWS*

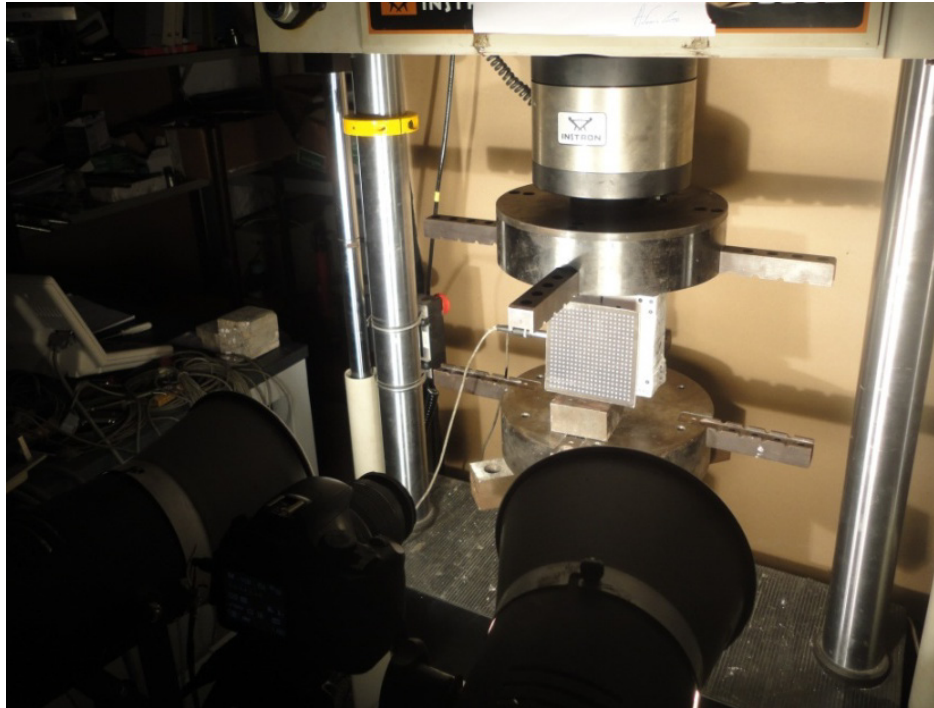
La superficie delle piastre è stata accuratamente levigata in modo da minimizzare l'attrito. Per lo stesso scopo i cilindri prima di ogni prova sono stati ricoperti da uno strato di teflon.

In prossimità della macchina di prova è stata posizionata una macchina fotografica digitale per l'acquisizione delle immagini digitali. La fotocamera digitale utilizzata, una Canon modello EOS 1100 D, dotata di un sensore CMOS<sup>8</sup> da 12,2 Megapixel è stata sistemata su un treppiede frontalmente ai campioni e collegata alla macchina di prova. Quest'ultima è stata programmata per consentire alla fotocamera di effettuare uno scatto ad un prefissato intervallo di spostamento delle piastre di carico della macchina; intervallo pari a 0,1 mm. Per ottimizzare la registrazione delle immagini digitali sono stati utilizzati due appositi fari puntati verso il campione ed uno sfondo posizionato dietro di esso (Fig. 3.6).

Nella foto è anche possibile vedere il poligono di calibrazione posto davanti alla faccia anteriore del campione. Esso è stato utilizzato solo in una fase precedente all'avvio della macchina di prova per l'acquisizione di tre fotogrammi per ciascun campione da utilizzarsi per le successive procedure di calibrazione. Per ogni prova la fotocamera digitale è stata accuratamente centrata sulla posizione del provino, controllando manualmente la messa a fuoco e l'esposizione.

---

<sup>8</sup> Per sensore **CMOS** (Complementary Metal Oxide Semiconductor) si intende una famiglia tecnologica di sensori attualmente utilizzati nelle fotocamere digitali. Hanno ridotte dimensioni e un costo di produzione contenuto rispetto agli antagonisti CCD (Charged Coupled Device) offrendo anch'essi immagini di qualità. Presentano una minore sensibilità alla luce e ciò influisce sulla resa finale con un maggior disturbo o "rumore" (effetto alone blu) nelle foto realizzate in condizioni di scarsa luminosità.



*Figura 3.6: Esecuzione di una prova DEWS con l'utilizzo delle tecniche di Digital Image Correlation*

Passo successivo alle attività descritte è stato quello di collegare i comportamenti registrati in fase di prova, che saranno discussi nel capitolo seguente, con le caratteristiche specifiche del materiale. Per la determinazione di un parametro indicativo da usare per il confronto dei risultati ottenuti si è scelto, una volta eseguite le prove, di procedere al conteggio manuale delle fibre dei campioni ormai divisi in due metà dall'applicazione del carico.

Il numero di fibre totale per ogni campione, pari alla somma delle fibre presenti in ciascuna metà, rapportato con le dimensioni dell'area di frattura ci ha fornito il valore di concentrazione totale di fibre (espresso in fibre su centimetro quadrato).

### 3.3 Elaborazione delle immagini digitali

Durante lo svolgimento delle prove le immagini digitali sono state acquisite tramite la tecnica RAW. Essa consiste in un particolare metodo di memorizzazione dei dati descrittivi di un'immagine che viene usato per non avere perdite di qualità della registrazione rispetto ai segnali catturati dal sensore.

*Raw* è un termine inglese che assume diversi significati; qui interessano quelli che rimandano al concetto di "non elaborato", "non raffinato" o "grezzo". La denominazione Raw in quest'ambito sta ad indicare infatti che l'immagine catturata dal sensore della macchina fotografica viene registrata nella sua forma originaria, numerica, cioè dopo essere stata solo convertita da analogico a digitale, senza ulteriore elaborazione da parte della fotocamera.

Per questo la registrazione in questa modalità dà la possibilità di catturare le immagini con una regolazione anche non ottimale di alcune impostazioni (esposizione, bilanciamento del bianco, ecc), in quanto la successiva elaborazione in studio consente di regolare questi parametri di ripresa mantenendo la qualità ai livelli più alti possibile. Bisogna porre attenzione al fatto che profondità di campo e messa a fuoco devono essere ottimali in fase di ripresa perché la metodica di registrazione usata non consente di ricostruire dettagli di immagine persi dall'ottica della fotocamera a causa, ad esempio, della mancata messa a fuoco della scena ripresa o di suoi singoli elementi.

Le immagini così acquisite sono state così sottoposte a due fasi differenti; una fase che potremmo chiamare di pre-processing in cui le immagini sono state modificate e preparate per la fase di processing vero e proprio.

#### 3.3.1 Modifica delle immagini

In questa fase le immagini catturate sono state modificate tramite l'utilizzo di un software per l'editing professionale di immagini chiamato *Rawtherapee*. La modifica è avvenuta in ambiente Linux poiché la versione Windows del programma risultava particolarmente instabile. Inizialmente è stato applicato alle immagini originali un ritaglio in modo da circoscrivere le

informazioni alla parte prettamente rilevante per il nostro studio. A questo punto sono state corrette le opzioni di miscelazione dei colori al fine di sovrapporre in un'unica curva le curve relative ai colori primari registrate. Lavorando sull'esposizione si è traslato l'istogramma in posizione centrale rispetto al campo di esposizione ed infine portando al minimo la saturazione si è passati da un'immagine a colori ad una in bianco e nero. Come ultimo passaggio, agendo manualmente sulla curva di tono delle immagini sono state eliminate le informazioni non necessarie alla nostra indagine (ad esempio le informazioni relative allo sfondo). Quest'ultima correzione alla curva di tono va a correggere leggermente anche l'esposizione dell'istogramma, decentrandolo leggermente. Queste operazioni sono servite a creare una regolazione ottimale per l'utilizzo del software VIC-SD minimizzando la dimensione in megabyte dei file ottenuti. Nella figura seguente sono illustrate le tipologie di regolazione eseguite sulle curve (nella parte alta l'istogramma dello scatto, in basso la curva di tono) .

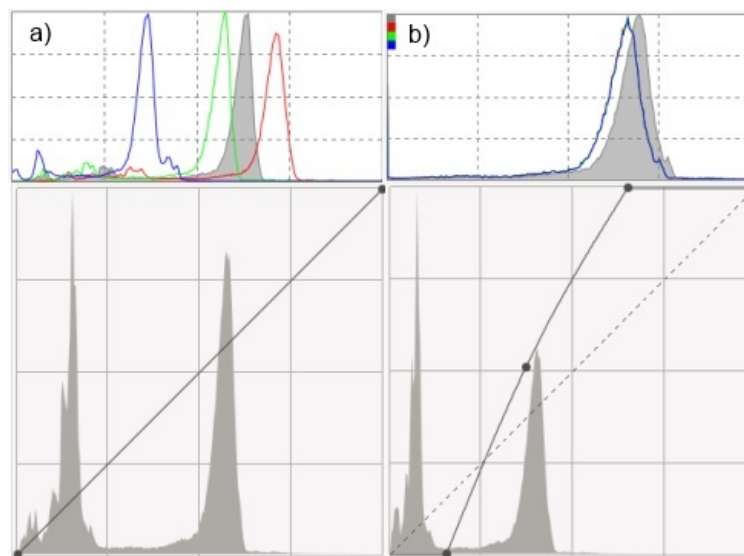


Figura 3.7: Istogramma e curva di tono dell'immagine originale (a) e della stessa ritoccata (b)

Nella parte sinistra si può vedere la situazione del fotogramma originale acquisito, mentre nella parte destra la situazione a fotoritocco eseguito. Il risultato di questi procedimenti è visibile in Figura 3.7, dove è presentato un esempio di immagine completa, e in Figura 3.8 un ingrandimento dello “*speckle pattern*” prima e dopo la modifica. Il salvataggio finale delle immagini è avvenuto nel formato PNG a 16 bit. Il software ha reso possibile l'applicazione delle stesse impostazioni a tutte le immagini. Gli scatti di calibrazione hanno avuto sviluppo proprio.

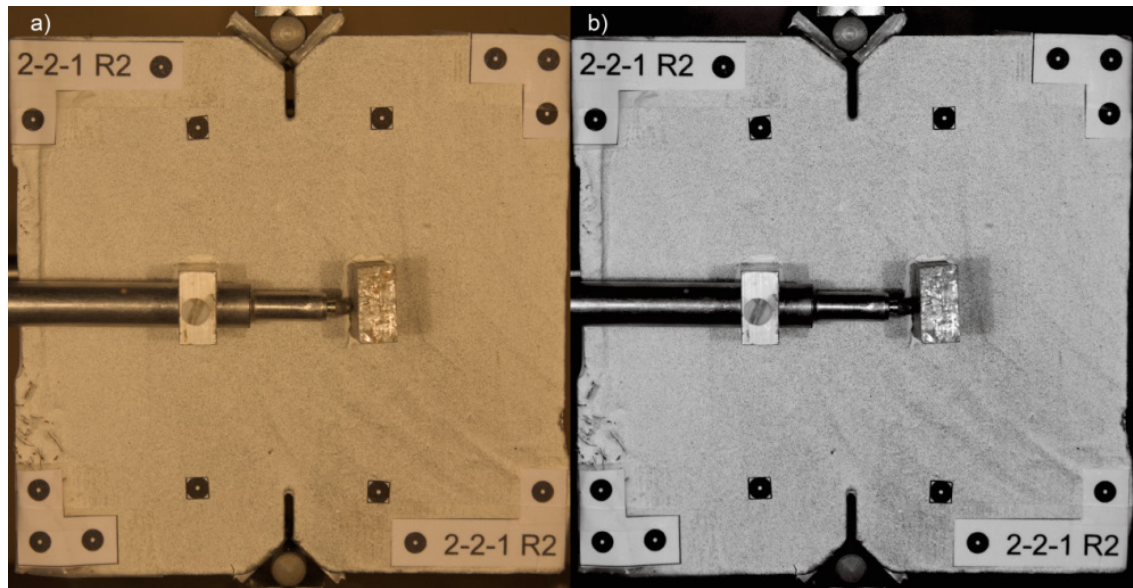


Figura 3.8: Esempio di fotogramma catturato durante una prova DEWS (a); Esempio dello stesso fotogramma elaborato nella fase preparazione col software Rawtherapee (b)

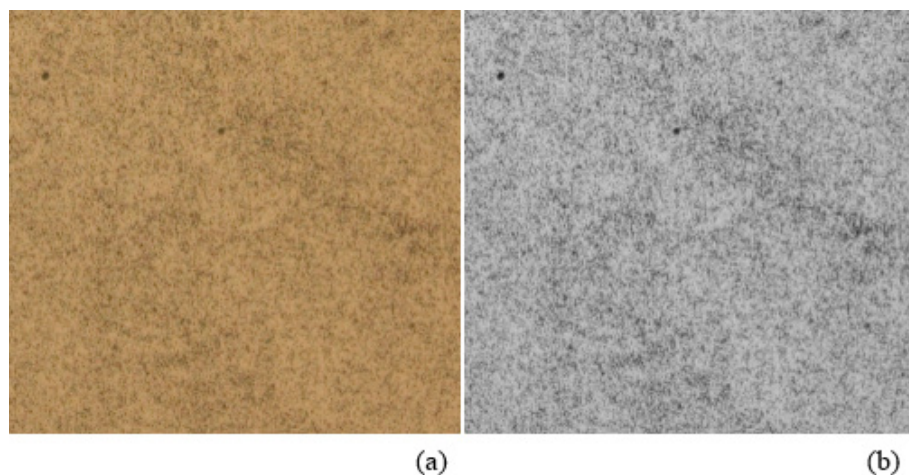


Figura 3.0.9: Porzione di “speckle pattern” prima (a) e dopo (b) la modifica con Rawtherapee

### 3.3.2 Calcolo degli spostamenti

Una volta trasformate le immagini registrate durante le prove meccaniche, sono state processate utilizzando il software VIC-2D della “Correlated Solution”. Esso consente, una volta stabilita all’interno della prima immagine registrata un’area d’interesse, di portare a termine il riconoscimento dei vari punti durante il processo deformativo subito dal campione. Una volta eseguita l’elaborazione delle varie immagini è stato possibile estrarre tramite lo stesso software i valori di spostamento delle mire posizionate tramite l’applicazione di estensimetri virtuali.

# 4

## *RISULTATI SPERIMENTALI*

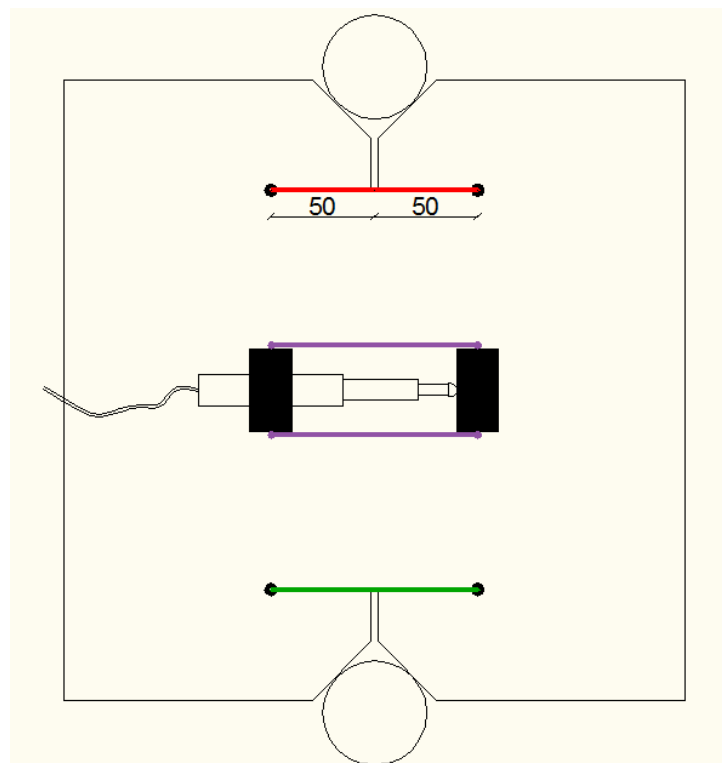
**I**n questo capitolo verranno descritti i risultati ottenuti dall'analisi eseguita nel presente lavoro. Le informazioni che si sono potute ricavare sono molteplici e riguardano differenti aspetti dell'attività sperimentale. In una prima fase sarà eseguito il confronto delle misurazioni di apertura di fessura tra estensimetri LVDT e Digital Image Correlation, procedendo al calcolo della precisione della tecnica digitale. In una seconda fase verranno analizzati i comportamenti specifici dei campioni sottoposti al Double Edge Wedge Splitting Test (D.E.W.S Test).

Si mostrerà com'è stato affrontato il procedimento di analisi dei dati rilevati al fine di descrivere il comportamento avuto dai vari campioni durante le prove effettuate. Ancora si cercherà di stabilire una relazione tra il contenuto di fibre e le risposte strutturali restituite dal materiale. Durante la trattazione saranno citati alcuni particolari campioni con i relativi grafici a supporto delle procedure svolte. Per la totalità delle elaborazioni si rimanda all'Appendice, dove saranno presentati i risultati ottenuti per ciascun campione. Infine saranno riportati alcuni esempi di registrazione digitale effettuata dalla fotocamera durante lo sviluppo delle prove.

## 4.1 Confronto tra i valori di COD registrati

Da evidenze sperimentali sviluppate in prove precedenti al presente lavoro si è potuto studiare come l'apertura di fessura nella mezzeria di un campione nel test DEWS sia pari alla media tra le aperture superiori ed inferiori [11]. Tenendo conto di tale premessa sono stati qui analizzati i dati ricavati dall'utilizzo della Digital Image Correlation. Grazie al software VIC-2D sono stati infatti estratti i valori di apertura di fessura sulla faccia anteriore dei campioni, in corrispondenza delle sezioni evidenziate dalle mire strumentali. L'operazione è stata resa possibile tramite l'utilizzo ed il posizionamento di estensimetri virtuali che misurano l'apertura in successione dei loro punti estremi per i vari fotogrammi analizzati.

Le aperture rilevate corrispondono a quelle mostrare in Figura 4.1; cioè alla base dell'intaglio superiore (linea rossa), alla base dell'intaglio inferiore (linea verde), ed in prossimità delle due estremità della strumentazione applicata sulla facciata (linee viola). Queste misurazioni centrali sono state necessarie poiché la Digital Image Correlation riconosce solamente gli spostamenti sulla facciata del provino e non sullo strumento di misurazione. L'apertura di fessura in questo caso è stata ricavata eseguendo la media delle due misurazioni effettuate.



*Figura 4.1: Rilevazione delle aperture di fessura tramite tecniche di Digital Image Correlation*



Le tecniche di Digital Image Correlation sono basate sull'analisi delle immagini registrate durante lo svolgimento dei test. E' quindi ovvio che sia stato necessario estrapolare dalle rilevazioni della pressa INSTRON solamente i valori corrispondenti agli istanti di scatto della fotocamera digitale. In questo modo si sono potuti ottenere grafici che, anche se non contenenti tutte le informazioni relative alla prova, ci hanno permesso di confrontare le due differenti metodologie di rilevazione. In Fig. 4.2 è ben visibile un grafico sforzo-COD relativo al campione 111-C2. Con il tratteggio nero sono rappresentati i valori registrati dall'estensimetro posto anteriormente al provino. A esso vengono sovrapposti i valori calcolati tramite il software VIC-2D. L'andamento delle aperture di fessura superiori ed inferiori è rispettivamente indicato con i tratti rosso e verde. Mentre il primo è sempre crescente durante tutto lo svolgimento della prova, l'altro subisce una leggera diminuzione verso la fine della prova, segno che il campione analizzato ha subito un'apertura asimmetrica manifestando una rotazione intorno al cilindro inferiore. A conferma sono riportate le immagini registrate durante la prova (Fig. 4.3). Il tratto azzurro rappresenta invece la media aritmetica tra le due misurazioni effettuate tramite gli estensimetri virtuali, secondo quanto descritto in precedenza. Infine il tratto di colore viola raffigura l'apertura di fessura calcolata nella sezione di mezzeria e pari alla media delle rilevazioni eseguite in prossimità dell'estensimetro.

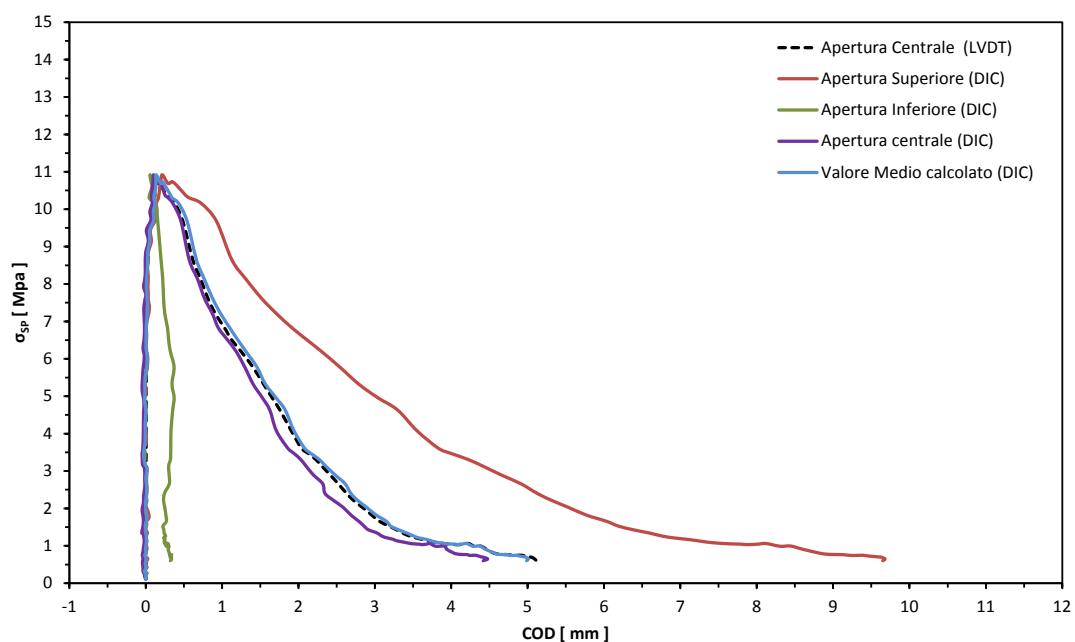
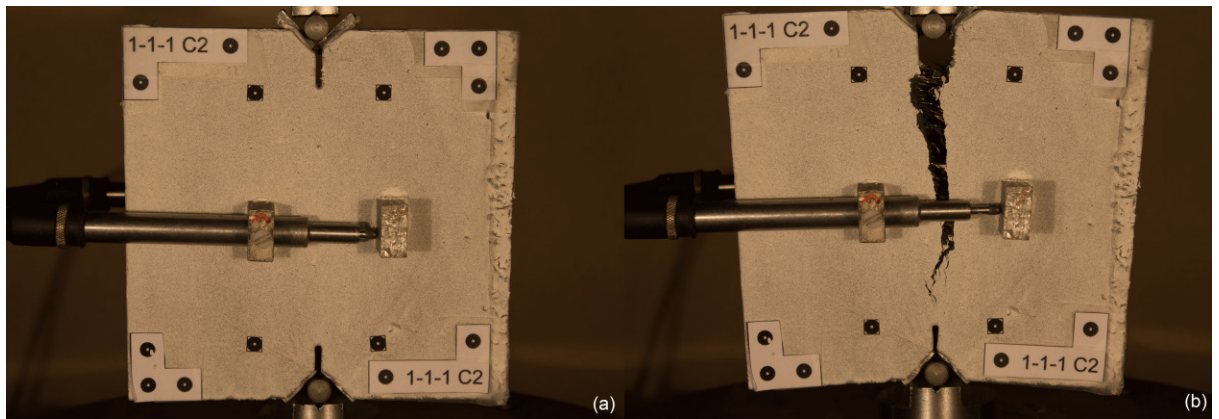


Figura 4.2: Confronto dei valori di COD registrati per il campione 111-C2



*Figura 4.3: Immagini della prova meccanica eseguita sul campione 111-C2; all'inizio della prova (a) ed in fase finale (b)*

E' ben visibile la corrispondenza tra il tratto nero ed il tratto azzurro. A conferma di quanto derivato da studi precedenti, il COD misurato nella sezione di mezzeria è, di fatto, molto prossimo alla media delle rilevazioni superiore ed inferiori. Nel seguito della trattazione si discuterà della bontà dei dati calcolati con le tecniche digitali.

Ancora nel grafico si nota la buona corrispondenza tra la media delle letture inferiori e superiori e l'apertura centrale, entrambe calcolate tramite Digital Image Correlation. Questa è influenzabile in primo luogo al fatto che la doppia misurazione da cui deriva la definizione dell'apertura centrale non è avvenuta in corrispondenza di punti specifici evidenziati da mire strumentali, ma soggetti ad una certa arbitrarietà data dall'operatore. In secondo luogo va anche specificato che la presenza fisica dell'estensimetro e a volte anche dei residui di pasta utilizzata per il suo fissaggio andava a disturbare la lettura dei punti da parte del software nelle immediate vicinanze della strumentazione. Per ovviare a questi inconvenienti la misurazione è stata eseguita nella prima zona disponibile dal bordo della strumentazione. Ad ulteriore prova che queste differenze influenzino la singola misurazione, viene presentata la stessa restituzione grafica per un diverso campione in cui appare senz'altro evidente la ancor migliore coincidenza dei tre tratti riguardanti l'apertura di fessura nella sezione di mezzeria. Questa volta il campione è l' 111-L2 (Fig. 4.4). Anche questo, come il precedente, ha subito deformandosi una rotazione nel piano intorno al cilindro inferiore; sostanziale differenza tra i due è la presenza in questo secondo caso di un'ulteriore rotazione subita al di fuori del piano.

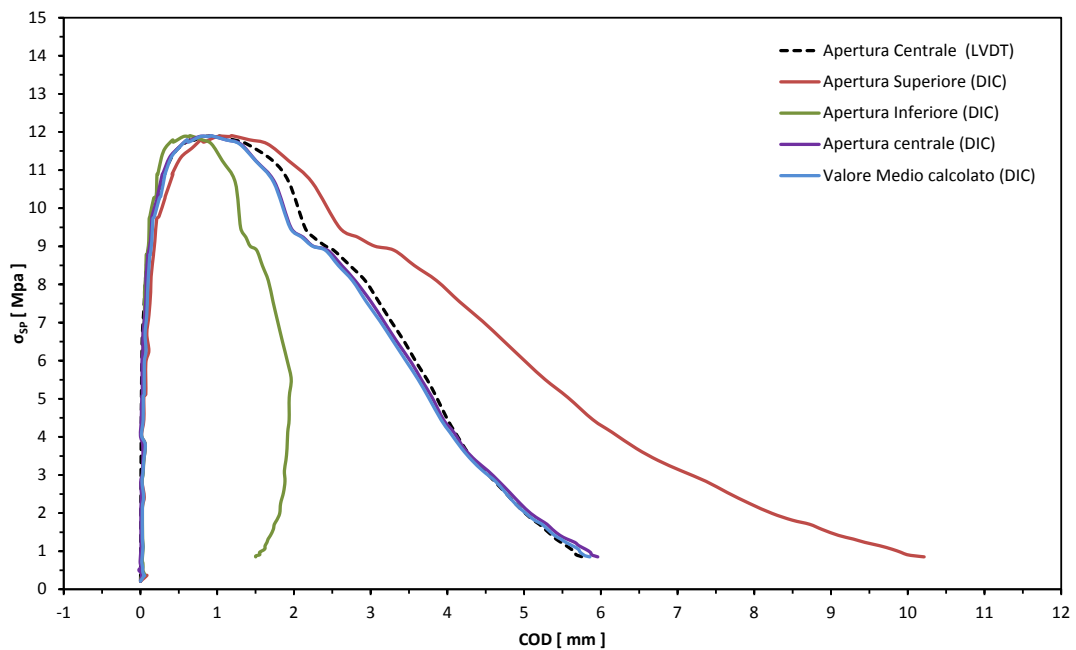


Figura 4.4: Confronto dei valori di COD registrati per il campione 111-L2

Anche se in questo paragrafo ci limiteremo ad analizzare la bontà dei dati ottenuti tramite l'utilizzo della Digital Image Correlation lasciando ad una trattazione successiva l'analisi del comportamento specifico dei campioni, questo lascia intendere come l'utilizzo delle tecniche di misurazione digitale siano efficaci anche in presenza di deformazioni non vincolate al principale piano di sviluppo dei campioni, seppur non eccessive.

Il buon riscontro avuto dall'andamento delle varie aperture è stato poi quantificato andando a calcolare l'errore tra le misurazioni effettuate. Per testare l'affidabilità del metodo digitale, essendo in presenza di spostamenti molto piccoli si è fatto riferimento alla procedura dei minimi quadrati<sup>9</sup>, spesso utilizzata per l'analisi dei dati sperimentali.

Passaggio iniziale è stato l'applicazione della procedura di regressione lineare tra i valori registrati con le due differenti tecniche. In questo modo è stato possibile calcolare i parametri della retta che esprime la relazione tra i dati utilizzati; relazione che formalmente è data dall'equazione della generica retta:

$$q_0 = m \cdot q_i + b = \quad (4.1)$$

<sup>9</sup> Il **metodo dei minimi quadrati** è una tecnica di ottimizzazione che permette di trovare una funzione, detta curva di regressione, che si avvicini il più possibile ad un insieme di dati (tipicamente punti del piano).

con:

$q_0$  valore di apertura calcolato tramite DIC;

$m$  coefficiente angolare

$q_i$  valore di apertura misurato tramite LVDT;

$b$  intercetta sull'asse delle ordinate per valore di ascissa nullo;

Arrivati a questo punto, considerando i parametri dati dalla regressione, è stato possibile quantificare lo scarto quadratico tra le due misurazioni tramite la formula:

$$s_{qi}^2 = \frac{1}{N-2} \cdot \left( \frac{q_0-b}{m} - q_i \right)^2 = \quad (4.2)$$

con:

$N$  n° dei gradi di libertà della regressione, sostanzialmente il numero di unità statistiche e del numero di variabili;

$q_0$  valore di apertura calcolato tramite DIC;

$b$  coordinata y del punto d'intersezione della retta di regressione con l'asse delle coordinate;

$m$  coefficiente angolare della retta di regressione calcolata;

$q_i$  valore di apertura misurato tramite LVDT.

La radice quadrata dei valori così ottenuti quantifica la differenza di rilevazione tra gli estensimetri fisici e quelli virtuali. L'output finale del procedimento svolto consiste in una raffigurazione della regressione tra le due serie di valori ed una puntuale dei singoli errori riscontrati per ogni scatto della macchina digitale. Nel seguito si mostreranno i grafici estratti da alcuni campioni indicativi. I risultati ottenuti per il campione 112-L2 e riportati in Figura 4.5 rappresentano il caso con i valori di scarto più elevati dell'intera indagine sperimentale. Il valore di errore più alto nel grafico risulta essere del 6,54%, mentre la media tra tutti i valori del campione (linea rossa) si attesta sul 2,64 %. La prova in questione ha avuto un rapido sviluppo con una rottura fragile in corrispondenza di una tensione applicata prossima ai 2,3 Mpa. Analizzando il grafico dell'errore puntuale calcolato è ben visibile come questo rimanga contenuto per bassi valori di COD e aumenti visibilmente poco dopo aver superato il millimetro di apertura; a fessurazione avvenuta.

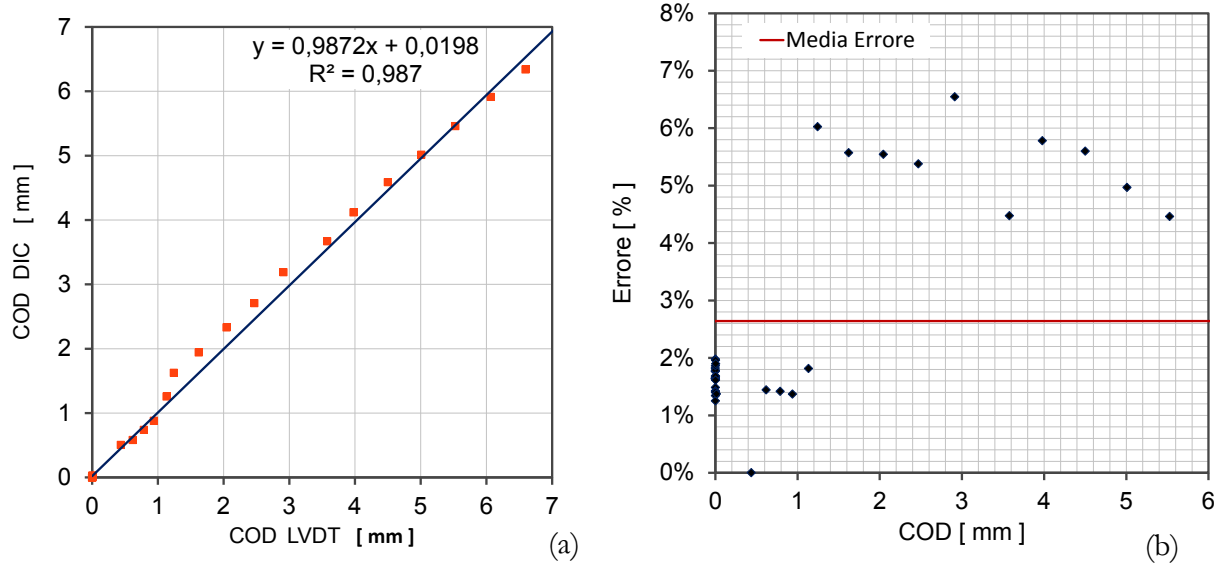


Figura 4.5: Regressione lineare (a) e scarti (b) per il campione 112-L2

Come riscontrato dalle immagini riprese durante la prova, questo istante corrisponde al netto aumento del trend fessurativo dovuto ad una rotazione fuori piano con il conseguente rapido aumento del COD nella parte anteriore e la registrazione di valori negativi sulla faccia posteriore. Ben altro sviluppo di prova e altri risultati si sono avuti invece per il campione 111-L3 (Fig. 4.6), caratterizzato dagli errori più bassi tra quelli rilevati. In questo caso l'errore medio è stato dello 0,22% con un valore di picco dello 0,70%.

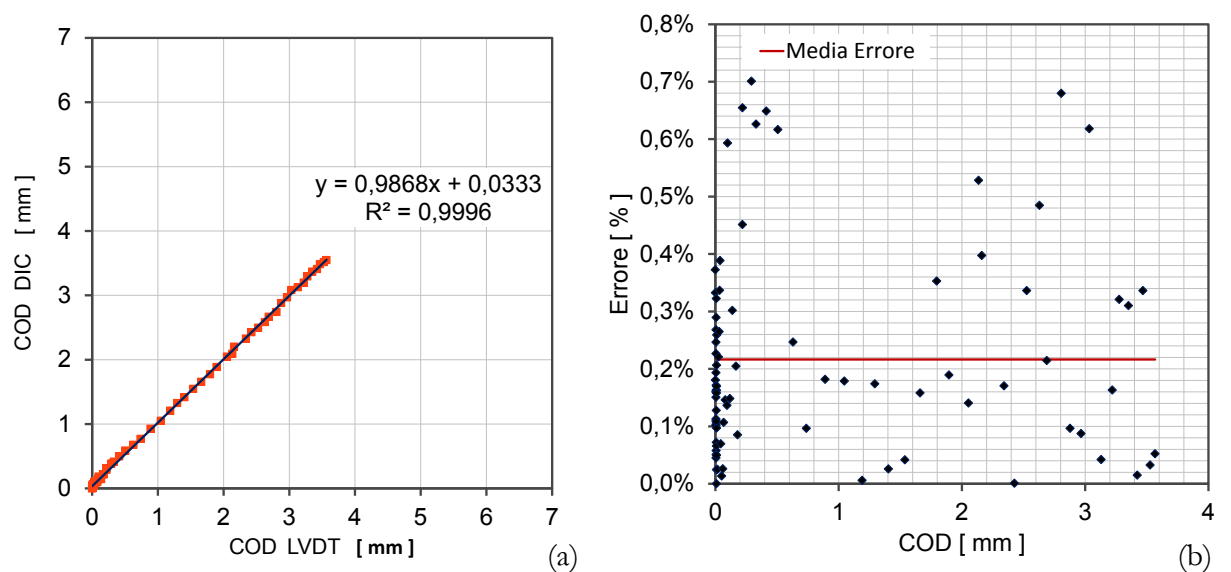


Figura 4.6: Regressione lineare (a) e scarti (b) per il campione 111-L3

Nella tabella seguente sono riportati i risultati riguardanti l'intera attività svolta. In particolare saranno indicati i valori dell'*errore di regressione standard*<sup>10</sup> e degli errori puntuali massimi, medi e minimi relativi alla Digital Image Correlation. La media totale degli errori è stata quantificata nella misura dell'1,10%. Questi risultati ci consentono di esprimere senz'altro parere positivo sull'utilizzo della tecnica digitale in perfetta alternativa agli estensimetri anche alla luce della Fig. 4.7, in cui in rosso sono riportati i valori degli errori medi per i vari campioni. Il trend generale è di errori molto bassi per gran parte dei campioni con alcuni valori elevati che vanno ad influire sulla media generale.

	PROVINO	S.E.R	Errore Max	Errore Medio	Errore Min
TRAVETTO 1-1-1	1-1-1 L1	3,38%	1,11%	0,37%	0,013%
	1-1-1 L2	7,82%	2,45%	0,72%	0,024%
	1-1-1 L3	2,54%	0,70%	0,22%	0,000%
	1-1-1 C1	2,71%	0,84%	0,25%	0,001%
	1-1-1 C2	3,63%	1,22%	0,28%	0,003%
	1-1-1 R1	2,30%	0,71%	0,27%	0,007%
	1-1-1 R2	3,07%	1,04%	0,33%	0,016%
	1-1-1 R3	9,72%	2,76%	0,92%	0,005%
	TRAVETTO 1-1-2	1-1-2 L1	8,45%	2,22%	0,91%
1-1-2 L2		20,29%	6,54%	2,64%	0,002%
1-1-2 C1		11,38%	2,64%	1,34%	0,082%
1-1-2 C2		78,90%	3,01%	0,75%	0,019%
1-1-2 R1		4,49%	5,32%	1,46%	0,018%
1-1-2 R2		14,41%	13,08%	4,40%	0,142%
1-1-2 R3		2,90%	6,27%	4,44%	0,362%
TRAVETTO 2-2-1	2-2-1 L2	5,51%	1,48%	0,41%	0,009%
	2-2-1 L3	3,25%	1,24%	0,26%	0,008%
	2-2-1 R2	4,10%	1,32%	0,37%	0,003%
TRAVETTO 2-2-2	2-2-2 L1	14,17%	5,90%	1,42%	0,102%
	2-2-2 L3	1,14%	0,58%	0,18%	0,009%
	2-2-2 L4	2,75%	0,77%	0,27%	0,004%
	2-2-2 C2	17,05%	4,28%	1,44%	0,002%
	2-2-2 R1	9,22%	2,78%	0,97%	0,008%
	2-2-2 R4	0,95%	8,36%	1,70%	0,019%
	<b>Media</b>	<b>9,76%</b>	<b>3,19%</b>	<b>1,10%</b>	<b>0,04%</b>

Tabella 4.1: Risultati degli errori relativi a Digital Image Correlation

<sup>10</sup> Per **errore di regressione standard** o S.E.R (Standard Error Regression) si intende lo stimatore della deviazione standard dell'errore di regressione, ovvero della dispersione delle osservazioni intorno alla retta di regressione.

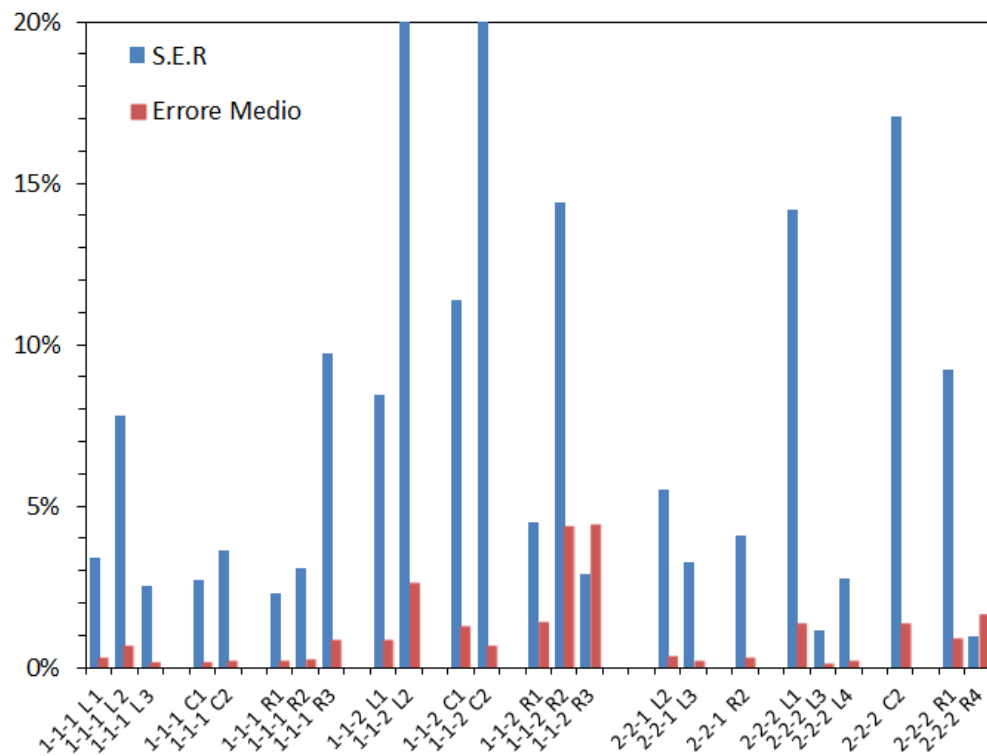


Figura 4.7: Errore Medio ed Errore di Regressione standard per i campioni analizzati

Nel grafico sono riportati per un confronto anche i valori dell'errore di regressione standard; valori molto alti se confrontati a quelli degli scarti prima descritti. Questa situazione può essere dovuta alla presenza di collinearità<sup>11</sup> tra le rilevazioni, che porta all'aumento della varianza dei coefficienti di regressione, e quindi dell'errore standard. Tale fenomeno, che comporta delle difficoltà nei processi di stima, non va in realtà ad influire sulla nostra trattazione basata sul semplice confronto delle aperture di fessura rilevate. Per stimare la presenza di collinearità è possibile utilizzare un parametro chiamato *Variance Inflation Factor* (VIF) in stretta relazione con l'indice  $R^2$  proveniente dalla regressione calcolata. Indice che esprime la proporzione di variabilità totale della regressione. La formula completa risulta:

$$VIF = \frac{1}{1-R^2} = \tag{4.3}$$

con:

$R^2$  il coefficiente di determinazione ottenuto dalla regressione.

<sup>11</sup> Il termine “**collinearità**” si riferisce alla possibilità che almeno due variabili indipendenti siano perfettamente correlate fra loro oppure che una variabile indipendente sia una combinazione lineare di alcune o di tutte le altre variabili indipendenti.

Solitamente si associa la presenza di collinearità ad un VIF maggiore di 10, ovvero per un coefficiente di determinazione maggiore di 0,9. Nella nostra indagine si discostano da tale comportamento solo i campioni denominati 112-C2, 112-R3 e 222-L3 (vedi Appendice).

Dimostrato così che la Digital Image Correlation consente di riprodurre in maniera estremamente paritaria le deformazioni misurate tramite i normali estensimetri va considerato che essa presenta innegabilmente il vantaggio di non dipendere dal posizionamento dell'elemento di misurazione. A tal proposito essa si è rivelata utilissima durante la nostra attività in laboratorio a sopperire ad alcuni inconvenienti verificatisi durante lo svolgimento delle prove. Per alcuni campioni è avvenuto il distacco della strumentazione posta sulla facciata anteriore dei campioni riconducibili a dei particolari comportamenti deformativi o a rotture del materiale particolarmente repentine e violente. In queste occasioni l'utilizzo della Digital Image Correlation consente di superare la perdita delle informazioni rilevate non avendo una strumentazione fisica soggetta a movimenti. Caso più esemplificativo è senz'altro quello del campione denominato 221-L3. Il grafico ottenuto (Fig. 4.8) ci mostra come l'andamento misurato dall'estensimetro (tratto nero) sia ben seguito dai valori calcolati dagli estensimetri virtuali soprattutto durante la fase post-picco. Al momento del distacco è difatti possibile proseguire nella valutazione delle aperture di fessura tramite i valori calcolati tramite le tecniche di Digital Image Correlation, con un errore medio calcolato dello 0,26%.

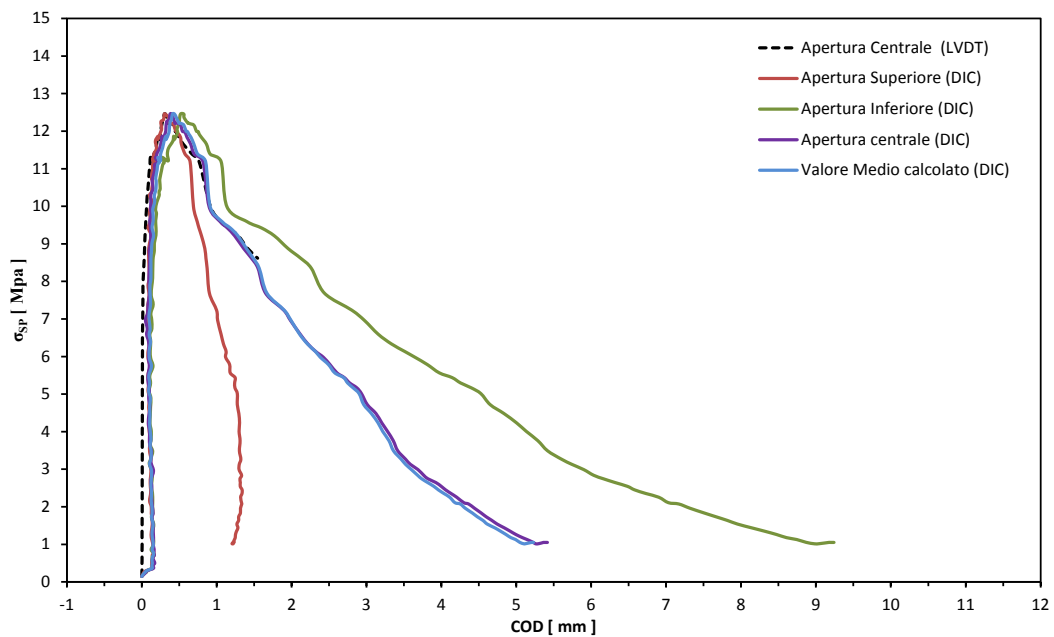


Figura 4.8: Grafico Sforzo-COD per il campione 221-L3



## 4.2 Analisi dei risultati sperimentali ottenuti

Per identificare il comportamento di ogni singolo pezzo in un test DEWS viene di solito utilizzata una visualizzazione basata sul grafico *Sforzo – COD*, che vede sull’asse delle ordinate lo sforzo di splitting calcolato, mentre su quello delle ascisse l’apertura di fessura (Crack Opening Displacement). In questo paragrafo saranno discussi i risultati ottenuti cercando di ampliare l’analisi basata su questi grafici con le informazioni derivanti dalla Digital Image Correlation. Dalle prime applicazioni del Double Edge Wedge Splitting Test è emerso come i campioni possano presentare due differenti tipologie di deformazione. La prima di queste si manifesta con una rotazione delle due metà del campione fessurato nel piano proprio del campione (“*rotazione nel piano*”); l’altra avverrà invece in direzione perpendicolare (“*rotazione fuori piano*”). In quest’ottica analizzando i grafici ottenuti per i campioni 111-C2 e 111-L2 (Fig. 4.9 e 4.10) è possibile notare un diverso comportamento fuori piano verificatosi nelle due prove.

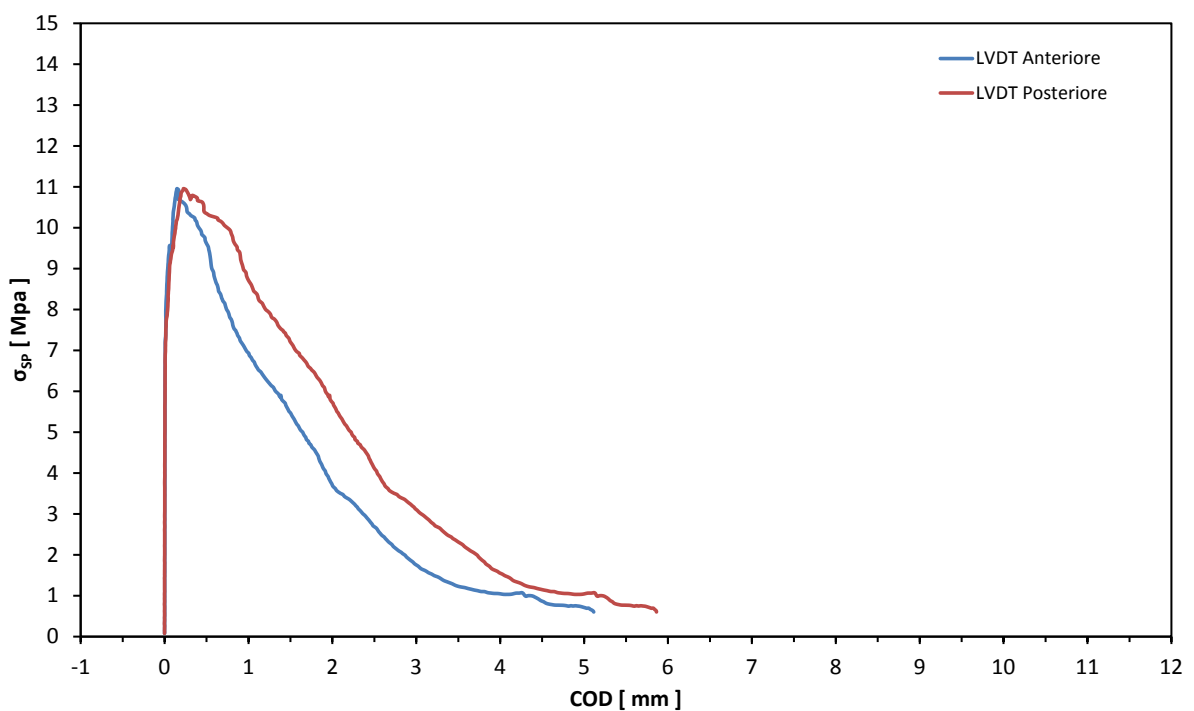


Figura 4.9: Grafico Sforzo-COD per il campione 111-C2

Mentre nel primo i valori di apertura di fessura restano sempre positivi per entrambi gli LVDT, nel secondo grafico invece è ben visibile in prossimità della zona di picco, situata intorno ai 12 Mpa la presenza di valori di COD negativi dell’estensimetro posteriore, segno evidente di una

leggera rotazione fuori piano. Rotazione che risulta senz'altro più evidente dal grafico per il campione denominato 112-R3 (Fig. 4.11) e dalle relative foto scattate a prova avvenuta (Fig. 4.12b).

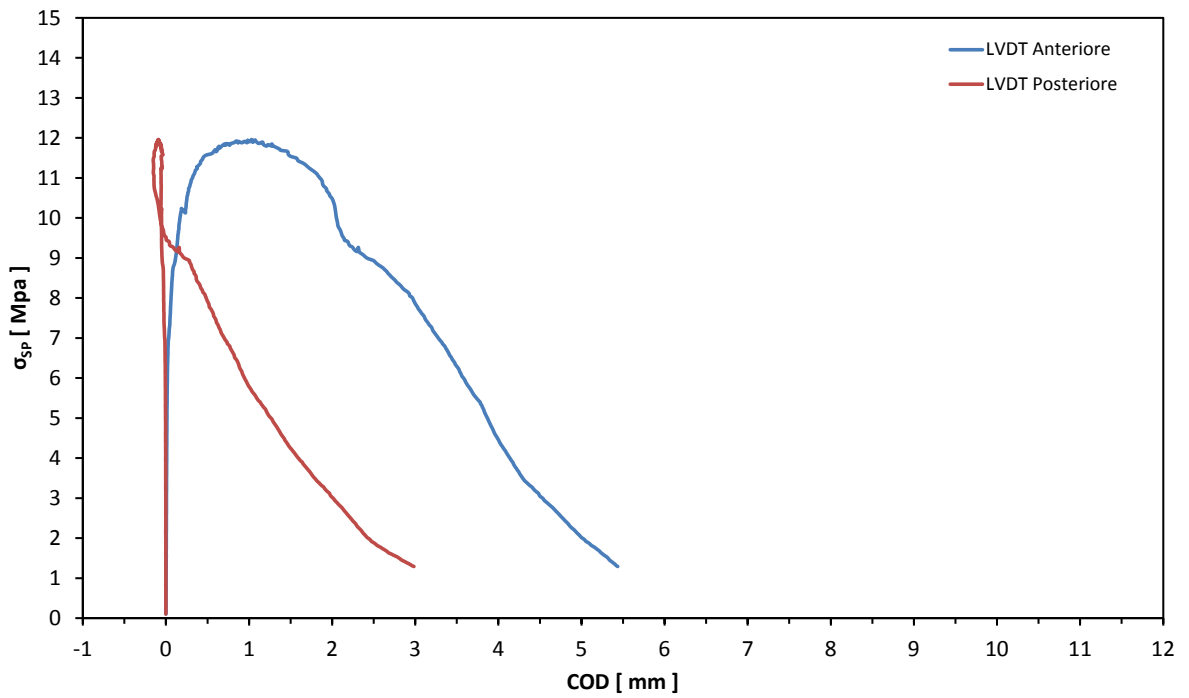


Figura 4.10: Grafico Sforzo-COD per il campione 111-L2

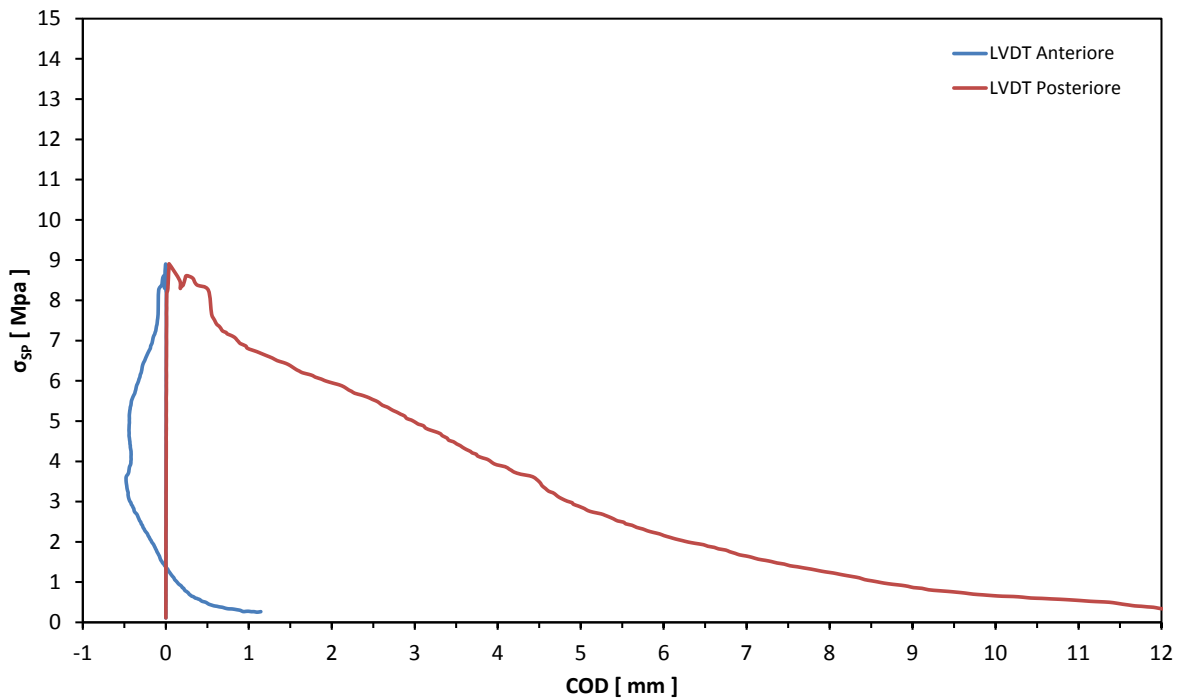
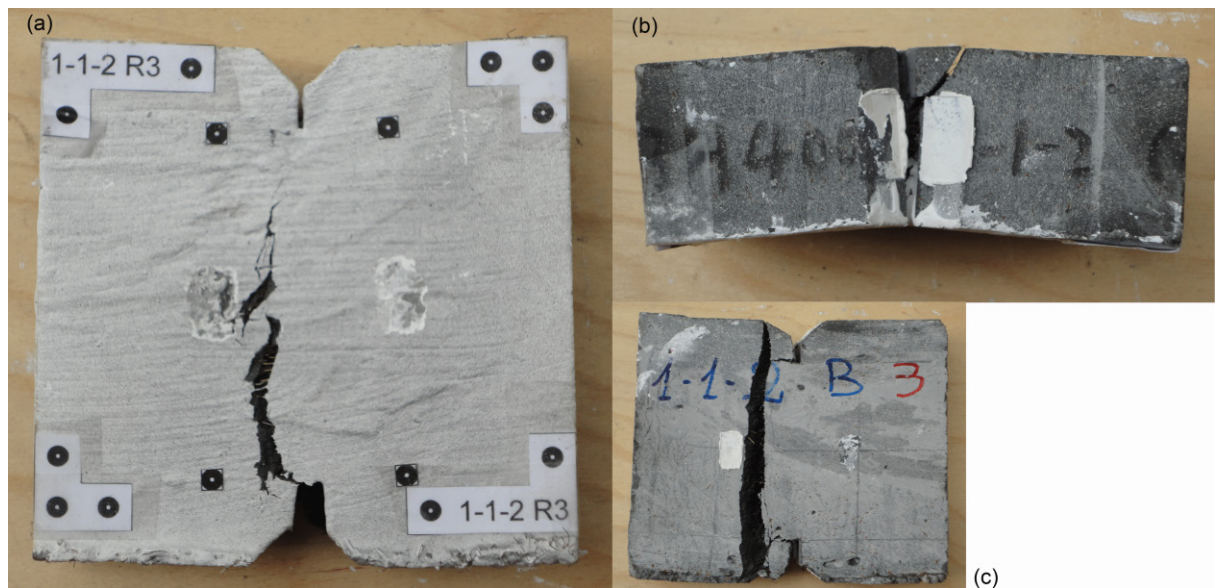


Figura 4.11: Grafico Sforzo-COD per il campione 112-R3

Analizzando la totalità dei campioni in nostro possesso si è osservato come la propagazione di fessura è stata spesso asimmetrica (Fig. 5.12a). Questo comportamento può essere dovuto alla diversa distribuzione delle fibre all'interno della sezione di splitting. La cricca iniziale avviene nella zona con una concentrazione minore di fibre e si propaga successivamente nel resto del campione.



*Figura 4.12: Immagini al termine della prova per il campione 112-R3; vista frontale (a), vista dall'alto (b) e vista posteriore (c)*

Come già anticipato, analizzando le prove effettuate in questo lavoro è possibile riconoscere due diversi tipi di comportamento dei campioni. Una deformazione nel piano del provino, associata tipicamente ad una rotazione intorno ad uno dei due cilindri di carico, ed una rotazione fuori dal piano, in direzione ortogonale alla precedente. Obiettivo del presente lavoro è stato anche trovare una trattazione dei dati registrati che ci consenta di definire in maniera semplice la tipologia di comportamento deformativo prevalente tenuto dal provino durante la prova. Per seguire questa finalità in prima battuta si è utilizzato un test statistico chiamato test di correlazione di Pearson, mentre in una fase successiva si è passati all'analisi della deviazione standard delle misurazioni effettuate. Questo procedimento è stato ripetuto sia per l'andamento nel piano, sia per quello fuori piano.

**Test di correlazione di Pearson (o chi quadrato).**

In teoria degli errori, l'indice di correlazione di Pearson (o di *Bravais-Pearson*) tra due variabili aleatorie è un coefficiente che esprime la linearità tra la loro covarianza e il prodotto delle rispettive deviazioni standard. Date due variabili statistiche X e Y, l'indice in questione assume la forma:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (4.4)$$

con:

- $\sigma_{xy}$  la covarianza tra  $x$  e  $y$ ;
- $\sigma_x, \sigma_y$  le due deviazioni standard.

Questo test viene utilizzato per studiare l'associazione tra un fattore di studio ed una variabile di risposta quantitativa che misura il grado di associazione assumendo valori compresi tra -1 ed 1. In particolare:

- l'indice di correlazione vale 1 ( o -1) in presenza di correlazione lineare positiva ( o negativa);
- l'indice di correlazione vale 0 se le due variabili sono indipendenti;
- valori vicini allo 0 indicheranno nessuna associazione lineare, il che non significa che non possa esistere altro tipo di associazione.

Il test è stato applicato per verificare la linearità tra la tensione di splitting ( $\sigma_{SP}$ ) calcolata a partire dal carico misurato durante le prove e le aperture di fessura registrate. In particolare per quanto riguarda la situazione nel piano il test è stato applicato sulla media delle tre aperture di fessura ricavate dagli estensimetri virtuali. L'allontanarsi progressivo dal valore unitario dell'indice di correlazione così calcolato sta ad indicare la progressiva perdita di linearità tra i valori di carico e di COD, ovvero il presentarsi dell'innesco di un fenomeno fessurativo asimmetrico. Per analogia il test è stato ripetuto per quanto riguarda la deformazione fuori piano, considerando in questo caso la differenza tra le letture anteriori e posteriori degli LVDT.

Di seguito alcune rappresentazioni di questo test per i campioni fin qui discussi.

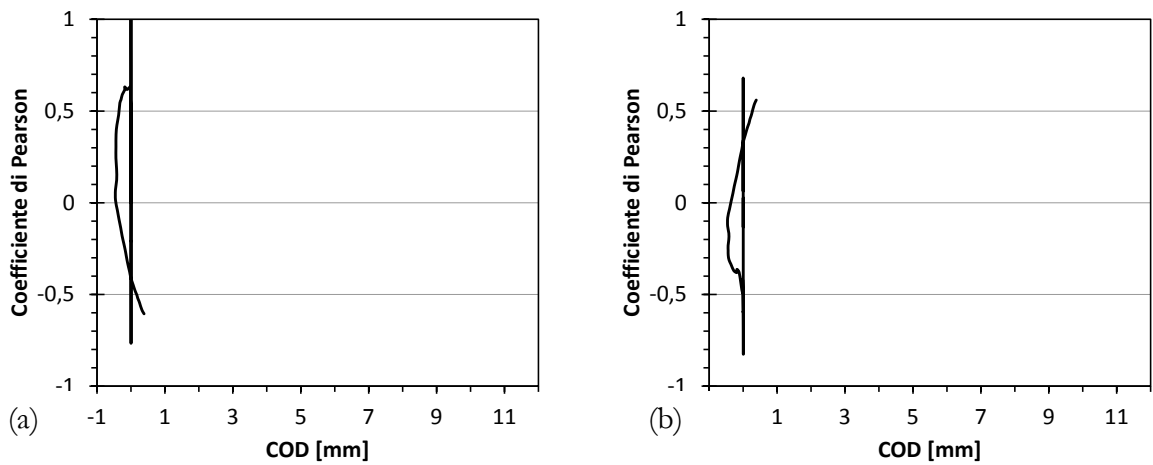


Figura 4.13: Test di Pearson per il campione 112-R3

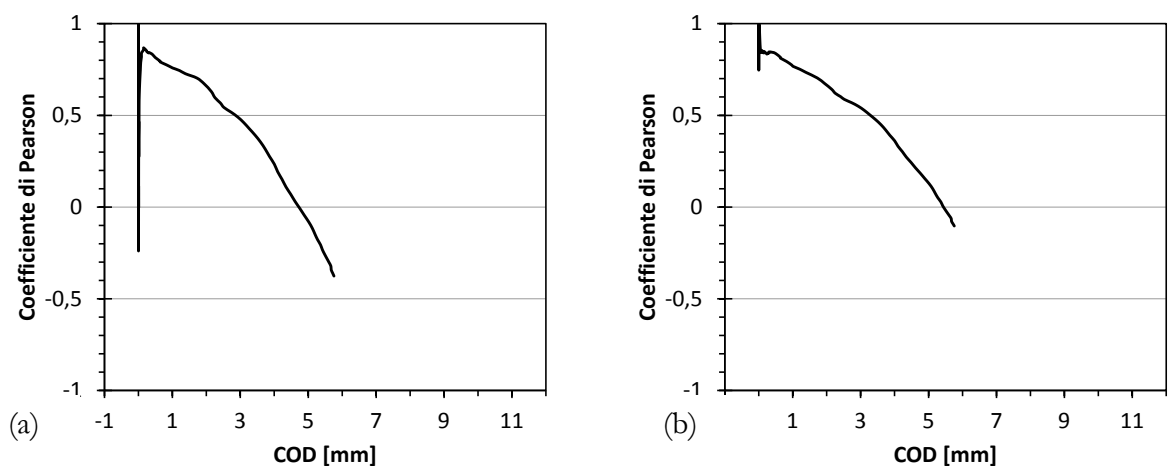


Figura 4.14: Test di Pearson per il campione 111-L2

Mentre il test riguardante la rotazione nel piano dà come risultato costante un andamento positivo decrescente (Fig. 4.13a e 4.14a) essendo frutto della media tra le aperture riscontrate, il segno dei valori risultati dal test eseguito fuori piano è indicativo della tipologia di rotazione avvenuta nei campioni. Valori negativi (Fig. 4.13b) sono indice di una prevalenza delle aperture posteriori e quindi di una rotazione fuori piano che tende a “chiudere” il campione nella facciata anteriore, come visibile in Figura 4.12b . Valori positivi (Fig. 4.14b) indicano invece una rotazione inversa. All’analisi appena descritta è stata affiancato il calcolo della deviazione standard dei valori di COD.

### Deviazione standard

La deviazione standard in ambito statistico rappresenta un indice di dispersione delle misure sperimentali, ovvero una stima della variabilità di una popolazione di dati. E' uno dei modi per esprimere la dispersione dei dati intorno ad un indice di posizione, quale può essere, ad esempio, il valore atteso o una stima di esso. Il termine "standard deviation" è stato introdotto in statistica da Pearson assieme alla lettera greca che lo rappresenta ( $\sigma$ ), e viene calcolato come la radice quadrata della varianza statistica secondo la formula:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}} \quad (4.5)$$

con:

$\mu$  media aritmetica;

$N$  numero totale di elementi nel campione.

Questo indicatore ci consente quindi di verificare l'effettiva dispersione dei valori registrati durante le prove sperimentali. Un valore elevato sta ad indicare una grande variabilità e la presenza di rotazione; un valore contenuto stabilisce una uniformità nei valori di apertura di fessura, quindi di una apertura uniforme. Questo metodo statistico è stato applicato sia alle misurazioni ricavate per descrivere il comportamento del campione nel piano (Estensimetri DIC) e ripetuto per la situazione fuori piano (Estensimetri LVDT). I grafici mostrano gli andamenti ottenuti per l'andamento dei campioni 111-L2 (Fig. 4.15) e 112-L2 (Fig. 4.16) in funzione dell'avanzamento delle piastre di carico della pressa. Netta la differenza in termini di deviazione standard che ci conferma il comportamento reale verificatosi; la presenza di rotazione per il campione 111-L2 ed un'apertura pressoché uniforme della faccia anteriore per il secondo, così come descritto in occasione della trattazione degli errori registrati al paragrafo precedente. Stesso discorso per quanto avviene al di fuori del piano principale. Come esempio si riportano i grafici (Fig. 4.17 e 4.18) che rispecchiano due diversi comportamenti. Nel primo i valori di deviazione standard restano contenuti per tutta la durata della prova. Nel secondo, dopo un incremento iniziale, la rotazione si stabilizza dopo i due millimetri di avanzamento delle piastre di carico.

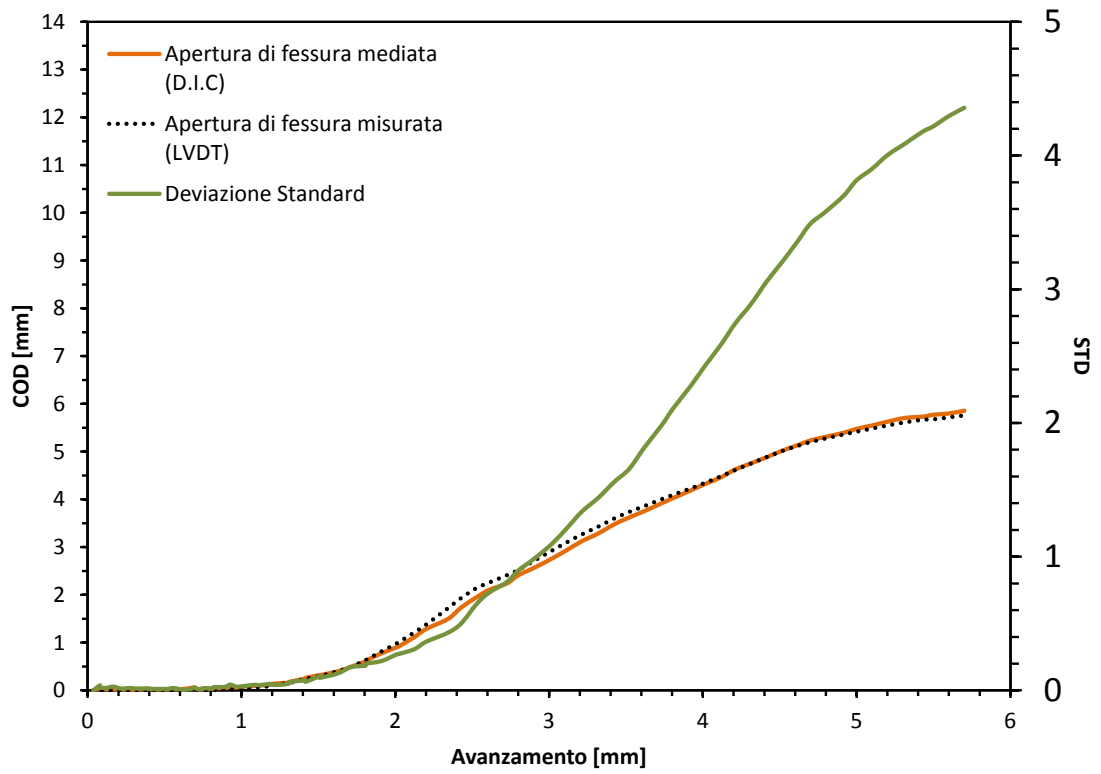


Figura 4.15: Deformazioni nel piano misurate per il campione 111-L2

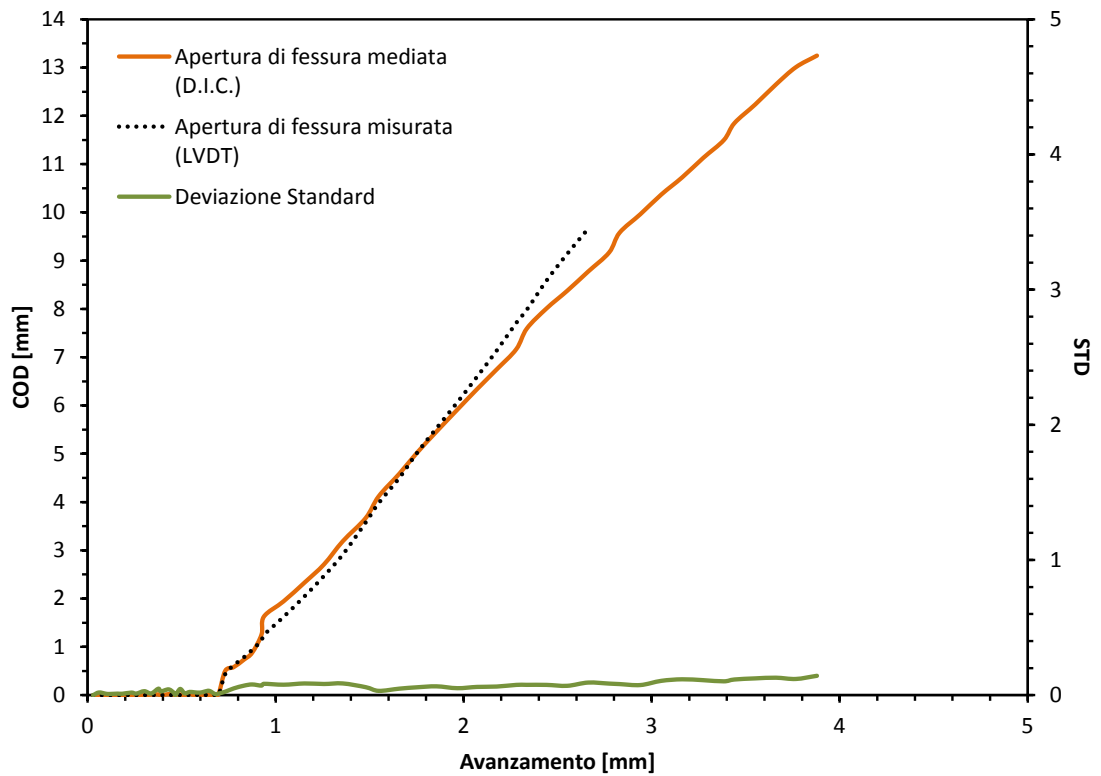


Figura 4.16: Deformazioni nel piano misurate per il campione 112-L2

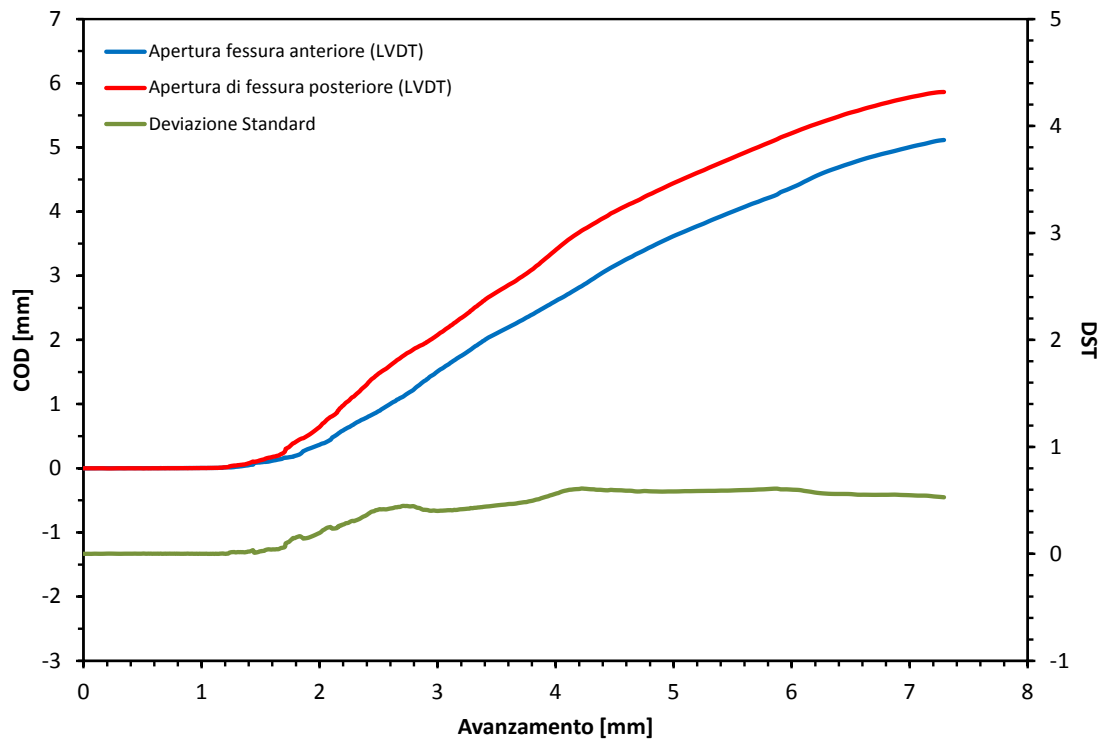


Figura 4.17: Deformazioni fuori piano misurate per il campione 111-C2

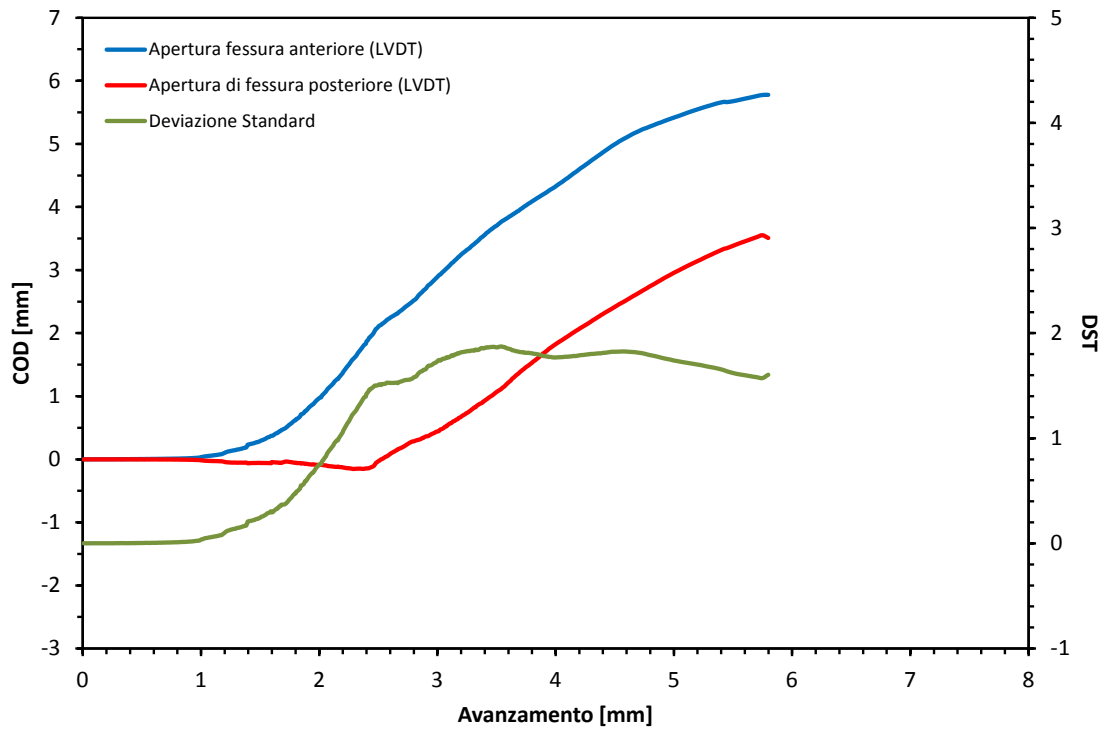


Figura 4.18: Deformazioni fuori piano misurate per il campione 111-L2



A questo punto è sorta la necessità di poter rendere confrontabili i due andamenti di deviazione calcolati per ogni campione, frutto di due caratteristiche deformative diverse.

Si è scelto di eseguire la normalizzazione delle due distribuzioni e di restituirle in funzione dell'apertura di fessura misurata. La comparazione di queste due curve ci consentirà di percepire quale dei due movimenti è prevalente durante lo sviluppo della prova.

### Normalizzazione statistica

La normalizzazione è un'operazione statistica che consiste essenzialmente nel limitare l'escursione di un insieme di valori entro un certo intervallo predefinito e permette di mettere a confronto distribuzioni diverse. Questo procedimento è possibile tramite l'utilizzo della seguente formula:

$$Z = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad (4.6)$$

con:

$\mu$  media aritmetica del campione;

$\sigma$  deviazione standard del campione.

In Figura 4.19 si riporta il grafico di confronto tra le due rotazioni. Dal suo sviluppo è visibile l'alternarsi delle due deformazioni calcolate. Nella fase iniziale della prova la rotazione prevalente è quella all'interno del piano principale; essa viene superata all'incirca a 0,5 mm di COD da quella fuori piano per quasi tutto lo sviluppo della prova per poi tornare ad essere preponderante per alti valori di fessurazione.

Ancor più chiara visivamente risulta una visualizzazione qualitativa basata sul calcolo della differenza istante per istante delle due curve normalizzate (Fig. 4.20). In rosso le zone in cui la rotazione fuori piano è dominante.

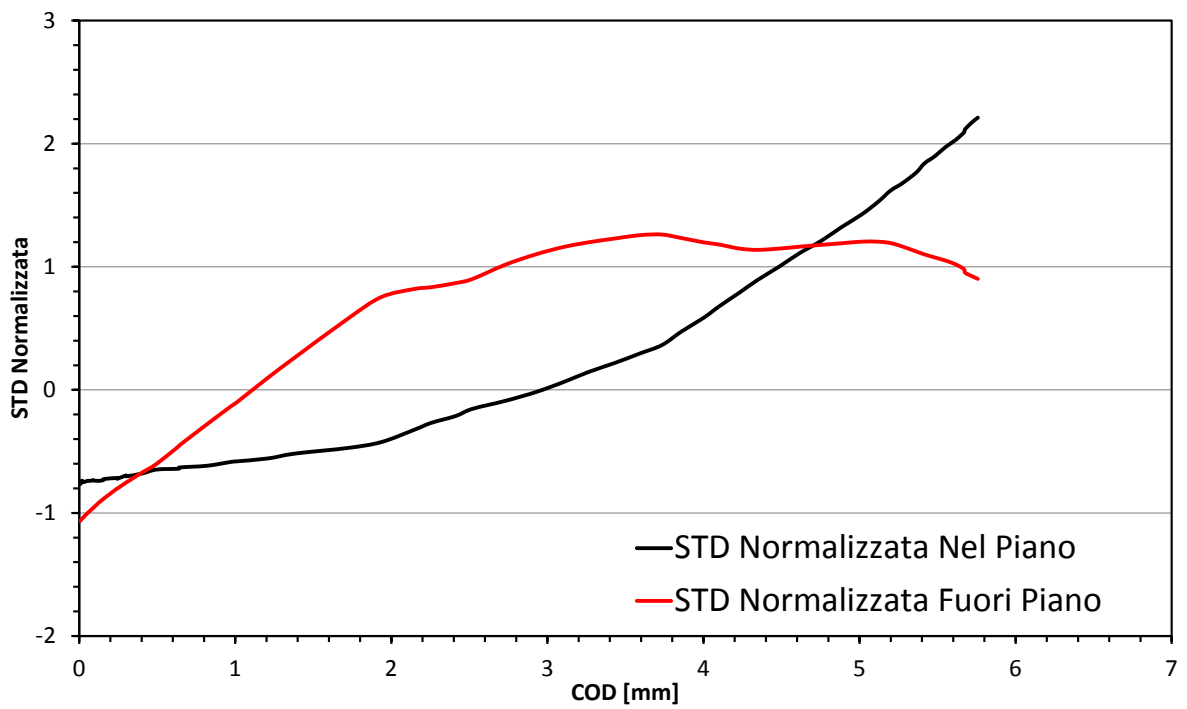


Figura 4.19: Confronto di deviazioni standard dentro e fuori dal piano per il campione 111-L2

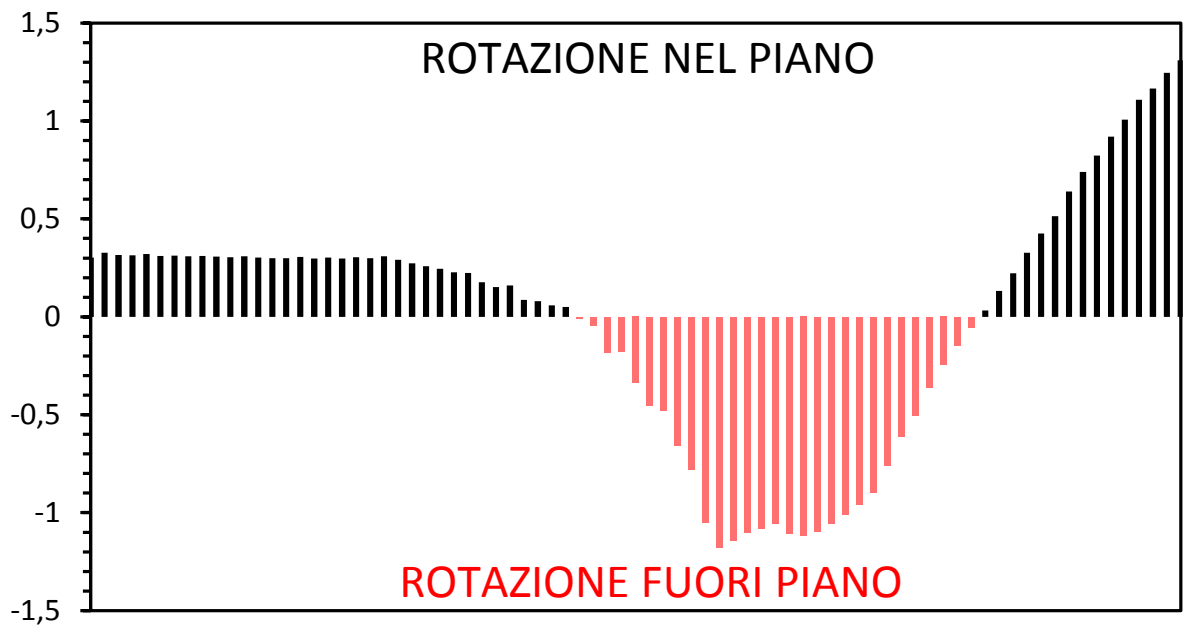


Figura 4.20: Andamento delle rotazioni prevalenti per il campione 111-L2

Completato questo passaggio, passeremo ora ad analizzare le risposte in termini di risposta fessurativa avute dai diversi campioni. A questo scopo si è costruito per ognuno un grafico in cui la tensione di splitting è messa in relazione con due differenti grandezze. Per il tratto iniziale, fino al raggiungimento del punto di picco, è stata graficata con la deformazione subita dall'estensimetro; per il tratto successivo invece si è utilizzata l'apertura di fessura post-picco ( $w$ ). Quest'ultima va intesa come il valore di COD calcolato prendendo come riferimento iniziale il valore di apertura in corrispondenza del picco di tensione. Nel grafico sono stati evidenziati alcuni punti di particolare interesse in funzione delle cosiddette tensioni residue, ovvero le tensioni corrispondenti a particolari valori di apertura di fessura post-picco (nello specifico a 0,25 , 1,25 e 2,50 mm). Per l'indicazione di questi parametri è stata utilizzata la lettera " f " seguita dal valore di apertura in base al quale sono stati misurati; il valore di tensioni all'apertura post-picco di 2,50 mm assumerà quindi la nomenclatura di " $f_{2,5}$ ". In evidenza sono state poste anche la tensione di prima fessurazione e la tensione di picco della prova. Per il punto di prima fessurazione indicato nel grafico è stato utilizzato un procedimento statistico. In particolare è stato eseguito un test di Pearson tra la tensione registrata e la sola apertura di fessura centrale. Il valore massimo del test corrisponde al punto in cui si perde la linearità tra la risposta deformativa del campione ed il carico applicato.

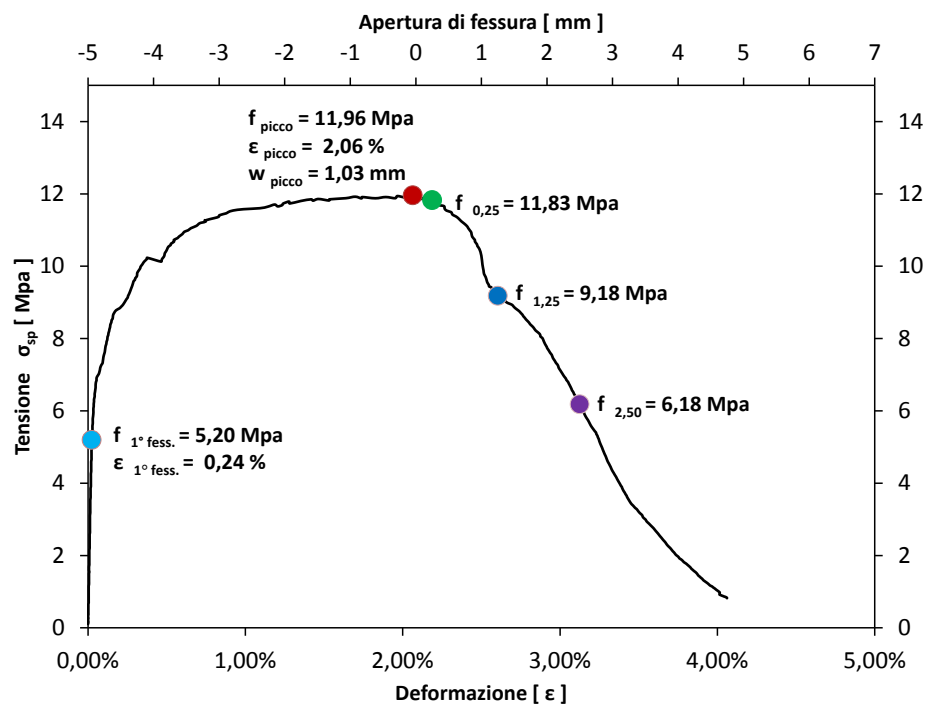


Figura 4.21: Esempio di grafico  $\sigma$ - $\epsilon/w$  per il campione 111-L2

Interessanti indicazioni si sono potute ottenere andando a correlare i valori tensionali estrapolati dai grafici precedenti con il valore di dispersione delle fibre. Analizzando il grafico relativo alle tensioni di picco (Fig. 4.22) si nota un chiaro andamento crescente tra i due parametri evidenziato anche dalla linea di tendenza. Logicamente come ci si attendeva ad un aumento delle fibre all'interno del campione si è riscontrato un aumento della tensione di picco registrata.

Dal grafico è possibile ancora notare una maggiore variabilità dei valori corrispondenti a campioni con maggiore concentrazione di fibre; segnale che, basandoci su solo questo aspetto, anche una lieve differenza di fibre impiegate basta per ottenere una variazione anche non banale nei risultati registrati.

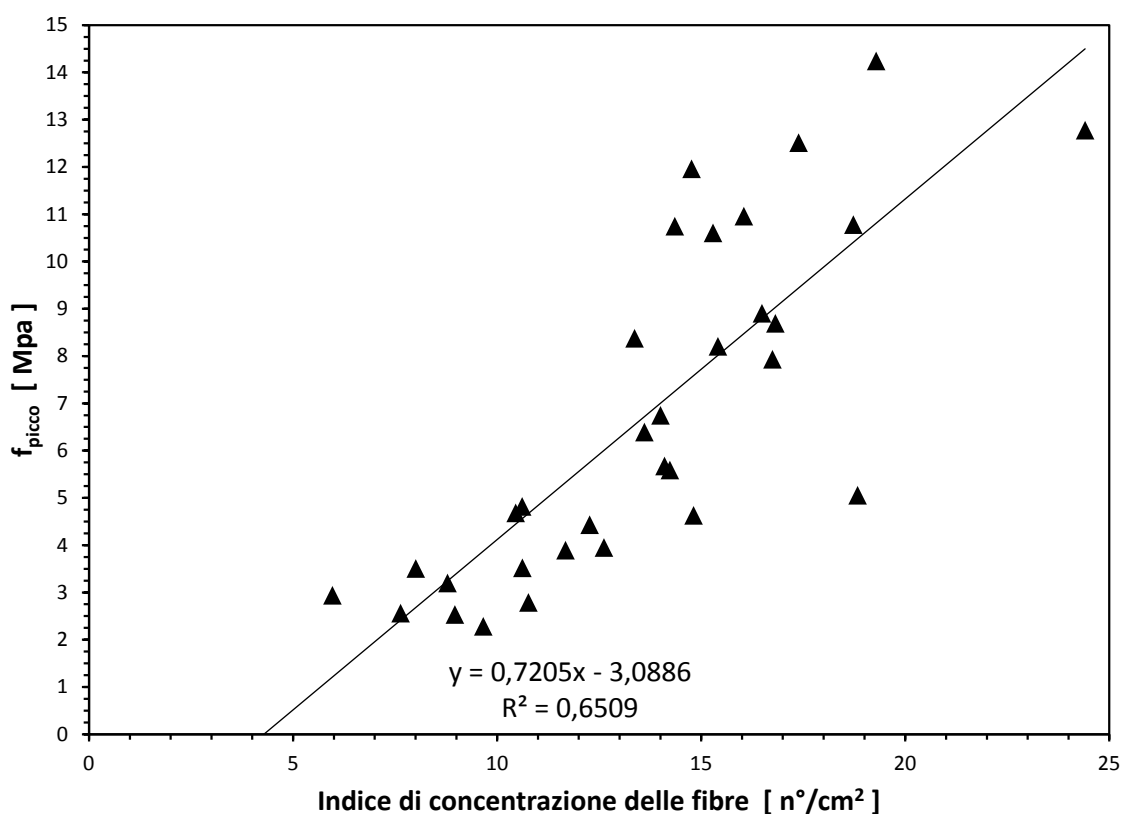


Figura 4.22: Correlazione tra tensione di picco e dispersione delle fibre

Come sappiamo però la risposta del calcestruzzo fibrorinforzato è influenzata da una molteplicità di fattori diversi; non solamente dal numero di fibre utilizzato. Un fattore che risulta molto importante, ma che in questo lavoro non è stato considerato non avendo delle informazioni precise sulle modalità di confezionamento dei campioni è l'orientamento assunto dalle fibre.

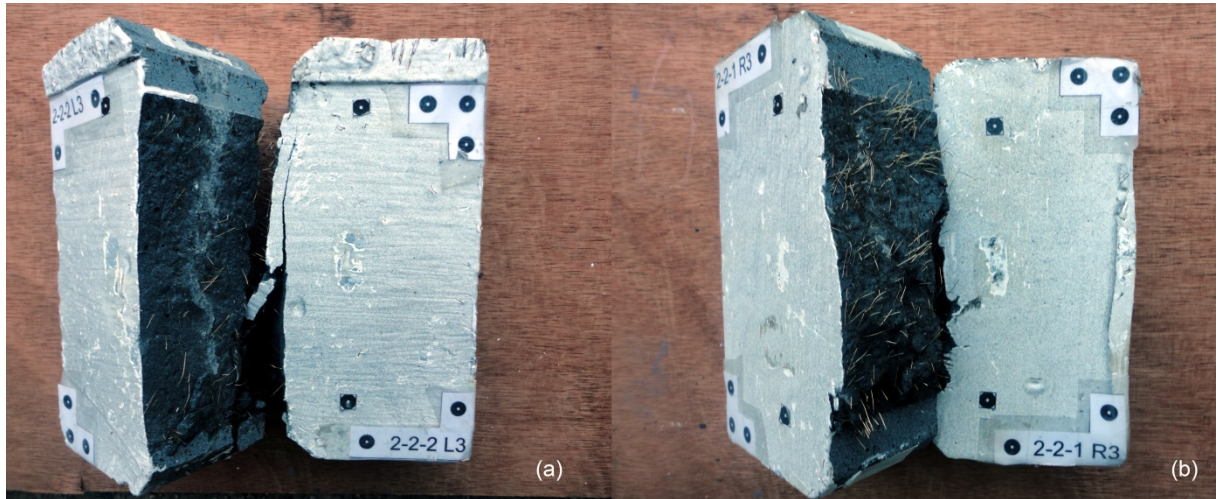


Figura 4.23: Campioni con minimo (a) ed elevato (b) indice di fibre

A questo proposito va specificato che i campioni denominati con le sigle 221-R1 e 221-C1 durante la prova non hanno nemmeno raggiunto il picco tensionale. In questi due casi la macchina di prova ha applicato la sua massima capacità di carico verticale (100kN) causando solo una minima fessurazione ai campioni e non consentendo il proseguimento del test.

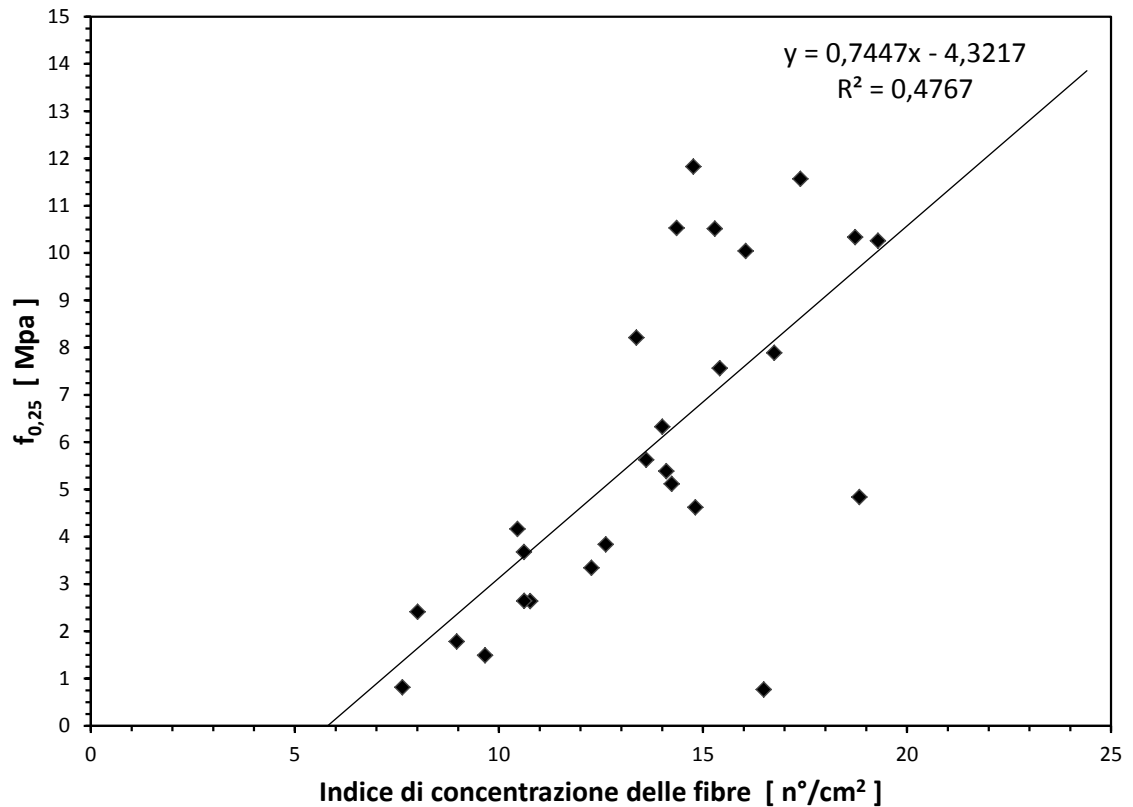


Figura 4.24: Correlazione tra dispersione delle fibre e tensione residua a 0,25 mm di apertura

Andamento analogo a quello della tensione di picco si ritrova anche nei grafici riguardanti le tensioni residue e la tensione di prima fessurazione. La tendenza generale vede sempre una crescita lineare tra le tensioni registrate e la dispersione delle fibre. Con l'aumentare dell'apertura di fessura rilevata la tendenza si fa man mano meno ripida come mostrato dalle linee di tendenza (Fig. 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27).

Discorso a parte bisogna riservare per il grafico riguardante i valori di COD registrati in corrispondenza del picco di tensione (Fig. 4.28). Al contrario di come si potrebbe pensare infatti la distribuzione di tensione non influisce in maniera chiara sul fattore considerato. Questo risultato è attribuibile probabilmente alle rotazioni fuori piano instauratesi nei campioni. Se tutte le prove presentassero solamente rotazioni all'interno del piano sarebbe si legittimo ipotizzare anche il valore di COD legato in maniera diretta alla concentrazione delle fibre.

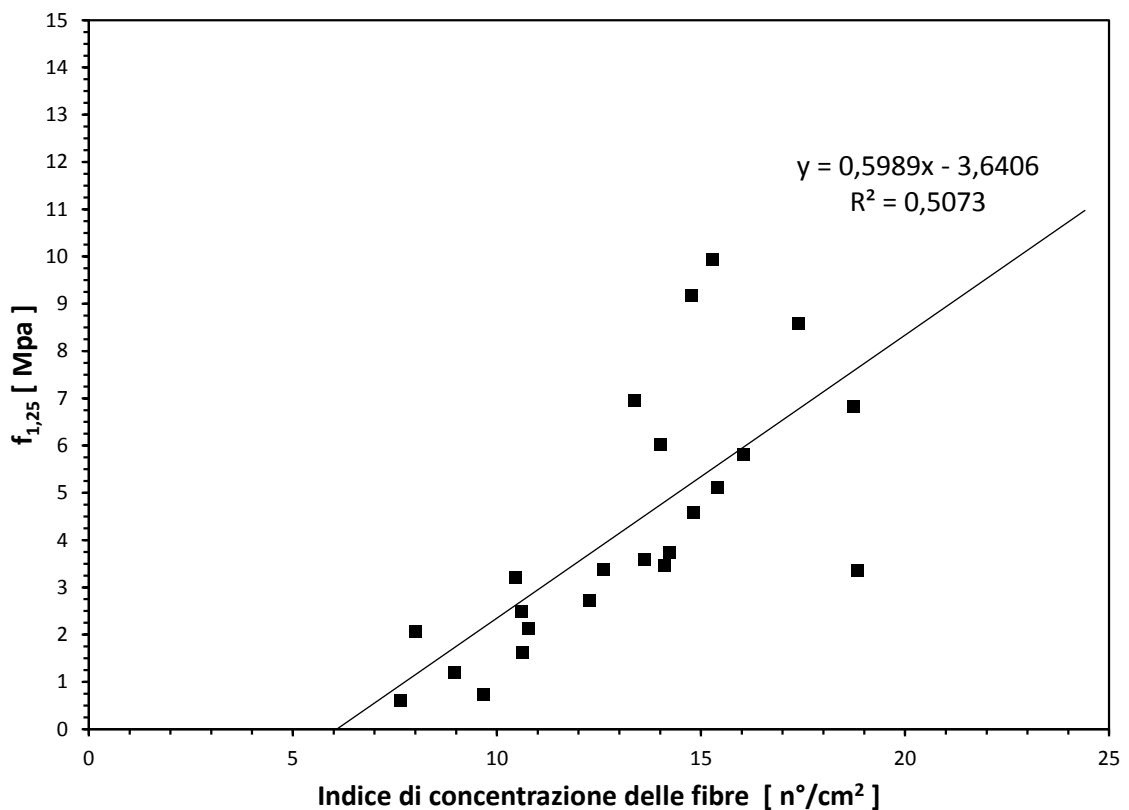


Figura 4.25: Correlazione tra dispersione delle fibre e tensione residua a 1,25 mm di apertura

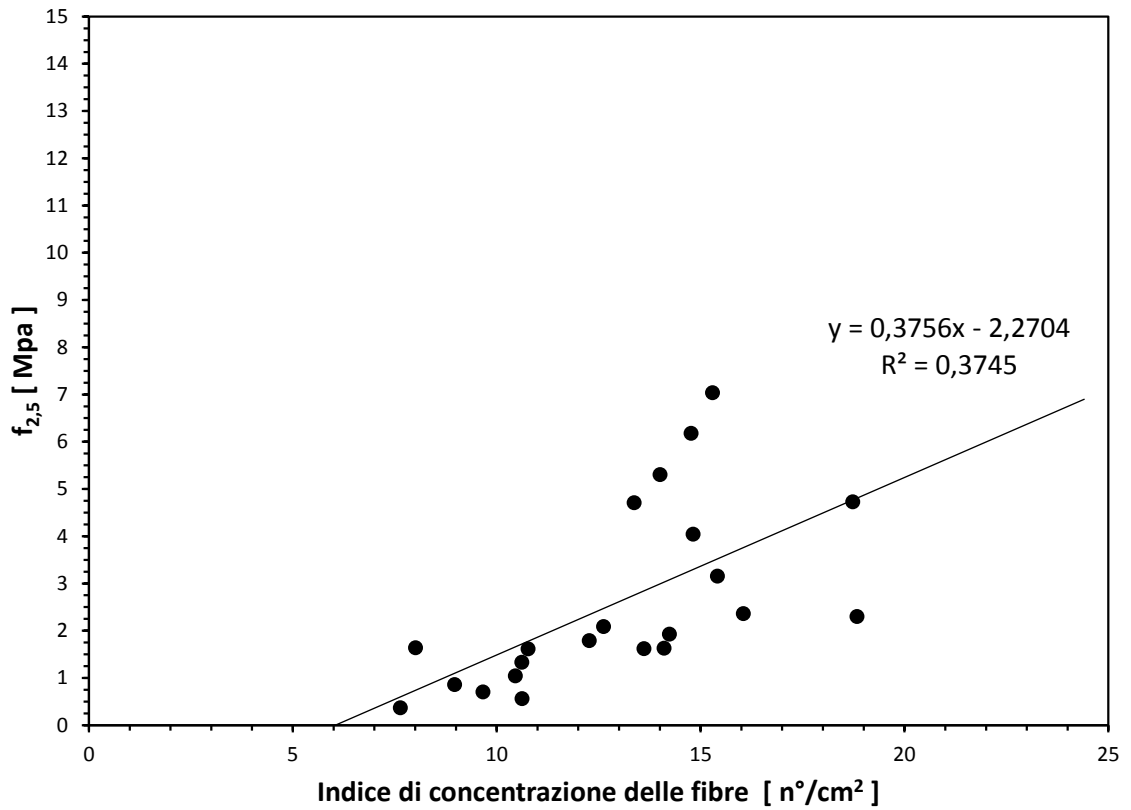


Figura 4.26: Correlazione tra dispersione delle fibre e tensione residua a 2,5 mm di apertura

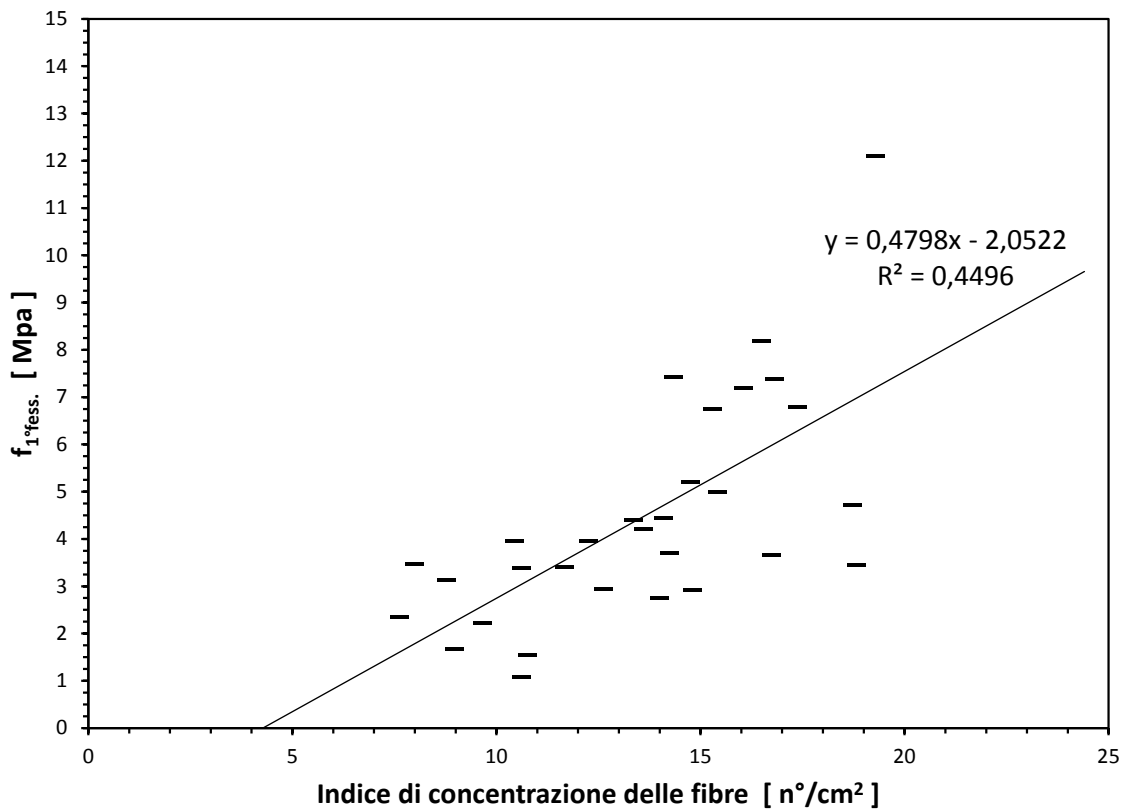


Figura 4.27: Correlazione tra dispersione delle fibre e tensione di prima fessurazione

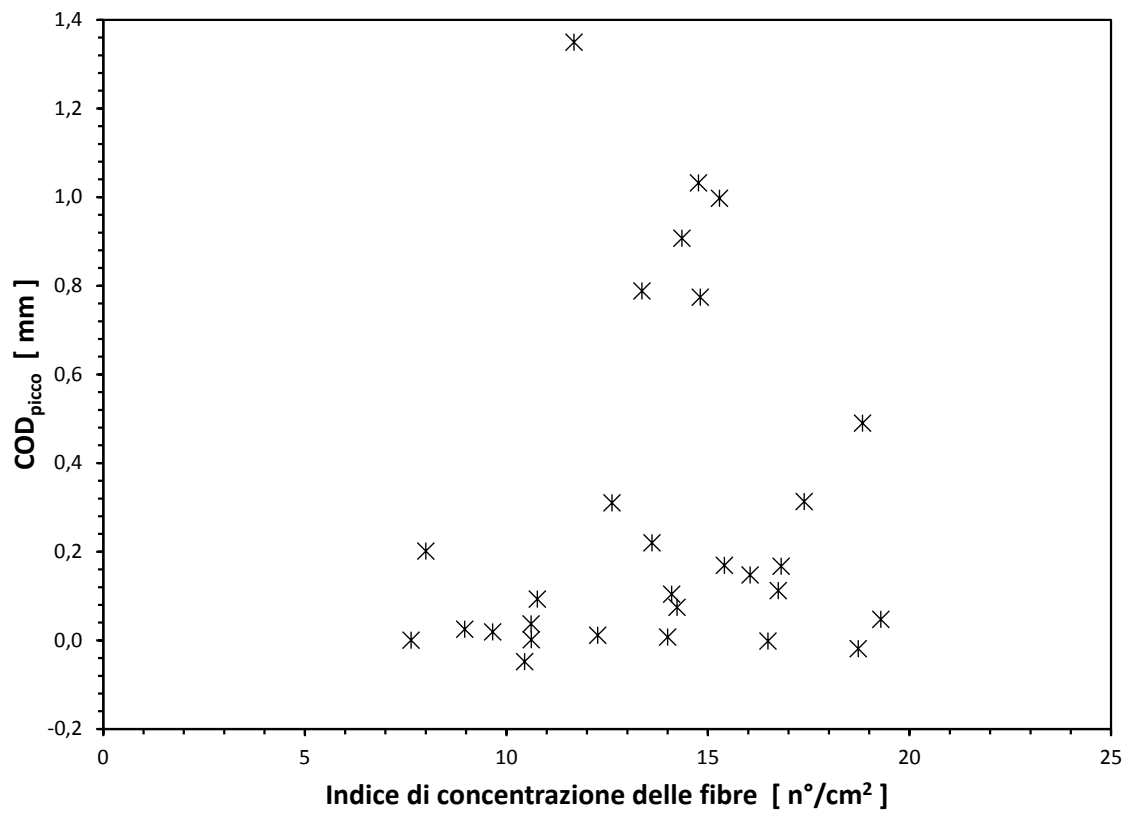


Figura 4.28: Correlazione tra  $t$  dispersione delle fibre e l'apertura di picco



### 4.3 Casi Particolari

In questo paragrafo saranno descritte alcune situazioni limite verificatesi durante l'attività sperimentale; casi che spesso hanno portato ad avere dati incompleti per un'analisi del comportamento del pezzo.

#### 4.3.1 Pura Rotazione Fuori Piano

Per il campione 221-C1 (Fig. 4.29) si è verificata una deformazione costituita da una pura rotazione fuori piano. In questo particolare caso l'utilizzo delle tecniche di Digital Image Correlation si sono dimostrate inefficaci per l'assenza di fenomeni fessurativi nella facciata anteriore del campione (Fig. 4.29a). Per analizzarne il comportamento sono stati utilizzati quindi solamente i dati derivanti dall'utilizzo degli LVDT.

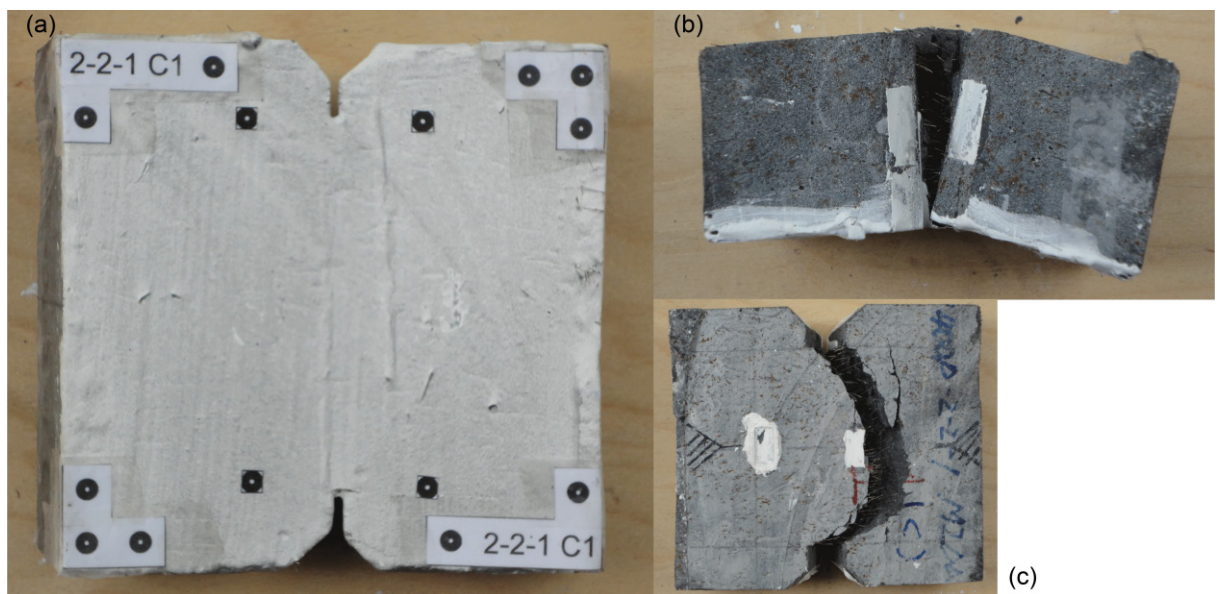


Figura 4.29: Immagini al termine della prova per il campione 221-C1; vista frontale (a), vista dall'alto (b) e vista posteriore (c)

I dati registrati e restituiti nei seguenti grafici ripropongono in modo chiaro il risultato visivo ottenuto dall'analisi del campione a prova avvenuta. La sola rotazione avuta dal campione fa sì che l'estensimetro posto sulla faccia posteriore abbia registrato dei valori molto bassi di apertura di fessura, mentre l'estensimetro anteriore a causa della chiusura del campione ha registrato valori negativi di spostamento. Una volta arrivati ad una rotazione limite è avvenuto il distacco di una delle piastre a cui era fissata la strumentazione e la conseguente perdita dei dati relativi alla

facciata anteriore del campione. Senza le indagini riguardanti la Digital Image Correlation e con i valori derivanti dagli LVDT incompleti non esistono le basi per lo svolgimento dell'analisi impostata. Ci limiteremo quindi nel seguito a mostrare i grafici dell'andamento generale rilevato.

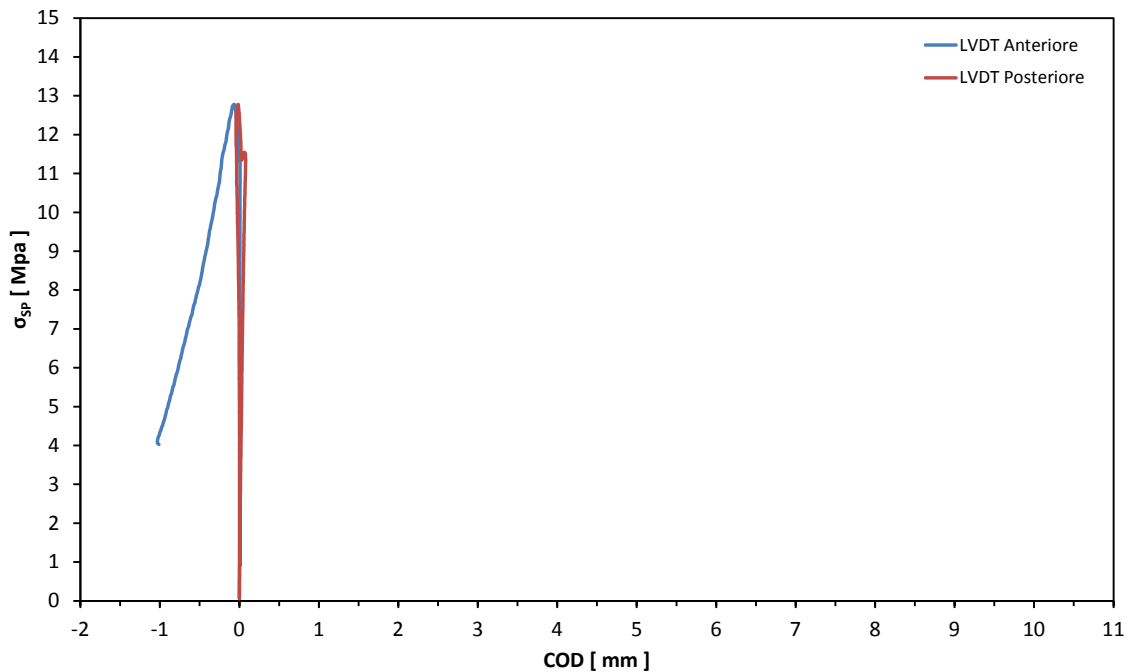


Figura 4.30: Grafico Sforzo-COD per il campione 221-C1

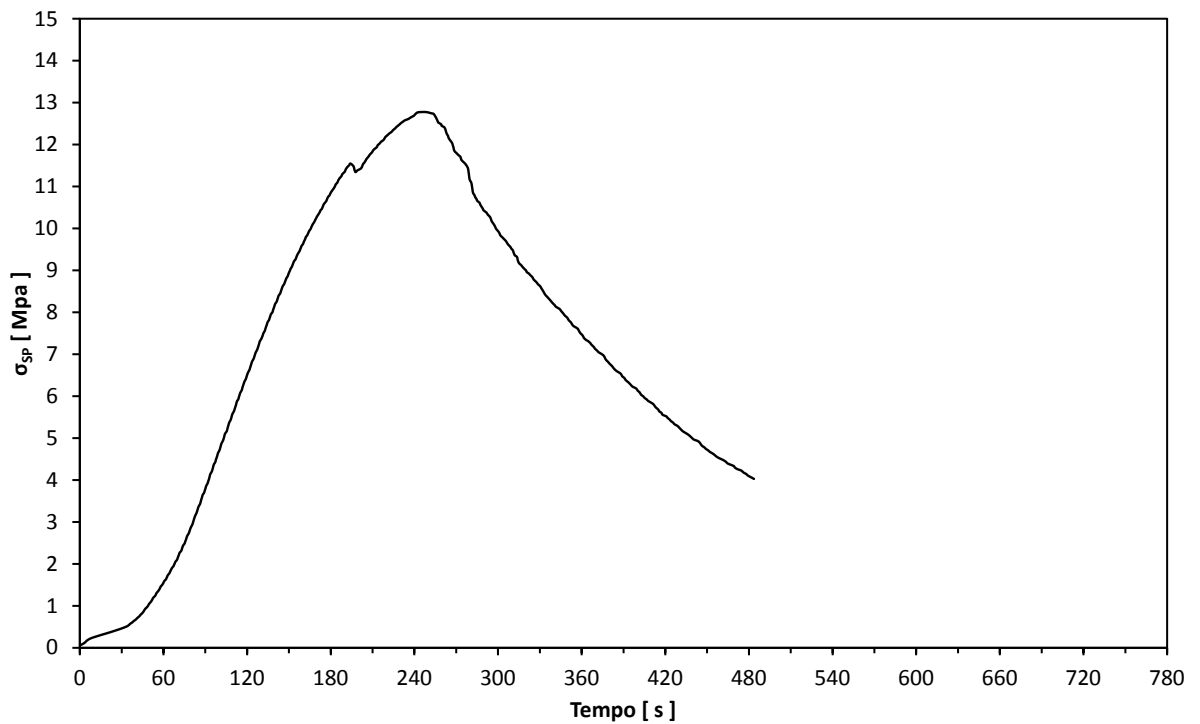


Figura 4.31: Grafico Sforzo-Tempo per il campione 221-C1

### 4.3.2 Fessurazione all'esterno della zona di rilevazione

Per il campione 112-C2 (Fig. 4.32) la fessurazione si è verificata all'esterno della zona delimitata dalla presenza degli LVDT. Questo tipo di rottura ha fatto sì che le rilevazioni dell'estensimetro anteriore perdano di significato.

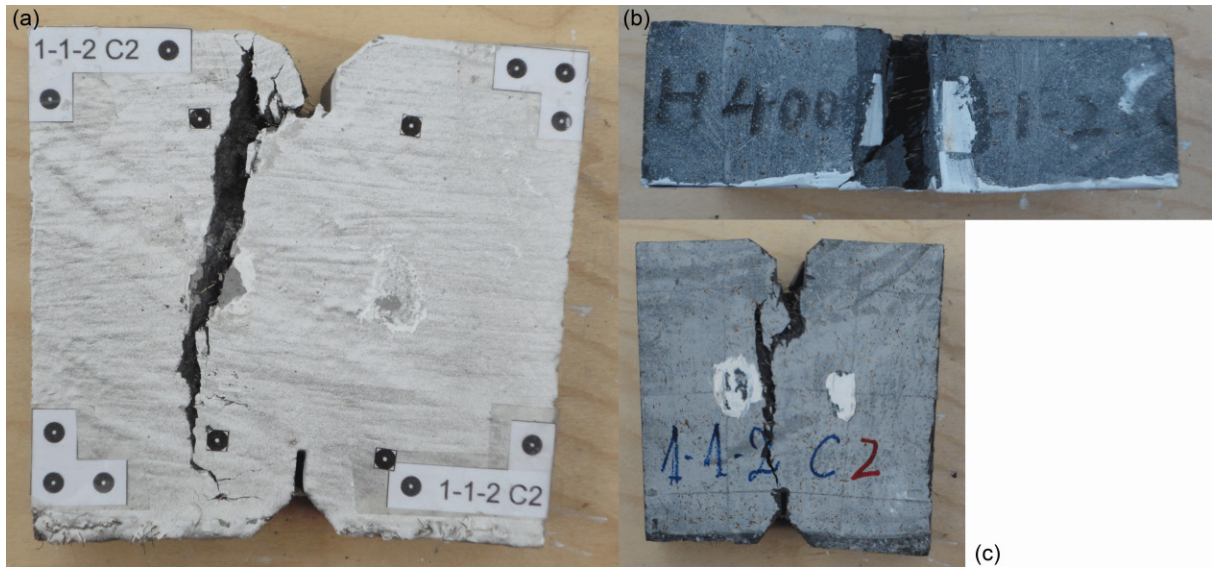


Figura 4.32: Immagini al termine della prova per il campione 112-C2; vista frontale (a), vista dall'alto (b) e vista posteriore (c)

In Fig. 4.34 è ben visibile come la corsa dell'estensimetro anteriore (tratto blu) si fermi e rimanga costante una volta raggiunta la fessurazione nel campione. Nella parte posteriore invece l'andamento registrato è sempre crescente in quanto, per questo lato del campione, la rottura avviene all'interno dell'area di rilevazione.

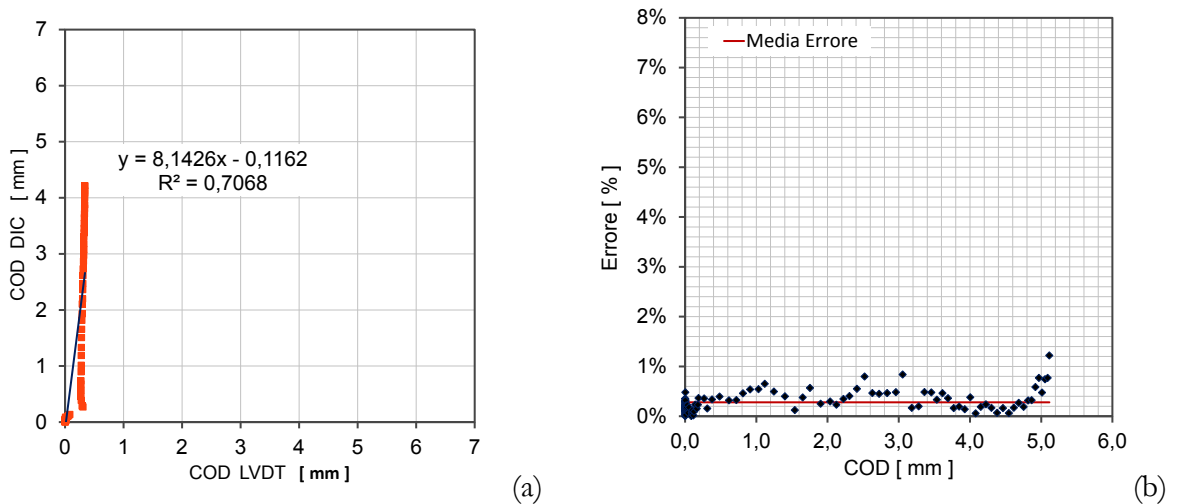


Figura 4.33: Regressione lineare (a) e scarti (b) per il campione 112-C2

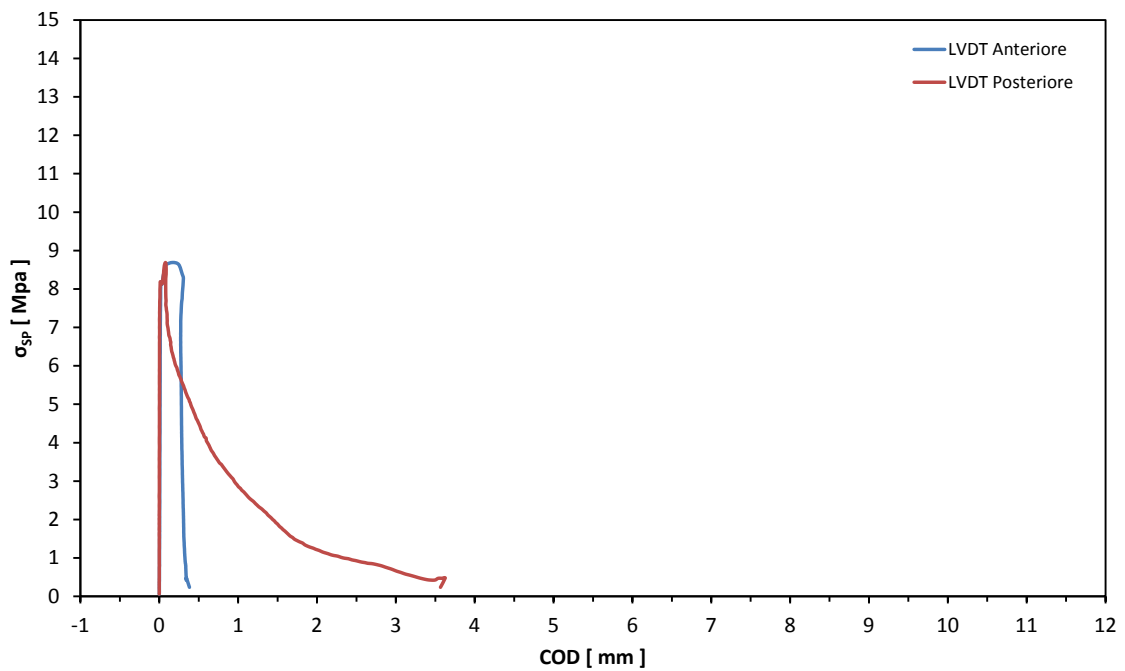


Figura 4.34: Grafico Sforzo-COD per il campione 112-C2

E' stato possibile calcolare l'errore medio per il tratto precedente alla caduta dell'estensimetro e risulta pari allo 0,75 % (Fig. 4.33). A tal motivo per la trattazione della deformazione fuori piano si è deciso di sostituire all'estensimetro anteriore il valore mediato calcolato tramite Digital Image Correlation. Procedendo con tutti i passaggi descritti al paragrafo precedente giungeremo alla definizione del seguente grafico di confronto tra i valori di deviazione normalizzati. Come prima ci fornirà l'andamento globale delle deformazioni della prova in questione.

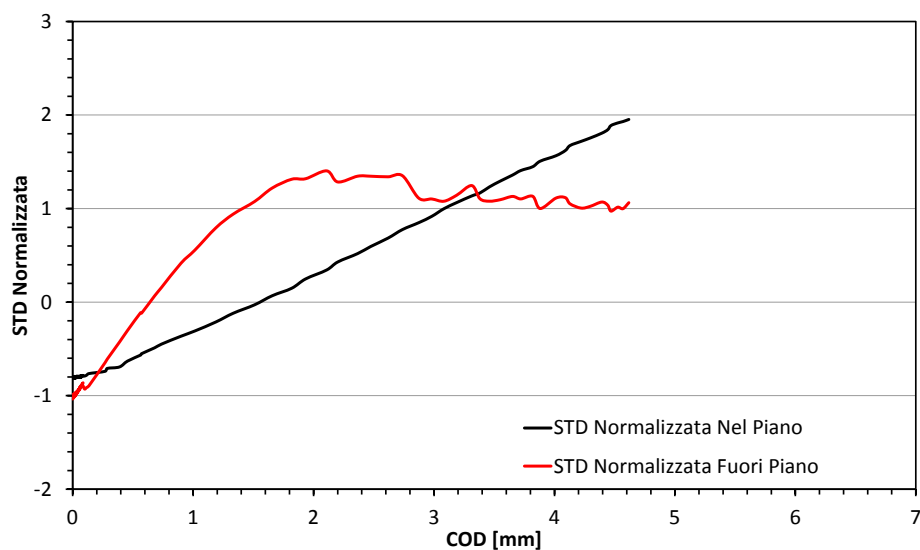


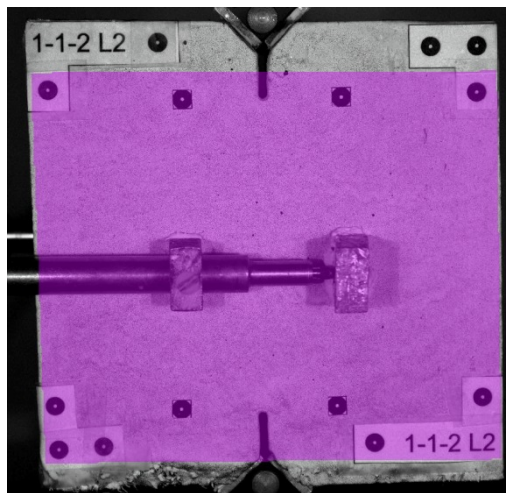
Figura 4.35: Confronto tra le deviazioni standard dentro e fuori dal piano per il campione 112-C2

## 4.4 Digital Image Correlation

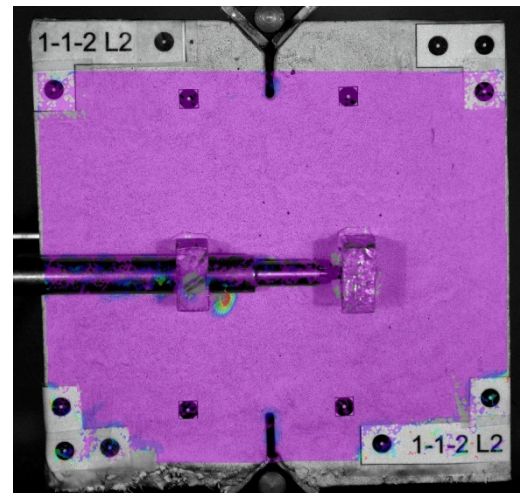
Grazie alla Digital Image Correlation è possibile ottenere, oltre ai dati fessurativi discussi, anche una netta visualizzazione grafica durante tutto lo svolgimento della prova meccanica. Nel seguito sono presentate in successione le immagini registrate durante lo svolgimento di alcune prove. In particolare sono proposti i campioni 112-L2 e 111-C2 a dimostrazione rispettivamente di una propagazione di fessura uniforme e di una rotazione nel piano.

### 4.4.1 Campione 112-L2

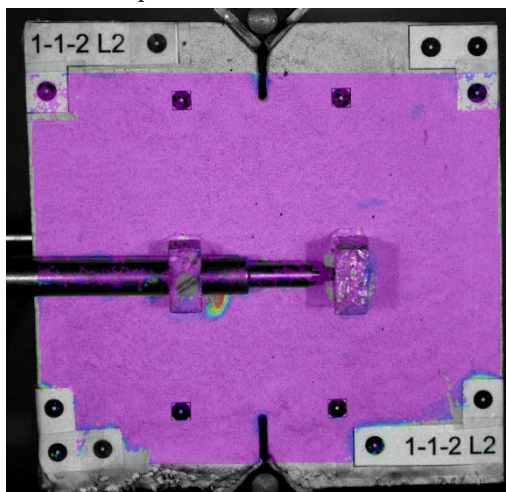
$\sigma_{SP} = 0,087 \text{ Mpa}$     $w = 0,000 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,000 \%$



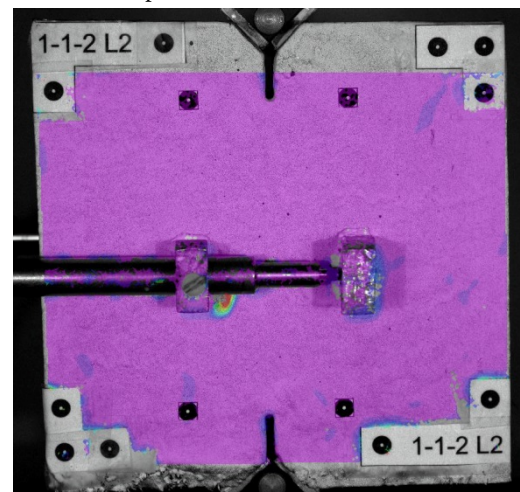
$\sigma_{SP} = 0,354 \text{ Mpa}$     $w = 0,001 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,002 \%$



$\sigma_{SP} = 0,572 \text{ Mpa}$     $w = 0,001 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,002 \%$

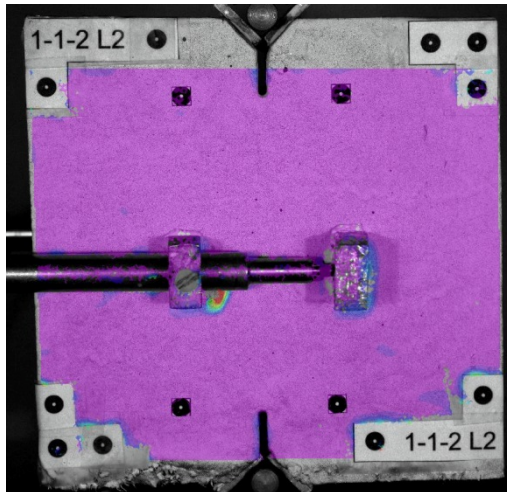


$\sigma_{SP} = 0,749 \text{ Mpa}$     $w = 0,001 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,002 \%$

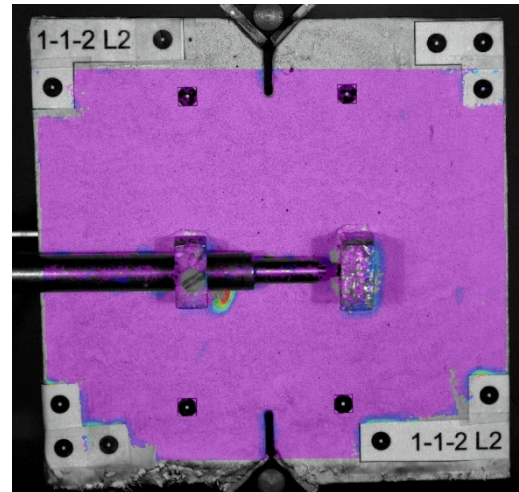


La prova comincia ed il carico applicato sale gradualmente. La deformazione inizialmente registrata dallo strumento resta costante. Non vi sono fessurazioni.

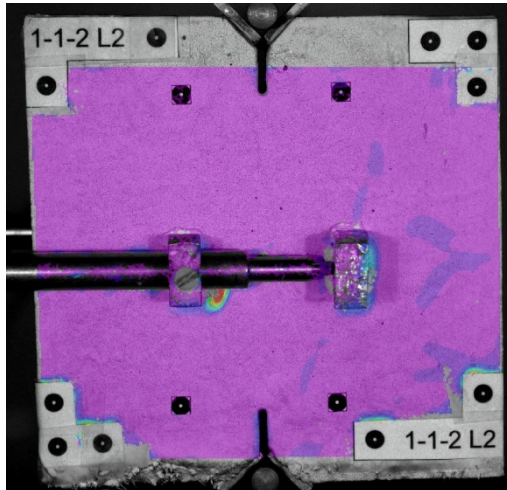
$\sigma_{SP} = 0,920 \text{ Mpa}$     $w = 0,002 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,004 \%$



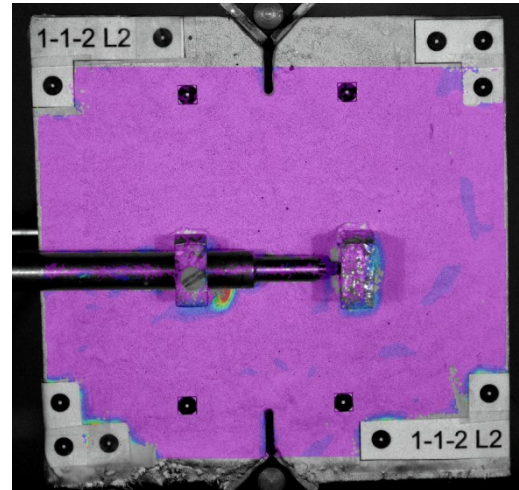
$\sigma_{SP} = 1,062 \text{ Mpa}$     $w = 0,002 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,004 \%$



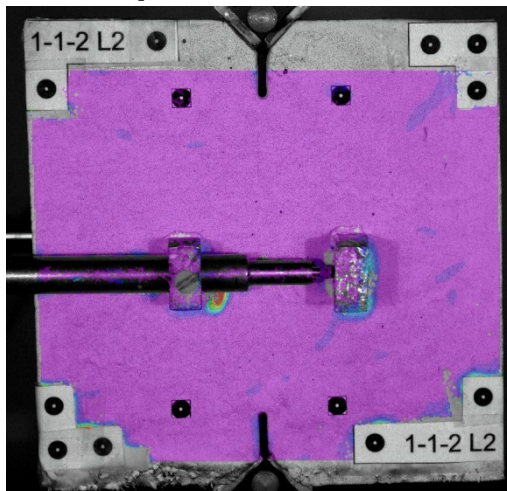
$\sigma_{SP} = 1,406 \text{ Mpa}$     $w = 0,002 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,004 \%$



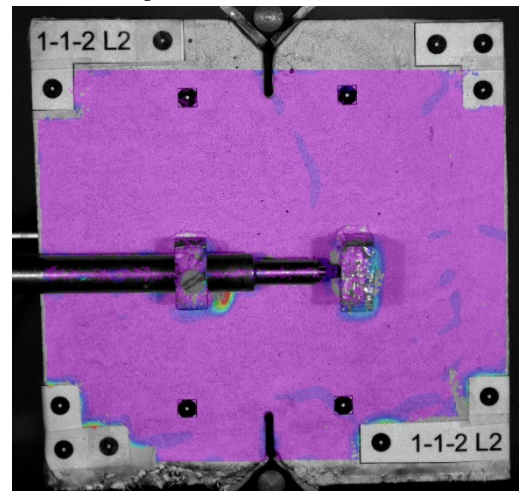
$\sigma_{SP} = 1,732 \text{ Mpa}$     $w = 0,003 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,006 \%$



$\sigma_{SP} = 2,037 \text{ Mpa}$     $w = 0,003 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,006 \%$

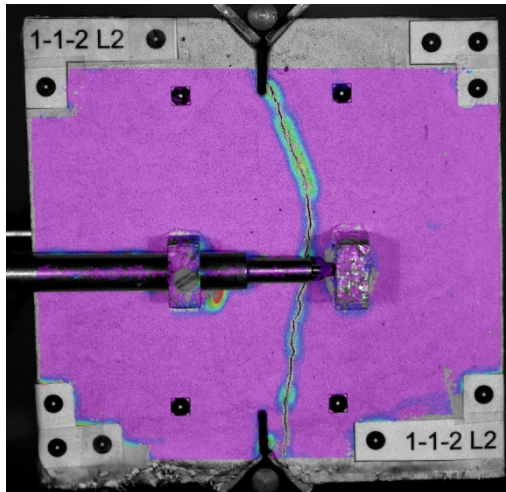


$\sigma_{SP} = 2,234 \text{ Mpa}$     $w = 0,013 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,026 \%$

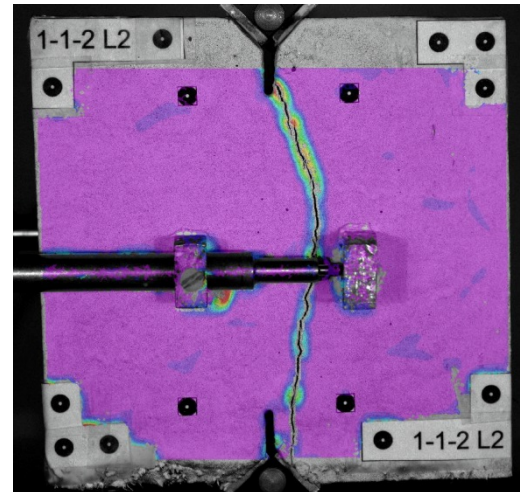


Il carico continua ad aumentare senza importanti variazioni nelle deformazioni registrate. Nell'ultimo fotogramma è visibile una zona di addensamento degli sforzi (colore blu) nell'intorno dell'intaglio superiore immediatamente prima del picco di tensione pari a 2,28 Mpa.

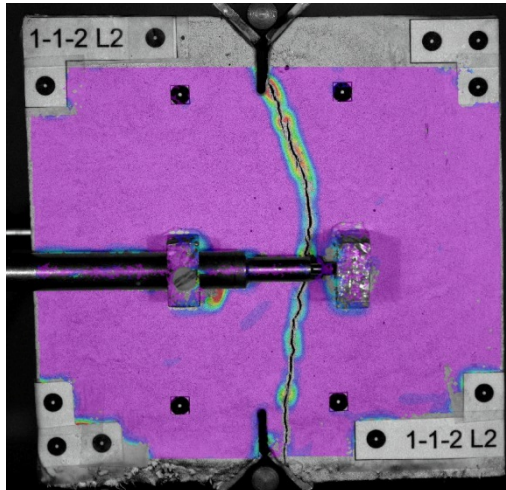
$\sigma_{SP} = 0,950 \text{ Mpa}$     $w = 0,438 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,876 \%$



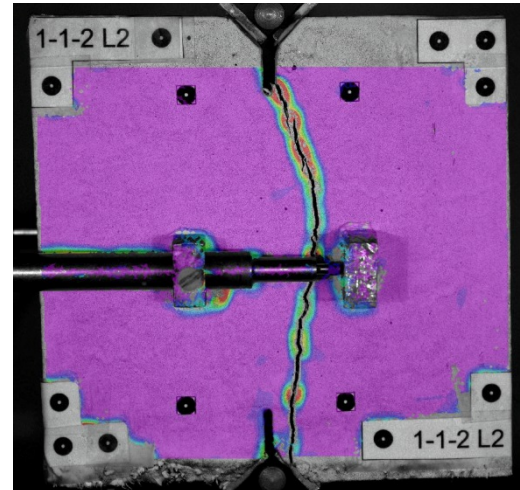
$\sigma_{SP} = 0,854 \text{ Mpa}$     $w = 0,788 \text{ mm}$     $\varepsilon = 1,576 \%$



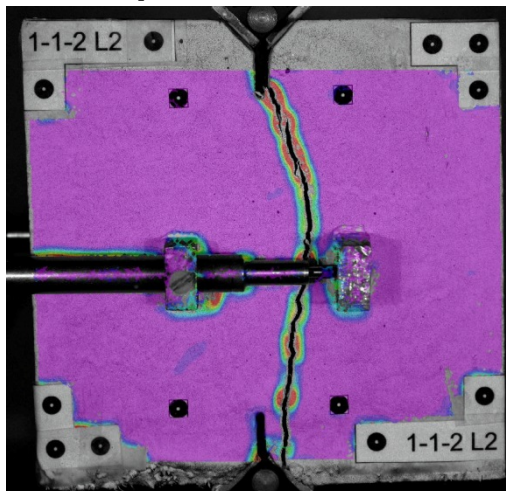
$\sigma_{SP} = 0,830 \text{ Mpa}$     $w = 0,939 \text{ mm}$     $\varepsilon = 1,878 \%$



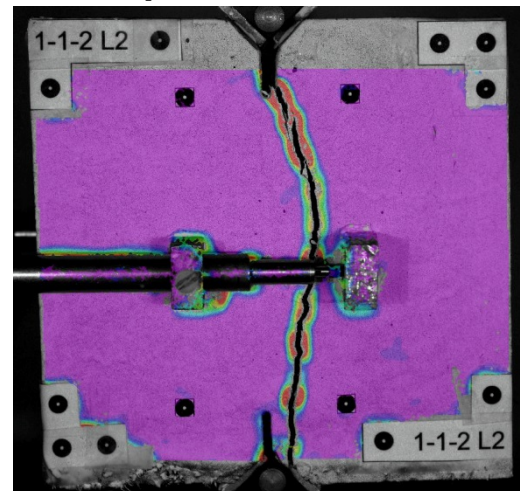
$\sigma_{SP} = 0,813 \text{ Mpa}$     $w = 1,133 \text{ mm}$     $\varepsilon = 2,266 \%$



$\sigma_{SP} = 0,726 \text{ Mpa}$     $w = 1,244 \text{ mm}$     $\varepsilon = 2,488 \%$

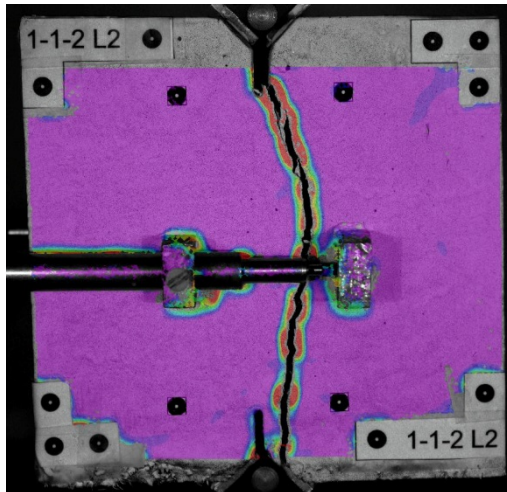


$\sigma_{SP} = 2,234 \text{ Mpa}$     $w = 0,013 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,026 \%$

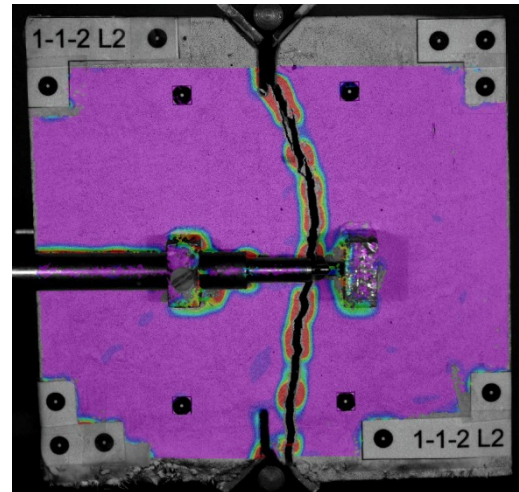


Il campione si fessura istantaneamente per tutta la sua altezza e si ha un immediato abbassamento del carico registrato. La trasmissione degli sforzi nella zona di interfaccia va incrementando passando da un colore verde chiaro ad una colorazione rossa.

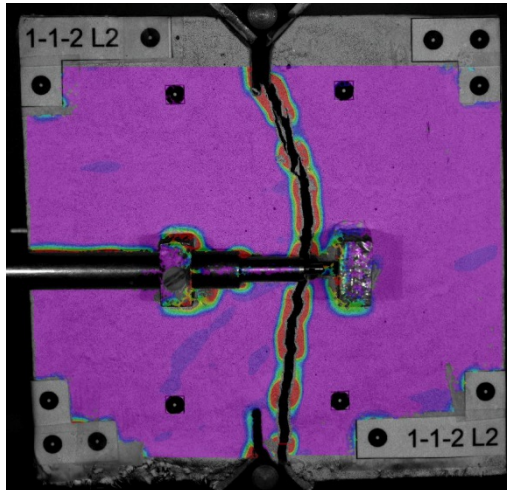
$\sigma_{SP} = 0,732 \text{ Mpa}$     $w = 2,045 \text{ mm}$     $\varepsilon = 4,090 \%$



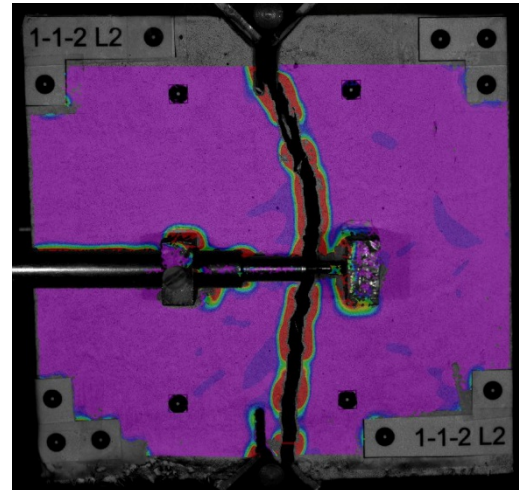
$\sigma_{SP} = 0,709 \text{ Mpa}$     $w = 2,469 \text{ mm}$     $\varepsilon = 4,938 \%$



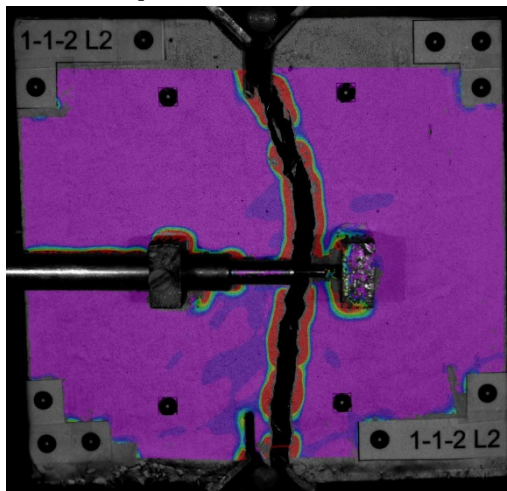
$\sigma_{SP} = 0,679 \text{ Mpa}$     $w = 2,912 \text{ mm}$     $\varepsilon = 5,824\%$



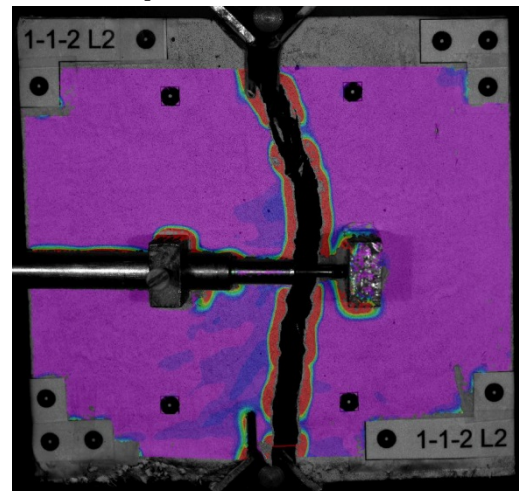
$\sigma_{SP} = 0,522 \text{ Mpa}$     $w = 4,501 \text{ mm}$     $\varepsilon = 9,02 \%$



$\sigma_{SP} = 0,396 \text{ Mpa}$     $w = 6,595 \text{ mm}$     $\varepsilon = 13,190 \%$



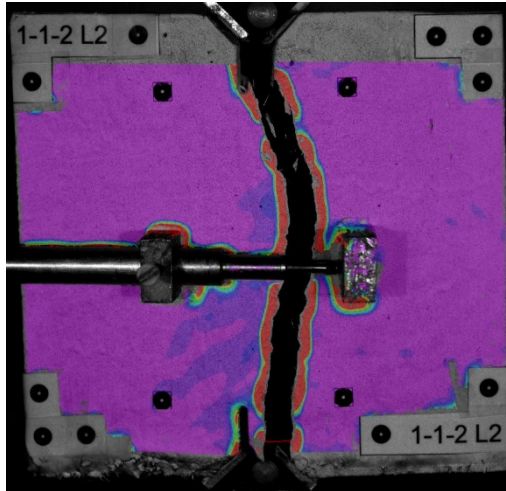
$\sigma_{SP} = 0,334 \text{ Mpa}$     $w = 8,588 \text{ mm}$     $\varepsilon = 17,176\%$



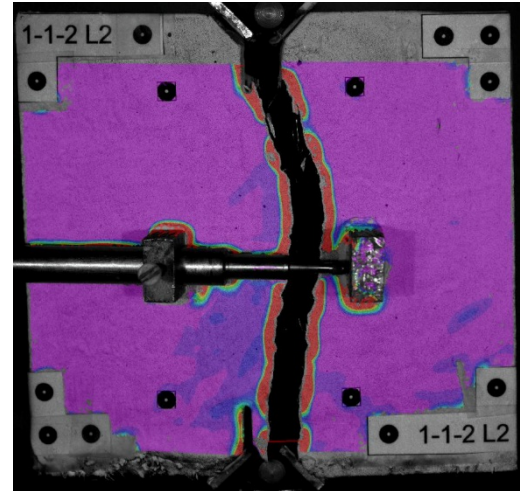
La zona rossa si estende ormai per tutta la lunghezza della frattura. A contrastare la fessurazione resta ormai solo l'effetto di bridging fornito dalle fibre. Nella fase finale i valori di apertura aumentano repentinamente fino ad arrivare ad oltre gli 8 mm per l'ultimo fotogramma.



$\sigma_{SP} = 0,320 \text{ Mpa}$      $w = 9,660 \text{ mm}$      $\varepsilon = 19,320 \%$



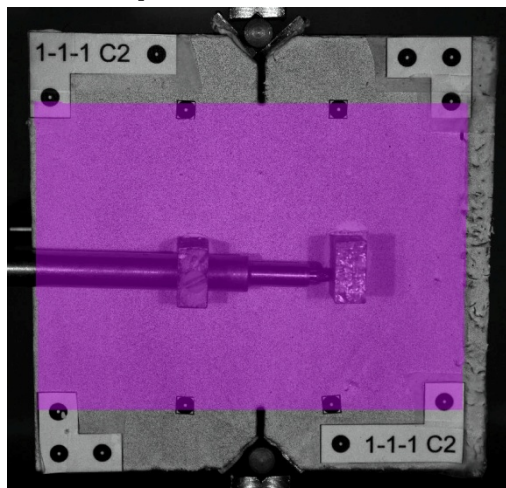
$\sigma_{SP} = 0,286 \text{ Mpa}$      $w =$      $\varepsilon =$



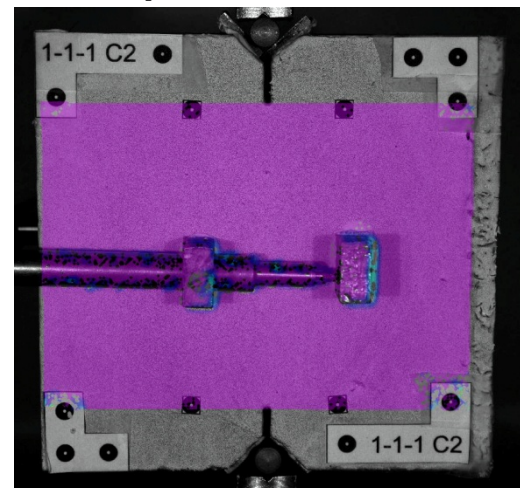
La prova giunge al termine quando l'estensimetro arriva a fine corsa dopo un'apertura totale prossima ai 10 mm. L'ultimo livello tensionale registrato è di 0,286 Mpa. Si segnala che per questa prova l'apertura anteriore è stata accompagnata da un'importante rotazione fuori piano del campione (vedi Appendice relativa). In quest'occasione non è stata possibile l'individuazione preventiva della zona di fessurazione a causa della rottura fragile avvenuta.

#### 4.4.2 Campione 111-C2

$\sigma_{SP} = 0,111 \text{ Mpa}$      $w = 0,000 \text{ mm}$      $\varepsilon = 0,000 \%$

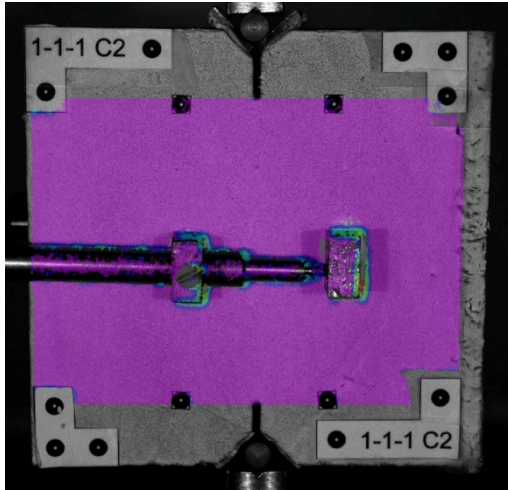


$\sigma_{SP} = 0,240 \text{ Mpa}$      $w = 0,001 \text{ mm}$      $\varepsilon = 0,002 \%$

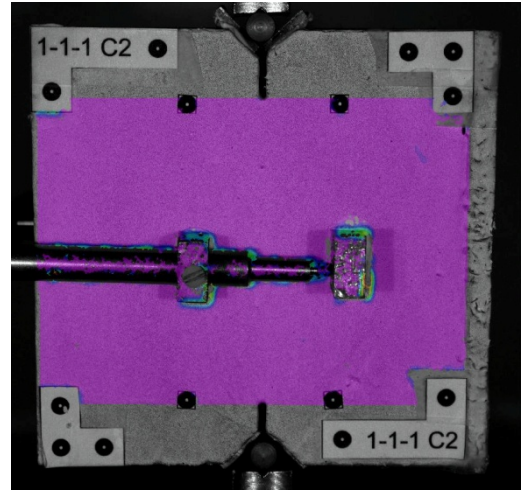


L'inizio della prova mostra i valori di tensione molto bassi e la situazione iniziale di provino non fessurato che resta costante all'aumentare del carico.

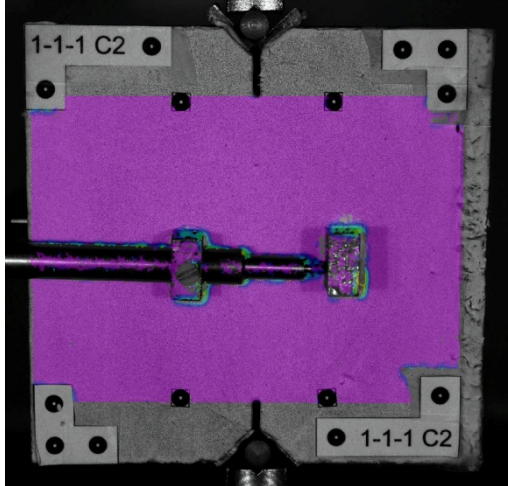
$\sigma_{SP} = 0,661 \text{ Mpa}$     $w = 0,002 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,004 \%$



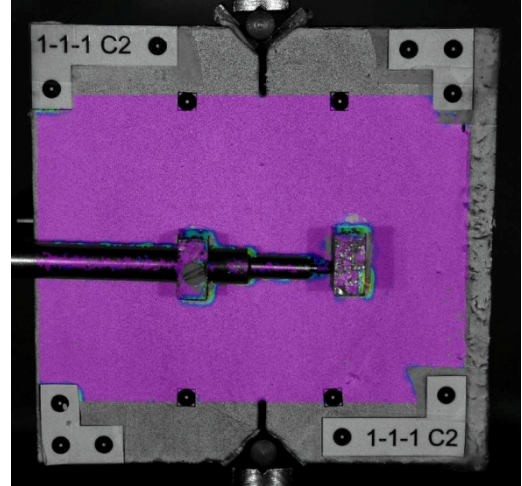
$\sigma_{SP} = 1,566 \text{ Mpa}$     $w = 0,003 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,006 \%$



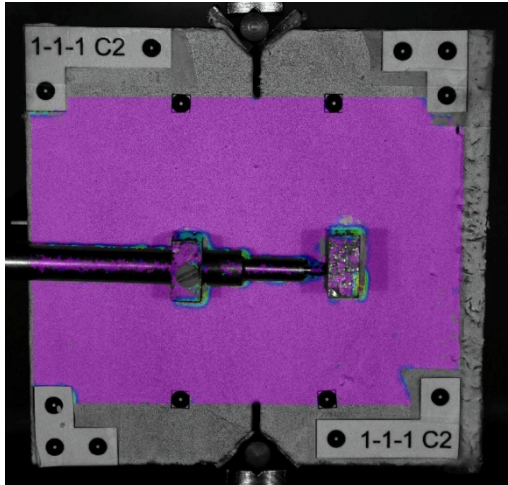
$\sigma_{SP} = 2,800 \text{ Mpa}$     $w = 0,003 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,006 \%$



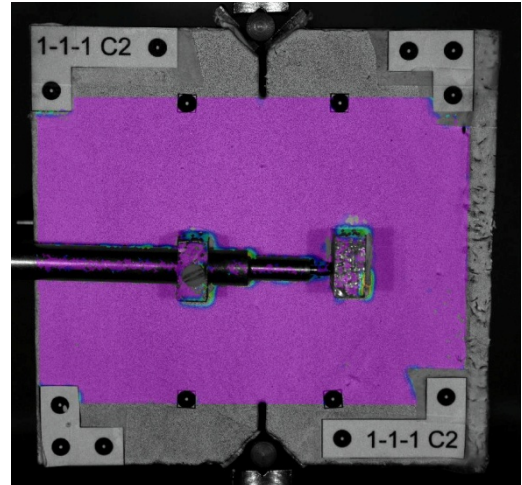
$\sigma_{SP} = 6,569 \text{ Mpa}$     $w = 0,005 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,010 \%$



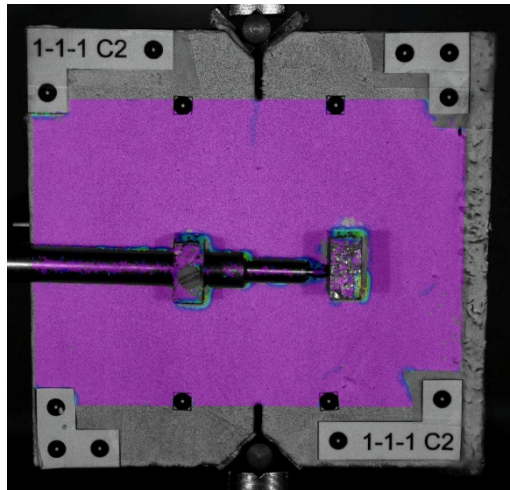
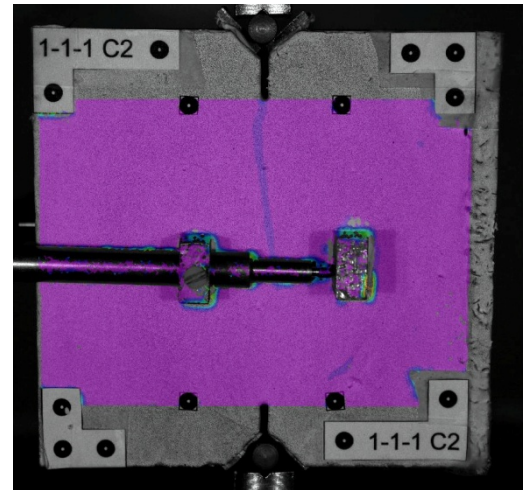
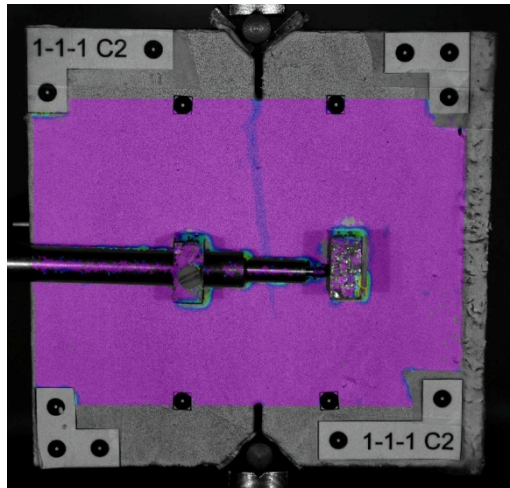
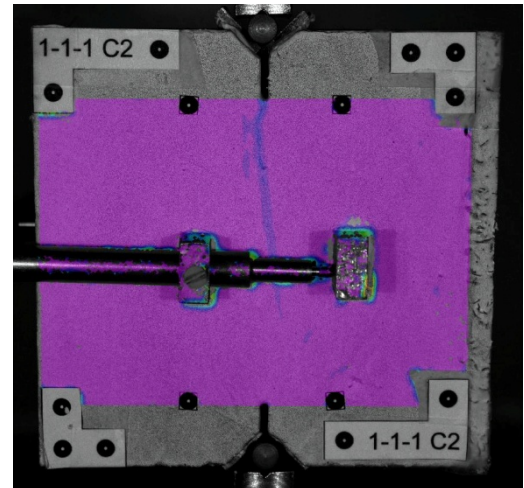
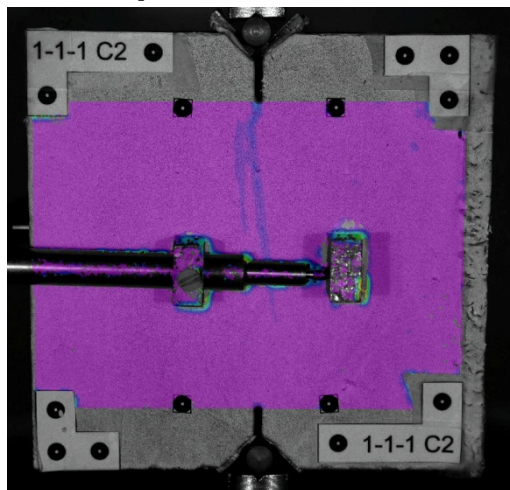
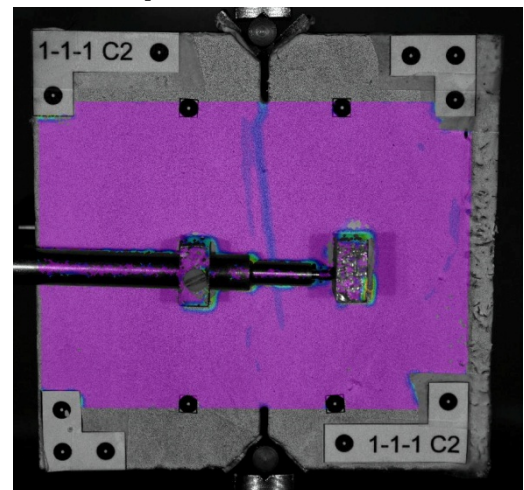
$\sigma_{SP} = 7,326 \text{ Mpa}$     $w = 0,012 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,024 \%$



$\sigma_{SP} = 8,209 \text{ Mpa}$     $w = 0,018 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,036 \%$

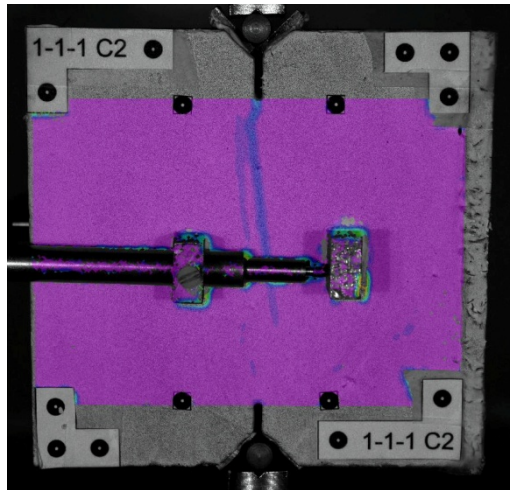


Si registrano le prime minime differenze nell'apertura di fessura tramite l'estensimetro. Il carico continua ad incrementare.

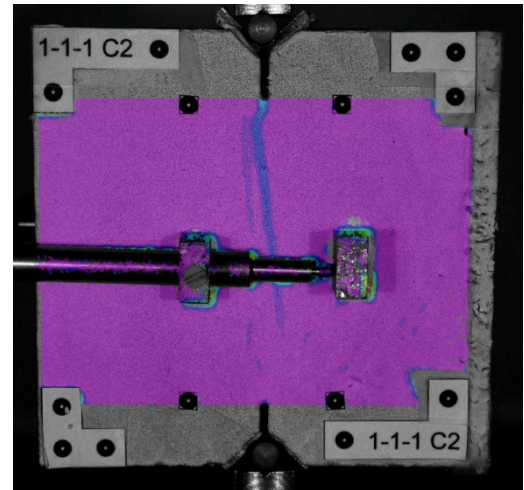
$\sigma_{SP} = 8,501 \text{ Mpa}$     $w = 0,025 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,050 \%$  $\sigma_{SP} = 9,147 \text{ Mpa}$     $w = 0,043 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,086 \%$  $\sigma_{SP} = 9,706 \text{ Mpa}$     $w = 0,088 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,176 \%$  $\sigma_{SP} = 10,165 \text{ Mpa}$     $w = 0,100 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,200 \%$  $\sigma_{SP} = 10,313 \text{ Mpa}$     $w = 0,102 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,204 \%$  $\sigma_{SP} = 10,588 \text{ Mpa}$     $w = 0,118 \text{ mm}$     $\varepsilon = 0,236 \%$ 

Le deformazioni si concentrano intorno all'intaglio superiore e poi si propagano verso il centro (zona blu). Questa ci predice la zona d'innescio della frattura. Negli ultimi scatti si crea un possibile percorso fessurativo secondario.

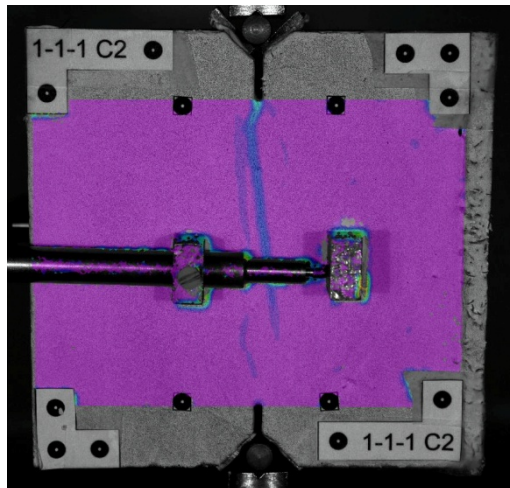
$\sigma_{SP}=10,723 \text{ Mpa}$     $w= 0,126 \text{ mm}$     $\varepsilon=0,252 \%$



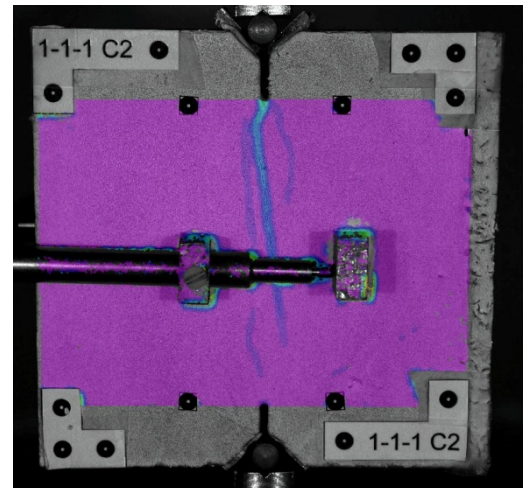
$\sigma_{SP}=10,921 \text{ Mpa}$     $w= 0,144 \text{ mm}$     $\varepsilon=0,288 \%$



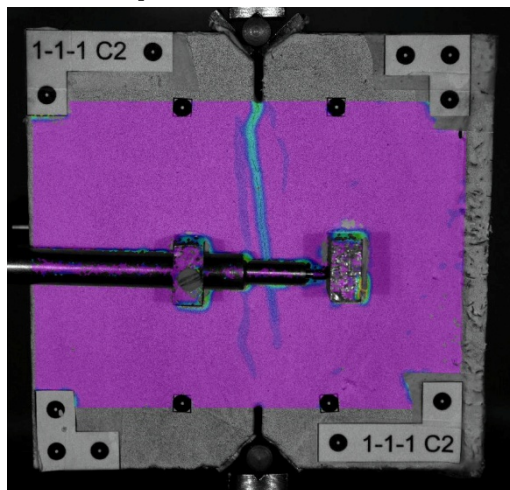
$\sigma_{SP}= 10,689 \text{ Mpa}$     $w= 0,165 \text{ mm}$     $\varepsilon=0,330 \%$



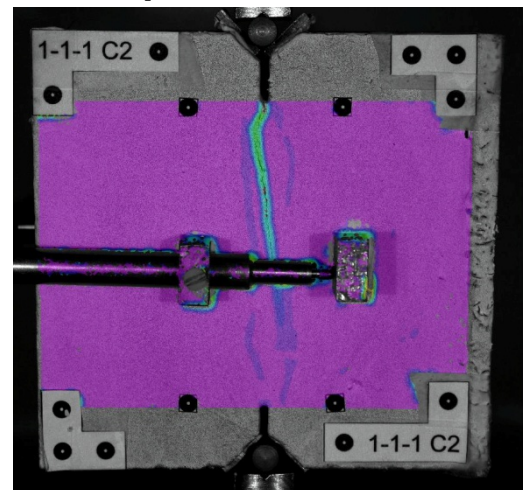
$\sigma_{SP}= 10,736 \text{ Mpa}$     $w= 0,180 \text{ mm}$     $\varepsilon=0,360 \%$



$\sigma_{SP}=10,660 \text{ Mpa}$     $w= 0,190 \text{ mm}$     $\varepsilon=0,380 \%$

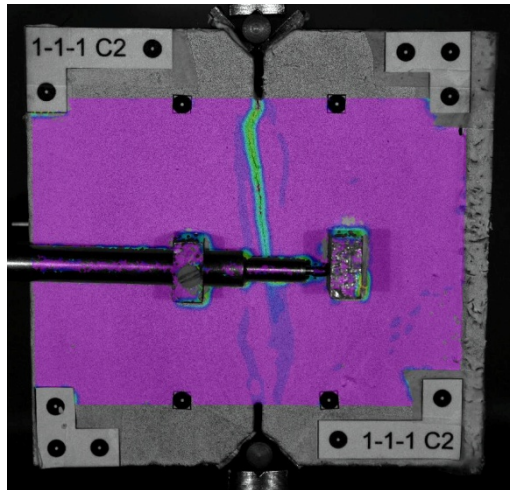


$\sigma_{SP}=10,388 \text{ Mpa}$     $w= 0,269 \text{ mm}$     $\varepsilon=0,538 \%$

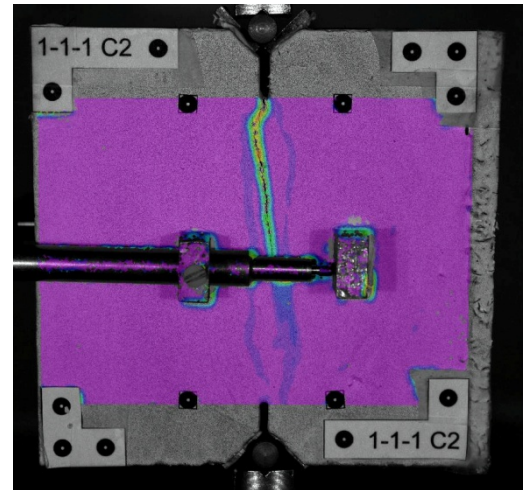


La zona blu aumenta di spessore e inizia la fessurazione che si propaga man mano verso la parte inferiore del campione, seguendo la zona di predizione. Comincia la trasmissione degli sforzi da parte delle fibre come si vede dal formarsi di una zona dal colore verde chiaro.

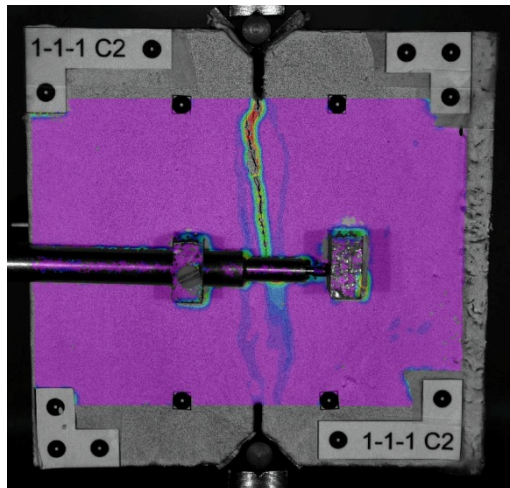
$\sigma_{SP}=10,301 \text{ Mpa}$     $w= 0,312 \text{ mm}$     $\varepsilon=0,624 \%$



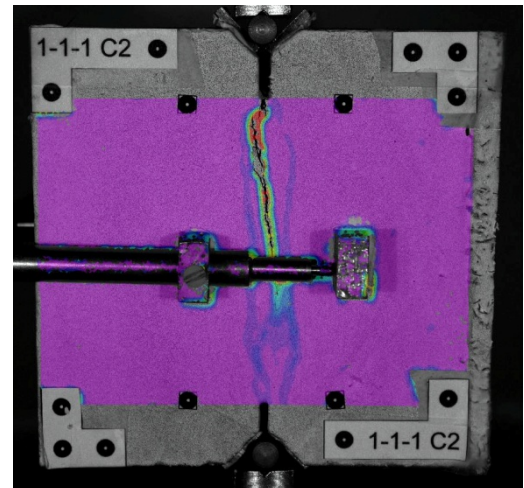
$\sigma_{SP}=10,158 \text{ Mpa}$     $w= 0,379 \text{ mm}$     $\varepsilon=0,758 \%$



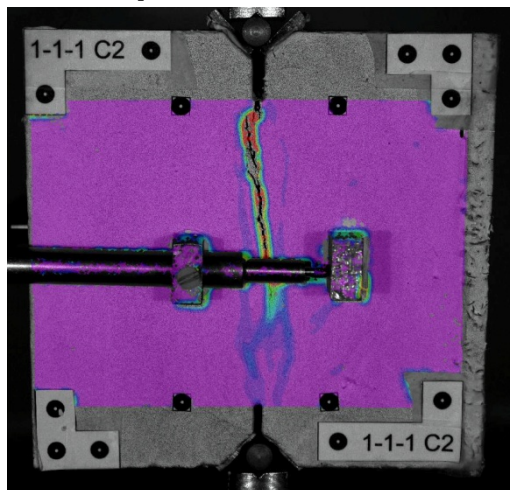
$\sigma_{SP}= 9,681 \text{ Mpa}$     $w= 0,485 \text{ mm}$     $\varepsilon=0,970 \%$



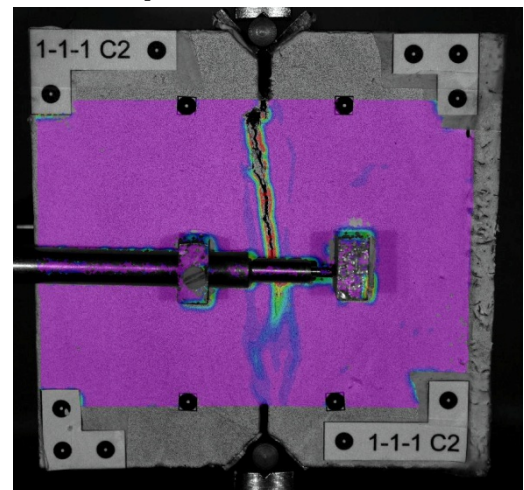
$\sigma_{SP}= 8,645 \text{ Mpa}$     $w= 0,616 \text{ mm}$     $\varepsilon=1,232 \%$



$\sigma_{SP}=8,121 \text{ Mpa}$     $w= 0,721 \text{ mm}$     $\varepsilon=1,442 \%$

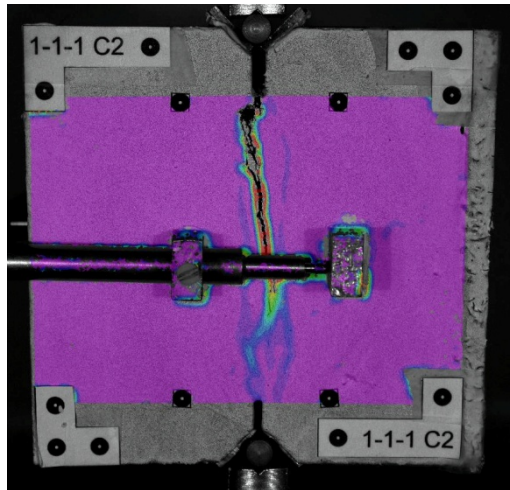


$\sigma_{SP}=7,616 \text{ Mpa}$     $w= 0,813 \text{ mm}$     $\varepsilon=1,626 \%$

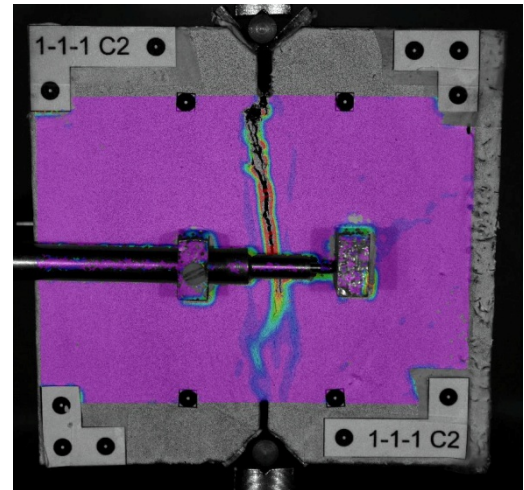


Il picco viene raggiunto al valore di 10,957 Mpa, molto prossimo al quarto scatto. La fessura continua a propagarsi e le deformazioni registrate aumentano. Nel frattempo la zona di previsione si estende anche nella parte bassa del campione fino all'intaglio inferiore.

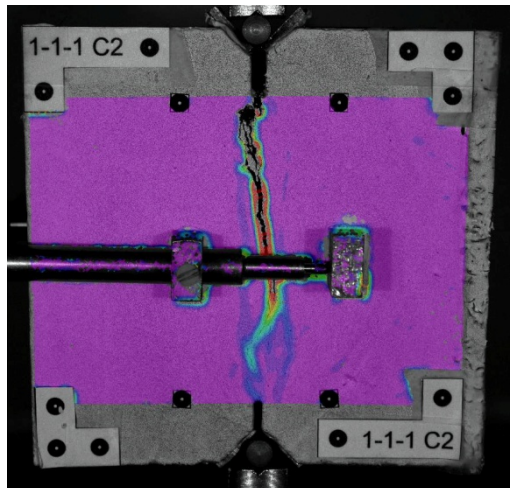
$\sigma_{SP}=7,200 \text{ Mpa}$     $w= 0,913 \text{ mm}$     $\varepsilon=1,826 \%$



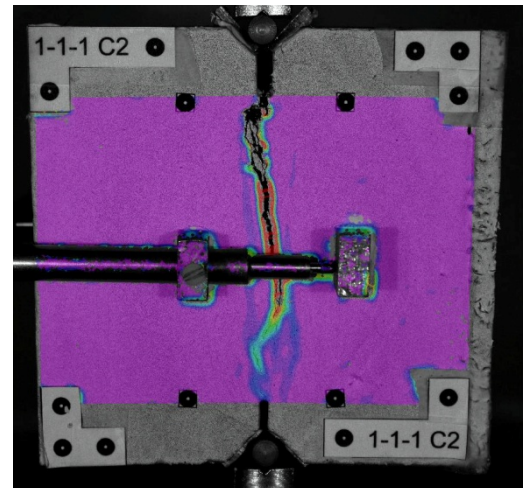
$\sigma_{SP}=6,825 \text{ Mpa}$     $w= 1,032 \text{ mm}$     $\varepsilon=2,064 \%$



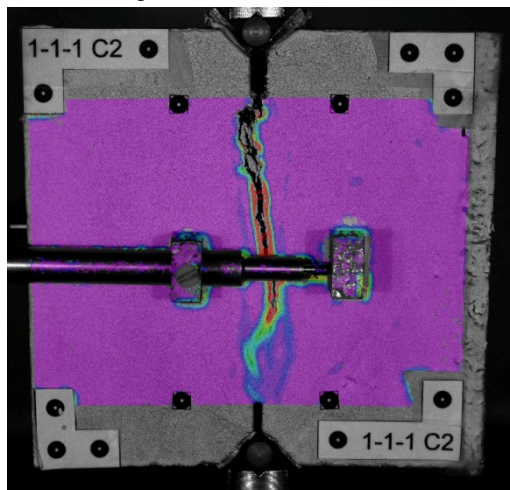
$\sigma_{SP}= 6,519 \text{ Mpa}$     $w= 1,120 \text{ mm}$     $\varepsilon=2,240 \%$



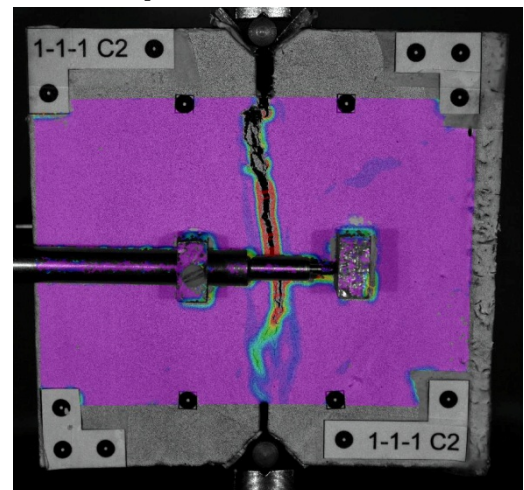
$\sigma_{SP}= 6,199 \text{ Mpa}$     $w= 1,248 \text{ mm}$     $\varepsilon=2,496 \%$



$\sigma_{SP}=5,781 \text{ Mpa}$     $w= 1,402 \text{ mm}$     $\varepsilon=2,804 \%$

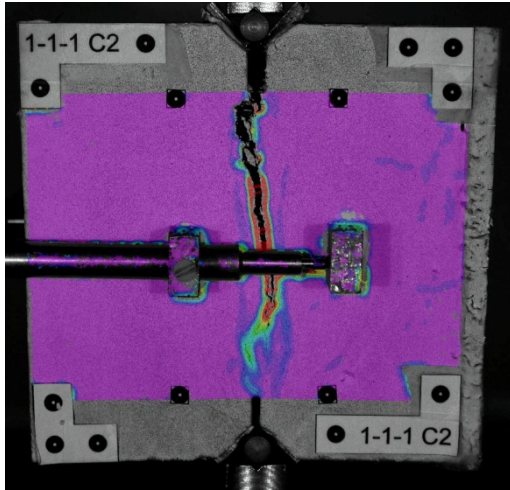


$\sigma_{SP}=5,324 \text{ Mpa}$     $w= 1,542 \text{ mm}$     $\varepsilon=3,084 \%$

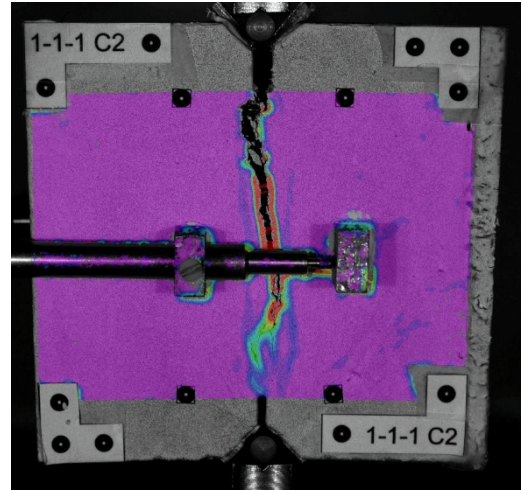


In rosso la zona nell'intorno della superficie di frattura dove vengono scaricate le tensioni a causa dell'effetto di bridging. Il carico registrato diminuisce progressivamente.

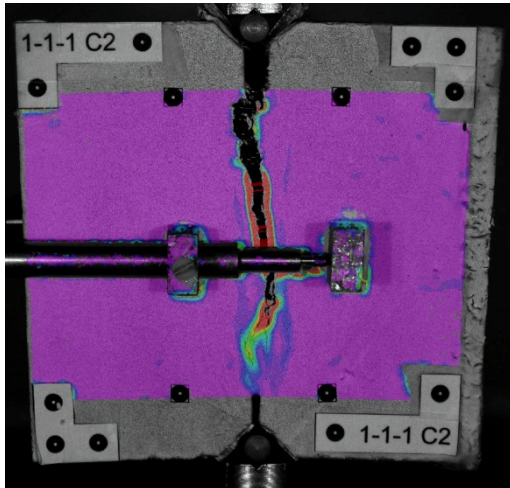
$\sigma_{SP}=4,964$  Mpa     $w= 1,653$  mm     $\varepsilon=3,306$  %



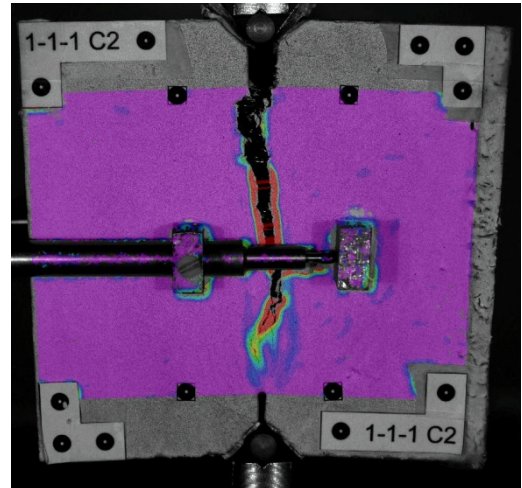
$\sigma_{SP}=4,635$  Mpa     $w= 1,755$  mm     $\varepsilon=3,510$  %



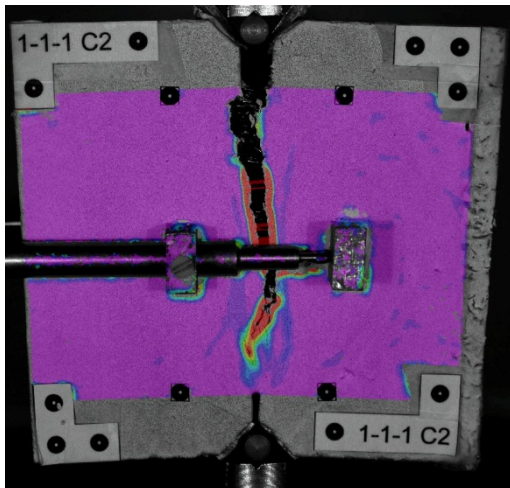
$\sigma_{SP}= 2,896$  Mpa     $w= 2,414$  mm     $\varepsilon=4,828$  %



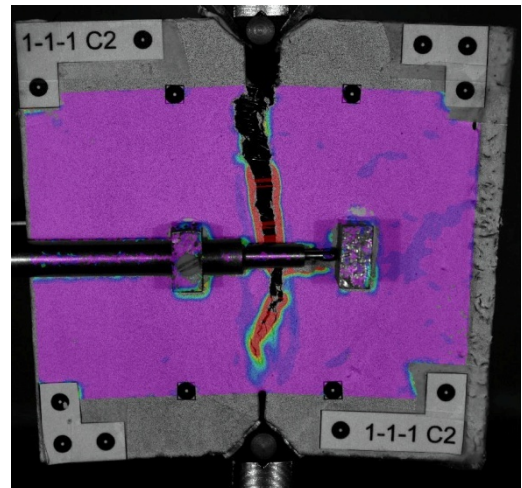
$\sigma_{SP}= 1,822$  Mpa     $w= 2,960$  mm     $\varepsilon=5,920$  %



$\sigma_{SP}=1,343$  Mpa     $w= 3,362$  mm     $\varepsilon=6,724$  %

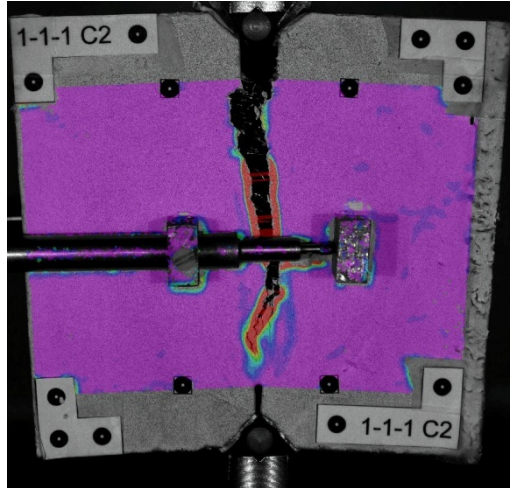


$\sigma_{SP}=1,101$  Mpa     $w= 3,773$  mm     $\varepsilon=7,546$  %

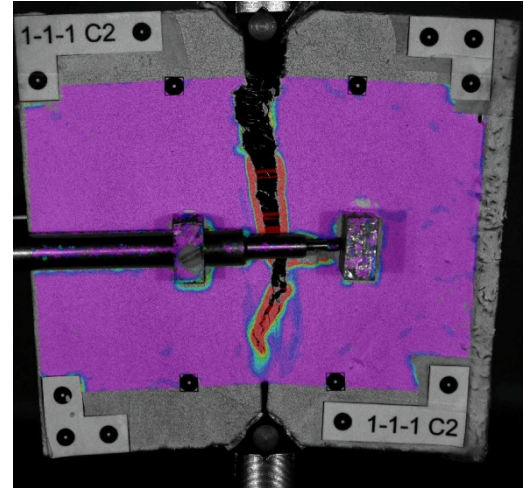


Le fibre nella parte superiore cominciano a rompersi e la zona di bridging si concentra nella parte centrale ed inferiore del campione.

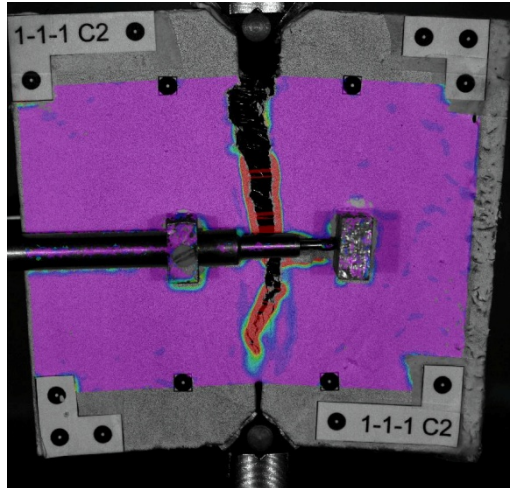
$\sigma_{SP}=1,062$  Mpa  $w= 4,225$  mm  $\varepsilon=8,450$  %



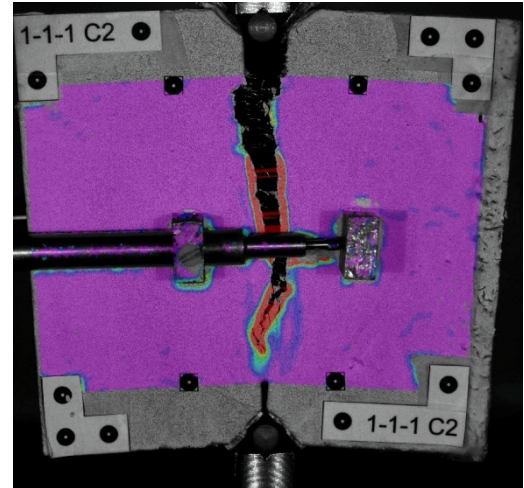
$\sigma_{SP}=0,743$  Mpa  $w= 4,817$  mm  $\varepsilon=9,634$  %



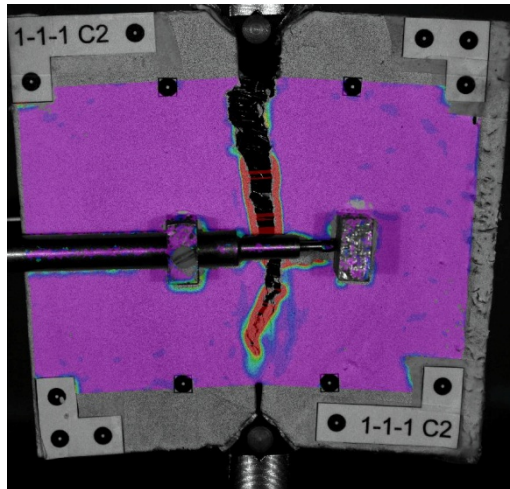
$\sigma_{SP}= 0,704$  Mpa  $w= 5,013$  mm  $\varepsilon=10,026$  %



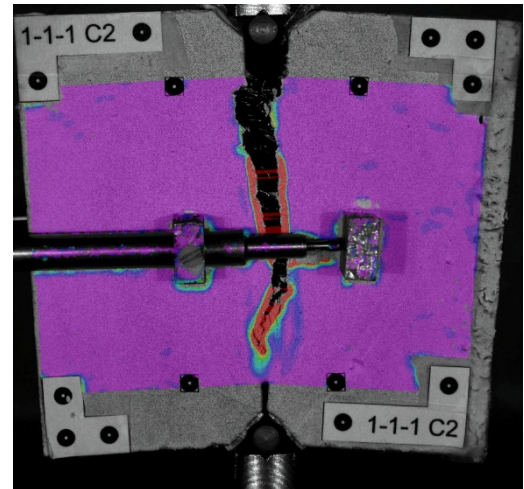
$\sigma_{SP}= 0,695$  Mpa  $w= 5,054$  mm  $\varepsilon=10,108$  %



$\sigma_{SP}=0,649$  Mpa  $w= 5,091$  mm  $\varepsilon=10,182$  %



$\sigma_{SP}=0,601$  Mpa  $w= 5,115$  mm  $\varepsilon=10,230$  %



La sempre maggiore fessurazione provoca una rotazione del campione intorno al cilindro inferiore. La zona di bridging si è estesa ormai fino all'intaglio inferiore. La prova termina con valori di carico prossimi allo zero e con le massime ampiezze fessurative registrate.



# 5

## *CONCLUSIONI*

Nel corso di questo lavoro di tesi si è potuto dimostrare numericamente come la Digital Image Correlation possa essere pienamente utilizzata per la misurazione dell'andamento deformativo di campioni soggetti a prove meccaniche in sostituzione delle comuni strumentazioni per la misura delle deformazioni finora utilizzate. Non solo, essa fornisce anche una visuale completa delle deformazioni subite dal campione oggetto di prova, come mostrato nel paragrafo 4.4. Questo aspetto può fornire un valido supporto per la modellazione tramite elementi finiti degli effettivi meccanismi di rottura instauratisi nei campioni, oppure ancora per un futuro studio di come le imperfezioni del materiale influiscano sul comportamento globale del materiale.

L'attività svolta nello specifico riguarda prove su calcestruzzo fibrorinforzato sottoposto a Double Edge Wedge Splitting Test, ma gli stessi principi sono teoricamente estendibili anche a calcestruzzi ordinari e ad altre tipologie di prove meccaniche. Lo svolgimento delle prove meccaniche ha evidenziato come grazie al setup di prova utilizzato sia possibile ottenere tutte le informazioni necessarie alla descrizione del comportamento monoassiale a trazione di calcestruzzi

fibrorinforzati ad alte prestazioni. In particolare grazie alla correlazione tra le tensioni raggiunte e la concentrazione delle fibre ricavata a posteriori si è evidenziato come tra i due fattori vi sia una netta dipendenza lineare.

Un altro aspetto affrontato nel presente lavoro è stato cercare una metodologia di elaborazione dei dati derivanti dalle prove al fine di caratterizzare gli aspetti deformativi propri di ogni campione analizzato. Si è potuto così restituire per ognuno un layout visivo che ci consenta di determinare il tipo di deformazione prevalente nella prova istante per istante.

L'analisi effettuata è basata su una trattazione statistica dei valori di spostamento e tensione registrati che non implica un grande onere computazionale. Questa sua caratteristica è un innegabile punto di forza considerando la sua possibile implementazione futura all'interno dell'apparecchiatura che si occupa della registrazione dei dati, creando un potente strumento di diagnosi direttamente durante lo svolgimento della prova. Ad esempio nel caso avvenga un certo percorso deformativo che si discosti dalle impostazioni preliminari fornite alla macchina, essa potrebbe porre fine all'applicazione del carico in totale autonomia.



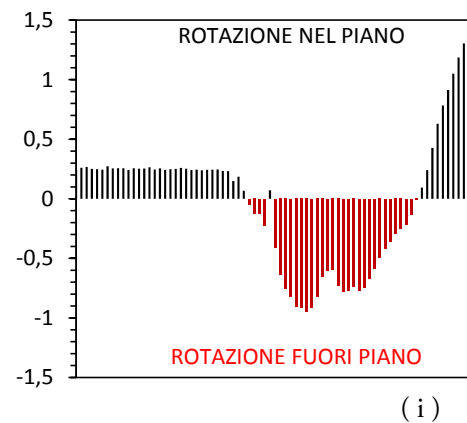
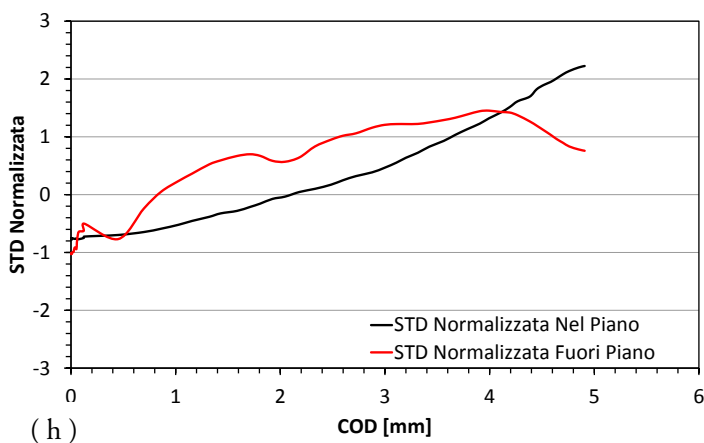
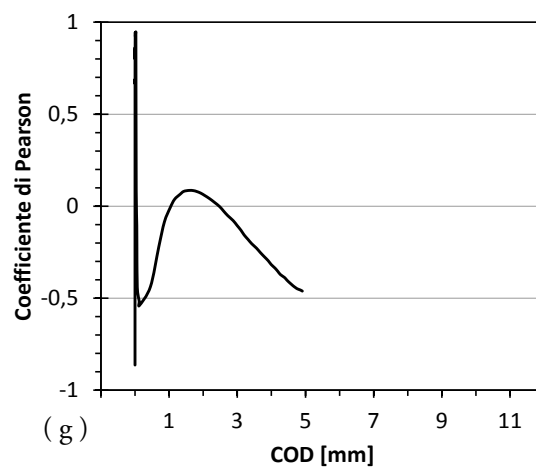
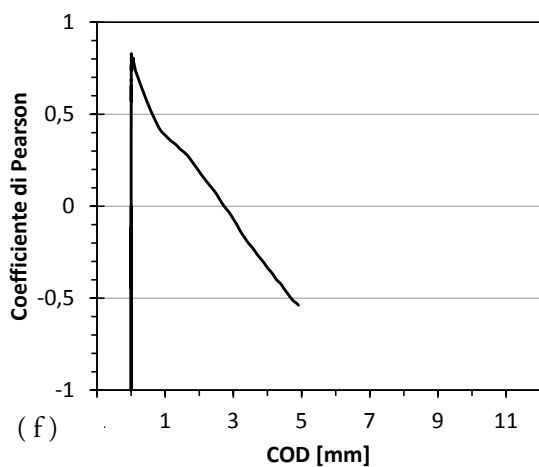
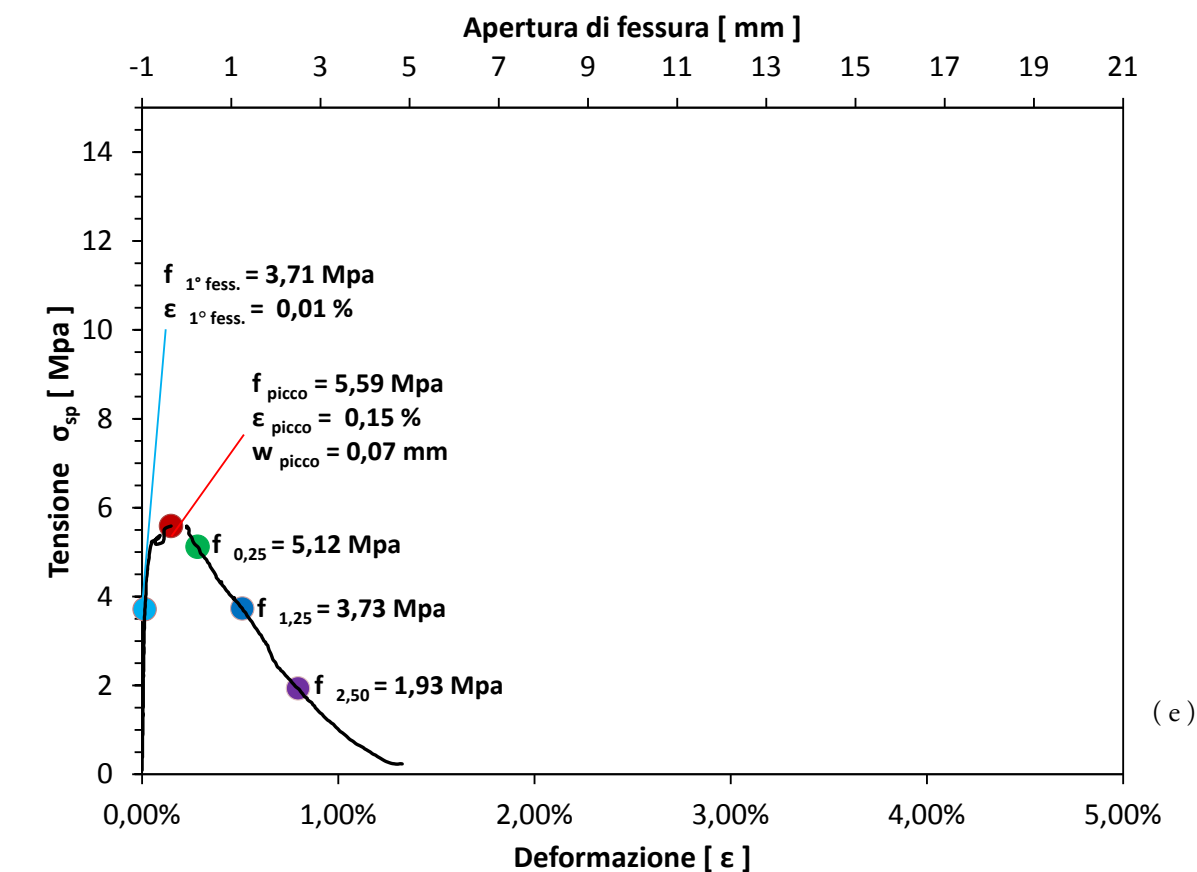
## *APPENDICE*

In questa sezione saranno presentati in successione tutti i grafici significativi a caratterizzare il comportamento di ciascun campione. La scelta della scala di riferimento è avvenuta in funzione della risposta massima registrata durante l'intera indagine sperimentale, al fine di rendere visivamente confrontabili i risultati ottenuti.

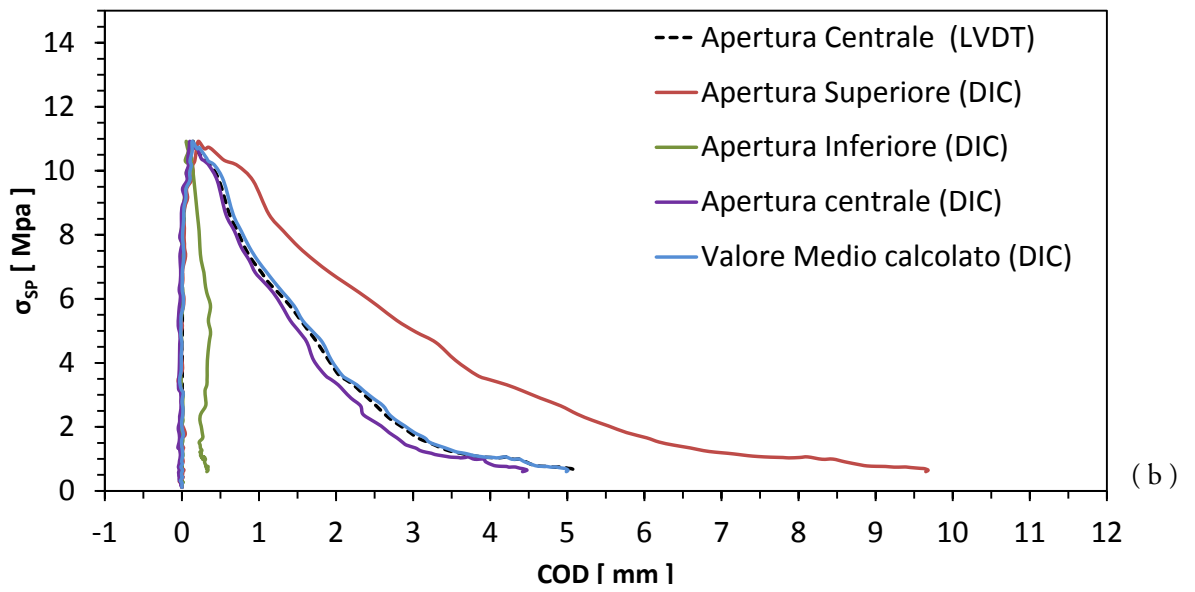
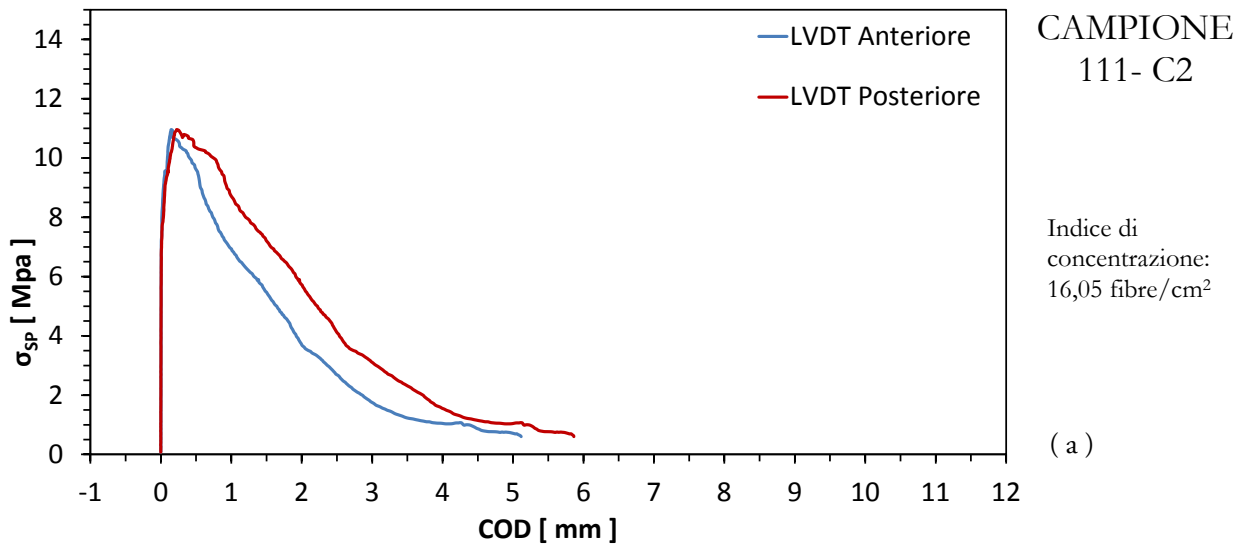
A completamento del lavoro eseguito, le intere elaborazioni sono state riversate su supporto informatico ed allegato alla presente tesi in quattro Blue-Ray Disc con la seguente suddivisione:

- Disco 1  
Confronto dei risultati ottenuti per i diversi campioni  
Elaborazione dati dei campioni che si riferiscono al travetto 1-1-1  
Testo della presente tesi  
Bibliografia
  
- Disco 2  
Elaborazione dati riguardanti il campione 1-1-1 R3  
Elaborazione dati dei campioni che si riferiscono al travetto 1-1-2
  
- Disco 3  
Elaborazione dati dei campioni che si riferiscono al travetto 2-2-1
  
- Disco 4  
Fotogrammi acquisiti per il campione 2-2-1 R1  
Elaborazione dati dei campioni che si riferiscono al travetto 2-2-2

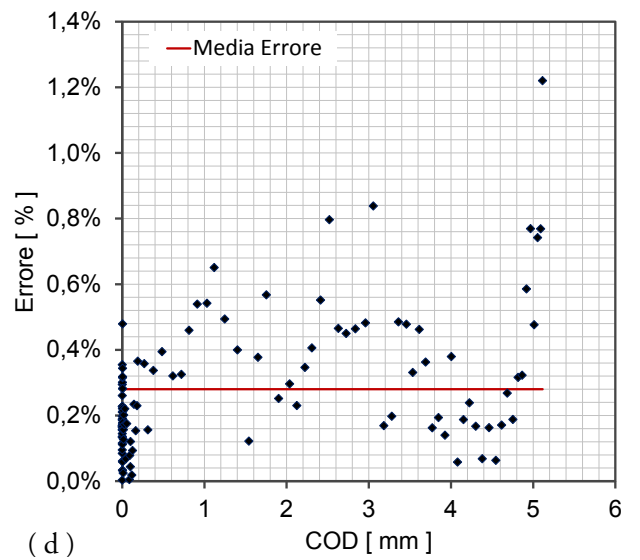
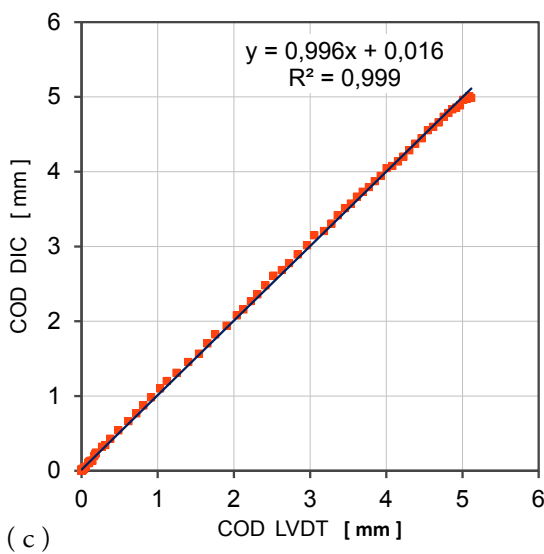




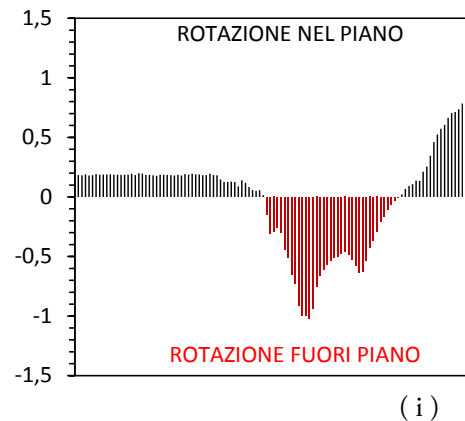
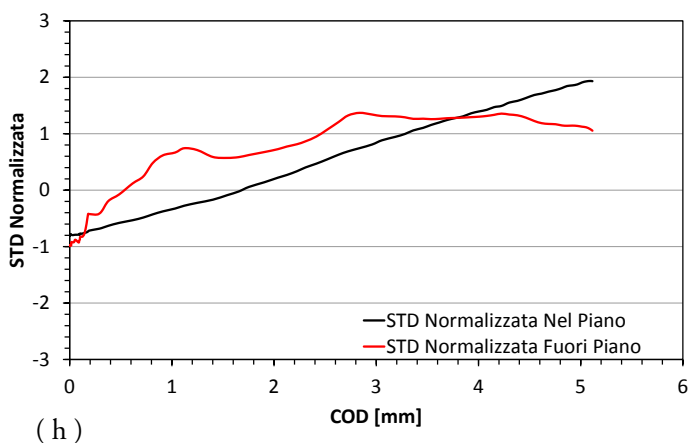
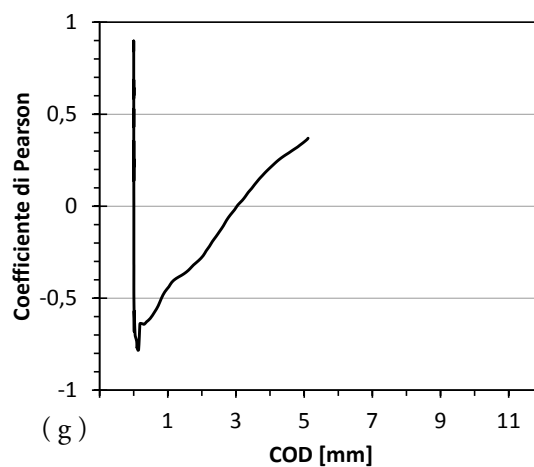
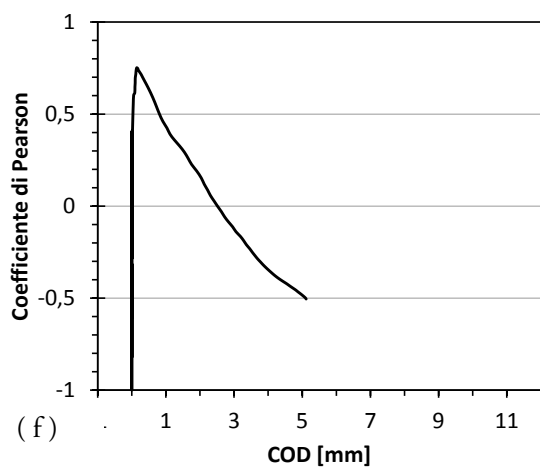
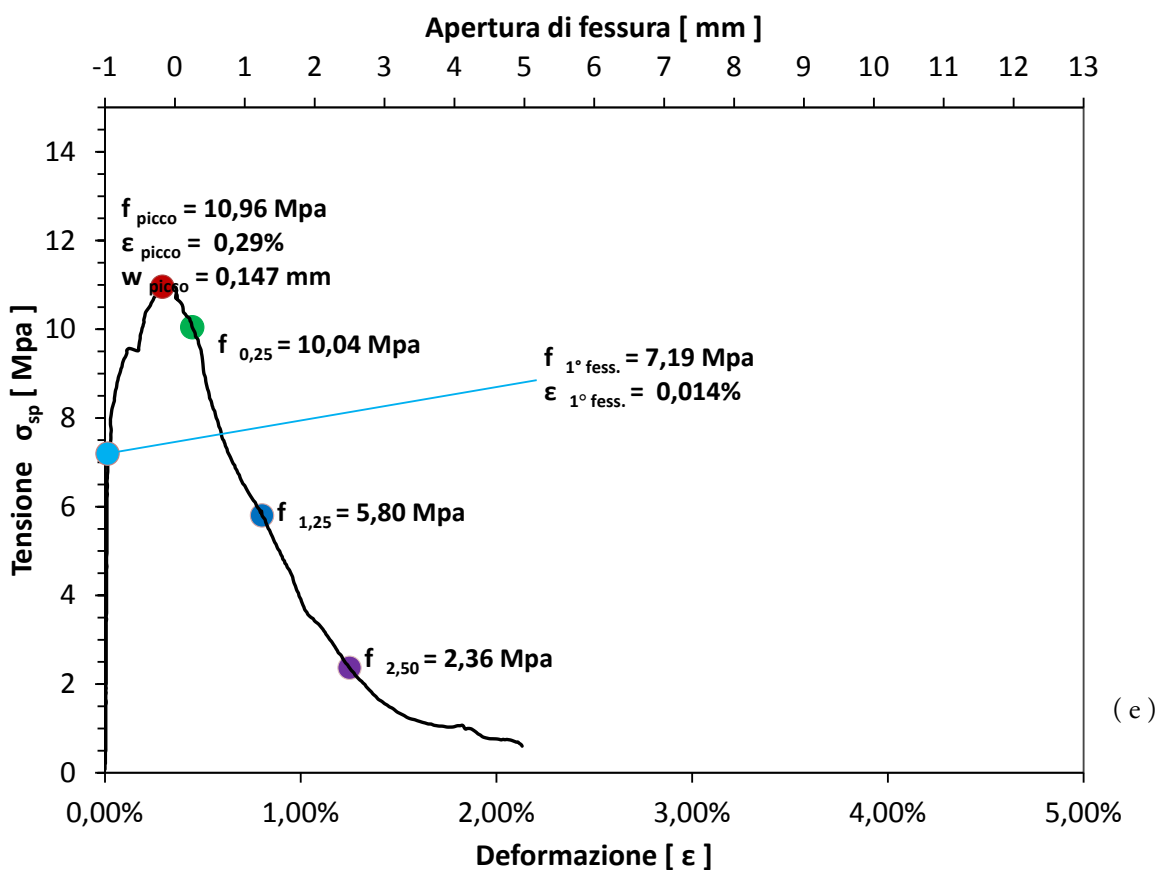
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



Confronto DIC/LVDT Errore massimo 1,22 %, medio 0,28 %, minimo 0,003 %, S.E.R. 3,63 %

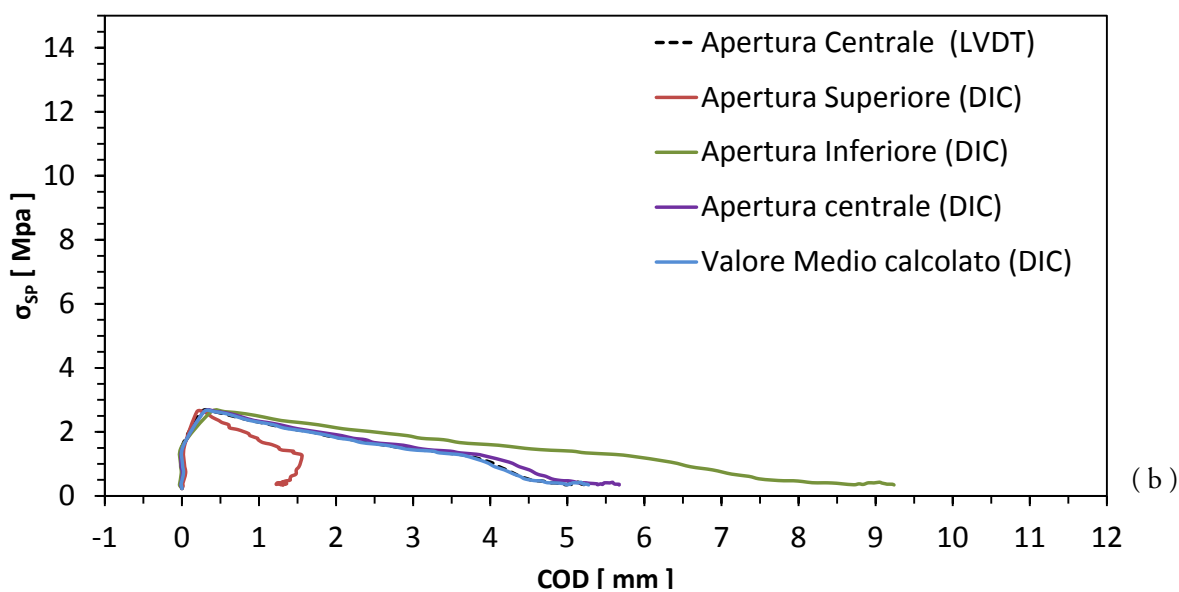
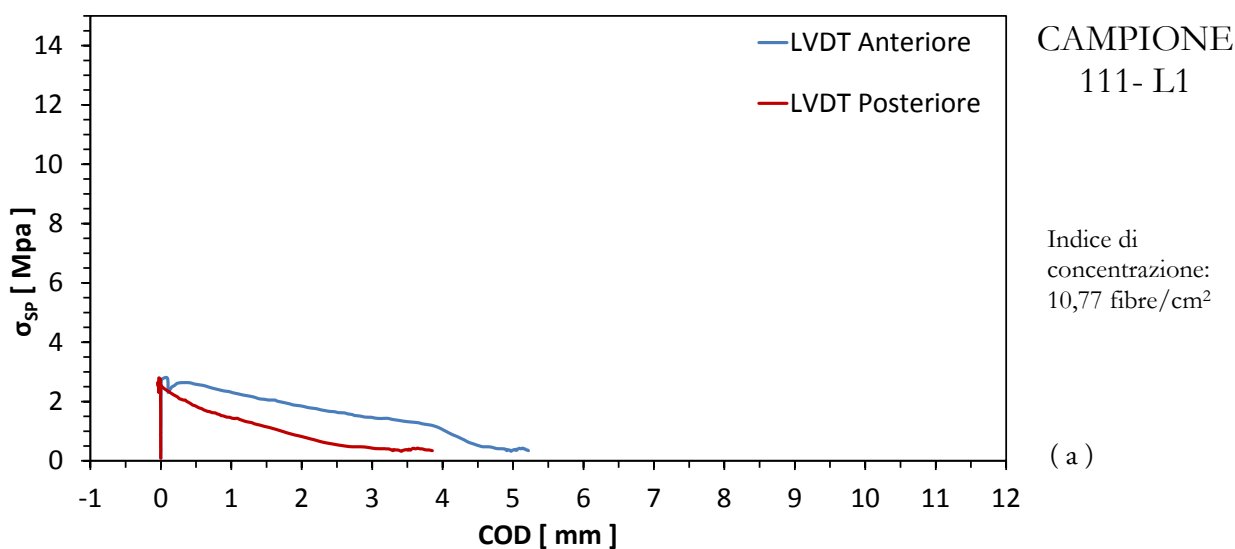


( a ) Curve Sforzo-COD; ( b ) Curva di confronto LVDT/COD; ( c ) Grafico di regressione LVDT/COD; ( d ) Grafico Errore DIC;

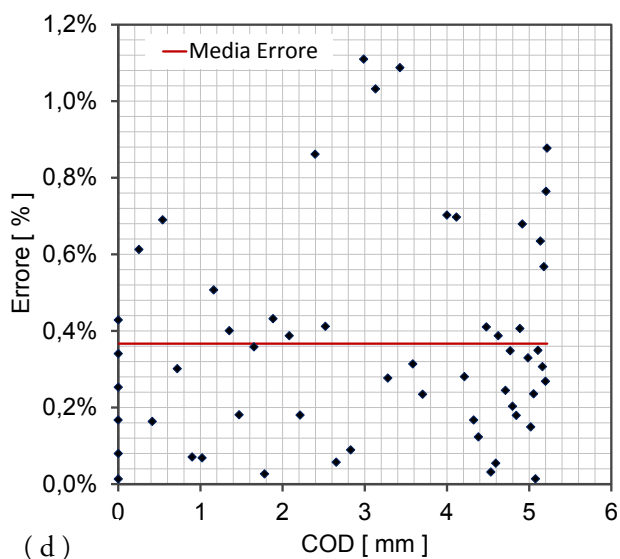
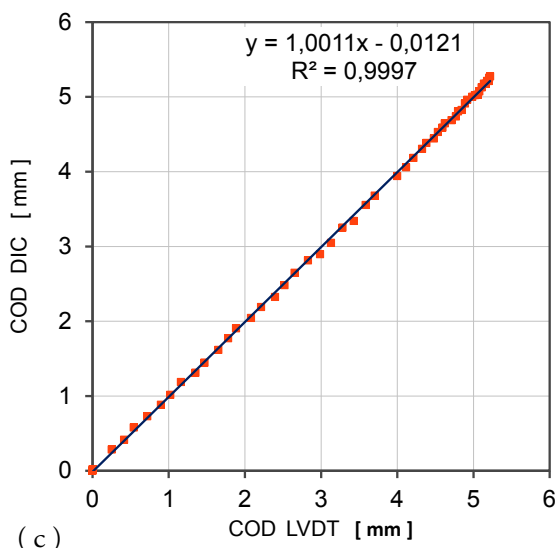


( e ) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; ( f ) Test di Pearson nel piano; ( g ) Test di Pearson fuori piano; ( h ) Grafico sulla modalità di rottura; ( i ) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.

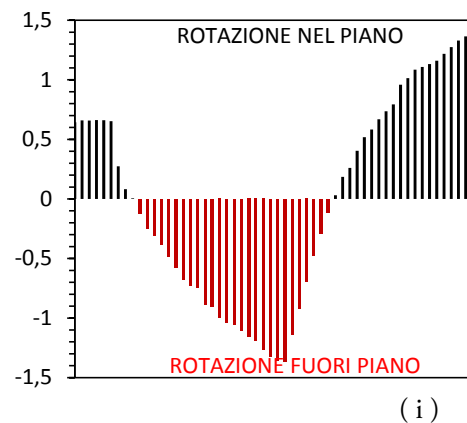
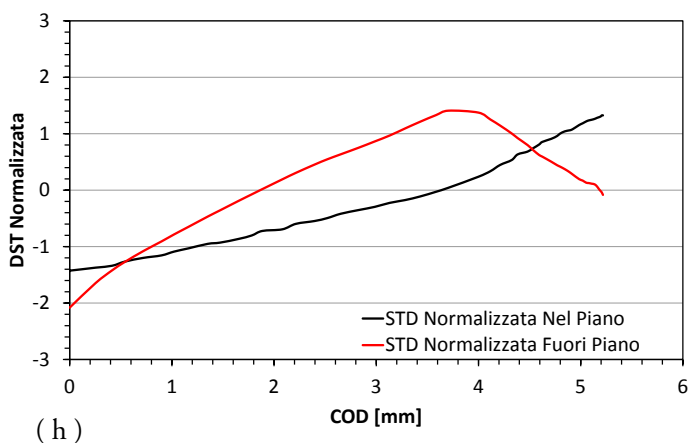
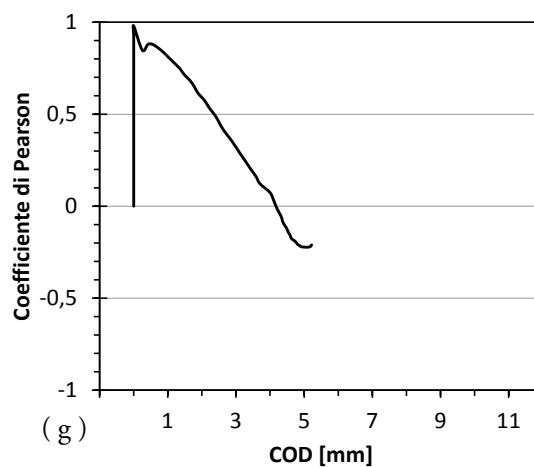
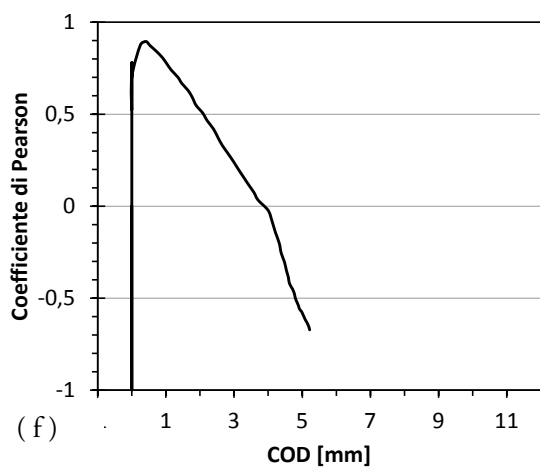
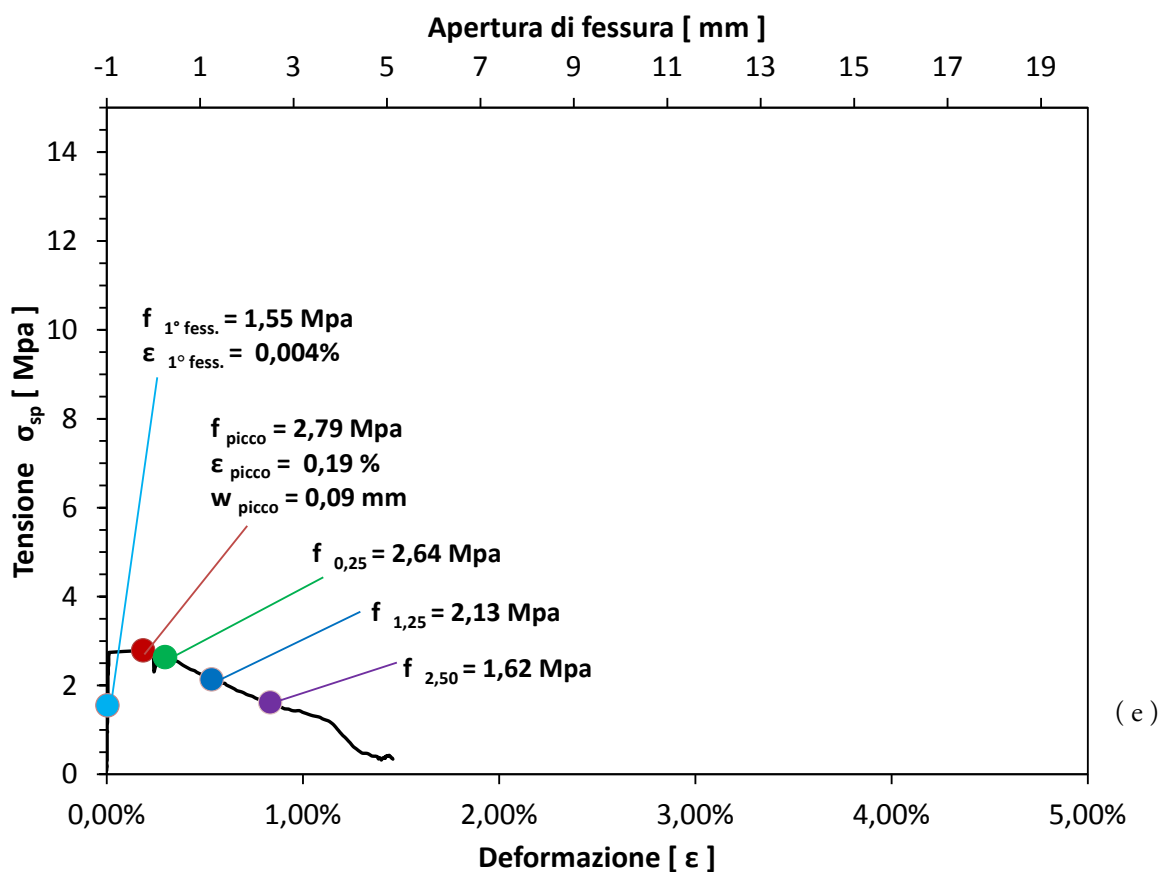




Confronto DIC/LVDT    Errore massimo 1,22 % ,    medio 0,28 % ,    minimo 0,003 %  
S.E.R.                    3,63 %

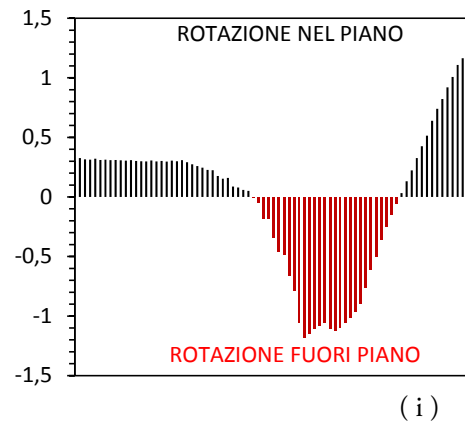
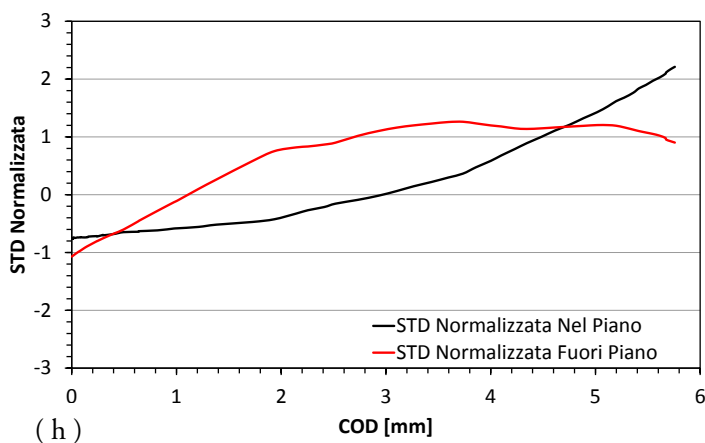
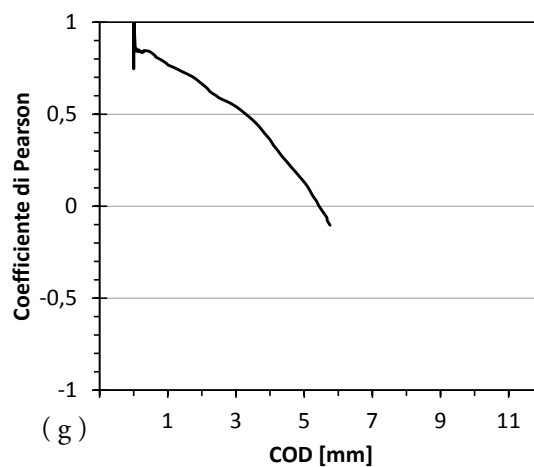
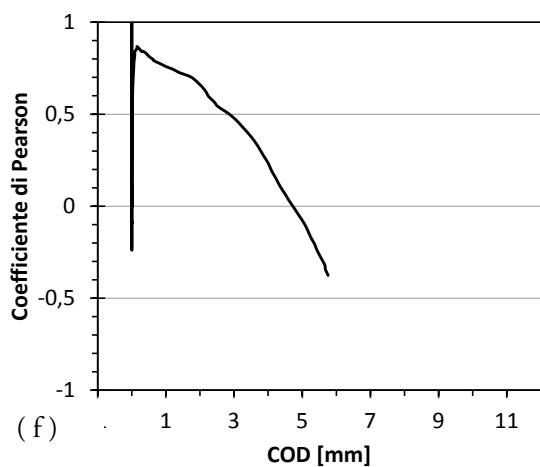
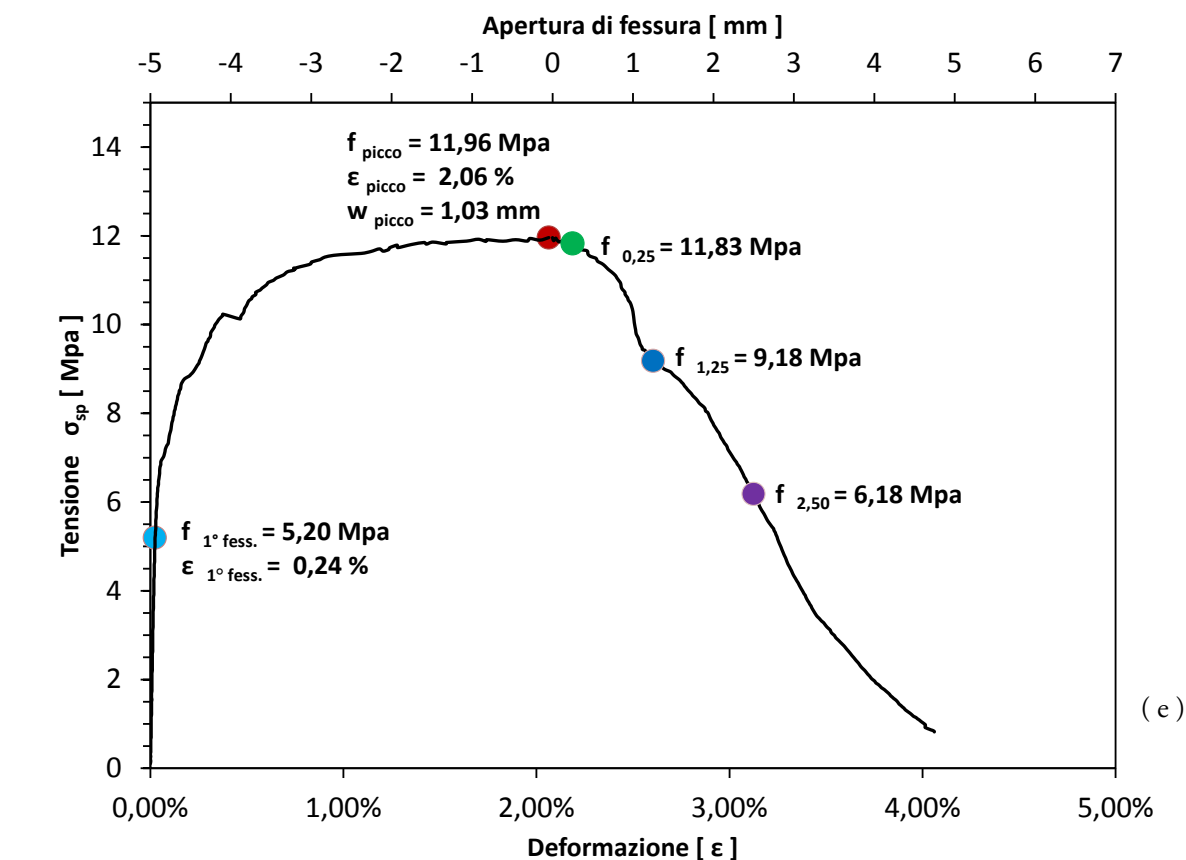


( a ) Curve Sforzo-COD; ( b ) Curva di confronto LVDT/COD; ( c ) Grafico di regressione LVDT/COD;  
( d ) Grafico Errore DIC;

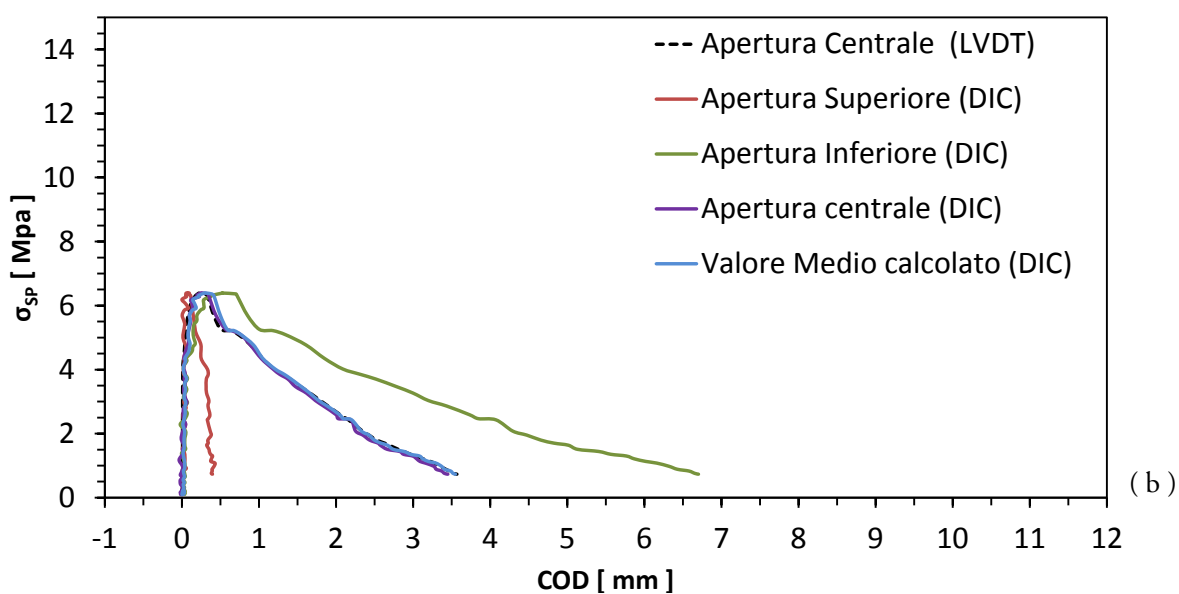
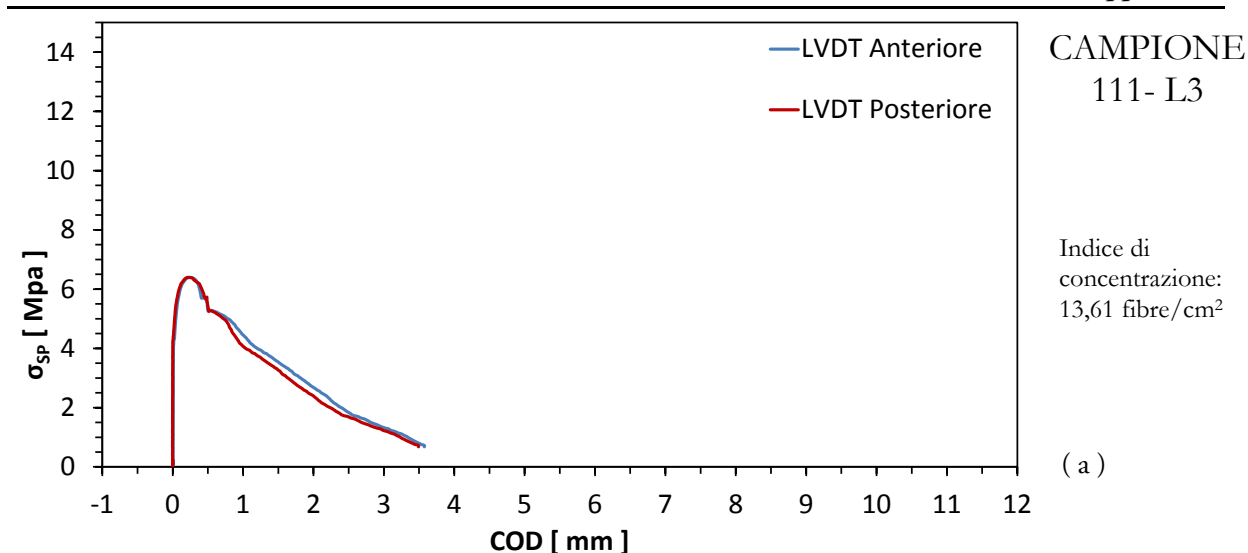


(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.

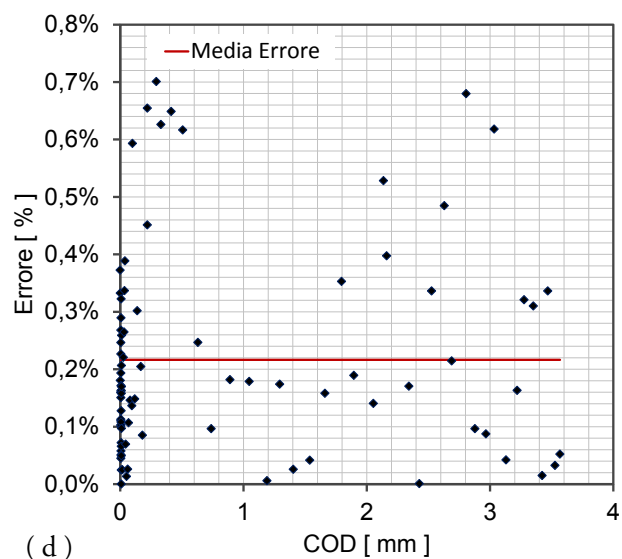
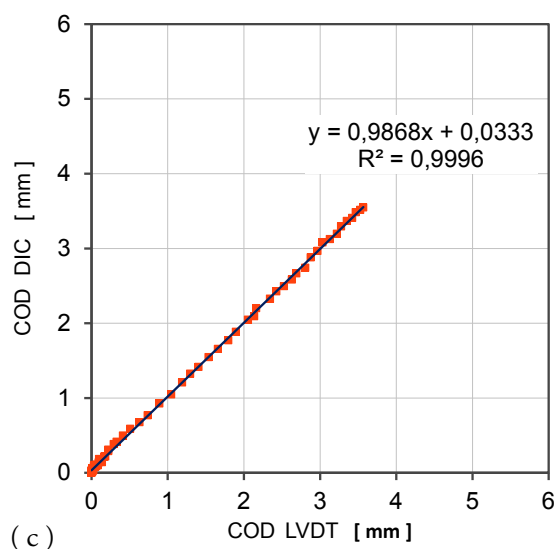




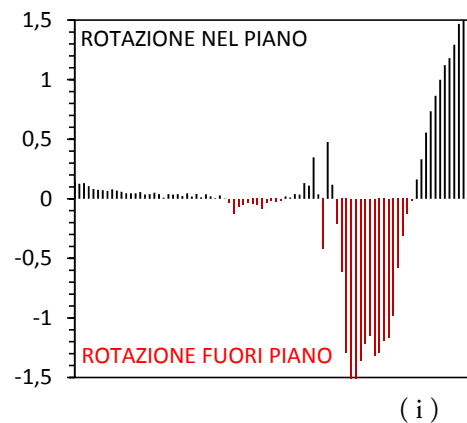
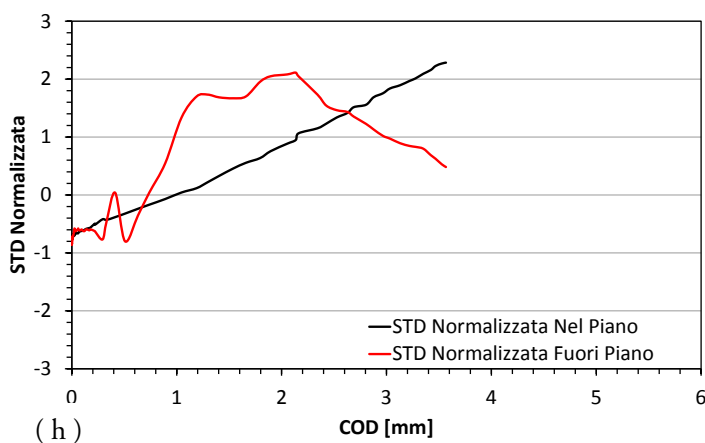
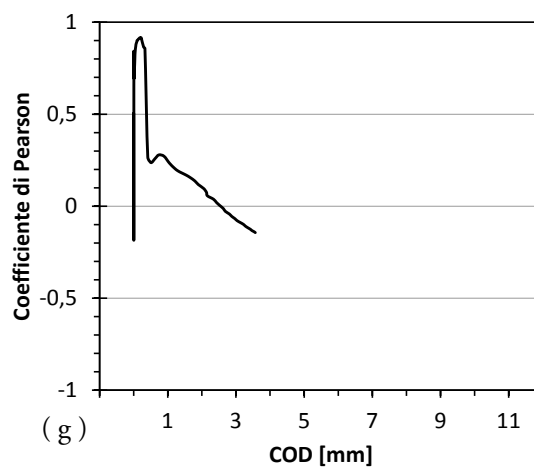
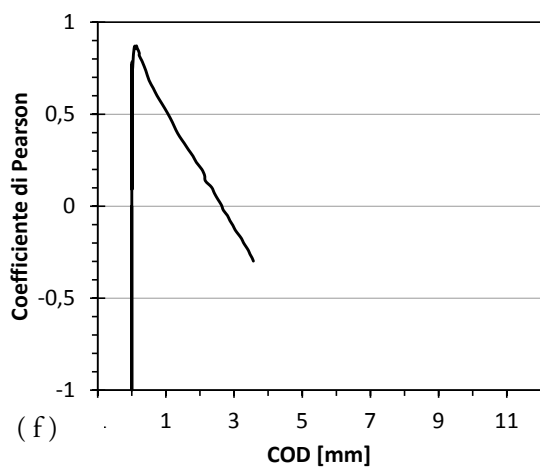
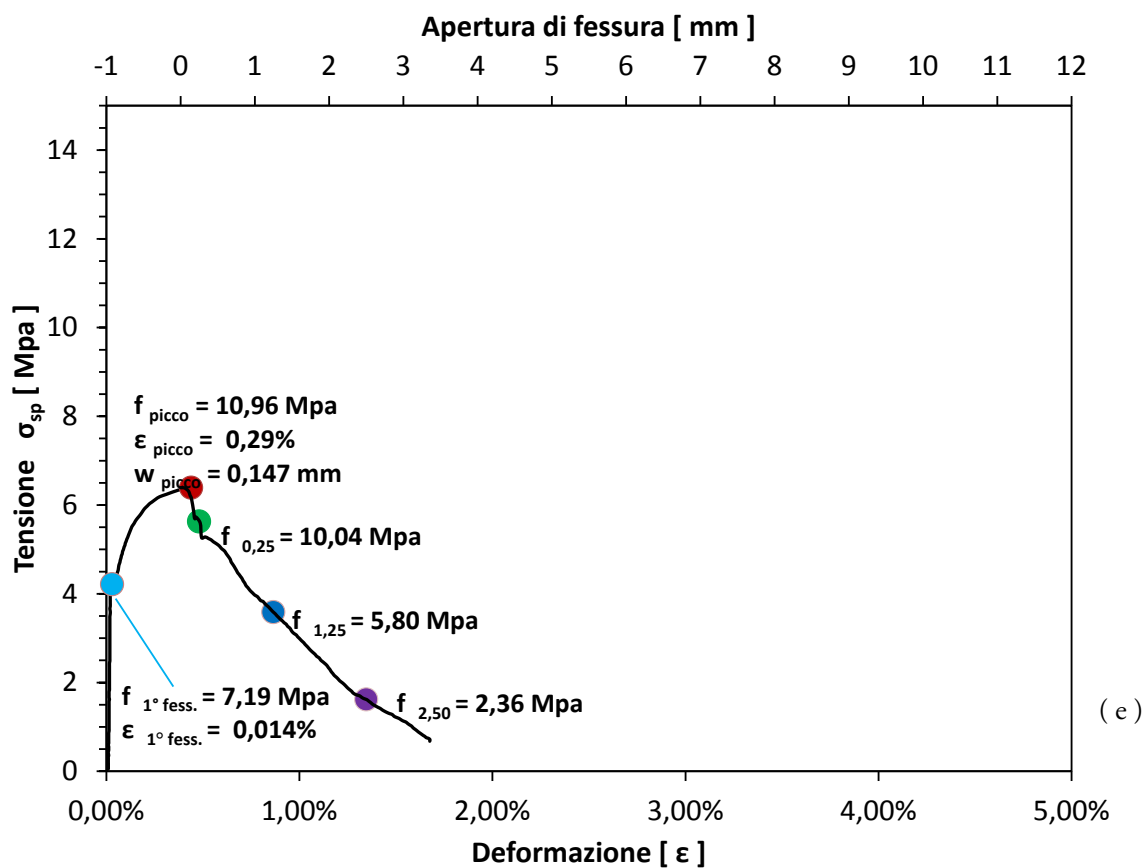
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



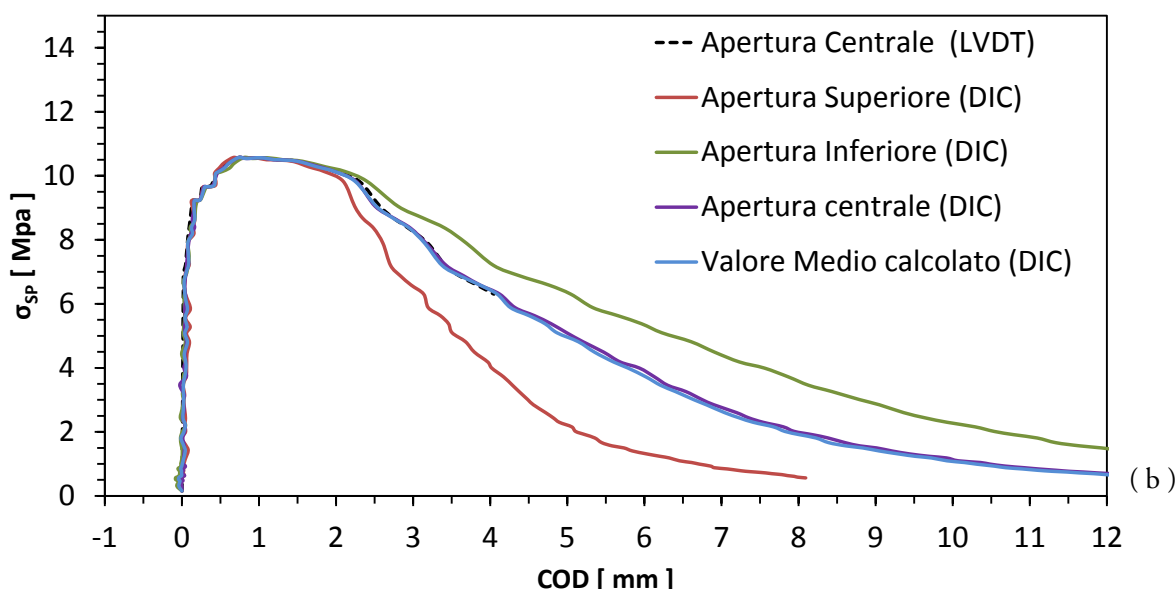
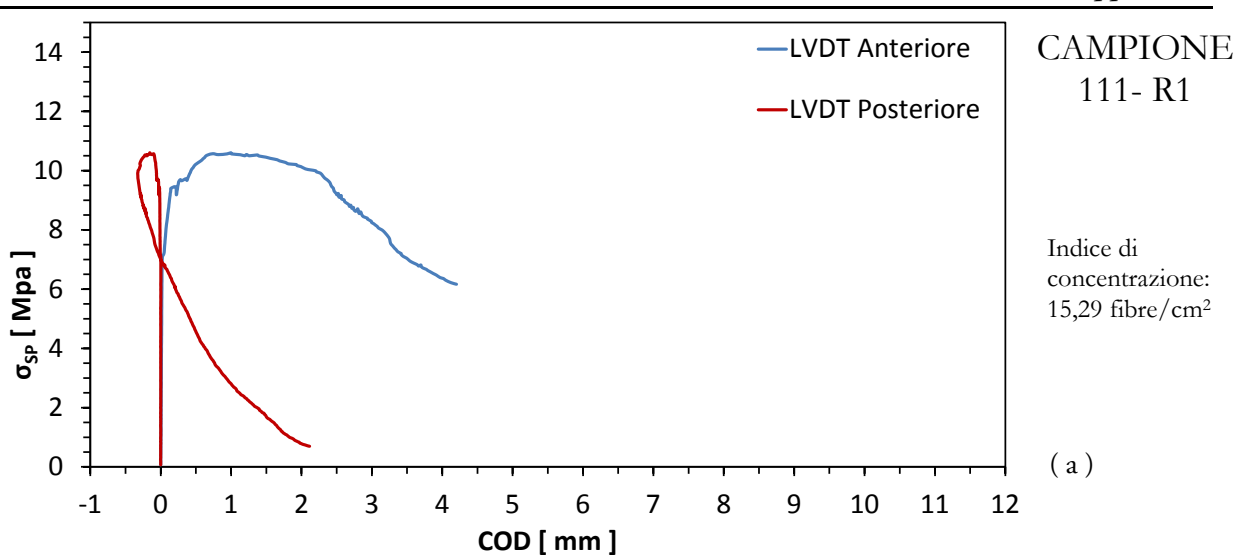
Confronto DIC/LVDT Errore massimo 0,84 %, medio 0,25 %, minimo 0,001 %,  
S.E.R. 2,71 %



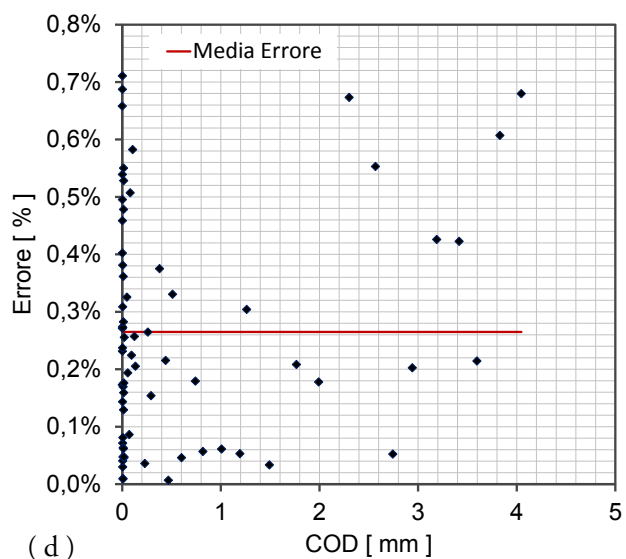
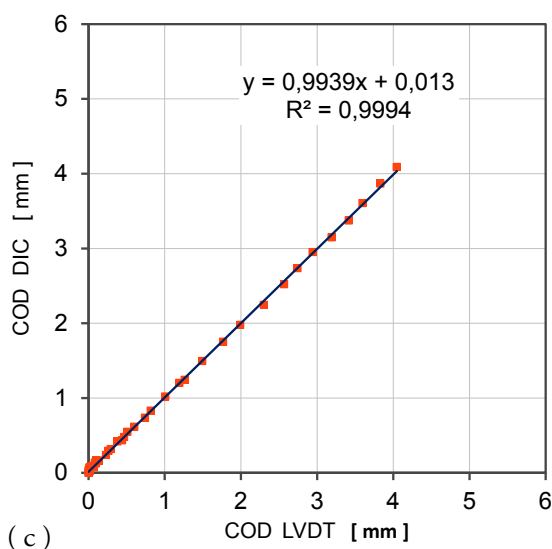
( a ) Curve Sforzo-COD; ( b ) Curva di confronto LVDT/COD; ( c ) Grafico di regressione LVDT/COD;  
( d ) Grafico Errore DIC;



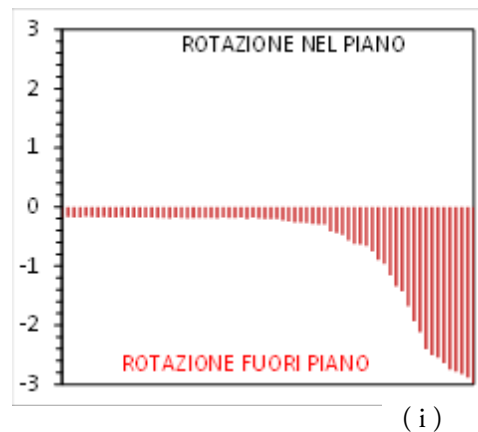
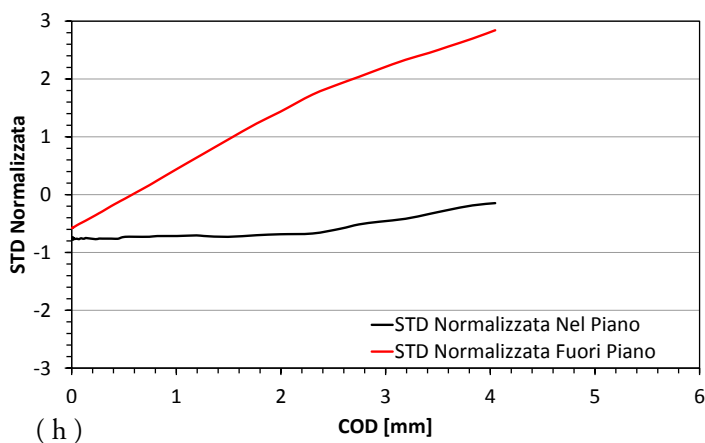
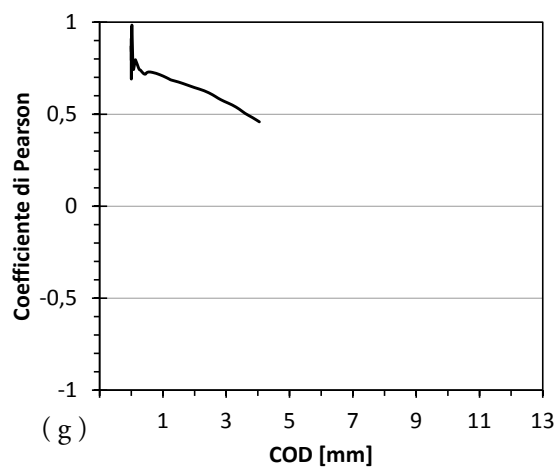
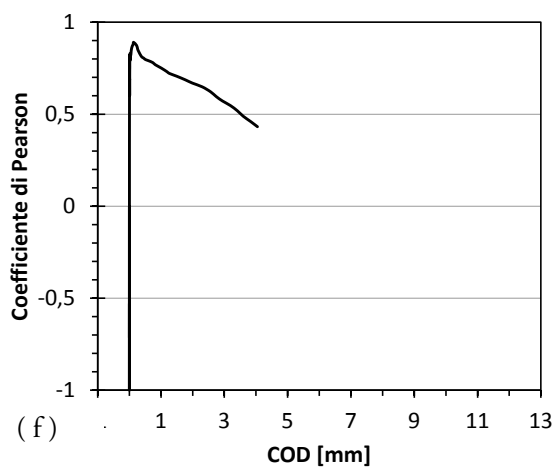
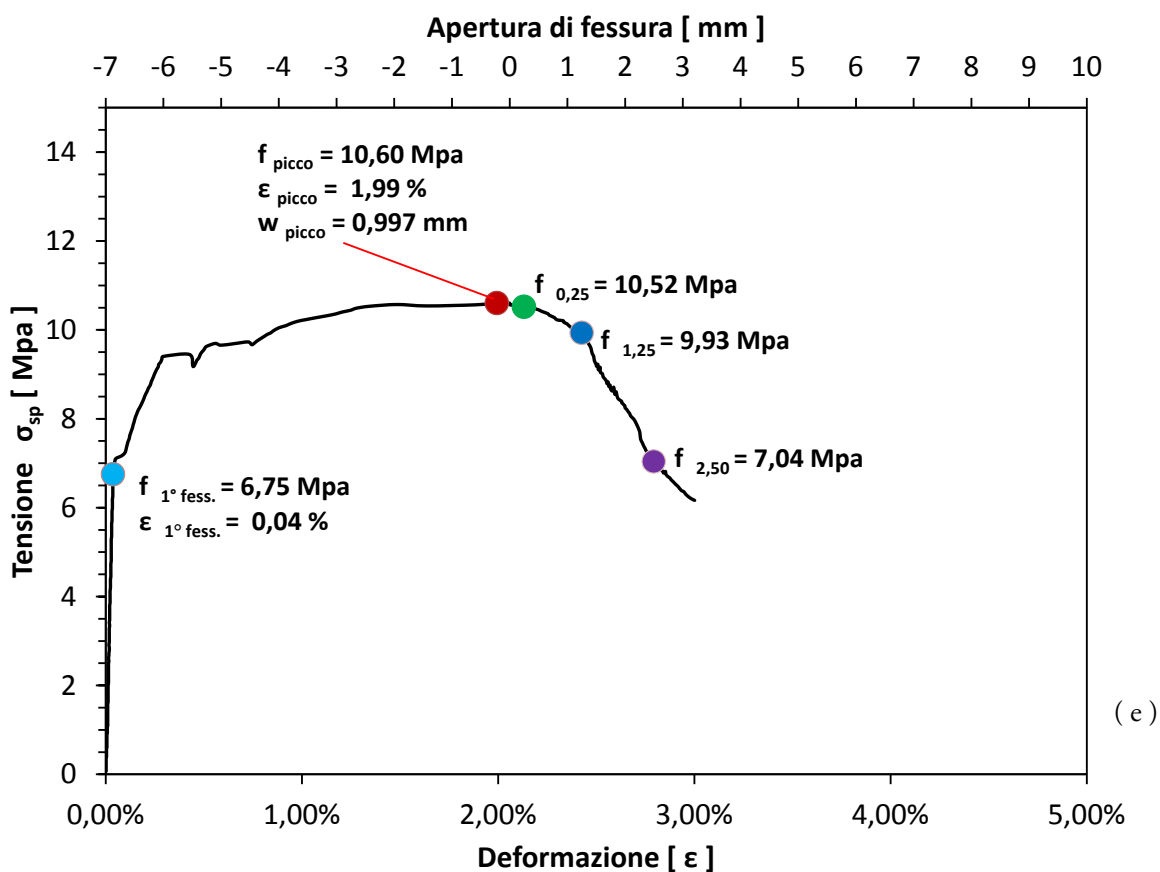
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



Confronto DIC/LVDT Errore massimo 0,71 % , medio 0,27 %, minimo 0,007 %  
S.E.R. 2,30 %



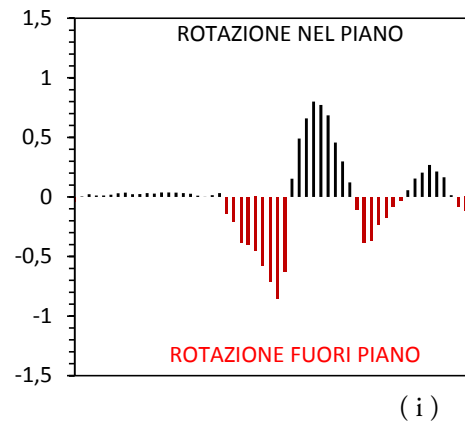
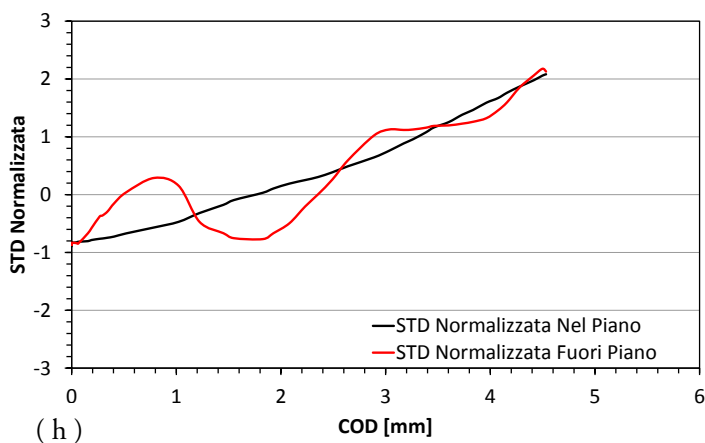
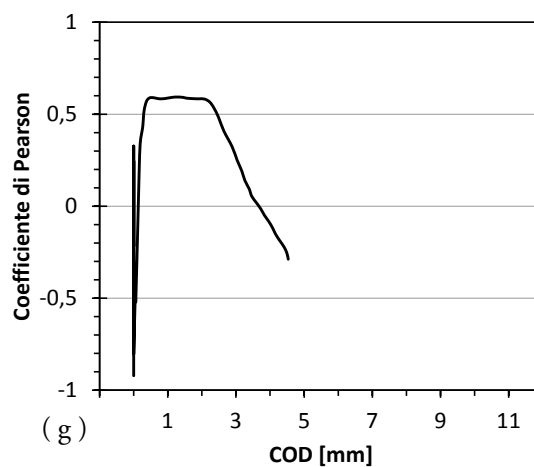
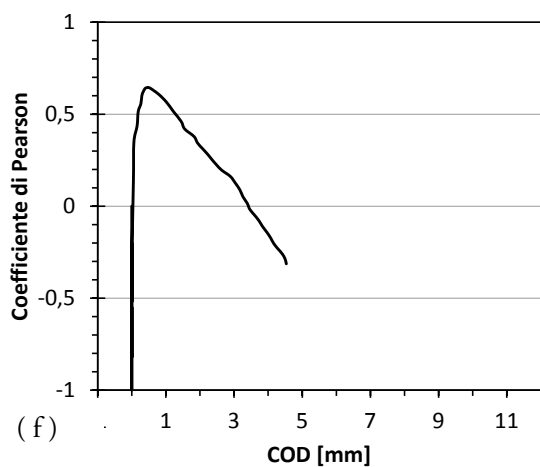
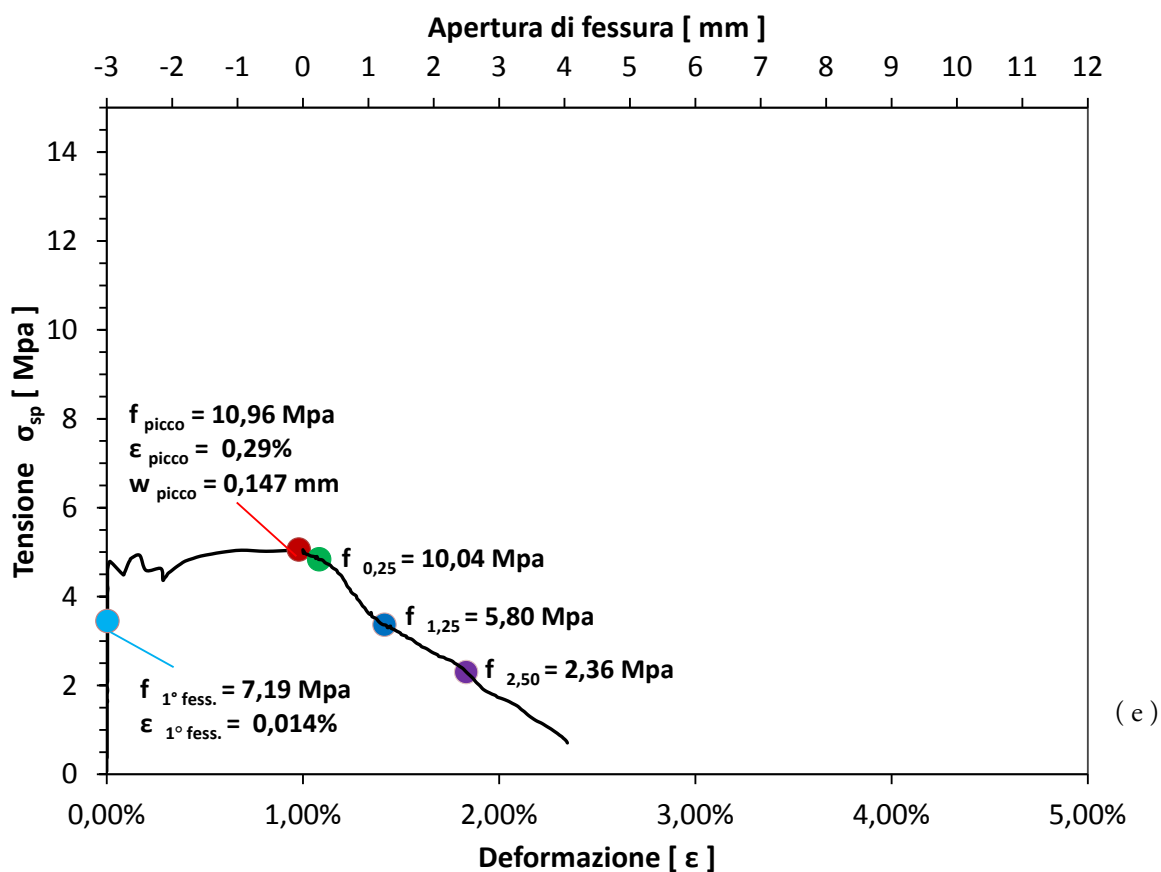
(a) Curve Sforzo-COD; (b) Curva di confronto LVDT/COD; (c) Grafico di regressione LVDT/COD; (d) Grafico Errore DIC;



(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.

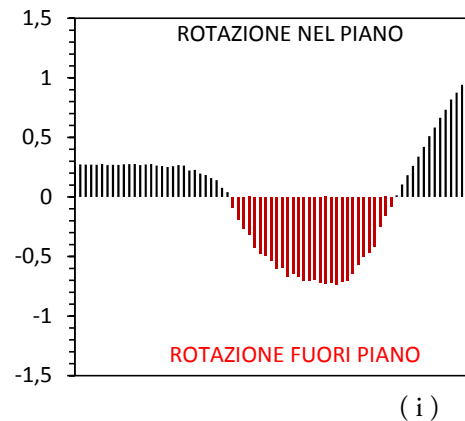
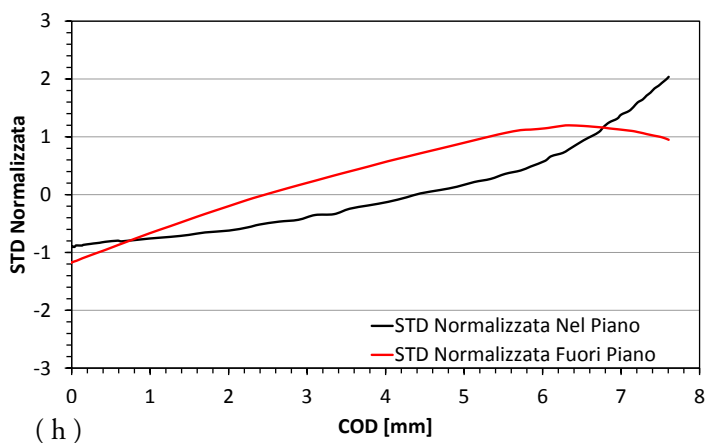
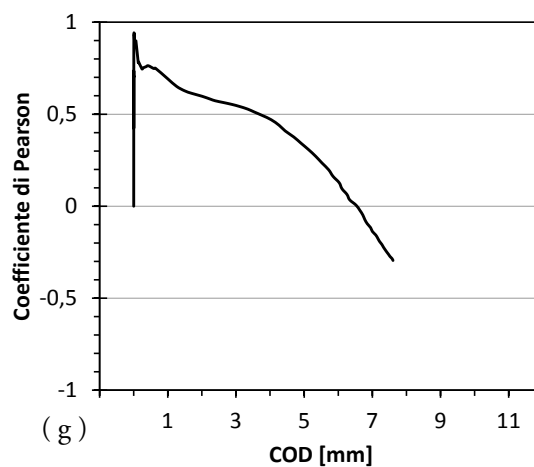
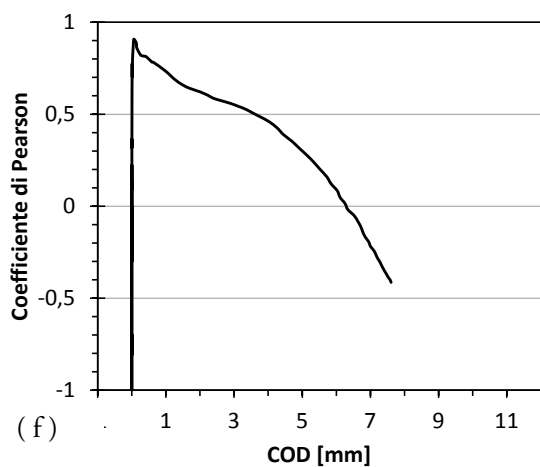
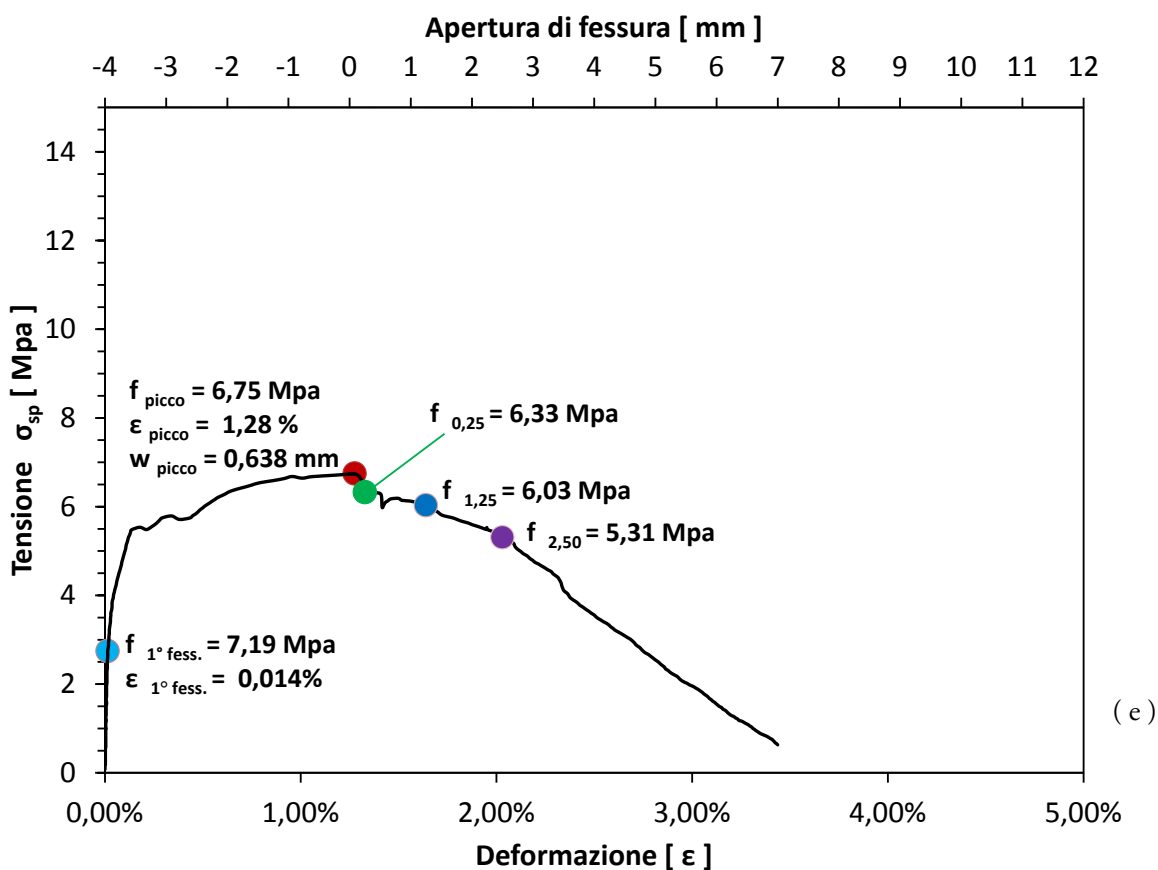






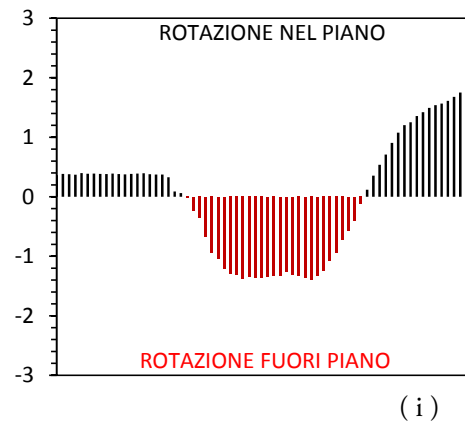
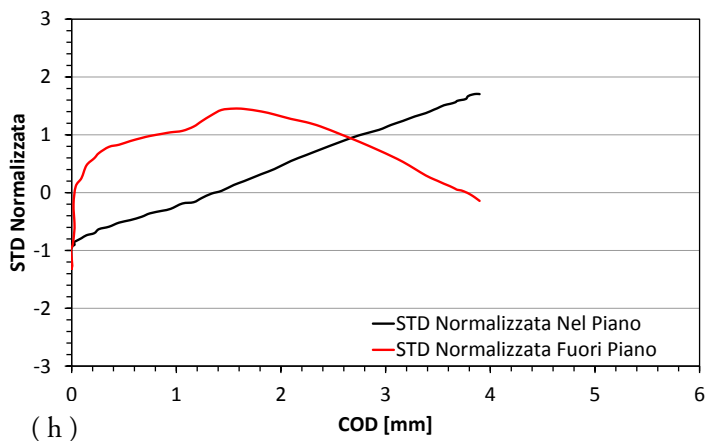
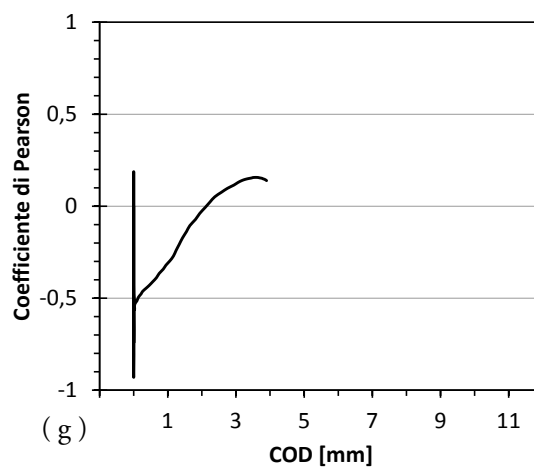
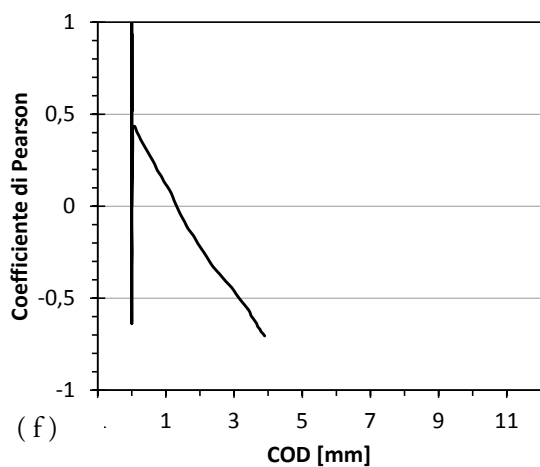
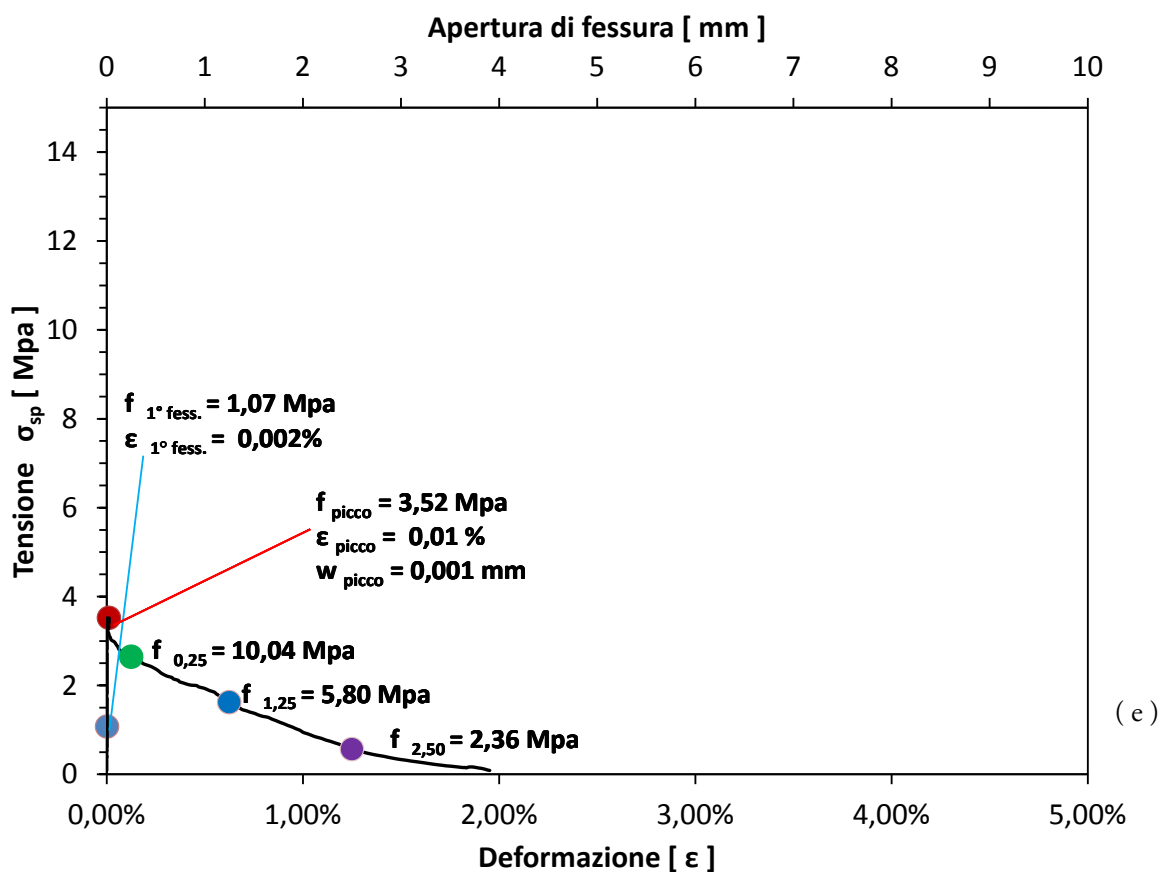
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.





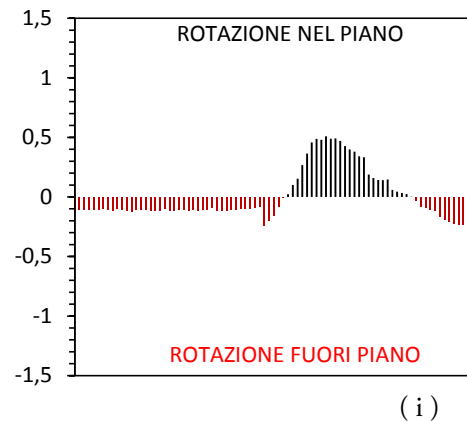
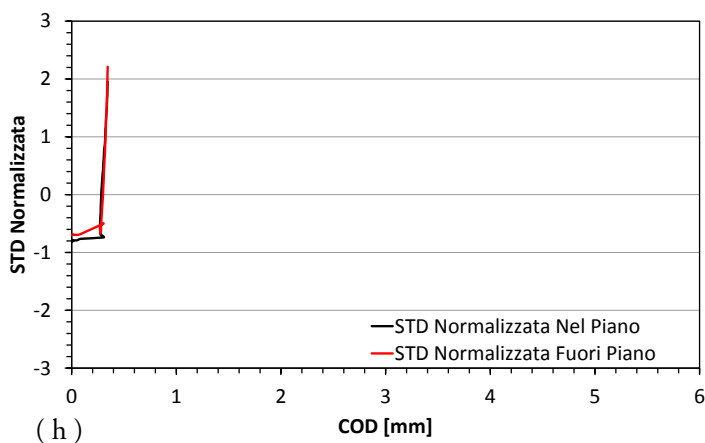
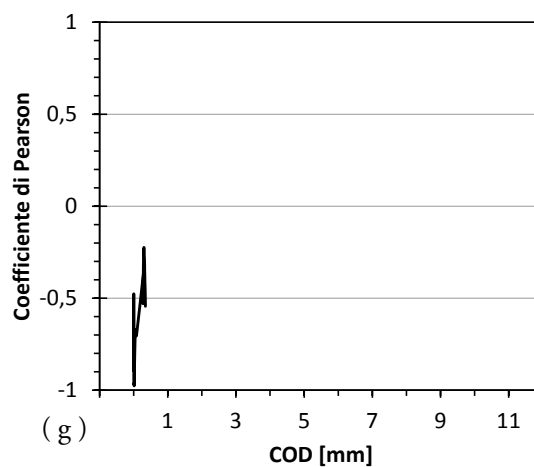
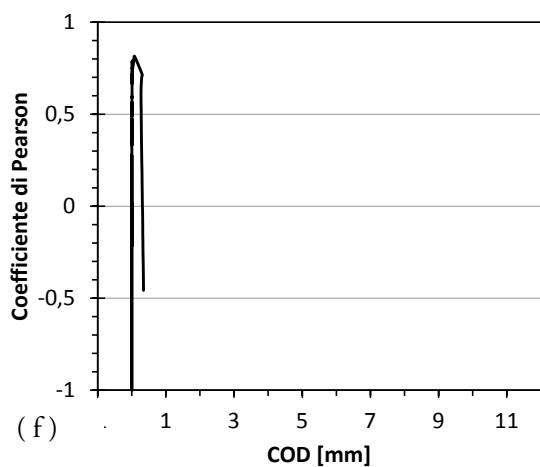
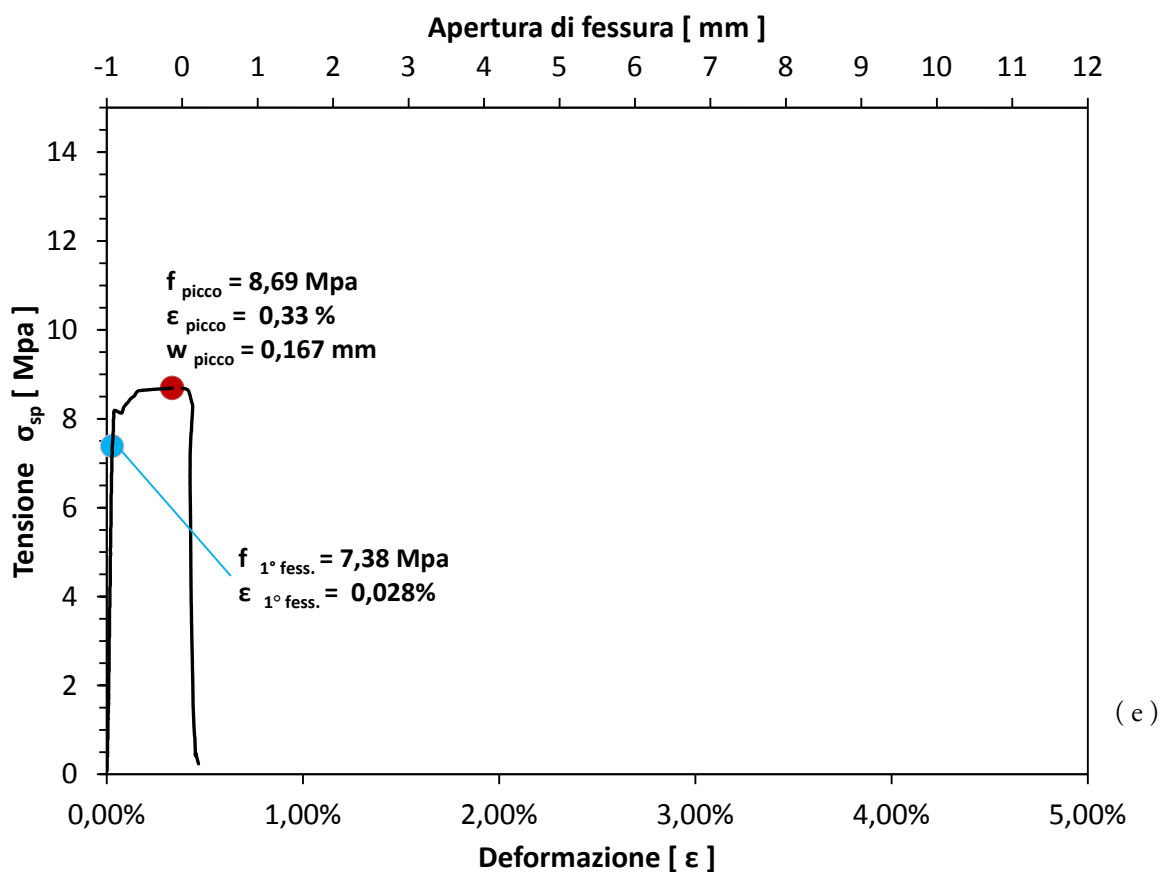
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.





(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.

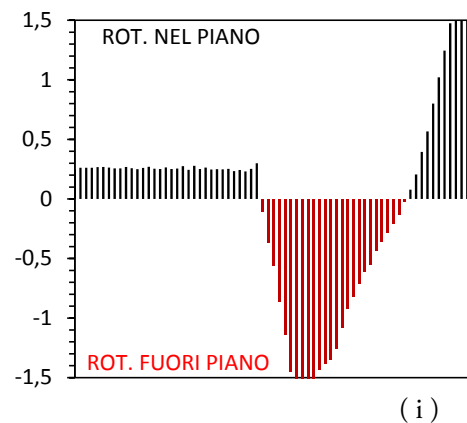
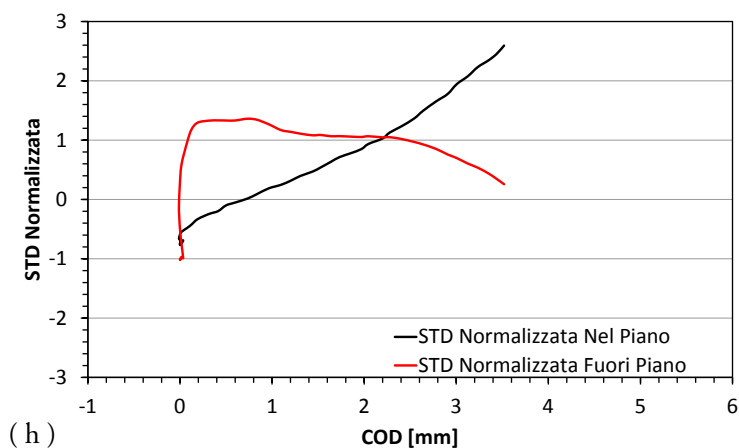
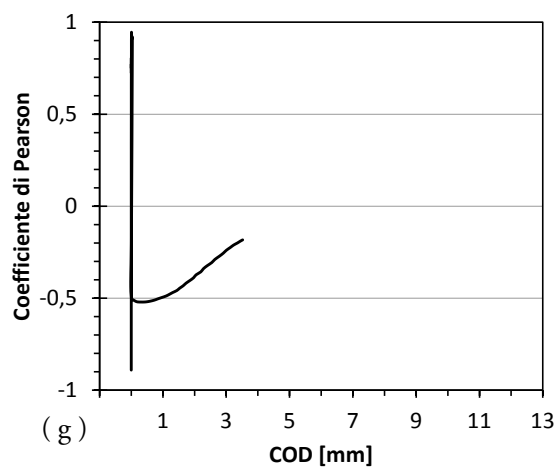
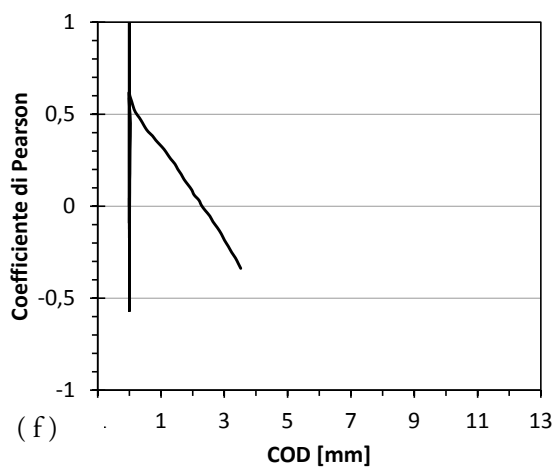
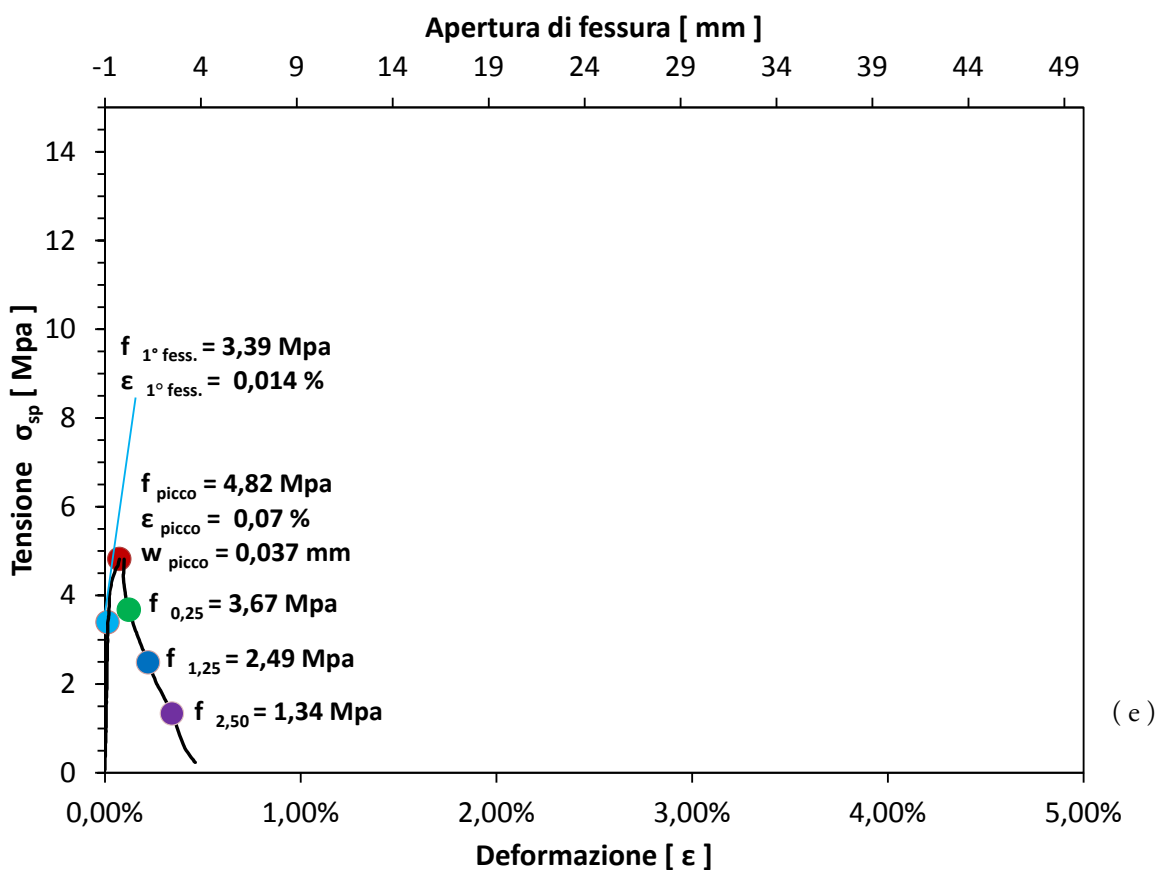




(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.

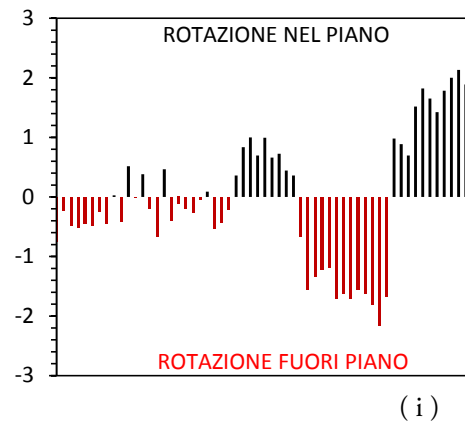
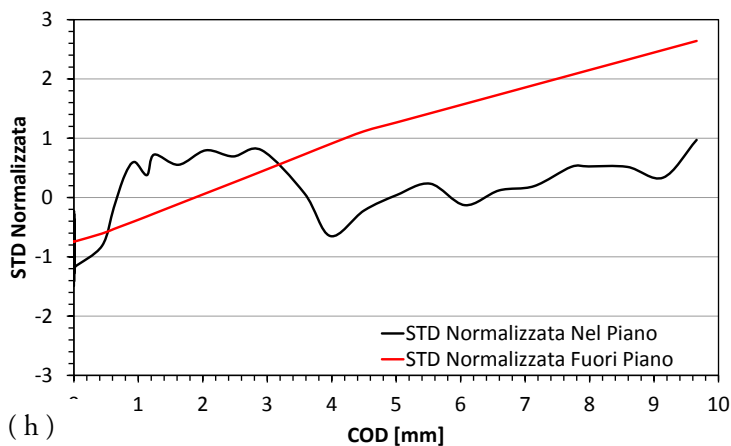
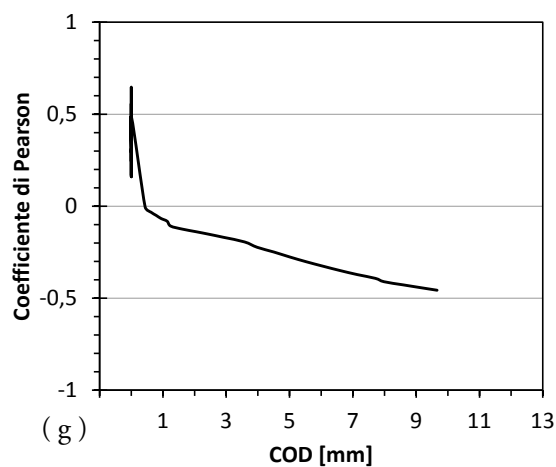
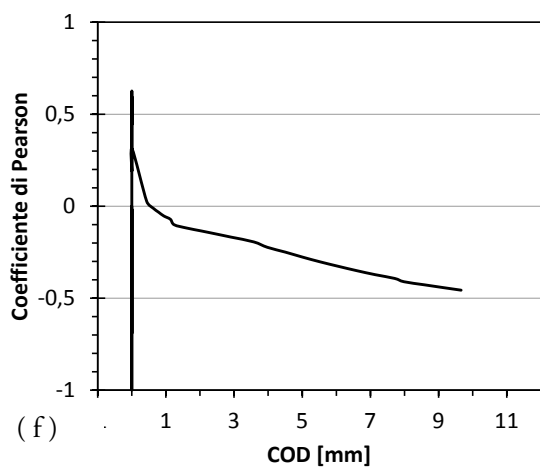
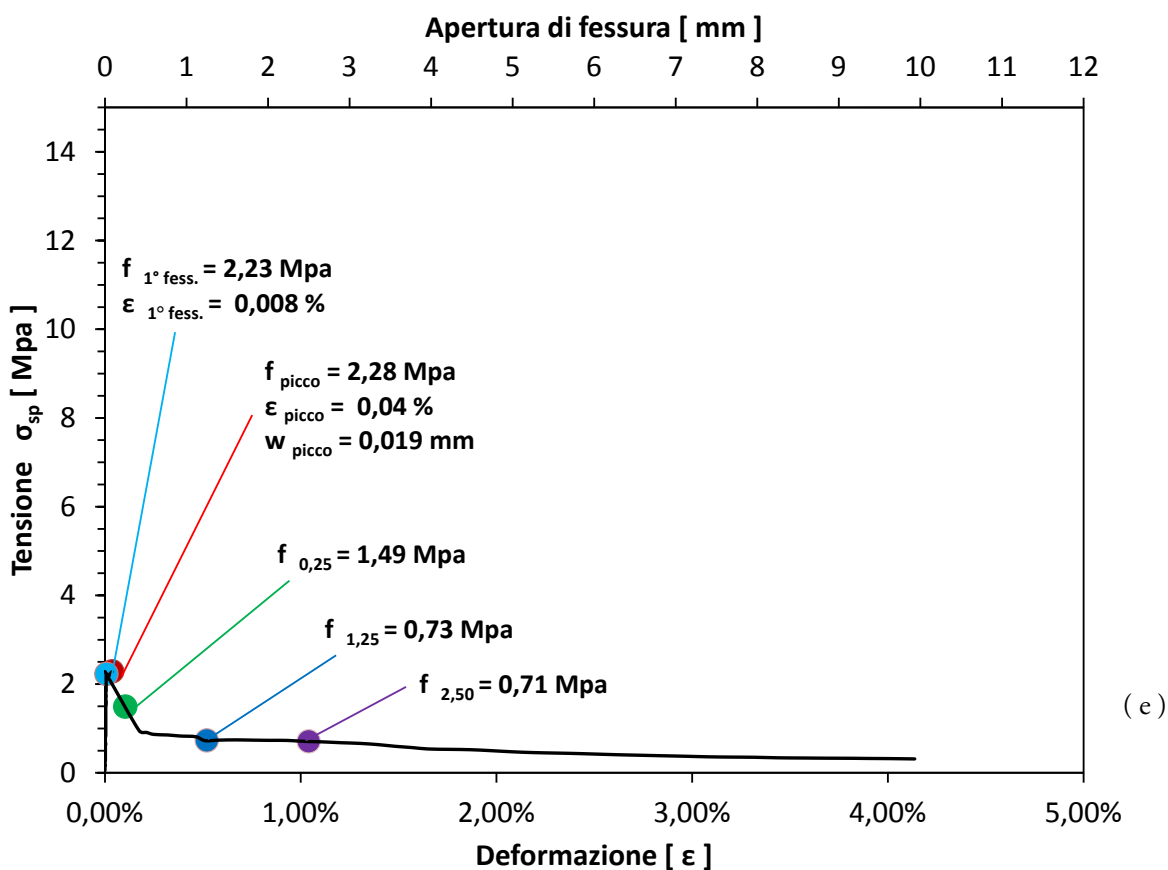




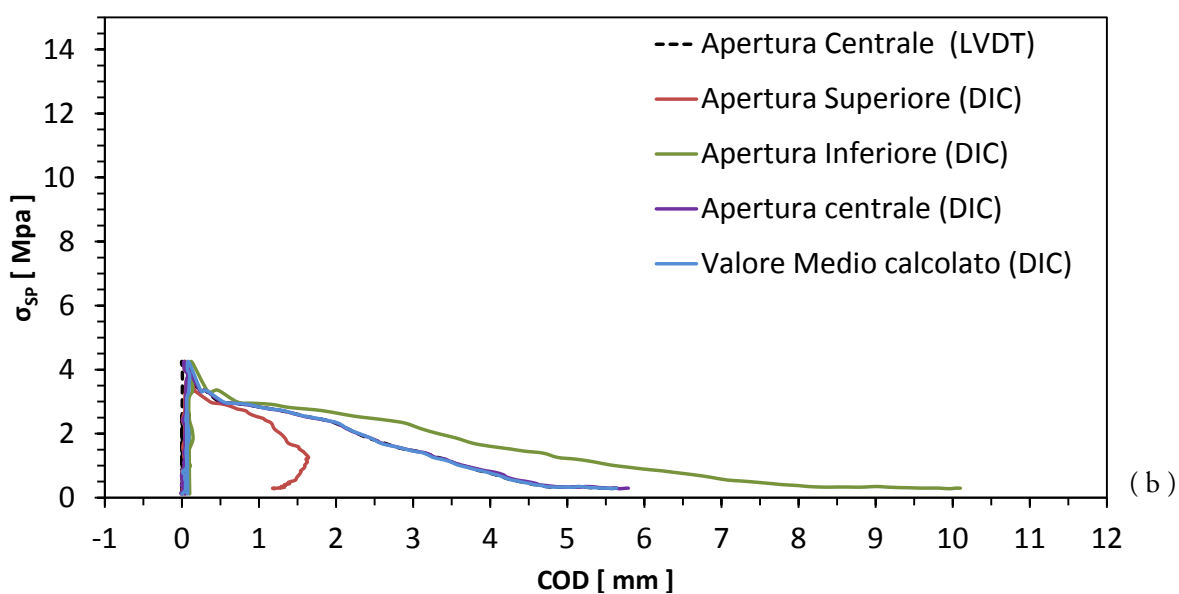
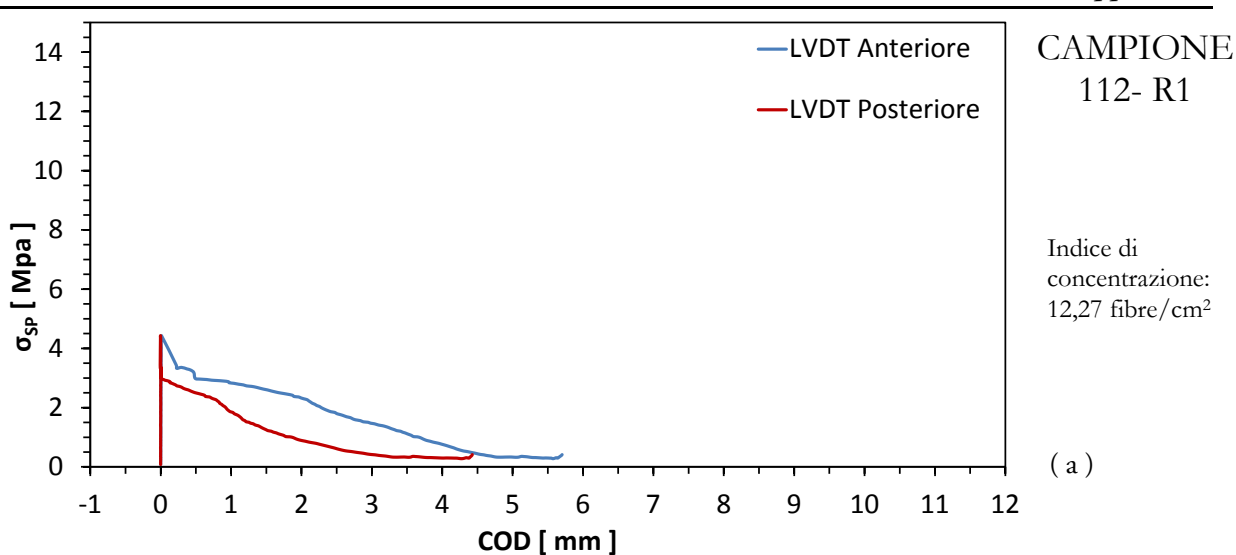


(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.

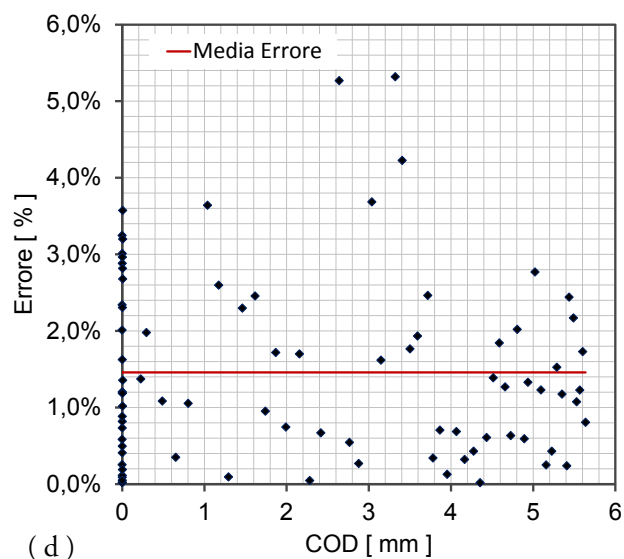
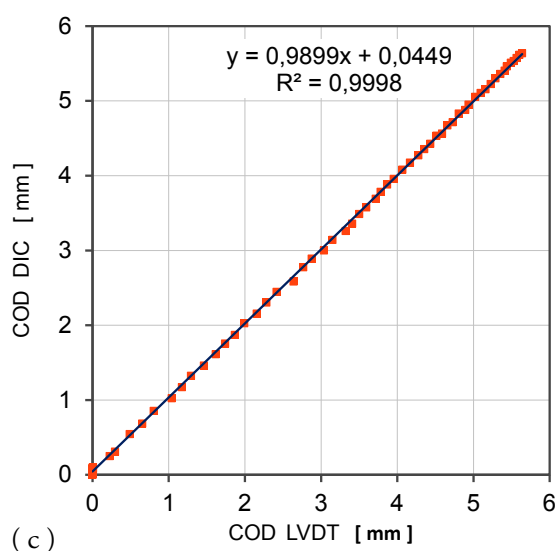




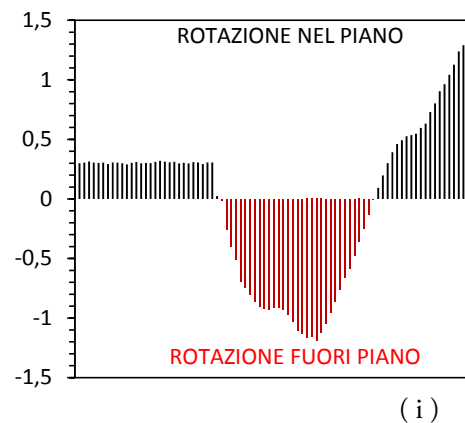
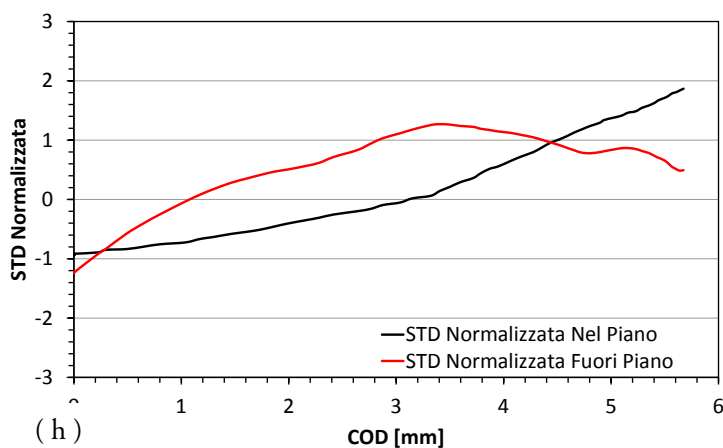
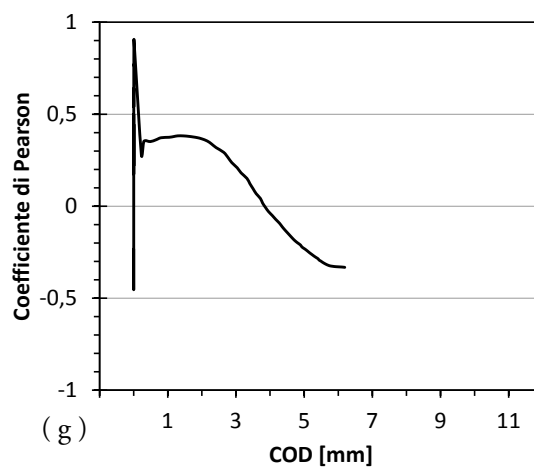
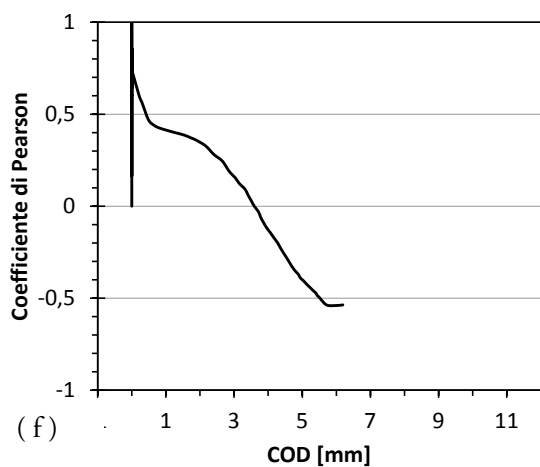
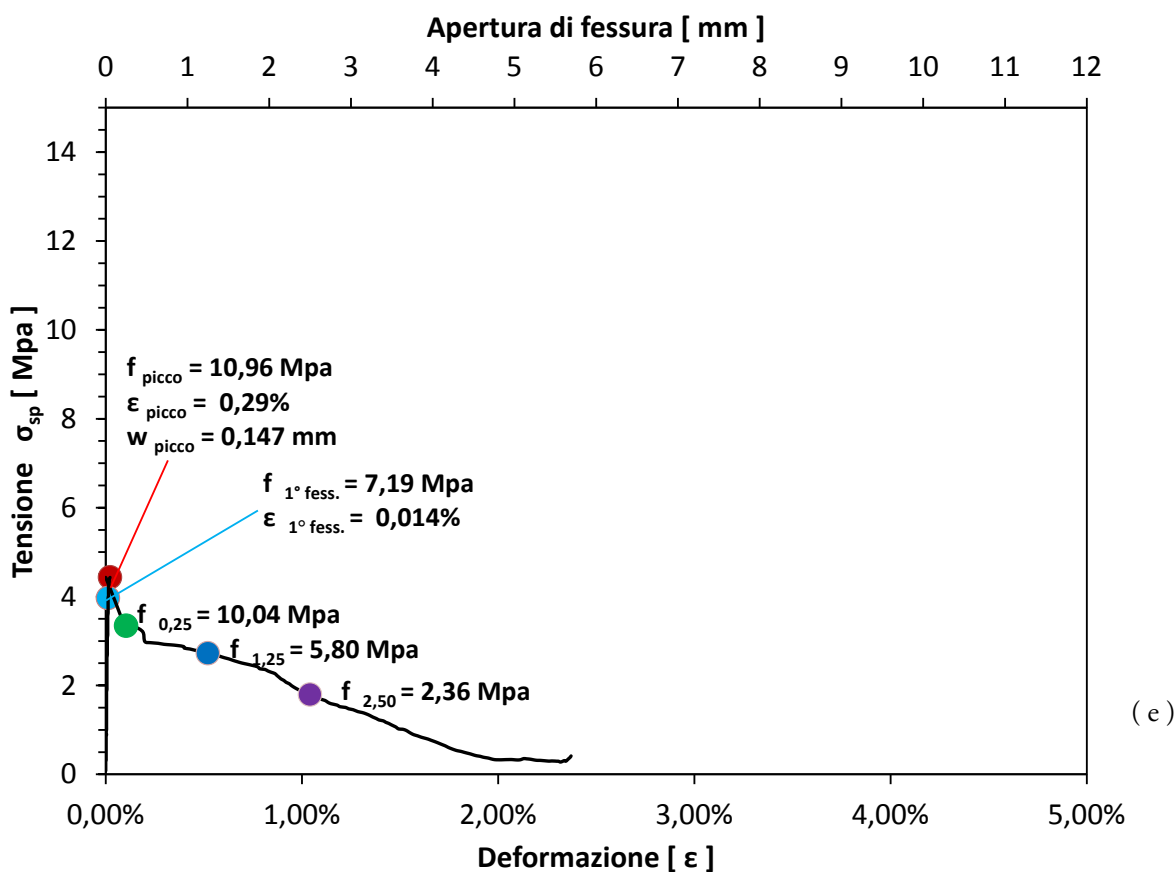
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



Confronto DIC/LVDT Errore massimo 5,32 %, medio 1,46 %, minimo 0,018 %  
S.E.R. 4,49 %

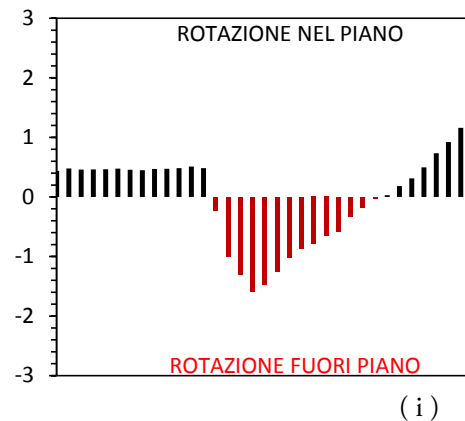
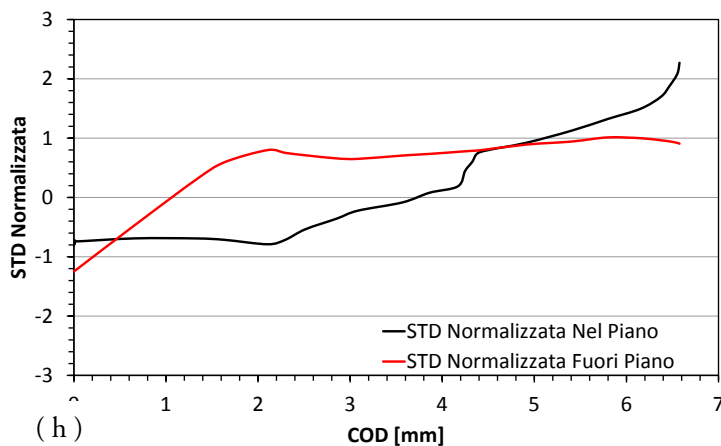
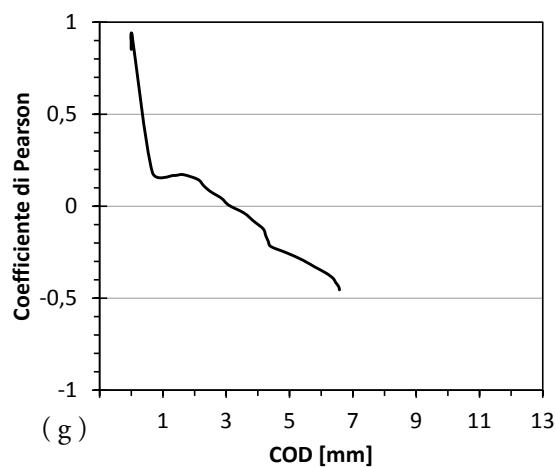
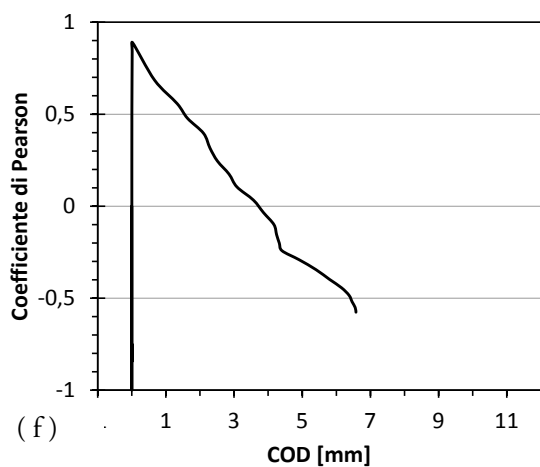
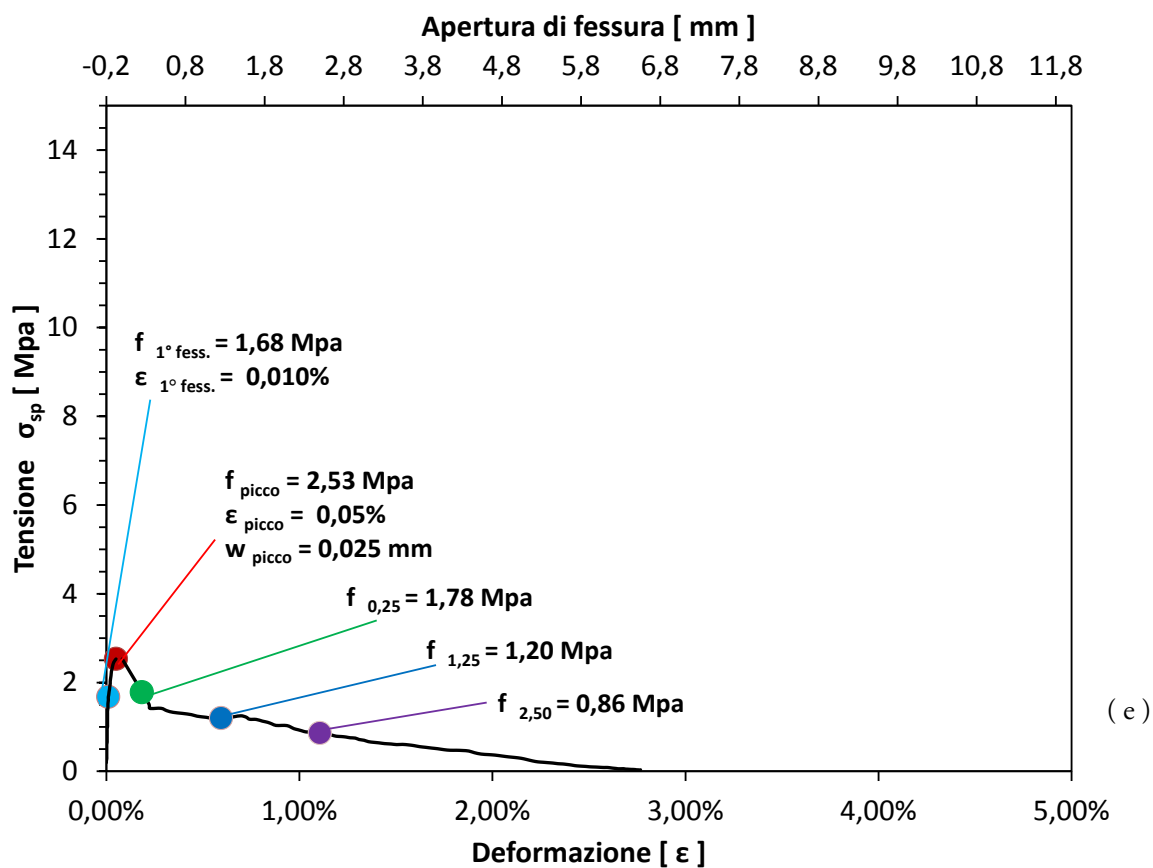


( a ) Curve Sforzo-COD; ( b ) Curva di confronto LVDT/COD; ( c ) Grafico di regressione LVDT/COD;  
( d ) Grafico Errore DIC;



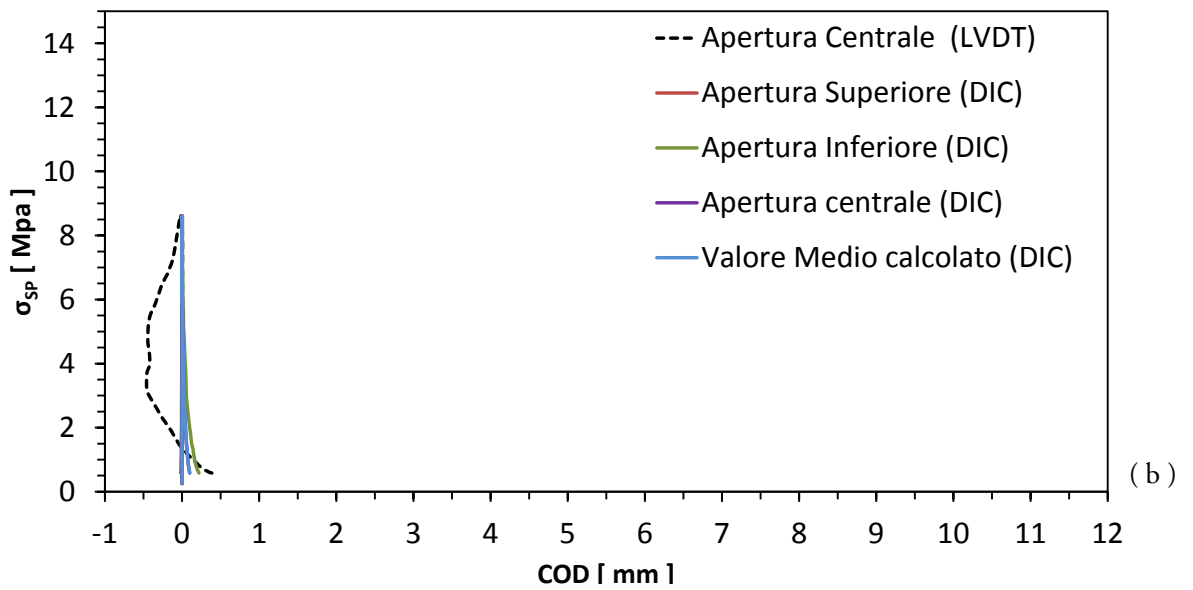
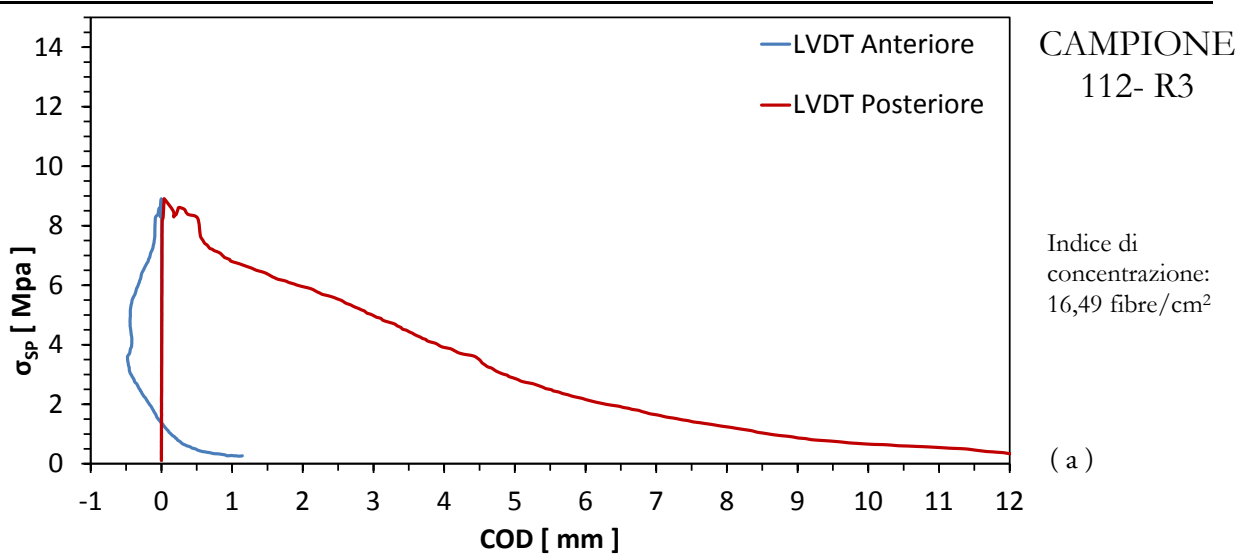
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



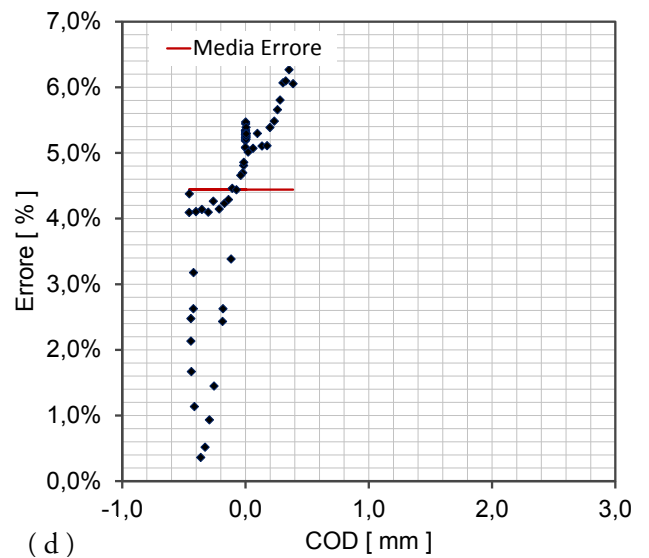
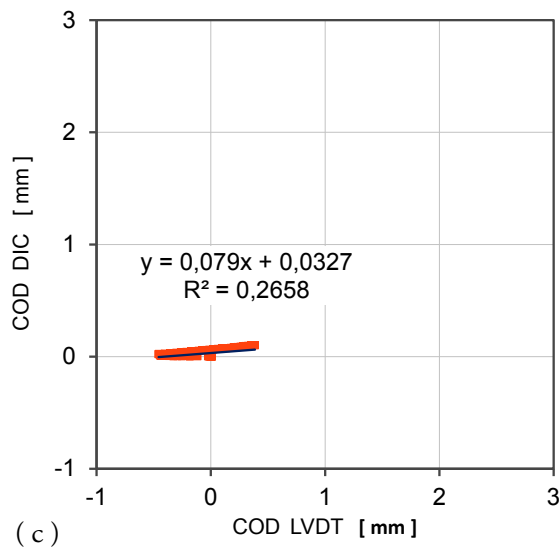


(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.

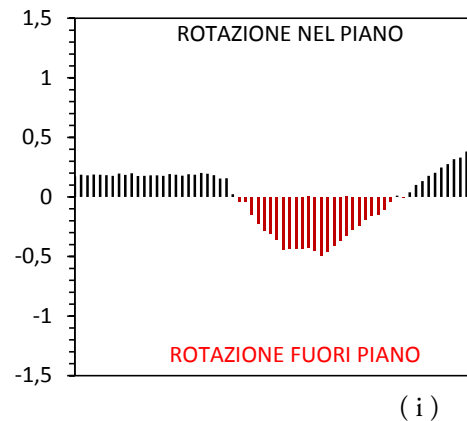
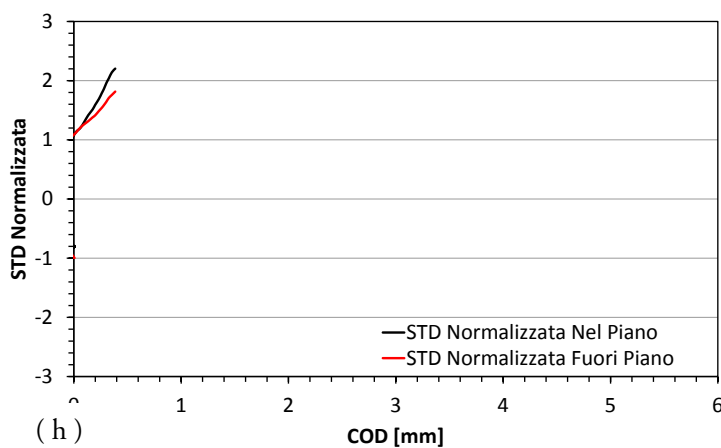
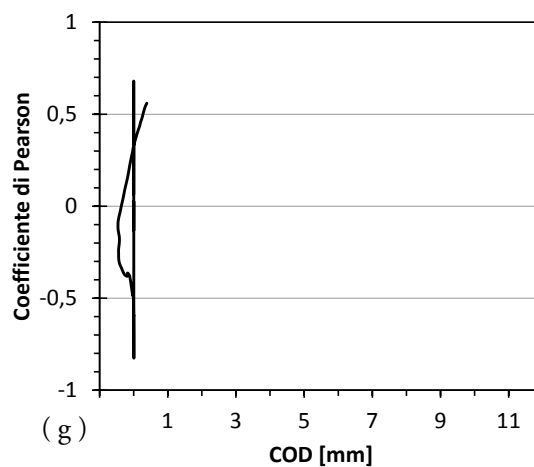
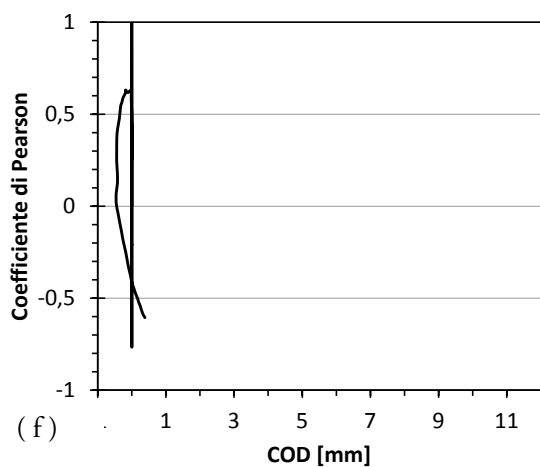
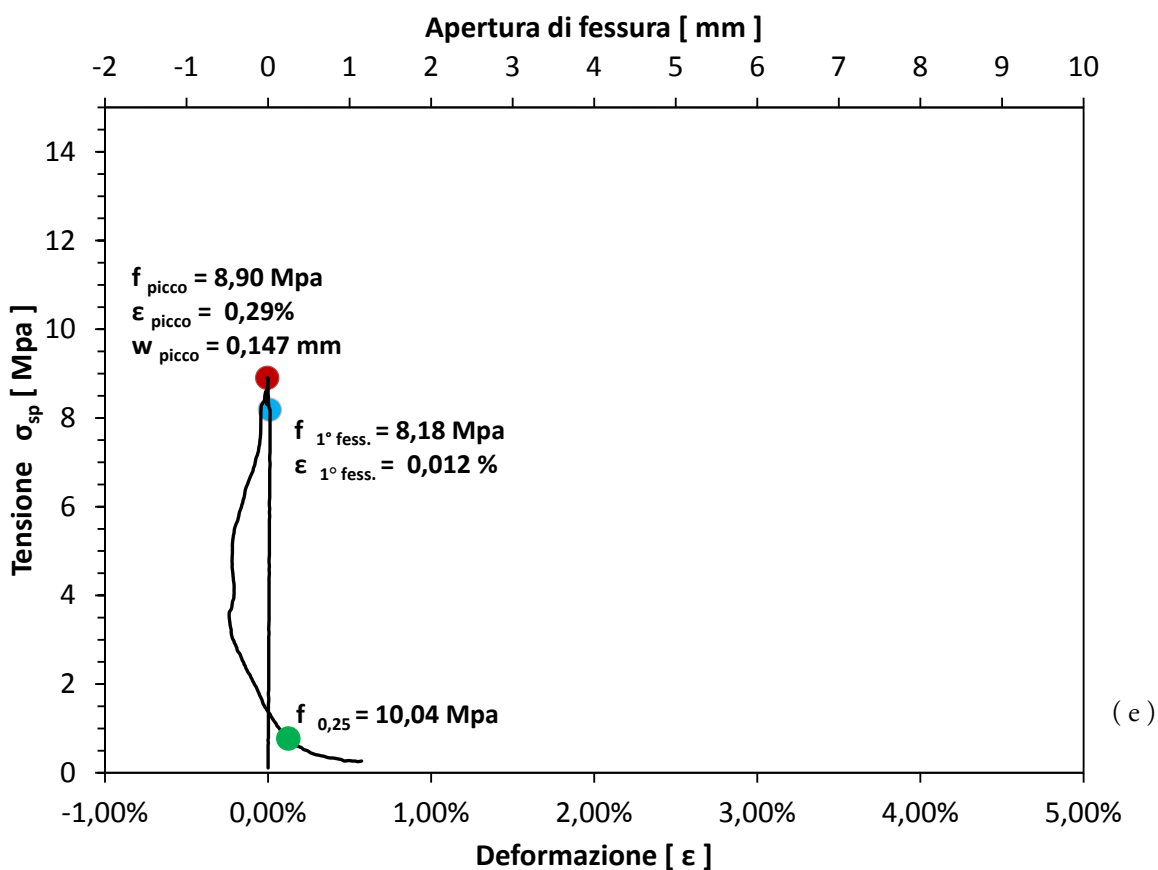




Confronto DIC/LVDT    Errore massimo 0,84 %,    medio 0,25 %,    minimo 0,001 %  
S.E.R.                      2,71 %

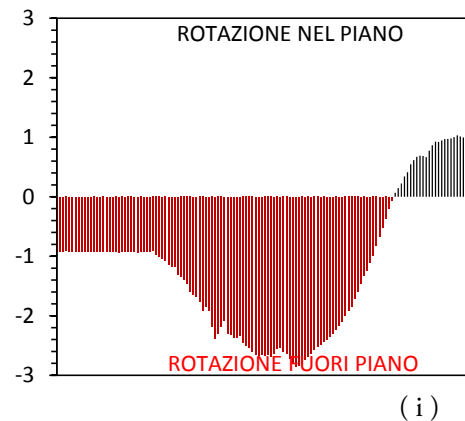
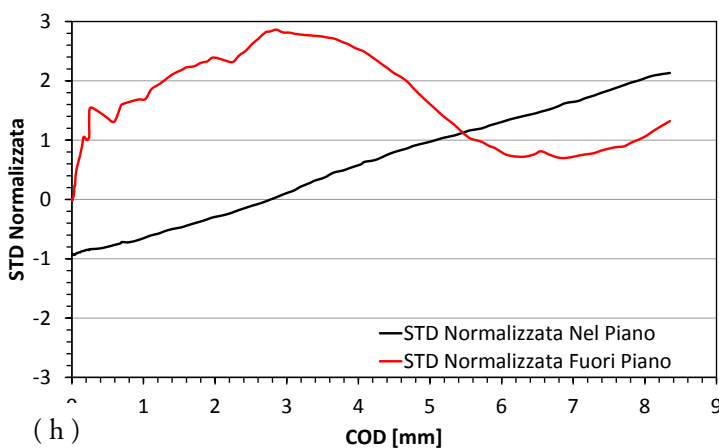
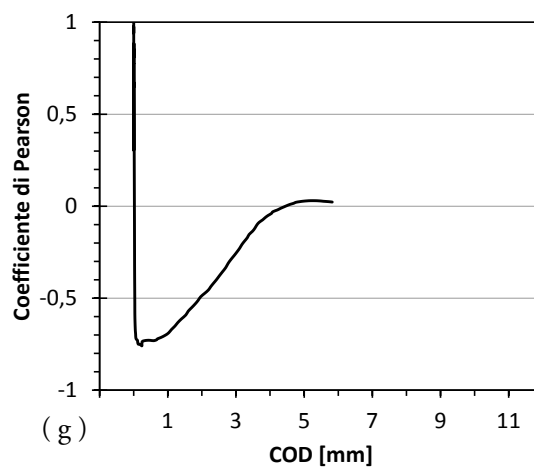
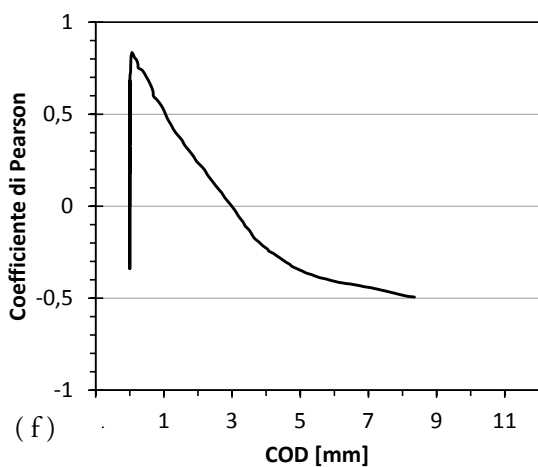
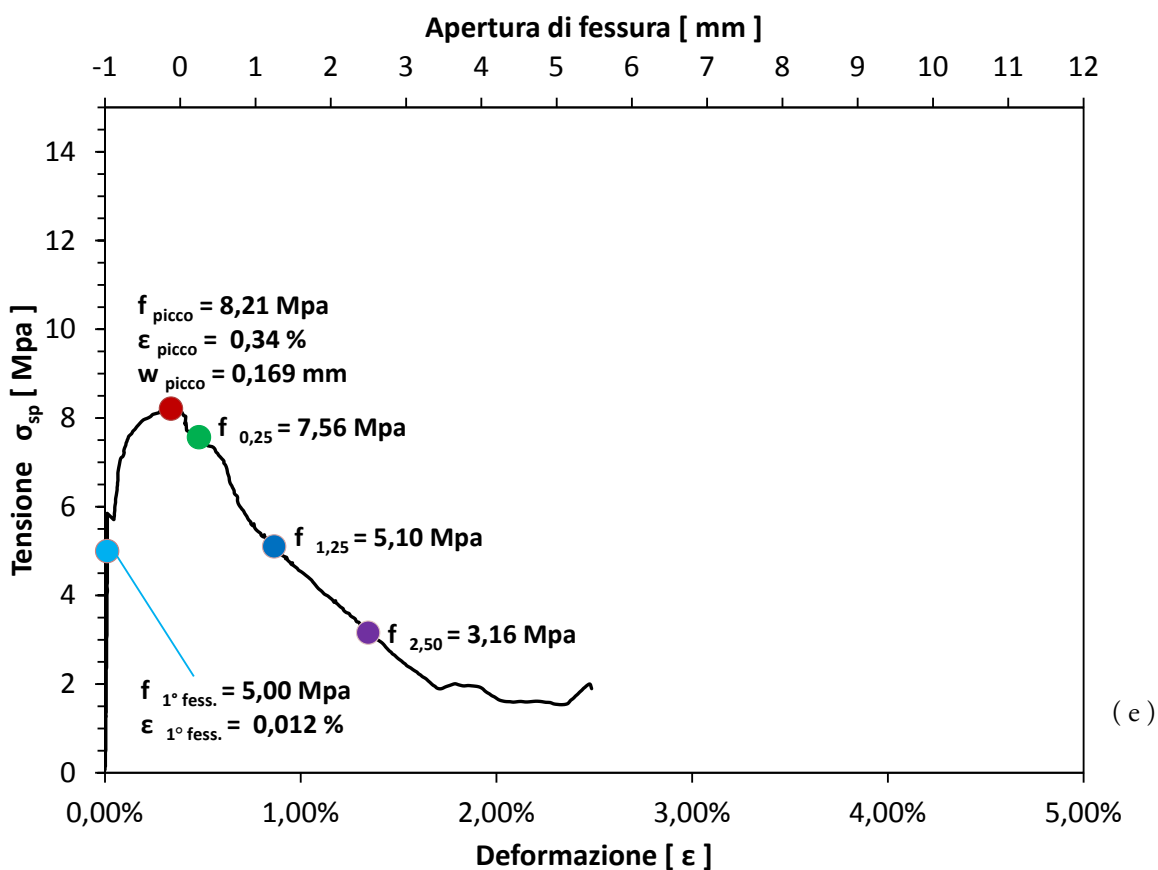


( a ) Curve Sforzo-COD; ( b ) Curva di confronto LVDT/COD; ( c ) Grafico di regressione LVDT/COD;  
( d ) Grafico Errore DIC;

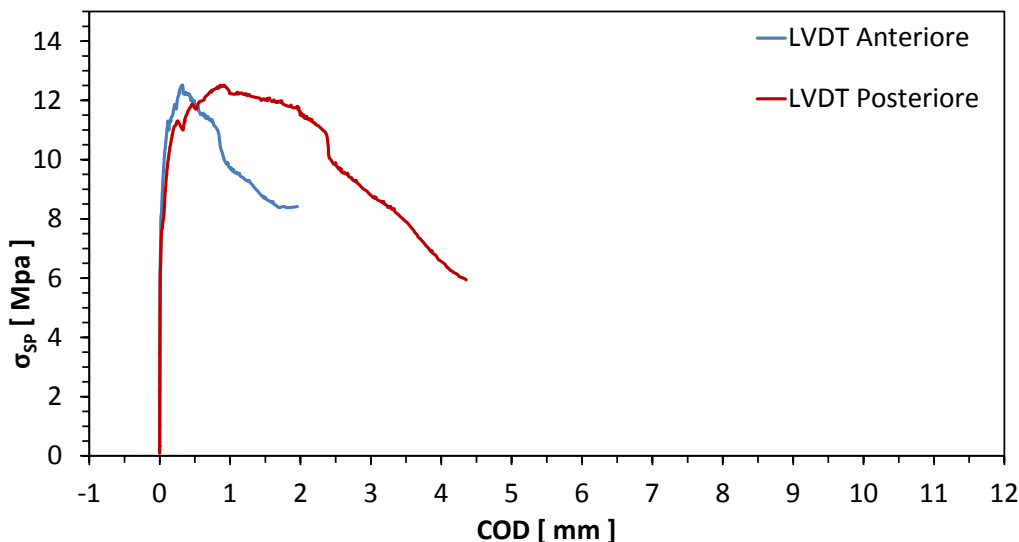


(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.





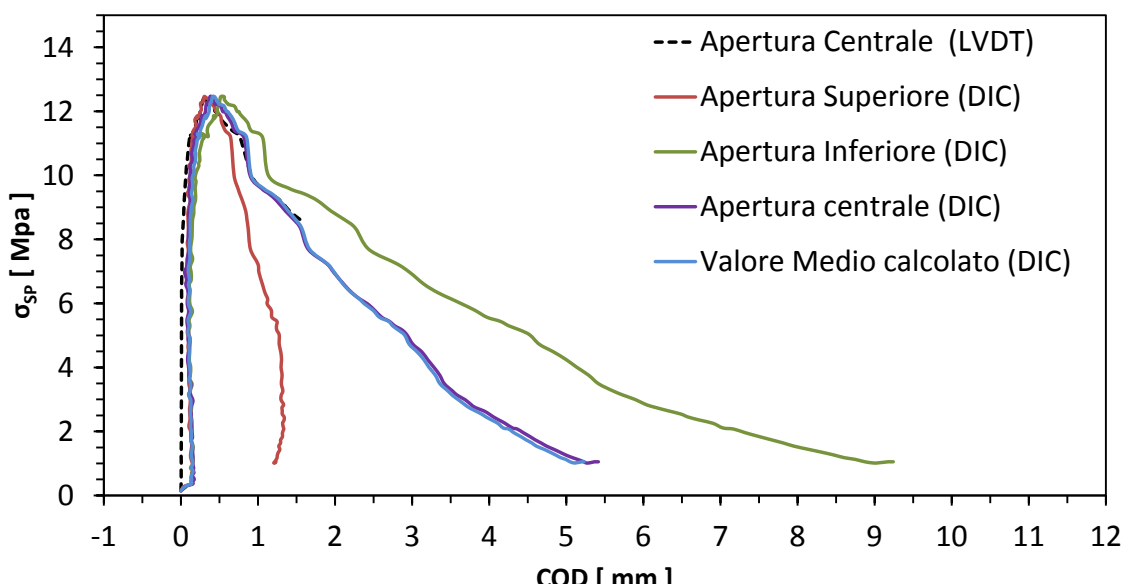
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



CAMPIONE  
221- L3

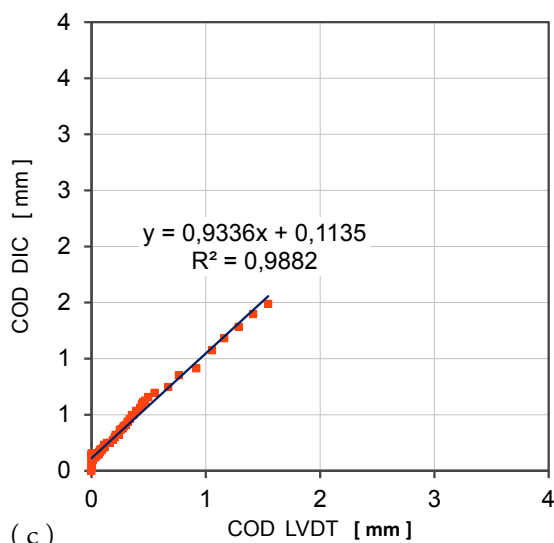
Indice di  
concentrazione:  
17,39 fibre/cm<sup>2</sup>

( a )

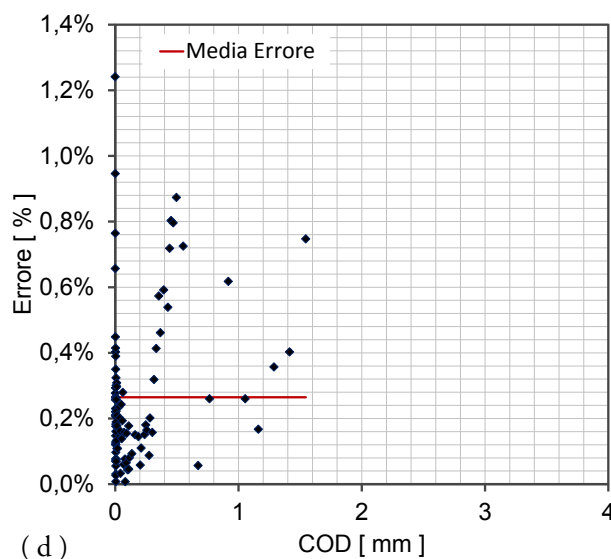


( b )

Confronto DIC/LVDT Errore massimo 1,24 % , medio 0,26 % , minimo 0,008 %  
S.E.R. 3,25 %

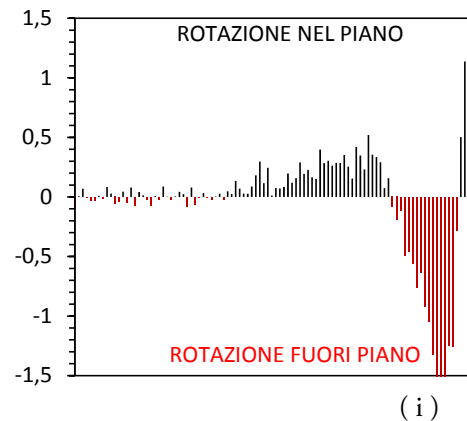
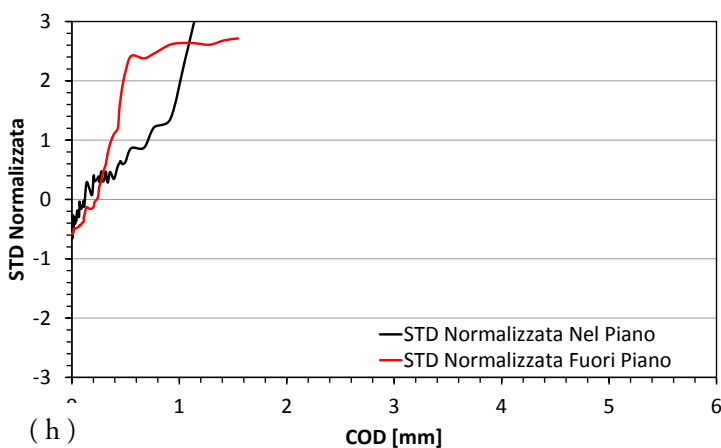
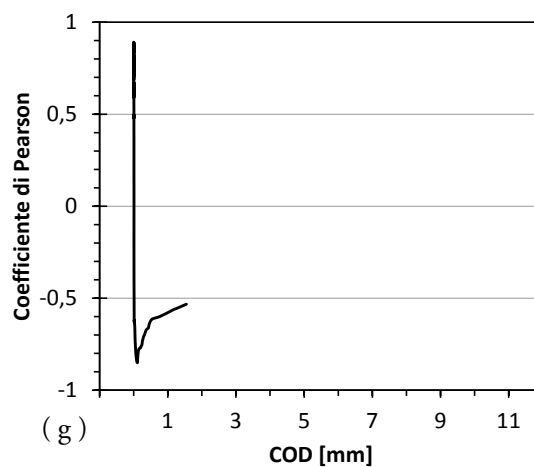
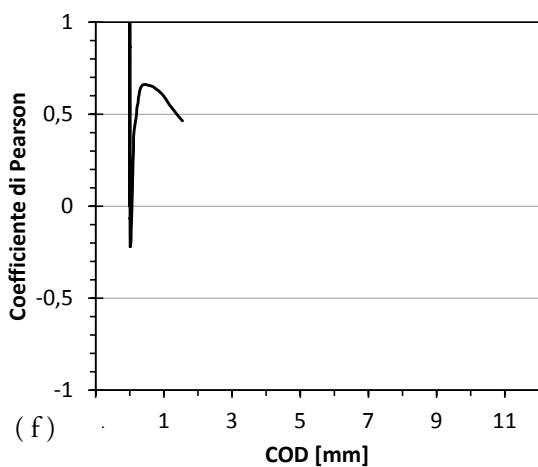
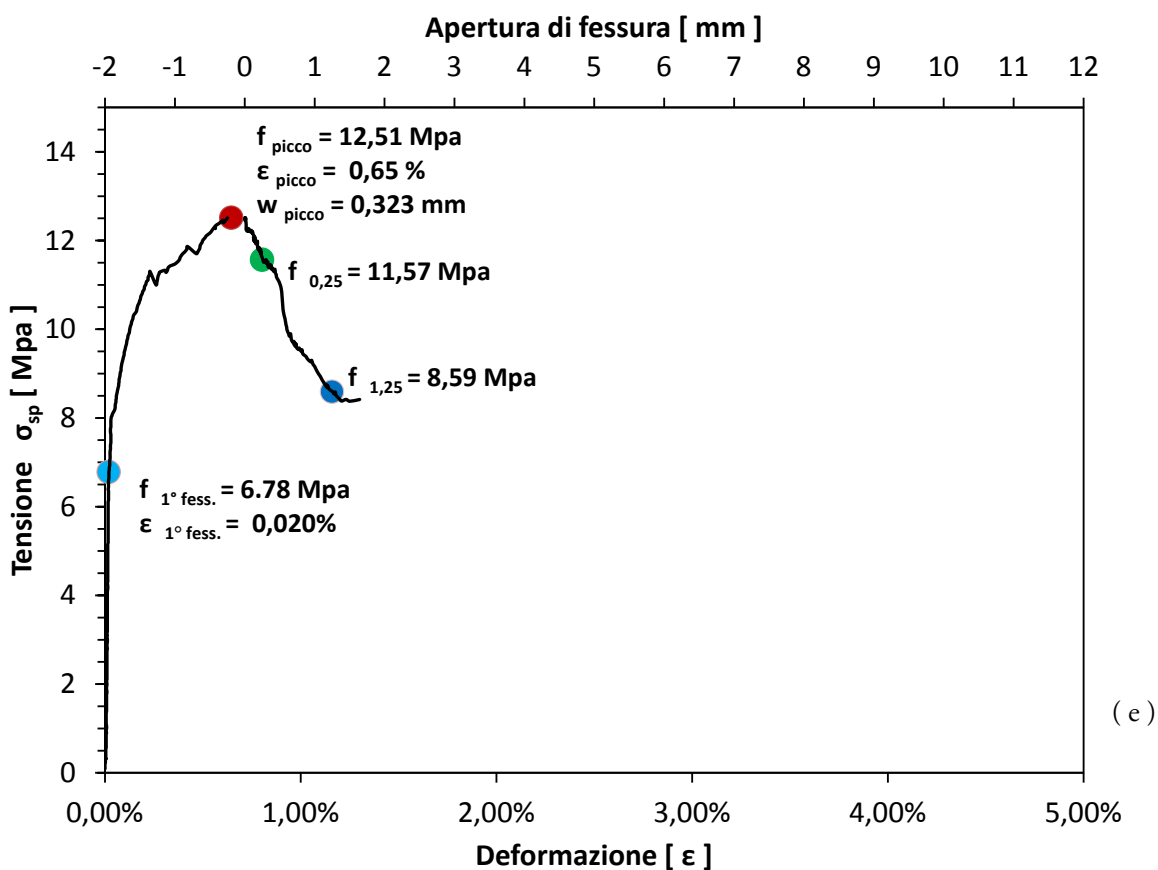


( c )



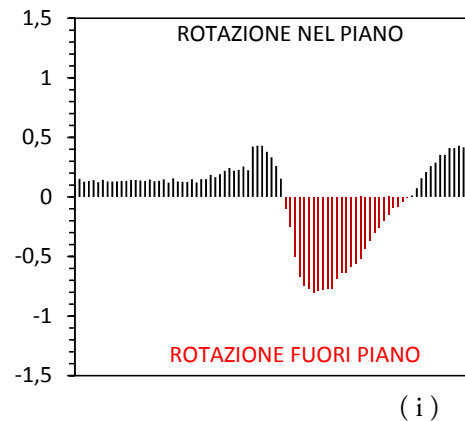
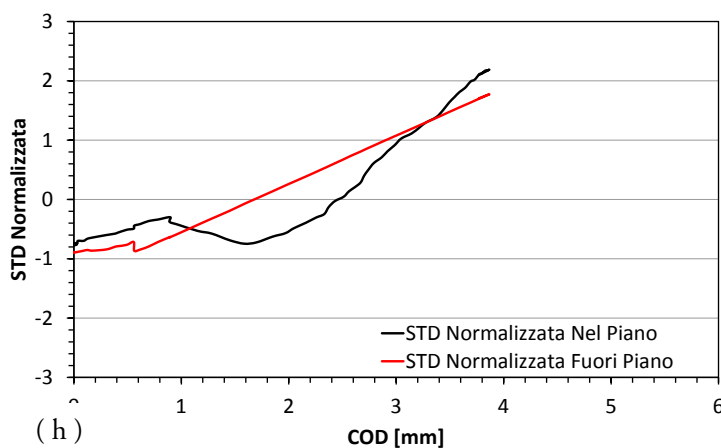
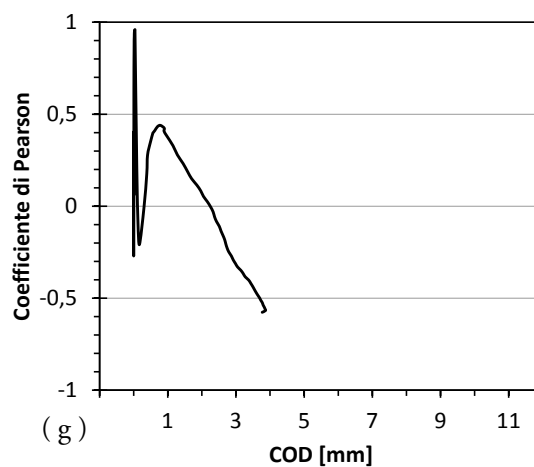
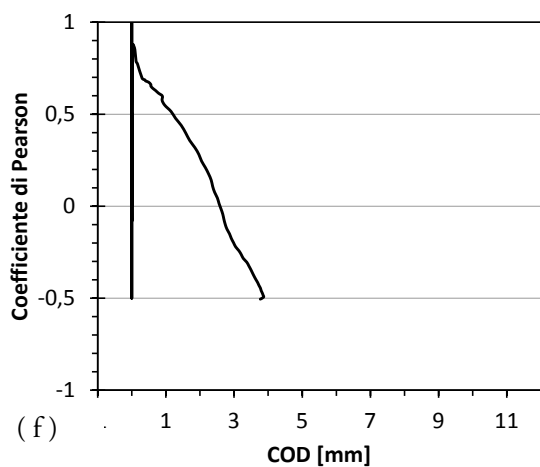
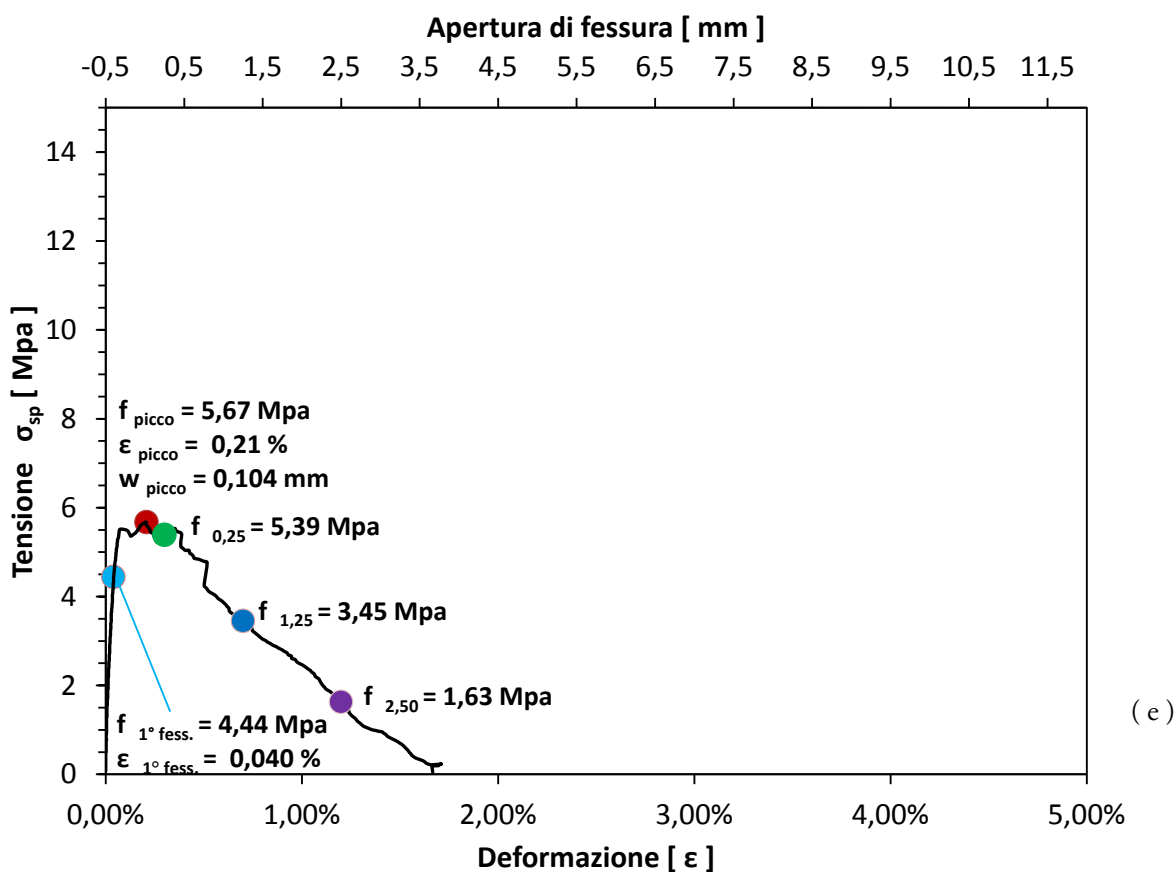
( d )

( a ) Curve Sforzo-COD; ( b ) Curva di confronto LVDT/COD; ( c ) Grafico di regressione LVDT/COD;  
( d ) Grafico Errore DIC;



(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.

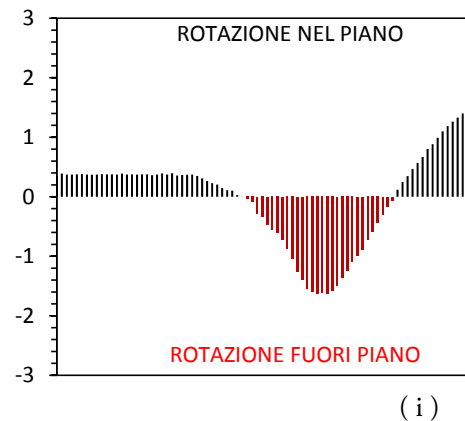
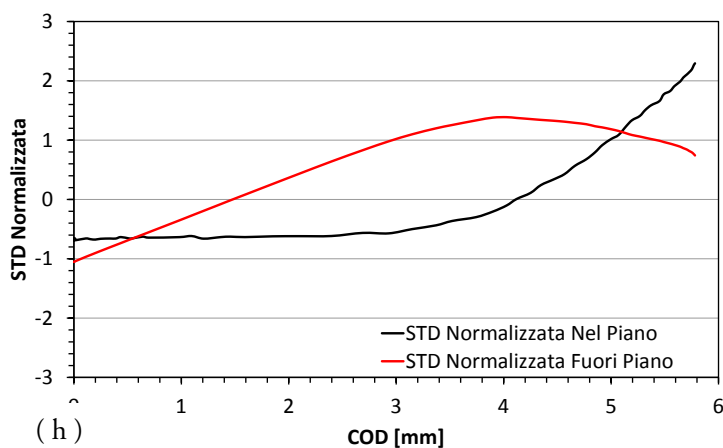
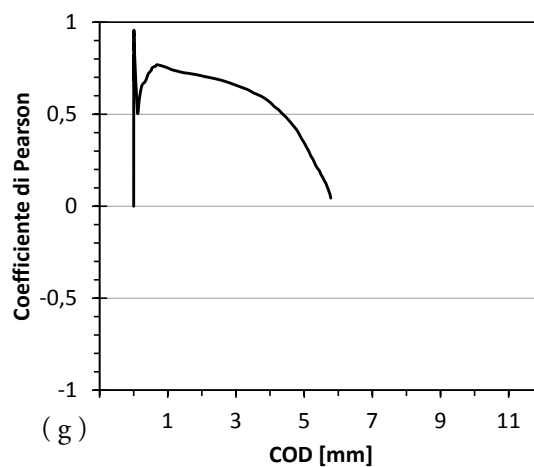
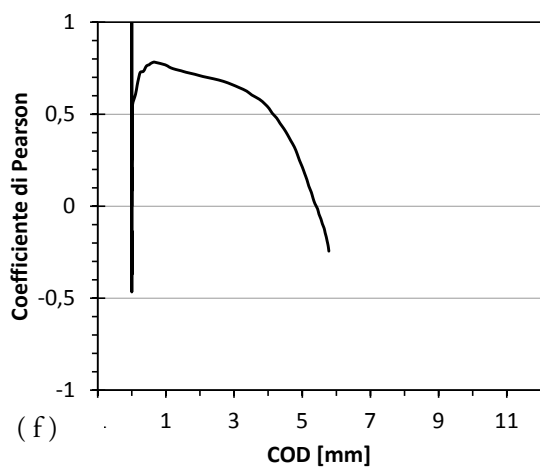
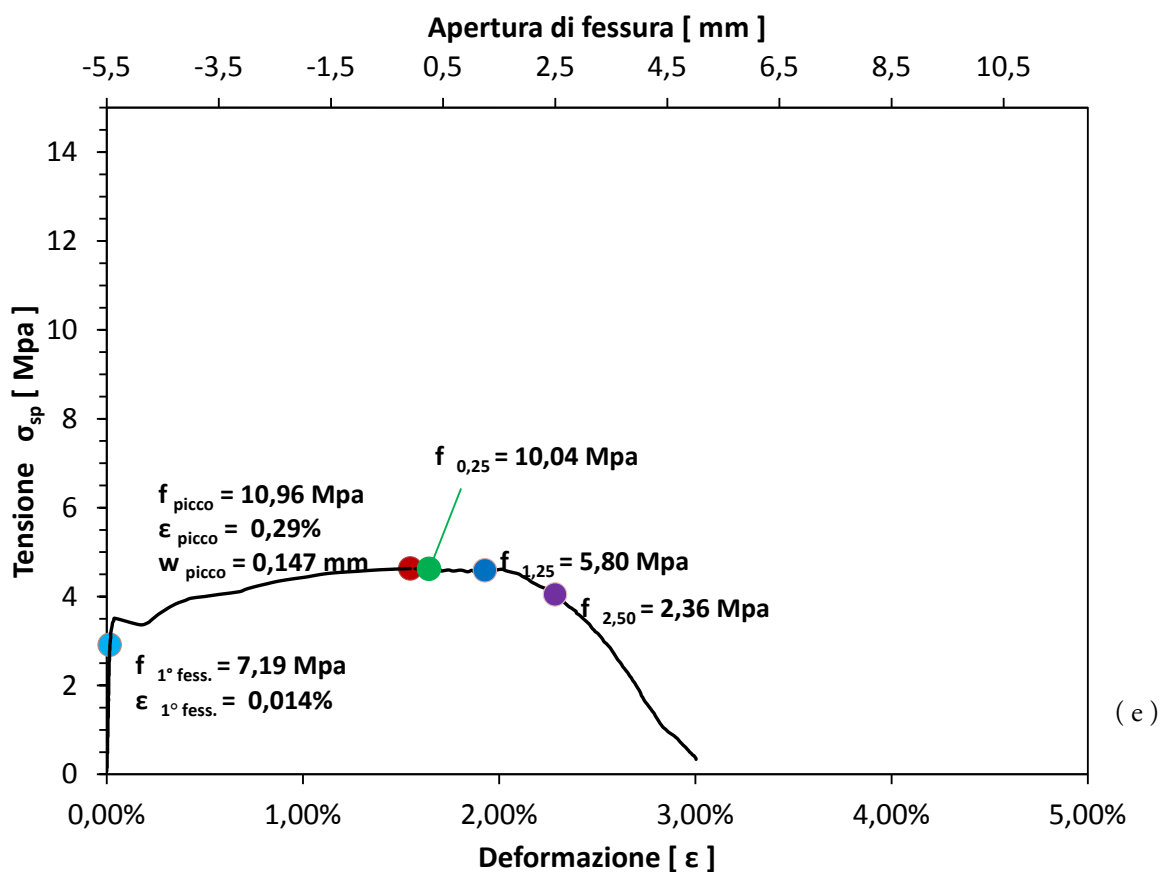




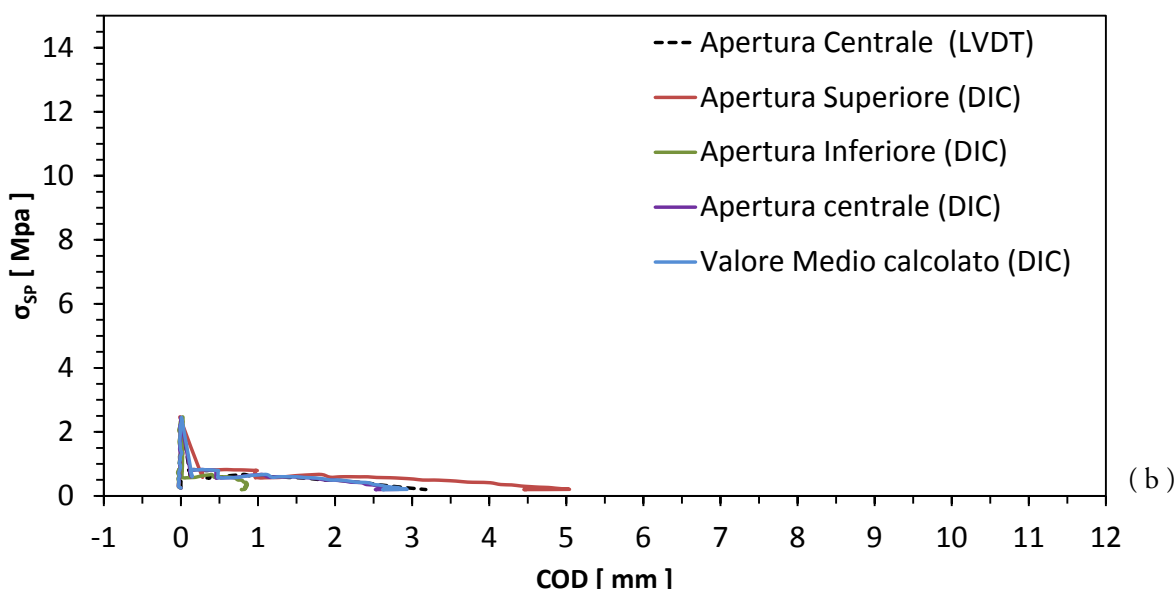
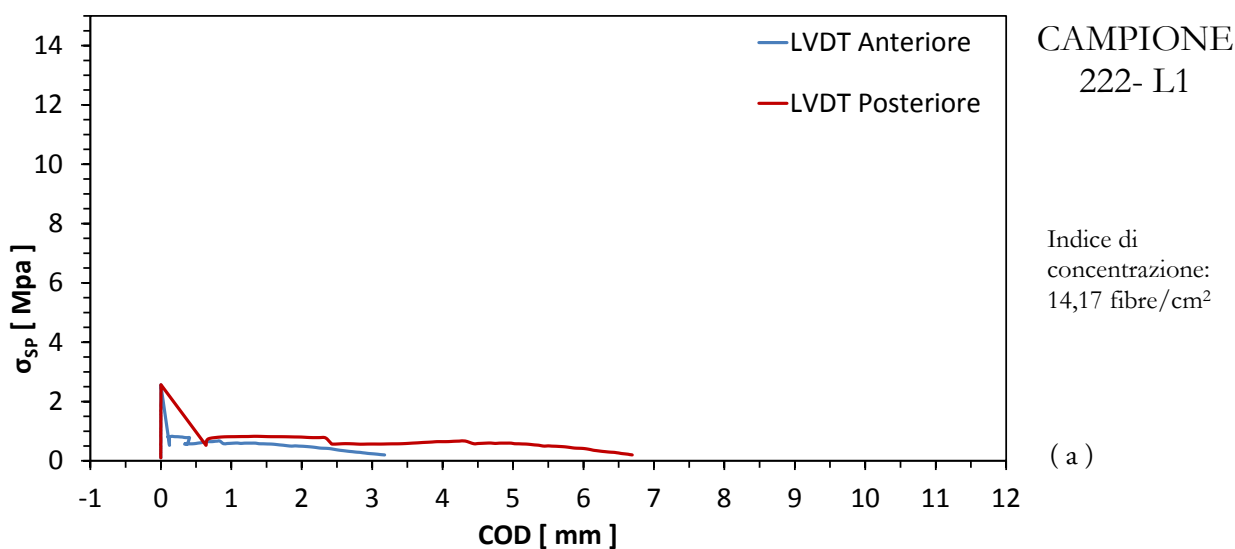
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



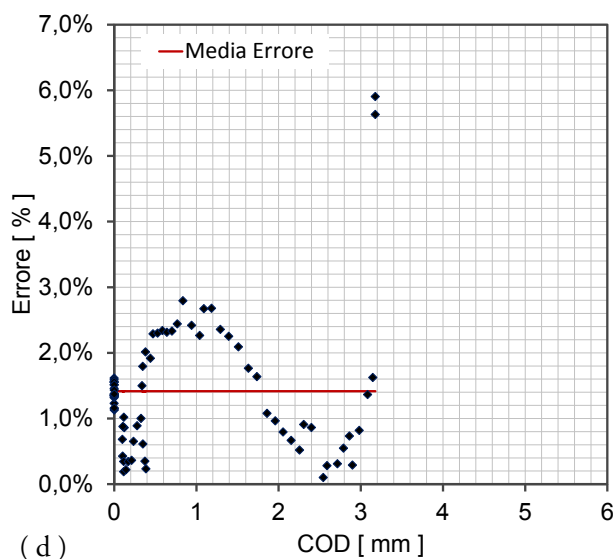
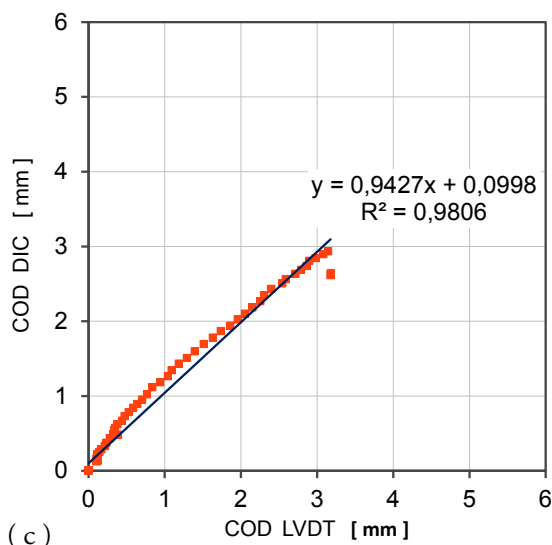




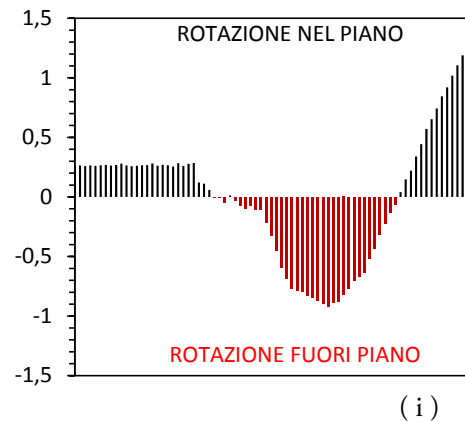
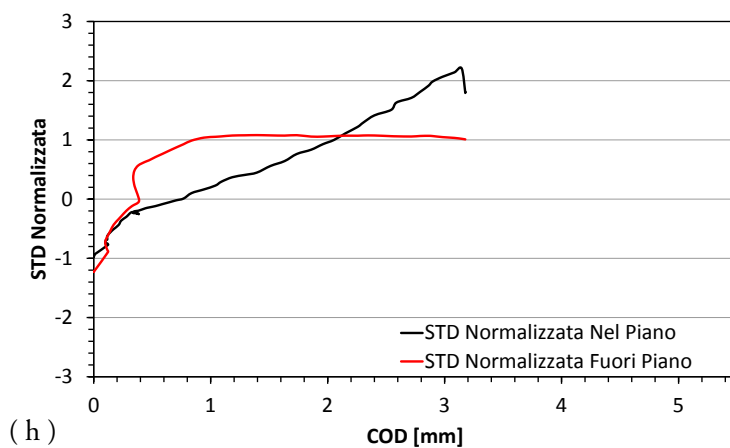
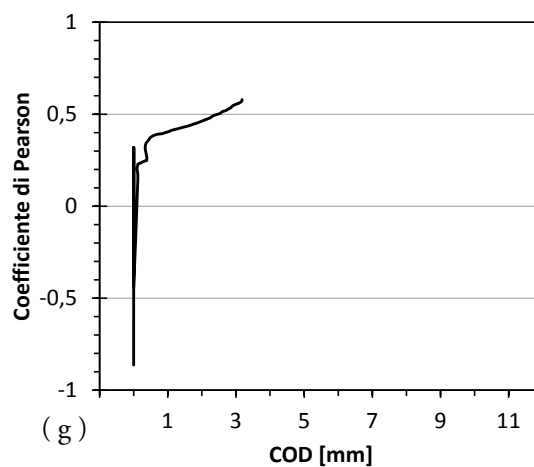
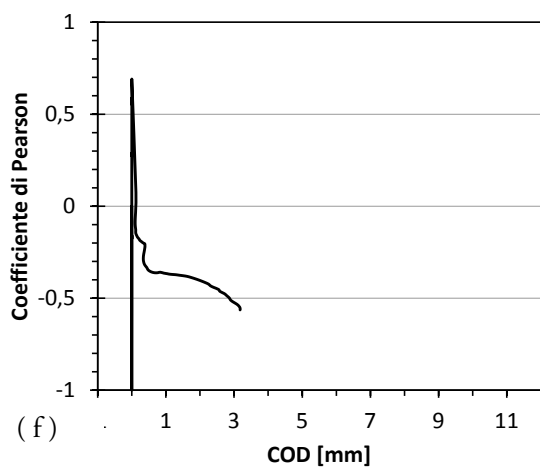
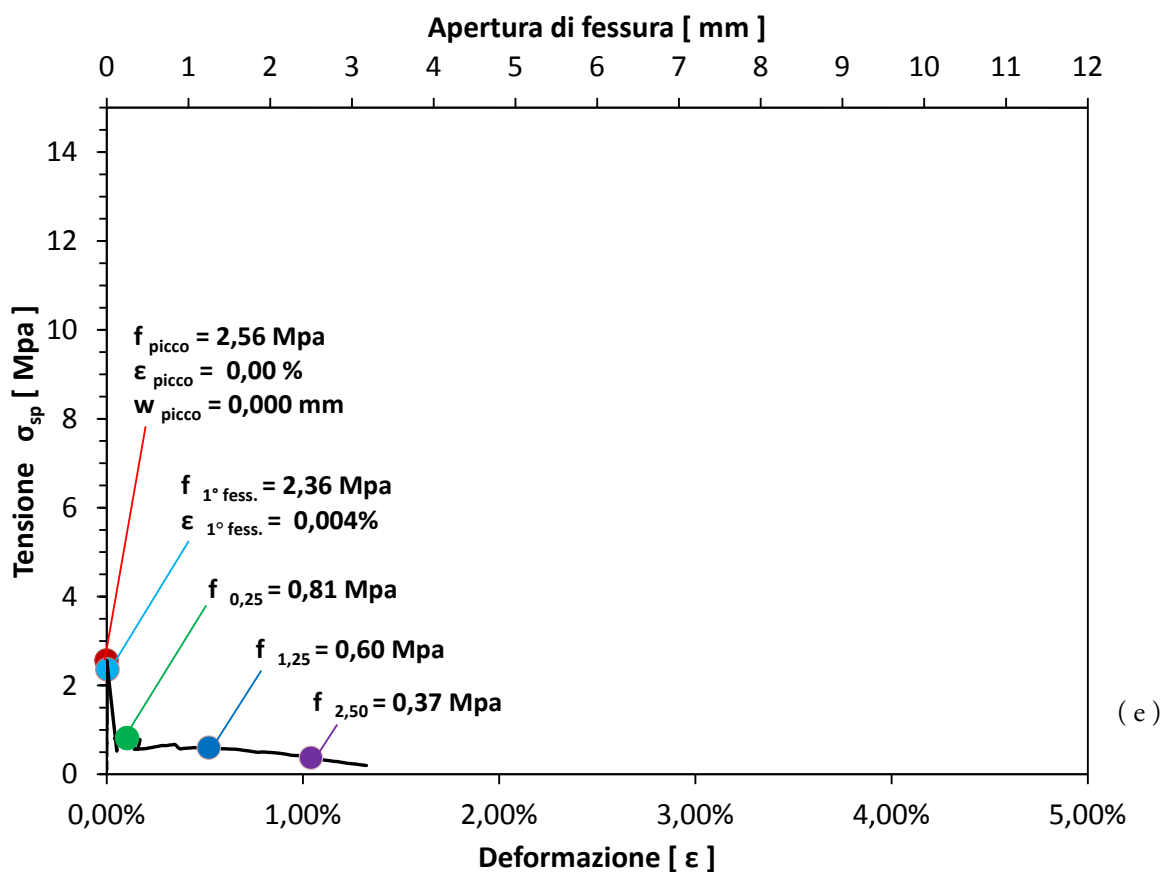
( e ) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; ( f ) Test di Pearson nel piano; ( g ) Test di Pearson fuori piano; ( h ) Grafico sulla modalità di rottura; ( i ) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



Confronto DIC/LVDT Errore massimo 5,90% , medio 1,42% , minimo 0,102 %  
S.E.R. 14,17 %

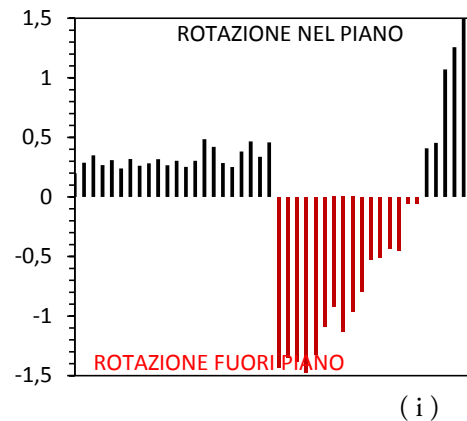
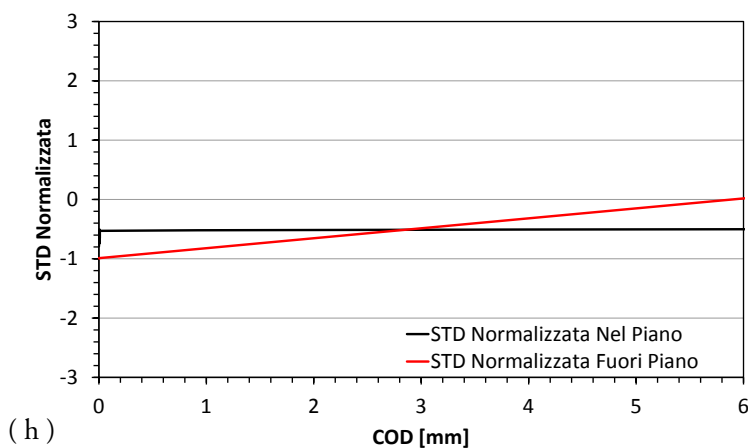
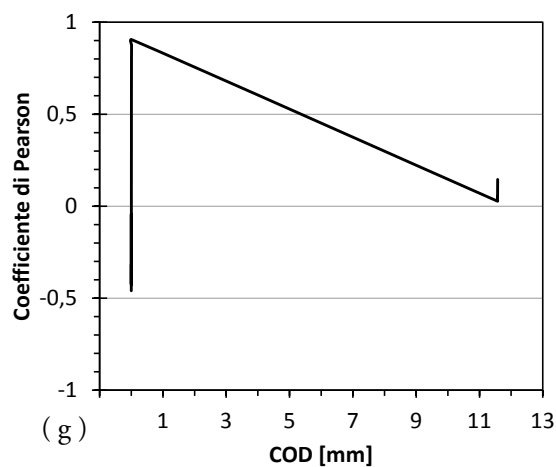
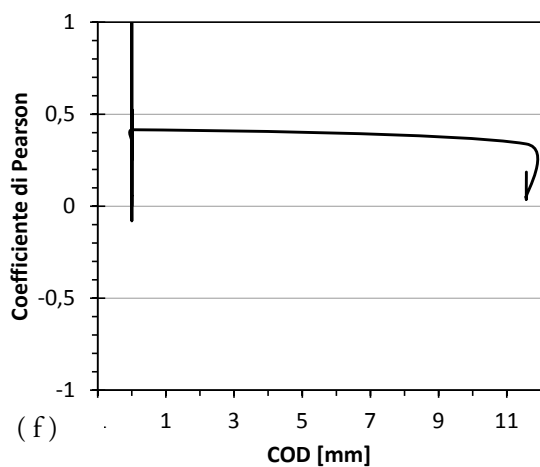
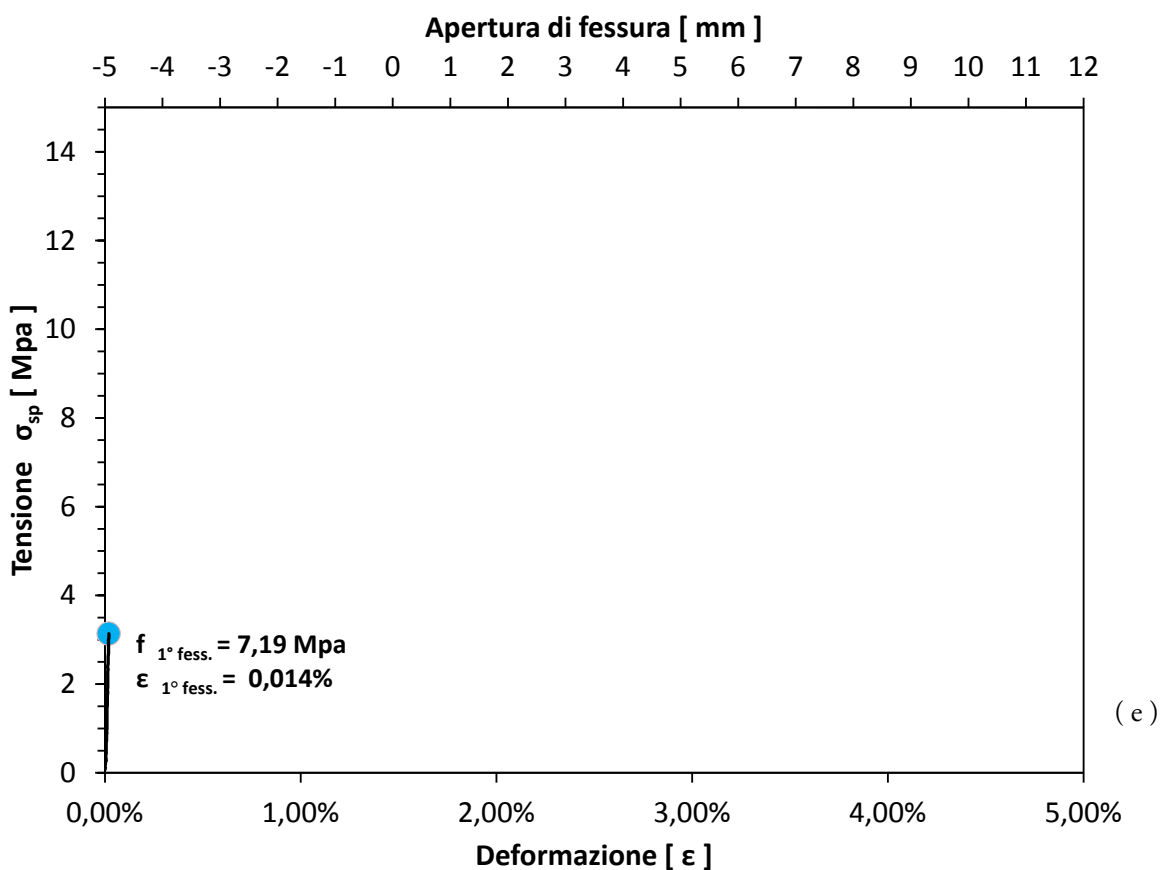


( a ) Curve Sforzo-COD; ( b ) Curva di confronto LVDT/COD; ( c ) Grafico di regressione LVDT/COD;  
( d ) Grafico Errore DIC;



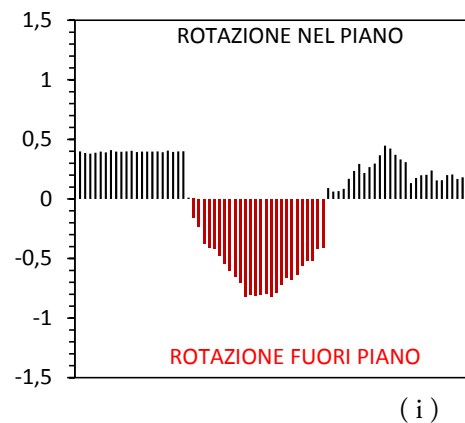
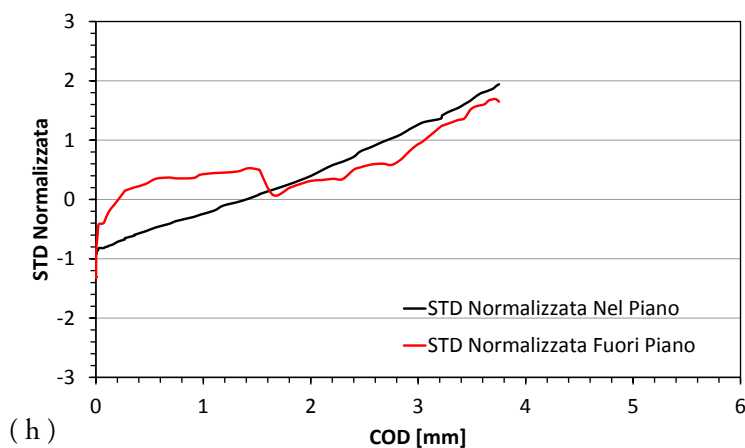
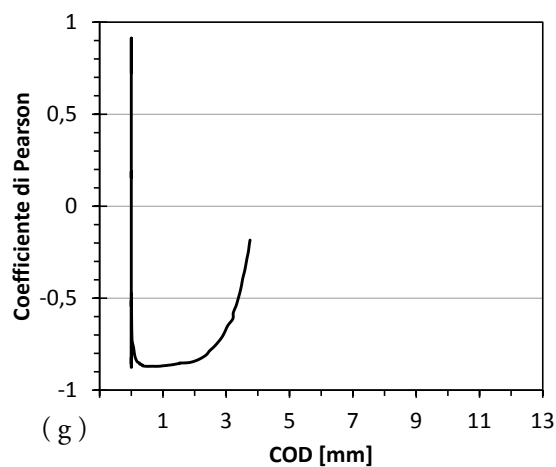
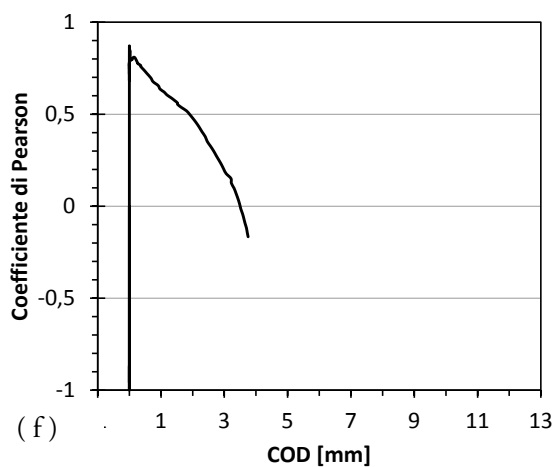
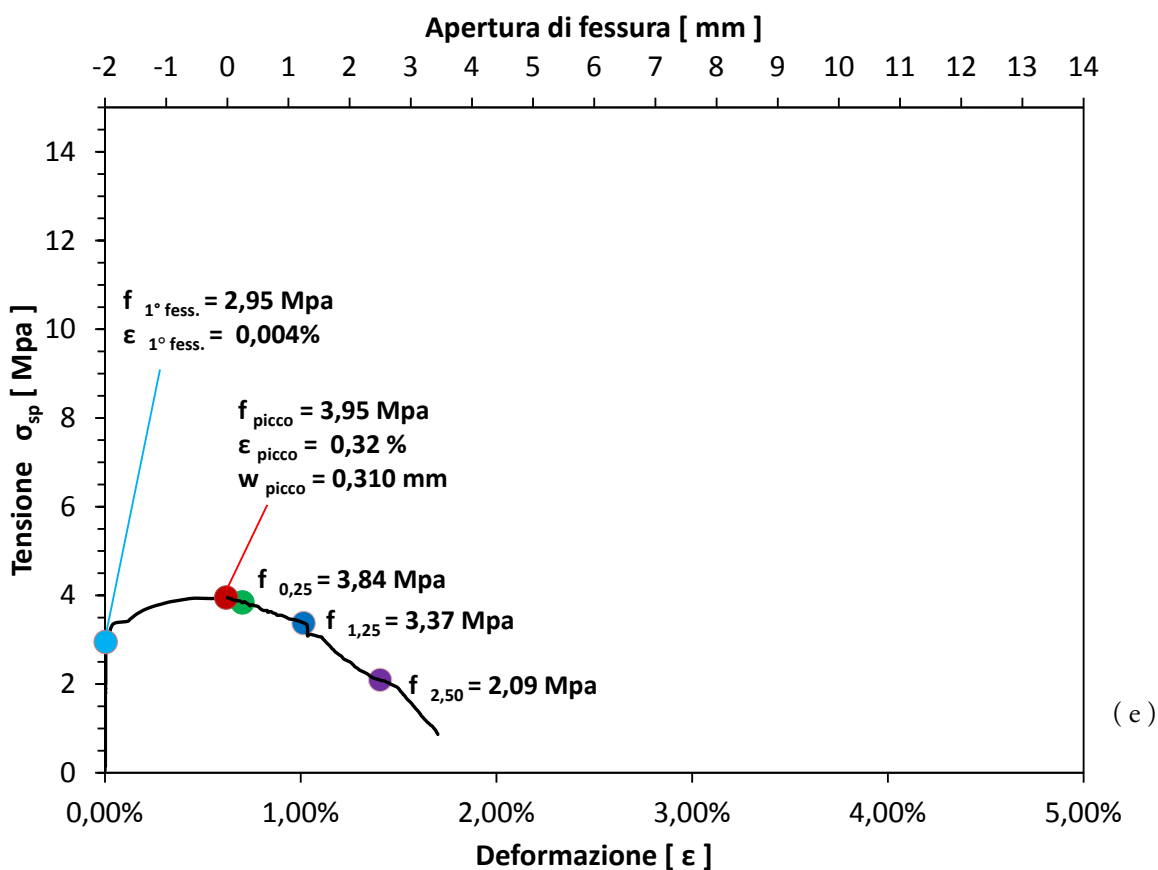
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.





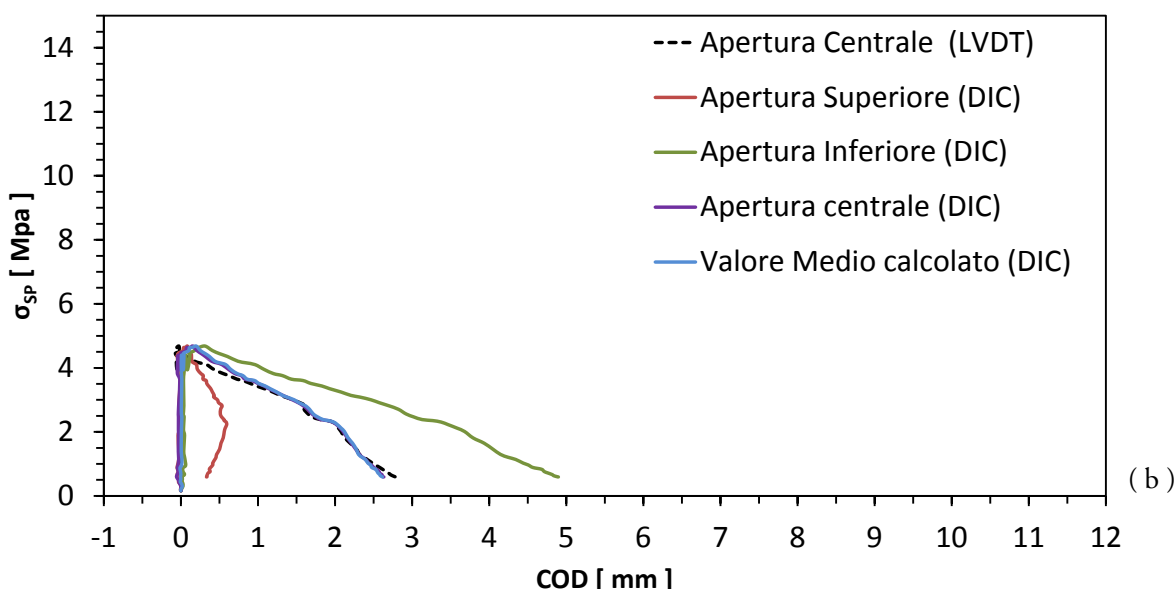
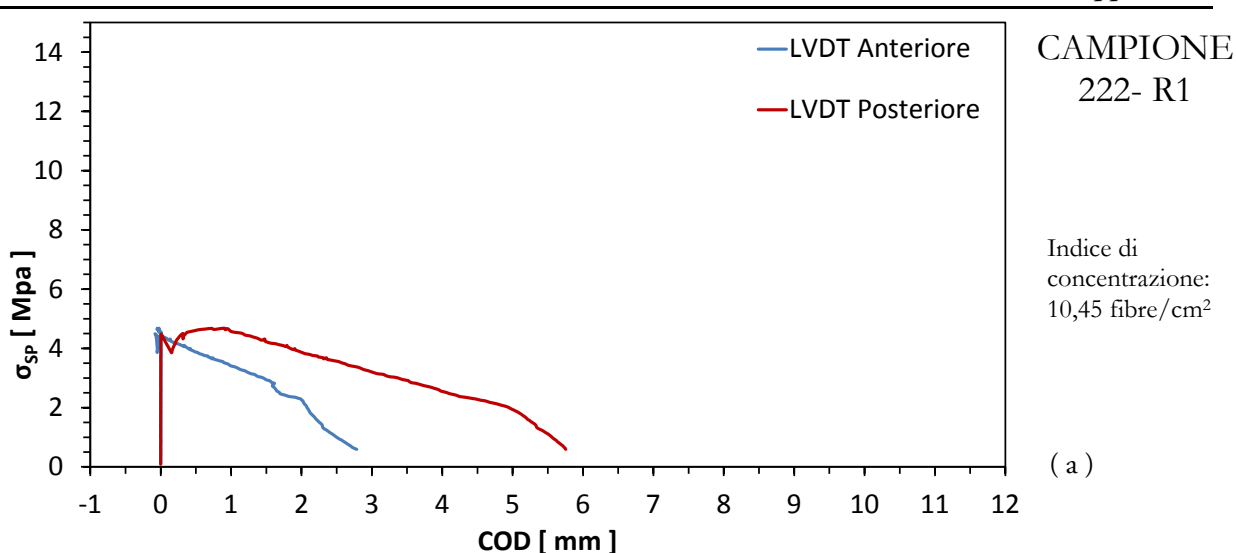
(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



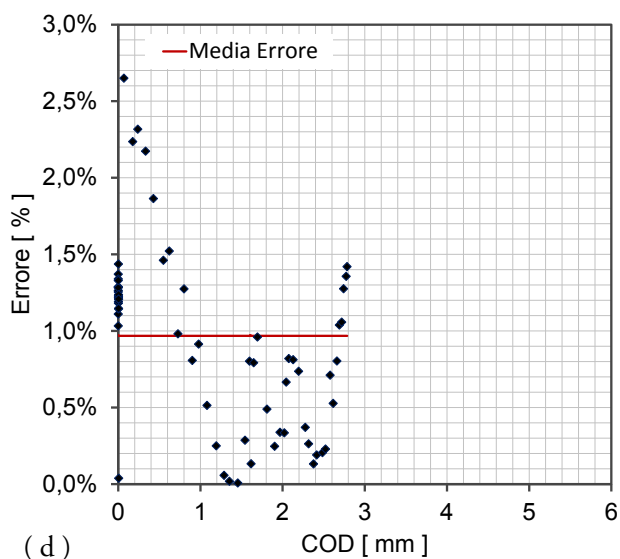
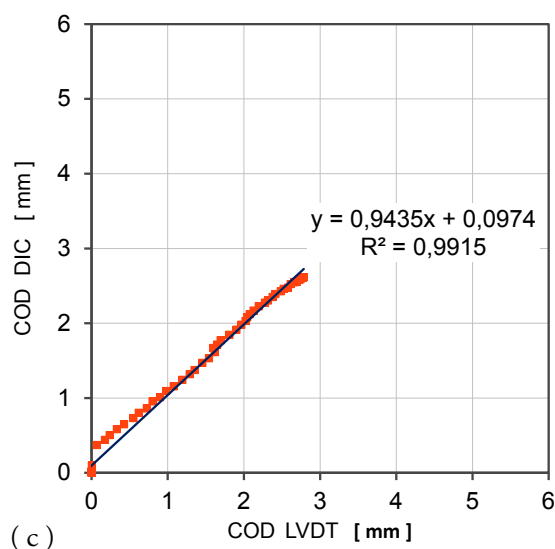


(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.

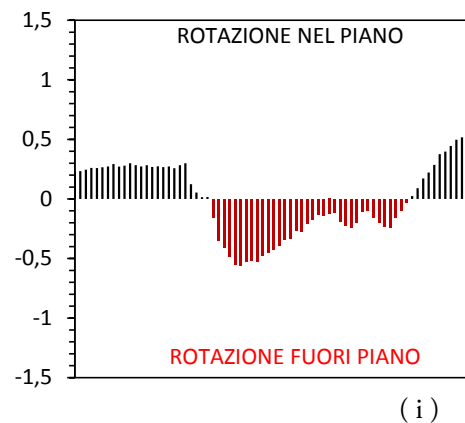
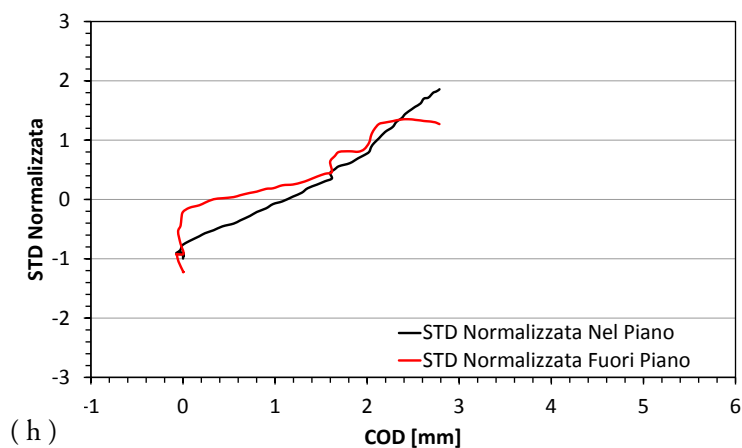
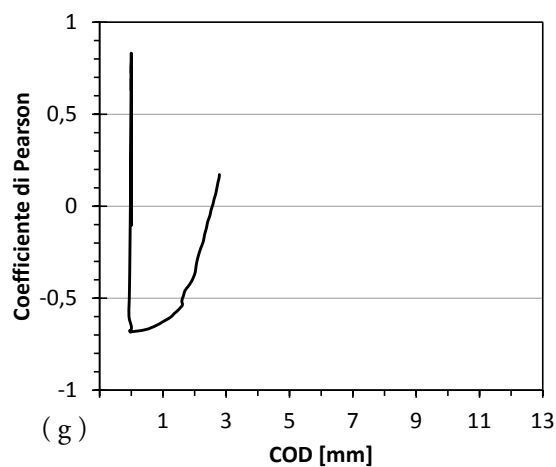
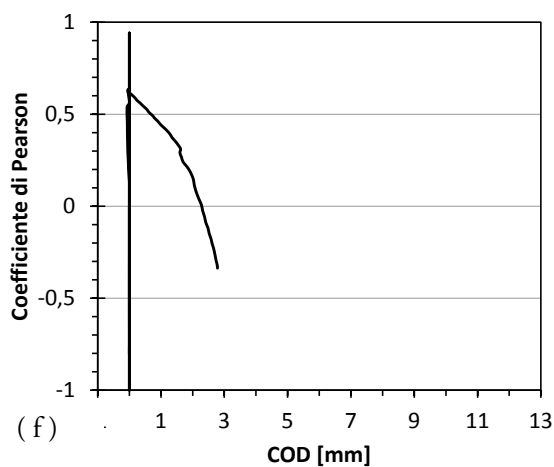
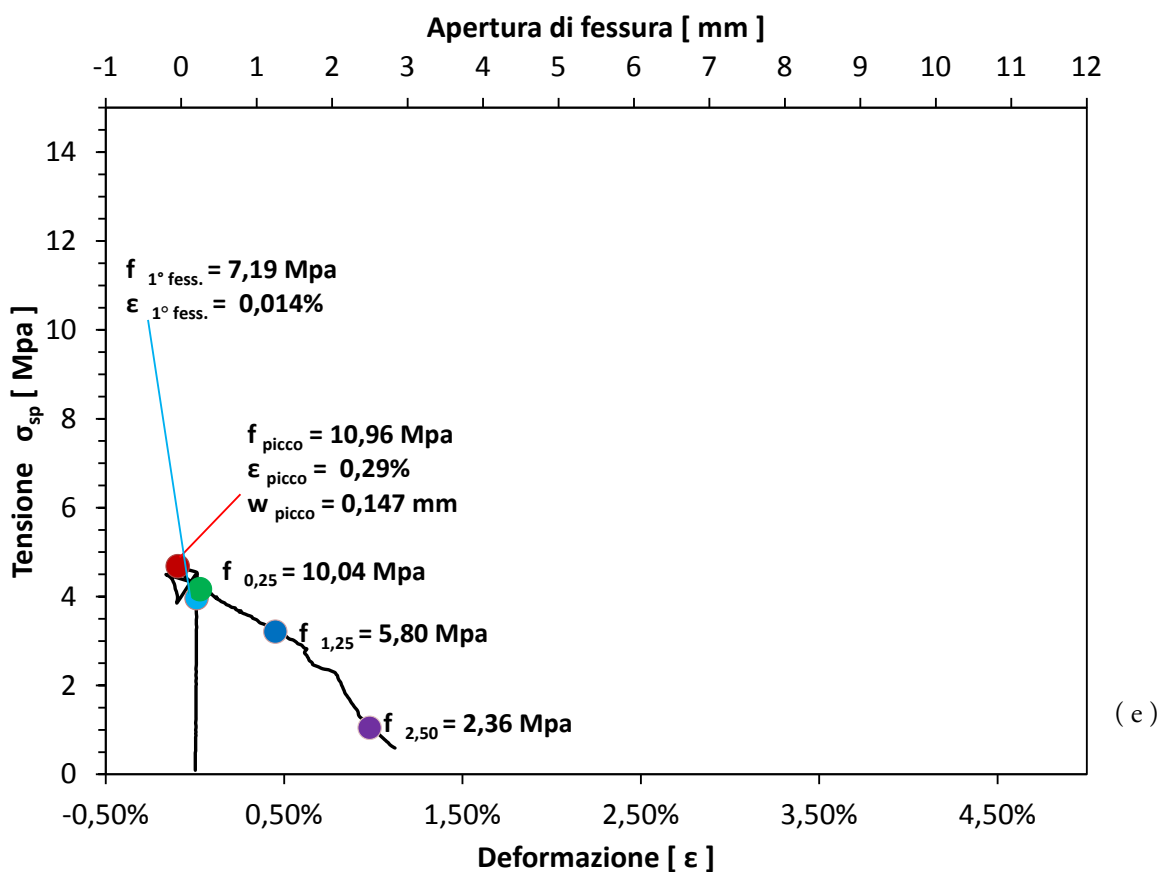




Confronto DIC/LVDT      Errore massimo 2,78 % ,      medio 0,97 % ,      minimo 0,008 %  
S.E.R.                                  9,22 %

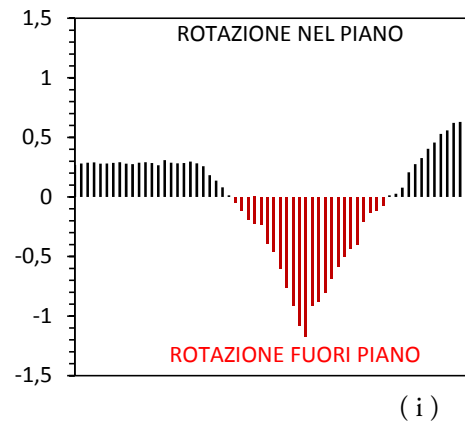
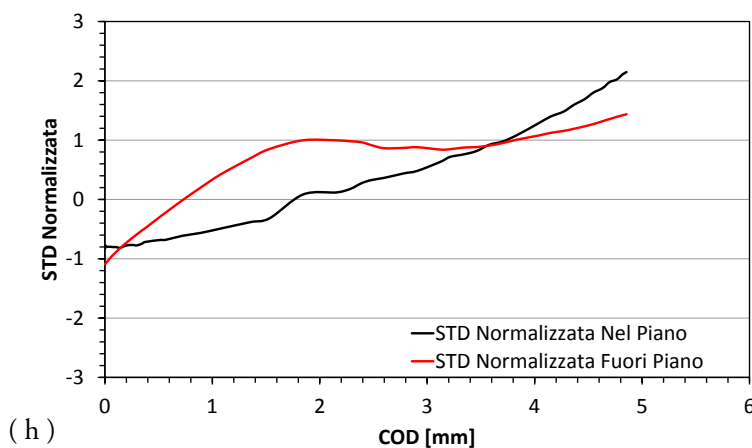
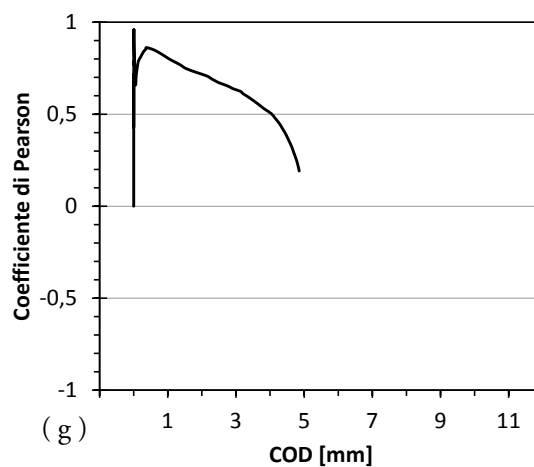
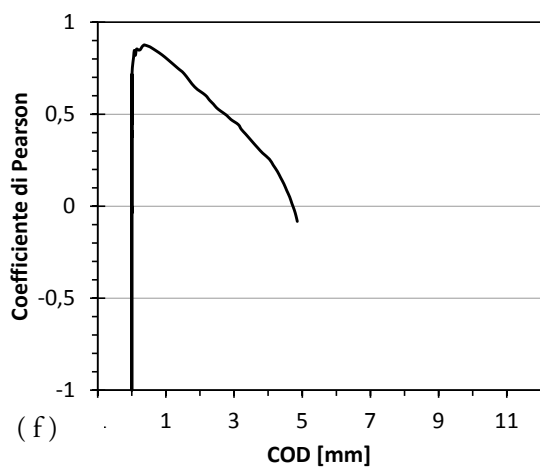
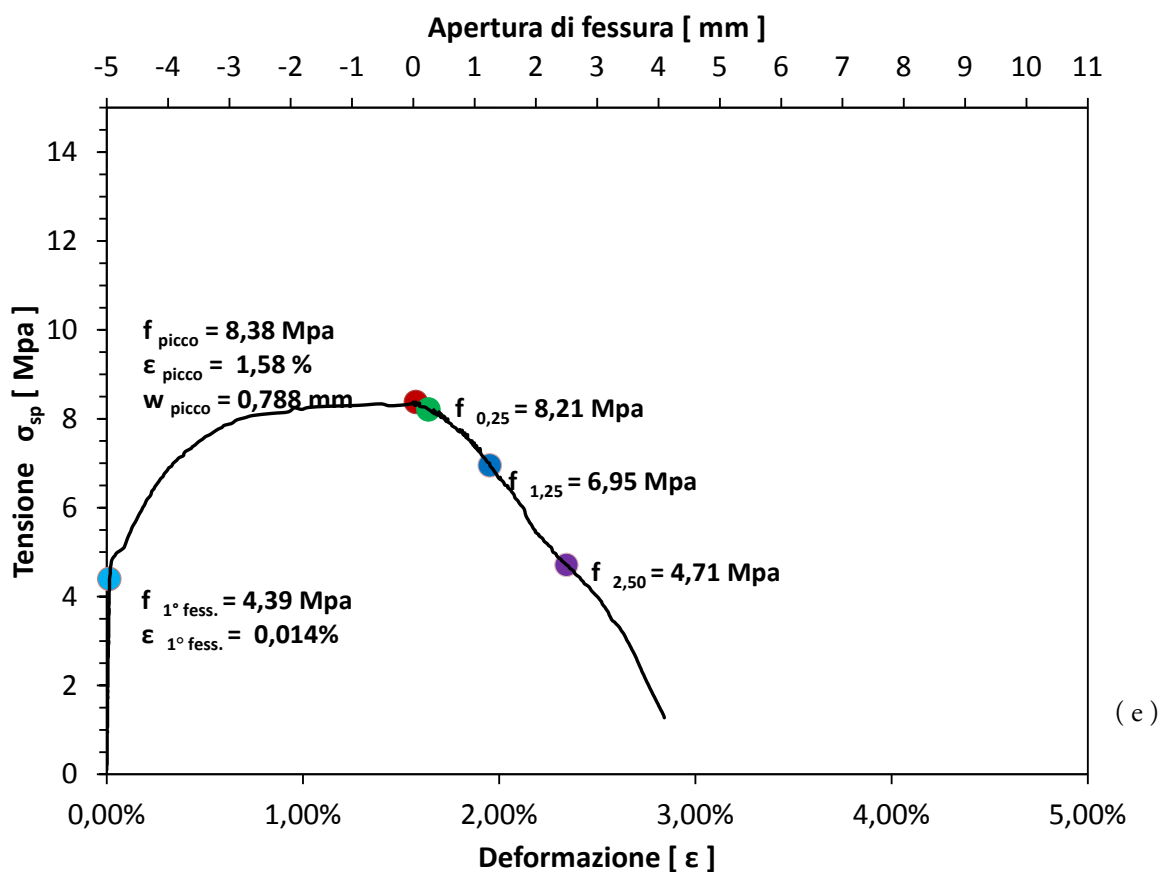


( a ) Curve Sforzo-COD; ( b ) Curva di confronto LVDT/COD; ( c ) Grafico di regressione LVDT/COD;  
( d ) Grafico Errore DIC;



(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.





(e) Grafico Sforzo-Deformazione/COD; (f) Test di Pearson nel piano; (g) Test di Pearson fuori piano; (h) Grafico sulla modalità di rottura; (i) Visualizzazione grafica della modalità di rotazione prevalente.



## ***RINGRAZIAMENTI***

Arrivato all'epilogo di queste pagine desidero ringraziare tutte le persone che sono state per me importanti durante questi anni, persone che hanno partecipato ai miei successi e alle mie cadute. Un enorme "Grazie" alla mia famiglia, che mi ha sostenuto e consigliato durante tutto questo tempo, senza farmi mai mancare nulla.

Una menzione particolare ai miei amici e compagni di corso Alessandro, Fabrizio ed Emanuele, per essere stati un grande punto di riferimento nei momenti di delusione e una ancor più grande compagnia nei momenti di gioia.

Enorme riconoscenza va al mio relatore, Prof. Liberato Ferrara, per avermi dato l'opportunità di sviluppare gli argomenti molto stimolanti ed innovativi trattati in questo lavoro e per l'aiuto fornitomi durante questi mesi.

Un sentito ringraziamento va anche all'Ing. Marco Lamperti. Con la sua disponibilità e la sua costante supervisione ho potuto affrontare al meglio questo impegno, raggiungendo risultati pienamente soddisfacenti.

Infine desidero ringraziare anche tutti coloro che lavorano presso il laboratorio di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Milano che hanno "sopportato" la mia presenza durante lo svolgimento del presente lavoro.



## ***BIBLIOGRAFIA***

- [1] Brandtl and A., "*Fibre reinforced cement-based (FRC) composites after over 40 years of development in building and civil engineering*", Composite structures, 2008.
- [2] A. Bentur and al., "*Cracking processes in steel fibre reinforced in a cement-based composites*", Cement and Concrete Research, 1985.
- [3] A. Bentur , S. Mindess, "*Fibre reinforced cementitious composites*", 2. ed. Taylor & Francis,, 2007
- [4] E. Bruhwiler, F.H. Wittman, "*The wedge splitting test: a new method of performing stable fracture mechanics tests*", Engineering Fracture Mechanics, Vol 35, Issues 1-3, Pag 117-125.
- [5] S.Carmona, A. Aguado "*New model for the indirect determination of the tensile stress–strain curve of concrete by means of the Brazilian test*", Materials and Structures , 2012
- [6] Y.W. Chan, V.C. Li, "*Effects of transition zone densification on fiber/cement paste bond strength improvement*", Elsevier Science Ltd, 1997.
- [7] K. Dagar , "*Slurry infiltrated fibrous concrete (Sifcon)*", International Journal of Applied Engineering and Technology, Vol. 2, 2012
- [8] M. Di Prisco, "*Fibre reinforced concrete for strong, durable and cost-saving structures and infrastructures*", Starrylink Editrice, Brescia 2007
- [9] M. Di Prisco, L. Ferrara, "*Double edge wedge splitting (DEWS): an indirect tension test to identify post-cracking behavior of fibre reinforced cementitious composites,*" 2013, RILEM 2013
- [10] C. Farina, "*Elementi multistrato in composito fibrorinforzato ad alte prestazioni con anima di schiuma*", Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, 2011/2012.
- [11] M. Foti, "*Studio della correlazione tra dispersione delle fibre e proprietà meccaniche di HPFRCC*", Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, 2012/2013.



- 
- [12] L. Ferrara, A. Meda, “*Relationships between fibre distribution, workability and the mechanical properties of SFRC applied to precast roof elements*”, Materials and Structures, 2006, RILEM 2006
- [13] L. Ferrara, N. Ozyurt , M. Di Prisco, “ *High mechanical performance of fibre reinforced cementitious composites: the role of “casting-flow induced” fibre orientation.*”, 2010, RILEM 2010.
- [14] L. Ferrara, M. di Prisco & M.G.L. Lamperti " *Identification of the stress-crack opening behavior of HPRCC: the role of flow-induced fiber orientation*" Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, 2010.
- [15] L. Ferrara, M. Faifer, S. Toscani, “*A magnetic method for non destructive monitoring of fiber dispersion and orientation in steel fiber reinforced cementitious composites – part 1: method calibration*”, 2011, RILEM 2011.
- [16] C. Jaturapitakkul and al., “*Use of ground coarse fly ash as a replacement of condensed silica fume in producing high-strength concrete*,” Cement and Concrete Research 34, 2004.
- [17] O. Kayali and al., “*Effect of high volume of fly ash on mechanical properties of fiber reinforced concrete*”, Materials and Structures, 2004.
- [18] D.J. Kim and al., “*Rate-dependent tensile behaviour of high performance fiber reinforced cementitious composites*”, Materials and Structures, 2009.
- [19] A.E. Naaman, H.W. Reinhardt, “*High performance fiber reinforced cement composites HPRCC-4:International workshop Ann Arbor, Michigan, June 16–18, 2003*”, Cement & Concrete Composites 26 (2004), Pag. 757–759.
- [20] A.E. Naaman, H.W. Reinhardt, “*Proposed classification of HPRFC composites based on their tensile response*”, Materials and Structures, 2006, Pag. 547–555.
- [21] M. Shannag, W. Hansen, P. Tjiptobroto, “ *Interface Debonding in Fiber Reinforced Cement-Matrix Composites*”, Journal of Composite Materials January 1999 Vol. 33 Pag. 158-176.
- [22] J. Skocek \*, H. Stang, “*Inverse analysis of the wedge-splitting test*“, Engineering Fracture Mechanics, Volume 75, Issue 10, 2008, Pag. 3173–3188.
- [23] P. Stroeven, H. Chen, J. Hu and J. Zheng, “*ITZ in plain and fiber concrete*”, 6<sup>th</sup> Symposium on Fibre-Reinforced Concretes (FRC) , BEFIB 2004, RILEM, Pag. 903-912.
- [24] J. Van Mier, “*Cementitious composites with high tensile strength and ductility through hybrid fibre*”, 6<sup>th</sup> Symposium on Fibre Reinforced Concrete (FRC), BEFIB2004, RILEM, Pag. 219–235.
-

- 
- [25] R.F. Zollo, *"Fiber-reinforced Concrete: an Overview after 30 Years of Development"*, Cement and concrete composites, 1997.
- [26] X.H. Wang and al., *"Effect of silica fume, steel fiber and ITZ on the strength and fracture behavior of mortar"*, Material and Structures, 2004.
- [27] CEB/FIB, "Model Code", 2010
- [28] A. Asundi, H. M. Xie and J. X. Gao. B. Pan, *"Digital image correlation using iterative least square and pointwise least squares for displacement field and strain field measurements"*, Opt. Laser. Eng., 2009, pp. 57-73.
- [29] J. Bai, P. He and K.Ying J. W. Luo, *"Axial strain calculation using a low-pass digital differentiator in ultrasound elastography"*, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, vol. 51,2004, pp. 1119-1127.
- [30] J.R. Braasch, M.A. Sutton H.W. Schreier, *"Systematic Errors in Digital Image Correlation Caused by Intensity Interpolation"*, Optical Engineering, vol. 39, n 11, pp 2915-2921, 2000.
- [31] A. Daverio. M. Lupia, *"Digital Image Correlation: pre-processing delle immagini per la riduzione dell'incertezza ed applicazioni allo studio del size effect di travi"*, Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, 2010/2011.
- [32] B. D. Lucas and T. Kanade, *"An iterative image registration technique with an application to stereo vision"*. Proceedings of Imaging Understanding Workshop, pages 121-130, 1981.
- [33] A. Muracciole , J. M. Nemoz-Gaillard B. C. Watrisse, *"Analysis of strain localization during tensile tests by digital image correlation"*, Exp. Mech., vol. 41, pp. 29-39, 2001.
- [34] B. Pan, K. Qian, H. Xie, A. Asundi, *"Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement: a review"*, Measurement Science and Technology, vol. 20, April 2009.
- [35] B.Pan, *"Recent Progress in Digital Image Correlation"* Experimental Mechanics, vol. 51, 2011.
- [36] H. Sol, J. Vantom, A. Habraken, D. Lecompte, *"Analysis of speckle patterns for deformation measurements by digital image correlation"*, SPIE Digital Library, 2006.
- [37] M.A. Sutton et al., *"Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements: Basic Concepts, Theory and Applications"*, Springer Science + Business Media, 2009.

- [38] W. Tong, "*Detection of plastic deformation patterns in a binary aluminium alloy*", Exp. Mech, vol. 452, no. 9, p. 37, 1997.
- [39] J. L. Turner, H. A. Bruck and T. A. Chao, M. A. Sutton, "*Full-field representation of discretely sampled surface deformation for displacement and strain analysis*", Exp. Mech., vol. 31, pp. 168-77, 1991.
- [40] C.C.B. Wang, "*An automated approach for direct measurements of two dimensional strain distributions within articular cartilage under unconfined compression*", Trans. ASME, J. Biomech Eng, vol. 557, no. 67, p. 124, 2002.
- [41] K. Ying, P. He and J. Bai J. W. Luo, "*Properties of Savitzky-Golay digital differentiator method*", Digit. Signal Process, vol. 15, pp. 122-136, 2005.
- [42] G. F. Xiang et al, "*Time resolved deformation measurements of the Portevin-Le Chatelier bands*", Ssr. Mater., vol. 721, no. 4, p. 56, 2007.
- [43] "*Fibers as structural element for the reinforcement of concrete*", Technical manual, Maccaferri.