

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea in  
Ingegneria Energetica



ANALISI ALLE DIFFERENZE FINITE  
DI PANNELLI RADIANTI A PAVIMENTO

Relatore: Prof. Luca MOLINAROLI

Tesi di Laurea di:

Guglielmo VERI Matr. 783908

Anno Accademico 2012 – 2013



*Non chi comincia  
ma quel che persevera*

*Alla mia famiglia.  
Agli amici.  
A chi ha curato  
la mia formazione.*



# Indice

<b>Elenco delle figure</b> .....	iii
<b>Elenco delle tabelle</b> .....	v
<b>Sommario e Parole Chiave</b> .....	vii
<b>Abstract and Key Words</b> .....	vii
<b>Introduzione</b> .....	1
<b>1 I sistemi a pannelli radianti</b> .....	3
1.1 Cenni storici.....	3
1.2 Vantaggi .....	4
1.2.1 Qualità dell'aria ambiente .....	4
1.2.2 Impatto ambientale.....	4
1.2.3 Basse temperature di utilizzo .....	5
1.3 Svantaggi .....	5
1.3.1 Temperatura superficiale del pavimento.....	5
1.3.2 Inerzia termica del pavimento.....	5
1.3.3 Difficoltà progettuali.....	6
1.4 Comfort termico e pannelli radianti .....	6
1.4.1 Temperatura operativa .....	6
1.4.2 Temperatura superficiale del pavimento.....	7
1.4.3 Gradiente verticale di temperatura dell'aria.....	7
1.4.4 Asimmetria temperatura media radiante .....	8
1.5 Lavori precedenti.....	9
<b>2 Modello matematico</b> .....	11
2.1 Equazione della diffusione termica .....	11
2.2 Condizioni iniziali e condizioni al contorno .....	12
2.3 Discretizzazione dell'equazione della diffusione termica.....	13
2.3.1 Discretizzazione nel caso tridimensionale in regime stazionario .....	14
2.3.2 Discretizzazione nel caso tridimensionale in regime dinamico .....	17
<b>3 Caso studio</b> .....	19
3.1 Descrizione del problema .....	19
3.2 Ipotesi di calcolo.....	21
3.3 Coefficiente di scambio termico convettivo.....	21

3.4	Fattori di vista.....	24
3.5	Coefficiente di scambio termico radiativo .....	27
3.6	Coefficiente di scambio convettivo del fluido interno ai tubi .....	28
<b>4</b>	<b>Risultati</b> .....	<b>31</b>
4.1	Regime stazionario .....	31
4.2	Regime dinamico.....	40
4.3	Regime periodico stabilizzato .....	44
	<b>Conclusioni</b> .....	<b>45</b>
	<b>Nomenclatura</b> .....	<b>47</b>
	<b>Bibliografia</b> .....	<b>49</b>

## Elenco delle figure

- 1.1 Differenza verticale di temperatura dell'aria misurata in un laboratorio per diversi sistemi di riscaldamento. Flusso termico areico  $50 \text{ W/m}^2$ .
- 1.2 Percentuale d'insoddisfatti al variare della temperatura asimmetrica radiante.
  
- 2.1 Volume di controllo infinitesimo in coordinate cartesiane.
- 2.2 Creazione della griglia nodale spaziale, approssimazione a quattro punti.
- 2.3 Approssimazione della derivata di una funzione.
- 2.3 Nodo superficiale con convezione.
  
- 3.1 Geometria della stanza campione.
- 3.2 Particolare costruttivo del pavimento.
- 3.3 Numero di Grashof al variare della temperatura superficiale del pavimento.
- 3.4 Numero di Rayleigh al variare della temperatura superficiale del pavimento.
- 3.5 Andamento del coefficiente di scambio convettivo al variare della temperatura del pavimento.
- 3.6 Fattore di vista associato allo scambio termico tra la superficie  $i$  e la superficie  $j$ .
- 3.7 Andamento asintotico del fattore di vista pavimento-parete, nodo centrale.
- 3.8 Andamento asintotico del fattore di vista pavimento-soffitto, nodo centrale.
- 3.9 Calcolo dei fattori di vista tra le superfici della stanza.
  
- 4.1 Configurazione a serpentino.
- 4.2 Isotherme sul piano contenente il pannello, quattro mura sull'esterno, caso serpentino.
- 4.3 Isotherme sul piano contenente il pavimento, quattro mura sull'esterno, caso serpentino.
- 4.4 Isotherme sul piano contenente il pannello, due mura sull'esterno, caso serpentino.
- 4.5 Isotherme sul piano contenente il pavimento, due mura sull'esterno, caso serpentino.
- 4.6 Configurazione a chiocciola.
- 4.7 Isotherme sul piano contenente il pannello, quattro mura sull'esterno, caso chiocciola.
- 4.8 Isotherme sul piano contenente il pavimento, quattro mura sull'esterno, caso chiocciola.

- 4.9 Isotherme sul piano contenente il pannello, due mura sull'esterno, caso chiocciola.
- 4.10 Isotherme sul piano contenente il pavimento, due mura sull'esterno, caso chiocciola.
- 4.11 Andamento del flusso termico al variare della portata volumetrica, caso serpentino.
- 4.12 Andamento della temperatura equivalente al variare della portata volumetrica, caso serpentino.
- 4.13 Andamento del flusso termico al variare della portata volumetrica, caso chiocciola.
- 4.14 Andamento della temperatura equivalente al variare della portata volumetrica, caso chiocciola.
- 4.15 Andamento della temperatura dell'aria, caso serpentino.
- 4.16 Andamento dei flussi termici, caso serpentino.
- 4.17 Andamento della temperatura dell'aria nel caso di temperatura uniforme, caso serpentino.
- 4.18 Andamento dei flussi termici nel caso di temperatura uniforme, confronto con serpentino.
- 4.19 Andamento della temperatura dell'aria, caso chiocciola.
- 4.20 Andamento dei flussi termici, caso chiocciola.
- 4.21 Andamento dei flussi termici nel caso di temperatura uniforme, confronto con chiocciola.
- 4.22 Effetti sulla temperatura dell'aria ambiente a causa dell'oscillazione della temperatura esterna, parete da 30 cm.



## Elenco delle tabelle

- 3.1 Specifiche dei materiale costituenti il pavimento.
- 3.2 Specifiche dei materiale costituenti le pareti.
- 3.3 Specifiche dei materiale costituenti le tubazioni.
- 3.4 Ipotesi del modello numerico.
  
- 4.1 Confronto tra la temperatura media e la temperatura uniforme, caso serpentino.
- 4.2 Confronto tra la temperatura media e la temperatura uniforme, caso chiocciola.



# Sommario e Parole Chiave

## Sommario

Gli impianti a pannelli radianti stanno acquistando, oggi, notevole importanza nel riscaldamento e raffrescamento residenziale, sia nel caso di nuove costruzioni sia in ristrutturazioni. Il loro utilizzo, nel caso del riscaldamento, ben si sposa con generatori a bassa temperatura, quali pompe di calore e caldaie a condensazione. Lo scopo del seguente lavoro di tesi sarà stabilire se lo strato di pavimento contenente i pannelli radianti possa essere considerato come una superficie a temperatura uniforme. Saranno esaminate le due configurazioni impiantistiche maggiormente utilizzate: il serpentino e la chiocciola. Le conclusioni saranno fornite sia per il regime stazionario sia per il regime dinamico. Lo studio è stato condotto sfruttando il metodo delle differenze finite e con l'ausilio di MATLAB™.

## Parole Chiave

Differenza finite, pannelli radianti, stazionario, dinamico, riscaldamento.

# Abstract and Key Words

## Abstract

Radiant floors are acquiring, nowadays, considerable usage in residential heating and cooling, either in case of new buildings or in renovations. Their use, in heating purpose, couple appropriately with low temperature generators such as heat pumps and condensing boilers. The purpose of the following thesis is to determine whether the layer of the floor containing the radiant panels may be considered as a surface with a uniform temperature. It will examine the two most widely used system layout: serpentine and counter flow. The conclusions will be provided for both the steady state and the transient conditions. The case studies are performed with the finite difference method and the aid of MATLAB™.

## Key Words

Finite differences, heating, radiant floors, steady state conditions, transient condition.



# Introduzione

L'uso di sistemi a pannelli radianti per il riscaldamento domestico è cresciuto negli ultimi anni. In alcuni paesi europei, ad esempio, il loro utilizzo in fabbricati di nuova costruzione raggiunge circa il 50% [1]. L'idea di un sistema quale il pannello radiante è quella di poter lavorare con basse temperature del fluido termovettore, riscaldato dal generatore di calore, e di sfruttare ampie superfici di scambio, riuscendo così a ottenere notevoli risparmi energetici rispetto ai sistemi tradizionali (radiatori e ventilconvettori). Naturalmente risultati di questo tipo sarebbero difficilmente raggiungibili senza un'integrazione intelligente tra edificio e impianto. Notevole attenzione dunque va riposta nei materiali da costruzione, sia in quelli costituenti il pavimento sia in quelli dell'isolamento termico dell'involucro edilizio.

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è dimostrare se lo strato di pavimento contenente l'impianto possa essere schematizzato come una superficie a temperatura uniforme in modo da semplificare i calcoli progettuali. A tale scopo sarà proposta una formula per il calcolo immediato del flusso termico areico.

Il caso studio in esame prevede l'analisi in regime stazionario e dinamico dello scambio termico tra un pannello radiante, annegato nel pavimento, e l'ambiente circostante. Calcolato il flusso scambiato nelle condizioni reali, si provvederà in seguito a sostituire il pannello con una superficie mantenuta a temperatura uniforme e nota. Per il regime stazionario è sufficiente trovare quella temperatura che fornisca il medesimo flusso, mentre per il regime dinamico è necessario che l'andamento dei flussi termici (caso reale e caso superficie a temperatura uniforme) sia simile.

L'analisi è condotta risolvendo l'equazione del calore e le relative condizioni al contorno con il metodo alle differenze finite, metodo che trasforma il sistema di equazioni differenziali in un sistema di equazioni algebriche.



# 1 I SISTEMI A PANNELLI RADIANTI

## 1.1 Cenni storici

Risale a più di duemila anni fa l'idea di utilizzare i pavimenti come terminali per cedere calore. Sistemi di riscaldamento che s'ispirano a tale idea furono realizzati da Cinesi, Egiziani e Romani.

Il sistema adottato dai Cinesi e dagli Egiziani era alquanto semplice. Consisteva nel realizzare un focolare interrato e nel far passare i suoi fumi sotto il pavimento del locale da riscaldare: era in pratica un riscaldamento monolocale.

I Romani, invece, utilizzavano sistemi molto più complessi ed evoluti. Con i fumi di un solo focolare esterno, essi riuscivano a riscaldare più locali e anche più edifici, realizzando così i primi impianti di tipo centralizzato.

E' solo agli inizi di questo secolo, però, che il riscaldamento a pavimento appare nella sua configurazione attuale. Ed è un inglese, il professor Baker, il primo a coprire tale tipo d'impianto con un brevetto dal titolo "sistema per riscaldare i locali con acqua calda convogliata in tubi sotto pavimento". A Londra, nel 1909, la Crittal Co. acquista i diritti del brevetto e col nuovo sistema realizza il riscaldamento del palazzo Royal River.

Nei primi anni del secondo dopoguerra, due sono i principali motivi che portano al diffondersi del riscaldamento a pannelli: la costante mancanza di corpi scaldanti e la facilità d'inserimento dei pannelli nelle solette prefabbricate.

La tecnica adottata è quella di annegare nei pavimenti, senza strati sottostanti di materiale isolante, tubi di acciaio.

Ben presto però si deve constatare che gli impianti realizzati causano numerosi disturbi fisiologici, quali ad esempio cattiva circolazione, innalzamento della pressione arteriosa, mal di testa, eccessiva sudorazione. Simili disturbi sono così gravi e documentati che alcuni paesi europei istituiscono apposite commissioni per individuarne le cause.

I risultati delle varie commissioni d'inchiesta concordano nel sostenere che, negli impianti realizzati, le condizioni di malessere fisiologico sono da addebitarsi ai valori troppo elevati di due grandezze: la temperatura superficiale del pavimento e l'inerzia termica delle solette.

In particolare si dimostra che, per evitare sensazioni di malessere, la temperatura superficiale del pavimento non deve superare i 28÷29°C. Al contrario, negli impianti esaminati, si raggiungevano temperature molto più elevate, spesso superiori anche a 40°C, questo per sopperire alla mancanza di isolamento nella struttura edile. Inoltre, il troppo calore accumulato nelle solette degli impianti realizzati comportava un surriscaldamento dei locali oltre livelli fisiologicamente accettabili.

## Capitolo 1

Le stesse commissioni non emettono però alcun giudizio negativo nei confronti degli impianti a pannelli. Anzi dimostrano che questi impianti, se costruiti a bassa temperatura superficiale e a inerzia termica non troppo elevata, possono offrire un comfort termico sensibilmente superiore a quello ottenibile con gli impianti a radiatori o a convettori.

Tuttavia, i risultati delle Commissioni costituiscono, di fatto, un forte disincentivo alla realizzazione degli impianti a pannelli; si devono aspettare diversi anni prima di assistere a un loro significativo ritorno.

L'evento che di nuovo richiama l'attenzione su questi impianti è la crisi energetica degli anni Settanta.

Sotto la stimolo di tale crisi quasi tutti i paesi europei emanano normative per l'efficienza energetica che impongono un buon isolamento termico degli edifici. È così possibile riscaldare i locali con un minor dispendio energetico, quindi, nel caso dei pannelli, con temperature a pavimento più basse. Si assiste di conseguenza a una riscoperta di tale impianto ai fini del riscaldamento.

### 1.2 Vantaggi

Alcuni dei principali vantaggi di un sistema a pannelli radianti consistono in:

- Qualità dell'aria ambiente,
- Impatto ambientale,
- Basse temperature d'utilizzo.

#### 1.2.1 Qualità dell'aria ambiente

Grazie alla possibilità di avere una temperatura media radiante più elevata, è possibile mantenere l'aria ambiente a temperatura inferiore rispetto alle case con elementi terminali tradizionali. Questo porta le persone a percepire una qualità migliore dell'aria [2] e anche alla possibilità di aumentare leggermente l'umidità relativa.

La German Allergy and Asthma Association [3] ha dimostrato attraverso uno studio che i sistemi a pannelli radianti sfavoriscono la proliferazione di acari della polvere e batteri.

#### 1.2.2 Impatto ambientale

Nelle costruzioni nuove e negli interventi di ristrutturazione con rifacimento dei pavimenti, gli impianti a pannelli sono gli impianti a minor impatto ambientale perché:



1. Non pongono vincoli di natura estetica. La non visibilità dei pannelli è molto importante soprattutto quando si devono climatizzare edifici di rilievo storico, dove la presenza di corpi scaldanti può compromettere le forme originali;
2. Non contribuiscono al degrado d'intonaci, pavimenti in legno e serramenti, in quanto:
  - Non sporcano le pareti di nerofumo,
  - Non consentono il formarsi di umidità a pavimento,
  - Limitano sensibilmente i casi di condensa interna in quanto aumentano le temperature delle pareti in prossimità delle solette.

### 1.2.3 Basse temperature d'utilizzo

Per merito della loro elevata superficie disperdente, gli impianti a pannelli possono riscaldare con basse temperature del fluido termovettore. Questa caratteristica rende conveniente il loro uso con sorgenti di calore il cui coefficiente di prestazione aumenta al diminuire della temperatura richiesta, come nel caso di:

- Pompe di calore,
- Caldaie a condensazione,
- Pannelli solari.

## 1.3 Svantaggi

Riguardano essenzialmente aspetti connessi alla temperatura superficiale del pavimento, all'inerzia termica dell'impianto e a difficoltà d'ordine progettuale.

### 1.3.1 Temperatura superficiale del pavimento

Per evitare condizioni di malessere fisiologico la temperatura superficiale del pavimento deve essere inferiore al valore di 29°C. Siccome la potenza scambiata dal pannello è funzione di quest'ultima è possibile che alcuni locali non siano correttamente riscaldati, rendendo necessaria l'installazione di elementi integrativi.

### 1.3.2 Inerzia termica del pavimento

Gli impianti a pannelli sono caratterizzati dall'averne un'elevata inerzia termica in quanto, per cedere calore, utilizzano le strutture in cui sono annegati i pannelli

## Capitolo 1

stessi.

In ambienti riscaldati con una certa continuità l'inerzia termica di questi impianti non pone alcun problema e consente:

- Un buon adeguamento dell'impianto alle condizioni climatiche esterne,
- Interruzioni o rallentamenti di funzionamento.

Per contro in ambienti riscaldati solo per brevi periodi l'inerzia termica degli impianti a pannelli comporta sensibili sfasamenti tra i tempi di avviamento e quelli di effettivo utilizzo. Pertanto in questi casi conviene ricorrere ad altri sistemi di riscaldamento.

### 1.3.3 Difficoltà progettuali

A differenza di quelli tradizionali a corpi scaldanti, gli impianti a pannelli richiedono:

- Maggior impegno per la determinazione dei parametri di progetto. Infatti oltre ai parametri necessari per determinare le dispersioni termiche dei locali, la progettazione degli impianti a pannelli richiede anche la conoscenza dettagliata di tutti gli elementi costruttivi che riguardano i pavimenti e le solette.
- Minor adattamento a varianti in corso d'opera o a impianto ultimato, siccome non è possibile togliere o aggiungere porzioni di pannello come invece è possibile con i radiatori.

## 1.4 Comfort termico e pannelli radianti

Al fine di fornire un ambiente termicamente gradevole, i requisiti del comfort termico generale (PMV-PPD, temperatura operativa) e quelli locali (temperatura del pavimento, gradiente verticale di temperatura dell'aria, asimmetria della temperatura media radiante) devono essere presi in considerazione.

### 1.4.1 Temperatura operativa

I due parametri fondamentali per garantire un comfort termico accettabile sono la temperatura dell'aria e la temperatura media radiante, definita come quella temperatura che dovrebbe avere una cavità nera e isoterma per ottenere lo stesso flusso termico scambiato tra gli occupanti e la cavità reale.

Per velocità dell'aria modeste ( $<0.2$  m/s) la temperatura operativa si può approssimare come la media aritmetica fra le due.

La temperatura media radiante dipende:

- Dal fattore di vista tra l'occupante e le pareti circostanti,
- Dalle temperature delle pareti circostanti.

Questi due fattori hanno un risvolto sulle temperatura operativa. Ad esempio per una stanza di 6 x 6 m il fattore di vista massimo (pari a 0.4) è quello tra un occupante seduto nel mezzo della stanza e il pavimento [1]. Se la temperatura superficiale del pavimento dovesse cambiare di 5 K, mantenendo costante le temperature delle altre superfici, si osserverebbe un cambiamento della temperatura media radiante di 2 K; di conseguenza la temperatura operativa cambierebbe di 1 K.

In altre parole un aumento di 5 K della temperatura del pavimento avrebbe lo stesso effetto di un cambiamento della temperatura dell'aria di 2 K.

Confrontando un sistema a pannelli radianti con uno a ventilconvettori, il primo può raggiungere la temperatura operativa di comfort con una temperatura dell'aria minore [1].

### 1.4.2 Temperatura superficiale del pavimento

La temperatura del pavimento influisce sul benessere termo igrometrico, sia per effetto dovuto al contatto diretto sia per l'influenza sulla temperatura media radiante; infatti, una temperatura del pavimento troppo bassa provocherebbe una temperatura operativa inferiore a quella di comfort. Si tenderebbe, per compensazione, ad aumentare la temperatura dell'aria, con possibili aumenti del consumo energetico.

Tuttavia per non arrecare disturbi al sistema circolatorio le norme internazionali pongono come campo di temperatura utile l'intervallo 19°C-29°C.

### 1.4.3 Gradiente verticale di temperatura dell'aria

Uno degli aspetti caratteristici e vincenti di un sistema a pannelli radianti è la quasi uniformità della temperatura dell'aria dal pavimento al soffitto.

La temperatura dell'aria in ambienti confinati tende ad aumentare dal pavimento al soffitto. Se il gradiente verticale è elevato si possono verificare condizioni di discomfort locale, caviglie fredde o testa calda. Il fenomeno assume importanza differente a seconda degli elementi terminali dell'impianto di riscaldamento. Misure effettuate in laboratorio [4] riguardo a differenti sistemi di riscaldamento hanno dimostrato che il profilo di temperatura risulta essere uniforme (Figura 1.1) per sistemi di questo tipo.

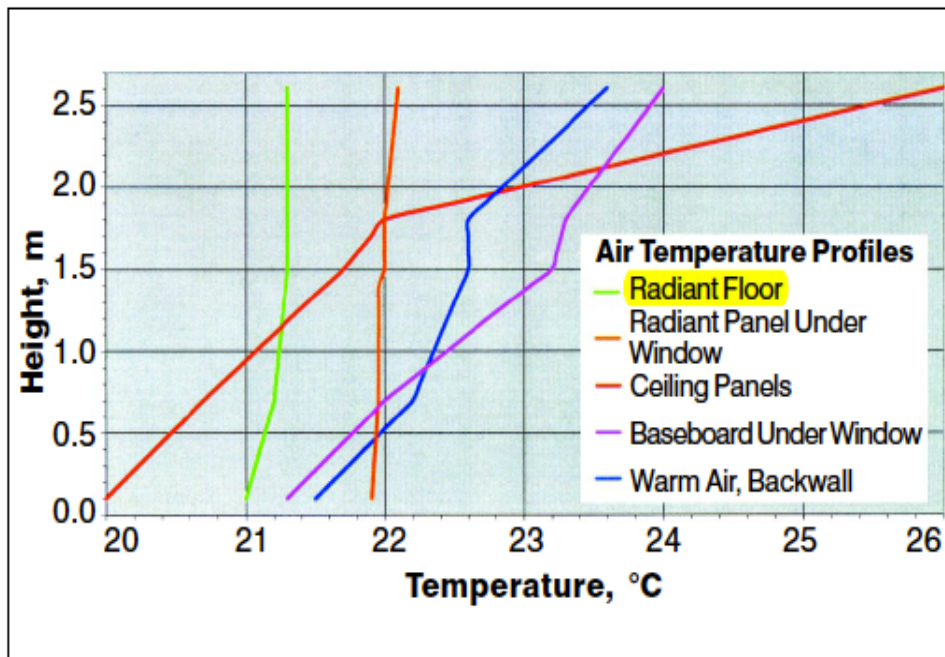


Figura 1.1. Differenza verticale di temperatura dell'aria misurata in un laboratorio per diversi sistemi di riscaldamento. Flusso termico areico  $50 \text{ W/m}^2$ .

Dalla Figura 1.1 si può notare come la temperatura operativa di  $22^\circ\text{C}$  si ottiene mediamente con temperature dell'aria inferiori di circa  $1.5 \text{ K}$  rispetto agli altri sistemi. Si riscontra che il caso peggiore risulta essere con i pannelli a soffitto.

#### 1.4.4 Asimmetria temperatura media radiante

La radiazione termica asimmetrica può derivare dalla presenza di superfici con temperature sensibilmente diverse da quelle dell'aria ambiente: è il caso di pareti non isolate, superfici vetrate, terminali di riscaldamento/raffrescamento. L'asimmetria radiante influenza notevolmente gli scambi di calore per irraggiamento, essendo questi regolati dalla quarta potenza della temperatura. Nella Figura 1.2 è possibile notare che la percentuale di persone insoddisfatte, PPD, a pari temperatura asimmetrica radiante, è molto accentuata per due casi: soffitto caldo e parete fredda.

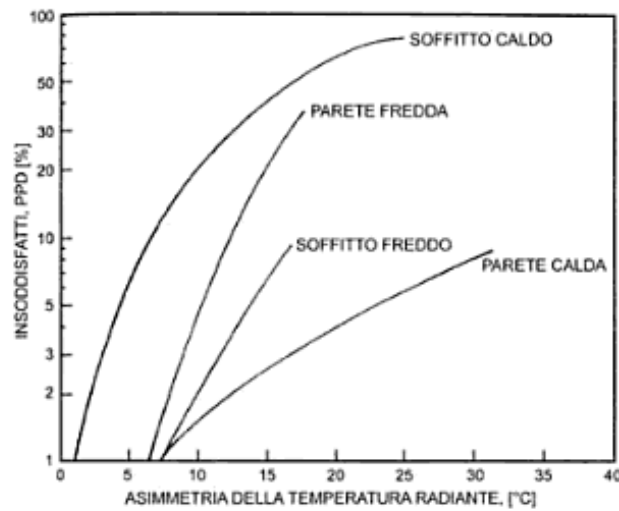


Figura 1.2. Percentuale d'insoddisfatti al variare della temperatura asimmetrica radiante.

## 1.5 Lavori precedenti

I sistemi radianti sono dei sistemi complessi da analizzare poiché sono presenti differenti modalità di scambio termico: conduzione nella soletta, irraggiamento tra la superficie radiante e le superfici circostanti, convezione naturale tra la superficie radiante e l'aria ambiente e conduzione verso il terreno. L'integrazione successiva tra l'impianto e l'edificio comporta un'ulteriore complessità del problema. Il modello predittivo, per questa ragione, deve prendere in considerazione la natura dinamica e multi-dimensionale del sistema radiante. Software di simulazione per il calcolo del flusso termico scambiato, che modellano il problema come monodimensionale, sovrastimano la capacità termica del sistema radiante, con la conseguenza di sovradimensionare tutto il sistema di riscaldamento [5]. Inoltre molti di questi software non sono in grado di stimare punti caldi o freddi sulla superficie del pavimento, che potrebbero essere causa di discomfort.

Dal punto di vista numerico non sono numerosi gli studi analitici per la stima delle performance di un sistema radiante. I primi modelli di Kollmar e Liese [6] assumono la soletta come un'aletta di forma parallelepipedica che scambia calore attraverso la superficie superiore. Zhang e Pate [7][8] sviluppano un modello bidimensionale per pannelli a soffitto e ne ricavano un modello semplificato per i pavimenti radianti.

## Capitolo 1

Athienitis [9] sviluppa un modello monodimensionale attraverso le differenze finite per un pavimento radiante. Il modello più recente in regime dinamico, il DIGITHON [10], è stato sviluppato per un sistema radiante a soffitto.

La stanza modello viene suddivisa in sezioni e per ognuna di queste, attraverso il metodo delle funzioni di trasferimento, sono calcolate la temperatura superficiale e la temperatura dell'acqua.

Il lavoro sviluppato da De Carli [10] prevede inoltre di confrontare i risultati della simulazione numerica con misure effettuate in una stanza di prova. I risultati principali sono stati i seguenti:

- Assumere costante il coefficiente di scambio termico convettivo non implica cambiamenti significativi nel profilo di temperatura dell'aria,
- Il modello fornisce la stima accurata della temperatura operativa anche in presenza di carichi termici interni.

Per quanto riguarda i pavimenti radianti, un lavoro accurato, è considerata la natura dinamica del problema, è stato svolto da Sattari e Farhanieh [11]. Per il loro caso di studio si ottengono i seguenti risultati:

- Il materiale e il diametro dei tubi influiscono minimamente sulle performance,
- I parametri di progetto fondamentali per un sistema a pavimento radiante sono il materiale costituente la copertura e il suo spessore,
- L'irraggiamento è il meccanismo predominante di scambio termico,
- Il numero di tubi non ha un effetto rilevante sulle performance.

## 2 MODELLO MATEMATICO

### 2.1 Equazione della diffusione termica

Per determinare la distribuzione di temperatura e il flusso areico scambiato tra la superficie radiante e l'ambiente circostante, è necessario analizzare lo scambio termico attraverso la soletta.

Vediamo dunque come possa essere determinato il campo di temperature al suo interno. L'approccio utilizzato consiste nell'applicare l'equazione di conservazione dell'energia a una generica porzione, chiamata anche volume di controllo, della soletta. Imponendo in seguito le condizioni al contorno si otterrà il risultato voluto.

Consideriamo quindi una porzione omogenea della soletta e da essa "estriamo" un volume di controllo infinitesimo (Figura 2.1).

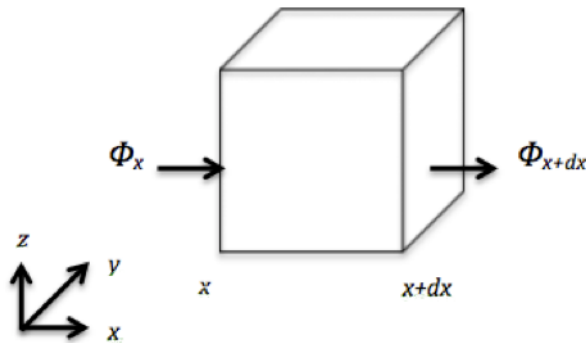


Figura 2.1. Volume di controllo infinitesimo in coordinate Cartesiane.

L'equazione di conservazione dell'energia è dunque:

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \sum \phi_{in} - \sum \phi_{out} + W + Q \quad (2.1)$$

Considerando nulli i termini associati all'energia cinetica, all'energia potenziale ed escludendo immissione o prelievo di potenza meccanica, rimangono esclusivamente i termini:

- $E_{tot}$ : energia interna  $U$ ,
- $\Phi$ : flussi di potenza entranti o uscenti,
- $Q$ : termine di generazione.

## Capitolo 2

Prendendo in considerazione la direzione  $x$ , il generico flusso può essere scritto come:

$$\phi_x = q_x * dy * dz \quad (2.2)$$

Indicando con  $q_x$  il flusso termico areico nella direzione  $x$ .  
La variazione del flusso lungo la direzione  $x$  può essere approssimata con lo sviluppo in serie di Taylor, trascurando i termini di ordine superiore al primo:

$$\phi_{x+dx} = (q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) * dy * dz \quad (2.3)$$

Ricordando che l'energia interna è funzione della temperatura sarà:

$$E_{tot} = \rho * c * T * dx * dy * dz \quad (2.4)$$

Si ottiene dunque:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -div \mathbf{q} + \dot{q} \quad (2.5)$$

Dal postulato di Fourier si giunge all'equazione finale:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = div(\mathbf{k} * grad T) + \dot{q} \quad (2.6)$$

### 2.2 Condizioni iniziali e al contorno

Nei problemi di scambio termico per conoscere il campo di temperatura e la sua evoluzione temporale è necessario conoscere le condizioni iniziali e le condizioni al contorno in cui:

- Per condizioni iniziali s'intende la conoscenza della distribuzione di temperatura all'istante iniziale in tutto il dominio.
- Per condizioni al contorno s'intende la conoscenza della temperatura o del flusso areico sul contorno del dominio in ogni istante temporale.



E' possibile suddividere ulteriormente le condizioni al contorno in altre quattro categorie:

- Condizioni di 1<sup>a</sup> specie: in ogni istante di tempo la temperatura del contorno del dominio è fissata e nota.
- Condizioni di 2<sup>a</sup> specie: in ogni istante di tempo il flusso areico è imposto sul contorno del dominio.
- Condizioni di 3<sup>a</sup> specie: in ogni istante di tempo tra contorno del dominio e un fluido circostante avviene uno scambio termico di tipo convettivo.
- Condizioni di 4<sup>a</sup> specie: in ogni istante di tempo tra contorno del dominio e le superfici circostanti avviene uno scambio termico di tipo radiativo.

### 2.3 Discretizzazione dell'equazione della diffusione termica

Numerose soluzioni analitiche, ad esempio il metodo delle separazioni delle variabili, possono essere usate per risolvere l'equazione del calore nel caso bidimensionale o tridimensionale. Tuttavia non per tutti i domini e non per tutte le condizioni al contorno esistono delle soluzioni chiuse. In tutti questi casi, la miglior alternativa è quella di utilizzare un metodo numerico come ad esempio il metodo delle differenze finite o degli elementi finiti.

A differenza della soluzione analitica, che permette di conoscere la temperatura in ogni punto del dominio e in ogni istante di tempo, una soluzione numerica consente di determinare la temperatura esclusivamente in alcuni punti del dominio e in determinati istanti temporali. Il primo passo deve essere dunque la scelta di questi punti, di seguito chiamati nodi (temporali o spaziali). L'unione di tutti i punti nodali, numerati progressivamente, è chiamata griglia.

Nella Figura 2.2 è mostrato l'esempio, per il caso bidimensionale, per la creazione della griglia.

La scelta di tali punti non è assolutamente arbitraria dipendendo, infatti, dall'accuratezza richiesta, dalla potenza del calcolatore, da possibili simmetrie geometriche etc. etc.. In questa trattazione l'equazione della diffusione termica è stata discretizzata mediante l'uso del metodo delle differenze finite, di seguito FDM.

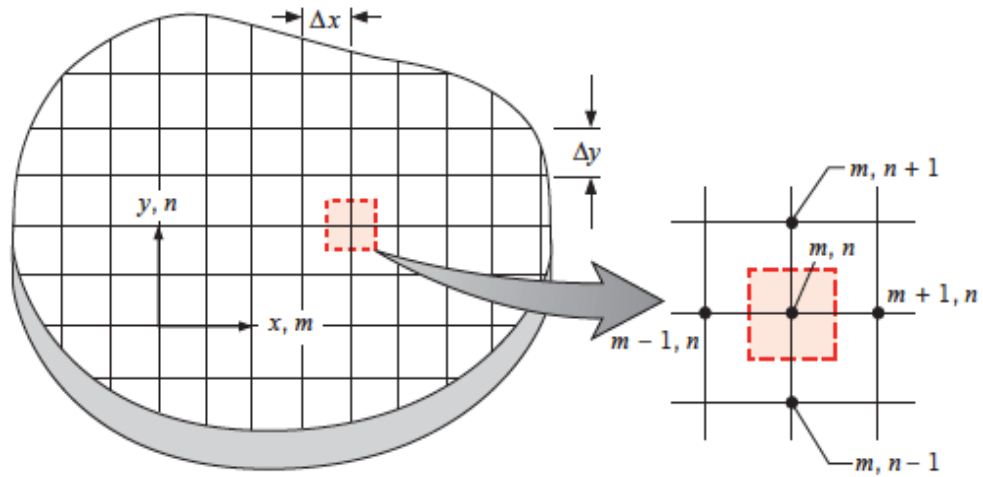


Figura 2.2. Creazione della griglia nodale spaziale, approssimazione a quattro punti.

### 2.3.1 Discretizzazione nel caso tridimensionale in regime stazionario

Ricordiamo che una generica funzione  $f(x)$  può essere approssimata in un punto  $x_0$  del dominio mediante lo sviluppo in serie di Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{(n)}f(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (2.7)$$

Se arrestiamo lo sviluppo in serie al primo ordine, trascurando i termini di ordine superiore, otteniamo:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} (x - x_0) \quad (2.8)$$

Da cui possiamo ricavare il concetto di derivata come il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \quad (2.9)$$

con  $x_0 = x + \Delta x$  (vedi Figura 2.3). L'Eq. 2.9 è chiamata differenza finita in avanti.

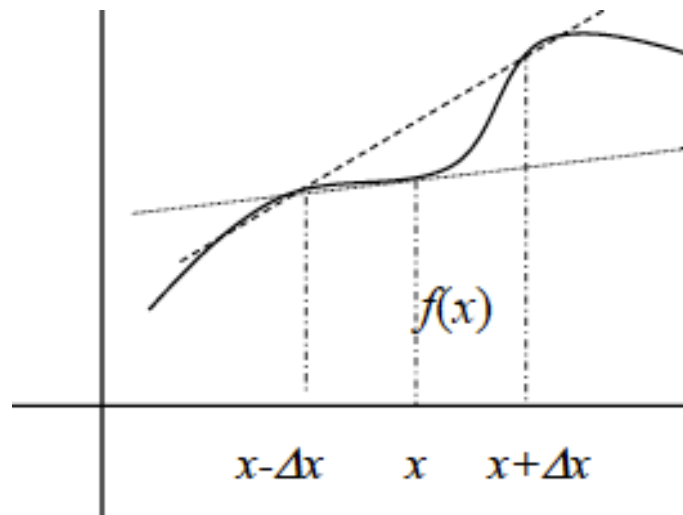


Figura 2.3. Approssimazione della derivata di una funzione.

Allo stesso modo se prendiamo  $x_0 = x - \Delta x$  otteniamo:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{-f(x_0) + f(x)}{x_0 - x} \quad (2.10)$$

L'Eq. 2.10 è chiamata differenza finita all'indietro. Dalla somma di Eq. 2.9 ed Eq. 2.10 otteniamo l'approssimazione mediante la differenza finita centrata:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.11)$$

Per approssimare la derivata seconda invece lo sviluppo in serie è arrestato al secondo ordine:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Delta x^2 \quad (2.12)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Delta x^2 \quad (2.13)$$

Sommando Eq. 2.12 ed Eq. 2.13 otteniamo:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (2.14)$$

Facendo riferimento all'Eq.2.6, per il generico punto di coordinate  $(m,n,p)$  completamente interno al dominio, troncando lo sviluppo al secondo ordine e trascurando i termini di ordine maggiore è possibile approssimare l'equazione differenziale in un'equazione algebrica mediante una differenza finita centrata:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{m+1,n,p} - 2T_{m,n,p} + T_{m-1,n,p}}{(\Delta x)^2} \quad (2.15)$$

Per il caso tridimensionale, considerando la conduttività termica costante in ogni punto del dominio e nulla la generazione di calore interna, si ottiene l'Equazione 2.16:

$$\frac{T_{m+1,n,p} - 2T_{m,n,p} + T_{m-1,n,p}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1,p} - 2T_{m,n,p} + T_{m,n-1,p}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{m,n,p+1} - 2T_{m,n,p} + T_{m,n,p-1}}{(\Delta z)^2} = 0 \quad (2.16)$$

Tale approssimazione è valida solo all'interno del dominio di calcolo mentre per i punti sul contorno si opera come segue.

Consideriamo ora un nodo superficiale di coordinate  $(m,n)$ , Figura 2.4, a contatto con l'aria ambiente (per semplicità tratteremo il caso bidimensionale, l'estensione al caso tridimensionale è immediata):

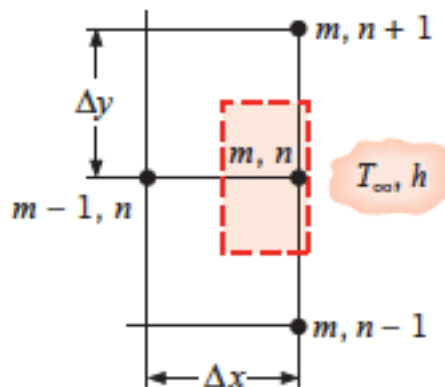


Figura 2.4. Nodo superficiale con convezione.

Il punto di coordinate  $(m+1,n)$  non è più definito, perché esterno al dominio considerato. Tuttavia si può ricorrere all'equazione di conservazione dell'energia:

$$q_{cond,(m,n)} = -k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_{(m,n)} - T_{\infty}) \quad (2.17)$$

Approssimando il flusso conduttivo mediante una differenza centrata tra il punto  $(m-1,n)$  e un punto fittizio  $(m+1,n)$  si ottiene:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{T_{(m-1,n)} - T_{(m+1,n)}}{2\Delta x} = h(T_{(m,n)} - T_{\infty}) \quad (2.18)$$

Sostituendo  $T_{(m+1,n)}$  nell'Eq.2.16 otteniamo:

$$2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{2h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right)T_{m,n} = 0 \quad (2.19)$$

Nel caso di condizione al contorno di adiabaticità s'impone  $h = 0$ .

### 2.3.2 Discretizzazione nel caso tridimensionale in regime dinamico

Per il caso in regime dinamico sono usati comunemente due metodi numerici differenti, che differiscono nel modo di approssimare la derivata parziale temporale:

- Schema implicito: si approssima  $\frac{\partial T}{\partial t}$  mediante una differenza finita in indietro (vedi Eq. 2.10).
- Schema esplicito: si approssima  $\frac{\partial T}{\partial t}$  mediante una differenza finita in avanti (vedi Eq. 2.9).

Mentre il primo schema è incondizionatamente stabile, ossia per qualsiasi scelta del passo temporale o spaziale il metodo converge sempre, il secondo lo è solo per determinati numeri di Fourier, vedi Equazione 2.20; per esempio, nel caso di conduzione monodimensionale, per avere stabilità deve essere  $Fo < 0.5$ .

$$Fo = \frac{\alpha * \Delta t}{\Delta x^2} \quad (2.20)$$

dove  $\alpha$  è la diffusività termica. Data la flessibilità del primo metodo, ci limiteremo ad analizzare solo questo.

Sarà dunque per il nodo interno  $(m,n,p)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{m,n,p}^{\tau+1} - T_{m,n,p}^{\tau}}{\Delta t} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{m+1,n,p}^{\tau+1} - 2T_{m,n,p}^{\tau+1} + T_{m-1,n,p}^{\tau+1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.22)$$

Per il caso tridimensionale, scegliendo  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  uguali:

$$T_{m,n,p}^{\tau} = (1 + 6Fo)T_{m,n,p}^{\tau+1} - Fo(T_{m+1,n,p}^{\tau+1} + T_{m-1,n,p}^{\tau+1} + T_{m,n+1,p}^{\tau+1} + T_{m,n-1,p}^{\tau+1} + T_{m,n,p+1}^{\tau+1} + T_{m,n,p-1}^{\tau+1}) \quad (2.23)$$

Dall'Equazione 2.23 è evidente che la temperatura del nodo  $(m,n,p)$  all'istante successivo dipende dalle nuove temperature dei nodi adiacenti, che sono anch'esse sconosciute. Quindi per determinare tutte le nuove temperature è necessario risolvere contemporaneamente il sistema di equazioni algebriche.

Consideriamo ora un nodo superficiale di coordinate  $(m,n)$  a contatto con l'aria ambiente (per semplicità tratteremo il caso bidimensionale, l'estensione al caso tridimensionale è immediata), vedi Figura 2.4.

Nuovamente il punto di coordinate  $(m+1,n)$  non è più definito, perché esterno al dominio considerato. Tuttavia imponendo la legge di conservazione dell'energia si ottiene:

$$\rho c A \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{m,n}^{\tau+1} - T_{m,n}^{\tau}}{\Delta t} = k A \frac{T_{m+1,n}^{\tau+1} - T_{m-1,n}^{\tau+1}}{2\Delta x} + h A (T_{m,n}^{\tau+1} - T_{\infty}) \quad (2.24)$$

e quindi sostituendo:

$$T_{m,n}^{\tau} + 2BiFoT_{\infty} = (1 + 2Fo(2 + Bi))T_{m,n}^{\tau+1} - Fo(2T_{m-1,n}^{\tau+1} + T_{m,n-1}^{\tau+1} + T_{m,n+1}^{\tau+1}) \quad (2.25)$$

con  $T_{\infty}$  pari alla temperatura indisturbata del fluido circostante,  $Bi = (h*\Delta x)/k$  e  $A$  l'area della superficie circostante il nodo.

### 3 CASO STUDIO

#### 3.1 Descrizione del problema

In questo lavoro di tesi è presa in considerazione una stanza di  $4 \text{ m}^2$  (Figura 3.1), con un sistema a pannelli radianti a pavimento.

La soletta del pavimento è formata da cinque strati secondo comuni criteri progettuali termotecnici, Figura 3.2.

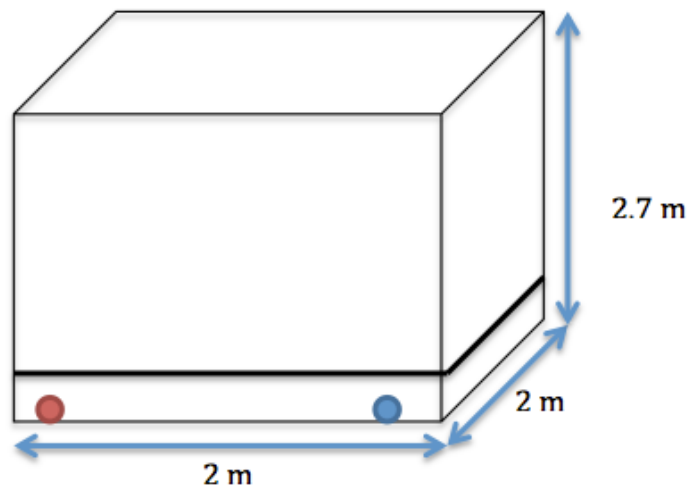


Figura 3.1. Geometria della stanza campione.

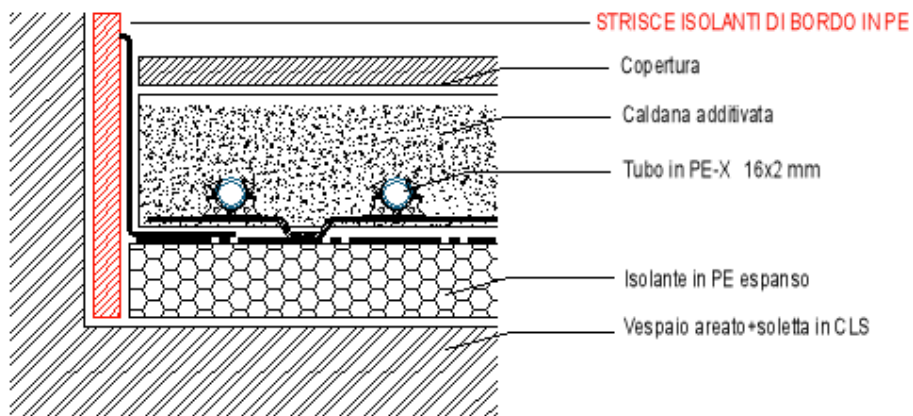


Figura 3.2. Particolare costruttivo del pavimento.

### Capitolo 3

Tutte le specifiche dei materiali del pavimento sono riportate nella Tabella 3.1.

Tabella 3.1. Specifiche dei materiali costituenti il pavimento.

Descrizione	Materiale	Spessore ( <i>cm</i> )	Conduttività ( <i>W/mK</i> )	Massa Volumica ( <i>kg/m<sup>3</sup></i> )	Calore Specifico ( <i>J/kgK</i> )
Copertura	Porcellana	1	1	2300	800
Caldana Add.	CLS cell.	6	1,4	1600	1000
Isolante	PE espanso	5	0,042	50	1500
Vesp.+Sol.		30	1,2	2000	1000

Per semplicità il pavimento è stato ipotizzato costituito da un unico strato di conduttività pari a 1 W/mK, densità pari a 1720 kg/m<sup>3</sup> e calore specifico pari a 1055 J/kgK. Questi valori derivano dalle medie pesate sugli spessori degli strati (vedi Tab.3.1).

Le pareti invece hanno le seguenti caratteristiche:

Tabella 3.2. Specifiche dei materiali costituenti le pareti.

Descrizione	Trasmittanza ( <i>W/m<sup>2</sup>K</i> )	Spessore ( <i>cm</i> )	Massa Volumica ( <i>kg/m<sup>3</sup></i> )	Calore Specifico ( <i>J/kgK</i> )
Parete Esterna	0,3	40	1000	880
Parete Interna	0,8	20	800	840
Solaio	0,3	30	1100	880

Le tubazioni sono modellate come due cilindri coassiali in polietilene reticolato e la loro dimensione è scelta secondo comuni criteri progettuali. La temperatura dell'acqua di mandata è assunta pari a 35°C, con salto termico di progetto di 5 K.



Tabella 3.3. Specifiche dei materiali costituenti le tubazioni.

Descrizione	Materiale	Spessore ( <i>cm</i> )	Diametro esterno ( <i>mm</i> )	Conduttività ( <i>W/mK</i> )	Massa Volumica ( <i>kg/m<sup>3</sup></i> )
Tubazione	PE-X	0,2	16	0,35	50

### 3.2 Ipotesi di calcolo

Nello sviluppo del modello numerico sono state utilizzate le seguenti ipotesi:

Tabella 3.4. Ipotesi del modello numerico.

ARIA	PARETI & PAVIMENTO	TUBAZIONI
La temperatura dell'aria ambiente è considerata uniforme e unica per l'intera stanza [12]	Passo nodale lungo le direzioni <i>x</i> e <i>z</i> pari a 10 cm, mentre per la direzione <i>y</i> pari a 3 cm.	L'acqua contenuta all'interno delle tubazioni è considerata come una sorgente di calore uniforme.
Aria non partecipa allo scambio radiativo.	Il perimetro del pavimento è considerato adiabatico, grazie all'isolamento di bordo.	Distanza interassi (passo) pari a 20 cm.
	Pareti e soffitto sono considerati come corpi grigi con emissività pari a 0,9	Lunghezza del circuito pari a 20 m.
	Temperatura del terreno pari a 20°C.	Distanza copertura pavimento – asse tubazione pari a 6 cm.
	Temperatura del soffitto e dei locali adiacenti pari a 20°C	

### 3.3 Coefficiente di scambio termico convettivo

I coefficienti di scambio termico sono parametri fondamentali per le simulazioni numeriche, calcolo dei carichi termici e dimensionamento dei sistemi radianti. In uno studio effettuato da Loman [13], condotto per comparare diversi software di simulazione energetica, la domanda di energia per il riscaldamento,

utilizzando due software differenti, risulta variare significativamente a seconda dell'algoritmo di calcolo del coefficiente di scambio termico convettivo. Quest'ultimo, infatti, è influenzato da diversi parametri quali la velocità dell'aria, la differenza di temperatura aria-pavimento e la turbolenza. Awbi [14] propone la seguente correlazione per un pavimento radiante:

$$h_{conv} = \frac{2,175}{D^{0,076}} * (T_{floor} - T_{air})^{0,308} \quad (3.1)$$

Dove  $D$  rappresenta il diametro idraulico della stanza. Il campo di validità dell'Eq.3.1 è per numeri di Grashof compresi nell'intervallo  $9*10^8$  e  $7*10^{10}$ . Tuttavia, com'è possibile osservare dalla Figura 3.3, la correlazione per il caso studio in esame non è valida.

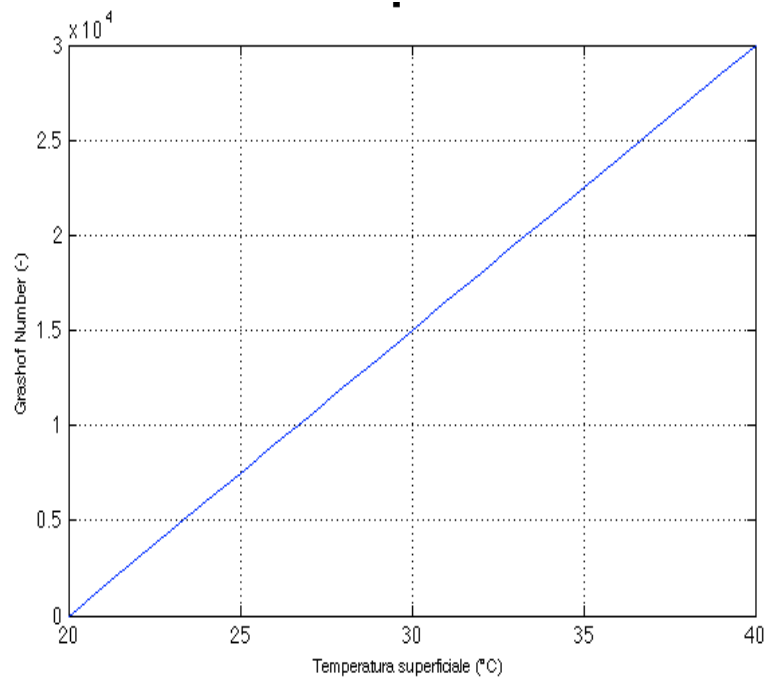


Figura 3.3. Numero di Grashof al variare della temperatura superficiale del pavimento.

Moran [15] suggerisce:

$$Nu = 0,15 Ra^{1/3} \quad (3.2)$$

Con tutte le proprietà del fluido prese alla temperatura di film. Campo di validità  $Ra > 0,5 \cdot 10^4$ .

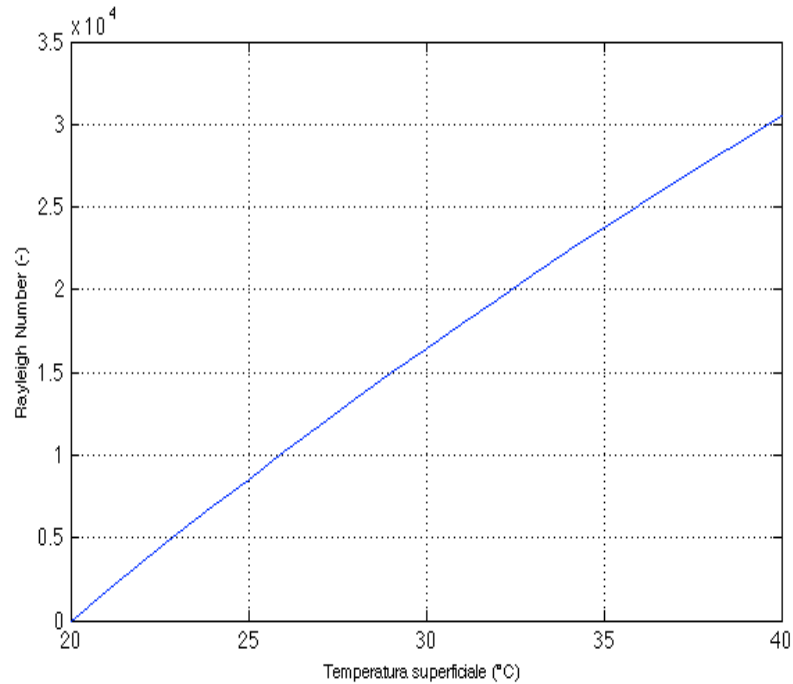


Figura 3.4. Numero di Rayleigh in funzione della temperatura superficiale del pavimento.

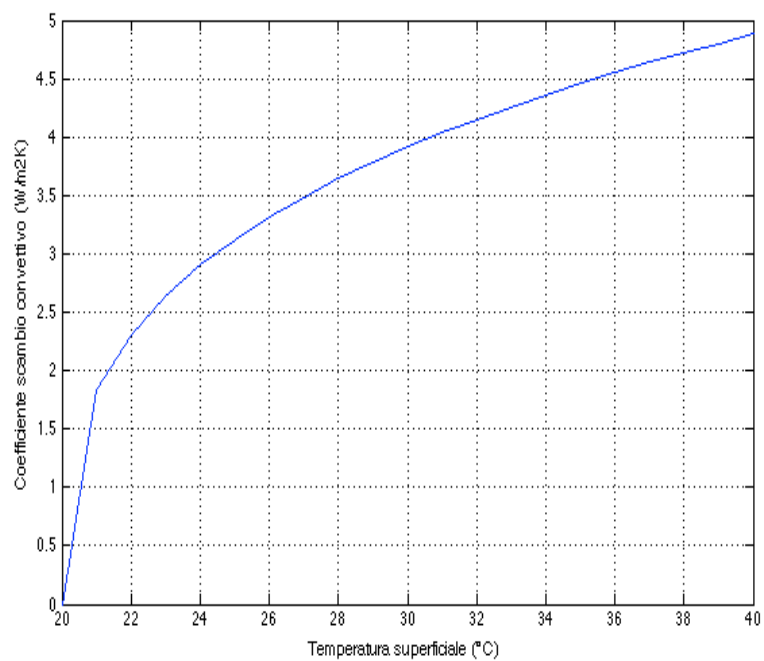


Figura 3.5. Andamento coefficiente scambio convettivo al variare della temperatura del pavimento.

### 3.4 Fattori di vista

Come risulta dai capitoli precedenti, il meccanismo di scambio termico predominante è l'irraggiamento. Questo dipende fortemente dalla geometria della superficie, dal suo orientamento così come dalle temperature e dalle proprietà fisiche del materiale. Assumeremo per ipotesi che le superfici della stanza siano separate da un mezzo non partecipante, l'aria. Dicesi *mezzo non partecipante*, quel mezzo che non partecipa in alcun modo allo scambio termico radiativo.

Vediamo allora come le caratteristiche geometriche e l'orientamento possano condizionare il processo di scambio. Introducendo il concetto di *fattore di vista*, ossia la parte di radiazione termica che lascia la generica superficie  $i$  ed è intercettata dalla generica superficie  $j$ , si prendano due superfici di area  $A_i$  e  $A_j$  orientate e si considerino due elementi di area infinitesima  $dA_i$  e  $dA_j$ ; questi sono connessi da una linea di lunghezza  $R$ , la quale forma due angoli,  $\theta_i$  e  $\theta_j$ , con le rispettive normali alla superficie,  $n_i$  e  $n_j$  (Figura 3.6).

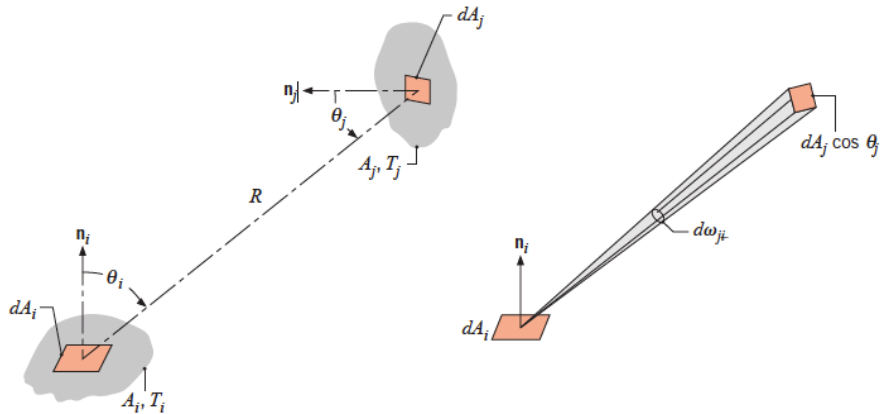


Figura 3.6. Fattore di vista associato allo scambio termico tra la superficie  $i$  e la superficie  $j$ .

Il flusso infinitesimo che lascia la superficie  $i$  e arriva sulla superficie  $j$  è:

$$dq_{i \rightarrow j} = I_{e+r,i} \cos \theta_i dA_i d\omega_{j-i} \quad (3.3)$$

dove  $I_{e+r,i}$  rappresenta l'intensità della radiazione emessa e riflessa da  $i$  e  $d\omega_{j-i}$  l'angolo solido tra le due superfici:

$$d\omega_{j-i} = \frac{\cos\theta_j dA_j}{R^2} \quad (3.4)$$

Se il corpo si assume come diffusore perfetto e integrando su tutta l'area di entrambe le superfici, sarà:

$$q_{i-j} = J_i \int_{dA_i} \int_{dA_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (3.5)$$

Dalla definizione generale di fattore di vista, normalizzando rispetto ad  $A_i$ :

$$F_{i-j} = \frac{1}{A_i} \int_{dA_i} \int_{dA_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (3.6)$$

Il calcolo del precedente integrale può non essere immediato e a volte si utilizzano metodi numerici per la sua approssimazione.

Tuttavia se la discretizzazione delle superfici è abbastanza fine è possibile approssimare l'integrale con:

$$F_{i-j} \cong \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} * A_j \quad (3.7)$$

Le figure 3.7 e 3.8 mostrano l'andamento asintotico del fattore di vista del nodo centrale del pavimento, nel caso pavimento-parete e nel caso pavimento-soffitto, all'aumentare della discretizzazione delle pareti e del soffitto.

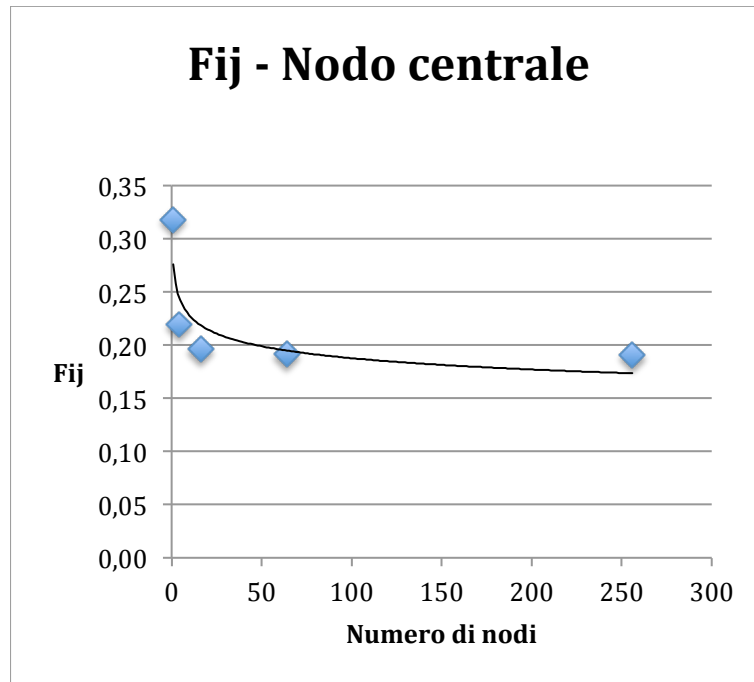


Figura 3.7. Andamento asintotico fattore di vista pavimento-pareti, nodo centrale.

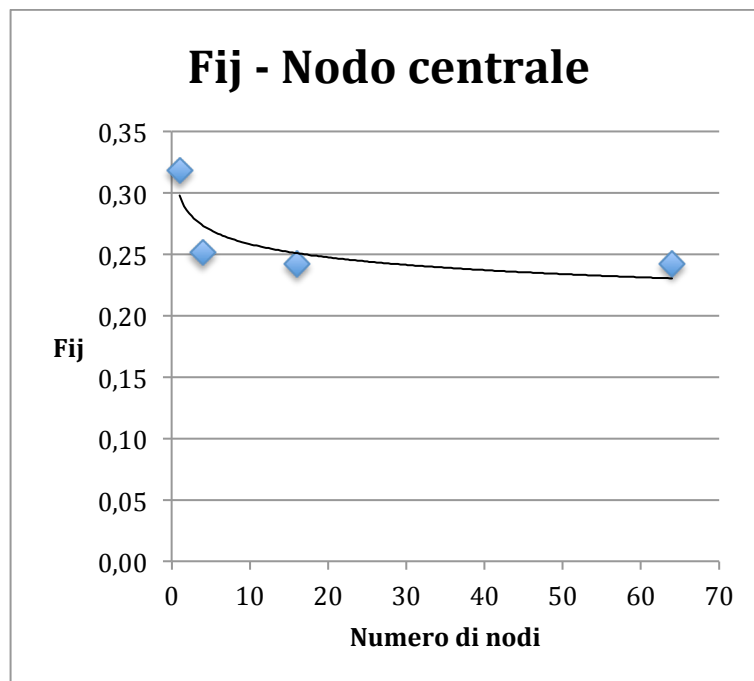


Figura 3.8. Andamento asintotico fattore di vista pavimento-soffitto, nodo centrale.

Una buona approssimazione dell'integrale si ha dunque per:

- 256 nodi nel caso pavimento - pareti.
- 64 nodi nel caso pavimento - soffitto.

### 3.5 Coefficiente di scambio termico radiativo

In un sistema a pannelli radianti a pavimento, la temperatura superficiale è significativamente superiore a quella delle altre superfici. Lo scambio termico per irraggiamento diventa allora il meccanismo predominante. Per poterlo modellare in dettaglio, sono stati calcolati i fattori di vista di ogni nodo del pavimento verso le altre superfici. Siccome la discretizzazione all'interno del modello è abbastanza fitta (Figura 3.9), il fattore di vista dal nodo  $i$  verso il nodo  $j$  potrà essere approssimato con l'Eq. 3.7.

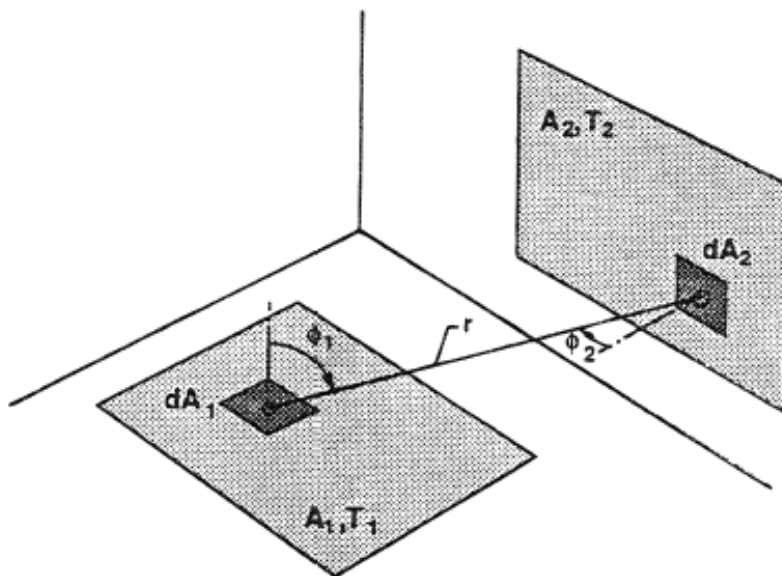


Figura 3.9. Calcolo dei fattori di vista tra le superfici della stanza.

Dunque lo scambio termico radiativo netto fra due superfici nere è:

$$q_{rad,i \rightarrow j} = \sigma F_{i \rightarrow j} (T_{sup,j}^4 - T_{sup,i}^4) S_i \quad (3.8)$$

Data la linearità di tutte le equazioni che descrivono il problema di scambio termico pavimento - ambiente è conveniente linearizzare anche lo scambio termico per irraggiamento. A tale scopo viene introdotto un'opportuna temperatura media, media pesata delle temperature delle superfici:

$$q_{rad,i \rightarrow j} = 4\sigma F_{i \rightarrow j} (T_m + 273,15)^3 (T_{sup,j} - T_{sup,i}) S_i \quad (3.9)$$

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^{N_{superfici}} T_{Ni} * A_i}{A_{tot}} \quad (3.10)$$

La precedente relazione è valida per lo scambio termico radiativo tra due superfici nere. Tuttavia le superfici reali non si comportano come corpi neri bensì riflettono parte della radiazione incidente.

Per tenere conto delle mutue inter-riflessioni tra le varie superfici occorre considerare una cavità chiusa composta da  $N$  superfici grigie, diffuse e opache a temperatura uniforme  $T_i$ . Definiamo *fattore di radiazione mutua* il rapporto tra la potenza emessa dalla superficie  $i$  e assorbita dalla superficie  $j$  e la potenza che emetterebbe la superficie  $i$  se questa fosse nera.

Come suggeriscono Dama e Lastaria [16] è possibile calcolare in forma matriciale il *fattore di radiazione mutua* all'inter-riflessione  $m$ -esima nel seguente modo:

$$\mathcal{F}_{i \rightarrow j}^{(m)} = \varepsilon_i \varepsilon_j [F(I + DF + \dots + DF^m)] \quad (3.11)$$

dove  $F$  è la matrice  $N \times N$  dei fattori di vista,  $D$  la matrice diagonale delle riflettanze,  $I$  la matrice identità e  $\varepsilon$  le emissività.

Il coefficiente di scambio termico radiativo sarà allora:

$$h_{rad,i \rightarrow j} = 4\sigma \mathcal{F}_{i \rightarrow j} (T_m + 273,15)^3 \quad (3.12)$$

### 3.6 Coefficiente di scambio convettivo del fluido interno ai tubi

Assumendo che i profili di velocità e temperatura siano completamente sviluppati, il calcolo del numero di Nusselt, nel caso di convezione forzata interna, è differente a seconda del numero di Reynolds. Se si è in condizioni di moto laminare,  $Re < 2300$ , e flusso termico areico imposto:



$$Nu = 4,36 \quad (3.13)$$

In caso di moto turbolento,  $Re > 2300$ , e profili di velocità completamente sviluppati, Gnielinski [17] propone:

$$Nu = \frac{\frac{f}{8}(Re - 1000)Pr}{1 + 12,7 \left(\frac{f}{8}\right)^{0,5} (Pr^{2/3} - 1)} \text{ per } Re > 2300 \quad (3.14)$$

$$f = (0,79 \ln Re - 1,64)^{-2} \quad (3.15)$$

Dove  $f$  è il fattore d'attrito,  $Re$  il numero di Reynolds e  $Pr$  il numero di Prandtl. Per semplicità i coefficienti di scambio per la convezione forzata interna sono stati assunti costanti lungo l'intero sviluppo del circuito idraulico.



## 4 RISULTATI

Lo scopo del seguente lavoro è di stabilire se lo strato contenente il pannello radiante possa essere considerato come una superficie a temperatura uniforme, sia per il regime stazionario sia per il regime dinamico.

### 4.1 Regime stazionario

Nel primo modello analizzato, il regime stazionario, si assume che il transitorio termico sia esaurito e conseguentemente il sistema edificio-impianto sia a regime; dunque la derivata temporale all'interno dell'equazione del calore si annulla. La prima simulazione numerica ha i seguenti dati:

- Configurazione: serpentino (Figura 4.1),

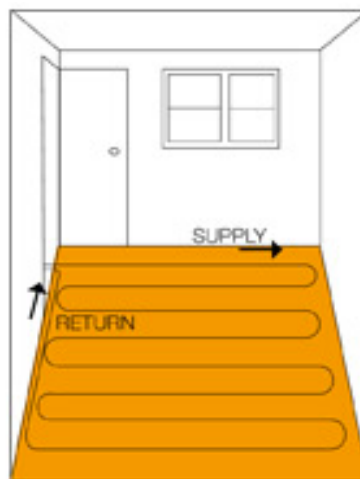


Figura 4.1. Configurazione a serpentino.

- Portata d'acqua: 80 L/h,
- Temperatura acqua calda: 35°C,
- Salto termico di progetto: 5 K,
- Mura perimetrali affacciate sull'esterno.

Come osservabile in Figura 4.3 l'utilizzo della configurazione a serpentino non sarebbe assimilabile a una superficie a temperatura uniforme; infatti, le temperature sono decrescenti dal punto in cui il fluido entra nella stanza al punto in cui fuoriesce.

Si ha inoltre il rischio di oltrepassare il limite di temperatura ammesso per un pavimento radiante.

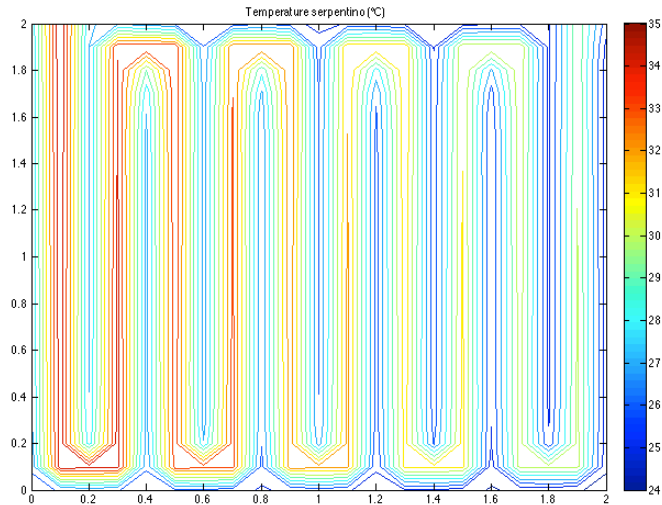


Figura 4.2. Isotherme sul piano contenente il pannello, quattro mura sull'esterno, caso serpentino.

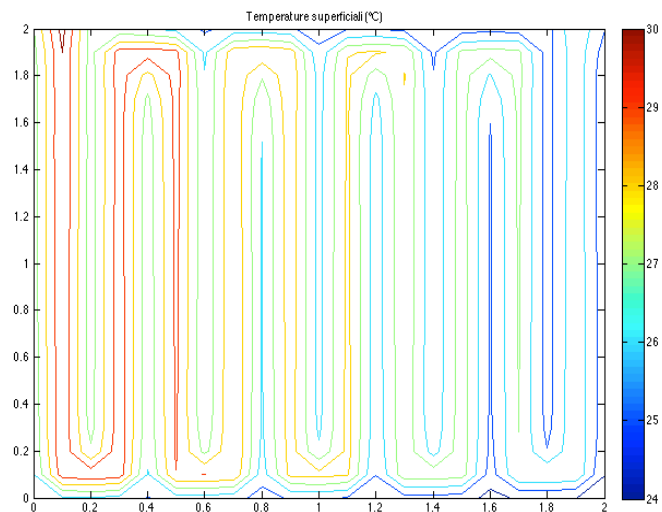


Figura 4.3. Isotherme sul piano contenente il pavimento, quattro mura sull'esterno, caso serpentino.

In regime stazionario il pannello fornisce  $72 \text{ W/m}^2$ , con un salto termico effettivo di  $5,21 \text{ K}$ , una temperatura media del pavimento pari a  $26,6^\circ\text{C}$  e coefficienti di scambio termico pari a:

- $h_{convettivo,medio}$  pari a  $3,43 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,

- $h_{\text{radiativo, medio}}$  pari a  $6,18 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Consideriamo ora il caso in cui due pareti della stanza siano a contatto con un ambiente mantenuto a una temperatura costante e uniforme di  $20^\circ\text{C}$ , mantenendo inalterati gli altri dati d'ingresso.

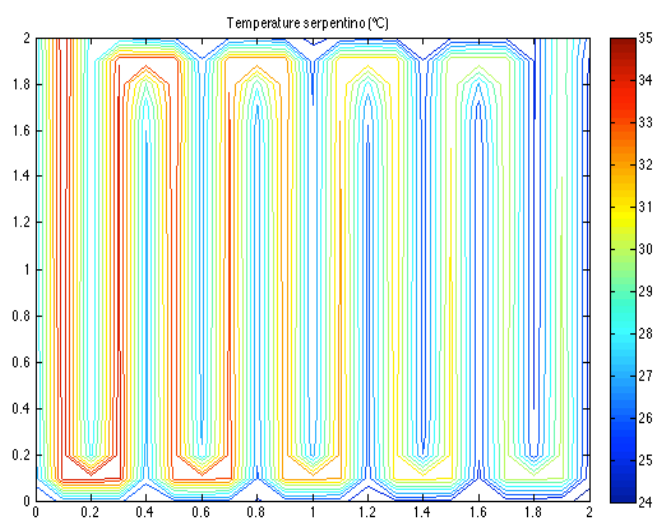


Figura 4.4. Isotherme sul piano contenente il pannello, due mura sull'esterno, caso serpentino.

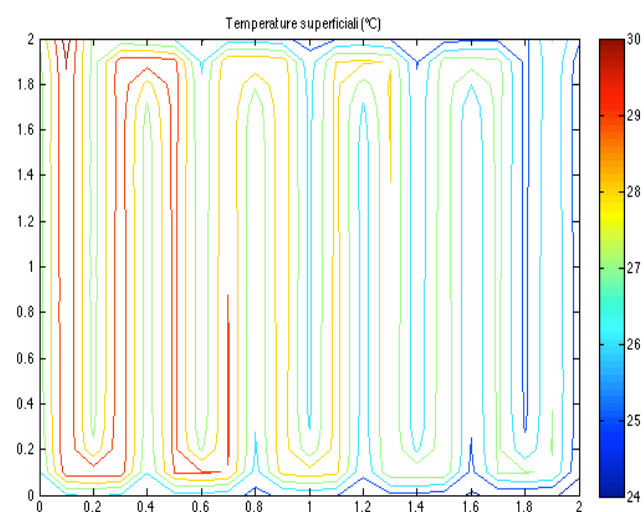


Figura 4.5. Isotherme sul piano contenente il pavimento, due mura sull'esterno, caso serpentino.

In questo caso il pannello fornisce una potenza specifica di  $70,8 \text{ W/m}^2$ , con un salto termico effettivo di  $5,15 \text{ K}$ , una temperatura media del pavimento di  $26,9^\circ\text{C}$  e coefficienti di scambio termico pari a:

- $h_{\text{convettivo,medio}}$  pari a  $3,45 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- $h_{\text{radiativo,medio}}$  pari a  $6,2 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

L'incremento dei coefficienti di scambio è dovuto all'aumento della temperatura superficiale del pavimento, parametro da cui dipendono entrambi. La potenza termica fornita, e conseguentemente il salto di temperatura ingresso-uscita, invece diminuisce perché la stanza disperde meno calore verso l'ambiente esterno; quindi per mantenere la stessa temperatura dell'aria ambiente si ha necessità di meno potenza scambiata.

In questo caso, rispondente di più a una situazione reale, per ottenere lo stesso flusso termico scambiato dal pannello, si può immaginare di sostituire al pannello stesso una superficie mantenuta a temperatura costante e uniforme pari a  $31,3^\circ\text{C}$ . I coefficienti di scambio termico sono pari a:

- $h_{\text{convettivo,medio}}$  pari a  $3,49 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- $h_{\text{radiativo,medio}}$  pari a  $6,2 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

La seconda configurazione analizzata è la disposizione dei tubi a chiocciola (Figura 4.6). I dati in ingresso sono:

- Configurazione: chiocciola,

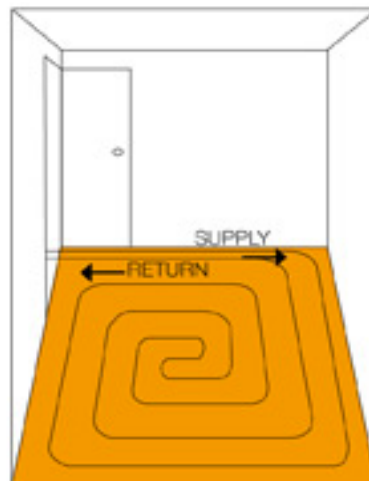


Figura 4.6. Configurazione a chiocciola.

- Portata d'acqua:  $80 \text{ L/h}$ ,

- Temperatura acqua calda: 35°C,
- Salto termico di progetto: 5 K,
- Mura perimetrali affacciate sull'esterno.

Come osservabile in Figura 4.8 l'utilizzo della configurazione a chiocciola, rispetto al serpentino, può approssimare in maniera soddisfacente una superficie a temperatura uniforme.

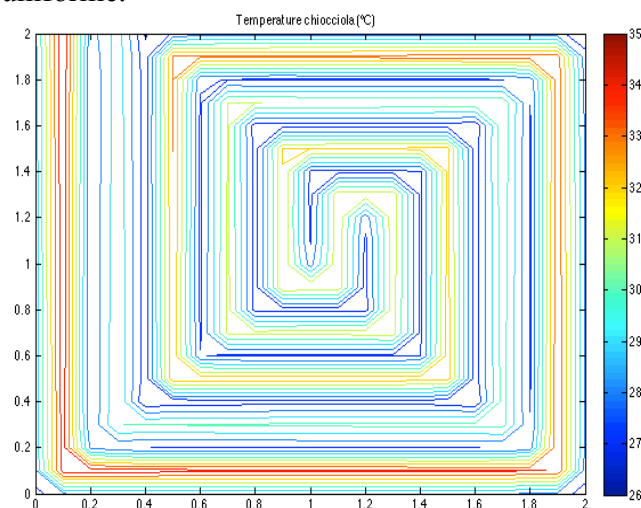


Figura 4.7. Isotherme sul piano contenente il pannello, quattro mura sull'esterno, caso chiocciola.

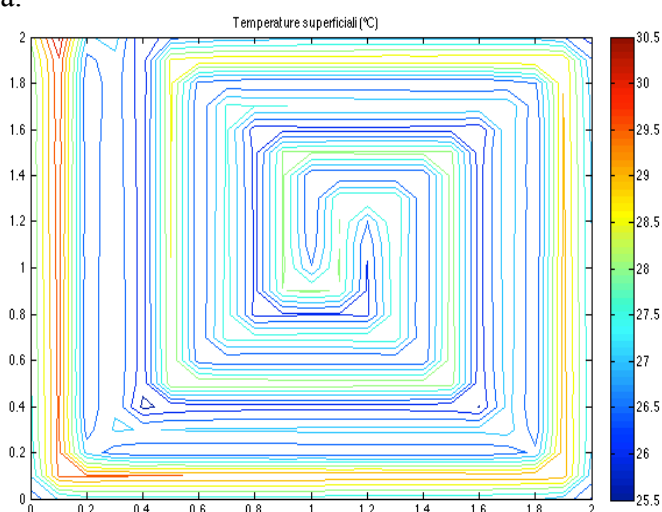


Figura 4.8. Isotherme sul piano contenente il pavimento, quattro mura sull'esterno, caso chiocciola.

## Capitolo 4

In regime stazionario il pannello fornisce  $75,49 \text{ W/m}^2$ , con un salto termico effettivo di  $5,47 \text{ K}$ , una temperatura media del pavimento pari a  $27,22^\circ\text{C}$  e coefficienti di scambio termico pari a:

- $h_{convettivo,medio}$  pari a  $3,51 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- $h_{radiativo,medio}$  pari a  $6,18 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Consideriamo ora il caso in cui due pareti della stanza siano a contatto con un ambiente mantenuto a una temperatura costante e uniforme di  $20^\circ\text{C}$ , mantenendo inalterati gli altri dati d'ingresso.

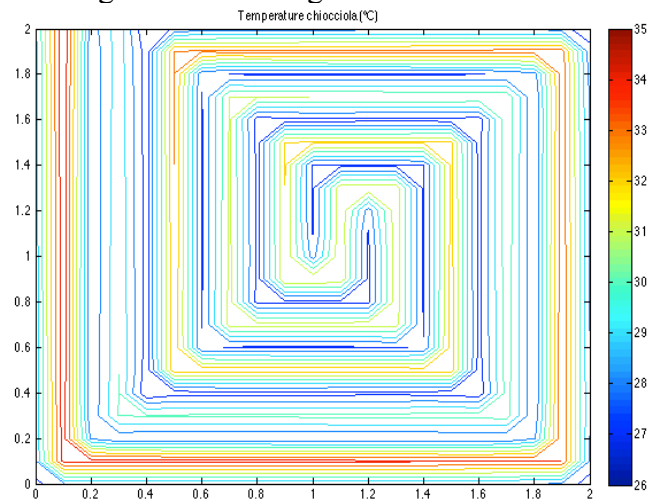


Figura 4.9. Isotherme sul piano contenente il pannello, due mura sull'esterno, caso chiocciola.

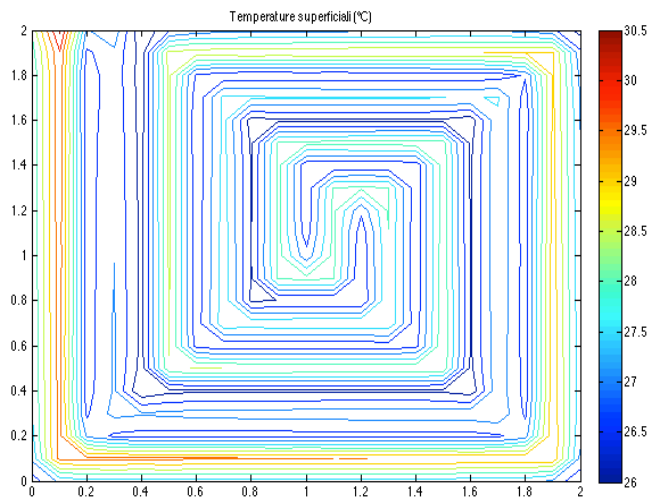


Figura 4.10. Isotherme sul piano contenente il pavimento, due mura sull'esterno, caso chiocciola.



In questo caso il pannello fornisce una potenza specifica di  $74,12 \text{ W/m}^2$ , con un salto termico effettivo di  $5,41 \text{ K}$ , una temperatura media del pavimento di  $27,31^\circ\text{C}$  e coefficienti di scambio termico pari a:

- $h_{\text{convettivo,medio}}$  pari a  $3,53 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- $h_{\text{radiativo,medio}}$  pari a  $6,2 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

L'incremento dei coefficienti di scambio è dovuto all'aumento della temperatura superficiale del pavimento, parametro da cui dipendono entrambi. La potenza termica fornita, e conseguentemente il salto di temperatura ingresso-uscita, invece diminuisce perché la stanza disperde meno calore verso l'ambiente esterno; quindi per mantenere la stessa temperatura dell'aria ambiente si ha necessità di meno potenza scambiata. E' interessante notare come il coefficiente di scambio termico radiativo non cambia in maniera significativa per le quattro configurazioni in esame.

In questo caso, rispondente di più a una situazione reale, per ottenere lo stesso flusso termico scambiato dal pannello, si può immaginare di sostituire al pannello stesso una superficie mantenuta a temperatura costante e uniforme pari a  $31,83^\circ\text{C}$ . I coefficienti di scambio termico sono pari a:

- $h_{\text{convettivo,medio}}$  pari a  $3,54 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- $h_{\text{radiativo,medio}}$  pari a  $6,20 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

E' possibile affermare dunque che in regime stazionario, nel caso in esame, la superficie contenente il pannello radiante può essere approssimata a una superficie a temperatura uniforme. Diversamente da quello che si potrebbe pensare, questa non è la media tra la temperatura in ingresso e uscita del fluido termovettore (vedi Tab.4.1 e 4.2).

Tabella 4.1. Confronto tra la temperatura media e la temperatura uniforme, caso serpentino.

$T_{w,in}$	$T_{w,out}$	$q$	$T_{\text{uniforme}}$	$T_{\text{media,in-out}}$
$^\circ\text{C}$	$^\circ\text{C}$	$\text{W/m}^2$	$^\circ\text{C}$	$^\circ\text{C}$
30,00	26,36	45,00	27,60	28,18
32,50	28,10	57,82	29,70	30,30
35,00	29,85	70,86	31,83	32,42
37,50	31,29	83,90	34,00	34,39
40,00	33,26	97,25	36,10	36,63

Tabella 4.2. Confronto tra la temperatura media e la temperatura uniforme, caso chiocciola.

$T_{w,in}$	$T_{w,out}$	$q$	$T_{uniforme}$	$T_{media,in-out}$
°C	°C	W/m <sup>2</sup>	°C	°C
30,00	26,19	46,91	27,60	28,09
32,50	27,89	60,39	29,70	30,20
35,00	29,59	74,13	31,83	32,29
37,50	31,28	88,04	34,00	34,39
40,00	32,96	102,15	36,10	36,48

Per il regime stazionario, sempre per il caso con due pareti perimetrali affacciate sull'esterno, vengono proposte le due formule seguenti per il calcolo immediato del flusso termico areico e della temperatura equivalente in funzione della portata volumetrica d'acqua  $V$ :

- SERPENTINO

$$q = -0,001 V^2 + 0,3132 V + 52,058 \quad (4.1)$$

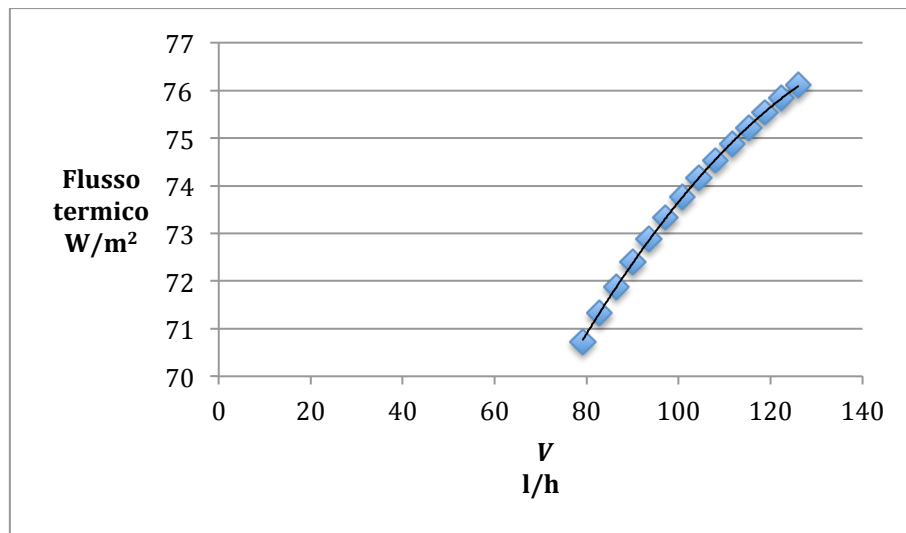


Figura 4.11. Andamento del flusso termico al variare della portata volumetrica, caso serpentino.

Mentre:

$$T_{eq} = -0,0001 V^2 + 0,0434 V + 28,685 \quad (4.2)$$

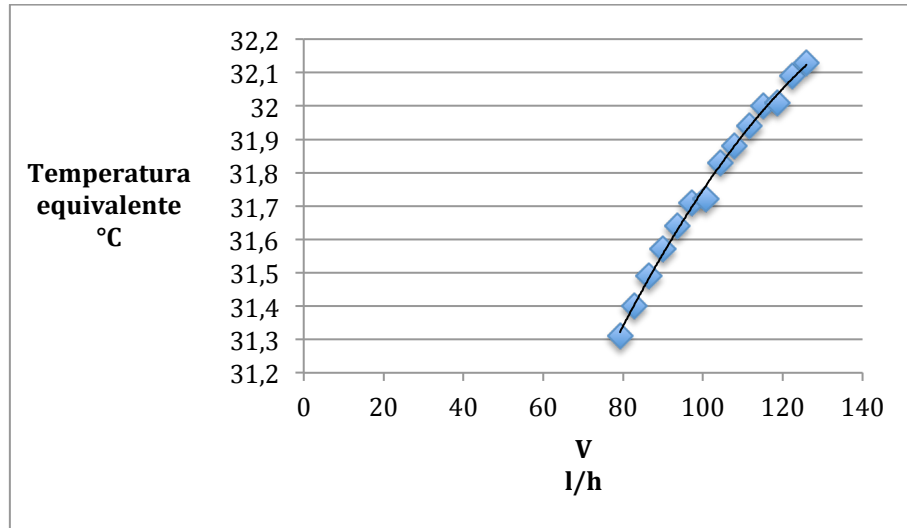


Figura 4.12. Andamento della temperatura equivalente al variare della portata volumetrica, caso serpentino.

- CHIOCCIOLA

$$q = -0,0011 V^2 + 0,3393 V + 53,909 \quad (4.3)$$

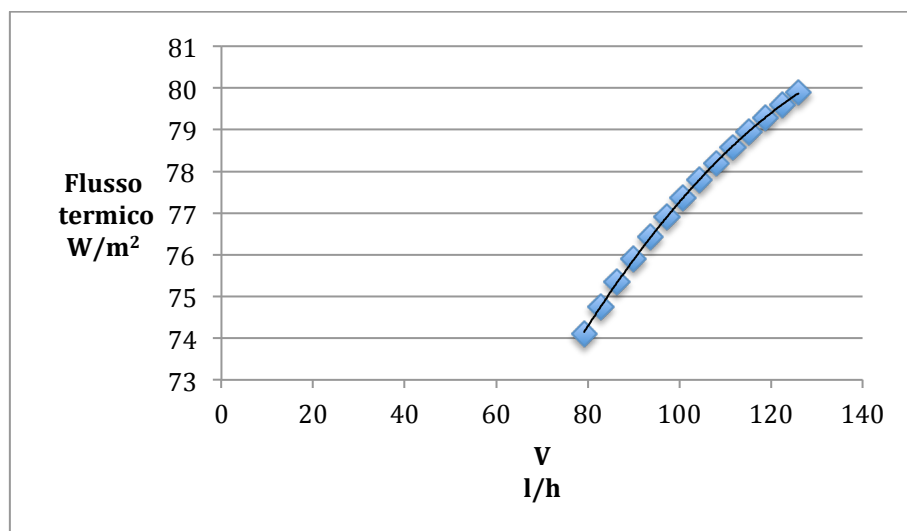


Figura 4.13. Andamento del flusso termico al variare della portata volumetrica, caso chiocciola.

Mentre:

$$T_{eq} = -0,0002 V^2 + 0,0531 V + 28,667 \quad (4.4)$$

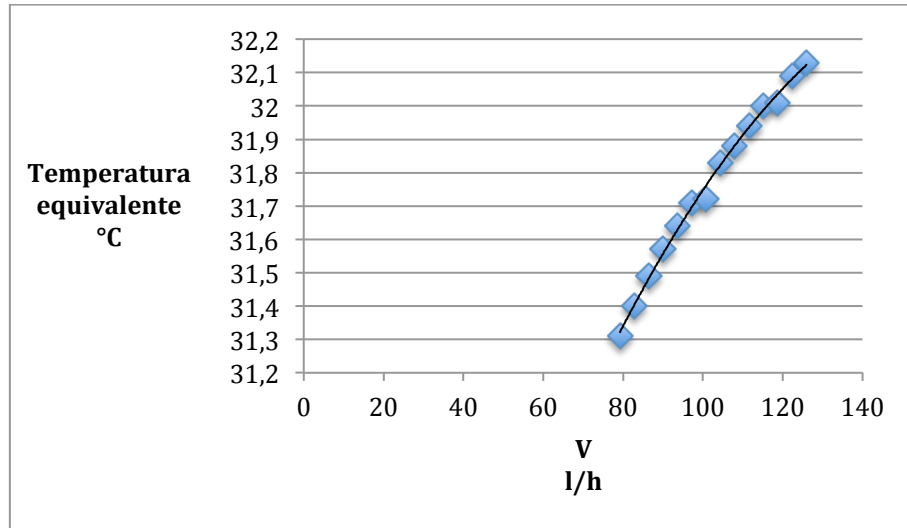


Figura 4.14. Andamento della temperatura equivalente al variare della portata volumetrica, caso chiocciola.

## 4.2 Regime Dinamico

Per la simulazione in regime dinamico è stata formulata l'ipotesi che all'istante iniziale tutti i nodi siano a temperatura uniforme pari a 18°C. Nell'istante successivo:

- Due pareti sono affacciate all'esterno, a temperatura di -5°C,
- Due pareti sono rivolte verso ambienti a temperatura uniforme di 20°C,
- Inizia la circolazione del fluido termovettore all'interno del pannello,
- Il soffitto assume la temperatura di 20°C.

Le condizioni di progetto (salto termico e portata d'acqua) sono le medesime del caso stazionario. La simulazione si arresta quando la temperatura dell'aria raggiunge i 20°C.

Per il serpentino la temperatura di set dell'aria ambiente è raggiunta dopo circa un'ora dall'accensione del riscaldamento (vedi Figura 4.15).

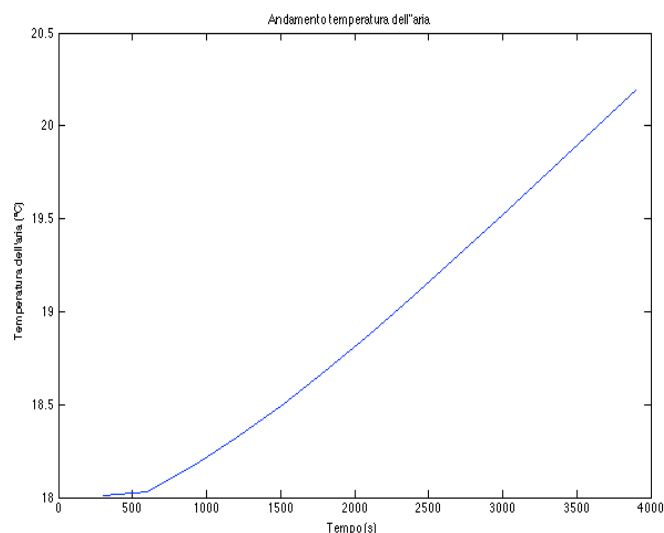


Figura 4.15. Andamento della temperatura dell'aria, caso serpentino.

Come si può notare in Figura 4.16, lo scambio termico per irraggiamento rappresenta la quota parte principale del flusso termico totale emesso dal pavimento verso l'aria, il soffitto e le pareti.

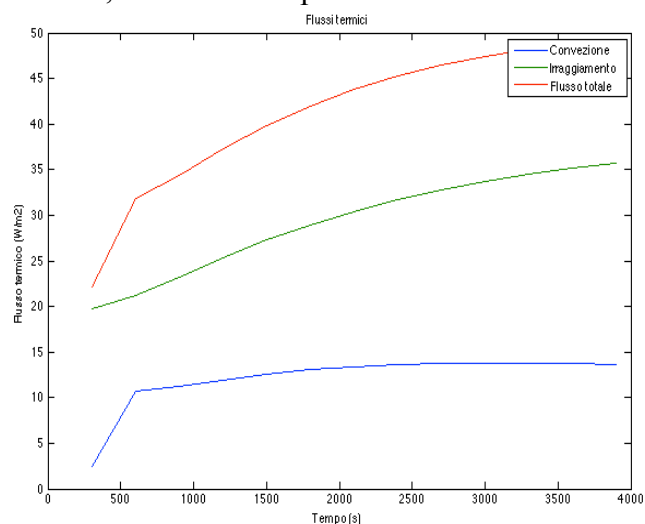


Figura 4.16. Andamento dei flussi termici, caso serpentino.

Simulando ora il pannello come una superficie a temperatura uniforme, prendendo come temperatura equivalente  $31,3^{\circ}\text{C}$  (la medesima del regime stazionario) otteniamo i seguenti risultati:

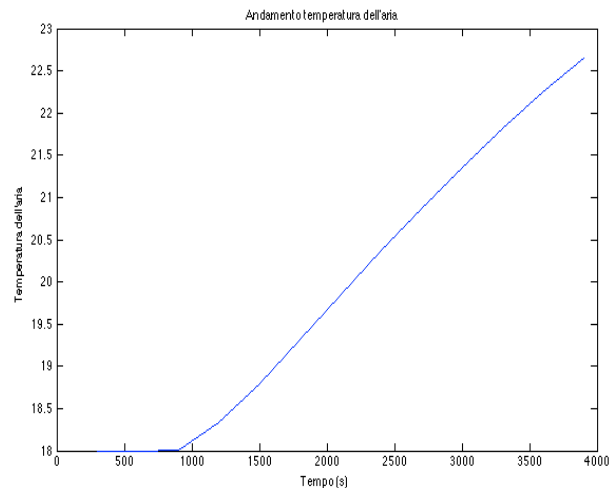


Figura 4.17. Andamento della temperatura dell'aria nel caso di temperatura uniforme, caso serpentino.

Come si può notare in Figura 4.17 la temperatura di set-point è raggiunta dopo circa mezz'ora ma l'andamento dei flussi areici è completamente diverso (cfr. Figura 4.16 e Figura 4.18). In Fig.4.18 si osserva che il flusso convettivo decresce molto rapidamente dopo circa mezz'ora; questo è dovuto al fatto che il coefficiente di scambio convettivo, dipendendo dalla differenza di temperatura pavimento – aria, decresce in maniera significativa. E' opportuno far notare che, procedendo per tentativi, si riesce a trovare una temperatura equivalente (nel caso in esame è pari a 24,6°C) che fornisca lo stesso andamento della temperatura dell'aria di Figura 4.15; tuttavia tale valore numerico non ha alcun significato fisico.

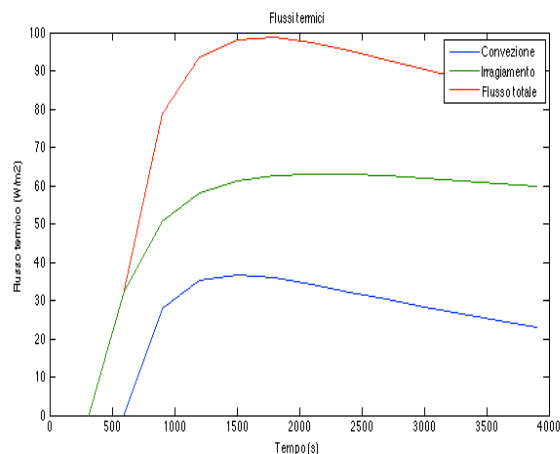


Figura 4.18. Andamento dei flussi termici nel caso di temperatura uniforme, confronto con serpentino.

Per la disposizione a chiocciola si ottengono i medesimi risultati finali; dunque per il regime dinamico non è possibile sostituire il pannello radiante con una superficie mantenuta a temperatura uniforme e costante.

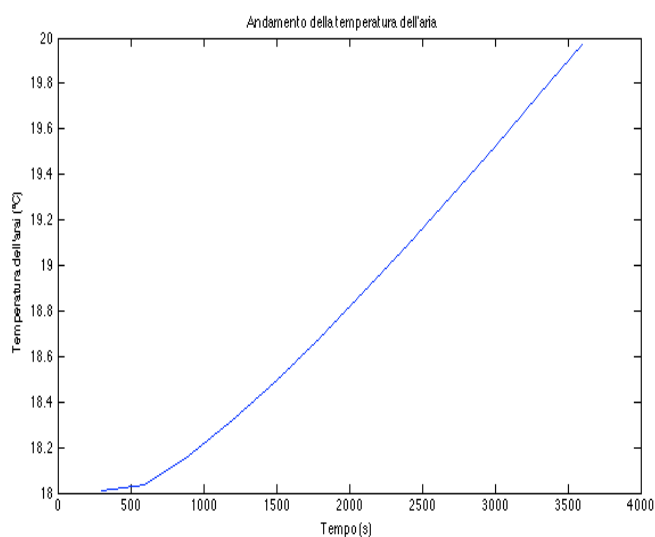


Figura 4.19. Andamento della temperatura dell'aria, caso chiocciola.

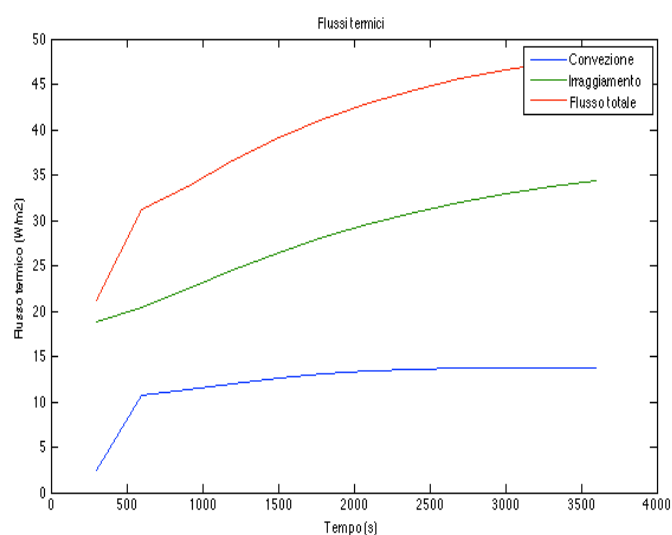


Figura 4.20. Andamento dei flussi termici, caso chiocciola.

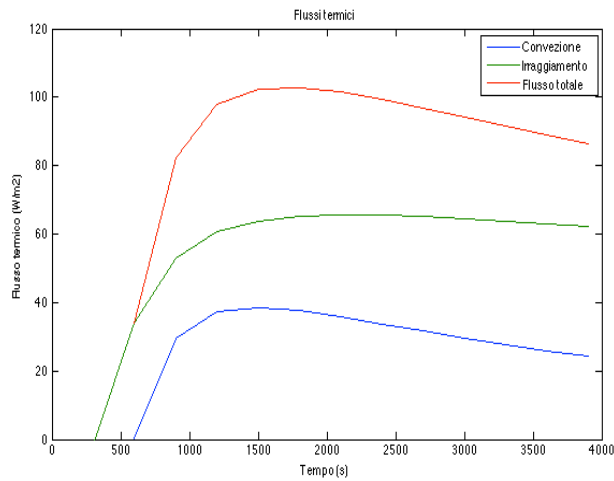


Figura 4.21. Andamento dei flussi termici nel caso di temperatura uniforme, confronto con chiocciola.

### 4.3 Regime Periodico Stabilizzato

Limitatamente al caso della disposizione a chiocciola, con due pareti affacciate sull'esterno, è stato analizzato il caso del regime periodico stabilizzato, di seguito RPS; nel RPS la temperatura dell'aria esterna non è più mantenuta costante ma è fatta variare con legge sinusoidale, con temperatura media pari a 0°C, ampiezza dell'oscillazione in modulo 5°C e periodo pari a 24 h. Con lo spessore delle pareti pari a 30 cm, la temperatura dell'aria interna non risente delle oscillazioni periodiche della temperatura esterna ma si mantiene costante (il valore numerico non è quello di set perché il pannello viene mantenuto in funzionamento continuativo).

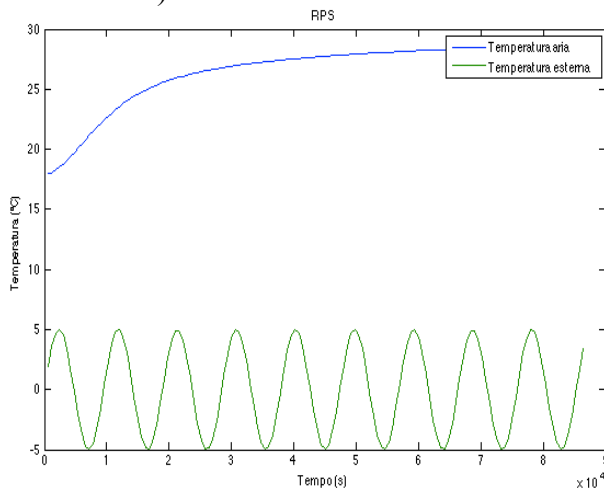


Figura 4.22. Effetti sulla temperatura dell'aria ambiente a causa dell'oscillazione della temperatura esterna, parete da 30 cm.



## Conclusioni

Ricordando lo scopo del presente lavoro possiamo trarre le seguenti conclusioni: per il regime stazionario è possibile approssimare il pannello con una superficie a temperatura uniforme, diversa dalla media tra le temperature in ingresso e uscita dell'acqua calda, sia per la disposizione a serpentino sia per la disposizione a chiocciola. Sono state proposte alcune formule (da Eq.4.1 a Eq.4.4) per il calcolo immediato del flusso areico e della temperatura equivalente.

Dai risultati numerici, è possibile inoltre assumere come valori medi dei coefficienti di scambio termico i seguenti numeri:

- $h_{conv,medio} = 3 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- $h_{rad,medio} = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

Per il regime dinamico invece è stato impossibile trovare una temperatura equivalente che fornisca lo stesso andamento del flusso termico dall'accensione del pannello fino alla condizione di set-point.



## Nomenclatura

$\Phi$	<i>flusso di potenza (W)</i>
$W$	<i>potenza meccanica (W)</i>
$Q$	<i>potenza termica (W)</i>
$\rho$	<i>densità (kg/m<sup>3</sup>)</i>
$c$	<i>calore specifico (kJ/kgK)</i>
$k$	<i>conduttività termica (W/mK)</i>
$h$	<i>coefficiente di scambio convettivo (W/m<sup>2</sup>K)</i>
$\alpha$	<i>diffusività termica (m<sup>2</sup>/s)</i>
$Fo$	<i>numero di Fourier (-)</i>
$Bi$	<i>numero di Biot (-)</i>
$h_{conv}$	<i>coefficiente di scambio convettivo (W/m<sup>2</sup>K)</i>
$D$	<i>diametro idraulico (m)</i>
$Nu$	<i>numero di Nusselt (-)</i>
$Gr$	<i>numero di Grashof (-)</i>
$Ra$	<i>numero di Rayleigh (-)</i>
$\sigma$	<i>costante di Stephan-Boltzmann (W/m<sup>2</sup>K<sup>4</sup>)</i>
$\varepsilon$	<i>emissività</i>
$h_{rad}$	<i>coefficiente di scambio radiativo (W/m<sup>2</sup>K)</i>
$Re$	<i>numero di Reynolds (-)</i>
$Pr$	<i>numero di Prandtl (-)</i>
$\dot{V}$	<i>portata volumetrica (l/h)</i>



## Bibliografia

- [1] Bjarne W.Olesen, *Radiant floor heating in theory and practice*, ASHRAE Journal, July 2002.
- [2] Fang L.,G. Clausen, and P.O. Fanger. 1998. “*Impact of temperature and humidity on the perception of indoor air quality*”, Indoor Air 8 (2) : 80-90.
- [3] Deutscher Allergie und Asthmabund:”*Hausstaubmilben-Allergie*” Merkblatt; Monchengladbach.
- [4] Lebrun,J. And D.Marret. 1979. “*Thermal comfort and energy consumption in winter conditions-continuation of the experimental study*”, ASHRAE Transaction 85 (2) : 190-204.
- [5] Laouadi A., “*Development of a radiant heating and cooling model for building energy simulation software*”, Building and Environment 39 (2004) 421-431.
- [6] Kollmar A., Liese W.,*Die strahlungsheizung* 4th ed. Munchen: R.Oldenbourg;1957.
- [7] Zhang Z., Pate MB.” *A numerical study of heat transfer in a hydronic radiant ceiling panel*”. In: Chen JLS, Vafaik, editors. Numerical methods in heat transfer, vol. 62. New York: ASME-HTD: 1986.
- [8] Zhang Z., Pate MB.” *A semi-analytical formulation of heat transfer from structures with embedded tubes*”. In: Khuen TH, editors. Heat transfer in buildings and structures, vol. 78. New York: ASME-HTD: 1987. p 17-25.
- [9] Athienitis AK., Chen TY. “*Experimental and theoretical investigation of floor heating with thermal storage*”. ASHRAE Transaction 1993; 99 (part1) : 1049-1057.
- [10] De Carli et alt. “*DIGITHON: a numerical method for the thermal balance of a room equipped with radiant systems*”. Building and Environment 57 (2012) 126-144.
- [11] Sattari S., Farhanieh B. “*A parametric study on radiant floor heating system performance*”. Renewable energy 31 (2006) 1617-1626.

- [12] Berglund LG, Gagge AP. “ *Human response to thermal conditions maintained in an office by radiant ceiling, baseboard, forced air and floor heating systems*”. ASHRAE Transaction 1985; 91 : 488-502.
- [13] K.J.Lomas. “*The UK applicability study: an evaluation of thermal simulation programs for passive solar house design*”. Building and Environment 31 (1995) 197-206.
- [14] Awbi H.B., “*Calculation of convective heat transfer coefficients of room surfaces for natural convection*”. Energy and Buildings 28 (1998) 219-227.
- [15] Lloyd J.R., and W.Moran, J. Heat Transer, 96, 443, 1974.
- [16] Dama A., Lastaria F.,”*Explicit versus implicit method for radiative heat transfer in gray and diffuse enclosures*”. International Journal of Heat and MassTransfer 55 (2012) 3829-3833.
- [17] Gnielinski V., Int.Chem.Eng., 16,359,1976.