



POLITECNICO DI MILANO

SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

**INTERPOLAZIONE DI MAPPE DEM MEDIANTE
ALGORITMI DI DISTANZA INVERSA PESATA E
FUNZIONI A BASE RADIALE**

Relatore:

Prof. Luca BASCETTA

Correlatore:

Prof. Paolo ROCCO

Tesi di Laurea Magistrale di:

Fabio AMBROSIANI

Matricola 787053

Abstract

This paper deals the interpolation of Digital Elevation Models (DEM), in order to obtain good reconstructions of a terrain morphology. The first part consist in a deep bibliographic research about the technical know-how. In the second part, I worked in order to implement two particular algorithms: the Inverse Distance Weighted (IDW) one and the Radial Basis Function (RBF) one. They have been optimized for my goal and several tests show that they rebuild every kind of surface accurately and quickly. Some limitation is still present, due to an imperfect rebuilding of irregular terrains and numerical instability problems that produce malformations. The Improvement and the implementation of these algorithms in a moving robot, so that it could rebuild surface areas not exposed to view of his camera, will be the purpose of future development.

Keywords: digital elevation model (DEM), raster, spatial interpolation, IDW, RBF

Sommario

Il presente lavoro di tesi tratta l'interpolazione di Modelli Digitali di Elevazione (DEM), al fine di ottenere fedeli ricostruzioni della morfologia di un terreno. La prima parte del documento tratta una approfondita ricerca bibliografica riguardo le tecniche maggiormente utilizzate in questo campo. Nella seconda parte mi sono concentrato sull'implementazione di due algoritmi, il primo basato sulla Distanza Inversa Pesata (IDW) e l'altro sulle Funzioni a Base Radiale (RBF). Essi sono stati ottimizzati per il mio studio e test effettuati hanno mostrato che sono in grado di interpolare in modo preciso e veloce qualsiasi morfologia di terreno. Tuttavia, restano alcune limitazioni, causate dalla non perfetta ricostruzione in caso di terreni particolarmente irregolari e dalla possibile presenza di errori numerici che generano malformazioni. Il perfezionamento e l'eventuale implementazione degli algoritmi su un robot mobile, in modo che possa ricostruire correttamente aree di terreno non viste dalla sua telecamera, saranno oggetto di sviluppi futuri di questo lavoro.

Parole chiave: modello digitale di elevazione (DEM), raster, interpolazione spaziale, IDW, RBF

Ringraziamenti

Finalmente, anche per me è arrivato il momento di dire ciao al Polimi, che è stato la mia seconda (forse la prima) casa durante questi anni. Per uno come me, proveniente dalla piccola realtà agricola di Zibido San Giacomo, è stato il primo vero impatto con la grande città, il che mi ha permesso di aprire i miei orizzonti.

Vorrei ringraziare in primis tutti i miei colleghi, colleghi poi diventati amici, con cui ho condiviso alti e bassi, successi e insuccessi, gioie e dolori, progetti, competitivi, scritti, orali, pranzi, cene, caffè, aperitivi ecc. di questa trafficata carriera universitaria in Ingegneria Meccanica. Preferisco non fare nomi perché sicuramente dimenticherei qualcuno, tanto sono fermamente convinto che tutti quelli tirati in ballo non avranno alcun problema a riconoscersi come tali. Per i più scettici comunico che non è stata fatta alcuna discriminazione a sfondo calcistico.

Non dimentico poi di ringraziare la mia famiglia, che mi ha sempre sostenuto e soprattutto sopportato, e tutti i miei parenti: mamma, papà, sorella, nonni, nonne, zii, zia, cugino. Ricordiamoci poi del cane, ormai l'unico che mi capisce. Un saluto anche all'ultimo arrivato, Achille, che sta ancora facendo la bella vita, ma che prima o poi dovrà pur mettersi a camminare.

Per ultimi, ma non per importanza, i miei amici di una vita, quelli che abbiamo condiviso veramente tutto il condivisibile, quelli che ci conosciamo da quando eravamo sotto il metro di altezza, quelli che sappiamo davvero tutto gli uni degli altri e che i segreti non esistono. Anche costoro, ovviamente nativi di quel di Zibido, non sono stati citati direttamente, ma non c'è bisogno di farlo. Non dimentichiamoci di quelli che non hanno avuto il privilegio di nascere a Zibido e che sono sparsi per l'Italia e anche oltreconfine.

Un ringraziamento particolare inoltre va al prof. Luca Bascetta che, in qualità di mio relatore, che mi ha sempre seguito scrupolosamente durante la preparazione della tesi, a tutti i professori con cui ho avuto a che fare, i quali hanno messo a disposizione di noi studenti il loro sapere e la loro esperienza, e a tutti quelli del Dipartimento di Meccanica del Polimi.

*È arrivato il momento di chiudere, e voglio farlo con le parole usate da Forrest Gump durante il discorso al Lincoln Memorial di Washington D.C.:
”..E non ho altro da dire su questa faccenda.”.*

Grazie di cuore a tutti

Fabio Ambrosiani

Indice

Elenco delle figure	V
Elenco delle tabelle	IX
Introduzione	1
1 Progetto Quadrivio	3
1.1 Sistema di acquisizione dati	4
2 Modelli Digitali di Elevazione	7
2.1 Cos'è una DEM	7
2.1.1 Interferometria	8
2.2 Tipologie di modelli	12
2.3 Tipi di DEM	13
2.3.1 Raster	13
2.3.2 TIN	15
2.3.3 Rappresentazione Numerica	17
2.4 Campi di utilizzo di una DEM	17
2.5 Costruzione di una DEM	18
2.5.1 Light Detection And Ranging (LiDAR)	18
2.5.2 Real Time Kinematics (RTK)	21
2.5.3 Mappa Topografica	24
2.5.4 Theodolite e Total Station	26
2.5.5 Variazione Focale	28
2.6 Caratteristiche di una DEM	30

2.7	Disponibilità	30
3	Metodi di Interpolazione delle DEM	33
3.1	Inverse Distance Weighted	37
3.2	Radial Basis Functions	40
3.2.1	Reti Neurali	40
3.2.2	RBF	43
3.3	Kriging	46
3.3.1	Geostatica	47
3.3.2	Metodologia	48
3.4	Altri metodi	50
3.4.1	Trend	51
3.4.2	Tassellazione al punto più vicino	52
3.4.3	Media mobile	52
3.5	Confronto metodi	53
4	Analisi dei dati e risultati	55
4.1	Terreno analizzato	56
4.2	Ottenimento Data-set	57
4.3	IDW	60
4.3.1	Stima dei parametri	60
4.3.2	Risultati e discussione delle scelte fatte	64
4.4	RBF	68
4.4.1	Studio del metodo	68
4.4.2	Sviluppo dell'algoritmo	70
4.4.3	Risultati e discussione	72
4.5	Conclusioni e sviluppi futuri	80
	Conclusioni	83
A	Appendice	85
A.1	Algoritmo IDW	85
A.2	Algoritmo RBF	88

INDICE

III

Bibliografia

107

Elenco delle figure

1.1	Confronto tra ATV originale e modificato per la guida automatica.	4
1.2	Come funziona il Time of Flight.	5
1.3	Principio dei piani di scansione.	5
1.4	Apertura dello scanner ed esempio di configurazione variabile.	6
2.1	Shuttle Endeavour.	9
2.2	Onda trasmessa e ricevuta.	10
2.3	Fase tra due onde.	10
2.4	Confronto tra immagine affetta da speckle e immagine filtrata MIR, aeroporto di Milano Linate.	11
2.5	Differenze tra DTM e DSM.	12
2.6	DTM vs. DSM rappresentanti la zona di Adelaide, Australia del sud.	13
2.7	Esempio di immagine raster.	14
2.8	Mappa DEM ad alta definizione. $1\frac{arc}{sec}$ (30m) di risoluzione, immagine raster.	14
2.9	Triangolazione di Delaunay.	16
2.10	Rappresentazione TIN di un corso d'acqua nello Yellowstone National Park, Wyoming, U.S.A..	16
2.11	Dettaglio di un sistema LiDAR fissato ad un elicottero.	20
2.12	Ottenimento di un data-set usando LiDAR.	21
2.13	Come funziona il Real Time Kinematics.	22
2.14	Vecchia mappa topografica di Chicago (1913), stampata da US Geological Survey.	25

2.15	Curvimetro analogico, particolare strumento usato per calcolare la lunghezza di una curva.	25
2.16	400-8403 Pilot Baloon Theodolite, usato in applicazioni militari.	27
2.17	Rete di triangolazione della Svizzera.	27
2.18	Total Station Nikon DTM-652, 500-X data collector.	28
2.19	Significato di profondità di campo.	29
2.20	Variazione focale.	29
3.1	Confronto tra interpolazione esatta e approssimata	35
3.2	Esempio di DEM raster completa, si tratta di una griglia 1201x1201, troppo impegnativa da gestire nel suo complesso.	36
3.3	Interpolazione a partire dalla conoscenza della quota dei punti e della loro distanza.	37
3.4	Schema di un neurone.	41
3.5	Struttura di una rete neurale.	41
3.6	Struttura di una rete neurale a più livelli.	42
3.7	Centri base RBF uniforme.	45
3.8	Centri base RBF centroidale, centri livello 1 in rosso, centri livello 2 in blu, centri livello 3 in nero.	46
3.9	Esempio di variogramma.	49
3.10	Approssimazione di dati con polinomio di II grado, minimi quadrati.	51
3.11	Esempio di tassellazione.	52
3.12	Esempio finestra circolare (a sinistra) e rettangolare (a destra)	53
4.1	Mappa dell'Antartide, la Marie Byrd Land si trova nella regione occidentale.	58
4.2	Mappa RAMP dell'Antartide.	60
4.3	Andamento dei pesi w con la distanza dal punto incognito.	61
4.4	Andamento dei pesi w , con coefficienti differenti.	62
4.5	Variazione terreno interpolato al variare di w	63
4.6	Prova IDW terreno 1.	65
4.7	Prova IDW terreno 2.	65
4.8	Prova IDW terreno 3.	65

4.9 Prova IDW terreno 4.	66
4.10 Prova IDW terreno 5.	66
4.11 Prova IDW terreno 6.	66
4.12 Dettaglio superficie affetta da occhi di bue, vista lateralmente e dall'alto.	68
4.13 Polinomi interpolatori di vari tipi di terreno analizzato.	71
4.14 Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utiliz- zata (1).	73
4.15 Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utiliz- zata (2).	74
4.16 Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utiliz- zata (3).	75
4.17 Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utiliz- zata (4).	76
4.18 Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utiliz- zata (5).	77
4.19 Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utiliz- zata (6).	78

Elenco delle tabelle

2.1	Confronto tra i vari metodi di ottenimento data-set.	31
3.1	Confronto tra i vari metodi di interpolazione.	54
4.1	Variazione dell'errore rms [%] al variare del peso.	63
4.2	Variazione dell'errore rms [%] al variare della tipologia di terreno.	67
4.3	RMSE e valore di c con terreni morfologicamente diversi.	79

Introduzione

Il presente elaborato ha come obiettivo lo sviluppo di metodi efficienti per la ricostruzione di superfici, riprodotte a partire da *Modelli Digitali di Elevazione* o *DEM*, in formato *raster*, mediante tecniche di interpolazione spaziale. Questo studio servirà per determinare quale sia il modello di interpolazione spaziale migliore da implementare su un ATV in grado di muoversi autonomamente, in modo che riesca a fare una buona pianificazione del percorso da seguire.

La ricostruzione e la gestione delle superfici rappresenta un ramo molto attivo nelle scienze applicate. Il rilevamento di punti che giacciono su una superficie di un terreno e la successiva ricostruzione di un modello virtuale di tale terreno costituiscono una procedura ad oggi molto diffusa in molti campi, dalle scienze della Terra al militare. Il modello virtuale generato può essere impegnato per svariati scopi: la semplice visualizzazione (producendo carte a rilievo o per simulatori di volo), l'applicazione per analisi dinamiche (software Geographic Information System (GIS) o monitoraggio di terremoti e altri eventi naturali) e molto altro (ingegneria civile, robotica, simulazioni sportive).

La DEM di un terreno deve quindi essere una sua fedele e versatile ricostruzione, destinata a utilizzi e finalità diverse. Deve essere in grado di ricostruire un insieme di punti distribuiti in modo non uniforme (ad esempio, nel caso in cui ci siamo dei buchi causati da errori nel rilevamento), oppure terreni con morfologia particolarmente complessa. Inoltre, deve garantire una certa rapidità di calcolo e pochi oneri in termini di memoria occupata.

La continua evoluzione dei sistemi di acquisizione dati 3D ha portato

infine alla nascita di nuove sfide. Questo perché ad oggi ci si trova ad avere a che fare con scanner e altri sistemi di in grado di acquisire decine di milioni di punti, mentre gli algoritmi di interpolazione nelle loro forme più avanzate arrivano a gestire insiemi di qualche milione di punti.

In questo elaborato, dopo una approfondita panoramica sui Modelli Digitali di Elevazione, cosa sono e come si ottengono, sono state analizzate le tecniche di interpolazione spaziale maggiormente usate per la ricostruzione di superfici. Nella seconda parte, ho focalizzato l'attenzione sullo studio di algoritmi che usano tecniche di interpolazione basate sul principio della *Distanza Inversa Pesata (IDW)* e delle *Funzioni a Base Radiale (RBF)*, particolarmente versatili e performanti anche nel caso di superfici complesse.

Nello specifico, ho concentrato il lavoro sullo sviluppo degli algoritmi proposti in [2], che sono stati implementati in MATLAB[®] e testati su DEM di terreni morfologicamente molto diversi. Gli esperimenti hanno messo in luce pregi e difetti dei due algoritmi, che sono stati messi a confronto. In particolare, uno di essi si è rivelato maggiormente robusto e stabile nei risultati, mentre l'altro ha presentato maggiore precisione a fronte di minore stabilità.

Per quanto riguarda il contenuto del documento, nel Capitolo 1 viene presentato il sistema di acquisizione dati della telecamera del robot mobile considerato in questo lavoro, la tecnologia usata, la componentistica e i principi di funzionamento. Nel Capitolo 2 vengono presentati i Modelli Digitali di Elevazione, prestando particolare attenzione alle odierne tecnologie di ottenimento dati e alle varie tipologie esistenti, ognuno con i suoi pro e contro. Il Capitolo 3 presenta i principali metodi di interpolazione delle DEM, sottolineando gli approcci che stanno alla base di ognuno di essi e i principali campi di utilizzo. Nel Capitolo 4 sono descritti gli algoritmi esposti da [2] che ho implementato, facendo le opportune modifiche per adattarli al problema specifico, sono inoltre illustrati i risultati delle prove fatte, dando loro una interpretazione critica.

Capitolo 1

Progetto Quadrivio

Quadrivio è un progetto sviluppato dal Politecnico di Milano e finanziato dalla Regione Lazio con il programma FILAS (FInanziaria LAziale di Sviluppo) che mira allo sviluppo di un mezzo a guida automatica (nello specifico un ATV) low-cost, con lo scopo di compiere missioni di ricerca e salvataggio in zone ad alto rischio, ad esempio colpite da disastri naturali [1]. I punti chiave di questo progetto sono lo sviluppo di:

- un pilota virtuale e un sistema di stabilizzazione del veicolo dotato anche di controllo anti-rollio e anti-ribaltamento, in modo tale che il mezzo possa viaggiare in autonomia almeno per brevi distanze;
- un pianificatore di percorsi, in grado di determinare la via migliore da percorrere in presenza di terreni frastagliati o con pendenze particolari, considerando i limiti cinematici e dinamici del veicolo;
- un sistema di guida automatica, che segua la traiettoria pianificata, agendo su sterzo, acceleratore e freni, e mantenendo sotto controllo la stabilità del veicolo.

Il punto di partenza di Quadrivio è un normale ATV commerciale, un Yamaha Grizzly 700, che è stato completamente modificato e dotato di una serie di sensori e attuatori per consentire una guida automatica (Figura 1.1).

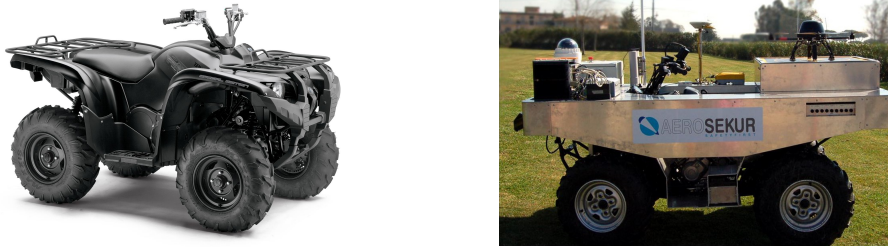


Figura 1.1: Confronto tra ATV originale e modificato per la guida automatica.

1.1 Sistema di acquisizione dati

Nello specifico, quello che mi interessa maggiormente di Quadrivio sta nel suo sistema di acquisizione dati del terreno. L'occhio di Quadrivio è un laser scanner posizionato sulla parte anteriore della scocca. Il laser scanner in questione è il modello LD-MRS, prodotto da Sick. Esso è composto da un sistema di misurazione laser e uno specchio che serve per indirizzare il fascio, chiusi in una scatola di acciaio.

Il riconoscimento dell'oggetto viene fatto col fascio laser che fa una scansione su quattro piani sovrapposti, grazie al quale il sistema misura la distanza e quindi la sua posizione in coordinate locali. Il data-set di uscita contiene le informazioni riguardo a: piano di misura, distanza, numero di misure fatte, numero di pulsazioni laser, classe e angoli di inclinazione (orizzontale e verticale).

La tecnologia usata per le misure è quella del *Tempo di Volo* (*ToF: Time of Flight*) [33], in pratica il sistema scansiona radialmente il circondario sparando molti fasci laser rotanti (la sorgente laser resta ferma, c'è specchio in rotazione continua e dirige il fascio a 360°). Il laser pulsato emesso, quando incontra un oggetto, viene riflesso verso la sorgente, dove il fotodiodo ricevitore lo processa trasformando l'intensità del fascio in voltaggio e organizza i risultati con un protocollo informatico Ethernet (Figura 1.2).

La distanza viene calcolata dal ToF del laser e dalla velocità della luce, in base all'inclinazione del laser impattato sullo specchio si riesce a valutare la inclinazione del terreno. Solo tramite la rotazione permanente dello specchio si riesce ad ottenere la costruzione del profilo completo del terreno circostante

(e di tutti gli altri oggetti presenti), naturalmente entro i limiti del campo visivo del sistema.

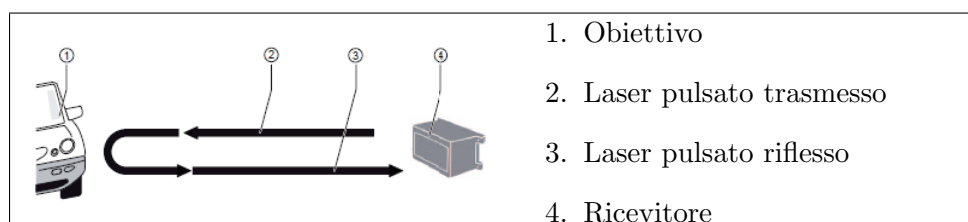


Figura 1.2: Come funziona il Time of Flight.

Il laser è dotato di capacità di acquisizione multi-eco, questo significa che il fotodiodo è in grado di acquisire i segnali trasmessi di più laser contemporaneamente (fino a tre), inoltre è dotato di filtro che elimina i rumori di misura.

La scansione viene eseguita su quattro piani al fine di poter valutare l'inclinazione del terreno, mediando l'altezza di di ogni piano (Figura 1.3). Questa tecnica permette anche di rilevare correttamente la posizione dell'oggetto anche quando il veicolo è in accelerazione o frenata quindi con l'avantreno inclinato.

Per acquisire i quattro piani il fotodiodo è composto da quattro ricevitori multistrato, disposti in linea. Ad ognuno di essi è affidata la misura di un piano, l'assegnamento viene fatto dividendo l'apertura angolare verticale in parti uguali, la scansione e la misura invece sono sempre fatte simultaneamente con due piani (logico perché i piani sono interconnessi).

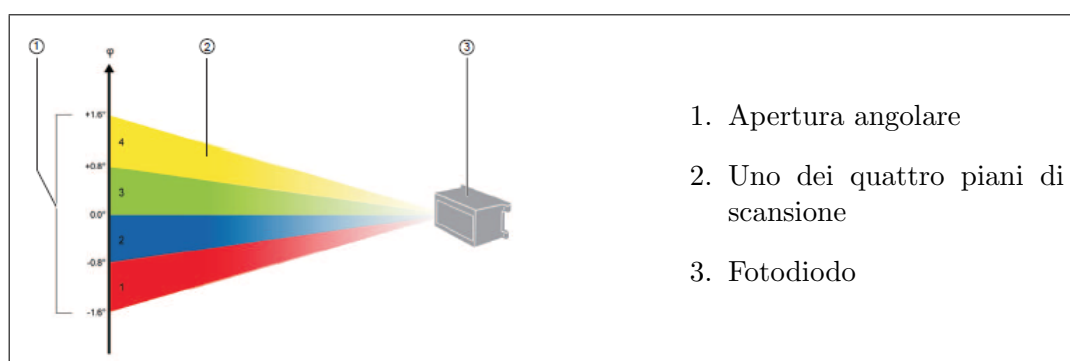


Figura 1.3: Principio dei piani di scansione.

La scansione può essere fatta in tre frequenze diverse ($12.5Hz$, $25Hz$,

Nel caso in cui si decidesse di lavorare con frequenza di $12.5Hz$ si possono adottare due configurazioni:

- variabile, in cui si ha la zona centrale ($\pm 10^\circ$) alla massima risoluzione (0.125°), due bande di $\pm(30^\circ$ fino a $10^\circ)$ ai lati a media risoluzione (0.25°) e le zone periferiche a 0.5° e le zone laterali (da $+50^\circ$ a $+30^\circ$ e da -30° a -60°) a risoluzione minima (0.5°);
- costante, in cui la risoluzione angolare è di 0.25° per tutta l'apertura dello scanner.

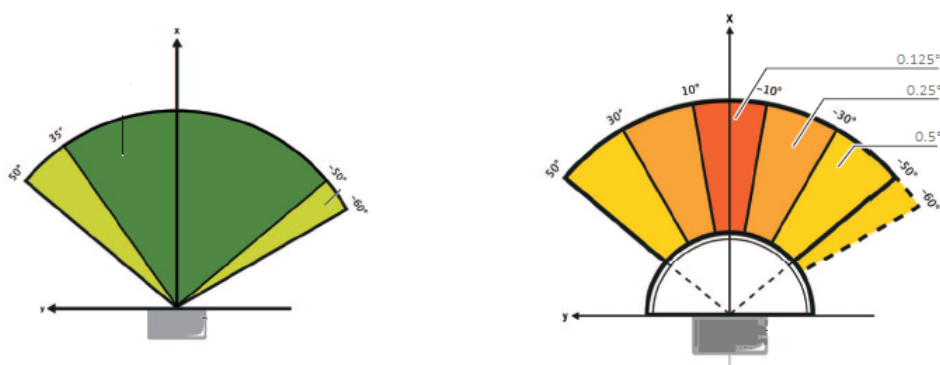


Figura 1.4: Apertura dello scanner ed esempio di configurazione variabile.

Le configurazioni a $25Hz$ e $50Hz$ lavorano solo in configurazione fissa, rispettivamente a 0.25° e 0.5° .

Quando il laser impatta contro l'obiettivo, parte di esso viene riflesso e parte assorbito, secondo le leggi di riflessione e assorbimento dei materiali [7]. Naturalmente la misura risulta maggiormente accurata quanto maggiore sia la riflessione del materiale e se l'energia viene riflessa in tutte le direzioni o concentrata verso il ricevitore. Superfici come la plastica bianca riflettono circa il 100%, mentre la gomma nera riflette circa il 2.4%, le superfici rugose presentano zone d'ombra dall'indice di riflessione minore. Oltre ad avere maggiore accuratezza, il ritorno di un quantitativo maggiore di energia permette di effettuare misure di oggetti più lontani. Inoltre, se l'oggetto è più piccolo del diametro del fascio del laser, le misure risultano qualitativamente inferiori a causa di parte del fascio non riflessa.

Capitolo 2

Modelli Digitali di Elevazione

2.1 Cos'è una DEM

Una DEM, dall'inglese *Digital Elevation Model*, è la rappresentazione digitale dell'elevazione di una superficie. Solitamente questa superficie rappresentata è una porzione di quella terrestre, ma può essere rappresentato ogni tipo di superficie, anche quelle artificiali [23].

Il termine DEM venne definito per la prima volta dallo U.S. Geological Survey, nella seconda metà degli anni '80, come: *la rappresentazione digitale dell'elevazione della superficie, suddivisa in intervalli regolari in direzione x e y (i valori z sono i dati verticali)*. Senza ulteriori definizioni, la DEM generica viene usata per indicare l'elevazione del terreno privo di vegetazione e strutture artificiali. Anche in questo documento il termine DEM è inteso in questo modo.

Lo studio delle DEM fornisce informazioni di carattere quantitativo e qualitativo di estremo interesse, soprattutto per la produzione di analisi idrogeologiche, studio delle risorse naturali, determinazione dell'impatto ambientale dovuto a varie attività, applicazioni militari.

Per costruire una buona DEM bisogna fare una complicata e costosa procedura di acquisizione dati, di solito tramite dei sensori fissati a un satellite o ad un aereo. Il primo data-set venne acquisito dal satellite Spot 1, nel 1986, tramite correlazione stereoscopica. In seguito, al fine di ottenere immagini di

migliore risoluzione, la National Aeronautics and Space Administration (NASA) e la National Geospatial-intelligence Agency (NGA) cooperarono nello sviluppo della missione Shuttle Radar Topography Mission (SRTM), il cui scopo era quello di ottenere una dettagliata mappa 3D della Terra per mezzo di un sistema radar fissato allo shuttle Endeavour (Figura 2.1). La missione spaziale, chiamata STS-99, durò 11 giorni (febbraio 2000), i radar attaccati allo shuttle erano due, uno alla fusoliera e l'altro a un braccio estensibile di 60 metri [25].

Il data-set STRM è costituito da una DEM numerica, essa è un documento binario (.hgt) che rappresenta la fetta di terreno compresa in un grado di longitudine e uno di latitudine, ad esempio la 'N45 E006' è la superficie di terreno compresa tra 45°Nord, 6°Est e 46°Nord, 7°Est. La risoluzione di una DEM è di $3\frac{arc}{sec}$ (90m) in tutta la Terra, eccetto gli Stati Uniti d'America che hanno risoluzione di $1\frac{arc}{sec}$ (30m), questo significa avere una matrice 1201×1201 (1.442.401 celle) per la Terra e una matrice 3601×3601 (12.967.201 celle) per gli USA. Ognuna di queste celle contiene il dato di una porzione $90 \times 90m$ di terreno ($30 \times 30m$ per gli USA), espressi in metri (limite superiore e inferiore $\pm 32000slm$) con errore verticale massimo di $\pm 16m$.

Oggi, solo lo 0.2% della superficie terrestre non è stata rappresentata in formato DEM, a causa della complessità di una particolare area. Nella realtà, qualche area della superficie terrestre non è stata ottenuta per via diretta dal STRM, ma indirettamente usando alcuni metodi matematici di interpolazione, a causa dell'immagine non sufficientemente pulita (per esempio per la presenza di nuvole) [15].

2.1.1 Interferometria

La tecnica maggiormente usata per ottenere le DEM è quella dell'*Interferometric Synthetic Aperture Radar (InSAR)*, che frutta appunto due o più Radar SAR per generare mappe dell'elevazione del terreno, fruttando la differenza di fase delle onde SAR (Figure 2.2 e 2.3) che ritornano alla sorgente (un satellite o un aereo). Sebbene sia molto costosa, è una tecnica di misura molto potente in grado anche di determinare variazioni centimetriche del terreno, infatti si

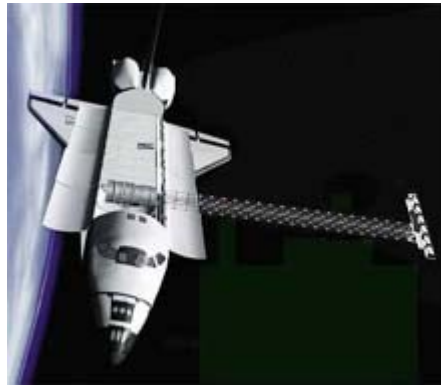


Figura 2.1: Shuttle Endeavour.

usa anche per il monitoraggio di terremoti e vulcani, o nel campo strutturale per tenere sotto controllo la stabilità di un edificio [3]. La variazione interferometrica risulta:

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \Delta R + \alpha \quad (2.1)$$

dove:

- $\Delta\varphi$ è la variazione di fase interferometrica;
- λ è la lunghezza d'onda del segnale;
- R è lo spostamento;
- α la variazione di fase dovuta all'atmosfera (come fosse un rumore di misura).

Il sensore SAR è associato a specifiche bande dello spettro elettromagnetico, nel caso delle applicazioni InSAR le bande comunemente utilizzate sono la banda L (frequenza $1 - 2GHz$, lunghezza d'onda $24cm$), la banda C (frequenza $5 - 6GHz$, lunghezza d'onda $6cm$) e la banda X (frequenza $8 - 12GHz$, lunghezza d'onda $3cm$), tutte bande del campo delle microonde.

Il principio di funzionamento è il seguente: un trasmettitore illumina lo spazio circostante con un'onda elettromagnetica, essa collide sulla superficie

terrestre e subisce un fenomeno di riflessione disordinata. Parte del campo riflesso ritorna al satellite, che è dotato di un ricevitore quindi in grado di analizzarlo. Il dispositivo è in grado di individuare il bersaglio elettromagnetico (detecting) e, misurando il ritardo temporale tra l'istante di trasmissione e quello di ricezione, valutare la distanza a cui è posizionato, localizzandolo in modo preciso lungo la direzione di puntamento dell'antenna (direzione di range).

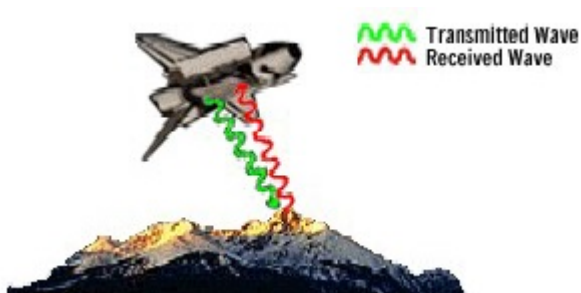


Figura 2.2: Onda trasmessa e ricevuta.

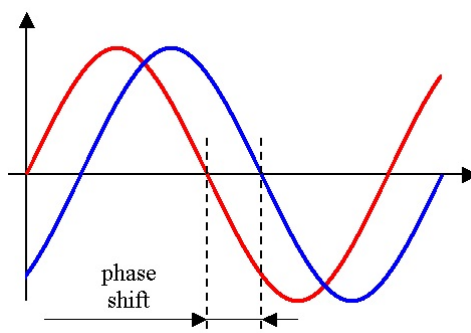


Figura 2.3: Fase tra due onde.

Il segnale radar è caratterizzato dal valore di ampiezza e da quello di fase:

- L'ampiezza è la parte di campo elettromagnetico che è tornata al sensore per l'acquisizione e che fornisce l'immagine vera e propria (Una particolare caratteristica sta nel fatto che le strutture metalliche siano molto più luminose in quanto riflettono meglio il segnale rispetto al terreno o ai corsi d'acqua). L'immagine non è di immediata interpretazione, in quanto è sempre affetta dal rumore di speckle (rende

l'immagine puntellata a causa della sovrapposizione dei punti riflettenti) e deve essere prima ripulita con diverse tecniche di filtraggio (Figura 2.4), di cui la più nota è una tecnica di mediazione dei valori chiamata MIR (Multi-Image Reflectivity map).

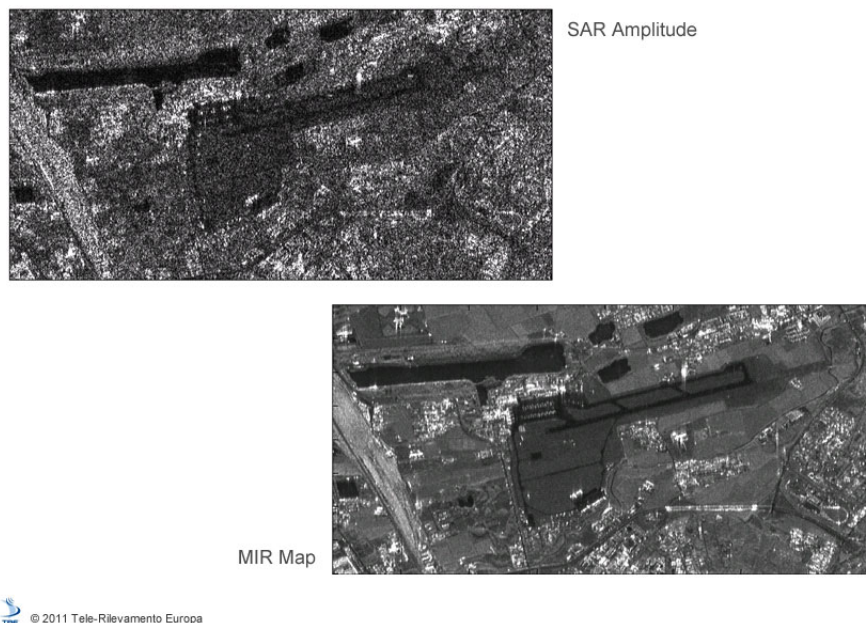


Figura 2.4: Confronto tra immagine affetta da speckle e immagine filtrata MIR, aeroporto di Milano Linate.

- La fase, che è molto importante dato che contiene le informazioni sulla distanza tra sensore e target, principalmente dipende da: riflettività del bersaglio (dipendente dal materiale e dalla sua geometria), un contributo dovuto all'atmosfera, distanza sensore-bersaglio e un inevitabile rumore di misura del sistema di acquisizione. Particolarmente critico è il contributo atmosferico in quanto il segnale viene deviato sia a causa del cambiamento degli strati atmosferici, ognuno dei quali di composizione differente, sia per l'umidità dell'aria che per presenza di nuvole, pioggia, nebbia e ogni altro fattore legato all'umidità dell'aria (questo rende più difficile l'acquisizione di immagini in ambienti tropicali rispetto agli ambienti secchi).

2.2 Tipologie di modelli

Occorre fare subito una distinzione delle tipologie principali di modelli di elevazione che si possono ottenere. Capita abbastanza frequentemente che il termine Modello Digitale di Elevazione venga usato anche per indicare altri due tipi di mappe: il *Modello Digitale del Terreno (DTM)* e il *Modello Digitale della Superficie (DSM)* (Figura 2.5); questo è ovviamente incorretto perché esse si riferiscono a modelli diversi (la distinzione tra DTM e DSM è universalmente riconosciuta, tuttavia non esiste ancora una ufficializzazione di queste denominazioni) [16].

- DTM: rappresenta solo la superficie nuda, cioè senza oggetti di alcun tipo come vegetazione o edifici, si usa per gli studi geologici tipo il percorso dei fiumi. Questo tipo di rappresentazione di solito non viene usato per produrre le DEM in quanto molti elementi cancellati per produrre un DTM sono di buon interesse.
- DSM: rappresenta la superficie includendo edifici, vegetazione, strade e altri elementi naturali. La DSM è l'immagine originale ottenuta dalla fotogrammetria, da cui ricavo la DEM rimuovendo gli oggetti di non interesse. Per questo è possibile dire che le DSM sono dei super set delle DTM (Figura 2.6).

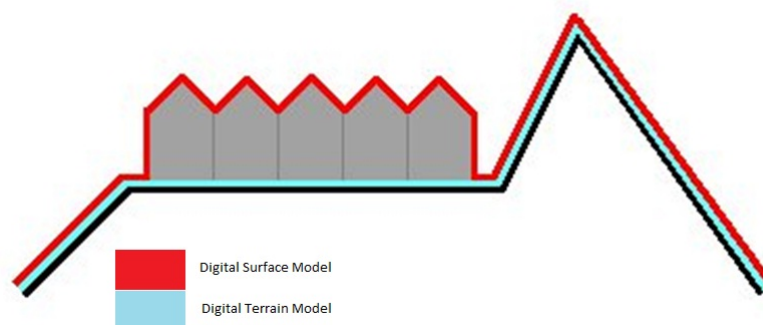


Figura 2.5: Differenze tra DTM e DSM.

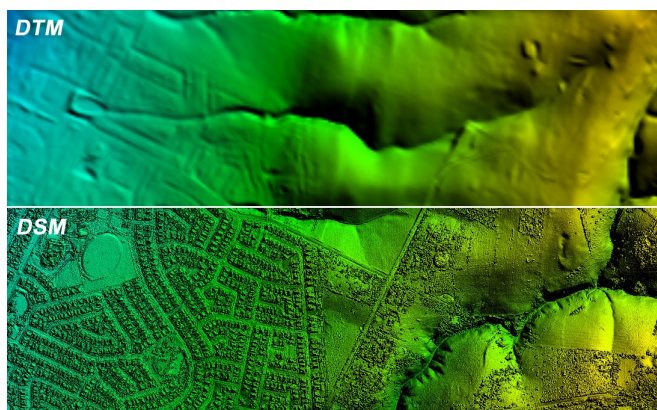


Figura 2.6: DTM vs. DSM rappresentanti la zona di Adelaide, Australia del sud.

2.3 Tipi di DEM

La DEM può essere rappresentata in tre differenti modi, i primi due di tipo vettoriale e l'ultimo di tipo numerico:

2.3.1 Raster

Detta anche immagine *bitmap*, è un'immagine digitale composta una griglia (regolare o irregolare) di quadrati chiamati *pixel*, ognuno di essi con un colore particolare dipendente dall'altezza della superficie (Figura 2.7). La griglia di elevazione chiama anche *heighmap* o *heighfield*, può essere a bassa risoluzione (scala di grigi) o ad alta risoluzione (scala a colori). Ora si usano praticamente solo immagini ad alta risoluzione, la tonalità di colore viene ottenuta combinando il blu, il rosso e il verde (sistema RGB); questo perché il segnale RGB è quello letto dalle schede grafiche per mandare le immagini ai monitor. Dato che si riescono ad ottenere immagini molto dettagliate, questo tipo di grafica è particolarmente indicato per rappresentare immagini della realtà con variabilità continua (è il caso delle DEM) (Figura 2.8). Nei *Sistemi Informativi Territoriali (GIS)*¹ i file raster vengono implementati con

¹il GIS è un sistema atto a raccogliere, gestire, analizzare e modificare qualunque tipo di dati geografici. Frutto dell'accorpamento tra le discipline di cartografia, analisi statistica e informatica. Il padre dei GIS è Roger Tomlinson (1968)

acquisizione diretta utilizzando particolari scanner d'immagini o con dati già acquisiti, di solito da satelliti o aerofotogrammeria [13].

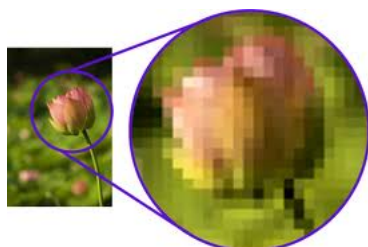


Figura 2.7: Esempio di immagine raster.

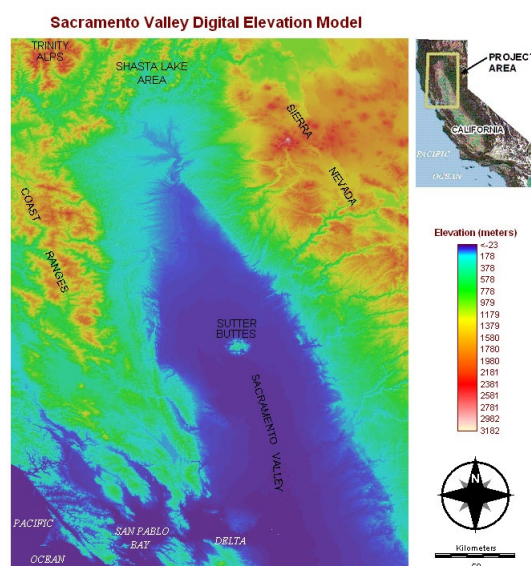


Figura 2.8: Mappa DEM ad alta definizione. $1 \frac{arc}{sec}$ (30m) di risoluzione, immagine raster.

La rappresentazione raster ha come vantaggio una facile gestione dei punti, che possono essere estrapolati direttamente dalle matrici numeriche di elevazione regolari e si possono facilmente integrare con i dati telerilevati quali immagini satellitari o aeree. Inoltre si ha una estrema facilità di rappresentazione. Di contro si ha una ridondanza di punti nelle zone pianeggianti, una scarsa rappresentazione delle superfici complesse, difficoltà nel caso in cui si voglia cambiare risoluzione e anisotropia nelle informazioni (le direzioni privilegiate solo la x e la y).

Anche la griglia di rappresentazione influisce in modo abbastanza pesante il risultato finale. Una griglia regolare ha come vantaggio la facilità di organizzazione dei punti nelle coordinate x , y e z , quindi si facilita tutto il processo di analisi ed elaborazione modello, inoltre è più semplice eseguire confronti tra diverse DEM. Gli algoritmi possono però presentare comportamenti strani ai bordi della griglia, della quale si deve scegliere con cura il passo ottimale (possono dipendere grossi cambiamenti nel tempo di esecuzione analisi) e si potrebbe avere ridondanza o mancanza di dati, dipendentemente dalla morfologia del terreno (di solito di ha ridondanza in terreni uniformi e mancanza in terreni particolarmente frastagliati).

Per risolvere gli ultimi due problemi, si è passati all'utilizzo della griglia a passo variabile dei dati (o campionamento progressivo), in cui il passo della griglia viene fatto variare in funzione della variabilità del terreno.

2.3.2 TIN

Acronimo di **Triangular Irregular Network**, è basata su dati campionati irregolarmente e rappresentati secondo la Triangolazione di Delaunay [36] (Figura 2.9):

preso un set di punti P , si parla di Triangolazione di Delaunay quando, per ogni circonferenza circoscritta in un triangolo, nessun punto di P , oltre a quelli che formano il triangolo stesso, si trova all'interno della circonferenza.

Si parte da una griglia triangolare formata da nodi aventi coordinate x , y e z (note) casualmente distribuiti, ha come vantaggio il fatto di utilizzare solo i punti più importanti della DEM. Essa permette quindi di lavorare con dataset meno pesanti. Per creare una rete triangolare si possono usare diverse fonti quali: punti censiti dal GPS, linee con vertici quotati, o dati di altre banche dati. Il modello TIN è fortemente legato ai punti, i triangoli vengono costruiti successivamente con vari metodi di interpolazione e il suo utilizzo principale si ha nell'analisi dell'inclinazione e dell'aspetto della superficie (Figura 2.10). La rappresentazione TIN viene anch'essa usata nei Geographic

Information System (GIS) e venne sviluppata per la prima volta da Phil Mellor, studente di sociologia all'Università di Edimburgo, Scozia.

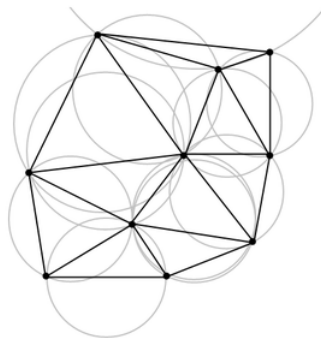


Figura 2.9: Triangolazione di Delaunay.

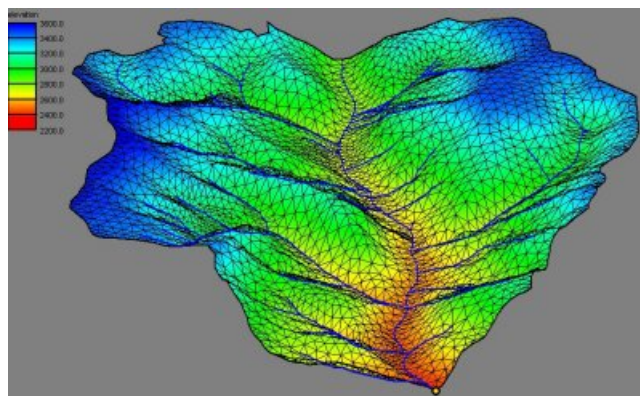


Figura 2.10: Rappresentazione TIN di un corso d'acqua nello Yellowstone National Park, Wyoming, U.S.A..

La rappresentazione TIN, dato che sfrutta pochi punti, non ha ridondanza nelle informazioni in zone regolari, anzi la densità dei punti varia in funzione della complessità del terreno analizzato. Inoltre vanno bene dati campionati in modo random, senza necessità di interpolazione o ricampionamento. Questi vantaggi sono pagati col fatto di lavorare sempre con strutture abbastanza complesse, quindi ci saranno difficoltà nella fase di calcolo. I triangoli che vengono disegnati potrebbero poi avere grosse discontinuità.

Raster o TIN?

Per la loro costruzione, i modelli digitali di un terreno in formato TIN forniscono una rappresentazione migliore rispetto al formato Raster. Essendo variabile la densità dei punti in base alla complessità del terreno, non si incorre mai nel rischio di avere sovra o sotto-popolamento. Inoltre le maglie triangolari si prestano meglio alla rappresentazione di bruschi cambi di pendenza (es: salti, gole, canyon) allineandosi perfettamente con le reali discontinuità del terreno.

Tuttavia, la griglia in formato Raster resta sempre quella maggiormente utilizzata per via della sua struttura più semplice, quindi meglio gestibile dai sistemi GIS, anche nel caso dell'accorpamento tra più data-set (in particolare in casi complessi come quello di analisi dei terreni).

2.3.3 Rappresentazione Numerica

Si tratta di una rappresentazione discreta, dove un relativamente piccolo numero di punti campionati diventa una superficie continua tramite particolari algoritmi numerici studiati ad hoc. Più è alto il numero di punti, maggiore è l'onere di calcolo quindi il tempo di analisi, questo significa che il metodo è utilizzato solo per piccole aree di superficie. Questo metodo di analisi venne modellato la prima volta da [11], i quali hanno verificato che riprodurre il comportamento di una superficie con metodi continui richiede un grande onere di calcolo e molto spesso la necessità di lavorare con decine di parametri o variabili. Inoltre, questa metodologia deve ancora essere perfezionata per poter essere utilizzata in modo continuativo, ad esempio sviluppando un efficiente sistema di calibrazione. In futuro, quando questo metodo verrà perfezionato, probabilmente diventerà anche il più utilizzato, in quanto è molto intuitivo.

2.4 Campi di utilizzo di una DEM

Le DEM sono usate di solito nello studio della morfologia del terreno, in particolare nei seguenti campi di interesse:

- Estrazione dei parametri del terreno;
- Rendering 3D delle superfici;
- Creazione di modelli fisici (mappe);
- Analisi delle superfici;
- Simulazioni di volo;
- Archeologia;
- Ingegneria civile;
- Sistemi di posizionamento (GPS);
- Sistemi di informazione geografica (GIS);
- Sistemi di trasporto intelligente (ITS);
- Sistemi di assistenza di guida avanzata (ADAS).

2.5 Costruzione di una DEM

Per ottenere un data set per DEM ci sono svariate metodologie:

2.5.1 Light Detection And Ranging (LiDAR)

Il LiDAR è un metodo di telerilevamento remoto (Remote Sensing) atto ad ottenere rilievi topografici ad alta risoluzione, il rilievo viene effettuato da un aereo sul quale è montato un sistema laser scanner costituito da un laser (il trasmettitore), da un telescopio (il ricevitore) e da un sistema di acquisizione (Figura 2.11). La distanza è misurata sulla base del tempo che il fascio laser pulsato impiega prima di essere riflesso e captato dal ricevitore, nel quale è integrato anche un sistema inerziale (INS o IMU) che determina l'assetto del velivolo rilevando i tre gradi di libertà dovuti a rollio, beccheggio e deriva del mezzo ed un GPS che determina la posizione assoluta del telemetro rispetto al

sistema di coordinate di riferimento. Inoltre, in presenza di vegetazione poco densa il fascio laser riesce a penetrare riflettendo quindi punti a vari livelli di quota. In base alla classificazione del volume dei dati ricevuti si attribuisce ad ognuno di essi uno specifico significato fisico, riuscendo a distinguere i punti che appartengono al suolo da quelli appartenenti a superfici arbustive o altri elementi tipo cavi elettrici, edifici, ponti o automobili (grazie a questa caratteristica di riconoscimento delle superfici è possibile generare con una sola operazione di raccolta dati sia DTM che DSM).

Il sistema di acquisizione dati è costituito da tre componenti principali:

- Il *laser scanner* genera il fascio pulsato ad alta frequenza, un sensore registra l'intensità del fascio riflesso e la quota del terreno, che varia in base al tempo percorso dal fascio.
- Un *sistema di posizionamento satellitare GPS* e uno di inerziale di navigazione INS installati a bordo del veivolo, in modo da poter determinare in ogni istante di tempo posizione (x,y) e orientamento.
- *Stazione GPS* posizionata a terra ai vertici della rete geodetica creata, in modo da correggere la posizione dell'aereo in post processing dei dati.

L'elaborazione dei dati ottenuti dal sistema è abbastanza complessa, ma quasi del tutto automatizzata e veloce da eseguire (prima di iniziare i rilievi, si deve eseguire sempre una calibrazione di tutto il sistema di misura). Il processo si svolge in quattro fasi:

1. Calcolo traiettoria e orientamento del sensore via GPS e INS.
2. Generazione punti x,y,z.
3. Classificazione punti in base ad altezza, intensità di riflessione e altri parametri vari.
4. Generazione dei modelli.

Il LiDAR ha come pregio il fatto che può essere montato su ogni piattaforma come: aerei, elicotteri, sommità di edifici, robot ecc; inoltre posso studiare anche superfici verticali (ad esempio per scansionare una parete rocciosa). L'area di interesse è coperta dal rilievo mediante linee di volo parallele finalizzate alla produzione di strisce di scansione sovrapposte la cui larghezza (generalmente 300 – 400m) è dipendente all'apertura angolare del sensore ed all'altezza di volo; la risoluzione, in modo analogo, è inversamente proporzionale alla frequenza del generatore del telemetro. Maggiore sarà la distanza dal suolo, maggiore sarà il tempo di ritorno del segnale e l'intervallo fra l'emissione di un segnale e il successivo, diminuendo così la densità dei punti possibili per l'area di interesse. Inoltre, ha un'altissima velocità di acquisizione dati ad elevata risoluzione (Figura 2.12).

La riconosciuta qualità delle DEM generate dall'interpolazione delle nuvole di punti LiDAR permette a questi modelli digitali di competere, specialmente in aree con copertura vegetale, con i metodi tradizionali e da radar. Non sorprende, quindi che questa tecnologia sia sempre più oggetto di studio in vari settori del mondo scientifico.



Figura 2.11: Dettaglio di un sistema LiDAR fissato ad un elicottero.

Il sistema LiDAR aerotrasportato ha in qualche modo rivoluzionato la tecnica di rilievo topografico, rendendosi efficace anche in zone molto articolate e di difficile accesso come i piccoli bacini montani. L'output di questo sistema sono direttamente le coordinate x , y e z di ogni misurazione. Il tutto con un'alta velocità di acquisizione dati e ottima risoluzione.

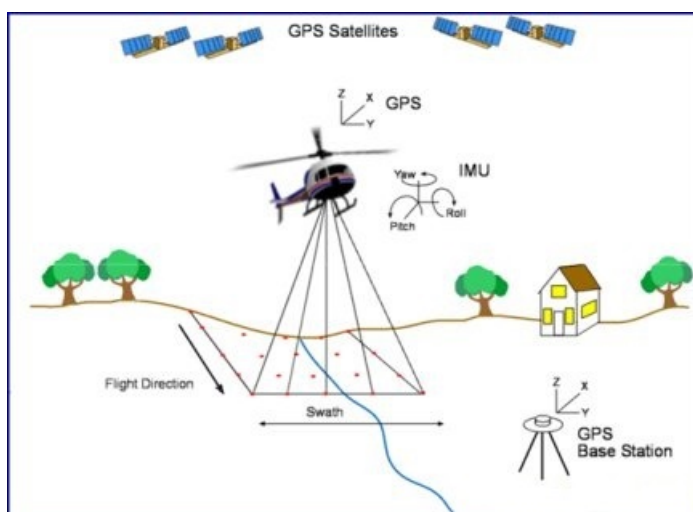


Figura 2.12: Ottenimento di un data-set usando LiDAR.

2.5.2 Real Time Kinematics (RTK)

Si tratta una tecnica sviluppata negli anni '90 che consiste nella misura della distanza tramite comunicazione tra stazione base e un ricevitore (chiamato rover) mediante un'onda portante ad altissima frequenza, con lunghezza d'onda di 19cm e errore di fase $\pm 1\%$ [24]. La stazione base si trova in un punto di coordinate note, esso è connesso col satellite e in broadcast col rover; quest'ultimo ricevendo le informazioni del satellite, è in grado di rimandare alla base le informazioni sulla propria posizione, in coordinate relative (Figura 2.13). La comunicazione tra base e rover di solito avviene via radio, in cui posso mettere in comunicazione una base con infiniti rover, oppure con altri metodi, tipo la rete GSM dei cellulari, in questi casi però di si connette al massimo un rover per base.

La stazione base del RTK è costituita da:

- ricevitore e antenna GPS
- sistema di comunicazione (antenna radio o antenna GSM)
- sistema di controllo
- cablaggio e alimentazione (via AC o batterie)

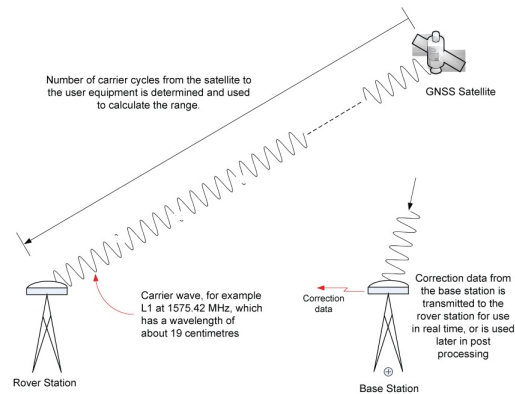


Figura 2.13: Come funziona il Real Time Kinematics.

Il rover invece deve avere:

- ricevitore e antenna GPS
- ricevitore del sistema di comunicazione
- sistema di controllo
- alimentazione via batterie

Molto importante è la fase di preparazione del sistema, per calibrare bene il calcolo della differenza delle fasi dei segnali vettoriali tra base e rover. La fase deve essere sempre allineata, per ogni ciclo del segnale, altrimenti si crea ambiguità.

Il metodo usato per risolvere questo problema è quello del *Carrier Phase Differencing*, in pratica ogni ricevitore misura lo stesso segnale inviato da un satellite, poi uno di essi viene usato come riferimento, alla cui fase si allineano tutti gli altri.

L'equazione di osservazione della fase è:

$$\phi = \rho - I + Tr + c(b_{Rx} - b_{sat}) + N\lambda + \varepsilon_\phi \quad (2.2)$$

dove:

- I è il ritardo di fase dovuto all'attraversamento della ionosfera
- Tr è il ritardo di fase dovuto all'attraversamento della troposfera
- b_{Rx} è il fattore di compensazione di tempo del ricevitore
- b_{sat} è il fattore di compensazione tempo del satellite
- c è la velocità della luce nel vuoto
- λ è la lunghezza d'onda nominale del segnale
- N è l'ambiguità di fase del segnale
- ρ distanza geometrica tra satellite e ricevitore che si scrive

$$\rho = \sqrt{(x_{sat} - x_{Rx})^2 + (y_{sat} - y_{Rx})^2 + (z_{sat} - z_{Rx})^2} \quad (2.3)$$

Per due ricevitori a e b che fanno misure simultanee ai satelliti 1 e 2 e supponendo che l'errore di tempo dell'offset sia nullo, posso vedere che:

$$\phi_a^{12} - \phi_b^{12} = \rho_a^{12} - \rho_b^{12} - I_a^{12} + I_b^{12} + Tr_a^{12} - Tr_b^{12} + \lambda (N_a^{12} - N_b^{12}) + \varepsilon_a^{12} - \varepsilon_b^{12} \quad (2.4)$$

Il parametro $(N_a^{12} - N_b^{12}) = N_{ab}^{12}$ rappresenta il parametro l'ambiguità di fase. Una volta determinato, si riduce il più possibile usando metodi di integrazione numerica e statistici abbastanza complessi (possibili solo se la soluzione è sovra determinata, infatti vengono raccolti i segnali di almeno 5 satelliti). In questo modo si riescono ad eseguire misure con errore di fase di circa zero, esso non potrà mai essere azzerato perché ogni satellite lavora con differenti geometrie e l'attraversamento degli strati atmosferici devia sempre il segnale in modo casuale. Inoltre, i Dipartimenti della Difesa dei vari Paesi hanno la facoltà di degradare artificialmente il segnale GPS dei satelliti (la precisione massima del segnale viene garantita solo per fini militari e mai civili).

Questa tecnica ha come vantaggio quello di garantire alta accuratezza ($\pm 1cm$) in prossimità della stazione base, ma si usa per aree limitate (al

massimo raggi di 10 o 20km intorno alla stazione base, oltre il segnale viene captato male). Il segnale viene acquisito con estrema regolarità, circa una misura al secondo.

Data la sua elevata precisione, il sistema RTK si usò nelle operazioni di controllo e rilevamento topografico, nei sistemi di autopilotaggio e nelle macchine automatiche ad alta precisione.

2.5.3 Mappa Topografica

La Mappa Topografica è una mappa caratterizzata da dettagli in larga scala con la rappresentazione dei rilievi è di tipo quantitativo usando le linee di quota (chiamate anche contour lines). Storicamente, queste mappe rappresentano dettagli sia naturali che artificiali, le linee di quota non si sovrappongono mai e rappresentano un range altimetrico di 100m (Figura 2.14).

La prima mappa topografica di un intero Paese risale al 1789 con la Carte Géométrique de la France, successivamente i vari governi decisero di fare le proprie mappe per aiutare i militari a preparare i piani di battaglia e di difesa, a tale scopo l'attenzione ai rilievi fu di vitale importanza.

Una particolare mappa topografica è il Great Trigonometric Survey of India, iniziata dalla East India Company nel 1802 e completata dalla British Raj nel 1857. È stato il primo tentativo nella storia, andato a buon fine, di determinare e rappresentare accuratamente la cime delle vette Himalayane, stando a 1000km di distanza da esse.

Nel 1913 si iniziò a rappresentare la prima mappa topografica mondiale, in scala 1 : 1000000. Negli anni '80 nacquero i primi database digitali di coordinate che diedero la possibilità di stampare e vedere mappe in scale e contesti diversi (mappe fisiche, politiche ecc.).

Il governo degli U.S.A elaborò in quegli anni un proprio database TIGER (Topologically Integrated Geographic Encoding and Referencing) che fu un vero e proprio punto di riferimento negli anni '90 per fare il loro primo censimento territoriale di strade, fiumi, laghi, edifici ecc. Le prime DEM vennero costruite partendo proprio dall'interpretazione di queste mappe unite alle fotografie aeree, solo più tardi si passò all'uso dei satelliti. Grazie all'uso

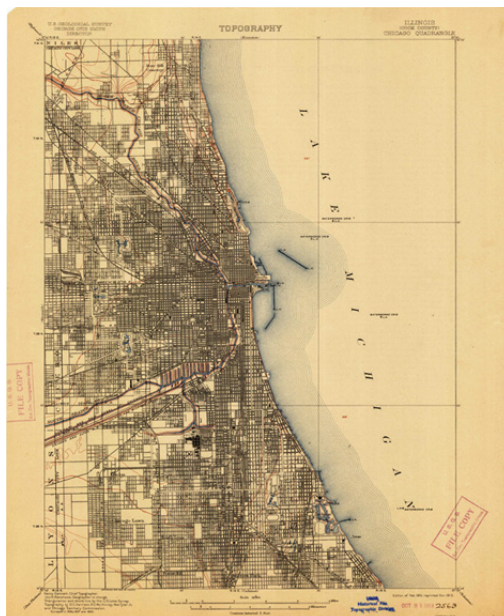


Figura 2.14: Vecchia mappa topografica di Chicago (1913), stampata da US Geological Survey.

combinato delle DEM e del TIGER che vennero sviluppati i primi sistemi GPS.

Al giorno d'oggi queste mappe vengono usate in: architettura, ingegneria civile, scienze della Terra, orienteering e altre discipline geografiche. Le prime mappe vennero disegnate usando solo gli strumenti di misura tradizionali (Figura 2.15), mentre oggi sono completamente ricavate dalla fotogrammetria (dal LiDAR o altre tecniche remote).



Figura 2.15: Curvimetro analogico, particolare strumento usato per calcolare la lunghezza di una curva.

2.5.4 Theodolite e Total Station

Theodolite

È uno strumento di precisione usato per misurare gli angoli verticali e orizzontali ed è costituito da un telescopio montato su due assi perpendicolari moventi (verticale e orizzontale). Quando il telescopio è puntato su un target, l'angolo degli assi può essere misurato con estrema precisione (unità di misura $[\frac{arc}{sec}]$) [18]. Possono essere di tipo Transit, cioè quelli in grado di ruotare per 360° attorno all'asse verticale, o di tipo No-Transit, i quali compiono solo mezzo giro attorno all'asse verticale.

Il primo modello di Theodolite risale al 1576 e fu ideato da Joshua Habermel, nel giro di due secoli divenne un accurato strumento di misura meccanico, quando fu perfezionato nel 1787 da Jesse Ramsden (inventò il suo Great Theodolite, oggi custodito presso il Science Museum di Londra) che introdusse anche delle scale graduate ad alta precisione (Figura 2.16). Questi strumenti divennero molto popolari nelle operazioni di misura nel XX secolo.

Il Theodolite misura le distanze con la tecnica della triangolazione (basata sulla geometria Euclidea), che misura le distanze da un punto di posizione nota e conoscendo una lunghezza nota, chiamata baseline. Nelle misure topografiche si creano dei sistemi di triangoli, detti reti di triangolazione (Figura 2.17).

Al giorno d'oggi, i moderni Theodolite lavorano con lo stesso principio, solo che non sono più meccanici ma misurano l'angolo con un encoder di rotazione, sia in modo assoluto (ad esempio utilizzando il codice Gray) o incrementale (utilizzando bande radiali di luce e ombra equidistanti).

Total Station

È uno strumento elettro-ottico costituito da un Theodolite elettronico (transit) e da un misuratore di distanza elettronico (EDM) che legge la distanza dallo strumento a un particolare punto, in cui è presente un riflettore prismatico (Figura 2.18). Il segnale rifratto fornisce la misura, che viene interpretata da un computer sulla base della lunghezza d'onda e frequenza del segnale.



Figura 2.16: 400-8403 Pilot Balloon Theodolite, usato in applicazioni militari.

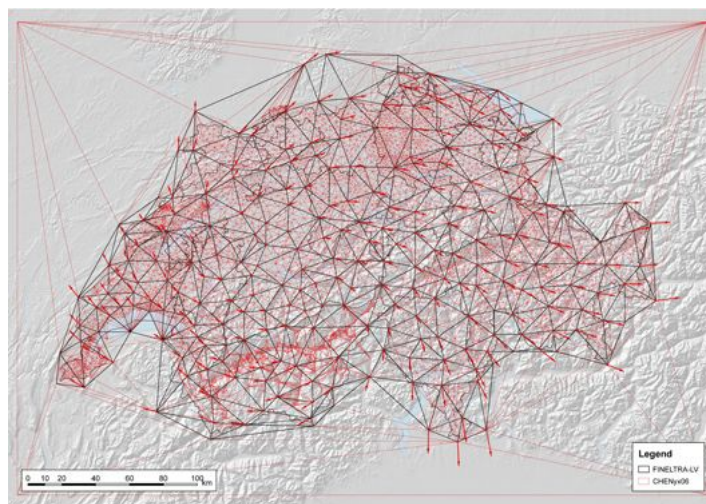


Figura 2.17: Rete di triangolazione della Svizzera.

Esistono anche le così dette Robotic Total Station, che permettono controllare lo strumento via remota, questo elimina la necessità di avere sempre un operatore fisso sul transit.

Anche questo strumento si basa sulla tecnica della triangolazione per determinare una misura, essi sono in grado di misurare angoli con accuratezza di $0.5 \frac{arc}{sec}$ e distanze fino a $1500m$ con accuratezza di $1.5mm$. Le Total Station, una volta collegate al pc, sono in grado di fare automaticamente mappe dettagliate del territorio misurato, usando dei software appositi. Sono strumenti molto costosi che arrivano anche a 10000 euro.



Figura 2.18: Total Station Nikon DTM-652, 500-X data collector.

Sia i Theodite che le Total Station sono usate in ingegneria civile, soprattutto in ambiti quali la costruzione di strade, ponti e gallerie, ma anche in altre applicazioni archeologia e missilistica.

2.5.5 Variazione Focale

É un metodo usato per calcolare una distanza usando un'ottica con limitata profondità di campo. La profondità di campo è la distanza tra l'oggetto più vicino e il più lontano che appaiono nitidi in un immagine (Figura 2.19). Se l'ottica ha piccola profondità di campo si ottiene una migliore accuratezza di misura.

Questa tecnica di usa per determinare rugosità e ondulazione del terreno, con una risoluzione di qualche nanometro.

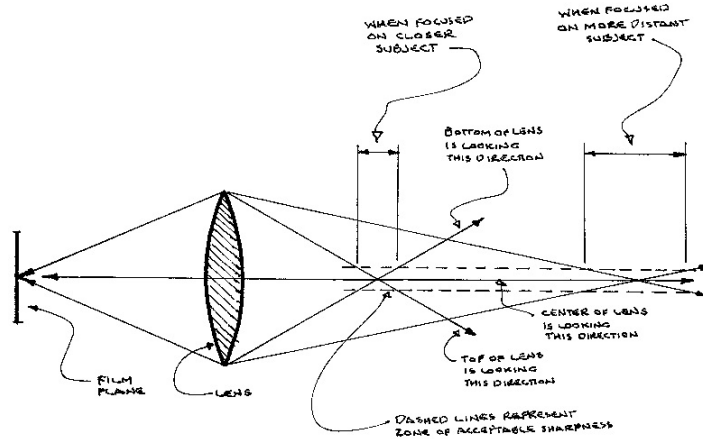


Figura 2.19: Significato di profondità di campo.

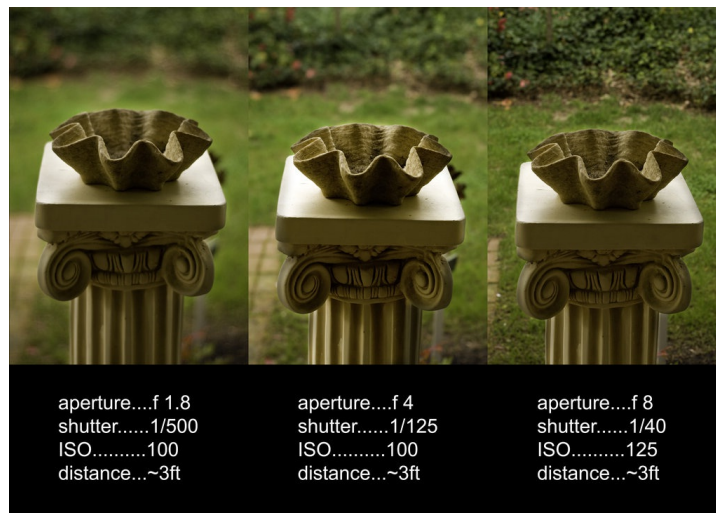


Figura 2.20: Variazione focale.

Al giorno d'oggi, per ottenere il data set di una DEM, si preferisce l'utilizzo di tecniche remote rispetto alle misurazioni dirette, perché possono essere fatte per via totalmente informatica senza andare direttamente nell'area di interesse. Inoltre, si ottiene una elevatissima risoluzione (Figura 2.20), circa di $10m^2$ per $10km^2$ di superficie osservata, questo è il motivo principale per cui l'interferometria è il sistema più usato.

2.6 Caratteristiche di una DEM

Ricapitolando i metodi di acquisizione dati visti nella sezione 2.5, è possibile costruire la tabella 2.1

Avere una DEM di alta qualità significa avere buona accuratezza assoluta (cioè l'accuratezza dell'elevazione di ogni singolo pixel) e buona accuratezza relativa (cioè l'accuratezza del terreno digitalizzato). I fattori più importanti per garantire buona accuratezza sono la densità dei campioni, la risoluzione della griglia e la bontà dell'algoritmo di interpolazione, oltre ad altri fattori che potrebbero inficiare le operazioni di raccolta dati (ad esempio la presenza di nuvole che non permette al satellite di raccogliere immagini abbastanza nitide).

2.7 Disponibilità

Le DEM, dato che sono state praticamente tutte ottenute da enti governativi, quindi di pubblico dominio. In rete si trovano sia gratuite che a pagamento, alcune di queste fonti sono:

- STRM: sono i data-set raccolti dall'omonima missione (citata sopra) nel 2000, c'è a disposizione circa l'80% della superficie terrestre, accuratezza di $1\frac{arc}{sec}$ per gli U.S.A. e di $3\frac{arc}{sec}$ per il resto del mondo
- GTOPO30: *Global 30 Arc-Second*, è una DEM alla risoluzione di $30\frac{arc}{sec}$ che copre tutta la Terra, i dati provengono da diverse organizzazioni internazionali e sono a disposizione dal 1996

	Metodologia	Strumentazione usata	Quantità misurabile di dati	Automazione metodo	Accuratezza
	scansione	scanner	elevata	buona (in modalità semiautomatica)	media (funzione della qualità/scala della carta e solo se in modalità semiautomatica)
Misura della cartografia	digitalizzazione	tavolo digitalizzazione	elevata	scarsa	media (funzione della qualità/scala della carta)
Rilievo topografico	topografia classica geodesia spaziale	total station GPS	media media	nulla nulla	elevata elevata
Rilievo fotogrammetrico	approccio analitico approccio digitale	stereocompasso analitico stazione digitale	elevata molto elevata	scarsa ottima	buona/elevata buona/elevata
Telerilevamento	ripresa spaziale	elaborazione digitale delle immagini	elevata	ottima	media

Tabella 2.1: Confronto tra i vari metodi di ottenimento data-set.

- GMTED2010: *Global Multi-resolution Terrain Elevation Data 2010*, è una nuova mappatura, frutto di una collaborazione tra USGS e NGA, che copre tutta la superficie terrestre alle risoluzioni di $30 \frac{arc}{sec}$, $15 \frac{arc}{sec}$, $7.5 \frac{arc}{sec}$ con un RMSE medio compreso tra 26m e 42m. Ha sostituito il data-set GTOPO30
- ASTER GDEM: *Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer Global Digital Elevation Model*, prodotta utilizzando tecniche stereoscopiche e le immagini del sensore ASTER², collaborazione tra il ministro dell'economia, commercio e industria giapponese e NASA, composto da 22600 data-set di 1° cadauno; coprono la superficie compresa tra 83°N e 83°S alla risoluzione di $1 \frac{arc}{sec}$.

²ASTER è un raffinatissimo strumento fotografico fatto da NASA, Japan's Ministry of Economy, Trade and Industry (METI) e Japan Space Systems, fiore all'occhiello del satellite NASA Earth Observing System (EOS) lanciato nel dicembre 1999 e usato appositamente per creare mappe dettagliate della superficie terrestre, attualmente è la fotocamera più avanzata in orbita. Lo scopo principale di questa collaborazione è quello di sviluppare una conoscenza scientifica della Terra e dei suoi eventi, al fine di poter prevedere meglio cambiamenti meteorologici e disastri naturali

Capitolo 3

Metodi di Interpolazione delle DEM

In questo capitolo verranno illustrati i metodi di utilizzati per la stima dei punti incogniti del data set e i risultati che sono stati ottenuti.

Tutte queste tecniche si basano sull'*interpolazione spaziale dei punti*, col termine interpolazione si una tecnica matematico/statistica che serve a determinare i valori assunti da una grandezza nei punti intermedi tra punti la cui grandezza è nota [12]. La formula generale del problema dell'interpolazione è la seguente:

Dati i punti (x_i, z_i) $i = 0, 1, \dots, n$ con $x_i \in \mathbb{R}^n$, $m > 1$, $x_i \neq x_k$ per $i \neq k$ e data una famiglia di funzioni

$$z(x, a_0, \dots, a_n) \quad \text{modello matematico}$$

si cercano i valori a_0, a_1, \dots, a_n (**parametri** o **gradi di libertà**) tali che:

$$z(x, a_0, \dots, a_n) = z_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

La z può dipendere linearmente dai parametri, in questo caso si ha il problema dell'interpolazione lineare, cioè:

$$z(x, a_0, \dots, a_n) \equiv a_0 z_0(x) + a_1 z_1(x) + \dots + a_n z_n(x) \quad (3.1)$$

In casi particolari si lavora con l'interpolazione polinomiale:

$$z(x, a_0, \dots, a_n) \equiv a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (3.2)$$

e, molto raramente, con l'interpolazione trigonometrica:

$$z(x, a_0, \dots, a_n) \equiv a_0 + a_1e^{xi} + a_2e^{2xi} + \dots + a_n e^{nxi} \quad (3.3)$$

Nella classe delle interpolazioni lineari si colloca l'interpolazione mediante spline, molto importante certe applicazioni (grafica) e da cui prende il nome il metodo degli elementi finiti [35].

In questo tipo di interpolazione si suddivide l'intervallo in un certo numero di sottospazi e gli estremi vengono uniti con un polinomio di grado prefissato e sotto opportune condizioni nei punti di raccordo, questo metodo è anche detto *approssimazione polinomiale a pezzi*. Molte volte si preferisce lavorare in questo modo rispetto all'utilizzo di un unico polinomio perché, anche se la funzione avrà sempre una soglia massima di regolarità, legata al grado del polinomio, sarà meno oscillante quindi si ottengono risultati migliori in termini di approssimazione del terreno.

L'interpolazione lineare è quella in assoluto più usata, solo in casi particolari in cui non risulterebbe adeguata si passa agli altri due modelli.

Nel caso specifico dell'interpolazione spaziale possiamo dire che: *Dato uno spazio dove sono stati misurati in alcuni punti i valori assunti da una grandezza, l'interpolazione spaziale è la tecnica che consente di determinare i valori nei punti dove non sono stati misurati*. Il risultato di tale tecnica è la generazione di una superficie $S = f(x, y)$ chiamata *Superficie Statistica*, che può essere continua o discreta. I punti che definiscono la superficie statistica possono essere distribuiti regolarmente o irregolarmente nel piano.

Il metodo di interpolazione si sceglie in funzione delle entità spaziali interessate (possono essere punti o aree) e delle caratteristiche della variabile in esame. Inoltre esistono i così detti metodi *esatti*, che onorano sempre i dati noti, e i metodi *approssimati* (chiamati anche *approssimazioni*), che non onorano i dati noti ma lavorano su altri parametri, ad esempio sulla

minimizzazione dell'errore globale (Figura 3.1) [22].

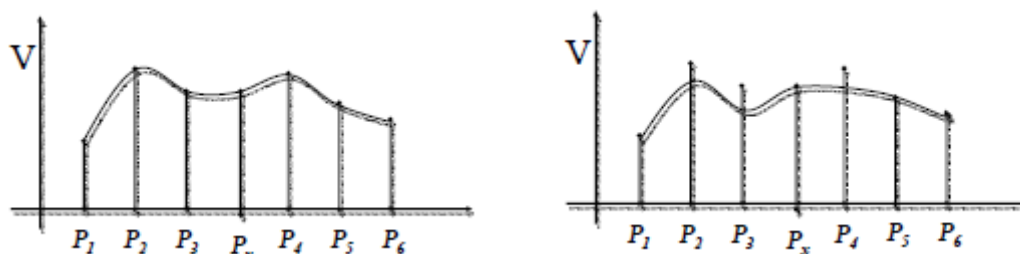


Figura 3.1: Confronto tra interpolazione esatta e approssimata

Quindi, è chiaro che lo scopo di una qualunque tecnica di interpolazione spaziale è quello di fare una corretta ricostruzione della superficie, usando solo pochi punti campionati. Il fatto di lavorare con meno punti possibile, avendo risultati apprezzabili, è un fattore molto importante dato che normalmente in questo tipo di applicazione si ha a che fare con data-set enormi (oltre 1000000 punti) che porterebbero a tempi di calcolo altissimi (Figura 3.2). Di solito si impone un raggio massimo dal punto incognito e si prendono solo i punti noti al suo interno, oppure si definisce direttamente il numero massimo di punti da interpolare, questa tecnica è detta dei *Nearest Neighbour* ed è la più usata nello studio dei terreni e in generale dove la superficie ha un andamento regolare (infatti l'interpolazione fornisce alti errori se si approssima la zona ad esempio di un crepaccio, dove ho un alto cambiamento di quota).

Nel caso specifico di interpolazioni spaziali di DEM (o di qualunque terreno in generale), le tecniche di interpolazione abitualmente utilizzate sono:

- *IDW* o *Inverse Distance Weighted* (illustrata nella sezione 3.1);
- *RBF* o *Radial Basis Function* (illustrate nella sezione 3.2);
- Metodo dei *poligoni di influenza*, si basa sulla rappresentazione TIN e le triangolazioni di Delaunay (sezione 2.3.2). Questo metodo non è stato considerato in quanto, lavorando su data-set regolari; l'implementazione risulta troppo complessa e di scarsa applicabilità;

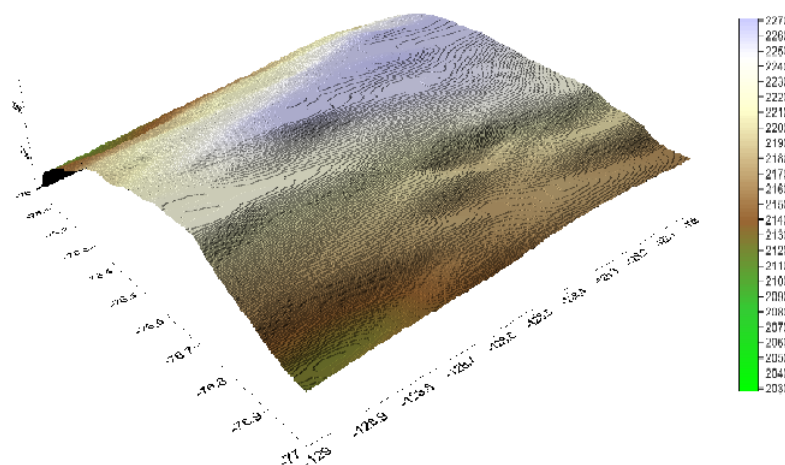


Figura 3.2: Esempio di DEM raster completa, si tratta di una griglia 1201x1201, troppo impegnativa da gestire nel suo complesso.

- *Kriging*: metodo geostatico di interpolazione illustrato nella sezione 3.3;
- altri metodi quali: tecniche visive, serie di Fourier, ricerca dei contorni, trend, spline, tassellazione al punto più vicino, media mobile.

Tutte le tecniche di interpolazione di basano sul semplice concetto che *punti più vicini hanno valori più simili* [6], significa che punti vicini devono trovarsi a quote simili, pena la discontinuità del campo (cosa non tollerabile anche per una superficie approssimata, a meno che non ci siano pareti verticali tipo burroni ecc.).

Inoltre si possono dividere i modelli di interpolazione in:

- modelli deterministici: il legame tra i punti vicini è dato da una legge esplicita, i cui parametri hanno anch'essi significato fisico;
- modelli stocastici: il legame tra i punti vicini é di tipo statistico (covarianza) che può non avere significato fisico;
- modelli globali: sfruttano tutte le informazioni a disposizione per ricostruire il modello, non vanno bene per descrivere gli andamenti locali e si usano per individuare eventuali trend;

- modelli locali: sfruttano solo le informazioni date dai punti più vicini per ricostruire il modello.

3.1 Inverse Distance Weighted

Inverse Distance Weighted (IDW) è una tecnica largamente utilizzata per la modellazione di superfici, è un metodo deterministico che svolge una interpolazione multi variabile con un set di valori noto, si basa sull'assunto generale per cui le misure dei punti che sono vicini tendono ad essere più simili si quelle prodotte in punti più lontani tra loro [2]. Il metodo venne proposto da [32] nella sua versione da interpolatore esatto, in seguito sono nate anche altre versioni dove viene definito un fattore di smoothing che rende inesatto l'interpolatore.

La IDW assume che ogni misura abbia un'influenza locale che diminuisce con la distanza, assegnando ai dati utilizzati nell'interpolazione un peso che decresce all'allontanarsi dal punto incognito.

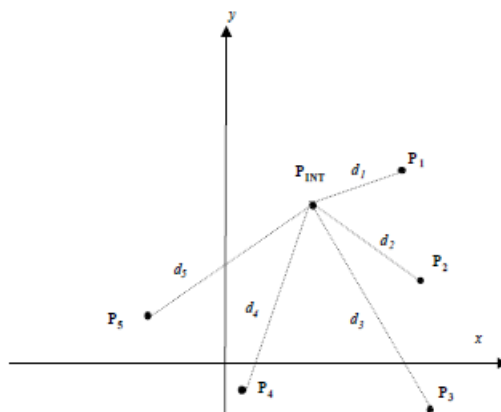


Figura 3.3: Interpolazione a partire dalla conoscenza della quota dei punti e della loro distanza.

È possibile assegnare il valore di un punto sconosciuto lavorando sulla media pesata dei punti noti, attraverso la seguente espressione generale:

$$Z(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z(x_i, y_i) \quad (3.4)$$

dove:

- $Z(x, y)$ è il valore stimato del punto non campionato di coordinate (x, y) ;
- $Z(x_i, y_i)$ è il valore del punto campionato di coordinate (x_i, y_i) , ci sono n punti campionati utilizzati per l'interpolazione del punto incognito;
- λ_i è il valore della funzione peso λ , associato al punto i -esimo inversamente proporzionale alla distanza d_i dal punto sconosciuto x_0 al punto noto x_i

solitamente il peso λ_i è determinato tramite una relazione $\lambda_i = w(d_i)$, inversamente proporzionale alla distanza tra il punti incognito e quello i -esimo, questo significa che:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} w(d) = 0 \quad (3.5)$$

di solito l'andamento della funzione $w(d)$ può essere di due tipi:

- potenze negative

$$w(d) = d^r \quad (3.6)$$

- esponenziale negativo

$$w(d) = e^{rd} \quad oppure \quad w(d) = e^{rd^2} \quad (3.7)$$

con r esponente proprio della funzione peso. Normalmente sul peso λ di pone anche il vincolo che:

$$\sum_{i=1}^n \lambda(1) = 1 \quad (3.8)$$

in questo modo la media globale rimane inalterata.

Inoltre il fenomeno deve poter variare in modo continuo, quindi l'oggetto di interpolazione deve essere di tipo interval o ratio, questo implica l'esclusione del diagramma di Voronoi (quindi di una TIN DEM). Il formato migliore per poter rendere continua la variazione di un fenomeno è quello raster, indipendentemente dalla risoluzione, in cui il valore incognito interpolato si

trova al centro di ogni cella. La spaziatura della griglia può essere regolare o irregolare, nel primo caso si hanno risultati migliori.

Si capisce facilmente che si tratta di un metodo di interpolazione esatta perché produce punti di infinito se $\sum d_{ij} = 0$, cioè se le coordinate dei punti da valutare coincidono con quelle dei punti noti, allora i valori interpolati coincidono coi valori campionati.

Quindi, l'operatore IDW prende come input un set di punti sparsi, appartenenti allo stesso sistema di riferimento geodetico/cartografico, dando come output un raster calcolato col criterio della media pesata dell'inverso della distanza. Preventivamente bisogna definire:

- l'area su cui effettuare l'interpolazione
- la risoluzione che si vuole applicare
- l'attributo di interpolazione (come vengono definiti i pesi)
- il numero massimo di punti utilizzati (in caso di data-set molto grandi)

L'algoritmo di calcolo è il seguente:

1. *verifica consistenza parametri in input*
2. *calcolo e controllo della risoluzione effettiva, che consenta di avere un numero di righe e colonne intero*
3. *impostazione del sistema di riferimento adottato*
4. *per ogni cella avente valore incognito:*
 - 4.1 *calcolo coordinate del punto nel sistema di riferimento adottato*
 - 4.2 *individuazione degli n punti più vicini ad esso, da usare per la stima*
 - 4.3 *calcolo della media pesata sull'inverso della distanza*
5. *composizione finale del raster con attribuzione dei parametri necessari*

Risulta facile comprendere che le prestazioni dell'algoritmo dipendono in sostanza dall'efficienza con cui sono stati valutati i punti vicini, dato che le operazioni svolte sono abbastanza semplici e non si sente il bisogno di ricorrere a particolari ottimizzazioni.

Inoltre, questo tipo di approccio non tiene conto delle variazioni superficiali graduali e in generale del trend della superficie, è quindi adatto alla rappresentazione in zone dove si ha brusca variazione (matematicamente si può parlare di zone a bassa correlazione spaziale).

3.2 Radial Basis Functions

Le RBF sono una particolare categoria di funzioni che riprendono quelle che stanno alla base delle reti neurali, cioè le connessioni dei neuroni biologici col sistema nervoso centrale e periferico.

3.2.1 Reti Neurali

Le reti neurali sono uno strumento matematico/informatico molto utile per la risoluzione di problemi di controllo, analisi dei dati o pattern recognition, in particolar modo nel caso si debbano fare interpolazioni multi valore e approssimazioni di funzioni (strutturando il tutto come una rete neurale), per via delle loro proprietà di approssimazione che valgono universalmente e della facilità nella stima dei parametri [9]. Inoltre trovano ampia applicazione come kernel nel campo Machine Learning (quel ramo dello studio dell'intelligenza artificiale avente come obiettivo la creazione di un sistema in grado di imparare autonomamente alcune funzioni o attività da svolgere) come Support Vector Machines (SVMs), cioè come modello di apprendimento di algoritmi in grado di svolgere determinate analisi (di solito analisi di regressione o di classificazione) [5]

Rientrano nel sistema delle reti in feed forward, ovvero in cui gli output sono espressi come funzioni deterministiche degli input.

L'unità fondamentale di una rete neurale è il neurone che può essere schematizzato in Figura 3.4:

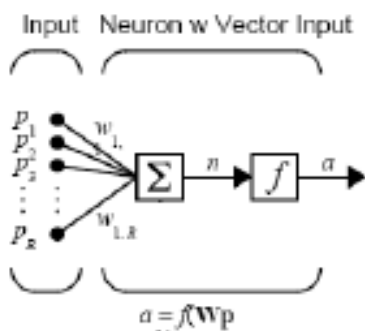


Figura 3.4: Schema di un neurone.

dove in ingresso arrivano R valori in input, dei quali viene fatta una sommatoria pesata sui valori delle connessioni che portano gli ingressi al neurone, risultando:

$$p_1w_1 + p_2w_2 + \dots + p_Rw_R \quad (3.9)$$

Il risultato della equazione 3.9 viene passato ad una una funzione modellatrice f che genera il vero e proprio output del neurone (è chiaro quindi dedurre che la funzione f di tratta della funzione di trasferimento del neurone).

Due o più neuroni possono essere combinati in un livello e una rete neurale contenere uno o più livelli. Gli strati fondamentali di una rete sono tre (Figura 3.5):

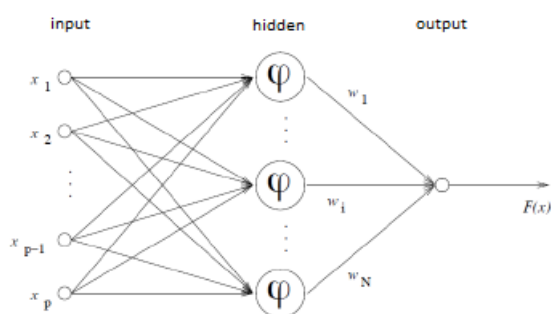


Figura 3.5: Struttura di una rete neurale.

dove:

- Il primo strato (*input*), costituito da p neuroni, serve per prelevare il

vettore x posto in ingresso, esso viene scomposto in componenti scalari che vengono inviate ai neuroni del secondo strato.

- Il secondo strato (*hidden*), costituito da N neuroni, che sono le vere e proprie funzioni che effettuano la trasformazione (solitamente lineare, ma non necessariamente) richiesta dall'algoritmo. I parametri di quest'ultimo vengono determinati in una fase precedente, detta di training, in cui si addestra la rete neurale e si ragiona nel modo voluto.
- Il terzo strato (*output*), costituito da un solo neurone, il quale combina linearmente gli elementi in entrata, generando ciò che viene richiesto.

Queste reti sono chiamate a singolo strato, in quanto il numero degli strati è riferito soltanto a quelli nascosti.

Naturalmente esistono anche reti neurali maggiormente complesse, a più livelli (Figura 3.6). Gli output del livello i diventano l'ingresso del livello $i + 1$, che vengono rielaborati ed escono per andare al livello successivo e così via. I collegamenti sono possibili solo tra livelli adiacenti.

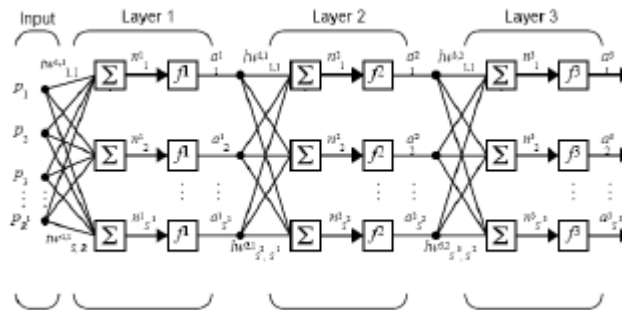


Figura 3.6: Struttura di una rete neurale a più livelli.

Il livello maggiormente significativo è l'ultimo, cioè quello che genera il vero e proprio output della rete.

Per poter funzionare correttamente bisogna fare una fase di *training* per la definizione dei corretti pesi. Per fare il training si usa un certo numero di esempi predefiniti di cui si conosce perfettamente l'output che la funzione dovrebbe emettere in funzione dei relativi ingressi e vengono definiti conseguentemente i pesi. Gli algoritmi di training sono molteplici e possono essere

reperiti in letteratura. Le reti neurali sono uno strumento apparentemente complesso ma nella pratica si rivelano comode e facili da usare anche per i problemi più difficili, ad esempio con una rete a soli due livelli opportunamente addestrata si possono approssimare pressoché tutte le funzioni aventi numero finito di discontinuità.

3.2.2 RBF

Come scritto nel paragrafo 3.2.1, l'architettura di una rete neurale si basa sull'idea che una funzione $y(x)$ venga approssimata come combinazione lineare delle varie funzioni di base [10].

Di solito si hanno N funzioni di base di forma $\phi(x, x_k) = \phi(\|x - x_k\|)$, dette anche *kernel functions*, ognuna corrispondente ad un punto dell'insieme di dati e dipendente solo dalla norma, che è distanza euclidea tra il punto x e il punto x_k chiamato centro (in questo caso si tratta rispettivamente del punto che deve essere interpolato e del punto campionato).

Essendo che l'output della mappa radiale $y(x, w)$ sia l'approssimazione si una combinazione lineare delle funzioni, avremo che:

$$y(x, w) = \sum_{k=1}^N w_k \cdot \phi_k(x - x_k) \quad (3.10)$$

con w_k coefficiente di peso riferito ad uno delle N funzioni RBF ϕ_k , che possono assumere diverse forme:

- Gaussiana

$$\phi_k(x) = \exp\left(-\frac{\|x - x_k\|^2}{2c^2}\right) \quad (3.11)$$

- Multiquadratica

$$\phi_k(x) = \sqrt{c^2 + \|x - x_k\|^2} \quad (3.12)$$

- Multilogaritmica

$$\phi_k(x) = \log(c^2 + \|x - x_k\|^2) \quad (3.13)$$

- Multiquadratica inversa

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{c^2 + \|x - x_k\|^2}} \quad (3.14)$$

- Spline poliarmoniche

$$\phi_k(x) = (c^2 + \|x - x_k\|^2)^{\frac{j}{2}} \quad j = 1, 3, 5, \dots \quad (3.15)$$

$$\phi_k(x) = (c^2 + \|x - x_k\|^2)^{\frac{j}{2}} \cdot \log(c^2 + \|x - x_k\|^2) \quad j = 2, 4, 6, \dots \quad (3.16)$$

nel caso $j = 2$ la RBF assume il nome di Thin Plate Spline ed è un caso particolare di spline poliarmonica.

Questo tipo di modello di approssimazione a rete neurale viene particolarmente utilizzato nel controllo di sistemi non lineari aventi comportamento caotico e nella ricostruzione 3D in grafica computerizzata [8]. L'ambiente specifico che studia la ricostruzione dei terreni prende il nome di RBF gerarchiche, chiamate così perché usano appunto algoritmi gerarchici in decompongono un grosso input in gruppi di dati più piccoli, classificandoli in base alla loro importanza.

L'operazione di interpolazione si riduce alla stima del campo di interesse. Questo significa che, partendo da una un insieme di N punti c_t , ognuno dei quali associato ad uno scalare h_t , è possibile immaginare che si sia una funzione $f(c_t, \theta)$, prefissata e incognita, tale da garantire la corrispondenza $c_t \rightarrow h_t$.

$$f(c_t, \theta) = h_t \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (3.17)$$

La soluzione deve essere espressa mediante rete neurale RBF, quindi nella forma (Figura 3.5), ovvero una combinazione della base di funzioni asimmetria radiale $[\phi_1(c_1) \dots \phi_p(c_t)]$, cioè:

$$f(c_t, \theta) = \sum_{k=1}^p \phi_k(c_t) \cdot \theta_k \quad (3.18)$$

dato che gli N vettori c_t sono dei punti nel piano, essi sono composti da

(x_t, y_t) . Quindi applicare la condizione di interpolazione significa imporre che l'equazione (3.18) rispetti la condizione (3.17) per tutte le coppie $f(c_t, \theta)$.

Le basi su cui effettuare la stima del campo possono essere di due tipi:

- Base *uniforme*;
- Base *centroidale*;

La base RBF uniforme prevede una distribuzione uniforme dei centri delle funzioni su tutta la mappa e l'algoritmo implementato valuta prima le dimensioni del campo (x e y) e dispone le funzioni coprendo interamente il campo di misura (Figura 3.7).

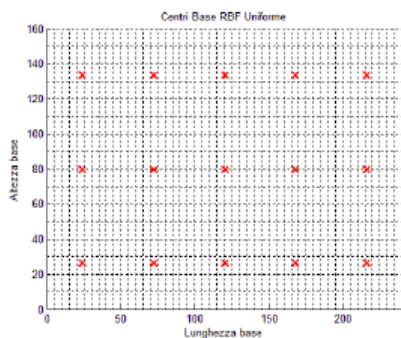


Figura 3.7: Centri base RBF uniforme.

Naturalmente, se si aumenta il numero dei centri delle funzioni, aumenta anche la risoluzione e la precisione di stima. Di contro però si hanno maggiori tempi di calcolo e in alcuni casi si ha il fenomeno dell'*overfitting*, cioè un aumento dell'errore di stima dovuto al fatto ci sono più funzioni radiali di quante ne servirebbero (in alcuni casi si valuta una soglia di massima stima).

La base RBF centroidale prevede che i centri degli interpolatori siano posti uno al centro della mappa, in modo da dividerla in quattro quadrati. In ognuno di essi si calcola la posizione del centro dove viene posta la funzione, dividendo ulteriormente la mappa, e così via fino al livello di risoluzione che si vuole ottenere (Figura 3.8). Il numero di funzioni segue la legge:

$$n = \sum_{k=0}^{L-1} 4^k \quad (3.19)$$

dove L è il livello di risoluzione che si vuole ottenere.

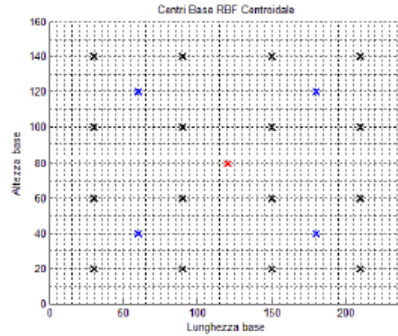


Figura 3.8: Centri base RBF centroidale, centri livello 1 in rosso, centri livello 2 in blu, centri livello 3 in nero.

Nella pratica la funzione centrale serve per fare una base della stima della media del campo, mentre le altre servono per migliorare l'accuratezza dello stesso.

Le funzioni RBF possono prestarsi all'interpolazione di terreni, e si usano in particolare nei casi in cui non si ha una griglia equamente spaziata [27].

In questo caso l'elevazione Z_i del punto incognito si può esprimere come somma di due componenti:

$$Z_i(x) = \sum_{i=1}^m \quad (3.20)$$

3.3 Kriging

Metodo di analisi basato sulla correlazione dei dati, studiato da Krige [19], appartiene alla categoria dei metodi geostatici di interpolazione, cioè tutti quei metodi in cui la superficie interpolata è concettualizzata come una delle possibili superfici che potrebbero essere osservate, coerentemente con i dati in input.

Per comprendere meglio il significato del kriging è doveroso fare una introduzione alla geostatica (sezione 3.3.1).

3.3.1 Geostatica

La Geostatica può intendersi come una branca della Statistica, cioè si basa su un approccio statistico e probabilistico per quantificare l'interdipendenza spaziale fra i campioni e quindi utilizzare tale informazione per le fasi successive di interpolazione, e di analisi della accuratezza della stima [14].

La teoria cardine della Geostatica è la Teoria delle Variabili Generalizzate di Matheron [28], che afferma: *un fenomeno si dice regionalizzato quando questo è un fenomeno naturale, che si concretizza nello spazio e nel tempo, manifestando un determinato comportamento. Le variabili che determinano questo fenomeno vengono individuate come delle variabili a scala regionale. Tali variabili si intendono come una funzione spaziale, il cui valore varia da un sito all'altro con un certo andamento continuo nello spazio, senza che sia possibile rappresentarne completamente i cambiamenti mediante una relazione analitica.*

Quindi la variabile regionalizzata sembra una variabile puramente deterministica in quanto, secondo la definizione, è una funzione che assume in ogni punto dello spazio un determinato valore. Tuttavia, osservando l'andamento di un fenomeno in una certa direzione, si nota una piccola irregolarità strutturata ubbidiente a certe regole. Questo tipo di fenomeno si dice che è strutturato spazialmente, cioè ha una variazione spaziale di componenti sia deterministiche che casuali.

Nel caso i punti campionati fossero distribuiti in modo uniforme e indipendente tra loro, allora si considera la variabile regionalizzata come deterministica e le posizioni dei campioni come casuali. Quando invece si lavora con un reticolato sistematico, quindi con dipendenza tra i punti, anche la variabile regionalizzata è casuale e si associa un modello stocastico in cui quella variabile è rappresentata come una funzione random¹.

¹è chiaro che in natura la probabilità non esiste, si usano dei modelli stocastici solo perché si rivelano utili per la stima di essa.

3.3.2 Metodologia

Rispetto alla teoria classica, ogni punto dello spazio x_0 presenta una variazione causale di una sua proprietà $Z(x_0)$ da cui viene estratto il valore reale analizzando la distribuzione delle probabilità. Dalla teoria di Matheron è possibile scrivere che una variabile generalizzata come:

$$Z(x_0) = \mu + \varepsilon(x) \quad (3.21)$$

dove:

- μ è la funzione costante stazionaria (media globale) preponderante
- $\varepsilon(x)$ è la variabile stocastica

La funzione utilizzata per lo studio di queste variabili è il *variogramma* (Figura 3.9), il variogramma è una tecnica di analisi statistica che quantifica il grado variabilità di punti a distanza crescente, mettendo quindi in relazione varianza con distanza [37].

La varianza è un indice statistico che fornisce una misura di quanto il valore di un campione si discosta dal valore atteso, cioè quanto varia il campione.

$$Var(x) = Z [(x - Z[x])^2] = Z[x^2] - Z[x]^2 \quad (3.22)$$

Nella pratica, per semplicità, si lavora più spesso col semivariogramma, che lavora con distanza e semivarianza $\gamma(x)$.

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (Z(x_i + h) - Z(x_i))^2 \quad (3.23)$$

dove:

- h è la distanza (lag) dal punti incognito x_0 ai punti campionati
- x è la posizione di uno degli n punti campionati, aventi lo stesso distanza da x_0

Nella fase sperimentale il semivariogramma prevede che vengano calcolati i valori di semivarianza per qualsiasi distanza dal punto x_0 . In realtà, per via

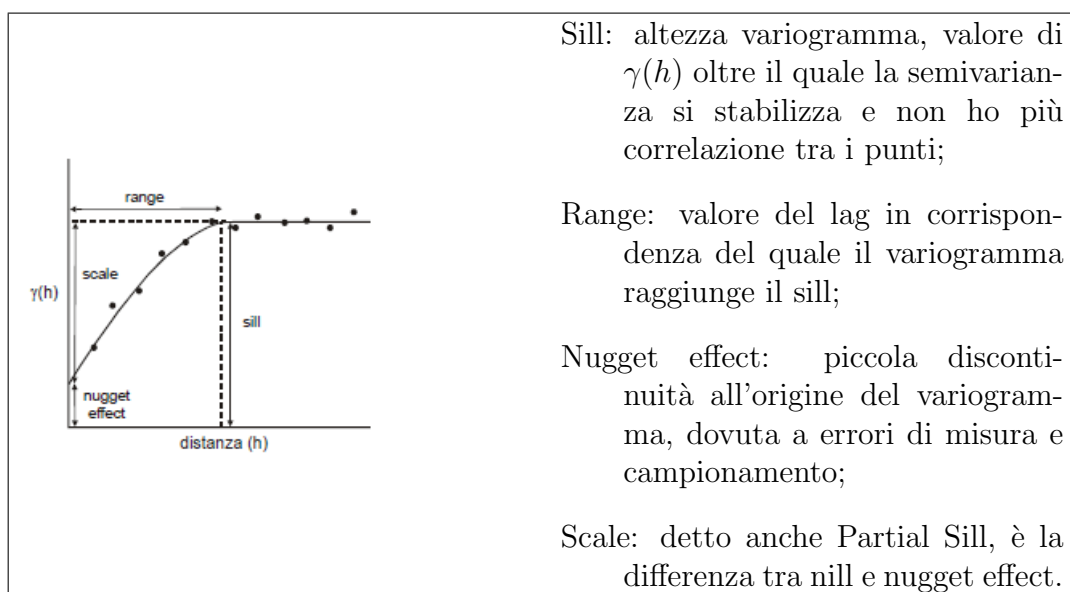


Figura 3.9: Esempio di variogramma.

dei grossi oneri di calcolo, è pratica comune adattare un modello matematico in cui si valuta un valore massimo di range a cui associare un determinato sill, in pratica si valuta a che lag il sill raggiunge un valore costante, i dati oltre quel lag non sono presi in considerazione in quanto non correlati.

Dai parametri del variogramma si ricavano i valori dei pesi da attribuite alle singole misure di interpolazione.

Esistono tre tipi di approccio di analisi del kriging:

Simple kriging: se si suppone di avere la media nota (potrebbe essere costante oppure no);

Ordinary kriging: se si suppone che la media sia ignota e costante;

Universal kriging: se si suppone che la media sia ignota e non costante, ma intesa come combinazione lineare di funzioni note (generalmente funzioni polinomiali), per cui i parametri ignoti sono da stimare con qualche metodo parametrico. Questo tipo di modellazione è frutto della combinazione dei due metodi precedenti e risulta essere quello maggiormente

utilizzato, può essere rappresentato dalla seguente formula:

$$Z(x_0) = \hat{m}(x_0) + \hat{e}(x_0) = \sum_{k=0}^p \hat{\beta}_k \cdot q_k(x_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e(x_i) \quad (3.24)$$

dove:

- $\hat{m}(x_0)$ è la parte deterministica;
- $\hat{e}(x_0)$ è il residuo interpolato;
- $\hat{\beta}_k$ sono i coefficienti di regressione stimati del modello deterministico;
- λ_i sono i pesi assegnati in base alla struttura della dipendenza spaziale del residuo, i pesi devono essere tali che:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

- $e(x_i)$ è il residuo alla posizione x_i ;

Il Kriging può essere visto come una interpolazione IDW molto più sofisticata, in cui i pesi non vengono determinati in modo arbitrario ma riflettono la struttura di autocorrelazione spaziale definita dalla funzione assunta dal variogramma. I pesi sono assegnati in modo da minimizzare la varianza dell'errore di stima (Minimum-Variance Unbiased Estimator MVUE).

3.4 Altri metodi

Oltre ai tre metodi di interpolazione presentati precedentemente, ne esistono altri che sono usati meno frequentemente, la maggior parte delle volte come base per ottenere una interpolazione più raffinata (fruttando poi la IDW, le RBF o il Kriging) o per fare una stima a grandi linee del terreno.

3.4.1 Trend

Metodo deterministico globale, consiste nell'approssimare i dati attraverso un polinomio o una superficie polinomiale (Figura 3.10). Di solito si tratta di una approssimazione, che usa un polinomio di grado n della forma 3.25, i cui coefficienti sono calcolati sfruttando i dati noti, in modo da minimizzare una funzione delle differenze rispetto ai loro valori (solitamente quella ai minimi quadrati). Molto raramente, si fruttano polinomi interpolanti esatti. La generica struttura di un polinomio interpolante è di grado n la seguente:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ p(x, y) &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + \dots + a_{n0}x^n + a_{0n}y^n + a_{nn}x^ny^n \end{aligned} \quad (3.25)$$

Lo sfruttamento del trend nella pratica serve solamente per avere una idea veloce sull'andamento globale del terreno, in quanto riesce a modellare una grande quantità di dati con polinomi di basso ordine (abituamente $n \leq 3$, oltre risulta difficile dare un significato fisico al polinomio) e fornisce indicazioni sul grado di approssimazione.

Di contro, al di fuori della zona coperta dai dati non si hanno valori ragionevoli e i minimi quadrati, oltre a presupporre una distribuzione Normale dei dati, non sono un criterio di stima robusto.

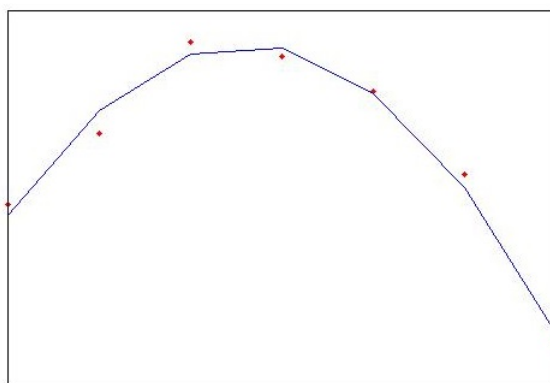


Figura 3.10: Approssimazione di dati con polinomio di II grado, minimi quadrati.

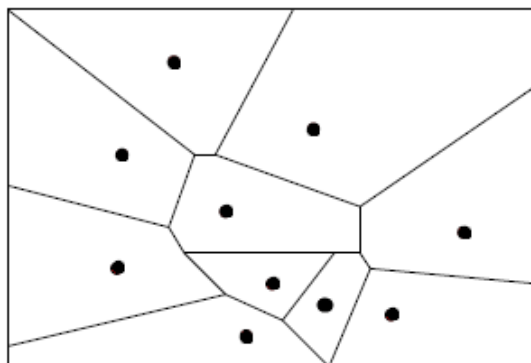


Figura 3.11: Esempio di tassellazione.

3.4.2 Tassellazione al punto più vicino

Si tratta una tecnica di interpolazione deterministica locale, consiste nell'assegnare ad ogni punto incognito il valore del punto campionato più vicino. Si tracciano delle regioni, la cui configurazione è determinata univocamente dalla posizione dei punti, questo processo viene detto *tassellazione* (Poligoni di Thiessen o di Voronoi, celle di Dirichlet) (Figura 3.11)

Una particolarità sta nel fatto che punti distribuiti regolarmente generano una tassellazione rettangolare.

Questo metodo ha come vantaggio un semplicissimo approccio e la facilità di automatizzazione della procedura. Negativamente, la dimensione di forma delle regioni dipende solo dalla distribuzione dei campioni (assunta omogenea e isotropa), inoltre non si hanno indicazioni sugli errori di stima.

3.4.3 Media mobile

Metodo locale deterministico, il valore del punto è dato dalla media degli n valori nell'intorno del punto di interesse, contenuti in una finestra simmetrica circolare o rettangolare (Figura 3.12) centrata nel punto incognito, come da equazione 3.26. Il metodo ha come ipotesi implicita l'isotropia dei punti.

$$z(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z(x_i, y_i) \quad (3.26)$$

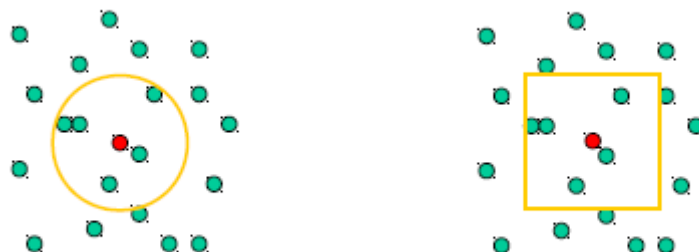


Figura 3.12: Esempio finestra circolare (a sinistra) e rettangolare (a destra)

La media mobile usa solo punti limitrofi al punto incognito e li pesa tutti allo stesso modo. La dimensione della finestra è molto importante per il risultato, finestre piccole esaltano le alte frequenze (quindi mettono in evidenza le asperità del territorio), mentre finestre grandi riducono le frequenze (hanno un effetto livellante o di *smoothing*).

3.5 Confronto metodi

Una panoramica dei vari metodi di interpolazioni delle DEM (discussi e non) è fatta dalla tabella 3.1.

Metodo	Legge	Validità	Transizione	Interpolazione	Limiti	Migliore per ...	Input	Oneri	Ipotesi
Visivo	soggettivo	globale	brusca	no	soggettiva, non riproducibile	immagini aeree	poligoni	nessuno	conoscenza intuitiva dei processi, omogeneità nelle aree
Ricerca contorni	deterministico	globale	brusca	no	richiede forme predefinite (artificiali)	remote sensing	raster	moderati	omogeneità nelle aree
Tassellazione	deterministico	locale	brusca	si	un dato per cella, no stima errore, dipende dalla disposizione dei punti	dati non numerici	poligoni	bassi o moderati	il più vicino fornisce informazioni migliori
Trend	stocastico	globale	graduale	no	effetti di bordo, non robusto, no significato fisico	rimozione di trend per altre interpolazioni	raster	bassi o moderati	trend con significato fisico, errori gaussiani
Serie di Fourier	stocastico	globale	graduale	no	dati periodici	dune o manufatti	raster	moderati	periodicità fenomeno
Spline	deterministico	locale	graduale	si	no stima errore	superfici lisce	raster	bassi o moderati	variazioni graduali
IDW	deterministico	locale	graduale	no (si se uso vincoli)	dipende da distribuzione punti, no stima errore	calcolo veloce di dati lisci	raster	bassi o moderati	isotropia, continuità, differenziabilità
Kriging	stocastico	locale	graduale	si	dati stazionari, altissimi oneri di calcolo	stime precedenti di funzione e errore	raster	molto alti	ipotesi transeche, trend

Tabella 3.1: Confronto tra i vari metodi di interpolazione.

Capitolo 4

Analisi dei dati e risultati

Nel presente capitolo, dopo una veloce illustrazione del terreno su cui sono state fatte le analisi, verrà illustrata la procedura di ottenimento del data set e le analisi eseguite, facendo riferimento alle metodologie illustrate nel capitolo 3. Inoltre, verranno illustrati i risultati raggiunti.

L'obiettivo delle analisi è quello di capire quale sia l'algoritmo migliore da implementare nell'elaboratore dell'ATV, in termini di errori e oneri di calcolo. Pertanto sono partito da una DEM completa, artificialmente sono stati annullati alcuni punti al fine di renderli incogniti, poi sono stati interpolati e infine si è determinato l'errore di interpolazione. L'obiettivo è quello di capire quale algoritmo dia un buon errore ingegneristico, associato anche a un ridotto tempo di analisi.

Nello specifico, le DEM usate durante l'analisi sono state ridotte di un fattore 10, in modo da lavorare con una griglia di soli $\frac{1201 \cdot 1201}{10} = 14424$ punti. Per creare dei valori incogniti, i cui valori verranno determinati matematicamente, sono stati annullati 70 punti casuali.

Il parametro generalmente utilizzato per valutare l'accuratezza di una DEM è l'*Errore Quadratico Medio (RMSE)*, questo compara altezze interpolate e reali, per ogni check point definito, analizzandone i residui. L'errore RMSE può essere scritto sia in forma assoluta che in forma percentuale (equazione 4.1), la seconda è preferibile perché, avendo un risultato percentuale, permette di validare positivamente o negativamente il metodo di

interpolazione nell'immediato [34].

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Z_i^{stimato} - Z_i^{reale})^2}{n}} \quad (4.1)$$

$$RMSE[\%] = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i^{stimato} - Z_i^{reale}}{Z_i^{reale}} \right)^2}{n}} \cdot 100$$

dove:

- $Z_i^{stimato}$ è il vettore di n elementi contenente i valori delle altezze interpolate
- Z_i^{reale} è il vettore di n elementi contenente i valori delle altezze reali
- n è il numero dei check point presi in considerazione

Il software usato per l'analisi dei dati è il noto MATLAB[®] (acronimo di MATix LABoratory) nella versione 8.1.0.604 (R2012a). MATLAB[®] venne creato alla fine degli anni '70 dall'allora preside del dipartimento di scienze informatiche della Università del New Mexico Cleve Moler, con l'intento di fornire ai suoi studenti un facile strumento di analisi numerico/statistica che non richiedesse la conoscenza del linguaggio Fortran. In seguito al suo enorme potenziale commerciale, MATLAB[®] venne riscritto in linguaggio C e Moler col socio Steve Bangert fondò nel 1984 la società *The MathWorks* che tutt'ora si occupa dello sviluppo e vendita del prodotto.

4.1 Terreno analizzato

La prima cosa da valutare è stata la scelta della tipologia di terreno da analizzare, naturalmente sono state fatte prove con più terreni morfologicamente diversi, pensando che potessero essere simili a quelli che il robot si troverà a dover percorrere. Ho scelto di lavorare con una DEM in formato .hgt

dell'Antartide, dato che è una zona geografica avente svariate tipologie di terreno.

Le DEM sono state prese tutte appartenenti alla regione Mary Bird Land, sita nella zona occidentale, tra il Mare di Ross e l'oceano Pacifico [26], di coordinate 158°W e $103^{\circ}24'\text{W}$ (Figura 4.1).

Questa regione si estende su una superficie di $1.610.000\text{km}^2$, venne scoperta nel 1929 dall'ammiraglio ed esploratore statunitense Richard Evelyn Byrd (Winchester, 25 ottobre 1888 - Boston, 11 marzo 1957) che le diede il nome in onore della moglie. Dopo le prime scoperte l'Antartide venne diviso politicamente e questa regione venne considerata come possesso degli Stati Uniti d'America, in virtù della nazionalità dello scopritore. Con l'entrata in vigore del Trattato Antartico (stipulato a Washington il 1 dicembre 1959 ed entrato in vigore il 23 giugno 1961, ad oggi, tra stati consultivi e stati membri, hanno aderito 45 Paesi) venne sospesa ogni rivendicazione di possesso lasciando tuttora tutto il Continente senza sovranità (tuttavia, gli Stati Uniti non hanno mai rivendicato il territorio), questo ha fatto sì che la Marie Byrd Land sia la più grossa regione non rivendicata della Terra. Oltre a questo, il Trattato Antartico impedisce qualunque test militare, installazione di basi non pacifiche, rilascio di materiali radioattivi o test nucleari, sfruttamento delle risorse naturali e scambio di informazioni scientifiche e personale tra i paesi contraenti, al fine di ridurre i costi delle spedizioni. Tutto questo per alterare il meno possibile una zona molto delicata dal punto di vista climatico e biologico.

4.2 Ottenimento Data-set

Il data-set che è stato preso dal database della National Snow and Ice Data Center (NSIDC) e si chiama high-resolution Radarsat Antarctic Mapping Project (RAMP) DEM (version 2) (Figura 4.2). Questo data-set raccoglie le informazioni da una diversa varietà di sorgenti in modo da coprire il continente molto dettagliatamente. La versione 2 si differenzia dalla prima per:

- nuovi dati topografici

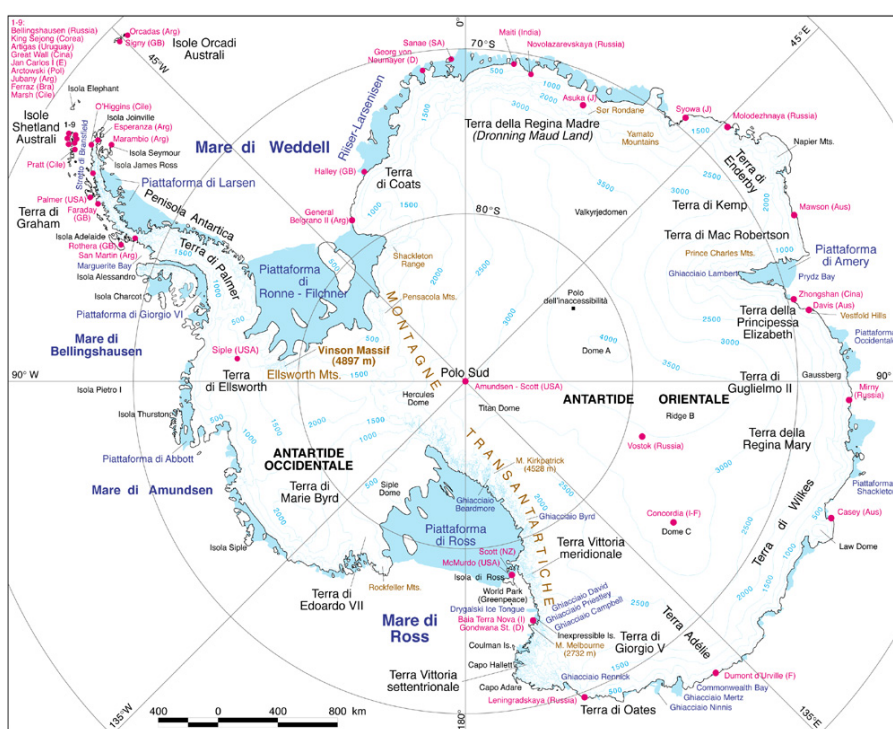


Figura 4.1: Mappa dell'Antartide, la Marie Byrd Land si trova nella regione occidentale.

- correzione errori della precedente versione
- maggior copertura del territorio
- altre modifiche

Questa particolare DEM raccoglie i dati topografici ottenuti dai satelliti, dagli aerei, dalle mappe a larga scala dello USGS e Australian Antarctic Division. I primi dati vennero inglobati negli anni '40 fino al completamento del lavoro con un certo grado di dettaglio negli anni '90.

La RAMP DEM è un progetto iniziato nel 1995, quando la Canadian Space Agency (CSA) lanciò nello spazio il satellite RADARSAT-1. Il progetto venne completato nel 1997, in seguito ad uno sforzo congiunto con la NASA ed altre collaborazioni esterne come: Byrd Polar Research Center, Vexcel Corporation, the Alaska Satellite Facility, the Jet Propulsion Laboratory (JPL), National Science Foundation, the Environmental Research Institute of Michigan, and the National Imagery and Mapping Agency.

Il satellite RADARSAT-1, grazie alla sua antenna SAR, riuscì a produrre la prima mappa ad alta risoluzione dell'Antartide. La RAMP DEM è molto indicata per studiare la morfologia della superficie ghiacciata e la sua dinamica.

Il data-set è presentato, come tutti quelli forniti dallo STRM della NASA, è in estensione .hgt, che significa semplicemente "height". Il file .hgt non è un tipo di formato, bensì solo la denominazione. Il formato di questo tipo di file è il di tipo vettore riga, 16 bit, contenente l'elevazione del terreno in *m.s.l* in proiezioni geografiche (matrice latitudine - longitudine). Nel caso dell'Antartide si hanno dati su 1201 righe e 1201 colonne (risoluzione a $3\frac{arc}{sec}$) il che significa un file di 2.884.802 bytes. Il data-set in questo formato non può essere letto direttamente dal calcolatore, pertanto è stato convertito, attraverso l'uso del software opensource 3DEM versione 20.7 (creato da Richard Homme, che purtroppo ha interrotto lo sviluppo alla fine del 2009) in formato USGS American Standard Code for Information Interchange (ASCII) DEM (*.dem); in questo modo si ottiene la matrice delle elevazioni *z* che può essere facilmente trattata con qualunque software di calcolo.

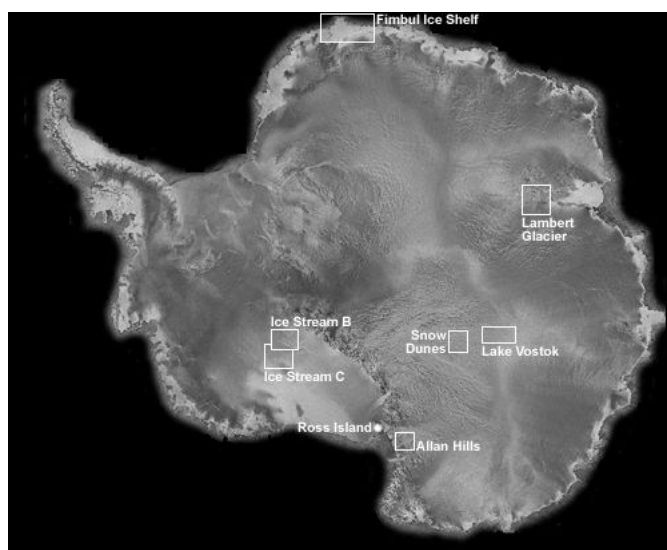


Figura 4.2: Mappa RAMP dell'Antartide.

4.3 IDW

Il primo metodo implementato è stato quello della IDW (3.1). Con MATLAB[®] stato possibile costruire una IDW function (ad hoc perché non è una funzione originariamente presente nella libreria) per creare una rete di nodi interpolati per coprire tutti gli eventuali buchi della griglia delle elevazioni, cioè le zone dove non sono stati acquisiti i dati.

4.3.1 Stima dei parametri

L'approccio originale IDW prevede la valutazione dei pesi w di tutti i punti noti della matrice. Tuttavia, questo genera altissimo tempo di analisi perché significa che per ogni punto incognito bisogna calcolare le distanze euclidee e i pesi w di tutti i punti noti (anche lavorando con DEM ridotte di parla di oltre 1000 distanze euclidee e pesi da determinare).

Quindi, non ho scelto di ricorrere al un banale algoritmo IDW esaustivo, ma è stato usato un algoritmo ottimizzato (allegato numero A.1) in cui, utilizzando la struttura ordinata del raster, sono state calcolare le distanze solo di alcuni di essi. In questo modo il risultato si raggiunge molto più velo-

cemente. Inoltre è possibile lavorare con la DEM completa, cosa altrimenti infattibile dato l'elevatissimo numero dei punti con cui lavorare.

Si possono utilizzare due criteri principali di scelta dei punti entrambi appartenenti alla categoria dei nearest neighbours, tra cui:

- determinazione di un raggio di confidenza e utilizzo di tutti i punti all'interno della circonferenza centrata nel punto incognito;
- scelta casuale di un certo numero di punti da usare come interpolatori.

Risulta facile dedurre che punti migliori da sfruttare sono quelli coi pesi maggiori, quindi quelli che influenzano maggiormente l'elevazione del punto da stimare (corretto perché sono quelli maggiormente correlati ad esso, in quanto più vicini). Per ridurre gli oneri di calcolo non è stato determinato alcun raggio ma ho preso direttamente i punti limitrofi a quello incognito.

La funzione $w(d_i)$ è stata stimata col metodo delle potenze negative (3.6, pag. 38), perché generalmente si ottengono risultati migliori [4].

L'andamento dei pesi è quello rappresentato in Figura 4.3, dove viene anche fatto un confronti con l'andamento a esponenziale negativo (3.7, pag. 38).

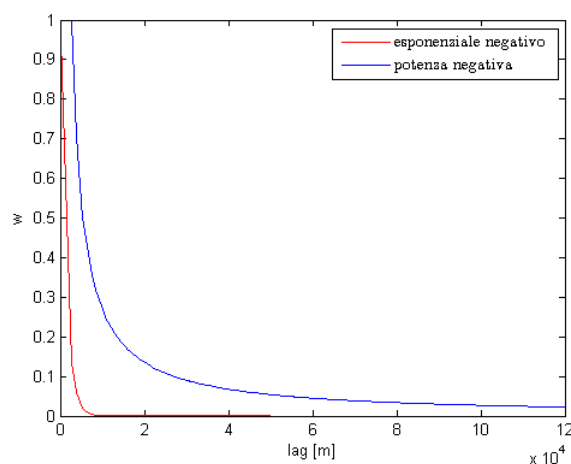


Figura 4.3: Andamento dei pesi w con la distanza dal punto incognito.

I coefficienti utilizzati di solito sono -1 , -2 e -3 , oltre al caso limite in cui $w = 0$, dove il concetto di media pesata degenera in una semplice media

aritmetica (questo perché si stanno pesando tutti i coefficienti allo stesso modo, indipendentemente dalla distanza).

Il coefficiente assegnato alla distanza genera un effetto di *smoothing* sulla superficie ricostruita. Maggiore è il coefficiente dato al peso, minore è l'effetto livellante. L'andamento dei pesi al variare della distanza è rappresentato in Figura 4.4.

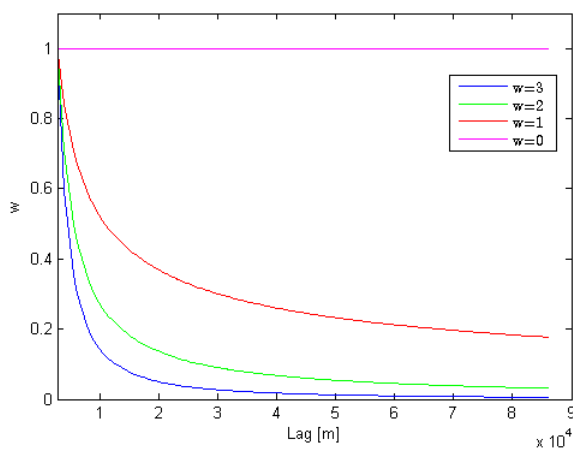
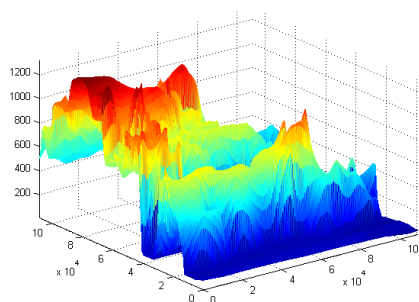


Figura 4.4: Andamento dei pesi w , con coefficienti differenti.

Come si può notare, il coefficiente limite $w = 0$ farà tendere tutti i valori incogniti all'elevazione media del terreno, mentre un coefficiente sempre maggiore darà più peso solo ai punti limitrofi a quello incognito, senza considerare quelli più distanti. Il fatto quindi di mettere un coefficiente diverso da zero al peso è corretto perché viene ripresa l'affermazione di pag. 36: *punti più vicini hanno valori più simili*.

Una superficie interpolata col metodo della IDW più avere differenze più o meno grosse rispetto a quella reale a seconda del peso utilizzato (Figura 4.5).

Naturalmente, a seconda del peso applicato, cambierà anche l'errore globale (Tabella 4.3.1). In questo caso gli errori sono molto alti perché, per evidenziare meno le discrepanze tra i vari peri in termini grafici, sono stati presi moltissimi punti incogniti. Nel complesso, si tratta di una DEM ridotta di un fattore 10 ($121 \times 121 = 14641$ punti), avente 7320 punti incogniti.



(a) terreno originale

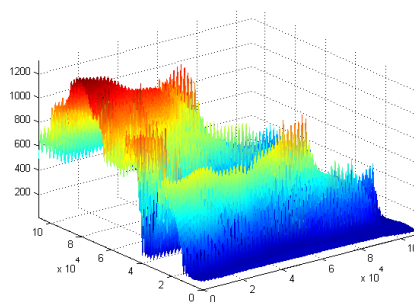
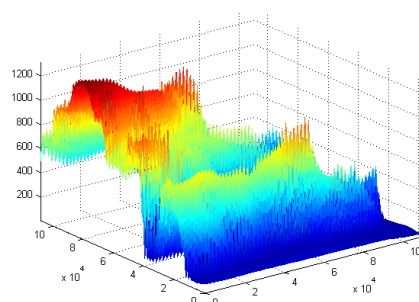
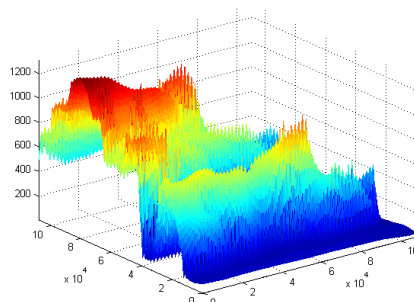
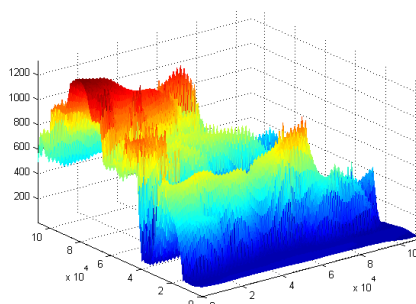
(b) IDW con $w = 0$ (c) IDW con $w = 1$ (d) IDW con $w = 2$ (e) IDW con $w = 3$ Figura 4.5: Variazione terreno interpolato al variare di w .

Figura	RMSE [%]
4.5 (b)	70.9689
4.5 (c)	54.5860
4.5 (d)	35.7018
4.5 (e)	23.3106

Tabella 4.1: Variazione dell'errore rms [%] al variare del peso.

Nell'applicazione del metodo dei nearest neighbours, sono stati considerati i 120 punti più vicini a quello incognito. L'algoritmo è strutturato in modo che un'eventuale punto incognito presente in quell'insieme non venga preso in considerazione.

Come si può vedere, il coefficiente migliore da applicare in un caso del genere è -3 , dato che dà un peso molto alto ai punti appena vicini e si riesce a seguire molto correttamente la superficie. In primo luogo, verrebbe da pensare che -3 sia dunque il miglior coefficiente e applicarlo in ogni caso. Tuttavia, questa non è sempre la soluzione più corretta perché ogni terreno, in base alla sua morfologia, ha un coefficiente ideale: ad esempio con uno completamente piatto ci si può permettere $w = 0$, che media tutto con pochi oneri computazionali e calcoli superflui. Viceversa, in caso di terreno particolarmente frastagliato, un peso troppo basso lo renderebbe troppo livellato, pertanto serve un peso alto al fine di ricostruire meglio le irregolarità.

Nella maggior parte dei casi il peso quadratico, cioè con coefficiente -2 , in quanto riesce a garantire un buon compromesso, in termini di errori, con ogni tipo di terreno [20], oltre al fatto di avere anche oneri abbastanza bassi (calcolare il quadrato di un numero è sempre più facile che calcolarne il cubo). Nel complesso l'equazione 3.4 (pag. 62) assume la forma:

$$Z(x_0) = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^{-2} \cdot Z(x_i)}{\sum_{i=1}^n d_i^{-2}} \quad (4.2)$$

4.3.2 Risultati e discussione delle scelte fatte

Sono state fatte alcune prove nelle condizioni di lavoro standard (vedi introduzione capitolo 4 pag. 55), al fine di verificare se l'equazione 4.2 dia o meno risultati apprezzabili.

La ricostruzione matematica di svariati tipi di terreno ha portato a ottimi risultati, sia in termini visivi (Figure 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11), che in termini di errori numerici (Tabella 4.3.2).

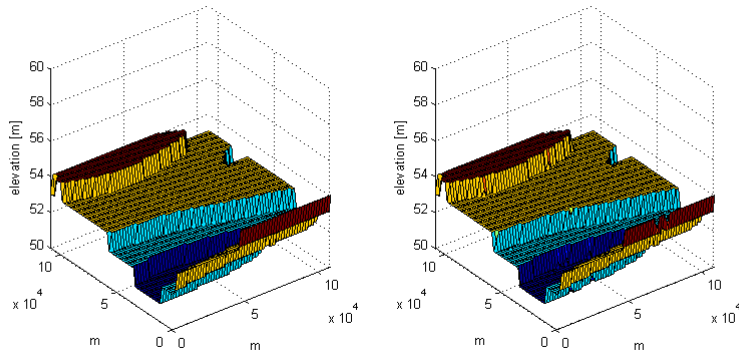


Figura 4.6: Prova IDW terreno 1.

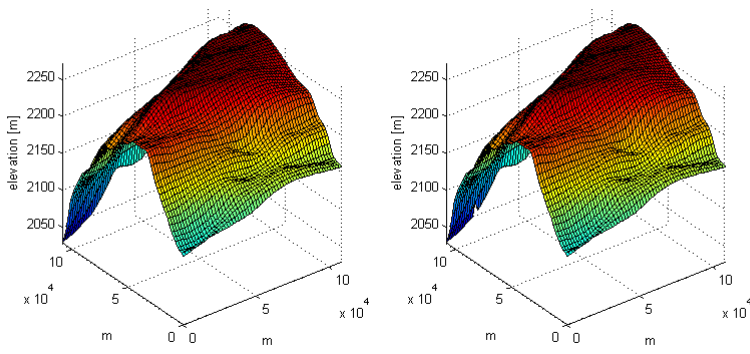


Figura 4.7: Prova IDW terreno 2.

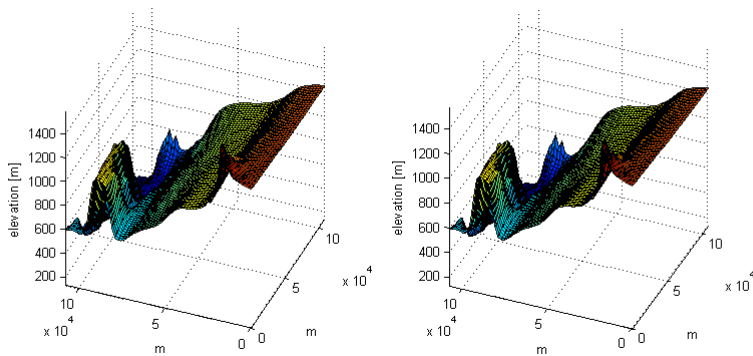


Figura 4.8: Prova IDW terreno 3.

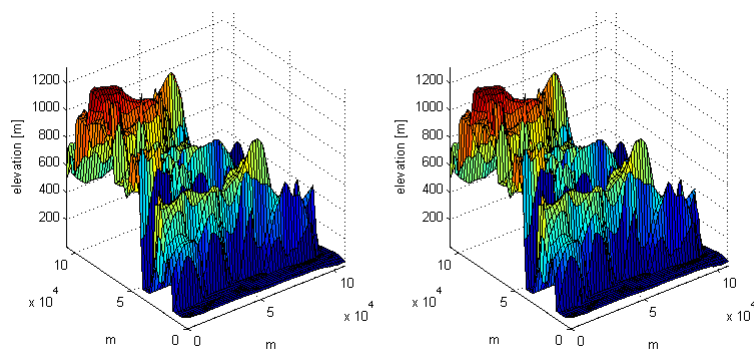


Figura 4.9: Prova IDW terreno 4.

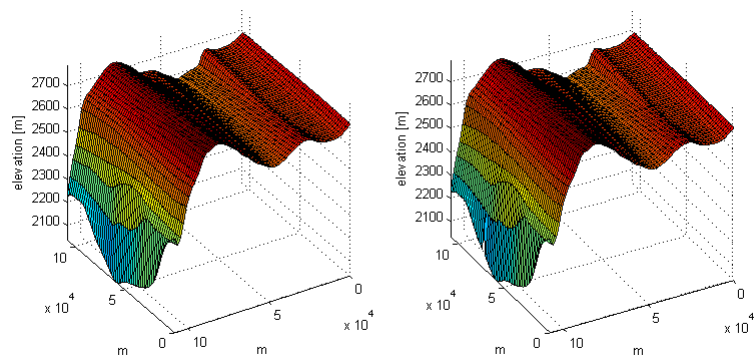


Figura 4.10: Prova IDW terreno 5.

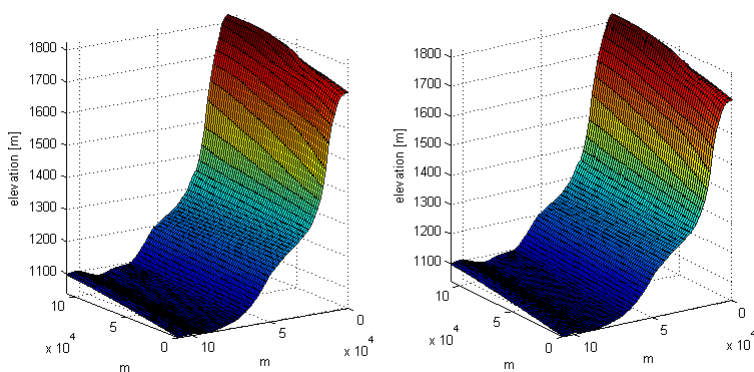


Figura 4.11: Prova IDW terreno 6.

Figura	RMSE [%]
4.6	0.047
4.7	0.012
4.8	0.574
4.9	10.0431
4.10	0.072
4.11	0.036

Tabella 4.2: Variazione dell'errore rms [%] al variare della tipologia di terreno.

Il principale vantaggio dell'utilizzo di questo tipo di interpolazione sta nel fatto che, in particolare lavorando con mesh fitte di punti, si ha una ricostruzione quasi perfetta del terreno originale (come dimostrano gli errori ottenuti). Inoltre, i calcoli sono molto veloci, in quanto le operazioni da svolgere sono abbastanza elementari (solo se si applica il principio dei nearest neighbours, se si dovesse sfruttare la IDW completa di avrebbero tempi notevolmente maggiori, causa altissima quantità di calcoli).

Di contro, questo tipo di stima lavora bene quando la superficie è abbastanza regolare, se invece ci sono superfici particolarmente frastagliate o con repentini cambi di pendenza l'algoritmo tende sempre a mediare le altezze e si commettono errori abbastanza importanti (ad esempio come in figura 4.9). Un altro difetto tipico di una superficie ricostruita con algoritmo IDW è la presenza dei classici occhi di bue (Figura 4.12), coincidenti con le coordinate del punto incognito. L'occhio di bue è il classico dosso o avvallamento, provocato dal fatto che l'algoritmo tenta comunque di portare tutte le altezze verso quella media (per questo ho errori maggiori in caso di terreni irregolari perché ho molti punti che si discostano dall'elevazione media e conseguentemente si generano molti occhi di bue).

Anche il problema degli occhi di bue viene risolto molto bene semplicemente lavorando coi nearest neighbours, perché viene fatta una media solo dei punti limitrofi. In altre parole, si può ritornare al concetto di media mobile (già citata nel paragrafo 3.4.3), ma pesata anziché matematica.

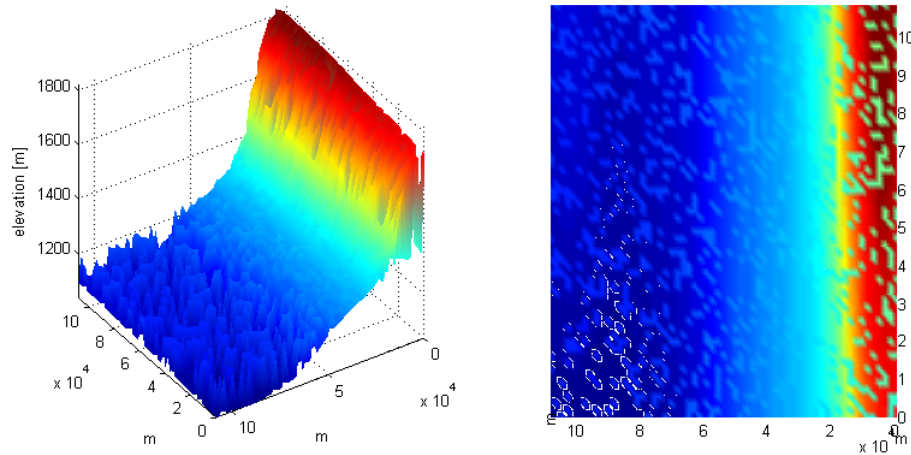


Figura 4.12: Dettaglio superficie affetta da occhi di bue, vista lateralmente e dall'alto.

4.4 RBF

In questo caso sono state usate le funzioni di base dipendenti dalla distanza tra punto interpolato e punti campionati, citate nel capitolo 3.2, con la differenza che non è stata usata la rete neurale vera e propria, ma un modello semplificato che sfrutta i medesimi principi (vedi allegato A.2). Le equazioni di base devono minimizzare un funzionale che descrive grosso modo l'andamento della superficie analizzata.

4.4.1 Studio del metodo

L'andamento matematico della superficie può essere descritto come somma di due componenti, una polinomiale che fornisce il trend della funzione, e una a base radiale [29], secondo la seguente formulazione:

$$Z(x_0) = \sum_{i=1}^m a_i f_i(x) + \sum_{j=1}^n b_j \phi(d_j) \quad (4.3)$$

in cui m è il grado massimo della funzione polinomiale $f(x)$ che approssima il trend della funzione, n è il numero di punti noti presi come campioni $\phi(d)$ la funzione a base radiale. I coefficienti a_i e b_j sono i coefficienti medi

dei vari parametri. Essi si ricavano dai punti campionati che intervengono nella interpolazione e sono stati stimati attraverso la risoluzione del seguente sistema lineare, di $n + m$ equazioni:

$$\begin{cases} Z(x_k) = \sum_{i=1}^m a_i f_i(x_k) + \sum_{j=1}^n b_j \phi(d_j k) & k = 1, 2, \dots, n \\ 0 = \sum_{j=1}^n b_j f_k(x_j) & k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (4.4)$$

Se si volesse fare un paragone con le vere reti neurali, il sistema 4.4 può essere considerato come la parte di training della rete, cioè quella in cui il sistema capisce come comportarsi e stima i parametri necessari.

La risoluzione di questo sistema comporta altissimi oneri di calcolo, inoltre se si considerano molti punti noti si ha il rischio di avere instabilità numerica. Per ovviare a questo inconveniente la stima dei parametri è stata fatta utilizzando solo gli otto punti circondanti quello incognito, questa pratica porta comunque a risultati soddisfacenti se si lavora con terreni non troppo complessi [21], come possono essere quelli percorsi dal quad.

Le funzioni a base radiale che possono essere usate sono molteplici, e possono essere trovate in letteratura. In questo caso si è scelto di lavorare con le RBF: 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 citate nel capitolo 3.2 (la RBF 3.11 non è stata presa in considerazione in quanto la funzione gaussiana si presta poco all'interpolazione di terreni [17]).

Tutte queste equazioni dipendono dal parametro c , il cui valore varia in base all'elevazione ma soprattutto alla distribuzione spaziale dei singoli punti partecipanti all'interpolazione. In questo caso la distribuzione dei centri RBF è uniforme (capitolo 3.2). Esistono due scuole di pensiero per arrivare alla stima del parametro c :

1. stime di tipo empirico che si appoggiano a tecniche statistiche di cross-validation [17];
2. algoritmo di tipo matematico che stimano il parametro in modo da minimizzare l'errore globale della superficie interpolata [31].

Per questo elaborato, non avendo alcun dato a disposizione, risulterebbe molto azzardato fare una stima empirica, pertanto si è optato per la minimizzazione dell'errore.

Come nel caso della interpolazione IDW, anche qui la prima cosa da fare per iniziare il lavoro è il calcolo della matrice delle distanze euclidee dai punti incogniti a quelli noti.

4.4.2 Sviluppo dell'algoritmo

La prima parte è stata quella dell'identificazione della funzione di trend per avere l'andamento medio del terreno. Questa è la polinomiale $f(x)$, si è valutato che il grado ottimo per approssimare un terreno è il secondo, la forma della funzione di trend sarà quindi:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (4.5)$$

Sono state fatte delle prove di costruzione (Figura 4.13) di superfici di vario tipo con dei polinomi di secondo grado. Visivamente, è possibile notare che come prima approssimazione può considerarsi soddisfacente, in quanto la superficie polinomiale ha un andamento che mediamente rispecchia la superficie reale. Non è necessario calcolare l'errore matematicamente in quanto il trend è solo una prima approssimazione della superficie, pertanto si otterrebbero dei risultati, sia in forma assoluta che relativa, poco sensati.

La scelta di un trend polinomiale di secondo grado è semplicemente dovuta al fatto che, nonostante una polinomiale di grado più alto dia generalmente un'approssimazione migliore, questa genera anche maggiori errori numerici. Queste polinomi sono, infatti, mal condizionati. Un polinomio mal condizionato è causa di alta instabilità numerica quindi di alta possibilità di commettere errori.

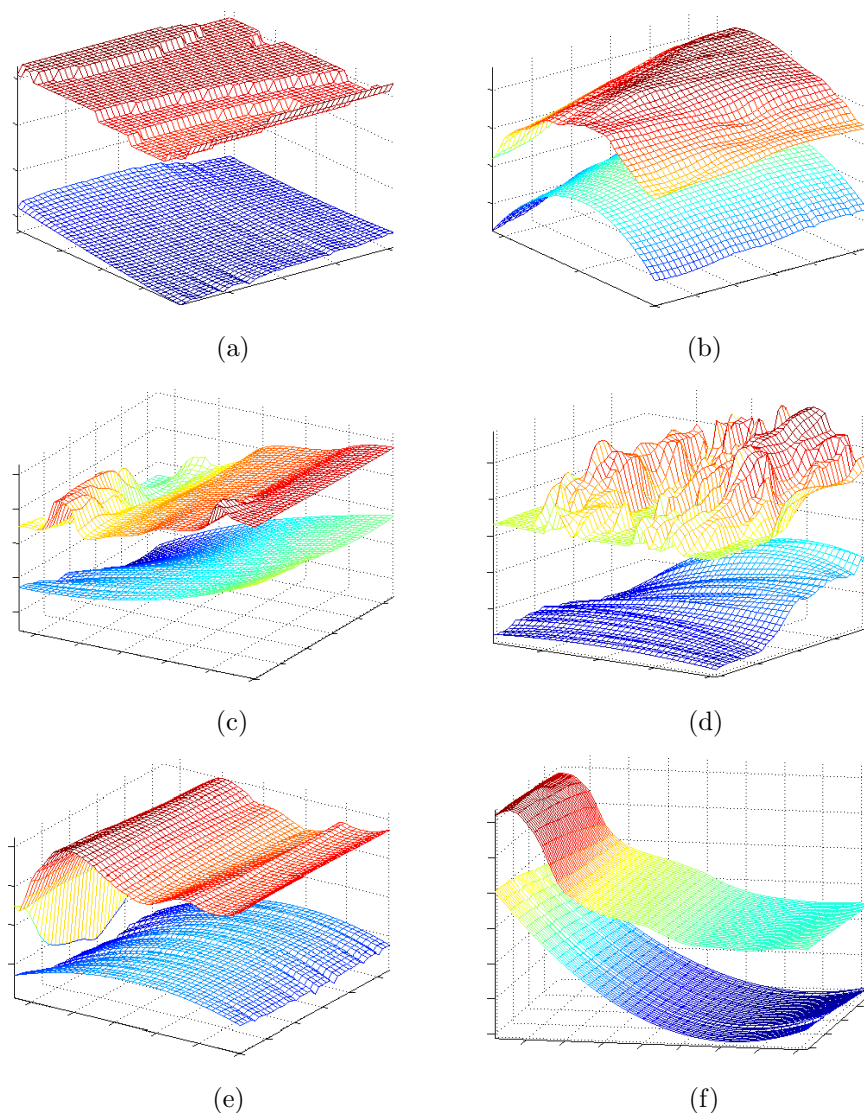


Figura 4.13: Polinomi interpolatori di vari tipi di terreno analizzato.

Inoltre, nella seconda parte dello sviluppo della funzione RBF, quando si dovranno andare a stimare i coefficienti a_i e b_j del sistema 4.4, lavorare con un polinomio di un grado minore significa avere una riga e una colonna in meno nella matrice di stato quindi minor tempo di calcolo.

Dopo avere valutato che il trend utilizzato può andare bene, si passa all'applicazione vera e propria delle funzioni a base radiale. Quindi, dopo la risoluzione del sistema 4.4 con la stima dei parametri a_i e b_j , si ottengono le

elevazioni dei punti incogniti dipendenti unicamente dal parametro c che è stato poi stimato in modo da minimizzare l'errore rms globale.

Per minimizzare la funzione rmse è stato scartato, vista la complessità della funzione, il metodo analitico classico, basato sul calcolo della derivata seguito dalla ricerca degli zeri. Di conseguenza, si è preferito utilizzare il metodo di ricerca free-derivative di Nelder-Mead [30] che ha portato alla stima corretta di c .

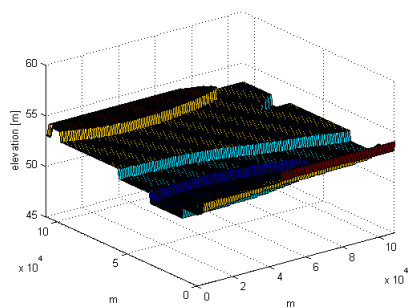
Nel complesso, sono stati ricostruiti i vari tipi di terreno con tutte le funzioni a base radiale prese in considerazione. Anche in questo caso i risultati, sia visivi (Figure 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19) che numerici (Tabella 4.4.3), sono stati ottimi.

4.4.3 Risultati e discussione

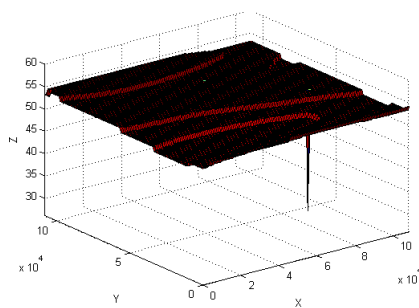
Anche utilizzando le funzioni a base radiale si ottengono errori molto bassi, al di sotto del punto percentuale. Queste funzioni hanno inoltre la capacità di ricostruire meglio il terreno interpolato in quanto lavorano con due approcci combinati (quello grossolano polinomiale e quello di precisione RBF), i terreni ricostruiti si presentano pressoché uguali a quelli originali.

Di contro, l'applicazione delle funzioni RBF ha un alto peso sul calcolatore. Questo si traduce in maggior tempo di calcolo (nell'ordine di qualche minuto) rispetto all'algoritmo IDW (esegue il lavoro in qualche decina di secondi). Tuttavia, il problema può essere quantomeno ridotto in caso di implementazione in linguaggio C per il funzionamento in real-time (nella memoria del robot i comandi devono essere scritti in C). L'altro grosso limite dell'approccio RBF è la loro alta instabilità numerica, dovuta al fatto che si lavora quasi sempre con polinomi mal condizionati. L'instabilità numerica non ha effetto sull'errore, ma sulla ricostruzione grafica del terreno, e si tramuta in picchi (*skewness*), positivi o negativi.

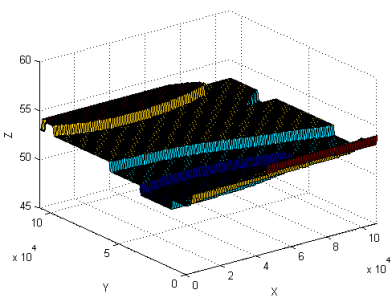
Nella pratica, l'utilizzo di questo tipo di interpolatore è ottimo se si lavora con terreni particolarmente frastagliati, o con repentini cambi di quota, in quanto non calcola medie locali e ricostruisce il terreno senza gli spiacevoli occhi di bue provocati dalla IDW. Se viceversa, si lavora con terreni regolari,



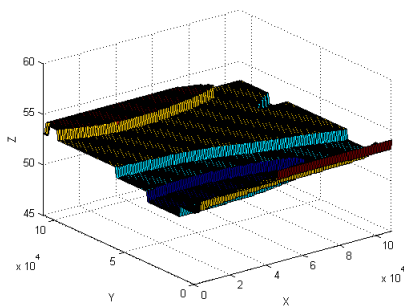
(a) Terreno originale



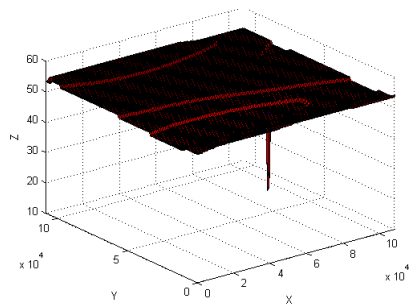
(b) Multiquadratica



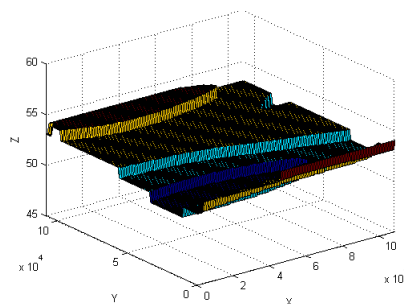
(c) Multilogaritmica



(d) Multiquadratica inversa

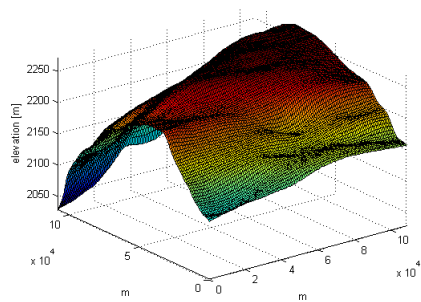


(e) Spline cubica

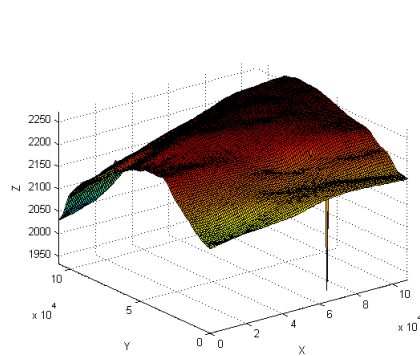


(f) Thin plate spline

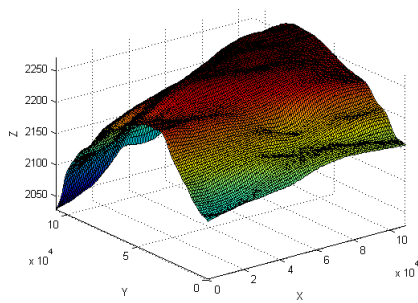
Figura 4.14: Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utilizzata (1).



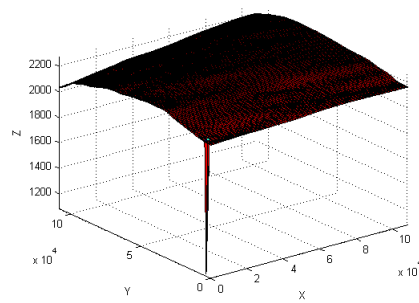
(a) Terreno originale



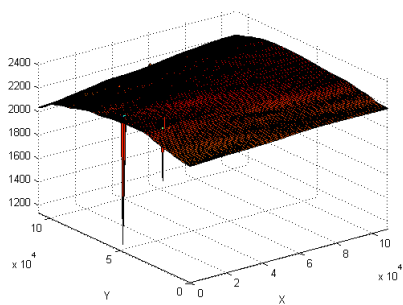
(b) Multiquadrica



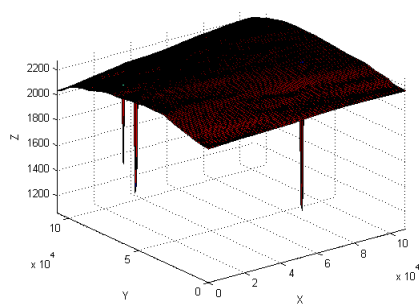
(c) Multilogaritmica



(d) Multiquadrica inversa

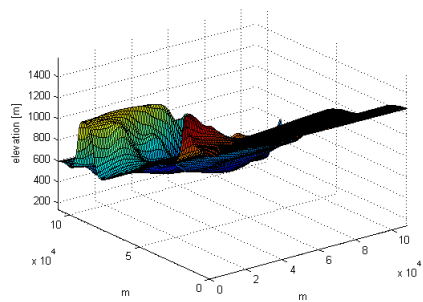


(e) Splice cubica

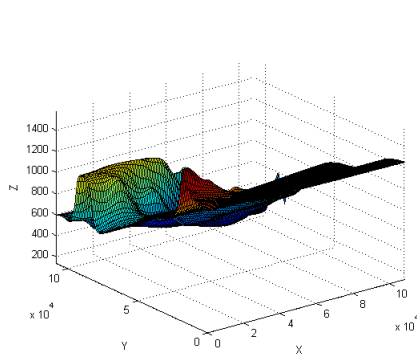


(f) Thin plate spline

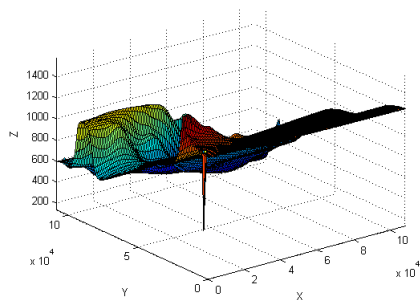
Figura 4.15: Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utilizzata (2).



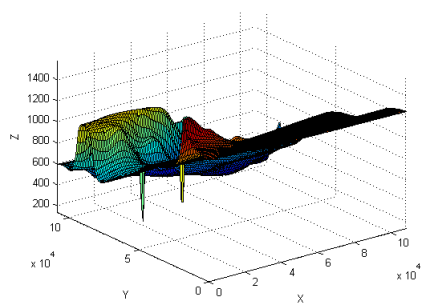
(a) Terreno originale



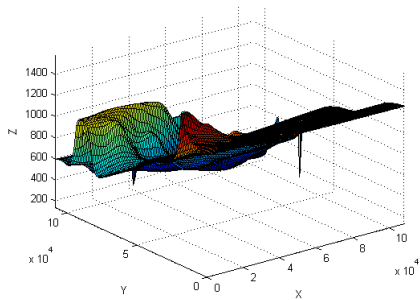
(b) Multiquadratica



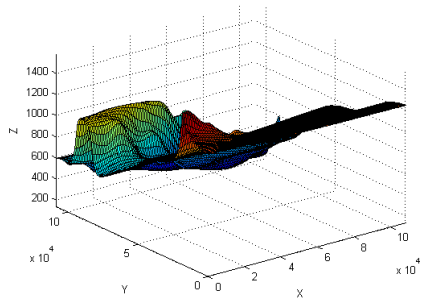
(c) Multilogaritmica



(d) Multiquadratica inversa

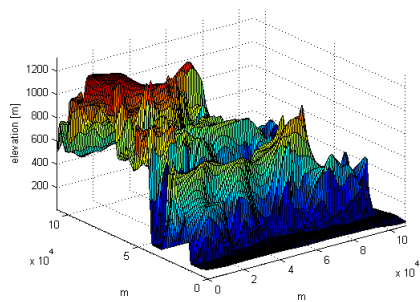


(e) Spline cubica

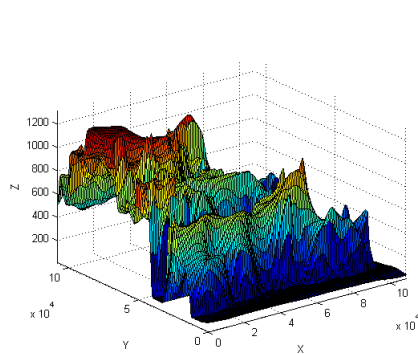


(f) Thin plate spline

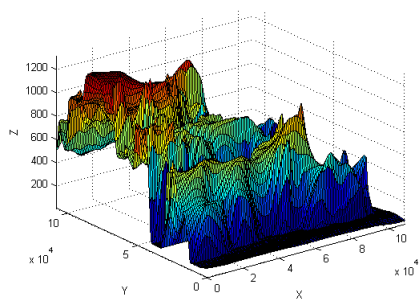
Figura 4.16: Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utilizzata (3).



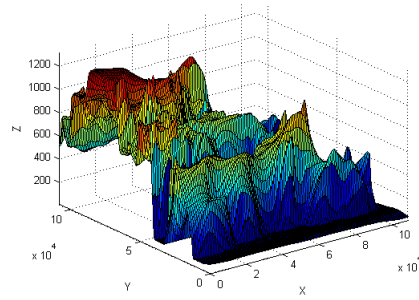
(a) Terreno originale



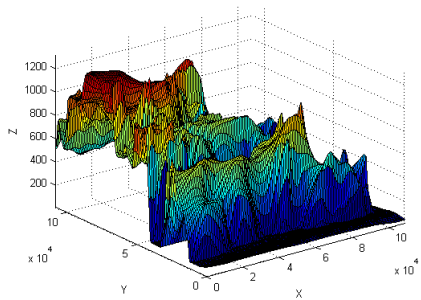
(b) Multiquadratica



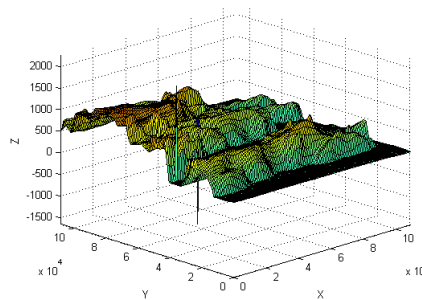
(c) Multilogaritmica



(d) Multiquadratica inversa

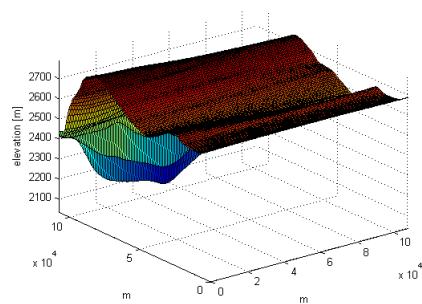


(e) Spline cubica

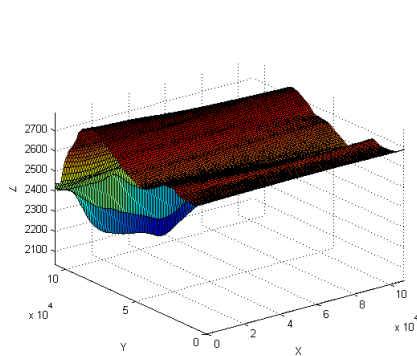


(f) Thin plate spline

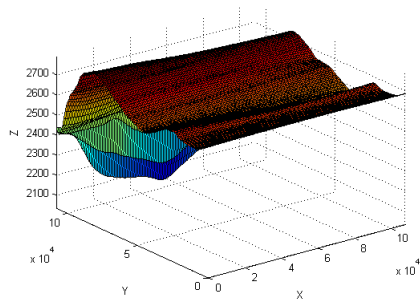
Figura 4.17: Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utilizzata (4).



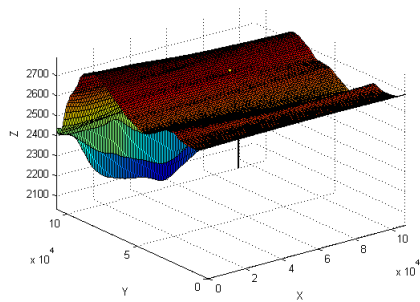
(a) Terreno originale



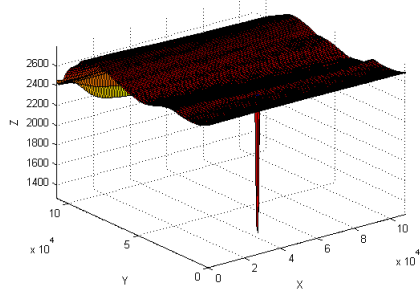
(b) Multiquadratica



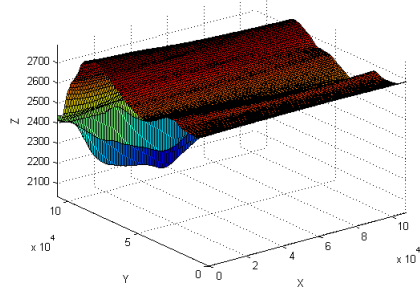
(c) Multilogaritmica



(d) Multiquadratica inversa

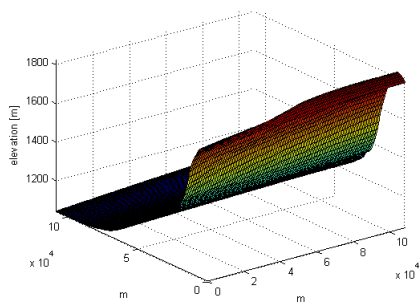


(e) Spline cubica

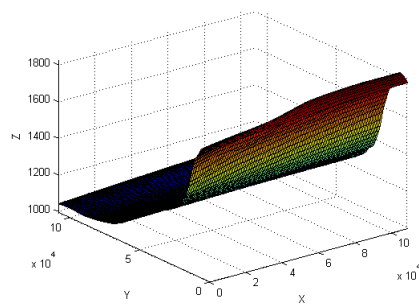


(f) Thin plate spline

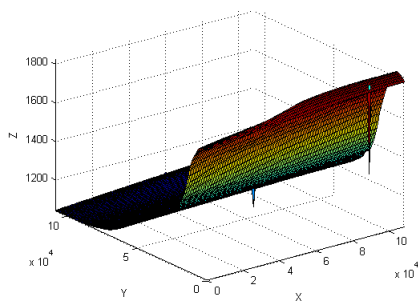
Figura 4.18: Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utilizzata (5).



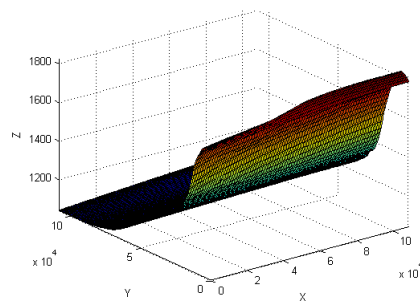
(a) Terreno originale



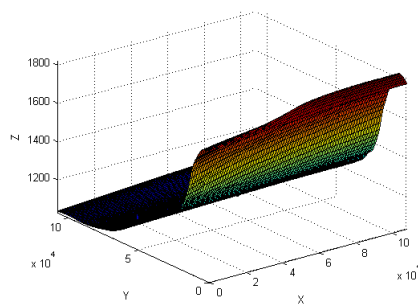
(b) Multiquadratica



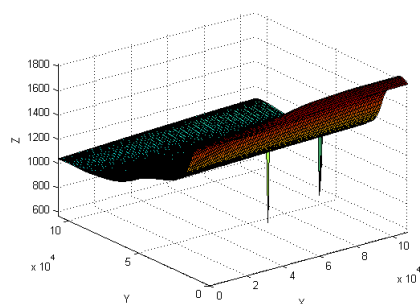
(c) Multilogaritmica



(d) Multiquadratica inversa



(e) Spline cubica



(f) Thin plate spline

Figura 4.19: Variazione ricostruzione superficie al variare della RBF utilizzata (6).

	Figura 4.14	Figura 4.15	Figura 4.16	Figura 4.17	Figura 4.18	Figura 4.19	
Multiquadratica [6.X(b)]	c RMSE [%]	$1.94 \cdot 10^{-16}$ 0.51	$2.20 \cdot 10^4$ 0.09	$1.94 \cdot 10^{-16}$ 0.22	$3.94 \cdot 10^3$ 0.63	$1.33 \cdot 10^4$ 0.04	$2.31 \cdot 10^4$ 0.08
Multilogaritmica [6.X(c)]	c RMSE [%]	$5.88 \cdot 10^3$ 0.01	$6.06 \cdot 10^3$ 0.01	$-1.11 \cdot 10^{-18}$ 0.63	$2.01 \cdot 10^3$ 0.95	$6.14 \cdot 10^3$ 0.01	$7.17 \cdot 10^3$ 0.22
Multiquadratica inversa [6.X(d)]	c RMSE [%]	$2.94 \cdot 10^3$ 0.01	$1.94 \cdot 10^{-16}$ 0.46	$1.94 \cdot 10^{-16}$ 0.73	$4.69 \cdot 10^3$ 0.83	$2.46 \cdot 10^4$ 0.20	$1.84 \cdot 10^4$ 0.01
Spline cubica [6.X(e)]	c RMSE [%]	$2.28 \cdot 10^{-4}$ 0.57	$1.91 \cdot 10^3$ 0.50	476 0.69	253 1.87	$5.85 \cdot 10^3$ 0.60	225 0.05
Thin plate spline [6.X(f)]	c RMSE [%]	$3.30 \cdot 10^3$ 0.01	$-1.11 \cdot 10^{-18}$ 0.85	$-1.11 \cdot 10^{-18}$ 0.11	$1.11 \cdot 10^{-18}$ 1.01	$-1.11 \cdot 10^{-18}$ 0.02	$-1.11 \cdot 10^{-18}$ 0.67

Tabella 4.3: RMSE e valore di c con terreni morfologicamente diversi.

aventi colline o avvallamenti che provocano cambiamenti dolci di elevazione, è preferibile utilizzare l'algoritmo IDW per la sua semplicità applicativa e velocità di calcolo.

4.5 Conclusioni e sviluppi futuri

Ricapitolando, lo scopo di tutto questo lavoro è stato quello di valutare, tra le molteplici metodologie di interpolazione di superfici, quale fosse quella più adatta al mio scopo. Il punto critico è stato quello creare un algoritmo che, oltre a generare un basso errore, sia il meno pesante possibile, pensando al fatto che possa essere caricato nella memoria del robot.

Il metodo del Kriging geostatico, anche se molto usato dai geologi per la ricostruzione di terreni, è stato scartato in quanto, oltre ad essere proceduralmente abbastanza lento (prevede la raccolta di più campioni, con i quali viene costruito il variogramma per la valutazione della autocorrelazione, e solo dopo l'analisi può partire), risulta particolarmente complicato da automatizzare. Nella pratica infatti, il Kriging si utilizza quando si devono monitorare altri parametri geologici di interesse, solitamente per modellare fenomeni idrologici, controllo di zone sismiche e monitoraggio falde acquifere, nonché in cartografia per il disegno di mappe (che ovviamente non sono fatte in real time). Anche le altre tecniche viste nella Sezione 3.4 non risultano adatte in quando non sono in grado di garantire prestazioni soddisfacenti, soprattutto in termini di errore generato.

La scelta è quindi caduta tra l'applicazione dell'interpolazione Inverse Distance Weighted e Radial Basis Function. L'implementazione in MATLAB[®] dei due interpolatori e i test effettuati hanno messo alla luce i loro pregi e i loro difetti.

Il primo metodo ha dalla sua un'alta velocità, grazie ai calcoli relativamente semplici che devono essere eseguiti, inoltre garantisce anche una certa robustezza nei risultati. Di contro, provoca leggere distorsioni grafiche nel terreno interpolato causate dagli occhi di buca, oltre al fatto che superfici molto frastagliate, con medie locali molto diverse, non vengono ricostruite bene.

L'algoritmo RBF permette invece una migliore ricostruzione di qualsiasi morfologia del terreno, sia dal punto di vista matematico che grafico. Il suo difetto sta invece nel fatto che lavora con calcoli più complessi, che generano più oneri computazionali, oltre alla instabilità numerica che affligge queste funzioni. L'instabilità numerica è un problema tipico delle funzioni RBF e si presenta soprattutto in presenza di angoli, spigoli o punte [10].

In caso di applicazione al robot, una idea valida potrebbe essere l'applicazione in coppia dei due algoritmi, utilizzando quello RBF per creare una prima ricostruzione offline del terreno, in modo da pianificare il percorso lavorando con una superficie ben approssimata. L'algoritmo IDW invece, verrebbe implementato in modo da lavorare online e ricostruire in real time quelle fette di terreno che vengono inquadrare dal laser scanner dell'ATV.

Un'altra idea interessante può riguardare l'applicazione di tecniche di calcolo parallelo, per accelerare il tempo di calcolo e consentire l'applicazione sia offline che online delle funzioni RBF e ottenere migliori ricostruzioni. Questa scelta implementativa richiederebbe una rivisitazione abbastanza profonda dell'algoritmo, ma potrebbe portare a risultati molto soddisfacenti.

Conclusioni

La produzione di algoritmi efficienti per l'interpolazione di superfici, avendo un data set iniziale più o meno dettagliato, è un compito abbastanza complesso. Tale attività è uno dei passi fondamentali del processo di ottenimento di un Modello Digitale di Elevazione di un terreno. È stato constatato che i metodi attualmente in uso permettono di ottenere buone prestazioni, ognuno perfezionando un determinato parametro.

Gli algoritmi che ho analizzato in questo lavoro sono quelli che permettono la ricostruzione di terreni partendo da dati in formato raster, il che li rende molto versatili in quanto è il formato più comunemente ottenuto dai dispositivi di raccolta dati. Tali algoritmi fanno uso di tecniche basate su medie a distanza pesata (IDW) e funzioni a base radiale (RBF), che sono tra gli strumenti più efficaci per l'interpolazione spaziale, in accordo con la letteratura scientifica.

Il confronto proposto ha quindi messo alla luce pregi e difetti dei due algoritmi più usati nella produzione di terreni digitali, dimostrando che entrambi fanno il loro lavoro con ottimi risultati, qualitativi e quantitativi. Restano comunque dei range di miglioramento che possono perfezionarli ulteriormente, a seconda della specifica applicazione cui saranno destinati. Nello specifico il perfezionamento per la loro implementazione nel robot, come algoritmi di pianificazione del percorso, sarà oggetto di un prossimo step di sviluppo.

Appendice A

Appendice

A.1 Algoritmo IDW

```
1 clear all
  close all
3 clc

5 %creo la DEM
  L=1201*90; lunghezza lato della DEM.
7 rf=10; %fattore di riduzione
  [Z,R]=usgsdem('C:\Desktop\TESI\antartide2.dem',rf);
9 X=linspace(0,L,length(Z(:,1)));
  Y=linspace(0,L,length(Z(1,:)))';
11
  %annullo 70 punti casuali
13 n_punti=70; %numero di punti incogniti
  punti_incogniti=randi(length(X)*length(Y),1,n_punti);
15 Z(punti_incogniti)=0;

17 %creo matrice dist, serve per facilitare i conti
  dist=zeros(size(Z));
19 for i=1:length(X)*length(Y)
    if Z(i)==0
```

```

21     dist(i)=1;
      end
23 end
      clear i
25
      % IDW
27 u=-2; %coefficiente della IDW (segno negativo!!!!)
      Zi=zeros(size(Z)); %matrice altezze interpolate
29
      for m=1:length(X)
31     for n=1:length(Y);
          if dist(m,n)==1
33         w=zeros(size(Z)); %matrice dei pesi

35         for i=m-1000:m+1000
            for j=n-1000:n+1000
37             if 0<i && i<=length(X)
                if 0<j && j<=length(Y)
39
                    if dist(i,j)~=1
41                     dist(i,j)=(X(i)-X(m))^2+(Y(j)-Y(n))^2;
                        w(i,j)=(dist(i,j))^(u/2);
43                     end
                    end
45                 end
                end
47             end

49             num1=Z(find(w));
                num2=w(find(w));
51             num=num1'*num2;
                clear t num1 w

53
                Zi(m,n)=num/sum(num2);
55             clear num num2

```



```
    end
57  end
end
59  clear m n dist

61  Ztot=Z+Zi;

63  % DEM originale usata per confronto
[Zreal,R]=usgsdem('C:\Desktop\TESI\antartide2.dem',rf);
65
%errore RMSE
67  Z1_globale=reshape(Zreal,1,[]);
res_globale=reshape(Zreal-(Ztot),1,[]);
69  rmse_globale=rms(res_globale);
rmse_perc_globale=rms(res_globale./Z1_globale)*100;
71
clear A1 Z1 R
73
% plottaggio risultati
75  figure()
subplot(1,2,1)
77  surf(X,Y,Zreal), axis tight
title('DEM □ originale')
79  xlabel('m')
ylabel('m')
81  zlabel('elevation □ [m]')
subplot(1,2,2)
83  surf(X,Y,Ztot), axis tight
title('DEM □ ricostruita')
85  xlabel('m')
ylabel('m')
87  zlabel('elevation □ [m]')
```

A.2 Algoritmo RBF

```

1 clear all
  close all
3 clc

5 L=1201*90;
  fd=10; %fattore di riduzione della DEM
7 [Zr,Rr]=usgsdem('C:\Desktop\TESI\antartide.dem',fd);
  X=linspace(0,L,length(Zr(:,1)));
9 Y=linspace(0,L,length(Zr(1,:)))';

11 n_punti=70; %numero di punti incogniti
  punti_incogniti=randi(length(X)*length(Y),1,n_punti);
13 Zr(punti_incogniti)=0;

15 Zi=vpa(zeros(size(Zr)));
  for i=1:length(Zr(:,1))
17   for j=1:length(Zr(1,:))
     if Zr(i,j)==0
19       Zi(i,j)=1;
     end
21   end
  end
23 clear i j

25 %costruisco le polinomiali di grado 1 e 2
  p1=zeros(length(Zr(:,1)),2);
27 c1=zeros(size(Zr));
  for j=1:length(Zr(1,:))
29   p1(j,:)=polyfit(X(find(Zr(:,j))),Zr(find(Zr(:,j))))',1);
     c1(j,:)=polyval(p1(j,:),X);
31 end

33 p2=zeros(length(Zr(:,1)),3);

```

```

c2=zeros(size(Zr));
35 for j=1:length(Zr(1,:))
p2(j,:)=polyfit(X(find(Zr(:,j))),Zr(find(Zr(:,j)),j)')',2);
37 c2(j,:)=polyval(p2(j,:),X);
end
39
%creo la matrice D, metodo dei nearest neighbours
41 dist=zeros(size(Zr));
for i=1:length(X)
43 for j=1:length(Y)
if Zi(i,j)==1
45 dist(i,j)=1;
end
47 end
end
49 clear i j

51 [D,L] = bwdist(dist,'euclidean');
D=D.*X(2);
53
%creo la matrice Zi
55 syms c real
RBF=menu('RBF','mlq','mlg','imlq','ncs','tps');
57 for i=1:length(Zr(1,:))
for j=1:length(Zr(:,1))
59
if Zi(i,j)==1
61 phi=vpa(zeros(size(Zr)));

63 for m=i-1:i+1
for n=j-1:j+1
65 if m>0 && m<=length(Zr(1,:))
if n>0 && n<=length(Zr(:,1))
67 switch RBF
case(1)

```

```

69     phi(m,n)=sqrt(D(m,n)^2+c^2);
       case(2)
71     phi(m,n)=log(D(m,n)^2+c^2);
       case(3)
73     phi(m,n)=1/(sqrt(D(m,n)^2+c^2));
       case(4)
75     phi(m,n)=(D(m,n)^2+c^2)^1.5;
       case(5)
77     phi(m,n)=(D(m,n)^2+c^2)+log(D(m,n)^2+c^2);
     end
79   end
     end
81   end
end
83
     numphi=phi(find(phi~=0));
85
     if length(numphi)==9
87
oo=vpa(zeros(5,8));
89 Zxk=[Zr(i,j-1) Zr(i-1,j) Zr(i,j+1) Zr(i,j+1)]';
cc1=[c1(i,j-1) c1(i-1,j) c1(i,j) c1(i+1,j) c1(i,j+1)]';
91 cc2=[c2(i,j-1) c2(i-1,j) c2(i,j) c2(i+1,j) c2(i,j+1)]';

93   for v=1:9

95       if v==2 || v==4 || v==5 || v==6 || v==8
           d1=zeros(3,3); d1(v)=1;
97           [d1,L1] = bwdist(d1,'euclidean');
           d1=d1.*X(2);
99           phi1=vpa(zeros(size(d1)));
           d1(1)=0;
101          d1(3)=0;
           d1(7)=0;
103          d1(9)=0;

```

```

105     for t=1:9
107         if t==2 || t==4 || t==5 || t==6 || t==8
109             switch RBF
111                 case(1)
113                     phi1(t)=sqrt(d1(t)^2+c^2);
115                 case(2)
117                     phi1(t)=log(d1(t)^2+c^2);
119                 case(3)
121                     phi1(t)=1/(sqrt(d1(t)^2+c^2));
123                 case(4)
125                     phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)^1.5;
127                 case(5)
129                     phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)+log(d1(t)^2+c^2);
131             end
133         end
135     end

137     oo(:,v)=[phi1(2) phi1(4) phi1(5) phi1(6) phi1(8)];

139     oo(:,7)=[];
141     oo(:,3)=[];
143     oo(:,1)=[];

145     A=[ cc1(1) cc2(1) oo(1,1) oo(2,1) oo(4,1) oo(5,1);
147         cc1(2) cc2(2) oo(1,2) oo(2,2) oo(4,2) oo(5,2);
149         cc1(4) cc2(4) oo(1,4) oo(2,4) oo(4,4) oo(5,4);
151         cc1(5) cc2(5) oo(1,5) oo(2,5) oo(4,5) oo(5,5);
153         0      0      cc1(1)  cc1(2)  cc1(4)  cc1(5);
155         0      0      cc2(1)  cc2(2)  cc2(4)  cc2(5)];

157     b=vpa([Zxk(1);

```

```

139         Zxk(2);
           Zxk(3);
141         Zxk(4);
           0;
143         0]);

145     x=A\b;

147     Zi(i,j)=[cc1(3) cc2(3) oo(3,1) oo(3,2) oo(3,4) oo(3,5)]*x;

149     else if length(numphi)==6

151         oo=vpa(zeros(6,6));

153     if j==1
           Zxk=[Zr(i-1,j) Zr(i+1,j) Zr(i,j+1)]';
155         cc1=[c1(i-1,j) c1(i,j) c1(i+1,j) c1(i,j+1)]';
           cc2=[c2(i-1,j) c2(i,j) c2(i+1,j) c2(i,j+1)]';

157     for v=1:6

159         if v==1 || v==2 || v==3 || v==5
           d1=zeros(3,2); d1(v)=1;
161         [d1,L1] = bwdist(d1,'euclidean');
           d1=d1.*X(2);
163         phi1=vpa(zeros(size(d1)));

165     for t=1:6
           if t==1 || t==2 || t==3 || t==5
167                 switch RBF
                   case(1)
169                     phi1(t)=sqrt(d1(t)^2+c^2);
                   case(2)
171                     phi1(t)=log(d1(t)^2+c^2);
                   case(3)
173                     phi1(t)=1/(sqrt(d1(t)^2+c^2));

```

```

175         case(4)
176             phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)^1.5;
177         case(5)
178             phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)+log(d1(t)^2+c^2);
179         end
180     end
181     end
182     oo(:,v)=[phi1(1) phi1(2) phi1(3) phi1(4) phi1(5) phi1(6)];
183
184     end
185     end
186
187     oo(6,:)=[];
188     oo(4,:)=[];
189     oo(:,6)=[];
190     oo(:,4)=[];
191
192     A=[ cc1(1) cc2(1) oo(1,1) oo(3,1) oo(4,1);
193         cc1(3) cc2(3) oo(1,3) oo(3,3) oo(4,3);
194         cc1(4) cc2(4) oo(1,4) oo(3,4) oo(4,4);
195         0      0      cc1(1)  cc1(3)  cc1(4);
196         0      0      cc2(1)  cc2(3)  cc2(4)];
197
198     b=vpa([Zxk(1);
199           Zxk(2);
200           Zxk(3);
201           0;
202           0]);
203
204     x=A\b;
205
206     Zi(i,j)=[cc1(2) cc2(2) oo(1,2) oo(3,2) oo(4,2)]*x;
207

```

```

209     else if j==length(Zr(1,:))
211         Zxk=[Zr(i,j-1) Zr(i-1,j) Zr(i+1,j)]';
           cc1=[c1(i,j-1) c1(i-1,j) c1(i,j) c1(i+1,j)]';
213         cc2=[c2(i,j-1) c2(i-1,j) c2(i,j) c2(i+1,j)]';

215     for v=1:6
           if v==2 || v==4 || v==5 || v==6
217         d1=zeros(3,2); d1(v)=1;
           [d1,L1] = bwdist(d1,'euclidean');
219         d1=d1.*X(2);
           phi1=vpa(zeros(size(d1)));

221     for t=1:6
           if t==2 || t==4 || t==5 || t==6
           switch RBF
225             case(1)
               phi1(t)=sqrt(d1(t)^2+c^2);
227             case(2)
               phi1(t)=log(d1(t)^2+c^2);
229             case(3)
               phi1(t)=1/(sqrt(d1(t)^2+c^2));
231             case(4)
               phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)^1.5;
233             case(5)
               phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)+log(d1(t)^2+c^2);
235             end
           end
237     end

239 oo(:,v)=[phi1(1) phi1(2) phi1(3) phi1(4) phi1(5) phi1(6)];

241     end
           end
243     oo(3,:)=[];

```



```

245         oo(1,:)=[];
246         oo(:,3)=[];
247         oo(:,1)=[];
248
249         A=[ cc1(1) cc2(1) oo(1,1) oo(2,1) oo(4,1);
250             cc1(3) cc2(3) oo(1,2) oo(2,2) oo(4,2);
251             cc1(4) cc2(4) oo(1,4) oo(2,4) oo(4,4);
252             0      0      cc1(1)  cc1(2)  cc1(4);
253             0      0      cc2(1)  cc2(2)  cc2(4)];
254
255         b=vpa([Zxk(1);
256               Zxk(2);
257               Zxk(3);
258               0;
259               0]);
260
261         x=A\b;
262
263         Zi(i,j)=[cc1(2) cc2(2) oo(1,3) oo(2,3) oo(4,3)]*x;
264
265         else if i==1
266             Zxk=[Zr(i,j-1) Zr(i+1,j) Zr(i,j+1)]';
267             cc1=[c1(i,j-1) c1(i,j) c1(i+1,j) c1(i,j+1)]';
268             cc2=[c2(i,j-1) c2(i,j) c2(i+1,j) c2(i,j+1)]';
269
270         for v=1:6
271             if v==1 || v==3 || v==4 || v==5
272                 d1=zeros(2,3); d1(v)=1;
273                 [d1,L1] = bwdist(d1,'euclidean');
274                 d1=d1.*X(2);
275                 phi1=vpa(zeros(size(d1)));
276
277         for t=1:6
278             if t==1 || t==3 || t==4 || t==5

```

```

279         switch RBF
                case (1)
281             phi1(t)=sqrt(d1(t)^2+c^2);
                case (2)
283             phi1(t)=log(d1(t)^2+c^2);
                case (3)
285             phi1(t)=1/(sqrt(d1(t)^2+c^2));
                case (4)
287             phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)^1.5;
                case (5)
289             phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)+log(d1(t)^2+c^2);
                end
291         end
                end
293
oo(:,v)=[phi1(1) phi1(2) phi1(3) phi1(4) phi1(5) phi1(6)];
295
                end
297             end
                    oo(6,:)=[];
299             oo(2,:)=[];
                    oo(:,6)=[];
301             oo(:,2)=[];

303         A=[ cc1(1) cc2(1) oo(1,1) oo(3,1) oo(4,1);
                cc1(3) cc2(3) oo(1,3) oo(3,3) oo(4,3);
305             cc1(4) cc2(4) oo(1,4) oo(3,4) oo(4,4);
                    0      0      cc1(1)  cc1(3)  cc1(4);
307             0      0      cc2(1)  cc2(3)  cc2(4)];

309         b=vpa([Zxk(1);
                Zxk(2);
311             Zxk(3);
                    0;
313             0]);

```

```

315         x=A\b;

317     Zi(i,j)=[cc1(2) cc2(2) oo(1,2) oo(3,2) oo(4,2)]*x;

319

321     else if i==length(Zr(:,1))
322         Zxk=[Zr(i,j-1) Zr(i-1,j) Zr(i,j+1)]';
323         cc1=[c1(i,j-1) c1(i-1,j) c1(i,j) c1(i,j+1)]';
324         cc2=[c2(i,j-1) c2(i-1,j) c2(i,j) c2(i,j+1)]';

325     for v=1:6
326         if v==2 || v==3 || v==4 || v==6
327             d1=zeros(2,3); d1(v)=1;
328             [d1,L1] = bwdist(d1,'euclidean');
329             d1=d1.*X(2);
330             phi1=vpa(zeros(size(d1)));

331

332         for t=1:6
333             if t==2 || t==3 || t==4 || t==6
334                 switch RBF
335                     case(1)
336                         phi1(t)=sqrt(d1(t)^2+c^2);
337                     case(2)
338                         phi1(t)=log(d1(t)^2+c^2);
339                     case(3)
340                         phi1(t)=1/(sqrt(d1(t)^2+c^2));
341                     case(4)
342                         phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)^1.5;
343                     case(5)
344                         phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)+log(d1(t)^2+c^2);
345                 end

346             end
347         end

```

```

349 oo(:,v)=[phi1(1) phi1(2) phi1(3) phi1(4) phi1(5) phi1(6)];
351     end
352     end
353
354         oo(5,:)=[];
355         oo(1,:)=[];
356         oo(:,5)=[];
357         oo(:,1)=[];
358
359         A=[ cc1(1) cc2(1) oo(1,1) oo(2,1) oo(4,1);
360             cc1(3) cc2(3) oo(1,2) oo(2,2) oo(4,2);
361             cc1(4) cc2(4) oo(1,4) oo(2,4) oo(4,4);
362             0      0      cc1(1)  cc1(2)  cc1(4);
363             0      0      cc2(1)  cc2(2)  cc2(4)];
364
365         b=vpa([Zxk(1);
366               Zxk(2);
367               Zxk(3);
368               0;
369               0]);
370
371         x=A\b;
372
373         Zi(i,j)=[cc1(2) cc2(2) oo(1,3) oo(2,3) oo(4,3)]*x;
374
375     end
376 end
377 end
378 end
379
380 else if length(numphi)==4
381
382     oo=vpa(zeros(4,4));
383

```

```

385     if i==1 && j==1
386         Zxk=[Zr(i+1,j) Zr(i,j+1) Zr(i+1,j+1)]';
387         cc1=[c1(i,j) c1(i+1,j) c1(i,j+1) c1(i+1,j+1)]';
388         cc2=[c2(i,j) c2(i+1,j) c2(i,j+1) c2(i+1,j+1)]';

389     for v=1:4
390         d1=zeros(2,2); d1(v)=1;
391         [d1,L1] = bwdist(d1,'euclidean');
392         d1=d1.*X(2);
393         phi1=vpa(zeros(size(d1)));

394     for t=1:4
395         switch RBF
396             case(1)
397                 phi1(t)=sqrt(d1(t)^2+c^2);
398             case(2)
399                 phi1(t)=log(d1(t)^2+c^2);
400             case(3)
401                 phi1(t)=1/(sqrt(d1(t)^2+c^2));
402             case(4)
403                 phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)^1.5;
404             case(5)
405                 phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)+log(d1(t)^2+c^2);
406         end
407     end

408     oo(:,v)=[phi1(1,1) phi1(2,1) phi1(1,2) phi1(2,2)];
409     end

410     A=[ cc1(1) cc2(1) oo(2,2) oo(3,2) oo(4,2);
411         cc1(3) cc2(3) oo(2,3) oo(3,3) oo(4,3);
412         cc1(4) cc2(4) oo(2,4) oo(3,4) oo(4,4);
413         0      0      cc1(2)  cc1(3)  cc1(4);
414         0      0      cc2(2)  cc2(3)  cc2(4)];

```

```

419         b=vpa([Zxk(1);
                Zxk(2);
421         Zxk(3);
                0;
423         0]);

425         x=A\b;

427         Zi(i,j)=[cc1(2) cc2(2) oo(2,1) oo(3,1) oo(4,1)]*x;

429         else if i==1 && j==length(Zr(1,:))
                Zxk=[Zr(i,j-1) Zr(i+1,j-1) Zr(i+1,j)]';
431         cc1=[c1(i,j-1) c1(i+1,j-1) c1(i,j) c1(i+1,j)]';
                cc2=[c2(i,j-1) c2(i+1,j-1) c2(i,j) c2(i+1,j)]';
433

                for v=1:4
435                     d1=zeros(2,2); d1(v)=1;
                        [d1,L1] = bwdist(d1,'euclidean');
437                     d1=d1.*X(2);
                        phi1=vpa(zeros(size(d1)));
439

                for t=1:4
441                     switch RBF
                            case(1)
443                     phi1(t)=sqrt(d1(t)^2+c^2);
                            case(2)
445                     phi1(t)=log(d1(t)^2+c^2);
                            case(3)
447                     phi1(t)=1/(sqrt(d1(t)^2+c^2));
                            case(4)
449                     phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)^1.5;
                            case(5)
451                     phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)+log(d1(t)^2+c^2);
                        end
453         end

```

```

455 oo(:,v)=[phi1(1,1) phi1(2,1) phi1(1,2) phi1(2,2)];
      end
457
      A=[ cc1(1) cc2(1) oo(1,1) oo(2,1) oo(4,1);
459         cc1(3) cc2(3) oo(1,2) oo(2,2) oo(4,2);
         cc1(4) cc2(4) oo(1,4) oo(2,4) oo(4,4);
461         0      0      cc1(1)  cc1(2)  cc1(4);
         0      0      cc2(1)  cc2(2)  cc2(4)];
463
      b=vpa([Zxk(1);
465             Zxk(2);
             Zxk(3);
467             0;
             0]);
469
      x=A\b;
471
      Zi(i,j)=[cc1(2) cc2(2) oo(1,3) oo(2,3) oo(4,3)]*x;
473
      else if i==length(Zr(:,1)) && j==1
475         Zxk=[Zr(i-1,j) Zr(i-1,j+1) Zr(i,j+1)]';
         cc1=[c1(i-1,j) c1(i,j) c1(i-1,j+1) c1(i,j+1)]';
477         cc2=[c2(i-1,j) c2(i,j) c2(i-1,j+1) c2(i,j+1)]';

479         for v=1:4
             d1=zeros(2,2); d1(v)=1;
481             [d1,L1] = bwdist(d1,'euclidean');
             d1=d1.*X(2);
483             hi1=vpa(zeros(size(d1)));

485         for t=1:4
             switch RBF
487                 case(1)
                     phi1(t)=sqrt(d1(t)^2+c^2);

```

```

489         case (2)
           phi1(t)=log(d1(t)^2+c^2);
491         case (3)
           phi1(t)=1/(sqrt(d1(t)^2+c^2));
493         case (4)
           phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)^1.5;
495         case (5)
           phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)+log(d1(t)^2+c^2);
497         end
       end
499
500 oo(:,v)=[phi1(1,1) phi1(2,1) phi1(1,2) phi1(2,2)];
501     end
502
503     A=[cc1(1) cc2(1) oo(1,1) oo(3,1) oo(4,1);
504         cc1(3) cc2(3) oo(1,3) oo(3,3) oo(4,3);
505         cc1(4) cc2(4) oo(1,4) oo(3,4) oo(4,4);
506         0      0      cc1(1)  cc1(3)  cc1(4);
507         0      0      cc2(1)  cc2(3)  cc2(4)];
508
509     b=vpa([Zxk(1);
510           Zxk(2);
511           Zxk(3);
512           0;
513           0]);
514
515     x=A\b;
516
517     Zi(i,j)=[cc1(2) cc2(2) oo(1,2) oo(3,2) oo(4,2)]*x;
518
519     else if i==length(Zr(:,1)) && i==length(Zr(1,:))
520         Zxk=[Zr(i-1,j-1) Zr(i,j-1) Zr(i-1,j)]';
521         cc1=[c1(i-1,j-1) c1(i,j-1) c1(i-1,j)]';
522         cc2=[c2(i-1,j-1) c2(i,j-1) c2(i-1,j)]';
523

```



```

    for v=1:4
525         d1=zeros(2,2); d1(v)=1;
            [d1,L1] = bwdist(d1,'euclidean');
527         d1=d1.*X(2);
            phi1=vpa(zeros(size(d1)));
529
            for t=1:4
531                 switch RBF
                    case(1)
533                     phi1(t)=sqrt(d1(t)^2+c^2);
                    case(2)
535                     phi1(t)=log(d1(t)^2+c^2);
                    case(3)
537                     phi1(t)=1/(sqrt(d1(t)^2+c^2));
                    case(4)
539                     phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)^1.5;
                    case(5)
541                     phi1(t)=(d1(t)^2+c^2)+log(d1(t)^2+c^2);
                    end
543             end

545 oo(:,v)=[phi1(1,1) phi1(2,1) phi1(1,2) phi1(2,2)];
            end
547
            A=[ cc1(1) cc2(1) oo(1,1) oo(2,1) oo(3,1);
549              cc1(2) cc2(2) oo(1,2) oo(2,2) oo(3,2);
              cc1(3) cc2(3) oo(1,3) oo(2,3) oo(3,3);
551              0      0      cc1(1)  cc1(2)  cc1(3);
              0      0      cc2(1)  cc2(2)  cc2(3)];
553
            b=vpa([Zxk(1);
555                  Zxk(2);
                  Zxk(3);
557                  0;
                  0 ]);

```

```

559         x=A\b;
561
562         Zi(i,j)=[cc1(2) cc2(2) oo(1,4) oo(2,4) oo(3,4)]*x;
563         end
564         end
565         end
566         end
567         end
568         end
569         end
570     end
571 % clear m n k t u v w
572     end
573 end
574     clear i j
575
576 %calcolo del parametro c che minimizza la errore rms
577 [Zreal,R]=usgsdem('C:\Desktop\TESI\antartide.dem',fd);
578
579 err=Zi-Zreal;
580 err1=err(find(Zi~=0));
581 funerr=matlabFunction(rms(err1));
582 c=fminsearch(funerr,0.1);
583
584 %errore pesato su tutta la dem
585 Z1_globale=reshape(Zreal,1,[]);
586 res_globale=reshape(Zreal-(Zi+Zr),1,[]);
587 rmse_globale=rms(res_globale);
588 rmse_perc_globale=rms(res_globale./Z1_globale)*100; %[%]
589
590 %plottaggio risultati
591 Ztot=Zi+Zr;
592 figure()
593 subplot(1,2,2)

```

```
surf(X,Y,Ztot), axis tight
595 title('DEM□interpolata')
    xlabel('X')
597 ylabel('Y')
    ylabel('Z')
599 subplot(1,2,1)
    surf(X,Y,Zreal), axis tight
601 title('DEM□originale')
    xlabel('X')
603 ylabel('Y')
    ylabel('Z')
```


Bibliografia

- [1] Quadrivio.
- [2] Fernando J Aguilar, Francisco Aguera, Manuel A Aguilar, and Fernando Carvajal. Effects of terrain morphology, sampling density, and interpolation methods on grid dem accuracy. *Photogrammetric engineering and remote sensing*, 71(7):805, 2005.
- [3] Andrea Bagliani, Alessandro Mosconi, Daniele Marzorati, Antonio Cremonesi, Alessandro Ferretti, Davide Colombo, Fabrizio Novali, and Andrea Tamburini. Use of satellite radar data for surface deformation monitoring: A wrap-up after 10 years of experimentation. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 2010.
- [4] Patrick M Bartier and C Peter Keller. Multivariate interpolation to incorporate thematic surface data using inverse distance weighting (idw). *Computers & Geosciences*, 22(7):795–799, 1996.
- [5] Carlo Bonato, Federico Antonio Pancino, and Marco Tognon. Ottimizzazione distribuita per map-building in reti robotiche. Master’s thesis, Università degli studi di Padova, Via 8 Febbraio 1848 2, 35122, Padova, Italy, A.A. 2012/2013.
- [6] Peter A Burrough. Principles of geographical information systems for land resources assessment. 1986.
- [7] Edoardo Capello. Le lavorazioni industriali mediante laser di potenza. *Maggioli Editore, Bologna*, 2008.

- [8] Sheng Chen, CFN Cowan, and PM Grant. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 2(2):302–309, 1991.
- [9] Shimon Cohen and Nathan Intrator. Global optimization of rbf networks. *IEEE Trans Neural Networks (2000 submitted)*, 1996.
- [10] Alberto Crivellaro. Ricostruzione adattativa di dati sparsi mediante funzioni a simmetria radiale. 2011.
- [11] Peter A Cundall and Roger D Hart. Numerical modelling of discontinua. *Engineering computations*, 9(2):101–113, 1992.
- [12] Mark De Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, and Mark Overmars. *Computational geometry*. Springer, 2008.
- [13] Michael N DeMers. *GIS modeling in raster*. J. Wiley, 2002.
- [14] A. Errico. Kriging iterativo per l'interpolazione dei dati: applicazioni per la costruzione del dtm. Technical report, Università degli Studi di Napoli Parthenope, Via Ammiraglio Ferdinando Acton 38, 80133, Napoli, Italy, 2011.
- [15] American Society for Photogrammetry, Remote Sensing, et al. *Digital elevation model technologies and applications: The DEM users manual*. Asprs Publications, 2007.
- [16] Armin Gruen, Olaf Kuebler, and Peggy Agouris. *Automatic Extraction of Man-Made Objects from Aerial Space Images*. Springer, 1995.
- [17] Rolland L Hardy. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of geophysical research*, 76(8):1905–1915, 1971.
- [18] Barry F Kavanagh and SJ Glenn Bird. *Surveying*. Prentice Hall, 1992.
- [19] DG Kbiob. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand. *Jnl. C'hem. Met. and Min. Soc. S. Afr*, 1951.

- [20] Nina Siu-Ngan Lam. Spatial interpolation methods: a review. *The American Cartographer*, 10(2):129–150, 1983.
- [21] Damiana Lazzaro and Laura B Montefusco. Radial basis functions for the multivariate interpolation of large scattered data sets. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 140(1):521–536, 2002.
- [22] Jay Lee, Peter K Snyder, and Peter F Fisher. Modeling the effect of data errors on feature extraction from digital elevation models. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 58(10):1461–1467, 1992.
- [23] Zhilin Li, Qing Zhu, and Chris Gold. *Digital terrain modeling: principles and methodology*. CRC press, 2010.
- [24] Trimble Navigation Limited. *Real Time Kinematic Surveying, training guide*, 2003.
- [25] Skip Links. Geographic names information system.
- [26] H Liu, KC Jezek, B Li, and Z Zhao. Radarsat antarctic mapping project digital elevation model, 2001.
- [27] Jian-cheng LUO, Cheng-hu ZHOU, and Yee LEUNG. A knowledge-integrated rbf network for remote sensing classification. In *Paper presented at the 22nd Asian Conference on Remote Sensing*, volume 5, page 9, 2001.
- [28] Georges Matheron. *The theory of regionalized variables and its applications*, volume 5. Ecole nationale supérieure des mines de Paris, 1971.
- [29] Helena Mitášová and Lubos Mitáš. Interpolation by regularized spline with tension: I. theory and implementation. *Mathematical geology*, 25(6):641–655, 1993.
- [30] Veronica Piccialli. Metodi per la soluzioni di problemi non vincolati che non fanno uso di derivate.

- [31] Shmuel Rippa. An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 11(2-3):193–210, 1999.
- [32] Donald Shepard. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference*, pages 517–524. ACM, 1968.
- [33] SICK AG Waldkirch, Nimburger Straße 11, 79276 Reute, Germany. *LD-MRS Laser scanner, user manual*, 2009.
- [34] Jason Su and Edward Bork. Influence of vegetation, slope and lidar sampling angle on dem accuracy. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 72(11):1265–1274, 2006.
- [35] Heitor Manuel Timóteo. Validazione in angola del modello digitale del terreno globale gtopo030.
- [36] Victor JD Tsai. Delaunay triangulations in tin creation: an overview and a linear-time algorithm. *International Journal of Geographical Information Science*, 7(6):501–524, 1993.
- [37] Laura Ursella, Pierre-Marie Poulain, and Richard P Signell. Surface drifter derived circulation in the northern and middle adriatic sea: Response to wind regime and season. *Journal of geophysical research*, 111(C3):C03S04, 2006.

