

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria delle Telecomunicazioni



**OTTIMIZZAZIONE DEL FILTRO DI
POST-DETECTION NELLA SINCRONIZZAZIONE
DELL'ISTANTE DI CAMPIONAMENTO BASATO
SU RIVELAZIONE A QUADRATORE IN
RICEVITORI NUMERICI**

Relatore: Prof. Arnaldo SPALVIERI

**Tesi di Laurea di:
Federica Edvige SCARDONI, matricola 782960**

Anno Accademico 2012-2013

Sommario

Il recupero del sincronismo dell'istante di campionamento è un aspetto fondamentale nello studio e nella progettazione dei sistemi di comunicazione digitali, ampiamente trattato in letteratura. In questo ambito un ruolo determinante è giocato dal rumore di fase inevitabilmente presente nel sistema, il quale deve essere stimato e compensato dall'algoritmo per il recupero del sincronismo di simbolo.

Lo scopo di questa tesi consiste nell'analizzare le componenti di rumore di fase tempo-variante a valle del TED del sincronizzatore e, in base ad esse, progettare il filtro di *post-detection* opportuno da implementare nel sincronizzatore stesso.

Particolare attenzione verrà posta al termine di rumore noto come *self-noise*, in quanto in letteratura è assente una trattazione completa a tal riguardo. Verrà progettato il post-filtro ottimo e, a partire da esso, saranno proposte soluzioni sub-ottime meno onerose dal punto di vista realizzativo.

L'analisi svolta verrà validata tramite confronto con i risultati ottenuti dalle simulazioni eseguite, prendendo in esame i sincronizzatori *feedforward* di Oerder e Meyr e di Serpedin, così come quello retroazionato di Gardner.

Indice

Sommario	I
Elenco delle figure	V
Elenco delle tabelle	IX
Acronimi	X
Introduzione	1
1 Recupero del sincronismo di simbolo	5
1.1 Sincronizzatori di simbolo in ricevitori numerici	5
1.1.1 Classificazione dei sincronizzatori	7
1.1.2 Sincronizzatore di Oerder e Meyr	9
1.1.3 Sincronizzatore di Gardner	10
1.1.4 Sincronizzatore di Serpedin	11
1.2 Rumore dipendente dai dati: <i>self-noise</i>	12
1.3 Pre-filtro ottimizzato	13
2 Analisi del <i>self-noise</i> nel sincronizzatore di simbolo di Oerder & Meyr	16
2.1 Scenario e modello	16
2.1.1 Sincronizzante	22
2.2 Densità spettrale di potenza ciclostazionaria del rumore di fase	23
2.2.1 Densità spettrale di potenza media del rumore di fase .	26
2.3 Approssimazione della DSP del rumore di fase	28
2.3.1 Approssimazione del contributo $N \times N$	28

2.3.2	Approssimazione del contributo $S \times N$	29
2.3.3	Approssimazione del contributo $S \times S$	31
3	Progettazione del post-filtro nel sincronizzatore di simbolo di Oerder & Meyr	35
3.1	Rumore di fase tempo-variante	35
3.2	Post-filtro ottimo $H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})$	37
3.2.1	Valutazioni su post-filtro ottimo e sub-ottimo	41
3.3	Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile	42
3.3.1	Ottimizzazione tramite uguaglianza tra bande di rumore	43
3.3.2	Ottimizzazione tramite ricerca empirica	44
3.3.3	Effetti dell'ottimizzazione	46
4	Altri sincronizzatori dell'istante di campionamento	52
4.1	Sincronizzatore di Serpedin	52
4.2	Sincronizzatore di Gardner	54
4.2.1	Autocorrelazione e densità spettrale di potenza del rumore di fase	55
4.2.2	Post-filtro	58
5	Simulazioni e risultati	64
5.1	Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin	64
5.1.1	Densità spettrale di potenza del rumore di fase	64
5.1.2	Prestazioni	66
5.2	Sincronizzatore di Gardner	75
5.2.1	Densità spettrale di potenza del rumore di fase	75
5.2.2	Prestazioni in presenza di rumore di fase tempo-variante	78
6	Conclusioni e possibili sviluppi futuri	80
A	Sincronizzante nel sincronizzatore di Oerder e Meyr	82
B	Autocorrelazione e densità spettrale di potenza del rumore di fase nel sincronizzatore di Oerder e Meyr	85
B.1	Definizioni utili	85
B.2	Autocorrelazioni e cross-correlazioni	87

B.3	Autocorrelazione $R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon)$	88
B.4	Altre autocorrelazioni e cross-correlazioni $R_{z_i z_j}(mT; \epsilon)$	93
B.5	Approssimazione del contributo SxS	95
C	Post-filtro ottimo per il sincronizzatore di Oerder e Meyr	98
D	Autocorrelazione e densità spettrale di potenza del rumore di fase SxS nel sincronizzatore di Gardner	100
D.1	Autocorrelazione e densità spettrale di potenza	100
D.2	Approssimazione della densità spettrale di potenza SxS	103
E	Post-filtro ottimo per il sincronizzatore di Gardner	104
	Bibliografia	107

Elenco delle figure

1.1	Diagramma ad occhio a valle del filtro in ricezione. Cascata di filtri in trasmissione e ricezione del tipo coseno rialzato, con fattore di roll-off minimo.	6
1.2	Configurazione non retroazionata di stima e correzione.	8
1.3	Configurazione retroazionata di stima e correzione.	9
1.4	Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di O&M.	10
1.5	Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di Gardner.	11
1.6	Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di Serpedin.	11
1.7	Risposta in frequenza del filtro in trasmissione $G(f)$, radice di coseno rialzato con roll-off α pari a 0.25, e del pre-filtro ottimizzato $P(f)$	15
2.1	Schema a blocchi del sistema di comunicazione studiato e suo modello equivalente.	17
2.2	Schema a blocchi del TED costruito per il modello equivalente.	19
2.3	Rappresentazione vettoriale.	21
2.4	Schema a blocchi del TED e dell'estrazione del rumore di fase nel modello equivalente.	22
2.5	Densità spettrale di potenza del <i>self-noise</i> per diversi valori di ϵ ; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.	25
2.6	Densità spettrale di potenza del <i>self-noise</i> mediata su ϵ ; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtri MF e PO.	27
2.7	Densità spettrale di potenza media e sua approssimazione per il contributo N_xN ; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e SNR = 0 dB.	29

2.8	Densità spettrale di potenza al variare di ϵ e media per il contributo SxN e relativa approssimazione; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e SNR = 0 dB.	30
2.9	Varianza σ_{ψ}^2 in funzione del valore di SNR: contributi NxN, SxN e SxS.	31
2.10	Densità spettrale di potenza media e sua approssimazione per il contributo SxS; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtri MF e PO.	32
2.11	Densità spettrale di potenza media e sua approssimazione per il contributo SxS, per diversi valori di roll-off α ; 4 – QAM e pre-filtro MF.	33
2.12	Valore di β_{SxS} al variare del roll-off α ; {4, 256} – QAM e pre-filtri MF e PO.	34
3.1	Spettro Lorentziano e sua approssimazione come $S_{\theta}(e^{j2\pi fT})$, con γ^2 pari a $4 \cdot 10^{-6}$	37
3.2	Risposta in frequenza del post-filtro ottimo, realizzato per SNR = {20,50} dB; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.	39
3.3	Confronto tra post-filtro ottimo con pre-filtro MF e pre-filtro PO, realizzati per SNR = {20,50} dB; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	40
3.4	Schema a blocchi del filtraggio a singola media mobile implementato in modo ricorsivo.	43
3.5	Ottimizzazione empirica del post-filtro a doppia media mobile con pre-filtri MF e PO; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e SNR = 50 dB.	45
3.6	Esempio di ottimizzazione dei post-filtri a singola e doppia MA, tramite le due tecniche discusse; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.	46
4.1	Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di Serpedin.	53
4.2	Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di Gardner.	54
4.3	Densità spettrale di potenza del rumore di fase SxS, per diversi valori di roll-off α ; 4 – QAM e pre-filtro MF.	57

4.4	Valore di $\beta_{S \times S, GA}$ al variare del roll-off α ; $\{4, 256\}$ – QAM e pre-filtro MF.	58
4.5	Schema a blocchi dell’implementazione di $L_{PO}(f)$ nel sincronizzatore di Gardner.	60
4.6	Schema a blocchi dell’implementazione di $L_{MF}(f)$ nel sincronizzatore di Gardner.	62
4.7	Post-filtri ottimi per pre-filtri MF e PO, per diversi SNR; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	63
5.1	Densità spettrale di potenza del <i>self-noise</i> $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)$ per il sincronizzatore di Oerder e Meyr, per diversi valori del ritardo ϵ ; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.	65
5.2	Densità spettrale di potenza del <i>self-noise</i> media $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT})$ per il sincronizzatore di Oerder e Meyr; $\{4, 256\}$ – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtri MF e PO.	66
5.3	Prestazioni dei sincronizzatori di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-invariante, pre-filtro MF, post-filtro a singola media mobile di varie lunghezze temporali D ; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	67
5.4	Prestazioni dei sincronizzatore di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-invariante, pre-filtro PO, post-filtro a singola media mobile di varie lunghezze temporali D ; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	69
5.5	Prestazioni dei sincronizzatori di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-invariante, pre-filtri MF e PO, post-filtro a doppia media mobile, ciascuna di lunghezza temporale D ; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	70
5.6	Prestazioni dei sincronizzatori di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-variante, pre-filtro MF, post-filtro ottimo e post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	71

5.7	Prestazioni dei sincronizzatori di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-variante, pre-filtro PO, post-filtro ottimo e post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	72
5.8	Prestazioni del sincronizzatore di O&M con rumore di fase tempo-variante, pre-filtri MF e PO, post-filtro ottimo e post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati empiricamente; 256 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	74
5.9	Densità spettrale di potenza del <i>self-noise</i> $S_{\psi, S \times S, GA}(e^{j2\pi fT})$ per il sincronizzatore di Gardner, per diversi valori di roll-off α ; 4 – QAM e pre-filtro MF.	76
5.10	Densità spettrale di potenza $S_{\psi, GA}(e^{j2\pi fT})$ per il sincronizzatore di Gardner, con pre-filtro MF; {4, 256} – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	76
5.11	Densità spettrale di potenza $S_{\psi, GA}(e^{j2\pi fT})$ per il sincronizzatore di Gardner, con pre-filtri MF e PO, per diversi valori di SNR; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	77
5.12	Prestazioni del sincronizzatore di Gardner con rumore di fase tempo-variante, pre-filtri MF e PO e post-filtri ottimi; {4, 256} – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$	79

Elenco delle tabelle

3.1	Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dal post-filtro a doppia media mobile ottimizzato; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.	47
3.2	Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dal post-filtro a doppia media mobile ottimizzato; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro PO.	48
3.3	Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dal post-filtro a singola media mobile ottimizzato; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.	48
3.4	Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dal post-filtro a singola media mobile ottimizzato; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro PO.	49
3.5	Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dai post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati; 256 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.	50
3.6	Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dai post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati; 256 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro PO.	51

Acronimi

ADC	Analog to Digital Converter
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BPSK	Binary Phase Shift Keying
DAC	Digital to Analog Converter
DSP	Densità Spettrale di Potenza
FIR	Finite Impulse Response
ISI	Interferenza Inter-Simbolica
MA	Moving Average
MF	Matched Filter
MSE	Mean Square Error
OeM	Order e Meyr
OSF	Over-Sampling Factor
PLL	Phase Lock Loop
PO	Pre-filtro Ottimizzato
PSK	Phase Shift Keying
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
SNR	Signal to Noise Ratio
TED	Timing Error Detector

Introduzione

Nei sistemi di comunicazione digitali è fondamentale che il ricevitore recuperi nel modo migliore possibile il sincronismo di simbolo, affinché la conversione analogico-digitale avvenga negli istanti ottimali e le prestazioni dell'intero sistema non subiscano degradazioni. In letteratura sono stati proposti molteplici algoritmi per il recupero della sincronizzazione, ognuno con peculiarità specifiche. In questa tesi saranno assunti come riferimento due tra i principali schemi esistenti, rispetto ai quali si concentrerà il lavoro effettuato: il sincronizzatore proposto da Oerder e Meyr [1] per il caso *feedforward* e quello di Gardner [2] per la variante *feedback*; anche l'algoritmo di Serpedin [3] verrà analizzato, poiché si tratta di un'interessante combinazione dei due precedenti.

Nei sistemi di comunicazione è inevitabile la presenza di rumore di fase, tipicamente tempo-variante, noto come *timing jitter*. Esso è dovuto a più fattori, tra cui le fasi degli oscillatori locali in trasmissione e ricezione ed il ritardo introdotto dal canale. In questa tesi si studieranno le differenti componenti che compongono tale rumore poiché, effettuata l'analisi, sarà possibile progettare il filtro di *post-detection* del sincronizzatore.

Stato dell'arte e scopo della tesi

Il primo scopo di questo lavoro consiste, quindi, nel calcolare la densità spettrale di potenza del rumore di fase a valle del TED del sincronizzatore, ponendo particolare attenzione al termine noto come *self-noise*. Infatti un'analisi completa di tale componente di rumore di fase è assente in letteratura, perlomeno per quanto riguarda il contesto in cui questo lavoro si colloca. Si ritiene opportuno riassumere brevemente quanto è presente in letteratura sull'argomento, evidenziando di volta in volta i motivi per i quali si renderà

necessario lo studio aggiuntivo realizzato in questa tesi.

Per quanto concerne i sincronizzatori *feedforward* un'ampia ed esaustiva trattazione può essere trovata in [4], in cui tuttavia viene studiato il solo caso analogico e, di conseguenza, la condizione di assenza di *jitter* viene raggiunta tramite uno *zero-crossing detector* (ZCD). In questa tesi, però, si considerano ricevitori digitali, pertanto l'analisi effettuata in [4] non è adeguata.

Oerder e Meyr, invece, proponendo il loro schema di sincronizzazione digitale in [1], affermano che, ai fini della valutazione della varianza dell'errore di fase, non è necessario calcolare la densità spettrale di potenza del *self-noise* poiché essa è approssimabile con il suo valore nullo nell'origine, purché si utilizzi un post-filtro a media mobile sufficientemente lungo nel tempo. In questa tesi, tuttavia, si desidera rimuovere il vincolo di post-filtro con durata temporale sufficientemente elevata, poiché l'obiettivo del lavoro consiste proprio nella progettazione del filtro di *post-detection* opportuno, senza imposizione di vincoli a priori. Infatti, in presenza di rumore di fase tempo-variante, si rende necessario allargare la banda di transizione del post-filtro, riducendo quindi la sua durata temporale; appare evidente, pertanto, come la scelta di Oerder e Meyr non sia adottabile in questo caso.

Serpedin in [3], a sua volta, per il calcolo della varianza del rumore di fase definisce uno stimatore tale da permettergli di evitare l'analisi della densità spettrale di potenza del *self-noise*, per motivi analoghi a quelli ipotizzati da Oerder e Meyr. Infine, in [5], Serpedin non riporta la densità spettrale di potenza, bensì calcola direttamente la varianza dell'errore di fase avendo utilizzato un post-filtro a media mobile.

Anche per quanto riguarda i sincronizzatori *feedback*, in letteratura si trovano trattazioni volte alla scrittura della varianza dell'errore di fase in forma chiusa, per esempio in [6], ma non risultano adeguate per lo scopo di questa tesi, in quanto non caratterizzano completamente il termine di *self-noise* ed impongono vincoli sulla tipologia di post-filtro.

Lo scopo ultimo della tesi, come anticipato, consiste proprio nello studio del filtro di *post-detection* da implementare nel sincronizzatore di simbolo: esso verrà progettato sulla base della densità spettrale di potenza del rumore di fase a valle del TED ed in ingresso al filtro stesso.

Si calcolerà, dapprima, il post-filtro ottimo seguendo la teoria sviluppata

da Wiener sulla predizione lineare; tale filtro, come si mostrerà, garantisce le prestazioni migliori possibili, poiché minimizza il valore di MSE a valle del sincronizzatore di simbolo. Si procederà, quindi, con lo studio di soluzioni sub-ottime che possano essere implementate al posto del filtro di *post-detection* ottimo, tipicamente filtri a singola e doppia media mobile. Infatti, per quanto il post-filtro ottimo offra le prestazioni migliori, esso risulta più complesso da un punto di vista realizzativo rispetto ai filtri sub-ottimi adottati comunemente in letteratura. Infine, sfruttando anche la conoscenza acquisita circa il post-filtro ottimo, si ottimizzeranno le soluzioni sub-ottime con tecniche differenti.

Contributo della tesi

L'analisi effettuata circa la densità spettrale di potenza del rumore di fase permetterà di quantificare il *floor* che la varianza del rumore di fase esibisce ad alto SNR, indipendentemente dal post-filtro utilizzato.

Il confronto tra le prestazioni ottenute utilizzando il filtro di *post-detection* ottimo e quelle a valle di post-filtri sub-ottimi offrirà la possibilità di valutare di volta in volta come soddisfare il compromesso tra complessità realizzativa e qualità della sincronizzazione.

La possibilità di tracciare la varianza del rumore di fase a valle del post-filtro ottimo permetterà, altresì, di valutare la bontà e l'efficacia delle ottimizzazioni introdotte sulle varie soluzioni sub-ottime possibili, tanto quelle proposte in questa tesi, quanto quelle già presenti ed adottate in letteratura.

Struttura della tesi

Nel capitolo 1 si spiegherà il contesto in cui questo lavoro di tesi si inserisce, offrendo una breve introduzione sul recupero del sincronismo di simbolo ed approfondendo la descrizione degli algoritmi che verranno analizzati, ossia quelli di Oerder e Meyr, di Gardner e di Serpedin. Si porrà quindi l'accento sul contributo di rumore di fase che è al centro di questo lavoro: il *self-noise*. Si presenterà poi la possibilità di eliminare, o quantomeno attenuare, tale componente di rumore di fase utilizzando un opportuno pre-filtro ottimizzato in sostituzione del classico filtro adattato.

Il capitolo 2 sarà totalmente incentrato sull'analisi del *self-noise* e del suo impatto nel sincronizzatore di Oerder e Meyr: verrà mostrato il modello costruito per effettuare l'analisi e saranno ricavate le espressioni di densità spettrale di potenza del rumore di fase ciclostazionaria e mediata. Verranno introdotte, inoltre, utili approssimazioni di tali spettri, le quali saranno adottate nel proseguo della tesi.

Nel capitolo 3 si aggiungerà la tempo-varianza sul rumore di fase considerato e si procederà, quindi, con la progettazione del filtro di *post-detection* per il sincronizzatore di Oerder e Meyr. Come anticipato, sarà ricavato il post-filtro ottimo e saranno proposte soluzioni sub-ottime, ottimizzate tramite due differenti tecniche.

Il capitolo 4, invece, sposterà l'attenzione su altri schemi di sincronizzazione: gli algoritmi di Serpedin e di Gardner. In particolar modo il capitolo verterà su quest'ultimo, per il quale si effettuerà l'analisi della densità spettrale di potenza del rumore di fase presente a valle del TED e, analogamente a quanto effettuato per il caso di Oerder e Meyr, verrà progettato il filtro di *post-detection* ottimo.

Nel capitolo 5 verranno mostrati e commentati i risultati ottenuti, prendendo in considerazione entrambi i pre-filtri studiati (adattato ed ottimizzato) e tutti i vari post-filtri costruiti (ottimi e sub-ottimi), tanto per i sincronizzatori *feedforward* di Oerder e Meyr e di Serpedin, quanto per quello *feedback* di Gardner. Si validerà l'analisi effettuata comparando i risultati teorici ottenuti da essa con quelli ricavati dalle simulazioni eseguite.

Infine, nel capitolo 6, si riporteranno le conclusioni a riguardo del lavoro svolto ed i possibili sviluppi futuri.

Capitolo 1

Recupero del sincronismo di simbolo

In questo capitolo viene introdotto il concetto di sincronizzazione dell'istante di campionamento e sono presentate brevemente alcune delle tecniche principali presenti in letteratura. Si pone particolare attenzione all'impatto che il rumore di fase dipendente dai dati ha sul recupero del sincronismo di simbolo. Si mostra, inoltre, la possibilità di eliminare, o quantomeno attenuare, tale componente di rumore grazie all'utilizzo di un pre-filtro opportuno.

1.1 Sincronizzatori di simbolo in ricevitori numerici

In un sistema di comunicazione digitale il recupero del sincronismo di simbolo è di fondamentale importanza in quanto una cattiva sincronizzazione impatta negativamente sulle prestazioni del sistema stesso. Altrettanto fondamentale e ad esso collegato è il recupero della frequenza portante, tuttavia in questa tesi si suppone di lavorare con il sistema equivalente in banda base, pertanto non si affronta il problema del sincronismo di portante (*carrier recovery*).

La frequenza dell'oscillatore locale utilizzato dal convertitore digitale - analogico in trasmissione si suppone nota al ricevitore, il quale quindi utilizza un proprio oscillatore locale alla stessa frequenza per effettuare la conversione

1.1. Sincronizzatori di simbolo in ricevitori numerici

analogico-digitale. Supponendo di utilizzare filtri in trasmissione e ricezione che rispettino il criterio di Nyquist per avere interferenza inter-simbolica (ISI) nulla, è necessario conoscere la fase di oscillazione opportuna affinché il convertitore in ricezione possa campionare il segnale negli istanti ottimali, ossia quelli in corrispondenza della massima apertura del diagramma ad occhio a valle del filtro in ricezione.

L'esempio in Fig.1.1 mostra il campionamento ottimale in verde (fase t_0) ed uno con fase errata in rosso (fase t_1). Appare evidente come la conoscenza della sola frequenza di oscillazione non sia sufficiente, infatti entrambi i casi hanno frequenza corretta $1/T$. Inoltre si può osservare come il campionamento con fase errata introduca ISI.

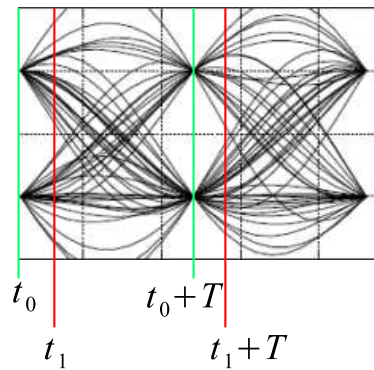


Figura 1.1: Diagramma ad occhio a valle del filtro in ricezione.

Cascata di filtri in trasmissione e ricezione del tipo coseno rialzato, con fattore di roll-off minimo.

Recuperare il sincronismo di simbolo significa, quindi, estrapolare dal segnale ricevuto la fase ottimale per effettuare la conversione analogico-digitale. Di seguito si chiarisce meglio il procedimento.

Si consideri il segnale ricevuto $r(t)$ campionato con opportuno fattore di sovracampionamento OSF rispetto al tempo di simbolo T e con fase non ottimale:

$$r\left(k\frac{T}{\text{OSF}}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i v\left(k\frac{T}{\text{OSF}} - iT - \epsilon\right) + w\left(k\frac{T}{\text{OSF}}\right), \quad (1.1)$$

1.1. Sincronizzatori di simbolo in ricevitori numerici

dove $\{c_i\}$ sono i simboli di una costellazione complessa M-QAM o M-PSK, $w(t)$ è il rumore additivo introdotto dal canale (AWGN) e $v(t)$ è la cascata di filtro formatore utilizzato dal trasmettitore e filtro adattato in ricezione; si supponga che $v(t)$ sia a coseno rialzato, soddisfacendo quindi il criterio di Nyquist, e che abbia valore unitario in corrispondenza di $t = 0$. Il ritardo ϵ , non noto al ricevitore, è ciò che si desidera stimare per poter poi ricampionare correttamente. Esso è dovuto tipicamente alla fase dell'oscillatore locale utilizzato in trasmissione, al ritardo introdotto dal canale ed alla fase dell'oscillatore locale in ricezione; per il momento si suppone ϵ costante nel tempo.

Recuperare il sincronismo di simbolo consiste, quindi, in due passi:

- stimare il ritardo ϵ a partire dal segnale ricevuto e campionato con fase non ottimale (*stima*)
- ricampionare negli istanti ottimali il segnale stesso (*correzione*).

Se la stima di ϵ è corretta, si ottiene quindi un segnale ricampionato in corrispondenza della massima apertura del diagramma ad occhio, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} r(kT + \epsilon) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i v(kT + \epsilon - iT - \epsilon) + w(kT + \epsilon) \\ &= c_k + w(kT + \epsilon), \end{aligned} \tag{1.2}$$

avendo imposto OSF pari a 1 per semplicità. Si nota come, in assenza del rumore di canale $w(t)$, si recuperi correttamente il simbolo trasmesso, privo di ISI.

1.1.1 Classificazione dei sincronizzatori

In letteratura sono presenti diverse architetture per il recupero del sincronismo di simbolo in sistemi di comunicazione digitali, ognuna con i propri vantaggi e svantaggi. Di seguito si riporta una breve classificazione degli schemi possibili, senza dettagli eccessivi, al solo fine di inquadrare le caratteristiche principali dei vari sincronizzatori. Una spiegazione più esaustiva

1.1. Sincronizzatori di simbolo in ricevitori numerici

verrà riportata nei paragrafi seguenti per i sincronizzatori utilizzati in questa tesi: Oerder e Meyr, Serpedin e Gardner.

Una prima suddivisione può essere introdotta tra gli algoritmi che utilizzano o meno simboli pilota o preamboli inseriti appositamente nella trasmissione, al fine di agevolare il recupero di sincronismo. Un'altra importante distinzione va fatta tra architetture retroazionate o meno, rispettivamente *feedback* e *feedforward*.

Gli algoritmi che utilizzano simboli pilota o preamboli (*data-aided*) hanno come punto di forza la possibilità di raggiungere prestazioni migliori, come intuibile, ma devono pagare il costo di una riduzione della capacità, dovuta alla trasmissione di tali simboli, privi di contenuto informativo ai fini della trasmissione dei dati.

Questi algoritmi possono essere utilizzati sia con un'architettura retroazionata, sia con una non in retroazione. Tipicamente tuttavia, grazie ai loro preamboli, sono molto utili per la fase di aggancio nelle configurazioni retroazionate.

Tutti gli schemi che verranno analizzati in questa tesi non utilizzano simboli pilota.

Una rappresentazione schematica di una architettura non retroazionata è riportata in Fig.1.2: un oscillatore locale (OL) regola il campionamento del segnale ricevuto, a valle del quale viene implementata la stima di ϵ e la successiva correzione.

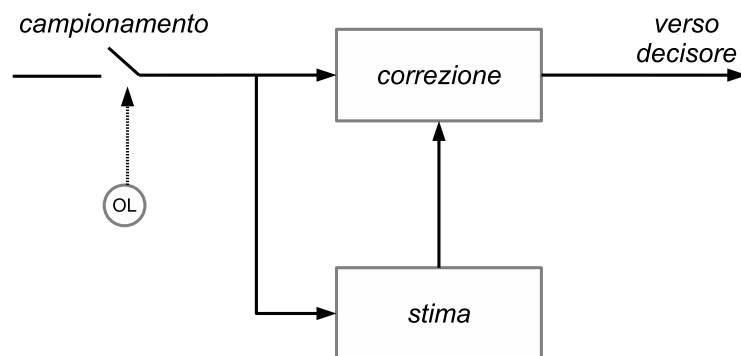


Figura 1.2: Configurazione non retroazionata di stima e correzione.

1.1. Sincronizzatori di simbolo in ricevitori numerici

Nel caso di retroazione l'architettura di base appare, invece, come quella riportata in Fig.1.3: la stima di ϵ viene effettuata dal *Timing Error Detector* (TED) e dal successivo filtro d'anello, i quali ricevono in ingresso i dati precedentemente corretti, a differenza del caso non retroazionato; si ha poi la fase di correzione.

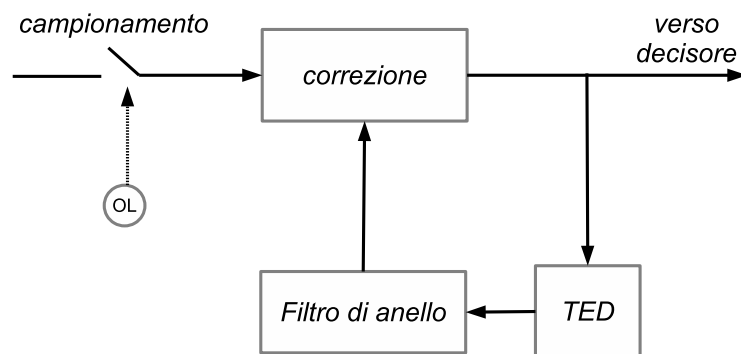


Figura 1.3: Configurazione retroazionata di stima e correzione.

Lo svantaggio di architetture non retroazionate consiste nel dovere lavorare con fattore di sovracampionamento OSF tipicamente maggiore rispetto agli schemi retroazionati, allo scopo di soddisfare correttamente il teorema del campionamento senza introduzione di *aliasing*; frequenze più elevate di campionamento sono, tuttavia, computazionalmente più costose. Le architetture retroazionate, invece, hanno problemi relativi al ritardo nell'anello, il quale va gestito in modo accurato.

1.1.2 Sincronizzatore di Oerder e Meyr

Nel 1988 Oerder e Meyr (O&M) proposero uno schema non retroazionato per il recupero del sincronismo di simbolo [1], il cui schema a blocchi è riportato in Fig.1.4.

Il tempo di simbolo T è supposto noto al ricevitore. Per la stima di ϵ l'algoritmo di Oerder e Meyr prevede che il segnale ricevuto $r(t)$ venga campionato a frequenza pari ad almeno quattro volte il tempo di simbolo; per semplicità nel seguito si assume intervallo di campionamento T_s pari a $T/4$. L'idea alla base dell'algoritmo è analoga a quella di Franks e Bubrouski [7] per il caso

1.1. Sincronizzatori di simbolo in ricevitori numerici

tempo-continuo: sfruttare la ciclostazionarietà del segnale ricevuto (opportunamente filtrato dal filtro in ricezione), elevando al quadrato i campioni del segnale e procurandosi in tal modo una sequenza il cui valor medio contiene i campioni della sinusoida sincronizzante. Tale sinusoida è alla frequenza desiderata e l'informazione sull'istante di sincronismo è contenuta nella sua fase. Pertanto è necessario estrapolare la fase della sincronizzante demodulando il quadrato con una sinusoida complessa a frequenza $-1/T$ e filtrando passa-basso. Ottenuta la stima $\hat{\epsilon}$, la si utilizza per interpolare il segnale in uscita dal filtro in ricezione, precedentemente ritardato in modo opportuno per tenere conto dei ritardi eventualmente introdotti dal filtraggio passa-basso.

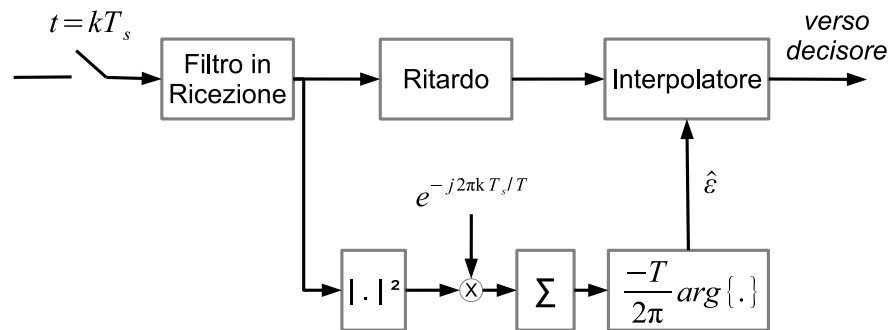


Figura 1.4: Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di O&M.

1.1.3 Sincronizzatore di Gardner

Nel 1986 Gardner propose invece un'architettura retroazionata [2], il cui schema a blocchi è riportato in Fig.1.5.

A differenza dell'algoritmo di Oerder e Meyr, il sincronizzatore di Gardner lavora con intervallo di campionamento T_s pari a $T/2$. L'idea alla base di questo algoritmo consiste nell'individuazione del massimo della potenza ciclostazionaria in ingresso al Timing Error Detector (TED) cercando lo zero della sua derivata; tale derivata viene approssimata come differenza tra due campioni a passo di simbolo T . A valle del TED è quindi possibile ottenere la fase desiderata tramite opportuno filtraggio passa-basso.

1.1. Sincronizzatori di simbolo in ricevitori numerici

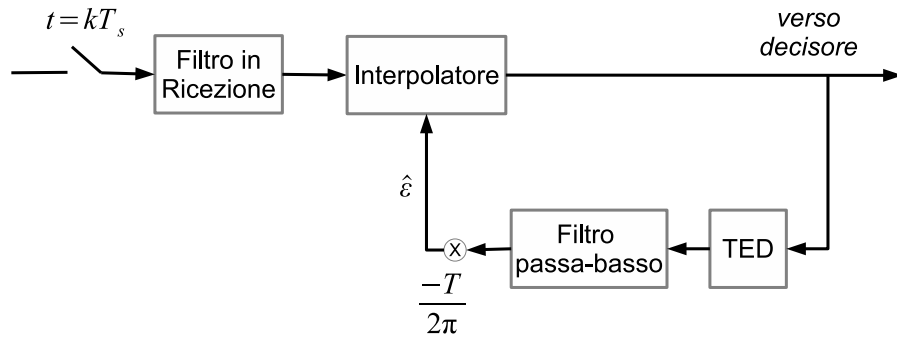


Figura 1.5: Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di Gardner.

1.1.4 Sincronizzatore di Serpedin

Nel 2002 Lee propose uno schema non retroazionato il quale richiedeva solo due campioni per tempo di simbolo [8]; altri schemi *feedforward* a $T/2$ erano già stati proposti, ma erano computazionalmente più onerosi. Nel 2003 Serpedin [3], partendo dall'idea di Lee, propose una variante che permettesse di raggiungere una stima asintoticamente non polarizzata ed un minore MSE, sempre mantenendo uno schema non retroazionato ed un tempo di campionamento T_s pari a $T/2$.

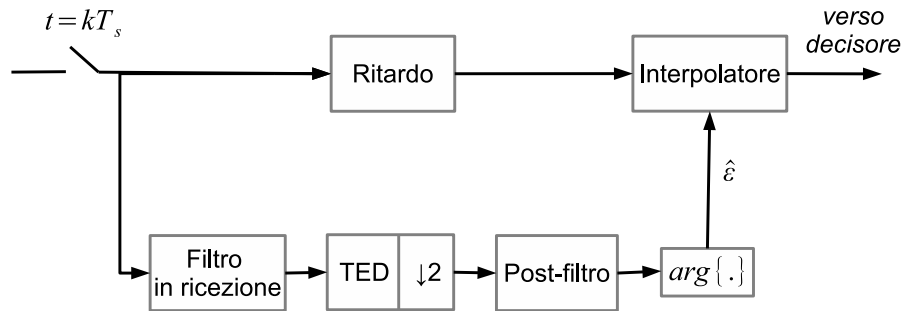


Figura 1.6: Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di Serpedin.

L'idea alla base dell'algoritmo di Serpedin è quella di approssimare l'uscita del classico quadratore di Oerder e Meyr (non retroazionato, a $T/4$) tramite due TED in parallelo, ognuno dei quali operante a $T/2$. Uno dei due TED coincide esattamente con quello di Oerder e Meyr ma lavora a $T/2$ e, pertanto, fornisce solo due dei quattro campioni per tempo di simbolo necessari per approssimare il classico quadratore. Gli altri due campioni sono estratti

1.2. Rumore dipendente dai dati: *self-noise*

invece dal secondo TED, analogo a quello di Gardner; esso fornisce un'approssimazione sufficientemente accurata dei campioni desiderati.

Per maggior chiarezza si riporta di seguito un breve esempio. Si chiamino y_k i campioni in ingresso al doppio TED dello schema di Serpedin

$$y_{\frac{k}{2}} = y(kT_s) = y\left(k\frac{T}{2}\right). \quad (1.3)$$

Il classico quadratore di Oerder e Meyr fornirebbe in uscita i seguenti quattro campioni in un tempo di simbolo T

$$y_0^2 \quad y_{\frac{1}{4}}^2 \quad y_{\frac{1}{2}}^2 \quad y_{\frac{3}{4}}^2. \quad (1.4)$$

Il primo TED dello schema di Serpedin fornisce i seguenti due campioni in un tempo di simbolo

$$y_0^2 \quad y_{\frac{1}{2}}^2 \quad (1.5)$$

che sono esattamente il primo ed il terzo di (1.4). Il secondo TED, invece, fornisce in uscita

$$\Re\{y_0 y_{\frac{1}{2}}^*\} \quad \Re\{y_{\frac{1}{2}}^* y_1\} \quad (1.6)$$

che risultano essere una sufficientemente buona approssimazione del secondo e del quarto di (1.4), come dimostrato in [3] e validato dalle prestazioni ottenute.

1.2 Rumore dipendente dai dati: *self-noise*

I sincronizzatori per il recupero del sincronismo di simbolo, siano essi retroazionati o meno, soffrono della presenza di una componente di rumore di fase indipendente dal rapporto segnale-rumore SNR, denominata *self-noise*. L'indipendenza di tale contributo di rumore di fase dal valore di SNR comporta la presenza di fluttuazioni che degradano le prestazioni del ricevitore stesso, anche in assenza di rumore AWGN sul canale e di altre fonti di rumore; ciò si traduce nella presenza di un asintoto costante (*floor*) nella varianza dell'errore di fase. Fluttuazioni di fase di questo tipo sono dovute alla natura

1.3. Pre-filtro ottimizzato

casuale del flusso di dati trasmessi e alla non linearità presente nei TED dei sincronizzatori. Per tale motivo il *self-noise* è anche noto come *pattern-noise*, in quanto legato appunto ai dati stessi.

Per meglio comprendere in cosa consista questa componente di degrado, si prenda in considerazione il sincronizzatore di Oerder e Meyr e, per semplicità, si immagini rumore di canale nullo. Il TED, come precedentemente spiegato ed illustrato nello schema di Fig.1.4, calcola il quadrato dell'ingresso, lo demodula in modo opportuno e lo filtra passa-basso. Il TED fornisce in uscita, quindi, la fase corretta della sincronizzante, coincidente come detto con il valor medio, ed una componente di rumore a media nulla, il *self-noise*. Appare a questo punto evidente il motivo del nome: esso è dovuto al battimento del segnale con se stesso, causato dalla non linearità presente nel TED, ossia dall'elevamento al quadrato.

Un discorso analogo può essere fatto per i sincronizzatori di Gardner e Serpedin.

Nel caso di rumore di canale non nullo, oltre al *self-noise*, saranno ovviamente presenti altri termini di degrado.

Il contributo di rumore di fase causato dal *self-noise* è al centro di questo lavoro di tesi. Si analizzerà nel seguito l'entità del termine di varianza del rumore di fase ad esso dovuto. Inoltre si mostrerà la possibilità di attenuare o eliminare il *self-noise*, sotto specifiche condizioni, tramite l'utilizzo di un opportuno pre-filtro, presentato nella sezione seguente. L'analisi della densità spettrale di potenza di tale contributo di rumore di fase permetterà anche la progettazione del filtro di *post-detection*.

1.3 Pre-filtro ottimizzato

In questa tesi, supponendo il filtro in trasmissione del tipo radice di coseno rialzato, si considerano due diversi filtri in ricezione: il filtro adattato a quello in trasmissione (*matched filter* MF) ed il pre-filtro ottimizzato (PO). L'introduzione di un filtro PO differente dal classico MF mira a minimizzare il *self-noise* a valle dello stesso.

Le condizioni che la cascata di filtro in trasmissione e filtro in ricezione deve rispettare affinché il termine di *self-noise* venga minimizzato sono sta-

1.3. Pre-filtro ottimizzato

te evidenziate da Franks e Bubrouski in [7] e da D'Andrea e Luise in [9], rispettivamente per il sincronizzatore a quadratore tempo-continuo e per il sincronizzatore di Gardner.

Il pre-filtro ottimizzato PO utilizzato in questa tesi è, tuttavia, quello presentato da Spalvieri e Magarini in [10], in quanto quest'ultimo PO offre anche la minimizzazione del termine di rumore di fase dovuto al battimento del rumore di canale con se stesso. Si omette una spiegazione dettagliata sulla costruzione del pre-filtro ottimizzato in questione, limitandosi ad una breve ed intuitiva osservazione volta alla comprensione dell'idea alla base di tale pre-filtro; per una trattazione esaustiva si rimanda a [10].

Si chiami $g(t)$ la risposta all'impulso del filtro formatore utilizzato in trasmissione e sia $G(f)$ la sua risposta in frequenza del tipo radice di coseno rialzato. Sia T il tempo di simbolo e α il fattore di roll-off del filtro. La risposta in frequenza $P(f)$ del pre-filtro ottimizzato è la seguente

$$P(f) = \begin{cases} 0 & 0 \leq f < \frac{1-\alpha}{2T} \\ G^*(T^{-1} - f) & \frac{1-\alpha}{2T} \leq f < \frac{1+\alpha}{2T} \\ \text{non vincolato} & \frac{1+\alpha}{2T} \leq f < \frac{1}{T} \\ 0 & f \geq \frac{1}{T} \end{cases}. \quad (1.7)$$

Per comprendere il motivo per il quale il pre-filtro viene costruito in questo modo si prenda nuovamente in considerazione il sincronizzatore di Oerder e Meyr, per il quale è già stato osservato che la sincronizzante da cui estrarre la stima della fase desiderata si trova a frequenza $1/T$. Si possono quindi pre-filtrare via le frequenze che, a valle dell'elevamento al quadrato, non daranno un contributo costruttivo alla frequenza $1/T$: si tratta delle frequenze che, prima dell'elevamento, sono minori di $(1-\alpha)/2T$ e maggiori di $1/T$. Si ricorda che $G(f)$ è del tipo radice di coseno rialzato, con banda unilatera B_G pari a $(1+\alpha)/2T$. Nella zona di frequenze comprese tra $(1-\alpha)/2T$ e $(1+\alpha)/2T$ l'andamento di $P(f)$ è imposto dalla condizione per la minimizzazione del *self-noise* presentata in [7] e qui non indagata ulteriormente per brevità. Tra $(1+\alpha)/2T$ e $1/T$ non vi è l'imposizione di vincoli particolari; in questo lavoro

1.3. Pre-filtro ottimizzato

di tesi, tuttavia, si è scelto anche per questa banda un andamento del tipo radice di coseno rialzato, al fine di evitare transizioni brusche e discontinuità nella funzione $P(f)$ e nella sua derivata prima.

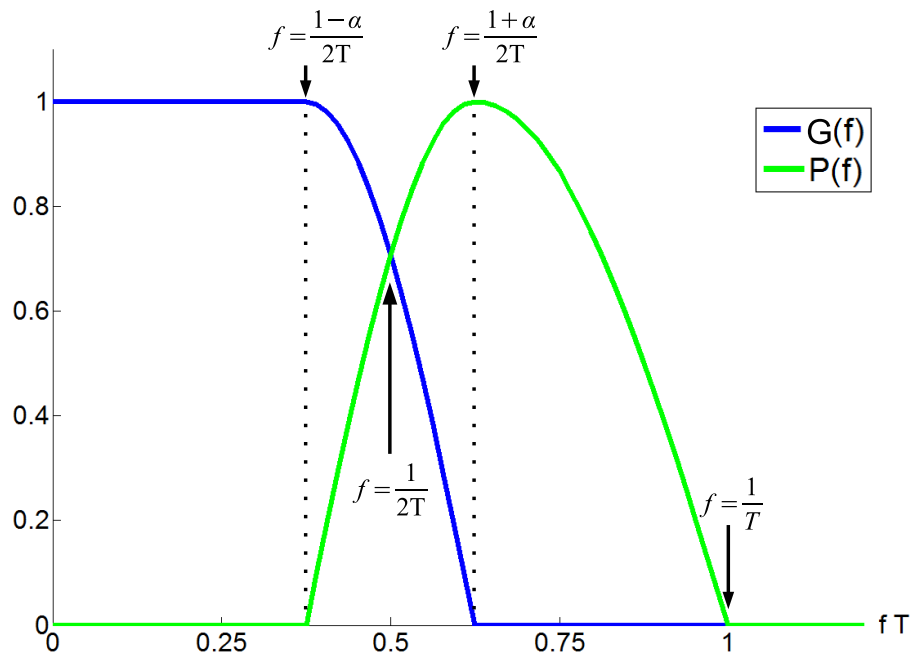


Figura 1.7: Risposta in frequenza del filtro in trasmissione $G(f)$, radice di coseno rialzato con roll-off α pari a 0.25, e del pre-filtro ottimizzato $P(f)$.

La Fig.1.7 riporta il pre-filtro della (1.7), evidenziando le 4 bande su cui esso è definito a tratti.

Capitolo 2

Analisi del *self-noise* nel sincronizzatore di simbolo di Oerder & Meyr

In questo capitolo viene effettuato uno studio approfondito della densità spettrale di potenza del rumore di fase nel sincronizzatore di simbolo di Oerder e Meyr. In particolar modo viene caratterizzato il rumore di fase dipendente dai dati (*self-noise*), in quanto in letteratura non è presente un'analisi completa, ma essa è indispensabile per la progettazione del post-filtro ottimo. Si introduce, inoltre, una formulazione approssimata e più compatta della densità spettrale di potenza del rumore di fase e se ne dimostra la validità.

2.1 Scenario e modello

Si consideri lo schema a blocchi del sistema di comunicazione digitale riportato in Fig.2.1, supponendo una modulazione M-QAM o M-PSK, con $\{c_i\}$ i simboli della costellazione complessa.

Lo schema a blocchi riportato sulla prima riga in Fig.2.1 rappresenta il sistema di comunicazione preso come riferimento, per il quale è stato formulato un modello equivalente, mostrato sulla seconda riga della figura; nel seguito si utilizza per semplicità il modello equivalente.

Gli oscillatori locali reali utilizzati in trasmissione e ricezione introducono un

2.1. Scenario e modello

disturbo, il quale viene modellizzato come rumore di fase ($2\pi\tau_1/T$ e $2\pi\tau_2/T$) ed è supposto, per il momento, costante nel tempo.

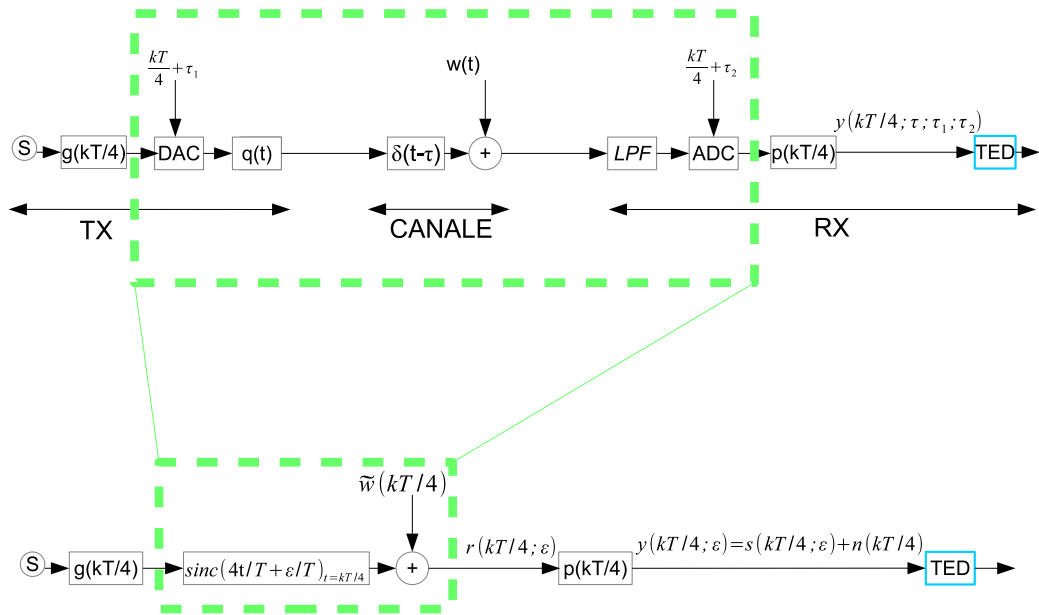


Figura 2.1: Schema a blocchi del sistema di comunicazione studiato e suo modello equivalente.

Il TED è quello del sincronizzatore di Oerder e Meyr (O&M), pertanto i convertitori digitale-analogico e analogico-digitale, rispettivamente DAC e ADC, lavorano con fattore di sovracampionamento OSF pari a quattro volte il tempo di simbolo T ; si ricorda che il sincronizzatore di O&M richiede OSF maggiore od uguale a quattro.

Nel modello equivalente, mostrato in basso in Fig.2.1, la parte contenuta nel riquadro verde in alto è stata modellizzata come interpolatore $\text{sinc}(4t/T + \epsilon/T)$ e rumore additivo $\tilde{w}(kT/4)$, gaussiano e bianco sulla banda di interesse. La dipendenza da τ_2 del termine di rumore è stata trascurata nel modello equivalente in quanto il rumore risulta essere statisticamente indipendente da τ_2 .

2.1. Scenario e modello

Si definiscono di seguito le altre grandezze riportate in figura:

- $g(t)$ risposta all'impulso del filtro formatore in trasmissione (radice di coseno rialzato in frequenza, con fattore di roll-off α);
- $p(t)$ risposta all'impulso del filtro in ricezione: pre-filtro adattato a $g(t)$ (MF) oppure pre-filtro ottimizzato (PO) di [10];
- $q(t)$ risposta all'impulso del filtro di ricostruzione (anti-replica);
- *LPF* Low Pass Filter, ossia filtro passa-basso *anti-aliasing*;
- $w(t)$ rumore di tipo AWGN introdotto dal canale;
- τ ritardo eventualmente introdotto dal canale, supposto costante in questa tesi.

Si definisce il parametro ϵ

$$\epsilon = \tau_2 - \tau - \tau_1, \quad (2.1)$$

il quale coincide con il ritardo che il sincronizzatore di O&M deve stimare e correggere affinché il ricampionamento avvenga negli istanti ottimali.

Il segnale ricevuto e campionato con fase non ottimale dal ricevitore risulta quindi

$$r\left(\frac{kT}{4}; \epsilon\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i g\left(\frac{kT}{4} - iT\right) * \text{sinc}\left(\frac{4t}{T} + \frac{\epsilon}{T}\right) \Big|_{t=\frac{kT}{4}} + \tilde{w}\left(\frac{kT}{4}\right), \quad (2.2)$$

in cui è stato utilizzato il simbolo $*$ per indicare la convoluzione. Il segnale $r(kT/4; \epsilon)$ viene filtrato dal pre-filtro $p(t)$, a valle del quale si ottiene

$$\begin{aligned} y\left(\frac{kT}{4}; \epsilon\right) &= r\left(\frac{kT}{4}; \epsilon\right) * p\left(\frac{kT}{4}\right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i v(t - iT + \epsilon) \Big|_{t=\frac{kT}{4}} + \tilde{w}\left(\frac{kT}{4}\right) * p\left(\frac{kT}{4}\right) \\ &= s\left(\frac{kT}{4}; \epsilon\right) + n\left(\frac{kT}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.1. Scenario e modello

Si definisce $v(t)$ la risposta all'impulso della cascata di filtro in trasmissione e pre-filtro in ricezione, $s(t)$ il contributo di $y(t)$ dipendente dai dati e $n(t)$ quello dipendente, invece, dal rumore di canale.

Si desidera studiare il rumore di fase e la sua densità spettrale di potenza, pertanto nel modello equivalente si ridefinisce il TED in modo tale da agevolare l'analisi; la nuova struttura modificata è mostrata in Fig.2.2. Si precisa che il nuovo TED è equivalente a quello di O&M e ciò viene confermato, nel paragrafo seguente, dalla coincidenza tra la sincronizzante estratta dal modello equivalente e quella estratta dal TED di O&M.

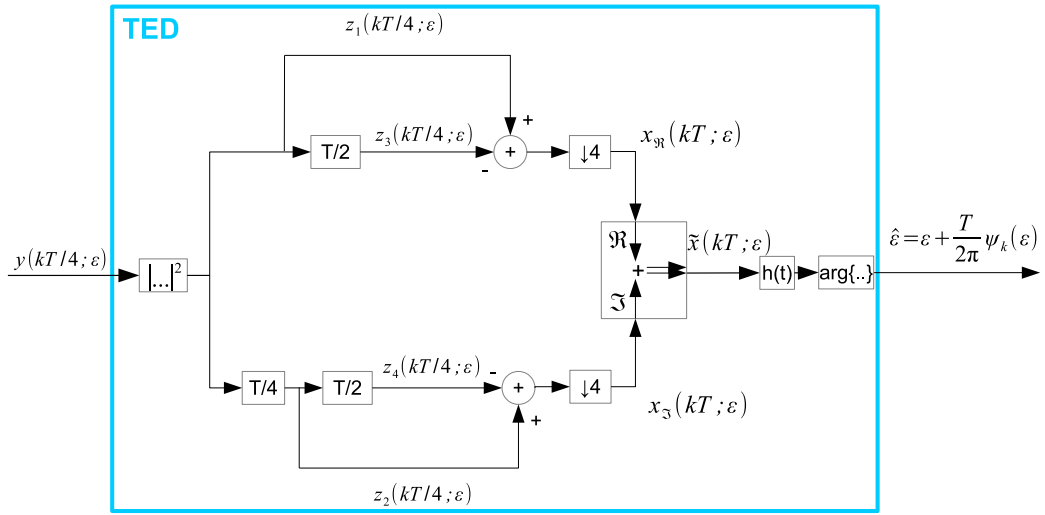


Figura 2.2: Schema a blocchi del TED costruito per il modello equivalente.

In figura si introduce $h(t)$, ossia la risposta all'impulso del post-filtro, e $\psi_k(\epsilon)$, l'errore di fase dipendente dal ritardo ϵ .

A valle della non-linearità di tipo quadratico e dei ritardi opportuni, come mostrato in figura, si ottiene

$$z_\beta \left(\frac{kT}{4}; \epsilon \right) = \left| y \left(\frac{kT}{4} - \frac{\beta - 1}{4}; \epsilon \right) \right|^2 \quad \text{con } \beta = 1, 2, 3, 4. \quad (2.4)$$

In ingresso al post-filtro $h(t)$ si ha quindi

$$\tilde{x}(kT; \epsilon) = x_{\Re}(kT; \epsilon) + j x_{\Im}(kT; \epsilon), \quad (2.5)$$

2.1. Scenario e modello

con

$$x_{\Re}(kT; \epsilon) = z_1(kT; \epsilon) - z_3(kT; \epsilon) \quad (2.6)$$

$$x_{\Im}(kT; \epsilon) = z_2(kT; \epsilon) - z_4(kT; \epsilon) , \quad (2.7)$$

dove i pedici \Re e \Im sono usati, rispettivamente, per indicare la parte reale e la parte immaginaria.

Inoltre, come riportato nel paragrafo seguente, si può dimostrare che

$$x_{\Re}(kT; \epsilon) = A \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) + \nu_{\Re}(kT; \epsilon) , \quad (2.8)$$

$$x_{\Im}(kT; \epsilon) = A \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) + \nu_{\Im}(kT; \epsilon) , \quad (2.9)$$

$$\tilde{x}_k(\epsilon) = \tilde{x}(kT; \epsilon) = A e^{j\frac{2\pi\epsilon}{T}} + \nu_k(\epsilon) , \quad (2.10)$$

dove sono stati separati i termini deterministici e utili al fine della stima di ϵ , ossia quelli che costituiscono la sincronizzante demodulata, dai termini casuali di rumore ν . L'ampiezza media A vale

$$A = \left| \frac{4C_2}{T} \int_0^{T^{-1}} V(\beta)V^* \left(\frac{1}{T} - \beta \right) d\beta \right| \quad (2.11)$$

con C_2 pari a $E\{|c_i|^2\}$, con l'apice $*$ ad indicare il complesso coniugato e con $V(f)$ risposta in frequenza della cascata di filtro in trasmissione e pre-filtro in ricezione. Nel caso di pre-filtro MF o di pre-filtro PO l'ampiezza media vale $\alpha/2$.

Lo scopo, si ricorda, è determinare la densità spettrale di potenza del rumore di fase $\psi_k(\epsilon)$. Si consideri quindi la Fig.2.3, in cui sono evidenziate tanto le componenti reale ed immaginaria del termine di rumore $\nu_k(\epsilon)$, quanto la sua scomposizione in componenti radiale e tangenziale (indicate rispettivamente con i pedici *rad* e *tg*). Poichè non è agevole studiare il rumore di fase $\psi_k(\epsilon)$ a valle dell'estrazione di argomento, come invece sarebbe necessario in base allo schema in Fig.2.2, si introduce l'approssimazione seguente

$$\psi_k(\epsilon) = \arctg\left(\frac{\nu_{k,tg}(\epsilon)}{\nu_{k,rad}(\epsilon) + A}\right) \simeq \frac{\nu_{k,tg}(\epsilon)}{A} . \quad (2.12)$$

Fintanto che si studia il caso ideale con $\epsilon = 0$, si ha

$$\nu_{\Im}(kT; \epsilon = 0) = \nu_{tg}(kT; \epsilon = 0) , \quad (2.13)$$

2.1. Scenario e modello

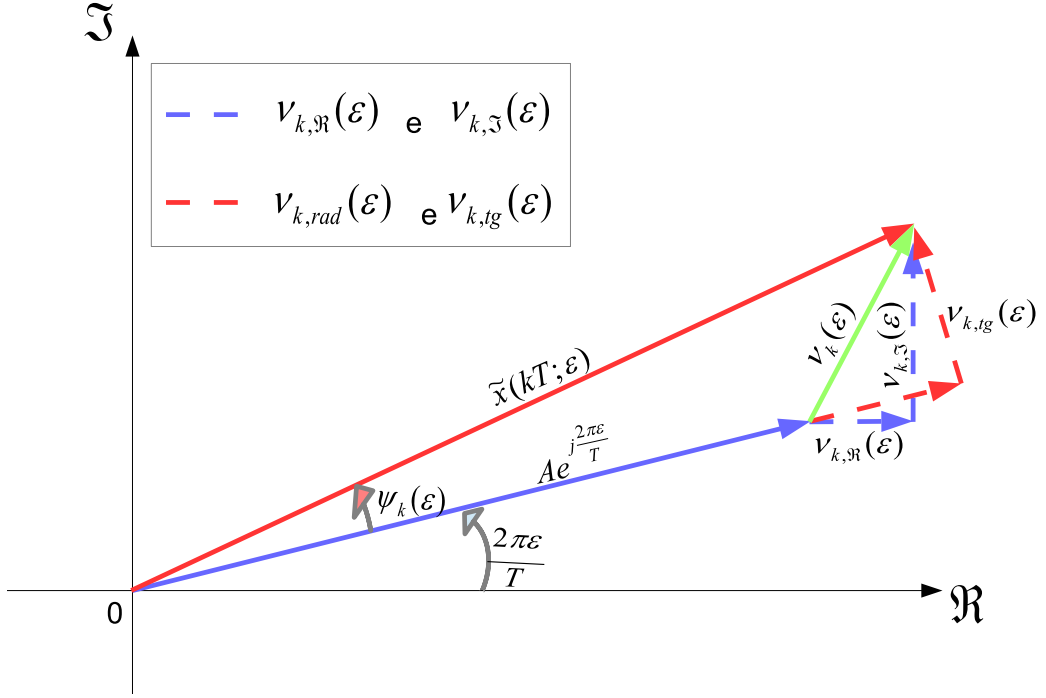


Figura 2.3: Rappresentazione vettoriale.

tuttavia tale uguaglianza non è vera per valori di ϵ diversi da 0; ciò appare evidente in Fig.2.3.

Per questo motivo si è preferito costruire il TED equivalente come in Fig.2.2, invece di adottare quello classico di O&M. Per maggiore chiarezza si riporta anche lo schema a blocchi completo in Fig.2.4, per evidenziare le aggiunte introdotte allo scopo di estrarre e caratterizzare il rumore di fase $\psi_k(\epsilon)$ tramite l'approssimazione (2.12).

Come visibile in figura, è stata introdotta la rotazione $e^{-j\frac{2\pi\epsilon}{T}}$, in modo tale da estrarre la componente tangenziale di rumore nel modo seguente

$$\begin{aligned}
 \nu_{k,tg}(\epsilon) &= \Im \left(\tilde{x}(kT; \epsilon) e^{-j\frac{2\pi\epsilon}{T}} \right) \\
 &= \Im \left(A + \nu_k(\epsilon) e^{-j\frac{2\pi\epsilon}{T}} \right) \\
 &= \Im \left(\nu_k(\epsilon) e^{-j\frac{2\pi\epsilon}{T}} \right) .
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Pertanto si ha

$$\psi_k(\epsilon) \simeq \frac{\nu_{k,tg}(\epsilon)}{A} = \frac{u(kT; \epsilon)}{A} , \tag{2.15}$$

2.1. Scenario e modello

con

$$\begin{aligned} u(kT; \epsilon) &= \Im \left(\tilde{x}(kT; \epsilon) e^{-j\frac{2\pi\epsilon}{T}} \right) \\ &= x_{\Im}(kT; \epsilon) \cos \left(\frac{2\pi\epsilon}{T} \right) - x_{\Re}(kT; \epsilon) \sin \left(\frac{2\pi\epsilon}{T} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

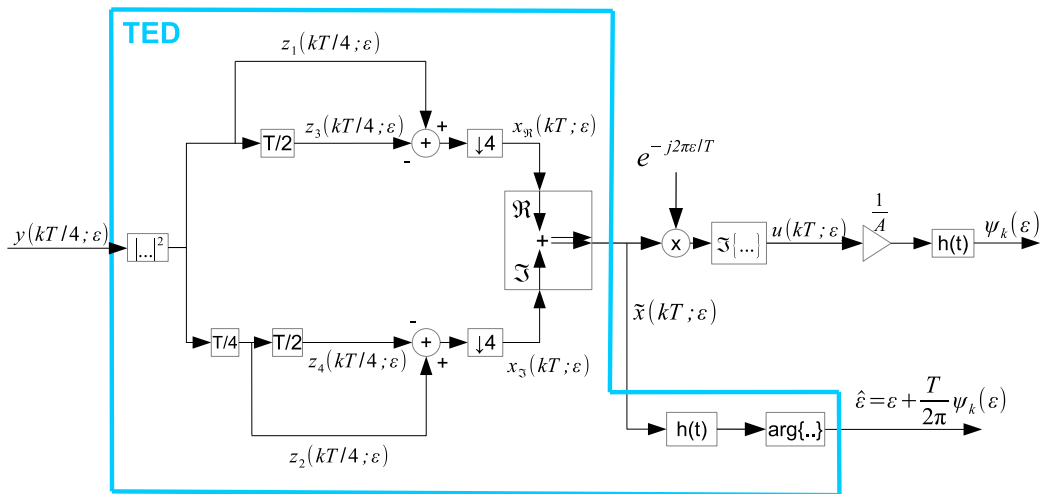


Figura 2.4: Schema a blocchi del TED e dell'estrazione del rumore di fase nel modello equivalente.

2.1.1 Sincronizzante

Si dimostra ora la validità delle equazioni (2.8) e (2.9), ossia che $x_{\Re}(kT; \epsilon)$ e $x_{\Im}(kT; \epsilon)$ abbiano una parte deterministica (il valore medio) dalla quale si estrae la stima di ϵ : essa costituisce la sincronizzante demodulata, in analogia con il sincronizzatore a quadratore tempo-continuo e con lo schema di Oerder-Meyr.

Si riportano, per brevità, solo i passaggi principali ed i risultati; la trattazione completa può essere trovata in Appendice A. Per comodità si svolge l'analisi nel tempo-continuo e, al termine, si campiona in modo opportuno.

2.2. Densità spettrale di potenza ciclostazionaria del rumore di fase

Il contributo deterministico di $x_{\Re}(kT; \epsilon)$ si ottiene come

$$\begin{aligned}
 E \{x_{\Re}(kT; \epsilon)\} &= E \{x_{\Re}(t; \epsilon)|_{t=kT}\} \\
 &= E \{z_1(t; \epsilon) - z_3(t; \epsilon)\}|_{t=kT} \\
 &= \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi(t + \epsilon)}{T}\right)\Big|_{t=kT} - \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi(t - T/2 + \epsilon)}{T}\right)\Big|_{t=kT} \\
 &= A \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right). \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Analogamente il contributo deterministico di $x_{\Im}(kT; \epsilon)$ vale

$$E \{x_{\Im}(kT; \epsilon)\} = E \{x_{\Im}(t; \epsilon)|_{t=kT}\} = A \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right). \tag{2.18}$$

2.2 Densità spettrale di potenza ciclostazionaria del rumore di fase

Ottenuto il rumore di fase $\psi_k(\epsilon)$ dalle equazioni (2.15) e (2.16), si può procedere alla sua caratterizzazione tramite calcolo della sua autocorrelazione e, quindi, della sua densità spettrale di potenza. Si sottolinea la dipendenza di ψ_k dal parametro ϵ , dovuta al fatto che il segnale $y(kT/4; \epsilon)$ in ingresso al TED è ciclostazionario, in quanto il suo valore quadratico medio risulta essere periodico in ϵ di periodo pari al tempo di simbolo T . Pertanto autocorrelazione e densità spettrale di potenza di $\psi_k(\epsilon)$ risultano essere dipendenti da ϵ , rispettivamente nel modo seguente

$$R_{\psi}(mT; \epsilon) = \frac{R_u(mT; \epsilon)}{A^2} \tag{2.19}$$

e

$$\begin{aligned}
 S_{\psi}(e^{j2\pi fT}; \epsilon) &= \frac{S_u(e^{j2\pi fT}; \epsilon)}{A^2} \\
 &= \frac{\mathcal{F}_m\{R_u(mT; \epsilon)\}}{A^2}, \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

2.2. Densità spettrale di potenza ciclostazionaria del rumore di fase

dove $\mathcal{F}_B\{C\}$ indica la trasformata di Fourier di C integrando su B.

L'autocorrelazione di $u(kT; \epsilon)$ vale

$$\begin{aligned}
R_u(mT; \epsilon) &= E \{u^*(kT; \epsilon) u(kT + mT; \epsilon)\} \quad (2.21) \\
&= E \left\{ \left(x_{\Im}(kT; \epsilon) \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) - x_{\Re}(kT; \epsilon) \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left(x_{\Im}(kT+mT; \epsilon) \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) - x_{\Re}(kT+mT; \epsilon) \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) \right) \right\} \\
&= E \left\{ x_{\Im}(kT; \epsilon) x_{\Im}(kT + mT; \epsilon) \cos^2\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) + \right. \\
&\quad \left. + x_{\Re}(kT; \epsilon) x_{\Re}(kT + mT; \epsilon) \sin^2\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) + \right. \\
&\quad \left. - x_{\Im}(kT; \epsilon) x_{\Re}(kT + mT; \epsilon) \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) + \right. \\
&\quad \left. - x_{\Re}(kT; \epsilon) x_{\Im}(kT + mT; \epsilon) \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) \right\} \\
&= R_{x_{\Im}}(mT; \epsilon) \cos^2\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) + \\
&\quad + R_{x_{\Re}}(mT; \epsilon) \sin^2\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) + \\
&\quad - (R_{x_{\Im}x_{\Re}}(mT; \epsilon) + R_{x_{\Re}x_{\Im}}(mT; \epsilon)) \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right);
\end{aligned}$$

si rimanda all'Appendice B per il calcolo delle autocorrelazioni e delle cross-correlazioni $R_{x_{\Im}}(mT; \epsilon)$, $R_{x_{\Re}}(mT; \epsilon)$, $R_{x_{\Im}x_{\Re}}(mT; \epsilon)$ e $R_{x_{\Re}x_{\Im}}(mT; \epsilon)$.

Tanto l'autocorrelazione $R_{\psi}(mT; \epsilon)$ quanto la densità spettrale di potenza $S_{\psi}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)$ risultano composte da tre termini additivi che sorgono a valle della non-linearità di tipo quadratico del TED: si tratta dei battimenti rumore-rumore (NxN), segnale-rumore (SxN) e segnale-segnale (SxS); il termine SxS è proprio il contributo di *self-noise*. É quindi possibile scrivere

$$R_{\psi}(mT; \epsilon) = R_{\psi, N \times N}(mT; \epsilon) + R_{\psi, S \times N}(mT; \epsilon) + R_{\psi, S \times S}(mT; \epsilon) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
S_{\psi}(e^{j2\pi fT}; \epsilon) &= S_{\psi, N \times N}(e^{j2\pi fT}; \epsilon) + S_{\psi, S \times N}(e^{j2\pi fT}; \epsilon) + \\
&\quad + S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon). \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Per avere idea dell'andamento del contributo di *self-noise*, il quale è al centro dell'analisi di questa tesi, si riporta in Fig.2.5 la densità spettrale di

2.2. Densità spettrale di potenza ciclostazionaria del rumore di fase

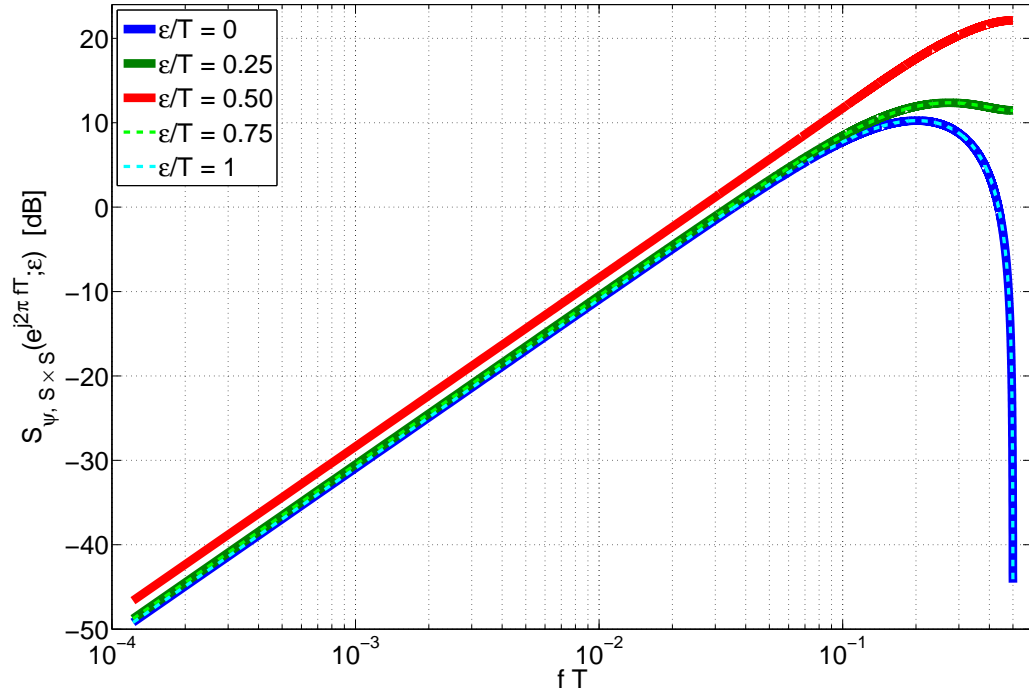


Figura 2.5: Densità spettrale di potenza del self-noise per diversi valori di ϵ ; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.

potenza $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)$ per diversi valori di ϵ .

La figura è stata ottenuta per una 4 – QAM, con roll-off α pari a 0.25 e con pre-filtro adattato (MF). Si nota come il contributo di *self-noise* a frequenza 0 sia nullo per qualsiasi valore di ϵ . Come indicato in [1], ciò è verificato sempre purché si utilizzi $v(t)$ simmetrico; perciò si avrà sempre l’annullamento del termine SxS a frequenza 0 nei casi presi in considerazione in questa tesi, poiché si utilizza filtro in trasmissione con risposta in frequenza del tipo radice di coseno rialzato e pre-filtro in ricezione adattato MF od ottimizzato PO.

Si evidenzia, inoltre, come il *self-noise* aumenti con il crescere dell’errore di campionamento ϵ :

- per $\epsilon = 0$ il *self-noise* è minimo, in quanto si tratta del caso migliore possibile, nel quale il campionario in ricezione ha già campionato il segnale ricevuto negli istanti ottimali;

2.2. Densità spettrale di potenza ciclostazionaria del rumore di fase

- per $\epsilon = T/2$ il contributo SxS raggiunge il suo massimo, in quanto il campionamento è avvenuto a distanza massima dagli istanti ottimali;
- per $\epsilon = \{T/4, 3T/4\}$ si ottiene un contributo intermedio;
- per $\epsilon = T$ si trova di nuovo *self-noise* minimo, confermando quanto detto circa la periodicità della densità spettrale di potenza.

Si sottolinea, infine, la pendenza di 20 dB/decade, caratteristica che tornerà utile per l'approssimazione di $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)$ introdotta nella sezione 2.3.

2.2.1 Densità spettrale di potenza media del rumore di fase

Autocorrelazione e densità spettrale di potenza del rumore di fase sono, come detto, periodiche in ϵ di periodo T . Può essere utile calcolare il loro valore mediato su tutti i possibili ϵ nel modo seguente

$$R_{\psi}(mT) = \frac{1}{T} \int_0^T R_{\psi}(mT; \epsilon) \cdot ddp(\epsilon) d\epsilon, \quad (2.24)$$

dove i limiti d'integrazione sono dovuti alla natura periodica di periodo T e dove si è indicata con $ddp(\epsilon)$ la densità di probabilità di ϵ , assunta nel seguito uniforme. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} R_{\psi}(mT) &= \frac{1}{T} \int_0^T R_{\psi}(mT; \epsilon) d\epsilon \quad (2.25) \\ &= \frac{1}{A^2 T} \int_0^T R_{x_{\Im}}(mT; \epsilon) \cos^2\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) d\epsilon + \\ &\quad + \frac{1}{A^2 T} \int_0^T R_{x_{\Re}}(mT; \epsilon) \sin^2\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) d\epsilon + \\ &\quad - \frac{1}{A^2 T} \int_0^T (R_{x_{\Im}x_{\Re}}(mT; \epsilon) + R_{x_{\Re}x_{\Im}}(mT; \epsilon)) \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) d\epsilon. \end{aligned}$$

Di conseguenza la densità spettrale di potenza (DSP) media risulta essere

$$S_{\psi}(e^{j2\pi fT}) = \mathcal{F}_m\{R_{\psi}(mT)\}. \quad (2.26)$$

2.2. Densità spettrale di potenza ciclostazionaria del rumore di fase

Per esempio in Fig.2.6 si mostra la DSP media per il contributo di *self-noise*. La figura è stata ottenuta per una 4 – QAM, con roll-off α pari a 0.25 e con pre-filtro adattato (MF) ed ottimizzato PO. Si sottolinea nuovamente la pendenza di 20 dB/decade alle basse frequenze, caratteristica che verrà sfruttata nella sezione seguente.

Si evidenzia inoltre come il pre-filtro PO riduca effettivamente il termine di *self-noise*. Esso, si ricorda, viene annullato del tutto solo nel caso di ϵ pari a multipli interi del tempo di simbolo T .

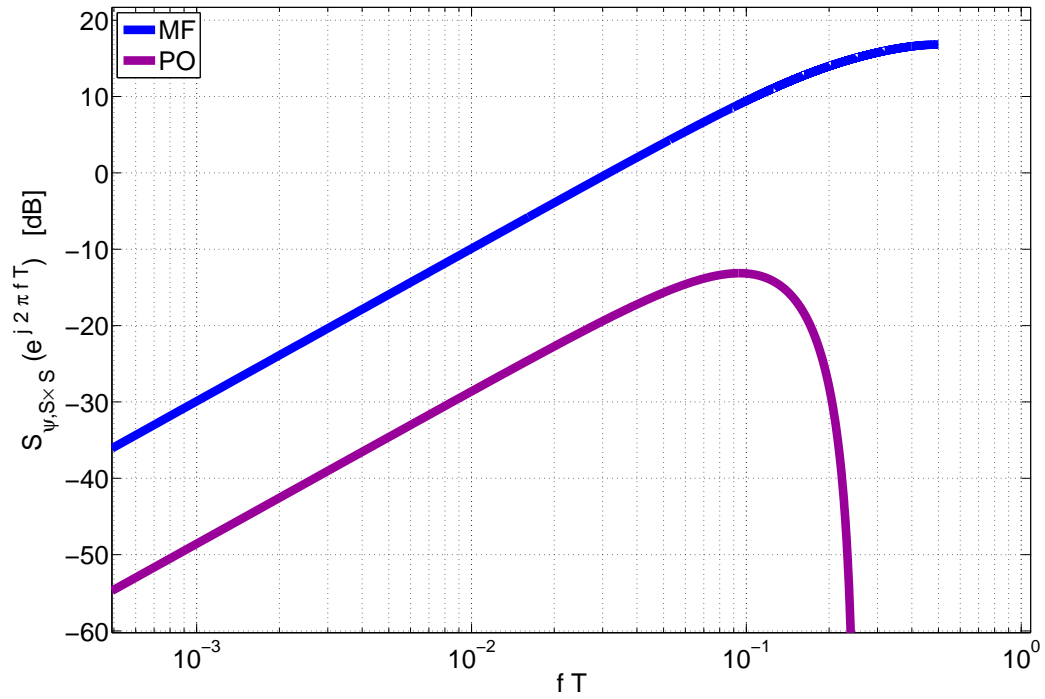


Figura 2.6: Densità spettrale di potenza del self-noise mediata su ϵ ; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtri MF e PO.

2.3 Approssimazione della DSP del rumore di fase

La densità spettrale di potenza (DSP) del rumore di fase, sia essa espressa come dipendente da ϵ o mediata su tutti i valori possibili di ϵ (rispettivamente $S_\psi(e^{j2\pi fT}; \epsilon)$ e $S_\psi(e^{j2\pi fT})$), risulta essere poco maneggevole nella formulazione ottenuta nelle equazioni (2.20) e (2.26). Si desidera quindi introdurre alcune approssimazioni per ottenere una scrittura maggiormente compatta, ossia

$$S_\psi(e^{j2\pi fT}; \epsilon) \simeq \beta_{N \times N} + \beta_{S \times N} + \beta_{S \times S}(\epsilon)(1 - e^{j2\pi fT})(1 - e^{-j2\pi fT}) \quad (2.27)$$

$$S_\psi(e^{j2\pi fT}) \simeq \beta_{N \times N} + \beta_{S \times N} + \beta_{S \times S}(1 - e^{j2\pi fT})(1 - e^{-j2\pi fT}), \quad (2.28)$$

in cui sono stati messi in evidenza i contributi $N \times N$, $S \times N$ e $S \times S$. Le motivazioni di tale scrittura saranno chiarite nei paragrafi seguenti, così come verranno definiti i termini $\beta_{N \times N}$, $\beta_{S \times N}$, $\beta_{S \times S}$ e $\beta_{S \times S}(\epsilon)$.

2.3.1 Approssimazione del contributo $N \times N$

Si nota che il termine $S_{\psi, N \times N}(e^{j2\pi fT})$ ha pendenza nulla alle frequenze di interesse, ossia le basse frequenze che verranno selezionate dal post-filtro passa-basso $h(t)$, pertanto si desidera approssimarlo con il suo valore a frequenza 0, come segue

$$\beta_{N \times N} = S_{\psi, N \times N}(e^{j2\pi fT})|_{f=0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\psi, N \times N}(mT). \quad (2.29)$$

Nei casi presi in esame in questa tesi, sia con pre-filtro MF sia con pre-filtro PO, si ottiene

$$\beta_{N \times N} = \frac{\alpha}{\text{SNR}^2 A^2} = \frac{4}{\alpha \text{SNR}^2}, \quad (2.30)$$

coincidente con quanto avviene nel caso tempo-continuo trattato in [11].

Un esempio di tale approssimazione è mostrato in Fig.2.7, ottenuta per una 4-QAM, con roll-off α pari a 0.25 e 0 dB di SNR.

2.3. Approssimazione della DSP del rumore di fase

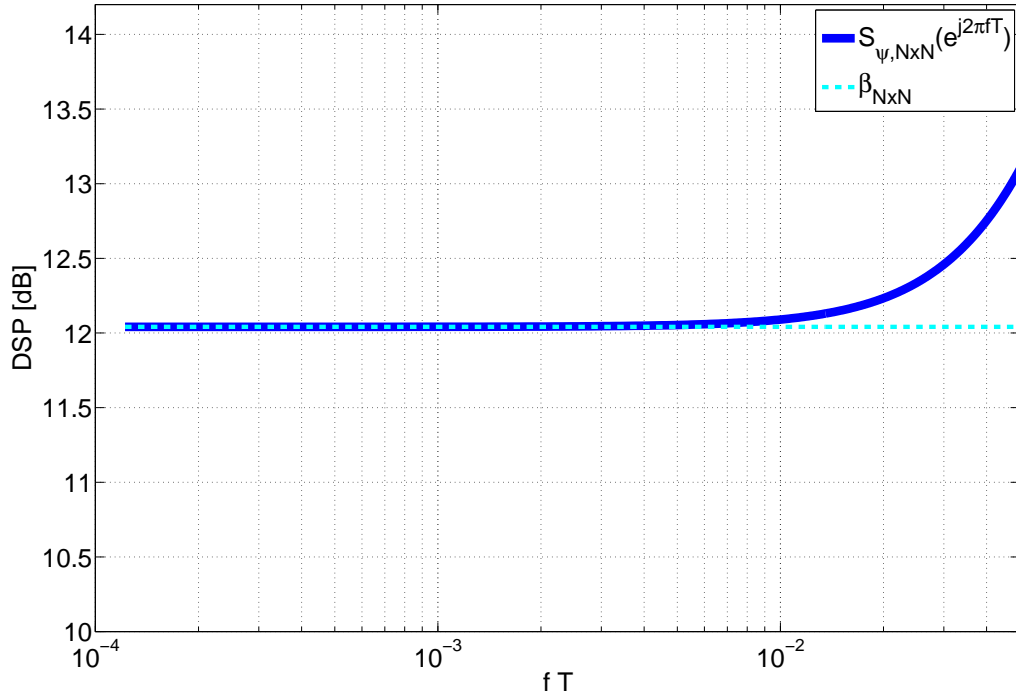


Figura 2.7: Densità spettrale di potenza media e sua approssimazione per il contributo $N \times N$; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e $SNR = 0$ dB.

È superfluo dimostrare la validità dell'approssimazione per $S_{\psi, N \times N}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)$ in quanto il contributo $N \times N$ è totalmente indipendente dal parametro ϵ , ossia $S_{\psi, N \times N}(e^{j2\pi fT}; \epsilon) = S_{\psi, N \times N}(e^{j2\pi fT})$.

È possibile verificare come la correttezza di $\beta_{N \times N}$ venga inoltre confermata dal confronto con la $\sigma_{\psi, N \times N}^2$ calcolata da Oerder e Meyr in [1], dove

$$\sigma_{\psi, N \times N}^2 = T \int_0^{T^{-1}} S_{\psi, N \times N}(e^{j2\pi fT}) |H(e^{j2\pi fT})|^2 df, \quad (2.31)$$

con $H(e^{j2\pi fT})$ risposta in frequenza del filtro di *post-detection*.

2.3.2 Approssimazione del contributo $S \times N$

Si ripete quanto eseguito per $N \times N$ anche per il contributo $S \times N$, in quanto anche il termine $S_{\psi, S \times N}(e^{j2\pi fT})$ è bianco alle frequenze di interesse e di

2.3. Approssimazione della DSP del rumore di fase

conseguenza lo si approssima con il suo valore a frequenza 0, ossia

$$\beta_{S \times N} = S_{\psi, S \times N}(e^{j2\pi f T})|_{f=0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\psi, S \times N}(mT). \quad (2.32)$$

Nei casi presi in esame in questa tesi, sia con pre-filtro MF sia con pre-filtro PO, si ottiene

$$\beta_{S \times N} = \frac{\alpha}{\text{SNR} A^2} = \frac{4}{\alpha \text{SNR}}, \quad (2.33)$$

coincidente con quanto avviene nel caso tempo-continuo [11].

Un esempio di tale approssimazione è mostrato in Fig.2.8, ottenuta per una 4 – QAM, con roll-off α pari a 0.25 e 0 dB di SNR.

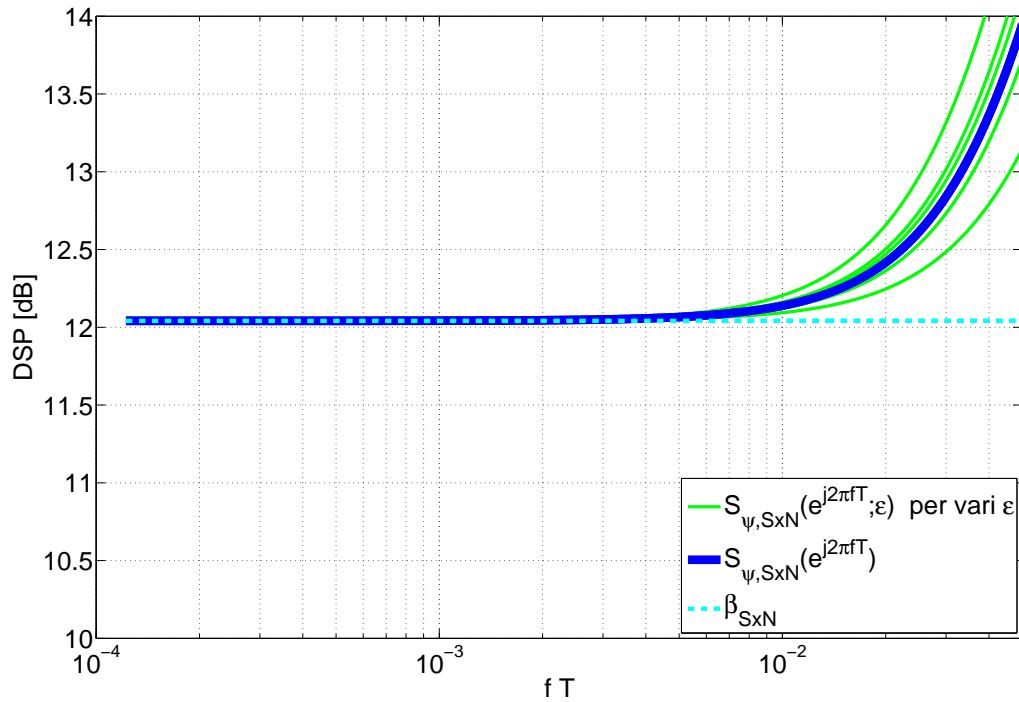


Figura 2.8: Densità spettrale di potenza al variare di ϵ e media per il contributo $S \times N$ e relativa approssimazione; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e $\text{SNR} = 0$ dB.

Sulla stessa figura è dimostrata la validità dell'approssimazione anche per $S_{\psi, S \times N}(e^{j2\pi f T}; \epsilon)$ in quanto il contributo $S \times N$, pur essendo periodico in ϵ , alle frequenze di interesse risulta costante ed indipendente da ϵ .

2.3. Approssimazione della DSP del rumore di fase

Analogamente al contributo NxN, anche la correttezza di $\beta_{S \times N}$ viene confermata dal confronto con la $\sigma_{\psi, S \times N}^2$ calcolata da Oerder e Meyr in [1], dove

$$\sigma_{\psi, S \times N}^2 = T \int_0^{T^{-1}} S_{\psi, S \times N}(e^{j2\pi fT}) |H(e^{j2\pi fT})|^2 df. \quad (2.34)$$

I termini NxN e SxN, a differenza del *self-noise*, dipendono dal valore di SNR, come evidente nelle equazioni (2.30) e (2.33). Perciò, valutando la varianza σ_{ψ}^2 , sarà possibile distinguere tre zone: a basso SNR il termine di rumore di fase dominante è NxN, per valori intermedi prevale SxN, mentre per SNR elevati diviene predominante il *self-noise* SxS; ciò viene schematicamente mostrato in Fig.2.9. Per esempio, come evidente dalle (2.30) e (2.33) e come confermato dalle figure 2.7 e 2.8, in corrispondenza di SNR pari a 0 dB i contributi NxN e SxN si equivalgono.

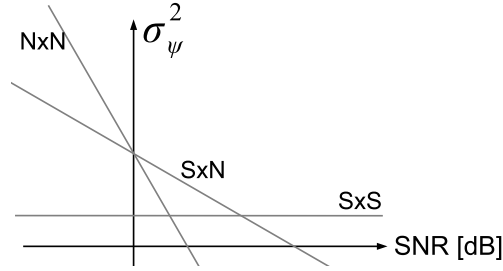


Figura 2.9: Varianza σ_{ψ}^2 in funzione del valore di SNR: contributi NxN, SxN e SxS.

2.3.3 Approssimazione del contributo $S \times S$

Si consideri $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)$ e $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT})$: nelle Fig.2.5 e 2.6 è stata evidenziata la pendenza di 20 dB/decade alle frequenze di interesse (le basse frequenze che verranno selezionate dal post-filtro passa-basso $h(t)$). Si desidera, quindi, approssimare le DSP come segue

$$\tilde{S}_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon) = \beta_{S \times S}(\epsilon)(1 - e^{j2\pi fT})(1 - e^{-j2\pi fT}) \quad (2.35)$$

$$\tilde{S}_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}) = \beta_{S \times S}(1 - e^{j2\pi fT})(1 - e^{-j2\pi fT}) \quad (2.36)$$

Si deve determinare il valore opportuno di $\beta_{S \times S}(\epsilon)$, imponendo

$$\left. \frac{d\tilde{S}_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)}{df} \right|_{f \rightarrow 0^+} = \left. \frac{dS_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)}{df} \right|_{f \rightarrow 0^+}, \quad (2.37)$$

2.3. Approssimazione della DSP del rumore di fase

e analogamente per $\beta_{S \times S}$. Si ottiene quindi

$$\beta_{S \times S}(\epsilon) = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 R_{\psi, S \times S}(mT; \epsilon) \quad (2.38)$$

$$\beta_{S \times S} = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^2 R_{\psi, S \times S}(mT). \quad (2.39)$$

Per il calcolo dei termini $R_{\psi, S \times S}(mT; \epsilon)$ e $R_{\psi, S \times S}(mT)$ si rimanda all'Appendice B.

Si sottolinea come l'analisi effettuata confermi l'indipendenza del contributo di *self-noise* dal valore di SNR.

La bontà dell'approssimazione introdotta viene mostrata nella Fig.2.10, ottenuta per una 4 – QAM, con roll-off α pari a 0.25.

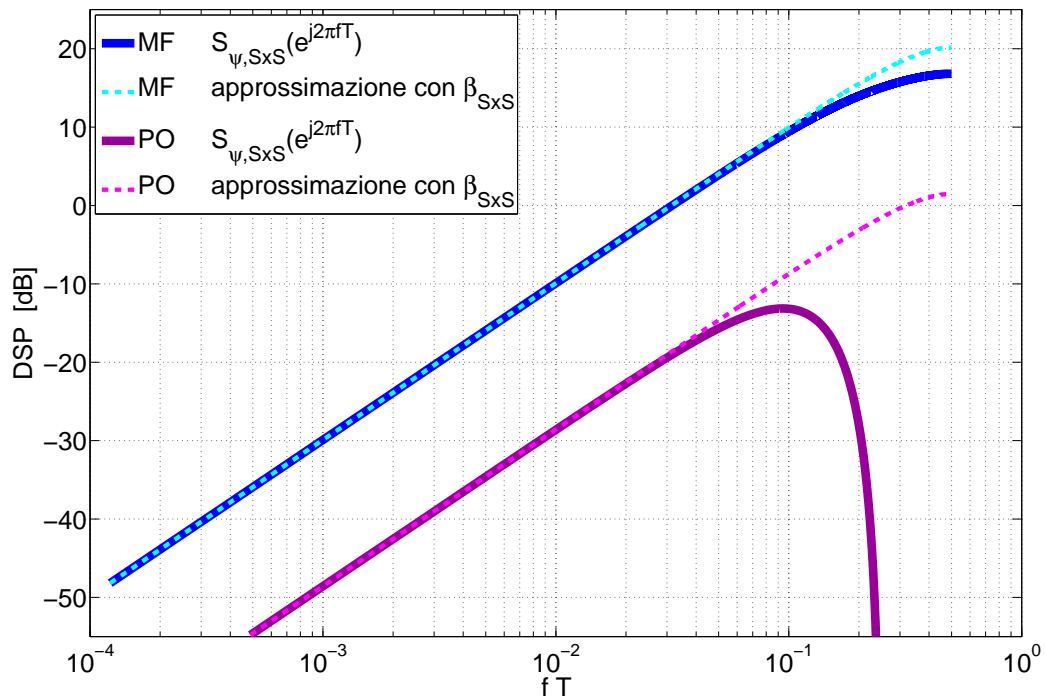


Figura 2.10: Densità spettrale di potenza media e sua approssimazione per il contributo $S \times S$; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtri MF e PO.

In figura si vede come tale approssimazione sia buona alle basse frequenze, ma non altrettanto alle alte, soprattutto nel caso di PO. Tuttavia, si

2.3. Approssimazione della DSP del rumore di fase

ricorda, sono le basse frequenze quelle che verranno selezionate dal post-filtro passa-basso, mentre le alte risulteranno fortemente attenuate, pertanto l'approssimazione introdotta è adeguata per lo scopo della tesi.

Per completezza si desidera mostrare la validità dell'approssimazione introdotta anche per diversi valori di roll-off.

A tal scopo si consideri la Fig.2.11, ottenuta sempre per una 4 – QAM, con il solo pre-filtro adattato MF, e variando il valore di α . Si nota come il *self-noise* sia minore per α grandi, in corrispondenza dei quali le oscillazioni di $v(t)$ si smorzano più velocemente. Inoltre, per roll-off grandi, l'approssimazione stessa risulta maggiormente robusta anche alle alte frequenze.

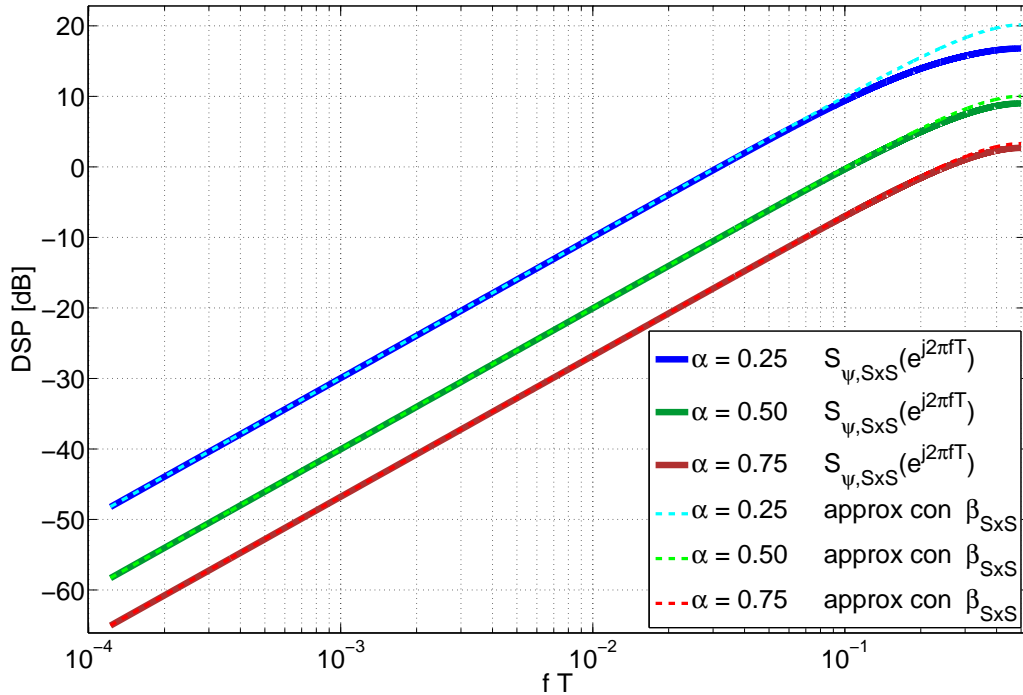


Figura 2.11: Densità spettrale di potenza media e sua approssimazione per il contributo SxS , per diversi valori di roll-off α ; 4 – QAM e pre-filtro MF.

In Fig.2.12 è riportato invece il valore β_{SxS} dell'equazione (2.39) al variare del roll-off α , mostrato sia nel caso di pre-filtro adattato MF, sia nel caso di pre-filtro ottimizzato PO, per una M – QAM con M pari a 4 e 256.

Ancora è evidente come il pre-filtro PO dia luogo a minore *self-noise* e come, per entrambi i pre-filtri, valori grandi di roll-off riducano il contributo SxS .

2.3. Approssimazione della DSP del rumore di fase

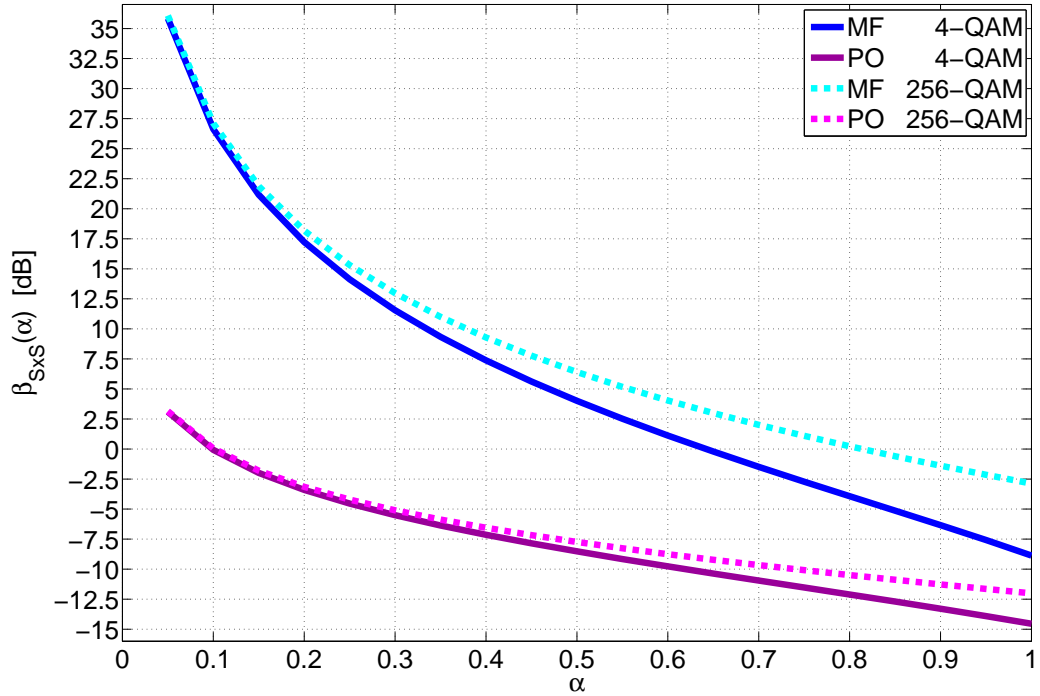


Figura 2.12: Valore di β_{SxS} al variare del roll-off α ; $\{4, 256\}$ – QAM e pre-filtri MF e PO.

Per confronto, oltre al 4 – QAM, è riportato anche il caso di 256 – QAM, per evidenziare come giustamente il contributo SxS cresca all’aumentare di M .

Capitolo 3

Progettazione del post-filtro nel sincronizzatore di simbolo di Oerder & Meyr

In questo capitolo si introduce la tempo-varianza sul rumore di fase, allo scopo di rappresentare meglio quanto accade nei sistemi di comunicazione reali. Si procede quindi con la progettazione del filtro di *post-detection* per il sincronizzatore di simbolo di Oerder e Meyr. Si ricava dapprima il post-filtro ottimo, basandosi sulla teoria di Wiener. Si valutano in seguito le soluzioni sub-ottime offerte dai filtri a singola e doppia media mobile, la cui durata viene ottimizzata secondo tecniche differenti, al fine di ottenere prestazioni prossime alle ottime con il vantaggio di una minore complessità realizzativa.

3.1 Rumore di fase tempo-variante

Nell'analisi svolta sino ad ora il ritardo ϵ , responsabile di un campionamento in ricezione negli istanti non ottimali, è stato mantenuto costante nel tempo. Tale ritardo, si ricorda, è dovuto agli oscillatori locali in trasmissione e ricezione e all'eventuale ritardo di canale. Nei sistemi di comunicazione reali tale disturbo ovviamente non è costante nel tempo, pertanto nel seguito si considera $\epsilon(t)$, il quale dà luogo ad un rumore di fase tempo-variante $\theta(t)$ pari a $2\pi\epsilon(t)/T$.

3.1. Rumore di fase tempo-variante

Nello specifico, si assume rumore di fase di Wiener (o *random phase walk*), perciò il modello tempo-discreto per tale rumore di fase, a valle dell'operazione di *unwrap*, è

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \gamma u_k, \quad (3.1)$$

con $\{u_k\}$ rumore gaussiano e bianco, a media nulla e varianza unitaria. Il parametro γ è invece uno scalare e rappresenta il passo del *random walk*. Il valore di γ è anche un indicatore relativo alla bontà degli oscillatori: oscillatori di buona qualità sono modellizzabili tramite un valore minore di γ ; nel proseguo si è assunto γ pari a $4 \cdot 10^{-6}$, valore adeguato a rappresentare i peggiori oscillatori in commercio.

La densità spettrale di potenza del rumore di fase di Wiener tempo-discreto risulta essere

$$S_\theta(e^{j2\pi fT}) = \frac{\gamma^2}{(1 - e^{j2\pi fT})(1 - e^{-j2\pi fT})}, \quad (3.2)$$

avente pendenza -20 dB/decade. Si precisa che la (3.2) è lo spettro del modello definito nella (3.1), ossia una fase a valle di un'operazione di *unwrap*, pertanto non è un errore da un punto di vista concettuale la potenza infinita che il processo esibisce, poiché appunto non si tratta di un'ampiezza, bensì di un angolo. Si può dimostrare che lo spettro dell'esponenziale tempo-continua $e^{j\theta(t)}$ è una funzione Lorentziana del tipo

$$\mathcal{L}(f) = \frac{4\gamma^2 T}{16\pi^2 f^2 T^2 + \gamma^4}, \quad (3.3)$$

caratterizzata dalla frequenza a -3 dB pari a

$$f_{-3} = \frac{\gamma^2}{4\pi T}, \quad (3.4)$$

la quale ovviamente non tende all'infinito per $f \rightarrow 0$. Per frequenze superiori a f_{-3} la funzione Lorentziana appena descritta ha pendenza di -20 dB/decade ed è ben approssimata dalla DSP $S_\theta(e^{j2\pi fT})$ della fase a valle dell'operazione di *unwrap*; ciò viene mostrato in Fig.3.1 per γ^2 pari a $4 \cdot 10^{-6}$.

Il ritardo tempo-variante ϵ_k porta ad avere contributi di rumore di fase a valle del TED di Oerder e Meyr (O&M) essi stessi tempo-varianti, nelle tre

3.2. Post-filtro ottimo $H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})$

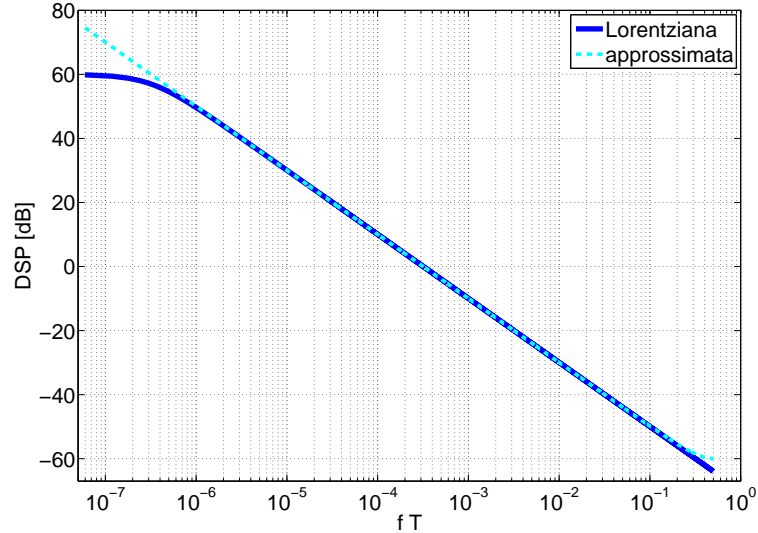


Figura 3.1: Spettro Lorentziano e sua approssimazione come $S_\theta(e^{j2\pi fT})$, con γ^2 pari a $4 \cdot 10^{-6}$

componenti NxN, SxN e SxS. Sebbene l'analisi svolta nel precedente capitolo fosse per ϵ costante, nelle equazioni (2.25) e (2.26) è stata eseguita l'operazione di media assumendo densità di probabilità $ddp(\epsilon)$ uniforme e, pertanto, la tempo-varianza è stata in tal modo recuperata in modo adeguato.

3.2 Post-filtro ottimo $H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})$

A valle del TED di Oerder e Meyr (O&M) è necessario un filtro passa-basso per estrarre la stima della fase con cui ricampionare il segnale ricevuto negli istanti ottimali. È importante, quindi, che la stima effettuata sia la più accurata possibile, perciò si desidera progettare il post-filtro ottimo, ossia quello che minimizza l'errore quadratico medio della stima. Si precisa che la progettazione del filtro ottimo è possibile solo grazie al fatto che in questa tesi tutte le componenti di rumore in ingresso al post-filtro siano state studiate in modo adeguato; l'assenza in letteratura di un'analisi completa relativa al termine di *self-noise* spiega la mancanza dello studio di un post-filtro ottimo.

L'obiettivo del post-filtro passa-basso, quindi, è stimare θ_k . Da un punto di vista spettrale, la sua risposta in frequenza deve essere tale da eliminare

3.2. Post-filtro ottimo $H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})$

il più possibile il rumore, andando invece ad inseguire il termine di fase θ . Pertanto $H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})$ dovrà soddisfare un compromesso tra rumore non attenuato alle basse frequenze (in banda di transizione) e parte utile tagliata alle alte frequenze (banda attenuata), in modo tale che l'errore quadratico medio, dovuto a queste due differenti cause, venga minimizzato.

Utilizzando per comodità il dominio z , ed indicando quindi $X(z)$ per $X(e^{j2\pi fT})$, la densità spettrale della fase θ può essere riscritta come

$$S_\theta(z) = \frac{\gamma^2}{(1-z)(1-z^{-1})} \quad (3.5)$$

e rappresenta la parte utile per stimare θ_k , da cui estrarre ϵ_k , per poter quindi correggere l'errore di campionamento ed ottenere così un ricampionamento del segnale ricevuto negli istanti ottimali.

La densità spettrale di potenza del rumore è invece

$$S_\psi(z) \simeq \beta_{N \times N} + \beta_{S \times N} + \beta_{S \times S}(1-z)(1-z^{-1}). \quad (3.6)$$

Di conseguenza il filtro ottimo è ottenibile applicando la teoria di Wiener nella sua formulazione non causale, in quanto il sincronizzatore di O&M è non retroazionato. Perciò il post-filtro ottimo è ricavabile nel seguente modo

$$\begin{aligned} H_{ottimo}(z) &= \frac{S_\theta(z)}{S_\theta(z) + S_\psi(z)} \\ &= \frac{\gamma^2 \xi^2}{(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1})(1-z_1^* z)(1-z_2^* z)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

con

$$\xi = \sqrt{\frac{z_1^* z_2^*}{\beta_{S \times S}}} = \sqrt{\frac{z_1 z_2}{\beta_{S \times S}}} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{N_0^3}{\beta_{S \times S}^2 P} + \frac{N_0^2}{\beta_{S \times S}} + \frac{4N_0(\gamma^2 - N_0)}{\beta_{S \times S} P} + \frac{16\gamma^2}{P} + \frac{4N_0 - 2\gamma^2}{\beta_{S \times S}}} + \\ &\quad - \frac{P+Q}{4\beta_{S \times S}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q^2}{2\beta_{S \times S}^2} + \frac{1}{2P} \left(-\frac{Q^3}{\beta_{S \times S}} + \frac{4QR}{\beta_{S \times S}} - 8Q \right) - \frac{R}{2} - 2} + \frac{P-Q}{4\beta_{S \times S}}, \quad (3.10)$$

3.2. Post-filtro ottimo $H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})$

dove $N_0 = \beta_{N \times N} + \beta_{S \times N}$, $P = \sqrt{N_0^2 - 4\beta_{S \times S}\gamma^2}$, $Q = -4\beta_{S \times S} - N_0$ e $R = 6\beta_{S \times S} + \gamma^2 + 2N_0$. Si precisa che per il calcolo di $H_{ottimo}(z)$ è stata utilizzata l'approssimazione (2.28), da cui è stata ottenuta la (3.6). La derivazione completa di $H_{ottimo}(z)$ può essere trovata in Appendice C.

La varianza dell'errore di fase, a valle del post-filtro ottimo, è

$$\begin{aligned} \sigma_\psi^2 = & T \int_0^{T^{-1}} S_\psi(e^{j2\pi fT}) |H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})|^2 df + \\ & + T \int_0^{T^{-1}} S_\theta(e^{j2\pi fT}) |1 - H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})|^2 df, \end{aligned} \quad (3.11)$$

dove il primo contributo è dovuto al rumore nella banda di transizione del post-filtro, mentre il secondo è causato dalle alte frequenze di $S_\theta(e^{j2\pi fT})$ che vengono tagliate nella banda di attenuazione.

Per meglio chiarire questo compromesso tra rumore non attenuato alle basse frequenze e parte utile tagliata alle alte, si riportano due esempi in Fig.3.2, ottenuti per una 4-QAM, con roll-off α pari a 0.25 e con pre-filtro adattato (MF).

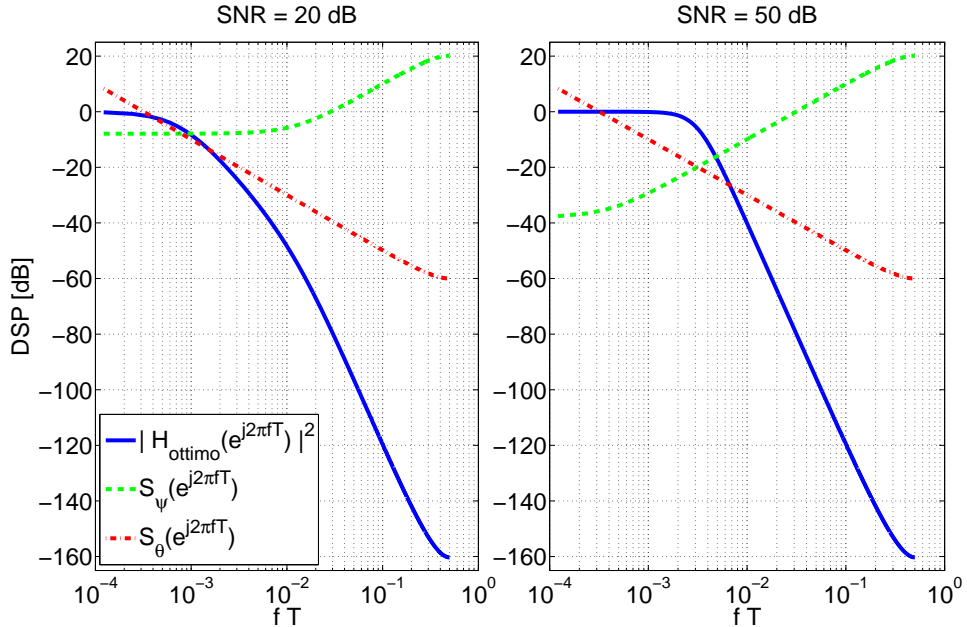


Figura 3.2: Risposta in frequenza del post-filtro ottimo, realizzato per $SNR = \{20, 50\}$ dB; 4-QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.

3.2. Post-filtro ottimo $H_{\text{ottimo}}(e^{j2\pi fT})$

In entrambi i casi è evidente come venga realizzato il post-filtro ottimo: esso mantiene funzione di trasferimento piatta (banda di transizione) fintanto che il termine desiderato $S_{\theta}(e^{j2\pi fT})$ è il dominante, mentre attenua (banda attenuata) quando il contributo di rumore $S_{\psi}(e^{j2\pi fT})$ lo supera. Nella figura a sinistra, per la quale il valore di SNR è minore, si può osservare tanto il contributo di rumore bianco dovuto a NxN e SxN, quanto quello a +20 dB/decade di SxS: nella zona di NxN+SxN il post-filtro scende a -40 dB/decade, mentre in quella di SxS va a -80 dB/decade. Nella figura a destra, invece, il termine SxS domina a tutte le frequenze poiché è stata ottenuta con 50 dB di SNR; conseguenza di ciò è la realizzazione di un post-filtro con i poli coincidenti per avere un'attenuazione di 80 dB/decade oltre la frequenza di taglio, ossia la frequenza alla quale $S_{\theta}(e^{j2\pi fT})$ e $S_{\psi}(e^{j2\pi fT})$ si uguagliano.

Per completezza si mostra la risposta in frequenza del post-filtro ottimo realizzato sempre per una 4 – QAM, con roll-off α pari a 0.25, ma con pre-filtro ottimizzato (PO).

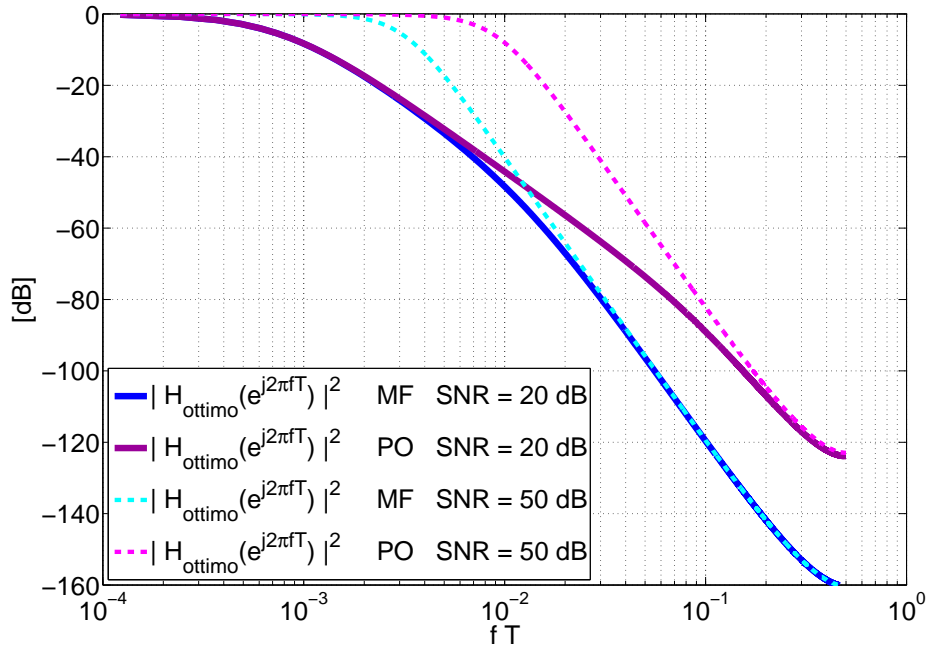


Figura 3.3: Confronto tra post-filtro ottimo con pre-filtro MF e pre-filtro PO, realizzati per $\text{SNR} = \{20, 50\}$ dB; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

3.2. Post-filtro ottimo $H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})$

In Fig.3.3 sono messe a confronto le risposte in frequenza dei filtri ottimi quando i pre-filtri sono MF e PO, per SNR pari a 20 e 50 dB. Nella banda di frequenze in cui il termine di rumore dominante è il *self-noise* per il caso MF, i post-filtri appaiono giustamente diversi, in quanto nel caso di PO il termine SxS è stato almeno parzialmente eliminato. Tale differenza è particolarmente evidente ad alto SNR, quando la componente di *self-noise* domina a tutte le frequenze nel caso di MF, come mostrato già in Fig.3.2,

3.2.1 Valutazioni su post-filtro ottimo e sub-ottimo

In letteratura, come detto, non è presente il calcolo del post-filtro ottimo in quanto non è altresì presente un'analisi completa del termine di *self-noise* (SxS). Occorre spiegare le motivazioni per le quali non è stato realizzato precedentemente un studio più approfondito volto alla progettazione del post-filtro ottimo, o quantomeno il motivo per cui tale filtro non sia stato utilizzato. La ragione risiede nel fatto che in letteratura si utilizza solitamente un post-filtro sub-ottimo a singola o doppia media mobile, realizzato trascurando la presenza del *self-noise*, il quale fornisce prestazioni ovviamente inferiori rispetto al post-filtro ottimo, ma la cui complessità realizzativa è molto più bassa. Ai valori di SNR di interesse il peggioramento rispetto al post-filtro ottimo è limitato.

Implementare il post-filtro ottimo come FIR, con risposta all'impulso pari attorno all'origine e traslata in modo opportuno per renderla causale, risulta computazionalmente non efficiente da un punto di vista di risorse *hardware*. Si potrebbe progettare un'implementazione efficiente, ma la sua realizzazione non è immediata poiché la risposta all'impulso è, appunto, una funzione esponenziale decrescente *two-sided*, con durata elevata, e necessita quindi lo studio di un'implementazione opportuna con un'accurata gestione dei ritardi. L'utilizzo di filtri sub-ottimi, come si mostrerà in seguito, permette di raggiungere prestazioni prossime alle ottime, con il vantaggio di una complessità realizzativa inferiore a quella richiesta per il filtro ottimo. Pertanto non appare necessario utilizzare il filtro di *post-detection* ottimo, perlomeno per lo scopo di questa tesi.

Si desidera, quindi, partire dal filtro ottimo progettato per procedere

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

all'ottimizzazione dei post-filtri a singola e doppia media mobile (MA), dimensionandoli in modo opportuno grazie all'analisi eseguita su tutte le componenti di rumore di fase. Il filtro ottimo viene utilizzato come termine di paragone per valutare la bontà delle soluzioni sub-ottime proposte.

Inoltre si sottolinea la possibilità di dimostrare che, come supposto ed anticipato, il miglioramento offerto dal filtro ottimo rispetto ai sub-ottimi è molto piccolo ai valori di SNR di interesse. Pertanto l'utilizzo del post-filtro ottimo risulta ragionevole solo in circostanze specifiche, tipicamente in casi in cui il valore di SNR è molto alto e siano richieste prestazioni ottimali del sincronizzatore, anche a costo di una complessità realizzativa maggiore. In tutti gli altri casi i post-filtri sub-ottimi, ottimizzati come mostrato nella sezione seguente, risulteranno invece adeguati. L'analisi delle prestazioni, che conferma quanto qui anticipato, viene riportata nel quinto capitolo.

3.3 Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

L'utilizzo di un filtro sub-ottimo a singola o doppia media mobile ottimizzato risulta la scelta migliore nella maggioranza dei casi, in quanto esso appare un buon compromesso tra prestazioni e complessità.

Nei paragrafi seguenti si riportano due possibili modalità per ottimizzare i filtri MA: eguagliando la loro banda equivalente di rumore con quella del post-filtro ottimo o procedendo empiricamente.

Prima di proseguire, tuttavia, si desidera argomentare quanto affermato circa la possibilità di un'implementazione efficiente dei filtri sub-ottimi a media mobile.

Si consideri, per esempio, la singola media mobile, avente risposta all'impulso rettangolare pari a

$$h_{1MA}(t) = \begin{cases} 1/D & |t| \leq D/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.12)$$

L'operazione di media mobile effettua, appunto, la media, ossia somma D valori in ingresso e li divide per D . Tuttavia, per D elevato, questa operazione

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

diviene onerosa se non implementata in modo efficiente. Per ovviare a tale problema si realizza uno schema ricorsivo per effettuare la media, in modo tale da riutilizzare le somme già eseguite: ad ogni passo viene sottratto il termine uscente dalla finestra di calcolo e viene, invece, aggiunto quello entrante. Ciò è mostrato in Fig.3.4 e può essere formalizzato nel modo seguente:

$$\text{out}[k] = \text{out}[k - 1] + \frac{\text{in}[k] - \text{in}[k - D]}{D}, \quad (3.13)$$

dove $\text{out}[k]$ è il k -esimo campione in uscita dal post-filtro a singola media mobile, $\text{in}[k]$ il k -esimo campione in ingresso.

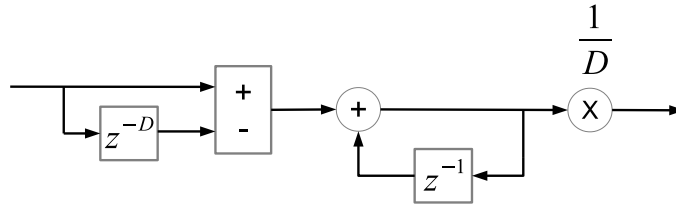


Figura 3.4: Schema a blocchi del filtraggio a singola media mobile implementato in modo ricorsivo.

3.3.1 Ottimizzazione tramite uguaglianza tra bande di rumore

Avendo calcolato il post-filtro ottimo $H_{\text{ottimo}}(e^{j2\pi fT})$ è possibile sfruttare tale conoscenza per dimensionare i post-filtri sub-ottimi a singola o doppia media mobile. Come illustrato nella sezione precedente, dimensionare in modo opportuno la larghezza della banda di transizione è fondamentale per ottenere buone prestazioni del sincronizzatore. L'idea, quindi, è quella di imporre che i post-filtri sub-ottimi abbiano la stessa banda equivalente di rumore del filtro ottimo, in quanto quest'ultimo soddisfa al meglio il compromesso tra rumore non attenuato alle basse frequenze e parte utile tagliata alle alte.

La banda equivalente di rumore di un filtro è definita come la banda del filtro ideale passa-basso che, data la potenza in entrata P_{in} in entrambi i filtri, fornisce la stessa potenza in uscita P_{out} .

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

Pertanto la banda equivalente di rumore unilatera del filtro ottimo risulta

$$\begin{aligned} B_{eq,H_{ott}} &= \frac{1}{2|H_{ottimo}(1)|^2} \int_0^{T^{-1}} |H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})|^2 df \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T^{-1}} |H_{ottimo}(e^{j2\pi fT})|^2 df . \end{aligned} \quad (3.14)$$

La banda equivalente di rumore unilatera di un filtro a singola media mobile è

$$B_{eq,1MA} = \frac{1}{2D_{Beq,1MA}} , \quad (3.15)$$

mentre quella unilatera di un filtro a doppia media mobile risulta

$$B_{eq,2MA} = \frac{1}{3D_{Beq,2MA}} , \quad (3.16)$$

con $D_{Beq,1MA}$ e $D_{Beq,2MA}$ durata dei filtri rettangolari nel tempo.

L'ottimizzazione realizzata tramite uguaglianza delle bande normalizzate di rumore è sicuramente un metodo semplice e veloce per dimensionare i post-filtri a singola e doppia media mobile, tuttavia non garantisce l'ottenimento delle prestazioni migliori possibili. Infatti questa prima tecnica di ottimizzazione, sebbene sia efficace per il post-filtro a doppia media mobile, non risulta adeguata per la singola media mobile quando il valore di SNR è medio-alto; ciò viene mostrato nel paragrafo 3.3.3 e confermato dalle simulazioni, i cui risultati sono riportati nel quinto capitolo.

3.3.2 Ottimizzazione tramite ricerca empirica

La seconda modalità di ottimizzazione proposta consiste nella ricerca empirica del dimensionamento opportuno dei filtri MA, valutando quindi quale durata $D_{emp,1MA}$ e $D_{emp,2MA}$ dei filtri sia da preferire. Ciò può essere formulato come segue

$$D_{emp,1MA} = \arg \min_D \{ \sigma_{\psi,1MA}^2(D) \} \quad (3.17)$$

$$D_{emp,2MA} = \arg \min_D \{ \sigma_{\psi,2MA}^2(D) \} . \quad (3.18)$$

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

Questa tecnica ha il vantaggio di garantire l'ottenimento delle migliori prestazioni raggiungibili tramite filtri sub-ottimi. Il costo risiede nel fatto che è necessario eseguire la ricerca della dimensione ottima D_{emp} , considerando tutte le lunghezze D possibili, per ogni valore di SNR; è tuttavia possibile, ma non immediato, cercare una scrittura in forma chiusa di σ_ψ^2 in funzione di D e selezionare, quindi, D_{emp} cercando lo zero della derivata della varianza. Si precisa che, in realtà, la ricerca empirica permette di raggiungere le prestazioni migliori possibili per i filtri MA solo se nelle (3.17) e (3.18) viene calcolata la varianza σ_ψ^2 senza introdurre approssimazione alcuna. In questa tesi, tuttavia, viene sempre utilizzata l'equazione approssimata (2.28); si valutano nel paragrafo seguente le conseguenze di tale scelta.

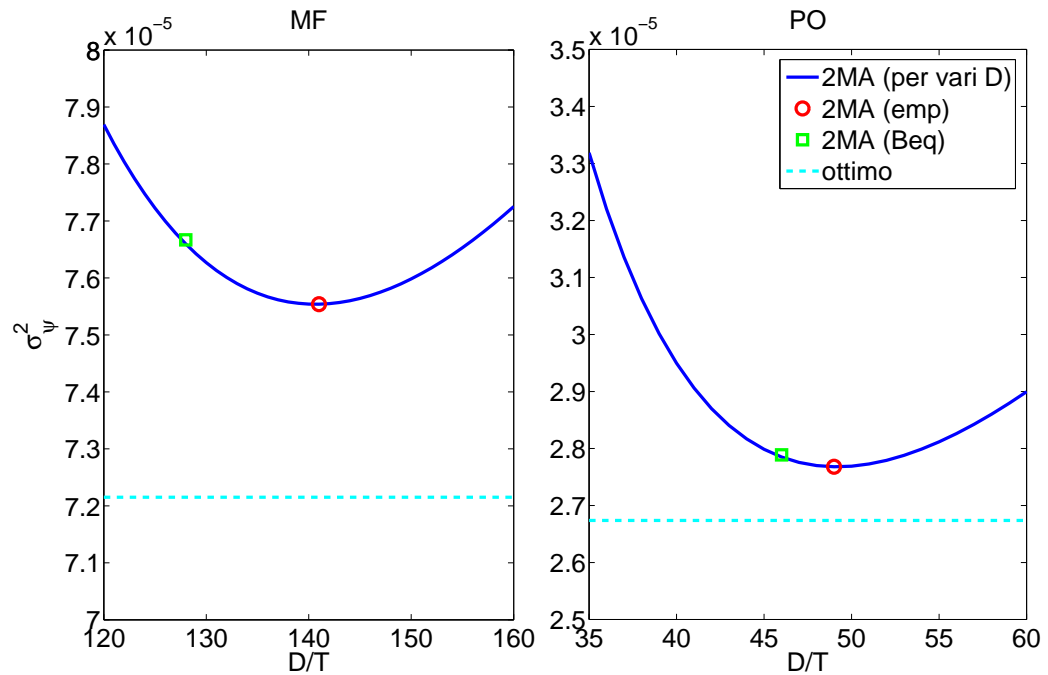


Figura 3.5: Ottimizzazione empirica del post-filtro a doppia media mobile con pre-filtri MF e PO; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e SNR = 50 dB.

In Fig.3.5 si riporta un esempio di ottimizzazione tramite ricerca empirica, eseguita per il post-filtro a doppia media mobile, per una 4 – QAM, con roll-off 0.25, SNR di 50 dB, sia con pre-filtro adattato MF, sia con quello ottimizzato PO. In figura si riportano, per confronto, anche i valori delle

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

σ_ψ^2 ottenute tramite post-filtro ottimo ed attraverso la precedente tecnica di ottimizzazione.

Nel paragrafo seguente verranno mostrati e discussi gli effetti di questa seconda modalità di ottimizzazione.

3.3.3 Effetti dell'ottimizzazione

In Fig.3.6 sono mostrate le risposte in frequenza del post-filtro ottimo e dei post-filtri a singola e doppia media mobile, ottimizzati con le due tecniche presentate nei paragrafi precedenti. La figura è stata ottenuta per una 4-QAM, con roll-off pari a 0.25, con SNR di 50 dB e con pre-filtro adattato MF.

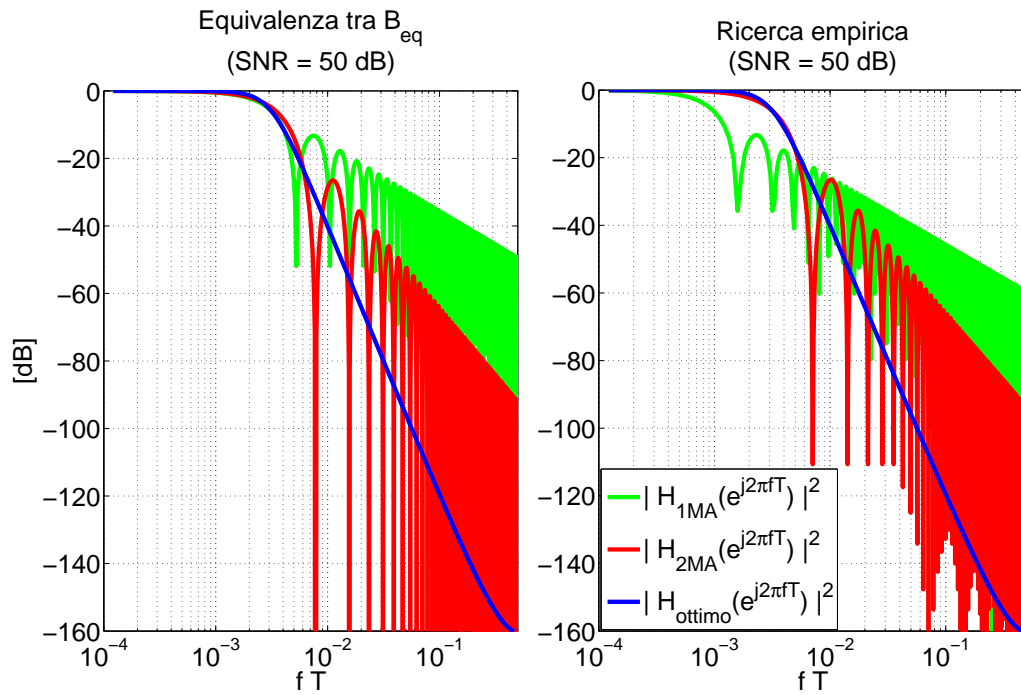


Figura 3.6: Esempio di ottimizzazione dei post-filtri a singola e doppia MA, tramite le due tecniche discusse; 4-QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.

Per il caso considerato in figura, l'ottimizzazione del filtro a doppia media mobile tramite le due diverse modalità discusse conduce a risposte in frequenza simili. Non altrettanto accade per il post-filtro a singola media mobile,

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

per il quale, come anticipato, la prima tecnica di ottimizzazione non risulta adeguata.

Nelle tabelle 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 vengono riportate, per diversi valori di SNR, le lunghezze dei filtri a media mobile ottenute tramite le due tecniche di ottimizzazione, sia per pre-filtro MF sia per quello PO; il riferimento è sempre una 4 – QAM con roll-off α pari a 0.25. Inoltre nelle tabelle viene riportato anche il confronto tra la varianza σ_ψ^2 ottenuta a valle del post-filtro ottimo e quelle ricavate dall'utilizzo dei post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati.

Tabella 3.1: Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dal post-filtro a doppia media mobile ottimizzato; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.

SNR [dB]	D_{Beq}	$\sigma_{\psi,Beq}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]	D_{emp}	$\sigma_{\psi,emp}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]
10	1769	0.1423	1713	0.1401
20	539	0.1390	520	0.1364
30	199	0.0769	193	0.0741
40	135	0.1811	145	0.1502
50	128	0.2637	141	0.1993

La tabella 3.1 mostra come le due ottimizzazioni del post-filtro a doppia media mobile, quando il pre-filtro è quello adattato, diano risultati molto simili; le loro prestazioni, inoltre, appaiono molto vicine a quelle del post-filtro ottimo. Si evidenzia però una tendenza dell'ottimizzazione empirica a mantenere la banda leggermente più larga di quanto indichi la prima modalità di ottimizzazione a SNR medio-bassi, più stretta in corrispondenza di SNR elevati.

Le stesse osservazioni valgono anche per la tabella 3.2, ottenuta con pre-filtro ottimizzato (PO).

Si conclude, quindi, che per il post-filtro a doppia media mobile entrambe le tecniche di ottimizzazione sono sfruttabili, sebbene la seconda proposta dia luogo a prestazioni migliori. Inoltre si sottolinea come, per ambedue i pre-filtri ed entrambe le tecniche di ottimizzazione, i risultati raggiunti siano

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

prossimi a quelli offerti dal post-filtro ottimo, da cui si discostano mediamente per meno di 0.2 dB.

Tabella 3.2: Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dal post-filtro a doppia media mobile ottimizzato; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro PO.

SNR [dB]	D_{Beq}	$\sigma_{\psi,Beq}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]	D_{emp}	$\sigma_{\psi,emp}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]
10	1769	0.1424	1713	0.1401
20	536	0.1424	519	0.1401
30	170	0.1379	164	0.1351
40	65	0.0719	63	0.0698
50	46	0.1829	49	0.1503

Tabella 3.3: Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dal post-filtro a singola media mobile ottimizzato; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.

SNR [dB]	D_{Beq}	$\sigma_{\psi,Beq}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]	D_{emp}	$\sigma_{\psi,emp}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]
10	2623	0.6851	2320	0.6456
20	808	1.1978	872	1.1813
30	298	6.4310	648	3.8860
40	202	11.2157	626	5.9587
50	191	12.0545	620	6.3459

La tabella 3.3 mostra invece gli effetti delle due ottimizzazioni suggerite quando il post-filtro è a singola media mobile ed il pre-filtro è quello adattato.

Le due tecniche conducono a risultati sensibilmente diversi, soprattutto a valori elevati di SNR, come anticipato nella sezione precedente. Il problema è legato al fatto che l'ottimizzazione tramite uguaglianza delle bande equivalenti di rumore ha dei limiti di validità: essa non risulta adeguata per il caso di post-filtro a singola media mobile poiché la risposta in frequenza di

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

tale filtro differisce sensibilmente da quella del post-filtro ottimo; non appare pertanto sensato utilizzarla come se fosse una buona approssimazione del post-filtro ottimo e dimensionarla di conseguenza attraverso la prima tecnica di ottimizzazione discussa.

È inoltre presente un problema anche per quanto riguarda la singola media mobile ottimizzata empiricamente: l'analisi teorica risulta una sovra-stima della varianza σ_ψ^2 a causa dell'approssimazione (3.6). Tale approssimazione sul termine SxS, come già sottolineato, non è buona alle alte frequenze e ciò si traduce in un degrado delle prestazioni quando il *self-noise* diviene il contributo di rumore dominante, ossia ad alto SNR. Il filtro ottimo e quello a doppia media mobile non risentono in maniera significativa della cattiva approssimazione poiché a quelle frequenze attenuano molto; non altrettanto accade per il post-filtro a singola media mobile. Si precisa, quindi, che le simulazioni mostreranno prestazioni migliori di quelle qui calcolate, poiché l'analisi risulta essere, appunto, una sovra-stima.

Tabella 3.4: Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dal post-filtro a singola media mobile ottimizzato; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro PO.

SNR [dB]	D_{Beq}	$\sigma_{\psi,Beq}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]	D_{emp}	$\sigma_{\psi,emp}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]
10	2653	0.6694	2297	0.6248
20	804	0.6767	700	0.6344
30	255	0.9014	247	0.8993
40	97	3.8223	159	2.8180
50	69	7.2130	149	4.4932

Come nel caso precedente, anche la tabella 3.4 mostra come le due ottimizzazioni del post-filtro a singola media mobile, con pre-filtro PO, diano luogo a risultati sensibilmente diversi, soprattutto a valori elevati di SNR. La motivazione è analoga a quanto spiegato per il caso di pre-filtro MF: l'utilizzo della prima tecnica di ottimizzazione non è adeguato, mentre la seconda fornisce risultati sovra-stimati. Si precisa, tuttavia, che la sovra-stima sarà ancora maggiore poiché l'approssimazione è peggiore nel caso di PO, come

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

evidente nella Fig.2.10, e pertanto si avrà un distacco ancora più marcato tra calcolo analitico e simulazioni.

Avendo eseguito l'analisi completa del termine di *self-noise* si potrebbe risolvere semplicemente il problema della sovra-stima, tanto nel caso di pre-filtro MF quanto in quello di pre-filtro PO. Sarebbe infatti sufficiente utilizzare la vera $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT})$ invece della sua approssimazione. Tuttavia ciò porterebbe ad una perdita considerevole di semplicità, pertanto non si è reputato utile, per lo scopo di questa tesi, ripetere l'analisi senza introdurre approssimazioni e ci si è invece limitati ad evidenziare l'incongruenza e a spiegarne le cause.

Effetto dell'ottimizzazione empirica per 256 – QAM

Sino ad ora sono stati mostrati gli effetti delle due tecniche di ottimizzazione adottate prendendo come riferimento una 4 – QAM. È interessante mostrare brevemente anche i risultati per schemi di modulazione con valori più elevati di M , soprattutto motivati dal fatto che il contributo SxS diviene rilevante a valori di SNR medio-alti.

Poiché è già stato appurato come sia la seconda la modalità di ottimizzazione da preferire, nel seguito si riportano gli effetti della sola tecnica empirica.

Si considerino le tabelle 3.5 e 3.6, ottenute rispettivamente per pre-filtro MF e PO, con post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati empiricamente.

Tabella 3.5: Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dai post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati; 256–QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.

SNR [dB]	$D_{emp,1MA}$	$\sigma_{\psi,1MA}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]	$D_{emp,2MA}$	$\sigma_{\psi,2MA}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]
10	2328	0.6522	1713	0.1401
20	912	1.3071	521	0.1353
30	705	4.1585	199	0.0715
40	685	6.1073	155	0.1562
50	680	6.4505	151	0.2004

3.3. Ottimizzazione del post-filtro a singola e doppia media mobile

Tabella 3.6: Confronto tra le prestazioni offerte dal post-filtro ottimo e quelle offerte dai post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati; 256-QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro PO.

SNR [dB]	$D_{emp,1MA}$	$\sigma_{\psi,1MA}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]	$D_{emp,2MA}$	$\sigma_{\psi,2MA}^2/\sigma_{\psi,ott}^2$ [dB]
10	2297	0.6248	1713	0.1401
20	700	0.6352	519	0.1348
30	249	0.9179	164	0.1348
40	163	2.8811	64	0.0693
50	153	4.5318	50	0.1519

Come previsto, nel caso di pre-filtro PO, il quale attenua il termine di *self-noise*, i risultati sono pressoché identici a quelli precedentemente mostrati per il caso 4-QAM, tanto per la singola media mobile, quanto per la doppia.

Nel caso di pre-filtro MF, invece, vi sono delle lievi differenze, dovute al fatto che il termine SxS è maggiore per M grandi, come già evidenziato nella Fig.2.12. Questo fa sì che il filtro sub-ottimo abbia banda più stretta, soprattutto in corrispondenza dei valori di SNR in cui il *self-noise* è rilevante e soprattutto per la singola MA, i cui lobi laterali attenuano meno. La differenza, tuttavia, non è sostanziale, come confermato dalle varianze σ_{ψ}^2 .

Capitolo 4

Altri sincronizzatori dell'istante di campionamento

In questo capitolo si svolge l'analisi del *self-noise* e la progettazione del post-filtro per i sincronizzatori di simbolo di Serpedin e di Gardner, in modo analogo a quanto fatto nei precedenti capitoli per il sincronizzatore di Oerder e Meyr.

4.1 Sincronizzatore di Serpedin

Come spiegato nel paragrafo 1.1.4, il sincronizzatore dell'istante di campionamento di Serpedin è *feedforward*, ossia lavora senza retroazione, analogamente a quanto avviene per il sincronizzatore di Oerder e Meyr (O&M). Lo schema di Serpedin ha però il vantaggio di necessitare solo di due campioni per tempo di simbolo T , a differenza del precedente che ne richiede quattro. Inoltre è stato mostrato come l'algoritmo di Serpedin sia un'approssimazione di quello di O&M, pertanto appare superfluo svolgere nuovamente l'analisi teorica del contributo di rumore di fase SxS e la progettazione del post-filtro, poiché si giungerebbe agli stessi risultati ottenuti per O&M. Ciò viene confermato dalle simulazioni, riportate nel capitolo seguente. Poiché le simulazioni sono state svolte anche per il sincronizzatore di Serpedin, appare tuttavia opportuno mostrare lo schema a blocchi che è stato implementato ed utilizzato: esso è riportato in Fig.4.1.

4.1. Sincronizzatore di Serpedin

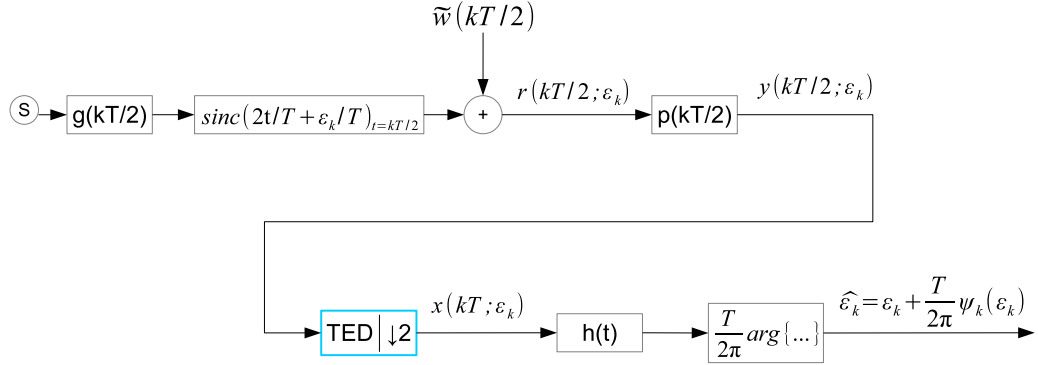


Figura 4.1: Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di Serpedin.

Il filtro in trasmissione $g(t)$ è analogo a quello presentato per O&M, così come il pre-filtro $p(t)$ adattato od ottimizzato (MF o PO). Il TED è frutto della combinazione di O&M e Gardner e fornisce in uscita

$$x_k(\epsilon_k) = x(kT; \epsilon_k) = \Re\{x_k(\epsilon_k)\} + j\Im\{x_k(\epsilon_k)\}, \quad (4.1)$$

con

$$\Re\{x_k(\epsilon_k)\} = |y(kT; \epsilon_k)|^2 - |y(kT - T/2; \epsilon_k)|^2 \quad (4.2)$$

$$\Im\{x_k(\epsilon_k)\} = \frac{A}{A_{GA}} \Re\{y^*(kT - T/2; \epsilon_k)(y(kT; \epsilon_k) - y(kT - T; \epsilon_k))\}. \quad (4.3)$$

L'ampiezza A_{GA} è l'ampiezza media dell'uscita del TED del sincronizzatore di Gardner e, nel caso di pre-filtro MF o PO, vale

$$A_{GA} = \left| \frac{4C_2}{T} \int_0^{T^{-1}} e^{-j\pi\beta T} V(\beta) V^* \left(\frac{1}{T} - \beta \right) d\beta \right| = \frac{4 \sin(\pi\alpha/2)}{\pi(4 - \alpha^2)}, \quad (4.4)$$

con C_2 pari a $E\{|c_i|^2\}$, fattore di roll-off α e $V(f)$ risposta in frequenza della cascata di filtro in trasmissione e pre-filtro in ricezione. In Fig.4.1 il canale è stato modellizzato in modo analogo a quanto fatto per O&M. Con $h(t)$ è stata indicata la risposta all'impulso del post-filtro e, come al solito, $\psi_k(\epsilon_k)$ è il rumore di fase.

4.2 Sincronizzatore di Gardner

Il sincronizzatore di simbolo di Gardner è retroazionato (*feedback*), come spiegato nel paragrafo 1.1.3, ed il suo schema a blocchi è riportato in Fig.4.2.

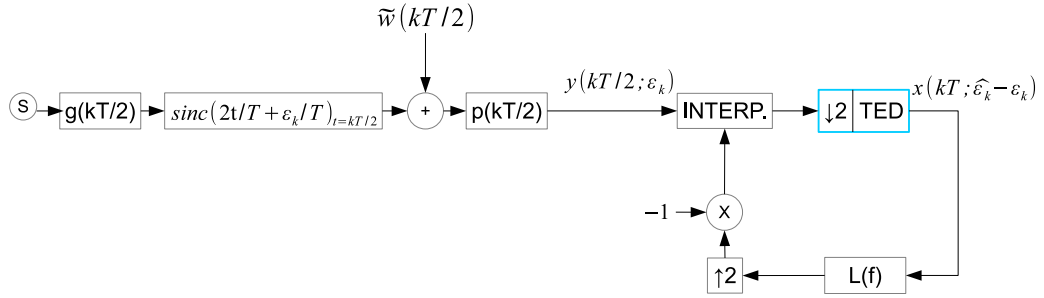


Figura 4.2: Schema a blocchi del sincronizzatore di simbolo di Gardner.

Come per il Serpedin, anche qui il filtro in trasmissione $g(t)$ è analogo a quello presentato per O&M, ed altrettanto lo è il pre-filtro $p(t)$ adattato od ottimizzato (MF o PO). Il post-filtro passa-basso dell'anello ha risposta in frequenza $L(f)$.

A differenza dei precedenti schemi, nel sincronizzatore di Gardner il TED fornisce in uscita direttamente l'errore di sincronizzazione grazie alla retroazione, per cui a valle del TED si ottiene

$$\begin{aligned}
 e_k &= x(kT; \hat{\epsilon}_k - \epsilon_k) \\
 &= \Re\{y^*(kT - T/2; \hat{\epsilon}_k - \epsilon_k)(y(kT; \hat{\epsilon}_k - \epsilon_k) - y(kT - T; \hat{\epsilon}_k - \epsilon_k))\} \\
 &= E\{e_k\} + \nu_k \\
 &= A_{GA} \sin\left(\frac{2\pi(\hat{\epsilon}_k - \epsilon_k)}{T}\right) + \nu_k \\
 &\simeq A_{GA} \rho_k \sin(\psi_k) , \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

dove sono state evidenziate la parte deterministica $E\{e_k\}$ ed il rumore casuale ν_k , il quale è stato poi scomposto in ρ_k e ψ_k che costituiscono, rispettivamente, la modulazione indesiderata di ampiezza e fase. L'ampiezza media della sinusoide vale invece A_{GA} , ottenibile come nella (4.4).

4.2. Sincronizzatore di Gardner

Il rumore di fase che si desidera caratterizzare è approssimabile come

$$\psi_k \simeq \frac{e_k}{A_{GA}\rho_k} \simeq \frac{e_k}{A_{GA}}. \quad (4.6)$$

Si sottolinea che, a differenza del caso di O&M, per studiare il rumore di fase non è necessario introdurre alcuna rotazione $e^{j2\pi\epsilon/T}$ poiché qui la retroazione fa sì che i campioni in ingresso al sincronizzatore abbiano errore di fase sempre attorno allo 0, perlomeno durante il *tracking* (la fase di acquisizione non è argomento di questa tesi e, come tale, viene omessa). Per progettare il post-filtro ottimo $L(e^{j2\pi fT})$ è sufficiente quindi caratterizzare l'errore di fase tempo-variante residuo, offerto direttamente in uscita dal TED.

4.2.1 Autocorrelazione e densità spettrale di potenza del rumore di fase

Per quanto riguarda i contributi di rumore di fase NxN e SxN, essi sono ricavabili in maniera analoga a quanto eseguito per il sincronizzatore di O&M, ancora approssimabili come bianchi sulla banda del post-filtro. Si ottiene quindi

$$\beta_{N \times N, GA} = S_{\psi, N \times N}(e^{j2\pi fT})|_{f=0} \quad (4.7)$$

$$\beta_{S \times N, GA} = S_{\psi, S \times N}(e^{j2\pi fT})|_{f=0}, \quad (4.8)$$

i quali, nel caso di pre-filtro MF o PO, valgono

$$\beta_{N \times N, GA} = \frac{\alpha}{\text{SNR}^2 A_{GA}^2} \quad (4.9)$$

$$= \frac{\alpha\pi^2(4 - \alpha^2)^2}{16 \sin^2(\pi\alpha/2)\text{SNR}^2} \quad (4.10)$$

$$\simeq \frac{4}{\alpha \text{SNR}^2} \quad (4.11)$$

e

$$\beta_{S \times N, GA} = \frac{\alpha}{\text{SNR} A_{GA}^2} \quad (4.12)$$

$$= \frac{\alpha\pi^2(4 - \alpha^2)^2}{16 \sin^2(\pi\alpha/2)\text{SNR}} \quad (4.13)$$

$$\simeq \frac{4}{\alpha \text{SNR}}. \quad (4.14)$$

4.2. Sincronizzatore di Gardner

Per quanto riguarda il termine di rumore SxS (*self-noise*), come evidenziato anche in [6], è invece necessario calcolare l'autocorrelazione

$$R_{\psi, S \times S, \text{GA}}(mT) = \frac{1}{A_{\text{GA}}^2} E\{e_k \cdot e_{k+m}\}, \quad (4.15)$$

da cui ricavare la densità spettrale di potenza del *self-noise* come

$$S_{\psi, S \times S, \text{GA}}(e^{j2\pi fT}) = \mathcal{F}_m\{R_{\psi, S \times S, \text{GA}}(mT)\}; \quad (4.16)$$

la derivazione completa può essere trovata in Appendice D.

Il rumore di fase SxS è idealmente nullo quando si utilizza il pre-filtro ottimizzato PO, poiché nel Gardner tale pre-filtro riesce ad eliminare completamente il contributo di *self-noise* grazie al fatto che il sistema è retroazionato e che, quindi, i campioni in ingresso al TED siano già stati precedentemente corretti. Nel proseguo, pertanto, si farà riferimento solo al caso con pre-filtro MF quando si parlerà di contributo SxS.

Come nel caso di O&M, il termine $S_{\psi, S \times S, \text{GA}}(e^{j2\pi fT})$ esibisce una pendenza di 20 dB/decade alle frequenze di interesse (le basse frequenze che verranno selezionate dal post-filtro passa-basso), nel caso di pre-filtro adattato. Perciò si introduce l'approssimazione

$$\tilde{S}_{\psi, S \times S, \text{GA}}(e^{j2\pi fT}) = \beta_{S \times S, \text{GA}}(1 - e^{j2\pi fT})(1 - e^{-j2\pi fT}) \quad (4.17)$$

e si ottiene il valore opportuno di $\beta_{S \times S, \text{GA}}$ come mostrato in Appendice D, il quale risulta

$$\beta_{S \times S, \text{GA}} = \frac{1}{2A_{\text{GA}}^2} \left\{ \left[B v^2(T/2) + C \sum_{l=-\infty}^{\infty} v(lT-T/2)v(lT+T/2) \right] + C \sum_{l=1}^{\infty} l^2 [v(lT+T/2) - v(lT-T/2)]^2 \right\}, \quad (4.18)$$

dove $B = 4(A_4 - 3A_2^2)$ e $C = 4A_2^2$.

In Fig.4.3 è mostrata la densità spettrale di potenza del rumore di fase dovuto al *self-noise*, ottenuta per una 4 - QAM, con pre-filtro MF e per diversi valori del roll-off α . In figura sono anche riportate le approssimazioni del termine SxS come nella (4.17).

4.2. Sincronizzatore di Gardner

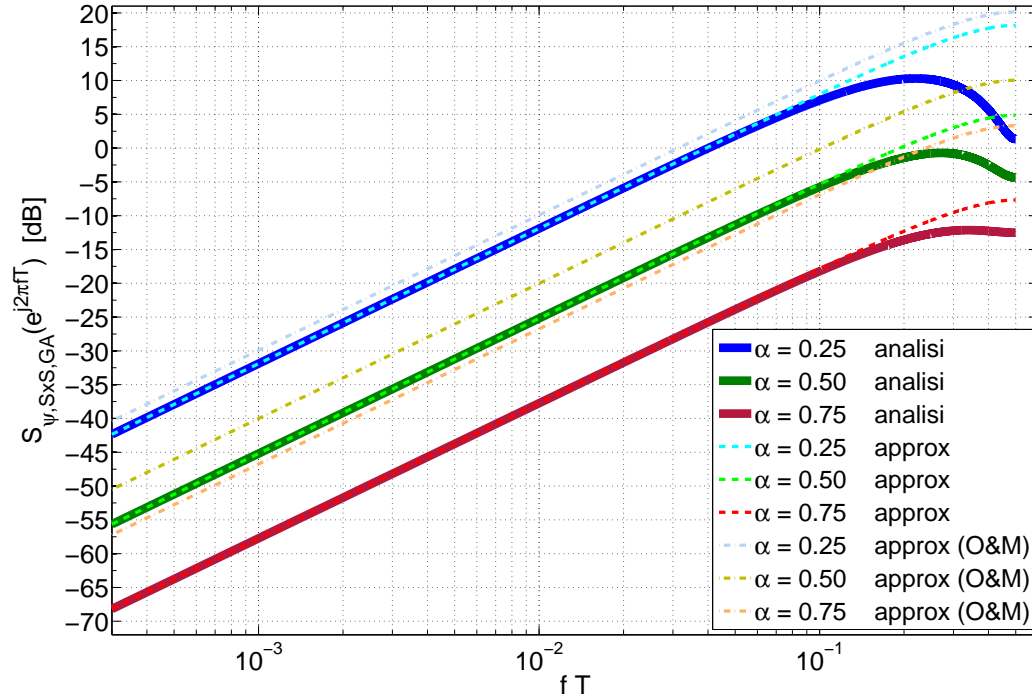


Figura 4.3: Densità spettrale di potenza del rumore di fase $S_{\psi, SxS}$, per diversi valori di roll-off α ; 4 – QAM e pre-filtro MF.

Come per il sincronizzatore di O&M si vede che l'approssimazione introdotta è buona alle basse frequenze, ma non altrettanto alle alte; tuttavia ancora una volta essa risulta adeguata poiché il post-filtro passa-bassa selezionerà solo le basse frequenze. È inoltre evidente come l'approssimazione sia migliore per valori di roll-off più elevati. Per tali valori di α il termine S_{xS} ha densità spettrale di potenza minore, a causa del fatto che si smorzano più velocemente le oscillazioni di $v(t)$, cascata del filtro in trasmissione $g(t)$ e del pre-filtro in ricezione $p(t)$.

In figura, per confronto, sono riportate anche le $S_{\psi, SxS}(e^{j2\pi fT})$ ottenute per il sincronizzatore di O&M e precedentemente illustrate in Fig.2.11, allo scopo di sottolineare come la retroazione dello schema di Gardner permetta di ridurre il *self-noise*.

In Fig.4.4 è riportato il valore di $\beta_{SxS, GA}$ dell'equazione (4.18) al variare del roll-off α , mostrato per il caso di pre-filtro adattato MF, per una M – QAM con M pari a 4 e 256.

4.2. Sincronizzatore di Gardner

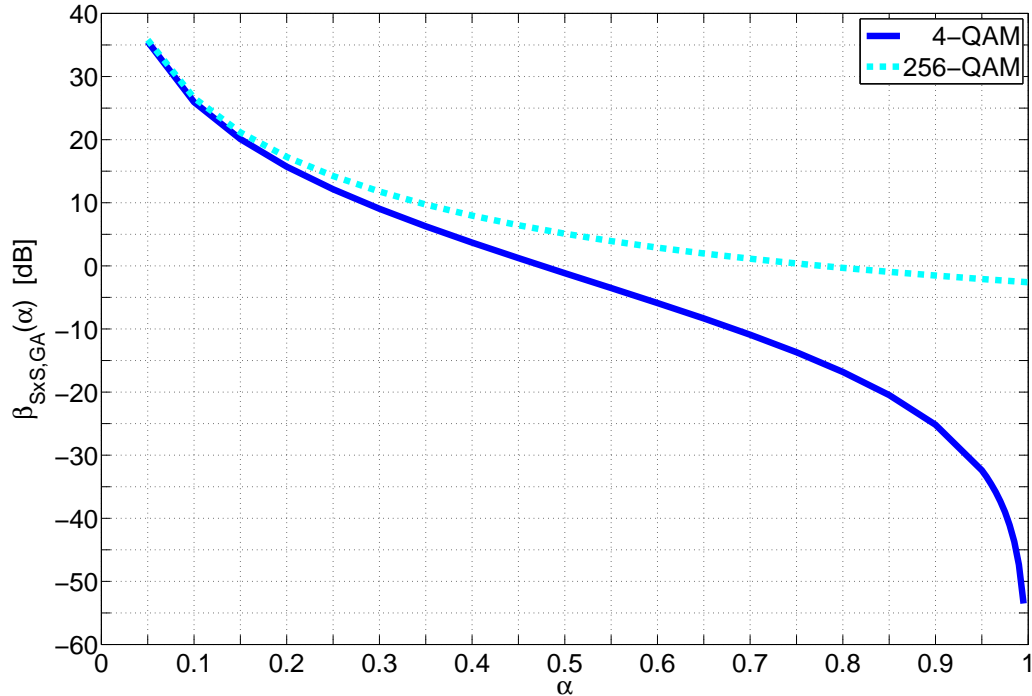


Figura 4.4: Valore di $\beta_{S \times S, GA}$ al variare del roll-off α ; $\{4, 256\}$ – QAM e pre-filtro MF.

Si sottolinea ancora come al crescere del roll-off il contributo di rumore dovuto al *self-noise* si riduca e come, ovviamente, esso sia maggiore per valori più elevati di M .

4.2.2 Post-filtro

Per il sincronizzatore di Gardner è stata applicata la teoria della predizione lineare con il metodo formulato da Bode e Shannon per ricavare la funzione di trasferimento ottima del filtro dell'anello PLL.

È necessario distinguere tra il caso di pre-filtro adattato (MF) e pre-filtro ottimizzato (PO), poiché il secondo elimina la componente di rumore S_{xS} , pertanto il post-filtro ottimo $L(e^{j2\pi fT})$ sarà differente nei due casi. La derivazione del filtro ottimo per il pre-filtro ottimizzato può essere trovata in [12], i cui risultati vengono brevemente riassunti nel paragrafo seguente per completezza.

Si lavora nel dominio z per comodità. La densità spettrale di potenza della

4.2. Sincronizzatore di Gardner

fase da stimare è la (3.5), ossia

$$S_{\theta}(z) = \frac{\gamma^2}{(1-z)(1-z^{-1})}. \quad (4.19)$$

mentre quella del rumore risulta pari a

$$S_{\psi,GA}(z) \simeq \beta_{N \times N,GA} + \beta_{S \times N,GA} + \beta_{S \times S,GA}(1-z)(1-z^{-1}). \quad (4.20)$$

Post-filtro ottimo con pre-filtro PO

Nel caso di utilizzo di pre-filtro ottimizzato come in [10], la densità spettrale di potenza del rumore di fase si riduce a

$$S_{\psi,GA}(z) \simeq \beta_{N \times N,GA} + \beta_{S \times N,GA} = S_{\psi,GA}, \quad (4.21)$$

poiché il pre-filtro elimina la componente di *self-noise*. Il post-filtro ottimo che minimizza il valore di MSE può essere calcolato seguendo [13], come mostrato in [12], trovando il filtro passa-basso del PLL con la seguente funzione di trasferimento

$$H_{ott,GA,PO}(z) = \frac{(1-z_p)z^{-1}}{1-z_pz^{-1}}. \quad (4.22)$$

Da esso si ricava la funzione di trasferimento comunemente definita ad anello aperto (*open-loop*), ossia

$$L_{PO}(z) = \frac{H_{ott,GA,PO}(z)}{1-H_{ott,GA,PO}(z)} = \frac{(1-z_p)z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad (4.23)$$

con

$$z_p = \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (4.24)$$

$$\zeta = 1 + \frac{\gamma^2}{2S_{\psi,GA}}. \quad (4.25)$$

La varianza dell'errore di fase si ottiene quindi come

$$\sigma_{\psi}^2 = \frac{\gamma^2}{1-z_p}. \quad (4.26)$$

Il filtro $L_{PO}(e^{j2\pi fT})$, ossia il filtro $L(e^{j2\pi fT})$ di Fig.4.2, viene implementato in modo efficiente come illustrato in Fig.4.5.

4.2. Sincronizzatore di Gardner

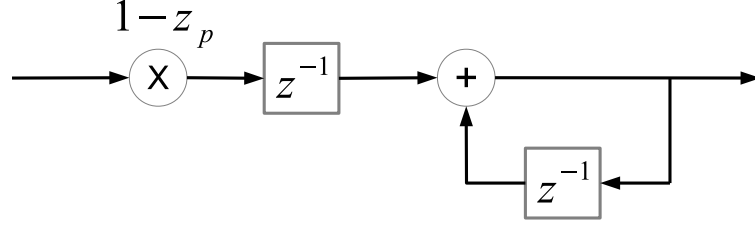


Figura 4.5: Schema a blocchi dell'implementazione di $L_{PO}(f)$ nel sincronizzatore di Gardner.

Post-filtro ottimo con pre-filtro MF

Nel caso di utilizzo di pre-filtro adattato (MF) la densità spettrale di potenza del rumore di fase è quella scritta nell'equazione (4.20) e la derivazione del post-filtro ottimo non è presente in letteratura. Per ricavare la sua funzione di trasferimento viene di seguito applicata la teoria della predizione lineare. Il filtro $W(z)$, causale e a minima fase, che sbianca la sequenza in ingresso è ricavabile dalla fattorizzazione spettrale seguente

$$W(z)W^*(z^{-*}) = \frac{1}{S_\theta(z) + S_{\psi,GA}(z)}. \quad (4.27)$$

Si precisa che, a differenza di O&M, il vincolo di causalità è necessario per il sincronizzatore di Gardner, in quanto esso è retroazionato. Si calcola quindi

$$S_\theta(z) + S_{\psi,GA}(z) = \frac{\xi^{-2}(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})(1 - z_1^* z)(1 - z_2^* z)}{(1 - z^{-1})(1 - z)} \quad (4.28)$$

dove

$$\xi = \sqrt{\frac{z_1^* z_2^*}{\beta}} = \sqrt{\frac{z_1 z_2}{\beta}} \quad (4.29)$$

$$z_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{N_0^3}{\beta^2 P} + \frac{N_0^2}{\beta^2} + \frac{4N_0(\gamma^2 - N_0)}{\beta P} + \frac{16\gamma^2}{P} + \frac{4N_0 - 2\gamma^2}{\beta}} + \frac{P + Q}{4\beta} \quad (4.30)$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q^2}{2\beta^2} + \frac{1}{2P} \left(-\frac{Q^3}{\beta^2} + \frac{4QR}{\beta} - 8Q \right) - \frac{R}{2} - 2 + \frac{P - Q}{4\beta}}, \quad (4.31)$$

4.2. Sincronizzatore di Gardner

con $\beta = \beta_{S \times S, \text{GA}}$, $N_0 = \beta_{N \times N, \text{GA}} + \beta_{N \times S, \text{GA}}$, $P = \sqrt{N_0^2 - 4\beta\gamma^2}$, $Q = -4\beta - N_0$ e $R = 6\beta + \gamma^2 + 2N_0$.

Selezionando le radici z_1 e z_2 all'interno del cerchio unitario si ottiene il filtro sbiancante causale

$$W(z) = \frac{\xi(1 - z^{-1})}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})} \quad (4.32)$$

e di conseguenza quello anti-causale risulta

$$W^*(z^{-*}) = \frac{\xi(1 - z)}{(1 - z_1^* z)(1 - z_2^* z)}, \quad (4.33)$$

in cui è stata adottata la notazione $W^*(z^{-*})$ per indicare $(W(1/z^*))^*$.

A valle di $W(z)$ è necessario il filtro 1-causale $F(z)$, ottenibile come

$$\begin{aligned} F(z) &= [S_\theta(z)W^*(z^{-*})]^+ \\ &= \left[\frac{\xi\gamma^2}{(1 - z^{-1})(1 - z_1^* z)(1 - z_2^* z)} \right]^+ \\ &= \frac{\xi\gamma^2\zeta^2 z^{-1}}{(1 - z^{-1})}; \end{aligned} \quad (4.34)$$

la derivazione può essere trovata in Appendice E. Nella (4.34) è stata utilizzata la notazione $[Q(z)]^+$ per indicare la porzione 1-causale di $Q(z)$, ossia

$$[Q(z)]^+ = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^{-k}, \quad (4.35)$$

ed è stata introdotta ζ^2 , pari a

$$\zeta^2 = \frac{1}{(1 - z_1^*)(1 - z_2^*)} = \frac{1}{(1 - z_1)(1 - z_2)} = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2 \xi^2}}. \quad (4.36)$$

Il post-filtro ottimo 1-causale è quindi

$$\begin{aligned} H_{\text{ott,GA,MF}}(z) &= W(z)F(z) \\ &= \frac{\xi\gamma z^{-1}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Da esso è ricavabile il post-filtro ad anello aperto

$$L_{\text{MF}}(z) = \frac{H_{\text{ott,GA,MF}}(z)}{1 - H_{\text{ott,GA,MF}}(z)} = \frac{\xi\gamma z^{-1}}{z_p^{-1} z_1 z_2 (1 - z^{-1})(1 - z_p z^{-1})}, \quad (4.38)$$

4.2. Sincronizzatore di Gardner

con

$$z_p = \frac{2z_1 z_2}{\sqrt{(-z_1 - z_2 - \gamma\xi)^2 - 4z_1 z_2 + z_1 + z_2 + \gamma\xi}}; \quad (4.39)$$

il calcolo completo può essere trovato in Appendice E.

Pertanto, per il caso di pre-filtro adattato, la varianza dell'errore di fase può essere calcolata nel seguente modo

$$\sigma_\psi^2 = T \int_0^{T^{-1}} S_{err}(e^{j2\pi fT}) df, \quad (4.40)$$

con

$$S_{err}(z) = H_{ott,GA,MF}(z)H_{ott,GA,MF}^*(z^{-*})S_{\psi,GA}(z) + \\ + (1 - H_{ott,GA,MF}(z))(1 - H_{ott,GA,MF}^*(z^{-*}))S_{\theta}(z). \quad (4.41)$$

Il filtro $L_{MF}(e^{j2\pi fT})$, ossia il filtro $L(e^{j2\pi fT})$ di Fig.4.2, viene implementato in modo efficiente come illustrato in Fig.4.6.

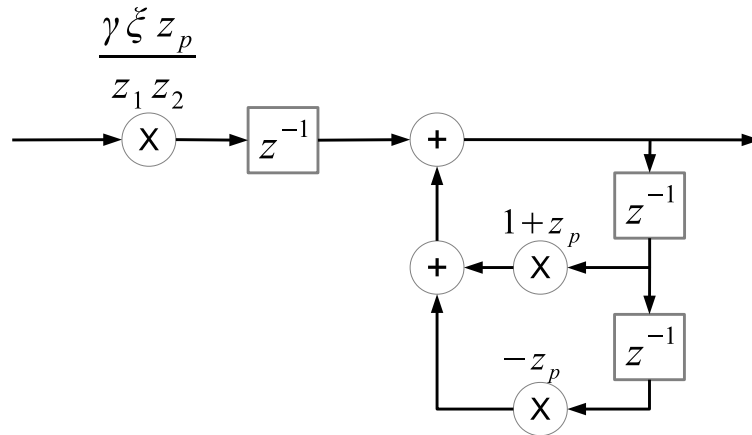


Figura 4.6: Schema a blocchi dell'implementazione di $L_{MF}(f)$ nel sincronizzatore di Gardner.

In Fig.4.7 sono mostrati i post-filtri ottimi costruiti per diversi valori di SNR e per entrambi i pre-filtri considerati in questa tesi; la figura è stata ottenuta per una 4 – QAM con fattore di roll-off pari a 0.25.

Il pre-filtro PO elimina la componente SxS di rumore di fase e, pertanto, il post-filtro $H_{ott,GA,PO}(e^{j2\pi fT})$ ha pendenza costante, oltre le frequenze di taglio, indipendentemente dal valore di SNR. Si osservi che tale pendenza

4.2. Sincronizzatore di Gardner

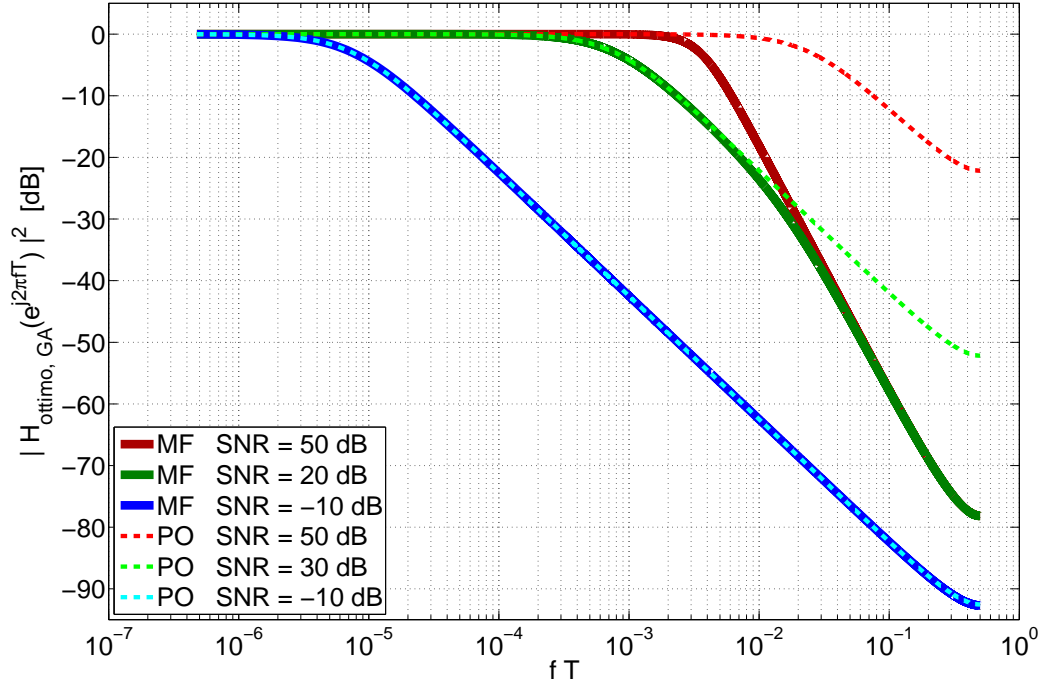


Figura 4.7: Post-filtri ottimi per pre-filtri MF e PO, per diversi SNR; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

è di -20 dB/decade, ossia la metà della pendenza del corrispondente post-filtro calcolato per il sincronizzatore di O&M in assenza di *self-noise*, poiché nel Gardner il post-filtro deve essere causale, mentre il precedente era causale ed anticausale.

Il post-filtro costruito per il caso di pre-filtro MF coincide con quello del pre-filtro PO a basso SNR, dove il termine SxS è dominato dagli altri contributi di rumore e, quindi, risulta irrilevante. In corrispondenza di valori intermedi di SNR, invece, il post-filtro $H_{ott,GA,MF}(e^{j2\pi fT})$ esibisce zone con pendenza differente: -20 dB/decade alle frequenze in cui domina il rumore bianco $NxN + SxN$, -40 dB/decade a quelle in cui invece domina il *self-noise*. Per valori alti di SNR il termine SxS domina a tutte le frequenze e, quindi, la pendenza del post-filtro $H_{ott,GA,MF}(e^{j2\pi fT})$ è di -40 dB/decade e la sua frequenza di taglio è inferiore a quella del post-filtro $H_{ott,GA,PO}(e^{j2\pi fT})$ progettato per lo stesso valore di SNR.

Capitolo 5

Simulazioni e risultati

In questo capitolo si riportano i risultati ottenuti per i diversi sincronizzatori di simbolo studiati. Vengono utilizzati entrambi i pre-filtri descritti (MF e PO) e tutti i vari post-filtri progettati e proposti (ottimi e sub-ottimi). Si mostra come i risultati ottenuti dalle simulazioni validino l'analisi effettuata, tanto per ciò che riguarda la densità spettrale di potenza del *self-noise*, quanto per quello che concerne le prestazioni raggiunte dai sincronizzatori, in termini di varianza dell'errore di fase.

5.1 Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

Come spiegato nella sezione 4.1, il sincronizzatore di simbolo di Serpedin approssima il sincronizzatore proposto da Oerder e Meyr (O&M) e fornisce le medesime prestazioni. Pertanto nel seguito si riportano sulle stesse figure sia i risultati ottenuti tramite O&M, sia quelli offerti dall'utilizzo dello schema di Serpedin.

5.1.1 Densità spettrale di potenza del rumore di fase

Prima di procedere con la valutazione delle prestazioni raggiunte dai differenti sincronizzatori studiati, si desidera validare con un esempio l'analisi effettuata sulla densità spettrale di potenza del rumore di fase.

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

Con riferimento ai sincronizzatori di O&M e di Serpedin, si compara quindi la $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)$ a valle del TED analizzata nei precedenti capitoli con quanto ottenuto dalle simulazioni svolte. Si pone particolare attenzione alla componente SxS (*self-noise*) poiché, si ricorda, era assente in letteratura una trattazione completa su di essa.

Si consideri la Fig.5.1, ottenuta con il sincronizzatore di Oerder e Meyr, per una 4 – QAM, con filtro in trasmissione a radice di coseno rialzato e pre-filtro adattato in ricezione, con roll-off α pari a 0.25.

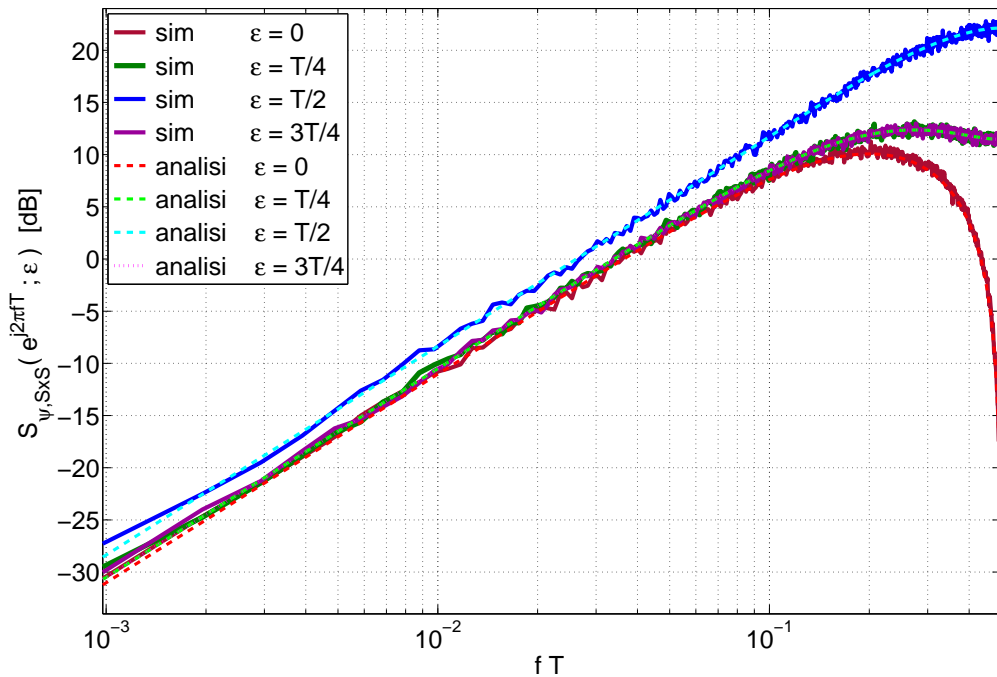


Figura 5.1: Densità spettrale di potenza del self-noise $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT}; \epsilon)$ per il sincronizzatore di Oerder e Meyr, per diversi valori del ritardo ϵ ; 4 – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtro MF.

In figura viene riportata la densità spettrale di potenza del *self-noise* per diversi valori del ritardo ϵ tempo-invariante. Le simulazioni validano l'analisi effettuata e confermano la ragionevolezza dell'approssimazione (2.35), in quanto è evidente la pendenza di 20 dB/decade.

In Fig.5.2 viene riportata la densità spettrale di potenza media $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi fT})$ e la sua approssimazione (2.36), con pre-filtri MF e PO e per M – QAM, con M pari a 4 e 256.

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

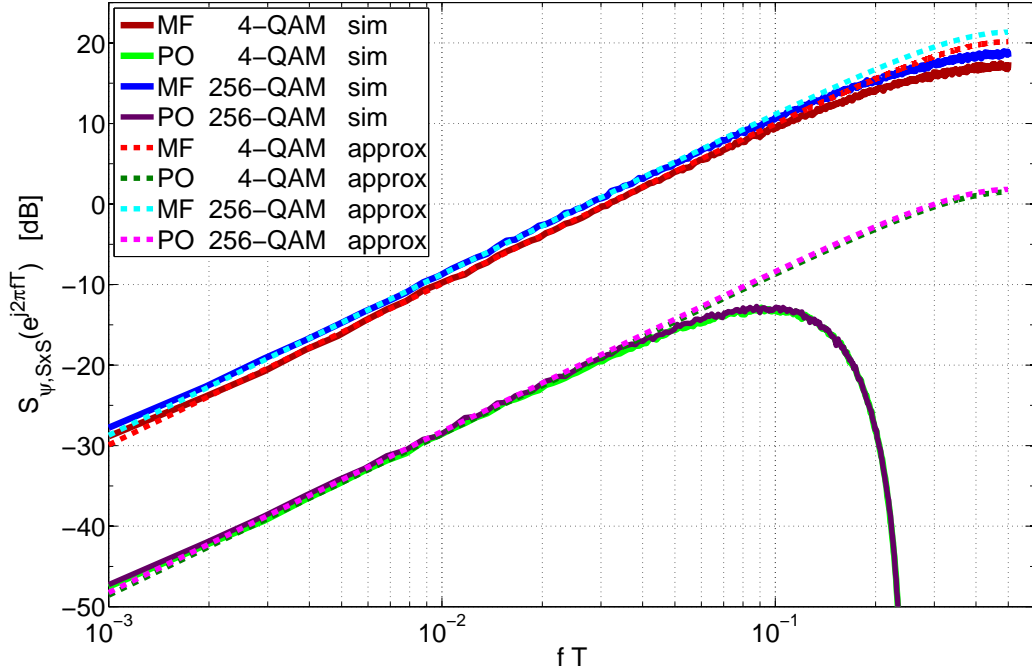


Figura 5.2: Densità spettrale di potenza del self-noise media $S_{\psi, S \times S}(e^{j2\pi f T})$ per il sincronizzatore di Oerder e Meyr; $\{4, 256\}$ – QAM, roll-off $\alpha = 0.25$ e pre-filtri MF e PO.

Come previsto, le simulazioni confermano la riduzione del *self-noise* in caso di utilizzo di pre-filtro PO, così come la bontà dell'approssimazione introdotta alle frequenze di interesse.

Si evidenzia come il crescere di M comporta, giustamente, rumore di fase $S_{\psi, S \times S}$ leggermente superiore rispetto al 4 – QAM: nel caso di pre-filtro MF si osserva un aumento di circa 1.2 dB, mentre con pre-filtro PO l'incremento è più ridotto e pari a circa 0.3 dB, poiché questo pre-filtro attenua il termine $S_{\psi, S \times S}$.

5.1.2 Prestazioni

Si valutano ora le prestazioni raggiunte dai sincronizzatori di O&M e di Serpedin, osservando la varianza dell'errore di fase σ_{ψ}^2 .

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

Rumore di fase costante nel tempo

Si considera dapprima rumore di fase tempo-invariante dovuto al ritardo costante ϵ , per cui i post-filtri utilizzati sono quelli a singola e doppia media mobile (MA). Pertanto la varianza del rumore di fase è ottenibile come segue

$$\sigma_{\psi,1MA}^2 = T \int_0^{T^{-1}} S_{\psi}(e^{j2\pi fT}) |H_{1MA}(e^{j2\pi fT})|^2 df \quad (5.1)$$

$$\sigma_{\psi,2MA}^2 = T \int_0^{T^{-1}} S_{\psi}(e^{j2\pi fT}) |H_{2MA}(e^{j2\pi fT})|^2 df, \quad (5.2)$$

con $H_{1MA}(e^{j2\pi fT})$ e $H_{2MA}(e^{j2\pi fT})$ risposte in frequenza dei post-filtri a singola e doppia media mobile, rispettivamente.

La Fig.5.3 è stata ottenuta con pre-filtro MF e con post-filtro a singola media mobile, per diversi valori della sua durata temporale D .

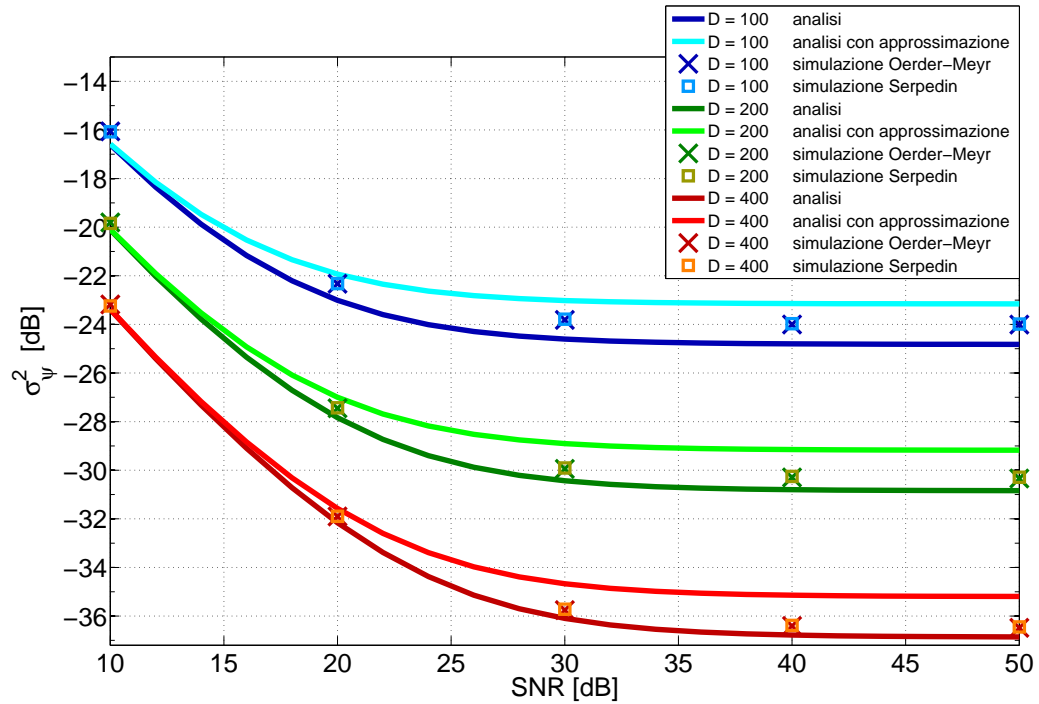


Figura 5.3: Prestazioni dei sincronizzatori di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-invariante, pre-filtro MF, post-filtro a singola media mobile di varie lunghezze temporali D ; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

Come argomentato nei capitoli precedenti, per quanto riguarda il termine SxS l'approssimazione introdotta nella (2.28) non è buona alle alte frequenze, pertanto non è adeguata quando si utilizza un post-filtro a singola media mobile che ha lobi laterali non sufficientemente attenuati: in figura infatti si vede come l'utilizzo dell'approssimazione (2.28) dia luogo ad una sovra-stima della varianza.

Le curve teoriche calcolate senza approssimazioni risultano, invece, leggermente inferiori rispetto a quelle simulate, poiché nell'analisi non è stato inserito il contributo di rumore dovuto all'estrazione dell'argomento per estrapolare la fase. Infatti per svolgere l'analisi è stato utilizzato il ramo superiore del modello in figura 2.4, il quale non prevede l'estrazione della fase, a differenza dell'O&M classico implementato per le simulazioni.

Si noti anche come le simulazioni eseguite con i sincronizzatori di O&M e di Serpedin diano risultati coincidenti, a conferma dell'equivalenza delle prestazioni tra i due schemi *feedforward*.

Si osservi come le prestazioni migliorino per valori maggiori di D . Ciò è dovuto al fatto che all'aumentare della durata temporale del post-filtro, la sua banda di transizione si stringe e, pertanto, il rumore selezionato è inferiore. Infatti, essendo il rumore di fase tempo-invariante, il post-filtro ottimo sarebbe quello di durata temporale tendente all'infinito, in modo tale da selezionare solo la componente continua a valle del TED, ossia la sincronizzante demodulata desiderata.

Si consideri la Fig.5.4, ottenuta come la precedente, con post-filtro a singola media mobile, ma con pre-filtro ottimizzato (PO).

In questo caso è ulteriormente evidente l'inadeguatezza dell'utilizzo dell'approssimazione (2.28) se il post-filtro è a singola media mobile, a causa del fatto che la banda di frequenze di cattiva approssimazione è più estesa per il caso di pre-filtro PO, come mostrato in Fig.2.10 e confermato in Fig.5.2.

Si sottolinea nuovamente la coincidenza tra prestazioni di O&M e di Serpedin.

Come previsto dall'analisi, per valori bassi di SNR le prestazioni ottenute con l'utilizzo del pre-filtro PO sono le medesime viste nella precedente figura per il caso di pre-filtro MF. Infatti il miglioramento offerto dal pre-filtro PO riguarda il solo termine di *self-noise* e, quindi, è evidente solo per valori

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

elevati di SNR, in corrispondenza dei quali il contributo SxS domina sugli altri termini di rumore di fase.

Anche in questo caso si osserva, ovviamente, una diminuzione della varianza σ_ψ^2 al crescere della durata temporale del post-filtro.

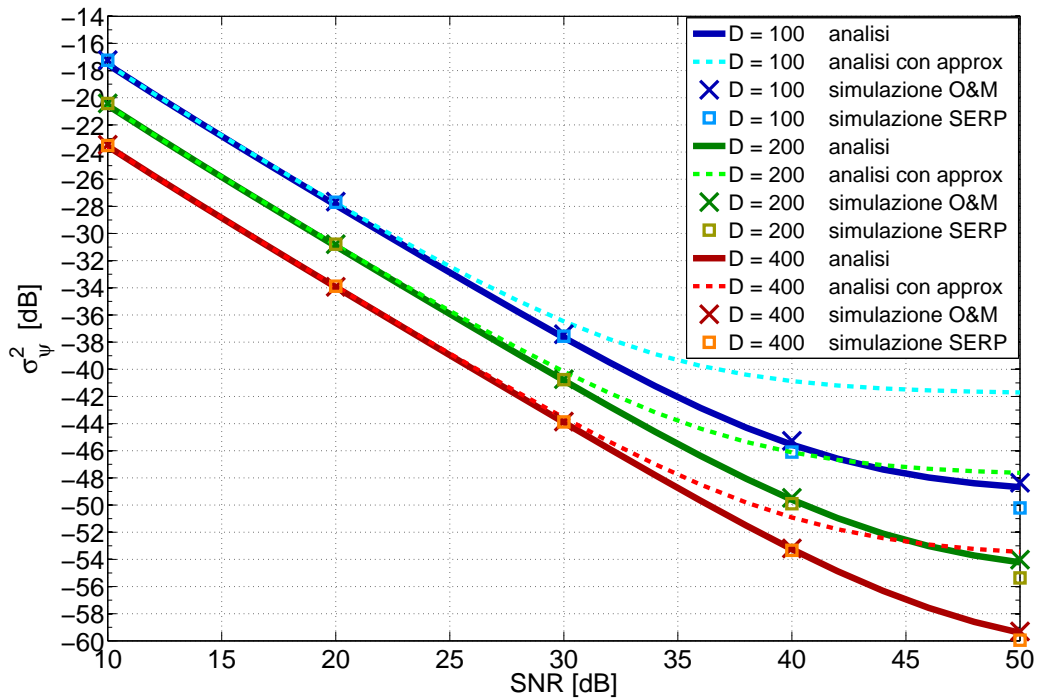


Figura 5.4: Prestazioni dei sincronizzatore di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-invariante, pre-filtro PO, post-filtro a singola media mobile di varie lunghezze temporali D ; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

Si valutano ora le prestazioni quando il post-filtro è la cascata di due filtri a media mobile, ognuno dei quali lungo D tempi di simbolo nel dominio temporale. Si osservi la Fig.5.5, in cui sono state riportate le varianze σ_ψ^2 ottenute con pre-filtro MF e con quello PO.

É innanzitutto nuovamente evidente come in effetti il pre-filtro PO offra un miglioramento che diviene visibile in corrispondenza di valori elevati di SNR, per i quali il *self-noise* risulta il contributo di rumore di fase dominante; per SNR medio-bassi, invece, MF e PO offrono le stesse prestazioni.

Come previsto, con il post-filtro a doppia media mobile il problema relativo alla sovra-stima fornita dall'utilizzo dell'approssimazione (2.28) non sussiste:

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

in figura, infatti, è mostrata la coincidenza perfetta tra l'analisi effettuata con e senza introdurre l'approssimazione.

Ancora si osserva come O&M e Serpedin forniscano gli stessi risultati e come, stringendo la banda di transizione del post-filtro, le prestazioni migliorino.

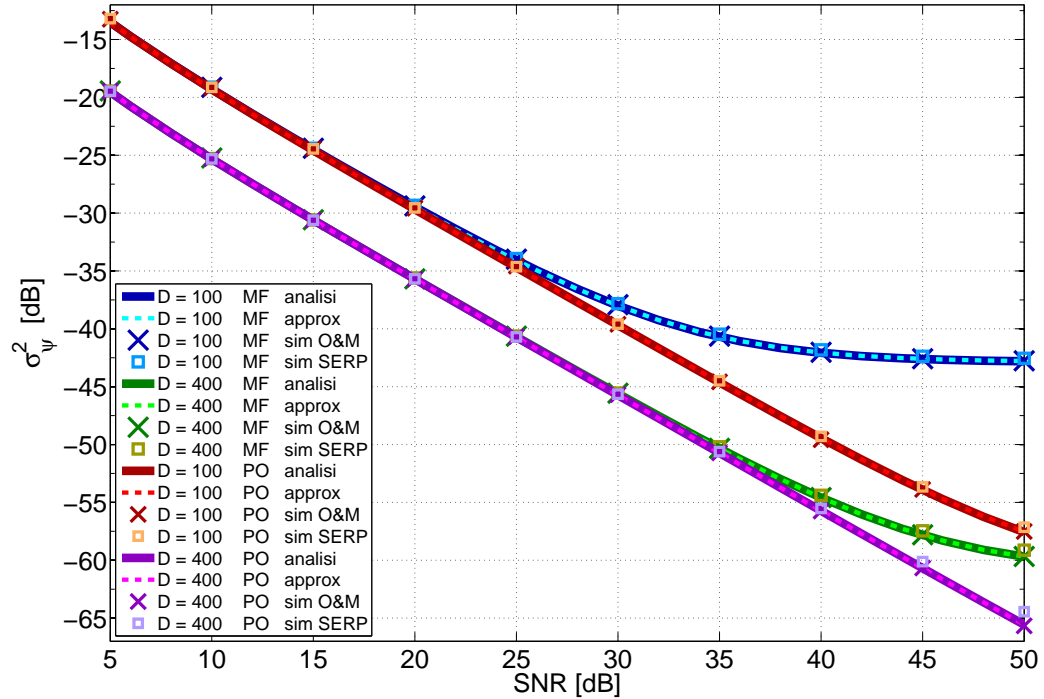


Figura 5.5: Prestazioni dei sincronizzatori di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-invariante, pre-filtri MF e PO, post-filtro a doppia media mobile, ciascuna di lunghezza temporale D ; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

Rumore di fase tempo-variante

Si riportano di seguito le prestazioni ottenute in presenza di rumore di fase tempo-variante $2\pi\epsilon(t)/T$ del tipo di Wiener, mostrando il confronto tra analisi e simulazioni.

Si ricorda che è stato derivato il post-filtro ottimo e che sono stati poi presi in considerazione post-filtri a singola e doppia media mobile poiché, per quanto le loro prestazioni siano inferiori all'ottimo, essi offrono una complessità realizzativa sensibilmente minore. I post-filtri MA sono stati ottimizzati secondo due tecniche differenti: imponendo che la loro banda equivalente

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

di rumore coincidesse con quella del post-filtro ottimo e ricercando empiricamente il dimensionamento migliore. È già stato mostrato come la prima tecnica non fosse sempre adeguata, ma per completezza è stata ugualmente implementata.

Per maggiore chiarezza e leggibilità si riportano su figure separate le prestazioni ottenute con pre-filtro adattato MF e con pre-filtro ottimo PO, commentando in seguito il confronto tra i due.

Si consideri la Fig.5.6, ottenuta per una 4-QAM, roll-off pari a 0.25 e pre-filtro adattato MF.

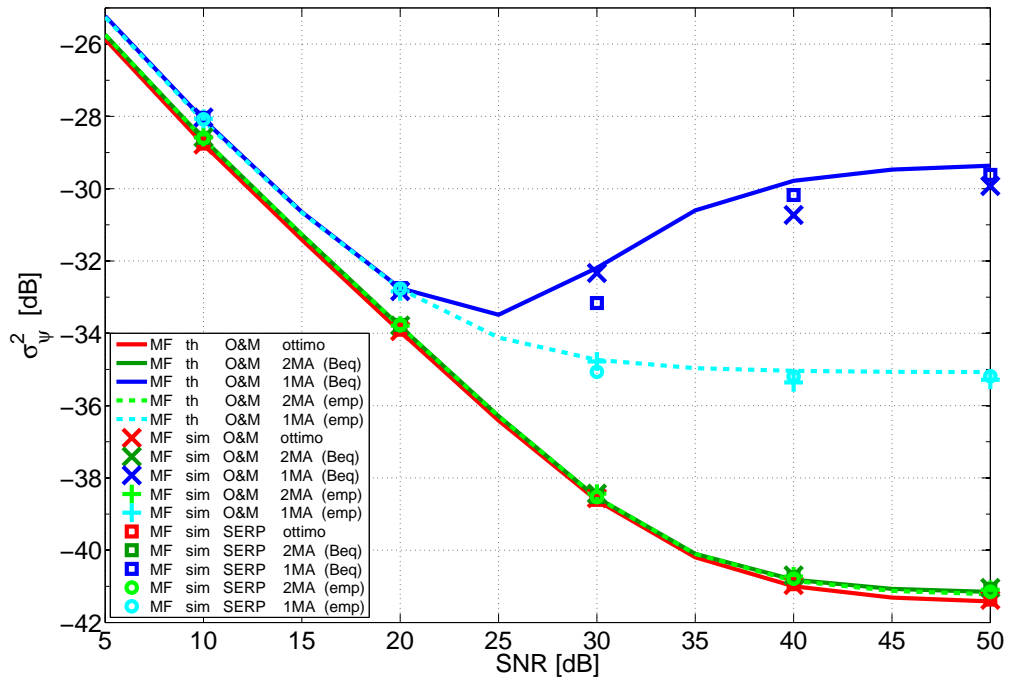


Figura 5.6: Prestazioni dei sincronizzatori di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-variante, pre-filtro MF, post-filtro ottimo e post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati; 4-QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

Si osserva quanto precedentemente detto circa l'inadeguatezza della prima tecnica di ottimizzazione quando il post-filtro è la singola media mobile; ovviamente tale ottimizzazione deve essere evitata in questo caso.

La curva teorica relativa all'ottimizzazione empirica del post-filtro a singola media mobile sovra-stima la varianza ottenuta tramite le simulazioni per il motivo spiegato nei capitoli precedenti, ossia a causa dell'utilizzo dell'ap-

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

prossimazione (2.28) per l'analisi. L'effetto di sovra-stima dovuto a tale approssimazione è invece completamente trascurabile nel caso di post-filtro a doppia media mobile o di post-filtro ottimo.

Le due modalità di ottimizzazione proposte per la doppia media mobile forniscono risultati simili e prossimi a quelli ottenuti tramite post-filtro ottimo; le simulazioni ricalcano perfettamente la curva tracciata grazie all'analisi teorica eseguita.

Per quanto riguarda il caso di pre-filtro PO si osservi invece la Fig.5.7.

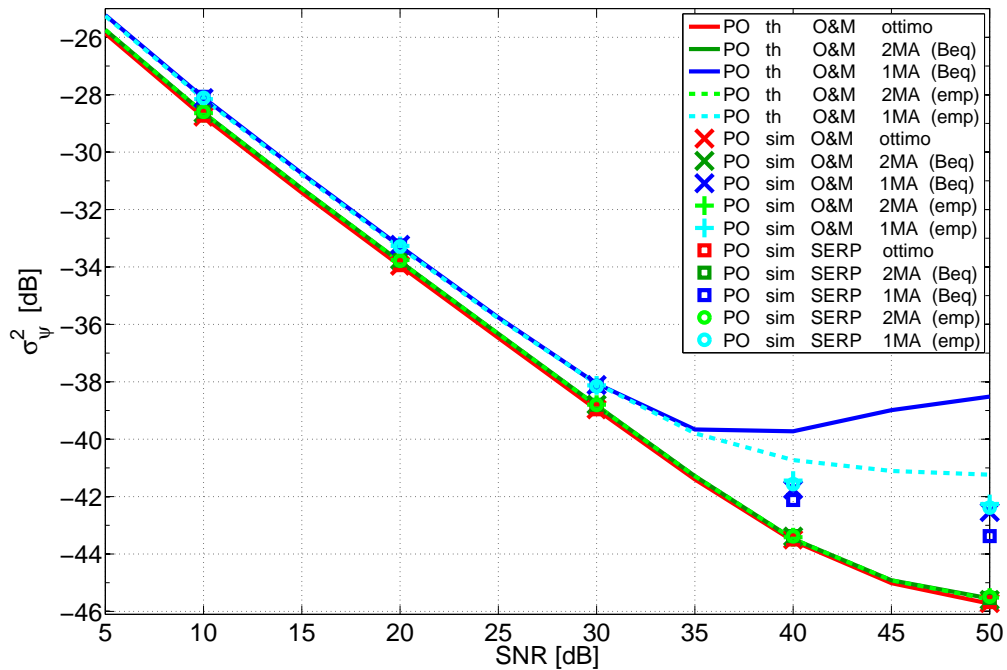


Figura 5.7: Prestazioni dei sincronizzatori di O&M e di Serpedin con rumore di fase tempo-variante, pre-filtro PO, post-filtro ottimo e post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

È nuovamente evidente come non sia opportuno utilizzare la prima tecnica di ottimizzazione quando il post-filtro è la singola media mobile. Ancora è visibile come entrambe le modalità di ottimizzazione sovra-stimino la varianza quando si ha il post-filtro a singola media mobile: il distacco tra curve analitiche e valori simulati risulta maggiore rispetto al caso di pre-filtro MF poiché l'approssimazione (2.28) è peggiore nel caso PO. Oltretutto l'utilizzo di tale approssimazione fa anche sì che la ricerca empirica della lunghezza temporale

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

D_{emp} conduca ad un valore tutt'altro che ottimale: ciò è confermato dalle simulazioni che, paradossalmente, mostrano risultati migliori quando l'ottimizzazione è svolta tramite uguaglianza delle bande equivalenti di rumore. Si conclude, quindi, che per il caso di pre-filtro ottimizzato e post-filtro a singola media mobile nessuna delle due tecniche di ottimizzazione applicate è adeguata. Si precisa nuovamente, tuttavia, che affinché la ricerca empirica dia luogo al risultato desiderato è sufficiente ripetere l'analisi senza introdurre l'approssimazione (2.28), ma ciò non è utile ai fini della tesi e pertanto non è stato svolto.

Le ottimizzazioni sulla doppia media mobile forniscono risultati molto simili tra loro e vicini alle prestazioni ottenute con l'utilizzo del post-filtro ottimo; i valori simulati coincidono con quelli calcolati analiticamente.

Tanto per la doppia media mobile, quanto per il post-filtro ottimo, è evidente come il pre-filtro PO, rispetto al caso di pre-filtro MF, permetta il raggiungimento di prestazioni migliori per valori di SNR medio-alti (circa 4.5 dB a 50 dB di SNR), mentre a basso SNR i risultati coincidono ovviamente.

Sino ad ora è stata considerata una 4 – QAM per semplicità, tuttavia si ritiene opportuno prendere in esame anche il caso di schemi di modulazione più densi. Pertanto, seppur le considerazioni siano pressoché analoghe a quelle già effettuate per il caso 4 – QAM, si desidera mostrare e commentare le prestazioni ottenute con una 256 – QAM. A tal proposito, quindi, si osservi la Fig.5.8, ottenuta utilizzando pre-filtri MF e PO e post-filtri ottimi e sub-ottimi (ottimizzati empiricamente).

I risultati in figura mostrano nuovamente come la cascata di due medie mobili offra prestazioni migliori della singola media mobile, in particolar modo per valori elevati di SNR. Ciò è sempre dovuto al fatto che, in corrispondenza di SNR alto, la banda di transizione del post-filtro diviene piuttosto larga e la porzione ad alta frequenza dello spettro del *self-noise*, approssimato come in (2.36), non è sufficientemente attenuata dai lobi laterali della singola MA. Inoltre, come già precedentemente sottolineato per il caso 4 – QAM, l'analisi teorica sovra-stima leggermente le prestazioni ottenute tramite simulazione quando il post-filtro è la singola media mobile, soprattutto per pre-filtro ottimizzato: a 50 dB di SNR, per esempio, le prestazioni analitiche con PO e singola MA superano quelle simulate di circa 1 dB. Ciò è sempre dovuto al

5.1. Sincronizzatore di Oerder & Meyr e sincronizzatore di Serpedin

fatto che i lobi laterali della singola media mobile non attenuano a sufficienza le alte frequenze, in corrispondenza delle quali, però, l'approssimazione (2.36) non é affatto buona nel caso di pre-filtro ottimizzato, come evidente in Fig.5.2.

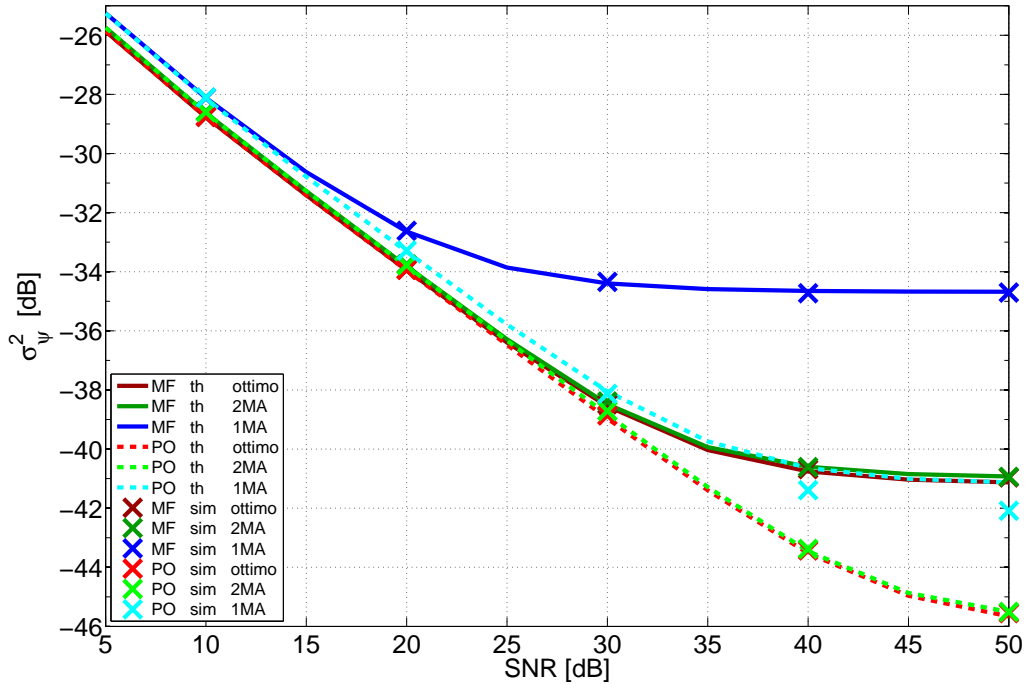


Figura 5.8: Prestazioni del sincronizzatore di O&M con rumore di fase tempo-variante, pre-filtri MF e PO, post-filtro ottimo e post-filtri a singola e doppia media mobile ottimizzati empiricamente; 256 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

In figura, inoltre, è osservabile anche in questo caso come, assunto un filtro di *post-detection*, il pre-filtro ottimizzato PO garantisca il raggiungimento di prestazioni superiori a quelle ottenute utilizzando il pre-filtro adattato MF. Tuttavia, si evidenzia che, nel caso di utilizzo di post-filtro ottimo o di doppia media mobile, la scelta del pre-filtro appare del tutto ininfluenza per valori medio-bassi di SNR; infatti solo dai 30 dB di SNR le prestazioni ottenute con MF e PO iniziano a differire. Si ricorda che comunemente il valore di γ^2 è inferiore a quello utilizzato in questo caso, poiché qui é stato assunto il valore peggiore in commercio; perciò, per le circostanze di interesse pratico (con γ^2 minori) la divergenza tra prestazioni offerte da pre-filtro MF e PO avviene

5.2. Sincronizzatore di Gardner

in corrispondenza di SNR ancora più elevati. Pertanto si conclude che non è necessario l'utilizzo del pre-filtro ottimizzato per formati di modulazione densi come la 256 – QAM o meno.

Inoltre, come previsto dall'analisi teorica, le simulazioni confermano che le prestazioni offerte dall'utilizzo del filtro di *post-detection* a doppia media mobile si mantengono distanti dalle ottime per valori compresi tra 0.07 e 0.2 dB per il caso di pre-filtro MF, tra 0.06 e 0.16 dB per quello PO.

Infine si precisa che è stato verificato, tramite analisi e simulazioni, che anche in questo caso lo schema di Serpedin raggiunge le medesime prestazioni dell'algoritmo di O&M.

5.2 Sincronizzatore di Gardner

Analogamente a quanto effettuato per gli schemi di O&M e di Serpedin, di seguito vengono riportati i risultati delle simulazioni eseguite per il sincronizzatore retroazionato di Gardner e viene validata l'analisi svolta.

Anche in questo caso, inoltre, si considera dapprima uno schema di modulazione 4 – QAM e, in seguito, si estende la trattazione a modulazioni con un numero di livelli più elevato, nello specifico 256.

5.2.1 Densità spettrale di potenza del rumore di fase

Si desidera innanzitutto confermare, tramite confronto con le simulazioni, la correttezza dell'analisi effettuata sulla densità spettrale di potenza del rumore di fase.

Si consideri la Fig.5.9 ottenuta per una 4 – QAM, con filtro in trasmissione del tipo radice di coseno rialzato, con diversi valori di roll-off α , e filtro adattato in ricezione.

In figura è riportata la densità spettrale del rumore di fase dovuto al solo *self-noise*, in quanto i contributi $N \times N$ e $S \times N$ sono bianchi sulla banda di transizione del post-filtro e analoghi a quanto ottenuto per il sincronizzatore di O&M. L'analisi teorica viene confermata dalle curve simulate, per tutti i valori di roll-off considerati. Per completezza sono mostrate anche le curve ottenute tramite l'approssimazione (4.17), poiché nel seguito si lavora utiliz-

5.2. Sincronizzatore di Gardner

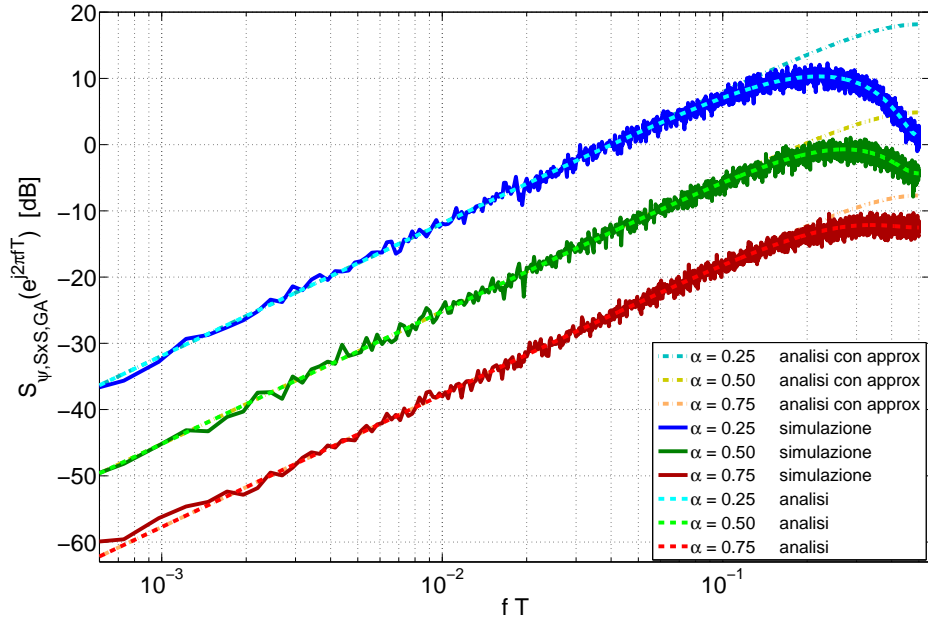


Figura 5.9: Densità spettrale di potenza del self-noise $S_{\psi,S \times S,GA}(e^{j2\pi fT})$ per il sincronizzatore di Gardner, per diversi valori di roll-off α ; 4 – QAM e pre-filtro MF.

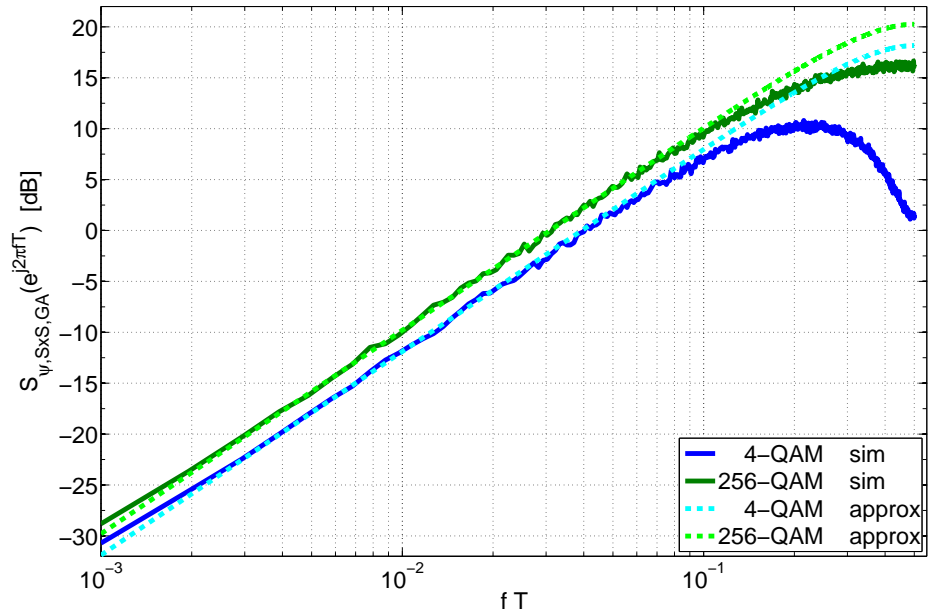


Figura 5.10: Densità spettrale di potenza $S_{\psi,GA}(e^{j2\pi fT})$ per il sincronizzatore di Gardner, con pre-filtro MF; $\{4, 256\}$ – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

5.2. Sincronizzatore di Gardner

zando tale approssimazione.

La figura mostra la DSP del termine SxS per il solo pre-filtro adattato MF poiché, si ricorda, nel caso di pre-filtro ottimizzato PO il *self-noise* è virtualmente nullo.

Si consideri ora la Fig.5.10, in cui è nuovamente riportata la densità spettrale di potenza del contributo di *self-noise*, ma mettendo a paragone quella ottenuta per una 4 – QAM con quella ricavata da una 256 – QAM; si assume roll-off pari a 0.25.

Aumentando il numero di livelli della modulazione la DSP del contributo SxS aumenta di circa 2 dB alle frequenze di interesse. Si sottolinea però che alle alte frequenze, invece, la differenza è più marcata, ma l'approssimazione risulta più vicina alla curva simulata per il caso di 256 – QAM.

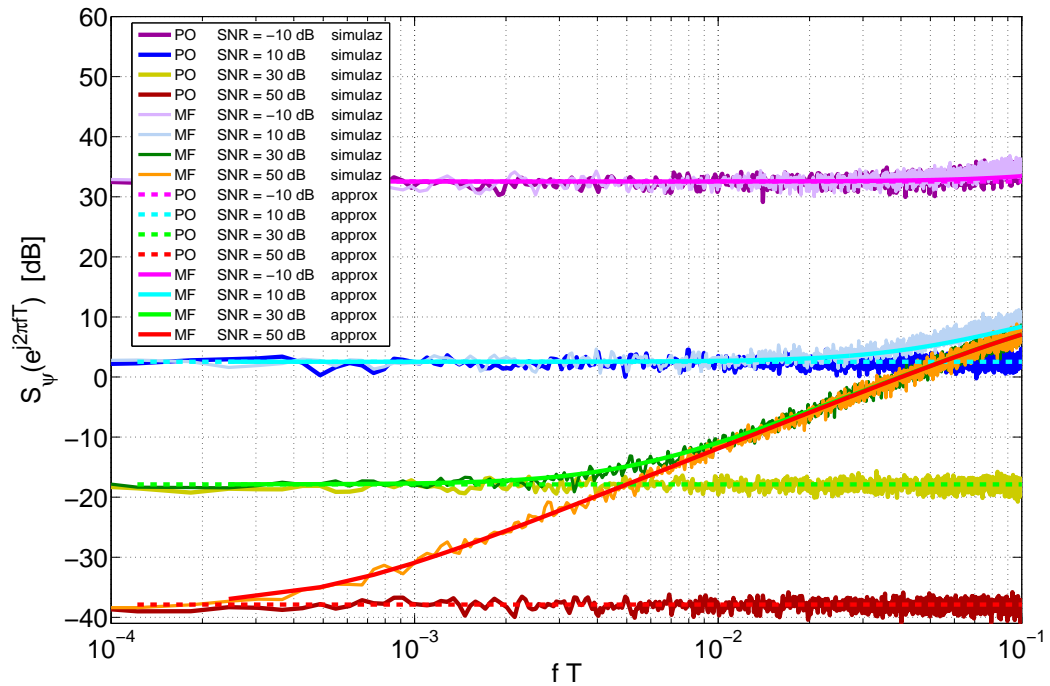


Figura 5.11: Densità spettrale di potenza $S_{\psi,GA}(e^{j2\pi fT})$ per il sincronizzatore di Gardner, con pre-filtri MF e PO, per diversi valori di SNR; 4 – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

Per completezza si riporta la densità spettrale di potenza totale del rumore di fase $S_{\psi,GA}(e^{j2\pi fT})$, inclusi i termini SxN e NxN, tanto per pre-filtro MF, quando per quello PO. A tal proposito si osservi quindi la Fig.5.11,

5.2. Sincronizzatore di Gardner

ottenuta per diversi valori di SNR e con roll-off pari a 0.25.

La figura mostra, per il caso di pre-filtro MF, come all'aumentare dei valori di SNR il contributo dovuto al *self-noise* divenga via via il dominante. Il pre-filtro PO invece elimina il termine SxS, come previsto, e la $S_{\psi,GA}(e^{j2\pi fT})$ risulta bianca indipendentemente dal valore di SNR considerato.

5.2.2 Prestazioni in presenza di rumore di fase tempo-variante

Si riportano di seguito le prestazioni ottenute con il sincronizzatore di simbolo di Gardner in presenza di rumore di fase tempo-variante di tipo Wiener. I post-filtri utilizzati sono quelli ottimi calcolati nel capitolo precedente per i casi di pre-filtro adattato MF ed ottimizzato PO.

Le curve teoriche della varianza del rumore di fase σ_{ψ}^2 a valle del sincronizzatore sono state ottenute con le formule (4.26) e (4.40), rispettivamente per i casi di pre-filtri PO e MF.

Si consideri la Fig.5.12, ottenuta per una $\{4, 256\}$ – QAM, con roll-off 0.25.

In figura si osserva, giustamente, un distacco tra prestazioni ottenute con la 4 e con la 256 – QAM solo per valori di SNR per i quali domina il *self-noise*, tanto per il pre-filtro adattato MF, quanto per quello ottimizzato PO. In quest'ultimo caso, in realtà, il termine SxS dovrebbe essere virtualmente nullo, tuttavia in figura si può osservare la presenza di un *floor* causato dal *self-noise* oltre i 40 dB di SNR. Si tratta di un residuo di *self-noise* dovuto alla correzione imperfetta nella retroazione.

Inoltre si evidenzia come, per valori di SNR inferiori a 20 dB, il pre-filtro PO offra prestazioni indistinguibili da quelle ottenute tramite pre-filtro MF; si ricorda che, nel caso di sincronizzatore di O&M, tale soglia era circa a 30 dB. Rispetto ai sincronizzatori *feedforward* studiati, lo schema di Gardner raggiunge prestazioni inferiori di circa 3 dB a basso SNR, mentre a 50 dB di SNR il peggioramento è di circa 6 dB per il pre-filtro MF e di 2 dB per quello PO.

5.2. Sincronizzatore di Gardner

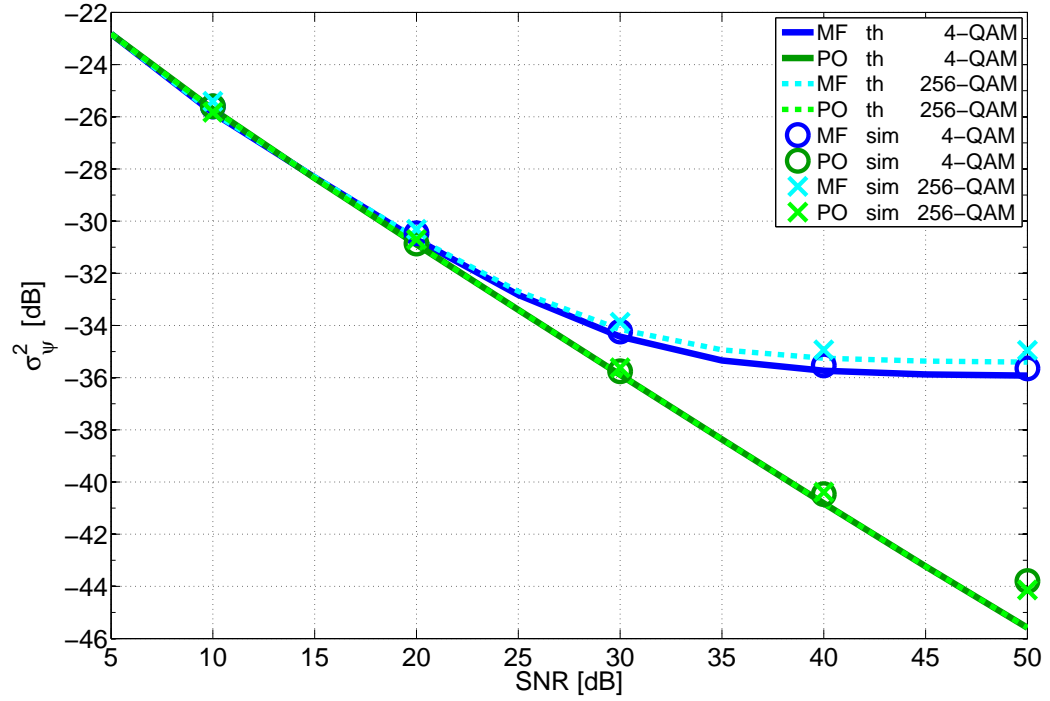


Figura 5.12: Prestazioni del sincronizzatore di Gardner con rumore di fase tempo-variante, pre-filtri MF e PO e post-filtri ottimi; $\{4, 256\}$ – QAM e roll-off $\alpha = 0.25$.

Capitolo 6

Conclusioni e possibili sviluppi futuri

In questa tesi é stata studiata la densità spettrale di potenza del rumore di fase tempo-variante che affligge i sincronizzatori di simbolo di Oerder e Meyr, di Serpedin e di Gardner. La validità del modello proposto per la caratterizzazione del rumore di fase è stata confermata dalle simulazioni, come illustrato nel precedente capitolo.

É stato quindi possibile procedere con la progettazione del filtro di *post-detection*. Dopo aver ricavato il post-filtro ottimo, sono stati proposti differenti filtri sub-ottimi per i sincronizzatori *feedforward*, allo scopo di fornire soluzioni alternative, con il vantaggio di una complessità realizzativa inferiore e tali da garantire prestazioni prossime alle ottime. Sono state suggerite due differenti tecniche di ottimizzazione dei post-filtri sub-ottimi, evidenziando per ciascuna punti di forza e limiti di applicabilità. Per il sincronizzatore *feedback* considerato, quello di Gardner, è stato progettato il filtro di *post-detection* ottimo, implementato in modo efficiente.

L'analisi delle prestazioni raggiunte dai sincronizzatori e i risultati ottenuti tramite simulazione hanno validato la trattazione eseguita e confermato l'efficacia delle ottimizzazioni implementate.

L'analisi svolta in questa tesi ha fornito la possibilità di quantificare il *floor* dovuto al *self-noise* che le prestazioni dei sincronizzatori esibiscono a valori di SNR medio-alti.

Inoltre, la progettazione dei filtri ottimi di *post-detection* ha permesso di ricavare un limite inferiore per le prestazioni che i sincronizzatori presi in esame possono raggiungere. In tal modo è stato possibile valutare la bontà delle soluzioni sub-ottime proposte per i sincronizzatori di Oerder e Meyr e di Serpedin: nel caso di pre-filtro adattato MF l'utilizzo di un post-filtro a doppia media mobile, ottimizzato secondo la tecnica mostrata, permette di ottenere prestazioni prossime alle ottime, dalle quali si distacca per valori compresi tra 0.07 dB e 0.2 dB; per quanto concerne il pre-filtro ottimizzato PO, invece, il peggioramento rispetto all'ottimo è compreso tra 0.06 dB e 0.16 dB.

Nel caso dei sincronizzatori *feedforward* studiati, inoltre, è stato mostrato come l'utilizzo del pre-filtro ottimizzato non dia vantaggi per valori di SNR inferiori a 30 dB circa, quando il filtro di *post-detection* è la doppia media mobile od il post-filtro ottimo; pertanto il pre-filtro PO appare non necessario per modulazioni $M - \text{QAM}$ per valori di M minori od uguali a 256.

Nel caso *feedback* di Gardner con post-filtro ottimo, invece, i pre-filtri MF e PO danno luogo a prestazioni del sincronizzatore indistinguibili tra loro al di sotto di 20 dB di SNR.

Uno sviluppo possibile di questo lavoro consiste nell'estensione dello studio del filtro di *post-detection* a situazioni in cui il canale risulti velocemente tempo-variante. Anche in quella circostanza, infatti, vi sarebbe la necessità di allargare la banda del post-filtro, analogamente a quanto richiesto in questa tesi a causa della presenza di rumore di fase tempo-variante dovuto agli oscillatori locali in trasmissione e ricezione.

Appendice A

Sincronizzante nel sincronizzatore di Oerder e Meyr

In questa appendice si validano i risultati presentati nelle equazioni (2.17) e (2.18), ossia si dimostra che il modello di Fig.2.2 offre in uscita la sincronizzante demodulata, come nel sincronizzatore a quadratore tempo-continuo e come nello schema di Oerder-Meyr. Essa costituisce la parte deterministica (il valore medio) e da essa si estrae la stima di ϵ .

Per comodità si svolge l'analisi nel tempo-continuo e, al termine, si campiona in modo opportuno.

Il contributo deterministico di $x_{\Re}(kT; \epsilon)$ si ottiene come

$$\begin{aligned} E \{x_{\Re}(kT; \epsilon)\} &= E \{x_{\Re}(t; \epsilon)|_{t=kT}\} \\ &= A \cos \left(\frac{2\pi\epsilon}{T} + 2\pi k \right) \\ &= A \cos \left(\frac{2\pi\epsilon}{T} \right), \end{aligned} \tag{A.1}$$

con

$$\begin{aligned}
E \{x_{\Re}(t; \epsilon)\}_{|_{t=kT}} &= E \{z_1(t; \epsilon) - z_3(t; \epsilon)\}_{|_{t=kT}} \\
&= E \{z_1(t; \epsilon)\}_{|_{t=kT}} - E \{z_3(t; \epsilon)\}_{|_{t=kT}} \\
&= \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi(t+\epsilon)}{T}\right)\Big|_{t=kT} - \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi(t-T/2+\epsilon)}{T}\right)\Big|_{t=kT} \\
&= \frac{A}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi(t+\epsilon)}{T}\right)\Big|_{t=kT} - \cos\left(\frac{2\pi(t+\epsilon)}{T} - \pi\right)\Big|_{t=kT} \right) \\
&= \frac{A}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi(t+\epsilon)}{T}\right)\Big|_{t=kT} + \cos\left(\frac{2\pi(t+\epsilon)}{T}\right)\Big|_{t=kT} \right) \\
&= A \cos\left(\frac{2\pi(t+\epsilon)}{T}\right)\Big|_{t=kT} \\
&= A \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T} + 2\pi k\right). \tag{A.2}
\end{aligned}$$

I termini $z_{\beta}(kT/4; \epsilon)$, con $\beta = \{1, 2, 3, 4\}$, sono stati definiti nella (2.4) e di seguito se ne calcola il valore di aspettazione

$$\begin{aligned}
E \{z_1(t; \epsilon)\} &= E \{|y(t; \epsilon)|^2\} \\
&= E \{|s(t; \epsilon)|^2\} + E \{|n(t)|^2\} \\
&= E \{s(t; \epsilon) s^*(t; \epsilon)\} + R_n(0) \\
&= C_2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} v^2(t - iT + \epsilon) + R_n(0) \\
&= \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi(t+\epsilon)}{T}\right) + A_0 + R_n(0) \tag{A.3}
\end{aligned}$$

ed analogamente

$$E \{z_3(t; \epsilon)\} = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi(t-T/2+\epsilon)}{T}\right) + A_0 + R_n(0). \tag{A.4}$$

Le ampiezze costanti A ed A_0 sono ottenibili come

$$A = \left| \frac{4C_2}{T} \int_0^{T^{-1}} V(\beta) V^* \left(\frac{1}{T} - \beta \right) d\beta \right| \tag{A.5}$$

$$A_0 = \left| \frac{4C_2}{T} \int_0^{T^{-1}} V(\beta) V^*(-\beta) d\beta \right|, \tag{A.6}$$

con C_2 pari a $E\{|c_i|^2\}$, con l'apice $*$ ad indicare il complesso coniugato e con $V(f)$ risposta in frequenza della cascata di filtro in trasmissione e pre-filtro in ricezione. Il termine $R_n(0)$ indica l'autocorrelazione di $n(t)$ valutata in 0, ossia vale $E\{|n(t)|^2\}$.

Analogamente a quanto eseguito per $E\{x_{\Re}(kT; \epsilon)\}$, si può calcolare il valore medio di $x_{\Im}(kT; \epsilon)$ e si ottiene

$$\begin{aligned}
E\{x_{\Im}(kT; \epsilon)\} &= E\{x_{\Im}(t; \epsilon)|_{t=kT}\} \\
&= A \cos\left(\frac{2\pi(\epsilon - T/4)}{T} + 2\pi k\right) \\
&= A \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \\
&= A \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T} + 2\pi k\right) \\
&= A \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right). \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Appendice B

Autocorrelazione e densità spettrale di potenza del rumore di fase nel sincronizzatore di Oerder e Meyr

In questa appendice si ricavano le formule (2.38) e (2.39) ed i termini presenti nell'equazione (2.21), necessari per ottenere la densità spettrale di potenza del rumore di fase nel sincronizzatore dell'istante di simbolo di Oerder e Meyr (O&M) presentato in Fig.2.4.

B.1 Definizioni utili

Si consideri un sistema con modulazione $M - \text{QAM}$ o $M - \text{PSK}$ ¹, i cui simboli della costellazione complessa sono $\{c_i\}$. Sia $n(t)$ il contributo di rumore additivo a valle del pre-filtro in ricezione, come indicato nell'equazione (2.3).

¹Si precisa che l'intera analisi è stata pensata per M maggiore di 2. Pertanto nel caso di BPSK sarà necessario adattare in modo opportuno i termini delle equazioni (B.7) e (B.8).

B.1. Definizioni utili

Si introducono alcune definizioni e si riportano alcune considerazioni utili, che verranno utilizzate nel corso di questa appendice:

$$c_i = a_i + j b_i \quad (\text{B.1})$$

$$E\{c_i n(t)\} = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$E\{c_i\} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$E\{c_i c_i^*\} = C_2 \delta_{il} \quad (\text{B.4})$$

$$E\{c_i c_l\} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$E\{c_i c_i^* c_p c_q^*\} = \begin{cases} C_4 & \text{se } i = l = p = q \\ C_2^2 & \text{se } i = l \neq p = q \\ C_2^2 & \text{se } i = q \neq l = p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

$$C_2 = A_2 + B_2 = 2 A_2 \quad (\text{B.7})$$

$$C_4 = A_4 + B_4 + 2A_2 B_2 = 2 A_4 + 2 A_2^2 \quad (\text{B.8})$$

$$E\{n^*(t) n(t + \tau)\} = R_n(\tau) \quad (\text{B.9})$$

$$\sigma_{\tilde{w}}^2 = E\{|\tilde{w}(t)|^2\} \quad (\text{B.10})$$

B.2 Autocorrelazioni e cross-correlazioni

Si desidera mostrare le modalità con cui è possibile ricavare i termini di autocorrelazione e cross-correlazione presenti nell'equazione (2.21).

L'autocorrelazione di $x_{\Im}(kT; \epsilon)$ si ottiene come segue

$$\begin{aligned}
 R_{x_{\Im}}(mT; \epsilon) &= E\{x_{\Im}^*(kT; \epsilon) x_{\Im}(kT + mT; \epsilon)\} \\
 &= E\{(z_2(kT; \epsilon) - z_4(kT; \epsilon)) \cdot \\
 &\quad \cdot (z_2(kT + mT; \epsilon) - z_4(kT + mT; \epsilon))\} \\
 &= E\{(|y(kT - T/4; \epsilon)|^2 - |y(kT - 3T/4; \epsilon)|^2) \cdot \\
 &\quad \cdot (|y(kT - T/4 + mT; \epsilon)|^2 - |y(kT - 3T/4 + mT; \epsilon)|^2)\} \\
 &= E\{|y(kT - T/4; \epsilon)|^2 \cdot |y(kT - T/4 + mT; \epsilon)|^2\} + \\
 &\quad - E\{|y(kT - T/4; \epsilon)|^2 \cdot |y(kT - 3T/4 + mT; \epsilon)|^2\} + \\
 &\quad - E\{|y(kT - 3T/4; \epsilon)|^2 \cdot |y(kT - T/4 + mT; \epsilon)|^2\} + \\
 &\quad + E\{|y(kT - 3T/4; \epsilon)|^2 \cdot |y(kT - 3T/4 + mT; \epsilon)|^2\} \\
 &= R_{z_2z_2}(mT; \epsilon) - R_{z_2z_4}(mT; \epsilon) + \\
 &\quad - R_{z_4z_2}(mT; \epsilon) + R_{z_4z_4}(mT; \epsilon), \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

con $z_{\xi}(kT/4; \epsilon)$ pari a $|y(kT/4 - (\xi - 1)/4; \epsilon)|^2$ con $\xi = 1, 2, 3, 4$.

Analogamente si ricava l'autocorrelazione di $x_{\Re}(kT; \epsilon)$

$$\begin{aligned}
 R_{x_{\Re}}(mT; \epsilon) &= E\{x_{\Re}^*(kT; \epsilon) x_{\Re}(kT + mT; \epsilon)\} \\
 &= E\{(z_1(kT; \epsilon) - z_3(kT; \epsilon)) \cdot \\
 &\quad \cdot (z_1(kT + mT; \epsilon) - z_3(kT + mT; \epsilon))\} \\
 &= R_{z_1z_1}(mT; \epsilon) - R_{z_1z_3}(mT; \epsilon) + \\
 &\quad - R_{z_3z_1}(mT; \epsilon) + R_{z_3z_3}(mT; \epsilon). \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

La cross-correlazione tra $x_{\Im}(kT; \epsilon)$ e $x_{\Re}(kT; \epsilon)$ si ricava nel modo seguente

$$\begin{aligned}
 R_{x_{\Im}x_{\Re}}(mT; \epsilon) &= E\{x_{\Im}^*(kT; \epsilon) x_{\Re}(kT + mT; \epsilon)\} \\
 &= E\{(z_2(kT; \epsilon) - z_4(kT; \epsilon)) \cdot \\
 &\quad \cdot (z_1(kT + mT; \epsilon) - z_3(kT + mT; \epsilon))\} \\
 &= R_{z_2z_1}(mT; \epsilon) - R_{z_2z_3}(mT; \epsilon) + \\
 &\quad - R_{z_4z_1}(mT; \epsilon) + R_{z_4z_3}(mT; \epsilon), \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

B.3. Autocorrelazione $R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon)$

e quella tra $x_{\Re}(kT; \epsilon)$ e $x_{\Im}(kT; \epsilon)$ come segue

$$\begin{aligned}
 R_{x_{\Re} x_{\Im}}(mT; \epsilon) &= E\{x_{\Re}^*(kT; \epsilon) x_{\Im}(kT + mT; \epsilon)\} \\
 &= E\{(z_1(kT; \epsilon) - z_3(kT; \epsilon)) \cdot \\
 &\quad \cdot (z_2(kT + mT; \epsilon) - z_4(kT + mT; \epsilon))\} \\
 &= R_{z_1 z_2}(mT; \epsilon) - R_{z_1 z_4}(mT; \epsilon) + \\
 &\quad - R_{z_3 z_2}(mT; \epsilon) + R_{z_3 z_4}(mT; \epsilon). \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

B.3 Autocorrelazione $R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon)$

Si calcola l'autocorrelazione $R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon)$, che costituisce uno dei quattro termini dell'equazione (B.12):

$$\begin{aligned}
 R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon) &= E\{|y(kT; \epsilon)|^2 \cdot |y(kT + mT; \epsilon)|^2\} \\
 &= E\{(y_{\Re}^2(kT; \epsilon) + y_{\Im}^2(kT; \epsilon)) \cdot \\
 &\quad \cdot (y_{\Re}^2(kT + mT; \epsilon) + y_{\Im}^2(kT + mT; \epsilon))\} \\
 &= 2E\{y_{\Re}^2(kT; \epsilon) \cdot y_{\Re}^2(kT + mT; \epsilon)\} + \\
 &\quad + 2E\{y_{\Re}^2(kT; \epsilon) \cdot y_{\Im}^2(kT + mT; \epsilon)\} \\
 &= 2R_{z_{11, \Re \cdot \Re}}(mT; \epsilon) + 2R_{z_{11, \Re \cdot \Im}}(mT; \epsilon), \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

con i pedici \Re e \Im utilizzati per indicare rispettivamente la sola parte reale e immaginaria, poiché risulta più comodo procedere calcolando separatamente i due contributi come scritti nell'ultima riga della (B.15).

B.3. Autocorrelazione $R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon)$

Calcolo di $R_{z_{11}, \Re, \Re}(mT; \epsilon)$

Si ha

$$\begin{aligned}
R_{z_{11}, \Re, \Re}(mT; \epsilon) &= E\{y_{\Re}^2(kT; \epsilon) \cdot y_{\Re}^2(kT+mT; \epsilon)\} \\
&= E\{s_{\Re}^2(kT; \epsilon) \cdot s_{\Re}^2(kT+mT; \epsilon)\} + \\
&\quad + E\{s_{\Re}^2(kT; \epsilon) \cdot n_{\Re}^2(kT+mT)\} + \\
&\quad + E\{n_{\Re}^2(kT) \cdot s_{\Re}^2(kT+mT; \epsilon)\} + \\
&\quad + E\{n_{\Re}^2(kT) \cdot n_{\Re}^2(kT+mT)\} + \\
&\quad + 4E\{s_{\Re}(kT; \epsilon) \cdot n_{\Re}(kT) \cdot \\
&\quad \cdot s_{\Re}(kT+mT; \epsilon) \cdot n_{\Re}(kT+mT)\}. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Nella (B.16) il quarto termine rappresenta il contributo NxN, il secondo, il terzo e l'ultimo rappresentano invece il contributo SxN, mentre il primo termine rappresenta la parte SxS (*self-noise*). Di seguito le tre componenti vengono valutate singolarmente.

Il termine NxN si ottiene come

$$\begin{aligned}
R_{z_{11}, \Re, \Re, N \times N}(mT) &= E\{n_{\Re}^2(kT) \cdot n_{\Re}^2(kT+mT)\} \\
&= E\{n_{\Re}^2(kT)\} \cdot E\{n_{\Re}^2(kT+mT)\} + \\
&\quad + 2(E\{n_{\Re}(kT) \cdot n_{\Re}(kT+mT)\})^2 \\
&= R_{n_{11}, \Re}^2(0) + 2R_{n_{11}, \Re}^2(mT), \tag{B.17}
\end{aligned}$$

essendo n_{\Re} stazionario ed avendo utilizzato la seguente proprietà

date le variabili gaussiane X, Y, W, Z

$$E\{XYWZ\} = E\{XY\} \cdot E\{WZ\} + E\{XW\} \cdot E\{YZ\} + E\{XZ\} \cdot E\{YW\}. \tag{B.18}$$

B.3. Autocorrelazione $R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon)$

Nella (B.17) il termine $R_{n_{11, \Re}}(mT)$ vale

$$\begin{aligned}
R_{n_{11, \Re}}(mT) &= E\{n_{\Re}(kT)n_{\Re}(kT + mT)\} \\
&= E\left\{\left(\sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \tilde{w}_{\Re}\left(kT - \frac{\xi T}{4}\right) p\left(\frac{\xi T}{4}\right)\right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{w}_{\Re}\left(kT + mT - \frac{lT}{4}\right) p\left(\frac{lT}{4}\right)\right)\right\} \\
&= \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\left\{\tilde{w}_{\Re}\left(kT - \frac{\xi T}{4}\right) \tilde{w}_{\Re}\left(kT + mT - \frac{lT}{4}\right)\right\} \cdot \\
&\quad \cdot p\left(\frac{\xi T}{4}\right) p\left(\frac{lT}{4}\right) \\
&= \frac{\sigma_{\tilde{w}}^2}{2} \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} p\left(\frac{\xi T}{4}\right) p\left(\frac{\xi T}{4} + mT\right). \tag{B.19}
\end{aligned}$$

Il termine SxN si ottiene come

$$\begin{aligned}
R_{z_{11, \Re, \Re}, S \times N}(mT; \epsilon) &= E\{s_{\Re}^2(kT; \epsilon) \cdot n_{\Re}^2(kT + mT)\} + \\
&\quad + E\{n_{\Re}^2(kT) \cdot s_{\Re}^2(kT + mT; \epsilon)\} + \\
&\quad + 4E\{s_{\Re}(kT; \epsilon) \cdot n_{\Re}(kT) \cdot \\
&\quad \cdot s_{\Re}(kT + mT; \epsilon) \cdot n_{\Re}(kT + mT)\} \\
&= E\{s_{\Re}^2(kT; \epsilon)\} \cdot E\{n_{\Re}^2(kT + mT)\} + \\
&\quad + E\{n_{\Re}^2(kT)\} \cdot E\{s_{\Re}^2(kT + mT; \epsilon)\} + \\
&\quad + 4E\{s_{\Re}(kT; \epsilon) \cdot s_{\Re}(kT + mT; \epsilon)\} \cdot \\
&\quad \cdot E\{n_{\Re}(kT) \cdot n_{\Re}(kT + mT)\} \\
&= A_2 R_{n_{11, \Re}}(0) \sum_{i=-\infty}^{\infty} v^2(iT + \epsilon) + \\
&\quad + A_2 R_{n_{11, \Re}}(0) \sum_{i=-\infty}^{\infty} v^2(iT + \epsilon + mT) + \\
&\quad + 4 R_{n_{11, \Re}}(mT) R_{s_{11, \Re}}(mT; \epsilon), \tag{B.20}
\end{aligned}$$

B.3. Autocorrelazione $R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon)$

con

$$\begin{aligned}
 E\{s_{\Re}^2(kT; \epsilon)\} &= E\left\{\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i v(kT-iT+\epsilon)\right) \cdot \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l v(kT-lT+\epsilon)\right)\right\} \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} E\{a_{k-j} a_{k-p}\} v(jT+\epsilon) v(pT+\epsilon) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_2 v^2(iT+\epsilon) \tag{B.21}
 \end{aligned}$$

e con

$$\begin{aligned}
 R_{s_{11, \Re}}(mT; \epsilon) &= E\{s_{\Re}(kT; \epsilon) \cdot s_{\Re}(kT+mT; \epsilon)\} \\
 &= E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i v(kT-iT+\epsilon) \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l v(kT-lT+mT+\epsilon)\right\} \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} E\{a_{k-j} a_{k-p}\} v(jT+\epsilon) v(pT+mT+\epsilon) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_2 v(iT+\epsilon) v(iT+mT+\epsilon). \tag{B.22}
 \end{aligned}$$

B.3. Autocorrelazione $R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon)$

Il termine SxS si ottiene come

$$\begin{aligned}
R_{z_{11}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}, S \times S}(mT; \epsilon) &= E\{s_{\mathfrak{R}}^2(kT; \epsilon) \cdot s_{\mathfrak{R}}^2(kT+mT; \epsilon)\} \\
&= E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i v(kT+\epsilon-iT) \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l v(kT+\epsilon-lT) \cdot \right. \\
&\quad \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p v(kT+\epsilon-pT+mT) \cdot \\
&\quad \left. \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q v(kT+\epsilon-qT+mT)\right\} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} E\{a_{k-j} a_{k-\xi} a_{k-\gamma} a_{k-\rho}\} \cdot \\
&\quad \cdot v(jT+\epsilon) v(\xi T+\epsilon) v(\gamma T+\epsilon+mT) v(\rho T+\epsilon+mT) \\
&= A_4 \sum_i v^2(iT+\epsilon) v^2(iT+\epsilon+mT) + \\
&\quad + A_2^2 \sum_i \sum_{l \neq i} v^2(iT+\epsilon) v^2(lT+\epsilon+mT) + \\
&\quad + 2 A_2^2 \sum_i v(iT+\epsilon) v(iT+\epsilon+mT) \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{l \neq i} v(lT+\epsilon) v(lT+\epsilon+mT) \\
&= (A_4 - 3A_2^2) \sum_i v^2(iT+\epsilon) v^2(iT+\epsilon+mT) + \\
&\quad + A_2^2 \sum_i \sum_l v^2(iT+\epsilon) v^2(lT+\epsilon+mT) + \\
&\quad + 2 A_2^2 \sum_i v(iT+\epsilon) v(iT+\epsilon+mT) \cdot \\
&\quad \cdot \sum_l v(lT+\epsilon) v(lT+\epsilon+mT) \\
&= (A_4 - 3A_2^2) \sum_i v^2(iT+\epsilon) v^2(iT+\epsilon+mT) + \\
&\quad + A_2^2 \sum_i \sum_l v^2(iT+\epsilon) v^2(lT+\epsilon+mT) + \\
&\quad + 2 R_{s_{11}, \mathfrak{R}}^2(mT; \epsilon). \tag{B.23}
\end{aligned}$$

B.4. Altre autocorrelazioni e cross-correlazioni $R_{z_i z_j}(mT; \epsilon)$

Calcolo di $R_{z_{11}, \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}}(mT; \epsilon)$

Analogamente si ha

$$\begin{aligned}
 R_{z_{11}, \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}}(mT; \epsilon) &= E\{y_{\mathfrak{R}}^2(kT; \epsilon) \cdot y_{\mathfrak{S}}^2(kT+mT; \epsilon)\} \\
 &= E\{s_{\mathfrak{R}}^2(kT; \epsilon) \cdot s_{\mathfrak{S}}^2(kT+mT; \epsilon)\} + \\
 &\quad + E\{s_{\mathfrak{R}}^2(kT; \epsilon) \cdot n_{\mathfrak{S}}^2(kT+mT)\} + \\
 &\quad + E\{n_{\mathfrak{R}}^2(kT) \cdot s_{\mathfrak{S}}^2(kT+mT; \epsilon)\} + \\
 &\quad + E\{n_{\mathfrak{R}}^2(kT) \cdot n_{\mathfrak{S}}^2(kT+mT)\} + \\
 &\quad + 4E\{s_{\mathfrak{R}}(kT; \epsilon) \cdot n_{\mathfrak{R}}(kT) \cdot \\
 &\quad \cdot s_{\mathfrak{S}}(kT+mT; \epsilon) \cdot n_{\mathfrak{S}}(kT+mT)\}. \tag{B.24}
 \end{aligned}$$

Il termine NxN risulta

$$\begin{aligned}
 R_{z_{11}, \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}, N \times N}(mT) &= R_{n_{11}, \mathfrak{R}}(0) \cdot R_{n_{11}, \mathfrak{S}}(0) \\
 &= R_{n_{11}, \mathfrak{R}}^2(0). \tag{B.25}
 \end{aligned}$$

Il termine SxN vale

$$\begin{aligned}
 R_{z_{11}, \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}, S \times N}(mT; \epsilon) &= A_2 R_{n_{11}, \mathfrak{R}}(0) \sum_{i=-\infty}^{\infty} v^2(iT+\epsilon) + \\
 &\quad + A_2 R_{n_{11}, \mathfrak{R}}(0) \sum_{i=-\infty}^{\infty} v^2(iT+mT+\epsilon). \tag{B.26}
 \end{aligned}$$

Ed infine il termine SxS è

$$R_{z_{11}, \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S}, S \times S}(mT; \epsilon) = A_2^2 \sum_i \sum_l v^2(iT+\epsilon) v^2(lT+mT+\epsilon). \tag{B.27}$$

B.4 Altre autocorrelazioni e cross-correlazioni

$$R_{z_i z_j}(mT; \epsilon)$$

Per brevità si omette il calcolo degli altri quindici termini $R_{z_i z_j}(mT; \epsilon)$, ricavabili in modo analogo a quanto effettuato per $R_{z_1 z_1}(mT; \epsilon)$ nelle pagine precedenti. Di seguito, pertanto, viene riportato solamente il risultato delle autocorrelazioni $R_{z_i z_j}(mT; \epsilon)$, con $i, j = \{1, 2, 3, 4\}$.

B.4. Altre autocorrelazioni e cross-correlazioni $R_{z_i z_j}(mT; \epsilon)$

- Se $i \geq j$ allora i contributi NxN, SxN e SxS di $R_{z_i z_j}(mT; \epsilon)$ sono i seguenti:

$$R_{z_i z_j, N \times N}(mT) = 4R_{n_{ii, \Re}}(0) \cdot R_{n_{jj, \Re}}(0) + 4R_{n_{ij, \Re}}^2(mT) \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} R_{z_i z_j, S \times N}(mT; \epsilon) &= 4A_2 R_{n_{jj, \Re}}(0) \sum_{i=-\infty}^{\infty} v^2(iT - T/4(i-1) + \epsilon) + \\ &\quad + 4A_2 R_{n_{ii, \Re}}(0) \sum_{i=-\infty}^{\infty} v^2(iT - T/4(j-1) + \epsilon + mT) + \\ &\quad + 8R_{n_{ij, \Re}}(mT) R_{s_{ij, \Re}}(mT; \epsilon) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} R_{z_i z_j, S \times S}(mT; \epsilon) &= 2(A_4 - 3A_2^2) \sum_{i=-\infty}^{\infty} v^2(iT - T/4(i-1) + \epsilon) \cdot \\ &\quad \cdot v^2(iT - T/4(j-1) + \epsilon + mT) + \\ &\quad + 4A_2^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} v^2(iT - T/4(i-1) + \epsilon) \cdot \\ &\quad \cdot v^2(lT - T/4(j-1) + \epsilon + mT) + \\ &\quad + 4R_{s_{ij, \Re}}^2(mT; \epsilon) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

con

$$R_{n_{ij, \Re}}(mT) = \frac{\sigma_w^2}{2} \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} p\left(\frac{\xi T}{4}\right) p\left(\frac{\xi T}{4} - \frac{T}{4}(j-i) + mT\right) \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} R_{s_{ij, \Re}}(mT; \epsilon) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_2 v(iT - T/4(i-1) + \epsilon) \cdot \\ &\quad \cdot v(iT - T/4(j-1) + mT + \epsilon); \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

- se $i < j$ invece:

$$R_{z_i z_j}(mT; \epsilon) = R_{z_j z_i}(-mT; \epsilon). \quad (\text{B.33})$$

B.5 Approssimazione del contributo SxS

Nelle equazioni (2.38) e (2.39) si osserva che i termini $R_{\psi, S \times S}(mT; \epsilon)$ e $R_{\psi, S \times S}(mT)$ sono necessari per il calcolo di $\beta_{SxS}(\epsilon)$ e di β_{SxS} , fondamentali per approssimare la densità spettrale di potenza del *self-noise*. Si considerino, pertanto, le equazioni (2.19), (2.21) e (2.25).

Si definisce

$$q_m(iT) = v(iT)v(iT + mT) \quad (\text{B.34})$$

e si calcola

$$\begin{aligned} R_{\psi, S \times S}(mT; \epsilon) = \frac{1}{A^2} \left[R_1(mT; \epsilon) \sin^2\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) + \right. \\ \left. + R_1(mT; \epsilon - T/4) \cos^2\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (R_2(mT; \epsilon) + R_2(-mT; \epsilon)) \sin\left(\frac{4\pi\epsilon}{T}\right) \right] \quad (\text{B.35}) \end{aligned}$$

e

$$R_{\psi, S \times S}(mT) = \frac{2R_1(mT) - R_2(mT) - R_2(-mT)}{A^2}. \quad (\text{B.36})$$

I termini $R_i(mT)$ e $R_i(mT; \epsilon)$, con $i = \{1, 2\}$, presenti nelle equazioni precedenti, risultano essere

$$R_1(mT) = \frac{1}{T} \int_0^T R_1(mT; \epsilon) \sin^2\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) d\epsilon \quad (\text{B.37})$$

$$R_2(mT) = \frac{1}{T} \int_0^T R_2(mT; \epsilon) \sin\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi\epsilon}{T}\right) d\epsilon \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} R_1(mT; \epsilon) = 2(A_4 - 3A_2^2)R_{1,a}(mT; \epsilon) + \\ + 4A_2^2R_{1,b}(mT; \epsilon) + 4A_2^2R_{1,c}(mT; \epsilon) \quad (\text{B.39}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2(mT; \epsilon) = 2(A_4 - 3A_2^2)R_{2,a}(mT; \epsilon) + \\ + 4A_2^2R_{2,b}(mT; \epsilon) + 4A_2^2R_{2,c}(mT; \epsilon). \quad (\text{B.40}) \end{aligned}$$

B.5. Approssimazione del contributo SxS

I tre contributi dell'equazione (B.39) vengono valutati di seguito

$$\begin{aligned}
R_{1,a}(mT;\epsilon) &= \sum_i q_m^2(iT+\epsilon) + \sum_i q_m^2(iT+\epsilon-T/2) + \\
&\quad - \sum_i q_{m-1/2}^2(iT+\epsilon) - \sum_i q_{-m-1/2}^2(iT+\epsilon), \quad (B.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{1,b}(mT;\epsilon) &= \sum_i q_0(iT+\epsilon) \sum_l q_0(lT+mT+\epsilon) + \\
&\quad + \sum_i q_0(iT+\epsilon-T/2) \sum_l q_0(lT+mT+\epsilon-T/2) + \\
&\quad - \sum_i q_0(iT+\epsilon) \sum_l q_0(lT+mT+\epsilon-T/2) + \\
&\quad - \sum_i q_0(iT+\epsilon) \sum_l q_0(lT-mT+\epsilon-T/2), \quad (B.42)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
R_{1,c}(mT;\epsilon) &= \left(\sum_i q_m(iT+\epsilon) \right)^2 + \left(\sum_i q_m(iT+\epsilon-T/2) \right)^2 + \\
&\quad - \left(\sum_i q_{m-1/2}(iT+\epsilon) \right)^2 - \left(\sum_i q_{-m-1/2}(iT+\epsilon) \right)^2. \quad (B.43)
\end{aligned}$$

I tre contributi dell'equazione (B.40) risultano invece

$$\begin{aligned}
R_{2,a}(mT;\epsilon) &= \sum_i q_{m-1/4}^2(iT+\epsilon) + \sum_i q_{m-1/4}^2(iT+\epsilon-T/2) + \\
&\quad - \sum_i q_{m-3/4}^2(iT+\epsilon) - \sum_i q_{-m-1/4}^2(iT+\epsilon-T/4), \quad (B.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{2,b}(mT;\epsilon) &= \sum_i q_0(iT+\epsilon) \sum_l q_0(lT+mT+\epsilon-T/4) + \\
&\quad + \sum_i q_0(iT+\epsilon-T/2) \sum_l q_0(lT+mT+\epsilon-3T/4) + \\
&\quad - \sum_i q_0(iT+\epsilon) \sum_l q_0(lT+mT+\epsilon-3T/4) + \\
&\quad - \sum_i q_0(iT+\epsilon-T/4) \sum_l q_0(lT-mT+\epsilon-T/2), \quad (B.45)
\end{aligned}$$

B.5. Approssimazione del contributo SxS

e

$$R_{2,c}(mT;\epsilon) = \left(\sum_i q_{m-1/4}(iT+\epsilon) \right)^2 + \left(\sum_i q_{m-1/4}(iT+\epsilon-T/2) \right)^2 + \\ - \left(\sum_i q_{m-3/4}(iT+\epsilon) \right)^2 - \left(\sum_i q_{-m-1/4}(iT+\epsilon-T/4) \right)^2 . \quad (\text{B.46})$$

Appendice C

Post-filtro ottimo per il sincronizzatore di Oerder e Meyr

In questa appendice si ricava, per il sincronizzatore di simbolo di Oerder e Meyr, la risposta in frequenza del post-filtro ottimo, il quale permette di minimizzare l'errore quadratico medio (MSE) di stima della fase desiderata. Infatti, si ricorda, lo scopo è stimare il rumore di fase tempo-variante θ_k , dal quale estrarre il ritardo ϵ_k , necessario per il passo di correzione, ossia per ricampionare il segnale ricevuto negli istanti ottimali.

Per comodità si lavora nel dominio z .

Si riportano di seguito le equazioni (3.5) e (3.6), necessarie per il calcolo di $H_{ottimo}(z)$: la densità spettrale di potenza della fase θ è

$$S_{\theta}(z) = \frac{\gamma^2}{(1-z)(1-z^{-1})}, \quad (\text{C.1})$$

mentre la densità spettrale di potenza del rumore ψ è

$$S_{\psi}(z) \simeq \beta_{N \times N} + \beta_{S \times N} + \beta_{S \times S}(1-z)(1-z^{-1}); \quad (\text{C.2})$$

si rimanda invece al Capitolo 2 per $\beta_{N \times N}$, $\beta_{S \times N}$ e $\beta_{S \times S}$.

Per ricavare la funzione di trasferimento del post-filtro ottimo si segue esattamente la teoria di Wiener nella sua formulazione non causale, dato che il

sincronizzatore di Oerder e Meyr non ha vincoli di causalità, essendo non retroazionato.

Pertanto si calcola

$$\begin{aligned}
S_\theta(z) + S_\psi(z) &= \frac{\beta \left[\frac{\gamma^2}{\beta} + \frac{N_0}{\beta} (1-z)(1-z^{-1}) + (1-z)^2(1-z^{-1})^2 \right]}{(1-z)(1-z^{-1})} \\
&= \frac{\beta(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}{z^2(1-z)(1-z^{-1})} \\
&= \frac{\beta(-z_3)(-z_4)(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})(1-z_3^{-1}z)(1-z_4^{-1}z)}{(1-z)(1-z^{-1})} \\
&= \frac{\beta(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})(1-z_1^*z)(1-z_2^*z)}{z_1^*z_2^*(1-z)(1-z^{-1})} \\
&= \frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})(1-z_1^*z)(1-z_2^*z)}{\xi^2(1-z)(1-z^{-1})} \tag{C.3}
\end{aligned}$$

con

$$\xi = \sqrt{\frac{z_1^*z_2^*}{\beta}} = \sqrt{\frac{z_1z_2}{\beta}} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{N_0^3}{\beta^2P} + \frac{N_0^2}{\beta^2} + \frac{4N_0(\gamma^2 - N_0)}{\beta P} + \frac{16\gamma^2}{P} + \frac{4N_0 - 2\gamma^2}{\beta}} + \\
&\quad - \frac{P+Q}{4\beta}, \tag{C.5}
\end{aligned}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q^2}{2\beta^2} + \frac{1}{2P} \left(-\frac{Q^3}{\beta^2} + \frac{4QR}{\beta} - 8Q \right) - \frac{R}{2} - 2 + \frac{P-Q}{4\beta}}, \tag{C.6}$$

$$z_3 = z_1^{-*} = \frac{1}{z_1^*}, \tag{C.7}$$

$$z_4 = z_2^{-*} = \frac{1}{z_2^*}, \tag{C.8}$$

dove $\beta = \beta_{S \times S}$, $N_0 = \beta_{N \times N} + \beta_{S \times N}$, $P = \sqrt{N_0^2 - 4\beta\gamma^2}$, $Q = -4\beta - N_0$ e $R = 6\beta + \gamma^2 + 2N_0$.

Il filtro ottimo è ottenibile, quindi, nel seguente modo

$$\begin{aligned}
H_{ottimo}(z) &= \frac{S_\theta(z)}{S_\theta(z) + S_\psi(z)} \\
&= \frac{\gamma^2 \xi^2}{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})(1-z_1^*z)(1-z_2^*z)}. \tag{C.9}
\end{aligned}$$

Appendice D

Autocorrelazione e densità spettrale di potenza del rumore di fase SxS nel sincronizzatore di Gardner

In questa appendice si ricavano l'autocorrelazione della (4.15), la densità spettrale di potenza della (4.16) ed il valore di $\beta_{S \times S, GA}$ della (4.18) per il sincronizzatore di simbolo di Gardner, presentato in Fig.4.2.

D.1 Autocorrelazione e densità spettrale di potenza

Si consideri un sistema con modulazione $M - QAM$ o $M - PSK$, con $\{c_i\}$ i simboli della costellazione complessa, $g(t)$ risposta all'impulso del filtro in trasmissione (con risposta in frequenza del tipo radice di coseno rialzato) e $p(t)$ pre-filtro adattato (MF) in ricezione. Si utilizzano le stesse definizioni presentate nella sezione B.1, le quali non vengono riscritte per brevità.

Il TED del sincronizzatore di Gardner fornisce in uscita l'errore di sincronismo

$$e_k = \Re\{y^*(kT - T/2; \hat{\epsilon}_k - \epsilon_k)(y(kT; \hat{\epsilon}_k - \epsilon_k) - y(kT - T; \hat{\epsilon}_k - \epsilon_k))\}, \quad (D.1)$$

D.1. Autocorrelazione e densità spettrale di potenza

come indicato nell'equazione (4.5). Ipotizzando rumore additivo nullo, in modo da selezionare il solo contributo di rumore dovuto al *self-noise*, e ricordando che $\widehat{\epsilon}_k - \epsilon_k \rightarrow 0$ in fase di *tracking*, è possibile riscrivere l'errore come segue

$$\begin{aligned}
e_k &= \Re \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i^* v^*(kT - iT - T/2) \cdot \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l v(kT - lT) - \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p v(kT - pT - T) \right) \right\} \\
&= \Re \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{k-q}^* v^*(qT - T/2) \cdot \left(\sum_{\xi=-\infty}^{\infty} c_{k-\xi} v(\xi T) - \sum_{\zeta=-\infty}^{\infty} c_{k-\zeta} v(\zeta T - T) \right) \right\} \\
&= \Re \left\{ (c_k - c_{k-1}) \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{k-q}^* v^*(qT - T/2) \right\} \\
&= (a_k - a_{k-1}) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{k-i} v(iT - T/2) + \\
&\quad + (b_k - b_{k-1}) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{k-i} v(iT - T/2) \tag{D.2}
\end{aligned}$$

con $v(t)$ filtro la cui risposta in frequenza è a coseno rialzato, poiché dovuto alla cascata del filtro $g(t)$ e del pre-filtro $p(t)$ ad esso adattato; si ricorda che $v(kT)$ risulta diverso da 0 solo per k pari a 0, in corrispondenza del quale assume invece valore unitario.

Perciò l'autocorrelazione di e_k , dopo semplici passaggi matematici omessi per

D.1. Autocorrelazione e densità spettrale di potenza

brevità, risulta

$$\begin{aligned}
R_{e,S \times S}(mT) &= E\{e_k \cdot e_{k+m}\} \\
&= \delta(mT) \cdot \left[B v^2\left(\frac{T}{2}\right) + C \sum_{l=-\infty}^{\infty} v^2\left(lT - \frac{T}{2}\right) \right] + \\
&\quad + (\delta(mT - T) + \delta(mT + T)) \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{B}{2} v^2\left(\frac{T}{2}\right) + \frac{C}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} v\left(lT - \frac{T}{2}\right) v\left(lT + \frac{T}{2}\right) \right] + \\
&\quad + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(mT - lT) \cdot \frac{C}{2} \left[v\left(mT + \frac{T}{2}\right) - v\left(mT - \frac{T}{2}\right) \right]^2, \quad (D.3)
\end{aligned}$$

con

$$B = 4(A_4 - 3A_2^2) \quad (D.4)$$

$$C = 4A_2^2. \quad (D.5)$$

L'autocorrelazione del rumore di fase dovuta al *self-noise* quindi è

$$R_{\psi,S \times S,GA}(mT) = \frac{1}{A_{GA}^2} R_{e,S \times S}(mT) \quad (D.6)$$

e da essa si ottiene la densità spettrale di potenza del contributo SxS, ossia

$$\begin{aligned}
S_{\psi,S \times S,GA}(e^{j2\pi fT}) &= \mathcal{F}_m\{R_{\psi,S \times S,GA}(mT)\} \\
&= \frac{1}{A_{GA}^2} \left\{ \left[B v^2\left(\frac{T}{2}\right) + C \sum_{l=-\infty}^{\infty} v^2\left(lT - \frac{T}{2}\right) \right] + \right. \\
&\quad + \left[B v^2\left(\frac{T}{2}\right) + C \sum_{l=-\infty}^{\infty} v\left(lT - \frac{T}{2}\right) v\left(lT + \frac{T}{2}\right) \right] \cos(2\pi fT) + \\
&\quad \left. + C \sum_{l=1}^{\infty} \left[v\left(lT + \frac{T}{2}\right) - v\left(lT - \frac{T}{2}\right) \right]^2 \cos(2\pi flT) \right\}. \quad (D.7)
\end{aligned}$$

D.2 Approssimazione della densità spettrale di potenza SxS

Il termine $S_{\psi, S \times S, \text{GA}}(e^{j2\pi fT})$ esibisce una pendenza di 20 dB/decade alle frequenze di interesse, ossia alle basse frequenze che verranno selezionate dal post-filtro passa-basso. Pertanto è stata introdotta l'approssimazione

$$\tilde{S}_{\psi, S \times S, \text{GA}}(e^{j2\pi fT}) = \beta_{S \times S, \text{GA}}(1 - e^{j2\pi fT})(1 - e^{-j2\pi fT}). \quad (\text{D.8})$$

Per ricavare il valore opportuno di $\beta_{S \times S, \text{GA}}$ è stato imposto

$$\tilde{S}_{\psi, S \times S, \text{GA}}(e^{j2\pi fT})|_{f \rightarrow 0^+} = S_{\psi, S \times S, \text{GA}}(e^{j2\pi fT})|_{f \rightarrow 0^+}, \quad (\text{D.9})$$

ottenendo di conseguenza il valore corretto di $\beta_{S \times S, \text{GA}}$, ossia

$$\beta_{S \times S, \text{GA}} = \frac{1}{2A_{\text{GA}}^2} \left(G + \sum_{l=1}^{\infty} l^2 H_l \right) \quad (\text{D.10})$$

con

$$G = \left[B v^2(T/2) + C \sum_{l=-\infty}^{\infty} v(lT - T/2) v(lT + T/2) \right] \quad (\text{D.11})$$

$$H_l = C [v(lT + T/2) - v(lT - T/2)]^2. \quad (\text{D.12})$$

Appendice E

Post-filtro ottimo per il sincronizzatore di Gardner

In questa appendice viene ricavata la funzione di trasferimento del post-filtro ottimo per il sincronizzatore di Gardner, in presenza di rumore di fase tempo-variante, quando il pre-filtro è quello adattato al filtro in trasmissione.

Per comodità si lavora nel dominio z .

La fattorizzazione spettrale scritta nell'equazione (4.28), necessaria per il calcolo della (4.27), è ottenibile in modo analogo a quanto fatto per la progettazione del post-filtro ottimo per il sincronizzatore *feedforward* di Oerder e Meyr (O&M), pertanto non viene eseguita nuovamente; la derivazione può essere trovata in (C.3).

Si ricava, invece, la funzione di trasferimento di $F(z)$. In base alla teoria della predizione lineare con vincolo di causalità, $F(z)$ coincide con la parte causale della trasformata della cross-correlazione tra la sequenza sbiancata in ingresso a $F(z)$ e la sequenza desiderata. Nel caso in esame quindi si ha

$$F(z) = [S_\theta(z)W^*(z^{-*})]^+ = \left[\frac{\xi\gamma^2}{(1-z^{-1})(1-z_1^*z)(1-z_2^*z)} \right]^+ . \quad (\text{E.1})$$

Il termine $1/(1-z^{-1})$ è la trasformata Z di un gradino causale di ampiezza unitaria $u(n)$, mentre $1/(1-az)$ (con $a = \{z_1^*, z_2^*\}$) è la trasformata di un termine anticausale del tipo $a^{-n}u(n)$. La convoluzione tra i due termini anticausali dà luogo ad un termine anch'esso anticausale; la convoluzione

di quest'ultimo con $u(n)$ fornisce un risultato causale ed anticausale, la cui parte causale è però costante, pari a $\zeta^2 u(n)$. La definizione di $F(z)$ impone di prelevare la sola parte 1-causale, cioè $\zeta^2 u(n-1)$, che nel dominio trasformato risulta $\zeta^2 z^{-1}/(1-z^{-1})$, e quindi si giunge a

$$F(z) = \frac{\xi \gamma^2 \zeta^2 z^{-1}}{(1-z^{-1})}. \quad (\text{E.2})$$

È necessario determinare il valore della costante ζ^2 . Essa coincide con l'integrale della convoluzione tra i due termini anticausali $a^{-n}u(n)$, con $a = \{z_1^*, z_2^*\}$. Ossia, nel dominio trasformato

$$\zeta^2 = \frac{1}{(1-z_1^*z)} \cdot \frac{1}{(1-z_2^*z)} \Big|_{z=1} = \frac{1}{(1-z_1^*)(1-z_2^*)}. \quad (\text{E.3})$$

Si può osservare che ζ^2 è pari anche a $(\gamma\xi)^{-1}$. Si giunge quindi alla funzione di trasferimento ottima del filtro d'anello

$$H_{ott,GA,MF}(z) = W(z)F(z) = \frac{\xi \gamma z^{-1}}{(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1})}. \quad (\text{E.4})$$

La funzione di trasferimento del filtro ad anello aperto è invece

$$L_{MF}(z) = \frac{H_{ott,GA,MF}(z)}{1 - H_{ott,GA,MF}(z)}, \quad (\text{E.5})$$

per cui è necessario calcolare

$$\begin{aligned} 1 - H_{ott,GA,MF}(z) &= \frac{(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1}) - \xi \gamma z^{-1}}{(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1})} \\ &= \frac{z_1 z_2 \left[z^{-2} - \frac{z_1+z_2+\gamma\xi}{z_1 z_2} z^{-1} + \frac{1}{z_1 z_2} \right]}{(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1})} \\ &= \frac{z_1 z_2 (z^{-1} - x_1)(z^{-1} - x_2)}{(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1})} \\ &= \frac{z_1 z_2 (-x_1)(-x_2) (1-x_1^{-1} z^{-1})(1-x_2^{-1} z^{-1})}{(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1})}, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

con

$$x_1^{-1} = 1 \quad (\text{E.7})$$

$$x_2^{-1} = \frac{2z_1 z_2}{\sqrt{(-z_1 - z_2 - \gamma\xi)^2 - 4z_1 z_2} + z_1 + z_2 + \gamma\xi} = z_p. \quad (\text{E.8})$$

Perciò la funzione di trasferimento del filtro ottimo ad anello aperto vale

$$L_{\text{MF}}(z) = \frac{\xi \gamma z^{-1}}{z_p^{-1} z_1 z_2 (1 - z^{-1})(1 - z_p z^{-1})}. \quad (\text{E.9})$$

Bibliografia

- [1] M. Oerder and H. Meyr, “Digital filter and square timing recovery”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 36, no. 5, pp. 605–612, May 1988.
- [2] F. M. Gardner, “A BPSK/QPSK timing error detector for sampled receivers”, *IEEE Transactions on Communications*, vol.34, no.5, pp. 423-429, May 1986.
- [3] Y. Wang, E. Serpedin and P. Ciblat, “An Alternative Blind Feedforward Symbol Timing Estimator Using Two Samples per Symbol”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 9, September 2003.
- [4] A. D’Andrea and U. Mengali, “Performance analysis of the delay-line clock regenerator”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-34, pp. 321–328, April 1986.
- [5] K. Shi, Y. Wang, and E. Serpedin, “On the design of a digital blind feedforward, nearly jitter-free timing-recovery scheme for linear modulations”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, no. 9, pp. 1464-1469, September 2004.
- [6] W. Gappmair, “Self-noise performance of zero-crossing and Gardner synchronisers applied to one/two-dimensional modulation schemes”, *Electronics Letters*, vol. 40, no.16, pp. 1010-1011, 2004.
- [7] L E. Franks and J. P. Bubrouski, “Statistical properties of timing jitter in a PAM timing recovery scheme”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-22, pp. 913-920, July 1974.

BIBLIOGRAFIA

- [8] S.J. Lee, “A new non-data-aided feedforward symbol timing estimator using two samples per symbol”, *IEEE Communications Letters*, vol. 6, pp. 205–207, May 2002.
- [9] A. N. D’Andrea and M. Luise, “Design and analysis of a jitter-free clock recovery scheme for QAM systems”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 41, pp. 1296-1299, September 1993.
- [10] A. Spalvieri and M. Magarini, “Minimum timing jitter in timing recovery based on pre-filtered square-law timing detection”, in Proc. 2nd CTRQ, Colmar, France, pp. 46–51, July 2009.
- [11] L. Barletta, R. Disarò, M. Magarini and A. Spalvieri, “Post-filter optimization in timing recovery based on square-law detection”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 25, no. 9, pp. 821–824, May 2013.
- [12] L. Barletta, M. Magarini, F. Scardoni and A. Spalvieri, “Impact of Loop Delay on the Performance of Gardner Timing Recovery”, *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 25, no. 18, pp. 1797-1800, 2013.
- [13] A. Spalvieri and M. Magarini, “Wiener’s analysis of the discrete-time phase-locked loop with loop delay”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II, Express Briefs*, vol. 55, no. 6, pp. 596–600, June 2008.