

POLITECNICO DI MILANO
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aeronautica
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Dipartimento di Scienze e Tecnologie Aerospaziali



Viscous fingering in una cella di Hele-Shaw

Relatore: Prof. Maurizio Quadrio

Tesi di Laurea di:
Matteo Marchi, matricola 770837

Anno Accademico 2013-2014

Ci sono due modi di vivere la tua vita. Uno è pensare che niente è un miracolo. L'altro è pensare che ogni cosa è un miracolo.

A. Einstein

Indice

Sommario	11
Ringraziamenti	13
1 Introduzione	15
2 Petrolio e viscous fingering	21
2.1 Estrazione del petrolio	23
2.1.1 Coltivazione primaria e secondaria	23
2.1.2 Coltivazione terziaria o migliorata	24
2.2 Viscous fingering e flusso di Hele-Shaw	25
2.2.1 Esperimento nella cella di Hele-Shaw	25
2.2.2 La corrente di Hele-Shaw	27
3 Matematica del viscous fingering	31
3.1 Equazioni di conservazione	31
3.2 Forma adimensionale	36
3.3 Effetto dei parametri	39
4 Metodo numerico	43
4.1 Trasferimento di informazione	43
4.2 Aggiornamento delle proprietà	46
4.3 Soluzione dell'equazione di Hele-Shaw	47
4.3.1 Termine noto	47
4.3.2 Solutore dell'equazione per la pressione	50
4.3.3 Recupero delle velocità e advezione	51
4.3.4 Analisi delle prestazioni del solutore	52
4.4 Multigrid	54
4.4.1 Operatori di trasferimento: restrizione e interpolazione	55
4.4.2 Cicli	57
4.4.3 Riscrittura dell'equazione per la pressione	58
4.5 Ricostruzione dell'interfaccia	60

INDICE

4.6	Validazione del codice	61
5	Esperimenti numerici	69
5.1	Confronto tra metodi	69
5.1.1	Considerazioni sulla tolleranza	71
5.2	Simulazioni	72
5.3	Controllo	76
5.3.1	Pompaggio instazionario	76
5.3.2	Risultati	78
6	Conclusioni e sviluppi futuri	85
	Bibliografia	87

Elenco delle figure

1.1	Viscous fingering	16
1.2	Cella di Hele-Shaw	16
1.3	Instabilità gravitazionale in una cella di Hele-Shaw	17
1.4	Instabilità radiale in una cella di Hele-Shaw	18
2.1	Cella di Hele-Shaw	25
2.2	Fingering radiale nella cella di Hele-Shaw	25
2.3	Instabilità di Saffman-Taylor	26
2.4	Sistema di riferimento	28
3.1	Interfaccia tra i due fluidi con i valori della funzione indice $H(\mathbf{x},t)$	32
3.2	Effetto del raggio iniziale dell'interfaccia sul rateo di crescita delle perturbazioni ($\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$, $A = 1.5 \cdot 10^3$)	40
3.3	Effetto del rapporto delle viscosità sul rateo di crescita delle perturbazioni ($R = 1$, $A = 1.5 \cdot 10^3$)	41
3.4	Effetto della tensione superficiale sul rateo di crescita delle perturbazioni ($R = 1$, $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$)	42
4.1	Funzione di distribuzione	45
4.2	Tensione superficiale conservativa	48
4.3	Tensione superficiale agente sulla griglia	49
4.4	Tensione superficiale agente sull'interfaccia	49
4.5	Griglia a doppia risoluzione per la funzione indice	51
4.6	Passi iniziali del programma di calcolo	53
4.7	Ciclo del programma di calcolo	54
4.8	Iniezione nel caso monodimensionale	56
4.9	Full weighting	57
4.10	Interpolazione 2-D	57
4.11	Cicli V e W con 4 griglie	58
4.12	Ciclo sawtooth con 4 griglie	58

ELENCO DELLE FIGURE

4.13	Ricostruzione tramite contorni di livello. I due estremi della linea di contorno $H = 0.5$ formano i nuovi estremi dell'elemento	62
4.14	Crescita del raggio nel caso di interfaccia circolare con perturbazione nulla	63
4.15	Differenza nell'evoluzione tra due casi, l'uno perturbato e l'altro imperturbato	65
4.16	Confronto tra risultati analitici e numerici, con parametri $A = 2 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ e $R_0 = 1$	66
4.17	Confronto tra risultati analitici e numerici con due diversi metodi, con parametri $A = 2 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ e $R_0 = 1$	66
4.18	Confronto dell'errore assoluto tra i due metodi analizzati, con parametri $A = 2 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ e $R_0 = 1$	67
4.19	Confronto tra $f(4,t)$ analitica e numerica, con parametri $A = 2 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ e $R_0 = 1$	67
5.1	Istogramma delle prestazioni	71
5.2	Posizione dell'interfaccia	73
5.3	Evoluzione di fingers con distacco e riattacco di una bolla	74
5.4	Evoluzione di fingers con intrappolamento di fluido	75
5.5	Portata instazionaria immessa nella cella di Hele-Shaw	77
5.6	Mappa 3-D del raggio	80
5.7	Mappa del raggio vista dall'alto	81
5.8	I fingers fanno crescere la curva del raggio più rapidamente	82
5.9	Oscillazioni del raggio nel caso di portata instazionaria	83
5.10	Zoom del grafico 5.6	83
5.11	Zoom del grafico 5.7	84

Elenco delle tabelle

4.1	Tempistiche medie per i cinque passi di figura (4.7)	55
5.1	Prestazioni	70

Sommario

Oggetto di questo lavoro di tesi è il miglioramento dell'efficienza di un programma di calcolo per la soluzione numerica della corrente in una cella di Hele-Shaw. Essa è costituita da due piatti paralleli separati da una distanza minima riempita di un fluido ad elevata viscosità; un fluido meno viscoso viene iniettato al centro dei piatti. L'iniezione genera un fenomeno che prende il nome di viscous fingering. Lo scopo del lavoro è quello di arrivare ad uno strumento numerico altamente efficiente che consenta una importate campagna di prove in tempi rapidi, tramite l'utilizzo di un metodo multigriglia. Una volta costruito lo strumento di calcolo, lo si userà per un primo tentativo di controllo a ciclo aperto del fenomeno del viscous fingering tramite iniezione pulsata di massa nella cella. La speranza è che le pulsazioni possano impedire la formazioni di strutture estese e ramificate. Questo approccio ancora non indagato in letteratura presenta notevoli vantaggi rispetto ai metodi attualmente utilizzati. Il particolare campo di studio indagato inoltre fa presupporre interessanti possibilità di impiego in applicazioni future.

Parole chiave: viscous fingering, cella di Hele-Shaw, multigrid, simulazione di flussi in mezzi porosi, controllo pulsato.

Abstract

Aim of this thesis work is the efficiency improvement of a computer program for the simulation of Hele-Shaw cell flows. The cell consists of two parallel plates, separated by a small gap filled with a highly viscous fluid; a less viscous fluid is then injected in the middle of the plates. The operation generates a phenomenon which goes under the name of viscous fingering. The goal is to develop a highly efficient numerical tool that quickly allows intensive testing, through the use of a multigrid method. Once the tool is built, it will be used for a first attempt to viscous fingering control through pulsating mass injection. The hope is that the pulses will prevent the formation of elongated and branched structures. This kind of analysis is new, and has considerable advantages with respect to the methods used nowadays. The particular field of study also reveals interesting possibilities of future development in various engineering areas.

Keywords: viscous fingering, Hele-Shaw cell, multigrid, simulation of fluids through porous media, pulsated control.

Ringraziamenti

Un sentito ringraziamento va al Prof. Maurizio Quadrio, il quale mi ha dato la possibilità di portare a termine questo impegnativo lavoro di tesi, guidandomi in questo percorso con esperienza ed insegnandomi a lavorare in autonomia, e concedendomi molto del suo poco tempo.

Vorrei ringraziare tutti coloro che mi hanno accompagnato in questi anni di sofferenze e soddisfazioni al Politecnico di Milano. I professori che mi hanno trasmesso qualcosa di più di qualche semplice nozione, e anche quelli che forse avrebbero dovuto trasmettere qualche nozione in più.

Un profondo grazie va a tutta la mia famiglia che ha sempre creduto in me, anche nei momenti bui, e che mi ha permesso di intraprendere questo importante cammino, non senza infiniti consigli su come andasse intrapreso. A loro è dedicato questo lavoro.

Il ringraziamento più dolce va a Laura, per aver accettato tanti devo studiare nonostante fosse appena finita la sessione d'esame, e avermi aiutato a restare distante dallo stereotipo dell'ingegnere occhialuto e quadratissimo. Grazie per avermi supportato e sopportato con tutto l'amore possibile.

Ringrazio tutti i compagni di corso che sono diventati amici fidati, con cui discutere per ore sul significato di qualche formula in qualche dispensa di ardua comprensione, spesso senza giungere a conclusioni certe, ma anche con cui sedersi a studiare nelle ore di pausa pranzo, o condividere le attese snervanti prima degli esami.

Grazie a tutti voi!

Capitolo 1

Introduzione

Quando si parla di *viscous fingering* si fa riferimento alla nascita ed all'evoluzione di instabilità all'interfaccia fra due fluidi in un mezzo poroso.

Questo tipo di flusso bifase attraverso un mezzo poroso è tipico di numerosi casi di interesse pratico, forse primo fra tutti l'ambito dell'estrazione del petrolio.

Quest'ultimo si trova generalmente nel sottosuolo, all'interno delle rocce cosiddette *serbatoio* (o *reservoir*), ovvero rocce caratterizzate da alta porosità.

La sua estrazione avviene solitamente in due fasi separate, chiamate *coltivazione primaria* e *coltivazione secondaria*; nella prima fase la pressione del greggio all'interno del pozzo di estrazione è sufficiente a spingere il petrolio dal giacimento alla superficie. Tuttavia, durante il processo di estrazione, la pressione nel sottosuolo diminuisce progressivamente, fino a che il petrolio non riesce a emergere autonomamente.

Al fine di raccogliere quanto più greggio possibile, prima che la pressione cali troppo, si passa alla seconda fase: si inietta un altro fluido nel giacimento, allo scopo di rallentare la depressurizzazione (acqua o anidride carbonica).

Durante la coltivazione secondaria, tuttavia, si genera un'instabilità idrodinamica all'interfaccia tra i due fluidi; questa instabilità si presenta quando un fluido poco viscoso (appunto, acqua o anidride carbonica) ne spinge uno con maggiore viscosità (petrolio), in un mezzo poroso.

Ciò che accade all'interfaccia tra i due fluidi è oggetto di studio di questa tesi; il fenomeno di instabilità che si verifica all'interfaccia viene chiamato *viscous fingering*, e si presenta alla vista come delle strutture elongate, dette *dita*, che si protendono all'interno dell'altro fluido, come si vede in figura 1.1.



Figura 1.1: *Viscous fingering* provocato dall'iniezione di cherosene in olio minerale ([1])

Lo svilupparsi di queste strutture allungate danneggia notevolmente l'efficienza del processo di estrazione; in particolare, può accadere che esse raggiungano il punto di estrazione, controcircuitando il flusso di petrolio e portando all'estrazione di acqua; inoltre, in alcuni casi, può avvenire il distaccamento di una bolla di fluido iniettato, il quale può intrappolare cospicue quantità di petrolio, che non sarà più estraibile.

I primi studi di cui si ha notizia risalgono al 1956, quando Geoffrey Taylor visitò una piccola compagnia petrolifera texana, e iniziò a interessarsi al fenomeno del *fingering*. Si accorse subito della difficoltà nel replicare, per via sperimentale, l'interazione di due fluidi in un mezzo poroso; egli decise, insieme al collega P. G. Saffman, di prendere come problema modello il flusso di Hele-Shaw.

Essi utilizzarono come set-up sperimentale la cella di Hele-Shaw (figura 1.2), ovvero un sistema costituito da due lastre di vetro parallele poste a distanza b l'una dall'altra, nel mezzo delle quali viene iniettato un fluido.

Il vetro trasparente permette di eseguire esperimenti di visualizzazione, generalmente impossibili in mezzi porosi quali le rocce di origine sedimentaria.

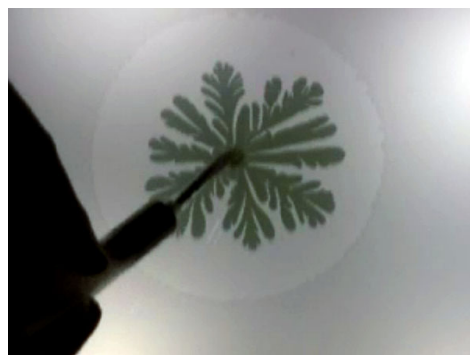


Figura 1.2: *Cella di Hele-Shaw* ([1])

Questo set-up consente di modellare il flusso in un mezzo poroso, in quanto la relazione velocità-pressione è governata dalla stessa equazione (*Darcy's law*): la velocità media del fluido è proporzionale al gradiente di pressione in entrambi i casi; ciò che cambia è la costante di proporzionalità: nel mezzo poroso questa costante è data a meno del segno della permeabilità del materiale, mentre per la cella di Hele-Shaw essa è $-b^2/12$, dove b è la distanza tra i piatti.

Da allora questa instabilità è nota col nome di instabilità di Saffman-Taylor (presentata per la prima volta nel 1958: [2]), ed è a tutt'oggi oggetto di attenzione da parte della comunità scientifica. Grazie alla sua semplicità e potenziali applicazioni, costituisce l'archetipo di sistemi caratterizzati dalla formazione di *patterns*. Più di recente varie analisi sperimentali sono state riprodotte con strumentazione migliorata (consultare ad esempio [3]).

Esistono due tipi di instabilità di interfaccia all'interno di una cella di Hele-Shaw: un caso dovuto alla forza di gravità, in cui un fluido più pesante sta sopra ad uno più leggero, con interfaccia inizialmente rettilinea (figura 1.3); l'altra instabilità è quella che interessa direttamente questo lavoro: l'instabilità a geometria radiale, che riguarda più da vicino il caso di estrazione del petrolio (figura 1.4).



Figura 1.3: Instabilità gravitazionale in una cella di Hele-Shaw ([1])

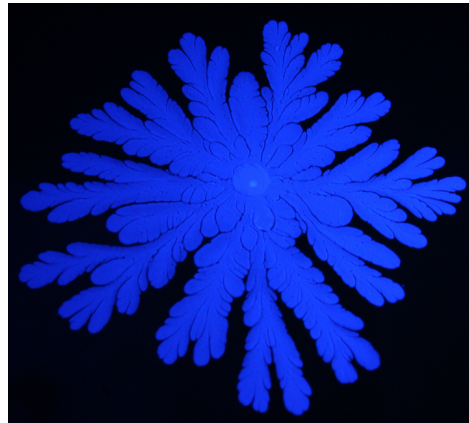


Figura 1.4: Instabilità radiale in una cella di Hele-Shaw ([1])

La simulazione numerica del viscous fingering

Da quando, mezzo secolo fa, Taylor e Saffman fecero i primi studi, il fenomeno del *viscous fingering* è stato sempre molto studiato, sia per mezzo di simulazioni numeriche (consultare ad esempio [4] e [5]), sia tramite esperimenti. La maggior parte dei calcoli numerici si basa sulla soluzione di equazioni integrali di contorno, le quali permettono di ridurre la complessità della dinamica del sistema a una più semplice dinamica di interfaccia tra i due fluidi (consultare Hou, Lowengrub e Shelley [6]).

Alcuni tentativi di simulazione sono stati fatti anche nel viscous fingering gravitazionale (consultare Trevelyan, Almarcha e de Wit [7]).

Il controllo del viscous fingering

Anke et al. [8], fecero numerosi esperimenti per scoprire fino a che punto le proprietà dei fluidi potessero influenzare il fenomeno; questi tentativi fornivano anche la possibilità di *controllare* il fingering.

Essi provarono vari tipi di fluidi diluiti con surfattanti e/o polimeri. Lo scopo dei surfattanti è quello di cambiare la tensione superficiale, mentre i polimeri vanno a modificare la viscosità. Paterson studiò la stabilità lineare di un'interfaccia circolare che evolve nei fingers (consultare [9] e [10]). Howinson ([11]) ha simulato numericamente il fingering radiale ipotizzato da Paterson.

Tutti questi esperimenti mostrarono come l'instabilità di Saffman-Taylor sia drasticamente dipendente dalle proprietà dei fluidi; questo può essere sfruttato per ottenere un più efficiente spostamento del greggio nel giacimento.

Li et al. [12] tentarono invece un approccio diverso, ovvero non modificarono le proprietà del fluido iniettato, ma cambiarono la portata, nella

speranza di ridurre (o sopprimere) l'evoluzione dell'instabilità interfacciale. Essi ipotizzarono che, per una portata immessa che sia scalata col tempo come $t^{-1/3}$, si possa ottenere una crescita *similare* delle dita, evitando regimi con pattern eccessivamente complessi (consultare anche, per uno studio più recente, [13]).

Questo lavoro di tesi vuole essere un proseguo di una tesi precedente svolto da Marco Nicotra [14], la quale aveva sviluppato uno strumento numerico al fine di risolvere il sistema di equazioni che governa il viscous fingering in geometria radiale.

Sebbene il metodo numerico fosse efficace, risultava poco efficiente. Questo consentiva un numero molto limitato di simulazioni in un lasso di tempo ragionevole e con delle macchine di media potenza.

Lo scopo di questa tesi è quello migliorare lo strumento operativo in nostro possesso, in modo da diminuire i tempi di calcolo, e, successivamente, analizzare a fondo una strategia di controllo basata su una portata in ingresso pulsata sinusoidalmente, in modo da trovare combinazioni di frequenza e ampiezza della parte pulsata che siano generalmente vantaggiose per ridurre l'instabilità di Saffman-Taylor. La speranza è che si possa effettivamente arrivare ad uno strumento teorico che possa migliorare il controllo del viscous fingering, limitando l'estensione dei singoli fingers, e, a livello pratico, migliorare parzialmente il processo di estrazione del petrolio.

Questo documento è strutturato come segue:

1. **INTRODUZIONE**
2. **PETROLIO E VISCOUS FINGERING:** Una breve introduzione all'importanza del *viscous fingering* come archetipo dei sistemi soggetti allo sviluppo di *patterns*. Verranno spiegate le caratteristiche di non linearità, mescolamento e non linearità. Verrà analizzato nel dettaglio il modello fisico del flusso di Hele-Shaw, con le condizioni al contorno.
3. **MATEMATICA DEL VISCOUS FINGERING:** Si presentano le equazioni di governo del flusso di Hele-Shaw. Si mostra la forma adimensionale di queste ultime, successivamente usata nel metodo numerico. Si evidenzia l'effetto dei vari parametri adimensionali sul fenomeno.
4. **METODO NUMERICO:** Si descrive il metodo numerico, presentando vari aspetti dello stesso, quali la procedura di ricostruzione dell'interfaccia in relazione ai cambi di topologia e il trattamento della tensione superficiale. Si compara il precedente metodo di risoluzione delle equazioni di governo al nuovo metodo da noi introdotto, evidenziando, in particolare, i tempi di calcolo e l'aumento di efficienza.
5. **SIMULAZIONI ED ESPERIMENTI NUMERICI:** Il codice viene validato tramite confronto con risultati analitici. Si utilizza il codice per una campagna di prove molto dettagliata al fine di controllare il viscous fingering tramite portata pulsata, variando ampiezza e frequenza della parte sinusoidale della portata immessa.
6. **CONCLUSIONI**
7. **APPENDICI**

Capitolo 2

Petrolio e viscous fingering

Esistono, in natura, numerosi processi di *crescita* che danno origine a formazione di schemi, detti *patterns*. Uno di questi fenomeni è il viscous fingering, il quale, nel corso della recente storia, è stato analizzato sia per motivi di ricerca, che per la sua rappresentatività universale in questo tipo di modelli di crescita.

In particolare, la ricca industria petrolifera, da anni esegue numerose ricerche, sia di tipo numerico che sperimentale, al fine di inibire il fenomeno del fingering, il quale limita l'efficienza del processo di estrazione del greggio dal giacimento.

Negli ultimi trent'anni, il modello preso a rappresentazione del fenomeno è l'instabilità di Saffman-Taylor ([2]), scoperta dai due studiosi nel 1958, e fin da allora utilizzata come archetipo nel campo della crescita con formazione di patterns, anche grazie alla sua semplicità sperimentale. Così, questa instabilità, diviene oggetto di studio in un ambito più generale, al fine anche di ricerche future, e non per interessi puramente idrodinamici; essa sarà il tema principale del capitolo.

L'interesse sempre crescente verso i fenomeni di spostamento dei fluidi, combinato con la necessità di un miglioramento delle procedure di recupero e estrazione nel campo degli idrocarburi, ha messo in maggiore evidenza quanto fosse indispensabile uno strumento matematico capace di modellare con precisione le interfacce di fluidi in rapida evoluzione, e spesso instabili.

In questo tipo di fenomeni, fortemente instabili, una variazione, per quanto minima, delle condizioni iniziali, può portare senza problemi a soluzioni finali con interfacce estremamente diverse tra loro.

All'interfaccia tra i due fluidi di nostro interesse, solo alcune proprietà possono essere riproducibili in un esperimento; inoltre, in prossimità di questa interfaccia, dove essenzialmente non c'è diffusione, si possono presentare fenomeni di *mixing* (mescolamento) e *entrainment* (intrappolamento), ovve-

ro situazioni comuni nei flussi turbolenti convenzionali, i quali portano a un mescolamento su scale macroscopiche (opposte a quelle molecolari).

Le equazioni che descrivono tipicamente i fenomeni di interfaccia sono non lineari. Lo studio delle equazioni non lineari di governo è generalmente limitato ad analisi di stabilità per configurazioni molto regolari, come interfacce circolari, magari con perturbazioni iniziali nulle o molto piccole. Saffman e Taylor, tuttavia, si accorsero dell'analogia tra questi fenomeni e un modello precedentemente sviluppato e studiato: il flusso nella cella di Hele-Shaw. Durante l'estrazione del petrolio, infatti, si forza un fluido meno viscoso a penetrare in uno più viscoso; questo è esattamente ciò che accade nella cella di Hele-Shaw.

Questa analogia si rivelò vincente, tant'è che ad oggi il flusso di Hele-Shaw è il modello matematico usato per studiare i fenomeni di interfaccia tra due fluidi non mescolabili in un mezzo poroso. Il sistema è bidimensionale per costruzione, e quindi accessibile a simulazioni numeriche.

L'interesse economico fece da catalizzatore per la ricerca in questo ambito. Studi principalmente empirici furono condotti, al fine di sviluppare una correlazione tra il flusso olio-acqua in mezzo poroso in laboratorio e il caso reale. D'altro canto, sono stati sviluppati alcuni strumenti per il calcolo numerico, e questo lavoro tratta anche il miglioramento di uno di questi.

Ricordiamo i due principali tipi di interfaccia nel flusso di Hele-Shaw: il tipo in cui è presente diffusione, ovvero i due fluidi si mescolano, e il tipo in cui invece la diffusione è proibita, ovvero il caso di fluidi immiscibili. In questo lavoro ci interessiamo al secondo. Nell'ambito dei fluidi miscibili, l'effetto stabilizzante è fornito dall'interdiffusione dei fluidi; tuttavia, se la velocità dei fingers all'interfaccia è molto maggiore della velocità di diffusione caratteristica, la forma delle dita non viene modificata dalla diffusione, e si dovrebbe vedere un comportamento qualitativamente simile a quello immiscibile. Per questo caso, invece, l'effetto stabilizzante per le perturbazioni di piccola scala è dato dalla tensione superficiale. Vale la pena di notare che, nonostante in questo documento venga preso in considerazione solo il caso immiscibile (il solo di cui si possa, ad oggi, eseguire calcoli numerici), pensiamo che alcune delle conclusioni possano essere trasportate immutate al caso miscibile, per le considerazioni sopra menzionate.

Un'ultima considerazione prima di parlare di petrolio e estrazione: sebbene la trasposizione dei risultati ottenuti sul fingering in una cella di Hele-Shaw ad un caso reale di flusso tridimensionale non sia così immediata, pensiamo che un'analisi del problema possa essere importante per la comprensione più generale del moto di interfacce instazionarie.

2.1 Estrazione del petrolio

Il greggio si trova all'interno degli spazi porosi nelle formazioni rocciose situate vari chilometri sotto terra. Varie tecniche estrattive sono state sviluppate nel corso del tempo; esse verranno ora presentate. Il viscous fingering risulta di vitale importanza nella fase secondaria e terziaria (migliorata, o *enhanced oil recovery*).

2.1.1 Coltivazione primaria e secondaria

La tecnica base nell'estrazione del petrolio è detta coltivazione primaria. Essa consiste semplicemente nella perforazione del suolo, e il greggio fluisce autonomamente in superficie a causa della pressione presente nel giacimento. Il motivo dell'alta pressione naturale è spiegato sia dalla presenza di rocce e acqua più dense poste al di sopra del petrolio che dalle varie sacche d'aria e gas compressi intrappolate nelle rocce.

Come il greggio comincia a uscire dal pozzo, la pressione cala, e il flusso che arriva in superficie perde progressivamente forza, fino a fermarsi completamente. Alcune tecniche usate per migliorare la coltivazione primaria includono l'uso di esplosivi e pompe ad elevata pressione per frantumare le formazioni rocciose. Nonostante i tentativi di miglioramento, questa prima fase rimane la più inefficiente, estraendo mediamente il 10% del greggio totale nel giacimento. In quasi tutti i pozzi, una volta terminata la coltivazione primaria, è consentito passare alla coltivazione secondaria.

Durante questa seconda fase, dell'acqua viene iniettata nel giacimento attraverso un pozzo, causando lo spostamento del petrolio e la conseguente estrazione da un pozzo limitrofo. Poichè l'acqua è meno viscosa dell'olio, e la permeabilità della roccia è eterogenea, non passa molto tempo prima che l'acqua trovi un passaggio che conduce dal pozzo di iniezione a quello di estrazione. Quando ciò accade, e la frazione di acqua che viene estratta è eccessiva, il processo diventa svantaggioso dal punto di vista economico, e viene interrotto.

Come si può intuire, la quantità di olio estraibile in questo modo dipende fortemente dalla conformazione e dalle proprietà della roccia nel sottosuolo, così come da quelle del greggio da recuperare; comunque, in generale, anche in condizioni ottimali, più del 50% del greggio totale resta all'interno del giacimento dopo le coltivazioni primaria e secondaria.

2.1.2 Coltivazione terziaria o migliorata

Le compagnie petrolifere, con lo scopo di massimizzare il profitto, hanno molto investito sulla coltivazione terziaria, con l'ovvio scopo di raccogliere una maggior quantità di petrolio. Alcune tecniche includono l'estrazione termica: il petrolio è riscaldato tramite combustione controllata, utilizzando l'olio stesso come combustibile sotterraneo. Il riscaldamento provoca un radicale abbassamento della viscosità, favorendo la fuoriuscita del liquido. L'estrazione termica è particolarmente indicata per oli molto viscosi e pesanti, per i quali le sole coltivazioni primaria e secondaria recuperano una parte minima di greggio. Se, quindi, esso viene riscaldato, le due fasi iniziali vengono rese molto più efficienti.

Un'altra possibilità è l'aggiunta di soluzioni chimiche all'interno dell'acqua iniettata. Gli additivi sono volti a modificare due proprietà importanti nel fenomeno del fingering: tensione superficiale e viscosità dell'acqua. I cosiddetti surfattanti agiscono sulla tensione superficiale dell'acqua, riducendo la formazione di fingers, mentre i polimeri vanno a modificare la viscosità, sempre allo scopo di ridurre la formazione di dita estese. Queste possibilità sono dispendiose dal punto di vista economico, per via dei costi elevati degli additivi, paragonati al costo dell'acqua. In questo lavoro esploriamo una terza possibilità per migliorare il recupero del greggio: quella di controllare la formazione di fingers tramite la modulazione del processo di iniezione (opposta all'iniezione continua e costante).

2.2 Viscous fingering e flusso di Hele-Shaw

2.2.1 Esperimento nella cella di Hele-Shaw

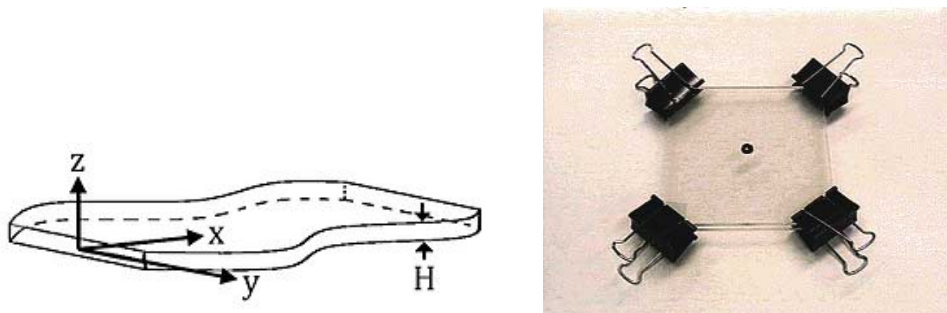


Figura 2.1: Cella di Hele-Shaw ([15])

Come mostrato in figura 2.1, il semplice esperimento si compone di due lastre trasparenti, che possono essere di qualunque forma, purchè la dimensione sia tale che il fluido iniettato non raggiunga la prossimità del bordo. Queste lastre vengono tenute unite e a distanza quanto più possibile costante da delle pinze (in questo particolare esempio, poste ai quattro angoli). Lo spazio compreso deve essere precedentemente riempito con un fluido viscoso, per esempio olio al silicone. La fase successiva dell'esperimento consiste nell'iniettare aria attraverso il buco nel centro, in modo da spingere l'olio al di fuori in modo radiale.

L'aria non penetrerà nell'olio regolarmente formando una regione circolare, ma formerà un pattern irregolare, e di complessità crescente, come mostrato in figura 2.2.

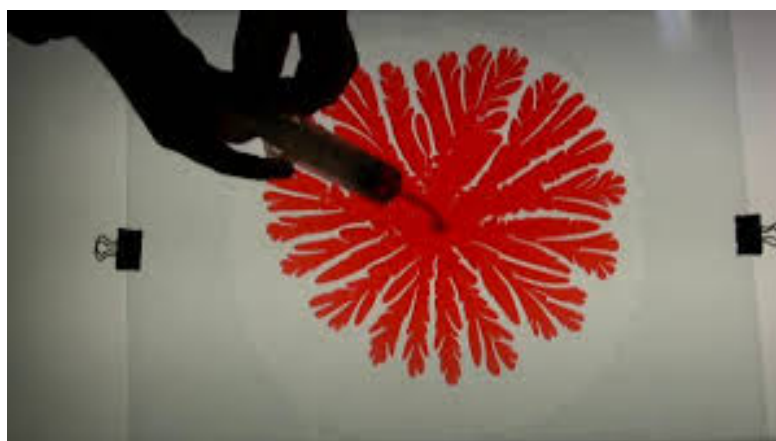


Figura 2.2: Fingering radiale nella cella di Hele-Shaw ([15])

In questo instabilità, sia i due fluidi che la loro interfaccia si spostano a causa della pressione applicata. Questa situazione sperimentale può essere descritta da un modello bidimensionale dove la distribuzione spaziale di pressione obbedisce a un'equazione di Laplace, e i fluidi si muovono con una velocità proporzionale al gradiente di pressione ([16]).

Chiamando (1) e (2) le due regioni separate dall'interfaccia, esiste un campo scalare $P(x,y,z)$ su questo piano; nel nostro caso il campo P è la pressione. Nel caso più semplice P è costante nelle regioni 1 e 2, e soddisfa la relazione:

$$\nabla^2 P = 0. \quad (2.1)$$

Per ogni istante di tempo t , il campo di pressione P dipende dalle condizioni al contorno definite all'infinito e all'interfaccia tra le regioni 1 e 2. Le situazioni che più ci interessano da vicino, in questo particolare caso di studio, sono quelle in cui questa interfaccia si sposta con una velocità normale proporzionale al gradiente di pressione:

$$V_n \propto \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla P, \quad (2.2)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ indica il versore normale all'interfaccia. Lo spostamento della stessa modifica il campo P , in quanto cambia la posizione del bordo, e, di conseguenza, la velocità dell'interfaccia. Questo è il processo che conduce ad una instabilità, l'instabilità di Saffman-Taylor. Una particolarità del fenomeno è la sua non località, dovuta alle interazioni di lungo raggio (teoricamente infinito) introdotte dalla legge di Laplace2.2 a cui deve sottostare il campo di pressione.

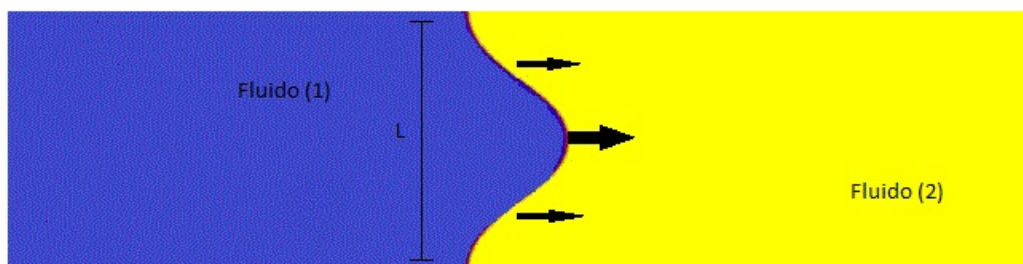


Figura 2.3: Instabilità di Saffman-Taylor

Con riferimento alla figura 2.3, consideriamo una situazione in cui due fluidi sono separati inizialmente da un'interfaccia rettilinea, e assumiamo che questa interfaccia venga perturbata con un disturbo di ampiezza L . L'interfaccia si muove nella direzione delle frecce; ricordiamo che nella zona 1 la pressione è costante, mentre segue la legge di Laplace nella zona 2.

La curva a pressione costante sono linee parallele tra loro, eccetto davanti al disturbo; in quella zona sono leggermente distrorte. Il vincolo introdotto dalla 2.2 impone che la distorsione influenzi le curve isobare fino a una profondità massima di L . Questo risulta in un gradiente di pressione localmente maggiore, davanti alla protrusione, e quindi una velocità più alta. L'interfaccia si sposterà più rapidamente (freccia più grande) in quella zona, facendo crescere la distorsione, e alimentando questo processo: l'interfaccia è instabile.

Se le zone fossero invertite, e i fluidi si stessero muovendo nella direzione opposta, questo ragionamento non sarebbe valido, ma accadrebbe l'esatto contrario: il fluido più viscoso spingerebbe quello meno viscoso, e il cambio di velocità servirebbe a ridurre la protrusione, e il fronte sarebbe stabile.

Idealmente, un finger più allungato implica un gradiente di pressione più alto, e una più alta velocità. Negli esperimenti reali, tuttavia, un effetto di capillarità tende a stabilizzare leggermente di più l'interfaccia alle piccole scale, ritardando, anche se di poco, la formazione dei fingers.

2.2.2 La corrente di Hele-Shaw

A differenza di quanto possa sembrare a prima vista, il nome Hele-Shaw non è dovuto a una collaborazione tra scienziati, ma appartiene al signor Henry Selby Hele-Shaw! Il suo flusso è definito come un flusso di Stokes tra due piatti paralleli separati da uno spazio infinitesimo.

Il problema di Hele-Shaw condivide molte delle difficoltà che si incontrano nelle simulazioni di problemi con contorni dinamici: il vincolo di incomprimibilità implica un'equazione ellittica (Laplace) per la pressione, che deve essere risolta in un dominio dipendente dal tempo, creato dai bordi liberi di muoversi.

In letteratura si trovano esempi di approcci seguiti da vari autori (Fast e Shelley [17]), che trattano lo spazio occupato dal fluido esterno come il dominio computazionale, e impongono le condizioni al contorno all'interfaccia e al bordo d'uscita. Questo approccio è valido nel caso in cui il fluido interno abbia una viscosità trascurabile rispetto a quello esterno: ciò si vede guardando le equazioni di governo. Poiché i termini inerziali sono di ordine inferiore rispetto alla pressione e ai termini viscosi, nel limite di $Re \rightarrow 0$, si ottengono le equazioni base del flusso di Stokes:

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.3)$$

Considerando trascurabile la viscosità per il fluido interno, si arriva alla relazione già menzionata $\nabla p = 0$, ovvero pressione costante nel fluido interno. Inoltre, dall'equazione di continuità si ha:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

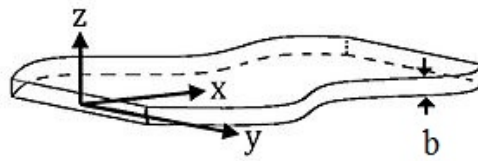


Figura 2.4: Sistema di riferimento

Avendo la dimensione verticale molto piccola, è consentito considerare soltanto le derivate delle componenti di velocità parallele al piano. Col sistema di riferimento in figura 2.4, le variazioni maggiori di velocità sono in direzione z , e l'equazione (2.3) può essere riscritta come:

$$\nabla p = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

la quale può successivamente essere integrata per arrivare al campo di velocità parabolico del flusso di Poiseuille piano. Evidenziando questo fatto, il flusso nella cella di Hele-Shaw è *localmente* un flusso di Poiseuille piano:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\mu} z(z - b) \nabla p \quad (2.6)$$

Dove b indica lo spessore totale della cella. Il flusso può essere integrato lungo lo spessore della cella, definendo così una velocità media $\langle \mathbf{u} \rangle$:

$$\int_0^b \mathbf{u} dz = \langle \mathbf{u} \rangle \quad (2.7)$$

e trovare così che $\langle \mathbf{u} \rangle$ è governata dalla legge:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = -\frac{b^2}{12\mu} \nabla p \quad (2.8)$$

Questa relazione tra la velocità media e la pressione è un caso particolare della legge di Darcy, che vale più generalmente per fluidi che si spostano in mezzi porosi come le rocce. Di solito è presentata nella forma:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = -\frac{K}{\mu} \nabla p \quad (2.9)$$

dove K rappresenta la permeabilità del mezzo. Questa equazione fu dedotta da Henry Darcy a partire dai risultati di esperimenti su flussi d'acqua attraverso sabbia.

Quindi, sia nella cella di Hele-Shaw che in un mezzo poroso, l'incomprimibilità del fluido implica che l'equazione di continuità per la velocità media è valida, $\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0$, e dell'equazione di Laplace per la pressione, $\nabla^2 p = 0$.

Nella descrizione seguente verrà adottata l'approssimazione bidimensionale, dove le velocità del fluido sono quelle medie e rispondono all'equazione (2.8), e verrà abbandonata la notazione con il simbolo di media, per una più facile lettura.

Se non volessimo trascurare la viscosità del fluido interno, basterebbe osservare che la sua velocità segue anch'essa la legge 2.8:

$$\mathbf{u}_j = -\frac{b^2}{12\mu_j} \nabla p_j \quad j = 1, 2 \quad (2.10)$$

dove i pedici 1 e 2 si riferiscono ai fluidi interno e esterno rispettivamente. Nel nostro caso è necessario aggiungere un termine sorgente all'equazione di continuità per la velocità media del fluido interno (pedice 1), per tenere conto dell'iniezione di fluido nella cella:

$$\nabla \mathbf{u}_1 = Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.11)$$

Condizioni al contorno

Come già ricordato, le condizioni al contorno vanno applicate sia all'interfaccia che al bordo esterno della cella. A causa del repentino passaggio da un fluido all'altro, le condizioni al bordo saranno in realtà di salto attraverso l'interfaccia.

Esse sono

$$p_\Gamma = \sigma\kappa = \sigma \left(\frac{2}{b} + \kappa_{2d} \right) \quad (2.12)$$

dove σ è la tensione superficiale (con dimensione [Forza]/[Lunghezza]), e κ è la curvatura dell'interfaccia, naturalmente composta di due contributi, uno

dovuto al menisco, e uno dovuto alla curvatura nel piano $x-y$, ovvero il finger stesso.

La condizione cinematica è

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) = \mathbf{u}|_{\mathbf{x}(t)} \quad (2.13)$$

Per semplicità consideriamo il flusso in una cella di Hele-Shaw che sia circolare con raggio esterno R_{out} . Per determinare la condizione al bordo d'uscita assumiamo che l'interfaccia sia lontana da questa zona, così che il flusso al confine segua il flusso radiale causato dal termine sorgente (iniettore). Viene quindi intuitivo imporre una condizione sul flusso di massa in $r = R_{out}$:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} = \frac{Q}{2\pi R_{out}} \quad (2.14)$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è un versore in direzione radiale. In termini di pressione, la condizione al bordo di uscita è

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{12\mu_2}{b^2} \frac{Q}{2\pi R_{out}} \quad (2.15)$$

la quale deve essere integrata per ottenere la condizione di Dirichlet da utilizzare:

$$p(R_{out}) = p_0 - \frac{12\mu_2}{b^2} \frac{Q}{2\pi} \log(R_{out}) \quad (2.16)$$

con p_0 costante arbitraria. Tutto questo conduce all'area della bolla che cresce con un rateo specifico e calcolabile. Per una trattazione diversa della condizione al contorno fare riferimento a [18].

Capitolo 3

Matematica del viscous fingering

In questo capitolo viene presentata la formulazione matematica del problema. Il metodo si basa sulla scrittura del sistema di equazioni di governo per l'intero dominio computazionale, e considerare i due fluidi come un solo fluido con proprietà diverse. All'interfaccia, dove si avrebbe un salto, si utilizzano delle funzioni δ . Anche una adimensionalizzazione del problema viene qui presentata, e uno studio dell'effetto dei parametri sul fenomeno.

3.1 Equazioni di conservazione

La chiave per rendere questo problema più semplice dal punto di vista matematico, è utilizzare, come in molte simulazioni di fenomeni multifase, un solo set di equazioni di governo per l'intero campo di moto.

La difficoltà sta nella rappresentazione efficace dell'interfaccia: in quella zona si deve avere una discontinuità delle proprietà del fluido. Inoltre c'è la tensione superficiale, che deve essere inclusa nelle equazioni, aggiungendo un termine d'interfaccia appropriato. In generale, un salto di proprietà viene rappresentato usando le cosiddette *funzioni* δ . Questo approccio è trattato da Tryggvason et al. [19] e da Shin e Juric [20].

Prima di procedere alla trattazione matematica vera e propria, è utile presentare alcuni aspetti elementari della rappresentazione di una funzione discontinua attraverso funzioni generalizzate. I vari fluidi vengono identificati da una funzione a scalino (Heaviside) H , con valore 1 dove c'è un fluido particolare, e 0 in tutte le altre zone; questa funzione viene detta *funzione indice*. L'interfaccia stessa ha un valore diverso da zero, cioè il gradiente della funzione scalino.

Per legare la funzione indice alla funzione δ che identifica l'interfaccia, conviene rappresentare H in termini di integrale sul prodotto di funzioni δ monodimensionali:

$$H(\mathbf{x}, t) = \int_{A(t)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') da' \quad (3.1)$$

Da notare: l'integrale è definito su un'area $A(t)$ delimitata dal confine $\Gamma(t)$. Ciò significa che H è chiaramente 1 se \mathbf{x} è all'interno di Γ , mentre è 0 se è all'esterno (figura 3.1).

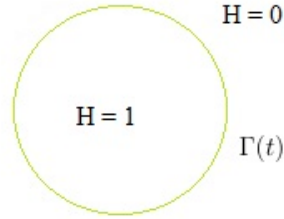


Figura 3.1: Interfaccia tra i due fluidi con i valori della funzione indice $H(\mathbf{x}, t)$

Per trovare il gradiente della funzione indice osserviamo innanzitutto che esso è calcolato sulle variabili non derivate, e quindi può essere portato all'interno del segno di integrale. Poichè le funzioni δ sono antisimmetriche rispetto a tutte le variabili, derivate e non, allora il gradiente delle variabili non derivate può essere rimpiazzato dall'opposto del gradiente rispetto alle variabili derivate.

$$\nabla H = \int_{A(t)} \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') da' = - \int_{A(t)} \nabla' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') da' \quad (3.2)$$

L'ultimo integrale d'area può essere trasformato in un integrale di linea, con una variazione del teorema della divergenza, valido per il gradiente:

$$- \oint_{\Gamma(t)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \hat{\mathbf{n}} ds \quad (3.3)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore uscente normale all'interfaccia e $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(s, t)$ è una parametrizzazione dell'interfaccia $\Gamma(t)$.

Considerando un versore entrante normale è applicando l'operatore $\nabla \cdot$ all'equazione (3.3), si ottiene un'equazione molto importante per il codice che utilizzeremo, ovvero l'equazione di governo di Poisson per la funzione indice $H(\mathbf{x}, t)$:

$$\nabla^2 H = \nabla \cdot \int_{\Gamma(t)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \hat{\mathbf{n}} ds \quad (3.4)$$

Il campo di valori delle proprietà del fluido per ogni punto del dominio sono date da:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)H(\mathbf{x}, t) \quad (3.5)$$

$$\mu(\mathbf{x}, t) = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)H(\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

Con i pedici 1 e 2 che indicano rispettivamente il fluido interno e quello esterno, ρ indica la densità e μ la viscosità. Per esempio, il gradiente della viscosità è dato da:

$$\nabla \mu = (\mu_1 - \mu_2) \nabla H(\mathbf{x}, t) = (\mu_1 - \mu_2) \int_{\Gamma(t)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \hat{\mathbf{n}} ds \quad (3.7)$$

Occorre tener presente che il secondo membro di questa equazione è funzione solamente della posizione (nota) dell'interfaccia, un ulteriore fatto che sfrutteremo a nostro vantaggio nell'implementazione numerica.

L'advezione dell'interfaccia avviene in modo Lagrangiano, risolvendo

$$\frac{d\mathbf{x}_f}{dt} = \mathbf{u}_f \quad (3.8)$$

dove $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}(\mathbf{x}_f)$ è la velocità del fluido all'interfaccia. La sola componente del moto dell'interfaccia determinata in modo fisico è quella normale; per la componente di moto tangenziale possiamo ipotizzare che all'interfaccia i due fluidi abbiano la stessa velocità tangenziale (Shin e Juric [20]).

La conservazione della massa è data da

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (3.9)$$

I fluidi sono ipotizzati incomprimibili, cosicchè la densità di una particella di fluido resti costante:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.10)$$

Questo riduce la conservazione della massa a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (3.11)$$

Poichè stiamo trattando l'iniezione di fluido all'interno del sistema, occorre anche un termine di sorgente, che sia in grado di tenere conto di questo fatto. L'equazione di continuità diventa quindi:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = Q(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.12)$$

Prendiamo anche la viscosità dei fluidi costante:

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0 \quad (3.13)$$

L'equazione della quantità di moto è scritta per l'intero campo di flusso, e le forze dovute alla tensione superficiale (per noi fondamentali e assolutamente non trascurabili) vengono inserite all'interfaccia come forze di volume, che agiscono solo in quella zona. Questa equazione, in forma conservativa e trascurando i termini inerziali e non stazionari, è:

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \int_{\Gamma(t)} \sigma \kappa \hat{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) ds \quad (3.14)$$

Ricordiamo che σ è la tensione superficiale, mentre κ è la curvatura.

Il termine sotto il segno di integrale nell'equazione 3.14 tiene conto della tensione superficiale che agisce sull'interfaccia; seguendo la dissertazione di Tryggvason et al. ([19]), ignoriamo le variazioni tangenziali di σ lungo l'interfaccia.

Utilizzando la stessa ipotesi che ci ha condotti all'equazione 2.5, si ottiene:

$$0 = -\nabla p + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \int_{\Gamma(t)} \sigma \kappa \hat{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) ds \quad (3.15)$$

dove, adesso, $\mathbf{u}=(u,v)$.

Integrando attraverso il salto e prendendo la media, si ha:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = -\frac{b^2}{12\mu} \left(\nabla p - \int_{\Gamma(t)} \sigma \kappa \hat{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) ds \right). \quad (3.16)$$

Ora l'integrale è un integrale di linea lungo l'interfaccia. La bidimensionalità è stata imposta quando abbiamo deciso di trascurare effetti tridimensionali, ma la perdita di realismo è considerata irrilevante; un effetto globale della tridimensionalità potrebbe essere reinserito aggiungendo la curvatura del menisco $2/b$ alla curvatura bidimensionale, quella considerata nell'equazione 2.12.

Prendendo la divergenza dell'equazione 3.16, e usando l'equazione 3.12, otteniamo questa equazione ellittica per la pressione:

$$\nabla \cdot \left(\frac{b^2}{12\mu} \nabla p \right) = Q(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) - \nabla \cdot \left(\frac{b^2}{12\mu} \int_{\Gamma(t)} \sigma \kappa \hat{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) ds \right) \quad (3.17)$$

Le condizioni al contorno devono essere specificate soltanto al bordo d'uscita; in particolare, la condizione 2.16 va applicata al confine esterno del dominio.

Definendo:

$$\beta = -\frac{b^2}{12\mu} \quad (3.18)$$

possiamo scrivere il seguente sistema di equazioni di governo:

Equazioni di governo

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\beta \nabla p) = Q(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \nabla \cdot \left(\beta \int_{\Gamma(t)} \sigma \kappa \hat{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) ds \right) \\ \mathbf{u} = \beta \left(\nabla p - \int_{\Gamma(t)} \sigma \kappa \hat{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) ds \right) \end{cases} \quad (3.19)$$

Condizioni al contorno

$$p(R_{out}) = p_0 + \frac{1}{\beta_{out}} \frac{Q}{2\pi} \log(R_{out}) \quad (3.20)$$

Questo sistema può essere risolto trovando prima una soluzione per la pressione, separatamente, e successivamente recuperando il campo di velocità dalla seconda equazione.

Si noti che il termine della tensione superficiale che dipende dal menisco è costante, verrà trascurato nei nostri calcoli, poichè non influenza il campo di velocità, e quindi la formazione e sviluppo di fingers.

3.2 Forma adimensionale

In questa sezione si vuole arrivare a ricavare un'espressione adimensionale delle equazioni di governo (3.19).

Lo scopo della adimensionalizzazione è di avere la possibilità di conoscere i parametri adimensionali che regolano la fisica del problema.

Introduciamo in seguito alcuni valori di riferimento per le diverse quantità fisiche:

1. $L_R = b$
2. $\mu_R = \mu_2$
3. $p_R = \sigma/b$
4. $U_R = Q/b$

Ricordiamo che b è lo spessore della cella, μ è la viscosità, σ la tensione superficiale e Q la portata.

Ecco che, allora, possiamo scrivere le seguenti variabili adimensionali che regolano il nostro problema, ricordando prima che le funzioni δ hanno dimensione $[1/\text{lunghezza}^2]$:

1. $\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L_R} = \frac{\mathbf{x}}{b}$
2. $\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_R} = \frac{\mathbf{u}}{Q/b}$
3. $p^* = \frac{p}{p_R} = \frac{p}{\sigma/b}$
4. $\mu^* = \frac{\mu}{\mu_R} = \frac{\mu}{\mu_2}$
5. $\delta^* = \frac{\delta}{1/L_R^2} = \frac{\delta}{1/b^2}$
6. $\kappa^* = \frac{\kappa}{1/L_R} = \frac{\kappa}{1/b}$

Facendo le debite sostituzioni nell'equazione di conservazione della massa, si ottiene la seguente espressione:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*) \quad (3.21)$$

Con le stesse sostituzioni, l'equazione 3.16 diventa:

$$\mathbf{u}^* = -\frac{\sigma b}{12\mu_2 Q} \frac{1}{\mu^*} \left(\nabla^* p^* - \int \kappa^* \hat{\mathbf{n}} \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_f^*) ds^* \right) \quad (3.22)$$

Applicando una divergenza adimensionale all'equazione (3.22), otteniamo questa equazione ellittica per la pressione adimensionale:

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot \left(-\frac{1}{\mu^*} \nabla^* p^* \right) &= \frac{12\mu_2 Q}{\sigma b} \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*) \\ &+ \nabla^* \cdot \left(-\frac{1}{\mu^*} \int \kappa^* \hat{\mathbf{n}} \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_f^*) ds^* \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Mentre, per quanto riguarda la condizione al contorno, la sua adimensionalizzazione è la seguente:

$$p^*(R_{out}^*) = -\frac{12/mu_2 Q}{\sigma b} \frac{1}{2\pi} \log(r^*) \quad (3.24)$$

In conclusione, scopriamo che sono due i parametri adimensionali che regolano la fisica del fenomeno; questi due parametri sono:

Rapporto di viscosità

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Questo rapporto entra nella definizione della variabile adimensionale μ^* in questo modo:

$$\mu^* = 1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) H(\mathbf{x}, t) \quad (3.25)$$

e quindi assume il valore di 1 al di fuori dell'interfaccia, mentre vale μ_1/μ_2 all'interno della stessa.

Tensione superficiale

$$A = \frac{12\mu_2 Q}{\sigma b}$$

Infine, sostituendo queste definizioni otteniamo questo sistema di equazioni adimensionali:

Equazioni di governo adimensionali

$$\begin{cases} \nabla^* \cdot \left(-\frac{1}{\mu^*} \nabla^* p^* \right) = A \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*) + \nabla^* \cdot \left(-\frac{1}{\mu^*} \int \kappa^* \hat{\mathbf{n}} \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_f^*) ds^* \right) \\ \mathbf{u}^* = -\frac{1}{A} \frac{1}{\mu^*} \left(\nabla^* p^* - \int \kappa^* \hat{\mathbf{n}} \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_f^*) ds^* \right) \end{cases} \quad (3.26)$$

Va ricordato che non esiste una convenzione universale su quali parametri di controllo adimensionali vadano utilizzati. Questo va tenuto presente nel comparare risultati di diversi studi.

3.3 Effetto dei parametri

Per capire a fondo l'effetto che i parametri adimensionali appena introdotti possono avere sul flusso di Hele-Shaw, dobbiamo prima richiamare una quantità importante in questo problema: il rateo di crescita delle perturbazioni σ_n . Il simbolo è stato preso in accordo con la letteratura, e bisogna prestare attenzione a non confonderlo con σ , che è la tensione superficiale. Ipotizziamo che l'interfaccia Γ sia:

$$\mathbf{R}(\theta, t) = (R(t) + \epsilon R_0 \eta(\theta, t)) \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.27)$$

con $\epsilon \ll 1$ parametro molto piccolo, R_0 raggio iniziale, e $\eta(\theta, t)$ perturbazione dell'interfaccia.

Il parametro che indica la crescita di queste perturbazioni è (per una trattazione più completa si veda [14]):

$$\sigma_n^* = \frac{n}{2\pi R^{*2}} \frac{(1 - \mu_1/\mu_2)}{(1 + \mu_1/\mu_2)} - \frac{1}{2\pi R^{*2}} - \frac{1}{A} \frac{n(n^2 - 1)}{R^{*3}(1 + \mu_1/\mu_2)}, \quad (3.28)$$

dove n è il numero d'onda delle perturbazioni.

Questo rateo di crescita delle perturbazioni è fondamentale nel nostro caso, poichè ci consente di capire quanto, o *se*, cresceranno i fingers, e capire le dipendenze di questa crescita dai vari parametri adimensionali. Dall'equazione stessa si può già evincere come la tensione superficiale A abbia un effetto *stabilizzante* sul rateo di crescita, tant'è che dà un contributo negativo all'equazione, e si sottrae alla prima parte, che deriva dall'adimensionalizzazione della portata iniettata; quindi, ricapitolando, l'iniezione ha un effetto destabilizzante, che sarà contrastato dalla tensione superficiale. Il particolare, l'effetto stabilizzante va con n^2 , ciò fa supporre che per numeri d'onda n alti, il contributo negativo sia maggiore di quello positivo (che va con n), e che quindi il flusso di Hele-Shaw sia stabile per quei numeri d'onda.

Per valori minori di n , dipendentemente dai parametri, σ_n può essere positivo, indicando instabilità. Il caso estremo di $n = 0$ porta a una crescita nulla, che può essere spiegata con il fatto che si tratta di un'interfaccia circolare che si allarga rimanendo circolare.

Comunque, in generale, il rateo di crescita delle perturbazioni è influenzato evidentemente da tre parametri: il raggio iniziale R , la tensione superficiale parametrica A , e il rapporto delle viscosità μ_1/μ_2 .

Vediamo adesso alcune immagini che spiegano meglio questa dipendenza.

In figura 3.2 si vede per quali valori di n si hanno crescite instabili: dove σ_n^* è maggiore di zero abbiamo crescite instabili, mentre sono stabili quando

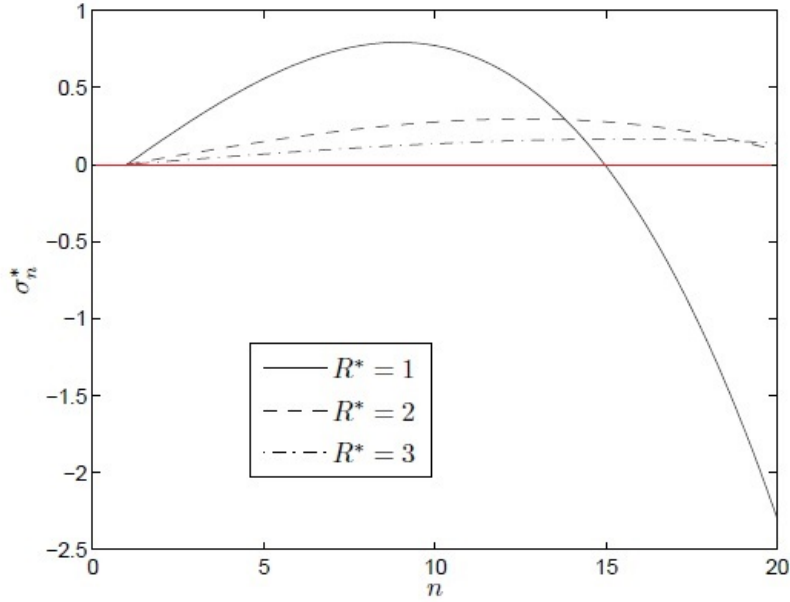


Figura 3.2: Effetto del raggio iniziale dell'interfaccia sul rateo di crescita delle perturbazioni ($\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$, $A = 1.5 \cdot 10^3$)

è minore di zero. Detto questo, è facile vedere come per raggi che crescono la banda di numeri d'onda instabili si allarga notevolmente (per es. per raggio iniziale unitario, $n = 15$ è l'ultimo numero d'onda instabile, mentre per un raggio iniziale raddoppiato si ha instabilità ancora per $n = 20$), mentre l'intensità della crescita diminuisce.

In figura 3.3 si riporta l'effetto del rapporto delle viscosità sul fenomeno: la larghezza della banda di numeri d'onda instabili resta all'incirca invariata; ciò che cambia è l'intensità della crescita. All'abbassarsi del rapporto di viscosità ci si aspetta una crescita maggiore. In effetti, portando al limite $\mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$ l'equazione 3.28, si ottiene proprio questo comportamento:

$$\sigma_n^* = \frac{n-1}{2\pi R^{*2}} - \frac{1}{A} \frac{n(n^2-1)}{R^{*3}} \quad (3.29)$$

L'ultimo parametro che può essere fatto variare è la tensione superficiale, come mostrato in figura 3.4.

Il grafico ha la medesima interpretazione dei precedenti, ovvero al crescere del parametro della tensione superficiale A cresce sia l'ampiezza della banda di numeri d'onda instabili, che l'intensità della crescita. In termini numerici, aumentare di poco la tensione superficiale parametrica sembra aumentare di molto l'effetto instabilizzante.

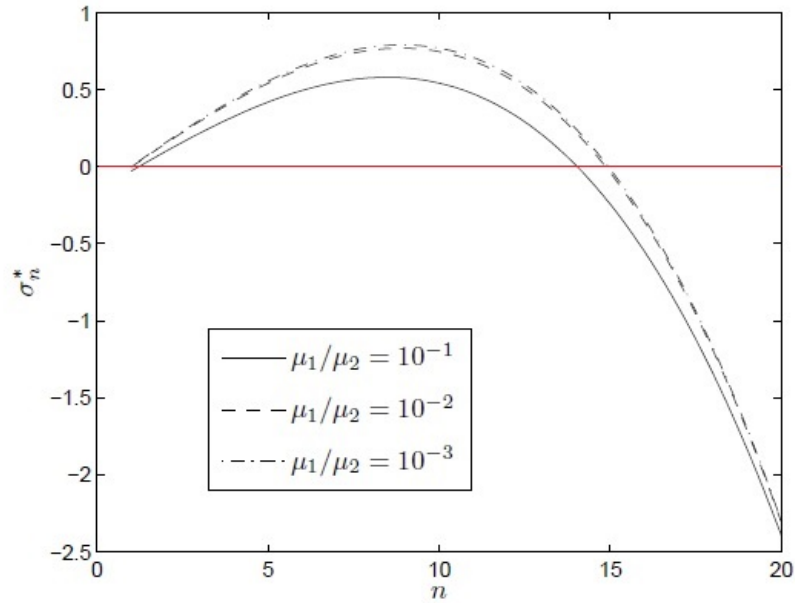


Figura 3.3: Effetto del rapporto delle viscosità sul rateo di crescita delle perturbazioni ($R = 1$, $A = 1.5 \cdot 10^3$)

Ricordando la forma del parametro A :

$$A = \frac{12\mu_2 Q}{\sigma b} \quad (3.30)$$

si può notare come un incremento di A possa essere visto come una *diminuzione* della tensione superficiale *fisica*, ovvero σ , tenendo costante la portata Q , oppure come un incremento della portata a σ costante. In conclusione, all'aumentare di A , aumenta l'intensità della crescita e il massimo numero d'onda instabile.

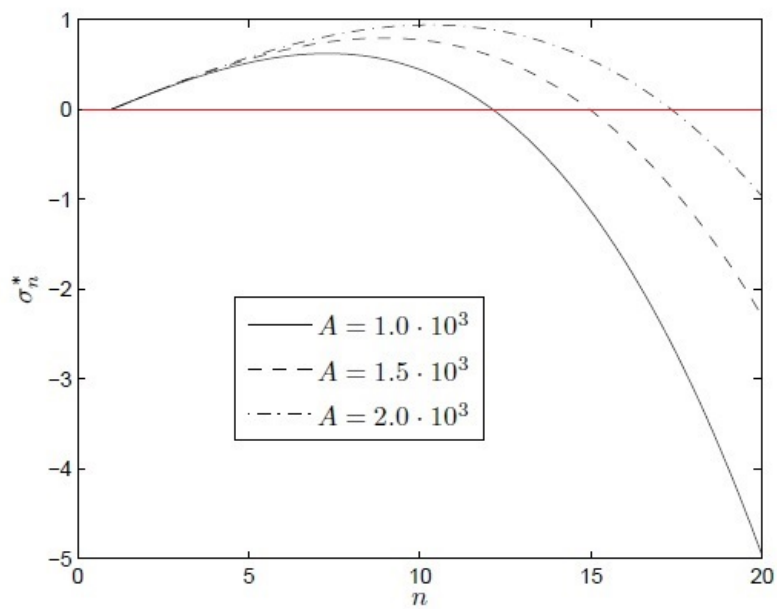


Figura 3.4: Effetto della tensione superficiale sul rateo di crescita delle perturbazioni ($R = 1, \mu_1/\mu_2 \rightarrow 0$)

Capitolo 4

Metodo numerico

La formulazione descritta nel capitolo precedente consente di trattare i fluidi multifase come fossero fluidi omogenei. Una volta che la posizione dell'interfaccia è nota, un qualsiasi algoritmo standard con griglia fissa può risolvere l'equazione (3.26). Questo capitolo vuole illustrare innanzitutto i sistemi utilizzati per il trasferimento di informazioni tra l'interfaccia e la griglia fissa e per l'aggiornamento delle proprietà. Successivamente si definisce il termine noto dell'equazione. Per il solutore di pressione si cercherà di fare un paragone tra il metodo precedente, e quello sviluppato più di recente, confrontando tempi di calcolo e precisione.

4.1 Trasferimento di informazione

Il trasferimento di informazioni dall'interfaccia, descritto in modo lagrangiano, alla griglia stazionaria euleriana, deve avvenire a ogni passo temporale. Poichè i punti dell'interfaccia \mathbf{x}_p non coincidono quasi mai con i punti della griglia \mathbf{x}_{ij} , questo processo viene svolto utilizzando il metodo di Peskin per contorni immersi ([21]).

Con questa tecnica, l'interfaccia infinitamente sottile viene approssimata da una funzione di distribuzione, usata con lo scopo di distribuire le sorgenti su vari punti della griglia vicini all'interfaccia; poichè il fronte rappresenta una funzione δ , il trasferimento corrisponde a costruire un'approssimazione valida per questa funzione δ sulla griglia stazionaria. La stessa funzione approssimata verrà poi utilizzata per interpolare le velocità dalla griglia all'interfaccia.

Così facendo, il fronte acquista uno spessore finito, seppur piccolo, e questo aggiunge stabilità.

È sempre necessario assicurarsi che la quantità trasferita venga conservata. In particolare, una quantità sull'interfaccia ϕ , è espressa in unità per lun-

ghezza [unità/lunghezza], mentre il valore di griglia Φ , è dato in unità per area [unità/area].

Per assicurarsi che il valore totale sia conservato nel processo di trasferimento interfaccia-griglia, dobbiamo scrivere una relazione che leghi i valori assunti sull'interfaccia e sulla griglia:

$$\int_{\Delta_s} \phi(s) ds = \int_{\Delta_a} \Phi(\mathbf{x}) da \quad (4.1)$$

Questa richiesta viene soddisfatta scrivendo

$$\Phi_{ij} = \sum_p \phi_p D_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\Delta s_p}{\Delta x \Delta y} \quad (4.2)$$

dove:

- ϕ_p è un'approssimazione discreta del valore sul fronte $\phi(s)$;
- Φ_{ij} è un'approssimazione discreta del valore di griglia $\Phi(\mathbf{x})$;
- Δs_p è la lunghezza dell'elemento p ;
- $D_{ij}(\mathbf{x}_p)$ è il *peso* del punto di griglia ij rispetto all'elemento p .

I pesi devono rispettare:

$$\sum_{ij} D_{ij} = 1 \quad (4.3)$$

Poichè i pesi hanno un supporto finito, c'è un numero relativamente piccolo di elementi di interfaccia che contribuiscono al valore finale di ogni punto di griglia. Nell'implementazione vera e propria, il trasferimento di informazioni viene fatto tramite ciclo sugli elementi di interfaccia, aggiungendo la quantità ai punti di griglia vicini al fronte.

Per quanto riguarda le funzioni peso, generalmente sono scritte come prodotto di funzioni monodimensionali:

$$D_{ij}(\mathbf{x}_p) = \delta \left(\frac{x_p - x_i}{\Delta x} \right) \left(\frac{y_p - y_i}{\Delta y} \right) \quad (4.4)$$

La funzione di distribuzione liscia che viene usata per distribuire le sorgenti dell'interfaccia sui punti di griglia fissa è quella consigliata da Peskin e McQueen ([21], figura 4.1):

$$\delta(r) = \begin{cases} \delta_1(r), & |r| \leq 1 \\ 1/2 - \delta_1(2 - |r|), & 1 < |r| < 2 \\ 0, & |r| \geq 2 \end{cases} \quad (4.5)$$

dove

$$\delta_1(r) = \frac{3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}}{8}$$

Con la stessa funzione possiamo trasferire informazioni dalla griglia all'interfaccia, ovvero il passaggio al contrario; a ogni passo temporale il campo di velocità è calcolato sulla griglia fissa, mentre a noi occorre il campo di velocità dei punti all'interfaccia per poter iniziare la routine di advezione. Quindi, usando la seguente espressione, il processo è consentito:

$$\mathbf{u}_p = \sum_{ij} \mathbf{u}_{ij} D_{ij}(\mathbf{x}_p) \quad (4.6)$$

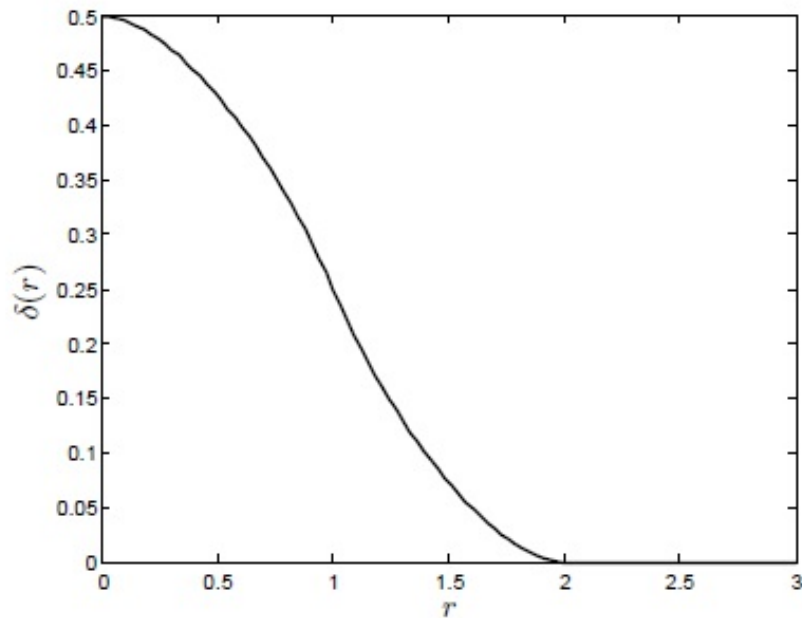


Figura 4.1: Funzione di distribuzione

4.2 Aggiornamento delle proprietà

Come già specificato, le proprietà dei fluidi non subiscono advezione direttamente. Al contrario, soltanto il confine tra i due diversi fluidi viene spostato. È quindi necessario aggiornare le proprietà ad ogni passo temporale.

Per fare questo, prima dobbiamo trovare la funzione indice una volta nota la posizione dell'interfaccia, usando un solutore di Poisson rapido per l'equazione 3.4.

$$\nabla_h^2 H = \nabla_h \cdot \mathbf{N} \quad (4.7)$$

Il pedice h indica l'approssimazione alle differenze finite dell'operatore. \mathbf{N} è, invece, l'approssimazione dell'integrale di superficie presente nell'equazione 3.4:

$$\mathbf{N}_{i,j} = \sum_p \hat{\mathbf{n}}_p \frac{D_{ij}(\mathbf{x}_{midp})}{\Delta x \Delta y} \Delta s_p \sim \int \hat{\mathbf{n}} \delta^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) ds^* \quad (4.8)$$

La funzione indice calcolata in questo modo è costante in ogni regione materiale, ma ha spessore finito, una sorta di zona di transizione attorno all'interfaccia. In questa zona le proprietà cambiano senza l'introduzione di salti dal valore su un lato al valore sull'altro. Lo spessore della regione di transizione è funzione della dimensione della mesh, ed è costante durante tutto il calcolo; questo implica che non ci sia introduzione di diffusione numerica.

La forma discretizzata dell'equazione 3.4 è:

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i+1,j} - 2H_{i,j} + H_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{H_{i,j+1} - 2H_{i,j} + H_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \\ & \frac{(N_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (N_x)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{(N_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (N_y)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \end{aligned} \quad (4.9)$$

con queste definizioni:

$$x_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i\pm\frac{1}{2}}}{2}; \quad y_{j\pm\frac{1}{2}} = \frac{y_j + y_{j\pm\frac{1}{2}}}{2}$$

Una volta che l'equazione di Poisson è stata risolta per la funzione indice, possiamo aggiornare le proprietà del fluido:

$$\mu_{ij} = 1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) H_{ij} \quad (4.10)$$

4.3 Soluzione dell'equazione di Hele-Shaw

In questa sezione verrà analizzata nel dettaglio l'equazione di governo adimensionalizzata 3.26, si vedrà come vengono trattate le singole componenti, e quali metodi vengono usati per risolverla.

4.3.1 Termine noto

Nell'equazione di Poisson 3.26, il termine noto è composto di due termini che descrivono, il primo l'iniezione del fluido, e il secondo la divergenza della forza di tensione superficiale che agisce sull'interfaccia.

$$A\delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*) + \nabla^* \cdot \left(-\frac{1}{\mu^*} \int \kappa^* \hat{\mathbf{n}} \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_f^*) ds^* \right)$$

TERMINE SORGENTE

Nei nostri test imponiamo

$$\delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*) \sim \begin{cases} \delta_0(1 + \cos(|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*|/\pi/r_0^*)) & |\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*| \leq r_0^* \\ 0 & |\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*| > r_0^* \end{cases} \quad (4.11)$$

dove δ_0 è una costante di normalizzazione. Il rateo di iniezione totale è:

$$A \int \int \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*) d\mathbf{x}^* = A\delta_0 \left(\pi - \frac{4}{\pi} \right) r_0^{*2} \quad (4.12)$$

Dato che vogliamo che il totale sia uguale a A , imponiamo:

$$\delta_0 = (\pi r_0^{*2} - 4r_0^{*2}/\pi)^{-1} \quad (4.13)$$

TENSIONE SUPERFICIALE

Come abbiamo avuto modo di vedere nella sezione 3.3, la tensione superficiale e la sua corretta rappresentazione nel metodo numerico sono, forse, l'aspetto più importante. In generale, questo è vero per ogni metodo che voglia seguire il moto di un confine tra fluidi immiscibili per periodi di tempo prolungati. La posizione del fronte è rappresentata da punti discreti; poiché teniamo traccia esplicitamente dell'interfaccia usando gli elementi della superficie, il calcolo della tensione superficiale può essere svolto direttamente sull'interfaccia.

La forza adimensionale su un segmento del fronte è data da:

$$\delta F_\sigma^* = \int_{\Delta s^*} \kappa^* \hat{\mathbf{n}} ds, \quad (4.14)$$

dove κ^* è la curvatura adimensionale, introdotta nella sezione 3.2. Usando la relazione di Frenet, $\kappa^* \hat{\mathbf{n}} = d\hat{\mathbf{t}}/ds^*$, possiamo scrivere:

$$\delta F_\sigma^* = \int_{\Delta s^*} \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial s^*} ds^* = t_B - t_A \quad (4.15)$$

Quindi, invece di dover calcolare la curvatura, ovvero derivate di ordine più alto, servono soltanto le tangenti degli estremi di ogni elemento.

Oltre a semplificare il calcolo del valore, questo assicura che la sommatoria delle forze totali su una superficie chiusa sia nulla, visto che ogni estremo cancella esattamente l'altro. Questa proprietà di conservazione è estremamente importante per le simulazioni di lunga durata, dove anche una minima discrepanza può produrre una forza risultante non fisica, che, alla fine, si accumulerebbe.

Le tangenti sono calcolate facilmente; basta considerare l'interfaccia come composta da segmenti che collegano i punti della stessa. La figura 4.2 mostra come, una volta calcolate le tangenti, sia sufficiente applicare la forza all'estremo di ogni elemento. La forza risultante a ogni estremo è la differenza tra il valore delle tangenti dell'elemento.

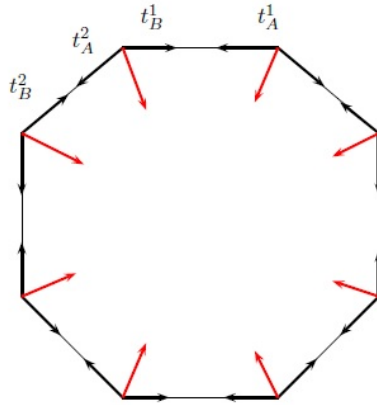


Figura 4.2: Tensione superficiale conservativa

Questa forza deve essere applicata a tutta la griglia, se ne deve calcolare la risultante, e successivamente se ne deve prendere la divergenza.

Nelle figure 4.3 e 4.4 si ha un esempio delle forze di tensione superficiale che agiscono sulla griglia e sull'interfaccia rispettivamente. Si noti come nella prima figura le forze agenti sulla griglia siano allargate allo spessore di

4.3. SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI HELE-SHAW

transizione di cui sopra (infatti le frecce non sono applicate ai punti dell'interfaccia, ma a tutta la zona limitrofa); nella seconda figura, invece, si vede il risultato del passaggio dalla griglia all'interfaccia, in cui la risultante delle forze distribuite viene applicata ai singoli punti dell'interfaccia.

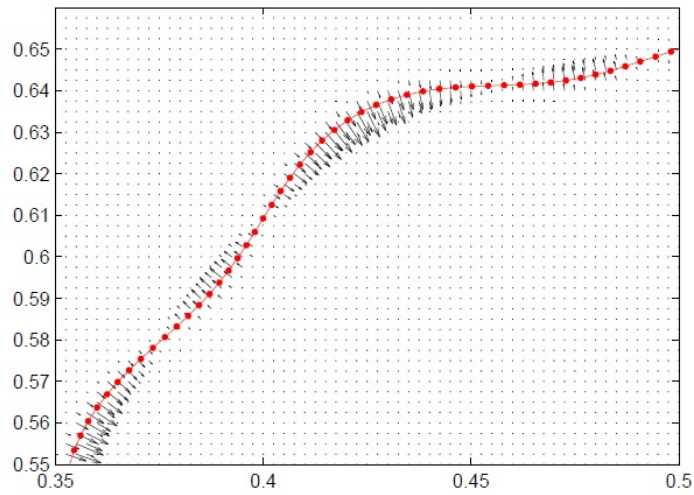


Figura 4.3: Tensione superficiale agente sulla griglia

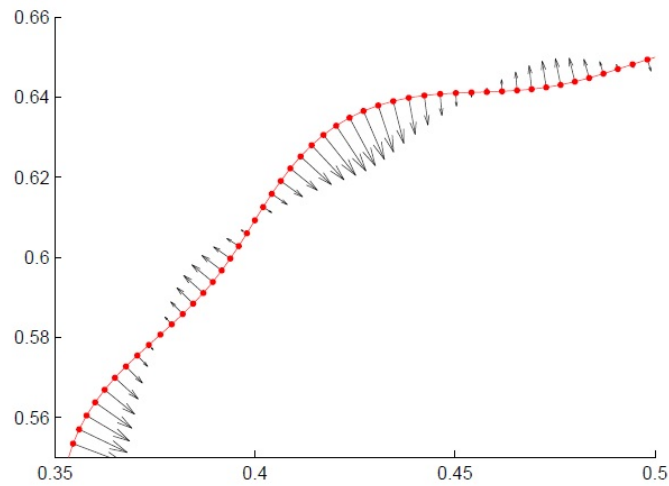


Figura 4.4: Tensione superficiale agente sull'interfaccia

4.3.2 Solutore dell'equazione per la pressione

Dati la posizione dell'interfaccia al tempo t_n e il termine noto dell'equazione, dobbiamo risolvere l'equazione di Poisson per la pressione. In particolare, risolviamo un'equazione discretizzata secondo la tecnica delle differenze finite, con schemi al secondo ordine, nella forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} \left[\beta_{i+\frac{1}{2},j} (p_{i+1,j} - p_{i,j}) - \beta_{i-\frac{1}{2},j} (p_{i,j} - p_{i-1,j}) \right] + \\ & \frac{1}{\Delta y^2} \left[\beta_{i,j+\frac{1}{2}} (p_{i,j+1} - p_{i,j}) - \beta_{i,j-\frac{1}{2}} (p_{i,j} - p_{i,j-1}) \right] = RHS_{ij} \end{aligned} \quad (4.16)$$

sulla griglia cartesiana, dove il coefficiente β è dato da:

$$\beta(x^*, y^*) = -\frac{1}{\mu^*(x^*, y^*)}; \quad (4.17)$$

e il termine noto (RHS_{ij}) discretizzato è:

$$\begin{aligned} RHS_{ij} = & A\delta_{i,j} + \\ & \frac{1}{\Delta x} \left[\beta_{i+\frac{1}{2},j} (ST_x)_{i+\frac{1}{2},j} - \beta_{i-\frac{1}{2},j} (ST_x)_{i-\frac{1}{2},j} \right] + \\ & \frac{1}{\Delta y} \left[\beta_{i,j+\frac{1}{2}} (ST_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - \beta_{i,j-\frac{1}{2}} (ST_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dove

$$\delta_{ij} \sim \begin{cases} \delta_0(1 + \cos(|\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_s|/\pi/r_0)) & |\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_s| \leq r_0 \\ 0 & |\mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_s| > r_0 \end{cases} \quad (4.19)$$

e

$$\mathbf{ST}_{ij} = \sum_p \mathbf{F}_{\sigma p} \frac{D_{ij}(\mathbf{x}_p)}{\Delta x \Delta y} \sim \int \kappa^* \hat{\mathbf{n}} \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_f) ds^* \quad (4.20)$$

Per ottenere i valori necessari di $\beta_{i\pm\frac{1}{2},j}$ e $\beta_{i,j\pm\frac{1}{2}}$, usiamo una griglia a doppia risoluzione per il solutore per la funzione indice $((X_J, Y_J)$, rappresentata dai punti bianchi nella figura 4.5.

Questa tecnica non aumenta il costo computazionale di molto, grazie all'efficienza del solutore per l'equazione di Poisson per la funzione indice.

Lo spessore della zona di transizione diminuisce al crescere della risoluzione; sebbene la griglia abbia raddoppiato la risoluzione, lo spessore è rimasto

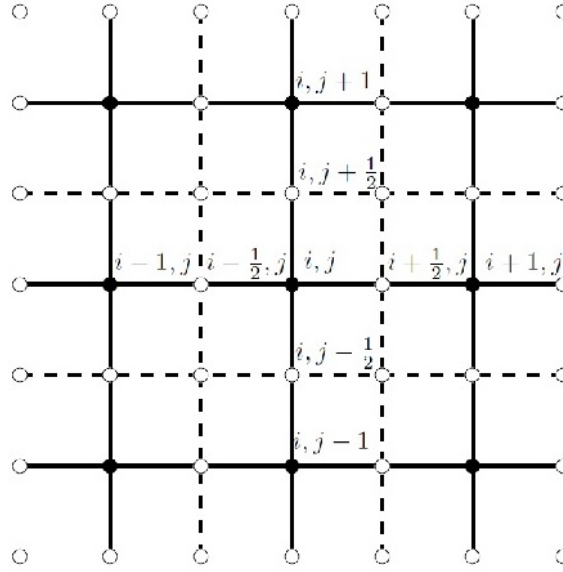


Figura 4.5: Griglia a doppia risoluzione per la funzione indice

lo stesso: la forma della funzione indice è rimasta la stessa. Per informazioni più dettagliate vedere Nicotra [14].

Nella tesi che precede questa, questo sistema di equazioni viene risolto con il metodo BiCG-stab, ovvero il metodo iterativo del gradiente biconiugato stabilizzato, che si basa sui sottospazi di Krylov, sviluppato da H.A. van der Vorst ([22]) per la soluzione numerica di sistemi lineari non simmetrici.

4.3.3 Recupero delle velocità e advezione

Una volta che la pressione è stata trovata, si può recuperare il campo di velocità utilizzando:

$$\begin{cases} u_{i\pm\frac{1}{2},j} = \beta_{i\pm\frac{1}{2},j} \left[\frac{(\pm p_{i\pm 1,j} \mp p_{i,j})}{\Delta x} - (ST_x)_{i\pm\frac{1}{2},j} \right] \\ v_{i\pm\frac{1}{2},j} = \beta_{i,j\pm\frac{1}{2}} \left[\frac{(\pm p_{i,j\pm 1} \mp p_{i,j})}{\Delta y} - (ST_y)_{i,j\pm\frac{1}{2}} \right] \end{cases} \quad (4.21)$$

e

$$\begin{cases} u_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{2} \\ v_{i,j} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2} \end{cases} \quad (4.22)$$

Questi procedimenti sono integrati all'interno del codice, si tratta di passaggi molto rapidi di operazioni semplici, tuttavia fondamentali per trovare i punti dell'interfaccia. Questo passaggio avviene integrando l'equazione di advezione lagrangiana dell'interfaccia, qui riscritta per comodità:

$$\frac{d\mathbf{x}_f}{dt} = \mathbf{u}_f \quad (4.23)$$

Va notato che l'evoluzione temporale del flusso è determinata interamente dalla dipendenza temporale delle proprietà del fluido. Queste quantità sono determinate a loro volta dalla posizione dell'interfaccia. Una volta che questa è conosciuta, il sistema diventa ellittico e la soluzione è determinata indipendentemente dalla storia passata del flusso. Questa è una conseguenza dell'assenza di inerzia nel sistema.

L'equazione (4.23) è risolta utilizzando un metodo di Runge-Kutta del quarto ordine. Il sistema di equazioni da integrare è il seguente:

$$\begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = u_p = \sum_{ij} u_{ij} D_{ij}(x_p, y_p) \\ \frac{dy_p}{dt} = v_p = \sum_{ij} v_{ij} D_{ij}(x_p, y_p) \end{cases} \quad (4.24)$$

4.3.4 Analisi delle prestazioni del solutore

Il solutore sviluppato da Nicotra ([14]), per quanto funzionante, è estremamente inefficiente.

Poichè il nostro scopo è eseguire uno studio approfondito sul controllo pulsato del viscous fingering, necessitiamo di uno strumento che consenta un'elevata quantità di calcoli in tempi ridotti.

La prima cosa da fare è svolgere un *profiling* dello strumento in nostro possesso, ovvero suddividere il programma in sottosezioni, e misurare i tempi di calcolo medi di ogni sottosezione, con lo scopo di capire dove sia necessario intervenire per migliorare le prestazioni.

La figura (4.6) mostra i passi iniziali del programma, ovvero quelli al di fuori del ciclo di iterazione che porta alla soluzione.

Questi quattro passi fungono da inizializzazione, e per questo sono svolti prima che inizi il ciclo iterativo; il tempo richiesto per questa fase è minimo, ed avviene una sola volta durante l'intera simulazione.

Dopo questa breve inizializzazione, si entra nel ciclo vero e proprio, quello che porterà alla soluzione al tempo finale. In figura (4.7) si vede il ciclo compiuto da dopo l'inizializzazione fino al tempo finale. Questa suddivisione

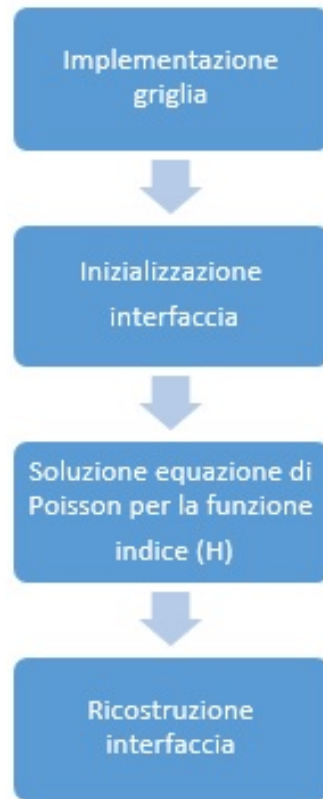


Figura 4.6: Passi iniziali del programma di calcolo

negli steps eseguiti è la più elementare possibile allo scopo di capire dove viene speso più tempo, suddividere ulteriormente non avrebbe alcuna utilità.

In particolare, del ciclo mostrato, il passaggio della scrittura dei dati è trascurabile, perchè non viene svolto a ogni passo temporale, ma soltanto quando richiesto, in base alla necessità di conoscere la forma dell'interfaccia e gli altri dati con più o meno precisione. Anche il passo di ricostruzione avviene sporadicamente, e se ne parlerà più avanti nel capitolo. Gli altri steps devono necessariamente essere svolti ad ogni passo temporale.

La tabella 4.1 mostra i tempi medi per risolvere i passi del ciclo, tenendo presente le specifiche della macchina su cui sono stati svolti i calcoli: *IntelCore i7 CPU @ 2.40GHz*.

Inoltre, va considerato che con il metodo BiCG-stab, la prima volta che l'equazione di Hele-Shaw vengono risolte, poichè si parte da un guess iniziale a caso, il tempo necessario per arrivare a convergenza è all'incirca 2 min, mentre per gli steps successivi, poichè il guess iniziale è la pressione trovata al passo precedente, il tempo medio per ogni ciclo scende a quello indicato



Figura 4.7: Ciclo del programma di calcolo

in tabella (4.1).

Risulta quindi chiaro dove bisogna intervenire, ovvero sullo step della risoluzione delle equazioni di Hele-Shaw, anche perchè l'altra operazione che occupa molto tempo è la trascrizione su disco dei dati, che non avviene ad ogni passo. Infatti questa operazione avviene all'incirca una volta ogni trenta passi temporali, quando si vuole avere un'immagine precisa dell'evoluzione dell'interfaccia. Per aumentare di molto la velocità di esecuzione, si è deciso di sostituire il metodo del gradiente biconiugato stabilizzato, con un metodo *multigrid*, nella speranza di una riduzione tale da poter eseguire un'importante campagna di prove.

4.4 Multigrid

I metodi *multigrid*, o *multigriglia*, si basano su un'idea molto efficace: cambiare la griglia di risoluzione del sistema, da griglia fine a griglia lasca.

Tabella 4.1: Tempistiche medie per i cinque passi di figura (4.7)

Step	Tempi metodo BiCG-stab
1	$\approx 2\text{s}$
2	$\approx 0.7\text{s}$
3	$\approx 0.02\text{s}$
4	$\approx 0.27\text{s}$
5	$\approx 0.012\text{s}$

I metodi iterativi standard sono caratterizzati da una convergenza globale bassa; tuttavia, per errori le cui scale di lunghezza sono dell'ordine della dimensione della griglia, questi metodi smorzano l'errore rapidamente, lasciando indietro errori con frequenze più basse (scale di lunghezza maggiori). Passando tra griglie di diverse dimensioni, col metodo multigrid, consente di abbattere tutte le componenti del residuo. Quindi, l'obiettivo è di passare a griglie sempre meno fitte, dove le frequenze basse si comportano come frequenze alte, e possono essere abbattute (operazione di *smoothing*) (Consultare Brandt, [23]). Va tenuto presente che si itera solo poche volte prima di cambiare da fine a lasca e viceversa. Il risultato notevole dei metodi multigrid è che possono risolvere numerosi sistemi sparsi, simmetrici e non, in un numero fissato di iterazioni.

Il *cuore* di un metodo di questo tipo si può riassumere in tre passaggi fondamentali, che lo distinguono dagli altri metodi:

1. Restrizione, griglia fine \rightarrow griglia lasca
2. Soluzione, sulla griglia lasca
3. Interpolazione, griglia lasca \rightarrow griglia fine

Resta da stabilire come si possa passare liberamente tra le diverse griglie, e questo sarà l'argomento della prossima sezione.

4.4.1 Operatori di trasferimento: restrizione e interpolazione

Le entità matematiche che consentono i passaggi tra le griglie sono degli *operatori matriciali*, i quali possono essere definiti in vari modi, purchè riescano a ridurre i punti di griglia. Esistono vari operatori che consentono questo processo, uno di questi, per esempio, è la cosiddetta *iniezione*: come

mostrato in figura 4.8, questa tecnica consiste nel prendere le soluzioni presenti sui punti pari della griglia densa, e trasferirle senza ulteriori modifiche sulla griglia rada.

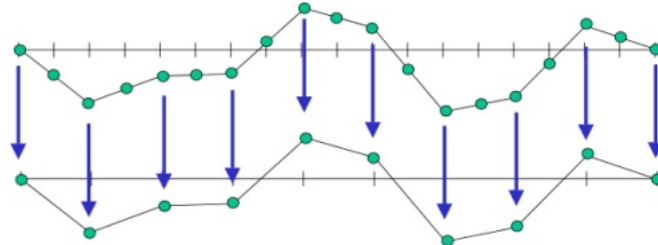


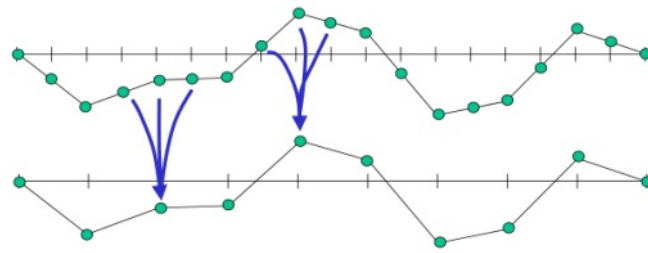
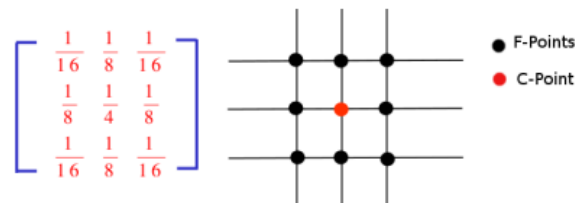
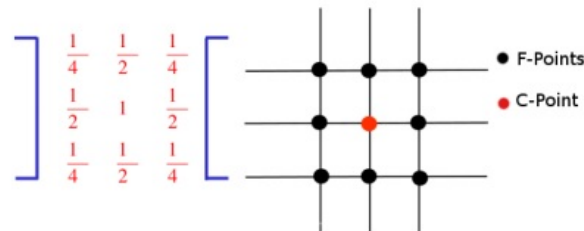
Figura 4.8: Iniezione nel caso monodimensionale

L'iniezione non offre sempre risultati soddisfacenti, e in presenza di sistemi più complessi, con nel nostro caso, conviene adottare una strategia più complicata; questa tecnica è nota come *full weighting*, e prende il nome dal fatto che i punti della griglia lasca vengono ottenuti effettuando una media pesata dei vicini punti della griglia fitta. Per rendere l'idea di come ciò possa avvenire, mostriamo una figura per il caso monodimensionale (4.9a), decisamente più chiaro, e una per il caso di nostro interesse, ovvero quello bidimensionale (4.9b).

La nostra scelta per il solutore delle equazioni di Hele-Shaw ricade ovviamente sull'operatore di restrizione full weight.

L'interpolazione è l'operazione inversa alla restrizione e permette il trasferimento di informazioni dalla griglia rada a quella densa. In questo caso, forse, è più chiara la rappresentazione bidimensionale, mostrata in figura 4.10.

Ad ogni punto F della griglia fine, viene associato il peso con cui il punto della griglia meno densa contribuisce al valore di F . Per una trattazione più dettagliata degli operatori consultare [23].

(a) *Full weighting 1-D.*(b) *Full weighting 2-D.**Figura 4.9: Full weighting**Figura 4.10: Interpolazione 2-D*

4.4.2 Cicli

Poichè il metodo multigrid si basa su una gerarchia di griglie computazionali, resta da decidere l'ordine e il numero delle gerarchie, ovvero quanti passi di restrizione fare prima di calcolare la soluzione, e, successivamente, quanti passi di interpolazione fare per tornare alla griglia fine. Esistono vari cicli possibili, con varie combinazioni di restrizione, interpolazione e rilassamento, e anche vari metodi di rilassamento. Ora vedremo alcuni cicli, senza analizzarli nel dettaglio. In figura 4.11 si vedono due tipi di cicli; ogni punto nero corrisponde ad un'operazione di smoothing, ogni tratto che scende corrisponde a una restrizione su griglia meno densa di quella posta sopra, fino ad arrivare al punto più basso, dove si esegue l'ultima operazione di rilassamento prima di risalire, ovvero interpolare fino ad avere la soluzione sulla

griglia più fine.

Un'altra strategia è il cosiddetto ciclo *sawtooth*, ovvero a dente di sega (4.12, con quattro griglie), ed è la strategia più semplice possibile di multigrid. In questo particolare caso il calcolo parte con un passo di rilassamento sulla griglia più fine, che costa computazionalmente leggermente di più di un semplice calcolo del residuo. Ogni griglia lasca è visitata una sola volta, e un passo di smoothing viene svolto dopo ogni correzione di griglia.

Nella sua semplicità, questo metodo è quello che fa per noi, avendo la possibilità di fornire una soluzione estremamente precisa (data anche la semplicità del sistema da risolvere) in tempi molto ridotti.

Per la strategia di smoothing si opta per una scomposizione LU incompleta (*iLU decomposition*, per una trattazione più estesa consultare [24]). Altre strategie di rilassamento (Gauss-Seidel, Red-Black Gauss-Seidel) sono trattate più nel dettaglio in libri specializzati ([24], [23]).

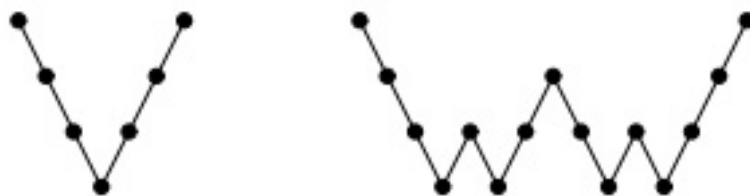


Figura 4.11: Cicli V e W con 4 griglie

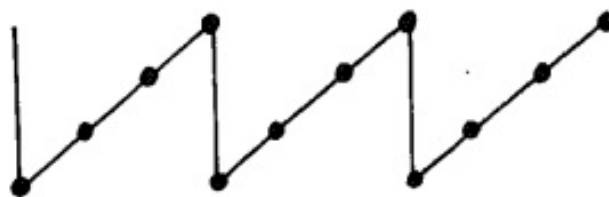


Figura 4.12: Ciclo sawtooth con 4 griglie

4.4.3 Riscrittura dell'equazione per la pressione

Prima di procedere alla sostituzione del metodo BiCG-stab con quello multigrid, bisogna riscrivere l'equazione della pressione (4.16). Il metodo BiCG non aveva bisogno della costruzione esplicita della matrice (metodi

matrix-free), perchè arrivava a convergenza confrontando la norma del residuo al passo $k+1$ con quella al passo k . Il multigrid, invece, ha bisogno in ingresso del sistema nella forma classica:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Il termine noto \mathbf{b} è precisamente quello della (4.18), mentre per la parte a sinistra dell'uguale dell'equazione 4.16, deve essere riscritta in modo più chiaro, raggruppando le incognite con pedice uguale:

$$\begin{aligned} & p_{i,j} \left(-\frac{1}{\Delta x^2} \beta_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{1}{\Delta x^2} \beta_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{\Delta y^2} \beta_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta y^2} \beta_{i,j-\frac{1}{2}} \right) + \\ & p_{i+1,j} \left(\frac{1}{\Delta x^2} \beta_{i+\frac{1}{2},j} \right) + p_{i-1,j} \left(\frac{1}{\Delta x^2} \beta_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \\ & p_{i,j+1} \left(\frac{1}{\Delta y^2} \beta_{i,j+\frac{1}{2}} \right) + p_{i,j-1} \left(\frac{1}{\Delta y^2} \beta_{i,j-\frac{1}{2}} \right) = RHS_{ij} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Con riferimento alla molecola a 9 punti

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{i+1,j} & 0 \\ p_{i,j-1} & p_{i,j} & p_{i,j+1} \\ 0 & p_{i-1,j} & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice verrà riempita in questo modo

$$\begin{bmatrix} 0 & & \frac{1}{\Delta x^2} \beta_{i+\frac{1}{2},j} & 0 \\ \frac{1}{\Delta y^2} \beta_{i,j-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{\Delta x^2} \left(\beta_{i+\frac{1}{2},j} + \beta_{i-\frac{1}{2},j} \right) - \frac{1}{\Delta y^2} \left(\beta_{i,j+\frac{1}{2}} + \beta_{i,j-\frac{1}{2}} \right) & & \frac{1}{\Delta y^2} \beta_{i,j+\frac{1}{2}} \\ 0 & & \frac{1}{\Delta x^2} \beta_{i-\frac{1}{2},j} & 0 \end{bmatrix}$$

Questo sarà il nucleo della matrice da inserire nel multigrid, ricordando che β è dato dalla 4.17, e viene calcolato dal codice in una routine a parte. Relativamente agli elementi di bordo della matrice, essi devono essere modificati per includere le condizioni al contorno; in particolare, chiamando β_{out} il valore di β sul contorno del dominio (avrà lo stesso nome all'interno del codice), vediamo la prima colonna della matrice, tenendo presente che con

una simile trattazione, ma con indici diversi, si implementano anche le restanti righe e colonne di bordo. Il termine noto è già costruito in modo da contenere le necessarie modifiche.

L'equazione 4.25, sul contorno diventa:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_{out}}{\Delta x^2} (p_{i+1,2} - 2p_{i,2} + p_{i-1,2}) + \\ & \frac{\beta_{out}}{\Delta y^2} (p_{i,3} - 2p_{i,2}) = RHS_{i,2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Da notare l'assenza del termine $p_{i,1}$, poichè, essendo l'indice 1 il bordo, il valore della pressione sul bordo è imposto dalla condizione di Dirichlet, e in particolare $p_{i,1} = 0$. La prima colonna della matrice diventa allora:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_{out}}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & -2 \left(\frac{\beta_{out}}{\Delta x^2} + \frac{\beta_{out}}{\Delta y^2} \right) & \frac{\beta_{out}}{\Delta y^2} \\ 0 & \frac{\beta_{out}}{\Delta x^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Allo stesso modo si modificano tutti i termini di bordo, prestando particolare attenzione agli angoli della matrice, dove la molecola a 9 punti è in realtà definita solo su 3 di essi, poichè i restanti corrispondono alle condizioni al contorno, e sono quindi nulli.

4.5 Ricostruzione dell'interfaccia

Vale la pena spendere qualche parola sul processo di ricostruzione dell'interfaccia, che, sebbene, come mostrato, sia un processo estremamente poco costoso dal punto di vista dei tempi di calcolo, è estremamente importante nel fenomeno preso in esame.

I cambi topologici sono una caratteristica propria del flusso di Hele-Shaw, a causa del distaccamento di piccole gocce dai fingers, ma anche a causa dell'unione di diverse sezioni dell'interfaccia. Questo aspetto è fondamentale se vogliamo una buona approssimazione del processo di estrazione del petrolio, in cui una frazione dell'olio è dispersa in acqua sotto forma di goccioline. Queste goccioline devono quindi essere riprodotte numericamente, in dimensione e numero.

Dobbiamo consentire all'interfaccia di riconnettersi qualora due fingers si avvicinino, o di staccarsi qualora una bolla stia per crearsi.

Shin e Juric [20] hanno proposto un metodo che rimpiazza queste aggiunte e sottrazione di goccioline, con una procedura di ricostruzione dell'interfaccia.

Ci avvaliamo del fatto che abbiamo due rappresentazioni della posizione dell'interfaccia: gli elementi tracciati esplicitamente, e la funzione indice, dove il contorno con valore pari a 0.5 rappresenta l'interfaccia stessa. Così, cominciando da una funzione indice data, possiamo posizionare gli elementi dell'interfaccia sul contorno con valore 0.5, o, al contrario, partendo dagli elementi dell'interfaccia possiamo risolvere l'equazione di Poisson per la funzione indice.

Supponiamo che alla fine di un passo temporale abbiamo usato gli elementi dell'interfaccia tracciata nella soluzione dell'equazione 3.4 per ottenere la funzione H in ogni punto di griglia. Ora scartiamo gli elementi dell'interfaccia e ne costruiamo di nuovi; lo facciamo disegnando contorno di livello (approssimato da una linea) attraverso ogni cella della griglia al valore $H = 0.5$, usando un'interpolazione lineare.

In figura 4.13, i due estremi di questa linea di contorno formano i nuovi estremi dell'elemento di interfaccia. Poichè usiamo un banale calcolo della pendenza come interpolatore, gli elementi confinanti di celle limitrofe avranno sempre gli stessi estremi, ovvero non si creeranno buchi. Quindi, sebbene elementi adiacenti non sono connessi logicamente, vengono collegati fisicamente tramite questo processo.

Per ora gli elementi di interfaccia non sono orientati; una procedura è implementata perchè le normali degli elementi puntino verso l'interno. Come mostrato in figura 4.13, gli elementi sono orientati cella per cella, in modo che il valore massimo della funzione indice stia alla destra dell'elemento che collega x_{start} a x_{end} .

I nuovi elementi ricostruiti e orientati ora giacciono sul contorno di livello 0.5 della funzione indice. Questa procedura fa le veci di quella sopra menzionata di aggiungere e sottrarre pezzetti di interfaccia per simulare le goccioline. Inoltre questa procedura consente complessi cambi di topologia: non appena due linee di interfaccia si avvicinano a una o due celle di griglia, la ricostruzione le unisce, come accadrebbe nella realtà, e poi le tratta come fossero una sola linea. Gli elementi di interfaccia, infatti, verranno ricostruiti con le stesse proprietà topologiche della funzione indice.

4.6 Validazione del codice

Ora che abbiamo sviluppato uno strumento numericamente estremamente efficiente, possiamo condurre una campagna di prove sostanziosa, con l'intento di provare una nuova forma di controllo sul viscous fingering. Tuttavia, prima di procedere agli esperimenti veri e propri, occorre validare il codice.

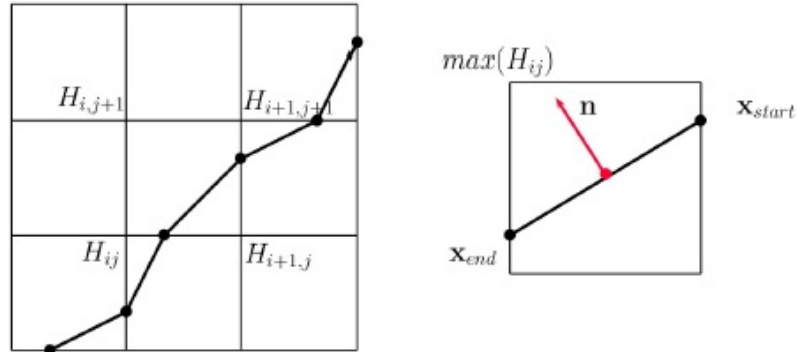


Figura 4.13: Ricostruzione tramite contorni di livello. I due estremi della linea di contorno $H = 0.5$ formano i nuovi estremi dell'elemento

Per validare l'implementazione, consideriamo l'analisi sulla stabilità lineare di una bolla circolare, perturbata in direzione azimutale mentre si espande all'interno di un fluido più viscoso in una cella di Hele-Shaw indefinita. L'interfaccia circolare è una soluzione esatta delle equazioni di governo, col campo di velocità dato da

$$\mathbf{u}(r,t) = \frac{1}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.27)$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ indica il versore radiale. Il raggio $R(t)$ per gli spostamenti non perturbati è la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2\pi R} \quad (4.28)$$

ovvero

$$R(t) = \sqrt{\frac{S_0 + t}{\pi}} \quad (4.29)$$

La figura 4.14 mostra come, impostando i termini di perturbazione nulli nel codice, questo andamento sia verificato, ottenendo una quasi perfetta sovrapposizione. Questo già ci dice che l'implementazione numerica risolve correttamente il caso imperturbato.

I ratei di crescita delle perturbazioni teorici linearizzati vengono ora comparati ai ratei estratti dalle simulazioni.

Ipotizziamo che l'interfaccia Γ sia data dalla formula (si veda la figura 4.15):

$$\mathbf{R}(\theta,t) = (R(t) + \epsilon R_0 \eta(\theta,t)) \hat{\mathbf{r}} \quad (4.30)$$

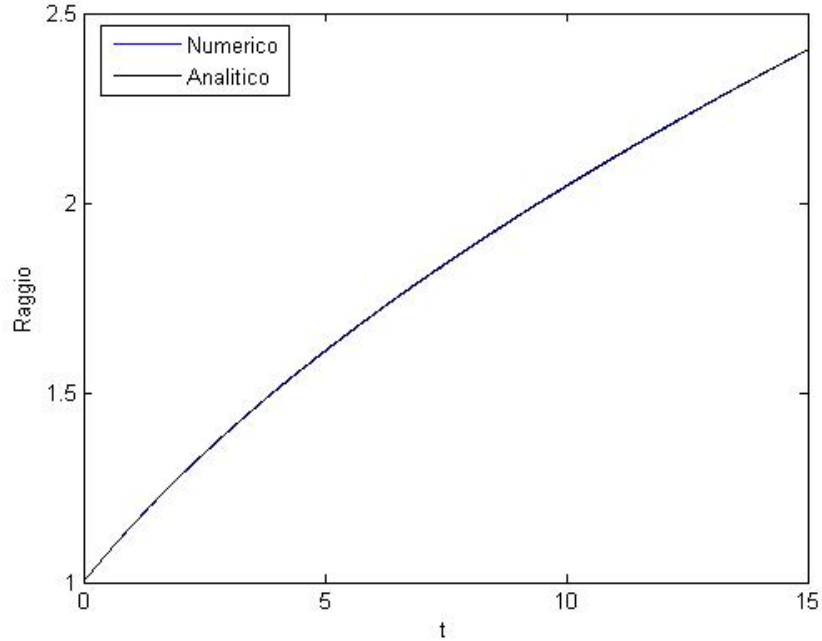


Figura 4.14: Crescita del raggio nel caso di interfaccia circolare con perturbazione nulla

dove

- $\epsilon \ll 1$ è un parametro molto piccolo
- $\eta(\theta, t)$ è una perturbazione
- R_0 è il raggio iniziale

Poichè $\eta(\theta, t)$ può essere espresso come serie di Fourier nell'angolo azimutale θ , e le equazioni linearizzate sono separabili, consideriamo, senza perdita di generalità, una perturbazione nella forma

$$\eta(\theta, t) = f(n, t) \cos(n\theta) \quad (4.31)$$

dove n è un numero d'onda. Mentre

$$f(n, t) = e^{\sigma_n t} \quad (4.32)$$

e il rateo di crescita delle perturbazioni istantaneo è dato da (per una trattazione più dettagliata si veda Nicotra [14]):

$$\sigma_n = \frac{n}{2\pi R^2} \frac{(1 - \mu_1/\mu_2)}{(1 + \mu_1/\mu_2)} - \frac{1}{2\pi R^2} - \frac{1}{A} \frac{n(n^2 - 1)}{R^3(1 + \mu_1/\mu_2)} \quad (4.33)$$

L'idea è di utilizzare i risultati dell'analisi di stabilità lineare come ulteriore validazione della nostra implementazione numerica. Nelle simulazioni consideriamo che le perturbazioni siano della forma delle equazioni 4.30 e 4.31 con una perturbazione di ampiezza $\epsilon = 0.01$, e modi $n = 1, \dots, 18$. Per ogni numero d'onda n , risolviamo l'intero sistema per pochi passi temporali (in particolare 5). Per ogni passo temporale ricaviamo la posizione del punto dell'interfaccia caratterizzato da $\theta = 0$:

$$x(t) = R(t) + a(n, t, \theta = 0) = R(t) + \epsilon R_0 f(n, t) \cos(0). \quad (4.34)$$

Si ottiene:

$$f(n, t) = \frac{x(t) - R(t)}{\epsilon R_0} \quad (4.35)$$

Prendendo il logaritmo dell'equazione 4.32 si ha

$$\log(f(n, t)) = \sigma_n t \quad (4.36)$$

dalla quale si ricava facilmente la formula per il rateo di crescita delle perturbazioni:

$$\sigma_n = \frac{\log[f(n, t)]}{t} = \frac{1}{t} \log \left[\frac{x(t) - R(t)}{\epsilon R_0} \right] \quad (4.37)$$

Per avere un'idea dell'effetto di una perturbazione sullo sviluppo della circonferenza, basta guardare la figura 4.15; qui si vede come le linee tratteggiate, essendo imperturbate, rimangono una circonferenza perfetta durante il moto, mentre le linee continue si deformano; già all'istante $t = 0$ la linea continua cessa di essere una circonferenza, a causa della perturbazione; inoltre, col passare del tempo, si vede come la distanza tra la linea continua e la circonferenza tratteggiata aumenti, segno che la perturbazione continua ad agire deformando in modo crescente la forma iniziale.

Nella figura 4.16 si confrontano i ratei di crescita delle perturbazioni analitici (equazione 4.33), con i ratei ottenuti dalle simulazioni eseguite con il codice per dei valori dei parametri riportati in figura. La risoluzione della griglia è 513×513 , e il dominio è 5×5 (ovvero 5 unità di lunghezza, prendendo come termine di paragone il raggio iniziale pari a 1), e il passo temporale pari a $\Delta t = 0.001$. I parametri del fluido sono: $A = 2 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ e $R_0 = 1$.

Dal grafico si nota che per alti valori dei numeri d'onda, i ratei della teoria lineare deviano leggermente, risultando inferiori. Comunque, i numeri d'onda così elevati sono di scarso interesse nel problema qui presentato, a causa della loro natura fortemente dissipativa; infatti i casi con $n = 17$ e

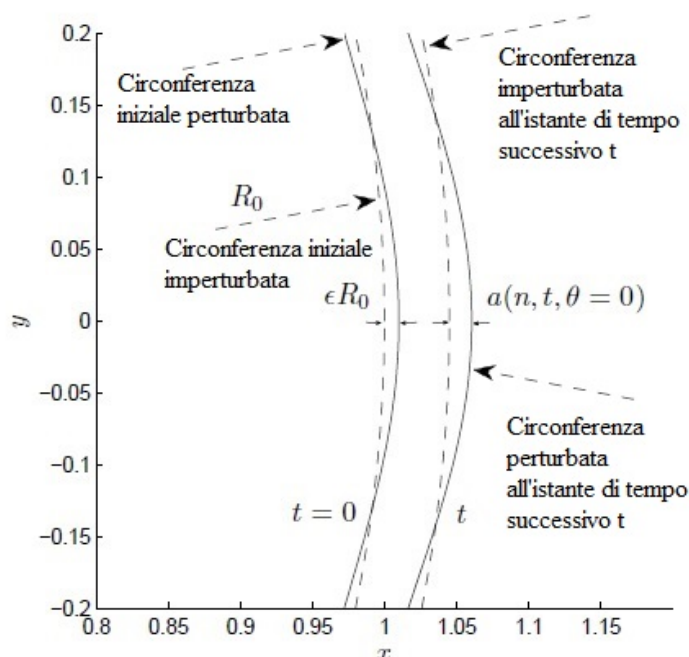


Figura 4.15: Differenza nell'evoluzione tra due casi, l'uno perturbato e l'altro imperturbato

$n = 18$ sono abbondantemente sotto lo 0, segno del fatto che il rateo delle perturbazioni è negativo, e che quindi le perturbazioni si smorzano. Questo comportamento era atteso, ed è già stato discusso in relazione all'equazione 3.28, dove si valutava l'effetto instabilizzante dell'iniezione, che cresce come n , contro quello stabilizzante della tensione superficiale, che aumenta come n^3 .

Vediamo anche un confronto tra il metodo multigrid e il metodo del gradiente biconiugato stabilizzato (figura 4.17), e un confronto tra gli errori assoluti dei due metodi, calcolati come la differenza tra il valore atteso analitico e quello ottenuto con le simulazioni (figura 4.18). Sembra effettivamente che il metodo multigrid consenta di guadagnare, seppur di poco e non in modo evidente con un'ispezione qualitativa, in accuratezza; in particolare questo miglioramento si nota su alti numeri d'onda. Un ultimo confronto viene fatto sulla funzione $f(n,t) = e^{\sigma_n t}$ analitica e, successivamente, sostituendo i σ_n ottenuti dalle simulazioni; in figura 4.19 si mostra il caso $f(4,t)$, rappresentato con asse y logaritmico per vedere le rette sovrapposte.

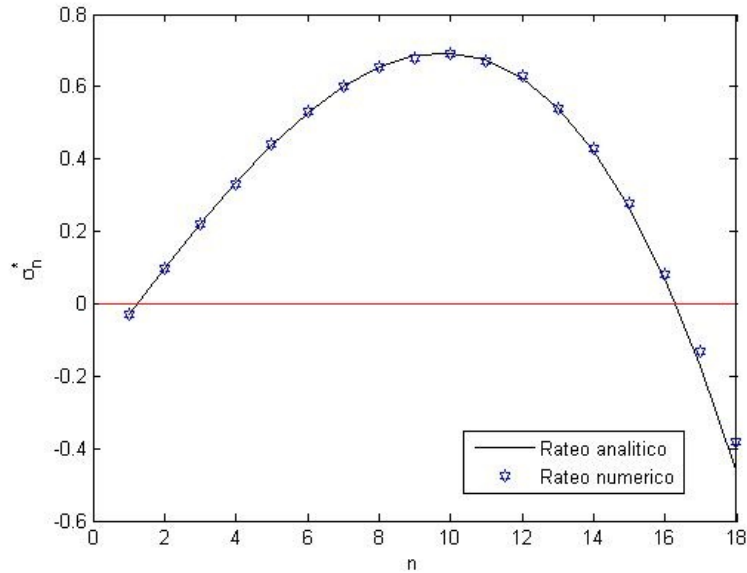


Figura 4.16: Confronto tra risultati analitici e numerici, con parametri $A = 2 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ e $R_0 = 1$

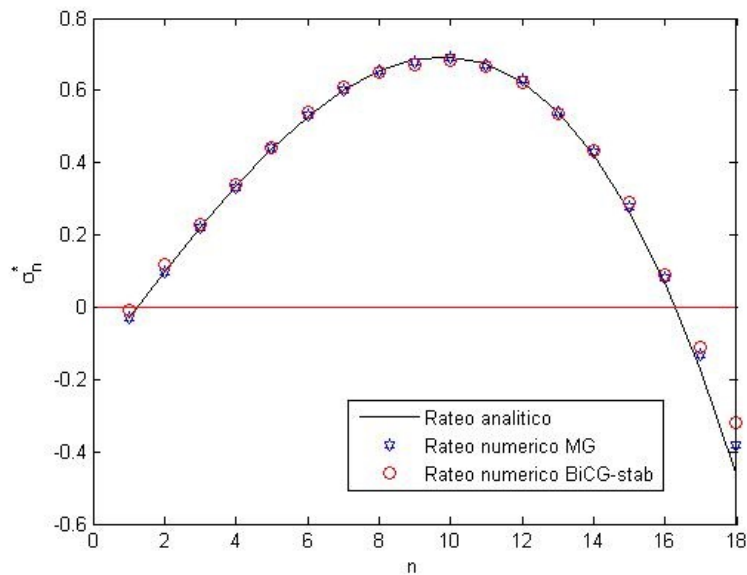


Figura 4.17: Confronto tra risultati analitici e numerici con due diversi metodi, con parametri $A = 2 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ e $R_0 = 1$

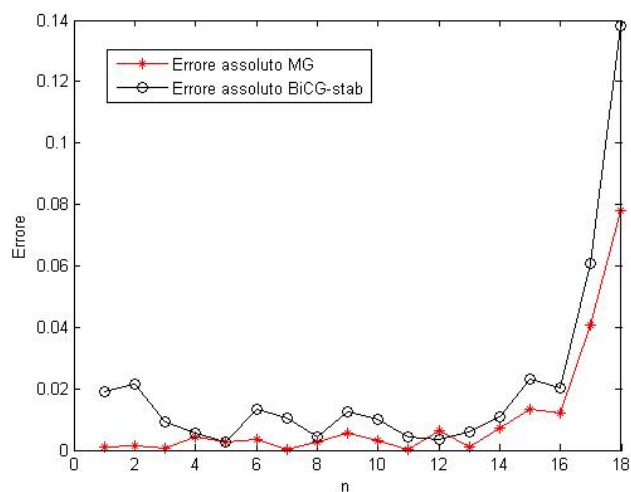


Figura 4.18: Confronto dell'errore assoluto tra i due metodi analizzati, con parametri $A = 2 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ e $R_0 = 1$

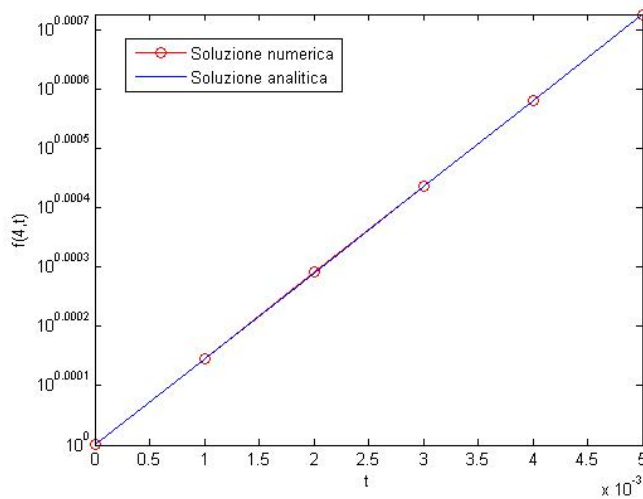


Figura 4.19: Confronto tra $f(4,t)$ analitica e numerica, con parametri $A = 2 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ e $R_0 = 1$

Capitolo 5

Esperimenti numerici

Dopo aver appurato che il metodo numerico è attendibile, in questo capitolo si presentano i risultati degli esperimenti fatti, sia sulle prestazioni del nuovo programma, sia sul controllo del viscous fingering.

5.1 Confronto tra metodi

In questa sezione viene fatto il confronto finale, in termini di prestazioni, tra il metodo utilizzato in precedenza, ovvero il gradiente biconiugato stabilizzato, e il nuovo metodo implementato, il multigrid.

Il confronto è stato fatto a parità di punti di griglia, pari tolleranza sulla norma del residuo, e pari parametri dei fluidi; infatti, un calcolo fatto con portata non stazionaria dura notevolmente di più dello stesso calcolo con portata stazionaria. Allo stesso modo, come visto nella sezione 3.3, con una tensione superficiale maggiore, il numero di fingers aumenta rapidamente, creando patterns dell'interfaccia più complicati e potenzialmente più lenti da gestire. Occorre dunque impostare due calcoli che abbiano gli stessi parametri e la stessa dimensione di griglia. Il programma è scritto in *Fortran 90*, e quindi, sempre al fine di migliorare l'efficienza, si sono valutati due diversi compilatori (*ifort*, e *g95*).

Le prove sono state effettuate con i seguenti parametri:

- Tensione superficiale adimensionale $A = 6.4 \cdot 10^3$
- Rapporto di viscosità $\mu_1/\mu_2 = 0.02$
- Tempo totale $T = 30$
- Passo temporale $\Delta T = 0.01$

- Tolleranza $tol = 5 \cdot 10^{-7}$

I risultati sono riportati nella tabella 5.1, tenendo presente che, eccetto il tempo per la prima iterazione e del tempo totale, si tratta di tempi medi tra tutti i passi temporali.

Il multigrid migliora le prestazioni in modo evidente. Si noti, inoltre, come il compilatore *Intel* aiuti ulteriormente nell'aumento di efficienza.

Tabella 5.1: Prestazioni

	BiCG con g95	MG con g95	MG con ifort
Prima iterazione H-S	$\approx 80s$	$\approx 0.65s$	$\approx 0.27s$
Iterazioni successive H-S	$\approx 2.0s$	$\approx 0.55s$	$\approx 0.22s$
Scrittura dati	$\approx 0.7s$	$\approx 0.7s$	$\approx 0.7s$
Aggiornamento interfaccia	$\approx 0.02s$	$\approx 0.02s$	$\approx 0s$
Poisson per funzione indice	$\approx 0.27s$	$\approx 0.27s$	$\approx 0.12s$
Ricostruzione interfaccia	$\approx 0.012s$	$\approx 0.012s$	$\approx 0.003s$
Tempo totale simulazione	$\approx 2h$	$\approx 33min$	$\approx 12min$

Anche nel caso del multigrid, la prima iterazione parte da un guess iniziale casuale, per questo motivo i tempi si dilatano, ma si osservi come la dilatazione non sia lontanamente paragonabile a quella del caso BiCG-stab. La parte più costosa in termini di tempo era, come già menzionato, la risoluzione delle equazioni di Hele-Shaw; questo problema è stato risolto cambiando il metodo di risoluzione: solamente inserendo il multigrid si ha un guadagno su ogni iterazione del 72.5%. Il tempo totale si riduce ovviamente della stessa quantità, in quanto non siamo intervenuti sugli altri passi del ciclo poichè già molto rapidi.

Con l'utilizzo di un compilatore più efficiente la riduzione è di poco più di un fattore 2: si ha una riduzione del 60% rispetto al multigrid stesso. Considerando la riduzione totale, da BiCG-stab a MG con ifort, si ha una diminuzione dell'89% sul tempo di ogni ciclo, e una riduzione sul tempo totale del 90%.

In figura 5.1 si riporta anche un istogramma del miglioramento delle prestazioni, dove si evidenzia ulteriormente la riduzione del tempo di calcolo per le equazioni di Hele-Shaw.

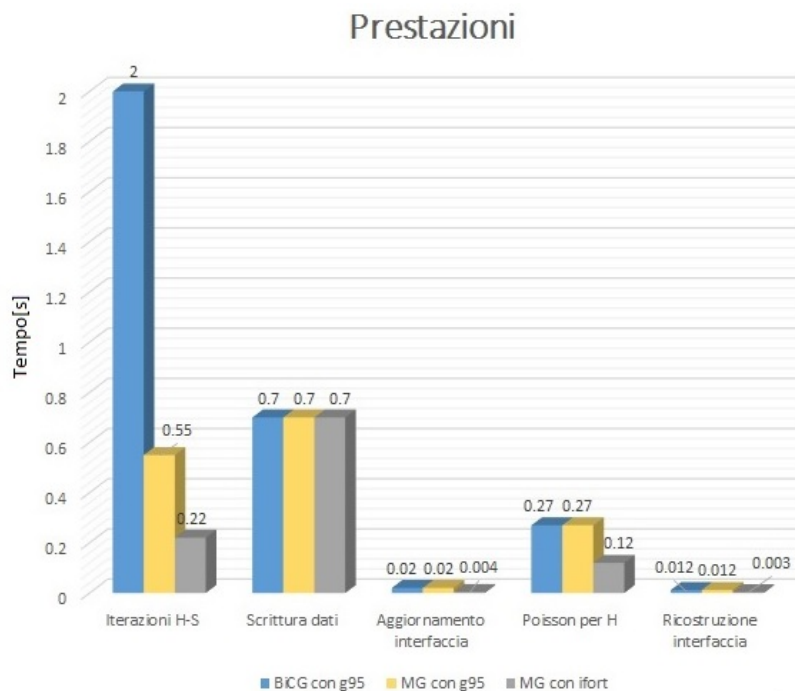


Figura 5.1: Istogramma delle prestazioni

5.1.1 Considerazioni sulla tolleranza

Per quanto riguarda la tolleranza, abbiamo scelto un buon compromesso tra accuratezza e velocità. In realtà una tolleranza di $5 \cdot 10^{-7}$ è già estremamente valida per delle analisi qualitative su un processo così fortemente instabile.

Tuttavia vale la pena far presente che i due metodi differiscono molto per quanto riguarda il funzionamento della tolleranza.

Il metodo BiCG-stab può scendere formalmente con la tolleranza fino al limite dettato dall'*epsilon macchina*, che, nel caso della precisione doppia usata, corrisponde a $\approx 2.2 \cdot 10^{-16}$. I tempi nel caso del BiCG-stab salgono spaventosamente per tolleranze così basse, basti pensare che già con la tolleranza di $5 \cdot 10^{-7}$, per scendere dell'ultimo ordine di grandezza impiega lo stesso tempo speso per arrivare al precedente; addirittura la norma L2 del residuo usata cessa di essere monotona, e comincia a oscillare leggermente prima di assestarsi sul valore richiesto.

Con il metodo MG, invece, il problema della tolleranza si presenta sotto un'altra forma: è vincolato dalla seguente equazione che dipende da alcuni parametri del problema numerico.

$$tol \geq n_x \cdot n_y \cdot eps \cdot (\text{dimensione media elementi della matrice MG})$$

dove:

- n_x è il numero di punti della griglia in direzione x
- n_y è il numero di punti della griglia in direzione y
- eps è l'epsilon macchina

Quindi, la tolleranza è vincolata da queste scelte. Premettendo che le dimensioni della griglia sono fissate (e comunque per migliorare la tolleranza andrebbero abbassate), e la dimensione media degli elementi della matrice per questo problema è fissa, dovrebbe variare l'epsilon macchina. Esso cambia in base alla precisione imposta nel codice:

- Doppia precisione, indicata in *Fortran 90* con `-r8`, impone un $eps = 2.2 \cdot 10^{-16}$
- Quadrupla precisione, indicata in *Fortran 90* con `-r16`, impone un $eps = 1.9 \cdot 10^{-34}$

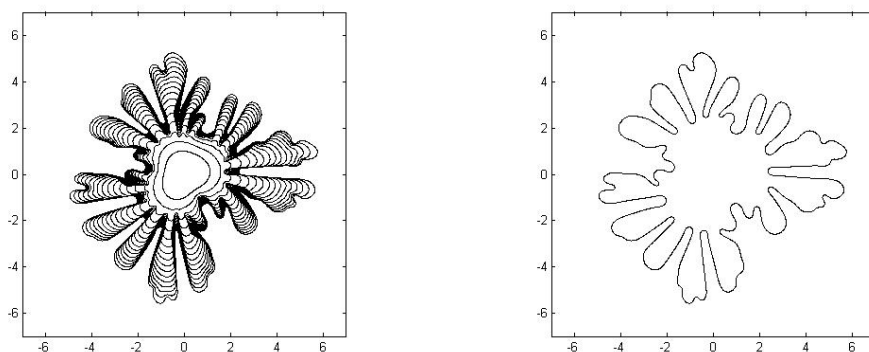
Calcolando che le dimensioni della griglia sono fisse a 513x513, le dimensioni medie degli elementi sono dello stesso ordine di grandezza ($1/\Delta x^2$, dove $\Delta x = 1/513$), si stima una tolleranza minima per la precisione doppia di 10^{-7} , mentre per la precisione quadrupla si arriva a 10^{-25} .

5.2 Simulazioni

Ora che abbiamo uno strumento altamente efficiente, possiamo eseguire numerose simulazioni, e verificare qualitativamente il comportamento dei fingers. Vediamo, per esempio, una delle prime simulazioni fatte con nuovo programma di calcolo in figura 5.2: questo test è stato eseguito con $A = 25.6 \cdot 10^3$, $\mu_1/\mu_2 = 0.02$ e $R_0 = 1$; la 5.2a è una sovrapposizione di interfacce, fotografate a distanza di tempo $\Delta t = 2$, per un tempo totale di $T = 30$, mentre la 5.2b è la posizione dell'interfaccia al tempo finale.

Queste immagini ricordano indubbiamente le immagini sperimentali mostrate nel capitolo 1, così come quelle presenti in letteratura (per esempio si veda [13]).

Nelle figure 5.3 e 5.4 si mostra invece come il programma sia in grado di gestire i cambi di topologia, di cui si è parlato nella sezione 4.5. La

(a) *Evoluzione dell'interfaccia.*(b) *Posizione dell'interfaccia al tempo finale.**Figura 5.2: Posizione dell'interfaccia*

procedura di ricostruzione consente infatti anche i cambi topologici, grazie al fatto che, quando due fingers arrivano a distanza di una o due celle di griglia, la ricostruzione li unisce, e successivamente li tratta come un'unica linea di interfaccia. Queste particolari simulazioni mostrano anche come i fingers vicini si influenzino, grazie alla incomprimibilità dei due fluidi: in figura 5.3a si vede che i fingers accanto a quello molto prolungato costringono quest'ultimo a snellire il proprio stelo, fino a provocare il distacco. Con il distacco delle bolle si ha una caduta improvvisa nell'estensione del raggio massimo. Infatti la bolla, essendo distaccata dal corpo principale dei fingers, non aumenta in dimensione a causa dell'assenza di massa immessa, e quindi procede separata dal resto, a meno che un finger vicino che si sta espandendo riesca a raggiungerla e inglobarla di nuovo, come accade nelle figure 5.3e e 5.3f.

Questo vorrebbe essere evitato ai fini dell'estrazione del petrolio: avere bolle separate che non crescono ulteriormente e invece riducono drasticamente la dimensione del corpo principale sarebbe un indubbio vantaggio.

Infine mostriamo, nella figura 5.4, un caso curioso in cui un finger si protrae verso uno limitrofo, e intrappola del fluido all'interno del corpo principale. Come in precedenza, anche in questo caso la procedura di ricostruzione dell'interfaccia gestisce senza problemi i due fingers che si avvicinano.

Inutile dire che nel nostro caso, in cui il fluido che ramifica è iniettato nel petrolio, non è molto conveniente che bolle di petrolio restino intrappolate nel corpo principale (5.4d). Esse infatti sono vincolate a muoversi col fluido meno viscoso. Va comunque osservato che nel caso tridimensionale l'intrappolamento potrebbe essere più difficile, e il petrolio avrebbe probabilmente una via di fuga.

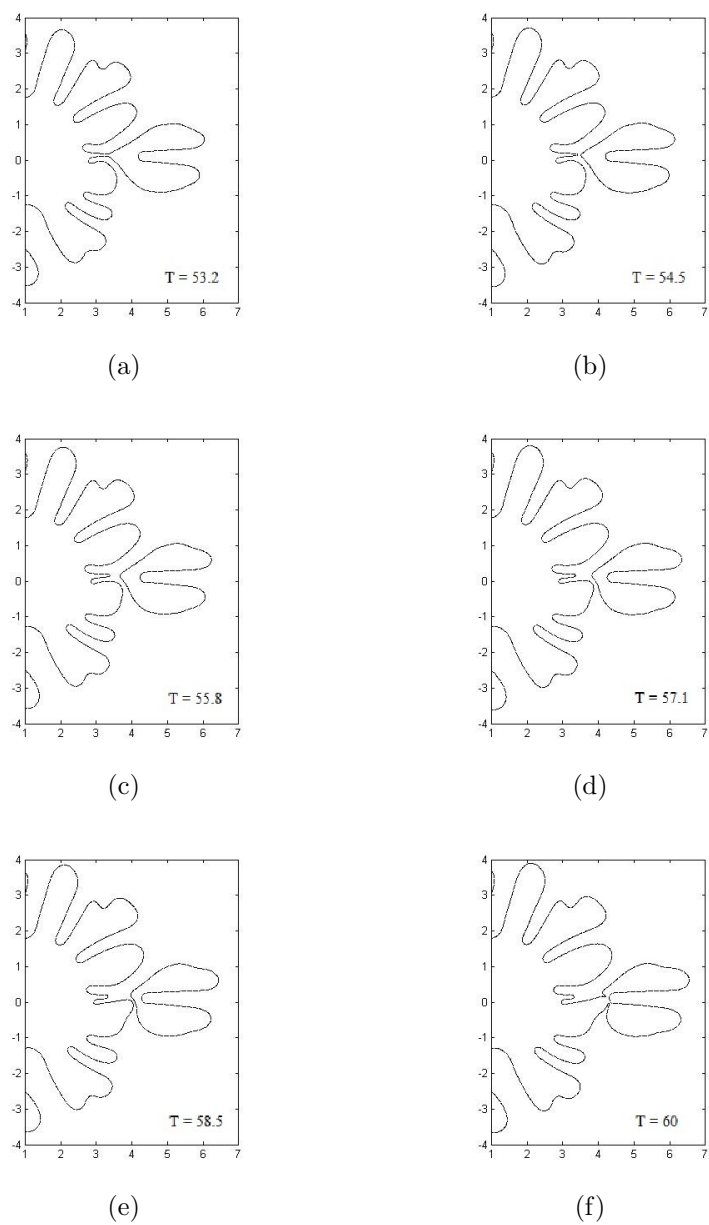
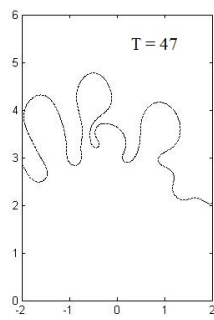
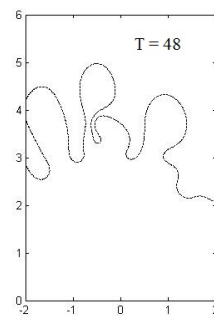


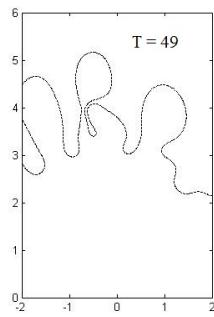
Figura 5.3: Evoluzione di fingers con distacco e riattacco di una bolla



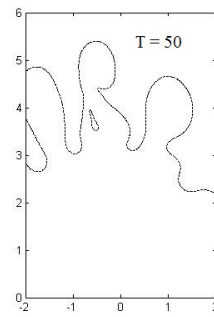
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.4: Evoluzione di fingers con intrappolamento di fluido

5.3 Controllo

In questa sezione presentiamo il funzionamento base del controllo implementato e i risultati ottenuti sul raggio, in particolare se, e di quanto, si riduce. L'idea che vorremo sfruttare è un controllo in anello aperto sulla portata, modulandone l'iniezione e l'aspirazione. Useremo il raggio massimo come indicatore, calcolato come la distanza massima dal centro del finger più esteso, e la paragoneremo al raggio massimo del caso non controllato, ovvero lasciato libero di espandersi con portata immessa costante.

5.3.1 Pompaggio instazionario

Nicotra nel suo lavoro di tesi ([14]) aveva proposto il distacco di una bolla tramite aspirazione: si invertiva il flusso di massa, aspirando una portata nove volte superiore a quella precedentemente immessa; questo causava il distacco delle teste di alcune dita molto estese, generando varie bolle staccate.

Sebbene sia un approccio interessante, potrebbe risultare estremamente difficile da realizzare in modo pratico, in quanto richiederebbe una pompa capace di passare repentinamente da immissione ad aspirazione di una quantità di fluido nove volte superiore. Risulta anche difficile, in realtà, impedire che i fingers attaccati al corpo principale raggiungano le bolle staccate, le quali sono mosse semplicemente dal fluido compreso nel canale formato dalle due linee di interfaccia, il quale può però scorrere al di fuori di questo canale senza problemi. Quindi, a meno di prendere precauzioni sulla portata (ridurla di molto potrebbe funzionare, ma rallenterebbe il processo di estrazione), questo approccio potrebbe rivelarsi un vicolo cieco.

Per cercare di prevenire la formazione di alcuni fingers, vogliamo provare a immettere nella cella di Hele-Shaw una portata instazionaria.

Per fare questo impostiamo la portata come composta di due contributi: una parte statica e una armonica, che si somma a quella statica. Ricordando l'equazione di continuità per un fluido con massa immessa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = Q(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (5.1)$$

modifichiamo la portata $Q(t)$, scrivendola come

$$Q(t) = Q_0q(t) = Q_0(C_1 + C_2\sin(2\pi ft)) \quad (5.2)$$

La portata $q(t)$ è mostrata in figura 5.5. Q_0 ha valore fisso pari a 1.

Definiamo la velocità adimensionale \mathbf{u}^* usando un valore tipico di $Q(t)$, ovvero Q_0 :

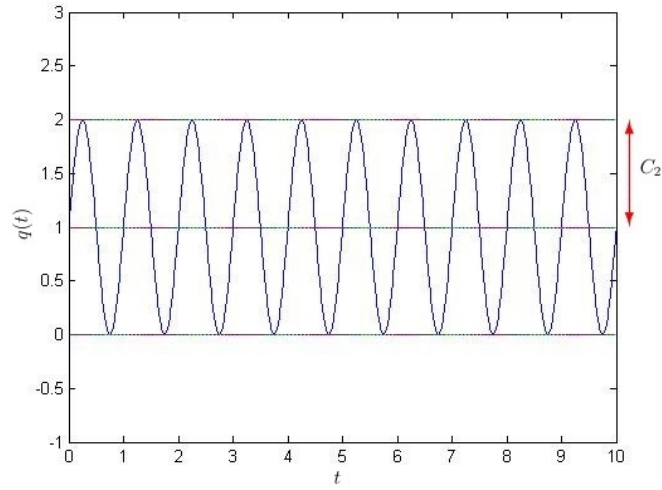


Figura 5.5: Portata instazionaria immessa nella cella di Hele-Shaw

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_R} = \frac{\mathbf{u}}{Q_0/b} \quad (5.3)$$

L'equazione della conservazione della massa adimensionalizzata è:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = q(t^*)\delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*) \quad (5.4)$$

per la pressione p , la viscosità μ , la posizione dell'interfaccia \mathbf{x} , e le funzioni δ , usiamo le stesse adimensionalizzazioni presentate nella sezione 3.2. Si arriva a

$$\mathbf{u}^* = -\frac{1}{A} \frac{1}{\mu^*} \left(\nabla^* p^* - \int \kappa^* \mathbf{n} \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_f^*) ds^* \right) \quad (5.5)$$

dove il parametro che indica la tensione superficiale adimensionale è ora cambiato, ed è

$$A = \frac{12\mu_2 Q_0}{\sigma b}$$

Come già fatto in precedenza, si prende la divergenza dell'equazione 5.5, e si usa la 5.4, ottenendo:

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot \left(-\frac{1}{\mu^*} \nabla^* p^* \right) &= Aq(t^*)\delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_s^*) \\ &+ \nabla^* \cdot \left(-\frac{1}{\mu^*} \int \kappa^* \mathbf{n} \delta^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_f^*) ds^* \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

La condizione al contorno adimensionale, nel caso di pompaggio instazionario è:

$$p^*(R_{out}^*) = -A \frac{q(t^*)}{2\pi} \log(r^*) \quad (5.7)$$

5.3.2 Risultati

Abbiamo eseguito un'ampia campagna di prove, facendo variare i parametri della parte instazionaria nell'equazione della portata 5.2: f e C_2 . In particolare, gli altri parametri usati sono stati:

- $A = 6.4 \cdot 10^3$
- $\mu_1/\mu_2 = 0.02$
- $R_0 = 1$
- $C_1 = 1$
- Dimensioni griglia: 514x514
- Dimensioni dominio: 14x14
- Ampiezza perturbazioni azimutali: $A_{cos} = 0.1, A_{sin} = 0.1$
- Numeri d'onda delle perturbazioni azimutali: $n_{cos} = 3, n_{sin} = 2$
- Tempo totale in unità di tempo $T = 60$
- Passo temporale $\Delta t = 0.01$
- Tolleranza $tol = 10^{-6}$

La nostra pompa consente senza problemi anche l'aspirazione, cosa che forse applicata alla realtà non sarebbe così facile da ottenere. Abbiamo svolto una prima indagine ad ampia gamma, in modo da avere un'idea sulle zone in cui il controllo possa avere più effetto. Le frequenze f sono state fatte variare, per questo primo tentativo, da $5/T$ a $75/T$, con passo $5/T$. Esse

sono espresse in termini di tempo totale T perchè è importante che alla fine della simulazione, ovvero quando $t = T$, la fase sia la stessa dell'inizio, e le fasi siano le stesse tra tutte le simulazioni. Le ampiezze C_2 variano da 0.1 a 2.0, con passo 0.1.

I risultati ottenuti sono mostrati in figura 5.6, una mappa 3-D che ha sugli assi x e y ampiezza e frequenza rispettivamente, e sull'asse z la differenza normalizzata del raggio massimo.

$$\delta R = \frac{R_0 - R}{R_0} \quad (5.8)$$

Qui si vede come il fenomeno sia instabile, mostrando picchi e valli sparsi, come ci si aspettava, piuttosto che un andamento chiaro e definito. Questa prima analisi mostra come il controllo sia fattibile: i picchi (colori caldi) mostrano dove il controllo è andato a buon fine nella riduzione del raggio massimo. Tenendo a mente il codice colore, in figura 5.7 si mostra una vista dall'alto, dove possiamo identificare le zone in cui il controllo ha maggiore effetto. Sembra che effettivamente ci siano alcune aree in cui il controllo è efficace, mentre altre in cui addirittura peggiora la situazione (colori freddi): in questo caso il controllo agisce nei momenti sbagliati e amplifica, seppur di poco, il fenomeno.

Nella zona considerata, il controllo mediamente funziona, ovvero la media dei raggi è diminuita. Questa informazione non è molto utile, perchè sappiamo che se procedessimo a caso con i valori di ampiezza e frequenza, potremmo ricadere in un punto in cui il raggio aumenta. Guardando la figura 5.7 possiamo trarre alcune conclusioni interessanti: si individuano degli accoppiamenti di frequenza e ampiezza che generano delle intere zone più o meno evidenti in cui il controllo fallisce. Si guardi per esempio l'area di bassa frequenza e bassa ampiezza: in questo caso il raggio cresce. Una spiegazione potrebbe essere che per frequenze così basse, nell'ordine di 5 - 10 oscillazioni su tutto il periodo, anche una variazione di ampiezza così bassa porta a un'esplosione preventiva dei fingers. Vicino all'origine dei tempi, infatti, il $\sin(2\pi ft)$ inizia a crescere, e fornisce una spinta maggiore rispetto al caso non controllato, spinta che non viene invertita repentinamente, a causa delle poche oscillazioni. Anche un'ampiezza troppo alta può scatenare l'avvio dei fingers a tempi inferiori rispetto al caso non controllato e, nonostante le poche oscillazioni portano ad aspirare buona parte dell'acqua iniettata, i fingers si estendono troppo.

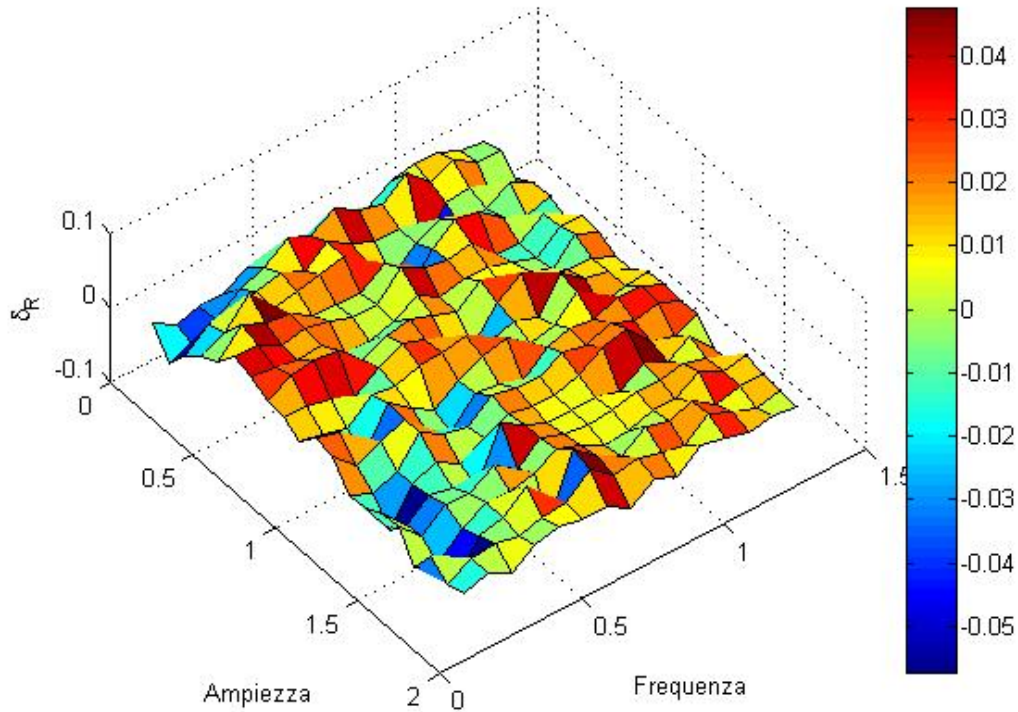


Figura 5.6: Mappa 3-D del raggio

Una via di mezzo sembra dare buoni risultati. Nella zona per valori di f compresi tra $5/T \div 25/T$ il controllo si rivela efficace. Probabilmente queste combinazioni di ampiezza e frequenza funzionano perchè ritardano il più possibile la formazione delle dita estese, che sono principali responsabili della forte differenza tra il raggio della circonferenza imperturbata e il raggio nel caso controllato (figura 5.8), creando questa zona relativamente ampia di riduzione.

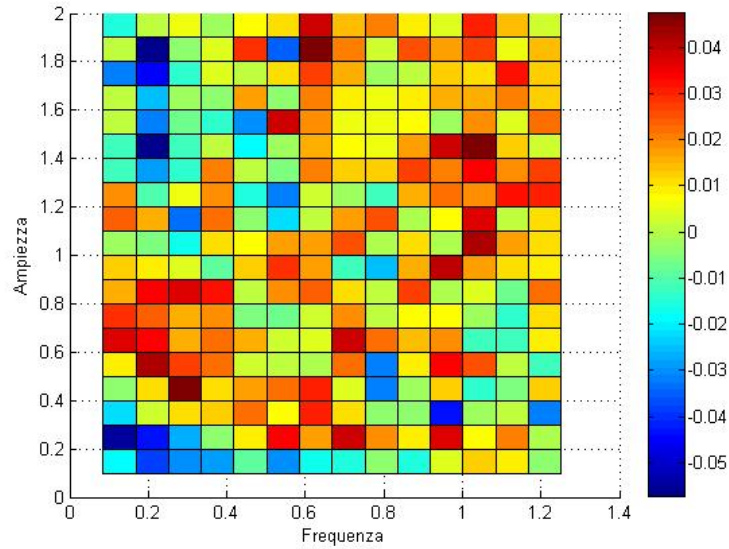


Figura 5.7: Mappa del raggio vista dall'alto

Nei grafici (5.8) e (5.9) si evidenziano le oscillazioni del raggio, le quali non sono in fase con le oscillazioni della portata, perchè questa oscilla attorno a 1, e il raggio cresce fino a che la portata ha valore $q(t) > 0$. Tuttavia, quando la portata scende di molto sotto al valore di 1, la crescita del raggio è estremamente lenta, quasi nulla, quindi, terminando le simulazioni con $q(t) = 1$, per essere in fase con l'inizio, perdiamo una quantità trascurabile di variazione del raggio (crescerebbe di poco, dell'ordine di 10^{-3} , ovvero una quantità che non si impatta sui risultati).

Sulle mappe (5.7) e (5.6) si vedono anche alcune zone in cui il controllo è efficace per una determinata combinazione ampiezza-frequenza, mentre è inefficace per una combinazione di poco differente (passaggi veloci da colori freddi a colori caldi); queste sono aree nelle quali non conviene lavorare, nè fare esperimenti, poichè una variazione minima della combinazione ampiezza-frequenza può portare ad un fallimento del controllo.

Un'ampia zona dove il controllo sembra funzionare è per frequenze alte in corrispondenza di ampiezze alte, ovvero una iniezione di molto fluido seguito subito da una forte aspirazione. A causa della difficoltà nella realizzazione di una simile pompa in un pozzo di estrazione, abbiamo deciso di concentrarci sulle combinazioni ampiezza-frequenza più facilmente realizzabili sperimentalmente.

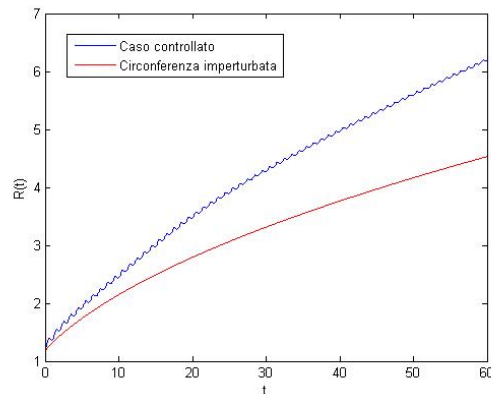


Figura 5.8: I fingers fanno crescere la curva del raggio più rapidamente

Lo zoom della figura (5.10) corrisponde a due soli punti della mappa precedente (5.6), in particolare l'ampiezza varia da $C_2 = 0.3$ a $C_2 = 0.5$ con passo 0.01, e la frequenza da $f = 10/T$ a $f = 20/T$ con passo $1/T$. In termini di ampiezza ci è consentito scendere illimitatamente fino alla cifra decimale che preferiamo, tuttavia il frequenza siamo limitati dal vincolo della fase: la frequenza deve contenere rapporti tra un numero intero e il tempo totale, in modo da arrivare alla fine della simulazione in fase con l'inizio.

Vediamo infine la mappa ingrandita dall'alto (figura 5.11).

I grafici (5.10) e (5.11) mostrano una zona relativamente ampia in cui il controllo ha effetto: anche variando di poco i parametri ampiezza e frequenza si ricadrebbe in un'area che riduce comunque il raggio massimo.

La riduzione media di questa zona è del 2%, a causa della presenza di svariati punti negativi, mentre il picco ha un valore di riduzione del 6%.

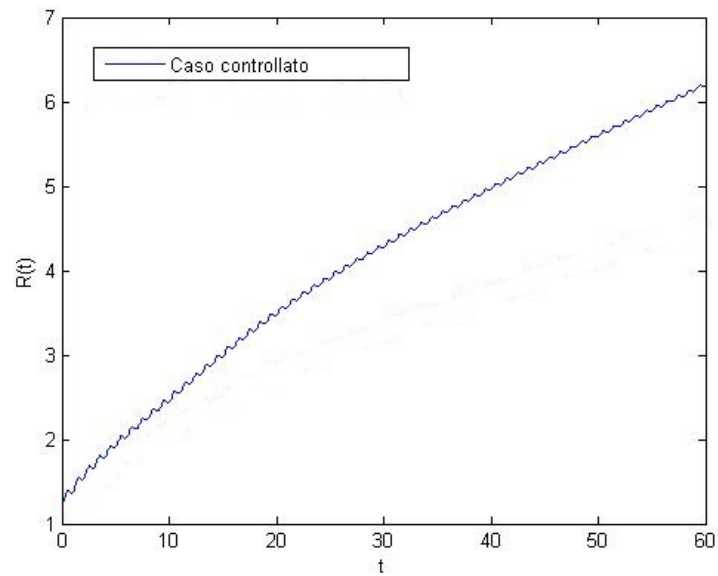


Figura 5.9: Oscillazioni del raggio nel caso di portata instazionaria

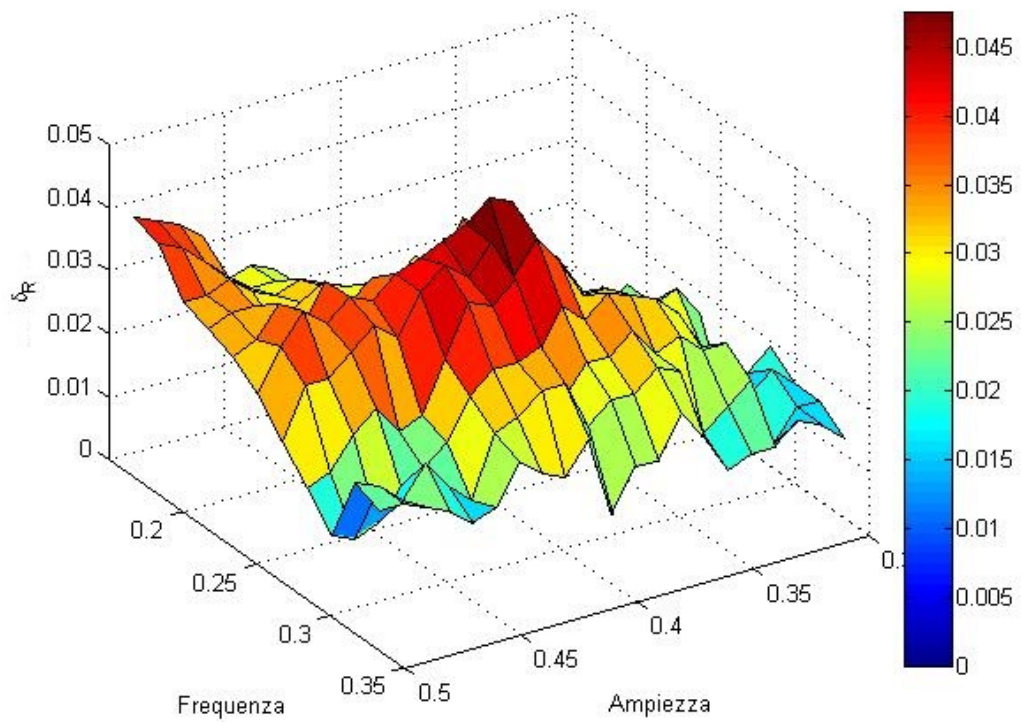


Figura 5.10: Zoom del grafico 5.6

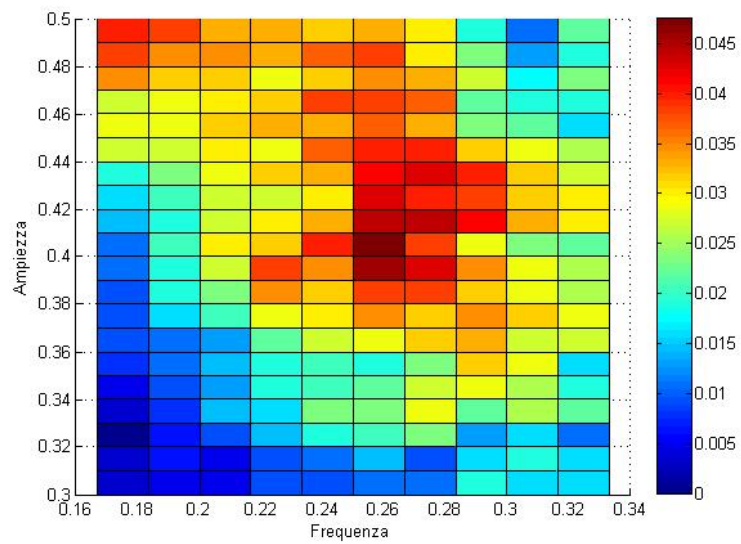


Figura 5.11: Zoom del grafico 5.7

Capitolo 6

Conclusioni e sviluppi futuri

In questo lavoro è stato sviluppato uno strumento robusto ed efficiente per la simulazione di correnti viscosse multifase in due dimensioni, in particolare studiando il viscous fingering in una cella di Hele-Shaw, in cui i fenomeni di distacco e fusione di fingers sono frequenti.

Per rendere il metodo efficiente è stato inserito in un programma numerico un solutore per le equazioni adimensionali di Hele-Shaw basato sul metodo multigrid. Questa modifica sostanziale ha permesso un guadagno in termini di tempo del 90%, riducendo i tempi medi di simulazione da $\approx 2h$ a $\approx 15min$. I tempi di calcolo ridotti hanno permesso di svolgere velocemente numerose prove, nelle quali sono state osservate casistiche di ogni tipo, e alcune volte anche inaspettate, dal distacco e riattacco di una bolla, all'intrappolamento di parte del fluido più viscoso nel corpo principale del fluido iniettato.

Lo scopo principale era tentare di implementare un controllo del viscous fingering. L'idea era di modificare la portata, immettendola in modo pulsato armonico, con un'onda di seno, sperando che la variazione potesse impedire la formazione di alcune strutture molto ramificate.

L'elevata quantità di test svolti hanno indicato che il controllo è, in ultima istanza, possibile. Il comportamento fortemente instabile del fenomeno rende difficile prevedere quando avrà effetto e quando invece peggiorerà le cose facendo aumentare il raggio.

Tuttavia delle zone abbastanza ampie di funzionamento sono state individuate, dove sarebbe possibile e utile approfondire lo studio. In queste zone i parametri di controllo possono essere fatti variare, pur mantenendo un funzionamento del controllo consistente.

La riduzione del 6% del raggio massimo rispetto al caso non controllato che abbiamo ottenuto potrebbe sembrare poco significativa, ma questo processo va pensato sulle scale dei pozzi petroliferi, dove i processi di coltivazione secondaria e terziaria durano anni, e i pozzi hanno dimensioni medie di mi-

gliaia di chilometri quadrati e diametri che arrivano a 140 chilometri. Anche una riduzione minima del raggio massimo, in percentuale risulta comunque in una gigantesca quantità in più di olio estratto.

Si ritiene che possa essere interessante approfondire questo tipo di studio sul controllo, affiancando esperimenti di laboratorio e simulazioni numeriche ora più efficienti. In futuro si potrebbe pensare di provare con nuove leggi di controllo, cosa consentita dallo strumento matematico sviluppato, o si potrebbe sviluppare un nuovo studio che combini il controllo armonico ai metodi attualmente utilizzati di iniezione di polimeri o surfactanti per modificare i parametri del fluido; anche un controllo in anello chiuso può essere ipotizzato, retroazionando, per esempio, la posizione del fronte, o il raggio massimo istantaneo. Ancora numerose vie non sono state tentate per il miglioramento del controllo del viscous fingering.

Bibliografia

- [1] J.J. Xu. *Viscous fingering in a Hele-Shaw cell*. 1998.
- [2] P. G. Saffman and G. I. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. In *Proceedings of the Royal Society of London, Mathematical and Physical Sciences*, volume 245 of *A*, pages 312–329, 1958.
- [3] Chen J.D. Growth of radial viscous fingers in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, 201:223, 1989.
- [4] G. M. Homsy. Viscous fingering in porous media. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19:271–311, 1987.
- [5] D. Bensimon et al. Viscous flows in two dimensions. *Rev. Modern Phys.*, 58:977–999, 1986.
- [6] T. Y. Hou, Z. Li, S. Osher, and H. Zhao. A hybrid method for moving interface problems with application to the Hele-Shaw flow. *J. Comput. Phys.*, 134:236–252, 1997.
- [7] P. M. J. Trevelyan, C. Almarcha, and A. de Wit. Buoyancy-driven instabilities of miscible two-layer stratifications in porous media and Hele-Shaw cells. *J. Fluid. Mech.*, 670:38–65, 2011.
- [8] L. Anke, D. Bonn, M. Ben Amar, and J. Maunier. Controlling viscous fingering. *EuroPhys. News*, pages 77–78, 1999.
- [9] L. Paterson. Radial fingering in a Hele-Shaw cell. *J. Fluid Mech.*, 167:439–453, 1986.
- [10] L. Paterson. Fingering with miscible fluids in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids*, 28:26–30, 1985.
- [11] S. D. Howison. Fingering in Hele-Shaw cells. *J. Fluid Mech.*, 167:439–453, 1986.

- [12] Li, Shuwang, et al. Control of viscous fingering patterns in a radial Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. Lett.*, 2009.
- [13] Li, Lowengrub, Fontana, and Palfy-Muhoray. Control of viscous fingering patterns in a radial Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. Lett.*, 102, 2009.
- [14] Nicotra. Radial fingering in a Hele-Shaw cell. Politecnico di Milano.
- [15] J. Feder. *Viscous fingering in porous media*. 1988.
- [16] Couder and Yves. Viscous fingering as an archetype for growth patterns. In G. K. Batchelor, H. K. Moffatt, and M. G. Worster, editors, *Perspectives in Fluid Dynamics*, pages 53–98. Cambridge, 2000.
- [17] P. Fast and M. J. Shelley. A moving overset grid method for interface dynamics applied to non-Newtonian Hele-Shaw flow. *J. Comput. Phys.*, 195:117–142, 2003.
- [18] Homsy G.M. Park C.W. Two-phase displacement in Hele-Shaw cells: theory. *J. Fluid Mech.*, 139:291, 1984.
- [19] G. Tryggvason et al. A front-tracking method for computations of multiphase flow. *J. Comput Phys.*, 169:708, 2001.
- [20] S. Shin and D. Juric. Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity. *J. Comput. Phys.*, 180:427–470, 2002.
- [21] C. S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comput. Phys.*, 25:220, 1977.
- [22] H. van der Vorst. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13:631–644, 1992.
- [23] A. Brandt. *Multigrid techniques: guide with application to fluid dynamics*. 1984.
- [24] W. Hackbusch. *Multigrid Methods and Applications*. 1985.