



POLITECNICO DI MILANO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Sintesi Cinetostatica di una Innovativa Serie Sterzo per Biciclette

Relatore

Dott. Ing. Hermes Giberti

Tesi di laurea di

Rubèn Chierigati

Matricola: 783865

Anno Accademico 2013/2014

RINGRAZIAMENTI:

Ringrazio il prof. Hermes Giberti per la sua disponibilità e interesse nel guidarmi durante il lavoro di tesi. Ringrazio l'ing. Davide Ferrari per i suoi preziosi contributi nelle fasi di ottimizzazione. Ringrazio mio fratello e i miei genitori che hanno sostenuto i miei studi per tutti questi anni. Infine ringrazio tutti gli amici.

INDICE

INTRODUZIONE	XI
1 INTRODUZIONE ALLA BICICLETTA	3
1.1 Evoluzione della bicicletta	3
1.2 Meccanismi compliant	9
2 LA BICICLETTA CLASSICA	13
2.1 Descrizione e modello cinematico	13
2.1.1 Dominio dei parametri	15
2.1.2 Sistemi di riferimento e matrici di rotazione	16
2.1.3 Coordinate indipendenti e dipendenti	21
2.1.4 Equazioni cinematiche	21
2.1.5 Risultati cinematici	26
2.2 Modello pneumatico-asfalto	27
2.3 Curva a velocità costante	29
2.4 Analisi dei risultati	37
2.4.1 Rappresentazione bicicletta in curva	37
2.4.2 Dal diagramma curvatura-velocità al campo di lavoro	38
2.4.3 Comportamento bicicletta in curva	40
2.4.4 Analisi coppia allo sterzo	41
2.4.5 Parametri geometrici-coppia allo sterzo	42
2.5 Conclusioni	43
3 LO STERZO: ELEMENTO A PIU' GDL	45
3.1 Descrizione e modello cinematico	46
3.1.1 Dominio dei parametri	46
3.1.2 Sistemi di riferimento e matrici di rototraslazione	47
3.1.3 Coordinate indipendenti e dipendenti	51
3.1.4 Equazioni cinematiche	52
3.2 Curva a velocità costante	55
3.3 Analisi risultati attivando nuovi gradi di libertà	61
3.3.1 Analisi traslazione laterale	61
3.3.2 Analisi traslazione longitudinale	63
3.3.3 Analisi torsione	63
3.4 Definizione campo di lavoro generico	64
3.5 Conclusioni	65

4	LA BICICLETTA COMPLIANT-PIASTRA	67
4.1	Cerniera flessibile	67
4.1.1	Descrizione e teoria	67
4.1.2	Confronto tra cerniere flessibili	69
4.1.3	Alcune soluzioni costruttive	69
4.2	Modello piastra	79
4.3	Confronto bici compliant-piastra vs bici classica	82
4.3.1	Bicicletta compliant-piastra significativa	82
4.3.2	Il beccheggio	83
4.3.3	Punto di contatto ruota anteriore	85
4.3.4	Campo di lavoro	87
4.3.5	Sistema di forze agenti sullo sterzo	90
4.4	Comportamento piastra in curva	93
4.4.1	Piastra indeformata	95
4.4.2	Piastra in curva con ciclista ideale	96
4.4.3	Piastra in curva con ciclista classico	97
4.5	Variabili progettuali	98
5	SINTESI MEDIANTE OTTIMIZZAZIONE MULTIOBBIETTIVO	101
5.1	Algoritmo Genetico	101
5.1.1	Aspetti teorici sul metodo di ottimizzazione	101
5.1.2	Proprietà che rendono algoritmo genetico particolarmente adatto al problema in esame	104
5.2	Adattamento dell'algoritmo genetico al caso in esame	105
5.2.1	Limiti superiori ed inferiori per le variabili progettuali	106
5.2.2	Opzioni della funzione gamultiobj.m	107
5.3	Risultati ottimizzazione e analisi bicicletta compliant-piastra ottimizzata	109
5.3.1	Valutazione performance piastra	113
5.3.2	Comportamento bicicletta in curva e indicazioni sul nuovo modo di guidare	114
5.3.3	Dipendenza dei risultati dalle ipotesi sul ciclista	117
6	TEST: Modifica Costruttiva di una Bicicletta Classica	119
6.1	Bicicletta Classica Test	119
6.2	Verifiche in fase di accelerazione e frenata	120
6.2.1	Verifica fase di accelerazione	120
6.2.2	Verifica in fase di frenata	124
6.3	Realizzazione	125
6.4	Indicazioni progettuali	127
	CONCLUSIONI	131
	A APPENDICE A	133
	B APPENDICE B	137
	BIBLIOGRAFIA	141

ELENCO DELLE FIGURE

1.1	3
1.2	La draisina, o macchina da corsa. Costruita in Germania nel 1816	3
1.3	Ausilio manuale realizzato da Gompertz	4
1.4	Veicolo costruito da Kirkpatrick Macmillan attorno al 1869	4
1.5	Velocipede di Pierre Michaux, Parigi 1869	5
1.6	Meccanismo di frenata per mezzo di un piccolo cucchiaino	5
1.7	Evoluzione della bicicletta grazie all'avvento del raggiamento a tensione-tangente	6
1.8	Evoluzione della bicicletta grazie all'uso delle prime catene di trazione	6
1.9	Prima bicicletta Bianchi prodotta da Edoardo Bianchi nel 1885 a Milano	7
1.10	Safety bicycle (bicicletta di sicurezza), Starley 1885	7
1.11	10
2.1	rappresentazione schematica bicicletta	14
2.2	sistemi di riferimento.	16
2.3	posizione spaziale ruota posteriore	17
2.4	posizione spaziale ruota anteriore	17
2.5	convenzioni per ogni singolo angolo definito	18
2.6	si evidenziano alcuni sistemi di riferimento e angoli per facilitarne l'individuazione	19
2.7	percorsi prodotti matriciali	22
2.8	robot a cinematica chiusa	22
2.9	analisi posizione punti contatto nel sistema di riferimento assoluto	25
2.10	beccheggio al variare dell'angolo di sterzo e di rollio	26
2.11	coordinate del punto di contatto anteriore fissato angolo di sterzo	27
2.12	coordinate del punto di contatto anteriore fissato angolo di rollio	27
2.13	coordinate del punto di contatto anteriore al variare dell'angolo di sterzo e di rollio	28
2.14	rappresentazione delle forze e momenti tra pneumatico e asfalto	29
2.15	forze che agiscono sulla bicicletta in curva a velocità costante	30
2.16	angoli di slittamento $\lambda_r, \lambda_f, \kappa$	35
2.17	andamento dell'errore	35
2.18	forze che agiscono sull'avantreno in curva a velocità costante	36
2.19	bicicletta-Matlab nel piano	38
2.20	bicicletta-Matlab in curva	38
2.21	dal diagramma curvatura-velocità al campo di lavoro	39
2.22	motivo saturazione vincolo nel dominio (R,V)	40

2.23		40
2.24	motivo saturazione vincolo nel dominio $(\varphi, \vartheta_{1z})$	40
2.25	sottosterzante-sovrasterzante.	41
2.26	reazioni verticali e laterali sulle ruote.	41
2.27	velocità di avanzamento.	41
2.28	raggio di curvatura fisso rollio e vario angolo di sterzo	41
2.29	coppia nel campo di lavoro.	41
2.30	coppia in funzione del raggio di curvatura e velocità di avanzamento	41
2.31	coppia fisso angolo di sterzo e vario rollio	42
2.32	coppia per diversi valori dell'angolo di sterzo e vario rollio	42
2.33	coppia in funzione di parametri geometrici.	42
3.1	bicicletta schema black-box e nuovi Gdl	45
3.2	rappresentazione schematica bicicletta sterzo a più GdL	46
3.3	sistemi di riferimento	48
3.4	sterzo a 4 Gdl	50
3.5	percorsi prodotti matriciali	52
3.6	posizione dei punti di contatto e altri parametri significativi della bicicletta nel piano	54
3.7	bicicletta a 4 Gdl in curva a velocità costante	56
3.8	rappresentazione del confronto in curva tra bicicletta classica e sterzo-traslazione trasversale	62
3.9	vista dall'alto bici sterzo-traslazione trasversale	62
3.10	coordinate punto di contatto bici classica vs. bici sterzo-traslazione trasversale	62
3.11	individuazione semplice del raggio di curvatura	62
3.12	traiettoria bici classica vs. bici sterzo-traslazione trasversale	62
3.13	differenza $R_{compliant} - R_{classica}$	62
3.14	rappresentazione del confronto in curva tra bicicletta classica e sterzo-traslazione longitudinale	63
3.15	traiettoria bici classica vs. bici sterzo-traslazione longitudinale	63
3.16	rappresentazione del confronto in curva tra bicicletta classica e sterzo-torsione	64
3.17	traiettoria bici classica vs. bici sterzo-torsione	64
3.18	coordinate punto di contatto bici classica vs. bici sterzo-torsione	64
3.19	individuazione semplice del raggio di curvatura	64
4.1	generico corpo elastico	69
4.2	curve sforzo-deformazione	70
4.3	ingobbamento della sezione dovuto al taglio	71
4.4	scorrimento medio	71
4.5	piastra di primo tentativo	73
4.6	cerniera flessibile a sezione parabolica (vista dall'alto)	76
4.7	sezione parabolica al variare del coefficiente c	76
4.8	coefficienti di flessibilità	77
4.9	GdL e convenzioni per il beam	80
4.10	rappresentazione Matlab bici compliant-piastra	82
4.11	rappresentazione Matlab bici classica	82

4.12	rappresentazione bicicletta Matlab sovrapposte	83
4.13	angolo di beccheggio bicicletta compliant-piastra	84
4.14	differenza beccheggio bici classica vs. bici compliant-piastra	84
4.15	beccheggio bicicletta compliant-torsione	85
4.16	coordinate dell'avantreno al varire di φ fissato ϑ_{1z}	86
4.17	coordinate dell'avantreno al varire di φ e ϑ_{1z}	86
4.18	coordinate avantreno al variare di φ e ϑ_{1z} torsione	87
4.19	campo di lavoro 3D	87
4.20	campo di lavoro 3D (vista dall'alto)	87
4.21	schematizzazione della metodologia con cui si determina il campo di lavoro	88
4.22	campo di lavoro bicicletta compliant-piastra	88
4.23	confronto campo di lavoro bici compliant-piastra vs. bici classica	89
4.24	traiettoria bici compliant-piastra vs. bici classica	89
4.25	differenza raggio di curvatura bici compliant-piastra vs. bici classica al variare di ϑ_{1z}	90
4.26	raggio di curvatura al variare di $f, \varphi, \vartheta_{1z}$	90
4.27	raggio di curvatura al variare di $\lambda, \varphi, \vartheta_{1z}$	90
4.28	sistema di forze nel campo di lavoro	91
4.29	sistema di forze al variare di φ e ϑ_{1z}	91
4.30	coppia flettente M_{1z} e componenti	92
4.31	andamento delle forze al variare della posizione della piastra nel telaio fissati $\lambda, \varphi, \vartheta_{1z}$	92
4.32	schema delle forze che agiscono sull'avantreno	94
4.33	piastra primo tentativo	95
4.34	piastra deformata	97
4.35	deformazione della piastra dopo una serie di iterazioni	98
4.36	spostamento verticale come effetto della torsione	98
4.37	campi di lavoro al variare delle dimensioni della piastra	98
4.38	campi di lavoro al variare dell'inclinazione della piastra	99
4.39	campi di lavoro al variare dellaposizione della piastra	99
5.1	spazio dei parametri-spazio degli obbiettivi	102
5.2	si adatta programma di calcolo all'algoritmo genetico	105
5.3	nuovo metodo di calcolo dell'area di lavoro: coordinate polari	107
5.4	decision space per le variabili di posizione	107
5.5	finestra di diagnosi aggiornata ad ogni iterazione dal programma di ottimizzazione	108
5.6	fronte di Pareto	110
5.7	bici compliant-piastra ottimizzata	111
5.8	campo di lavoro 3D	111
5.9	campo di lavoro 3 layer	111
5.10	campo di lavoro 3 layer: vantaggio cinematico	112
5.11	forze nel campo di lavoro	112
5.12	vincoli cinetostatici	112
5.13	vincoli nel dominio $(\varphi, \vartheta_{1z})$	112
5.14	vincoli ammissibili per la deformazione della piastra	112
5.15	efficienza piastra 3D	114
5.16	efficienza piastra vista1	114

5.17	efficienza piastra vista2	114
5.18	deformazione piastra in curva	115
5.19	deformazione piastra in curva all'ultima iterazione	115
5.20	andamento del raggio di curvatura variabile	115
5.21	bicicletta ottima ridotto M_{1y}	116
5.22	deformazione piastra in curva ridotto M_{1y}	116
5.23	deformazione piastra in curva ridotto M_{1y} all'ultima iterazione	116
5.24	confronto andamento del raggio di curvatura	116
5.25	dipendenza risultati da M_{1z}	117
5.26	dipendenza risultati da M_{1x}	117
6.1	bici vera test	119
6.2	bici inventor test	119
6.3	possibili posizioni della parte deformabile	120
6.4	forze e reazioni in fase di accelerazione	120
6.5	catena con pignoni	121
6.6	schema del ciclista	121
6.7	convenzioni	122
6.8	azione interna assiale	122
6.9	azione interna taglio	122
6.10	azione interna flettente	122
6.11	trave inflessa	123
6.12	verifico buckling	124
6.13	forze e reazioni in fase di frenata	124
6.14	convenzioni	125
6.15	azione interna assiale	125
6.16	azione interna di taglio	125
6.17	azione interna flettente	125
6.18	test1: bici-compliant conservativa	126
6.19	test1: bici-compliant conservativa vista dall'alto	126
6.20	test2: bici-compliant estrema	127
6.21	potenzialità: curve isolivello $\varphi=5^\circ$ e $\vartheta_{1z}=8^\circ$	128
6.22	potenzialità: curve isolivello $\varphi=20^\circ$ e $\vartheta_{1z}=30^\circ$	128
6.23	potenzialità: cresce campo di lavoro	129

INTRODUZIONE

Il lavoro in esame si prefigge di concepire una nuova idea di bicicletta attraverso la riprogettazione del classico sterzo. La possibilità di svincolare il movimento della ruota anteriore da quella posteriore in una bicicletta classica è affidata alla serie sterzo composta dallo stelo della forcella, due cuscinetti a sfere il canotto di sterzo, un sistema di fissaggio ed un porta-manubrio.

Nella tesi ci si propone dunque di scardinare l'idea di uno sterzo a singolo Gdl e verrà formalizzato un legame cinematico tra avantreno e retrotreno a più gradi di libertà. Attraverso questo nuovo modo di ripensare lo sterzo risulta possibile introdurre nella progettazione della bicicletta nuovi sistemi di recente studio in ambito ingegneristico, come i meccanismi compliant. In questo modo le soluzioni costruttive diventano molteplici, tuttavia l'interesse della tesi si è concentrato sul tentativo di realizzare una bicicletta facendo completamente a meno del classico sterzo, e di affidare il ruolo cinematico di collegamento tra le ruote ad un telaio deformabile.

Il Cap.1 è dedicato alla descrizione dell'evoluzione della bicicletta, prestando particolare attenzione a come sono state introdotte le modifiche progettuali che hanno portato all'ormai consolidata idea di bicicletta moderna. Si farà inoltre un cenno alle principali caratteristiche dei sistemi compliant che saranno lo strumento per rendere effettivo un nuovo tipo di sterzo.

Nel Cap.2 si studia la cinetostatica in curva della bicicletta classica. Si costruisce così un riferimento utile su cui basare la nuova progettazione. Diversi sono infatti gli strumenti introdotti per poter caratterizzare e valutare le prestazioni di una bicicletta: l'analisi cinematica del punto di contatto della ruota anteriore, l'andamento dell'angolo di beccheggio, la costruzione di una funzione che legghi il dominio rollio-angolo di sterzo a velocità-raggio di curvatura e viceversa. Infine verrà introdotto il concetto di campo di lavoro.

Nel Cap.3 si formalizza un nuovo legame matematico tra retrotreno e avantreno per la bicicletta. Dal semplice grado di libertà rappresentato dal classico sterzo si passa ad un modello cinematico a 4GdL. Si valuteranno infine eventuali vantaggi/svantaggi legati alla singola attivazione dei nuovi GdL rispetto la bicicletta classica.

Il Cap.4 introduce il modello dei meccanismi compliant nel sistema bicicletta. Dopo una prima fase legata alla descrizione teorica e di confronto tra possibili soluzioni progettuali, si definisce un modello beam di una cerniera flessibile-piastra sufficiente per poter individuare le principali problematiche legate al nuovo progetto: necessità di dover tener conto del cambio di rigidità al variare della deformazione. Viene quindi confrontata una bicicletta compliant-piastra significativa nel tentativo di riconoscere le variabili che ne determinano il progetto.

Nel Cap.5 ci si avvale di una ottimizzazione multiobiettivo per gestire la sintesi

cinetostatica della cerniera flessibile-piastra. Dopo alcuni cenni teorici adatti a giustificare la scelta, si sono definite le funzioni di costo e gli altri parametri in ingresso per l'ottimizzatore multiobbiettivo ad algoritmi genetici. Il progetto della bicicletta compliant-piastra ottimizzata risulta essere dipendente dalle capacità di interazione ciclista-telaio e quindi il progetto è "ottimo" per le particolari condizioni di vincolo ipotizzate.

Nel Cap.6 si descrivono una serie di test effettuati per valutare qualitativamente le sensazioni di guida. I test sono serviti anche per valutare la nuova interazione tra ciclista e telaio su una bicicletta compliant-piastra resa deformabile a partire da una semplice modifica di una bicicletta classica. Infine, a partire da questi risultati sperimentali, verranno descritte le potenzialità legate a possibili sviluppi per questo tipo di bicicletta.

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE ALLA BICICLETTA

La bicicletta è uno dei veicoli più diffusi al mondo. Si usa la bicicletta sia in città che in montagna, si usa come mezzo di spostamento gratuito e non inquinante, si usa anche come attività sportiva su strada. Proprio a causa dei suoi molti utilizzi non può dunque esistere una sola bicicletta; a seconda del motivo per cui si decide di salire in sella avremo quindi una bici più confortevole, una bici più leggera, una bici più resistente e rinforzata. Tuttavia la struttura che sta alla base della bicicletta moderna, e che accomuna gran parte delle biciclette in circolazione, è frutto dell'evoluzione che ha portato dalla macchina da corsa di inizio XIX secolo alla bicicletta di sicurezza di fine XIX secolo. Da allora, sebbene in termini di prestazione si sia fatto molto in ogni direzione, la struttura di base non è cambiata. In questo primo capitolo quindi si indagherà la storia della bicicletta e la sua evoluzione nel corso del tempo, ponendo particolare attenzione a come sono state ideate e introdotte nuove modifiche progettuali. Verranno infine introdotti i meccanismi compliant, che saranno lo strumento con il quale si cercherà di sintetizzare il nuovo tipo di sterzo.

1.1 Evoluzione della bicicletta

Nonostante alcuni miti che sostengono l'esistenza di precedenti macchine a due ruote, l'invenzione della prima *macchina da corsa* è avvenuta in Germania nel **1817**, ed è allora che la storia della bicicletta ebbe inizio. La sua prima apparizione è avvenuta quando l'inventore tedesco, il barone Karl von Drais, ispirato dall'idea del pattinaggio senza ghiaccio, quindi su ruote, ideò un'attrezzatura per la corsa, detta *draisina*.

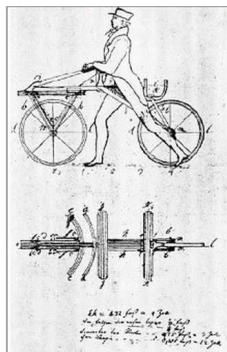


Figura 1.1

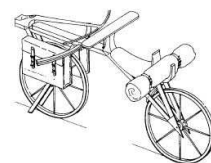


Figura 1.2: La draisina, o macchina da corsa. Costruita in Germania nel 1816

La draisina (mostrata in Figura 1.2), è costituita da due ruote allineate di cui la ruota anteriore è sterzante: il corridore è supportato da un “appoggia-pancia” per agevolare la posizione in funzione del fatto che si avvanza puntando i piedi per terra dando una spinta in avanti, più o meno come si fa oggi con il monopattino.

Con l’obiettivo di risolvere gli impedimenti fondamentali nella guida della draisina, quali la mancanza di trazione e di frenata, nel **1821** Lewis Gompertz adattò alla ruota anteriore un cricchetto ad arco-oscillante in modo tale che il pilota potesse spingere le maniglie dello sterzo per assistere le gambe nel movimento. In Figura 1.3 viene evidenziato l’elemento introdotto:

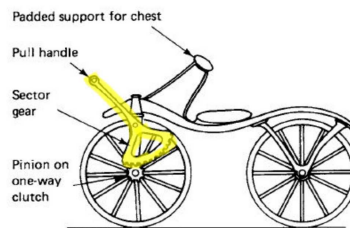


Figura 1.3: Ausilio manuale realizzato da Gompertz

Un altro cambiamento si ebbe attorno il **1839**, quando lo scozzese Kirkpatrick Macmillan costruisce un veicolo con un diverso sistema di trazione (raffigurato in Figura 1.4): il veicolo presentava una ruota posteriore più grande di quella anteriore e su di essa venne adattata una sella su cui si appollaiava l’uomo, il quale con un sistema di pedivelle oscillanti, sistemate dalle due parti della ruota anteriore, imprimeva un movimento alla ruota posteriore per mezzo di due bielle leggere. L’inconveniente della sua invenzione che non ebbe successo dipendeva dal fatto che i pedali non ruotavano completamente, ma descrivevano soltanto un arco di cerchio.

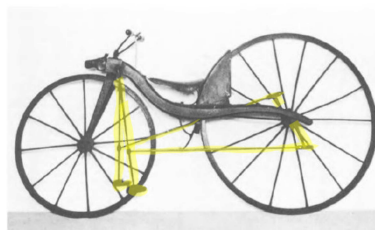


Figura 1.4: Veicolo costruito da Kirkpatrick Macmillan attorno al 1869

Il secondo passo molto significativo nell’evoluzione del design della bicicletta fu sviluppato in Francia nel **1861** dal carrozziere francese Pierre Michaux che introdusse dei pedali e manovella sulla ruota anteriore di una draisina dando così vita al *velocipede*. Si fece in modo che le pedivelle ruotassero completamente intorno all’asse della ruota e le trasmettessero il loro movimento. L’asse di sterzo (vedi Figura 1.5) era verticale e

passava attraverso l'asse della ruota anteriore, cosa che determinava nulla l'avancorsa. Questo velocipede rappresentò il primo vero boom della bicicletta nel mondo, infatti dal **1868** l'entusiasmo per questo veicolo si diffuse da Parigi al Belgio, all'Olanda, alla Germania fino agli Stati Uniti ed Inghilterra.



Figura 1.5: Velocipede di Pierre Michaux, Parigi 1869

Il problema della trazione apparve risolto con questa soluzione e dunque l'attenzione si spostò al sistema frenante nel tentativo di renderlo più efficace. Il primo rudimentale freno era costituito da una paletta di ferro, che, azionata da una cordicella, faceva attrito, rallentando lo slancio della ruota posteriore. In pochi anni a seconda del produttore furono adoperati diversi tipi di meccanismi frenanti, anche se non molto efficaci. Nel caso del velocipede mostrato, il piccolo freno a cucchiaio sulla ruota posteriore è collegato al manubrio ed è ingranato da un semplice movimento rotatorio.



Figura 1.6: Meccanismo di frenata per mezzo di un piccolo cucchiaio

Negli anni successivi si andò a migliorare la struttura delle ruote che fino ad allora erano costituite da spessi raggi di legno ed un cerchione in ferro. È stato solo alla fine degli anni '60 dell'ottocento che venne fissata ai cerchioni la gomma e vennero introdotti i primi cuscinetti per dotare queste macchine di una guida più fluida rispetto a quelle precedenti. Attorno al **1870** Starley e William Hillman introdussero la "ruota a leva di tensione", con raggi radiali e una leva per regolare la tensione dei raggi delle ruote. Nel **1874** Starley brevettò la logica estensione di quel metodo che rimane quello standard anche ai giorni d'oggi: il metodo per raggiatura a tensione radiale. Con l'avvento del raggiamento a tensione fu possibile costruire ruote anteriori sempre più grandi, per dare a ogni pedalata un maggior spostamento e quindi più velocità, trasformando il rapporto di trasmissione in un diametro equivalente. Ben presto le ruote diventarono tanto grandi quanto veniva permesso dalla lunghezza delle gambe del ciclista.

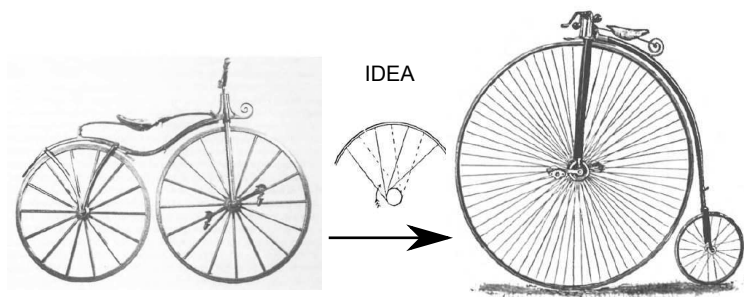


Figura 1.7: Evoluzione della bicicletta grazie all'avvento del raggiamento a tensione-tangente

Nel **1870** apparve la prima macchina leggera interamente in metallo: il *quattrino ordinario* o *penny*. Questo veicolo era caratterizzato appunto dalla ruota anteriore molto alta, di solito tra i 90 e i 150 cm di diametro, e dalla ruota posteriore molto piccola che serviva solo ad equilibrare l'insieme. Le biciclette di alto livello furono dotate di cuscinetti su entrambe le ruote, la testata di sterzo, il cerchione e le forcelle erano ricavati da tubi cavi, l'asse di sterzo era inclinato per creare l'effetto *castering*, i pneumatici erano di gomma piena e la grande ruota anteriore aveva lunghi raggi. In questo modo la guida divenne più fluida rispetto alle precedenti versioni ed il peso fu ridotto fino a 13.6kg. Questa macchina, che è stata la prima a essere chiamata bicicletta, è stato il primo veicolo al mondo a binario unico ad impiegare il capo centro-sterzo, che è in uso ancora oggi. Il baricentro alto e la posizione in avanti del pilota rendevano complicato salire e scendere da questa bicicletta che dinamicamente era già difficile da guidare. Con l'intento di rendere la bicicletta un mezzo più sicuro vennero apportate delle modifiche che si erano già sviluppate per i tricicli: la trasmissione di coppia alla ruota tramite catena. Le sperimentazioni quindi volsero a cercare soluzioni che consentissero la trasmissione del moto tramite un sistema di cinghie elastiche e ingranaggi sulla ruota posteriore.

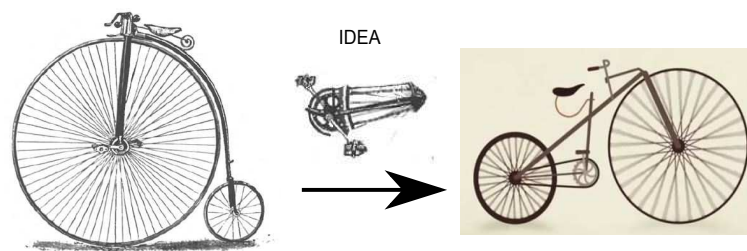


Figura 1.8: Evoluzione della bicicletta grazie all'uso delle prime catene di trazione

Si ricorda fra tutti l'inglese Harry John Lawson di Coventry che nel **1879** brevettò un biciclo con trasmissione a catena e ruote di piccola dimensione che aumentavano la sicurezza senza sacrificarne la velocità. Il modello non ebbe successo ma diede l'avvio ad un nuovo capitolo nel design dei bicikli. Nel **1885** un italiano, il milanese Edoardo Bianchi, fondatore della famosa ditta, realizzò la prima bicicletta con trasmissione a catena: in

Italia fu un successo straordinario. Quella prima bicicletta, di marca italiana, aveva un telaio in ferro, a forma di croce, e direzione a perno, linea snella ma solida e ruote di diametro uguali, caratteristiche che si troveranno poi anche in altri vari modelli inglesi, francesi, tedeschi, apparsi fra il 1885 e 1887. Prima della fine del secolo, in circa 20 anni di sperimentazione, il problema della trasmissione a catena fu risolto in modo definitivo: i pedali furono collegati ad una corona dentata che, mediante catena snodabile, trasmetteva il movimento al pignone della ruota posteriore. In questo modo a parità di coppia non era più necessario avere un diametro di ruota così grande per avere la stessa velocità del veicolo; con la migliore efficienza e affidabilità nel generare coppia le ruote poterono essere riportate entrambe alle stesse medie dimensioni. Si raggiunse così la posizione moderna di guida nella quale ci si siede quasi sopra la pedivella e si spartisce il peso del corpo attraverso il manubrio, pedali e sellino (si veda Figura 1.9).

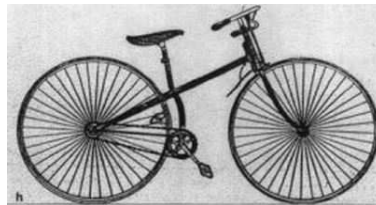


Figura 1.9: Prima bicicletta Bianchi prodotta da Edoardo Bianchi nel 1885 a Milano

Nei diversi modelli di bicicletta apparsi dal 1885 alla fine del 1887 il telaio era costruito a forma di croce con una direzione a perno: il tubo che dalla sella finisce alla pedaliera incrocia, a metà strada, il tubo che unisce la ruota posteriore al manubrio. Una forcella per la ruota anteriore conteneva due calotte coniche, una saldata sopra la testa della forcella, l'altra movibile, infilata nella parte superiore del tubo dello sterzo, in cui venivano immesse le punte del perno costituendo così lo sterzo e completando il telaio. Con questo tipo di telaio il veicolo non aveva quella resistenza e rigidità necessaria ad attutire lo sforzo prodotto dai colpi dei pedali e di conseguenza spesso si verificava o l'uscita della catena dagli ingranaggi o la sua rottura. Allora l'inglese John Kemp Starley decise di dare una maggiore stabilità al pedaliera creando il primo modello di telaio a trapezio o diamante, usato nella maggior parte delle biciclette moderne. Tale modello, in cui l'originale forma del telaio lasciava intravedere la geometria chiusa a trapezio, venne chiamato *bicicletta di sicurezza* proprio perchè garantiva maggiore stabilità e scorrevolezza al mezzo. Verso l'anno **1890**, era ben noto che in sostanza



Figura 1.10: Safety bicycle (bicicletta di sicurezza), Starley 1885

chiunque avrebbe potuto imparare a bilanciare una bicicletta di sicurezza, che aveva pneumatici pieni e trasmissione a catena.

Un'altra importante invenzione fu lo pneumatico introdotto da John Boyd Dunlop nel **1899**. Fino alla sua introduzione, i mezzi erano rigidi, pesanti e scomodi da guidare dovuto alle vibrazioni e contraccolpi. I nuovi pneumatici davano maggior scorrevolezza al veicolo, migliorarono sostanzialmente l'ammortizzazione della corsa e la velocità massima raggiungibile.

Trascorsero appena due anni dall'apparizione sul mercato ciclistico dei tubolari Dunlop quando, i fratelli francesi André e Eduard Michelin, produttori locali di articoli in gomma, ebbero l'idea di dividere il pneumatico in due parti: un tubo in caucciù munito di una valvola, inserito in un altro tubo più spesso e resistente, facilmente smontabile dal cerchione: erano nati i primi copertoni smontabili agganciati alla ruota con due fili di acciaio. Per riparare una gomma forata dunque, bastava estrarre la camera d'aria e rappezzarla o sostituirla con una nuova. Nel **1892** vede la luce l'ultima modifica che perfeziona il pneumatico. Il merito va all'industriale milanese, Giovan Battista Pirelli, che costruisce il "pneumatico milano" con la cosiddetta copertura a tallone, usata ancor oggi, con cui il copertone è trattenuto nelle apposite scanalature del cerchione dalla pressione della camera d'aria.

Tra le invenzioni e sviluppi che hanno reso la bicicletta quello che è oggi si possono citare sistemi di azionamento a pignone e a catena, leggeri telai rigidi in acciaio, freni a pinza, sedili a molle, sistemi di sospensioni anteriori e posteriori, mozzi di trasmissione free-running, e treni d'ingranaggi di cambio multivelocità. Anche le biciclette fuori strada o mountain bike sono diventate molto sofisticate, molte di esse hanno ammortizzatori anteriori e posteriori, cambio di marce ad ampio raggio, freni idraulici a disco e telai fatti in alluminio titanio o fibra di carbonio.

Dall'analisi della storia della bicicletta ciò che emerge è che i primi passi nell'evoluzione del design della bicicletta si realizzarono attraverso tentativi e modifiche empiriche senza nessun approccio scientifico consolidato. La bicicletta è un sistema che è stato prima inventato e solo successivamente si è cercato di comprenderne il funzionamento: infatti solo verso la fine dell'ottocento si iniziò a fare uso di equazioni e calcoli matematici per modellare il sistema bicicletta. Nel **1899**, il matematico francese Carvallo e poi, più in generale, Whipple [47], usarono equazioni della dinamica dei corpi rigidi per dimostrare in teoria ciò che era sicuramente noto in pratica, e cioè che alcune biciclette di sicurezza potevano mantenersi in equilibrio ad una ben precisa velocità di avanzamento. In particolare misero in luce come il sistema instabile bicicletta potesse essere stabilizzato e come un pilota può equilibrare una bicicletta che si sposta in avanti facendo ruotare la ruota anteriore nella direzione di un'inclinazione indesiderata. Attribuirono all'accelerazione del punto di contatto della ruota anteriore il ruolo stabilizzante della bicicletta in avanzamento, proprio come una scopa o un bastone invertito possono essere bilanciati su una mano aperta accelerando il punto di appoggio nella direzione della inclinazione. Inoltre spiegarono come qualche bicicletta incontrollata può auto-stabilizzarsi a determinate velocità e le coppie necessarie alla correzione del moto dello sterzo possono derivare da diverse caratteristiche geometriche, inerziali e giroscopiche della bicicletta.

Con l'avvento dei computer nel **1970** venne facilitata l'integrazione delle equazioni che governano la dinamica non lineare della bicicletta (si faccia riferimento per approfondimenti a [20], [19]). Con l'aiuto di nuovi strumenti, metodi di ricerca e analisi matematica, ad esempio simulatori multibody e software ad elementi finiti, le modi-

fiche apportate alle biciclette negli ultimi anni sono volte a migliorare in termini di prestazioni alcuni aspetti della bicicletta. In particolare si sono volute approfondire le metodologie con cui si sono apportate modifiche alla bicicletta. Tra questi alcuni utili spunti sono stati l'“Experimental Optimization Pivot Point Height for Swing-Arm Type Rear Suspensions in Off-Road Bicycles” [7] in cui Hull e Karchin andarono ad individuare la posizione ottimale del punto di aggancio del pendente sul piantone, per ottenere le migliori prestazioni dall'ammortizzatore posteriore.

Recenti studi sulla dinamica della bicicletta [5] confermano quanto già trattato da Carvalho e Whipple per spiegare la asintotica auto-stabilità di alcune biciclette incontrollate ma hanno fatto cadere il mito del fatto che l'autostabilità fosse garantita esclusivamente dall'avancorsa o dall'effetto giroscopico delle ruote della bicicletta: attraverso un'opportuna distribuzione dei masse è possibile comunque mantenere l'effetto autostabilizzante (Arend L. Schwab della Delft University of Technology (TU Delft) seminario: *Bicycle Dynamics and Control*).

Comunque, nonostante la rapida evoluzione ed i numerosi perfezionamenti meccanici apportati negli ultimi anni, l'idea di bicicletta è rimasta pressochè uguale: fin dalla presentazione della prima *safety bicycle*, ancora oggi per bicicletta si intende il veicolo con telaio, due ruote, mozzi, pedali, trasmissione a catena, manubrio, freni, sella e sterzo.

1.2 Meccanismi compliant

Negli ultimi anni c'è stato un particolare interesse per quanto riguarda lo studio di meccanismi cedevoli, evidenziando un potenziale non indifferente per risolvere problemi di progettazione meccanica. Ciò è evidente dal fatto che *meccanismi compliant* si trovano ovunque: nelle pinze, nei tappi di bottiglia di shampoo, nelle graffette e in molti altri comuni oggetti di vita quotidiana. In ambito più strettamente ingegneristico è possibile trovare questi sistemi nell'industria automobilistica, biomeccanica, aerospaziale e robotica: particolarmente bene si adattano su robot paralleli di ultima generazione, su sistemi di amplificazione degli spostamenti degli attuatori piezoelettrici, sono diffuse soluzioni con meccanismi compliant anche nel campo MEMS (per approfondire i diversi campi di utilizzo e potenzialità dei meccanismi compliant si faccia riferimento a [1],[15],[46]); di seguito sono state raccolte alcune delle applicazioni più rappresentative). Secondo la pubblicazione di Lobontiu “a compliant (or flexible) mechanism is a mechanism that is composed of at least one component (member) that is sensibly deformable (flexible or compliant) compared to the other rigid links. The compliant mechanisms, therefore, gain their mobility by transforming an input form of energy (mechanical, electric, thermal, magnetic, etc.) into output motion”.

All'interno di un meccanismo compliant viene chiamato *flexure hinge* (cerniera flessibile) il membro sottile che fornisce la rotazione relativa tra i due elementi rigidi adiacenti attraverso la sua deformazione. In Figura 1.11 viene confrontata una cerniera convenzionale con quella di flessione.

Come già accennato, la cerniera di flessione è costituita da una parte sottile elasticamente flessibile tra due parti rigide che devono essere sottoposte a rotazione limitata in un meccanismo che dovrebbe raggiungere un compito specifico. La cerniera a flessione è monolitica con il resto del meccanismo, e questa è la principale fonte dei suoi vantaggi rispetto le giunture di rotazione classiche. Oltre a questo le cerniere di flessione offrono molti altri benefici, i più notevoli sono:

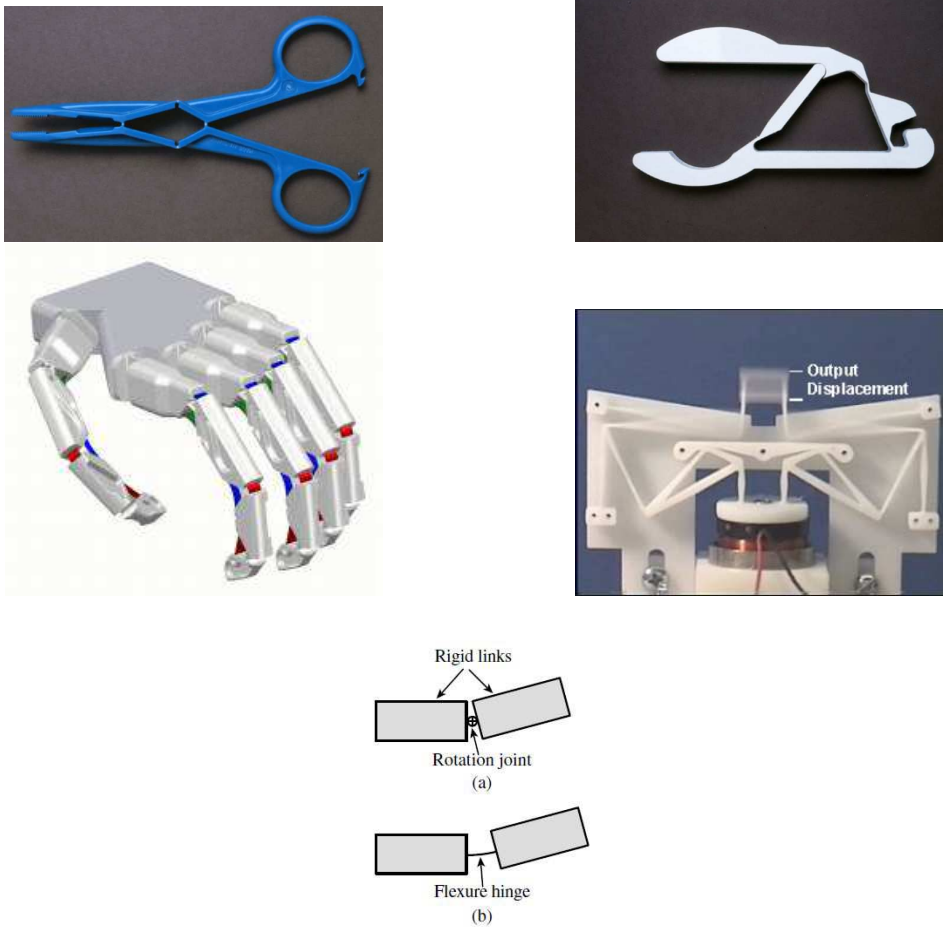


Figura 1.11

- Nessuna perdita di attrito
- Non necessitano di lubrificazione
- No isteresi
- Compattezza
- Capacità di essere utilizzate in applicazioni su piccola scala
- Facilità di fabbricazione
- Assolutamente nessuna manutenzione necessaria

Le cerniere di flessione non richiedono di essere riparate in quanto il meccanismo funzionerà fino a quando una sua parte flessibile non cede a causa o del raggiungimento del limite a fatica o si ha un sovraccarico che provoca deformazione plastica permanente. Certamente richiedono ispezione subito dopo la loro fabbricazione, quando bisognerà controllare che gli errori indotti sulla geometria ideale a causa della lavorazione non inficino sul funzionamento previsto. Tuttavia, le cerniere di flessione hanno delle limitazioni tra le quali:

- Sono in grado di fornire livelli relativamente bassi di rotazione.
- La rotazione non è pura perché la deformazione di una cerniera flessibile è complessa, infatti non è detto che sia solo la flessione a determinare la sua deformazione ma possono subentrare effetti legati a forze di taglio e da momenti torcenti.
- Il centro di rotazione non è detto che sia fisso durante la rotazione relativa poiché si sposta per effetto del carico combinato.

Il peso di questi eventuali svantaggi rispetto ai vantaggi sopra descritti sono inevitabilmente funzione del sistema da progettare.

CAPITOLO 2

LA BICICLETTA CLASSICA

Questa prima parte della tesi è dedicata allo studio dell'esistente: in letteratura sono presenti diversi tipi di modelli di variabile complessità a seconda degli scopi con cui si analizza il comportamento di un veicolo a due ruote. La maggior parte degli sforzi negli anni sono stati rivolti allo studio del sistema motocicletta (anche se come modello cinematico è identico, l'analisi dei risultati non può che essere completamente diversa) e, nei casi in cui si analizza in modo specifico la bicicletta, l'analisi è esclusivamente dinamica incentrata sullo studio della stabilità. A tal proposito risultano comunque molto esaustive le pubblicazioni del 2006 di Limebeer e Sharp [13] o il *Tire and Vehicle Dynamics* di Pacejka [32] o ancora i paper che riguardano l'analisi delle equazioni dinamiche linearizzate per il controllo della bicicletta [34], [33], [35]. In realtà per gli obiettivi della tesi risulta più interessante l'approccio adottato da Cossalter [16] in cui nel cap.4 *moto in curva* analizza le prestazioni di un motociclo basandosi sullo studio di una particolare curva a velocità costante (meglio conosciuta come steady-state turning). Quindi si è adattato e analizzato tale approccio alla bicicletta e in questo modo si è riusciti a definire il concetto di campo di lavoro come strumento principale per caratterizzare le prestazioni di una bicicletta.

Prima di poter analizzare la bicicletta in curva a velocità costante, come detto, deve essere effettuata un'analisi cinematica ovvero determinare la posizione relativa dei diversi corpi rigidi che compongono il sistema in una generica posizione nello spazio. Per risolvere il problema cinematico è stato seguito il metodo a matrici di rototraslazione, proposto dal prof. Legnani [42] usato per risolvere la cinematica diretta dei robot. Con questo approccio è possibile rendere in forma abbastanza compatta ed intuitiva il problema (altri possibili approcci, a cui fa riferimento Cossalter, sono quelli proposti da Kane [33]).

Lo studio della bicicletta classica quindi sarà funzionale per poter definire i margini del problema, cioè stabilire i contorni e vincoli che il sistema bicicletta rappresenta di per sé e soprattutto costruire un riferimento e un elemento di confronto per il nuovo progetto.

2.1 Descrizione e modello cinematico

Nel caso oggetto della presente indagine è necessario in primo luogo stabilire il modello che si vuole impiegare nell'analisi del sistema, fissando, in base all'osservazione diretta di una generica bicicletta reale, i parametri geometrici caratterizzanti il moto della stessa.

Il modello formulato è funzione del tipo di analisi: siccome l'obiettivo è quello di

descrivere il comportamento del veicolo in curva in moto stazionario sarà preso in considerazione il comportamento cinematico effettivo del veicolo e le proprietà delle gomme della bicicletta con l'introduzione delle seguenti ipotesi semplificative:

- Il ciclista è considerato come un corpo rigido saldamente fissato al telaio.
- Si tiene conto delle forze aerodinamiche distribuite che l'aria esercita sulla bicicletta considerando trascinamento, ascensione e forze laterali che agiscono al centro di massa della parte posteriore del telaio e tre coppie aerodinamiche dovute al fatto che le forze sono state trasportate dal centro delle pressioni (COP) in cui sono effettivamente applicate, al centro di massa (COG).
- Le forze laterali esercitate dalla strada sui pneumatici sono poste in relazione allo slittamento laterale e gli angoli di rollio, in modo che il modello del veicolo tenga conto degli angoli di deriva.
- Per quanto riguarda lo scorrimento longitudinale non viene trascurato lo slittamento della ruota posteriore a causa delle tensioni longitudinali sul pneumatico dovute alla forza resistente al rotolamento, mentre viene trascurato questo effetto nella modellazione della ruota anteriore.
- Come velocità del veicolo viene assunta la velocità di avanzamento del punto del telaio posteriore che si sovrappone al punto di contatto del pneumatico posteriore. A questa verrà legata la velocità di imbardata del veicolo.

Una sezione verrà dedicata in seguito alla descrizione del modello semplificato di contatto tra ruota e asfalto. Si consideri quindi la bicicletta schematizzata in Figura 2.1,

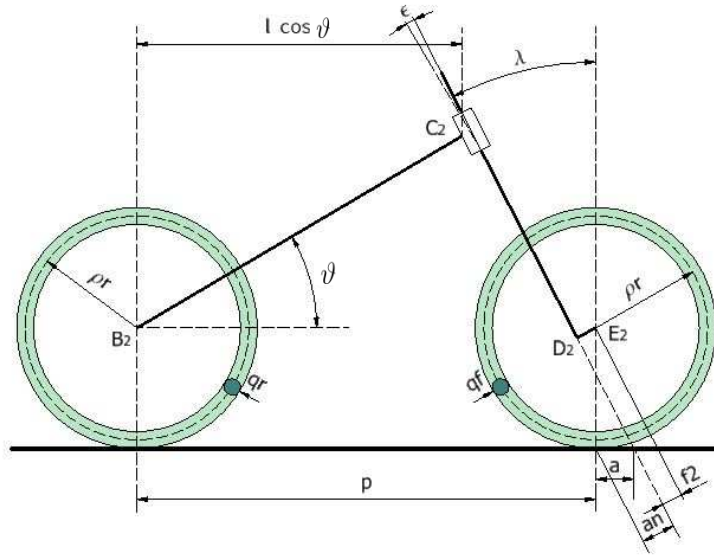


Figura 2.1: rappresentazione schematica bicicletta

la quale si muove su di un piano orizzontale. La bicicletta risulta così essere composta da quattro corpi rigidi uniti tra loro attraverso tre giunti rotoidali:

- la ruota posteriore;
- il retrotreno, costituito dal telaio, dal sellino e dal gruppo di trasmissione della potenza;
- l'avantreno o sterzo;
- la ruota anteriore.

Due giunti rotoidali uniscono il telaio e lo sterzo rispettivamente la ruota posteriore e quella anteriore, mentre il terzo connette il telaio allo sterzo.

Per come sono definiti i vincoli della bicicletta si può individuare un primo piano, detto *piano posteriore*, che contiene la ruota posteriore ed il telaio, mentre un secondo definito come *piano anteriore*, nel quale giacciono sia la ruota anteriore sia lo sterzo.

2.1.1 Dominio dei parametri

A questo punto, facendo riferimento alla configurazione banale (quella per cui i due piani definiti sono sovrapposti e perpendicolari al piano del terreno), è possibile definire i parametri geometrici che caratterizzano la bicicletta e ne individuano completamente la struttura meccanica. Si intuisce subito come il dominio dei parametri sia grande in confronto al numero di corpi rigidi. Quindi, come riportato in Figura 2.1, indichiamo con ρ_r ed ρ_f rispettivamente i raggi medi del toro posteriore e di quello anteriore, mentre con r_r ed r_f i corrispondenti raggi della sezione torica (q_r e q_r) del pneumatico posteriore ed anteriore. Indichiamo poi con p il passo della bicicletta, ovvero la distanza che intercorre tra i punti di contatto delle due ruote. Osserviamo quindi che il passo p non risulta costante, ma è variabile con la configurazione della bicicletta. Definiamo l la distanza che caratterizza la lunghezza della parte di telaio rigido che nella Figura 2.1 costituisce il segmento \overline{BC} . Con riferimento alla figura, l'angolo tra la verticale e l'asse di rotazione dello sterzo viene detto *caster angle* (λ). Per svincolare l'inclinazione del telaio rigido a quella che caratterizza lo sterzo definiamo un angolo detto *caster angle ridotto* (ε) nel seguente modo:

$$\varepsilon = \lambda - \vartheta$$

Indicato con ϑ l'angolo formato tra l'asse passante per il centro della ruota posteriore parallelo alla linea di contatto e l'asse coincidente con il segmento \overline{BC} . Questo angolo rappresenta il beccheggio della bicicletta nella configurazione banale. L'abbassamento della forcella (nella figura segmento \overline{CD}) è identificata dalla distanza d . Infine assegnamo al disassamento della forcella, cioè la distanza tra la ruota posteriore e l'asse dello sterzo, il valore f_2 .

A tale scopo sotto sono riportate le relazioni geometriche che devono rispettare i parametri della bicicletta avendo fissato l'abbassamento della forcella, l'avancorsa normale, il passo e il *caster angle*:

parametri assegnati

p, d_2, a_{n_2}, λ

vincoli tra parametri

$$f_2 = -a_{n_2} + (\rho_f + q_f) \sin \lambda \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} l_2 \cos \vartheta_2 + d_2 \sin \lambda + m_2 \cos \lambda = p \\ l_2 \sin \vartheta_2 = d_2 \cos \lambda - m_2 \sin \lambda \end{cases} \longrightarrow l_2, \vartheta_2$$

$$\vartheta_2 = \arctan \left(\frac{d_2 \cos \lambda - m_2 \sin \lambda}{p - m_2 \cos \lambda - d_2 \sin \lambda} \right) \quad (2.2)$$

$$l_2 = \left(\frac{p - d_2 \sin \lambda - m_2 \cos \lambda}{\cos(\vartheta_2)} \right) \quad (2.3)$$

2.1.2 Sistemi di riferimento e matrici di rotazione

Si introducono i sistemi di riferimento rispetto ai quali viene determinata la generica configurazione della bicicletta. Infatti si determinano le posizioni di particolari punti nello spazio attraverso la successione di matrici di rototraslazione. In particolare, si inseriscono un sistema di riferimento inerziale e diversi sistemi solidali ai vari corpi rigidi che compongono il sistema meccanico. Il sistema inerziale $\Sigma = (\mathbf{O}; X, Y, Z)$ viene fissato con l'asse X coincidente con la linea di contatto col terreno. L'asse Z, invece, si assume normale al piano del terreno e diretto verso il basso, mentre l'asse Y viene determinato in modo che la terna soddisfi la regola della mano destra.

Di seguito sono riportati un insieme di figure che permettono di capire in maniera più chiara come sono prese le convenzioni dei vari sistemi di riferimento, come sono posizionati nella bicicletta e come determinano la posizione del corpo rigido nello spazio.

Per quanto riguarda i sistemi solidali, con riferimento alla schematizzazione della

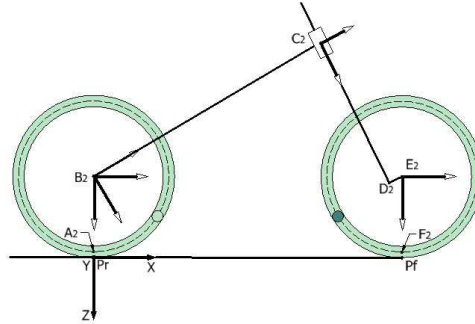


Figura 2.2: sistemi di riferimento.

bicicletta riportata in Figura 2.2, scegliamo un primo sistema $S_{Pr} = (\mathbf{Pr}; x_{Pr}, y_{Pr}, z_{Pr})$ con l'origine nel punto di contatto, l'asse z_{Pr} normale al terreno e diretto verso il basso e l'asse x_{Pr} parallelo all'asse X. Questo sistema di riferimento in qualunque posizione si trovi la bicicletta avrà l'asse z_{Pr} che passa sempre tra il punto A_2 e Pr . Un ulteriore sistema di riferimento, indicato con $S_{A_2} = (\mathbf{A}_2; x_{A_2}, y_{A_2}, z_{A_2})$, viene fissato sulla ruota con l'origine in A_2 , l'asse x_{A_2} sempre parallelo ad X; ma l'asse z_{A_2} adesso risulta passante per i punti B_2 e A_2 qualsiasi sia la posizione della bicicletta. Si assume poi un sistema di riferimento $S_{B_2} = (\mathbf{B}_2; x_{B_2}, y_{B_2}, z_{B_2})$ solidale al telaio con l'origine nel punto B_2 , l'asse x_{B_2} parallelo alla linea di contatto e l'asse z_{B_2} normale al terreno

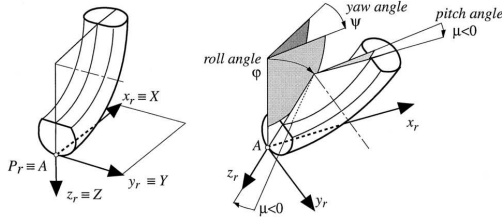


Figura 2.3: posizione spaziale ruota posteriore

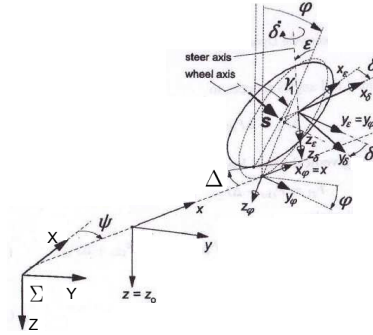


Figura 2.4: posizione spaziale ruota anteriore

sempre rivolto verso il basso quando il sistema si trova nella configurazione banale e l'asse y_{B_2} preso positivo secondo la regola della mano destra. Si osserva quindi che il sistema di riferimento S_{B_2} non risente della rotazione propria della ruota, in quanto il giunto rotoidale in B_2 non trasmette tale rotazione al telaio. Per caratterizzare la posizione del avantreno si necessitano due sistemi di riferimento che prevedono due rotazioni $S_{C_2,\varepsilon} = (\mathbf{C}_2; x_{C_2,\varepsilon}, y_{C_2,\varepsilon}, z_{C_2,\varepsilon})$ con l'origine posizionato nel punto C_2 e l'asse x_{C_2} inclinato di ε rispetto al telaio e l'altro $S_{C_2,\vartheta_{1z}} = (\mathbf{C}_2; x_{C_2,\vartheta_{1z}}, y_{C_2,\vartheta_{1z}}, z_{C_2,\vartheta_{1z}})$ con origine nella stessa posizione del sistema $S_{C_2,\varepsilon}$ ma ruotato dell'angolo di sterzo ϑ_{1z} rispetto all'asse z . Solidali alla ruota anteriore, inoltre, si adottano altri tre sistemi di riferimento in modo analogo a quanto fatto per quella posteriore. In particolare, si hanno i sistemi $S_{D_2} = (\mathbf{D}_2; x_{D_2}, y_{D_2}, z_{D_2})$, $S_{E_2} = (\mathbf{E}_2; x_{E_2}, y_{E_2}, z_{E_2})$ con asse z_{E_2} passante per i punti E_2 ed D_2 , mentre $S_{P_f} = (\mathbf{P}_f; x_{P_f}, y_{P_f}, z_{P_f})$ con l'asse z_{P_f} passa per i punti P_f ed E_2 . Per entrambi i due sistemi l'asse x è preso parallelo all'asse X nella configurazione banale. L'asse z_{P_f} , così come l'asse z_{P_r} del sistema S_{P_r} , rimane sempre normale al piano del terreno; questo è dovuto al fatto che i tori sono rigidi e a sezione circolare, per cui la distanza minima tra il punto di contatto della ruota con il terreno ed il centro della sezione torica è sempre il raggio di tale sezione, ortogonale al suolo per questioni di tangenza.

Siano quindi $P_r = (x_{P_r}, y_{P_r}, 0)$ le coordinate del punto di contatto della ruota posteriore sul piano del terreno rispetto al sistema di riferimento inerziale, considerato appunto $z=0$ il piano orizzontale su cui giace il punto di contatto. In curva la linea di contatto che unisce i punti P_r e P_f si muove nel piano stradale e non risulta più coincidente con l'asse X come nella configurazione banale, ma determina un angolo con tale asse. In particolare, il sistema di riferimento S_{P_r} appare ruotato rispetto a quello inerziale attorno all'asse Z di un angolo ψ , detto angolo di imbardata, e misurato a partire dall'asse X con verso positivo secondo la regola della mano destra. In seguito, tutti gli angoli saranno presi positivi secondo tale regola.

In sostanza, il passaggio dal sistema inerziale a quello solidale in P_r è descritto dalla matrice di rototraslazione:

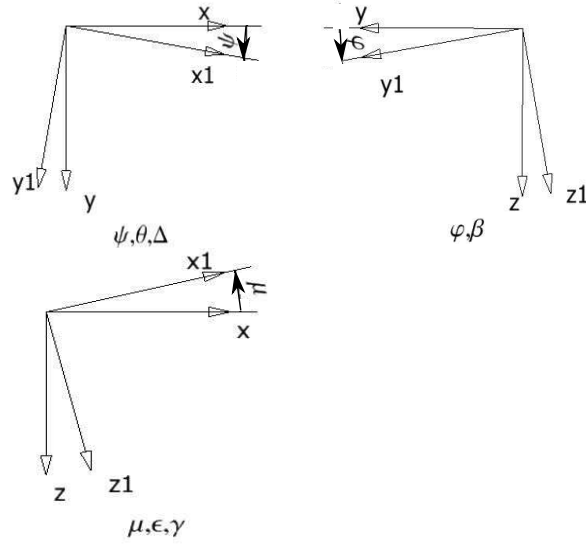


Figura 2.5: convenzioni per ogni singolo angolo definito

$$\mathbf{M}_{(\text{Pr}, \psi, z)} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'angolo che il piano posteriore forma con quello normale al terreno prende invece il nome di angolo di rollio ed indicato con φ . La matrice che descrive la rototraslazione tra i due sistemi di riferimento S_{P_r} e S_{B_2} è data dal prodotto di queste quattro matrici:

$$\mathbf{M}_{(\text{Pr}, \text{A}_2, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\text{A}_2, \varphi, x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\text{A}_2, \text{B}_2, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\text{B}_2, \vartheta, y)} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

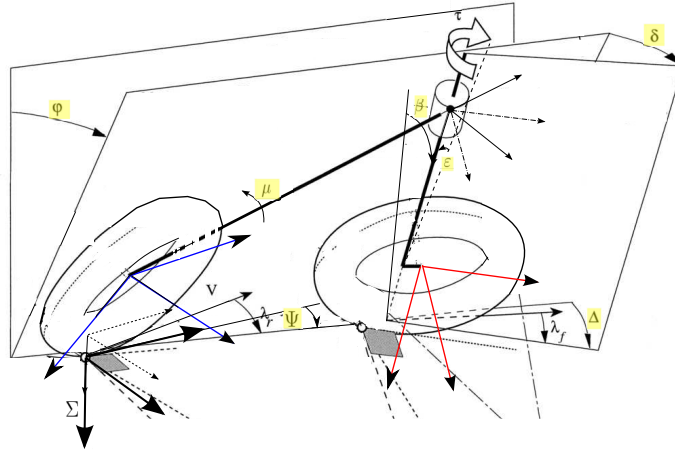


Figura 2.6: si evidenziano alcuni sistemi di riferimento e angoli per facilitarne l'individuazione

Passando poi al telaio, il giunto rotoidale in B_2 permette una rotazione rispetto alla ruota posteriore attorno all'asse y_{B_2} . Tale rotazione viene descritta dall'angolo di beccheggio μ e la corrispettiva matrice risulta essere:

$$\mathbf{M}_{(B_2, \mu, y)} = \begin{pmatrix} \cos \mu & 0 & \sin \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \mu & 0 & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto, in una configurazione generica, il passaggio dal sistema di riferimento S_{A_2} ad S_{B_2} è dato dalla matrice di rototraslazione:

$$M_{(A_2, B_2)} = M_{(Pr, A_2, z)} M_{(A_2, \varphi, x)} M_{(A_2, B_2, z)} M_{(B_2, \vartheta, y)} M_{(B_2, \mu, y)} \quad (2.4)$$

Il passaggio dal sistema di riferimento S_{B_2} ad S_{C_2} è dato dalla seguente matrice di rototraslazione:

$$M_{(B_2, C_2)} = M_{(B_2, C_2, x)} M_{(C_2, \varepsilon, y)} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{M}_{(B_2, C_2, x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(C_2, \varepsilon, y)} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda il giunto rotoidale dello sterzo dal punto di vista cinematico può essere descritto dalla seguente matrice di rotazione:

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{C}_2, \theta_{1z}, \mathbf{z})} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{1z} & -\sin \theta_{1z} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{1z} & \cos \theta_{1z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il passaggio dal sistema di riferimento S_{C_2} a S_{D_2} è descritto dalla seguente matrice di rototraslazione:

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per caratterizzare il passaggio dal sistema di riferimento S_{D_2} a S_{Pf} tramite matrici di rototraslazione si ragiona in modo inverso cioè si parte dal punto di contatto della ruota anteriore per poi arrivare al centro della ruota. Quindi vengono riportate sotto le matrici che descrivono il passaggio tra i due sistemi di riferimento:

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{Pf}, \Delta, \mathbf{z})} = \begin{pmatrix} \cos \Delta & -\sin \Delta & 0 & 0 \\ \sin \Delta & \cos \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{Pf}, \mathbf{E}_2, \mathbf{z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{E}_2, \beta, \mathbf{x})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{D}_2, \gamma, \mathbf{y})} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

È importante notare che in realtà anche senza gli angoli qui sopra introdotti si sarebbe potuta risolvere la cinematica, poichè solo col definire il sistema di riferimento S_D poteva essere caratterizzato il movimento di tutti i punti della bicicletta. Si è scelto di definire questi angoli ausiliari per una serie di comodità in fase di calcolo.

Queste matrici di rotazione e traslazione permettono di passare da un sistema di riferimento ad un altro e quindi nel complesso permettono di descrivere in maniera completa dal punto di vista cinematico la bicicletta. Prima di comporre tra di loro queste matrici di rototraslazione per ottenere la matrice di trasformazione finale, che permette di passare dal sistema di riferimento inerziale ai vari sistemi solidali, bisogna fare una serie

di considerazioni riguardo le coordinate indipendenti e dipendenti che caratterizzano il moto della bicicletta.

2.1.3 Coordinate indipendenti e dipendenti

Nella sezione precedente sono state introdotte una serie di angoli e distanze per descrivere il reciproco orientamento e posizione dei sistemi di riferimento solidali. Tuttavia è chiaro che non tutti gli angoli di Eulero prima definiti sono necessari per descrivere la configurazione della bicicletta. Pertanto, adesso si intende determinare il numero di coordinate generalizzate necessarie e sufficienti per descrivere completamente lo spazio delle configurazioni del nostro sistema.

Il modello studiato nel presente lavoro è costituito da quattro corpi rigidi, quindi nello spazio ambiente, se non fossero presenti vincoli di alcun genere, il sistema presenterebbe 24 gradi di libertà. Tuttavia, è noto che i quattro corpi in questione sono uniti tra loro tramite tre giunti rotoidali, mentre i punti di contatto della ruota posteriore ed anteriore sono vincolati a giacere sul piano orizzontale $z=0$. Ciascun giunto rotoidale toglie 5 gradi di libertà, mentre il vincolo di contatto sottrae un grado di libertà per la ruota posteriore e due a quella anteriore (si trascura il suo slittamento longitudinale). In conclusione, il numero di coordinate generalizzate necessarie per descrivere la configurazione del sistema risulta essere 6. Le coordinate indipendenti possono essere identificate con l'angolo d'imbardata ψ , l'angolo di rollio φ , quello di sterzo ϑ_{1z} , gli angoli di slittamento trasversali λ_r e λ_f e lo slittamento longitudinale κ della ruota posteriore. Lo spostamento del centro della ruota anteriore, con la conseguente nascita del beccheggio non è una coordinata indipendente, come dimostra Cossalter in [16] cap. 1 par. 1.4, ma è funzione dell'angolo di rollio e sterzo.

2.1.4 Equazioni cinematiche

Ci si propone adesso di risolvere la cinematica della bicicletta andando prima a determinare l'espressione di tutte le coordinate dipendenti in funzione di quelle generalizzate. Questo risulta utile per capire come la bicicletta può disporsi nello spazio rispettando tutti i vincoli geometrici e vedere come questi parametri vadano ad influenzare il suo movimento.

Per ottenere tali relazioni è necessario determinare l'espressione del vettore $\overline{P_r P_f}$ (nel sistema di riferimento S_{P_r}), della coordinata μ e degli angoli ausiliari γ, β, Δ (in tutto 6 incognite). Infatti la configurazione della bicicletta e quindi la posizione di ogni sua parte rigida può essere espressa considerando le coordinate libere.

Si attua dunque un'operazione di conversione tra le coordinate che rappresentano la posa della bicicletta nei diversi sistemi di riferimento. Perciò trovare la posizione relativa di P_f rispetto P_r è un problema cinematico diretto, cioè si trova la posizione del punto finale nel sistema di riferimento relativo S_{P_r} quando sono note le coordinate libere. Come evidenziato in figura 2.7 tale approccio coincide con quello adottato per studiare robot seriali a catena cinematica chiusa. Infatti la bicicletta può essere vista come una serie di link rigidi dotati di giunti rotoidali. Le 6 equazioni, necessarie per rendere determinato il problema, possono essere ricavate da una chiusura vettoriale fatta imponendo l'uguaglianza tra gli elementi di due matrici di rototraslazione. In particolare una di queste si ricava componendo le singole matrici partendo dal punto P_f e in senso orario arrivando al punto E (scelta che deriva dal fatto che in questo

modo è possibile ottenere una semplificazione dei conti) mentre l'altra, che caratterizza l'avantreno, si costruisce partendo dal punto P_r e, passando dal punto P_f , giunge al centro della ruota anteriore E.

Sotto sono riportate le due matrici che caratterizzano dal punto di vista geometrico i due percorsi schematizzati in Figura 2.7:

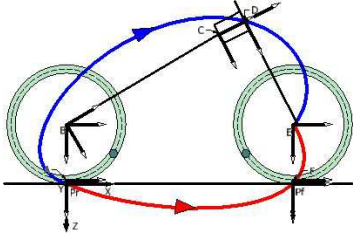


Figura 2.7: percorsi prodotti matriciali

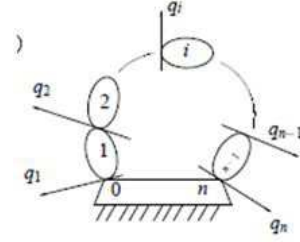


Figura 2.8: robot a cinematica chiusa

$$M_{(P_r,E)BLU} = M_{(P_r,\psi,z)}M_{(P_r,A,z)}M_{(A,\varphi,x)}M_{(A,B,z)}M_{(\mu-\vartheta,y)}M_{(B,C)} \\ M_{(C,\varepsilon,y)}M_{(C,D,\theta_{1z},x_{mc},y_{mc})}M_{(D,E)} \quad (2.6)$$

$$M_{(P_r,E)ROSSO} = M_{(P_r,P_f)}M_{(P_f,\Delta,z)}M_{(P_f,E,z)}M_{(E_2,\beta,x)}M_{(E_2,E,z)}M_{(E,\gamma,y)} \quad (2.7)$$

con

$$M_{(P_r,P_f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & z_{P_f} \\ 0 & 1 & 0 & w_{P_f} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto si possono ricavare 6 equazioni imponendo l'uguaglianza tra le matrici per ricavare z_{P_f} , w_{P_f} , μ e i tre angoli ausiliari.

$$M_{(P_r,E)BLU} = M_{(P_r,E)ROSSO} \quad (2.8)$$

Si scelgono i seguenti termini da eguagliare:

$$(3, 4); (3, 2); (3, 1); (1, 2); (1, 4); (2, 4)$$

$$(3, 4) [\cos \varphi \cos(\mu_2 + \varepsilon_2)]d_2 - l_2 \cos \varphi \sin \mu_2 + m_2[-\cos \varphi \sin(\mu_2 + \varepsilon_2) + \\ + \cos \theta_{1z} + \sin \varphi \sin \theta_{1z}] - \rho_r \cos \varphi - q_r = -\rho_f \cos \beta_2 - q_f \quad (2.9)$$

$$(3, 2) \sin \theta_{1z} \cos \varphi \sin(\mu_2 + \varepsilon_2) + \cos \theta_{1z} \sin \varphi = \sin \beta_2 \quad (2.10)$$

$$(3, 1) -\cos \varphi \sin(\mu_2 + \varepsilon_2) \cos \theta_{1z} + \sin \varphi \sin \theta_{1z} = -\cos \beta_2 \sin \gamma_2 \quad (2.11)$$

$$(1, 2) - [\sin \theta_{1z} \cos(\mu_2 + \varepsilon_2) \cos \psi - \sin \theta_{1z} \cos(\mu_2 + \varepsilon_2) \sin \psi] + \\ - \cos \varphi \cos \theta_{1z} \sin \psi = -\sin \Delta_2 \cos \beta_2 \quad (2.12)$$

$$(1, 4) d_2[\sin(\mu_2 + \varepsilon_2) \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos(\varepsilon_2 + \mu_2)] + m_2 \cos \theta_{1z}[\cos(\mu_2 + \\ + \varepsilon_2) \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin(\mu_2 + \varepsilon_2)] - m_2 \cos \varphi \sin \psi \sin \theta_{1z} + \\ + l_2(\cos \psi \cos \mu_2 - \sin \varphi \sin \psi \sin \mu_2) - \rho_r \sin \varphi \sin \psi = -\rho_f \sin \Delta_2 \sin \beta_2 + z_2 \quad (2.13)$$

$$(2, 4) d_2[\sin(\mu_2 + \varepsilon_2) \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos(\varepsilon_2 + \mu_2)] + m_2 \cos \theta_{1z}[\cos(\mu_2 + \\ + \varepsilon_2) \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin(\mu_2 + \varepsilon_2)] + m_2 \cos \varphi \cos \psi \sin \theta_{1z} + \\ + l_2(\sin \psi \cos \mu_2 + \sin \varphi \cos \psi \sin \mu_2) + \rho_r \sin \varphi \cos \psi = \rho_f \sin \beta_2 \cos \Delta_2 + w_2 \quad (2.14)$$

Si risolvono in un primo momento le due relazioni **(3, 2)** e **(3, 4)** da cui si ricavano l'angolo di beccheggio e l'angolo di rollio della ruota anteriore. Queste risultano essere equazioni algebriche non lineari che vengono risolte per via numerica tramite l'algoritmo di Newton-Rapson adattato a sistemi di equazioni.

$$\begin{cases} (3, 2) f(\mu, \beta) \\ (3, 4) f(\mu, \beta) \end{cases} \Rightarrow (\mu, \beta)$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \beta \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \sin \theta_{1z} \cos \varphi \sin(x(1) + \varepsilon_2) + \cos \theta_{1z} \sin \varphi = \sin x(2) & f_1 \\ (\cos \varphi \cos(x(1) + \varepsilon_2))d_2 - l_2 \cos \varphi \sin x(1) + m_2[-\cos \varphi \sin(x(1) + \varepsilon_2) + \\ + \cos \theta_{1z} + \sin \varphi \sin \theta_{1z}] - \rho_r \cos \varphi - q_r = -\rho_f \cos x(2) - q_f & f_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mu_2} = \sin \theta_{1z} \cos \varphi \cos(\mu_2 + \varepsilon_2) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} = -\cos \beta_2 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mu_2} = -\cos \varphi \sin(\mu_2 + \varepsilon_2)d_2 - m_2 \cos \varphi \cos(\mu_2 + \varepsilon_2) \cos \theta_{1z} - l_2 \cos \varphi \cos \mu_2 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} = -\rho_f \sin \beta_2 \quad (2.18)$$

Per implementare il metodo di Newton in ingresso è necessario definire un vettore che rappresenti il dato iniziale e questo deve essere sufficientemente vicino alla soluzione

per essere sicuri di garantire la convergenza del metodo. In particolare, per quanto riguarda l'angolo di beccheggio, visto che nell'intervallo di variazione di φ e di ϑ_{1z} questo non si discosterà dal valore assunto nella configurazione banale, si sceglie ϑ come x_0 per la variabile μ . L'angolo di rollio β dell'avantreno, per come dimostra Cossalter in [16] cap. 1 par. 1.8 attraverso un'equazione linearizzata, si discosta poco dall'angolo di rollio del retrotreno. Dunque è ragionevole assumere φ come dato iniziale per la variabile β . Nel caso in esame con questa scelta viene sempre garantita la convergenza del metodo di Newton visto che la soluzione si discosta poco dal vettore di ingresso. Gli altri parametri che completano i dati di ingresso per il metodo di Newton sono scelti in maniera tale che l'arresto dell'algorithm garantisca sempre un errore nella soluzione minore della tolleranza fissata.

Caratteristiche algoritmo	Valore
x_0	$(\theta; \varphi)$
$toll$	1e-5
n_{max}	10

A questo punto è possibile risolvere le equazioni rimanenti determinando le singole incognite in ciascuna di esse:

$$(\mathbf{3}, \mathbf{1})f(\beta_2, \mu_2, \gamma_2) \Rightarrow \gamma_2$$

$$(\mathbf{1}, \mathbf{2})f(\beta_2, \mu_2, \Delta_2) \Rightarrow \Delta_2$$

$$(\mathbf{1}, \mathbf{4})f(z_{Pf}, \beta_2, \mu_2, \Delta_2) \Rightarrow z_{Pf}$$

$$(\mathbf{2}, \mathbf{4})f(w_{Pf}, \beta_2, \mu_2, \Delta_2) \Rightarrow w_{Pf}$$

Si definisce il sistema $S_{O_2} = (\mathbf{O}_2; x_{O_2}, y_{O_2}, z_{O_2})$ che rappresenta il sistema di riferimento assoluto. L'origine è posizionato nel centro di curvatura del veicolo (punto O_2), l'asse z_{O_2} è perpendicolare al piano del terreno e punta verso il basso, l'asse x_{O_2} giace sul piano del terreno ed è parallelo al piano di simmetria della ruota posteriore, ed infine l'asse y_{O_2} completa il sistema di riferimento secondo la regola della mano destra.

Già risolte precedentemente le funzioni che legano l'angolo μ ai Gdl e determinato il legame tra P_r e P_f , possiamo quindi ora definire la curvatura Θ come il reciproco della traiettoria del raggio del punto di contatto della ruota posteriore P_r e può essere espresso come segue:

$$\frac{1}{R} = \Theta = \frac{\cos \lambda_r \sin(\Delta - \lambda_f) + \sin \lambda_r \cos(\Delta - \lambda_f)}{z \cos(\Delta - \lambda_f) + w \sin(\Delta - \lambda_f)} \quad (2.19)$$

Per poter completamente definire la bicicletta in curva bisogna legare la posizione del punto di contatto anteriore nel sistema di riferimento inerziale con quello posteriore già definito. Per fare ciò è utile definire la distanza del punto di contatto anteriore (in Figura 2.9 identificato dalla lunghezza L) nel sistema di riferimento considerato:

$$L = \frac{R \cos \lambda_r - w}{\cos(\Delta - \lambda_f)} \quad (2.20)$$

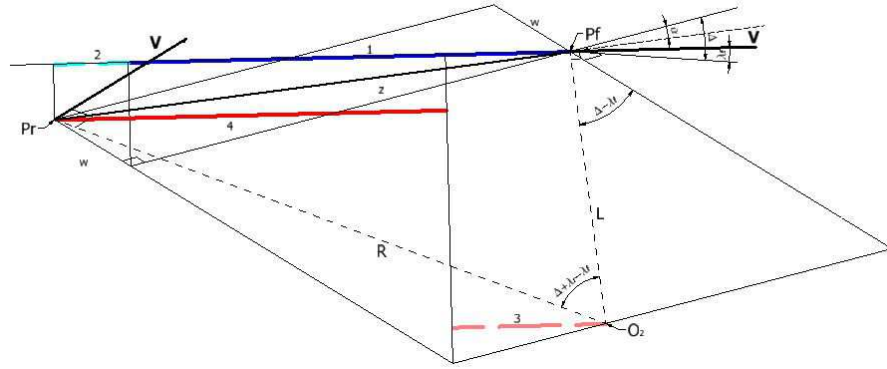


Figura 2.9: analisi posizione punti contatto nel sistema di riferimento assoluto

da cui possono ricavarsi le coordinate dei punti di contatto rispetto al sistema di riferimento assoluto S_{O_2} :

$$X_{pr} = -R \sin \lambda_r \quad (2.21)$$

$$Y_{pr} = -R \cos \lambda_r \quad (2.22)$$

$$X_{pf} = L \sin(\Delta - \lambda_f) \quad (2.23)$$

$$Y_{pf} = -L \cos(\Delta - \lambda_f) \quad (2.24)$$

Un secondo insieme di equazioni cinematiche determina le velocità della bicicletta come funzioni della velocità di imbardata $\dot{\Psi}$. La velocità nella direzione di marcia V è correlata alla curvatura e alla velocità di imbardata dall'equazione:

$$V = \frac{\dot{\Psi}}{\Theta} = \Gamma_V(\varphi, \vartheta_{1z}, \lambda_r, \lambda_f) \dot{\Psi} \quad (2.25)$$

La velocità angolare della ruota posteriore in funzione della velocità di imbardata risulta essere:

$$\omega_r = \frac{V_x - V_{sx}}{\rho_r + q_r \cos \varphi} = -\frac{\dot{\Psi}(\kappa + 1) \cos \lambda_r}{\Theta(\rho_r + q_r \cos \varphi)} = \Gamma_{\omega_r}(\varphi, \vartheta_{1z}, \lambda_r, \lambda_f, \kappa) \dot{\Psi} \quad (2.26)$$

dove V_{sx} è la velocità di slittamento longitudinale, V_x è la componente longitudinale della velocità di marcia, e κ è lo scorrimento longitudinale.

La velocità angolare della ruota anteriore, tenendo conto delle relazioni cinematiche, è:

$$\omega_f = \frac{\dot{\Psi} Y_{Pf} \cos \lambda_f}{\cos(\Delta - \lambda_f)(\rho_f + q_f \cos \beta)} = \Gamma_{\omega_f}(\varphi, \vartheta_{1z}, \lambda_r, \lambda_f) \dot{\Psi} \quad (2.27)$$

2.1.5 Risultati cinematici

I risultati cinematici che vengono proposti in seguito sono quelli di una bicicletta classica, i cui dati per completo sono riportati in appendice A.

In Figura 2.10 riportiamo l'andamento dell'angolo di beccheggio μ in funzione dell'angolo di sterzata ϑ_{1z} e di rollio φ .

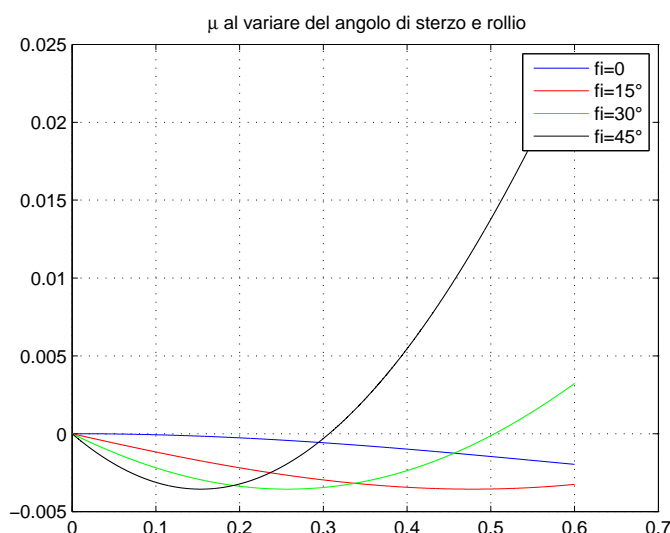


Figura 2.10: beccheggio al variare dell'angolo di sterzo e di rollio

Dalla figura 2.10 si vede come per piccoli angoli di rollio l'andamento delle curve risulta decrescente all'aumentare di ϑ_{1z} . Inoltre ricordando la convenzione adottata sul segno dell'angolo di beccheggio μ ad un suo valore negativo viene associata una rotazione verso il basso della bicicletta attorno al centro della ruota posteriore e quindi corrisponde ad un abbassamento del telaio. Perciò all'aumentare di ϑ_{1z} si osserva un abbassamento continuo del baricentro della bicicletta; visto che si hanno valori sempre più negativi di μ , come si vede dal grafico, comporta una diminuzione della energia potenziale. Dunque la bicicletta tenderà a raggiungere naturalmente la posizione per cui è minima l'energia potenziale anche senza l'applicazione di una coppia al manubrio.

Per valori elevati dell'angolo φ , l'andamento dei grafici non è più decrescente ma presenta un minimo. Infatti come si vede in figura il valore di beccheggio μ inverte il proprio segno per valori dell'angolo di sterzo ϑ_{1z} decrescenti man mano che cresce il rollio. Dal punto di vista fisico questo significa che il baricentro per un determinato valore di rollio raggiunge la posizione più bassa in corrispondenza di un preciso valore dell'angolo di sterzo che, se aumentato ulteriormente, comporterebbe un innalzamento del telaio. Questo concorda con l'esperienza comune per cui se si piega lateralmente una bicicletta, il manubrio ruota naturalmente di un certo angolo, che dipende dall'angolo di rollio imposto.

Per quanto riguarda le coordinate del punto di contatto anteriore, si riporta nelle figure che seguono lo spostamento di tale punto nel piano al variare degli angoli φ e ϑ_{1z} , avendo preso le coordinate del punto posteriore e l'angolo ψ entrambi uguali a zero.

Il grafico 2.11 rappresenta l'impronta del punto di contatto in funzione dell'angolo di

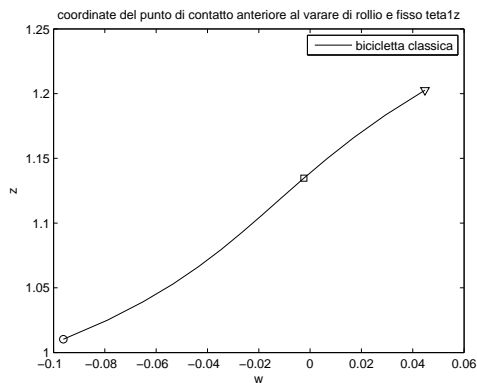


Figura 2.11: coordinate del punto di contatto anteriore fissato angolo di sterzo

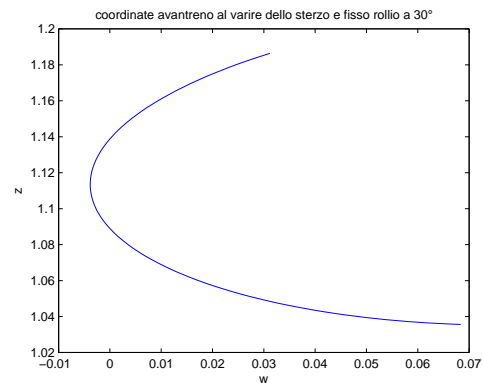


Figura 2.12: coordinate del punto di contatto anteriore fissato angolo di rollio

rollio, fissato $\vartheta_{1z} = 30^\circ$. Si vede quindi che per valori negativi dell'angolo φ il punto di contatto indietreggia e trasla verso destra, infatti è negativo il valore della componente lungo y . Questo concorda con l'esperienza comune per cui, se la bicicletta ha lo sterzo inclinato verso destra e viene successivamente inclinata verso sinistra, allora il punto di contatto si avvicina a quello posteriore. Quando poi l'angolo di rollio è positivo, ovvero la bicicletta viene inclinata dalla stessa parte verso cui è ruotato lo sterzo, si vede un avanzamento del punto di contatto, mentre il valore di w rimane negativo fino a valori di φ poco maggiori di 0.2 rad.

Nel grafico 2.12 invece, sono riportate le coordinate del punto P_f in funzione di ϑ_{1z} , avendo adesso fissato $\varphi = \pi/6$. Per valori positivi di ϑ_{1z} , aumenta il valore assunto dalla componente z , mentre si osserva uno spostamento del punto di contatto lungo l'asse y e inizialmente verso sinistra, e poi verso destra. Si noti che, mentre lo spostamento longitudinale è minore quando variamo ϑ_{1z} , quello laterale risulta maggiore rispetto a quello ottenuto in precedenza facendo variare φ .

Quest'ultima figura raccoglie le informazioni dei grafici precedenti ed in particolare rappresenta l'impronta del punto di contatto al variare dell'angolo di sterzo per diversi valori di angolo di rollio.

2.2 Modello pneumatico-asfalto

Il modello che descrive il contatto ruota-asfalto, rappresenta indubbiamente l'elemento più complesso da descrivere. Numerosi sono infatti gli approcci con cui si è cercato di dare una valida formulazione matematica al problema fisico. Alcuni di questi si basano solamente su dati sperimentali come il modello empirico che passa sotto il nome di "Magic Formula" sviluppata dal Prof. H. B. Pacejka, altri utilizzano il metodo della similarità ed altri invece sono modelli analitici semplici che permettono di ottenere delle previsioni corrette del comportamento del pneumatico solamente in particolari condizioni di moto (Brush Model o Modelli Lineari). Il fatto che ci sia stata fatta negli anni un'analisi così approfondita riguardo la modellazione del pneumatico è dovuto al fatto che nei veicoli come l'automobile e la motocicletta il loro modello rappresenta una variabile importante per la cinematica e dinamica del sistema. Se in letteratura risultano presenti tutti i parametri sperimentali per alcuni copertoni da motocicletta, per

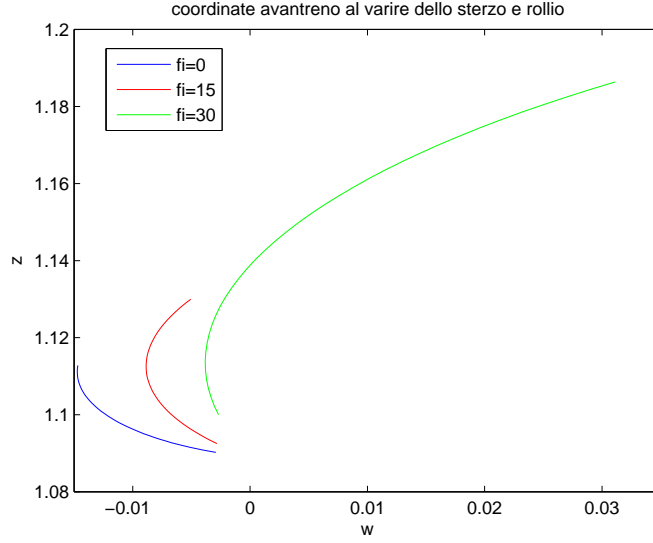


Figura 2.13: coordinate del punto di contatto anteriore al variare dell'angolo di sterzo e di rollio

quanto riguarda le ruote da bicicletta la sperimentazione sugli stessi parametri è quasi del tutto assente. Indubbiamente, anche se in una maniera meno evidente, la cinetostatica della bicicletta sarà influenzata dal modello adottato per descrivere il contatto pneumatico-asfalto. Quindi, se si volesse progettare una bicicletta in maniera assoluta, il pneumatico costituirebbe una variabile di progetto importante. In questo caso, la bicicletta compliant si progetta in relazione al riferimento cinetostatico caratteristico di una bicicletta classica con le stesse ruote. Per tale motivo il pneumatico risulta essere un parametro comune per entrambe le biciclette e quindi non costituisce una variabile progettuale. Tutto ciò permette di usare un modello meno accurato per descrivere il comportamento ruota-asfalto poichè entrambe le biciclette presentano le medesime ruote. In figura sono rappresentate l'insieme di forze e coppie che descrivono il modello contatto ruota-asfalto. Si vede come il sistema di forze agisce sul punto di contatto $P_{r,f}$.

$$F_r = (k_\varphi \varphi + k_{\lambda_r} \lambda_r) F_z \quad (2.28)$$

$$F_f = (k_\beta \beta + k_{\lambda_f} \lambda_f) F_z \quad (2.29)$$

$$S_f = \mu_f N_f \quad (2.30)$$

$$S_r = \mu_r(\kappa) N_r \quad (2.31)$$

$$M_{z_{r,f}} = -t_{r,f} F_{r,f} - sp S_{r,f} + M_{T_{z_{r,f}}}(\varphi(\beta)) \quad (2.32)$$

$$M_{y_{r,f}} = d_{r,f} N_{r,f} = \mu_{r,f} r_{r,f} N_{r,f} \quad (2.33)$$

$$M_{x_{r,f}} = -sp N_{r,f} \quad (2.34)$$

$$t_{r,f} = t_{o_{r,f}} \left(1 - \left| \frac{\lambda_{r,f}}{\lambda_{max_{r,f}}} \right| \right) \quad (2.35)$$

Per piccole variazioni dell'angolo di rollio e degli angoli di slittamento si possono supporre lineari le relazioni che intercorrono tra questi angoli e le forze laterali. La forza

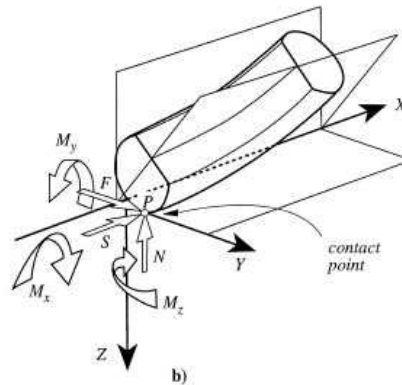


Figura 2.14: rappresentazione delle forze e momenti tra pneumatico e asfalto

motrice longitudinale S_r , che agisce sulla ruota posteriore, è legata attraverso il coefficiente di aderenza longitudinale, funzione del coefficiente di slittamento κ al carico verticale. Anche in questo caso per piccoli valori di slittamento longitudinale la dipendenza del coefficiente di attrito può considerarsi lineare. La piccola forza longitudinale della ruota anteriore è dovuta soltanto ad attrito volvente, per cui è possibile legarla direttamente alla forza normale attraverso l'opportuno coefficiente di attrito volvente. Le coppie dipendono dalla distribuzione degli sforzi e dallo spostamento cinematico dell'area di contatto rispetto al piano di simmetria della ruota. In particolare la coppia di resistenza al rotolamento M_y è dovuta allo spostamento in avanti della distribuzione degli sforzi generati dal carico verticale a cui è possibile legarla attraverso un coefficiente che dipende dal raggio della ruota in condizioni indeformate. Per quanto riguarda il momento M_x questo è dovuto al fatto che la forza di spinta risulta avere un braccio a causa della deformazione laterale del pneumatico. Poiché lo spostamento s_p solitamente è di bassa entità a causa della maggiore rigidità laterale del pneumatico, M_x può essere trascurato. Il momento M_z è generato dalla forza laterale F , dalla forza longitudinale S_r e dalla coppia torcente. Il primo termine, contributo dato dalla forza laterale, tende a riportare l'avantreno ad allinearsi. L'offset $t(\lambda)$, che dipende dalla distribuzione delle forze laterali non uniforme, è calcolato come rapporto tra coppia M_z e la forza laterale quando la forza longitudinale e l'angolo di rollio sono pari a zero (a tal proposito si è fatto riferimento alla formula sperimentale riportata da Cossalter in [16]). Il terzo termine dipende dal rollio ed ha un contributo disallineante in curva; una buona approssimazione dei dati sperimentali è stata formulata sempre da Cossalter attraverso una relazione lineare tra momento ed angolo di rollio.

2.3 Curva a velocità costante

Quando si guida lungo un percorso circolare il conducente di una bicicletta controlla il veicolo principalmente mediante coppia di sterzo. Se questa è bassa, il conducente percepisce che il veicolo è manovrabile. La manovrabilità è un requisito importante per le biciclette, in quanto aumenta la sicurezza di guida, poiché il conducente può

controllare più facilmente un veicolo ben manovrabile.

In realtà, il conducente può controllare la bicicletta non solo attraverso la coppia di sterzo ma anche tramite cambiamenti di velocità e movimenti corporei che modificano l'inerzia del sistema. Tuttavia, il contributo di controllo più importante è fornito dalla coppia di sterzo.

A partire dalle analisi puramente geometriche effettuate il passo successivo consiste nel capire come si comporta la bicicletta classica nel moto stazionario in curva:

- se presenta un comportamento neutro, sottosterzante o sovrasterzante.
- se il pilota per mantenere l'equilibrio dovrà applicare una coppia allo sterzo dello stesso verso di cui è ruotato il manubrio o di verso opposto.
- definire il diagramma velocità-curvatura nel rispetto di tutti i vincoli a cui è soggetto il sistema.

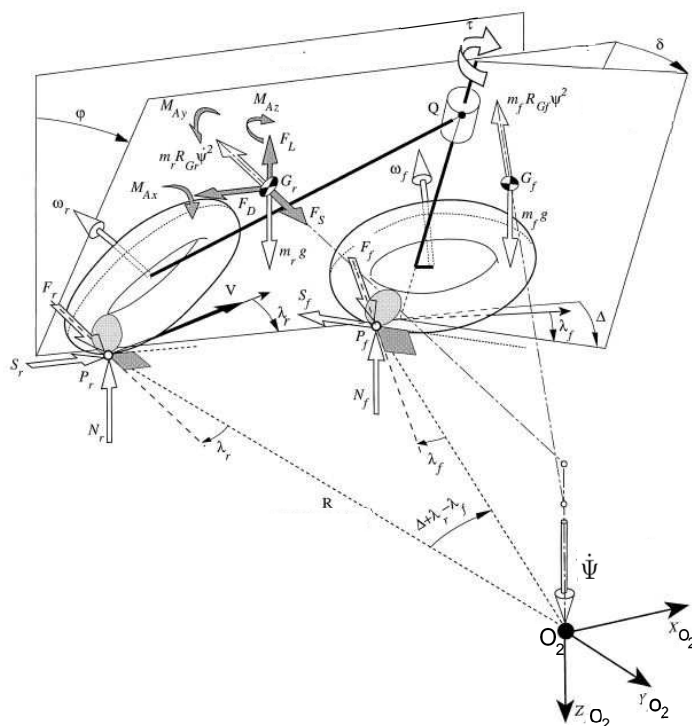


Figura 2.15: forze che agiscono sulla bicicletta in curva a velocità costante

L'angolo posteriore di slittamento laterale λ_r è l'angolo misurato sul piano stradale tra la velocità del punto fisso del retrotreno, che si sovrappone al punto di contatto del pneumatico, e l'intersezione del piano posteriore con il piano della strada. L'angolo di slittamento anteriore λ_f è definito nello stesso modo (vedasi Figura 2.15). Questi angoli concorrono assieme agli altri parametri geometrici della bicicletta a definire il suo centro di rotazione come si vede in figura.

Nello sviluppo dell'equazione di steady turning la velocità di imbardata, rollio e angoli dello sterzo e le quantità di slittamento sono costanti perciò il set di equazioni dinamiche

che generalmente descrivono il moto di una bicicletta in curva diventano equazioni algebriche. È possibile quindi usare il classico approccio basato sulle equazioni di D'Alémbert che, per il sistema illustrato nella Figura 2.15 e precedentemente descritto, viene espresso nel modo seguente:

$$\mathbf{F}_{Gr} + \mathbf{F}_{Gf} + \mathbf{F}_{Rr} + \mathbf{F}_{Rf} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}_G \quad (2.36)$$

dove \mathbf{F}_{Gr} e \mathbf{F}_{Gf} sono forze gravitazionali sul telaio posteriore (compresa la ruota posteriore) e telaio anteriore (compresa la ruota anteriore) rispettivamente; \mathbf{F}_{Rr} , \mathbf{F}_{Rf} sono reazioni della strada sui pneumatici anteriori e posteriori rispettivamente; \mathbf{F}_A è la forza aerodinamica sul telaio posteriore, m è la massa totale e \mathbf{a}_G è l'accelerazione del centro di massa.

Questa equazione vettoriale viene espressa nelle sue componenti utilizzando come riferimento il sistema $S_{O_2} = (\mathbf{O}_2; x_{O_2}, y_{O_2}, z_{O_2})$:

$$\begin{cases} -F_D + S_r - S_f \cos \Delta - F_f \sin \Delta + F_{inerzia} = 0 \\ F_r + F_f \cos \Delta - S_f \sin \Delta + F_S \cos \varphi + F_L \sin \varphi + F_{inerzia} = 0 \\ -N_r - N_f + F_S \sin \varphi - F_L \cos \varphi + (m_r + m_f)g = 0 \end{cases}$$

dove N_r , N_f sono i carichi verticali delle ruote; le forze F_r , F_f forze laterali dei pneumatici; S_r , S_f le forze longitudinali; F_D , F_S , F_L rispettivamente forza aerodinamica di trascinamento, laterale e di sollevamento; m_r , m_f masse di avantreno e retrotreno compreso il ciclista e X_{Gr} , Y_{Gr} , Z_{Gr} e X_{Gf} , Y_{Gf} , Z_{Gf} le coordinate dei centri di massa nel sistema di riferimento S_{O_2} . Le cui componenti si calcolano definendo ulteriori matrici oltre quelle già usate per descrivere la cinematica pura della bicicletta:

$$\mathbf{M}_{(\mu-\vartheta, \mathbf{y})} = \begin{pmatrix} \cos(\mu - \theta) & 0 & \sin(\mu - \theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\mu - \theta) & 0 & \cos(\mu - \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(1, \text{Pr})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -R \sin \lambda_r \\ 0 & 1 & 0 & -R \cos \lambda_r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{B}, \text{Gr})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{B}, \text{C})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{E}, \text{Gf})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_f \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{1,Gr} = M_{(1,Pr)} M_{(Pr,\psi,z)} M_{(Pr,A,z)} M_{(A,\varphi,x)} M_{(A,B,z)} M_{(B,\mu,y)} M_{(B,Gr)} \quad (2.37)$$

$$M_{1,Gf} = M_{(1,Pr)}M_{(Pr,\psi,z)}M_{(Pr,A,z)}M_{(A,\varphi,x)}M_{(A,B,z)}M_{(\mu-\vartheta,y)} \\ M_{(B,C)}M_{(C,\varepsilon,y)}M_{(C,D,\theta_{1z},x_{mc},y_{mc})}M_{(D,E)}M_{(E,Gf)} \quad (2.38)$$

$$X_{Gr} = M_{1,Gr}(1, 4); \quad (2.39)$$

$$Y_{Gr} = M_{1,Gr}(2, 4); \quad (2.40)$$

$$Z_{Gr} = M_{1,Gr}(3, 4); \quad (2.41)$$

$$X_{Gf} = M_{1,Gf}(1, 4); \quad (2.42)$$

$$Y_{Gf} = M_{1,Gf}(2, 4); \quad (2.43)$$

$$Z_{Gf} = M_{1,Gf}(3, 4); \quad (2.44)$$

L'equazione vettoriale del momento angolare attorno a S_{O_2} per il sistema di corpi rigidi è riportato qui sotto:

$$M_{Gr} + M_{Gf} + M_{Rr} + M_{Rf} + M_A = \dot{\mathbf{J}}_r + \dot{\mathbf{J}}_f + \dot{\mathbf{J}}_{Wr} + \dot{\mathbf{J}}_{Wf} \quad (2.45)$$

I termini di sinistra sono la coppia delle forze aerodinamiche M_A , le coppie dovute alle forze di gravità M_{Gr} , M_{Gf} , e le coppie generate dalle forze di reazione M_{Rr} , M_{Rf} ; i termini di destra sono le derivate temporali del momento angolare dei quattro corpi rigidi rispetto al sistema di riferimento S_{O_2} ; $\dot{\mathbf{J}}_r$ è il momento angolare del retrotreno (inclusa la ruota posteriore) causato dalla velocità di imbardata; $\dot{\mathbf{J}}_f$ rappresenta la stessa grandezza per l'avantreno e ruota anteriore; infine $\dot{\mathbf{J}}_{Wr}$ e $\dot{\mathbf{J}}_{Wf}$ sono i momenti angolari delle due ruote causati dalle velocità di rotazione.

Per poter esprimere l'equazione del momento angolare in forma di componenti rispetto al sistema di riferimento S_{O_2} , bisogna calcolare le componenti del momento angolare e la loro derivata nel tempo per il retrotreno e l'avantreno.

$$\mathbf{J}_{r(\text{rel})} = \begin{pmatrix} I_{xr} & 0 & I_{x zr} & 0 \\ 0 & I_{yr} & 0 & 0 \\ I_{x zr} & 0 & I_{zr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_r \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{f(\text{rel})} = \begin{pmatrix} I_{xf} & 0 & I_{x zf} & 0 \\ 0 & I_{yf} & 0 & 0 \\ I_{x zf} & 0 & I_{zf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_f \end{pmatrix}$$

$$J_{r(1)} = M_{1,Gr} J_{r(\text{rel})} M_{1,Gr}^T \quad (2.46)$$

$$J_{f(1)} = M_{1,Gf} J_{f(\text{rel})} M_{1,Gf}^T; \quad (2.47)$$

$$\mathbf{L}_{(1,G)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{(1,Gr)} = L_{(1,G)} \dot{\Psi}^2; \quad (2.48)$$

$$H_{(1,Gf)} = L_{(1,G)} \dot{\Psi}^2; \quad (2.49)$$

$$\Phi_r = -(H_{(1,Gr)} J_{r(1)} - J_{r(1)} H_{(1,Gr)}^T); \quad (2.50)$$

$$\Phi_f = -(H_{(1,Gf)}J_{f(1)} - J_{f(1)}H_{(1,Gf)}^T); \quad (2.51)$$

Il momento angolare di entrambe le ruote dovuto alla loro velocità di rotazione ω è un vettore parallelo all'asse di rotazione. Le componenti di questo vettore e le sue derivate, rappresentati nel sistema di coordinate S_{O_2} , si calcolano come segue:

$$\mathbf{K}_{\omega r(1)} = R_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ I_{\omega r}\omega_{r(in)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\omega f(1)} = R_{1,relf} \begin{pmatrix} 0 \\ I_{\omega f}\omega_{f(in)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}(\Omega_{in}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{K}}_{\omega r(1)} = P(\Omega_{in})\dot{\mathbf{K}}_{\omega r(1)} \quad (2.52)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_{\omega f(1)} = P(\Omega_{in})\dot{\mathbf{K}}_{\omega f(1)} \quad (2.53)$$

A questo punto si ottengono le seguenti equazioni di momento angolare in forma di componente:

$$\left\{ \begin{array}{l} -N_r Y_{Pr} - N_f Y_{Pf} + F_S Y_{Gr} \sin \varphi - F_L Y_{Gr} \cos \varphi + (m_r Y_{Gr} + m_f Y_{Gf})g - F_S Z_{Gr} \cos \varphi + \\ - F_L Z_{Gr} \sin \varphi + M_{Ax} - M_{yf} \sin \Delta - \dot{\mathbf{K}}_{\omega r(1)}(1) - \dot{\mathbf{K}}_{\omega f(1)}(1) + M_{inerzia} = 0 \\ N_r X_{Pr} + N_f X_{Pf} - F_S X_{Gr} \sin \varphi + F_L X_{Gr} \cos \varphi - (m_r X_{Gr} + m_f X_{Gf})g + M_{Ay} \cos \varphi + \\ - M_{Az} \sin \varphi + M_{yf} \cos \Delta + M_{yr} - \dot{\mathbf{K}}_{\omega r(1)}(2) - \dot{\mathbf{K}}_{\omega f(1)}(2) - F_D Z_{Gr} + M_{inerzia} = 0 \\ F_r X_{Pr} + F_f \cos \Delta X_{Pf} - S_f \sin \Delta X_{Pf} + S_f \cos \Delta Y_{Pf} + F_S X_{Gr} \cos \varphi + F_L X_{Gr} \sin \varphi + \\ + M_{Az} \cos \varphi + M_{Ay} \sin \varphi + F_D Y_{Gr} + M_{zf} + M_{zr} - S_r Y_{Pr} + M_{inerzia} = 0 \end{array} \right.$$

dove X_{Pr} , Y_{Pr} , X_{Pf} , Y_{Pf} sono le coordinate di Pr e Pf nel sistema di riferimento S_{O_2} ; M_{Ax} , M_{Ay} , M_{Az} sono le componenti della coppia aerodinamica; M_{yr} , M_{zr} e M_{yf} , M_{zf} sono rispettivamente le coppie che agiscono sul pneumatico posteriore ed anteriore.

Le relazioni così definite rappresentano un set di 13 equazioni algebriche non lineari in 13 incognite (riassunte in tabella) che devono essere risolte numericamente assegnati l'angolo di rollio e sterzata.

Equazioni	Incognite	
3	$\Sigma F = 0$	5 forze di reazione
3	$\Sigma M = 0$	V
1	$V = \Gamma_V(\varphi, \vartheta_{1z}, \lambda_r, \lambda_f)\dot{\Psi}$	λ_r
1	$\omega_r = \Gamma_{\omega_r}(\varphi, \vartheta_{1z}, \lambda_r, \lambda_f, \kappa)\dot{\Psi}$	λ_f
1	$\omega_f = \Gamma_{\omega_f}(\varphi, \vartheta_{1z}, \lambda_r, \lambda_f)\dot{\Psi}$	κ
1	$F_r = f(\lambda, \varphi)$	Θ
1	$F_f = f(\lambda, \beta)$	$\dot{\Psi}$
1	$S_r = f(\kappa)$	ω_r
1	$M_z = f(\lambda, \varphi)$	ω_f

Il metodo risolutivo è descritto di seguito:

1. In primo luogo, le quantità di slittamento sono impostate uguali a zero, e le equazioni di curvatura costante diventano un sistema lineare di sei equazioni nelle sei incognite: N_r , N_f , F_r , F_f , S_r , $\dot{\Psi}^2$, che sono calcolate risolvendo il seguente sistema lineare.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_f \cos \Delta & 0 & -\sin \Delta & 1 & a(1,6) \\ 0 & -\mu_f \sin \Delta & 1 & \cos \Delta & 0 & a(2,6) \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a(3,6) \\ -Y_{Pr} & a(4,2) & 0 & 0 & 0 & a(4,6) \\ X_{Pr} + murr & a(5,2) & 0 & 0 & 0 & a(5,6) \\ a\varphi & a(6,2) & X_{Pr} - t_r & a(6,4) & -Y_{Pr} - sp & a(6,6) \end{pmatrix}$$

$$a(1,6) = \Phi_r(1,4) + \Phi_f(1,4) - F_D$$

$$a(2,6) = \Phi_r(2,4) + \Phi_f(2,4) + F_L \sin \varphi$$

$$a(3,6) = \Phi_r(3,4) + \Phi_f(3,4) + F_L \cos \varphi$$

$$a(4,2) = -Y_{Pf} - \mu_f r_f \sin \Delta$$

$$a(5,2) = X_{Pf} + \mu_f r_f \cos \Delta$$

$$a(4,6) = \Phi_r(3,2) + \Phi_f(3,2) - F_L(Y_{Gr} \cos \varphi + Z_{Gr} \sin \varphi) - \dot{K}_{\omega f}(1) - \dot{K}_{\omega r}(1)$$

$$a(5,6) = \Phi_r(1,3) + \Phi_f(1,3) - F_D Z_{Gr} + F_L X_{Gr} \cos \varphi + M_{Ay} \cos \varphi - \dot{K}_{\omega f}(2) - \dot{K}_{\omega r}(2)$$

$$a(6,2) = -\mu_f(X_{Pf} \sin \Delta - Y_{Pf} \cos \Delta + sp) + b\beta$$

$$a(6,4) = X_{Pf} \cos \Delta + Y_{Pf} \sin \Delta - t_f$$

$$a(6,6) = F_D Y_{Gr} + F_L X_{Gr} \sin \varphi + M_{Ay} \sin \varphi$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_S \cos \varphi \\ -F_S \sin \varphi - (m_r + m_f)g \\ -Max - F_S(-Z_{Gr} \cos \varphi + Y_{Gr} \sin \varphi) - g(m_r Y_{Gr} + m_f Y_{Gf}) \\ M_{Az} \sin \varphi + F_S X_{Gr} \sin \varphi + g(m_r X_{Gr} + m_f X_{Gf}) - M_{Az} \cos \varphi - F_S X_{Gr} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1} B \quad (2.54)$$

$$x = \begin{pmatrix} N_r \\ N_f \\ F_r \\ F_f \\ S_r \\ \Omega \end{pmatrix}$$

2. Invertendo il modello lineare degli pneumatici è stata fatta una prima stima dei quantitativi di slittamento λ_r , λ_f , κ .
3. Poiché le quantità di slittamento sono ora definite, entrambe le variabili di posizione e coefficienti di velocità possono essere calcolati separatamente.

- Le equazioni di curvatura costante sono ancora una volta un sistema lineare di sei equazioni nelle sei incognite $N_r, N_f, F_r, F_f, S_r, \dot{\Psi}^2$, e quindi possono essere calcolati i nuovi valori di $N_r, N_f, F_r, F_f, S_r, \dot{\Psi}^2$. Utilizzando le formule degli pneumatici, viene fatta una nuova stima delle quantità di slittamento che viene confrontata con quella iniziale. Le differenze si chiamano residui. Il processo viene ripetuto tante volte quanto è necessario per ottenere dei residui al di sotto di una soglia prefissata.

Il numero di iterazioni necessario per convergere alla soluzione sono generalmente pochi; sotto vengono riportati i grafici dell'andamento degli errori sugli angoli di slittamento ad ogni passo del algoritmo.

A questo punto si è ottenuto tutto quanto per permettere di passare dal dominio

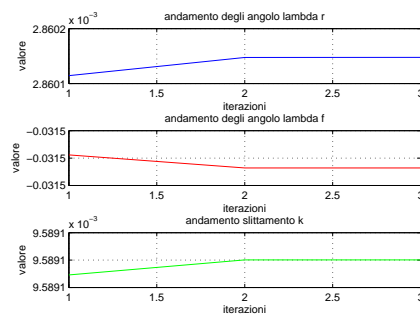


Figura 2.16: angoli di slittamento $\lambda_r, \lambda_f, \kappa$

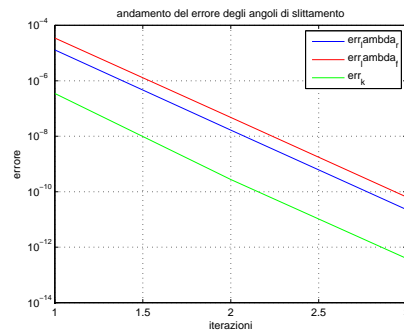


Figura 2.17: andamento dell'errore

$(\varphi, \vartheta_{1z})$ a (R, V) . Perciò fissato un determinato valore all'angolo di rollio e di sterzo è possibile valutare che tipo di curva fa la bicicletta in termini di raggio di curvatura e velocità.

Calcolate le forze di reazione e la velocità necessaria per poter mantenere la bicicletta in equilibrio, è possibile valutare quanto debba essere la coppia che il pilota deve fornire al sistema per mantenerlo in posizione ad un determinato valore di rollio e sterzo. Questo è possibile farlo andando a scrivere un equilibrio sull'avantreno, in cui la componente di coppia lungo l'asse di sterzo è la coppia di sterzo che deve essere equilibrata dal ciclista. La Figura 2.18 sotto mostra una vista schematica delle forze che agiscono sull'avantreno: Le equazioni di equilibrio scritte secondo il principio di D'ALémbert sono:

$$\mathbf{F}_{Gf} + \mathbf{F}_{Rf} + \mathbf{F}_{\tau} = m_f \mathbf{a}_{Gf} \tag{2.55}$$

$$\mathbf{M}_{Gf} + \mathbf{M}_{Rf} + \mathbf{M}_{\tau} + \mathbf{C}_2 \mathbf{O}_2 \times \mathbf{F}_{\tau} = \dot{\mathbf{J}}_f + \dot{\mathbf{J}}_{Wf} \tag{2.56}$$

Scritti in forma di componente rispetto al sistema di riferimento S_{O_2} , si ottiene un sistema lineare di sei equazioni in sei incognite (le componenti di \mathbf{F}_{τ} e di \mathbf{M}_{τ}).

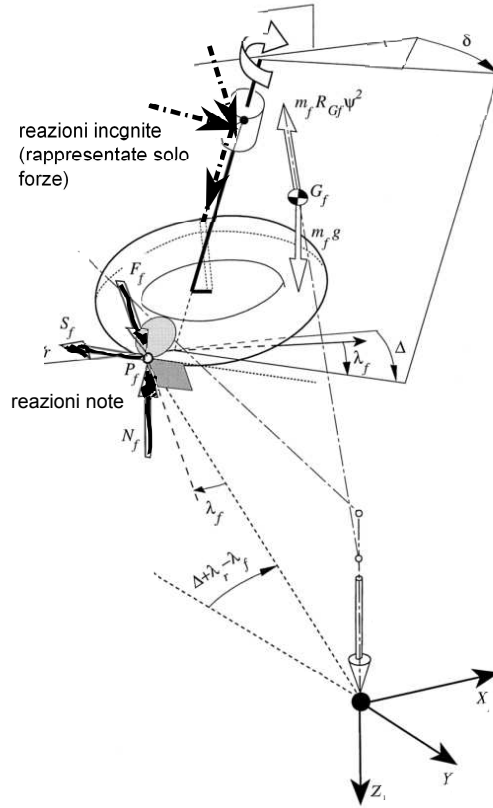


Figura 2.18: forze che agiscono sull'avantreno in curva a velocità costante

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{x(1)} - S_f \cos \Delta - F_f \sin \Delta + F_{\tau_x} + F_{inerzia} = 0 \\ F_{y(1)} + F_f \cos \Delta - S_f \sin \Delta + F_{inerzia} + F_{\tau_y} = 0 \\ -N_f + F_{z(1)} + F_{\tau_z} + m_f g = 0 \\ \\ -N_f Y_{P_f} + m_f Y_{G_f} g - M_{y_f} \sin \Delta - \dot{K}_{\omega_f(1)}(1) - F_{y(1)} Z_{Q_f} + F_{z(1)} Y_{Q_f} + M_{x(1)} + M_{\tau_x} + \\ - F_{\tau_y} Z_{Q_f} + F_{\tau_z} Y_{Q_f} + M_{inerzia} = 0 \\ N_f X_{P_f} - m_f X_{G_f} g + M_{y_f} \cos \Delta - \dot{K}_{\omega_f(2)} + F_{x(1)} Z_{Q_f} - F_{z(1)} X_{Q_f} + M_{y(1)} + M_{\tau_y} + \\ + F_{\tau_x} Z_{Q_f} - F_{\tau_z} X_{Q_f} + M_{inerzia} = 0 \\ F_f \cos \Delta X_{P_f} - S_f \sin \Delta X_{P_f} + S_f \cos \Delta Y_{P_f} + M_{z_f} - F_{x(1)} Y_{Q_f} + F_{y(1)} X_{Q_f} + M_{z(1)} + \\ + M_{\tau_z} - F_{\tau_x} Y_{Q_f} + F_{\tau_y} X_{Q_f} + M_{inerzia} = 0 \end{array} \right.$$

Riscritta in termini matriciali:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_{Q_f} & Y_{Q_f} & 1 & 0 & 0 \\ Z_{Q_f} & 0 & -X_{Q_f} & 0 & 1 & 0 \\ -Y_{Q_f} & X_{Q_f} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -F_\tau(1) + F_f \sin \Delta + S_f \cos \Delta - \Phi_f(1, 4) \\ -F_\tau(2) - F_f \cos \Delta + S_f \sin \Delta - \Phi_f(2, 4) \\ -m_f g + N_f - F_\tau(3) - \Phi_f(3, 4) \\ d(4) \\ d(5) \\ d(6) \end{pmatrix}$$

$$d(4) = -m_f g Y_{Gf} + N_f Y_{Pf} - \Phi_f(3, 2) + \dot{K}_{\omega f}(1) - M_\tau(1) + F_\tau(2) Z_{Qf} - F_\tau(3) Y_{Qf} + d_f N_f \sin \Delta$$

$$d(5) = m_f g X_{Gf} - N_f X_{Pf} - \Phi_f(1, 3) + \dot{K}_{\omega f}(2) - d_f N_f \cos \Delta + \\ - M_\tau(2) - F_\tau(1) Z_{Qf} + F_\tau(3) X_{Qf}$$

$$d(6) = -F_f \sin \Delta Y_{Pf} - S_f \cos \Delta Y_{Pf} - F_f \cos \Delta X_{Pf} S_f \sin \Delta X_{Pf} + t_f F_f + \\ + sp S_f - b \beta N_f - \Phi_f(2, 1) + \dot{K}_{\omega f}(3) - M_\tau(3) + F_\tau(1) Y_{Qf} - F_\tau(2) X_{Qf}$$

$$x_{\text{reazionicorniera flessibile}} = \begin{pmatrix} F_{x(1)} \\ F_{y(1)} \\ F_{z(1)} \\ M_{x(1)} \\ M_{y(1)} \\ M_{\text{teta}_{1z}(1)} \end{pmatrix}$$

2.4 Analisi dei risultati

L'analisi svolta, sullo studio della curva della bicicletta, ha permesso di ottenere alcuni importanti strumenti per poter valutarne le prestazioni. Il primo tra tutti è rappresentato dalla possibilità di passare dal dominio $(\varphi, \vartheta_{1z})$ a (R, V) e viceversa: si è così in grado di assegnare una posizione di guida alla bicicletta in termini di angolo di rollio e sterzo e, a partire da questi, ottenere il raggio di curvatura e velocità di equilibrio in curva; viceversa, fissato un raggio di curvatura e una velocità si può determinare la posizione di equilibrio che deve assumere la bicicletta. Viene messo a disposizione un semplice ausilio visivo in Matlab per valutare velocemente gli aspetti principali in queste trasformazioni. Un altro strumento importante riguarda la definizione del campo di lavoro per una bicicletta.

2.4.1 Rappresentazione bicicletta in curva

La posizione della bicicletta in curva parte dall'imposizione di un determinato angolo di rollio e di sterzo e per facilitare una interpretazione fisica dei risultati cinematici ottenuti, è stato utile la sua rappresentazione in curva. Di seguito viene presentata una bicicletta nel piano e accanto la stessa mentre compie una curva a velocità costante per un determinato valore dell'angolo di rollio e di sterzo.

In questo modo, rendendo visivo il risultato numerico, è facile verificare eventuali possibili incongruenze. Inoltre da questa rappresentazione è possibile farsi un'idea della funzione che lega il dominio $(\varphi, \vartheta_{1z})$ a (R, V) e della sua inversa. In particolare la Figura 2.20 è stata determinata imponendo un determinato valore di raggio di curvatura $R = 10m$ e di velocità $V = 4m/s$ trovando la posizione della bicicletta, che in questo caso esiste, che soddisfa l'equilibrio: $\varphi = 9.2886^\circ$ e $\vartheta_{1z} = 5.5659^\circ$.

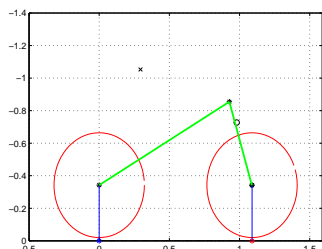


Figura 2.19: bicicletta-Matlab nel piano

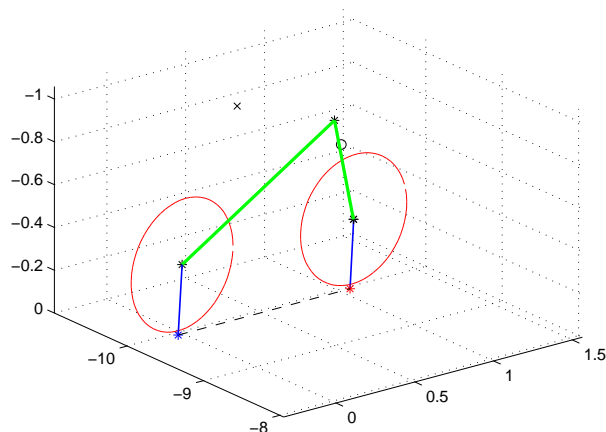


Figura 2.20: bicicletta-Matlab in curva

2.4.2 Dal diagramma curvatura-velocità al campo di lavoro

Le condizioni di equilibrio stazionario di una bicicletta in curva possono essere rappresentate nel diagramma curvatura-velocità di avanzamento per curve isolivello. Lo scopo della tesi è riuscire a definire un metodo efficace per poter, in base ad un confronto, valutare le nuove prestazioni di un nuovo progetto di bicicletta rispetto a quella classica. A tal proposito del diagramma curvatura-velocità di avanzamento interessa valutare non tanto delle curve di equilibrio quanto definire un area con un contorno ben delimitato, in modo da introdurre il concetto di spazio di lavoro, molto adoperato per valutare le prestazioni di robot, allo studio della bicicletta.

La figura 2.21 (in alto) rappresenta il classico diagramma curvatura-velocità e quindi le condizioni di equilibrio stazionario di una bicicletta in curva. In particolare le curve isolivello di rollio φ e sterzata ϑ_{1z} forniscono i valori per cui la bicicletta sta in equilibrio fissati velocità di avanzamento e raggio di traiettoria. Questo diagramma può essere letto anche in un altro senso: percorrendo le curve a rollio costante si determina come deve variare la velocità ed il raggio di curvatura per fare in modo che la bicicletta rimanga in equilibrio fissato l'angolo di rollio. Nello stesso modo descrive come variano velocità e raggio nel caso si voglia percorrere una curva fissando l'angolo di sterzo.

La necessità di dover dare maggior risalto ai vincoli del problema e facilitare un confronto rende il grafico del campo di lavoro, rappresentato in figura 2.21 (in basso), uno strumento più efficace. Tale diagramma dunque rappresenta l'equivalente per la bicicletta dello spazio di lavoro per i robot, infatti assegnati dei range sufficientemente ampi all'angolo di rollio φ e di sterzo ϑ_{1z} sono state incluse le soluzioni che effettivamente potevano garantire l'equilibrio del veicolo; quindi sono stati esclusi risultati in cui:

- le forze di contatto verticali N_r o N_f risultano minori di zero
- le forze di contatto laterali F_r e F_f e la forza longitudinale S_r risultano minori della corrispondente forza limite di aderenza
- la velocità di avanzamento supera un valore indicativamente scelto come limite di utilizzo (30Km/h)

- il raggio di curvatura risulta essere minore del raggio minimo tipico delle biciclette assunto pari a 1.5m
- la velocità di imbardata calcolata risulta essere negativa: questo risultato stà ad indicare che per poter mantenere l'equilibrio la bicicletta dovrebbe percorrere la curva nel senso opposto

I grafici che seguono vanno a completare il grafico del campo di lavoro in quanto permettono di capire quale vincolo, tra quelli sopra citati, sia il responsabile dell'esclusione della posizione analizzata dal campo di lavoro. Questi grafici rappresentano questo stesso concetto ma su domini diversi: la figura 2.22 in termini di velocità-raggio di curvatura mentre le figure 2.23, 2.24 in termini di angolo φ e ϑ_{1z} .

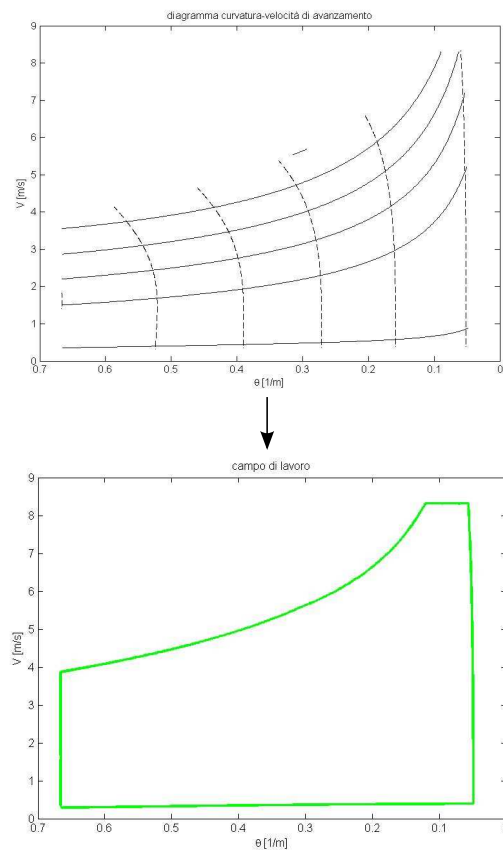


Figura 2.21: dal diagramma curvatura-velocità al campo di lavoro

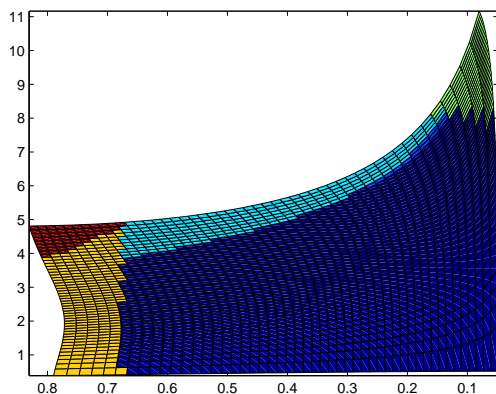


Figura 2.22: motivo saturazione vincolo nel dominio (R, V)

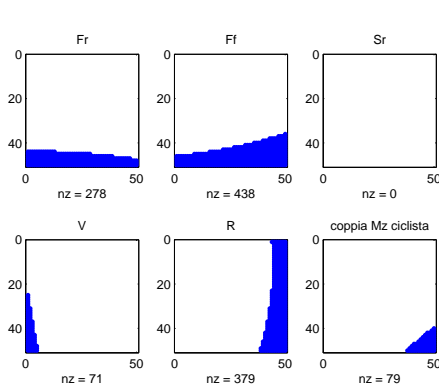


Figura 2.23

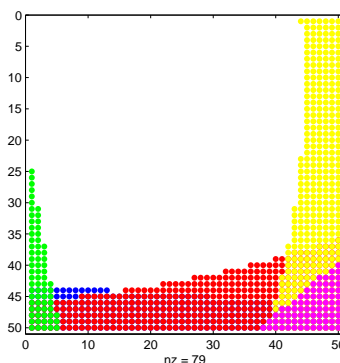


Figura 2.24: motivo saturazione vincolo nel dominio $(\varphi, \vartheta_{1z})$

2.4.3 Comportamento bicicletta in curva

I grafici descritti in questa sezione sono utili per comprendere il comportamento della bicicletta in curva.

La Figura 2.25 riporta i possibili valori degli angoli di slittamento della ruota anteriore e posteriore variando l'angolo di rollio φ mantenendo costante ϑ_{1z} . Si vede come per i casi riportati λ_r risulta sempre essere maggiore di λ_f quindi la bicicletta avrà un comportamento sovrasterzante, cioè il raggio di curvatura risulta essere sempre minore del raggio di curvatura cinematico (raggio della traiettoria che si avrebbe se non venissero considerati gli angoli di slittamento nel modello). Questo comportamento è migliore del caso sottosterzante perchè la bicicletta tende a fare curve più strette a pari angoli di rollio e di sterzo. Proprio per questo risulta essere la ruota posteriore quella più sollecitata e nel caso si raggiunga il limite di scivolamento il pilota con una manovra di controsterzo ha più probabilità di riuscire a controllare l'equilibrio del veicolo se ha comportamento sovrasterzante.

La Figura 2.26 riporta i valori delle forze che gravano sui pneumatici al variare degli angoli di rollio e sterzo. Dal grafico si vede che all'aumentare degli angoli di sterzata e di rollio, la ruota anteriore richiede coefficienti di attrito più elevati rispetto a quella

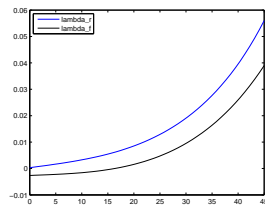


Figura 2.25: sottosterzante-sovrasterzante.

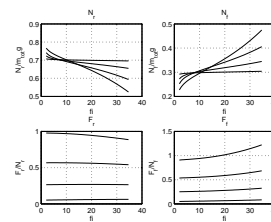


Figura 2.26: reazioni verticali e laterali sulle ruote.

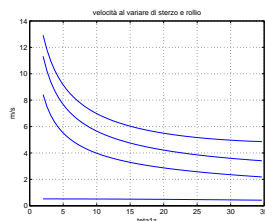


Figura 2.27: velocità di avanzamento.

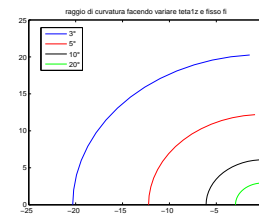


Figura 2.28: raggio di curvatura fisso rollio e vario angolo di sterzo

posteriore e perciò in condizioni di scarsa aderenza la ruota anteriore tenderà a scivolare prima.

La Figura 2.27 mostra i valori della velocità di avanzamento in condizioni stazionarie al variare dell'angolo di rollio e di sterzata. Da notare il fatto che la bicicletta classica raggiunge l'equilibrio a velocità diversa da zero per angolo di rollio $\varphi = 0$ e angolo di sterzo $\vartheta_{1z} = 3^\circ$, cosa non del tutto scontata visto che ci si aspetterebbe che l'azione ribaltante della forza di inerzia centrifuga non possa essere equilibrata; la spiegazione sta nel fatto che mantenendo la bicicletta verticale ed inclinando lo sterzo il punto di contatto della ruota anteriore si trova a sinistra e perciò il baricentro risulta posizionato a destra rispetto la congiungente $P_r P_f$ riuscendo così a bilanciare i momenti centrifughi.

2.4.4 Analisi coppia allo sterzo

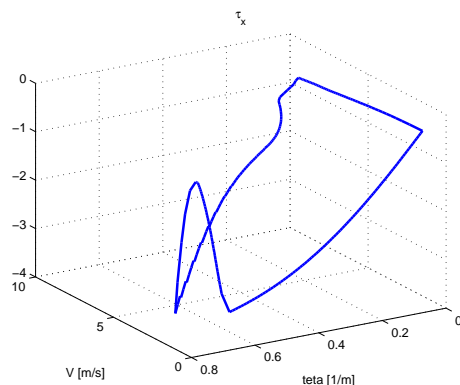


Figura 2.29: coppia nel campo di lavoro.

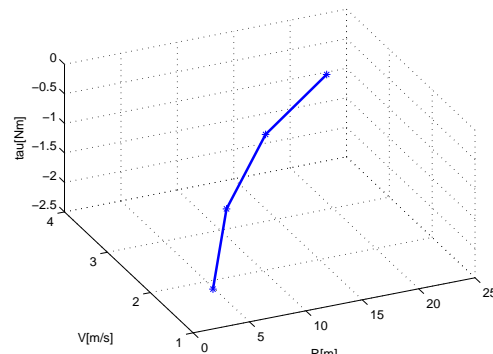


Figura 2.30: coppia in funzione del raggio di curvatura e velocità di avanzamento

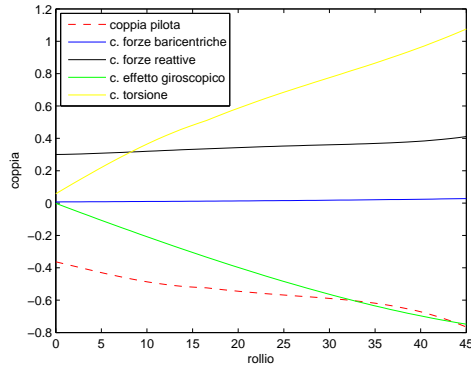


Figura 2.31: coppia fisso angolo di sterzo e vario rollio

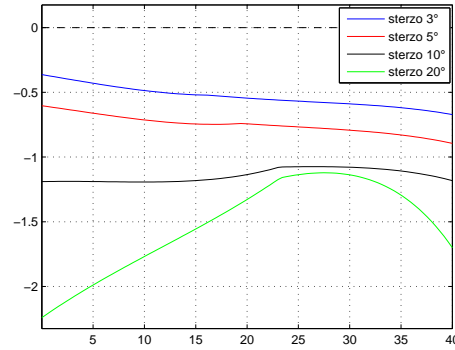


Figura 2.32: coppia per diversi valori dell'angolo di sterzo e vario rollio

La figura 2.29 definisce il valore della coppia che deve fornire il ciclista nel contorno del campo di lavoro. Sono state effettuate valutazioni sulla coppia per tutti i punti interni ma quelli sul contorno risultano essere di modulo maggiore e dunque più significativi (in figura 2.30 ne è riportato l'esempio grafico).

Nella figura 2.31 si evidenziano tutte le componenti che concorrono a determinare il valore di coppia allo sterzo fissato l'angolo di sterzo al variare del rollio. Il risultato evidenzia che il moto della bicicletta dipende dall'azione simultanea di diverse forze che hanno effetti alcune stabilizzanti ed altre instabilizzanti. Infatti la coppia allo sterzo è data dalla risultante di termini grandi in modulo ma di segno opposto.

La figura 2.32 valuta la coppia di sterzo al variare del rollio per diversi angoli di sterzo.

2.4.5 Parametri geometrici-coppia allo sterzo

Di seguito è riportato il set di risultati in cui si determina l'andamento della coppia di sterzo al variare di diversi parametri geometrici della bicicletta per comprenderne il legame:

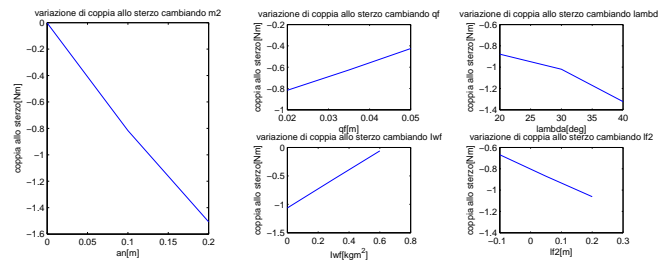


Figura 2.33: coppia in funzione di parametri geometrici.

In particolare sotto è riportata la tabella che riassume come questo insieme di parametri influenza la cinetostatica della bicicletta.

PARAMETRI CONSIDERATI	EFFETTI
$\lambda_r \lambda_f$	comportamento prevalentemente sovrasterzante
$\varepsilon \downarrow$	$\tau \downarrow\downarrow$
$a_n \uparrow$	$\tau \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$
$l_{f2} \uparrow$	$\tau \downarrow$
$q_{f2} \uparrow$	$\tau \uparrow$
$I_{w_f} \uparrow$	$\tau \uparrow$

2.5 Conclusioni

Nello studiare la bicicletta classica dunque sono state valutate le principali caratteristiche geometriche e cinematiche tra i corpi rigidi che la compongono, sono state risolte le equazioni che descrivono il veicolo in curva in moto stazionario senza semplificare il comportamento cinematico del veicolo ma andando a considerare un modello linearizzato per quanto riguarda le forze che descrivono il legame pneumatico-asfalto ed infine sono stati introdotti i primi strumenti utili su cui basare un confronto con quanto caratterizza la bicicletta classica.

CAPITOLO 3

LO STERZO: ELEMENTO A PIU' GDL

In questo capitolo viene presentata la cinematica di un sistema bicicletta in cui il retrotreno e avantreno sono collegati attraverso un elemento a più gradi di libertà. Si vuole quindi pensare la bicicletta come un sistema formato da due ruote collegate da una black-box senza dover essere vincolati al singolo grado di libertà rappresentato dal classico sterzo.

Nel modellare questo sistema si è voluto dare una formulazione matematica tale da poter descrivere l'elemento black-box nella forma più generica ma che fosse funzionale al sistema bicicletta. Chiariamo meglio questo concetto: si potrebbe pensare di descrivere la cinematica che lega la posizione del retrotreno al avantreno a 6 GdL e valutare i loro vantaggi e svantaggi cinematici durante la percorrenza di una curva; in realtà da considerazioni basate su equazioni che regolano l'equilibrio statico si richiede al telaio una rigidità sufficientemente elevata attorno all'asse Y in termini di momento e all'asse Z in termini di forza al fine di contrastare il peso del pilota senza che debba essere questo stesso a fornire le reazioni necessarie per mantenersi in equilibrio. Questa caratteristica costituisce il primo vincolo progettuale per il sistema sterzo. Con questo vincolo è lecito trascurare l'effetto cinematico sul sistema bicicletta delle piccole rotazioni attorno all'asse y e delle traslazioni verticali lungo z nel sistema relativo del sistema sterzo; il monitoraggio di eventuali spostamenti indesiderati sarà un problema di progettazione successiva.

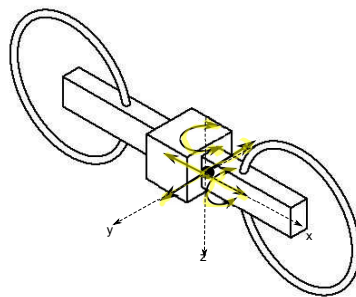


Figura 3.1: bicicletta schema black-box e nuovi Gdl

Si vuole far notare come la bicicletta classica non sia altro che un caso particolare di questa generica riscrittura cinematica. Per questa infatti la blackbox non è altro che il canotto a singolo grado di libertà. Oltre che analizzare i vantaggi e gli svantaggi cine-

matici rappresentati dall'introduzione dei nuovi Gdl, si vuole proporre una metodologia generica per definire il campo di lavoro della bicicletta.

3.1 Descrizione e modello cinematico

Molti aspetti riguardanti il nuovo modello della bicicletta risultano identici a quelli della bicicletta classica già analizzata.

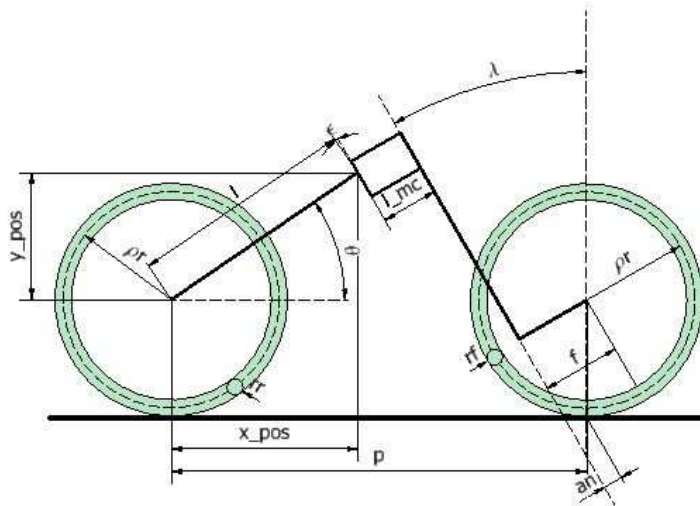


Figura 3.2: rappresentazione schematica bicicletta sterzo a più GdL

Si consideri quindi la bicicletta schematizzata in figura 3.2, la quale si muove su un piano orizzontale. La bicicletta risulta così essere composta da quattro corpi rigidi uniti tra loro attraverso due giunti rotoidali e uno a 4 Gdl non necessariamente puntuale ma di lunghezza l_{mc} .

Due giunti rotoidali uniscono al telaio e allo sterzo rispettivamente la ruota posteriore e quella anteriore, mentre il nuovo sistema sterzo connette il telaio all'avantreno.

Come per la bicicletta classica si possono individuare un primo piano, detto *piano posteriore*, che contiene la ruota posteriore ed il telaio, ed un secondo definito come *piano anteriore*, nel quale giacciono sia la ruota anteriore sia lo sterzo. Il sistema sterzo rappresenta il collegamento tra i piani sopra definiti senza appartenere a nessuno dei due, a differenza di quanto accade per una bicicletta classica in cui la cerniera dello sterzo giace lungo l'intersezione dei due piani.

3.1.1 Dominio dei parametri

A questo punto, facendo riferimento alla configurazione banale, è possibile definire i parametri geometrici che caratterizzano la bicicletta e ne individuano completamente la struttura meccanica (alcuni parametri, identici alla bicicletta classica, non verranno definiti). Indichiamo con p il passo della bicicletta, ovvero la distanza che intercorre

tra i punti di contatto delle due ruote. Definiamo l la distanza che caratterizza la lunghezza della parte di telaio rigido che nella figura 3.2 costituisce il segmento \overline{BC} . Con riferimento alla figura, l'angolo tra la verticale e l'asse di rotazione dello sterzo flessibile viene detto *caster angle* (λ) e come per la bicicletta classica si svincola l'inclinazione del telaio rigido a quella che caratterizza la cerniera flessibile e lo sterzo definendo il *caster angle ridotto* ($\varepsilon = \lambda - \vartheta$). Indichiamo invece con ϑ l'angolo formato tra l'asse passante per il centro della ruota posteriore parallelo alla linea di contatto e l'asse coincidente con il segmento \overline{BC} . Questo angolo rappresenta il beccheggio della bicicletta nella configurazione banale. Con l_{mc} viene identificata la lunghezza del sistema sterzo che in figura è rappresentata dal segmento \overline{CD} . L'abbassamento della forcella (nella figura segmento \overline{DE}) è identificata dalla distanza d . Infine assegnamo al disassamento della forcella, cioè la distanza tra la ruota posteriore e l'asse dello sterzo, il valore f . Sotto sono riportate le relazioni che intercorrono tra alcuni parametri della bicicletta. Si vuole mettere in evidenza che la scelta dei parametri da assegnare è stata fatta in funzione del sistema sterzo. Si poteva pensare di assegnare l'avancorsa normale o altri parametri ma quelli risultavano essere i più importanti per la bicicletta classica. Qui quello che interessa è poter dare una posizione e dimensione nello spazio al sistema sterzo ed in funzione di questo ed il passo della bicicletta, legare tutte le altre grandezze sopra definite. In base a quanto detto possiamo definire come:

parametri assegnati

$$p, x_{pos}, y_{pos}, l_{mc}, \lambda$$

vincoli tra parametri

$$l = \sqrt{x_{pos}^2 + y_{pos}^2} \quad (3.1)$$

$$\vartheta = \text{atan2}(y_{pos}, x_{pos}) \quad (3.2)$$

$$f = l \cos(\vartheta - \lambda) + l_{mc} - p \cos \lambda \quad (3.3)$$

$$d = \frac{p + f \cos \lambda - l_{mc} \cos \lambda - l \cos \vartheta}{\sin \lambda} \quad (3.4)$$

3.1.2 Sistemi di riferimento e matrici di rototraslazione

Una volta definite la grandezze geometriche caratteristiche che descrivono la bicicletta compliant nella configurazione banale (piano del retrotreno e avantreno paralleli e perpendicolari al terreno), si introducono i sistemi di riferimento rispetto ai quali viene determinata la generica configurazione nello spazio della bicicletta. In particolare, si aggiunge un sistema di riferimento inerziale e diversi sistemi solidali ai vari corpi rigidi che compongono il sistema meccanico.

Il meccanismo con cui vengono definiti i sistemi di riferimento è analogo a quanto fatto per la bicicletta classica perciò di seguito verranno solo elencati mentre si analizzerà con maggior dettaglio quanto concerne il nuovo sistema sterzo. Come ausilio grafico si faccia riferimento alla schematizzazione riportata in figura 3.3.

Il sistema di riferimento inerziale $\Sigma = (\mathbf{O}; X, Y, Z)$ viene fissato con l'asse X parallelo alla linea di intersezione tra piano del retrotreno e piano del terreno; l'asse Z si assume normale al piano del terreno e diretto verso il basso, mentre l'asse Y viene determinato

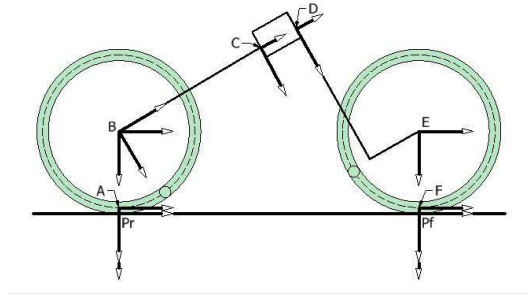


Figura 3.3: sistemi di riferimento

in modo che la terna soddisfi la regola della mano destra; la posizione del suo origine dipende dal raggio di curvatura effettuato. Per quanto riguarda i sistemi solidali verranno definiti seguendo la stessa logica del caso della bicicletta classica. Con riferimento alla schematizzazione della bicicletta riportata in figura, scegliamo un primo sistema $S_{Pr} = (\mathbf{Pr}; x_{Pr}, y_{Pr}, z_{Pr})$ con l'origine nel punto di contatto, l'asse z_{Pr} normale al terreno e l'asse x_{Pr} parallelo all'asse X. Questo sistema di riferimento in qualunque posizione si trovi la bicicletta avrà l'asse z_{Pr} che passa sempre tra il punto A e P_r . Un ulteriore sistema di riferimento, indicato con $S_A = (\mathbf{A}; x_A, y_A, z_A)$, viene fissato sulla ruota con l'origine in A, l'asse x_A sempre parallelo ad X; ma l'asse z_A adesso risulta passante per i punti B e A qualsiasi sia la posizione della bicicletta. Si prenda poi un sistema di riferimento $S_B = (\mathbf{B}; x_B, y_B, z_B)$ solidale al telaio con l'origine nel punto B, l'asse x_B parallelo alla linea di contatto e l'asse z_B normale al terreno sempre rivolto verso il basso quando il sistema si trova nella configurazione banale e l'asse y_B preso positivo secondo la regola della mano destra. Si osserva quindi che il sistema di riferimento S_B non risente della rotazione propria della ruota, in quanto il giunto rotoidale in B non trasmette tale rotazione al telaio. Per caratterizzare la posizione della cerniera flessibile nello spazio si adottano due sistemi di riferimento uno $S_C = (\mathbf{C}; x_C, y_C, z_C)$ con l'origine posizionato nel punto C e l'asse x_C inclinato di ε rispetto al telaio e l'altro $S_D = (\mathbf{D}; x_D, y_D, z_D)$ con origine nell'estremità opposta e la cui posizione è determinata da due rotazioni (attorno all'asse x_C e z_C) e due traslazioni (lungo l'asse x_C e y_C) che saranno definite più avanti. Come già accennato prima il modello cinematico non prevede traslazioni lungo l'asse z_C nè rotazioni attorno l'asse y_C tra retrotreno e avantreno perchè indesiderate (sarà compito della soluzione costruttiva adottata garantire rigidità tali da rendere trascurabili questi spostamenti). Solidali alla ruota anteriore, inoltre, si adottano altri tre sistemi di riferimento in modo analogo a quanto fatto per quella posteriore. In particolare, si considerano i sistemi $S_E = (\mathbf{E}; x_E, y_E, z_E)$, $S_F = (\mathbf{F}; x_F, y_F, z_F)$ con asse z_F passante per i punti F ed E, mentre $S_{Pf} = (\mathbf{Pf}; x_{Pf}, y_{Pf}, z_{Pf})$ con l'asse z_{Pf} passa per i punti Pf ed F. Per entrambi i due sistemi l'asse x è preso parallelo all'asse X nella configurazione banale.

Questi sistemi di riferimento permettono di poter calcolare le coordinate di tutti i punti appartenenti a ciascun corpo rigido (di cui ogni terna ne è rappresentativa) nelle rispettive terne. Per analizzare la bicicletta in una configurazione generica nello spazio ambiente bisogna definire il legame che intercorre tra queste matrici così facendo si potranno calcolare le posizioni di tutti i punti della bicicletta rispetto al sistema di riferimento inerziale. Siano quindi $P_r = (x_{Pr}, y_{Pr}, 0)$ le coordinate del punto di

contatto della ruota posteriore sul piano del terreno, considerato appunto $z=0$ il piano orizzontale su cui giace il punto di contatto. La linea di contatto, invece, non risulta più coincidente con l'asse X come nella configurazione banale, ma determina un angolo con tale asse. In particolare, il sistema di riferimento S_{Pr} appare ruotato rispetto a quello inerziale attorno all'asse Z di un angolo ψ , detto angolo di imbardata, e misurato a partire dall'asse X con verso positivo secondo la regola della mano destra. In seguito, tutti gli angoli saranno presi positivi secondo tale regola. In sostanza, il passaggio dal sistema inerziale a quello solidale in Pr è descritto dalla matrice di rototraslazione:

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{Pr},\psi,\mathbf{z})} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In una configurazione generica, il passaggio dal sistema di riferimento S_{Pr} ad S_B telaio è dato dalla matrice di rototraslazione: $M_{(A,B)} = M_{(Pr,A,z)}M_{(A,\varphi,x)}M_{(A,B,z)}M_{(B,\vartheta,y)}M_{(B,\mu,y)}$ le singole matrici sono:

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{Pr},\mathbf{A},\mathbf{z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{A},\varphi,\mathbf{x})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{B},\vartheta,\mathbf{y})} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il giunto rotoidale in B permette una rotazione rispetto alla ruota posteriore attorno all'asse y_B . Tale rotazione viene descritta dall'angolo di beccheggio μ e la corrispondente matrice risulta essere:

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{B},\mu,\mathbf{y})} = \begin{pmatrix} \cos \mu & 0 & \sin \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \mu & 0 & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il passaggio dal sistema di riferimento S_B ad S_C è dato dalla seguente matrice di rototraslazione: $M_{(B,C)} = M_{(B,C,x)}M_{(C,\varepsilon,y)}$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{x})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(C,\varepsilon,y)} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In termini matriciali si possono descrivere il sistema di riferimento locale che caratterizza la posizione relativa tra i sistemi di riferimento S_C e S_D e che quindi definisce la posizione del avantreno rispetto al retrotreno a seguito dell'attivazione dei 4Gdl, con il prodotto delle seguenti matrici:

$$\mathbf{M}_{(C,D,\theta_{1z},x_{mc},y_{mc})} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{1z} & -\sin \theta_{1z} & 0 & x_{mc} \\ \sin \theta_{1z} & \cos \theta_{1z} & 0 & y_{mc} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{(C,D,\theta_{1x})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{1x} & -\sin \theta_{1x} & 0 \\ 0 & \sin \theta_{1x} & \cos \theta_{1x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo modo si ottiene la matrice che descrive la rototraslazione relativa tra il sistema di riferimento S_C e S_D per una generica rototraslazione:

$$\mathbf{M}_{(C,D,\theta_{1z},\theta_{1x},x_{mc},y_{mc})} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{1z} & -\sin \theta_{1z} \cos \theta_{1x} & \sin \theta_{1z} \sin \theta_{1x} & x_{mc} \\ \sin \theta_{1z} & \cos \theta_{1z} \cos \theta_{1x} & -\cos \theta_{1z} \sin \theta_{1x} & y_{mc} \\ 0 & \sin \theta_{1x} & \cos \theta_{1x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

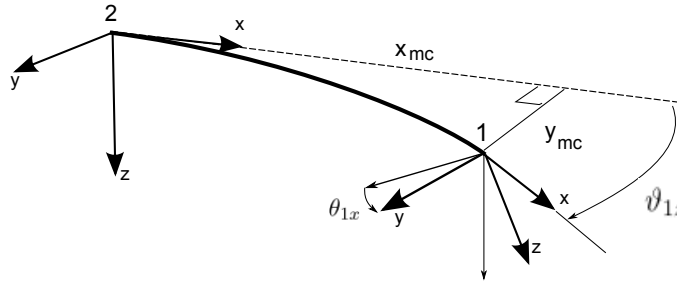


Figura 3.4: sterzo a 4 Gdl

Il passaggio dal sistema di riferimento S_D a S_E è descritto dalla seguente matrice di rototraslazione:

$$\mathbf{M}_{(D,E)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per caratterizzare il passaggio dal sistema di riferimento S_E a S_{Pf} tramite matrici di rototraslazione si lavora in modo inverso cioè si parte dal punto di contatto della ruota anteriore per poi arrivare al centro della ruota. Quindi vengono riportate sotto le matrici che descrivono le relazioni tra i sistemi di riferimento:

$$\mathbf{M}_{(Pf,\Delta,z)} = \begin{pmatrix} \cos \Delta & -\sin \Delta & 0 & 0 \\ \sin \Delta & \cos \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{P}f, \mathbf{F}, \mathbf{z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{F}, \beta, \mathbf{x})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{F}, \mathbf{E}, \mathbf{z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{E}, \gamma, \mathbf{y})} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

È importante notare che in realtà anche senza questi ultimi angoli qui sopra introdotti si sarebbe potuta risolvere la cinematica poichè anche solamente col definire il sistema di riferimento S_D si sarebbe potuto caratterizzare il movimento di tutti i punti della bicicletta. Si è scelto di definire questi angoli ausiliari per una serie di comodità in fase di calcolo.

Queste matrici di rototraslazione permettono di passare da un sistema di riferimento ad un altro e quindi nel complesso permettono di descrivere in maniera completa dal punto di vista cinematico la bicicletta. Prima di comporre tra di loro queste matrici di rototraslazione per ottenere la matrice di trasformazione finale, che permette di passare dal sistema di riferimento inerziale ai vari sistemi solidali, bisogna fare una serie di considerazioni riguardo le coordinate indipendenti e dipendenti che caratterizzano il moto della bicicletta che ora risultano essere diverse dal caso classico.

3.1.3 Coordinate indipendenti e dipendenti

Allo stesso modo in cui è stato fatto per bicicletta classica si intende determinare il numero di coordinate generalizzate necessarie (e sufficienti) per descrivere completamente lo spazio delle configurazioni del nostro sistema. Il modello è costituito da quattro corpi rigidi, quindi nello spazio ambiente, se non fossero presenti vincoli di alcun genere, il sistema presenterebbe 24 gradi di libertà. Tuttavia, è noto che i quattro corpi in questione sono uniti tra loro tramite due giunti rotoidali e uno a 4Gdl, mentre i punti di contatto della ruota posteriore ed anteriore sono vincolati a giacere sul piano orizzontale $z=0$. Ciascun giunto rotoidale toglie 5 gradi di libertà, il nuovo sistema sterzo, per come è stata definita la sua cinematica, ne elimina 2, mentre il vincolo di contatto sottrae un grado di libertà per la ruota posteriore e due per quella anteriore di cui si trascura lo slittamento longitudinale. In conclusione, il numero di coordinate generalizzate necessarie per descrivere la configurazione del sistema risulta essere 9. Si vede quindi che delle coordinate indipendenti (Gdl) possono essere identificate con l'angolo d'imbardata ψ , l'angolo di rollio φ , gli angoli di slittamento trasversali λ_r e λ_f e lo slittamento longitudinale κ della ruota posteriore. Infine risulta naturale prendere

come ultime coordinate indipendenti le variabili che rappresentano i Gdl dello sterzo: $\theta_{1z}, \theta_{1x}, x_{mc}, y_{mc}$. Anche in questo caso, come per la bicicletta classica, lo spostamento del centro della ruota anteriore, con la conseguente nascita del beccheggio, non risulta una coordinata indipendente, ma deriva dagli angoli di rollio e di sterzo.

3.1.4 Equazioni cinematiche

A questo punto si possono determinare l'angolo di beccheggio e le coordinate del punto di contatto anteriore nel sistema relativo S_{Pr} in funzione dei Gdl. Per ottenere tali relazioni, è necessario determinare l'espressione del vettore \overline{PrPf} (nel sistema relativo S_{Pr}), della coordinata μ e degli angoli ausiliari γ, β, Δ . Queste sei equazioni possono essere ricavate da una chiusura vettoriale fatta imponendo l'uguaglianza tra gli elementi di due matrici di rototraslazione. In particolare la prima di queste si ricava componendo le singole matrici partendo dal punto Pf e in senso orario arrivando al punto E (scelta che deriva dal fatto che in questo modo è possibile ottenere una semplificazione dei conti) mentre l'altra, che caratterizza l'avantreno, si costruisce partendo dal punto Pr e, passando dal punto Pf, giunge al centro della ruota anteriore E. Sotto sono riportate le due matrici che caratterizzano dal

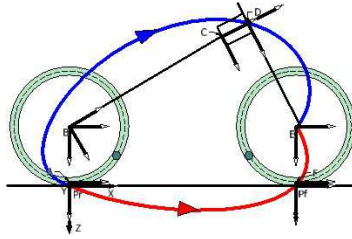


Figura 3.5: percorsi prodotti matriciali

punto di vista cinematico i due percorsi schematizzati in figura 3.5: $M_{(Pr,E)BLU} = M_{(Pr,\psi,z)}M_{(Pr,A,z)}M_{(A,\varphi,x)}M_{(A,B,z)}M_{(\mu-\vartheta,y)}M_{(B,C)}M_{(C,\varepsilon,y)}M_{(C,D,\theta_{1z},\theta_{1x},x_{mc},y_{mc})}M_{(D,E)}$
 $M_{(Pr,E)ROSSO} = M_{(Pr,Pf)}M_{(Pf,\Delta,z)}M_{(Pf,E,z)}M_{(F,\beta,x)}M_{(F,E,z)}M_{(E,\gamma,y)}$ con

$$\mathbf{M}_{(Pr,Pf)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & z_{Pf} \\ 0 & 1 & 0 & w_{Pf} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possono ricavare 6 equazioni imponendo l'uguaglianza tra le matrici per ricavare z_{Pf} , w_{Pf} , μ e i tre angoli ausiliari.

$$M_{(Pr,E)BLU} = M_{(Pr,E)ROSSO} \quad (3.5)$$

Si scelgono i seguenti termini da eguagliare:

$$(3, 4); (3, 2); (3, 1); (1, 2); (1, 4); (2, 4) \quad (3.6)$$

$$(3,4) \quad f \cos \theta_{1z} \cos \varphi \sin(\mu + \varepsilon) - \sin \varphi \sin \theta_{1z} f + (\sin \theta_{1z} \sin \theta_{1x} (\cos \varepsilon \cos \varphi \sin \mu + \\ - \sin \varepsilon \cos \varphi \cos \mu) - \cos \theta_{1z} \sin \theta_{1x} \sin \varphi + \cos \theta_{1x} \cos \varphi \cos(\mu + \varepsilon)) d + \\ - l \cos \varphi \sin \mu - x_{mc} \cos \varphi \sin(\mu + \varepsilon) + y_{mc} \sin \varphi - \rho_r \cos \varphi - q_r = -\rho_f \cos(\beta) - q_f \quad (3.7)$$

$$(3,2) \quad \sin \theta_{1z} \cos \theta_{1x} \cos \varphi \sin(\mu + \varepsilon) + \cos \theta_{1z} \cos \theta_{1x} \sin \varphi + \sin \theta_{1x} \cos \varphi \cos(\mu + \varepsilon) = \sin(\beta) \quad (3.8)$$

$$(3,1) \quad \sin \gamma \cos(\beta) = \cos \theta_{1z} \cos \varepsilon \cos \varphi \sin \mu + \cos \theta_{1z} \sin \varepsilon \cos \varphi \cos \mu - \sin \theta_{1z} \sin \varphi \quad (3.9)$$

$$(1,2) \quad \sin \delta \cos(\beta) = \sin \theta_{1z} \cos \theta_{1x} \cos \varepsilon (\cos \psi \cos \mu - \sin \varphi \sin \psi \sin \mu) + \\ - \sin \theta_{1z} \cos \theta_{1x} \sin \varepsilon (\cos \psi \sin \mu + \sin \varphi \sin \psi \cos \mu) + \cos \theta_{1z} \cos \theta_{1x} \cos \varphi \sin \psi + \\ - \sin \theta_{1x} (\sin \varepsilon (\cos \psi \cos \mu - \sin \varphi \sin \psi \sin \mu) + \cos \varepsilon (\cos \psi \sin \mu + \sin \varphi \sin \psi \cos \mu)) \quad (3.10)$$

$$(1,4) \quad z = (-f) (\cos \theta_{1z} \cos \varepsilon (\cos \psi \cos \mu - \sin \varphi \sin \psi \sin \mu) - \cos \theta_{1z} \sin \varepsilon (\cos \psi \sin \mu + \\ + \sin \varphi \sin \psi \cos \mu) + \sin \theta_{1z} (-\cos \varphi \sin \psi)) + d (\sin \theta_{1z} \sin \theta_{1x} \cos \varepsilon (\cos \psi \cos \mu + \\ - \sin \varphi \sin \psi \sin \mu) - \sin \theta_{1z} \sin \theta_{1x} \sin \varepsilon (\cos \psi \sin \mu + \sin \varphi \sin \psi \cos \mu) + \\ + \cos \theta_{1z} \sin \theta_{1x} \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta_{1x} (\sin \varepsilon (\cos \psi \cos \mu - \sin \varphi \sin \psi \sin \mu) + \\ + \cos \varepsilon (\cos \psi \sin \mu + \sin \varphi \sin \psi \cos \mu))) + x_{mc} \cos \varepsilon (\cos \psi \cos \mu - \sin \varphi \sin \psi \sin \mu) + \\ - x_{mc} \sin \varepsilon (\cos \psi \sin \mu + \sin \varphi \sin \psi \cos \mu) - y_{mc} (\cos \varphi \sin \psi) + l (\cos \psi \cos \mu + \\ - \sin \varphi \sin \psi \sin \mu) - \rho_r \sin \varphi \sin \psi + \rho_f \sin \delta \sin \beta \quad (3.11)$$

$$(2,4) \quad w = (-f) (\cos \theta_{1z} \cos \varepsilon (\sin \psi \cos \mu - \sin \varphi \cos \psi \sin \mu) - \cos \theta_{1z} \sin \varepsilon (\sin \psi \sin \mu \\ - \sin \varphi \cos \psi \cos \mu) \sin \theta_{1z} \cos \varphi \cos \psi) + d (\sin \theta_{1z} \sin \theta_{1x} \cos \varepsilon (\sin \psi \cos \mu + \\ + \sin \varphi \cos \psi \sin \mu) - \sin \theta_{1z} \sin \theta_{1x} \sin \varepsilon (\sin \psi \sin \mu - \sin \varphi \cos \psi \cos \mu) + \\ - \cos \theta_{1z} \sin \theta_{1x} \cos \varphi \cos \psi + \cos \theta_{1x} (\sin \varepsilon (\sin \psi \cos \mu + \sin \varphi \cos \psi \sin \mu) + \\ + \cos \varepsilon (\sin \psi \sin \mu - \sin \varphi \cos \psi \cos \mu))) + x_{mc} \cos \varepsilon (\sin \psi \cos \mu + \sin \varphi \cos \psi \sin \mu) + \\ - x_{mc} \sin \varepsilon (\sin \psi \sin \mu - \sin \varphi \cos \psi \cos \mu) + y_{mc} (\cos \varphi \cos \psi) + l (\sin \psi \cos \mu + \\ + \sin \varphi \cos \psi \sin \mu) + \rho_r \sin \varphi \cos \psi - \rho_f \cos \delta \sin \beta \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} (3,2) f(\mu, \beta) \\ (3,4) f(\mu, \beta) \end{cases} \Rightarrow (\mu, \beta)$$

Si risolvono in un primo momento le due relazioni (3,2)(3,4) da cui si ricavano l'angolo di beccheggio e l'angolo di rollio della ruota anteriore. Queste risultano essere equazioni algebriche non lineari che vengono risolte per via numerica tramite l'algoritmo di Newton-Rapson adattato a sistemi di equazioni.

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \beta \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \sin \theta_{1z} \cos \theta_{1x} \cos \varphi \sin(\mu + \varepsilon) + \cos \theta_{1z} \cos \theta_{1x} \sin \varphi + \\ + \sin \theta_{1x} \cos \varphi \cos(\mu + \varepsilon) - \sin(\beta) & f_1 \\ f \cos \theta_{1z} \cos \varphi \sin(\mu + \varepsilon) - \sin \varphi \sin \theta_{1z} f + (\sin \theta_{1z} \sin \theta_{1x} (\cos \varepsilon \cos \varphi \sin \mu + \\ - \sin \varepsilon \cos \varphi \cos \mu) - \cos \theta_{1z} \sin \theta_{1x} \sin \varphi + \cos \theta_{1x} \cos \varphi \cos(\mu + \varepsilon)) d + \\ - l \cos \varphi \sin \mu - x_{mc} \cos \varphi \sin(\mu + \varepsilon) + y_{mc} \sin \varphi \\ - \rho_r \cos \varphi - q_r + \rho_f \cos(\beta) + q_f & f_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mu} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mu} = \sin \theta_{1z} \cos \theta_{1x} \cos \varphi \cos(\mu + \varepsilon) - \sin \theta_{1x} \cos \varphi \sin(\mu + \varepsilon) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta} = -\cos \beta \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \mu} = & f \cos \theta_{1z} \cos \varphi \cos(\mu + \varepsilon) + (\sin \theta_{1z} \sin \theta_{1x} (\cos \varepsilon \cos \varphi \cos \mu + \sin \varepsilon \cos \varphi \sin \mu) + \\ & - \cos \theta_{1x} \cos \varphi \sin(\mu + \varepsilon))d - x_{mc} \cos \varphi \cos(\mu + \varepsilon) - l \cos \varphi \cos \mu \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta} = -\rho_f \sin \beta \quad (3.16)$$

Per quanto riguarda la scelta del vettore rappresentativo del dato iniziale e gli altri parametri, da cui dipendono le soluzioni dell'algoritmo di Newton, valgono le stesse considerazioni fatte per la bicicletta classica.

Caratteristiche algoritmo	Valore
x_0	$(\vartheta; \varphi)$
$toll$	1e-5
n_{max}	10

$$(3, 1) f(\beta, \mu, \gamma) \Rightarrow \gamma$$

$$(1, 2) f(\beta, \mu, \Delta) \Rightarrow \Delta$$

$$(1, 4) f(z_{Pf}, \beta, \mu, \Delta) \Rightarrow z_{Pf}$$

$$(2, 4) f(w_{Pf}, \beta, \mu, \Delta) \Rightarrow w_{Pf}$$

Si può definire curvatura Θ come il reciproco della traiettoria del raggio del punto di

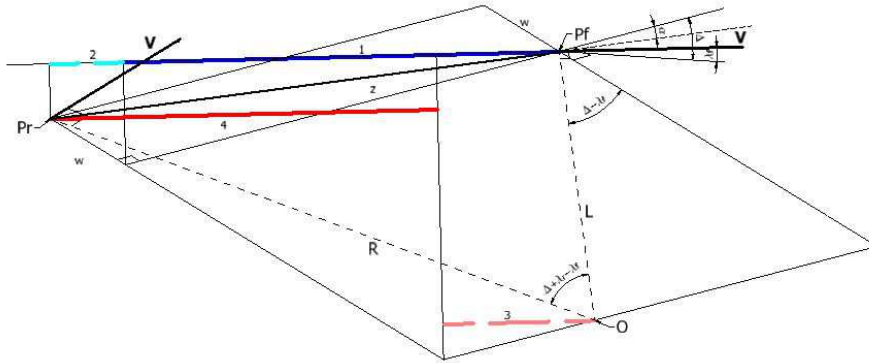


Figura 3.6: posizione dei punti di contatto e altri parametri significativi della bicicletta nel piano

contatto della ruota posteriore P_r . Da considerazioni geometriche si può legare il raggio di curvatura ai valori della coordinata del punto dell'avantreno nel sistema relativo S_{P_r} già calcolati e quindi si ottiene l'equazione che segue. In figura 3.6 sono evidenziati i singoli termini che compongono la relazione per facilitarne la comprensione:

$$\begin{array}{l}
1 \ z \cos(\Delta - \lambda_f) \\
2 \ w \sin(\Delta - \lambda_f) \\
3 \ R \sin \lambda_r \cos(\Delta - \lambda_f) \\
4 \ R \cos \lambda_r \sin(\Delta - \lambda_f)
\end{array}$$

$$\frac{1}{R_{compl}} = \Theta = \frac{\cos \lambda_r \sin(\Delta - \lambda_f) + \sin \lambda_r \cos(\Delta - \lambda_f)}{z \cos(\Delta - \lambda_f) + w \sin(\Delta - \lambda_f)} \quad (3.17)$$

$$L = \frac{R_{compl} \cos \lambda_r - w}{\cos(\Delta - \lambda_f)} \quad (3.18)$$

da cui possono ricavarsi le coordinate dei punti di contatto:

$$X_{pr} = -R_{compl} \sin \lambda_r \quad (3.19)$$

$$Y_{pr} = -R_{compl} \cos \lambda_r \quad (3.20)$$

$$X_{pf} = L \sin(\Delta - \lambda_f) \quad (3.21)$$

$$Y_{pf} = -L \cos(\Delta - \lambda_f) \quad (3.22)$$

Un secondo insieme di equazioni cinematiche determina le velocità della bicicletta in funzioni della velocità di imbardata $\dot{\Psi}$.

$$V = \frac{\dot{\Psi}}{\Theta} = \Gamma_V(\varphi, \vartheta_{1z}, \vartheta_{1x}, u_{1x}, u_{1y}, \lambda_r, \lambda_f) \dot{\Psi} \quad (3.23)$$

Le velocità angolari delle ruote posteriore ed anteriori si determinano come segue:

$$\omega_r = \frac{V_x - V_{sx}}{\rho_r + q_r \cos \varphi} = -\frac{\dot{\Psi}(\kappa + 1) \cos \lambda_r}{\Theta(\rho_r + q_r \cos \varphi)} = \Gamma_{\omega_r}(\varphi, \vartheta_{1z}, \vartheta_{1x}, u_{1x}, u_{1y}, \lambda_r, \lambda_f, \kappa) \dot{\Psi} \quad (3.24)$$

$$\omega_f = \frac{\dot{\Psi} Y_{Pf} \cos \lambda_f}{\cos(\Delta - \lambda_f)(\rho_f + q_f \cos \beta)} = \Gamma_{\omega_f}(\varphi, \vartheta_{1z}, \vartheta_{1x}, u_{1x}, u_{1y}, \lambda_r, \lambda_f) \dot{\Psi} \quad (3.25)$$

3.2 Curva a velocità costante

A partire dalle analisi geometriche effettuate precedentemente e alle considerazioni fatte per quanto riguarda la cerniera flessibile il passo successivo consiste nel risolvere la cinetostatica in condizioni di steady-state turning.

Per quanto riguarda il modello (a parte la cerniera flessibile) e le ipotesi prese saranno identiche a quelle della bicicletta classica.

Di seguito viene rappresentata la bicicletta compliant e tutte le forze che agiscono su di essa in percorrenza di una curva a velocità costante:

Nello sviluppo dell'equazione di curva a velocità costante la velocità di imbardata, l'angolo di rollio, le variabili che descrivono la posizione della cerniera flessibile e gli angoli di slittamento sono costanti. Perciò il set di equazioni dinamiche diventano

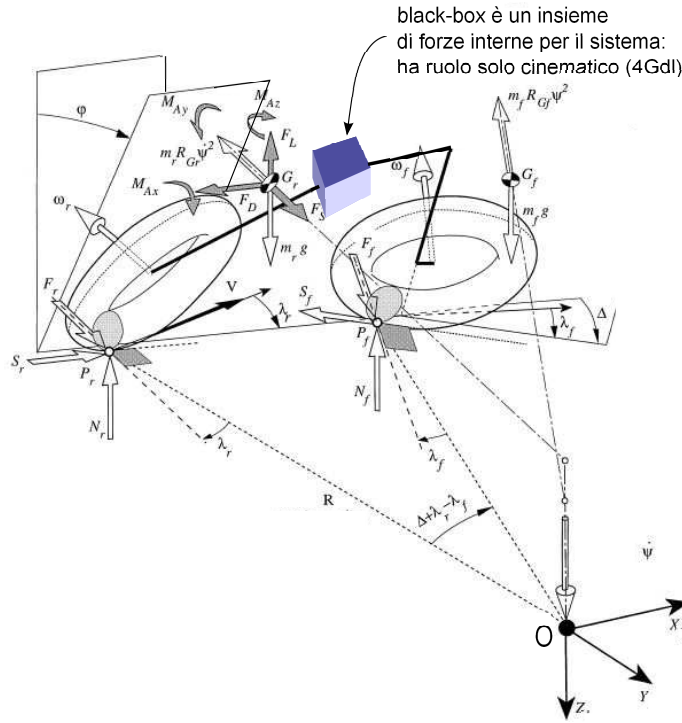


Figura 3.7: bicicletta a 4 Gdl in curva a velocità costante

equazioni algebriche e risulta comodo usare, per scrivere la cinetostatica, l'approccio basato sulle equazioni di D'Alémbert:

$$\mathbf{F}_{Gr} + \mathbf{F}_{Gf} + \mathbf{F}_{Rr} + \mathbf{F}_{Rf} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}_G \quad (3.26)$$

dove \mathbf{F}_{Gr} e \mathbf{F}_{Gf} sono forze gravitazionali sul telaio posteriore (compresa la ruota posteriore) e telaio anteriore (compresa la ruota anteriore) rispettivamente; \mathbf{F}_{Rr} , \mathbf{F}_{Rf} sono reazioni della strada sui pneumatici anteriori e posteriori rispettivamente; \mathbf{F}_A è la forza aerodinamica sul telaio posteriore, m è la massa totale e \mathbf{a}_G è l'accelerazione del centro di massa. Nel sistema di equazioni non rientra la cerniera flessibile visto che risulta essere una forza interna per il sistema in esame.

Questa equazione vettoriale viene espressa nelle sue componenti rispetto al sistema di riferimento $S_{O_2} = (\mathbf{O}_2; x_{O_2}, y_{O_2}, z_{O_2})$:

$$\begin{cases} -F_D + S_r - S_f \cos \Delta - F_f \sin \Delta + F_{inerzia} = 0 \\ F_r + F_f \cos \Delta - S_f \sin \Delta + F_S \cos \varphi + F_L \sin \varphi + F_{inerzia} = 0 \\ -N_r - N_f + F_S \sin \varphi - F_L \cos \varphi + (m_r + m_f)g = 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda il modello che descrive il contatto pneumatico-asfalto vale tutto quanto già detto per la bicicletta classica; ci si limita soltanto a riportare le formule per completezza. L'obiettivo iniziale infatti non è quello di determinare un modello estremamente complicato che descriva nei minimi dettagli il comportamento della bicicletta in assoluto ma bensì fornire degli strumenti per poter valutare in base ad un confronto il progetto della cerniera flessibile. Questo permette dunque di poter considerare, senza

che costituisca un limite, un modello semplificato nel descrivere il contatto pneumatico-asfalto. Visto che la progettazione si baserà su un confronto tra la bicicletta classica e compliant e poichè in entrambe, non a caso, si considerano le stesse ruote, la scelta del modello non costituisce una variabile progettuale.

modello pneumatici-asfalto
lineare

$$F_r = (k_\varphi \varphi + k_{\lambda_r} \lambda_r) F_z \quad (3.27)$$

$$F_f = (k_\beta \beta + k_{\lambda_f} \lambda_f) F_z \quad (3.28)$$

$$S_f = \mu_f N_f \quad (3.29)$$

$$S_r = \mu_r(\kappa) N_r \quad (3.30)$$

$$M_{z_{r,f}} = -t_{r,f} F_{r,f} - sp S_{r,f} + M_{T_{z_{r,f}}}(\varphi(\beta)) \quad (3.31)$$

$$M_{y_{r,f}} = d_{r,f} N_{r,f} = \mu_{r,f} r_{r,f} N_{r,f} \quad (3.32)$$

$$M_{x_{r,f}} = -sp N_{r,f} \quad (3.33)$$

$$t_{r,f} = t_{o_{r,f}} \left(1 - \left| \frac{\lambda_{r,f}}{\lambda_{max_{r,f}}} \right| \right) \quad (3.34)$$

dove N_r , N_f sono i carichi verticali delle ruote; le forze F_r , F_f forze laterali dei pneumatici; S_r , S_f le forze longitudinali; F_D , F_S , F_L rispettivamente forza aerodinamica di trascinamento, laterale e di sollevamento; m_r , m_f masse di avantreno e retrotreno compreso ciclista e X_{Gr} , Y_{Gr} , Z_{Gr} e X_{Gf} , Y_{Gf} , Z_{Gf} le coordinate dei centri di massa nel sistema di riferimento S_{O_2} . Le cui componenti si calcolano definendo ulteriori matrici oltre quelle già usate per descrivere la cinematica pura della bicicletta:

$$\mathbf{M}_{(\mu-\vartheta,y)} = \begin{pmatrix} \cos(\mu - \vartheta) & 0 & \sin(\mu - \vartheta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\mu - \vartheta) & 0 & \cos(\mu - \vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(1,Pr)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -R_{mecc} \sin \lambda_r \\ 0 & 1 & 0 & -R_{mecc} \cos \lambda_r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(B,Gr)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(B,C)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{(E,Gf)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_f \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{1,Gr} = M_{(1,Pr)}M_{(Pr,\psi,z)}M_{(Pr,A,z)}M_{(A,\varphi,x)}M_{(A,B,z)}M_{(B,\mu,y)}M_{(B,Gr)} \quad (3.35)$$

$$M_{1,Gf} = M_{(1,Pr)}M_{(Pr,\psi,z)}M_{(Pr,A,z)}M_{(A,\varphi,x)}M_{(A,B,z)}M_{(\mu-\vartheta,y)}M_{(B,C)}M_{(C,\varepsilon,y)} \\ M_{(C,D,\theta_{1z},x_{mc},y_{mc})}M_{(D,E)}M_{(E,Gf)} \quad (3.36)$$

$$X_{Gr} = M_{1,Gr}(1,4); \quad (3.37)$$

$$Y_{Gr} = M_{1,Gr}(2,4); \quad (3.38)$$

$$Z_{Gr} = M_{1,Gr}(3,4); \quad (3.39)$$

$$X_{Gf} = M_{1,Gf}(1,4); \quad (3.40)$$

$$Y_{Gf} = M_{1,Gf}(2,4); \quad (3.41)$$

$$Z_{Gf} = M_{1,Gf}(3,4); \quad (3.42)$$

L'equazione del momento angolare attorno a C per il sistema di corpi rigidi è:

$$\mathbf{M}_{Gr} + \mathbf{M}_{Gf} + \mathbf{M}_{Rr} + \mathbf{M}_{Rf} + \mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{J}}_r + \dot{\mathbf{J}}_f + \dot{\mathbf{J}}_{Wr} + \dot{\mathbf{J}}_{Wf} \quad (3.43)$$

I termini di sinistra sono la coppia delle forze aerodinamiche \mathbf{M}_A , le coppie di forze di gravità \mathbf{M}_{Gr} , \mathbf{M}_{Gf} , e le coppie di reazione forze \mathbf{M}_{Rr} , \mathbf{M}_{Rf} ; i termini di destra sono le derivate temporali del momento angolare dei quattro corpi rigidi rispetto al sistema di riferimento S_{O_2} ; $\dot{\mathbf{J}}_r$ è il momento angolare del telaio posteriore (inclusa la ruota posteriore) causato dalla velocità di imbardata; $\dot{\mathbf{J}}_f$ rappresenta la stessa grandezza per l'avantreno e ruota anteriore; infine $\dot{\mathbf{J}}_{Wr}$ e $\dot{\mathbf{J}}_{Wf}$ sono i momenti angolari delle due ruote causati dalle velocità di rotazione.

Per poter esprimere l'equazione del momento angolare in forma di componenti rispetto al sistema di riferimento S_{O_2} , bisogna calcolare le componenti del momento angolare e la derivata nel tempo del momento angolare dei telai anteriore e posteriore.

$$\mathbf{J}_{r(\text{rel})} = \begin{pmatrix} I_{xr} & 0 & I_{x zr} & 0 \\ 0 & I_{yr} & 0 & 0 \\ I_{x zr} & 0 & I_{zr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_r \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{f(\text{rel})} = \begin{pmatrix} I_{xf} & 0 & I_{x zf} & 0 \\ 0 & I_{yf} & 0 & 0 \\ I_{x zf} & 0 & I_{zf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_f \end{pmatrix}$$

$$J_{r(1)} = M_{1,Gr} J_{r(\text{rel})} M_{1,Gr}^T \quad (3.44)$$

$$J_{f(1)} = M_{1,Gf} J_{f(\text{rel})} M_{1,Gf}^T; \quad (3.45)$$

$$\mathbf{L}_{(1,G)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{(1,Gr)} = L_{(1,G)} \dot{\Psi}^2; \quad (3.46)$$

$$H_{(1,Gf)} = L_{(1,G)} \dot{\Psi}^2; \quad (3.47)$$

$$\Phi_r = -(H_{(1,Gr)}J_{r(1)} - J_{r(1)}H_{(1,Gr)}^T); \quad (3.48)$$

$$\Phi_f = -(H_{(1,Gf)}J_{f(1)} - J_{f(1)}H_{(1,Gf)}^T); \quad (3.49)$$

Il momento angolare di entrambe le ruote dovuto alla velocità di rotazione omegar velocità è un vettore parallelo all'asse di rotazione e le componenti di questo vettore e le derivate, rappresentati nel sistema di coordinate S_{O_2} , sono:

$$\mathbf{K}_{\omega r(1)} = Rfi \begin{pmatrix} 0 \\ I_{\omega r}\omega_{r(in)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\omega f(1)} = R_{1,relf} \begin{pmatrix} 0 \\ I_{\omega f}\omega_{f(in)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}(\Omega_{in}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{K}}_{\omega r(1)} = P(\Omega_{in})\mathbf{K}_{\omega r(1)} \quad (3.50)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_{\omega f(1)} = P(\Omega_{in})\mathbf{K}_{\omega f(1)} \quad (3.51)$$

Dopo che i calcoli di cui sopra sono stati completati, si ottengono le seguenti equazioni di momento angolare in forma di componente:

$$\left\{ \begin{array}{l} -N_r Y_{Pr} - N_f Y_{Pf} + F_S Y_{Gr} \sin \varphi - F_L Y_{Gr} \cos \varphi + (m_r Y_{Gr} + m_f Y_{Gf})g - F_S Z_{Gr} \cos \varphi + \\ - F_L Z_{Gr} \sin \varphi + M_{Ax} - M_{yf} \sin \Delta - \dot{\mathbf{K}}_{\omega r(1)}(1) - \dot{\mathbf{K}}_{\omega f(1)}(1) + M_{inerzia} = 0 \\ N_r X_{Pr} + N_f X_{Pf} - F_S X_{Gr} \sin \varphi + F_L X_{Gr} \cos \varphi - (m_r X_{Gr} + m_f X_{Gf})g + M_{Ay} \cos \varphi + \\ - M_{Az} \sin \varphi + M_{yr} \cos \Delta + M_{yf} - \dot{\mathbf{K}}_{\omega r(1)}(2) - \dot{\mathbf{K}}_{\omega f(1)}(2) - F_D Z_{Gr} + M_{inerzia} = 0 \\ F_r X_{Pr} + F_f \cos \Delta X_{Pf} - S_f \sin \Delta X_{Pf} + S_f \cos \Delta Y_{Pf} + F_S X_{Gr} \cos \varphi + F_L X_{Gr} \sin \varphi + \\ + M_{Az} \cos \varphi + M_{Ay} \sin \varphi + F_D Y_{Gr} + M_{zf} + M_{zr} - S_r Y_{Pr} + M_{inerzia} = 0 \end{array} \right.$$

dove $X_{Pr}, Y_{Pr}, X_{Pf}, Y_{Pf}$ sono le coordinate di Pr e Pf in S_{O_2} ; M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az} sono i componenti della coppia aerodinamica (x_r, y_r, z_r); M_{yr}, M_{zr} sono le coppie sul pneumatico posteriore; M_{yf}, M_{zf} sono le coppie sul pneumatico anteriore.

Le relazioni definite rappresentano un set di 13 equazioni algebriche non lineari in 13 incognite (vedi tabella sotto) che devono essere risolte numericamente per i valori assegnati di rollio(φ) e delle variabili che descrivono la posizione data dal sistema sterzo ($\vartheta_{1z}, \vartheta_{1x}, u_{1x}, u_{1y}$).

Equazioni		Incognite
3	$\Sigma F = 0$	5 forze di reazione
3	$\Sigma M = 0$	V
1	$V = \Gamma_V(\varphi, \vartheta_{1z}, \vartheta_{1x}, u_{1x}, u_{1y}, \lambda_r, \lambda_f) \dot{\Psi}$	λ_r
1	$\omega_r = \Gamma_{\omega_r}(\varphi, \vartheta_{1z}, \vartheta_{1x}, u_{1x}, u_{1y}, \lambda_r, \lambda_f, \kappa) \dot{\Psi}$	λ_f
1	$\omega_f = \Gamma_{\omega_f}(\varphi, \vartheta_{1z}, \vartheta_{1x}, u_{1x}, u_{1y}, \lambda_r, \lambda_f) \dot{\Psi}$	κ
1	$F_r = f(\lambda, \varphi)$	Θ
1	$F_f = f(\lambda, \beta)$	$\dot{\Psi}$
1	$S_r = f(\kappa)$	ω_r
1	$M_z = f(\lambda, \varphi)$	ω_f

Il metodo risolutivo adottato è descritto di seguito:

1. In primo luogo, le quantità di slittamento sono impostate a zero, e le equazioni di curvatura costante diventano un sistema lineare di sei equazioni nelle sei incognite: $N_r, N_f, F_r, F_f, S_r, \dot{\Psi}^2$, che sono calcolate risolvendo il seguente sistema lineare.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_f \cos \Delta & 0 & -\sin \Delta & 1 & a(1,6) \\ 0 & -\mu_f \sin \Delta & 1 & \cos \Delta & 0 & a(2,6) \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a(3,6) \\ -Y_{Pr} & -Y_{Pf} - \mu_f r_f \sin \Delta & 0 & 0 & 0 & a(4,6) \\ X_{Pr} + m_r r_r & X_{Pf} + \mu_f r_f \cos \Delta & 0 & 0 & 0 & a(5,6) \\ a\varphi & a(6,2) & X_{Pr} - t_r & a(6,4) & -Y_{Pr} - sp & a(6,6) \end{pmatrix}$$

$$a(1,6) = \Phi_r(1,4) + \Phi_f(1,4) - F_D$$

$$a(2,6) = \Phi_r(2,4) + \Phi_f(2,4) + F_L \sin \varphi$$

$$a(3,6) = \Phi_r(3,4) + \Phi_f(3,4) + F_L \cos \varphi$$

$$a(6,2) = -\mu_f(X_{Pf} \sin \Delta - Y_{Pf} \cos \Delta + sp) + b\beta$$

$$a(6,4) = X_{Pf} \cos \Delta + Y_{Pf} \sin \Delta - t_f$$

$$a(6,6) = F_D Y_{Gr} + F_L X_{Gr} \sin \varphi + M_{Ay} \sin \varphi$$

$$a(5,6) = \Phi_r(1,3) + \Phi_f(1,3) - F_D Z_{Gr} + F_L X_{Gr} \cos \varphi + M_{Ay} \cos \varphi - \dot{K}_{\omega_f}(2) - \dot{K}_{\omega_r}(2)$$

$$a(4,6) = \Phi_r(3,2) + \Phi_f(3,2) - F_L(Y_{Gr} \cos \varphi + Z_{Gr} \sin \varphi) - \dot{K}_{\omega_f}(1) - \dot{K}_{\omega_r}(1)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_S \cos \varphi \\ -F_S \sin \varphi - (m_r + m_f)g \\ -M_{Ax} - F_S(-Z_{Gr} \cos \varphi + Y_{Gr} \sin \varphi) - g(m_r Y_{Gr} + m_f Y_{Gf}) \\ M_{Az} \sin \varphi + F_S X_{Gr} \sin \varphi + g(m_r X_{Gr} + m_f X_{Gf}) - M_{Az} \cos \varphi - F_S X_{Gr} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}B \quad (3.52)$$

$$x = \begin{pmatrix} N_r \\ N_f \\ F_r \\ F_f \\ S_r \\ \Omega \end{pmatrix}$$

2. Utilizzando il modello lineare dei pneumatici è stata fatta una prima stima dei quantitativi di slittamento.
3. Poiché le quantità di slittamento sono ora definite, entrambe le variabili di posizione e coefficienti di velocità possono essere calcolati separatamente.
4. Le equazioni di curvatura costante sono ancora una volta un sistema lineare di sei equazioni nelle sei incognite $N_r, N_f, F_r, F_f, S_r, \dot{\Psi}^2$, e quindi possono essere calcolati i nuovi valori di $N_r, N_f, F_r, F_f, S_r, \dot{\Psi}^2$. Utilizzando le formule dei pneumatici, viene fatta una nuova stima delle quantità di slittamento che viene confrontata con quella iniziale. Le differenze si chiamano residui. Il processo viene ripetuto tante volte quanto è necessario per ottenere dei residui al di sotto di una soglia prefissata.

3.3 Analisi risultati attivando nuovi gradi di libertà

Si andrà ora ad analizzare i vantaggi e svantaggi cinematici che derivano nell'attivare i Gdl aggiuntivi partendo dalle stesse condizioni della bicicletta classica. Dalla stessa posizione in termini di rollio e angolo di sterzo si vuole capire che effetto ha l'introduzione di una rotazione o spostamento aggiuntivo allo sterzo.

3.3.1 Analisi traslazione laterale

Si confrontano i raggi di curvatura per una bicicletta classica e compliant che sono dal punto di vista geometrico uguali. Entrambe compiono la curva con lo stesso angolo di sterzata $\vartheta_{1z} = 30^\circ$ e angolo di rollio $\varphi = 3^\circ$ ma quella compliant ha lo sterzo traslato di $u_{1y} = 0.1m$.

Dalle figure si vede come la bicicletta compliant fa una traiettoria più larga di quella classica. La spiegazione di questo comportamento è da ricercare andando ad analizzare la posizione del punto di contatto della ruota anteriore delle due biciclette: quella compliant avendo il punto di contatto spostato più a destra (v. figura 3.10) andrà ad identificare un punto più lontano come centro di rotazione. Questo è facilmente verificabile se si trascurano i piccoli angoli di slittamento laterali e quindi si immagina di fare le due linee parallele che definiscono l'intersezione del piano dell'avantreno ed il terreno per poi disegnare quelle perpendicolari e passanti per il punto di contatto P_f . In figura 3.11 viene proposta questa rappresentazione esemplificativa del centro di curvatura considerando angoli di slittamento nulli.

Per valutare in diverse condizioni come cambia il comportamento in curva effettivo, si faccia riferimento alla figura 3.13 in cui si visualizza la variazione della differenza di curvatura tra la bicicletta classica e quella compliant in funzione dell'angolo di rollio, di sterzo e la traslazione u_{1y} .

Si vede che per piccoli angoli di sterzo la bicicletta compliant fa curve più strette a pari angolo di sterzo e rollio proprio grazie alla traslazione u_{1y} , essendo $R_{compliant} - R_{classica} < 0$.

Inoltre al aumentare del rollio l'effetto negativo legato alla traslazione sembra scomparire. Infatti la curva delle differenze si annulla ad angoli di rollio sempre maggiori

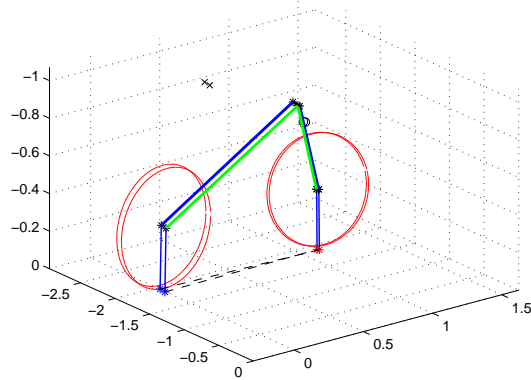


Figura 3.8: rappresentazione del confronto in curva tra biciletta classica e sterzo-traslazione trasversale

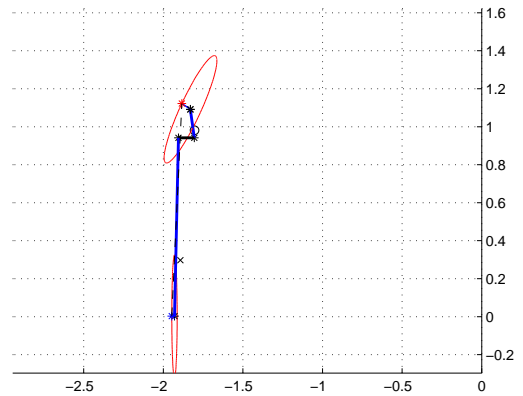


Figura 3.9: vista dall'alto bici sterzo-traslazione trasversale

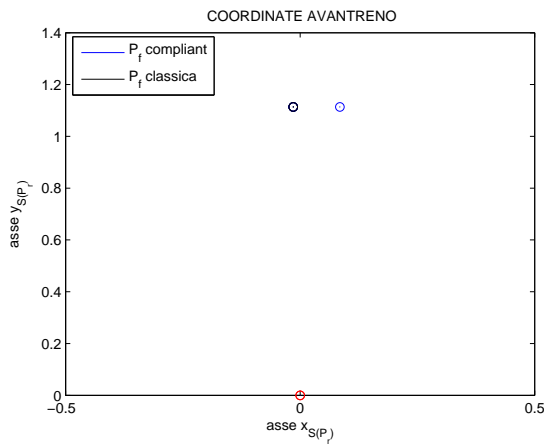


Figura 3.10: coordinate punto di contatto bici classica vs. bici sterzo-traslazione trasversale

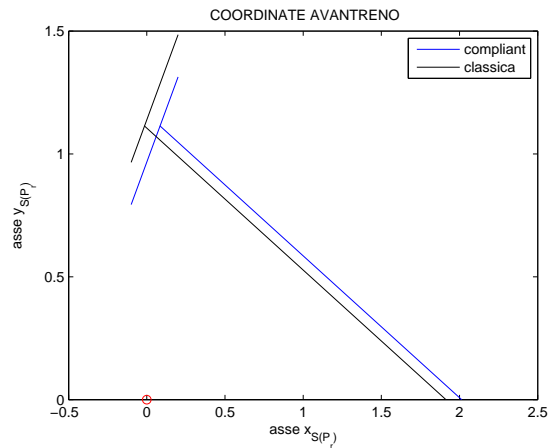


Figura 3.11: individuazione semplice del raggio di curvatura

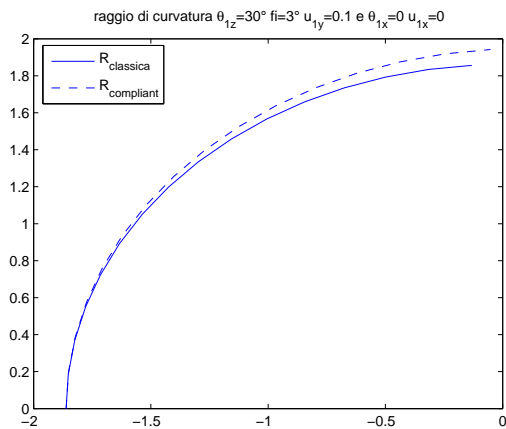


Figura 3.12: traiettoria bici classica vs. bici sterzo-traslazione trasversale

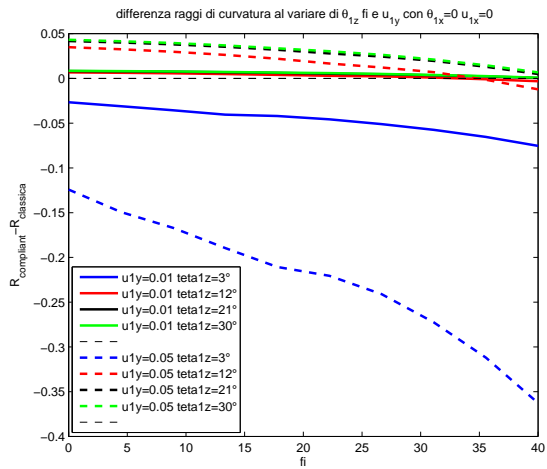


Figura 3.13: differenza $R_{compliant} - R_{classica}$

per angoli di sterzo grandi. Per traslazioni u_{1y} crescenti l'effetto è lo stesso ma scalato (linea tratteggiata).

variabile	intervallo e discretizzazione	
φ	$[0 \ 40^\circ]$	10
ϑ_{1x}	0	0
ϑ_{1z}	$[3^\circ \ 30^\circ]$	4
u_{1x}	0	0
u_{1y}	$[0.01 \ 0.05]$	2

3.3.2 Analisi traslazione longitudinale

Per quanto riguarda traslazione longitudinale non c'è bisogno di un'analisi approfondita infatti studiare una bicicletta in cui è permesso cambiare u_{1x} è come analizzare la stessa bicicletta classica ma con passo più corto o più grande e quindi non presenta niente di nuovo: farà curve più strette se, nelle stesse condizioni, si trasla lo sterzo in modo che abbia un passo più corto. Nelle figure 3.14, 3.15 è riportato un esempio.

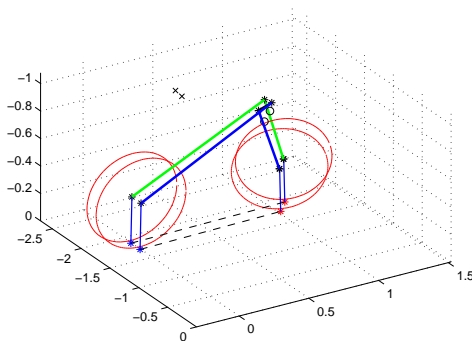


Figura 3.14: rappresentazione del confronto in curva tra bicicletta classica e sterzo-traslazione longitudinale

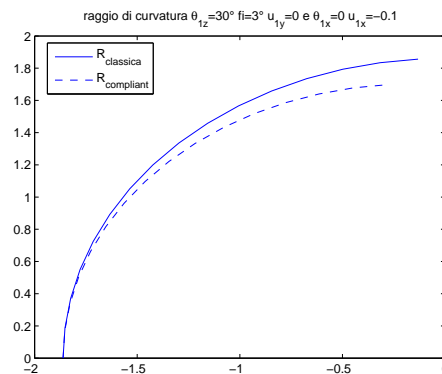


Figura 3.15: traiettoria bici classica vs. bici sterzo-traslazione longitudinale

3.3.3 Analisi torsione

L'ultimo Gdl utile è quello che riguarda una possibile torsione dello sterzo. Gli effetti sul raggio di curvatura come si vede dalle figure successive è, a parità di tutto il resto, trascurabile sebbene il punto di contatto della ruota subisca un sostanziale cambiamento di posizione. Infatti nella figura 3.17 le traiettorie sono pressochè identiche; nella figura 3.18 invece si vede come il punto di contatto della bicicletta con sterzo torcente è piuttosto lontano da quello della bicicletta classica. Facendo la stessa analisi del caso della traslazione trasversale si trova il raggio di curvatura per le due bici trascurando gli slittamenti trasversali (λ_r, λ_f). Si vede come la posizione del punto è tale da non cambiare il raggio di curvatura perchè la rotazione attorno a x dello sterzo sposta il punto di contatto lungo la retta che determina la curvatura.

Dal grafico 3.19 si vede come una variazione di ϑ_{1x} non ha effetto sul raggio di curvatura.

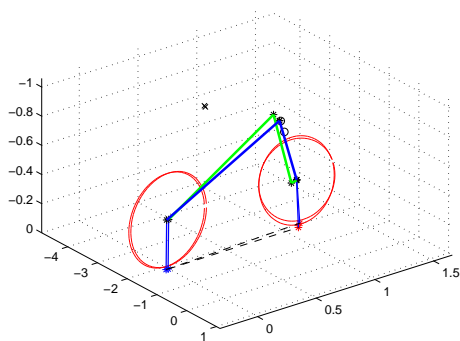


Figura 3.16: rappresentazione del confronto in curva tra bicicletta classica e sterzo-torsione

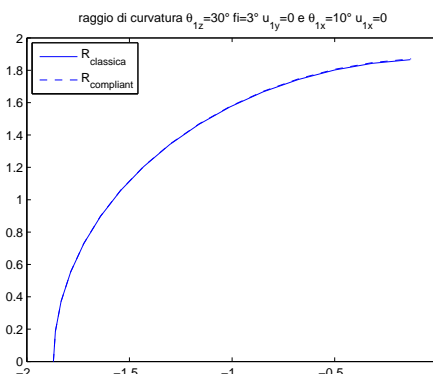


Figura 3.17: traiettoria bici classica vs. bici sterzo-torsione

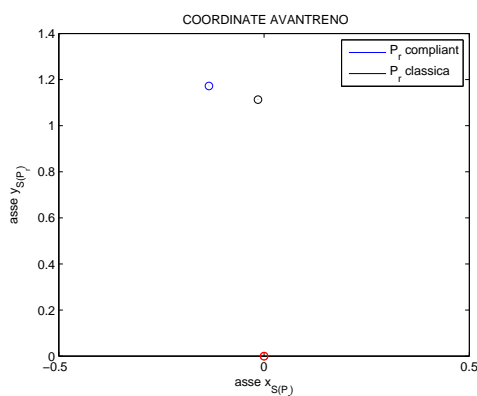


Figura 3.18: coordinate punto di contatto bici classica vs. bici sterzo-torsione

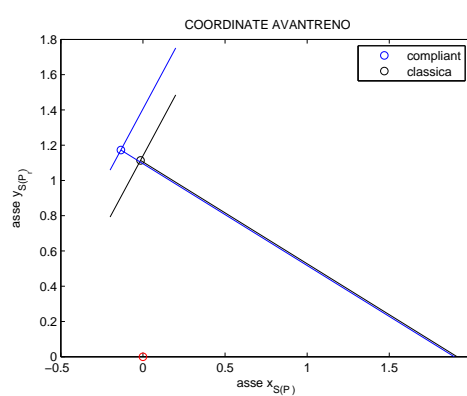


Figura 3.19: individuazione semplice del raggio di curvatura

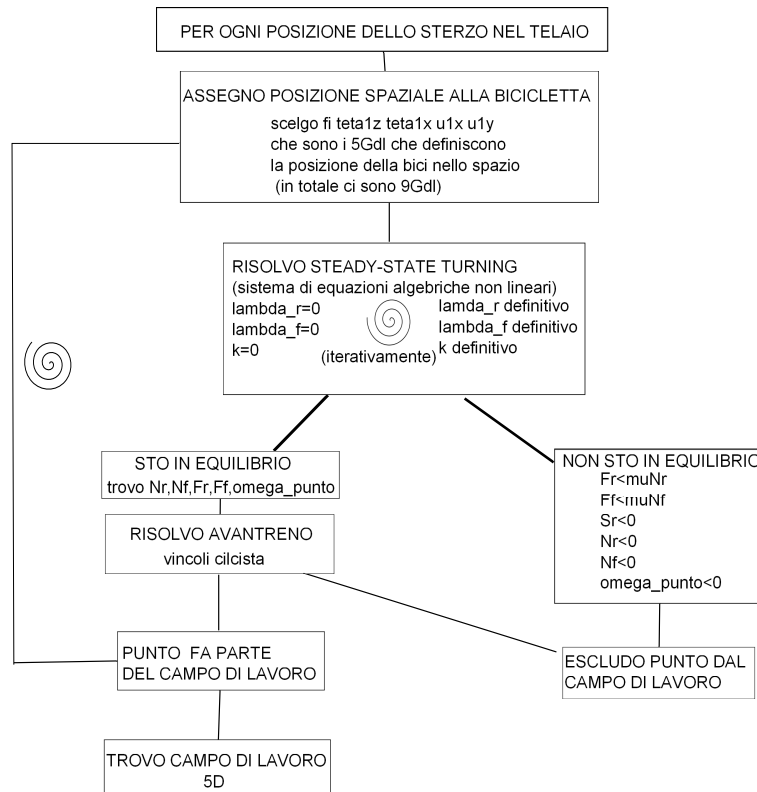
Le piccole differenze tra i due raggi di curvatura sono dovute al fatto che la bicicletta con ϑ_{1x} , che si trova in un'altra posizione a causa di un diverso angolo di beccheggio. In particolare il raggio di curvatura della bicicletta a più GdL risulta più grande rispetto alla bicicletta classica.

3.4 Definizione campo di lavoro generico

Le condizioni di equilibrio stazionario di una bicicletta in curva possono essere rappresentate nel diagramma curvatura-velocità di avanzamento. Lo scopo della tesi è riuscire a definire un metodo efficace per poter, in base ad un confronto, valutare le nuove prestazioni di un nuovo progetto di bicicletta rispetto a quella classica. A tal proposito del diagramma curvatura-velocità di avanzamento interessa valutare non tanto i punti interni di equilibrio quanto definire il contorno in modo da introdurre il concetto di spazio di lavoro, molto adoperato per valutare le prestazioni di robot, allo studio della bicicletta.

A tal proposito in seguito viene presentato in forma schematica il metodo usato per definire il campo di lavoro per una bicicletta generica (di cui la bici classica è un sottocaso con una particolare matrice di rigidità). Lo schema che segue non è nient'altro che la schematizzazione logica del programma di calcolo, le cui soluzioni (campo di lavoro in

primis) rappresenteranno lo strumento con cui si potrà confrontare tra di loro diversi tipi di bicicletta.



3.5 Conclusioni

Si sono quindi analizzati gli effetti dei Gdl del nuovo sterzo presi singolarmente. Chiaramente nel progettare una cerniera flessibile reale, qualsiasi essa sia, si vanno ad accoppiare questi effetti. Qui non è possibile valutare tutti i possibili casi ma nel capitolo successivo verrà analizzata nel dettaglio la progettazione di una piastra come cerniera flessibile e si potranno studiare i loro effetti combinati per quel caso particolare. Questo studio è stato utile per avere indicazione su come si potrebbe agire sui Gdl per cambiare il raggio di curvatura e capire come viene spostato il punto di contatto della ruota anteriore. Questo aiuta quindi a capire in fase di progettazione della reale cerniera flessibile come cercare prestazioni migliori o risolvere determinati problemi di equilibrio. Inoltre questa valutazione, che prescinde dal tipo di sistema sterzo, è esclusivamente basata sull'analisi dei raggi di curvatura, infatti bisogna tener presente che questa bicicletta sarà possibile guidarla a seconda anche di come cambiano le forze che percepisce o che deve dare il pilota. Questo studio può essere fatto non in assoluto, ma dipende dal singolo caso che si sceglie di progettare, anche a seconda degli scopi.

CAPITOLO 4

LA BICICLETTA COMPLIANT-PIASTRA

Lo studio teorico presentato in precedenza, che vede la bicicletta dotata di uno sterzo a più Gdl, si propone come stimolo per ripensare il semplice canotto di sterzo attraverso nuove soluzioni costruttive. In particolare per le caratteristiche del problema si è trovato nei meccanismi compliant lo strumento più adatto per sfruttare le nuove potenzialità progettuali. Infatti attraverso la progettazione di un opportuno sistema deformabile si potrebbe realizzare un telaio a pezzo unico, magari attraverso il semplice ritaglio della bicicletta da una lamiera. A tal proposito, dopo una prima fase di valutazione tra diverse tipologie di cerniere flessibili, gli sforzi si sono concentrati nella progettazione di una piastra tale per cui venisse minimizzato il peso degli svantaggi sul sistema e al contempo la bicicletta potesse rimanere guidabile. Un'applicazione come la bicicletta, anche se si ipotizza di poter stravolgere il telaio, presenta di per sé dei limiti progettuali non indifferenti dal momento che è un sistema instabile; l'interazione reale tra pilota e bicicletta è estremamente complessa e soprattutto le forze allo sterzo, come dimostrato per la bicicletta classica, sono il risultato di grandi termini in modulo di segno opposto. Inoltre bisogna osservare che non è possibile progettare il sistema sterzo in maniera indipendente: infatti a seconda della soluzione costruttiva cambiano i vincoli tra i Gdl dello sterzo, ciò comporta un diverso comportamento cinematico della bicicletta, che in funzione di questo andrà a sollecitare in un determinato modo il sistema sterzo. Quello che segue quindi è una delle possibili applicazioni che darà le prime indicazioni sulla direzione che deve prendere la progettazione di una cerniera flessibile per il sistema bicicletta.

Con il termine cerniera flessibile si farà riferimento all'elemento deformabile della bicicletta, per riferirci al sistema nel suo complesso si userà il termine *bicicletta compliant*. Quando come cerniera flessibile si considererà una piastra si parlerà di *bicicletta compliant-piastra*. Il metodo di progetto presentato si basa sul confronto con la bicicletta classica. Si procederà quindi nel modo seguente: dopo una valutazione tra diverse soluzioni costruttive, si stabilirà il modello di cerniera flessibile piastra che verrà integrato al modello bicicletta con sterzo a più Gdl definito nel capitolo precedente, e si valuteranno tutte le variabili progettuali determinando la fattibilità o meno del sistema così pensato.

4.1 Cerniera flessibile

4.1.1 Descrizione e teoria

L'effettivo legame che intercorre tra retrotreno e avantreno sarà determinato dai vincoli rappresentati dalla cerniera flessibile. La formulazione matematica per questo tipo di

sistemi si basa sul principio della reciprocità che descrive le proprietà nelle relazioni carico-deformazioni nei sistemi elastici lineari. Una conseguenza diretta delle caratteristiche che regolano il comportamento dei corpi lineari elastici è il cosiddetto principio di sovrapposizione lineare. Secondo questo principio, la deformazione in qualsiasi punto in un corpo elastico sotto l'azione di un sistema di carico è uguale alla somma delle deformazioni prodotte da ogni carico quando agiscono separatamente. Supponendo che n carichi agiscano su un corpo elastico, la deformazione in una posizione specifica i può essere trovata come:

$$u_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} L_j \quad (4.1)$$

dove C_{ij} sono definiti coefficienti di cedevolezza che insieme costituiscono la matrice di cedevolezza $[C]$. Questa matrice metterà in relazione il vettore di deformazione $\{u\}$ al vettore di carico $\{L\}$ secondo l'equazione matriciale:

$$\{u\} = [C]\{L\} \quad (4.2)$$

L'equazione indica chiaramente che il coefficiente di cedevolezza individuale C_{ij} rappresenta la deformazione prodotta a i da un'unità di carico applicata a j . Allo stesso modo, un coefficiente C_{ji} indicherà la deformazione misurata a j come prodotta da un'unità di carico applicata a i . Tuttavia, secondo il principio di reciprocità di Maxwell, queste due deformazioni sono sempre uguali; pertanto,

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (4.3)$$

indica che la matrice $[C]$ è simmetrica. D'altra parte, il principio di sovrapposizione può essere formulato in maniera inversa per un sistema elastico lineare. In particolare, il carico che viene applicato in una determinata posizione del corpo è espresso come la somma dei carichi corrispondenti ad ogni singolo spostamento, secondo l'equazione:

$$L_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j \quad (4.4)$$

dove K_{ij} sono coefficienti di rigidità. Equazioni simili all'equazione sopra possono essere scritte per uno qualsiasi degli altri punti di interesse sul corpo elastico. Essi possono essere raccolti in un'equazione generica della forma:

$$\{L\} = [K]\{u\} \quad (4.5)$$

dove $[K]$ è la matrice di rigidità.

Il confronto delle eq. 4.2 e 4.5 indica che la matrice di rigidità $[K]$ è l'inverso della matrice di cedevolezza $[C]$:

$$[K] = [C]^{-1} \quad (4.6)$$

che è infatti possibile perché, la matrice di cedevolezza $[C]$ risulta essere quadrata e simmetrica. Questo implica che la matrice di cedevolezza $[C]$ non è singolare; pertanto ha sempre un inverso, che è la matrice di rigidità $[K]$. Vengono presentati due metodi possibili per determinare i coefficienti di cedevolezza:

modellazione tramite formulazione matematica esatta: la prima comprende quelle cerniere per cui la formulazione matematica risulta semplice e quindi possono essere facilmente modellate applicando il secondo teorema di Castigliano.

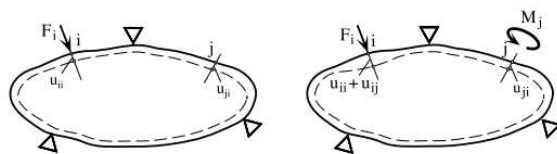


Figura 4.1: generico corpo elastico

modellazione tramite FEM: la seconda comprende quelle cerniere per cui la forma geometrica complessa rende difficile la loro modellazione matematica esatta. Si possono descrivere elementi molto complessi.

4.1.2 Confronto tra cerniere flessibili

Qualunque dei due metodi venga usato le cerniere flessibili possono essere progettate e analizzate in base alla loro efficacia durante il funzionamento secondo i seguenti criteri, nel tentativo di valutare le prestazioni e la bontà della soluzione costruttiva per il sistema bicicletta:

1. Capacità di rotazione: criterio che si basa nel valutare i singoli valori di cedevolezza che rappresentano quanto una forza deforma in una certa direzione la cerniera flessibile.
2. Efficienza energetica: questo criterio si basa su un approccio energetico per valutare le performance delle diverse cerniere flessibili. Infatti viene definito un “rendimento” come rapporto tra il lavoro effettivamente utile a produrre la rotazione effettiva, che si calcola come il lavoro necessario per torcere un giunto flessibile ideale che possiede solo rigidità torsionale, e il lavoro dato dalle forze che agiscono effettivamente sulla cerniera reale:

$$\eta = \frac{W_{out}}{W_{in}} \quad (4.7)$$

3. Sensibilità ai carichi parassiti: criterio che si basa sulla formulazione di coefficiente detti di “flessione” che vede al numeratore i coefficienti di cedevolezza che sono proporzionali alla capacità di rotazione della cerniera flessibile e si vorrebbe che fossero il più grandi possibile, mentre si scelgono al denominatore coefficiente che si vuole siano piccoli, poichè descrivono effetti non voluti.

4.1.3 Alcune soluzioni costruttive

Modellazione tramite formulazione matematica esatta

Un corpo elastico subisce deformazioni sia lineari che angolari sotto l’azione di carichi esterni e reazioni vincolari.

Lo spostamento lineare al punto i è espresso in termini di forza F_i che agisce in quella posizione come:

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (4.8)$$

In cui U rappresenta l'energia di deformazione necessaria perchè la forza mi dia uno spostamento. Allo stesso modo, la deformazione angolare è espressa in termini di momento M_j agendo al punto j come:

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \quad (4.9)$$

Quando la deformazione deve essere valutata in un punto in cui non vi sia carico esterno/reazione vincolare, viene artificialmente applicato un carico fittizio, corrispondente al tipo di deformazione ricercata e la deformazione lineare o angolare è determinata utilizzando equazioni simili alle due già date. La deformazione al punto k in figura 4.1 sopra può essere trovata introducendo il carico fittizio F_k^* nella forma:

$$u_k = \frac{\partial U}{\partial F_k^*} \quad (4.10)$$

Analogamente, la rotazione in un altro punto l sul corpo elastico quando non c'è nessun momento in quella posizione è data da:

$$\theta_l = \frac{\partial U}{\partial M_l^*} \quad (4.11)$$

dove M_l^* è un momento fittizio.

L'energia di deformazione per un elemento lungo e snello che è generalmente sottoposto a flessione, taglio, carico assiale e torsione è espressa come:

$$U = U_{flessione} + U_{assiale} + U_{torcente} + U_{taglio} \quad (4.12)$$

1. Nel caso di forze che generano sforzi normali (flessione e assiale) il lavoro di deformazione viene calcolato come l'area sottesa alla curva sforzo-deformazione:

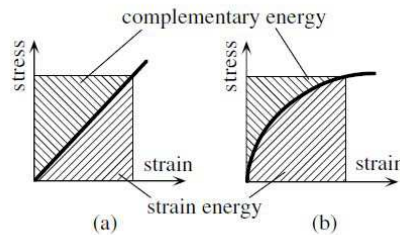


Figura 4.2: curve sforzo-deformazione

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon dV \quad (4.13)$$

2. Nel caso di sollecitazioni di taglio, le corrispondenti deformazioni, dette scorrimento, si indicano con γ . Per i materiali elastici lineari la legge di Hooke per il taglio esprime una proporzionalità tra τ e γ per mezzo della caratteristica G , detta modulo di elasticità tangenziale:

$$\tau = G\gamma \quad (4.14)$$

con G che è legato al modulo di elasticità E attraverso la relazione:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.15)$$

in cui ν è il coefficiente di Poisson.

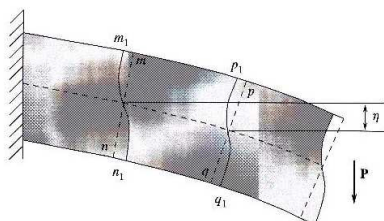


Figura 4.3: ingobbamento della sezione dovuto al taglio

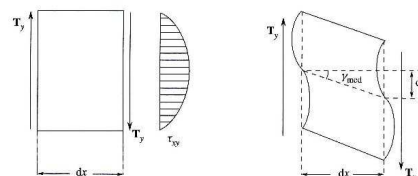


Figura 4.4: scorrimento medio

L'ingobbamento di un solido soggetto a taglio costante lungo il suo asse è uguale per tutte le sezioni. Lo spostamento relativo η tra due sezioni adiacenti può essere valutato per mezzo della deformazione media γ_{medio} attraverso le seguenti formule:

$$d\eta = \gamma_{medio} dx \quad \gamma_{medio} = \frac{\chi T}{GA} \quad (4.16)$$

dove χ è una costante, detta fattore di taglio, che dipende dalla forma della sezione.

In questo caso quindi la formula per il calcolo del lavoro di deformazione dovuta al taglio assume la forma:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \tau \gamma_{medio} dV \quad (4.17)$$

Questa deformazione dovuta al taglio risulta possibile trascurarla a seconda che la cerniera di flessione reagisca come un beam lungo (segue la teoria degli elementi di tipo beam Euler-Bernoulli) o corto (modello di Timoshenko) rispetto alla flessione. È ovvio che questo dipende dalla geometria specifica della configurazione analizzata nonché dal materiale. Nel caso in esame le dimensioni della trave sono da determinare e nei casi in cui sarà necessario si terrà conto degli opportuni coefficienti.

Di seguito viene esposto un possibile metodo di valutazione proposto da Lobontiu in [14]. Applicando il teorema di traslazione di Castigliano le deformazioni supplementari generate dal taglio sono calcolate come:

$$u_y^* = \frac{\partial U^*}{\partial F_y} \quad \theta_z^* = \frac{\partial U^*}{\partial M_z} = 0 \quad (4.18)$$

L'eq. 4.18 riflette effettivamente il fatto che l'angolo tra la tangente alla deformata dell'asse neutro e la direzione orizzontale non è influenzata dagli effetti di taglio. Le deformazioni supplementari di Eq possono essere riscritte nella forma:

$$u_y^* = C_{y-F_y}^* F_y \quad (4.19)$$

Una breve analisi delle eq. 4.18 e 4.19 mostra che solo la forza di taglio influenza la deformazione supplementare prodotta nel considerare gli effetti di tranciatura di cerniere di flessione relativamente corte. Le cedevolezza totali (che sintetizzano gli effetti di flessione e taglio) saranno:

$$C_{y-Fy}^s = C_{y-Fy} + C_{y-Fy}^* \quad C_{y-Mz}^s = C_{y-Mz} \quad (4.20)$$

$$C_{z-Fz}^s = C_{z-Fz} + C_{z-Fz}^* \quad C_{z-My}^s = C_{z-My} \quad (4.21)$$

Il rapporto di soglia di lunghezza-spessore che marca il limite nel distinguere travi lunghe da corte viene assegnato valori che vanno da 3 a 5 (valore 3 è dato in Young, mentre Den Hartog assume un valore limite di 5). È anche riconosciuto che la deformazione prodotta per taglio in un beam corto diventa paragonabile alla normale deflessione prodotta per flessione. Il criterio, quindi, che discrimina tra travi corte e lunghe valuta il rapporto di deformazione di taglio e di flessione e lo confronta con un valore limite (chiamato errore). Il fatto che questo rapporto superi un errore limite per una particolare geometria porrà quel beam nella categoria corto; altrimenti, sarà collocato nella classe lungo. Come mostrato nella seguente discussione, decidere il tipo di modellazione per il beam, se lungo o corto direttamente dal limite di errore impostato da uno specifico rapporto lunghezza-spessore, riguarda aspetti legati al tipo di sezione trasversale e dipende dalle proprietà del materiale.

L'equazione fornisce la relazione tra rapporto delle deformazioni taglio-flessione e la geometria della trave (sezione e lunghezza) nonché le proprietà del materiale:

$$\frac{u_y^*}{u_y} = error \quad (4.22)$$

Per valori minori di un valore specificato dell'errore, la deformazione di taglio è piccola rispetto a quella per flessione e, quindi, gli effetti di taglio possono essere trascurati.

$$u_y = C_{y-Fy}F_y + C_{y-Mz}M_z \quad (4.23)$$

$$\frac{u_y^*}{u_y} = \frac{C_{y-Fy}^*}{C_{y-Fy}} = \frac{\chi(1+\nu)}{6} \frac{I_1}{I_2} \quad (4.24)$$

3. Per quanto riguarda il calcolo del lavoro di deformazione dovuto alla torsione si usa, come per il taglio, la formula basata sugli sforzi tangenziali generati dal momento torcente:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \tau \gamma dV \quad (4.25)$$

In questo caso, a differenza del taglio lo scorrimento γ è uguale per tutti i punti della sezione ed è per questo motivo che nella formula precedente viene usato quel valore senza bisogno di calcolarne uno medio.

A questo punto si determinano i coefficiente di cedevolezza seguendo il Teorema di Castigliano che è una tecnica che permette di calcolare le deformazioni dei corpi elastici sotto l'azione di carico esterno e reazioni vincolari. Il teorema è limitato ai materiali che sono linearmente elastici e quindi obbediscono alla legge di Hooke sforzo-deformazione.

In sostanza, il teorema fornisce uno strumento matematico semplice per calcolare una deformazione locale (lineare o angolare) che è prodotta dal corrispondente carico esterno/reazione (che sia una forza o un momento) che agisce in quella posizione specifica. In particolare, la deformazione locale di un corpo elastico è espressa come la derivata parziale della energia di deformazione totale immagazzinata in detto corpo in termini di forza o momento che agiscono in quella posizione e lungo la stessa direzione della deformazione associata. Un prerequisito del teorema è che il corpo elastico in esame sia vincolato da supporti rigidi, il che significa che qualsiasi moto del corpo rigido dovuto alla cedevolezza dei supporti e non prodotti da deformazione elastica è proibito. Un secondo requisito, che riguarda il secondo teorema di Castigliano, è che l'energia di deformazione deve essere espressa in termini di carichi e, di conseguenza, non deve contenere spostamenti.

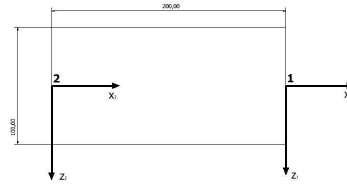


Figura 4.5: piastra di primo tentativo

Per il singolo asse, cerniera di flessione a larghezza costante, il sistema di carichi e deformazioni generiche vengono visualizzati in Figura 4.5. All'estremità 1 si possono avere tre componenti di forza e tre di momento esterni: due momenti flettenti, M_{1y} , M_{1z} ; due forze di taglio, F_{1y} , F_{1z} , un carico assiale, F_{1x} , e un momento di torsione, M_{1x} . Il caso in esame non è un di per sè un problema bidimensionale in cui tutti i carichi attivi e resistivi sono planari: le componenti delle reazioni (M_{1y} , F_{1z} , e M_{1x}) che agiscono fuori piano sullo sterzo in curva hanno valori del tutto confrontabili con le componenti nel piano M_{1z} , F_{1y} , e F_{1x} . Perciò si dovrà progettare la cerniera in modo tale che le componenti che non contribuiscono alla flessione vengano assorbite con la minore deformazione possibile.

Quindi considerando la figura 4.5 e l'equazione 4.2 possiamo definire i singoli elementi dei vettori:

$$\{u_1\} = \{u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \theta_{1z}\}^T \quad (4.26)$$

$$\{L_1\} = \{F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, M_{1x}, M_{1y}, M_{1z}\}^T \quad (4.27)$$

Nello stesso modo la matrice dei coefficienti di cedevolezza espansa risulta:

$$[C_1] = \begin{bmatrix} C_{1,x-Fx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{1,y-Fy} & 0 & 0 & 0 & C_{1,y-Mz} \\ 0 & 0 & C_{1,z-Fz} & 0 & C_{1,z-My} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1,\theta x-Mx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{1,\theta y-Fz} & 0 & C_{1,\theta y-My} & 0 \\ 0 & C_{1,\theta z-Fy} & 0 & 0 & 0 & C_{1,\theta z-Mz} \end{bmatrix}$$

Secondo il principio di reciprocità possiamo scrivere le seguenti identità:

$$C_{1,y-Mz} = C_{1,\theta z-Fy} \quad C_{1,z-My} = C_{1,\theta y-Fz} \quad (4.28)$$

Si riportano sotto i conti per trovare i coefficienti di cedevolezza:

- $C_{1,x-Fx}$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dV \quad (4.29)$$

sostituendo

$$\sigma = \frac{F_{1x}}{A} \quad dV = \int_A dA dx \quad (4.30)$$

si ottiene

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{F_{1x}^2}{A^2 E} \int_A dA dx = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{F_{1x}^2}{AE} dx = \frac{1}{2} \frac{I_1}{E} F_{1x}^2 \quad (4.31)$$

applicando ora il teorema di Castigliano si ottiene:

$$u_{1x} = \frac{\partial U}{\partial F_{1x}} = \frac{I_1}{E} F_{1x} \implies C_{1,x-Fx} = \frac{I_1}{E} \quad (4.32)$$

- $C_{1,y-Fy}$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dV \quad (4.33)$$

sostituendo

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z} \quad dV = \int_A dA dx \quad (4.34)$$

si ottiene

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{J_z^2 E} y^2 \int_A dA dx \quad (4.35)$$

se porto dentro l'integrale y^2 riconosco il momento d'inerzia della sezione rispetto l'asse x:

$$y^2 \int_A dA = \int_A y^2 dA = J_z \quad (4.36)$$

e quindi la 4.42 diventa:

$$\int_0^l \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{J_z E} dx = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{F_{1y}^2 x^2}{J_z E} dx = \frac{1}{2} I_2 \frac{F_{1y}^2}{E} \quad (4.37)$$

applicando ora il teorema di Castigliano si ottiene:

$$u_{1y} = \frac{\partial U}{\partial F_{1y}} = \frac{I_2}{E} F_{1y} \implies C_{1,y-Fy} = \frac{I_2}{E} \quad (4.38)$$

Non avendo fissato la lunghezza nè la sezione della piastra bisogna verificare se le azioni di taglio sono trascurabili e nel caso non lo fossero bisogna tenerne conto come:

$$\text{se } \frac{u_y^*}{u_y} = \frac{C_{y-Fy}^*}{C_{y-Fy}} = \frac{\chi(1+\nu) I_1}{6 I_2} > 4 \implies C_{1,y-Fy}^s = C_{1,y-Fy} + \frac{\alpha E}{G} C_{1,x-Fx} \quad (4.39)$$

- $C_{1,z-Fz}$

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dV \quad (4.40)$$

sostituendo

$$\sigma = \frac{M_y z}{J_y} \quad dV = \int_A dA dx \quad (4.41)$$

si ottiene

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{J_y^2 E} z^2 \int_A dA dx \quad (4.42)$$

se porto dentro l'integrale z^2 riconosco il momento d'inerzia della sezione rispetto l'asse y:

$$z^2 \int_A dA = \int_A z^2 dA = J_y \quad (4.43)$$

e quindi la 4.42 diventa:

$$\int_0^l \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{J_y E} dx = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{F_{1z}^2 x^2}{J_y E} dx = \frac{1}{2} \frac{l^3}{3 J_y E} F_{1z}^2 \quad (4.44)$$

applicando ora il teorema di Castigliano si ottiene:

$$u_{1z} = \frac{\partial U}{\partial F_{1z}} = \frac{I_3}{E} F_{1z} \implies C_{1,z-Fz} = \frac{I_3}{E} \quad (4.45)$$

Allo stesso modo possiamo determinare tutti gli altri coefficiente:

$$- C_{1,y-Mz} = \frac{I_4}{E}$$

$$- C_{1,\theta z-Mz} = \frac{I_5}{E}$$

$$- C_{1,\theta y-My} = \frac{I_6}{E}$$

$$- C_{1,\theta x-Mx} = \frac{I_7}{E}$$

Risolvendo le I nel caso di trave a sezione costante e forma rettangolare i coefficienti di cedevolezza si riducono a:

$$\begin{aligned} C_{1,x-Fx} &= \frac{l}{Ewt} & C_{1,\theta z-Mz} &= \frac{6l^2}{Ew^3t} \\ C_{1,y-Fy} &= \frac{4l^3}{Ewt^3} & C_{1,\theta y-My} &= \frac{12l}{Ew^3t} \\ C_{1,z-Fz} &= \frac{4l^3}{Ew^3t} & C_{1,\theta x-Mx} &= \frac{l}{GJ_t} \\ C_{1,y-Mz} &= \frac{6l^2}{Ewt^3} \end{aligned}$$

con $J_t = \frac{1}{3} \frac{1}{wt^3}$

Allo stesso modo si possono determinare coefficienti di cedevolezza per sezioni variabili.

Viene riportato il caso di sezione parabolica:

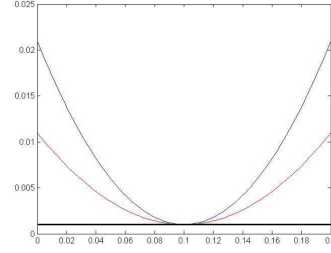
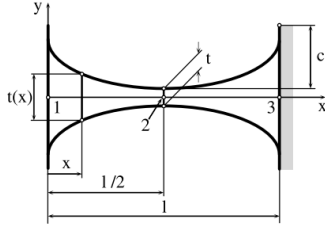


Figura 4.6: cerniera flessibile a sezione parabolica (vista dall'alto)

Figura 4.7: sezione parabolica al variare del coefficiente c

$$C_{1,x-Fx} = \frac{l_{mc}}{Ew_{mc}\sqrt{2ct_{mc}}} \cot\left(\sqrt{\frac{t_{mc}}{2c}}\right) \quad (4.46)$$

$$C_{1,y-Fy} = \frac{3l_{mc}^3}{16Ew_{mc}t_{mc}^2c} \left[\frac{12c^2 + 12ct_{mc} - t_{mc}^2}{(2c + t_{mc})^2} + \frac{6c + t_{mc}}{\sqrt{2ct_{mc}}} \cot\sqrt{\frac{t_{mc}}{2c}} \right]$$

$$C_{1,z-Fz} = \frac{3l_{mc}^3}{4Ew_{mc}^3t_{mc}c} \left[2t + (2c - t_{mc})\sqrt{\frac{2t_{mc}}{c}} \arctan\sqrt{\frac{t_{mc}}{2c}} \right] \quad (4.47)$$

$$C_{1,y-Mz} = \frac{3l_{mc}^2}{8Ew_{mc}t_{mc}^3(2c + t_{mc})^2} \left[2t_{mc}(6c + 5t_{mc}) + 3\sqrt{\frac{t_{mc}}{2c}}(4c^2 + t_{mc}^2) \cot\sqrt{\frac{t_{mc}}{2c}} \right]$$

$$C_{1,\theta z-Mz} = \frac{2}{l_{mc}} C_{1,y-Mz} \quad (4.48)$$

$$C_{1,\theta y-My} = \frac{12}{w_{mc}^2} C_{1,x-Fx} \quad (4.49)$$

con $J_t = \frac{1}{3} \frac{1}{wt^3}$

Gli stessi coefficienti si possono ricavare per diversi profili che per maggiori dettagli si rimanda a [14]: nel testo si confrontano tra loro diverse cerniere flessibili con i criteri di confronto sopra citati e si possono trarre le seguenti conclusioni:

In termini di capacità di rotazione le performance delle diverse cerniere possono essere classificate in questo modo:

$$rC_{\vartheta_{1z}-M_{1z}} = \frac{C_{1,\theta z-Mz}}{C_{1,\theta z-Mz}} \quad (4.50)$$

1° inverse parabolic (1.4)

2° secant, elliptic (2.5)

3° parabolic, hyperbolic (5)

Quelle che hanno minore sensibilità assiale:

$$rC_{1,x-Fx} = \frac{C_{1,x-Fx}}{C_{1,x-Fx}} \quad (4.51)$$

1° hyperbolic (2)

2° parabolic, elliptic (1.5)

3° secant, inverse parabolic (1.35)

In termini di precisione di rotazione, cioè della capacità di mantenere la posizione del centro di rotazione fisso:

$$rC_{3,y-Mz} = \frac{C_{3,y-Mz}}{C_{3,y-Mz}} \quad (4.52)$$

In cui 3 rappresenta il punto di lunghezza $l_{mc}/2$ della cerniera in cui si approssima la posizione del centro di rotazione.

1° inverse parabolic (3)

2° secant, elliptic (5)

3° hyperbolic (7.5)

4° parabolic (8)

Questo è un confronto in termini assoluti tra le diverse cerniere indipendentemente dalla applicazione bicicletta, quindi si capisce come questo non possa rappresentare un valido criterio per scegliere il tipo di cerniera da adottare;

questo studio permette però di capire come si può agire sulla forma geometrica di un

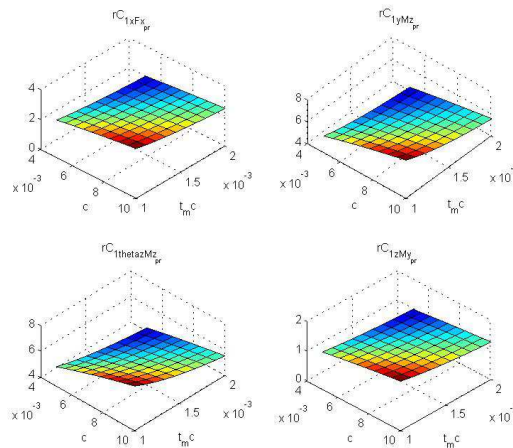


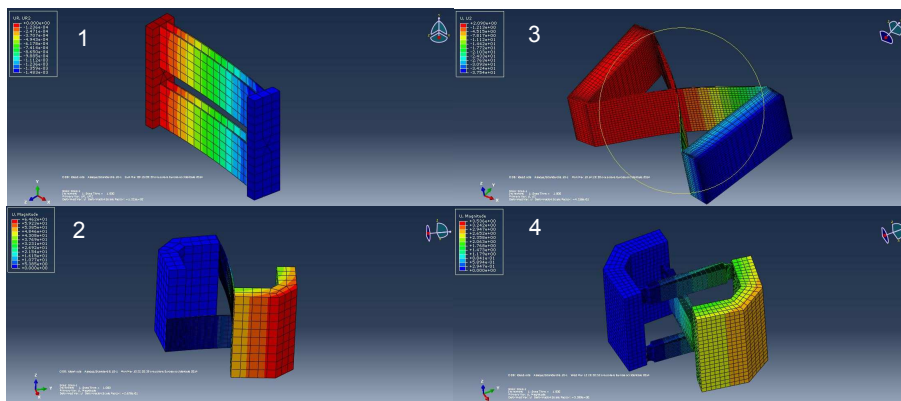
Figura 4.8: coefficienti di flessibilità

elemento per variare le sue capacità di deformazione. Si prendano infatti in particolare due cerniere: una a sezione rettangolare e una parabolica. Calcolando i coefficiente di flessibilità sopra definiti si vede come tutti crescono al crescere del parametro c e al diminuire dello spessore t (vedi figura 4.7). L'aumento di c è da in tendere come in

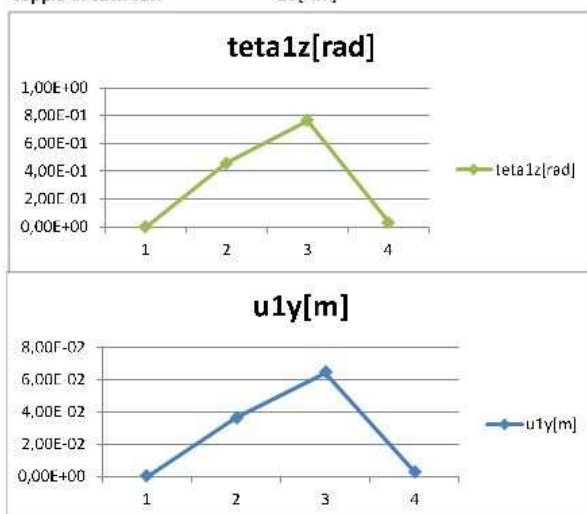
figura 4.6; quindi più la parabola è pronunciata più sarà facilitata la sua deformazione alla rotazione ma sarà più sensibile al carico assiale. Per le diverse forme considerate si vede come la cerniera flessibile di forma ellittica è una via di mezzo per tutti i casi; se non fosse per la grande sensibilità assiale data dalla cerniera a forma parabolica inversa questa sarebbe senza dubbio la soluzione geometrica migliore.

Modellazione tramite FEM

Di seguito si presentano altri sistemi che resistono meglio alla torsione rispetto ad una semplice piastra per la loro forma geometrica. Per questi sistemi è stato fatto un modello Abaqus e si sono valutate le loro capacità a deformarsi soggetti ad una coppia flettente di 10Nm. La miglior rigidità torcente si paga con un aumento della rigidità a flessione:



tipo di cerniera	1	2	3	4
$u1y[m]$	1,14E-04	0,0366235	0,06462	0,00287232
$teta1z[rad]$	1,48E-03	0,457794	0,7637	0,03617
sforzo max[Mpa]	1,11E+01	796,7	757,7	648,3
coppia in tutti i casi 10[Nm]				



La cerniera flessibile di maggiore interesse è quella in cui le piastre sono messe in diagonale e sovrapposte (identificata dal il numero 3 in figura ??). Per le dimensioni considerate questa presenta le seguenti rigidezze:

$$\begin{aligned}
 C_{1,x-Fx} &= 7.752e - 9 \\
 C_{1,y-Fy} &= 4.954e - 4 \\
 C_{1,z-Fz} &= 3.087e - 7 \\
 C_{1,y-Mz} &= 3.257e - 3 \\
 C_{1,\theta z-Mz} &= 2.53e - 2 \\
 C_{1,\theta y-My} &= 9.414e - 6 \\
 C_{1,\theta x-Mx} &= 1.461e - 4 \\
 C_{1,z-My} &= 1.421e - 6
 \end{aligned}$$

Tra quelle considerate questa infatti è quella che presenta il migliore rapporto tra capacità di rotazione e rigidezza alla torsione che come si vedrà in seguito rappresenterà il problema maggiore durante la guida.

4.2 Modello piastra

I modelli fin qui introdotti vanno a sostituire la cerniera flessibile con delle molle, una per ogni direzione di applicazione di un carico. Queste molle però non cambiano rigidezza una volta deformatasi, e quindi si perdono alcuni degli aspetti fondamentali (effetto della torsione sulla matrice di rigidezza) che è importante modellare nel caso di cerniere flessibili di grandi dimensioni.

Per questo motivo si considera la piastra a sezione costante come prima applicazione costruttiva: è possibile scrivere una formulazione analitica abbastanza semplice ma che spiega le problematiche principali nella guida della bicicletta compliant. Infatti è possibile valutare le deformazioni della piastra durante la percorrenza di una curva e determinare variazioni di rigidezza una volta deformatasi. Tutto questo non sarebbe possibile con un elemento più complesso da sintetizzare attraverso un software esterno a Matlab ad elementi finiti.

Per poter capire quanto accade alla piastra in curva, che a sua volta determina il comportamento di tutta la bicicletta, il modello deve essere tale da poter valutare le deformazioni in tutte le direzioni in modo da monitorare anche quelle deformazioni indesiderate che proprio per questo motivo non sono state incluse nella trattazione cinematica del modello bicicletta compliant. Queste considerazioni hanno portato ad una modellazione della piastra attraverso un modello finito sufficientemente semplice da poter fare a meno di un software esterno a Matlab ma che potesse spiegare tutte le problematiche sopra indicate.

Nel caso in esame quindi la piastra è stata suddivisa in un certo numero di elementi finiti beam per ognuno dei quali si è stabilito lo stesso modello di spostamento a 12 Gdl. Su questa base viene definito il comportamento di ogni singolo beam e quello dell'intera struttura viene poi ricostruito assemblando questi elementi, che si immaginano connessi tra loro dai nodi. Sotto vengono riportate le convenzioni:

Le componenti di spostamento di questo elemento, che è solo uno del k-elementi con

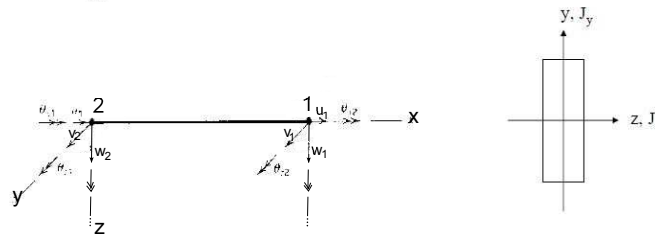


Figura 4.9: GdL e convenzioni per il beam

cui si vuole discretizzare la piastra, possono essere raggruppate in un vettore:

$$\underline{x}^L = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vartheta_{x2} \\ \vartheta_{y2} \\ \vartheta_{z2} \\ u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vartheta_{x1} \\ \vartheta_{y1} \\ \vartheta_{z1} \end{pmatrix}$$

La matrice di rigidezza ad esso associata quindi è 12×12 , e nella situazione indeformata ha le seguenti componenti non nulle:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & Y_2 & 0 & 0 & 0 & Y_1 & 0 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 & Y_1 \\ & & Z_2 & 0 & -Z_1 & 0 & 0 & 0 & -Z_2 & 0 & -Z_1 & 0 \\ & & & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ & & & & Z_4 & 0 & 0 & 0 & Z_1 & 0 & Z_3 & 0 \\ & & & & & Y_4 & 0 & -Y_1 & 0 & 0 & 0 & Y_3 \\ & & & & & & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & Y_2 & 0 & 0 & 0 & -Y_1 \\ & & & & & & & & Z_2 & 0 & Z_1 & 0 \\ & & & & & & & & & S & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & Z_4 & 0 \\ & & & & & & & & & & & Y_4 \end{pmatrix}$$

simm

inoltre siccome risulta valida la seguente formula:

$$[C] = [K]^{-1} \quad (4.53)$$

Si possono ricavare prima i coefficienti di cedevolezza e successivamente quelli di rigidezza. Le singole componenti della matrice di cedevolezza si ricavano attraverso il secondo teorema di Castigliano già descritto in precedenza. A partire da questi si trovano i coefficienti di rigidezza che definiscono la matrice di rigidezza locale $[K_l]$. Per

passare al sistema di riferimento globale per poter assemblare tra di loro i diversi beam si definisce la matrice di trasformazione:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} [\Lambda] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\Lambda] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\Lambda] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\Lambda] \end{pmatrix}$$

in cui: $[\Lambda] = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[K_G] = [T]^T [K_l] [T] \quad (4.54)$$

Ora è possibile applicare un qualsiasi sistema di carichi all'estremità 1 della figura 4.9 e determinare i conseguenti spostamenti. Inoltre è possibile determinare le deformazioni dei singoli punti all'interno del beam attraverso le funzioni di forma adattate a 12Gdl:

$$\begin{aligned} N_{u_{2x}} &= 1 - \frac{\xi}{l_k} \\ N_{u_{1x}} &= \frac{\xi}{l_k} \\ u &= N_{u_{2x}} u_{2x} + N_{u_{1x}} u_{1x} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} N_{\vartheta_{2x}} &= 1 - \frac{\xi}{l_k} \\ N_{\vartheta_{1x}} &= \frac{\xi}{l_k} \\ \vartheta_x &= N_{\vartheta_{2x}} \vartheta_{2x} + N_{\vartheta_{1x}} \vartheta_{1x} \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} N_{w_{2z}} &= 2 \frac{\xi^3}{l_k^3} - 3 \frac{\xi^2}{l_k^2} + 1 \\ N_{\vartheta_{2z}} &= l_k \frac{\xi^3}{l_k^3} - 2 \frac{\xi^2}{l_k^2} + \frac{\xi}{l_k} \\ N_{w_{1z}} &= -2 \frac{\xi^3}{l_k^3} + 3 \frac{\xi^2}{l_k^2} \\ N_{\vartheta_{1z}} &= l_k \frac{\xi^3}{l_k^3} - \frac{\xi^2}{l_k^2} \\ w &= N_{w_{2z}} w_{2z} + N_{w_{1z}} w_{1z} \\ \vartheta_z &= N_{\vartheta_{2z}} \vartheta_{2z} + N_{\vartheta_{1z}} \vartheta_{1z} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
N_{v_{2y}} &= 2\frac{\xi^3}{l_k^3} - 3\frac{\xi^2}{l_k^2} + 1 \\
N_{\vartheta_{2y}} &= l_k\frac{\xi^3}{l_k^3} - 2\frac{\xi^2}{l_k^2} + \frac{\xi}{l_k} \\
N_{v_{1y}} &= -2\frac{\xi^3}{l_k^3} + 3\frac{\xi^2}{l_k^2} \\
N_{\vartheta_{1y}} &= l_k\frac{\xi^3}{l_k^3} - \frac{\xi^2}{l_k^2} \\
v &= N_{v_{2y}}v_{2y} + N_{v_{1y}}v_{1y} \\
\vartheta_y &= N_{\vartheta_{2y}}\vartheta_{2y} + N_{\vartheta_{1y}}\vartheta_{1y}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

in cui ξ definisce la discretizzazione all'interno del singolo beam dei punti di cui si vuole calcolare lo spostamento.

4.3 Confronto bici compliant-piastra vs bici classica

Per il confronto delle biciclette si alleggeriranno i vincoli rappresentati dal pilota per rendere più evidenti le differenze cinematiche tra la bicicletta classica e quella compliant. Infatti è possibile che questa bicicletta con cui si fa il confronto non sia effettivamente possibile da guidare ma significativa nel campo dell'indagine e dello studio delle nuove caratteristiche dello sterzo: si determina un accoppiamento dei gradi di libertà specifico della piastra.

4.3.1 Bicicletta compliant-piastra significativa

Nel capitolo 3 si è analizzata la cinematica nel caso di traslazione in un punto dello sterzo. Adesso trattandosi della deformaione di una piastra la traslazione riguarda più punti e non è così scontata la scelta della bicicletta compliant *significativa* da confrontare per evidenziare i soli effetti dovuti all'accoppiamento dei Gdl dello sterzo. Quindi si è pensato come più incisivo confrontare due biciclette fatte così:

Si fa in modo che nella configurazione banale abbiano la forcella anteriore sovrappo-

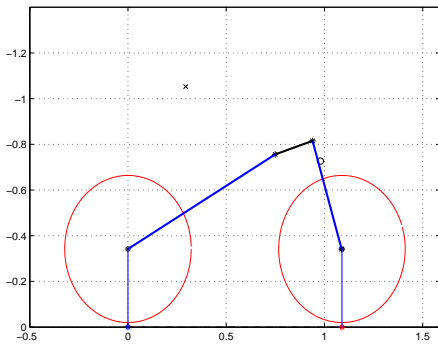


Figura 4.10: rappresentazione Matlab bici compliant-piastra

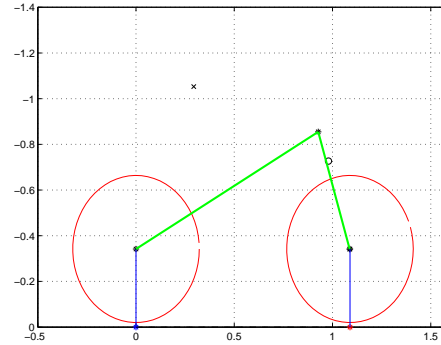


Figura 4.11: rappresentazione Matlab bici classica

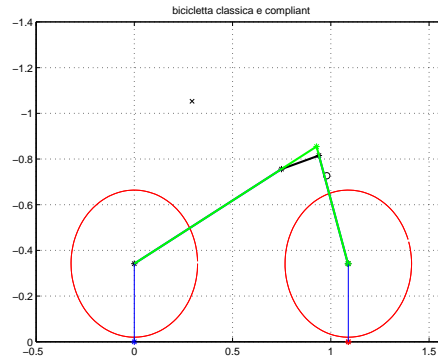


Figura 4.12: rappresentazione bicicletta Matlab sovrapposte

ste. Un'altra possibilità sarebbe stata quella di confrontare due biciclette con i due assi di rotazione sovrapposti nella configurazione banale ma in questo modo i risultati sarebbero dipendenti dal fatto che la cerniera flessibile è in un'altra posizione nel telaio. Sovrapponendo le forcelle si è sicuri che la differenza nel valore della coppia lungo l'asse di rotazione relativo z della piastra sarà esclusivamente dovuto alle deformazioni della piastra. A tale scopo sotto sono riportate le relazioni che intercorrono tra alcuni parametri delle due biciclette compliant e classica per poter confrontare il comportamento cinematico come descritto in precedenza:

parametri assegnati

$d_2, \vartheta_2, m_2, l_{mc}, \lambda, p$

$$f = -m_2 \quad (4.59)$$

$$\vartheta = -\vartheta_2 \quad (4.60)$$

$$l = \frac{p \cos \lambda + f - l_{mc}}{\cos \vartheta \cos \lambda + \sin \vartheta \sin \lambda} \quad (4.61)$$

$$d = \frac{l \sin \vartheta + l_{mc} \sin \lambda - f \sin \lambda}{\cos \lambda} \quad (4.62)$$

4.3.2 Il beccheggio

Il primo elemento utile da confrontare, che permette di capire come si comporta la bicicletta compliant in curva, è lo studio della funzione che lega l'angolo di beccheggio agli angoli di sterzata e di rollio. La figura 4.13 evidenzia come l'andamento dell'angolo di beccheggio sia ben diverso da quello della bicicletta classica. Infatti l'andamento di queste funzioni è sempre crescente all'aumentare dell'angolo di sterzo ϑ_{1z} . Solo nel caso di angolo di rollio nullo l'andamento è come quello riscontrato nella bicicletta classica. Il motivo di questa differenza nell'andamento dell'angolo di beccheggio è da attribuire allo spostamento trasversale u_{1y} che si ha in corrispondenza di un angolo di sterzo ϑ_{1z} nella bicicletta compliant. Per facilitare il confronto tra i valori caratteristici di una bicicletta classica e quelli assunti dalla compliant, nella figura 4.14 viene rappresentato l'andamento della differenza dell'angolo di beccheggio μ funzione della sterzata ϑ_{1z} e del rollio φ . Dal grafico si vede come considerando entrambe le biciclette con rollio

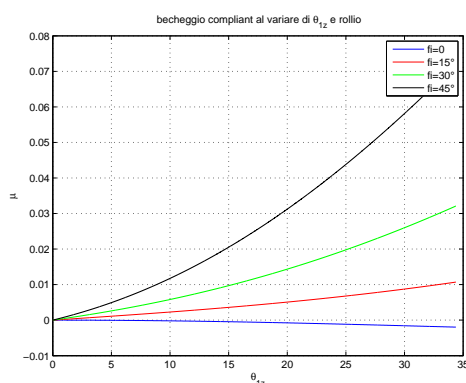


Figura 4.13: angolo di beccheggio bicicletta compliant-piastra

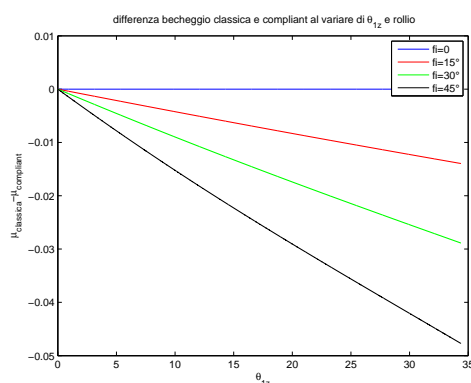
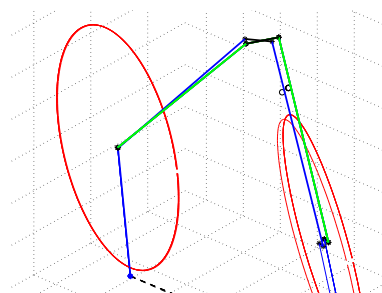
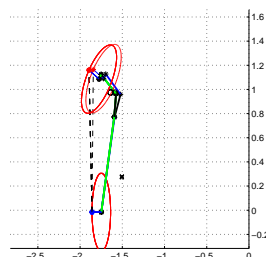


Figura 4.14: differenza beccheggio bici classica vs. bici compliant-piastra

nullo l'angolo di beccheggio assuma valori molto simili al variare dell'angolo di sterzo. Diverso è quanto accade al crescere dell'angolo di rollio infatti la differenza tra i beccheggi cresce in modulo ed in particolare per la bicicletta compliant si hanno angoli sempre più grandi di quella classica a pari valori di angolo di sterzo e rollio. L'angolo di beccheggio, come già spiegato nel capitolo della bicicletta classica, risulta essere un indice molto utile nel valutare l'altezza del baricentro in curva. Di conseguenza nella bicicletta compliant, per valori diversi da zero dell'angolo di rollio, l'aumento dell'angolo di sterzata comporta un innalzamento continuo del baricentro: dato che questo innalzamento corrisponde ad un aumento dell'energia potenziale si può intuire come lo sterzo non sia naturalmente portato a curvare, ma tenda a rimanere nella posizione di minima energia potenziale rappresentata dalla configurazione verticale. Questo aspetto della bicicletta compliant risulta intuitivamente facile da verificare: infatti se si immagina di eseguire una curva con una bicicletta classica ed ad un certo punto traslare il piano dell'avantreno nella direzione dell'interno della curva, comporta un innalzamento del retrotreno. Sotto vengono riportate due immagini che evidenziano quanto fin qui discusso:



Per il caso in esame risulta molto utile definire e valutare un altro tipo di grafico per quanto riguarda il beccheggio: è particolarmente di interesse infatti capire l'effetto sull'angolo di beccheggio della variazione dell'angolo di rotazione ϑ_{1x} . Questo aspetto, che per le biciclette classiche non ha senso trattare essendo lo sterzo infinitamente rigido rispetto la torsione, risulta necessario introdurlo nell'analisi della bicicletta compliant per poter capire dal punto di vista energetico verso quale configurazione tende naturalmente a portarsi dal momento che è possibile che nasca una rotazione attorno all'asse

x del sistema di riferimento relativo della cerniera flessibile.

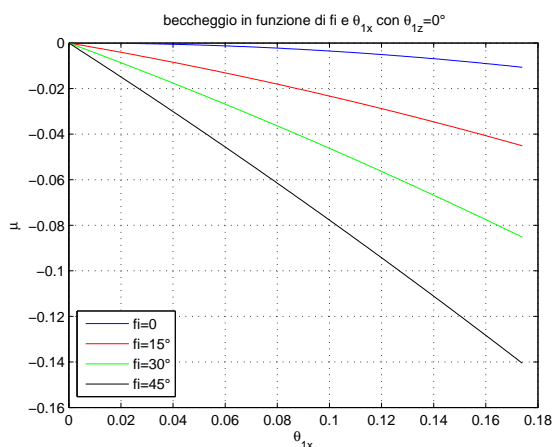


Figura 4.15: beccheggio bicicletta compliant-torsione

Il comportamento in figura 4.15 stà ad indicare che per qualsiasi angolo di rollio l'aumento dell'angolo di torsione ϑ_{1x} genera angoli di beccheggio negativi e quindi, per le convenzioni assunte, comporta un abbassamento del baricentro della bicicletta. Questo abbassamento corrisponde ad una diminuzione dell'energia potenziale e quindi l'aumento dell'angolo di torsione tende ad avvenire naturalmente. C'è da aspettarsi perciò che solo con un'inclinazione piccola della bicicletta compliant questa veda il piano dell'avantreno ruotare attorno ad x di una quantità che dipende dalla rigidezza torcente della piastra.

4.3.3 Punto di contatto ruota anteriore

Per quanto riguarda le coordinate del punto di contatto anteriore, si riporta in figura lo spostamento di tale punto nel piano al variare degli angoli φ e ϑ_{1z} , avendo preso le coordinate del punto posteriore e l'angolo ψ entrambi uguali a zero.

In particolare la figura 4.16 rappresenta le diverse posizioni del punto di contatto dell'avantreno fissando l'angolo di sterzo ad un valore pari a $\vartheta_{1z}=3^\circ$, tenendo conto della traslazione associata, e variando l'angolo di rollio fra $\varphi_{min}=0^\circ$ e $\varphi_{max}=30^\circ$. Questo grafico può fungere da verifica: la distanza lungo l'asse y tra i punti di contatto della bici classica e compliant nella condizione di $\varphi=0^\circ$ e $\vartheta_{1z}=3^\circ$ (in figura raffigurati da due cerchi) deve essere uguale al valore che si ricava dalla seguente semplice relazione:

$$w_{classic} - w_{compliant} = u_{1y} + f \sin \vartheta_{1z} \quad (4.63)$$

che non è nient'altro che la chiusura cinematica semplificata a causa dei particolari valori scelti. Dall'andamento del grafico di sinistra si può notare come la differenza relativa rispetto all'asse y tra i punti evidenziati in figura con un pallino, quadrato e triangolo cresce e quindi questo significa che all'aumentare dell'angolo di rollio l'effetto della traslazione dello sterzo viene accentuato. Il grafico a destra rappresenta le coordinate del punto di contatto anteriore al variare dell'angolo di sterzo per tre angoli di rollio $\varphi=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$. Analizzando i singoli andamenti si vede come la posizione del punto P_f

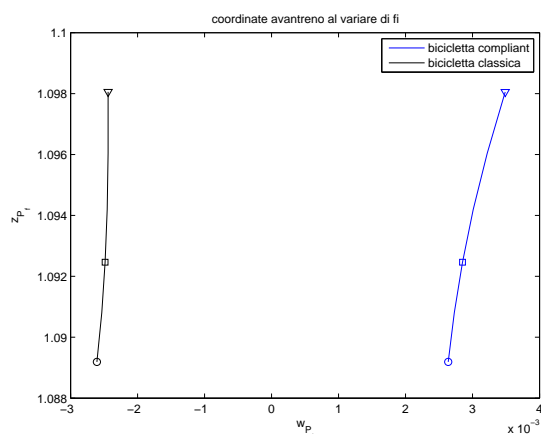


Figura 4.16: coordinate dell'avantreno al variare di φ fissato ϑ_{1z}

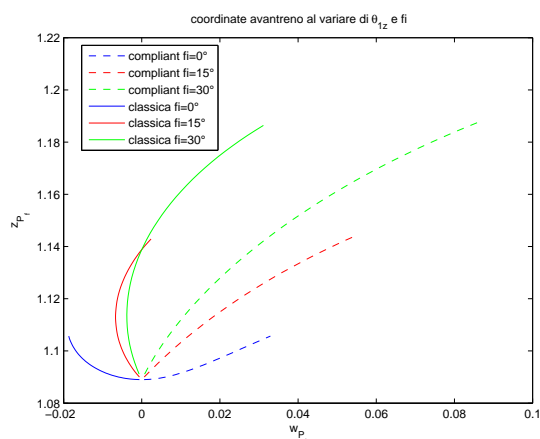


Figura 4.17: coordinate dell'avantreno al variare di φ e ϑ_{1z}

nella bicicletta compliant dipende molto dalla traslazione associata dell'asse di sterzo: in particolare soffermandosi al caso di rollio nullo (curva blu) si vede come l'andamento sia praticamente opposto a quanto avviene per la bicicletta classica; questo è dovuto al fatto che la traslazione laterale della piastra al variare dell'angolo ϑ_{1z} è più grande di quanto non lo sia il contributo opposto dato dalla rotazione dello sterzo: per una bicicletta classica una rotazione positiva dello sterzo provoca una traslazione lungo y negativa del punto di contatto (linea blu continua). Quindi la posizione del punto di contatto per quanto riguarda la sua posizione lungo y dipende dal gioco di forza tra la traslazione della piastra associata alla rotazione, che dipende a sua volta dalla lunghezza della piastra, e la traslazione dovuta alla rotazione dello sterzo.

Proseguendo con l'analisi si vede come, fissato l'angolo di rollio positivo per valori ϑ_{1z} crescenti, la posizione del punto di contatto sia spostata più a destra e più avanti rispetto allo stesso punto della bicicletta classica, ed inoltre all'aumentare dell'angolo di rollio φ la differenza tra le traiettorie si accentua. Quindi da questa analisi si può capire che la bicicletta compliant farà traiettorie diverse rispetto a quella classica a pari angoli di rollio e di sterzo.

Importanti saranno le differenze cinetostatiche che derivano dalla diversa locazione del punto di contatto anteriore rispetto a quanto accadeva per la bicicletta classica: bisognerà attendersi un cambiamento sull'influenza del moto di rollio, che non vedrà più l'effetto benefico dovuto allo spostamento laterale negativo del punto P_f , e ancora più incerta sarà la verifica della condizione di equilibrio per angoli di rollio nulli e angoli di sterzo grandi che nella bicicletta classica è garantita dal fatto che, essendo favorita la caduta di rollio a causa dei valori negativi lungo l'asse y del punto di contatto anteriore, si riesce ad equilibrare il contributo dato dalle forze di inerzia che porterebbero a far cadere la bicicletta verso l'esterno della curva.

Di seguito si rappresenta come si sposta il punto di contatto della ruota anteriore a fronte di un angolo di torsione ϑ_{1x} diverso da zero.

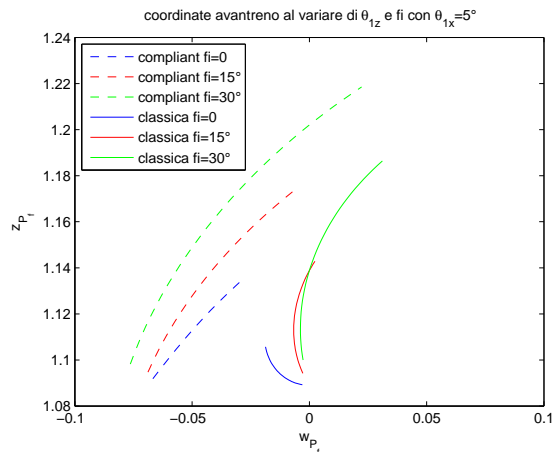


Figura 4.18: coordinate avantierno al variare di φ e ϑ_{1z} torsione

4.3.4 Campo di lavoro

Nel definire il campo di lavoro per la bicicletta compliant è necessario aggiungere un ulteriore asse e rappresentare in tre dimensioni i punti di equilibrio al variare della rotazione dello sterzo. Infatti la bicicletta può assumere, come già discusso, un angolo ϑ_{1x} diverso da zero a causa o dell'azione del ciclista o delle forze reattive. In seguito viene rappresentato il campo di lavoro 3D della bicicletta compliant (v. figura 4.19)

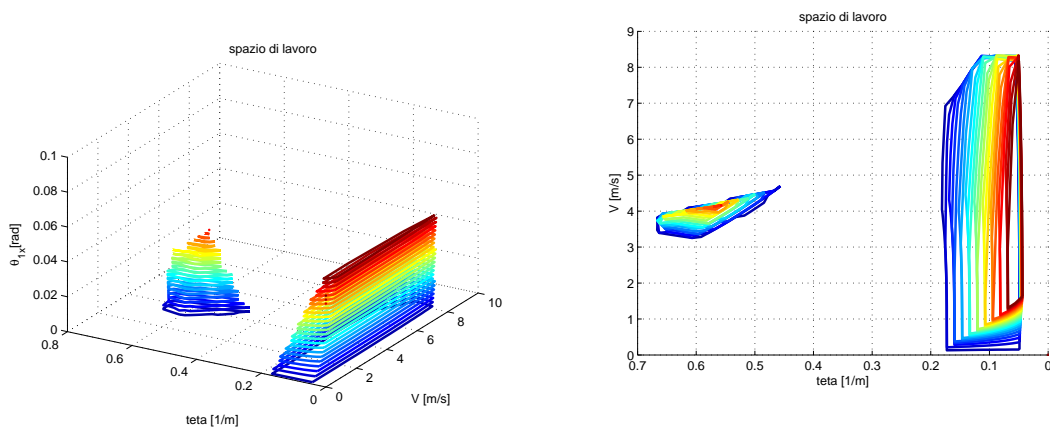


Figura 4.19: campo di lavoro 3D

Figura 4.20: campo di lavoro 3D (vista dall'alto)

Con i vincoli imposti, dalla figura 4.19 si vede come lo spazio di lavoro sia disgiunto cioè la bicicletta compliant sta in equilibrio percorrendo ampie curve sia a velocità bassa che alta mentre riesce a stare in equilibrio facendo curve più strette a patto che la velocità sia sufficientemente elevata. Bisogna notare che è negativo il fatto di avere un campo di lavoro disgiunto, perchè in linea teorica si possono avere delle soluzioni mai raggiungibili a partire da una posizione a rollio nullo.

Per il confronto con la bicicletta classica si prende il campo di lavoro visto dall'alto e dato dalla proiezione nel piano di tutti i campi di lavoro perchè rappresentano tutti i punti raggiungibili in termini di raggio di curvatura e velocità attivando o meno la

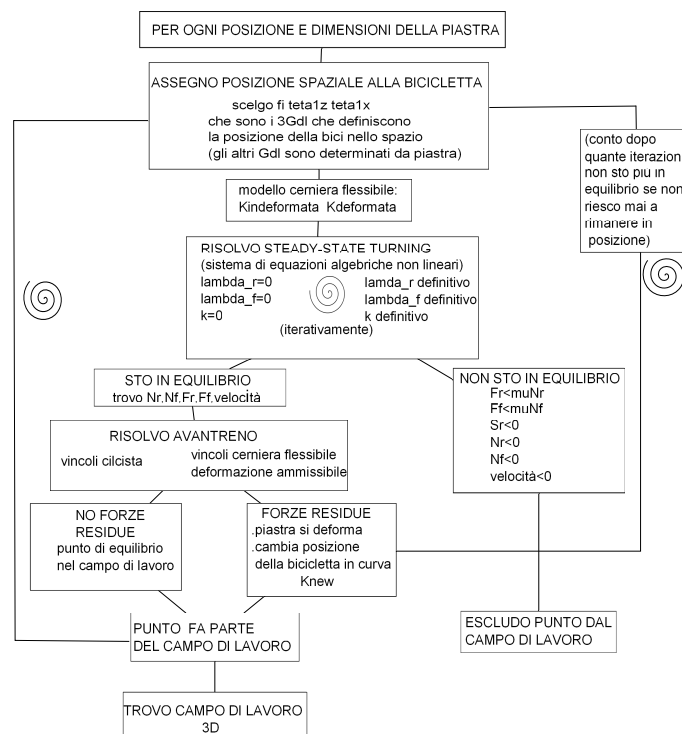


Figura 4.21: schematizzazione della metodologia con cui si determina il campo di lavoro

torsione della piastra. Nel piano quindi si considera il seguente spazio di lavoro:

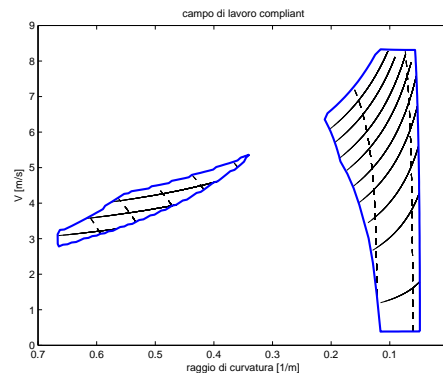


Figura 4.22: campo di lavoro bicicletta compliant-piastra

A questo punto è immediato il confronto tra le biciclette sovrapponendo i due grafici del campo di lavoro: quello della bicicletta classica definito nel cap.2 par. 2.4.2 e quello della bicicletta compliant-piastra 4.22 ottenendo la figura 4.22.

Oltre che capire quali margini in termini di spazio di lavoro si hanno tra la bicicletta classica e quella compliant-piastra, da questa sovrapposizione è possibile farsi un'idea di altre importanti differenze. Infatti si può valutare a partire dalla posizione relativa dei due grafici come lo stesso punto nel dominio $(\varphi-\vartheta_{1z})$, cioè per la stessa posizione

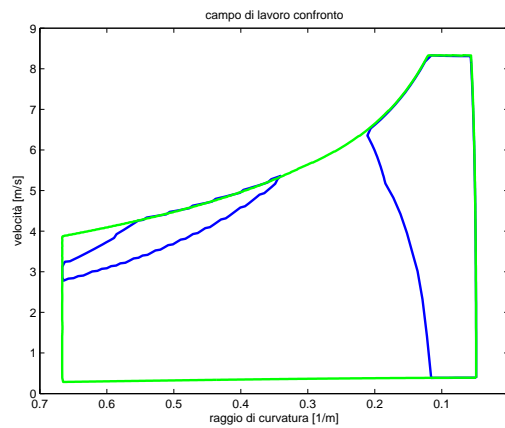


Figura 4.23: confronto campo di lavoro bici compliant-piastra vs. bici classica

in termini di rollio e angolo di sterzo delle biciclette, risultano in posizioni diverse nel dominio $(V-1/R)$. In particolare il punto corrispondente ai valori $\varphi=3^\circ$ e $\vartheta_{1z}=30^\circ$ per la bicicletta compliant risulta spostato più a destra e più in basso rispetto a quello corrispondente della bicicletta classica. Questo comporta che la bicicletta compliant compia una curva a raggio di curvatura maggiore e a velocità più bassa. Quindi la traslazione associata nella bicicletta compliant non ha effetti benefici per quella configurazione dal punto di vista cinematico in curva, e sotto viene rappresentata tale differenza:

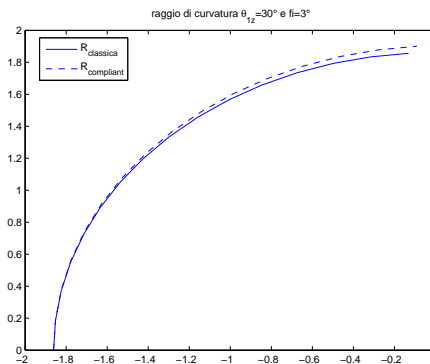


Figura 4.24: traiettoria bici compliant-piastra vs. bici classica

Questo non significa che per tutte le configurazioni ci debba essere la stessa differenza. Quella riscontrata è una proprietà puntuale e non globale dello spazio di lavoro. Infatti al variare dell'angolo di sterzo la differenza tra i raggi di curvatura delle due biciclette cambia addirittura segno, cioè per piccoli angoli di sterzo la traslazione associata è un vantaggio in quanto la bicicletta classica effettua una curva con un raggio di curvatura più ampio rispetto a quella compliant come si vede in figura 4.25.

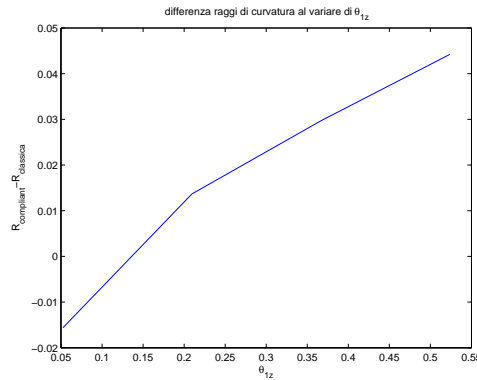


Figura 4.25: differenza raggio di curvatura bici compliant-piastra vs. bici classica al variare di ϑ_{1z}

La cineto-statica di una curva a regime stazionario dipende dalla posizione e dalla inclinazione della cerniera flessibile all'interno del telaio della bicicletta. In particolare per quanto riguarda il raggio di curvatura si può vedere come cambia in base alle variazioni di λ (v. figura 4.26) o f (v. figura 4.27).

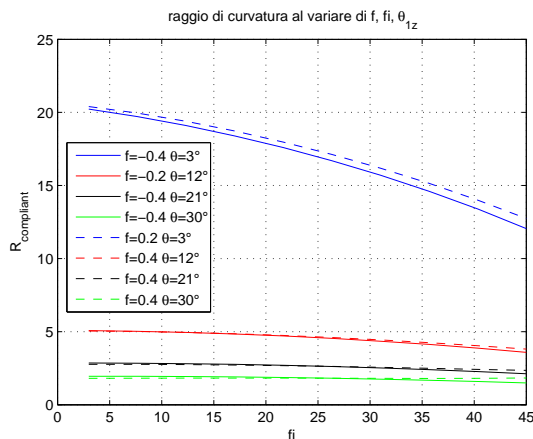


Figura 4.26: raggio di curvatura al variare di $f, \varphi, \vartheta_{1z}$

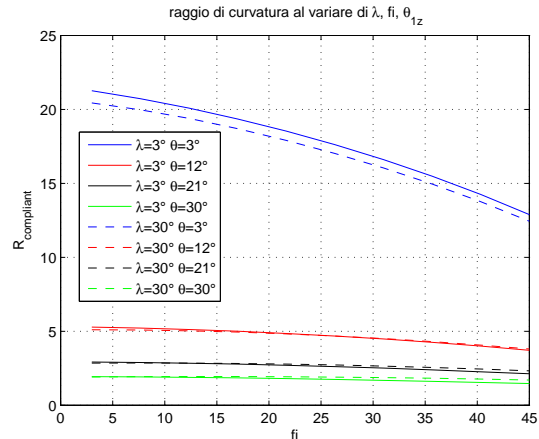


Figura 4.27: raggio di curvatura al variare di $\lambda, \varphi, \vartheta_{1z}$

4.3.5 Sistema di forze agenti sullo sterzo

Ipotizzando che si riesca a mantenere nella posizione assegnata la bicicletta, fissati quindi $\vartheta_{1z}, \vartheta_{1x}, \varphi$, per ogni punto di equilibrio dello spazio di lavoro la piastra sarà soggetta ad un sistema di forze diverso. In figura 4.28 viene fornita una rappresentazione del valore delle forze sul contorno dello spazio di lavoro.

La figura 4.29 rappresenta la variazione delle forze seguendo le curve isolivello di rollio e di sterzo all'interno del campo di lavoro. Il confronto con la bicicletta classica ha senso farlo solo per quanto riguarda la coppia M_{1z} . A tal proposito si può ottenere

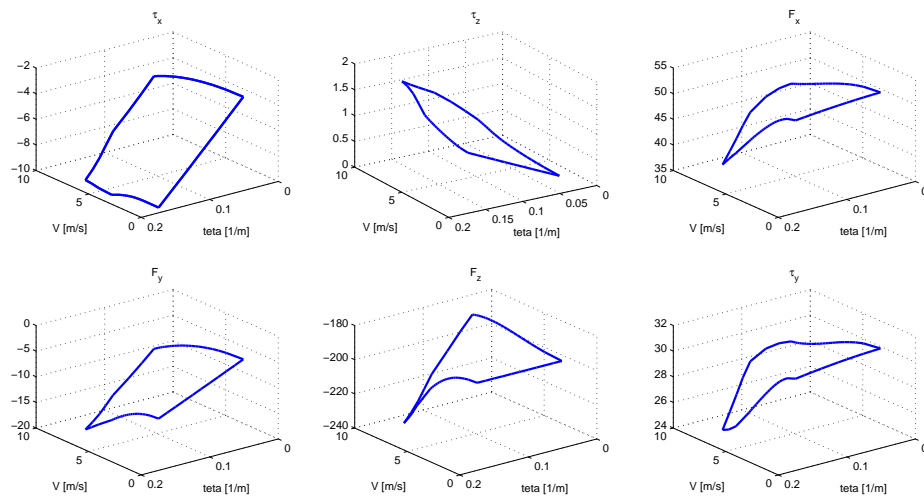


Figura 4.28: sistema di forze nel campo di lavoro

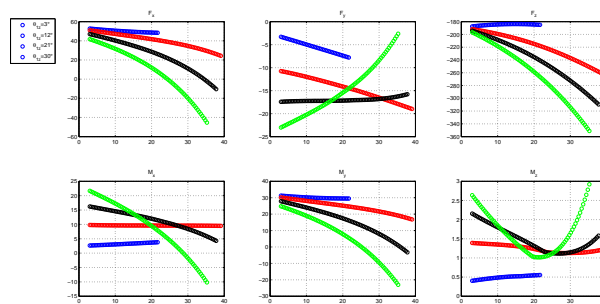


Figura 4.29: sistema di forze al variare di φ e ϑ_{1z}

lo stesso grafico del caso della bicicletta classica al variare del rollio e angolo di sterzo fisso, in modo da evidenziare tutte le componenti che vanno a determinarne il valore (vedasi figura 4.30).

Nella figura si vede come l'andamento è simile a quello della bicicletta classica ma traslato. Questa traslazione è data dal contributo di coppia necessario per tenere deformata la piastra e mantenerla in posizione. Le forze sulla cerniera indipendentemente da quale sia cambiano se si varia la sua posizione e inclinazione nel telaio.

In figura 4.31 si evidenziano i valori della forze e coppie sullo sterzo al variare della posizione della piastra nel telaio. Bisogna notare come la coppia torcente M_{1x} è tanto più piccola quanto più mi avvicino al terreno, mentre la coppia flettente M_{1y} è nulla in corrispondenza circa della posizione del punto di contatto della ruota anteriore (comportamento che ci si poteva aspettare visto che la forza normale è la più grande tra le forze e mi dà momento nullo lungo la retta che parte dal punto su cui è applicata). Conoscere l'andamento delle forze in un ipotetico telaio risulterà utile quando si dovrà verificare la bontà dell'ottimizzazione nel prossimo capitolo. Bisogna però sottolineare che si avranno dei grafici diversi a seconda del punto di equilibrio considerato e della

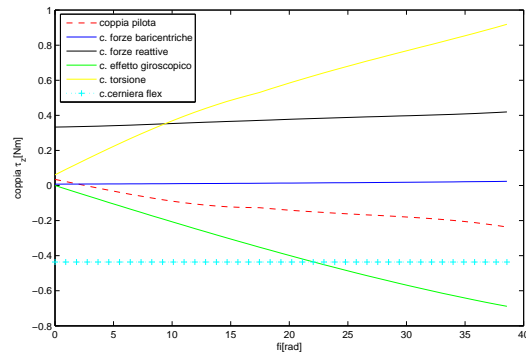


Figura 4.30: coppia flettente M_{1z} e componenti

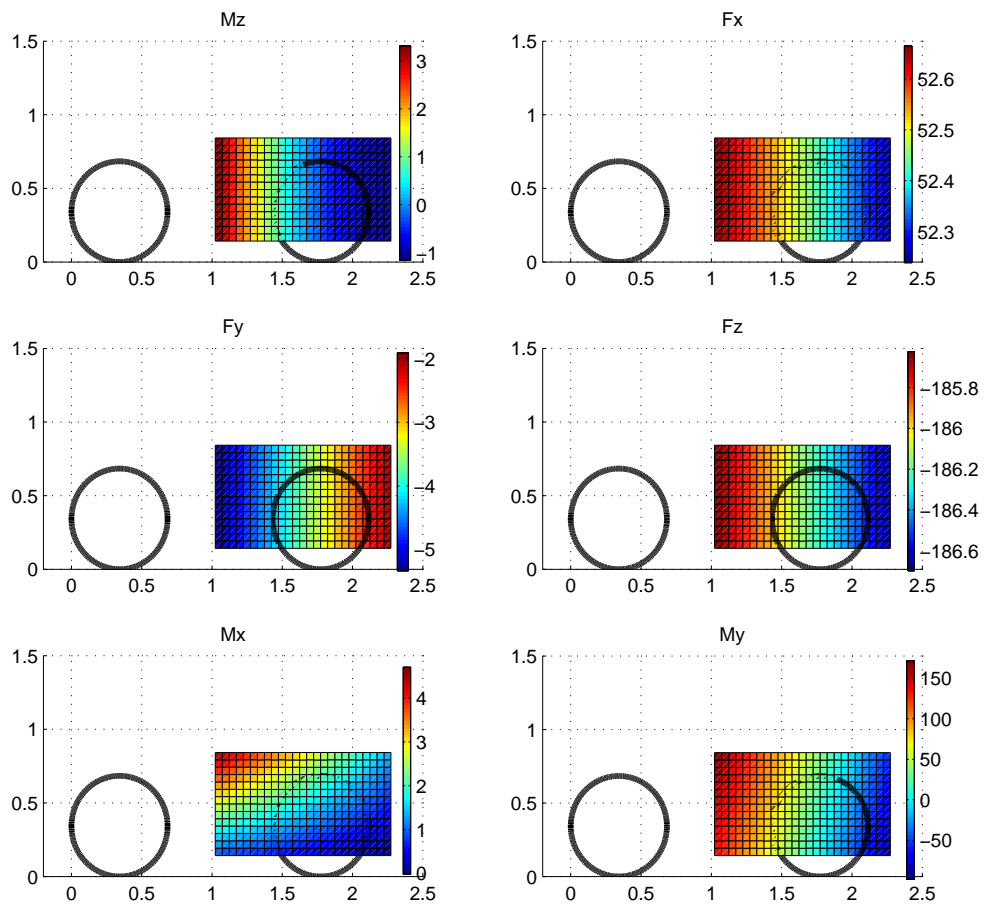


Figura 4.31: andamento delle forze al variare della posizione della piastra nel telaio fissati λ , φ , ϑ_{1z}

inclinazione e dimensioni della piastra considerate. Quindi la progettazione non può basarsi su questo grafico ma richiede uno strumento più potente (nel prossimo capitolo si adotterà una soluzione che usa un ottimizzatore multiobiettivo).

4.4 Comportamento piastra in curva

Attraverso l'analisi del avantreno si determina come il modello di cerniera flessibile entra nelle equazioni di equilibrio. Fissata quindi la posizione di cui si vuole valutare l'equilibrio in termini di φ , ϑ_{1z} e ϑ_{1x} si determina il legame cinematico dato dalla piastra per garantire quel posizionamento. Si calcola la coppia flettente e torcente necessaria per posizionare la piastra al valore ϑ_{1z} e ϑ_{1x} assegnati:

$$M_{1z} = K_{LL_{indef}}(6, 6)\vartheta_{1z} \quad (4.64)$$

$$M_{1x} = K_{LL_{indef}}(4, 4)\vartheta_{1x} \quad (4.65)$$

$$\{u\} = [C_{LL_{indef}}]\{F_{est}\} \quad (4.66)$$

La piastra così deformata è descritta dalla matrice $[K_{LL_{def}}]$.

Nota la posizione dell'avantreno si risolve l'equilibrio della bicicletta in curva in moto stazionario e si trovano le reazioni e la velocità di equilibrio con la piastra, che è un sistema di forze esterne per il sistema. Perciò non è nulla di nuovo rispetto a quanto già descritto nel cap. 3 ma con un opportuno legame cinematico rappresentato dalla piastra.

A questo punto si isola l'avantreno e per il sistema considerato la piastra è un insieme di forze esterne il cui valore dipende dalla deformazione della piastra necessaria per assumere la posizione richiesta in cui valutare l'equilibrio.

La figura 4.32 mostra una vista schematica delle forze che agiscono sull'avantreno:

Le equazioni di equilibrio scritte secondo il principio di D'ALémbert sono:

$$\mathbf{F}_{Gf} + \mathbf{F}_{Rf} + \mathbf{F}_{\tau} + \mathbf{F}_{cerniera\,flex,O} = m_f \mathbf{a}_{Gf} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{M}_{Gf} + \mathbf{M}_{Rf} + \mathbf{M}_{\tau} + \mathbf{M}_{cerniera\,flex,O} + \mathbf{C}_2 \mathbf{O}_2 \times \mathbf{F}_{\tau} = \dot{\mathbf{J}}_f + \dot{\mathbf{J}}_{Wf} \quad (4.68)$$

Scritti in forma di componente rispetto al sistema di riferimento S_O , si ottiene un sistema lineare di sei equazioni in sei incognite (le componenti di \mathbf{F}_{τ} e di \mathbf{M}_{τ}). Per il sistema considerato le forze che la cerniera flessibile scambia con il telaio sono forze esterne (cambiate di segno) e quindi rientrano nell'equazione precedente.

$$\mathbf{F}_{cerniera\,flex} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{cerniera\,flex} = \begin{Bmatrix} -M_{1x} \\ 0 \\ -M_{1z} \end{Bmatrix}$$

Questi rappresentano il sistema di forze che agiscono nel sistema di riferimento della cerniera flessibile. Con le matrici di rotazione passiamo al sistema di riferimento S_O :

$$\mathbf{R}_{rot} = \mathbf{R}_{\Delta} \mathbf{R}_{\beta} \mathbf{R}_{\gamma}$$

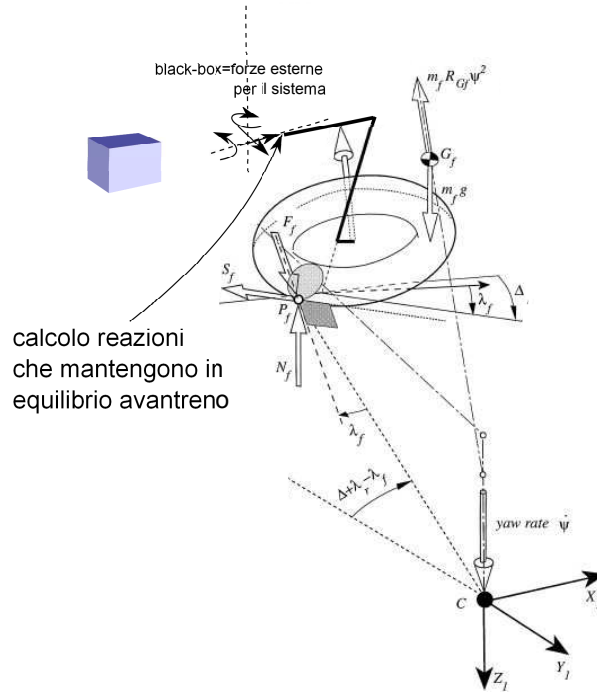


Figura 4.32: schema delle forze che agiscono sull'avantreno

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{cerniera flex, O}} &= R_{\text{rot}} \mathbf{F}_{\text{cerniera flex}} \\ \mathbf{M}_{\text{cerniera flex, O}} &= R_{\text{rot}} \mathbf{F}_{\text{cerniera flex}} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{x(1)} - S_f \cos \Delta - F_f \sin \Delta + F_{\tau_x} + F_{\text{inerzia}} = 0 \\ F_{y(1)} + F_f \cos \Delta - S_f \sin \Delta + F_{\text{inerzia}} + F_{\tau_y} = 0 \\ -N_f + F_{z(1)} + F_{\tau_z} + m_f g = 0 \\ -N_f Y_{P_f} + m_f Y_{G_f} g - M_{y_f} \sin \Delta - \dot{K}_{\omega_f(1)}(1) - F_{y(1)} Z_{Q_f} + F_{z(1)} Y_{Q_f} + M_{x(1)} + M_{\tau_x} + \\ - F_{\tau_y} Z_{Q_f} + F_{\tau_z} Y_{Q_f} + M_{\text{inerzia}} = 0 \\ N_f X_{P_f} - m_f X_{G_f} g + M_{y_f} \cos \Delta - \dot{K}_{\omega_f(2)} + F_{x(1)} Z_{Q_f} - F_{z(1)} X_{Q_f} + M_{y(1)} + M_{\tau_y} + \\ + F_{\tau_x} Z_{Q_f} - F_{\tau_z} X_{Q_f} + M_{\text{inerzia}} = 0 \\ F_f \cos \Delta X_{P_f} - S_f \sin \Delta X_{P_f} + S_f \cos \Delta Y_{P_f} + M_{z_f} - F_{x(1)} Y_{Q_f} + F_{y(1)} X_{Q_f} + M_{z(1)} + \\ + M_{\tau_z} - F_{\tau_x} Y_{Q_f} + F_{\tau_y} X_{Q_f} + M_{\text{inerzia}} = 0 \end{array} \right.$$

Riscritta in termini matriciali:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_{Q_f} & Y_{Q_f} & 1 & 0 & 0 \\ Z_{Q_f} & 0 & -X_{Q_f} & 0 & 1 & 0 \\ -Y_{Q_f} & X_{Q_f} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -F_\tau(1) + F_f \sin \Delta + S_f \cos \Delta - \Phi_f(1, 4) \\ -F_\tau(2) - F_f \cos \Delta + S_f \sin \Delta - \Phi_f(2, 4) \\ -m_f g + N_f - F_\tau(3) - \Phi_f(3, 4) \\ d(4) \\ d(5) \\ d(6) \end{pmatrix}$$

$$d(4) = -m_f g Y_{Gf} + N_f Y_{Pf} - \Phi_f(3, 2) + \dot{K}_{\omega f}(1) - M_\tau(1) + F_\tau(2) Z_{Qf} - F_\tau(3) Y_{Qf} + d_f N_f \sin \Delta$$

$$d(5) = m_f g X_{Gf} - N_f X_{Pf} - \Phi_f(1, 3) + \dot{K}_{\omega f}(2) - d_f N_f \cos \Delta + -M_\tau(2) - F_\tau(1) Z_{Qf} + F_\tau(3) X_{Qf}$$

$$d(6) = -F_f \sin \Delta Y_{Pf} - S_f \cos \Delta Y_{Pf} - F_f \cos \Delta X_{Pf} + S_f \sin \Delta X_{Pf} + \\ + t_f F_f + sp S_f - b \beta N_f - \Phi_f(2, 1) + \dot{K}_{\omega f}(3) - M_\tau(3) + F_\tau(1) Y_{Qf} - F_\tau(2) X_{Qf} \quad (4.69)$$

$$x_{reazioni} = \begin{pmatrix} F_x(1) \\ F_y(1) \\ F_z(1) \\ M_x(1) \\ M_y(1) \\ M_{teta_{1z}}(1) \end{pmatrix}$$

Quelle calcolate sono le reazioni che agiscono nel punto considerato e sono tali da mantenere in equilibrio l'avantreno. In generale si scaricheranno sulla piastra le forze risultanti da $x_{reazioni}$ – azioni del ciclista. Quello che si farà sarà monitorare come cambia la matrice di rigidezza $[K_{LL}]$ nelle diverse condizioni in curva.

4.4.1 Piastra indeformata

In figura vengono rappresentate le convenzioni assunte per descrivere la posizione della piastra nello spazio:

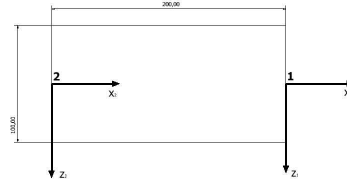


Figura 4.33: piastra primo tentativo

La matrice che descrive la piastra come singolo beam ha dimensioni 12×12 , le cui componenti sono già state precedentemente definite. Di seguito viene riportata solo la parte legata alle coordinate libere rappresentate da tutti gli spostamenti del punto 1 evidenziato in figura:

$$[K_{LL}]_{indef} = \begin{bmatrix} K_{1,x-Fx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{1,y-Fy} & 0 & 0 & 0 & K_{1,y-Mz} \\ 0 & 0 & K_{1,z-Fz} & 0 & K_{1,z-My} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{1,\theta x-Mx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{1,\theta y-Fz} & 0 & K_{1,\theta y-My} & 0 \\ 0 & K_{1,\theta z-Fy} & 0 & 0 & 0 & K_{1,\theta z-Mz} \end{bmatrix}$$

Si può notare come la bicicletta classica non è altro che un caso particolare della formulazione matematica esposta: infatti la relazione tra le forze e gli spostamenti nel caso di sterzo rigido a 1Gdl la matrice di rigidezza diventa la seguente.

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & \dots & \dots & \infty \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \infty & \dots & \dots & \infty \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ \vartheta_z \end{pmatrix}$$

4.4.2 Piastra in curva con ciclista ideale

Per poter fare una curva, qualsivoglia essa sia, il ciclista deve dare una rotazione relativa dell'avantreno rispetto al retrotreno. È lecito ipotizzare che il pilota per generare la rotazione relativa necessaria per percorrere una determinata curva agisca sullo sterzo con una coppia M_{1z} proprio come per la bicicletta classica. Nel caso della bicicletta compliant l'effetto però non è lo stesso, infatti semplicemente osservando la matrice $[K_{LL}]$ si vede che oltre alla rotazione ϑ_{1z} viene attivata la traslazione u_{1y} :

$$\mathbf{u}_{LL} = [K_{LL}]^{-1} \mathbf{F} \quad (4.70)$$

$$\begin{pmatrix} u_{1x} \\ \mathbf{u}_{1y} \\ u_{1z} \\ \vartheta_{1x} \\ \vartheta_{1y} \\ \vartheta_{1z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,x-Fx} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & K_{1,y-Fy} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{1,y-Mz} & 0 \\ 0 & 0 & K_{1,z-Fz} & 0 & K_{1,z-My} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & K_{1,\theta x-Mx} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & K_{1,\theta y-Fz} & 0 & K_{1,\theta y-My} & \mathbf{0} \\ 0 & K_{1,\theta z-Fy} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{1,\theta z-Mz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \end{pmatrix}$$

Perciò una volta raggiunto lo stesso angolo di sterzo del caso della bicicletta classica la matrice di cedevolezza che caratterizza la nuova condizione deformata sarà una matrice piena. Come esempio si riportano i valori di tale matrice nel caso di curva a $\vartheta_{1z}=10^\circ$ e $\varphi=3^\circ$, per la piastra considerata:

$$[C_{LL}]_{def} = [K_{LL}]_{def}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,13^{-6} & -2,01^{-5} & 0 & 0 & 0 & -1,6^{-4} \\ -2,02^{-5} & 1,94^{-4} & 0 & 0 & 0 & 1,46^{-3} \\ 0 & 0 & 2,6^{-7} & 2,084^{-5} & 3,21^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 3,09^{-7} & 0,0047 & 6,14^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -2,36^{-6} & 4^{-3} & 7,72^{-5} & 0 \\ -1,5^{-4} & 0,0014 & 0 & 0 & 0 & 0,0146 \end{bmatrix}$$

La figura 4.34 è una rappresentazione Matlab della piastra nella configurazione deformata.

Affinchè sia possibile mantenere la piastra in posizione è richiesto un ciclista capace di assorbire il sistema di forze agente sulla piastra in tutte le direzioni che altrimenti andrebbero a scaricarsi su di essa deformandola. Se quindi il ciclista si comportasse in maniera ideale sarebbe possibile eseguire la curva mantenendo la piastra nella posizione rappresentata in figura.

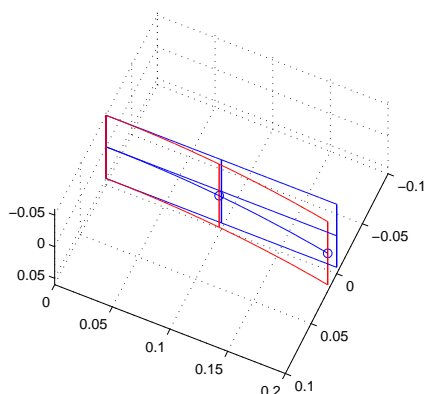


Figura 4.34: piastra deformata

4.4.3 Piastra in curva con ciclista classico

In letteratura non esistono studi che riguardano le capacità di un ciclista di assorbire forze in altre direzioni, se non qualche analisi sul classico modo di guida. Quindi si conoscono le coppie che può dare attorno all'asse z durante la guida ma non quali altre forze riesce a tenere. È quindi utile capire cosa potrebbe succedere se il ciclista fosse capace di guidare solo nella maniera classica e quindi dando coppia attorno a z . Quello che è certo è che le forze esterne che agiscono sulla cerniera generano deformazioni che sono il prodotto di queste forze per la matrice di rigidità nel caso deformato, provocando l'accoppiamento di tutti i GdL.

L'effetto di queste forze non ha effetti benefici, infatti risulta che la posizione di equilibrio in curva della piastra è instabile, cioè a fronte di piccoli spostamenti il sistema tende ad allontanarsi dalla sua posizione iniziale.

Le motivazioni che determinano questo comportamento sono da cercare nel sistema di forze che agisce all'esterno della piastra e nella matrice di cedevolezza per la condizione deformata. La coppia torcente che agisce sulla piastra determina la torsione della stessa e ad ogni iterazione la nuova posizione è tale da accrescere la torsione perchè non equilibrata da nessuna azione del pilota (ipotesi di ciclista classico). Questo determina un aumento in modulo degli elementi $C_{LL}(\vartheta_{1x} - M_y)$ e $C_{LL}(\vartheta_{1x} - F_z)$. La conseguenza è che la coppia M_y e la forza F_z , che sono le componenti di modulo maggiore del vettore delle forze esterne, provocano la rotazione del estremo della piastra attorno a y e uno spostamento lungo z . Questo rappresenta quindi un elemento potenzialmente negativo e indesiderato, in quanto viene richiesto al pilota di sostenersi non potendo più contare con la rigidità data dalla piastra lungo z . Questo aspetto è sempre più evidente all'aumentare della lunghezza della piastra infatti in figura 4.36 viene rappresentato quello che succede in curva ad una bicicletta con l'elemento deformabile esteso.

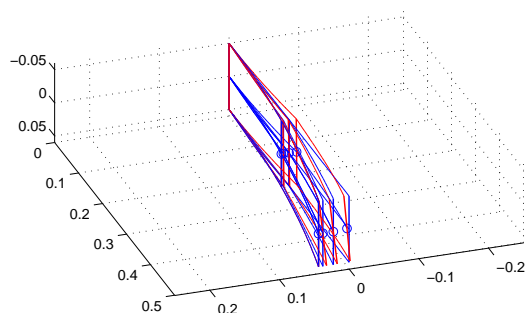


Figura 4.35: deformazione della piastra dopo una serie di iterazioni

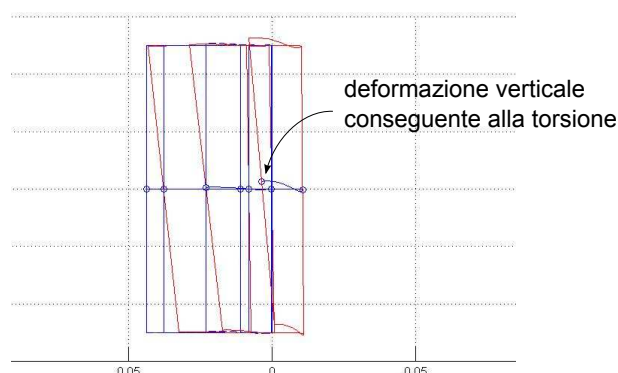


Figura 4.36: spostamento verticale come effetto della torsione

4.5 Variabili progettuali

Quanto esposto fino adesso riguarda una particolare piastra in una ben precisa posizione all'interno del telaio scelta in modo che venissero risaltare le principali caratteristiche comportamentali della bicicletta compliant-piastra. È lecito quindi aspettarsi che, cambiando dimensioni alla piastra ma mantenendo gli stessi vincoli, la cinetostatica della nuova bicicletta risulti diversa e quindi saranno diversi anche i campi di lavoro. Sotto vengono rappresentati possibili spazi di lavoro al variare delle dimensioni della diagonale della piastra:

cambio dimensioni piastra

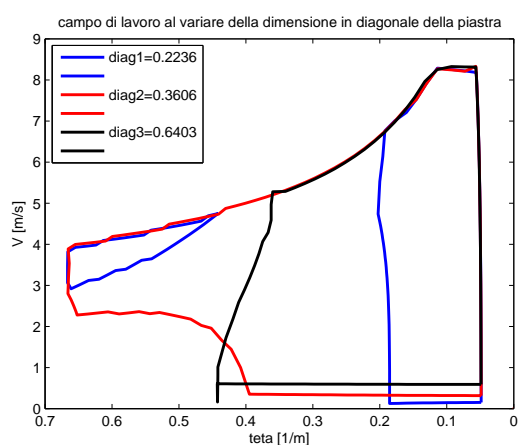


Figura 4.37: campi di lavoro al variare delle dimensioni della piastra

Il motivo del fatto che cambiano i campi di lavoro è dovuto principalmente al fatto che vengono saturati in modo diverso i vincoli imposti. Bisogna osservare che in questa fase non ci si è posti il problema di verificare che i vincoli imposti fossero effettivamente rispettati, infatti questa trattazione è utile per individuare tutti i fattori che caratte-

rizzano il progetto e come questi determinano la cinetostatica della bicicletta compliant.

cambio posizione e inclinazione

Mantenendo ora le dimensioni fissate per la piastra si vede come, cambiando la sua posizione e inclinazione nel telaio, varia lo spazio di lavoro:

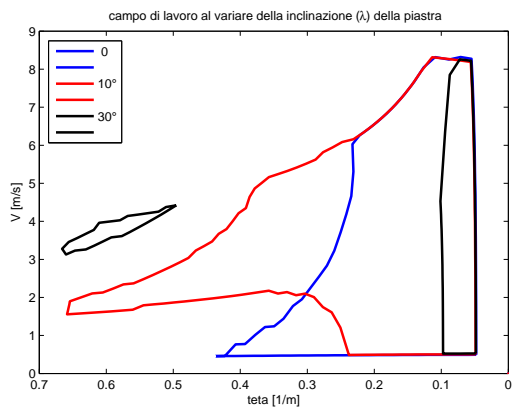


Figura 4.38: campi di lavoro al variare dell'inclinazione della piastra

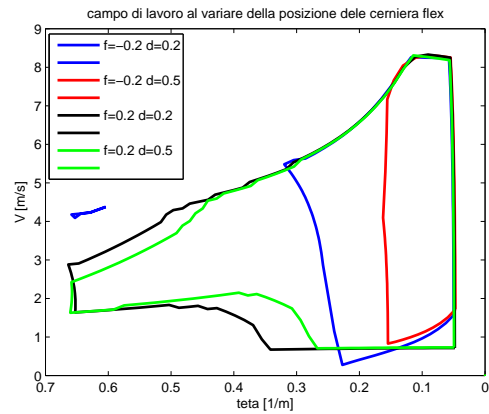


Figura 4.39: campi di lavoro al variare della posizione della piastra

CAPITOLO 5

SINTESI MEDIANTE OTTIMIZZAZIONE MULTIOBBIETTIVO

Nei capitoli precedenti sono state individuate e analizzate le variabili che regolano la cinetostatica della bicicletta compliant-piastra. Vista la quantità di variabili del progetto e i vincoli come strumento per gestire il problema, si è deciso di servirsi di un ottimizzatore ad algoritmi genetici che per le sue proprietà risulta ben adattabile al caso in esame. Il metodo di confronto adottato nei capitoli precedenti, che si basa su valutazioni dei campi di lavoro delle biciclette e di tutto ciò ad esso dipendente, può essere agevolmente trasformato in una funzione di costo per l'algoritmo genetico opportunamente adattato. In questo lavoro di tesi ci si è focalizzati sulla costruzione delle funzioni di costo, senza entrare nei dettagli teorici degli algoritmi genetici. Per eventuali approfondimenti sul loro utilizzo nei problemi di ottimo multi-obiettivo si rimanda al libro di K. Deb. [8]. La bicicletta compliant-piastra viene in questo modo ottimizzata in funzione dei due obiettivi che si sono individuati come più determinanti in fase di analisi della bicicletta compliant che sono: massimizzare l'area di lavoro (devono esistere punti di equilibrio per la bicicletta compliant e ci si deve avvicinare il più possibile al campo di lavoro di riferimento rappresentato dalla bicicletta classica) e ridurre l'effetto negativo della torsione per la rigidità della piastra. Si sono infine evidenziate le principali caratteristiche di guida in linea teorica per questa bicicletta.

5.1 Algoritmo Genetico

Un algoritmo genetico è un metodo di ottimizzazione che si basa sul principio darwiniano dell'evoluzione biologica. In particolare attraverso la codifica delle variabili del problema in forma adatta ad essere manipolata a livello di popolazione, genera popolazioni sempre *migliori* sulla base di trasmissione di patrimonio genetico fino ad individuare l'individuo con le migliori caratteristiche. La meccanica di questi processi è basata su delle operazioni casuali di scambio tra i patrimoni genetici dei genitori e consiste in procedimenti di riproduzione, crossover, mutazione e inversione dei cromosomi.

5.1.1 Aspetti teorici sul metodo di ottimizzazione

Funzione di costo

La funzione di costo, detta anche fitness function, è una funzione le cui n variabili sono date dagli n parametri da ottimizzare. Dati i valori di tali parametri, essa determina il valore dell'obiettivo: quindi la funzione di costo porta dallo spazio dei parametri, detto anche decision space, allo spazio degli obiettivi, come rappresentato in figura 5.1. La

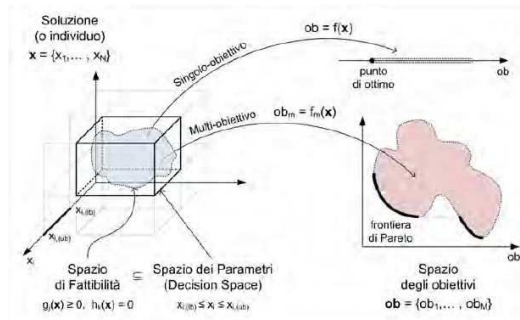


Figura 5.1: spazio dei parametri-spazio degli obbiettivi

bontà o meno del processo di ottimizzazione dipende in gran parte da come sono state costruite le funzioni di costo. Il confine dello spazio dei parametri è dato dai cosiddetti lower bound (lb) e upper bound (ub) che devono essere specificati per ciascuno di essi. Infine, viene chiamato *feasible decision space* il sottoinsieme dello spazio dei parametri che rispetta tutte le relazioni di vincolo date sui parametri stessi.

I problemi di ottimo, siano essi a singolo-obiettivo piuttosto che multi-obiettivo, possono riguardare sia la minimizzazione che la massimizzazione degli obiettivi presi singolarmente. È però consuetudine fare in modo che l'ottimo delle funzioni di costo sia da ricercare nel verso dei valori minimi. Per ottenere questo, se vi sono funzioni di costo da massimizzare, esse vengono cambiate di segno.

Singolo obiettivo

Definita la funzione di costo, l'algoritmo genetico, nella sua versione a singolo obiettivo, che è implementato nella funzione Matlab `ga.m`, funziona eseguendo le seguenti operazioni:

1. creazione di una popolazione di individui con numerosità imposta che copre in maniera statisticamente significativa l'intero spazio dei parametri: ciascun individuo rappresenta una valutazione del set di parametri da ottimizzare e i valori assegnati ai parametri costituiscono i "geni" dell'individuo;
2. valutazione della funzione di costo: ad ogni individuo viene associato uno specifico valore dell'obiettivo. Ciò permette di stilare una classifica degli individui da utilizzare per la produzione della nuova generazione;
3. calcolo della differenza tra l'obiettivo di valor minimo associato all'individuo migliore della generazione attuale e l'obiettivo di valor minimo associato all'individuo migliore della generazione precedente (tale operazione viene effettuata a partire dalla seconda iterazione in quanto la prima iterazione serve per produrre la cosiddetta generazione zero). L'algoritmo si ferma a questo punto se la media pesata della differenza nel valor minimo dell'obiettivo, calcolata sulle cosiddette N_s "generazioni di stallo" (stall generations), è inferiore alla tolleranza (function tolerance). Se ciò non è verificato si passa al punto successivo. La funzione di pesatura è $(\frac{1}{2})^{n_s}$, dove n_s è il numero delle generazioni precedenti contate a ritroso, a partire da quella attuale fino alla N_s -esima;

4. selezione di un numero imposto di individui migliori (élite) che passano invariati alla generazione successiva;
5. selezione degli individui genitori in base al valore dell'obiettivo a cui sono associati;
6. produzione degli individui figli secondo due modalità, oltre a quella elitaria: (1) crossover, l'individuo figlio nasce per combinazione casuale dei geni di due individui genitori, i cui valori rimangono invariati, (2) mutation, l'individuo figlio nasce per mutazione casuale dei geni di un singolo individuo genitore. La frazione di individui della nuova generazione che deve essere prodotta con una modalità piuttosto che con l'altra (élite, crossover, mutation) è decisa dall'utente settando le opzioni. Si riparte dal punto 2 con una nuova iterazione.

Come descritto al punto 3, il criterio di arresto dell'algoritmo che si basa sulla soglia di tolleranza prende in considerazione N_s "generazioni di stallo" precedenti a quella attuale, il cui numero è scelto dall'utente. Si possono impostare anche criteri di arresto diversi, come, ad esempio, il raggiungimento di: un numero massimo di generazioni, un limite massimo di tempo, un valore limite inferiore della funzione di costo. L'algoritmo si ferma appena una di queste condizioni è soddisfatta.

Multiobiettivo

I problemi di ottimo multi-obiettivo si presentano nella seguente forma generale:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Minimizzare/massimizzare} & f_m(\mathbf{x}) & m = 1, 2, \dots, M; \\
 \text{soggetta a} & g_j(\mathbf{x}) > 0, & j = 1, 2, \dots, J; \\
 & h_k(\mathbf{x}) = 0, & k = 1, 2, \dots, K; \\
 & x_{i,(lb)} < x_i < x_{i,(ub)}, & i = 1, 2, \dots, n
 \end{array}$$

in cui f_m è una delle M funzioni di costo, \mathbf{x} è il generico vettore soluzione che raccoglie gli n parametri da ottimizzare, g_j e h_k sono le relazioni di vincolo a cui sono soggetti i parametri, $x_{i,(lb)}$ e $x_{i,(ub)}$ sono i limiti di variabilità inferiore e superiore dati sull' i -esimo parametro x_i . Il soddisfacimento di tutti i vincoli determina il confine del *feasible decision space* all'interno dello spazio dei parametri. Si osserva che per la funzione `gamultiobj.m` di Matlab, le relazioni g_j e h_k devono essere per forza lineari in x , mentre per la funzione `ga.m` possono essere anche non lineari. Supponendo che tutti gli obiettivi debbano essere minimizzati, si dice che il vettore soluzione $\mathbf{x}^{(1)}$ domina un'altro vettore soluzione $\mathbf{x}^{(2)}$ se:

1. $f_m(\mathbf{x}^{(1)}) < f_m(\mathbf{x}^{(2)}) \forall m = 1, 2, \dots, M$;
2. $\exists \bar{m}$ tale che $f_{\bar{m}}(\mathbf{x}^{(1)}) < f_{\bar{m}}(\mathbf{x}^{(2)})$;

altrimenti, si dice che i due vettori $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ sono tra loro non dominanti, o anche non-inferiori. Nei problemi di ottimo multi-obiettivo non esiste un'unica soluzione di ottimo ma un insieme di punti di ottimo $\mathbf{x}^{(i)}$ che sono tra loro nondominanti, la cui ottimalità rispetto agli M obiettivi è da intendersi nel senso di Pareto. Tali soluzioni Pareto-ottime sono mappate dalle M funzioni di costo nello spazio degli obiettivi, dove congiunte tra loro formano la cosiddetta frontiera di Pareto. Se l'ottimo di tutti gli obiettivi va nel verso del loro valore minimo, la frontiera di Pareto giace nell'angolo inferiore-sinistro dello spazio dei parametri ed è evidente come le soluzioni che vi appartengono siano

dominanti rispetto a tutte le altre. L'algoritmo genetico multi-obiettivo, implementato nella funzione Matlab `gamultiobj`, è diverso da quello a singolo-obiettivo. Ad ogni iterazione l'algoritmo riconosce il set di individui tra loro non-dominanti all'interno della popolazione: essi rappresentano una frontiera di Pareto locale. La produzione degli individui figli è condotta perseguendo due scopi:

1. progressivo avvicinamento verso la frontiera di Pareto globale;
2. mantenimento della diversità tra soluzioni in entrambi gli spazi: diversità tra parametri e diversità tra obiettivi.

Il criterio di arresto si basa sulla misura della distribuzione delle soluzioni sulla frontiera di Pareto attuale (average spread). L'algoritmo si ferma quando la media pesata della differenza in tale distribuzione, calcolata sulle cosiddette "generazioni di stallo", è inferiore alla tolleranza (function tolerance). Tolleranza e numero di *stall generations* N_s sono stabilite dall'utente. La funzione di pesatura è $(\frac{1}{2})_s^n$ dove n_s è il numero delle generazioni precedenti contate a ritroso, a partire da quella attuale fino alla N_s -esima. Affinchè il processo di ottimizzazione produca i risultati sperati, la diversità tra soluzioni deve essere associata ad un numero sufficiente di individui. Perciò il numero di individui della popolazione iniziale è scelto in modo da trovare un compromesso tra valori che porterebbero a tempi di calcolo eccessivi e valori che mi garantiscano la possibilità di poter ispezionare tutto il campo delle soluzioni. Matlab propone che il numero della popolazione debba essere al meno 15 volte il numero delle variabili del problema.

5.1.2 Proprietà che rendono algoritmo genetico particolarmente adatto al problema in esame

- Il fatto di lavorare con una popolazione di individui in contemporanea garantisce la possibilità di identificare il minimo globale della funzione obiettivo mantenendo contemporaneamente punti di indagine che sono vicini a dei minimi locali. Ciò permette di ottenere come output, oltre alla soluzione di ottimo, alternative anche molto differenti in termini di variabili ma sempre caratterizzate da valori bassi della funzione obiettivo. Questo permette di avere più casi tra cui scegliere per rispettare altri vincoli di tipo progettuale. Questo aspetto rimane durante il processo di calcolo infatti l'algoritmo cerca di salvaguardare la diversità tra parametri nella produzione degli individui figli. Essa rappresenta la "distanza media" tra gli individui di una popolazione. Il mantenimento della diversità tra gli individui, di generazione in generazione, è essenziale perchè permette all'algoritmo di cercare l'ottimo nella più ampia regione di spazio possibile.
- È l'unico reso disponibile da Matlab per risolvere problemi multi-obiettivo senza cambiarne la natura con una riduzione a singolo-obiettivo.
- Esso può essere applicato a problemi cosiddetti "non-smooth", in cui le funzioni di costo non presentino caratteristiche di derivabilità, e per i quali, quindi, non sono adatti metodi che si basano sul gradiente.

- Anche se non vi è certezza di convergenza verso l'ottimo questo metodo trova soluzioni buone in tempi ragionevoli.

5.2 Adattamento dell' algoritmo genetico al caso in esame

Nell'andare progressivamente a determinare il definitivo programma di ottimizzazione si sono effettuati diversi tentativi apportando modifiche alle funzioni di costo, ai vincoli e ai valori di soglia delle variabili del problema:

1. algoritmo ad 1 obiettivo rappresentato dall'area di lavoro da massimizzare; utile per verificare che l'ottimizzatore mi desse risultati in linea con quanto già analizzato in precedenza.
2. algoritmo a 2 obiettivi: minima area di lavoro non coperta e coppia flettente; si sono ottenute informazioni sulla posizione e piastra migliore che dessero la minore coppia flettente M_{1z} al pilota.
3. algoritmo a 2 obiettivi: minima area di lavoro non coperta e coppia torcente; si è andati ad analizzare la soluzione che poteva garantire la minore coppia torcente al pilota.
4. in figura 5.2 si riporta in forma schematica come si è adattato il problema progettuale in termini di variabili, funzioni di costo e obiettivi nella sua forma definitiva. Si vede come i parametri che rendono particolare la soluzione diventa-

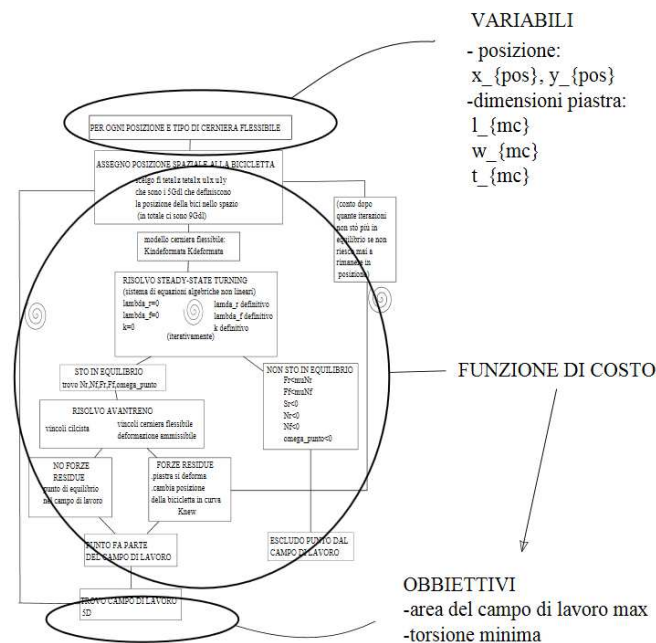


Figura 5.2: si adatta programma di calcolo all' algoritmo genetico

no le variabili del problema. Il corpo del metodo diventa le due funzioni di costo

che vengono inserite nell'algoritmo genetico in base ai due obiettivi:

Obiettivo 1: minimizzare l'area di lavoro non coperta A_{nc} :

$$A_{nc} = A_{classica} - A_{compliant}$$

Obiettivo 2: minimizzare la deformazione della piastra dovuto alla torsione ϑ_{1x}

Per quanto riguarda l'algoritmo nella sua forma definitiva, il primo dei due obiettivi è quello che mi garantisce l'esistenza di posizioni per cui la bicicletta può effettuare la curva in equilibrio rispettando tutti i vincoli imposti. Da notare come il problema di massimo è stato convertito in minimo valutando l'area di lavoro non coperta rispetto a quella di riferimento data dalla bicicletta classica. In realtà si dovrebbe massimizzare un volume visto il campo di lavoro 3D per la bicicletta compliant-piastra. Nel caso in esame si è andato a semplificare il calcolo valutando indicazioni sul volume attraverso la somma dell'area di tre layer corrispondenti a tre angoli di torsione (0° , 3° , 5°).

Il secondo obiettivo riguarda il vincolo rappresentato dalla torsione della piastra. Questa scelta si deve al fatto che la torsione risulta essere la condizione più stringente tra quelle che determinano l'inguidabilità della bicicletta compliant con un pilota capace di interagire con lo sterzo attraverso la sola coppia attorno all'asse z del sistema di riferimento relativo piastra. Proprio per questo motivo non si è ritenuto sufficiente stabilire un valore di soglia ma si è voluto spingere il risultato verso soluzioni che mi portassero ad una minimizzazione di questo valore.

Un'importante modifica, determinata dalla necessità di ridurre i tempi di calcolo, alla funzione di costo in ingresso all'algoritmo genetico è stato il cambio di metodo con cui si determina l'area del campo di lavoro: si è passati dal determinare lo spazio di lavoro valutando tutti i punti nel dominio $(\varphi, \vartheta_{1z})$, ad una ricerca limitata dei punti prossimi al confine del campo di lavoro. Questo è stato possibile attuando una trasformazione di coordinate: da coordinate lineari si è passati a quelle polari, che meglio si prestano all'implementazione di problemi di questo tipo:

$$\begin{cases} \vartheta_{1z} = \rho \cos \theta & \rho \in [0, \sqrt{2} \max(\varphi_{max}, \vartheta_{1z_{max}})] \\ \varphi = \rho \sin \theta & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Si vede in figura 5.3 come partendo da raggio ρ e angolo θ nulli ci si muove in linea retta fino ad individuare il confine, dopodichè viene aumentato l'angolo di ricerca. A seconda che il punto appartenga o meno al campo di lavoro si procede a determinare il punto di confine spostandosi in un senso o nell'altro. In questo modo con poche iterazioni si ha un valore che approssima piuttosto bene l'effettiva area di lavoro.

5.2.1 Limiti superiori ed inferiori per le variabili progettuali

Una volta individuate le variabili del problema, sono stati definiti i limiti massimo e minimo di variabilità per ciascun parametro andando così a definire il decision space per l'ottimizzatore. I limiti che riguardano la posizione della piastra lungo l'asse orizzontale sono stati scelti nel seguente modo: come limite inferiore per l'asse x è stato scelto la metà del passo della bicicletta mentre come limite superiore si è optato per un valore tale da posizionare la cerniera poco oltre la fine della ruota anteriore. Per l'asse verticale è stato scelto in modo che non ci fosse contatto con il terreno mentre come limite

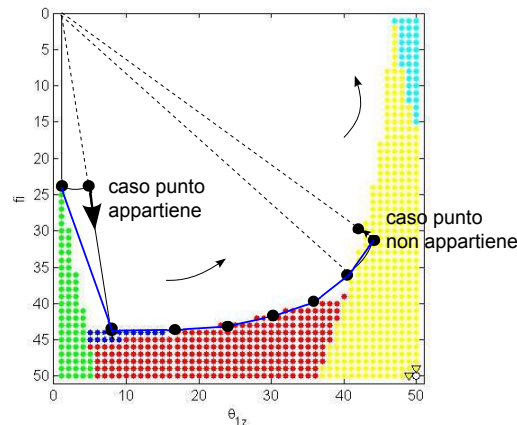


Figura 5.3: nuovo metodo di calcolo dell'area di lavoro: coordinate polari

superiore è stato scelto un valore che mettesse la cerniera non oltre la altezza massima dello sterzo di una bicicletta classica. Da analisi successive si evince che le zone più interessanti per quanto riguarda la possibile posizione della cerniera sono quelle vicino alla ruota anteriore. Visto che l'ottimizzatore non tendeva mai a raggiungere i confini posti prima si è deciso che questi limiti fossero sufficientemente ampi.

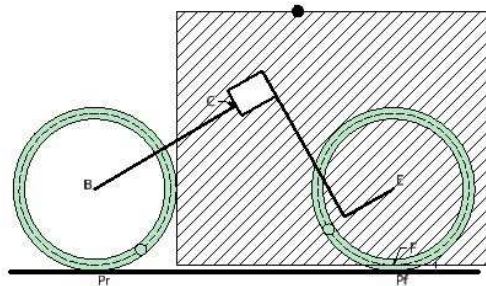


Figura 5.4: decision space per le variabili di posizione

I valori specifici e i limiti posti sulle variabili che determinano la dimensione della piastra si faccia riferimento alla tabella.

5.2.2 Opzioni della funzione gamultiobj.m

Come dati in ingresso per l'ottimizzatore multiobiettivo bisogna assegnare il numero di individui della popolazione iniziale e il cui valore è scelto in modo da trovare un compromesso tra valori che porterebbero a tempi di calcolo eccessivi e valori che mi garantiscano la possibilità di poter ispezionare tutto il campo delle soluzioni. Matlab propone che il numero della popolazione debba essere al meno 15 volte il numero delle variabili del problema; nel nostro caso si è scelto di dare un valore indicativamente 30

volte il numero di variabili visto che i range per ogni variabili erano piuttosto ampi. Anche per assegnare il numero di generazioni massimo, non essendoci una formula che ne determina un legame fra il numero degli individui della popolazione e le variabili del problema, si è andati, dopo un po' di prove, a trovare un valore tale per cui non ci fossero più grandi variazioni dello spread.

Come monitoraggio durante la ottimizzazione sono state scelte quattro rappresentazioni che mirano a tener sotto controllo i dati che man mano vengono effettuati. Il primo riquadro rappresenta il fronte di Pareto degli individui dominanti ad ogni generazione. Vengono disposti gli individui dominanti allo stesso livello rispetto a tutti gli altri per l'obiettivo uno e l'obiettivo due. Il secondo riquadro rappresenta ad ogni generazione quanto sono distanti fra di loro gli individui dominanti. Il terzo grafico categorizza la popolazione per gruppi dello stesso livello, quelli con rank 8 sono i dominanti. L'ultimo grafico monitora lo spread medio per la distribuzione di Pareto corrente.

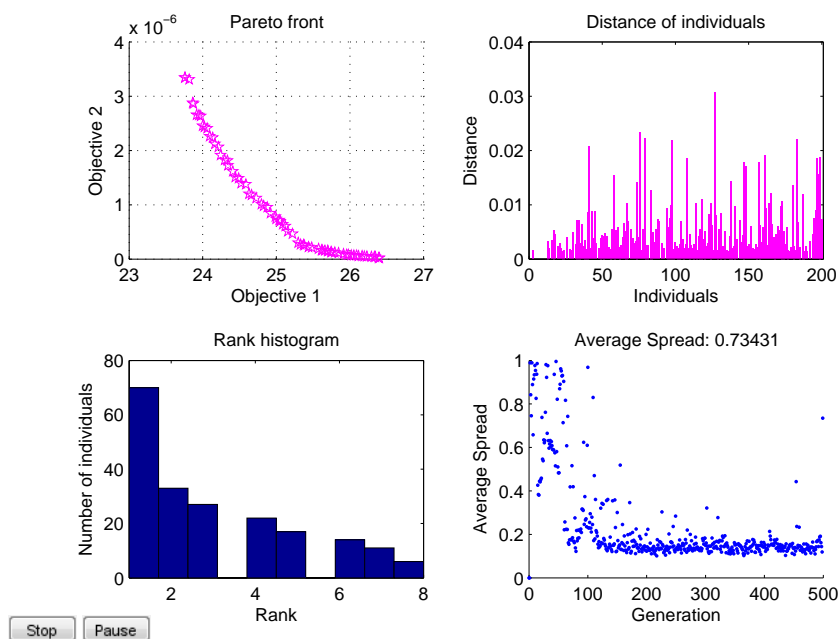


Figura 5.5: finestra di diagnosi aggiornata ad ogni iterazione dal programma di ottimizzazione

Parametro	lb	ub
l_{mc}	0.005	0.2
w_{mc}	0.05	0.5
t_{mc}	0.001	0.01
x_{pos}	0.3	1.3
y_{pos}	-0.3	0.6
λ	0.005	0.2
Griglia disposizione bicicletta		
Spaziatura φ ($0 \div 45^\circ$)	50	
Spaziatura ϑ_{1z} ($3^\circ \div 40^\circ$)	50	
Coordinate polari		
Spaziatura radiale: ρ	100	
Spaziatura angolare: θ	20	
Opzioni della funzione <i>gamultiobj.m</i>		
Dimensione popolazione iniziale	200	
N_s numero di generazioni max	500	
Tolleranza	10^{-5}	
Funzione di crossover	crossovertwopoint	
Risorse di calcolo		
Tempo di calcolo	26 h (circa)	
Utilizzo CPU (parallel-processing)	100	
Caratteristiche CPU	Intel Core i7-4600U 2.70GHz	

5.3 Risultati ottimizzazione e analisi bicicletta compliant-piastra ottimizzata

L'ottimizzazione come già anticipato dipende da una serie di vincoli: il rispetto della condizione di equilibrio ($F_r < \mu_r N_r$, $F_f < \mu_f N_f$, $N_r > 0$, $N_f > 0$, $S_r > 0$, $\dot{\Psi} > 0$), condizioni di deformazione massima ammissibile per la piastra perchè non subisca sneramento o generi una cinematica non desiderata, ma soprattutto l'elemento di vincolo più complesso è rappresentato dal ciclista. In letteratura non sono molti gli studi che riguardano le capacità di guida del ciclista, ma tutti questi analizzano il caso di ciclista classico capace di interagire con lo sterzo attraverso la sola coppia attorno all'asse z (secondo le convenzioni assunte in questa tesi). Nel caso in esame bisognerebbe conoscere con precisione che cosa è in grado di fare il ciclista per i diversi gradi di libertà che si attivano durante la guida della bicicletta compliant. Visto che le ambizioni di questo studio non sono quelle di progettare una bicicletta prestante (per cui sarebbe fondamentale uno studio approfondito del ciclista), ma quanto meno che sia guidabile, si sono introdotte delle larghe ipotesi sulle capacità di guida del ciclista: questo infatti oltre che una coppia flettente (M_{1z}) si è ritenuto lecito potesse fornire una coppia torcente (M_{1x}) allo sterzo.

La scelta del valore della coppia M_{1z} si basa su un confronto con i dati sperimentali trovati in letteratura sulla coppia massima a cui viene sottoposto il ciclista in diverse condizioni di guida (in particolare si è fatto riferimento a [45]) ed ai valori tipici nella guida di una motocicletta.

La scelta del valore di coppia torcente è molto conservativo ma si è scelto, anche in base alle prove sperimentali con la bicicletta test, di considerarla non nulla. Da questo

vincolo dipende molto la possibilità o meno di poter guidare effettivamente la bicicletta compliant perchè condiziona il valore della deformazione torsionale della piastra. Si sarebbe potuto, in favore della sicurezza, considerare un ciclista incapace di fornire coppia torcente e quindi affidarsi completamente alla rigidità torsionale della piastra ma in questi casi l'ottimizzatore forniva dei risultati che vedevano saturata la variabile w_{mc} , dimensione lungo z della piastra. È quindi lecito considerare il ciclista capace di assorbire una coppia torcente senza pesare eccessivamente sul progetto della piastra che deve mantenere una buona rigidità torsionale. Tenendo presente questi aspetti si è determinata la bicicletta compliant-ottima con i vincoli sul ciclista ritenuti più opportuni basandosi anche sui test effettuati e descritti nel seguente capitolo ($M_{1z} = 50Nm$ e $M_{1x} = 5Nm$).

La figura 5.6 rappresenta l'ultima frontiera di Pareto ottenuta: gli individui migliori

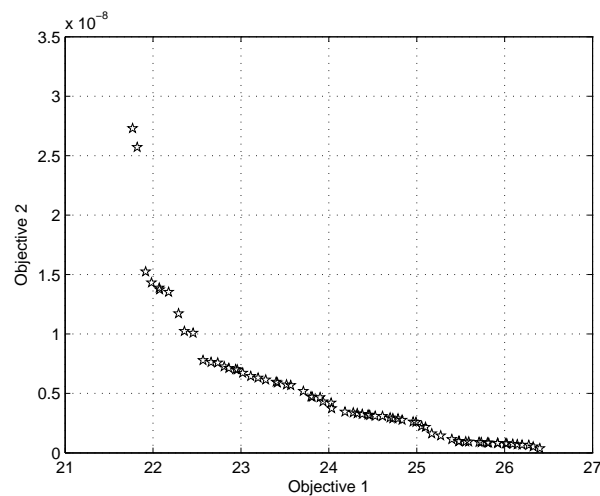


Figura 5.6: fronte di Pareto

sono disposti nel grafico che ha per ascissa l'obbiettivo area di lavoro e ordinata deformazione torsionale della piastra. Tra questi individui, di cui ciascuno rappresenta un set di valori delle variabili da ottimizzare e tutti dominanti nello stesso modo, si è scelta una soluzione leggermente a favore dell'area di lavoro. Di seguito viene proposta la soluzione di bicicletta compliant e tutti i grafici che la descrivono.

La piastra viene messa poco sopra la linea del terreno. Questo concorda con la tendenza riscontrata nel descrivere per una ben precisa curva l'andamento della coppia torcente (vedi figura 5.7). Ora si può dire con certezza che la posizione e dimensioni della piastra sono tali da minimizzare la rotazione e massimizzare l'area considerando tutti i punti del campo di lavoro e non solo per una condizione specifica.

Si sono esclusi dal campo di lavoro 3D quei punti che portano ad una rotazione dopo la prima deformazione maggiore di 10° . In figura 5.9 vengono rappresentati i tre layer per cui si calcola l'area di lavoro la cui somma costituisce il secondo obbiettivo dell'ottimizzatore. Considerando lo stesso punto nel dominio $(\varphi, \vartheta_{1z})$ al variare dell'angolo ϑ_{1x} nel dominio (R, V) sono punti diversi. In particolare si vede come all'aumentare di ϑ_{1x} la bicicletta compliant fa curve più strette variando poco la velocità di avanzamento in curva per mantenere l'equilibrio. Questa rappresenta la caratteristica più importante della bicicletta compliant ma allo stesso tempo quella da evitare. Infatti più si spinge

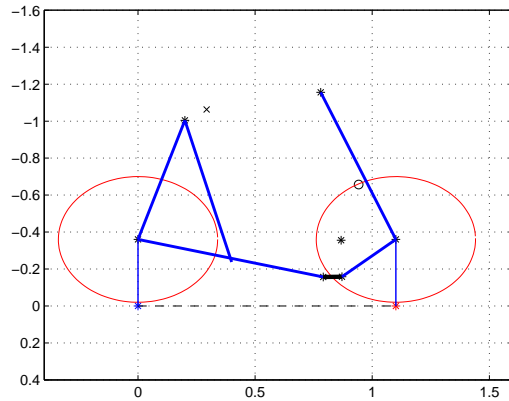


Figura 5.7: bici compliant-piastra ottimizzata

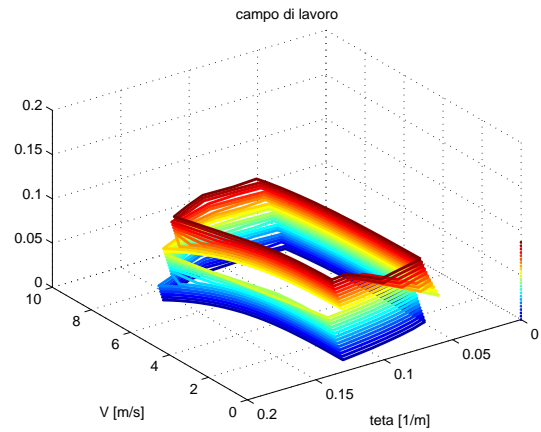


Figura 5.8: campo di lavoro 3D

la progettazione verso soluzioni che prevedono grandi torsioni si avranno maggiori vantaggi cinematici ma cresce l'instabilità della piastra per la perdita di rigidità rispetto a M_{1y} e F_{1z} . Per ogni layer del campo di lavoro sulla piastra agiscono forze diverse

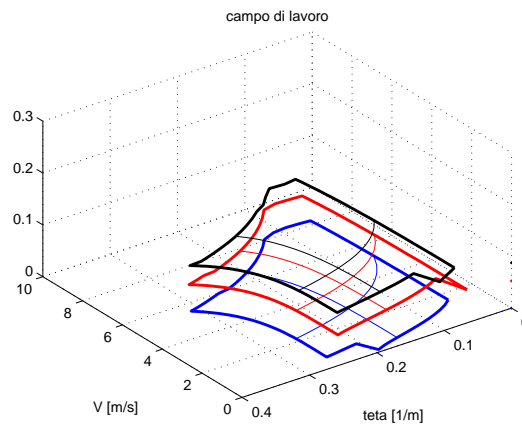


Figura 5.9: campo di lavoro 3 layer

e i vincoli vengono saturati in modo diverso. Si riportano di seguito esclusivamente i grafici di monitoraggio delle forze per il layer corrispondente a $\vartheta_{1x}=0$. Per lo stesso layer si riportano i grafici di supporto al campo di lavoro necessari per evidenziare i motivi dell'esclusione di un punto nell'equilibrio della bicicletta valutando quale vincolo viene saturato per primo.

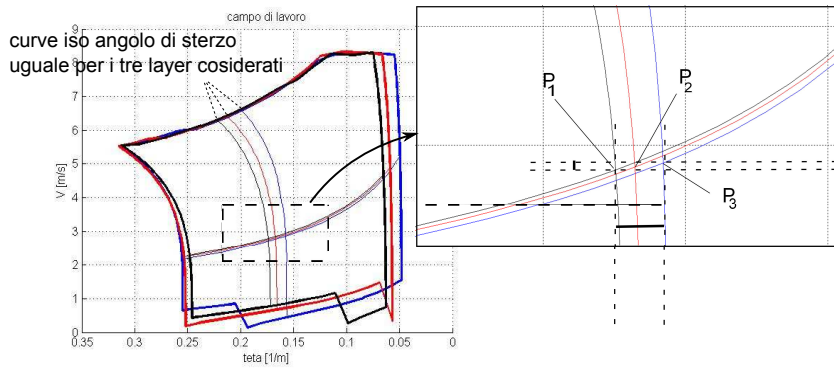


Figura 5.10: campo di lavoro 3 layer: vantaggio cinematico

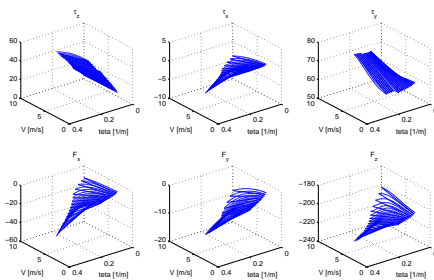


Figura 5.11: forze nel campo di lavoro

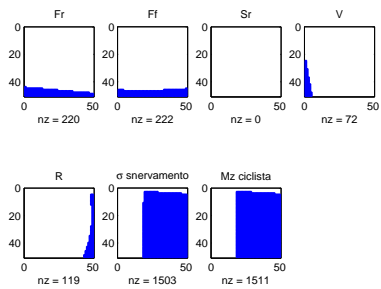


Figura 5.12: vincoli cinetostatici

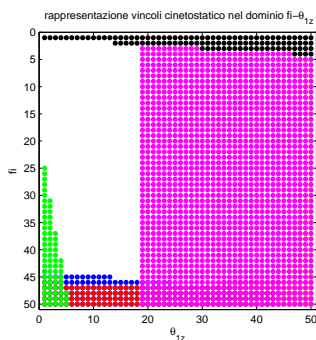


Figura 5.13: vincoli nel dominio $(\varphi, \vartheta_{1z})$

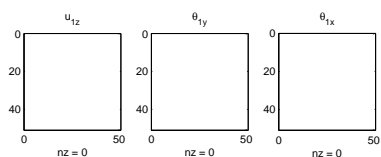


Figura 5.14: vincoli ammissibili per la deformazione della piastra

5.3.1 Valutazione performance piastra

La scelta di modellazione della piastra con 10 beam per poter descrivere le variazioni di rigidità durante la sua deformazione porta a dover gestire matrici di cedevolezza $[C_{LL}]$ di dimensioni 60×60 . Questo rende i criteri che si basano sui coefficienti di cedevolezza non idonei per poter caratterizzare in modo semplice le performance della piastra.

Ci si è basati dunque sul criterio energetico per valutare il comportamento della piastra attraverso la definizione di un coefficiente di “rendimento”. Per la piastra la relazione che intercorre tra deformazioni e forze è dato dalla seguente:

$$\{u_L\} = [C_{LL}]\{f\} \quad (5.1)$$

in cui con $\{u_L\}$ si intende l'insieme dei gradi di libertà di tutti i nodi considerati quindi è un vettore ($1 \times nGdL$); $[C_{LL}]$ ($nGdL \times nGdL$) è la matrice di cedevolezza nella condizione deformata che quindi cambia per ogni punto del campo di lavoro della bicicletta; infine $\{f\}$ ($1 \times nGdL$) è il vettore di forze che per ogni punto del campo di lavoro grava sull'estremo della piastra e quindi solo le ultime sei componenti del vettore saranno diverse da zero. Assumendo che le forze siano applicate in modo quasi-statico (ipotesi sempre più valida riducendo le dimensioni del elemento deformabile), il lavoro totale delle forze può essere calcolato come:

$$W_{in} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nGdL} F_i u_i \quad (5.2)$$

Il lavoro utile è quello che direttamente produce la rotazione della piastra, e se questa fosse un giunto ideale considerato puntuale dotato di sola rigidità torsionale, il lavoro esterno sarebbe:

$$W_{out} = \frac{1}{2} M_{1z} \vartheta_{1z} \quad (5.3)$$

Quindi l'efficienza energetica per la cerniera flessibile piastra può essere definita come:

$$\eta = \frac{W_{out}}{W_{in}} \quad (5.4)$$

Come anticipato questo valore cambia al variare del punto considerato nel campo di lavoro, quindi è possibile rappresentare una superficie che descrive per ogni layer del campo 3D l'andamento del coefficiente di efficienza (in figura 5.15 si mostra il valore di η per il layer corrispondente a $\vartheta_{1x}=0$). L'andamento corrisponde a quanto ci si poteva aspettare e fornisce alcuni utili spunti di riflessione. In particolare dalla figura 5.16 si vede come l'andamento sia crescente al diminuire del raggio di curvatura. Questo è dovuto al fatto che per stretti raggi di curvatura, poichè corrispondono grandi angoli di sterzo, il pilota agisce con una coppia flettente sempre maggiore per deformare la piastra e le altre forze, che dipendono dall'equilibrio in curva, non crescono così tanto. Dalla figura 5.17 si vede che all'aumentare della velocità di avanzamento l'efficienza diminuisce: questo è dovuto al fatto che, fissata la coppia di sterzo per garantire un certo angolo di rotazione, all'aumentare di V le forze nelle altre direzioni crescono.

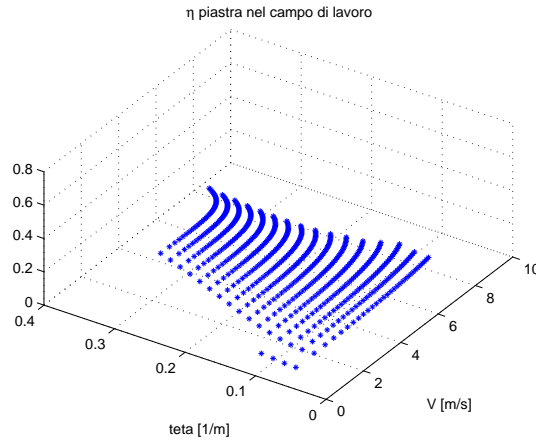


Figura 5.15: efficienza piastra 3D

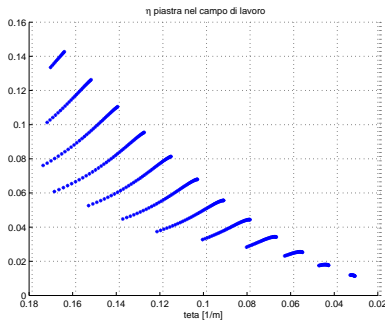


Figura 5.16: efficienza piastra vista1

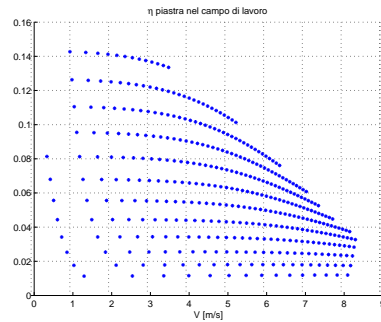


Figura 5.17: efficienza piastra vista2

5.3.2 Comportamento bicicletta in curva e indicazioni sul nuovo modo di guidare

La bicicletta compliant-piastra, a meno che non si ipotizzi un ciclista in grado di interagire perfettamente con il telaio a 360° , subirà delle deformazioni che provocano uno spostamento dell'avantreno della bicicletta; nella nuova posizione cambiano le forze che vanno ad agire sulla piastra che genera nuove deformazioni. Volendo analizzare più nel dettaglio questo comportamento si è deciso di studiare un'unica curva rendendo il processo di calcolo iterativo per tener conto degli effetti descritti. Assegnata dunque la posizione per effettuare una determinata curva ($\varphi=0.031[\text{rad}]$, $\vartheta_{1z}=0.1446[\text{rad}]$, $\vartheta_{1x}=0[\text{rad}]$), trascurando l'effetto delle deformazioni si effettuerebbe una curva a raggio di curvatura costante e pari a $R_{\text{compliant}}=15[\text{m}]$. Ipotizzando ora che il ciclista possa agire con coppia flettente M_{1z} tale da mantenere la rotazione assegnata e con una coppia torcente, l'effetto delle successive deformazioni e cambiamenti di posizione dell'avantreno fa in modo che la bicicletta compliant-piastra compia una curva a raggio di curvatura variabile. Possono essere così visualizzati l'andamento del raggio di curvatura e la deformazione della piastra per una serie di iterazioni:

Dai grafici si vede che l'effetto di deformazione maggiore sulla piastra è la traslazione verso l'esterno della curva. Questo provoca una crescita lineare del raggio di curvatura. Ipotizzando ora di diminuire la coppia torcente che il pilota può dare la situazione non

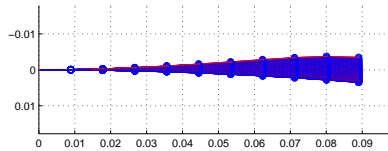


Figura 5.18: deformazione piastra in curva

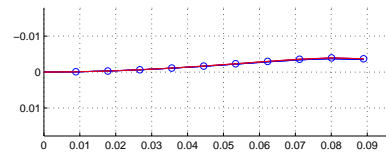


Figura 5.19: deformazione piastra in curva all'ultima iterazione

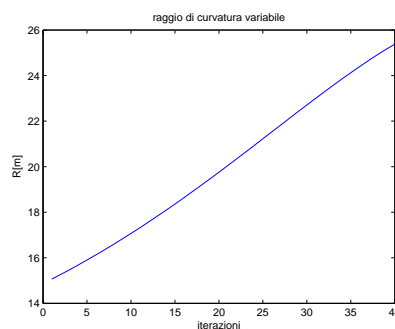


Figura 5.20: andamento del raggio di curvatura variabile

cambia di molto, poichè la bicicletta considerata è quella ottimizzata per minimizzare la torsione. La forza che maggiormente determina lo spostamento laterale della piastra nella sua configurazione deformata, risulta essere il momento M_{1y} . Quindi per migliorare le prestazioni della bicicletta si deve agire andando a ridurre l'effetto del momento M_{1y} sulla piastra in curva. Per far questo si può spostare la piastra in una posizione a coppia flettente più piccola ma rimanendo vicini alla posizione ottima per la torsione. Quindi si è posizionata la piastra in prossimità del punto di contatto della ruota anteriore. In questo modo le prestazioni nel mantenere la curva assegnata vengono molto migliorate come si vede in figura 5.21.

Lo studio teorico indicativo del comportamento in curva della bicicletta compliant-piastra è stato svolto sotto precise ipotesi per quanto riguarda il ciclista e si è trascurata la dinamica nel passare da una condizione di equilibrio ad un'altra. Questo voleva solo essere un elemento utile ad evidenziare il nuovo tipo di curva a raggio di curvatura variabile della bicicletta. Cambiando infatti il modo di interazione tra telaio e ciclista il comportamento in curva si modifica significativamente. Risulta quindi di fondamentale importanza valutare come si comporta il ciclista rispetto ai nuovi gradi di libertà introdotti, per poter definire un corretto sistema di controllo che simuli il nuovo tipo di interazione tra ciclista e telaio deformabile, da cui dipende il progetto. Le prime indicazioni qualitative a riguardo sono state evidenziate nei test descritti nel capitolo seguente.

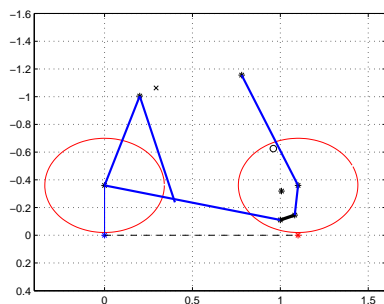


Figura 5.21: bicicletta ottima ridotto M_{1y}

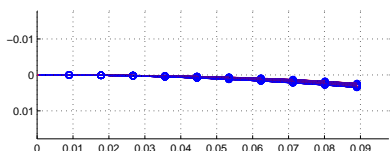


Figura 5.22: deformazione piastra in curva ridotto M_{1y}

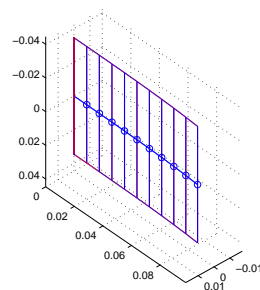


Figura 5.23: deformazione piastra in curva ridotto M_{1y} all'ultima iterazione

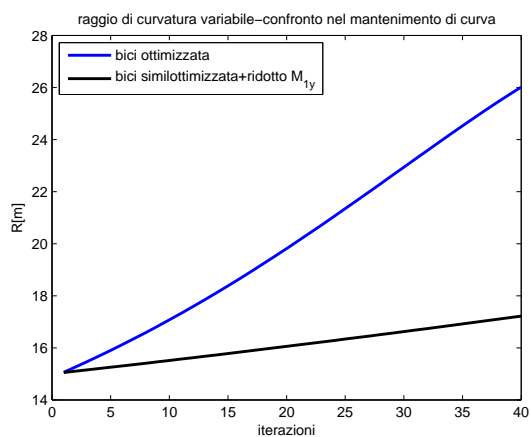


Figura 5.24: confronto andamento del raggio di curvatura

5.3.3 Dipendenza dei risultati dalle ipotesi sul ciclista

Per valutare l'influenza della coppia M_{1z} nel determinare il campo di lavoro si fa riferimento al grafico 5.25 dei vincoli nel dominio $(\varphi, \vartheta_{1z})$. All'aumentare di M_{1z} l'area di

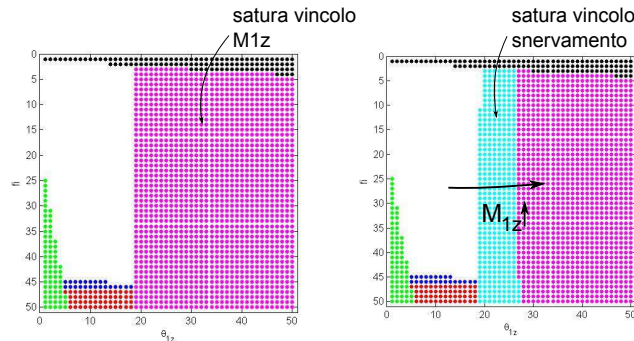


Figura 5.25: dipendenza risultati da M_{1z}

lavoro cresce perchè il limite di saturazione si raggiunge per valori di angolo di sterzo maggiori. Questo comportamento è garantito fino a valori di circa 60Nm per quanto riguarda la coppia flettente. Per valori al di sopra di questa soglia perde influenza nel determinare l'area di lavoro perchè diventa più stringente il vincolo rappresentato dal raggiungimento dello snervamento della piastra (si considera acciaio armonico $R_s=1150$ [MPa] e criterio di Guest-Tresca calcolato negli otto vertici della piastra e coefficiente di sicurezza $\eta_s=1.5$). Dal grafico si vede come lo snervamento si raggiunge per rotazioni dell'estremo della piastra pari a circa 17° (posizione 19 in ascisse del grafico quindi: $3^\circ + (40^\circ - 3^\circ)/50 * 19 = 17.06^\circ$).

Nella figura 5.26 si evidenzia l'influenza della coppia torcente M_{1x} nel determinare la piastra e quindi le prestazioni della bicicletta.

Al aumentare di M_{1x} il grafico di Pareto risulta dominante (migliore posizione dei

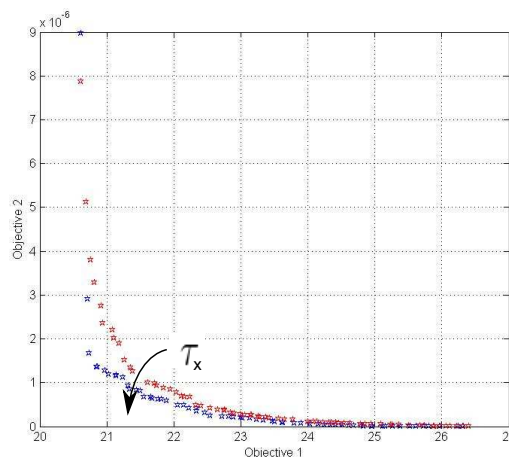


Figura 5.26: dipendenza risultati da M_{1x}

punti per i due obiettivi). Questo è dovuto al fatto che un ciclista capace di fornire meno coppia provoca una deformazione torcente maggiore alla piastra e quindi che si

raggiunga più facilmente il limite di saturazione e di conseguenza l'area del campo di lavoro diminuisce.

A questo punto è chiaro come la bicicletta compliant-piastra risulti ottima per i vincoli considerati e non in assoluto.

CAPITOLO 6

TEST: Modifica Costruttiva di una Bicicletta Classica

In questo capitolo viene descritto un test di guida di una bicicletta compliant-piastra ricavata apportando una semplice modifica costruttiva ad una bicicletta classica. L'obiettivo principale del test è quello di evidenziare i comportamenti che si sono riscontrati per via teorica, e capire come il pilota si adatta al nuovo modo di guidare per via dello sterzo flessibile. Tutto ciò è dunque funzionale a capire se le ipotesi dei vincoli rappresentate dal pilota siano qualitativamente valide e tali da rendere il metodo di progettazione della piastra adottato efficace.

Di seguito verranno presentate le modifiche effettuate alla bicicletta classica, si valuterà che in fase di accelerazione e frenata la piastra non subisca snervamento o instabilità a carico di punta, si analizzeranno le sensazioni di guida nel tentativo di fornire alcune indicazioni progettuali.

6.1 Bicicletta Classica Test

La bicicletta a disposizione, su cui sono stati fatti i test, è rappresentata in figura 6.1 mentre accanto si evidenziano tutte le dimensioni di interesse in una sua ricostruzione con Autodesk Inventor:



Figura 6.1: bici vera test

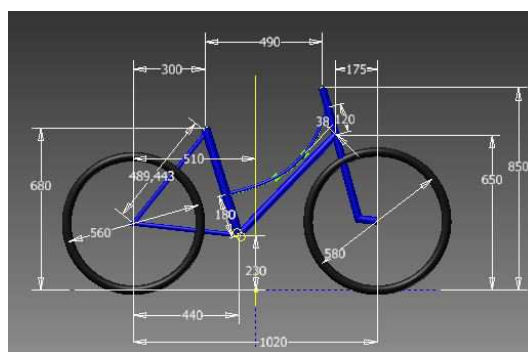


Figura 6.2: bici inventor test

Visto l'obiettivo del test si è adottata una soluzione costruttiva che potesse prevedere una variazione di lunghezza della parte flessibile. Perciò il tubo superiore, elemento che collega tubo di sterzo e piantone, e il tubo obliquo che collega il tubo di sterzo alla scatola del movimento centrale, sono stati sostituiti con una piastra di acciaio armonico di dimensioni $600 \times 150 \times 2$ [mm] ($l_{mc} \times w_{mc} \times t_{mc}$). Con il tratteggio viene rappresentata

la parte della bicicletta che può essere resa deformabile.

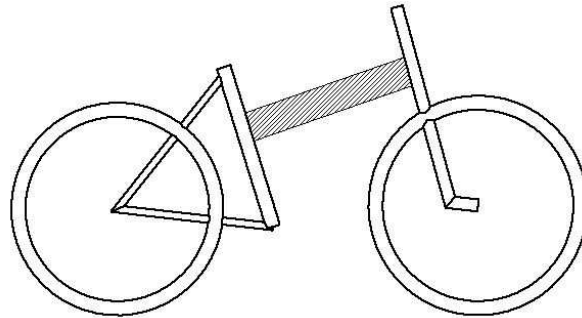


Figura 6.3: possibili posizioni della parte deformabile

6.2 Verifiche in fase di accelerazione e frenata

Nel caso in esame, sostituendo la serie sterzo con una piastra, risulta importante, oltre che considerare gli opportuni vincoli di snervamento in curva stazionaria, effettuare le opportune verifiche in fase di accelerazione e frenata. Si possono così determinare alcune indicazioni sul valore massimo di accelerazione o frenata oltre i quali la piastra subisce instabilità da carico di punta o snervamento.

6.2.1 Verifica fase di accelerazione

Sulla base di alcune ipotesi semplificative si può schematizzare il problema in fase di accelerazione nel seguente modo:

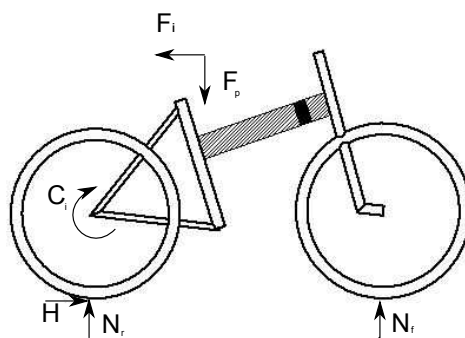


Figura 6.4: forze e reazioni in fase di accelerazione

In figura 6.4 sono evidenziate tutte le forze esterne agenti nel sistema dovute al peso, alle reazioni vincolari, la coppia interna C_i che può essere facilmente trovata attraverso un bilancio di potenze: $C_i = m_{tot} \rho_r a_G$. L'accelerazione a_G , che impone il pilota in fase di accelerazione, si ipotizza $1/10$ l'accelerazione di gravità ($a_G = k_{acc} g$ con $k_{acc} = 1/10$).

Attraverso l'uso di equazioni cardinali della dinamica si trovano reazioni vincolari e forza di spinta:

$$\sum F_x, \sum F_z, \sum M_{P_r,y} \quad \longrightarrow \quad N_r, N_f, S_r \quad (6.1)$$

Con un equilibrio sulla catena si determinano la forza tiro necessaria per garantire la coppia motrice calcolata; di conseguenza è facile determinare la coppia sul pignone maggiore e la forza che il ciclista impone sul pedale:

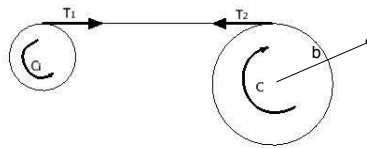


Figura 6.5: catena con pignoni

$$T_1 = \frac{C_1}{r_{pign}} \quad (6.2)$$

$$C_{i2} = R_{pign} T_2 \quad (6.3)$$

$$F_{ped} = \frac{C_{i2}}{b} \quad (6.4)$$

Se si isola il ciclista può essere visto come un corpo solido vincolato isostaticamente al telaio della bicicletta tramite una cerniera e due carrelli:

Con tre equilibri dinamici si trovano tutte le reazioni incognite (anche se sono 4 i

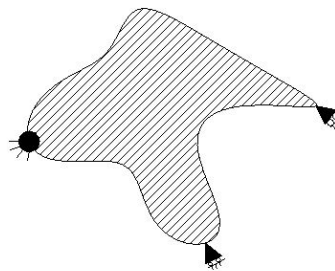


Figura 6.6: schema del ciclista

vincoli del ciclista, il problema è isostatico perchè la forza sul pedale è nota):

$$\sum F_x, \sum F_z, \sum M_{sell,y} \quad \longrightarrow \quad N_{man}, H_{sell}, V_{sell} \quad (6.5)$$

A questo punto sono note tutte le forze esterne che agiscono sul telaio della bicicletta. La valutazione delle azioni interne è stata fatta adattando un codice di calcolo in Matlab per la risoluzione di strutture bidimensionali con il metodo degli spostamenti al telaio della bicicletta considerata. Il file di input è riportato in appendice B. Il telaio è

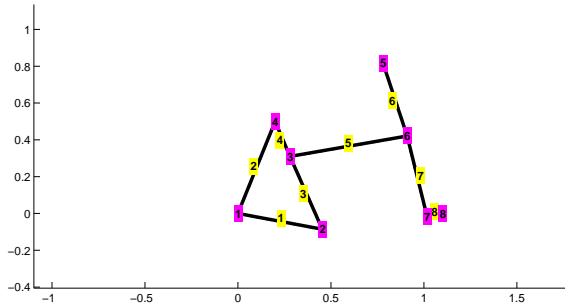


Figura 6.7: convenzioni

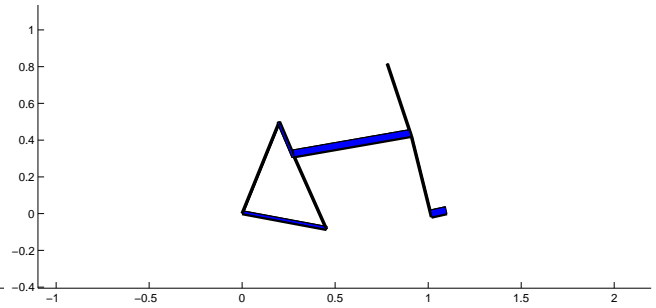


Figura 6.8: azione interna assiale

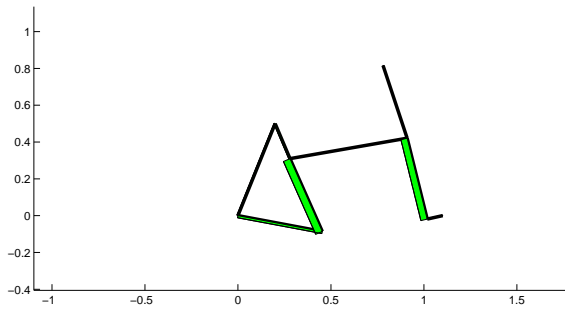


Figura 6.9: azione interna taglio

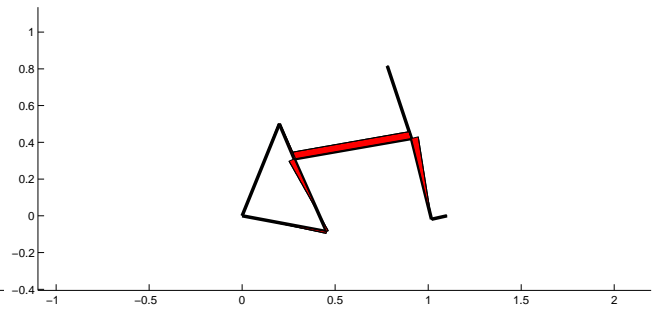


Figura 6.10: azione interna flettente

stato reso isostatico assegnando come vincoli un carrello in corrispondenza della ruota posteriore e una cerniera per quella anteriore per rendere la struttura isostatica. Nella figura 6.7 vengono riportati i diagrammi delle azioni interne.

Si vede come la parte di telaio che deve essere resa deformabile risulta compressa infatti il carico assiale è negativo. Bisogna quindi verificare che la piastra non subisca instabilità da carico di punta: le inevitabili imperfezioni nelle travi causano piccole inflessioni, che però si amplificano in presenza di compressione, fino a non risultare più limitate quando il carico assiale si avvicina al valore critico. Per trovare quale sia il carico oltre al quale si instaura instabilità nella piastra si fa riferimento alla teoria delle travi presso-inflesse applicata al caso di trave incastrata sottoposta ad un carico assiale di compressione P . L'effetto descritto non può essere colto sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti, che deve quindi essere rimossa dell'ambito che riguarda la scrittura dell'equilibrio riferendosi alla situazione indeformata. In figura 6.11 viene rappresentata la condizione deformata in cui viene valutato l'equilibrio.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{EJ} \quad (6.6)$$

$$M = P(f - y) \quad (6.7)$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ} \quad (6.8)$$

$$(6.9)$$

si ottiene:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \alpha^2 y = \alpha^2 f \quad (6.10)$$

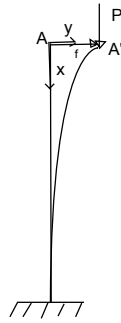


Figura 6.11: trave inflessa

la soluzione di questa equazione differenziale è:

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + y_P \quad (6.11)$$

$$y_P = f \quad (6.12)$$

le condizioni al contorno valgono:

$$\begin{cases} y(x=0) = f \\ y(x=l) = 0 \\ y'(x=0) = 0 \end{cases}$$

che se esplicitate le uguaglianze precedenti si trova:

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \sin \alpha l + f = 0 \\ C_1 \alpha \cos \alpha l = 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

escludendo la soluzione banale deve risultare

$$\alpha \cos \alpha l = 0 \rightarrow \alpha l = \frac{\pi}{2} \quad (6.14)$$

combinando le due equazioni 6.14 e 6.6 si trova:

$$P_{cr} = 0.25 \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (6.15)$$

Trovato il valore del carico critico deve risultare

$$\sigma_{assiale} A_{sez} < P_{cr} \quad (6.16)$$

A questo punto, determinato ogni termine della disuguaglianza si risolve iterativamente il calcolo descritto variando ad ogni passo il coefficiente di accelerazione k_{acc} e si determina così il valore dell'accelerazione tale per cui la disuguaglianza non risulta più verificata. Dal grafico 6.12 si vede come per valori del fattore k_{acc} inferiori a circa 0.15 non si supera il carico critico. In fase di test quindi è importante non imprimere accelerazioni al di sopra di questa soglia. Inoltre all'aumentare della lunghezza della piastra il carico critico scende con il quadrato della lunghezza e di conseguenza si abbassa il valore dell'accelerazione massima ammissibile.

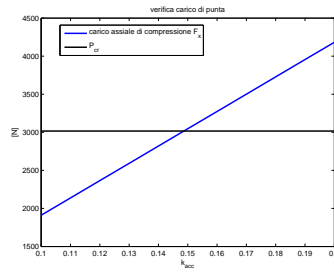


Figura 6.12: verifico buckling

6.2.2 Verifica in fase di frenata

Nel caso della frenata si adotteranno le stesse ipotesi semplificative della fase di accelerazione, la differenza sarà rappresentata dal fatto che la forza di inerzia ha segno opposto, la forza freno agisce sul telaio attraverso un classico freno sulla ruota anteriore e il ciclista non pedala.

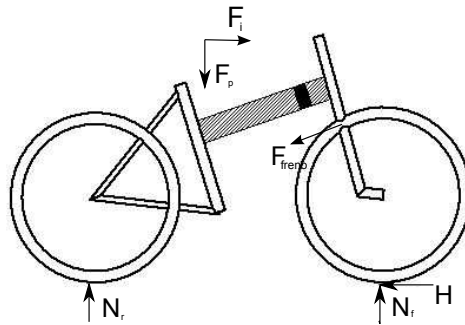


Figura 6.13: forze e reazioni in fase di frenata

Si assume una decelerazione pari ad un quinto dell'accelerazione di gravità. Le reazioni a terra si calcolano attraverso i seguenti tre equilibri dinamici:

$$\sum F_x, \sum F_z, \sum M_{P_r,y} \quad \longrightarrow \quad N_r, N_f, S_r \quad (6.17)$$

A questo punto si può calcolare la forza interna che devono esercitare i freni per ottenere la decelerazione imposta; a tal proposito si isola la ruota anteriore e con un equilibrio di momenti attorno al centro della ruota si determina F_{fr} . A differenza del caso accelerazione si considera il ciclista come un corpo rigido vincolato isostaticamente al telaio tramite una cerniera e un solo carrello (ciclista non vincolato ai pedali). Con equilibri newtoniani si calcolano le reazioni:

$$\sum F_x, \sum F_z, \sum M_{sell,y} \quad \longrightarrow \quad N_{man}, H_{sell}, V_{sell} \quad (6.18)$$

Il telaio caricato di tutte le forze esterne viene dato in input (si veda appendice B) al programma TelaioMds ottenendo le seguenti azioni interne:

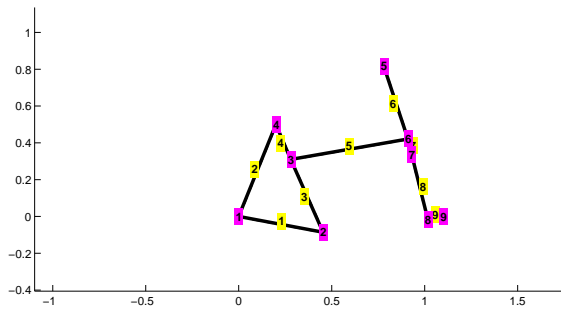


Figura 6.14: convenzioni

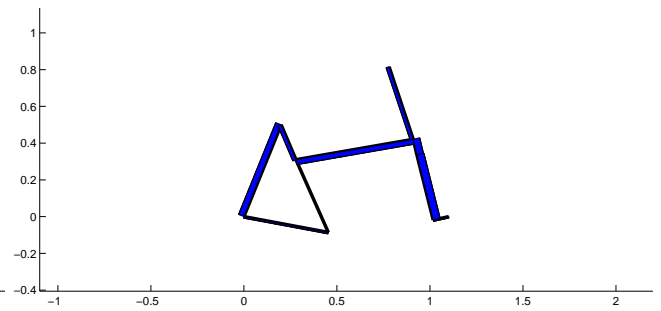


Figura 6.15: azione interna assiale

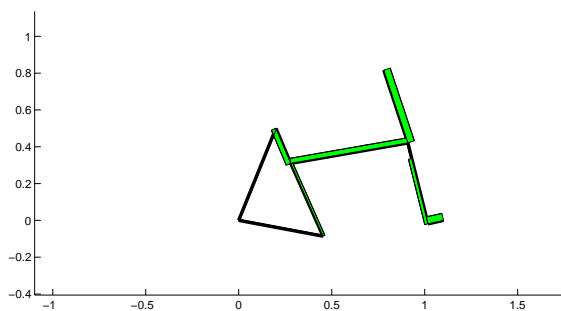


Figura 6.16: azione interna di taglio

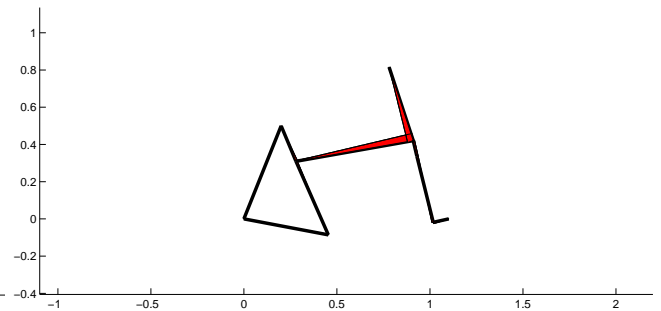


Figura 6.17: azione interna flettente

Da questa analisi la piastra risulta tirata in termini di azione assiale. La motivazione fisica di questo risultato sta nel fatto che in frenata il ciclista cerca di rimanere incollato al sellino e quindi scarica la forza di inerzia sul manubrio generando azioni assiali positive (tirano la piastra per le convenzioni adottate). Questo comporta che nel caso di frenata si debba verificare la resistenza a strappo.

6.3 Realizzazione

Verranno di seguito descritte le prove effettuate per valutare qualitativamente le nuove sensazioni di guida.

La prima rappresenta la soluzione costruttiva più conservativa: la flessibilità è affidata ad una piccola zona della piastra di dimensioni $10 \times 150 \times 2$ [mm] ($l \times w \times t$) [mm].

Il ciclista eseguendo una curva avverte la piccola rigidità aggiunta dalla piastra ma non sembra rappresentare un elemento così difficile da gestire dal pilota. La sensazione di guida può essere paragonata al caso di una bicicletta classica con uno sterzo poco più rigido. Con queste dimensioni infatti la traslazione laterale e la torsione della piastra sono piccole e nella guida non possono essere apprezzati comportamenti atipici attribuibili a questi fattori. Un aspetto che però risulta evidente è che la bicicletta compliant è difficilmente controllabile a basse velocità. Questo è da attribuire ai limiti in termini di angolo di sterzata massimo che si possono avere per non raggiungere snervamento per le dimensioni di questa piastra. Si vuole far notare come la soluzione costruttiva rappresenti di per sé il vincolo garante del rispetto della rotazione massima ammissibile nel verso della sicurezza (infatti l'angolo di sterzo massimo è 15° circa). È noto a partire dagli studi dinamici sulla bicicletta come il ciclista cerchi di stabilizzare il veicolo



Figura 6.18: test1: bici-compliant conservativa



Figura 6.19: test1: bici-compliant conservativa vista dall'alto

accelerando il punto di contatto della ruota anteriore nel verso della caduta per mezzo di rapidi e grandi rotazioni dello sterzo. Nel caso della bicicletta compliant questo tipo di movimento è difficile da ottenere visti i limiti sull'angolo di sterzo. L'aspetto che riguarda la difficile capacità di stabilizzazione per le compliant è uno studio che non viene trattato nel presente lavoro ma che necessita un appropriato approfondimento. Questa bicicletta quindi risulta guidabile ma difficile da stabilizzare a basse velocità. Il secondo test (v. figura 6.20) è stato fatto sulla stessa bicicletta ma in cui si è resa deformabile l'intera lunghezza utile della piastra.

Alcune considerazioni cinematiche possono essere fatte a partire dall'analisi della condizione statica. Infatti dalla figura 6.20 si vede come la posizione del punto di contatto corrisponde a quanto descritto in 4.18. Inoltre è confermata la tendenza energetica riscontrate nello studio dell'angolo di beccheggio con torsione: un rollio della bicicletta provoca un aumento dell'angolo di torsione contrastato dalla rigidità della piastra. Per quanto riguarda la bicicletta in curva questa risulta praticamente inguidabile. L'impossibilità di guidare la bicicletta non è dovuto tanto alla scarsa capacità del pilota di fornire una coppia torcente sufficiente ma è dovuto al fatto che ci si trova a dover governare una posizione instabile della piastra. Può essere visto come problema analogo all'instabilità a carico di punta per travi presso inflesse ma rispetto alla torsione. Si è visto infatti che piccole torsioni legate alla fisiologia della pedalata provocano un incremento della deformazione della piastra e la conseguenza è che la rigidità di questa cambia e il pilota non è in grado di sostenerla. Da questo test risulta quindi confermato quanto riscontrato per la formulazione beam a 12 Gdl per la piastra: una torsione ha come effetto uno spostamento verticale e il test evidenzia come il pilota non riesca a contrastarla. Come ultimo test si è ridotta la lunghezza della piastra deformabile rispetto al secondo caso ma si è aumentato lo spessore della piastra mettendone due in parallelo. In questo modo lo sterzo vedeva risolto il problema legato alla torsione, ma in negativo rendeva lo sterzo eccessivamente rigido alla rotazione.



Figura 6.20: test2: bici-compliant estrema

Da questi test si mette in evidenza la necessità di approfondire alcuni aspetti legati alla dinamica della bicicletta e alle capacità di guida del ciclista in termini quantitativi. Quindi, negli studi successivi, sarà necessario allestire un sistema di misurazione sulla bicicletta compliant che possa misurare forze e coppie sulla piastra monitorando i movimenti che in modo naturale compie il ciclista nel nuovo modo di guidare al variare della lunghezza della piastra. Inoltre sarebbe conveniente eseguire i nuovi test su una bicicletta con ruote sottili in modo da poter valutare con più precisione la posizione del punto di contatto dell'avantreno durante la guida.

Per quanto riguarda il metodo analitico, basato sul confronto con la bicicletta classica, nel complesso riesce quantomeno ad individuare le principali problematiche riscontrate nel test.

6.4 Indicazioni progettuali

A questo punto è stato verificato che è possibile quanto meno curvare e rimare in equilibrio sfruttando la deformazione di un meccanismo compliant a semplice piastra. Inoltre dall'analisi fatta emerge una ben chiara direzione di progettazione. La direzione è quella di cercare di fare un telaio totalmente flessibile (aumentando la lunghezza della parte deformabile) ma che riesca ad assorbire le forze che non può sostenere il pilota e che nel test si sono rilevate tali da rendere inguidabile la bicicletta. Tutto questo, come detto, richiede un'analisi di come il ciclista riesce ad interagire con i nuovi Gdl visto che il progetto dipende dal grado di precisione con cui si descrive il modello ciclista. In questo modo si potrebbe spingere la progettazione verso soluzioni che trovino un compromesso tra la possibilità di sfruttare i nuovi vantaggi cinematici dati dai nuovi Gdl dello sterzo (la torsione) e avere un telaio gran parte flessibile facendo in modo che sia controllabile dal ciclista.

A proposito delle potenzialità cinematiche rappresentate dallo sterzo a più Gdl, si vo-

giono analizzare alcuni campi di lavoro di una bicicletta compliant, inguidabile con la soluzione piastra adottata, ma che indica la direzione di possibili future progettazioni.

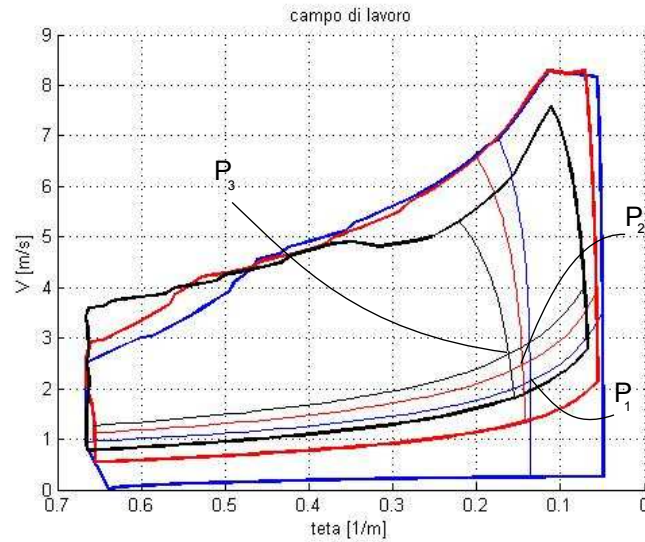


Figura 6.21: potenzialità: curve isolivello $\varphi=5^\circ$ e $\vartheta_{1z}=8^\circ$

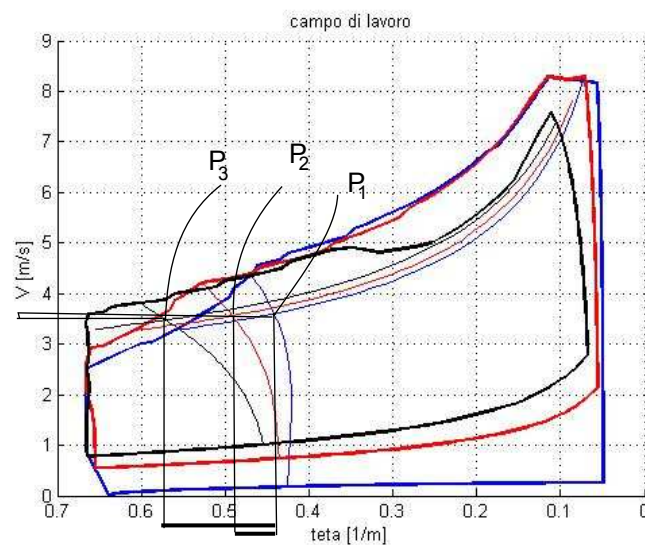


Figura 6.22: potenzialità: curve isolivello $\varphi=20^\circ$ e $\vartheta_{1z}=30^\circ$

Il campo di lavoro 3D è rappresentato in 2D come sovrapposizione di tre layer corrispondenti a tre angoli di torsione dello sterzo: $\vartheta_{1x}=0$ (layer blu), $\vartheta_{1x}=10^\circ$ (layer rosso), $\vartheta_{1x}=20^\circ$ (layer nero).

Si considerino, come mostrato nel grafico 6.21, le curve isolivello per l'angolo di rollio e di sterzo pari rispettivamente a $\varphi=5^\circ$ e $\vartheta_{1z}=8^\circ$ per ogni layer. Si osserva che la posizione del punto corrispondente nel dominio $(1/R, V)$ è diversa: P_1 per $\vartheta_{1x}=0^\circ$, P_2

per $\vartheta_{1x}=10^\circ$ e P_3 per $\vartheta_{1x}=20^\circ$. Questo indica che, attivando la torsione dello sterzo, il punto di equilibrio identifica un raggio di curvatura leggermente più grande di quanto non accada senza prevedere tale torsione (punto P_3 spostato più a sinistra di P_1). La velocità di avanzamento necessaria per mantenere l'equilibrio però risulta notevolmente aumentata e questo non è propriamente positivo. Il vantaggio si ha quando si considerano angoli di sterzo e rollio più grandi: a tal proposito si faccia riferimento alla figura 6.22 in cui sono rappresentate le curve isolivello $\varphi=20^\circ$ e $\vartheta_{1z}=30^\circ$. Si vede come il punto P_3 , corrispondente alla posizione di equilibrio assegnata e angolo di torsione $\vartheta_{1x}=20^\circ$ è molto più spostato a sinistra rispetto al corrispondente punto considerando nulla la torsione, di quanto non accedesse per i precedenti angoli di rollio e di sterzo. Risulta invece piccolo il suo spostamento verticale di P_3 rispetto a P_1 confrontato sempre rispetto al caso precedente. Questo si traduce nella possibilità di effettuare curve a raggio di curvatura molto minore alla stessa velocità di percorrenza circa. Attivare dunque la torsione dello sterzo in determinate condizioni di guida è un vantaggio cinematico non indifferente. Sfruttando questo effetto legato alla torsione, si riesce anche ad aumentare il campo di lavoro della bicicletta perchè si riesce a trovare l'equilibrio in punti irraggiungibili altrimenti. Nella figura seguente viene evidenziata l'area di lavoro aggiunta:

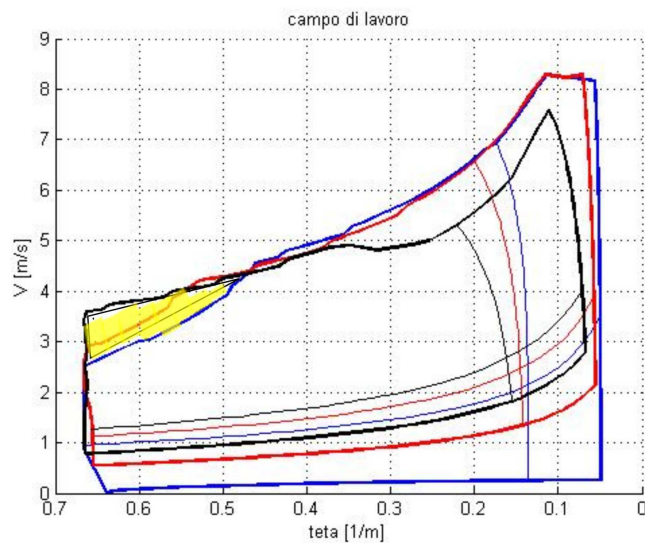


Figura 6.23: potenzialità: cresce campo di lavoro

CONCLUSIONI

Questo lavoro di tesi propone una possibile metodologia per sintetizzare un nuovo tipo di sterzo basandosi su un confronto con la bicicletta classica, usando come strumento per gestire le molteplici variabili del problema, un'ottimizzazione multi-obiettivo. Dai test qualitativi effettuati emergono le principali problematiche riscontrate per via teorica e alcune indicazioni circa le possibilità di azioni di un ciclista aggiuntive oltre la semplice coppia classica sterzante. Quello che si può concludere è che la soluzione piastra difficilmente potrà portare ad avere una bicicletta dalle prestazioni cinetostatiche migliori, in termini di campo di lavoro, di una bicicletta classica. Infatti le conseguenze sulla rigidità legate alla torsione della piastra rendono la bicicletta non guidabile più si aumenta la lunghezza del elemento deformabile. Rimane comunque la possibilità di ricavare l'intera bicicletta a partire da un semplice ritaglio di lamiera a patto che la parte deformabile riguardi una zona molto ristretta.

A questo punto è possibile fornire qualche indicazione circa eventuali sviluppi futuri. Per via della natura della bicicletta compliant è sicuramente prioritario capire meglio l'interazione tra il ciclista e il sistema sterzo flessibile; bisogna dunque dotare la bicicletta di un sistema di misurazione opportuno in modo da avere precise indicazioni quantitative sulle forze che effettivamente si scaricano sulla cerniera flessibile. A questo punto si potrà sintetizzare una bicicletta ottima seguendo la metodologia qui indicata cercando magari di ampliare il numero degli obiettivi del ottimizzatore in modo da spingere la progettazione ad ampliare il più possibile le dimensioni della parte flessibile, soprattutto in termini di lunghezza. Inoltre con un modello migliorato del pilota si potrebbe studiare la stabilità del sistema per capire meglio le sensazioni negative provate nei test a basse velocità.

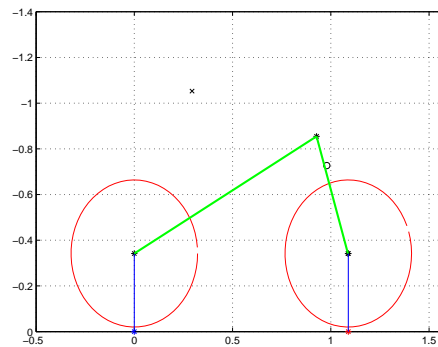
Inoltre si aprono altre interessanti strade progettuali nel caso si vogliano studiare altri sistemi di cerniera flessibile (o altri meccanismi non necessariamente compliant) con l'intento di rendere possibile i vantaggi cinematici individuati in questo studio. L'idea di base dovrebbe essere quella di cercare di permettere una torsione dello sterzo senza perdere rigidità verticale.

Altre analisi potrebbero concentrarsi su studi ad elementi finiti valutando gli sforzi su tutto il telaio in modo da ottimizzare il materiale per allungare la vita a fatica di queste biciclette.

APPENDICE A

APPENDICE A

BICICLETTA CLASSICA



DATI GEOMETRICI	PROPRIETÀ DI MASSA	
$r_f = 0.325$	$m_r = 2.57 + 75.31[kg]$	$m_f = 2.45 + 1.9[kg]$
$\mu_f = 0.02$	$h_r = 1.052 - 0.3414[m]$	$h_{f2} = 0.46784[m]$
$\mu_r = 0.02$	$l_r = 0.294[m]$	$l_{f2} = -0.001935[m]$
$r_r = 0.325$	$I_{xr} = 9.035[kgm^2]$	$I_{xf} = 0.145[kgm^2]$
$d_f = \mu_f r_f$	$I_{yr} = 9.324[kgm^2]$	$I_{yf} = 0.12[kgm^2]$
$q_r = 0.02[m]$	$I_{zr} = 2.633[kgm^2]$	$I_{zf} = 0.029[kgm^2]$
$q_f = 0.02[m]$	$I_{x zr} = -2.12[kgm^2]$	$I_{x zf} = -0.019[kgm^2]$
$\rho_r = 0.322[m]$	$I_{wr} = 0.149[kgm^2]$	$I_{wf} = 0.147[kgm^2]$
$\rho_f = 0.322[m]$		
$sp = 0$		
$m_2 = 0.04592m$		
$p = 1.089m$		
$\lambda = 0.302rad$		
$d_2 = 0.53759m$		

PROPRIETÀ RUOTE

modello lineare

$$K_\varphi = \frac{(0.4)}{(25/180 * \pi)}$$

$$K_\lambda = \frac{(0.2)}{(2.5/180 * \pi)}$$

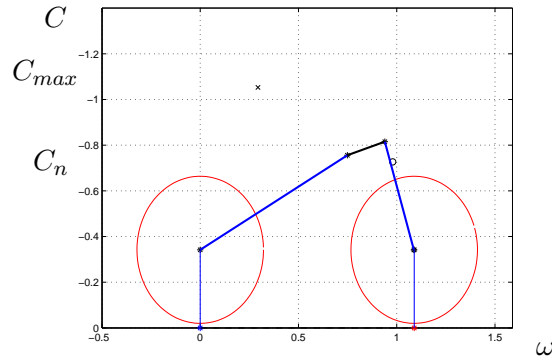
Per i valori usati per determinare i coefficienti di rigidità di deriva e di slittamento si è fatto riferimento a [31].

$$\begin{aligned} t_{or} &= 0.009 & \lambda_{max_r} &= 0.075 & a &= 0.028 \\ t_{of} &= 0.01 & \lambda_{max_f} &= 0.075 & b &= 0.024 \end{aligned}$$

COEFFICIENTI AERODINAMICI

$$C_{drag} = 0.3 \qquad C_{lift} = 0.047 \qquad C_{mom} = 0.01$$

BICICLETTA COMPLIANT



DATI GEOMETRICI

$$\begin{aligned} r_f &= 0.325 \\ \mu_f &= 0.02 \\ \mu_r &= 0.02 \\ r_r &= 0.325 \\ d_f &= \mu_f r_f \\ q_r &= 0.02[m] \\ q_f &= 0.02[m] \\ \rho_r &= 0.322[m] \\ \rho_f &= 0.322[m] \\ sp &= 0 \\ m_2 &= 0.04592m \\ p &= 1.089m \\ \lambda &= 0.302rad \\ d &= 0.5m \\ l_{mc} &= 0.1 \end{aligned}$$

PROPRIETÀ DI MASSA

$$\begin{aligned} m_r &= 2.57 + 75.31[kg] & m_f &= 2.45 + 1.9[kg] \\ h_r &= 1.052 - 0.3414[m] & h_f &= 0.46784[m] \\ l_r &= 0.294[m] & l_f &= -0.001935[m] \\ I_{xr} &= 9.035[kgm^2] & I_{xf} &= 0.145[kgm^2] \\ I_{yr} &= 9.324[kgm^2] & I_{yf} &= 0.12[kgm^2] \\ I_{zr} &= 2.633[kgm^2] & I_{zf} &= 0.029[kgm^2] \\ I_{x_zr} &= -2.12[kgm^2] & I_{x_zf} &= -0.019[kgm^2] \\ I_{wr} &= 0.149[kgm^2] & I_{wf} &= 0.147[kgm^2] \end{aligned}$$

PROPRIETÀ RUOTE

modello lineare

$$K_\varphi = \frac{(0.4)}{(2.5/180 * \pi)}$$

$$K_\lambda = \frac{(0.2)}{(2.5/180 * \pi)}$$

Per i valori usati per determinare i coefficienti di rigidità di deriva e di slittamento si è fatto riferimento a [31].

$$\begin{aligned} t_{or} &= 0.009 & \lambda_{max_r} &= 0.075 & a &= 0.028 \\ t_{of} &= 0.01 & \lambda_{max_f} &= 0.075 & b &= 0.024 \end{aligned}$$

COEFFICIENTI AERODINAMICI

$$C_{drag} = 0.3$$

$$C_{lift} = 0.047$$

$$C_{mom} = 0.01$$

APPENDICE B

APPENDICE B

FILE INPUT ACCELERAZIONE

numero di nodi

8

tabella dei nodi

nodo,x,y

1,0,0

2,0.45363,-0.0857

3,0.28,0.30974

4,0.2,0.5

5,0.78,0.816

6,0.910,0.42087

7,1.0176,-0.01854

8,1.1010,0

numero di elementi

8

tabella di incidenze

elem,nodo1,nodo2,sez,mat

1,1,2,1,1

2,1,4,2,1

3,2,3,3,1

4,3,4,4,1

5,3,6,5,1

6,6,5,6,1

7,6,7,7,1

8,7,8,7,1

numero di vincoli a terra

3

tabella dei vincoli a terra

nodo,direzione

1,2

8,2

8,1

numero di asservimenti

0

tabella degli asservimenti

master,slave,direzione

numero di nodi caricati

7

tabella dei carichi

nodo,direzione,forza

1,1,1.1109e+003

2,1,1.0183e+003

2,2,5.2512e+002

4,1,-2.4743e+002

4,2,-3.7855e+002

5,1,6.3354e+001

5,2,-1.1171e+001

numero di elementi caricati

0

tabella dei carichi

elem,Px,Py1,Py2,Tsup,Tinf

numero di vincoli elastici a terra

0

tabella dei vincoli

nodo,direzione,rigidezza

numero di vincoli elastici interni

0

tabella dei vincoli

nodo1,nodo2,direzione,rigidezza

numero di cedimenti vincolari

0

tabella dei cedimenti

nodo,direzione,cedimento

numero di vincoli inclinati

0

tabella di inclinazione

nodo,angolo(gradi),parametro,ri

FILE INPUT FRENATA

numero di nodi

9

tabella dei nodi

nodo,x,y

1,0,0

2,0.45363,-0.0857

3,0.28,0.30974

4,0.2,0.5

5,0.78,0.816

6,0.910,0.42087

7,0.930,0.33636

8,1.0176,-0.01854

9,1.1010,0

numero di elementi

9

tabella di incidenze

elem,nodo1,nodo2,sez,mat

1,1,2,1,1

2,1,4,2,1

3,2,3,3,1

4,3,4,4,1

5,3,6,5,1

6,6,5,6,1

7,6,7,7,1

8,7,8,7,1

9,8,9,7,1

numero di vincoli a terra

3

tabella dei vincoli a terra

nodo,direzione

1,1

1,2

9,2

numero di asservimenti

0

tabella degli asservimenti

master,slave,direzione

numero di nodi caricati

9

tabella dei carichi

nodo,direzione,forza

4,1,-329.37
4,2,-824.49
5,1,512.34
5,2,-90.339
7,1,177.0342
7,2,3.0901
8,1,-354.0953

numero di elementi caricati

0

tabella dei carichi

elem,Px,Py1,Py2,Tsup,Tinf

numero di vincoli elastici a terra

0

tabella dei vincoli

nodo,direzione,rigidezza

numero di vincoli elastici interni

0

tabella dei vincoli

nodo1,nodo2,direzione,rigidezza

numero di cedimenti vincolari

0

tabella dei cedimenti

nodo,direzione,cedimento

numero di vincoli inclinati

0

tabella di inclinazione

nodo,angolo(gradi),parametro,ri

BIBLIOGRAFIA

- [1] Lu, Kerr-Jia and Kota, Sridhar, “Synthesis of shape morphing compliant mechanisms using a load path representation method” *IEEE Transaction on Control Systems Thecnology*, vol. 5049, pp. 337–348, 2003. Smith, Ralph C.
- [2] Impellizzeri, Franco M and Marcora, Samuele M, “The physiology of mountain biking” *Sports medicine*, vol. 37, pp. 59–71, 2007. Auckland, N.Z.
- [3] Liu, Yung-Sheng and Tsay, Tswen-Syau and Wang, Tsai-Chu, “Muscles force and joints load simulation of bicycle riding using multibody models” *Procedia Engineering*, vol. 13, pp. 81–87, 2011.
- [4] Sharp, R. S., “Motorcycle Steering Control by Road Preview” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 129, n. 4, pp. 373, 2007.
- [5] Meijaard, J.P. and Papadopoulos, Jim M. and Ruina, Andy and a.L. Schwab, “Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 463, n. 3, pp. 1955–1982, 2007.
- [6] H. Nielens, T. Lejeune, “Bicycle shock absorption systems and energy expended by the cyclist” *Sports medicine*, vol. 34, n. 2, pp. 71–80, 2004. Auckland, N.Z.
- [7] Karchin, Ari and Hull, M. L., “Experimental Optimization of Pivot Point Height for Swing-Arm Type Rear Suspensions in Off-Road Bicycles” *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 124, n. 3, pp. 101, 2002.
- [8] Kalyanmoy, Deb. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. Wiley, 2001.
- [9] Stone, C and Hull, M L, “The effect of rider weight on rider-induced loads during common cycling situations” *Journal of biomechanics*, vol. 28, n. 4, pp. 365–375, 1995.
- [10] Bu, Yan and Xiang, Zhongxia and Huang, Tian, “A multi-body model for the simulation of rider and mountain bike coupled system” *2008 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pp. 1669–1672, 2008.
- [11] Waechter, Matthias and Riess, Falk and Zacharias, Norbert, “A Multibody Model for the Simulation of Bicycle Suspension Systems” *Vehicle System Dynamics*, vol. 37, n. 1, pp. 3–28, 2002.

- [12] E.L.Wang, M.L.Hull “A Dynamic System Model of an Off-Road Cyclist” *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 119, pp. 248–253, 1997.
- [13] D. Limebeer, R. Sharp “Single-Track Vehicle Modeling and Control Bicycles, Motorcycles, and Models” *IEE Control Systems Magazine*, vol. 119, pp. 34-61, 2006.
- [14] N. Lobontiu, *Compliant Mechanisms Design of Flexure Hinges*, Florida: CRC Press LLC, 2003.
- [15] Dassa L., ”Mechanisms Based on Flexure Articulations (Disegno di meccanismi miniaturizzati articolati attraverso cerniere flessionali)”, Tesi di dottorato, Università di Brescia, (2004)
- [16] V.Cossalter, *Cinematica e dinamica della motocicletta* Casa Editrice Progetto, Padova, 1997.
- [17] Cossalter, Vittore and Doria, Alberto and Lot, Roberto “Steady Turning of Two-Wheeled Vehicles” *Vehicle System Dynamics*, vol. 31,n. 3, pp. 157–181, 1999.
- [18] J.Moore,M.Hubbard, A.Schwab, L.Kooijman “Accurate Measurement of Bicycle Parameters” *Symposium on the Dynamics and Control of Single Track Vehicles*, pp. 20-22, 2010.,Delft, The Netherlands
- [19] Sharp, R. S. 1971 The stability and control of motorcycles. *J. Mech. Eng. Sci.*13, 316-329.
- [20] Roland, R. D. and Massing, D. E. 1971 A digital computer simulation of bicycle dynamics. Report YA-3063-K-1, June, Calspan, Buffalo, NY.
- [21] J. Titlestad, M. Davie, A. Whittaker, S. Grant, “Experimental Evaluation of Mountain Bike Suspension Systems” *Acta Polytechnica*, vol. 43, 2003.
- [22] L.L. Howell, *Compliant Mechanisms*, New York: John Wiley and Sons.
- [23] H. Wilczynski, M.L. Hull “A Dynamic System Model for Estimating Surface-Induced Frame Loads During Off-Road Cycling” *IEEE Transaction on Control Systems Thecnology*, vol. 116, pp. 816-822, 1994.
- [24] Jobst Brandt, *the Bicycle Wheel* Avocet, California
- [25] D. G. Wilson, J. Papadopoulos, *Bicycling Science*, 3rd Edition, MIT, 2004
- [26] M. Waechter, F. Riess, N. Zacharias, “A Multibody Model for the Simulation of Bicycle Suspension Systems” *Vehicle System Dynamics*, vol. 37, pp. 3-28, 2002.
- [27] D.Too, E.L. Gerald “The Biomechanics of Force and Power Production in Human Powered Vehicles” *Human power*, vol. 55, pp. 3-6
- [28] C.Good, J.Mcphee, “Dynamics of mountain bicycles with rear suspensions : modelling and simulation” *Blackwell Science Ltd*, vol. 2, n. 3, pp. 129-143, 1999. University of Waterloo, Canada
- [29] R.Redfield “Large motion mountain biking dynamics” *Vehicle System Dynamics*, vol. 43, n. 12, pp. 845–865, 2005. Taylor and Francis

- [30] M. González, J. Cuadrado, F. González and D. Dopico, "Optimization of an off-road bicycle with four-bar linkage rear suspension" *the International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics*, Paper n. 02-MUSME08, pp. 8-12, 2008.
- [31] A. E. Dressel, A. Rahman, "Measuring Dynamic Properties of Bicycle Tires" *Bicycle and Motorcycle Dynamics*, Symposium on the Dynamics and Control of Single Track Vehicles, pp. 271–276, 2010. Delft, The Netherlands
- [32] H. B. Pacejka, *Tyre and Vehicle Dynamics*, Butterworth and Heinemann, Oxford, 2002.
- [33] Kane T.R., "Fundamental kinematical relationships for single-track vehicles" *Int. J. mech. Sci.* 1975 vol.17, pp. 409-504
- [34] V. Cossalter, R. Lot, F. Maggio, "A Multibody Code for Motorcycle Handling and Stability Analysis with Validation and Examples of Application"
- [35] David E. H. Jones, *The Stability of the Bicycle*, Physics Today, 1970.
- [36] L. Corradi Dell'Acqua, *Meccanica delle strutture 2*, Seconda edizione, McGraw-Hill, 2010.
- [37] G. Diana, F. Cheli, *Dinamica dei sistemi meccanici* polipress, 2010.
- [38] N. Bachschmid, S. Bruni, A. Collina, B. Pizzigoni, F. Resta, A. Zasso *Fondamenti di meccanica teorica e applicata*, Seconda edizione, McGraw-Hill, 2010.
- [39] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4 edition, Wiley, 2001.
- [40] Hiroyasu Fu. Fundamental characteristics of single-track vehicles in steady turning. *JSME Bulletin*, 9(34):284-293, 1965.
- [41] Jason K. Moore, J. D. G. Kooijman, Mont Hubbard, and A. L. Schwab. A method for estimating physical properties of a combined bicycle and rider. In *Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2009*. San Diego, CA, USA, August-September 2009. ASME
- [42] Legnani, Giovanni. *Robotica industriale*. 2nd ed. Casa Editrice Ambrosiana, 2003.
- [43] Matlab R2012b. *Global Optimization Toolbox User's Guide*. MathWorks, 2012.
- [44] S. Henein, "Conception des guidages flexibles", Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2001.
- [45] Human Control of a Bicycle: Jason K. Moore
website: <http://moorepants.github.io/dissertation/index.html>
- [46] B.H. Woolley, "An Approach to Concept Development for Compliant Mechanisms Possessing High Coefficients of Restitution", Department of Mechanical Engineering, Brigham Young University, April 2003.
- [47] Whipple, F. J. W. 1899 The stability of the motion of a bicycle. *Quart. J. Pure Appl. Math.* 30, 312-348.