

POLITECNICO DI MILANO
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Corso di Studi in Ingegneria Matematica



Tesi di Laurea Magistrale

VINCOLI INTERNI ISOTROPI IN ELASTICITÀ FINITA

Relatore:

Prof. Maurizio Stefano VIANELLO

Tesi di Laurea di:

Marco RIZZO

Matr. 781964

Anno Accademico 2013-2014

Ad Alessia

Ringraziamenti

I miei ringraziamenti vanno a tutte le persone che mi sono state vicine in questi anni di studi universitari, soprattutto negli ultimi mesi, e che in qualche modo hanno reso possibile la realizzazione di questa tesi.

Prima di tutto devo ringraziare la mia famiglia perché è soprattutto grazie a essa che sono diventato la persona che sono oggi, raggiungendo questo importante traguardo. I miei genitori e i nonni Luisa e Ugo, per me i migliori al mondo, mi hanno trasmesso i valori della tenacia e dell'umiltà con i quali nessun obiettivo risulta irraggiungibile, oltre ad avermi cresciuto e sostenuto in tutti questi anni. Grazie a Luca, che è unico e sarà sempre al mio fianco, sapendo che potremo contare uno sull'altro.

Un grazie speciale va ad Alessia, che è entrata inaspettatamente nella mia vita rendendola completa e felice, che è sempre presente con una dolcezza e una tenerezza infinite e che tutti i giorni mi dà la forza per affrontare ogni situazione.

Un grazie particolare va poi ad Arnaldo, Giuseppe e Alessio, insieme ai quali nel gennaio 2011 è nato il progetto musicale Tales of Unexpected, una rock band che in questi anni si è rivelata essere una seconda famiglia per me, unita da un profondo legame di amicizia.

Grazie a Luigi, compagno di studi, per avermi accompagnato in questo lungo e tortuoso percorso che ci ha condotto insieme alla meta finale.

Infine vorrei ringraziare il mio relatore, il prof. Maurizio Vianello, senza il quale questa tesi non sarebbe mai stata scritta, perché, oltre a essersi dimostrato un ottimo docente, è sempre stato disponibile e paziente durante i nostri lunghi incontri nel suo ufficio; inoltre è riuscito a trasmettermi parte della sua passione per la fisica matematica, incoraggiandomi nei momenti meno produttivi.

Milano, 25 luglio 2014

Abstract

I vincoli interni nell'ambito dell'elasticità finita permettono di modellare alcune tipologie di materiali molto utilizzate nelle applicazioni. In questo elaborato di tesi vengono affrontate le modalità con cui si impongono i vincoli dal punto di vista prettamente matematico, mostrando come essi vengano descritti da sottovarietà differenziabili dello spazio dei gradienti di deformazione e facendo un breve confronto con i sistemi olonomi studiati nella meccanica razionale. Introducendo dei vincoli interni per un corpo elastico, il tensore degli sforzi associato risulta scomponibile nella somma di un contributo dovuto alla funzione risposta e di uno che rappresenta i vincoli.

Particolare attenzione è stata rivolta alle possibili dimensioni di una varietà di vincolo isotropa, argomento già affrontato in letteratura e sul quale sono state tratte conclusioni contrastanti. È stato quindi dimostrato che, a parte i casi di rigidità e conformalità, la dimensione di una varietà di vincolo isotropa è sempre 8, o equivalentemente 5 se viene considerata come sottovarietà differenziabile dello spazio dei tensori simmetrici e definiti positivi.

Abstract

Internal constraints in finite elasticity allow to model some types of materials widely used in applications. This thesis work deals with the ways in which constraints are imposed from the purely mathematical point of view, showing how they are described by differentiable submanifolds of the space of deformation gradients and making a brief comparison with holonomic systems studied in rational mechanics. Introducing internal constraints for an elastic body, the associated stress tensor can be decomposed into the sum of a contribution due to the response function and one that represents the constraints.

Particular attention has been given to the possible dimension of an isotropic constraint manifold, which is a topic already studied in literature and on which contrasting conclusions were drawn. It has therefore been proved that, apart from the cases of rigidity and conformality, the dimension of an isotropic constraint manifold is always 8, or equivalently 5 if it is considered as a differentiable submanifold of the space of symmetric strain tensors.

Indice

Introduzione	5
1 Elasticità	8
1.1 Corpi e deformazioni	8
1.2 Moto	12
1.3 Sforzo	14
1.3.1 Tensore di Cauchy	14
1.3.2 Tensore di Piola	17
1.3.3 Teorema dell'energia cinetica	21
1.4 Elasticità finita	23
1.4.1 Classi costitutive	23
1.4.2 Principio di indifferenza materiale	24
1.4.3 Simmetria materiale	26
1.4.4 Isotropia	26
1.4.5 Principio di indifferenza materiale e gruppo di simmetria per il tensore di Piola	29
1.5 Corpi iperelastici	30
1.5.1 Energia di deformazione	30
1.5.2 Tensore degli sforzi	31
2 Elementi di geometria differenziale	35
2.1 Varietà differenziabili	35
2.2 Spazio tangente	38
2.3 Mappe differenziabili e loro differenziali	41
2.4 Varietà prodotto	42
2.5 Sottovarietà differenziabili	43
2.6 Teoremi della funzione implicita	45

3	Vincoli nella meccanica razionale	47
3.1	Cinematica di un sistema vincolato	47
3.1.1	Rappresentazione dei vincoli	47
3.1.2	Coordinate lagrangiane	49
3.1.3	Spostamenti, velocità e lavoro virtuali	51
3.2	Dinamica di un sistema olonomo	53
3.3	Statica di un sistema olonomo	56
3.4	Realizzazione fisica dei vincoli nell'esempio dell'asta rigida vincolata	56
4	Vincoli interni	60
4.1	Varietà di vincolo	60
4.1.1	Definizione	60
4.1.2	Dimensione e spazio tangente	63
4.2	Tensore degli sforzi	64
4.2.1	Tensore di Piola	65
	Esempio del vincolo d'incomprimibilità	66
	Esempio del vincolo di Bell	66
4.2.2	Tensore di Cauchy	67
	Esempio del vincolo d'incomprimibilità	70
	Esempio del vincolo di Bell	70
4.3	Gruppi di simmetria	71
4.4	Vincoli interni isotropi	73
4.5	Esempi di vincoli interni	76
4.5.1	Rigidità	76
4.5.2	Conformalità	77
4.5.3	Incomprimibilità	78
4.5.4	Inestensibilità lungo una direzione	80
4.5.5	Ortogonalità tra due direzioni	82
4.5.6	Vincolo di Bell	83
5	Vincoli isotropi	86
5.1	Dimensione di una varietà di vincolo isotropa	87
5.2	Il contributo di Carroll: condizioni di ammissibilità	91
5.2.1	Rappresentazione grafica	94
5.2.2	Altra espressione della regione di ammissibilità	97
5.3	Il contributo di Carroll: vincoli isotropi	98
5.4	Il contributo di Carroll: dimensione di una varietà di vincolo isotropa	102

5.4.1	Vincoli omogenei	103
5.4.2	Vincoli non omogenei	104
5.4.3	Considerazioni finali	105
6	Discussione sui controesempi proposti da Carroll	106
6.1	Struttura dei controesempi	107
6.1.1	Introduzione	107
6.1.2	Definizione delle varietà di vincolo	109
6.1.3	Analisi dei differenziali delle funzioni che definiscono le varietà	112
6.2	Primo Controesempio	114
6.3	Secondo Controesempio	117
6.4	Terzo Controesempio	120
6.5	Quarto Controesempio	122
6.6	Considerazioni finali	125
	Bibliografia	131

Elenco delle figure

5.1	Regione di ammissibilità	96
-----	------------------------------------	----

Introduzione

In meccanica lo studio dei vincoli e delle modalità con cui questi vengono imposti riveste un ruolo fondamentale nell'analisi cinematica e dinamica di un sistema vincolato, costituito da corpi rigidi o punti materiali. I vincoli permettono infatti di imporre delle restrizioni cinematiche a un sistema, che viene così privato della possibilità di assumere alcune configurazioni o atti di moto particolari.

Nell'ambito dell'elasticità finita, che si occupa dello studio delle deformazioni e degli sforzi dei corpi solidi elastici, i vincoli consentono invece di modellare il comportamento interno e le caratteristiche intrinseche di un corpo. Essi costituiscono infatti delle restrizioni sui tensori che descrivono le deformazioni, limitando queste alle sole ammissibili per un certo corpo, la cui struttura interna non ne permette delle altre.

A prima vista la funzione dei vincoli nei due settori potrebbe sembrare differente, dal momento che nel primo caso descrivono delle restrizioni sulle configurazioni di un sistema generale, mentre nel secondo caratterizzano la struttura interna di un corpo. Tuttavia, in entrambi gli ambiti essi impongono delle limitazioni sul comportamento del sistema o del corpo e ciò si riflette nell'utilizzo della stessa struttura matematica per modellare i vincoli, che viene presa in prestito dalla geometria differenziale.

Questo elaborato di tesi, dallo stampo teorico caratteristico della fisica matematica, è incentrato sullo studio dei vincoli interni isotropi in elasticità finita ed è suddiviso in sei capitoli. Dopo un'introduzione dei concetti generali dell'elasticità finita e degli elementi necessari di geometria differenziale, viene presentato un breve compendio sui sistemi vincolati e poi la teoria matematica alla base dei vincoli interni con rispettivi esempi, per concludere con lo studio dei vincoli interni isotropi, che costituisce la parte più corposa e innovativa del lavoro.

Il Capitolo 1 è suddiviso in due parti: nella prima vengono introdotti i concetti basilari della meccanica dei continui e nella seconda la teoria dell'elasticità finita. Sono trattate prima le modalità con cui si descrivono configurazioni, deformazioni e moti dei corpi continui e poi le sollecitazioni esterne e gli sforzi interni a cui essi sono

sottoposti, introducendo i tensori di Cauchy e di Piola che li descrivono. Per quanto riguarda invece l'elasticità finita, vengono presentati i concetti di classe costitutiva, indifferenza materiale, gruppo di simmetria e isotropia, e infine, i corpi iperelastici con energia di deformazione e tensori degli sforzi associati. Viene anche introdotta la notazione utilizzata nel seguito.

Nel Capitolo 2 vengono esposti gli argomenti di geometria differenziale necessari per trattare i vincoli interni, ovvero i concetti di varietà e sottovarietà differenziabili, spazi tangenti, varietà prodotto, applicazioni differenziabili tra varietà, immersioni e alcuni teoremi della funzione implicita.

Il Capitolo 3 è dedicato alla presentazione e allo studio dei sistemi vincolati, in particolare di quelli definiti olonomi, sia dal punto di vista cinematico sia da quello statico e dinamico. In un esempio finale vengono poi mostrate le realizzazioni fisiche di alcune tipologie di vincoli.

Nel Capitolo 4 si entra nel vivo della questione perché è quello dedicato ai vincoli interni nell'elasticità finita. Viene introdotto il concetto di varietà di vincolo, che costituisce la rappresentazione matematica dei vincoli: si tratta di una sottovarietà differenziabile dello spazio dei gradienti di deformazione con le proprietà di contenere l'elemento associato alla configurazione di riferimento e di rispettare il principio di indifferenza materiale. Sono poi presentati gli spazi tangenti e i gruppi di simmetria relativi a tali varietà e vengono mostrate le forme che assumono i tensori di Cauchy e di Piola, nel caso di un corpo soggetto a dei vincoli interni, facendo anche una trattazione sugli spazi in cui tali tensori sono definiti. Infine vengono introdotti i vincoli isotropi, ripresi e approfonditi nel capitolo successivo, e viene mostrato come le varietà di vincolo associate possano anche essere interpretate come sottovarietà dello spazio dei tensori simmetrici e definiti positivi. Nell'ultima sezione, vengono applicati tutti i concetti teorici introdotti ad alcuni esempi dei più comuni vincoli interni: rigidità, conformalità, incomprimibilità, inestensibilità lungo una direzione, ortogonalità tra due direzioni e il vincolo di Bell.

Il Capitolo 5 è interamente dedicato ai vincoli interni isotropi ed è suddiviso in due parti: nella prima viene esposta la teoria di Podio-Guidugli e Vianello ([1]) secondo cui una varietà di vincolo isotropa, escludendo i casi di rigidità e conformalità, ha sempre dimensione 8, mentre nella seconda si mostra la contrastante tesi di Carroll ([2]) secondo cui è possibile costruire delle varietà di vincolo isotrope di dimensione 7, corredata da quattro controesempi. Viene dimostrato, per mezzo di argomentazioni tratte dalla geometria differenziale, che la tesi di Carroll è errata poiché, se si considera la definizione di varietà di vincolo come varietà differenzia-

bile, le uniche varietà isotrope che possano essere costruite e che rispettino tale definizione hanno una dimensione pari a 3 nel caso della rigidità, a 4 in quello della conformalità e a 8 in tutti gli altri. Nonostante tutto, il lavoro di Carroll presenta degli apporti interessanti alla teoria dei vincoli interni che vengono riportati e spiegati nel dettaglio.

Nel Capitolo 6 viene ancora una volta chiamata in causa la geometria differenziale per dimostrare che i quattro controesempi proposti da Carroll a sostegno della sua teoria non siano effettivamente tali. Le varietà di vincolo da lui proposte non presentano infatti una struttura differenziabile, ma si riducono a delle varietà algebriche con una criticità nell'identità, che corrisponde alla configurazione di riferimento. Viene dimostrato che in quel punto non è mai definito uno spazio tangente, ma soltanto un cono, e l'insieme dei vettori tangenti genera uno spazio vettoriale di dimensione superiore alla varietà stessa, diverso a seconda dei casi. Nelle dimostrazioni si fa ricorso a una definizione intrinseca delle varietà di vincolo, prescindendo da qualsiasi tipo di parametrizzazione locale. In conclusione, una varietà di vincolo isotropa che non descriva i casi di rigidità o conformalità ha sempre dimensione 8 nello spazio dei tensori a determinante positivo o 5 in quello dei tensori simmetrici e definiti positivi.

Capitolo 1

Elasticità

Una tesi di meccanica incentrata sui vincoli interni per corpi elastici non può prescindere da un'introduzione alla teoria dell'elasticità finita per presentare tutti gli strumenti che vengono utilizzati nel seguito. Si è fatto riferimento principalmente a due fonti: gli appunti del corso di Modellistica matematico-fisica per l'ingegneria [3] tenuto dal professor Maurizio Vianello nell'anno accademico 2012-2013, all'interno del corso di studi di laurea specialistica in Ingegneria Matematica del Politecnico di Milano, e il Gurtin [4].

1.1 Corpi e deformazioni

Nello studio della meccanica dei continui un corpo viene descritto dal modello matematico del continuo deformabile, detto anche *continuo di Cauchy*. Ai punti materiali del corpo vengono fatti corrispondere i punti geometrici di una regione regolare \mathcal{B} dello spazio euclideo tridimensionale \mathcal{E} . Tale regione, detta *configurazione*, si sposta nello spazio e nel tempo a causa degli spostamenti e delle deformazioni che subisce il corpo in esame.

Si ipotizza l'esistenza di una *configurazione di riferimento* \mathcal{B}_0 in cui si trova il corpo all'inizio dello studio e di successive *configurazioni attuali* \mathcal{B}_t che descrivono lo stato e la posizione del corpo nell'istante di tempo t . Sottoregioni limitate e regolari di \mathcal{B}_0 vengono dette *parti* e indicate con \mathcal{P}_0 , mentre le superfici che le ricoprono si indicano con \mathcal{S}_0 . Si utilizza una notazione analoga, con la differenza che viene usato il pedice t , per riferirsi a sottoregioni e superfici che le contengono in una configurazione attuale.

Le coordinate di un punto nella sua configurazione di riferimento si dicono *coordinate materiali* o *lagrangiane*, mentre quelle riferite alla configurazione attuale si

dicono *coordinate spaziali* o *euleriane*.

Data una configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 , si può definire, per ogni istante di tempo t , una mappa f che associa a ogni punto materiale \mathbf{p} di \mathcal{B}_0 un punto $\mathbf{x} = f(\mathbf{p})$ di \mathcal{B}_t e che descrive la trasformazione del corpo dopo un tempo t . Tale mappa viene detta *deformazione* e si postula che sia una corrispondenza biunivoca, differenziabile e tale che, chiamando \mathbf{F} il suo gradiente, $\det \mathbf{F} > 0$ per ogni punto \mathbf{p} . Dal momento che, come si vedrà in seguito, $\det \mathbf{F}$ rappresenta localmente il rapporto tra il volume dopo la deformazione e il corrispettivo iniziale, appare logico richiedere che esso sia positivo.

Il tensore $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p})$ viene chiamato *gradiente di deformazione* e appartiene allo spazio dei tensori a determinante positivo Lin^+ . In generale, un tensore del secondo ordine appartiene allo spazio Lin e, ogniqualvolta si voglia considerare un sottospazio costituito solo dai tensori a determinante positivo, si aggiunge un apice $+$ alla notazione che indica lo spazio a cui esso appartiene.

Lin ha una dimensione pari a 9 e può essere decomposto nella somma diretta tra lo spazio dei tensori simmetrici Sym con dimensione 6 e quello dei tensori antisimmetrici Skw con dimensione 3. Si può quindi scrivere

$$\text{Lin} = \text{Sym} \oplus \text{Skw},$$

con

$$\text{Sym} = \{\mathbf{H} \in \text{Lin} : \mathbf{H}^T = \mathbf{H}\}$$

e

$$\text{Skw} = \{\mathbf{W} \in \text{Lin} : \mathbf{W}^T = -\mathbf{W}\}.$$

Gli spazi Sym e Skw risultano essere tra loro ortogonali secondo il prodotto interno dello spazio Lin , definito come

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin},$$

e l'uno sarà il complemento ortogonale dell'altro, cioè si avrà sempre

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{W} = 0 \quad \forall \mathbf{H} \in \text{Sym}, \quad \forall \mathbf{W} \in \text{Skw}.$$

Lo spazio Sym può a sua volta essere decomposto nella somma diretta tra lo spazio dei tensori a traccia nulla Dev con dimensione 5 e lo spazio dei tensori sferici,

che sono multipli dell'identità, Sph di dimensione 1. Analogamente si scrive

$$\text{Sym} = \text{Dev} \oplus \text{Sph},$$

con

$$\text{Dev} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : \mathbf{H} \cdot \mathbf{I} = 0\}$$

e

$$\text{Sph} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : \mathbf{H} = \alpha \mathbf{I}\}.$$

Anche questi ultimi sono l'uno il complemento ortogonale dell'altro.

Per completare il quadro degli spazi di tensori che verranno utilizzati nel seguito si introducono anche lo spazio delle rotazioni

$$\text{Rot} = \{\mathbf{R} \in \text{Lin}^+ : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}\},$$

a dimensione 3, e lo spazio unimodulare proprio

$$\text{Unim} = \{\mathbf{H} \in \text{Lin}^+ : \det \mathbf{H} = 1\}$$

con dimensione pari a 8.

Nel seguito si farà riferimento, per semplicità di notazione, a un tensore e a una sua matrice rappresentativa, una volta assegnata una base, con lo stesso simbolo.

Tornando all'argomento principale, una deformazione con \mathbf{F} costante, e quindi indipendente dal punto \mathbf{p} , si dice *omogenea* e può essere sempre decomposta in una deformazione pura seguita da una rotazione o come una rotazione seguita da una deformazione pura.

Espandendo la deformazione f in un intorno di un arbitrario punto \mathbf{q} di \mathcal{B} si ottiene:

$$f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\mathbf{q})(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + o(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (1.1)$$

che mostra come la deformazione venga descritta localmente da \mathbf{F} tramite un legame lineare. Il tensore \mathbf{F} , infatti, è un operatore lineare che manda vettori uscenti da \mathbf{p} , $\mathbf{p} - \mathbf{q}$, in vettori uscenti da $f(\mathbf{p})$, $f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})$. A meno di un errore di $o(\mathbf{p} - \mathbf{q})$, la (1.1) rappresenta, in un intorno di un punto \mathbf{q} , una deformazione omogenea perché $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ è indipendente da \mathbf{p} .

Grazie al teorema di decomposizione polare si può poi scrivere

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R},$$

dove \mathbf{R} è un tensore di rotazione appartenente a Rot , \mathbf{U} è il *tensore destro di deformazione*, simmetrico e definito positivo, che appartiene a Sym^+ , e \mathbf{V} il *tensore sinistro di deformazione*, anch'esso appartenente a Sym^+ . In questo modo è possibile separare le due parti che contribuiscono alla definizione di una deformazione omogenea, perché \mathbf{U} e \mathbf{V} rappresentano una deformazione pura, priva cioè di rotazioni.

Il tensore \mathbf{U} è un tensore materiale, essendo una trasformazione di vettori nella configurazione di riferimento, mentre \mathbf{V} è un tensore spaziale, in quanto trasformazione di vettori nella configurazione attuale. Per quanto riguarda il tensore rotazione \mathbf{R} , invece, esso manda vettori della configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 in vettori della configurazione attuale \mathcal{B}_t . Considerando quindi la decomposizione $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, un vettore di \mathcal{B}_0 viene trasformato da \mathbf{U} in un altro vettore di \mathcal{B}_0 che poi, tramite la rotazione \mathbf{R} , viene portato in \mathcal{B}_t . Se si considera, invece, la decomposizione $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, un vettore di \mathcal{B}_0 viene prima portato in \mathcal{B}_t da \mathbf{R} e poi trasformato secondo \mathbf{V} .

La deformazione pura espressa da \mathbf{U} può ulteriormente essere decomposta nella successione di tre estensioni lungo tre direzioni ortogonali date dagli autovettori di \mathbf{U} e chiamate *direzioni principali di allungamento* oppure *assi principali lagrangiani*. L'entità dell'allungamento lungo tali direzioni è data dai tre autovalori di \mathbf{U} , che vengono chiamati *allungamenti principali* o *coefficienti di allungamento*. Un discorso analogo può essere fatto per il tensore \mathbf{V} , i cui autovalori sono gli stessi di \mathbf{U} e i cui autovettori corrispondono agli autovettori di \mathbf{U} ruotati secondo la rotazione \mathbf{R} e vengono chiamati ancora *direzioni principali di allungamento* oppure *assi principali euleriani*.

Per evitare il calcolo di \mathbf{U} e di \mathbf{V} che richiederebbe l'uso di radici quadrate di tensori, si introducono i tensori

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F},$$

rispettivamente i *tensori sinistro e destro di Cauchy-Green*, appartenenti a Sym^+ . Il tensore \mathbf{B} , che è un tensore spaziale, ha gli stessi autovettori di \mathbf{V} e i suoi autovalori sono pari al quadrato degli autovalori di \mathbf{V} ; esiste poi la stessa relazione tra autovettori e autovalori di \mathbf{C} , tensore materiale, e \mathbf{U} .

È importante per il seguito definire anche gli invarianti scalari di \mathbf{V} , (i_1, i_2, i_3) , ovvero quelle quantità intrinseche che non dipendono dal sistema di riferimento prescelto per esprimere il tensore per mezzo di una particolare matrice rappresentativa

e che compaiono come coefficienti del suo polinomio caratteristico

$$\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^3 - i_1 \lambda^2 + i_2 \lambda - i_3 = 0.$$

Si potrebbero anche definire come quelle quantità scalari $\omega(\mathbf{V})$ che sono tali per cui

$$\omega(\mathbf{V}) = \omega(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{A} \text{ invertibile.}$$

Essi vengono definiti nel modo seguente:

$$\begin{aligned} i_1 &= \operatorname{tr} \mathbf{V} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ i_2 &= \operatorname{tr} \mathbf{V}^* = \frac{1}{2}((\operatorname{tr} \mathbf{V})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{V}^2)) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \\ i_3 &= \det \mathbf{V} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \end{aligned}$$

avendo denominato con λ_1, λ_2 e λ_3 gli autovalori di \mathbf{V} e con \mathbf{V}^* il tensore aggiunto di \mathbf{V} , detto anche tensore cofattore di \mathbf{V} , definito così:

$$\mathbf{V}^* = (\det \mathbf{V}) \mathbf{V}^{-T}.$$

I corrispondenti invarianti scalari di \mathbf{B} , (I_1, I_2, I_3) , risulteranno

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr} \mathbf{B} = i_1^2 - 2i_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \operatorname{tr} \mathbf{B}^* = \frac{1}{2}((\operatorname{tr} \mathbf{B})^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{B}^2)) = i_2^2 - 2i_1 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \det \mathbf{B} = i_3^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{aligned}$$

1.2 Moto

Il *moto* di un corpo \mathcal{B} nello spazio e nel tempo viene rappresentato da una funzione x di classe C^3 che associa a ogni istante di tempo t e a ogni punto materiale \mathbf{p} un punto spaziale \mathbf{x} . Pertanto tale funzione prende valori in \mathcal{E} , ha per dominio l'insieme $\mathcal{B} \times \mathbb{R}$ e viene espressa mediante la seguente notazione:

$$\mathbf{x} = x(\mathbf{p}, t).$$

A ogni istante di tempo t , il corpo \mathcal{B} occupa una regione diversa tale che $\mathcal{B}_t = x(\mathcal{B}, t)$ e la funzione $x(\cdot, t)$ è una deformazione di \mathcal{B} .

Per passare a una descrizione spaziale si introducono l'insieme

$$\mathcal{T} = \{(x, t) : x \in \mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\},$$

che viene detto *traiettoria* del corpo nel tempo, e la funzione

$$p : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{B},$$

denominata *mappa di riferimento* del moto, che permette di descrivere il punto materiale che occupa la posizione \mathbf{x} nell'istante t secondo la legge $\mathbf{p} = p(\mathbf{x}, t)$. Prima, infatti, si aveva a disposizione solo una descrizione materiale perché $\mathbf{x} = x(\mathbf{p}, t)$ indicava la posizione occupata dal punto materiale \mathbf{p} nell'istante di tempo t .

Ora si possono definire i campi vettoriali della velocità e dell'accelerazione sia in termini spaziali, attraverso la funzione moto x , sia in termini materiali, ricorrendo alla mappa di riferimento appena introdotta.

La *velocità materiale* è:

$$\dot{x}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial}{\partial t} x(\mathbf{p}, t)$$

e l'*accelerazione materiale*:

$$\ddot{x}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(\mathbf{p}, t),$$

mentre la *velocità spaziale* è:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{x}(p(\mathbf{x}, t), t)$$

e l'*accelerazione spaziale* è:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \ddot{x}(p(\mathbf{x}, t), t).$$

Per ottenere gli ultimi due campi si ha operato una *spazializzazione* dei campi materiali.

Nel seguito si useranno sia la descrizione spaziale che quella materiale di diverse grandezze o diversi operatori a seconda dei casi. Per passare da una descrizione all'altra si opera nel seguente modo. Dato un campo materiale $(\mathbf{p}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{p}, t)$, la sua *descrizione spaziale* Φ_s è data da

$$\Phi_s(\mathbf{x}, t) = \Phi(p(\mathbf{x}, t), t),$$

mentre, dato un campo spaziale $(\mathbf{x}, t) \mapsto \Omega(\mathbf{x}, t)$, la sua *descrizione materiale* Ω_m è

$$\Omega_m(\mathbf{p}, t) = \Omega(x(\mathbf{p}, t), t).$$

Spesso, l'operazione di spazializzazione o materializzazione viene fatta implicitamente, ovvero non sempre si trovano i pedici m o s sotto le relative grandezze, ma il contesto solitamente aiuta a capire quale descrizione si sta di volta in volta utilizzando.

Per quanto riguarda invece gli operatori differenziali, si introduce la seguente notazione: $\nabla\Phi$ per il gradiente materiale, $\dot{\Phi}$ per la derivata materiale rispetto al tempo, $\text{Div}\Phi$ per la divergenza materiale, $\text{Rot}\Phi$ per il rotore materiale, $\text{grad}\Omega$ per il gradiente spaziale, Ω' per la derivata spaziale rispetto al tempo, $\text{div}\Omega$ per la divergenza spaziale e $\text{rot}\Omega$ per il rotore spaziale.

Si definiscono infine il tensore *gradiente di velocità* $\mathbf{L} = \text{grad}\mathbf{v}$ e i tensori

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \text{e} \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T),$$

rispettivamente la parte simmetrica e antisimmetrica di \mathbf{L} , tali che $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ e, ovviamente, $\mathbf{D} \in \text{Sym}$ e $\mathbf{W} \in \text{Skw}$.

1.3 Sforzo

1.3.1 Tensore di Cauchy

Le forze che agiscono su un corpo modellizzato come continuo deformabile sono di due tipi. Ci sono, infatti, le forze di volume che rappresentano le interazioni del corpo con campi esterni, prevalentemente quello gravitazionale, e le forze di contatto che rappresentano sia le interazioni tra la superficie del corpo e l'esterno sia quelle tra le diverse parti del corpo attraverso le superfici che le delimitano.

Tutto ciò viene rappresentato tramite un *sistema di forze* (\mathbf{s}, \mathbf{b}) , in cui \mathbf{s} descrive le forze di contatto e \mathbf{b} quelle di volume. Per indicare una superficie particolare si introduce l'insieme \mathcal{N} dei versori dello spazio euclideo \mathcal{E} e ci si riferisce alla superficie per mezzo della sua normale uscente $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$. Si fa poi riferimento alla traiettoria del corpo per indicare la sua posizione nello spazio e nel tempo.

La funzione vettoriale $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$, denominata *densità delle forze di contatto*, ha quindi per dominio l'insieme $\mathcal{N} \times \mathcal{T}$ e, per ogni normale \mathbf{n} e ogni istante di tempo

t , è una funzione regolare di \mathbf{x} . Si è assunto quindi che \mathbf{s} dipenda dalla superficie di contatto solo attraverso la sua normale \mathbf{n} nel punto \mathbf{x} .

D'altra parte, la funzione vettoriale $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, che viene chiamata *densità delle forze di volume*, ha per dominio la traiettoria \mathcal{T} e, per ogni t , si richiede che sia una funzione continua di \mathbf{x} .

Si consideri ora una parte del corpo \mathcal{P}_t e si ipotizzi che la sua frontiera $\partial\mathcal{P}_t$ sia una superficie regolare orientabile per ogni t , in modo che sia ben definito il versore normale uscente \mathbf{n} in ogni punto. Si può così definire la *forza* $\mathbf{f}(\mathcal{P}, t)$ agente su \mathcal{P} all'istante t come la somma dei contributi delle forze di contatto su $\partial\mathcal{P}_t$ e di quelli delle forze di volume su \mathcal{P}_t :

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, t) = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n}) dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{b} dV.$$

Per quanto riguarda invece il *momento* $\mathbf{m}(\mathcal{P}, t)$ agente su \mathcal{P} all'istante t , calcolato rispetto a un punto \mathbf{o} dal quale ogni punto dista \mathbf{r} , esso viene definito analogamente tramite la seguente relazione:

$$\mathbf{m}(\mathcal{P}, t) = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{s}(\mathbf{n}) dA + \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV.$$

Si introducono poi la *quantità di moto* di \mathcal{P} all'istante t :

$$\mathbf{l}(\mathcal{P}, t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \mathbf{v}$$

e il suo momento angolare:

$$\mathbf{a}(\mathcal{P}, t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

A questo punto possono essere riportate le leggi che esprimono il bilancio della quantità di moto e del momento angolare, dette *leggi di Eulero*:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathcal{P}, t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{l}(\mathcal{P}, t), \\ \mathbf{m}(\mathcal{P}, t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{a}(\mathcal{P}, t). \end{aligned}$$

Per caratterizzare meglio la dipendenza della densità delle forze di contatto $\mathbf{s}(\mathbf{n})$ dalla normale \mathbf{n} si riporta un importante teorema dovuto a Cauchy, per la dimostrazione del quale si rimanda a [4]:

Teorema 1 (Esistenza dello sforzo). *Sia (\mathbf{s}, \mathbf{b}) un sistema di forze per un corpo \mathcal{B} durante un moto. Allora una condizione necessaria e sufficiente affinché le leggi di Eulero siano soddisfatte è che esista un campo tensoriale spaziale \mathbf{T} (chiamato lo sforzo di Cauchy) tale che:*

(a) *per ogni versore \mathbf{n} ,*

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n};$$

(b) *\mathbf{T} è simmetrico;*

(c) *\mathbf{T} soddisfa l'equazione del moto*

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (1.2)$$

(essendo ρ la densità del corpo).

In realtà, l'enunciato provato da Cauchy è la linearità di \mathbf{T} in \mathbf{n} , poiché la nozione di tensore è successiva alla sua opera, ma è proprio questo l'apporto fondamentale del teorema nello sviluppo della teoria. $\mathbf{T}\mathbf{n}$ indica lo sforzo che agisce sulla superficie di normale \mathbf{n} che, in generale, avrà una componente normale $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{T}\mathbf{n}$, denominata *sforzo normale*, e una componente parallela alla superficie $(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{T}\mathbf{n}$, chiamata *sforzo di taglio*.

Il tensore degli sforzi di Cauchy \mathbf{T} è un tensore simmetrico ed è quindi possibile diagonalizzare la matrice che lo rappresenta in una certa base e ottenere, per ogni istante t e per ogni posizione \mathbf{x} , una terna ortogonale di autovettori che costituiscono le *direzioni principali di sforzo*, lungo le quali il modulo dello sforzo è pari agli autovalori di \mathbf{T} , detti *sforzi principali*.

La (1.2) esprime in termini spaziali e locali quella che in meccanica dei continui è l'equivalente del secondo principio della dinamica, o seconda legge di Newton, nella meccanica classica. Si tratta, infatti, dell'equazione di bilancio della quantità di moto, ovvero dell'uguaglianza tra la variazione della quantità di moto, al membro destro, e la risultante delle forze interne ed esterne, al membro sinistro. Tale risultante, in termini integrali, si ricava da:

$$\mathbf{f}(\mathcal{B}, t) = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{T}\mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{b} dV = \int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} dV + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{b} dV,$$

avendo fatto uso del teorema della divergenza.

1.3.2 Tensore di Piola

Il tensore degli sforzi \mathbf{T} è un tensore spaziale e quindi si riferisce alla configurazione attuale del corpo in esame. E' utile avere un corrispondente materiale di \mathbf{T} che si riferisca alla configurazione di riferimento, perché nello studio di corpi solidi è importante conoscere la posizione attuale e lo stato di sforzo di ogni punto *materiale* dopo una certa deformazione. Nel caso dei fluidi, invece, è più comoda una descrizione spaziale in quanto una certa configurazione macroscopica del fluido corrisponde a svariate configurazioni microscopiche delle particelle che lo compongono. Per i solidi vi è una corrispondenza biunivoca tra configurazione microscopica e macroscopica.

Si consideri quindi una porzione di superficie \mathcal{S}_0 di un corpo \mathcal{B}_0 con normale uscente \mathbf{m} e i corrispondenti spaziali una volta applicata una deformazione, ovvero \mathcal{S}_t con normale uscente \mathbf{n} . \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_t sono materialmente identiche, cioè costituite dagli stessi punti materiali, ma geometricamente diverse. Dato un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ su \mathcal{S}_t , si vuole trovare quale sia il corrispondente campo vettoriale $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{p}))$ su \mathcal{S}_0 , in funzione di \mathbf{v} e della deformazione, tale che

$$\int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_x = \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{m} dA_p.$$

La seguente Proposizione, introducendo anche un altro risultato utile, ci viene in aiuto:

Proposizione 1. *Sia \mathbf{f} una deformazione di \mathcal{B}_0 , e sia \mathbf{v} un campo vettoriale continuo su $\mathcal{B}_t = \mathbf{f}(\mathcal{B}_0)$. Allora, data una qualsiasi parte \mathcal{P}_0 di \mathcal{B}_0 ,*

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV_x = \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{p})) \det \mathbf{F}(\mathbf{p}) dV_p, \quad (1.3)$$

$$\int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dA_x = \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbf{v}(\mathbf{f}(\mathbf{p})) \cdot \mathbf{F}^*(\mathbf{p}) \mathbf{m}(\mathbf{p}) dA_p, \quad (1.4)$$

dove

$$\mathbf{F}^* = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}$$

è il tensore aggiunto di \mathbf{F} .

Pertanto, il campo \mathbf{v}_0 cercato è

$$\mathbf{v}_0 = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{v}. \quad (1.5)$$

Dalla (1.3) si può ricavare un'importante interpretazione del determinante del gradiente di deformazione \mathbf{F} . Infatti, data una parte \mathcal{P}_0 , il volume della corrispondente parte dopo la deformazione è

$$\text{vol}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} dV_x,$$

che, grazie alla (1.3), si può scrivere anche come

$$\text{vol}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_0} \det \mathbf{F} dV_p. \quad (1.6)$$

A questo punto, per procedere, è necessario introdurre un importante

Teorema 2 (di localizzazione). *Sia φ un campo continuo scalare su un insieme aperto \mathcal{R} in \mathcal{E} (lo spazio euclideo tridimensionale). Allora, dato un qualsiasi punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}$,*

$$\varphi(\mathbf{x}_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(\Omega_\delta)} \int_{\Omega_\delta} \varphi dV,$$

dove Ω_δ ($\delta > 0$) è la palla chiusa di raggio δ centrata in \mathbf{x}_0 . Quindi, se

$$\int_{\Omega_\delta} \varphi dV = 0$$

per ogni palla chiusa $\Omega \subset \mathcal{R}$, allora

$$\varphi = 0.$$

La dimostrazione si trova in [4].

Dalla (1.6) segue, pertanto, che

$$\det \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\mathbf{f}(\Omega_\delta))}{\text{vol}(\Omega_\delta)}, \quad (1.7)$$

dove Ω_δ è la palla chiusa di raggio δ e centrata in \mathbf{p} . Così $\det \mathbf{F}$ indica il volume dopo la deformazione per unità del volume originario. La (1.7) può essere equivalentemente scritta nel modo seguente

$$dV_x = (\det \mathbf{F}) dV_p \quad (1.8)$$

e il determinante di \mathbf{F} potrebbe anche essere definito come rapporto tra il volume di una parte dopo la trasformazione con gradiente \mathbf{F} e il corrispondente iniziale.

Una deformazione \mathbf{f} si dice *isocora* quando preserva il volume, ovvero quando, data una qualsiasi parte \mathcal{P} ,

$$\text{vol}(\mathbf{f}(\mathcal{P})) = \text{vol}(\mathcal{P}).$$

Da quest'ultima definizione segue subito la seguente

Proposizione 2. *Una deformazione è isocora se e solo se*

$$\det \mathbf{F} = 1.$$

Per ottenere una relazione simile alla (1.5), che metta in relazione la divergenza materiale di un campo vettoriale con quella spaziale, si parte dalla stessa espressione scritta per la frontiera di una parte \mathcal{P}_0 del corpo:

$$\int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA_x = \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{m} dA_p$$

e si applica prima il teorema della divergenza ad ambo i membri ottenendo:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \text{div } \mathbf{v} dV_x = \int_{\mathcal{P}_0} \text{Div } \mathbf{v}_0 dV_p$$

e dopo la (1.8) che permette di scrivere:

$$\int_{\mathcal{P}_0} \text{div } \mathbf{v}(\det \mathbf{F}) dV_p = \int_{\mathcal{P}_0} \text{Div } \mathbf{v}_0 dV_p.$$

In conclusione, si è trovato che:

$$\text{Div } \mathbf{v}_0 = (\det \mathbf{F}) \text{div } \mathbf{v}. \tag{1.9}$$

Ora che si sono ottenute le formule per scrivere i corrispettivi materiali di un campo vettoriale spaziale, la (1.5), e della sua divergenza, la (1.9), si possono applicare al processo per ricavare i corrispondenti materiali del tensore di Cauchy e della sua divergenza.

Denominando quindi il tensore degli sforzi nella configurazione di riferimento con \mathbf{S} , devono valere le seguenti uguaglianze:

$$\int_{\mathcal{S}_t} \mathbf{Tn} dA_x = \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{Sm} dA_p$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c} \cdot \int_{S_t} \mathbf{T} \mathbf{n} dA_x &= \mathbf{c} \cdot \int_{S_0} \mathbf{S} \mathbf{m} dA_p \quad \forall \mathbf{c} \\ \int_{S_t} \mathbf{T}^T \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} dA_x &= \int_{S_0} \mathbf{S}^T \mathbf{c} \cdot \mathbf{m} dA_p \quad \forall \mathbf{c}.\end{aligned}$$

Applicando ora la (1.5) con $\mathbf{v} = \mathbf{T}^T \mathbf{c}$ e $\mathbf{v}_0 = \mathbf{S}^T \mathbf{c}$, si ottiene:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{c} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{c},$$

poi

$$\mathbf{S}^T = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}^T$$

e infine

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}. \quad (1.10)$$

\mathbf{S} prende il nome di *tensor di Piola* e la (1.10) viene chiamata *trasformazione di Piola*.

Per ottenere una relazione per la divergenza di \mathbf{S} , si segue un procedimento analogo a quello utilizzato per arrivare alla (1.9), perché tutti i passaggi effettuati in quel caso, in cui si stava considerando un campo vettoriale, sono leciti anche in questo caso, in cui si sta trattando un campo tensoriale. Pertanto, si applica l'equivalente della (1.9) per un campo tensoriale con $\mathbf{v} = \mathbf{T}$ e $\mathbf{v}_0 = \mathbf{S}$, trovando alla fine:

$$\text{Div } \mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \text{div } \mathbf{T}. \quad (1.11)$$

Osservando meglio la (1.10) e la (1.11) si può notare una piccola incongruenza, poiché, in entrambe, il membro sinistro è espresso in coordinate materiali, mentre il destro in coordinate spaziali. Per rendere le cose coerenti, si materializzano le grandezze spaziali dei secondi membri:

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, t) = (\det \mathbf{F})(\mathbf{p}, t) \mathbf{T}(f(\mathbf{p}, t)) \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{p}, t)$$

$$\text{Div } \mathbf{S}(\mathbf{p}, t) = (\det \mathbf{F})(\mathbf{p}, t) \text{div } \mathbf{T}(f(\mathbf{p}, t)).$$

Definito il tensore degli sforzi in termini materiali, si vuole ora scoprire se esiste una condizione di simmetria per esso, dal momento che il tensore di Cauchy è simmetrico. Dalla simmetria di quest'ultimo, ovvero da:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

e invertendo la (1.10):

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (1.12)$$

segue, infatti, che:

$$\mathbf{S} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S}^T$$

$$\mathbf{S} \mathbf{F}^T = (\mathbf{S} \mathbf{F}^T)^T$$

che significa che $\mathbf{S} \mathbf{F}^T \in \text{Sym}$.

In ultimo si riporta anche l'equazione del moto scritta in forma materiale, che si ricava sostituendo la (1.10) e la (1.11) nella (1.2):

$$\text{Div } \mathbf{S} + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}},$$

dove $\mathbf{b}_0 = (\det \mathbf{F}) \mathbf{b}$ e $\rho_0 = \rho \det \mathbf{F}$ sono, rispettivamente, la densità delle forze di volume e la densità del corpo espresse in coordinate materiali.

1.3.3 Teorema dell'energia cinetica

Si riporta un importante teorema della meccanica dei continui e che sarà utilizzato in seguito per sviluppare la teoria dei vincoli interni perfetti. Il teorema dell'energia cinetica afferma che la variazione dell'energia cinetica di un corpo è pari alla potenza totale spesa sul corpo stesso, ovvero

$$\frac{d}{dt} E_C = P.$$

Derivando quindi l'energia cinetica di un corpo elastico \mathcal{B} si ottiene la somma di tutti i contributi alla potenza spesa su quella parte di corpo. Nei prossimi passaggi si farà uso delle seguenti due relazioni:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \psi(\mathbf{x}, t) \rho dV_x = \int_{\mathcal{B}_t} \dot{\psi}(\mathbf{x}, t) \rho dV_x, \quad (1.13)$$

valida ogniqualvolta $\int_{\mathcal{B}_t} \rho dV_x = \text{cost}$, e

$$\text{div } \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) - \mathbf{T} \cdot \text{grad } \mathbf{v}. \quad (1.14)$$

Si può ora procedere alla dimostrazione del teorema considerando tutte le quantità in termini spaziali.

$$\frac{d}{dt} E_C = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \frac{v^2}{2} dV_x.$$

Essendo $\int_{\mathcal{B}_t} \rho dV_x = \text{cost}$ in quanto massa di \mathcal{B}_t , si può applicare la (1.13) ottenendo

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \frac{v^2}{2} dV_x = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} dV_x = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dV_x,$$

dove \mathbf{a} è l'accelerazione spaziale.

Si prosegue utilizzando l'equazione del moto e la (1.14):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dV_x &= \int_{\mathcal{B}_t} (\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \text{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dV_x = \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} (\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) - \mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v}) dV_x. \end{aligned}$$

Si riscrive il termine centrale come segue:

$$\int_{\mathcal{B}_t} \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) dV_x = \int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{T}^T \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA_x = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} dA_x = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} dA_x,$$

avendo usato prima il teorema della divergenza e poi la definizione dello sforzo di Cauchy, essendo \mathbf{n} la normale esterna lungo la superficie $\partial \mathcal{B}_t$.

Alla fine si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_C &= \Pi_{\text{est}} + \Pi_{\text{int}} \\ E_C &= \int_{\mathcal{B}_t} \rho \frac{v^2}{2} dV_x \\ \Pi_{\text{est}} &= \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV_x + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} dA_x \\ \Pi_{\text{int}} &= - \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{T} \cdot \text{grad} \mathbf{v} dV_x, \end{aligned}$$

dove Π_{est} è la potenza delle forze esterne che si compone del contributo delle forze di volume e di quello delle forze di contatto tra il corpo e l'esterno, mentre Π_{int} è la potenza delle forze interne, cioè delle forze di contatto escluse quelle tra il corpo e l'esterno. Π_{int} è pari a zero nel caso dei corpi rigidi, perché non si ha deformazione del corpo.

Scomponendo poi $\text{grad} \mathbf{v}$ nella somma della sua parte simmetrica \mathbf{D} e di quella antisimmetrica \mathbf{W} , $\text{grad} \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, e siccome \mathbf{T} è simmetrico, si può semplificare la potenza delle forze interne:

$$\Pi_{\text{int}} = - \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dV_x,$$

essendo \mathbf{T} e \mathbf{W} ortogonali ($\mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = 0$) perché $\text{Lin} = \text{Sym} \oplus \text{Skw}$.

Rifacendo tutto per esprimere il teorema in termini materiali, si arriva a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_C &= \Pi_{\text{est}} + \Pi_{\text{int}} \\ E_C &= \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{\dot{x}^2}{2} dV_p \\ \Pi_{\text{est}} &= \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \dot{x} dV_p + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{s} \cdot \dot{x} dA_p \\ \Pi_{\text{int}} &= - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} \cdot \nabla \dot{x} dV_p. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, si può scrivere meglio, in maniera più significativa, la potenza delle forze interne in termini materiali. Infatti, si ha

$$\nabla \dot{\mathbf{x}} = D_{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{p}, t) = D_{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial}{\partial t} D_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{F}},$$

che porta a scrivere

$$\Pi_{\text{int}} = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} dV_p.$$

1.4 Elasticità finita

1.4.1 Classi costitutive

La coppia moto-sforzi (x, \mathbf{T}) viene definita *processo dinamico*. I materiali sottoposti a un certo sistema di forze o a una data deformazione si comportano in maniera differente a seconda delle loro proprietà fisiche. Vengono raggruppati in diverse *classi costitutive* che rappresentano delle restrizioni sull'insieme dei processi dinamici che un corpo costituito da un certo materiale può sopportare. A ogni classe corrisponde un'*equazione costitutiva* che descrive il tensore degli sforzi. Particolare attenzione hanno ricevuto le classi costitutive più comuni, ovvero quelle dei materiali elastici, viscoelastici e fluidi. Nel seguito si tratteranno i corpi elastici.

Facendo un parallelo con l'equazione della molla elastica, la forza esercitata dalla quale dipende linearmente solo dalla variazione della sua lunghezza, si definisce un *corpo elastico* come un corpo il cui tensore degli sforzi \mathbf{T} dipende, oltre che dal punto materiale e dall'istante di tempo in considerazione, solo dal gradiente di deformazione \mathbf{F} , che misura le variazioni locali delle lunghezze. Ciò si traduce in

un'equazione costitutiva del tipo:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(\mathbf{p}, t), \mathbf{p}).$$

La *funzione risposta* $\hat{\mathbf{T}} : \text{Lin}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Sym}$ definisce quindi la classe costitutiva di un corpo elastico. Eliminando la dipendenza da \mathbf{p} si ottiene l'equazione costitutiva dei corpi elastici omogenei:

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}), \tag{1.15}$$

con $\hat{\mathbf{T}} : \text{Lin}^+ \rightarrow \text{Sym}$.

1.4.2 Principio di indifferenza materiale

La funzione $\hat{\mathbf{T}}$ non può essere arbitraria perché si vuole che soddisfi il *principio di indifferenza materiale*, ovvero che sia indipendente dall'osservatore. Si vuole cioè che, una volta effettuata la deformazione, ruotando il corpo si ottenga un tensore degli sforzi che corrisponda al ruotato di quello che si ottiene con la sola deformazione. Considerando quindi una rotazione rigida \mathbf{Q} , appartenente al gruppo delle rotazioni Rot , si indica con \mathbf{T}^* il tensore degli sforzi che si ottiene mettendo \mathbf{QF} al posto di \mathbf{F} nell'equazione costitutiva¹, dove \mathbf{QF} è la deformazione che si ottiene facendo seguire alla deformazione \mathbf{F} la rotazione \mathbf{Q} , cioè:

$$\mathbf{T}^* = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{QF}). \tag{1.16}$$

Sia poi \mathbf{n}^* la rotazione secondo \mathbf{Q} di un versore \mathbf{n} , ovvero $\mathbf{n}^* = \mathbf{Qn}$. Al fine di rispettare il principio di indifferenza materiale, si deve soddisfare sempre la relazione

$$\mathbf{T}^* \mathbf{n}^* = \mathbf{Q}(\mathbf{Tn}),$$

che rappresenta, appunto, l'uguaglianza tra lo sforzo relativo al corpo già ruotato e che agisce sulla superficie di normale \mathbf{n}^* (membro sinistro) e la rotazione \mathbf{Q} dello sforzo relativo al corpo prima della rotazione e agente sulla superficie di normale \mathbf{n} (membro destro). La precedente relazione si riscrive come

$$\mathbf{T}^* \mathbf{Qn} = \mathbf{Q} \mathbf{Tn}$$

¹Da non confondere con il tensore aggiunto di \mathbf{T} .

e, a sua volta,

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T, \quad (1.17)$$

che, in sostanza, esprime la rotazione di un tensore. Ora sostituendo la (1.15) e la (1.16) nella (1.17) si ottiene:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T,$$

che è il principio di indifferenza materiale, riportato, per completezza, nella seguente

Proposizione 3. *Una condizione necessaria e sufficiente affinché la risposta di un corpo elastico sia indipendente dall'osservatore è che la funzione risposta $\hat{\mathbf{T}}$ soddisfi*

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T \quad (1.18)$$

per ogni $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+$ e per ogni $\mathbf{Q} \in \text{Rot}$.

Dalle seguenti relazioni, infine,

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{R}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T \quad (1.19)$$

si può vedere come basti conoscere $\hat{\mathbf{T}}$ sui tensori simmetrici definiti positivi per determinarla univocamente. Assegnando, infatti, $\hat{\mathbf{T}} : \text{Sym}^+ \rightarrow \text{Sym}$ si può dedurre $\hat{\mathbf{T}} : \text{Lin}^+ \rightarrow \text{Sym}$ dal valore della sua restrizione $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})$ su Sym e conoscendo la decomposizione polare di \mathbf{F} . Il principio di indifferenza materiale risulta sempre soddisfatto perché, grazie alla (1.19):

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{Q}\mathbf{R}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})(\mathbf{Q}\mathbf{R})^T = \mathbf{Q}\mathbf{R}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T.$$

Questo è un caso del seguente

Corollario 1 (Equazioni costitutive ridotte). *La funzione risposta $\hat{\mathbf{T}}$ è completamente determinata dalla sua restrizione su Sym^+ ; infatti,*

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T$$

per ogni $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+$, dove $\mathbf{R} \in \text{Rot}$ è il tensore di rotazione e $\mathbf{U} \in \text{Sym}^+$ il tensore destro di allungamento corrispondente a \mathbf{F} ; cioè, $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ è la decomposizione polare destra di \mathbf{F} . Inoltre, esistono delle funzioni risposta regolari \mathbf{T}^* , $\tilde{\mathbf{T}}$ e $\bar{\mathbf{T}}$ da Sym^+ a Sym tali che

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\mathbf{T}^*(\mathbf{U})\mathbf{F}^T,$$

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{C})\mathbf{R}^T,$$

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{C})\mathbf{F}^T,$$

con $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ il tensore di Cauchy-Green destro corrispondente a \mathbf{F} .

1.4.3 Simmetria materiale

Un'altra proprietà importante della funzione risposta è quella di avere un *gruppo di simmetria*, ovvero un insieme di tensori rotazione che applicati prima della deformazione lasciano inalterato il valore della funzione stessa e che costituiscono un gruppo algebrico:

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{Q} \in \text{Rot} : \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \ \forall \mathbf{F} \in \text{Lin}^+.\} \quad (1.20)$$

Sicuramente tale gruppo non è vuoto perché contiene l'identità. Per mostrare che \mathcal{G} sia effettivamente un gruppo algebrico, oltre al fatto che contenga il tensore identità, devono valere le seguenti due relazioni:

(a) $\mathbf{Q} \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathbf{Q}^T \in \mathcal{G}$

(b) $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \in \mathcal{G}$

Per dimostrare la (a) basta far vedere che $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$ e infatti

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$$

perché $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$ e $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Per la (b) si ha invece

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}_1) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$$

perché $\mathbf{Q}_2 \in \mathcal{G}$ e $\mathbf{Q}_1 \in \mathcal{G}$; e quindi $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \in \mathcal{G}$. \mathcal{G} viene chiamato gruppo di simmetria materiale.

1.4.4 Isotropia

Se \mathcal{G} contiene tutte le rotazioni, il materiale si dice *isotropo* e quindi la rotazione non è individuabile, cioè è indifferente se viene applicata prima o dopo la deformazione, in quanto si otterrebbero gli stessi sforzi. Se invece contiene solo le rotazioni attorno

a un asse dato si parla di isotropia trasversa, oppure se contiene le rotazioni che trasformano un cubo in sé stesso (simmetria cubica) di isotropia cubica e così via.

Combinando il principio di indifferenza materiale e le proprietà del gruppo di simmetria si può ottenere l'importante relazione

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G},$$

che esprime il fatto che $\hat{\mathbf{T}}$ sia una funzione invariante sotto il gruppo di simmetria considerato. Infatti,

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T)\mathbf{Q}^T$$

per il principio di indifferenza materiale applicato alla rotazione \mathbf{Q} e

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$$

per il fatto che $\mathbf{Q}^T \in \mathcal{G}$.

Nel caso dell'isotropia, cioè quando $\mathcal{G} = \text{Rot}$ e $\hat{\mathbf{T}}$ risulta invariante sotto il gruppo delle rotazioni, si dice che $\hat{\mathbf{T}}$ è una *funzione isotropa*.

L'isotropia poi permette di scrivere il tensore di Cauchy in funzione solo di \mathbf{B} , perché

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{V}\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{V}) = \hat{\mathbf{T}}(\sqrt{\mathbf{B}}) = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{B}),$$

quindi

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{B}). \tag{1.21}$$

Se nella (1.21) si mette $\mathbf{Q}\mathbf{F}$ al posto di \mathbf{F} e si ricorda che $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ si ottiene

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{T}}((\mathbf{Q}\mathbf{F})(\mathbf{Q}\mathbf{F})^T)$$

e quindi

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T).$$

Ma, per la (1.18), si ha anche che $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T$, quindi

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T,$$

e, grazie alla (1.21),

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{B})\mathbf{Q}^T,$$

che significa che $\tilde{\mathbf{T}}$ è una funzione isotropa, e, in particolare, che \mathbf{T} è esprimibile per

mezzo di una funzione isotropa di \mathbf{B} .

A questo punto si può utilizzare un teorema di rappresentazione delle funzioni isotrope:

Teorema 3 (Equazione costitutiva per un materiale isotropo). *Si assuma che il materiale in \mathbf{p} sia isotropo. Allora l'equazione costitutiva può essere scritta nella forma*

$$\mathbf{T} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{B} + \beta_2 \mathbf{B}^{-1}, \quad (1.22)$$

dove $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ è il tensore sinistro di Cauchy-Green e β_0 , β_1 e β_2 sono funzioni scalari degli invarianti principali di \mathbf{B} .

In realtà, è possibile dare altre versioni della (1.22) in cui compaiono sempre tre termini e ognuno è costituito da un coefficiente funzione degli invarianti di \mathbf{B} che moltiplica una potenza di \mathbf{B} . Per esempio, un'altra forma usata spesso è

$$\mathbf{T} = \tilde{\beta}_0 \mathbf{I} + \tilde{\beta}_1 \mathbf{B} + \tilde{\beta}_2 \mathbf{B}^2. \quad (1.23)$$

Per vedere che tutte le versioni sono equivalenti si ricorre al teorema di Cayley-Hamilton che afferma che ogni tensore soddisfa il suo polinomio caratteristico, cioè che vale la seguente relazione:

$$-\mathbf{B}^3 + I_1 \mathbf{B}^2 - I_2 \mathbf{B} + I_3 \mathbf{I} = 0,$$

con I_1 , I_2 e I_3 gli invarianti principali di \mathbf{B} . Da qui, moltiplicando a destra per esempio per \mathbf{B}^{-1} , si ottiene un'espressione per \mathbf{B}^2 in funzione delle potenze precedenti di \mathbf{B} , da sostituire nella (1.23) per ottenere la (1.22), e così via.

In conclusione, il sistema completo spaziale delle equazioni di campo, comprensivo dell'equazione di moto, dell'equazione di bilancio della massa e dell'equazione costitutiva per un corpo elastico isotropo, risulta essere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \\ \rho_0 = \rho \det \mathbf{F} \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \\ \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{B}) \end{array} \right.$$

con $\tilde{\mathbf{T}}$ funzione isotropa.

1.4.5 Principio di indifferenza materiale e gruppo di simmetria per il tensore di Piola

Ora si vogliono riscrivere il principio di indifferenza materiale e la caratterizzazione del gruppo di simmetria in termini materiali, cioè in funzione del tensore di Piola \mathbf{S} .

Mettendo \mathbf{QF} al posto di \mathbf{F} nella (1.10) si ottiene:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{QF}) = (\det \mathbf{F}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{QF}) \mathbf{Q}^{-\mathbf{T}} \mathbf{F}^{-\mathbf{T}},$$

perché $\det \mathbf{Q} = \mathbf{1}$, essendo \mathbf{Q} una rotazione; poi si applica la (1.18), ovvero il principio di indifferenza materiale per \mathbf{T} , ottenendo:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{QF}) = (\det \mathbf{F}) (\mathbf{Q} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}^{\mathbf{T}}) \mathbf{Q}^{-\mathbf{T}} \mathbf{F}^{-\mathbf{T}},$$

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{QF}) = (\det \mathbf{F}) \mathbf{Q} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

e, usando la (1.12), si arriva a:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{QF}) = (\det \mathbf{F}) \mathbf{Q} \left(\frac{\mathbf{1}}{\det \mathbf{F}} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \right) \mathbf{F}^{-\mathbf{T}},$$

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{QF}) = \mathbf{Q} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}), \tag{1.24}$$

che è il principio di indifferenza materiale espresso in termini materiali.

Per la caratterizzazione del gruppo di simmetria, si procede in maniera analoga. Mettendo \mathbf{FQ} al posto di \mathbf{F} nella (1.10) si ottiene:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{FQ}) = (\det \mathbf{F}) \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ}) \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \mathbf{Q}^{-\mathbf{T}},$$

poi si applica la (1.20), ovvero la caratterizzazione del gruppo di simmetria per \mathbf{T} , ottenendo:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{FQ}) = (\det \mathbf{F}) (\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})) \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \mathbf{Q}^{-\mathbf{T}}$$

e, usando la (1.12), si arriva a:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{FQ}) = (\det \mathbf{F}) \left(\frac{\mathbf{1}}{\det \mathbf{F}} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \right) \mathbf{F}^{-\mathbf{T}} \mathbf{Q}^{-\mathbf{T}},$$

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{FQ}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}, \tag{1.25}$$

perché $\mathbf{Q}^{-\mathbf{T}} = \mathbf{Q}$, essendo \mathbf{Q} una rotazione. E quest'ultima è la caratterizzazione del gruppo di simmetria in termini materiali.

1.5 Corpi iperelastici

1.5.1 Energia di deformazione

Un corpo elastico si dice *iperelastico* se il suo tensore di Piola \mathbf{S} può essere scritto come la derivata rispetto a \mathbf{F} di una funzione scalare $\hat{\sigma} : \text{Lin}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ denominata *energia di deformazione* per unità di volume, ovvero se:

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = D\hat{\sigma}(\mathbf{F}), \quad (1.26)$$

avendo indicato con D l'operatore differenziale.

La (1.26) scritta per componenti risulta:

$$S_{ij} = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial F_{ij}}.$$

Studiando la termodinamica dei continui, si scopre che tutti i materiali sono iperelastici, ovvero tutti possiedono un'energia di deformazione.

Di seguito si riportano alcune proprietà dell'energia di deformazione, ereditate dal principio di indifferenza materiale, dalla caratterizzazione del gruppo di simmetria e dall'isotropia del tensore di Piola, senza però soffermarsi sulle dimostrazioni, per le quali si rimanda a [4].

Dalla (1.24) si può dimostrare che $\forall \mathbf{Q} \in \text{Rot}$:

$$\hat{\sigma}(\mathbf{QF}) = \hat{\sigma}(\mathbf{F})$$

e, di conseguenza, che

$$\hat{\sigma}(\mathbf{F}) = \hat{\sigma}(\mathbf{RU}) = \hat{\sigma}(\mathbf{U}) = \bar{\sigma}(\mathbf{C}).$$

Dalla (1.25) si può dimostrare che $\forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G}$:

$$\hat{\sigma}(\mathbf{FQ}) = \hat{\sigma}(\mathbf{F}).$$

Nel caso dell'isotropia, in cui $\mathcal{G} = \text{Rot}$:

$$\hat{\sigma}(\mathbf{F}) = \hat{\sigma}(\mathbf{VR}) = \hat{\sigma}(\mathbf{V}) = \tilde{\sigma}(\mathbf{B}).$$

E, da quest'ultima, si può giungere a:

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{B}) = \tilde{\sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T),$$

e affermare che $\tilde{\sigma}$ è una funzione isotropa di \mathbf{B} e che quindi si può ricorrere a un teorema di rappresentazione delle funzioni isotrope. In questo modo si riesce a scrivere la $\tilde{\sigma}$ come funzione dei tre invarianti principali di \mathbf{B} , ovvero:

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{B}) = \tilde{\sigma}(i_1(\mathbf{B}), i_2(\mathbf{B}), i_3(\mathbf{B})).$$

Infine, il teorema dell'energia cinetica prende un'altra forma per un corpo iperelastico perché

$$\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} = D\sigma(\mathbf{F}) \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt}\sigma(\mathbf{F}(t))$$

e quindi

$$\Pi_{\text{int}} = - \int_{\mathcal{B}} \frac{d}{dt}\sigma(\mathbf{F}) dV_p = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \sigma(\mathbf{F}) dV_p.$$

Dopo aver definito l'*energia totale di deformazione* o *energia elastica* come

$$E_E = \int_{\mathcal{B}} \sigma(\mathbf{F}) dV_p,$$

il teorema dell'energia cinetica in questo caso diventa:

$$\frac{d}{dt}(E_C + E_E) = \Pi_{\text{est}}.$$

1.5.2 Tensore degli sforzi

Una volta data l'energia di deformazione $\tilde{\sigma}(i_1, i_2, i_3)$ si è in grado di scrivere il tensore di Piola, perché

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}) = D\hat{\sigma}(\mathbf{F}) = \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_1} \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_2} \frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{F}} + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_3} \frac{\partial i_3}{\partial \mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{F}}. \quad (1.27)$$

Le tre componenti

$$\frac{\partial i_j}{\partial \mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial i_j}{\partial \mathbf{F}}$$

per $j = 1, 2, 3$ si calcolano una volta per tutte nella maniera riportata di seguito. Si scrive

$$\frac{\partial i_j}{\partial t} = \frac{\partial i_j}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}$$

e nella derivata dell'invariante rispetto al tempo si cerca di isolare il termine di interesse.

Per il primo invariante si ha:

$$i_1(\mathbf{B}) = \text{tr } \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)$$

e la sua derivata rispetto al tempo è:

$$\frac{\partial i_1}{\partial t} = \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T) = \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T + (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T)^T) = 2 \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T) = 2\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}.$$

Si conclude quindi che

$$\frac{\partial i_1(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F}. \quad (1.28)$$

Per il secondo:

$$i_2(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2))$$

e la sua derivata rispetto al tempo è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_2}{\partial t} &= \frac{1}{2}2(\text{tr } \mathbf{B})(2\mathbf{F}) \cdot \dot{\mathbf{F}} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T) \\ &= 2(\text{tr } \mathbf{B})\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}} - \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T). \end{aligned}$$

Per proseguire, si farà uso più volte delle seguenti proprietà dell'operatore traccia:

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Queste, infatti, permettono di scrivere:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T) &= \dot{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^T = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F} \\ \text{tr}(\mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T) &= \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F}) = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F} \\ \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T) &= \text{tr}(\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}) = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F} \\ \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T) &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F}, \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\partial i_2}{\partial t} = 2(\text{tr } \mathbf{B})\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}} - \frac{1}{2}4\mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}.$$

E, in definitiva,

$$\frac{\partial i_2(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{F}} = 2(\operatorname{tr} \mathbf{B})\mathbf{F} - 2\mathbf{B}\mathbf{F}. \quad (1.29)$$

Per il terzo invariante, si ha:

$$i_3(\mathbf{B}) = \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)$$

e per calcolare la sua derivata rispetto al tempo bisogna prima conoscere la derivata rispetto al tempo dell'operatore determinante, cioè:

$$\frac{d}{dt}(\det \mathbf{A}(t)) = (\det \mathbf{A}) \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}).$$

A questo punto si può scrivere, utilizzando ancora le proprietà dell'operatore traccia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_3}{\partial t} &= \det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) \operatorname{tr}((\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T)(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1}) \\ &= \det(\mathbf{B}) \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}) \\ &= \det(\mathbf{B}) \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + \dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}) \\ &= \det(\mathbf{B}) \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + \dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}^{-T}) \\ &= \det(\mathbf{B})(\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}) \\ &= 2(\det \mathbf{B})\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\partial i_3(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{F}} = 2(\det \mathbf{B})\mathbf{F}^{-T}. \quad (1.30)$$

Ora, sostituendo le (1.28), (1.29) e (1.30) nella (1.27), si ottiene:

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}) = 2\left(\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_1}\mathbf{F} + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_2}(\operatorname{tr} \mathbf{B})\mathbf{F} - \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_2}\mathbf{B}\mathbf{F} + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_3}(\det \mathbf{B})\mathbf{F}^{-T}\right).$$

Questa formula permette di scrivere il tensore di Piola, una volta data un'energia di deformazione, e, da essa, utilizzando la (1.12), si può ricavare il corrispettivo tensore di Cauchy:

$$\mathbf{T}(\mathbf{F}) = \frac{2}{\det \mathbf{F}}\left(\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_1}\mathbf{B} + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_2}(\operatorname{tr} \mathbf{B})\mathbf{B} - \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_2}\mathbf{B}^2 + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial i_3}(\det \mathbf{B})\mathbf{I}\right), \quad (1.31)$$

che risulta essere un caso particolare di (1.23).

Si consideri ora il sistema di riferimento che permette di diagonalizzare \mathbf{B} e che, di conseguenza, fa comparire i suoi autovalori λ_i^2 sulla sua diagonale principale, avendo

indicato con λ_i gli autovalori del tensore sinistro di allungamento \mathbf{V} . Il tensore di Cauchy \mathbf{T} che si ottiene dalla (1.31) si presenterà anch'esso in forma diagonale con i suoi autovalori t_i sulla diagonale principale. Si può dimostrare che vale la seguente formula:

$$(\det \mathbf{F})t_i = \lambda_i \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_i},$$

che mostra come gli sforzi principali t_i siano direttamente collegati ai coefficienti di allungamento λ_i e alla derivata dell'energia di deformazione fatta proprio rispetto ai λ_i .

Capitolo 2

Elementi di geometria differenziale

Nella teoria dei vincoli interni nell'ambito della meccanica dei continui vengono utilizzati strumenti e oggetti matematici presi in prestito dalla geometria differenziale. La definizione stessa dello spazio che si genera come restrizione di quello dei gradienti di deformazione, una volta imposti dei vincoli, utilizza una struttura matematica studiata in questo ambito. Anche nello studio dei sistemi olonomi in meccanica razionale gli stessi oggetti vengono utilizzati senza farne menzione esplicita. In questo capitolo vengono quindi introdotti tutti gli elementi di geometria differenziale necessari a comprendere meglio il contenuto delle seguenti sezioni.

In particolare, si trattano varietà e sottovarietà differenziabili, spazi tangenti, varietà prodotto, applicazioni differenziabili tra varietà, immersioni e alcuni teoremi della funzione implicita.

I testi a cui si è fatto riferimento sono essenzialmente il Warner [5] e il Bishop Goldberg [6] per quanto riguarda i concetti fondamentali di geometria differenziale, mentre si è consultato il Manetti [7] per gli argomenti introduttivi di topologia.

2.1 Varietà differenziabili

Esempi noti di varietà differenziabili sono le curve, le superfici o le ipersuperfici regolari di \mathbb{R}^n . Questi oggetti matematici possono essere descritti come sottoinsiemi di uno spazio \mathbb{R}^n che godono di certe proprietà, oppure come applicazioni da un insieme aperto contenuto in \mathbb{R}^m a valori in \mathbb{R}^n , con $n > m$, dotate di opportune proprietà di regolarità.

In generale, una *varietà differenziabile* è uno spazio topologico X con alcune proprietà aggiuntive. Si procederà, quindi, introducendo il concetto di spazio topologico e via via tutti gli strumenti necessari per definire rigorosamente tali proprietà.

Definizione 1. Sia X un insieme. Una topologia su X è una famiglia \mathcal{T} di sottoinsiemi di X , detti aperti, che soddisfa le seguenti condizioni:

- \emptyset e X sono aperti;
- l'unione arbitraria di aperti è un sottoinsieme aperto;
- l'intersezione di due aperti è un sottoinsieme aperto.

Un insieme dotato di una topologia viene detto spazio topologico. Gli elementi di uno spazio topologico vengono detti punti.

Definizione 2. Uno spazio topologico si dice di Hausdorff se punti distinti ammettono intorni disgiunti.

La proprietà di Hausdorff è una condizione di separabilità tra i punti dell'insieme.

Per poter applicare tutti gli strumenti del calcolo infinitesimale a uno spazio topologico si introducono delle funzioni che lo mettono in relazione con lo spazio euclideo d -dimensionale, sul quale si è in grado di applicarli senza difficoltà.

Definizione 3. Se X è uno spazio topologico, una carta locale in un punto $p \in X$ è una coppia (U, μ) , dove U è un sottoinsieme aperto di X che contiene p , e $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ è un omeomorfismo su un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^d . La dimensione della carta locale (U, μ) è d .

Un omeomorfismo è un'applicazione continua, biunivoca e con inversa anch'essa continua.

Definizione 4. Una funzione $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ è una mappa differenziabile di classe C^k , con $k \geq 1$, se le sue coordinate locali $u^i \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ sono dei diffeomorfismi di classe C^k , essendo $u^i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni di proiezione tali che $u^i(a^1, \dots, a^d) = a^i$.

Da qui in avanti ogni volta che comparirà nelle definizioni l'insieme C^k , ovvero la classe di funzioni derivabili con continuità fino all'ordine k , verrà sempre sottintesa la condizione $k \geq 1$. Inoltre, con diffeomorfismo di classe C^k si intende una funzione differenziabile, di classe C^k , invertibile e tale che la sua inversa sia differenziabile e di classe C^k .

Definizione 5. Due carte (U, μ) , con $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}^d$, e (V, τ) , con $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}^e$, su uno spazio topologico X sono C^k -compatibili se $d = e$ e

- $U \cap V = \emptyset$

- $\mu \circ \tau^{-1} : \tau(U \cap V) \rightarrow \mu(U \cap V)$ e $\tau \circ \mu^{-1} : \mu(U \cap V) \rightarrow \tau(U \cap V)$ sono mappe differenziabili di classe C^k .

Le funzioni $\mu \circ \tau^{-1}$ e $\tau \circ \mu^{-1}$ vengono dette *funzioni di transizione* e sono mappe tra sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^d , in quanto i loro domini e codomini sono immagini di insiemi aperti tramite omeomorfismi. Funzioni di questo genere sono alla base del calcolo differenziale e proprio grazie a esse, imponendo condizioni appropriate, si possono applicare molti strumenti di questo ramo della matematica alle varietà.

Definizione 6. Un atlante di uno spazio topologico X è una collezione di carte locali $\{(U_\alpha, \mu_\alpha), \mu_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \alpha \text{ intero}\}$ tale che $\bigcup U_\alpha = X$.

Definizione 7. Un atlante differenziabile di classe C^k è un atlante tale per cui le sue carte sono C^k -compatibili a due a due.

Si è ora in grado di introdurre il concetto di *varietà topologica* che, in sostanza, rappresenta uno spazio topologico di una certa dimensione e con alcune proprietà che è possibile descrivere mediante un atlante.

Definizione 8. Una varietà topologica è uno spazio di Hausdorff dotato di un atlante differenziabile. La dimensione della varietà coincide con la dimensione delle carte dell'atlante.

Ciò significa che per ogni punto dello spazio topologico X esiste una carta locale d -dimensionale, appartenente a un atlante di X , che permette di trasportare tutto sullo spazio euclideo, molto più agevole di uno spazio topologico. Il passo successivo consiste nell'aggiungere all'oggetto matematico varietà topologica un'ultima struttura per poter utilizzare gli strumenti del calcolo infinitesimale su di essa.

Definizione 9. Una carta locale è C^k -compatibile con un atlante differenziabile di classe C^k se è C^k -compatibile con ogni carta locale dell'atlante.

Definizione 10. Una struttura differenziabile di classe C^k è un atlante differenziabile di classe C^k massimale, cioè è un atlante differenziabile di classe C^k che contiene tutte quelle carte che sono C^k -compatibili con lui stesso.

A questo punto sono stati introdotti tutti gli ingredienti di topologia e geometria differenziale necessari per dare la definizione di varietà differenziabile che si cercava.

Definizione 11. Una varietà differenziabile di classe C^k è una varietà topologica dotata di una struttura differenziabile di classe C^k .

2.2 Spazio tangente

Come nel calcolo infinitesimale si utilizza il differenziale per avere un'approssimazione locale lineare di una funzione che permetta di descriverla più facilmente, così in geometria differenziale si fa ricorso a un'approssimazione lineare locale di una varietà differenziabile, chiamata *spazio tangente* e definita in ogni punto di essa. Vi sono tre definizioni diverse ma equivalenti dello spazio tangente e di seguito viene riportata nel dettaglio solo quella che più si adatta alle tipologie di varietà differenziabili che rientrano nella teoria dei vincoli interni. Anche in questo caso, sarà necessario introdurre alcuni nuovi oggetti matematici e si procederà ancora riportandone tutte le definizioni.

Si consideri quindi una varietà differenziabile M di classe C^k e di dimensione n . Sia $p \in M$ un punto di M e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una curva di classe C^1 che passi per p , ovvero tale che $\gamma(0) = p$. Siccome, in generale, M non è immerso in nessun \mathbb{R}^N , la derivata $\gamma'(0)$ non ha senso. Tuttavia, considerando una carta locale (U, μ) in p , con $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, la mappa $\mu \circ \gamma$ è una curva di classe C^1 in \mathbb{R}^n e il vettore tangente $v = (\mu \circ \gamma)'(0)$ è ben definito.

Un problema che sorge è che a curve diverse potrebbe corrispondere lo stesso vettore tangente v e, per ovviare a ciò, si definisce una relazione di equivalenza tra curve passanti per p nel modo seguente:

Definizione 12. *Data una varietà differenziabile M di classe C^k e di dimensione n , per ogni punto $p \in M$, due curve di classe C^1 , $\gamma_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow M$ e $\gamma_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow M$, passanti per p , cioè tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, sono equivalenti se e solo se esiste una carta locale (U, μ) in p tale che*

$$(\mu \circ \gamma_1)'(0) = (\mu \circ \gamma_2)'(0).$$

Bisogna ora dimostrare che questa definizione sia ben posta, ovvero che non dipenda dalla scelta della carta locale. Sia quindi (U, μ) una carta locale per p per cui valga

$$(\mu \circ \gamma_1)'(0) = (\mu \circ \gamma_2)'(0) \tag{2.1}$$

e si consideri un'altra carta locale (V, τ) per p . Si vuole far vedere che la (2.1) è equivalente a

$$(\tau \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \gamma_2)'(0).$$

Per prima cosa bisogna notare che

$$\tau \circ \gamma = \tau \circ \mu^{-1} \circ \mu \circ \gamma.$$

E poi, grazie alla regola di derivazione di funzioni composte:

$$(\tau \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \mu^{-1})'(\mu(p)) \cdot (\mu \circ \gamma_1)'(0).$$

Utilizzando la (2.1), si arriva a scrivere

$$(\tau \circ \mu^{-1})'(\mu(p)) \cdot (\mu \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \mu^{-1})'(\mu(p)) \cdot (\mu \circ \gamma_2)'(0)$$

e, ancora grazie alla regola precedente,

$$(\tau \circ \mu^{-1})'(\mu(p)) \cdot (\mu \circ \gamma_2)'(0) = (\tau \circ \gamma_2)'(0).$$

Quindi si è dimostrato che

$$(\tau \circ \gamma_1)'(0) = (\tau \circ \gamma_2)'(0)$$

e la Definizione 12 risulta ben posta, non dipendendo dalla carta locale scelta, perché si è visto che se vale per una allora vale per una qualsiasi e quindi per tutte.

A questo punto si può procedere a definire un *vettore tangente*:

Definizione 13. *Data una varietà differenziabile M di classe C^k e di dimensione n e dato un punto $p \in M$ un vettore tangente a M in p è una qualsiasi classe di equivalenza di curve di classe C^1 passanti per p in M , modulo la relazione di equivalenza (2.1).*

E infine:

Definizione 14. *Nelle stesse condizioni della definizione precedente, l'insieme di tutti i vettori tangenti in p è chiamato spazio tangente e viene indicato con $T_p M$ oppure $\dot{M}(p)$.*

Come ultimo passo bisogna mostrare che lo spazio tangente è uno spazio vettoriale, ma questo segue dal fatto che ogni elemento dello spazio tangente può anche essere visto come un vettore dello spazio euclideo \mathbb{R}^n che è uno spazio vettoriale. Esiste infatti una corrispondenza biunivoca naturale tra $T_p M$ e \mathbb{R}^n che associa a ogni classe di equivalenza di curve su M passanti per p , con elemento rappresentante $[\gamma]$,

uno e un solo vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$\mathbf{v} = (\tau \circ [\gamma])'(0).$$

Si osserva infine che una varietà differenziabile e lo spazio tangente a essa in ogni suo punto hanno la stessa dimensione. Prendendo infatti un punto p di una varietà differenziabile M di dimensione k , e una carta locale (U, τ) centrata in p , con $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, e considerando l'aperto $W = \tau(U)$, che ovviamente conterrà $\tau(p)$, si ha un isomorfismo tra U e W . Questo fatto implica l'esistenza di un isomorfismo anche tra i rispettivi spazi tangenti $T_p M$ e $T_{\tau(p)} \mathbb{R}^k$, ma quest'ultimo coincide con \mathbb{R}^k che ha dimensione k . Pertanto, anche $T_p M$ avrà dimensione k come la varietà M , per ogni punto $p \in M$.

Il modo scelto per introdurre lo spazio tangente è molto comodo quando si lavora con varietà differenziabili di classe C^k , ma questa definizione sembra non avere niente a che vedere con le funzioni definite localmente nel punto della varietà rispetto al quale si è costruito lo spazio tangente.

Il secondo modo per definire lo spazio tangente è quello di considerarlo come l'insieme delle derivazioni di classi di equivalenza di funzioni definite nell'intorno di ogni punto della varietà e che costituiscono un'algebra associativa. Tale definizione può essere applicata solo a varietà differenziabili di classe C^∞ ma risulta molto comoda per sviluppare gli strumenti del calcolo infinitesimale applicati alle varietà. Inoltre è una definizione più intrinseca rispetto alla prima perché non si riferisce esplicitamente alle carte locali. Questo modo di definire lo spazio tangente è equivalente al primo perché, attraverso una classe di equivalenza di curve $[\gamma]$ con vettore tangente \mathbf{u} , si può definire una mappa sullo spazio quoziente delle funzioni definite nell'intorno di ogni punto nel seguente modo

$$L_{\mathbf{u}}([f]) = (f \circ [\gamma])'(0).$$

E la mappa $\mathbf{u} \mapsto L_{\mathbf{u}}$ è un isomorfismo tra gli spazi tangenti definiti nei due modi.

Il terzo e ultimo modo a disposizione per definire lo spazio tangente in un punto m di una varietà differenziabile è quello di vederlo come l'insieme quoziente delle coppie $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dove \mathbf{v} è un vettore di \mathbb{R}^n e $\mathbf{x} = (u_1 \circ \tau, \dots, u_n \circ \tau)$ è il vettore delle coordinate locali secondo la carta locale (U, τ) centrata nel punto m , con U intorno aperto di m , rispetto alla seguente relazione di equivalenza:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \sim (\mathbf{y}, \mathbf{w}) \iff \mathbf{w} = d(\mu \circ \tau^{-1})_{\tau(m)}(\mathbf{v}),$$

essendo (V, μ) un'altra carta locale con V intorno aperto di m . Anche con questa definizione bisogna fare ricorso alle carte locali. L'equivalenza tra questo modo di definire lo spazio tangente e il primo deriva dall'isomorfismo esistente tra gli spazi tangenti definiti nei due modi quando si considera come vettore \mathbf{v} il vettore $(\tau \circ [\gamma])'(0)$.

2.3 Mappe differenziabili e loro differenziali

Si possono definire delle applicazioni su una varietà differenziabile e che prendono valori su un'altra varietà differenziabile ed è possibile classificarle in base alla loro regolarità, come si è soliti fare con le funzioni vettoriali a più variabili. Ancora una volta si farà ricorso alle carte locali per ottenere delle funzioni composte definite su spazi euclidei e con valori in spazi euclidei \mathbb{R}^n .

Definizione 15. *Siano M ed N due varietà differenziabili di classe C^k di dimensione m ed n , rispettivamente. Una mappa differenziabile di classe C^k è un'applicazione continua $f : M \rightarrow N$ tale che per ogni $p \in M$ esistano una carta locale (U, τ) , centrata in p , e una carta locale (V, μ) , centrata in $q = f(p)$, con $f(U) \subseteq V$ e tale che*

$$\mu \circ f \circ \tau^{-1} : \tau(U) \rightarrow \mu(V)$$

sia una funzione di classe C^k .

La precedente definizione risulta ben posta non dipendendo dalla scelta delle carte locali.

Si vuole ora definire il differenziale di una mappa differenziabile di classe C^∞ tra due varietà differenziabili. Per far ciò è necessario introdurre un insieme che si definisce a partire da una generica varietà differenziabile M di dimensione m e i cui elementi sono tutti gli spazi tangenti a quella varietà. Tale insieme, che viene indicato con TM , si chiama *fibrato tangente* di M e può essere dotato di una struttura di varietà differenziabile di dimensione $2m$, ma, per i nostri scopi, è sufficiente considerarlo solo come un insieme. Pertanto, TM risulta l'insieme di tutti gli spazi tangenti in p in ogni punto $p \in M$. Sia quindi $f : M \rightarrow N$ una mappa di classe C^∞ . Allora

Definizione 16. *Il differenziale di $f : M \rightarrow N$ è una mappa*

$$df : TM \rightarrow TN$$

tale che, prendendo un vettore tangente $v \in TM$, che apparterrà a un T_pM per un punto $p \in M$, e una curva γ di classe C^∞ tale per cui $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, si abbia

$$df(v) = (f \circ \gamma)'(0).$$

L'applicazione $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow N$ è una curva di classe C^∞ su N perché è la composizione della mappa f e della curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, entrambe di classe C^∞ . Il differenziale di una mappa tra due varietà differenziabili è quindi un'applicazione tra gli spazi tangenti alle due varietà che associa a un vettore tangente del primo spazio, calcolato in un punto p sulla prima varietà, un vettore tangente del secondo, calcolato nel punto $f(p)$ sulla seconda. Nella pratica si utilizza generalmente il differenziale calcolato in un punto della prima varietà, cioè:

$$df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N.$$

Il differenziale gode delle seguenti proprietà:

Proposizione 4. *Se $f : M \rightarrow N$ è una mappa di classe C^∞ , allora anche $df : TM \rightarrow TN$ è una mappa di classe C^∞ .*

Proposizione 5. *df è lineare su T_pM , ovvero dati $v, w \in T_pM$ e $a \in \mathbb{R}$:*

- $df(v + w) = df(v) + df(w)$
- $df(av) = a df(v)$,

per la dimostrazione delle quali si rimanda a [5].

2.4 Varietà prodotto

Altri oggetti matematici da considerare e che saranno utili nel seguito sono le varietà prodotto e i loro spazi tangenti. Siano date due varietà differenziabili, M di dimensione m dotata di un atlante differenziabile massimale $\mathcal{A}_M = \{(U_i, \tau_i)\}$ ed N di dimensione n dotata di un atlante differenziabile massimale $\mathcal{A}_N = \{(V_j, \mu_j)\}$.

Definizione 17. *La topologia prodotto sull'insieme $M \times N$ è la famiglia degli aperti della forma $U \times V$, dove U è un aperto di M e V un aperto di N .*

Definizione 18. *La varietà prodotto $M \times N$ è la varietà differenziabile di dimensione $m + n$ dotata della topologia prodotto e dell'atlante differenziabile massimale*

$$\mathcal{A} = \{(U_i \times V_j, \tau_i \times \mu_j)\},$$

con $\tau_i \times \mu_j(x, y) = (\tau_i(x), \mu_j(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $(x, y) \in U_i \times V_j$.

Sulla varietà prodotto $M \times N$ si considerano poi le proiezioni canoniche

$$\pi_1 : M \times N \rightarrow M$$

$$\pi_2 : M \times N \rightarrow N$$

che agiscono nel seguente modo:

$$\pi_1(p, q) = p$$

$$\pi_2(p, q) = q$$

e che permettono di definire un isomorfismo tra $T_{(p,q)}(M \times N)$ e $T_pM \oplus T_qN$, tramite i loro differenziali, della forma $v \mapsto (d\pi_1(v), d\pi_2(v))$ e quindi:

Proposizione 6. *Lo spazio tangente di una varietà prodotto $M \times N$ in un punto (p, q) è la somma diretta degli spazi tangenti di M in p ed N in q :*

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \oplus T_qN.$$

2.5 Sottovarietà differenziabili

Una sottovarietà di una varietà differenziabile è sostanzialmente un sottoinsieme chiuso di questa dotato anch'esso di una struttura di varietà differenziabile e con una dimensione minore. Considerando, invece, un sottoinsieme aperto, si ottiene sempre una varietà differenziabile della stessa dimensione di quella che la contiene.

Sia ora $\varphi : M \rightarrow N$ una mappa differenziabile di classe C^∞ , con M ed N due varietà differenziabili di dimensione m ed n , rispettivamente, e tali che $m < n$. In base alle sue proprietà, φ prende diversi nomi.

Definizione 19. *φ è un'immersione se il differenziale $d\varphi$ è non singolare per ogni $p \in M$.*

Il differenziale $d\varphi : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ è non singolare in p se il suo nucleo consiste solo dell'elemento nullo e, in quei punti, anche la mappa φ viene detta non singolare.

In generale, un'immersione non è globalmente iniettiva, ma, dal momento che il suo differenziale è per definizione non singolare in ogni punto, si può applicare il teorema di invertibilità locale che garantisce l'iniettività locale dell'immersione. L'iniettività globale, invece, permette di dare la seguente

Definizione 20. *La coppia (M, φ) è una sottovarietà di N se φ è un'immersione iniettiva.*

Pertanto, un modo per verificare se una coppia (M, φ) sia una sottovarietà differenziabile di N consiste nel controllare che $\varphi : M \rightarrow N$ sia un'applicazione iniettiva e che $d\varphi$ sia non singolare per ogni $p \in M$.

Un esempio di un'immersione che non è una sottovarietà è costituito da una curva piana regolare con delle autointersezioni, che può essere descritta da una funzione definita da \mathbb{R} a \mathbb{R}^2 con un differenziale sempre non singolare, che in questo caso significa che per ogni punto della curva esiste sempre una tangente diversa da zero. Tuttavia, nei punti coincidenti con le autointersezioni si perde innanzitutto l'iniettività e poi la possibilità di definire un'unica tangente e quindi uno spazio tangente della stessa dimensione della curva. Considerando, per esempio, delle curve piane con un punto doppio nell'origine, come possono essere il Folium di Cartesio o la Lemniscata di Bernoulli¹, si hanno due tangenti nell'origine anziché una.

Un altro modo per definire una sottovarietà di dimensione m è vederla come un sottoinsieme di una varietà differenziabile di dimensione n tale che per ogni suo punto sia definita una carta locale che abbia per immagine un sottoinsieme di \mathbb{R}^n dato dal prodotto cartesiano tra \mathbb{R}^m e un vettore di zeri $(n - m)$ -dimensionale. Più rigorosamente:

Definizione 21. *Sia M un sottoinsieme di una varietà differenziabile N di dimensione n . M è una sottovarietà di N di dimensione m se, per ogni elemento $p \in M$, esiste una carta locale (U_p, τ) di N , tale che mappi $U_p \cap M$ in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m \times 0^{(n-m)}$.*

Nella precedente definizione $\mathbb{R}^m \times 0^{(n-m)}$ indica l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n della forma $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ con $x_i \in \mathbb{R}$ e un totale di $(n - m)$ zeri alla fine.

Questa seconda definizione mostra direttamente la struttura differenziabile del sottoinsieme considerato perché garantisce, tramite le carte locali, un omeomorfismo locale con un aperto dello spazio \mathbb{R}^m per ogni punto del sottoinsieme. Una varietà differenziabile di dimensione d , infatti, è uno spazio topologico localmente omeomorfo a un aperto di \mathbb{R}^d .

Nello studio dei vincoli interni saranno talvolta necessarie ulteriori proprietà di regolarità di φ .

Definizione 22. *φ è un imbedding se φ è un'immersione iniettiva che è anche un omeomorfismo.*

¹Curva che sarà studiata in dettaglio più avanti.

Definizione 23. φ è un diffeomorfismo se φ è una mappa biettiva, ovvero iniettiva e suriettiva, e φ^{-1} è di classe C^∞ .

In quest'ultimo caso, è possibile derivare delle proprietà locali per il differenziale di φ , come mostrato in [5].

Proposizione 7. Se φ è un diffeomorfismo, allora $d\varphi_p$ è un isomorfismo per ogni $p \in M$.

Con isomorfismo si intende un'applicazione biettiva tale per cui la composizione con la sua inversa, in entrambi gli ordini, restituisca l'applicazione identica.

L'inverso della Proposizione 7 è valido solo localmente ed è garantito dal teorema di invertibilità locale che asserisce che φ è un diffeomorfismo in un intorno di $p \in M$ se $d\varphi_p$ è un isomorfismo.

2.6 Teoremi della funzione implicita

Nella teoria dei vincoli interni è spesso necessario verificare se un certo sottoinsieme di una varietà differenziabile sia una sottovarietà o meno. Come visto nella precedente sezione, si può applicare direttamente una delle definizioni di sottovarietà, ma talvolta ciò potrebbe risultare complesso. Un'importante condizione sufficiente affinché un sottoinsieme abbia una struttura di varietà differenziabile deriva da una versione del teorema della funzione implicita adattata al caso di applicazioni su varietà differenziabili. Si riporta prima il teorema della funzione implicita dal mondo dell'analisi funzionale.

Teorema 4 (della funzione implicita, di Dini). Sia $U \subset \mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^∞ . Il sistema di coordinate canoniche su $\mathbb{R}^{c-d} \times \mathbb{R}^d$ sarà denotato con $(r_1, \dots, r_{c-d}, s_1, \dots, s_d)$. Si supponga che in un punto $(r_0, s_0) \in U$ si abbia

$$f(r_0, s_0) = 0,$$

e che la matrice

$$\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \Big|_{(r_0, s_0)} \right\}_{i,j=1,\dots,d}$$

sia non singolare. Allora esistono un intorno aperto V di r_0 in \mathbb{R}^{c-d} e un intorno aperto W di s_0 in \mathbb{R}^d tali che $V \times W \subset U$, e una funzione di classe C^∞ $g : V \rightarrow W$ tale che per ogni $(p, q) \in V \times W$

$$f(p, q) = 0 \quad \iff \quad q = g(p).$$

Il teorema di Dini permette di definire delle varietà differenziabili come insiemi di livello di funzioni vettoriali a più variabili. Di seguito viene riportato il teorema adattato al caso di applicazioni con dominio e codominio che sono delle varietà differenziabili.

Teorema 5. *Siano M ed N due varietà differenziabili di dimensione c e d , rispettivamente. Si assuma che $\varphi : M \rightarrow N$ sia una mappa di classe C^∞ , che n sia un punto di N , che $P = \varphi^{-1}(n)$ sia non vuoto, e che $d\varphi : T_m M \rightarrow T_{\varphi(m)} N$ sia suriettivo per ogni $m \in P$. Allora P ha un'unica struttura di varietà differenziabile tale per cui (P, i) sia una sottovarietà di M , dove i è la mappa di inclusione. Inoltre, $i : P \rightarrow M$ è un imbedding, e la dimensione di P è $c - d$.*

Questo teorema, oltre a fornire una condizione sufficiente affinché un certo sottoinsieme di una varietà differenziabile sia una sottovarietà, permette di determinarne la dimensione semplicemente considerando le dimensioni delle varietà tra cui è definita l'applicazione. Fornendo però solo una condizione sufficiente e non necessaria, il teorema non dice nulla in merito a quei casi in cui non sia verificata l'ipotesi del differenziale suriettivo. In quei frangenti si dovrà diversificare l'analisi caso per caso e, ovviamente, non sono escluse possibilità di sottovarietà differenziabili con il differenziale non suriettivo in qualche punto. Quest'ultima possibilità rende talvolta estremamente arduo il compito di verificare la natura di varietà differenziabile di un certo spazio topologico. Le dimostrazioni dei Teoremi 4 e 5 si trovano in [5].

Capitolo 3

Vincoli nella meccanica razionale

L'attenzione di questo capitolo è rivolta ai vincoli nella meccanica razionale, che si occupa di cinematica, statica e dinamica dei sistemi meccanici con un numero finito di gradi di libertà. Questo argomento offre un ottimo punto di partenza per la comprensione della teoria sviluppata nel seguito sui vincoli interni nell'ambito dell'elasticità finita.

In generale, un vincolo è una restrizione a priori sulle possibilità di moto di un sistema, che può essere imposto sulle posizioni o sulle velocità dei punti che lo costituiscono. Si dice *interno* quando scaturisce dalla mutua interazione tra le particelle o i singoli elementi di un sistema o tra le varie parti di un corpo in esame, oppure *esterno* se scaturisce dall'interazione tra parti del sistema e parti esterne a questo. Bisogna distinguere tra la rappresentazione matematica di un vincolo, affrontata in dettaglio nel seguito, e la sua realizzazione fisica, accennata per un caso particolare nell'ultima sezione del capitolo.

Per stilare questo compendio sono stati consultati i principali testi italiani del settore, in particolare il Levi-Civita [8], il Grioli [9], il Fasano Marmi [10] e il Gallavotti [11]. Si è inoltre fatto riferimento al Benvenuti [12] e al testo [13] per l'introduzione di alcuni concetti basilari.

3.1 Cinematica di un sistema vincolato

3.1.1 Rappresentazione dei vincoli

Per affrontare lo studio di un sistema vincolato costituito da N punti materiali nello spazio tridimensionale ci si pone sempre nello spazio ambiente euclideo \mathbb{R}^{3N} , in modo da poter descrivere completamente la configurazione del sistema in ogni istante

modo seguente

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} & \frac{\partial f_1}{\partial y_N} & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \frac{\partial f_k}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_N} & \frac{\partial f_k}{\partial y_N} & \frac{\partial f_k}{\partial z_N} \end{pmatrix}$$

sia massimo, ovvero pari a k . Se avviene ciò, i vincoli si dicono *regolari*.

Nella letteratura consultata viene sempre riportata quest'ultima ipotesi, ma solo in quella più recente, come in [12] o in [10], viene fatto notare che essa coincide con la richiesta che le (3.1) definiscano implicitamente una sottovarietà di \mathbb{R}^{3N} che, grazie alle ipotesi di regolarità sulle f_j , possiede la struttura di varietà differenziabile di classe C^2 . La richiesta che il rango di \mathbf{J} sia k implica che i gradienti di ogni f_j , ovvero i vettori ∇f_j , siano diversi da zero in ogni punto, cosa che, a sua volta, significa che le varietà definite implicitamente dalle singole f_j siano dotate ciascuna di uno spazio tangente in ogni punto, di dimensione $3N - 1$. Inoltre, essendo i k spazi tangenti linearmente indipendenti, perché tali sono i vettori ∇f_j , essi si intersecano in uno spazio con dimensione pari a $3N - k$. Pertanto, lo spazio delle configurazioni compatibili con i vincoli imposti risulta essere una varietà differenziabile di classe C^2 , dimensione $3N - k$ e codimensione k , immersa in \mathbb{R}^{3N} , che verrà chiamata *varietà delle configurazioni* e sarà indicata con \mathcal{V} .

3.1.2 Coordinate lagrangiane

La condizione sul rango massimo della matrice jacobiana \mathbf{J} permette anche di applicare il teorema del Dini (Teorema 4): avendo questa rango pari a k è possibile esplicitare k coordinate in funzione delle rimanenti $3N - k$ e del tempo t , generando così un sistema meccanico con $n = 3N - k$ gradi di libertà. Le configurazioni compatibili con i vincoli vengono quindi messe in corrispondenza biunivoca, con il sistema di *coordinate lagrangiane* (q_1, \dots, q_n) , variabile in un aperto di \mathbb{R}^n , per mezzo delle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, \dots, q_n, t) \\ y_i = y_i(q_1, \dots, q_n, t) \\ z_i = z_i(q_1, \dots, q_n, t), \end{cases} \quad (3.2)$$

rappresentate da $3N$ funzioni scalari di classe C^2 , e tali per cui la matrice jacobiana $\mathbf{J}' \in \mathbb{R}^{3N \times n}$ definita per ogni istante di tempo nel modo seguente

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

abbia rango n , dal momento che i vincoli imposti si sono supposti regolari.

Nell'istante di tempo t la varietà delle configurazioni $\mathcal{V}(t)$ viene, di conseguenza, parametrizzata per mezzo delle coordinate lagrangiane, come nelle (3.2), e in ogni suo punto P_i la base dello spazio tangente $T_{P_i}\mathcal{V}(t)$ è data da

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial P_i}{\partial q_n} \right),$$

mentre la base dello spazio ortogonale $(T_{P_i}\mathcal{V}(t))^\perp$ è

$$(\nabla f_1(P_i), \dots, \nabla f_k(P_i)).$$

Un sistema vincolato viene così rappresentato da un insieme di punti $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ funzione di un dato numero n di parametri arbitrari, corrispondenti con le coordinate lagrangiane, e del tempo cioè $P_i = P_i(q_1, \dots, q_n, t)$, e ogni moto è descritto dalle n funzioni $(q_1(t), \dots, q_n(t))$ nel modo seguente

$$P_i(t) = P_i(q_1(t), \dots, q_n(t), t).$$

Adottando invece una prospettiva inversa, come viene fatto nel Levi-Civita [8], si può pensare di descrivere un sistema vincolato di N punti con n gradi di libertà per mezzo delle coordinate lagrangiane come fosse un sistema non vincolato in \mathbb{R}^n e riconoscere in un secondo momento che questo equivale a imporre $3N - n$ vincoli

del tipo (3.1) a un sistema libero in \mathbb{R}^{3N} .

In generale, un sistema vincolato come quello appena descritto, con vincoli dipendenti solo dalla posizione dei punti del sistema e al limite dal tempo ma non dalle velocità, viene detto *olonomo*, altrimenti *anolonomo*. In realtà, per definire olonomo un sistema è necessaria un'ulteriore ipotesi sulla natura dei vincoli che sarà introdotta nel seguito, ma per ora è importante tenere a mente la dipendenza solo dalla posizione.

Ritornando alla prospettiva precedente, l'atto di moto del sistema risulta dato dalle velocità di ogni punto come segue

$$\mathbf{v}_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad (3.3)$$

dove $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ vengono chiamate componenti lagrangiane dell'atto di moto. Avendo supposto che la matrice jacobiana \mathbf{J}' abbia rango n , allora esiste una corrispondenza biunivoca tra i vettori \mathbf{v}_i e \dot{q}_i .

3.1.3 Spostamenti, velocità e lavoro virtuali

Per un sistema olonomo, in generale con vincoli dipendenti dal tempo e quindi mobili, vengono definiti *possibili* tutti gli spostamenti infinitesimi effettivamente realizzabili e *virtuali* tutti quelli compatibili con i vincoli fissati a un dato istante di tempo. Per esempio, per un punto vincolato a stare su una circonferenza nel piano con centro fisso e raggio crescente nel tempo, è considerato possibile uno spostamento che lo porti su una circonferenza di raggio maggiore e virtuale uno che lo porti in un altro punto della stessa circonferenza. In caso di vincoli fissi, spostamenti possibili e virtuali coincidono. Inoltre, uno spostamento virtuale si dice *reversibile* se è tale per cui il suo opposto sia anch'esso virtuale, altrimenti si dice *irreversibile*.

Un discorso analogo può essere fatto per le velocità virtuali che vengono definite nel modo seguente:

$$\mathbf{v}_i^{virt} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h, \quad (3.4)$$

dove si vede che rispetto alle (3.3) non compare più la derivata parziale rispetto al tempo.

L'insieme degli spostamenti virtuali e quello delle velocità virtuali sono degli spazi vettoriali, come verrà mostrato a breve. Variando infatti arbitrariamente i \dot{q}_i nelle (3.4), è possibile ottenere tutti gli atti di moto virtuali e le velocità virtuali

fanno parte dello spazio tangente $T_{P_i}\mathcal{V}$, poiché la (3.4) ne indica la scomposizione secondo gli elementi della base. Per quanto riguarda invece gli spostamenti virtuali, anch'essi appartengono a $T_{P_i}\mathcal{V}$ e vengono definiti dalle seguenti relazioni

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h, \quad (3.5)$$

dove $(\delta q_1, \dots, \delta q_n)$ vengono chiamate componenti lagrangiane degli spostamenti virtuali.

Dati gli spostamenti virtuali, è possibile definire il lavoro virtuale di una generica sollecitazione \mathbf{f}_i agente sui punti del sistema tramite la seguente espressione:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta P_i$$

che, una volta sostituita la (3.5), diventa

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \left(\sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \right) = \sum_{h=1}^n Q_h \delta q_h, \quad (3.6)$$

dove le

$$Q_h = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \quad (3.7)$$

vengono chiamate componenti lagrangiane della sollecitazione e rappresentano la somma, per ogni punto P_i del sistema, delle proiezioni delle \mathbf{f}_i lungo l' h -esimo elemento della base di $T_{P_i}\mathcal{V}$. In questa direzione, lo spostamento virtuale ha una componente pari a δq_h e quindi la (3.6) rappresenta il lavoro virtuale totale compiuto dalle sollecitazioni \mathbf{f}_i lungo tutte le direzioni indicate dagli spostamenti virtuali sui $T_{P_i}\mathcal{V}$ per ogni punto P_i .

Ora che si sono introdotti i principali ingredienti per caratterizzare un sistema vincolato è utile riportare un esempio che mostri quanto sia importante la condizione che la varietà delle configurazioni abbia la natura di una varietà differenziabile. Si consideri infatti un sistema la cui varietà delle configurazioni coincida con la seguente curva piana denominata Lemniscata di Bernoulli:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - x^2 + y^2 = 0\},$$

che è una curva con la forma simile al simbolo di ∞ centrata nell'origine. Tale

varietà presenta un insieme di spostamenti virtuali che nell'origine non costituisce uno spazio vettoriale, a causa della natura di punto doppio di questa. In quel punto, infatti, esistono due tangenti, due spostamenti virtuali, che generano una criticità, dal momento che un eventuale spazio tangente deve avere una dimensione pari a quella della varietà corrispondente, cioè uno in questo caso. Se in quel punto, infatti, esistesse uno spazio tangente, esso avrebbe una dimensione pari a due perché sarebbe generato dalle due tangenti nell'origine che sono linearmente indipendenti. Pertanto, nell'origine si ha un cono tangente che non ha la struttura di spazio vettoriale e la curva \mathcal{C} non è quindi una varietà differenziabile, ma solo una varietà algebrica, in quanto definita da una funzione polinomiale delle coordinate.

Gli spostamenti virtuali devono però appartenere a uno spazio vettoriale come visto precedentemente perché su questo asserto si basa gran parte della teoria della meccanica classica. Ciò traduce infatti la logica condizione che, per una varietà delle configurazioni generata da vincoli fissi, se esistono due spostamenti virtuali allora deve esistere anche quello corrispondente alla somma dei due, perché, da un punto di vista cinematico, è equivalente compiere prima uno spostamento e poi l'altro oppure compierne uno che è già la somma vettoriale dei due.

3.2 Dinamica di un sistema olonomo

Passando a studiare la dinamica di un sistema olonomo, l'azione dei vincoli sui punti del sistema è sostituibile con delle forze reattive, dette sollecitazioni vincolari. Con questo modello, non si presta attenzione al modo con cui vengono imposti fisicamente i vincoli, ma si studiano solamente le conseguenze della loro presenza dal punto di vista matematico. È come se si stesse studiando un sistema non vincolato sul quale però, oltre alle sollecitazioni attive, agiscono anche le sollecitazioni vincolari che rappresentano appunto i vincoli.

Con questo in mente, si procede a definire la categoria di vincoli con i quali si lavorerà nel seguito

Definizione 24. *Un vincolo si dice perfetto se è in grado di esplicitare tutte e sole le sollecitazioni vincolari il cui lavoro virtuale è nullo in corrispondenza a ogni spostamento virtuale del sistema.*

L'ipotesi mancante nella definizione di sistema olonomo sulla natura dei vincoli era proprio questa, quindi d'ora in poi tutti i vincoli saranno considerati perfetti e si avrà a che fare solo con sistemi olonomi. Vincoli perfetti sono per esempio quelli privi di attrito.

Affinché il lavoro delle reazioni vincolari sia nullo per ogni spostamento virtuale è necessario e sufficiente che si annullino tutte le componenti lagrangiane delle sollecitazioni vincolari:

$$Q_h^v = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^v \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = 0 \quad \forall h = \dots, n.$$

Una conseguenza diretta di ciò è che le reazioni vincolari hanno una proiezione nulla su $T_{P_i}\mathcal{V}$ e appartengono quindi a $(T_{P_i}\mathcal{V})^\perp$, generato dai gradienti delle funzioni f_j che definiscono i vincoli. Una loro rappresentazione in tale spazio è la seguente

$$\mathbf{f}_i^v = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla f_j(P_i) \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.8)$$

con λ_j moltiplicatori incogniti.

Le componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive, invece, dipendono in generale dalle coordinate lagrangiane (q_1, \dots, q_n) , dalle componenti lagrangiane dell'atto di moto $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ ed eventualmente dal tempo e prendono la forma (3.7). Se poi la risultante delle forze in considerazione è conservativa, ovvero esprimibile come gradiente di una funzione $U = U(q_1, \dots, q_n)$ detta potenziale, si può dimostrare (si veda per esempio [12]) che

$$Q_h^a = \frac{\partial U}{\partial q_h}. \quad (3.9)$$

Le equazioni del moto di un sistema olonomo sono quindi le seguenti

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i^a + \mathbf{f}_i^v \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.10)$$

in cui, oltre alle n incognite $q_h(t)$ compaiono anche le k incognite \mathbf{f}_i^v e dove m_i è la massa di ogni punto e l'accelerazione è definita nel modo seguente

$$\mathbf{a}_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \ddot{q}_h + \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 P_i}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_h \dot{q}_k + \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2}.$$

Moltiplicando ora scalarmente le (3.10) per $\frac{\partial P_i}{\partial q_h}$, ovvero operando una proiezione su $T_{P_i}\mathcal{V}$, e sommando su i a destra e sinistra, si ottiene

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = Q_h^a \quad h = 1, \dots, n, \quad (3.11)$$

dal momento che le componenti lagrangiane delle sollecitazioni vincolari sono nulle, per via dei vincoli perfetti utilizzati. Le (3.11) vengono chiamate equazioni di Lagrange e sono equazioni differenziali del secondo ordine per le quali si dimostra esistere unica la soluzione. Osservandole meglio, esse asseriscono che la proiezione sullo spazio tangente alla varietà delle configurazioni (o meglio, la somma delle proiezioni su ogni spazio tangente definito in ogni punto) della forza attiva totale sia uguale alla proiezione della derivata rispetto al tempo della quantità di moto del sistema. In questo modo sono state eliminate dalle equazioni le incognite relative alle reazioni vincolari.

Le (3.11) possono essere espresse in un'altra forma, introducendo l'energia cinetica del sistema

$$\mathcal{T}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n g_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

con

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$$

la matrice metrica di \mathcal{V} moltiplicata per dei coefficienti che tengano conto delle masse dei singoli punti. Si arriva dunque alla seconda formulazione delle equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h} = Q_h^a \quad h = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

per la dimostrazione della quale si rimanda a [12] o [13]. Si ricordi che le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva sono tali per cui

$$Q_h^a = Q_h^a(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t).$$

In caso di sollecitazioni conservative, si possono semplificare ulteriormente le cose sostituendo le (3.9) nelle (3.12) e introducendo la funzione lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} + U$$

in modo da ottenere infine:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \quad h = 1, \dots, n.$$

3.3 Statica di un sistema olonomo

Al fine di studiare la statica di un sistema olonomo si riporta il seguente teorema per la cui dimostrazione si rimanda a [13]:

Teorema 6 (Principio dei lavori virtuali). *Condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione \mathcal{C} sia di equilibrio per un sistema meccanico a vincoli perfetti è che il lavoro virtuale delle forze attive sia non positivo per ogni spostamento virtuale δP compiuto a partire da \mathcal{C} :*

$$\delta L^a \leq 0 \quad \forall \delta P \text{ da } \mathcal{C}.$$

In particolare si ha che

$$\delta L^a = 0 \quad \forall \delta P \text{ reversibile da } \mathcal{C}. \quad (3.13)$$

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo, allora tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili e quindi il principio dei lavori virtuali vale con il segno di uguaglianza e, grazie alla (3.6), prende la forma:

$$Q_h^a = 0 \quad h = 1, \dots, n,$$

dal momento che la (3.13) deve valere per ogni spostamento virtuale arbitrariamente scelto. Se poi le sollecitazioni sono conservative, grazie alla (3.9), vale il seguente

Teorema 7 (Stazionarietà del potenziale). *Le configurazioni ordinarie di equilibrio di un sistema olonomo sono tutte e sole quelle che annullano le derivate del potenziale rispetto a tutte le coordinate lagrangiane. Esse coincidono quindi con i punti di stazionarietà del potenziale.*

3.4 Realizzazione fisica dei vincoli nell'esempio dell'asta rigida vincolata

A titolo di esempio, si riporteranno le tipologie di vincoli elementari che realizzano la diretta soppressione di uno o più gradi di libertà di un singolo corpo rigido nel piano, in modo da avere una panoramica su alcune tra le più comuni modalità per la realizzazione fisica dei vincoli. Si pensi, per esempio, a un'asta rigida: tale sistema privo di vincoli ha tre gradi di libertà e saranno quindi necessarie tre coordinate la-

grangiane per definire univocamente la posizione dell'asta nel piano. Questo perché si è considerato il vincolo di rigidità per l'intera asta, che impone che essa non si deformi mai sia in stato di quiete sia in stato di moto, lasciando quindi inalterata la distanza tra due punti per ogni coppia di punti appartenenti a essa. Si considerino pertanto le due coordinate (x_A, y_A) per definire la posizione di un estremo A dell'asta nello spazio e un angolo ϑ per definirne l'orientazione rispetto alla posizione orizzontale. Per un'asta rigida libera la varietà delle configurazioni ha dunque dimensione tre ed è parametrizzata dalle coordinate lagrangiane (x_A, y_A, ϑ) .

Questo tipo di approccio riflette un punto di vista cinematico, ma a esso deve essere abbinata una trattazione dei vincoli anche dal punto di vista della dinamica, andando cioè a capire cosa succede al sistema di forze applicato all'asta in corrispondenza delle limitazioni cinematiche.

La soppressione dei gradi di libertà dell'asta viene realizzata dal vincolo mediante l'applicazione di forze o momenti che assumono intensità, direzioni e versi necessari per garantire le restrizioni cinematiche imposte dal vincolo stesso. Tali forze, che prendono il nome di *reazioni vincolari*, sono incognite e, trattandosi di vettori nel piano, corrispondono ciascuna a due incognite scalari. Per quanto riguarda i momenti, invece, sarà necessaria una sola componente scalare che ne indichi l'intensità e il verso, essendo la direzione sempre ortogonale al piano. Si osserva che il numero di incognite scalari delle reazioni vincolari introdotte dal vincolo coincide con il numero di gradi di libertà che sopprime il vincolo stesso. Si consideri quindi una terna ortogonale di forze $\{\mathbf{N}, \mathbf{T}, \mathbf{M}\}$, con \mathbf{N} e \mathbf{T} nel piano e \mathbf{M} ortogonale a esso e che rappresenta il momento, per descrivere le reazioni vincolari introdotte da un vincolo.

Si tratteranno solo vincoli perfetti, cioè quelli capaci di eliminare completamente lo spostamento a cui si oppongono e in grado di esplicitare tutte e sole quelle reazioni vincolari ortogonali alla curva sulla quale è vincolato a muoversi il corpo.

Applicando un vincolo di tipo *cerniera* in A , si impedisce qualsiasi spostamento del punto A . Tale vincolo è un vincolo doppio e viene rappresentato dalle due equazioni

$$\begin{cases} x_A = x_0 \\ y_A = y_0 \end{cases}$$

che fissano il valore delle prime due coordinate, lasciando all'asta solo la possibilità di ruotare intorno ad A facendo variare, di conseguenza, solo ϑ , che rimane l'unico grado di libertà. Così facendo si genera una varietà delle configurazioni di dimensione uno, e quindi una curva regolare, parametrizzata dalla sola coordinata lagrangiana ϑ .

Una cerniera introduce poi una reazione vincolare applicata in A con due componenti scalari incognite e che può essere scomposta nella somma vettoriale di \mathbf{N} e \mathbf{T} .

Un vincolo di tipo *incastro* applicato in A è un vincolo triplo che sopprime tutti e tre i gradi di libertà dell'asta e si esprime mediante le tre equazioni

$$\begin{cases} x_A = x_0 \\ y_A = y_0 \\ \vartheta = \vartheta_0. \end{cases}$$

Un incastro introduce quindi tre componenti di reazione vincolare \mathbf{N} , \mathbf{T} ed \mathbf{M} e genera una varietà delle configurazioni di dimensione zero, cioè un punto nello spazio ambiente, che coincide con l'unica configurazione ammissibile.

Applicando un vincolo di tipo *pattino* sempre all'estremo A , si impedisce la rotazione dell'asta e lo spostamento in direzione ortogonale al vincolo, dal momento che il punto A è costretto a seguire una guida. Come la cerniera, anch'esso è un vincolo doppio che sopprime due gradi di libertà e viene espresso mediante le due equazioni

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0 \\ y_A = x_A f(\alpha), \end{cases}$$

dove la funzione f dipende esclusivamente dall'inclinazione α , rispetto al piano orizzontale, della tangente alla guida lungo la quale scorre il punto A .

Un vincolo molto simile al pattino è quello chiamato *manicotto*, che sopprime gli stessi gradi di libertà all'asta, ma che, anziché essere applicato in A , avvolge l'asta in modo che essa abbia, come unico grado di libertà, la possibilità di scorrere all'interno di esso. Le equazioni che lo descrivono sono le stesse del pattino e, in entrambi i casi, il sistema è completamente descritto da una varietà delle configurazioni di dimensione uno.

Un pattino o un manicotto introducono due incognite di reazione vincolare, un momento \mathbf{M} e una forza \mathbf{N} avente direzione ortogonale a quella della tangente della guida.

Infine, un *carrello* applicato in A è un vincolo semplice che sopprime solo la componente di spostamento in direzione ortogonale a lui stesso. Lascia quindi due gradi di libertà all'asta e viene descritto da un'unica equazione del tipo

$$y_A = x_A f(\alpha),$$

dove α descrive l'orientazione della tangente alla guida lungo la quale l'estremo A è

vincolato a scorrere. Un carrello può essere interpretato anche come la disposizione in serie di una cerniera e di un pattino e introduce un'incognita di reazione vincolare, consistente in una forza \mathbf{N} ortogonale alla tangente della guida. Inoltre, tale vincolo genera una varietà delle configurazioni di dimensione due, cioè una superficie regolare.

Dopo un quadro generale sui vincoli nel mondo dei corpi rigidi nel piano e forti delle nozioni di geometria differenziale apprese nel Capitolo 2, si passerà ora al mondo dei continui deformabili e, in particolare, dei corpi definiti elastici.

Capitolo 4

Vincoli interni

In questo capitolo vengono trattati i vincoli interni nell'ambito della meccanica dei continui e in particolare dell'elasticità finita. In generale, essi impongono delle restrizioni sul possibile comportamento interno di un corpo appartenente alla classe costitutiva dei materiali elastici.

Inizialmente viene data una definizione formale della varietà che rappresenta i vincoli; successivamente viene studiato il tensore degli sforzi associato a un corpo vincolato, mostrando come sia scomponibile nella somma di un contributo dovuto alla funzione risposta e di uno che rappresenta i vincoli. Viene poi introdotto il gruppo di simmetria di una varietà di vincolo, e infine vengono trattati i vincoli interni isotropi, ripresi e approfonditi nel Capitolo 5. Nell'ultima parte vengono presentati gli esempi più comuni di vincoli interni.

I riferimenti principali per la stesura di questo capitolo sono ancora gli appunti del corso del professor Vianello [3] e tre articoli scritti da Gurtin e Podio-Guidugli [14], Podio-Guidugli e Vianello [1], Podio-Guidugli [15]. Si è consultato inoltre l'articolo di Cohen e Wang [16].

4.1 Varietà di vincolo

4.1.1 Definizione

Per un corpo elastico, un vincolo interno si definisce come una restrizione sull'insieme dei gradienti di deformazione $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+$ imposta in diversi modi e solo le deformazioni che rispettano tale restrizione vengono considerate ammissibili e appartengono a una *varietà di vincolo*, che viene definita nel seguente modo come sottoinsieme di Lin^+ :

Definizione 25. $\mathcal{M} \subset \text{Lin}^+$ è una varietà di vincolo se soddisfa le seguenti proprietà:

- (a) \mathcal{M} è una sottovarietà differenziabile connessa di Lin^+ ;
- (b) $\mathbf{I} \in \mathcal{M}$;
- (c) $\mathbf{Q}\mathcal{M} = \mathcal{M}$ per ogni $\mathbf{Q} \in \text{Rot}$.

Il modo più comune per definire delle varietà di vincolo è quello di rappresentare la restrizione sull'insieme dei gradienti di deformazione per mezzo di una o più funzioni scalari del tipo $\varphi(\mathbf{F}) = k$ con proprietà che verranno descritte nel seguito, con k una costante. Considerando, per esempio, il caso più ricorrente nelle applicazioni di un vincolo definito da una sola funzione φ , la varietà di vincolo corrispondente risulta essere della forma

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \varphi(\mathbf{F}) = k\}.$$

Alcuni esempi di vincoli molto utilizzati sono:

- l'incomprimibilità, che ammette solo le deformazioni che non alterano il volume e che è descritta dalla varietà di vincolo

$$\mathcal{M}_1 = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \det \mathbf{F} = 1\},$$

- l'instensibilità lungo una direzione fissata \mathbf{e} , rappresentata dalla varietà

$$\mathcal{M}_2 = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}\mathbf{e} = 1\},$$

- il vincolo di Bell, rappresentato da

$$\mathcal{M}_3 = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \text{tr } \mathbf{B} = 3\},$$

dove $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$.

Si noti che in tutti e tre i casi la costante k è stata scelta pari al valore che la funzione φ assume nell'identità, cioè $\varphi(\mathbf{I})$, in modo da soddisfare la condizione (b).

I vincoli definiti in questo modo devono però rispettare le condizioni della Definizione 25, ognuna delle quali ha un preciso significato. La condizione (a) implica che \mathcal{M} sia una varietà differenziabile e quindi che ogni suo punto sia regolare, cosa che

si traduce nell'esistenza di uno spazio tangente definito in ogni punto. Analizzando il modo esemplificativo appena introdotto per definire una varietà di vincolo, questa condizione richiede che il differenziale della funzione φ calcolato rispetto ad \mathbf{F} sia diverso da zero in ogni punto, ovvero

$$D_{\mathbf{F}}\varphi(\mathbf{F}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{M}.$$

Ciò permette di applicare il teorema della funzione implicita di Dini e la varietà di vincolo può essere considerata come un insieme di livello della funzione φ , descritto dalla relazione $\varphi(\mathbf{F}) = k$. Si potrebbe però pensare di rilassare questa condizione e sostituirla con la richiesta che la varietà di vincolo sia una *varietà algebrica*, cioè che costituisca semplicemente l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni polinomiali, ma così facendo non è garantita l'esistenza di uno spazio tangente in ogni punto della varietà. Si è visto nel Capitolo 3 che quest'ultima caratteristica riveste un ruolo fondamentale nello studio della meccanica perché è alla base di alcune proprietà principali, e pertanto non può essere tolta.

Si ricordi infatti l'esempio sulla Lemniscata di Bernoulli nel Capitolo 3 e tutto il discorso annesso sul fatto che una varietà algebrica potrebbe presentare dei punti critici in cui non è definito uno spazio tangente, ma solo un cono tangente, che genera uno spazio vettoriale di dimensione superiore a quella della varietà. In quel frangente lo spazio degli spostamenti virtuali e quello delle velocità virtuali perdevano così la struttura di spazio vettoriale, proprietà alla base della meccanica classica e conseguenza logica del fatto che se sono ammessi due spostamenti allora deve essere ammesso anche quello spostamento dato dalla somma vettoriale dei due. Qui è più difficile dare un'interpretazione negli stessi termini, ma la natura della questione non cambia perché gli elementi dello spazio tangente alla varietà di vincolo in \mathbf{F} rappresentano le possibili variazioni del tensore \mathbf{F} che lo trasformano in un altro tensore ammissibile. Pertanto, se due variazioni differenti trasformano un tensore ammissibile in un altro ancora ammissibile allora anche il tensore ottenuto sommando le due variazioni deve essere ammissibile.

La condizione (c), che significa che se \mathbf{F} appartiene a \mathcal{M} anche \mathbf{QF} vi appartiene, impone che il vincolo sia compatibile con il principio di indifferenza materiale e, insieme alla (a) e alla (b), che $\mathcal{M} \supset \text{Rot}$, perché asserisce che, moltiplicando a sinistra un tensore appartenente alla varietà per una qualsiasi rotazione, si ottiene ancora un elemento della varietà. Compiendo quindi questa operazione con il tensore identità, che per la (b) appartiene alla varietà, si arriva a dire che anche tutte le rotazioni vi appartengono.

La (b) è la condizione di appartenenza dell'identità alla varietà di vincolo, cioè esprime il fatto che la configurazione di riferimento sia una configurazione ammissibile che rispetti il vincolo. Tale condizione presenta una certa criticità perché si potrebbe provare a sviluppare una teoria sui vincoli interni nella quale essa non compaia, però ciò porterebbe ad altri problemi. Le ragioni per cui si mantiene tale condizione sono principalmente tre. In primo luogo, essa consente di dotare la varietà di vincolo di una struttura algebrica di gruppo, cosa che capita di frequente. Secondariamente, la condizione che il vincolo debba rispettare il principio di indifferenza materiale implica che ci si trovi di fronte a due diverse alternative: o l'identità e tutte le rotazioni appartengono alla varietà di vincolo, oppure né l'una né le altre. Imponendo la condizione (b), dunque, si ammettono tutte le deformazioni ottenute ruotando mediante un tensore rotazione la configurazione di riferimento. Infine, si vuole che quest'ultima appartenga alla varietà di vincolo.

La definizione appena riportata si trova per esempio in [14], [1] e [17].

Nel seguito si terrà in considerazione la seguente

Proposizione 8. *Una varietà di vincolo \mathcal{M} è indipendente dalla configurazione di riferimento κ se e solo se \mathcal{M} è un sottogruppo di Lin^+ .*

Considerando quindi varietà di vincolo che siano sottogruppi di Lin^+ non sarà necessario riferirsi a una particolare configurazione di riferimento, semplificando di conseguenza la notazione.

4.1.2 Dimensione e spazio tangente

Per quanto riguarda la dimensione di una varietà di vincolo, bisogna tenere presente che lo spazio dei tensori del secondo ordine a determinante positivo Lin^+ ha dimensione pari a 9. A esso appartengono i gradienti di deformazione, in quanto relativi a deformazioni che si applicano a corpi che vivono nello spazio euclideo tridimensionale. La dimensione dello spazio in cui vivono i gradienti di deformazione, che rappresentano le deformazioni locali, indica i gradi di libertà su cui agisce la deformazione. Questi sono 9 perché, grazie al teorema di decomposizione polare, un gradiente di deformazione può sempre essere visto come l'applicazione di una rotazione preceduta o seguita da una deformazione pura, rappresentata da un tensore simmetrico e definito positivo. Pertanto, sono necessari 3 gradi di libertà per descrivere la parte relativa alla rotazione (per esempio i tre angoli di Eulero), e infatti $\dim \text{Rot} = 3$, e 6 per la deformazione pura, di cui 3 per individuare la terna ortogo-

nale dei suoi autovettori e 3 per i suoi autovalori, che rappresentano gli allungamenti lungo le direzioni individuate dagli autovettori, e infatti $\dim \text{Sym}^+ = 6$.

Una varietà di vincolo in generale, essendo un sottoinsieme di Lin^+ , ha una dimensione minore o uguale a 9, ma si dice *propria* quando la sua dimensione è minore o uguale a 8, ovvero quando

$$\dim \mathcal{M} \leq 8.$$

Si studieranno solo le varietà di vincolo proprie, perché le altre non forniscono restrizioni sui gradi di libertà di un corpo e quindi non risultano fisicamente interessanti.

Infine, si introduce lo *spazio tangente* a una varietà di vincolo \mathcal{M} in un punto \mathbf{F} di essa che si indicherà con $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$. Avendo richiesto che \mathcal{M} sia una sottovarietà connessa di Lin^+ , si può sempre considerare una curva regolare $\mathbb{R} \ni \tau \mapsto \mathbf{F}(\tau)$ su \mathcal{M} tale che

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(0) &= \mathbf{F} \in \mathcal{M}(\mathbf{F}), \\ \dot{\mathbf{F}}(0) &= \dot{\mathbf{F}} \in \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}). \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{F}}$ è quindi l'elemento di $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$ che corrisponde alla tangente della curva considerata su \mathcal{M} e valutata in 0. Facendo variare la curva su \mathcal{M} e mantenendo il passaggio per \mathbf{F} , ovvero mantenendo la condizione $\mathbf{F}(0) = \mathbf{F}$, si ottengono tutti i possibili $\dot{\mathbf{F}}$ di $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$ e, di conseguenza, una possibile descrizione dello spazio tangente.

4.2 Tensore degli sforzi

Il tensore degli sforzi di Cauchy di un corpo soggetto a un vincolo è determinato, oltre che dall'equazione costitutiva, anche dal vincolo stesso. Si considera, infatti, come la somma di una *parte attiva* \mathbf{T}_A , che tiene conto della risposta meccanica agli spostamenti ammissibili, e di una *parte reattiva* \mathbf{T}_R , che tiene conto delle reazioni interne necessarie a mantenere i vincoli cinematici imposti. Si può quindi scrivere:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_R.$$

Lo stesso discorso si può fare per il tensore degli sforzi di Piola e arrivare a scrivere:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_R.$$

Per descrivere le due parti che compongono \mathbf{T} o \mathbf{S} , bisogna specificare meglio le caratteristiche dei vincoli con i quali si vuole lavorare. Come nel caso dei sistemi olonomi trattato nel Capitolo 3, anche qui si considereranno esclusivamente i vincoli interni definiti *perfetti*, ovvero con la caratteristica di avere la potenza delle forze interne Π_{int} nulla, cioè:

$$\mathbf{T}_R \cdot \mathbf{D} = 0,$$

oppure:

$$\mathbf{S}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} = 0. \tag{4.1}$$

4.2.1 Tensore di Piola

Tra i due modi per esprimere l'annullamento della potenza delle forze interne, risulta più agevole per i conti e più utile ai fini di quello che si sta cercando quello espresso in termini materiali, che si traduce nella (4.1).

Per instaurare un parallelismo con il caso dei sistemi olonomi studiati nel Capitolo 3, in cui le reazioni vincolari esplicitate dai vincoli perfetti erano solo quelle ortogonali alla varietà delle configurazioni, basta notare che la (4.1) esprime una condizione di ortogonalità nello spazio Lin^+ tra il tensore \mathbf{S}_R e il tensore $\dot{\mathbf{F}}$. Per un corpo rigido vincolato a muoversi lungo una traiettoria, la reazione vincolare risulta, infatti, perpendicolare alla tangente della traiettoria in ogni punto. Nel nostro caso, la parte reattiva del tensore degli sforzi espresso in coordinate materiali risulta ortogonale, in ogni punto della varietà di vincolo \mathcal{M} , al generico elemento dello spazio tangente a \mathcal{M} in \mathbf{F} rappresentato da $\dot{\mathbf{F}}$, e quindi a $\dot{\mathcal{M}}$ stesso, ovvero:

$$\mathbf{S}_R \perp \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}). \tag{4.2}$$

Considerando poi il caso di una varietà di vincolo \mathcal{M} descritta da $\varphi(\mathbf{F}) = k$ e prendendo una curva $\mathbf{F}(t)$ su di essa, si può scrivere

$$\varphi(\mathbf{F}(t)) = k$$

e, derivando rispetto a t , si ottiene

$$D_{\mathbf{F}}\varphi \cdot \dot{\mathbf{F}} = 0,$$

che significa che il tensore $D_{\mathbf{F}}\varphi$ è ortogonale al tensore $\dot{\mathbf{F}}$, generico elemento di $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$. Pertanto, in questo caso, grazie alla (4.2), \mathbf{S}_R risulta appartenere allo spazio

generato da $D_{\mathbf{F}}\varphi$, ovvero

$$\mathbf{S}_R = \lambda D_{\mathbf{F}}\varphi, \quad (4.3)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario. Si confronti la relazione appena ottenuta con la (3.8) del caso di un sistema olonomo e si noti la corrispondenza tra le due: anche in quel caso, infatti, le reazioni vincolari appartenevano al complemento ortogonale dello spazio tangente alla varietà delle configurazioni che era generato dai gradienti delle funzioni scalari utilizzate per definire i vincoli.

Per quanto riguarda la parte attiva \mathbf{S}_A del tensore di Piola che dipende dall'equazione costitutiva del corpo in esame, essa è un tensore appartenente a Lin^+ che può essere scomposto nella somma di una parte ortogonale a $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$ e di una tangente allo stesso. Essendo, però, \mathbf{S}_R arbitrario e appartenente a $(\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}))^\perp$, è possibile normalizzare \mathbf{S}_A per renderlo ortogonale a \mathbf{S}_R , semplicemente considerando solo la sua parte contenuta in $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$ e inglobando quella contenuta in $(\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}))^\perp$ direttamente in \mathbf{S}_R . In questo modo, si avrà

$$(\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}))^\perp \ni \mathbf{S}_R \perp \mathbf{S}_A \in \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}).$$

Esempio del vincolo d'incomprimibilità

Analizzando il caso del vincolo di incomprimibilità definito da \mathcal{M}_1 si ottiene:

$$\varphi(\mathbf{F}(t)) = \det \mathbf{F}(t) = 1$$

e derivando rispetto a t

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\det \mathbf{F}) \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) = (\det \mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}} = 0,$$

che significa che

$$D_{\mathbf{F}}\varphi = (\det \mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-T},$$

dal momento che $\frac{d\varphi}{dt} = D_{\mathbf{F}}\varphi \cdot \dot{\mathbf{F}}$. Per la (4.3) allora si ha

$$\mathbf{S}_R = \lambda \mathbf{F}^{-T}. \quad (4.4)$$

Esempio del vincolo di Bell

Applicando la stessa procedura al vincolo di Bell definito da \mathcal{M}_3 si ottiene:

$$\varphi(\mathbf{F}(t)) = \text{tr}(\mathbf{F}(t)\mathbf{F}^T(t)) = 3, \quad (4.5)$$

che derivata rispetto a t dà:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = 2\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}} = 0,$$

cioè $D_{\mathbf{F}}\varphi = 2\mathbf{F}$ e quindi, grazie alla (4.3):

$$\mathbf{S}_R = 2\lambda\mathbf{F}. \quad (4.6)$$

4.2.2 Tensore di Cauchy

Per passare al tensore degli sforzi di Cauchy, che si vuole scomporre anch'esso come la somma di una parte attiva \mathbf{T}_A e di una reattiva \mathbf{T}_R che siano tra loro ortogonali, in modo da poter scrivere $\mathbf{T} = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_R$, non è sufficiente applicare la trasformazione di Piola prima a \mathbf{S}_R e poi a \mathbf{S}_A . Tale trasformazione, infatti, non preserva l'ortogonalità tra tensori e quindi i rispettivi \mathbf{T}_R e \mathbf{T}_A non risulterebbero anch'essi ortogonali.

Quello che si fa è applicare la trasformazione di Piola a \mathbf{S}_R ottenendo il corrispondente \mathbf{T}_R , che apparterrà a un certo spazio e sarà anch'esso arbitrario, e successivamente, proprio sfruttando quest'ultimo fatto, si normalizza \mathbf{T}_A per portarlo sul complemento ortogonale dello spazio a cui appartiene \mathbf{T}_R .

Per prima cosa bisogna capire a quale spazio appartenga \mathbf{T}_R una volta applicata la trasformazione di Piola a $\mathbf{S}_R \in (\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}))^\perp$. Quindi si applica la (1.10) alla (4.1) ottenendo:

$$\mathbf{S}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} = (\det \mathbf{F})\mathbf{T}_R \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}} = 0$$

ed essendo $\det \mathbf{F} > 0$:

$$\mathbf{T}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = 0. \quad (4.7)$$

Dal momento che $\dot{\mathbf{F}}$ rappresenta il generico elemento di $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$ la (4.7) è equivalente a

$$\mathbf{T}_R \in (\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1})^\perp, \quad (4.8)$$

con \mathbf{T}_R comunque arbitrario.

Si può dire di più sullo spazio $(\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1})^\perp$ se si considerano i seguenti passaggi. Grazie alla condizione (c) della Definizione 25 di varietà di vincolo, si ha che

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{QF}) = \mathbf{Q}\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$$

per ogni $\mathbf{Q} \in \text{Rot}$. Fissando $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$ e considerando una curva regolare $\mathbb{R} \ni \tau \mapsto$

$\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F} \in \mathcal{M}$, con $\mathbf{Q}(\tau) \in \text{Rot}$, si può scrivere

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} \in \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$$

e quindi

$$\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} \in \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})$$

e

$$\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} \in \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}. \quad (4.9)$$

A questo punto, essendo \mathbf{Q} una rotazione, si ha che $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e, una volta derivata,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}} &= 0 \\ (\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}})^T + \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}} &= 0, \end{aligned}$$

che significa che $\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}} \in \text{Skw}$. Si può poi dimostrare che lo spazio tangente al gruppo delle rotazioni Rot nell'identità è proprio lo spazio dei tensori antisimmetrici Skw , ovvero per ogni $\mathbf{W} \in \text{Skw}$ esiste una curva regolare $\mathbf{Q}(t)$ che appartiene a Rot per ogni t ed è tale che $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0) = \mathbf{W}$. Inoltre, all'infuori dell'identità, lo spazio tangente a Rot in ogni punto \mathbf{Q} si può ottenere come isomorfismo di Skw tramite la rotazione \mathbf{Q} e quindi identificare $\dot{\mathbf{Q}}$ nel seguente modo:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}. \quad (4.10)$$

Si è appena visto che, al variare di \mathbf{Q} nel gruppo delle rotazioni, $\dot{\mathbf{Q}}(t)$ descrive tutti i tensori antisimmetrici e che $\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$ appartiene ancora a Skw . Allora la (4.9) implica che

$$\text{Skw} \subset \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}$$

per ogni $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$.

Prendendo i complementi ortogonali degli insiemi di quest'ultima relazione, si conclude che

$$(\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1})^\perp \subset \text{Sym} \quad (4.11)$$

per ogni $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$. E ciò significa che \mathbf{T}_R è un tensore simmetrico, dal momento che appartiene proprio a $(\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1})^\perp$.

La parte attiva \mathbf{T}_A normalizzata, invece, appartiene allo spazio $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}$, perché l'eventuale contributo appartenente a $(\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1})^\perp$ viene inglobato in \mathbf{T}_R che è arbitrario. Bisogna ricordarsi anche che per il teorema di Cauchy \mathbf{T}_A deve essere

simmetrico. Pertanto, alla fine, si ha che

$$\mathbf{T}_A \in \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1} \cap \text{Sym} \quad (4.12)$$

In generale si può quindi affermare che, dato un gradiente di deformazione \mathbf{F} , il corrispondente tensore degli sforzi di Cauchy è dato da:

$$\mathbf{T}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) + \mathbf{T}_R$$

con le condizioni (4.7) e $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$, e dove si è posto $\mathbf{T}_A = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$ con

$$\hat{\mathbf{T}} : \text{Lin}^+ \rightarrow \text{Sym} \cap \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}$$

che è la funzione risposta data dall'equazione costitutiva.

Infine, considerando varietà di vincolo che siano sottogruppi di Lin^+ , grazie alla Proposizione 8, si possono semplificare ulteriormente le cose perché vale la seguente

Proposizione 9. *Sia \mathcal{M} una varietà di vincolo indipendente dalla configurazione di riferimento. Allora*

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1} \equiv \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{I}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{M}. \quad (4.13)$$

Ciò permette di semplificare il codominio della funzione \hat{T} e scrivere:

$$\hat{\mathbf{T}} : \text{Lin}^+ \rightarrow \text{Sym} \cap \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{I}).$$

Considerando poi come varietà di vincolo il gruppo delle rotazioni $\mathcal{M} = \text{Rot}$, la (4.13) permette di scrivere

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{Q})\mathbf{Q}^T = \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{I}) = \text{Skw}$$

e quindi

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{Q}) = \text{Skw } \mathbf{Q},$$

che conferma la (4.10).

Esempio del vincolo d'incomprimibilità

Ripartendo dalla (4.4) si può passare alla parte reattiva del tensore di Cauchy:

$$\mathbf{T}_R = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{S}_R \mathbf{F}^T = \lambda \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T = \lambda \mathbf{I}. \quad (4.14)$$

Si suole porre $\lambda = -p$, con p una pressione incognita che funge anche da moltiplicatore di Lagrange relativo al vincolo. Si è quindi ottenuto che

$$\mathbf{T}_R \in \text{Sph.}$$

La parte attiva del tensore di Cauchy \mathbf{T}_A data dall'equazione costitutiva, in generale, può essere scritta come somma di una componente appartenente a Dev, denominata \mathbf{T}_0 , e una a Sph, indicata con $\alpha \mathbf{I}$:

$$\mathbf{T}_A = \mathbf{T}_0 + \alpha \mathbf{I}, \quad (4.15)$$

ma la parte sferica verrà inglobata in \mathbf{T}_R , che è arbitrario, mentre quella deviatorica sarà considerata la vera parte attiva del tensore di Cauchy.

Per trovare il valore di α che permette di proiettare \mathbf{T}_A su Sph si prende la traccia della relazione (4.15) ottenendo

$$\text{tr } \mathbf{T}_A = \alpha \text{tr } \mathbf{I} = 3\alpha$$

e quindi $\alpha = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T}_A$, che permette di scrivere

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_A - \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{T}_A) \mathbf{I} \in \text{Dev}$$

e considerare \mathbf{T}_0 come la parte attiva di \mathbf{T} , ortogonale a \mathbf{T}_R .

Esempio del vincolo di Bell

A partire dalla (4.6), si ottiene la seguente espressione per la parte reattiva del tensore di Cauchy:

$$\mathbf{T}_R = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{S}_R \mathbf{F}^T = \frac{2\lambda}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mu \mathbf{B}.$$

Per quanto riguarda invece la parte attiva del tensore di Cauchy si rimanda agli esempi finali della Sezione 4.5 perché si è utilizzato un altro metodo introdotto più

avanti.

4.3 Gruppi di simmetria

A una varietà di vincolo è associato un gruppo di simmetria che dovrà avere una certa relazione di compatibilità con il gruppo di simmetria relativo alla funzione risposta, che fornisce la parte attiva del tensore degli sforzi una volta data la deformazione e quindi il suo gradiente. Si proseguirà definendo meglio quest'ultimo gruppo, poi il primo e infine la relazione di compatibilità cercata.

Data una configurazione di riferimento κ e la relativa funzione risposta in termini delle coordinate materiali

$$\hat{\mathbf{S}}_\kappa : \text{Lin}^+ \rightarrow \text{Sym}, \quad \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}_\kappa(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{M},$$

si definisce il *gruppo di simmetria della risposta*

$$\text{Syg}_\kappa = \{\mathbf{H} \in \text{Unim} \cap \mathcal{M} : \hat{\mathbf{S}}_\kappa(\mathbf{FH}) = \hat{\mathbf{S}}_\kappa(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \text{Lin}^+\},$$

avendo introdotto il *gruppo unimodulare proprio*

$$\text{Unim} = \{\mathbf{H} \in \text{Lin}^+ : \det \mathbf{H} = 1\}.$$

Considerando poi un'altra configurazione μ , il suo gruppo di simmetria Syg_μ si può ottenere facendo uso della regola di Noll:

$$\text{Syg}_\mu = P \text{Syg}_\kappa P^{-1}, \quad (4.16)$$

essendo $P = \nabla(\mu \circ \kappa^{-1})$.

Si può dimostrare che $\hat{\mathbf{S}}_\kappa$ descrive un fluido se esiste una configurazione di riferimento κ tale per cui $\text{Syg}_\kappa \equiv \text{Unim}$, un solido se si ha che $\text{Syg}_\kappa \subset \text{Rot}$ e un materiale isotropo se $\text{Syg}_\kappa \supset \text{Rot}$. Si era visto, infatti, nel Capitolo 1 che il gruppo di simmetria per i solidi isotropi era proprio il gruppo delle rotazioni, ovvero $\text{Syg}_\kappa \equiv \text{Rot}$. Grazie alla (4.16), lo stesso discorso vale per ogni configurazione e non solo per quella di riferimento.

In maniera simile a quanto fatto con il gruppo di simmetria della risposta, si definisce il *gruppo di simmetria del vincolo* relativo alla configurazione di riferimento

κ

$$\text{Myg}_\kappa = \{\mathbf{H} \in \mathcal{M} : \mathcal{M}\mathbf{H} = \mathcal{M}\}.$$

Vale inoltre una regola simile alla (4.16) per il gruppo relativo a una configurazione μ :

$$\text{Myg}_\mu = P \text{Myg}_\kappa P^{-1}.$$

La seguente proposizione mostra come viene trasformato lo spazio tangente $\dot{\mathcal{M}}$ sotto l'azione di Myg_κ :

Proposizione 10. *Per ogni $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$ e $\mathbf{H} \in \text{Myg}_\kappa$, si ha che*

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}\mathbf{H}) = \dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{H}.$$

Syg_κ è l'insieme di tutte le deformazioni della configurazione di riferimento che non sono meccanicamente individuabili, mentre Myg_κ è l'insieme di tutte quelle deformazioni che lasciano la varietà di vincolo \mathcal{M} inalterata. Affinché vi sia una compatibilità tra la varietà di vincolo e la funzione risposta che definisce la parte attiva del tensore degli sforzi, ogni cambio meccanicamente non individuabile nella configurazione di riferimento deve lasciare inalterata la varietà di vincolo stessa. Questo si traduce nella seguente richiesta sui rispettivi gruppi di simmetria:

$$\text{Myg}_\kappa \supset \text{Syg}_\kappa. \tag{4.17}$$

Il primo problema che sorge da questa condizione di compatibilità si concretizza nella ricerca dei vincoli interni compatibili con una data funzione risposta e con il rispettivo gruppo di simmetria di un dato materiale. Per esempio, dal fatto che per un fluido si abbia $\text{Syg}_\kappa = \text{Unim}$ segue che $\text{Unim} \subset \text{Myg}_\kappa$ e quindi che ogni possibile vincolo imposto a un fluido deve comprendere l'incompressibilità, data da

$$\det \mathbf{H} = 1.$$

Nella prossima sezione e nel Capitolo 5 si studierà più a fondo il caso dei solidi isotropi vincolati.

4.4 Vincoli interni isotropi

Definizione 26. Una varietà di vincolo $\mathcal{M} \in \text{Lin}^+$ si dice isotropa se

$$\mathbf{F} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbf{FQ} \in \mathcal{M} \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot}.$$

Pertanto, se una varietà di vincolo isotropa contiene un elemento \mathbf{F} relativo a una data deformazione, allora contiene anche i tensori associati a tutte le deformazioni ottenute operando prima una rotazione e poi la deformazione data, evidenziando così un'indipendenza della varietà rispetto alle direzioni di deformazione. Ovviamente, non tutti i vincoli hanno questa proprietà; si considerino infatti gli esempi introdotti:

- l'incomprimibilità è un vincolo isotropo perché se $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_1$ allora

$$\det(\mathbf{FQ}) = (\det \mathbf{F})(\det \mathbf{Q}) = 1 \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot},$$

- il vincolo di Bell è isotropo in quanto dato $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_3$ allora

$$\text{tr}(\mathbf{FQ}(\mathbf{FQ})^T) = \text{tr}(\mathbf{FQ}\mathbf{Q}^T\mathbf{F}^T) = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = 3 \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot},$$

- l'instensibilità lungo una direzione fissata \mathbf{e} non è un vincolo isotropo poiché se $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_2$ allora

$$\exists \mathbf{Q} \in \text{Rot} : (\mathbf{FQ})\mathbf{e} \cdot (\mathbf{FQ})\mathbf{e} = \mathbf{Q}^T\mathbf{F}^T\mathbf{FQ}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \neq 1,$$

cosa che ci si poteva aspettare dal fatto che questo vincolo dipende dalla direzione di deformazione.

La definizione di varietà di vincolo isotropa appena introdotta è un caso particolare della Definizione 25 di una varietà di vincolo contenuta in Lin^+ . Tuttavia, è possibile introdurre un'altra definizione più appropriata che permette di semplificare le cose, considerando le seguenti argomentazioni. Nel Capitolo 1 si era detto che il gruppo di simmetria della risposta per un materiale solido e isotropo coincide con Rot e, affinché una varietà di vincolo sia compatibile con questo tipo di materiale, per la (4.17), il gruppo di simmetria del vincolo deve contenere Rot . Pertanto, una varietà di vincolo isotropa in Lin^+ contiene l'intero gruppo delle rotazioni e le restrizioni sui gradienti di deformazione saranno imposte solamente sulla parte di deformazione pura di questi, rappresentate da tensori simmetrici e definiti positivi. Viene quindi naturale definirla come sottospazio di Sym^+ .

Per quanto detto fin qui, si preferisce utilizzare la seguente definizione per una varietà di vincolo isotropa, che si può trovare in [17]:

Definizione 27. *Un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset \text{Sym}^+$ è una varietà di vincolo isotropa se:*

- (A) \mathcal{S} è una sottovarietà differenziabile connessa di Sym^+ ;
- (B) $\mathbf{I} \in \mathcal{S}$;
- (C) $\mathbf{Q}\mathcal{S}\mathbf{Q}^T = \mathcal{S}$ per ogni $\mathbf{Q} \in \text{Rot}$.

Si può notare una certa somiglianza con la Definizione 25 di una varietà di vincolo nello spazio Lin^+ . La condizione (A) richiede che la varietà di vincolo isotropa abbia una struttura di sottovarietà differenziabile questa volta di Sym^+ , anziché di Lin^+ , fatto che permette di avere uno spazio tangente in ogni punto della varietà. Inoltre, grazie alla richiesta della connessione di questa, è possibile considerare delle curve su di essa i cui vettori tangenti definiscono per ogni punto lo spazio tangente. La condizione (B) richiede che sia compreso nella varietà il tensore identità (in Sym^+) che corrisponde a deformazioni date dalle sole rotazioni, il gruppo delle quali è sempre compreso in una varietà di vincolo isotropa in Lin^+ , come visto in precedenza. Tra tutte le rotazioni è compreso anche il tensore identità (in Lin^+) corrispondente alla configurazione di riferimento, che anche in questo caso risulta ammissibile. La condizione (C), infine, mette insieme la richiesta che la varietà di vincolo soddisfi il principio di indifferenza materiale e il fatto che sia isotropa.

Considerando quindi una varietà di vincolo isotropa \mathcal{S} nello spazio 6-dimensionale dei tensori simmetrici definiti positivi Sym^+ , a essa si può far corrispondere una varietà di vincolo \mathcal{M} nello spazio 9-dimensionale dei tensori a determinante positivo Lin^+ definita da:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \mathbf{F}\mathbf{F}^T \in \mathcal{S}\}.$$

La varietà di vincolo isotropa \mathcal{S} conterrà quindi tutti i tensori sinistri di Cauchy-Green $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ relativi alle deformazioni \mathbf{F} contenute nella varietà di vincolo \mathcal{M} .

Una tale corrispondenza è garantita dal seguente

Lemma 1. *Sia $\mathcal{M} \subset \text{Lin}^+$ una varietà di vincolo e sia $\mathcal{S}' := \mathcal{M} \cap \text{Sym}^+$. Allora*

- (i) \mathcal{M} è un diffeomorfismo di $\text{Rot} \times \mathcal{S}'$;
- (ii) \mathcal{S}' è una sottovarietà connessa di Sym^+ ;
- (iii) $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{I}) = \text{Skw} \oplus \dot{\mathcal{S}}'(\mathbf{I})$;

(iv) \mathcal{M} è propria se e solo se $\dim \mathcal{S}' \leq 5$.

La dimostrazione completa si può trovare in [1], ma comunque di seguito ne vengono riportate delle linee guida per intendere meglio il lemma. La (i) deriva dal fatto che un elemento \mathbf{F} di \mathcal{M} può essere decomposto univocamente come la composizione di un tensore rotazione e di un tensore simmetrico definito positivo, in modo da avere $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, grazie al teorema di decomposizione polare visto nel Capitolo 1. Pertanto, esiste una corrispondenza biunivoca tra \mathcal{M} e $\text{Rot} \times \mathcal{S}'$ che è anche un'applicazione differenziabile, come la sua inversa, fatto che permette di definirla un diffeomorfismo. Da qui segue subito che, essendo $\dim \text{Rot} = 3$,

$$\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{S}' + 3,$$

e quindi la (iv), ricordando che \mathcal{M} è propria quando la sua dimensione è minore o uguale a 8.

La (iii) deriva direttamente dalla (i) se si tiene presente che lo spazio tangente al gruppo delle rotazioni Rot nell'identità è proprio lo spazio dei tensori antisimmetrici Skw , come già visto in precedenza, e che lo spazio tangente di una varietà prodotto è la somma diretta degli spazi tangenti delle singole varietà, come mostrato nel Capitolo 2.

Essendo poi $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$, che significa che a ogni tensore \mathbf{V} è associato uno e un solo tensore \mathbf{B} con gli stessi autovettori e con una terna di autovalori che sono il quadrato di quelli di \mathbf{V} , la \mathcal{S} della Definizione 27 e la \mathcal{S}' del Lemma 1 possono essere identificate perché rappresentano la stessa varietà di vincolo.

In sostanza, passando da \mathcal{M} a \mathcal{S} , si considera solo la parte di una deformazione corrispondente alla deformazione pura e non quella relativa alla rotazione e la dimensione della varietà di vincolo viene conseguentemente abbassata di tre, che corrisponde alla dimensione del gruppo delle rotazioni. Pertanto, in Sym^+ la varietà di vincolo corrispondente alla rigidità è formata da un unico elemento, il tensore identità, e assume una dimensione pari a zero. Quella corrispondente alla conformalità, che rappresenta una dilatazione o compressione omogenea del corpo, è costituita da tutti i multipli del tensore identità che la rendono una varietà di dimensione uno. Infine, per quanto riguarda la dimensione di altre varietà di vincolo isotrope si rimanda al Capitolo 5 in cui verrà discussa a fondo questa spinosa questione.

Anche per le varietà di vincolo isotrope, il modo più comune per definirle è quello di considerarle come insiemi di livello di una o più funzioni scalari di \mathbf{B} . Tali funzioni, affinché sia soddisfatta la condizione (C) della Definizione 27, devono essere

isotrope e quindi, come visto nel Capitolo 1, è possibile scriverle come funzioni degli invarianti scalari di \mathbf{B} . Una varietà di vincolo costruita in questo modo prende la forma seguente:

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{B} \in \text{Sym}^+ : g_i(I_1, I_2, I_3) = g_i(3, 3, 1) \quad i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (4.18)$$

avendo scelto la costante che definisce l'insieme di livello in modo da garantire che il tensore identità sia compreso nella varietà, come richiesto dalla condizione (B). Tale insieme deve avere inoltre la natura di varietà differenziabile, per rispettare anche la condizione (A).

Il Capitolo 5 sarà interamente dedicato all'argomento dei vincoli interni isotropi e alle varietà associate.

4.5 Esempi di vincoli interni

Rispettando le condizioni descritte fin qui, è possibile definire differenti varietà di vincolo, però solo quelle con un reale significato fisico meritano di essere studiate più approfonditamente. Di seguito saranno riportate le più comuni e alcune di esse sono già state introdotte e a volte analizzate più o meno in dettaglio nel corso del presente capitolo.

4.5.1 Rigidità

Il vincolo di rigidità impone che un corpo non si possa mai deformare e si esprime attraverso una varietà di vincolo che contiene solo le rotazioni, ovvero tale per cui

$$\mathcal{M} = \text{Rot},$$

poiché il tensore di deformazione pura \mathbf{V} o \mathbf{U} che compare nella decomposizione polare di una deformazione \mathbf{F} è pari, in questo caso, al tensore identità. Una tale varietà di vincolo ha dimensione pari a 3, pari a quella del gruppo delle rotazioni. Sapendo che lo spazio tangente di Rot nell'identità coincide con Skw ($\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{I}) = \text{Skw}$), si può facilmente scrivere che

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{R}) = \text{Skw } \mathbf{R}$$

per ogni $\mathbf{R} \in \text{Rot}$ e che $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{R})\mathbf{R}^{-1} = \text{Skw}$. La (4.8) ci dice quindi che

$$\mathbf{T}_R \in \text{Sym},$$

mentre la (4.12) ci dice che $\mathbf{T}_A \in \emptyset$, ovvero

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_R$$

e lo sforzo è puramente reattivo, come ci si aspettava dal fatto che gli sforzi interni per un corpo rigido sono nulli dal momento che non si deforma mai e quindi la parte reattiva del tensore degli sforzi è in grado di contrapporsi a qualsiasi tipo di sforzo attivo.

Il vincolo di rigidità poi è isotropo perché vale la relazione

$$\mathbf{F} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbf{F}\mathbf{Q} \in \mathcal{M} \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot},$$

essendo \mathbf{F} una rotazione e il gruppo di simmetria associato alla sua varietà di vincolo è proprio Rot :

$$\text{Myg} = \mathcal{M} = \text{Rot}.$$

4.5.2 Conformalità

Il vincolo di conformalità restringe la classe di deformazioni possibili a tutte quelle che si ottengono come composizione di una rotazione e di un'omotetia, che dilata o restringe il corpo in maniera uniforme e che viene rappresentata da un tensore multiplo dell'identità. La varietà di vincolo corrispondente è

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \mathbf{F} = \alpha\mathbf{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ e } \mathbf{R} \in \text{Rot}\}$$

che ha una dimensione pari a 4 perché rispetto al caso della rigidità, di dimensione 3, viene aggiunto il parametro α .

Per capire a che spazi appartengono la parte attiva e quella reattiva del tensore degli sforzi bisogna scrivere il generico elemento dello spazio tangente alla varietà di vincolo:

$$\dot{\mathbf{F}} = \alpha\dot{\mathbf{R}} + \dot{\alpha}\mathbf{R} = \alpha\mathbf{W}\mathbf{R} + \dot{\alpha}\mathbf{R},$$

dove $\mathbf{W} \in \text{Skw}$ è il tensore antisimmetrico che corrisponde a $\dot{\mathbf{R}}$. Dividendo per α e

moltiplicando a destra per \mathbf{R}^{-1} in ambo i membri si ottiene:

$$\frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{W} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{I}, \quad (4.19)$$

ma $\frac{1}{\alpha} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}$ e la (4.19) si traduce nella seguente relazione:

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} = \text{Skw} \oplus \text{Sph},$$

essendo α , e quindi $\dot{\alpha}$, arbitrari. Prendendo ora i complementi ortogonali si arriva a

$$(\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1})^\perp = \text{Sym} \cap \text{Dev} = \text{Dev}$$

e da qui, per la (4.12) e la (4.8), segue che

$$\mathbf{T}_A \in \text{Sph} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_R \in \text{Dev},$$

e la parte attiva dello sforzo è una pressione, come si poteva evincere dal fatto che una deformazione conforme è omogenea e non presenta particolari direzioni preferenziali.

Come per la rigidità, anche questo è un vincolo isotropo perché

$$\mathbf{F} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbf{F} \mathbf{Q} \in \mathcal{M} \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot},$$

essendo \mathbf{F} una rotazione moltiplicata per uno scalare α .

Il gruppo di simmetria associato a questa varietà di vincolo coincide con la varietà stessa poiché

$$\mathbf{H} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} \mathbf{H} = \mathcal{M} \quad \forall \mathbf{H} \in \mathcal{M}$$

e quindi

$$\text{Myg} = \mathcal{M}.$$

4.5.3 Incomprimibilità

Nonostante il vincolo di incomprimibilità sia stato usato come esempio durante tutta la trattazione, viene qui riassunto di nuovo ma verrà utilizzato un altro metodo per ricavare gli spazi di appartenenza delle parti attiva e reattiva del tensore degli sforzi.

Il vincolo di incomprimibilità impone che durante una deformazione o un moto il volume di una qualsiasi parte del corpo rimanga invariato. Come si era visto nel Capitolo 1, ciò significa che saranno considerate ammissibili solo le deformazioni

isocore, caratterizzate da un gradiente di deformazione pari a uno. Pertanto, la varietà di vincolo corrispondente è $\mathcal{M} = \text{Unim}$, che può essere espressa anche nel modo seguente:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \det \mathbf{F} = 1\}. \quad (4.20)$$

Avendo definito la varietà di vincolo come insieme di livello di una funzione scalare $\varphi(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F}$ con il differenziale sempre diverso da zero, si può applicare un teorema della funzione implicita (più precisamente, il Teorema 5 introdotto nel Capitolo 2) e concludere quindi che tale varietà ha codimensione 1 e, di conseguenza, dimensione 8 in Lin^+ .

Ricordando che la derivata del determinante di una curva di tensori rispetto al parametro di questa è

$$\frac{d}{dt} \det \mathbf{F}(t) = (\det \mathbf{F}) \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}),$$

derivando la (4.20) rispetto a t si ottiene:

$$(\det \mathbf{F}) \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) = 0$$

e poi, usando la (4.20) e le proprietà dell'operatore traccia:

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-T} = 0.$$

Lo spazio tangente alla varietà di vincolo in ogni punto sarà quindi dato da

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}) = \{\dot{\mathbf{F}} \in \text{Lin} : \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-T} = 0\},$$

che permette di scrivere

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{I} = 0,$$

che significa che $\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1} = \text{Dev}$ e che, grazie alla (4.8) e alla (4.12),

$$\mathbf{T}_R \in \text{Sph} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_A \in \text{Dev},$$

quindi risulta

$$\mathbf{T}_R = \lambda \mathbf{I},$$

come già era stato trovato nella (4.14).

Il tensore di Cauchy generale per un corpo soggetto al vincolo di incomprimibilità

sarà dunque dato da

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_A - p\mathbf{I}$$

e se si considera un corpo isotropo, per cui $\mathbf{T}_A = \beta_0\mathbf{I} + \beta_1\mathbf{B} + \beta_2\mathbf{B}^2$, si arriva a

$$\mathbf{T} = \beta_1\mathbf{B} + \beta_2\mathbf{B}^2 - p\mathbf{I},$$

con p arbitrario.

Anche il vincolo di incomprimibilità è isotropo in quanto

$$\det \mathbf{FQ} = (\det \mathbf{F})(\det \mathbf{Q}) = 1 \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot}$$

e il gruppo di simmetria associato alla sua varietà di vincolo coincide con Unim, e cioè, come nel caso della rigidità e della conformalità, è la varietà stessa:

$$\text{Myg} = \mathcal{M} = \text{Unim}.$$

4.5.4 Inestensibilità lungo una direzione

Il vincolo di inestensibilità lungo una direzione fissa assegnata \mathbf{e} può essere utilizzato per modellare dei materiali rinforzati con fibre ed è espresso dalla seguente varietà di vincolo:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}\mathbf{e} = 1\},$$

che ha dimensione 8 in Lin^+ grazie al Teorema 5, in quanto definita come insieme di livello di una sola funzione scalare $\varphi(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}\mathbf{e}$ col differenziale sempre diverso da zero.

Per trovare lo spazio tangente in ogni punto di \mathcal{M} , si deriva rispetto a t la relazione $\mathbf{F}(t)\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(t)\mathbf{e} = 1$ ottenendo¹

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}\mathbf{e} + \mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{e} = 0$$

$$2\mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{e} = 0$$

$$\mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{e} = 0$$

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} = 0$$

e quindi

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}) = \{\dot{\mathbf{F}} \in \text{Lin} : \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} = 0\},$$

¹Si farà ricorso alla relazione $\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$.

che significa che

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{F}\mathbf{e} = 0,$$

il che risulta equivalente alla relazione

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1} \perp \text{span}\{\mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{F}\mathbf{e}\}$$

e, grazie alla (4.8), si può concludere che

$$\mathbf{T}_R \in \text{span}\{\mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{F}\mathbf{e}\},$$

che mostra come la parte reattiva dello sforzo sia data da una pura trazione arbitraria lungo $\mathbf{F}\mathbf{e}$ perché può essere scritto come

$$\mathbf{T}_R = \alpha(\mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{F}\mathbf{e}).$$

Questi sforzi contrastano un'eventuale deformazione lungo la direzione \mathbf{e} e quindi il vincolo esprime proprio la conservazione della lunghezza di archi di curva lungo \mathbf{e} .

Si è già analizzato questo vincolo nel corso della trattazione mostrando che non è isotropo per via del fatto che non è indipendente dalle direzioni di deformazione.

Per quanto riguarda invece il gruppo di simmetria associato alla varietà di vincolo in esame, esso è costituito da tutti i tensori $\mathbf{H} \in \mathcal{M}$ tali per cui

$$\mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{e} = 1 \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{M}, \tag{4.21}$$

che sono tutti quelli per cui $\mathbf{H}\mathbf{e} = \pm\mathbf{e}$ perché soddisfano la (4.21) e si può dimostrare che sono gli unici con tale proprietà attraverso i seguenti passaggi. Considerata infatti una terna ortonormale $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$, dove \mathbf{e} è la direzione che rientra nella definizione del vincolo, rispetto alla quale si abbia

$$\mathbf{H}\mathbf{e} = \alpha\mathbf{e} + \beta\mathbf{f} + \gamma\mathbf{g}, \tag{4.22}$$

si possono definire due gradienti di deformazione appartenenti alla varietà di vincolo $\mathbf{F}_1 = \mathbf{I}$ e \mathbf{F}_2 tale che:

$$\mathbf{F}_2\mathbf{e} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{F}_2\mathbf{f} = 2\mathbf{f}, \quad \mathbf{F}_2\mathbf{g} = 2\mathbf{g}.$$

Sostituendo poi \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 e la (4.22) nella (4.21), si ottengono le due relazioni seguenti:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

$$\alpha^2 + 4\beta^2 + 4\gamma^2 = 1,$$

che implicano $\beta = \gamma = 0$ e $\alpha = \pm 1$ e quindi proprio $\mathbf{H}\mathbf{e} = \pm\mathbf{e}$, ovvero in conclusione:

$$\text{Myg} = \{\mathbf{H} \in \mathcal{M} : \mathbf{H}\mathbf{e} = \pm\mathbf{e}\}.$$

4.5.5 Ortogonalità tra due direzioni

Un procedimento analogo a quello seguito per il vincolo di inestensibilità lungo una direzione può essere utilizzato per descrivere il vincolo che mantiene l'ortogonalità tra due direzioni date \mathbf{e} e \mathbf{f} . Si parte dalla varietà di vincolo

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}\mathbf{f} = 0\},$$

che ha dimensione 8 sempre grazie al Teorema 5, e, considerando una curva $\mathbf{F}(t)$, si eseguono i seguenti passaggi

$$\mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}\mathbf{f} = 0$$

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}\mathbf{f} + \mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{f} = 0$$

$$\mathbf{F}\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{f} + \mathbf{F}\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{e} = 0$$

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{f} + \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}\mathbf{f} \otimes \mathbf{e} = 0$$

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{f} + \mathbf{F}\mathbf{f} \otimes \mathbf{e}) = 0$$

per trovare lo spazio tangente in ogni punto:

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}) = \{\dot{\mathbf{F}} \in \text{Lin} : \dot{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{f} + \mathbf{F}\mathbf{f} \otimes \mathbf{e}) = 0\}.$$

Ciò permette di scrivere

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{F}\mathbf{f} + \mathbf{F}\mathbf{f} \otimes \mathbf{F}\mathbf{e}) = 0$$

e, per la (4.8), si può concludere che

$$\mathbf{T}_R \in \text{span}\{\mathbf{F}\mathbf{e} \otimes \mathbf{F}\mathbf{f} + \mathbf{F}\mathbf{f} \otimes \mathbf{F}\mathbf{e}\}.$$

La parte reattiva dello sforzo risulta quindi essere uno scorrimento puro arbitrario nel piano di $\mathbf{F}\mathbf{e}$ e $\mathbf{F}\mathbf{f}$ che può quindi opporsi a ogni tentativo di modificare l'angolo retto tra \mathbf{e} ed \mathbf{f} .

Come il precedente, anche il vincolo di ortogonalità tra due direzioni assegnate non è isotropo dal momento che dipende dalle direzioni di deformazione ed è sempre possibile trovare una rotazione \mathbf{Q} tale per cui

$$\mathbf{FQ}\mathbf{e} \cdot \mathbf{FQ}\mathbf{f} \neq 0,$$

che rende il tensore \mathbf{FQ} non appartenente ad \mathcal{M} , fatto in contrasto con la definizione di varietà di vincolo isotropa.

4.5.6 Vincolo di Bell

Il vincolo di Bell è stato già analizzato durante la trattazione; di seguito quindi verrà riportata un'interpretazione fisica di tale vincolo che viene anche chiamato vincolo di inestensibilità totale o inestensibilità nella media. La sua varietà di vincolo è la seguente:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ : \text{tr } \mathbf{B} = 3\},$$

che risulta ancora di dimensione 8 per il Teorema 5, essendo definita come insieme di livello di una funzione scalare $\varphi(\mathbf{F}) = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)$ che ha il differenziale sempre diverso da zero.

Introducendo una qualsiasi base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, il tensore $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ può essere rappresentato nel seguente modo:

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \sum_{i,j=1}^3 (F^T F)_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

con $(F^T F)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{e}_j$ le componenti di $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$. Di conseguenza, la relazione che rappresenta il vincolo, ovvero

$$\text{tr } \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \text{tr}(\mathbf{F}^T\mathbf{F}) = 3,$$

è esprimibile come la somma delle componenti diagonali di $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} (F^T F)_{11} + (F^T F)_{22} + (F^T F)_{33} &= \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{e}_3 = \\ &= \mathbf{F} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F} \mathbf{e}_1 + \mathbf{F} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{F} \mathbf{e}_2 + \mathbf{F} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F} \mathbf{e}_3 = 3. \end{aligned}$$

Rinominando poi la terna $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ con $\{\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ per semplificare la notazione, si ottiene

$$\mathbf{F} \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} \mathbf{d} + \mathbf{F} \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \mathbf{e} + \mathbf{F} \mathbf{f} \cdot \mathbf{F} \mathbf{f} = 3, \quad (4.23)$$

dalla quale si nota che il vincolo può essere interpretato come la sovrapposizione di tre vincoli di inestensibilità lungo le tre direzioni di ogni terna ortogonale scelta, da cui il nome di inestensibilità totale. Derivando la (4.23), si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} \mathbf{d} + \mathbf{F} \mathbf{d} \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{d} + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \mathbf{e} + \mathbf{F} \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{e} + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{F} \mathbf{f} + \mathbf{F} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{f} &= 0 \\ 2(\mathbf{F} \mathbf{d} \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{d} + \mathbf{F} \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{e} + \mathbf{F} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{f}) &= 0 \\ \dot{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{F} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{F} \mathbf{f} \otimes \mathbf{f}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

che permette di definire lo spazio tangente in ogni punto:

$$\dot{\mathcal{M}}(\mathbf{F}) = \{\dot{\mathbf{F}} \in \text{Lin} : \dot{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{F} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{F} \mathbf{f} \otimes \mathbf{f}) = 0\}.$$

Dalla (4.24) si ottiene:

$$\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F} \mathbf{d} \otimes \mathbf{F} \mathbf{d} + \mathbf{F} \mathbf{e} \otimes \mathbf{F} \mathbf{e} + \mathbf{F} \mathbf{f} \otimes \mathbf{F} \mathbf{f}) = 0$$

e, grazie alla (4.8), segue che

$$\mathbf{T}_R \in \text{span}\{\mathbf{F} \mathbf{d} \otimes \mathbf{F} \mathbf{d} + \mathbf{F} \mathbf{e} \otimes \mathbf{F} \mathbf{e} + \mathbf{F} \mathbf{f} \otimes \mathbf{F} \mathbf{f}\},$$

che descrive uno sforzo che si può opporre all'estensione totale lungo le tre direzioni ortogonali \mathbf{d} , \mathbf{e} ed \mathbf{f} .

Il vincolo di Bell è isotropo, poiché

$$\text{tr}((\mathbf{F} \mathbf{Q})(\mathbf{F} \mathbf{Q})^T) = \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}^T) = \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{F}^T) = 3 \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot}.$$

Inoltre, il gruppo di simmetria associato alla sua varietà di vincolo coincide con il gruppo delle rotazioni perché con un procedimento analogo a quello seguito per il

caso del vincolo di inestensibilità lungo una direzione, ma molto più lungo in questo caso, si può dimostrare (si veda per esempio [16]) che esso contiene tutti e soli i tensori \mathbf{H} tali per cui

$$\text{tr}((\mathbf{F}\mathbf{H})(\mathbf{F}\mathbf{H})^T) = 3 \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{M}$$

e quindi

$$\text{Myg} = \text{Rot.}$$

Capitolo 5

Vincoli isotropi

In questo capitolo sono trattati ampiamente i vincoli interni isotropi, già introdotti in precedenza, con un particolare riguardo alle dimensioni delle varietà di vincolo associate. Nella prima parte viene presentata la teoria di Podio-Guidugli e Vianello, che nell'articolo del 1989 [1] sostengono la tesi che le possibili dimensioni di tali varietà, a parte i casi di vincoli di rigidità e conformalità, debbano essere pari a 8 in Lin^+ o a 5 in Sym^+ . Nella seconda viene esposta la tesi di Carroll, che nell'articolo del 2008 [2] arriva alla conclusione che sia possibile costruire delle varietà di vincolo isotrope di dimensione 7 in Lin^+ , presentando quattro possibili controesempi alla teoria precedente. Tuttavia, già Vianello nel suo articolo del 2012 [17] propone una nuova dimostrazione a favore della sua teoria e confuta uno dei quattro controesempi.

Per giungere alla relazione cercata, Carroll introduce, in primo luogo, delle condizioni di ammissibilità per i vincoli isotropi espresse prima in funzione degli invarianti scalari del tensore sinistro di deformazione \mathbf{V} e poi in termini di un altro insieme di invarianti, più comodi per interpretare tali condizioni. In secondo luogo, presenta una nuova definizione di vincolo isotropo e una distinzione tra vincoli omogenei e non omogenei e tra vincoli compatibili e non compatibili. Infine, per mezzo di sei proposizioni, arriva a definire tutte le possibili dimensioni di una varietà di vincolo isotropa.

L'articolo di Carroll però risulta molto sintetico e diversi passaggi vengono omessi a discapito della comprensione; pertanto in questa sede si è cercato di presentare i suoi ragionamenti e le sue conclusioni nel modo più dettagliato e approfondito possibile, integrando e spiegando i passaggi mancanti.

5.1 Dimensione di una varietà di vincolo isotropa

Si è già detto che il gruppo di simmetria della risposta per un materiale solido e isotropo coincide con Rot e, affinché una varietà di vincolo sia compatibile con questo tipo di materiale, per la (4.17), il gruppo di simmetria del vincolo, e di conseguenza la varietà che rappresenta quest'ultimo, deve contenere Rot . Tutti i tipi di possibili varietà di vincolo compatibili con un materiale solido e isotropo sono raccolti nel seguente

Teorema 8. *Sia Myg il gruppo di simmetria di una varietà di vincolo propria \mathcal{M} e si assuma che*

$$\text{Myg} \supset \text{Rot}.$$

Allora una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

- (i) \mathcal{M} è rigida, cioè $\mathcal{M} = \text{Rot}$;
- (ii) \mathcal{M} è conforme, ovvero esistono due numeri reali γ_1 e γ_2 , con $0 \leq \gamma_1 < 1 < \gamma_2 \leq +\infty$, tali che $\mathcal{M} = \{\alpha \mathbf{R} : \mathbf{R} \in \text{Rot}, \gamma_1 < \alpha < \gamma_2\}$;
- (iii) \mathcal{M} ha dimensione massima, cioè $\dim \mathcal{M} = 8$.

Il teorema precedente, per la cui dimostrazione si rimanda a [1], afferma che una varietà di vincolo isotropa può avere una dimensione pari a 3 nel caso della rigidità, in quanto coincidente con quella di Rot , pari a 4 nel caso della conformalità, perché rispetto alla rigidità si aggiunge il grado di libertà dato da α , e a 8 in tutti gli altri. Inoltre, non è possibile costruire varietà di vincolo isotrope con una dimensione minore di 3 perché il gruppo delle rotazioni deve sempre essere compreso. Pertanto, il Teorema 8 può equivalentemente essere espresso mediante la seguente

Proposizione 11. *Non esiste una varietà di vincolo isotropa $\mathcal{M} \subset \text{Lin}^+$ di dimensione 5, 6 o 7.*

Nella Sezione 4.4 si era mostrato che una varietà di vincolo isotropa può essere rappresentata equivalentemente da un sottoinsieme \mathcal{M} di Lin^+ o da uno \mathcal{S} di Sym^+ , quest'ultimo più semplice da trattare. La corrispondenza è garantita dal Lemma 1 ampiamente discusso in quella sede; all'elemento $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$ si fa corrispondere il tensore $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \in \mathcal{S}$. Le dimensioni delle due varietà differiscono tra loro di 3 e pertanto si ha un equivalente della Proposizione 11 nella seguente

Proposizione 12. *Non esiste una varietà di vincolo isotropa $\mathcal{S} \subset \text{Sym}^+$ di dimensione 2, 3 o 4.*

Prima di passare alla dimostrazione formale della Proposizione 12, è utile fare delle considerazioni generali su di essa. Ricordando il discorso fatto sulla dimensione di una varietà di vincolo generica in Lin^+ , in cui si associava la dimensione di questa con i gradi di libertà disponibili per descrivere una deformazione appartenente a essa, si proverà a procedere in modo analogo per il caso di una varietà di vincolo isotropa in Sym^+ . La sua dimensione può quindi venire associata ai gradi di libertà di una deformazione pura, che sono 6, di cui 3 per definire la terna ortogonale delle direzioni principali di allungamento (gli autovettori di \mathbf{U} o \mathbf{V}) e 3 per gli allungamenti principali (i corrispondenti autovalori).

Il caso della rigidità è rappresentato, come già detto, dal tensore identità in Sym^+ che è un punto e rappresenta quindi una varietà di vincolo di dimensione zero.

Per descrivere completamente il caso della conformalità, che rappresenta una dilatazione o una compressione omogenea del corpo, è necessario un unico grado di libertà, corrispondente al valore unico che assumono i tre allungamenti principali, proprio grazie all'isotropia del corpo e all'omogeneità della deformazione; ciò si traduce nella dimensione unitaria della varietà di vincolo associata.

Considerando invece un altro tipo di varietà isotropa, non è possibile togliere nessuno dei tre gradi di libertà che descrivono l'orientamento della terna delle direzioni principali di allungamento, perché la richiesta (C) della Definizione 27 non lo permette. Vincolando infatti in qualche modo tale orientamento, è sempre possibile trovare una rotazione che modifichi quest'ultimo rendendo quindi la deformazione in esame non appartenente alla varietà di vincolo.

Inoltre, è necessario avere almeno un grado di libertà per gli allungamenti principali, poiché una varietà di vincolo descritta da una terna di essi fissata e diversa da quella degli autovalori del tensore identità non risulta isotropa per via della condizione (B), proprio perché non ammette l'identità.

Pertanto, all'infuori del caso della rigidità e della conformalità, una varietà di vincolo isotropa deve avere una dimensione almeno pari a 4, cosa che esclude i casi di dimensioni uguali a 2 e a 3. Per dimostrare la Proposizione 12 rimane da escludere il caso di dimensione pari a 4, ma per far ciò è necessario utilizzare la richiesta (A) sulla struttura differenziabile della varietà di vincolo che risulta molto delicata. La dimostrazione riportata nel seguito, sfruttando questa ipotesi, riesce da sola a escludere tutti i casi di dimensione diversi da 1 e 5. Essa si basa sul seguente teorema, dove si è indicato con $\mathcal{S}_0 \subset \text{Sym}$ lo spazio tangente a \mathcal{S} nell'identità, cioè $\mathcal{S}_0 = \dot{\mathcal{S}}(\mathbf{I})$.

Teorema 9. *Sia \mathcal{S}_0 un sottospazio vettoriale proprio di Sym che soddisfa la seguente condizione:*

$$\mathbf{Q}\mathcal{S}_0\mathbf{Q}^T = \mathcal{S}_0 \quad (5.1)$$

per ogni $\mathbf{Q} \in \text{Rot}$. Allora,

$$\mathcal{S}_0 = \text{Sph} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{S}_0 = \text{Dev}.$$

La condizione (5.1) significa che lo spazio tangente a \mathcal{S} nell'identità è invariante sotto il gruppo delle rotazioni. Considerando, infatti, una curva $\mathbf{B}(t)$ in \mathcal{S} tale che $\mathbf{B}(0) = \mathbf{I}$ e $\dot{\mathbf{B}}(0) \in \mathcal{S}_0$ si può definire una generica curva

$$\hat{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T \in \mathcal{S} \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot}$$

che apparterrà alla varietà di vincolo per la (C) della definizione di \mathcal{S} e tale per cui $\hat{\mathbf{B}}(0) = \mathbf{Q}\mathbf{B}(0)\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ e

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{B}}(t)|_{t=0} = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{B}}(0)\mathbf{Q}^T \in \mathcal{S}_0,$$

appartenente di diritto allo spazio tangente nell'identità in quanto vettore tangente a una curva sulla varietà e passante proprio per l'identità.

Il Teorema 9 afferma che gli unici sottospazi di Sym che sono invarianti sotto il gruppo delle rotazioni e che, pertanto, soddisfano la (5.1), sono Sph e Dev. Si può infatti mostrare che Sph è invariante sotto il gruppo delle rotazioni considerando un suo generico elemento $\alpha\mathbf{I}$:

$$\mathbf{Q}\alpha\mathbf{I}\mathbf{Q}^T = \alpha\mathbf{Q}\mathbf{I}\mathbf{Q}^T = \alpha\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \alpha\mathbf{I} \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot}.$$

E si può fare lo stesso per lo spazio Dev prendendo un suo generico elemento a traccia nulla \mathbf{A} :

$$\text{tr}(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = \text{tr}(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}) = \text{tr} \mathbf{A} = 0 \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot}.$$

Ora bisogna dimostrare che non esiste nessun altro sottospazio di Sym che sia invariante sotto il gruppo delle rotazioni oltre a Sph e Dev. Per far ciò è necessario introdurre prima un lemma per la cui dimostrazione si rimanda a [17]:

Lemma 2. *Siano \mathbf{A} e \mathbf{B} una coppia di tensori simmetrici tali che $\mathbf{A} \notin \text{Sph}$ e, per*

ogni $\mathbf{Q} \in \text{Rot}$, si abbia

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T = 0. \quad (5.2)$$

Allora $\mathbf{B} \in \text{Sph}$.

Supponendo quindi che $\mathcal{S}_0 \neq \text{Sph}$, è possibile prendere un tensore \mathbf{A} in \mathcal{S}_0 tale per cui $\mathbf{A} \notin \text{Sph}$. Allora, in virtù della (5.1), qualsiasi tensore \mathbf{B} contenuto in \mathcal{S}_0^\perp soddisfa la (5.2), per ogni $\mathbf{Q} \in \text{Rot}$. Pertanto, il Lemma 2 implica che $\mathbf{B} \in \text{Sph}$ e, di conseguenza, $\mathcal{S}_0^\perp \subset \text{Sph}$. Dal momento che \mathcal{S}_0 dev'essere un sottospazio vettoriale proprio di Sym , si conclude che $\mathcal{S}_0^\perp = \text{Sph}$ e quindi $\mathcal{S}_0 = \text{Dev}$. Si è appena fatto vedere che $\mathcal{S}_0 = \text{Sph}$ o $\mathcal{S}_0 = \text{Dev}$ dimostrando così il Teorema 9.

Tornando quindi alla dimostrazione della Proposizione 12, si nota che Sph e Dev hanno dimensioni pari a 1 e 5, rispettivamente, e la dimensione della sottovarietà \mathcal{S} è la stessa del suo spazio tangente in ogni punto e quindi anche nell'identità. Di conseguenza, \mathcal{S} stessa risulta avere dimensione 1 o 5, fatto che esclude le possibilità intermedie.

Un vincolo interno isotropo per un corpo elastico può quindi essere descritto equivalentemente da una sottovarietà \mathcal{M} di Lin^+ di dimensione pari a 8, oppure da una sottovarietà \mathcal{S} di Sym^+ di dimensione pari a 5, escludendo i casi di rigidità e conformalità. Inoltre, spesso è possibile esprimere la varietà di vincolo associata per mezzo di una o più funzioni isotrope del tipo

$$g_i(i_1, i_2, i_3) = k,$$

con i_1, i_2 e i_3 gli invarianti scalari di \mathbf{V} e la costante k pari al valore delle funzioni g_i valutate in $(3, 3, 1)$, ovvero nei valori degli invarianti scalari del tensore identità, per fare in modo che la configurazione di riferimento appartenga alla varietà di vincolo.

Equivalentemente, la stessa varietà si può esprimere per mezzo di funzioni isotrope degli invarianti scalari di \mathbf{B} , I_1 , I_2 e I_3 , dal momento che si conoscono le relazioni che li legano a quelli del tensore \mathbf{V} :

$$\begin{aligned} I_1 &= i_1^2 - 2i_2, \\ I_2 &= i_2^2 - 2i_1 i_3, \\ I_3 &= i_3^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.2 Il contributo di Carroll: condizioni di ammissibilità

Dalle conclusioni della sezione precedente si può evincere che, date una qualsiasi terna di invarianti e delle funzioni isotrope e sufficientemente regolari, sia possibile costruire un'infinità di varietà di vincolo isotrope, a patto che esse rispettino le condizioni della Definizione 27. Tuttavia, oltre a ciò, è necessario imporre che i tre invarianti provengano solo da tensori simmetrici e definiti positivi, poiché tale è \mathbf{V} . Questa è la condizione più innovativa introdotta da Carroll nell'ambito della teoria dei vincoli interni, perché nei lavori sullo stesso argomento precedenti al suo non era mai stata richiesta esplicitamente. Compare nel già citato [2] ma anche in un altro articolo scritto con Agarwal [18], incentrato sulle condizioni di ammissibilità imposte sugli invarianti.

Per cercare delle condizioni sugli invarianti di un tensore simmetrico che impongano che questo sia definito positivo si osserva che i suoi autovalori devono essere reali e positivi e tali dovranno essere, di conseguenza, le radici del suo polinomio caratteristico. Pertanto, dato

$$\lambda^3 - i_1\lambda^2 + i_2\lambda - i_3 = 0, \quad (5.4)$$

si vuole che

$$0 < \lambda_p < \infty \quad p = 1, 2, 3.$$

La (5.4) è l'equazione di un polinomio di terzo grado e, affinché questo abbia tre radici reali e positive, bisogna prima di tutto imporre che i suoi coefficienti siano tali per cui

$$0 < i_p < \infty \quad p = 1, 2, 3 \quad (5.5)$$

e poi richiedere che il suo discriminante soddisfi una certa condizione che verrà ora introdotta. Applicando alla (5.4) il cambio di variabile

$$\lambda = \gamma + \frac{i_1}{3},$$

il polinomio caratteristico può essere riscritto nella forma seguente

$$\gamma^3 + p\gamma + q = 0, \quad (5.6)$$

con

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}(3i_2 - i_1^2), \\ q &= \frac{1}{27}(-2i_1^3 + 9i_1i_2 - 27i_3). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Successivamente, affinché la (5.6), e quindi la (5.4), abbiano tre radici reali, per la teoria dei polinomi di terzo grado si impone che il loro discriminante, coincidente nei due casi, sia non positivo:

$$\delta = \delta(i_1, i_2, i_3) = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0,$$

ovvero

$$27q^2 + 4p^3 \leq 0. \quad (5.8)$$

Sostituendo quindi le (5.7) nella (5.8) e svolgendo i conti si arriva a

$$-4i_1^3i_3 + i_1^2i_2^2 + 18i_1i_2i_3 - 4i_2^3 - 27i_3^2 \geq 0. \quad (5.9)$$

Le (5.5) insieme alla (5.9) appena trovata costituiscono le *condizioni di ammissibilità* che una terna di invarianti scalari (i_1, i_2, i_3) deve soddisfare per provenire da un tensore definito positivo.

La (5.9) può essere riscritta in diversi modi. Per prima cosa si osserva che la (5.8) impone che la quantità p sia minore o uguale a zero e quindi tale relazione si può riscrivere come

$$\frac{27q^2}{-4p^3} \leq 1, \quad (5.10)$$

avendo diviso per una quantità sempre positiva $(-4p^3)$, se si esclude il caso in cui $p = 0$, che verrà considerato in seguito. La (5.10) corrisponde alle due disuguaglianze

$$-1 \leq \frac{\sqrt{27q}}{2(-p)^{\frac{3}{2}}} \leq 1$$

e quindi, una volta sostituite le (5.7), alle

$$-1 \leq s \leq 1, \quad (5.11)$$

con

$$s = \frac{2i_1^3 - 9i_1i_2 + 27i_3}{(i_1^2 - 3i_2)^{\frac{3}{2}}},$$

denominato *rapporto di Signorini*. Il caso $p = 0$ corrisponde alla relazione

$$i_1^2 = 3i_2$$

e quindi, in termini degli autovalori λ_i , a

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,$$

relazione soddisfatta solo nel caso in cui $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, ovvero quando si sta trattando una deformazione conforme. Il tensore sinistro di deformazione nel caso della conformalità è sicuramente simmetrico e definito positivo e non è quindi necessario che i suoi invarianti scalari soddisfino la condizione di ammissibilità (5.11). Pertanto, le terne di invarianti che soddisfano la (5.9) sono tutte le terne che soddisfano la (5.11) più quelle del tipo $(3\lambda, 3\lambda^2, \lambda^3)$, che corrispondono a una deformazione conforme.

Per ottenere un'altra scrittura della (5.9), si osserva che, essendo le radici del polinomio caratteristico $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ funzioni continue dei coefficienti (i_1, i_2, i_3) , il passaggio da una coppia di radici reali, possibile solo con discriminante non positivo, a una coppia di radici complesse coniugate, che si ha solo quando il discriminante è positivo, implica la coalescenza delle radici. Ciò significa che il discriminante deve annullarsi quando due radici sono uguali. Inoltre, il discriminante è un polinomio omogeneo di sesto grado nei suoi argomenti λ_i . Queste due considerazioni messe insieme, portano a scrivere la (5.9) nella forma seguente:

$$k(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2 \geq 0 \quad k > 0. \quad (5.12)$$

La costante k si trova confrontando la (5.9) con la (5.12) per ogni insieme di invarianti. Scegliendo, per esempio, la terna $(1, 2, 3)$ dei λ_i , per la quale la (5.9) vale 108 e la (5.12) vale $4k$, si trova che $k = 27$ e quindi

$$\delta = 27(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2.$$

Si sarebbe anche potuto ottenere la (5.9) direttamente dalla (5.12), esprimendo i λ_i in funzione degli invarianti i_i ed eseguendo i conti. Apparentemente la (5.12) sembra sempre verificata perché il membro sinistro è una quantità sempre positiva, ma i λ_i prendono valori nel campo complesso e quindi tale relazione esclude proprio le radici complesse.

Le (5.11), infine, descrivono nello spazio degli invarianti (i_1, i_2, i_3) una regione,

denominata *regione di ammissibilità*, corrispondente alle terne di invarianti provenienti da tensori simmetrici e definiti positivi. Tale regione verrà analizzata più dettagliatamente nella prossima sezione.

5.2.1 Rappresentazione grafica

La regione di ammissibilità degli invarianti scalari di \mathbf{V} può essere rappresentata in uno spazio cartesiano tridimensionale per mezzo di coordinate dipendenti dagli invarianti stessi e utilizzando le condizioni di ammissibilità. Per semplificare le cose, si può osservare che l'ammissibilità di una terna di invarianti (i_1, i_2, i_3) , corrispondenti agli allungamenti principali $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, implica l'ammissibilità della terna (ai_1, a^2i_2, a^3i_3) , con $a > 0$, che corrisponde a $(a\lambda_1, a\lambda_2, a\lambda_3)$. Questo si vede per esempio dal fatto che le due terne di invarianti considerate hanno lo stesso rapporto di Signorini. Allora si introducono gli invarianti (x, y, z) definiti come

$$x = i_1, \quad y = i_2^{1/2}, \quad z = i_3^{1/3}, \quad (5.13)$$

per i quali l'ammissibilità della terna (x, y, z) implica l'ammissibilità della terna (ax, ay, az) , per ogni $a > 0$. Scegliendo (x, y, z) come una terna di assi cartesiani, le (5.5) implicano che la regione di ammissibilità degli invarianti si trovi nell'ottante positivo dello spazio (x, y, z) e, inoltre, essa corrisponde a un cono con il vertice nell'origine, dal momento che (ax, ay, az) appartiene alla regione per ogni $a > 0$ e ogni (x, y, z) già appartenente. Ed è questo il motivo del cambiamento di coordinate (5.13).

Per visualizzare meglio la regione è utile passare alle coordinate sferiche (r, θ, φ) , definite come

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (5.14)$$

con

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

per selezionare l'ottante positivo. La terna (r, θ, φ) è, quindi, un'altra terna di invarianti isotropi definiti tramite le (5.13) e le (5.14) come

$$r = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2}, \quad \theta = \arccos \left(\frac{i_3^{1/3}}{r} \right), \quad \varphi = \arctan \left(\frac{i_2^{1/2}}{i_1} \right). \quad (5.15)$$

Si noti che, essendo la regione ammissibile un cono con il vertice nell'origine degli assi nello spazio (x, y, z) , l'ammissibilità della terna (r_1, θ, φ) implica quella della terna (r_2, θ, φ) per ogni scelta di r_2 e, di conseguenza, si possono considerare solo gli invarianti θ e φ per stabilire se una terna è contenuta nella regione.

Si presentano ora le deformazioni rigide e conformi rappresentate mediante le diverse terne di invarianti. Uno stato di deformazione rigida è descritto da una terna di allungamenti principali tutti pari a uno, a cui corrisponde la terna di invarianti scalari $(3, 3, 1)$, oppure, in termini degli invarianti in coordinate sferiche appena introdotti, dalla terna $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, con

$$r_0 = \sqrt{13}, \quad \theta_0 = \operatorname{arcsec} \sqrt{13}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \quad (5.16)$$

valori ottenuti sostituendo nelle (5.15) la terna $(3, 3, 1)$. Per quanto riguarda, invece, uno stato di deformazione conforme la terna degli allungamenti principali è del tipo $(\lambda, \lambda, \lambda)$, quella degli invarianti scalari è $(3\lambda, 3\lambda^2, \lambda^3)$, mentre quella in termini degli invarianti in coordinate sferiche risulta (r, θ_0, φ_0) , dipendente quindi da un solo parametro e per la quale valgono ancora le (5.16).

Al fine di avere una rappresentazione grafica della regione di ammissibilità, si sfrutta il fatto che essa, nello spazio (x, y, z) , coincide con un cono centrato nell'origine e, pertanto, risulta comodo rappresentare solo la sua intersezione, nel piano (θ, φ) , con una sfera di raggio r costante centrata nell'origine. Calcolando il rapporto di Signorini in coordinate sferiche, si ottiene la seguente rappresentazione analitica della regione

$$-1 \leq \frac{\cos \varphi (11 \cos^2 \varphi - 9) + 27 \cot^3 \theta}{2(4 \cos^2 \varphi - 3)^{3/2}} \leq 1.$$

Tale regione nel piano (θ, φ) rappresenta quindi la regione di ammissibilità su una qualsiasi sfera di raggio r costante e, a partire da essa, è possibile risalire all'intero cono.

La regione, rappresentata nella Figura 5.1, è delimitata dalle curve PS e QS , che corrispondono rispettivamente ai casi in cui il rapporto di Signorini è pari a 1 e -1 (che rappresentano stati di deformazione simmetrica), e dalla linea PQ ($\theta = \pi/2$) che non è compresa nella regione, in quanto corrispondente al limite per $i_3 \rightarrow 0$. Il punto S di coordinate (θ_0, φ_0) rappresenta gli stati di deformazione conforme, ovvero tutti quelli che si ottengono applicando una deformazione con un gradiente multiplo del tensore identità. Fissando poi $r = r_0$, S , che in questo caso viene indicato con S_0 , corrisponde allo stato di deformazione rigida e quindi al tensore identità sulla varietà di vincolo. In esso è presente una cuspidine generata dalle curve PS e QS , in

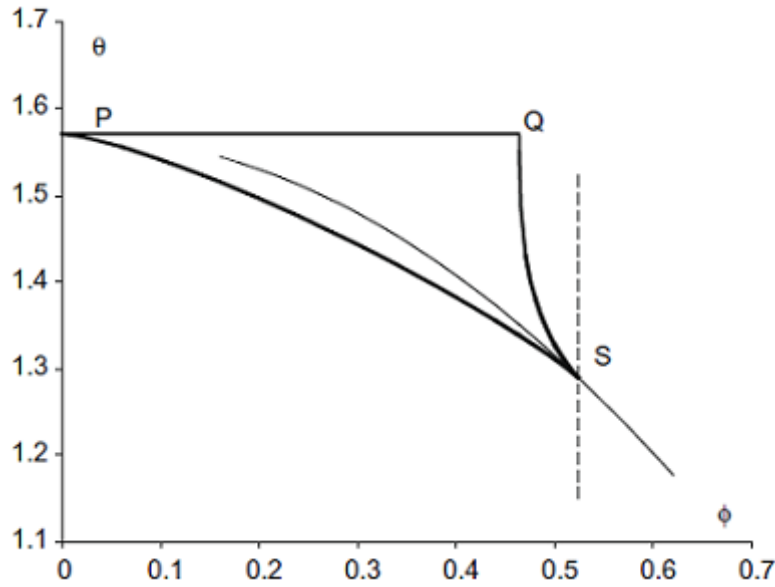


Figura 5.1: Regione di ammissibilità

cui la pendenza, calcolata a partire dal rapporto di Signorini in coordinate sferiche posto prima uguale a 1 e poi a -1 , risulta essere pari a

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)_0 = -\frac{14}{13}.$$

La presenza della cuspidè nel punto S è una conseguenza del fatto che il gradiente del discriminante δ si annulli per stati di deformazione conforme, avendo infatti

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial i_1}, \frac{\partial\delta}{\partial i_2}, \frac{\partial\delta}{\partial i_3}\right)_0 = (0, 0, 0)$$

e ricordando che $\delta \leq 0$ è un'altra rappresentazione della regione di ammissibilità. La regione in Figura 5.1, infatti, è delimitata dal triangoloide PQS , nel quale il lato PQ , non appartenente alla regione, corrisponde alla limitazione $\theta < \pi/2$, mentre PS e QS fanno parte della stessa curva definita implicitamente da $\delta = 0$ che presenta un punto singolare proprio in S .

Nella definizione di varietà di vincolo del Capitolo 4 si era richiesto che la configurazione di riferimento rispettasse i vincoli imposti e che conseguentemente il tensore di identità appartenesse alla varietà stessa. Questa richiesta, che in prima analisi sembra ragionevole e priva di criticità, risulta invece essere molto delicata, dal momento che il punto corrispondente al tensore identità si trova innanzitutto sulla frontiera della regione di ammissibilità e poi proprio in corrispondenza di una

cuspidale. Pertanto, l'arbitrarietà nella scelta di un vincolo isotropo viene limitata da tutte queste condizioni che provengono dalla richiesta che il vincolo sia imposto analiticamente sugli invarianti scalari di un tensore simmetrico e definito positivo.

5.2.2 Altra espressione della regione di ammissibilità

Tutti i modi introdotti fin qui per esprimere le condizioni di ammissibilità non hanno un'interpretazione geometrica immediata nello spazio degli invarianti di \mathbf{V} o in quello dei suoi autovalori. Pertanto, si è provato a utilizzare un'altra terna di invarianti scalari cercando un'espressione analitica che potesse avere un'espressività maggiore. Si è considerata la terna (I_1, I_2, I_3) definita come

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{V}, \quad I_2 = \text{tr}(\mathbf{V}^2), \quad I_3 = \text{tr}(\mathbf{V}^3) \quad (5.17)$$

e, prima di tutto, si è verificato che essa fosse in corrispondenza biunivoca con (i_1, i_2, i_3) . Grazie al teorema di Cayley-Hamilton, che asserisce che ogni tensore soddisfa il proprio polinomio caratteristico, è possibile scrivere la seguente relazione

$$\mathbf{V}^3 - i_1 \mathbf{V}^2 + i_2 \mathbf{V} - i_3 = 0$$

e applicarvi l'operatore traccia, ottenendo

$$\text{tr}(\mathbf{V}^3) - i_1 \text{tr}(\mathbf{V}^2) + i_2 \text{tr } \mathbf{V} - i_3 = 0$$

e quindi

$$i_3 = \text{tr}(\mathbf{V}^3) - (\text{tr } \mathbf{V})(\text{tr}(\mathbf{V}^2)) + \left(\frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{V})^2 - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{V}^2)\right) \text{tr } \mathbf{V}.$$

Facendo i conti si arriva a

$$i_3 = \text{tr}(\mathbf{V}^3) - \frac{3}{2}(\text{tr } \mathbf{V})(\text{tr}(\mathbf{V}^2)) + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{V}^3)$$

e, utilizzando le (5.17), si ottengono le relazioni cercate

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 \\ i_2 &= \frac{1}{2} I_1^2 - \frac{1}{2} I_2 \\ i_3 &= I_3 - \frac{3}{2} I_1 I_2 + \frac{1}{2} I_1^3, \end{aligned} \quad (5.18)$$

che possono essere facilmente invertite:

$$\begin{aligned} I_1 &= i_1 \\ I_2 &= i_1^2 - 2i_2 \\ I_3 &= i_3 - 3i_1i_2 + i_1^3. \end{aligned}$$

Andando ora a sostituire le (5.18) nella (5.9) si ottiene una relazione ancora meno espressiva dal punto di vista dell'interpretazione geometrica della regione di ammissibilità rappresentata e più complicata analiticamente:

$$-\frac{9}{2}I_1^6 - 22I_1^3I_3 + \frac{59}{2}I_1^4I_2 - \frac{97}{2}I_1^2I_2^2 + 72I_1I_2I_3 + \frac{1}{2}I_2^3 - 27I_3^2 \geq 0.$$

Pertanto, non si è neanche provato a calcolare il corrispondente rapporto di Signorini, né a passare in coordinate sferiche. L'impressione è che, anche provando a sostituire altre terne di invarianti, non sia possibile ottenere un'espressione migliore in questo senso e la rappresentazione più eloquente della regione di ammissibilità rimane quella della Figura 5.1.

5.3 Il contributo di Carroll: vincoli isotropi

Considerando la definizione di vincolo interno isotropo come una condizione del tipo

$$f(i_1, i_2, i_3) = 0, \quad f(3, 3, 1) = 0, \quad (5.19)$$

con f funzione simmetrica nei suoi argomenti, e facendo uso delle (5.13), (5.14), (5.15) e (5.16), si può scrivere la corrispondente condizione in termini della terna di invarianti in coordinate sferiche introdotta nella sezione precedente come segue:

$$F(r, \theta, \varphi) = 0, \quad F(r_0, \theta_0, \varphi_0) = 0. \quad (5.20)$$

Gli invarianti scalari i_p che compaiono nella (5.19) sono quelli del tensore di deformazione \mathbf{V} , ma si potrebbe scrivere una relazione equivalente per gli invarianti I_p del tensore sinistro di Cauchy-Green \mathbf{B} , come fatto nel Capitolo 4 nella (4.18), usando le (5.3), oppure definire direttamente il vincolo attraverso funzioni isotrope degli invarianti di \mathbf{B} .

Carroll introduce una nuova definizione di vincolo isotropo, giudicando la (5.19) e la (5.20) troppo generiche:

Definizione 28. Una condizione (5.20) è un vincolo isotropo se si presenta in una delle due seguenti forme

$$r = R(\theta, \varphi), \quad r_0 = R(\theta_0, \varphi_0), \quad (5.21)$$

oppure

$$F(r, \theta, \varphi) = r^d P(\theta, \varphi) = 0, \quad F(r_0, \theta_0, \varphi_0) = 0. \quad (5.22)$$

La condizione (5.22) è equivalente a

$$P(\theta, \varphi) = 0, \quad P(\theta_0, \varphi_0) = 0 \quad (5.23)$$

e si presenta quando la funzione f della (5.19) è omogenea di grado d nei suoi argomenti. Le due forme appena introdotte per esprimere un vincolo isotropo prendono nomi differenti secondo la seguente

Definizione 29. Un vincolo del tipo (5.22) o (5.23) è omogeneo e un vincolo del tipo (5.21) è non omogeneo. La forma ridotta (5.23) è la proiezione del vincolo omogeneo su una sfera con raggio r costante.

In sostanza, Carroll introduce due modi per definire un vincolo isotropo e la loro rappresentazione per mezzo delle coordinate sferiche (r, θ, φ) semplifica ancora una volta il modo di vederli. Un vincolo non omogeneo, infatti, può essere visto come una superficie parametrizzata da (θ, φ) , perché la prima delle (5.21) assegna una distanza radiale r dall'origine degli assi cartesiani (x, y, z) per ogni coppia (θ, φ) . L'insieme aperto su cui variano i punti (θ, φ) non è un sottoinsieme del piano (x, y) , come accade per le superfici classiche, ma è un sottoinsieme di una qualsiasi superficie sferica di raggio r costante. Per quanto riguarda, invece, un vincolo omogeneo, esso è rappresentato da un cono passante per una curva parametrizzata dalle (5.23), la quale vive su una qualsiasi superficie sferica di raggio r costante. Pertanto, di qualunque natura sia il vincolo, esso riduce la possibilità di assumere qualsiasi valore alla terna di invarianti (x, y, z) , e quindi (i_1, i_2, i_3) , imponendo così indirettamente una restrizione sul tensore gradiente di deformazione \mathbf{F} . Nello spazio degli invarianti (x, y, z) di dimensione 3 un vincolo isotropo è quindi rappresentato da una varietà di dimensione 2, sia esso omogeneo o non omogeneo.

Bisogna subito notare che la terna $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, che corrisponde al vincolo di rigidità, appartiene sempre a un vincolo non omogeneo per la seconda delle (5.21) e che non esiste nessun altro valore di r associato alla coppia (θ_0, φ_0) che appartenga a tale

vincolo. Per un vincolo omogeneo, invece, tutte le possibili terne (r, θ_0, φ_0) , che corrispondono al vincolo di conformalità, appartengono sempre al vincolo; tra di esse è ovviamente compresa anche quella con r_0 . Pertanto, una deformazione rigida soddisfa ogni tipo di vincolo, sia esso omogeneo o non, mentre una deformazione conforme è sempre contenuta in un vincolo omogeneo. Dal momento che una deformazione rigida ha come gradiente di deformazione il tensore identità, anche la definizione di vincolo isotropo data da Carroll rispetta la condizione dell'appartenenza della configurazione di riferimento al vincolo.

Un altro esempio noto di vincolo è quello d'incomprimibilità che si esprime per mezzo della relazione $i_3 = 1$, che implica $z = 1$ e, di conseguenza,

$$r = \frac{1}{\cos \theta}, \quad r_0 = \frac{1}{\cos \theta_0}$$

e quindi viene classificato come vincolo non omogeneo, poiché si sono ottenute delle espressioni del tipo delle (5.21).

Ancora non si è fatto riferimento alla regione di ammissibilità, quindi i vincoli che rispettano le definizioni appena introdotte possono essere ammissibili o no. Nel seguito verranno distinti meglio i due casi.

Si riporta un corollario che segue direttamente dalle Definizioni 28 e 29:

Corollario 2. *Due vincoli non omogenei sono equivalenti a un vincolo omogeneo e a uno non omogeneo.*

Considerando, infatti, l'insieme di due vincoli non omogenei

$$r = R_1(\theta, \varphi), \quad r = R_2(\theta, \varphi), \quad (5.24)$$

esso risulta equivalente al seguente insieme, costituito da un vincolo omogeneo e uno non omogeneo:

$$P(\theta, \varphi) = R_1(\theta, \varphi) - R_2(\theta, \varphi) = 0, \quad r = R_1(\theta, \varphi). \quad (5.25)$$

Nello spazio (x, y, z) i due vincoli non omogenei, rappresentati dalle due superfici parametrizzate dalle (5.24), si intersecano lungo una curva che può essere ottenuta equivalentemente dall'intersezione di uno di essi con il vincolo omogeneo descritto dalla prima equazione delle (5.25).

Per distinguere vincoli ammissibili da vincoli non ammissibili si introduce la seguente

Definizione 30. *La proiezione (5.23) di un vincolo omogeneo è una curva su una sfera di raggio r costante che passa per il punto di conformalità $S(\theta_0, \varphi_0)$. Se questa entra nella regione di ammissibilità, ovvero se*

$$-1 \leq s \leq 1, \quad \theta < \frac{\pi}{2},$$

allora il vincolo omogeneo si dice compatibile, altrimenti si dice incompatibile.

Affinché la curva di proiezione del vincolo entri effettivamente nella regione di ammissibilità, non basta che essa passi per il punto S , ma in quel punto deve innanzitutto avere una tangente pari a quella della cuspidale presente in S , cioè deve succedere che

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)_0 = - \left(\frac{14}{13} \right),$$

e poi bisogna imporre un'ulteriore condizione per escludere i casi di curve con la giusta tangente ma che poi non proseguono all'interno della regione, toccandola solamente in S . Tale condizione si scrive come segue:

$$\theta^-(\varepsilon) \leq \theta(\varepsilon) \leq \theta^+(\varepsilon), \tag{5.26}$$

con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e tale che:

$$s(\theta^-, \varphi_0 - \varepsilon) = 1, \tag{5.27}$$

$$P(\theta, \varphi_0 - \varepsilon) = 0, \tag{5.28}$$

$$s(\theta^+, \varphi_0 - \varepsilon) = -1. \tag{5.29}$$

Facendo riferimento ancora alla Figura 5.1, queste tre condizioni impongono che la curva di proiezione, in un intorno sinistro rispetto a φ_0 , definito dalla (5.28), sia compresa tra la curva PS , per la (5.27), e la curva QS , per la (5.29), dal momento che con le (5.26) si è imposto l'intervallo in cui può variare θ in tale intorno. La condizione (5.28), ancora insieme alle (5.26), implica che i punti (θ, φ) per i quali si sono imposte le condizioni si trovino effettivamente lungo la curva di proiezione. Si fa notare ancora una volta che tutte queste condizioni apparentemente cavillose devono essere imposte per garantire l'appartenenza al vincolo della configurazione di riferimento.

La definizione di vincoli omogenei compatibili e non compatibili si estende anche ai casi di insiemi di due vincoli non omogenei, o equivalentemente di un vincolo omogeneo e uno non omogeneo, considerando l'appartenenza o meno della curva di

proiezione dell'intersezione dei due vincoli alla regione di ammissibilità.

5.4 Il contributo di Carroll: dimensione di una varietà di vincolo isotropa

Verranno riportate le sei proposizioni con le quali Carroll descrive completamente la relazione esistente tra un insieme di vincoli isotropi imposti sulla deformazione e la dimensione della varietà di vincolo associata. Nel Capitolo 4, seguendo Podio-Guidugli e Vianello, si era detto che il vincolo di rigidità corrisponde a una varietà di vincolo di dimensione 3, il vincolo di conformalità a una di dimensione 4 e si era giunti alla conclusione che qualsiasi altro vincolo isotropo corrisponde a una varietà di vincolo di dimensione 8, considerando sempre come spazio ambiente Lin^+ . Carroll, invece, introducendo queste proposizioni, arriva a costruire delle varietà di vincolo isotrope di dimensione 7, cosa che va in contrasto con la teoria sviluppata fin qui. Nel suo lavoro propone poi quattro possibili controesempi che dimostrerebbero i risultati da lui ottenuti e smentirebbero quelli di Podio-Guidugli e Vianello. Prima di discutere nel dettaglio i presunti controesempi, che saranno affrontati ampiamente nel Capitolo 6, è necessario riportare le sei proposizioni su cui si poggia la teoria di Carroll.

È necessario far notare fin da subito che nel suo articolo Carroll considera erroneamente la dimensione della varietà di vincolo associata alla rigidità pari a 6 e quella associata alla conformalità uguale a 7, affermando che lo stesso avevano fatto Podio-Guidugli e Vianello in [1]. Tuttavia, in [1] viene detto espressamente e giustamente che la dimensione della varietà associata alla rigidità è 3, coincidente con quella del gruppo delle rotazioni Rot , e quella della conformalità è 4. Tutto ciò è già stato mostrato ampiamente nel Capitolo 4 e non ci si dilungherà ulteriormente nel seguito.

Tornando alle sei proposizioni di Carroll, esse permettono di calcolare la dimensione di una varietà di vincolo definita in Lin^+ tramite lo studio delle varietà che si generano nello spazio (x, y, z) , introdotto nelle sezioni precedenti, imponendo i vincoli per mezzo di funzioni degli invarianti scalari di \mathbf{V} . In particolare, si ricordi che ogni curva o superficie in (x, y, z) che definisce un vincolo deve passare per il punto di rigidità S_0 (proiezione radiale su una sfera di raggio pari a r_0 di tutti i punti corrispondenti a stati conformi) e che il punto stesso corrisponde al vincolo di rigidità. Inoltre, la retta dello spazio (x, y, z) costituita dai punti con coordinate

sferiche del tipo (r, θ_0, φ_0) sarà chiamata retta di conformalità o retta degli stati conformi.

5.4.1 Vincoli omogenei

Proposizione 13. *Un vincolo omogeneo corrisponde a una varietà di vincolo di dimensione 8 se è compatibile e implica la conformalità se è incompatibile.*

Un vincolo omogeneo riduce infatti di uno i gradi di libertà del tensore gradiente di deformazione \mathbf{F} , che in generale sono 9, introducendo una relazione tra gli invarianti del tensore di deformazione \mathbf{V} , direttamente legato a \mathbf{F} tramite la decomposizione polare. La dimensione della varietà di vincolo corrispondente risulta, di conseguenza, pari a 8. Tuttavia, il vincolo potrebbe non essere ammissibile, ovvero la sua curva di proiezione nel piano degli invarianti (θ, φ) potrebbe non entrare nella regione di ammissibilità. In questo caso, in cui il vincolo omogeneo viene detto incompatibile, solo la retta degli stati conformi sarebbe all'interno di tale regione, implicando quindi la varietà di vincolo conforme.

Le seguenti due proposizioni si riferiscono all'intersezione di due o più vincoli omogenei.

Proposizione 14. *Un insieme di due o più vincoli omogenei implica la conformalità.*

L'intersezione tra due o più vincoli omogenei diversi tra loro nello spazio degli invarianti (x, y, z) si riduce, di fatto, alla retta degli stati conformi, implicando quindi la conformalità, dal momento che i due vincoli sono dei coni passanti per tale retta; pertanto, solo questa retta è compresa nella regione di ammissibilità. Inoltre, essendo vincoli omogenei, tutte le terne del tipo (r, θ_0, φ_0) sono ammesse e quindi con un'intersezione tra vincoli di questo tipo non è possibile ottenere il caso in cui solo la terna $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ sia ammissibile, che corrisponde alla rigidità, proprio perché il valore dell'invariante r non viene limitato in alcun modo. La seguente proposizione si riferisce proprio a questo:

Proposizione 15. *Un insieme di vincoli omogenei, di qualsiasi grandezza, non implica la rigidità.*

Pertanto, non è possibile costruire una varietà di vincolo di dimensione diversa da 4, corrispondente al caso della conformalità, e da 8, utilizzando solo vincoli omogenei. Inoltre, ogni vincolo omogeneo deve contenere tutte le deformazioni conformi, cosa che impedisce alla deformazione rigida di appartenervi.

5.4.2 Vincoli non omogenei

Le prossime tre proposizioni si riferiscono ai vincoli non omogenei e alle possibili intersezioni tra due o più di essi.

Proposizione 16. *Un vincolo non omogeneo corrisponde a una varietà di vincolo di dimensione 8.*

Come per il caso di vincoli omogenei, anche qui un vincolo non omogeneo introduce una relazione tra gli invarianti di \mathbf{V} , e quindi di \mathbf{F} , abbassando di uno la dimensione in cui vive \mathbf{F} e definendo quindi una varietà di vincolo di dimensione pari a 8.

Proposizione 17. *Un insieme di due vincoli non omogenei, o un insieme di un vincolo non omogeneo e di un vincolo omogeneo, corrisponde a una varietà di vincolo di dimensione 7 se è compatibile e implica la rigidità se è incompatibile.*

La curva di proiezione dell'intersezione di due vincoli non omogenei nello spazio degli invarianti (x, y, z) passa sicuramente per il punto associato alla terna di coordinate sferiche $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, che corrisponde alla rigidità, in quanto unico punto in comune a tutti i vincoli non omogenei. Se poi tale proiezione è incompatibile, allora questo risulta essere l'unico punto della varietà di vincolo e si rientra quindi nel caso della rigidità. Se, invece, la proiezione è compatibile, anche l'insieme dei due vincoli è compatibile e la varietà di vincolo associata risulta avere una dimensione pari a 7, dal momento che ciascuno dei due vincoli introduce una relazione tra gli invarianti di \mathbf{V} , e quindi di \mathbf{F} , riducendo di due la dimensione totale dello spazio in cui vive il tensore \mathbf{F} soggetto all'insieme di vincoli. Un altro modo per vedere ciò è notare che le (5.25) definiscono la coordinata r in funzione di un solo parametro. Infine, per il Corollario 2 sussistono le stesse proprietà per un insieme di un vincolo non omogeneo e di uno omogeneo.

Proposizione 18. *Un insieme di tre o più vincoli implica la rigidità se almeno un vincolo è non omogeneo.*

L'intersezione tra tre o più vincoli non omogenei nel piano degli invarianti (x, y, z) si riduce al solo punto di rigidità corrispondente alla terna di coordinate sferiche $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ per quanto detto fin qui. Per il Corollario 2 poi a ogni coppia di vincoli non omogenei si può sostituire una coppia costituita da un vincolo omogeneo e uno non omogeneo. Pertanto, se la Proposizione 18 vale per tre vincoli non omogenei, come appena mostrato, allora vale anche per due vincoli non omogenei e uno omogeneo e poi per uno non omogeneo e due omogenei.

5.4.3 Considerazioni finali

Nelle proposizioni introdotte ogni volta che si intersecano due vincoli omogenei, rappresentati da due coni in (x, y, z) , si considera come unica intersezione la retta di conformalità e non ci si pone mai il problema, al momento di calcolare la dimensione della varietà associata, se questa sia l'insieme di tutti i punti di intersezione o se vi siano altri punti altrove. Allo stesso modo, intersecando due vincoli non omogenei, rappresentati da due superfici in (x, y, z) , si assume che la loro intersezione sia costituita da una sola curva. Così facendo si ottengono sempre delle varietà di vincolo connesse, ma ciò non viene segnalato da Carroll, quindi si presume che sia stato assunto implicitamente, la qual cosa conferirebbe alla sua definizione di vincolo isotropo un altro punto in comune con quella del Capitolo 4.

In conclusione, utilizzando dei vincoli non omogenei è possibile costruire delle varietà di vincolo di dimensione 7, cosa apparentemente in contrasto con quanto detto nel Capitolo 4. Le sei proposizioni di Carroll asseriscono, quindi, che la dimensione di una varietà di vincolo isotropa, a esclusione dei casi semplici di rigidità e conformalità, possa essere 7 o 8 a seconda delle funzioni utilizzate per descrivere i vincoli imposti. Questi risultati sono perfettamente coerenti con la Definizione 28 di vincolo isotropo data da Carroll; tuttavia, essa è diversa dalla Definizione 27 presentata nella Sezione 4.4 del capitolo precedente. La differenza sostanziale sta nel fatto che quella richiedeva che una varietà di vincolo avesse la struttura matematica di sottovarietà differenziabile connessa di Sym^+ , mentre questa richiede solo una struttura di varietà algebrica. Pertanto, le proposizioni introdotte sarebbero effettivamente in contrasto con le conclusioni del Capitolo 4 se anch'esse si riferissero a varietà differenziabili e non solo algebriche, ma non è questo il caso perché si mostrerà nel seguito che nessuno dei controesempi proposti da Carroll ha questa proprietà.

Capitolo 6

Discussione sui controesempi proposti da Carroll

Nel Capitolo 5 si era accennato al fatto che Carroll nel suo articolo [2] avesse proposto quattro possibili controesempi alla teoria sui vincoli interni isotropi esposta da Podio-Guidugli e Vianello, secondo cui una varietà di vincolo isotropa, fatta eccezione per i casi di rigidità e conformalità, ha sempre una dimensione pari a 8 in Lin^+ . Carroll, dopo aver introdotto una nuova definizione di vincolo isotropo e presentato le sei proposizioni che descrivono tutti i modi possibili per definire la varietà di vincolo associata, era arrivato alla conclusione che potessero esistere varietà così costruite di dimensione 7, proponendo appunto quattro controesempi.

Questo capitolo è quindi dedicato interamente allo studio dei suddetti controesempi che, attraverso delle tecniche ereditate dalla geometria differenziale, vengono dimostrati non essere tali, in quanto non concordi con la Definizione 25 di varietà di vincolo introdotta nel Capitolo 4, per via del fatto che le varietà di vincolo che si generano non possiedono la struttura di varietà differenziabile.

Pertanto, una varietà di vincolo isotropa ha sempre dimensione 8 in Lin^+ o 5 in Sym^+ , escludendo i casi di rigidità e conformalità.

Il problema in esame viene trasportato nel mondo della geometria differenziale dove risulta più comodo e intuitivo da studiare e il cambio di prospettiva conferisce un certo fascino alla tecnica utilizzata.

6.1 Struttura dei controesempi

6.1.1 Introduzione

I controesempi proposti che genererebbero delle varietà di vincolo di dimensione 7 vengono presentati assegnando le restrizioni sulla terna degli allungamenti principali, che sono gli autovalori del tensore sinistro di deformazione \mathbf{V} , che un tensore deve soddisfare per appartenere a tale varietà. Sono tutte varietà di vincolo generate dall'intersezione di due vincoli non omogenei, o da uno omogeneo e uno non, come affermato nella Proposizione 17.

I quattro casi proposti vengono sempre descritti da terne dipendenti da un solo parametro:

- $(\lambda, 1, 1)$ che descrive una deformazione uniassiale;
- $(\lambda, \lambda, 1)$ che rappresenta una deformazione omogenea biassiale;
- $(\lambda, \lambda, \frac{1}{\lambda^2})$ che è una deformazione isocora con due autovalori coincidenti;
- $(\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1)$ che rappresenta una deformazione isocora più generica.

Nel seguito si è preferito studiare questi vincoli isotropi nello spazio Sym^+ piuttosto che in Lin^+ , sfruttando la corrispondenza biunivoca esistente tra una varietà di vincolo isotropa \mathcal{S} in Sym^+ e una \mathcal{M} in Lin^+ , come visto nella Sezione 4.4 del Capitolo 4. Inoltre, le terne degli autovalori presentate da Carroll si riferiscono al tensore \mathbf{V} , ma si considereranno come se fossero riferite al tensore \mathbf{B} , in quanto, grazie alla relazione $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$, rappresentano lo stesso vincolo. Per convincersene basta osservare che la terna $(\lambda, 1, 1)$ degli autovalori di \mathbf{V} corrisponde alla terna $(\lambda^2, 1, 1)$ di quelli di \mathbf{B} che può essere riscritta come $(\mu, 1, 1)$, dal momento che gli autovalori in questi casi sono sempre positivi. Lo stesso discorso vale anche per gli altri tre controesempi e quindi, in definitiva, bisognerà dimostrare che i vincoli proposti da Carroll non abbiano dimensione 4 in Sym^+ , ricordando che $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{S} + 3$.

Già Vianello in [17] aveva dimostrato che il vincolo rappresentato dalla terna $(\lambda, 1/\lambda, 1)$ non produce una sottovarietà differenziabile connessa di Sym^+ facendo vedere che in corrispondenza del tensore identità non è definito uno spazio tangente. In particolare, aveva scritto il vincolo come intersezione di due vincoli, definiti implicitamente da due funzioni degli invarianti di \mathbf{B} , ognuno dei quali costituiva una varietà differenziabile di dimensione 5 in Sym^+ . Successivamente, aveva mostrato che l'intersezione dei due vincoli costituiva una varietà differenziabile di dimensione

4 in ogni suo punto diverso dall'identità e, attraverso uno studio sui vettori tangenti, era giunto alla conclusione che un eventuale spazio tangente nell'identità avesse dovuto avere una dimensione pari a 5, ovvero superiore a quella della varietà stessa, cosa che la privava della sua natura differenziabile.

In un primo momento si era provato ad applicare la stessa tecnica ai restanti tre controesempi incontrando però sempre delle difficoltà apparentemente insormontabili, poiché o non è stato possibile descrivere il vincolo come intersezione di due vincoli espressi implicitamente da funzioni degli invarianti o, nei casi in cui si era riusciti in questo intento, non è stato possibile effettuare uno studio adeguato del differenziale di tali funzioni, necessario per studiare lo spazio tangente.

Partendo infatti dalla terna degli autovalori con cui viene descritto il vincolo, si è ricavata la terna degli invarianti di \mathbf{B} corrispondenti espressi in funzione dell'unico parametro λ . A questo punto si è cercato di trovare due funzioni polinomiali f_j che mettessero in relazione tra loro i tre invarianti scalari: in alcuni casi è stato possibile e in altri no. Tuttavia, anche quando si era riusciti nell'intento, passando allo studio dei differenziali di tali funzioni rispetto a \mathbf{B} ci si è sempre trovati di fronte a problemi di diverso tipo. I differenziali delle funzioni f_j si calcolano infatti nel seguente modo:

$$D_{\mathbf{B}}f_j(i_1(\mathbf{B}), i_2(\mathbf{B}), i_3(\mathbf{B})) = \frac{\partial f_j}{\partial i_1} D_{\mathbf{B}}i_1(\mathbf{B}) + \frac{\partial f_j}{\partial i_2} D_{\mathbf{B}}i_2(\mathbf{B}) + \frac{\partial f_j}{\partial i_3} D_{\mathbf{B}}i_3(\mathbf{B}),$$

dove

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{B}}i_1(\mathbf{B})[\mathbf{H}] &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{H}, \\ D_{\mathbf{B}}i_2(\mathbf{B})[\mathbf{H}] &= ((\text{tr } \mathbf{B})\mathbf{I} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{H}, \\ D_{\mathbf{B}}i_3(\mathbf{B})[\mathbf{H}] &= (\det \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{H}, \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{H} \in \text{Sym}^+$. Scrivendoli in forma compatta, si ottiene:

$$D_{\mathbf{B}}f_j(i_1(\mathbf{B}), i_2(\mathbf{B}), i_3(\mathbf{B}))[\mathbf{H}] = \left(\frac{\partial f_j}{\partial i_1} \mathbf{I} + \frac{\partial f_j}{\partial i_2} ((\text{tr } \mathbf{B})\mathbf{I} - \mathbf{B}) + \frac{\partial f_j}{\partial i_3} (\det \mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} \right) \cdot \mathbf{H}$$

e si può quindi capire come, in alcuni casi, essi risultino complicati da studiare. Inoltre, i tre controesempi diversi da quello studiato da Vianello presentano sempre due autovalori coincidenti e ciò genera ulteriori criticità.

Pertanto, si è deciso di seguire un altro approccio legato a un diverso modo di definire la varietà di vincolo che non si serve più di funzioni implicite sugli invarianti, ma definisce direttamente un generico punto della varietà tramite gli autovalori

imposti dalla terna con cui Carroll descrive il vincolo. Rispetto all'altro approccio, questo non risulta più legato a delle particolari parametrizzazioni del vincolo nello spazio (i_1, i_2, i_3) ma studia intrinsecamente la struttura della varietà di vincolo. Non è una procedura utilizzata spesso in questo ambito perché si preferisce sempre, quando possibile, descrivere una varietà di vincolo isotropa implicitamente per mezzo di funzioni sugli invarianti di \mathbf{B} ; in questo caso, però, è risultata molto utile. Inoltre, è interessante notare che, definendo direttamente una varietà di vincolo tramite la descrizione di un suo generico elemento, risulta più facile avere una descrizione geometrica della varietà stessa e del suo spazio tangente, quando presente.

6.1.2 Definizione delle varietà di vincolo

Si parte dal fatto che un generico tensore di una varietà di vincolo isotropa è simmetrico e definito positivo, quindi diagonalizzabile, con autovalori reali e positivi e autovettori ortogonali. Data la terna dei suoi autovalori $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, la sua forma diagonale espressa nel sistema di riferimento dei suoi autovettori normalizzati $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ risulta:

$$\mathbf{B} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (6.1)$$

Tutti e soli i tensori simmetrici e definiti positivi con gli stessi autovalori, si possono ricavare dall'orbita del tensore diagonale appena introdotto, che si costruisce ruotando quest'ultimo per tutte le possibili rotazioni:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = \lambda_1 \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{Q}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_3 \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot}, \quad (6.2)$$

dove \mathbf{B} è definito dalla (6.1). Si noti che, avendo fissato il sistema di riferimento $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e grazie all'arbitrarietà nella scelta della rotazione da applicare, la (6.2) non rappresenta solo dei tensori diagonali.

La (6.2) permette di descrivere intrinsecamente la varietà di vincolo che contiene tutti i tensori simmetrici e definiti positivi con la terna di autovalori $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Nei casi dei quattro controesempi la terna degli autovalori dipende da un solo parametro

$\lambda > 0$ e la (6.1) prende quindi le seguenti forme:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_1(\lambda) &= \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{B}_2(\lambda) &= \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\lambda} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{B}_3(\lambda) &= \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{B}_4(\lambda) &= \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Pertanto, le varietà di vincolo associate vengono descritte mostrando come costruire, mediante la (6.2), un generico loro elemento:

$$\tilde{\mathbf{B}}_j(\lambda, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \mathbf{B}_j(\lambda) \mathbf{Q}^T \quad j = 1, \dots, 4, \tag{6.4}$$

dove i $\mathbf{B}_j(\lambda)$ sono dati dalle (6.3). Tali varietà di vincolo¹ assumono quindi la forma

$$\mathcal{S}_j = \{ \mathbf{B} \in \text{Sym}^+ : \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}_j(\lambda, \mathbf{Q}), \lambda > 0, \mathbf{Q} \in \text{Rot} \} \quad j = 1, \dots, 4$$

e non sono mai vuote.

Volendo avere una rappresentazione dei generici tensori appartenenti alle varietà introdotte, si scrivono le matrici rappresentative nei sistemi di riferimento che diagonalizzano i \mathbf{B}_j , ottenendo:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{B}}_1 &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T & \tilde{\mathbf{B}}_2 &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T \\
 \tilde{\mathbf{B}}_3 &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T & \tilde{\mathbf{B}}_4 &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T.
 \end{aligned}$$

Le (6.4) associano a ogni λ e a ogni rotazione \mathbf{Q} un elemento di Sym^+ appartenente alla varietà di vincolo isotropa in esame e possono quindi essere viste come delle applicazioni

$$\tilde{\mathbf{B}}_j : \mathbb{R}^+ \times \text{Rot} \rightarrow \text{Sym}^+$$

che mandano un punto della varietà prodotto $\mathbb{R}^+ \times \text{Rot}$ in un punto della varietà di

¹In questi casi l'uso del termine varietà di vincolo, riferito agli insiemi dei tensori che rispettano i vincoli, costituisce un abuso di notazione, in quanto, per essere veramente tali, questi dovrebbero avere la struttura di varietà differenziabile e si sta proprio dimostrando che non è così.

vincolo.

Dal momento che il discorso che verrà fatto di seguito non dipende dalla particolare varietà ma è comune a tutte e quattro, si è preferito omettere l'indice j per semplificare la notazione, ma si tenga presente che esso sarebbe da porre ogni qualvolta compaiano i tensore \mathbf{B} o $\tilde{\mathbf{B}}$ oppure una funzione od operatore dipendente da essi. Stesso discorso vale per le varietà di vincolo \mathcal{S}_j alle quali si farà riferimento nel seguito solo con \mathcal{S} .

Affinché le $\tilde{\mathbf{B}}$ nelle (6.4) definiscano delle sottovarietà differenziabili di Sym^+ è sufficiente, ma non condizione necessaria, che esse siano delle immersioni iniettive, ovvero delle mappe differenziabili di classe C^∞ che siano iniettive e con il differenziale non singolare in ogni loro punto, cioè suriettivo. Inoltre, se fossero verificate queste condizioni allora le varietà di vincolo \mathcal{S} definite dalle $\tilde{\mathbf{B}}$ sarebbero delle varietà differenziabili di dimensione 4, perché tale è la dimensione della varietà prodotto $\mathbb{R}^+ \times \text{Rot}$ che viene immersa in Sym^+ proprio attraverso le $\tilde{\mathbf{B}}$, e Carroll avrebbe effettivamente trovato dei controesempi alla teoria precedente.

Tuttavia, le quattro varietà hanno una caratteristica comune in corrispondenza del tensore identità perché in quel punto, come verrà mostrato dettagliatamente nel seguito, si perde l'iniettività delle $\tilde{\mathbf{B}}$ e non è definito uno spazio tangente.

In primo luogo, si osservi che esse sono tutte delle applicazioni di classe C^∞ perché i loro autovalori sono definiti tramite funzioni di classe C^∞ del parametro $\lambda > 0$ e i prodotti tra tensori non hanno problemi di regolarità.

Per quanto riguarda invece la loro iniettività, si noti che l'immagine dei punti $(1, \mathbf{Q})$ è il tensore identità in tutti e quattro i casi:

$$\tilde{\mathbf{B}}(1, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}\mathbf{B}(1)\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{I}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot},$$

dal momento che $\mathbf{B}(1) = \mathbf{I}$. Pertanto, proprio in quel punto si perde l'iniettività poiché per $\lambda = 1$ e per qualsiasi rotazione si ottiene sempre l'identità. Allora non è possibile utilizzare la condizione sufficiente appena introdotta per verificare la natura di varietà differenziabile delle \mathcal{S} , ma, non essendo questa anche una condizione necessaria, non si può concludere che esse non abbiano tale natura e bisognerà ricorrere a ulteriori analisi sui differenziali delle $\tilde{\mathbf{B}}$, diversi a seconda dei casi.

6.1.3 Analisi dei differenziali delle funzioni che definiscono le varietà

Facendo riferimento al Capitolo 2, in cui si era mostrato che il differenziale di una mappa tra due varietà è un'applicazione lineare tra i due relativi spazi tangenti e che lo spazio tangente a una varietà prodotto è la somma diretta degli spazi tangenti delle singole varietà, si possono definire i differenziali delle $\tilde{\mathbf{B}}$ nel modo seguente

$$D\tilde{\mathbf{B}}_{(\lambda, \mathbf{Q})} : \mathbb{R} \oplus (\text{Skw } \mathbf{Q}) \rightarrow \text{Sym},$$

avendo indicato con $\text{Skw } \mathbf{Q}$ lo spazio tangente in un generico punto di Rot , ovvero l'isomorfismo tramite \mathbf{Q} di Skw , che è lo spazio tangente a Rot nell'identità.

Per quanto riguarda, invece, il calcolo di questi differenziali, si consideri una generica curva differenziabile $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ che appartenga a \mathcal{S} per ogni t e che sia tale per cui $\tilde{\mathbf{B}}(0) = \mathbf{I}$. Per come sono stati costruiti i $\tilde{\mathbf{B}}$ nelle (6.3), questo significa che esistono delle curve $\lambda(t) \in \mathbb{R}^+$ e $\mathbf{Q}(t) \in \text{Rot}$ con $\lambda(0) = 1$ tali che

$$\tilde{\mathbf{B}}(\lambda(t), \mathbf{Q}(t)) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(\lambda(t))\mathbf{Q}^T(t). \quad (6.5)$$

Derivando la (6.5), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda(t), \mathbf{Q}(t)) &= D\tilde{\mathbf{B}}(\lambda(t), \mathbf{Q}(t))[\dot{\lambda}, \dot{\mathbf{Q}}] dt = \\ &= D_\lambda\tilde{\mathbf{B}}(\lambda(t), \mathbf{Q}(t)) d\lambda + D_{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda(t), \mathbf{Q}(t))[d\mathbf{Q}] = \\ &= (D_\lambda\tilde{\mathbf{B}}(\lambda(t), \mathbf{Q}(t)) \dot{\lambda} + D_{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda(t), \mathbf{Q}(t))[\dot{\mathbf{Q}}]) dt \end{aligned}$$

e quindi i differenziali cercati assumono la forma seguente

$$D\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})[\dot{\lambda}, \dot{\mathbf{Q}}] = D_\lambda\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})\dot{\lambda} + D_{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})[\dot{\mathbf{Q}}] \quad (6.6)$$

e sono definiti lungo le direzioni $\dot{\lambda}$ e $\dot{\mathbf{Q}}$ in $\mathbb{R} \oplus (\text{Skw } \mathbf{Q})$.

Sviluppando separatamente i due termini ai membri destri delle (6.6) si ottiene per il primo

$$D_\lambda\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})\dot{\lambda} = \dot{\lambda} \mathbf{Q}\mathbf{B}'(\lambda)\mathbf{Q}^T, \quad (6.7)$$

mentre per il secondo

$$D_{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})[\dot{\mathbf{Q}}] = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{B}(\lambda)\dot{\mathbf{Q}}^T$$

e, ricordando che $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{WQ}$ per un $\mathbf{W} \in \text{Skw}$, come visto nella (4.10), si può scrivere

$$D_{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})[\mathbf{WQ}] = \mathbf{WQB}(\lambda)\mathbf{Q}^T - \mathbf{QB}(\lambda)\mathbf{Q}^T\mathbf{W}$$

e infine, grazie alle definizioni dei $\tilde{\mathbf{B}}$ riportate nelle (6.4),

$$D_{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})[\mathbf{WQ}] = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q}) - \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})\mathbf{W}. \quad (6.8)$$

Sostituendo ora le (6.7) e le (6.8) nelle (6.6), si arriva alle espressioni dei differenziali delle applicazioni $\tilde{\mathbf{B}}$ che descrivono le varietà di vincolo:

$$D\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})[\dot{\lambda}, \mathbf{WQ}] = \dot{\lambda}\mathbf{QB}'(\lambda)\mathbf{Q}^T + \mathbf{W}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q}) - \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})\mathbf{W}, \quad (6.9)$$

sempre definiti lungo le direzioni $\dot{\lambda}$ e $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{WQ}$.

I $\mathbf{B}'(\lambda)$ che compaiono nelle (6.9) differiscono caso per caso e vengono calcolati direttamente dalle (6.3) derivando rispetto a λ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_1(\lambda) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{2}{\lambda^3} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{B}'_2(\lambda) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{B}'_3(\lambda) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{B}'_4(\lambda) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Valutando poi le (6.9) in corrispondenza del tensore identità, immagine dei punti $(1, \mathbf{Q})$ per i quali si ha che $\tilde{\mathbf{B}}(1, \mathbf{Q}) = \mathbf{I}$, si ottiene, facendo uso delle (6.10) appena scritte:

$$D\tilde{\mathbf{B}}(1, \mathbf{Q})[\dot{\lambda}, \mathbf{WQ}] = \dot{\lambda}\mathbf{QB}'(1)\mathbf{Q}^T + \mathbf{WI} - \mathbf{IW} = \dot{\lambda}\mathbf{QB}'(1)\mathbf{Q}^T. \quad (6.11)$$

Lo studio di questi differenziali permette di caratterizzare l'eventuale spazio tangente alle quattro varietà di vincolo nell'identità, perché descrivono il generico vettore tangente proprio in quel punto, ovvero il vettore tangente ad una generica curva contenuta nella varietà e passante per l'identità. Si procederà quindi separando i

vari casi per i quali i valori delle $\mathbf{B}'(1)$ si ottengono sostituendo $\lambda = 1$ nelle (6.10):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}'_1(1) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{B}'_2(1) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\
 \mathbf{B}'_3(1) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \\
 \mathbf{B}'_4(1) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Pertanto, i generici vettori tangenti \mathbf{H} alle varietà \mathcal{S} in corrispondenza dell'identità possono essere rappresentati tramite le matrici rappresentative espresse nel sistema di riferimento che diagonalizza i \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_1 &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{H}_2 &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T \\
 \mathbf{H}_3 &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{H}_4 &= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T,
 \end{aligned}$$

dove si è sostituito $\dot{\lambda}$ con α per indicarne l'arbitrarietà. Sarà proprio lo studio di questi vettori tangenti in ognuno dei quattro casi ad avere un ruolo fondamentale nella dimostrazione che le quattro varietà di vincolo introdotte non costituiscono delle varietà differenziabili.

6.2 Primo Controesempio

Per il primo caso, corrispondente alla terna di autovalori $(\lambda, \lambda, 1/\lambda^2)$, la varietà di vincolo associata è

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{B} \in \text{Sym}^+ : \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q}), \lambda > 0, \mathbf{Q} \in \text{Rot}\},$$

dove $\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})$ è la prima delle (6.3), e il generico vettore tangente nell'identità appartiene all'insieme

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : \mathbf{H} = \alpha \mathbf{Q} \mathbf{B}'(1) \mathbf{Q}^T, \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{Q} \in \text{Rot}\},$$

dove bisogna inserire l'espressione opportuna di $\mathbf{B}'(1)$ data dalla prima delle (6.12) e dove si è sostituito α al posto di $\dot{\lambda}$ per esprimere l'arbitrarietà di quest'ultimo. Nel

sistema di riferimento che diagonalizza $\mathbf{B}'(1)$, un elemento di \mathcal{T} si scrive nel modo seguente:

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T.$$

Gli invarianti scalari di \mathbf{H} coincidono con quelli del tensore $\alpha \mathbf{B}'(1)$, che prende la forma

$$\alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - 2\alpha \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$

e quindi risultano pari a:

$$\begin{cases} i_1 = 0, \\ i_2 = -3\alpha^2, \\ i_3 = -2\alpha^3. \end{cases} \quad (6.13)$$

Bisogna ora mostrare che non vi siano altri tensori all'infuori di quelli contenuti in \mathcal{T} con la stessa terna di invarianti scalari. A tal fine, si scrive il polinomio caratteristico di un tensore con gli invarianti dati dalle (6.13), in cui si è utilizzata la variabile μ invece della classica λ per evitare di confonderla col parametro che definisce la varietà di vincolo:

$$P(\mu) = \mu^3 - i_1\mu^2 + i_2\mu - i_3 = \mu^3 - 3\alpha^2\mu + 2\alpha^3$$

e si osserva che può essere fattorizzato nel modo seguente

$$P(\mu) = (\mu - \alpha)^2(\mu + 2\alpha),$$

il che significa che corrisponde a un generico tensore della forma $\alpha \mathbf{Q} \mathbf{B}'(1) \mathbf{Q}^T$, con autovalori $(\alpha, \alpha, -2\alpha)$, come volevasi dimostrare.

Pertanto l'insieme \mathcal{T} può anche essere descritto nel modo seguente

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : i_1(\mathbf{H}) = 0, i_2(\mathbf{H}) = -3\alpha^2, i_3(\mathbf{H}) = -2\alpha^3, \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (6.14)$$

Analizzando meglio tale insieme, si nota che prendendo un suo elemento $\mathbf{H} \in \mathcal{T}$ e uno scalare $\beta \in \mathbb{R}$, il tensore $\mathbf{A} = \beta \mathbf{H}$ presenta i seguenti invarianti

$$\begin{cases} i_1(\mathbf{A}) = \beta i_1(\mathbf{H}) = 0, \\ i_2(\mathbf{A}) = \beta^2 i_2(\mathbf{H}) = -3(\beta\alpha)^2, \\ i_3(\mathbf{A}) = \beta^3 i_3(\mathbf{H}) = -2(\beta\alpha)^3 \end{cases}$$

e quindi anche \mathbf{A} risulta essere un elemento di \mathcal{T} secondo la definizione (6.14), la qual cosa dimostra che \mathcal{T} è un cono.

La varietà di vincolo in esame in corrispondenza dell'identità ha solo un cono tangente che non ha la struttura di spazio vettoriale e, dal momento che contiene tutti tensori a traccia nulla, è contenuto sicuramente in Dev. Inoltre, sostituendo la prima delle (6.12) nella (6.11) si ottiene l'espressione del generico vettore tangente nell'identità:

$$\mathbf{H} = \dot{\lambda} (\mathbf{Q}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{Q}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_3).$$

Considerando prima una rotazione $\bar{\mathbf{Q}}$ che mandi la terna ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in un'altra terna ortonormale $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$, cosicché al variare di $\dot{\lambda}$ si ottengano tutti i tensori del tipo

$$\bar{\mathbf{H}} = \gamma \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \gamma \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 - 2\gamma \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

e poi una rotazione $\tilde{\mathbf{Q}}$ che mandi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ nella terna ortonormale $\{\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1\}$, per ottenere, al variare di $\dot{\lambda}$, tutti i tensori del tipo

$$\tilde{\mathbf{H}} = -2\delta \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \delta \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 + \delta \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

e sommando $\bar{\mathbf{H}}$ e $\tilde{\mathbf{H}}$, si ottiene il tensore

$$\mathbf{A} = (\gamma - 2\delta) \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + (\gamma + \delta) \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 + (\delta - 2\gamma) \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

che corrisponde al generico tensore a traccia nulla appartenente a Dev e in forma diagonale, esprimibile nel modo seguente

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \beta \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 - (\alpha + \beta) \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

avendo posto $\alpha = \gamma - 2\delta$ e $\beta = \gamma + \delta$.

Avendo fatto vedere che sommando due generici elementi di \mathcal{T} si ottiene un generico elemento di Dev, si è dimostrato che i vettori tangenti alla varietà di vincolo \mathcal{S} in corrispondenza dell'identità generano lo spazio Dev, ovvero

$$\text{span}\{\mathbf{H} : \mathbf{H} \in \mathcal{T}\} = \text{Dev}.$$

Pertanto, se \mathcal{S} fosse una varietà differenziabile, lo spazio generato da \mathcal{T} coinciderebbe con lo spazio tangente in corrispondenza del tensore identità, Dev in questo

caso, che ha dimensione pari a 5, in contraddizione col fatto che \mathcal{S} sia una varietà differenziabile di dimensione 4. Di conseguenza, si è dimostrato che \mathcal{S} non è una varietà di vincolo isotropa di dimensione 4 perché, almeno nell'identità, non è una varietà differenziabile, perché li presenta solo un cono tangente e non uno spazio, e, se lo fosse, il suo spazio tangente avrebbe dimensione 5 e non 4.

6.3 Secondo Controesempio

Il secondo caso corrisponde alla terna di autovalori $(\lambda, 1/\lambda, 1)$ e si rimanda a [17] per la dimostrazione che esso non sia un controesempio, basata sulla definizione del vincolo tramite un sistema di due funzioni implicite degli invarianti:

$$\begin{cases} i_3 = 0 \\ i_1 = i_2. \end{cases}$$

Questo modo per definire il vincolo rispecchia proprio quello che Carroll aveva in mente enunciando la Proposizione 17 con la quale si riferiva alla possibilità di costruire varietà di vincolo isotrope di dimensione 4 in Sym^+ attraverso l'intersezione di due vincoli non omogenei, come in questo caso. In questa sede, invece, si seguirà il secondo approccio introdotto all'inizio della sezione e applicato con successo al primo controesempio.

In questo caso la varietà di vincolo associata è

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{B} \in \text{Sym}^+ : \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q}), \lambda > 0, \mathbf{Q} \in \text{Rot}\},$$

dove $\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})$ è la seconda delle (6.3), e il generico vettore tangente nell'identità appartiene all'insieme

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : \mathbf{H} = \alpha \mathbf{Q} \mathbf{B}'(1) \mathbf{Q}^T, \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{Q} \in \text{Rot}\},$$

con $\mathbf{B}'(1)$ la seconda delle (6.12), e nel sistema di riferimento che diagonalizza $\mathbf{B}'(1)$ assume la forma

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T.$$

\mathbf{H} possiede gli stessi invarianti scalari del tensore

$$\alpha \mathbf{B}'(1) = \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \alpha \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

che sono

$$\begin{cases} i_1 = 0, \\ i_2 = -\alpha^2, \\ i_3 = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Il polinomio caratteristico di un generico tensore con gli invarianti dati dalle (6.15), sempre espresso in funzione di μ , prende la seguente forma

$$P(\mu) = \mu^3 - i_1\mu^2 + i_2\mu - i_3 = \mu^3 - \alpha^2\mu$$

che si può fattorizzare ottenendo

$$P(\mu) = \mu(\mu - \alpha)(\mu + \alpha).$$

Pertanto, tutti i tensori con gli invarianti dati dalle (6.15) appartengono all'insieme \mathcal{T} , dal momento che i suoi elementi presentano la terna di autovalori $(\alpha, \alpha, 0)$, e questo può quindi essere rappresentato anche nel modo seguente

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : i_1(\mathbf{H}) = 0, i_2(\mathbf{H}) = -\alpha^2, i_3(\mathbf{H}) = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (6.16)$$

Si noti che, come era avvenuto nel caso precedente, anche qui \mathcal{T} ha la struttura di un cono perché, dato uno scalare $\beta \in \mathbb{R}$ e un elemento $\mathbf{H} \in \mathcal{T}$, il tensore $\mathbf{A} = \beta\mathbf{H}$ presenta i seguenti invarianti

$$\begin{cases} i_1(\mathbf{A}) = \beta i_1(\mathbf{H}) = 0, \\ i_2(\mathbf{A}) = \beta^2 i_2(\mathbf{H}) = -(\beta\alpha)^2, \\ i_3(\mathbf{A}) = \beta^3 i_3(\mathbf{H}) = 0 \end{cases}$$

e quindi appartiene anch'esso a \mathcal{T} , che, anche in questo caso, è contenuto in Dev dal momento che tutti i suoi elementi presentano una traccia nulla.

Per studiare ora quale spazio venga generato da \mathcal{T} si sostituisce la seconda delle (6.12) nella (6.11) ottenendo l'espressione del generico vettore tangente nell'identità alla varietà di vincolo \mathcal{S} :

$$\mathbf{H} = \dot{\lambda}(\mathbf{Q}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 - \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_2).$$

Come fatto per il primo caso, si consideri prima una rotazione $\bar{\mathbf{Q}}$ che mandi la terna ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in un'altra terna ortonormale $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$, cosicché al

variare di $\dot{\lambda}$ si ottengano tutti i tensori del tipo

$$\bar{\mathbf{H}} = \gamma \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 - \gamma \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2,$$

e poi una rotazione $\tilde{\mathbf{Q}}$ che mandi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ nella terna ortonormale $\{\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1\}$, per ottenere, al variare di $\dot{\lambda}$, tutti i tensori del tipo

$$\tilde{\mathbf{H}} = \delta \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 - \delta \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

e si sommino $\bar{\mathbf{H}}$ e $\tilde{\mathbf{H}}$, ottenendo il tensore

$$\mathbf{A} = \gamma \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + (\delta - \gamma) \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 - \delta \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

che corrisponde al generico tensore a traccia nulla appartenente a Dev e in forma diagonale, esprimibile nel modo seguente

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \beta \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 - (\alpha + \beta) \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

avendo posto $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta - \gamma$.

Avendo fatto vedere che la somma di due generici elementi di \mathcal{T}_2 è un generico elemento di Dev, si è quindi dimostrato che

$$\text{span}\{\mathbf{H} : \mathbf{H} \in \mathcal{T}_2\} = \text{Dev}$$

e si possono trarre le stesse conclusioni del caso precedente, confutando anche questo controesempio.

Si noti che nei primi due casi analizzati il cono tangente nell'identità alle corrispondenti varietà di vincolo genera sempre lo spazio dei tensori a traccia nulla Dev. Ciò si deve al fatto che in entrambi i casi \mathcal{S} rappresenta delle trasformazioni isocore e quindi tutti i tensori contenuti nella varietà di vincolo sono tali per cui $\det \mathbf{B} = 1$. Nel Capitolo 4 si era dimostrato che lo spazio tangente alla varietà di vincolo corrispondente all'incomprimibilità è rappresentato da

$$\dot{\mathcal{S}}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{B} \in \text{Sym} : \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}^{-\text{T}} = 0\}$$

che permette di scrivere

$$\dot{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{I} = 0$$

e quindi

$$\dot{\mathcal{S}}(\mathbf{B}) = \text{Dev } \mathbf{B},$$

risultato che si sarebbe anche potuto evincere dalla Proposizione 9 del Capitolo 4. Considerando però lo spazio tangente in corrispondenza del tensore identità $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, si ottiene proprio

$$\dot{\mathcal{S}}(\mathbf{I}) = \text{Dev}.$$

Pertanto, avendo a che fare con varietà di vincolo che sono dei sottoinsiemi di quella corrispondente all'incomprimibilità, lo spazio generato dai vettori tangenti nell'identità non può che essere Dev e il cono tangente ivi presente risulta essere un sottoinsieme di questo.

6.4 Terzo Controesempio

Questo caso è riferito alla terna di autovalori $(\lambda, 1, 1)$ e corrisponde alla varietà di vincolo seguente:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{B} \in \text{Sym}^+ : \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q}), \lambda > 0, \mathbf{Q} \in \text{Rot}\},$$

dove $\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})$ è la terza delle (6.3), e il generico vettore tangente nell'identità appartiene all'insieme

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : \mathbf{H} = \alpha \mathbf{Q} \mathbf{B}'(1) \mathbf{Q}^T, \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{Q} \in \text{Rot}\},$$

con $\mathbf{B}'(1)$ la terza delle (6.12). La rappresentazione di un generico tensore \mathbf{H} nel sistema di riferimento che diagonalizza $\mathbf{B}'(1)$ prende la forma seguente:

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T.$$

\mathbf{H} possiede poi gli stessi invarianti scalari del tensore

$$\alpha \mathbf{B}'(1) = \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1,$$

ovvero

$$\begin{cases} i_1 = \alpha, \\ i_2 = 0, \\ i_3 = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Considerando il polinomio caratteristico, dipendente dalla variabile μ , di un generico tensore con gli invarianti dati dalle (6.17), ossia

$$P(\mu) = \mu^3 - i_1\mu^2 + i_2\mu - i_3 = \mu^3 - \alpha\mu^2,$$

si nota che esso può essere fattorizzato come segue

$$P(\mu) = \mu^2(\mu - \alpha).$$

Allora tutti i tensori con gli invarianti come nelle (6.17) hanno una terna di autovalori del tipo $(\alpha, 0, 0)$ e appartengono a \mathcal{T} , che, di conseguenza, può assumere anche la forma

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : i_1(\mathbf{H}) = \alpha, i_2(\mathbf{H}) = 0, i_3(\mathbf{H}) = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (6.18)$$

Anche in questo caso, \mathcal{T} ha la struttura di un cono perché, dato uno scalare $\beta \in \mathbb{R}$ e un elemento $\mathbf{H} \in \mathcal{T}$, il tensore $\mathbf{A} = \beta\mathbf{H}$ presenta i seguenti invarianti

$$\begin{cases} i_1(\mathbf{A}) = \beta i_1(\mathbf{H}) = \beta\alpha, \\ i_2(\mathbf{A}) = \beta^2 i_2(\mathbf{H}) = 0, \\ i_3(\mathbf{A}) = \beta^3 i_3(\mathbf{H}) = 0 \end{cases}$$

e quindi appartiene anch'esso a \mathcal{T} , che però, questa volta, non è contenuto in Dev.

Procedendo analogamente ai casi precedenti, si vuole analizzare quale sia lo spazio vettoriale generato dai vettori tangenti a \mathcal{S} nell'identità, partendo dalla forma del generico vettore tangente che si ottiene sostituendo la terza delle (6.12) nella (6.11):

$$\mathbf{H} = \dot{\lambda} \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_1.$$

Si consideri quindi una prima rotazione $\bar{\mathbf{Q}}$ tale per cui $\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1$, con \mathbf{g}_1 un versore, cosicché al variare di $\dot{\lambda}$ si ottengano tutti i tensori del tipo

$$\bar{\mathbf{H}} = \gamma \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1,$$

poi una seconda rotazione $\tilde{\mathbf{Q}}$ tale che $\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_2$, con \mathbf{g}_2 versore ortogonale a \mathbf{g}_1 , per

ottenere, al variare di $\dot{\lambda}$, tutti i tensori del tipo

$$\tilde{\mathbf{H}} = \delta \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2,$$

e infine una terza rotazione $\hat{\mathbf{Q}}$ tale che $\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_3$, con \mathbf{g}_3 versore ortogonale a \mathbf{g}_1 e \mathbf{g}_2 e tale che la terna $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ sia ortonormale, ottenendo tutti i tensori del tipo

$$\hat{\mathbf{H}} = \epsilon \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3.$$

Sommando poi $\bar{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{H}}$, e quindi combinando linearmente tre generici elementi di \mathcal{T} , si ottiene il tensore

$$\mathbf{A} = \gamma \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \delta \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 + \epsilon \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

che corrisponde al generico tensore in forma diagonale appartenente a Sym . Si è appena dimostrato che

$$\text{span}\{\mathbf{H} : \mathbf{H} \in \mathcal{T}\} = \text{Sym}.$$

Questa volta, a differenza dei primi due casi in cui veniva generato lo spazio 5-dimensionale Dev , si ottiene addirittura tutto lo spazio Sym a dimensione 6, ma la conclusione a cui si giunge è la stessa. Infatti, \mathcal{S} non è una varietà di vincolo di dimensione 4 poiché almeno in corrispondenza del tensore identità non è una varietà differenziabile, essendo definito solo un cono tangente e non uno spazio in quel punto; inoltre, se fosse una varietà differenziabile, il suo spazio tangente nell'identità avrebbe dimensione pari a 6 e non 4.

6.5 Quarto Controesempio

L'ultimo caso si riferisce alla terna di autovalori $(\lambda, \lambda, 1)$ alla quale corrisponde la varietà di vincolo

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{B} \in \text{Sym}^+ : \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q}), \lambda > 0, \mathbf{Q} \in \text{Rot}\},$$

dove $\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{Q})$ è la quarta delle (6.3), e il generico vettore tangente nell'identità appartiene all'insieme

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : \mathbf{H} = \alpha \mathbf{Q}\mathbf{B}'(1)\mathbf{Q}^T, \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{Q} \in \text{Rot}\},$$

con $\mathbf{B}'(1)$ la quarta delle (6.12). La rappresentazione di un generico tensore \mathbf{H} nel sistema di riferimento che diagonalizza $\mathbf{B}'(1)$ assume la seguente forma:

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T.$$

\mathbf{H} possiede gli stessi invarianti scalari del tensore

$$\alpha \mathbf{B}'(1) = \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2,$$

ovvero

$$\begin{cases} i_1 = 2\alpha, \\ i_2 = \alpha^2, \\ i_3 = 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

Il polinomio caratteristico, dipendente da μ , di un generico tensore con gli invarianti dati dalle (6.19) prende la forma

$$P(\mu) = \mu^3 - i_1\mu^2 + i_2\mu - i_3 = \mu^3 - 2\alpha\mu^2 + \alpha^2\mu,$$

e può essere fattorizzato come segue

$$P(\mu) = \mu(\mu - \alpha)^2.$$

Pertanto, tutti i tensori con gli invarianti come nelle (6.19) hanno una terna di autovalori del tipo $(\alpha, \alpha, 0)$ e appartengono a \mathcal{T} , che, di conseguenza, può assumere anche la forma

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : i_1(\mathbf{H}) = 2\alpha, i_2(\mathbf{H}) = \alpha^2, i_3(\mathbf{H}) = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (6.20)$$

Come accadeva per gli altri tre casi, anche qui \mathcal{T} ha la struttura di un cono perché, dato uno scalare $\beta \in \mathbb{R}$ e un elemento $\mathbf{H} \in \mathcal{T}$, il tensore $\mathbf{A} = \beta\mathbf{H}$ presenta i seguenti invarianti

$$\begin{cases} i_1(\mathbf{A}) = \beta i_1(\mathbf{H}) = 2(\alpha\beta), \\ i_2(\mathbf{A}) = \beta^2 i_2(\mathbf{H}) = (\alpha\beta)^2, \\ i_3(\mathbf{A}) = \beta^3 i_3(\mathbf{H}) = 0 \end{cases}$$

e quindi appartiene anch'esso a \mathcal{T} , che, come nel terzo caso e a differenza dei primi due, non è contenuto in Dev.

L'ultimo passo consiste nell'analizzare lo spazio generato dagli elementi contenuti in \mathcal{T} , partendo dalla forma del generico vettore tangente che si ottiene sostituendo la quarta delle (6.12) nella (6.11):

$$\mathbf{H} = \dot{\lambda}(\mathbf{Q}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_2).$$

Si consideri quindi una prima rotazione $\bar{\mathbf{Q}}$ che mandi la terna ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in un'altra terna ortonormale $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$, cosicché al variare di $\dot{\lambda}$ si ottengano tutti i tensori del tipo

$$\bar{\mathbf{H}} = \gamma \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \gamma \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2,$$

poi una seconda rotazione $\tilde{\mathbf{Q}}$ che mandi la terna $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ nella terna $\{\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1\}$, per ottenere, al variare di $\dot{\lambda}$, tutti i tensori del tipo

$$\tilde{\mathbf{H}} = \delta \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 + \delta \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

e infine una terza rotazione $\hat{\mathbf{Q}}$ che mandi la terna $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ nella terna $\{\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$, ottenendo così tutti i tensori del tipo

$$\hat{\mathbf{H}} = \epsilon \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \epsilon \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3.$$

Sommando poi $\bar{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{H}}$, e quindi combinando linearmente tre generici elementi di \mathcal{T} , si ottiene il tensore

$$\mathbf{A} = (\gamma + \epsilon) \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + (\gamma + \delta) \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 + (\delta + \epsilon) \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

che corrisponde al generico tensore in forma diagonale appartenente a Sym della forma

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \beta \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 + \eta \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3,$$

con $\alpha = \gamma + \epsilon$, $\beta = \gamma + \delta$ e $\eta = \delta + \epsilon$. La corrispondenza biunivoca tra i vettori $\mathbf{x} = (\gamma, \delta, \epsilon)^T$ e $\mathbf{y} = (\alpha, \beta, \eta)^T$ è garantita dall'invertibilità della matrice Σ che rappresenta l'applicazione lineare tale per cui

$$\Sigma \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

con

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anche qui, come già era accaduto nel terzo caso, i vettori tangenti a \mathcal{T} in corrispondenza dell'identità generano l'intero spazio Sym , ovvero

$$\text{span}\{\mathbf{H} : \mathbf{H} \in \mathcal{T}\} = \text{Sym}.$$

Pertanto, \mathcal{S} non è una varietà di vincolo di dimensione 4 prima di tutto perché non è una varietà differenziabile, dal momento che nell'identità presenta solo un cono tangente e non uno spazio, e poi perché, se lo fosse, il suo spazio tangente in quel punto avrebbe una dimensione pari a 6 e non a 4.

6.6 Considerazioni finali

Grazie alle precedenti dimostrazioni si sono confutati tutti e quattro i controesempi di Carroll utilizzando sempre le stesse argomentazioni. In ogni caso, infatti, la varietà di vincolo associata alla terna di autovalori proposta non presenta una struttura di varietà differenziabile a causa della criticità che si genera in corrispondenza dell'identità. In quel punto non è mai definito uno spazio tangente, ma solo un cono, e ciò si rivela essere un problema per quanto detto sia nel Capitolo 3, riguardo allo spazio degli spostamenti o delle velocità virtuali di un sistema olonomo, sia nel Capitolo 4, riguardo proprio allo spazio tangente di una varietà di vincolo. La natura di spazio vettoriale è fondamentale e necessaria in entrambi gli ambiti per gli sviluppi della teoria. Inoltre, si è mostrato che in ogni caso lo spazio vettoriale generato dai vettori tangenti nell'identità ha sempre una dimensione maggiore della varietà di vincolo a cui si riferisce. Ciò è in contrasto col fatto che in ogni punto la dimensione della varietà deve essere la stessa dello spazio tangente.

I vettori tangenti nell'identità si sono costruiti a partire da curve appartenenti alla varietà di vincolo e passanti per l'identità; tuttavia, si sono considerate solo le curve della seguente forma

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(\lambda(t))\mathbf{Q}^T(t),$$

che costituiscono un sottoinsieme di tutte quelle possibili. Nonostante ciò, tutte le conclusioni che ne sono state tratte rimangono valide, poiché lo spazio generato

dai vettori tangenti così costruiti ha una dimensione superiore alla varietà e, se ce ne fossero altri, tale dimensione potrebbe al limite aumentare, rimanendo quindi sempre diversa da quella della varietà.

La definizione intrinseca delle varietà di vincolo per mezzo dell'orbita del tensore simmetrico e definito positivo con una terna di autovalori assegnati potrebbe far pensare che in corrispondenza dell'identità non sia mai definito uno spazio tangente, a causa della perdita dell'iniettività dell'immersione introdotta. Si consideri quindi il vincolo di incomprimibilità al quale è associata una varietà di vincolo di dimensione 5 in Sym^+ dotata di una struttura differenziabile e senza nessun tipo di problema. Essa viene rappresentata dalla terna di autovalori dipendente da due parametri $(\lambda, \mu, \frac{1}{\lambda\mu})$ e quindi dall'immersione

$$\tilde{\mathbf{B}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \text{Rot} \rightarrow \text{Sym}^+$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}\mathbf{B}(\lambda, \mu)\mathbf{Q}^T,$$

dove

$$\mathbf{B}(\lambda, \mu) = \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\lambda\mu} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

e la terna ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è quella che indica le direzioni degli autovettori di \mathbf{B} . In questo modo si costruisce la seguente varietà di vincolo

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{B} \in \text{Sym}^+ : \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu, \mathbf{Q}), \lambda > 0, \mu > 0, \mathbf{Q} \in \text{Rot}\}.$$

In corrispondenza di tutti i punti del tipo $(1, 1, \mathbf{Q})$ l'immersione $\tilde{\mathbf{B}}$ perde l'iniettività, ovvero

$$\tilde{\mathbf{B}}(1, 1, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}\mathbf{I}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Rot}.$$

Tuttavia, considerando il differenziale di $\tilde{\mathbf{B}}$, si ottiene

$$D_{(\lambda, \mu, \mathbf{Q})}\tilde{\mathbf{B}} : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus (\text{Skw } \mathbf{Q}) \rightarrow \text{Sym}$$

$$D\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu, \mathbf{Q})[\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \dot{\mathbf{Q}}] = D_\lambda \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu, \mathbf{Q})\dot{\lambda} + D_\mu \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu, \mathbf{Q})\dot{\mu} + D_{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu, \mathbf{Q})[\dot{\mathbf{Q}}]$$

e, sviluppando i conti come fatto nella Sezione 6.1.3, si giunge alla seguente espressione:

$$\begin{aligned} D\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu, \mathbf{Q})[\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \mathbf{W}\mathbf{Q}] &= \\ &= \dot{\lambda} \mathbf{Q}\mathbf{B}_\lambda(\lambda, \mu)\mathbf{Q}^T + \dot{\mu} \mathbf{Q}\mathbf{B}_\mu(\lambda, \mu)\mathbf{Q}^T + \mathbf{W}\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu, \mathbf{Q}) - \tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mu, \mathbf{Q})\mathbf{W}, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\lambda(\lambda, \mu) &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{\mu\lambda^2} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{B}_\mu(\lambda, \mu) &= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \frac{1}{\lambda\mu^2} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{6.21}$$

In corrispondenza dell'identità si ottiene

$$\begin{aligned}D\tilde{\mathbf{B}}(1, 1, \mathbf{Q})[\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \mathbf{W}\mathbf{Q}] &= \\ &= \dot{\lambda} \mathbf{Q}\mathbf{B}_\lambda(1, 1)\mathbf{Q}^T + \dot{\mu} \mathbf{Q}\mathbf{B}_\mu(1, 1)\mathbf{Q}^T + \mathbf{W}\mathbf{I} - \mathbf{I}\mathbf{W} = \\ &= \dot{\lambda} \mathbf{Q}\mathbf{B}_\lambda(1, 1)\mathbf{Q}^T + \dot{\mu} \mathbf{Q}\mathbf{B}_\mu(1, 1)\mathbf{Q}^T\end{aligned}$$

e il generico vettore tangente nell'identità appartiene all'insieme

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{H} \in \text{Sym} : \mathbf{H} = \alpha \mathbf{Q}\mathbf{B}_\lambda(1, 1)\mathbf{Q}^T + \beta \mathbf{Q}\mathbf{B}_\mu(1, 1)\mathbf{Q}^T, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{Q} \in \text{Rot}, \}$$

dove si sono sostituiti α e β al posto $\dot{\lambda}$ e $\dot{\mu}$ per l'arbitrarietà di questi, e sostituendo le (6.21) valutate in $(1, 1)$, \mathbf{H} assume la seguente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \alpha \mathbf{Q}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\mathbf{Q}^T + \beta \mathbf{Q}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\mathbf{Q}^T = \\ &= \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - (\alpha + \beta) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\mathbf{Q}^T.\end{aligned}$$

Si è quindi ottenuto che \mathbf{H} è il generico tensore a traccia nulla, ovvero

$$\text{span}\{\mathbf{H} : \mathbf{H} \in \mathcal{T}\} = \text{Dev},$$

a conferma di quanto già si sapeva. Pertanto, utilizzando la modalità presentata per descrivere una varietà di vincolo dotata di una struttura differenziabile, come è quella associata all'incomprimibilità, in ogni punto di essa è definito uno spazio tangente della sua stessa dimensione. Ciò è una conseguenza del fatto che in ogni punto della varietà diverso dall'identità l'immersione che la definisce è iniettiva e il suo differenziale è suriettivo (si veda la Definizione 20 di sottovarietà differenziabile), mentre nell'identità, pur perdendo l'iniettività dell'immersione, si è dimostrato che esiste uno spazio tangente coincidente con Dev.

La tecnica utilizzata per confutare i quattro controesempi riesce nell'intento perché dimostra che nell'identità non è definito uno spazio tangente e quindi la varietà associata non può essere dotata di una struttura differenziabile. Per com-

pletezza, si potrebbe studiare cosa succede negli altri punti della varietà diversi dall'identità per vedere se vi siano altre criticità.

Tra i quattro controesempi analizzati solo il secondo presenta tre autovalori distinti, mentre negli altri tre casi vi è sempre un autovalore doppio. Analizzando quindi per primo il secondo caso, si è ottenuto che l'immersione che definisce la varietà e il suo differenziale sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{B}(\lambda, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}(\lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\lambda} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \mathbf{Q}^T, \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} D\mathbf{B}(\lambda, \mathbf{Q})[\dot{\lambda}, \mathbf{W}\mathbf{Q}] &= \\ &= \dot{\lambda} \mathbf{Q}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \mathbf{Q}^T + \mathbf{W}\mathbf{B}(\lambda, \mathbf{Q}) - \mathbf{B}(\lambda, \mathbf{Q})\mathbf{W}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

di cui la (6.22) è sempre iniettiva per $\lambda \neq 1$ (cioè nei punti diversi dall'identità) e il differenziale non è mai singolare per $\lambda \neq 1$ perché ha sempre una componente lungo $\dot{\lambda}$ e una lungo $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$, corrispondente a $\mathbf{W}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{W}$, cioè queste due componenti nella (6.23) non si annullano mai. Pertanto, all'infuori dell'identità questa varietà di vincolo presenta sempre una struttura differenziabile e uno spazio tangente. La dimensione locale della varietà, lontano dall'identità, è 4, pari a quella della varietà prodotto $\mathbb{R} \times \text{Rot}$ che viene immersa in Sym^+ attraverso la (6.22).

Le criticità di tutti gli altri tre controesempi nascono dalla parte del differenziale lungo $\dot{\mathbf{Q}}$, ovvero da $\mathbf{W}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{W}$, perché per alcuni \mathbf{W} , e quindi alcune \mathbf{Q} , questa si annulla. Il problema diventa quindi capire quando $\mathbf{W}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{W} = 0$; dal momento che \mathbf{B} è un tensore simmetrico e \mathbf{W} antisimmetrico si presentano tre casi possibili:

- $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{W} \quad \forall \mathbf{W};$
- \mathbf{B} ha tre autovalori distinti $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{W} \quad \text{solo se } \mathbf{W} = \mathbf{0};$
- \mathbf{B} ha due autovalori coincidenti $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{W} \quad \forall \mathbf{W} : \mathbf{W}\mathbf{e} = \mathbf{0},$
dove \mathbf{e} indica l'autospazio di dimensione 1 di \mathbf{B} .

Per questi tre controesempi, che presentano sempre due autovalori coincidenti, si rientra nell'ultimo caso e quindi la componente dei differenziali lungo $\dot{\mathbf{Q}}$ si annulla in corrispondenza di tutti quei \mathbf{W} che hanno uno spazio nullo contenente l'autospazio di \mathbf{B} di dimensione uno, cioè quello relativo all'autovalore di molteplicità uno. La ricerca di questi \mathbf{W} , ai quali poi associare una coppia $(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ tale che $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$ per trovare i punti (λ, \mathbf{Q}) in cui la varietà definita dall'immersione $\mathbf{B}(\lambda, \mathbf{Q})$ presenti

delle criticità, non sembra essere un problema facile da affrontare e rimane quindi ancora aperto.

Bibliografia

- [1] P. Podio-Guidugli and M. S. Vianello, “Constraint manifolds for isotropic solids,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1989.
- [2] M. M. Carroll, “On isotropic constraints,” *International Journal of Engineering Science*, 2008.
- [3] M. S. Vianello, “Appunti del corso di modellistica matematico fisica per l’ingegneria,” 2012-2013. Tenuto all’interno del corso di studi di laurea specialistica in Ingegneria Matematica presso il Politecnico di Milano.
- [4] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.
- [5] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, 1971.
- [6] R. L. Bishop and S. I. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover, 1980.
- [7] M. Manetti, *Topologia*. Springer, 2008.
- [8] T. Levi-Civita and U. Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale*. Zanichelli, 1974.
- [9] G. Grioli, *Lezioni di meccanica razionale*. Edizioni Libreria Cortina Padova, 1985.
- [10] A. Fasano and S. Marmi, *Meccanica analitica*. Bollati Boringhieri, 1994.
- [11] G. Gallavotti, *Meccanica elementare*. Bollati Boringhieri, 1986.
- [12] P. Benvenuti and G. Maschio, *Complementi ed esercizi di meccanica razionale*. Edizioni Kappa, 1995.
- [13] P. Biscari, T. Ruggeri, G. Saccomandi, and M. Vianello, *Meccanica razionale per l’ingegneria*. Springer, 2013.

- [14] M. E. Gurtin and P. Podio-Guidugli, “The thermodynamics of constrained materials,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1973.
- [15] P. Podio-Guidugli, “Constrained elasticity,” *Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni*, 1990.
- [16] H. Cohen and C.-C. Wang, “On the response and symmetry of elastic materials with internal constraints,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1987.
- [17] M. S. Vianello, “Internal constraints in finite elasticity: Manifolds or not,” *Journal of Elasticity*, 2012.
- [18] V. K. Agarwal and M. M. Carroll, “Admissibility conditions on principal strain invariants,” *Acta Mechanica*, 2005.