

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in
Ingegneria Meccanica



Applicazione del filtro di Kalman per sensor fusion a segnali
acquisiti a bordo di una vettura da competizione

Relatore: Prof. Edoardo SABBIONI

Tesi di Laurea di:

Mattia MORLACCHI Matr. 770677

Anno Accademico 2013 - 2014.

Ringraziamenti

Le prime persone a cui devo dire grazie sono coloro che mi hanno dato la possibilità di svolgere questo lavoro di tesi, quindi un grazie sentito a Michele Ciavola, Giacomo Tortora e Luca De Bernardi del gruppo GES di Ferrari. Un grazie particolare va a Stefano Frigieri che mi ha consigliato e dedicato attenzione durante lo svolgimento di questo progetto e che al tempo stesso è una persona con la quale è piacevole dialogare. Ringrazio anche Maurizio Bocchi, sempre del team di Ferrari, per tutte le interessanti discussioni, lavorative e non, avute con lui, purtroppo spesso confinate a una pausa caffè.

Non posso poi non ringraziare l'ing. Edoardo Sabbioni del Politecnico di Milano che ha avuto la pazienza di seguirmi e controllare il lavoro svolto.

Colgo anche l'occasione per dire grazie a tutte quelle persone che mi hanno aiutato e mi sono state vicine non solo durante questo periodo di tesi, ma anche più in generale durante tutto quello universitario.

Tra queste, sarò anche poco originale, ma la prima persona che indubbiamente devo ringraziare è mia madre. Non bastano poche righe, e non è sicuramente questo il luogo, per descrivere la profonda stima che ho di lei; a lei è rivolto il mio più grande grazie per avermi sempre sostenuto e incoraggiato a fare bene specialmente nei momenti più difficili, ma soprattutto per la sua capacità di comprendermi fino in fondo e di trovare in ogni situazione il modo e le parole per farmi sentire l'estrema fiducia che ha in me.

Un altro ringraziamento speciale va al mio migliore amico Guzz che, nonostante da qualche anno abiti giusto un pochino più lontano rispetto a dove ha sempre vissuto (ovvero nella casa dietro la mia), continua a dimostrarmi che quell'aggettivo "migliore" non gli è stato dato a caso. Ringrazio anche la mia amica Marta per la sua grande umanità e per essermi stata sempre accanto, specialmente negli ultimi mesi. Un grazie comunque a tutti i miei amici, quelli veri, persone senza le quali non mi sentirei completo.

Grazie anche al gruppo di ballo della CrazyRock e al maestro Antonio, perché è merito loro se, soprattutto durante gli intensi periodi di studio, riesco a staccare la mente, sfogarmi e divertirmi tra allenamenti e spettacoli.

Ringrazio infine i miei compagni di università (Max, Puppe, Stewe e Saimon) con i quali ho condiviso un percorso non facile fatto di difficoltà e soddisfazioni.

Indice Generale

Sommario e parole chiave	i
Introduzione	ii
1. Sensor fusion	1
1.1. Cosa significa.....	1
1.2. Come si realizza.....	3
1.2.1. Le logiche fuzzy.....	3
1.2.2. Il filtro di Kalman.....	6
1.2.3. Le reti neurali.....	7
1.3. Strumento scelto e motivazione.....	10
2. Il filtro di Kalman: Concetti teorici	13
2.1. Kalman per sistemi lineari.....	13
2.2. Osservabilità di un sistema.....	19
2.3. Kalman per sistemi non lineari.....	20
2.4. Identificazione di parametri incogniti.....	26
3. Il filtro di Kalman: Esempi applicativi	29
3.1. Sistema a 1 grado di libertà.....	29
3.1.1. Analisi delle prestazioni del filtro in base alle misure disponibili.....	31
3.1.2. Presenza di bias sulla misura dell'accelerazione.....	38
3.1.3. Malfunzionamento del sensore di velocità.....	43
3.2. Sistema a 2 gradi di libertà.....	50
3.2.1. Velocità angolare assunta come ingresso.....	52
3.2.2. Velocità angolare assunta come variabile di stato.....	57
3.2.3. Introduzione delle forze aerodinamiche.....	59
3.2.4. Modello utilizzato dal filtro diverso da quello usato per generare le misure.....	67

4. Applicazione reale	71
4.1. Giro di pista: dinamica nel piano.....	73
4.1.1. Scelta del modello.....	73
4.1.2. Analisi di validazione.....	77
4.1.3. Risultati.....	80
4.1.4. Considerazioni finali.....	89
Conclusioni	91
Bibliografia	93

Elenco delle figure

1.1	Esempio di trasformazione delle variabili in ingresso in valori linguistici.....	4
1.2	Esempio di funzione di appartenenza finale.....	5
1.3	Architettura di una rete neurale.....	8
2.1	Schema riassuntivo del filtro di Kalman per sistemi lineari.....	18
2.2	Schema riassuntivo del filtro di Kalman esteso.....	24
2.3	Confronto tra filtro di Kalman lineare e filtro di Kalman esteso.....	26
3.1	Schema del sistema a 1 grado di libertà.....	29
3.2	Confronto tra misure e valori veri.....	30
3.3	Confronto tra accelerazione reale, misurata e filtrata note accelerazione e velocità.....	32
3.4	Confronto tra velocità reale, misurata e filtrata note accelerazione e velocità.....	33
3.5	Confronto tra posizione reale, misurata e filtrata note accelerazione e velocità.....	34
3.6	Influenza della varianza di modello dell'accelerazione.....	35
3.7	Andamenti degli errori tra valori veri e valori filtrati in diverse situazioni di misure disponibili.....	37
3.8	Confronto tra misure e valori veri in presenza di accelerometro affetto da bias.....	39
3.9	Confronto tra accelerazione vera, misurata e filtrata.....	40
3.10	Confronto tra velocità vera, misurata e filtrata.....	41
3.11	Andamento nel tempo dell'errore tra posizione vera e posizione misurata e filtrata.....	42
3.12	Comportamento della stima del bias con due diversi valori di varianza a modello del bias stesso.....	43
3.13	Confronto tra misure e valori veri in presenza di malfunzionamento del sensore di velocità.....	44
3.14	Profilo della velocità vera, misurata e filtrata in corrispondenza della zona di malfunzionamento del sensore.....	45
3.15	Andamenti degli errori commessi su accelerazione e posizione dalle rispettive misure e dalle grandezze filtrate.....	46
3.16	Schema dell'algoritmo che rileva il malfunzionamento del sensore.....	47
3.17	Profilo di velocità filtrato con la disattivazione del segnale di velocità nella zona di malfunzionamento del sensore.....	48

3.18	Andamento degli errori commessi su accelerazione e posizione con la logica On/Off confrontati con quelli ottenuti in precedenza	49
3.19	Modello a due gradi di libertà.....	51
3.20	Storie temporali esatte delle variabili.....	51
3.21	Confronto degli errori tra velocità vera e velocità misurata e filtrata in diverse condizioni.....	53
3.22	Confronto degli errori commessi su accelerazione e posizione dalle misure e dalle rispettive grandezze filtrate nelle diverse situazioni.....	54
3.23	Andamenti temporali degli errori commessi su accelerazione, velocità e posizione dalle misure e dalle variabili filtrate con diversi modelli.....	58
3.24	Sistema a 2 gradi di libertà con presenza delle forze aerodinamiche e della coppia di trazione/frenatura.....	60
3.25	Dinamica vera delle grandezze da filtrare e degli ingressi del sistema ..	62
3.26	Andamenti temporali degli errori commessi su accelerazione, velocità e posizione dalle misure e dalle variabili filtrate nei differenti casi.....	64
3.27	Andamento nel tempo dell'errore su omega ruota commesso dalla misura e dalla rispettiva grandezza filtrata nei differenti casi.....	65
3.28	Andamento della stima dei coefficienti aerodinamici utilizzando le variabili filtrate o includendo gli stessi nel vettore di stato.....	67
3.29	Profilo temporale dell'errore commesso su velocità di avanzamento e su quella di rotazione della ruota in corrispondenza dei valori massimi di resistenza aerodinamica con modello che la trascura.....	69
3.30	Profilo temporale dell'errore commesso sull'accelerazione e sullo spostamento in corrispondenza dei valori massimi di resistenza aerodinamica con modello che la trascura.....	69
4.1	Sensori utilizzati per fare sensor fusion presenti a bordo della Ferrari F150 Italia.....	72
4.2	Tracciato del circuito della Catalogna (Spagna).....	73
4.3	Modellazione della monoposto come corpo rigido nel piano.....	74
4.4	Test di validazione del modello: dinamica vera ricreata tramite modello.....	78
4.5	Test di validazione del modello: confronto degli andamenti degli errori di misura e delle rispettive grandezze filtrate (accelerazioni e velocità).....	79
4.6	Test di validazione del modello: confronto degli andamenti degli errori di misura e delle rispettive grandezze filtrate (posizione e angolo).....	80

4.7	Profilo della velocità longitudinale della vettura misurata e filtrata	81
4.8	Ingrandimento del profilo di velocità longitudinale nelle zone in cui le misure del Datron sono riconosciute come anomale	83
4.9	Confronto tra accelerazioni misurate e filtrate	84
4.10	Confronto tra velocità d'imbardata misurata e filtrata e ricostruzione dell'angolo di imbardata tramite filtro e tramite integrazione	85
4.11	Confronto tra velocità laterale misurata e filtrata	86
4.12	Profilo della traiettoria tenuta dal pilota durante il giro di pista	87
4.13	Ingrandimento di una zona di traiettoria per apprezzare la differenza tra quella misurata dal GPS e quella filtrata	88
4.14	Andamento temporale della distanza tra posizione individuata dal GPS e posizione filtrata	88

Elenco tabelle

1.1	Confronto tra tecniche di sensor fusion	11
3.1	Sistema a 1 grado di libertà: Valori delle condizioni iniziali del filtro e valori reali di partenza	31
3.2	Sistema a 1 grado di libertà: Valori di deviazione standard delle misure confrontati con quelli delle grandezze filtrate in diverse situazioni di misure disponibili	38
3.3	Sistema a 2 gradi di libertà: Valori di deviazione standard delle misure confrontati con quelli delle grandezze filtrate in diverse situazioni di variabili di stato e/o modelli	55
3.4	Sistema a 2 gradi di libertà con forze aerodinamiche e coppia alla ruota: Valori di deviazione standard delle misure confrontati con quelli delle grandezze filtrate in diverse situazioni di variabili di stato e/o modelli	66
3.5	Sistema a 2 gradi di libertà con modello del filtro diverso da quello usato per la generazione delle misure: Valori di deviazione standard delle grandezze filtrate confrontati con i precedenti	70

Sommario

Il presente lavoro è stato svolto all'interno dell'area sportiva di Ferrari Spa con l'obiettivo di prendere confidenza e approfondire il funzionamento del filtro di Kalman. Quest'ultimo è un utile strumento per fare sensor fusion, ossia rendere migliori le informazioni che si hanno di un sistema tramite l'uso combinato dei sensori che lo monitorano. Dopo una panoramica delle principali tecniche sfruttabili per la sensor fusion, si è studiato il filtro di Kalman sia per sistemi lineari che nella sua versione più estesa adatta anche a sistemi non lineari, mostrandone pregi, difetti e potenzialità. Infine è stata presentata un'applicazione reale del filtro di Kalman per attuare sensor fusion a bordo della monoposto Ferrari F150 Italia.

Parole Chiave: Fusione di sensori, sensori virtuali, filtro di Kalman, filtro di Kalman esteso.

Abstract

The present work was developed in the racing area of Ferrari Spa with the aim to better understand and examine in depth the Kalman filter working. It is a useful tool to carry out sensor fusion, in other words to better understand the available information of a system by the combined application of the sensors that control it. After a landscape of the main techniques applicable for the sensor fusion, we studied both the Kalman filter and the extended Kalman filter showing merits and faults and also potentiality. In the end a real application of Kalman filter to do sensor fusion in the Ferrari F150 Italia racecar was developed.

Keywords: Sensor fusion, virtual sensors, Kalman filter, extended Kalman filter.

Introduzione

Questo progetto è nato all'interno dell'area sportiva di Ferrari Spa dalla constatazione che ogni vettura di Formula Uno viene monitorata da un gran numero di sensori eterogenei che spesso forniscono misure relazionabili alla stessa grandezza (si pensi per esempio al legame che esiste tra la velocità di avanzamento e l'accelerazione del veicolo stesso). Si è quindi voluto cercare una strada per utilizzare alcuni segnali non solo singolarmente, ma combinarli tra loro con l'obiettivo di:

- ottenere delle misure migliori,
- essere meno sensibili a dei malfunzionamenti dei sensori,
- stimare grandezze non misurabili fisicamente.

Tale attività ricade sotto il nome di Sensor Fusion e la tecnica che è stata presa in considerazione nel presente lavoro per attuarla è il filtro di Kalman.

Affronteremo l'argomento nel seguente modo:

- Nel capitolo 1 chiariremo il concetto di sensor fusion mostrando come sia un'attività applicabile in una vastissima area di settori ed illustreremo i principali effetti potenzialmente raggiungibili tramite un suo impiego. Presenteremo poi tre tecniche tra le più conosciute per attuarla, ossia le logiche fuzzy, il filtro di Kalman e le reti neurali; per ognuna di queste forniremo una spiegazione introduttiva del funzionamento e ne mostreremo pregi, difetti e campo di applicabilità. Il capitolo verrà chiuso illustrando quali siano gli obiettivi del presente lavoro e motivando la scelta del filtro di Kalman per raggiungerli.
- Nel capitolo 2 ci concentreremo sul filtro di Kalman da un punto di vista didattico, spiegando quali equazioni vi sono al "suo interno", il perché e le ipotesi che vi stanno alla base. Vedremo che tale tecnica necessita di un modello dinamico del sistema in esame, inoltre tale modello deve essere descritto da funzioni lineari. A tal riguardo presenteremo anche la definizione di osservabilità di un sistema. Mostriamo poi il filtro di Kalman

esteso che è un adattamento della versione classica alle situazioni di sistemi non lineari. Infine esamineremo come è possibile identificare tramite il filtro di Kalman (classico o esteso) delle grandezze incognite.

- Nel capitolo 3 applicheremo il filtro di Kalman a delle situazioni ideali per le quali la dinamica reale è stata ricostruita tramite modello. Renderemo dapprima disponibili al filtro diverse combinazioni di misure (anch'esse generate a sistema), in seguito valuteremo il suo comportamento nel caso in cui una di queste sia affetta da bias o da un malfunzionamento del sensore. Metteremo poi a confronto le prestazioni ottenute considerando alcune misure come ingressi al sistema o come variabili di stato e proporremo una tecnica, secondo noi originale, per trattare situazioni in cui è possibile scrivere più di un'equazione per una stessa grandezza. Infine mostreremo un caso nel quale ci serviremo del filtro di Kalman per identificare due coefficienti aerodinamici.
- Nel capitolo 4 applicheremo il filtro di Kalman a una situazione reale, e cioè lo utilizzeremo per filtrare alcuni dati acquisiti a bordo della vettura da Formula Uno Ferrari F150 Italia e renderli più robusti ai malfunzionamenti del sensore ottico di velocità.

Capitolo 1

Sensor fusion

Una delle domande che solitamente ci si pone prima di fare qualsiasi cosa è banalmente: “Perché?”. Ci è sembrato dunque interessante aprire questo capitolo dando una breve spiegazione, seppur ovvia, del motivo per il quale stiamo per affrontare il tema della sensor fusion. Come disse Lord William Thomson «possiamo conoscere qualcosa dell’oggetto di cui stiamo parlando solo se possiamo eseguirvi misurazioni, per descriverlo mediante numeri; altrimenti la nostra conoscenza è scarsa e insoddisfacente». Si aprono quindi due problemi: il primo legato al processo di misura, il secondo relativo agli stessi strumenti di misurazione. È noto, infatti, che ogni misura viene definita come un intervallo di valori entro cui probabilmente essa è compresa, dato che è impossibile conoscere il valore vero del misurando, e la larghezza di questo intervallo ne definisce la precisione [1]. Senza addentrarci ulteriormente, possiamo intuire che quanto più le misure sono vicine al valore vero, maggiore è la conoscenza dell’oggetto preso in esame, o più in generale del sistema.

L’altro aspetto fondamentale è relativo a quali e quante grandezze siamo in grado di investigare. Pur esistendo al giorno d’oggi una notevole quantità di strumenti di misura per ogni area di applicazione, ogniqualvolta desideriamo monitorare un sistema non possiamo non considerare limiti legati a: costo, spazio disponibile, invasività del sensore, peso o al fatto che non esistono ancora strumenti in grado di misurare una determinata grandezza.

Obiettivo della sensor fusion è quindi rispondere a queste esigenze.

1.1 Cosa significa

Fare sensor fusion significa combinare in modo intelligente i dati provenienti da diversi sensori in modo da ottenere informazioni migliori di quelle che si sarebbero potute ottenere usando quei sensori separatamente. Con migliori intendiamo più accurate, più affidabili, più complete e più robuste. Possiamo inoltre compiere la distinzione tra fusione diretta, cioè quella che unisce solo le informazioni

provenienti da sensori omogenei e/o eterogenei, e fusione indiretta la quale usa in aggiunta le informazioni derivanti dalla conoscenza a priori del sistema e degli ingressi [2].

Vista la definizione generale, cerchiamo ora di capirne più in concreto le potenzialità. La sensor fusion permette anzitutto di interpretare il sistema da un punto di osservazione più alto poiché si ha una visione d'insieme di tutte le misure. Facciamo l'esempio di un sistema anti-incendio all'interno di un edificio: se disponiamo di tanti sensori distribuiti su tutta l'area, la sola osservazione d'insieme di quali si attivano e quali no, ci consente di capire l'origine dell'incendio, l'intensità e la direzione di propagazione. Inoltre se volessimo evitare falsi allarmi, possiamo pensare di servirci di due tipi di sensori diversi, uno per le particelle e uno per la temperatura, in modo che solo l'accensione contemporanea di entrambi faccia scattare l'allarme [3].

Sempre a sostegno della maggior robustezza, si può applicare una logica di sensor fusion per rendere il sistema in esame meno sensibile ai guasti di uno o più sensori. Monitorare, infatti, la stessa grandezza con più strumenti, permette di individuare una misura "anomala" (cioè con valore eccessivamente distante da quello medio di tutte le misurazioni), di attribuire la causa a un malfunzionamento del sensore associato e quindi agire di conseguenza per esempio isolandolo. Dall'altro lato consente anche di unire tali misure per ottenerne una sola filtrata, cioè più precisa e meno affetta da rumore. Prendiamo ad esempio il caso di due sensori che rilevano la stessa grandezza: dalle due rispettive misure y_1 (con varianza σ_1) e y_2 (con varianza σ_2) applicando il teorema del limite centrale [4], otteniamo la misura mediata:

$$y_{12} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_1 \quad (1.1)$$

con deviazione standard pari a:

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (1.2)$$

Aggiungiamo che l'operazione di filtraggio può essere effettuata anche servendosi di misure di grandezze diverse tramite l'impiego di opportuni algoritmi o modelli di sistema (quali ad esempio le logiche fuzzy, il filtro di Kalman e le reti neurali, che verranno approfonditi meglio nella prossima sezione).

Infine uno dei grandi vantaggi ottenibili tramite la sensor fusion è la possibilità di rimuovere un sensore continuando però a monitorare le stesse grandezze, oppure di ottenere la rilevazione di una misura senza dover aggiungere un nuovo sensore: si parla nello specifico di sensori virtuali. Il loro impiego viene fatto da un lato con l'obiettivo di aggiungere una ridondanza di tipo analitico per garantire più elevati requisiti di affidabilità limitando le ridondanze fisiche, con i vantaggi già citati che ne conseguono; dall'altro permette la predizione di alcune variabili di uscita di un processo dinamico e/o la determinazione del valore di grandezze che per loro natura o per l'architettura dell'impianto non possono essere misurate direttamente [5].

1.2 Come si realizza

Premesso quindi che la sensor fusion ha vaste aree di applicazione, vogliamo a questo punto indagare alcune delle principali tecniche comunemente utilizzate per realizzarla. Specifichiamo che l'intenzione di questo paragrafo non è quella di addentrarci in una lunga e didattica spiegazione per ogni tecnica, ma piuttosto di rendere consapevole il lettore di quali siano i principali "strumenti" per effettuare la sensor fusion, mostrandone brevemente il funzionamento, le potenzialità, i vantaggi e le limitazioni.

1.2.1 Le logiche fuzzy

Le logiche fuzzy sono un'estensione della logica classica in cui sono presenti più valori di verità, infatti il termine fuzzy (tradotto solitamente con sfumato) si riferisce al fatto che un'affermazione può essere non solo vera o falsa, ma anche parzialmente vera e parzialmente falsa. Si parla pertanto di grado di verità, cioè di un valore compreso tra 0 (che ha il significato di totalmente falso) e 1 (ossia totalmente vero).

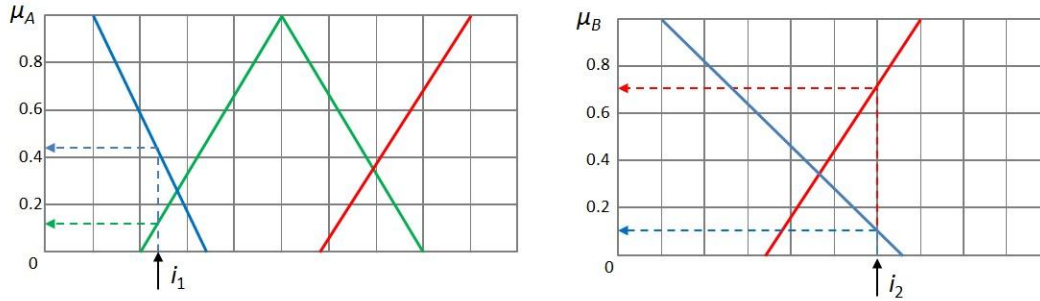


Figura 1.1: Esempio di trasformazione delle variabili in ingresso in valori linguistici.

Possiamo riassumere il funzionamento di un sistema fuzzy in tre fasi:

1. **Fuzzificazione:** i valori in ingresso al sistema (le misure per esempio) vengono convertiti in valori linguistici con un grado di verità associato. Ciò avviene tramite delle funzioni semplici $\mu(i)$ come mostrato in fig. 1.1. Notiamo per esempio che l'ingresso 1 può appartenere a tre categorie, più in particolare appartiene alla blu e alla verde con un certo grado di verità, mentre non appartiene alla rossa (grado di verità pari a zero).
2. **Controllo:** i valori linguistici ottenuti vengono valutati secondo delle regole pre-stabilite che hanno una struttura del tipo "IF - THEN". Nella condizione IF possono essere presenti le congiunzioni AND o OR che generalmente si traducono nel prendere rispettivamente il valore di verità minimo o quello massimo. Se sono presenti più regole μ_r , la funzione di appartenenza finale μ_{fin} è data dall'unione di tutte le uscite delle regole stesse come illustrato in fig. 1.2.
3. **Defuzzificazione:** i valori linguistici ottenuti vengono riconvertiti in output del sistema y_{out} . Il metodo abitualmente utilizzato è quello del centroide, ossia:

$$y_{out} = \frac{\int \mu_{fin}(y) \cdot y \, dy}{\int \mu_{fin}(y) \, dy} \quad (1.3)$$

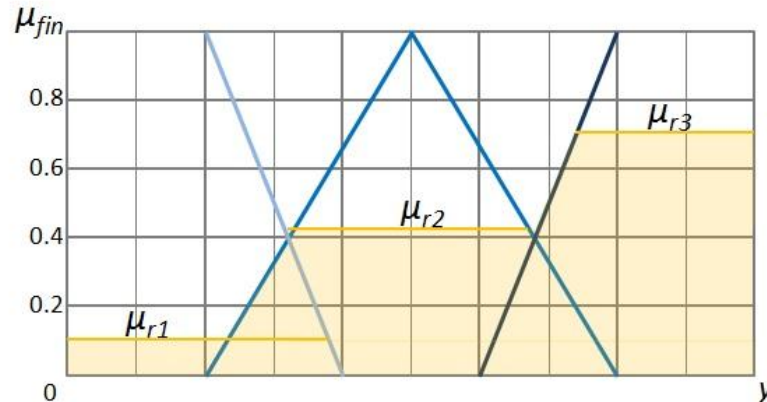


Figura 1.2: Esempio di funzione di appartenenza finale data dall'unione dei valori uscenti dalle tre diverse regole.

Per maggiori dettagli e approfondimenti sull'argomento si rimanda a testi specifici come per esempio [6].

In [7] è riportato il funzionamento di una logica fuzzy a bordo vettura per la stima della velocità longitudinale del veicolo utilizzando come ingressi le 4 velocità angolari delle ruote e l'accelerazione longitudinale. L'idea di base è di utilizzare il valore di accelerazione per riconoscere una situazione di marcia costante, di frenata o di accelerazione e quindi agire sui pesi di tutte le cinque misure per ottenere un valore il più possibile corretto della velocità di avanzamento. Per esempio, nella condizione di forte frenata, la logica fuzzy darà maggior peso al segnale dell'accelerometro, peso medio alle velocità angolari delle ruote posteriori e peso basso a quelle anteriori dato che sono quelle soggette ai maggiori scorrimenti. In marcia costante invece, peserà poco l'accelerometro rispetto alle velocità angolari delle ruote.

Uno dei principali vantaggi delle logiche fuzzy è che il percorso che porta alla soluzione del problema, basandosi sul linguaggio naturale, può essere facilmente compreso dall'utente, il quale oltre ad avere sotto controllo il procedimento può usare la sua esperienza per modificare e migliorare la logica in uso. Inoltre il loro utilizzo può essere conveniente quando [8]:

- vi sono notevoli variazioni parametriche,

- il sistema non è noto con precisione,
- la molteplicità degli obiettivi da raggiungere crea una difficoltà di decisione.

Se invece il sistema è lineare e/o esiste un preciso modello matematico, o al contrario il sistema è ignoto, allora la scelta delle logiche fuzzy è da scartare privilegiando tecniche quali il filtro di Kalman o le reti neurali.

1.2.2 Il filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è uno strumento che permette di stimare lo stato di un sistema dinamico sulla base delle misure effettuate sullo stesso. Viene spesso utilizzato per ottenere una migliore valutazione di un dato ottenuto dalla lettura di più sensori, ognuno caratterizzato da un rumore di misura. Possiamo riassumere il suo funzionamento in due fasi successive:

- al tempo t la fase di predizione, cioè tramite un modello matematico viene fatta una previsione dei valori che assumeranno le variabili di interesse in un futuro immediato ($t + \Delta t$),
- e al tempo ($t + \Delta t$) la fase di aggiornamento, ossia si mettono a confronto i valori predetti con quelli provenienti in quell'istante dai sensori di misura e se ne opera un'opportuna media.

Sottolineiamo dunque che il filtro di Kalman, a differenza delle logiche fuzzy e delle reti neurali, ha bisogno di un modello matematico al quale appoggiarsi per calcolare la storia temporale del sistema. In particolare se il sistema dinamico è lineare, e se i disturbi sono aleatori con distribuzione di probabilità gaussiana, allora il filtro di Kalman è uno stimatore ottimo; tuttavia può essere anche esteso a sistemi non lineari con prestazioni accettabili. Un altro vantaggio è la capacità di ricavare parametri incogniti o grandezze non misurabili direttamente.

Tra gli svantaggi citiamo il fatto ovvio che non può essere applicato nelle situazioni in cui non si è in grado di modellare opportunamente il processo reale, e in secondo luogo la necessità di impostare in maniera del tutto euristica alcuni parametri del filtro durante la fase di messa a punto iniziale.

Ci siamo volutamente limitati a fornire una breve spiegazione di questa tecnica, per non essere ripetitivi in seguito, dato che l'argomento verrà sviluppato ampiamente nei prossimi capitoli.

1.2.3 Le reti neurali

Sono delle tecniche di approssimazione globale molto potenti utilizzate principalmente quando si ha una scarsa conoscenza del legame esistente tra variabili indipendenti e variabili dipendenti. Esse infatti permettono di trattare il sistema come una *black box* alla quale fornire gli input per ottenere gli output. La denominazione di rete neurale è dovuta al fatto che si è cercato di imitare il comportamento e la struttura del cervello umano, che però, specifichiamo, sono di gran lunga più complessi.

Per capire il funzionamento di una rete neurale artificiale, osserviamone dapprima l'architettura mostrata in fig. 1.3.¹ Notiamo che le singole unità di processo, chiamate neuroni, sono organizzate in colonne successive (dette livelli); e ogni neurone è connesso a tutti i neuroni sia del livello precedente che di quello successivo, ma non a quelli del livello a cui appartiene. I livelli di ingresso e di uscita sono sempre presenti, il numero dei livelli nascosti viene invece impostato dall'utente (solitamente minore di tre).

L' i -esimo neurone riceve in ingresso la somma pesata delle uscite a del livello precedente alla quale può essere aggiunto un eventuale offset ϑ :

$$i_i = \sum_j w_{ij} a_j + \vartheta_i \quad (1.4)$$

dove w_{ij} rappresenta il peso per la j -esima uscita. Il neurone “elabora” dunque l'ingresso mediante una funzione di attivazione $F(i_i)$ per generare l'uscita o_i . Quella comunemente più utilizzata è la sigmoide perché permette di valutare anche funzioni non lineari:

$$F(i_i) = \frac{1}{1 + e^{-i_i s}} \quad (1.5)$$

¹ In realtà esistono diverse architetture, quella a cui facciamo riferimento è una delle più diffuse e viene denominata Multi Layer Perceptron.

nella quale s indica la pendenza nell'origine.

Creata quindi la rete neurale, si passa alla fase di apprendimento, vale a dire si forniscono alla stessa dei campioni di input-output (ricavati per esempio sperimentalmente) con i quali la rete "impara" la relazione esistente tra ingressi e uscite. In concreto ciò avviene facendo variare i pesi w e gli offset ϑ in modo da minimizzare l'errore tra output previsto e output campionato.

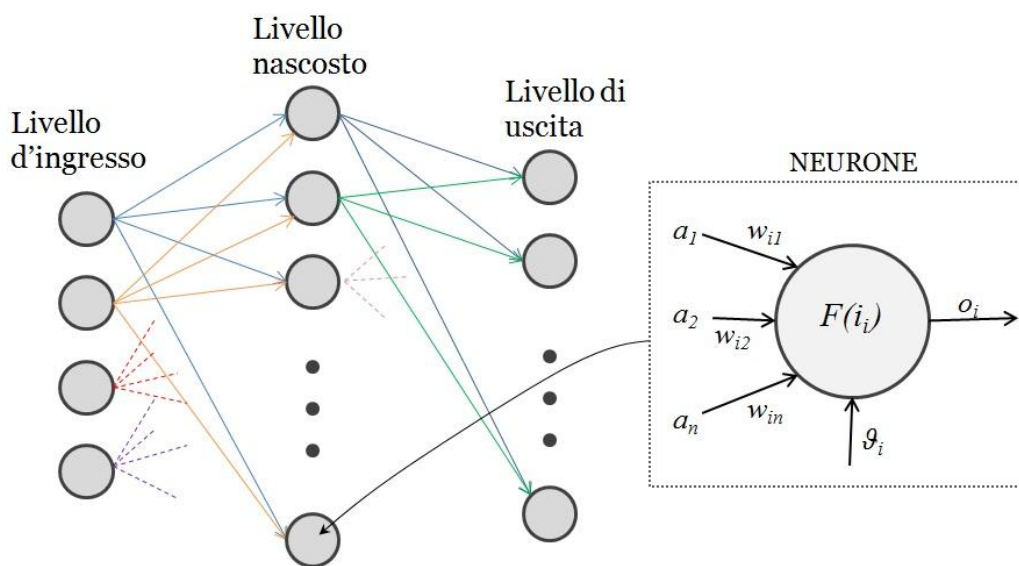


Figura 1.3: Architettura di una rete neurale con un solo livello nascosto. (Sulla destra) ingrandimento della singola unità di processo o neurone.

Il problema con cui però è facile scontrarsi è l'*overtraining*, ossia la rete neurale si adatta perfettamente ai dati campionati, ma perde di generalizzazione, cioè al di fuori di quegli ingressi commette errori elevati. È dunque pratica comune servirsi solo di una parte (80-90%) di tutti i campioni disponibili per addestrare la rete neurale, e di utilizzare la restante parte per calcolare l'errore di generalizzazione: quando quest'ultimo raggiunge il suo minimo, si può pensare di fermare

l'apprendimento.² Ovviamente reti neurali complesse (tanti neuroni e vari livelli nascosti) permettono di approssimare “funzioni” complicate, tuttavia è più facile commettere *overtraining* oltre al fatto che serve un numero di campioni più grande per addestrarle (in linea di massima se abbiamo n connessioni dobbiamo avere un insieme di allenamento di almeno $n+1$ campioni)[9].

Uno degli svantaggi infatti delle reti neurali è la necessità di disporre di molti campioni, la cui generazione è solitamente un processo lungo e costoso se non addirittura impossibile da realizzare. L'altro difetto evidente è l'incapacità di comprendere il comportamento della rete e di spiegare quale sia l'impatto delle singole variabili d'ingresso su quelle di uscita (siamo nel caso opposto delle logiche fuzzy).

Per quanto riguarda invece i vantaggi [5], possiamo riassumerli in:

- determinano il risultato tenendo conto di tutti gli input
- lavorano bene anche con input affetti da rumore, grazie al fatto che le funzioni di attivazione effettuano una naturale regolazione della variabilità nei dati
- non richiedono la conoscenza del modello matematico/fisico del sistema che si vuole studiare
- sono preferibili e hanno prestazioni migliori rispetto a Kalman quando il sistema è fortemente non lineare
- nel caso diventassero disponibili nuovi dati sperimentali rispetto a quelli con cui la rete è stata addestrata, si possono migliorare le prestazioni della stessa addestrandola con un nuovo set di allenamento costituito dai dati nuovi uniti a quelli utilizzati in precedenza
- sono facili da implementare.

² Questo approccio utilizzato per evitare l'overtraining prende il nome di cross validazione. Ne esistono anche altri, citiamo ad esempio l'approccio empirico di regolarizzazione che impedisce che i valori di alcuni coefficienti crescano troppo, fatto che porterebbe a funzioni con improvvise variazioni.





1.3 Strumento scelto e motivazione

Il presente lavoro è stato svolto all'interno dell'area sportiva di Ferrari Spa con l'obiettivo di attuare sensor fusion a bordo della vettura di Formula Uno. In merito al metodo da utilizzare, la scelta è ricaduta sul filtro di Kalman, giustificata dal fatto che sulla monoposto è presente un ingente numero di sensori e si ha quindi la possibilità di formulare diversi modelli dinamici di sistemi osservabili³. Inoltre sulla dinamica del veicolo, sia longitudinale che verticale, sono noti e disponibili in letteratura numerosi modelli. Di questi, il reparto Ges (Gestione Sportiva) di Ferrari Spa ne ha sviluppato e affinato uno specifico per la monoposto di Formula Uno, motivo per cui ci sembra poco ragionevole trattare il sistema vettura come una *black box*. Infine a rafforzare la scelta del filtro di Kalman è la sua particolarmente attitudine a identificare parametri incogniti, la conoscenza dei quali è per esempio richiesta nelle attività di simulazione.

Prima di concludere abbiamo riportato in tab. 1.1 un confronto tra i tre metodi illustrati nel corso di questo capitolo, mostrandone pregi e difetti, così che possa essere d'aiuto nella scelta di uno di questi in base al problema da affrontare.

³ Per la definizione di osservabilità di un sistema si rimanda alla sezione §2.2

Tabella 1.1: Confronto tra le tre tecniche presentate, nel quale sono stati evidenziati i principali punti di forza e di debolezza delle stesse.

	LOGICA FUZZY	FILTRO DI KALMAN	RETE NEURALE
<i>Percorso input output</i>	Facilmente comprensibile 	Comprensibile	Sconosciuto 
<i>Conoscenza del sistema</i>	Non è richiesta in maniera dettagliata	Richiede nello specifico un modello dinamico del sistema	Non richiesta, tratta il sistema come una Black box
<i>Tipologie di sistemi</i>	Applicabile a una vasta area di sistemi	Ottimo per i sistemi lineari 	Particolarmente adatto per sistemi fortemente non lineari
<i>Fase iniziale</i>	Non presenta particolari problemi	Setting da svolgere in maniera euristica e con buon senso	Necessità di ampi campioni per la fase di apprendimento 
<i>Sviluppabile in real time</i>	Sì e con basso costo computazionale	Sì e con basso costo computazionale	Sì, ma con costo computazionale più elevato

Capitolo 2

Il filtro di Kalman: concetti teorici

Il filtro di Kalman è uno dei più famosi algoritmi di fusione di segnali in uso al giorno d'oggi, viene tipicamente utilizzato per ridurre il rumore di misura e per fornire una stima di parametri incogniti. Deve il nome al suo inventore Rudolf E. Kalman e storicamente il primo utilizzo pratico fu sviluppato dal ricercatore della NASA Stanley Schmidt per stimare le traiettorie dell' Apollo 11 che portò Neil Armstrong sulla Luna [10]. Attualmente, per fare qualche esempio, è presente nei dispositivi di navigazione satellitare, negli *smart phones* e in molti videogiochi [11]. Il processo che sta alla base del filtro di Kalman è di fare una previsione delle grandezze di interesse con i dati disponibili a un certo istante, poi confrontarla con le misure provenienti dai sensori all'istante successivo e quindi farne una media pesata opportunamente. È proprio quest'ultimo passaggio la chiave dell'algoritmo di Kalman, vedremo nel seguito del capitolo che la scelta di tale peso (o guadagno) è guidata dalla minimizzazione dell'errore quadratico medio. In particolare sotto le ipotesi di sistema lineare e di distribuzione gaussiana con media nulla dell'errore, il filtro di Kalman è un osservatore ottimo, ossia è il migliore di tutti i filtri possibili [4].

2.1 Kalman per sistemi lineari

Come detto poco sopra, il filtro di Kalman è un osservatore di stato, cioè si basa su un modello dinamico per descrivere il sistema in esame, più in particolare necessita di un'equazione o di un sistema di equazioni differenziali che, note le condizioni iniziali, permetta di ricostruire la successiva storia temporale. Consideriamo un generico sistema lineare a tempo discreto¹ descritto dalla seguente equazione:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.1)$$

dove:

¹ L'equazione per il caso a tempo continuo è: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t)$.

- \mathbf{x}_k è il vettore di stato contenente le grandezze di interesse all'istante k (per esempio posizione e velocità)
- \mathbf{A}_k è la matrice $n \times n$ di transizione dello stato che connette lo stato all'istante k allo stato all'istante $k+1$, in assenza di ingressi di comando e di rumore
- \mathbf{u}_k è il vettore che contiene gli ingressi di controllo all'istante k (per esempio apertura valvola farfalla e/o pressione sui freni)
- \mathbf{B}_k è la matrice $n \times l$ che lega gli ingressi di controllo allo stato
- \mathbf{w}_k è il vettore contenente il rumore di processo legato ad ogni variabile del vettore di stato.

Per quanto riguarda il legame tra le misure e le variabili di stato possiamo scrivere:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.2)$$

in cui:

- \mathbf{y}_k è il vettore contenente le m misure
- \mathbf{H}_k è la matrice $m \times n$ che lega il vettore di stato alle misure
- \mathbf{v}_k è il vettore contenente il rumore associato alle misure

È bene sottolineare che l'ipotesi principale che sta alla base del filtro di Kalman è che il rumore di processo e di misura siano rumore bianco con distribuzione gaussiana a media nulla ad ogni istante temporale. Facciamo anche notare che solitamente le matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} ed \mathbf{H} sono costanti.

Definiamo le matrici di covarianza del modello e delle misure come:

$$\mathbf{Q}_k = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] ; \quad \mathbf{R}_k = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] \quad (2.3)$$

Generalmente tali matrici sono diagonali, in quanto gli errori sulle variabili del modello e sulle misure sono scorrelati tra loro (o vengono supposti tali per semplicità); nulla però vieta di considerare una qualche correlazione tra due o più misure o variabili. Tuttavia precisiamo che i valori numerici da mettere all'interno di queste matrici sono difficili da stimare e quasi sempre la loro scelta viene fatta per tentativi nella fase di *tuning* del filtro. La matrice \mathbf{Q}_k è legata all'incertezza

sullo stato, quindi è principalmente influenzata dal modello scelto, dal passo di integrazione Δt , e dall'accuratezza sugli ingressi. Spesso si preferisce usare un modello semplice e più approssimato, rispetto a uno complesso e preciso, includendo la maggior incertezza in valori più alti di \mathbf{Q}_k : in questo modo il costo computazionale del filtro rimane basso, il che significa una maggior velocità di calcolo, fondamentale nel caso di filtraggio in tempo reale. La matrice di covarianza del modello è generalmente costante, talvolta può essere variabile: un esempio è quando si decide di assegnarle valori più piccoli laddove il sistema abbia una dinamica lenta e valori più elevati in situazioni di dinamica veloce. La matrice \mathbf{R}_k invece è più facilmente identificabile essendo legata ai sensori di misura, infatti spesso si possono eseguire *off-line* delle misure campione per determinare le varianze degli errori relativi. Sono più frequenti i casi in cui questa matrice non è costante; pensiamo per esempio a come varia la precisione di un segnale GPS in relazione al numero di satelliti "visibili" [12].

Poiché non conosciamo i valori istantanei di \mathbf{w} e di \mathbf{v} , l'obiettivo diventa trovare un $\hat{\mathbf{x}}$ il più possibile vicino al vero valore di \mathbf{x} . A questo punto introduciamo la seguente notazione:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (2.4)$$

dove il segno meno come apice sta ad indicare la stima a priori ottenuta tramite la conoscenza del modello ipotizzando un errore nullo. Con $\hat{\mathbf{x}}$ intendiamo invece la stima a posteriori che è data dalla combinazione lineare tra la stima a priori e la differenza pesata tra la misura attuale e la misura prevista, ossia:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (2.5)$$

Il termine $\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$ è chiamato innovazione o residuo di misura, mentre la matrice \mathbf{K}_k ($n \times m$) è detta guadagno di Kalman ed è scelta opportunamente in modo da essere quel guadagno ottimale che minimizza la covarianza a posteriori.

Procediamo quindi con la determinazione del guadagno di Kalman. Introduciamo l'errore e la covarianza rispettivamente a priori e a posteriori definiti come:

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- ; \quad \mathbf{P}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}] \quad (2.6)$$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k ; \quad \mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] \quad (2.7)$$

Sostituendo l'eq. (2.2) nella (2.5) otteniamo²:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) = \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^- = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (2.8)$$

Riscriviamo quindi l'errore a posteriori come:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k &= \mathbf{x}_k - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{x}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{x}_k - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (2.9)$$

Espandiamo la matrice di covarianza a posteriori:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = \\ &= E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k][(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k]^T] = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \mathbf{K}_k E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] \mathbf{K}_k^T = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \quad (2.10)$$

Per minimizzare la covarianza dell'errore a posteriori dobbiamo derivare la traccia³ di \mathbf{P}_k rispetto a \mathbf{K}_k :

$$T[\mathbf{P}_k] = T[\mathbf{P}_k^-] - 2T[\mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_k^-] + T[\mathbf{K}_k (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k^T] \quad (2.11)$$

$$\frac{dT[\mathbf{P}_k]}{d\mathbf{K}_k} = -2(\mathbf{H} \mathbf{P}_k^-)^T + 2\mathbf{K}_k (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k) \quad (2.12)$$

e quindi porre la derivata uguale a zero per trovare il punto di minimo:

² Per non appesantire eccessivamente la notazione da qui in seguito omettiamo la dipendenza delle matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{H} dal passo k-esimo, poiché come già fatto notare solitamente esse sono costanti.

³ La traccia di una matrice è la somma degli elementi della sua diagonale. Osserviamo che la traccia di una matrice è uguale alla traccia della matrice trasposta.

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (2.13)$$

Osservando quanto appena trovato e l'eq. (2.5) possiamo fare alcune considerazioni:

- più la covarianza dell'errore di misura \mathbf{R} si avvicina a zero, più il guadagno di Kalman pesa il residuo, cioè dà maggiore fiducia alle misure attuali piuttosto che a quelle previste
- più la covarianza dell'errore a priori \mathbf{P}^- tende a zero, e meno peso il guadagno di Kalman attribuisce al residuo, ossia si fida maggiormente delle misure previste tramite modello [12].

Riepilogando, abbiamo visto come fare la previsione tramite modello dello stato $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ (eq. (2.4)), come scegliere \mathbf{K}_k in modo che sia un guadagno ottimale (eq. (2.13)) e come aggiornare lo stato a $\hat{\mathbf{x}}_k$ (eq. (2.5)). Rimane da capire come aggiornare la matrice di covarianza dell'errore da \mathbf{P}^- a \mathbf{P} e come proiettarla al passo successivo \mathbf{P}^-_{k+1} . Per quanto riguarda l'aggiornamento di \mathbf{P}^- riutilizziamo l'eq. (2.10) nella quale sostituiamo la (2.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_k^- = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- \end{aligned} \quad (2.14)$$

Mentre per la proiezione allo *step* successivo espandiamo l'errore a priori:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^-_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}^-_{k+1} = \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k) - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{B} \mathbf{u}_k = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (2.15)$$

Estendendo la definizione della matrice di covarianza dell'errore a priori (eq. (2.6)) al passo $k+1$ si ottiene:

$$\mathbf{P}^-_{k+1} = E[\mathbf{e}^-_{k+1} \mathbf{e}^-_{k+1}{}^T] =$$

$$\begin{aligned}
 &= E[(\mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k)(\mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{w}_k)^T] = \\
 &= E[\mathbf{A}\mathbf{e}_k(\mathbf{A}\mathbf{e}_k)^T] + E[\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^T] = ^4 \\
 &= \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_k
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Illustriamo quindi nella fig. 2.1 lo schema riassuntivo di come opera l'algoritmo di Kalman nella quale abbiamo distinto per maggiore chiarezza la fase di aggiornamento da quella di previsione. $\hat{\mathbf{x}}_0^-$ e \mathbf{P}_0^- sono rispettivamente il vettore di stato contenente le condizioni iniziali e la matrice di covarianza dell'errore sulle condizioni iniziali.

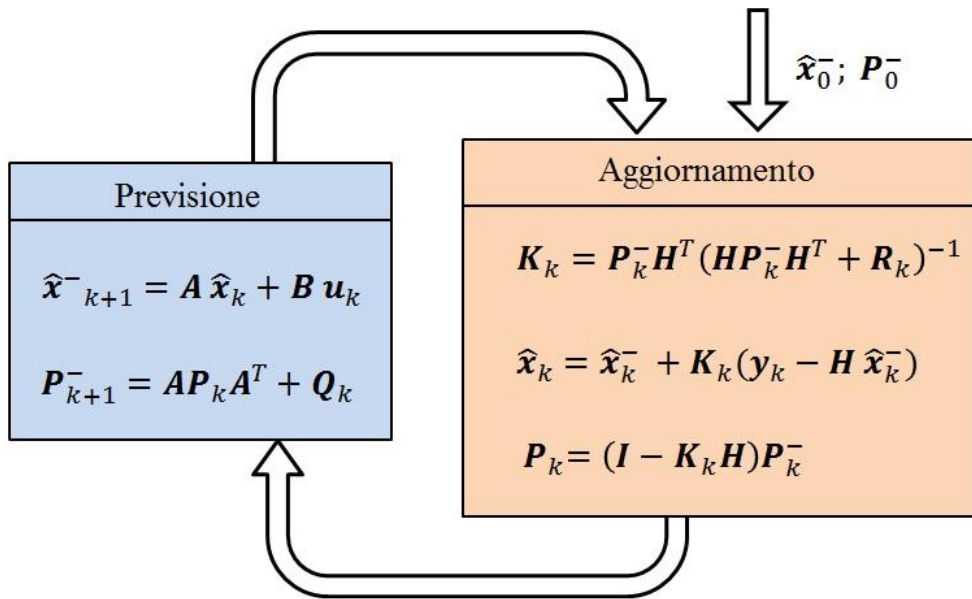


Figura 2.1: Schema riassuntivo del filtro di Kalman per sistemi lineari.

⁴ Notiamo che \mathbf{e}_k e \mathbf{w}_k hanno cross correlazione pari a zero perché il rumore \mathbf{w}_k si accumula dal passo k al passo $k+1$ mentre l'errore \mathbf{e}_k rimane lo stesso.

2.2 Osservabilità di un sistema

Vogliamo porci a questo punto qualche interrogativo sul termine \mathbf{y} , vettore contenente le misure, finora poco analizzato:

- quante misure sono necessarie?
- quali misure sono importanti?

È infatti facile rendersi conto che, per esempio, utilizzare solo la velocità di rotazione di una ruota per risalire alla velocità longitudinale del veicolo non va bene nel momento in cui essa sia bloccata in frenata o stia slittando eccessivamente in accelerazione. Allo stesso modo se volessimo conoscere l'accelerazione laterale in curva di un veicolo non ci basta misurare v_x e v_y , ma avremmo bisogno anche della velocità di imbardata $\dot{\psi}$.

Introduciamo quindi il concetto di osservabilità di un sistema come la capacità di determinare lo stato completo dello stesso a partire dalle osservazioni \mathbf{y} . Consideriamo il sistema già noto:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (2.17)$$

Esso si definisce completamente osservabile se per ogni stato iniziale \mathbf{x}_i esiste un tempo finito t_f (cioè un numero di passi p finito) in cui è sufficiente la conoscenza delle osservazioni \mathbf{y}_{i-p} per determinare lo stato \mathbf{x}_p . La verifica dell'osservabilità per un sistema lineare si riduce al calcolo del rango di una matrice test di osservabilità definita come:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H} \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{H} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

dove n è il numero degli stati. Se la matrice \mathbf{O} ha rango massimo, allora il sistema è osservabile, in caso contrario significa che i valori correnti di alcune variabili di stato non possono essere determinati attraverso i sensori sulle uscite [13].

Quindi affinché il filtro di Kalman funzioni correttamente è necessario che il sistema sia osservabile.⁵

Per quanto riguarda quali misure siano più importanti si può fare riferimento al Gramiano o decomposizione della matrice \mathbf{O} ai valori singolari, ossia se il rapporto tra il valore singolare massimo e quello minimo è vicino a 1 allora il sistema è ben osservabile in tutti i suoi modi, altrimenti se tende a infinito significa che l'ultimo modo è poco osservabile [14].

2.3 Kalman per sistemi non lineari

Cosa succede quando il sistema in esame non è più descritto da equazioni lineari? Il filtro di Kalman può essere adattato anche a questa situazione, fatto che ne ha aumentato l'applicazione ad una vasta area di problemi. In una prima sintesi l'algoritmo rimane quello già visto per i sistemi lineari, con la differenza che la previsione dello stato allo *step* successivo viene fatta tramite l'equazione non lineare, mentre per quella della matrice di covarianza dell'errore occorre linearizzare le equazioni passo-passo nell'intorno della condizione di lavoro. Tale filtro modificato prende il nome di Filtro di Kalman Esteso (EKF): vediamone più nel dettaglio il funzionamento.

Consideriamo il caso più generale in cui sia l'equazione del modello che quella di relazione tra stato e misure siano non lineari:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (2.20)$$

⁵ In realtà è sufficiente la condizione di rilevabilità (o *detectability*) che è una condizione meno forte dell'osservabilità. Essa richiede che gli eventuali modi non osservabili siano stabili. Per verificarla si può usare il test di Popov-Belevitch-Hautus secondo il quale il sistema è rilevabile se la matrice $\mathbf{PBH} = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$ ha rango massimo per ogni autovalore s [15]. È comunque un aspetto piuttosto tecnico, un utente del filtro di Kalman può tranquillamente fare riferimento all'osservabilità.

nelle quali abbiamo mantenuto la stessa notazione vista per il caso lineare di variabili di stato \mathbf{x} , ingressi di comando \mathbf{u} , misure \mathbf{y} e rispettivi rumori \mathbf{v} e \mathbf{w} ; mentre f è la funzione non lineare che lega lo stato al passo k a quello al passo $k+1$ e h la funzione non lineare che lega lo stato alle misure al passo k . Ripetiamo ancora una volta che la distribuzione degli errori è assunta gaussiana e con media nulla; le rispettive matrici di covarianza di \mathbf{v} e \mathbf{w} sono \mathbf{Q} e \mathbf{R} già definite nell'eq. (2.3).

Come notato in precedenza, non conosciamo i valori effettivi dei rumori, per cui analogamente a quanto fatto nell'eq. (2.4) forniamo una stima a priori dello stato tramite la seguente relazione non lineare in cui il rumore è supposto pari a zero:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = f(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}) \quad (2.21)$$

nella quale $\hat{\mathbf{x}}_k$ è la stima a posteriori dello stato che arriva dallo step precedente. Facciamo la stessa approssimazione anche per l'equazione non lineare delle misure:

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}) \quad (2.22)$$

La stima dello stato a posteriori è anche in questo caso data da una combinazione lineare tra la stima a priori e la differenza pesata tra la misura attuale e la misura prevista come mostrato nella seguente relazione:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad (2.23)$$

A differenza di quanto visto nel filtro di Kalman lineare (eq. (2.5)), ripetiamo che sia lo stato che le misure stimate sono ricavate tramite equazioni non lineari. Prima di vedere come calcolare il guadagno di Kalman e la matrice di covarianza aggiornata e proiettata al passo successivo, dobbiamo linearizzare le due equazioni (2.19) e (2.20):

$$\mathbf{x}_{k+1} \cong \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{W}_k \mathbf{w}_k \quad (2.24)$$

$$\mathbf{y}_k \cong \hat{\mathbf{y}}_k^- + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{V}_k \mathbf{v}_k \quad (2.25)$$

dove:

- \mathbf{A}_k è la matrice Jacobiana delle derivate parziali di f rispetto ad \mathbf{x} al passo k :

$$\mathbf{A}_k = \left. \frac{\partial f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, 0)}{\partial \mathbf{x}} \right|_k \quad (2.26)$$

- \mathbf{W}_k è la matrice Jacobiana delle derivate parziali di f rispetto a \mathbf{w} al passo k :

$$\mathbf{W}_k = \left. \frac{\partial f(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, 0)}{\partial \mathbf{w}} \right|_k \quad (2.27)$$

- \mathbf{H}_k è la matrice Jacobiana delle derivate parziali di h rispetto ad \mathbf{x} al passo k :

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h(\hat{\mathbf{x}}^-, 0)}{\partial \mathbf{x}} \right|_k \quad (2.28)$$

- \mathbf{V}_k è la matrice Jacobiana delle derivate parziali di h rispetto ad \mathbf{v} al passo k :

$$\mathbf{V}_k = \left. \frac{\partial h(\hat{\mathbf{x}}^-, 0)}{\partial \mathbf{v}} \right|_k \quad (2.29)$$

Facciamo notare che le matrici \mathbf{W} e \mathbf{V} sono solitamente matrici identità a meno di conoscere un particolare legame dell'errore con le variabili di stato e/o gli ingressi del sistema.

Ricordando la definizione di errore a priori vista nell'eq. (2.6) scriviamo tale errore al passo $k+1$:

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \quad (2.30)$$

Sostituendo l'equazione (2.24) in quella appena trovata, otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}^- &\cong \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{W}_k \mathbf{w}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \\ &\cong \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{aligned} \quad (2.31)$$

nella quale $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ rappresenta il nuovo errore random con media nulla e matrice di covarianza pari a $\mathbf{W}\mathbf{Q}\mathbf{W}^T$.

Richiamiamo il concetto di residuo di misura (o innovazione), cioè la discrepanza tra le misure stimate e quelle attuali fornite dai sensori, pertanto possiamo scrivere le seguenti relazioni (dove sostituiamo al posto di \mathbf{y}_k l'eq. (2.25)):

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_k &= \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^- \\ &\cong \hat{\mathbf{y}}_k^- + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{V}_k\mathbf{v}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^- \\ &\cong \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \boldsymbol{\eta}_k \end{aligned} \quad (2.32)$$

nella quale $\boldsymbol{\eta}_k$ rappresenta il nuovo errore random con media nulla e matrice di covarianza pari a $\mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{V}^T$. Notiamo che le eq. (2.31) e (2.32) sono lineari e hanno struttura analoga alle eq. (2.1) e (2.2) viste per il filtro di Kalman lineare.

Pertanto le equazioni viste per il caso lineare del guadagno di Kalman (eq. (2.13)), della proiezione della matrice di covarianza dell'errore (eq. (2.16)) e del suo aggiornamento (eq. (2.14)), nel caso dell' EKF si modificano rispettivamente nelle seguenti:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k^T \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T)^{-1} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{W}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{W}_k^T \quad (2.34)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (2.35)$$

Con quest'ultime equazioni l'algoritmo dell' EKF è completo. Vale la pena di sottolineare che la principale approssimazione del filtro di Kalman Esteso consiste nell'assumere che le distribuzioni delle variabili random rimangano gaussiane anche dopo le rispettive trasformazioni non lineari dal passo k al passo $k+1$, l'equazione (2.34) è infatti un'ipotesi vera per i sistemi lineari, ma non per quelli non lineari.

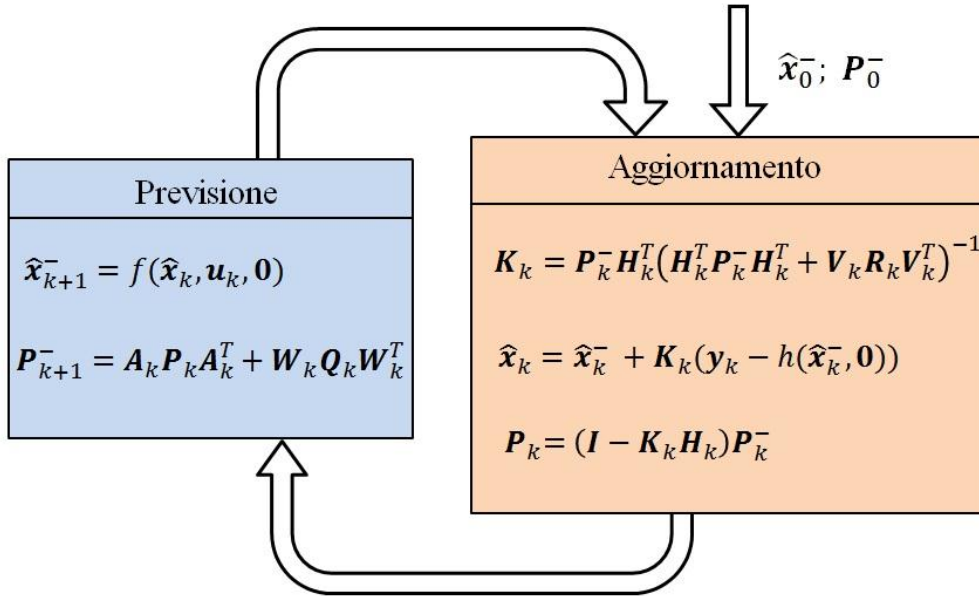


Figura 2.2: Schema riassuntivo del filtro di Kalman esteso.

Anche in questo caso ci serviamo di uno schema riassuntivo, mostrato in fig. 2.2, per visualizzare facilmente il funzionamento del filtro di Kalman esteso, nel quale abbiamo suddiviso le equazioni relative alla fase di previsione da quelle relative alla fase di aggiornamento. Per quanto riguarda la scelta dei valori da attribuire ai valori iniziali $\hat{\mathbf{x}}_0^-$ e \mathbf{P}_0^- non c'è una regola generale, tanto è che spesso viene fatta in modo arbitrario caso per caso. Facciamo però alcune considerazioni, valide sia per Kalman lineare che per quello esteso, che ci possono dare una linea guida in tale scelta:

- assegnare a \mathbf{P}_0^- valori molto piccoli (al limite uguali a zero) significa dare notevole fiducia al vettore condizioni iniziali, valori più elevati permettono invece dinamiche del filtro più rapide, ma con stime meno precise
- un buon suggerimento è quello di porre $\mathbf{P}_0^- = \mathbf{Q}_0$
- valori di $\hat{\mathbf{x}}_0^-$ troppo distanti da quelli veri possono portare a divergenza o convergenza verso valori scorretti se il sistema non è lineare

- impostare valori di $\hat{\mathbf{x}}_0^-$ non prossimi a quelli iniziali permette di verificare la correttezza del filtro e la sua convergenza
- nel caso si voglia ridurre il transitorio iniziale del filtro, ci sembra una buona soluzione utilizzare il primo set di misure disponibili per definire le condizioni iniziali sugli stati misurabili, mentre per gli altri utilizzare un buon senso fisico o eventualmente porli nulli.

In fig. 2.3 abbiamo voluto riportare lo schema del filtro di Kalman lineare di fianco a quello esteso in modo da apprezzarne le differenze (indicate in rosso) ossia, riferendoci all'EKF:

- la previsione dello stato a priori viene fatta tramite la funzione non lineare f
- nelle matrici \mathbf{A}_k e \mathbf{H}_k è rimasto volutamente il pedice k per rimarcare il fatto che sono matrici linearizzate (e quindi ricalcolate) ad ogni passo
- nel caso particolare in cui si conosce il legame del rumore con le variabili di stato e/o con le misure, occorre calcolare passo-passo gli Jacobiani \mathbf{W}_k e \mathbf{V}_k per definire le nuove matrici di covarianza sul modello e sulle misure
- le misure stimate da modello sono ottenute tramite la funzione non lineare h .

	Filtro di Kalman lineare	Filtro di Kalman esteso
Previsione	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k$ $\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{A} \mathbf{P}_k \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_k$	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = f(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{0})$ $\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{W}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{W}_k^T$
Aggiornamento	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-)$ $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^-$	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k^T \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T)^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}))$ $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$

Figura 2.3: Confronto tra filtro di Kalman lineare e filtro di Kalman esteso

2.4 Identificazione di parametri incogniti

Una delle peculiarità del filtro di Kalman è la possibilità di determinare anche alcuni parametri incogniti contenuti nel modello. Rispetto al metodo dei minimi quadrati largamente utilizzato a tale scopo, il filtro di Kalman presenta il vantaggio di essere un metodo *on-line*, di essere più robusto rispetto al rumore nelle misure e alle imperfezioni del modello e di essere in grado di maneggiare una maggior quantità di informazioni [16]. Alcune applicazioni tipiche sono l'individuazione del *bias* che spesso è presente nelle misure, e l'identificazione dei coefficienti della magic formula di Pacejka tramite misure sperimentali come fatto in [16, 17].

Consideriamo il caso generale di un sistema descritto dall'equazione non lineare:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\vartheta}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (2.36)$$

dove $\boldsymbol{\vartheta}$ rappresenta il vettore contenente i parametri incogniti che si vogliono identificare. Questi devono essere aggiunti al vettore di stato che per tale motivo viene comunemente chiamato vettore di stato aumentato [18]:

$$\mathbf{z}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\vartheta}_k \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

A meno di conoscere la legge che descrive la variazione nel tempo di tali parametri, l'equazione da aggiungere a quella di stato è:

$$\boldsymbol{\vartheta}_{k+1} = \boldsymbol{\vartheta}_k \quad (2.38)$$

cioè si considerano come parametri costanti o con dinamica molto lenta rispetto a quella del sistema. L'equazione di stato complessiva pertanto diviene:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\vartheta}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\vartheta}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \\ \boldsymbol{\vartheta}_k + \mathbf{w}_{\boldsymbol{\vartheta},k} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

nella quale $\mathbf{w}_{\boldsymbol{\vartheta},k}$ indica l'errore associato all'equazione di modello dei parametri⁶. Nel caso in cui uno o più parametri siano variabili nel tempo secondo una legge non nota, si mantiene l'eq. (2.38) attribuendo loro però un errore di modello $\mathbf{w}_{\boldsymbol{\vartheta},k}$ grande, in modo che arriva al filtro di Kalman l'informazione di fidarsi poco di tale equazione e di poterli variare più agilmente coerentemente con il confronto modello e misure [19].

Il legame tra le misure e il nuovo vettore di stato aumentato, sempre nel caso generale di relazione non lineare, si modifica in:

$$\mathbf{y}_k = h^*(\mathbf{z}_k, \mathbf{v}_k) \quad (2.40)$$

Definiti il vettore di stato aumentato (eq. (2.37)), la nuova equazione del modello (eq. (2.39)) e il legame tra misure effettive e misure previste (eq. (2.40)), il procedimento del filtro di Kalman rimane uguale a quello già visto nella sezione precedente 2.3.

⁶ Per i parametri tempo invarianti tale errore è preso solitamente uguale a zero.

Capitolo 3

Il filtro di Kalman: esempi applicativi

Dopo aver evidenziato i concetti teorici, nel presente capitolo vogliamo prendere confidenza con il filtro di Kalman tramite alcuni esempi di sistemi con pochi gradi di libertà. La scelta di tali sistemi semplici, rispetto a quella di concentrarci su uno solo complesso, è dovuta al fatto che i nostri obiettivi sono da un lato comprendere il funzionamento del filtro di Kalman, dall'altro affrontare una vasta gamma di problematiche nelle quali può essere applicato; ciò al fine di disporre di un'utile guida nel momento in cui si voglia utilizzare il filtro di Kalman per problemi reali.

Il vantaggio dei seguenti sistemi è che è stata creata la dinamica vera, siamo quindi a conoscenza dei valori esatti degli stati, fatto che ci permette di confrontare e valutare la bontà dei risultati ottenuti dal filtro. Sottolineiamo che in tutti i casi, ad eccezione dell'ultimo, il modello utilizzato per ricostruire la dinamica vera è lo stesso che viene fornito al filtro di Kalman. Precisiamo anche che tutte le seguenti analisi sono state svolte in ambiente Matlab.

3.1 Sistema a 1 Grado di Libertà

Consideriamo un veicolo che si muove con una certa legge oraria lungo una traiettoria obbligata: tale sistema può essere schematizzato con punto nel piano la cui unica variabile indipendente è lo spostamento $s(t)$ ¹ ossia la distanza percorsa da una data origine (vedere fig. 3.1).



Figura 3.1: Schema del sistema a 1 grado di libertà

¹ $v(t)$ e $a(t)$ sono banalmente la derivata prima e seconda di $s(t)$.

Supponiamo ora di non essere a conoscenza dei veri valori di accelerazione, velocità e posizione, ma di avere a disposizione le misure provenienti da alcuni sensori, e quindi affette da rumore², di alcune o tutte queste grandezze. Vogliamo pertanto servirci dell’algoritmo di Kalman per filtrarle. In fig. 3.2 sono mostrate le parti zoomate delle storie temporali di accelerazione, velocità e posizione (in verde) e i rispettivi segnali misurati (in rosso). Siamo quindi in grado di calcolare le relative deviazioni standard e la matrice di covarianza delle misure \mathbf{R} .

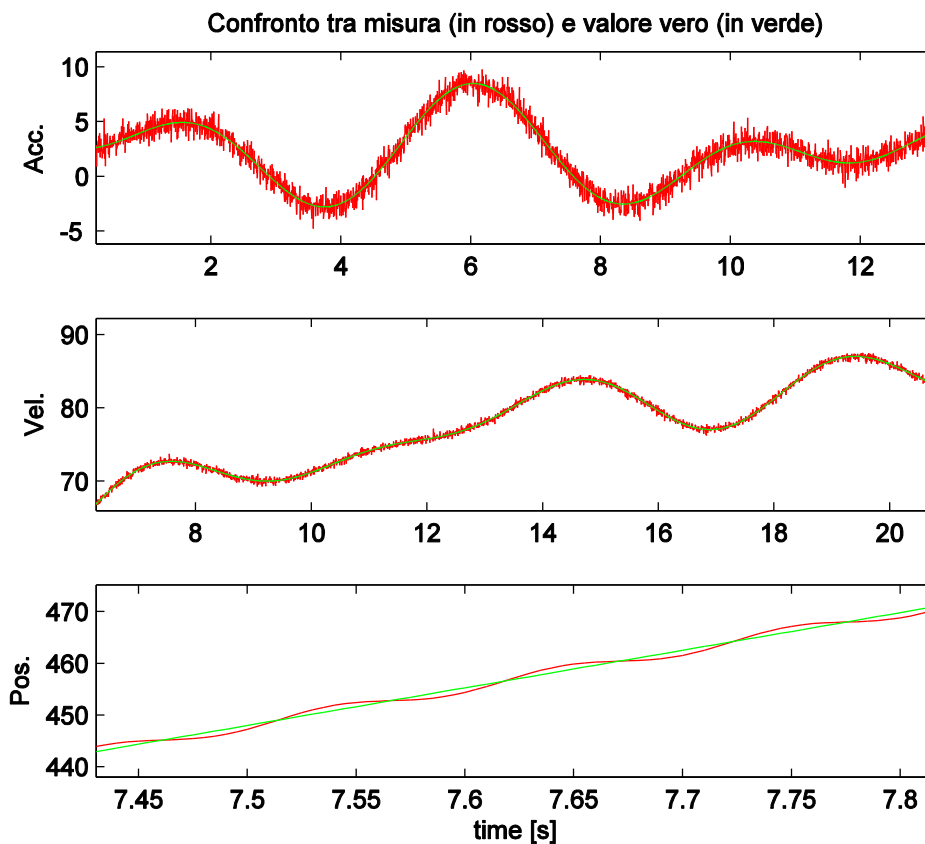


Figura 3.2: Confronto tra misure di accelerazione [m/s^2], velocità [m/s] e posizione [m] (in rosso) e i rispettivi valori veri (in verde).

² Il rumore su velocità e accelerazione è stato costruito aggiungendo ad ogni valore vero della funzione discretizzata un numero random positivo o negativo. Quello sulla posizione sommando un’armonica a frequenza più alta. In questo modo il rumore ha idealmente media nulla (no *bias*) e distribuzione gaussiana.

Per quanto riguarda il modello, ci serviamo dei semplici legami cinematici, pertanto l'equazione dello stato a priori è la seguente:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \begin{Bmatrix} a \\ v \\ s \end{Bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Delta t & 1 & 0 \\ 0 & \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ v \\ s \end{Bmatrix}_k \end{aligned} \quad (3.1)$$

Specifichiamo che abbiamo incluso nel vettore di stato anche l'accelerazione, essendo una grandezza da filtrare, ma non avendo informazioni sulla sua derivata, la dobbiamo trattare come un parametro costante. Ovviamente l'errore di modello associato ad essa sarà da impostare a valori più elevati (vedere §2.4). Ribadiamo anche che la scelta dei valori da assegnare alle matrici \mathbf{Q} e \mathbf{R} è arbitraria e avviene nella fase di messa a punto del filtro. In tutti gli esempi seguenti, poiché conosciamo \mathbf{R} , ci limiteremo ad agire solo sulla matrice di covarianza del modello \mathbf{Q} . Come linea guida sottolineiamo che ai fini pratici quello che conta è il rapporto tra le due matrici di covarianza piuttosto che i singoli valori in sé. Per quanto riguarda invece le condizioni iniziali, decidiamo di assegnare $\hat{\mathbf{x}}_0$ come mostrato in tabella 3.1, nella quale riportiamo anche per confronto i valori veri di partenza, e di impostare $\mathbf{P}_0 = \mathbf{Q}$.

Procediamo quindi affrontando diverse situazioni di misure disponibili.

Tabella 3.1: Valori delle condizioni iniziali del filtro e valori reali di partenza di accelerazione, velocità e posizione.

	\mathbf{x}_0	$\mathbf{x}_{\text{reale}}$
acc [m/s ²]	0	2.5
vel [m/s]	30	50
pos [m]	40	0

3.1.1 Analisi delle prestazioni del filtro in base alle misure disponibili

Supponiamo di avere a disposizione le misure di accelerazione \tilde{a} e velocità \tilde{v} ; il legame tra misure e variabili di stato è pertanto espresso dalla seguente relazione:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ v \\ s \end{Bmatrix}_k + \mathbf{v} \quad (3.2)$$

Implementiamo dunque il filtro di Kalman e riportiamo i risultati ottenuti di accelerazione (fig. 3.3), velocità (fig. 3.4) e posizione (fig.3.5).

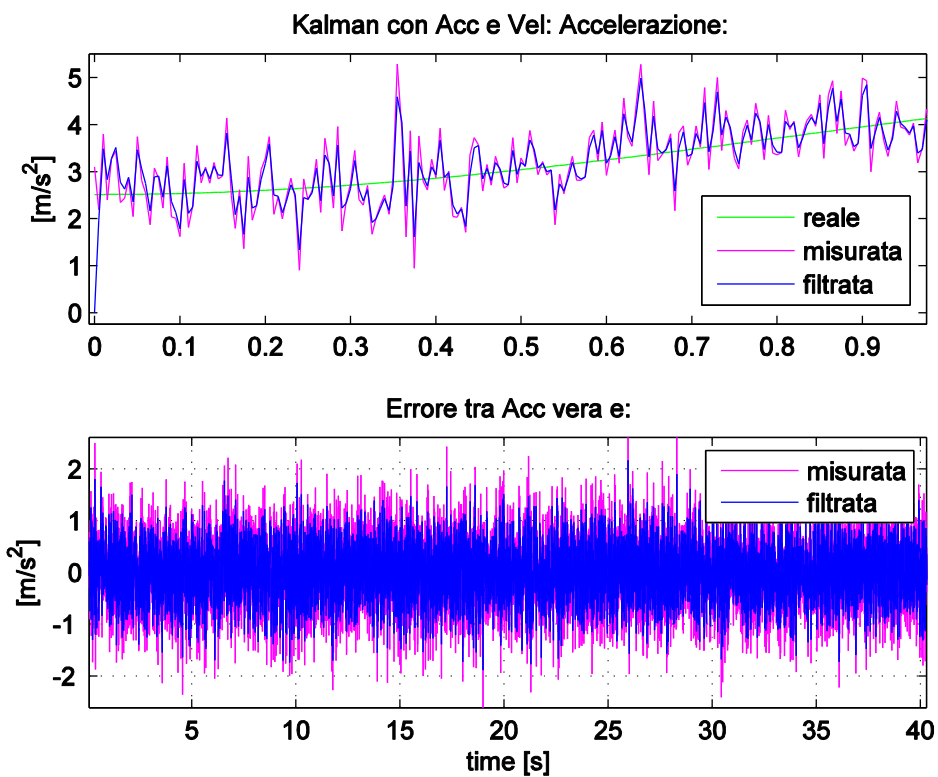


Figura 3.3: (sopra) Confronto tra accelerazione vera, misurata e filtrata con Kalman note le misure di A e V , (sotto) errore dell'accelerazione misurata e di quella filtrata rispetto al valore vero nel tempo.

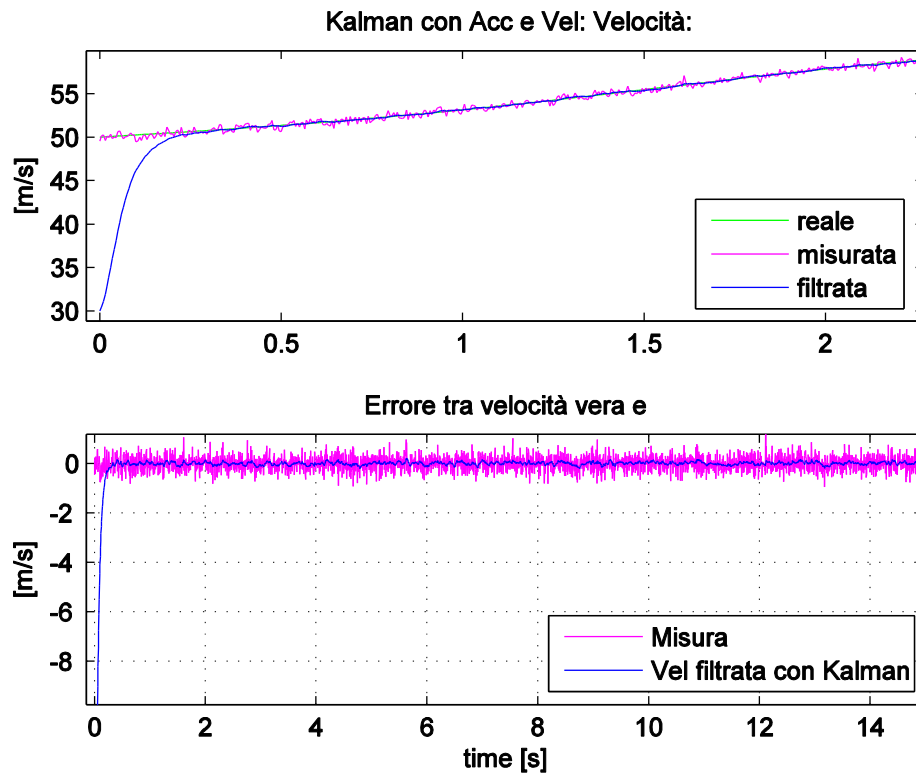


Figura 3.4: (sopra) Confronto tra velocità vera, misurata e filtrata con Kalman note le misure di A e V , (sotto) errore della velocità misurata e di quella filtrata rispetto al valore vero nel tempo.

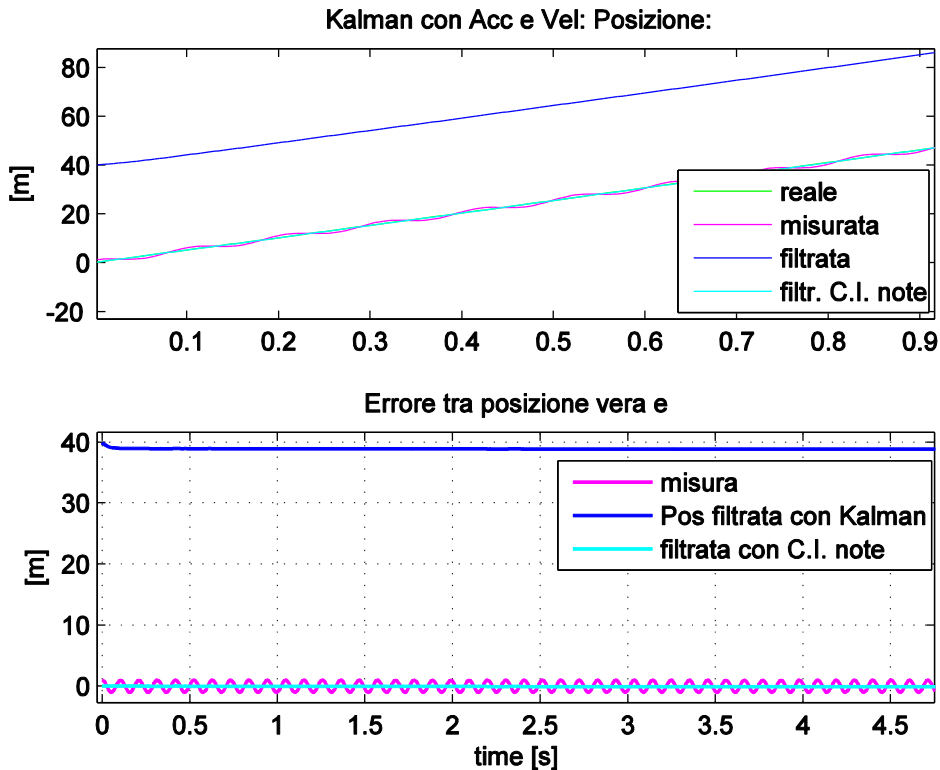


Figura 3.5: (sopra) Confronto tra posizione vera, misurata e filtrata con Kalman note le misure di A e V, (sotto) errore della posizione misurata e di quella filtrata rispetto al valore vero nel tempo. Sono distinti i due casi in cui il filtro abbia come condizioni iniziali dei valori di tentativo e valori uguali a quelli reali.

Notiamo che mentre per accelerazione e velocità Kalman ha una rapida convergenza verso i rispettivi valori veri ed effettua una corretta azione di filtraggio, non si può dire altrettanto in merito alla posizione, la quale sembra venire filtrata intorno a un valore lontano da quello reale. La ragione risiede nel fatto che il sistema non è osservabile sullo spostamento, infatti la matrice di osservabilità non ha rango massimo. Nell'ipotesi di assegnare al filtro le vere condizioni iniziali, otteniamo dei risultati corretti anche sulla posizione, va però sottolineato che tale profilo è ottenuto solo dall'integrazione della velocità filtrata: il filtro non è in grado in questo caso di notare una perturbazione sullo spostamento non prevista da modello.

Vediamo adesso come cambia il comportamento del filtro al variare di uno dei valori di \mathbf{Q} , nello specifico proviamo a ridurre la varianza dell'accelerazione. Ciò significa dare maggior credibilità alla prima equazione del sistema (3.1), cioè che l'accelerazione si mantiene costante:

$$a_{k+1} = a_k \quad (3.3)$$

In fig. 3.6 illustriamo gli effetti ottenuti: il filtro stabilizza l'accelerazione intorno al valore vero dopo un transitorio più lungo, ma nel seguito opera un'azione di filtraggio migliore; non si hanno cambiamenti rilevanti invece sulla velocità. Pertanto, in questo particolare problema dove non si hanno brusche variazioni di accelerazione, ridurre la varianza ha prodotto un effetto benefico.

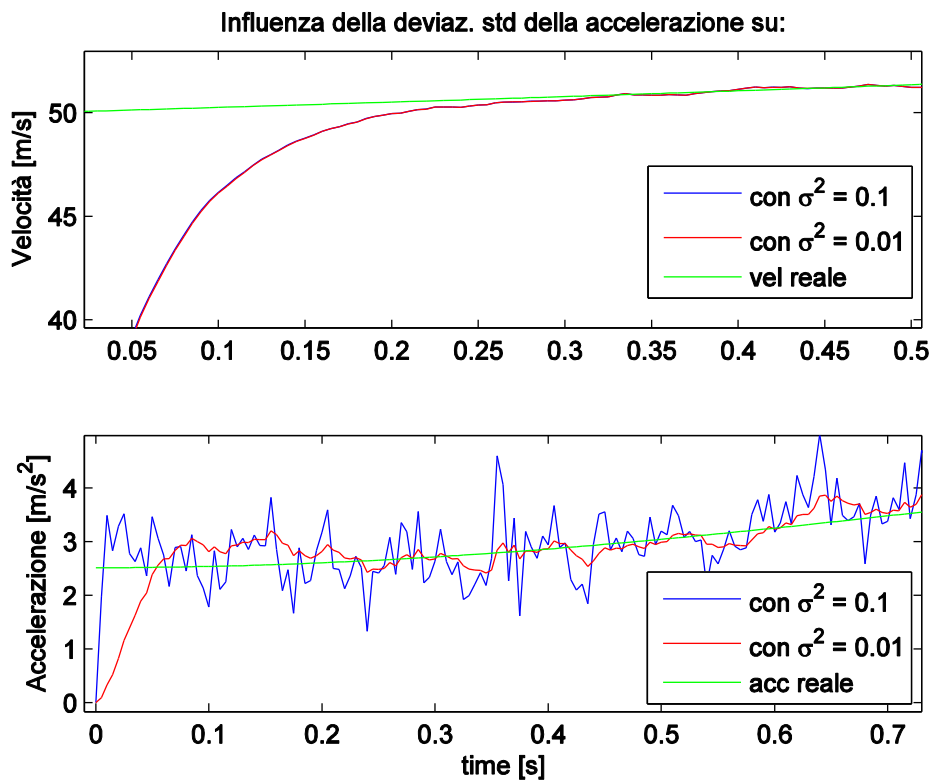


Figura 3.6: Influenza della varianza di modello dell'accelerazione sul filtraggio di velocità (sopra) e accelerazione (sotto).

Riproviamo ora a filtrare gli stessi segnali iniziali avendo a disposizione alternativamente le misure di accelerazione e posizione, velocità e posizione, accelerazione velocità e posizione, per confrontare i cambiamenti del comportamento del filtro. I valori della matrice \mathbf{Q} sono stati ritirati caso per caso in modo da ottimizzarne le prestazioni, mentre come condizioni iniziali sono state mantenute quelle di tab. 3.1. Le matrici \mathbf{H} che legano il vettore di stato alle misure sono nei i rispettivi casi di:

- misure di \tilde{a} e \tilde{s}

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

- misure di \tilde{v} e \tilde{s}

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

- misure di \tilde{a} \tilde{v} e \tilde{s}

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Sottolineiamo anche che in tutte queste situazioni il sistema è osservabile, cioè le matrici di osservabilità hanno rango massimo. In figura 3.7 abbiamo messo a confronto gli andamenti degli errori tra valore vero e valore filtrato di accelerazione, velocità e posizione per le quattro combinazioni di misure disponibili. Notiamo subito che il filtro di Kalman converge sempre, fatto eccezione il primo caso per il quale è stato spiegato precedentemente il motivo. Inoltre il transitorio maggiore si ha sulla variabile di cui non si dispone la misura, poiché il filtro non può fare un confronto diretto.

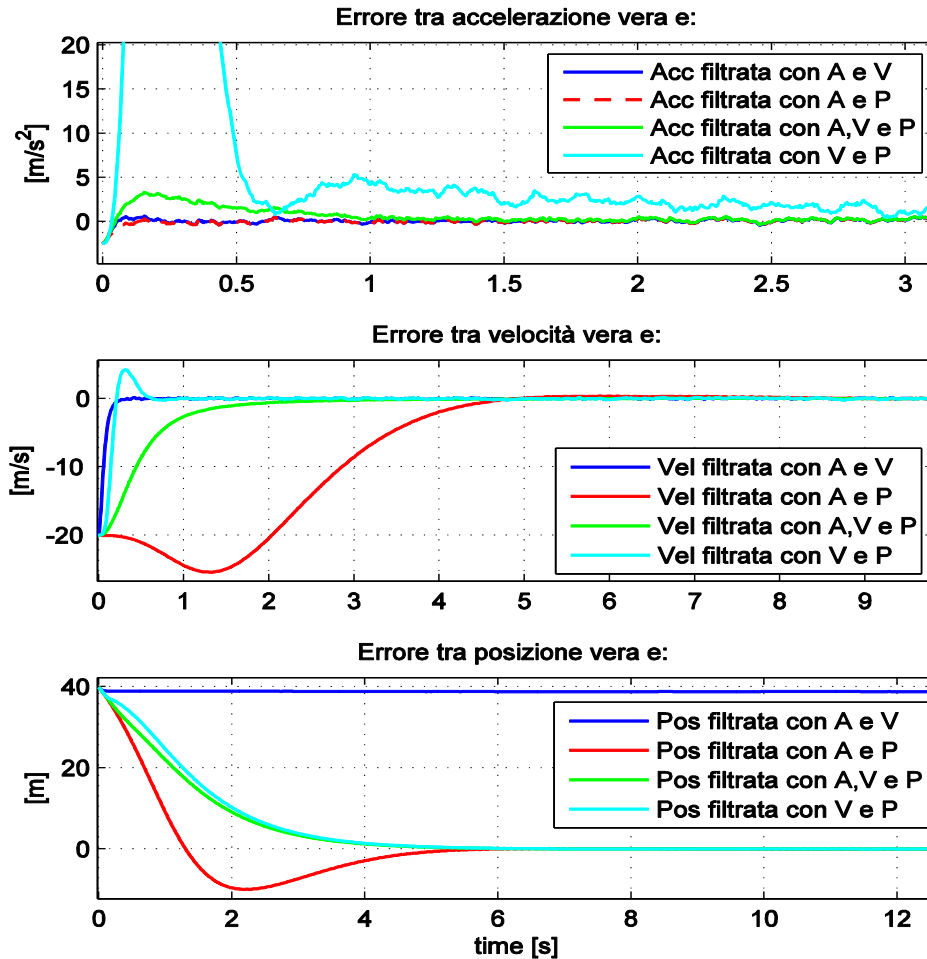


Figura 3.7: Andamenti degli errori tra accelerazione (in alto), velocità (al centro) e posizione (in basso) e le rispettive grandezze filtrate con Kalman in diverse situazioni di misure disponibili.

Per valutare meglio le prestazioni del filtro, calcoliamo le deviazioni standard (*mse*) delle misure ripulite nei vari casi³: i valori sono riportati in tab. 3.2 dove abbiamo aggiunto per confronto anche i valori di mse dei segnali originali. È evidente il netto

³ In tale calcolo sono stati esclusi i primi 10 secondi di storia temporale per non includere il transitorio.

miglioramento dei segnali filtrati con Kalman. Le prestazioni migliori si ottengono ovviamente in presenza di tutte e tre le misure disponibili.

Tabella 3.2: Valori di deviazione standard delle misure di accelerazione, velocità e posizione confrontati con le deviazioni standard delle stesse grandezze filtrate con Kalman in diverse situazioni di misure disponibili.

MSE	Misure	Filtro di Kalman con:			
		A V	A P	A V P	V P
acc	0.707	0.226	0.227	0.226	0.699
vel	0.300	0.070	0.050	0.034	0.081
pos	0.707	no oss.	0.031	0.020	0.021

3.1.2 Presenza di bias sulla misura dell'accelerazione

Ipotizziamo ora che il veicolo ripeta la stessa prova vista in precedenza e di misurare le grandezze cinematiche di interesse, ma questa volta utilizzando un diverso accelerometro affetto da bias, caso per altro piuttosto comune nella pratica. Il nuovo record di dati è mostrato in fig. 3.8. L'obiettivo è quindi di identificare il bias oltre che ripulire le misure.

Il sistema di equazioni del modello⁴ a tempo continuo è:

$$\begin{cases} \dot{a} = 0 \\ \dot{v} = a - b \\ \dot{s} = v \\ \dot{b} = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

che una volta discretizzato assume la forma seguente:

$$\begin{pmatrix} a \\ v \\ s \\ b \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta t & 1 & 0 & -\Delta t \\ 0 & \Delta t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ v \\ s \\ b \end{pmatrix}_k \quad (3.8)$$

⁴ Con modello intendiamo d'ora in poi quello per la stima a priori e quindi senza errore poiché è quello che viene utilizzato all'interno del filtro di Kalman per fare la previsione. Ricordiamo che l'errore ad esso connesso è considerato tramite la matrice Q .

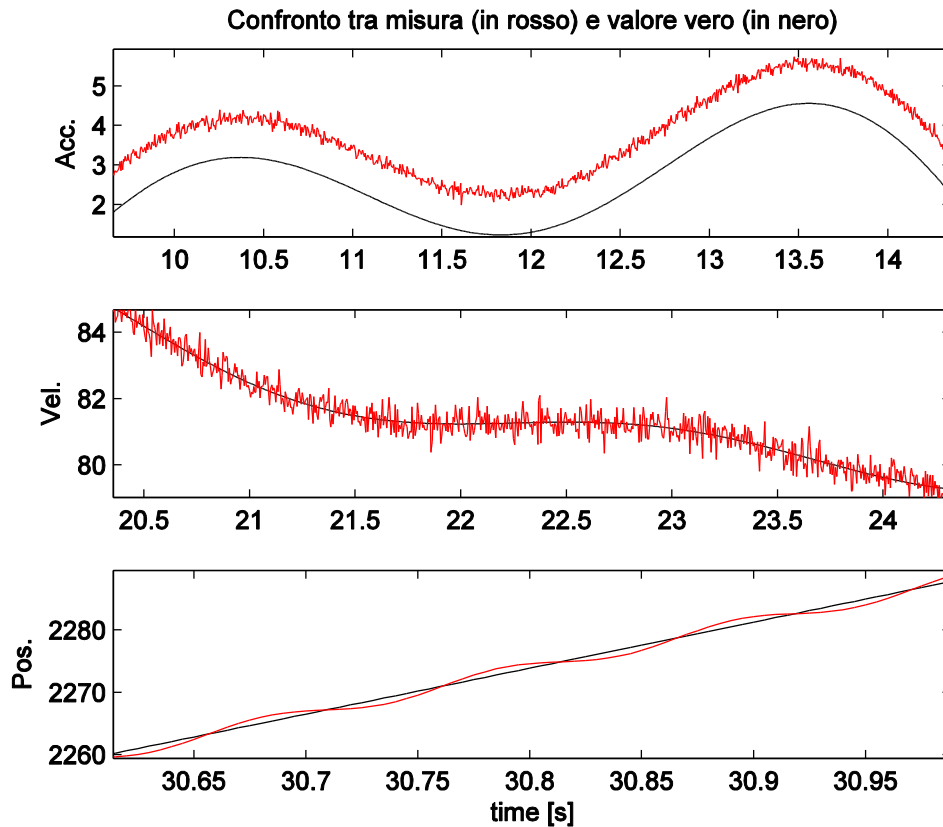


Figura 3.8: Confronto tra misure di accelerazione [m/s²], velocità [m/s] e posizione [m] (in rosso) e i rispettivi valori veri (in nero). Si nota la presenza di bias sulla misura dell'accelerazione.

Consideriamo il caso di avere a disposizione le misure di \tilde{a} e \tilde{s} , pertanto la matrice \mathbf{H} è così definita:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Il sistema risulta essere osservabile. Facciamo girare il filtro con diversi valori di varianza di modello della velocità σ_v per apprezzarne le differenze nei risultati. In figura 3.9, dove è mostrato l'andamento dell'accelerazione e del bias, notiamo come in tutti i casi il filtro riesca ad avvicinarsi a un valore molto prossimo a quello del bias vero, osserviamo anche che impostando un valore di σ_v di un ordine di

grandezza inferiore al primo caso (rappresentato in blu) si ottiene un transitorio più breve, mentre a regime non si hanno particolari differenze. Ulteriori riduzioni di σ_v rispetto al valore di 10^{-5} non producono sostanziali miglioramenti, se non il rischio di lavorare con matrici mal condizionate.

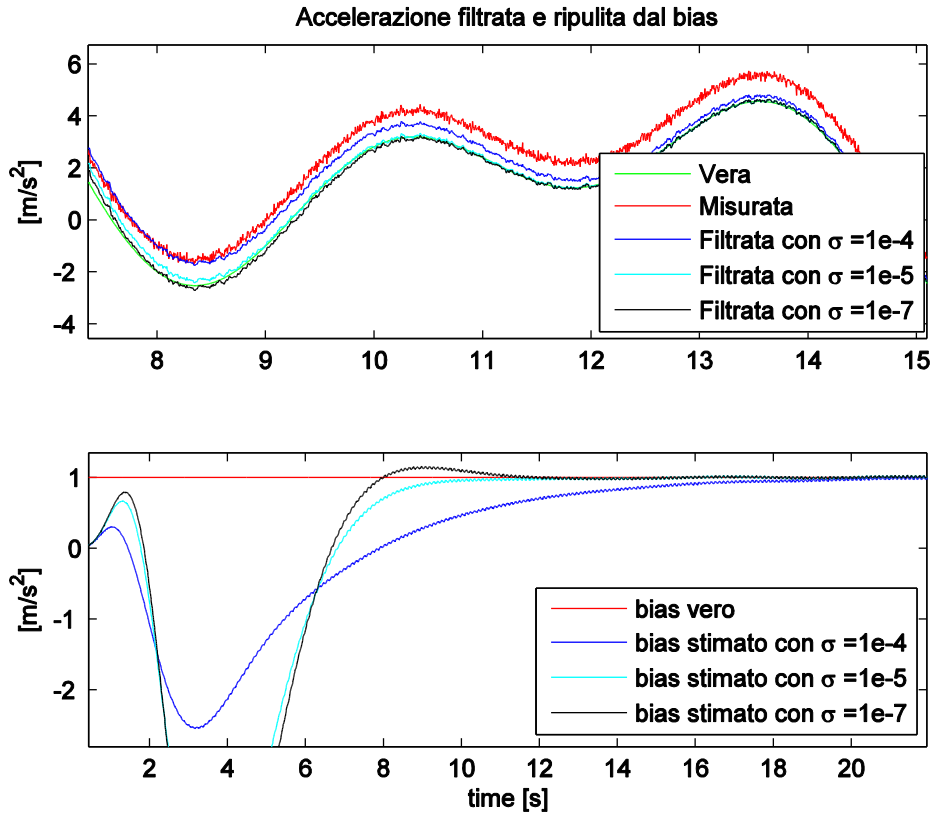


Figura 3.9: (Sopra) Confronto tra accelerazione vera, misurata con bias, e filtrata con diversi valori di varianza di modello della velocità. (Sotto) Andamento nel tempo della stima del bias nei diversi casi confrontata col valore vero.

Riportiamo in fig. 3.10 i profili di velocità misurata e filtrate e l'errore che hanno rispetto alla velocità vera; in fig. 3.11 l'andamento dell'errore commesso sulla posizione dalla misura e dai rispetti segnali filtrati. Le considerazioni che possiamo fare sono analoghe a quelle viste poco sopra per l'accelerazione.

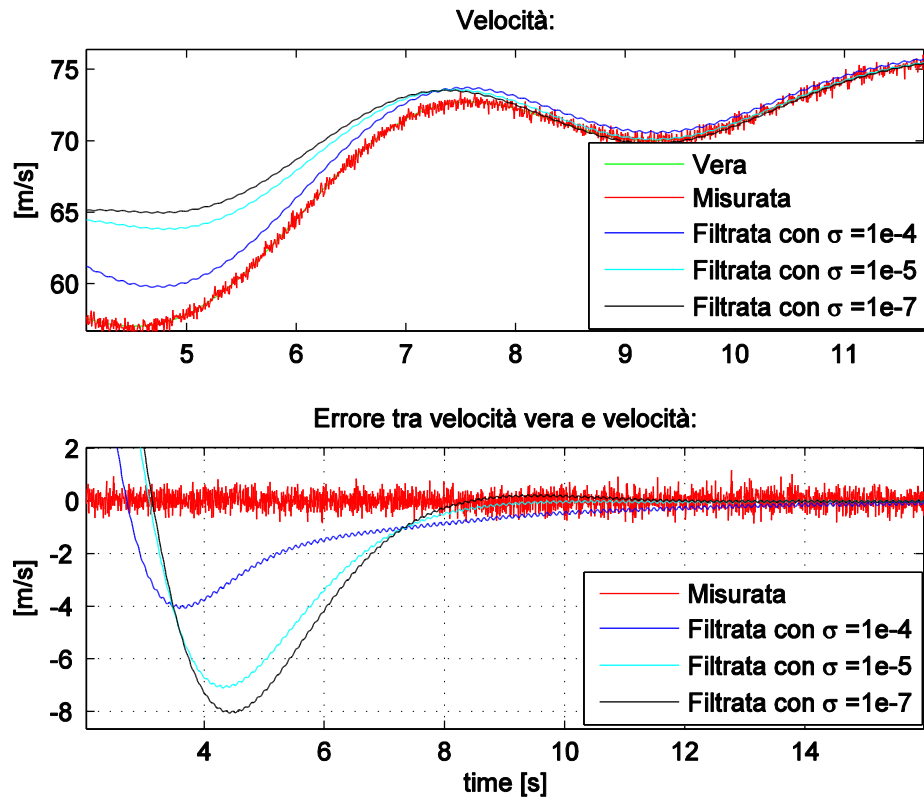


Figura 3.10: (Sopra) Confronto tra velocità vera, misurata, e filtrata con diversi valori di varianza di modello della velocità. (Sotto) Andamento nel tempo dell'errore tra velocità vera e velocità stimata nei diversi casi.

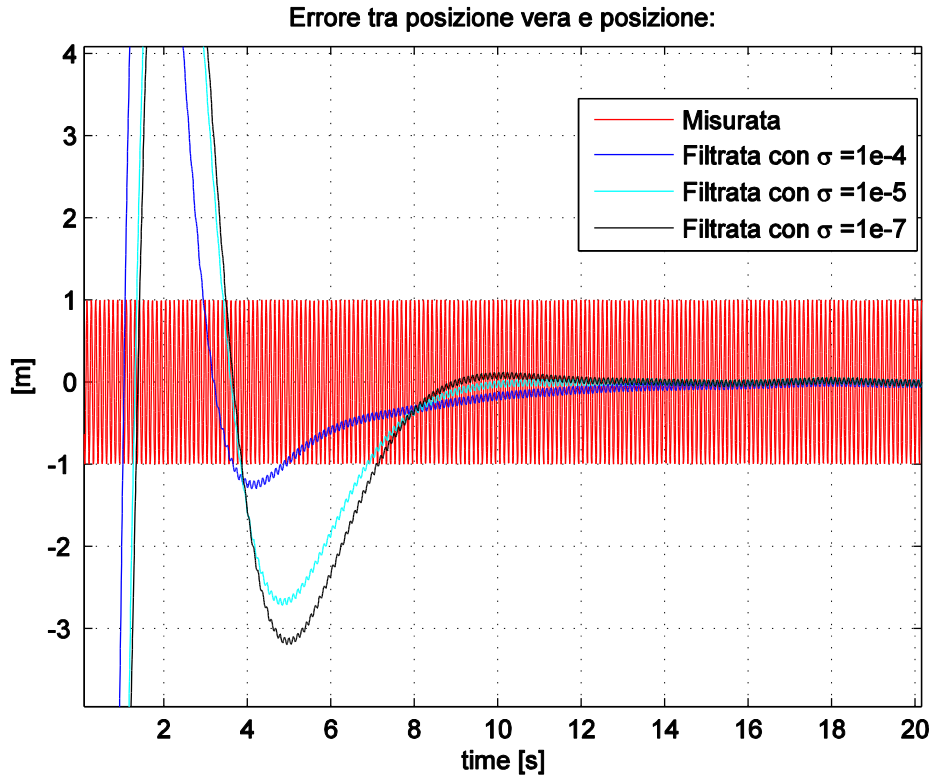


Figura 3.11: Andamento nel tempo dell'errore tra posizione vera e posizione: misurata (in rosso) e posizione filtrata per diversi valori di varianza di modello della velocità (in blu, azzurro e nero).

Nel caso ora di avere a disposizione le misure di \tilde{a} e \tilde{v} , sappiamo che il sistema non è osservabile, ma poiché il bias che vogliamo identificare è sulla misura dell'accelerazione e la non osservabilità sulla posizione, possiamo comunque utilizzare l'algoritmo di Kalman eliminando dalle variabili di stato lo spostamento. Il sistema visto in (3.8) si riduce a:

$$\begin{Bmatrix} a \\ v \\ b \end{Bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Delta t & 1 & -\Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ v \\ b \end{Bmatrix}_k \quad (3.10)$$

e la matrice \mathbf{H} diventa:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Riportiamo in fig. 3.12 l'andamento della stima del bias, avendo fatto variare questa volta la varianza di modello dello stesso bias. Notiamo che valori di σ_b più piccoli portano ad una identificazione più lenta del valore corretto, ma minori oscillazioni (e quindi più precisione) una volta che è stato raggiunto.

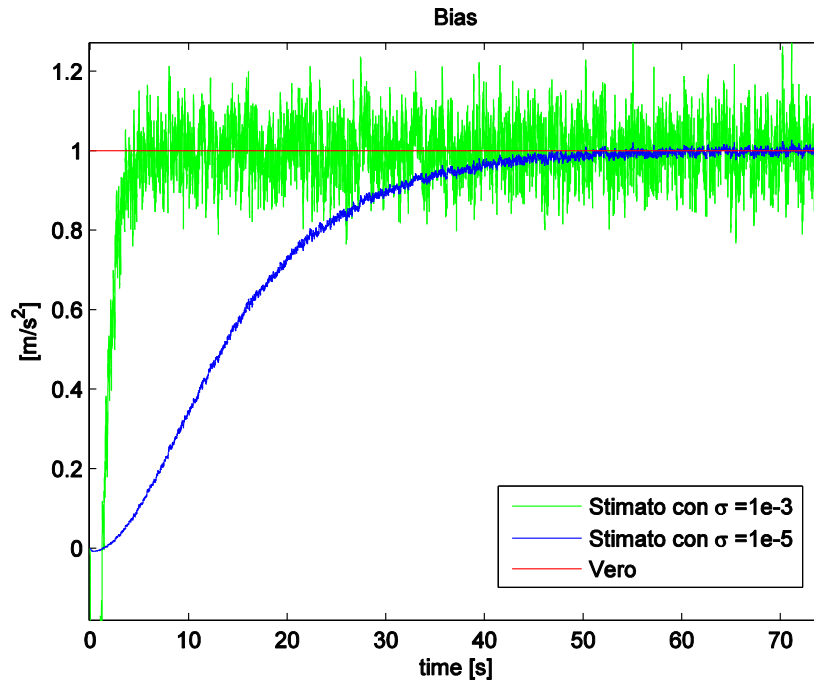


Figura 3.12: Comportamento della stima del bias nei casi di due diversi valori di varianza di modello del bias.

3.1.3 Malfunzionamento del sensore di velocità

Un'altra situazione che capita non di rado, è di avere malfunzionamenti del sensore di velocità: pensiamo ad esempio al lettore ottico DATRON montato sulle formula uno che nel passare sopra superfici riflettenti come una pozza d'acqua o una riga bianca, rileva delle velocità molto distanti da quelle reali. Analizziamo il comportamento del filtro di Kalman anche in questo caso, valutando quali possibili accorgimenti possiamo intraprendere. Facciamo riferimento alla solita storia

temporale, consideriamo però un improvviso malfunzionamento del sensore della velocità (per circa una decina di secondi) come evidenziato dal grafico centrale della figura 3.13.

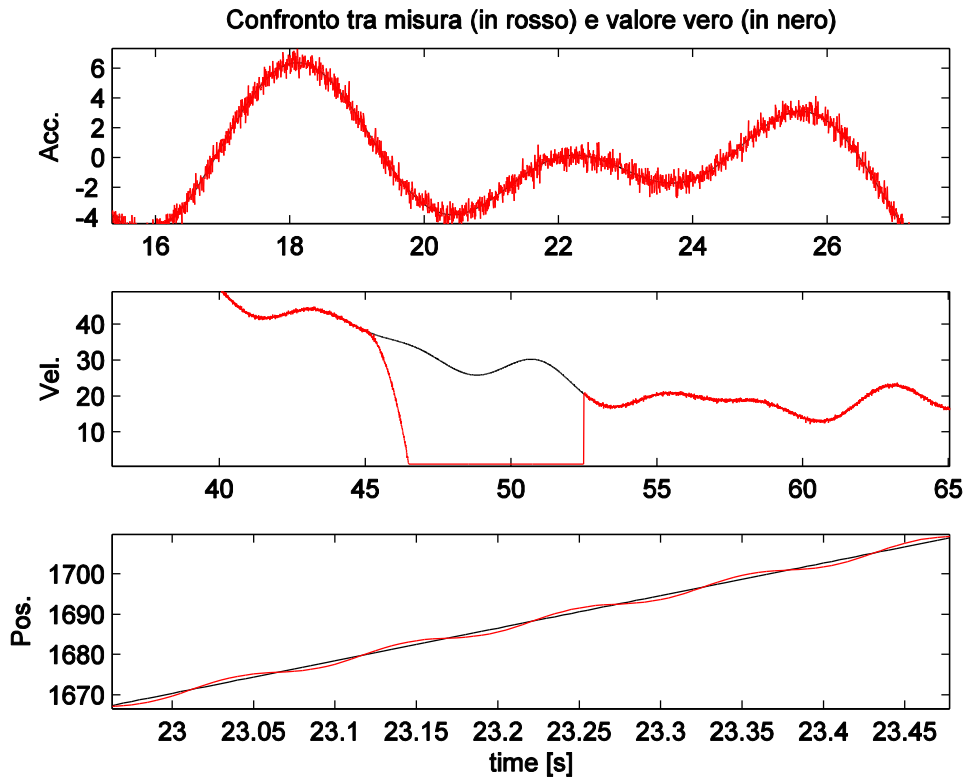


Figura 3.13: Confronto tra misure di accelerazione [m/s^2], velocità [m/s] e posizione [m] (in rosso) e i rispettivi valori veri (in nero). È stato evidenziato il periodo temporale nel quale il sensore di velocità ha avuto un malfunzionamento.

Supponiamo di avere a disposizione tutte e tre le misure e applichiamo il filtro di Kalman. I risultati della simulazione sono rappresentati dalle linee blu nelle figure 3.14 e 3.15. Ci accorgiamo che, nel momento del malfunzionamento, il filtro “rileva” un’anomalia, infatti i valori della velocità filtrata si scostano maggiormente da quelli misurati, ma considerando anche le ripercussioni su accelerazione e posizione, le prestazioni rimangono comunque scadenti. Un possibile miglioramento può essere ottenuto impostando a priori una varianza associata alla

misura della velocità σ_m molto più grande, in modo che il filtro si fiderà meno di quest'ultima e userà maggiormente le equazioni di modello e le altre due misure disponibili per ricostruire il profilo di velocità. I risultati ottenuti, indicati dalla linea azzurra, sulle tre variabili di interesse sono più accettabili.

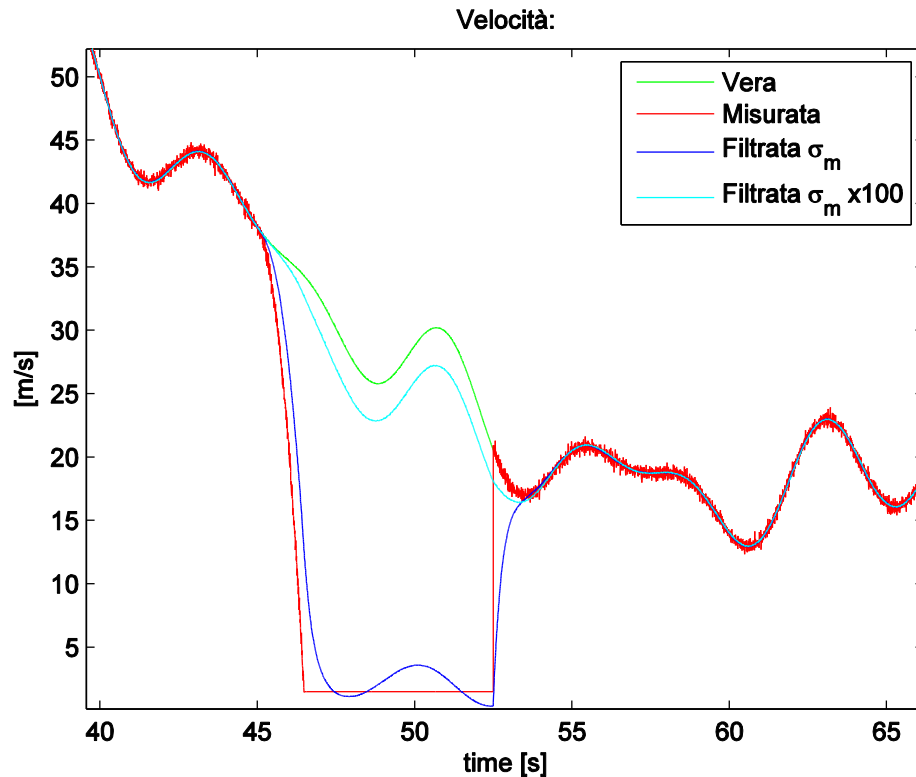


Figura 3.14: Profilo della velocità in corrispondenza della zona di malfunzionamento del sensore. La linea blu si riferisce a quella filtrata con il valore di varianza di misura di velocità originale, la linea azzurra al caso di filtraggio con varianza di misura di velocità aumentata di due ordini di grandezza.

Evidenziamo tuttavia due aspetti critici:

- occorre conoscere a priori quale sarà il sensore che subirà un malfunzionamento
- assegnare a quel sensore una varianza molto grande significa non sfruttarlo a dovere nel momento in cui esso funziona bene. Nel caso analizzato non si

notano particolari differenze rispetto alle grandezze filtrate con i valori originali (linee in blu) nelle situazioni di corretto funzionamento, poiché abbiamo visto in precedenza che sono sufficienti le misure di \tilde{a} ed \tilde{s} per un buon filtraggio; nel momento in cui però il peso di tale misura sia rilevante, le prestazioni subirebbero un più marcato peggioramento.

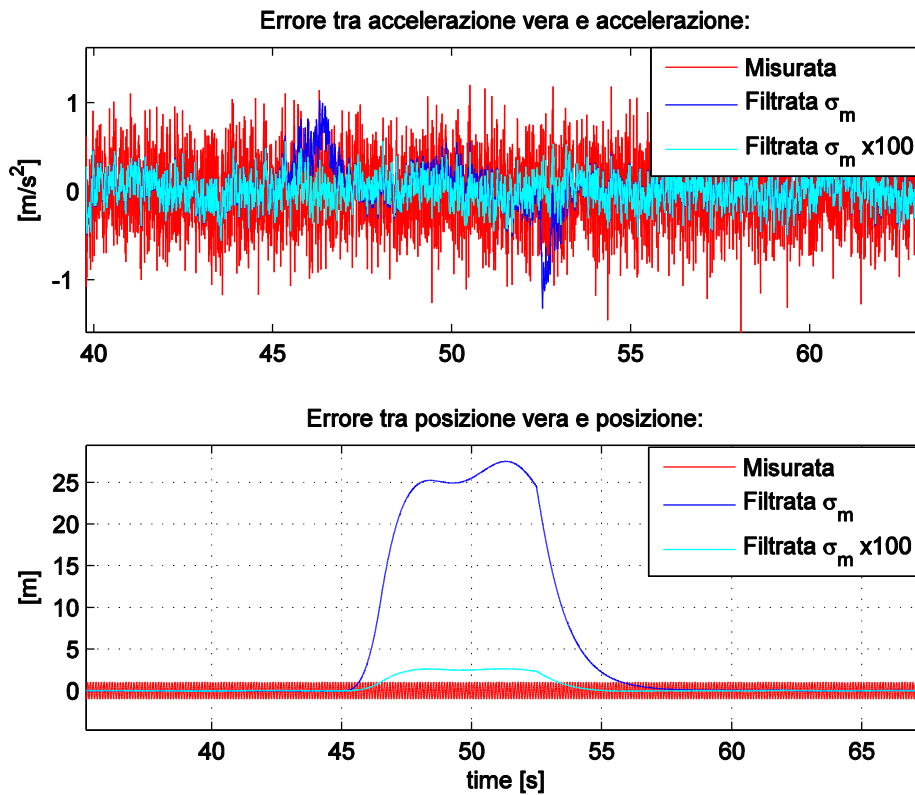


Figura 3.15: Andamento dell'errore nell'intorno della zona di malfunzionamento del sensore di velocità tra: (sopra) accelerazione vera, misurata e filtrata con due diversi valori di σ_m ; (sotto) posizione vera, misurata e filtrata sempre con i due diversi valori di σ_m .

Ci rendiamo quindi conto che mantenere la matrice \mathbf{R} costante lungo tutta la storia temporale non è la soluzione più furba; pensiamo pertanto a una strategia che preveda di modificarla a seconda della situazione di buono o cattivo funzionamento

del sensore della velocità. L'idea di base è di tenere attivo il sensore fintanto che "lavora bene", e di disattivarlo nel momento in cui inizia il malfunzionamento. Lo schema dell'algoritmo di controllo che abbiamo implementato all'interno del filtro di Kalman è rappresentato in fig. 3.16: spieghiamo brevemente il funzionamento. L'algoritmo riceve in ingresso ad ogni passo k il vettore delle variabili filtrate \mathbf{x}_k e il vettore delle misure \mathbf{y}_k e calcola quanto le misure si discostano da quelle previste da modello⁵. Se ad esempio la differenza sulla velocità è maggiore di un certo valore di soglia, allora l'algoritmo aggiunge un segnalino (*flag*) a quella variabile, altrimenti li svuota.

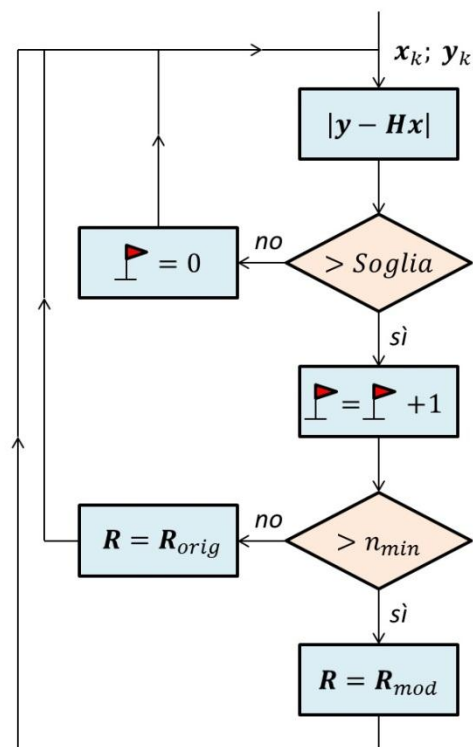


Figura 3.16: Schema dell'algoritmo che opera all'interno del filtro di Kalman per individuare il malfunzionamento di un sensore. In tal caso ne aumenta la relativa varianza, altrimenti la ristabilisce ai valori originali.

⁵ Precisiamo che tale errore non è l'innovazione, perché viene calcolato utilizzando il valore già aggiornato dello stato e non quello a priori.

A questo punto controlla il numero di *flag* presenti, se superano un numero minimo, allora assegna alla varianza di misura relativa a quella variabile un valore molto alto, che equivale a una sorta di disattivazione di tale sensore; in caso contrario mantiene la matrice di covarianza di misura con i valori originali. L'introduzione dei *flag* serve ad evitare che una sola misura fuori dall'intervallo di accettabilità, porti a spegnere subito il sensore relativo, questo accade invece solo in presenza di più misure errate consecutive.⁶

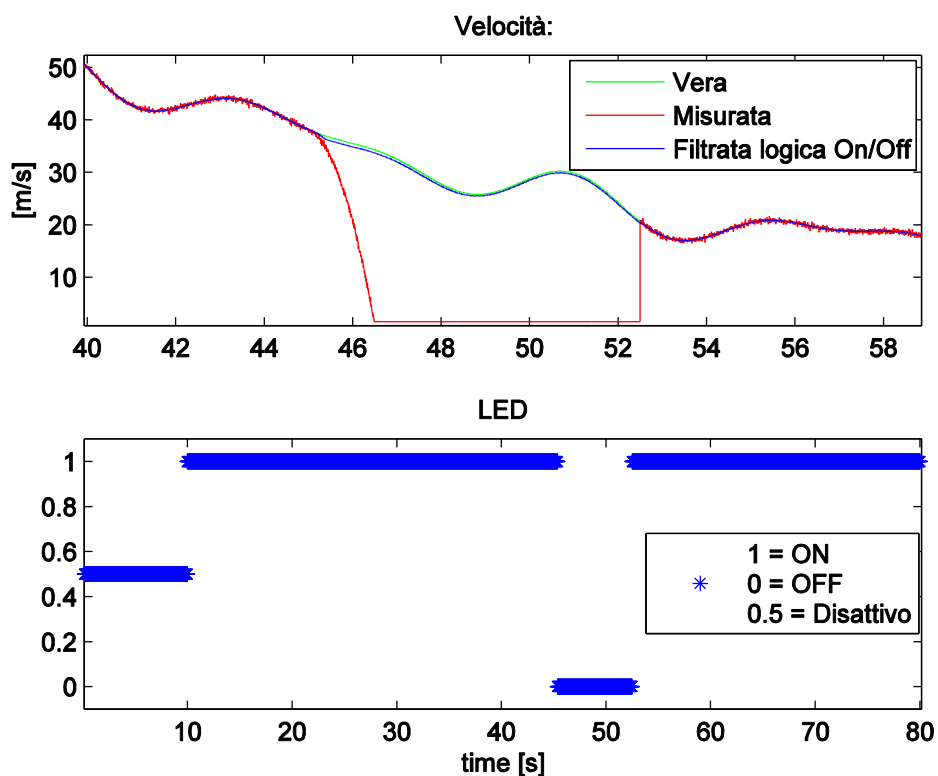


Figura 3.17: (Sopra) Confronto tra velocità vera, misurata e filtrata con l'algoritmo di accensione/spengimento del sensore difettoso. (Sotto) Spia che indica quando il sensore di velocità è acceso (valore = 1) e quando è spento (valore = 0); nei primi 10 secondi tale algoritmo è stato mantenuto disattivo per permettere la convergenza verso i valori corretti.

⁶ Si può pensare a una logica analogica anche nel momento di riattivare il sensore, per evitare continue accensioni e spegnimenti nel caso di ampie oscillazioni del segnale misurato intorno ai valori corretti.

Ovviamente i parametri su cui agire per calibrare l'algoritmo sono il valore di soglia e il numero minimo necessario di *flag* per disattivare il sensore.

I risultati ottenuti con questa logica sono mostrati nelle figure 3.17 e 3.18 nelle quali osserviamo un netto miglioramento rispetto ai due casi precedenti, specialmente sul filtraggio di velocità e posizione. Facciamo anche notare che abbiamo tenuto disattivato l'algoritmo nei primi 10 secondi di storia temporale, per permettere la convergenza dalle condizioni iniziali verso i valori corretti.

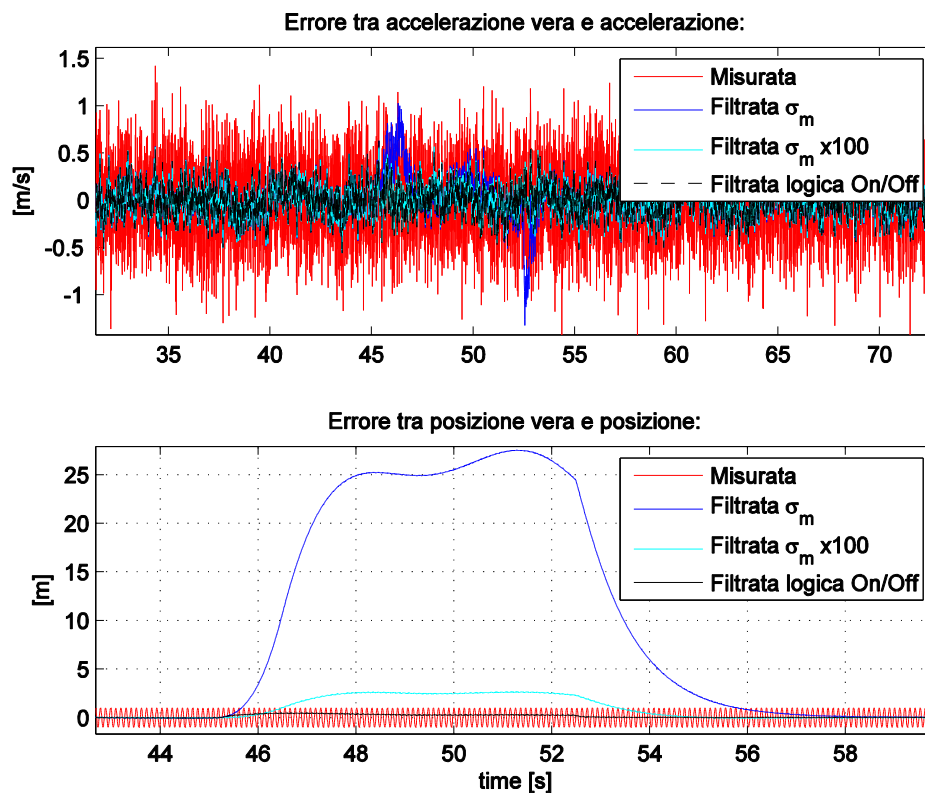


Figura 3.18: Andamento dell'errore nell'intorno della zona di malfunzionamento del sensore di velocità tra: (sopra) accelerazione e (sotto) posizione vera, misurata e filtrata nei tre diversi casi.

3.2 Sistema a 2 Gradi di Libertà

Supponiamo ora che a bordo del nostro veicolo oltre a monitorare accelerazione, velocità e posizione, siamo in grado di misurare anche la velocità angolare delle ruote. Cercando di mantenere il modello più semplice possibile, schematizziamo il sistema come illustrato in fig. 3.19, ossia come una massa collegata rigidamente ad una ruota che possiede i due gradi di libertà di rotazione e traslazione. La differenza tra la velocità di avanzamento v e la velocità di rotolamento ωr_{ruota} nel punto di contatto ruota-strada, dove con r_{ruota} si è inteso il raggio della ruota, è chiamata velocità di scorrimento. Possiamo dunque definire lo scorrimento longitudinale⁷ come il seguente rapporto:

$$\epsilon_x = \frac{v - \omega r_{ruota}}{\omega r_{ruota}} \quad (3.12)$$

e da questo risalire alla forza di trazione-frenatura ipotizzando un legame lineare del tipo:

$$F = -C_x \epsilon_x \quad (3.13)$$

dove C_x rappresenta la rigidità longitudinale dello pneumatico. Per ulteriori approfondimenti sull'argomento si rimanda a un testo specifico come [20].

Siamo a questo punto in grado di legare l'accelerazione del veicolo alla velocità di rotazione della ruota tramite un'equazione differenziale del primo ordine:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{F(t)}{m} = -\frac{C_x}{m} \epsilon_x(t) \\ \dot{v}(t) &= -\frac{C_x}{m} \left(\frac{v(t) - \omega(t) r_{ruota}}{\omega(t) r_{ruota}} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

⁷ Formalmente sarebbe più corretto chiamarlo scorrimento teorico, dato che lo scorrimento longitudinale è di solito normalizzato sulla velocità di avanzamento, ma ai fini di questa trattazione la distinzione tra i due è irrilevante.

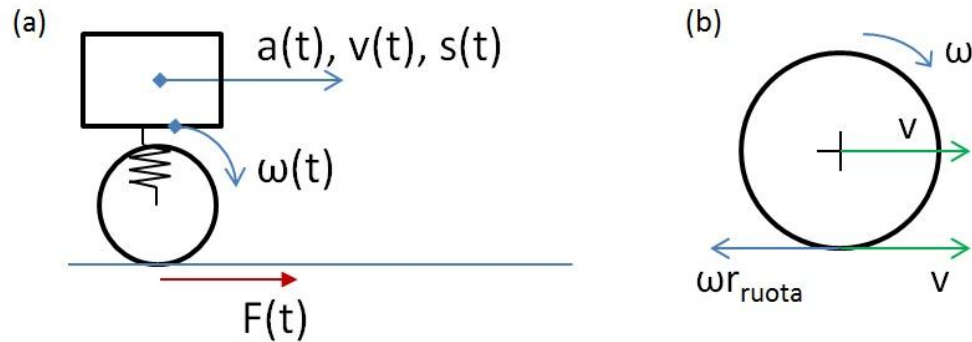


Figura 3.19: (A sinistra) Modello a due gradi di libertà del veicolo. (A destra) Ingrandimento della ruota per mettere in evidenza le velocità di avanzamento e di rotolamento.

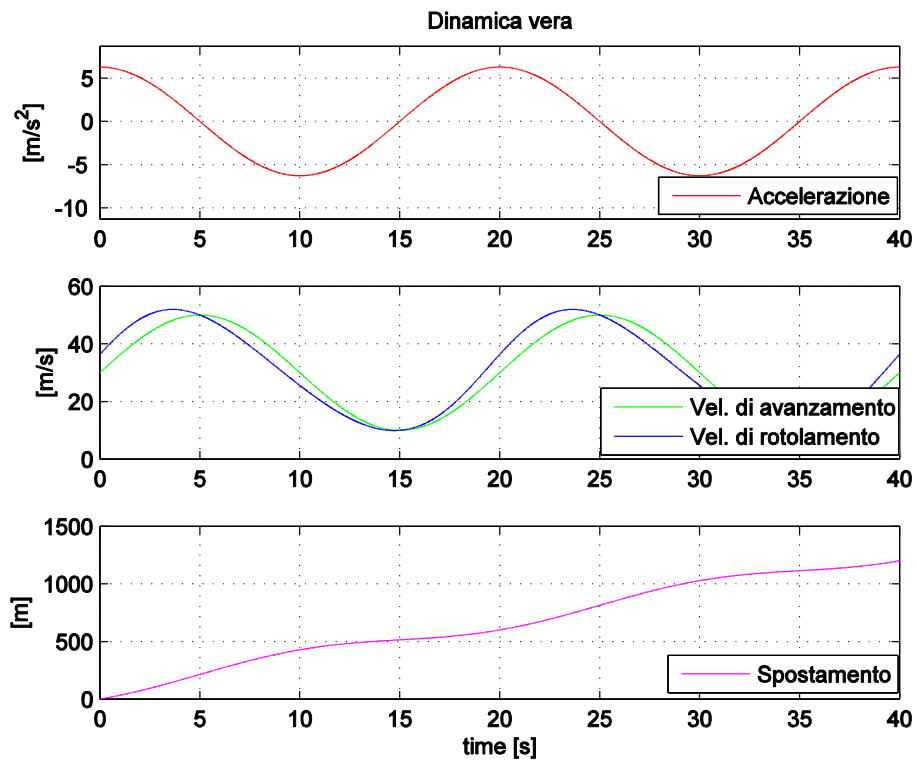


Figura 3.20: Storie temporali esatte di accelerazione, velocità e spostamento

Analizziamo quindi i possibili modi di implementazione del filtro di Kalman in presenza della misura della velocità angolare della ruota, distinguendo le due situazioni in cui la si assuma come ingresso o come variabile di stato. La dinamica vera che abbiamo simulato è rappresentata in fig. 3.20, i valori di questa sono stati poi sporcati con del rumore per costruire i segnali di misura.

3.2.1 Velocità angolare assunta come ingresso

Consideriamo dapprima il caso semplice di utilizzare il segnale della velocità angolare della ruota $\tilde{\omega}$ come ingresso al modello per poter stimare la velocità di avanzamento, e di servirci della misura di quest'ultima \tilde{v} per attuare il filtraggio. Tenendo conto dell'eq. (3.14), l'equazione di stato discretizzata diventa:

$$v_{k+1} = \left(1 - \frac{C_x \Delta t}{m r_{ruota} \tilde{\omega}_k}\right) v_k + \frac{C_x \Delta t}{m} \quad (3.15)$$

Facciamo notare che la matrice di stato (in questo caso di dimensioni 1x1) :

$$A_k = 1 - \frac{C_x \Delta t}{m r_{ruota} \tilde{\omega}_k} \quad (3.16)$$

deve essere ricalcolata ad ogni passo k poiché ha al suo interno la misura di $\tilde{\omega}$. Inoltre dovremo tener presente nel valutare la precisione del modello, tramite la matrice \mathbf{Q} , che l'ingresso $\tilde{\omega}$, in quanto misurato, sta introducendo dell'errore. Il risultato ottenuto sul filtraggio della velocità di avanzamento è rappresentato in fig. 3.21 dalla linea blu.

Ripetiamo l'operazione aggiungendo come grandezze di stato anche l'accelerazione e lo spostamento e fornendo al filtro di Kalman le misure ad esse connesse. La relazione (3.17) costituisce la nuova equazione di stato, nella quale notiamo che per lo spostamento ci siamo serviti del legame cinematico, mentre l'accelerazione è stata trattata come un parametro, come già fatto in precedenza. I risultati sono riportati in fig. 3.21 e 3.22 con linee nere.

$$\begin{Bmatrix} a \\ v \\ s \end{Bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{C_x \Delta t}{m r_{ruota} \tilde{\omega}_k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ v \\ s \end{Bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_x \Delta t}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Ci chiediamo, a questo punto, come si sarebbe comportato il filtro di Kalman se avessimo utilizzato solo i legami cinematici, ignorando quindi la misura della $\tilde{\omega}$. Implementiamo pertanto un filtro analogo a quello fatto per il sistema a 1 GdL (vedere eq. (3.1)) con le tre misure di \tilde{a} , \tilde{v} e \tilde{s} e per un confronto illustriamo nelle stesse figure 3.21 e 3.22 i risultati ottenuti (linee rosa).

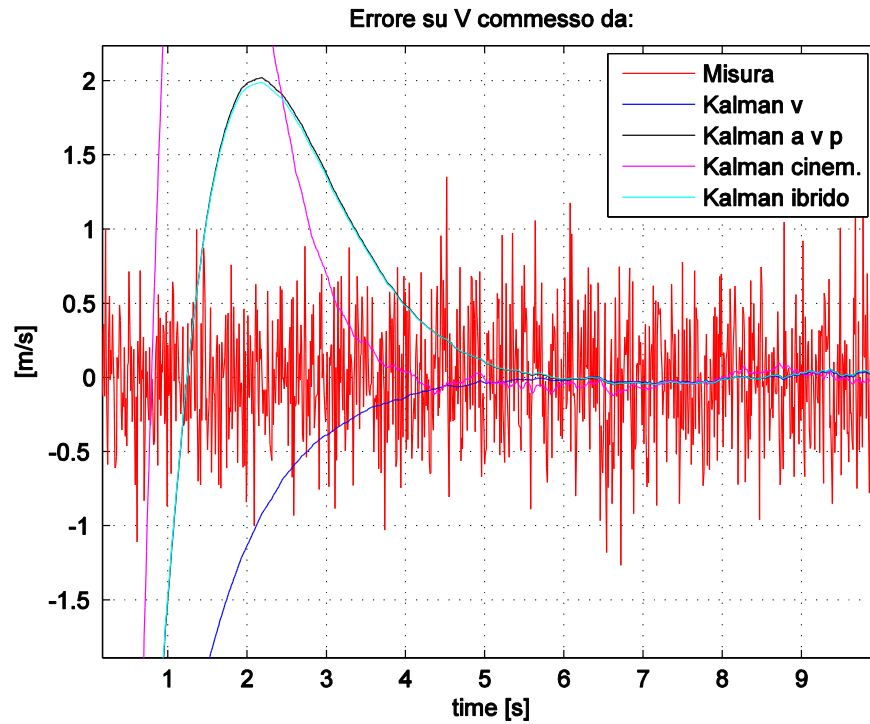


Figura 3.21: Errore tra velocità vera e velocità: misurata (in rosso), filtrata con sola la misura di v (blu), filtrata con le misure di a v ed s (in nero), filtrata col modello cinematico (in rosa), filtrata con il modello ibrido (in azzurro).

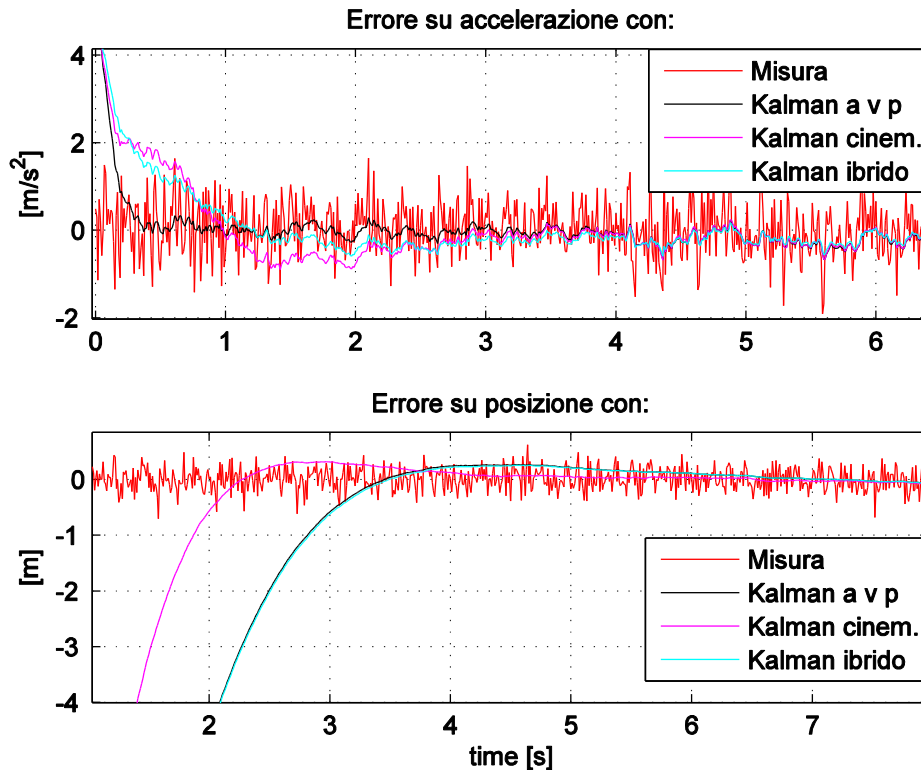


Figura 3.22: Errori commessi su accelerazione (sopra) e posizione (sotto) rispettivamente da: misura (in rosso), grandezza filtrata con le misure di a v ed s (in nero), filtrata col modello cinematico (in rosa), filtrata con il modello ibrido (in azzurro).

Facendo riferimento anche alla tab. 3.3 nella quale sono stati riportati i valori di deviazione standard delle misure e delle variabili filtrate nei differenti casi, possiamo fare le seguenti considerazioni:

- Fornire più misure al filtro di Kalman non comporta necessariamente un miglioramento. Nel caso considerato ciò è dovuto al fatto che abbiamo dovuto aggiungere al modello altre due variabili di stato, ma il leggero peggioramento sulla velocità è stato compensato dall'aver filtrato anche accelerazione e posizione. Diversamente, se disponessimo di misure ridondanti di una stessa grandezza, l'inserirle nel filtro provocherebbe in

generale un miglioramento. Ricordiamo anche che uno dei maggiori benefici del fornire più misure al filtro è la maggiore robustezza dello stesso.

- Il modello cinematico ha prestazioni molto simili su posizione e accelerazione, si distingue, rispetto al modello che considera la forza di trazione, solamente nel transitorio di convergenza; mostra invece differenze più marcate sul filtraggio della velocità (in questo caso con valori di mse leggermente peggiori). Il motivo è che le equazioni di stato di accelerazione e posizione sono le stesse per i due modelli, mentre quelle per la velocità sono diverse. Per quanto riguarda il modello cinematico, la stima di v presenta “l’inconveniente” di essere strettamente legata all’aver definito a costante, di fatto non vera; l’altro modello per contro utilizza per stimare v una misura (omega ruota) ed è quindi influenzato dalla precisione di tale segnale.

Queste osservazioni ci portano a ribadire che non esiste un modello migliore in assoluto, ma che la scelta deve essere relazionata in particolare agli obiettivi (come per esempio quali grandezze vogliamo filtrare e che robustezza avere in presenza di malfunzionamenti) e alle misure (quali sono disponibili e quanto sono attendibili).

Tabella 3.3: Valori di deviazione standard delle misure di accelerazione, velocità, posizione e velocità angolare ruota confrontati con quelli relativi alle stesse grandezze filtrate con Kalman in diverse situazioni di variabili di stato e/o modelli.

MSE	Misure	Filtro di Kalman:					
		con ω =input				con ω =stato	
		Kv	K avp	K cin	K ibr	K w	K w.ibr
acc	0.607		0.191	0.188	0.160	0.191	0.164
vel	0.4006	0.0234	0.0242	0.0474	0.0244	0.0236	0.0225
pos	0.1961		0.0256	0.0244	0.0256	0.0224	0.0224
omega	1.215					0.686	0.659

Dal momento che abbiamo sottolineato che esistono due possibili strade per il calcolo della stima a priori della velocità (con i relativi vantaggi e svantaggi), abbiamo pensato ad un modo per servirci di entrambe contemporaneamente. Allo

stato del sistema di equazioni visto in (3.17) abbiamo aggiunto una quarta variabile v_{null} che è pari alla differenza tra la velocità calcolata tramite l'integrazione dell'accelerazione (legame cinematico) e quella calcolata tramite il modello fisico (eq. (3.15)). Per maggiore chiarezza abbiamo riportato prima il sistema di equazioni del modello a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{a} = 0 \\ \dot{v} = -\frac{C_x}{m r_{ruota} \omega} v + \frac{C_x}{m} \\ \dot{s} = v \\ \dot{v}_{null} = a - \left(-\frac{C_x}{m r_{ruota} \omega} v + \frac{C_x}{m} \right) \end{cases} \quad (3.18)$$

e quindi la forma consueta a tempo discreto nella quale è ben visibile la matrice di stato \mathbf{A}_k :

$$\begin{Bmatrix} a \\ v \\ s \\ v_{null} \end{Bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{C_x \Delta t}{m r_{ruota} \tilde{\omega}_k} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t & 1 & 0 \\ \Delta t & \frac{C_x \Delta t}{m r_{ruota} \tilde{\omega}_k} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ v \\ s \\ v_{null} \end{Bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C_x \Delta t}{m} \\ 0 \\ -\frac{C_x \Delta t}{m} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Siccome la variabile v_{null} dovrebbe avere un valore quasi nullo, abbiamo creato una misura fittizia \tilde{v}_{null} costituita da un semplice vettore di zeri, da fornire al filtro come confronto, e ad essa abbiamo associato un valore di covarianza procedendo per tentativi.

I risultati ottenuti con questo modello, che abbiamo soprannominato ibrido, sono rappresentati nelle fig. 3.21 e 3.22 dalle linee azzurre, mentre i valori di deviazione standard delle variabili filtrate sono riportati sempre in tab. 3.3 nella relativa colonna. Notiamo un comportamento del tutto affine a quello del modello fisico per quanto riguarda velocità e posizione, si ha un miglioramento invece sul filtraggio dell'accelerazione.

3.2.2 Velocità angolare assunta come variabile di stato

Fino ad ora abbiamo utilizzato la misura della velocità angolare della ruota come un ingresso del modello, sottolineando che tale azione introduce un certo errore legato alla misura. Ci chiediamo quindi se e quali vantaggi potremmo ottenere includendo ω tra le variabili di stato (ciò comporta ovviamente ad utilizzare la sua misura nel vettore \mathbf{y}). Poiché non si hanno ulteriori informazioni su questa variabile, dovremo trattarla esattamente come l'accelerazione, ossia come un parametro costante con un errore di modello associato elevato. Il modello si complica ulteriormente dato che l'equazione di stato passa ad essere non lineare, infatti nella stima del vettore $\hat{\mathbf{x}}^-$ dal passo k al passo $k+1$ notiamo che la non linearità è presente nell'equazione relativa alla velocità di avanzamento:

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ v_{k+1} = v_k - \frac{C_x \Delta t}{m r_{ruota}} \frac{v_k}{\omega_k} + \frac{C_x \Delta t}{m} \\ s_{k+1} = s_k + \Delta t v_k \\ \omega_{k+1} = \omega_k \end{cases} \quad (3.20)$$

Per determinare la matrice \mathbf{A}_k occorre pertanto calcolare la matrice Jacobiana delle derivate parziali della funzione di stato rispetto alle variabili di stato; si ottiene così:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{C_x \Delta t}{m r_{ruota} \omega_k} & 0 & \frac{C_x \Delta t v_k}{m r_{ruota} \omega_k^2} \\ 0 & \Delta t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Ci serviamo dunque dell'algorithmo di Kalman esteso e mostriamo i risultati in fig. 3.23 (linee verdi), nella quale abbiamo riportato per confronto quelli già ottenuti nel caso di ω considerato come *input* (linee nere).

Anche per questa seconda situazione abbiamo testato l'utilità di un modello ibrido, di cui non stiamo a riportare le equazioni e la matrice di stato avendo spiegato il procedimento poco sopra. Gli andamenti degli errori tra le variabili così filtrate e i valori veri, sono anch'essi illustrati in fig. 3.23 con linee marroni; mentre ci appoggiamo sempre alla tabella 3.3 per confrontare le deviazioni standard.

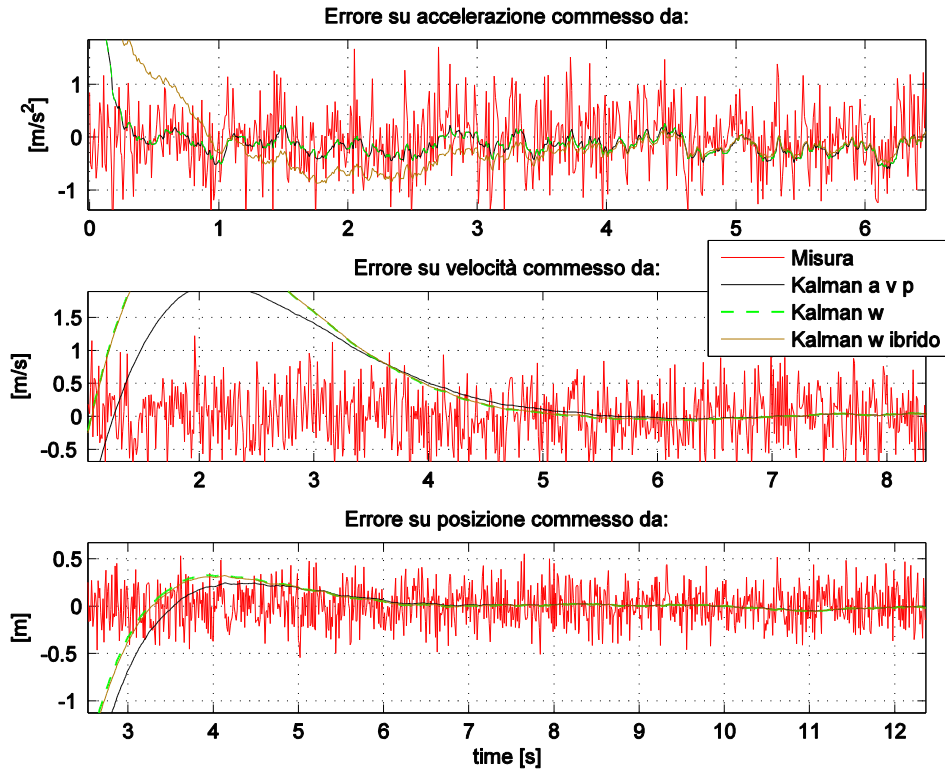


Figura 3.23: Andamento nel tempo dell'errore su accelerazione (sopra), velocità di avanzamento (al centro) e posizione (sotto) commesso dalle relative misure e dalle variabili filtrate con Kalman nei differenti casi. Con “Kalman a v p” si intende il filtro che utilizza le misure di accelerazione, velocità e posizione, omega ruota è quindi un ingresso al modello; con “Kalman w” quello che considera omega ruota tra le variabili di stato; con “Kalman w ibrido” l’analogo di quest’ultimo ma col modello ibrido.

Osserviamo che l’aver spostato ω da ingresso a variabile di stato ha prodotto leggerissimi miglioramenti sul filtraggio della velocità e dello spostamento; inoltre il tempo impiegato per convergere dall’algoritmo con ω variabile è lo stesso dell’algoritmo che utilizza ω come *input*. Queste considerazioni ci portano a non giustificare l’impiego del modello più complicato, che peraltro ha reso il sistema non lineare, a meno che non si desideri filtrare la velocità angolare. Per quanto riguarda il modello ibrido, constatiamo che anche in questo secondo caso ha prodotto effetti positivi sul filtraggio delle misure, può essere quindi una buona

soluzione da adottare nei casi nei quali è possibile scrivere due diverse equazioni per la stessa variabile di stato.

3.2.3 Introduzione delle forze aerodinamiche

Complichiamo ulteriormente il sistema a 2 gradi di libertà prendendo in considerazione le forze aerodinamiche, e supponiamo di poter misurare anche la coppia applicata alla ruota. Lo schema del sistema così modificato è rappresentato in fig. 3.24; nella stessa sulla destra abbiamo evidenziato le coppie applicate alla ruota per visualizzare meglio il seguente equilibrio:

$$J_r \dot{\omega} = T - F_T r_{ruota} \quad (3.22)$$

dove con J_r si è inteso il momento d'inerzia della ruota e con T la coppia.⁸ Ricordando il legame visto nell'eq. (3.13), possiamo scrivere per la forza longitudinale:

$$F_T = -\frac{C_x v}{\omega r_{ruota}} + C_x \quad (3.23)$$

che sostituita nella (3.22) porta a:

$$\dot{\omega} = \frac{T}{J_r} + \frac{C_x v}{J_r \omega} - \frac{C_x r_{ruota}}{J_r} \quad (3.24)$$

Disponiamo quindi, in questo caso, di un'equazione differenziale in ω che può essere utilizzata nel modello al posto di quella formalmente meno corretta:

$$\dot{\omega} = 0 \quad (3.25)$$

Per quanto riguarda le forze aerodinamiche ricordiamo le due relazioni, rispettivamente della resistenza aerodinamica e della forza di *lift* :

⁸ La forza di trazione/frenatura che nel caso precedente veniva indicata solamente con F, acquisisce ora il pedice T per una maggiore distinzione dalle altre forze in gioco.

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho c_D S v^2 \quad (3.26)$$

$$F_L = \frac{1}{2} \rho c_L S v^2 \quad (3.27)$$

nelle quali ρ è la densità dell'aria, S la superficie di riferimento, c_D il coefficiente adimensionale di resistenza e c_L quello di portanza.⁹ Precisiamo che è stata fatta l'ipotesi che la velocità relativa aria-veicolo sia uguale a quella di avanzamento.

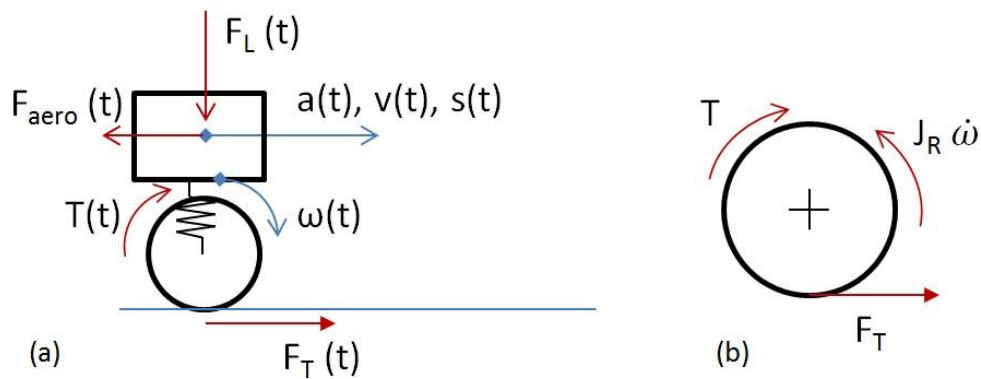


Figura 3.24: (A sinistra) Sistema a 2 GdL del veicolo considerando anche le forze aerodinamiche e la coppia di trazione/frenatura. (A destra) Coppie applicate alla ruota.

Il sistema visto in (3.20) si modifica pertanto in:

⁹ In ambito veicolistico la superficie di riferimento è spesso presa pari all'area della sezione frontale del veicolo, ma ricordiamo che quello che conta è il prodotto $c_D S$, tanto è vero che per un'auto da corsa a ruote scoperte e con elementi alari tale valore S ha un significato più simbolico. Specifichiamo anche che la forza di portanza è assunta positiva verso l'alto, nel caso in esame il coefficiente c_L ha valori negativi essendo desiderato sulla vettura un effetto di compressione verso il suolo.

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ v_{k+1} = v_k + \frac{\Delta t}{m} \left(-\frac{C_x}{r_{ruota}} \frac{v_k}{\omega_k} + C_x - \frac{1}{2} \rho \tilde{c}_D S v_k^2 \right) \\ s_{k+1} = s_k + \Delta t v_k \\ \omega_{k+1} = \omega_k + \frac{\Delta t}{J_r} \left(\tilde{T}_k + C_x \frac{v_k}{\omega_k} - C_x r_{ruota} \right) \end{cases} \quad (3.28)$$

che costituisce la funzione di stato non lineare. Facciamo notare che all'interno compare, oltre alla misura della coppia \tilde{T} , anche il valore di \tilde{c}_D “misurato”. Infatti questo coefficiente, qui assunto costante, ma nella realtà variabile¹⁰, non può essere direttamente misurato, ma viene stimato tramite prove nella galleria del vento. Rispetto ad altre grandezze come la massa o il raggio ruota, questa “misura” è affetta da una minor precisione. Quindi per mantenere il nostro esempio vicino a un possibile caso reale, abbiamo inserito nel modello un valore di \tilde{c}_D differente da quello vero (del 20%).

Come sottolineato più volte, per determinare la matrice \mathbf{A}_k nel caso di sistema non lineare, è necessario calcolare lo Jacobiano della funzione di stato rispetto alle variabili di stato. In fig. 3.25 è mostrata la dinamica vera del sistema, mentre in fig. 3.26 e 3.27 sono riportati con linee blu gli errori tra i valori veri e quelli delle variabili filtrate con Kalman per la situazione appena illustrata. Nella tab. 3.4 sono riportati i relativi valori di deviazione standard confrontati con quelli delle misure.

¹⁰ I coefficienti aerodinamici variano in funzione dell'angolo di attacco α cioè l'angolo formato tra la direzione del flusso e il profilo alare.

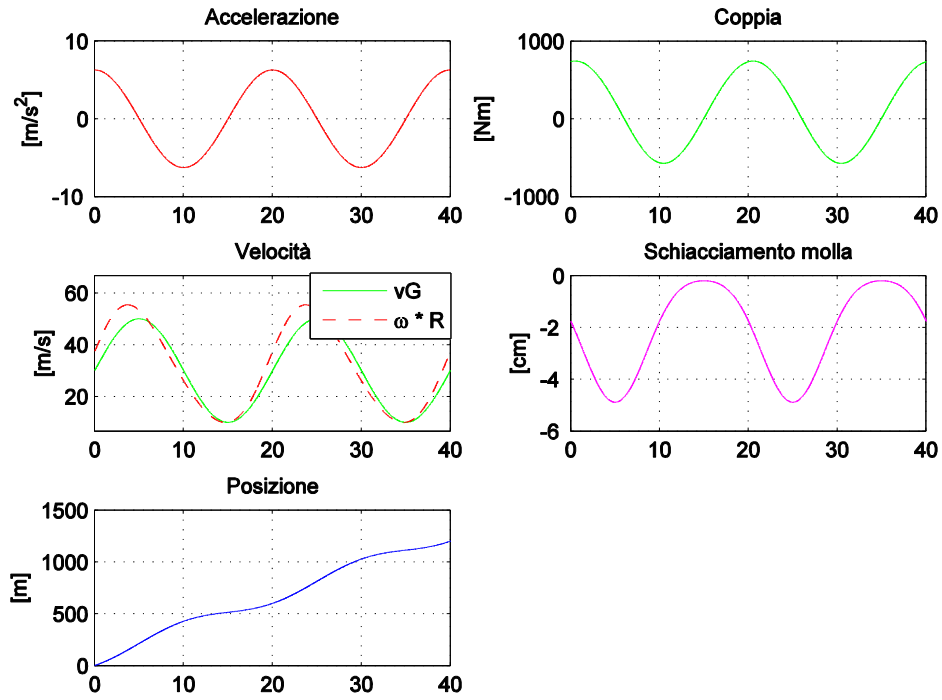


Figura 3.25: Dinamica vera delle grandezze da filtrare e degli ingressi del sistema.

Vogliamo ora sfruttare la forza di lift per risalire alla velocità di avanzamento del veicolo. Ipotizziamo di avere a disposizione la misura dello schiacciamento della molla della sospensione Δl , e ipotizziamo anche che il legame tra forza elastica e Δl sia lineare:

$$F_{el} = k_{mol} \Delta l \quad (3.29)$$

dove k_{mol} indica la rigidezza della molla. Considerando che lo schiacciamento della molla sia dovuto solo alla forza di deportanza, possiamo scrivere la seguente uguaglianza:

$$k_{mol} \Delta l = \frac{1}{2} \rho c_L S v^2 \quad (3.30)$$

dalla quale è facile ricavare il legame tra misura $\tilde{\Delta}l$ e variabile di stato v :

$$\tilde{\Delta}l = \frac{\rho \tilde{c}_L S}{2 k_{mol}} v^2 \quad (3.31)$$

Anche nell'eq. (3.31) abbiamo aggiunto il soprassegno al coefficiente di portanza per indicare che utilizziamo nel modello un valore leggermente diverso da quello vero, dato che valgono le stesse considerazioni fatte per il c_D . La funzione h che lega le misure alle variabili di stato diventa anch'essa non lineare con l'introduzione della nuova misura:

$$\begin{cases} \tilde{a}_k = a_k \\ \tilde{v}_k = v_k \\ \tilde{s}_k = s_k \\ \tilde{\omega}_k = \omega_k \\ \tilde{\Delta}l_k = \frac{\rho \tilde{c}_L S}{2 k_{mol}} v_k^2 \end{cases} \quad (3.32)$$

In questo caso occorre quindi calcolare gli Jacobiani sia di f che di h ad ogni passo k per determinare rispettivamente le matrici A_k e H_k . I risultati ottenuti dal filtro per questa situazione sono rappresentati nelle fig. 3.26 e 3.27 dalle linee rosa: notiamo la totale sovrapposizione con quelli ricavati in assenza della misura dello schiacciamento della molla. I valori *mse* delle variabili filtrate riportati in tab. 3.4 danno un'ulteriore conferma. La ragione risiede nel fatto che nel secondo caso abbiamo dovuto aumentare il valore di varianza della misura $\tilde{\Delta}l$ all'interno della matrice R per avere prestazioni migliori nel filtraggio. Infatti oltre all'errore di misura ad essa associato, si ha un errore introdotto dal \tilde{c}_L nel legame $\Delta l - v$ che nell'esempio considerato porta a un peggioramento in primis della stima della velocità e, a seguire, di tutte le variabili ad essa associate. Pertanto l'introduzione della misura $\tilde{\Delta}l$ non produce nessun vantaggio, dato che praticamente non deve essere tenuta in considerazione dal filtro se si vogliono ottenere buoni risultati paragonabili ai primi.

Osserviamo anche un peggioramento sul filtraggio della velocità angolare in corrispondenza dei bassi scorrimenti longitudinali da parte di tutti i filtri

implementati. Il motivo è che quando lo scorrimento longitudinale è circa uguale a zero, ω “perde la connessione” con le altre variabili di stato (vedere l’equazione di stato (3.28)), quindi al filtro non arrivano informazioni utili se non quella della stessa misura $\tilde{\omega}$.¹¹

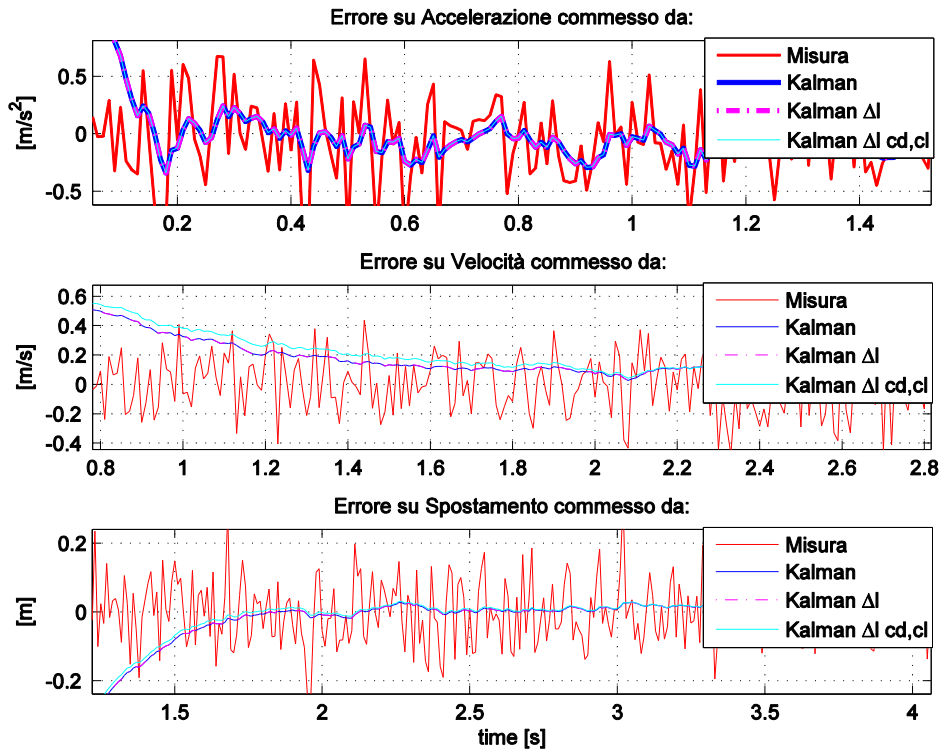


Figura 3.26: Andamento nel tempo dell’errore su accelerazione (sopra), velocità di avanzamento (al centro) e posizione (sotto) commesso dalle relative misure e dalle variabili filtrate con Kalman nei differenti casi. Con “Kalman” si intende il filtro che utilizza le misure di accelerazione, velocità, posizione e omega ruota e come ingresso la coppia; con “Kalman Δl” quello aggiunge la misura dello schiacciamento della molla; con “Kalman Δl cd,cl” quello che considera i coefficienti aerodinamici come variabili di stato.

¹¹ In questo caso l’equazione più adatta che lega ω alla velocità di avanzamento è banalmente $\omega = v/r_{ruota}$.

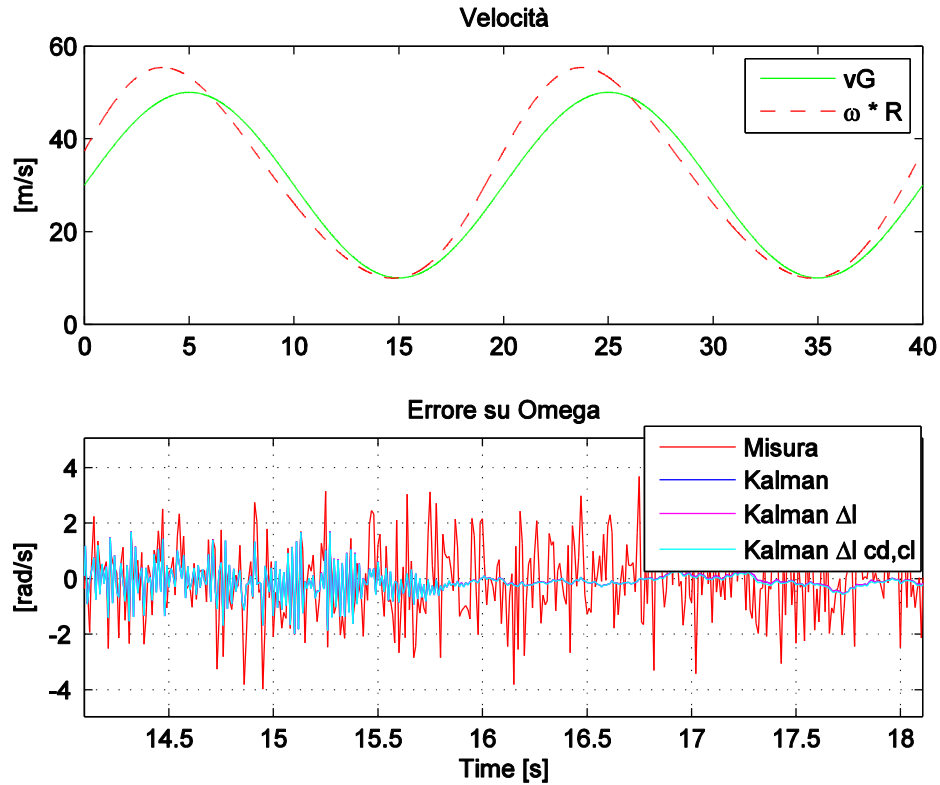


Figura 3.27: (Sopra) Storia temporale della velocità di avanzamento e di quella di rotolamento. (Sotto) Andamento nel tempo dell'errore su omega commesso dalla misura e da omega filtrata con Kalman nei diversi casi.

Ci chiediamo a questo punto se è possibile sfruttare il filtro di Kalman per fare una stima più corretta dei coefficienti aerodinamici c_D e c_L . Ricordando le formule che li definiscono viste in (3.26) e (3.27), una prima opzione è di riscriverle esplicitando il legame tra coefficiente e variabili di stato, e di inserire in queste i valori delle grandezze di stato filtrate:

$$c_D^* = \frac{2}{\rho S v_f^2} \left(-\frac{C_x v_f}{r_{ruota} \omega_f} + C_x - m a_f \right) \quad (3.33)$$

$$c_L^* = \frac{2 k_{mol} \tilde{\Delta} l}{\rho S v_f^2} \quad (3.34)$$

Nelle relazioni (3.33) e (3.34) abbiamo usato il pedice f per indicare la variabile filtrata. Come si può facilmente intuire, un'alternativa possibile, è di inserire tali coefficienti tra le variabili di stato, in modo che diventino dei parametri da far stimare al filtro. Dando ormai per assimilato il procedimento di implementazione del filtro, ci limitiamo solo a ricordare che nella scrittura delle matrici Jacobiane vanno calcolate anche le derivate rispetto a c_D e c_L . Per quanto riguarda gli effetti sul filtraggio delle misure ci serviamo sempre delle fig. 3.26 e 3.27 dove i risultati sono indicati dalle linee azzurre, e della tab. 3.4 che riporta i valori di deviazione standard. In questo caso notiamo che l'aver lasciato al filtro la libertà di variare i coefficienti aerodinamici ha prodotto dei miglioramenti sul filtraggio della velocità di avanzamento e di quella di rotazione della ruota. Specifichiamo anche che per ottenere queste prestazioni non abbiamo dovuto aumentare la varianza di misura di $\tilde{\Delta}l$, come avevamo fatto invece nel caso precedente, ma anzi il considerarla è stato utile per stimare il valore di c_L .

Tabella 3.4: Valori di deviazione standard delle misure di accelerazione, velocità, posizione e velocità angolare ruota confrontati con quelli relativi alle stesse grandezze filtrate con Kalman in diverse situazioni di variabili di stato e/o misure.

MSE	Misure	Kalman	Kalman Δl	Kalman Δl cd cl
acc	0.403	0.147	0.147	0.147
vel	0.1949	0.0447	0.0448	0.0315
pos	0.101	0.018	0.018	0.018
omega	1.287	0.511	0.512	0.463

Per quanto riguarda invece l'identificazione dei due parametri, mettiamo a confronto in fig. 3.28 i risultati ottenuti con i due metodi. Notiamo che utilizzare le variabili filtrate da Kalman per ricostruirli porta a delle oscillazioni nell'intorno del valore corretto che possono essere a seconda dei casi più o meno accettabili. Vi è comunque un evidente peggioramento della stima in corrispondenza delle basse velocità di avanzamento, poiché le forze aerodinamiche assumono valori molto bassi rispetto alle altre forze in gioco, inoltre va tenuto presente che nella determinazione del c_L^* è presente la misura di $\tilde{\Delta}l$ e quindi del suo rumore.

Prestazioni nettamente migliori si ottengono considerando i due coefficienti come variabili di stato che si ripercuotono anche su un miglior filtraggio delle misure come visto poco sopra.

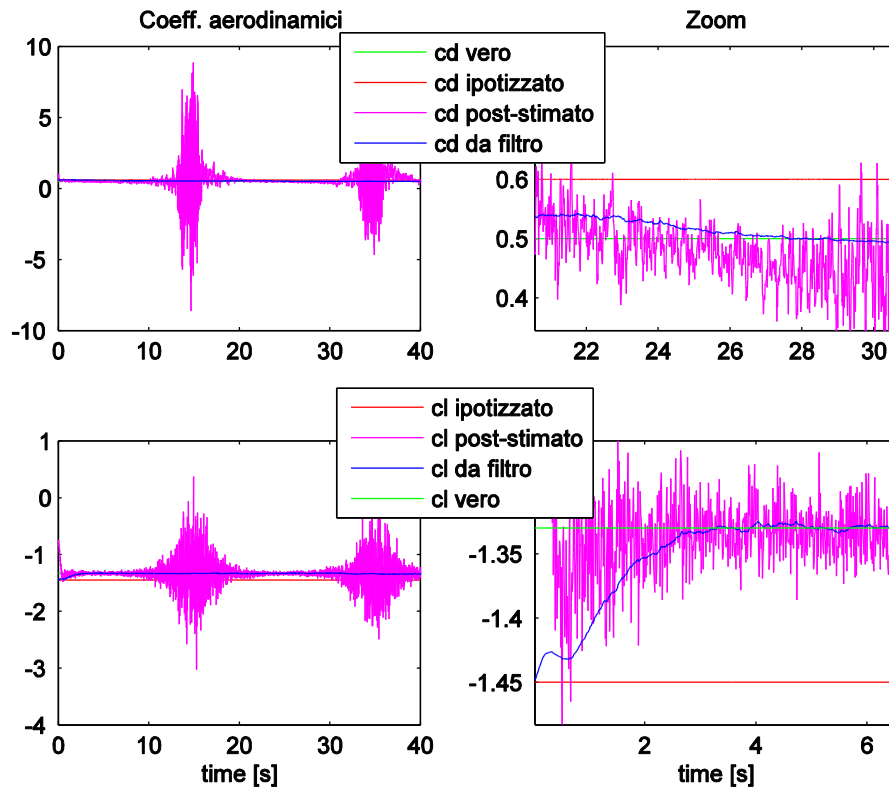


Figura 3.28: Andamento della stima dei coefficienti di resistenza aerodinamica (sopra) e di portanza (sotto) utilizzando le variabili filtrate (post stimato) o includendo gli stessi nel vettore di stato (da filtro). A destra è stato fatto un ingrandimento per visualizzare meglio le differenze.

3.2.4 Modello utilizzato dal filtro diverso da quello usato per generare le misure

In tutti gli esempi visti finora, il modello utilizzato per generare la dinamica vera e quindi le misure è lo stesso di cui si è servito il filtro di Kalman¹², sono quindi

¹² Ad eccezione delle accelerazioni (e talvolta della omega) che all'interno del filtro vengono considerate a modello come costanti.

situazioni particolarmente favorevoli dato che il filtro ha a disposizione delle equazioni che possiamo considerare “esatte”. Pur rimanendo valide le considerazioni fatte per questi casi, ricordiamo che nella realtà quando si modella un sistema reale si introduce sempre un certo grado di approssimazione, e quindi le equazioni che lo descrivono sono “parzialmente” vere. Vogliamo quindi affrontare un ultimo caso nel quale il filtro di Kalman si serva di un modello più semplice rispetto a quello utilizzato per la generazione delle misure e valutarne il comportamento.

Consideriamo sempre il sistema a 2 gradi di libertà soggetto a forze aerodinamiche presentato poco sopra (§ 3.2.3) e ipotizziamo questa volta di modellarlo trascurando l’aerodinamica. Le equazioni di modello viste in (3.28) si semplificano nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ v_{k+1} = v_k + \frac{\Delta t}{m} \left(-\frac{C_x}{r_{ruota}} \frac{v_k}{\omega_k} + C_x \right) \\ s_{k+1} = s_k + \Delta t v_k \\ \omega_{k+1} = \omega_k + \frac{\Delta t}{J_r} \left(\tilde{T}_k + C_x \frac{v_k}{\omega_k} - C_x r_{ruota} \right) \end{cases} \quad (3.35)$$

mentre la coppia \tilde{T} e le misure in ingresso al filtro $\tilde{a}, \tilde{v}, \tilde{s}$ e $\tilde{\omega}$ rimangono quelle generate precedentemente in presenza delle forze aerodinamiche.

In fig. 3.29 sono stati riportati gli andamenti degli errori commessi sulla velocità di avanzamento e sulla velocità angolare della ruota in una zona in cui queste ultime raggiungono i valori massimi, e quindi anche la resistenza aerodinamica sarà particolarmente elevata. Come ci si poteva facilmente aspettare, la grandezza filtrata (linea azzurra) presenta in questa situazione un valor medio diverso da zero, in quanto il modello, trascurando l’aerodinamica, va a sovrastimare le velocità effettive. In fig. 3.30 notiamo che anche la posizione viene influenzata da tale ipotesi semplificativa, mentre l’accelerazione non presenta particolari problemi. Abbiamo quindi aumentato la covarianza di modello relativa alla velocità di avanzamento di un ordine di grandezza e ripetuto il filtraggio: i risultati sono rappresentati nelle medesime figure con linee nere. Osserviamo che l’aver dato minore fiducia al modello ha permesso di risolvere in maniera accettabile tale problema, a discapito però di oscillazioni maggiori delle grandezze lungo tutta la

storia temporale essendo in questo caso maggiore il contributo fornito dalle misure. I valori di deviazione standard riportati in tab. 3.5 dimostrano tale miglioramento, ovviamente il confronto con quelli ottenuti nei casi precedenti rileva l'effetto del minore filtraggio nel caso del modello che trascura l'aerodinamica.

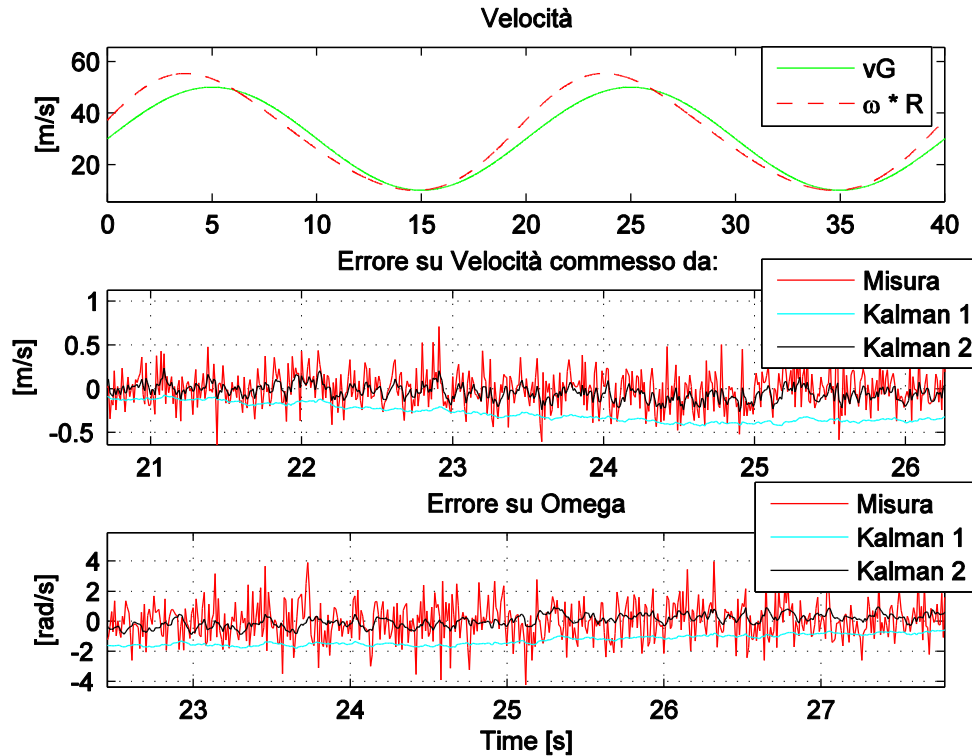


Figura 3.29: (In alto) Profilo reale di velocità di avanzamento e di rotolamento lungo tutta la storia temporale, dal quale è possibile notare i punti in cui le velocità sono maggiori. (Al centro) Errore commesso sulla velocità di avanzamento e (Sotto) sulla velocità angolare della ruota in corrispondenza di un tratto ad elevata forza di resistenza aerodinamica dalle relative misure e dalle grandezze filtrate.

Infine facciamo notare come l'accelerazione filtrata non subisca cambiamenti in tutte le situazioni considerate, ciò in parte è dovuto al fatto che il valore della sua varianza a modello è sempre stato mantenuto uguale, ma soprattutto perché non è legata alle altre variabili tramite le equazioni del modello. Il filtro di Kalman si comporta in questo caso come un semplice filtro passa-basso. Come si è già

mostrato nel corso del capitolo, una possibile soluzione è di utilizzare il modello che abbiamo definito ibrido nel quale viene introdotta anche la variabile v_{NULL} e la rispettiva misura.

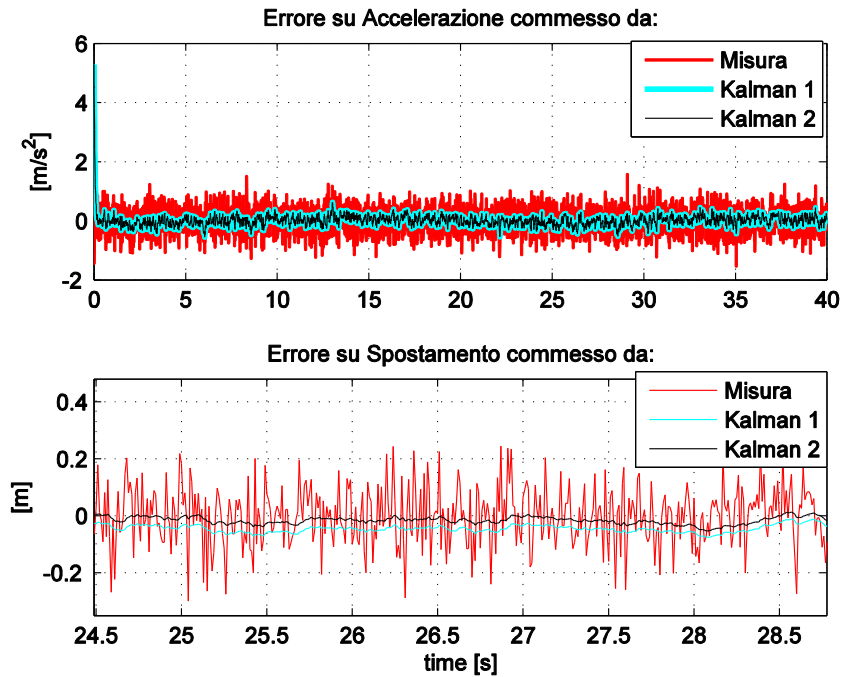


Figura 3.30: (Sopra) Errore commesso sull'accelerazione dalla misura e dalla grandezza filtrate lungo tutta la storia temporale. (Sotto) Errore commesso sulla posizione dalla misura e dalla grandezza filtrata in corrispondenza di un tratto ad elevata forza di resistenza aerodinamica.

Tabella 3.5: Valori di deviazione standard delle grandezze filtrate nelle due situazioni appena presentate (Kalman 1 e Kalman 2) e messi a confronto con quelli trovati e già mostrati precedentemente nel capitolo.

MSE	Misure	Kalman	Kalman Δl	Kalman Δl cd cl	Kalman 1	Kalman 2
acc	0.403	0.147	0.147	0.147	0.147	0.147
vel	0.1949	0.0447	0.0448	0.0315	0.1905	0.0819
Pos	0.101	0.018	0.018	0.018	0.031	0.021
Omega	1.287	0.511	0.512	0.463	0.855	0.523

Capitolo 4

Applicazione reale

Visto nel capitolo precedente il comportamento del filtro di Kalman in diverse possibili casistiche simulate, passiamo ora a confrontarci con una situazione reale. In particolare vogliamo utilizzarlo per fare sensor fusion a bordo della monoposto Ferrari F150 Italia, vettura che ha disputato la stagione 2011 di Formula Uno, mostrata in fig. 4.1. Tale vettura, come del resto anche le monoposto avversarie, è equipaggiata con un ingente numero di sensori, se confrontati per esempio con quelli presenti su una normale autovettura. Tra i tanti presenti riportiamo quelli di cui ci siamo serviti (indicati sempre in fig. 4.1) per l'analisi che si vedrà in seguito e le rispettive misure:

- accelerometro telaio triassiale capacitivo MEMs (Micro Electro-Mechanical systems): accelerazione longitudinale, laterale e verticale del telaio,
- lettore ottico Datron: velocità longitudinale e laterale vettura calcolata rispetto alla strada,
- GPS: posizione della vettura rispetto a un sistema di riferimento fisso,
- giroscopio: velocità di imbardata della vettura.

Gli obiettivi che abbiamo voluto perseguire sono dal un lato il filtraggio delle misure stesse e dall'altro rendere il sistema di misura più robusto, nello specifico rispetto a dei malfunzionamenti del lettore ottico di velocità¹. In merito al modello da utilizzare come riferimento per il filtro di Kalman, sottolineiamo che si è optato per un modello semplice in modo da limitare i parametri da settare nel filtro. La scelta rappresenta un compromesso tra semplicità e grado di approssimazione. Inoltre, come è stato mostrato nel capitolo precedente, il passaggio verso un modello più complesso non porta necessariamente a dei benefici dato che spesso introduce altre grandezze fonti di ulteriore incertezza. Ovviamente ribadiamo che le

¹ Ricordiamo che sono principalmente dovuti al passaggio del lettore ottico sopra superfici particolarmente riflettenti, come una pozza d'acqua o un riga bianca verniciata.

ipotesi semplificative fatte nel considerare un determinato modello si ripercuotono nella scelta dei valori da assegnare alla matrice di covarianza del modello.

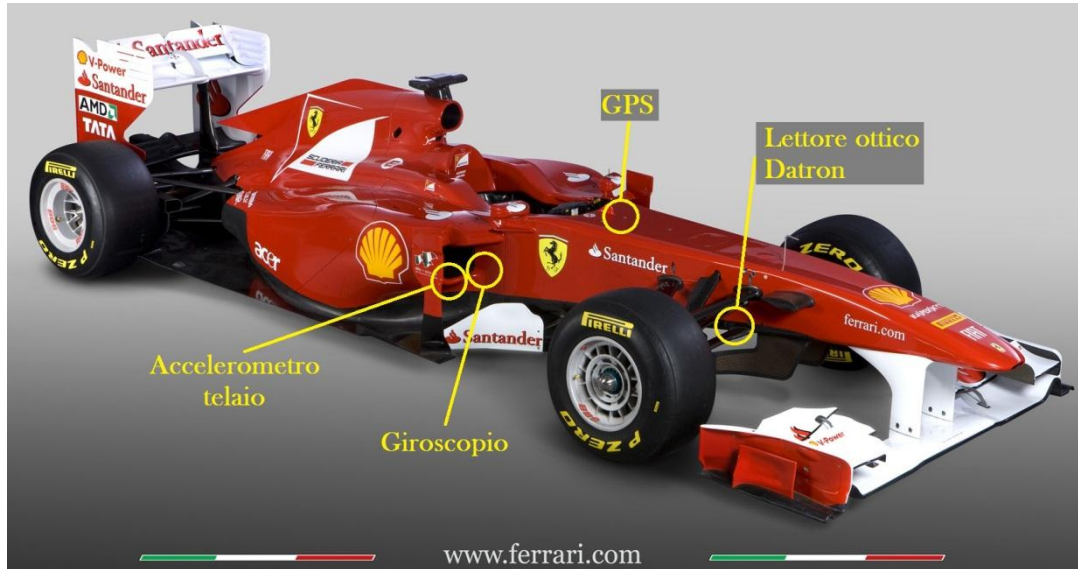


Figura 4.1: Sensori utilizzati per fare sensor fusion presenti a bordo della Ferrari F150 Italia.

Premettiamo anche che l'analisi è stata svolta in *post processing*, tuttavia il filtro di Kalman è stato implementato in modo da poter funzionare anche in *real time*. La frequenza è stata uniformata per tutti i segnali a 200 Hz, così che ad ogni passo siano sempre a disposizione tutte le misure.

I dati utilizzati sono relativi a un giro veloce durante le prove libere del venerdì di Alonso sul circuito di Catalogna Montmelò (Spagna), che è illustrato in figura 4.2.

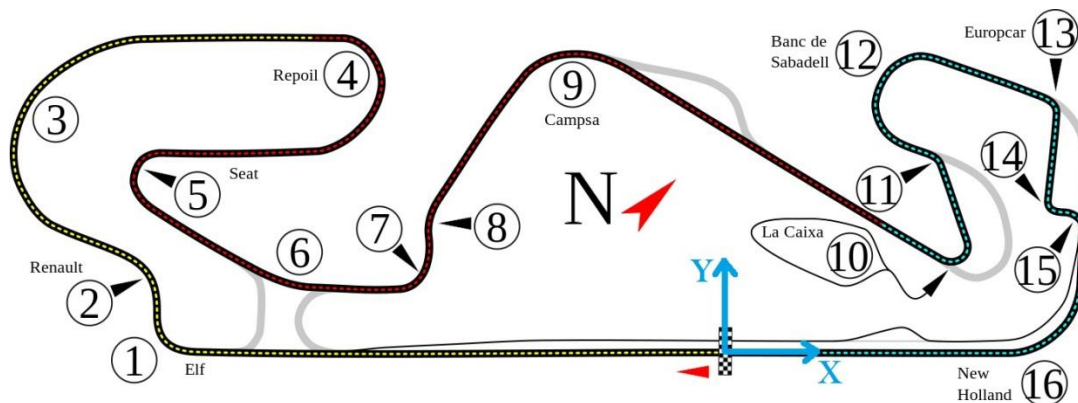


Figura 4.2: Tracciato del circuito della Catalogna, è evidenziata la configurazione delle curve usata in Formula Uno.

4.1 Giro di pista: dinamica nel piano

4.1.1 Scelta del modello

Vediamo quindi più nel dettaglio il problema. In particolare osservando le misure che abbiamo a disposizione, notiamo che molte di esse sono riferite alla dinamica longitudinale e laterale della vettura, e che invece l'accelerazione verticale del telaio non può essere relazionata alle altre (non avrebbe infatti senso legarla alla variazione di altitudine misurata dal GPS, dato che è dovuta agli scuotimenti verticali del telaio ed è del tutto trascurabile il contributo dovuto alla variazione di quota della pista). Abbiamo quindi deciso di affrontare il problema considerando la dinamica nel piano della monoposto.

Il modello più semplice possibile è quello di un punto materiale che si muove nel piano (quindi a due gradi di libertà), ma volendo sfruttare anche la misura della velocità di imbardata, decidiamo di modellare il sistema vettura come un corpo rigido nel piano, come mostrato in fig. 4.3. Tale corpo possiede i 3 GdL v_x , v_y e ψ per i quali valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = a_x + v_y \dot{\psi} \\ \dot{v}_y = a_y - v_x \dot{\psi} \\ X_G = \int v_x \cos(\psi) - v_y \sin(\psi) dt \\ Y_G = \int v_x \sin(\psi) + v_y \cos(\psi) dt \\ \psi = \int \dot{\psi} dt \end{cases} \quad (4.1)$$

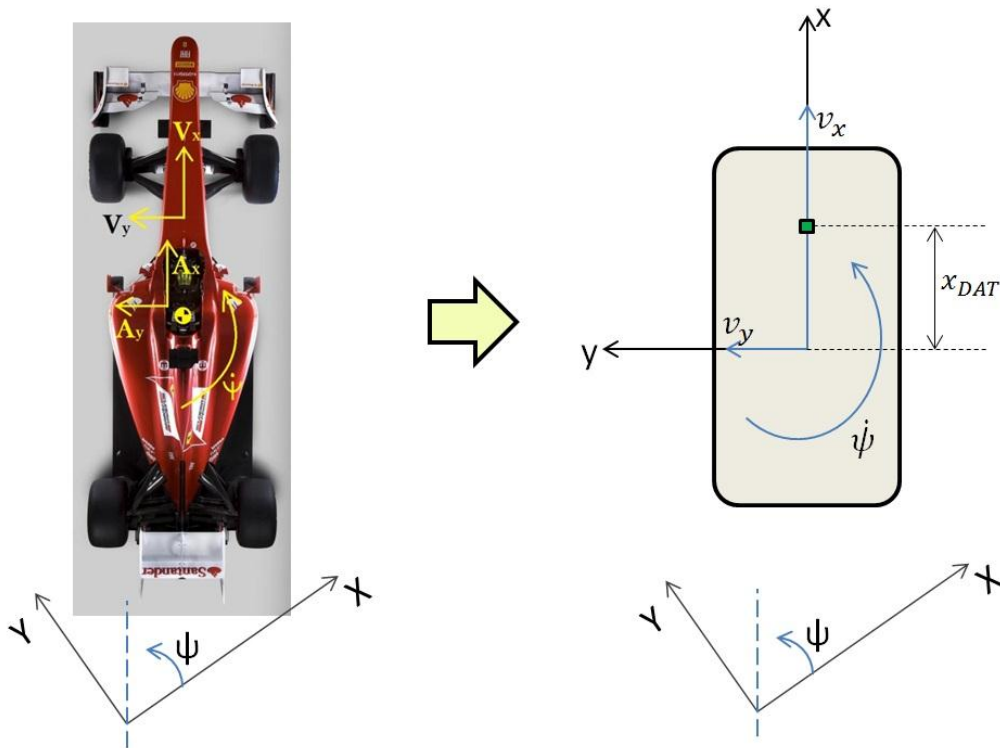


Figura 4.3: Modellazione della monoposto come corpo rigido nel piano. Gli assi x-y sono solidali con la vettura, mentre con X-Y si intende il sistema di riferimento fisso. Nella figura di sinistra sono rappresentate qualitativamente le misure provenienti dai sensori nelle posizioni di questi ultimi.

Facciamo subito notare che nell'assumere tale modello abbiamo trascurato:

- i moti verticali, di beccheggio e di rollio della cassa,

- la deformabilità del telaio,
- le variazioni di altitudine della pista e le eventuali sopraelevazioni delle curve.

Le misure² di cui ci serviamo sono quindi:

- le accelerazioni \tilde{a}_x e \tilde{a}_y della vettura provenienti dall'accelerometro sul telaio,
- le velocità \tilde{v}_x e \tilde{v}_y misurate dal Datron³,
- la posizione in \tilde{X} e in \tilde{Y} fornita del GPS⁴,
- la velocità di imbardata $\tilde{\psi}$ misurata dal giroscopio.

Relativamente al segnale del GPS specifichiamo che abbiamo trascurato la misura dell'altitudine per via del modello scelto, tuttavia osserviamo che tale scelta non introduce grossi errori in quanto il tracciato non presenta significative variazioni di quota. Anche per l'accelerometro del telaio ricordiamo che non è stata tenuta in considerazione la misura dell'accelerazione verticale sempre per il fatto che ci stiamo occupando di un problema nel piano x-y.

Note quindi le eq. (4.1), scriviamo il sistema di equazioni di stato in forma discreta, nel quale sono state aggiunte le relazioni per le accelerazioni e per la velocità di imbardata così da poter filtrare tutte le misure sopra presentate:

² Per distinguere i valori misurati dalle variabili di stato abbiamo mantenuto la convenzione adottata fino ad ora, ossia le misure si diversificano dalle variabili di stato dal soprassetto $\tilde{\cdot}$.

³ Il Datron misura il modulo della velocità e l'angolo rispetto all'asse vettura, \tilde{v}_x e \tilde{v}_y sono rispettivamente le proiezioni di tale vettore sui due assi x e y solidali col veicolo.

⁴ Il GPS fornisce un dato grezzo di angolo di latitudine e longitudine. Con X e Y ci riferiamo ai dati opportunamente trattati e convertiti in metri. L'origine degli assi è stata presa coincidente con la posizione del traguardo del circuito, orientati come illustrato in fig. 4.2.

$$\begin{cases} a_{x_{k+1}} = a_{x_k} \\ a_{y_{k+1}} = a_{y_k} \\ v_{x_{k+1}} = v_{x_k} + \Delta t(a_{x_k} + v_{y_k} \dot{\psi}_k) \\ v_{y_{k+1}} = v_{y_k} + \Delta t(a_{y_k} - v_{x_k} \dot{\psi}_k) \\ X_{G_{k+1}} = X_{G_k} + \Delta t(v_{x_k} \cos(\psi_k) - v_{y_k} \sin(\psi_k)) \\ Y_{G_{k+1}} = Y_{G_k} + \Delta t(v_{x_k} \sin(\psi_k) + v_{y_k} \cos(\psi_k)) \\ \dot{\psi}_{k+1} = \dot{\psi}_k \\ \psi_{k+1} = \psi_k + \Delta t \dot{\psi}_k \end{cases} \quad (4.2)$$

Osserviamo che la presenza delle funzioni \sin e \cos e il prodotto tra due variabili di stato rende non lineari alcuni dei legami, dovremo quindi utilizzare il filtro di Kalman esteso. La matrice di stato \mathbf{A}_k deve pertanto essere linearizzata ad ogni passo in modo da poter proiettare la matrice di covarianza dell'errore allo *step* successivo e, in corrispondenza delle relazioni non lineari (da riga 3 a riga 6), assume la forma evidenziata nell'eq. (4.3):

$$\mathbf{A} (3 : 6, :)_k = \quad (4.3)$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta t & 0 & 1 & \Delta t \dot{\psi}_k & 0 & 0 & \Delta t v_{y_k} & 0 \\ 0 & \Delta t & -\Delta t \dot{\psi}_k & 1 & 0 & 0 & -\Delta t v_{x_k} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \cos(\psi_k) & -\Delta t \sin(\psi_k) & 0 & 0 & 0 & -\Delta t(v_{x_k} \sin(\psi_k) + v_{y_k} \cos(\psi_k)) \\ 0 & 0 & \Delta t \sin(\psi_k) & \Delta t \cos(\psi_k) & 0 & 0 & 0 & \Delta t(v_{x_k} \cos(\psi_k) - v_{y_k} \sin(\psi_k)) \end{bmatrix}$$

Passiamo ad esplicitare con l'eq (4.4) il legame espresso tramite la matrice \mathbf{H} tra le variabili di stato (vettore \mathbf{x}) e le misure raggruppate nel vettore \mathbf{y} . In particolare essendo l'accelerometro molto vicino al baricentro della vettura, abbiamo considerato i suoi segnali \tilde{a}_x e \tilde{a}_y come baricentrici; la stessa assunzione è stata fatta anche per i segnali del GPS poiché questi ultimi sono dell'ordine delle centinaia di metri rispetto al dislocamento del sensore che è dell'ordine dei centimetri. Per quanto riguarda il giroscopio, avendo fatto l'ipotesi di corpo rigido non è importante considerare la posizione del sensore, specifichiamo comunque che è montato in prossimità dell'accelerometro e quindi anch'esso molto vicino al baricentro. La distanza longitudinale x_{DAT} del Datron rispetto al baricentro della

vettura non può essere invece trascurata, è anzi utile ai fini del filtraggio perché permette di legare tra loro le variabili v_y e $\dot{\psi}$.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x} \\
 & \begin{pmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \\ \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \\ \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & x_{DAT} & 0 \\ & & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ v_x \\ v_y \\ X_G \\ Y_G \\ \dot{\psi} \\ \psi \end{pmatrix} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

4.1.2 Analisi di validazione

Prima di utilizzare il filtro così impostato sui dati reali, abbiamo voluto validarlo applicandolo a una situazione di dinamica ricreata tramite il modello: in questo modo, esattamente come per gli esempi visti nel precedente capitolo, siamo in grado di verificare la corretta convergenza verso i valori esatti poiché noti. In fig. 4.4 è illustrata la dinamica vera di tutte le variabili presenti nel vettore di stato. Facciamo notare che tale dinamica, pur avendo ordini di grandezza delle variabili comparabili con quelli misurati su una vettura da corsa, rappresenta una “manovra” inverosimile, tuttavia ciò non toglie credito alla trattazione in quanto lo scopo della presente simulazione è verificare il corretto funzionamento del filtro. I segnali delle misure sono stati costruiti come sempre sporcando i valori reali con del rumore a media nulla e si è considerato un dislocamento longitudinale del sensore di velocità rispetto al baricentro, come nella situazione reale. I risultati relativi a tale simulazione di validazione sono riportati nelle fig. 4.5 e 4.6. In particolare vengono mostrati gli errori commessi su ogni grandezza dalle variabili filtrate e dai segnali misurati (ad eccezione dell’angolo di imbardata che non è tra le misure): notiamo che convergono tutti rapidamente verso lo zero e si mantengono all’interno di un intervallo d’errore minore di quello commesso dalle misure; possiamo pertanto utilizzare tale modello per la situazione reale.

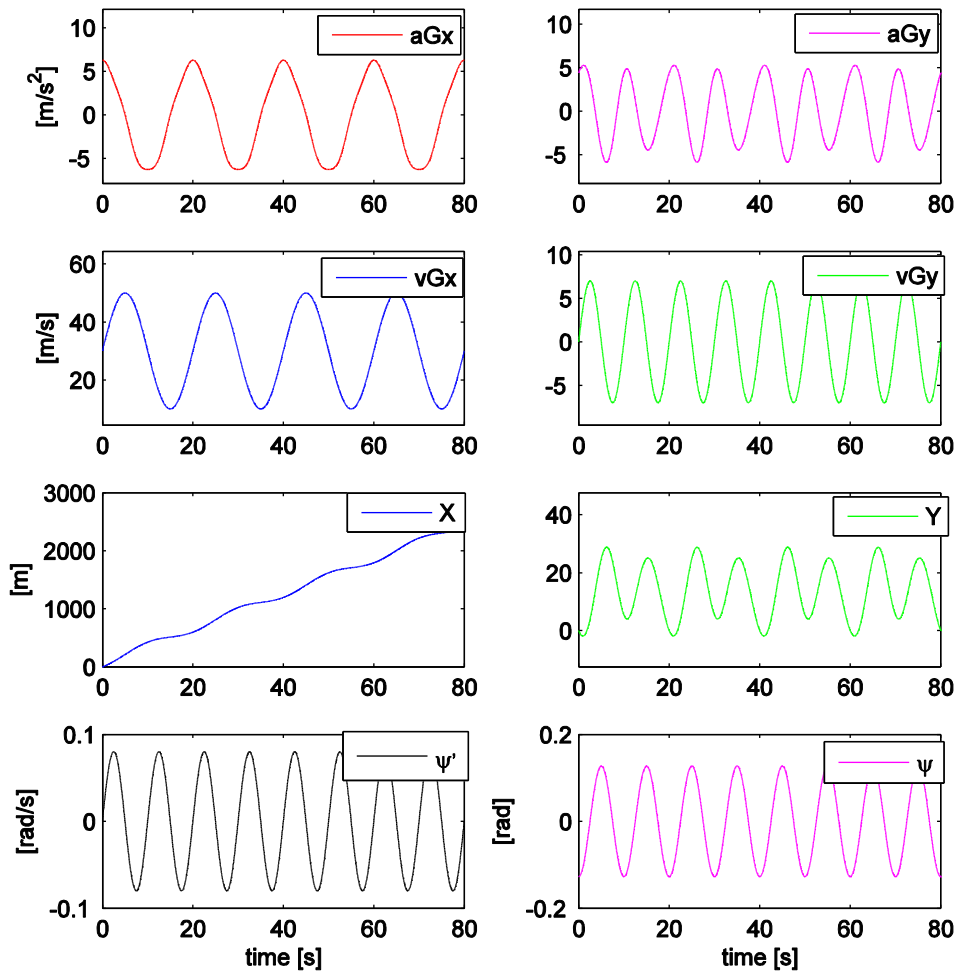


Figura 4.4: Andamenti reali nel tempo di tutte le grandezze di interesse ricostruiti tramite modello.

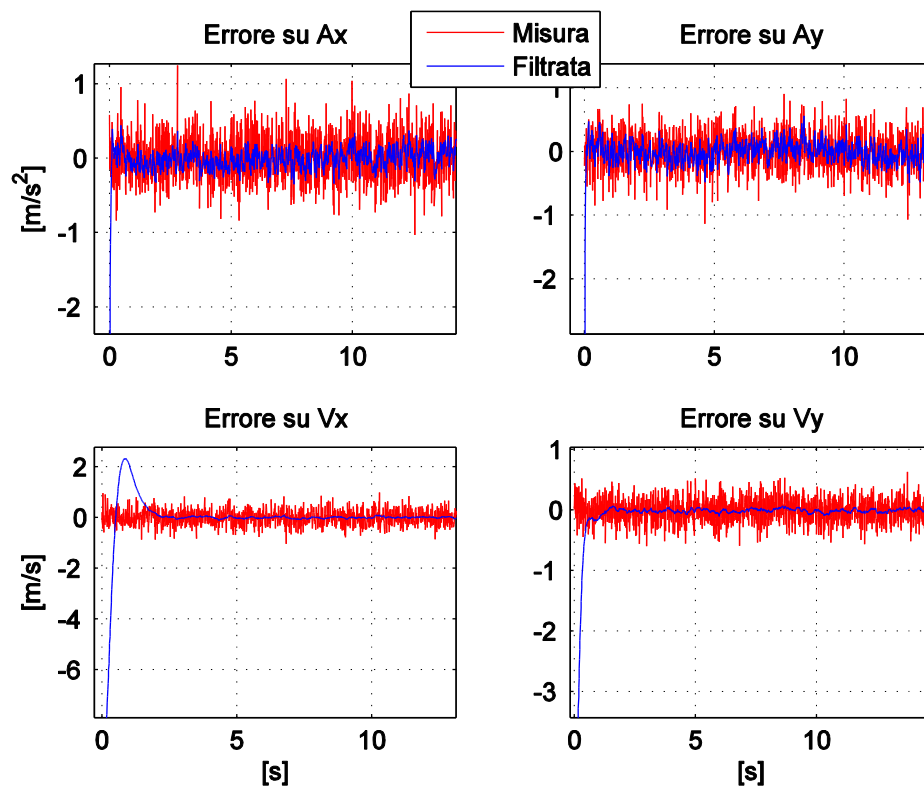


Figura 4.5: Confronto degli andamenti degli errori di misura (in rosso) e della rispettiva grandezza filtrata con Kalman (in blu).

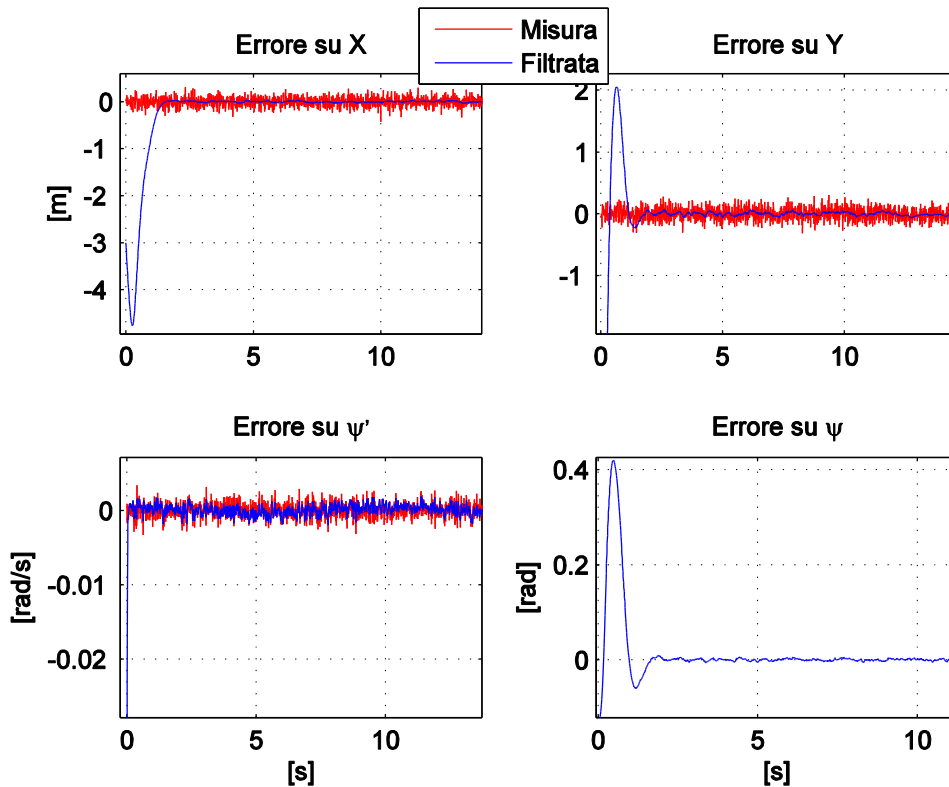


Figura 4.6: Confronto degli andamenti degli errori di misura (in rosso) e della rispettiva grandezza filtrata con Kalman (in blu). Per l'angolo di imbardata rappresentato in basso a destra non viene riportato l'errore di misura in quanto come nel caso reale non è una grandezza misurata fisicamente.

4.1.3 Risultati

Avendo dimostrato la convergenza del filtro, abbiamo scelto di assegnare come condizioni iniziali il primo valore misurato da ogni sensore in modo da partire con dei valori relativamente vicini a quelli corretti e ridurre/eliminare il transitorio di convergenza iniziale. L'angolo di imbardata all'istante t_0 , non essendo misurato, è stato posto pari a π , scelta fatta osservando la conformazione della pista e in particolare la direzione del rettilineo iniziale.⁵ In questo caso il primo passo dell'algoritmo di Kalman sarà la fase di previsione e non quella consueta di aggiornamento, perché non avrebbe infatti senso andare a confrontare gli stessi dati.

⁵ Specifichiamo, anche se scontato, che l'inizio dell'attività di sensor fusion coincide con l'inizio del giro di pista.

Analizziamo quindi i risultati ottenuti, incominciando dal profilo di velocità longitudinale illustrato in fig. 4.7. Essendo uno degli obiettivi rendere il sistema più robusto a dei malfunzionamenti del Datron, abbiamo applicato a questo sensore la logica On/Off già presentata nel paragrafo § 3.1.3.

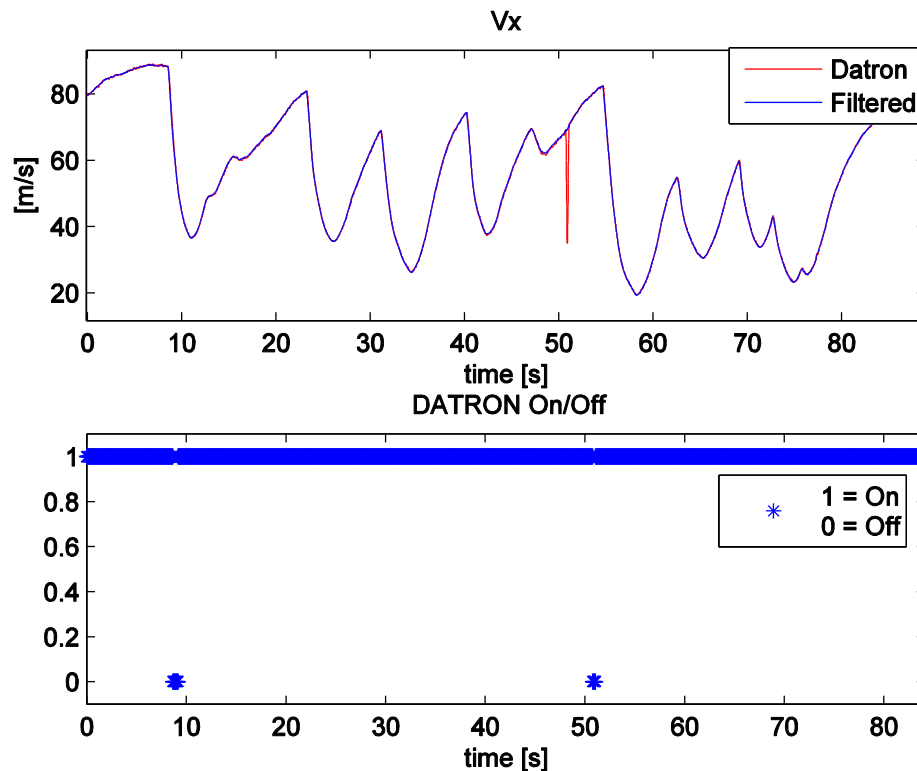


Figura 4.7: (Sopra) Profilo della velocità longitudinale della vettura lungo il giro di pista. (Sotto) Punti nei quali le misure di velocità del Datron vengono tenute “attive” all’interno del filtro (valore 1) o vengono “disattivate” (valore 0) in quanto troppo distanti dalle previsioni fatte dal filtro stesso.

Per tale motivo, sempre in fig. 4.7 sono riportati i punti nei quali il filtro mantiene attive le misure del lettore ottico (Datron On) e quando invece queste vengono praticamente non considerate nell’operazione di filtraggio (Datron Off), perché riconosciute come anomale. Notiamo che ciò avviene intorno al 51-esimo secondo, dove è evidente un malfunzionamento del sensore, ma anche in corrispondenza della frenata in fondo al rettilineo iniziale ($t \cong 9s$). Abbiamo quindi riportato in

fig. 4.8 l'ingrandimento del profilo di velocità in corrispondenza di tali zone. Il segnale che compare in verde proviene dalle misure delle velocità angolari delle ruote opportunamente trattate per tener conto degli effetti dovuti agli scorrimenti degli pneumatici. Non ci addentriamo volutamente su come è stato elaborato tale segnale, poiché la nostra intenzione è stata di inserirlo solo per avere dei valori di confronto. Osserviamo anzitutto un buon comportamento del filtro nel momento in cui il Datron smette di funzionare (caso visualizzato a destra): una volta che viene riconosciuto il malfunzionamento (tramite un'eccessiva differenza tra valori misurati e valori previsti), il filtro si serve delle equazioni del modello e delle altre misure disponibili per ricostruire con accettabile precisione la velocità longitudinale. A dimostrazione di tale fatto, abbiamo aggiunto in azzurro sempre nella stessa figura la velocità in x ottenuta tramite l'integrazione seguente:

$$\begin{cases} v'_{x_{k+1}} = v'_{x_k} + \Delta t(\tilde{a}_{x_k} + \tilde{\psi}_k v'_{y_k}) \\ v'_{y_{k+1}} = v'_{y_k} + \Delta t(\tilde{a}_{y_k} - \tilde{\psi}_k v'_{x_k}) \end{cases} \quad (4.5)$$

La discrepanza invece tra valori misurati e valori filtrati in corrispondenza della frenata in fondo al rettilineo principale (caso visualizzato a sinistra) si spiega col fatto che in presenza di forti decelerazioni il lettore ottico è meno accurato e risponde con un certo ritardo⁶; detto in termini pratici significa che il pilota ha iniziato a frenare realmente in leggero anticipo rispetto all'istante identificato dalla misura. Anche in questo caso il filtro mostra un buon comportamento, fornendo un segnale più vicino alla situazione reale.

⁶ All'interno del software del sensore può essere implementato un filtro (a scelta tra uno a media mobile e uno a risposta finita all'impulso) che se impiegato porta ad un ritardo nel tempo del segnale in presenza di forti variazioni di velocità.

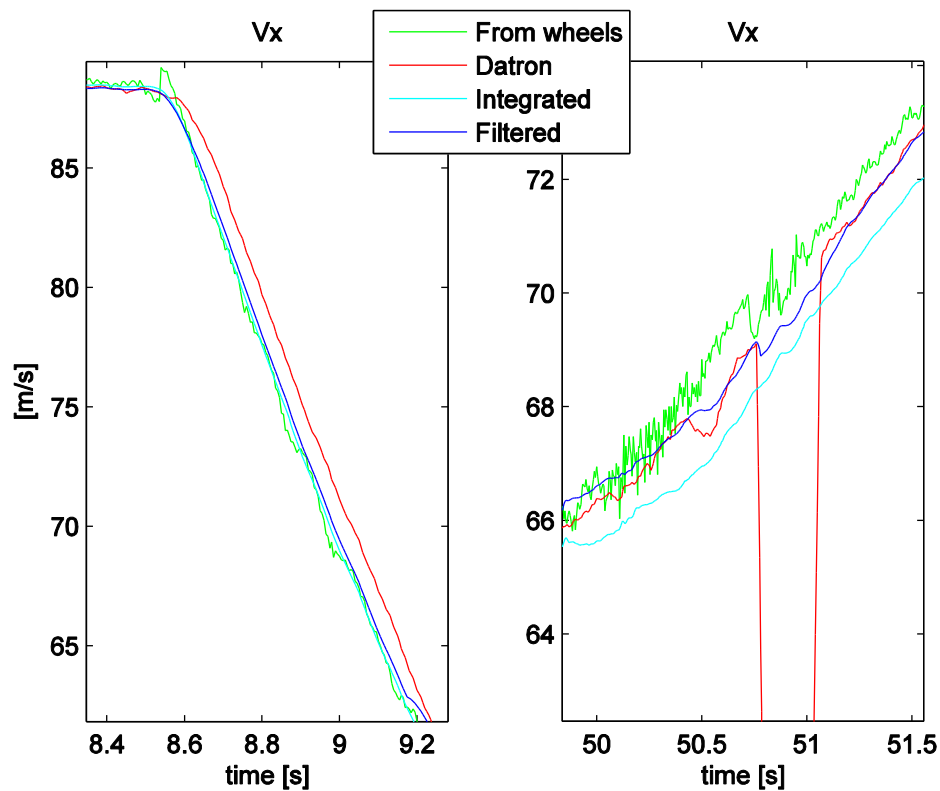


Figura 4.8: Ingrandimento del profilo di velocità longitudinale nelle zone in cui le misure del Datron sono riconosciute come anomale.

Specifichiamo che anche nelle altre situazioni di frenata la velocità filtrata risulta essere in anticipo rispetto a quella misurata dal lettore ottico, ma tale differenza si mantiene all'interno dell'intervallo per il quale non si ha la disattivazione del sensore che in questo caso è stato preso pari a $\pm 1,4$ m/s.⁷

⁷ Ricordiamo che all'interno dell'algoritmo che individua il malfunzionamento del sensore uno dei parametri su cui agire è il valore massimo dell'intervallo all'interno del quale la misura è considerata "coerente/accettabile".

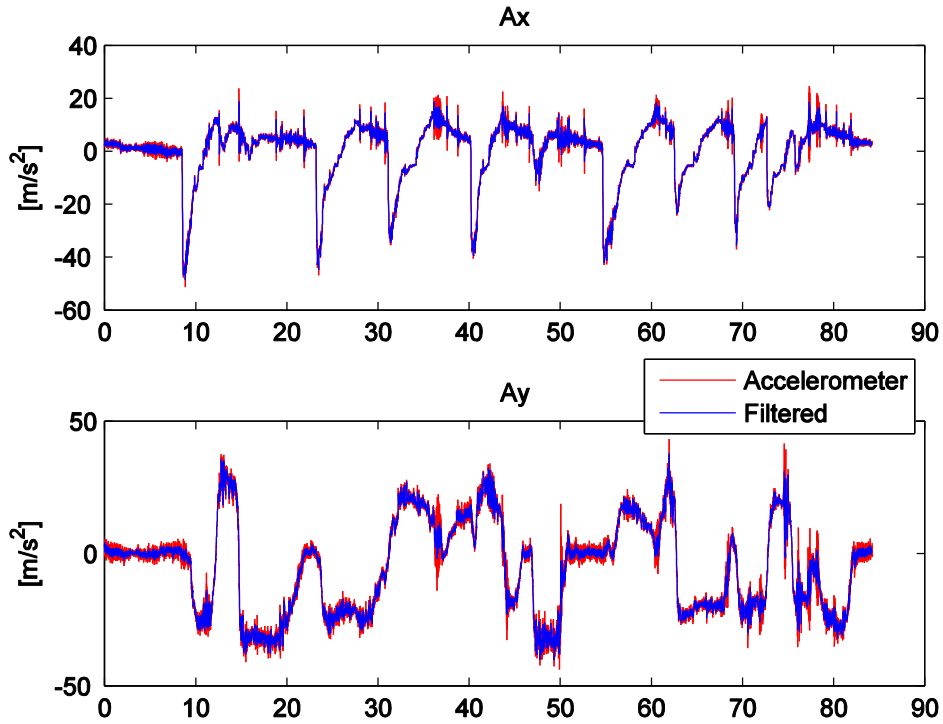


Figura 4.9: Confronto su accelerazione longitudinale (sopra) e laterale (sotto) tra valori misurati e valori filtrati con Kalman.

Nelle fig. 4.9 e 4.10 abbiamo riportato i risultati ottenuti sulle accelerazioni e sulla velocità di imbardata dalle quali è possibile constatare l'effetto di filtraggio prodotto. In particolare notiamo che l'effetto è simile a quello di un filtro passa-basso, poiché le rispettive equazioni di modello prevedono tali grandezze come costanti. In fig. 4.10 è stato anche evidenziato che al termine del giro l'angolo ψ uscente dal filtro raggiunge correttamente valori più prossimi ai 360° rispetto al profilo dell'angolo ottenuto mediante semplice integrazione della misura della velocità d'imbardata⁸.

⁸ Per maggiore chiarezza l'integrazione della misura è stata fatta partendo dal valore iniziale pari a zero, mentre alla grandezza ψ ricostruita abbiamo sottratto i 180° iniziali.

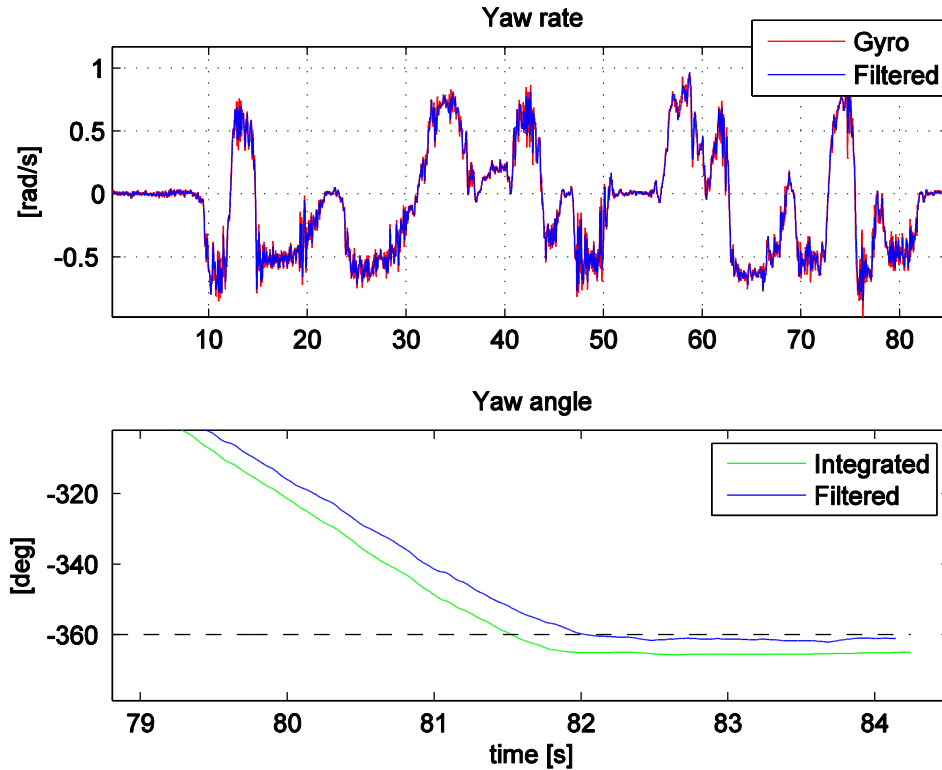


Figura 4.10: (Sopra) Confronto tra segnale misurato e segnale filtrato della velocità d'imbardata. (Sotto) Profilo temporale dell'angolo di imbardata nel tratto finale del tracciato. Sono messi a confronto quello ottenuto tramite il filtro di Kalman e quello ricavato tramite integrazione del segnale del giroscopio.

Per quanto riguarda la velocità laterale, per confrontare la grandezza filtrata con la misura proveniente dal lettore ottico, dobbiamo prima riportare quest'ultima al baricentro della vettura mediante la semplice relazione:

$$\tilde{v}_{y,G} = \tilde{v}_y - x_{DAT}\tilde{\psi} \tag{4.5}$$

nella quale osserviamo che abbiamo utilizzato il segnale della velocità di imbardata non filtrata, in quanto sarebbe stata questa la misura ottenuta se non avessimo applicato il filtro. Notiamo in fig. 4.11 la correzione del segnale nel punto di mal funzionamento del lettore ottico e dall'ingrandimento di un intervallo temporale che

l'effetto di filtraggio è meno accentuato rispetto a quello ottenuto sulla velocità longitudinale.

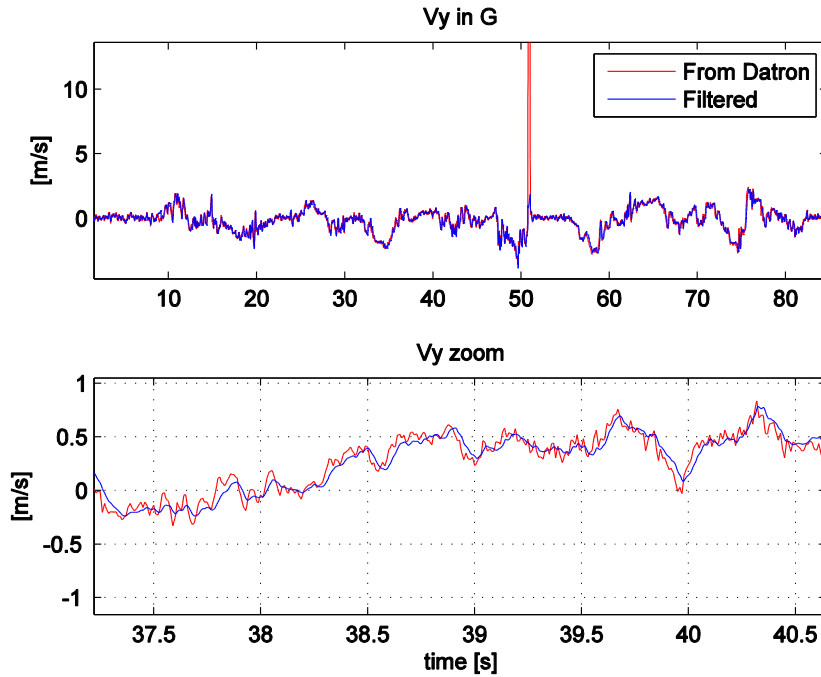


Figura 4.11: Confronto tra velocità laterale filtrata e velocità laterale proveniente dal lettore ottico riportata al baricentro vettura lungo tutto il giro di pista (sopra) e in un intervallo di tempo più ridotto per apprezzarne meglio le differenze (sotto).

Riportiamo infine in fig. 4.12 a scopo illustrativo i segnali di posizione filtrati e quelli provenienti dal GPS dai quali si può apprezzare la traiettoria tenuta dal pilota durante il giro di pista, mentre dall'ingrandimento di quest'ultima mostrato nella fig. 4.13 si nota il profilo più "morbido" e regolare ottenuto con le grandezze filtrate. Illustriamo anche in fig. 4.14 il profilo temporale della distanza tra la posizione misurata dal GPS e quella filtrata per avere un ordine di grandezza della precisione del sensore che notiamo essere piuttosto bassa. Questo fatto ci ha portato nel processo iterativo della fase di *tuning* del filtro ad assegnare un valore di covarianza sulle due misure \tilde{X} e \tilde{Y} relativamente grande rispetto a quello sulle corrispettive variabili di modello.

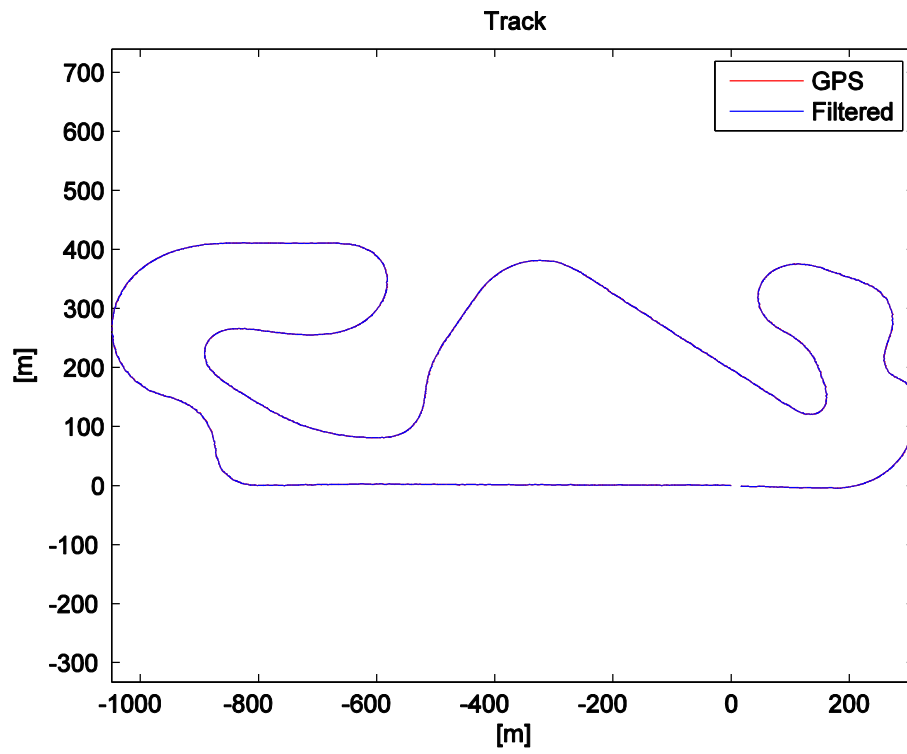


Figura 4.12: Profilo della traiettoria tenuta dal pilota durante il giro di pista.

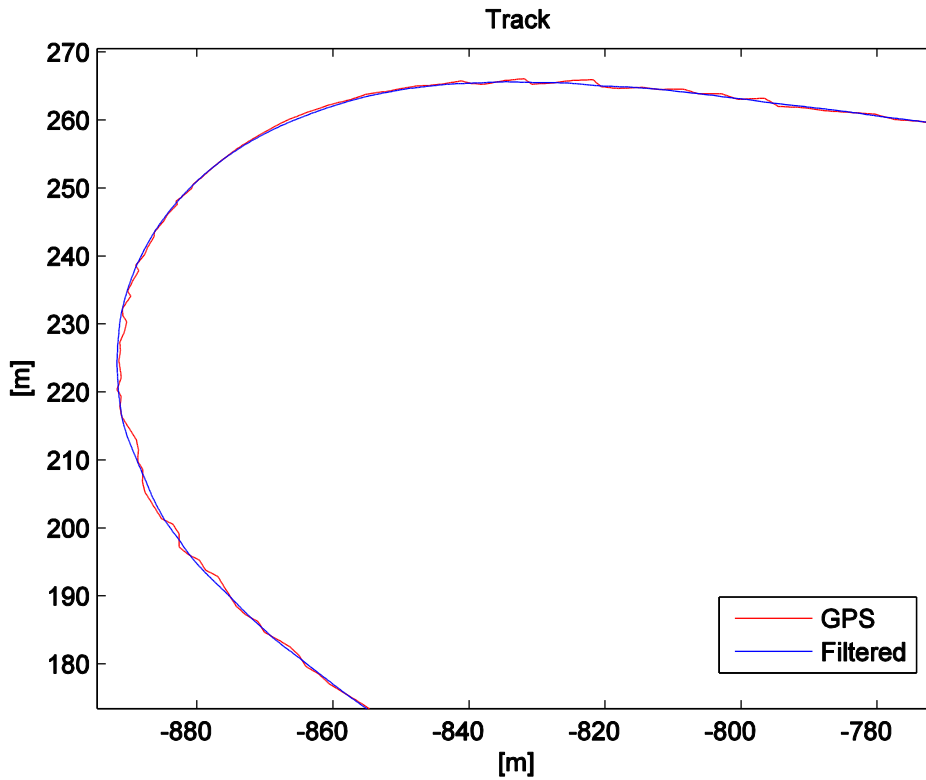


Figura 4.13: Ingrandimento di una zona della traiettoria per apprezzare la differenza tra quella filtrata e quella misurata dal GPS.

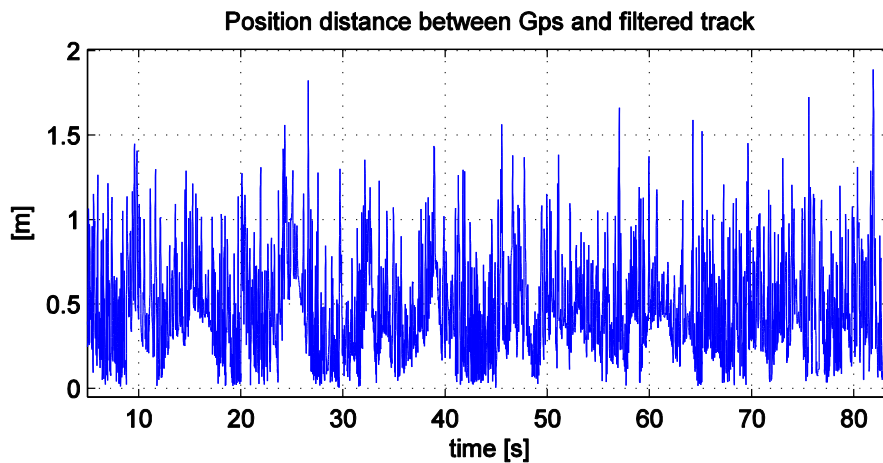


Figura 4.14: Andamento temporale della distanza tra posizione individuata dal GPS e posizione filtrata con Kalman.

4.1.4 Considerazioni finali

Prima di concludere il capitolo, vogliamo lasciare alcune osservazioni.

Un possibile miglioramento delle prestazioni del filtro può essere ottenuto considerando la matrice \mathbf{R} variabile nel tempo, andando per esempio ad aumentare opportunamente l'errore di misura del Datron in corrispondenza di forti frenate (situazioni nelle quali come si è visto il sensore è meno accurato).

Una mancanza del segnale del GPS renderebbe, in quel lasso di tempo, il sistema non osservabile. Precisiamo che la verifica dell'osservabilità (vista in § 2.2) è stata data per sistemi lineari, quindi nel nostro caso non è applicabile; si può però intuire che in assenza delle misure del GPS la posizione della vettura non è più osservabile, dato che quest'ultima verrebbe ricostruita solo tramite le due equazioni di modello viste in (4.2), e quindi integrando anche gli errori presenti sulle variabili v_x , v_y e ψ . In tale situazione sarebbe comunque possibile continuare a filtrare correttamente accelerazioni e velocità.

L'introduzione di una bussola magnetica a bordo vettura fornirebbe la misura dell'angolo di imbardata, che in questo modello è l'unica grandezza a non avere un confronto diretto con la misura. È lecito aspettarsi un miglioramento delle prestazioni del filtro, in particolare sulla posizione e sulla velocità angolare $\dot{\psi}$.

È stata presa in considerazione l'ipotesi di adottare il modello monotraccia per schematizzare la dinamica della vettura. In tal caso si dovrebbero utilizzare anche le misure dell'angolo di sterzo e delle velocità angolari delle ruote per calcolare le forze pneumatici-suolo. Si potrebbero anche considerare le misure della coppia di trazione e della velocità relativa aria-vettura, che pur non essendo indispensabili, possono fornire un buon contributo. Specifichiamo, tra l'altro, che tutte queste misure citate sono effettivamente rilevate a bordo vettura. Abbiamo tuttavia deciso di non adottare tale modello più complesso in quanto presuppone ipotesi troppo semplificative, tra tutte il trascurare i trasferimenti di carico laterali porta ad una sovrastima delle forze longitudinali e laterali scambiate dagli pneumatici con il terreno. Occorrerà quindi dare all'interno del filtro di Kalman maggior credito ai segnali misurati.

Riteniamo quindi che il modello monotraccia porti a numerose complicazioni⁹ senza che siano dall'altra parte ricompensate da un incremento delle prestazioni del filtro; quindi per il caso di un giro di pista, abbiamo giudicato essere migliore il modello a corpo rigido.

⁹ Il grado di dettaglio con cui implementare il modello monotraccia è a discrezione dell'utente. Per esempio si può decidere se considerare la massa della vettura variabile con il consumo di carburante, se tenere in conto nell'inerzia della vettura la marcia inserita e i giri motore, se considerare i coefficienti aerodinamici costanti o variabili con le altezze da terra, se utilizzare la Magic formula di Pacejka per il calcolo delle forze pneumatici strada e con che grado di dettaglio (considerando per esempio l'attrito combinato e la temperatura della gomma), ecc...

Conclusioni

Gli obiettivi del lavoro presentato sono stati quelli di studiare il filtro di Kalman come tecnica per fare sensor fusion e di applicarlo ai segnali acquisiti a bordo della vettura di Formula Uno durante un giro di pista. Nello specifico l'intenzione è stata quella di ridurre il rumore delle misure ed essere in grado di ricostruire il profilo di velocità della monoposto anche quando il lettore ottico è soggetto ad anomalie di funzionamento.

Abbiamo pertanto studiato la versione del filtro di Kalman per i sistemi lineari, mostrando come sotto certe ipotesi sia uno stimatore ottimo, e quella estesa che altro non è che un adattamento di quella precedente ai sistemi non lineari. In tale situazione, però, non si può garantire l'ottimalità del filtro, e se si stanno utilizzando modelli con forti non linearità (ossia le funzioni f ed h sono fortemente non lineari) il filtro di Kalman esteso rischia di dare prestazioni scadenti.

Indichiamo che ne esiste, tuttavia, anche un'altra versione, con il nome di *Unscented Kalman filter*, che è particolarmente adatta a queste situazioni e in caso di interesse può essere eventualmente approfondita [21].

È stata inoltre evidenziata come la scelta del modello da fornire al filtro di Kalman non sia banale e sia spesso oggetto di compromesso. Infatti se da un lato un modello semplice richiede il settaggio di pochi parametri nelle matrici Q e R , dall'altro un modello più complesso, se preciso, rende il sistema più robusto e permette l'identificazione di un maggior numero di grandezze. Abbiamo infatti visto come uno dei punti di maggior forza del filtro di Kalman sia la ricostruzione coerentemente col modello di grandezze non misurabili direttamente; mentre uno dei suoi punti deboli è legato al numero di parametri da settare nel filtro, dato che non esistendo al momento delle regole pratiche, la scelta di tali valori deve essere fatta euristicamente e in base all'esperienza di colui che lo implementa.

Ricordiamo anche che rendere disponibili più misure apporta in genere dei benefici in termini di robustezza ed osservabilità del sistema, ciò nonostante occorrerà prestare attenzione a quali segnali aggiungere (il sistema può rimanere non osservabile), a come considerarli nel filtro (se come input o come grandezze da

filtrare) e alla loro qualità (se la misura è molto meno accurata rispetto alle altre può peggiorare i risultati)¹.

Per quanto riguarda l'applicazione reale, gli esiti del filtro di Kalman sono stati positivi, in primo luogo perché ha permesso il filtraggio di tutte le misure prese in considerazione. Relativamente alla ricostruzione del profilo di velocità in presenza di un malfunzionamento del relativo sensore, abbiamo visto che, per avere buone prestazioni, si è reso necessario introdurre all'interno del filtro un algoritmo per l'identificazione dell'anomalia con lo scopo di togliere "credibilità" alla misura in tale situazione.

Il reparto GES di Ferrari Spa ha nel corso degli anni implementato e affinato un modello dinamico di vettura *ad hoc* della monoposto col quale svolge attività di simulazione; il passo successivo di questo lavoro sarà pertanto quello di utilizzare tale modello all'interno del filtro di Kalman. Ciò porterà ad una notevole complicazione per la fase di *tuning* del filtro, ma probabilmente ad un significativo vantaggio nel senso di poter fare ancora più sensor fusion con altre misure e poter filtrare e/o ricostruire un gran numero di quantità utili per l'*handling*.

Un altro possibile sviluppo futuro potrebbe essere quello di testare anche le altre tecniche presentate nel paragrafo § 1.2 per fare sensor fusion e quindi metterne a confronto le prestazioni.

In particolare sarebbe interessante cercare di unire i punti di forza di alcuni metodi. Si può pensare, per esempio, all'interno del funzionamento di un filtro di Kalman di scegliere le matrici \mathbf{Q} ed \mathbf{R} tra alcune già prestabilite secondo una logica fuzzy relativamente alla situazione in cui si trova il sistema, o sempre tramite la stessa logica di cambiare direttamente il modello e/o il vettore delle misure.

¹ L'ipotesi per l'ottimalità del filtro di Kalman è che le distribuzioni degli errori siano gaussiane e con media nulla.

Bibliografia

- [1] “*Grandezze fisiche e loro misura*” Materiale didattico Corsi Zero, Università degli studi di Enna “Kore”:
<http://www.unikore.it/index.php/ingegneria-informatica-attivita-didattiche/materiale-didattico-corsi-zero/>
- [2] University of Bonn, Institute of Computer Science 4:
net.cs.uni-bonn.de/wg/sensor-data-and-information-fusion/what-is-it/
- [3] T.C. Henderson, M. Dekhil, R.R. Kessler, M.L. Griss, *Sensor fusion*, Lecture notes in control and information Sciences, 230, Springer, pp. 194-205.
- [4] Enrico Marcuzzi, *Metodi di localizzazione e sensor fusion per la robotica mobile*, Università degli Studi di Padova, Tesi di Dottorato in Scienze Tecnologie e Misure Spaziali, pp. 21-43.
- [5] E. Mazzeschi, *Sviluppo di sensori virtuali per la stima degli angoli di incidenza e derapata dei velivoli mediante reti neurali*, Università di Pisa, Tesi di laurea in Ingegneria Aerospaziale, Anno accademico 2007-2008.
- [6] H.J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications*, Kluwer Academic Publishers, IV edizione.
- [7] U. Kiencke, L. Nielsen, *Automotive Control Systems, for engine, driveline, and vehicle*, second edition, Springer, 2005, pp. 351-374
- [8] M. Zigliotto, Appunti online del corso di Azionamenti Elettrici I, cap. 3.
<http://www.diegm.uniud.it/petrella/Azionamenti%20Elettrici%20I/>
- [9] M. Gobbi, Appunti online del corso Progettazione di Veicoli (metodi di ottimizzazione), lezione 9/10, Politecnico di Milano:
http://people.mecc.polimi.it/gobbi/PO/Global_approximation.pdf
- [10] A. Bozzano, “*Studio e implementazione software di algoritmi per applicazioni per il supporto alla sicurezza automobilistica basate su sistemi cooperativi tra macchine e infrastruttura stradale*”, Università degli Studi di Genova, Tesi di laurea in Ingegneria Elettronica, Anno accademico 2007-2008, cap.3.3.

- [11] Ramsey Faragher, *Understanding the basis of the Kalman filter via a simple and intuitive derivation*, IEEE Signal Processing Magazine, September 2012, pp. 128-132.
- [12] Greg Welch, Gary Bishop, *An introduction to the Kalman filter*, Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill NC, September 17, 1997
- [13] G. Diana, F. Resta, *Controllo di sistemi meccanici*, Polipress 2007, pp. 269-293.
- [14] J. Roubal, *Observability, Reconstructability, Detectability*, Department of Control Engineering, Czech Technical University in Prague, December 2006 https://support.dce.felk.cvut.cz/pub/roubalj/teaching/SpaceMaster/lectures/SSMI_Observability.pdf
- [15] F. Naets, J. Cuadrado, W. Desmet, *Stable force identification in structural dynamics using Kalman filtering and dummy-measurements*, KU Leuven, Belgium, Preprint submitted to Mechanical Systems and Signal Processing, April 8, 2013.
- [16] M. Macchi, *Identificazione di parametri di un veicolo mediante il filtro di Kalman esteso*, Politecnico di Milano, Tesi di laurea 2009/2010, pp. 68-92.
- [17] Luca De Bernardi, *Identificazione, mediante Filtro di Kalman Esteso, della caratteristica non lineare delle forze trasmesse dal pneumatico in deriva a partire da prove su strada*, Politecnico di Milano, Tesi di laurea 1997/1998.
- [18] F. Naets, R. Pastorino, J. Cuadrado, W. Desmet, *Online state and input force estimation for multibody models employing extended Kalman filtering*, Multibody System Dynamics manuscript.
- [19] F. Naets, J. Croes, W. Desmet, *An online coupled state/input/parameter estimation approach for structural dynamics*, PMA, KU Leuven, Belgium, Preprint submitted to Elsevier, October 10, 2013.
- [20] Massimo Guiggiani, *Dinamica del veicolo*, CittàStudi edizioni, Nuova edizione 2007.
- [21] Simon Haykin, *Kalman filtering and Neural Networks*, John Wiley & Sons Inc. 2001, pp. 221-269.