

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica



**SISTEMA DI NAVIGAZIONE PER UN
ALL-TERRAIN VEHICLE BASATO SU
TECNICHE DI SENSOR FUSION**

Relatore: **Prof. Luca BASCETTA**

Tesi di Laurea di:

Matteo BORRINI Matr. **801259**

Riccardo FESI Matr. **800503**

Anno Accademico 2013-2014

Desideriamo dedicare questo lavoro ad alcune persone speciali.

Ai miei genitori che, nonostante le lunghe distanze che ora ci separano, ci sono sempre quando ho bisogno di loro: grazie per tutto quello che avete fatto per me e per tutto quello che ancora farete.

Al mio carissimo amico d'infanzia che riesce ancora a strapparmi una risata col suo incedere vanitoso e il suo odore muschiato: per me resterai sempre lo scanzonato "Brian McGee".

Matteo Borrini

Ai miei genitori, Pietro e Provvidenza, che mi hanno sostenuto in questo lungo percorso di studi senza mai farmi mancare nulla.

A Pamela che ha sempre creduto in me.

Riccardo Fesi

Indice

Sommario	xi
Abstract	xii
Ringraziamenti	xiii
Introduzione	xv
1 Stato dell'arte	1
1.1 Tecniche di Navigazione	1
1.1.1 Pilotaggio	2
1.1.2 Navigazione astronomica	2
1.1.3 Navigazione satellitare	3
1.1.4 Navigazione inerziale	4
1.2 Fusione dei sensori o <i>Sensor Fusion</i>	6
1.3 Localizzazione terrestre	7
1.3.1 Ambiente chiuso	7
1.3.2 Città	9
1.3.3 Campo aperto	11
1.4 Sviluppi del lavoro di tesi	13
2 Descrizione e modellazione del sistema	15
2.1 Descrizione del veicolo	15
2.1.1 Modello bicicletta della cinematica del veicolo	18
2.2 Sensori propriocettivi	20
2.2.1 Piattaforma inerziale o <i>Inertial Measurement Unit (IMU)</i>	21
2.2.2 Sistema di posizionamento globale o <i>Global Positioning System (GPS)</i>	24
2.2.3 Encoder rotativi	27

3	Navigazione inerziale terrestre	31
3.1	Sistemi di riferimento	31
3.1.1	Trasformazioni di coordinate	33
3.1.2	Velocità di rotazione relative delle terne	34
3.2	Sistema di navigazione inerziale	35
3.2.1	Equazione dinamica della velocità	37
3.2.2	Equazione dinamica della posizione	38
3.2.3	Equazione dinamica dell'orientamento	38
3.2.4	Equazioni di navigazione inerziale	39
3.3	Integrazione a tempo discreto	39
3.3.1	Inizializzazione	40
3.3.2	Integrazione dell'orientamento	42
3.3.3	Integrazione della velocità	43
3.3.4	Integrazione della posizione	44
4	Localizzazione mediante <i>sensor fusion</i>	45
4.1	Modello dell'errore	45
4.1.1	Dinamica dell'errore di velocità	46
4.1.2	Dinamica dell'errore di posizione	48
4.1.3	Dinamica dell'errore di orientamento	49
4.2	Localizzazione mediante filtro di Kalman	50
4.2.1	Equazioni di stato del filtro di Kalman	51
4.2.2	Discretizzazione delle equazioni di stato	57
4.2.3	Correzione in anello aperto (<i>open loop</i>)	58
4.2.4	Correzione in anello chiuso (<i>closed loop</i>)	60
4.3	Problemi di implementazione	62
4.3.1	Allineamento delle misure	63
4.3.2	Effetto <i>lever-arm</i>	63
4.3.3	Instabilità numerica	65
4.3.4	Assenza del segnale GPS	66
5	Validazione dell'algoritmo di navigazione	69
5.1	Modello virtuale	69
5.1.1	Generazione della traiettoria	70
5.1.2	Generazione delle misure	71
5.2	Risultati del modello	74
5.2.1	Traiettoria generica	74
5.2.2	Traiettoria ispirata ad un caso reale	83
5.2.3	Conclusioni sui risultati	91

6	Risultati sperimentali	93
6.1	Analisi dei dati di accelerometri e giroscopi	93
6.1.1	Motore spento	95
6.1.2	Motore acceso e veicolo fermo	97
6.1.3	Motore in accelerazione e veicolo fermo	100
6.1.4	Veicolo in moto rettilineo su terreno liscio e pianeggiante	102
6.1.5	Veicolo in moto generico su terreno erboso e sconnesso	103
6.1.6	Conclusioni sull'analisi dei dati	105
6.2	Riduzione dei disturbi	106
6.2.1	Accelerometri e Giroscopi	106
6.2.2	Magnetometro	114
6.2.3	GPS	115
6.3	Localizzazione del veicolo	115
6.3.1	Conclusioni sui risultati	123
7	Conclusioni e spunti futuri	125
7.1	Conclusioni	125
7.1.1	Conoscenze pregresse	125
7.1.2	Miglioramenti introdotti	126
7.1.3	Risultati conseguiti	127
7.2	Spunti futuri	128
7.2.1	Miglioramento della navigazione inerziale	128
7.2.2	Modello delle sospensioni	129
	Bibliografia	131

Elenco delle figure

1.1	Sospensione cardanica	5
1.2	Integrazione INS/GPS <i>loosely-coupled</i>	13
2.1	Yamaha Grizzly 700	16
2.2	Il prototipo e la collocazione dei principali strumenti	18
2.3	Modello bicicletta dell'ATV	19
2.4	Xsens MTi <i>Inertial Measurement Unit</i>	21
2.5	GPS Trimble con antenne Zephyr	25
2.6	Rappresentazione in coordinate sferiche	27
3.1	Sistemi di riferimento	32
3.2	Integrazione a tempo discreto delle equazioni di navigazione	44
4.1	Filtro di Kalman in <i>open loop</i>	58
4.2	Filtro di Kalman in <i>closed loop</i>	60
5.1	Traiettoria	74
5.2	Accelerazioni e velocità angolari misurate dalla IMU	75
5.3	Velocità e posizione misurate dal GPS	76
5.4	Velocità di avanzamento misurata dall'odometria	77
5.5	Campo magnetico misurato dal magnetometro	78
5.6	Stato del sistema	79
5.7	Errore sullo stato del sistema	80
5.8	Stima della Traiettoria	82
5.9	Traiettoria	83
5.10	Accelerazioni e velocità angolari misurate dalla IMU	84
5.11	Velocità e posizione misurate dal GPS	85
5.12	Velocità di avanzamento misurata dall'odometria	86
5.13	Campo magnetico misurato dal magnetometro	87
5.14	Stato del sistema	88
5.15	Errore sullo stato del sistema	89

5.16	Stima della Traiettoria	90
6.1	IMU installata sul pianale del veicolo	94
6.2	Dati misurati: motore spento	96
6.3	Dati misurati: motore acceso e veicolo fermo	97
6.4	Diagramma della contrappesatura del monocilindro	99
6.5	Spettro in frequenza relativo alle forze alternate	100
6.6	Dati misurati: motore in accelerazione e veicolo fermo	101
6.7	Dati misurati: veicolo in moto rettilineo su terreno liscio e pianeggiante	103
6.8	Dati misurati: veicolo in moto generico su terreno erboso e sconnesso	104
6.9	Dati filtrati: motore spento	107
6.10	Dati filtrati: motore acceso e veicolo fermo	108
6.11	Dati filtrati: motore acceso in accelerazione e veicolo fermo	109
6.12	Dati filtrati: veicolo in moto rettilineo su terreno liscio e pianeggiante	110
6.13	Verifica frequenza di taglio: veicolo in moto rettilineo su terreno liscio e pianeggiante	111
6.14	Dati filtrati: veicolo in moto generico su terreno erboso e sconnesso .	112
6.15	Verifica frequenza di taglio: veicolo in moto generico su terreno erboso e sconnesso	113
6.16	Traiettoria	115
6.17	Accelerazioni e velocità angolari misurate dalla IMU	116
6.18	Velocità e posizione misurate dal GPS	117
6.19	Velocità di avanzamento misurata dall'odometria	118
6.20	Campo magnetico misurato dal magnetometro	119
6.21	Stato del sistema	120
6.22	Stato stimato (EKF) del sistema in open loop	121
6.23	Stima della Traiettoria	122

Elenco delle tabelle

2.1	Specifiche di una Xsens MTi IMU	22
6.1	Componenti di disturbo dovute al motore	98

Sommario

La tesi si sviluppa nell'ambito della localizzazione dei sistemi in campo aperto. Le tecniche adottate nel seguito prevedono di fondere i risultati della navigazione inerziale (INS), ottenuti integrando le misure di accelerometri e giroscopi contenuti all'interno di un piattaforma inerziale (IMU), con i dati forniti da altri sensori. Gli strumenti aggiuntivi comprendono un magnetometro triassiale per la misura del campo magnetico, un sistema di posizionamento globale (GPS) che fornisce le coordinate geografiche e un odometro che dà un'informazione sulla la velocità di avanzamento del veicolo.

Il sistema di navigazione viene realizzato in architettura *loosely coupled* secondo due diverse configurazioni. La prima, denominata *open loop*, utilizza un filtro di Kalman linearizzato per correggere in *feedforward* lo stato stimato con la navigazione inerziale. Rispetto alla precedente, la seconda configurazione viene chiamata *closed loop* poiché aggiorna le condizioni iniziali dell'integrazione utilizzando in *feedback* la stima corretta da un filtro di Kalman esteso (EKF).

Le tecniche sviluppate vengono poi applicate sia ad un modello virtuale, appositamente creato, che ad una serie di dati raccolti durante delle prove sperimentali. Il modello matematico si basa sulla cinematica del veicolo ed è in grado di fornirne lo stato e di generare le misure virtuali dei sensori a partire da esso. La campagna di prove è stata realizzata al di fuori dei tracciati stradali in modo da avere le condizioni di percorso più generiche possibili. Infine sono state analizzate le misure per caratterizzare i rumori da cui sono affette e per distinguerne le cause.

PAROLE CHIAVE: ATV; IMU; GPS; odometria; navigazione inerziale; fusione dei sensori; filtro di Kalman.

Abstract

The thesis is developed in the context of systems localization in open space. The techniques merge the results of the inertial navigation (INS), obtained by integrating the measurements of accelerometers and gyroscopes contained within an inertial measurement unit (IMU), with data from other sensors. Additional instruments include a triaxial magnetometer to measure the magnetic field, a global positioning system (GPS) that provides the geographical coordinates, and an odometer that gives information on the forward speed of the vehicle.

The navigation system architecture is loosely coupled in two different configurations. The first, called open loop, uses a linearized Kalman filter to correct the estimate resulting from the inertial navigation in feedforward. The second configuration is called closed loop because it updates the initial conditions of the integration using a feedback estimation corrected by an Extended Kalman Filter (EKF).

The techniques developed are then applied to a specially created virtual model and to a data set collected during the experimental tests. The mathematical model is based on the vehicle's kinematics and it is able to provide the status and to generate the measures of virtual sensors. The test campaign was carried out of traffic routes in order to have generic as possible path conditions. Finally, the measurements have been analyzed to characterize the noises and to distinguish their causes.

KEYWORDS: ATV; IMU; GPS; odometry; inertial navigation; sensor fusion; Kalman filter.

Ringraziamenti

Ringraziamo innanzitutto il Prof. Luca Bascetta per il suo aiuto nello svolgimento del lavoro di tesi. Il nostro ringraziamento va anche al Prof. Stefano Manzoni per i preziosi consigli. Inoltre ringraziamo l'Ing. Davide Antonio Cucci e l'Ing. Gianluca Bardaro per averci fornito materiale e dati utili alla realizzazione della tesi.

Un particolare e sentito ringraziamento va alle nostre famiglie le quali ci hanno saputo fornire l'indispensabile sostegno morale e l'importante contributo economico durante l'intero percorso di studi. Desideriamo anche ringraziare le nostre ragazze, gli amici fidati ed i colleghi universitari che hanno saputo dimostrarci il loro affetto più sincero ed il loro appoggio.

Milano, Settembre 2014

Introduzione

Il presente lavoro di tesi si colloca all'interno del progetto Quadrivio del Politecnico di Milano per lo sviluppo di un *All-Terrain-Vehicle* (ATV) autonomo. Il robot considerato è stato ottenuto modificando il quad commerciale Yamaha Grizzly YMT 700, inserendo sistemi di attuazione dei comandi di guida e la strumentazione di misura.

Un veicolo, per essere reso autonomo, ha la necessità di sviluppare un sistema di navigazione, avere cioè percezione dello spazio circostante in modo da poter controllare il proprio movimento in tale ambiente. La percezione serve sia per identificare eventuali ostacoli che per permettere di misurare le grandezze su cui poi opererà il sistema di controllo.

Fondamentale nello sviluppo del progetto è quindi l'impiego di una piattaforma inerziale (IMU) vincolata rigidamente sul pianale del robot e dotata di accelerometri, giroscopi e magnetometro che misurano rispettivamente accelerazioni, velocità angolari e campo magnetico su una terna destrorsa solidale alla piattaforma stessa. Altrettanto importante è il sistema di posizionamento globale (GPS) che è costituito da un'antenna installata a bordo del veicolo, ma in una posizione differente rispetto alla IMU. Infine si è raccolta un'informazione sulla velocità di avanzamento grazie alla presenza di una ruota fonica fornita di serie dalla casa produttrice del quad.

La tesi si sviluppa nell'ambito della localizzazione dei sistemi, ossia l'insieme di tecniche che consentono di individuare la posizione e l'orientamento di un robot rispetto al sistema di riferimento scelto. La tecnica adottata nel seguito prevede di fondere i risultati della navigazione inerziale, ottenuti dall'integrazione di accelerometri e giroscopi, con i dati forniti dagli altri strumenti.

Lo scopo è dunque quello di fare in modo che il veicolo possa determinare in ogni istante la sua velocità, la sua posizione e il suo orientamento, in modo che in futuro possano essere applicate anche tecniche di *path following*.

Descrizione del lavoro

Il problema affrontato nel presente lavoro di tesi è incentrato su un veicolo in grado di muoversi su diversi tipi di terreno (*All-Terrain-Vehicle*). Questo richiede che la

navigazione sia ottenuta a partire da condizioni che siano le più generiche possibili, perciò si dovranno considerare dei percorsi che possono attraversare sia zone al chiuso che all'aperto, terreni sia lisci che sconnessi, sia pianeggianti che in pendenza. La localizzazione terrestre del robot non potrà dunque prescindere da nessuno di questi aspetti.

La navigazione inerziale è una tecnica che impiega le misure di accelerometri e giroscopi, integrandole nel tempo per ottenere una stima di posizione, velocità e orientamento del veicolo. Questa stima è però affetta da un problema di deriva nel tempo, tanto più rapida e consistente quanto più rumore è sovrapposto alle misure della IMU. A causa di ciò si deve effettuare una correzione dei risultati ottenuti dalla navigazione inerziale, e questa può essere realizzata impiegando un filtro di Kalman.

Il filtro di Kalman è un osservatore ottimo di sistemi lineari, esso consente di ricostruire lo stato del sistema stesso a partire dalla conoscenza di ingressi e di uscite su cui agiscono dei rumori bianchi gaussiani. Nel caso specifico si impiegano come ingressi le misure di accelerometri e giroscopi e come uscite le misure degli altri strumenti, cioè GPS, odometria e magnetometro. Il sistema di equazioni che descrive i legami tra le misure e le variabili di stato risulta essere non lineare, quindi si rende necessario approssimare queste equazioni con funzioni lineari. In analisi matematica tale approssimazione lineare è detta linearizzazione o sviluppo al primo ordine della funzione.

Nel lavoro di tesi viene prima realizzata una stima dello stato data dalla navigazione inerziale, la quale prevede di stimare lo stato integrando le accelerazioni e le velocità angolari. Successivamente si ricorre all'introduzione dell'osservatore del sistema per fondere tali risultati con i dati forniti dagli altri strumenti descritti in precedenza. Questa architettura viene detta *loosely coupled* e può a sua volta essere ottenuta secondo due possibili configurazioni. La prima, denominata *open loop*, procede con la navigazione inerziale ed attua la correzione, calcolata attraverso il filtro di Kalman linearizzato, solo quando sono disponibili i dati di tutti gli strumenti aggiuntivi alla IMU. La seconda configurazione è invece detta *closed loop* e sfrutta la correzione data da un filtro di Kalman esteso (EKF) per aggiornare le condizioni iniziali dell'integrazione che quindi riparte sempre da un valore aggiornato e più vicino allo stato corretto, questo comporta una minor deriva dell'integrazione.

Qualunque sia la configurazione del filtro adottata è essenziale, per il suo funzionamento, la presenza di tutte le misure per tutta la durata della navigazione. Nel momento in cui la costellazione di satelliti viene in parte oscurata, si ha la degradazione o persino la perdita totale del segnale GPS. Per superare questo problema si è introdotta in questo progetto una soluzione che prevede la valutazione del segnale e quindi la possibilità di procedere solamente con la navigazione inerziale nei periodi in cui le misure del GPS vengono a mancare o sono ritenute inutilizzabili. Costruire

invece un filtro di Kalman, in grado di ricostruire lo stato completo del sistema, con la sola presenza dei dati della IMU e dell'odometria, senza l'apporto delle misure del GPS, non è fattibile in quanto il sistema non risulterebbe essere osservabile.

Al fine di verificare se gli algoritmi appena descritti siano in grado di stimare adeguatamente lo stato del veicolo, si è reso opportuno sviluppare un modello virtuale che simuli una generica traiettoria e le rispettive misure realizzate dai sensori. In questo modo è stato possibile tracciare un qualunque percorso del quale tutto è noto. Ciò permette di realizzare un'analisi approfondita prima di applicare la tecnica di navigazione ad un caso reale.

Le tecniche sviluppate vengono poi applicate ad una serie di dati raccolti durante prove sperimentali. Le misure registrate dalla piattaforma inerziale comprendono tuttavia dei forti disturbi non inclusi nel modello. Si è svolta quindi un'analisi in frequenza dei dati raccolti per verificare la provenienza di questi disturbi, individuando così, tra le possibili cause, le vibrazioni del motore in funzione e le asperità del suolo. Si è fatto ricorso perciò ad un filtro passa-basso sui segnali per rimuovere i rumori di misura e le vibrazioni indotte.

Per l'implementazione degli algoritmi di calcolo e dei modelli di simulazione si è impiegato il software commerciale MATLAB sviluppato da MathWorks. Nella realizzazione del filtro di Kalman ci si è in parte ispirati al *EKF/UKF Toolbox for Matlab V1.3* [25].

Per approfondire ulteriormente gli argomenti legati alla tecnologia della navigazione inerziale e alla sua fusione con il segnale GPS, si rimanda a [47].

Perfezionamento della tecnica di navigazione

Al fine di poter migliorare i risultati ottenibili sono state sviluppate autonomamente delle modifiche da applicare agli algoritmi di navigazione. L'introduzione di tali modifiche va a toccare alcuni degli aspetti più critici incontrati durante lo studio del problema.

Grazie all'inserimento degli odometri è possibile migliorare la stima delle velocità, la quale altrimenti verrebbe corretta solamente dalle informazioni ottenute per derivazione dalla posizione misurata con il GPS. Ancora più rilevante è però l'aggiunta del magnetometro, esso infatti consente di avere delle misure di riferimento per l'orientamento che erano prima del tutto assenti. Il perfezionamento nella stima di alcune delle variabili di stato comporta inoltre un miglioramento nell'intero processo di navigazione, poiché tutte le informazioni presenti all'interno dello stato sono tra loro congiunte da legami coerenti dati dalle equazioni di navigazione.

L'impiego di diversi strumenti di misura porta però ad avere delle problematiche di carattere pratico. Ciascuno di essi sarà infatti caratterizzato da un differente

tempo di campionamento, di conseguenza le acquisizioni non avverranno tutte negli stessi istanti di tempo e in alcuni casi potrebbe persino capitare che l'istante iniziale di misura non sia uguale per tutti. Per questo sono state impiegate tecniche di interpolazione in modo da determinare i valori di misura negli stessi istanti per tutti i sensori.

Un ulteriore problema è legato invece alla realizzazione del filtro di Kalman, esso infatti prevede che tutti i sensori forniscano delle misure durante tutto il tempo in cui si realizza la navigazione. Questa supposizione è sempre verificata nel caso di accelerometri, giroscopi, magnetometro e odometria (a meno di guasti), mentre non può essere sempre ritenuta vera per un GPS. A seconda delle condizioni di comunicazione del ricevitore con i satelliti, esso potrà infatti fornire un segnale più o meno degradato e in alcune situazioni anche del tutto inesistente. In questo caso è dunque doveroso riscrivere le equazioni del filtro di Kalman in assenza dei dati di posizione e velocità del GPS, ma ne risulta così un sistema non osservabile. Negli intervalli di tempo in cui tali informazioni manchino, si è dunque scelto di impiegare la sola navigazione inerziale. Ciò ha richiesto lo sviluppo di un algoritmo che calcoli istante per istante le covarianze di misura del sistema di posizionamento globale e che controlli se le misure sono buone o se non possono essere ritenute accettabili o ancora se il segnale manca del tutto.

Nello sviluppo di un modello matematico del sistema atto a realizzare delle simulazioni per la navigazione, si è reso necessario anche creare dei modelli per i sensori. Le misure non possono infatti essere realizzate per la traiettoria virtuale, ma bisogna costruire delle equazioni che a partire da essa determinino le informazioni che verrebbero misurate dagli strumenti reali, aggiungendovi anche il rumore di misura.

In ultimo, prima di procedere con delle prove sperimentali, si sono anche dovuti rimuovere i disturbi presenti sulle misure degli accelerometri e i giroscopi. Si è iniziato perciò analizzando i dati in modo da individuare le cause di rumore ed infine si è proceduto con la rimozione degli stessi in modo da poter ottenere i migliori risultati possibili dal processo di navigazione inerziale.

Ciò che infine si è potuto ottenere è un algoritmo in grado di stimare la velocità, la posizione e l'orientamento di un veicolo capace di muoversi su qualunque tipo di terreno. I risultati hanno dimostrato come l'impiego di una configurazione in *closed loop* del sistema sia ben più efficace di una in *open loop*. Ciò è dovuto sia alla maggiore robustezza dell'algoritmo che alla possibilità di escludere il GPS in alcuni tratti ottenendo degli errori minori. Il robot è così capace di determinare autonomamente la propria posizione nello spazio e grazie a questa conoscenza sarà possibile pianificare delle traiettorie e delle leggi di moto.

Struttura della tesi

Nell'organizzare il lavoro di tesi si sono suddivisi i capitoli nel modo seguente:

Il primo capitolo illustra lo stato dell'arte per quanto riguarda le tecniche di navigazione, passando poi a descrivere gli algoritmi impiegati nella fusione dei sensori. Successivamente si sofferma nell'analizzare nello specifico la localizzazione terrestre ed infine viene presentata la tecnica seguita nel presente lavoro di tesi.

Il secondo capitolo descrive il veicolo preso in esame e ne costruisce un modello matematico. Presenta poi i sensori installati sullo stesso e illustra un modello dell'errore per ogni tipo di strumento di misura.

Il terzo capitolo spiega i diversi sistemi di riferimento utilizzati nelle analisi successive ed espone come ricavare le equazioni di navigazione, integrandole infine per ottenere la stima dello stato data dalla navigazione inerziale.

Il quarto capitolo espone un modello dell'errore dinamico per le equazioni di navigazione, in modo da implementare successivamente due differenti algoritmi per la *sensor fusion* con il filtro di Kalman: l'uno in *open loop* e l'altro in *closed loop*. Infine presenta le problematiche associate a questo procedimento e le possibili soluzioni da adottare.

Il quinto capitolo a seguito della creazione di un modello virtuale in grado di generare la traiettoria desiderata e simulare le misure degli strumenti, illustra i risultati ottenuti con gli algoritmi precedentemente descritti.

Il sesto capitolo mostra l'analisi dei dati raccolti durante delle prove con il quad e la riduzione dei disturbi. In ultimo descrive i risultati ottenuti con i dati processati e le tecniche di navigazione già esposte.

Il settimo capitolo riassume ciò che è stato ottenuto, le problematiche incontrate, le innovazioni introdotte e alcuni spunti di sviluppo futuro per il progetto.

Capitolo 1

Stato dell'arte

*“ Quanto più già si sa,
tanto più bisogna ancora imparare.
Con il sapere cresce nello stesso grado il non sapere,
o meglio il sapere del non sapere. ”*

— Friedrich Wilhelm Nietzsche

Storicamente per navigazione si intende l'insieme delle tecniche utilizzate per determinare la posizione e la rotta di una nave in mare. Oggigiorno l'uso del termine si è esteso ad una serie di altri ambiti applicativi al di là di quello marittimo, come per esempio quello terrestre, aeronautico e spaziale. In senso lato, può riferirsi a qualunque attività o studio finalizzato alla determinazione della posizione e della direzione di movimento. In questi termini la navigazione include anche l'orientamento e la navigazione pedestre [26].

1.1 Tecniche di Navigazione

La tecnica adottata non può prescindere dalle caratteristiche del mezzo né dall'ambiente circostante né dagli obiettivi che si vogliono conseguire. Una tecnica che ben si sposa con un determinato problema non necessariamente porterà a risultati altrettanto soddisfacenti in una situazione differente. Tutte le tecniche di localizzazione hanno però lo stesso scopo, ovvero fornire la posizione e l'orientamento del mezzo. La prima può essere ottenuta sia in forma di coordinate cartesiane che polari, oppure anche in coordinate geografiche (latitudine e longitudine). Il secondo invece può essere rappresentato dagli angoli di Eulero (rollio, beccheggio e imbardata) o tramite i quaternioni.

1.1.1 Pilotaggio

La più semplice forma di navigazione si ha quando si vuole viaggiare verso una destinazione ignota e lo si fa seguendo le indicazioni che vengono fornite. Durante il tragitto è perciò necessario osservare l'area circostante ed individuare dei punti fissi (*waypoints* o *landmarks*) che corrispondano a quelli descritti nelle indicazioni ricevute, in modo da potersi orientare all'interno di un ambiente sconosciuto.

Un'estensione di questa tecnica potrebbe essere quella di seguire il percorso grazie ad una mappa. In questo secondo caso si determina la posizione confrontando l'ambiente circostante con quello raffigurato sulla mappa.

Pilotaggio significa dunque orientarsi prendendo come riferimento dei *landmarks* ad intervalli di tempo frequenti. Per questa ragione, se le osservazioni vengono fatte visivamente senza l'ausilio di strumentazione, è necessaria un'adeguata preparazione e una particolare attenzione ai dettagli. Le procedure poi cambiano a seconda del mezzo (che sia un veicolo, un velivolo o una nave), ma anche a seconda che esso sia di tipo militare, commerciale o privato.

Su navi militari, ad esempio, vengono create appositamente delle vere e proprie *équipe* che hanno il compito di prendere nota della rotta sulle mappe, mentre i navigatori civili provvedono da soli a registrare il percorso di viaggio.

Se le imbarcazioni sono provviste di un *Electronic Chart Display and Information System* (ECDIS) allora è più semplice per i navigatori monitorare i progressi sulla mappa digitale, prestando però attenzione che la nave stia procedendo lungo la rotta desiderata. Se per qualche ragione si ha un guasto al suddetto ECDIS, i navigatori devono tuttavia ricorrere alle procedure visive apprese durante l'addestramento e descritte nei manuali [6].

1.1.2 Navigazione astronomica

In tempi remoti, per determinare le coordinate geografiche della propria posizione, si basava la navigazione sull'osservazione di punti di riferimento la cui posizione era nota, quali il sole, la luna e le stelle. Navigare conoscendo la posizione dei corpi celesti rende relativamente semplice la determinazione della latitudine, mentre invece per la longitudine è necessario conoscere anche il tempo in cui si sta effettuando l'osservazione.

Tali sistemi sono tutt'ora in uso per la navigazione sia entro l'atmosfera terrestre che al di fuori. Gli almanacchi nautici e i cronometri marini sono gli strumenti utilizzati per individuare la proiezione di un corpo celeste sulla superficie terrestre, mentre i sestanti vengono impiegati per misurare l'altezza angolare di suddetto corpo al di sopra dell'orizzonte. L'altezza misurata viene poi utilizzata per quantificare la distanza dell'osservatore dalla proiezione del corpo celeste, in modo da disegnare

un cerchio attorno a tale punto. Più corpi celesti vengono inquadrati e più cerchi possono essere tracciati, in modo da ottenere delle intersezioni che indichino con maggiore affidabilità la propria posizione [6].

1.1.3 Navigazione satellitare

Il progresso tecnologico dei tempi recenti ha permesso di realizzare sensori in grado di determinare la posizione attraverso l'utilizzo di punti di riferimento introdotti artificialmente dall'uomo (per esempio i ripetitori WLAN o i satelliti dei GNSS).

Wireless Local Area Network (WLAN) è un metodo di connessione senza fili che collega due o più dispositivi e che, nella maggior parte dei casi, provvede anche a fornire un punto di accesso ad internet. Questo consente agli utenti di restare connessi alla rete anche se si è in movimento all'interno dell'area di copertura locale. I WLAN più moderni si basano sullo standard IEEE 802.11, conosciuto con il nome di Wi-Fi.

Global Navigation Satellite System (GNSS) è il nome dato al sistema che fornisce la posizione (espressa in latitudine, longitudine e altitudine) di un ricevitore posto all'interno dell'atmosfera terrestre, grazie ai segnali scambiati con i satelliti in orbita attorno alla Terra. Possono inoltre essere impiegati anche dei ricevitori a terra, la cui posizione è fissa rispetto al mezzo in movimento così da consentire una maggiore precisione di localizzazione.

La presenza di oggetti circostanti (come edifici o alberi) può ostacolare il segnale GNSS, costringendolo a lavorare con pochi satelliti agganciati e riducendo di conseguenza l'accuratezza della posizione stimata [27]. Nel peggiore dei casi potrebbero venire agganciati anche meno di quattro satelliti, rendendo impossibile la localizzazione del veicolo e interrompendo la continuità del segnale. Inoltre il segnale potrebbe risultare disturbato dalla propagazione *multi-path* delle onde radio dovuta alla riflessione degli oggetti circostanti, ciò genera un errore di stima della posizione del ricevitore rispetto ai satelliti che non viene neppure segnalato dallo strumento: le onde riflesse non si muovono in linea retta tra ricevitore e satellite, ma percorrono una distanza più lunga [44].

Da Ottobre 2011 gli unici sistemi GNSS completamente operativi sono soltanto lo statunitense NAVSTAR *Global Positioning System* (GPS) e il russo *Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema* (GLONASS). L'Unione Europea sta sviluppando un proprio sistema GNSS denominato Galileo, mentre la Cina sembra aver programmato di estendere la copertura di Beidou da livello regionale a mondiale.

Dal 1978, anno in cui è avvenuto il lancio del primo satellite sperimentale, il GPS si è affermato come un sistema indispensabile per la navigazione sulla Terra e un importante strumento per realizzare la mappatura e il controllo di un territorio.

La flotta di satelliti GPS è gestita dalla *United States Air Force 50th Space Wing*, ma è una tecnologia disponibile gratuitamente ad uso pubblico e civile.

1.1.4 Navigazione inerziale

Un *Inertial Navigation System* (INS) è una metodologia che utilizza computer, sensori di movimento (accelerometri) e sensori di rotazione (giroscopi) per calcolare la posizione, la velocità e l'orientamento di un oggetto a partire da condizioni iniziali note (*dead reckoning*). Essa viene utilizzata per localizzare veicoli terrestri, navi, sottomarini, missili guidati, velivoli aerei e spaziali.

I vantaggi di questo sistema sono che, una volta fornite le condizioni iniziali, esso non richiede ulteriori informazioni esterne e non viene influenzato dalle condizioni meteorologiche. Tra gli svantaggi si ha che gli errori di stima vengono sommati nel tempo portando ad una rapida deriva dei risultati.

A causa di questi errori la navigazione inerziale viene spesso associata ad altri sistemi di localizzazione in modo tale da poter essere frequentemente corretta. Da quando è stato reso disponibile, il GPS è diventato il mezzo privilegiato da accoppiare ad un INS, ma in determinate applicazioni, come ad esempio nei sottomarini, in cui il GPS non può essere utilizzato a causa delle profondità raggiunte, la navigazione inerziale da sola resta il sistema di localizzazione più comunemente utilizzato.

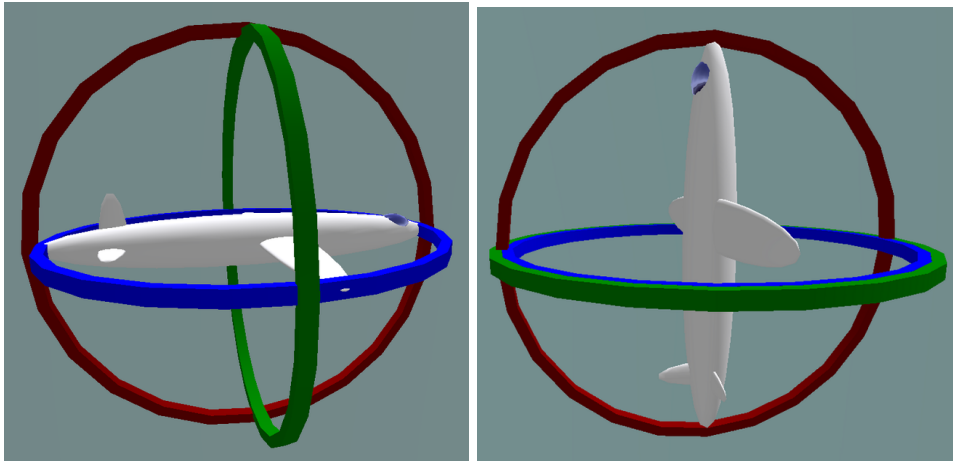
Spesso ci si riferisce ad un sistema di navigazione inerziale utilizzando i nomi degli strumenti in essa impiegati come ad esempio *inertial guidance system*, *inertial reference platform*, *inertial instrument*, *inertial measurement units* (IMU) o altre varianti. Suddetti strumenti possono essere vincolati al mezzo di trasporto tramite diverse soluzioni realizzative, ma le più utilizzate in questo contesto sono la sospensione cardanica e la sospensione vincolata, le quali verranno di seguito approfondite.

Sospensione cardanica (*Gimballed*)

È una tecnica per cui lo strumento viene posto al centro di un gruppo di tre anelli montati ortogonalmente e ciascuno dotato di una coppia di cuscinetti, in modo da poter ruotare attorno a qualunque asse. L'orientamento dei tre anelli viene regolato grazie alle misure fornite dai giroscopi in modo tale che lo strumento possa mantenere sempre lo stesso orientamento, indipendentemente dalla rotazione del mezzo su cui essa è montata.

Questo sistema è in grado di fornire la misura di rollio, beccheggio e imbarcata di un veicolo grazie alla rotazione dei cuscinetti della sospensione cardanica. Semplici circuiti elettronici possono essere usati per aggiornare l'orientamento degli accelerometri, affinché non cambi la direzione delle accelerazioni misurate.

Il più grande svantaggio di questo schema è l'utilizzo di costosi componenti meccanici di precisione. Ha anche parti in movimento che possono usurarsi ed è vulnerabile al blocco cardanico.



(a) Situazione normale: tre assi di rotazione indipendenti (b) Blocco cardanico: due dei tre assi di rotazione divengono paralleli

Figura 1.1: Sospensione Cardanica [52]

Il blocco cardanico è la perdita di uno dei tre gradi di libertà. Esso avviene nel momento in cui due dei tre assi di una sospensione cardanica divengono paralleli, costringendo di conseguenza il sistema a ruotare soltanto attorno a due assi distinti. Non si tratta dunque di un “blocco” meccanico del sistema, ma piuttosto della perdita di un grado di libertà in conseguenza alla disposizione geometrica degli anelli nello spazio.

Sospensione vincolata (*Strapdown*)

I moderni processori, più piccoli e leggeri, permettono di eliminare il giunto cardanico, realizzando dei sistemi *strapdown*, così chiamati poiché i sensori sono semplicemente vincolati al veicolo. Questo riduce i costi, rimuove il rischio di blocco cardanico, risolve alcuni problemi di calibrazione e aumenta l'affidabilità eliminando delle parti in movimento. I giroscopi forniscono le misure di velocità angolare del mezzo. Talvolta i giroscopi vengono sostituiti da interferometri laser.

La sospensione vincolata viene oggi comunemente utilizzata a scopi commerciali e militari ed ha già iniziato a diffondersi in tutti quei settori in cui è richiesta un'accuratezza molto elevata.

1.2 Fusione dei sensori o *Sensor Fusion*

Per poter combinare insieme i dati ottenuti da più sensori o i dati elaborati da un processore si utilizzano metodi di *sensor fusion*, in modo da ricavare un'informazione in un certo senso migliore da quella che sarebbe possibile estrarre da ciascuna fonte presa individualmente. Per migliore s'intende qualcosa che possa essere più accurato, più completo, più affidabile.

Le diverse misurazioni in un processo di fusione non provengono dagli stessi dispositivi, a questo proposito è possibile distinguere tra fusione diretta e indiretta. La prima è la fusione di dati provenienti da un gruppo di sensori cui possono appartenere sia sensori omogenei che eterogenei, ma anche sensori virtuali e storie di dati. La fusione indiretta invece può mettere a confronto dati forniti sul momento con informazioni note a priori.

Un modo per ottenere la fusione dei sensori è quello di utilizzare un filtro di Kalman il quale può però essere applicato solamente a sistemi lineari.

In presenza di un sistema non lineare, è necessario trovare il corrispondente sistema lineare il cui stato rappresenti la differenza tra la traiettoria nominale e la traiettoria vera del suddetto sistema non lineare, al fine di poter applicare un filtro di Kalman linearizzato. Esso dunque stima lo stato di un sistema non lineare, la cui linearizzazione viene realizzata nell'intorno della traiettoria nominale. Risulta evidente che la determinazione di questa traiettoria è fondamentale, ma non sempre può essere semplice da determinare a priori [43].

È allora possibile utilizzare la stima stessa dello stato realizzata dal filtro come traiettoria nominale. Questo è il principio su cui si basa un *Extended Kalman Filter* (EKF): linearizzare il sistema non lineare attorno alla stima data dal filtro e stimare lo stato del sistema linearizzato con il filtro stesso. L'idea di un EKF fu inizialmente proposta da Stanley Schmidt al fine di poter applicare un filtro di Kalman ai problemi di navigazione non lineari in ambito aerospaziale [3].

I filtri di Kalman estesi sono i più diffusi tra i sistemi non lineari. Possono essere infatti ottenuti altri stimatori ottimi dello stato per generiche classi di sistemi non lineari, ma tali filtri sono di solito di dimensioni infinite e ciò ne rende impossibile l'implementazione [30]. Inoltre possono essere ricavati degli ulteriori stimatori ottimi dello stato che abbiano dimensioni finite, ma solo per una ristretta cerchia di classi di sistemi non lineari, tale restrizione è tuttavia sufficiente ad impedirne la vasta diffusione [33].

Nonostante stabilità e convergenza siano risultati facilmente ottenibili per un filtro di Kalman applicato a sistemi lineari, esse stesse sono molto più difficili da ottenere con i filtri adatti ai sistemi non lineari. Se le non linearità sono limitate e tali limiti sono noti a priori, allora l'equazione di Riccati può essere semplicemente

modificata per garantire la stabilità di un EKF a tempo continuo [40]. Le condizioni necessarie a garantire la convergenza della dinamica dell'errore di un EKF a tempo discreto può essere messa in relazione con l'osservabilità del sistema [16, 45].

Un EKF si basa sul principio per cui un sistema linearizzato sia approssimativamente uguale ai valori del corrispondente sistema non lineare nell'intorno di una traiettoria nominale, ma nel caso in cui tali funzioni siano fortemente non lineari l'approssimazione potrebbe risultare non soddisfacente.

Un *Unscented Kalman Filter* (UKF) è un'estensione non lineare del filtro di Kalman che riduce gli errori dell'EKF dovuti alla linearizzazione. La trasformazione di tipo *unscented* non necessita infatti del calcolo degli jacobiani (matrici alle derivate parziali) che per funzioni complesse possono essere molto difficili da ottenere in via analitica o possono richiedere un elevato costo computazionale in via numerica. Un UKF si basa essenzialmente su due principi fondamentali. Il primo sostiene che sia più facile applicare una trasformazione non lineare in un singolo punto piuttosto che su un'intera traiettoria. Il secondo dice invece che non è troppo complicato trovare un insieme di punti nello spazio di stato che approssimino bene l'andamento reale del vettore di stato. Per fare ciò si introducono un insieme di vettori deterministici chiamati *sigma points* la cui media e covarianza coincidono con quelle del vettore di stato \underline{x} . Applicando poi la trasformazione $\underline{y} = h(\underline{x})$ a questi *sigma points*, media e covarianza del vettore trasformato saranno una buona approssimazione di quelle del vettore \underline{y} [28].

1.3 Localizzazione terrestre

Avendo precedentemente illustrato le comuni tecniche di navigazione è bene esemplificare che in alcune applicazioni risulta più interessante accoppiare differenti metodi di localizzazione al fine di compensare i difetti degli uni cogli altri. Questa unione può essere realizzata grazie agli algoritmi di *sensor fusion* appena descritti.

Come già detto una tecnica può essere molto efficace se rapportata in un determinato contesto, ma del tutto irrealizzabile in una differente situazione. Di seguito vengono riportati gli approcci più all'avanguardia nel settore della navigazione terrestre, con una certa attenzione agli strumenti utilizzati, al tipo di veicolo impiegato e in particolare all'ambiente in cui esso si muove.

1.3.1 Ambiente chiuso

Trovandosi in un ambiente chiuso non è possibile avvalersi di tecniche che rimandino alla navigazione astronomica o satellitare. In questo caso gli strumenti utilizzati sono i seguenti:

- Odometri, forniscono una stima della distanza percorsa.
- Accelerometri e giroscopi, misurano rispettivamente accelerazione lineare e velocità angolare.
- Magnetometri, misurano il campo magnetico terrestre.
- Ruota fonica sullo sterzo, aggiunge informazioni sull'angolo di avanzamento del robot.
- Telecamere, offrono una visione dell'ambiente circostante.
- *Laser Imaging Detection and Ranging (LIDAR)*, stima la distanza di un oggetto calcolando il tempo intercorso tra l'emissione luminosa e il ritorno del raggio riflesso.
- Sensori di prossimità ad ultrasuoni, emettono impulsi sonori ultrasonici e rilevano un'eventuale eco di ritorno generata dalla presenza di un oggetto all'interno della portata nominale.

Alcuni di questi sensori vengono utilizzati per rilevare caratteristiche ambientali che possano essere utilizzate come punti di riferimento. Tra questi possiamo distinguere gli oggetti già presenti nello spazio (come i muri, gli angoli o le rampe) dai simboli e le linee appositamente tracciate. Tutti questi elementi utili ai fini della navigazione sono proprio quelli che sono stati precedentemente denominati *landmarks*.

L'identificazione di tali punti di riferimento non può essere estremamente precisa se vengono impiegati dei sensori ad ultrasuoni, a causa della loro elevata sensibilità al rumore e ai disturbi esterni. Per superare questi problemi è possibile ricorrere a filtri passa-banda in modo da schermare i sensori da frequenze indesiderate, riducendo contestualmente il tempo di campionamento dei dati con l'impiego di due sensori ad ultrasuoni con frequenze differenti [29].

In un ambiente chiuso, limitato e in piano solitamente si suppone di conoscere la conformazione dello spazio interno sia perché può essere stato allestito appositamente sia perché la mappa dell'ambiente circostante è eventualmente facile e rapida da tracciare. Per un robot equipaggiato con sensori inerziali, encoder e sensori ad ultrasuoni, si utilizza un EKF al fine di poter ridurre il rumore di misura, il *bias* e il *drift*. In passato questo meccanismo veniva già utilizzato per la localizzazione dei robot, ma con la sola presenza di sensori ad ultrasuoni. Uno dei problemi nell'utilizzo di questa tecnica è la necessità di introdurre o identificare dei *landmarks* nello spazio. Questo problema viene superato con l'aggiunta di ulteriori strumenti come encoder e sensori inerziali che forniscono una stima della posizione del robot tramite EKF anche in assenza di *landmarks*. Nel caso in cui questi fossero presenti possono comunque

essere utilizzati come informazione aggiuntiva per limitare gli errori sulla stima di posizione del filtro [2].

In altre applicazioni si ha la possibilità di stimare anche la direzione di movimento grazie all'aggiunta di un magnetometro.

1.3.2 Città

In un ambiente urbano si aprono molte più possibilità rispetto alla situazione precedente e con alcuni accorgimenti è possibile avvalersi dell'ausilio di tanti altri importanti strumenti in aggiunta a quelli già visti al paragrafo precedente:

- *Global Positioning System* (GPS), essendo all'aperto ed installando un'antenna sul veicolo si può ricevere la posizione da una costellazione di satelliti, ma esso da solo non è in grado di soddisfare adeguatamente le esigenze a causa del problema dovuto ai *multi-path*.
- Mappa stradale, ormai disponibile per la gran parte delle città e delle strade extraurbane, può altresì comprendere informazioni sui sensi di percorrenza e sulla viabilità.
- Segnaletica stradale, può costituire un valido aiuto nel posizionamento del veicolo.

Normalmente tutte queste informazioni, in parte ridondanti, vengono fuse insieme in un filtro di Kalman, il quale calcola una stima della posizione basata sulle misure dirette effettuate da alcuni sensori (GPS, odometri) e sulla predizione della posizione data dall'integrazione delle grandezze misurate da altri sensori (accelerometri e giroscopi). Fondamentale nella determinazione della posizione di un veicolo nella navigazione terrestre, è l'esatta conoscenza della rete stradale: sfruttando l'assunzione che un veicolo possa trovarsi esclusivamente su una strada, viene stimata la posizione più probabile assunta lungo il tracciato, riuscendo così a restringere enormemente le possibili soluzioni del problema di posizionamento in confronto al caso in cui si utilizzino i soli sensori. Per apprezzare quanto importante sia l'uso della rete stradale nel problema della localizzazione terrestre basta confrontare la precisione di un sistema di navigazione quando esso si trova su una strada e quando si trova in un ampio parcheggio.

Anche se il problema del posizionamento terrestre in ambiente urbano è essenzialmente bidimensionale, specialmente nei mercati asiatici dove la rete stradale può svilupparsi verticalmente su diversi livelli con rampe, ponti e sopraelevate, diventa importante l'impiego di sensori o punti di riferimento addizionali rispetto a quelli usati in occidente. I sistemi di navigazione montati su auto giapponesi si avvalgono,

ad esempio, di un giroscopio addizionale che misura l'inclinazione dell'auto rispetto all'asse di beccheggio. Inoltre in Giappone è attivo il *Vehicle Information and Communication System* (VICS) che permette di monitorare la posizione di un veicolo attraverso ripetitori posti ai margini della strada.

Il recente sviluppo degli *Intelligent transportation systems* (ITS) ha portato ad un'attenzione sempre più considerevole verso la tecnologia di comunicazione *wireless* con il veicolo. Le ITS sono avanzate applicazioni che mirano a fornire servizi innovativi di trasporto e di gestione del traffico con l'obiettivo di rendere gli utenti maggiormente informati e sicuri quando sono alla guida della propria auto [17].

In questo contesto, tanti ricercatori hanno impiegato molto lavoro per sviluppare un nuovo tipo di rete *wireless* allo scopo di creare una comunicazione *vehicle to vehicle* (V2V) che implementasse diverse applicazioni di ITS. In alcune reti i dispositivi trasmettono e ricevono informazioni reciprocamente e contemporaneamente in tempo reale. La localizzazione di veicoli urbani resta tutt'ora una sfida a causa della difficoltà dei sistemi satellitari di individuarne la posizione nell'intenso traffico cittadino [50].

Alcune proposte di miglioramento per la navigazione urbana si basano sull'assunzione che il mezzo di trasporto sia in movimento su una comune strada dotata di segnaletica orizzontale. In questo modo si possono impiegare sensori che misurino la distanza laterale individuando le linee della carreggiata, questa informazione aggiuntiva viene utilizzata per compensare le misure del GPS prima che esse vengano utilizzate all'interno del filtro di Kalman. Inoltre il metodo proposto utilizza anche la distanza di Mahalanobis [35] per validare le misure dei sensori. La compensazione del GPS e la validazione della distanza di Mahalanobis riducono effettivamente l'errore dei sensori, in particolare la deriva dell'errore e i salti di posizione del GPS. Come risultato si ottiene perciò una migliore accuratezza nella stima della posizione rispetto ad una comune fusione INS/GPS [32].

Un altro approccio proposto utilizza un modello virtuale 3D del territorio gestito da un *3D Geographical Information System* (3D GIS) e una videocamera. In questo modo è possibile avere a disposizione due strumenti indipendenti che forniscono due immagini che possono essere confrontate: l'immagine reale e quella virtuale. L'immagine reale è quella acquisita tramite la telecamera a bordo che registra la vista dello scenario reale in cui si muove il veicolo. L'immagine virtuale è invece ricavata dal 3D GIS. Il modello sviluppato si compone di tre parti. La prima parte consiste nell'individuare e nel confrontare l'immagine reale con quella virtuale, ciò può essere realizzato secondo due algoritmi: la *Scale Invariant Feature Transform* (SIFT) [34] o il riconoscimento degli angoli di Harris [24]. La seconda parte si occupa di calcolare la posizione utilizzando l'algoritmo POSIT [15] e la precedente comparazione d'immagini. La terza parte si occupa di fondere i dati utilizzando un *Interacting Multiple Model-Unscented Kalman Filter* (IMM-UKF) [12].

Si può infine pensare di adottare un approccio che comprenda sia lo studio della segnaletica stradale che il riferimento ad una mappa. Da un lato si utilizza una telecamera per individuare la segnaletica lungo la strada (come strisce, frecce, dossi...). Dall'altro lato si individuano dei *landmarks* nella zona d'interesse grazie alla triangolazione di Delaunay [14], comparandoli poi con la mappa per mezzo di un *Particle filter*. Viene inoltre impiegato un GPS per ottenere un'ulteriore misura della posizione. Infine si può pensare di introdurre una *sensor fusion* tra queste due localizzazioni per compensare i difetti dell'una e dell'altra [31].

1.3.3 Campo aperto

Quando non ci si muove più in un ambiente cittadino, ma in un generico terreno all'aperto lontano dalle strade, non si può più fare affidamento né sulle mappa né sulla segnaletica stradale. Non si aggiungono dunque ulteriori strumenti in questa circostanza, ma si deve provvedere a sfruttare al meglio quelli già a disposizione.

Nondimeno si riducono i problemi legati al segnale del GPS poiché al posto di edifici e sottopassi si avranno i disturbi dovuti ad alberi o ad altri elementi naturali, ciononostante l'utilizzo di un GPS è una soluzione piuttosto comune nel caso di vasti spazi all'aperto, non essendo possibile avere dei punti fissi di riferimento e nel caso in cui non siano richieste precisioni troppo accurate sulla posizione [38].

Per porre rimedio a questa scarsa accuratezza di localizzazione si può pensare di integrare tramite un filtro di Kalman i segnali forniti da una IMU con quelli di un ricevitore GPS. In letteratura le architetture di integrazione GPS/INS vengono classificate in tre diverse categorie:

- *Loosely-coupled* (integrazione “lasca”) in cui i dati pre-processati del GPS vengono utilizzati per aggiornare i risultati della navigazione inerziale, ottenuti dall'integrazione delle misure di accelerazione e velocità angolare [13].
- *Tightly-coupled* (integrazione “robusta”) in cui le misure della IMU non vengono integrate separatamente nella navigazione inerziale, ma vengono introdotte contemporaneamente con quelle del GPS in un unico filtro. Questo secondo approccio richiede però di modificare hardware e software del GPS, per ottenere una misura degli *pseudorange*, cioè la pseudo-distanza tra il satellite e il ricevitore [13].
- *Deeply-coupled* (integrazione “diretta”) che non viene quasi mai utilizzata a causa della complessità del suo impiego [13]. Per un'approfondita descrizione di questa terza architettura si rimanda a [22] e a [23].

La figura 1.2 mostra due possibili schemi per l'integrazione GPS/INS di tipo *loosely-coupled*. Come si può vedere, in questo tipo di architettura, le posizioni misurate

grazie ad un ricevitore GPS vengono impiegate all'interno di un filtro di Kalman, allo scopo di compensare gli errori sugli stati della navigazione ottenuti a partire dai dati inerziali. La soluzione finale al problema della navigazione sarà dunque rappresentata dalla stima del sistema inerziale corretta tramite la valutazione degli errori.

In generale, l'integrazione di tipo "lasco" porta con sé due grandi vantaggi: la semplicità di realizzazione e la ridondanza delle misure. Infatti, essendo basata sull'integrazione delle soluzioni INS e GPS, tale architettura può essere impiegata indistintamente su qualsiasi tipo di strumento senza alcun problema legato alla lettura di eventuali dati grezzi. La ridondanza delle misure è invece garantita dal fatto che, oltre alla soluzione data dal *sensor fusion*, si dispone per ciascuna epoca anche di altre due soluzioni indipendenti: quelle dei sistemi INS e GPS. Quest'ultima, in particolare, può essere utilizzata per un controllo in parallelo dell'integrità della soluzione finale, in maniera da monitorare eventuali errori grossolani dovuti ad una cattiva stima della correzione da parte del filtro di Kalman [13].

Oltre ad alcuni problemi di natura computazionale, legati a possibili instabilità del filtro di Kalman (dovute alla velocità di aggiornamento dei dati forniti dal GPS) [23], l'architettura di integrazione di tipo *loosely-coupled* presenta anche alcuni problemi di tipo teorico. In primo luogo, siccome l'integrazione è basata sulla conoscenza della soluzione GPS, è necessario disporre di almeno quattro satelliti in vista. Una soluzione è ottenibile anche avendo a disposizione solo tre satelliti purché ciò avvenga per periodi di tempo sufficientemente brevi e considerando ad esempio costante una delle incognite del problema della navigazione. Nelle situazioni in cui vi siano ostacoli che disturbino la rintracciabilità dei satelliti per periodi di tempo prolungati il sistema GPS non può essere utilizzato per compensare la soluzione INS. In aggiunta, il filtro di Kalman utilizzato all'interno dell'architettura "lasca" richiede la conoscenza della matrice di covarianza delle misure. Siccome tale matrice è funzione della geometria della costellazione e del numero di satelliti tracciati, è necessario prevedere che la matrice di covarianza possa variare ad ogni epoca di misura, oltre ad avere la necessità di poter disporre di valori realistici degli elementi di tale matrice [13].

In figura 1.2a si può vedere la configurazione *open loop* dell'architettura "lasca", mentre nell'immagine 1.2b si può notare una seconda versione denominata *closed loop* che prevede di utilizzare la stima dello stato fornita dal filtro di Kalman per aggiornare l'integrazione della navigazione inerziale. Con questo secondo metodo si elimina il problema della divergenza dell'integrazione dei dati della piattaforma inerziale e si ottiene un algoritmo più robusto.

Per migliorare la stima realizzata dalla fusione INS/GPS si può pensare di impiegare due differenti ricevitori piuttosto che uno soltanto. L'analisi di osservabilità rivela che l'integrazione di un singolo GPS con una IMU (che non utilizzi un magnetometro)

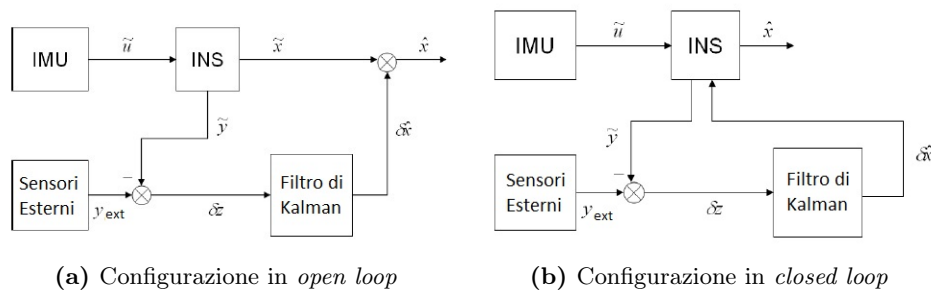


Figura 1.2: Integrazione INS/GPS *loosely-coupled*

non costituisce un sistema osservabile, per ovviare a ciò si ricorre all'integrazione della stessa IMU con due GPS anziché uno soltanto. Questo è vero fintanto che si presta la dovuta attenzione affinché la linea tra le due antenne GPS non sia parallela con il vettore dell'accelerazione misurata dalla IMU. Tale approccio permette di compensare l'errore nell'orientamento stimato senza la necessità di utilizzare un ulteriore strumento (come un magnetometro) [1].

In mancanza di una mappa stradale si pone il cosiddetto problema *simultaneous localization and map building* (SLAM), questo si chiede se sia possibile, per un veicolo autonomo, partire da una posizione sconosciuta in un ambiente sconosciuto per creare progressivamente una mappa del territorio che lo circonda, usandola contemporaneamente per identificare la propria posizione assoluta [19].

1.4 Sviluppi del lavoro di tesi

La situazione affrontata nel presente lavoro di tesi si basa su un veicolo in grado di muoversi su diversi tipi di terreno (*All-Terrain-Vehicle*). La navigazione non può dunque prescindere da questo aspetto ed è la ragione per cui i casi che più si avvicinano a tale applicazione sono quelli di localizzazione terrestre in campo aperto.

Si vuole progettare un sistema che provveda a determinare la velocità, la posizione e l'orientamento del robot in qualunque punto della superficie terrestre e in qualunque condizione di manovra.

Alla luce di quanto esposto nel presente capitolo ci si può certamente affidare all'ausilio di un GPS, tenendo però ben presenti le limitazioni dello stesso. Esso infatti, pur essendo un sistema piuttosto preciso ed accurato, non si potrà avvalere dell'aiuto di mappe stradali dal momento che si vuole realizzare un robot libero di muoversi su qualunque tipo di terreno. Oltre a ciò va tenuto in considerazione che utilizzare un'antenna di supporto posta a terra, per la correzione dei dati del GPS, è un vincolo del quale si vuole fare a meno. Non si ritiene infatti accettabile dover trasportare ogni volta uno strumento tanto ingombrante sul luogo di lavoro, che

può anche essere caratterizzato da terreno accidentato e non adatto all'installazione dell'antenna.

Considerare un generico terreno all'aperto, senza strade e magari persino irregolare o sconnesso comporta di avere i due grossi limiti appena esposti. Essi vanno dunque a ridurre le precisioni tipiche di un GPS ad uso cittadino. Va infine aggiunto che un qualunque sistema di posizionamento globale non può garantire una continuità del segnale per la presenza di ostacoli sia in ambienti naturali che urbani.

Come è stato più volte detto in precedenza, per sopperire ai vincoli imposti dal GPS è immediato ricorrere ad una IMU. Questa è vincolata al robot in configurazione *strapdown* ed è costituita da accelerometri e giroscopi i cui segnali integrati nel tempo possono essere utilizzati per dare una prima stima di localizzazione del veicolo. La navigazione inerziale è però affetta da un problema di deriva nel tempo, tanto più rapida e consistente quanto più sono sporche le misure della IMU. Le stime ricavate da accelerometri e giroscopi vengono poi utilizzate in un filtro di Kalman assieme ai dati del GPS.

A causa delle non linearità delle equazioni che caratterizzano i legami tra le variabili di stato del veicolo, si ricorrerà nel seguito a filtri per sistemi non lineari come il filtro di Kalman linearizzato e il filtro di Kalman esteso.

Per superare le imprecisioni dei processi di fusione e perfezionare di conseguenza la navigazione di un robot terrestre, si è pensato di introdurre ulteriori strumenti di supporto. I sensori che si vogliono utilizzare sono un magnetometro utilizzato per la stima dell'orientamento e degli odometri che andranno a caratterizzare la velocità di avanzamento del veicolo.

Essendo inoltre il GPS un insostituibile strumento di localizzazione, si ritiene fondamentale scrivere un algoritmo che si basi essenzialmente sulle informazioni date dai satelliti fintanto che essi sono disponibili e forniscono misure accurate. Nel momento in cui la costellazione di satelliti viene in parte oscurata, con conseguente degradazione o perdita totale del segnale, si deve ricorrere alla sola navigazione inerziale. Per questa ragione anche la IMU deve presentare misure che siano le più accurate possibili, ma per fare ciò si deve ricorrere a filtraggi sui segnali per rimuovere i rumori di misura e le vibrazioni indotte dal terreno e dal motore.

Capitolo 2

Descrizione e modellazione del sistema

*“ Anche se le leggi della matematica si riferiscono alla realtà,
non possiedono una veridicità assoluta,
e se l'avessero, allora non si riferirebbero alla realtà. ”*

— Albert Einstein

In questo capitolo viene introdotto il caso specifico del quale ci si occupa nel progetto. Si analizza quindi l'intero sistema a disposizione, soffermando l'attenzione sulle specifiche tecniche, la strumentazione impiegata e le modifiche realizzate dal laboratorio per creare un robot autonomo.

In primo luogo viene descritto il veicolo e le sue componenti meccaniche, sia quelle di serie che quelle introdotte con le modifiche. Successivamente ne viene proposto un modello cinematico in modo tale da simularne il moto.

Nella seconda parte vengono elencati e analizzati i sensori installati a bordo, per poi introdurre per ciascuno di essi un modello dell'errore.

Questo capitolo è essenziale al fine di realizzare delle prove virtuali come si vedrà nel seguito al capitolo 5.

2.1 Descrizione del veicolo

Il programma Quadrivio (presso il Politecnico di Milano) si propone nel lungo termine la realizzazione di un robot mobile capace di guida autonoma e dotato di braccio manipolatore per l'interazione con oggetti correlati al tipo di missione che il robot dovrà svolgere [56].

Veicoli di questo tipo vengono detti *Unmanned Ground Vehicles* (UGV) e trovano applicazione in operazioni sia militari sia civili, quali missioni di sminamento, re-

cupero e manipolazione di oggetti in zone accidentate o contaminate, esplorazioni archeologiche [56].

Il robot mobile in oggetto è basato su un *All-Terrain-Vehicle* (ATV) commerciale (Yamaha Grizzly YMT 700) opportunamente modificato con sistemi di attuazione dei comandi di guida (sterzo, freno, acceleratore) e la necessaria strumentazione (sensori e sistemi di elaborazione) per muoversi con buona velocità e per distanze rilevanti anche su terreni accidentati [56].

Le specifiche richiedono l'impiego di un veicolo dotato di buona manovrabilità, agile, adatto a spostarsi su terreni accidentati, che offra la possibilità di installare facilmente dispositivi aggiuntivi. Nelle fasi preliminari del progetto la scelta è quindi ricaduta su un quad o *All-Terrain-Vehicle*, lo Yamaha Grizzly YMT 700 di figura 2.1 [56].



Figura 2.1: Yamaha Grizzly 700 [56]

L'ATV dispone di un motore a benzina monocilindrico a quattro tempi da 686 cm^3 ad iniezione elettronica, che può erogare una potenza di 46 CV (33.8 kW). La trasmissione avviene mediante frizione centrifuga automatica e riduttore finale a due velocità [56].

È possibile scegliere se guidare il veicolo con sola trazione posteriore o se inserire la trazione integrale (4WD) [56].

Le dimensioni del veicolo sono:

- lunghezza: 2.06 m

- larghezza: 1.18 m
- altezza: 1.24 m
- altezza da terra: 0.275 m
- passo: 1.25 m

Il peso complessivo senza pilota è di 294 kg. L'impianto frenante è idraulico con doppi freni a disco anteriore e posteriore. Gli pneumatici sono di tipo *tubeless*: l'allestimento prevede i modelli Dunlop/KT421, in standard AT25 x 8-12 (anteriore) e Dunlop/KT425, in standard AT25 x 10-12 (posteriore). L'impianto elettrico è dotato di una batteria da 12 V e 18 A h, caricata da un alternatore da 35 A e 5000 rpm. Per alimentare la strumentazione aggiuntiva di bordo, il prototipo è dotato di due batterie ausiliare al piombo da 12 V e 38 A h [56].

La carrozzeria originale è stata in gran parte rimossa e sostituita da un pianale e una scocca realizzata in lamiera di alluminio. Questa soluzione fornisce un supporto meccanico all'installazione della centralina, del PC industriale, dei cablaggi e dei vari dispositivi di comunicazione e misura [56].

Sono inoltre previsti dei connettori per la carica delle batterie ausiliarie e una batteria di interruttori per l'accensione separata degli strumenti [56].

Successivamente il pianale è stato modificato con una nuova carrozzeria in alluminio ricoperta da una patina mimetica e lo sterzo del veicolo è stato modificato in modo da garantire la guida automatica. È stata infatti interrotta la continuità meccanica tra manubrio e ruote rimuovendo il sistema EPS, di cui è dotato il Grizzly di serie. Si è quindi sostituito il piantone dello sterzo inserendo un gruppo motore DC-motoriduttore (motore Intecno ND180.240 e riduttore Intecno NDP180/813), il quale aziona l'elemento, detto *pitman arm*, che converte il moto rotatorio dell'albero nel moto traslatorio dei braccetti. Il pedale del freno è agganciato ad un cavo, avvolto su una puleggia, a sua volta azionata da un motore passo passo B&R 80MDP4.300S000-01. L'acceleratore viene infine comandato mediante l'attuazione di un altro motore *stepper* B&R 80MDP4.300S000-01, il quale agisce sulla manopola presente sul manubrio [11].

Alcuni degli elementi sopra descritti sono visibili in figura 2.2, per ulteriori dettagli si rimanda al manuale tecnico [56] e al manuale di uso e manutenzione fornito dal costruttore.

Allo scopo di realizzare delle prove su un modello matematico, prima ancora che sui dati sperimentali, è essenziale fornire una descrizione del modello cinematico del veicolo. L'obiettivo è quello di descrivere la traiettoria percorsa dal mezzo caratterizzandone i parametri, quali velocità e angolo di sterzo, in modo completo e coerente.



Figura 2.2: Il prototipo e la collocazione dei principali strumenti [56]

In letteratura sono espone differenti soluzioni. Quella adottata nel seguito è comunemente chiamata modello bicicletta e utilizza una cinematica semplificata basata su un veicolo a due ruote. Una soluzione largamente utilizzata è quella del modello unicycle che tuttavia nella sua semplicità trascura l'ingombro del passo del veicolo rendendone possibile la rotazione sul posto. L'impiego di modelli più complicati si è ritenuto non necessario in quanto le ipotesi semplificative del modello bicicletta permettono comunque la corretta descrizione del percorso di manovra senza incorrere in eccessive complicazioni.

2.1.1 Modello bicicletta della cinematica del veicolo

Il modello bicicletta si riferisce ad un veicolo che può essere a trazione anteriore o posteriore e dotato di due ruote, una fissa ed una sterzante. Questa configurazione può essere rappresentata da una coppia (x, y) che identifica la posizione nel piano del punto di contatto della ruota posteriore con il terreno, da Φ che descrive l'orientamento del veicolo rispetto all'asse delle ascisse e da Ψ che mostra l'angolo di sterzo della ruota anteriore rispetto all'asse del veicolo.

Ciascuna delle due ruote è caratterizzata da un vincolo di puro rotolamento, aspetto che rende tale veicolo un sistema anolonomo. Infatti la velocità della ruota anteriore è nulla in direzione ortogonale ad essa, mentre la velocità della ruota posteriore è nulla in direzione ortogonale all'asse sagittale del veicolo. Formalmente questi due vincoli anolonomi si esprimono come

$$\dot{x}_a \sin(\Phi + \Psi) - \dot{y}_a \cos(\Phi + \Psi) = 0 \quad (2.1)$$

$$\dot{x} \sin \Phi - \dot{y} \cos \Phi = 0 \quad (2.2)$$

in cui la coppia (x_a, y_a) che rappresenta la posizione nel piano del punto di contatto

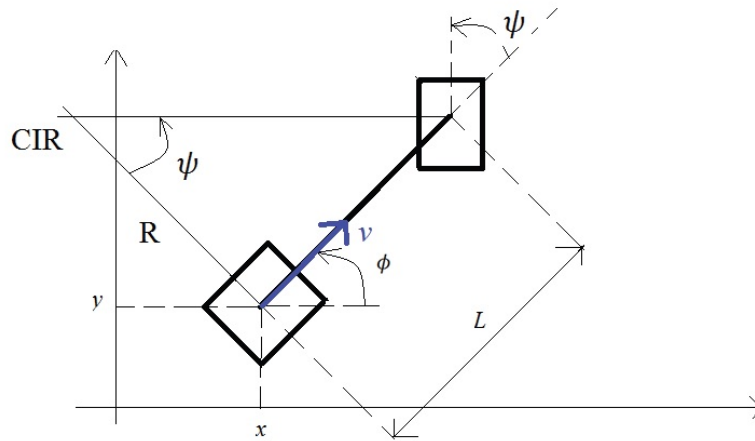


Figura 2.3: Modello bicicletta dell'ATV [11]

della ruota anteriore con il terreno, può essere legata alla coppia (x, y) e alla distanza tra gli assi delle ruote, detta anche passo l , nel modo seguente

$$x_a = x + l \cos \Phi \quad (2.3)$$

$$y_a = y + l \sin \Phi \quad (2.4)$$

Di conseguenza la (2.1) può essere riscritta come

$$\dot{x} \sin(\Phi + \Psi) - \dot{y} \cos(\Phi + \Psi) - l \dot{\Phi} \cos \Psi = 0 \quad (2.5)$$

Prendendo ora in considerazione un veicolo a trazione posteriore (come nel caso d'interesse) e schematizzandolo come in figura 2.3, si possono ricavare le equazioni che ne descrivono la cinematica. Detta v la velocità lineare di trazione della ruota posteriore, si determinano le derivate temporali delle coordinate rappresentative la posizione nel piano

$$\dot{x} = v \cos \Phi \quad (2.6)$$

$$\dot{y} = v \sin \Phi \quad (2.7)$$

A partire da ciascuna ruota è possibile tracciare una retta passante per il punto di contatto della stessa con il terreno e diretta ortogonalmente rispetto alla velocità lineare dello pneumatico in questione (retta perpendicolare all'asse sagittale per quella posteriore e ortogonale alla ruota stessa per quella anteriore). Tali rette si incontrano in un punto che viene definito centro d'istantanea rotazione, indicato con CIR nella figura 2.3, che può essere posizionato ad infinito nel caso di angolo di sterzo Ψ nullo. Ogni punto del veicolo, dunque, si muove lungo un arco di circonferenza

centrato nel CIR. Detta R la distanza tra il centro d'istantanea rotazione e il punto di contatto con il terreno della ruota posteriore, è possibile determinare il valore della velocità angolare che risulta

$$\dot{\Phi} = \frac{v}{R} \quad (2.8)$$

Sempre dalla figura 2.3 è evidente che si può scrivere R in funzione dell'angolo di sterzo Ψ

$$R = \frac{l}{\tan \Psi} \quad (2.9)$$

che può essere sostituita nella (2.8) ottenendo

$$\dot{\Phi} = v \frac{\tan \Psi}{l} \quad (2.10)$$

Scrivendo la derivata temporale dell'angolo di sterzo come $\omega = \dot{\Psi}$ e mettendola insieme alle equazioni (2.6), (2.7) e (2.10) si ha il sistema che descrive la cinematica del veicolo bicicletta a trazione posteriore

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \Phi \\ \dot{y} = v \sin \Phi \\ \dot{\Phi} = v \frac{\tan \Psi}{l} \\ \dot{\Psi} = \omega \end{cases} \quad (2.11)$$

A differenza dei modelli unicycle (spesso più utilizzati) si può osservare nella (2.11) che il veicolo non ha la capacità di ruotare sul posto, infatti quando la velocità lineare v è nulla risulta esserlo anche quella angolare $\dot{\Phi}$. Tuttavia è presente una singolarità meccanica in corrispondenza di $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$, situazione in cui la ruota anteriore è ortogonale all'asse sagittale del veicolo, in termini di simulazione questo però non causa problemi poiché si può ragionevolmente ritenere che l'angolo di sterzo reale di un quad non possa arrivare fino a 90° .

2.2 Sensori propriocettivi

La propriocezione è la capacità di percepire e riconoscere la posizione e l'orientamento di un corpo nello spazio a partire dal suo stato e con l'ausilio della strumentazione. La propriocezione assume un'importanza fondamentale nel complesso meccanismo di controllo del moto. A bordo vengono attualmente integrati diversi sensori propriocettivi per la stima della posizione dell'assetto del veicolo, tra questi si trovano un sistema GPS, encoder rotativi per la misura della velocità di avanzamento e una piattaforma inerziale. Quest'ultima è a sua volta costituita da accelerometri, giroscopi e magnetometri.

Per quanto detto al capitolo 1 ai fini di realizzare un sistema di navigazione inerziale si avrà bisogno delle misure degli accelerometri e dei giroscopi. Tutti gli altri strumenti vengono chiamati “esterni” (alla navigazione inerziale) e potranno essere successivamente utilizzati in un processo di *sensor fusion* al fine di correggere gli errori ed aumentare l’accuratezza della localizzazione.

2.2.1 Piattaforma inerziale o *Inertial Measurement Unit* (IMU)

Un’unità inerziale è un dispositivo elettronico che utilizza degli accelerometri per misurare direttamente le accelerazioni del mezzo su cui è installata rispetto a tre assi tra loro ortogonali, è dotata inoltre di giroscopi che riportano le velocità angolari attorno agli stessi assi utilizzati dagli accelerometri e infine può anche essere fornita di un magnetometro per la stima del campo magnetico terrestre in funzione dell’orientamento del mezzo. L’IMU è il componente principalmente usato nella navigazione inerziale, tramite le sue misurazioni un computer è in grado di ricostruire velocità, posizione e orientamento del veicolo utilizzando il principio noto come *dead reckoning*.

La piattaforma inerziale impiegata è una unità integrata Xsens MTi [54] che fornisce misure di orientamento assoluto, rispetto al campo magnetico terrestre, su 3 assi, oltre a misure di velocità angolare e accelerazione sugli stessi 3 assi. Il modello selezionato, visibile in figura 2.4, registra accelerazioni fino a 1,7 g e velocità angolari fino a 150°s^{-1} .



Figura 2.4: Xsens MTi *Inertial Measurement Unit* [54]

Modello matematico

Nella tabella 2.1 vengono fornite le specifiche della IMU utilizzata. Nel seguito del paragrafo si farà riferimento solamente agli accelerometri per questioni di semplicità

della descrizione, si tenga tuttavia presente che la stessa procedura può essere applicata anche agli altri strumenti contenuti nella piattaforma inerziale.

Specifiche	Giroscopi	Accelerometri	Magnetometro
Dimensioni	3 assi	3 assi	3 assi
<i>Full scale</i>	$\pm 300^\circ \text{ s}^{-1}$	$\pm 50 \text{ m/s}^2$	$\pm 750 \text{ mG}$
<i>Bias stability</i> (1σ)	1° s^{-1}	0.02 m/s^2	0.1 mG
<i>Noise density</i>	$0.05^\circ/\text{s}/\text{Hz}^{1/2}$	$0.002 \text{ m/s}^2/\text{Hz}^{1/2}$	$0.5 \text{ mG}/\text{Hz}^{1/2}$
<i>Bandwidth</i>	40 Hz	30 Hz	10 Hz
<i>Max update rate</i>	512 Hz	512 Hz	512 Hz
<i>A/D resolution</i>	16 bit	16 bit	16 bit

Tabella 2.1: Specifiche di una Xsens MTi IMU [54]

Il *bias stability* a_{bs} descrive come il *bias* di un dispositivo cambia in riferimento ad un certo periodo di tempo t_{bs} , tipicamente 100 s. In questo caso il *bias stability* è specificato con un intervallo di confidenza 1σ . Per quanto visto in precedenza se $a_b(t)$ è il *bias* noto al tempo t , allora un *bias stability* a 1σ di 0.02 m/s^2 implica che il *bias* al tempo $t + t_{bs}$ sia una variabile casuale di media $a_b(t)$ e deviazione standard $a_{bs} = 0.02 \text{ m/s}^2$. Oltre questo tempo si crea un *random walk* la cui deviazione standard cresce proporzionalmente alla radice quadrata del tempo. Per questa ragione il *bias stability* viene occasionalmente specificato da una misura del *bias random walk* che può anche essere calcolato come segue [53]

$$a_{brw} = \frac{a_{bs}}{\sqrt{t_{bs}}}, \quad [\text{m/s}^2/\text{s}^{1/2}] \quad (2.12)$$

Da questa si può ricavare la deviazione standard del *bias* $a_{bdev}(t)$ in ogni istante di tempo t [53]

$$a_{bdev}(t) = a_{brw} \sqrt{t \Delta t_{IMU}}, \quad [\text{m/s}^2] \quad (2.13)$$

dove Δt_{IMU} è il tempo di campionamento del dispositivo. Quindi la varianza del *bias* in ciascun istante di tempo t è semplicemente $a_{bvar}(t) = a_{bdev}^2(t)$. Si può così modellare il *bias* con una distribuzione gaussiana a media nulla (rumore bianco) in ognuna delle direzioni di misura, in modo tale da poter avere un errore differente su ciascuno dei tre assi per ogni istante di tempo t .

$$\begin{aligned} a_{x_{bias}}(t) &\sim G(0, a_{bvar}(t)) \\ a_{y_{bias}}(t) &\sim G(0, a_{bvar}(t)) \\ a_{z_{bias}}(t) &\sim G(0, a_{bvar}(t)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

La *noise density* indicata può essere identificata con il valore *root mean square*

(RMS) del rumore a_{rrms} . Si può dimostrare che nel caso di rumore bianco l'RMS coincide con la deviazione standard chiamando infatti μ_x il valore medio di un generico segnale x , γ_x^2 il suo valore quadratico medio e rms_x il suo valore RMS si possono scrivere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\mu_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ \gamma_x^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \\ rms_x &= \sqrt{\gamma_x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}\end{aligned}\quad (2.15)$$

dove T è il tempo di acquisizione del segnale. A questo punto si introducono anche le definizioni di varianza σ_x^2 e deviazione standard σ_x nel modo seguente

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x)^2 dt \\ \sigma_x &= \sqrt{\sigma_x^2}\end{aligned}\quad (2.16)$$

che in conseguenza delle relazioni scritte in (2.15) possono essere modificate come

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= rms_x^2 - \mu_x^2 \\ \sigma_x &= \sqrt{rms_x^2 - \mu_x^2}\end{aligned}\quad (2.17)$$

essendo perciò il rumore bianco una distribuzione gaussiana a media nulla, in questo caso specifico si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= rms_x^2 \\ \sigma_x &= rms_x\end{aligned}\quad (2.18)$$

Il rumore di misura se schematizzato come un rumore bianco porta dunque ad avere $a_{rdev} = a_{rrms}$ e da questo si può infine calcolare semplicemente la varianza del rumore $a_{rvar} = a_{rrms}^2$. In questo caso perciò a_{rvar} è costante e non aumenta al passare del tempo come faceva a_{bvar} , tuttavia analogamente a quanto visto per il *bias* anche il rumore di misura è stato rappresentato da una distribuzione gaussiana a media nulla, calcolata istante per istante e differenziata su ciascun asse

$$\begin{aligned}a_{xrum}(t) &\sim G(0, a_{rvar}) \\ a_{yrum}(t) &\sim G(0, a_{rvar}) \\ a_{zrum}(t) &\sim G(0, a_{rvar})\end{aligned}\quad (2.19)$$

Infine si può simulare la misura realizzata dagli accelerometri \tilde{a} partendo dai

valori reali a e aggiungendovi il *bias* e il rumore

$$\begin{aligned}\tilde{a}_x(t) &= a_x(t) + a_{x_{bias}}(t) + a_{x_{rum}}(t) \\ \tilde{a}_y(t) &= a_y(t) + a_{y_{bias}}(t) + a_{y_{rum}}(t) \\ \tilde{a}_z(t) &= a_z(t) + a_{z_{bias}}(t) + a_{z_{rum}}(t)\end{aligned}\tag{2.20}$$

La piattaforma inerziale contiene anche dei giroscopi e un magnetometro triassiale. Come già detto in precedenza, la procedura seguita nel simulare i disturbi agenti su questi dispositivi è del tutto analoga a quella appena descritta per gli accelerometri. Di conseguenza le misure dei giroscopi affette da rumore bianco e da *bias* saranno

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_x(t) &= \omega_x(t) + \omega_{x_{bias}}(t) + \omega_{x_{rum}}(t) \\ \tilde{\omega}_y(t) &= \omega_y(t) + \omega_{y_{bias}}(t) + \omega_{y_{rum}}(t) \\ \tilde{\omega}_z(t) &= \omega_z(t) + \omega_{z_{bias}}(t) + \omega_{z_{rum}}(t)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Similmente agli strumenti precedenti si potranno simulare anche le misure realizzate dal magnetometro triassiale

$$\begin{aligned}m_{x_{mag}}(t) &= m_x(t) + m_{x_{bias}}(t) + m_{x_{rum}}(t) \\ m_{y_{mag}}(t) &= m_y(t) + m_{y_{bias}}(t) + m_{y_{rum}}(t) \\ m_{z_{mag}}(t) &= m_z(t) + m_{z_{bias}}(t) + m_{z_{rum}}(t)\end{aligned}\tag{2.22}$$

Si osservi che esiste una differenza nella notazione adottata per le misure di accelerazione \tilde{a} e velocità angolare $\tilde{\omega}$ rispetto a quella usata per i dati del magnetometro m_{mag} . Tale distinzione è stata voluta per poter distinguere facilmente le misure di accelerometri e giroscopi da tutte le altre misure ad esse esterne e si potrà notare sempre da qui in avanti. Lo scopo di questa differenza di simbologia diverrà più chiaro durante la descrizione del funzionamento del filtro di Kalman nel paragrafo 4.2.

2.2.2 Sistema di posizionamento globale o *Global Positioning System* (GPS)

Il sistema di posizionamento globale è uno strumento di navigazione basato su una rete di 24 satelliti messi in orbita dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti. Fu inizialmente inventato a scopo militare, tuttavia negli anni '80 il governo degli Stati Uniti decise di estendere la tecnologia del GPS ad uso civile. Tra le caratteristiche del GPS si può evidenziare che le condizioni meteorologiche non influiscono sulle sue prestazioni, che almeno 7 satelliti su 24 sono visibili in ogni parte del mondo e che infine non esistono commissioni o tasse da pagare per il suo utilizzo.

Il ricevitore utilizzato è un GPS Trimble 5700 con antenna Zephyr [48] ed è montato sul veicolo in posizione eccentrica rispetto al centro odometrico dello stesso. Può inoltre essere utilizzata una stazione a terra per la correzione della posizione, in questo caso il ricevitore utilizzato come *base station* è un Trimble MS750 con un'antenna Zephyr [48]. Il collegamento tra i due sistemi prevedeva originariamente un *radio link*, sostituito poi da un link UDP che sfrutta il collegamento del veicolo e della *base station* alla rete tramite un modem 3G.



(a) GPS Trimble 5700 con antenna Zephyr sul veicolo (b) GPS Trimble MS750 con antenna Zephyr a terra

Figura 2.5: GPS Trimble con antenne Zephyr

Nella figura 2.5 si possono notare il ricevitore montato sul veicolo e il *set up* della *base station*. Va sottolineato il fatto che nel lavoro svolto in questa tesi le misurazioni del GPS sono svolte senza l'ausilio della stazione a terra, poiché si sono cercate di creare delle condizioni più generiche possibili, ipotizzando che in alcune particolari situazioni non sia possibile trasportare o collocare un'antenna così ingombrante.

Modello matematico

L'obiettivo è quello di stabilire una certa escursione del valore misurato dallo strumento rispetto a quello reale. In questo senso si definisce un unico errore rappresentato dal raggio di una sfera d'incertezza, al fine di aggiungerlo ai dati del GPS esso verrà poi proiettato nella direzione di latitudine L , longitudine λ e altitudine h . Facendo riferimento alla figura 2.6, per poter definire un punto in coordinate sferiche si devono determinare tre variabili quali un raggio ρ e due angoli Φ e Θ .

Nel creare un modello virtuale di un GPS si è ipotizzato che il robot si muova entro delle aree in differenti condizioni di ricezione del segnale. Nel caso specifico si è ritenuto di adottare tre differenti aree: la prima in cui il segnale è ottimo, un'altra in cui esso è un po' degradato e l'ultima in cui il GPS è in pessime condizioni di ricezione. Per ognuna di queste tre aree il modello prevede di stabilire un'escursione minima e una massima dell'errore del GPS.

Si può decidere di estrarre casualmente il raggio ρ dell'errore entro il suddetto intervallo, invece all'angolo Φ sarà assegnato casualmente un valore compreso tra 0 rad e $2\pi \text{ rad}$ mentre per Θ sarà scelto un angolo compreso tra 0 rad e $\pi \text{ rad}$ sempre in modo casuale.

I GPS presentano un rumore di misura molto piccolo, l'errore infatti è più che altro causato da ostacoli lungo il percorso del segnale o da riflessioni dovute al terreno o ad oggetti circostanti. Ne consegue che i dati forniti non presentano delle oscillazioni attorno ad un valore medio, ma piuttosto uno scostamento sistematico di questo al variare dell'ambiente circostante, caratterizzato da "salti" repentini della misura da una posizione ad un'altra. Per simulare questa situazione ρ , Φ e Θ vengono riassegnati nei soli istanti di tempo $t_a(i)$ in cui il veicolo entra nell'area i , di conseguenza $\rho(t)$, $\Phi(t)$ e $\Theta(t)$ resteranno costanti per $t \in [t_a(i), t_a(i+1))$. In questo modo si ottiene un andamento coerente (anche se sbagliato) all'interno di ciascuna area, ma diverso rispetto alle altre, in modo da avvicinarsi il più possibile a quello che è il comportamento reale di un GPS.

Fatte queste considerazioni è necessario convertire le variabili sferiche in coordinate cartesiane, in modo da assegnare correttamente gli errori alle misure del GPS. Riferendosi sempre alla figura 2.6 si scrive

$$\begin{aligned} L_e(t) &= \rho(t) \sin \Theta(t) \cos \Phi(t) \\ \lambda_e(t) &= \rho(t) \sin \Theta(t) \sin \Phi(t) \\ h_e(t) &= \rho(t) \cos \Theta(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove L_e , λ_e e h_e sono rispettivamente la porzione di errore in direzione della latitudine, della longitudine e dell'altitudine. Si può infine assegnare l'errore a quelle che sarebbero le misure corrette L , λ e h per ottenere la simulazione dei dati forniti dal GPS

$$\begin{aligned} L_{GPS}(t) &= L(t) + L_e(t) \\ \lambda_{GPS}(t) &= \lambda(t) + \lambda_e(t) \\ h_{GPS}(t) &= h(t) + h_e(t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Per quanto detto in precedenza queste misure resteranno costanti durante il tempo

$t \in [t_a(i), t_a(i + 1))$.

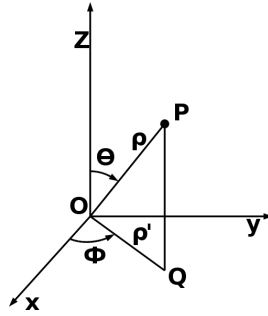


Figura 2.6: Rappresentazione in coordinate sferiche in cui $x = L$, $y = \lambda$ e $z = h$ [52]

Le informazioni di posizione date dal GPS possono anche essere derivate per ottenere la velocità. Nella pratica sperimentale si prendono dunque i dati di latitudine L_{GPS} , longitudine λ_{GPS} e altitudine h_{GPS} in cui sono già presenti i disturbi e derivandoli si ricava una velocità che contiene al suo interno delle imprecisioni ereditate dalla posizione. Se il percorso tracciato dal sistema satellitare presenta delle discontinuità, in corrispondenza di questi punti si otterranno dei picchi istantanei. Di conseguenza se si simulano adeguatamente i disturbi agenti sulla posizione fornita da un GPS, anche in fase di modellazione si otterranno per derivazione delle velocità che presentano le stesse distorsioni del caso reale. Non esiste dunque un modello dell'errore sulla velocità del GPS, ma solamente un modello dell'errore di posizione.

2.2.3 Encoder rotativi

Un encoder rotativo è un dispositivo elettromeccanico che converte la posizione angolare di un albero o di un asse in un codice che può essere sia digitale sia analogico.

Possono esistere due tipi di encoder: assoluti o relativi (detti incrementali). L'uscita di un encoder assoluto indica direttamente la posizione attuale dell'albero su cui è installato, senza il bisogno di conoscere la posizione di partenza. Gli encoder incrementali invece forniscono un'informazione sul moto dell'asse che viene di solito utilizzata per misurare velocità di rotazione, distanza percorsa o posizione.

Gli encoder possono essere realizzati secondo differenti tecnologie costruttive:

- Encoder magnetici, si basano sulla legge di Faraday o dell'induzione elettromagnetica. L'allontanarsi ed avvicinarsi delle prominente, costruite in materiale ferromagnetico, causa una variazione del flusso del campo magnetico nelle vicinanze di un sensore di prossimità, detto *pick up*, costituito da una bobina avvolta attorno ad un magnete permanente e collegata al terminale di rilevamento della velocità angolare. La variazione di flusso fa nascere nella bobina

una corrente indotta alternata (ad impulsi di tipo sinusoidale), che viene letta dal terminale; ad ogni impulso corrisponde una prominenteza o dente.

- Encoder ottici, sono costituiti da un laser e da un fotodiodo che rileva il raggio laser riflesso: il materiale opaco assorbe completamente il laser mentre quello riflettente lo restituisce come riflesso, ad ogni passaggio da opaco a riflettente corrisponde un segnale che viene inviato al terminale.
- Encoder conduttivi, sono costituiti da una ruota con dei piccoli denti realizzati in materiale conduttivo (tipicamente rame) a cui è collegata una linea elettrica. Il sensore *pick-up* è questa volta un semplice polo di contatto o spazzola, che viene toccata dai denti in fase di rotazione. Ogni dente corrisponde ad una chiusura istantanea del circuito, con conseguente impulso elettrico, seguita immediatamente dalla riapertura del contatto. La frequenza con cui il circuito si apre e chiude (cioè il numero di impulsi nell'unità di tempo), viene letta dal terminale che calcola quindi la velocità in base al numero di impulsi in rapporto al numero di denti.

Il veicolo è dotato di serie di un encoder per la misura della velocità di avanzamento. Questo è nello specifico una ruota fonica SKF installata nel blocco motore sul lato destro del quad. Essa realizza una misura dei giri dell'albero su cui è montata per poi convertirla direttamente in un'informazione sulla velocità di avanzamento della vettura.

Modello matematico

Tipicamente gli encoder magnetici soffrono di un rumore di misura tanto maggiore quanto lo è la velocità di rotazione e dunque anche quella di avanzamento. Gli encoder però forniscono delle misure piuttosto pulite e prive di errori, non si ritiene perciò di dover simulare ulteriori disturbi agenti sul dispositivo.

Nel modellare questo strumento ci si può basare sui dati acquisiti durante una campagna di prove sperimentali. I risultati ottenuti confermano la presenza di una proporzionalità tra il rumore di misura e la velocità di avanzamento del mezzo.

Per quanto detto finora si può aggiungere alla misura ideale della velocità un rumore piuttosto piccolo, ma crescente con la velocità del veicolo.

In modo del tutto analogo al caso della piattaforma inerziale, anche qui il rumore può essere approssimato come bianco e gaussiano

$$v_{x_e}(t) \sim G(0, v_{x_{evar}}) \quad (2.25)$$

dove $v_{x_{evar}}$ è la varianza del rumore ottenuta in via sperimentale per un basso valore della velocità di rotazione del motore. Il modello matematico rappresentate la velocità

misurata dall'encoder può infine essere scritto come

$$v_{x_{odo}}(t) = (1 + 0.1v_{x_e}(t))v_x(t) \quad (2.26)$$

in questo caso si aggiunge alla misura v_x realizzata in assenza di rumore, un contributo dovuto all'errore v_{x_e} proporzionale a $\frac{1}{10}$ della velocità di avanzamento stessa.

Capitolo 3

Navigazione inerziale terrestre

“ Quand’anche ci fosse una sola teoria unificata possibile, essa sarebbe solo un insieme di regole e di equazioni. Che cos’è che infonde vita nelle equazioni e che costruisce un universo che possa essere descritto da esse? L’approccio consueto della scienza, consistente nel costruire un modello matematico, non può rispondere alle domande del perché dovrebbe esserci un universo reale descrivibile da quel modello. ”

— Stephen Hawking

L’approccio adottato in questo capitolo consiste nell’utilizzare le misure fornite dagli accelerometri e dai giroscopi di una *Inertial Measurement Unit* (IMU) rigidamente vincolata ad un veicolo semiautonoma per stimarne la velocità, la posizione e l’orientamento. Questo sistema di localizzazione viene detto navigazione inerziale in configurazione *strapdown* (INS) come descritto al paragrafo 1.1.

Per fare questo saranno espresse alcune terne di riferimento e verranno poi descritte le trasformazioni di coordinate tra di esse. Successivamente verranno introdotte le equazioni di navigazione inerziale sviluppate sulla base del sistema di riferimento navigazionale. Infine sarà definita una possibile tecnica di integrazione a tempo discreto per le suddette equazioni.

3.1 Sistemi di riferimento

Nell’ambito della navigazione inerziale possono essere definiti diversi sistemi di riferimento:

- Il **sistema di riferimento inerziale** o *inertial frame* (terna-i), ha l’origine collocata in corrispondenza del centro della Terra ed è solidale rispetto alle stelle fisse. L’asse x è diretto verso il centro dell’equinozio di primavera, l’asse z è parallelo all’asse di rotazione della Terra, mentre l’asse y è posizionato in modo tale da completare una terna ortogonale destrorsa.

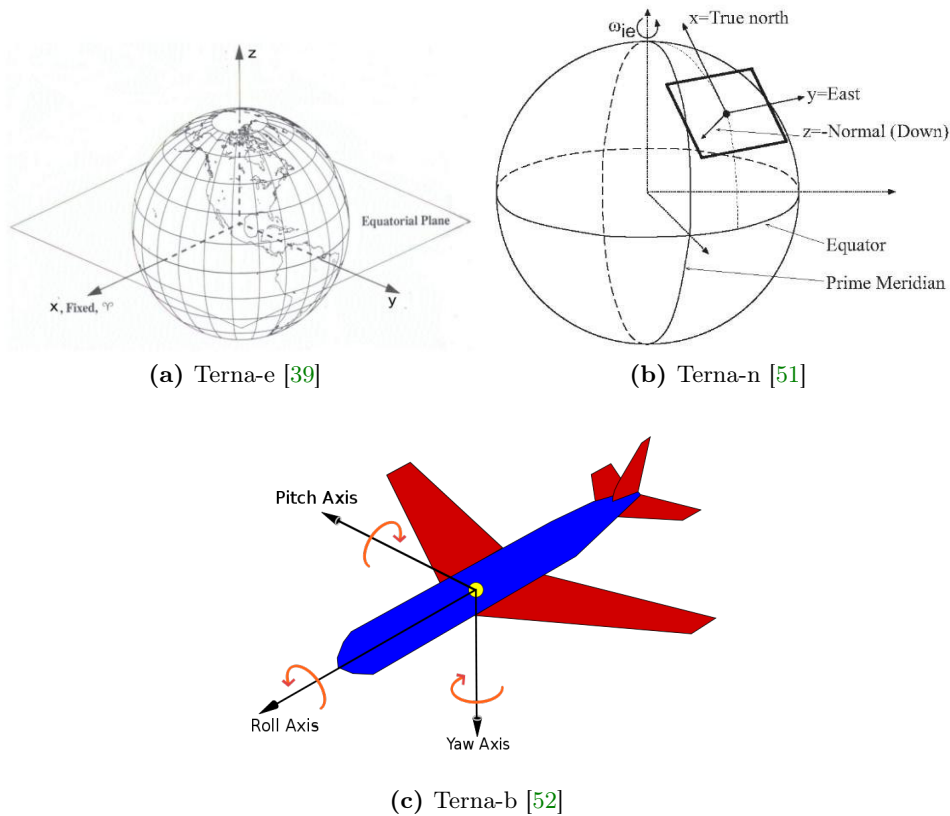


Figura 3.1: Sistemi di riferimento

- Il **sistema di riferimento terrestre** o *Earth frame* (terna-e) mostrato in figura 3.1a, ha origine nel centro di massa della Terra ed è solidale con essa. L'asse x è diretto verso il meridiano di Greenwich, l'asse z è parallelo all'asse di rotazione della Terra, mentre l'asse y è posizionato in modo tale da completare una terna ortogonale destrorsa.
- Il **sistema di riferimento navigazionale** o *navigation frame* (terna-n) mostrato in figura 3.1b, ha origine in corrispondenza del punto di partenza del veicolo preso sulla superficie della Terra e solidale con essa. L'asse x punta verso il nord geografico ed è indicato con N , l'asse z punta in basso verso il centro della Terra ed è indicato con D , mentre l'asse y è posizionato in modo tale da completare una terna ortogonale destrorsa ed esso è indicato con E . Ci si può riferire a questo sistema di riferimento anche chiamandolo terna NED (dal nome delle coordinate espresse in Nord, Est e $Down$) oppure si può utilizzare una conformazione alternativa denominata ENU (Est, Nord e Up). Il vantaggio della seconda soluzione sta nel fatto che l'altitudine aumenta verso l'alto (dunque in direzione Up), mentre il vantaggio della prima consiste

nell'avere una rotazione verso destra positiva (poiché il suo asse sarà diretto verso il basso) e inoltre gli assi della terna NED possono coincidere con quelli fissi del veicolo (rollio, beccheggio e imbardata) quando questo è in piano e rivolto verso Nord [22]. Solitamente il sistema NED è il più utilizzato e di conseguenza possono essere ricavati molti più risultati di ricerca riferiti ad esso.

- Il **sistema di riferimento del corpo** o *body frame* (terna-b) mostrato in figura 3.1c, ha origine in un punto di riferimento preso a bordo del veicolo ed è solidale con esso, di solito tale punto coincide con il centro della terna di misura della IMU. L'asse x è l'asse di rollio del mezzo (direzione di avanzamento), l'asse y è quello di beccheggio (direzione verso destra), mentre l'asse z è quello di imbardata (direzione verso il basso).

I vettori scritti nel seguito come $\underline{\zeta}^\alpha$ indicheranno sempre un generico vettore $\underline{\zeta}$ le cui componenti vengono proiettate lungo la terna- α . Inoltre i vettori scritti nel seguito come $\underline{\omega}_{\beta\gamma}^\alpha$ indicheranno sempre le componenti della velocità di rotazione della terna- γ rispetto alla terna- β e proiettate lungo la terna- α .

3.1.1 Trasformazioni di coordinate

È possibile compiere delle trasformazioni di coordinate da un sistema di riferimento all'altro utilizzando le cosiddette matrici dei coseni direttori o *direction cosine matrix* (DCM). La trasformazione dalla terna-e alla terna-n viene dunque realizzata dalla seguente matrice

$$\begin{aligned} C_e^n &= C_y\left(-L - \frac{\pi}{2}\right)C_z(\lambda) = \\ &= \begin{bmatrix} -\sin L \cos \lambda & -\sin L \sin \lambda & \cos L \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos L \cos \lambda & -\cos L \sin \lambda & -\sin L \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove L è la latitudine, λ è la longitudine, C_y e C_z indicano rispettivamente una rotazione del sistema di coordinate intorno all'asse y e all'asse z. La DCM dalla terna-n alla terna-e può essere ottenuta sfruttando le proprietà di ortogonalità delle matrici di rotazione

$$C_n^e = (C_e^n)^T \quad (3.2)$$

La definizione della DCM dalla terna-n alla terna-b viene fornita in [47]

$$C_n^b = C_x(\phi)C_y(\theta)C_z(\psi) \quad (3.3)$$

dove ϕ , θ e ψ sono le tre componenti degli angoli di Eulero: rollio, beccheggio e imbardata. Quindi la matrice dei coseni direttori dalla terna-b alla terna-n può essere

ottenuta invertendo (e dunque trasponendo) la precedente

$$\begin{aligned}
C_b^n &= (C_n^b)^T = C_z(-\psi)C_y(-\theta)C_x(-\phi) = \\
&= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Gli angoli di Eulero possono essere determinati a partire dalla matrice dei coseni direttori con le seguenti equazioni [18]

$$\phi = \arctan \frac{C_b^n(3, 2)}{C_b^n(3, 3)} \tag{3.5}$$

$$\theta = \arcsin C_b^n(3, 1) \tag{3.6}$$

$$\psi = \arctan \frac{C_b^n(2, 1)}{C_b^n(1, 1)} \tag{3.7}$$

3.1.2 Velocità di rotazione relative delle terne

Il vettore di velocità angolare della terna-e rispetto alla terna-i proiettato sulla terna-e è dato da

$$\underline{\omega}_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_e \end{bmatrix}^T \tag{3.8}$$

dove $\omega_e = 7.292\,115\,8 \text{ rad s}^{-1}$ è la velocità angolare di rotazione della Terra attorno al proprio asse. Proiettando il vettore sulla terna-n con la (3.1) si ottiene

$$\underline{\omega}_{ie}^n = C_e^n \underline{\omega}_{ie}^e = \begin{bmatrix} \omega_e \cos L & 0 & -\omega_e \sin L \end{bmatrix}^T \tag{3.9}$$

La velocità di rotazione della terna-n rispetto alla terna-e viene espressa come [47]

$$\underline{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \cos L & -\dot{L} & -\dot{\lambda} \sin L \end{bmatrix}^T \tag{3.10}$$

sostituendo $\dot{L} = \frac{v_N}{R_n + h}$ e $\dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R_e + h) \cos L}$

$$\underline{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{R_e + h} & -\frac{v_N}{R_n + h} & -\frac{v_E}{R_e + h} \tan L \end{bmatrix}^T \tag{3.11}$$

dove v_N e v_E sono la velocità verso nord e quella verso est mentre h è l'altitudine. R_n e R_e sono rispettivamente il raggio di curvatura del meridiano terrestre e il raggio gran normale, che possono essere calcolati come [42]

$$R_n = \frac{R(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{3/2}} \quad (3.12)$$

$$R_e = \frac{R}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{1/2}} \quad (3.13)$$

dove $R = 6.378\,137 \times 10^6$ m è il semiasse maggiore della Terra. Schematizzando il pianeta con un ellissoide il suo semiasse maggiore può essere ottenuto come $e = \sqrt{f(2 - f)}$ in cui $f = \frac{R - r}{R}$ è il coefficiente di appiattimento e $r = 6.356\,752 \times 10^6$ m è il semiasse minore della Terra. L'equazione di $\underline{\omega}_{in}^n$ può essere espressa in funzione della posizione e della velocità del mezzo e si ricava sommando le equazioni (3.9) e (3.11)

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{in}^n &= \underline{\omega}_{ie}^n + \underline{\omega}_{en}^n = \\ &= \left[\omega_e \cos L + \frac{v_E}{R_e + h} \quad -\frac{v_N}{R_n + h} \quad -\omega_e \sin L - \frac{v_E}{R_e + h} \tan L \right]^T \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si può anche scrivere il vettore di velocità angolare della terna-n rispetto alla terna-b proiettato sulla terna-n come

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{bn}^n &= \underline{\omega}_{bi}^n + \underline{\omega}_{in}^n = \\ &= \underline{\omega}_{in}^n - \underline{\omega}_{ib}^n = \\ &= \underline{\omega}_{in}^n - C_b^n \underline{\omega}_{ib}^b \end{aligned} \quad (3.15)$$

I vettori introdotti in questo paragrafo saranno impiegati per dimostrare o calcolare le relazioni descritte nel seguito.

3.2 Sistema di navigazione inerziale

L'obiettivo è ora quello di determinare delle espressioni analitiche che leghino velocità, posizione e orientamento del corpo. Tali equazioni saranno descritte nel sistema di riferimento navigazionale e vengono dette equazioni di navigazione inerziale, poiché sono le formule che permettono di risolvere il problema della localizzazione avendo a disposizione uno strumento di misura inerziale come una IMU.

Nell'approccio al problema si devono innanzitutto distinguere le variabili adottate. Per prima si descrive la velocità del veicolo che può essere proiettata lungo la terna-n

- Velocità verso Nord: v_N
 - Velocità verso Est: v_E
 - Velocità verso il basso: v_D
- $$\underline{v}^n = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La posizione viene invece espressa in coordinate geografiche, ma riferendosi pur sempre alla terna-n

- Latitudine: L
 - Longitudine: λ
 - Altitudine: h
- $$\underline{p}^n = \begin{bmatrix} L \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

L'orientamento del mezzo è infine descritto dalla matrice di rotazione C_b^m calcolata tramite la (3.4) a partire dagli angoli di Eulero della terna-b

- Rollio: ϕ
 - Beccheggio: θ
 - Imbardata: ψ
- $$\underline{a}^b = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Si deve inoltre tenere conto delle grandezze misurate dalla IMU che saranno espresse nel sistema di riferimento del corpo. Gli accelerometri forniscono le forze specifiche calcolate come la differenza tra l'accelerazione vera del corpo e l'accelerazione di gravità [47]

- Accelerazione in direzione x: a_x
 - Accelerazione in direzione y: a_y
 - Accelerazione in direzione z: a_z
- $$\underline{f}^b = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

I giroscopi misurano invece le velocità angolari del mezzo riferendosi agli stessi assi degli accelerometri

- Velocità angolare attorno ad x: ω_x
 - Velocità angolare attorno ad y: ω_y
 - Velocità angolare attorno ad z: ω_z
- $$\underline{\omega}_{ib}^b = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

3.2.1 Equazione dinamica della velocità

Per ottenere l'equazione dinamica delle velocità si parte da una trasformazione di coordinate dalla terna-e alla terna-n

$$\underline{v}^n = C_e^n \underline{\dot{p}}^e \quad (3.21)$$

Sostituendo $\underline{\dot{p}}^e = C_i^e (\underline{\dot{p}}^i - \Omega_{ie}^i \underline{p}^i)$ nell'equazione di cui sopra si ottiene

$$\underline{v}^n = C_i^n (\underline{\dot{p}}^i - \Omega_{ie}^i \underline{p}^i) \quad (3.22)$$

dove Ω rappresenta la forma matriciale *skew* simmetrica del vettore $\underline{\omega}$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad \Omega = (\underline{\omega} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si prosegue derivando la (3.22) rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \underline{\dot{v}}^n &= C_i^n \Omega_{ni}^i (\underline{\dot{p}}^i - \Omega_{ie}^i \underline{p}^i) + C_i^n (\underline{\ddot{p}}^i - \Omega_{ie}^i \underline{\dot{p}}^i) = \\ &= C_i^n \underline{\ddot{p}}^i + C_i^n (\Omega_{ni}^i - \Omega_{ie}^i) \underline{\dot{p}}^i - C_i^n \Omega_{ni}^i \Omega_{ie}^i \underline{p}^i \end{aligned} \quad (3.23)$$

in cui la velocità di rotazione della Terra Ω_{ie}^i viene considerata costante. Sostituendo $\underline{\dot{p}}^i = C_e^i (\underline{\dot{p}}^e + \Omega_{ie}^e)$ e $I = C_n^i C_i^n$ nell'equazione appena scritta si può scrivere

$$\begin{aligned} \underline{\dot{v}}^n &= C_i^n \underline{\ddot{p}}^i + C_i^n (\Omega_{ni}^i - \Omega_{ie}^i) C_n^i C_i^i C_e^i (\underline{\dot{p}}^e + \Omega_{ie}^e \underline{p}^e) - C_i^n \Omega_{ni}^i \Omega_{ie}^i \underline{p}^i = \\ &= C_i^n \underline{\ddot{p}}^i + (\Omega_{ni}^n - \Omega_{ie}^n) C_e^n \underline{\dot{p}}^e + (\Omega_{ni}^n - \Omega_{ie}^n) C_e^n \Omega_{ie}^e \underline{p}^e - C_i^n \Omega_{ni}^i \Omega_{ie}^i \underline{p}^i = \\ &= C_i^n \underline{\ddot{p}}^i + (\Omega_{ni}^n - \Omega_{ie}^n) C_e^n \underline{\dot{p}}^e + \Omega_{ni}^n C_e^n \Omega_{ie}^e \underline{p}^e - \Omega_{ie}^n C_e^n \Omega_{ie}^e \underline{p}^e - C_i^n \Omega_{ni}^i \Omega_{ie}^i \underline{p}^i \end{aligned} \quad (3.24)$$

Con alcuni calcoli è possibile riformulare l'espressione di $\Omega_{ni}^n C_e^n \Omega_{ie}^e \underline{p}^e$ nel modo seguente

$$\begin{aligned} \Omega_{ni}^n C_e^n \Omega_{ie}^e \underline{p}^e &= C_i^n C_n^i \Omega_{ni}^n C_i^i C_n^i C_e^n \Omega_{ie}^e C_i^i C_e^i \underline{p}^e = \\ &= C_i^n \Omega_{ni}^i \Omega_{ie}^i \underline{p}^i \end{aligned}$$

quest'ultima insieme alla (3.21) permette di ridurre la (3.24)

$$\begin{aligned} \underline{\dot{v}}^n &= C_i^n \underline{\ddot{p}}^i + (\Omega_{ni}^n - \Omega_{ie}^n) \underline{v}^n - \Omega_{ie}^n C_e^n \Omega_{ie}^e \underline{p}^e = \\ &= C_i^n \underline{\ddot{p}}^i - (\Omega_{in}^n + \Omega_{ie}^n) \underline{v}^n - \Omega_{ie}^n C_e^n \Omega_{ie}^e \underline{p}^e = \\ &= C_i^n \underline{\ddot{p}}^i - (\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n + \Omega_{ie}^n) \underline{v}^n - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \underline{p}^e = \\ &= C_i^n \underline{\ddot{p}}^i - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) \underline{v}^n - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \underline{p}^e \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sostituendo poi $\underline{\ddot{p}}^i = \underline{f}^i + \underline{g}^i$ nell'equazione precedente

$$\begin{aligned}\underline{\dot{v}}^n &= C_i^n (\underline{f}^i + \underline{g}^i) - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) \underline{v}^n - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \underline{p}^e = \\ &= C_i^n \underline{f}^i - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) \underline{v}^n + C_e^n (\underline{g}^e - \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \underline{p}^e) = \\ &= C_b^n \underline{f}^b - (2\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) \underline{v}^n + \underline{g}^n\end{aligned}\quad (3.26)$$

dove \underline{f}^b è il vettore delle forze specifiche (3.19), mentre $\underline{g}^n = [0 \ 0 \ g]^T$ è il vettore gravità nella terna-n e g è l'accelerazione di gravità. L'equazione (3.26) può anche essere riscritta in un'altra forma

$$\underline{\dot{v}}^n = C_b^n \underline{f}^b - (2\underline{\omega}_{ie}^n + \underline{\omega}_{en}^n) \times \underline{v}^n + \underline{g}^n \quad (3.27)$$

3.2.2 Equazione dinamica della posizione

Le quantità viste nella (3.16) e nella (3.17) sono legate dalla seguente relazione [47]

$$\begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n + h & 0 & 0 \\ 0 & (R_e + h) \cos L & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{L} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

La derivata nel tempo della posizione può essere scritta invertendo la formula precedente

$$\begin{bmatrix} \dot{L} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_n + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_e + h) \cos L} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

3.2.3 Equazione dinamica dell'orientamento

Utilizzando la matrice *skew* simmetrica Ω_{bn}^n corrispondente al vettore ottenuto dalla (3.15), si può definire la dinamica dell'orientamento come [41]

$$\dot{C}_b^n = -\Omega_{bn}^n C_b^n \quad (3.30)$$

ma essa può anche essere scritta in una forma trasposta

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{nb}^b = C_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b) \quad (3.31)$$

dove Ω_{ib}^b è la forma matriciale *skew* simmetrica corrispondente a $\underline{\omega}_{ib}^b$ cioè il vettore delle misure fornite dai giroscopi (3.20).

3.2.4 Equazioni di navigazione inerziale

Unendo le equazioni scritte finora (3.27), (3.29) e (3.30), il sistema di equazioni di navigazione inerziale nella terna-n può essere espresso come

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{v}}^n \\ \dot{\underline{p}}^n \\ \dot{C}_b^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_b^n \underline{f}^b - (2\underline{\omega}_{ie}^n + \underline{\omega}_{en}^n) \times \underline{v}^n + \underline{g}^n \\ D^{-1} \underline{v}^n \\ -\Omega_{bn}^n C_b^n \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

dove

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_n + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_e + h) \cos L} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Queste sono equazioni differenziali non lineari del primo ordine e come tali, una volta integrate, permettono di calcolare lo stato del veicolo nella terna-n, individuato dalle velocità \underline{v}^n , posizioni \underline{p}^n e orientamento C_b^n . La risoluzione richiede la conoscenza delle misure di accelerazione \underline{f}^b e velocità angolare $\underline{\omega}_{ib}^b$ ottenute da una piattaforma inerziale e realizzate lungo la terna-b. Anche la determinazione degli altri termini presenti nelle equazioni è funzione sia dello stato che delle suddette misure: $\underline{\omega}_{ie}^n$ è descritta dalla (3.9), $\underline{\omega}_{en}^n$ si scrive come (3.11), mentre Ω_{bn}^n è la matrice *skew* simmetrica corrispondente al vettore rappresentato in (3.15). Restano infine le dimensioni della Terra R_n e R_e ottenibili rispettivamente da (3.12) e (3.13).

3.3 Integrazione a tempo discreto

Nell'applicazione pratica di un sistema di navigazione inerziale si deve ricorrere all'utilizzo di un calcolatore elettronico e di una IMU i cui accelerometri e giroscopi misurano rispettivamente le accelerazioni e le velocità angolari del corpo nella terna-b come illustrato nella (3.19) e nella (3.20). È di conseguenza necessario implementare un algoritmo di integrazione a tempo discreto per poter trasformare queste quantità in velocità, posizione e orientamento nella terna-n.

Ad ogni intervallo di integrazione si dovranno stimare i dati di navigazione del passo successivo $k + 1$: $v_{N_{k+1}}$, $v_{E_{k+1}}$, $v_{D_{k+1}}$, L_{k+1} , λ_{k+1} , h_{k+1} e $C_{b_{k+1}}^n$. Questo sarà ottenuto sfruttando le misure realizzate con la IMU per quello stesso passo: \underline{f}_{k+1}^b e $\underline{\omega}_{ib_{k+1}}^b$. In aggiunta sarà utile considerare anche i dati di navigazione calcolati al passo precedente k : v_{N_k} , v_{E_k} , v_{D_k} , L_k , λ_k , h_k e $C_{b_k}^n$.

3.3.1 Inizializzazione

Il passo iniziale non può essere ottenuto integrando, ma va stimato a partire dalla conoscenza delle condizioni iniziali (*dead reckoning*). Tali condizioni iniziali devono essere fornite da strumenti di misura esterni. Come descritto al paragrafo 2.2 gli strumenti di misura aggiuntivi impiegati in questo contesto sono odometri, GPS e un magnetometro triassiale.

Un veicolo in movimento nello spazio, sarà dotato di una velocità che può essere scomposta in tutte e tre le direzioni della terna-b

- Velocità in direzione x: v_x
- Velocità in direzione y: v_y
- Velocità in direzione z: v_z

$$\underline{v}^b = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Il robot perciò non è dotato solamente di una velocità in direzione di avanzamento. Tuttavia gli odometri, per loro definizione, misurano semplicemente la velocità di rotazione del motore e dunque la velocità trasmessa alle ruote posteriori del veicolo che corrisponde a quella in direzione di avanzamento v_x .

Il GPS riporta invece la posizione del mezzo nella terna-n espressa in coordinate geografiche

- Latitudine: L
- Longitudine: λ
- Altitudine: h

$$\underline{p}^n = \begin{bmatrix} L \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

derivando la posizione e applicando la (3.28) è inoltre possibile ricavare da questo dispositivo un'ulteriore informazione sulle velocità

- Velocità verso Nord: v_N
- Velocità verso Est: v_E
- Velocità verso il basso: v_D

$$\underline{v}^n = \begin{bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Si utilizza infine un magnetometro triassiale che misuri il campo magnetico con riferimento alla terna-b

- Campo magnetico lungo x: m_x
- Campo magnetico lungo y: m_y
- Campo magnetico lungo z: m_z

$$\underline{m}^b = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

L'impiego di alcuni di questi strumenti rende agevole la determinazione delle condizioni iniziali delle equazioni di navigazione e permette inoltre di correggere l'errore di stima della navigazione inerziale, come verrà descritto nel prossimo capitolo.

Le velocità possono semplicemente essere poste a zero ipotizzando che il veicolo parta da fermo

$$\begin{aligned} v_{N_0} &= 0 \\ v_{E_0} &= 0 \\ v_{D_0} &= 0 \end{aligned} \tag{3.38}$$

La posizione viene direttamente presa dai dati del GPS

$$\begin{aligned} L_0 &= L_{GPS} \\ \lambda_0 &= \lambda_{GPS} \\ h_0 &= h_{GPS} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Il rollio e il beccheggio non possono essere ipotizzati nulli come le velocità poiché il robot può trovarsi inizialmente su di un terreno con una pendenza qualsiasi, perciò essi vengono calcolati dai dati iniziali degli accelerometri. La formula seguente è valida solo nell'ipotesi di veicolo fermo poiché in questo caso le accelerazioni misurate non comprendono le componenti dovute al moto, ma solamente quelle del campo gravitazionale. Sfruttando la conoscenza che il vettore di gravità deve essere diretto verso il basso si possono impiegare le seguenti espressioni per il calcolo del rollio e del beccheggio [4]

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arctan \frac{a_{y_0}}{\sqrt{a_{x_0}^2 + a_{z_0}^2}} \\ \theta_0 &= \arctan \frac{-a_{x_0}}{a_{z_0}} \end{aligned} \tag{3.40}$$

Utilizzando invece il magnetometro triassiale si può stimare anche l'imbardata iniziale [4]

$$\psi_0 = - \arctan \frac{m_{x_0} \sin \phi_0 \sin \theta_0 + m_{y_0} \cos \phi_0 - m_{z_0} \sin \phi_0 \cos \theta_0}{m_{x_0} \cos \theta_0 + m_{z_0} \sin \theta_0} \tag{3.41}$$

Poiché la IMU è installata sul corpo del veicolo, allora le accelerazioni misurate saranno quelle del corpo stesso, perciò gli angoli così definiti saranno riferiti all'inclinazione della carrozzeria e non del piano delle ruote. La $C_{b_0}^m$ che descrive l'orientamento del robot nell'istante iniziale si deduce infine sfruttando l'equazione (3.4).

3.3.2 Integrazione dell'orientamento

La prima cosa da ottenere ad ogni passo di integrazione è una valutazione della DCM a partire dalle velocità angolari dei giroscopi. La matrice dei coseni direttori servirà infatti alla successiva stima delle altre grandezze.

Supponendo che il tempo di campionamento della IMU Δt_{IMU} sia sufficientemente piccolo, è possibile calcolare l'incremento angolare $\Delta \underline{\Theta}_{ib}^b$ tramite la velocità angolare misurata $\underline{\omega}_{ib}^b$, come se questa restasse costante nell'intervallo tra l'acquisizione di un dato e del successivo

$$\Delta \underline{\Theta}_{ib_{k+1}}^b = \underline{\omega}_{ib_{k+1}}^b \Delta t_{IMU} \quad (3.42)$$

Avendo a disposizione i dati di navigazione al passo k si può calcolare $\underline{\omega}_{ie_k}^n$ come visto nella (3.9) e $\underline{\omega}_{en_k}^n$ come nella (3.11). Utilizzando queste misure insieme a $\Delta \underline{\Theta}_{ib_{k+1}}^b$ si può dedurre l'incremento angolare del corpo rispetto alla terna-n

$$\Delta \underline{\Theta}_{nb_{k+1}}^b = \left[\Delta \Theta_{x_{k+1}} \quad \Delta \Theta_{y_{k+1}} \quad \Delta \Theta_{z_{k+1}} \right]^T = \Delta \underline{\Theta}_{ib_{k+1}}^b - C_{n_k}^b (\underline{\omega}_{ie_k}^n + \underline{\omega}_{en_k}^n) \Delta t_{IMU} \quad (3.43)$$

e la sua ampiezza si ottiene come

$$\Delta \Theta_{k+1} = \sqrt{\Delta \Theta_{x_{k+1}}^2 + \Delta \Theta_{y_{k+1}}^2 + \Delta \Theta_{z_{k+1}}^2} \quad (3.44)$$

Per procedere con i calcoli è più comodo avvalersi dell'utilizzo dei quaternioni, essi possono essere legati semplicemente alla DCM [42]

$$\begin{aligned} q_{1k} &= 0.25 \frac{C_{b_k}^n(3,2) - C_{b_k}^n(2,3)}{0.5 \sqrt{1 + C_{b_k}^n(1,1) + C_{b_k}^n(2,2) + C_{b_k}^n(3,3)}} \\ q_{2k} &= 0.25 \frac{C_{b_k}^n(1,3) - C_{b_k}^n(3,1)}{0.5 \sqrt{1 + C_{b_k}^n(1,1) + C_{b_k}^n(2,2) + C_{b_k}^n(3,3)}} \\ q_{3k} &= 0.25 \frac{C_{b_k}^n(2,1) - C_{b_k}^n(1,2)}{0.5 \sqrt{1 + C_{b_k}^n(1,1) + C_{b_k}^n(2,2) + C_{b_k}^n(3,3)}} \\ q_{4k} &= 0.5 \sqrt{1 + C_{b_k}^n(1,1) + C_{b_k}^n(2,2) + C_{b_k}^n(3,3)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Questi vanno poi aggiornati al passo successivo grazie alle quantità fin qui ricavate [42]

$$\underline{q}_{k+1} = \underline{q}_k + 0.5 \begin{bmatrix} c_{k+1} & s_{k+1} \Delta \Theta_{z_{k+1}} & -s_{k+1} \Delta \Theta_{y_{k+1}} & s_{k+1} \Delta \Theta_{x_{k+1}} \\ -s_{k+1} \Delta \Theta_{z_{k+1}} & c_{k+1} & s_{k+1} \Delta \Theta_{x_{k+1}} & s_{k+1} \Delta \Theta_{y_{k+1}} \\ s_{k+1} \Delta \Theta_{y_{k+1}} & -s_{k+1} \Delta \Theta_{x_{k+1}} & c_{k+1} & s_{k+1} \Delta \Theta_{z_{k+1}} \\ -s_{k+1} \Delta \Theta_{x_{k+1}} & -s_{k+1} \Delta \Theta_{y_{k+1}} & -s_{k+1} \Delta \Theta_{z_{k+1}} & c_{k+1} \end{bmatrix} \underline{q}_k \quad (3.46)$$

dove s_{k+1} e c_{k+1} sono ottenute da espansioni in serie di Taylor troncate al quarto ordine

$$s_{k+1} = \frac{2}{\Delta\Theta_{k+1}} \sin \frac{\Delta\Theta_{k+1}}{2} = 1 - \frac{\Delta\Theta_{k+1}^2}{24} + \frac{\Delta\Theta_{k+1}^4}{1920} + \dots$$

$$c_{k+1} = 2(\cos \frac{\Delta\Theta_{k+1}}{2} - 1) = -\frac{\Delta\Theta_{k+1}^2}{4} + \frac{\Delta\Theta_{k+1}^4}{192} + \dots$$

Infine la DCM C_b^n viene aggiornata usando i quaternioni nella seguente equazione [42]

$$C_{b_{k+1}}^n = \begin{bmatrix} q_{1_{k+1}}^2 - q_{2_{k+1}}^2 - q_{3_{k+1}}^2 + q_{4_{k+1}}^2 & 2(q_{1_{k+1}}q_{2_{k+1}} - q_{3_{k+1}}q_{4_{k+1}}) & 2(q_{1_{k+1}}q_{3_{k+1}} - q_{2_{k+1}}q_{4_{k+1}}) \\ 2(q_{1_{k+1}}q_{2_{k+1}} + q_{3_{k+1}}q_{4_{k+1}}) & q_{2_{k+1}}^2 - q_{1_{k+1}}^2 - q_{3_{k+1}}^2 + q_{4_{k+1}}^2 & 2(q_{2_{k+1}}q_{3_{k+1}} - q_{1_{k+1}}q_{4_{k+1}}) \\ 2(q_{1_{k+1}}q_{3_{k+1}} - q_{2_{k+1}}q_{4_{k+1}}) & 2(q_{2_{k+1}}q_{3_{k+1}} + q_{1_{k+1}}q_{4_{k+1}}) & q_{3_{k+1}}^2 - q_{1_{k+1}}^2 - q_{2_{k+1}}^2 + q_{4_{k+1}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

3.3.3 Integrazione della velocità

Analogamente a quanto visto per la velocità angolare si può considerare l'accelerazione misurata dagli accelerometri \underline{f}^b come se restasse costante entro un piccolo intervallo di tempo. Si calcola dunque l'incremento della velocità al passo $k + 1$

$$\Delta \underline{v}_{f_{k+1}}^b = \underline{f}_{k+1}^b \Delta t_{IMU} \quad (3.48)$$

L'incremento di velocità della terna-b dovuto alle forze specifiche viene riportato alla terna-n grazie alla DCM calcolata in (3.47) [42]

$$\Delta \underline{v}_{f_{k+1}}^n = C_{b_{k+1}}^n \begin{bmatrix} 1 & 0.5\Delta\Theta_{z_{k+1}} & -0.5\Delta\Theta_{y_{k+1}} \\ -0.5\Delta\Theta_{z_{k+1}} & 1 & 0.5\Delta\Theta_{x_{k+1}} \\ 0.5\Delta\Theta_{y_{k+1}} & -0.5\Delta\Theta_{x_{k+1}} & 1 \end{bmatrix} \Delta \underline{v}_{f_{k+1}}^b \quad (3.49)$$

Quest'ultimo viene corretto considerando il contributo dovuto alla gravità e all'accelerazione di Coriolis

$$\Delta \underline{v}_{k+1}^n = \Delta \underline{v}_{f_{k+1}}^n - (2\underline{\omega}_{ie_k}^n + \underline{\omega}_{en_k}^n) \times \underline{v}_k^n \Delta t_{IMU} + \underline{\gamma}_k^n \Delta t_{IMU} \quad (3.50)$$

dove $\underline{\gamma}_k^n = [0 \ 0 \ \gamma_k]^T$ è il vettore dell'accelerazione di gravità proiettata sulla terna-n, mentre γ_k è la gravità normale a latitudine L_k ed altitudine h_k [42]

$$\gamma_k = a_1(1 + a_2 \sin^2 L_k + a_3 \sin^4 L_k) + (a_4 + a_5 \sin^2 L_k)h_k + a_6 h_k^2 \quad (3.51)$$

dove

$$\begin{aligned}
 a1 &= 9.7803267715 \\
 a2 &= 0.0052790414 \\
 a3 &= 0.0000232718 \\
 a4 &= -0.0000030876910891 \\
 a5 &= 0.0000000043977311 \\
 a6 &= 0.0000000000007211
 \end{aligned}$$

L'integrazione sulla velocità può infine essere realizzata come

$$\underline{v}_{k+1}^n = \underline{v}_k^n + \Delta \underline{v}_{k+1}^n \quad (3.52)$$

3.3.4 Integrazione della posizione

Avendo ora a disposizione i valori aggiornati della velocità del corpo è facile ottenere anche le posizioni usando il metodo di integrazione di Runge-Kutta del secondo ordine [42]

$$\underline{p}_{k+1}^n = \underline{p}_k^n + 0.5 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ R_{n_k} + h_k & & & \\ 0 & & 1 & \\ & & (R_{e_k} + h_k) \cos L_k & \\ 0 & & 0 & -1 \end{bmatrix} (\underline{v}_k^n + \underline{v}_{k+1}^n) \Delta t_{IMU} \quad (3.53)$$

La figura 3.2 riassume l'intero processo di integrazione descritto in questa sezione.

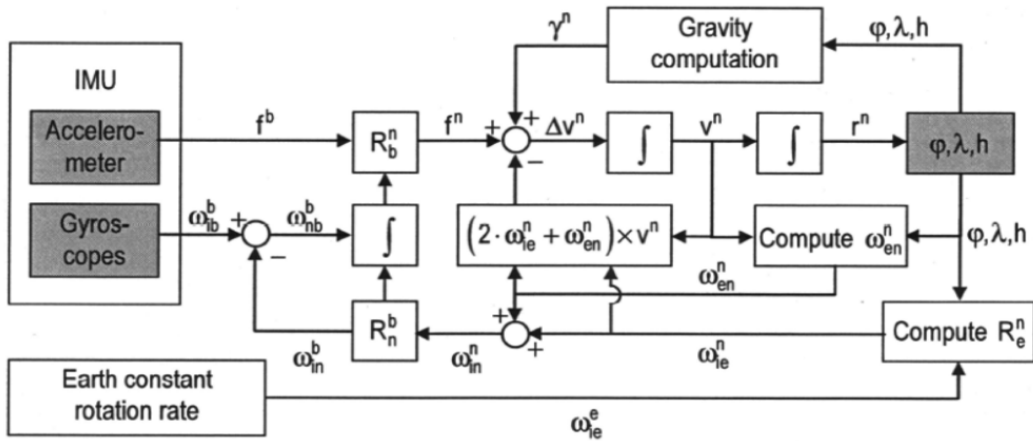


Figura 3.2: Integrazione a tempo discreto delle equazioni di navigazione [36]

Capitolo 4

Localizzazione mediante *sensor fusion*

“ Lasciatemi ribadire categoricamente che non può esistere qualcosa come un concetto confuso... Si può parlare di cose confuse, ma esse non possono in nessun modo essere concetti scientifici. Alcune persone nel passato hanno scoperto molte cose interessanti, hanno formulato le proprie scoperte in modo non confuso ed è così che noi tutti siamo potuti progredire nelle scienze. ”

— Rudolf E. Kálmán

In questo capitolo si provvederà a fondere la stima ottenuta dal processo di navigazione inerziale, descritto nel capitolo precedente, con le misure fornite da strumenti che si aggiungono agli accelerometri e ai giroscopi della piattaforma inerziale. Per ottenere dei risultati più accurati si utilizzeranno come sensori esterni sia gli odometri che il GPS che il magnetometro.

In prima analisi si esporranno le equazioni della dinamica dell'errore di un sistema di navigazione inerziale, ottenute da un'analisi di perturbazione. Per correggere questi errori sarà poi costruito un filtro di Kalman secondo due configurazioni: una in anello aperto (*open loop*) ed una in anello chiuso (*closed loop*). Verranno inoltre discussi in dettaglio i numerosi problemi che affliggono la realizzazione del filtro come l'instabilità numerica, l'allineamento delle misure fornite dai sensori esterni con quelle della IMU e la correzione del *lever-arm*.

4.1 Modello dell'errore

L'analisi dell'errore sfrutta i metodi di perturbazione al fine di linearizzare il sistema di equazioni differenziali non lineari [7]. Indicando nel seguito i valori stimati con $\tilde{\cdot}$ e gli errori con δ le perturbazioni di posizione, velocità e orientamento possono essere

espresse come

$$\tilde{\underline{v}}^n = \underline{v}^n + \delta \underline{v}^n \quad (4.1)$$

$$\tilde{\underline{p}}^n = \underline{p}^n + \delta \underline{p}^n \quad (4.2)$$

$$\tilde{C}_b^n = (I - E^n) C_b^n \quad (4.3)$$

dove E^n è la forma matriciale *skew* simmetrica del vettore $\underline{\epsilon}^n$ contenente gli errori di orientamento ϵ_N , ϵ_E e ϵ_D rispettivamente in direzione Nord, Est e *Down*

$$\underline{\epsilon}^n = \begin{bmatrix} \epsilon_N \\ \epsilon_E \\ \epsilon_D \end{bmatrix} \quad E^n = (\underline{\epsilon}^n \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_D & \epsilon_E \\ \epsilon_D & 0 & -\epsilon_N \\ -\epsilon_E & \epsilon_N & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

La trasformazione (4.3) è data con un vincolo esplicito di ortogonalità [7].

4.1.1 Dinamica dell'errore di velocità

Si può calcolare l'equazione dinamica della velocità riferendosi alla (3.27)

$$\dot{\tilde{\underline{v}}}^n = \tilde{C}_b^n \tilde{\underline{f}}^b - (2\tilde{\underline{\omega}}_{ie}^n + \tilde{\underline{\omega}}_{en}^n) \times \tilde{\underline{v}}^n + \tilde{\underline{g}}^n \quad (4.5)$$

dove $\tilde{\underline{g}}^n = \underline{g}^n + \delta \underline{g}^n$ è la perturbazione della gravità. Perturbando l'equazione di cui sopra si ottiene

$$\dot{\underline{v}}^n + \delta \dot{\underline{v}}^n = (I - E^n) C_b^n (\underline{f}^b + \delta \underline{f}^b) - (2\underline{\omega}_{ie}^n + \underline{\omega}_{en}^n + 2\delta \underline{\omega}_{ie}^n + \delta \underline{\omega}_{en}^n) \times (\underline{v}^n + \delta \underline{v}^n) + \underline{g}^n + \delta \underline{g}^n \quad (4.6)$$

Raccogliendo i termini l'equazione si riduce a

$$\begin{aligned} \delta \dot{\underline{v}}^n &= -(2\delta \underline{\omega}_{ie}^n + \delta \underline{\omega}_{en}^n) \times \underline{v}^n + \delta \underline{g}^n - (2\underline{\omega}_{ie}^n + \underline{\omega}_{en}^n) \times \delta \underline{v}^n - \underline{\epsilon}^n \times \underline{f}^n + C_b^n \delta \underline{f}^b = \\ &= \underline{v}^n \times (2\delta \underline{\omega}_{ie}^n + \delta \underline{\omega}_{en}^n) + \delta \underline{g}^n - (2\underline{\omega}_{ie}^n + \underline{\omega}_{en}^n) \times \delta \underline{v}^n + \underline{f}^n \times \underline{\epsilon}^n + C_b^n \delta \underline{f}^b \end{aligned} \quad (4.7)$$

in cui il primo e il secondo termine possono essere sviluppati in funzione degli errori di velocità. Riferendosi alla (3.14) si può ottenere

$$2\underline{\omega}_{ie}^n + \underline{\omega}_{en}^n = \left[2\omega_e \cos L + \frac{v_E}{R_e + h} \quad \frac{v_n}{R_n + h} \quad -2\omega_e \sin L - \frac{v_E}{R_e + h} \tan L \right]^T \quad (4.8)$$

Perturbando anche questa equazione si avrà

$$2\delta \underline{\omega}_{ie}^n + \delta \underline{\omega}_{en}^n = \delta \Omega_p \delta \underline{p}^n + \delta \Omega_v \delta \underline{v}^n \quad (4.9)$$

dove

$$\delta\Omega_p = \begin{bmatrix} -2\omega_e \sin L & 0 & \frac{-v_E}{(R_e + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(R_n + h)^2} \\ -2\omega_e \cos L - \frac{v_E}{(R_e + h) \cos^2 L} & 0 & \frac{v_e}{(R - e + h)^2} \tan L \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

mentre

$$\delta\Omega_v = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_e + h} & 0 \\ \frac{-1}{R_n + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_e + h} \tan L & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Usando l'equazione (4.9), il primo termine a destra dell'uguale nell'equazione (4.7) può essere sviluppato in funzione degli errori di posizione e velocità

$$\underline{v}^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) = (\underline{v}^n \times)(\delta\Omega_p \delta \underline{p}^n + \delta\Omega_v \delta \underline{v}^n) = (\underline{v}^n \times) \delta\Omega_p \delta \underline{p}^n + (\underline{v}^n \times) \delta\Omega_v \delta \underline{v}^n \quad (4.12)$$

Svolgendo i prodotti si ricava

$$\begin{aligned} & (\underline{p}^n \times) \delta\Omega_p = \\ & = \begin{bmatrix} -2v_E \omega_e \cos L - \frac{v_E^2}{(R_e + h) \cos^2 L} & 0 & \frac{-v_N v_D}{(R_n + h)^2} + \frac{v_E^2}{(R_e + h)^2} \tan L \\ 2\omega_e (v_N \cos L - v_D \sin L) + \frac{v_E v_N}{(R_e + h) \cos^2 L} & 0 & \frac{-v_E v_D}{(R_e + h)^2} - \frac{v_N v_E}{(R_e + h)^2} \tan L \\ 2v_E \omega_e \sin L & 0 & \frac{v_E^2}{(R_e + h)^2} + \frac{v_N^2}{(R_n + h)^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$(\underline{v}^n \times) \delta\Omega_v = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{R_n + h} & \frac{-v_E}{R_e + h} \tan L & 0 \\ 0 & \frac{v_D}{R_e + h} + \frac{v_N}{R_e + h} \tan L & 0 \\ \frac{-v_N}{R_n + h} & \frac{-v_E}{R_e + h} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Il vettore gravità nella terna-n \underline{g}^n è approssimato con il vettore di gravità normale alla superficie terrestre $\begin{bmatrix} 0 & 0 & g \end{bmatrix}^T$ in cui g varia con l'altitudine. Assumendo un modello sferico della Terra e il seguente modello semplificato della gravità [41]

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R + h} \right)^2 \quad (4.15)$$

dove g_0 è la gravità normale alla superficie terrestre ad altitudine $h = 0$, e $R = \sqrt{R_n R_e}$. Perturbando l'equazione di cui sopra

$$\delta g = -2 \left(\frac{g}{R+h} \right) \delta h \quad (4.16)$$

Nel caso di un veicolo in moto sulla superficie terrestre g può tuttavia essere ritenuta circa costante, poiché non si potranno mai avere delle grosse variazioni di altitudine. Utilizzando quindi le equazioni presentate in precedenza, l'equazione dinamica dell'errore di velocità (4.7) può essere riscritta come

$$\delta \dot{\underline{v}}^n = F_{vp} \delta \underline{p}^n + F_{vv} \delta \underline{v}^n + (\underline{f}^n \times) \underline{\epsilon}^n + C_b^n \delta \underline{f}^b \quad (4.17)$$

dove

$$F_{vp} = \begin{bmatrix} -2v_E \omega_e \cos L - \frac{v_E^2}{(R_e+h) \cos^2 L} & 0 & \frac{-v_N v_D}{(R_n+h)^2} + \frac{v_E^2}{(R_e+h)^2} \tan L \\ 2\omega_e (v_N \cos L - v_D \sin L) + \frac{v_E v_N}{(R_e+h) \cos^2 L} & 0 & \frac{-v_E v_D}{(R_e+h)^2} - \frac{v_N v_E}{(R_e+h)^2} \tan L \\ 2v_E \omega_e \sin L & 0 & \frac{v_E^2}{(R_e+h)^2} + \frac{v_N^2}{(R_n+h)^2} - \frac{2g}{R+h} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$F_{vv} = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{R_n+h} & -2\omega_e \sin L - 2 \frac{v_E}{R_e+h} \tan L & \frac{v_N}{R_n+h} \\ 2\omega_e \sin L + \frac{v_E}{R_e+h} \tan L & \frac{v_D + v_N \tan L}{R_e+h} & 2\omega_e \cos L + \frac{v_E}{R_e+h} \\ -2 \frac{v_N}{R_n+h} & -2\omega_e \cos L - 2 \frac{v_E}{R_e+h} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

4.1.2 Dinamica dell'errore di posizione

La linearizzazione dell'equazione dinamica dell'errore di posizione può essere ottenuta perturbando le equazioni dinamiche per la posizione geodetica (3.29). Siccome queste sono funzione sia di posizione che di velocità, si procede applicando le derivate parziali

$$\delta \dot{\underline{p}}^n = F_{pp} \delta \underline{p}^n + F_{pv} \delta \underline{v}^n \quad (4.20)$$

dove

$$F_{pp} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{L}}{\partial L} & \frac{\partial \dot{L}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{L}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial L} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial L} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-v_N}{(R_n + h)^{1/2}} \\ \frac{v_E}{(R_e + h) \cos^2 L} \sin L & 0 & \frac{v_E}{(R_e + h)^2 \cos L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$F_{pv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{L}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{L}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{L}}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_N} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_E} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial v_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_n + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_e + h) \cos L} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

4.1.3 Dinamica dell'errore di orientamento

Riscrivendo l'equazione (3.31), essa può essere espressa come

$$\dot{C}_b^n = \tilde{C}_b^n (\tilde{\Omega}_{ib}^b - \tilde{\Omega}_{in}^b) \quad (4.23)$$

Eguagliando la derivata dell'equazione (4.3) alla (4.23) si ottiene

$$\begin{aligned} -\dot{E}^n C_b^n + (I - E^n) \dot{C}_b^n &= (I - E^n) C_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b + \delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) = \\ &= (I - E^n) C_b^n (\Omega_{ib}^b - \Omega_{in}^b) + (I - E^n) C_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) = \\ &= (I - E^n) C_b^n \Omega_{nb}^b + (I - E^n) C_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Tale equazione può essere poi semplificata come segue

$$-\dot{E}^n C_b^n = (I - E^n) C_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) \quad (4.25)$$

Riordinando gli elementi, quest'ultima si può riscrivere come

$$\dot{E}^n = -C_b^n (\delta\Omega_{ib}^b - \delta\Omega_{in}^b) C_n^b \quad (4.26)$$

oppure in forma vettoriale facendo riferimento alla (4.4)

$$\dot{\underline{\epsilon}}^n = -C_b^n (\delta\underline{\omega}_{ib}^b - \delta\underline{\omega}_{in}^b) \quad (4.27)$$

Per ottenere l'equazione dell'errore di $\delta\underline{\omega}_{in}^b$ si parte da $\tilde{\underline{\omega}}_{in}^b = \tilde{C}_n^b \tilde{\underline{\omega}}_{in}^n$ che può essere riscritta come

$$\underline{\omega}_{in}^b + \delta\underline{\omega}_{in}^b = C_n^b (I + E^n) (\underline{\omega}_{in}^n + \delta\underline{\omega}_{in}^n) \quad (4.28)$$

Riordinando i termini

$$\begin{aligned} \delta\underline{\omega}_{in}^b &= C_n^b (\delta\underline{\omega}_{in}^n + E^n \underline{\omega}_{in}^n) = \\ &= C_n^b (\delta\underline{\omega}_{in}^n + (\epsilon^n \times) \underline{\omega}_{in}^n) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sostituendo la (4.29) nella (4.27)

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\epsilon}}^n &= \delta\underline{\omega}_{in}^n + (\underline{\epsilon}^n \times) \underline{\omega}_{in}^n - C_b^n \delta\underline{\omega}_{ib}^b = \\ &= \delta\underline{\omega}_{in}^n - (\underline{\omega}_{in}^n \times) \underline{\epsilon}^n - C_b^n \delta\underline{\omega}_{ib}^b \end{aligned} \quad (4.30)$$

La procedura che segue espande il primo termine a destra dell'uguale esplicitando l'errore di posizione e di velocità. Riferendosi all'equazione (3.14) e alla (4.9), l'errore di orientamento può essere scritto come

$$\underline{\epsilon}^n = F_{ep} \delta \underline{p}^n + F_{ev} \delta \underline{v}^n - (\underline{\omega}_{in}^n \times) \underline{\epsilon}^n - C_b^n \delta \underline{\omega}_{ib}^b \quad (4.31)$$

dove

$$F_{ep} = \begin{bmatrix} -\omega_e \sin L & 0 & \frac{-v_E}{(R_e + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{v_N}{(R_n + h)^2} \\ -\omega_e \cos L - \frac{v_E}{(R_e + h) \cos^2 L} & 0 & \frac{v_E}{(R_e + h)^2} \tan L \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$F_{ev} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_e + h} & 0 \\ \frac{-1}{R_n + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_e + h} \tan L & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

4.2 Localizzazione mediante filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è un efficiente stimatore ricorsivo che valuta lo stato di un sistema dinamico a partire da una serie di misure soggette a rumore. Risulta dunque necessario individuare il sistema di equazioni da implementare per far funzionare il suddetto filtro.

4.2.1 Equazioni di stato del filtro di Kalman

Velocità, posizione e orientamento di un corpo rigido in moto sulla Terra possono essere genericamente descritte da un sistema di equazioni non lineari.

In questo caso si definisce: \underline{x} come il vettore di stato reale (nella terna-n) con riferimento alla (3.32) e \underline{u} come il vettore delle misure ideali della IMU (in assenza di rumore) con riferimento alla (3.19) e alla (3.20)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{v}^n \\ \underline{p}^n \\ \underline{C}_b^n \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{f}^b \\ \underline{\omega}_{ib}^b \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Si considera inoltre: $\tilde{\underline{x}}$ come il vettore di stato di prima stima ottenuto integrando il segnale della IMU con il procedimento della navigazione inerziale e $\tilde{\underline{u}}$ come il vettore delle misure della IMU in presenza di rumore

$$\tilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{v}}^n \\ \tilde{\underline{p}}^n \\ \tilde{\underline{C}}_b^n \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{f}}^b \\ \tilde{\underline{\omega}}_{ib}^b \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Nella letteratura scientifica si ritiene di avere soltanto un ricevitore GPS come strumento di misura aggiuntivo rispetto alla IMU. Dal segnale scambiato con i satelliti è possibile calcolare la posizione del veicolo espressa nella (3.35) e derivando questa se ne può ottenere anche la velocità vista in (3.36). Di conseguenza il vettore delle misure esterne ideali \underline{y} e il corrispondente vettore in presenza di rumore di misura \underline{y}_{ext} vengono di solito espressi nel modo seguente

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{v}^n \\ \underline{p}^n \end{bmatrix} \quad \underline{y}_{ext} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{GPS}^n \\ \underline{p}_{GPS}^n \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Nel presente lavoro di tesi si è tuttavia cercato di superare questo approccio, ritenendo utile aggiungere ulteriori strumenti da affiancare alle misure realizzate grazie al GPS. Al fine di perfezionare la correzione realizzata tramite il filtro di Kalman, sono state impiegate le misure ricavate dai dispositivi esterni alla IMU già introdotti al paragrafo 2.2: gli odometri forniscono la velocità nella direzione di avanzamento contenuta in (3.34), mentre il GPS mostra la posizione del veicolo sulla superficie terrestre (3.35) e consente di ricavarne la velocità per derivazione (3.36), il magnetometro misura infine il campo magnetico terrestre sulla terna-b, rappresentato in forma vettoriale nella (3.37). Unendo queste informazioni si può così scrivere il vettore delle misure

esterne ideali \underline{y} e il corrispondente vettore in presenza di rumore di misura \underline{y}_{ext}

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} v_x \\ \underline{v}^n \\ \underline{p}^n \\ \underline{m}^b \end{bmatrix} \quad \underline{y}_{ext} = \begin{bmatrix} v_{x_{odo}} \\ \underline{v}_{GPS}^n \\ \underline{p}_{GPS}^n \\ \underline{m}_{mag}^b \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Si può di conseguenza scrivere il sistema non lineare in una forma generica

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= f(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{y} &= h(\underline{x}, \underline{u}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Conoscendo l'espressione di $h(\underline{x}, \underline{u})$ è dunque possibile stimare le misure esterne $\tilde{\underline{y}}$ a partire dalla stima dello stato $\tilde{\underline{x}}$ e dalle misure della IMU affette da rumore $\tilde{\underline{u}}$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\underline{x}}} &= f(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) \\ \tilde{\underline{y}} &= h(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Definendo poi il vettore degli errori sulla stima dello stato come $\delta\underline{x} = \underline{x} - \tilde{\underline{x}}$ e riferendosi alle equazioni (4.1), (4.2) e (4.3)

$$\delta\underline{x} = \begin{bmatrix} \delta\underline{v}^n \\ \delta\underline{p}^n \\ E^n \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

dove E^n può essere scritto in forma vettoriale sostituendovi $\underline{\epsilon}^n = [\epsilon_N \quad \epsilon_E \quad \epsilon_D]^T$ per quanto visto nella (4.4), ne consegue che $\delta\underline{x}$ è un vettore di nove elementi e non di quindici come lo erano \underline{x} e $\tilde{\underline{x}}$. Analogamente anche il vettore del rumore di misura della IMU $\delta\underline{u} = \underline{u} - \tilde{\underline{u}}$ e il vettore degli errori sulla stima delle misure esterne $\delta\underline{y} = \underline{y} - \tilde{\underline{y}}$ possono essere riscritti come

$$\delta\underline{u} = \begin{bmatrix} \delta\underline{f}^b \\ \delta\underline{\omega}_{ib}^b \end{bmatrix} \quad \delta\underline{y} = \begin{bmatrix} \delta v_x \\ \delta\underline{v}^n \\ \delta\underline{p}^n \\ \delta\underline{m}^b \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Dalla differenza delle equazioni (4.38) e (4.39) si ricava perciò

$$\begin{aligned} \delta\dot{\underline{x}} &= f(\underline{x}, \underline{u}) - f(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) = f(\tilde{\underline{x}} + \delta\underline{x}, \tilde{\underline{u}} + \delta\underline{u}) - f(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) \\ \delta\underline{y} &= h(\underline{x}, \underline{u}) - h(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) = h(\tilde{\underline{x}} + \delta\underline{x}, \tilde{\underline{u}} + \delta\underline{u}) - h(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

che per piccoli errori possono essere approssimate da

$$\begin{aligned}\delta \dot{\underline{x}} &= F(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \underline{x} + G(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \underline{u} \\ \delta \underline{y} &= H(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \underline{x} + D(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \underline{u}\end{aligned}\quad (4.43)$$

dove

$$F(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) = \left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}} f(\underline{x}, \underline{u}) \right|_{(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})} \quad G(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) = \left. \frac{\partial}{\partial \underline{u}} f(\underline{x}, \underline{u}) \right|_{(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})} \quad (4.44)$$

$$H(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) = \left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}} h(\underline{x}, \underline{u}) \right|_{(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})} \quad D(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) = \left. \frac{\partial}{\partial \underline{u}} h(\underline{x}, \underline{u}) \right|_{(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})} \quad (4.45)$$

La trasformazione di uscita può essere scritta come

$$\delta \underline{z} = \delta \underline{y} - \delta \underline{y}_{ext} = (\underline{y} - \tilde{\underline{y}}) - (\underline{y} - \underline{y}_{ext}) = \underline{y}_{ext} - \tilde{\underline{y}} \quad (4.46)$$

Quindi sostituendo quest'ultima relazione nella (4.43) si può ottenere, per rumori sufficientemente piccoli, un modello stocastico lineare dell'errore come di seguito riportato

$$\begin{aligned}\delta \dot{\underline{x}} &= F(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \underline{x} + G(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \underline{u} \\ \delta \underline{z} &= H(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \underline{x} + D(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \underline{u} - \delta \underline{y}_{ext}\end{aligned}\quad (4.47)$$

Identificazione della matrice F e della matrice G

La forma della matrice F e della matrice G viene espressa nella (4.44) come linearizzazione della funzione $f(\underline{x}, \underline{u})$ riportata in (3.32). Esse possono essere calcolate riferendosi all'analisi dell'errore condotta al paragrafo 4.1 e unendo le equazioni (4.17), (4.20), (4.31)

$$F = \begin{bmatrix} F_{vv} & F_{vp} & (\underline{f}^n \times) \\ F_{pv} & F_{pp} & [0]_{3 \times 3} \\ F_{ev} & F_{ep} & -(\underline{\omega}_{in}^n \times) \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} C_b^n & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & -C_b^n \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Identificazione della matrice H e della matrice D

Come viene espresso nella (4.45), la matrice H e la matrice D sono ottenute dalla linearizzazione della funzione $h(\underline{x}, \underline{u})$. La loro determinazione dipende dunque dalla scelta delle misure esterne \underline{y} adottate.

Riferendosi all'espressione (4.36), adottata comunemente in letteratura, la funzio-

ne $h(\underline{x}, \underline{u})$ si riduce semplicemente ad un'identità

$$\begin{aligned}\underline{v}^n &= \underline{v}^n \\ \underline{p}^n &= \underline{p}^n\end{aligned}\tag{4.49}$$

quindi le due matrici H e D possono essere espresse come

$$H = \begin{bmatrix} [I]_{6 \times 6} & [0]_{6 \times 3} \end{bmatrix} \quad D = [0]_{6 \times 6}\tag{4.50}$$

dove $[0]_{n \times m}$ e $[I]_{n \times m}$ indicano rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità di n righe e m colonne. Si noti che D coincide con la matrice nulla poiché le misure della IMU non influenzano quelle degli altri strumenti.

Come già esposto in precedenza, in questa tesi è stato sviluppato un approccio differente che tiene conto di un maggior numero di dispositivi installati sul robot. In questo caso l'espressione delle misure esterne cui si fa riferimento è quello della (4.37) e la determinazione della matrice H e della matrice D necessita perciò di ulteriori passaggi.

In primo luogo è necessario identificare il legame esistente tra le nuove misure \underline{y} e lo stato del sistema \underline{x} . La velocità di avanzamento v_x , misurata dall'odometria, appartiene al vettore \underline{v}^b della terna-b, mentre invece la velocità dello stato \underline{v}^n viene espressa nella terna-n. La trasformazione di coordinate viene realizzata grazie alla matrice di rotazione C_b^n

$$\underline{v}^b = C_b^n \underline{v}^n\tag{4.51}$$

Allo stesso modo si può trasformare il campo magnetico terrestre \underline{m}^n nel campo magnetico \underline{m}^b misurato dal magnetometro triassiale

$$\underline{m}^b = C_b^n \underline{m}^n\tag{4.52}$$

Di conseguenza la funzione $h(\underline{x}, \underline{u})$ può essere ricavata semplicemente unendo le (4.51), (4.49) e (4.52)

$$\begin{bmatrix} \underline{v}^b \\ \underline{v}^n \\ \underline{p}^n \\ \underline{m}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_b^n \underline{v}^n \\ \underline{v}^n \\ \underline{p}^n \\ C_b^n \underline{m}^n \end{bmatrix}\tag{4.53}$$

La determinazione della matrice H richiede di ricavare le equazioni di misura

perturbate. In questo caso invertendo l'espressione (4.51) si può scrivere

$$\tilde{\underline{v}}^n = C_b^n \tilde{\underline{v}}^b \quad (4.54)$$

perturbando l'equazione con riferimento alla (4.1) e alla (4.3) si ottiene

$$\underline{v}^n + \delta \underline{v}^n = (I - E^n) C_b^n \underline{v}^b + \delta \underline{v}^b \quad (4.55)$$

raccogliendo i termini l'equazione si riduce a

$$\begin{aligned} \delta \underline{v}^n &= C_b^n \delta \underline{v}^b - \underline{\epsilon}^n \times \underline{v}^n = \\ &= C_b^n \delta \underline{v}^b + \underline{v}^n \times \underline{\epsilon}^n \end{aligned} \quad (4.56)$$

L'espressione deve poi essere riscritta mettendo in evidenza l'errore di velocità dell'odometria

$$\begin{aligned} \delta \underline{v}^b &= C_n^b \delta \underline{v}^n - C_n^b \underline{v}^n \times \underline{\epsilon}^n = \\ &= C_n^b \delta \underline{v}^n - (\underline{v}^b \times) \underline{\epsilon}^n \end{aligned} \quad (4.57)$$

Sapendo che gli odometri misurano solo la velocità lungo la direzioni di avanzamento, la relazione di cui sopra deve essere riscritta tenendo in considerazione soltanto la prima riga del vettore $\delta \underline{v}^b$ che equivale a premoltiplicare entrambi i membri per il vettore $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} C_n^b \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\underline{v}^b \times) \begin{bmatrix} \epsilon_N \\ \epsilon_E \\ \epsilon_D \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

da ciò si ottiene

$$\delta v_x = \mathfrak{C}_n^b \delta v^n - \mathfrak{v}^b \epsilon^n \quad (4.59)$$

dove con \mathfrak{C}_n^b e \mathfrak{v}^b si indicano i vettori contenenti rispettivamente la prima riga della matrice C_n^b e la prima riga della matrice *skew* simmetrica $(\underline{v}^b \times)$.

Un procedimento analogo può essere seguito per l'equazione di misura del magnetometro (4.52) che, una volta invertita, si scrive

$$\tilde{\underline{m}}^n = C_b^n \tilde{\underline{m}}^b \quad (4.60)$$

perturbando l'equazione in modo del tutto simile al caso precedente si scrive

$$\underline{m}^n + \delta \underline{m}^n = (I - E^n) C_b^n \underline{m}^b + \delta \underline{m}^b \quad (4.61)$$

raccogliendo i termini l'equazione si riduce a

$$\begin{aligned}\delta \underline{m}^n &= C_n^b \delta \underline{m}^b - \epsilon^n \times \underline{m}^n = \\ &= C_n^b \delta \underline{m}^b + \underline{m}^n \times \epsilon^n\end{aligned}\quad (4.62)$$

L'espressione deve poi essere riscritta mettendo in evidenza l'errore del campo magnetico misurato dal magnetometro

$$\begin{aligned}\delta \underline{m}^b &= C_n^b \delta \underline{m}^n - C_n^b \underline{m}^n \times \epsilon^n = \\ &= C_n^b \delta \underline{m}^n - (\underline{m}^b \times) \epsilon^n\end{aligned}\quad (4.63)$$

ritenendo stabile e costante il campo magnetico terrestre entro l'area ristretta in cui il robot si muove, si può considerare $\delta \underline{m}^n = 0$

$$\delta \underline{m}^b = -(\underline{m}^b \times) \epsilon^n \quad (4.64)$$

La matrice H e la matrice D possono dunque essere descritte unendo le equazioni (4.59) e (4.64)

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n^b & [0]_{1 \times 3} & -\mathbf{v}^b \\ [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & -(\underline{m}^b \times) \end{bmatrix} \quad D = [0]_{10 \times 6} \quad (4.65)$$

Anche in questo caso le misure della IMU non hanno influenza su quelle degli altri strumenti, perciò la matrice D risulta essere nulla.

Identificazione delle matrici di covarianza

Per le sue caratteristiche intrinseche, le condizioni di lavoro ottime per un filtro di Kalman si hanno in presenza di rumori bianchi gaussiani a media nulla, indipendenti e non correlati fra di loro.

Poiché il vettore degli errori sulle misure della IMU $\delta \underline{u}$ è incognito, si può pensare di modellarlo semplicemente come un rumore bianco gaussiano a media nulla. Di contro, se è disponibile un dettagliato modello stocastico dei sensori, il vettore degli errori sullo stato $\delta \underline{x}$ può essere aumentato per poter includere ulteriori elementi come i *bias*, i *drift* e i disallineamenti della IMU. In ogni caso è possibile derivare un modello dinamico degli errori come espresso in (4.47), con un rumore bianco gaussiano agente su $\delta \underline{u}$ e avente covarianza

$$Q_{IMU} = \text{diag} \left[\sigma_{a_x}^2 \quad \sigma_{a_y}^2 \quad \sigma_{a_z}^2 \quad \sigma_{\omega_x}^2 \quad \sigma_{\omega_y}^2 \quad \sigma_{\omega_z}^2 \right] \quad (4.66)$$

dove σ_a^2 e σ_ω^2 sono rispettivamente le varianze degli accelerometri e quelle dei giroscopi, la matrice può inoltre essere ritenuta diagonale poiché non ci sono interferenze tra le diverse misurazioni. Questa matrice di covarianza può essere ottenuta nel modo seguente

$$E[\delta \underline{u}(t) \delta \underline{u}^T(\tau)] = Q_{IMU}(t) \delta^*(t - \tau) \quad (4.67)$$

dove l'operatore δ^* denota la funzione delta di Dirac [20]. Descrivendo poi gli ingressi del sistema come $\delta \underline{w} = G \delta \underline{u}$ è meno intuitivo scrivere direttamente la forma della covarianza corrispondente Q , ma sfruttando la relazione (4.67) essa si può ottenere in modo del tutto analogo

$$\begin{aligned} E[\delta \underline{w}(t) \delta \underline{w}^T(\tau)] &= E[G(t) \delta \underline{u}(t) \delta \underline{u}^T(\tau) G^T(\tau)] = \\ &= G(t) Q_{IMU}(t) G^T(\tau) \delta^*(t - \tau) = \\ &= Q(t) \delta^*(t - \tau) \end{aligned} \quad (4.68)$$

L'utilità della covarianza Q risulterà più evidente nelle prossime pagine.

Analogamente anche gli strumenti di misura esterni e indipendenti dalla IMU saranno matematicamente caratterizzati da appropriati rumori di misura $\delta \underline{y}_{ext} = \underline{y} - \underline{y}_{ext}$. Ancora una volta è plausibile modellare questo disturbo come un rumore bianco gaussiano con media nulla avente covarianza

$$R_{ext} = \text{diag} \left[\sigma_{v_x}^2 \quad \sigma_{v_N}^2 \quad \sigma_{v_E}^2 \quad \sigma_{v_D}^2 \quad \sigma_L^2 \quad \sigma_\lambda^2 \quad \sigma_h^2 \quad \sigma_{m_x}^2 \quad \sigma_{m_y}^2 \quad \sigma_{m_z}^2 \right] \quad (4.69)$$

dove $\sigma_{v_x}^2$ è la varianza della velocità di avanzamento misurata dagli odometri, mentre $\sigma_{v_N}^2$, $\sigma_{v_E}^2$, $\sigma_{v_D}^2$ e σ_L^2 , σ_λ^2 , σ_h^2 sono le varianze delle velocità e delle posizioni calcolate con il GPS, infine $\sigma_{m_x}^2$, $\sigma_{m_y}^2$ e $\sigma_{m_z}^2$ sono le varianze riferite ai dati forniti dal magnetometro. Anche in questo caso, non essendoci interferenze tra le diverse misurazioni, la matrice di covarianza può essere considerata diagonale.

4.2.2 Discretizzazione delle equazioni di stato

Per un'implementazione in *real-time* dell'algoritmo è richiesta la discretizzazione del sistema dinamico. Questa può essere realizzata utilizzando un modello di discretizzazione *zero-order hold* (ZOH)

$$\begin{aligned} \delta \underline{x}_{k+1} &= F_d(\tilde{\underline{x}}_k, \tilde{\underline{u}}_k) \delta \underline{x}_k + G_d(\tilde{\underline{x}}_k, \tilde{\underline{u}}_k) \delta \underline{u}_k \\ \delta \underline{z}_k &= H_d(\tilde{\underline{x}}_k, \tilde{\underline{u}}_k) \delta \underline{x}_k + D_d(\tilde{\underline{x}}_k, \tilde{\underline{u}}_k) \delta \underline{u}_k - \delta \underline{y}_{extk} \end{aligned} \quad (4.70)$$

in cui, rappresentando con Δt_F il tempo di campionamento usato nel filtro, le matrici possono essere calcolate semplificando il risultato attraverso l'approssimazione di

Eulero esplicito, al fine di ridurre il carico di lavoro della CPU

$$F_d = e^{F\Delta t_F} \simeq I + F\Delta t_F \quad H_d = H \quad (4.71)$$

$$G_d = \int_0^{\Delta t_F} e^{F\eta} G d\eta \simeq (e^{F\Delta t_F} - I)F^{-1}G \simeq G\Delta t_F \quad D_d = D \quad (4.72)$$

Utilizzando Φ per indicare la matrice di transizione associata alla matrice dinamica F , si possono determinare anche le forme discrete delle matrici di covarianza

$$Q_{d_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) Q(\tau) \Phi(t_{k+1}, \tau)^T d\tau \simeq Q(t_k) \Delta t_F \quad (4.73)$$

$$R_{d_k} = R$$

in cui la matrice di covarianza Q è stata introdotta nella (4.68).

4.2.3 Correzione in anello aperto (*open loop*)

Il primo approccio utilizza un filtro di Kalman linearizzato per correggere continuamente il risultato dell'integrazione della IMU, come illustrato nella figura 4.1. Questa soluzione viene chiamata in *feedforward*.

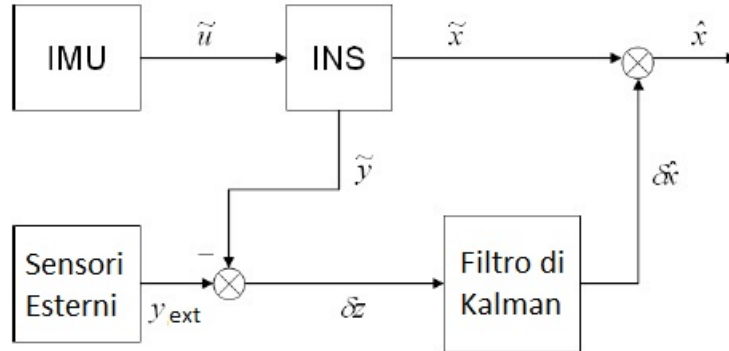


Figura 4.1: Filtro di Kalman in *open loop*

Come descritto al paragrafo 3.3 le equazioni di navigazione inerziale vengono integrate per aggiornare continuamente la stima dello stato \tilde{x} a partire dalle misure della IMU \tilde{u} , tale processo viene chiamato sistema di navigazione inerziale (INS). Questa prima stima consente di calcolare un'approssimazione delle misure fornite dagli strumenti esterni \tilde{y} . Intanto da questi sensori vengono acquisiti i dati effettivamente misurati y_{ext} , in modo da poter realizzare un confronto tra le due diverse quantità $\delta z = y_{ext} - \tilde{y}$ e quindi consentire una valutazione della bontà del processo di navigazione inerziale. Di conseguenza deve essere costruito uno stimatore ottimo

dello stato a partire dalla (4.47)

$$\begin{aligned}\delta\dot{\hat{x}} &= F(\tilde{x}, \tilde{u})\delta\hat{x} + L(\delta z - \delta\hat{z}) \\ \delta\hat{z} &= H(\tilde{x}, \tilde{u})\delta\hat{x}\end{aligned}\tag{4.74}$$

Risulta evidente che le matrici in questione sono linearizzate nell'intorno della traiettoria nominale \tilde{x} fornita dalla navigazione inerziale perciò quello utilizzato è di fatto un filtro di Kalman linearizzato che viene alimentato da

$$\underline{e} = \delta z - \delta\hat{z} = \underline{y}_{ext} - \tilde{y} - H_d\delta\hat{x}\tag{4.75}$$

cioè l'errore esistente tra il δz fornito al filtro e il $\delta\hat{z}$ calcolato tramite la trasformazione di uscita della (4.74). La quantità ottenuta grazie al filtro di Kalman $\delta\hat{x}$ è la correzione da applicare ai risultati della navigazione inerziale \tilde{x} in modo da pervenire ad una stima più accurata dello stato \hat{x} .

Il filtro è di seguito descritto nella sua forma a tempo discreto [46], utilizzando come condizioni iniziali: $\delta\hat{x}_0 = E[\delta x_0]$ e $P_0 = E[\delta x_0 \delta x_0^T]$

Predizione

$$\begin{aligned}\delta\hat{x}_i &= F_{d_{k-1}}\delta\hat{x}_{k-1} \\ P_i &= F_{d_{k-1}}P_{k-1}F_{d_{k-1}}^T + Q_{d_k}\end{aligned}$$

Aggiornamento

$$\begin{aligned}S_k &= H_{d_k}P_iH_{d_k}^T + R_{d_k} \\ K_k &= P_iH_{d_k}^T S_k^{-1} \\ \underline{e}_k &= \delta z_k - H_{d_k}\delta\hat{x}_i \\ \delta\hat{x}_k &= \delta\hat{x}_i + K_k\underline{e}_k \\ P_k &= P_i - K_kH_{d_k}P_i\end{aligned}\tag{4.76}$$

Le variabili qui utilizzate assumono i seguenti significati:

- $k - 1$ è l'istante di tempo riferito al passo precedente.
- k è l'istante in cui il filtro fornisce la stima finale della correzione $\delta\hat{x}$ da applicare allo stato.
- i è l'istante di tempo collocato tra l'istante $k - 1$ e k .
- F_d è la matrice di stato discretizzata del sistema linearizzato, si veda la (4.71).
- H_d è la matrice di osservazione discretizzata del sistema linearizzato, si veda la (4.71).

- P è la matrice di covarianza del vettore di stato aggiornata dal filtro.
- K è la matrice dei guadagni del filtro di Kalman.
- Q_d è la matrice di covarianza del rumore di attuazione, si veda la (4.73).
- R_d è la matrice di covarianza dell'errore di misura, si veda la (4.73).

La navigazione inerziale necessita solo delle misurazioni degli accelerometri e dei giroscopi, essa opera perciò ad intervalli di tempo piuttosto ridotti dovuti al tempo di campionamento della IMU Δt_{IMU} . Il filtro di Kalman deve invece poter acquisire i dati di tutti gli strumenti, ne consegue che esso non può far altro che lavorare con il tempo di campionamento più grande a disposizione, che in questo caso è quello del GPS Δt_{GPS} . In seguito a tutto ciò il filtro riesce correggere lo stato ad una frequenza molto più bassa di quella con cui viene calcolata la stima \tilde{x} .

Nonostante il limite intrinseco della navigazione inerziale porti lo stato a divergere progressivamente, si è comunque deciso di seguire questo tipo di approccio a scopo di confronto.

4.2.4 Correzione in anello chiuso (*closed loop*)

Il secondo approccio differisce dal precedente per la presenza di un filtro di Kalman esteso in linea di retroazione, il quale alimenta direttamente in ingresso l'integrazione della IMU con una configurazione in *feedback*, come illustrato nella figure 4.2. Nasce quindi l'idea di aggiornare le condizioni iniziali del processo di navigazione inerziale ad ogni passo del filtro, sostituendole con i valori corretti in seguito al processo di *sensor fusion*.

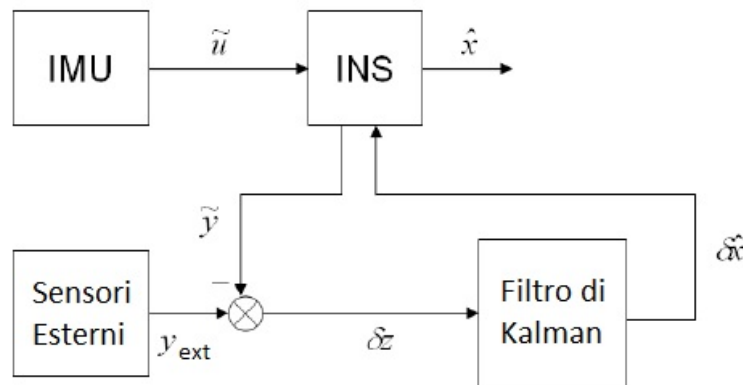


Figura 4.2: Filtro di Kalman in *closed loop*

Il principio di funzionamento è analogo al precedente. Le equazioni di navigazione inerziale vengono integrate per aggiornare direttamente la stima dello stato corretto \hat{x}

a partire dalle misure della IMU $\tilde{\underline{u}}$, tale processo viene chiamato sistema di navigazione inerziale (INS). Questa stima consente di calcolare un'approssimazione delle misure fornite dagli strumenti esterni $\tilde{\underline{y}}$. Intanto da questi sensori vengono acquisiti i dati effettivamente misurati \underline{y}_{ext} , in modo da poter realizzare un confronto tra le due diverse quantità $\delta \underline{z} = \underline{y}_{ext} - \tilde{\underline{y}}$ e quindi consentire una valutazione della bontà del processo di navigazione inerziale. Di conseguenza deve essere costruito uno stimatore ottimo dello stato a partire dalla (4.47)

$$\begin{aligned}\delta \dot{\hat{\underline{x}}} &= F(\hat{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \hat{\underline{x}} + L(\delta \underline{z} - \delta \hat{\underline{z}}) \\ \delta \hat{\underline{z}} &= H(\hat{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}})\delta \hat{\underline{x}}\end{aligned}\tag{4.77}$$

A differenza del caso precedente le matrici in questione sono linearizzate nell'intorno della traiettoria $\hat{\underline{x}}$, che è il risultato della correzione del filtro, perciò esso è di fatto un filtro di Kalman esteso che viene concettualmente alimentato da

$$\underline{e} = \delta \underline{z} = \underline{y}_{ext} - \tilde{\underline{y}}\tag{4.78}$$

cioè l'errore esistente tra la misure esterne reali \underline{y}_{ext} e le misure esterne stimate $\tilde{\underline{y}}$. La quantità ottenuta grazie al filtro di Kalman $\delta \hat{\underline{x}}$ è la correzione da applicare all'ultimo risultato della navigazione inerziale $\hat{\underline{x}}$, in modo da pervenire a condizioni iniziali più accurate per l'integrazione del passo successivo.

Il filtro è di seguito descritto nella sua forma a tempo discreto [46], utilizzando come condizioni iniziali: $\delta \hat{\underline{x}}_0 = E[\delta \underline{x}_0]$ e $P_0 = E[\delta \underline{x}_0 \delta \underline{x}_0^T]$

Predizione

$$P_i = F_{d_{k-1}} P_{k-1} F_{d_{k-1}}^T + Q_{d_k}$$

Aggiornamento

$$S_k = H_{d_k} P_i H_{d_k}^T + R_{d_k}\tag{4.79}$$

$$K_k = P_i H_{d_k}^T S_k^{-1}$$

$$\underline{e}_k = \delta \underline{z}_k$$

$$\delta \hat{\underline{x}}_k = K_k \underline{e}_k$$

$$P_k = P_i - K_k H_{d_k} P_i$$

Le variabili qui utilizzate assumono i seguenti significati:

- $k - 1$ è l'istante di tempo riferito al passo precedente.
- k è l'istante in cui il filtro fornisce la stima finale della correzione $\delta \hat{\underline{x}}$ da applicare allo stato.

- i è l'istante di tempo collocato tra l'istante $k - 1$ e k .
- F_d è la matrice di stato discretizzata del sistema linearizzato, si veda la (4.71).
- H_d è la matrice di osservazione discretizzata del sistema linearizzato, si veda la (4.71).
- P è la matrice di covarianza del vettore di stato aggiornata dal filtro.
- K è la matrice dei guadagni del filtro di Kalman.
- Q_d è la matrice di covarianza del rumore di attuazione, si veda la (4.73).
- R_d è la matrice di covarianza dell'errore di misura, si veda la (4.73).

Il grosso vantaggio di questo approccio *closed loop* risiede nel fatto che, ad ogni ciclo, l'integrazione delle equazioni di navigazione riparta utilizzando come condizione iniziale lo stato corretto dal filtro. In questo modo la stima ottenuta per integrazione non diverge più indefinitamente nel tempo. Questo garantisce una robustezza migliore ad eventuali disturbi presenti nelle misure utilizzate per la navigazione inerziale.

4.3 Problemi di implementazione

Nelle applicazioni reali degli algoritmi appena descritti ci si scontra con problemi di carattere pratico legati sia alle prestazioni del computer con cui si effettuano i calcoli che a quelle degli strumenti di misura.

Avendo a disposizione diverse tipologie di sensori essi saranno caratterizzati da frequenze di campionamento molto differenti, che possono anche non essere proporzionali tra di loro. In questo modo si ottengono campioni di misura realizzati in istanti temporali differenti o si potrebbe persino avere l'inizio dell'acquisizione in un momento diverso per ciascun sensore.

Gli strumenti inoltre hanno un loro ingombro e un loro peso, ragion per cui non possono essere installati nello stesso punto e non potranno avere misure riferite allo stesso punto fisico.

Il problema tipico legato all'utilizzo del calcolatore è dovuto alla presenza di numeri di molti ordini di grandezza di differenza. Questo diviene particolarmente critico quando si devono effettuare moltiplicazioni o divisioni tra i suddetti numeri, portando di conseguenza ad avere dei risultati che possono non essere del tutto corretti.

Vi è infine un ultimo aspetto legato strettamente al principio di funzionamento del processo di *sensor fusion*. L'integrazione tramite filtro di Kalman si basa infatti sull'unione di tutti i dati ricevuti dai diversi strumenti, al fine di determinare lo stato

del veicolo. Perciò se una di queste misure viene meno durante il funzionamento del robot è allora necessario cambiare le equazioni da passare al filtro. Come è già stato detto, non è così improbabile perdere il collegamento tra ricevitore GPS e satelliti e in queste situazioni si avranno momenti in cui il sistema di posizionamento globale non fornirà alcun dato. Il problema è che il GPS è uno strumento fondamentale nel processo di *sensor fusion* e senza di esso il sistema non risulta più essere osservabile.

Di seguito vengono esposte alcune possibili soluzioni ai problemi appena descritti.

4.3.1 Allineamento delle misure

I dati riportati da strumenti differenti sono solitamente misurati con tempi di campionamento diversi e di conseguenza potrebbero non essere stati acquisiti nello stesso istante di tempo. Per questa ragione diviene indispensabile interpolare i dati dei sensori aventi frequenza minore in modo tale da farli traslare nel tempo, andando a coincidere con gli istanti in cui si realizzano le misure dello strumento avente frequenza maggiore. Solitamente lo strumento che ha tempi di campionamento molto più piccoli è la IMU. Chiamando $y_{ext}(t_e)$ una qualunque misura ottenuta dai sensori esterni nell'istante di tempo t_e e t_{IMU} l'istante più vicino in cui si ha un dato della *inertial measurement unit*, si può dunque fare l'interpolazione lineare nel modo seguente

$$\begin{aligned} y_{ext}(t_{IMU}) &= y_{ext}(t_{e-1}) + \frac{y_{ext}(t_e) - y_{ext}(t_{e-1})}{t_e - t_{e-1}}(t_{IMU} - t_{e-1}) \\ &= \frac{t_e - t_{IMU}}{t_e - t_{e-1}}y_{ext}(t_{e-1}) + \frac{t_{IMU} - t_{e-1}}{t_e - t_{e-1}}y_{ext}(t_e) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Per applicazioni a più elevate prestazioni possono essere richieste interpolazioni di ordine superiore. Può essere ad esempio utilizzata l'interpolazione di Lagrange [9]

$$y_{ext}(t_{IMU}) = \sum_{i=k-m-1}^{k+m} y_{ext}(t_i) \prod_{j=k-m-1}^{k+m} \frac{t_{IMU} - t_j}{t_i - t_j}, \quad j \neq i \quad (4.81)$$

dove $2m + 1$ è l'ordine dell'interpolazione, infatti per $m = 0$ si ha una funzione del primo ordine e la (4.81) coincide con la (4.80).

4.3.2 Effetto *lever-arm*

I sensori non possono essere installati tutti nello stesso punto del robot, di conseguenza le misure realizzate da questi potranno differire anche sensibilmente tra loro, questo è quello che viene chiamato effetto *lever-arm*. Tale errore può essere ridotto prendendo la distanza Δr_{ext}^b a partire dalla IMU fino al punto di applicazione del sensore esterno di cui si vuole realizzare la correzione.

IMU e Odometri

Per il robot descritto al paragrafo 2.1 ed esaminato in questo lavoro di tesi, la distanza dalla piattaforma inerziale al punto in cui si applicano le misure degli odometri è espressa in metri e vale $\Delta r_{odo}^b = [-0.96 \quad -0.03 \quad 0.90]^T$. Essa comporta che la velocità di avanzamento misurata nel centro odometrico \underline{v}_{odo}^b debba essere riportata nel punto di applicazione della IMU \underline{v}_{IMU}^b . Ciò può essere realizzato sottraendo l'effetto dovuto alla velocità di rotazione del corpo $\underline{\omega}_{nb}^b$ alle velocità ricavate dagli odometri

$$\begin{aligned}
\underline{v}_{IMU}^b &= \underline{v}_{odo}^b - \Omega_{nb}^b \Delta r_{odo}^b = \\
&= \underline{v}_{odo}^b - (\Omega_{ni}^b + \Omega_{ib}^b) \Delta r_{odo}^b = \\
&= \underline{v}_{odo}^b + \Omega_{in}^b \Delta r_{odo}^b - \Omega_{ib}^b \Delta r_{odo}^b = \\
&= \underline{v}_{odo}^b + C_n^b C_b^n \Omega_{in}^b C_n^b C_b^n \Delta r_{odo}^b - \Omega_{ib}^b \Delta r_{odo}^b = \\
&= \underline{v}_{odo}^b + C_n^b (\Omega_{ie}^n - \Omega_{en}^n) C_b^n \Delta r_{odo}^b - \Omega_{ib}^b \Delta r_{odo}^b
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Tuttavia l'odometria fornisce solo l'informazione sulla velocità di avanzamento v_x , quindi si può estrarre solo la prima riga dall'equazione vettoriale di cui sopra

$$v_{x_{IMU}} = v_{x_{odo}} + [1 \quad 0 \quad 0] C_n^b (\Omega_{ie}^n - \Omega_{en}^n) C_b^n \Delta r_{odo}^b - [1 \quad 0 \quad 0] \Omega_{ib}^b \Delta r_{odo}^b \tag{4.83}$$

dove il vettore $[1 \quad 0 \quad 0]$ estrae il primo elemento di ogni prodotto al quale viene anteposto. Si realizza in questo modo la correzione che consente di avere i dati dell'odometria come se questi venissero calcolati nel punto di applicazione della IMU.

IMU e GPS

Il GPS riporta un'informazione sulla posizione \underline{p}_{GPS}^n , ma essa è riferita al punto in cui è stata installata l'antenna del ricevitore. Affinché il GPS misuri la posizione del veicolo in corrispondenza del punto in cui è invece installata la IMU è necessario trovare la distanza tra la piattaforma inerziale e l'antenna GPS, che per l'ATV impiegato vale in metri $\Delta r_{GPS}^b = [-0.26 \quad 0.43 \quad 0.02]^T$. Fatto ciò si può procedere alla correzione della misura nel modo seguente

$$\underline{p}_{IMU}^n = \underline{p}_{GPS}^n - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_n + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_e + h) \cos L} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} C_b^n \Delta r_{GPS}^b \tag{4.84}$$

in cui C_b^n serve a portare nella terna-n la misure della distanza realizzata sul corpo del veicolo (terna-b), mentre la matrice rappresentata in forma estesa è stata già

introdotta in (3.29), essa serve a convertire una distanza in metri nella relativa misura in radianti (come vengono espresse Latitudine e Longitudine).

La posizione del GPS viene inoltre utilizzata per ottenere un'informazione sulla velocità del veicolo \underline{v}_{GPS}^n . Se la derivazione avviene dopo la correzione appena descritta per la posizione, non c'è necessità di modificare anche la velocità. Se invece la derivazione viene direttamente effettuata dallo strumento oppure viene calcolata prima di correggere la posizione, è allora necessario applicare una trasformazione analoga a quella vista per gli odometri

$$\begin{aligned}
\underline{v}_{IMU}^n &= \underline{v}_{GPS}^n - C_b^n \Omega_{nb}^b \Delta r_{GPS}^b = \\
&= \underline{v}_{GPS}^n - C_b^n (\Omega_{ni}^b + \Omega_{ib}^b) \Delta r_{GPS}^b = \\
&= \underline{v}_{GPS}^n + C_b^n \Omega_{in}^b \Delta r_{GPS}^b - C_b^n \Omega_{ib}^b \Delta r_{GPS}^b = \\
&= \underline{v}_{GPS}^n + C_b^n \Omega_{in}^b C_n^b C_b^n \Delta r_{GPS}^b - C_b^n \Omega_{ib}^b \Delta r_{GPS}^b = \\
&= \underline{v}_{GPS}^n + (\Omega_{ie}^n - \Omega_{en}^n) C_b^n \Delta r_{GPS}^b - C_b^n \Omega_{ib}^b \Delta r_{GPS}^b
\end{aligned} \tag{4.85}$$

dove C_b^n trasporta le matrici dalla terna-b alla terna-n mentre come è già stato descritto nei capitoli precedenti le Ω sono le matrici corrispondenti ai vettori delle velocità angolari.

IMU e Magnetometro

Come già è stato detto al paragrafo 2.2, in questa applicazione, così come in molti altri casi pratici, il magnetometro è interno alla IMU, dunque non esiste nessun effetto *lever-arm* legato alla misura dell'angolo di imbardata.

4.3.3 Instabilità numerica

La forma della matrice H espressa nella (4.65) può causare instabilità numerica quando si inverte S_k per calcolare il guadagno del filtro K_k nella (4.76) o nella (4.79). Ciò è dovuto al fatto che L e λ vengono espressi in radianti e sono di molti ordini di grandezza più piccoli degli altri valori. Per risolvere il problema si può moltiplicare a destra e a sinistra della seconda equazione del filtro in *open loop* (4.74) e ugualmente per il filtro in *closed loop* (4.77) per una matrice Z in grado di trasformare i radianti in metri, in modo da poterne così scalare il valore e stabilire proporzioni più adeguate rispetto agli altri dati

$$Z \cdot \delta \underline{\hat{z}} = Z \cdot H \delta \underline{\hat{x}} \tag{4.86}$$

dove

$$Z = \text{diag} \left[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad R_n + h \quad (R_e + h) \cos L \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right] \tag{4.87}$$

Svolgendo i prodotti ed esplicitando gli elementi del vettore $\delta\hat{z}$ e della matrice H si ottiene

$$\begin{bmatrix} v_{x_{odo}} - \tilde{v}_x \\ v_{N_{GPS}} - \tilde{v}_N \\ v_{E_{GPS}} - \tilde{v}_E \\ v_{D_{GPS}} - \tilde{v}_D \\ (R_n + h)(L_{GPS} - \tilde{L}) \\ ((R_e + h) \cos L)(\lambda_{GPS} - \tilde{\lambda}) \\ h_{GPS} - \tilde{h} \\ m_{x_{mag}} - \tilde{m}_x \\ m_{y_{mag}} - \tilde{m}_y \\ m_{z_{mag}} - \tilde{m}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n^b & 0 & 0 & 0 & \mathbf{v}^b \\ [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 1} & [0]_{3 \times 1} & [0]_{3 \times 1} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{1 \times 3} & R_n + h & 0 & 0 & [0]_{1 \times 3} \\ [0]_{1 \times 3} & 0 & (R_e + h) \cos L & 0 & [0]_{1 \times 3} \\ [0]_{1 \times 3} & 0 & 0 & 1 & [0]_{1 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 1} & [0]_{3 \times 1} & [0]_{3 \times 1} & -(\underline{m}^b \times) \end{bmatrix} \delta\hat{x} \quad (4.88)$$

In questo modo si ottiene una conversione dei valori contenuti in $\delta\hat{z}$, e una riscrittura dei termini in H così da non incorrere nei problemi di instabilità numerica, senza la necessità di dover modificare il filtro e senza alterare le quantità contenute in $\delta\hat{x}$.

4.3.4 Assenza del segnale GPS

In questa tesi si è cercato di realizzare un sistema di navigazione più generico possibile, per questa ragione si sono dovute affrontare problematiche spesso trascurate in altre trattazioni.

Un fatto che spesso non viene tenuto in considerazione è che il segnale GPS può risultare discontinuo nel tempo per molteplici ragioni e in certe circostanze esso può risultare del tutto assente. Quando infatti il ricevitore riesce a collegarsi solo a meno di quattro satelliti, esso non ha informazioni sufficienti per calcolare la posizione del veicolo e dunque non fornisce alcun dato.

Per come sono state descritte le equazioni dello stimatore ottimo (4.74) o (4.77) è essenziale conoscere sempre anche i dati del GPS, poiché essi vanno a far parte dei valori del vettore $\delta\hat{z}$. Nel caso in cui il segnale GPS non sia sempre disponibile, per i tratti in cui manca la misura si aprono due possibilità: scrivere delle nuove equazioni da fornire al filtro di Kalman o procedere solamente con la navigazione inerziale.

Il primo approccio prevede di scrivere un vettore delle misure \underline{y} in cui compaiono soltanto la velocità di avanzamento v_x fornita dall'odometria e il campo magnetico \underline{m}^b calcolato dal magnetometro triassiale. Senza l'utilizzo dei dati del GPS \underline{v}^n e \underline{p}^n non si riesce però ad ottenere un sistema osservabile. Nella teoria del controllo, la proprietà di osservabilità è propria di un sistema dinamico e determina la possibilità di risalire allo stato del sistema $\delta\hat{x}$ a partire dalla conoscenza di ingressi $\delta\hat{u}$ ed uscite $\delta\hat{z}$. Per i sistemi dinamici lineari tempo invarianti esiste un metodo conveniente per

controllare se il sistema è osservabile. Per un sistema con n variabili, se il rango della seguente matrice di osservabilità è uguale a n , il sistema è osservabile

$$Obs = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

dove $A = F$ e $C = H$ cioè le matrici descritte rispettivamente in (4.48) e in (4.65). Il fondamento logico di questo metodo è che se n righe sono linearmente indipendenti, allora ognuno degli n stati è osservabile attraverso combinazioni lineari delle variabili di uscita. Nel caso in cui non si hanno a disposizione i dati del GPS la matrice F non cambia, mentre H si ricava dalla (4.65) rimuovendo le righe corrispondenti alle velocità e alla posizione calcolate dal ricevitore satellitare

$$H = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n^b & [0]_{1 \times 3} & -\mathbf{v}^b \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & -(\underline{m}^b \times) \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Di conseguenza la matrice di osservabilità diviene

$$Obs = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n^b & [0]_{1 \times 3} & -\mathbf{v}^b \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & -(\underline{m}^b \times) \\ \mathbf{e}_n^b F_{vv} - \mathbf{v}^b F_{ev} & \mathbf{e}_n^b F_{vp} - \mathbf{v}^b F_{ep} & \mathbf{e}_n^b (\underline{f}^b \times) + \mathbf{v}^b (\underline{\omega}^b \times) \\ -(\underline{m}^b \times) F_{ev} & -(\underline{m}^b \times) F_{ep} & (\underline{m}^b \times) (\underline{\omega}^b \times) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

la quale ha rango inferiore ad n e ne risulta un sistema non osservabile al quale non può essere applicato il filtro di Kalman.

Il secondo caso è quello sviluppato ed adottato in questo lavoro di tesi. Tramite esso si può evitare del tutto di entrare nel filtro di Kalman quando mancano i dati del GPS. A partire dall'ultimo istante in cui si ha un'informazione di posizione fornita dal GPS e quindi anche una correzione dello stato, si procede con la sola integrazione delle misure della IMU, finché non torna il segnale del GPS. Questo approccio ha però due evidenti limiti:

- In tutto il tratto in cui si procede con la navigazione inerziale si ha una deriva della stima tipica di questo sistema di localizzazione. Non si ha infatti l'impiego di nessun filtro che consenta di correggere la stima
- Esso può essere applicato solamente alla correzione in anello chiuso. In *open loop* infatti l'integrazione dei dati della IMU inizia con l'accensione della stru-

mentazione e prosegue ininterrottamente fino alla fine. Quindi se si interrompe la correzione data dal filtro per proseguire con la sola navigazione inerziale si avranno già in partenza dei dati tanto più devianti quanto più tempo è passato dall'inizio della localizzazione. In *closed loop* invece l'integrazione riparte ciclicamente dall'ultimo punto corretto dal filtro, perciò nel momento in cui si interrompe la *sensor fusion* la navigazione inerziale partirà da dati già corretti ed impiegherà per cui più tempo prima di deviare.

Questi limiti non sono troppo restrittivi se si considera di perdere il segnale GPS solo per brevi periodi di tempo.

Capitolo 5

Validazione dell'algoritmo di navigazione

*“ Quelli che s'innamorano di pratica senza scienza son come il nocchiere,
che entra in naviglio senza timone o bussola,
che mai ha certezza dove si vada. ”*

— Leonardo da Vinci

Questo capitolo si propone lo scopo di creare un modello matematico completo atto ad eseguire delle prove preliminari con l'algoritmo di navigazione presentato nei capitoli precedenti.

Utilizzando il modello cinematico del robot descritto al paragrafo 2.1 si realizzerà una traiettoria virtuale, tale percorso “ideale” sarà successivamente impiegato per creare delle misure (anch'esse virtuali) per i sensori realmente presenti a bordo del mezzo fisico, aggiungendovi il rumore modellato al paragrafo 2.2.

Il percorso e le misurazioni così costruite verranno impiegate per verificare la validità della localizzazione descritta nei capitoli precedenti, avendo il vantaggio di conoscere il risultato “ideale” da raggiungere.

5.1 Modello virtuale

Il sistema di navigazione inerziale visto al capitolo 3 e la successiva implementazione di un filtro di Kalman del capitolo 4 devono prima poter essere provati su un sistema ideale del quale si conosce lo stato reale \underline{x} . Questo non può ovviamente essere realizzato su un sistema fisico che può essere studiato solo tramite le informazioni ricavate dalla strumentazione. Da qui nasce l'esigenza di creare un modello virtuale che rappresenti il percorso di un robot realizzato *ad hoc* e del quale, per l'appunto, tutto lo stato è noto a priori. Trattandosi però di una traiettoria virtuale anche tutti

gli strumenti di misura dovranno essere modellati al fine di raccogliere informazioni da essa, simulando il più possibile il comportamento reale dei dispositivi fisici.

Questi modelli sono già stati discussi nel capitolo 2, ma in questo contesto se ne vuole dare un'esposizione sistematica ed organica, procedendo passo dopo passo in tutte le fasi che portano alla generazione della traiettoria e delle misure ad essa legate.

5.1.1 Generazione della traiettoria

Il modello cinematico del veicolo visto al paragrafo 2.1 si basa sulla terna di figura 2.3 che non appartiene a nessuno dei sistemi di riferimento introdotti al paragrafo 3.1, utilizzati per definire le equazioni di navigazione inerziale. Tale terna viene quindi aggiunta all'elenco e descritta qui di seguito

- **Il sistema di riferimento dell'osservatore** o *observer frame* (terna-o) mostrato in figura 2.3, è analogo alla terna-b, ma anziché riferirsi agli assi del robot si riferisce a quelli di un osservatore rivolto verso nord e immobile rispetto al veicolo. L'asse x punta in avanti rispetto all'osservatore, l'asse y è diretto verso la sua sinistra, mentre l'asse z è quello diretto verso l'alto. Quando anche il robot guarda verso nord gli assi della terna-b e della terna-o sono paralleli, ma y e z sono di segno opposto.

Questa terna è stata introdotta per evitare di modificare le equazioni del paragrafo 2.1 e al tempo stesso fare in modo che l'angolo Φ del sistema (2.11) parta da Nord così come l'angolo di imbardata del veicolo ψ .

Per generare la traiettoria virtuale del robot si inizia scrivendo una legge di moto in funzione del tempo t per la velocità lineare di trazione della ruota posteriore $v(t)$. Per evitare di avere picchi di accelerazione infiniti si può anche utilizzare una legge di moto cicloidale.

Bisogna inoltre determinare le curve realizzate dal mezzo durante il processo di avanzamento assegnando l'angolo di sterzo $\Psi(t)$ al variare del tempo t oppure scegliendo un angolo Ψ costante se si vogliono disegnare traiettorie circolari.

In ultimo può anche essere assegnato un angolo di pendenza del terreno α in modo da ottenere un moto in tre dimensioni. A questo punto tramite la (2.10) si calcola $\dot{\Phi}$ cioè la derivata temporale dell'angolo del veicolo rispetto all'asse delle ascisse della terna-o. Integrando tale valore si ottiene Φ e usando l'equazione (2.6) e (2.7) si determinano le componenti della velocità nella terna-o

$$\underline{v}^o = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{av}(t) \\ v_{sx}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

in cui come è già stato detto le velocità lungo gli assi x e y della terna-o coincidono rispettivamente con la velocità in avanti v_{av} e verso sinistra v_{sx} rispetto all'osservatore. Esse devono poi essere convertite nelle rispettive componenti della terna-n

$$\underline{v}^n = \begin{bmatrix} v_N(t) \\ v_E(t) \\ v_D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{av}(t) \cos \alpha \\ -v_{sx}(t) \\ -v_{av}(t) \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

dove v_N , v_E e v_D sono le componenti della velocità nella terna-n rispettivamente verso Nord, Est e Down. Utilizzando la (3.29) si riesce poi a determinare la velocità in termini di \dot{L} , $\dot{\lambda}$ e \dot{h} . La posizione espressa in latitudine, longitudine e altitudine si ottiene integrando le velocità appena ottenute. Come è già stato detto in precedenza sia Φ (l'angolo del robot rispetto all'asse delle ascisse della terna-o) che ψ (angolo di imbardata) descrivono l'orientamento del mezzo rispetto alla direzione Nord, tuttavia è anche stato affermato che l'asse z della terna-o e quello della terna-b hanno verso opposto, perciò si potrà scrivere

$$\psi(t) = -\Phi(t) \quad (5.3)$$

Da questo si determinano anche gli altri due angoli di Eulero del mezzo sulla terna-b

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \alpha \cos(\psi(t)) \\ \phi(t) &= \alpha \sin(\psi(t)) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Lo stato \underline{x} illustrato nell'equazione (4.34), può essere infine completato calcolando la matrice C_b^n come in (3.4). Per leggerezza di scrittura da qui in avanti verrà omissa (t) sottintendendo che tutte le variabili possono dipendere dal tempo.

5.1.2 Generazione delle misure

Lo stato ottenuto vuole rappresentare la velocità, la posizione e l'orientamento del robot lungo un percorso fittizio. Nella pratica sperimentale questa informazione non può essere nota direttamente, ma viene ricavata a partire dalle misure realizzate dai dispositivi installati sul mezzo. Per simulare questa situazione si deve utilizzare lo stato \underline{x} nei modelli di seguito descritti per ottenere delle misure coerenti con la traiettoria e il moto simulati per il veicolo. A questi dati andrà aggiunto successivamente l'errore di misura già modellato al paragrafo 2.2.

Dati della IMU

La piattaforma inerziale è uno strumento le cui misure \underline{f}^b e $\underline{\omega}_{ib}^b$ vengono utilizzate nel processo di navigazione inerziale per ottenere una stima dello stato del sistema

$\underline{\hat{x}}$. Di conseguenza invertendo le equazioni di navigazione inerziale si può pensare di passare dallo stato ideale \underline{x} alle misure ideali \underline{f}^b e $\underline{\omega}_{ib}^b$.

Invertendo la (3.27) si può calcolare la misura realizzata dagli accelerometri

$$\underline{f}^b = C_n^b(\underline{\dot{v}}^n + (2\underline{\omega}_{ie}^n + \underline{\omega}_{en}^n) \times \underline{v}^n - \underline{g}^n) \quad (5.5)$$

dove $\underline{\dot{v}}^n$ viene ottenuta derivando numericamente la \underline{v}^n presente nello stato \underline{x} , mentre C_n^b è semplicemente l'inversa (o trasposta, grazie alle sue proprietà di simmetria) di C_b^n . Le velocità angolari $\underline{\omega}_{ie}^n$ e $\underline{\omega}_{en}^n$ sono state calcolate rispettivamente a partire dalla (3.9) e dalla (3.11).

Per ottenere anche le misure dei giroscopi $\underline{\omega}_{ib}^b$ bisogna in prima istanza derivare C_b^n presente nello stato \underline{x} per ottenere \dot{C}_b^n , così invertendo la (3.30) si scrive

$$\Omega_{bn}^n = -\dot{C}_b^n C_n^b \quad (5.6)$$

che è la matrice *skew* simmetrica di $\underline{\omega}_{bn}^n$. Se inoltre si calcola $\underline{\omega}_{in}^n$ attraverso la (3.14) è possibile invertire la (3.15) ottenendo

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{ib}^b &= C_n^b(\underline{\omega}_{in}^n - \underline{\omega}_{bn}^n) = \\ &= C_n^b \underline{\omega}_{in}^n - \underline{\omega}_{bn}^b = \\ &= C_n^b \underline{\omega}_{in}^n + \underline{\omega}_{nb}^b \end{aligned} \quad (5.7)$$

I dati del magnetometro si ricavano semplicemente scrivendo il vettore del campo magnetico terrestre nella terna-n, nel caso specifico si è adottato il valore del campo magnetico presente nell'area di Milano ed espresso in milliGauss $\underline{m}^n = [m_N \ m_E \ m_D]^T = [225.097 \ 7.719 \ 416.133]^T$. Effettuando un cambio di terna grazie alla C_n^b si scrive semplicemente

$$\underline{m}_*^b = C_n^b \underline{m}^n \quad (5.8)$$

Tuttavia le misure fornite dal magnetometro sono normalizzate rispetto al modulo del campo magnetico terrestre $|m^n| = \sqrt{m_N^2 + m_E^2 + m_D^2}$, perciò con un ultimo passaggio si impone che

$$\underline{m}^b = \frac{\underline{m}_*^b}{|m^n|} \quad (5.9)$$

Ne consegue che si può assegnare qualunque valore a \underline{m}^n poiché le misure \underline{m}^b vengono normalizzate rispetto al suo modulo.

Queste scritte fin'ora (\underline{f}^b , $\underline{\omega}_{ib}^b$, \underline{m}^b) altro non sono che delle misure ideali prive di errore, ma per simulare al meglio una situazione reale ($\underline{\tilde{f}}^b$, $\underline{\tilde{\omega}}_{ib}^b$, \underline{m}_{mag}^b) è bene utilizzare i modelli visti al paragrafo 2.2 che introducono l'effetto del *bias stability* e

della *noise density* generando delle misure più imprecise, ma comunque più vicine alla realtà.

Dati del GPS

Un GPS misura la posizione di un veicolo in termini di latitudine L , longitudine λ e altitudine h cioè le stesse informazioni riportate all'interno del vettore di stato $\underline{x} = \left[\underline{v}^n \quad \underline{p}^n \quad C_b^n \right]^T$ descritto nella (4.34). Di conseguenza l'ottenimento delle misure ideali del GPS è dovuto alla banale uguaglianza vista in (3.35)

$$\begin{bmatrix} L \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} = \underline{p}^n \quad (5.10)$$

Analogamente a quanto detto per i dati della IMU anche qui va introdotto l'errore di misura per rendere i dati simulati più vicini alla realtà \underline{p}_{GPS}^n . A questo scopo si può fare riferimento sempre al paragrafo 2.2 in cui viene proposto un modello dell'errore sul GPS.

Non esiste invece la necessità di simulare la velocità \underline{v}^n calcolata grazie ai dati di posizione del GPS. Questa sarà infatti ottenuta per derivazione sia nella simulazione virtuale del sistema che durante le prove sperimentali. In altre parole, una volta che è stato scritto un modello corretto per la posizione del GPS e per il suo errore, ci si trova già in una situazione paragonabile alla realtà perciò derivando la posizione \underline{p}_{GPS}^n si deriveranno anche gli errori ottenendo una velocità disturbata come nella realtà \underline{v}_{GPS}^n .

Dati dell'Odometria

Gli odometri misurano la velocità del mezzo nella direzione di avanzamento, mentre nel vettore di stato \underline{x} essa è scomposta nelle tre componenti della terna-n v_N , v_E e v_D . Invertendo la matrice di rotazione C_b^n , contenuta nel vettore di stato \underline{x} , si ottiene C_n^b di conseguenza per risalire dal vettore velocità \underline{v}^n lungo la terna-n al vettore velocità \underline{v}^b lungo la terna-b si può scrivere

$$\underline{v}^b = C_n^b \underline{v}^n \quad (5.11)$$

L'odometria però misura solamente la velocità di avanzamento v_x che può essere estratta dal vettore $\underline{v}^b = \left[v_x \quad v_y \quad v_z \right]^T$. Anche in questo caso la misura ideale della velocità deve essere unita al rumore di misura secondo la procedura descritta al paragrafo 2.2 per ottenere una velocità più simile alla realtà $v_{x_{odo}}$.

5.2 Risultati del modello

Il modello descritto al paragrafo precedente è stato utilizzato per effettuare le simulazioni del sistema di navigazione. Lo scopo è quello di verificare che gli algoritmi di integrazione e *sensor fusion*, introdotti ai capitoli precedenti, diano risultati soddisfacenti.

In queste prove il sistema è stato impiegato sia in configurazione *open loop* che in quella *closed loop*. L'obiettivo è individuare e caratterizzare i vantaggi e gli svantaggi nell'utilizzo di una soluzione rispetto all'altra.

5.2.1 Traiettoria generica

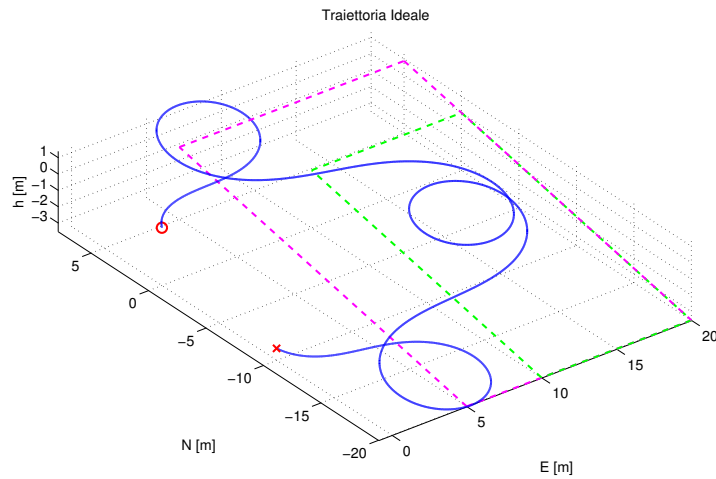


Figura 5.1: Traiettoria

Nella seguente prova si è generata una traiettoria avente le seguenti caratteristiche:

- Angolo di sterzo variabile nel tempo $\Psi(t) = 25^\circ \sin(2\pi \cdot \omega_\Psi \cdot t)$ dove $\omega_\Psi = 0.05 \text{ rad s}^{-1}$ è la pulsazione della sinusoide.
- Velocità in direzione di avanzamento di tipo cicloidale, in modo da non avere discontinuità di accelerazione né in partenza né in arrivo.

$$v(t) = \frac{h_a}{t_a} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{t_a} \right) \right)$$

dove h_a è l'alzata cioè la lunghezza totale dello spazio percorso e t_a è il tempo di azionamento ossia la durata complessiva della legge di moto.

- Pendenza del terreno $\alpha = 10^\circ$.

- Suddivisione del territorio in tre aree aventi caratteristiche di ricezione del segnale GPS progressivamente peggiori procedendo dall'esterno verso l'interno.

Dall'immagine 5.1 si nota che la traiettoria è stata realizzata in modo da essere più generica possibile: il veicolo parte dalla posizione segnata con un cerchio, attraversa tutte le differenti aree, compiendo più curve lungo il percorso e spostandosi in salita e discesa, fino ad arrivare al punto contrassegnato da una croce. Da tale traiettoria vengono poi generate tutte le misure degli strumenti disponibili sul veicolo.

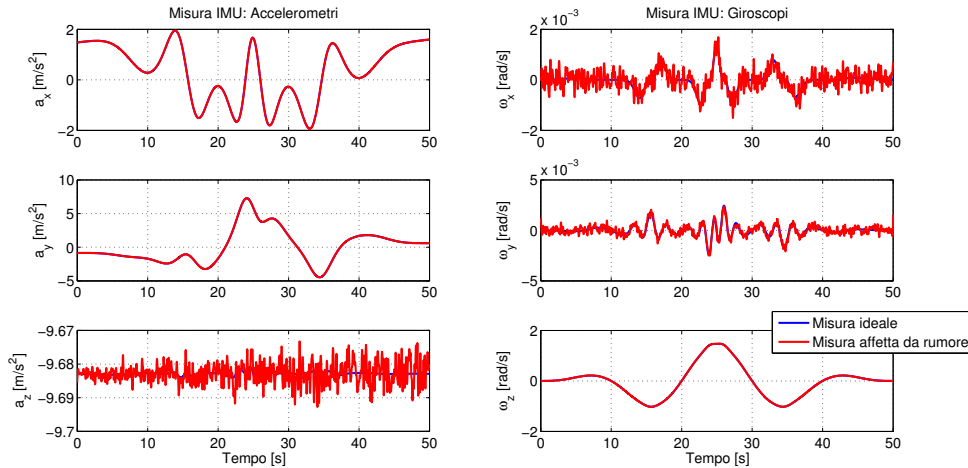
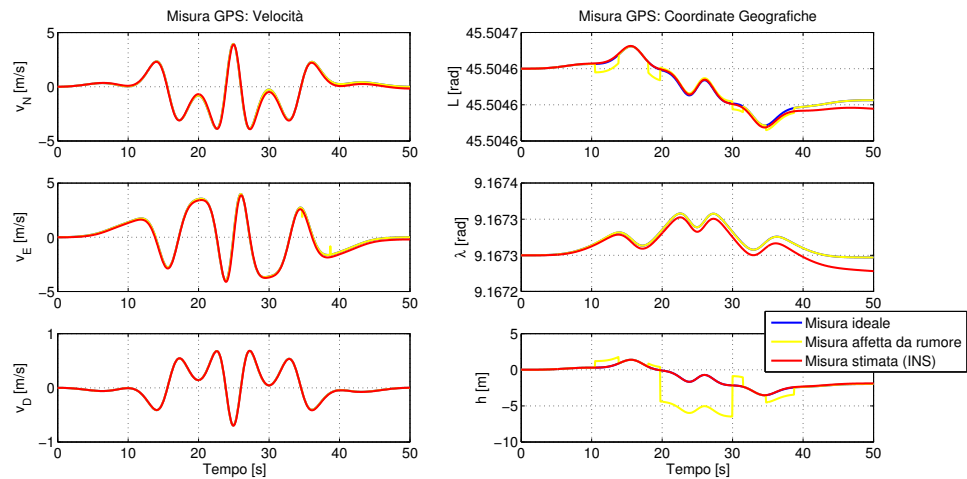
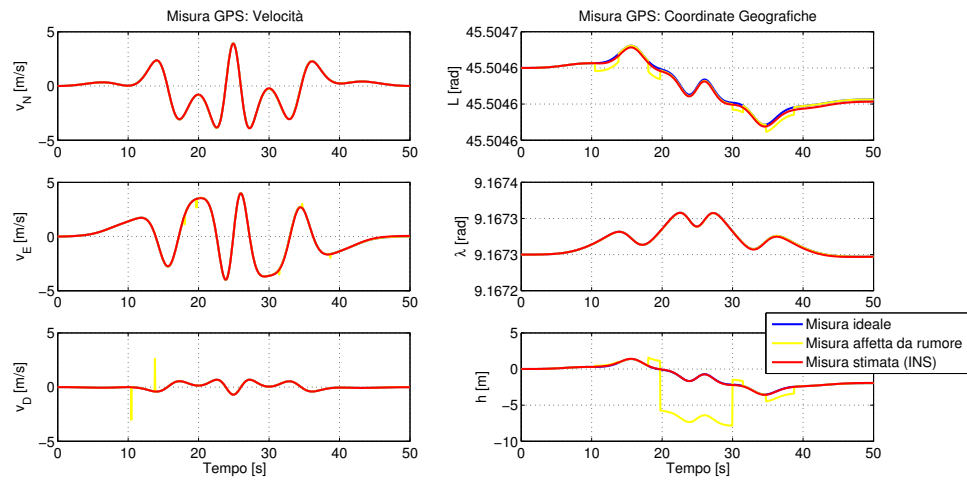


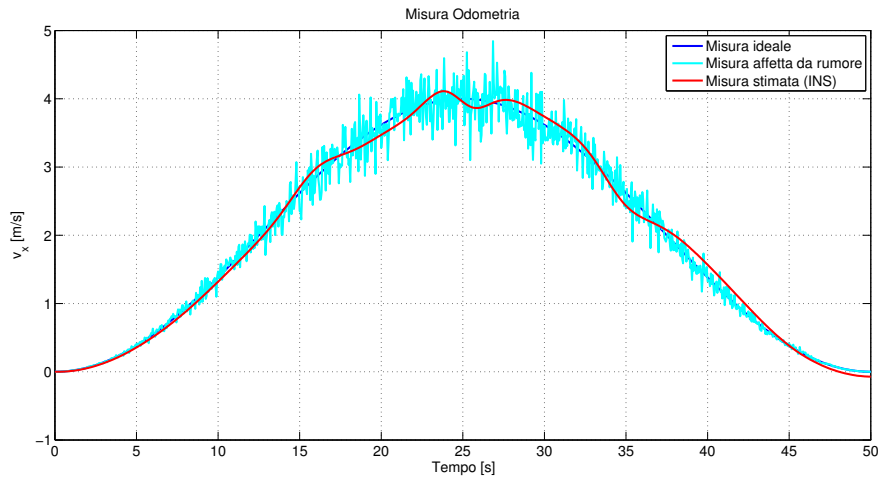
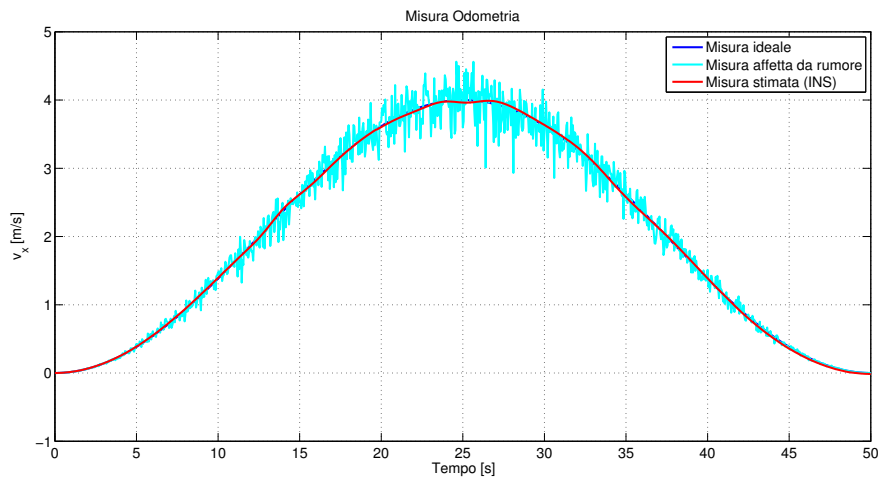
Figura 5.2: Accelerazioni e velocità angolari misurate dalla IMU

Nella figura 5.2 sono riportate le accelerazioni e velocità angolari misurate rispettivamente dagli accelerometri e dai giroscopi presenti all'interno della piattaforma inerziale. In particolare vengono riportate in blu le misure ideali \underline{u} e in rosso, sovrapposte ad esse, quelle reali $\tilde{\underline{u}}$ in cui si può notare sia la presenza di rumore bianco sia un progressivo aumento delle oscillazioni dato dal *bias stability*. Questi sono i dati impiegati per la navigazione inerziale (INS) tramite la quale è quindi possibile fare una prima stima dello stato del veicolo $\tilde{\underline{x}}$.

In figura 5.3 vengono rappresentate le informazioni di posizione fornite direttamente dal GPS e quelle di velocità ricavate per derivazione. Anche in questo caso alla misura ideale $\underline{y} = [\dots \underline{v}^n \underline{p}^n \dots]^T$ è stata sovrapposta quella reale $\underline{y}_{ext} = [\dots \underline{v}_{GPS}^n \underline{p}_{GPS}^n \dots]^T$ in cui i disturbi sono stati modellati come descritto in precedenza. Inoltre viene anche tracciata la stima di posizione e velocità del veicolo $\tilde{\underline{y}} = [\dots \tilde{\underline{v}}^n \tilde{\underline{p}}^n \dots]^T$ ricavata a partire dalla stima dello stato $\tilde{\underline{x}}$ ottenuta dal processo di navigazione inerziale. Si può tuttavia notare che questa stima diverge nel tempo a causa delle limitazioni intrinseche racchiuse nell'algoritmo di integrazione e del rumore associato alle misure $\tilde{\underline{u}}$. Questa deviazione è tanto più evidente nell'approccio in *open loop* della figura 5.3a, rispetto a quello in *closed loop*

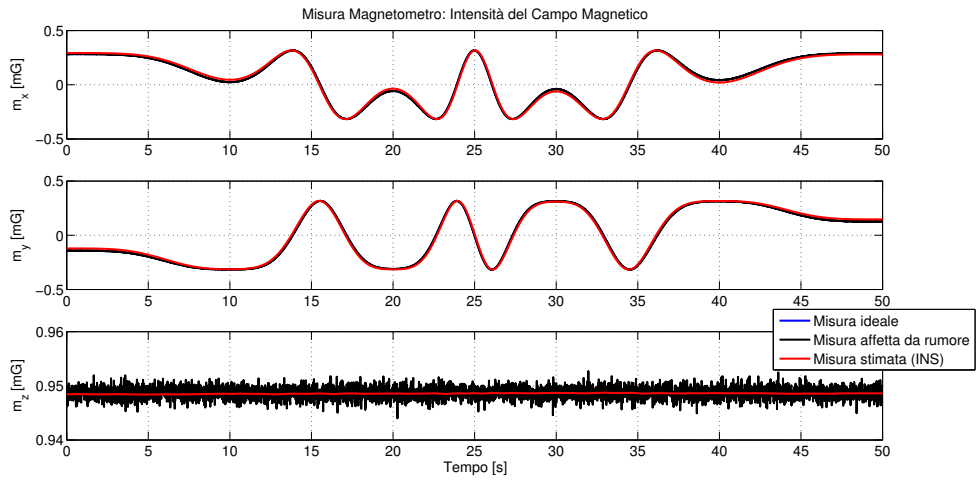
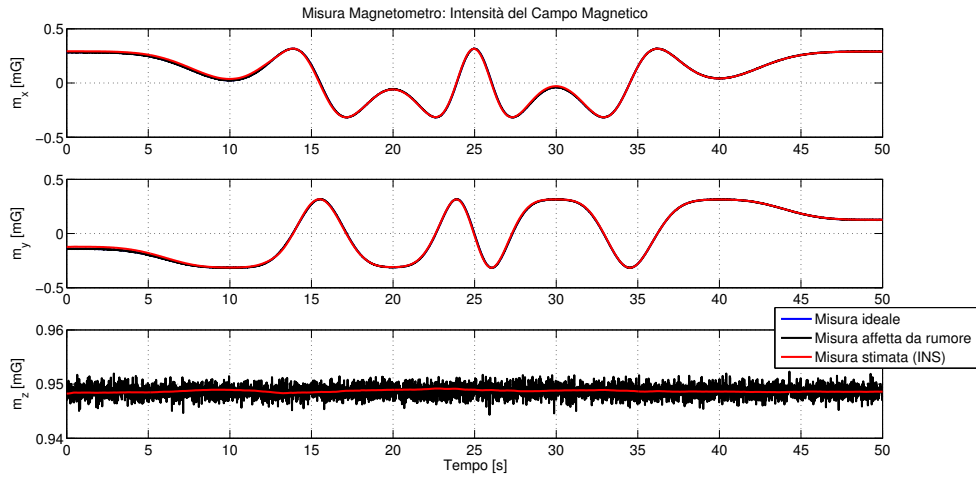
(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.3:** Velocità e posizione misurate dal GPS

rappresentato nella 5.3b. Ciò avviene perché l'integrazione in *open loop* è continua dall'istante iniziale fino allo spegnimento del dispositivo, mentre l'integrazione in *closed loop* riparte cambiando la condizione iniziale con lo stato corretto dal filtro di Kalman ogni volta che questa correzione è disponibile. Dalla figura 5.3 è inoltre facile individuare gli istanti in cui il veicolo transita da un'area alla successiva, in quanto è visibile uno scostamento differente del segnale GPS dalla traiettoria ideale, a seconda della bontà della ricezione dell'area in cui si trova il robot. Va infine notato che i disturbi agenti sul GPS (così come quelli degli altri strumenti) possono cambiare da una prova all'altra e anche trasversalmente nel passare da un approccio in *open loop* ad uno in *closed loop*. Questo perché nella realizzazione virtuale del sistema sono stati simulati dei rumori casuali come descritto al paragrafo 2.2.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.4:** Velocità di avanzamento misurata dall'odometria

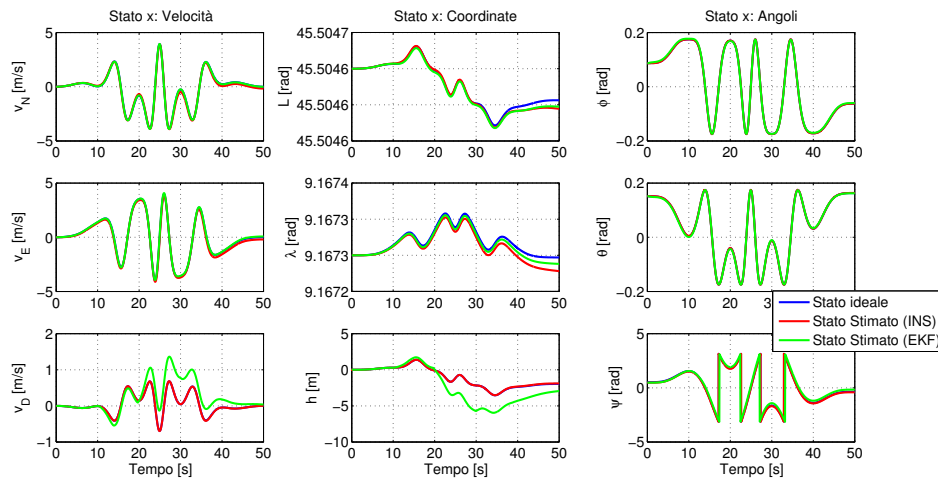
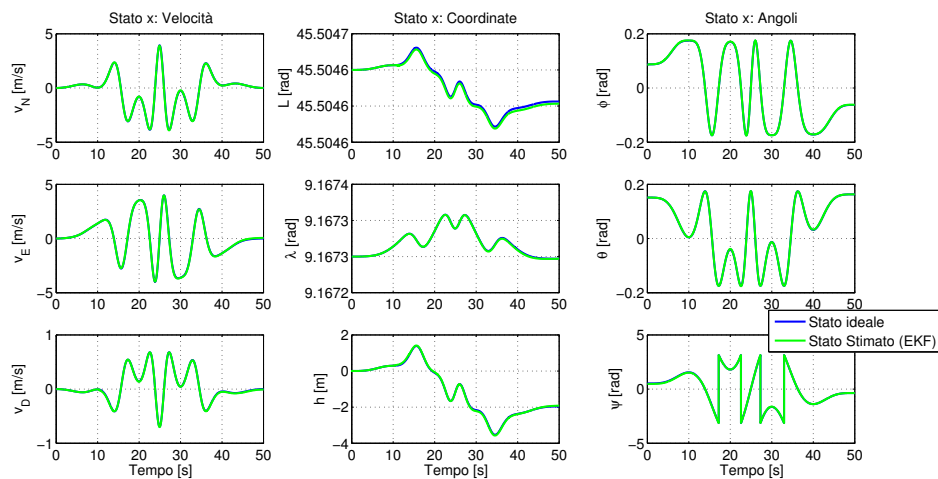
In figura 5.4 è presente la velocità misurata tramite gli odometri. Il tratto blu rappresenta anche in questo caso la misura ideale $\underline{y} = [v_x \ \dots]^T$, mentre il tratto sovrapposto ad esso è caratterizzato dalle oscillazioni tipiche di una misura reale $\underline{y}_{ext} = [v_{x_{odo}} \ \dots]^T$, esse presentano il tipico andamento di una velocità cicloidale come quella modellata per questa traiettoria. Viene infine tracciata la stima della misura del suddetto strumento $\tilde{\underline{y}} = [\tilde{v}_x \ \dots]^T$ ricavata grazie alle informazioni di accelerometri e giroscopi $\tilde{\underline{u}}$. Ancora una volta si nota la divergenza di quest'ultimo valore e la differenza tra gli approcci in *open loop* e in *closed loop* per i motivi sopra elencati.

Dall'immagine 5.5 è possibile ricavare un'informazione sia sulle misure ideali del

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.5:** Campo magnetico misurato dal magnetometro

magnetometro $\underline{y} = [\dots \ m^b]^T$ che sulle misure reali dello stesso $\underline{y}_{ext} = [\dots \ \underline{m}_{mag}^b]^T$, generate con l'aggiunta del rumore. Nello specifico si nota che essendo costante la pendenza del terreno, questo fa sì che l'asse z del veicolo resti parallelo a sé stesso durante tutto il moto e quindi anche il campo magnetico rilevato lungo z m_z resta costante nel tempo. Anche in questo caso è presente inoltre la stima delle misurazioni $\tilde{\underline{y}} = [\dots \ \tilde{m}^b]^T$ ottenuta a partire dalla stima dello stato $\tilde{\underline{x}}$ calcolata durante la navigazione inerziale ed è di nuovo visibile il maggiore distacco dei risultati ottenuti in figura 5.5a con l'*open loop* rispetto a quelli in 5.5b con il *closed loop*.

Utilizzando le misure degli strumenti, come descritto al paragrafo 4.2, è possibile impiegare un filtro di Kalman per migliorare la stima dello stato del veicolo.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.6:** Stato del sistema

In figura 5.6a sono rappresentati i risultati dell'algoritmo in *open loop*. Qui lo stato stimato dalla navigazione inerziale $\hat{\underline{x}}$ diverge nel tempo, mentre la correzione effettuata tramite il filtro di Kalman riesce ad avvicinare la stima finale $\hat{\underline{x}}$ allo stato ideale del sistema \underline{x} creato a priori insieme alla traiettoria. Quanto detto è vero tranne nel caso dell'altitudine h che si discosta dallo stato ideale in corrispondenza del distacco del GPS dalla traiettoria corretta. Di conseguenza anche la velocità verso il basso v_D presenta errore nello stesso tratto dell'altitudine, questo perché le equazioni di navigazione fanno in modo da avere una correlazione tra le posizioni e le velocità.

Il filtro in *closed loop* della figura 5.6b ha degli evidenti vantaggi rispetto al caso precedente. In primo luogo si nota la maggiore vicinanza dello stato corretto dal

filtro \hat{x} allo stato ideale x , questo è dovuto alle caratteristiche proprie del *closed loop*, esso infatti consente di aggiornare ad ogni passo le condizioni iniziali del processo di navigazione inerziale con la stima corretta con la *sensor fusion*. Oltre a ciò si ha una miglioria, resa più evidente nella stima dell'altitudine h , grazie alla modifica tramite cui viene valutato se utilizzare o meno i dati del GPS in un determinato istante, come già descritto al paragrafo 4.3.

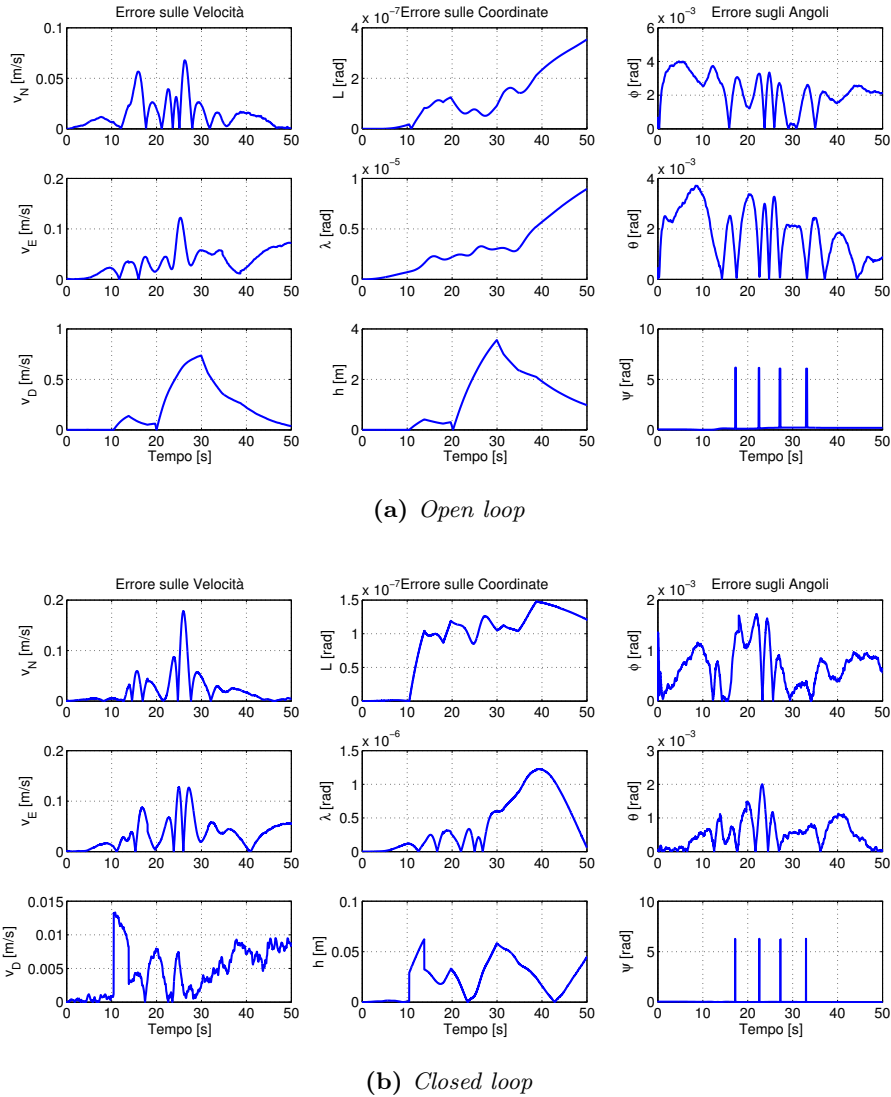


Figura 5.7: Errore sullo stato del sistema

Conoscendo lo stato ideale del sistema x creato insieme alla traiettoria, si può valutare un errore che quantifichi la differenza esistente tra quest'ultimo e la stima dello stato effettuata dalla *sensor fusion* \hat{x} .

In figura 5.7a sono riportati tali errori per l'architettura in *open loop*. Dai grafici emerge che, nonostante l'ausilio di sensori esterni, la stima finale di posizione diverge

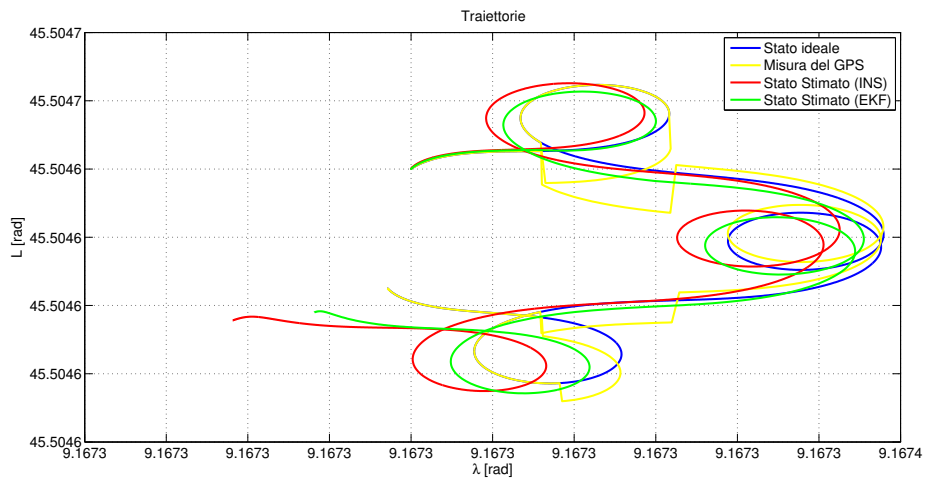
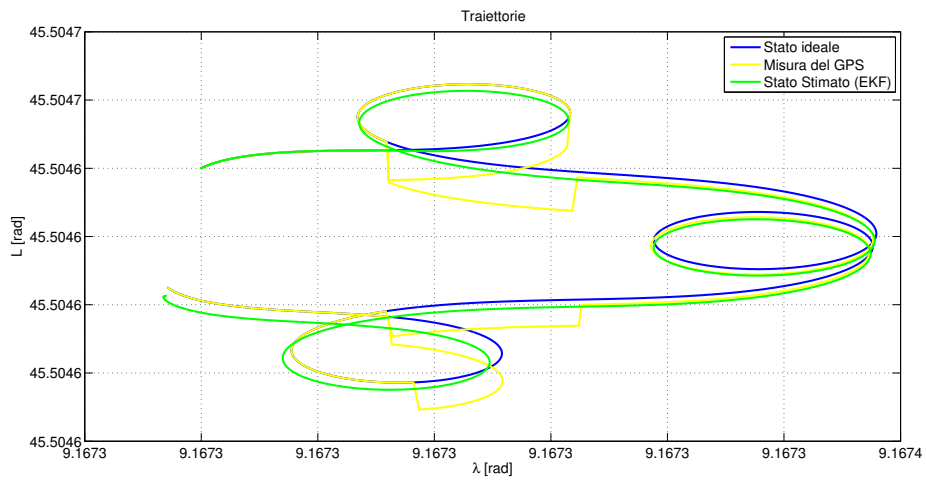
nel tempo come quella della navigazione inerziale. Questo è imputabile al fatto che il segnale GPS, che è il principale strumento di riferimento nel determinare la posizione assoluta del veicolo, attraversa per lungo tempo delle zone di bassa qualità del segnale. Uno dei limiti dell'architettura *loosely coupled* è proprio costituito dal fatto che, al modificarsi dei disturbi presenti sulle misure durante la percorrenza della traiettoria, subentra la necessità di dover variare la matrice di covarianza. La stima di una nuova matrice di covarianza in funzione delle variazioni di misura, è un processo iterativo troppo dispendioso in termini di tempi di calcolo, di conseguenza l'impiego di questa tecnica comprometterebbe l'utilizzazione in *real time* dell'algoritmo. Si può invece osservare che l'aggiunta di sensori in grado di fornire informazioni relative alla velocità e all'orientamento, come gli odometri e il magnetometro, consentono di avere un errore molto ridotto in corrispondenza di queste variabili di stato. Un importante contributo viene inoltre dato dalle velocità ricavate a partire dalle misure di posizione del GPS, la loro precisione risulta essere di grande affidabilità per la stima della velocità del veicolo.

Gli errori in configurazione *closed loop* vengono mostrati in figura 5.7b. Si può in questo caso osservare che per le variabili in cui già l'algoritmo in open loop otteneva ottimi risultati non si sono avuti ulteriori miglioramenti. Nel caso invece della velocità verso il basso v_D , della longitudine λ e dell'altitudine h , si sono ottenuti dei miglioramenti più consistenti. Il problema legato all'architettura *loosely coupled*, in corrispondenza di un tratto di scarsa qualità del segnale GPS, è già stato descritto in precedenza, ma nel caso in *closed loop* esso viene aggirato proseguendo la localizzazione con il solo impiego della navigazione inerziale. Come spiegato al paragrafo 4.3, questo espediente non può essere invece applicato in configurazione *open loop*.

Infine nella figura 5.8 vengono sovrapposte alla traiettoria ideale quella stimata durante la navigazione e quella ricavata dal segnale GPS.

Il risultato dell'*open loop* viene raffigurato nella 5.8a dove si nota che nonostante la traiettoria stimata dalla navigazione inerziale diverga nel tempo, quella ottenuta grazie al processo di *sensor fusion* riesce a mediare gli errori con il segnale GPS. La stima corretta dal filtro è una traiettoria migliore di quella inerziale, inoltre essa risulta continua nello spazio e quindi utilizzabile in una successiva fase di controllo del moto del robot.

Nel *closed loop*, visibile in figura 5.8b, si ha un ulteriore miglioramento della stima finale per la quale valgono considerazioni simili a quelle già fatte per l'*open loop*.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.8:** Stima della Traiettorie

5.2.2 Traiettoria ispirata ad un caso reale

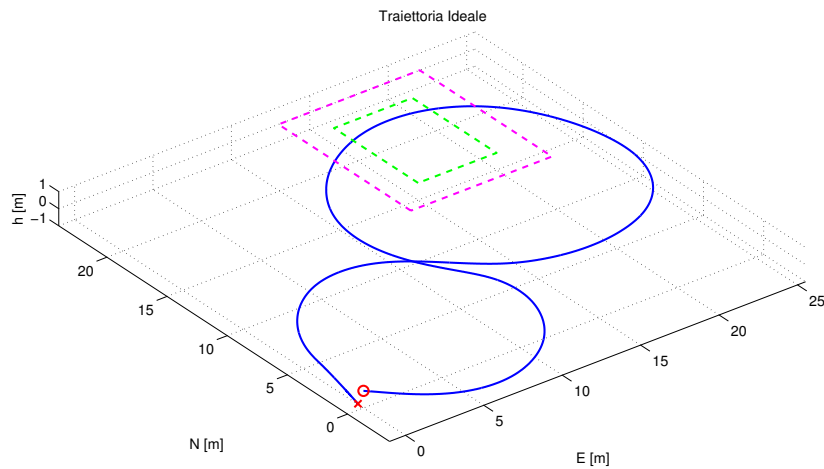


Figura 5.9: Traiettoria

In questa prova si è voluta simulare una traiettoria realmente percorsa durante la campagna di prove sperimentali. Le caratteristiche di questa sono:

- Angolo di sterzo variabile nel tempo $\Psi(t)$, ottenuto dai dati raccolti da un encoder installato sul piantone dello sterzo.
- Velocità in direzione di avanzamento $v(t)$, ottenuta dalla misura effettuata dagli odometri.
- Pendenza del terreno $\alpha = 0^\circ$, come nell'area pianeggiante su cui sono state effettuate le prove.
- Suddivisione del territorio in tre aree aventi caratteristiche di ricezione del segnale GPS progressivamente peggiori procedendo dall'esterno verso l'interno. In particolare si è cercato di riprodurre il reale comportamento dei dati acquisiti dal GPS nella zona in cui il segnale acquisito è di scarsa qualità.

L'immagine 5.9 raffigura una traiettoria a forma di otto che ha inizio nel punto contrassegnato da un cerchio e si conclude nella posizione segnata da una x. L'area in cui la qualità del segnale GPS risulta essere degradata è posizionata nel primo tratto della seconda curva.

Nella figura 5.10 vengono rappresentate le simulazioni delle misure di accelerazioni e velocità angolari del veicolo realizzate dalla IMU. Nella stessa immagine vengono riportate sia le misure ideali \underline{u} che quelle reali $\tilde{\underline{u}}$ affette dai disturbi descritti e modellati nel paragrafo 2.2. Dall'accelerazione lungo x a_x si vede un picco iniziale più

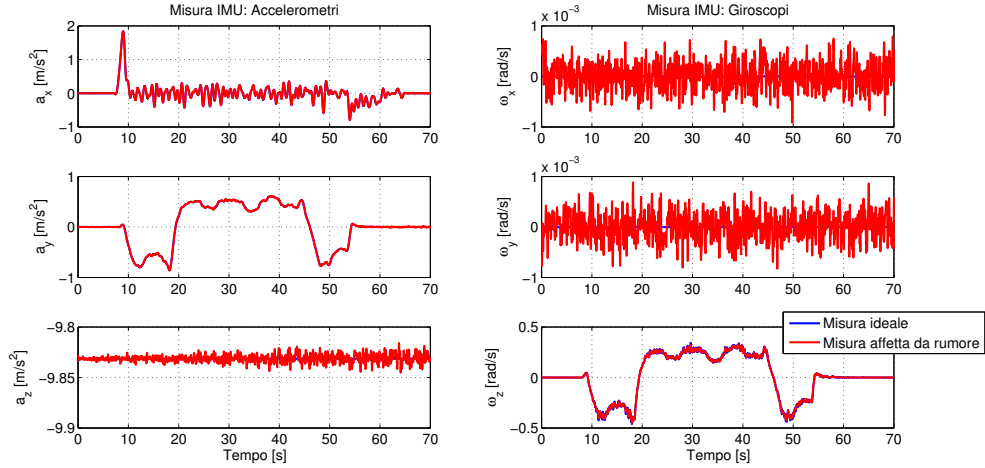
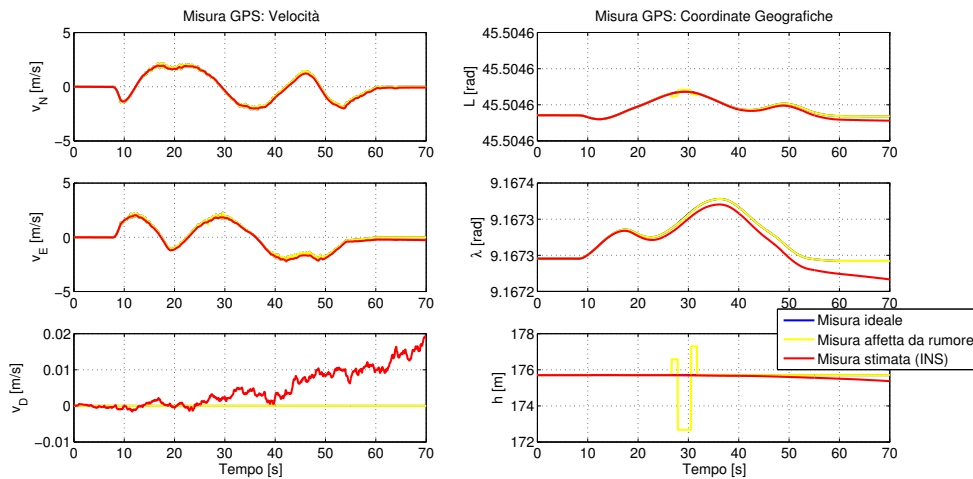
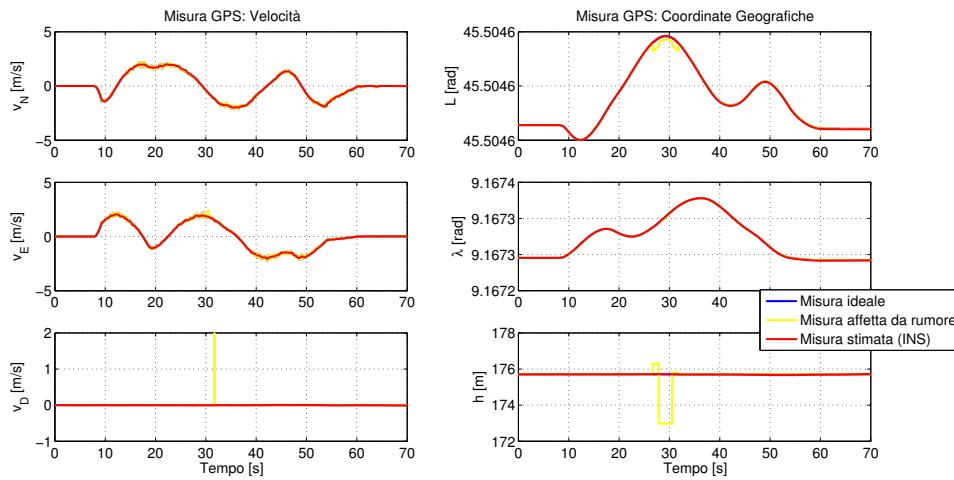


Figura 5.10: Accelerazioni e velocità angolari misurate dalla IMU

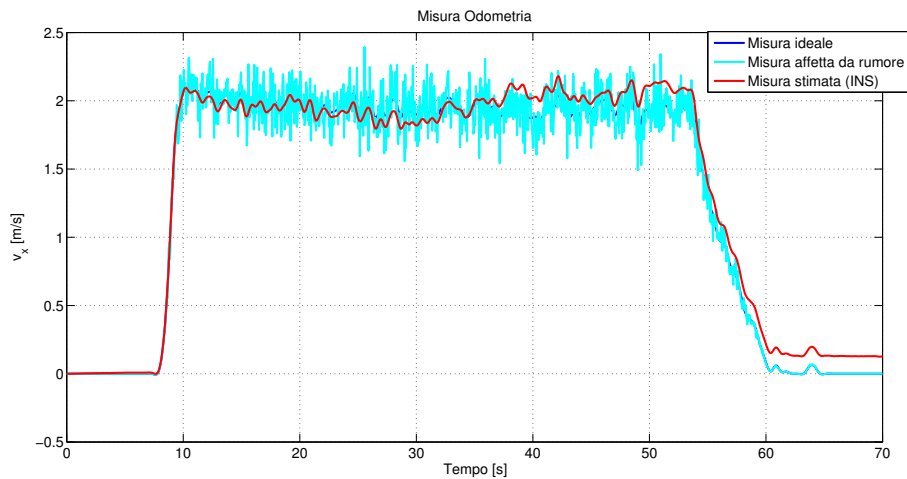
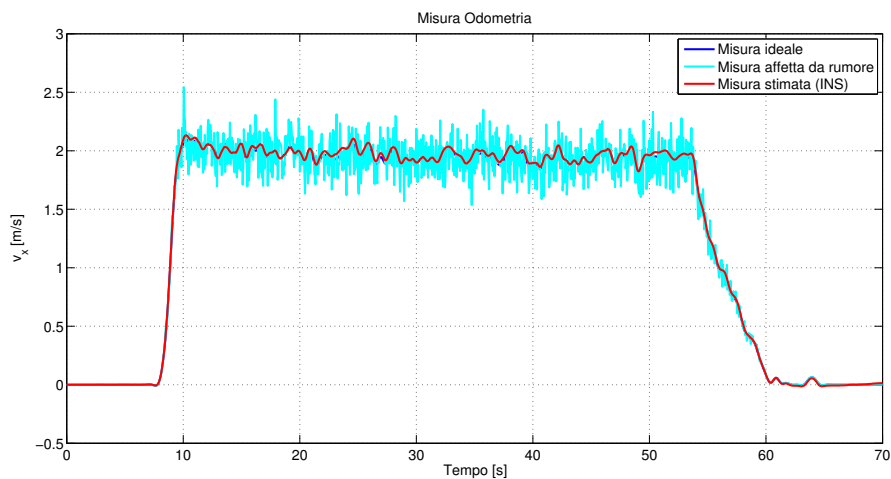
marcato, dovuto alla partenza del veicolo, seguito da altre oscillazioni di entità minore e infine da una rampa di decelerazione dovuta all'arresto progressivo del mezzo. La direzione y è rivolta alla destra del robot, di conseguenza l'accelerazione a_y misura valori negativi quando si hanno delle curve verso sinistra e positivi quando la curva è verso destra, questo è dovuto al diverso orientamento dell'accelerazione centripeta. La stessa forma dell'accelerazione a_y viene assunta dalla velocità angolare ω_z , l'asse z è infatti rivolto verso il basso quindi durante le curve a sinistra si registrerà una variazione dell'angolo di imbardata negativa e viceversa per le curve verso destra. Tutte le altre misure a_z , ω_x , ω_y restano costanti nel tempo, a meno degli errori di misura, per l'assenza di pendenza del terreno. In seguito, tramite il processo di navigazione inerziale (INS), si impiegheranno tutti questi dati allo scopo di realizzare una prima stima dello stato del veicolo \tilde{x} .

Nell'immagine 5.11 sono riportate le misure ideali di posizione e velocità fornite dal GPS $\underline{y} = [\dots \underline{v}^n \underline{p}^n \dots]^T$ e quelle reali $\underline{y}_{ext} = [\dots \underline{v}_{GPS}^n \underline{p}_{GPS}^n \dots]^T$ nelle quali viene introdotta la presenza dei disturbi. In questo caso in particolare le discontinuità in posizione del GPS sono concentrate nella zona sopra descritta. Inoltre a partire dalla stima dello stato \tilde{x} viene calcolata, grazie al processo di navigazione inerziale, la stima di posizione e velocità del veicolo $\tilde{y} = [\dots \tilde{v}^n \tilde{p}^n \dots]^T$ rappresentata in rosso nella stessa figura. Si rende evidente il fatto che questa stima peggiori nel tempo, allontanandosi progressivamente dalle misure ideali a causa delle limitazioni intrinseche racchiuse nell' algoritmo di integrazione e del rumore associato alle misure \tilde{u} . Questa deviazione è tanto più evidente nell'approccio in *open loop* della figura 5.11a, rispetto a quello in *closed loop* rappresentato nella 5.11b. I disturbi introdotti in tutti gli strumenti sono generati in modo casuale, come descritto al

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.11:** Velocità e posizione misurate dal GPS

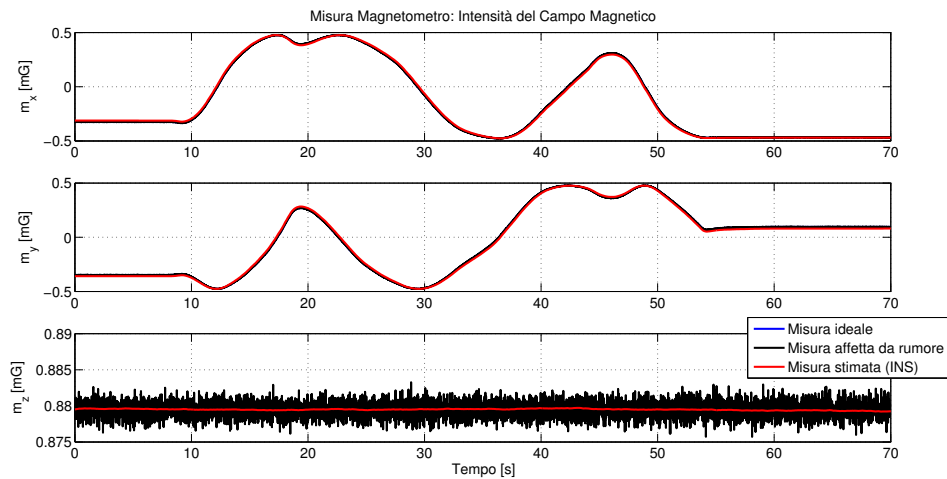
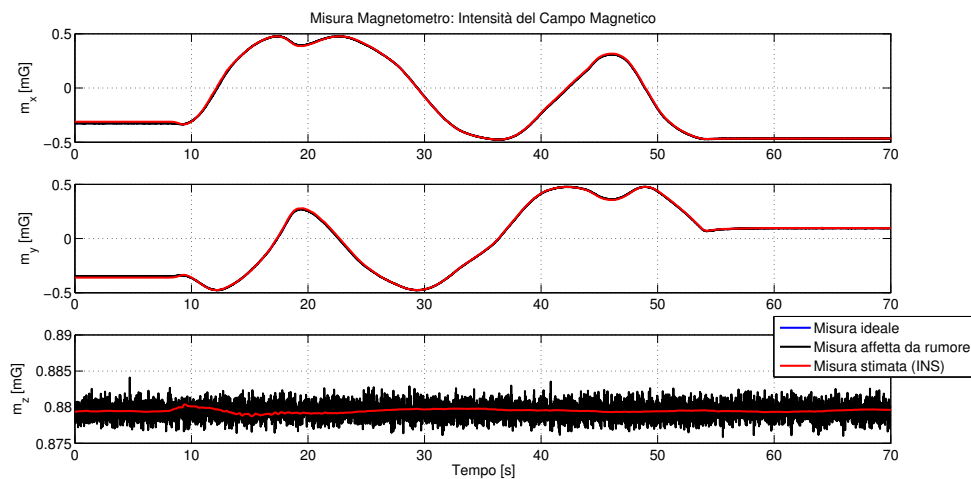
paragrafo 2.2, quindi variabili oltre che nel tempo anche tra le varie prove.

La velocità di avanzamento misurata dall'odometria è simulata in figura 5.12. Ancora una volta viene rappresentata in blu la misura ideale $\underline{y} = [v_x \ \dots]^T$ e sovrapposta ad essa viene tracciata la simulazione della misura reale $\underline{y}_{ext} = [v_{x_{odo}} \ \dots]^T$ in cui si nota la presenza del rumore. Si può osservare che in questo caso l'andamento della velocità è all'incirca di tipo trapezoidale, in cui a seguito di un transitorio iniziale si raggiunge una velocità di regime costante nel tempo a meno degli errori di misura e di controllo del mezzo, fino al transitorio di decelerazione. Si traccia infine la stima della misura degli odometri $\tilde{\underline{y}} = [\tilde{v}_x \ \dots]^T$ ottenuta grazie ai dati degli accelerometri e dei giroscopi $\tilde{\underline{u}}$. Nuovamente è visibile come quest'ultimo valore

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.12:** Velocità di avanzamento misurata dall'odometria

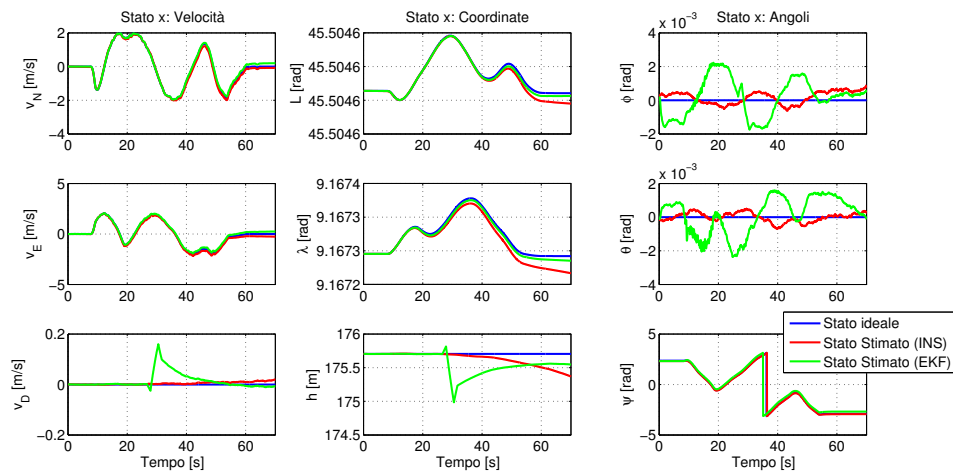
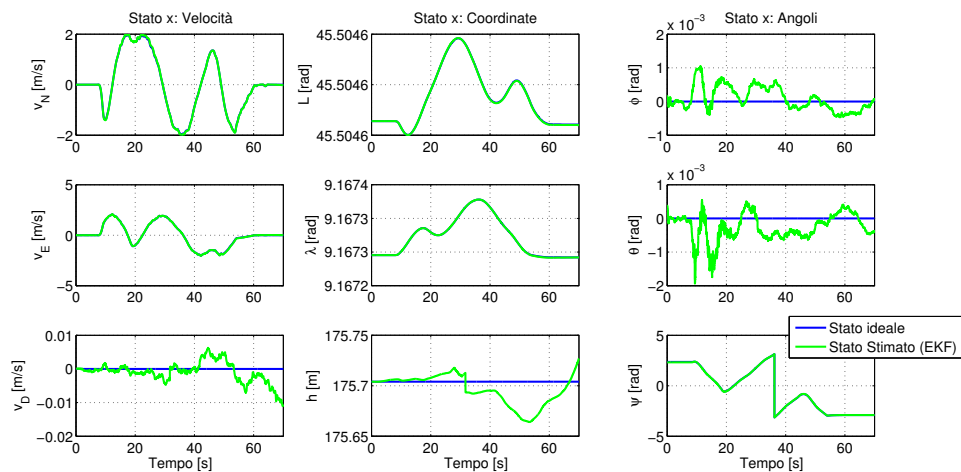
diverga nel tempo nel caso di un approccio in *open loop* e come tale errore venga attenuato in *closed loop*.

Nella figura 5.13 viene riportata un'informazione sulle misure ideali del magnetometro $\underline{y} = [\dots \underline{m}^b]^T$ e sulle misure reali $\underline{y}_{ext} = [\dots \underline{m}_{mag}^b]^T$ in cui si ha la presenza di rumore. La pendenza nulla del terreno consente all'asse z del veicolo di restare parallelo a sé stesso nel tempo e dunque di avere anche un campo magnetico lungo z m_z costante al variare della posizione del robot. Anche qui è tracciata la stima delle misure $\tilde{\underline{y}} = [\dots \tilde{\underline{m}}^b]^T$ calcolata durante la navigazione inerziale a partire dalla stima dello stato $\tilde{\underline{x}}$. In figura 5.13a sono rappresentati i risultati della configurazione in *open loop*, i quali sono caratterizzati da una minore accuratezza della stima rispetto a quella del *closed loop* riportata in figura 5.13b.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.13:** Campo magnetico misurato dal magnetometro

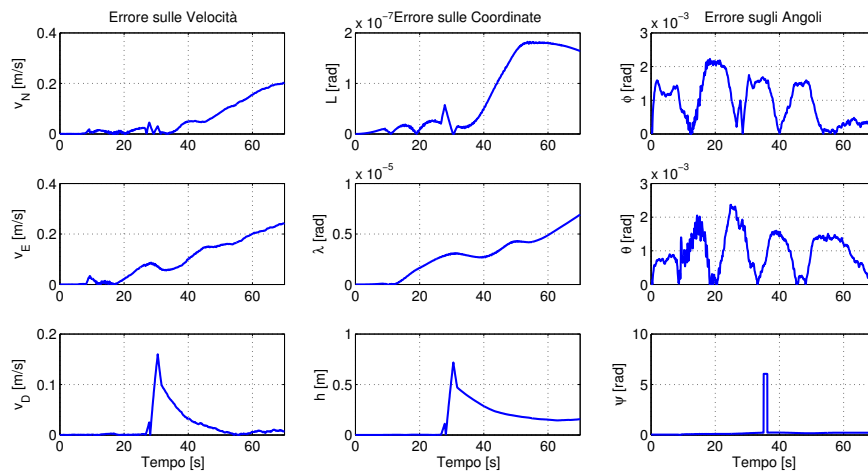
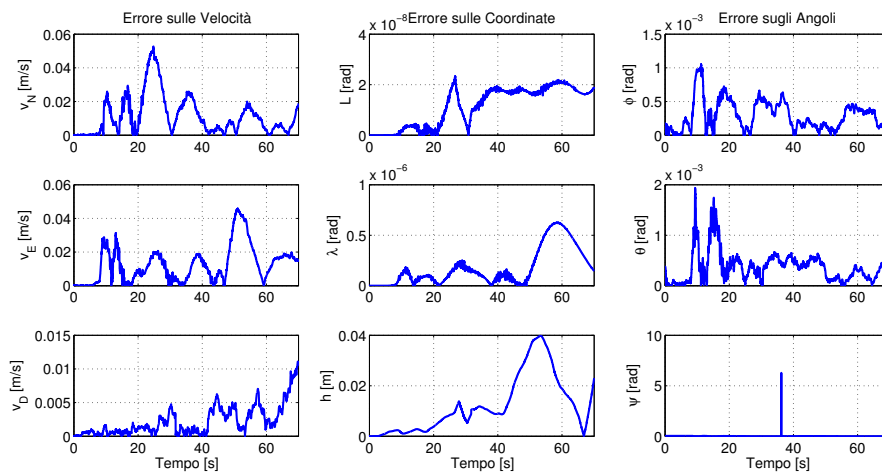
Lo stato del veicolo si può stimare utilizzando il filtro di Kalman descritto al paragrafo 4.2 e fornendo ad esso le misure simulate per gli strumenti, descritte nelle figure precedenti.

Nell'immagine 5.14a sono riportati i risultati dell'algoritmo in configurazione *open loop*. Lo stato stimato tramite la navigazione inerziale \hat{x} diverge progressivamente al trascorrere del tempo, ma la correzione realizzata grazie al filtro di Kalman permette di avvicinare la stima finale \hat{x} allo stato ideale del sistema x legato alla traiettoria realmente percorsa e ricostruita in questa simulazione virtuale. Lo svantaggio dell'*open loop* risulta evidente in altitudine dove, in presenza di un errore del GPS, si ha un distacco dalla traiettoria ideale che viene recuperato lentamente nel tempo. Tale problema si riscontra anche nella velocità v_D in quanto esiste

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.14:** Stato del sistema

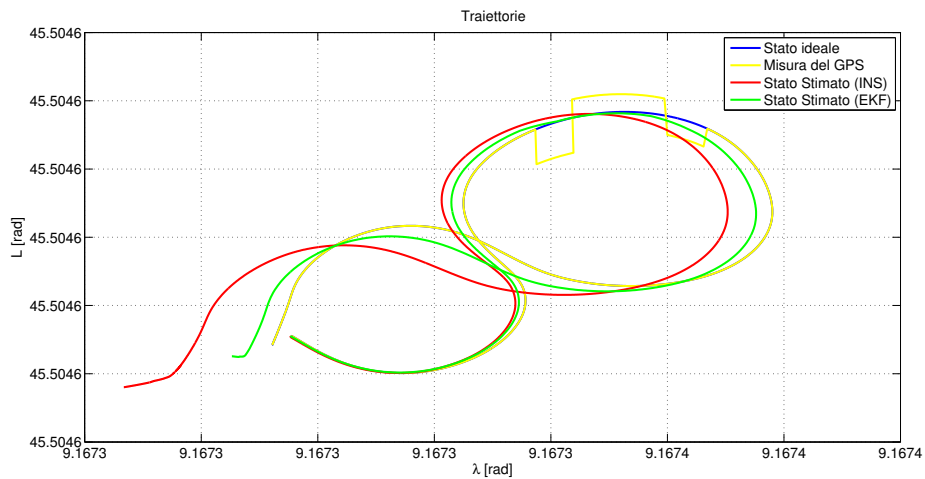
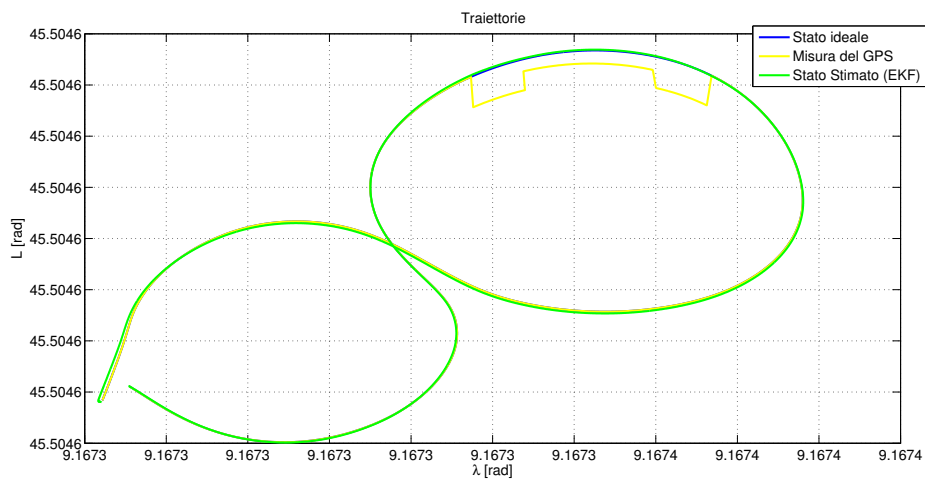
una correlazione tra essa e l'altitudine h . Per quanto riguarda invece la stima dell'orientamento, si hanno errori dell'ordine di 10^{-3} rad sia nell'angolo di rollio ϕ che in quello di beccheggio θ che in quello d'imbardata ψ .

Il filtro in *closed loop* consente di aggiornare ad ogni passo le condizioni iniziali del processo di navigazione inerziale con la stima corretta con la *sensor fusion*. I suoi risultati sono raffigurati nell'immagine 5.14b da cui si evince come esso riesca a portare lo stato corretto \hat{x} più vicino allo stato ideale x di quanto faccia l'algoritmo in *open loop*. L'altitudine h stimata si allontana dallo stato ideale nel momento in cui peggiora il segnale fornito dal GPS, essa deriva poi nel tempo pur restando ad una distanza di alcuni centimetri, ritenuta accettabile. Anche in questo caso gli errori di rollio ϕ , beccheggio θ e imbardata ψ restano molto piccoli, nell'ordine di 10^{-3} rad.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.15:** Errore sullo stato del sistema

Per avere una valutazione quantitativa della bontà della correzione effettuata dal filtro, viene mostrato in figura 5.15 l'errore esistente tra lo stato ideale \underline{x} e lo stato corretto dalla *sensor fusion* $\hat{\underline{x}}$.

Nell'immagine 5.15a vengono illustrati gli errori dovuti all'utilizzo del sistema in configurazione *open loop*. Ancora una volta si evidenzia che con questo algoritmo non si è del tutto in grado di arrestare la deriva nella stima della velocità e della posizione. Nel momento in cui il GPS fornisce dei dati sbagliati sulla posizione, la correzione comincia a compiere degli errori progressivamente sempre più grandi, poiché non si ha la possibilità di modificare la matrice di covarianza delle misure in modo da pesare di meno il contributo relativo alla posizione data dal GPS. Implementare un algoritmo che vada a modificare ogni volta le covarianze richiede l'utilizzo di un

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 5.16:** Stima della Traiettorie

procedimento iterativo, questo risulta però essere troppo dispendioso in termini di tempi di calcolo e per questa ragione non può essere utilizzato in *real time* e dunque viene escluso dalla simulazione. I risultati dovuti alla stima dell'orientamento sono invece piuttosto corretti, grazie all'utilizzo del magnetometro triassiale che ha dei disturbi che non variano drasticamente nel tempo, a meno dell'influsso di campi magnetici indesiderati, ma esclusi in questa trattazione.

Con l'utilizzo della configurazione in *closed loop*, i cui errori sono rappresentati in figura 5.15b, si riescono a migliorare sia i risultati dovuti alla stima stessa che a rimuovere la deriva nel tempo. Nell'algoritmo in *closed loop* è infatti possibile applicare la tecnica introdotta per la prima volta al paragrafo 4.3, la quale prevede di impiegare solamente il processo di navigazione inerziale nei periodi di tempo in

cui il segnale del GPS è inesistente o non utilizzabile. In questo modo si evita di correggere la matrice di covarianza presente sulle misure, ma al tempo stesso si possono escludere i dati erronei dati dal sistema di posizionamento globale. Oltre agli evidenti miglioramenti presenti in posizione e velocità, è possibile notare che anche i tre angoli di Eulero sono caratterizzati da un errore di stima più ridotto.

In ultimo nella figura 5.16 vengono rappresentate, oltre che la traiettoria ideale, anche quella stimata durante la navigazione e quella fornita dal GPS. Le considerazioni su questi risultati sono le stesse di quelle viste per una traiettoria generica e descritta in precedenza.

5.2.3 Conclusioni sui risultati

Entrambe le traiettorie simulate in questo capitolo vengono stimate in modo corretto durante il processo di localizzazione. L'architettura di navigazione *loosely coupled* è stata impiegata in entrambi i casi secondo due configurazioni: *open loop* e *closed loop*.

In generale i risultati ottenuti in configurazione *closed loop* risultano essere più accurati di quelli in *open loop*, tuttavia entrambi presentano degli errori ridotti e nel breve tempo non si discostano eccessivamente dalla traiettoria ideale. Sia l'una che l'altra potrebbero quindi essere usate per determinare lo stato del veicolo, da fornire ad una successiva fase di controllo.

Gli errori simulati sono tuttavia quelli dichiarati nei manuali dei sensori o quelli osservati in via sperimentale (come nel caso del GPS). In una situazione reale la strumentazione potrebbe essere affetta da vibrazioni ben più elevate indotte da agenti esterni e da *bias* intrinseci agli strumenti di misura. Di conseguenza si potrebbero avere dei risultati di navigazione piuttosto differenti da quelli ottenuti in questo capitolo, come ad esempio una maggiore deriva dell'integrazione della navigazione inerziale che rende più difficile la stima finale del veicolo realizzata tramite il filtro di Kalman. Per questa ragione è bene proseguire il lavoro con la realizzazione di prove sperimentali atte a validare la robustezza della procedura.

Capitolo 6

Risultati sperimentali

*“ Quello che noi ci immaginiamo bisogna che sia
o una delle cose già vedute,
o un composto di cose
o di parti delle cose altra volta vedute. ”*

— Galileo Galilei

Le prove sperimentali si discostano significativamente dai modelli matematici realizzati nel capitolo 5. In un'applicazione reale, oltre ai rumori di misura intrinseci dei dispositivi, si aggiungono numerosi disturbi che non possono essere previsti dal produttore del sensore e che dunque non trovano una corrispondenza nelle tabelle del *datasheet*.

Nel caso specifico di cui ci si è occupati durante la realizzazione del progetto di tesi, ci si è in particolare scontrati con un rumore assai significativo sugli accelerometri e i giroscopi della IMU. Nel seguito verrà perciò condotta un'analisi dei dati forniti da questo dispositivo, focalizzando l'attenzione sulle possibili cause d'errore. Successivamente saranno descritte le soluzioni adottate sia a livello meccanico che di filtraggio in *post-processing* per ridurre i disturbi agenti su questi e tutti gli altri sensori utilizzati. Saranno infine presentati i risultati ottenuti a seguito delle correzioni fatte sulle misure.

6.1 Analisi dei dati di accelerometri e giroscopi

Gli accelerometri e i giroscopi sono contenuti all'interno della piattaforma inerziale, essa è rigidamente vincolata al pianale del robot in posizione centrale, come mostrato in figura 6.1. Le misure vengono realizzate lungo gli assi della terna-b descritta al paragrafo 3.1.

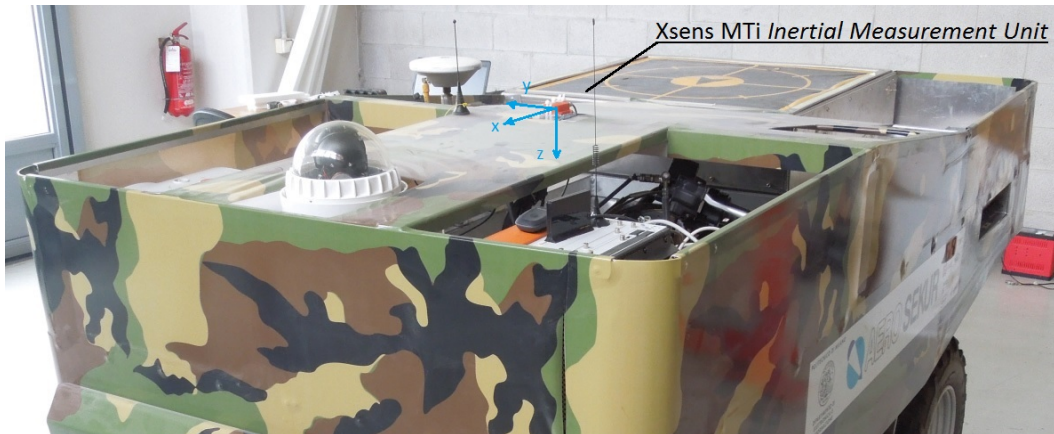


Figura 6.1: IMU installata sul pianale del veicolo

Nelle prove realizzate si è cercato di fare in modo di poter caratterizzare i disturbi da cui sono affette le misure della IMU. Considerando questo, si è reso necessario acquisire il segnale secondo cinque differenti modalità, così da poter distinguere le possibili cause dei disturbi. Il rumore di misura, le vibrazioni del motore e quelle indotte dalla strada hanno un contributo diverso nel degradare le misurazioni degli accelerometri e dei giroscopi.

Ci si può aspettare per le misure la presenza di un rumore di fondo distribuito su tutte le frequenze, ma dal piccolo contributo in ampiezza. Essendo inoltre il motore un monocilindrico, come detto al paragrafo 2.1, si avranno delle grosse vibrazioni dovute al funzionamento dello stesso, poiché non esistono pistoni contrapposti che bilanciano la spinta data dalla combustione. Il motore sarà la causa di importanti contributi di disturbo principalmente agenti su alcune specifiche frequenze e dipendenti dalla sua stessa velocità di rotazione. Si può infine ritenere che il manto stradale e le asperità del terreno introducano un ulteriore contributo nella definizione dei disturbi.

Per evidenziare le cause del rumore si è ritenuto opportuno impiegare un'analisi spettrale in modo da distinguere le frequenze sollecitate. Allo scopo viene utilizzata la trasformata discreta di Fourier (DFT), essa converte una serie di dati campionati ad una determinata frequenza in una collezione di coefficienti di una combinazione lineare di sinusoidi, ordinate al crescere della frequenza. Si tratta di un modo per rappresentare nel dominio delle frequenze una funzione altrimenti variabile nel tempo. Le frequenze delle sinusoidi della combinazione periodica lineare prodotta dalla trasformata sono multipli interi di una frequenza fondamentale, il cui periodo è la lunghezza dell'intervallo di campionamento.

La successione di N numeri complessi x_0, x_1, \dots, x_{N-1} è trasformata nella successione di N numeri complessi X_0, X_1, \dots, X_{N-1} dalla trasformata discreta di Fourier

secondo la formula

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-k \frac{2\pi i}{N} n} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (6.1)$$

dove i è l'unità immaginaria e $e^{\frac{2\pi i}{N}}$ è una radice dell'unità primitiva N -esima. La trasformata è spesso rappresentata dal simbolo \mathcal{F} , usato come $X = \mathcal{F}(\mathbf{x})$.

6.1.1 Motore spento

In questa prova i dati acquisiti dalla IMU vengono registrati senza azionare il motore del veicolo, allo scopo di individuare il rumore di misura in modo da distinguerlo, nelle prove successive, dai disturbi dovuti alle vibrazioni del terreno e del motore. Il rumore di misura potrà eventualmente essere confrontato con il modello matematico realizzato grazie ai dati presenti nel manuale tecnico della piattaforma inerziale.

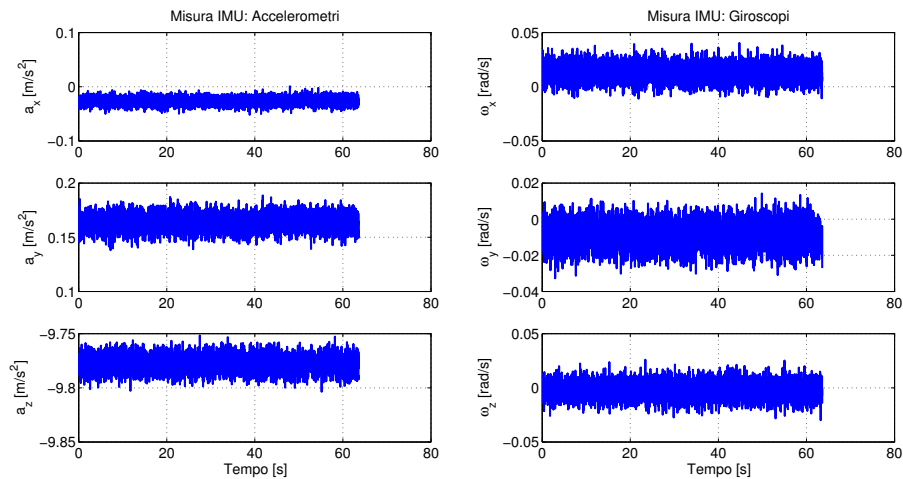
La prima cosa che si può notare dai dati rappresentati in figura 6.2a è la presenza di un valore medio non nullo sia nell'acquisizione degli accelerometri che in quella dei giroscopi. Nel caso dei giroscopi questo valore può essere causato solamente da un *bias* di misura variabile con la temperatura dei sensori. Per gli accelerometri, non essendo il veicolo in movimento, questo contributo può invece essere imputabile sia al *bias* che al campo gravitazionale suddiviso sui tre assi a seconda dell'orientamento assunto dalla IMU stessa. Gli angoli di inclinazione del dispositivo rispetto alla terna-n possono a loro volta essere dovuti a diverse circostanze:

- Il veicolo è parcheggiato su di un terreno in pendenza
- Il pianale su cui è installata la IMU è diversamente inclinato rispetto al piano delle ruote a causa di pesi distribuiti non uniformemente sulla carrozzeria
- La terna di misura non è parallela alla terna-b del robot

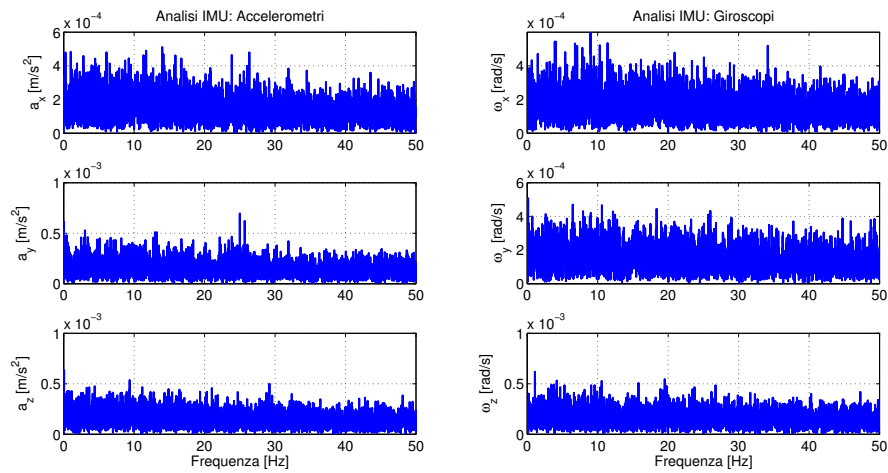
La quota parte del valore medio non nullo imputabile al *bias* degli strumenti, è la causa di una deriva nell'integrazione della IMU durante il processo di navigazione inerziale. Per questo è necessario ricorrere ad una corretta calibrazione della piattaforma inerziale, ciò non è tuttavia semplice in quanto il suddetto *bias* è variabile nel tempo e dipendente dalla temperatura.

Oltre al valore medio non nullo sono presenti delle oscillazioni di misura assimilabili al rumore di fondo. Esso risulta tuttavia essere maggiore di quello descritto dal costruttore in tabella 2.1.

L'analisi spettrale in figura 6.2b mostra una distribuzione in frequenza dei disturbi all'incirca uniforme, ciò vuol dire che essi possono essere assimilati ad un rumore bianco.



(a) Storia temporale



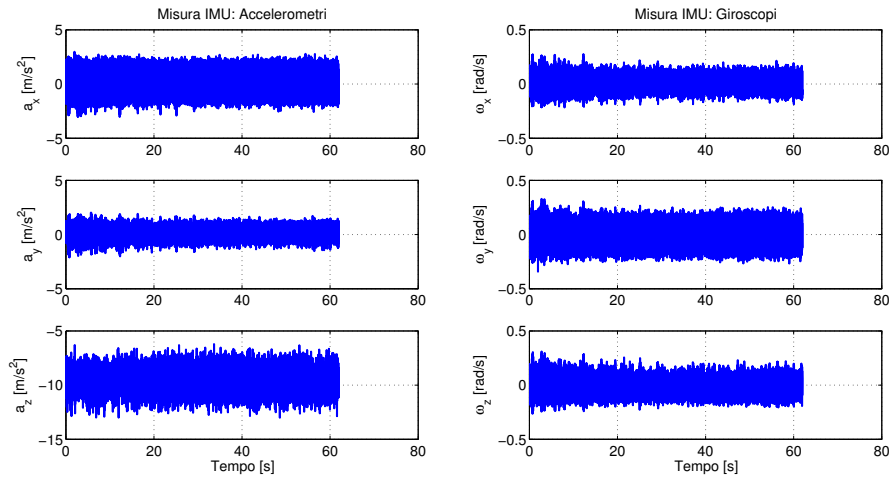
(b) Spettro in frequenza

Figura 6.2: Dati misurati: motore spento

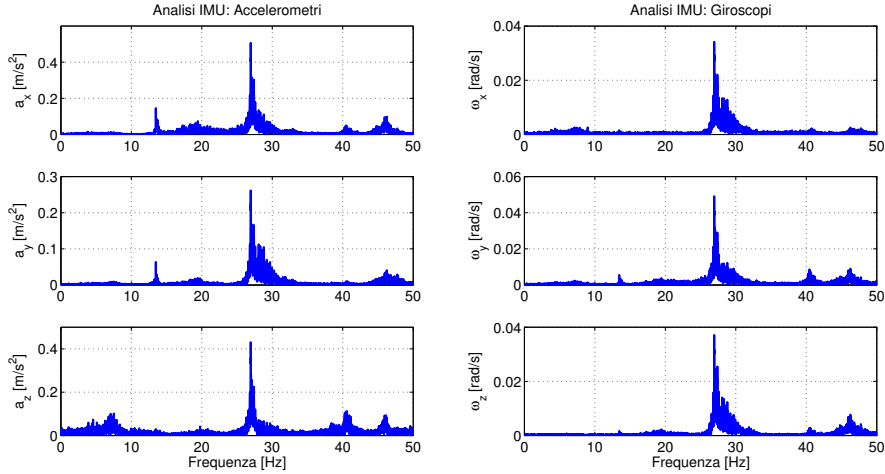
Il rumore bianco è infatti un particolare tipo di rumore caratterizzato dall'assenza di periodicità nel tempo e da ampiezza costante su tutto lo spettro di frequenze. Nella pratica però il rumore bianco non esiste: si tratta di un'idealizzazione teorica, poiché nessun sistema è in grado di generare uno spettro uniforme per tutte le frequenze esteso da zero a infinito, mentre nei casi reali d'interesse il rumore bianco è al più riferibile ad un intervallo di frequenze (rumore bianco a banda finita o limitata). Si presenta così spesso uno spettro con caratteristiche simili al rumore bianco, ma con ampiezza maggiore alle basse frequenze e minore fino ad azzerarsi alle frequenze maggiori.

6.1.2 Motore acceso e veicolo fermo

Nella seconda prova le misure vengono realizzate azionando il motore e lasciandolo andare ad un numero di giri costante nel tempo. Questa analisi permette di vedere come cambiano le misurazioni della IMU rispetto al caso precedente in cui il motore era spento e quando la piattaforma inerziale non poteva registrare altro che il proprio rumore di misura.



(a) Storia temporale



(b) Spettro in frequenza

Figura 6.3: Dati misurati: motore acceso e veicolo fermo

In questa configurazione si sono ottenuti i risultati presentati in figura 6.3a. Da essi risulta evidente che le vibrazioni del motore giocano un contributo estremamente rilevante nel distorcere soprattutto le informazioni sull'accelerazione, ma anche quelle sulla velocità angolare.

L'analisi spettrale viene presentata in figura 6.3b, essa mostra come le vibrazioni del motore vengano percepite lungo tutti e tre gli assi. Gli accelerometri rilevano infatti le accelerazioni dovute alle oscillazioni, le quali causano anche delle piccole rotazioni del pianale del veicolo misurate poi dai giroscopi. Si può notare che le vibrazioni in bassa frequenza sono di maggiore entità per l'accelerazione a_z e le velocità angolari ω_x e ω_y , probabilmente dovute ad un'oscillazione del motore prevalentemente in direzione verticale. In tutti i casi è però individuabile una consistente vibrazione ad una specifica frequenza di circa 27 Hz. Tipicamente si denota con n_{giro} un numero adimensionale che indica quante volte si manifesta la vibrazione in un giro di rotazione completo. Le vibrazioni di un albero rotante possono avere componenti:

- Sincrone con la frequenza di rotazione ($n_{giro} = 1$, uno per giro).
- Sincrone con multipli della frequenza di rotazione (es: $n_{giro} = 2$, due per giro).
- Sincrone con sottomultipli della frequenza di rotazione (es: $n_{giro} = 0.5$, mezzo per giro).

Nel caso specifico si è ritenuto che la componente manifestata a 27 Hz sia la uno per giro, di conseguenza è possibile calcolare la velocità di rotazione mantenuta dal motore durante la prova come di seguito riportato

$$N_M = \frac{f_{giro}}{n_{giro}} \cdot 60 = \frac{27}{1} \cdot 60 = 1620 \text{ rpm} \quad (6.2)$$

dove f_{giro} indica la frequenza corrispondente al disturbo che si presenta n_{giro} volte durante un periodo di rotazione. Questa velocità coincide all'incirca con quella reale, infatti prendendo in considerazione il manuale del quad [55] risulta che la velocità di rotazione minima del motore deve essere compresa tra i 1350 rpm e i 1450 rpm e inoltre è stato verificato che il controllo dell'acceleratore tiene il motore leggermente accelerato anche a *setpoint* di velocità uguale a zero. Si possono a questo punto fare diverse ipotesi per giustificare la presenza delle altre componenti di disturbo.

Frequenze Hz	I ipotesi n_{giro}	II ipotesi n_{giro}	Commenti
6 ÷ 8	0.25	4	di ampiezza maggiore in a_z
13 ÷ 14	0.5	0.5	più consistente in a_x e in ω_y
19 ÷ 21	0.75	3	componente molto piccola
26 ÷ 28	1	1	componente più rilevante
40 ÷ 41	1.5	1.5	maggiormente visibile per a_x , a_z e ω_y
46 ÷ 47	1.75	2	piuttosto consistente tranne che per ω_x

Tabella 6.1: Componenti di disturbo dovute al motore

Da un primo punto di vista si può ritenere che la vibrazione presente a 27 Hz, così come gli altri contributi visibili e descritti in tabella 6.1, siano multipli della frequenza più bassa. Questo è un tipico comportamento degli alberi in rotazione che manifestano sollecitazioni di vibrazione a frequenze multiple della velocità di rotazione.

Un'altra teoria potrebbe essere quella di considerare alcune delle frequenze visibili nello spettro come effetto di un *aliasing*. L'acquisizione della IMU viene infatti realizzata a frequenza di campionamento $f_c = 100$ Hz, la cui pulsazione corrispondente è $\omega_c = 2\pi f_c$, mentre la pulsazione di Nyquist corrisponde a $\omega_N = \frac{\omega_c}{2}$. Se il segnale contiene componenti a pulsazione ω_s superiori ad ω_N durante l'acquisizione si genera un'armonica di *alias* di bassa frequenza, la cui pulsazione è data dalla formula [5]

$$\omega_{al} = |\omega_c - \omega_s| \quad \text{per } \omega_s < 3\omega_N \quad (6.3)$$

mentre per $\omega_s \geq 3\omega_N$ esistono formule analoghe alla precedente [5].

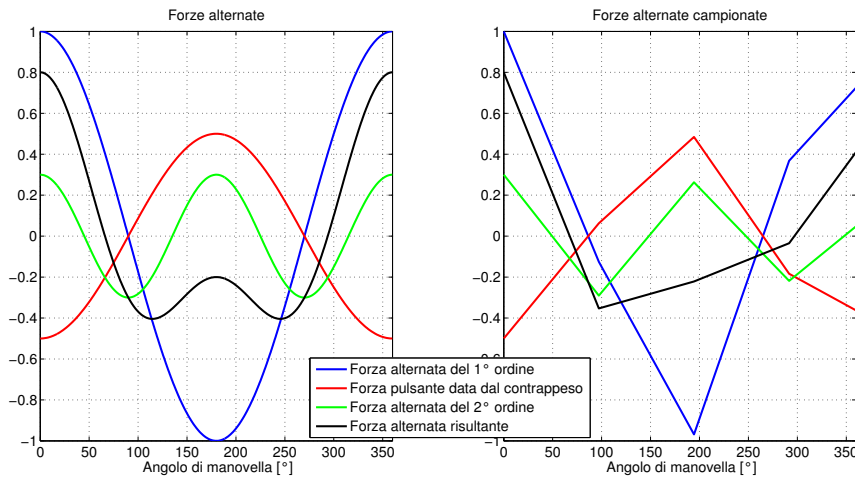


Figura 6.4: Diagramma della contrappesatura del monocilindro

In letteratura per motori endotermici monocilindrici vengono descritte le sollecitazioni rappresentate in figura 6.4 e descritte dalle equazioni seguenti normalizzate rispetto alla forzante maggiore [21]

$$F_{1a} = \cos(\omega_M t) \quad \text{Forza alternata del 1° ordine: } n_{giro} = 1 \quad (6.4)$$

$$F_{1b} = -0.5 \cos(\omega_M t) \quad \text{Forza pulsante data dal contrappeso: } n_{giro} = 1 \quad (6.5)$$

$$F_2 = 0.15 \cos(2\omega_M t) \quad \text{Forza alternata del 2° ordine: } n_{giro} = 2 \quad (6.6)$$

$$F_{tot} = F_{1a} + F_{1b} + F_2 \quad \text{Forza alternata risultante} \quad (6.7)$$

in cui ω_M rappresenta la velocità di rotazione del motore espressa in rad/s che può

essere ottenuta a partire da quella calcolata in (6.2)

$$\omega_M = 2\pi \frac{N_M}{60} \quad (6.8)$$

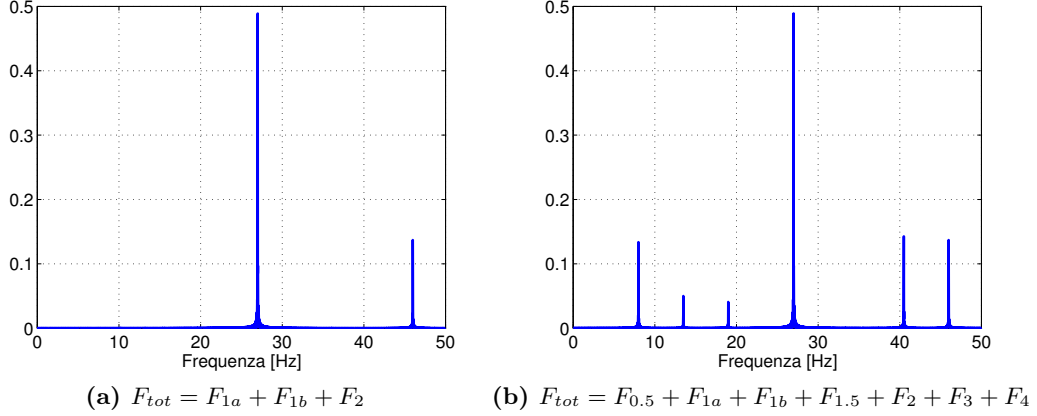


Figura 6.5: Spettro in frequenza relativo alle forze alternate

Lo spettro di figura 6.5a è relativo a queste sollecitazioni e in particolare si può notare come in esso la forza alternata del 2° ordine si manifesti ad una frequenza di 46 Hz. Questa è però una componente 2 per giro e dunque dovrebbe corrispondere ad una frequenza doppia rispetto a 27 Hz cioè 54 Hz, ma tale valore è superiore alla frequenza di Nyquist (50 Hz) e infatti risente di un effetto di *aliasing* come descritto nella (6.3). Tale rappresentazione non comprende però tutte le componenti visibili nello spettro reale di figura 6.3b, si può però ipotizzare di avere ulteriori forze alternate dovute alle masse in movimento all'interno del motore

$$F_{0.5} = 0.05 \cos(0.5\omega_M t) \quad n_{giro} = 0.5 \quad (6.9)$$

$$F_{1.5} = 0.15 \cos(1.5\omega_M t) \quad n_{giro} = 1.5 \quad (6.10)$$

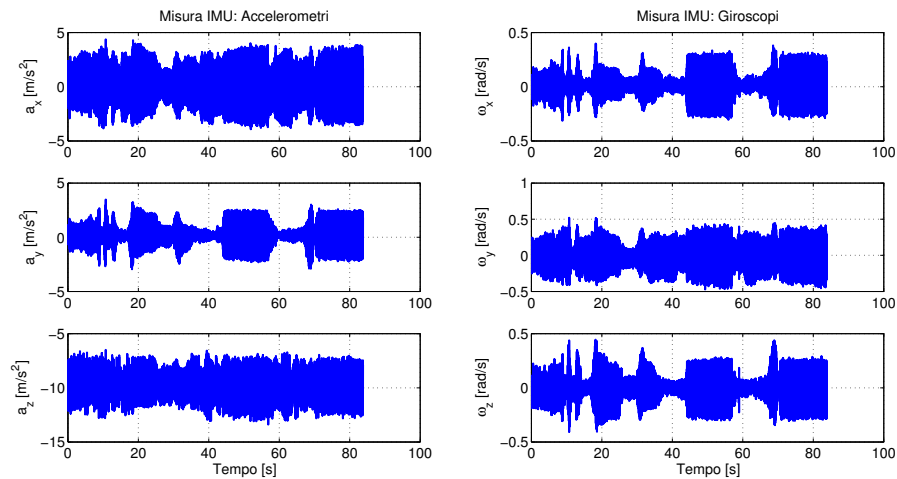
$$F_3 = 0.05 \cos(3\omega_M t) \quad n_{giro} = 3 \quad (6.11)$$

$$F_4 = 0.15 \cos(4\omega_M t) \quad n_{giro} = 4 \quad (6.12)$$

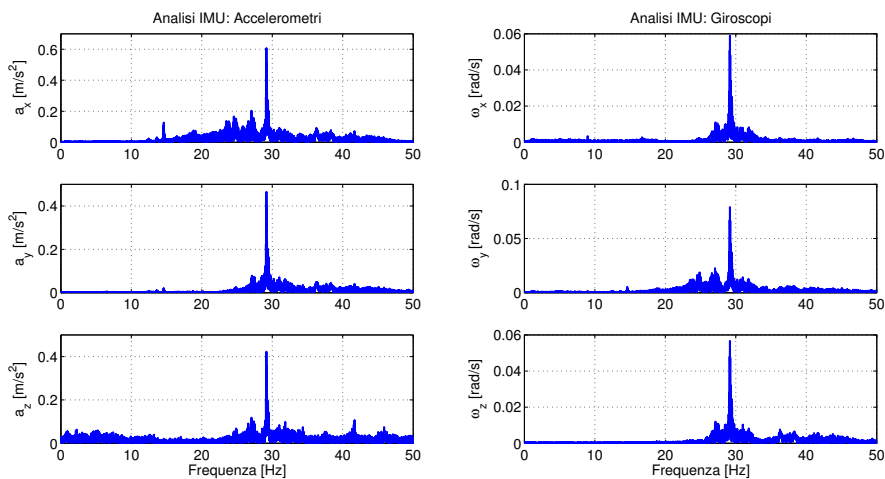
Lo spettro corrispondente a tutte le sollecitazioni fin qui introdotte viene riportato nell'immagine 6.5b. In questo compaiono tutte le frequenze già visibili nello spettro corrispondente ai dati misurati e riportate in tabella 6.1.

6.1.3 Motore in accelerazione e veicolo fermo

La terza prova è stata realizzata mettendo in folle il cambio del veicolo in modo da poter accelerare i giri del motore senza però consentire al veicolo di muoversi. Il



(a) Storia temporale



(b) Spettro in frequenza

Figura 6.6: Dati misurati: motore in accelerazione e veicolo fermo

motore è stato accelerato a velocità differenti per intervalli di tempo diversi e non regolari, alternati da momenti in cui il motore non veniva accelerato. In questo caso l'obiettivo è identificare come cambiano le vibrazioni al crescere della velocità di rotazione del motore.

Dalla figura 6.6a si vede che in effetti, a causa delle diverse accelerazioni fornite nel tempo al motore, esistono delle consistenti variazioni di ampiezze delle accelerazioni e delle velocità angolari misurate.

Nell'immagine 6.6b si può notare un picco elevato alla frequenza di circa 27 Hz, corrispondente al picco della prova precedente, questo riappare poiché ci sono stati intervalli in cui il motore girava ancora al minimo. A causa delle diverse velocità a cui gira il motore, va inoltre notata la presenza di componenti un po' più ridotte disposte

attorno alla suddetta frequenza, ma comunque maggiori rispetto al caso precedente, in cui non avendo accelerazioni non era possibile ottenere tale distribuzione. Avendo a disposizione una prova in cui le velocità cambiano nel tempo, si avranno delle frequenze di disturbo, dovute alla rotazione del motore, che a loro volta variano nel tempo. Questo fa sì che nell'analisi spettrale esse risultino distribuite nell'intorno delle frequenze in cui variano. Anche in questo caso la misura dell'accelerazione lungo z a_z e delle velocità angolari attorno a x e y ω_x, ω_y sono soggette a sollecitazioni più consistenti in bassa frequenza.

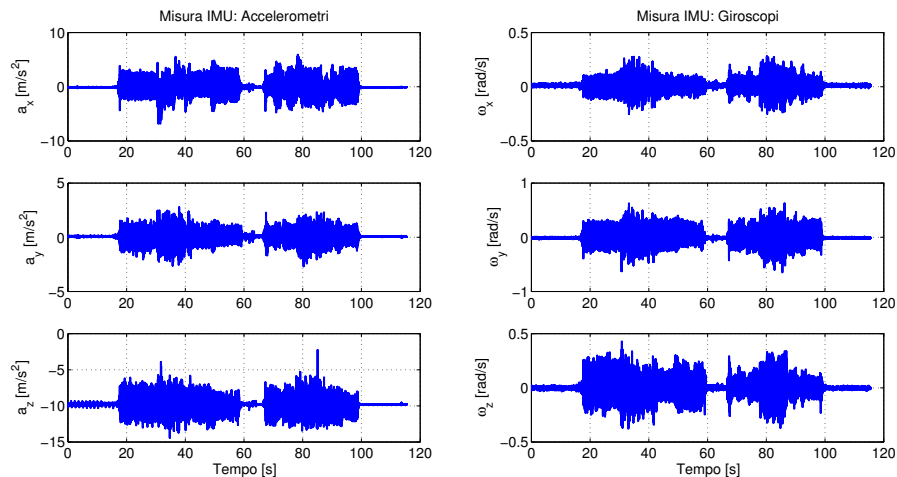
6.1.4 Veicolo in moto rettilineo su terreno liscio e pianeggiante

La prova in questione è stata effettuata guidando il veicolo lungo un percorso rettilineo e su di un terreno liscio e pianeggiante come l'interno di un garage. In questo modo nei dati misurati vengono aggiunte le accelerazioni dovute al movimento del veicolo stesso, evitando le sollecitazioni date da buche e dossi presenti su un qualunque terreno erboso e dalla granulosità del manto stradale. Trovandosi in un ambiente chiuso non è stato tuttavia possibile acquisire i dati del GPS al fine di tracciarne la traiettoria.

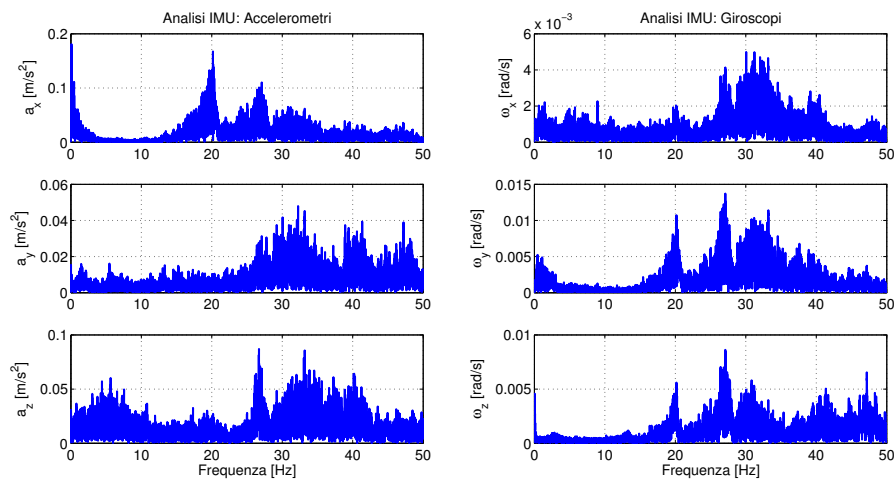
Il veicolo viene guidato in retromarcia per circa 10s ad una velocità sostenuta e poi fatto fermare spegnendo il motore. La seconda parte del percorso viene fatta dopo avere riacceso il motore, conducendo il robot in avanti per la durata di quasi 20s. In realtà in entrambi i tratti il veicolo si sposta mantenendo un piccolo angolo di sterzo, ne risulta una traiettoria non perfettamente rettilinea.

Nei dati raccolti in figura 6.7a non è possibile distinguere né le accelerazioni né le velocità angolari che ci si aspetterebbe dal tipo di traiettoria percorsa. I disturbi descritti nelle prove precedenti sono tanto elevati da nascondere le informazioni utili ed è perciò evidente la necessità di dover ricorrere ad un sistema di filtraggio in frequenza.

Nello spettro in frequenza di figura 6.7b compaiono delle componenti consistenti anche al di sotto dei 5 Hz dovute al moto del veicolo lungo il percorso. In particolare si ha un incremento di quasi un ordine di grandezza nel caso dell'accelerazione lungo x a_x (direzione in cui si ha prevalentemente lo spostamento) e un po' più ridotta lungo y a_y (a causa delle piccole curve compiute durante il moto). Generalmente le ampiezze maggiori si distribuiscono tra i 20, i 25 e i 30 Hz, tuttavia esiste una diffusione di molte altre ampiezze elevate su tutte le frequenze circostanti. Questo comportamento è dovuto al fatto che durante la prova le frequenze di sollecitazione cambiano nel tempo a causa del movimento del veicolo alle diverse velocità, nello spettro in frequenza invece queste variazioni non possono essere rappresentate, perciò quello che si ottiene è una dispersione delle stesse fra differenti valori.



(a) Storia temporale



(b) Spettro in frequenza

Figura 6.7: Dati misurati: veicolo in moto rettilineo su terreno liscio e pianeggiante

6.1.5 Veicolo in moto generico su terreno erboso e sconnesso

L'ultima prova è stata realizzata conducendo il robot lungo un percorso casuale e su di un terreno erboso e dunque caratterizzato da piccole buche e dossi. Lo scopo è quello di individuare le differenze presenti nello spettro di questa con la precedente, in modo da imputarne la causa al tipo di suolo.

La velocità di moto è sostenuta e viene mantenuta pressoché costante a 3 m s^{-1} , ma il percorso seguito non è rettilineo a causa della conformazione del prato, della sua limitata dimensione e dei limiti naturali in esso presenti.

Dalle misurazioni mostrate in figura 6.8a non è possibile ottenere molte informazioni utili ad effettuare una prima stima di localizzazione del mezzo. Solamente

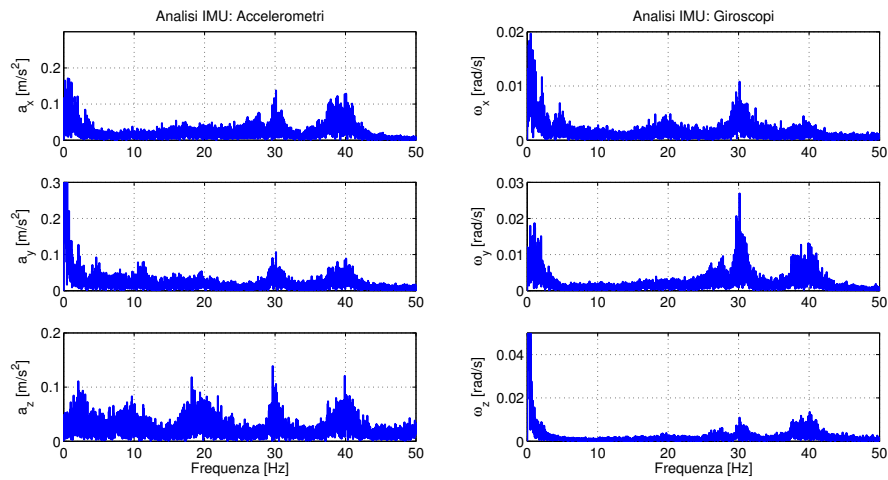
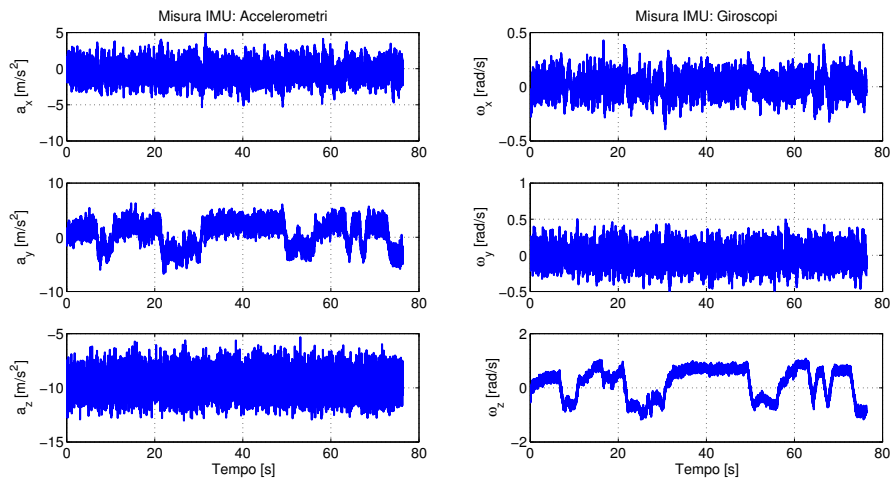


Figura 6.8: Dati misurati: veicolo in moto generico su terreno erboso e sconnesso

grazie all'accelerazione centripeta misurata lungo y a_y e alla velocità angolare attorno all'asse z ω_z è possibile intuire l'orientamento del veicolo nel tempo. Come già evidenziato infatti la prova realizzata non è in moto rettilineo, ma segue una traiettoria qualunque. Le restanti misure invece hanno dei disturbi così importanti da non rendere possibile l'identificazione delle rimanenti informazioni sul moto.

Osservando lo spettro in frequenza di figura 6.8b si può notare che le componenti individuate nel caso di motore acceso e veicolo fermo, mostrate in figura 6.3b, sono aumentate di frequenza. Questo è dovuto ad una maggiore velocità dei giri del motore che in questa prova è stata portata ad un valore circa costante nel tempo. Un altro aspetto importante, riferito a tutte e sei le misure, è legato alle componenti di bassa frequenza: in questo caso esse hanno infatti ampiezza maggiore di quelle a frequenze

più elevate. Per quanto detto, la più grande differenza di questa prova rispetto alla precedente è dovuta al tipo di terreno, si può dunque sostenere che la presenza di asperità lungo il percorso comporta delle sollecitazioni di bassa frequenza.

6.1.6 Conclusioni sull'analisi dei dati

Nel presente paragrafo sono state analizzate diverse prove durante le quali sono stati acquisiti i segnali degli accelerometri e dei giroscopi presenti all'interno della piattaforma inerziale.

In primo luogo si è reso evidente che il rumore di fondo degli strumenti può essere assimilato ad un rumore bianco gaussiano di ampiezza contenuta.

Successivamente, l'accensione del motore, ha portato ad un aumento dei disturbi, individuabili nell'intorno di alcune frequenze principali. La causa di queste componenti è stata ricercata avanzando due possibili ipotesi. La prima ritiene che le componenti presenti nello spettro siano in corrispondenza delle effettive frequenze di vibrazione del motore, mentre la seconda considera di avere un effetto di *aliasing*. Infatti, come riportato nel manuale della IMU [54], le vibrazioni possono causare problemi nelle misure dei sensori, in particolare vengono segnalate due possibili situazioni:

- L'ampiezza di vibrazione è maggiore del fondo scala dei sensori. Questo porta ad avere una saturazione degli strumenti che si manifesta come un *drift* del valore medio delle misure.
- La frequenza di vibrazione è maggiore della frequenza di Nyquist. In teoria tali vibrazioni possono essere rigettate dalla banda passante dei sensori, ma in pratica esse generano spesso un effetto di *aliasing*. Questo viene mostrato nell'acquisizione con oscillazioni aventi una frequenza più bassa di quella effettiva.

L'incremento di velocità nelle rotazioni del motore porta inoltre i disturbi a spostarsi a frequenze maggiori. Se si considera però l'effetto di *aliasing*, un incremento di frequenza delle componenti al di sopra del limite della banda passante, corrisponde ad un abbassamento della corrispondente frequenza di *alias*.

A differenza dei disturbi dovuti al motore, le componenti di moto del veicolo si distribuiscono tutte in bassa frequenza al di sotto dei 5 Hz. Ad esse tuttavia si sovrappongono gli effetti dovuti alle asperità del suolo che si manifestano con un aumento dell'ampiezza dei disturbi di bassa frequenza.

6.2 Riduzione dei disturbi

Nel presente paragrafo vengono presentate delle tecniche di reiezione dei disturbi specifiche per ciascuno strumento di misura e al tipo di problema da cui essi sono affetti. In primo luogo verranno trattati i dati provenienti dagli accelerometri e i giroscopi della piattaforma inerziale, ne seguirà poi una trattazione specifica per gli altri strumenti quali magnetometro e GPS.

6.2.1 Accelerometri e Giroscopi

Al paragrafo precedente sono state analizzate cinque prove effettuate allo scopo di individuare i disturbi presenti sulle misure della IMU e quindi le frequenze da eliminare tramite l'impiego di un sistema di filtraggio.

Come è già stato detto, le variazioni di accelerazione e velocità angolare del pianale, dovute al moto del veicolo, non possono che essere a bassa frequenza (inferiori a circa 5 Hz), perciò tutti i contributi alle alte frequenze non sono utili alla stima di navigazione e devono perciò essere rimossi. Per questa ragione è stato impiegato un filtro digitale passa-basso avente le seguenti caratteristiche

- Butterworth (o “massimamente piatto”), è una delle più semplici tipologie di filtro. Il suo scopo è ottenere una risposta in frequenza il più possibile piatta in modulo nella banda passante [8].
- *Zero-phase forward and reverse*, dopo aver filtrato il segnale in avanti, il filtro inverte la sequenza ed esegue lo stesso processo all'indietro [37]. Il risultato ottenuto è un segnale filtrato non sfasato nel tempo. Questa caratteristica è stata impiegata avendo a disposizione l'intera storia dei dati, mentre volendo ricorrere ad un'applicazione in *real time* è bene utilizzare un filtro *linear-phase* il quale ritarda l'intero segnale dello stesso quantitativo senza distorsioni di fase.
- *Infinite Impulse Response* (IIR), è un sistema dinamico causale la cui risposta impulsiva non è nulla al tendere all'infinito del tempo. I sistemi la cui risposta si annulla ad un tempo finito sono detti *finite impulse response* (FIR).

A seguito delle analisi riportate in precedenza si è scelto di tagliare le frequenze sotto i 5 Hz con un filtro del secondo ordine, tuttavia la caratteristica *zero-phase forward and reverse* raddoppia l'ordine in conseguenza del doppio filtraggio che realizza.

Motore spento

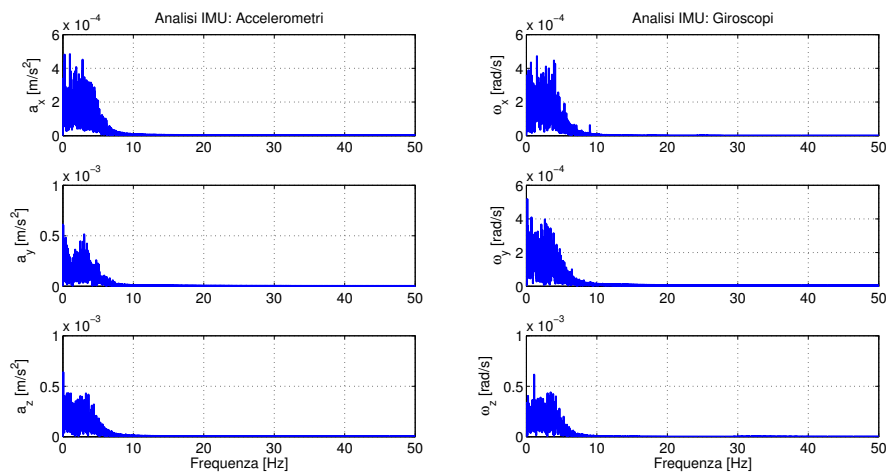
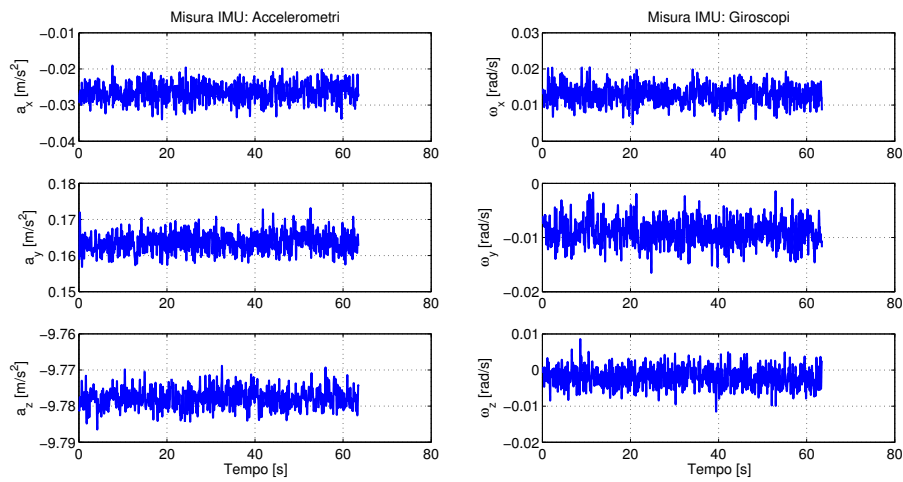


Figura 6.9: Dati filtrati: motore spento

Rispetto ai dati non filtrati rappresentati in 6.2a, il segnale filtrato mostrato in figura 6.9a non presenta una sostanziale diminuzione delle ampiezze di oscillazione. Questo è un risultato atteso poiché come è stato detto i dati sono affetti da un rumore bianco che quindi si distribuisce uniformemente su tutto lo spettro e non può perciò essere eliminato con un filtro passa basso.

Lo spettro in frequenza viene mostrato in figura 6.9b e presenta una sostanziale riduzione dell'ampiezza a frequenze maggiori di quella di taglio.

Motore acceso e veicolo fermo

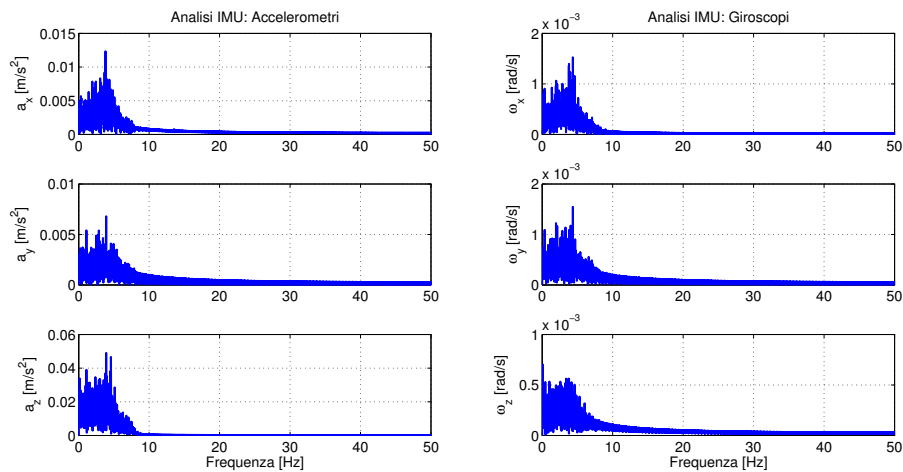
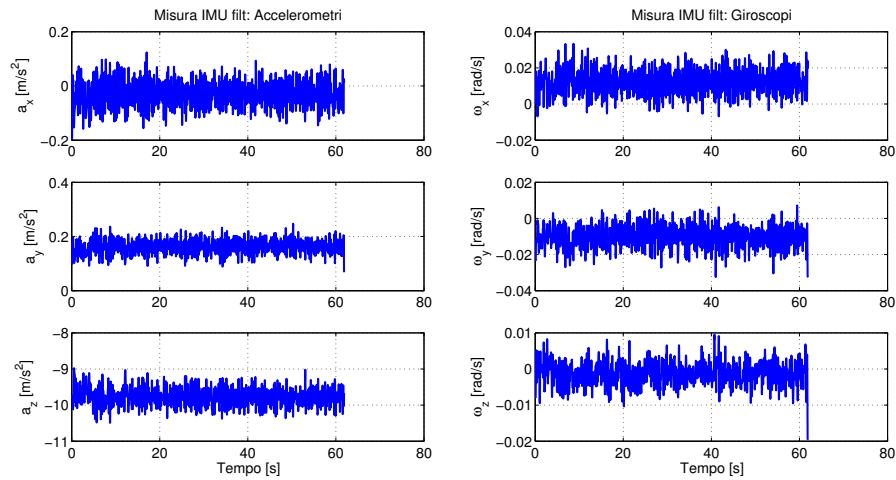


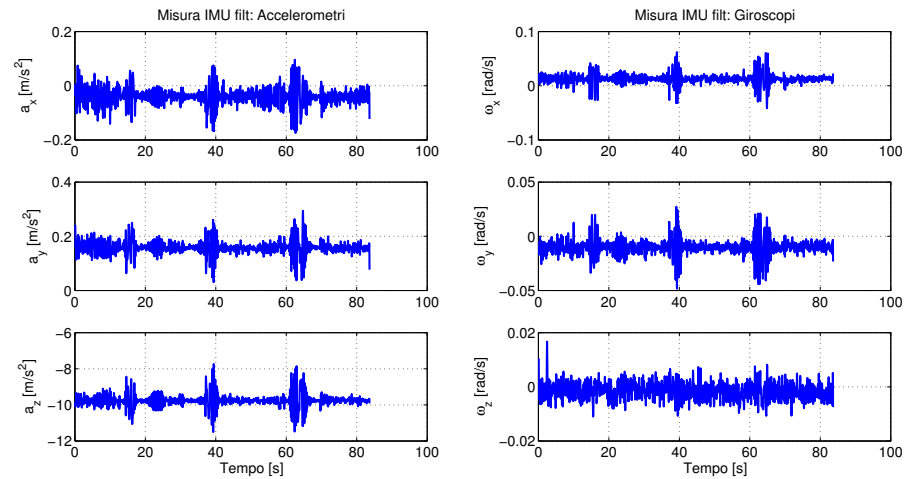
Figura 6.10: Dati filtrati: motore acceso e veicolo fermo

A differenza della prova precedente, nei dati di figura 6.10a, si può vedere come il filtro abbia avuto un effetto decisamente più importante. Le ampiezze delle oscillazione si sono ridotte di almeno un ordine di grandezza rispetto a quelle di figura 6.3a. Se si effettua un confronto con i dati filtrati della prova precedente 6.9a in cui il motore era spento, si evince che nonostante la grande riduzione del rumore ottenuta in questo caso con il filtro, una parte delle vibrazioni dovute al motore non può essere rimossa, ottenendo quindi un segnale comunque più rumoroso.

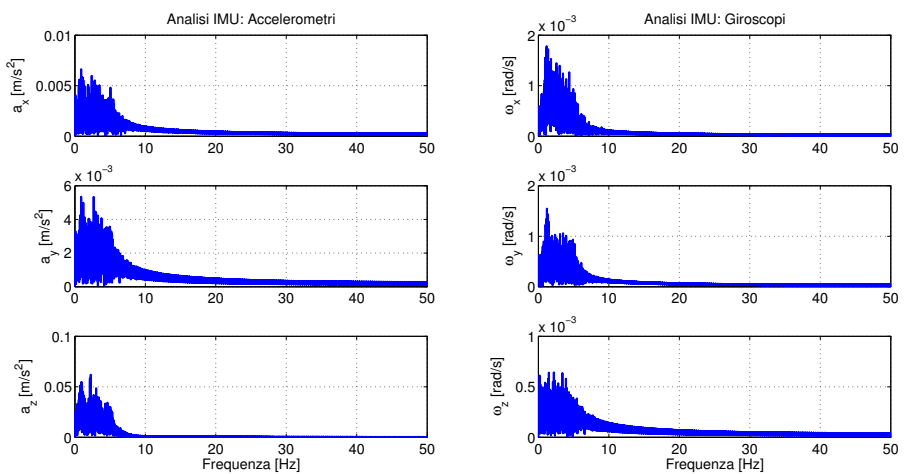
Con l'impiego dello spettro in frequenza 6.10b si rende ancora più evidente il taglio dovuto al filtro passa basso a 5 Hz. Si nota che la parte residua dei disturbi è

maggiore per la misura dell'accelerometro in direzione z a_z e per quelle dei giroscopi attorno agli altri due assi ω_x , ω_y per quanto detto al paragrafo 6.1.

Motore in accelerazione e veicolo fermo



(a) Storia temporale



(b) Spettro in frequenza

Figura 6.11: Dati filtrati: motore acceso in accelerazione e veicolo fermo

Ciò che risulta immediatamente evidente dalla figura 6.11a è che le maggiori oscillazioni del segnale filtrato si hanno proprio in corrispondenza delle oscillazioni minori del segnale non filtrato di figura 6.6a. Questo è dovuto al fatto che i rumori più grandi si hanno in alta frequenza, ma che vengono rimossi dal filtro, a differenza dei disturbi di bassa frequenza. Ancora una volta l'effetto del filtro si fa consistente

per tutte le misure tranne che per l'accelerazione lungo z a_z che presenta dunque vibrazioni di maggiore entità.

Le considerazioni che possono essere fatte per lo spettro in figura 6.11b sono le stesse già esposte per il caso precedente. Questo perché le frequenze generate dal motore in accelerazione si spostano solo in alta frequenza, ma vengono poi rimosse dal filtro passa basso.

Veicolo in moto rettilineo su terreno liscio e pianeggiante

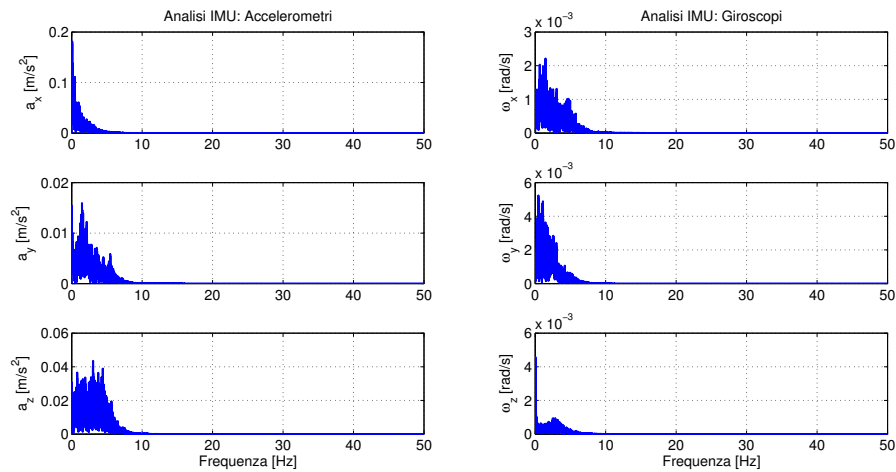
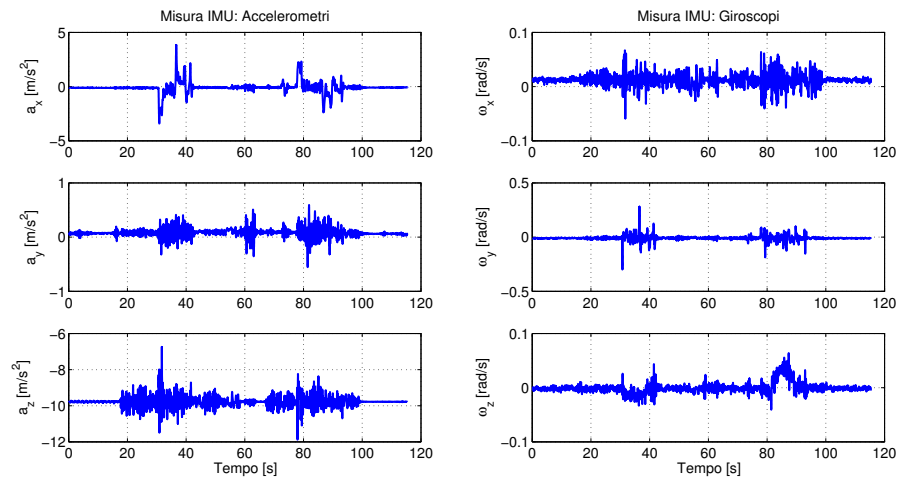


Figura 6.12: Dati filtrati: veicolo in moto rettilineo su terreno liscio e pianeggiante

Nell'immagine 6.12a si può vedere un andamento delle accelerazioni e delle velocità angolari coerente con la traiettoria percorsa dal veicolo. L'accelerazione misurata

lungo x a_x mostra bene l'istante di partenza all'indietro seguito poi dalla frenata e una forma simile per il percorso in avanti. L'imbardata del mezzo è legata alla velocità angolare attorno a z ω_z ed essa mostra che in realtà il veicolo non procede in linea retta, ma compie un piccolo arco di circonferenza sia nel primo che nel secondo tratto. Questo giustifica la presenza di accelerazioni lungo y a_y .

L'analisi in frequenza di figura 6.12b mostra delle componenti residue di bassa frequenza molto maggiori in a_x e in a_y , rispetto a quelle dell'immagine 6.11b, mentre l'accelerazione a_z non presenta questa differenza. Tale comportamento è senza dubbio imputabile ad un moto piano in direzione x e y , il quale genera componenti di bassa frequenza che non vengono eliminate dal filtro.

Per verificare di non perdere componenti di movimento importanti per la stima dello stato del robot, si è realizzato un confronto tra la velocità ottenuta integrando l'accelerazione filtrata lungo x a_x e la velocità di avanzamento v_x calcolata grazie agli odometri. Nel processo di navigazione inerziale questo veniva realizzato eliminando dall'accelerazione la componente dovuta alla gravità, calcolata in base alle coordinate geografiche e poi rimossa in funzione dell'orientamento del mezzo (si veda il capitolo 3). Muovendosi però in un ambiente chiuso, in questa fase non si hanno a disposizione i dati del GPS, di conseguenza ne risulterebbe una stima errata della gravità. Per questa ragione l'approccio qui di seguito adottato prevede di calcolare l'accelerazione di gravità mediando i dati dei primi 10 s in cui il veicolo è fermo. Lo scopo è quello di rimuovere il valore medio dalle accelerazioni così da ridurre la deriva dell'integrazione. A causa della variazione dell'assetto del veicolo durante il percorso la componente gravitazionale lungo l'asse x cambia, la rimozione non è perciò sempre corretta e quindi non si risolve del tutto l'effetto di deriva.

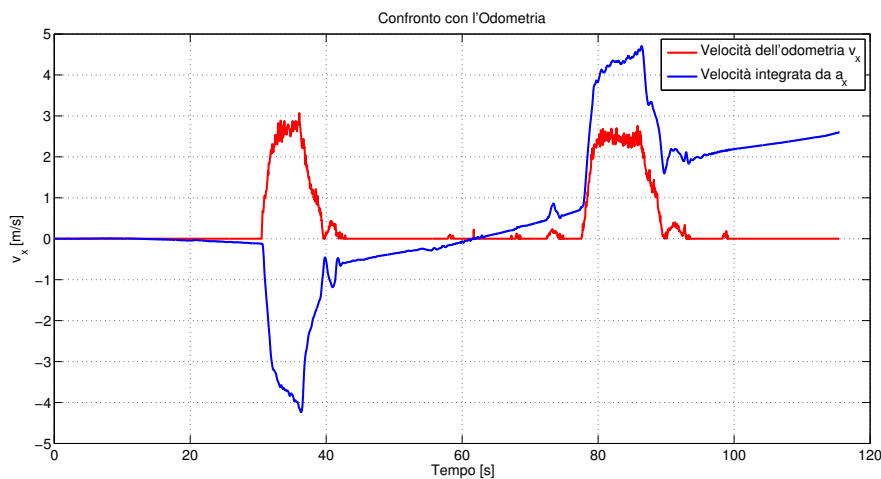


Figura 6.13: Verifica frequenza di taglio: veicolo in moto rettilineo su terreno liscio e pianeggiante

Come si nota in figura 6.13 la forma della velocità ottenuta derivando il segnale di accelerazione lungo x a_x è la stessa di quella misurata tramite gli odometri v_x , a meno dell'effetto di deriva descritto in precedenza e della direzione della velocità, in quanto gli odometri ne misurano solo il modulo. Questa è la dimostrazione che le componenti rimosse non sono quelle dovute al moto del veicolo.

Veicolo in moto generico su terreno erboso e sconnesso

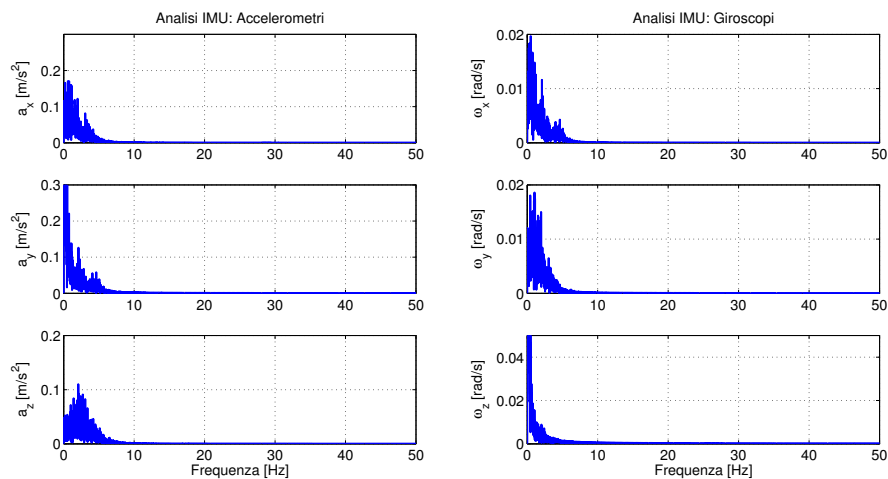
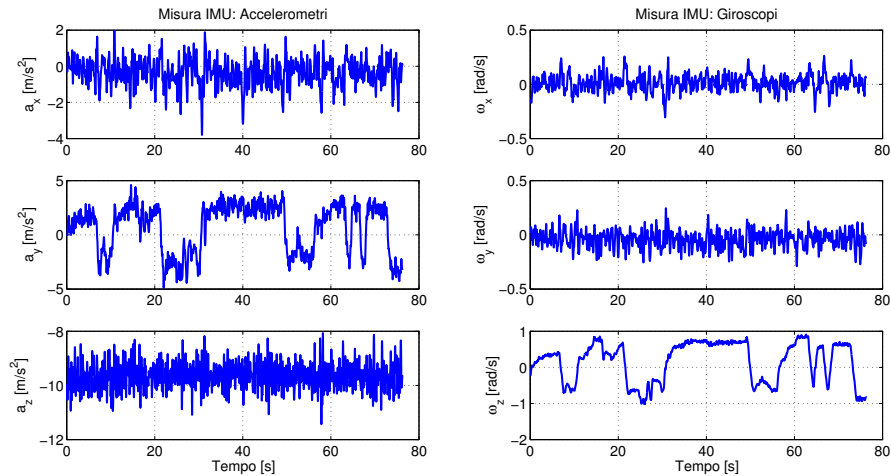


Figura 6.14: Dati filtrati: veicolo in moto generico su terreno erboso e sconnesso

L'immagine 6.14a mostra le accelerazioni e le velocità angolari ottenute a seguito dell'applicazione del filtro passa-basso. Rispetto al caso precedente qui si hanno disturbi residui di maggiore entità. Com'è stato infatti sottolineato nell'analisi al

paragrafo 6.1, tale prova è caratterizzata da rumore a più bassa frequenza dovuto alla conformazione del territorio. Ciononostante grazie all'accelerazione lungo y a_y e alla velocità angolare attorno a z ω_z è possibile ottenere informazioni sull'imbardata del veicolo, anche se un andamento era già piuttosto intuibile dai dati non filtrati nell'immagine 6.8a.

Lo spettro dell'immagine 6.14b mostra che le componenti di bassa frequenza sono molto più elevate nel caso in cui ci si muova su un terreno sconnesso piuttosto che su un suolo liscio. Oltre alle componenti del moto si aggiungono infatti le sollecitazioni date da buche e dossi ed è per questo che le ampiezze residue sono tanto più grandi del caso riportato in figura 6.12b, che a sua volta ne aveva di maggiori rispetto allo spettro di una prova da fermo come quella dell'immagine 6.11b.

Analogamente alla prova precedente, la velocità di avanzamento v_x , calcolata per mezzo degli odometri, è stata confrontata con l'integrale dell'accelerazione filtrata lungo x a_x . Da quest'ultima è stata inoltre rimossa la componente di gravità dovuta all'inclinazione del veicolo. Per fare ciò si è calcolata la media dell'accelerazione filtrata lungo x a_x durante tutto il tragitto poiché il veicolo viaggia circa a velocità costante.

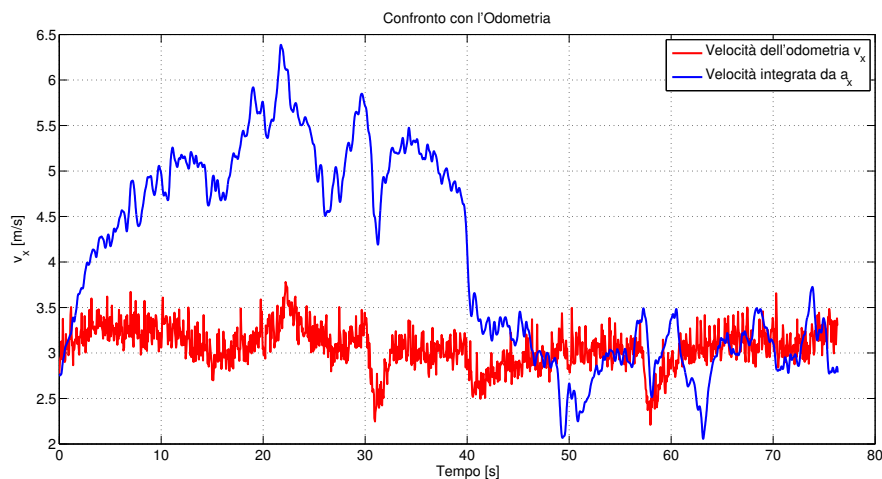


Figura 6.15: Verifica frequenza di taglio: veicolo in moto generico su terreno erboso e sconnesso

La figura 6.15 dimostra che il filtro non rimuove le componenti di accelerazione dovute al moto del veicolo, ma mette anche in evidenza che in questo caso, rispetto a quello di figura 6.13, esiste un distacco maggiore della velocità calcolata per integrazione da quella misurata dall'odometria nel tratto iniziale. Come già detto in precedenza, il processo di avanzamento su un suolo sconnesso comporta di avere delle sollecitazioni a bassa frequenza, le quali si vanno a confondere con le componenti dovute al moto del robot. Esse di conseguenza degradano le misure, ma al tempo

stesso non possono essere rimosse con un filtro passa-basso.

Considerazioni generali

Nonostante si sia realizzato un filtro passa-basso a frequenza molto ridotta, non è possibile eliminare del tutto le vibrazioni indesiderate, inoltre scegliendo una frequenza di taglio inferiore a 5 Hz non si ottengono risultati migliori, ma anzi si rischia di intaccare le componenti dello spettro dovute al moto.

Il processo di navigazione inerziale sarà comunque affetto da errori d'integrazione sulle misure della IMU a causa della presenza di componenti residue di disturbo, a queste si aggiunge un'importante contributo dovuto al *bias* degli strumenti. Questo non è facilmente quantificabile, poiché variabile nel tempo e dipendente dalla temperatura, ne risulta dunque difficile la rimozione, che non può essere effettuata con un filtro passa-basso, ma richiede la calibrazione degli strumenti.

Piccoli errori delle misure di accelerazione e velocità angolare vengono integrati in errori di orientamento crescenti nel tempo, poi utilizzati per calcolare velocità che degradano ancora di più, le quali portano infine ad errori ancora maggiori delle posizioni. Poiché le nuove posizioni sono calcolate a partire da quelle determinate in precedenza, gli errori si accumulano proporzionalmente al tempo trascorso dall'inizio dell'acquisizione.

6.2.2 Magnetometro

Il campo magnetico terrestre \underline{m}^n viene rappresentato dalla misura fornita dal magnetometro triassiale nella terna-b \underline{m}^b . I disturbi da cui esso è affetto sono stati caratterizzati durante delle prove sperimentali realizzate dal gruppo di ricerca del progetto Quadrivio del Politecnico di Milano [10].

A seguito delle analisi è stato sviluppato un modello dell'errore che tiene conto delle distorsioni magnetiche, del fattore di scala, del *bias*, delle non ortogonalità degli assi del sensore e dei disallineamenti degli stessi rispetto alla terna-b [49].

$$\tilde{\underline{m}}^b(t) = AC_n^b(t)\underline{m}^n + \underline{b} + \underline{\eta} \quad (6.13)$$

dove A è una matrice ricavata sperimentalmente e \underline{b} è il vettore dei *bias*

$$A = \begin{bmatrix} 1.8492 & -0.0450 & 0.0096 \\ 0.0704 & 1.7959 & -0.0064 \\ 0.1077 & -0.0304 & 0.6137 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -0.1268 \\ 0.0232 \\ -0.5139 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

L'errore di misura è quindi ottenuto dalla differenza tra il dato fornito dal magnetometro e il valore vero $\underline{e}_m^b = \tilde{\underline{m}}^b - \underline{m}^b$ [10].

6.2.3 GPS

Un sistema di posizionamento globale fornisce tipicamente un'informazione sulla posizione che dipende fortemente dalla bontà del segnale. Di conseguenza si otterranno misure continue in alcuni tratti di buona ricezione, alternati da punti di discontinuità dovuta alla riduzione della qualità nella comunicazione con i satelliti. Nella peggiore ipotesi possibile si potrà riscontrare un'interruzione totale del segnale.

Una correzione di queste misure non è dunque possibile da realizzare, poiché senza l'aiuto di un'altra antenna GPS non si ha conoscenza di quale sia la traiettoria realmente percorsa. Le discontinuità non possono perciò essere rimosse e il segnale non può essere ricreato quando la comunicazione satellitare viene meno.

Come è già stato descritto in precedenza 2.2, la posizione misurata dal GPS viene derivata per ricavare la velocità di movimento del veicolo. A causa delle discontinuità appena esposte la derivazione sarà soggetta a dei picchi istantanei di velocità che non avranno alcuna corrispondenza con quello che è il reale comportamento del robot.

In questo caso è dunque possibile ricorrere ad una correzione che elimini i suddetti picchi senza il rischio di cancellare un'informazione utile alla stima dello stato del veicolo. Per fare ciò si può confrontare il valore di velocità di un istante con quello precedente e valutare l'escursione esistente tra i due. Se tale differenza risulta più elevata di un limite stabilito a priori, si procede all'eliminazione del picco.

6.3 Localizzazione del veicolo

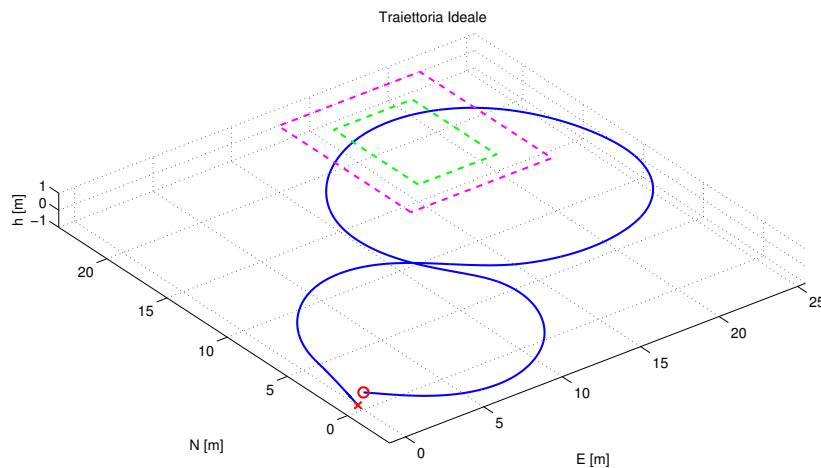


Figura 6.16: Traiettoria

Dopo aver analizzato il modello matematico sono stati raccolti dei dati a seguito di prove sperimentali. La prova analizzata nel seguito è quella simulata al paragrafo

5.2, i risultati non sono tuttavia del tutto paragonabili a causa dei forti disturbi presenti sugli accelerometri reali, nonostante le operazioni di filtraggio effettuate e descritte al paragrafo 6.2.

La traiettoria in questione è stata percorsa su un terreno erboso privo di pendenza. Il robot viene portato alla velocità di regime con un'accelerazione iniziale e infine frenato con una decelerazione più graduale, la velocità massima non è elevata per evitare l'eventuale ribaltamento del veicolo. Essa viene rappresentata in figura 6.16 ed è una ricostruzione realizzata grazie al modello matematico del veicolo esposto al paragrafo 5.1.

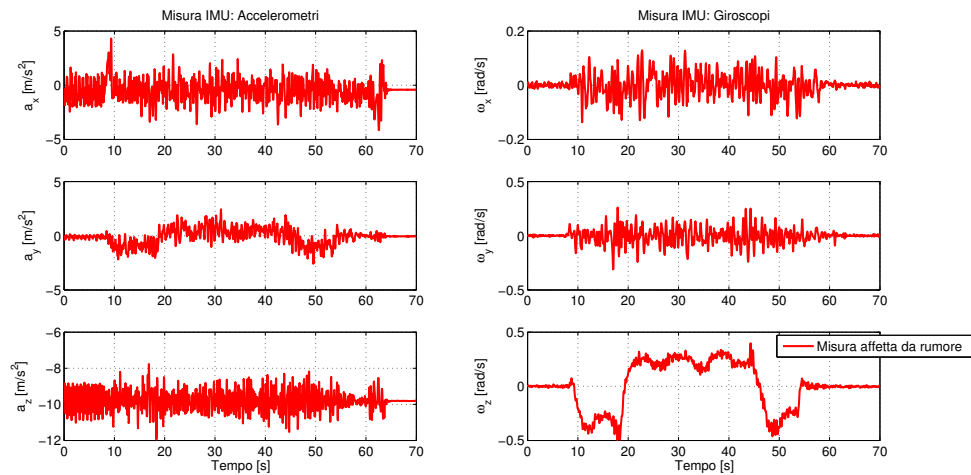
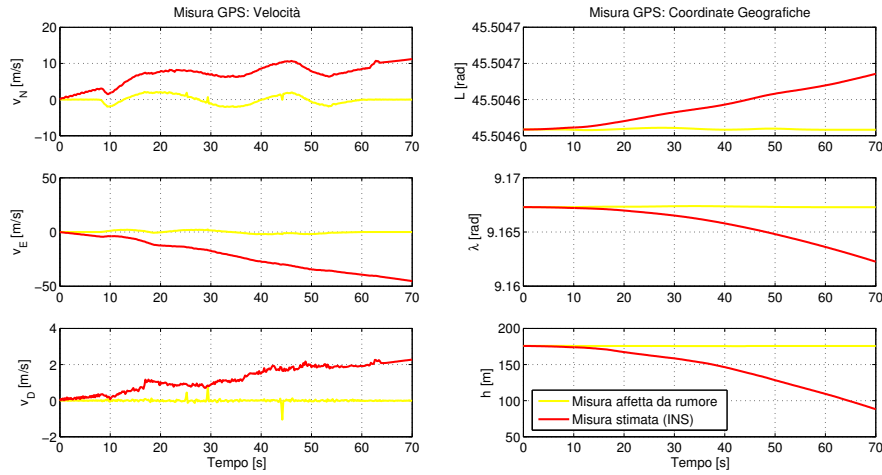
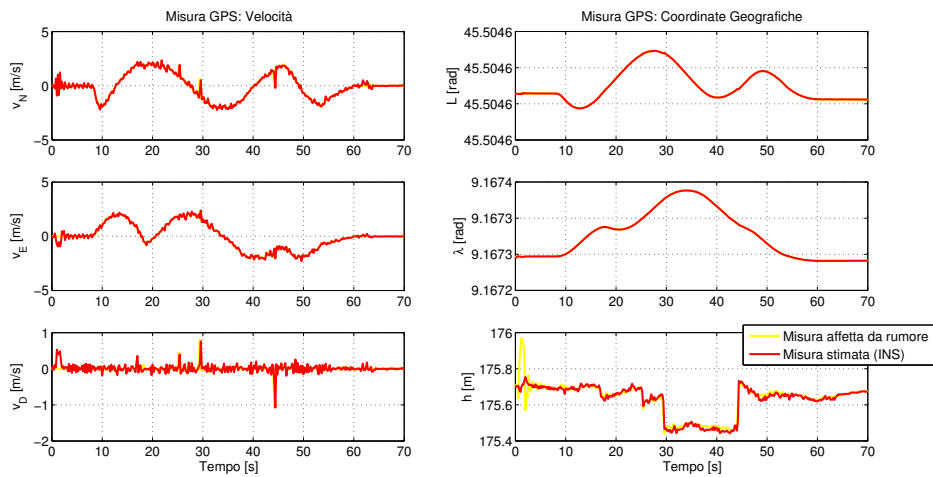


Figura 6.17: Accelerazioni e velocità angolari misurate dalla IMU

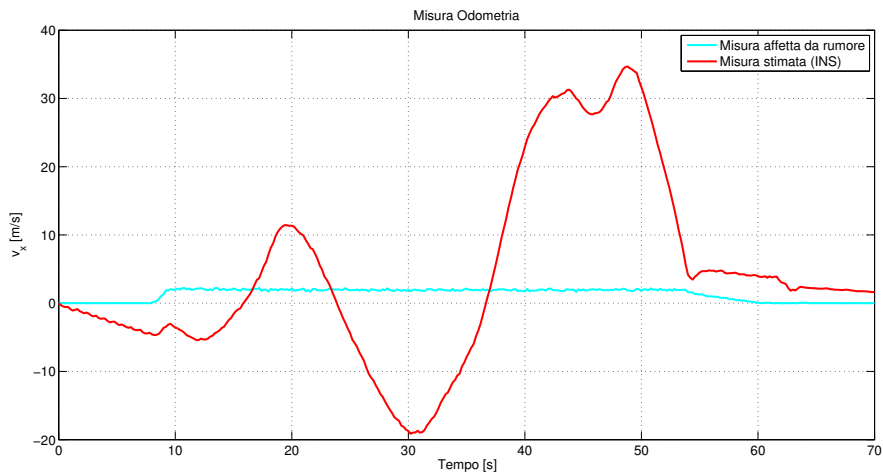
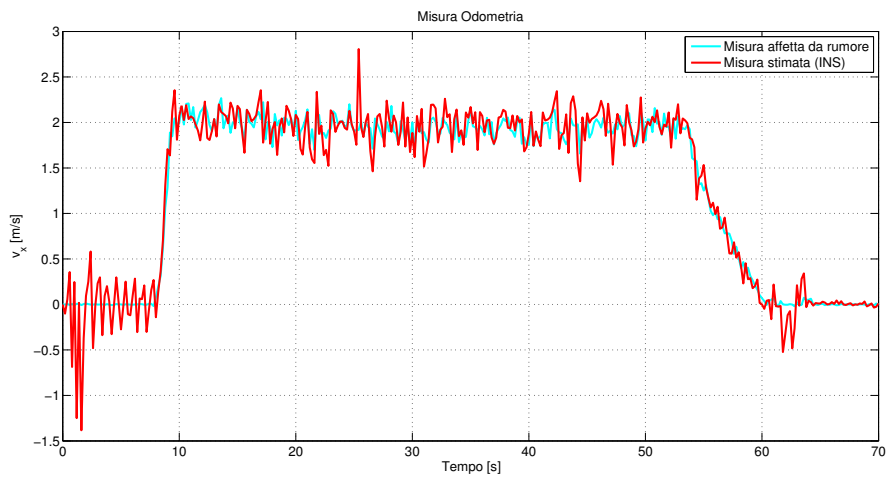
In figura 6.17 vengono riportate le misure effettuate dai tre accelerometri e dai giroscopi. Rispetto ai dati di figura 5.10 nel caso reale si ha un rumore molto più elevato dovuto alle oscillazioni del motore e dalle vibrazioni imposte da un terreno sconnesso, ma si può notare che il modello calcolato permette di avere un andamento molto simile a quello realmente misurato dagli strumenti. Come già detto il filtro passa basso non è sufficiente ad eliminare del tutto i disturbi sulle misure, infatti l'accelerazione lungo x a_x mostra l'istante di partenza e quello di frenata con dei picchi un po' più elevati, ma che comunque hanno dimensioni paragonabili ai picchi dovuti al rumore. Analogamente l'accelerometro in y a_y rileva un'accelerazione centripeta cui sono sovrapposte ingenti oscillazioni. Anche se l'accelerazione lungo z a_z è costante si possono ancora una volta notare dei rumori molto più elevati rispetto al modello virtuale. Sulle velocità angolari agiscono dei disturbi di entità minore rispetto agli accelerometri, ma comunque molto maggiori di quelli simulati, tuttavia la velocità angolare attorno all'asse z ω_z presenta un andamento ben visibile e paragonabile a quello di figura 5.10. La navigazione inerziale (INS) sfrutta solo

queste informazioni per stimare lo stato del veicolo \tilde{x} , quindi ci si aspettano dei risultati che non possono essere ritenuti accettabili senza una correzione opportuna.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 6.18:** Velocità e posizione misurate dal GPS

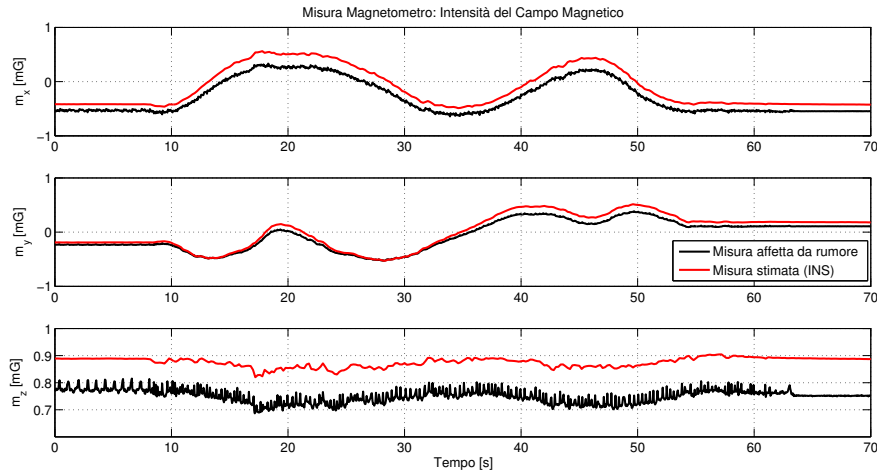
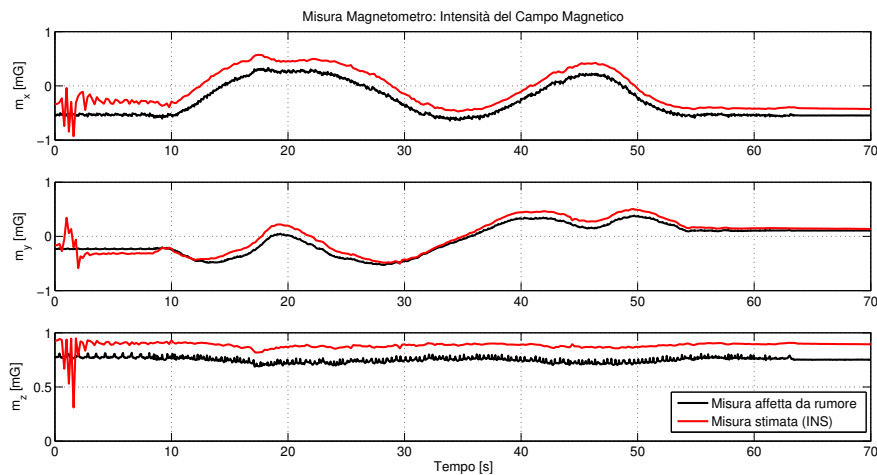
In figura 6.18 viene rappresentato in giallo il segnale fornito dal sistema di posizionamento globale $\underline{y}_{ext} = [\dots \underline{v}_{GPS}^n \underline{p}_{GPS}^n \dots]^T$ e in rosso la stima di velocità e posizione $\tilde{\underline{y}} = [\dots \tilde{\underline{v}}^n \tilde{\underline{p}}^n \dots]^T$ ottenuta a partire dai dati della IMU $\tilde{\underline{u}}$. Si può notare che tale stima si comporta in modo molto diverso tra *open loop* e *closed loop*, infatti la posizione stimata diverge esponenzialmente in figura 6.18a, mentre in figura 6.18b essa resta vicina ai dati forniti dal GPS grazie al fatto che l'integrazione in *closed loop* riparte cambiando la condizione iniziale con lo stato corretto dal filtro di Kalman ogni volta che questa correzione è disponibile. Va però

notato che l'effetto di deriva presente sulle stime della velocità è meno marcato in figura 6.18a poiché nel processo di navigazione inerziale la posizione viene calcolata da essa e dunque accumula un maggior numero di errori, ancora una volta invece i risultati del *closed loop* mostrati nella 6.18b risultano migliori. In questo caso il ricevitore mantiene sempre il collegamento con i satelliti, ci sono solamente due tratti di breve durata, collocati l'uno tra l'istante iniziale e i 3 s e l'altro tra i 30 s e i 45 s, in cui la covarianza del segnale aumenta leggermente, ma nonostante ciò si hanno sempre degli ottimi dati.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 6.19:** Velocità di avanzamento misurata dall'odometria

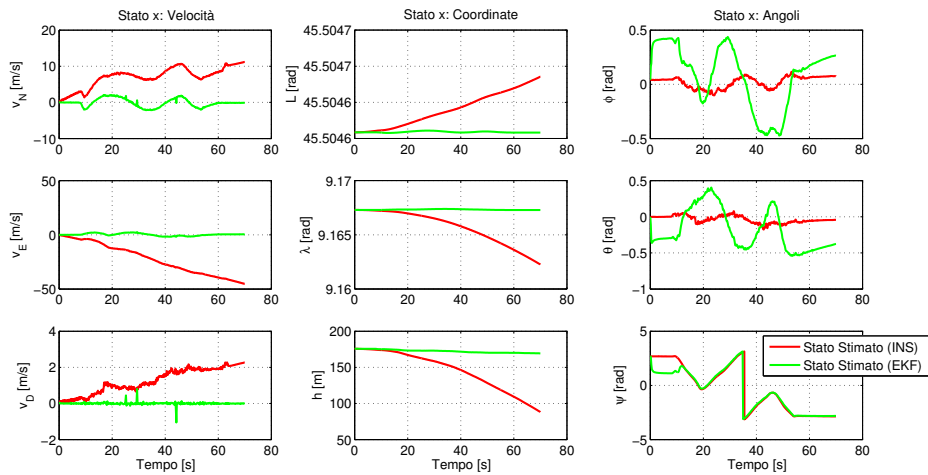
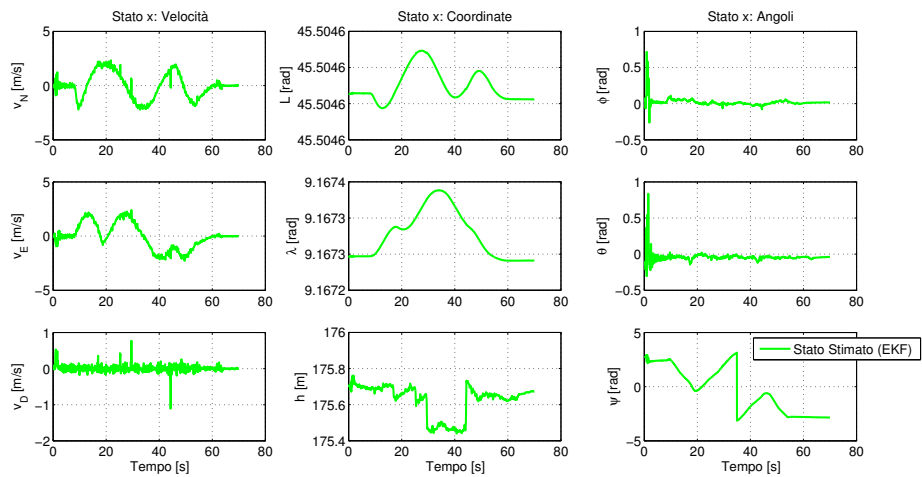
In figura 6.19 la velocità misurata tramite gli odometri $\underline{y}_{ext} = [v_{x_{odo}} \dots]^T$ viene confrontata con la stima della stessa $\tilde{\underline{y}} = [\tilde{v}_x \dots]^T$ derivandola dalla navigazione

inerziale. Dalle misure si evidenzia un andamento trapezoidale della velocità di avanzamento, ma il fatto di avere accelerometri affetti da forti disturbi comporta che la stima del processo di navigazione inerziale in *open loop* (figura 6.19a) diverga oscillando nel tempo. L'integrazione degli accelerometri viene invece corretta passo dopo passo dal filtro di Kalman nell'algoritmo in *closed loop*, mostrato in figura 6.19b, seguendo così la misura degli odometri.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 6.20:** Campo magnetico misurato dal magnetometro

Nell'immagine 6.20 si ha un'informazione legata alle misure del campo magnetico effettuate dal magnetometro $\underline{y}_{ext} = [\dots \ m_{mag}^b]^T$ e la relativa stima $\tilde{\underline{y}} = [\dots \ \tilde{m}^b]^T$ ottenuta grazie alla conoscenza dello stato stimato $\tilde{\underline{u}}$ e del campo magnetico terrestre relativo all'area in cui ci si sta muovendo. La condizione iniziale della stima si ricava grazie agli angoli di partenza ottenuti a loro volta dai dati del magnetometro e degli

accelerometri (3.40) e (3.41). A causa dei disturbi di misura tale calcolo non può essere perfetto quindi la stima \tilde{y} partirà da un dato differente rispetto alle misure del magnetometro y_{ext} . Come mostrato in figura 6.20a con l'algoritmo in *open loop* l'integrazione procede ininterrottamente dalla condizione iniziale, mantenendosi circa parallela rispetto ai dati misurati. Nel *closed loop* di figura 6.20b tale stima viene fatta convergere con la misura del magnetometro, ma con una dinamica piuttosto lenta, così ogni volta che si hanno delle variazioni del campo magnetico la stima si distacca nuovamente per poi riavvicinarsi lentamente.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 6.21:** Stato del sistema

Le stime e le misure degli strumenti vengono impiegate come descritto al paragrafo 4.2 per migliorare la stima dello stato del veicolo grazie ad un filtro di Kalman. Nelle prove sperimentali non vi è uno stato vero \underline{x} cui fare riferimento, ma avendo degli

ottimi dati del GPS mostrati in figura 6.18, si può valutare la bontà della navigazione riferendosi ad essi.

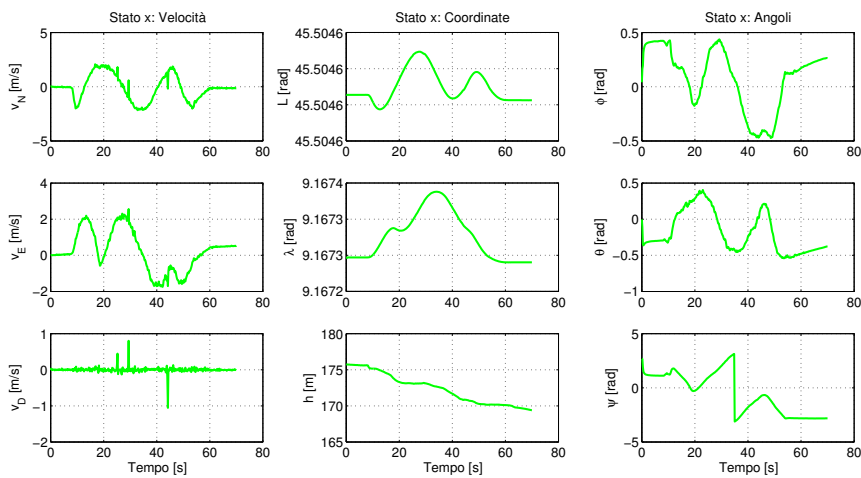
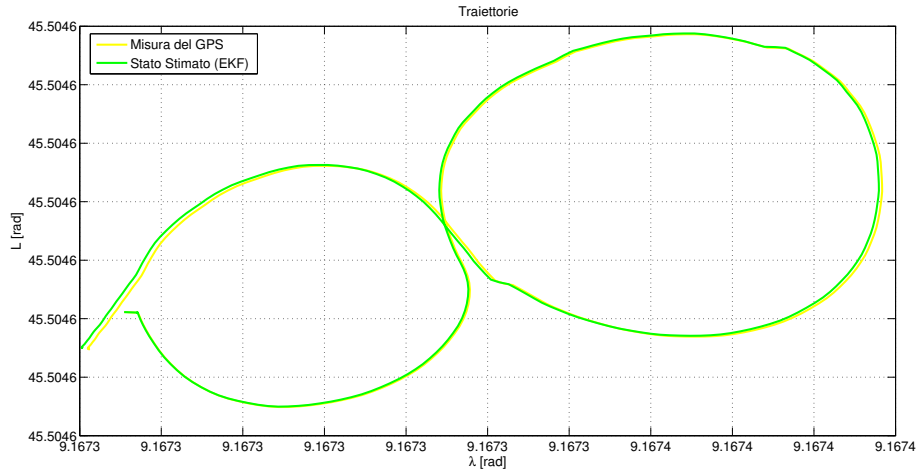
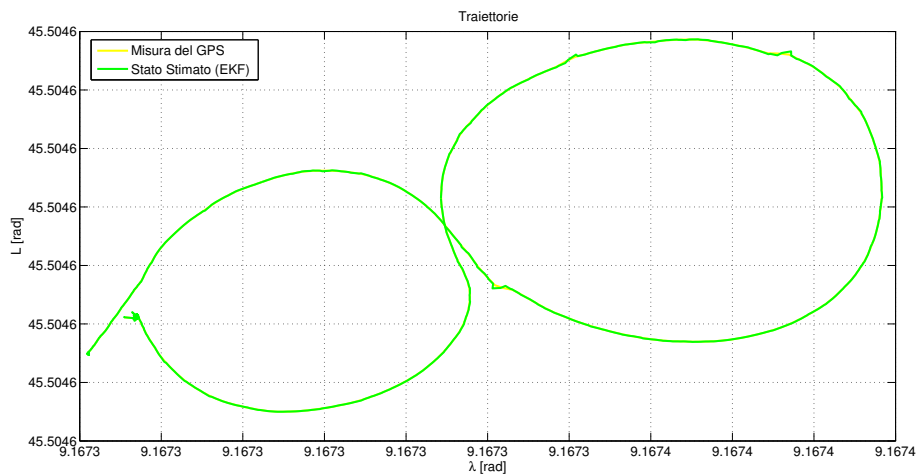


Figura 6.22: Stato stimato (EKF) del sistema in open loop

Nell'immagine 6.21a viene confrontata la stima dello stato realizzata a monte del filtro \tilde{x} con quella ottenuta a valle dello stesso \hat{x} , quest'ultima è inoltre visibile in maniera più dettagliata nella figura 6.22. Le velocità stimate dalla navigazione inerziale derivano linearmente nel tempo, ma con la *sensor fusion* si ottengono delle misure corrette paragonabili a quelle del GPS di figura 6.18a. Le posizioni ricavate dall'integrazione di accelerometri e giroscopi divergono maggiormente e con un andamento quadratico, tuttavia si può ancora avere una correzione dello stato grazie al filtro di Kalman che calcola delle posizioni molto più prossime a quelle del GPS, sempre visibili in 6.18a. L'orientamento, a differenza dei precedenti, viene calcolato bene grazie alla navigazione inerziale e perciò necessario un minore intervento da parte del filtro. Come visto nella (4.59), la velocità di avanzamento influisce sulla correzione dell'orientamento, ciononostante l'errata valutazione di questa velocità (figura 6.19a) da parte del sistema di navigazione inerziale, fa sì che la correzione peggiori la stima degli angoli.

L'immagine 6.21b mostra solamente lo stato \hat{x} ricavato con l'utilizzo della *sensor fusion*, poiché in *closed loop* la stima realizzata dalla navigazione inerziale viene direttamente influenzata dal contributo dato dal filtro di Kalman. La velocità e la posizione, analogamente al caso in *open loop*, vengono corrette adeguatamente dall'intero processo di localizzazione andando a coincidere con le misure realizzate dal GPS e illustrate in figura 6.18b. Si può inoltre notare che nei primi istanti, in cui la posizione misurata dal GPS presenta una discontinuità, particolarmente marcata in altitudine h , la stima finale riesce a non considerare tale errore. L'orientamento, dopo un transitorio iniziale molto rapido, si assesta su dei valori ritenuti plausibili

poiché il rollio ϕ e il beccheggio θ sono prossimi a 0 rad e l'imbardata ψ segue la traiettoria percorsa, inoltre i risultati sono simili a quelli riportati in figura 5.14b per il modello matematico.

(a) *Open loop*(b) *Closed loop***Figura 6.23:** Stima della Traiettoria

Come detto in precedenza, in questo caso, si ha una buona precisione della posizione data dal GPS, perciò in figura 6.23 essa viene usata come riferimento per la traiettoria da seguire.

Nel caso in *open loop* il risultato di figura 6.23a mostra solamente la stima a valle del filtro di Kalman, poiché come si può dedurre dalla figura 6.21a la stima realizzata solamente con la navigazione inerziale risultava essere inconsistente. Nonostante ciò grazie alla *sensor fusion* la posizione finale riesce a seguire perfettamente la traiettoria tracciata dal GPS.

Nell'immagine 6.23b si ha la traiettoria ottenuta a seguito dell'applicazione di un filtro di Kalman in *closed loop*. Come prima la stima va a coincidere con i dati del GPS dopo un brevissimo tempo di assestamento, individuabile dalle fluttuazioni nei primi istanti di percorrenza della traiettoria.

6.3.1 Conclusioni sui risultati

La traiettoria presentata in questo capitolo è la stessa vista nel capitolo precedente, ma in questo caso vengono impiegati i dati effettivamente misurati durante la prova e non delle simulazioni virtuali di tali misure. Anche nel caso sperimentale viene impiegata l'architettura di navigazione *loosely coupled* in entrambe le sue configurazioni: *open loop* e *closed loop*.

La navigazione in *open loop* presenta una progressiva deriva dell'integrazione dei dati della IMU a causa dei disturbi e dei *bias* presenti su di essi. In *closed loop* si risolve invece tale problema grazie alla correzione realizzata dal filtro di Kalman ogni volta che si hanno a disposizione le misure degli strumenti esterni. In entrambi i casi però la stima finale dello stato risulta piuttosto buona e si ritiene che essa potrà essere impiegata in ingresso ai successivi schemi di *path following*.

Capitolo 7

Conclusioni e spunti futuri

*“ Ci sono soltanto due possibili conclusioni:
se il risultato conferma le ipotesi, allora hai appena fatto una misura;
se il risultato è contrario alle ipotesi, allora hai fatto una scoperta. ”*

— Enrico Fermi

I risultati ottenuti in questo lavoro di tesi possono essere utilizzati per la localizzazione di qualunque tipo di veicolo terrestre. La conformazione del territorio non limita il campo di applicazione degli algoritmi sviluppati, così come l'assenza di una mappa stradale non impedisce di procedere con la navigazione. L'obiettivo è stato infatti quello di ottenere un algoritmo in grado di funzionare nelle condizioni più generiche possibili, per ampliare la capacità di autonomia del robot.

In questo capitolo si esporranno le problematiche affrontate e le soluzioni adottate. I risultati conseguiti sono in parte dovuti alla conoscenza e allo studio di casi precedenti riportati nello stato dell'arte, ma anche all'introduzione di alcune innovazioni.

Nel seguito si proporranno dei possibili sviluppi per provare a migliorare ulteriormente la tecnica di localizzazione dell'ATV.

7.1 Conclusioni

L'algoritmo sviluppato per la navigazione del quad Yamaha Grizzly YMT 700 è stato costruito sulla base di conoscenze pregresse e di tecniche nuove qui introdotte. Le problematiche descritte nel seguito hanno permesso di approfondire la materia e spingersi verso le soluzioni migliori da adottare caso per caso.

7.1.1 Conoscenze pregresse

Prima di affrontare il problema della navigazione si è reso necessario individuare le variabili che forniscono un'informazione sufficiente alla stima dello stato del sistema.

In particolare, per fornire le indicazioni di un corpo in movimento nello spazio si è scelto di impiegare dati di velocità, posizione ed orientamento.

È stato possibile legare tra loro tutte le variabili di stato tramite le equazioni di navigazione, dalle quali si sono sviluppate delle tecniche di integrazione proprie della navigazione inerziale. Da questa si è ottenuta una prima stima dello stato a partire dalle misure di accelerometri e giroscopi installati a bordo del veicolo.

Per migliorare la suddetta stima viene introdotta la *sensor fusion* per mezzo di un filtro di Kalman. Il sistema di navigazione è stato quindi realizzato in architettura *loosely coupled*, secondo una configurazione in *open loop* o in *closed loop*.

7.1.2 Miglioramenti introdotti

I limiti riscontrati nell'ambito della navigazione hanno reso necessario lo sviluppo di tecniche innovative per poter superare alcuni problemi di carattere sia pratico che teorico.

Per rendere più robusta la stima dello stato realizzata con il filtro di Kalman sono stati impiegati strumenti di misura aggiuntivi. Oltre all'utilizzo di un GPS da cui si ottengono misure di velocità e posizione assoluta, si sono introdotte delle informazioni riferite all'orientamento del veicolo ottenute dalle misure di un magnetometro triassiale. Allo scopo di collegare l'orientamento alla velocità del robot si inserisce infine la velocità di avanzamento calcolata tramite l'odometria. Con l'aggiunta di questi sensori si è andata a modificare in (4.53) la forma dell'equazione di misura $h(\underline{x}, \underline{u})$ e quindi nella (4.65) anche la matrice H ad essa associata e riferita alla forma di stato linearizzata.

Utilizzare i dati di diversi sensori in un unico filtro di Kalman richiede di avere alcuni accorgimenti poiché i dati verranno campionati a frequenze differenti e quindi in istanti di tempo diversi. Inoltre si può persino ottenere che le storie temporali non vengano acquisite tutte a partire dallo stesso istante iniziale. In questo caso si è pensato di sfruttare l'equazione (4.80) o la (4.81), per interpolare nel tempo i dati campionati a frequenza minore e valutarli poi negli istanti in cui si hanno quelli a frequenza maggiore.

Per come è scritto il filtro di Kalman è necessario inoltre avere sempre a disposizione le misure di tutti gli strumenti. Mentre per odometri e piattaforma inerziale questa assunzione è plausibile, il segnale del GPS può venire interrotto a causa di ostacoli incontrati lungo il percorso tra ricevitore e satelliti. In quest'ottica si rende possibile scrivere un altro filtro di Kalman senza i dati del GPS, il quale però non risulta essere osservabile, di conseguenza si è preferito stimare lo stato proseguendo con la sola navigazione inerziale, nei tratti in cui il sistema di posizionamento globale

perde il segnale. Questo approccio è stato più ampiamente illustrato all'interno del paragrafo 4.3.

Infine per verificare la bontà della navigazione si è scelto di procedere con la realizzazione di un modello bicicletta del veicolo da applicare in una simulazione virtuale. In questo caso però non è possibile ricorrere alle misure di sensori reali, dunque si è dovuto pensare allo sviluppo di modelli virtuali per i sensori. Questi vengono ampiamente descritti nel paragrafo 5.1, mentre il modello dell'errore, atto a simulare i disturbi agenti su strumenti fisici, è stato presentato nel paragrafo 2.2.

Dopo le prove realizzate interamente al calcolatore e basate su modelli matematici, sono stati raccolti i dati di prove sperimentali. In questa situazione il problema con cui ci si è scontrati più duramente è stato quello legato ai forti disturbi presenti sulle misure sperimentali di accelerometri e giroscopi. L'analisi dei dati condotta al paragrafo 6.1 è stata fatta solo a seguito di ulteriori prove atte a caratterizzare i rumori e le cause di essi. Da tale studio è emersa l'esigenza di ricorrere ad un filtro passa-basso per eliminare le frequenze non dovute al moto del veicolo.

7.1.3 Risultati conseguiti

Ciò che si è ottenuto è una tecnica di *sensor fusion* valida per qualunque veicolo terrestre dotato di ruote e in moto su un terreno qualsiasi. Ad esso potranno dunque essere applicate successivamente delle tecniche di *path following* che vadano ad impiegare i dati stimati dal processo di navigazione.

L'aggiunta dei sensori propria di questa tesi consente una maggior robustezza dell'algoritmo associata ad una migliore stima degli angoli di orientamento del mezzo. Inoltre vengono rimossi i problemi dovuti ad una mancata sincronia tra le misure acquisite da diversi strumenti con tempi di campionamento differenti.

La valutazione del segnale GPS è fatta attraverso l'utilizzo delle covarianze associate ai dati di misura e fornite dallo strumento stesso. Questa fase, anteposta al filtro di Kalman, permette di selezionare i dati da utilizzare o meno nella *sensor fusion*, ottenendo quindi una migliore stima nei tratti in cui il GPS perde il segnale o in cui quest'ultimo non è utilizzabile.

Il modello matematico del robot creato in precedenza dimostra che l'algoritmo di navigazione porta a buoni risultati in diverse condizioni di lavoro. I problemi presenti durante l'esecuzione delle prove sperimentali sono perciò in gran parte dovuti alla presenza di misure reali caratterizzate da disturbi di entità maggiore.

Dall'analisi delle misure degli accelerometri e dei giroscopi è infine emerso che, per il particolare caso in questione, si hanno dei disturbi sia in alta che in bassa frequenza. I primi sono essenzialmente dovuti alla rotazione del motore e alle vibrazioni da esso indotte, gli altri sono per la maggior parte imputabili alla conformazione del

terreno. Di conseguenza mentre con un filtro passa-basso si riescono a rimuovere adeguatamente i contributi del motore, non si riesce a fare altrettanto per le oscillazioni dovute ad un terreno sconnesso.

7.2 Spunti futuri

Per perfezionare ulteriormente l'algoritmo di navigazione fin qui esposto, vengono di seguito suggerite alcune migliorie. Esse richiedono uno sviluppo indipendente e separato rispetto alle tecniche adottate nell'ambito della navigazione ed è per questa ragione che non sono state trattate nella presente tesi.

7.2.1 Miglioramento della navigazione inerziale

Il primo suggerimento riguarda un modo per poter migliorare il processo di navigazione inerziale. Quest'ultimo procede infatti con l'integrazione delle accelerazioni e delle velocità angolari misurate dalla IMU, ottenendo una lenta deriva dei risultati rispetto allo stato reale del robot. Tale deriva è intrinseca nel concetto di navigazione inerziale ed è associata sia al *bias* che agli altri disturbi presenti nelle misure della IMU. L'errore aumenta perciò al crescere del tempo e tanto più velocemente quanti più grandi sono i disturbi sovrapposti ai dati inerziali.

Le vibrazioni indotte dal terreno e dal motore sono state rimosse solo al di sopra dei 5 Hz con l'impiego di un filtro passa-basso. Esso non è però sufficiente a rimuovere del tutto i rumori agenti sugli accelerometri e i giroscopi. Questo perché esistono anche componenti di bassa frequenza che non possono essere eliminate in quanto prossime alle frequenze delle accelerazioni e delle velocità angolari dovute al moto del veicolo.

Il *bias* di misura è invece dovuto alla temperatura degli strumenti, esso è perciò variabile nel tempo e difficile da stimare. Essendo un contributo lentamente variabile, anch'esso non può essere rimosso con l'utilizzo di un filtro passa-basso, inoltre non esistono piattaforme inerziali acquistabili a costi ragionevoli che non sono affette da tale *bias*.

Nello specifico caso dell'ATV utilizzato all'interno del progetto Quadrivio, si può pensare di ottenere un miglioramento della navigazione inerziale in diversi modi:

- Determinare una posizione più adatta per la piattaforma inerziale, in modo che esse venga influenzata il meno possibile dalle vibrazioni associate al motore e al terreno.
- Installare sensori alternativi che non risentano allo stesso modo dei disturbi. Questi possono essere quelli che trovano impiego in campo aeronautico, ma sono caratterizzati da costi elevati.

- Progettare un algoritmo di navigazione inerziale più robusto rispetto agli errori di misura.

7.2.2 Modello delle sospensioni

Per ottenere ulteriori sviluppi all'interno del progetto, si fornisce un secondo spunto che riguarda la creazione di un modello per le sospensioni del robot. Nella tesi in questione le accelerazioni, le velocità angolari e il campo magnetico vengono infatti misurati da una piattaforma inerziale solidale rispetto al pianale del veicolo. L'orientamento calcolato tramite il processo di navigazione è perciò quello riferito agli angoli di inclinazione del telaio.

Realizzando un accurato modello dinamico delle sospensioni si rende possibile descrivere tramite delle equazioni il legame esistente tra il pianale del robot e gli assi delle ruote. In questo modo è possibile passare dalla stima dell'orientamento dell'uno a quella dell'altro.

Sapere come variano gli angoli di inclinazione dell'asse anteriore e posteriore delle ruote del robot è un'informazione che può tornare utile nell'applicazione delle tecniche di *path following*.

Bibliografia

- [1] F. Aghili e A. Salerno. «Driftless 3-D Attitude Determination and Positioning of Mobile Robots By Integration of IMU With Two RTK GPSs». In: *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics* (2013) (cit. a p. 13).
- [2] I. Ashokaraj et al. «Sensor Based Robot Localisation and Navigation: Using Interval Analysis and Extended Kalman Filter». In: *5th Asian Control Conference* (2004) (cit. a p. 9).
- [3] J. Bellantoni e K. Dodge. «A square root formulation of the Kalman-Schmidt filter». In: *AIAA Journal* (1967) (cit. a p. 6).
- [4] V. Bistrov. «Performance Analysis of Alignment Process of MEMS IMU». In: *International Journal of Navigation and Observation* (2012) (cit. a p. 41).
- [5] P. Bolzern, R. Scattolini e N. Schiavoni. *Fondamenti di controlli automatici*. 3a. McGraw-Hill Italia, 2007 (cit. a p. 99).
- [6] N. Bowditch. *The American Practical Navigator*. Bicentennial Edition. National Imagery e Mapping Agency (NIMA), 2002 (cit. alle pp. 2, 3).
- [7] K.R. Britting. *Inertial Navigation Systems Analysis*. Artech House, Inc, 2010 (cit. alle pp. 45, 46).
- [8] S. Butterworth. «On the Theory of Filter Amplifiers». In: *Wireless Engineer* (1930) (cit. a p. 106).
- [9] S.D. Conte e C. de Boor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. 3rd. McGraw-Hill, 1980 (cit. a p. 63).
- [10] D.A. Cucci e M. Matteucci. «Position Tracking and Sensors Self-Calibration in Autonomous Mobile Robots by Gauss-Newton Optimization». In: *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2014) (cit. a p. 114).
- [11] E.L. D'Amelio e F. Fontanile. «Modellazione Dinamica e Controllo di Percorso per un All Terrain Vehicle». Tesi di Laurea. Politecnico di Milano, 2013 (cit. alle pp. 17, 19).

- [12] M. Dawood et al. «Vehicle geo-localization based on IMM-UKF data fusion using a GPS receiver, a video camera and a 3D city model». In: *IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)* (2011) (cit. a p. 10).
- [13] M. De Agostino. «I Sensori Inerziali di Basso Costo per la Navigazione Geodetica». Tesi di Dottorato. Politecnico di Torino, 2009 (cit. alle pp. 11, 12).
- [14] B. Delaunay. «Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï». In: *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, Classe des sciences mathématiques et naturelles* (1934) (cit. a p. 11).
- [15] D.F. DeMenthon e L.S. Davis. «Model-based object pose in 25 lines of code». In: *International Journal of Computer Vision* (1995) (cit. a p. 10).
- [16] F. Deza et al. «High gain estimation for nonlinear systems». In: *Systems and Control Letters* (1992) (cit. a p. 7).
- [17] *Direttiva 2010/40/UE del Parlamento Europeo e del Consiglio*. 2010. URL: <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2010:207:0001:0013:IT:PDF> (cit. a p. 10).
- [18] J. Farrell e M. Barth. *The Global Positioning System and Inertial Navigation*. McGraw–Hill, 1998 (cit. a p. 34).
- [19] M.W.M. Gamini Dissanayake. «A Solution to the Simultaneous Localization and Map Building (SLAM) Problem». In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* (2001) (cit. a p. 13).
- [20] A. Gelb et al. *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T. Press, 1974 (cit. a p. 57).
- [21] D. Giacosa. *Motori endotermici*. HOEPLI, 2000 (cit. a p. 99).
- [22] M.S. Grewal, L.R. Weill e A.P. Andrews. *Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration*. 2nd. Wiley, 2007 (cit. alle pp. 11, 33).
- [23] P.D. Groves. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. Artech House, 2008 (cit. alle pp. 11, 12).
- [24] C. Harris e M. Stephens. «A combined corner and edge detector». In: *Proceedings of the 4th Alvey Vision Conference* (1988) (cit. a p. 10).
- [25] J. Hartikainen, A. Solin e S. Särkkä. *Optimal Filtering with Kalman Filters and Smoothers*. Manual for the Matlab toolbox EKF/UKF. 2011 (cit. a p. xvii).
- [26] B. Hofmann-Wellenhof, K. Legat e M. Wieser. *Navigation: Principles of Positioning and Guidance*. 2nd. Springer, 2007 (cit. a p. 1).

- [27] J. Huang e H.S. Tan. «A low-order DGPS-based vehicle positioning system under urban environment». In: *IEEE/ASME Trans. Mechatronics* (2006) (cit. a p. 3).
- [28] S.J. Julier e J.K. Uhlmann. «A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems». In: *International Symposium Aerospace/Defense Sensing, Simul. and Controls* (2008) (cit. a p. 7).
- [29] H. Kim e J. Choi. «Advanced indoor localization using ultrasonic sensor and digital compass». In: *International Conference on Control, Automation and Systems* (2008) (cit. a p. 8).
- [30] H. Kushner. «Approximations to optimal nonlinear filters». In: *IEEE Transactions on Automatic Control* (1967) (cit. a p. 6).
- [31] D. Lee et al. «Sensor Fusion Localization System for Outdoor Mobile Robot». In: *ICCAS-SICE International Joint Conference* (2009) (cit. a p. 11).
- [32] Y. Lee e W. Yu. «EKF Localization with Lateral Distance Information for Mobile Robots in Urban Environments». In: *8th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI)* (2011) (cit. a p. 10).
- [33] C. Liu e S. Marcus. «Estimator performance for a class of nonlinear estimation problems». In: *IEEE Transactions on Automatic Control* (1980) (cit. a p. 6).
- [34] D.G. Lowe. «Object recognition from local scale-invariant features». In: *Proceedings of the International Conference on Computer Vision* (1999) (cit. a p. 10).
- [35] P.C. Mahalanobis. «On the generalised distance in statistics». In: *Proceedings of the National Institute of Sciences of India* (1936) (cit. a p. 10).
- [36] *MDPI Open Access Journals Platform*. URL: <http://www.mdpi.com/> (cit. a p. 44).
- [37] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer e J.R. Buck. *Discrete-Time Signal Processing*. 3rd. Prentice Hall, 2009 (cit. a p. 106).
- [38] S. Panzieri, F. Pascucci e G. Ulivi. «An outdoor navigation system using GPS and inertial platform». In: *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics* (2002) (cit. a p. 11).
- [39] *PoleCATS wiki*. URL: <http://reuscats.wikispaces.com/> (cit. a p. 32).
- [40] K. Reif, F. Sonnemann e R. Unbehauen. «An EKF-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability». In: *Automatica* (1998) (cit. a p. 7).
- [41] R.M. Rogers. *Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems*. 2nd. American Institute of Aeronautics e Astronautics, Inc, 2000 (cit. alle pp. 38, 47).

- [42] E. Shin. «Accuracy Improvement of Low Cost INS/GPS for Land Applications». Tesi di Laurea. University of Calgary, 2001 (cit. alle pp. 35, 42–44).
- [43] D. Simon. *Optimal State Estimation - Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*. Wiley, 2006 (cit. a p. 6).
- [44] I. Skog e P. Händel. «State-of-the art and future in-car navigation systems - a survey». In: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* (2012) (cit. a p. 3).
- [45] Y. Song e J. Grizzle. «The extended Kalman filter as a local asymptotic observer for discrete-time nonlinear systems». In: *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* (1995) (cit. a p. 7).
- [46] S. Thrun, D. Fox e W. Burgard. *Probabilistic Robotics*. The Institution of Electrical Engineers, 2000 (cit. alle pp. 59, 61).
- [47] D.H. Titterton e J.L. Weston. *Strapdown Inertial Navigation Technology*. 2nd. The Institution of Electrical Engineers, 2004 (cit. alle pp. xvii, 33, 34, 36, 38).
- [48] Navigation Limited Trimble. *5700-5800 GPS Receiver*. User Guide. Trimble Navigation Limited. 2003 (cit. a p. 25).
- [49] J. Vasconcelos et al. «Geometric approach to strapdown magnetometer calibration in sensor frame». In: *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* (2011) (cit. a p. 114).
- [50] B. Wei e W. Chen. «Design of an Integrated System Solution for Urban Vehicle Localization». In: *12th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems* (2009) (cit. a p. 10).
- [51] *what-when-how, In Depth Tutorials and Information*. URL: <http://what-when-how.com/> (cit. a p. 32).
- [52] *Wikipedia*. URL: <http://www.wikipedia.org/> (cit. alle pp. 5, 27, 32).
- [53] O.J. Woodman. «An introduction to inertial navigation». Technical report. University of Cambridge, 2007 (cit. a p. 22).
- [54] Technologies B.V. Xsens. *MTi and MTx*. User Manual and Technical Documentation. Xsens Technologies B.V. 2010 (cit. alle pp. 21, 22, 105).
- [55] *YFM7FGPW*. Service Manual. Yamaha Motor Corporation. 2006 (cit. a p. 98).
- [56] M. Zago, cur. *Quadrivio*. Manuale tecnico. Aero Sekur. 2012 (cit. alle pp. 15–18).