

**POLITECNICO DI MILANO**

Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica



**Contratti di Remunerazione  
dell'Asset Manager in presenza  
di Flow Fund**

Tesi Magistrale

Luca LAMORTE

Matricola 786857

Relatore: Prof. Emilio BARUCCI

Anno Accademico 2013-2014

*Tutti siamo geni.  
Ma se giudichi un pesce per come si arrampica su una montagna,  
penserà per tutta la vita di essere uno stupido.*

Albert Einstein

## **Abstract**

This thesis solves, in many contexts, the optimal allocation problem of an investment fund manager whose target is the maximization of the salary received. The salary is made of a management fee, which is proportional to asset value, and a performance fee by high-water mark contract. This contract gives to the manager his performance compensation if the value of the assets exceeds its previous maximum (high-water mark).

We introduce the flow fund possibility which is linked to relative performance with a benchmark. We add two more features in this framework: high-water mark drawdown constraint and a regime switching economy.

We find that in these models flow fund changes the behaviour of the manager making him more conservative and risk averse.

On the contrary the management fee produces a risk-shifting effect in the manager's strategy making him more aggressive.

## Sommario

Il lavoro di tesi risolve, in contesti diversi, il problema di allocazione ottima di un manager il cui obiettivo è massimizzare il compenso ricevuto. Il compenso è formato da una management fee per la gestione del fondo e da una performance fee derivante da un contratto di high-water mark. Il contratto consente al manager di ricevere il compenso dovuto alla performance solo nel caso in cui gli asset gestiti superino il valore massimo registrato fino a quell'istante (high-water mark).

In questo contesto introduciamo la possibilità di flussi di capitale nel fondo gestito in relazione alla performance relativa rispetto a un benchmark. Analizziamo due ulteriori vincoli in questo framework : vincolo di drawdown basato sul valore di high-water mark ed una economia con regime switching.

In tutti i contesti considerati la presenza dei flow fund provoca un atteggiamento più conservativo del manager inducendolo a ridurre l'esposizione al rischio e ad allinearsi alla strategia del benchmark.

La presenza di una management fee provoca un fenomeno di risk-shifting nelle strategie del manager rendendolo di conseguenza meno avverso al rischio.

## Ringraziamenti

Per questo lavoro e traguardo personale, che mi ha fatto crescere e maturare, devo ringraziare tante persone.

Prima di tutti devo ringraziare Eugenia per essermi stata accanto in tutti i momenti di difficoltà e anche in quelli di gioia. Non avrei potuto farcela senza di te.

Voglio ringraziare tutta la mia famiglia per avermi sostenuto nelle mie scelte, soprattutto mia madre che mi è sempre stata accanto e capito quando ero in difficoltà. Inoltre ringrazio i suoi magnifici manicaretti che giorno per giorno hanno rifocillato sia me che altri studenti universitari grazie all'ormai mitico "piatto giallo".

A proposito di amici universitari ringrazio con tutto il mio cuore quei compagni che mi hanno fatto piangere dalle risate e accompagnato per lunghe ore di studio e di lezione. In primis Cesare ed Ema, senza la loro simpatia Ingegneria Matematica non sarebbe stata così divertente. Poi tutta la crew Dani, Nahuel, Ele, Simo Rosso, Bianca, Simo Nero, Paolo e Silvano.

Ringrazio i miei amici storici di Premezzo, con cui ho passato un sacco di serate in compagnia. Pietro per essere sempre originale e sincero, Marco per essere simpatico in un modo incredibilmente originale, Bra per essermi sempre stato accanto, Mazzu per le sue magnifiche cavolate, Giorgio per i suoi occhioni dolci e Menga per essere la persona più strana e incomprensibile che io conosca. Ringrazio anche Paolo Breda, Jangi, Silvia, Marta, Laura, Valerio. Un grazie anche a tutti i miei compagni del CSI Premezzo che oltre alle prestazioni sportive mi hanno accompagnato in un sacco di momenti spensierati.

Un pensiero a due persone che non vedo da un sacco di tempo per diversi motivi ma che sono parte di me. Un abbraccio forte al mio amico Ivan che mi manca ogni giorno di più e a mio amico fraterno Alessio che vorrei fosse sempre al mio fianco per poter parlare di qualsiasi cosa come facevamo un tempo.

Infine ringrazio per questo lavoro di tesi Emilio Barucci per la sua pazienza e accuratezza nella correzione e Daniele Marazzina per la sua disponibilità quando mi trovo in difficoltà computazionali.

# Indice

<b>Abstract</b>	<b>i</b>
<b>Sommario</b>	<b>ii</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>iii</b>
<b>Indice</b>	<b>vi</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>viii</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>ix</b>
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Asset Management con contratti High-water mark, Flow Fund e vincolo di Drawdown</b>	<b>4</b>
1.1 Retribuzioni con High-water-mark	4
1.2 Vincolo di Drawdown	12
1.3 Flow Fund e Asset Management	14
<b>2 Flow Fund e Remunerazione con High-Water Mark</b>	<b>18</b>
2.1 Descrizione del modello matematico	18
2.2 Problema di ottimizzazione	19
2.3 No Management Fee	20
2.3.1 Risoluzione	20
2.3.2 Statica Comparata	24
2.3.3 Derivate prime	26
2.3.4 Validità delle assunzioni	27
2.3.5 Avversione al rischio	28
2.4 Management Fee	30
2.4.1 Risoluzione	30
2.4.2 Statica Comparata	34

---

2.5	Confronto tra strategie . . . . .	37
<b>3</b>	<b>No perfect replication del benchmark</b>	<b>43</b>
3.1	Descrizione del modello matematico . . . . .	43
3.2	Problema di ottimizzazione . . . . .	44
3.3	No Management Fee . . . . .	44
3.3.1	Risoluzione . . . . .	45
3.3.2	Statica Comparata . . . . .	47
3.3.3	Avversione al rischio . . . . .	50
3.4	Management Fee . . . . .	53
3.4.1	Risoluzione . . . . .	53
3.4.2	Statica comparata . . . . .	55
3.5	Confronto tra strategie . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Asset Management sotto il vincolo di Drawdown</b>	<b>63</b>
4.1	Descrizione del modello matematico . . . . .	63
4.2	Problema di ottimizzazione . . . . .	65
4.2.1	Trasformazione del problema . . . . .	65
4.2.2	Metodo risolutivo . . . . .	66
4.3	Risoluzione . . . . .	66
4.4	Statica Comparata . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Asset Management in presenza di Regime Switching</b>	<b>72</b>
5.1	Descrizione del modello matematico . . . . .	72
5.2	Problema di ottimizzazione . . . . .	74
5.3	Risoluzione . . . . .	74
5.4	Statica Comparata . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Varianti del modello</b>	<b>82</b>
6.1	Flow fund basato su rendimenti logaritmici . . . . .	82
6.1.1	Descrizione del modello matematico . . . . .	82
6.1.2	Problema di ottimizzazione . . . . .	83
6.1.3	Risoluzione . . . . .	84
6.1.4	Statica Comparata . . . . .	86
6.2	Avversione al rischio e orizzonte infinito . . . . .	91
6.2.1	Problema di ottimizzazione . . . . .	91
6.2.2	Risoluzione . . . . .	92
6.2.3	Statica Comparata . . . . .	94
	<b>Conclusioni</b>	<b>96</b>

<b>Appendice</b>	<b>98</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>107</b>



# Elenco delle figure

2.1	Avversione al rischio: $\theta_t$ e $V_t$ rispetto ai parametri $k$ e $\delta$ . . . . .	31
2.2	Remunerazioni e Flow Fund: Confronto $\theta_t^*$ rispetto ad altre strategie al variare di $\mu, \sigma, \gamma$ e $\beta$ . . . . .	36
2.3	Remunerazioni e Flow Fund: Confronto $\theta_t^*$ rispetto ad altre strategie al variare di $a$ e $x$ . . . . .	37
2.4	Remunerazioni e Flow Fund: Confronto $\theta_t^*$ rispetto ad altre strategie al variare di $\eta$ e $\beta$ . . . . .	39
2.5	Remunerazioni e Flow Fund: Confronto $\theta_t^*$ rispetto ad altre strategie al variare di $a$ e $x$ . . . . .	40
2.6	Remunerazioni e Flow Fund: Confronto $\theta_t^*$ rispetto ad altre strategie al variare di $a$ con $x = 0.2$ . . . . .	41
3.1	Modello No Replication No management fee: $\theta^*$ rispetto alla correlazione $\rho$ . . . . .	46
3.2	Modello No Replication No management fee: $V_t$ e $\theta^*$ rispetto ai parametri $\sigma$ e $\mu$ . . . . .	47
3.3	Modello No Replication No management fee: $V_t$ e $\theta^*$ rispetto ai parametri $\eta$ e $\beta$ . . . . .	48
3.4	Modello No Replication No management fee: $V_t$ rispetto ai parametri $k$ e $H_t$ . . . . .	49
3.5	No Replication Avversione al rischio: $\theta_t$ e $V_t$ rispetto ai parametri $k$ e $\delta$ . . . . .	53
3.6	Modello No Replication Management fee: $\theta^*$ rispetto alla correlazione $\rho$ . . . . .	56
3.7	Modello No Replication Management fee: $V_t$ e $\theta_t$ rispetto ai parametri $a$ e $x$ . . . . .	57
3.8	Modello No Replication: Confronto $\theta_t^*$ rispetto ad altre strategie al variare di $\mu, \sigma, \eta$ e $\beta$ . . . . .	59
3.9	Modello No Replication: Confronto $\theta_t^*$ rispetto ad altre strategie al variare di $\rho, \gamma, a$ e $x$ . . . . .	60

3.10	Modello No Replication: Confronto $\theta_t^*$ rispetto ad altre strategie al variare di $\eta, a$ e $x$ . . . . .	61
5.1	Modello con Regime Switching: Strategie ottima $\theta^0, \theta^1$ al variare di $W_t$ per valori differenti di $q$ . . . . .	76
5.2	Modello con Regime Switching: Strategie ottima $\theta^0, \theta^1$ al variare di $W_t$ per valori differenti di $q$ set di parametri alternativo . . . . .	77
5.3	Modello con Regime Switching: Strategie ottima $\theta^0, \theta^1$ al variare di $W_t$ per valori differenti di $a$ . . . . .	78
5.4	Modello con Regime Switching: Strategie ottima $\theta^0, \theta^1$ al variare di $W_t$ per valori differenti di $x$ . . . . .	79
5.5	Modello con Regime Switching: Strategie ottima $\theta^0, \theta^1$ al variare di $W_t$ per valori differenti di $\eta$ . . . . .	80
6.1	Modello con Flow fund alternativo: $V_t$ e $\theta^*$ rispetto ai parametri $\mu$ e $\sigma$	86
6.2	Modello con Flow fund alternativo: $\theta^*$ rispetto a $\mu$ in differenti set di parametri . . . . .	87
6.3	Modello con Flow fund alternativo: $V_t$ e $\theta^*$ rispetto ai parametri $\eta$ e $\beta$	88
6.4	Modello con Flow fund alternativo: $V_t$ e $\theta^*$ rispetto ai parametri $a$ e $x$	89
6.5	Avversione al rischio: $V_t$ rispetto a $H_t$ e $k$ con due coefficienti di avversione al rischio differenti . . . . .	93

# Elenco delle tabelle

2.1	Parametri Remunerazioni e Flow Fund dell'Avversione al rischio . . .	32
2.2	Parametri Remunerazioni e Flow Fund Confronto . . . . .	38
2.3	Parametri Remunerazioni e Flow Fund Confronto 2 . . . . .	38
3.1	Parametri Modello No Replication No Management Fee . . . . .	49
3.2	Parametri No Replication Avversione al rischio . . . . .	54
3.3	Parametri Modello No Replication Management Fee . . . . .	58
3.4	Parametri Modello No Replication Confronto . . . . .	62
3.5	Parametri Modello No Replication Confronto Posizionamento . . . . .	62
5.1	Parametri della statica comparata del Modello con Regime Switching	81
6.1	Parametri Modello con flow fund alternativo . . . . .	87
6.2	Parametri dell'Avversione al rischio a tempo infinito . . . . .	94

# Introduzione

Il nostro progetto di tesi si pone come scopo lo studio del comportamento di un manager di un fondo di investimento (ad esempio un hedge fund) il cui schema retributivo sia dovuto da due componenti distinte. Una performance fee definita da un contratto di high-water mark che ha lo scopo di incentivare il manager ad avere rendimenti più alti possibili nella gestione del fondo in questione. La seconda componente è una management fee caratterizzata da una quota costante del fondo gestito che garantisce al manager il compenso base.

Un altro aspetto fondamentale che andrà a variare i comportamenti del manager sarà la presenza di possibili inflow o outflow in base a come il fondo viene gestito. Questo sarà un fattore ulteriore di cui il manager dovrà tener conto per gestire al meglio il fondo e raggiungere i propri obiettivi.

Per caratterizzare questi flussi di capitali in entrata e in uscita detti flow fund è pratica comune legarli alla performance del fondo rispetto a un benchmark così da avere degli inflow se il fondo sta avendo una performance migliore di quella del benchmark e degli outflow nel caso contrario. Essi vengono introdotti in questa maniera perché è stato riscontrato nella pratica che gli investitori che decidono di entrare o uscire da un fondo d'investimento hanno come motivazione principale la performance del fondo come è ragionevole che sia.

Il nostro obiettivo è studiare questo tipo di situazione in un contesto temporale di natura stocastica: il fondo ha, in linea teorica, vita infinita, ma possono verificarsi eventi che portano ad una chiusura anticipata. La data di chiusura è quindi aleatoria e dovuta a cause interne o esterne al fondo. La componente temporale influenzerà la nostra parte modellistica infatti sia i compensi che la presenza dei flow fund saranno gestite a tempo continuo. Questo differisce in maniera sostanziale da molti lavori precedenti in cui sia la remunerazione che gli inflow/outflow venivano considerati solo a un tempo fissato  $T$  definito come il termine di gestione del fondo. In questi modelli a tempo finito si concludeva spesso che performance fee di questo genere provocano risk-shifting da parte del manager, ovvero un aumento notevole del rischio a cui il fondo è esposto per far sì che il manager raggiunga i suoi obiettivi prima della chiusura del fondo.

Ovviamente le conclusioni che trarremo saranno differenti e a volte sorprendenti rispetto alla maggior parte della letteratura su questo tema. Analizzeremo inoltre come cambiano i comportamenti del manager se poniamo un vincolo di drawdown o considerando un'economia in cui è presente il fenomeno di *regime switching*. Infine valuteremo alcune varianti sulla modellizzazione dei flow fund e sull'impatto delle preferenze del manager.

Nel nostro lavoro troveremo che il manager, in tutti i modelli proposti, investirà una quota finita e in alcuni casi anche costante nel tempo nel titolo rischioso. Questo è dovuto al fattore temporale infatti avendo un orizzonte di natura stocastica non si verifica quel fenomeno di risk-shifting che porta il manager a rischiare in maniera maggiore quando si avvicina la data di chiusura del fondo. Questo non accade perché il manager valuta il trade-off tra i payoff presenti e quelli futuri e decide di limitare l'esposizione al rischio oggi per il timore di far chiudere il fondo che gestisce.

Inoltre otterremo dei risultati significativi sull'introduzione dei flow fund e della management fee in aggiunta al compenso dovuto al contratto di high-water mark. Troveremo che la presenza dei flow fund porta il manager a un atteggiamento più conservativo mentre l'introduzione di una management comporta un effetto contrario quindi rende il manager meno avverso al rischio.

Questo lavoro ha varie ispirazioni dalla letteratura precedente. Il paper da cui prende principalmente ispirazione è il Panageas-Westerfield [1], ma oltre a questo altri studi su high-water mark sono stati fatti, in ordine cronologico, da Goetzmann, Ingersoll e Ross [2], Janecek-Sirbu [4], Hodder-Jackwerth [11] e Guasoni-Obloj [3]. Per prendere ispirazioni sulle varie alternative su cui procedere con lo studio abbiamo utilizzato anche i paper [5] [6] e in particolare per introdurre l'aspetto dei drawdown ci siamo ispirati a [7]. Per modellizzare la presenza di inflow/outflow ci riferiamo ai paper Basak,Pavlova,Shapiro [8] e Sirri-Tufano [9].

Il nostro studio avrà la seguente struttura: il Capitolo 1 è dedicato a un riepilogo dei risultati ottenuti dalla letteratura precedente sul tema dei contratti di high-water mark, sull'importanza dei flow fund attraverso l'analisi effettuata in [8] e sul vincolo di drawdown. Nel Capitolo 2 studieremo il modello in cui le scelte di portafoglio del manager dipendono da un compenso dovuto al contratto di high-water mark e da un compenso fisso equivalente a una quota costante del valore del fondo. Inoltre introduciamo l'impatto dei flow fund per mezzo di una relazione dipendente dalla performance relativa rispetto a un benchmark. Nel Capitolo 3 analizziamo il modello base studiato nel Capitolo 2 ma con la sostanziale differenza che il manager e il benchmark investano su due diversi asset rischiosi guidati da due processi browniani diversi ma correlati tra loro. Nel Capitolo 4 analizziamo il caso in cui il fondo sia soggetto alla presenza di un vincolo di drawdown cioè il valore del fondo

è limitato dal basso da una soglia stocastica dipendente dal valore del high-water mark. Nel Capitolo 5 studiamo il nostro problema di asset management nel caso in cui l'economia sia soggetta al fenomeno di regime switching cioè gli asset del mercato non sono più a coefficienti costanti ma essi dipendono da una catena di Markov a tempo continuo. Nel Capitolo 6 tratteremo due varianti del modello principale analizzando un modello con flowfund dipendenti da rendimenti logaritmici e un modello in cui si analizza l'impatto dell'avversione al rischio a tempo infinito. In tutti i capitoli descritti cercheremo una soluzione esplicita dei problemi specifici e faremo delle analisi su di esse. Infine faremo le nostre osservazioni riassuntive sul lavoro svolto nel capitolo Conclusioni. Le dimostrazioni dei risultati utilizzati le porremo nella Appendice.

## Capitolo 1

# Asset Management con contratti High-water mark, Flow Fund e vincolo di Drawdown

In questo capitolo riporteremo i più rilevanti studi fatti sui tre temi caratteristici della nostra tesi cioè: il contratto di high-water mark, la presenza di flow fund e il vincolo di drawdown. Analizzeremo questi aspetti focalizzandoci su modelli che hanno come componente principale il massimo valore del fondo. Gli esempi che consideriamo sono problemi di allocazione ottima con le seguenti caratteristiche

- Remunerazione del manager attraverso un contratto di high-water mark
- Vincoli di drawdowns basati sul valore massimo del fondo
- Flussi di capitale che modificano il valore del fondo

Prenderemo come punto di partenza questi lavori per svolgere il nostro studio e paragonare i risultati con quelli ottenuti in precedenza. Il nostro intento è studiare l'impatto dei flow fund in un contesto che prevede, come negli studi sopracitati, la presenza del contratto di high-water mark e dei vincoli di drawdowns.

### 1.1 Retribuzioni con High-water-mark

In questa prima parte andiamo ad illustrare i principali risultati ottenuti dagli studi effettuati sul tema del high-water mark. Questo contratto consiste nel retribuire il manager, attraverso delle performance fee, nel caso in cui la sua gestione porti il valore del fondo a superare l'ultimo valore massimo registrato dal fondo in questione. Di conseguenza come compenso il manager riceverà una percentuale di questo superamento.

Questo tipo di retribuzione è paragonabile a una serie di opzioni che l'azienda stipula con il manager con strike price variabile, pari al valore di high-water mark. Queste tipologie di contratti per i manager sono molto frequenti nel mondo degli hedge fund perché una retribuzione di questo tipo tiene conto non soltanto dei rendimenti positivi che il manager ha saputo ottenere, ma anche delle eventuali perdite precedenti. Ad esempio se il fondo gestito partisse da 100 e nei due anni successivi scendesse ad un valore di 60 ma nel terzo anno il manager riuscisse ad ottenere una performance positiva portando il valore del fondo a 80 egli comunque non riceverebbe nessun bonus legato alla performance perché il massimo valore del fondo non è stato raggiunto durante la sua gestione. Questo tipo di performance fee garantisce la cosiddetta equità verticale tra manager e investitori: infatti non vengono prelevate dal fondo ulteriori quote dovute alle performance finché non si sono recuperate le perdite precedenti. D'altro canto essendo gli indici azionari su cui si investe in genere crescenti nel medio-lungo periodo, questo contratto garantisce al manager il raggiungimento del bonus. Quindi risulta utile studiare le scelte di portafoglio che il manager compie se retribuito con questo tipo di contratti.

Esistono vari studi su questo argomento, in cui l'approccio al problema avviene da punti di vista differenti e ponendo ipotesi diverse. Descriveremo modelli ad orizzonte finito e infinito per notare i diversi comportamenti del manager in relazione al fattore temporale. Inoltre descriveremo modelli in cui si studia il problema sia dal punto di vista del manager che da quello dell'investitore per notare le diverse prospettive e concludere se questo tipo di remunerazione è vantaggiosa per tutti gli investitori o solo per alcuni. Infine vedremo come la presenza di una management fee e del processo di consumo del manager può far variare i comportamenti del manager e di conseguenza la ricchezza dell'investitore. Riportiamo la descrizione di questi studi e le conclusioni più significative sui modelli descritti.

Come primo esempio riportiamo il lavoro di Panageas-Westerfield in [1] dove partendo da un modello

$$\begin{cases} dP_{0,t} = rP_{0,t}dt \\ dP_{1,t} = \mu P_{1,t}dt + \sigma P_{1,t}dB_t \end{cases}$$

dove  $\mu > r$  e  $\sigma > 0$  sono costanti e  $B_t$  è un processo Browniano standard. definiamo il processo di high-water mark nel seguente modo

$$H_t = \max\{W_s : s \in [0, t]\}$$

dove  $W_t$  è il processo stocastico che determina il valore del fondo con la seguente dinamica

$$dW_t = W_t\pi \left[ \mu dt + \sigma dB_t \right] + W_t(1 - \pi_t)rdt - kW_t dH_t$$



dove  $k$  è la frazione dell'incremento data al manager come compenso. Nello studio in questione il manager si pone il seguente obiettivo

$$\max_{\pi} \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge \infty} e^{-(\lambda+\beta)t} k dH_t \right]$$

dove  $\beta > 0$  è il fattore di sconto del manager tenendo conto della possibilità che il fondo possa chiudere. Inoltre  $\lambda > 0$  è l'intensità di una variabile di Poisson che guida il processo di chiusura del fondo dovuta a cause esogene. Si assume che il fondo terminerà la prima volta che il valore del fondo tocca il valore nullo quindi la variabile aleatoria  $\tau_0$  è definita come

$$\tau^0 = \inf\{t : W_t \leq 0\}$$

Quindi definendo la funzione valore come

$$V(W_t, H_t) = \max_{\{\pi_s\}_{s=t}^{\infty}} \mathbb{E}_t \left[ \int_t^{\tau \wedge \infty} e^{-(\beta+\lambda)(s-t)} k dH_s \right]$$

Partendo dalla regione in cui  $\{W_t = H_t\}$  si osserva che deve valere la seguente condizione alle derivate parziali

$$k V_W = k + V_H$$

Mentre nella regione in cui  $\{W_t < H_t\}$  vale che  $dH_t = 0$  quindi la funzione valore deve soddisfare la seguente relazione di Hamilton-Jacobi-Bellman

$$0 = -(\beta + \lambda)V + \max_{\pi_t} \left\{ V_W W_t (r + \pi_t(\mu - r)) + \frac{1}{2} V_{WW} W_t^2 \sigma^2 \pi_t^2 \right\}$$

Gli autori ipotizzando la seguente guess solution

$$V(W_t, H_t) = K(H_t)W_t^\eta$$

sono giunti ai seguenti risultati. La funzione valore del manager è

$$V(W_t, H_t) = \frac{k H_t}{\eta(1+k) - 1} \left( \frac{W_t}{H_t} \right)^\eta \quad (1.1)$$

sotto l'ipotesi che  $\eta(1+k) - 1 > 0$  e dove  $\eta$  è la seguente espressione dei parametri del modello

$$\eta = \frac{\beta + \lambda + r + \omega - \sqrt{(\beta + \lambda + r + \omega)^2 - 4r(\beta + \lambda)}}{2r}$$

dove  $\omega = \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}$ .

Inoltre la strategia ottima che segue il manager sarà

$$\pi_t^* = \frac{1}{1 - \eta} \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

questa soluzione euristica viene verificata attraverso un teorema di verifica derivato dalla teoria della programmazione dinamica. Le conclusioni che si traggono da questo studio sono: sotto delle condizioni di regolarità un manager neutrale al rischio con questa tipologia di retribuzione ha un incentivo nel scegliere un portafoglio all'interno della frontiera efficiente media-varianza.

Il fatto di avere un compenso *option-like* non intacca la volontà di avere un portafoglio costante e limitato. Nel caso in cui il fondo abbia un predeterminato tempo di chiusura avviene il contrario e all'avvicinarsi della chiusura il manager preferisce detenere un portafoglio illimitato.

Un risultato aggiuntivo è il seguente: il contratto di high-water mark sembra dare i giusti incentivi per le scelte di portafoglio del manager perché lo predispone a scegliere la via della separazione in due fondi comuni: investendo una frazione costante nel titolo privo di rischio e il resto nel portafoglio efficiente media-varianza in base all'insieme di informazioni del manager.

Inoltre si nota che l'andamento della strategia ottima  $\pi^*$  rispetto al parametro  $\mu$  è decrescente. Questo è dovuto al fatto che questo parametro ha un effetto diretto che incrementa la seconda frazione di  $\pi$  ma allo stesso tempo un aumento di  $\mu$  provoca una diminuzione di  $\eta$  che provoca una diminuzione della prima frazione. Questo può essere considerato come un aumento del coefficiente di avversione al rischio «endogeno» del manager. Quindi se poniamo la condizione  $\beta + \lambda > r + \omega$  il secondo effetto vince sul classico effetto di attrazione maggiore che esercita sull'investitore un titolo a rendimento più alto. Inoltre si nota anche un andamento crescente della funzione valore del manager  $V_t$  rispetto al valore del high-water mark  $H_t$  ciò è dovuto al fatto che quando il fondo raggiunge il valore  $H_t$  allora la funzione valore è crescente in modo lineare rispetto ad  $H_t$  perché il fattore  $\left(\frac{W_t}{H_t}\right)^\eta = 1$  mentre questo fattore è minore in generale e ha un effetto di riduzione quando  $H_t$  cresce, ma per valori di  $\eta < 1$  come in questo caso il primo effetto domina il secondo. Ultimo risultato notevole è la dipendenza decrescente della funzione valore dalla percentuale  $k$ .

Analizziamo ora il lavoro [3] di Guasoni e Obloj in cui si approfondisce l'impatto di un contratto di high-water mark ponendo l'attenzione sulle preferenze del manager

e degli investitori. Quindi partendo da un modello

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r + \mu)dt + \sigma dW_t$$

Il manager riceve due tipologie di fees: una quota  $\varphi$  degli asset che gestisce  $X_t$  e una quota  $\alpha$  dei profitti sopra il valore di high-water mark  $X_t^*$  definito come

$$X_t^* = \max_{0 \leq s \leq t} X_s$$

Entrambe le fees sono consegnate nel continuo quindi il manager riceverà  $\varphi X_t dt$  e  $\frac{\alpha}{1-\alpha} dX_t^*$ . Il manager può scegliere il portafoglio  $\pi$ , che definisce la frazione della ricchezza che il fondo investe in  $S_t$ . Quindi l'asset del fondo avrà la seguente dinamica:

$$dX_t = (r - \varphi)X_t dt + \pi_t X_t \left( \frac{dS_t}{S_t} - r dt \right) - \frac{\alpha}{1-\alpha} dX_t^*$$

Definiamo il processo  $F_t$  come il manager account in cui il manager può investire le fees ricevute solo in un investimento privo di rischio

$$dF_t = rF_t dt + \varphi X_t dt + \frac{\alpha}{1-\alpha} dX_t^*$$

Ipotizzando che manager e investitori abbiano preferenze date una funzione utilità di tipo potenza con coefficiente di avversione al rischio rispettivamente  $\gamma_M$  e  $\gamma_I$ . Di conseguenza il manager avrà come obiettivo

$$\max_{\pi} \mathbb{E} \left[ \frac{F_T^{1-\gamma_M}}{1-\gamma_M} \right]$$

mentre l'investitore vorrà massimizzare  $\mathbb{E} \left[ \frac{X_T^{1-\gamma_I}}{1-\gamma_I} \right]$  ma non ha nessun controllo sulla composizione del fondo.

Il problema ad orizzonte finito non ha una soluzione in forma chiusa. Quindi per ottenere una soluzione esplicita ci focalizziamo sull'orizzonte a lungo termine. Definiamo il tasso di certo equivalente della variabile  $F_T$  come :

$$CER_{\gamma}(F^{\pi}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\gamma)T} \log \mathbb{E} \left[ (F_T^{\pi})^{1-\gamma} \right]$$

Il manager cercherà di seguire la strategia  $\hat{\pi}$  che massimizzerà  $CER_{\gamma_M}(F^{\pi})$ . La soluzione di questo problema di ottimo si ottiene ponendo delle ipotesi sui parametri del modello. Infatti se definiamo l'avversione al rischio effettiva come

$\gamma_M^* = (1 - \alpha)\gamma_M + \alpha$  e ponendo questa restrizione sui parametri

$$\varphi - r < \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{\min(\gamma_M^*, 1)}{\gamma_M^*}$$

allora la soluzione del problema del manager è

$$\hat{\pi} = \frac{1}{\gamma_M^*} \frac{\mu}{\sigma^2}$$

$$CER_{\gamma_M}(F^{\hat{\pi}}) = \max \left\{ (1 - \alpha) \left( \frac{1}{\gamma_M^*} \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + r - \varphi \right), r \right\}$$

Per  $\gamma_I \geq 1$ , il tasso di certo equivalente per l'investitore è uguale a:

$$\begin{cases} \frac{1-\alpha}{\gamma_M^*} \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \left( 1 - (1-\alpha) \frac{\gamma_I - \gamma_M}{\gamma_M^*} \right) - (1-\alpha)(\varphi - r) & \text{se } \varphi - r < \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{1-2(1-\alpha)(\gamma_I - \gamma_M) + \alpha(1-\gamma_I)}{\gamma_M^{*2}} \\ \frac{1}{\gamma_M^*} \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \left( 2 - \frac{\gamma_I}{\gamma_M^*} \right) - (\varphi - r) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questi risultati ci dicono che per i manager che non possono detenere quote del fondo che gestiscono, e che hanno un orizzonte di lungo periodo, avere come performance fee un contratto di high-water mark fa sì che il coefficiente di avversione al rischio tende ad avvicinarsi al valore 1. Questo effetto riduce il risk-taking per i manager che sono neutrali al rischio, e in generale per i manager con avversione al rischio minore di quella propria dell'utilità logaritmica. Al contrario si ha un aumento del risk-taking per i manager più avversi al rischio del caso logaritmico ( $\gamma_M > 1$ ), i quali sono portati a detenere un portafoglio più rischioso di quello che avrebbero naturalmente. In questo caso grosse performance fees inducono a un fondo molto più volatile.

Le performance fees sono uno strumento per alterare le preferenze del manager che gestisce il fondo senza tenere conto delle sue preferenze iniziali del manager. Ciò rappresenta un vantaggio per gli investitori quando  $\gamma_I$  si trova tra  $\gamma_M$  ed 1, poiché le performance fees allineano gli obiettivi di investitori e manager.

Nello studio [2] di Goetzmann Ingersoll Ross viene analizzato l'impatto di un contratto di high-water mark in un hedge fund. L'evoluzione dell'asset del hedge fund è la seguente

$$dS = (\mu S - W(S, H, t) - cS)dt + \sigma S d\omega \quad S < H$$

dove  $H$  è il valore massimo registrato dal fondo e  $W(S, H, t)$  è il processo di ritiro/depositi da parte degli investitori. Mentre  $c$  è la quota costante che spetta al manager del fondo come management fee.

La dinamica di  $H$  quando  $S < H$  è la seguente

$$dH = \left( g - \frac{W(S, H, t) + c'S}{S} \right) H dt$$

dove  $g$  è il tasso di crescita costante del high-water mark ( di solito pari a  $r$  o nullo) e  $c'S$  è la quota dovuta ai costi del fondo e alle fee che riducono il valore del massimo. Quando l'asset del fondo è sotto il valore del high-water mark, le funzioni valore dei possibili agenti soddisfano la seguente PDE

$$0 = f_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f_{SS} + (rS - W(S, H, t) - cS) f_S + \left( g - \frac{W(S, H, t) + c'S}{S} \right) H f_H - \Lambda(S, H, t) f - rf + D(S, H)$$

dove  $\Lambda(S, H, t)$  è il parametro che descrive la possibilità di totale ritiro da parte degli investitori questo avviene se il valore dell'asset tocca il valore  $\underline{S}(H, t)$ .

La funzione  $f$  può rappresentare: performance fees (  $P(S, H)$  ), annual fees (  $A(S, H)$  ), la somma delle due (  $F(S, H)$  ) oppure il claim degli investitori (  $I(S, H)$  ). Queste diverse funzioni valore sono differenziare dal payout  $D(S, H)$  che è rispettivamente  $D(S, H) = 0$ ,  $D(S, H) = cS$  e  $D(S, H) = W(S, H, t) + \Lambda(S, H, t)$  per  $I(S, H)$ . Considerando le relative condizioni al bordo e le seguenti ipotesi semplificative

- Il livello di liquidazione totale è una frazione costante di  $H$  cioè  $\underline{S}(H, t) = bH$ .
- Il ritiro è proporzionale al valore dell'asset  $W(S, H, t) = wS$ .
- La probabilità di liquidazione è costante,  $\Lambda(S, H, t) = \lambda$ .
- Le funzioni valore  $f$  non dipendono esplicitamente dal tempo quindi  $f_t = 0$ .

si ottiene in modo esplicito la funzione valore della performance fee

$$P(S, H) = k \frac{H^{1-\gamma} S^\gamma - b^{\gamma-\eta} H^{1-\eta} S^\eta}{\gamma(1+k) - 1 - b^{\gamma-\eta} [\eta(1+k) - 1]}$$

e la funzione valore delle fee totali

$$F(S, H) = \frac{c}{c+w+\lambda} S + \frac{k(w+\lambda) + cb^{1-\eta} [\eta(1+k) - 1]}{(c+w+\lambda) \{ \gamma(1+k) - 1 - b^{\gamma-\eta} [\eta(1+k) - 1] \}} H^{1-\gamma} S^\gamma + \frac{b^{\gamma-\eta} k(w+\lambda) + cb^{1-\eta} [\eta(1+k) - 1]}{(c+w+\lambda) \{ \gamma(1+k) - 1 - b^{\gamma-\eta} [\eta(1+k) - 1] \}} H^{1-\eta} S^\eta$$

dove  $\gamma, \eta$  sono le soluzioni dell'equazione  $\frac{1}{2}\sigma^2x^2 + (r + c' - g - c - \frac{1}{2}\sigma^2)x - (r + c' - g + w + \lambda) = 0$ . Mentre le altre due funzioni valore si ottengono semplicemente come:  $A(S, H) = F(S, H) - P(S; H)$  e  $I(S; H) = S - F(S, H)$ .

Se analizziamo un caso semplificato in cui non c'è la possibilità di liquidazione totale, cioè  $b = 0$ , si ottiene

$$P(S, H) = \frac{kH}{\gamma(1+k) - 1} \left(\frac{S}{H}\right)^\gamma$$

$$F(S, H) = \frac{c}{c+w+\lambda}S + \frac{w+\lambda}{c+\lambda+w} \frac{kH}{\gamma(1+k) - 1} \left(\frac{S}{H}\right)^\gamma$$

Da questo studio si può concludere che per il manager il valore del contratto aumenta con l'aumentare della varianza del portafoglio, quindi il manager è incentivato ad aumentare la rischiosità del fondo. Inoltre viene evidenziato il ruolo cruciale della possibilità per gli investitori di ritirare una quota degli investimenti nella forma chiusa trovata. Infatti se gli asset sono gestiti da un manager per lungo tempo allora i costi per gli investitori dovuti alle performance fee possono essere alti se la politica di ritiro investimento è bassa. La presenza di contratti di high-water mark negli hedge fund è conseguenza di investitori che vogliono che il manager segua strategie ad alta varianza e che gli sia permesso ritirare presto i propri investimenti. Quindi per gli investitori è giustificato un contratto del genere solo se il manager è in grado di creare valore cioè ottenere un grande rendimento dagli investimenti.

In quest'ultimo esempio riportiamo lo studio presente in [4]. In cui l'aspetto del high-water mark viene considerato dal punto di vista di un investitore che deve decidere quanto investire nel fondo che ha un manager retribuito con questo contratto e quanto investire nel titolo privo di rischio. Quindi l'andamento del fondo è come se fosse un fenomeno esogeno e l'investitore deve prendere una decisione di trading. Definendo  $F_t$  il valore del fondo la dinamica del processo di profitto dell'investitore è:

$$\begin{cases} dP_t = \theta_t \frac{dF_t}{F_t}, & 0 \leq t \leq \infty \\ P_0 = 0 \end{cases}$$

Assumendo che una frazione  $\lambda > 0$  del profitto raggiunti è pagata dall'investitore al manager del fondo. Infatti il manager deve raggiungere high-water mark del profitto registrato dall'investitore cioè

$$M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} P_s$$

Quando l'high-water mark crescerà una quota  $\lambda$  viene pagata al manager, quindi il

processo  $P_t$  diventa

$$\begin{cases} dP_t = \theta_t \frac{dF_t}{F_t} - \lambda dM_t, & P_0 = 0 \\ M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} (P_s \vee i) \end{cases}$$

dove  $i \geq 0$  è il valore iniziale dell'high-water mark. Passiamo a definire il processo di ricchezza dell'investitore che comprende anche il processo di consumo  $C_t$  definito come

$$C_t = \int_0^t \gamma_s ds, \quad 0 \leq t \leq \infty$$

ponendo  $x > 0$  il valore della ricchezza iniziale otteniamo il processo  $X_t$

$$X_t = x + P_t - C_t \quad 0 \leq t \leq \infty$$

definendo l'asset del fondo  $dF_t = F_t(\alpha dt + \sigma dW_t)$  otteniamo la dinamica  $X_t$

$$dX_t = (\theta_t \alpha - \gamma_t) dt + \theta_t \sigma dW_t - \lambda dM_t, \quad X_0 = x$$

I principali risultati di questo studio sono: il problema di investimento ottimo può essere modellato come un problema di controllo stocastico bi-dimensionale e il problema è ben posto ( esiste un unico controllo ottimo). Numericamente si può dimostrare che la presenza di performance fees cambia il comportamento dell'investitore con un tipico livello di avversione al rischio inducendolo ad aumentare l'investimento quando il livello di high-water mark viene raggiunto, allo scopo di aumentare ulteriormente l'high-water mark ed evitare il pagamento di fee in futuro. Altro risultato verificabile numericamente è la riduzione della ricchezza dell'investitore di un fattore  $1 + \lambda$  nel lungo periodo. Allo stesso tempo il certo equivalente relativo dell'investimento è di solito più alto di  $1/(1 + \lambda)$ . Questo è dovuto al fatto che le fees sono pagate solo se si è ottenuto un extra profitto e quindi queste fees hanno un impatto minore dal punto di vista della utilità. Mentre le regular fees sono pagate in qualunque caso e di conseguenza hanno un impatto molto più deleterio sull'utilità soprattutto quando si ha una perdita.

## 1.2 Vincolo di Drawdown

In questa sezione analizziamo come è stato studiato nel mondo accademico il tema del vincolo di performance dal basso, cioè il fatto di porre un limite inferiore al valore del fondo che gestisce il manager.

Come primo esempio riportiamo il lavoro di Grossman e Zhou in [7] in cui il vincolo di drawdowns è legato al massimo registrato dal fondo cioè al valore del high-water mark, quindi pone un limite inferiore stocastico al valore del fondo.

Ipotizzando un economia con due titoli: un asset rischioso con drift  $\mu + r$  e volatilità  $\sigma$  e un titolo privo con tasso  $r$ . Il manager del fondo potendo investire in questi due titoli deve scegliere la quantità di ricchezza  $x_t$  da investire nel titolo rischioso. Quindi la ricchezza del fondo  $W_t$  avrà la seguente dinamica

$$dW_t = r W_t dt + x_t (\mu dt + \sigma dZ_t)$$

dove  $Z_t$  è un moto browniano standard.

In questo modello il vincolo di drawdowns è definito nel modo seguente

$$W_t \geq \alpha M_t$$

dove  $M_t$  è il massimo registrato dal fondo fino al tempo  $t$  e  $\alpha$  è una costante tra  $(0, 1)$  che indica quanto è stringente il vincolo di drawdowns. Inoltre il processo del massimo è definito nel modo seguente

$$M_t = \max\{M_0 e^{\lambda t}, W_s e^{\lambda(t-s)}; s \leq t\}$$

dove  $M_0$  è il valore massimo del fondo registrato al tempo iniziale. Consideriamo solo i casi  $\lambda \leq r$  perché nel caso opposto non esistono strategie ammissibili.

Ipotizzando che il manager abbia una funzione utilità  $U$  di tipo potenza con coefficiente relativo di avversione al rischio  $A$ , l'obiettivo del manager è quello di massimizzare il tasso di crescita a lungo termine del fondo perché egli viene retribuito con una quota del valore del fondo a  $T$ . Di conseguenza l'obiettivo sarà ottenere

$$\xi = \sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-A)T} \ln \mathbb{E} \left[ (1-A)U(W_T) \right]$$

dove  $\mathcal{A}$  è l'insieme di tutte le strategie  $x_t$  che rendono ben definito il processo  $W_t$  e rispettano il vincolo  $W_t \geq \alpha M_t$ .

La risoluzione del problema avviene distinguendo due casi principali:  $\lambda = r$  e  $\lambda < r$ . Nel primo caso si ottiene che la strategia ottima risulta essere

$$X_t = k (W_t - \alpha M_t)$$

dove

$$k = \frac{\mu}{\sigma} \frac{1}{\alpha + (1-\alpha)A}$$

mentre il tasso di crescita ottimale risulta essere

$$\xi = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{1-\alpha}{\alpha + (1-\alpha)A}$$



Nel secondo caso invece la risoluzione non è determinata per via analitica ma deve essere trovata tramite metodo numerico. Oltre alle soluzioni le analisi sul modello hanno portato gli autori dello studio a concludere che la strategia del manager risulta dipendente dalla distanza del valore del fondo dal limite stocastico inferiore quindi la quantità investita nell'asset rischioso dipende da  $W_t - \alpha M_t$ . Inoltre si nota che l'imposizione di questo vincolo provoca una mutazione delle preferenze del manager perché come si vede nel caso  $\lambda = r$  esso risulta essere una media tra il coefficiente  $A$  e 1 pesata per il coefficiente  $\alpha$  che indica quanto è stringente il vincolo. Inoltre si nota in entrambi i casi che il portafoglio ottimo del manager è minore del caso classico di Merton in [12] questo porta a dire che il vincolo dei drawdown in questo contesto porta a una riduzione dell'esposizione del fondo e un atteggiamento più prudentiale da parte del manager.

Infine si nota dalle elaborazioni che il portafoglio  $X_t$  cresce al crescere di  $W_t$  ma quando  $W_t \cong M_t$  la strategia cala notevolmente perché  $M_t$  rappresenta per  $W_t$  una barriera riflettente che porta il manager a disinvestire nel titolo rischioso, questo succede solo se  $\alpha \geq 0,5$  e  $A \geq 1$ .

### 1.3 Flow Fund e Asset Management

In questa sezione andremo a descrivere i principali studi fatti nell'ambito delle strategie d'investimento quando il valore del fondo dipende dalla entrata/uscita di investimenti. Quindi andremo a verificare come impattano questi cosiddetti inflow/outflow sulle scelte del manager che gestisce il fondo e come cambia il valore in base alle sue scelte. La motivazione principale dell'introduzione di flow fund attraverso benchmarking è verificata in degli studi precedenti ad esempio nella ricerca empirica sui dati di mercato eseguita da Sirri e Tufano in [9]. I quali provarono che gli investitori si riversano in maniera spropositata verso i fondi ad alta performance mentre il disinvestimento da fondi poco redditizi avviene con un tasso molto inferiore. Inoltre verificarono che i flow di un fondo sono sensibili alla politica retributiva del fondo. Anche in questo si è riscontrata una asimmetria nelle risposte degli investitori tra alte e basse fees. Quindi è chiaro che la presenza dei flow fund sia fortemente dipendente dalle performance del fondo gestito e per valutarle si sceglie un fondo benchmark con cui confrontarle. Inoltre in questi studi il manager viene retribuito attraverso una classica management fee dipendente dal valore del fondo e di conseguenza la volontà del manager di ottenere un maggiore compenso concorda con il fenomeno di ottenere maggiori inflow.

Nello studio [8] di Basak, Pavlova e Shapiro si vuole verificare l'impatto degli inflow/outflow caratterizzandoli come dipendenti da una performance relativa rispetto a un benchmark fissato. Inoltre si pone un vincolo di under-performing cioè

si inserisce un limite inferiore al valore del fondo confrontandolo con un ulteriore benchmark. Considerando una economia tempo continuo con orizzonte finito,  $[0, T]$ , prendiamo una economia come in Black&Scholes cioè con un titolo privo di rischio con tasso  $r$  e un titolo rischioso  $S_t$  con dinamica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t$$

dove  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti. Il manager riceverà come compenso una quota costante del asset del fondo che gestisce  $A_t$  quindi il suo obiettivo sarà massimizzare il valore del fondo a T, ipotizzando una utilità potenza del tipo

$$u(A_T) = \frac{A_T^{1-\delta}}{1-\delta}, \quad \delta > 0$$

dove  $\delta$  è il coefficiente relativo di avversione al rischio. Il processo valore del portafoglio ha la seguente dinamica

$$dW_t = [(1 - \theta_t)r + \theta_t\mu] W_t dt + \theta_t\sigma W_t dw_t$$

dove  $\theta_t$  indica la frazione di portafoglio investita nel titolo rischioso, o esposizione al rischio del fondo. In assenza di flow nel fondo questo sarebbe il suo asset cioè lo stesso studiato da Merton in [12]. La cui esposizione al rischio ottimale del manager,  $\theta^N$ , è definita come

$$\theta^N = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

I flow fund che il fondo attirerà si modellizzano dipendenti dalle performance del manager rispetto a un fondo benchmark,  $Y_t$ , il quale investe una quota  $\beta$  in  $S_t$  e  $1 - \beta$  nel titolo privo di rischio. Di conseguenza il fondo benchmark segue la dinamica

$$dY_t = (1 - \beta)r Y_t dt + \beta Y_t \frac{dS_t}{S_t} = [(1 - \beta)r + \beta\mu] Y_t dt + \beta\sigma Y_t dw_t$$

Definiamo return del portafoglio del manager e del benchmark come  $R_t^W = \ln \frac{W_t}{W_0}$  e  $R_t^Y = \ln \frac{Y_t}{Y_0}$ , ponendo senza perdita di generalità  $W_0 = Y_0$ . Per descrivere l'impatto del flow fund utilizziamo  $f_T$  e definiamo il valore degli asset del fondo a T come

$$A_T = f_T W_T$$

dove

$$f_T = \begin{cases} f_L & \text{se } R_T^W - R_T^Y < \eta \\ f_H & \text{se } R_T^W - R_T^Y \geq \eta \end{cases}$$

in cui  $\eta$ , può essere definita come *soglia dei flow*, ed è un parametro che può essere positivo, negativo o nullo. Quindi possiamo riscrivere il valore dell'asset come

$$A_T = f_L W_T + (f_H - f_L) W_T \mathbb{1}_{\{R_T^W - R_T^Y \geq \eta\}}$$

come si può facilmente notare l'asset è diviso in due componenti: la prima è una funzione lineare del valore del portafoglio, mentre la seconda è il payoff di un'opzione binaria «asset-or-nothing» con strike stocastico. Osserviamo che la volatilità del sottostante ( $W/Y$ ) di questa opzione è  $\sigma|\theta_W - \theta_Y|$ . Come detto in molti studi l'aumento del compenso del manager porta il manager a deviare dalla strategia  $\theta^N$  e porta a un incremento della volatilità del sottostante. Notiamo invece che, in questo caso, un aumento della esposizione del fondo non è detto che porti a un aumento della volatilità del sottostante  $W/Y$ . Poniamo una restrizione all'under-performing del fondo ponendo questo vincolo

$$R_T^W - R_T^X \geq \epsilon$$

dove  $X$  è il valore di un portafoglio pesato, con una frazione  $\delta$  investita in  $S_t$  e  $1 - \delta$  nel titolo privo di rischio e  $\epsilon$  è la *soglia minima di perdita permessa*. L'obiettivo del manager sarà massimizzare il net present value derivante dal suo compenso che in questo modello è definito come una classica management fee cioè una quota costante del valore dell'asset del fondo  $A_T$ . Di conseguenza il problema di ottimo sarà il seguente

$$\max_{\theta} \mathbb{E} \left[ u(A_T) \right]$$

gli autori per risolvere questo problema utilizzano il metodo martingala e ottengono le seguenti valutazioni. Nella soluzione si può notare che nel caso in cui il manager non abbia restrizioni di under-performance cioè  $\epsilon = -\infty$  allora il portafoglio ottimo si allinea al  $\theta^N$  quando si è molto distante dalla performance del benchmark  $Y_t$  oppure quando si supera la soglia  $\eta$ . Mentre nella zona in cui la performance relativa è sotto la soglia ma non in maniera irrecuperabile, il manager aumenterà l'esposizione del fondo per cercare di ottenere una performance migliore e quindi recuperare sul benchmark. Questo effetto sul comportamento del manager non rientra negli interessi degli investitori del fondo, perché la loro utilità non è influenzata dal fenomeno di flow fund. Nel caso in cui sia definita la soglia minima  $\epsilon$  allora il comportamento del manager viene notevolmente mitigato verso un atteggiamento più prudentiale e in linea con gli interessi degli investitori. In questo studio si verifica che il benchmarking e l'imposizione di una soglia minima di under-performance ha un effetto positivo sulle scelte del manager. Questo perché gli incentivi al manager potrebbero portare il manager ad agire nell'interesse

degli investitori e dei loro scopi. La restrizione di under-performance allinea questi interessi verso quelli degli investitori. Nonostante ciò, non tutti le benchmarking fees creano valore per gli investitori, ad esempio scegliere un benchmark per la soglia minima  $X_t$  troppo aggressivo potrebbe essere deleterio per il valore del fondo perché spinge il manager ad aumentare l'esposizione del fondo. Infatti si nota che si sceglie un benchmark con strategia  $\theta^X > \max(\theta^N, \theta^Y)$  l'incentivo del manager al risk-taking non si riduce al contrario l'esposizione al rischio cresce notevolmente quando il valore di  $R_t^W - R_t^Y$  si avvicina alla soglia  $\eta$ .

## Capitolo 2

# Flow Fund e Remunerazione con High-Water Mark

Il primo caso che vogliamo analizzare nel nostro studio è il problema di allocazione ottima che affronta il manager di un fondo di investimento. Gli obiettivi del manager sono principalmente influenzati dal compenso che egli riceve per gestire il fondo. Lo schema retributivo che vogliamo studiare è il seguente: il manager riceverà una quota fissa detta management fee e una quota variabile detta performance fee basata sul contratto di high-water mark. Inoltre le scelte del manager saranno influenzate dalla presenza nel fondo gestito di una possibilità di flow fund, questi dipenderanno dalla performance che il fondo sotto la gestione del manager riuscirà a ottenere. Essa verrà confrontata in modo continuo con le performance di un prefissato fondo benchmark. Per la modellizzazione e la risoluzione di questo problema ci ispiriamo principalmente allo studio di Panageas e Westerfield in [1]. Andiamo ora a descrivere il modello che sarà analizzato nel proseguo dello studio.

### 2.1 Descrizione del modello matematico

Partiamo da un modello economico Black&Scholes<sup>1</sup> che comprende un titolo rischioso  $S_t$  e un titolo privo di rischio  $B_t$  con dinamica:

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t & S_0 > 0 \\ dB_t = r B_t dt & B_0 > 0 \end{cases}$$

dove  $Z_t$  è processo di Wiener con media zero e varianza  $t$ .

---

<sup>1</sup>Consideriamo il seguente spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  e lo ipotizziamo completo

Definiamo il processo  $F_t$  come il valore del fondo dipendente solo dagli investimenti in  $S_t$  e in  $B_t$ :

$$dF_t = F_t \left[ (1 - \theta_t)r + \theta_t\mu \right] dt + F_t\sigma\theta_t dZ_t$$

dove  $\theta_t$  è la percentuale che il manager investe nel titolo rischioso  $S_t$  al tempo  $t$  detta anche strategia del manager.

Il valore del fondo dipenderà inoltre dai inflow/outflow che gli investitori decideranno di effettuare. Possiamo modellare questo fenomeno come dipendente dall'andamento relativo del fondo rispetto a un fondo benchmark  $Y_t$  la cui dinamica è:

$$dY_t = Y_t \left[ (1 - \beta)r + \beta\mu \right] dt + Y_t\sigma\beta dZ_t$$

dove  $\beta$  è la percentuale che il benchmark investe nel titolo rischioso  $S_t$  e poniamo costante nel tempo. Quindi possiamo descrivere l'effetto dei flow fund attraverso la seguente funzione

$$dG(F_t, Y_t) = \eta \left( \frac{dF_t}{F_t} - \frac{dY_t}{Y_t} \right)$$

notiamo che la funzione dei flow fund è lineare nella differenza dei rendimenti dei fondi a confronto con pendenza descritta dal parametro  $\eta$ .

Consideriamo infine il fondo complessivo  $W_t$  comprensivo di investimenti nei titoli presenti sul mercato, della possibile presenza di inflow/outflow e del pagamento del manager.

$$dW_t = W_t \left[ (1 - \theta_t)r + \theta_t\mu \right] dt + W_t\sigma\theta_t dZ_t + W_t\eta \left( \frac{dF_t}{F_t} - \frac{dY_t}{Y_t} \right) - (1 - x) aW_t dt - x k dH_t \quad (2.1)$$

dove  $H_t$  è il processo di High Water Mark definito come :

$$H_t = \max\{W_s : s \in [0, t]\}$$

Questo sta a significare che quando il massimo viene raggiunto e modificato cioè  $dH_t \neq 0$  il valore del fondo decresce in generale di una quantità  $x k dH_t$  che rispecchia la frazione dell'incremento che il manager riceve come compenso.

## 2.2 Problema di ottimizzazione

Il manager del fondo ha la volontà di massimizzare il net present value dovuto al suo compenso. Le ipotesi basilari del modello sono la neutralità al rischio del manager e l'impossibilità di reinvestire i compensi ricevuti. Inoltre nel compenso è

presente il peso  $x \in [0, 1]$ , che descrive l'importanza della management fee rispetto alla performance fee.

La funzione valore è data da

$$V(W, H) = \max_{\theta_t} \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge \infty} e^{-(\lambda+\gamma)t} \left( x k dH_t + (1-x) a W_t dt \right) \right] \quad (2.2)$$

dove  $W = W_0$ ,  $H = H_0$  e il fattore di sconto del manager,  $\gamma > 0$ , è stato adeguato in base alla probabilità che il fondo chiuda. Abbiamo assunto che la data di chiusura del fondo sia aleatoria e dovuta a fattori esterni. Questa possibilità appare nel modello tramite una variabile di Poisson di intensità costante  $\lambda$ . Si assume che alla chiusura del fondo gli investitori ritirino tutti i loro investimenti, quindi termini il contratto del manager e di conseguenza la sua funzione valore valga zero. Assumiamo per completezza che il fondo chiuderà quando il valore del fondo  $W_t$  tocca lo zero quindi definiamo la variabile  $\tau^0$  come:

$$\tau^0 = \inf\{t : W_t \leq 0\}$$

Nelle prossime sezioni analizzeremo il problema nei casi in cui:

- il manager riceva solo la performance fee
- il manager riceva lo schema retributivo completo

## 2.3 No Management Fee

In questa sezione analizziamo il problema nel caso in cui il compenso del manager comprenda solamente la performance fee dovuta al contratto di high-water mark. Di conseguenza imponiamo che:

- $a=0$
- $x=1$

### 2.3.1 Risoluzione

Per risolvere il problema di ottimo in (2.2) possiamo procedere sfruttando la metodologia di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) la quale descrive la funzione obiettivo come soluzione di una equazione alle derivate parziali.

Partiamo dall'analizzare il problema nella regione  $\{W_t = H_t\}$  in cui se istantaneamente  $W_t \geq H_t$  allora allo stesso modo  $H_t$  cresce di un fattore  $dH_t$  che va a formare il nuovo livello di high-water mark.

Quindi analizziamo l'andamento della funzione valore in questa regione confrontando il valore prima e dopo l'evento:

$$V(W_t, H_t) = k dH_t + V(W_t - k dH_t, H_t + dH_t)$$

Espandiamo il secondo termine tramite la formula di Taylor al primo ordine per valori piccoli di  $dH_t$  intorno a  $W_t = H_t$  e otteniamo:

$$V(H_t, H_t) = k dH_t + V(H_t, H_t) - k dH_t V_W(H_t, H_t) + dH_t V_H(H_t, H_t)$$

Eliminando  $V(H_t, H_t)$  da entrambi i lati si ottiene:

$$k V_W = k + V_H \quad (2.3)$$

quando  $W_t = H_t$ .

Passiamo a studiare il problema nella regione  $\{W_t < H_t\}$  in questa regione  $dH_t = 0$  quindi tramite la relazione di HJB possiamo cercare la funzione  $V(W, H)$  che risolve

$$0 = V_t + \max_{\theta_t} \left\{ V_W W \left[ r + (1 + \eta)(\mu - r)\theta_t - \eta\beta(\mu - r) \right] + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{WW} W^2 \left[ \theta_t(1 + \eta) - \eta\beta \right]^2 \right\} \quad (2.4)$$

Assumendo che esista una soluzione per il problema di massimizzazione presente nell'equazione precedente otteniamo

$$\theta_t^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \beta\eta - \frac{V_W}{V_{WW} W} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \right) \quad (2.5)$$

Quindi sostituendo la strategia ottima  $\theta_t^*$  nell'equazione differenziale tenendo conto che  $V_t = -(\gamma + \lambda)V$  e semplificando otteniamo

$$0 = -(\gamma + \lambda)V + rV_W W - \frac{1}{2} \frac{V_W^2}{V_{WW}} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \quad (2.6)$$

Per risolvere questa equazione differenziale ordinaria non lineare poniamo come guess solution la seguente

$$V(W, H) = P(H)W^\alpha \quad (2.7)$$

dove  $\alpha \geq 0$ .

Con questa ipotesi sulla soluzione di  $V(W, H)$  possiamo ricavare la strategia ottima

$$\theta_t^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \eta\beta + \frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2} \right) \quad (2.8)$$



Si può vedere facilmente che la soluzione trovata è costante nel tempo. E inoltre notiamo che il secondo addendo è simile alla soluzione trovata da Merton in [12]. Dove  $1 - \alpha$  corrisponde al coefficiente relativo di avversione del manager nella soluzione di Merton. Quindi ad un aumento della variabile  $\alpha$  corrisponde una diminuzione dell'avversione al rischio del manager. Mentre il primo addendo è un coefficiente che dipende solamente dalla presenza degli inflow/outflow e che caratterizza la nostra soluzione rispetto a quella trovata in [1]. Sostituendo la guess solution nella formula (2.6) e definendo

$$\pi = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2$$

otteniamo l'equazione

$$0 = (\gamma + \lambda) - \alpha[\gamma + \lambda + r + \pi] + \alpha^2 r \quad (2.9)$$

Quindi il valore  $\alpha$  della guess solution (2.7) si ottiene risolvendo la precedente equazione di secondo grado ponendo come ipotesi  $\mu > r$  e quindi di conseguenza  $\pi > 0$

$$\alpha_{\pm} = \frac{\gamma + \lambda + r + \pi \pm \sqrt{(\gamma + \lambda + r + \pi)^2 - 4r(\gamma + \lambda)}}{2r} \quad (2.10)$$

Possiamo riscrivere l'espressione sotto radice come

$$(\lambda + \gamma + \pi - r)^2 + 4\pi r > 0$$

di conseguenza le radici trovate sono reali. Inoltre entrambe le radici sono positive ma  $\alpha_- \in (0, 1)$  mentre  $\alpha_+ > 1$ , si può vedere facilmente che se  $\alpha = 0$  l'equazione (2.9) è positiva mentre se  $\alpha = 1$  è negativa. Per il proseguo scegliamo di ignorare la radice  $\alpha_+$  perché una soluzione con una potenza maggiore di 1 non può essere associata al nostro problema infatti essa renderebbe la nostra funzione valore convessa rispetto alla variabile  $W$  e di conseguenza renderebbe il problema di ottimo mal posto. Quindi chiamiamo  $\alpha_-$  come  $\alpha$ .

Passiamo ad analizzare la guess solution (2.7) nella regione  $\{W_t = H_t\}$ . Quindi sostituiamo la soluzione nella condizione (2.3) otteniamo

$$k \alpha H^{\alpha-1} P(H) = k + P'(H) H^{\alpha}$$

Semplificando otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria

$$P'(H) = k \left( \frac{\alpha P(H)}{H} - \frac{1}{H^{\alpha}} \right)$$

che ha soluzione generale

$$P(H) = \left[ \frac{k}{\alpha(1+k) - 1} H^{1-(1+k)\alpha} + C \right] H^{\alpha k}$$

per determinare la costante  $C$  imponiamo che la funzione valore si annulli quando il processo di high-water mark tocca un valore sufficientemente alto  $\hat{H}$ .

Di conseguenza la condizione di bordo è

$$V(W, \hat{H}) = 0$$

otteniamo in questo il valore della costante cioè

$$C = -\frac{k\hat{H}^{1-\alpha(1+k)}}{\alpha(1+k) - 1}$$

Per ottenere la soluzione del problema in un orizzonte infinito, facciamo tendere  $\hat{H} \rightarrow \infty$  e ponendo la seguente condizione tra i parametri

$$\alpha(1+k) - 1 > 0 \tag{2.11}$$

si ottiene che la costante  $C$  è pari a 0.

Di conseguenza la soluzione al nostro problema è

$$V(W, H) = \frac{kH}{\alpha(1+k) - 1} \left( \frac{W}{H} \right)^\alpha \tag{2.12}$$

La soluzione trovata può essere facilmente verificata tramite il seguente teorema derivante dalla teoria della programmazione dinamica.

**Theorem 2.3.1.** *Assumendo che la condizione (2.11) valga e che  $\mu > r$ . Allora la funzione valore del manager è data da (2.12) e la strategia ottima è la (2.8).*

La cui dimostrazione è riportata nell'Appendice dello studio.

Come si può vedere la funzione valore sotto le ipotesi date è sempre positiva. Inoltre è dipendente dal rapporto tra il valore del fondo e l'high-water mark che ovviamente è sempre minore 1. Quindi questo fattore attenua l'impatto di  $H_t$  sulla funzione valore del manager in base al parametro  $\alpha$  che possiamo definire come il coefficiente di avversione al rischio «implicito» del manager. Definiamo  $\alpha$  in questo modo perché: esso ha lo stesso ruolo dell'avversione al rischio nella soluzione di [12] ed è implicito perché esso è una funzione dei parametri del modello e non delle preferenze del manager. Ovviamente bisogna precisare che nel nostro studio il vero coefficiente relativo di avversione al rischio sarebbe  $1 - \alpha$ .

### 2.3.2 Statica Comparata

Passiamo ora ad analizzare alcuni risultati significativi dovuti alla statica comparata applicata alla strategia ottima  $\theta_t^*$  e alla funzione valore del manager  $V(W, H)$ .

Ci focalizziamo su alcuni risultati principali su cui trarre delle conclusioni.

**Lemma 2.1.** *Se valgono le seguenti condizioni:*

- $\alpha(1 + k) > 1$
- $\mu > r$
- $\gamma + \lambda > r$

*allora*

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \gamma} > 0 \quad e \quad \frac{\partial \theta_t}{\partial \lambda} > 0.$$

Questo lemma ci dice che all'aumentare dei parametri  $\gamma$  e  $\lambda$  la percentuale ottimale che il manager investe nel titolo rischioso aumenta. Poiché questi parametri indicano quanto vengono scontati i payoff futuri del manager, questo risultato ci fa concludere che il manager vedendo grande rischiosità nel breve termine cerca di guadagnare il più possibile investendo nel titolo rischioso prima che il fondo chiuda.

**Lemma 2.2.** *Se valgono le seguenti condizioni:*

- $\alpha(1 + k) > 1$
- $\mu > r$
- $\gamma + \lambda > r$
- $\gamma + \lambda > r + \pi$

*allora*

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \mu} < 0$$

Il risultato di questo lemma ci fa dire che il manager diminuisce l'investimento nel titolo rischioso quando il drift ( $\mu$ ) di quest'ultimo aumenta. Questo sembra essere abbastanza contro intuitivo dal punto di vista economico perché come riportato in molti modelli finanziari, primo tra tutti il modello di Merton [12], la percentuale investita nel titolo rischioso  $\theta_t^*$  cresce quando il titolo diventa più appetibile. Nel nostro modello ciò non avviene perché il fattore  $\mu$  influenza la strategia ottima sia direttamente facendola aumentare che indirettamente attraverso il parametro  $\alpha$  che diminuisce all'aumentare di  $\mu$  che comporta quindi a una decrescita generale di  $\theta_t$ . Questo può essere interpretato come un aumento dell'avversione al rischio

«implicita» del manager  $1 - \alpha$  dovuto all'importanza dei payoff presenti rispetto a quelli futuri. Perciò in questo caso l'effetto attrattivo che di solito ha un aumento di  $\mu$  è dominato dall'effetto psicologico che in questo caso fa aumentare l'avversione al rischio del manager in modo implicito inducendolo così a diminuire la rischiosità del suo portafoglio.

**Lemma 2.3.** *Se valgono le seguenti condizioni:*

- $\alpha(1 + k) > 1$
- $\mu > r$

*allora*

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \sigma} < 0$$

Come ci potevamo aspettare il lemma 2.3 ci dice che la strategia ottima  $\theta_t^*$  diminuisce quando il titolo  $S_t$  diventa più rischioso. Questo fatto è ovvio dal punto di vista economico infatti se il nostro titolo incomincia a subire fluttuazioni notevoli dovuti all'aumento di  $\sigma$  il manager è spinto a investire una percentuale minore in quel titolo e incrementare la quota investita nel titolo risk-free  $B_t$ . Altra motivazione potrebbe essere la seguente: visto che il manager deve riuscire a raggiungere l'high-water mark e in contemporanea battere il benchmark  $Y_t$  per ottenere nuovi fondi, un aumento di  $\sigma$  porta a una probabilità crescente di possibili perdite che il manager cerca di evitare aumentando la quota risk-free.

**Lemma 2.4.** *Se valgono le seguenti condizioni:*

- $\alpha(1 + k) > 1$
- $\mu > r$
- $\frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - \alpha)} > \beta$

*allora*

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \eta} < 0$$

Questo lemma ci dice che all'aumentare della pendenza ( $\eta$ ) della funzione lineare che caratterizza gli inflow/outflow, la strategia che assume il manager è più conservativa e di conseguenza meno rischiosa. Questo può essere dovuto al fatto che il manager sapendo che battendo il benchmark incrementa di molto il valore del fondo allora sceglie una strategia più prudentiale per essere sicuro di raggiungere l'obiettivo cioè superare  $Y_t$ .

Inoltre si può notare che la condizione ulteriore per cui vale questo andamento cioè  $\beta < \frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2}$  ci dice che ciò accade quando il benchmark investe meno della quota

«normale» data dal lavoro di Merton in [12] ponendo come  $1 - \alpha$  il coefficiente di avversione al rischio del nostro fondo. Invece quando accade il contrario la derivata di  $\theta^*$  rispetto a  $\eta$  risulta essere negativa. Questo comportamento si verifica perché all'aumentare del parametro  $\eta$  (cioè per  $\eta \rightarrow \infty$ ) il manager è sempre più indotto ad imitare il benchmark, perché l'aspetto dei flow fund risulta sempre più importante e di conseguenza il manager non vuole incorrere in performance negative che porterebbe a ingenti outflow da parte degli investitori. Riassumendo per valori elevati di  $\eta$  il manager non è influenzato da nient'altro che dalla strategia del benchmark e tutti i restanti parametri del modello non influenzano più i comportamenti del manager.

**Lemma 2.5.** *Se valgono le seguenti condizioni:*

- $\alpha(1 + k) > 1$
- $\mu > r$

allora

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \beta} > 0 \quad e \quad \frac{\partial \theta_t}{\partial \beta} \in (0, \eta)$$

Nel lemma 2.5 si vede che il manager incrementa la quota investita in  $S_t$  se lo stesso succede per il manager che gestisce il fondo benchmark  $Y_t$ . Questo è dovuto al fatto che entrambi i fondi investono nello stesso titolo rischioso  $S_t$  quindi se il manager del benchmark aumenta il suo investimento rischioso anche il nostro manager dovrà seguirlo per non discostarsi troppo dal benchmark. Ma questa crescita di  $\theta$  rispetto a  $\beta$  non sarà 1 : 1. Infatti come vediamo nel lemma la derivata di  $\theta_t$  rispetto a  $\beta$  è limitata dal parametro  $\eta$  questo perché l'effetto degli inflow/outflow nel fondo  $W_t$  è caratterizzato dalla pendenza  $\eta$  che ne indica l'incidenza della performance relativa al benchmark sul valore del fondo.

### 2.3.3 Derivate prime

Infine valutiamo la funzione valore del manager (2.12) al variare dei suoi parametri principali. Si può derivare facilmente che:

$$\frac{\partial V_t}{\partial k} < 0 \quad e \quad \frac{\partial V_t}{\partial H_t} > 0.$$

Concludiamo quindi che il valore del manager, ovvero il suo compenso scontato, diminuisce se la percentuale percepita aumenta. Questo risultato apparentemente poco realistico può essere spiegato notando che  $k$  influenza negativamente il valore del fondo  $W_t$ : il manager ha maggiore probabilità di ottenere il bonus solo se il suo compenso non intaccherà eccessivamente il valore del fondo, così da poter raggiungere e sperabilmente superare il valore del high-water mark.

Inoltre il valore del manager aumenta all'aumentare del high-water mark, ciò è dovuto al fatto che il valore  $V_t$  dipende totalmente dalla capacità del manager di raggiungere questo massimo e continuare a farlo nel tempo, in quanto il suo compenso è legato esclusivamente a questo evento. Quindi se il manager riesce a raggiungere l'high-water mark, la sua volontà è quella di aumentare il valore del fondo il più possibile per ottenere un compenso maggiore. Ovviamente però questo effetto è mitigato dal fatto che avere un valore di high-water mark molto alto potrebbe comportare più tempo per raggiungerlo e conseguentemente uno sconto maggiore nella funzione valore. Il fatto che nella nostra risoluzione il fattore  $\alpha < 1$  implica che questo secondo effetto è dominato dal primo. Questi risultati sono validi anche nel caso di assenza di flow fund ( $\eta = 0$ ) infatti in [1] si riscontrano gli stessi andamenti rispetto a queste parametri.

### 2.3.4 Validità delle assunzioni

Nella nostra risoluzione abbiamo posto due assunzioni principali

A.  $\mu > r$

B.  $\alpha(1 + k) > 1$

Vogliamo analizzarle per poter trarre delle considerazioni sulla loro bontà. Partiamo dalla prima che dice che il drift del titolo rischioso  $S_t$  è maggiore del tasso risk-free ( $r$ ) questo sta a significare che il manager si trova in una economia in cui il titolo  $S_t$  è più appetibile del titolo  $B_t$  che risulta essere molto ragionevole dal punto di vista economico altrimenti il manager sceglierebbe di investire tutti gli asset gestiti in  $B_t$  che ha l'enorme vantaggio di essere privo di rischio. Dopo questo ragionamento ovvio andiamo ad analizzare come si comporta la nostra soluzione trovata nel caso in cui  $\mu$  si avvicini a  $r$ .

**Lemma 2.6.** *Assumendo che  $\gamma + \lambda > r$  e  $\mu > r$ . Allora*

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow r} \alpha &= 1 \\ \lim_{\mu \rightarrow r} \theta^* &= \infty \end{aligned} \tag{2.13}$$

Come si deduce dal lemma se il drift  $\mu$  si avvicina al tasso  $r$  il manager è incentivato a investire una quota infinita nel titolo  $S_t$  e quindi ottenere un portafoglio a volatilità infinita. Questo ovviamente non è né praticabile né ragionevole e comporta un problema di ottimizzazione non ben definito. In questo modo si conferma la ragionevolezza della nostra assunzione  $\mu > r$ . Si può osservare che in queste condizioni la funzione valore  $V_t$  del manager potrebbe superare il valore del fondo  $H_t$ . Inoltre

il fatto che  $\alpha \in (0, 1)$  rende il nostro problema di ottimizzazione concavo e rende la strategia ottima finita.

La seconda assunzione fatta sui parametri può essere vista come una condizione che permette ai payoff futuri del manager di rimanere finiti e positivi. Infatti se valesse l'uguaglianza si otterrebbe una funzione valore del manager infinita, cosa che non è ovviamente realistica.

### 2.3.5 Avversione al rischio

In questa sezione non consideriamo valida l'ipotesi, imposta precedentemente, di neutralità al rischio del manager. Analizziamo il caso in cui il manager abbia delle preferenze descritte dalla seguente funzione utilità

$$U(Z) = \frac{Z^{1-\delta}}{1-\delta}$$

dove  $\delta$  corrisponde al coefficiente relativo di avversione al rischio del manager.

Ipotizziamo che  $\delta \in (0, 1)$  cioè il manager risulta essere avverso al rischio.

In questo contesto ipotizziamo inoltre che la data di chiusura del fondo sia finita e pari a  $T$ . Vogliamo verificare come, in presenza di ipotesi diverse, cambiano i risultati ottenuti in precedenza. Nella risoluzione utilizziamo degli argomenti euristici di controllo stocastico ispirati a [3] che poi andremo ad analizzare. Si può facilmente osservare che a tempo finito l'obiettivo principale del manager è massimizzare il valore del processo di high-water mark  $H_t$ . Di conseguenza l'obiettivo del manager sarà

$$\max_{\theta_t} \mathbb{E} \left[ \frac{H_T^p}{p} \right] \quad \text{con } p = 1 - \delta$$

Considerando il suddetto obiettivo definiamo la funzione  $V(W, H, t)$  come

$$V(w, h, t) = \sup_{\theta_t} \mathbb{E} \left[ \frac{H_T^p}{p} \mid W_t = w, H_t = h \right] \quad (2.14)$$

dalla formula di Itô otteniamo

$$\begin{aligned} dV(W_t, H_t, t) &= V_t dt + V_W dW_t + \frac{1}{2} V_{WW} d\langle W \rangle_t + V_H dH_t \\ &= V_t dt + \left\{ V_W W_t \left[ r + (1 + \eta)(\mu - r)\theta_t - \eta\beta(\mu - r) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{WW} W_t^2 \left[ \theta_t(1 + \eta) - \eta\beta \right]^2 \right\} dt \\ &\quad + \sigma V_W W_t \left[ \theta_t(1 + \eta) - \eta\beta \right] dZ_t + (V_H - kV_W) dH_t \end{aligned}$$

Quindi l'equazione di HJB per la funzione valore  $V(w, h, t)$  è:

$$\begin{cases} V_t + \max_{\theta_t} \left\{ V_W W_t \left[ r + (1 + \eta)(\mu - r)\theta_t - \eta\beta(\mu - r) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{WW} W_t^2 \left[ \theta_t(1 + \eta) - \eta\beta \right]^2 \right\} = 0 & w < h \\ V_H = k V_W & w = h \end{cases}$$

La soluzione del problema di massimo presente nel sistema è la (2.5) quindi sostituendo nel sistema si ottiene

$$\begin{cases} V_t + r V_W W_t - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{V_W^2}{V_{WW}} = 0 & w < h \\ V_H = k V_W & w = h \end{cases} \quad (2.15)$$

Si può notare che la funzione  $V(W, H, t)$  è omogenea nei suoi parametri infatti si ha che  $V(\lambda w, \lambda h, t) = \frac{\lambda^p}{p} V(w, h, t)$  nel nostro caso utilizzeremo questa proprietà per ridurre il problema di una dimensione attraverso il seguente cambio di variabili  $V(w, h, t) = \frac{h^p}{p} V(w/h, 1, t)$ . Quindi ponendo  $u(x, t) = V(x, 1, t)$  e sostituendo le derivate parziali nel sistema (2.15) otteniamo

$$\begin{cases} u_t + r x u_x - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} = 0 & x \in (0, 1), t \in (0, T) \\ u_x(1, t) = \frac{p}{1+k} u(1, t) & t \in (0, T) \end{cases} \quad (2.16)$$

Per risolvere il problema (2.16) definiamo la guess solution  $u(x, t) = e^{-pvt} z(x)$  e sostituendo nel sistema si ottiene

$$\begin{cases} -pvz(x) + rxz_x - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{z_x^2}{z_{xx}} = 0 \\ z_x(1) = \frac{p}{1+k} z(1) \end{cases} \quad (2.17)$$

Infine per completare la trattazione ipotizziamo che  $z(x) = x^q$ , attraverso la condizione al bordo otteniamo  $q = \frac{p}{1+k}$ . Inserendo nel (2.17) otteniamo il parametro  $v$

$$v = \frac{r}{1+k} + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{1}{\delta + k} \quad (2.18)$$

dove  $v$  è il tasso di crescita di lungo periodo del fondo  $W_t$  secondo le preferenze del manager. Quindi la funzione valore risulta essere

$$V(w, h, t) = \frac{\exp(-pvt)}{p} \left( h^k w \right)^{\frac{p}{1+k}}$$



e dalla strategia presente (2.5) si ottiene

$$\theta = \frac{1}{1+\eta} \left( \eta\beta + \frac{1+k}{\delta+k} \frac{\mu-r}{\sigma^2} \right) \quad (2.19)$$

Questa trattazione non prova che la strategia in (2.19) sia ottima perché le relazioni ipotizzate come guess solution sono solo di tipo euristico. Ma si possono verificare questi risultati tramite un teorema di verifica come fatto in precedenza.

In questo caso otteniamo due risultati significativi rispetto alle precedenti analisi. Infatti il portafoglio ottimo del manager  $\theta$  dipende sia dalla quota  $k$  del high-water mark che dalla preferenza del manager cioè dal parametro  $\delta$ . Si può facilmente notare in Figura 2.1 che la strategia ottima è decrescente con il parametro  $\delta$  cioè se il manager diventa più avverso al rischio allora seguirà una strategia in cui l'investimento nel titolo rischioso è minore. Questo risultato risulta essere molto coerente con i risultati notevoli della teoria economica precedente.

Anche il parametro  $k$  incide diminuendo l'esposizione al rischio del fondo, la causa di questo comportamento potrebbe essere il fatto che avere una maggiore percentuale di  $dH_t$  potrebbe indurre il manager (avverso al rischio) a investire di meno sul titolo rischioso per evitare delle possibili perdite nel valore del fondo  $W_t$ .

Se andiamo ad analizzare l'andamento della funzione valore notiamo che al crescere della quota  $k$  il valore atteso derivante dai compensi risulta essere crescente. Questo è motivato dal fatto che più alto è il fattore  $k$  maggiore sarà il compenso, quindi è inevitabile che la funzione valore aumenti.

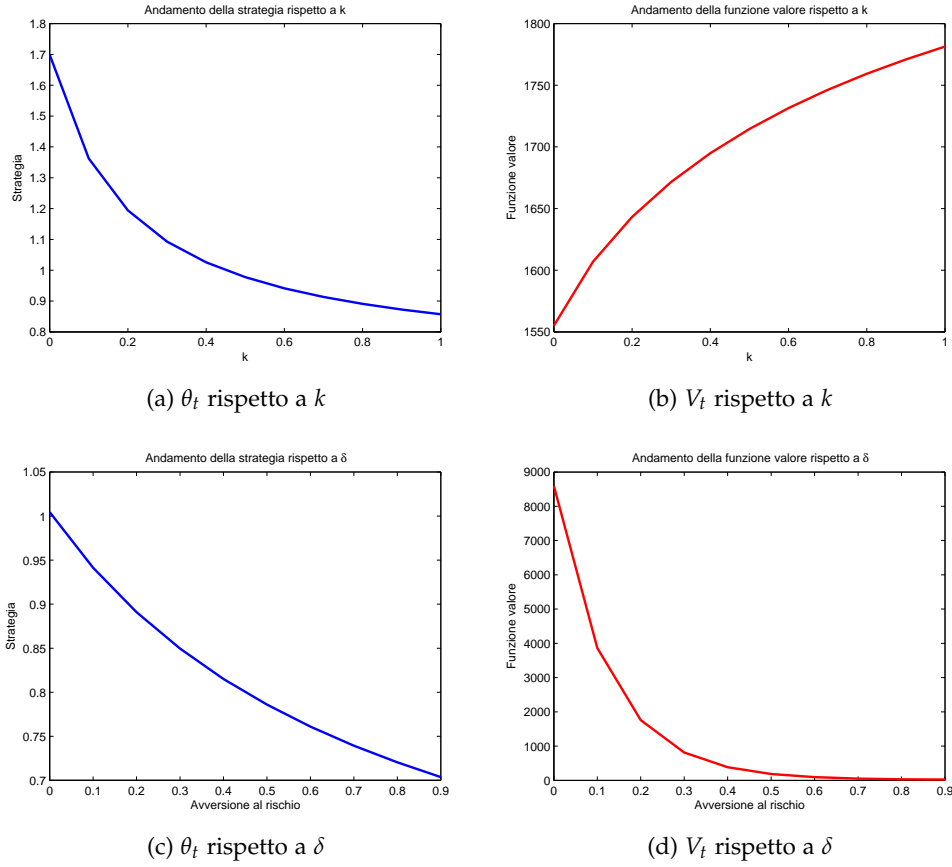
Al contrario la funzione valore risulta decrescente sia rispetto al tempo che rispetto al coefficiente di avversione al rischio  $\delta$ : anche questi due risultati sono intuitivi dal punto di vista economico e per come è stata strutturata la funzione valore.

## 2.4 Management Fee

Passiamo al caso in cui il manager abbia sia un compenso regolare (management fee) che una retribuzione se oltrepassa il valore dell'high-water mark (performance fee) pesate adeguatamente dal parametro  $x$ .

### 2.4.1 Risoluzione

In questo caso la funzione obiettivo sarà quella di massimizzare il net present value del compenso comprensivo sia della performance fee che della management di conseguenza la funzione valore sarà l'espressione descritta in (2.2) con  $x \in [0, 1]$  e  $a$  qualsiasi.


 Figura 2.1: Avversione al rischio:  $\theta_t$  e  $V_t$  rispetto ai parametri  $k$  e  $\delta$ 

Procediamo alla risoluzione tramite procedure di controllo ottimo stocastico. Come primo passo analizziamo il problema nella regione  $\{W = H\}$  in cui la soluzione si comporta in modo simile al caso precedente e quindi otteniamo la seguente equazione differenziale parziale

$$xk V_W = xk + V_H \quad (2.20)$$

quando  $W = H$ .

Passiamo all'analisi nella regione in cui  $\{W < H\}$ , utilizzando l'equazione di Hamilton Jacobi Bellman otteniamo

$$0 = V_t + \max_{\theta_t} \left\{ V_W W \left[ r - (1-x)a + (1+\eta)(\mu-r)\theta_t - \eta\beta(\mu-r) \right] + \frac{1}{2} V_{WW} \sigma^2 W^2 \left[ \theta_t(1+\eta) - \eta\beta \right]^2 \right\} \quad (2.21)$$

Ipotizzando che esista una soluzione del problema di ottimo presente nell'equazio-

Parametri	Figura	
	2.1 a&b	2.1 c&d
$r$	0,03	0,03
$\mu$	0,08	0,08
$\sigma$	0,3	0,3
$\eta$	1,2	1,2
$\beta$	0,8	0,8
$k$	$0 \div 1$	0,8
$H$	$10^4$	$10^4$
$W$	$8 * 10^3$	$8 * 10^3$
$T$	1	1
$t$	0,8	0,8
$\delta$	0,2	$0 \div 0,9$

Tabella 2.1: Parametri Remunerazioni e Flow Fund dell'Avversione al rischio

ne (2.21) ricaviamo la strategia ottima  $\theta_t^*$

$$\theta_t^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \eta \beta - \frac{V_W}{V_{WW} W} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \right) \quad (2.22)$$

Sostituendo la strategia trovata nella (2.21) otteniamo una equazione differenziale ordinaria non lineare

$$0 = -(\gamma + \lambda)V + [r - (1 - x)a] V_W W - \frac{1}{2} \frac{V_W^2}{V_{WW}} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \quad (2.23)$$

Per risolvere questa equazione differenziale ordinaria non lineare poniamo come guess solution di  $V(W, H)$  la seguente funzione

$$V(W, H) = P(H) W^\alpha \quad (2.24)$$

dove  $\alpha \geq 0$ .

Con questa ipotesi sulla soluzione di  $V(W, H)$  possiamo ricavare la strategia ottima

$$\theta_t^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \eta \beta + \frac{\mu - r}{(1 - \alpha) \sigma^2} \right)$$

Sostituendo la guess solution nella formula (2.23) e definendo

$$\pi = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2$$

otteniamo l'equazione

$$0 = (\gamma + \lambda) - \alpha[\gamma + \lambda + r - (1 - x)a + \pi] + \alpha^2[r - (1 - x)a] \quad (2.25)$$

Il valore incognito  $\alpha$  della guess solution (2.24) si ottiene risolvendo la precedente equazione di secondo grado ponendo come ipotesi  $\mu > r$  e di conseguenza  $\pi > 0$

$$\alpha_{\pm} = \frac{\gamma + \lambda + r - (1 - x)a + \pi \pm \sqrt{(\gamma + \lambda + r - (1 - x)a + \pi)^2 - 4(r - (1 - x)a)(\gamma + \lambda)}}{2(r - (1 - x)a)}$$

Notando che è possibile riscrivere la formula sotto radice come

$$(\lambda + \gamma - \pi - r + (1 - x)a)^2 + 4\pi(\gamma + \lambda) > 0$$

allora le radici trovate sono reali. Inoltre entrambe le radici sono positive ma  $\alpha_- \in (0, 1)$  mentre  $\alpha_+ > 1$ , si può vedere facilmente che se  $\alpha = 0$  l'equazione (2.25) è positiva mentre se  $\alpha = 1$  è negativa. Per il proseguo scegliamo di ignorare la radice  $\alpha_+$  perché una soluzione con una potenza maggiore di 1 non può essere associata alla soluzione del nostro problema perché renderebbe convesso il nostro problema di ottimo. Quindi chiamiamo  $\alpha_-$  come  $\alpha$ .

Passiamo ad analizzare la guess solution (2.24) nella regione  $\{W = H\}$ . Quindi sostituiamo la soluzione nella condizione (2.20) otteniamo

$$xk\alpha H^{\alpha-1}P(H) = xk + P'(H)H^{\alpha}$$

Semplificando otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria

$$P'(H) = xk \left( \frac{\alpha P(H)}{H} - \frac{1}{H^{\alpha}} \right)$$

che ha soluzione generale

$$P(H) = \left[ \frac{xk}{\alpha(1+xk) - 1} H^{1-(1+xk)\alpha} + C \right] H^{\alpha xk}$$

ponendo la ragionevole condizione che  $\alpha(1+xk) > 1$  si ottiene, in un orizzonte infinito, che la costante  $C$  è pari a 0.

Di conseguenza la soluzione ottima al nostro problema è

$$V(W, H) = \frac{xk H}{\alpha(1+xk) - 1} \left( \frac{W}{H} \right)^{\alpha} \quad (2.26)$$

Otteniamo una funzione valore simile a quella trovata nel caso precedente ma in cui il valore di  $\alpha$  è differente perché comprende il parametro  $a$ . In questo caso inoltre

risulta importante il parametro  $x$  che descrive l'importanza della performance fee rispetto alla management fee. La soluzione trovata si verifica essere ottima perché rispetta le condizioni di regolarità ed è conforme alla teoria della programmazione dinamica. Di conseguenza le soluzioni trovate e ipotizzate risultano essere quelle ottime del problema in questione.

Osserviamo inoltre che la strategia ottima trovata in questo caso risulta essere sempre maggiore di (2.8). Questo risultato è dovuto all'introduzione della management fee nella compensazione del manager, quest'ultima provoca una riduzione dell'avversione al rischio implicita  $1 - \alpha$  che porta il manager a seguire una strategia più rischiosa rispetto al caso precedente. Nelle prossime analisi andiamo a verificare se ci sono sostanziali differenze tra i due casi.

### 2.4.2 Statica Comparata

Analizziamo ora come varia la strategia ottima  $\theta_t^*$  al variare di alcuni parametri principali.

**Lemma 2.7.** *Se valgono le seguenti condizioni:*

- $\alpha(1 + xk) > 1$
- $\mu > r$
- $\gamma + \lambda > r - (1 - x)a$

*allora*

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \gamma} > 0 \quad e \quad \frac{\partial \theta_t}{\partial \lambda} > 0.$$

Questa analisi, come visto prima, ci dice che il manager investe una percentuale maggiore nel titolo rischioso se aumenta la rischiosità a breve termine per poter aumentare la sua funzione valore prima che il fondo chiuda. Quindi un aumento dei parametri in questione provoca un fenomeno di risk-shifting nel comportamento del manager.

**Lemma 2.8.** *Se valgono le seguenti condizioni:*

- $\alpha(1 + xk) > 1$
- $\mu > r$
- $\gamma + \lambda > r - (1 - x)a$
- $\gamma + \lambda > r - (1 - x)a + \pi$

*allora*

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \mu} < 0$$

Anche in questo modello vediamo che la percentuale nell'investimento rischioso diminuisce se il titolo  $S_t$  aumenta il suo drift ( $\mu$ ) questo è dovuto al fatto che questo fattore influenza (e aumenta) l'avversione al rischio «implicita» del manager e quindi lo rende più prudente. Questo è determinato dal fatto che un aumento di  $\mu$  diminuisce il valore  $\alpha$  che quindi fa aumentare la l'avversione «implicita»  $1 - \alpha$ .

**Lemma 2.9.** *Se valgono le seguenti condizioni:*

- $\alpha(1 + xk) > 1$
- $\mu > r$
- $\gamma + \lambda > r - (1 - x)a$

*allora*

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial a} > 0$$

Il lemma ci dice che l'aumento della quota fissa ( $a$ ) che il manager riceve come compenso provoca un aumento della strategia ottima  $\theta_t$  questo fatto può essere spiegato dalla seguente motivazione. Un aumento del parametro  $a$  potrebbe spingere il manager ad aumentare il suo investimento rischioso perché sa che la quota fissa che riceverà, e che andrà detratta dal fondo, è più alta e ciò lo incentiva a far crescere il valore del fondo. Quindi un aumento del compenso fisso del manager comporta un fenomeno di risk-shifting come riscontrato in vari articoli ad esempio in [5] e [11]. Nel nostro caso il fenomeno di risk-shifting è provocato da un aumento della variabile  $\alpha$  che di conseguenza fa diminuire l'avversione implicita definita dal coefficiente  $1 - \alpha$ . Questo andamento di  $\alpha$  provoca un atteggiamento più aggressivo da parte del manager che lo spinge a rischiare di più e quindi ad aumentare l'esposizione al rischio del fondo. Quindi possiamo concludere che gli investitori del fondo saranno portati ad accettare una percentuale  $a$  relativamente contenuta perché essa crea un fattore di crescita del rischio per il fondo.

**Lemma 2.10.** *Se valgono le seguenti condizioni:*

- $\alpha(1 + xk) > 1$
- $\mu > r$
- $\gamma + \lambda > r - (1 - x)a$

*allora*

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial x} < 0$$

Il lemma esprime il fatto che se l'importanza della performance fee aumenta il manager è portato ad avere atteggiamenti più prudenti. Questo avviene perché un aumento del parametro  $x$  sotto le condizioni del lemma 2.10 porta a un aumento dell'avversione al rischio implicita del manager data dal coefficiente  $1 - \alpha$  quindi lo rende più disposto a ridurre l'esposizione al rischio del fondo. Quindi possiamo concludere che dare più importanza alle management fee, in questo modello, provoca un fenomeno di risk-shifting perché si aumenta la rischiosità complessiva del fondo.

Le altre analisi effettuate risultano essere simili a quelle fatte nel caso senza management fee e non comportano nuovi significativi risultati.

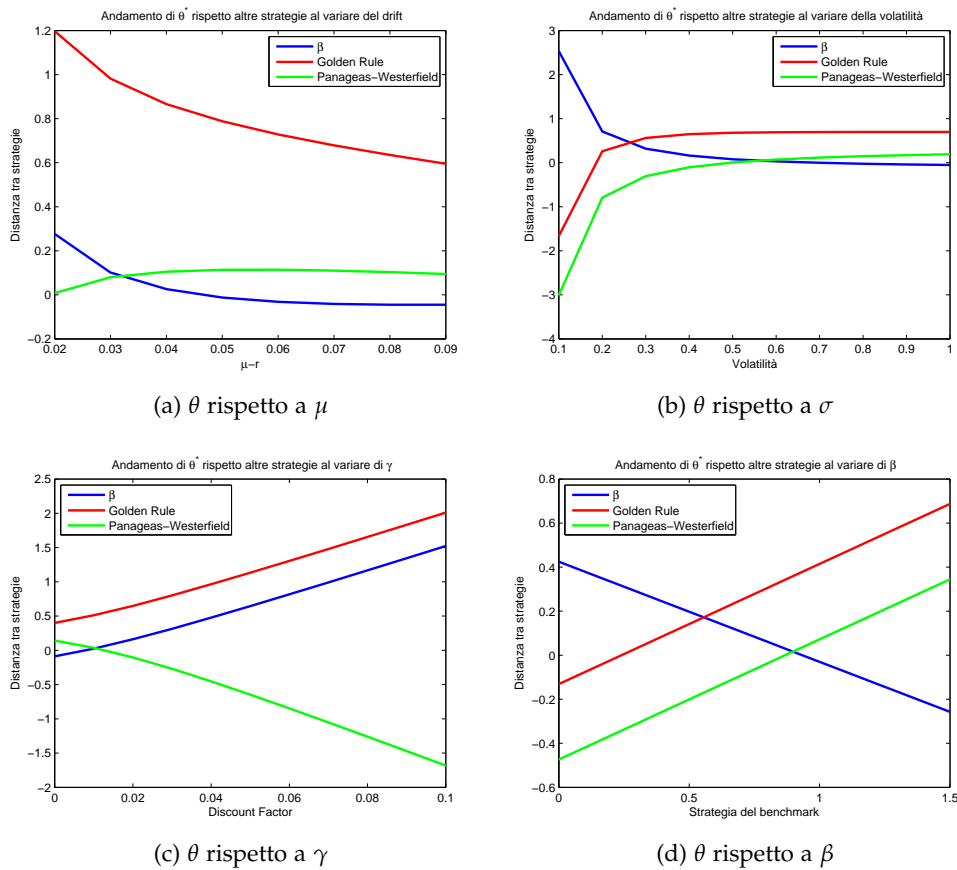


Figura 2.2: Remunerazioni e Flow Fund: Confronto  $\theta_t^*$  rispetto ad altre strategie al variare di  $\mu, \sigma, \gamma$  e  $\beta$

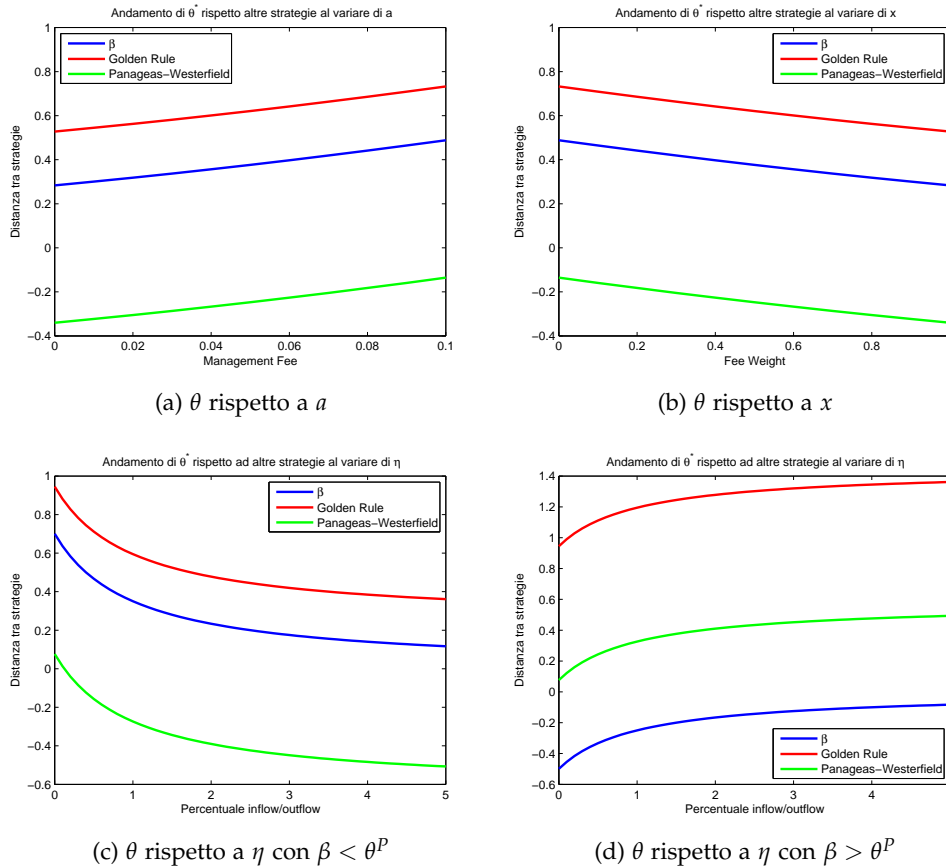


Figura 2.3: Remunerazioni e Flow Fund: Confronto  $\theta_t^*$  rispetto ad altre strategie al variare di  $a$  e  $x$

## 2.5 Confronto tra strategie

In questa sezione analizziamo la strategia ottima ottenuta in questo modello, cioè la (2.8), ponendola a confronto con alcune strategie notevoli che il manager potrebbe seguire. Questo ci servirà per capire come i comportamenti del manager possono essere mutati dal cambiamento dei parametri iniziali del modello e se a fronte di questo cambiamento il manager sceglie di avvicinarsi ad altre strategie.

Come termini di paragone scegliamo tre strategie rilevanti cioè

- La strategia del benchmark  $\beta$
- La strategia ottenuta da Merton in [12] detta Golden Rule cioè  $\theta^M = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$
- La strategia ottima di Panageas-Westerfield in [1] cioè  $\theta^P = \frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2}$

Procediamo nell'analisi verificando come variano le distanze della nostra soluzione ottima rispetto ai termini di paragone al variare dei parametri del modello.



Parametri	Figura							
	2.2 a	2.2 b	2.2 c	2.2 d	2.3 a	2.3 b	2.3 c	2.3 d
$\gamma$	0,02	0,02	$0 \div 0,1$	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
$\lambda$	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
$r$	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
$a$	0,02	0,02	0,02	0,02	$0 \div 0,1$	0,02	0,02	0,02
$x$	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	$0 \div 1$	0,8	0,8
$\mu$	$0,05 \div 0,12$	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
$\sigma$	0,5	$0,1 \div 1$	0,4	0,3	0,3	0,3	0,2	0,3
$\eta$	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	$0 \div 5$	$0 \div 5$
$\beta$	1	0,8	0,8	$0 \div 1,5$	0,8	0,8	0,8	2

Tabella 2.2: Parametri Remunerazioni e Flow Fund Confronto

Parametri	Figura								
	2.4 a	2.4 b	2.4 c	2.5 a	2.5 b	2.5 c	2.5 d	2.6 a	2.6 b
$\gamma$	0,02	0,02	0,01	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$\lambda$	0,02	0,02	0,01	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$r$	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
$a$	0,02	0,02	0,02	$0 \div 0,1$	$0 \div 0,1$	0,02	0,02	$0 \div 0,1$	$0 \div 0,1$
$x$	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	$0,2 \div 1$	$0,2 \div 1$	0,2	0,2
$\mu$	0,08	0,08	0,08	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
$\sigma$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
$\eta$	$0 \div 5$	$0 \div 5$	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
$\beta$	0,8	0,4	$0 \div 1,5$	1,2	0,2	1,2	0,2	1,2	0,2

Tabella 2.3: Parametri Remunerazioni e Flow Fund Confronto 2

Nel grafico (a) in Figura 2.2 notiamo che quando il drift aumenta l'unica strategia rispetto alla quale si riduce la distanza è la  $\theta^M$ : questo avviene perché all'aumentare di  $\mu$  la nostra soluzione e quella trovata da Merton hanno due andamenti opposti, infatti la  $\theta^*$  risulta decrescente mentre  $\theta^M$  è crescente col drift. Le altre due strategie hanno andamenti simili perché per valori contenuti del drift le distanze si riducono fino a toccare entrambe quasi lo zero quando  $\theta^P = \beta$  mentre superato quel limite, cioè quando  $\theta^P < \beta$ , entrambe le distanze aumentano e si discostano dalla strategia ottima. Precisiamo che quando le distanze si incrociano non toccano esattamente lo zero perché la strategia di Panageas-Westerfield non ha la stessa  $\alpha$  ricavata nel nostro caso, infatti nel nostro caso sono considerate le management fee caratterizzate dai parametri  $a$  e  $x$ .

Nel grafico (b) si vede che al variare della volatilità  $\sigma$  la distanza dalla golden rule si riduce per valori contenuti di  $\sigma$  per poi allontanarsi da essa, questo avviene perché la  $\theta^M$  si riduce molto più velocemente di  $\theta^*$  al crescere di  $\sigma$ . Nelle altre due

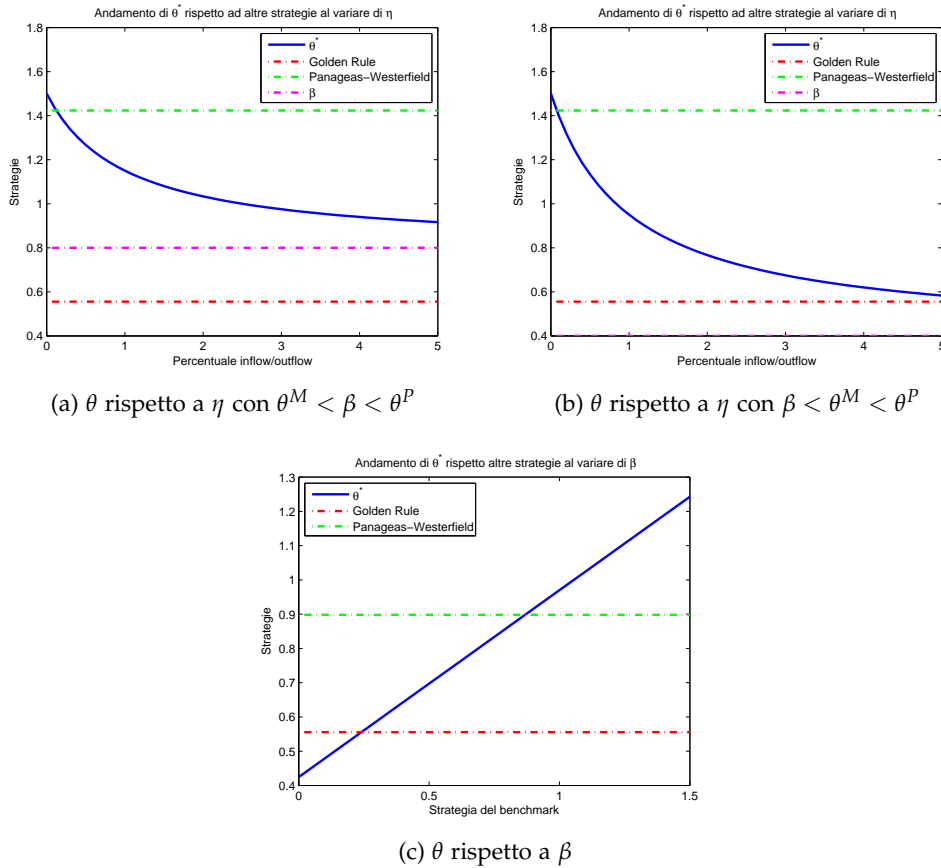


Figura 2.4: Remunerazioni e Flow Fund: Confronto  $\theta_t^*$  rispetto ad altre strategie al variare di  $\eta$  e  $\beta$

distanze notiamo un comportamento simile al precedente cioè una riduzione della distanza fino a quando  $\theta^P$  non si riduce al valore fissato di  $\beta$  in cui entrambe le strategie hanno la stessa distanza da  $\theta^*$  essendo appunto  $\theta^P = \beta$  e in seguito le distanze aumentano ma in maniera molto blanda.

In (c) si osserva che quando aumenta il discount factor dipendente dal parametro  $\gamma$  la distanza da  $\theta^M$  aumenta perché  $\theta^*$  è crescente con  $\gamma$  e la soluzione di Merton non dipende da questo parametro. Lo stesso andamento lo notiamo rispetto alla strategia del benchmark  $\beta$  mentre vediamo che la strategia di Panageas-Westerfield aumenta più velocemente della nostra soluzione ciò comporta quindi una riduzione della distanza da essa.

Nel grafico (d) notiamo come variano le distanze al variare della strategia del benchmark  $\beta$ . Osserviamo che le strategie che non incorporano il fenomeno dei flow fund si discostano dalla nostra soluzione ottima quando il benchmark incrementa la sua esposizione al rischio. Mentre la nostra soluzione ottima si avvicina al portafoglio del benchmark quando esso incrementa la quota rischiosa per evitare di

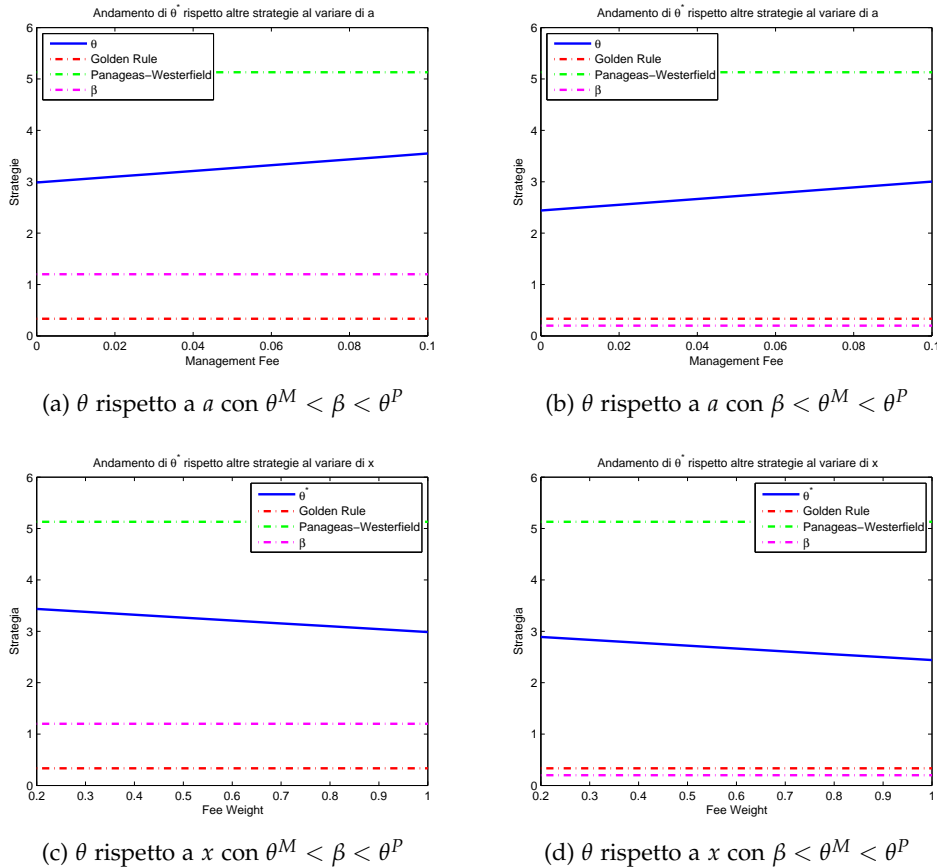


Figura 2.5: Remunerazioni e Flow Fund: Confronto  $\theta_t^*$  rispetto ad altre strategie al variare di  $a$  e  $x$

avere delle performance negative ingenti.

Nei grafici (a) e (b) della Figura 2.3 vediamo come si comportano la strategia ottima rispetto alle altre strategie al variare dei parametri  $x$  e  $a$ . Questi parametri caratterizzano la management fee infatti vediamo che se la management assume una maggiore importanza allora la strategia ottima trovata si discosta dalle strategie prese come termine di paragone aumentando la distanza da esse. Questo avviene perché le strategie notevoli non si tiene conto del fattore di crescita della management fee che comporta una aumento dell'esposizione al rischio del fondo. Nei grafico (c) e (d) vediamo come si comportano le distanze all'aumentare dell'importanza dei flow fund. Nel primo caso vediamo che quando abbiamo un set di parametri tali per cui  $\theta^P > \beta$  allora come già riferito in precedenza il manager cerca di seguire il benchmark riducendo la strategia ottima verso  $\beta$  che quindi comporta una riduzione della distanza da  $\beta$  ma anche una diminuzione delle altre due distanze perché le altre strategie non dipendono dal parametro  $\beta$ . Mentre nel grafico (d) vediamo l'andamento opposto cioè quando  $\theta^P < \beta$  si hanno andamenti crescenti

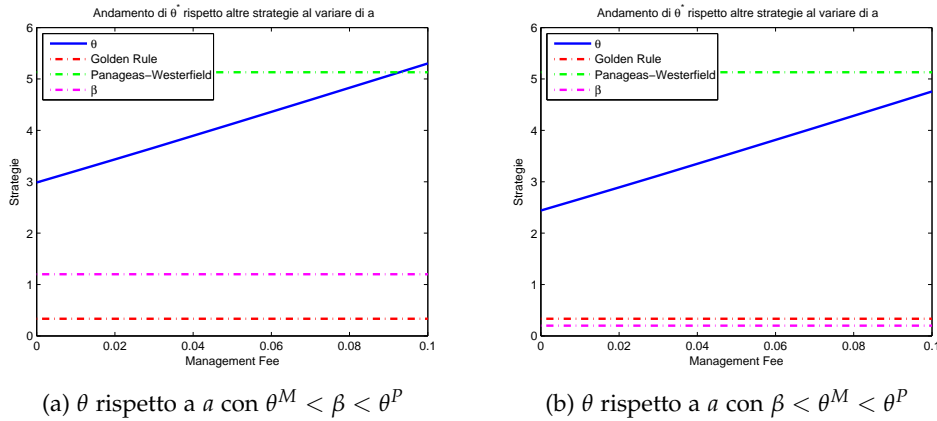


Figura 2.6: Remunerazioni e Flow Fund: Confronto  $\theta_t^*$  rispetto ad altre strategie al variare di  $a$  con  $x = 0.2$

delle distanze che comportano comunque un avvicinamento della strategia ottima al valore di  $\beta$ .

In figura 2.4 vediamo come si posiziona la nostra soluzione rispetto alle soluzioni notevoli al variare dei parametri dei flow fund. Nel grafico (a) vediamo che quando la strategia del benchmark  $\beta$  è compresa tra  $\theta^P$  e  $\theta^M$  la nostra soluzione tende a diminuire più lentamente rispetto al caso del grafico (b) in cui la strategia è minore di  $\theta^M$ . Questo accade perché all'aumentare di  $\eta$  la strategia tende ad avvicinarsi a  $\beta$  e quindi se il benchmark segue una strategia più conservativa allora la nostra strategia diminuirà più velocemente. Nel grafico (c) vediamo come al variare di  $\beta$  la nostra strategia si pone al di sotto della strategia di Merton per valori contenuti, per valori intermedi di  $\beta$  la nostra strategia si pone tra  $\theta^M$  e  $\theta^P$ . Mentre sopra una certa quota la strategia ottima supera quella di Panageas  $\theta^P$  perché il manager deve stare al passo con il benchmark per non correre il rischio di incorrere in outflow cospicui.

Nella Figura 2.5 osserviamo lo stesso andamento descritto in precedenza cioè sia rispetto alla management fee  $a$  e che rispetto al peso  $x$  notiamo che se  $\beta$  si pone tra  $\theta^P$  e  $\theta^M$  in confronto a quando  $\beta < \theta^M$  si nota solo una traslazione verso il basso della nostra strategia. Possiamo concludere che al variare del parametro  $a$  la strategia si avvicina più verso la strategia di Panageas-Westerfield diventando più rischiosa e si allontana sensibilmente dalla strategia del benchmark e dalla golden rule. La presenza della management fee riduce l'effetto conservativo che hanno i flow fund nei comportamenti del manager portandolo ad incrementare l'esposizione al rischio. Proprio per questo motivo un aumento del peso  $x$  non può che provocare un effetto contrario, infatti esso riduce l'importanza della management fee portando così il manager a delle esposizioni simili a quelle del benchmark e della golden rule che

di norma sono due strategie più conservative rispetto a  $\theta^P$ .

In Figura 2.6 vediamo come il set di parametri influenza il comportamento del manager. Infatti se la management fee ha più importanza all'aumentare di essa il manager diventa molto più rischioso rispetto al caso in cui la performance fee è più rilevante. Quindi possiamo concludere che dare maggiore peso alla management rispetto al contratto di high-water mark provoca maggiore risk-shifting nella strategia del manager.

## Capitolo 3

# No perfect replication del benchmark

In questo modello analizziamo un modello alternativo in cui il fondo  $F_t$  e il fondo benchmark  $Y_t$  investono in due titoli rischiosi differenti. In questa situazione il manager del fondo non è in grado di replicare perfettamente la strategia del benchmark  $Y_t$ . Poniamo le stesse ipotesi del modello precedente : ipotizziamo il manager neutrale al rischio e poniamo che ci sia l'impossibilità da parte del manager di investire nel fondo gestito. Lo schema retributivo del manager rimane invariato cioè formato da una management fee e una performance fee dovuta al contratto di high-water mark. Allo stesso modo comprendiamo nel modello la presenza di possibili flow fund come fatto in precedenza. Vogliamo analizzare le differenze principali con i risultati ottenuti in precedenza dovuti a questa nuova condizione modellistica.

### 3.1 Descrizione del modello matematico

Descriviamo l'economia di questo modello come:

$$\begin{cases} dS_t^1 = \mu S_t^1 dt + \sigma S_t^1 dZ_t^1 \\ dS_t^2 = \mu S_t^2 dt + \sigma S_t^2 dZ_t^2 \\ dB_t = r B_t dt \end{cases} \quad (3.1)$$

dove i due processi browniani  $Z_t^1$  e  $Z_t^2$  che guidano i processi in (3.1) sono correlati dal coefficiente  $\rho$  inoltre poniamo che i due titoli abbiano le stesse caratteristiche di drift e volatilità.<sup>1</sup>Di conseguenza otteniamo la dinamica del fondo  $F_t$  e del

<sup>1</sup>Consideriamo il seguente spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  e lo ipotizziamo completo

benchmark  $Y_t$  saranno le seguenti

$$\begin{aligned} dF_t &= F_t \left[ (1 - \theta_t)r + \theta_t\mu \right] dt + F_t\sigma\theta_t dZ_t^1 \\ dY_t &= Y_t \left[ (1 - \beta)r + \beta\mu \right] dt + Y_t\sigma\beta dZ_t^2 \end{aligned}$$

Si osserva che il fondo  $F_t$  non è in grado di replicare con certezza l'andamento di  $Y_t$  con nessuna strategia ammissibile  $\theta_t$ .

Quindi andando a considerare il valore del fondo  $W_t$  la dinamica comprensiva di inflow/outflow e di compenso del manager risulta essere

$$dW_t = W_t \left[ (1 - \theta_t)r + \theta_t\mu \right] dt + W_t\sigma\theta_t dZ_t + W_t\eta \left( \frac{dF_t}{F_t} - \frac{dY_t}{Y_t} \right) - xkdH_t - (1 - x)aW_t dt$$

dove  $H_t$  è il processo di high-water mark definito come :

$$H_t = \max \left\{ W_s : s \in [0, t] \right\}$$

### 3.2 Problema di ottimizzazione

Il manager del fondo ha la volontà di massimizzare il net present value associato al suo compenso, che dipende dal raggiungimento del massimo valore del fondo  $H_t$  e dal valore del fondo complessivo  $W_t$ . Possiamo rappresentare questo obiettivo tramite la funzione valore

$$V(W, H) = \max_{\theta_t} \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge \infty} e^{-(\lambda + \gamma)t} \left( xkdH_t + (1 - x)aW_t dt \right) \right] \quad (3.2)$$

dove i parametri presenti nella formula (3.2) hanno lo stesso significato visto in precedenza. Come si può vedere i compensi del manager sono formati da due componenti una parte costante  $a$  del valore del fondo (management fee) e una percentuale dovuta al contratto di high-water mark (performance fee) pesate dal parametro  $x \in [0, 1]$ .

Come fatto in precedenza andiamo ad analizzare il modello in due casi principali cioè: quando il manager riceve solo la performance fee e quando riceve entrambe le tipologie di compenso.

### 3.3 No Management Fee

In questo caso il manager percepisce come compenso solo la parte variabile dovuto alla sua performance e cioè quella regolata dal contratto di high-water mark. Quindi consideriamo il modello nel caso in cui  $a = 0$  e  $x = 1$ .

### 3.3.1 Risoluzione

Utilizziamo anche per questo caso la procedura utilizzata nei precedenti modelli. Quindi analizzando il problema nella regione  $\{W = H\}$  si ottiene l'equazione

$$k V_W = k + V_H \quad (3.3)$$

dove  $W = H$ .

Mentre nella regione  $\{W < H\}$  utilizzando il procedimento HJB otteniamo l'equazione differenziale parziale

$$V_t + \max_{\theta_t} \left\{ V_W W \left[ r + (1 + \eta)(\mu - r)\theta_t - \eta\beta(\mu - r) \right] + \frac{1}{2} V_{WW} \sigma^2 W^2 \left[ \theta_t^2 (1 + \eta)^2 + \eta^2 \beta^2 - 2\rho\theta_t(1 + \eta)\eta\beta \right] \right\} = 0 \quad (3.4)$$

Risolvendo il problema di ottimo presente nell'equazione (3.4) otteniamo la strategia ottima  $\theta_t^*$

$$\theta_t^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \rho\beta\eta - \frac{V_W}{V_{WW}W} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \right) \quad (3.5)$$

Sostituendo la strategia ottima  $\theta_t^*$  trovata nell'equazione (3.4) e ricordando che  $V_t = -(\lambda + \gamma)V$  si ottiene il seguente problema differenziale

$$0 = -(\gamma + \lambda)V + [r - \eta\beta(1 - \rho)(\mu - r)] V_W W - \frac{1}{2} \frac{V_W^2}{V_{WW}} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2} V_{WW} W^2 \sigma^2 \eta^2 \beta^2 (1 - \rho^2) \quad (3.6)$$

Per risolvere l'equazione differenziale (3.6) utilizziamo come in precedenza la guess solution (2.7) e otteniamo la seguente equazione di terzo grado in  $\alpha$

$$\begin{aligned} & \lambda + \gamma - \alpha \left[ r - (1 - \rho)\eta\beta(\mu - r) + \pi + \gamma + \lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \eta^2 \beta^2 (1 - \rho^2) \right] \\ & + \alpha^2 \left[ r - (1 - \rho)\eta\beta(\mu - r) - \sigma^2 \eta^2 \beta^2 (1 - \rho^2) \right] \\ & + \frac{1}{2} \alpha^3 \sigma^2 \eta^2 \beta^2 (1 - \rho^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove  $\pi = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2$ .

L'equazione (3.7) ha come soluzione esplicita una complicata combinazione tra i parametri del modello. Quindi per verificare alcune proprietà delle radici di questa equazione abbiamo in modo empirico risolto il problema attraverso un semplice codice Matlab che simula i vari parametri in un range ragionevole ( in base alla loro natura ) e trovato le radici cercate tramite il comando `roots`. Questa analisi ci



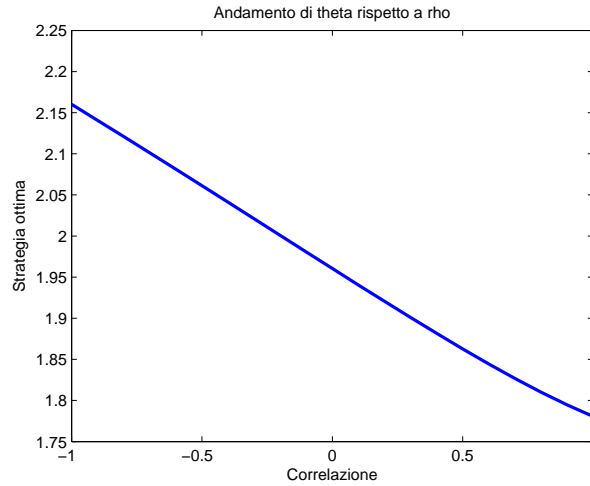


Figura 3.1: Modello No Replication No management fee:  $\theta^*$  rispetto alla correlazione  $\rho$

porta ai due seguenti risultati:

- Le tre radici del polinomio sono reali
- Due radici sono molto maggiori di 1 e la terza è compresa tra 0 e 1

Di conseguenza, come fatto nei modelli precedenti, per ottenere una soluzione ragionevole dal punto di vista economico siamo portati a scartare le radici maggiori di 1 e a considerare come soluzione la terza radice.

Per concludere utilizzando l'equazione (3.3), considerando valide le due condizioni viste in precedenza ( $\mu > r$  e  $\alpha(1+k) > 1$ ), otteniamo come già visto la nostra soluzione della funzione valore  $V(W, H)$  cioè

$$V(W, H) = \frac{kH}{\alpha(1+k) - 1} \left( \frac{W}{H} \right)^\alpha \quad (3.8)$$

e la strategia ottima del manager

$$\theta_t^* = \frac{1}{1+\eta} \left( \rho \beta \eta + \frac{1}{1-\alpha} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \right) \quad (3.9)$$

Le soluzioni si verificano essere ottime tramite la programmazione dinamica. Anche in questo caso il portafoglio risulta essere costante nel tempo e finito visto che dalle simulazioni  $\alpha \in (0, 1)$ . La soluzione trovata è molto simile a quella precedente a parte il fatto che il primo addendo, cioè quello che dipende dagli inflow/outflow, è moltiplicato per la correlazione  $\rho$ . Questo infatti è l'aspetto caratteristico di questo modello cioè che il confronto della performance relativa è legata dal parame-

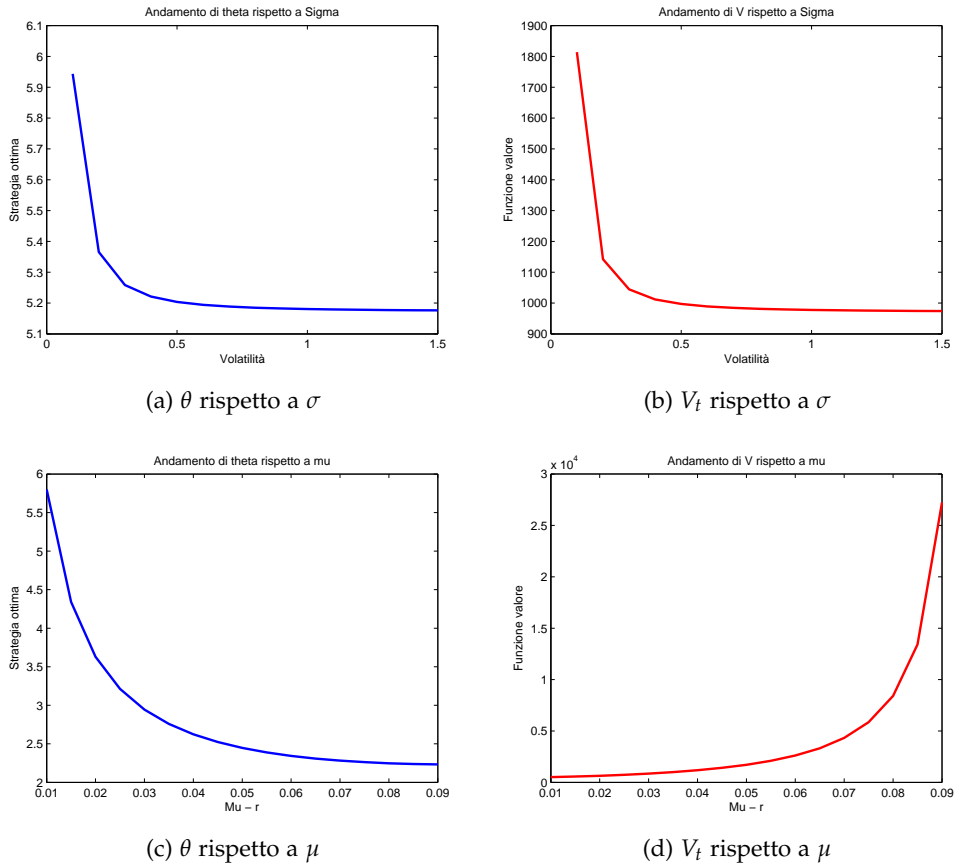


Figura 3.2: Modello No Replication No management fee:  $V_t$  e  $\theta^*$  rispetto ai parametri  $\sigma$  e  $\mu$

tro di correlazione dei due browniani  $\rho$ . Infatti si ottengo i risultati del modello precedente se poniamo il parametro di correlazione fosse  $\rho = 1$ .

### 3.3.2 Statica Comparata

Affrontiamo in questa sezione l'analisi della statica comparata per questo modello. A differenza dei modelli precedenti questa analisi risulta più complicata in quanto siamo in presenza di una equazione la (3.7) molto più elaborata che non ci porta a risultati significativi se la affrontiamo in modo analitico. Per trarre delle conclusioni sulle soluzioni trovate siamo portati ad utilizzare un metodo numerico. Di conseguenza utilizzando Matlab abbiamo verificato l'andamento di  $\theta^*$  e  $V_t$  per alcuni parametri. Come prima analisi andiamo a verificare l'impatto della presenza di due Browniani correlati dal parametro  $\rho$  nel modello che risulta essere l'aspetto principale che differenzia questo modello dai precedenti. Come si può vedere nella Figura 3.1 l'andamento della strategia ottima è decrescente rispetto a  $\rho$  quindi se i titoli rischiosi  $S_t^1$  e  $S_t^2$  sono correlati in modo negativo allora l'incidenza del-

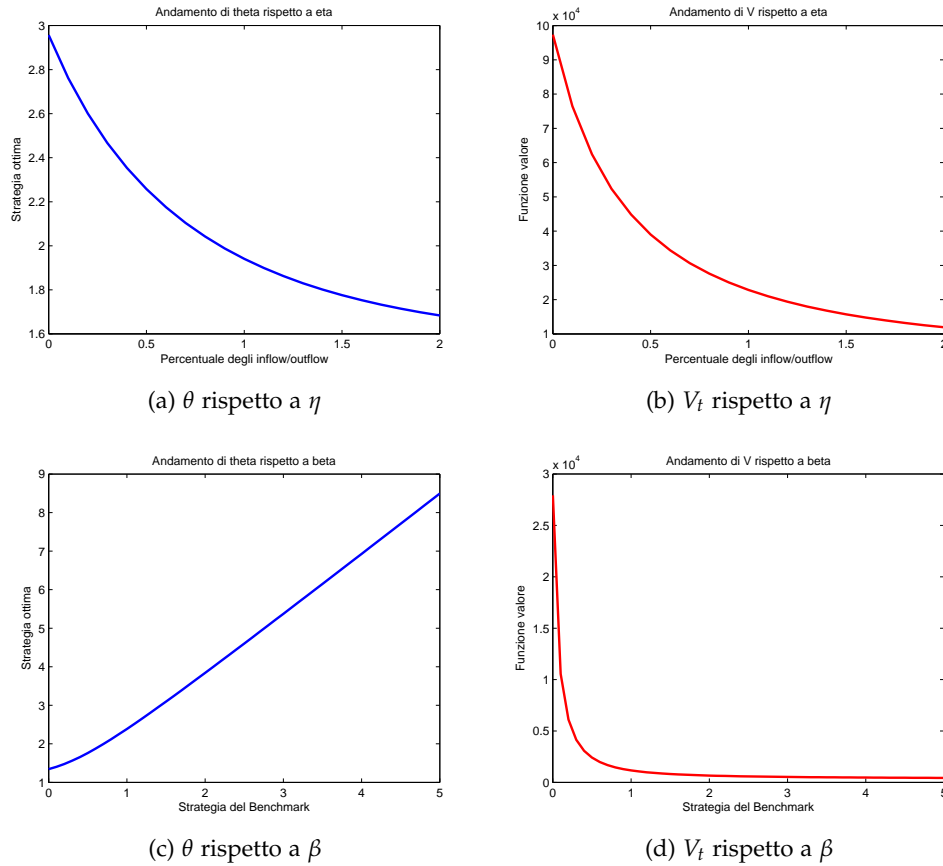


Figura 3.3: Modello No Replication No management fee:  $V_t$  e  $\theta^*$  rispetto ai parametri  $\eta$  e  $\beta$

la parte rischiosa nel portafoglio del manager aumenta. Un andamento opposto viene riscontrato per la funzione valore  $V_t$ . Ma nonostante questo notiamo dalle varie simulazioni fatte sui parametri che l'incidenza di  $\rho$  su  $\theta^*$  è sì decrescente ma di piccola rilevanza. Per questo concludiamo che il parametro in questione non è così rilevante sulla soluzione ottima. Con lo stesso procedimento eseguiamo le analisi comparate rispetto ai parametri  $\gamma, \lambda, \mu, \sigma, \eta, \beta$  sulla strategia ottima e sulla funzione valore  $V_t$  e dei parametri  $k$  e  $H_t$  solo su  $V_t$ . Da queste analisi, eseguite sempre simulando vari set di parametri realistici (così da ottenere risultati veritieri), riscontriamo le stesse conclusioni trovate nelle analisi eseguite per il modello del Capitolo 2. Come si può vedere nel grafico (a) della Figura (3.2) l'andamento della strategia ottima è decrescente rispetto a  $\sigma$  quindi se i titoli rischiosi  $S_t^1$  e  $S_t^2$  aumentano la loro rischiosità allora il manager diminuisce la parte del portafoglio investita nel titolo rischioso. Anche la funzione valore diminuisce all'aumentare di  $\sigma$  questo ci porta a dire che se l'economia diventa più rischiosa allora anche il NPV del compenso del manager diminuisce notevolmente. Si può semplicemente

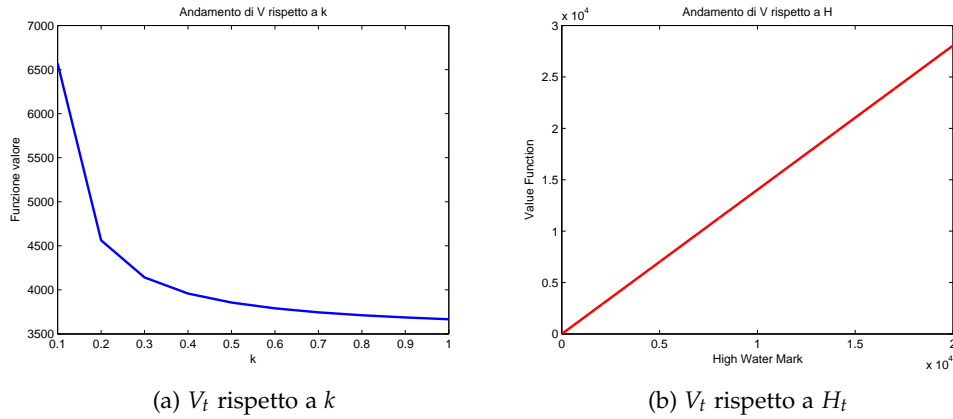


Figura 3.4: Modello No Replication No management fee:  $V_t$  rispetto ai parametri  $k$  e  $H_t$

Parametri	Figura						
	3.1	3.2 a&b	3.2 c&d	3.3 a&b	3.3 c&d	3.4 a	3.4 b
$\gamma$	0,03	0,08	0,04	0,03	0,03	0,06	0,06
$\lambda$	0,03	0,06	0,04	0,03	0,03	0,06	0,06
$r$	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
$\mu$	0,08	0,05	0,01 ÷ 0,09	0,08	0,08	0,08	0,08
$\sigma$	0,2	0,1 ÷ 1,5	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
$\eta$	1,2	1,6	1,2	0 ÷ 2	1,2	1,2	1,2
$\beta$	0,8	0,6	0,8	0,8	0 ÷ 5	0,8	0,8
$\rho$	-1 ÷ 1	-0,5	-0,5	0,5	-0,8	0,2	0,8
$k$	-	0,8	0,8	0,8	0,8	0,1 ÷ 1	0,5
$H$	-	$10^4$	$10^4$	$10^4$	$10^4$	$10^4$	$10 \div 2 * 10^4$

Tabella 3.1: Parametri Modello No Replication No Management Fee

notare che la decrescita sia di  $\theta^*$  che di  $V_t$  è di tipo esponenziale che porta dopo una certa soglia di  $\sigma$  a una stabilizzazione dei valori delle soluzioni ottime. Mentre nei grafici (c) e (d) notiamo che ipotizzando  $\mu > r$  l'aumento del discostamento di  $\mu$  da  $r$  porta a risultati opposti tra strategia ottima e funzione valore. Nel primo caso un aumento del drift del titolo porta il manager ad investire una quota minore nel titolo rischioso, come avveniva nei casi precedenti. In questo caso  $\mu$  fa diminuire il coefficiente  $\alpha$  sovrastando il consueto effetto attrattivo che deriva da un aumento del drift del titolo. Al contrario la funzione valore  $V_t$  è crescente con  $\mu$  questo è dovuto al fatto che un aumento del drift comporta comunque una maggiore facilità da parte del manager al raggiungimento del high-water mark e di conseguenza un aumento del NPV del manager.

Nei grafici della figura (3.3) analizziamo l'andamento delle soluzioni ottime rispetto ai parametri che caratterizzano la presenza di inflow/outflow. Nei grafici (a) e (b) si nota che le soluzioni ottime trovate sono decrescenti rispetto alla parte  $\eta$  della performance relativa che il fondo riceve come inflow/outflow. Quindi possiamo dire che un aumento di  $\eta$  provoca una crescita dell'avversione al rischio del manager che quindi sceglie come portafoglio ottimo una strategia più conservativa. Notiamo inoltre che questo andamento è valido solo se i parametri rispettano la seguente condizione

$$\rho\beta(1-\alpha)^2 < \frac{\mu-r}{\sigma^2} \left[ 1-\alpha - \frac{\partial\alpha}{\partial\eta}(1+\eta) \right] \quad (3.10)$$

Mentre nei grafici (c) e (d) si vede che una crescita della strategia del benchmark, cioè del parametro  $\beta$ , comporta un aumento della strategia del manager come se il manager volesse imitare l'andamento del benchmark per non incappare in performance negative. Al contrario un aumento di  $\beta$  porta a un declino della funzione valore perché il manager è portato a rischiare di più e quindi il suo NPV diminuirà. Questo andamento vale quando i parametri rispettano

$$\rho\eta + \frac{\partial\alpha}{\partial\beta} \frac{\mu-r}{\sigma^2(1-\alpha)^2} > 0 \quad (3.11)$$

Nei grafici della figura (3.4) si vede come varia la funzione valore  $V_t$  rispetto ai suoi principali parametri notiamo che come già verificato l'impatto della percentuale che riceve il manager come compenso ( $k$ ) risulta essere negativo perché esso diminuendo il valore del fondo  $W_t$  rende più difficoltoso raggiungere l'high-water mark  $H_t$ . Mentre il processo  $H_t$  ha un impatto positivo sulla funzione valore del manager ma la sua incidenza dipende dal set di parametri che stiamo considerando, infatti facendo varie simulazioni sui parametri si nota che questa dipendenza è sempre lineare e positiva ma risulta più o meno pendente in base alla scelta dei parametri.

### 3.3.3 Avversione al rischio

In questa sezione introduciamo l'aspetto dell'avversione al rischio del manager nel modello considerato. Eseguiamo l'analisi ipotizzando che il manager abbia un orizzonte temporale finito con termine a  $T$ . Inoltre ipotizziamo che le sue preferenze siano descritte dalla seguente funzione utilità di tipo CRRA

$$U(Z) = \frac{Z^{1-\delta}}{1-\delta}$$

con  $\delta \in (0,1)$ .

Per verificare questi aspetti utilizziamo degli argomenti euristici di controllo stocastico che poi andremo ad analizzare. Per prima cosa definiamo  $p = 1 - \delta$ . Si può facilmente osservare che a tempo finito l'obiettivo principale del manager è massimizzare il valore del processo di high-water mark  $H_t$ . Di conseguenza l'obiettivo del manager sarà

$$\max_{\theta_t} \mathbb{E} \left[ \frac{H_T^p}{p} \right]$$

Considerando il suddetto obiettivo definiamo la funzione  $V(W, H, t)$  come

$$V(w, h, t) = \sup_{\theta_t} \mathbb{E} \left[ \frac{H_T^p}{p} \mid W_t = w, H_t = h \right] \quad (3.12)$$

dalla formula di Itô otteniamo

$$\begin{aligned} dV(W_t, H_t, t) &= V_t dt + V_W dW_t + \frac{1}{2} V_{WW} d\langle W \rangle_t + V_H dH_t \\ &= V_t dt + \left\{ V_W W_t \left[ r + (1 + \eta)(\mu - r)\theta_t - \eta\beta(\mu - r) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} V_{WW} \sigma^2 W_t^2 \left[ \theta_t^2 (1 + \eta)^2 + \eta^2 \beta^2 - 2\rho\theta_t(1 + \eta)\eta\beta \right] \right\} dt \\ &\quad + \sigma V_W W_t \left[ \theta_t(1 + \eta) dZ_{1,t} - \eta\beta dZ_{2,t} \right] + (V_H - kV_W) dH_t \end{aligned}$$

Quindi l'equazione di HJB per la funzione valore  $V(w, h, t)$  è:

$$\begin{cases} V_t + \max_{\theta_t} \left\{ V_W W_t \left[ r + (1 + \eta)(\mu - r)\theta_t - \eta\beta(\mu - r) \right] \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} V_{WW} \sigma^2 W_t^2 \left[ \theta_t^2 (1 + \eta)^2 + \eta^2 \beta^2 - 2\rho\theta_t(1 + \eta)\eta\beta \right] \right\} = 0 & w < h \\ V_H = kV_W & w = h \end{cases}$$

La soluzione del problema di massimo presente nel sistema è la (3.5), da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} V_t + V_W W_t \left[ r - (1 - \rho)\eta\beta(\mu - r) \right] \\ \quad - \frac{1}{2} \frac{V_W^2}{V_{WW}} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{V_W^2}{V_{WW}} + \frac{1}{2} V_{WW} W_t^2 \sigma^2 \eta^2 \beta^2 (1 - \rho^2) = 0 & w < h \\ V_H = kV_W & w = h \end{cases}$$

Si può notare che la funzione  $V(W, H, t)$  è omogenea nei suoi parametri infatti si ha che  $V(\lambda w, \lambda h, t) = \frac{\lambda^p}{p} V(w, h, t)$  nel nostro caso utilizzeremo questa proprietà per ridurre il problema di una dimensione attraverso il seguente cambio di variabili

$V(w, h, t) = \frac{h^p}{p} V(w/h, 1, t)$ . Quindi ponendo  $u(x, t) = V(x, 1, t)$  e sostituendo le derivate parziali nel sistema otteniamo

$$\begin{cases} u_t + xu_x[r - (1 - \rho)\eta\beta(\mu - r)] \\ -\frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{u_x^2}{u_{xx}} + \frac{1}{2} u_{xx} x^2 \sigma^2 \eta^2 \beta^2 (1 - \rho^2) = 0 & x \in (0, 1), t \in (0, T) \\ u_x(1, t) = \frac{p}{1+k} u(1, t) & t \in (0, T) \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema definendo la guess solution  $u(x, t) = e^{-pbt} z(x)$  e sostituendo nel sistema si ottiene

$$\begin{cases} -pbz(x) + xz'(x)[r - (1 - \rho)\eta\beta(\mu - r)] \\ -\frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{z'(x)^2}{z''(x)} + \frac{1}{2} z''(x) x^2 \sigma^2 \eta^2 \beta^2 (1 - \rho^2) = 0 & (3.13) \\ z'(1) = \frac{p}{1+k} z(1) \end{cases}$$

Infine per completare la trattazione ipotizziamo che  $z(x) = x^q$ , attraverso la condizione al bordo otteniamo  $q = \frac{p}{1+k}$ . Inserendo nel (3.13) otteniamo

$$b = \frac{r - (1 - \rho)\eta\beta(\mu - r)}{1+k} + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{1}{\delta + k} - \frac{1}{2} \sigma^2 \eta^2 \beta^2 (1 - \rho^2) \frac{\delta + k}{(1+k)^2}$$

Di conseguenza la funzione valore del manager

$$V(w, h, t) = \exp(-pbt) \frac{(h^k w)^{\frac{p}{1+k}}}{p}$$

e dalla strategia presente (3.5) si ottiene

$$\theta_t = \frac{1}{1+\eta} \left( \rho\beta\eta + \frac{1+k}{\delta+k} \frac{\mu-r}{\sigma^2} \right) \quad (3.14)$$

Questa trattazione non prova che la strategia in (3.14) sia ottima perché le relazioni ipotizzate come guess solution sono solo di tipo euristico. Ma questi risultati possono essere verificati tramite dimostrazioni derivanti dalla programmazione dinamica dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman.

Possiamo osservare che anche in questo modello la strategia ottima trovata ponendo un'avversione al rischio a tempo finito è dipendente di parametri  $k$  e  $\delta$ . Come nel modello precedente questi parametri influenzano la soluzione trovata in modo decrescente come si osserva nella Figura 3.5. Ciò sembra molto logico per il parametro  $\delta$  che descrive l'avversione al rischio del manager e quindi un suo aumento provoca una conseguente minore esposizione al rischio. Stesso andamento si verifi-

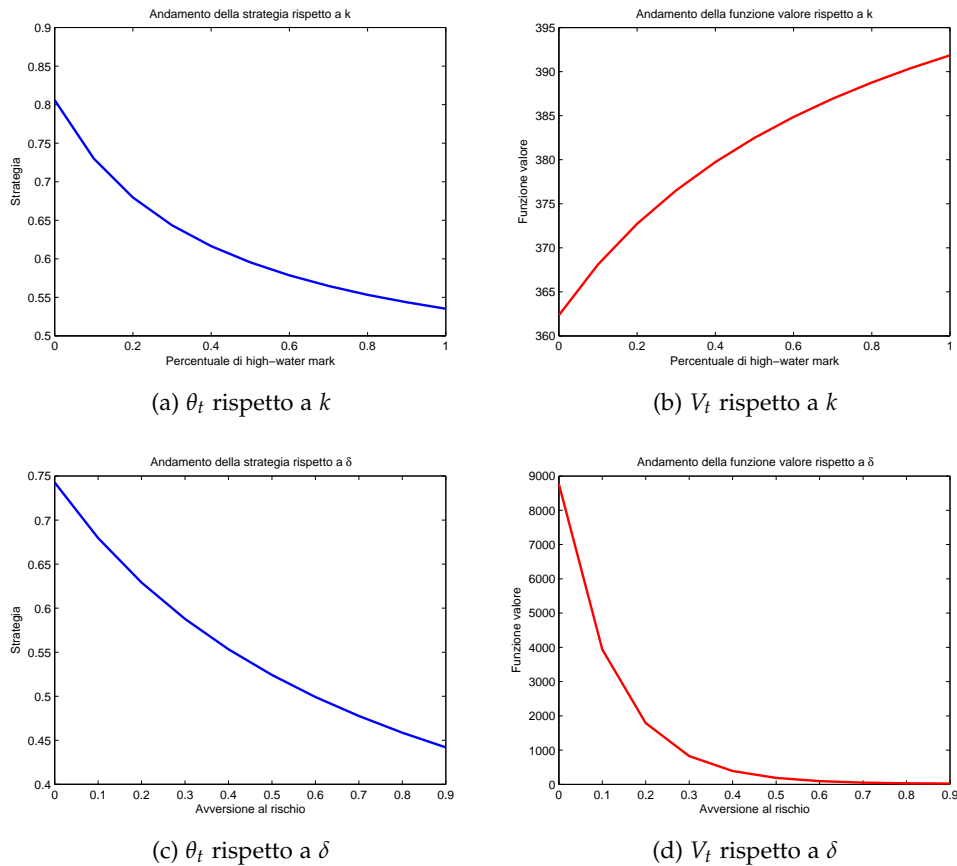


Figura 3.5: No Replication Avversione al rischio:  $\theta_t$  e  $V_t$  rispetto ai parametri  $k$  e  $\delta$

ca per il parametro  $k$  ciò è dovuto al fatto che un incremento provoca un incremento nella funzione valore del manager ma allo stesso tempo una maggiore detrazione dal fondo per poter pagare la performance fee al manager.

### 3.4 Management Fee

Passiamo all'analisi del problema nel caso in cui il manager riceva sia un compenso regolare che uno dato dalla performance.

#### 3.4.1 Risoluzione

Utilizziamo anche per questo caso la procedura utilizzata nei precedenti modelli. Analizzando il problema nella regione  $\{W = H\}$  otteniamo come già visto l'equazione

$$xk V_W = xk + V_H \quad (3.15)$$

dove  $W = H$ .



Parametri	Figura	
	3.5 a&b	3.5 c&d
$r$	0,03	0,03
$\mu$	0,08	0,08
$\sigma$	0,3	0,3
$\eta$	1,2	1,2
$\beta$	0,8	0,8
$\rho$	0,4	0,4
$k$	$0 \div 1$	0,8
$H$	$10^4$	$10^4$
$W$	$8 * 10^3$	$8 * 10^3$
$T$	1	1
$t$	0,8	0,8
$\delta$	0,4	$0 \div 0,9$

Tabella 3.2: Parametri No Replication Avversione al rischio

Mentre nella regione  $\{W_t < H_t\}$  attraverso la procedura HJB otteniamo l'equazione differenziale parziale

$$V_t + \max_{\theta_t} \left\{ V_W W \left[ r - (1-x)a + (1+\eta)(\mu-r)\theta_t - \eta\beta(\mu-r) \right] + \frac{1}{2} V_{WW} \sigma^2 W^2 \left[ \theta_t^2 (1+\eta)^2 + \eta^2 \beta^2 - 2\rho\theta_t(1+\eta)\eta\beta \right] \right\} = 0 \quad (3.16)$$

Risolvendo il problema di ottimo presente nell'equazione (3.16) otteniamo la strategia ottima  $\theta_t^*$

$$\theta_t^* = \frac{1}{1+\eta} \left( \rho\beta\eta - \frac{V_W}{V_{WW}W} \frac{\mu-r}{\sigma^2} \right) \quad (3.17)$$

Sostituendo la strategia ottima  $\theta_t^*$  trovata nell'equazione (3.16) e ricordando che  $V_t = -(\lambda + \gamma)V$  si ottiene il seguente problema differenziale

$$0 = -(\gamma + \lambda)V + \left[ r - (1-x)a - \eta\beta(1-\rho)(\mu-r) \right] V_W W - \frac{1}{2} \frac{V_W^2}{V_{WW}} \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2} V_{WW} W^2 \sigma^2 \eta^2 \beta^2 (1-\rho^2) \quad (3.18)$$

Per risolvere l'equazione differenziale (3.18) utilizziamo come in precedenza la

guess solution (2.7) e otteniamo la seguente equazione di terzo grado in  $\alpha$

$$\begin{aligned} & \lambda + \gamma - \alpha \left[ r - (1-x)a - (1-\rho)\eta\beta(\mu-r) + \pi + \gamma + \lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2\beta^2(1-\rho^2) \right] \\ & + \alpha^2 \left[ r - (1-x)a - (1-\rho)\eta\beta(\mu-r) - \sigma^2\eta^2\beta^2(1-\rho^2) \right] \\ & + \frac{1}{2}\alpha^3\sigma^2\eta^2\beta^2(1-\rho^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove  $\pi = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2$ .

L'equazione (3.19) ha come soluzione esplicita una complicata combinazione tra i parametri del modello. Per verificare alcune proprietà delle radici di questa equazione abbiamo in modo empirico risolto il problema attraverso un semplice codice Matlab che simula i vari parametri in un range ragionevole (in base alla loro natura) e trovato le radici cercate tramite il comando `roots`. Questa analisi ci porta ai due seguenti risultati:

- Le tre radici del polinomio sono reali
- Due radici sono molto maggiori di 1 in modo mentre la terza è compresa tra 0 e 1

Di conseguenza, come fatto nei modelli precedenti, per ottenere una soluzione ragionevole dal punto di vista economico siamo portati a scartare le radici maggiori di 1 e a considerare come soluzione la terza radice. Per concludere utilizzando l'equazione (3.15), considerando valide le due condizioni viste in precedenza ( $\mu > r$  e  $\alpha(1+xk) > 1$ ), otteniamo come già visto la nostra soluzione della funzione valore  $V(W, H)$  cioè

$$V(W, H) = \frac{xkH}{\alpha(1+xk) - 1} \left( \frac{W}{H} \right)^\alpha \quad (3.20)$$

La funzione valore risulta essere ottima tramite il teorema di verifica e della stessa forma ottenuta in precedenza ma in cui si incorpora l'effetto della management fee dovuta ai parametri  $x$  e  $a$ . Nella prossima sezione andiamo ad analizzare l'impatto dei parametri citati sulle soluzioni ottime trovate.

### 3.4.2 Statica comparata

Affrontiamo in questa sezione l'analisi della statica comparata per questo modello. Per trarre delle conclusioni sulle soluzioni trovate siamo portati ad utilizzare un metodo numerico. Di conseguenza utilizzando Matlab abbiamo verificato l'andamento di  $\theta^*$  e  $V_t$  per alcuni parametri. Come prima analisi andiamo a verificare l'impatto della presenza di due Browniani correlati dal parametro  $\rho$  nel modello che risulta essere l'aspetto principale che differenzia questo modello dai precedenti.

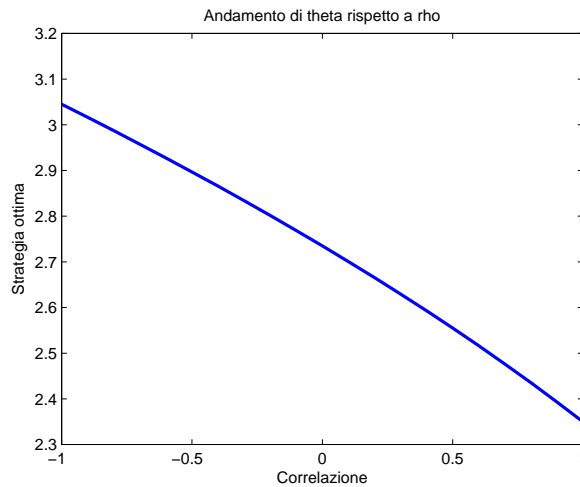


Figura 3.6: Modello No Replication Management fee:  $\theta^*$  rispetto alla correlazione  $\rho$

Come si può vedere nella Figura 3.6 l'andamento della strategia ottima è decrescente rispetto a  $\rho$  quindi se i titoli rischiosi  $S_t^1$  e  $S_t^2$  sono correlati in modo negativo allora l'incidenza della parte rischiosa nel portafoglio del manager aumenta. Un andamento opposto viene riscontrato per la funzione valore  $V_t$ . Ma nonostante questo notiamo dalle varie simulazioni fatte sui parametri che l'incidenza di  $\rho$  su  $\theta^*$  è sì decrescente ma di piccola rilevanza. Per questo concludiamo che il parametro in questione non è così rilevante sulla soluzione ottima.

Ora andiamo analizzare come variano le soluzioni ottime trovate rispetto alla percentuale di management fee ricevuta dal manager, cioè rispetto al parametro  $a$ . Come si può notare nei grafici (a) e (b) della Figura 3.7 abbiamo andamenti discordanti tra le due soluzioni. Infatti si riscontra che il portafoglio ottimo aumenta all'aumentare di  $a$ , come verificato per il modello del capitolo precedente nel Lemma 2.9. Mentre la funzione valore decresce con l'aumento della management fee. Questo perché un aumento del parametro  $a$  provoca un aumento della variabile  $\alpha$  che di conseguenza rende il manager implicitamente meno avverso al rischio e lo porta a seguire una strategia più aggressiva.

Nei grafici (c) e (d) vediamo come variano le soluzioni ottime in base al peso  $x$ . Al crescere dell'importanza della performance fee la strategia ottima risulta decrescente in linea con il risultato ottenuto nel Lemma 2.10 in cui la derivata era negativa sotto certe condizioni. Questo, come in precedenza, è dovuto all'influenza che ha il parametro  $x$  sul coefficiente  $\alpha$  infatti in questo caso l'avversione al rischio implicita risulta crescente ed è il risultato che si ottiene dalla risoluzione numerica dell'equazione di terzo grado in (3.19). Anche la funzione valore risulta essere decrescente con  $x$  ma in questo caso l'andamento è di tipo esponenziale.

Con lo stesso procedimento eseguiamo le analisi comparate rispetto ai parametri

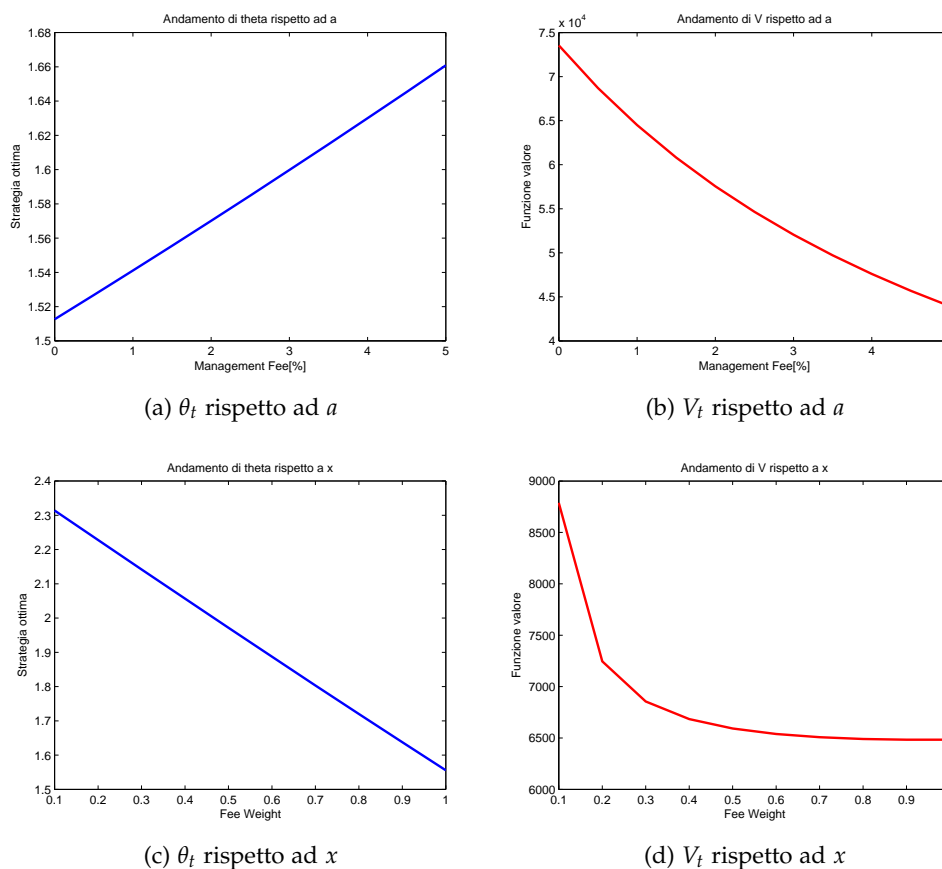


Figura 3.7: Modello No Replication Management fee:  $V_t$  e  $\theta_t$  rispetto ai parametri  $a$  e  $x$

$\gamma, \lambda, \mu, \sigma, \eta, \beta$  sulla strategia ottima e sulla funzione valore  $V_t$  e dei parametri  $k$  e  $H_t$  solo su  $V_t$ . Da queste analisi, eseguite sempre simulando vari set di parametri, riscontriamo le stesse conclusioni trovate nelle analisi eseguite per il modello con perfetta replicabilità del benchmark.

### 3.5 Confronto tra strategie

In questa sezione procediamo all'analisi del portafoglio ottimo trovato in (3.9), confrontando la strategia trovata con tre strategie rilevanti al variare di alcuni parametri del modello studiato. Le strategie con cui vogliamo confrontare sono quelle riportate nel modello precedente cioè

- La strategia del benchmark  $\beta$
- La strategia ottenuta da Merton in [12] detta Golden Rule cioè  $\theta^M = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$

Parametri	Figura		
	3.6	3.7 a&b	3.7 c&d
$\gamma$	0,03	0,02	0,02
$\lambda$	0,03	0,02	0,02
$r$	0,03	0,03	0,03
$a$	0,02	0 ÷ 0,05	0,02
$x$	0,8	0,8	0,1 ÷ 1
$\mu$	0,05	0,07	0,05
$\sigma$	0,2	0,2	0,4
$\eta$	1,2	1,2	1,2
$\beta$	0,8	0,8	0,8
$\rho$	-1 ÷ 1	0,2	-0,1
$k$	-	0,8	0,8
$H$	-	10 <sup>4</sup>	10 <sup>4</sup>

Tabella 3.3: Parametri Modello No Replication Management Fee

- La strategia ottima di Panageas-Westerfield in [1] cioè  $\theta^P = \frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2}$

Osservando come varia la distanza tra la nostra strategia e queste citate possiamo capire se al variare dei parametri il manager decide di comportarsi in modo più o meno simile alle strategie di paragone. Vediamo nel grafico (a) della Figura 3.8 come variano le distanze dalle strategie note al variare del drift del titolo rischioso. In questo caso notiamo che un aumento di  $\mu$  provoca una diminuzione della distanza per tutte le strategie prese come paragone. Questo avviene in questo caso perché un aumento del drift provoca come già visto un aumento dell'avversione al rischio implicita del manager che di conseguenza fa diminuire il secondo addendo della nostra soluzione portandola più vicina alla golden rule e alla soluzione di Panageas-Westerfield. Mentre il confronto con  $\beta$  mostra che la riduzione di  $\theta^*$  provoca un avvicinamento ma questo non vuol dire che all'aumentare del parametro  $\mu$  il manager cerca di imitare il benchmark perché questi due comportamenti sono indipendenti tra loro. Notiamo inoltre che come nel modello precedente quando al variare dei parametri  $\theta^P$  raggiunge il valore del parametro  $\beta$  allora le due distanze dalla soluzione ottima coincidono. In questo modello osserviamo che quando questo accade la distanza dalla strategia  $\theta^*$  è in modo significativo sopra lo zero, ciò è dovuto al fatto che questo modello si distacca ancora più notevolmente dal modello di Panageas-Westerfield introducendo due titoli rischiosi correlati dal parametro  $\rho$ . Nel grafico (b) osserviamo che all'aumentare della volatilità  $\sigma$  le distanze che aumentano sono quelle di Panageas-Westerfield e quella del benchmark mentre la distanza dalla golden rule aumenta. Si può comprendere questo effetto perché all'aumentare di  $\sigma$  queste strategie diminuiscono più rapidamente della nostra so-

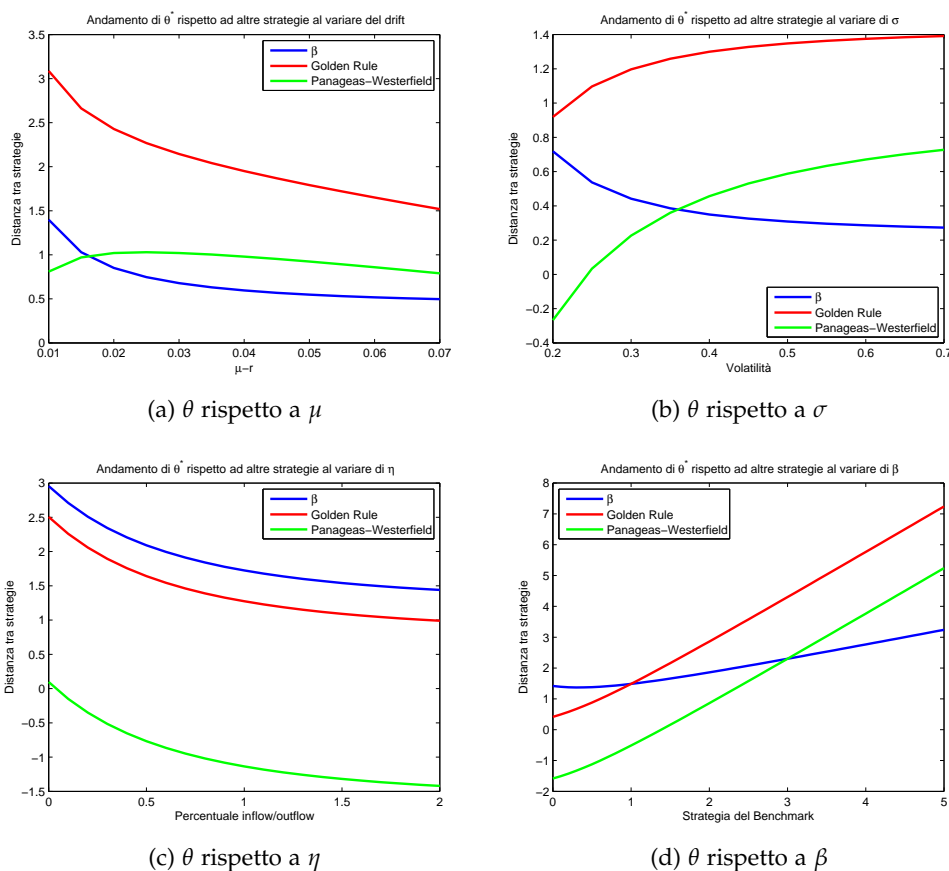


Figura 3.8: Modello No Replication: Confronto  $\theta_t^*$  rispetto ad altre strategie al variare di  $\mu, \sigma, \eta$  e  $\beta$

luzione e quindi la distanza tra le due strategie inevitabilmente aumenterà. Mentre rispetto al benchmark la distanza decresce perché la strategia del benchmark non è influenzata dalla volatilità  $\sigma$ , di conseguenza la distanza avrà lo stesso andamento riportato nella statica comparata cioè decrescente.

Nel grafico (c) notiamo che le tre distanze sono decrescenti all'aumentare del parametro  $\eta$  ciò avviene perché quando vale la condizione (3.10) l'andamento della strategia ottima  $\theta^*$  risulta decrescente di conseguenza anche le distanze avranno questo andamento non avendo i termini di paragone nessuna affinità con  $\eta$ . Ma osservando il grafico si nota che all'aumentare dell'importanza dei flow fund la strategia del manager si avvicina al benchmark e alla golden rule mentre si distacca dalla strategia  $\theta^P$  le cui distanze diventano ancora più negative.

Nel grafico (d) vediamo che le distanze risultano crescenti all'aumentare del parametro  $\beta$  esso è dovuto al fatto che sotto la condizione (3.11) la derivata parziale di  $\theta^*$  rispetto a  $\beta$  risulta positiva. Un aumento della rischiosità del benchmark porta a un allontanamento da tutte e tre i termini di paragone.

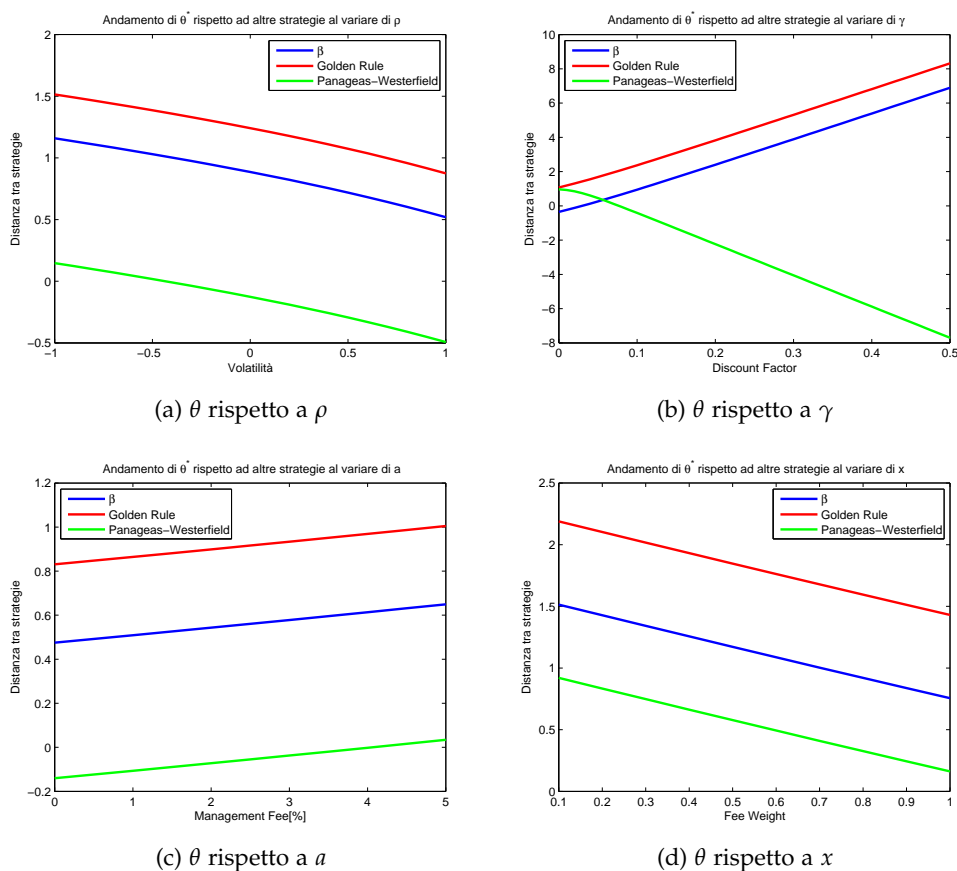


Figura 3.9: Modello No Replication: Confronto  $\theta_t^*$  rispetto ad altre strategie al variare di  $\rho, \gamma, a$  e  $x$

Il grafico (a) della Figura 3.9 mostra che quando la correlazione dei due titoli rischiosi aumenta cioè si avvicina al caso base tutte le distanze si riducono questo è sempre dovuto al fatto che le strategie di confronto sono indipendenti dall'andamento di  $\rho$  e quindi l'andamento rimane simile a quello riscontrato nella figura 3.1 cioè la strategia ottima  $\theta^*$  decresce quando la correlazione aumenta. Questo fenomeno ci porta a dire che un aumento della correlazione porta il manager a comportamenti più conservativi e di conseguenza si allinea alle strategie  $\beta$  e  $\theta^G R$  mentre si allontana dalla strategia più aggressiva trovata da Panageas-Westerfield. Nel grafico (b) riscontriamo che le strategie indipendenti dal parametro  $\gamma$  non mutano l'andamento riportato nella statica comparata ( in questo caso crescente) della strategia  $\theta^*$  mentre la distanza da Panageas-Westerfield ha un andamento opposto alle altre perché quando aumenta il rischio a breve termine  $\theta^P$  aumenta molto più velocemente di  $\theta^*$ . Dopo un certo valore di  $\gamma$  la strategia ottima si distacca dalle strategie di confronto.

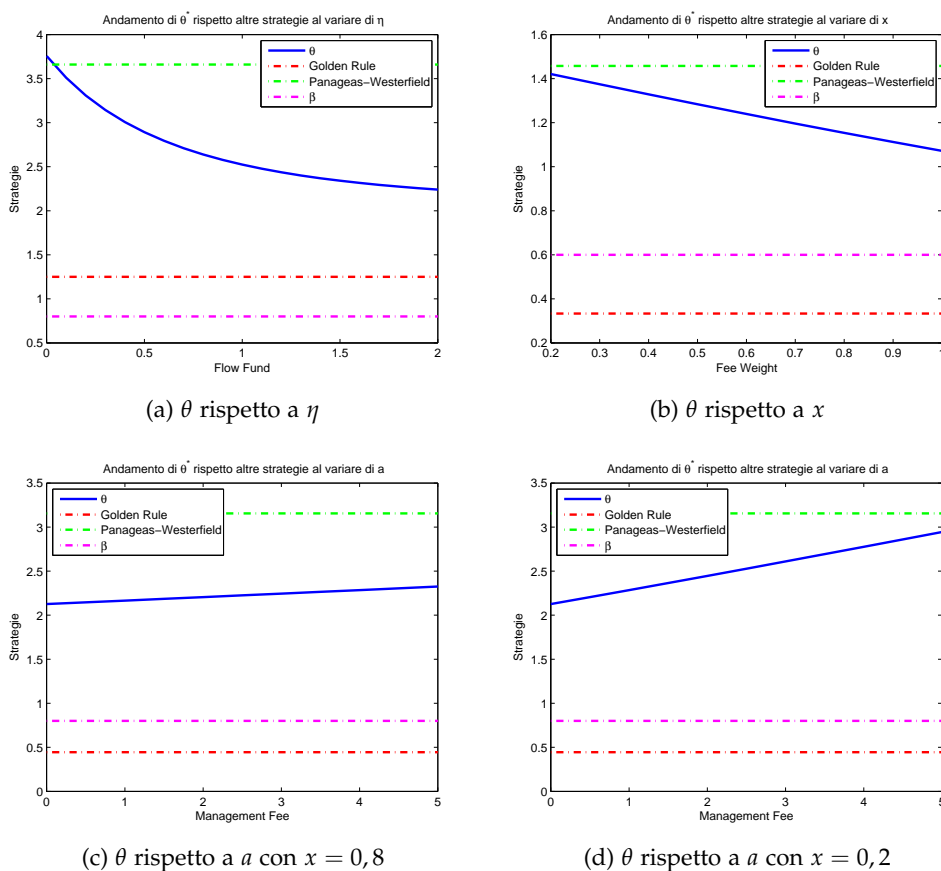


Figura 3.10: Modello No Replication: Confronto  $\theta_t^*$  rispetto ad altre strategie al variare di  $\eta, a$  e  $x$

Nei grafici (c) e (d) riscontriamo gli stessi effetti verificati e spiegati nel primo modello analizzato. Si nota che come in precedenza l'aumento della management fee provoca un avvicinamento alla strategia più rischiosa cioè  $\theta^P$ . Di conseguenza questo fenomeno comporta un sensibile allontanamento dalla strategie del benchmark e dalla golden rule quindi la presenza di una management fee di questo tipo induce comportamenti più aggressivi nonostante la presenza dei flow fund.

Al contrario se è l'importanza della performance fee a crescere il manager è portato ad assumere comportamenti più conservativi e quindi ad allinearsi maggiormente alle strategie  $\beta$  e golden rule.

In Figura 3.10 osserviamo il posizionamento della strategia ottima rispetto alle strategie di confronto al variare di alcuni parametri caratteristici. Nel grafico (a) vediamo al crescere dell'importanza dei flow fund il manager è portato più verso le strategie conservative ( $\beta$  e Golden Rule) mentre si allontana dalla strategia di Panageas-Westerfield perché l'inserimento dei flow fund nel fondo gestito provoca un atteggiamento più conservativo del manager.



Parametri	Figura					
	3.8 a	3.8 b	3.8 c	3.8 d	3.9 a	3.9 b
$\gamma$	0,02	0,02	0,04	0,02	0,03	$0 \div 0,5$
$\lambda$	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02	0,01
$r$	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
$a$	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
$x$	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
$\mu$	$0,04 \div 0,1$	0,07	0,08	0,07	0,07	0,09
$\sigma$	0,3	$0,2 \div 0,7$	0,2	0,2	0,3	0,4
$\eta$	1,2	1,2	$0 \div 2$	1,2	1,2	1,2
$\beta$	1,8	0,8	0,8	$0 \div 5$	0,8	1,8
$\rho$	0,4	0,4	-0,2	-0,5	$-1 \div 1$	0,4

Tabella 3.4: Parametri Modello No Replication Confronto

Parametri	Figura					
	3.9 c	3.9 d	3.10 a	3.10 b	3.10 c	3.10 d
$\gamma$	0,02	0,02	0,04	0,02	0,04	0,04
$\lambda$	0,02	0,02	0,04	0,02	0,04	0,04
$r$	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
$a$	$0 \div 0,05$	0,02	0,02	0,02	$0 \div 0,05$	$0 \div 0,05$
$x$	$0,1 \div 1$	0,8	0,8	$0,1 \div 1$	0,8	0,2
$\mu$	0,07	0,05	0,08	0,06	0,07	0,07
$\sigma$	0,3	0,4	0,2	0,3	0,3	0,3
$\eta$	1,2	1,2	$0 \div 2$	1,4	1,2	1,2
$\beta$	0,8	0,8	0,8	0,6	0,8	0,8
$\rho$	0,4	-0,1	-0,2	0,6	0,4	0,4

Tabella 3.5: Parametri Modello No Replication Confronto Posizionamento

Stesso fenomeno viene riscontrato all'aumentare dell'importanza della performance dovuta al contratto di high-water mark infatti aumentando il peso  $x$  il manager si avvicina alle strategie del benchmark e di Merton.

Nei grafici (c) e (d) notiamo come l'effetto di risk-shifting dovuto alla management fee sia più marcato quando essa ha maggiore importanza mentre esso si attenua quando è la performance fee ad essere preponderante. Questo ci fa concludere come nel modello precedente che un peso contenuto della performance fee provoca nel manager un fenomeno di risk-shifting che porta il fondo ad essere molto rischioso.

## Capitolo 4

# Asset Management sotto il vincolo di Drawdown

In questo capitolo vogliamo analizzare il caso in cui il fondo gestito dal manager abbia dei limiti inferiori sul valore del fondo gestito per tutelare gli investitori da eventuali perdite cospicue provocate dalla gestione del manager. Questo vincolo è detto controllo dei drawdowns ed è specificato come un tetto minimo che il valore del fondo non può superare. Questo vincolo può essere sia deterministico che, come nel nostro caso, stocastico quindi dipendente da una variabile aleatoria. Vogliamo studiare in questo modello l'impatto di un tetto inferiore sui comportamenti del manager e come l'aspetto dei flow fund interagisce con questo tipo di vincolo. Per descrivere questa situazione prendiamo spunto dal lavoro di Grossman e Zhou in [7] in cui questo tetto minimo è stocastico e in particolare è descritto come una quota costante del massimo registrato dal fondo (cioè del valore di high-water mark). In questa descrizione il compenso del manager non sarà più composto da due componenti ma dipenderà soltanto dal valore del fondo gestito cioè dalla management fee, inoltre porremo come ipotesi che il manager abbia un'utilità di tipo CRRA e che sia avverso al rischio. La nostra intenzione è quella di introdurre in questo modello l'aspetto dei flowfund come descritti in precedenza e verificare il loro impatto sulle soluzioni del modello studiato da Grossman e Zhou in [7]. Passiamo ora alla descrizione del modello e alla risoluzione del problema in questione.

### 4.1 Descrizione del modello matematico

Partiamo da un mercato finanziario in cui sono presenti due titoli: un titolo rischioso  $S_t$  e un titolo privo di rischio  $B_t$ . Ipotizzando costi di transizione nulli e

possibilità di short-selling, i titoli seguono la dinamica seguente:

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t & S_0 > 0 \\ dB_t = r B_t dt & B_0 > 0 \end{cases}$$

dove  $Z_t$  è un moto Browniano standard e  $r, \mu, \sigma$  sono costanti positive e finite. Definendo  $F_t$  il valore del portafoglio del fondo dovuto agli investimenti allora la sua dinamica sarà

$$dF_t = rF_t dt + F_t \theta_t [(\mu - r)dt + \sigma dZ_t], \quad F_0 > 0 \quad (4.1)$$

dove  $\theta_t$  è la quota che il manager decide di investire nel titolo  $S_t$ . Ipotizziamo che il processo stocastico  $\theta_t$  sia non anticipativo e tale che il processo  $F_t$  sia ben definito dall'equazione (4.1) e in modo tale che  $F_t$  sia sempre non negativo.

Introduciamo i flow fund come in precedenza attraverso la relazione di performance rispetto a un benchmark fissato  $Y_t$  che avrà la seguente dinamica

$$dY_t = rY_t dt + Y_t \beta [(\mu - r)dt + \sigma dZ_t], \quad Y_0 > 0$$

dove  $\beta$  è la quota che il benchmark investe nel titolo rischioso  $S_t$ .

Quindi consideriamo la presenza di inflow/outflow dipendente dalla seguente funzione

$$dG(F_t, Y_t) = \eta \left( \frac{dF_t}{F_t} - \frac{dY_t}{Y_t} \right)$$

Di conseguenza definendo il valore del fondo complessivo con  $W_t$ , esso avrà la seguente dinamica

$$d\bar{W}_t = \bar{W}_t [r + \theta_t(1 + \eta)(\mu - r) - \eta\beta(\mu - r)] dt + \bar{W}_t \sigma [\theta_t(1 + \eta) - \eta\beta] dZ_t$$

Dato  $\alpha \in (0, 1)$ . Il valore del fondo non può scendere sotto una quota  $\alpha$  del massimo registrato  $\bar{H}_t$ . Infatti il vincolo si può descrivere come

$$\bar{W}_t \geq \alpha \bar{H}_t \quad q.c. \quad \forall t \geq 0 \quad (4.2)$$

$\bar{H}_t$  è il processo stocastico che descrive il massimo registrato dal fondo cioè

$$\bar{H}_t = \max\{\bar{H}_0 e^{rt}, \bar{W}_s e^{r(t-s)}; s \leq t\}$$

dove  $\bar{H}_0$  è il valore massimo registrato al tempo  $t = 0$  che ipotizziamo positivo.

## 4.2 Problema di ottimizzazione

Descriviamo ora il problema di ottimo da risolvere, il manager vorrebbe conoscere quale strategia seguire per ottenere il massimo profitto derivante dal suo compenso. Visto che il compenso del manager in questo caso è una parte costante del valore del fondo possiamo dire che l'obiettivo del manager è quello di trovare un portafoglio  $\theta_t$  tale che massimizzi il valore atteso del fondo secondo le preferenze del manager. Assumiamo che il manager abbia un'utilità CRRA del tipo

$$U(W) = \frac{W^{1-\delta}}{1-\delta}$$

dove  $\delta > 0$  e  $\delta \neq 1$  è il coefficiente relativo di avversione al rischio.

Possiamo imporre che l'obiettivo del manager è quello di massimizzare il tasso di crescita a lungo termine dell'utilità attesa del valore finale del fondo, cioè

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\mathbb{E}\left[(1-\delta)U(\bar{W}_T)\right]\right)}{(1-\delta)T} \quad (4.3)$$

sotto il vincolo (4.2). Notiamo che se  $T$  è finito massimizzare (4.3) equivale a massimizzare  $\mathbb{E}[U(\bar{W}_T)]$ .

Definiamo  $\bar{\mathcal{A}}$  come l'insieme di tutte le strategie non anticipative che rendono ben definito il processo  $\bar{W}_t$  e tali per cui vale (4.3). Allora denotiamo il massimo tasso di crescita come

$$\bar{\omega} = \sup_{\bar{\mathcal{A}}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\mathbb{E}\left[(1-\delta)U(\bar{W}_T)\right]\right)}{(1-\delta)T}$$

### 4.2.1 Trasformazione del problema

Per rendere la risoluzione più agevole e semplificata proponiamo una semplice trasformazione del problema. Definiamo  $W_t = \bar{W}_t e^{-rt}$  e  $H_t = \bar{H}_t e^{-rt} = \max\{H_0, W_s; s \leq t\}$ . Di conseguenza la dinamica di  $W_t$  sarà

$$dW_t = W_t[\theta_t(1+\eta)(\mu-r) - \eta\beta(\mu-r)]dt + W_t\sigma[\theta_t(1+\eta) - \eta\beta]dZ_t$$

Il vincolo dovuto ai drawdown diventa equivalente a  $W_t \geq \alpha H_t$ . Definiamo  $\mathcal{A}$  come l'insieme di tutte le strategie  $\theta_t$  non anticipative che rendono ben definito il processo  $W_t$  e tali per cui vale  $W_t \geq \alpha H_t$ . Inoltre denotiamo con  $\omega$  il tasso di crescita di lungo periodo per il problema  $(W_t, H_t)$ . Notiamo che semplicemente vale  $\omega = \bar{\omega} - r$ .

### 4.2.2 Metodo risolutivo

Ora con riferimento a un teorema dimostrato in [7] definiamo la funzione valore che utilizziamo nel problema di ottimo. Il teorema afferma che se esiste una costante  $\omega$  e una funzione  $V(W, H)$  tale che

- per ogni  $t > 0$ ,  $V(W, H)$  soddisfa la seguente Bellman equation

$$V(W, H) = \sup_{\mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ V(W_t, H_t) e^{-(1-\delta)\omega t} \right]$$

dove  $W = W_0$  e  $H = H_0$ .

- esiste una strategia  $\theta_t^* \in \mathcal{A}$  tale che il superiore su  $\mathcal{A}$  di  $V(W, H)$  è raggiunto dalla strategia  $\theta_t^*$  per ogni  $t > 0$
- esistono due costanti positive  $C_1, C_2$  tali che valga

$$C_1(1-\delta)U(W) \leq (1-\delta)V(W, H) \leq C_2(1-\delta)U(W)$$

allora  $\omega$  è il massimo tasso di crescita a lungo termine e ed esso si ottiene seguendo la strategia  $\theta_t^*$ .

Osserviamo che una funzione valore che rispetta le condizioni del teorema citato è la seguente

$$\hat{V}(W, H) = \sup_{\mathcal{A}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ U(W_T) e^{-(1-\delta)\omega T} \right]$$

inoltre ha delle proprietà che torneranno utili per la risoluzione del problema cioè

- $\hat{V}(W, H)$  è finita per  $W \geq \alpha H$
- $\hat{V}(W, H)$  è omogenea di grado  $1 - \delta$  in  $W$  e  $H$ . Cioè per  $k > 0$  vale  $\hat{V}(kW, kH) = k^{1-\delta} \hat{V}(W, H)$
- Assumendo che esista  $\omega$  tale che  $\hat{V}(W, H)$  sia finito per  $W \geq \alpha H$ , valgono i seguenti andamenti  $\hat{V}_W > 0$ ,  $\hat{V}_{WW} < 0$  e  $\hat{V}_H < 0$

## 4.3 Risoluzione

Passiamo alla risoluzione del problema descritto attraverso argomenti euristici che si possono facilmente verificare come fatto in precedenza attraverso argomenti di controllo ottimo stocastico e programmazione dinamica.

Notiamo innanzitutto che  $W \in [\alpha H, H]$  dovendo rispettare il vincolo (4.2). Quando  $W_t = \alpha H_t$  il valore del fondo in un tempo immediatamente successivo dovrà

essere superiore per non finire al di sotto del vincolo dei drawdowns. Quindi se analizziamo il valore del fondo  $W_t$  in un intervallo breve  $[t, t+h]$  vediamo che

$$\begin{aligned} W_{t+h} &= W_t + W_t [(1+\eta)\theta_t(\mu-r) - \eta\beta(\mu-r)] h \\ &\quad + W_t \sigma [(1+\eta)\theta_t - \eta\beta] (Z_{t+h} - Z_t) \geq \alpha H_{t+h} \geq \alpha H_t = W_t \end{aligned}$$

questo implica che con probabilità 1 deve valere

$$[(1+\eta)\theta_t - \eta\beta] W_t (\mu-r) h + [(1+\eta)\theta_t - \eta\beta] W_t \sigma (Z_{t+h} - Z_t) \geq 0$$

questo vale solo nel caso in cui

$$\theta_t = \frac{\eta\beta}{1+\eta} \quad (4.4)$$

Ora se analizziamo nella regione interna,  $W \in (\alpha H, H)$ , abbiamo che  $dH = 0$ . Quindi per un valore piccolo di  $h > 0$ , dalle ipotesi del teorema si ottiene

$$0 = \max_{\theta_t} \mathbb{E} \left[ V(W_{t+h}, H) e^{-(1-\delta)\omega h} - V(W, H) \right]$$

Applicando la formula di Itô, dividendo per  $h$  e mandando  $h \rightarrow \infty$  otteniamo la consueta equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman

$$0 = \max_{\theta_t} \left\{ -(1-\delta)\omega V + V_W W [\theta_t(1+\eta)(\mu-r) - \eta\beta(\mu-r)] + \frac{1}{2} V_{WW} W^2 \sigma^2 [(1+\eta)\theta_t - \eta\beta]^2 \right\}$$

Dalle condizioni al primo ordine si può derivare la strategia ottima

$$\theta^* = \frac{1}{1+\eta} \left( \eta\beta - \frac{V_W}{V_{WW} W} \frac{\mu-r}{\sigma^2} \right)$$

Ora sostituendo la strategia ottima nell'equazione di Bellman si ottiene

$$0 = -(1-\delta)\omega V - \frac{1}{2} \frac{V_W^2}{V_{WW}} \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}$$

Visto che abbiamo l'ipotesi che la funzione valore  $V(W, H)$  sia omogenea di grado  $1-\delta$  possiamo definirla in questo modo

$$V(W, H) = H^{1-\delta} f(u)$$

dove  $u = W/H$  e  $f(u) = V(u, 1)$ . Di conseguenza da questa trasformazione si ottiene che

$$0 = -(1-\delta)\omega f(u) - \frac{1}{2} \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2} \frac{f'(u)^2}{f''(u)}$$

con  $u \in (\alpha, 1)$ . Otteniamo così un'equazione differenziale non lineare di secondo grado in  $u$  che si può riscrivere come

$$0 = f(u) + a \frac{f'(u)^2}{f''(u)} \quad \text{con} \quad a = \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{1}{\omega(1 - \delta)}$$

La cui soluzione esplicita è

$$f(u) = \gamma(u + c)^v \quad \text{dove} \quad v = \frac{1}{1 + a}$$

dove  $c$  e  $\gamma (\neq 0)$  sono due costanti. Ora se analizziamo la strategia del manager sappiamo che quando  $W = \alpha H$  cioè  $u = \alpha$  il manager sceglierà la strategia (4.4). Di conseguenza otteniamo che la costante  $c = -\alpha$  e la strategia ottima risulta essere

$$\theta^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \eta \beta + \frac{\mu - r}{(1 - v)\sigma^2} \frac{W - \alpha H}{W} \right)$$

Ora passiamo ad analizzare la regione in cui  $W = H$ . In questa regione  $dH \neq 0$  quindi la formula di Itô per un piccolo  $h > 0$  risulta essere

$$0 = \sup_{(\theta)_0^h} \left\{ \mathbb{E} \left[ \int_0^h \left( -(1 - \delta)\omega V + V_W W_s [\theta_s(1 + \eta)(\mu - r) - \eta \beta(\mu - r)] \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2} V_{WW} W_s^2 \sigma^2 [(1 + \eta)\theta_s - \eta \beta]^2 \right) ds \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^h V_M dM \right] \right\}$$

Si può dimostrare che in questa situazione l'unico modo in cui risulta valida l'equazione di Bellman, è porre

$$\frac{\partial V}{\partial H} = 0 \quad \text{se} \quad W = H$$

Posta questa condizione e sostituendo la funzione valore ipotizzata si ottiene

$$(1 - \delta)f(1) = f'(1)$$

che equivale a

$$v = (1 - \delta)(1 - \alpha)$$

di conseguenza ricaviamo il valore del tasso di crescita di lungo periodo  $\omega$

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{1 - \alpha}{\alpha + (1 - \alpha)\delta}$$

Concludiamo che la strategia ottima che il manager seguirà sarà

$$\theta^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \eta\beta + \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{\alpha + \delta(1 - \alpha)} \frac{W - \alpha H}{W} \right)$$

In cui si nota che il portafoglio ottimo dipende dalla situazione del fondo cioè dalla distanza dal limite inferiore dovuto ai drawdowns. Quindi questa strategia non sarà costante nel tempo come in precedenza ma dipenderà da come evolvono  $W$  e di conseguenza  $H$ . Inoltre notiamo come nei modelli precedenti una componente dovuta solamente all'aspetto dei flow fund che risulta essere solo un coefficiente costante in aggiunta al portafoglio dipendente dagli investimenti. Anche il tasso di crescita  $\omega$  in questo modello non risulta dipendente dai flow fund ma solo dagli investimenti e dal vincolo di drawdown.

Notiamo che il tasso di crescita  $\omega$  risulta decrescente con il parametro  $\alpha$  coerentemente con il fatto che ad un vincolo più stringente dei drawdown (cioè un valore di  $\alpha$  più alto) comporta un tasso di crescita prospettato minore perché il manager ha meno margini di manovra ed è obbligato a fare più attenzione al vincolo di performance. Inoltre il tasso di crescita risulta minore del caso in cui non è presente il vincolo dei drawdown (cioè  $\alpha = 0$ ) infatti

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\delta(1 - \alpha)}{\alpha + \delta(1 - \alpha)} \leq 1$$

questo ci porta a dire che la presenza del vincolo comporta una minore crescita del valore fondo  $W_t$  nel lungo periodo, ma la presenza dei drawdowns porta il manager a comportamenti più prudentziali perché porta la sua avversione al rischio da  $\delta$  a  $\alpha + \delta(1 - \alpha)$  che risulta sempre compresa tra  $(\delta, 1)$  se  $\delta < 1$ . Quindi anche in questo modello possiamo dire che il modello e i vincoli esterni portano il manager ad agire secondo preferenze diverse dal consueto in questo caso lo portano ad essere di norma più avverso al rischio del consueto. Infine il coefficiente  $(W - \alpha H)/W$  porta un'ulteriore diminuzione dell'esposizione al rischio del fondo perché riduce il secondo addendo della strategia ottima  $\theta^*$ .

## 4.4 Statica Comparata

Analizziamo l'andamento della strategia ottima trovata in precedenza rispetto ai parametri principali del modello. Ipotizziamo come in precedenza che  $\mu > r$  come di consueto succede per i titoli sul mercato. Inoltre ipotizziamo che il manager sia avverso al rischio ma al di sotto dell'utilità logaritmica cioè poniamo che  $\delta < 1$ .



Dall'analisi delle derivate prime otteniamo le seguenti dinamiche

- a La strategia  $\theta^*$  è crescente al crescere del drift  $\mu$
- b La strategia  $\theta^*$  è decrescente al crescere della volatilità  $\sigma$
- c La strategia  $\theta^*$  è decrescente al crescere della quota dei drawdowns  $\alpha$
- d La strategia  $\theta^*$  è decrescente al crescere del coefficiente di avversione al rischio del manager  $\delta$
- e La strategia  $\theta^*$  è crescente al crescere del portafoglio del benchmark  $\beta$
- f La strategia  $\theta^*$  è decrescente al crescere dell'importanza dei flow fund  $\eta$  se  $\beta < \theta^{GZ}$  dove  $\theta^{GZ} = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{W_t - \alpha H_t}{W_t(\alpha + \delta(1 - \alpha))}$  altrimenti risulta crescente
- g La strategia  $\theta^*$  è decrescente al crescere del valore di high-water mark  $H$
- h La strategia  $\theta^*$  è crescente al crescere del valore del fondo  $W$

I risultati ottenuti sono coerenti con gli andamenti delle soluzioni trovate nel paper [7]. Infatti  $\theta^*$  cresce quando il titolo rischioso diventa più appetibile e il manager riduce l'investimento rischioso quando la volatilità cresce. Mentre come era lecito aspettarsi quando il vincolo dei drawdown diventa più stringente il manager assume un atteggiamento più prudentiale e di conseguenza riduce l'esposizione al rischio del fondo. Inoltre come era logico prevedere quando l'avversione al rischio del manager aumenta egli sceglie di investire meno nel titolo rischioso così da seguire al meglio le sue preferenze.

Per quanto riguarda l'andamento rispetto ai flow fund, questo dipende da come si pone il portafoglio  $\beta$  del benchmark rispetto alla soluzione  $\theta^{GZ}$  trovata nel lavoro di Grossman-Zhou. Questo effetto è coerente con i risultati precedenti in cui all'aumentare di  $\eta$  la strategia del manager si allineava a quella del benchmark. Inoltre anche l'andamento rispetto a  $\beta$  risulta crescente come in precedenza, questo come già detto è dovuto al bisogno del manager di seguire il benchmark per evitare delle eventuali perdite eccessive dovute agli outflow.

Rispetto al processo del massimo valore registrato  $H$  la strategia  $\theta^*$  è decrescente perché incrementa il limite inferiore che vincola la performance del fondo  $W$  dal basso in maniera più consistente. Infine si nota che quando il valore del fondo  $W$  cresce la strategia ottima risulta crescente e quindi il manager assume maggiore rischio quando il fondo aumenta il suo valore ma ovviamente questa esposizione al rischio è minore del caso senza vincolo dei drawdown (cioè  $\alpha = 0$ ).

Analizziamo ora l'impatto dei flow fund rispetto alla strategia del benchmark  $\beta$ . Per prima cosa verifichiamo la distanza ottima da quella del benchmark risulta

essere pari a

$$\theta_t^* - \beta = \frac{1}{1 + \eta} \left( \theta^{GZ} - \beta \right)$$

dove  $\theta^{GZ} = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{\alpha + \delta(1 - \alpha)} \frac{W_t - \alpha H_t}{W_t}$  è la strategia ottima trovata in [7].

Di conseguenza al variare dei parametri otterremo i seguenti risultati

- La distanza dalla strategia del benchmark diminuisce all'aumentare dell'importanza dei flow fund
- La distanza dal benchmark diminuisce al crescere  $\beta$  se vale  $\theta^{GZ} > \beta$  altrimenti vale il contrario

Queste due conclusioni ci consentono di confermare i risultati ottenuti in precedenza che ci portano a dire che in questo tipo di contesto quando il benchmark diventa più rischioso o quando l'importanza dei flow fund cresce il manager del fondo è portato a seguire i comportamenti del benchmark e di conseguenza a imitare la sua strategia d'investimento.

## Capitolo 5

# Asset Management in presenza di Regime Switching

In questo capitolo vogliamo analizzare un modello economico differente dai precedenti. In questo caso l'economia è soggetta a un fenomeno di regime switching cioè il titolo rischioso in cui può investire il manager del fondo dipende da coefficienti che non sono più costanti nel tempo come in precedenza, ma in questo caso essi possono cambiare in base allo stato di una determinata catena di Markov a tempo continuo. Questo provocherà dei cambiamenti nel comportamento del manager sia a livello quantitativo che a livello di frequenza di riposizionamento della strategia. Nel nostro caso per semplicità ipotizzeremo che gli stati della catena di Markov siano due, un bad state e un good state. In queste condizioni la strategia sarà differente dal caso normale perché il manager è portato a modificare più frequentemente la strategia in base al valore del fondo e allo stato dell'economia. Vogliamo analizzare l'impatto dei flow fund e della management fee in questo contesto, considerando inalterato lo schema retributivo dei capitoli precedenti. Come in precedenza tratteremo questi aspetti a tempo continuo e ipotizzando che il fondo termini in un tempo aleatorio dovuto a fenomeni esterni di natura stocastica e nel caso in cui il fondo assuma valore nullo.

### 5.1 Descrizione del modello matematico

Partiamo dalla descrizione dell'economia in cui il manager può agire. Egli come in precedenza può investire in due titoli: un titolo privo di rischio  $B_t$  e un titolo rischioso  $S_t$ . Nel contesto presentato dobbiamo introdurre una catena di Markov a tempo continuo a due stati  $X$ . Questo processo può assumere i valori  $\{0, 1\}$  e rappresenta il regime dell'economia. Ipotizziamo che a  $t = 0$ ,  $X_0$  assume valore 1 con probabilità  $p$  e 0 con probabilità  $1 - p$ . Il processo  $X_t$  partendo da uno

stato  $i$  rimane in questo stato prima di cambiare stato ( e saltare in  $j \neq i$ ) per un tempo distribuito da una variabile esponenziale con intensità  $q_{ij}$ . Nel nostro caso consideriamo una catena simmetrica quindi abbiamo che  $q_{01} = q_{10} = q$ .

I due asset di conseguenza vengono descritti dalle seguenti dinamiche

$$\begin{cases} dS_t = \mu(X_t)S_t dt + \sigma S_t dZ_t & S_0 > 0 \\ dB_t = rB_t dt & B_0 > 0 \end{cases}$$

dove  $Z_t$  è processo di Wiener con media zero e varianza  $t$  che ipotizziamo indipendente dalla catena di Markov  $X_t$ . Quindi in questa impostazione la volatilità del titolo rischioso è assunta costante pari  $\sigma$  mentre il drift è funzione dello stato di  $X_t$ . In particolare poniamo che  $\mu(0) = \mu_0$  e  $\mu(1) = \mu_1$ .<sup>1</sup>

Descriviamo il valore del fondo dovuto ai soli investimenti con il processo  $F_t$  che soddisfa

$$dF_t = F_t \left[ (1 - \theta_t)r + \theta_t \mu(X_t) \right] dt + F_t \sigma \theta_t dZ_t$$

dove  $\theta_t$  è la percentuale che il manager investe nel titolo rischioso  $S_t$  al tempo  $t$  detta anche strategia del manager.

Ora introduciamo l'impatto dei flow fund nel modello come in precedenza ipotizziamo che i flussi di capitale dipendono dalla performance relativa del fondo  $F_t$  rispetto a un benchmark  $Y_t$  che investe nella stessa economia descritta sopra. Quindi il valore del fondo benchmark  $Y_t$  avrà la seguente dinamica

$$dY_t = Y_t \left[ (1 - \beta)r + \beta \mu(X_t) \right] dt + Y_t \sigma \beta dZ_t$$

dove  $\beta$  è la percentuale che il benchmark investe nel titolo rischioso  $S_t$  e che poniamo costante nel tempo. Quindi possiamo descrivere l'effetto dei flow fund attraverso la seguente funzione

$$dG(F_t, Y_t) = \eta \left( \frac{dF_t}{F_t} - \frac{dY_t}{Y_t} \right)$$

notiamo che la funzione dei flow fund è lineare nella differenza dei rendimenti dei fondi a confronto con pendenza descritta dal parametro  $\eta$ .

Consideriamo per finire il fondo complessivo  $W_t$  comprensivo di investimenti nei titoli presenti sul mercato, della possibile presenza di inflow/outflow e del paga-

<sup>1</sup>Per questo modello consideriamo lo spazio di probabilità filtrato  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  e lo consideriamo completo, in cui  $\mathcal{F} = \left\{ \mathcal{F}_t^{Z, X} \right\}$  dove  $\mathcal{F}_t^{Z, X} = \sigma(Z_s, X_s, s \leq t)$

mento del manager

$$dW_t = W_t[(1 - \theta_t)r + \theta_t\mu]dt + W_t\sigma\theta_t dZ_t + W_t\eta\left(\frac{dF_t}{F_t} - \frac{dY_t}{Y_t}\right) - (1 - x)aW_tdt - xkdH_t \quad (5.1)$$

dove  $a$  è la quota costante che il manager riceve come compenso base e  $x$  è il parametro che descrive l'importanza della performance fee rispetto alla management fee, infine  $H_t$  è il processo di high-water mark definito come :

$$H_t = \max\{W_s : s \in [0, t]\}$$

Questo sta a significare che quando il massimo viene raggiunto e modificato cioè  $dH_t \neq 0$  il valore del fondo decresce in generale di una quantità  $xkdH_t$  che rispecchia la frazione dell'incremento che il manager riceve come compenso nel continuo.

## 5.2 Problema di ottimizzazione

In questa parte descriviamo il problema di ottimo che il manager vuole risolvere per ottenere il miglior valore atteso dovuto al compenso scegliendo la strategia di investimento adatta. Imponiamo la neutralità al rischio del manager e l'impossibilità di investire nel fondo da parte dello stesso.

Di conseguenza la funzione valore del manager sarà

$$V(W, H) = \max_{\theta_t} \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge \infty} e^{-(\lambda+\gamma)t} \left( xkdH_t + (1-x)aW_tdt \right) \right] \quad (5.2)$$

dove i parametri  $\lambda, \gamma$  svolgono lo stesso compito svolto in precedenza cioè quello di caratterizzare il discount factor del compenso ricevuto.

## 5.3 Risoluzione

Passiamo alla risoluzione descritto utilizzando argomenti di controllo stocastico e di programmazione dinamica. La risoluzione del problema si otterrà per via numerica in quanto per via analitica il problema non è risolvibile in forma chiusa.

Definiamo due funzioni valore e due strategie del manager in base allo stato della catena di Markov cioè  $V^0, V^1$  e  $\theta^0, \theta^1$ .

L'equazione HJB del problema (5.2) risulta essere la coppia di equazioni seguenti

$$\begin{cases} \max_{\theta_t^0} \left\{ -(\lambda + \gamma)V^0 + V_W^0 W \left[ r - (1-x)a + (1+\eta)(\mu^0 - r)\theta_t^0 - \eta\beta(\mu^0 - r) \right] \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2}V_{WW}^0 \sigma^2 W^2 \left[ \theta_t^0(1+\eta) - \eta\beta \right]^2 - qV^0 + qV^1 \right\} = 0 \\ \max_{\theta_t^1} \left\{ -(\lambda + \gamma)V^1 + V_W^1 W \left[ r - (1-x)a + (1+\eta)(\mu^1 - r)\theta_t^1 - \eta\beta(\mu^1 - r) \right] \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2}V_{WW}^1 \sigma^2 W^2 \left[ \theta_t^1(1+\eta) - \eta\beta \right]^2 - qV^1 + qV^0 \right\} = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

con  $V = V(W, H)$  con dominio  $0 \leq W \leq H$  e  $H \geq 0$ . Le condizioni al bordo del sistema (5.3) sono le seguenti

$$\begin{cases} V^0(0, H) = 0 & \forall H \geq 0 \\ V^1(0, H) = 0 & \forall H \geq 0 \\ V_H^0(H, H) = xk(V_W^0(H, H) - 1) & \forall H \geq 0 \\ V_H^1(H, H) = xk(V_W^1(H, H) - 1) & \forall H \geq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Per risolvere questo problema per via numerica utilizziamo un algoritmo iterativo che si basa sulla discretizzazione alle differenze finite per trattare il sistema di equazioni alle derivate parziali in (5.3). Visto che il problema è in due variabili  $(W, H)$  scegliamo di fare una griglia di  $M$  punti per la variabile  $H$  e di risolvere il sistema fissando un punto di questa griglia trovando quindi la funzione valore e la strategia per ogni valore del fondo  $W$  fino al valore di  $H$  fissato. Ora ad ogni iterazione trattiamo il problema per ogni punto della griglia delle  $H$  così da trovare sia i vettori della value function  $V^0, V^1$  che i vettori delle strategie ottime  $\theta^0, \theta^1$  al variare del valore del fondo  $W$ .

Più in particolare tratteremo le derivate parziali nel seguente modo, fissato un valore di  $H = h$  poniamo

$$V_W^i(w, h) = \frac{V^i(w + dw, h) - V^i(w - dw, h)}{2dw} \quad i = 0, 1$$

dove  $dw$  è il passo di discretizzazione spaziale della griglia delle  $W$  che nel caso specifico va da  $[0, h]$ . Per la derivata seconda in  $W$  utilizziamo una differenza finita del secondo ordine

$$V_{WW}^i(w, h) = \frac{V^i(w + dw, h) - 2V^i(w, h) + V^i(w - dw, h)}{dw^2} \quad i = 0, 1$$

Mentre per la derivata nella variabile  $H$  dobbiamo, per motivi modellistici, utiliz-

zare la seguente differenza finita

$$V_H^i(w, h) = \frac{V^i(w, h) - V^i(w - dh, h - dh)}{\sqrt{2}dh} \quad i = 0, 1$$

infatti quest'ultima si trova solo nella condizione di Neumann al bordo superiore cioè quando  $W = H$  e di conseguenza non è possibile fare una derivata in avanti o all'indietro. A posteriori abbiamo verificato che questo modello converge verso la corretta condizione al bordo definita in precedenza.

Per procedere con l'algoritmo ad ogni passo dobbiamo calcolare il valore della  $V$  attraverso la risoluzione di un sistema lineare e da questa soluzione, attraverso l'equazione (2.22), otteniamo la strategia  $\theta_t$  che poi verrà utilizzata nel passo iterativo successivo.

L'algoritmo termina quando le norma in  $l^2$  delle distanze tra le strategie  $\theta^0, \theta^1$  con il corrispettivo al passo iterativo precedente convergono al di sotto di una certa tolleranza prefissata (nel nostro caso  $10^{-6}$ ).

Riportiamo di seguito il grafico delle strategie ottime per entrambi gli stati della catena trovate nel caso in cui il tasso di transizione sia  $q = 0$   $q = 0,05$   $q = 0,1$   $q = 0,3$ .

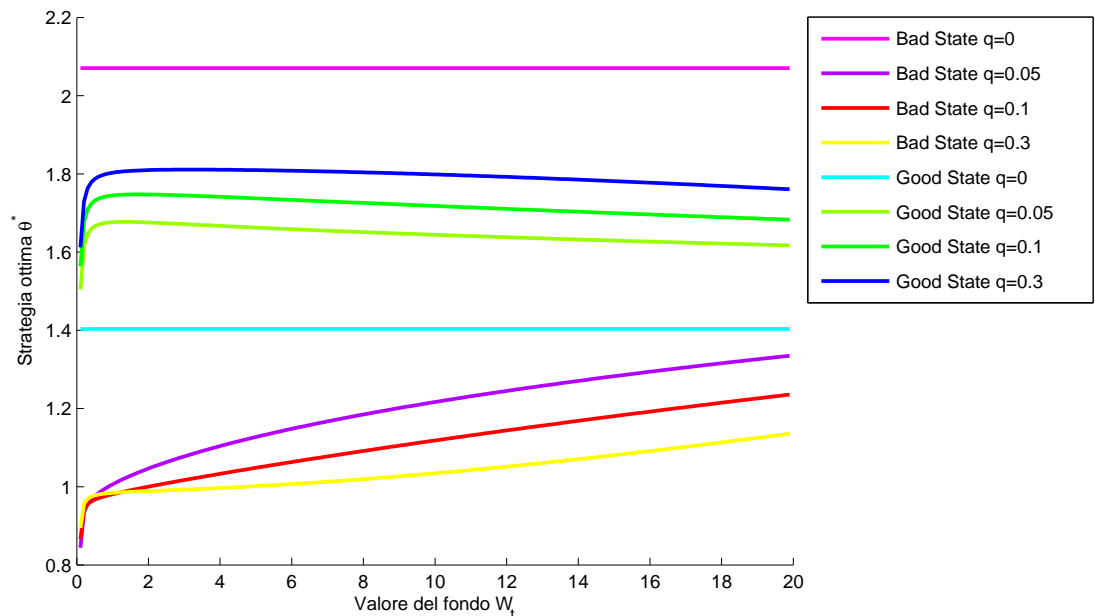


Figura 5.1: Strategie ottima  $\theta^0, \theta^1$  al variare di  $W_t$  per valori differenti di  $q$  con  $H = 20$   $\lambda = 0.03$   $\gamma = 0.03$   $r = 0.03$   $\mu_0 = 0.05$   $\mu_1 = 0.08$   $\sigma = 0.3$   $a = 0.01$   $x = 0.8$   $\eta = 1.2$   $\beta = 0.8$   $k = 0.8$

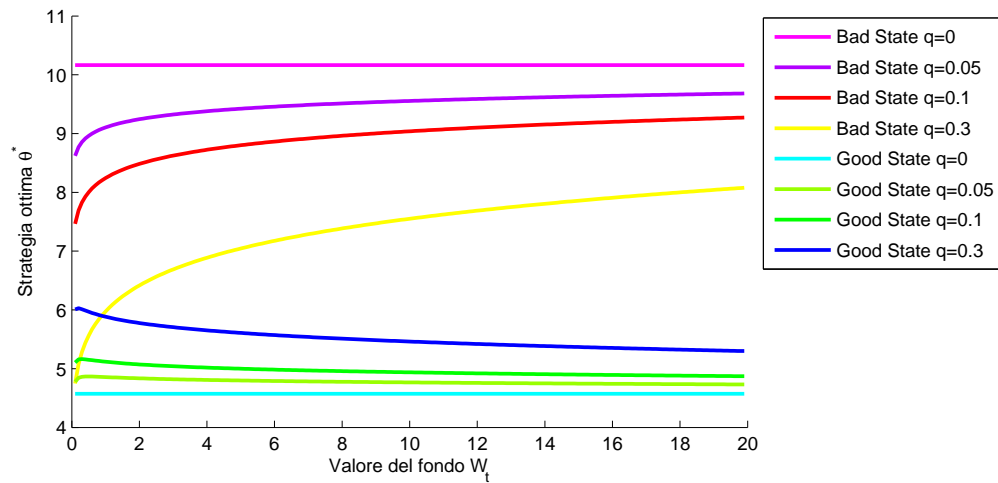


Figura 5.2: Strategie ottima  $\theta^0, \theta^1$  al variare di  $W_t$  per valori differenti di  $q$  con un set di parametri alternativo  
 con  $H = 20$   $\lambda = 0.1$   $\gamma = 0.1$   $r = 0.03$   $\mu_0 = 0.05$   $\mu_1 = 0.08$   $\sigma = 0.3$   
 $a = 0.02$   $x = 0.8$   $\eta = 0.8$   $\beta = 0.8$   $k = 0.8$

Questo grafico ci mostra che per entrambi gli stati della catena la strategia ottima risulta essere distante dalla strategia senza regime switching. Nello specifico nel caso bad state la strategia con regime switching risulta inferiore a quella del caso costante e inoltre più alto è il tasso di transizione  $q$  più la strategia risulta conservativa. Ciò significa che quando il manager si trova nel bad state investe meno nel titolo rischioso se reputa probabile il passaggio al good state perché è tanto meno conveniente assumere più rischio nel bad state quanto più è probabile lo switch verso il good state. Inoltre sempre nel bad state si vede che all'aumentare del valore del fondo  $W$  la strategia  $\theta^0$  risulta crescente. Ciò è dovuto al fatto che l'avvicinarsi al valore massimo riduce l'importanza dello switch di conseguenza il manager è indotto a seguire una strategia più simile a quella del caso costante. Nel good state avviene un fenomeno contrario al precedente cioè quando il manager è sottoposto a una situazione di regime switching tende a prendere maggiore rischio rispetto al caso standard ( $q = 0$ ) questo avviene per ogni livello di tasso di transizione  $q$  e inoltre all'aumentare di questo tasso il manager è portato a un fenomeno di risk-shifting più grande, aumentando la strategia  $\theta^1$ . Il timore di passaggio al bad state provoca un comportamento più aggressivo del manager che vuole sfruttare la situazione positiva in cui si trova.

Anche in questo caso la strategia  $\theta^1$  non è costante con il valore del fondo  $W$  ma risulta decrescente in questa variabile, cioè quando il valore del fondo si avvicina al valore di high-water mark  $H$ . Questo fenomeno accade perché quando il valore del fondo cresce il manager è più vicino all'obiettivo di ottenere la performance fee e



quindi il timore in riferimento al fenomeno di switching verso il bad state si riduce in maniera significativa.

Inoltre vediamo in Figura 5.2 come il posizionamento delle strategie dipenda molto dal valore dei parametri. Infatti nel grafico si nota come aumentando la rischiosità a breve termine ( $\gamma$  e  $\lambda$ ) le strategie del good state sono tutte al di sotto di quelle del bad state. Questo è dovuto al posizionamento delle strategie costanti che con questo set di parametri sono molto più distaccate.

## 5.4 Statica Comparata

In questa sezione analizziamo come la soluzione trovata si comporta al variare dei parametri. Studiamo principalmente l'impatto dei flow fund e della management fee sui comportamenti del manager. Di conseguenza risolveremo il precedente algoritmo iterativo facendo variare uno alla volta i seguenti parametri del modello  $a, x, \eta$ .

Quindi osservando i seguenti grafici possiamo trarre delle conclusioni su come una variazione di questi parametri possa modificare la strategia del manager in entrambi gli stati dell'economia.

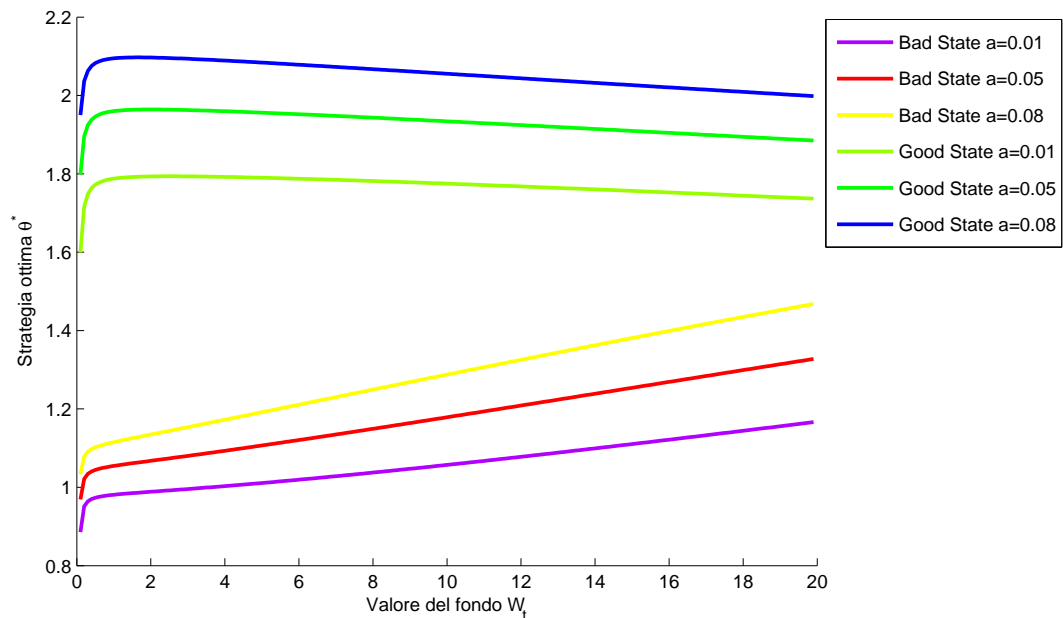


Figura 5.3: Modello con Regime Switching: Strategie ottima  $\theta^0, \theta^1$  al variare di  $W_t$  per valori differenti di  $a$

Partiamo col descrivere, osservando la Figura 5.3, l'influenza che ha la management fee dipendente dal parametro  $a$  nelle strategie del manager. Infatti notiamo che all'aumentare del parametro in questione il manager tende ad assumere maggiore rischio investendo una quota maggiore nel titolo rischioso  $S_t$ . Questo accade allo stesso modo in entrambi gli stati dell'economia di conseguenza possiamo dire che un aumento della management fee comporta un aumento del rischio del fondo gestito dal manager. Questo risultato è coerente con i risultati ottenuti in precedenza in tutti i modelli studiati. La strategia costante senza regime switching anch'essa è crescente in entrambi gli stati dell'economia e si posiziona come visto nella soluzione generale in Figura 5.1. Inoltre notiamo che un aumento di  $a$  non modifica l'andamento delle strategie ottime  $\theta^0, \theta^1$  rispetto al valore del fondo  $W_t$ . Difatti come visto nella soluzione generale otteniamo che nel bad state la strategia  $\theta^0$  cresce con  $W_t$  mentre la strategia del good state risulta decrescente con questa variabile. Quindi il cambiamento di questo parametro non influenza l'andamento delle soluzioni dovuto alla presenza del regime switching.

Ora descriviamo l'impatto del fee weight  $x$  sui comportamenti del manager. Per

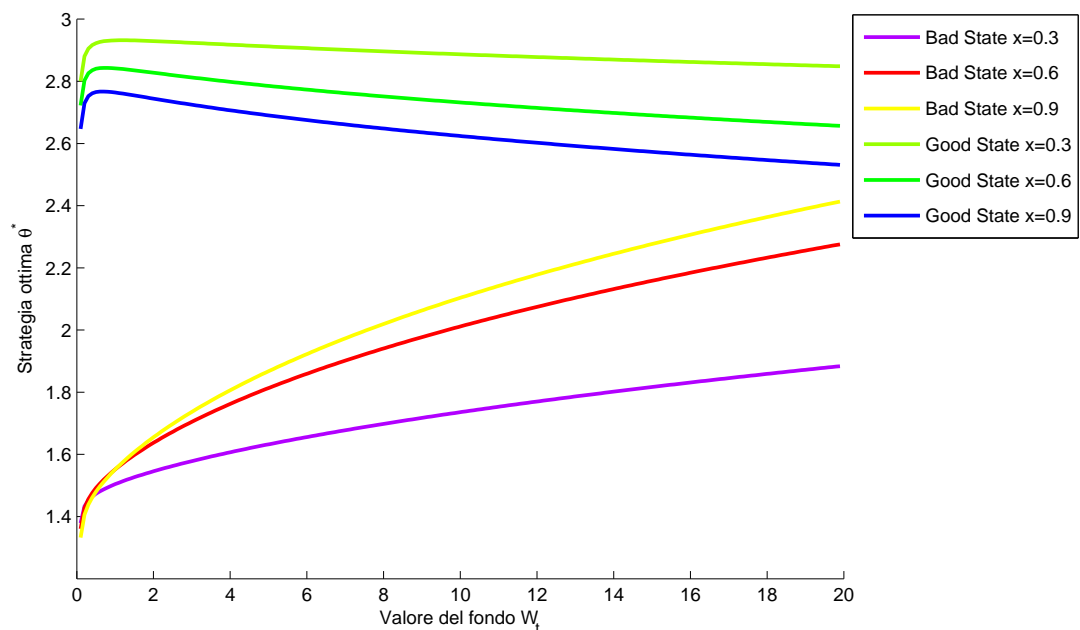


Figura 5.4: Modello con Regime Switching: Strategie ottima  $\theta^0, \theta^1$  al variare di  $W_t$  per valori differenti di  $x$

fare ciò ci riferiamo alla Figura 5.4 in cui osserviamo che gli effetti del cambiamento del parametro  $x$  sono differenti in base allo stato dell'economia in cui si trova il manager del fondo. Infatti se siamo nel bad state la strategia  $\theta^0$  risulta crescente con il parametro che determina l'importanza della performance fee rispetto alla manage-

ment fee. Questo fenomeno risulta differente dalle conclusioni tratte nei precedenti modelli dove l'andamento di  $\theta$  era sempre decrescente con il parametro  $x$ . Quindi possiamo concludere che la presenza del regime switching, il fatto che la management sia contenuta ( $a = 0,01$ ) e il fatto di trovarsi nel bad state dell'economia porta il manager a variare le sue reazioni rispetto al parametro  $x$ .

Mentre quando il manager è nel good state i suoi comportamenti non mutano rispetto al modello standard e ai precedenti, quindi egli ritorna a essere più conservativo quando la performance fee assume maggiore importanza. Inoltre la soluzione senza possibilità di switch resta, come in precedenza, al di sopra del caso variabile nel bad state viceversa nel caso good state. Infine notiamo che, come per il parametro  $a$ , cambiare il parametro  $x$  non provoca effetti sull'andamento della strategia rispetto  $W_t$  causato dalla presenza del regime switching.

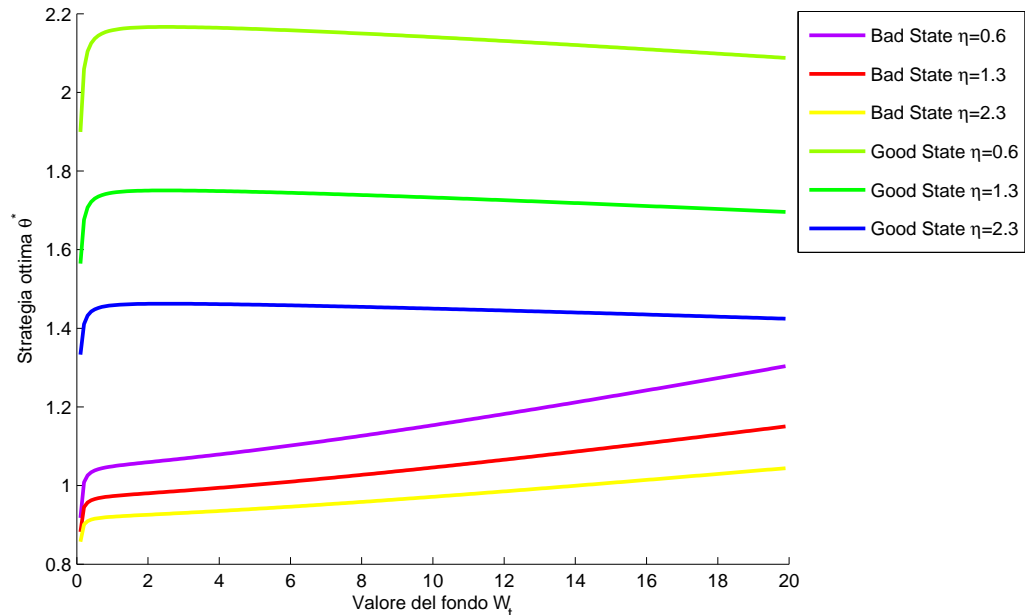


Figura 5.5: Modello con Regime Switching: Strategie ottima  $\theta^0, \theta^1$  al variare di  $W_t$  per valori differenti di  $\eta$

Approfondiamo ora l'impatto dei flow fund in questo modello con regime switching. Vediamo come il parametro  $\eta$  che caratterizza l'importanza degli inflow/outflow nelle dinamiche del fondo  $W_t$  influenza i comportamenti e le scelte del manager. In Figura 5.5 notiamo come in entrambi gli stati dell'economia il manager tende ad essere più conservativo quando l'importanza dei flow fund aumenta. Questo è in accordo con i risultati trovati in precedenza e come già detto dipende dal fatto che se i flow fund assumono maggiore importanza il manager è portato ad assumere un atteggiamento più conservativo per non incorrere in performance negative che

provocherebbero ingenti outflow. Di conseguenza per raggiungere i propri obiettivi cioè ottenere una performance fee più elevata possibile decide di investire una quota minore nel titolo rischioso  $S_t$  quando nota che i flow fund sono diventati molto importanti per l'economia del fondo gestito. Si ottiene lo stesso andamento anche per le strategie senza regime switching, le quali si posizionano rispetto a quelle variabili come in Figura 5.1.

Come nelle precedenti analisi l'andamento dovuto al fenomeno di regime switching non dipende in maniera sostanziale da questo parametro del modello.

Parametri	Figura		
	5.3	5.4	5.5
$\gamma$	0,03	0,05	0,03
$\lambda$	0,03	0,05	0,03
$r$	0,03	0,03	0,03
$\mu_0$	0,05	0,05	0,05
$\mu_1$	0,08	0,08	0,08
$\sigma$	0,3	0,3	0,3
$\eta$	1,2	1,2	[0,61,32,3]
$\beta$	0,8	0,8	0,8
$a$	[0,010,050,08]	0,01	0,01
$x$	0,8	[0,30,60,9]	0,8
$H$	20	20	20
$k$	0,8	0,8	0,8
$q$	0,2	0,2	0,2

Tabella 5.1: Parametri della statica comparata del Modello con Regime Switching

## Capitolo 6

# Varianti del modello

In questo capitolo analizziamo delle varianti alle ipotesi teoriche poste in precedenza. Nella prima variante verifichiamo come un diverso modello per i flow fund impatta sui comportamenti del manager del fondo. Una seconda variante consiste nell'introdurre le preferenze del manager in un contesto temporale infinito. La funzione utilità con le preferenze del manager è stata introdotta nel capitolo 2 ma in un contesto temporale finito. Questa differenza ci porterà a trovare risultati diversi in questa sezione.

### 6.1 Flow fund basato su rendimenti logaritmici

In questa sezione analizziamo un modello in cui descriviamo l'aspetto dei flow fund in maniera differente. Mentre in tutto lo studio i flussi di capitale dipendevano dalla performance relativa rispetto al benchmark  $Y_t$ , in questo capitolo proviamo a considerare la differenza tra rendimenti logaritmici dei due fondi a confronto. Consideriamo uno schema retributivo inalterato rispetto ai capitoli precedenti formato da una management fee e da una performance fee dipendente dal contratto di high-water mark.

#### 6.1.1 Descrizione del modello matematico

Consideriamo quindi un economia con un titolo rischioso  $S_t$  e un titolo privo di rischio  $B_t$  descritti come in precedenza.<sup>1</sup> Di conseguenza il manager investendo in questi titoli ottiene il valore del fondo  $F_t$  che segue la dinamica

$$dF_t = F_t(r + \theta_t(\mu - r))dt + F_t\theta_t\sigma dZ_t$$

---

<sup>1</sup>Consideriamo il seguente spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  e lo ipotizziamo completo

mentre il fondo benchmark seguendo la strategia costante  $\beta$  ha una dinamica

$$dY_t = Y_t(r + \beta(\mu - r))dt + Y_t\beta\sigma dZ_t$$

quindi possiamo descrivere la dinamica dei flow fund nel seguente modo

$$dG(F_t, Y_t) = \eta \left( d \log \left( \frac{F_t}{F_0} \right) - d \log \left( \frac{Y_t}{Y_0} \right) \right)$$

poniamo senza perdita di generalità  $F_0 = Y_0$ . Di conseguenza il valore del fondo complessivo dei flow fund e delle detrazioni dovute ai compensi del manager ha dinamica

$$dW_t = W_t \left[ r - (1-x)a + \theta_t(\mu - r)(1 + \eta) - \eta\beta(\mu - r) - \eta \frac{\sigma^2}{2} (\theta_t^2 - \beta^2) \right] dt \\ + W_t \sigma \left[ (1 + \eta)\theta_t - \eta\beta \right] dZ_t - xkdH_t$$

dove  $H_t$  è il processo di high-water mark come descritto in precedenza.

### 6.1.2 Problema di ottimizzazione

Descriviamo il problema di ottimo che andremo a risolvere in questa sezione. Considerando come detto uno schema retributivo completo, possiamo considerare che l'obiettivo del manager sarà quello di ottimizzare il proprio NPV dovuto ai compensi ricevuti dal fondo. Analizziamo come in precedenza un pagamento del manager a tempo continuo ipotizzando che il manager abbia come unica entrata quella dovuta al compenso e non possa reinvestire in un fondo privato.

Quindi definiamo la funzione  $V(W, H)$  come la funzione valore del manager definito come segue

$$V(W, H) = \max_{\theta_t} \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge \infty} e^{-(\lambda + \gamma)t} \left( xkdH_t + (1-x)aW_t dt \right) \right]$$

dove  $a$  caratterizza la management fee e  $k$  la performance fee mentre  $x$  descrive l'importanza delle fee dovuta al raggiungimento del high-water mark rispetto al compenso regolare. Le altre variabili  $\lambda, \gamma, \tau_0$  svolgono lo stesso ruolo svolto nei precedenti modelli.

### 6.1.3 Risoluzione

Analizziamo il problema prima nella regione in cui  $\{W = H\}$ , in questa zona si ottiene la relazione seguente

$$V_H = x k V_W - x k$$

Mentre nella regione in cui  $\{W < H\}$  attraverso l'equazione di HJB otteniamo la seguente relazione alle derivate parziali

$$0 = V_t + \max_{\theta_t} \left\{ V_W W \left[ r - (1-x)a + (1+\eta)(\mu-r)\theta_t - \eta\beta(\mu-r) - \eta \frac{\sigma^2}{2} (\theta_t^2 - \beta^2) \right] + \frac{\sigma^2}{2} V_{WW} W^2 \left[ \theta_t(1+\eta) - \eta\beta \right]^2 \right\} \quad (6.1)$$

Ipotizzando che esista una soluzione del problema di ottimo in (6.1) allora annullando la derivata prima otteniamo la seguente strategia ottima

$$\theta_t^* = \frac{V_{WW} W_t^2 \sigma^2 (1+\eta) \eta \beta - V_W W (1+\eta) (\mu-r)}{\sigma^2 [V_{WW} W_t^2 (1+\eta)^2 - V_W W_t \eta]}$$

Per risolvere il problema differenziale in (6.1) ipotizziamo la seguente guess solution

$$V(W, H) = P(H) W^\alpha$$

Sostituendola nella strategia ottima troviamo

$$\theta_t^* = \frac{(1+\eta) \left[ (1-\alpha) \eta \beta + \frac{\mu-r}{\sigma^2} \right]}{\eta + (1-\alpha)(1+\eta)^2} \quad (6.2)$$

Possiamo vedere che anche in questo caso la strategia ottima si può dividere in una parte simile alla soluzione di Merton in [12] e in una seconda parte dipendente dai flow fund. In questo caso non si può distinguere facilmente l'effetto della variabile  $\alpha$  come nei modelli precedenti, comunque essa influenza le strategie del manager. Per ricavare il valore dell'incognita  $\alpha$  sostituiamo la guess solution e la strategia

ottima nell'equazione (6.1). Si ottiene il seguente polinomio di terzo grado in  $\alpha$

$$\begin{aligned} & \alpha^3 \left( (1 + \eta)^4 (r - (1 - x)a) + \frac{\sigma^2 \beta^2 \eta}{2} (1 + \eta)^2 (1 + 2\eta) \right) \\ & + \alpha^2 \left( \frac{\sigma^2 \beta^2 \eta}{2} (\eta^3 - \eta(1 + 2\eta)(1 + \eta)^2 - (1 + \eta)^4) + \eta^2 \beta (\mu - r)(1 + \eta)^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} (1 + \eta)^4 - 2(r - (1 - x)a)(\eta + (1 + \eta)^2)(1 + \eta)^2 - (\gamma + \lambda)(1 + \eta)^4 \right) \\ & + \alpha \left( (\eta + (1 + \eta)^2)^2 \left[ \frac{\sigma^2 \beta^2 \eta}{2} + r - (1 - x)a \right] \right. \\ & \quad \left. + (\eta + (1 + \eta)^2) \left[ \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} (1 + \eta)^2 - \eta^2 \beta (\mu - r) \frac{\sigma^2 \beta^2 \eta^3}{2} + 2(\gamma + \lambda)(1 + \eta)^2 \right] \right) \\ & - (\gamma + \lambda)(\eta + (1 + \eta)^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Risolvendo questo polinomio con la funzione `roots` otteniamo il valore incognito  $\alpha$  simulando dei set di parametri plausibili in base al tipo di variabili. Quindi tra le tre radici trovate scegliamo la radice reale con valore compreso tra  $(0, 1)$ .

Ora passiamo ad analizzare il problema nella regione di bordo, sostituendo la guess solution nella condizione (2.3) otteniamo

$$P'(H) = xk \left( \frac{\alpha P(H)}{H} - \frac{1}{H^\alpha} \right)$$

per risolvere questa ODE poniamo la seguente condizione sui parametri

$$\alpha(1 + xk) > 1$$

quindi la soluzione dell'equazione differenziale risulta essere

$$P(H) = \left[ \frac{xk}{\alpha(1 + xk) - 1} H^{1 - (1 + xk)\alpha} + C \right] H^{\alpha xk}$$

su un orizzonte infinito  $C = 0$ , quindi la funzione valore del manager risulta essere

$$V(W, H) = \frac{xkH}{\alpha(1 + xk) - 1} \left( \frac{W}{H} \right)^\alpha$$

Di conseguenza otteniamo la stessa forma funzionale dei modelli precedenti in cui la variabile  $\alpha$  è ottenuto attraverso una diversa risoluzione e composizione dei parametri. Quindi nella prossima sezione andiamo ad analizzare le soluzioni ottime trovate al variare dei parametri del modello.



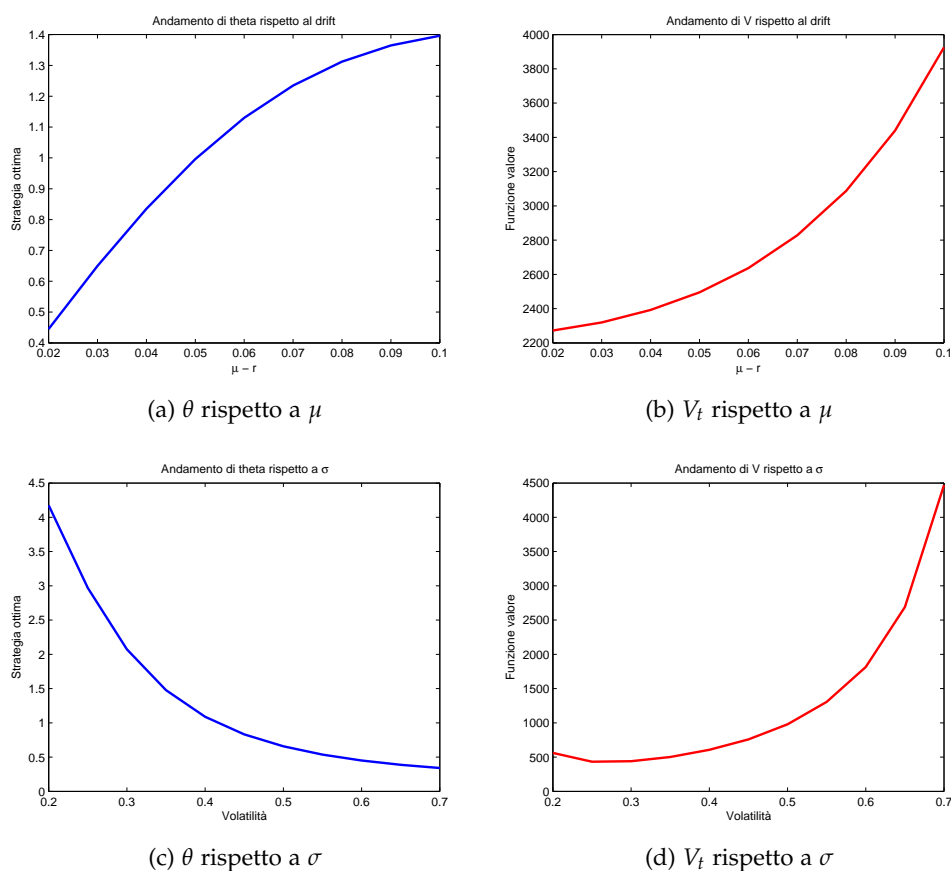


Figura 6.1: Modello con Flow fund alternativo:  $V_t$  e  $\theta^*$  rispetto ai parametri  $\mu$  e  $\sigma$

#### 6.1.4 Statica Comparata

In questa sezione analizziamo come si comportano le soluzioni ottime trovate al variare dei parametri del modello in questione. Per fare questo simuliamo un set di parametri realistici che rispetti le condizioni poste nella risoluzione.

Nei grafici (a) e (b) della Figura 6.1 vediamo che le soluzioni ottime sono crescenti rispetto al drift  $\mu$  del titolo rischioso  $S_t$ , questo è differente dai risultati ottenuti in precedenza soprattutto nella strategia ottima non si nota più l'aumento dell'avversione al rischio implicita che in precedenza superava l'effetto attrattivo dell'aumento del drift del titolo. Questo non avviene in questo caso e si nota quindi un effetto classico riscontrato in molti studi cioè un comportamento del manager che aumenta la quota  $\theta$  quando il premio per il rischio diventa più grande. Notiamo anche che questo andamento dipende fortemente dal set di parametri che imponiamo nella simulazione. Ad esempio come illustrato nel grafico (a) in Figura 6.2 ponendo a zero sia la management fee che i flow fund otteniamo un andamento decrescente. Ci aspettiamo questo risultato in quanto con queste imposizioni torniamo al caso

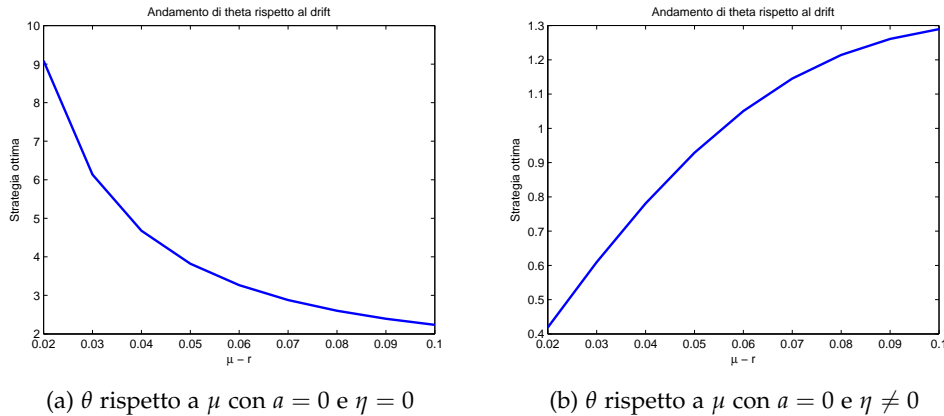


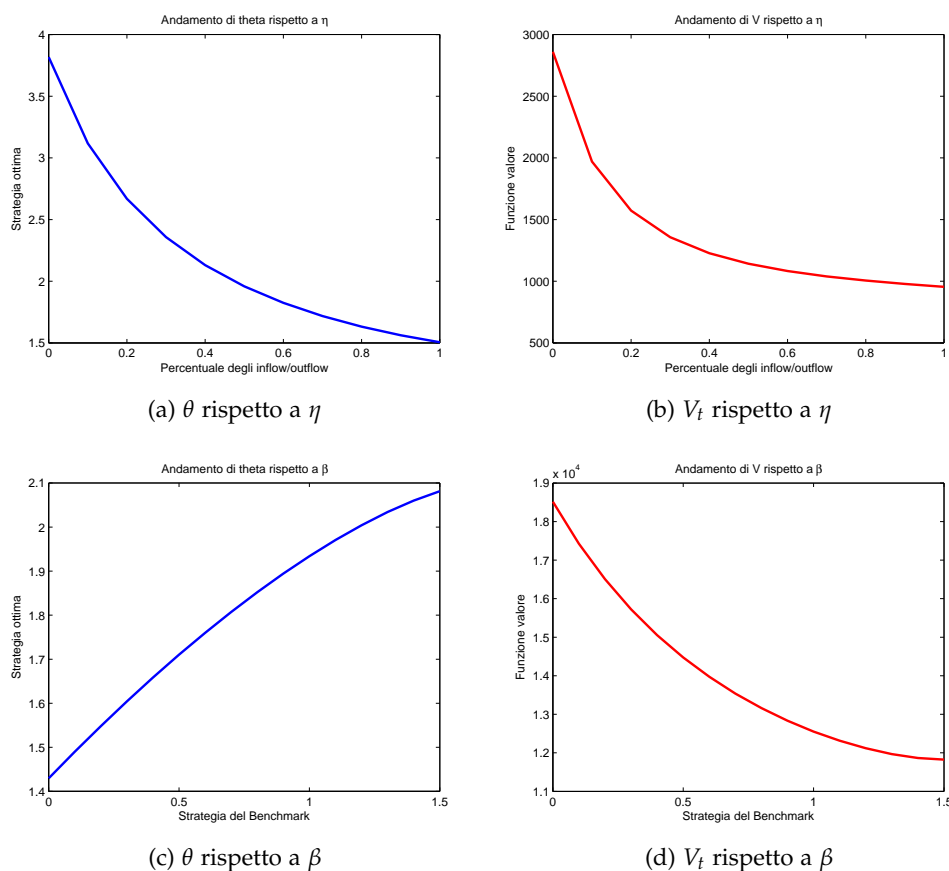
Figura 6.2: Modello con Flow fund alternativo:  $\theta^*$  rispetto a  $\mu$  in differenti set di parametri

Parametri	Figura					
	6.1 a&b e 6.2 a&b	6.1 c&d	6.3 a&b	6.3 c&d	6.4 a&b	6.4 c&d
$\gamma$	0,05	0,07	0,04	0,05	0,04	0,05
$\lambda$	0,05	0,08	0,03	0,05	0,03	0,05
$r$	0,01	0,01	0,03	0,03	0,03	0,03
$a$	0,03	0,04	0,03	0,01	$0 \div 0,1$	0,03
$x$	0,5	0,7	0,8	0,8	0,8	$0,3 \div 1$
$\mu$	$0,03 \div 0,11$	0,07	0,065	0,09	0,08	0,08
$\sigma$	0,5	$0,2 \div 0,7$	0,2	0,2	0,2	0,2
$\eta$	0,2	0,2	$0 \div 1$	1,3	1,2	1,2
$\beta$	0,3	1	0,2	$0 \div 1,5$	0,2	0,5
$k$	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
$H$	$10^4$	$10^4$	$10^4$	$10^4$	$10^4$	$10^4$

Tabella 6.1: Parametri Modello con flow fund alternativo

di Panageas-Westerfield in [1] in cui l'aumento dell'avversione al rischio implicito domina l'effetto attrattivo dovuto all'aumento del drift del titolo rischioso. Nel grafico (b) vediamo che l'introduzione dei flow fund fa diminuire l'avversione al rischio del manager che provoca una crescita della strategia  $\theta^*$ . Possiamo concludere che una modellizzazione alternativa dei flow fund provoca una minore crescita dell'avversione al rischio implicita del manager rispetto all'ipotesi sui flow fund fatta negli altri capitoli. Mentre la funzione valore resta comunque crescente perché un drift maggiore favorisce il manager nell'aumentare il suo NPV.

Nei grafici (c) e (d) vediamo l'andamento classico di  $\theta^*$  e  $V(W, H)$  rispetto alla volatilità  $\sigma$ . Infatti come in tutti i modelli un aumento del rischio provoca nel manager un atteggiamento più prudente e una conseguente diminuzione della funzione


 Figura 6.3: Modello con Flow fund alternativo:  $V_t$  e  $\theta^*$  rispetto ai parametri  $\eta$  e  $\beta$ 

valore.

I grafici (a) e (b) della Figura 6.3 mostrano un andamento decrescente delle soluzioni rispetto alla percentuale dei flow fund  $\eta$ . Nonostante si sia ipotizzata una dinamica dei flow fund differente dal resto dello studio si nota lo stesso comportamento delle soluzioni ottime. Dobbiamo precisare che questo andamento dipende dal set di parametri che andiamo a considerare infatti il suddetto andamento è valido se vale

$$\left( (1 - \alpha)\eta\beta + \frac{\mu - r}{\sigma^2} + (1 + \eta) \left[ \beta(1 - \alpha) - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \eta \beta \right] \right) \text{Den} - \left( 1 + 2(1 - \alpha)(1 + \eta) - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} (1 + \eta)^2 \right) \text{Num} < 0$$

dove Den e Num sono rispettivamente il denominatore e il numeratore della strategia ottima in (6.2). Si nota inoltre lo stesso andamento della strategia ottima per valori limite di  $\eta$  (cioè  $\eta \rightarrow \infty$ ). Si vede che la strategia quando l'importanza dei flow fund aumenta va verso la strategia del benchmark  $\beta$  come riscontrato anche

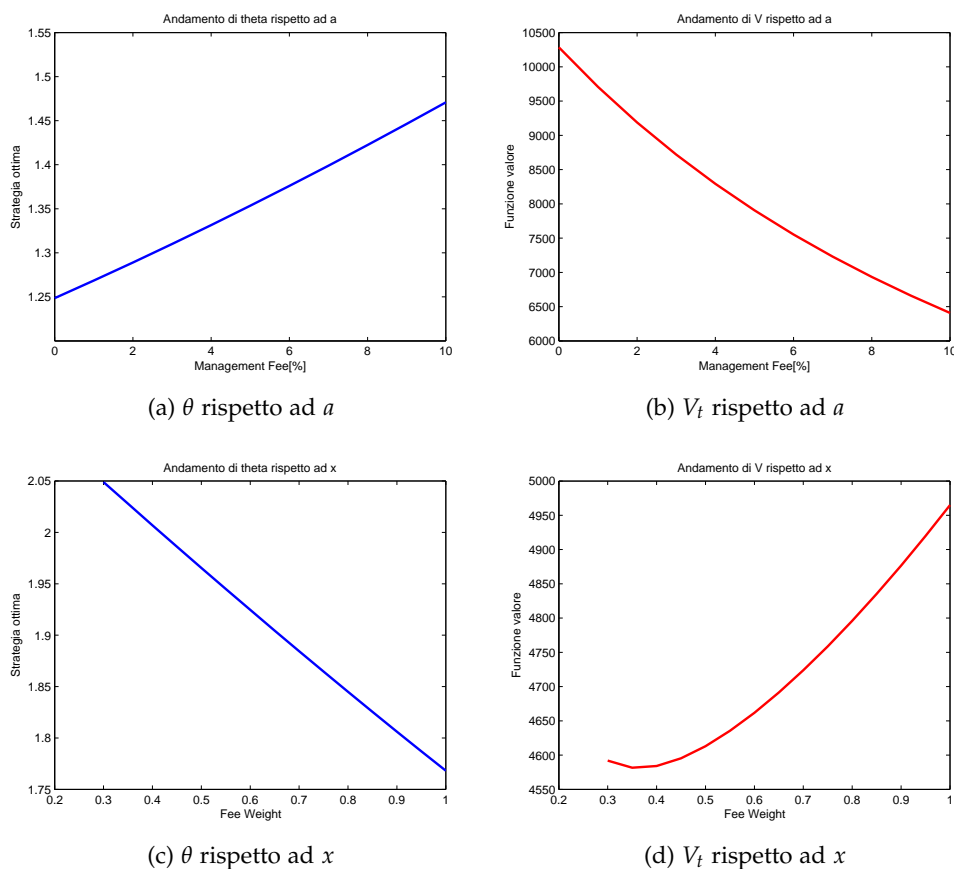


Figura 6.4: Modello con Flow fund alternativo:  $V_t$  e  $\theta^*$  rispetto ai parametri  $a$  e  $x$

negli altri modelli. Questo comportamento avviene a causa del timore del manager di ottenere performance negative rispetto a  $Y_t$  e ottenere dei outflow molto importanti.

Nei grafici (c) e (d) si vede come la strategia ottima e la funzione valore si comportano rispetto alla strategia del benchmark  $\beta$ . Gli andamenti riscontrati in questo modello sono coerenti ma solo sotto la seguente condizione sui parametri

$$\eta(1 - \alpha)\text{Den} + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \left( \frac{\mu - r}{\sigma^2} (1 + \eta)^2 - \eta^2 \beta \right) > 0$$

dove Den è il denominatore della strategia ottima in (6.2). Notiamo quindi se consideriamo un set di parametri per cui non vale la condizione allora l'andamento non univoco o crescente, questo fatto è dovuto alla peculiarità di questo modello cioè la presenza di flow fund basati su rendimenti logaritmici rispetto al benchmark. La funzione valore risulta crescente, a differenza dei modelli precedenti, perché se ci si discosta dal benchmark si può avere delle performance relative maggiori e quindi ottenere maggiori inflow.

Nei grafici (a) e (b) della Figura 6.4 si vede l'andamento rispetto alla percentuale della management fee  $a$ . Si osserva un andamento crescente della strategia ottima del manager anche se il suo impatto è molto ridotto rispetto ai precedenti casi. Questo è dovuto al fatto che l'influenza del parametro  $a$  risulta debole ma nonostante questo possiamo dire che un aumento della management fee comporta una riduzione dell'avversione al rischio del manager implicita. Mentre la funzione valore resta decrescente quando la percentuale  $a$  aumenta, ciò è dovuto al pagamento della management fee e dell'aumento dell'esposizione al rischio del fondo.

I grafici (c) e (d) mostrano il comportamento delle soluzioni ottime rispetto al peso  $x$  che caratterizza l'importanza della performance fee rispetto alla management fee. La strategia ottima risulta decrescente quando la performance fee diventa più importante questo è concorde al fatto che se la management fee aumenta il suo impatto il manager è portato a investire di più nel titolo rischioso  $S_t$  come abbiamo già verificato nei precedenti modelli. Mentre la funzione valore è crescente perché una aumento di  $x$  ha un effetto positivo diretto sulla funzione  $V_t$  ma anche implicitamente attraverso la diminuzione dell'importanza della management fee. Ovviamente dobbiamo supporre che esista una quota minima della performance fee (cioè  $x \geq 0.3$ ) perché altrimenti non risulta più valida la condizione  $\alpha(1 + xk) > 1$  che rende finita e positiva la funzione valore del manager.

## 6.2 Avversione al rischio e orizzonte infinito

In questa sezione cerchiamo di analizzare il caso in cui il manager può essere avverso al rischio o amante del rischio questo rende più realistiche le preferenze del manager che di solito si traducono in un agente avverso al rischio. Inoltre a differenza delle analisi ipotizziamo che l'orizzonte temporale del manager sia infinito. Di conseguenza, ispirandoci al paper [1], trattiamo i compensi ricevuti dal manager come beni duraturi che egli possiede su un orizzonte infinito e quindi poniamo come funzione obiettivo la massimizzazione di questi rispetto la sua funzione utilità. Come ipotesi definiamo le preferenze del manager attraverso una funzione utilità CRRA

$$U(Z) = \frac{Z^{1-\delta}}{1-\delta} \quad (6.3)$$

dove  $\delta \in (0, 1)$  è il coefficiente relativo di avversione al rischio del manager. Prendiamo come modello matematico quello descritto in precedenza nel Capitolo 2. Risolviamo questo tipo di problema nel caso in cui il manager del fondo abbia come schema retributivo solo la performance fee derivante dal contratto di high-water mark.

### 6.2.1 Problema di ottimizzazione

Definiamo il processo  $G_t$  come il processo dei beni posseduti dal manager e il suo differenziale come

$$dG_t = k dH_t \quad (6.4)$$

e la funzione obiettivo del manager come

$$J = \max_{\theta_s} \mathbb{E} \left[ \int_t^\infty e^{-\gamma s} U(G_s) ds \right] \quad (6.5)$$

dove  $U$  è la funzione utilità del manager, il parametro  $\gamma$  ha lo stesso significato visto in precedenza e il valore atteso è condizionato rispetto alla filtrazione  $\mathcal{F}_t$ . Se applichiamo l'integrazione per parti all'integrale presente nella formula (6.5) otteniamo

$$J = \frac{U(G_0)}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \max_{\theta_s} \mathbb{E} \left[ \int_t^\infty e^{-\gamma s} U'(G_s) dG_s \right] \quad (6.6)$$

Nella parte destra dell'equazione (6.6) il primo addendo rappresenta l'utilità del manager derivante dai beni che possiede inizialmente mentre il secondo rappresenta l'utilità derivante dai compensi futuri del manager ed è proprio quello che ci

interessa descrivere quindi definiamo

$$\begin{aligned} V(W_t, H_t) &= \max_{\theta_s} \mathbb{E} \left[ \int_t^\infty e^{-\gamma s} U'(G_s) dG_s \right] \\ &= \max_{\theta_s} \mathbb{E} \left[ \int_t^\infty e^{-\gamma s} U'(G_0 + k(H_s - H_0)) k dH_s \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

### 6.2.2 Risoluzione

Ora procediamo alla risoluzione come fatto nei precedenti modelli attraverso l'equazione di HJB ricordando che  $V_t = -\gamma V$  otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= -\gamma V + \max_{\theta_t} \left\{ V_W W_t \left[ r + (1 + \eta)(\mu - r)\theta_t - \eta\beta(\mu - r) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{WW} W_t^2 \left[ \theta_t(1 + \eta) - \eta\beta \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

ipotizzando l'esistenza della strategia ottima  $\theta_t^*$ , annullando la derivata prima rispetto a  $\theta$  otteniamo la strategia riportata in (2.5) e ponendo come guess solution (2.7) otteniamo una strategia ottima  $\theta^*$  della stessa forma vista in precedenza cioè

$$\theta_t^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \eta\beta + \frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2} \right)$$

dove  $\alpha$  è soluzione di un'equazione simile alla (2.9) in cui il parametro  $\lambda = 0$ . Come si può facilmente notare le preferenze del manager (e quindi il parametro  $\delta$ ) non compaiono nella strategia ottima del manager. Questo perché l'obiettivo del manager viene implicato solo da un fattore temporale, cioè da quando il manager raggiunge l'high-water mark e non da in che modo si comporta per raggiungerlo. Per studiare l'andamento della funzione valore  $V$  nella regione  $\{W_t = H_t\}$  procediamo con la stessa logica e otteniamo

$$\begin{aligned} V(H_t, H_t) &= U'(G_0 + k(H_t - H_0)) k dH_t + V(H_t - k dH_t, H_t + dH_t) \\ &= U'(G_0 + k(H_t - H_0)) k dH_t + V(H_t, H_t) - k V_W dH_t + V_H dH_t \end{aligned} \quad (6.9)$$

semplificando l'equazione (6.9) si ottiene l'equazione differenziale

$$k V_W = k U'(G_0 + k(H_t - H_0)) + V_H \quad (6.10)$$

Sostituendo la guess solution (2.7) otteniamo la seguente ODE

$$P'(H_t) = k \left( \frac{\alpha P(H_t)}{H_t} - \frac{[G_0 + k(H_t - H_0)]^{-\delta}}{H_t^\alpha} \right) \quad (6.11)$$

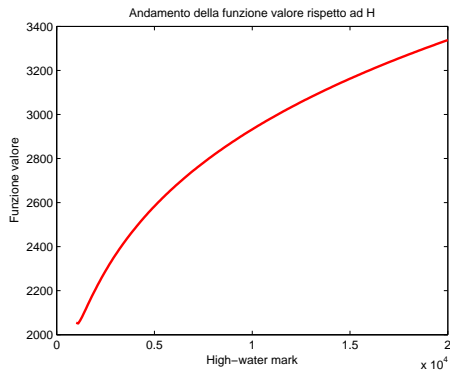
la cui soluzione è

$$P(H_t) = k^{1-\delta} \left( \int_{H_t}^{\infty} x^{-\alpha(1+k)} \left( x - H_0 + \frac{G_0}{k} \right)^{-\delta} dx \right) H^{\alpha k} \quad (6.12)$$

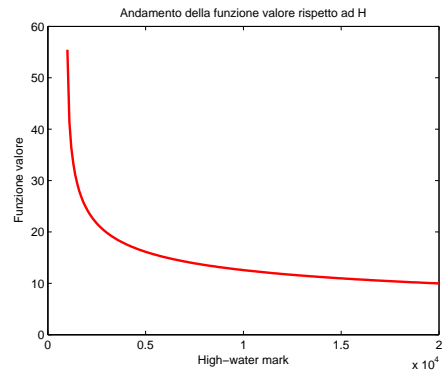
Con (6.12) possiamo verificare che  $V = P(H_t)W_t^\alpha$  sia la funzione valore ottima sotto la ulteriore condizione

$$\delta + \alpha(1+k) - 1 > 0$$

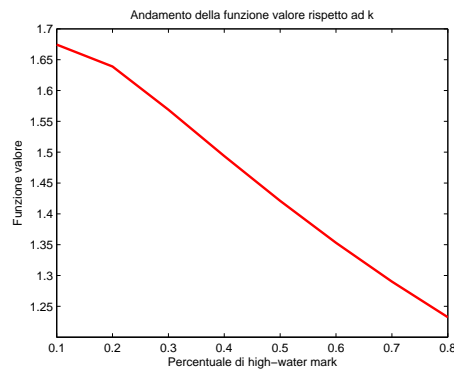
che si ottiene come per la condizione (2.11) ed è necessaria per rendere la soluzione ben definita e finita.



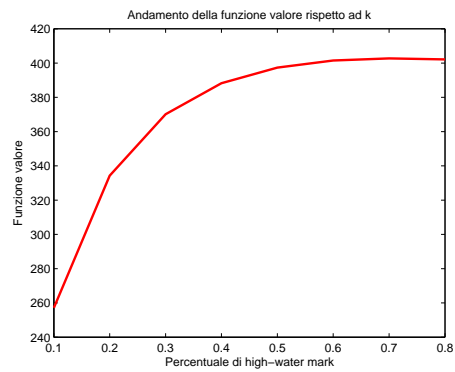
(a)  $V_t$  rispetto a  $H_t$  con  $\delta = 0,2$



(b)  $V_t$  rispetto a  $H_t$  con  $\delta = 0,7$



(c)  $V_t$  rispetto a  $k$  con  $\delta = 0,9$



(d)  $V_t$  rispetto a  $k$  con  $\delta = 0,3$

Figura 6.5: Avversione al rischio:  $V_t$  rispetto a  $H_t$  e  $k$  con due coefficienti di avversione al rischio differenti



Parametri	Figura			
	6.5 a	6.5 b	6.5 c	6.5 d
$\gamma$	0,04	0,04	0,1	0,1
$r$	0,03	0,03	0,03	0,03
$\mu$	0,08	0,08	0,05	0,05
$\sigma$	0,3	0,3	0,8	0,8
$\eta$	1,2	1,2	1,2	1,2
$\beta$	0,8	0,8	0,8	0,8
$k$	0,8	0,8	$0,1 \div 0,8$	$0,1 \div 0,8$
$H$	$10^3 \div 2 * 10^4$	$10^3 \div 2 * 10^4$	$10^4$	$10^4$
$W$	$5 * 10^3$	$5 * 10^3$	$8 * 10^3$	$8 * 10^3$
$H_0$	$10^3$	$10^3$	$10^3$	$10^3$
$G_0$	10	10	10	10
$\delta$	0,2	0,7	0,9	0,3

Tabella 6.2: Parametri dell'Avversione al rischio a tempo infinito

### 6.2.3 Statica Comparata

In questa sezione andiamo ad analizzare l'andamento della funzione valore rispetto ai suoi parametri caratteristici. Si nota che la funzione valore risulta essere decrescente con il coefficiente di avversione al rischio  $\delta$  questo è coerente sia con i risultati economici che con le analisi da noi fatte in precedenza in presenza di preferenze del manager. Questo fenomeno è dovuto al fatto che un manager più avverso al rischio assumerà dei comportamenti che lo porteranno a un minore rischio e di conseguenza a un minore NPV dei beni duraturi descritti dal processo  $G_t$ .

Se analizziamo l'andamento di  $V(W_t, H_t)$  rispetto al processo di high-water mark notiamo che in questo caso se il  $\delta$  è abbastanza alto allora  $V_H < 0$  contrariamente al risultato mostrato in precedenza. Questo è dovuto al fatto che nelle analisi precedenti imponendo la neutralità al rischio del manager, il manager era interessato ad aumentare il suo compenso il più possibile. In questo caso ipotizzando un manager fortemente avverso al rischio questo *effetto di scala* non si riscontra più ma risulta dominante l'effetto attenuante dovuto al fattore temporale come si può riscontrare nel grafico (b) della Figura 6.5. Mentre se il coefficiente di avversione al rischio ha valori contenuti come nel grafico (a) notiamo un andamento simile ai casi precedenti cioè la funzione valore risulta crescente con il valore del high-water mark  $H_t$ . Nei grafici (c) e (d) vediamo che l'andamento rispetto al parametro  $k$  della funzione valore cambia in base al livello di avversione al rischio del manager. Notiamo infatti che se valgono le seguenti condizioni sui parametri

$$kH_0 > G_0 \quad \text{e} \quad \sqrt{\alpha k} < \frac{\alpha}{2}(1+k) < 1$$

se l'avversione al rischio è ad un livello abbastanza alto la funzione valore risulta decrescente con la percentuale della performance dovuta al contratto di high-water mark mentre se il manager è meno avverso al rischio come nel grafico (d) allora l'andamento risulta essere crescente con il parametro  $k$  in maniera monotona. Questo risulta differente da quello che accadeva nel caso in cui il manager veniva considerato neutrale al rischio in cui l'andamento era puramente decrescente.

# Conclusioni

Nel nostro studio abbiamo analizzato vari modelli per descrivere l'impatto dei contratti high-water mark e dei flow fund in un problema di allocazione ottima da parte di un manager di un fondo di investimenti. In questi modelli descritti ci sono dei risultati coerenti a tutti i modelli e degli altri più peculiari e caratteristici del singolo modello.

Poniamo l'attenzione per prima cosa sull'impatto che ha l'introduzione e la valorizzazione della management fee nei comportamenti del manager. Infatti notiamo che in tutti modelli studiati abbiamo un fenomeno di risk-shifting, di conseguenza un incremento del rischio del fondo, quando l'importanza della fee di gestione diventa preponderante rispetto alla performance fee. Nel nostro caso questo effetto è dato dall'andamento crescente delle strategie ottime  $\theta_t^*$  nei vari modelli all'aumentare del parametro  $a$  e al diminuire del parametro  $x$  che caratterizzano rispettivamente la quota ricevuta come management fee e il peso che ha la performance fee rispetto a quella di gestione.

Questo risultato ci porta a concludere che il manager del fondo assume un atteggiamento meno prudentiale quando la management fee assume maggiore importanza, questo comportamento porterà gli investitori più conservativi a non investire in fondi in cui la performance fee sia preponderante. Un'altra conclusione che si può trarre e che privilegiare la performance fee comporta una inibizione del risk-shifting questo comportamento è coerente con i risultati ottenuti da Panageas-Westerfield in [1]. Tale effetto è dovuto sia all'aspetto temporale che caratterizza i modelli sia dal fatto che avere questo tipo di performance fee porta il manager a non rischiare in maniera incosciente per ottenere i suoi obiettivi cioè raggiungere il valore dell'high-water mark e ottenere maggiori inflow.

Un altro aspetto comune riscontrato in tutti i modelli è l'impatto dei flow fund in questo tipo di contesto. Infatti si riscontra che al crescere dell'importanza dei flow fund nel nostro caso del parametro  $\eta$  si nota un andamento della strategia ottima  $\theta_t^*$  verso la strategia del benchmark  $\beta$ . Questo fatto è comprensibile e se ne può intuire facilmente la motivazione infatti per come è stato descritto il fenomeno dei flow fund quando essi diventano più importanti c'è la necessità da parte del mana-

ger di non incorrere in ingenti outflow che potrebbero provocare gravi perdite per il valore del fondo complessivo  $W_t$ . Quindi per evitare questi eventi negativi il manager assume un atteggiamento prudentiale cercando di imitare il comportamento del benchmark così facendo si evitano eventuali perdite dovute agli outflow degli investitori ma nello stesso tempo si riducono anche le possibilità di crescita dovute agli inflow.

La presenza di flow fund comporta quindi un distanziamento sensibile dalla strategia di Panageas-Westerfield perché comporta una notevole riduzione dell'esposizione al rischio del fondo e un avvicinamento alla strategia del benchmark  $\beta$ .

La presenza delle preferenze del manager, nello specifico un manager più avverso al rischio, porta la strategia ottima a essere più conservativa solo nel caso di orizzonte temporale finito. Se l'orizzonte è infinito la strategia ottima non viene modificata dall'avversione al rischio del manager infatti essa dipende solo dai parametri dell'economia del modello.

Abbiamo notato invece che quando è presente il vincolo di drawdown la strategia ottima non è più costante rispetto al valore del fondo ma dipende dalla distanza dal limite inferiore dovuto al vincolo. Quindi si riconfermano i risultati trovati in [7], quindi possiamo dire che l'introduzione dei flow fund non modificano questo comportamento.

Stesso fenomeno si riscontra nel modello con regime switching in quanto la presenza dei flow fund e della management fee non modifica l'andamento delle soluzioni ottime trovate senza queste componenti.

Possiamo dire concludendo che un fondo il cui valore dipende dai flow fund e in cui la performance fee è prevalente rispetto alla management fee è preferibile da parte degli investitori che vogliono che il manager abbia comportamenti più conservativi in linea con le loro preferenze.

Al contrario un fondo in cui la management fee è preponderante rispetto al contratto di high-water mark provoca un aumento del risk-shifting. Il quale potrebbe essere scelto da investitori meno avversi al rischio.

# Appendice

In questa sezione procederemo con la dimostrazione dei risultati trovati nel lavoro di tesi.

*Dimostrazione.* Teorema 2.3.1

Mostriamo un teorema di verifica per dimostrare che la funzione valore riportata in (2.12) sia effettivamente corretta. Come primo passo verifichiamo il teorema nel caso in cui ci sia un valore  $\hat{H}$  tale per cui la funzione valore sia nulla quando il processo di high-water mark tocca questo valore superiore. In seguito generalizzeremo al caso di orizzonte infinito mediante il teorema di convergenza monotona. Per il proseguo definiamo  $\omega_t = \theta_t W_t$  il valore degli asset rischiosi detenuti dal manager del fondo.

**Proposition 6.2.1.** *Se definiamo  $\tau_0 = \inf \{t : W_t = 0\}$  e  $\tau^{\hat{H}} = \inf \{t : H_t = \hat{H}\}$ . Se ipotizziamo che esista una funzione che sia differenziabile con continuità due volte nella variabile  $W_t$  e differenziabile con continuità una volta in  $H_t$ , tale che valga*

$$0 = -(\lambda + \gamma)V + \max_{\omega} \left\{ V_W \left[ W_t r + (1 + \eta)(\mu - r)\omega - W_t \eta \beta (\mu - r) \right] + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{WW} \left[ \omega(1 + \eta) - W_t \eta \beta \right]^2 \right\} \quad (6.13)$$

e inoltre

$$k V_W = k + V_H \quad (6.14)$$

quando  $W_t = H_t$ . In aggiunta assumiamo che

- Il contratto del manager sia terminato quando  $H_t = \hat{H}$ , cosicché  $V(W_t, \hat{H}) = 0$  per ogni  $W_t \geq 0$
- $V(0, H_t) = 0$  per ogni valore di  $H_t$
- $V(W_t, H_t) \geq 0$
- $V_W > 0$
- $V_{WW} < 0$

Infine definiamo la strategia ottima

$$\omega^* = \frac{1}{1+\eta} \left( \eta\beta W_t - \frac{V_W}{V_{WW}} \frac{\mu-r}{\sigma^2} \right) \quad (6.15)$$

e assumiamo che  $\omega^*$  e  $\omega^*V_W$  siano limitate in  $[0, \hat{H}]$ . Per ogni strategia ammissibile  $\omega_t$  scriviamo  $H_t^\omega$  e  $W_t^\omega$  il processo risultante per  $H_t$  e  $W_t$ .

Allora

$$V(W_0, H_0) \geq \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\lambda+\gamma)s} k dH_s^\omega \right]$$

per ogni controllo ammissibile  $\omega$ , e vale l'uguaglianza per il controllo ottimo in (6.15).

### Osservazione

E' facile verificare che la funzione

$$V(W_t, H_t) = W_t^\alpha H_t^{k\alpha} \left( \frac{kH^{1-\alpha(1+k)}}{\alpha(1+k)-1} - \frac{k\hat{H}^{1-\alpha(1+k)}}{\alpha(1+k)-1} \right)$$

con  $\alpha$  data da (2.10) soddisfa tutte le ipotesi della proposizione precedente.

*Dimostrazione.* **Proposizione 6.2.1**

Partiamo definendo il processo

$$M(t, W_t, H_t) = e^{-(\lambda+\gamma)t} V(W_t, H_t) + \int_0^t e^{-(\lambda+\gamma)s} k dH_s$$

se applichiamo la formula di Itô, otteniamo che per ogni  $t < \tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}$  vale

$$\begin{aligned} M(t, W_t, H_t) = & M(0, W_0, H_0) + \int_0^t e^{-(\lambda+\gamma)s} [\mathcal{A}V(W_s, H_s; \omega_s)] ds \\ & + \int_0^t e^{-(\lambda+\gamma)s} \sigma [\omega(1+\eta) - W_s \eta \beta] V_W dZ_s + \int_0^t e^{-(\lambda+\gamma)s} (k - kV_W + V_H) dH_s \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{A}V(W_s, H_s; \omega_s) = & \frac{1}{2} \sigma^2 V_{WW} [\omega(1+\eta) - W_t \eta \beta]^2 + rW_t V_W \\ & + (1+\eta)\omega(\mu-r)V_W - W_t V_W \eta \beta (\mu-r) - (\lambda+\gamma)V \end{aligned}$$

Attraverso la condizione (6.14) possiamo riscrivere il processo come

$$\begin{aligned} M(t, W_t, H_t) = & M(0, W_0, H_0) + \int_0^t e^{-(\lambda+\gamma)s} [\mathcal{A}V(W_s, H_s; \omega_s)] ds \\ & + \int_0^t e^{-(\lambda+\gamma)s} \sigma [\omega(1+\eta) - W_s \eta \beta] V_W dZ_s \end{aligned} \quad (6.16)$$

inoltre avendo come ipotesi che  $V_{WW} < 0$ ,  $\mathcal{A}V(W_s, H_s; \omega_s)$  è una espressione quadratica in  $\omega_s$  la quale tocca il suo massimo valore per la seguente strategia

$$\omega^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \eta \beta W_t - \frac{V_W}{V_{WW}} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \right)$$

Dalle ipotesi del teorema otteniamo che il valore massimo raggiunto è il valore nullo infatti

$$\mathcal{A}V(W_s, H_s; \omega_s^*) = rW_s V_W - \pi \frac{V_W^2}{V_{WW}} - (\lambda + \gamma)V = 0$$

questa osservazione ci fa concludere che il secondo termine presente in (6.16) è sempre minore o uguale a zero per ogni strategia ammissibile.

Ora se consideriamo il tempo  $t = \tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}$  possiamo riscrivere l'equazione in (6.16) in questo modo

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\lambda + \gamma)s} \sigma V_W [\omega(1 + \eta) - W_s \eta \beta] dZ_s &= M(\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}, W_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}, H_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}) \\ &\quad - M(0, W - 0, H_0) - \int_0^{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\gamma + \lambda)s} \left[ \mathcal{A}V(W_s, H_s; \omega_s) \right] ds \\ &\geq M(\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}, W_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}, H_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}) - M(0, W - 0, H_0) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ora, ricordando l'assunzione  $V \geq 0$  per ogni  $H_t$  e  $W_t$ , segue che il termine di sinistra è una martingala locale visto che il processo integrato in  $Z_s$  è quasi certamente quadrato integrabile in  $ds$ . Inoltre il processo è limitato dal basso da  $-M(0, W_0, H_0)$  e di conseguenza il processo è una supermartingala.

Ora se applichiamo il valore atteso all'espressione (6.16), si può dimostrare che

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ M(\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}, W_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}, H_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}) \right] &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\beta + \gamma)s} \left[ \mathcal{A}V(W_s, H_s; \omega_s) \right] ds \right] \\ &\quad + M(0, W_0, H_0) \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\beta + \gamma)s} \sup_{\omega_s} \left[ \mathcal{A}V(W_s, H_s; \omega_s) \right] ds \right] \\ &\quad + M(0, W_0, H_0) \\ &= M(0, W_0, H_0). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Visto che si è ipotizzato che  $\omega^*$  e  $\omega^* V_W$  sono limitati in  $[0, \hat{H}]$ , il termine sinistro di (6.17) è martingala e di conseguenza in (6.18) vale l'uguaglianza perché ha valore

atteso nullo.

Di conseguenza, per ogni strategia ammissibile vale

$$\begin{aligned} V(W_0, H_0) &= M(0, W_0, H_0) \\ &\geq \mathbb{E} \left[ e^{-(\lambda+\gamma)(\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}})} V(W_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}, H_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\gamma+\lambda)s} k dH_s \right] \end{aligned}$$

Applicando il limite per  $T \rightarrow \infty$  e usando il fatto che per ogni strategia vale la seguente considerazione

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ e^{-(\gamma+\lambda)(\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}})} V(W_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}, H_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}) \right] = 0$$

dal teorema di convergenza monotona otteniamo che

$$\begin{aligned} V(W_0, H_0) &\geq \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ e^{-(\gamma+\lambda)(\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}})} V(W_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}^\omega, H_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}^\omega) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\gamma+\lambda)s} k dH_s^\omega \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\gamma+\lambda)s} k dH_s^\omega \right] \end{aligned}$$

se consideriamo invece la strategia ottima  $\omega^*$  otteniamo

$$\begin{aligned} V(W_0, H_0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ e^{-(\gamma+\lambda)(\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}})} V(W_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}^{\omega^*}, H_{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}}^{\omega^*}) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\tau^0 \wedge T \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\gamma+\lambda)s} k dH_s^{\omega^*} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^0 \wedge \tau^{\hat{H}}} e^{-(\gamma+\lambda)s} k dH_s^{\omega^*} \right] \end{aligned}$$

di conseguenza vale la tesi. □

Per ottenere il teorema di verifica nel caso di orizzonte infinito si procede per mezzo del teorema di convergenza monotona per  $\hat{H} \rightarrow \infty$ . In questo modo si verifica che la funzione valore (2.12) risulta ottima. □

*Dimostrazione.* Lemma 2.1

Derivando la strategia ottima otteniamo

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{1}{1 + \eta} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}$$



Calcoliamo  $\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}$  utilizzando il teorema della funzione implicita di Dini sull'equazione (2.9) e otteniamo

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = -\frac{1 - \alpha}{2\alpha r - (\gamma + \lambda + r + \pi)} = -\frac{\alpha(1 - \alpha)}{2\alpha^2 r - \alpha(\gamma + \lambda + r + \pi)}$$

Ora utilizzando l'equazione (2.9) otteniamo la seguente espressione

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\gamma + \lambda - \alpha^2 r}$$

Di conseguenza se valgono le ipotesi del lemma allora, considerando che  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} > 0$  e quindi vale la tesi. Per la derivata su  $\gamma$  si procede nello stesso modo e si ottengono le stesse conclusioni.  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma 2.2

Derivando la strategia ottima  $\theta_t^*$  rispetto al parametro  $\mu$  si ottiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2(1 + \eta)} \left( \frac{1 - \alpha + \alpha_\pi \pi_\mu (\mu - r)}{(1 - \alpha)^2} \right)$$

dove

$$\pi_\mu = \frac{2\pi}{\mu - r} \quad \rightarrow \quad \pi_\mu (\mu - r) = 2\pi$$

mentre la derivata parziale di  $\alpha$  rispetto a  $\pi$  utilizzando il teorema della funzione implicita è

$$\alpha_\pi = \frac{\alpha}{2\alpha r - (\gamma + \lambda + r + \pi)}$$

Quindi sostituendo e analizzando il segno della derivata otteniamo

$$\text{sgn} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \right) = \text{sgn} \left( \frac{2\alpha r - (\gamma + \lambda + r + \pi) - 2\alpha^2 r + \alpha(\gamma + \lambda + r + \pi) + 2\alpha\pi}{2\alpha r - (\gamma + \lambda + r + \pi)} \right)$$

Ora utilizzando l'equazione (2.9) possiamo riscrivere il numeratore e ottenere la seguente frazione

$$\frac{\alpha(\alpha - 1)(\gamma + \lambda - (\pi + r))}{\gamma + \lambda - \alpha^2 r}$$

Che sotto le ipotesi del lemma risulta essere sempre di segno negativo.  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma 2.3

Partiamo dalla derivata di  $\theta$  rispetto a  $\sigma$  e otteniamo

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = -\frac{\mu - r}{\sigma^3(1 - \alpha)} (2(1 - \alpha) - \sigma \alpha_\pi \pi_\sigma)$$

Quindi se dimostriamo che il secondo fattore è sempre positivo si ottiene la tesi, attraverso il teorema della funzione implicita otteniamo la seguente relazione

$$\sigma\alpha\pi\pi_\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{\gamma + \lambda - \alpha^2 r}$$

Sostituendo nella precedente equazione otteniamo che vale la tesi se

$$(1 - \alpha)(\gamma + \lambda) + \alpha^3 r - \alpha^2(\pi + r) > 0$$

Questa relazione si può riscrivere sfruttando l'equazione (2.9) e otteniamo

$$(\gamma + \lambda)(1 - \alpha)^2 > 0$$

Di conseguenza sotto le ipotesi del lemma vale la tesi.  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma 2.4

Per dimostrare la tesi di questo lemma basta semplicemente derivare la strategia ottima sul parametro  $\eta$  e si ottiene

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \frac{\beta(1 + \eta) - \eta\beta - \frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - \alpha)}}{(1 + \eta)^2}$$

Quindi se analizziamo il segno osserviamo che il numeratore è sempre positivo mentre il denominatore è negativo se valgono le ipotesi del lemma.  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma 2.5

Derivando si ottiene

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta} = \frac{\eta}{1 + \eta}$$

che risulta essere sempre positiva per come è definito il parametro  $\eta$  e inoltre è sicuramente compresa tra  $(0, \eta)$ .  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma 2.6

Il primo risultato del lemma è facilmente dimostrabile visto che se  $\mu \rightarrow r$  allora  $\pi \rightarrow 0$  quindi se poniamo  $\pi = 0$  nell'equazione (2.9) si ottiene che  $\alpha \rightarrow 1$ . Per il secondo risultato osserviamo che

$$\lim_{\mu \rightarrow r} \theta^* = \frac{1}{1 + \eta} \left( \eta\beta + \frac{1}{\sigma^2} \lim_{\mu \rightarrow r} \frac{\mu - r}{1 - \alpha} \right)$$

In cui si ha un forma di indeterminazione visto che sia il numeratore che il denominatore tendono a zero quando  $\mu$  tende  $r$ . Quindi utilizzando la regola di de

L'Hopital otteniamo che il limite in questione derivando rispetto  $\mu$  diventa

$$\lim_{\mu \rightarrow r} \frac{1}{-\alpha_\pi \pi_\mu}$$

dove

$$\alpha_\pi = \frac{\alpha}{2\alpha r - (\gamma + \lambda + r + \pi)} \quad \text{e} \quad \pi_\mu = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

quindi sostituendo si ottiene che il limite

$$\lim_{\mu \rightarrow r} \frac{\gamma + \lambda + r + \pi - 2\alpha r}{\alpha} \frac{\sigma^2}{\mu - r}$$

avendo notato che  $\alpha$  tende a 1 e  $\pi$  tende a 0 allora se valgono le ipotesi del lemma la strategia ottima tende a  $+\infty$ .  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma 2.7

Derivando la strategia ottima otteniamo

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{1}{1 + \eta} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}$$

Calcoliamo  $\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}$  utilizzando il teorema della funzione implicita di Dini sull'equazione (2.25) e otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} &= - \frac{1 - \alpha}{2\alpha(r - (1 - x)a) - (\gamma + \lambda + r - (1 - x)a + \pi)} \\ &= - \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2\alpha^2(r - (1 - x)a) - \alpha(\gamma + \lambda + r - (1 - x)a + \pi)} \end{aligned}$$

Ora utilizzando l'equazione (2.25) otteniamo la seguente espressione

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\gamma + \lambda - \alpha^2(r - (1 - x)a)}$$

Di conseguenza se valgono le ipotesi del lemma allora  $\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} > 0$  e quindi vale la tesi. Per la derivata su  $\gamma$  si procede nello stesso modo e si ottengono le stesse conclusioni.  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma 2.8

Derivando la strategia ottima  $\theta_t^*$  rispetto al parametro  $\mu$  si ottiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2(1 + \eta)} \left( \frac{1 - \alpha + \alpha_\pi \pi_\mu (\mu - r)}{(1 - \alpha)^2} \right)$$

dove

$$\pi_\mu = \frac{2\pi}{\mu - r} \quad \rightarrow \quad \pi_\mu(\mu - r) = 2\pi$$

mentre la derivata parziale di  $\alpha$  rispetto a  $\pi$  utilizzando il teorema della funzione implicita è

$$\alpha_\pi = \frac{\alpha}{2\alpha(r - (1-x)a) - (\gamma + \lambda + r - (1-x)a + \pi)}$$

Quindi sostituendo e analizzando il segno della derivata otteniamo

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \right) &= \operatorname{sgn} \left( \frac{2\alpha(r - (1-x)a) - (\gamma + \lambda + r - (1-x)a + \pi)}{2\alpha(r - (1-x)a) - (\gamma + \lambda + r - (1-x)a + \pi)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-2\alpha^2(r - (1-x)a) + \alpha(\gamma + \lambda + r - (1-x)a + \pi) + 2\alpha\pi}{2\alpha(r - (1-x)a) - (\gamma + \lambda + r - (1-x)a + \pi)} \right) \end{aligned}$$

Ora utilizzando l'equazione (2.25) possiamo riscrivere il numeratore e ottenere la seguente frazione

$$\frac{\alpha(\alpha - 1)(\gamma + \lambda - (\pi + r - (1-x)a))}{\gamma + \lambda - \alpha^2(r - (1-x)a)}$$

Che sotto le ipotesi del lemma risulta essere sempre di segno negativo.  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma 2.9

Derivando la strategia ottima su  $a$  si ottiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = \frac{1}{1 + \eta} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial a}$$

Quindi se la derivata parziale di  $\alpha$  rispetto a  $a$  è sempre positiva vale la tesi

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a} = - \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2\alpha(r - (1-x)a) - (\gamma + \lambda + r - (1-x)a + \pi)}$$

La cui espressione attraverso l'equazione (2.25) si può riscrivere come

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a} = \frac{\alpha^2(1 - \alpha)}{\gamma + \lambda - \alpha^2(r - (1-x)a)}$$

che sotto le ipotesi del lemma risulta essere in ogni caso di segno positivo.  $\square$

*Dimostrazione.* Lemma 2.10

Derivando la strategia ottima su  $x$  si ottiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \eta} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

Quindi se la derivata parziale di  $\alpha$  rispetto a  $a$  è sempre negativa vale la tesi

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = - \frac{\alpha a (\alpha - 1)}{2\alpha(r - (1-x)a) - (\gamma + \lambda + r - (1-x)a + \pi)}$$

La cui espressione attraverso l'equazione (2.25) si può riscrivere come

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\alpha^2 a (\alpha - 1)}{\gamma + \lambda - \alpha^2 (r - (1-x)a)}$$

che sotto le ipotesi del lemma risulta essere in ogni caso di segno negativo. □

# Bibliografia

- [1] S. Panageas e M. Westerfield, 2009, *High-Water Marks: High Risk Appetites? Convex Compensation, Long Horizons, and Portfolio Choice*, The Journal of Finance.
- [2] W.N. Goetzmann, J. Ingersoll e S.A. Ross, 2001, *High-Water Marks and hedge fund management contracts*, The Journal of Finance.
- [3] P. Guasoni e J. Obloj, 2011, *The Incentives of Hedge fund fees and High-Water Marks*, Boston U. School of Management Research.
- [4] K. Janecek e M. Sirbu, 2011, *Optimal investment with high-watermark performance fee*, Journal SIAM Journal on Control and Optimization.
- [5] J. Carpenter, 2000, *Does Option Compensation Increase Managerial Risk Appetite?*, The Journal of Finance.
- [6] R. Elie e N. Touzi, 2008, *Optimal lifetime consumption and investment under a drawdown constraint*, Finance and Stochastics.
- [7] S.J. Grossman e Z. Zhou, 1993, *Optimal investment strategies for controlling drawdowns*, Math. Finance 3.
- [8] S. Basak, A. Pavlova e A. Shapiro, 2007, *Offsetting the implicit incentives: Benefits of Benchmarking in money management*, Journal of Banking & Finance.
- [9] E. Sirri e P. Tufano, 1998, *Costly Search and Mutual Fund Flow*, The Journal of Finance.
- [10] T.S. Kim and E. Omberg, 1996, *Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior*, The Review of Financial Studies.
- [11] J.E. Hodder and J.C. Jackwerth, 2007, *Incentive Contracts and Hedge Fund Management*, Journal of Financial and Quantitative analysis.
- [12] R.C. Merton, 1971, *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*, Journal of Economic Theory.