

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Nucleare



Studio analitico e numerico
di Solitoni Elettromagnetici Relativistici nei plasmi

Relatore: Dott. Matteo PASSONI
Correlatore: Dott. Andrea SGATTONI

Tesi di Laurea di:
Michele BERGAMASCHI
Matr. 784198

Anno Accademico 2013-2014

*A tutta la mia famiglia,
in particolare a Nicolò
e a nonno Livio*

*“fatti non foste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e canoscenza”*

Divina Commedia, Inferno XXVI

Indice

Elenco delle figure	iii
Sommario	ix
Abstract	xi
Prefazione	xiii
1 Introduzione	1
1.1 La fusione inerziale	2
1.1.1 Reazioni di fusione nucleare	3
1.1.2 Confinamento di un plasma termonucleare	5
1.1.3 L'approccio inerziale alla fusione: cenni e ruolo dell'interazione laser-plasma	8
1.2 Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasmi .	14
1.2.1 Interazione tra radiazione elettromagnetica e materia: cenni	15
1.2.2 Metodi per lo studio dell'interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasmi	19
2 Fisica dell'interazione laser plasma	23
2.1 Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasma in regime non lineare	24
2.1.1 Dinamica di una particella carica in un'onda elettromagnetica piana	25
2.1.2 Forza ponderomotrice e Wake-field generation	29
2.1.3 Instabilità Raman e Brillouin	33
2.2 Solitoni elettromagnetici nei plasmi	35
2.2.1 Formazione dei solitoni elettromagnetici nei plasmi . .	37
2.2.2 Interesse per lo studio di solitoni in plasmi $e^- - e^+$. .	38
2.2.3 Interesse per lo studio di solitoni in plasmi $e^- - i$. . .	39

2.3	Approccio cinetico per la descrizione dei solitoni elettromagnetici nei plasmi	41
2.3.1	Metodi analitici	41
2.3.2	Metodi numerici	44
2.4	Obbiettivi della tesi	47
3	Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi	49
3.1	Descrizione del modello utilizzato e sua applicazione	50
3.2	Sviluppo del modello cinetico relativistico	53
3.2.1	Calcolo dei potenziali e dei campi	53
3.2.2	Calcolo della densità di particelle e della velocità fluida	56
3.3	Applicazioni del modello analitico	57
3.3.1	Solitoni in plasmi di elettroni-positroni	57
3.3.2	Solitoni in plasmi di elettroni-ioni	61
4	Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi	69
4.1	Introduzione	69
4.2	Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e positroni	70
4.2.1	Risultati ottenuti e discussione	71
4.3	Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e ioni	76
4.3.1	Risultati ottenuti e discussione	77
5	Conclusioni e sviluppi futuri	91
A	<i>Laser induced Wake-field generation</i>	95
A.1	Approccio analitico	95
A.2	Simulazioni con differenti codici Particle-In-Cell	101
A.3	Modi longitudinali e Wave-breaking	104
	Bibliografia	109

Elenco delle figure

1.1	Energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa	2
1.2	(a) Sezione d'urto della reazione di fusione rispetto all'energia cinetica dei nucleoni coinvolti e (b) tasso di reazione in funzione della temperatura ionica. [1]	4
1.3	stadi della fusione inerziale	11
1.4	Rappresentazione dello Schema Diretto (a destra) e dello Schema Indiretto (a sinistra)	13
1.5	Pellet sferico a confronto con un dito umano	13
1.6	Target a Schema indiretto per fusione a confinamento inerziale in NIF. [2]	14
1.7	Evoluzione della tecnologia laser. Da [3].	17
1.8	Classificazione dei plasmi nel piano densità-temperatura, da [4]	19
2.1	Un elettrone del plasma investito dall'impulso laser che si propaga risente dapprima della spinta verso destra in figura, e viene così spostata dalla sua posizione di equilibrio. La forza elettrostatica che nasce però dalla differenza di carica spaziale in tal modo creata tende del resto a riportarlo verso x_{eq} . E' questa la condizione ottimale in cui l'elettrone si deve trovare quando risentirà della seconda spinta, stavolta nella direzione opposta, dell'impulso.	32
2.2	Immagine, ottenuta con la tecnica del <i>proton imaging</i> (protoni di $6-7MeV$), di un plasma di elettroni e ioni (densità massima $\sim 10^{20} cm^{-3}$), $45ps$ dopo la propagazione di un impulso laser intenso ($I \sim 10^{19} W/cm^2$) di lunghezza d'onda $1 \mu m$, e durata $1ps$; l'immagine mostra la presenza di una cavità nella densità del plasma, che può essere dovuta alla presenza di un solitone elettromagnetico. Da [5].	41
2.3	Relazione tra a) funzione di distribuzione classica e b) macro-particelle in codice tipo PIC, da [4]	45

2.4	Schema dell'algoritmo dei codici tipo PIC, da [4]	46
3.1	Densità elettronica per un solitone in un plasma a bassa temperatura di elettroni-positroni con $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$	59
3.2	Velocità fluida elettronica per un solitone in un plasma a bassa temperatura di elettroni-positroni con $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$	60
3.3	Densità elettronica per un solitone in un plasma ultrarelativistico di elettroni-positroni con $\lambda = 30$ e $\omega = 0.1$	60
3.4	Ampiezza del potenziale vettore normalizzato in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$	61
3.5	Ampiezza del potenziale vettore per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e $\omega = 0.1$	64
3.6	Densità elettronica per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e $\omega = 0.1$	65
3.7	Densità ionica per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e $\omega = 0.1$	65
3.8	Campo elettrico longitudinale E_x (linea continua) e derivata seconda del potenziale scalare φ'' (linea tratteggiata) per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e $\omega = 0.1$	66
3.9	Campo elettrico longitudinale E_x dimensionale in MV/cm per il solitone della figura 3.8	66
3.10	Campo elettrico longitudinale E_x (linea continua) e derivata seconda del potenziale scalare φ'' (linea tratteggiata) per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 30$ e $\omega = 0.1$	67
3.11	Campo elettrico longitudinale E_x dimensionale in MV/cm per il solitone della figura 3.8	68
3.12	Densità elettronica per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 30$ e $\omega = 0.1$	68
4.1	Densità elettronica normalizzata in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$ ottenuta ad un tempo di 159 periodi di plasma con 128 punti di griglia: a sinistra per 5000 particella/cella a destra per 50 particelle/cella. Da [6].	72
4.2	Densità elettronica normalizzata in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$ ottenuta con Piccante per un plasma di elettroni e positroni caratterizzato da $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$. Il tempo di simulazione è di 159 periodi di plasma. La simulazione è stata effettuata con 256 punti di griglia e 1000 particella/cella.	72

4.3	Densità elettronica normalizzata in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$ ottenuta con Piccante per un plasma di elettroni e positroni caratterizzato da $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$. Il tempo di simulazione di 159 periodi di plasma. La simulazione effettuata con 256 punti di griglia e 50 particella/cella.	73
4.4	Solitone elettromagnetico in plasma di elettroni e positroni con $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$. Andamento dei campi elettrici trasversali nel tempo al centro del solitone: in rosso E_y , in blu E_z . Da [6].	73
4.5	Solitone elettromagnetico in plasma di elettroni e positroni con $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$. Andamento dei campi elettrici trasversali ottenuti con Piccante nel tempo al centro del solitone: in rosso E_y , in blu E_z . La simulazione è stata effettuata con 256 punti di griglia e 50 particelle/cella. In questo caso il tempo è espresso con la stessa adimensionalizzazione utilizzata nell'articolo [6] per poter confrontare i risultati.	74
4.6	Densità elettronica normalizzata in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$ per un plasma di elettroni e positroni caratterizzato da $\lambda = 30$ e $\omega = 0.1$. A sinistra quella ottenuta con Piccante Il tempo di simulazione è di 318 periodi di plasma. La simulazione è stata effettuata con 256 punti di griglia e 1000 particella/cella. A destra l'andamento teorico ottenuto con il modello analitico sviluppato nel capitolo 3 . . .	75
4.7	Solitone in plasma con temperature uguali per la specie ionica e elettronica $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Densità elettronica in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 200 particelle/cella.	77
4.8	Solitone in plasma con temperature uguali per la specie ionica e elettronica $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Andamenti teorici del campo elettrico longitudinale (linea continua) e della derivata seconda del potenziale vettore (linea tratteggiata) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Grafico ottenuto attraverso la risoluzione numerica del modello analitico presentato nel capitolo 3 con il codice Matlab sviluppato. . . .	78

4.9	Solitone in plasma con temperature uguali per la specie ionica e elettronica $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Campo elettrico longitudinale (blu) e derivata seconda del potenziale vettore (verde) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 200 particelle/cella.	80
4.10	Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Andamento teorico della densità elettronica in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$. Grafico ottenuto attraverso la risoluzione numerica del modello analitico presentato nel capitolo 3 con il codice Matlab sviluppato.	81
4.11	Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Densità elettronica in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 200 particelle/cella.	82
4.12	Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Andamenti teorici del campo elettrico longitudinale (linea continua) e della derivata seconda del potenziale vettore (linea tratteggiata) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Grafico ottenuto attraverso la risoluzione numerica del modello analitico presentato nel capitolo 3 con il codice Matlab sviluppato.	84
4.13	Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Densità elettronica in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti.	85
4.14	Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Campo elettrico longitudinale (blu) e derivata seconda del potenziale vettore (verde) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 200 particelle/cella.	86

4.15	Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Campo elettrico longitudinale (blu) e derivata seconda del potenziale vettore (verde) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 800 particelle/cella.	87
4.16	Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Campo elettrico longitudinale (blu) e derivata seconda del potenziale vettore (verde) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 1024 punti di griglia e 200 particelle/cella.	88
A.1	Wake-field generation presentato nel libro [4]	101
A.2	Campo elettrico longitudinale con normalizzazione $Ee/m_e\omega_{pe}$ generato da un impulso di ampiezza $a = 0.6$	102
A.3	Densità elettronica con normalizzazione n_e/n_c generata da un impulso di ampiezza $a = 0.6$	103
A.4	Campo elettrico longitudinale con normalizzazione $Ee/m_e\omega_{pe}$ generato da un impulso di ampiezza $a = 3$	103
A.5	Densità elettronica con normalizzazione n_e/n_c generata da un impulso di ampiezza $a = 3$	104
A.6	Risultati dell'approccio semi-analitico per onde di plasma non-lineari	106

Sommario

Lo sviluppo della tecnologia laser ha portato all'esplorazione di regimi di interazione con la materia, e in particolare con i plasmi, nei quali gli aspetti non-lineari e relativistici rivestono un ruolo determinante. La descrizione teorica di questi fenomeni, oltre che per un interesse fondamentale, è di grande rilevanza anche in relazione alle numerose possibili applicazioni. Tra queste, uno degli ambiti di maggior interesse per lo studio dell'interazione tra laser e plasma è la fusione a confinamento inerziale. In questo contesto, numerosi studi hanno mostrato come nel plasma possano formarsi particolari strutture elettromagnetiche a causa di instabilità dovute agli effetti non lineari dell'interazione con un impulso laser di elevata intensità. Queste strutture, caratterizzate da una concentrazione spazialmente localizzata di energia elettromagnetica, sono chiamate *Solitoni Elettromagnetici*. I solitoni elettromagnetici ricoprono un ruolo di particolare importanza poiché in essi viene immagazzinata parte dell'energia del laser che interagisce con il plasma. Inoltre, si è osservato che al loro interno possono instaurarsi campi elettrostatici molto intensi (anche dell'ordine del GV/cm). Risulta quindi chiaro come i solitoni elettromagnetici siano di notevole interesse anche per possibili applicazioni nell'ambito dell'accelerazione di particelle cariche. La descrizione teorica di queste strutture elettromagnetiche costituisce ancora oggi un argomento di ricerca in piena evoluzione. Scopo del seguente lavoro di tesi è lo sviluppo di descrizioni analitiche e numeriche dei solitoni elettromagnetici. Viene innanzitutto sviluppato un modello analitico di tipo cinetico in grado di descrivere in modo soddisfacente tali strutture. In seguito viene condotta un'analisi numerica sulla dinamica e sulla stabilità dei solitoni elettromagnetici, tramite l'utilizzo di codici cinetici di tipo *Particle-In-Cell*.

Abstract

The development of laser technology has led to the exploration of new ways of interaction with matter, particularly with plasmas, in which non-linear and relativistic aspects assume a key role. The theoretical description of these phenomena, other than being of fundamental interest, is also very relevant relating to many achievable applications. Among these, one of the most interesting field in laser-plasma interaction is the inertial confinement fusion. In this context, many studies showed how in plasma particular electromagnetic structures could be formed, characterized by a spatial localized concentration of electromagnetic energy, because of instability due to non-linear effects of interaction with high intensity laser pulse. These structures are called Electromagnetic Solitons. Electromagnetic solitons have a central role because a fraction of laser pulse energy, interacting with plasma, is accumulated inside them. Furthermore, it is observed that inside these structures electrostatic fields of very high intensity (of the order of GV/cm) can be established. Therefore, it is clear why electromagnetic solitons are very interesting with regards to possible applications in charged particles acceleration. The theoretical description of these electromagnetic structures represents a developing research topic still today. The aim of this thesis is devoted to the development of analytical and numerical descriptions of electromagnetic solitons. On the one hand an analytical kinetic model, that satisfactorily describes these structures, is developed. On the other hand a numerical analysis about dynamics and stability of electromagnetic solitons is pursued, making use of *Particle-In-Cell* kinetic codes.

Prefazione

Questa tesi presenta un lavoro di tipo teorico-numerico dedicato alla fisica dell'interazione laser-plasma. In particolare essa si focalizza sui *Solitoni elettromagnetici* nei plasmi, strutture elettromagnetiche che si possono formare a seguito dell'interazione tra impulsi laser ad alta intensità e plasma. La descrizione teorica di questi fenomeni, oltre che per un interesse fondamentale, è di grande rilevanza anche in relazione alle numerose possibili applicazioni. Si sottolineano in particolare le applicazioni nell'ambito della fusione a confinamento inerziale e dell'accelerazione di particelle cariche, argomenti particolarmente rilevanti per un corso di studi in Ingegneria Nucleare. La fase di studio, affrontata anche nel contesto del percorso ASPRI, degli aspetti fondamentali della propagazione di onde elettromagnetiche nei plasmi in regime non lineare, della loro descrizione analitica e numerica, risulta quindi fondamentale. In questo lavoro di tesi, viene innanzitutto sviluppato un modello analitico di tipo cinetico in grado di descrivere le strutture solitoniche; inoltre viene condotto uno studio numerico di tipo cinetico attraverso codici Particle-In-Cell, particolarmente indicati per la descrizione di fenomeni di interazione tra laser e plasmi.

Viste queste premesse, la tesi è strutturata come segue:

- Il capitolo 1 contestualizza il lavoro di tesi prestando particolare attenzione agli argomenti che sottolineano l'importanza dello studio dei solitoni elettromagnetici. A questo scopo introduce gli aspetti generali della fusione a confinamento inerziale per comprendere come la fase di interazione sia fondamentale nel trasferimento di energia tra un'onda elettromagnetica e la materia. Vengono, inoltre, introdotti brevemente

concetti propri dell'interazione essenziali per la comprensione della tesi. Infine, si presta particolare attenzione ai metodi disponibili per lo studio di questo fenomeno fisico.

- Nel capitolo 2 l'attenzione è posta sulla fisica dell'interazione tra laser e plasma. Ne sono discussi, quindi, gli aspetti centrali con lo scopo di comprendere da dove nasce l'interesse per solitoni elettromagnetici nei plasmi. Viene poi evidenziato il ruolo fondamentale dei metodi di tipo cinetico per la descrizione di solitoni elettromagnetici. Infine, alla luce di quanto esposto nei primi due capitoli, vengono enunciati gli obiettivi della tesi.
- Nel capitolo 3 viene sviluppato un modello analitico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici (RES) per le due tipologie di plasmi analizzati: i plasmi di elettroni-positroni e i plasmi di ioni-elettroni. Si presta particolare attenzione alle grandezze di interesse per lo studio dei solitoni elettromagnetici. Vengono, infine, discussi i risultati ottenuti con tale modello.
- Il capitolo 4 presenta i risultati dello studio di carattere numerico sull'evoluzione temporale dei RES. Tale studio è stato effettuato tramite codici cinetico di tipo Particle-In-Cell. La discussione dei risultati, ottenuti nel lavoro di tesi, presta particolare attenzione ai limiti di validità delle ipotesi adottate nello sviluppo del modello analitico.
- Il capitolo 5 illustra le conclusioni della tesi e presenta i possibili sviluppi futuri.
- L'appendice A descrive il fenomeno del *wake-field generation* poiché questo costituisce uno dei fenomeni più studiati dal punto di vista sia teorico che sperimentale, rappresentando un punto di riferimento per la fisica dell'interazione non lineare tra onde elettromagnetica e plasma. In particolare vengono presentati sia un approccio teorico che uno numerico che sono stati utili, nell'approfondimento ASPRI, per familiarizzare con i mezzi analitici e computazionali utilizzati nei problemi riguardanti l'interazione tra laser e plasma.

Alcune Notazioni

Nel testo il sistema di misura maggiormente utilizzato è il cgs, di gran lunga il più diffuso nella letteratura scientifica specializzata. Si è fatto uso anche di alcune unità miste, come ad esempio il W/cm^2 per la misura dell'intensità degli impulsi laser, in accordo con quanto avviene in letteratura. È presente un'unica bibliografia in fondo al testo e i riferimenti bibliografici sono indicati secondo una numerazione progressiva: per esempio, [4] è il riferimento al quarto lavoro citato nella bibliografia. Le equazioni sono numerate secondo il formato (capitolo.paragrafo.equazione): per esempio (2.1.4) è la quarta formula del primo paragrafo del secondo capitolo. In esse, si sono adottate le seguenti notazioni:

- ' \cdot ' : prodotto scalare,
- ' \wedge ' : prodotto vettore,
- ' ∇ ' : gradiente,
- ' ∇^2 ' : laplaciano,
- ' $\nabla \cdot$ ' : divergenza,
- ' $\nabla \wedge$ ' : rotore.

In alcuni capitoli, per semplificare le notazioni, le derivate si sono espresse con apici e pedici, dove l'apice indica l'ordine della derivata mentre il pedice indica rispetto a quale variabile essa viene effettuata: ad esempio, a'_x è la derivata prima della funzione a rispetto ad x (da non confondere con a_x che rappresenta invece la componente lungo x del vettore a).

Capitolo 1

Introduzione

In questo primo capitolo verranno introdotti gli argomenti che hanno portato allo sviluppo della tesi. L'interesse per il regime di interazione tra laser ad alta intensità (dell'ordine di $10^{15}W/cm^2$ o superiori) e potenza (dell'ordine dei centinaia di TW) e plasmi è nato negli studi sulla fusione a confinamento inerziale. Infatti la fase di cessione di energia al combustibile attraverso un'onda elettromagnetica intensa è uno degli aspetti fondamentali degli esperimenti sulla fusione inerziale, come si vedrà nel paragrafo 1.1.3. In particolare lo studio dell'interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e materia (soprattutto nello stato di plasma) ha messo in luce la presenza di fenomeni non lineari. L'introduzione, verso la fine degli anni '80, della tecnica di amplificazione d'impulsi laser CPA ha permesso di investigare anche dal punto di vista sperimentale tali fenomeni.

Il paragrafo 1.1 introdurrà quindi gli aspetti fondamentali della fusione nucleare utili ad introdurre il concetto di fusione a confinamento inerziale. In questo paragrafo verrà sottolineato come l'interazione tra laser e plasma riveste un ruolo centrale nella fusione inerziale. Infine, nel paragrafo 1.2, si parlerà nello specifico dell'interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e materia con dei riferimenti all'interazione con il plasma ed i relativi approcci di studio.

1.1 La fusione inerziale

L'energia che viene prodotta da una reazione nucleare può arrivare da due tipologie di processi differenti: la fusione di due nuclei leggeri o la fissione di due nuclei pesanti. Questi processi possono essere introdotti osservando l'energia di legame per nucleone (espressa in MeV) in funzione del numero di massa (A) dei vari elementi presenti in natura, come mostrato in figura 1.1. Per i nuclei leggeri l'energia di legame per nucleone cresce con l'aumentare

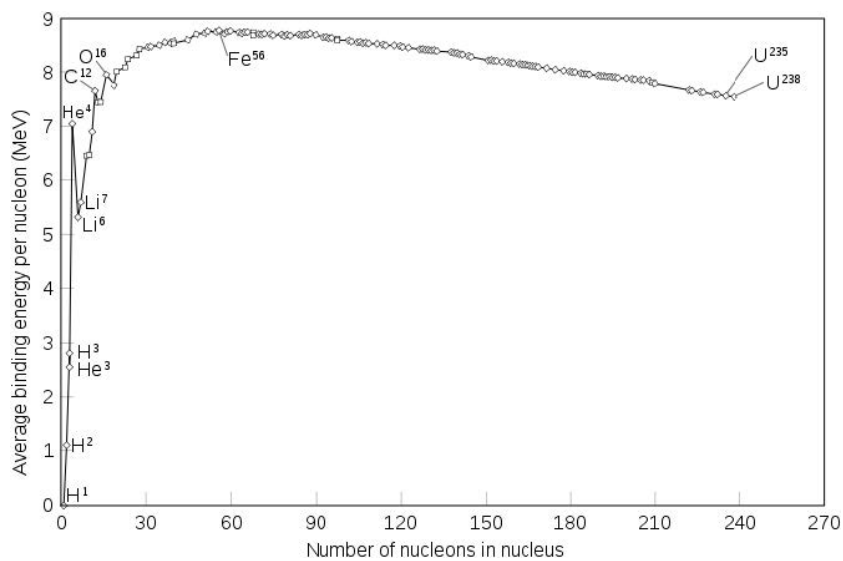


Figura 1.1: Energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa

di A fino ad un massimo rappresentato dal nucleo con $A=56$ (Ferro). In questo intervallo la fusione di due nuclei leggeri porta alla formazione di un nucleo più stabile con un rilascio significativo (alcuni MeV) di energia (si noti la pendenza della curva per i nuclei con $A < 16$). Per i nuclei pesanti la situazione è opposta, cioè l'energia di legame per nucleone diminuisce con l'aumentare di A , quindi con la fissione di un nucleo pesante in due nuclei più leggeri si ottiene una rilevante quantità di energia (decimi di MeV per nucleone).

Ad oggi, la produzione di energia elettrica da fonte nucleare è basata sulla fissione. Tuttavia c'è una forte propensione alla ricerca sulla fusione poiché tale processo, su cui si basa il funzionamento delle stelle, porterebbe grandi

1.1. La fusione inerziale

vantaggi come la grande abbondanza di nuclei leggeri in natura, che porta ad una disponibilità di combustibile pressoché illimitata [7]. Inoltre l'energia rilasciata per nucleone è in media di $5 - 6\text{MeV}$ rispetto agli 0.8MeV della classica reazione di fissione del ^{235}U . Il problema principale per ottenere una reazione di fusione sta nel fatto che i due nuclei reagenti, che hanno una carica elettrica, devono vincere la repulsione della forza di Coulomb per avvicinarsi ad una distanza dell'ordine di 10^{-15}m , cioè il raggio del nucleo; le reazioni di fissione, invece, essendo innescate dall'impatto di un neutrone con il nucleo non risentono di questa problematica.

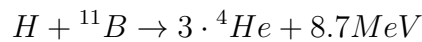
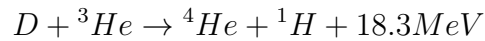
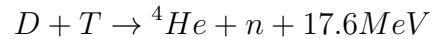
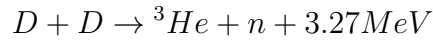
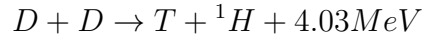
Per vincere la repulsione Coulombiana è necessario quindi che l'energia dei nuclei sia molto elevata. Un'altra possibilità è quella di sfruttare l'effetto tunnel la cui probabilità comunque aumenta con l'aumentare dell'energia dei nuclei coinvolti nella reazione. Dal punto di vista della produzione energetica l'accelerazione di ioni che prevede l'utilizzo di un acceleratore di particelle, non è percorribile perché la reazione più probabile è quella di ionizzazione dei nuclei bersaglio. Per fornire quindi un'elevata energia ai nuclei, la strada che è stata percorsa sino ad oggi è quella dell'utilizzo di un plasma termonucleare. La realizzazione di un reattore per la produzione di energia elettrica, prevede che il combustibile venga portato allo stato di plasma termonucleare, che può raggiungere energie e temperature molto elevate, dell'ordine delle decine di keV (circa 10^7K). Le principali strade intraprese per mantenere un plasma in tali condizioni sono il confinamento magnetico e il confinamento inerziale. Queste tipologie di approccio alla ricerca sulla fusione, che verranno approfondite nel paragrafo 1.1.2 e nel paragrafo 1.1.3, presentano ancora oggi dei problemi di carattere fisico oltre che tecnologico. Ad esempio la ricerca nell'ambito dell'interazione tra radiazione elettromagnetica e plasma costituisce uno degli aspetti centrali negli studi sulla fusione a confinamento inerziale, tema che verrà in seguito trattato nel paragrafo 1.1.3.

1.1.1 Reazioni di fusione nucleare

Come detto in precedenza, i nuclei più adatti ad effettuare una reazione di fusione sono quelli leggeri. Di conseguenza le reazioni più studiate ad oggi

Capitolo 1. Introduzione

sono quelle che coinvolgono in particolare gli isotopi dell'idrogeno.



Analizzando le sezioni d'urto e i tassi di reazione di tali reazioni presentati nella figura 1.2 è possibile fare alcune considerazioni.

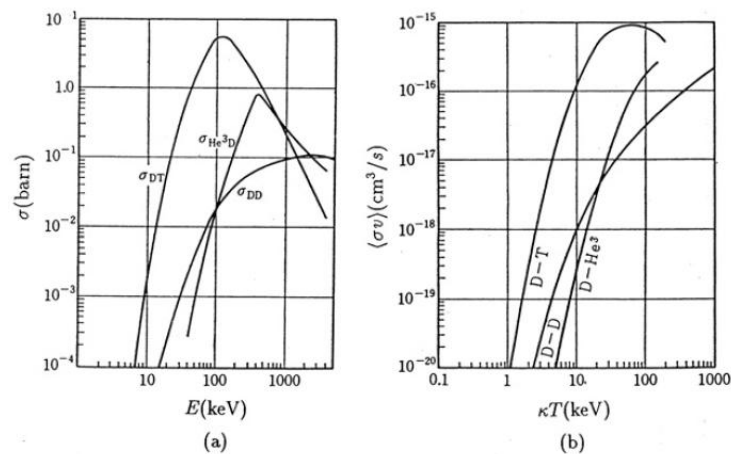
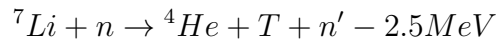
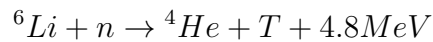


Figura 1.2: (a) Sezione d'urto della reazione di fusione rispetto all'energia cinetica dei nucleoni coinvolti e (b) tasso di reazione in funzione della temperatura ionica. [1]

Le reazioni D - D hanno come vantaggio principale che coinvolgono solo nuclei di deuterio che è un elemento non radioattivo, abbondante in natura e facilmente ottenibile dalla separazione isotopica e successiva elettrolisi dell'acqua pesante. Nonostante questo pregio, la reazione ha un duplice svantaggio: produce trizio, che è radioattivo, o neutroni, che possono provocare attivazione dei materiali strutturali, ed ha tassi di reazione ed energia prodotta inferiori rispetto alle altre reazioni considerate.

1.1. La fusione inerziale

La reazione D - T è la più promettente per la produzione di energia poiché ha il miglior tasso di reazione e produce una rilevante energia. Tuttavia necessita del trizio, che è un elemento radioattivo, che avendo un tempo di dimezzamento di 12.33 anni va prodotto artificialmente. Inoltre il trizio presenta dei notevoli problemi nello stoccaggio poiché i materiali che costituiscono i contenitori sono soggetti ad una permeabilità non trascurabile per questo elemento. Può, però, essere prodotto dalle seguenti reazioni nucleari sul litio:



la prima reazione è esotermica e più probabile con neutroni termici mentre la seconda è endotermica e più probabile con neutroni veloci. Va sottolineato che dalla reazione di fusione D - T viene prodotto un neutrone veloce di energia 14,07 MeV che crea problemi di danneggiamento e di attivazione della struttura del reattore ma che può essere sfruttato per produrre trizio attraverso un blanket di litio attraverso le reazioni sopra indicate.

La reazione D - ${}^3\text{He}$ risulta essere la più vantaggiosa dal punto di vista dell'energia prodotta, che è la maggiore tra le reazioni viste, e dei prodotti della reazione che non sono radioattivi. Inoltre l'assenza di neutroni prodotti evita l'attivazione e il danneggiamento della struttura. Tuttavia la sezione d'urto molto bassa e la bassa concentrazione isotopica dell' ${}^3\text{He}$ ne impediscono l'applicazione.

La reazione ${}^{11}\text{B}$ - H come la reazione precedente non produce neutroni ed elementi radioattivi ma il suo tasso di reazione risulta molto basso.

1.1.2 Confinamento di un plasma termonucleare

Per creare un plasma termonucleare e mantenere il combustibile in tale stato è necessario che l'energia termica delle particelle sia sufficientemente elevata da innescare la reazione di fusione e di conseguenza avere un guadagno netto di energia. Ovviamente questa è la sfida principale, innanzitutto è necessario portare il plasma a temperature dell'ordine di milioni di gradi Kelvin, ma

Capitolo 1. Introduzione

una tale energia termica porterebbe il plasma ad una forte espansione che, se non controllata, farebbe perdere tutta l'energia termica stessa in breve tempo. Da qui nasce il problema del confinamento del plasma termonucleare. Se si guarda alle stelle dove la fusione nucleare garantisce la loro esistenza si può osservare che il confinamento è dovuto all'enorme forza di gravità, perciò in tal caso si parla di *confinamento gravitazionale*. Questo meccanismo di confinamento non può essere utilizzato sulla terra perciò sono state studiate altre tipologie di confinamento. Il confinamento del plasma, comunque, risulta essere molto complesso a causa delle innumerevoli instabilità dovute alle interazioni elettromagnetiche tra le sue componenti, perché queste instabilità possono portare allo spegnimento del plasma prima del raggiungimento della fusione nucleare.

Guardando, invece, al guadagno netto di energia è necessario prendere in considerazione le perdite di energia intrinseche del sistema plasma termonucleare, cioè le perdite dovute all'emissione di radiazione. Gli elettroni che fanno parte del plasma perdono parte della loro energia emettendo radiazione di Bremsstrahlung a causa delle loro continue interazioni con le altre specie del plasma che ne causano accelerazioni e decelerazioni. La radiazione di Bremsstrahlung, alle tipiche temperature di plasma, è radiazione X che abbandona il plasma andando persa. Fortunatamente la potenza creata per unità di volume dalle reazioni di fusione aumenta con la temperatura molto più velocemente che la potenza persa per unità di volume per l'emissione di radiazione di frenamento. Considerando questo fatto è possibile definire la *temperatura di ignizione ideale* cioè la temperatura alla quale si eguagliano la potenza per unità di volume generata dalle reazioni di fusione e la potenza per unità di volume persa per Bremsstrahlung. Considerando, ad esempio, la reazione D - T il valore della temperatura di ignizione ideale è di $4,4keV$ mentre per la reazione D - D è di $32keV$, anche da questo si vede la convenienza nell'utilizzare la reazione D - T come detto in precedenza.

Nel raggiungimento di un bilancio energetico favorevole, l'ignizione ideale rappresenta solo una condizione necessaria poiché oltre alle perdite di energia per radiazione di frenamento ci sono anche quelle dovute al trasporto di calore come la conduzione termica e al fuga dei neutroni dal plasma che portano

1.1. La fusione inerziale

con se una parte dell'energia creata nelle reazioni di fusione. Per raggiungere la condizione di *ignizione* è necessario che l'energia delle reazioni di fusione compensi le perdite di energia del plasma appena elencate, ma se le caratteristiche del sistema (temperatura, densità ecc.) non sono in grado di soddisfare questa condizione è necessario contribuire con una fonte esterna di energia. La condizione di equilibrio è raggiunta quando la potenza generata dalla fusione eguaglia la potenza esterna emessa, questa è la condizione per avere un reattore a potenza nulla. L'obiettivo finale della ricerca sulla fusione è, però, quello di ottenere un sistema in condizioni di *ignizione* dove il processo di fusione è auto-sostenuto da una frazione di energia di fusione trasferita al plasma dalle particelle cariche prodotte dalla reazione (le particelle α nel caso di D - T) che sono in grado di interagire con il plasma stesso. Il *Criterio di Lawson*

$$p\tau_E \geq p\tau_{ign} \quad (1.1.1)$$

che deriva da un semplice bilancio energetico garantisce la condizione di auto-sostenibilità del plasma termonucleare. In questa relazione $p = 2nT$ rappresenta la pressione del plasma, τ_E il tempo di confinamento dell'energia e τ_{ign} il tempo di confinamento dell'energia nelle condizioni di ignizione. Nel caso della reazione D - T, τ_{ign} presenta un minimo quando la temperatura di plasma vale $15keV$, in queste condizioni $p\tau_{ign} = 8.3 atm \cdot s$, che può essere espresso come $n\tau_{ign} = 2 \cdot 10^{14} s/cm^3$. Dalla relazione 1.1.1 si nota che è possibile utilizzare differenti combinazioni di n e τ_e per ottenere la condizione di ignizione, esistono quindi almeno due possibili regimi di operazione per un sistema di confinamento per applicazioni energetiche:

- configurazione di confinamento *inerziale* che prevede la densità n elevata ($\sim 10^{24} particelle/cm^3$) e il tempo di confinamento dell'energia τ_E ridotto ($\sim 10^{-10} s$);
- configurazione di confinamento *magnetico* che prevede la densità n ridotta ($\sim 10^{14} particelle/cm^3$) e il tempo di confinamento dell'energia τ_E elevato ($\sim 10^0 s$).

Capitolo 1. Introduzione

Le problematiche fisiche e tecnologiche che caratterizzano i due metodi di confinamento sono molto differenti, comunque, poiché gli argomenti di studio della tesi derivano da problematiche legate alla fusione a confinamento *inerziale*, nel prossimo paragrafo verranno descritti gli aspetti basilari di questo tipo di approccio alla fusione nucleare al fine della produzione di energia.

1.1.3 L'approccio inerziale alla fusione: cenni e ruolo dell'interazione laser-plasma

L'interesse per la fusione nucleare nasce nel secondo dopoguerra per la fabbricazione di ordigni nucleari. In queste prime bombe termonucleari un esplosione iniziale di un innesco a fissione crea le condizioni per una reazione a fusione per la parte di combustibile costituito da atomi leggeri. Negli anni a seguire si inizia a pensare anche alla possibile applicazione per la produzione energetica della fusione nucleare, ed è proprio come conseguenza dei primi studi in ambito militare che nasce l'idea degli attuali impianti di ricerca sulla fusione inerziale.

Un impianto per la fusione inerziale si basa sulla presenza di un laser, detto *driver* le cui caratteristiche verranno introdotte nel seguito del paragrafo. Il driver è composto un elevato numero di fasci che sono singolarmente amplificati e mandati alla camera dove avviene la reazione attraverso una serie di specchi per colpire il combustibile da tutte le direzioni. L'elevata potenza dei laser genera un'ablazione dello strato esterno del combustibile che va a comprimere la zona più interna creando le condizioni ottimali per far avvenire la reazione di fusione. Questo processo è simile a quello che avviene nelle bombe-H dove i raggi X generati dall'innesco a fissione vanno ad interagire lo strato esterno del combustibile innescando l'ablazione e conseguentemente la fusione.

Nell'ambito della fusione inerziale come detto in precedenza si opera con τ_e dell'ordine del nanosecondo e densità n di $10^{23} - 10^{24}$ *particelle/cm³*. Questo comporta pressioni molto elevate dell'ordine di $10 - 10^2$ *Gbar*. Una simile configurazione può essere ottenuta, oltre che negli ordigni nucleari, solo per piccole quantità di materia. Poiché le densità e le pressioni in gioco hanno

1.1. La fusione inerziale

valori di questo ordine di grandezza, per comprendere al meglio le difficoltà tecnologiche legate alla fusione inerziale è utile utilizzare un nuovo set di grandezze di riferimento. Si può quindi passare dalla densità di particelle a quella in massa $n \rightarrow \rho \sim m_{DT}n$ e dal tempo di confinamento dell'energia al range caratteristico del sistema $\tau_E \rightarrow R \sim v_s \tau_E$. In questo modo è possibile esprimere il criterio di Lawson (1.1.1) per la reazione D - T nel seguente modo:

$$\rho R \geq 1 \frac{g}{cm^2} \quad (1.1.2)$$

È utile ora andare a considerare un caso pratico per poter fare delle stime appropriate. Considerando che la densità dell'idrogeno solido vale circa $0,2 g/cm^3$ (temperatura $T < 20 K$), per rispettare la relazione 1.1.2 il sistema deve presentare una dimensione dell'ordine del cm . Tale sistema, inoltre, deve essere scalato fino alla temperatura di 15 keV mantenendo la propria densità per avere una reazione di fusione. Alla densità considerata, la massa di D - T per una volume di combustibile con dimensione caratteristica di qualche cm è dell'ordine del grammo. Sapendo che la fusione completa di $1mg$ di D - T libera in energia tra i 300 e i 400 MJ se ne deduce che la fusione di un grammo libererebbe un energia paragonabile ad un ordigno nucleare. Per questo gli studi sulla fusione inerziale sono interessanti anche da un punto di vista militare. Ai fini della produzione di energia elettrica una simile quantità di energia sviluppata in tempi così brevi (τ_E) non è gestibile. Per questo motivo e per il fatto che servirebbe anche una considerevole quantità di energia innescare la reazione di fusione è necessario operare su scale più piccole. Si considerano quindi quantità di combustibile nucleare dell'ordine dei mg . Questo implica un aumentare del valore della densità di plasma ρ . Infatti per una configurazione sferica si ha che

$$m_{DT} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{(\rho R)^3}{\rho^2} \propto \rho^{-2} ; \quad (1.1.3)$$

in particolare, con m_{DT} in mg , si ha che $\rho \sim 300/\sqrt{m_{DT}} g/cm^3$, che implica una densità di $300 g/cm^3$ per $1 mg$ di combustibile nucleare. Questa densità è superiore di circa 3 ordini di grandezza rispetto all'idrogeno solidificato. Da

Capitolo 1. Introduzione

questa semplice stima si comprende una delle effettive problematiche tecnologiche nell'applicazione pratica della fusione inerziale legate alla compressione a cui deve essere soggetto il pellet.

È possibile effettuare anche una stima di carattere energetico per capire quale energia debba fornire il *driver*. Nel caso della fusione di un mg di D - T l'energia liberata è circa pari a $400 MJ$. Sorge spontaneo chiedersi per una tale quantità di energia ottenuta, quanta debba essere l'energia introdotta dall'esterno attraverso il *driver*. A tal proposito è utile introdurre la grandezza detta *fattore di guadagno* Q definito come

$$Q \equiv \frac{\text{Potenza termica prodotta}}{\text{Potenza termica introdotta da fonti esterne}} \quad (1.1.4)$$

questo parametro è utile per capire a che punto è una tecnologia volta alla produzione energetica nell'ambito della fusione nucleare, nel caso della fusione a confinamento inerziale è più significativo definire il Q come il rapporto tra l'energia fornita e l'energia generata per "singolo pellet", tale definizione nasce dal fatto che la potenza media generata da un sistema a fusione a confinamento inerziale dipende molto dalla frequenza dei processi coinvolti. Tornando quindi alla domanda posta in precedenza, è possibile ora rispondere che per ottenere un guadagno dell'ordine di 10^2 (per far fronte a tutte le inefficienze) è necessario conferire al sistema un'energia di $\sim 1 - 10 MJ$ al pellet.

Per riuscire ad aumentare temperatura e densità e giungere ai valori richiesti si segue il processo schematizzato in figura 1.3. Nella fase iniziale si irradia il combustibile sotto forma di pellet dall'esterno (1.), in tal modo si innesca un processo che porta alla ionizzazione della superficie esterna e la creazione di un plasma molto energetico con la pressione opportuna, l'ablazione del plasma causa un'implosione del core del pellet (2.). Tale implosione genera un aumento di densità e di temperatura creando un punto "caldo" detto *hot-spot* nel quale si può innescare la fusione (3.). Infine le particelle α cedendo energia al di fuori del *hot-spot*, causano l'aumento di temperatura della parte restante del pellet, fino a condizioni tali da innescare la fusione nucleare (si ha un'onda di combustione nucleare) (4.).

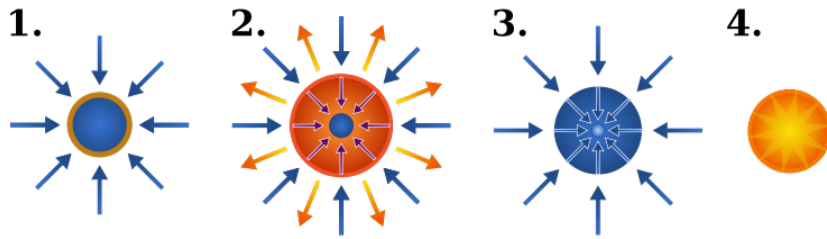


Figura 1.3: stadi della fusione inerziale

Il processo di ablazione del pellet è legato alla selezione del tipo di *driver* da adottare. Una possibile selezione del driver può essere rappresentata da un laser ad alta potenza impulsato. Come visto dalle stime precedenti gli impulsi dovranno essere di energia dell'ordine del MJ e di breve durata $\sim ns$ (paragonabile a τ_e). Questo apre un insieme di problematiche nell'ambito del laser da utilizzare e dei relativi sistemi di amplificazione. Ad esempio con laser come il Ti-sapphire è possibile generare, attraverso la tecnologia mode-locking, impulsi molto brevi (dell'ordine dei femtosecondi) grazie alla larghezza di banda molto ampia. Tuttavia la breve durata dell'impulso limita la massima energia immagazzinabile nel laser (dell'ordine del J). Al contrario con un laser di tipo Nd-glass si possono generare impulsi di una durata maggiore (centinaio di femtosecondi) che permettono di creare fasci ad alta energia (intorno al MJ). Essendo l'energia legata all'intensità dell'impulso (si veda l'equazione 1.2.1), con laser di questo tipo si possono ottenere impulsi ad alta intensità. Interagendo con la materia, un impulso di alta intensità porta la materia stessa allo stato di plasma, tale aspetto verrà chiarito nel paragrafo 1.2.1. In tali condizioni di interazione nascono dei fenomeni di tipo non-lineare che possono influenzare il trasferimento di energia dal laser al pellet come si vedrà nel capitolo 2.

Esistono varie possibilità per conferire al pellet, che normalmente è di forma sferica, l'energia dell'impulso laser:

- Focalizzazione a waist “grande”: si esegue una focalizzazione con un beam-waist (la sezione trasversale del fascio laser) delle stesse dimensioni della sferetta di combustibile. Affinché l'irraggiamento sia uniforme deve avvenire da più direzioni. Lo svantaggio di questo metodo

Capitolo 1. Introduzione

sta nel fatto che, ad inizio compressione, la sferetta diviene più piccola del waist dell'impulso causando una perdita dell'energia fornita.

- Focalizzazione a waist “piccolo” - Schema Diretto (Fig.1.4): in questo caso la focalizzazione da luogo ad un waist di dimensione molto inferiore alla dimensione della sferetta. In questo tipo di sistema si può raggiungere la condizione di irraggiamento uniforme facendo uso di molti fasci che incidono a raggiera da tutte le direzioni sul pellet, gli impulsi devono essere sincronizzati e alla stessa ampiezza.
- Cavità di corpo nero (hohlraum) - Schema Indiretto (Fig.1.4): in questo caso viene sfruttata la radiazione di corpo nero che per definizione è isotropa e uniforme. La cavità viene colpita all'esterno da *driver* ed, alle energie considerate, emette con un picco sui raggi X che vanno a incidere sul pellet in modo totalmente isotropo. Lo svantaggio di questa configurazione è dato dalla bassa efficienza di conversione energetica.

Per quel che riguarda la fase di compressione del pellet, si cerca di avere una compressione isoentropica della materia, che risulta essere nello stato di plasma, per spendere la minor quantità di energia possibile. Tuttavia la violenta compressione che si sviluppa su tempi caratteristici paragonabili al nanosecondo non è isoentropica, cioè avviene per onde d'urto che causano un aumento dell'entropia. Si cerca, quindi, di guidare la compressione attraverso opportune formazioni dell'impulso laser con l'obiettivo di rendere la compressione quanto più possibile vicina alla condizione di isotropia. Per tale ragione si è abbandonata l'idea del pellet sferico pieno per un pellet sferico cavo (figura 1.6), costituito da uno strato più esterno di materiale chiamato “ablator” e uno più interno di D - T solido. La cavità interna viene riempita con un gas di D - T in equilibrio di fase con il D - T solido. L'utilità di avere D - T gassoso nel core della sfera cava al posto del vuoto è data dallo sviluppo di entropia che si ha a fine compressione. Ciò causa un aumento di temperatura che porta alla formazione della scintilla che accende la combustione termonucleare, i prodotti di fusione scaldano la materia compressa circostante facendole raggiungere la condizione per la fusione. Le dimensioni della sferetta di combustibile sono dell'ordine del *mm* (figura 1.5).

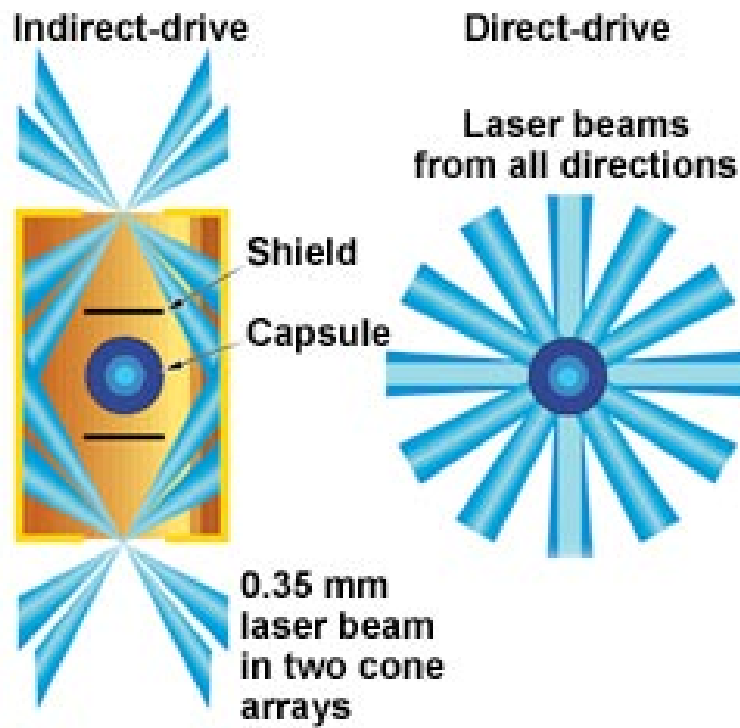


Figura 1.4: Rappresentazione dello Schema Diretto (a destra) e dello Schema Indiretto (a sinistra)



Figura 1.5: Pellet sferico a confronto con un dito umano

Capitolo 1. Introduzione

Il più promettente degli esperimenti sulla fusione a confinamento inerziale è il NIF, acronimo di National Ignition Facility che si trova al Lawrence Livermore Laboratory negli Stati Uniti, che è anche il laser più potente al mondo. Proprio questa impianto quest'anno ha raggiunto per la prima volta nella storia un *fattore di guadagno* Q maggiore dell'unità [2]. Sfruttando 192 laser che portano 1,9 MJ di energia su un hohlraum d'oro (figura 1.6), una cavità cilindrica, che emette così radiazione X isotropa. Una frazione di questi raggi X viene assorbita dalla capsula di combustibile generando circa 100 Mbar di pressione sull'ablatore, che va ad innescare il processo di compressione che porta alla fusione nucleare nel core di D - T.

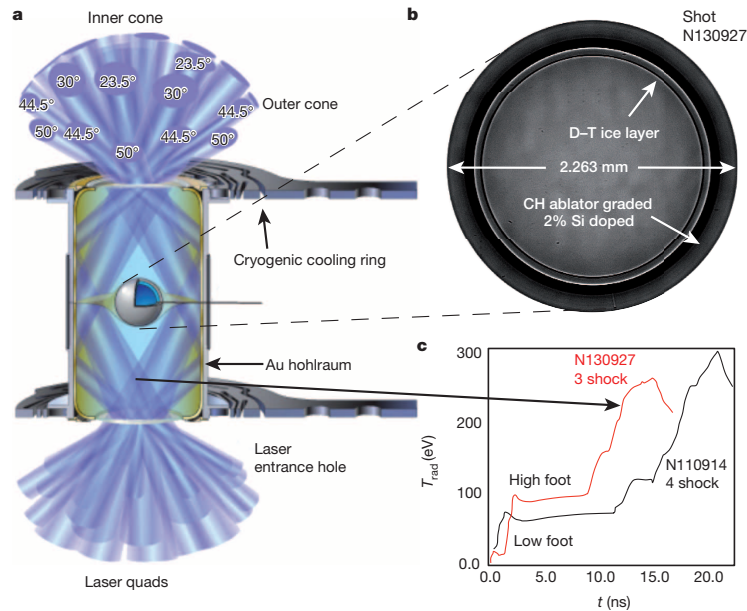


Figura 1.6: Target a Schema indiretto per fusione a confinamento inerziale in NIF. [2]

1.2 Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasmi

Come si è visto nel paragrafo precedente l'interazione tra il driver e il pellet (che raggiunge lo stato di plasma) costituisce un aspetto fondamentale

1.2. Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasmi

nella ricerca sulla fusione nucleare a confinamento inerziale. In particolare gli attuali studi sono focalizzati alla comprensione del processo di cessione di energia del laser al plasma. Tuttavia come mostrato dai più recenti esperimenti [2], in questo processo possono nascere delle instabilità che rendono difficile controllare la cessione di energia. Queste instabilità possono essere dovute a fenomeni non lineari dell'interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasma.

Prima di trattare approfonditamente l'interazione tra laser e plasma è utile introdurre brevemente dei concetti generali riguardo l'interazione tra la radiazione elettromagnetica e la materia. Per questo motivo tali aspetti saranno trattati nel paragrafo paragrafo 1.2.1 ed in seguito nel capitolo 2 ci si soffermerà maggiormente sull'interazione tra laser e plasma.

Come sottolineato più volte durante il capitolo il plasma ricopre un ruolo centrale nella fusione inerziale. Per questo è importante introdurre brevemente le tipologie di modelli che sono utilizzate per descrivere questo stato della materia, prestando particolare attenzione alla fase di interazione con la radiazione elettromagnetica. Questa tematica verrà brevemente introdotta nel paragrafo 1.2.2 e sarà successivamente approfondita nel capitolo 2.

1.2.1 Interazione tra radiazione elettromagnetica e materia: cenni

L'interazione tra la radiazione elettromagnetica e la materia è sempre stata fonte di studio sia in ambito teorico, portando allo sviluppo di teorie fisiche, che in ambito sperimentale con numerose applicazioni pratiche. Proprio gli studi sperimentali hanno fatto un significativo passo in avanti quando negli anni '60 è stata inventata la tecnologia dei laser che ha permesso di creare sorgenti di radiazione elettromagnetica con caratteristiche peculiari come la monocromaticità, la coerenza temporale e la possibilità di generare impulsi di breve durata e focalizzati su piccole regioni di spazio. È utile introdurre un parametro che consente di individuare gli aspetti fondamentali del regime di interazione. Tale parametro è l'intensità cioè la potenza per unità di superficie. Per un impulso laser l'intensità può essere espressa in funzione

Capitolo 1. Introduzione

del campo elettrico dalla seguente relazione:

$$I \left(\frac{W}{cm^2} \right) = \frac{cE^2}{8\pi} \simeq 1,33 \times 10^{-3} E^2 \left(\frac{V}{cm} \right)^2 . \quad (1.2.1)$$

A intensità superiori a $10^{15} - 10^{16} W/cm^2$ il campo elettrico dell'onda diviene paragonabile al campo coulombiano che lega gli elettroni ai nuclei stimabile attraverso il rapporto fra la carica fondamentale e e il quadrato del raggio di Bohr ($E_c \simeq 5,15 \times 10^9 V/cm$). Per intensità maggiori di $10^{17} W/cm^2$ gli impulsi laser in questa trattazione verranno definiti *ultraintensi*.

Lo sviluppo della tecnologia laser negli anni ha portato ad intensità sempre maggiori grazie a tecniche di *Q-switching* e *mode-locking* negli anni '60 e la *Chirped Pulse Amplification* (CPA) nella seconda metà degli anni '80. In questo modo è stato possibile raggiungere regimi di interazione completamente nuovi sia di grande interesse teorico che per le possibili applicazioni pratiche, proprio come la fusione a confinamento inerziale che richiede intensità molto elevate. Un esempio è NIF che per riuscire a generare reazioni di fusione è stato progettato per lavorare ad intensità dell'ordine di $10^{16} - 10^{17} W/cm^2$ [8].

È utile osservare la figura 1.7 che rappresenta l'evoluzione della tecnologia laser mostrando la massima intensità raggiunta sperimentalmente di anno in anno dall'invenzione dei laser. Si noti, come accenato in precedenza, l'apporto dato dall'invenzione della tecnica CPA che ha permesso di compiere in quindici anni un balzo di 5-6 ordini di grandezza nelle intensità ottenibili. Tuttavia da inizio millennio il trend di crescita della massima intensità ottenibile è diminuito rispetto alle previsioni e si sono raggiunti valori dell'ordine di $10^{23} W/cm^2$. La figura 1.7 mostra anche che all'aumentare dell'intensità del laser è possibile entrare in regimi fisici caratterizzati da fenomeni sempre più complessi ed interessanti. Quando l'intensità supera il valore di $10^{15} W/cm^2$, il campo elettrico associato all'impulso diventa dello stesso ordine di grandezza o maggiore del campo coulombiano che lega gli elettroni al nucleo. In questo regime gli atomi vengono ionizzati, per mezzo di meccanismi a più fotoni (per frequenze dell'impulso dell'ordine del μm , l'energia associata ad un singolo fotone non è sufficiente a ionizzare la materia) [9] e la dinamica

1.2. Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasmi

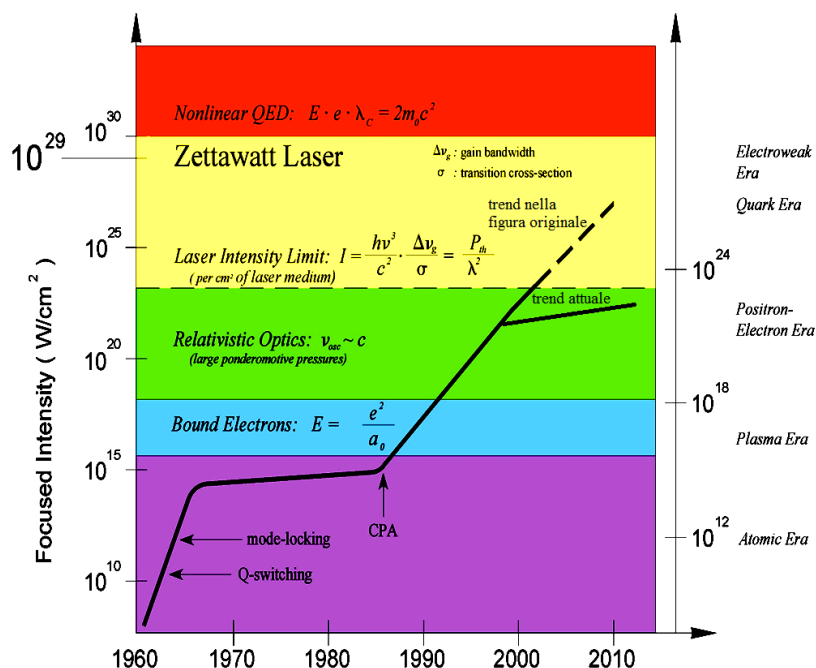


Figura 1.7: Evoluzione della tecnologia laser. Da [3].

non lineare degli elettroni risulta essere determinata dall'effetto combinato del campo oscillante del laser e del campo coulombiano. In mezzi gassosi, ad esempio, questo tipo di interazione porta alla generazione di radiazione, emessa dagli elettroni, a frequenze corrispondenti alle armoniche dell'impulso laser, permettendo di ottenere sorgenti di radiazione X coerente.

Portando l'intensità a valori dell'ordine di 10^{16} W/cm^2 il campo elettrico diventa maggiore di 10^9 V/cm (può raggiungere valori dell'ordine di 10^{12} V/cm per intensità di $\sim 10^{21} \text{ W/cm}^2$). Un simile campo elettrico è in grado di ionizzare completamente il mezzo materiale con cui interagisce portando allo stato di plasma. Con intensità maggiori di 10^{18} W/cm^2 gli elettroni nel campo del laser raggiungono velocità confrontabili con quelle della luce, in un singolo ciclo, perciò diventano importanti gli effetti relativistici che influenzano le caratteristiche non lineari dell'interazione.

Questi processi sono accompagnati dalla generazione di fenomeni di grande interesse, sia dal punto di vista teorico che per le applicazioni [10], come ad esempio la produzione di impulsi di raggi X, la generazione di campi elet-

Capitolo 1. Introduzione

trici e magnetici di elevata intensità, di fasci energetici di elettroni, ioni e neutroni, e la realizzazione di reazioni nucleari indotte dall'interazione.

L'interazione di impulsi ultraintensi con la materia permette, in condizioni opportune, di generare impulsi ultrabrevi di radiazione X, incoerente e coerente, anche inferiori al ps [11]. A seguito dell'interazione è possibile generare un plasma caratterizzato da elevate densità ($\sim 10^{23}$ *elettroni/cm*²) e temperatura ($\sim keV$), un mezzo ideale per un'efficiente emissione di raggi X. È stato possibile produrre impulsi caratterizzati da brillanze molto elevate, fino a $10^{17}W/cm^2sr$ ed è stata sperimentalmente mostrata la possibilità di utilizzare questi impulsi di raggi X in applicazioni radiografiche di precisione e per lo studio dell'evoluzione dinamica delle molecole [12], [13].

La produzione di intensi campi elettrici quasi-statici ($\sim 100GV/m$) e magnetici ($\sim Ggauss$) rappresenta uno degli effetti più caratteristici dell'interazione tra impulsi ultraintensi e materia. Questi campi elettrici sono in grado di generare fasci di elettroni, ben collimati, di energia ultrarelativistica (dell'ordine del GeV) su distanze dell'ordine del μm [14], [15].

Un aspetto molto interessante dell'interazione tra impulsi laser ultraintensi e materia è la possibilità di realizzare reazioni nucleari. A seguito dell'interazione con un film solido sottile, un impulso laser è in grado di generare un fascio di elettroni relativistici; questi ultimi, incidendo su un mezzo ad elevato numero atomico, generano radiazione X e γ che può essere utilizzata per indurre reazioni nucleari. In questo modo sono state ottenute diverse reazioni indotte da laser, come ad esempio reazioni (γ, n) e fotofissioni [16], [17]. In particolare, attraverso questo tipo di reazioni è stata anche accertata la possibilità di realizzare esperimenti di trasmutazione nucleare [18], anche di elementi a vita lunga presenti nei prodotti di fissione dei reattori nucleari, come lo iodio-129 [19]. L'interazione con film solidi sottili è in grado di generare anche fasci di protoni e ioni. Questi fasci di ioni, soprattutto protoni e ioni-deuterio, possono essere utilizzati per indurre reazioni nucleari (p, n) e di fusione nucleare. Con queste tecniche, è stata possibile la produzione di fasci di neutroni [20], la generazione di radionuclidi [21], [22], e in generale la trasmutazione di elementi.

1.2. Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasmi

1.2.2 Metodi per lo studio dell'interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasmi

Come si è visto la tematica dell'interazione tra onde elettromagnetiche e plasmi è di grande interesse in numerosi settori. Dal punto di vista teorico e della comprensione dei fenomeni fisici coinvolti, perciò è fondamentale capire come descrivere un sistema costituito da un plasma in interazione con un'onda elettromagnetica. Scegliere il modello opportuno per descrivere un plasma non è semplice per il fatto che tale stato della materia copre un range enorme nei valori di parametri come la densità e la temperatura. Per averne un'idea è possibile osservare la figura 1.8 che riporta alcune tipologie di plasma in funzione di densità elettronica e temperatura.

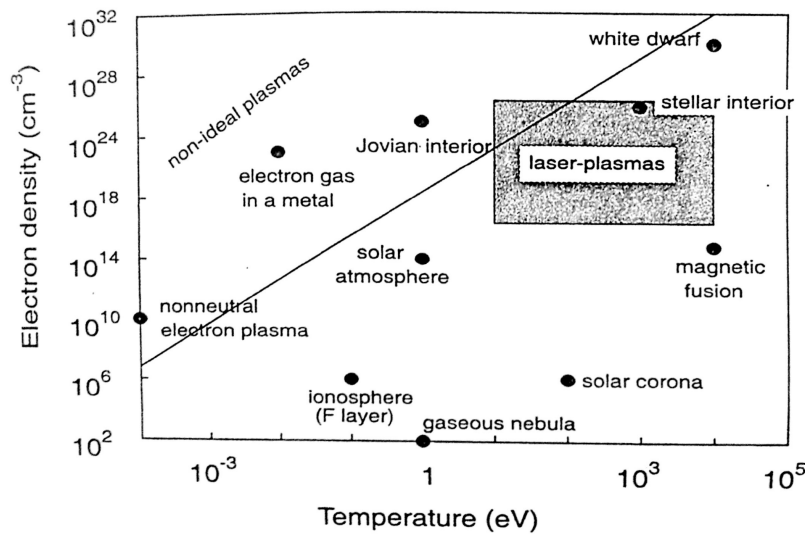


Figura 1.8: Classificazione dei plasmi nel piano densità-temperatura, da [4]

L'analogia con i gas o i liquidi è spesso utile per i plasmi ideali, a bassa densità e in equilibrio termico che possono essere descritti con le equazioni di Navier-Stokes. I plasmi ad alta densità, invece, possono essere trattati come i sistemi a stato solido. Nel caso dell'interazione con radiazione elettromagnetica ultraintensa e ultrabreve, la gran parte dei modelli che descrive un

Capitolo 1. Introduzione

plasma può essere raggruppata in tre categorie: modelli statici, modelli fluidi e modelli cinetici.

Il primo di questi approcci tratta il plasma come un mezzo passivo che viene creato dalla ionizzazione o alterato dalla propagazione del laser attraverso il plasma stesso. Questa descrizione è particolarmente adatta per sistemi a densità molto bassa dove il periodo di plasma $2\pi/\omega_p$ è lungo rispetto al tempo di interazione. Perciò il plasma fa sentire la sua presenza attraverso variazioni locali dell'indice di rifrazione, questo può a sua volta influenzare la propagazione dell'impulso laser.

Un modello fluido, o idrodinamico, va oltre questo tipo di approccio statico e solitamente assume che il plasma sia almeno localmente in equilibrio termico. Si assume quindi che le particelle seguono una funzione di distribuzione Maxwelliana con una temperatura ben definita per le singole specie che compongono il plasma. Poste queste condizioni, il plasma può essere descritto dalle sue variabili macroscopiche: densità (n_a), pressione (p_a), velocità fluida (\mathbf{u}_a) attraverso le equazioni di continuità 1.2.2, della quantità di moto 1.2.3 e dell'energia interna 1.2.4:

$$\frac{dn_a}{dt} + n_a \nabla \cdot \mathbf{u}_a = 0 \quad , \quad (1.2.2)$$

$$m_a n_a \frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = -\nabla p_a - \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{\Pi}}}_a + q_a n_a (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_a}{c} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_a \quad , \quad (1.2.3)$$

$$\frac{3}{2} n_a \frac{dT_a}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{Q}_a - p_a \nabla \cdot \mathbf{u}_a - \bar{\bar{\mathbf{\Pi}}}_a : \nabla \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{R}_a + \int_v C_a \frac{1}{2} m_a v d^3 v \quad (1.2.4)$$

dove \mathbf{E} e \mathbf{B} sono i campi elettrici e magnetici del sistema, m_a la massa delle particelle della popolazione a , $\bar{\bar{\mathbf{\Pi}}}_a$ la parte anisotropa del tensore delle pressioni, \mathbf{R}_a la variazione per unità di tempo della quantità di moto complessiva dovuta alle collisioni, T_a la temperatura cinetica ($T_a = p_a/n_a$), \mathbf{Q}_a il flusso di calore associato alla popolazione a e $\int_v C_a \frac{1}{2} m_a v d^3 v$ l'energia dovuta allo scambio collisionale.

Un modello idrodinamico viene utilizzato principalmente per studiare il comportamento dinamico di un plasma sotto l'influenza di campi elettrici e magnetici esterni o il riscaldamento da parte di fasci di particelle o laser. Le

1.2. Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasmi

scale temporali d'interesse sono governate dal moto degli ioni; tipicamente i tempi caratteristici in questione vanno dal picosecondo a diversi nanosecondi per interazioni laser-plasma. Risulta quindi chiara l'utilità dei modelli di tipo fluido per spiegare alcune fenomeni di tipo macroscopico nei plasmi. Perciò nel paragrafo 2.1.2 si sfrutteranno modelli di tipo fluido per introdurre alcuni fenomeni che avvengono nell'interazione tra onde elettromagnetiche e plasmi.

Un approccio cinetico, invece, cerca di determinare la funzione di distribuzione $f(r, v)$ auto-consistente, senza assumere che le specie costituenti il plasma assumano sempre una distribuzione Maxwelliana. Tipici esempi di applicazioni dove utilizzare questo tipo di modello sono la propagazione dei laser e la generazione di onde di plasma, dove ci si aspetta oscillazioni di grande ampiezza. In questi casi la funzione di distribuzione può risultare fortemente anisotropa, quindi un approccio cinetico che determina la funzione di distribuzione è particolarmente indicato. Per questo il tema dei modelli cinetici è di particolare interesse per lo sviluppo della tesi e verrà approfondito nel paragrafo 2.3.

È importante infine sottolineare che sia nell'approccio fluido che in quello cinetico c'è la necessità di risolvere il modello di plasma con le equazioni di Maxwell. Infatti accoppiare tali equazioni, di seguito riportate, con le equazioni che descrivono il plasma permette di descrivere il laser e i campi all'interno del plasma durante l'interazione.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1.2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2.6)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2.7)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2.8)$$

Capitolo 2

Fisica dell'interazione laser plasma

Come si è visto nel capitolo 1 gli studi condotti negli anni riguardo la fusione inerziale hanno mostrato la centralità dell'interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e la materia allo stato di plasma. In particolare come ricordato nel paragrafo 1.2, tali studi hanno messo in luce la presenza di una grande varietà e complessità di fenomeni. L'obiettivo di questo capitolo è quello di fornire una breve descrizione di alcuni di questi fenomeni, causati dalla non linearità dell'interazione, al fine di contestualizzare gli obiettivi della tesi.

Il paragrafo 2.1 fornirà un introduzione generale in modo da poter presentare successivamente, nel paragrafo 2.2, una tipologia di strutture elettromagnetiche che possono essere prodotte nel plasma a seguito dell'interazione con un impulso laser. Queste strutture, dette *Solitoni elettromagnetici*, rivestono un ruolo centrale nel lavoro di tesi. Nel paragrafo 1.2.2 si discuterà in che modo l'approccio cinetico introdotto nel paragrafo 1.2.2 possa essere adattato per poter descrivere e analizzare l'evoluzione dei Solitoni elettromagnetici nel plasma. Infine il paragrafo 2.4 illustrerà gli obiettivi del lavoro di tesi alla luce delle premesse effettuate nei primi due capitoli.

2.1 Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasma in regime non lineare

In questo paragrafo vengono introdotti alcuni fenomeni caratteristici dell'interazione tra radiazione elettromagnetica e plasma, di particolare rilevanza per lo studio effettuato in questo lavoro di tesi. Inizialmente viene proposto il caso in cui l'ampiezza della radiazione non è relativistica. In tal modo è possibile introdurre dei concetti generali utili per comprendere le caratteristiche dell'interazione per passare poi alla trattazione in regime relativistico.

La propagazione di un'onda elettromagnetica descritta da un vettore d'onda \mathbf{k} e una frequenza ω , in un plasma freddo, omogeneo non collisionale e non relativistico di densità n può essere descritta da una relazione di dispersione del tipo $kc = (\omega_{pe}^2 - \omega^2)^{1/2}$, dove $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n / m_e)^{1/2}$ è la frequenza di plasma elettronica, che è la frequenza del moto collettivo degli elettroni nel plasma [23]. Da questa relazione di dispersione si può osservare che esiste un valore di densità critica n_c tale per cui esistono due differenti regimi di interazione. La densità critica di un plasma è quella per cui la frequenza di plasma ω_{pe} eguaglia la frequenza della radiazione elettromagnetica ω :

$$n_c = \frac{m_e \omega^2}{4\pi e^2} . \quad (2.1.1)$$

Un plasma con densità inferiore alla critica viene definito *sotto-denso*, mentre nel caso in cui la densità sia maggiore di quella critica il plasma viene detto *sovra-denso*. Classicamente, in regime lineare, non relativistico le onde elettromagnetiche possono propagarsi liberamente solo in plasmi sotto-densi mentre in plasmi sovra-densi vengono smorzate, decadendo esponenzialmente, su distanze dell'ordine del cosiddetto *skin-depth* ($d_s \simeq c/\omega_{pe}$). È quindi possibile interpretare la frequenza di plasma ω_{pe} anche come la minima frequenza per un'onda elettromagnetica in grado di propagarsi nel plasma. Nel caso in cui il plasma non sia omogeneo ci possono essere zone in cui la stessa onda elettromagnetica può propagare e altre in cui non può propagarsi a

2.1. Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasma in regime non lineare

causa della differente densità: tale densità può essere superiore o inferiore di quella critica. All'interfaccia di queste zone possono verificarsi fenomeni di riflessione che possono portare all'insorgere di instabilità.

Nel caso relativistico si hanno delle importanti differenze rispetto al caso non relativistico poiché è differente la relazione di dispersione, quindi si modifica la relazione 2.1.1. La relazione di dispersione relativisticamente corretta è $kc = (\omega_{pe}^2/\gamma - \omega^2)^{1/2}$ dove γ è il fattore relativistico degli elettroni ($\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ con u modulo della velocità degli elettroni). Perciò la densità critica viene aumentata di un fattore γ rispetto al valore non relativistico per la stessa frequenza di radiazione:

$$n_c = \gamma \frac{m_e \omega^2}{4\pi e^2} = \gamma \frac{1,1 \cdot 10^{21}}{\lambda^2(\mu m)} cm^{-3} , \quad (2.1.2)$$

dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione espressa in micron. Da questa relazione si può vedere che la densità critica non è più solo funzione della frequenza dell'onda ma anche, tramite il parametro γ , della velocità di oscillazione. La velocità di oscillazione è legata all'intensità dell'onda come si vedrà nel prossimo paragrafo introducendo il caso apparentemente semplice di dinamica di una particella carica in un'onda elettromagnetica piana.

Attraverso l'uso di laser ultraintensi si ha un aumento rilevante del fattore relativistico γ e conseguentemente della densità critica. In questo modo è permessa la propagazione di onde con frequenze tali che, ad intensità minori, ne sarebbe stata impedita la propagazione nel medesimo plasma, questo fenomeno è detto “*relativistic induced transparency*” [24].

2.1.1 Dinamica di una particella carica in un'onda elettromagnetica piana

Prima di analizzare l'interazione tra un plasma e un'onda elettromagnetica, è utile osservare ciò che accade per una particella singola carica che interagisce con un'onda elettromagnetica. Tale caso anche se di più semplice trattazione è utile per introdurre alcuni concetti generali nell'interazione laser-plasma.

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

Consideriamo il moto di una particella carica su un'onda piana (polarizzata linearmente per semplicità) descritta dal potenziale vettore

$$\mathbf{A} = A_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{-i(\omega t - kx)} \right\} \hat{\mathbf{e}}_{y,z} . \quad (2.1.3)$$

La dinamica della particella di carica q è descritta dall'equazione del moto:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right) \approx q\mathbf{E} \quad (2.1.4)$$

Trascurando la parte magnetica della forza di Lorentz (assunzione accettabile per $v \ll c$), essa oscillerà sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda con una velocità massima pari a:

$$v = \frac{q}{e} a_0 c \quad (2.1.5)$$

dove $a_0 = \frac{eA_0}{mc^2}$ è l'ampiezza normalizzata dell'onda e A_0 è il modulo del potenziale vettore che descrive il campo elettromagnetico. Si può facilmente notare come la velocità di oscillazione diviene paragonabile a c per ampiezze normalizzate dell'ordine dell'unità (alle quali corrispondono intensità dell'ordine dei 10^{18} W/cm^2). Il valore di $a_0 = 1$ definisce dunque il limite oltre il quale l'ampiezza della radiazione dà luogo ad effetti relativistici. Risulta quindi necessaria una trattazione relativistica per affrontare il problema.

A tale scopo è comodo sfruttare la formulazione di Lagrange, scrivendo la lagrangiana in funzione il potenziale ϕ e il potenziale vettore \mathbf{A} dell'onda elettromagnetica.

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\phi \quad (2.1.6)$$

Le equazioni del moto si possono ricavare risolvendo l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.1.7)$$

ottenendo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right) \quad (2.1.8)$$

2.1. Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasma in regime non lineare

dove $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ è la quantità di moto relativistica e $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ il fattore relativistico. Inoltre nel caso trattato

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A} . \quad (2.1.9)$$

La scelta di un'onda piana monocromatica permette di ricavare facilmente alcune grandezze invarianti del sistema.

In primo luogo si può subito notare come un'onda piana dipenda dalla sola coordinata spaziale che definisce la direzione di propagazione. Pertanto la lagrangiana dovrà essere indipendente dalle altre due coordinate che definiscono il piano perpendicolare a essa (in questa trattazione la direzione di propagazione verrà presa parallela all'asse x), di conseguenza $\partial L/\partial \mathbf{r}_\perp = 0$; questo implica:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\perp} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\perp} = \mathbf{p}_\perp + \frac{q}{c}\mathbf{A}_\perp = \text{cost} . \quad (2.1.10)$$

Un'altra invariante si può ricavare notando come un'onda piana nel vuoto dipenda dalle coordinate spazio-temporali attraverso la relazione $t - x/c$. Dal momento che $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t - x/c)$, è possibile scrivere la derivata parziale nel tempo della lagrangiana nella forma $\partial L/\partial t = -c\partial L/\partial x$. Sfruttando questa relazione e la relazione 2.1.7 (ricordando che nel caso di un'onda piana $\mathbf{A}_x = 0$) si può scrivere la variazione dell'energia lagrangiana nella seguente forma:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = c\frac{\partial L}{\partial z} = c\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} = c\frac{P_x}{dt} = c\frac{d(p_x + qA_x)}{dt} = c\frac{dp_x}{dt} \quad (2.1.11)$$

da questa relazione si può ottenere facilmente la seconda invariante:

$$E - cp_x = \text{cost} . \quad (2.1.12)$$

È possibile ricavare la costante dell'equazione supponendo la particella inizialmente in quiete, l'energia sarà data dalla sola energia a riposo e la costante, di conseguenza, varrà mc^2 .

La relazione 2.1.12 permette di trarre importanti conclusioni sull'energia cinetica della particella. Dal momento che $E_k = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$ si

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

può legare alla quantità di moto longitudinale p_x :

$$p_x = mc(\gamma - 1) . \quad (2.1.13)$$

Combinando la relazione appena trovata con l'energia relativistica $E = \gamma mc^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (p_x c)^2 + (p_\perp c)^2}$ si può ottenere un legame fra le componenti longitudinali e trasversali della quantità di moto.

$$2mp_x c = (p_\perp)^2 \quad (2.1.14)$$

Definendo le seguenti grandezze adimensionali $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/mc$ e $\mathbf{a} = e\mathbf{A}/mc^2$ e ricordando che si sta trattando il caso semplice di un'onda piana polarizzata linearmente (facendo coincidere la direzione di \mathbf{A} con y) è possibile scrivere le equazioni che governano il moto:

$$\tilde{p}_x = \frac{\gamma}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{a^2}{2} \quad (2.1.15)$$

$$\tilde{p}_y = \frac{\gamma}{c} \frac{dy}{dt} = a_y \quad (2.1.16)$$

Combinando l'equazione 2.1.14 con le relazioni appena ricavate si possono trarre alcune importanti conclusioni sul moto della particella nei limiti classico e ultra-relativistico.

$$\frac{v_x}{c} = \frac{a^2}{2(1 + \frac{a^2}{2})} \quad (2.1.17)$$

$$\frac{v_y}{c} = \frac{a_y}{2(1 + \frac{a^2}{2})} \quad (2.1.18)$$

Come si vede dalle relazioni sulla velocità sopra riportate per $a \ll 1$ (limite classico) il moto è puramente trasversale esattamente come previsto nella relazione 2.1.5, mentre nel limite $a \gg 1$ (limite ultra-relativistico) si ha un moto prevalentemente longitudinale. Si sottolinea, quindi, il fatto che, all'aumentare dell'ampiezza normalizzata dell'onda, gli eletti non lineari divengono via via più importanti fino a diventare dominanti rispetto al solo moto di oscillazione lungo la direzione del campo elettrico.

2.1. Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasma in regime non lineare

Introducendo la variabile $\tau = t - x/c$ le componenti del potenziale vettore adimensionale per l'onda piana polarizzata linearmente sono $a_x = 0$, $a_y = a_0 \cos(\omega\tau)$ e $a_z = 0$. Con queste assunzioni è possibile risolvere le equazioni del moto:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{ca_0^2}{a_0^2+4} \left[t + \frac{\sin(2\omega\tau)}{2\omega} \right] \\ y(t) = \frac{ca_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{cases} \quad (2.1.19)$$

Il moto longitudinale sarà quindi caratterizzato da un moto oscillatorio con frequenza caratteristica pari a 2ω sovrapposto a un moto di deriva caratterizzato da una velocità $v_d = \frac{ca_0^2}{a_0^2+4}$. Questa trattazione permette di concludere innanzitutto che la velocità di oscillazione è legata all'intensità dell'onda. Inoltre è possibile notare che l'effetto delle non linearità è quello di legare fra di loro la dinamica longitudinale e quella trasversale della particella.

Il caso di particella singola può anche essere utile per introdurre la *forza ponderomotrice* che verrà descritta più approfonditamente nel paragrafo seguente. Si considera innanzitutto anche il campo magnetico nella relazione 2.1.4. In seguito tramite un approccio di tipo perturbativo ($\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{x}^{(1)}$) all'equazione si tratta il moto complessivo come la sovrapposizione di un moto all'ordine zero ($\mathbf{x}^{(0)}$) e di un contributo correttivo al primo ordine ($\mathbf{x}^{(1)}$). Sfruttando la legge di Faraday 1.2.7 e considerando, infine, il moto medio 'perturbato' della particella è possibile ottenere la relazione che descrive la forza ponderomotrice:

$$\frac{d^2 \langle \mathbf{x}^{(1)} \rangle}{dt^2} = -\nabla \left(\frac{qE}{2m\omega} \right)^2 \quad (2.1.20)$$

2.1.2 Forza ponderomotrice e Wake-field generation

Rispetto al caso di particella singola, un plasma si caratterizza per la comparsa di numerosi fenomeni non lineari di tipo collettivo. È possibile descrivere alcuni di questi fenomeni non lineari tramite l'utilizzo di un modello di tipo fluidodinamico come già accennato nel paragrafo 1.2.2. Attraverso una descrizione di tipo fluidodinamico del plasma è anche possibile mostrare le conseguenze delle non linearità dovute agli effetti relativistici.

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

Consideriamo innanzitutto l'equazione della quantità di moto 1.2.3 per la j -esima specie per plasma freddo (si trascurano i termini legati al moto termico), relativistico, non collisionale (si trascura \mathbf{R}_a) espressa in funzione dei potenziali (\mathbf{A} e ϕ) anziché dei campi (\mathbf{E} e \mathbf{B}):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \right) \mathbf{p}_j = q_j \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi + \frac{\mathbf{u}_j}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad (2.1.21)$$

dove \mathbf{u}_j , \mathbf{p}_j , q_j sono rispettivamente velocità, momento e carica delle particelle della popolazione j mentre \mathbf{A} , ϕ sono il potenziale vettore e il potenziale scalare. Introducendo le seguenti grandezze adimensionali

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \frac{\mathbf{p}}{mc} = \tilde{\mathbf{p}}, \quad \frac{q\mathbf{A}}{mc^2} = \mathbf{a}, \quad \frac{q\phi}{mc^2} = \varphi$$

e utilizzando alcune identità vettoriali, è possibile riscrivere la relazione 2.1.21 nella seguente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{a}) - \tilde{\mathbf{u}} \times [\nabla \times (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{a})] = \nabla \varphi - \nabla(\gamma - 1). \quad (2.1.22)$$

Prendendo in considerazione un fluido inizialmente in quiete, si può scomporre l'equazione 2.1.22 nelle sue componenti perpendicolari e parallele alla direzione del vettore d'onda

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}_{\perp} = \mathbf{a} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{p}}_{\parallel} = \nabla \varphi - \nabla(\gamma - 1) \end{cases} \quad (2.1.23)$$

con $\gamma = \sqrt{1 + \tilde{\mathbf{p}}_{\parallel}^2 + \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}^2} \simeq \sqrt{1 + \mathbf{a}^2}$.

Il sistema 2.1.23 mostra un legame fra la dinamica longitudinale e quella trasversale del fluido. Questa caratteristica ricalca quello che è stato visto nel caso di particella singola nel paragrafo precedente. Si noti come sia stato possibile giungere a queste conclusioni utilizzando un modello di tipo fluidodinamico che considera gli effetti non lineari. Con questo tipo di modello (plasma freddo) tuttavia non viene considerato l'effetto della temperatura che risulta centrale nei plasmi di tipo termonucleare dove l'energia termica

2.1. Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasma in regime non lineare

non può essere trascurata. Come è stato anticipato nel capitolo 1, per tener conto degli effetti termici è possibile utilizzare un modello cinetico che consente lo studio delle anisotropie che nascono nell'interazione laser plasma. Tale approccio risulta quindi più completo rispetto ad un modello di tipo fluido con plasma caldo che considererebbe comunque gli effetti termici. Proprio per questa caratteristica i metodi di tipo cinetico sono centrali in questo lavoro di tesi. Perciò il paragrafo 2.3 tratterà nello specifico dei metodi di tipo cinetico per lo studio dell'interazione tra laser e plasma.

Tornando al sistema 2.1.23 è possibile notare che il secondo termine a RHS della seconda equazione descrive una forza. La forza in questione è detta *forza ponderomotrice* ed agisce longitudinalmente sul plasma con la seguente forma:

$$f_p = -mc^2 \nabla \left(\sqrt{1 + \mathbf{a}^2} - 1 \right) . \quad (2.1.24)$$

La forza ponderomotrice può agire portando ad una variazione del profilo di densità del plasma, modificando di conseguenza la propagazione dell'onda stessa all'interno del plasma. La forza ponderomotrice è associata all'opposto del gradiente longitudinale di intensità quindi è legata al profilo longitudinale dell'impulso. Per tale motivo tende quindi ad espellere le particelle cariche dalle zone di più alta intensità come si può vedere dalla figura 2.1. In particolare la forza ponderomotrice agisce con maggiore intensità sugli elettroni poiché è inversamente proporzionale alla massa delle particelle come si può vedere dalla relazione introdotta nel paragrafo precedente 2.1.20:

$$f_p = -\nabla \left(\frac{qE}{2m\omega} \right)^2 \quad (2.1.25)$$

dove E è il campo dell'impulso laser.

La forza ponderomotrice è quindi una forza che divide le componenti del plasma e crea delle oscillazioni poiché nel plasma è presente una forza di richiamo dovuta alla separazione di carica. Sotto opportune condizioni sulla frequenza dell'onda ($\tau_{pulse} \approx \pi/\omega_p$) è possibile mandare in risonanza l'impulso con l'oscillazione di carattere elettrostatico creando delle onde di plasma.

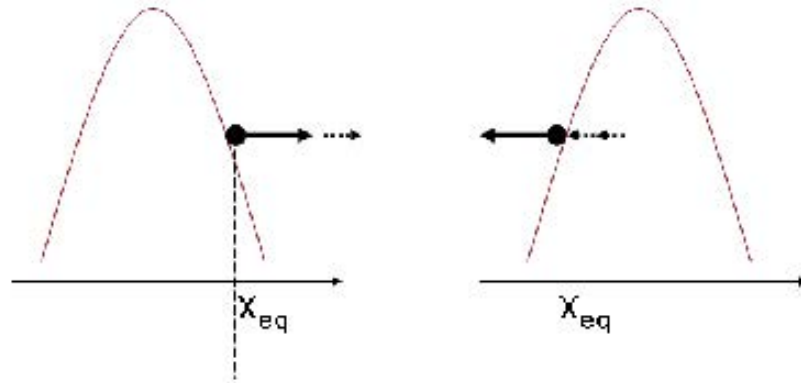


Figura 2.1: Un elettrone del plasma investito dall'impulso laser che si propaga risente dapprima della spinta verso destra in figura, e viene così spostata dalla sua posizione di equilibrio. La forza elettrostatica che nasce però dalla differenza di carica spaziale in tal modo creata tende del resto a riportarlo verso x_{eq} . E' questa la condizione ottimale in cui l'elettrone si deve trovare quando risentirà della seconda spinta, stavolta nella direzione opposta, dell'impulso.

Come conseguenza di questo meccanismo, si ha la produzione di un'onda di plasma nella scia dell'impulso laser che progressivamente attraversa il plasma. In particolare interagendo con la popolazione elettronica, la radiazione elettromagnetica è in grado di indurre nel plasma una significativa separazione di carica che genera nel plasma stesso onde di grande intensità. Alle spalle dell'impulso, nella zona di interazione, si crea cioè il cosiddetto *wake-field*. Il *wake-field* è un esempio di fenomeno legato alle non linearità del propagarsi in un plasma sottodenso di un impulso laser ultraintenso. Essendo uno dei fenomeni più studiati dal punto di vista sia teorico che sperimentale rappresenta un punto di riferimento per la fisica dell'interazione non lineare tra onde elettromagnetiche e plasma. Per questo tale argomento ha costituito un punto di partenza nel lavoro di tesi per avvicinarsi ad un approccio teorico ma anche numerico dei problemi dell'interazione tra laser e plasma. In particolare dopo uno studio di tipo analitico del fenomeno è stato eseguito uno studio comparativo su simulazioni che coinvolgevano due codici numerici differenti. Perciò l'appendice A tratta approfonditamente il fenomeno del *wake-field* sia da un punto di vista analitico che numerico riportando i risultati di tale studio.

2.1. Interazione tra radiazione elettromagnetica intensa e plasma in regime non lineare

2.1.3 Instabilità Raman e Brillouin

Come accennato in precedenza, la propagazione di onde elettromagnetiche intense in plasmi non omogenei può essere accompagnata dall'insorgere di instabilità [25]. La disomogeneità può essere dovuta alla presenza di un gradiente di densità nel plasma, quando ciò accade nell'intorno della densità critica si può verificare il fenomeno dell'assorbimento risonante (*resonance absorption*), che non verrà qui trattato perché esula dagli scopi di questo lavoro di tesi.

La disomogeneità, nello specifico una variazione spaziale della densità del plasma, può essere anche dovuta alla presenza di onde di plasma ioniche o elettroniche. Queste fluttuazioni di densità possono accoppiarsi ad onde elettromagnetiche intense, generando meccanismi che vanno a far crescere in modo instabile le fluttuazioni di densità stesse. Questi processi prendono il nome di instabilità parametriche. Un esempio di queste instabilità è proprio l'accoppiamento di un'onda elettromagnetica di grande intensità ($I > 10^{15} \text{ W/cm}^2$) con una fluttuazione di densità, che può essere o un'onda ionico-acustica o un'onda di plasma elettronica. Tale accoppiamento genera un'onda elettromagnetica diffusa che a sua volta si accoppia con l'onda di partenza e causa un aumento della fluttuazione di densità. Si crea, dunque, un meccanismo di retroazione che è alla base dell'instabilità e che amplifica l'onda elettromagnetica diffusa e l'onda di plasma sottraendo energia all'onda incidente. Nel caso in cui la fluttuazione di densità iniziale sia dovuta ad un'onda di plasma elettronica questa tipologia di instabilità prende il nome di *Stimulated Raman Scattering*, altrimenti nel caso in cui la fluttuazione di densità nasca da un'onda ionico-acustica il fenomeno viene chiamato *Stimulated Brillouin Scattering*.

Per quel che riguarda l'interazione tra impulsi ultraintensi ultrabrevi e plasmi l'instabilità dovuta allo *Stimulated Raman Scattering* [25] riveste un ruolo fondamentale poiché è quella che si sviluppa più velocemente [10]. Tale

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

processo per avvenire deve soddisfare le condizioni sui parametri principali:

$$\begin{cases} \omega_0 = \omega_s + \omega_{pe} \\ \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_s + \mathbf{k} \end{cases} \quad (2.1.26)$$

dove ω_0 e \mathbf{k}_0 rappresentano rispettivamente la frequenza e il vettore d'onda dell'onda elettromagnetica di intensità elevata (detta *pump wave*), ω_{pe} e \mathbf{k} sono la frequenza e il vettore d'onda dell'onda di plasma elettronica che si accoppia con la *pump wave*, infine ω_s e \mathbf{k}_s sono i parametri analoghi che descrivono l'onda elettromagnetica diffusa. Il nome di questo tipo di instabilità deriva dall'analogia con il *Raman scattering* che avviene nei solidi: il processo può essere interpretato come una diffusione anelastica di un fotone incidente che provoca il decadimento del fotone iniziale in un fotone diffuso e in un'onda di plasma o plasmone. Da questo punto di vista le condizioni indicate nella relazione (2.1.26) esprimono le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Avendo poi chiaro che la minima frequenza che un'onda elettromagnetica può avere in un plasma è ω_{pe} , tale relazione mostra che lo sviluppo di questa instabilità è possibile solo se $\omega_0 \gtrsim 2\omega_{pe}$, in altre parole se la densità n del plasma è tale che $n \lesssim n_{cr}/4$. Guardando alla direzione d'onda del vettore d'onda diffuso \mathbf{k}_s rispetto a quello incidente \mathbf{k}_0 si parla di *back-*, *forward-* o *side-scattering*. Nel caso di interazione tra un impulso laser ultraintenso ultrabreve e un plasma sottodenso il più veloce a svilupparsi è lo *Stimulated Backward Raman Scattering*, cioè dove i vettori d'onda incidente e diffuso sono antiparalleli ($\mathbf{k}_s \approx -\mathbf{k}_0$ e $\mathbf{k} \approx 2\mathbf{k}_0$). Questo tipo di instabilità è molto importante perché è uno dei principali attori nell'erosione dell'impulso laser a favore della cessione della sua energia al plasma. Questo trasferimento di energia è di grande importanza nelle applicazioni inerenti alla fusione a confinamento inerziale [26], tuttavia ad oggi se ne stanno ancora studiando le caratteristiche poiché risulta un fenomeno difficile da trattare proprio per i valori estremi dei parametri utilizzati (come temperatura $\sim keV$ e intensità della radiazione $\sim 10^{20} W/cm^2$) negli esperimenti rivolti alla fusione inerziale.

Lo *Stimulated Brillouin Scattering* per avvenire deve soddisfare una relazione simile a quella indicata per lo *Stimulated Raman Scattering* ma che ne

2.2. Solitoni elettromagnetici nei plasmi

differisce per il fatto che coinvolge la frequenza e il vettore d'onda delle onde di plasma ionico-acustiche in luogo della frequenza di plasma elettronica e del vettore d'onda relativo. Coinvolgendo tali onde le instabilità nascono su tempi più lunghi rispetto allo *Stimulated Raman Scattering* che nasce da onde di plasma elettroniche, inoltre rispetto a quest'ultimo, lo SBS può avvenire anche a densità critiche maggiori di $n_c/4$, per questo può avvenire in zone del plasma non interessate da SRS.

Come si vedrà nel prossimo paragrafo questo tipo di instabilità rivestono un ruolo di grande importanza nella formazioni di particolari strutture elettromagnetiche chiamate *Solitoni Elettromagnetici Relativistici* [27].

2.2 Solitoni elettromagnetici nei plasmi

Il termine *solitone elettromagnetico*, viene usato nella fisica dell'interazione tra laser ultraintensi e plasmi, per descrivere concentrazioni spazialmente localizzate di energia elettromagnetica che possono nascere a causa delle forti non linearità di tale interazione.

Il termine solitone, che in realtà può riguardare anche altri ambiti della fisica e della matematica, è stato introdotto da N.J. Zabusky e M.D. Kruskal nel 1965 [28] per indicare possibili soluzioni, analitiche e numeriche, di una classe di equazioni di evoluzione non lineari alle derivate parziali, aventi la proprietà di essere localizzate spazialmente e di sopravvivere a reciproche collisioni e attraversamenti, nonostante il carattere fondamentale non lineare di questo tipo di equazioni. In tal senso è possibile affermare che i solitoni, pur non essendo fenomeni lineari, godono della proprietà di effettuare collisioni elastiche per le quali vale una sorta di principio di sovrapposizione degli effetti.

Negli anni a seguire il concetto di solitone è stato esteso ad indicare ogni componente, propagante o non, di una grandezza fisica continua (ad esempio una densità o un campo), che presenti le caratteristiche di mantenersi localizzata spazialmente nel tempo, comportandosi come una particella. Quindi l'equazione che descrive i solitoni può essere una generica equazione non lineare di tipo evolutivo. Questa nuova estensione del concetto di solitone non

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

convince tutti, tanto che alcuni membri della comunità scientifica utilizzano il termine solitone solo per descrivere soluzioni che non sono solamente localizzate ma che godono anche della proprietà di effettuare collisioni elastiche. Per indicare, quindi, soluzioni di equazioni di tipo evolutivo localizzate spazialmente è stato introdotto il termine più appropriato *onda solitaria*, inoltre per sottolineare il comportamento simile a quello di una particella è stato proposto il termine *solitrone* (ispirato da termini come elettrone, positrone, ecc.). Nel caso in cui onde solitarie di questa tipologia collidano possono dar luogo ad una fenomenologia più complessa rispetto alla collisione elastica che avviene tra solitoni propriamente detti.

Nell'ambito della fisica dell'interazione tra laser e plasma, i termini solitone e onda solitaria sono utilizzate indifferentemente per indicare la stessa fenomenologia e cioè, come detto ad inizio paragrafo, la possibile presenza di concentrazione di energia elettromagnetica in un plasma. La denominazione solitone nel senso più stringente del termine sarebbe errata poiché come è stato visto da alcune simulazioni numeriche [5], questi oggetti per effetto di collisioni tendono a fondersi in strutture più estese e non ad effettuare collisioni elastiche. Nonostante ciò, in questo lavoro di tesi conformemente a quanto avviene in letteratura, vengono utilizzati indifferentemente i termini onda solitaria e solitone.

Come detto in precedenza per solitone elettromagnetico si intende una concentrazione localizzata di energia elettromagnetica che può formarsi ed eventualmente propagarsi in un plasma a seguito di un'interazione tra un impulso laser ultraintenso e ultrabreve e il plasma stesso. Più formalmente si può dire che i solitoni rappresentano possibili soluzioni non lineari delle equazioni di Maxwell che hanno le proprietà di avere una forma che non varia nel tempo e di annullarsi all'infinito. Queste soluzioni possono essere caratterizzate da velocità di propagazione nulla, in tal caso prendono il nome di *standing solitons*, o finita, quest'ultimi vengono chiamati *drifting solitons*. Nel caso in cui queste strutture elettromagnetiche presentino un campo elettromagnetico di ampiezza tale che la velocità acquistata da un elettrone per effetto di questo campo diventa confrontabile con la velocità della luce si parla di solitoni elettromagnetici relativistici (RES).

2.2. Solitoni elettromagnetici nei plasmi

L'interazione di impulsi laser di ampiezza ultraintensa e durata ultrabreve con plasmi sottodensi è caratterizzato da una complessa varietà di fenomeni fisici non lineari, alcuni dei quali sono stati brevemente descritti nel paragrafo precedente. Uno degli effetti più significativi dell'interazione nel caso di radiazione ultraintensa e ultrabreve è rappresentato dall'efficacia dell'accoppiamento tra l'impulso laser e la componente elettronica del plasma sottodenso, che porta ad un drastico cambiamento delle proprietà dell'impulso, in particolare ad una erosione dell'impulso stesso e al trasferimento di una grande frazione della sua energia al plasma, che sarebbe invece trasparente alla radiazione di intensità più moderate, di ampiezza non relativistica. I meccanismi fisici responsabili di questo fenomeno sono la generazione di onde di plasma, *wake-field* (si veda l'appendice A), e l'insorgere di alcune instabilità.

2.2.1 Formazione dei solitoni elettromagnetici nei plasmi

Come introdotto nel paragrafo 2.1.3, è stato dimostrato da numerosi studi di tipo numerico [27, 29–33] che le instabilità *Stimulated Raman Scattering* e *Stimulated Brillouin Scattering* rivestono un ruolo fondamentale nella formazione dei solitoni elettromagnetici nei plasmi. Queste instabilità causano una forte distorsione dell'impulso laser che viene energeticamente eroso, con una conseguente diminuzione dell'ampiezza del campo elettromagnetico. Tali fenomeni avvengono su tempi molto più lunghi del periodo associato al campo dell'impulso, perciò è possibile, in prima approssimazione, considerare che il processo si sviluppi in modo adiabatico. L'invariante adiabatico che caratteristico del fenomeno può essere ricavato dalle equazioni che descrivono l'interazione della radiazione elettromagnetica con un plasma freddo [34]. È possibile dimostrare che l'invariante adiabatico è dato dal rapporto tra il quadrato dell'ampiezza del campo elettrico e la frequenza locale della radiazione:

$$\int \frac{|E|^2}{\omega} dV = \text{cost} . \quad (2.2.1)$$

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

Questa relazione che esprime il rapporto tra l'energia dell'impulso laser e la sua frequenza può essere interpretata come la conservazione del numero totale di fotoni. Un'importante conseguenza della relazione 2.2.1 è la diminuzione della frequenza locale di una parte della radiazione. Questo fenomeno prende il nome di *frequency downshift* ed è stato confermato da simulazioni numeriche riguardanti questo tipo di interazione [27].

A causa del *frequency downshift* la frequenza locale diventa inferiore alla frequenza di plasma, perciò la radiazione elettromagnetica rimane intrappolata nel plasma che diventa sovradenso per la radiazione stessa. Corrispondentemente, la velocità di gruppo tende a zero per $\omega \rightarrow \omega_p$. È proprio attraverso questo meccanismo che parte dell'energia viene trasferita dall'impulso a strutture elettromagnetiche di tipo solitonico di ampiezza anche relativistica. Tali strutture poiché possiedono una frequenza inferiore a quella del plasma, rimangono intrappolate nel plasma.

2.2.2 Interesse per lo studio di solitoni in plasmi $e^- - e^+$

Prima di introdurre l'argomento dei solitoni elettromagnetici nei plasmi di elettroni e ioni, che sono direttamente legati alle instabilità che nascono negli esperimenti sulla fusione inerziale (si veda par.2.1.3), è utile affrontare il caso di solitoni in plasmi di elettroni e positroni. A causa dell'identica inerzia delle specie elettronica e positronica questi plasmi, infatti, presentano delle notevoli semplificazioni nei modelli utilizzati per descriverli come si vedrà nel capitolo 3. Oltre a questo aspetto che aiuta ad introdurre lo studio sui plasmi $e^- - i$, l'interesse per i plasmi $e^- - e^+$ nasce da svariati ambiti della fisica.

In primo luogo va citato l'ambito cosmologico. Infatti le più recenti ricostruzioni riguardanti la dinamica delle prime fasi dell'universo, tra 10^{-2} e 1 secondo dopo il *Big Bang*, hanno messo in luce che la materia era costituita da elettroni, positroni e fotoni ad una temperatura molto maggiore di $m_e c^2$ [35]. L'interazione tra la radiazione elettromagnetica e il plasma di $e^- - e^+$ in questo stadio dell'evoluzione del universo potrebbe aver prodotto delle disuniformità nella densità spaziale della materia. Questo po-

2.2. Solitoni elettromagnetici nei plasmi

trebbe rappresentare una delle possibili cause della distribuzione fortemente disomogenea della materia dell'universo attuale [36–38].

In secondo luogo c'è un forte interesse in ambito astronomico, poiché si ritiene che plasmi di $e^- - e^+$ costituiscano l'atmosfera di pulsar e stelle di neutroni [39, 40], dei dischi di accrescimento [41], di nuclei di galassie attive [42–44], e dei buchi neri [45]. I plasmi di $e^- - e^+$ hanno inoltre un ruolo fondamentale nei meccanismi fisici di generazione dei raggi gamma cosmici [46].

Infine lo studio dei plasmi di elettroni e positroni presenta notevole interesse anche in alcune situazioni sperimentali. Al giorno d'oggi grazie allo sviluppo della tecnologia CPA si è in grado di produrre un numero significativo di coppie $e^- - e^+$ per mezzo dell'interazione tra impulsi laser di intensità dell'ordine di $10^{21-22} W/cm^2$ con fasci di elettroni di energia ultrarelativistica, dell'ordine di decine o centinaia di MeV [47, 48]. Si ritiene che in un futuro potranno essere disponibili intensità dell'ordine di $10^{26-28} W/cm^2$ [3], realizzando così un regime nel quale diventa possibile una produzione significativa di coppie $e^- - e^+$ nel campo del laser.

2.2.3 Interesse per lo studio di solitoni in plasmi $e^- - i$

L'interesse per lo studio dei solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi di elettroni e ioni nasce dal fatto che rivestono un ruolo importante nella cessione di energia da parte di radiazione elettromagnetica intensa al plasma stesso. Questo fenomeno introdotto nel paragrafo 2.2, è stato rilevato anche in simulazioni numeriche bidimensionali [49] e tridimensionali [50] relative alla propagazione di un impulso laser ultraintenso e ultrabreve in un plasma sottodensso (caratterizzato cioè da una frequenza di plasma ω_{pe} minore della frequenza del laser ω_L). La cessione di energia da parte di un'onda elettromagnetica ad un plasma è centrale negli studi sulla fusione a confinamento inerziale come già detto nel capitolo 1. Le strutture solitoniche che si sono osservate in questo tipo di simulazioni sono entità elettromagnetiche di tipo *sub-cycle*, cioè strutture in cui è intrappolata solo metà della lunghezza d'onda della radiazione. La frequenza della radiazione confinata nel solitone

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

risulta essere inferiore alla frequenza di plasma imperturbata e quindi anche inferiore alla frequenza del laser. Come già si era anticipato nel paragrafo 2.2, il plasma diventa localmente sovradensito rispetto al campo elettromagnetico del solitone. Nella regione spaziale occupata del solitone si osserva una significativo svuotamento del plasma. Queste strutture sono poi caratterizzate dal fatto che le densità elettroniche e ioniche asintoticamente rimangono vicine tra loro, impedendo quindi l'instaurazione di una apprezzabile separazione di carica. Il plasma risponde cioè alla presenza della radiazione magnetica raggiungendo uno stato di quasi-neutralità. Questa caratteristica è molto importante perché permette come si vedrà nel paragrafo 3.3.2 lo sviluppo del modello analitico presentato nel corso del capitolo 3 per descrivere i solitoni elettromagnetici nei plasmi $e^- - i$. L'assunzione di quasi-neutralità non impedisce tuttavia che in queste strutture solitoniche si formi un campo elettrico quasistatico di un'intensità elevata (dal MV/cm al GV/cm). Il campo elettrico quasistatico trovato nelle simulazioni numeriche ha permesso di osservare anche sperimentalmente strutture di questo tipo, attraverso l'utilizzo della tecnica diagnostica denominata *proton imaging*, recentemente sviluppata e basata sulla deflessione di un fascio di protoni di energia di alcuni MeV per effetto dell'interazione con il campo elettrico localizzato [51]. In particolare con l'utilizzo di questa tecnica si è osservato che in queste strutture si manifesta una significativa depressione nella densità del plasma; le strutture appaiono inoltre come quasineutre e si caratterizzano per una estensione spaziale tipica di diverse decine di *skin depths* classici (c/ω_{pe}). Un'immagine ottenuta con la *proton imaging* è riportata in figura 2.2.

Sia le simulazioni numeriche che le osservazioni sperimentali indicano che il campo elettrico quasistatico presente nelle strutture solitoniche raggiunge valori delle decine di MV/cm (in alcune simulazioni anche GV/cm). Un campo di tale intensità, se opportunamente controllato dall'esterno, può essere utilizzato potenzialmente per l'accelerazione di particelle cariche. Questa proprietà e il fatto di immagazzinare una notevole quantità di energia del laser (fino al 30% in alcune simulazioni) rende i solitoni elettromagnetici in plasmi di elettroni e ioni un importante campo di studio.

In particolare recenti simulazioni [27, 30, 31] sull'interazione di un plasma

2.3. Approccio cinetico per la descrizione dei solitoni elettromagnetici nei plasmi

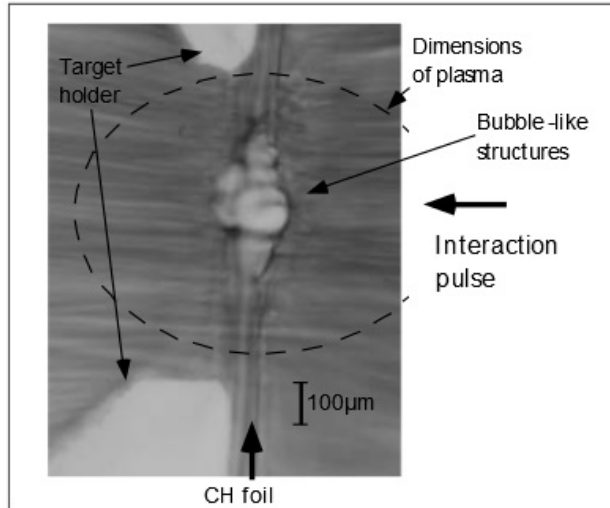


Figura 2.2: Immagine, ottenuta con la tecnica del *proton imaging* (protoni di 6–7 MeV), di un plasma di elettroni e ioni (densità massima $\sim 10^{20} \text{ cm}^{-3}$), 45 ps dopo la propagazione di un impulso laser intenso ($I \sim 10^{19} \text{ W/cm}^2$) di lunghezza d'onda $1 \mu\text{m}$, e durata 1 ps; l'immagine mostra la presenza di una cavità nella densità del plasma, che può essere dovuta alla presenza di un solitone elettromagnetico. Da [5].

con laser di intensità dell'ordine di quelle utilizzate nella fusione a confinamento inerziale, hanno messo in evidenza la formazione di solitoni elettromagnetici. Lo studio dei solitoni è centrale in questi processi poiché il fine dell'interazione con i laser del combustibile è la cessione di energia al combustibile stesso come si è visto nel paragrafo 1.1.3.

2.3 Approccio cinetico per la descrizione dei solitoni elettromagnetici nei plasmi

2.3.1 Metodi analitici

Nel corso degli anni sono stati pubblicati numerosi lavori di carattere analitico riguardanti lo studio della propagazione non lineare di onde elettromagnetiche in plasmi di elettroni-positroni ($e^- - e^+$) ed elettroni-ioni ($e^- - i$),

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

in particolare sulla possibilità dell'esistenza di strutture di tipo solitonico localizzate nel plasma stesso per effetto dell'interazione.

I primi lavori analitici risalgono agli anni '70 [52]. Il lavoro di Kozlov et al. [53], riguardante lo studio di solitoni elettromagnetici di ampiezza relativistica propaganti in un plasma freddo $e^- - i$, ha costituito un riferimento per gli sviluppi successivi in questo settore di ricerca. A partire dagli anni '90, lo studio dei solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi ha ricevuto un rinnovato impulso. Sono stati sviluppati studi analitici sull'esistenza di solitoni in plasmi $e^- - e^+$ [35] e $e^- - i$ [54]. Questi studi sono stati svolti descrivendo il plasma con modelli analitici relativistici di tipo fluido. Questo tipo di approccio è utile per comprendere alcune caratteristiche macroscopiche del plasma come è stato mostrato nel paragrafo 2.1.2. Tuttavia non considerando che la funzione di distribuzione del plasma possa essere diversa da una maxwelliana trascura importanti effetti termici come sottolineato dal lavoro di M. Passoni [55]. Per questo è utile utilizzare modelli di tipo cinetico per analizzare le strutture solitoniche che si formano nei plasmi.

In un approccio cinetico relativistico per descrivere il comportamento microscopico di un plasma si fa riferimento alla funzione di distribuzione f_j della j -esima specie carica costituente il plasma. Tale funzione di distribuzione soddisfa la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_j}{m_j \gamma_j} \cdot \nabla f_j + q_j \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{p}_j}{m_j \gamma_j c} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{p}_j} = \\ = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \cdot \sum_i \int \left[f_j(\mathbf{p}) \frac{\partial f_i(\mathbf{p}')}{\mathbf{p}'_i} - f_i(\mathbf{p}') \frac{\partial f_j(\mathbf{p})}{\mathbf{p}_j} \right] \cdot \bar{\mathbf{B}} d^3 \mathbf{p}'_i \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

dove $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ descrivono i campi elettrico e magnetico autoconsistenti presenti nel sistema, m_j , q_j e $\mathbf{p}_j = m_j \gamma_j \mathbf{v}_j$ sono rispettivamente la massa a riposo, la carica elettrica e la quantità di moto della j -esima specie, con γ_j fattore relativistico:

$$\gamma_j = \left(1 + \frac{p_j^2}{m_j^2 c^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (2.3.2)$$

L'espressione a secondo membro dell'equazione 2.3.1 descrive l'effetto delle

2.3. Approccio cinetico per la descrizione dei solitoni elettromagnetici nei plasmi

collisioni coulombiane nel plasma. La sommatoria è estesa a tutte le n specie presenti nel plasma, compresa la j -esima specie, che collidono con le particelle della j -esima stessa. Il tensore $\bar{\mathbf{B}}$ rappresenta la generalizzazione relativistica dell'integrale degli urti di Landau che descrive l'effetto degli urti coulombiani in un plasma.

L'equazione 2.3.1 integrodifferenziale non lineare nell'incognita f_j tiene conto sia dell'effetto dei campi elettromagnetici esterni e autogenerati che dell'effetto delle collisioni sulla funzione di distribuzione della j -esima specie di particelle. Per lo studio di solitoni elettromagnetici relativistici è possibile trascurare, in prima approssimazione, l'effetto delle collisioni coulombiane. In tal caso le proprietà del plasma e in particolare la funzione di distribuzione f_j possono essere descritte dall'equazione di Vlasov relativistica che è ottenuta dalla relazione 2.3.1 ponendo uguale a zero l'integrale di collisione a secondo membro:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_j}{m_j \gamma_j} \cdot \nabla f_j + q_j \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{p}_j}{m_j \gamma_j c} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{p}_j} = 0 \quad . \quad (2.3.3)$$

Con una funzione di distribuzione f_j per ciascuna specie che soddisfa l'equazione 2.3.3 (o più in generale l'Eq. 2.3.1) è possibile calcolare i momenti della funzione di distribuzione stessa che rappresentano la densità di carica elettrica

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^n q_j \int f_j d^3 \mathbf{p}_j \quad (2.3.4)$$

e la densità di corrente elettrica

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^n q_j \int \mathbf{v} f_j d^3 \mathbf{p}_j \quad . \quad (2.3.5)$$

Una volta note queste grandezze è possibile calcolare i campi elettromagnetici autoconsistenti attraverso le equazioni di Maxwell.

Poiché le relazioni 2.3.1 e 2.3.3 sono equazioni di tipo cinetico descrivono il comportamento microscopico del plasma. A partire da esse è possibile costruire delle equazioni per le variabili macroscopiche del plasma che possono essere utili per comprendere il comportamento dei solitoni come la densità

numerica, la velocità macroscopica e la temperatura.

2.3.2 Metodi numerici

Per investigare con metodi cinetici di tipo numerico la formazione e le caratteristiche cinetiche dei solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi inizialmente è stata sviluppata una tipologia di codici detti *codici di Vlasov* (*Vlasov-code*).

I codici di Vlasov risolvono l'equazione cinetica (eq. 2.3.3) per la funzione di distribuzione su una griglia. In questo tipo di codici la griglia è creata nello spazio delle fasi (\mathbf{r}, \mathbf{v}) , quindi se si vuole simulare un plasma in N dimensioni la griglia dovrà essere di dimensione $2N$: per esempio la griglia per un plasma in 3 dimensioni sarà costituita da punti su 6 dimensioni, 3 nello spazio (\mathbf{r}) e 3 per la quantità di moto (o la velocità \mathbf{v}). Questo implica un notevole aumento della memoria da allocare nel calcolatore che, come si vedrà nel seguente esempio, risulta comunque notevole nel caso di una simulazione di interazione laser-plasma.

Utilizzare un modello cinetico significa risolvere un problema a n -corpi per un elevato numero di particelle. Per esempio possiamo considerare un plasma con una densità di 10^{23} elettroni e ioni per centimetro cubo. Per descrivere l'interazione con un laser con un diametro focale di $10\mu m$ e con una profondità di penetrazione di $0.2\mu m$ è necessario un volume di simulazione che contiene 10^{18} particelle. Poiché risolvere numericamente le equazioni di Newton che descrivono il sistema è possibile solo per poche migliaia di particelle, risulta evidente che questo approccio ha dei limiti [4]. Per ovviare a questo problema è stato introdotto dagli anni '60 una tipologia di codici chiamati *Particle-In-Cell* (PIC), anche quest'ultimi basati su approccio cinetico.

Nei codici PIC la funzione di distribuzione $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ è espressa dalla seguente equazione:

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^N (S(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})\delta(\mathbf{v}_j - \mathbf{v})) \quad (2.3.6)$$

2.3. Approccio cinetico per la descrizione dei solitoni elettromagnetici nei plasmi

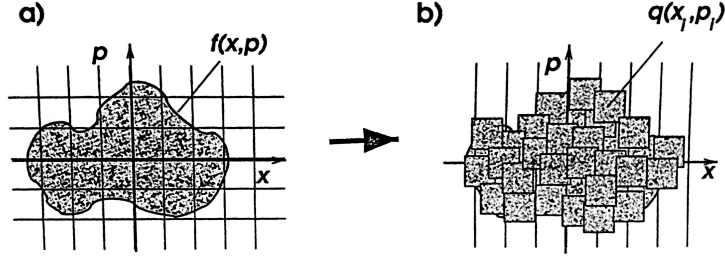


Figura 2.3: Relazione tra a) funzione di distribuzione classica e b) macro-particelle in codice tipo PIC, da [4]

Questa espressione nasce dalla espressione della funzione di distribuzione utilizzata nell'approccio di Klimontovich al problema cinetico:

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^N (\delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})\delta(\mathbf{v}_j - \mathbf{v})) \quad (2.3.7)$$

Considerare una funzione di distribuzione espressa dalla relazione 2.3.6 significa campionarla su una griglia attraverso una funzione densità $S(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})$ di macro-particelle numeriche con una carica q_i e una massa m_i fissate: il pedice j indica il numero di cella mentre i la particella. Come mostrato in figura 2.3 si passa da una funzione di distribuzione continua ad una discreta.

In questo modo i codici di tipo PIC sostituiscono gli enormi valori del parametro del plasma $n\lambda_D^3 \approx 10^{10}$ con un minor numero di particelle per cella dell'ordine di $n_m\lambda_D^3 \approx 100$, dove n_m è la densità di macro-particelle e la lunghezza di Debye λ_D è la tipica misura della cella di simulazione. In questo tipo di codice utilizzando un approccio Lagrangiano, l'equazione che governa il moto delle particelle è:

$$\frac{d}{dt}(\gamma_i \mathbf{v}_i) = \frac{q_i}{m_i} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_i}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.3.8)$$

con $\gamma_i = (1 - v_i^2/c^2)^{-1/2}$ e $i = 1..N$ dove N è il numero totale delle particelle.

La densità di carica e la densità di corrente necessarie per integrare le

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

equazioni di Maxwell sono ottenute considerando la posizione e la velocità delle particelle sulla griglia attraverso la funzione S :

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_j q_j S(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) \quad j = 1..N, \quad (2.3.9)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_j q_j \mathbf{v}_j S(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}) \quad j = 1..N, \quad (2.3.10)$$

Una volta che $\rho(\mathbf{r})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ sono definite nei punti di griglia è possibile risolvere le equazioni di Maxwell per ottenere i nuovi campi elettrico e magnetico. Questi vengono poi interpolati nelle posizioni delle particelle e utilizzati per calcolarne le nuove posizioni attraverso l'equazione 2.3.8.

Il grafico 2.4 riassume l'algoritmo utilizzato in un codice di tipo PIC: 1. note le condizioni iniziali delle particelle si calcolano densità di carica e di corrente nei punti di griglia. 2. Queste grandezze vengono utilizzate per calcolare i campi elettrico e magnetico nei punti di griglia con le equazioni di Maxwell. 3. Si calcolano i campi nei punti dove sono presenti le particelle interpolando dai punti di griglia. 4. Vengono infine ricalcolate posizione e velocità delle particelle inserendo i campi appena calcolati nelle equazioni di moto.

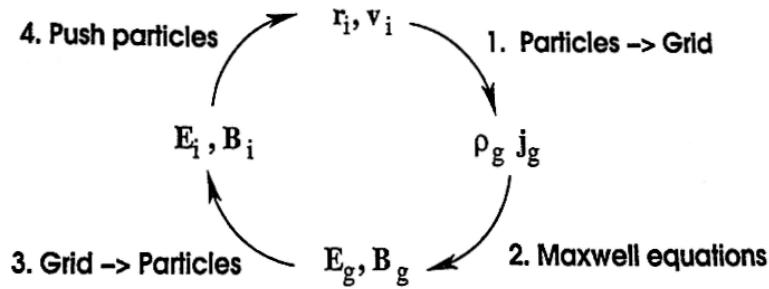


Figura 2.4: Schema dell'algoritmo dei codici tipo PIC, da [4]

Ora che sono state brevemente introdotte le principali tipologie di codice che vengono utilizzate per simulare i solitoni elettromagnetici nei plasmi è utile fare alcune considerazioni. I codici Vlasov presentano un rumore notevolmente inferiore rispetto ai codici PIC, tuttavia richiedono potenze di calcolo e memorie molto più elevate rispetto agli algoritmi *Particle-In-*

Cell. Questi ultimi inoltre sono più facili da sviluppare e presentano una ben documentata casistica di utilizzo.

2.4 Obbiettivi della tesi

Come descritto, l'interesse nello studio dei fenomeni di interazione tra laser e plasma è aumentato negli ultimi decenni. Oltre che da un punto di vista di studi sulla fisica di base, tale problema è centrale negli esperimenti sulla fusione a confinamento inerziale. In particolare la cessione di energia da parte di radiazione elettromagnetica intensa in un plasma è ancora oggi un argomento di ricerca in piena evoluzione. Le strutture solitoniche introdotte nel paragrafo 2.2 possono rivestire un ruolo di grande rilevanza in questa classe di fenomeni [30].

Scopo del seguente lavoro di tesi sarà, in primo luogo, quello di ampliare un modello analitico cinetico esistente per descrivere i solitoni elettromagnetici nei plasmi, e, in secondo luogo, quello di studiare l'evoluzione temporale di differenti strutture solitoniche attraverso un approccio numerico. A tal scopo, il lavoro di tesi è strutturato come segue.

Il capitolo 3 tratterà il problema della modellazione analitica dei solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi. Verrà sviluppato un modello analitico per le due tipologie di plasmi analizzati: inizialmente plasmi di elettroni-positroni e in seguito plasmi di ioni-elettroni. Si presterà particolare attenzione alle grandezze di interesse per lo studio stesso. Questo permetterà, inoltre, di avere un modello in grado di fornire dei parametri utili per intraprendere uno studio numerico delle strutture solitoniche.

Partendo dalle caratteristiche ottenute dallo studio numerico dei casi trattati, nel capitolo 4 verranno discussi in modo critico i risultati delle simulazioni numeriche effettuate sull'evoluzione temporale dei solitoni. In relazione ai risultati, inoltre, verranno analizzati i limiti del modello analitico sviluppato sottolineando il ruolo dell'ipotesi di quasi-neutralità. Queste simulazioni sono state effettuate tramite un codice di tipo PIC, poiché tale tipologia di codice è indicata per lo studio di questa fenomenologia come spiegato nel

Capitolo 2. Fisica dell'interazione laser plasma

paragrafo 1.2.2 e nel paragrafo 2.3. In particolare il codice utilizzato è il codice *Piccante* sviluppato da A. Sgattoni, L. Fedeli e S. Sinigardi.

In questo lavoro di tesi, inoltre, si prestata particolare attenzione ai codici di tipo *Particle-In-Cell* per questo il codice utilizzato per lo studio dei solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi è stato validato comparando con il codice BOPS i risultati ottenuti nel caso di fenomeni di interazione non lineare tra laser e plasma. In particolare si è analizzato uno dei fenomeni più studiati: il *wake-field* che è stato introdotto nel paragrafo 2.1.2. Il codice BOPS è un codice sviluppato da P.Gibbon basato su un algoritmo tipo PIC. I risultati di questo studio comparativo e una trattazione analitica del fenomeno sono esposti nell'appendice A.

Capitolo 3

Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

In questo capitolo verrà descritto il lavoro, svolto in questa tesi, di ampliamento di un modello cinetico relativistico per lo studio e la descrizione delle proprietà dei solitoni elettromagnetici nei plasmi, introdotto da M. Lontano, M. Passoni *et. al.* [56].

Il modello relativistico utilizzato ha come obiettivo quello di esprimere la densità di carica e la densità di corrente elettrica che si sviluppano nel plasma in funzione del campo elettromagnetico attraverso un approccio cinetico, che permette di includere importanti effetti, come discusso nel capitolo 2, come quelli legati alla presenza di una temperatura finita nel plasma. Inoltre, come si vedrà in seguito, rispetto ai modelli fluidi macroscopici, è possibile introdurre nella descrizione alcune delle proprietà caratteristiche dell'interazione tra impulsi laser ultraintensi e i plasmi, come ad esempio lo sviluppo nel sistema di una forte anisotropia nello spazio delle fasi.

Dopo averlo definito, il modello verrà sviluppato da un punto di vista analitico. In seguito, una volta ampliato, esso sarà utilizzato per il calcolo di una soluzione stazionaria del sistema di equazioni cinetiche in plasmi di elettroni-positroni (paragrafo 3.3.1) e in plasmi di elettroni-ioni (paragrafo

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

3.3.2), al fine di trovare le proprietà dei solitoni. In particolare verranno ricavate tutte le grandezze che descrivono in modo completo un solitone: densità e velocità delle particelle, campo elettrico e campo magnetico. In questo capitolo saranno mostrati e discussi solo alcuni casi significativi, per i valori dei parametri scelti, tra le numerose soluzioni trovate.

Con tale soluzione stazionaria, inoltre, sarà possibile inizializzare una simulazione di tipo PIC al fine di testare la stabilità nel tempo della soluzione stessa, come si vedrà successivamente nel capitolo 4.

3.1 Descrizione del modello utilizzato e sua applicazione

Il modello analitico presentato in ref. [55] considera un plasma costituito da un numero n di specie di particelle cariche differenti. La descrizione cinetica e relativistica del sistema si basa, trascurando l'effetto delle collisioni, su una funzione di distribuzione f_i per ciascuna specie, che soddisfa l'equazione di Vlasov relativistica come visto nel paragrafo 2.3.1.

Per prima cosa si richiama, quindi, l'equazione di Vlasov relativistica presentata in precedenza 2.3.3:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_j}{m_j \gamma_j} \cdot \nabla f_j + q_j \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{p}_j}{m_j \gamma_j} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{p}_j} = 0 \quad (3.1.1)$$

dove $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ rappresentano, rispettivamente, il campo elettrico e il campo magnetico presenti nel sistema, m_j , q_j e \mathbf{p}_j sono la massa a riposo, la carica elettrica e la quantità di moto della j -esima specie, mentre γ_j è il fattore relativistico,

$$\gamma_j = \left(1 + \frac{p_j^2}{m_j^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.1.2)$$

per semplificare le notazioni, in queste relazioni e nel resto del capitolo si utilizza il sistema di unità di misura nel quale la velocità della luce ha valore unitario.

3.1. Descrizione del modello utilizzato e sua applicazione

Il modello si basa sull'individuazione di una funzione di distribuzione per la j -esima specie con una forte anisotropia, che soddisfi identicamente l'equazione di Vlasov relativistica (equazione 3.1.1) nel caso stazionario:

$$f_j(W_j, \mathbf{P}_{j\perp}) = \frac{N_{0j}}{2m_j K_1(\beta_j^{-1})} \delta(\mathbf{P}_{j\perp}) \exp\left(-\frac{W_j}{T_j}\right) ; \quad (3.1.3)$$

in questa funzione di distribuzione sono state definite, per ogni j -esima specie l'energia totale, somma dell'energia a riposo, cinetica e potenziale

$$W_j(\mathbf{r}, t) = m_j \gamma_j + q_j \phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.1.4)$$

e il momento canonico coniugato

$$\mathbf{P}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}_j + q_j \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) . \quad (3.1.5)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, $\phi(\mathbf{r}, t)$ rappresentano rispettivamente il potenziale vettore e il potenziale scalare associati ai campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , N_{j0} , T_j , $\beta_j = T_j/m_j$ densità imperturbata, temperatura e rapporto tra l'energia termica e l'energia a riposo della particella che fa parte della j -esima specie. $K_1(\xi)$ è la funzione di MacDonald del prim'ordine e di argomento ξ .

Si può dimostrare che la funzione di distribuzione definita dall'eq. 3.1.3 è soluzione dell'eq. 3.1.1, in condizioni stazionarie, se si assume che la geometria del sistema sia di tipo monodimensionale, nella quale tutte le quantità fisiche dipendono da una sola coordinata spaziale, e inoltre che la radiazione elettromagnetica sia polarizzata circolarmente.

Con queste premesse e ricordando le espressioni 2.3.4 e 2.3.5, si ottengono le seguenti equazioni per la densità di carica elettrica

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^n q_j N_{0j} \frac{K_1(\gamma_{\perp j} \beta_j^{-1})}{K_1(\gamma_{\perp j} \beta_j^{-1})} \gamma_{\perp j} \exp\left(-\frac{\varphi_j}{\beta_j}\right) \quad (3.1.6)$$

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

e per la densità di corrente elettrica

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{j=1}^n q_j N_{0j} \frac{K_1(\gamma_{\perp j} \beta_j^{-1})}{K_0(\gamma_{\perp j} \beta_j^{-1})} \mathbf{a}_j \exp\left(-\frac{\varphi_j}{\beta_j}\right) \quad (3.1.7)$$

dove sono state introdotte le seguenti variabili adimensionali per i campi: $q_j \phi(\mathbf{A})/m_j \rightarrow \varphi_j(\mathbf{a}_j)$, $\gamma_{\perp j} = \sqrt{1 + a_{\perp j}^2}$, e $K_n(\xi)$ è la funzione di MacDonald di ordine n -esimo e argomento ξ .

Le equazioni 3.1.6 e 3.1.7, poiché esprimono le densità di carica e di corrente in funzione del potenziale scalare ϕ e del potenziale vettore \mathbf{A} , possono essere accoppiate alle equazioni di Maxwell per il calcolo dei campi auto-consistenti. Risulta conveniente utilizzare la gauge di Coulomb per trovare soluzioni localizzate di tipo solitonico, poiché in geometria monodimensionale la condizione $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ implica che A_x sia una costante. In particolare se si cercano soluzioni localizzate, la costante deve essere posta uguale a zero. Il potenziale vettore \mathbf{A} risulta quindi puramente trasversale così come, in virtù dell'equazione 3.1.7, la densità di corrente \mathbf{J} , quindi $\mathbf{J} = \mathbf{J}_t$. Partendo dunque dall'equazione di Maxwell per il potenziale vettore nella gauge di Coulomb

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t \quad (3.1.8)$$

e considerando un plasma costituito da due specie (ad esempio elettroni e positroni o elettroni e ioni) inserendo l'espressione della densità di corrente (eq. 3.1.7), nel caso monodimensionale si ottiene:

$$\mathbf{a}_{xx}'' - \mathbf{a}_{tt}'' = \mathbf{a} \left\{ \frac{K_0(\sqrt{1 + a^2} \lambda_e^{-1})}{K_1(\lambda_e^{-1})} \exp\left(\frac{\varphi}{\lambda_e}\right) + \right. \\ \left. + \rho Z \frac{K_0\left[\sqrt{1 + \rho^2 Z^2 a^2} (\rho \lambda_i)^{-1}\right]}{K_1[(\rho \lambda_i)^{-1}]} \exp\left(-\frac{Z\varphi}{\lambda_i}\right) \right\} \quad (3.1.9)$$

dove sono state definite le seguenti variabili adimensionali: $e\mathbf{A}(\phi) \rightarrow \mathbf{a}(\varphi)$, $\omega_{pe} t(x) \rightarrow t(x)$, $\lambda_e = T_e/m_e = \beta_e$, $\lambda_i = T_i/m_e$, $\rho = m_e/m_i$ ed infine Z è lo stato di ionizzazione della specie ionica ($Z=1$ per positroni).

Nel caso di distribuzioni stazionarie di energia elettromagnetica, cioè

3.2. Sviluppo del modello cinetico relativistico

di soluzioni con velocità di propagazione nulla, i cosiddetti *non drifting* o *standing solitons*, è possibile cercare soluzioni del tipo:

$$a(x, t) = a(x)e^{i\omega t} \quad (3.1.10)$$

dove $a(x, t) = a_y(x, t) + ia_z(x, t)$ e $\omega = \omega_0/\omega_{pe}$ è la frequenza del campo adimensionalizzata.

Questo tipo di soluzione è un caso particolare di un metodo generale che qui non viene riportato (per una trattazione più approfondita si rimanda a ref. [55] e [57]).

3.2 Sviluppo del modello cinetico relativistico

3.2.1 Calcolo dei potenziali e dei campi

Considerando la soluzione data dall'equazione 3.1.10, la relazione 3.1.9 diventa quindi:

$$a''_{xx} + \omega^2 a(x) = a \left\{ \frac{K_0 (\sqrt{1+a^2}\lambda_e^{-1})}{K_1 (\lambda_e^{-1})} \exp\left(\frac{\varphi}{\lambda_e}\right) + \right. \\ \left. + \rho Z \frac{K_0 [\sqrt{1+\rho^2 Z^2 a^2} (\rho\lambda_i)^{-1}]}{K_1 [(\rho\lambda_i)^{-1}]} \exp\left(-\frac{Z\varphi}{\lambda_i}\right) \right\} . \quad (3.2.1)$$

È possibile, analogamente, scrivere l'equazione di Poisson per il potenziale scalare $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$ nella seguente forma:

$$\varphi''_{xx} = \sqrt{1+a^2} \frac{K_1 (\sqrt{1+a^2}\lambda_e^{-1})}{K_1 (\lambda_e^{-1})} \exp\left(\frac{\varphi}{\lambda_e}\right) - \\ - \sqrt{1+\rho^2 Z^2 a^2} \frac{K_1 [\sqrt{1+\rho^2 Z^2 a^2} (\rho\lambda_i)^{-1}]}{K_1 [(\rho\lambda_i)^{-1}]} \exp\left(-\frac{Z\varphi}{\lambda_i}\right) . \quad (3.2.2)$$

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

Le equazioni 3.2.1 e 3.2.2 rappresentano un sistema chiuso di equazioni monodimensionali relativistiche che descrivono in modo autoconsistente l'interazione tra la radiazione elettromagnetica e un plasma caldo a due componenti, il cui stato macroscopico è stato derivato in modo consistente partendo dall'equazione di Vlasov relativistica 3.1.1. Una volta risolto, il sistema fornisce i potenziali scalare e vettore, che vengono utilizzati nelle seguenti equazioni che legano i potenziali ai campi per poter calcolare sia il campo elettrico che il campo magnetico:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (3.2.4)$$

Utilizzando una normalizzazione conseguente a quella adottata per i potenziali, $\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E}e}{m_e\omega_p c}$ e $\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}e}{m_e\omega_p c}$, dove e è il modulo della carica elettrica dell'elettrone, si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \quad (3.2.5)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \wedge \mathbf{a} \quad (3.2.6)$$

Considerando quindi il tipo di soluzione del potenziale 3.1.10 è possibile scrivere le componenti del campo elettrico lungo le tre direzioni nella seguente forma:

$$\tilde{E}_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial t} \quad (3.2.7)$$

$$\tilde{E}_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial t} \quad (3.2.8)$$

$$\tilde{E}_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial t} \quad (3.2.9)$$

3.2. Sviluppo del modello cinetico relativistico

L'espressione del campo magnetico risulta:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{B}} &= \det \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= \hat{\mathbf{e}}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - \hat{\mathbf{e}}_y \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{e}}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) . \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Ricordando che $\varphi = \varphi(x)$ e che $a_x = 0$, $a_y = a(x) \cos(\omega t)$, $a_z = a(x) \sin(\omega t)$ è possibile scrivere le derivate dei potenziali nelle varie direzioni:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi'_x \quad (3.2.11)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (3.2.12)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial t} = 0 \quad (3.2.14)$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial t} = -a(x)\omega \sin(\omega t) \quad (3.2.15)$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial t} = a(x)\omega \cos(\omega t) . \quad (3.2.16)$$

Note le derivate dei potenziali è possibile semplificare le relazioni scritte per le componenti del campo elettrico e del campo magnetico nel seguente modo:

$$\tilde{E}_x = -\varphi'_x \quad (3.2.17)$$

$$\tilde{E}_y = a(x)\omega \sin(\omega t) \quad (3.2.18)$$

$$\tilde{E}_z = -a(x)\omega \cos(\omega t) \quad (3.2.19)$$

$$\tilde{B}_x = 0 \quad (3.2.20)$$

$$\tilde{B}_y = -\frac{\partial a(x)}{\partial x} \sin(\omega t) \quad (3.2.21)$$

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

$$\tilde{B}_z = \frac{\partial a(x)}{\partial x} \cos(\omega t) . \quad (3.2.22)$$

3.2.2 Calcolo della densità di particelle e della velocità fluida

Una volta trovati i potenziali vettore e scalare è possibile esprimere le proprietà macroscopiche del plasma come la densità di carica e la densità di corrente elettrica totali attraverso le equazioni 3.1.6 e 3.1.7. Un'altra grandezza di notevole interesse nella descrizione del solitone è la densità numerica di ogni specie presente (intesa come numero di particelle della j -esima specie per unità di volume) normalizzata rispetto alla densità imperturbata:

$$\frac{N_j(\mathbf{r}, t)}{N_{0j}} = \frac{K_1(\gamma_{\perp j} \beta_j^{-1})}{K_1(\gamma_{\perp j} \beta_j^{-1})} \gamma_{\perp j} \exp\left(-\frac{\varphi_j}{\beta_j}\right) . \quad (3.2.23)$$

Per descrivere in modo completo le particelle del plasma è necessario descrivere anche la velocità fluida e la quantità di moto trasversale delle particelle di ogni popolazione. In particolare, in tal modo si possono descrivere completamente le particelle nello spazio delle fasi.

È possibile determinare la velocità fluida conoscendo la densità di numero e la densità di corrente, infatti la velocità fluida normalizzata è legata a queste grandezze dalla seguente relazione

$$\frac{v}{c} = \frac{J_j}{N_j} \quad (3.2.24)$$

dove c è la velocità della luce.

Dal tipo di funzione di distribuzione scelta (eq. 3.1.3) è possibile notare che la presenza della funzione δ implica la conservazione della componente trasversale del momento canonico coniugato. Fisicamente questo è dovuto alla forte anisotropia caratterizzata da una temperatura costante e non nulla nella direzione longitudinale (la direzione dei gradienti spaziali, identificata dalla direzione di propagazione dell'impulso laser), e da un'energia termica trascurabile in direzione trasversale. Partendo da questa considerazione e dall'espressione del momento canonico coniugato 3.1.5 è possibile ottenere,

3.3. Applicazioni del modello analitico

infine, le seguenti relazioni per la quantità di moto trasversale nello spazio delle fasi lungo le direzioni y e z :

$$p_{yj} = -q_j a_y \quad (3.2.25)$$

$$p_{zj} = -q_j a_z \quad (3.2.26)$$

3.3 Applicazioni del modello analitico

Nei prossimi paragrafi verrà descritta l'applicazione del modello cinetico proposto alle due tipologie di solitoni che si sono studiati: nel paragrafo 3.3.1 strutture solitoniche in plasmi di elettroni-positroni ($e^- - e^+$) e nel paragrafo 3.3.2 strutture solitoniche in plasmi di elettroni-ioni ($e^- - i$). Come descritto nel paragrafo 2.2.2 l'interesse per i plasmi di elettroni-positroni nasce da studi di carattere cosmologico, astronomico e sperimentale. Per quel riguarda i solitoni di elettroni-ioni, invece, va rimarcato ad esempio il loro ruolo nei processi di accoppiamento tra energia del laser e plasmi in esperimenti di fusione inerziale e accelerazione di particelle cariche (si veda paragrafo 2.2.3).

3.3.1 Solitoni in plasmi di elettroni-positroni

Come anticipato nel paragrafo 2.2.2 nel caso di plasmi di elettroni e positroni è necessario considerare il fatto che tali particelle hanno la stessa massa e modulo della carica elettrica di pari intensità. Per questa ragione nel modello considerato nel paragrafo 3.2.1 viene posto $\rho = Z = 1$. Viene studiato, inoltre, il caso particolarmente significativo di un plasma isoterma per il quale $T_{e^-} = T_{e^+} = T$.

A seguito di tali precisazioni è importante osservare che l'inerzia delle particelle cariche che costituiscono il plasma è identica. Non ci si aspetta, perciò, separazione di carica e la conseguente eccitazione del potenziale scalare. Quindi ϕ rimane nullo durante l'evoluzione del sistema. Questo aspetto costituisce una notevole differenza rispetto al caso di plasmi di elettroni-ioni, che verrà trattato in seguito. In un sistema di elettroni positroni non si

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

manifesta separazione di carica elettrica, e conseguentemente forze di tipo elettrostatico, a causa dell'identica inerzia delle due popolazioni costituenti il plasma. Quindi il campo elettrico longitudinale risulta nullo, $E_x = 0$, a seguito della relazione 3.2.17. Per questo l'esistenza di una temperatura finita diventa un ingrediente essenziale per poter sostenere la presenza di strutture di tipo solitonico, come risultato del bilancio tra la pressione della radiazione elettromagnetica e la pressione termica [58].

Con queste assunzioni si considera quindi $\varphi = 0$. Il sistema di equazioni che descrive l'andamento dei potenziali (3.2.1 e 3.2.2) si semplifica notevolmente ad un'equazione differenziale ordinaria non lineare del second'ordine che descrive l'ampiezza del potenziale vettore normalizzato:

$$a''_{xx} + \omega^2 a(x) = 2a \frac{K_0 (\sqrt{1 + a^2 \lambda^{-1}})}{K_1 (\lambda^{-1})}, \quad (3.3.1)$$

dove è stato posto $\lambda_{e^-} = \lambda_{e^+} = \lambda$.

Utilizzando questo modello analitico che descrive il solitone è stato scritto un codice *Matlab* in grado di risolvere per via numerica l'equazione differenziale del potenziale vettore (3.3.1) una volta inseriti i parametri che caratterizzano il solitone, cioè la temperatura λ e la frequenza dell'onda elettromagnetica ω . In particolare si cercano soluzioni che abbiano come condizioni al contorno $a(-\infty) = a(+\infty) = 0$. In tal modo è possibile trovare l'andamento di $a(x)$ per strutture solitoniche con differenti ampiezze e caratteristiche. Trovato $a(x)$ è possibile ricavare tutte le altre grandezze che servono per descrivere in modo completo il solitone utilizzando le equazioni descritte nei paragrafi 3.2.1 e 3.2.2: tali grandezze sono quelle che descrivono le particelle e i campi elettromagnetici. Va precisato che per poter confrontare al meglio le medesime grandezze tra solitoni con caratteristiche differenti, queste saranno espresse come grandezze normalizzate. Perciò d'ora in avanti per non appesantire la notazione i campi elettrici e magnetici normalizzati che in precedenza venivano indicati con $\tilde{\mathbf{E}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$ saranno indicati semplicemente con \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Per quel che riguarda le particelle le grandezze necessarie a descriverle saranno la densità numerica (N_j/N_{j0}), la velocità fluida (v_j/c) e la quantità

3.3. Applicazioni del modello analitico

di moto trasversale (p_{yi}, p_{zi}) per ogni specie presente nel plasma, quindi in questo caso elettroni e positroni. La densità numerica si ottiene dalla relazione 3.2.23 che per plasma isoterma di elettroni e positroni può essere riscritta in forma più semplice come

$$\frac{N(x)}{N_0} = \sqrt{1 + a^2} \frac{K_1(\sqrt{1 + a^2} \lambda^{-1})}{K_1(\lambda^{-1})} . \quad (3.3.2)$$

La velocità fluida si ottiene dalla relazione 3.2.24 mentre la quantità di moto trasversale nelle due direzioni si ottiene dalle relazioni 3.2.25 e 3.2.26.

Infine per descrivere in modo completo il campo elettromagnetico sono calcolate i valori delle varie componenti $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$. Queste sono ricavate sostituendo i valori dei potenziali ottenuti precedentemente nel set di equazioni per le componenti dei campi già mostrate nel paragrafo 3.2.1.

Vengono ora presentate alcune delle soluzioni trovate risolvendo il modello analitico presentato con il codice Matlab sviluppato nel lavoro di tesi. Tali soluzioni risultano particolarmente significative perché da una parte riproducono correttamente la casistica trattata in letteratura [56], dall'altra ne costituiscono un ampliamento.

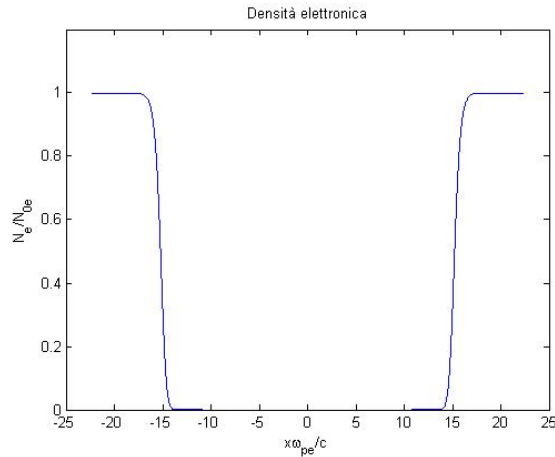


Figura 3.1: Densità elettronica per un solitone in un plasma a bassa temperatura di elettroni-positroni con $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$

Nelle figure 3.1 e 3.2 è possibile osservare l'andamento della densità e della velocità fluida elettronica. In particolare tali figure rappresentano un

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

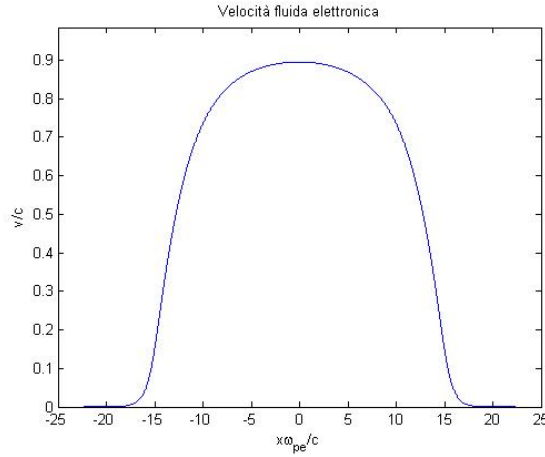


Figura 3.2: Velocità fluida elettronica per un solitone in un plasma a bassa temperatura di elettroni-positroni con $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$

solitone elettromagnetico in un plasma a bassa temperatura ($\lambda = 0.01$ cioè $T \approx 5.11 \text{ keV}$) di elettroni e positroni dove la frequenza della radiazione intrappolata adimensionale vale $\omega = \omega_0/\omega_{pe} = 0.01$. Si può notare come ci sia un'ampia zona di svuotamento nel solitone dove le particelle sono quasi completamente espulse.

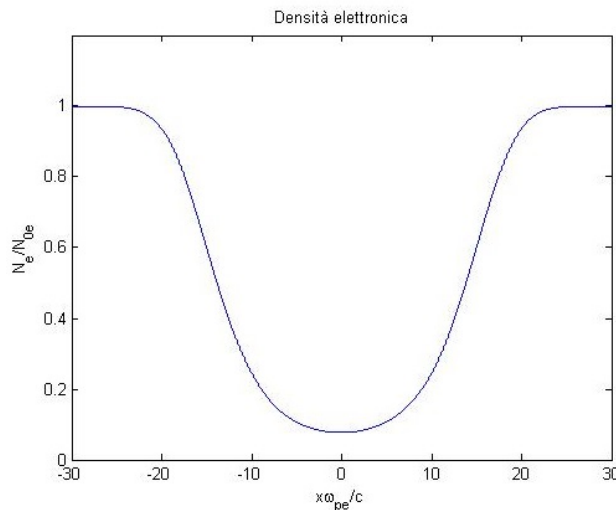


Figura 3.3: Densità elettronica per un solitone in un plasma ultrarelativistico di elettroni-positroni con $\lambda = 30$ e $\omega = 0.1$

Nella figura 3.3 viene invece presentato l'andamento della densità elettro-

3.3. Applicazioni del modello analitico

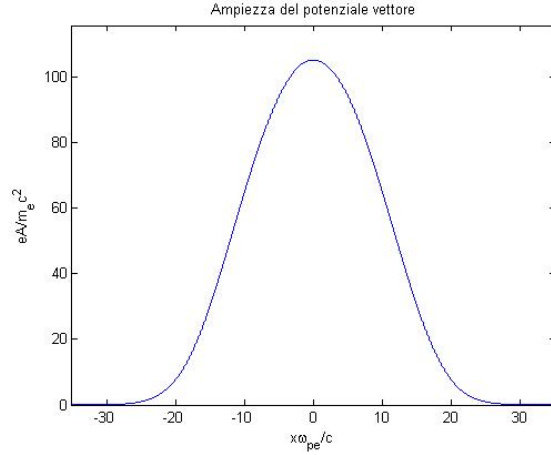


Figura 3.4: Ampiezza del potenziale vettore normalizzato in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$.

nica per un solitone in un plasma con frequenza della radiazione intrappolata pari a $\omega = 0.1$ e temperatura elevata $\lambda = 30$ (cioè $T \approx 15 \text{ MeV}$). A questa temperatura il plasma ha un comportamento ultrarelativistico; infatti, come si può vedere dal grafico 3.4 che rappresenta il modulo del potenziale vettore normalizzato a in funzione della coordinata spaziale, a raggiunge valori superiori a 100 (si veda paragrafo 2.1.1). Al contrario del caso precedente si può notare che a causa della elevata pressione termica del plasma ci sia solo una parziale cavitazione della densità.

3.3.2 Solitoni in plasmi di elettroni-ioni

Nel paragrafo 2.2.3 si è introdotto il concetto di quasi-neutralità. Questa proprietà caratteristica di molti fenomeni fisici nei plasmi è stata osservata in simulazioni multidimensionali ed esperimenti riguardanti i solitoni elettromagnetici nei plasmi di elettroni-ioni [5]. È quindi possibile sviluppare ulteriormente il modello presentato nel paragrafo 3.2, nel caso di plasmi $e^- - i$, sfruttando l'ipotesi di quasi-neutralità. Tale ipotesi è espressa dalla relazione:

$$\frac{|N_e - ZN_i|}{N_0} \ll 1 \quad . \quad (3.3.3)$$

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

Grazie all'ipotesi di quasineutralità è possibile in prima approssimazione trascurare l'effetto della derivata seconda del potenziale nell'equazione di Poisson ($\nabla^2\phi = -4\pi\rho$). Di conseguenza si può porre uguale a zero il secondo membro dell'equazione 3.2.2. In tal modo si ottiene una relazione algebrica trascendente in grado di esprimere il potenziale scalare in funzione dell'ampiezza a del potenziale vettore:

$$\varphi(a^2; \rho, \lambda_e, \lambda_i) = \left(\frac{1}{\lambda_e} + \frac{Z}{\lambda_i} \right)^{-1} \times \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho^2 Z^2 a^2}{1 + a^2} + \ln \frac{K_1(\lambda_e^{-1}) K_1 \left[\sqrt{1 + \rho^2 Z^2 a^2 / \rho \lambda_i} \right]}{K_1(\rho^{-1} \lambda_i^{-1}) K_1 \left[\sqrt{1 + a^2 / \lambda_e} \right]} \right\} . \quad (3.3.4)$$

Una volta trovata questa espressione è possibile eliminare φ nell'equazione 3.2.1 del potenziale vettore. Si ottiene quindi un'equazione differenziale ordinaria non lineare nell'incognita $a(x)$:

$$a''_{xx} + \omega^2 a(x) = G(a) \quad (3.3.5)$$

con

$$G(a) = a \left\{ \frac{K_0(\gamma_{\perp e} / \lambda_e)}{K_1(1 / \lambda_e)} \left[\frac{\gamma_{\perp i} K_1(1 / \lambda_e) K_1(\gamma_{\perp i} / \rho \lambda_i)}{\gamma_{\perp e} K_1(1 / \rho \lambda_i) K_1(\gamma_{\perp e} / \lambda_e)} \right]^\alpha + \rho Z \frac{K_0(\gamma_{\perp i} / \rho \lambda_i)}{K_1(1 / \rho \lambda_i)} \left[\frac{\gamma_{\perp i} K_1(1 / \lambda_e) K_1(\gamma_{\perp i} / \rho \lambda_i)}{\gamma_{\perp e} K_1(1 / \rho \lambda_i) K_1(\gamma_{\perp e} / \lambda_e)} \right]^{\alpha-1} \right\} \quad (3.3.6)$$

dove sono state definite le seguenti grandezze

$$\begin{aligned} \gamma_{\perp e} &= \sqrt{1 + a^2} \quad , \\ \gamma_{\perp i} &= \sqrt{1 + \rho^2 Z^2 a^2} \quad , \\ \alpha &= \lambda_i / (\lambda_i + Z \lambda_e) \quad . \end{aligned}$$

Come nel caso dei plasmi di $e^- - e^+$ è stato scritto un codice *Matlab* in grado di risolvere numericamente l'equazione differenziale del potenzia-

3.3. Applicazioni del modello analitico

le vettore (3.3.5) una volta inseriti i parametri che caratterizzano il solitone, cioè le temperature λ_e e λ_i e la frequenza dell'onda elettromagnetica ω . In particolare si cercano soluzioni che abbiano come condizioni al contorno $a(-\infty) = a(+\infty) = 0$. A differenza dei plasmi di $e^- - e^+$ dove l'assunzione $\varphi = 0$ semplifica di molto il modello cinetico, nei plasmi $e^- - i$ è stata fatta l'ipotesi di quasi-neutralità, che pertanto deve essere verificata almeno approssimativamente per garantire la coerenza del modello stesso. Perciò, una volta ottenuto $a(x)$ è possibile calcolare il potenziale scalare φ dall'equazione 3.3.4 e verificare, attraverso il successivo calcolo di φ' e φ'' , che sia soddisfatta la disuguaglianza $|\varphi''| \ll 1$.

Più in generale, come è stato discusso nel caso di plasmi di $e^- - e^+$, anche in questo caso avendo calcolato $a(x)$ è possibile ottenere le grandezze che descrivono in modo completo il solitone: la densità numerica (N_j/N_{j0}), la velocità fluida (v_j/c) e la quantità di moto trasversale lungo le due direzioni y e z (p_{yi}, p_{zi}) per ogni specie presente nel plasma. I valori di queste grandezze vengono calcolati a partire dalle relazioni 3.2.23 (densità di particelle), 3.2.24 (velocità fluida), 3.2.25 e 3.2.26 (quantità di moto trasversale).

Il campo elettromagnetico è descritto dalle sue componenti $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$, i cui rispettivi profili spaziali sono ricavati sostituendo i valori dei potenziali ottenuti precedentemente nel set di equazioni per le componenti dei campi già mostrate nel paragrafo 3.2.1. Contrariamente al caso di plasmi di $e^- - e^+$ dove $E_x = 0$, nei plasmi di ioni-elettroni è possibile trovare il campo elettrico longitudinale dalla relazione:

$$E_x(a; \rho, \lambda_i, \lambda_e) = -\frac{1}{\frac{1}{\lambda_e} + \frac{Z}{\lambda_i}} \cdot \left[\frac{1}{\lambda_e \gamma_{\perp e}} \frac{K_0(\gamma_{\perp e}/\lambda_e)}{K_1(\gamma_{\perp e}/\lambda_e)} - \frac{\rho Z^2}{\lambda_i \gamma_{\perp i}} \frac{K_0(\gamma_{\perp i}/\rho \lambda_i)}{K_1(\gamma_{\perp i}/\rho \lambda_i)} \right] a a'_x \quad (3.3.7)$$

Questa relazione è ottenuta sostituendo la relazione che descrivere il potenziale scalare 3.3.4 nell'equazione per la componente longitudinale del campo elettrico $E_x = -\varphi'_x$.

Viene presentato di seguito una caso esplicativo tra le soluzioni trovate per solitoni in plasmi di elettroni e ioni attraverso il codice scritto in Matlab. Le

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

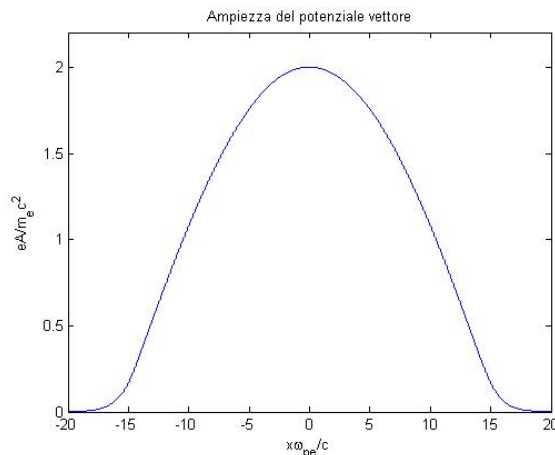


Figura 3.5: Ampiezza del potenziale vettore per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e $\omega = 0.1$

figure 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 rappresentano rispettivamente il potenziale vettore, la densità elettronica, la densità ionica e il campo elettrico longitudinale per un solitone in un plasma con una temperatura $\lambda_i = \lambda_e = 0.01$ cioè $T_e = T_i \approx 5.11 \text{ keV}$ dove la specie ionica è costituita da protoni ($Z = \rho = 1$).

Il caso trattato corrisponde ad una dinamica relativistica poiché, come si evince dalla figura 3.5, il valore massimo dell'ampiezza del potenziale vettore è maggiore di uno $a = eA/m_e c^2 \approx 2$ (si veda 2.1.1). È possibile osservare, dalle figure 3.6 e 3.7, come la densità elettronica e quella ionica abbiano lo stesso andamento in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$. In questo caso entrambe le soluzioni mostrano un'ampia zona di svuotamento nel solitone dove le particelle sono completamente espulse. Inoltre è interessante osservare che anche nell'ipotesi di quasi-neutralità nel solitone si instaura un campo elettrico longitudinale che in unità adimensionali ha un valore massimo di 0.06 che corrisponde ad un valore dell'ordine di $0.06 m_e \omega_{pe} c / e \approx 0.06 \sqrt{N_e (cm^{-3})} V/cm$, cioè a circa 60 MV/cm (fig. 3.9) per un valore di densità di $N_e \approx 10^{18} cm^{-3}$. Un elettrone su un intervallo pari a $15c/\omega_{pe}$, che è la regione su cui il campo ha lo stesso segno, viene accelerato a energie di circa 450 keV . Questo valore è di molto superiore a quello dell'energia termica che è pari a circa 5.11 keV .

Nella figura 3.8, inoltre, è possibile apprezzare la validità dell'ipotesi di

3.3. Applicazioni del modello analitico

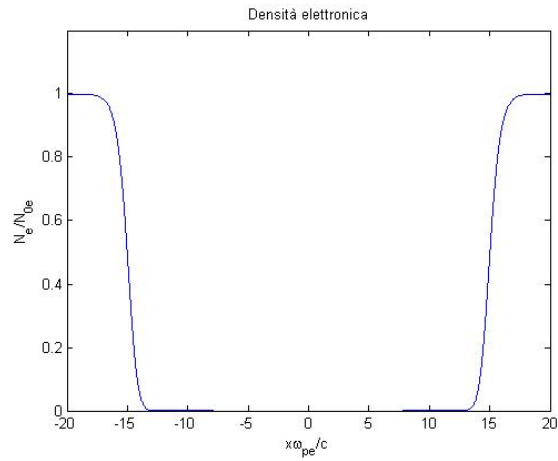


Figura 3.6: Densità elettronica per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e $\omega = 0.1$

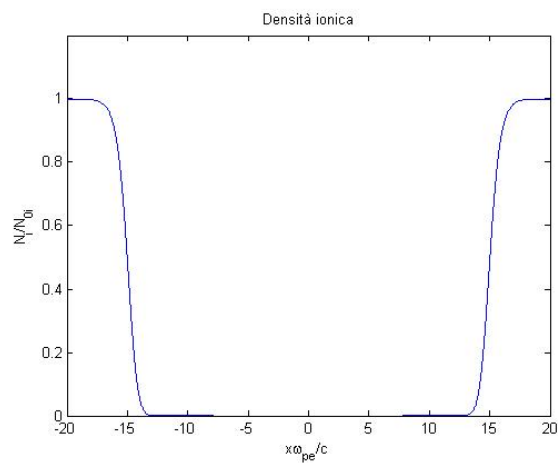


Figura 3.7: Densità ionica per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e $\omega = 0.1$

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

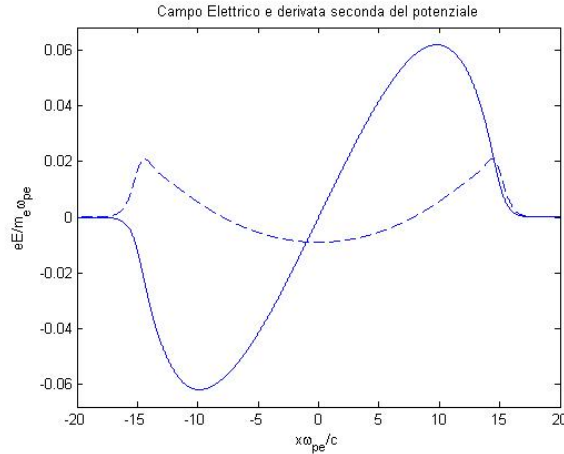


Figura 3.8: Campo elettrico longitudinale E_x (linea continua) e derivata seconda del potenziale scalare φ'' (linea tratteggiata) per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e $\omega = 0.1$

quasi-neutralità osservando l'andamento della derivata seconda del potenziale scalare. La quasi-neutralità ($|\varphi''| \ll 1$) è ben rispettata nel solitone, si possono tuttavia notare due massimi per φ'' (≈ 0.02) che possono costituire delle zone dove la soluzione ottenuta può ritenersi valida solo in modo approssimato, fatto che può implicare un comportamento dinamico del solitone. Questo aspetto viene trattato in dettaglio nel capitolo 4.

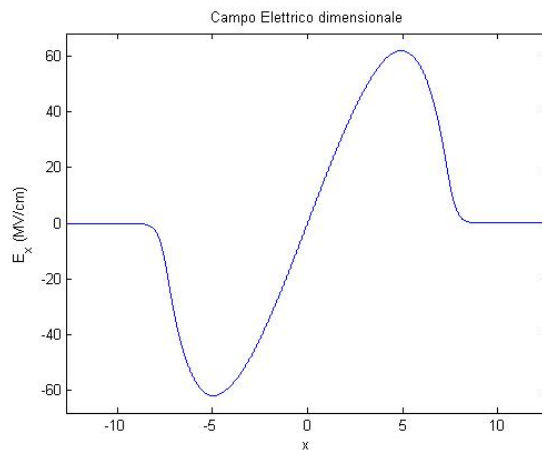


Figura 3.9: Campo elettrico longitudinale E_x dimensionale in MV/cm per il solitone della figura 3.8

3.3. Applicazioni del modello analitico

Riguardo alla presenza di campi elettrostatici longitudinali intensi, è possibile osservare in figura 3.11 come si raggiungano valori anche dell'ordine del GV/cm per solitoni ultrarelativistici ($\lambda_i = \lambda_e = 30$ e $\omega = 0.1$). In questo caso un elettrone su un intervallo pari a $30c/\omega_{pe}$, che è la regione su cui il campo ha lo stesso segno, viene accelerato a energie di circa $15 MeV$. Questo valore è dell'ordine di quello dell'energia termica che è pari a circa $15 MeV$. Rispetto al caso precedente, dove $\lambda_i = \lambda_e = 0.01$, in questo solitone, dove la temperatura ionica ed elettronica è elevata ($\lambda_i = \lambda_e = 30$), si può notare che a causa della elevata pressione termica del plasma ci sia solo una parziale cavitazione della densità (si veda la figura 3.3).

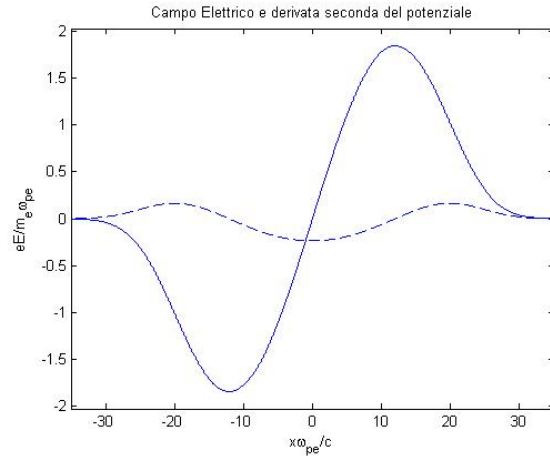


Figura 3.10: Campo elettrico longitudinale E_x (linea continua) e derivata seconda del potenziale scalare φ'' (linea tratteggiata) per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 30$ e $\omega = 0.1$

Capitolo 3. Sviluppo di modelli di Solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

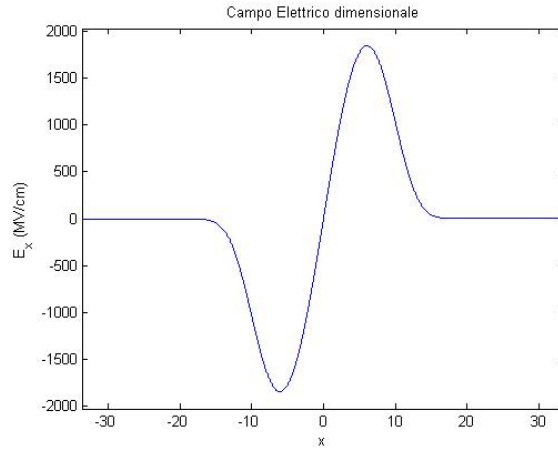


Figura 3.11: Campo elettrico longitudinale E_x dimensionale in MV/cm per il solitone della figura 3.8

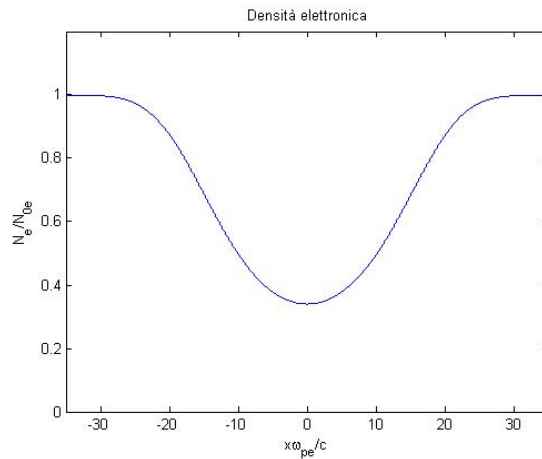


Figura 3.12: Densità elettronica per un solitone in un plasma di elettroni-ioni con $\lambda_e = \lambda_i = 30$ e $\omega = 0.1$

Capitolo 4

Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

4.1 Introduzione

I risultati ottenuti nel capitolo 3, oltre che di interesse per fornire una descrizione puramente analitica dei solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi, possono anche costituire una base per sviluppi ulteriori, volti ad analizzare ulteriori caratteristiche fisiche di queste strutture, facendo uso di opportuni approcci numerici. A questo scopo è stato effettuato uno studio numerico di tipo cinetico sull'evoluzione temporale dei solitoni elettromagnetici nei plasmi. Come già anticipato nel paragrafo 2.4, le simulazioni numeriche sono state effettuate attraverso l'uso del codice *Piccante* [59]. *Piccante* è un codice di tipo Particle in Cell sviluppato all'interno dei progetti SULDIS (programma del MIUR FIRB-Futuro in ricerca) e TOFUSEX (Prace european program per supercalcolatori @ CINECA), distribuito liberamente con licenza open-source GPLv3 (<https://github.com/ALaDyn/piccante>). Il codice è stato ideato per offrire flessibilità nella definizione delle condizioni iniziali (forma del plasma, numero e forma degli impulsi laser, etc.), algoritmi di soluzione e adattabilità ad hardware diversi. *Piccante* è stato sviluppato principalmente

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

per studiare differenti scenari di interazione laser-plasma. Grazie alla sua flessibilità è stato possibile estenderne facilmente l'uso allo studio di solitoni elettromagnetici per questo lavoro di tesi. In particolare uno degli obiettivi di questo lavoro è stato quello di adattarlo, ampliarlo e testarlo per lo studio di questi fenomeni fisici.

In questo capitolo vengono presentati e discussi i risultati delle simulazioni effettuate con *Piccante*. Come condizioni iniziali per descrivere i solitoni elettromagnetici sono state utilizzate le soluzioni stazionarie ottenute dal metodo analitico presentato nel capitolo 3. Per studiare la stabilità e l'eventuale dinamica delle soluzioni analitiche, le simulazioni sono state eseguite per tempi molto maggiori del periodo di plasma ($2\pi/\omega_p$) di riferimento per ogni singolo caso analizzato. Le simulazioni sono state condotte sia nel caso di solitoni in plasmi di elettroni e positroni (paragrafo 4.2) che nel caso di solitoni in plasmi di elettroni e ioni (paragrafo 4.3).

4.2 Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e positroni

Per analizzare l'evoluzione temporale dei solitoni elettromagnetici in plasmi di elettroni e positroni, le simulazioni sono state inizializzate con i dati su densità numerica, corrente, quantità di moto e campo elettromagnetico ottenuti dalle soluzioni analitiche mostrate precedentemente nel paragrafo 3.3.1.

Come prima simulazione è stato riprodotto l'unico caso analogo ed esteso di studio presente in bibliografia [6] dove era stata studiata l'evoluzione temporale di una struttura solitonica in un plasma di elettroni-positroni attraverso l'utilizzo di un codice di tipo Particle In Cell. Successivamente è stata simulata l'evoluzione temporale di solitoni caratterizzati da un'elevata temperatura delle specie elettronica e positronica ($\lambda = 30$ cioè $T \approx 15 \text{ MeV}$) che sono di interesse nell'ambito astrofisico come discusso nel paragrafo 2.2.2.

4.2. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e positroni

4.2.1 Risultati ottenuti e discussione

Il solitone presentato nell'articolo [6] ha come parametri caratteristici una temperatura uguale per entrambe le popolazioni $\lambda = 0.01$ ($T \approx 5.11 \text{ keV}$) e una frequenza di campo normalizzata $\omega = 0.1$.

La figura 4.1, ripresa dall'articolo [6], mostra la densità numerica normalizzata (N_e/N_0) dopo 159 periodi di plasma, quindi dopo un tempo di circa 270 ns per un plasma con una densità elettronica imperturbata $N_0 = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. I grafici mostrano risultati ottenuti con due risoluzioni differenti: entrambi con 128 punti di griglia, il primo con 5000 particelle per cella e il secondo con 50 particelle/cella. Si possono ora confrontare questi grafici con le figure 4.2 e 4.3 ottenute in questo lavoro di tesi con il codice Piccante. La densità elettronica presenta lo stesso andamento rispetto al caso di letteratura. Inoltre si nota che con entrambi i codici il rumore diminuisce significativamente aumentando il numero di particelle per cella. Questo è spiegato dal fatto che il campionamento della densità con un numero "piccolo" di particelle comporta fluttuazioni statistiche maggiori. In maniera molto semplice si possono stimare le fluttuazioni come \sqrt{n}/n dove n rappresenta il numero di particelle per cella. A dimostrazione di ciò, l'andamento della densità elettronica in figura 4.2, ottenuta con 256 punti di griglia e 1000 particelle/cella, si discosta meno dall'andamento teorico, mostrato in figura 3.1, rispetto alla figura 4.3.

Inoltre, per completare il confronto con il caso bibliografico è presentato in figura 4.5 l'andamento dei campi trasversali E_y ed E_z ottenuti con la simulazione effettuata con Piccante con 256 punti di griglia e 50 particella/cella. Si noti come il grafico presenti una piena corrispondenza con l'analoga figura 4.4 dell'articolo [6].

Va sottolineato, infine, che altre simulazioni condotte su questo solitone su tempi maggiori (500 periodi plasma corrispondenti a circa 840 ns), a parità degli altri parametri, hanno mostrato che la densità non si discosta dal profilo mostrato in figura 4.2. Questo dimostra l'esattezza della soluzione analitica monodimensionale per il caso di plasmi di elettroni e ioni, infatti essa per ipotesi è stazionaria. La stabilità di tali soluzioni è stata studiata anche tra-

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

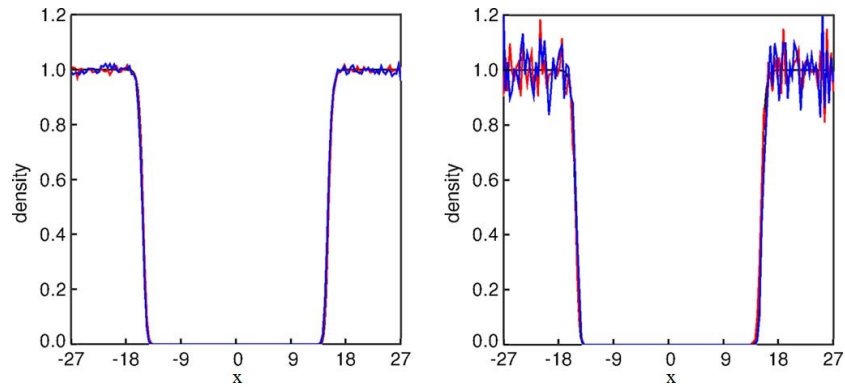


Figura 4.1: Densità elettronica normalizzata in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$ ottenuta ad un tempo di 159 periodi di plasma con 128 punti di griglia: a sinistra per 5000 particella/cella a destra per 50 particelle/cella. Da [6].

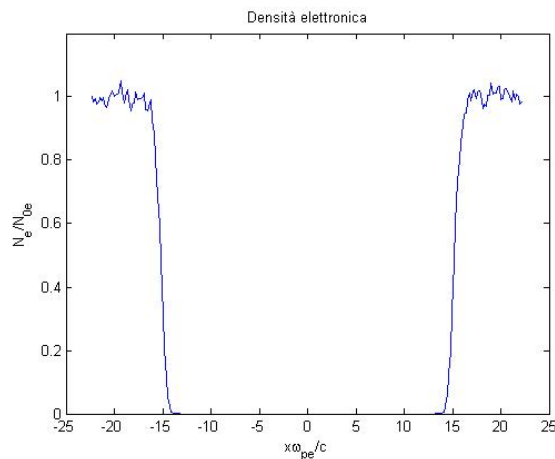


Figura 4.2: Densità elettronica normalizzata in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$ ottenuta con Piccante per un plasma di elettroni e positroni caratterizzato da $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$. Il tempo di simulazione è di 159 periodi di plasma. La simulazione è stata effettuata con 256 punti di griglia e 1000 particella/cella.

4.2. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e positroni

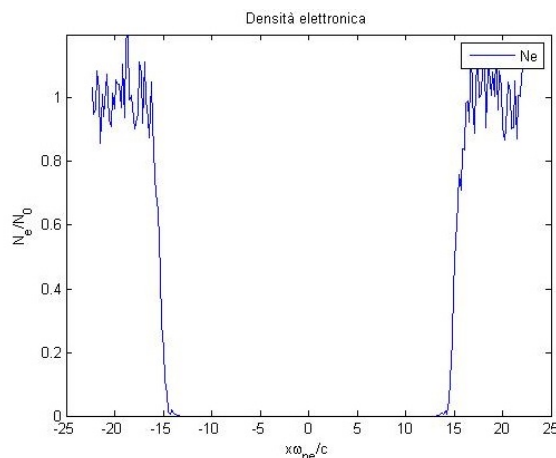


Figura 4.3: Densità elettronica normalizzata in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$ ottenuta con Piccante per un plasma di elettroni e positroni caratterizzato da $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$. Il tempo di simulazione di 159 periodi di plasma. La simulazione effettuata con 256 punti di griglia e 50 particella/cella.

mite altre simulazioni, di carattere differente rispetto a quello presentate in questo paragrafo, effettuate nel lavoro di tesi. Esse hanno mostrato come le stesse soluzioni analitiche fossero altamente instabili quando applicate ad un plasma con funzione di distribuzione non fortemente anisotropa al contrario di quella corrispondente utilizzata nel modello cinetico (eq. 3.1.3) per ottenere la soluzione analitica.

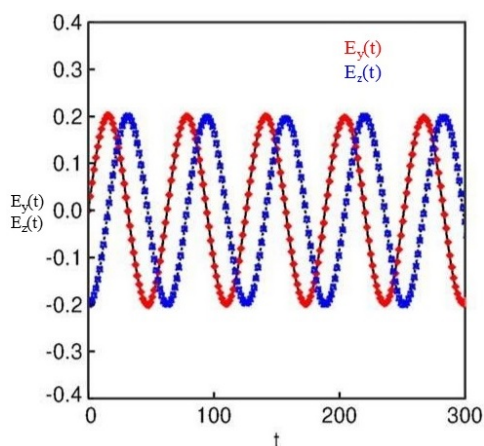


Figura 4.4: Solitone elettromagnetico in plasma di elettroni e positroni con $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$. Andamento dei campi elettrici trasversali nel tempo al centro del solitone: in rosso E_y , in blu E_z . Da [6].

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

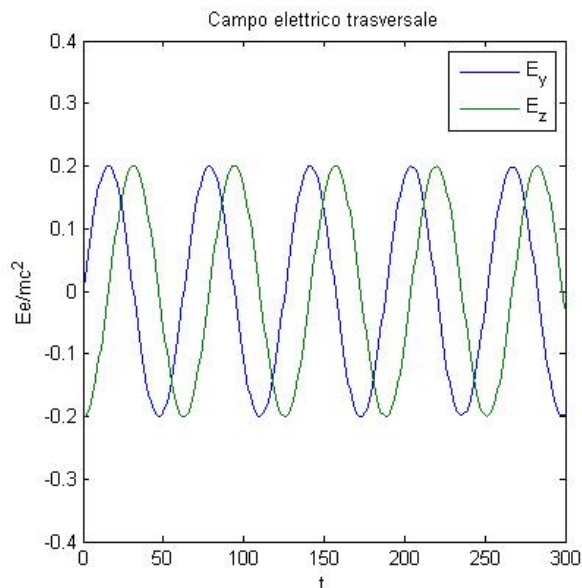
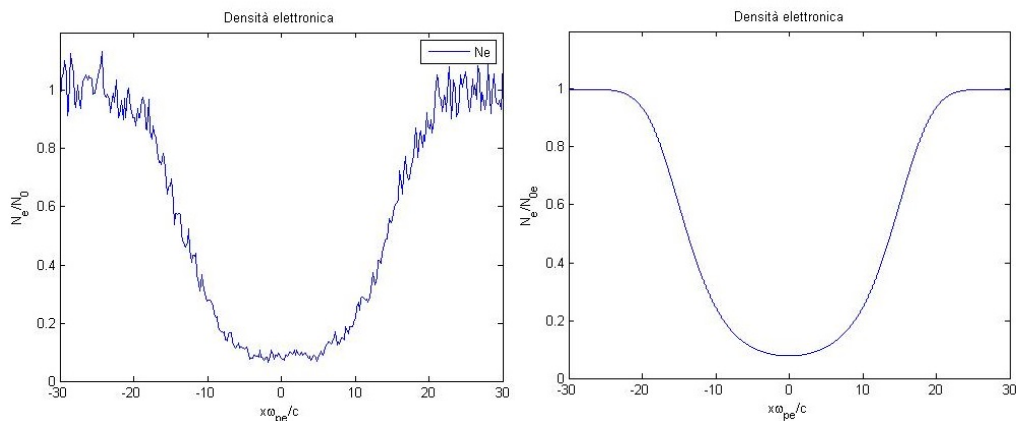


Figura 4.5: Solitone elettromagnetico in plasma di elettroni e positroni con $\lambda = 0.01$ e $\omega = 0.1$. Andamento dei campi elettrici trasversali ottenuti con Piccante nel tempo al centro del solitone: in rosso E_y , in blu E_z . La simulazione è stata effettuata con 256 punti di griglia e 50 particelle/cella. In questo caso il tempo è espresso con la stessa adimensionalizzazione utilizzata nell'articolo [6] per poter confrontare i risultati.

Si è passati poi a simulare un plasma con elevata temperatura, $\lambda = 30$ pari a circa 15 MeV . A questa temperatura il comportamento del plasma è ultrarelativistico, come si può vedere dalla figura 3.4, già presentata nel capitolo precedente, che rappresenta il modulo del potenziale vettore normalizzato a in funzione della coordinata spaziale: a raggiunge valori superiori a 100.

La figura 4.6a rappresenta l'andamento della densità elettronica normalizzata del solitone già presentato nel paragrafo 3.3.1 dopo un tempo di 318 periodi di plasma che corrisponde a circa 534 ns per una densità imperturbata $N_0 = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. La simulazione è stata condotta con 128 punti di griglia e 1000 particelle/cella. Anche in questo caso il solitone risulta stabile, tuttavia l'elevata temperatura porta ad avere delle oscillazioni rilevanti sulla densità rispetto alla soluzione calcolata con il modello analitico Fig. 3.3. Tali oscillazioni sono simili al rumore ottenuto nei casi precedenti con un minor

4.2. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e positroni



(a) Densità elettronica ottenuta dalla simulazione. (b) Densità elettronica ottenuta dal modello analitico.

Figura 4.6: Densità elettronica normalizzata in funzione della coordinata spaziale normalizzata $x\omega_{pe}/c$ per un plasma di elettroni e positroni caratterizzato da $\lambda = 30$ e $\omega = 0.1$. A sinistra quella ottenuta con Piccante Il tempo di simulazione è di 318 periodi di plasma. La simulazione è stata effettuata con 256 punti di griglia e 1000 particella/cella. A destra l'andamento teorico ottenuto con il modello analitico sviluppato nel capitolo 3

numero di particelle per cella, ma in realtà sono dovute, in questa situazione fisica, all'elevata energia termica degli elettroni e dei positroni.

Nel lavoro di tesi sono state effettuate anche altre simulazioni sui solitoni in plasmi di elettroni e positroni. In particolare sono stati studiati solitoni in plasmi con valori di temperatura compresi tra i due casi discussi in questo paragrafo ($0.01 < \lambda < 30$ cioè $5.11 \text{ keV} < T < 15 \text{ MeV}$). I risultati ottenuti presentano aspetti analoghi a quelli già presentati.

Dalle simulazioni effettuate è possibile trarre delle conclusioni sia riguardo al modello analitico utilizzato che riguardo all'aspetto numerico. In primo luogo va sottolineato che nel caso di solitoni in plasmi di elettroni e positroni il modello analitico fornisce una soluzione "esatta" valida per tutti i valori dei parametri ω , λ , etc.. La soluzione analitica monodimensionale del sistema cinetico relativistico risulta un'ottima soluzione perché se viene utilizzata come condizione iniziale in un codice PIC dinamico, si ottiene un profilo di densità molto stabile in tutte le simulazioni effettuate. In secondo luogo dal punto vista numerico viene confermato il fatto che un numero di particelle

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

per cella maggiore porta ad un profilo di densità, con meno rumore, che si avvicina sempre di più a quello ricavato dal modello analitico. Va ricordato, però, che aumentare l'ordine di grandezza il numero di particelle per cella porta ad un considerevole aumento del tempo di simulazione a scapito di un leggero miglioramento del rumore.

4.3 Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e ioni

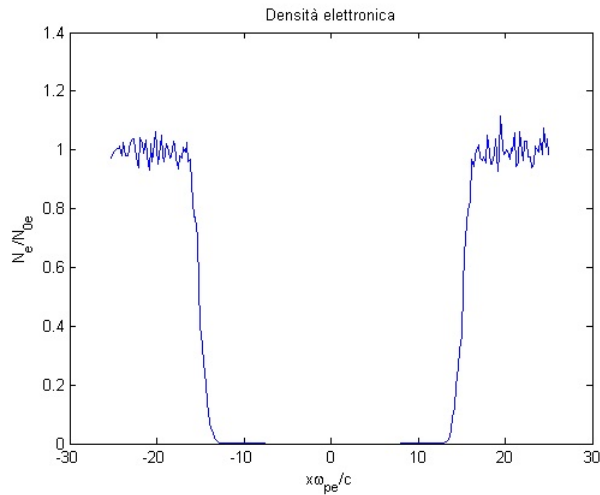
Come per le strutture solitoniche in plasmi di elettroni e positroni, anche per lo studio della stabilità dei solitoni in plasmi di ioni e elettroni le simulazioni sono state inizializzate con i dati di densità numerica, corrente, quantità di moto e campo elettromagnetico ottenute come mostrato nel paragrafo 3.3.2.

Nel seguente paragrafo vengono mostrati i risultati delle simulazioni di solitoni elettromagnetici in plasmi composti in particolare da elettroni e protoni ($Z = \rho = 1$). Il primo caso affrontato è quello di un solitone con frequenza della radiazione elettromagnetica pari ad un decimo delle frequenza di plasma ($\omega = 0.1$) in un plasma di temperatura identica per la specie elettronica e ionica $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ cioè $T_e = T_i \approx 5,11 \text{ keV}$ per $N_e = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. Questi valori sono stati scelti perché rappresentano una tipologia di solitoni di particolare interesse per casi studio di laboratorio volti alla fusione inerziale [27, 30, 31].

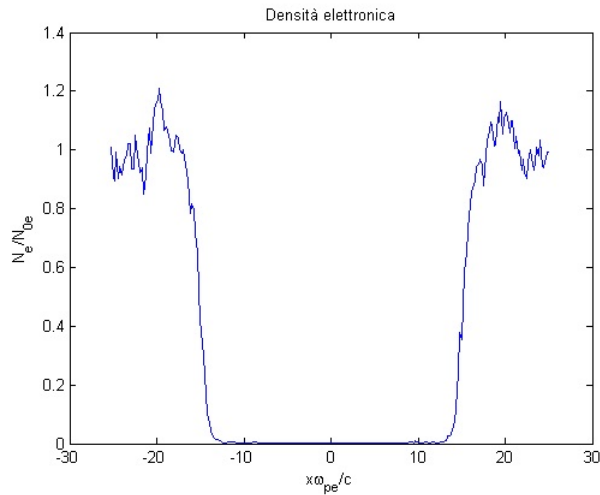
Successivamente viene presentato il caso di un solitone con frequenza $\omega = 0.1$ in un plasma con temperatura della specie elettronica $\lambda_e = 0.04$ ($T \approx 20.44 \text{ keV}$) e della specie ionica $\lambda_i = 10^{-4}$ ($T \approx 51.1 \text{ eV}$). Attraverso questi casi studio viene sottolineata l'importanza dell'approssimazione di quasi-neutralità. Infatti uno degli obiettivi del lavoro di tesi è di testare la bontà e i limiti di validità dell'assunzione di quasi-neutralità in relazione al modello sviluppato nel capitolo 3.

4.3. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e ioni

4.3.1 Risultati ottenuti e discussione



(a) Densità elettronica dopo circa 63 periodi di plasma.



(b) Densità elettronica dopo circa 1885 periodi di plasma.

Figura 4.7: Solitone in plasma con temperature uguali per la specie ionica e elettronica $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Densità elettronica in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 200 particelle/cella.

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

Le figura 4.7 mostra la densità elettronica normalizzata N_e/N_{e0} in funzione della coordinata spaziale $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti per un plasma con temperature uguali per la specie ionica e elettronica $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ ($T_e = T_i \approx 5, 11 \text{ keV}$) e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. D'ora in avanti in questo paragrafo per le stime dimensionali si fa riferimento ad una densità elettronica $N_e \approx 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. In particolare il grafico 4.7a rappresenta la densità elettronica ad un tempo di 63 periodi di plasma, che corrispondono ad un'evoluzione temporale di circa 100 ns . Il grafico 4.7b mostra invece l'evoluzione su un tempo molto maggiore, dell'ordine di $3.17 \mu\text{s}$ (circa 1885 periodi di plasma).

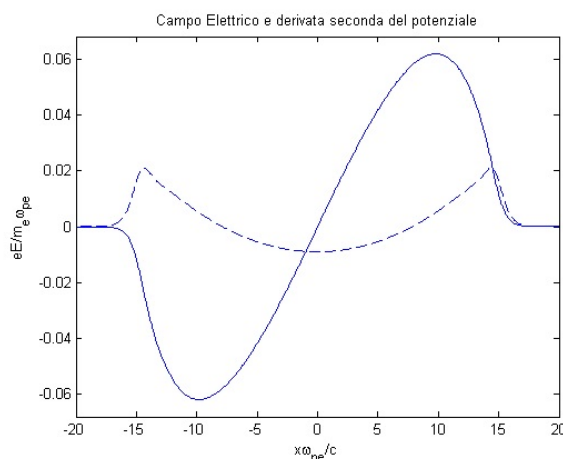


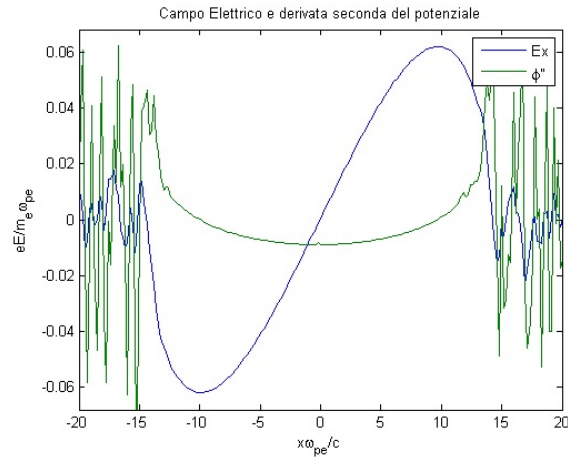
Figura 4.8: Solitone in plasma con temperature uguali per la specie ionica e elettronica $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Andamenti teorici del campo elettrico longitudinale (linea continua) e della derivata seconda del potenziale vettore (linea tratteggiata) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Grafico ottenuto attraverso la risoluzione numerica del modello analitico presentato nel capitolo 3 con il codice Matlab sviluppato.

4.3. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e ioni

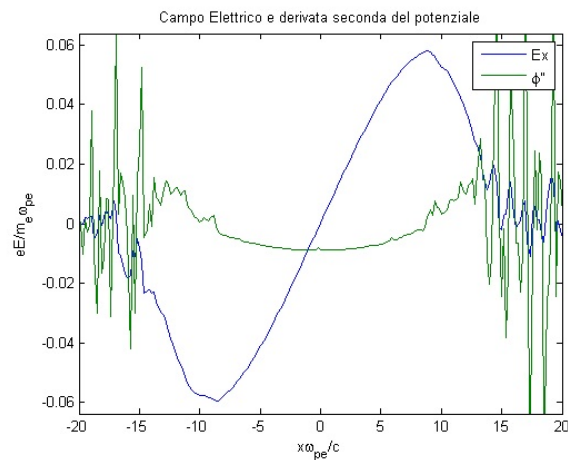
Confrontando questi grafici con la figura 3.1, che rappresenta la densità iniziale del solitone ricavata con il modello analitico, è possibile osservare che il solitone risulta stabile. Tuttavia si nota che ai margini della zona completamente svuotata ($-20 \leq x\omega_{pe}/c \leq -15$ e $15 \leq x\omega_{pe}/c \leq 20$) dopo un tempo elevato ($t = 3.17 \mu s$) la densità aumenta leggermente rispetto a quella iniziale. Questo fatto può essere spiegato osservando che tale zona del solitone è quella dove l'ipotesi di quasi-neutralità è più critica. A tal proposito sono riportati l'andamento del campo elettrico longitudinale E_x e della derivata seconda del potenziale scalare φ'' : in figura 4.8 viene presentato l'andamento ottenuto dal modello analitico che è stato utilizzato per inizializzare i solitoni nelle simulazioni; nella figura 4.9 vengono presentati i risultati delle simulazioni a tempi differenti.

Nella zona centrale del solitone il campo elettrico longitudinale presenta lo stesso andamento delle condizioni iniziali anche dopo tempi lunghi ($t = 3.17 \mu s$). Tuttavia nella zona periferica il valore del campo elettrico oscilla portando ad avere valori di φ'' molto elevati: tale valore è calcolato risolvendo numericamente la relazione $\varphi'' = -E'_x$ ottenuta a partire dalla relazione 3.2.17. In questa zona del solitone quindi la condizione di quasi-neutralità $\varphi'' \ll 1$ è verificata con peggiore approssimazione e questo va ad alterare i valori di densità del solitone rispetto all'andamento delle condizioni iniziali. Va però sottolineato il fatto che tale densità non si discosta di molto da quella presentata in figura 4.8, anche dopo un tempo relativamente lungo di circa $3.17 \mu s$. Il solitone in questione risulta essere, quindi, molto stabile. In particolare va sottolineato il fatto che la descrizione analitica approssimata, attraverso l'assunzione di quasi-neutralità, porta ad una soluzione che rappresenta un buon compromesso tra semplicità e accuratezza della descrizione quindi particolarmente indicata a descrivere il solitone elettromagnetico.

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi



(a) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 63 periodi di plasma.



(b) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 1885 periodi di plasma.

Figura 4.9: Solitone in plasma con temperature uguali per la specie ionica e elettronica $\lambda_e = \lambda_i = 0.01$ e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Campo elettrico longitudinale (blu) e derivata seconda del potenziale vettore (verde) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 200 particelle/cella.

4.3. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e ioni

Viene ora analizzato un caso differente rispetto al precedente dove si considera di un solitone con frequenza $\omega = 0.1$ in un plasma con temperatura della specie elettronica $\lambda_e = 0.04$ ($T \approx 20.44 \text{ keV}$) e della specie ionica $\lambda_i = 10^{-4}$ ($T \approx 51.1 \text{ eV}$). Questa può essere una situazione molto frequente in plasmi di elettroni e ioni di laboratorio dove, su tempi sufficientemente brevi, un laser interagisce con la specie elettronica a cui può cedere energia scaldandola 2.1.2. Questo caso viene analizzato per osservare gli effetti sull'evoluzione temporale di differenti temperature per la specie ionica e per la elettronica.

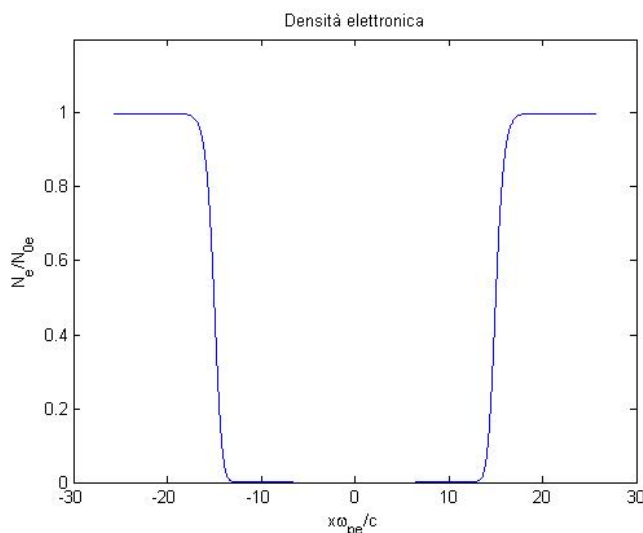
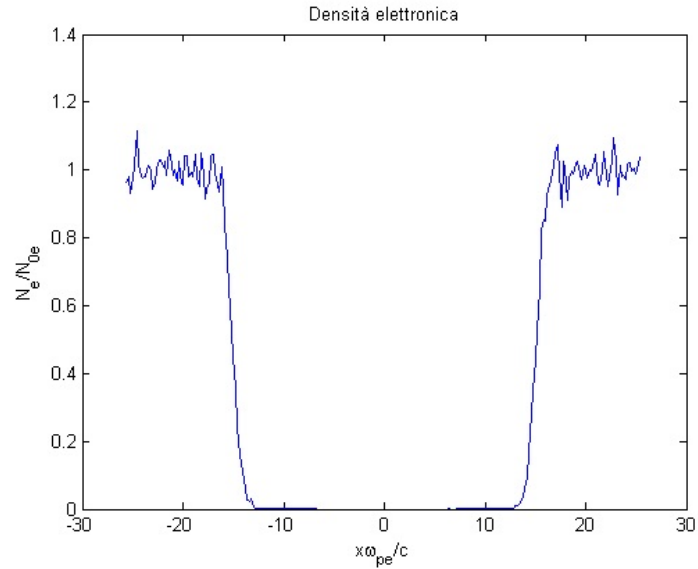


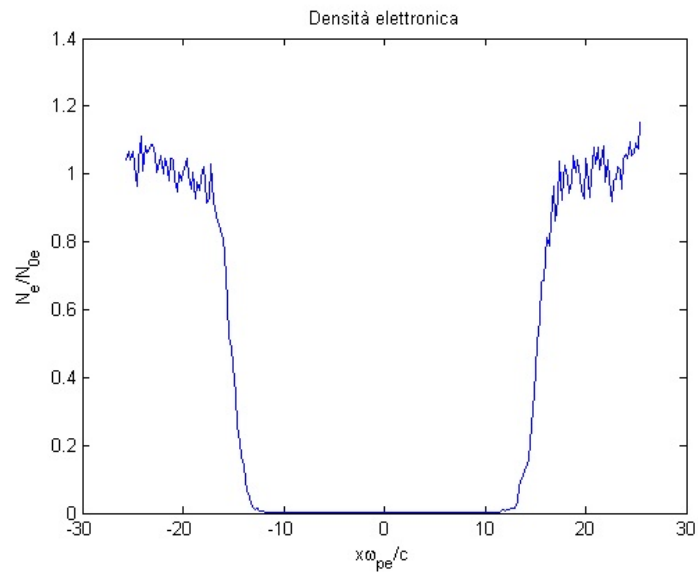
Figura 4.10: Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Andamento teorico della densità elettronica in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$. Grafico ottenuto attraverso la risoluzione numerica del modello analitico presentato nel capitolo 3 con il codice Matlab sviluppato.

Confrontando la figura 4.10 con la figura 4.11 si può osservare che, analogamente al caso precedente, nelle zone periferiche del solitone ($-20 \leq x\omega_{pe}/c \leq -15$ e $15 \leq x\omega_{pe}/c \leq 20$) la densità varia rispetto alle condizioni iniziali.

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi



(a) Densità elettronica dopo circa 63 periodi di plasma.



(b) Densità elettronica dopo circa 1885 periodi di plasma.

Figura 4.11: Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Densità elettronica in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 200 particelle/cella.

4.3. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e ioni

Come per il solitone analizzato in precedenza sono mostrati gli andamenti del campo elettrico longitudinale e della derivata seconda del potenziale vettore a tempi differenti. Dalla figura 4.14 si può notare come il capo elettrico al centro del solitone sia analogo a quello trovato analiticamente (fig. 4.12) anche dopo tempi lunghi ($t = 3.17 \mu s$). Tuttavia nella zona periferica il campo risulta deformato in modo consistente rispetto alla soluzione analitica. Per verificare se questo andamento possa essere giustificato da errori numerici sono state condotte sia simulazioni con una risoluzione maggiore che simulazioni con un maggior numero di particelle per cella. Nei codici di tipo PIC, infatti, pochi punti di griglia non permettono una buona risoluzione di gradienti elevati delle grandezze analizzate. In particolare un aumento dei punti di griglia permette al codice *Piccante* di utilizzare passi temporali minori fornendo una soluzione più precisa. D'altro canto, l'aumento del numero di particelle per cella permette di descrivere in modo migliore salti di densità rilevanti a partire da una densità costante. La simulazione iniziale è stata condotta con 256 punti di griglia e 200 particelle/cella. Il numero di punti di griglia è stato, poi, quadruplicato per avere una risoluzione maggiore. Tale simulazione ad alta risoluzione è stata quindi effettuata con 1024 punti di griglia e 200 particelle/cella. Nella simulazione con un numero maggiore di particelle per cella, invece, tale valore è stato quadruplicato rispetto alla prima simulazione di questo solitone, portando i parametri a 256 punti di griglia e 800 particelle/cella. La figura 4.13 mostra come sia la simulazione ad alta risoluzione che quella con numero di particelle/cella maggiore, presentino un profilo di densità elettronica analogo alla prima simulazione effettuata (figura 4.11). Anche per il campo elettrico longitudinale è possibile osservare dalle figure 4.15 e 4.16, un andamento analogo rispetto alla simulazione caratterizzata da 256 punti di griglia e 200 particelle/cella, figura 4.14.

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi

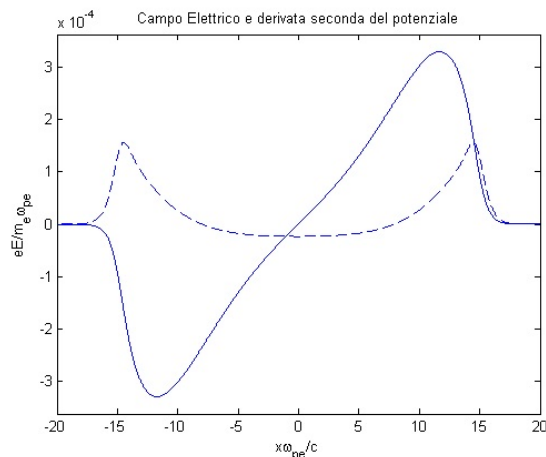
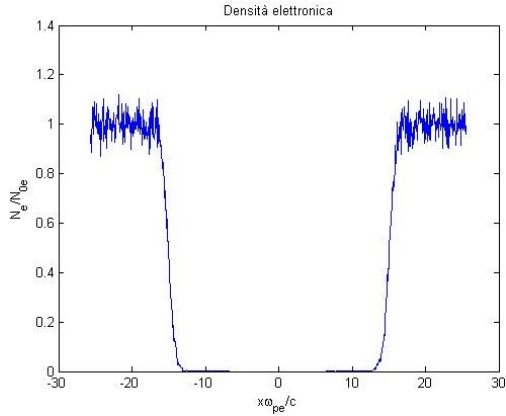


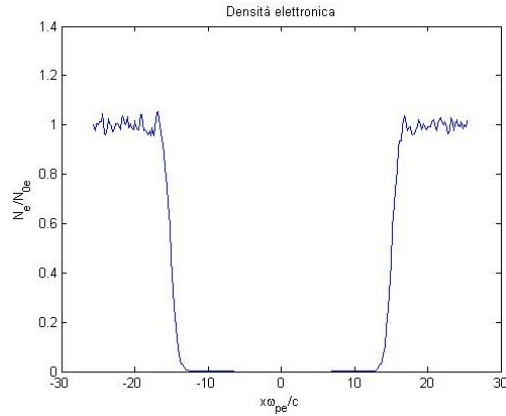
Figura 4.12: Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Andamenti teorici del campo elettrico longitudinale (linea continua) e della derivata seconda del potenziale vettore (linea tratteggiata) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Grafico ottenuto attraverso la risoluzione numerica del modello analitico presentato nel capitolo 3 con il codice Matlab sviluppato.

Come nel solitone con uguale temperatura per la specie ionica e quella elettronica, anche in questo solitone le zone dove la densità elettronica cambia rispetto alle condizione iniziale sono quelle critiche per l'ipotesi di quasi-neutralità. In particolare, osservando le zone ai lati del solitone ($-20 \leq x\omega_{pe}/c \leq -15$ e $15 \leq x\omega_{pe}/c \leq 20$), si noti come la derivata seconda del potenziale vettore (φ'') raggiunga valori molto maggiori di 1, oltrepassando i limiti di validità dell'assunzione di quasi-neutralità. Va, tuttavia, sottolineato che nella zona centrale del solitone la quasi-neutralità rimane una buona approssimazione.

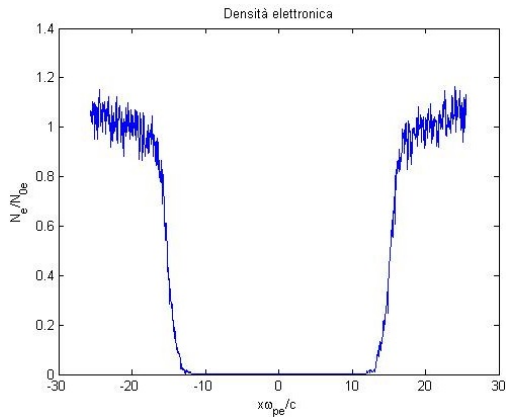
4.3. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e ioni



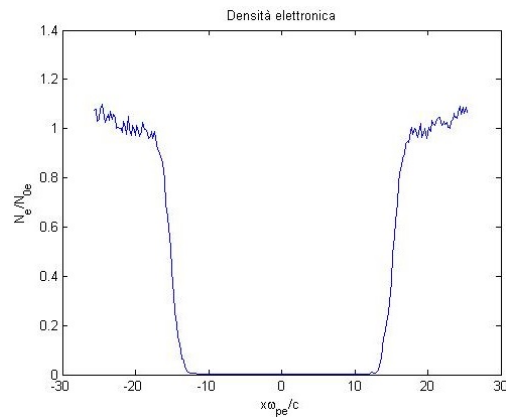
(a) Densità elettronica dopo circa 63 periodi di plasma. Simulazione effettuata con 1024 punti di griglia e 200 particelle/cella.



(b) Densità elettronica dopo circa 63 periodi di plasma. Simulazione effettuata con 256 punti di griglia e 800 particelle/cella.



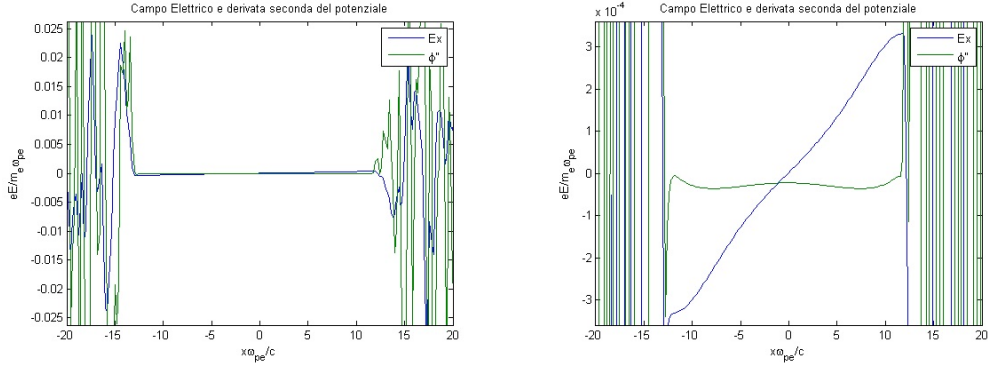
(c) Densità elettronica dopo circa 1885 periodi di plasma. Simulazione effettuata con 1024 punti di griglia e 200 particelle/cella.



(d) Densità elettronica dopo circa 1885 periodi di plasma. Simulazione effettuata con 256 punti di griglia e 800 particelle/cella.

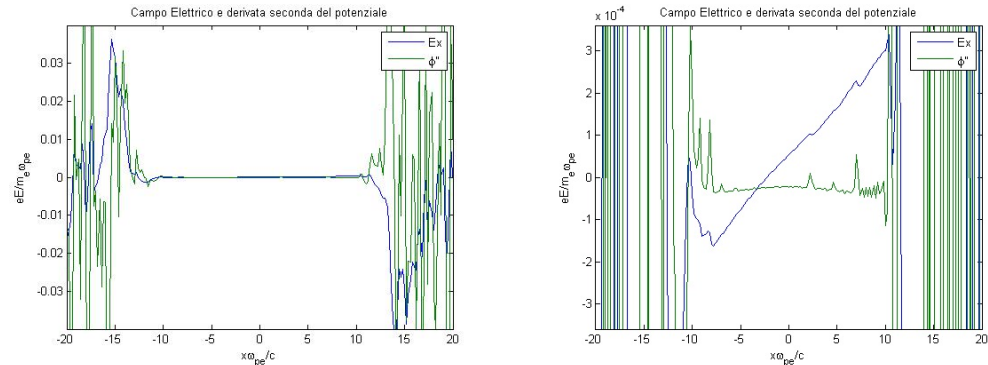
Figura 4.13: Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Densità elettronica in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti.

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi



(a) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 63 periodi di plasma.

(b) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 63 periodi di plasma nella zona centrale del solitone

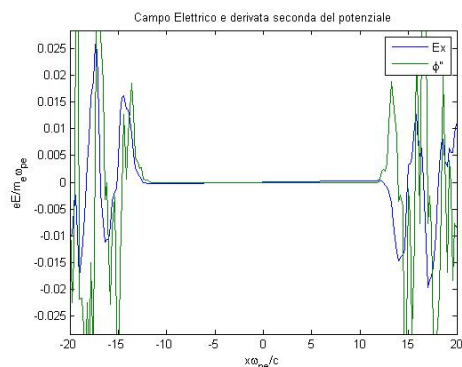


(c) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 1885 periodi di plasma.

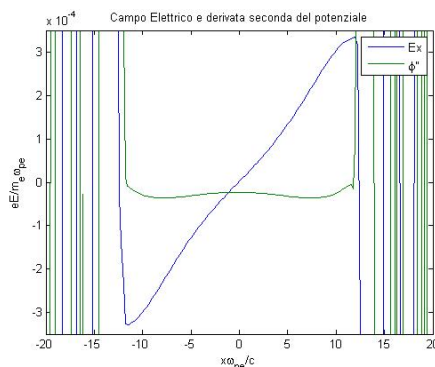
(d) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 1885 periodi di plasma nella zona centrale del solitone.

Figura 4.14: Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Campo elettrico longitudinale (blu) e derivata seconda del potenziale vettore (verde) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 200 particelle/cella.

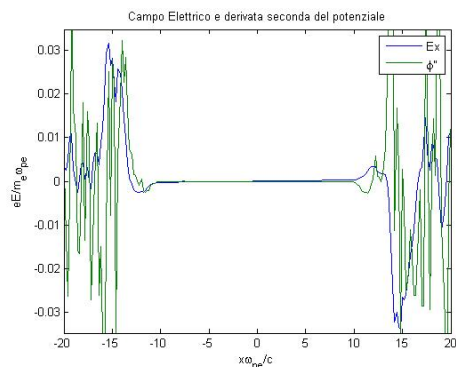
4.3. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e ioni



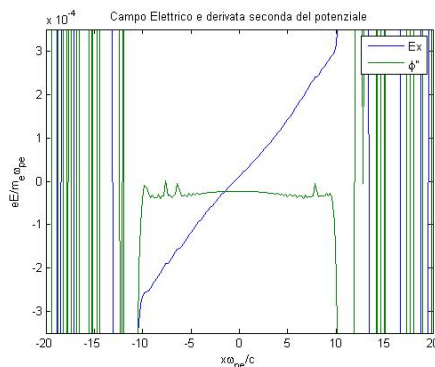
(a) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 63 periodi di plasma.



(b) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 63 periodi di plasma nella zona centrale del solitone



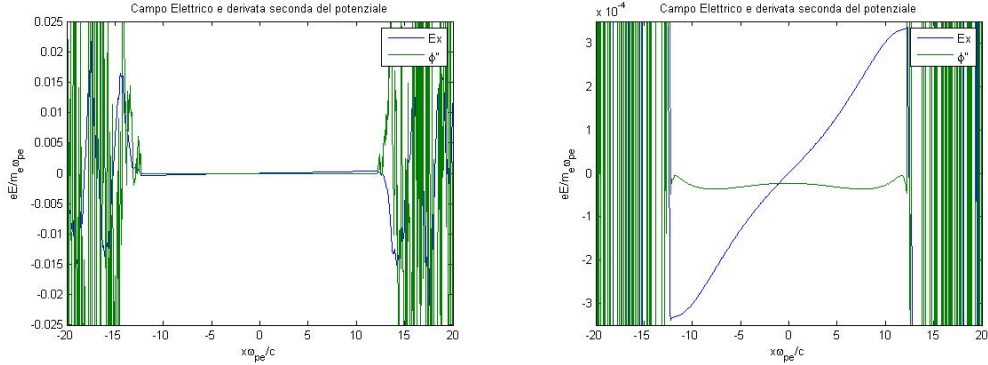
(c) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 1885 periodi di plasma.



(d) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 1885 periodi di plasma nella zona centrale del solitone.

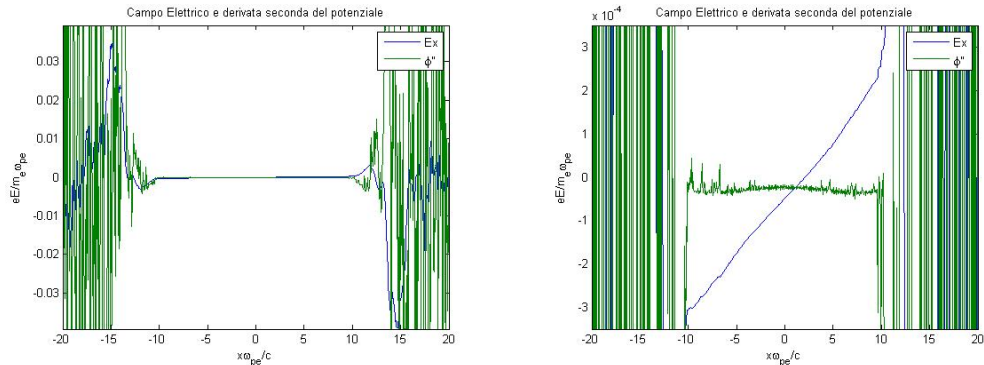
Figura 4.15: Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Campo elettrico longitudinale (blu) e derivata seconda del potenziale vettore (verde) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 256 punti di griglia e 800 particelle/cella.

Capitolo 4. Studio numerico cinetico di solitoni elettromagnetici relativistici nei plasmi



(a) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 63 periodi di plasma.

(b) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 63 periodi di plasma nella zona centrale del solitone



(c) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 1885 periodi di plasma.

(d) Campo elettrico longitudinale E_x e derivata seconda del potenziale vettore φ'' dopo circa 1885 periodi di plasma nella zona centrale del solitone.

Figura 4.16: Solitone in plasma con temperatura $\lambda_i = 10^{-4}$ per la specie ionica, $\lambda_e = 0.04$ per la specie elettronica e frequenza della radiazione normalizzata $\omega = 0.1$. Campo elettrico longitudinale (blu) e derivata seconda del potenziale vettore (verde) in funzione della coordinata normalizzata $x\omega_{pe}/c$ a tempi differenti. Entrambe le simulazioni sono state effettuate con 1024 punti di griglia e 200 particelle/cella.

4.3. Solitoni elettromagnetici relativistici in plasmi di elettroni e ioni

Rispetto al caso dei solitoni in plasmi di elettroni e positroni, dove il modello analitico monodimensionale fornisce una soluzione esatta, in tutti casi affrontati in questo paragrafo, su tempi lunghi (oltre i 100 ns), si ha una variazione del profilo di densità con una sorta di “svuotamento” del solitone su regioni spaziali crescenti nel tempo. Tuttavia su tempi sufficientemente brevi (fino a circa 100 ns) ma comunque significativi rispetto alle scale temporali tipiche dell’interazione tra impulsi ultrabrevi e plasmi, si ha una densità che rimano molto prossima a quella delle condizioni iniziali. Le soluzioni sono quindi abbastanza stabili, anche se non quanto quelle esatte per plasmi di elettroni-protoni. Poiché questo è stato registrato anche per simulazioni di solitoni con valori differenti dei parametri caratteristici $(\lambda_e, \lambda_i, \omega)$, è possibile concludere che l’assunzione di quasi-neutralità è una buona assunzione per ottenere le soluzioni monodimensionali del modello analitico presentato nel capitolo 3 almeno fino a tempi dell’ordine dei 100 ns e per regioni significative di estensione spaziale dei campi presenti nel solitone. La stabilità di tali soluzioni è stata studiata anche tramite altre simulazioni, di carattere differente rispetto a quelle presentate in questo paragrafo, effettuate nel lavoro di tesi. In particolare, in queste ulteriori simulazioni, oltre ai profili di densità e dei campi elettromagnetici, analoghi a quelli utilizzati in precedenza, sono state inserite nel codice PIC delle condizioni non fortemente anisotrope per la funzione di distribuzione come condizioni iniziali, al contrario di quelle ben descritte dalla funzione di distribuzione utilizzata nel modello cinetico (eq. 3.1.3). I risultati presentano un’evoluzione dinamica molto instabile con uno svuotamento dei solitoni “istantaneo”. Questo sottolinea l’importanza dell’anisotropia dovuta all’interazione laser plasma che porta ad avere soluzioni stabili.

Capitolo 5

Conclusioni e sviluppi futuri

Questo lavoro di tesi ha avuto come obiettivo principale lo studio dei solitoni elettromagnetici che si formano nei plasmi a seguito di interazioni con laser ad alta intensità (dell'ordine di $10^{15}W/cm^2$ o superiori) e potenza (dell'ordine dei centinaia di TW). L'interesse per tale tipo di strutture solitoniche nasce dagli studi sulla fusione nucleare a confinamento inerziale, tematica discussa nel capitolo 1. In questa tipologia di studi, si è osservato come i solitoni elettromagnetici possono rivestire un ruolo centrale nella cessione di energia al plasma. Infatti una parte rilevante dell'energia del laser viene trasferita al plasma proprio all'interno di tali strutture (si veda il paragrafo 2.2.1). In particolare, come discusso nel capitolo 2, studi recenti [27,30,31] hanno mostrato come strutture solitoniche si formano non solo a seguito dell'instaurarsi di instabilità del tipo *Stimulated Raman Scattering* (fenomeno ampiamente trattato in letteratura) ma anche da instabilità di tipo *Stimulated Brillouin Scattering*.

Lo studio è stato articolato principalmente in due fasi. Inizialmente un modello analitico di tipo cinetico introdotto da M. Lontano e M.Passoni *et. al.* [56] è stato ampliato per descrivere le strutture solitoniche elettromagnetiche in modo più completo, prestando, cioè, particolare attenzione al calcolo dei campi elettromagnetici delle strutture soliniche. In seguito è stato svolto uno studio di carattere numerico sui solitoni elettromagnetici: un codice di tipo *Particle-In-Cell* è stato adattato al fine di condurre un'analisi di tipo

Capitolo 5. Conclusioni e sviluppi futuri

numerico sulla stabilità dei solitoni nei plasmi.

Nel capitolo 3 è stato presentato il modello analitico cinetico. Inizialmente, tale modello è stato applicato a solitoni in plasmi di elettroni e positroni. Oltre che per interessi di tipo cosmologico e astronomico, come descritto nel paragrafo 2.2.2, questa tipologia di plasmi è stata analizzata per la possibilità di ottenere un insieme di equazioni che permette di trovare una soluzione analitica esatta grazie all'identica inerzia di elettroni e positroni. I risultati ottenuti concordano con altri casi presenti in letteratura. Si è passati, poi, al caso di solitoni in plasmi di elettroni e ioni, centrali nell'ambito della fusione inerziale, che comportano l'adozione dell'ipotesi di quasi-neutralità per ottenere una soluzione analitica. Va sottolineato come tale ipotesi sia pienamente compatibile con la presenza di campi elettrici intensi. Le soluzioni ottenute, infatti, presentano campi elettrostatici del valore di $10 - 10^3 \text{ MV/cm}$. Tali campi possono trovare un'importante applicazione nell'accelerazione di particelle cariche.

Le soluzioni del modello analitico del capitolo 3 sono state il punto di partenza per le simulazioni condotte con il codice PIC. Nel capitolo 4 sono stati quindi presentati i risultati ottenuti in questo studio numerico di tipo cinetico. In particolare le soluzioni per solitoni in plasmi di elettroni e positroni, caratterizzate per essere analiticamente esatte, hanno presentato un'elevata stabilità su tempi rilevanti: l'andamento spaziale della densità di particelle è rimasto sostanzialmente invariato nel tempo. Per quel che riguarda, invece, i plasmi di elettroni e ioni va ricordato che le soluzioni prevedono l'adozione dell'ipotesi di quasi-neutralità. In tal caso le simulazioni presentano, comunque, una buona stabilità delle soluzioni, anche se su un periodo di tempo inferiore rispetto al caso di plasmi $e^- - e^+$. In particolare osservando l'andamento spaziale delle soluzioni, si è riscontrato che le zone più critiche per l'approssimazione di quasi-neutralità risultano essere quelle in prossimità della densità imperturbata, ai lati del solitone (si veda nello specifico l'analisi condotta nel capitolo 4). Questa analisi numerica ha dimostrato, da un punto di vista numerico, la bontà dell'assunzione di quasi-neutralità, in particolare nella zona centrale delle strutture solitone, dove la densità di particelle è molto minore di quella imperturbata.

Lo studio numerico, inoltre, ha confermato come i codici di tipo Particle-in-Cell siano particolarmente indicati per studiare questa tipologia di fenomeni fisici. Essendo codici di tipo cinetico, infatti, permettono di impostare condizioni iniziali di forte anisotropia della funzione di distribuzione. Tale aspetto è stato analizzato con particolari simulazioni che hanno mostrato come le stesse soluzioni analitiche fossero altamente instabili quando applicate ad un plasma con funzione di distribuzione diversa da quella corrispondente alla soluzione analitica. Da un punto di vista fisico questo dimostra che con la presenza di impulsi laser ultraintensi, la dinamica delle particelle nel piano che contiene il campo elettromagnetico è determinata in modo dominante dall'azione del campo stesso: cioè una distribuzione energetica fortemente anisotropa si presenta nel caso in cui, in presenza di radiazione elettromagnetica, l'energia termica in direzione trasversale alla direzione di propagazione (cioè nel piano del campo elettromagnetico dell'impulso laser) è molto minore rispetto all'energia associata al moto delle particelle per effetto del campo stesso.

Oltre che ad una importante descrizione analitica dei solitoni, questo lavoro di tesi ha rappresentato un primo approccio allo studio dell'evoluzione temporale dei solitoni elettromagnetici nei plasmi. Molti sono i possibili sviluppi futuri di questo progetto di ricerca: uno dei più interessanti è sicuramente rappresentato dalla possibilità di ampliare lo studio effettuato, considerando il processo di formazione dei solitoni elettromagnetici nello studio numerico. Come mostrano recenti studi nell'ambito della fusione a confinamento inerziale, infatti, solitoni simili a quelli analizzati in questo lavoro si formano a seguito di instabilità di tipo Brillouin, nate da interazione tra laser intensi e plasmi. Con un'indagine numerica simile a quella condotta in questo lavoro di tesi, quindi, è possibile effettuare un'analisi della formazione di tali solitoni seguita da uno studio della stabilità proprio degli stessi. Un ulteriore sviluppo possibile è quello di ampliare al caso bidimensionale il modello analitico di tipo cinetico sviluppato in questo lavoro di tesi per il caso monodimensionale. Infine, un altro elemento di interesse è la possibilità di estendere anche lo studio numerico al caso bidimensionale. In tal caso, data la rilevante potenza di calcolo necessaria, si sottolinea l'opportunità di im-

Capitolo 5. Conclusioni e sviluppi futuri

plementare il codice di tipo cinetico, utilizzato e ampliato in questo lavoro di tesi, su super-calcolatori come il centro CINECA, vista la possibilità prevista dal codice di sfruttare il calcolo parallelo.

Appendice A

Laser induced Wake-field generation

A.1 Approccio analitico

Come si è visto nel paragrafo 2.1.2, propagandosi in un plasma sottodensso, un impulso laser ultraintenso, interagendo con la popolazione elettronica, è in grado di indurre nel plasma una significativa separazione di carica che genera nel plasma stesso onde di grande intensità; alle spalle dell'impulso, nella zona di interazione, si crea cioè il cosiddetto *wake-field*. Rispetto al caso di onde di piccola intensità, la propagazione di onde di elevata intensità nel plasma è notevolmente più complessa, essendo influenzata dagli effetti non lineari e relativistici. Un primo e fondamentale contributo allo studio di questo fenomeno è dovuto al lavoro di Akhiezer e Polovin [60], che hanno studiato la propagazione di onde elettromagnetiche relativisticamente intense, sia longitudinali che trasversali, in plasmi freddi, trascurando l'inerzia ionica e le collisioni. Vengono ora riportati i tratti salienti di questo lavoro in modo da poter contestualizzare dal punto di vista analitico il fenomeno del *wake-field*.

Si considera un modello fluido relativistico, non collisionale in approssimazione di plasma freddo (si veda paragrafo 2.1.2). In questa trattazione viene considerata, per semplicità, la sola risposta elettronica: questa è una

Capitolo A. *Laser induced Wake-field generation*

buona approssimazione in quanto, a causa della loro massa, gli elettroni, a parità di altre condizioni, sono la specie che risente maggiormente degli effetti relativistici. Quindi considerando un fluido ionico immerso in un fluido ionico immobile con $Z = 1$ e lasciando cadere il pedice “e”, le equazioni del modello fluido (eq. 1.2.3) e le equazioni di Maxwell (eq. 1.2.5-1.2.8) vengono espresse come segue:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{p} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right) \quad (\text{A.1.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e(n_0 - n_e) \quad (\text{A.1.2})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} e n_e \mathbf{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.1.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.1.5})$$

dove $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ è la quantità di moto relativistica e γ è il fattore relativistico. Assumiamo che, nel sistema considerato, propaghino onde piane di forma $f(\tau) = f(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$, dove $\tau = t - \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}/v_p$, con $v_p = \omega/k$ velocità di fase. In questo modo le derivate spaziali e temporali diventano:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (\text{A.1.6})$$

$$\nabla \cdot = -\frac{\mathbf{i}}{v_p} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (\text{A.1.7})$$

$$\nabla \wedge = -\frac{\mathbf{i}}{v_p} \frac{\partial}{\partial \tau} \wedge \quad (\text{A.1.8})$$

dove $\mathbf{i} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ è un versore che indica la direzione di propagazione dell'onda. Il sistema di equazioni A.1.1-A.1.5 che descrive il sistema quindi diventa:

$$\left(\frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}}{v_p} - 1 \right) \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right) \quad (\text{A.1.9})$$

$$-\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{d\tau} = 4\pi e v_p (n_0 - n_e) \quad (\text{A.1.10})$$

A.1. Approccio analitico

$$\mathbf{B} = \frac{c}{v_p} \mathbf{i} \wedge \mathbf{E} + \mathbf{B}_0 \quad (\text{A.1.11})$$

$$-\mathbf{i} \wedge \frac{d\mathbf{B}}{d\tau} = -\frac{4\pi}{c} e v_p n_e \mathbf{v} + \frac{v_p}{c} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (\text{A.1.12})$$

$$\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{d\tau} = 0. \quad (\text{A.1.13})$$

\mathbf{B}_0 rappresenta un campo magnetico esterno che in questo caso non viene considerato, quindi \mathbf{B}_0 viene posto uguale a zero. Considerando l'equazione A.1.11 e l'equazione A.1.13 è possibile scrivere $\mathbf{i} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, questo significa che il campo magnetico è perpendicolare sia al vettore d'onda che al campo elettrico. Eseguendo il prodotto scalare tra l'equazione A.1.12 e il versore \mathbf{i} e utilizzando l'equazione A.1.10 per eliminare il campo elettrico, è possibile ottenere una relazione per la densità:

$$n_e = \frac{v_p n_0}{v_p - \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}}. \quad (\text{A.1.14})$$

Il prodotto vettoriale tra l'equazione A.1.9 e il versore \mathbf{i} , invece porta alla relazione:

$$\left(\frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}}{v_p} - 1 \right) \mathbf{i} \wedge \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = e \frac{v_p}{c} \mathbf{B} \left(1 - \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}}{v_p} \right).$$

Che può essere riscritta come:

$$\mathbf{B} = -\frac{c}{e v_p} \mathbf{i} \wedge \frac{d\mathbf{p}}{\tau}. \quad (\text{A.1.15})$$

Allo stesso modo considerando il prodotto vettoriale tra l'equazione A.1.12 e il versore \mathbf{i} , utilizzando l'equazione A.1.11 è possibile ottenere la seguente relazione per $d\mathbf{B}/d\tau$:

$$\frac{d\mathbf{B}}{d\tau} = \frac{4\pi e n_e \beta_p}{\beta_p^2 - 1} \mathbf{i} \wedge \mathbf{v} \quad (\text{A.1.16})$$

dove $\beta_p = v_p/c$. Dalle due precedenti equazioni è possibile eliminare \mathbf{B} , sottraendo la relazione A.1.16 da $d/d\tau$ A.1.15, ottenendo la relazione per la parte trasversale dell'onda:

$$\mathbf{i} \wedge \frac{d^2\mathbf{p}}{d\tau^2} + \frac{4\pi e^2 n_e \beta_p^2}{\beta_p^2 - 1} \mathbf{i} \wedge \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.1.17})$$

Capitolo A. *Laser induced Wake-field generation*

La componente longitudinale può essere trovata derivando il prodotto scalare tra \mathbf{i} e la relazione A.1.9, utilizzando l'eq. A.1.15 per eliminare il campo magnetico e l'eq. A.1.14 per eliminare la densità:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}}{v_p} - 1 \right) \mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right] = \frac{4\pi e^2 v_p n_0 \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}}{v_p - \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}} - \frac{1}{v_p} \frac{d}{d\tau} \left[\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}) \left(\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right) \right]. \quad (\text{A.1.18})$$

Se consideriamo il caso in cui \mathbf{k} è lungo la direzione x , allora $\mathbf{i} \cdot \mathbf{p} = p_x$ e $\mathbf{i} \wedge \mathbf{p} = (0, -p_z, p_y)$. Con questa semplificazione e definendo $\mathbf{u} = \mathbf{v}/c$, l'equazione A.1.14 diventa:

$$n_e = \frac{\beta_p n_0}{\beta_p - u_x}. \quad (\text{A.1.19})$$

Da questa relazione è possibile vedere come considerando le non-linearità, la densità diventi molto elevata nelle regioni dove la velocità fluida si avvicina alla velocità di fase.

Considerando le componenti y e z dell'equazione A.1.17 e utilizzando l'equazione A.1.19 è possibile ottenere le seguenti relazioni accoppiate per le componenti trasversali:

$$\frac{d^2 p_z}{d\tau^2} + \frac{\omega_p^2 \beta_p^2}{\beta_p^2 - 1} \frac{\beta_p u_z}{\beta_p - u_z} = 0, \quad (\text{A.1.20})$$

$$\frac{d^2 p_y}{d\tau^2} + \frac{\omega_p^2 \beta_p^2}{\beta_p^2 - 1} \frac{\beta_p u_y}{\beta_p - u_z} = 0, \quad (\text{A.1.21})$$

in queste relazioni $\omega_p = 4\pi e^2 n_0 / m$ è la frequenza di plasma e sia p_y che p_z sono state normalizzate a mc , in modo che $\mathbf{p} = \gamma \mathbf{u}$. La relazione longitudinale invece è data dalla relazione A.1.18 dopo aver preso il vettore d'onda lungo l'asse x :

$$\frac{d}{d\tau} \left[(u_x - \beta_p) \frac{dp_x}{d\tau} + u_y \frac{dp_y}{d\tau} + u_z \frac{dp_z}{d\tau} \right] = \frac{\omega_p^2 \beta_p^2 u_x}{\beta_p - u_x}. \quad (\text{A.1.22})$$

Una volta risolto in \mathbf{p} , i corrispondenti campi elettrici e magnetici possono

A.1. Approccio analitico

essere trovati (qui sono normalizzati a $m\omega_p c/e$):

$$E_x = -\frac{1}{\beta_p} \frac{d}{d(\omega_p \tau)} \left(\beta_p p_x - \sqrt{1 + p^2} \right) \quad (\text{A.1.23})$$

$$E_y = -\frac{dp_y}{d(\omega_p \tau)} \quad (\text{A.1.24})$$

$$E_z = -\frac{dp_z}{d(\omega_p \tau)} \quad (\text{A.1.25})$$

$$B_x = 0 \quad (\text{A.1.26})$$

$$B_y = \frac{1}{\beta_p} \frac{dp_z}{d(\omega_p \tau)} \quad (\text{A.1.27})$$

$$B_z = -\frac{1}{\beta_p} \frac{dp_y}{d(\omega_p \tau)} \quad (\text{A.1.28})$$

Inoltre, una semplice espressione del potenziale può essere ottenuta ponendo $E_x = \beta_p^{-1} d\phi/d\tau$, integrando questa espressione e prestando attenzione al fatto che $\phi = p_x = 0$ e $\gamma = 1$ per $\tau \rightarrow -\infty$:

$$\phi = \gamma - \beta_p p_x - 1. \quad (\text{A.1.29})$$

Queste equazioni, identiche a quelle presentate da Akhiezer e Polovin [60], rappresentano un sistema chiuso per onde di plasma non lineari di ampiezza arbitraria e velocità di fase v_p fissa. Tale insieme di equazioni in generale non può essere risolto analiticamente. Considerando questo sistema è importante notare che la dinamica longitudinale è accoppiata alla dinamica trasversale. Ciò implica che, nell'ambito della fenomenologia non lineare, un moto trasversale può indurre un moto longitudinale al contrario di quanto invece accade nel caso di approssimazione lineare, dove i modi trasversali sono indipendenti rispetto ai modi longitudinali.

Nell'ipotesi di debole non-linearità, considerando un plasma esposto ad un'onda elettromagnetica con polarizzazione lungo y , è possibile trascurare le non-linearità di u_x indotte da se stesso. In tal modo è possibile riscrivere la

Capitolo A. *Laser induced Wake-field generation*

relazione A.1.22 nella forma:

$$\frac{d^2 u_x}{d\tau^2} + \omega_p^2 u_x = \frac{1}{\beta_p} \frac{d}{d\tau} \left(u_y \frac{dp_y}{d\tau} \right) \simeq \frac{1}{\beta_p} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{u_y^2}{2} \right) \quad (\text{A.1.30})$$

dove è stato considerato che $p_y = \gamma u_y \simeq u_y$ se $u_{x,y} \ll 1$. Dall'equazione A.1.19, inoltre, è possibile scrivere l'espressione dello sbilanciamento di densità ($n_e - n_0$) come:

$$\frac{n_e - n_0}{n_0} = n = \frac{\beta_p}{\beta_p - u_x} - 1 \simeq \frac{u_x}{\beta_p}. \quad (\text{A.1.31})$$

Sostituendo l'espressione appena ottenuta nell'equazione A.1.30 si ha:

$$\frac{d^2 n}{d\tau^2} + \omega_p^2 n = \frac{1}{\beta_p^2} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{u_y^2}{2} \right) \quad (\text{A.1.32})$$

da questa relazione risulta chiaro come sia possibile indurre oscillazioni longitudinali con modi trasversali.

Questa relazione può spiegare al meglio il fenomeno del *wake-field*. Adottando un approccio ad approssimazioni successive, è possibile descrivere l'interazione tra un impulso laser e un plasma. All'ordine zero, il plasma è descritto dalla seguente relazione:

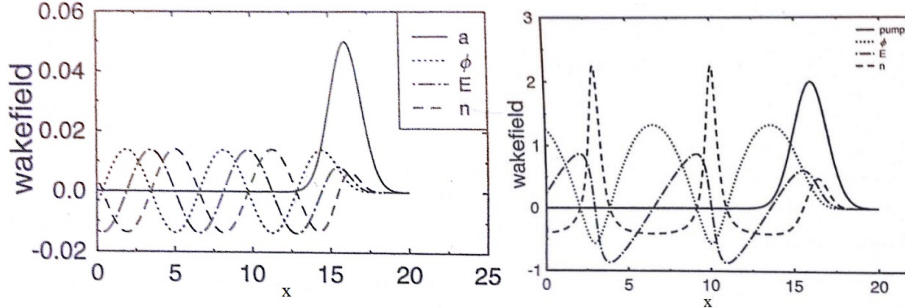
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{e}{mc} \mathbf{E} \Rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{e}{mc} E_{\perp} = \frac{e}{mc^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{A.1.33})$$

l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la parte trasversale del campo elettrico è data solo dal potenziale vettore. Il gradiente del potenziale scalare (ricordiamo che $\mathbf{E} = -\nabla\phi + (1/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t)$), infatti, è prevalentemente diretto nella direzione di propagazione dell'onda: contribuisce cioè a E_{\parallel} . Poiché $a = e\mathbf{A}/mc^2$, a partire dalla relazione A.1.32 è possibile quindi scrivere l'equazione che descrive l'effetto del laser sul plasma:

$$\frac{d^2 n}{d\tau^2} + \omega_p^2 n = \frac{1}{\beta_p^2} \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{a^2}{2} \right). \quad (\text{A.1.34})$$

Questa relazione, che è valida nell'ipotesi di debole non-linearità (quindi per $a \ll 1$), descrive il fenomeno del *wake-field generation* dove un laser con un

A.2. Simulazioni con differenti codici Particle-In-Cell



(a) Wake-field in regime di debole non-linearità. (b) Wake-field con ampiezza del laser elevata.

Figura A.1: Wake-field generation presentato nel libro [4]

campo elettrico prevalentemente trasversale eccita onde elettromagnetiche nel plasma con campo elettrico longitudinale. Anche nel caso in cui si considerino tutte le non-linearità, ($a \simeq 1$), è possibile ottenere delle equazioni che descrivono questo fenomeno, tuttavia questo processo richiede una specifica ed approfondita relazione e qui non viene riportato. Focalizzandosi, per semplicità, su un'analisi ristretta ad onde piane con fattore di fase $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ è possibile riscrivere la relazione A nelle variabili Euleriane:

$$\frac{\partial n^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 n = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a^2}{2} \right). \quad (\text{A.1.35})$$

si osservi come il termine di destra dell'equazione A.1.35 rappresenti la forzante di un oscillatore armonico. Questo termine è proporzionale al gradiente della forza ponderomotrice descritta nel paragrafo 2.1.2.

A.2 Simulazioni con differenti codici Particle-In-Cell

Prima di passare all'analisi dei moti longitudinali che vengono eccitati da un laser prevalentemente trasversale, vengono ora presentati dei risultati ottenuti con simulazioni numeriche con codici di tipo Particle-In-Cell. In particolare vengono mostrati il campo elettrico longitudinale e la densità generati

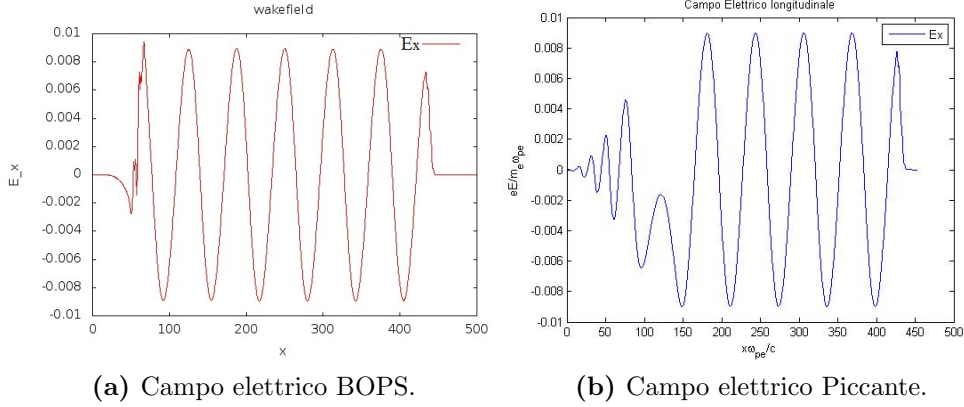


Figura A.2: Campo elettrico longitudinale con normalizzazione $Ee/m_e\omega_{pe}$ generato da un impulso di ampiezza $a = 0.6$

da un laser a seguito del passaggio in uno slab di plasma. Le simulazioni sono monodimensionali e sono state condotte inizialmente con il codice *BOPS* sviluppato da P. Gibbon [4] e, in seguito, con il codice *Piccante*, che come si è già visto nel corso della tesi, è stato utilizzato anche per le simulazioni sui solitoni elettromagnetici. Lo studio con questa tipologia di simulazioni, poiché tratta un caso noto in letteratura, è stato condotto nella fase preliminare del lavoro di tesi in modo da poter verificare se i risultati ottenuti con codice *Piccante* coincidessero con quelli ottenuti con *BOPS*, che è un codice già ampiamente testato in letteratura.

La figura A.2 mostra il campo elettrico longitudinale generato da un impulso di ampiezza $a = 0.6$, che rientra quindi nel limite di debole non-linearità, dopo che l'impulso ha attraversato lo slab di plasma (da $x = 0$ a $x = 500$). L'andamento del campo è identico per le due simulazioni effettuate con codici differenti, tranne che nella zona $0 < x < 150$. Questo è dovuto al fatto che nei due codici non era possibile implementare esattamente le stesse condizioni al contorno. Anche per la densità si riscontra lo stesso andamento nelle simulazioni effettuate con entrambi i codici (figura A.3).

La figura A.4 mostra, invece, il campo elettrico longitudinale generato da un impulso di ampiezza $a = 3$, quindi nel caso di onde di ampiezza arbitraria, dopo che l'impulso ha attraversato lo slab di plasma (da $x = 0$ a $x = 500$).

A.2. Simulazioni con differenti codici Particle-In-Cell

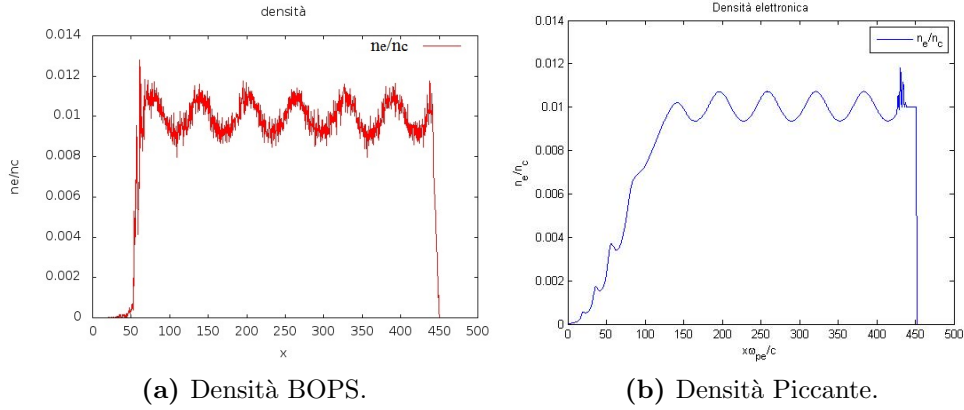


Figura A.3: Densità elettronica con normalizzazione n_e/n_c generata da un impulso di ampiezza $a = 0.6$

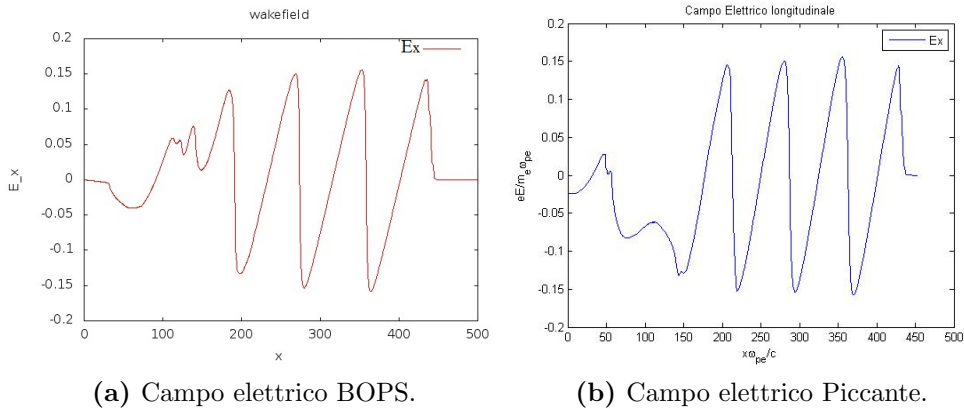


Figura A.4: Campo elettrico longitudinale con normalizzazione $E_e/m_e\omega_{pe}$ generato da un impulso di ampiezza $a = 3$

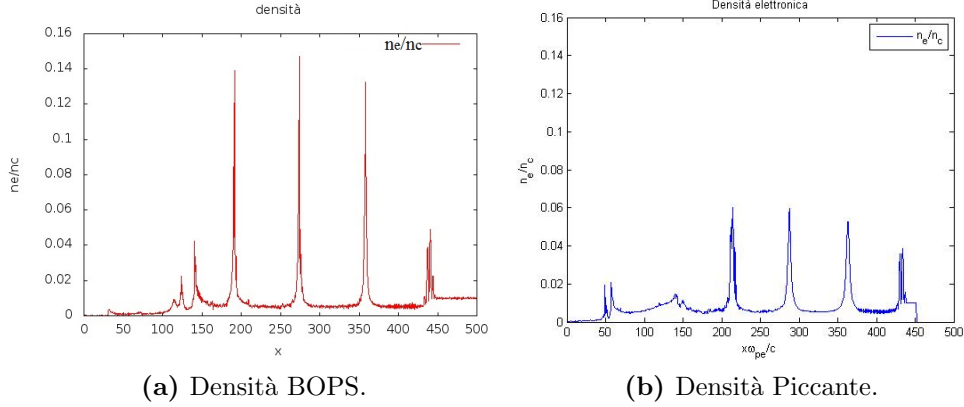


Figura A.5: Densità elettronica con normalizzazione n_e/n_c generata da un impulso di ampiezza $a = 3$

Anche in tal caso l'andamento del campo è identico per le due simulazioni effettuate con codici differenti, tranne che nella zona $0 < x < 150$. Questo è dovuto al fatto che nei due codici non era possibile implementare esattamente le stesse condizioni al contorno. Anche per la densità si riscontra lo stesso andamento nelle simulazioni effettuate con entrambi i codici (figura A.5), si nota solo un comportamento differente nella zone dove la densità tende a divergere (punto critico per la soluzione numerica). Da sottolineare come, sia il caso di debole non-linearità che in quello di onde di ampiezza elevata, le figure A.2-A.5 mostrano un andamento analogo a quello presentato in letteratura (fig. A.1).

A.3 Modi longitudinali e Wave-breaking

Per concludere, viene ora discusso il caso di oscillazioni puramente longitudinali in un plasma. Questa descrizione permette una soluzione semi-analitica dei modi longitudinali come quelli eccitati da un impulso laser trasversale mostrati dalle simulazioni numeriche. In tal caso si considera solo il contributo dato da u_x , cioè si pone $u_y = u_z = 0$ che implica $p_y = p_z = 0$. Perciò è possibile porre $u_x = u$ tralasciando il pedice x . L'equazione A.1.22 diventa

A.3. Modi longitudinali e Wave-breaking

quindi:

$$\frac{d}{d\tau} \left[(u - \beta_p) \frac{dp}{d\tau} \right] = \frac{\omega_p^2 \beta_p^2 u}{\beta_p - u} \quad (\text{A.3.1})$$

Scrivendo la quantità di moto come $p = \gamma u = u/\sqrt{1 - u^2}$, dopo un semplice passaggio è possibile riscrivere l'equazione A.3.1 nella seguente forma:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} [\gamma(1 - \beta_p u)] = \frac{\omega_p^2 \beta_p^2 u}{\beta_p - u}. \quad (\text{A.3.2})$$

Questa equazione può essere integrata una volta ottenendo la relazione:

$$\frac{1}{2} Y^2 = \beta_p^2 \omega_p^2 (\gamma_m - \gamma) \quad (\text{A.3.3})$$

dove

$$Y = \frac{d}{d\tau} [\gamma(1 - \beta_p u)], \quad \gamma_m = \sqrt{1 - u_m^2} \quad (\text{A.3.4})$$

con $u_m = (v/c)_{max}$ velocità massima di oscillazione dell'onda. L'onda è quindi descritta dall'equazione differenziale:

$$\frac{d}{d\tau} [\gamma(1 - \beta_p u)] = \pm \sqrt{2} \omega_p \beta_p \sqrt{\gamma_m - \gamma}. \quad (\text{A.3.5})$$

Trovata u integrando questa equazione, è possibile determinare la densità e il campo elettrico dalle relazioni A.1.19 e A.1.23:

$$n_e(\tau) = \frac{\beta_p n_0}{\beta_p - u(\tau)} \quad (\text{A.3.6})$$

$$E(\tau) = \frac{Y}{\beta_p} = \pm \sqrt{2} (\gamma_m - \gamma(\tau))^{1/2}. \quad (\text{A.3.7})$$

L'equazione A.3.5 è stata risolta per via numerica attraverso un codice appositamente scritto in Matlab. Alcuni risultati, con differenti parametri β_p e u_m vengono mostrati in figura A.6. Il caso con $\beta_p = 1$ e $u_m = 0.2$, rappresenta le classiche onde di plasma, che si ottengono anche nel caso lineare, con campo elettrico sfasato di 90° rispetto alla densità. Il caso con $\beta_p = 1$ e $u_m = 0.9$, invece, presenta un tipico effetto delle non-linearità: il campo elettrico a dente di sega e un picco di densità, accompagnati da un 'allungamento' del

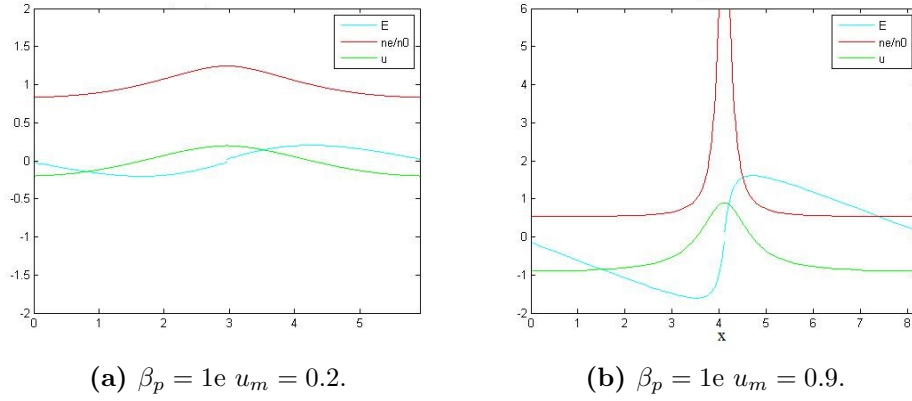


Figura A.6: Risultati dell'approccio semi-analitico per onde di plasma non-lineari

fattore di oscillazione di un fattore γ . Dal punto di vista fisico, ciò è dovuto all'aumento dell'inerzia elettronica con l'aumentare degli effetti relativistici. Si noti come queste due soluzioni abbiano un analogo andamento rispetto ai moti longitudinali eccitati da un impulso laser prevalentemente trasversale mostrati nel paragrafo precedente.

Una volta descritto questo modello sorge spontaneo chiedersi quanto grandi possono essere le oscillazioni descritte dall'equazione A.3.5. Questo aspetto è centrale in applicazioni come l'accelerazione di particelle cariche dove si vuole ottenere un campo elettrico longitudinale più alto possibile per dare la massima energia alle particelle in uno strato finito di plasma. Per ottenere il campo elettrico massimo dalla relazione A.3.7, bisogna innanzitutto considerare che la velocità fluida non può essere maggiore della velocità di fase. Se ciò accadesse alcuni pacchetti di elettroni potrebbero attraversarsi reciprocamente, muovendosi cioè diversamente rispetto al moto medio, facendo perdere la coerenza all'onda: questo fenomeno è detto *Wave-breaking*. Quindi per trovare il massimo bisogna porre $u_m = u_p$, cioè $\gamma_m = \gamma_p$, e considerare il valore massimo del fattore relativistico che è $\gamma = 1$. perciò l'espressione dimensionale del campo elettrico massimo è:

$$E_{max} = \frac{mc\omega_p}{e} \sqrt{2}(\gamma_p - 1)^{1/2}. \quad (\text{A.3.8})$$

A.3. Modi longitudinali e Wave-breaking

Nel caso di velocità di fase non relativistica, $\gamma_p - 1 \simeq \beta_p^2/2$, è possibile scrivere quindi:

$$E_{max} = \frac{m\omega_p v_p}{e} \quad (\text{A.3.9})$$

Inserendo i valori opportuni per le costanti numeriche nella relazione A.3.8, si può dimostrare che il campo elettrico longitudinale massimo può essere espresso come:

$$E_{max} \approx \left(\frac{n_e}{10^{18}}\right)^{1/2} f(v_f) \left[\frac{GV}{cm}\right] \quad (\text{A.3.10})$$

dove $n_e/10^{18}$ si riferisce alla densità elettronica espressa in unità di 10^{18} particelle/cm³. Per valori di circa $10^{18} - 10^{19}$, tipici di plasmi sottodensi di interesse sperimentale, si ottengono campi elettrici di intensità paragonabile al GV/cm . Questi valori estremamente elevati, se paragonati a quelli che oggi si raggiungono con cavità a radiofrequenza (MV/m), rendono tale fenomeno di particolare interesse per l'accelerazione di particelle cariche.

Bibliografia

- [1] K. Miyamoto. *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [2] O.S. Hurricane and D.A. Callahan. *Nature*, 506:343–349, 2014.
- [3] T Tajima, G Mouron, and M. Lontano. *AIP Conference Proceedings*, 611:423–436, 2002.
- [4] P. Gibbon. *Short Pulse Laser Interactions with Matter: an introduction*. Imperial College Press, London, 2005.
- [5] M. Borghesi, S. Bulanov, D.H. Campbell, R.J. Clarke, T.Zh. Esirkepov, M. Galimberti, L.A. Gizzi, A.J. MacKinnon, N.M. Naumova, F. Pegoraro, H. Ruhl, A. Schiavi, and O. Willi. *Physical Review Letters*, 88(13):1350021–1350024, 2002.
- [6] Carlo Benedetti, Andrea Sgattoni, Turchetti Giorgio, and Pasquale Londrillo. *IEEE Transaction on Plasma Science*, 36(4):1790–1798, 2008.
- [7] S. Saito. *Journal of Nuclear Materials*, 398:1, 2010.
- [8] E.I. Moses. *Summaries of Papers Presented at the Lasers and Electro-Optics 2002*, 1:361–362, 2002.
- [9] N.B. Delone and V.P. Krainov. *Multiphoton Processes in Atoms*. Springer, 2000.
- [10] S.V. Bulanov, F. Califano, and G.I. Dudnikova. *Reviews of Plasma Physics*, 22:227, 2001.

BIBLIOGRAFIA

- [11] D. Giulietti and L.A. Gizzi. *Rivista del Nuovo Cimento*, 21(10), 1998.
- [12] P. Gallant, Z. Jiang, and C.Y. Chien. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 65(1):243, 2000.
- [13] S. Svanberg. *Advances in Quantum Chemistry*, 30:209, 1998.
- [14] V. Malka, S. Fritzler, and E. Lefebvre. *Science*, 298:1596, 2002.
- [15] E.L. Clark. *Physics of Plasmas*, 10:2071, 2003.
- [16] K.W.D. Ledingham, I. Spencer, and T. McCanny. *Physical Review Letters*, 84:889, 2000.
- [17] H. Schwoerer, F. Ewald, and R. Sauerberry. *Europhysics Letters*, 64(1):47, 2003.
- [18] F. Ewald, H. Schwoerer, , and S. Dusterer. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 45(A):83, 2003.
- [19] K.W.D. Ledingham, J. Magill, and P. McKenna. *Journal of Physics D*, 36(J):79, 2002.
- [20] S. Fritzler, Z. Najmudin, and V. Malka. *Physical Review Letters*, 89:165004, 2002.
- [21] M.I.K. Santala, M. Zepf, and F.N. Beg. *Applied Physics Letters*, 78:19, 2001.
- [22] K. Nemoto, A. Maksimchuk, and S. Banerjee. *Applied Physics Letters*, 78:595, 2001.
- [23] N.A. Krall and A.W. Trivelpiece. *Principles of plasma physics*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [24] A. Mourou and et al. *Review of Modern Physics*, 78:309, 2006.
- [25] T. Kruer. *The Physics of Laser Plasma Interaction*. Addison-Wesley, New York, 1988.

BIBLIOGRAFIA

- [26] C. Riconda, S. Weber, V.T. Tikhonchuk, and A. Héron. *Physics of Plasmas*, 18(9), 2011.
- [27] S. Weber, M. Lontano, M. Passoni, C. Riconda, and V.T. Tikhonchuk. *Physics of Plasmas*, 12(11):1–5, 2005.
- [28] N.J. Zabusky and M.D. Kruskal. *Physical Review Letters*, 15(6):240–243, 1965.
- [29] S. Weber, C. Riconda, and V.T. Tikhonchuk. *Physical Review Letters*, 94(5), 2005.
- [30] S. Weber, C. Riconda, and V.T. Tikhonchuk. *Physics of Plasmas*, 12(4):1–14, 2005.
- [31] M. Lontano, M. Passoni, C. Riconda, V.T. Tikhonchuk, and S. Weber. *Laser and Particle Beams*, 24(1):125–129, 2006.
- [32] C. Riconda, S. Weber, V.T. Tikhonchuk, J.-C. Adam, and A. Heron. *Physics of Plasmas*, 13(8), 2006.
- [33] S. Luan, W. Yu, W. Xu, M. Murakami, H. Zhuo, J. Wang, X. Wang, and H. Wu. *Applied Physics B: Lasers and Optics*, 108(4):875–882, 2012.
- [34] S.V. Bulanov, I.N. Inovenkov, V.I. Kirsanov, N.M. Naumova, and A.S. Sakharov. *Physics of Fluids B*, 4(7):1935–1942, 1992.
- [35] T Tajima and T. Taniuti. *Physical Reviews A*, 42:3587, 1990.
- [36] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, San Francisco, 1980.
- [37] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, and S. Siklos. *The Very Early Universe*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [38] Ya.B. Zeldovich and I. Novikov. *Relativistic Astrophysics*. University of Chicago Press, Chicago, 1983.
- [39] P. Goldreich and W.H. Julian. *The Astrophysical Journal*, 157:869, 1969.

BIBLIOGRAFIA

- [40] C. Max and F.W. Perkins. *Physical Review Letters*, 29:1731, 1972.
- [41] J.R. Orosz. *The Astrophysical Journal*, 478(L):83, 1997.
- [42] F.C. Michel. *Reviews of Modern Physics*, 54:1, 1982.
- [43] M.C. Begelman, R.D. Blandford, and M.D. Rees. *Reviews of Modern Physics*, 56:255, 1984.
- [44] H.R. Miller and P.J. Wiita. *Active Galactic Nuclei*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [45] J. Daniel and T. Tajima. *The Astrophysical Journal*, 498:296, 1998.
- [46] T. Piran. *Physics Reports*, 314:575, 1999.
- [47] E.P. Liang, S.C. Wilks, and M. Tabak. *Physical Review Letters*, 81:4887, 1998.
- [48] C. Gahn, C.D. Tsakiris, and G. Pretzler. *Applied Physics Letters*, 77:2662, 2000.
- [49] N.M. Naumova, S.V. Bulanov, T.Zh. Esirkepov, D. Farina, K. Nishihara, F. Pegoraro, H. Ruhl, and A.S. Sakharov. *Physical Review Letters*, 87(18):1850041–1850044, 2001.
- [50] T. Esirkepov, K. Nishihara, S.V. Bulanov, and F. Pegoraro. *Physical Review Letters*, 89(27):2750021–2750024, 2002.
- [51] M. Borghesi, D.H. Campbell, A. Schiavi, M.G. Haines, O. Willi, A.J. MacKinnon, P. Patel, L.A. Gizzi, M. Galimberti, R.J. Clarke, F. Pegoraro, H. Ruhl, and S. Bulanov. *Physics of Plasmas*, 9(5):2214–2220, 2002.
- [52] J.H. Marburger and R.F. Tooper. *Physical Review Letters*, 35(15):1001–1004, 1975.
- [53] V.A. Kozlov, A.G. Litvak, and E.V. Suvorov. *Soviet Physics - JETP*, 49(1):75, 1979.

BIBLIOGRAFIA

- [54] P.K. Kaw, A. Sen, and T. Katsouleas. *Physical Review Letters*, 68(21):3172–3175, 1992.
- [55] Matteo Passoni. *Studi teorici sull'interazione in regime non lineare e relativistico tra impulsi laser ultraintensi ultrabrevi e plasmi, e applicazioni relative*. Tesi di dottorato, Politecnico di Milano, 2004.
- [56] M. Lontano, M. Passoni, and S.V. Bulanov. *Physics of Plasmas*, 10(3):639–649, 2003.
- [57] K.A. Gorshkov, V.A. Kozlov, and L.A. Ostrovskii. *Soviet Physics - JETP*, 38:93, 1974.
- [58] M. Lontano, S.V. Bulanov, and J. Koga. *Physics of Plasmas*, 8:5113, 2001.
- [59] <https://github.com/ALaDyn/piccante>.
- [60] A.I. Akhiezer and R.V. Polovin. *Soviet Physics JETP*, 10:915, 1956.

Ringraziamenti

Innanzitutto desidero ringraziare il mio relatore Matteo Passoni, non solo per avermi seguito durante questi mesi ma soprattutto per avermi indirizzato nella direzione migliore ogni volta che mi incagliavo nelle difficoltà incontrate. Un sentitissimo grazie anche ad Andrea che, oltre ad aver sviluppato gran parte degli strumenti senza i quali avrei concluso gran poco, mi ha sempre incoraggiato, mettendo in evidenza tutto ciò di buono che facevo rispetto agli errori e hai problemi in cui incappavo. Come non dimenticare Lorenzo (ebbene si sono diventato io lo “sventurato tesista” dei ringraziamenti della tua tesi) che soprattutto nelle fasi iniziali mi è stato vicino dimostrando una grandissima disponibilità nel risponde a qualsiasi domanda avessi. Oltre a lui ci tengo a ringraziare anche tutti gli altri dello “stanzino dei dottorandi”, che con le partite a calcetto serali, mi hanno fatto sentire parte di un gruppo di amici. Sempre nell’ambito del Polimi ci tengo a ringraziare i miei compagni di corso, in particolare Michele, Matteo e Francesco, con i quali ho condiviso, oltre che le sopracitate partite a calcetto, lunghissime giornate in sala tesisti che, in loro compagnia, sembravano volare.

Un enorme GRAZIE alla mia famiglia, in particolare a mamma e a papà (padre e madre sono parole troppo fredde) perché se sono arrivato fino a qui oggi è merito vostro. Mi avete dato l’opportunità di studiare lontano da casa e questa è stata una delle esperienze formative migliori della mia vita. Un gigantesco ringraziamento a mio fratello Nicolò perché, anche se probabilmente lui non se ne è mai accorto, mi ha insegnato tante cose, in particolare che talvolta è fondamentale non essere troppo seri e riflessivi ma approcciarsi alla vita in modo più tranquillo “prendendo le cose alla leggera”.

Uno speciale ringraziamento a tutti gli amici di lunga data perché è anche grazie a loro se sono diventato la persona che sono oggi: Lorenzo che con me

ha condiviso una strada lunga una vita (e la stanza) e che mi ha sempre ascoltato, sia parlando di cose serie ed importanti sia quando non la smetto più di dire cavolate a ripetizione tanto per parlare; Elena e Giacomo con i quali ho affrontato innumerevoli viaggi e che mi hanno sempre fatto sentire una delle persone più importanti al mondo; Matteo che è stato compagno di innumerevoli aneddoti che si possono tranquillamente definire epici; Stefano che con il suo fare diretto è sempre riuscito a strapparmi un sorriso; Francesco nel quale ho incontrato un grande amico (non solo perché insieme abbiamo imparato a fare la birra); Maria che mi ha fatto scoprire l'importanza di essere felici; Marco e Edo, grandi compagni di strada, con i quali sono cresciuto e ho condiviso una moltitudine di avventure.

Ringrazio di cuore anche i miei (ex-)coinquilini, Andrea, Andrea (si sono 2 non è un errore di stampa), Jacopo e anche Alessandro che in questo anno mi hanno "ospitato" e, esagerando un po' (anzi molto), considerato come un esempio da seguire. Ringrazio anche tutti coloro che qui non ho potuto citare per motivi di spazio.

Infine, voglio ringraziare con tutto me stesso Caterina perché in tutti questi anni mi è sempre stata vicino, non solo sorreggendomi nei momenti di difficoltà ma anche condividendo con me le gioie più grandi. GRAZIE perché mi hai fatto crescere e maturare, GRAZIE perché sei stata e sei importantissima per me, GRAZIE perché ci sei!

Michele