

**POLITECNICO DI MILANO**  
**Scuola di Ingegneria Civile, Ambientale e Territoriale**  
**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**



**Modellazione del comportamento meccanico non lineare  
di pannelli in muratura soggetti a carichi assiali e  
trasversali**

**Relatore: Chiar.mo Prof. Alberto TALIERCIO**  
**Correlatore: Dott. Ing. Raffaele ARDITO**

**Tesi di Laurea di:**

**Nicola Sacco**

**Anno Accademico 2013 / 2014**



# SOMMARIO

Le murature di tamponamento rivestono un ruolo fondamentale di chiusura tra spazio interno ed esterno oltre che di divisione degli spazi interni, regolando l'interscambio tra i due ambienti che separano. Pur non avendo un ruolo propriamente strutturale, l'importanza della sicurezza di tali elementi emerge chiara da quanto osservato nelle fasi di ricognizione dei danni seguite al terremoto del 6 Aprile 2009 a L'Aquila, che hanno per altro confermato quanto già osservato in terremoti precedenti.

Il presente lavoro di tesi si colloca a valle di indagini sperimentali svolte su murature ordinarie e armate proponendo un approccio all'analisi ed alla modellazione del comportamento meccanico non lineare dei pannelli soggetti a carichi assiali e trasversali.

La volontà è di conciliare le esperienze maturate grazie al tirocinio curriculare svolto presso la *Maire Tecnimont S.p.A.* e le competenze acquisite nell'arco del percorso universitario.

Il lavoro è stato svolto con l'ausilio di Abaqus CAE, programma di calcolo agli elementi finiti, che permette di simulare fedelmente il comportamento dei materiali che compongono il pannello.

La *9th IMC Competition for MSc and PhD students*, nella quale lo scrivente ha ottenuto il secondo posto, è stata spunto per un'analisi preliminare, essendo oggetto della competizione la predizione del carico ultimo di provini in muratura ordinaria.

A seguire sono stati studiati modelli progressivamente più complessi fino ad arrivare alla simulazione numerica di prove sperimentali svolte dalla ditta *Senini S.p.A.* su pannelli in muratura rinforzata sottoposti a prove di flessione su quattro punti.

# ABSTRACT

Infill walls play the key role of separating inside and outside space, as well as that of dividing internal spaces. Despite the lack of significant structural role, the importance of the safety assessment of these elements emerges clearly from what was observed in the early stages of the damage recognition followed the April 6 2009 earthquake in L'Aquila, which has confirmed what was observed after other earthquakes.

This thesis work follows a number of experimental investigations carried out on ordinary and reinforced walls, and aims of proposing an analysis and modeling approach of the non-linear mechanical behavior of panels subjected to axial and transverse loads.

The goal is to combine the experience gained from the internship at Maire Tecnimont S.p.A. and the skills acquired during the university education.

The work was carried out with the help of Abaqus CAE, a finite element program that allows the behavior of the materials that make up the panel to be accurately simulated.

The *9th IMC Competition for MSc and PhD students*, where the author won the second prize, was a starting step for a preliminary analysis, as the objective of the competition was to predict the maximum compressive load of two masonry prisms built with solid or hollow blocks and mortar joints.

Later on, progressively more complex models were studied to end up with the numerical simulation of experimental tests carried out at *Senini S.p.A.* on reinforced masonry panels subjected to 4-point bending tests.

# INDICE

<b>1. INTRODUZIONE .....</b>	<b>13</b>
1.1 PERCHÉ LA RICERCA .....	13
1.2 BASI DI PARTENZA .....	17
1.2.1 <i>Lo stage</i> .....	18
1.2.2 <i>“IMC Students’ challenge”</i> .....	19
1.2.3 <i>Senini</i> .....	20
1.3 SCHEMA DELLA TESI .....	21
<b>2. DESCRIZIONE DELLE PROVE SPERIMENTALI .....</b>	<b>22</b>
2.1 PROVE DI COMPRESSIONE ECCENTRICA SU PROVINI .....	23
2.1.1 <i>Obiettivo</i> .....	23
2.1.2 <i>Materiali e geometria dei provini</i> .....	24
2.2 PROVE DI FLESSIONE SU QUATTRO PUNTI SU PANNELLI ARMATI .....	33
2.2.1 <i>Generalità</i> .....	33
2.2.2 <i>Analisi del pannello in muratura</i> .....	33
2.2.3 <i>Preparazione del campo di prova e modalità d’esecuzione</i> .....	36
2.2.4 <i>Materiali</i> .....	39
2.2.5 <i>Risultati prove</i> .....	40
<b>3. MODELLO COSTITUTIVO .....</b>	<b>48</b>
3.1 MATERIALI LAPIDEI: CONCRETE SMEARED CRACKING MODEL .....	49
3.1.1 <i>Decomposizione della deformazione incrementale</i> .....	54
3.1.2 <i>Plasticizzazione a compressione</i> .....	55
3.1.3 <i>Previsione della fessurazione ed elasticità con danno</i> .....	59
3.2 MATERIALI METALLICI .....	66
<b>4. ANALISI NUMERICHE PRELIMINARI SU ELEMENTI SEMPLICI .....</b>	<b>67</b>
4.1 DESCRIZIONE MODELLO .....	68
4.2 PROPRIETÀ DEI MATERIALI .....	70
4.3 TRAZIONE SEMPLICE .....	72
4.4 COMPRESSIONE SEMPLICE .....	74
4.4.1 <i>Primo tentativo</i> .....	74
4.4.2 <i>Implementazione proprietà anelastiche calcestruzzo</i> .....	76
<i>Esito prova</i> .....	77
4.5 FLESSIONE SEMPLICE .....	78
4.6 FLESSIONE SEMPLICE CON <i>REFERENCE POINT</i> .....	81
4.7 FLESSIONE SEMPLICE DI UN PROVINO SEMPLICE CON ARMATURA DI RINFORZO .....	84
4.8 FLESSIONE SEMPLICE DI UN PROVINO COMPOSTO DA BLOCCHI DI GRANDI DIMENSIONI CON ARMATURA DI RINFORZO .....	89
4.9 MODELLAZIONE ADERENZA BARRA DI RINFORZO - GROUT .....	94
<b>5. ANALISI E CONFRONTI PER PANNELLI NON ARMATI .....</b>	<b>96</b>
5.1 MODELLAZIONE .....	96
5.1.1 <i>Parts</i> .....	96
5.1.2 <i>Proprietà</i> .....	97
5.2 ANALISI .....	104
5.3 RISULTATI .....	106
5.3.1 <i>Pannelli composti da blocchi forati in calcestruzzo</i> .....	106
5.3.2 <i>Pannelli composti da mattoni pieni in laterizio</i> .....	112

<b>6.</b>	<b>ANALISI E CONFRONTI PER PANNELLI ARMATI.....</b>	<b>118</b>
6.1	MODELLAZIONE .....	119
6.2	PROPRIETÀ .....	121
6.3	ANALISI .....	126
6.3.1	<i>Fase elastica.....</i>	<i>126</i>
6.3.2	<i>Stima carico limite ultimo.....</i>	<i>128</i>
6.3.3	<i>Stima degli spostamenti.....</i>	<i>138</i>
<b>7.</b>	<b>CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI .....</b>	<b>139</b>
<b>8.</b>	<b>SUMMARY .....</b>	<b>141</b>
<b>9.</b>	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>149</b>

# INDICE FIGURE

Figura 1-1- Espulsione murature, L'Aquila, 2009.....	14
Figura 1-2 – Effetti secondari Espulsione murature, L'Aquila, 2009.....	15
Figura 2-1- Configurazione finale dei provini: a) pannello con blocchi forati in calcestruzzo; b) pannello in mattoni .....	23
Figura 2-2 – Geometria dei provini con carico eccentrico applicato: a) pannello con blocchi forati in calcestruzzo (visione frontale e laterale); b) pannello in mattoni (visione frontale e laterale).....	24
Figura 2-3- Geometria degli elementi della muratura (dimensione in mm): a) blocchi forati in calcestruzzo; b) mattoni in laterizio .....	25
Figura 2-4 – Prova a flessione a) provino integro; b) provino rotto.....	27
Figura 2-5- Prova a compressione a) provino integro; b) provino rotto.....	27
Figura 2-6- Curve forza-spostamento ricavate nella prova a flessione su campioni di malta a: a) 14 giorni; b) 28 giorni.....	28
Figura 2-7- Curve forza-spostamento ricavate nella prova a compressione su campioni di malta a: a) 14 giorni; b) 28 giorni.....	28
Figura 2-8 – Prova a flessione su SCB: a) prima; b) dopo.....	29
Figura 2-9 - Curva forza-spostamento delle prove a flessione su SCB.....	29
Figura 2-10 - Prova a compressione su SCB: a) prima; b) dopo.....	30
Figura 2-11 - Curva sforzo-deformazione di una prova a compressione su SCB .....	30
Figura 2-12- Prova a flessione su HCB: a) prima; b) dopo.....	31
Figura 2-13- Prova a compressione su HCB: a) prima; b) dopo .....	31
Figura 2-14- Curva forza-spostamento delle prove a flessione su HCB .....	32
Figura 2-15- Curva sforzo-deformazione di una prova a compressione su HCB .....	32
Figura 2-16 –Pannello oggetto delle prove sperimentali .....	35
Figura 2-17 –Dettaglio blocco .....	36
Figura 2-18 - Dettagli ancoraggio contrafforti.....	37
Figura 2-19 - Schema di vincolo e di carico della prova .....	38
Figura 2-20 – Riproduzione in CAD con relative quote del pannello.....	38
Figura 2-21- Curve carico – spostamento relative al campione B1 .....	40
Figura 2-22- Curve carico – spostamento relative al campione B2 .....	41
Figura 2-23- Curve carico – spostamento relative al campione B3 .....	42
Figura 2-24 - Curve carico – spostamento relative al campione B4 .....	43
Figura 2-25- Curve carico – spostamento relative al campione B5 .....	44
Figura 2-26 - Curve carico – spostamento relative al campione B6 .....	45
Figura 2-27- Curva carico - spostamento in mezzeria prove sperimentali.....	46
Figura 3-1- Comportamento monoassiale dei materiali lapidei .....	51
Figura 3-2 - Superficie di rottura in stato di sforzo piano.....	52
Figura 3-3 - Superficie di fessurazione nel piano p-q .....	52
Figura 3-4- Modello di fessurazione basato sull' energia di frattura .....	62
Figura 3-5- Shear retention .....	64
Figura 3-6 - Comportamento elasto - plastico perfetto dell'acciaio .....	66
Figura 4-1- Mesh di un provino ad elementi finiti composto da due blocchi di calcestruzzo ed uno strato di malta .....	68
Figura 4-2- Collegamento tipo tie utilizzato .....	69
Figura 4-3- Curva sforzo deformazione per la malta in compressione monoassiale.....	70
Figura 4-4 - Provino soggetto a trazione semplice.....	72
Figura 4-5 - Sforzo assiale al collasso- provino intero .....	73
Figura 4-6- Sforzo assiale al collasso- strato di malta .....	73
Figura 4-7 - Curva carico – spostamento prova trazione semplice .....	73
Figura 4-8 - Provino soggetto a compressione semplice.....	74
Figura 4-9 - Curva sforzo-deformazione nello strato di malta.....	75
Figura 4-10- Curva sforzo deformazione per il calcestruzzo in compressione monoassiale .....	76

Figura 4-11 - Sforzo assiale - modello completo.....	77
Figura 4-12 - Sforzo assiale -.....	77
Figura 4-13 - Curva sforzo-deformazione nello strato di malta .....	77
Figura 4-14 - Provino soggetto a flessione semplice .....	78
Figura 4-15 - Sforzo assiale al collasso - Modello completo.....	79
Figura 4-16 - Sforzo assiale al collasso - Strato di malta .....	79
Figura 4-17 - Curva sforzo-deformazione fibre tese nello strato di malta .....	80
Figura 4-18- Curva sforzo-deformazione fibre compresse nello strato di malta .....	80
Figura 4-19 - Elementi soggetti ad uno sforzo di trazione in fase di collasso .....	80
Figura 4-20- Rotazione imposta nel Reference Point .....	81
Figura 4-21- Accoppiamento Cinematico .....	81
Figura 4-22- Sforzo assiale - Modello completo .....	82
Figura 4-23 - Curva momento – rotazione prova di flessione .....	82
Figura 4-24 – Sforzo assiale relativo ad un rotazione imposta di radianti: (a) 7.81E-005.....	83
Figura 4-25- Quote sezione provino .....	84
Figura 4-26- Modello provino armato .....	84
Figura 4-27- Sforzo assiale al collasso - modello completo .....	86
Figura 4-28- Asse neutro al collasso - strato di malta .....	86
Figura 4-29- Sforzo assiale al collasso- strato di malta .....	86
Figura 4-31- Sforzo si Von Mises nelle barre di rinforzo.....	87
Figura 4-30- Curva sforzo - deformazione strato fibre compresse nello strato di malta .....	87
Figura 4-32 - Curva Momento applicato - rotazione imposta.....	88
Figura 4-33 - Armature di rinforzo annegate.....	89
Figura 4-34- Mesh ad elementi finiti del provino.....	89
Figura 4-35- Curva momento - rotazione imposta.....	90
Figura 4-36- Sforzo assiale all'interruzione dell'analisi - modello completo.....	90
Figura 4-37 - Sforzo assiale all'interruzione dell'analisi – strato di malta .....	91
Figura 4-38 - Sforzo assiale all'interruzione dell'analisi – barre di rinforzo.....	91
Figura 4-39- Curve momento - rotazione imposta - confronto modelli.....	92
Figura 4-40- Sforzo assiale al collasso - modello completo .....	93
Figura 4-41- Sforzo assiale al collasso - Strato di malta .....	93
Figura 4-42- Sforzo assiale al collasso - barre di rinforzo.....	93
Figura 4-43 - Curva sforzo di aderenza - scorrimento barre.....	94
Figura 4-44- Curva forza - allungamento molle .....	94
Figura 4-45- Confronto curve momento - rotazione imposta .....	95
Figura 5-1 – Piastre in acciaio 200x100x50 .....	96
Figura 5-2- Strati di malta semplificati.....	96
Figura 5-3 - Blocchi forati in calcestruzzo semplificati .....	96
Figura 5-6 - Curva sforzo deformazione per la malta in compressione monoassiale .....	97
Figura 5-4 - Piastre in acciaio e mattoni pieni .....	97
Figura 5-5- Strato di malta .....	97
Figura 5-7- Curva sforzo deformazione per la malta in trazione monoassiale – fase elastica .....	99
Figura 5-8 – Tension stiffening della malta.....	99
Figura 5-9 – Curva sforzo – deformazione per il calcestruzzo in compressione monoassiale .....	100
Figura 5-10 - Curva sforzo deformazione per il calcestruzzo a trazione monoassiale – fase elastica .....	101
Figura 5-11 - Tension stiffening del calcestruzzo .....	101
Figura 5-12 - Curva sforzo - deformazione per il laterizio in compressione monoassiale .....	102
Figura 5-13 – Curva sforzo deformazione per il laterizio a trazione monoassiale – fase elastica .....	103
Figura 5-14 - Tension stiffening del laterizio .....	103
Figura 5-15 - Mesh ad elementi finiti dei prismi composti da mattoni pieni e blocchi forati in calcestruzzo .....	105
Figura 5-16 - Sforzo assiale al collasso – .....	106
Figura 5-18 - Evoluzione dello sforzo nel punto più compresso nella malta – confronto con la legge costitutiva .....	107



Figura 5-17- Sforzo assiale al collasso - strato di malta .....	107
Figura 5-19- Sensitività del carico ultimo al variare della dimensione della mesh [mm] .....	108
Figura 5-20 - Sensitività del carico ultimo al variare del coefficiente di attrito.....	108
Figura 5-21 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica .....	109
Figura 5-22 - Curva sforzo deformazione per la malta in compressione monoassiale.....	110
Figura 5-23 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica .....	111
Figura 5-24 – Sforzo assiale al collasso –.....	112
Figura 5-25 – Massimo sforzo principale al collasso.....	112
Figura 5-26 – Materiale in fase anelastica al collasso.....	112
Figura 5-27 - Sensitività del carico ultimo al variare della dimensione della mesh [mm] .....	113
Figura 5-28 - Sensitività del carico ultimo al variare del coefficiente di attrito.....	113
Figura 5-29 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica .....	115
Figura 5-30 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica .....	116
Figura 6-1- Modello completo .....	119
Figura 6-2- Strato di malta (blu) con grout (bianco) .....	120
Figura 6-3- Blocco in calcestruzzo (verde) con grout (rosso).....	120
Figura 6-4- Armature di rinforzo .....	120
Figura 6-5 - Curva sforzo deformazione per la malta in compressione monoassiale.....	121
Figura 6-6 - Curva sforzo deformazione della malta a trazione monoassiale – fase elastica.....	122
Figura 6-7 – Tension stiffening malta.....	122
Figura 6-8 - Curva sforzo deformazione per il calcestruzzo in compressione monoassiale .....	123
Figura 6-9 - Tension stiffening del calcestruzzo.....	123
Figura 6-10- Curva sforzo - deformazione della calcestruzzo a trazione monoassiale – fase elastica	123
Figura 6-11 - Curva sforzo deformazione per il grout in compressione monoassiale.....	124
Figura 6-12 - Curva sforzo - deformazione del grout a trazione monoassiale – fase elastica .....	124
Figura 6-13- Tension stiffening del grout .....	124
Figura 6-14 - Modello costitutivo acciaio.....	125
Figura 6-15 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica Grafico completo .....	126
Figura 6-16 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica Zona di interesse .....	127
Figura 6-17 - Curva carico applicato - spostamento in mezzeria.....	128
Figura 6-18 - Sforzo assiale al collasso - modello completo .....	129
Figura 6-19 - Sforzo assiale al collasso - dettaglio .....	129
Figura 6-20 - Sforzo assiale al collasso - sezione maggiormente sollecitata .....	130
Figura 6-21 - Sforzo di trazione con scala cromatica alterata – sezione maggiormente sollecitata ....	130
Figura 6-22 - Armature snervate - dettaglio.....	130
Figura 6-23- Armature snervate.....	130
Figura 6-24 - Curva carico applicato - spostamento in mezzeria.....	131
Figura 6-25 - Sforzo assiale con carico 10 kN - modello completo.....	133
Figura 6-26- Sforzo assiale con carico 10 kN – base del pannello .....	133
Figura 6-27- Sforzo assiale con carico 34 kN - modello completo.....	134
Figura 6-28- Sforzo assiale con carico 34 kN – base del pannello .....	135
Figura 6-29- Armature snervate con carico 34 kN – base del pannello .....	135
Figura 6-30 - Sforzo assiale con carico 34 kN – strato di malta alla base .....	135
Figura 6-31 – Materiale in fase inelastica con carico 34 kN - strato di malta alla base .....	135
Figura 6-32 - Sforzo assiale con carico 34 kN – strato di malta nel tratto centrale .....	135
Figura 6-33- Sforzo assiale al collasso - modello completo .....	136
Figura 6-34 - Sforzo assiale al collasso - tratto centrale .....	137
Figura 6-35- Sforzo assiale al collasso – base del pannello .....	137
Figura 6-36 - Barre snervate al collasso - tratto centrale .....	137
Figura 6-37 - Sforzo assiale al collasso – strato di malta nel tratto centrale .....	137
Figura 8-1- Final configuration of the panels: a) brick prism; b) hollow concrete prism; c) Reinforced prism .....	141
Figura 8-2- Concrete smeared cracking yield surface.....	142
Figura 8-3- Axial stress at collapse.....	143

Figura 8-4 - Reinforced sample mesh.....	143
Figura 8-5- Applied moment - rotation curve.....	143
Figura 8-7- Comparison of numerical results with experimental results - brick prisms.....	144
Figura 8-6 - Axial stress at collapse - hollow concrete prism.....	144
Figura 8-8 - Comparison of numerical results with experimental results -hollow concrete prisms ...	145
Figura 8-9 - Comparison of numerical results with experimental results - hollow concrete reinforced prism at the early stages .....	145
Figura 8-11- Comparison of numerical results with experimental results - hollow concrete reinforced prism.....	147
Figura 8-10- Axial stress at collapse - reinforced panel clamped at the basis .....	147

# INDICE TABELLE

Tabella 2-1- Resistenza a flessione della malta a 14 e 28 giorni. ....	28
Tabella 2-2- Resistenza a compressione della malta a 14 e 28 giorni.....	28
Tabella 2-3 – Massima forza e resistenza a flessione ed a compressione dei provini SCB .....	30
Tabella 2-4 - Massima forza e resistenza a flessione ed a compressione dei provini HCB .....	32
Tabella 2-5- Riepilogo dei carichi di rottura dei muri .....	47
Tabella 4-1 – Parametri caratterizzanti il comportamento a compressione .....	70
Tabella 4-2 - Tension stiffening.....	70
Tabella 4-3- Shear retention.....	70
Tabella 4-4- Failure ratios.....	70
Tabella 4-5- Parametri caratterizzanti il comportamento a compressione .....	76
Tabella 4-6- Tension stiffening.....	76
Tabella 4-7 – Failure ratios .....	76
Tabella 4-8 - Parametri descriventi il comportamento a compressione .....	85
Tabella 4-9 – Failure ratios e tension stiffening.....	85
Tabella 5-1 - Tipi di malta .....	98
Tabella 5-2 - Relazione tipo di malta - coefficiente di Poisson .....	98
Tabella 5-3 – Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico del calcestruzzo ...	100
Tabella 5-4- Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico del laterizio .....	102
Tabella 5-5- Risultati prove sperimentali.....	109
Tabella 5-6 - Risultati prove sperimentali.....	115
Tabella 6-1- Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico della malta.....	121
Tabella 6-2 - Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico del calcestruzzo....	123
Tabella 6-3 - Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico del grout .....	124



# 1. INTRODUZIONE

## 1.1 Perché la ricerca

Le murature di tamponamento rivestono un ruolo fondamentale di chiusura tra spazio interno ed esterno oltre che di separazione degli spazi interni, regolando l'interscambio tra i due ambienti che separano.

Questi elementi, al giorno d'oggi, possono essere composti da molteplici materiali, grazie all'evoluzione delle tecniche edilizie che hanno portato moltissima innovazione.

In particolare, in ambito industriale partizioni composte da blocchi di calcestruzzo vibrocompresso sono ampiamente utilizzate per le loro caratteristiche di durabilità e resistenza al fuoco. Non necessitano in generale di manutenzione e sono di facile realizzazione: praticamente qualunque impresa è capace di realizzare una muratura in CMU, concrete masonry units, essendo sufficienti attrezzature di un 'piccolo' cantiere.

Nonostante la realizzazione sia piuttosto laboriosa, i costi diretti (ovvero legati al materiale in sé) sono molto ridotti e ciò fa della muratura una soluzione assai conveniente.

La scelta è ancor più vantaggiosa se l'impianto è localizzato in paesi in via di sviluppo, dove il costo della mano d'opera è poco impattante sul costo totale.

Pur non essendo elementi strutturali, i tamponamenti giocano un ruolo importante nella sicurezza di un edificio, come emerso chiaramente da quanto osservato nelle fasi di ricognizione dei danni che hanno seguito il terremoto del 6 Aprile 2009 a L'Aquila, che ha per altro confermato quanto già osservato in terremoti precedenti [1].



*Figura 1-1- Espulsione murature, L'Aquila, 2009*

Le conseguenze dell'espulsione fuori piano delle tamponature possono essere molteplici. In generale, recuperando la definizione degli stati limite proposta dal NTC 2008 (v. §3.2.1) [3], sono definite tre tipologie di rischio<sup>1</sup>:

- **Salvaguardia della vita:** Può qualcuno essere ferito dalla componente durante un terremoto?
- **Perdita delle proprietà:** Può l'elemento perdere gran parte delle proprietà?
- **Perdita della funzionalità:** Può la crisi della componente causare la perdita di funzionalità dell'intera struttura o una sua interruzione?

Si sottolinea che le perdite sopra descritte possono essere o un effetto diretto del danneggiamento, o una conseguenza secondaria.

Risulta evidente infatti come il crollo di una parete, pur non strutturale, possa causare un grave pericolo diretto per gli occupanti che cercano di uscire dagli edifici durante

---

<sup>1</sup> Nel mondo anglosassone ci si riferisce alle tre categorie di rischio come *The 3Ds: Deaths, Dollars and Downtime*. [2]

un terremoto. Tuttavia il crollo di una pesante tramezzo può anche causare intralcio di vie di fuga mettendo indirettamente in pericolo la vita degli utenti.

Anche in termini di perdita delle proprietà, il costo può essere diretto legato alla riparazione dell'elemento stesso ed indiretto legato all'interruzione dell'attività negli spazi interni interessati durante i lavori.



*Figura 1-2 – Effetti secondari Espulsione murature, L'Aquila, 2009*

E' stato anche osservato come molte costruzioni prive di danni strutturali presentassero diffusi danneggiamenti agli elementi non strutturali, tali da non permettere l'agibilità della costruzione e condurre ad elevati costi di riparazione. In alcuni casi ciò ha portato a rendere vantaggiosa la demolizione e ricostruzione, piuttosto che la riparazione di alcuni edifici.

Dunque, specialmente in zona sismica o in presenza di carichi orizzontali elevati quali vento ed esplosioni, è evidente la necessità di dotare le murature di armature di rinforzo in modo da garantire un comportamento migliore e più adeguato rispetto a quello delle murature tradizionali.

Le murature armate dispongono infatti, oltre che di notevole duttilità, anche della capacità di assorbire sforzi di trazione: pertanto, il loro comportamento è più simile a quello di setti in calcestruzzo armato che non alla muratura tradizionale.

La muratura armata rappresenta tuttavia un sistema costruttivo relativamente ‘nuovo’ ed ancora non molto conosciuto sia in termini di prestazioni che di modalità di realizzazione.

Il comportamento non è di facile comprensione, essendo la resistenza governata dall’interazione di quattro materiali (calcestruzzo vibrocompresso, malta, miscela cementizia e barre in acciaio).

Le normative di riferimento inoltre non sono ancora complete e specialmente riguardo i ci sono notevoli lacune.

In questo contesto lo stage svolto presso la società *Maire Tecnimont* è stato dedicato ad investigare ed approfondire le conoscenze relative alle problematiche della tamponatura. Sono state quindi definite modalità progettuali che si adattassero alle varie situazioni considerando anche le necessarie procedure per la realizzazione. Ci si è concentrati inoltre sui sistemi di collegamento fra muratura e struttura principale, spesso anello debole del gruppo resistente.

In parallelo, in questo lavoro di tesi, ci si è proposti di modellare con un’analisi ad elementi finiti il comportamento non lineare di un pannello in muratura rinforzata e validarlo con risultati sperimentali.



## **1.2 Basi di partenza**

Per lo svolgimento del lavoro di tesi, sono state utilizzate conoscenze pregresse conseguite nel corso di uno stage di sei mesi svolto presso la società *Maire Tecnimont* (par.1.2.1), nel corso di una competizione internazionale svoltasi presso l'Università del Minho (par. 1.2.2) e sono stati sfruttati i risultati di prove precedentemente svolte presso la società di produzione di materiali per l'edilizia *Senini S.p.A.* di Montichiari, BS (par. 1.2.3).

### 1.2.1 Lo stage



La *Maire Tecnimont* è un società attiva a livello internazionale nell'ambito dell'Engineering and Construction. Principalmente rivolta all'impiantistica per la trasformazione nei settori di petrolio e gas, petrolchimico e fertilizzanti, ha al suo interno anche competenze nei settori di produzione di energia e

infrastrutture.

Lo stage svolto durante il biennio di Laurea Magistrale aveva come finalità l'elaborazione di uno standard aziendale per le murature in CMU (Concrete Masonry Units).

Partendo dalle due principali norme applicate, Eurocodice e ACI, sono state definite metodologie di calcolo per il dimensionamento di partizioni interne ed esterne in base alle geometrie ed tipi di carichi più comunemente presenti in impianti petrolchimici (carichi di servizio, vento, esplosioni interne ed esterne, sisma).

Sono stati infine definiti dettagli di fissaggio che garantissero alle partizioni di scaricare sulla struttura principale le sollecitazioni fuori piano pur mantenendone l'indipendenza rispetto ai carichi verticali e nel piano.

La conoscenza delle normative e del problema a livello generale, dal dimensionamento alla realizzazione, maturate nel corso del tirocinio sono state un'ottima partenza nello sviluppo del modello permettendo, fra l'altro, di affrontare lo studio con maggiore consapevolezza.

### 1.2.2 “IMC Students’ challenge”

La "IMC Students’ Challenge" è un'iniziativa del Comitato Organizzativo della 9th International Masonry Conference, tenutasi a Guimarães (Portogallo) dal 7 al 9 Luglio 2014, rivolta a studenti di Laurea Magistrale e Dottorandi. La competizione è stata sponsorizzata dalla EuLA - European Lime Association.



L'obiettivo della competizione era prevedere il carico di rottura a compressione di due tipologie di provini in muratura composti da mattoni pieni, o blocchi forati, legati fra loro con strati di malta.

I vincitori sono stati designati da un comitato scientifico di caratura internazionale valutando la precisione della previsione e la qualità del report.



I provini, realizzati nel laboratorio dell'Università del Minho 240 giorni prima della conferenza, sono stati sottoposti a un carico di compressione eccentrico.

Come dato di partenza, ai partecipanti è stata fornita una dettagliata descrizione della geometria dei provini, dei mattoni e dei blocchi, degli strati di malta e delle condizioni di prova, nonché delle proprietà dei materiali selezionati.

Nella competizione, a cui hanno partecipato 13 squadre provenienti da tutto il mondo, è stato conseguito il secondo posto.

I risultati delle prove sono stati infine utilizzati per validare le simulazioni svolte dal modello numerico sviluppato nel capitolo 5.

### 1.2.3 Senini

Nata nel 1960 come azienda produttrice di blocchi e manufatti in calcestruzzo, oggi Senini dà il nome ad una holding con un



volume di affari di oltre 30 milioni di euro e occupa 400 persone.

Al suo interno sono raggruppate tre prestigiose aziende: Senini S.p.A., Senini Service S.p.A. e Immobiliare Ambiente srl che occupano ambiti di attività diversi ma coordinati: produzione, servizi ed attività immobiliari. Un assetto societario che vanta cinquant'anni di attività durante i quali l'azienda ha saputo svilupparsi rivelando grandi capacità organizzative e progettuali.

Presso tale società, sono state svolte delle prove di flessione su quattro punti su pannelli di muratura armata composti da blocchi in calcestruzzo, i cui risultati, presentati nel paragrafo 2.2, sono stati utilizzati per validare le simulazioni svolte dal modello numerico sviluppato nel capitolo 6.

### **1.3 Schema della tesi**

Il presente elaborato descrive nel capitolo 2 le prove sperimentali svolte su elementi in muratura ordinaria (par.2.1) e armata (par. 2.2).

Il terzo capitolo è dedicato alla descrizione del modello costitutivo adottato per la modellazione dei materiali lapidei, *concrete smeared cracking model*, e delle basi teoriche su cui si fonda. Si fa inoltre un breve riferimento al modello costitutivo utilizzato per simulare il comportamento delle barre di rinforzo.

Nel capitolo 4 sono mostrate le analisi numeriche preliminari mirate a valutare il corretto funzionamento dei modelli costitutivi adottati in presenza di eterogeneità del materiale.

Il capitolo 5 è dedicato al lavoro svolto nell'ambito della "IMC Students' Challenge". In esso sono descritte le operazioni svolte per la definizione delle caratteristiche meccaniche dei singoli materiali, per la creazione del modello numerico ed per la predizione dei carichi ultimi dei pannelli oggetto della competizione.

La simulazione delle prove di flessione su quattro punti svolta sui pannelli in murature armate è descritta nel capitolo 6.

Chiudono l'elaborato le conclusioni nel capitolo 7 e il riassunto in lingua inglese nel capitolo 8.

## **2. DESCRIZIONE DELLE PROVE SPERIMENTALI**

In questo capitolo vengono descritte le prove sperimentali su elementi in muratura, che sono state successivamente utilizzate per validare i modelli numerici descritti nei capitoli 5 e 6.

## 2.1 Prove di compressione eccentrica su provini

### 2.1.1 Obiettivo

In occasione della 9th International Masonry Conference tenutasi a Guimarães dal 7 al 9 Luglio 2014, è stata indetta una competizione (“IMC Students’ Challenge”) rivolta a studenti di Laurea Magistrale e Dottorandi con l'obiettivo di predire il massimo carico a compressione di due serie di provini in muratura composti da mattoni pieni, o blocchi forati, legati fra loro con strati di malta (vedi Figura 2-1) [4].

I provini, realizzati nel laboratorio dell’ Università del Minho 240 giorni prima della conferenza, sono stati testati con un carico eccentrico.

Come dato di partenza, ai partecipanti è stata fornita una dettagliata descrizione della geometria dei provini, dei mattoni e dei blocchi, degli strati di malta e delle condizioni di prova, nonché delle proprietà dei materiali selezionati.



*Figura 2-1- Configurazione finale dei provini: a) pannello con blocchi forati in calcestruzzo; b) pannello in mattoni*

## 2.1.2 Materiali e geometria dei provini

Sono stati realizzati due tipi di provini:

- a) Muratura in blocchi forati in calcestruzzo vibrocompresso
- b) Muratura in mattoni pieni

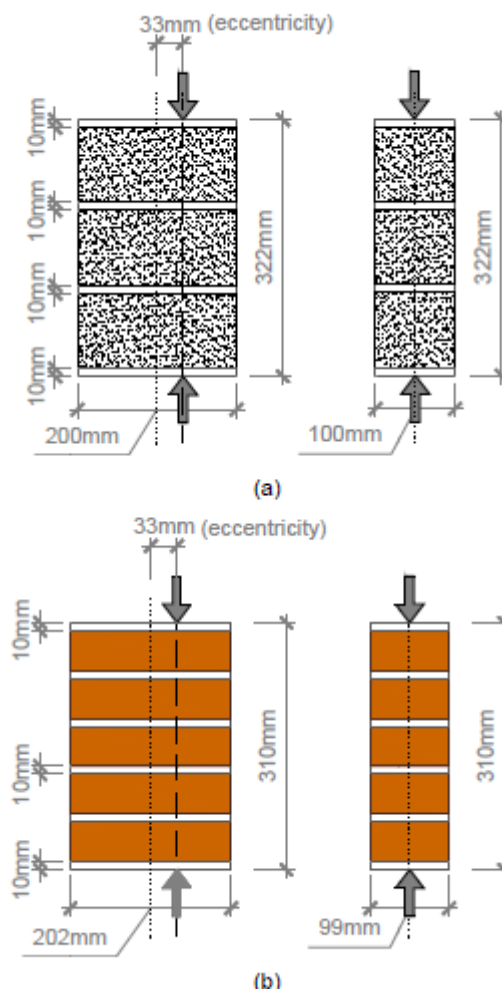


Figura 2-2 – Geometria dei provini con carico eccentrico applicato: a) pannello con blocchi forati in calcestruzzo (visione frontale e laterale); b) pannello in mattoni (visione frontale e laterale)



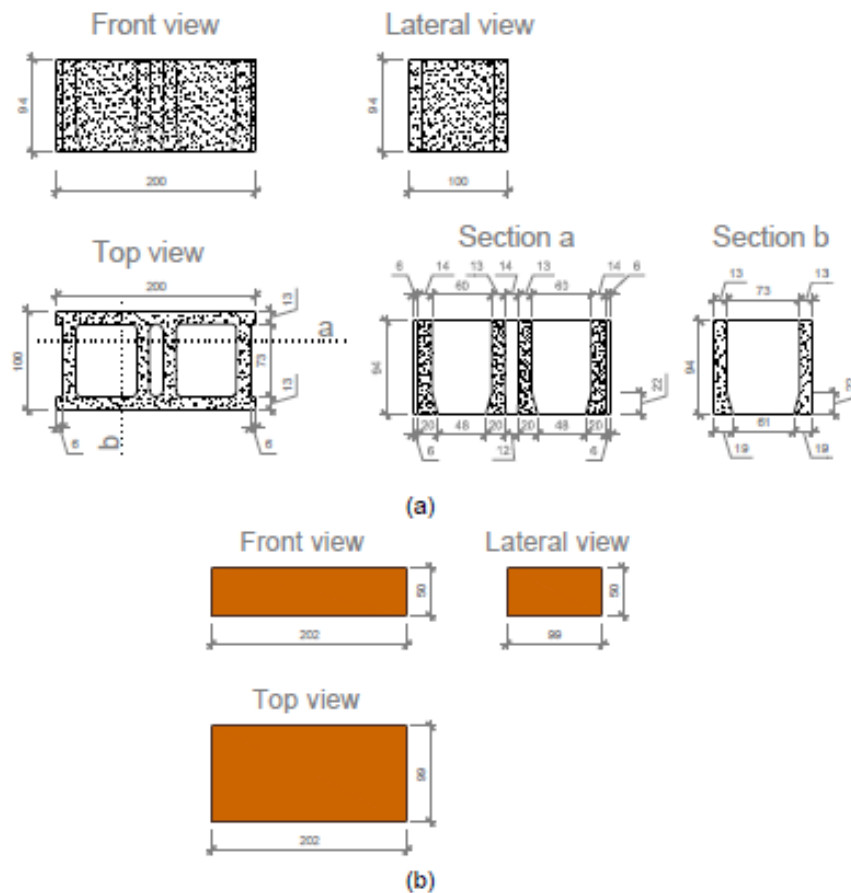


Figura 2-3- Geometria degli elementi della muratura (dimensione in mm): a) blocchi forati in calcestruzzo; b) mattoni in laterizio

E' stata adottata una malta con un rapporto di volume 1:1:6 (cemento – limo – sabbia), usando i materiali in accordo alla Norme Europee (CEM II/B-L 32,5N; CL 90-S; sabbia naturale).

Dopo la realizzazione, i provini di malta ed i pannelli di muratura sono stati conservati in una camera climatica: 7 giorni a 20°C e 95% di umidità relativa e fino al testing day a 20°C e 60% di umidità relativa.

La geometria dei pannelli è rappresentata in Figura 2-2. Si osservi che il carico aveva un'eccentricità di 33 mm, corrispondente ad un vertice del nocciolo d'inerzia della sezione dei prismi pieni; gli strati di malta avevano uno spessore di 10 mm.

Il carico di compressione eccentrico è stato applicato 240 giorni dopo la messa in opera dei pannelli. Prima dei test sono state svolte numerose prove sui singoli componenti della muratura.

## ***Malta***

La resistenza a trazione di tre provini di malta (160 mm x 40 mm x 40 mm) è stata valutata mediante prova di flessione in tre punti, come mostrato in Figura 2-4. In aggiunta, sei mezzi provini sono stati testati per la misurazione della resistenza a compressione (vedi Figura 2-5). Sono state seguite le linee guida descritte dall' EN 1015-11:1999 per determinare la resistenza a flessione e compressione, ad eccezione del metodo di carico. Entrambe le prove sono state eseguite a controllo di spostamento, in modo da ottenere una curva carico – spostamento che descrivesse anche il comportamento post-picco (vedi Figura 2-6 e Figura 2-7 rispettivamente per prova di flessione ed di compressione) [5].



*Figura 2-4 – Prova a flessione a) provino integro; b) provino rotto*



*Figura 2-5- Prova a compressione a) provino integro; b) provino rotto*

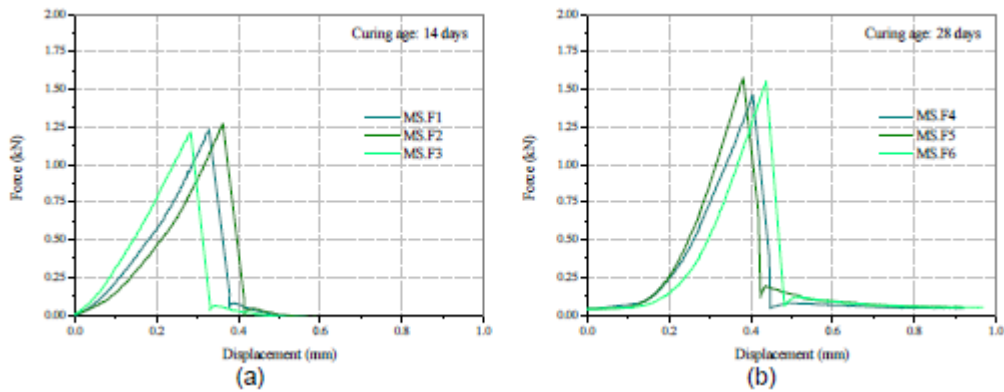


Figura 2-6- Curve forza-spostamento ricavate nella prove a flessione su campioni di malta a: a) 14 giorni; b) 28 giorni.

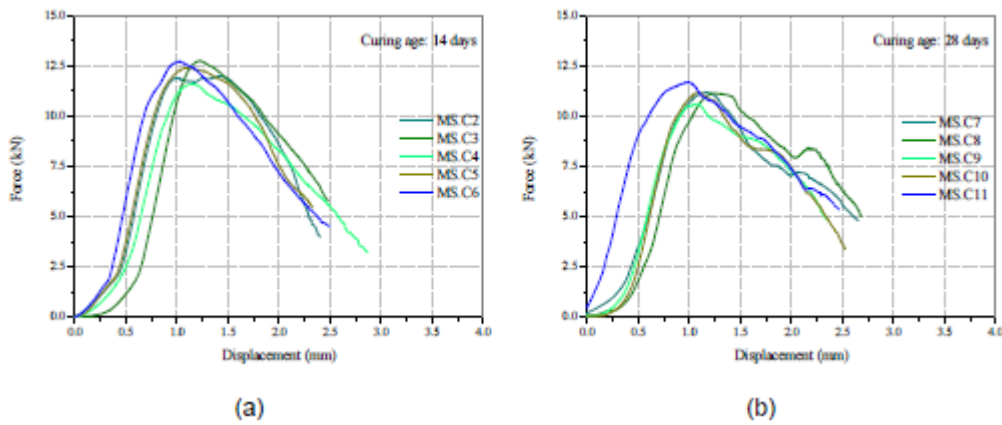


Figura 2-7- Curve forza-spostamento ricavate nella prova a compressione su campioni di malta a: a) 14 giorni; b) 28 giorni.

I valori della resistenza a flessione ed a compressione dei provini a 14 e 28 giorni sono riassunti in Tabella 2-1 e Tabella 2-2 rispettivamente.  $C_v$  indica il coefficiente di variazione.

Tabella 2-1- Resistenza a flessione della malta a 14 e 28 giorni.

	14 days		28 days		
	F (kN)	$f_{xm}$ (MPa)	F (kN)	$f_{xm}$ (MPa)	
MS.F1	1.23	2.9	MS.F4	1.46	3.4
MS.F2	1.27	3.0	MS.F5	1.58	3.7
MS.F3	1.21	2.8	MS.F6	1.56	3.6
Average	1.2	2.9	Average	1.5	3.6
$C_v$ (%)	2.0	2.0	$C_v$ (%)	3.2	3.2

Tabella 2-2- Resistenza a compressione della malta a 14 e 28 giorni

	14 days		28 days		
	F (kN)	$f_m$ (MPa)	F (kN)	$f_m$ (MPa)	
MS.C1	11.39	7.12	MS.C7	11.20	7.00
MS.C2	12.00	7.50	MS.C8	11.16	6.98
MS.C3	12.76	7.98	MS.C9	10.61	6.63
MS.C4	11.61	7.26	MS.C10	11.18	6.98
MS.C5	12.42	7.76	MS.C11	11.69	7.31
MS.C6	12.73	7.96	MS.C12	-	-
Average	12.2	7.6	Average	11.2	7.0
$C_v$ (%)	4.4	4.4	$C_v$ (%)	3.1	3.1

## *Mattoni pieni in argilla*

Cinque mattoni pieni in argilla (SCB) sono stati testati a flessione in tre punti ed altri cinque a compressione (vedi Figura 2-8 e Figura 2-10 rispettivamente). Si sono seguite le linee guida descritte dall'ASTM C67 – 13a per condurre le prove e per calcolare la resistenza a flessione. La distanza fra i due appoggi era di 174 mm. La curva carico-spostamento per il test a flessione è mostrata in Figura 2-9.

Per le prove a compressione sia ASTM C67 -13a che EN 772-1 sono state considerate. Sono stati testati blocchi interi, per essere coerenti con il metodo adottato per i provini in calcestruzzo. L'area media delle superfici di supporto superiore ed inferiore era di 20000 mm<sup>2</sup>. In Figura 2-11 sono mostrate le curva sforzo-deformazione per il test a compressione svolte sui provini di SCB [6].

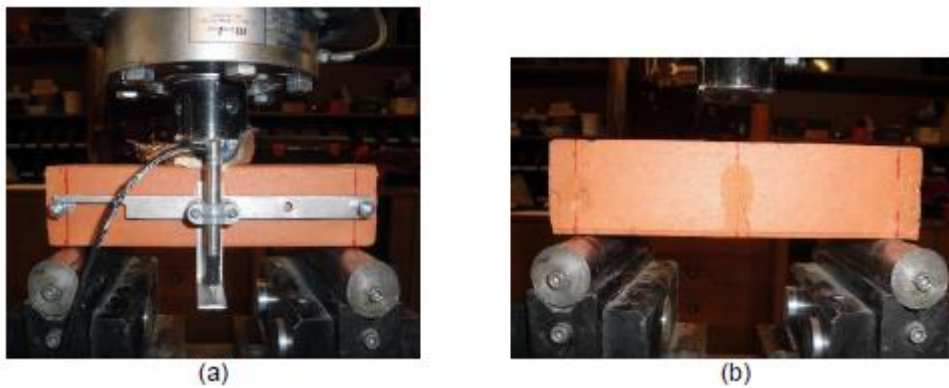


Figura 2-8 – Prova a flessione su SCB: a) provino integro; b) provino rotto

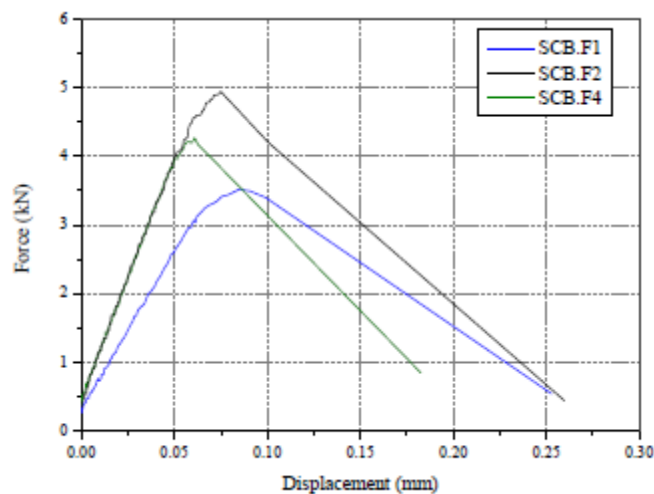


Figura 2-9 - Curva forza-spostamento delle prove a flessione su SCB

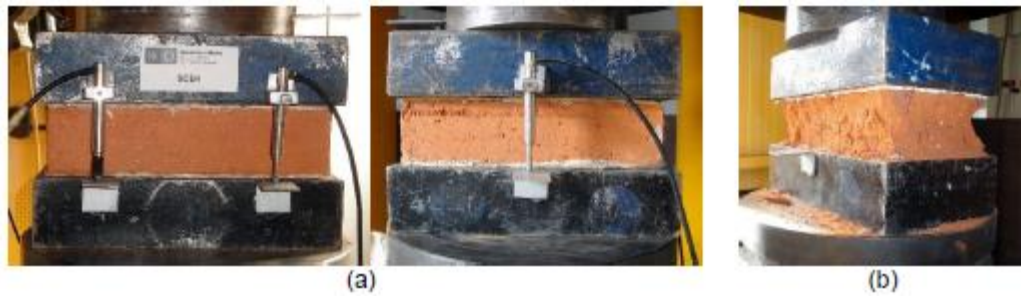


Figura 2-10 - Prova a compressione su SCB: a) provino integro; b) provino rotto

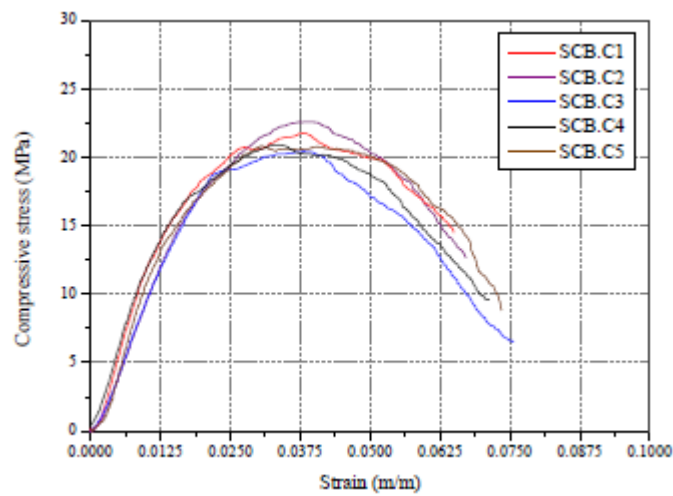


Figura 2-11 - Curva sforzo-deformazione di una prova a compressione su SCB

I valori di resistenza a flessione e a compressione, con il corrispettivo coefficiente di variazione (CoV) dei provini testati sono elencati nella Tabella 2-3.

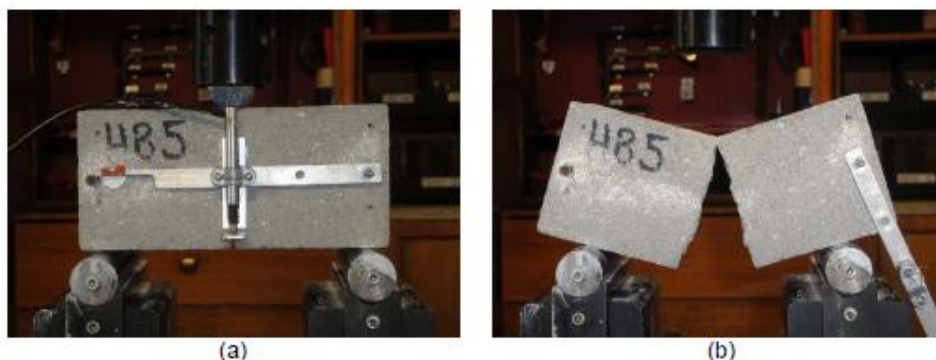
Tabella 2-3 – Massima forza e resistenza a flessione ed a compressione dei provini SCB

	Flexure tests			Compression tests	
	F (kN)	$f_{fb}$ (MPa)		F (kN)	$f_b$ (MPa)
SCB.F1	3.52	3.15	SCB.C1	439.2	22.0
SCB.F2	4.99	3.60	SCB.C2	457.3	22.9
SCB.F3	-	-	SCB.C3	412.4	20.6
SCB.F4	4.27	3.09	SCB.C4	423.1	21.2
SCB.F5	-	-	SCB.C5	423.9	21.2
Average	4.3	3.3		431.2	21.6
CoV (%)	14.1	7.0		3.6	3.6

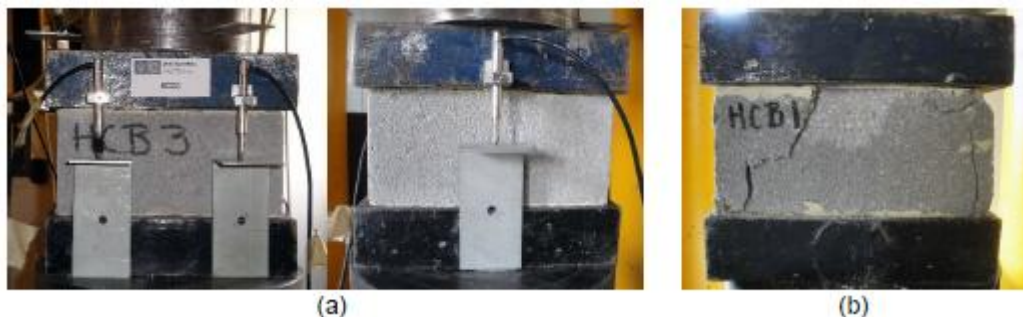
### ***Blocchi forati in calcestruzzo vibrocompresso***

Cinque blocchi forati in calcestruzzo vibrocompresso (HCB) sono stati testati per la resistenza a flessione ed altri cinque per la resistenza a compressione (vedi rispettivamente Figura 2-12 e Figura 2-13). Sono state seguite le linee guida descritte dall'ASTM C67 – 13a per condurre le prove e per calcolare la resistenza a flessione. Per ottenere la resistenza a flessione, i blocchi sono stati accuratamente intagliati lungo lo spessore in mezzeria. La larghezza dell'intaglio era mediamente di 3 mm e la parte intatta del blocco era profonda circa 79 mm. La distanza fra gli appoggi era di 174 mm. Le curve carico-spostamento ottenute nelle prove di flessione sono mostrate in Figura 2-14.

Per le prove a compressione sono state considerate sia le norme ASTM C67 -13a che le EN 772-1. Sono stati testati blocchi interi in modo da prevenire un eventuale danneggiamento causato dal taglio. L'area lorda media delle superfici di supporto superiore ed inferiore era di 9400 mm<sup>2</sup>. In Figura 2-15 sono mostrate le curve sforzo-deformazione per il test a compressione svolte sui provini HCB.



*Figura 2-12- Prova a flessione su HCB: a) provino integro; b) provino rotto*



*Figura 2-13- Prova a compressione su HCB: a) provino integro; b) provino rotto*

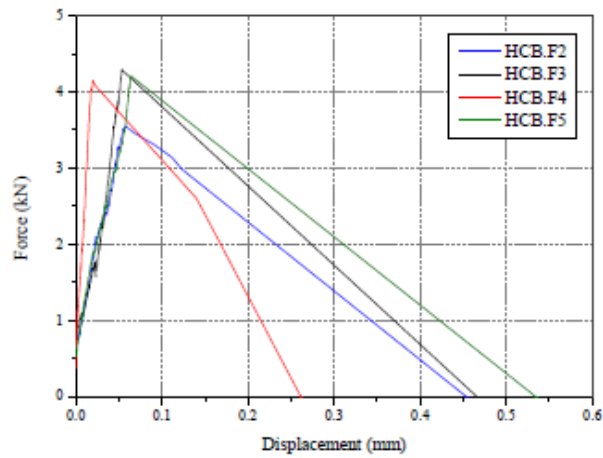


Figura 2-14- Curva forza-spostamento delle prove a flessione su HCB

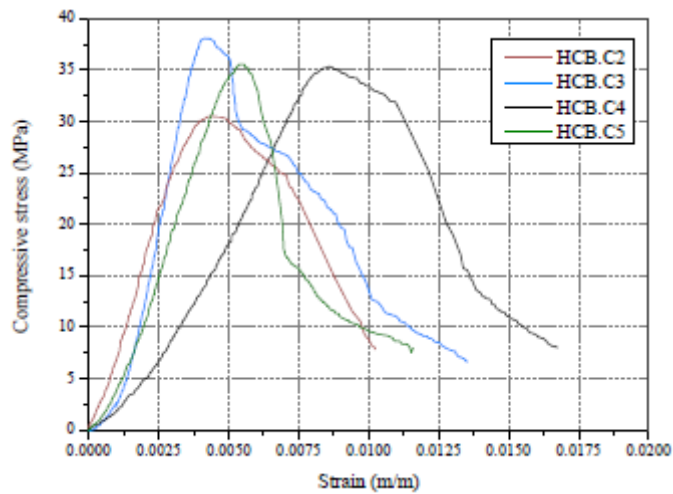


Figura 2-15- Curva sforzo-deformazione di una prova a compressione su HCB

I valori di resistenza a flessione e a compressione, con il corrispettivo coefficiente di variazione (CoV) dei provini testati sono elencati nella Tabella 2-4.

Tabella 2-4 - Massima forza e resistenza a flessione ed a compressione dei provini HCB

	Flexure tests		Compression tests	
	F (kN)	$f_{xb}$ (MPa)	F (kN)	$f_b$ (MPa)
HCB.F1	-	-	HCB.C1	-
HCB.F2	3.55	5.76	HCB.C2	294.4
HCB.F3	4.30	6.96	HCB.C3	368.1
HCB.F4	4.15	6.59	HCB.C4	337.6
HCB.F5	4.21	6.87	HCB.C5	344.7
Average	4.1	6.5		336.2
CoV (%)	7.3	7.2		7.9



## **2.2 Prove di flessione su quattro punti su pannelli armati**

### **2.2.1 Generalità**

Le prove sperimentali di seguito illustrate sono state condotte nell'ambito di un contratto tra Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Milano (di seguito denominato DIS) e ditta Senini S.p.A. nel corso del 2011 [7].

Le prove su pannelli murari ed architravi sono state condotte in un capannone della ditta Senini adibito all'uso ed eseguite da tecnici del DIS, sotto la supervisione dei responsabili del contratto.

Sono state create tre tipologie di campioni, ognuna delle quali è costituita da sei provini che differiscono per il tipo di calcestruzzo impiegato:

- Tipologia A: architravi;
- Tipologia B: pannello con armatura tradizionale;
- Tipologia C: pannello con armatura trasversale sperimentale;

In quest'elaborato sarà analizzata solo la seconda tipologia, trascurando dunque considerazioni sugli altri campioni.

Nelle prove il carico è stato esercitato mediante due martinetti oleodinamici con corsa di 250 mm, azionati manualmente attraverso una pompa da 700 bar di capacità massima. Nel corso di tali prove sono stati acquisiti i valori della pressione esercitata dai martinetti e gli spostamenti di tre punti di misura, misurati attraverso LVDT in direzione ortogonale alla faccia del muro su cui viene applicato il carico (vedi Figura 2-19).

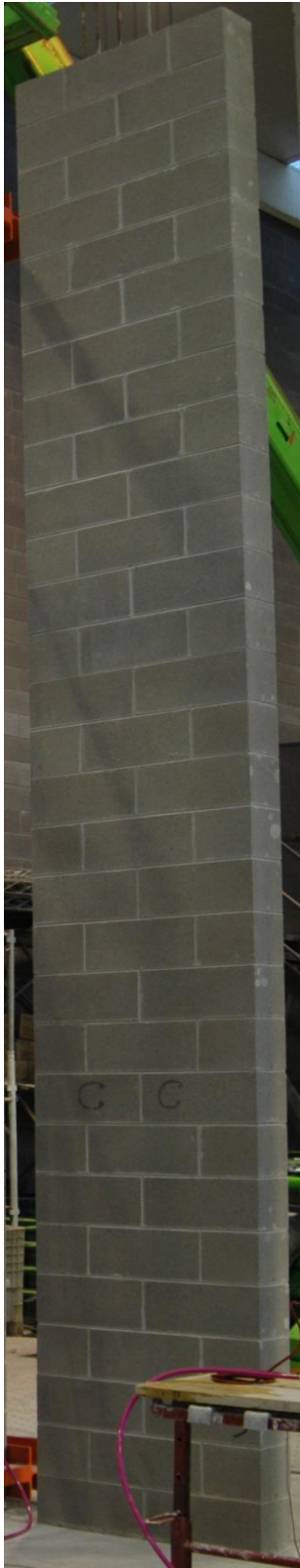
### **2.2.2 Analisi del pannello in muratura**

I provini sottoposti alle prove di flessione su quattro punti hanno dimensioni 1x6x0.2 m, sono costituiti da blocchi forati in calcestruzzo disposti in ordine preciso e legati da una malta cementizia (vedi Figura 2-16)

I fori centrali sono riempiti con del calcestruzzo di proprietà più scadente rispetto a quello dei blocchi (denominato nel seguito "grout") e armati con quattro barre

longitudinali ciascuno e staffate con passo regolare, mentre i fori esterni rimangono vuoti (vedi Figura 2-17)

Le armature fuoriuscenti dalla base dei muri sono state vincolate al pavimento della zona di prova mediante 4 tirafondi in acciaio  $\phi 14$  a forma di L, che si estendono per 1500 mm nel pannello, poi piegano a  $90^\circ$  e continuano per altri 100 mm nella platea. Le prove sono state condotte in analogia a quelle previste dalla normativa UNI EN 1052-2 al fine di valutare la resistenza a flessione di pannelli murari per piani di rottura paralleli ai giunti orizzontali. Si noti, peraltro, che l'inevitabile presenza del vincolo sopra descritto alla base dei muri fa sì che le modalità di prova non siano esattamente quelle previste dalla normativa, evidentemente concepita per muri non armati e quindi di altezza minore.



L'immagine affianco, Figura 2-16, mostra il pannello utilizzato nelle prove sperimentali; le dimensioni sono:

- Larghezza: 1000 *mm*
- Altezza: 6000 *mm*
- Profondità: 200 *mm*

Si può notare come esso sia costituito da trenta file di blocchi, caratterizzate dall'alternarsi di due diverse disposizioni:

- Due blocchi uguali affiancati;
- Blocchi intero posto centralmente, compreso tra due mattoni di dimensioni ridotte circa della metà;

Le dimensioni del blocco intero possono essere così definite:

- Larghezza:  $\cong 500$  *mm*
- Altezza:  $\cong 200$  *mm*
- Profondità: 200 *mm*

Si può osservare, inoltre, la presenza di malta di dimensione prossima ai 5 *mm*, che funge da legante tra i blocchi.

*Figura 2-16 – Pannello oggetto delle prove sperimentali*



*Figura 2-17 –Dettaglio blocco*

Nella Figura 2-17 sono visibili le barre longitudinali d'armatura di diametro  $\varnothing 12$  e il calcestruzzo di riempimento, diverso da quello utilizzato per la produzione dei blocchi.

Le staffe, non visibili nell'immagine, sono poste con passo  $200\text{ mm}$  e sono costituite da acciaio di diametro  $\varnothing 8$  e saldate esternamente alle barre longitudinali.

### **2.2.3 Preparazione del campo di prova e modalità d'esecuzione**

Per vincolare orizzontalmente la base e la sommità dei muri, nonché per consentire l'applicazione dei carichi, è stato realizzato un contrafforte metallico, di altezza circa pari a quella dei muri. Mediante due putrelle solidali con gli estremi del contrafforte, sono stati realizzati gli appoggi esterni richiesti dalla normativa. Gli appoggi interni, su cui viene esercitata la spinta dei due martinetti, sono realizzati mediante due ulteriori putrelle mobili. Ciascuno degli appoggi interni è collocato ad una distanza di  $1.5\text{ m}$  circa dall'appoggio esterno adiacente. Anche in questo caso, tra putrelle e muri è stato interposto uno strato di gomma.

Il procedimento consiste nel montaggio e fissaggio dei contrafforti alla platea e al pannello in muratura, poi nell'esecuzione della prova sul pannello ed infine nella rimozione e nel trasferimento del tutto sul secondo campione, ripetendo queste operazioni sino alla conclusione delle prove di carico.

Prima di tutte le operazioni di posa, è stato necessario rimuovere il precedente pavimento in autobloccanti, livellare il sottofondo in calcestruzzo preesistente e gettare una platea contenente due file di rete elettrosaldata.

I dettagli, forniti dall'azienda, sono rappresentati nelle immagini della pagina successiva.

MODALITA' PER FISSAGGIO A TERRA DEI CONTRAFFORTI PER I PANNELLI

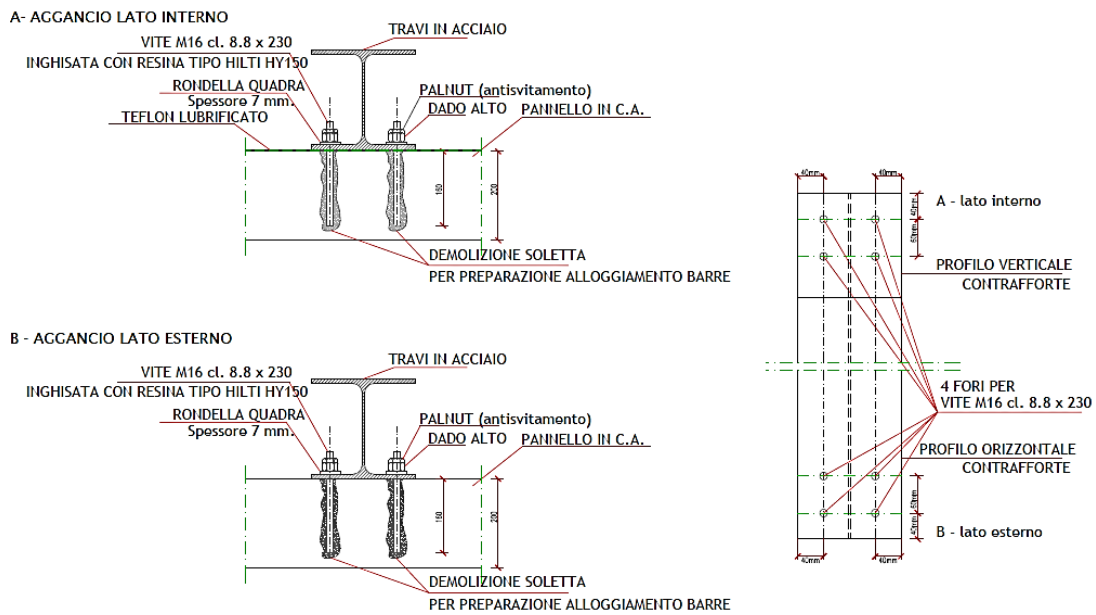


Figura 2-18 - Dettagli ancoraggio contrafforti

Sulla superficie del pannello sono stati applicati dei sensori per rilevare lo spostamento subito da esso durante la prova di flessione, in tre diverse posizioni:

- LVDT 1: 4100 mm dal basso;
- LVDT 2: 3100 mm dal basso;
- LVDT 3: 1700 mm dal basso;

Per quanto riguarda i contrafforti di ritegno, che fungono da appoggi per il pannello durante la prova di carico, si trovano rispettivamente a (distanza riferita al baricentro della trave d'acciaio):

- 400 mm dall'alto;
- 110 mm dal basso;

I punti di spinta sono due, distanziati da 3000 mm e posizionati nel seguente modo:

- 1640 mm dall'alto;
- 1360 mm dal basso;

Nelle due immagini sottostanti viene messa a confronto una prima riproduzione mediante CAD e il pannello reale, con relativa struttura metallica per la prova di carico.

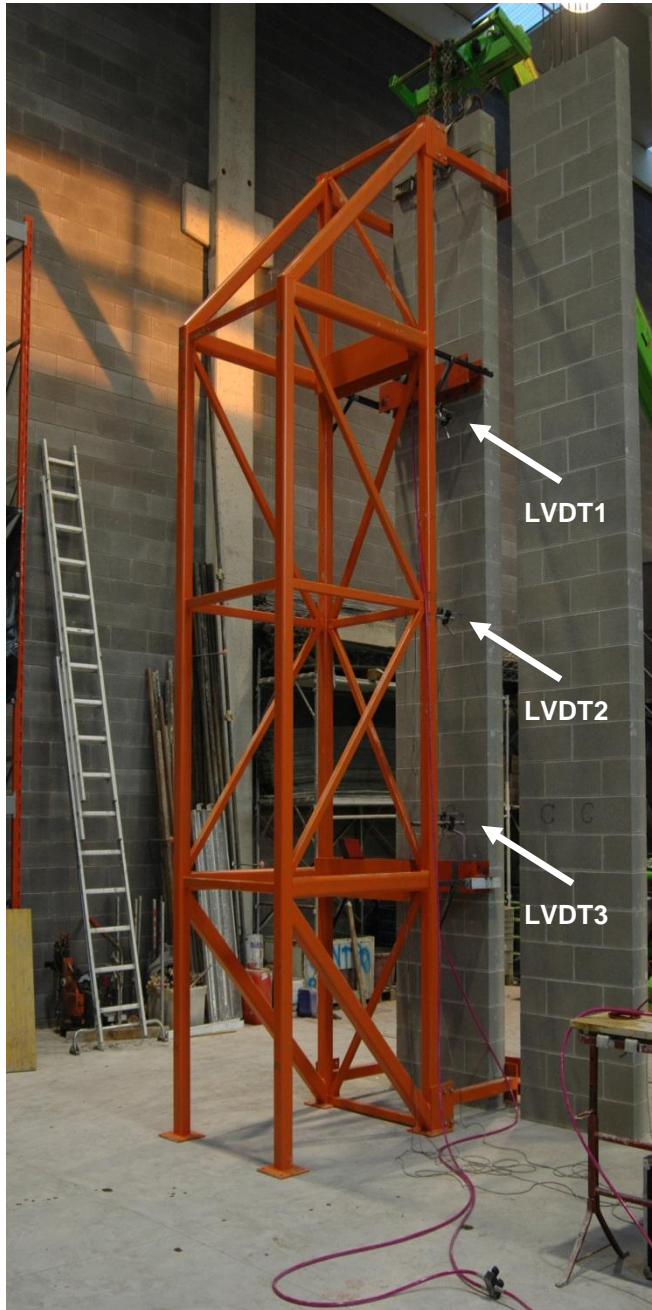


Figura 2-19 - Schema di vincolo e di carico della prova

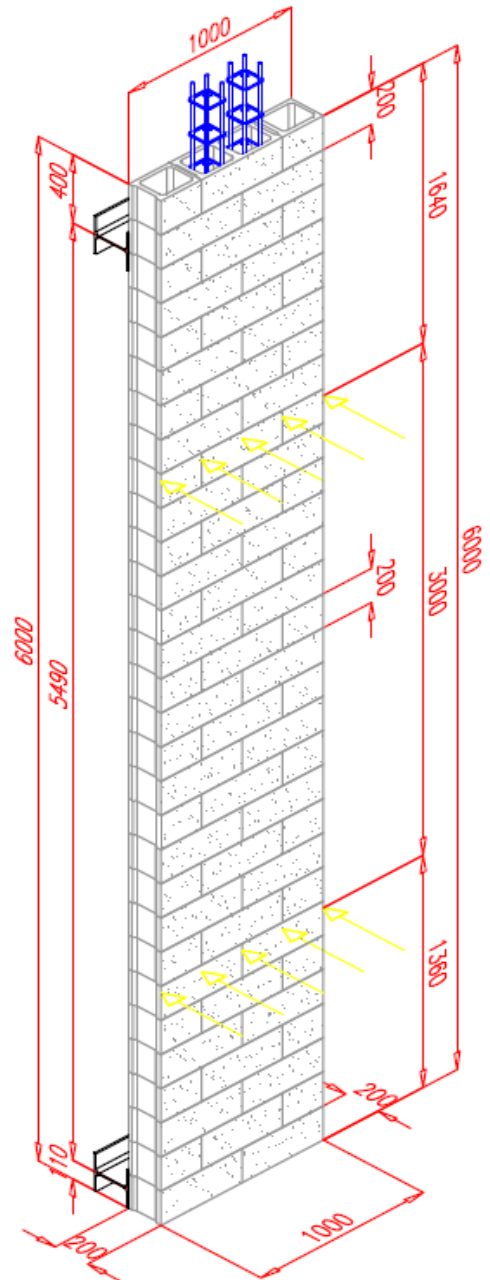


Figura 2-20 – Riproduzione in CAD con relative quote del pannello

## 2.2.4 Materiali

I materiali che costituiscono i pannelli sono quattro: calcestruzzo vibrocompresso del blocco, grout di riempimento, malta e acciaio d'armatura. Ognuno di essi possiede delle caratteristiche meccaniche che influiscono sul comportamento strutturale del pannello.

Di seguito si elencano le proprietà di ciascun materiale:

### ***Calcestruzzo vibrocompresso***

Densità:  $2300 \text{ kg/m}^3$   
Modulo Elastico:  $33000 \text{ MPa}$   
Coefficiente di Poisson: 0.2  
Resistenza a compressione:  $35 \text{ MPa}$   
Resistenza a trazione:  $3.1 \text{ MPa}$

### ***Grout di riempimento***

Classe di resistenza: C25/30  
Classe di esposizione: XC2  
Densità:  $2300 \text{ Kg/m}^3$   
Coefficiente di Poisson: 0.2  
Resistenza a compressione:  $10 \text{ MPa}$   
Resistenza a trazione:  $1.7 \text{ MPa}$

### ***Malta cementizia***

Densità:  $1800 \text{ Kg/m}^3$   
Resistenza a compressione:  $13 \text{ MPa}$

### ***Acciaio da costruzione***

Tipo: B450C  
Densità:  $7600 \text{ Kg/m}^3$   
Modulo Elastico:  $210000 \text{ MPa}$   
Coefficiente di Poisson: 0.35

## 2.2.5 Risultati prove

Eseguite tutte le prove di carico sui campioni, si è realizzato un grafico carico-spostamento<sup>2</sup> con riferimento delle singole prove:

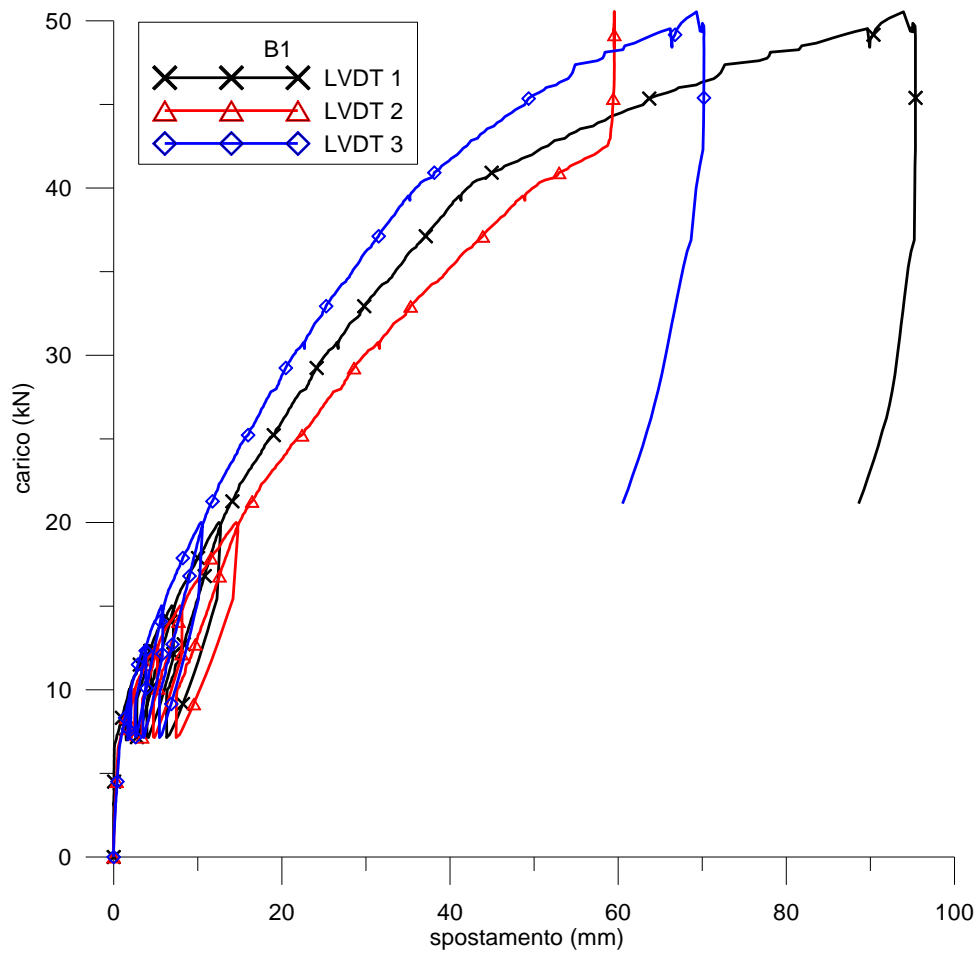


Figura 2-21- Curve carico – spostamento relative al campione B1

<sup>2</sup> Per “carico” s’intende quello esercitato dal singolo martinetto, pari quindi a metà di quello complessivamente applicato.



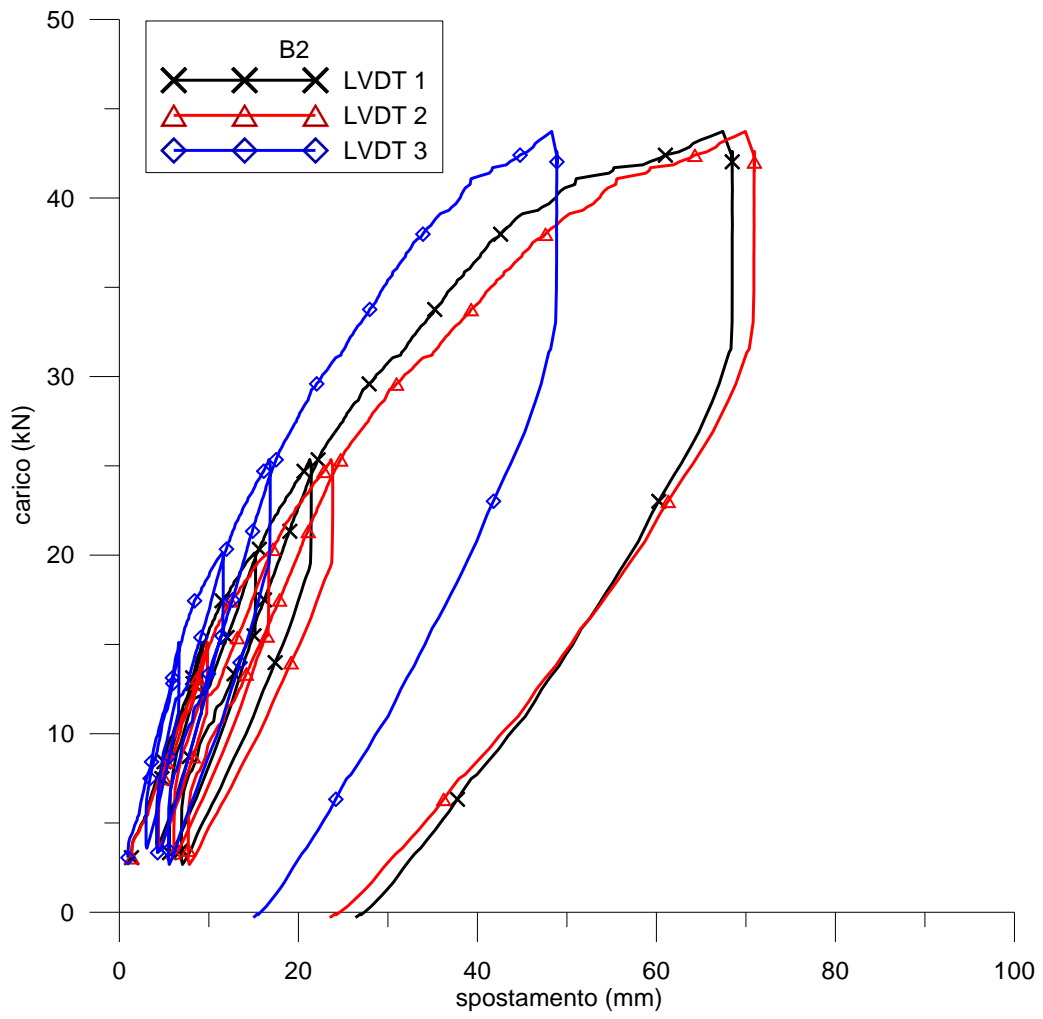


Figura 2-22- Curve carico – spostamento relative al campione B2

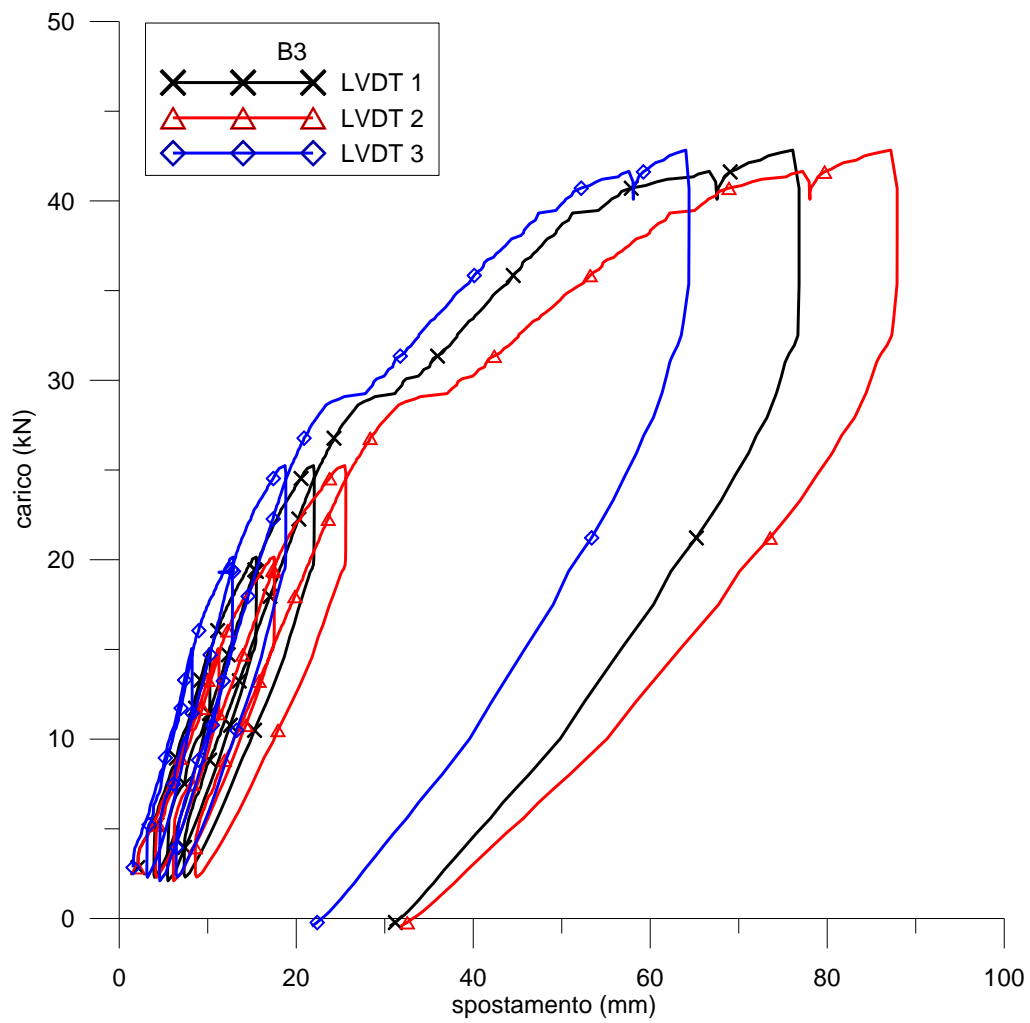


Figura 2-23- Curve carico – spostamento relative al campione B3

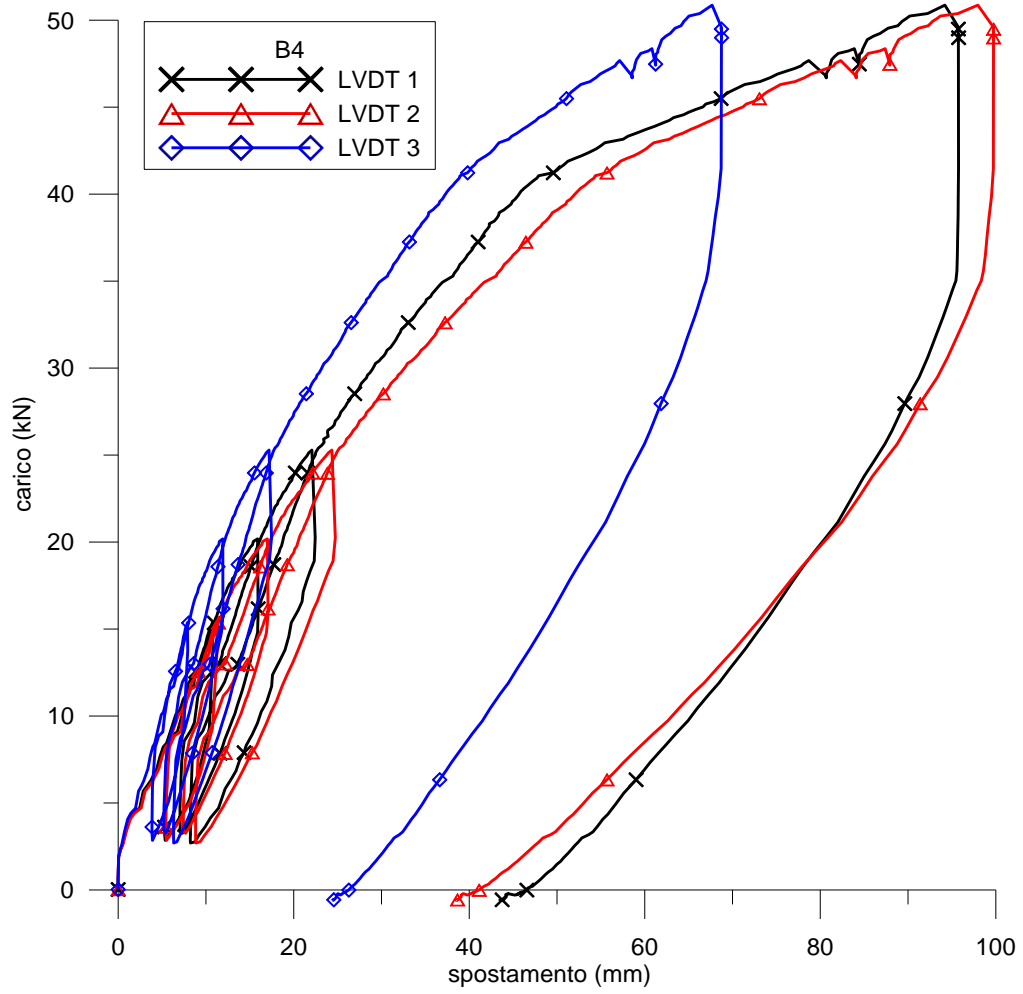


Figura 2-24 - Curve carico – spostamento relative al campione B4

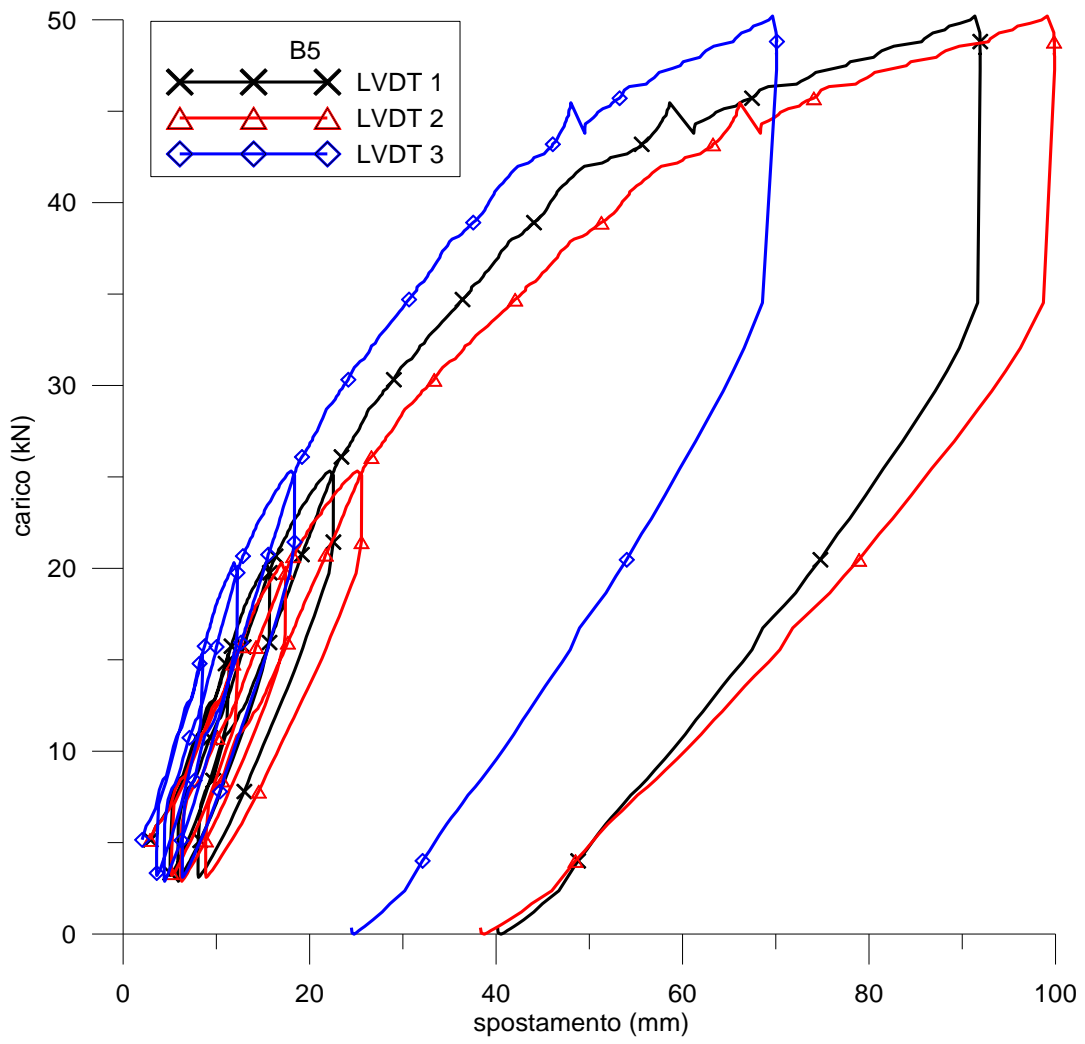


Figura 2-25- Curve carico – spostamento relative al campione B5

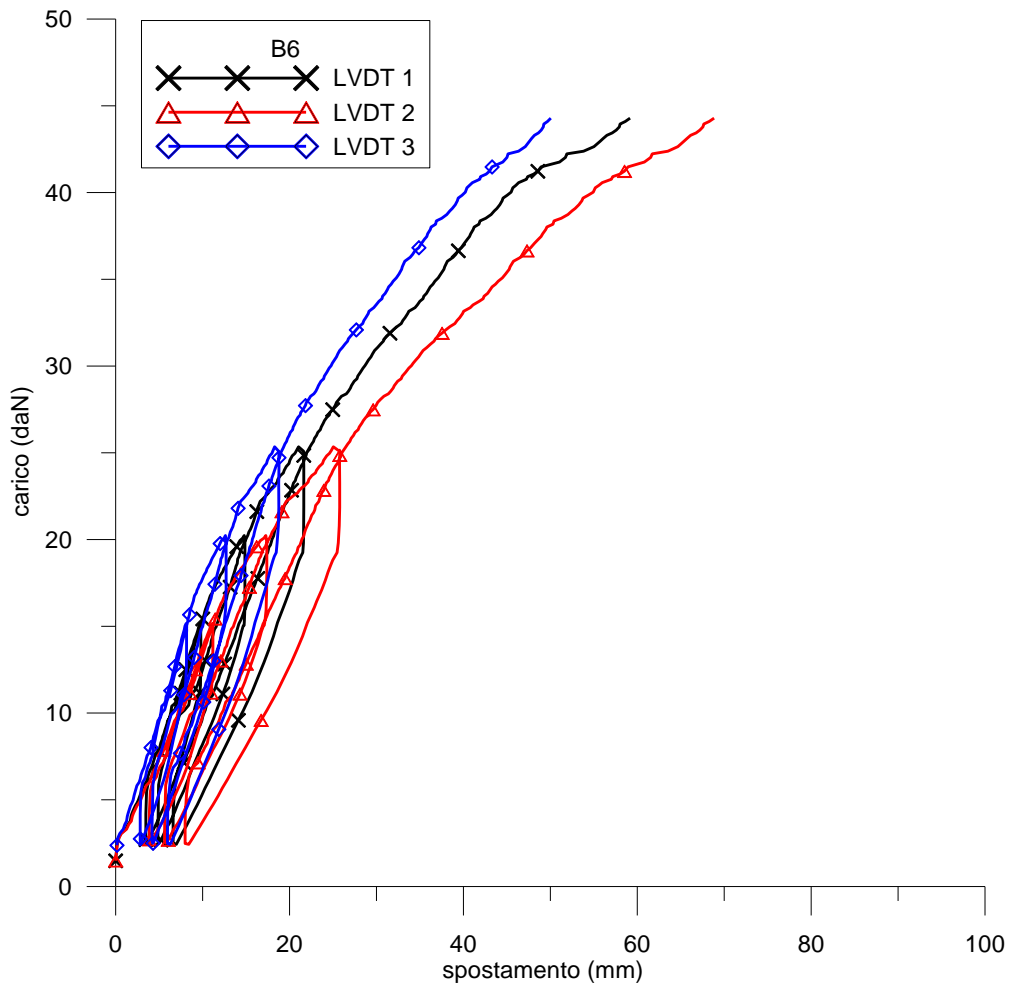


Figura 2-26 - Curve carico – spostamento relative al campione B6

In Figura 2-27 sono raccolte le curve carico-spostamento relative al secondo sensore, posto circa in mezzzeria, delle sei prove.

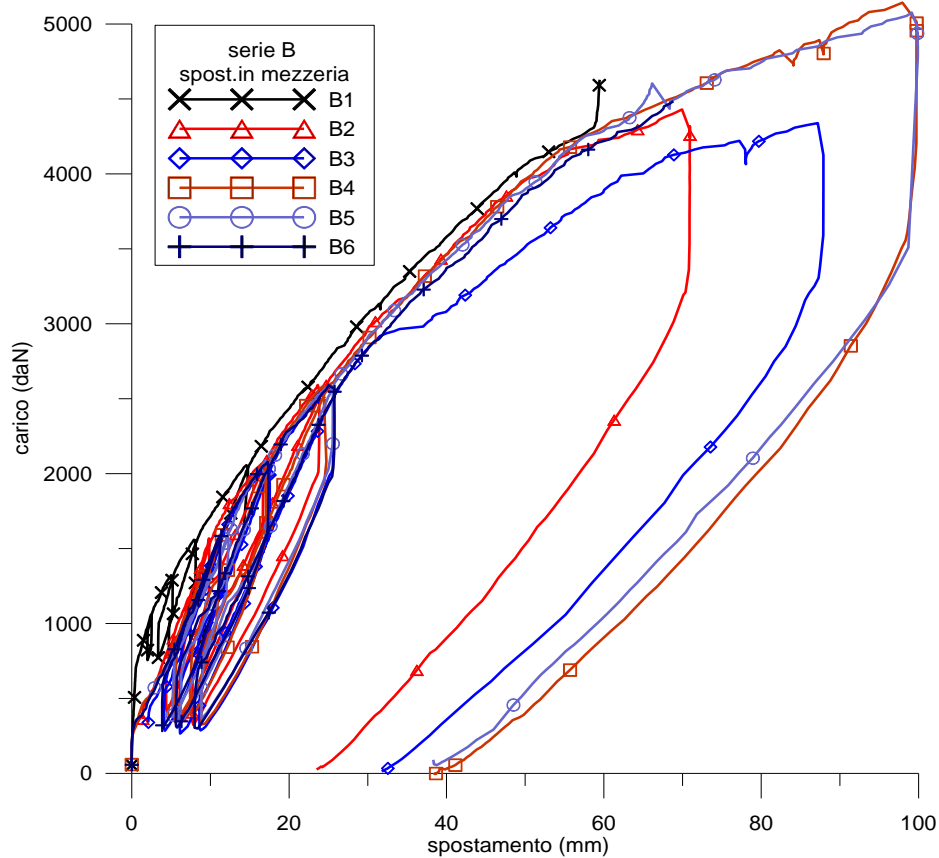


Figura 2-27- Curva carico - spostamento in mezzzeria prove sperimentali

Le curve mostrano una progressiva riduzione di pendenza, corrispondente alla formazione di lesioni nei giunti orizzontali di malta, riscontrata visivamente.

E' inoltre evidente l'estrema ripetibilità delle prove, tanto che è lecito pensare che in molti casi l'effettivo carico di rottura possa essere più alto di quello massimo raggiunto, potendo la relativa curva sperimentale continuare ricalcando quelle di altri campioni giudicati "più resistenti".

Tenendo presente la possibile sottostima dell'effettivo carico di rottura, i valori del carico massimo raggiunto nelle prove sui pannelli armati di spessore sono riassunti in Tabella 2-5.

Tabella 2-5- Riepilogo dei carichi di rottura dei muri

Campione	Velocità di prova (kN/min)*	carico di rottura, $F_i$ (kN)
B1	14.2	50.39
B2	10.2	43.73
B3	12.0	42.82
B4	13.0	50.86
B5	11.4	50.20
B6	6.87	49.50
<b>media (serie B)</b>	<b>11.3</b>	<b>47.92</b>

Si osserva che prima dell'applicazione di un carico crescente fino a rottura, sono stati eseguiti alcuni cicli di carico-scarico di ampiezza crescente, principalmente allo scopo di assestare l'attrezzatura di prova.

## **3. MODELLO COSTITUTIVO**

In questo capitolo vengono descritti i modelli implementati nel codice di Abaqus e adottati per le analisi numeriche dei campioni in muratura descritti nel capitolo 2.

La legge costitutiva traduce in termini matematici le proprietà meccaniche dei materiali. Per il problema in esame possono distinguersi due categorie di materiali:

- Lapidari dal comportamento fragile, come calcestruzzo, laterizio, malta e grout
- Metalli dal comportamento duttile, come l'acciaio



### 3.1 Materiali lapidei: Concrete smeared cracking model

I materiali fragili come calcestruzzo, laterizio, malta e grout sono accomunati da un comportamento fragile [8] riproducibile durante l'analisi numerica tramite l'adozione di un modello costitutivo chiamato "concrete smeared cracking".

Il modello, implementato sulla base di solide basi teoriche largamente discusse in letteratura [9] [10] [11] [12] [13] viene utilizzato essenzialmente per simulare situazioni di carico monotoniche in cui le deformazioni si sviluppano in presenza di una modesta pressione di confinamento.

Il *concrete smeared cracking model* può essere utilizzato anche in presenza di barre di rinforzo: ad elementi standard adottati per modellare il semplice materiale vengono combinati elementi truss usati per modellare il rinforzo stesso. Questo approccio permette di considerare il materiale indipendentemente dalle barre e dunque di implementare i modelli costitutivi separatamente.

La fessurazione è l'aspetto più rilevante del *concrete smeared cracking model*. Si assume che la fessurazione si manifesti quando il punto tensione raggiunge una superficie di rottura chiamata "Crack detection surface". Questa superficie è identificata semplicemente attraverso la *linea di Coulomb* scritta in termini del primo e del secondo invariante degli sforzi,  $p$  e  $q$ , definiti di seguito. Ai fini della simulazione l'anisotropia derivante dalla fessurazione ricopre un ruolo centrale così che, una volta osservata la fessura, la sua direzione viene memorizzata per i calcoli successivi. Il modello è chiamato "concrete smeared cracking" poiché non vengono descritte singole macrofessure ed i calcoli sono svolti indipendentemente in ogni punto di integrazione del modello. Tuttavia la presenza di fessure si riflette sull'analisi dal momento che esse influenzano lo stato di sforzo e la rigidità del materiale nei rispettivi punti di integrazione.

Diverse critiche sono state volte al *concrete smeared cracking model*. La principale sostiene che il modello porti a una soluzione *mesh sensitive*, ovvero che i risultati delle analisi non convergano ad un unico risultato. In effetti, poiché il comportamento softening era inizialmente implementato in termini di deformazioni,

un raffinamento della mesh implicava lo sviluppo di fessurazioni localizzate in bande via via più strette. Tuttavia Crisfield [14], in seguito ad uno studio dettagliato della problematica, ha concluso che l'adozione dell'approccio proposto da Hilleborg [15], basato su concetti della frattura fragile, permette di superare tale sensibilità.

Quando gli sforzi principali sono prevalentemente di compressione, la risposta del materiale è modellata attraverso una teoria elasto-plastica semplificata. Essa prevede una superficie di plasticizzazione scritta in termini di pressione equivalente  $p$  e sforzo deviatorico equivalente alla Von Mises  $q$ , oltre che hardening di tipo isotropo e legge di flusso associata [16].

Tale modello semplifica notevolmente il comportamento reale:

- La legge di flusso associata generalmente sovrastima la deformazione volumetrica inelastica.
- La superficie di plasticizzazione non riproduce accuratamente i valori ottenuti da prove triassiali poiché trascura la dipendenza dal terzo invariante degli sforzi.
- Quando il materiale è deformato oltre lo sforzo ultimo, l'ipotesi che la risposta elastica non sia influenzata dalle deformazioni permanenti non è realistica.
- Infine, quando il materiale è soggetto ad una pressione molto alta, esso mostra una risposta inelastica. Tale evidenza sperimentale non è descritta nel modello.

Può essere mostrato tuttavia che tali semplificazioni, necessarie per questioni di efficienza computazionale, garantiscono comunque risultati molto vicini a quelli ottenuti sperimentalmente rendendo il modello idoneo ai fini dell'elaborato. In particolare, assumere una legge di flusso associata porta ad una simmetria della matrice Jacobiana del modello costitutivo. Ciò fa sì che le equazioni di equilibrio globali non si traducano generalmente in un sistema di equazioni risolventi con matrice non simmetrica.

La risposta monoassiale prevista dal modello nella sua globalità è riassunta ed illustrata nella Figura 3-1.

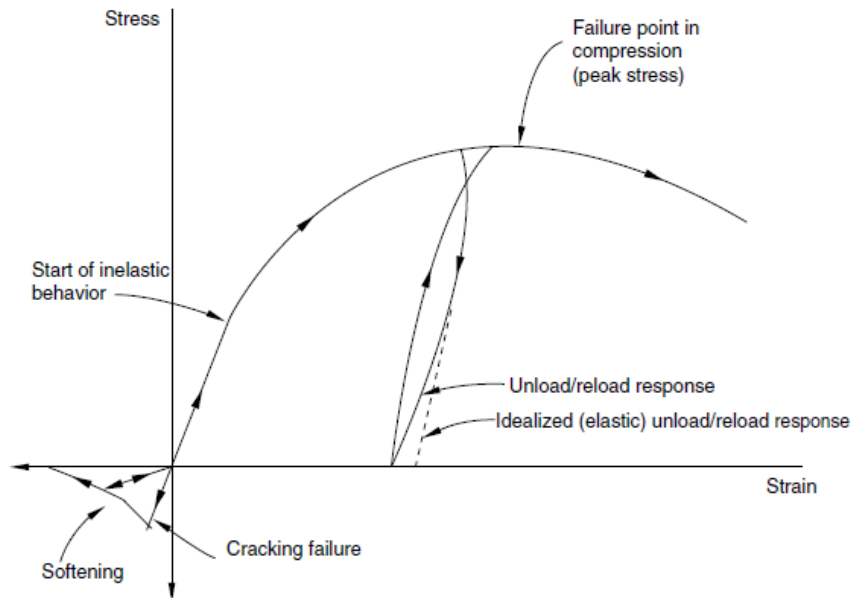


Figura 3-1- Comportamento monoassiale dei materiali lapidei

Quando si carica un provino a compressione, si evidenzia inizialmente una risposta elastica-lineare. Con il crescere dello sforzo nascono delle irreversibilità e la risposta del materiale è caratterizzata da una perdita di rigidità e di resistenza (risposta softening) fino al punto che il materiale non è più capace di assorbire sforzi e giunge a rottura.

Se il carico viene rimosso dopo che si sono sviluppate deformazioni plastiche, la fase di scarico è meno rigida della risposta elastica iniziale: l'elasticità è stata danneggiata. Questo effetto è ignorato nel modello dal momento che si assume che la prova studiata sia monotonica.

Quando un provino è soggetto ad una prova di trazione monoassiale, la risposta è elastica fino ad uno sforzo limite. Una volta raggiunto questo picco si apre una fessura che si propaga molto velocemente.

L'apertura delle fessure può essere rappresentata da una perdita di rigidità. La fessura non è considerata una deformazione permanente: infatti, se si sottopone a

compressione una zona precedentemente tesa e fessurata, la fessura si chiuderà completamente.

In uno stato di sforzo pluriassiale queste osservazioni sono generalizzate attraverso il concetto di superfici di rottura nello spazio degli sforzi (vedi Figura 3-2 e Figura 3-3). Queste superfici sono implementate sulla base di dati sperimentali ottenuti da Kupfer e Gerstle [17].

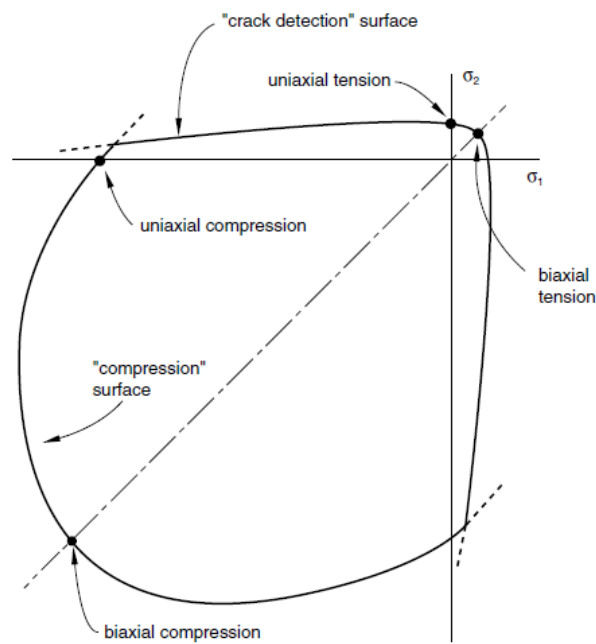


Figura 3-2 - Superficie di rottura in stato di sforzo piano

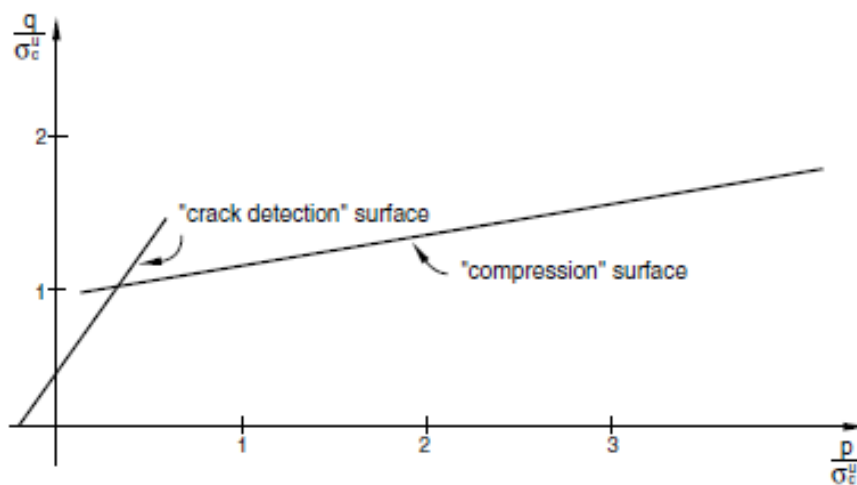


Figura 3-3 - Superficie di fessurazione nel piano p-q

Come anticipato, questo modello non nasce per predire la risposta di un materiale lapideo soggetto a carichi ciclici o, più in generale, la riduzione del modulo elastico causato dalle deformazioni inelastiche.

Tuttavia è probabile che in alcune applicazioni, anche in presenza di carichi monotonici, la traiettoria dello sforzo non sia perfettamente radiale; in questi casi il modello deve saper prevedere la risposta in maniera per lo meno approssimata. Quando gli sforzi principali sono prevalentemente di compressione il modello prevede una risposta inelastica basata su hardening di tipo isotropo della superficie di plasticizzazione. Come già detto, una volta rilevata la formazione di una frattura (attraverso la “Crack detection surface”), la sua direzione è memorizzata per i calcoli successivi; dunque il concetto di danneggiamento elastico orientato è utilizzato per descrivere la componente reversibile della risposta del materiale dopo la fessurazione.

Le componenti di sforzo che hanno attivato una fessura non vengono più incluse nella definizione della Crack detection surface per rilevare eventuali fessurazioni aggiuntive nello stesso punto. Le uniche fessure concesse nello stesso punto sono dunque quelle che si sviluppano in senso ortogonale alla prima fessura.

Riassumendo il modello consiste in una superficie di plasticizzazione che si attiva quando lo sforzo è prevalentemente di compressione insieme al concetto di elasticità con danno per rappresentare la perdita di rigidità e resistenza del materiale in regime *softening*. Una superficie di frattura indipendente rileva invece la nascita di una fessura quando lo sforzo è prevalentemente di trazione.

Sono ora presentati i dettagli del modello.

### 3.1.1 Decomposizione della deformazione incrementale

La deformazione incrementale è definita come:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{el} + d\varepsilon_c^{pl}$$

dove  $d\varepsilon$  è la deformazione incrementale totale,  $d\varepsilon^{el}$  è la deformazione incrementale elastica (che include le deformazioni legate all'apertura della fessura – un'ulteriore decomposizione verrà affrontata in seguito) e  $d\varepsilon_c^{pl}$  è la deformazione incrementale plastica legata alla superficie di plasticizzazione a compressione.

Assumendo che la componente elastica della deformazione sia sempre piccola, l'equazione si traduce in una decomposizione additiva della deformazione totale:

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon_c^{pl}$$

### 3.1.2 Plasticizzazione a compressione

La superficie di plasticizzazione a compressione è:

$$f_c = q - \sqrt{3}a_0p - \sqrt{3}\tau_c = 0$$

dove  $p$  è la pressione idrostatica:

$$p = -\frac{1}{3} \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}),$$

e  $q$  è lo sforzo deviatorico equivalente secondo Von Mises:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S})},$$

dove  $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} - p\boldsymbol{I}$  è lo sforzo deviatorico;  $a_0$  è una costante che dipende dal rapporto fra lo sforzo ultimo a compressione biassiale e quello a compressione monoassiale;  $\tau_c$  è l'intercetta della superficie di plasticizzazione con l'asse delle  $q$  per  $p = 0$ :  $\tau_c$  è dunque lo sforzo limite elastico nel caso di puro taglio quando tutte le componenti del tensore degli sforzi sono nulle eccetto  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_c$ , detto anche resistenza a taglio puro, o coesione.  $\tau_c$  è un parametro dipendente dall'incrudimento, che a sua volta è definito dal valore di  $\lambda_c$ : la relazione  $\tau_c(\lambda_c)$  è fornita dall'utente, come mostrato nel seguito.

L'espressione proposta per la superficie di plasticizzazione gode di un buon riscontro su dati sperimentali ed è descritta da una retta nel piano  $p - q$  che può variare al variare di  $\lambda_c$  mantenendosi parallela a se stessa. Questo non risulta in contraddizione con alcun risultato sperimentale ed implica che solo la costante  $a_0$  sia sufficiente a definire realisticamente la forma della superficie di plasticizzazione.

Il valore di  $a_0$  viene definito dai valori del limite elastico a compressione monoassiale ( $\sigma_c$ ) e di quello a compressione equibiassiale ( $\sigma_{bc}$ ), forniti in fase di input dall'utente.

Nel caso di compressione monoassiale  $p = -\frac{1}{3} \sigma_c$  e  $q = \sigma_c$ , e quindi per  $f_c = 0$ :

$$\frac{\tau_c}{\sigma_c} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{a_0}{3} \right);$$

In compressione equibiassiale  $p = \frac{2}{3} \sigma_{bc}$  e  $q = \sigma_{bc}$ , e quindi per  $f_c=0$ :

$$\frac{\tau_c}{\sigma_{bc}} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2a_0}{3} \right).$$

Definendo il rapporto  $\frac{\sigma_{bc}^u}{\sigma_c^u} = r_{bc}^\sigma$ , (richiesto come “*failure ratio 1*” da Abaqus), fra gli sforzi ultimi a compressione monoassiale ed equibiassiale, la costante  $a_0$  può essere calcolata combinando le due precedenti equazioni:

$$a_0 = \sqrt{3} \frac{1 - r_{bc}^\sigma}{1 - 2r_{bc}^\sigma}$$

Tipicamente nel caso del calcestruzzo  $r_{bc}^\sigma = 1.16$ .

La superficie di ‘compressione’ è mostrata in Figura 3-2 e Figura 3-3.



### ***Incrudimento***

L'incrudimento (o hardening) viene implementato definendo la relazione sforzo-deformazione plastica risultante da una prova a compressione monoassiale, ovvero la relazione  $\tau_c(\lambda_c)$ :

$$\tau_c = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{a_0}{3} \right) \sigma_c,$$

### ***Legge di flusso***

Il modello adotta una legge di flusso associata tale che se  $f_c = 0$  e  $d\lambda_c > 0$ ,

$$d\varepsilon_c^{pl} = d\lambda_c \left( 1 + c_0 \left( \frac{p}{\sigma_c} \right)^2 \right) \frac{\partial f_c}{\partial \sigma};$$

altrimenti  $d\varepsilon_c^{pl} = 0$

Nella definizione di  $d\varepsilon_c^{pl}$ ,  $c_0$  è una costante scelta in base al rapporto tra  $\varepsilon_{11}^{pl}$  in una prova a compressione biassiale e  $\varepsilon_{11}^{pl}$  in una prova di compressione monoassiale (identificato con  $r_{bc}^e$ ); questo valore è definito durante inserimento dei dati di input relativi alla superficie di rottura ed è chiamato in Abaqus *failure ratio 3* (tipicamente  $r_{bc}^e = 1.28$ ). Di seguito si descrive la procedura da cui deriva l'equazione che definisce  $c_0$  partendo da  $r_{bc}^e$  ed altre costanti.

Il gradiente del potenziale di plastico per la superficie di plasticizzazione a compressione è:

$$\frac{\partial f_c}{\partial \sigma} = \frac{\partial q}{\partial \sigma} - \sqrt{3}a_0 \frac{\partial p}{\partial \sigma}$$

E poiché:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\frac{1}{3} \mathbf{I}$$

e

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} = \frac{3 \mathbf{S}}{2 q}$$

allora

$$\frac{\partial f_c}{\partial \sigma} = \frac{3 \mathbf{S}}{2 q} + \sqrt{3} a_0 \frac{1}{3} \mathbf{I}.$$

Nel caso di compressione monoassiale ( $p = \frac{1}{3} \sigma_c$ ,  $q = \sigma_c$  e  $S_{11} = -\frac{2}{3} \sigma_c$ ), si ha:

$$(d\varepsilon_c^{pl})_{11}^c = d\lambda_c \left(1 + \frac{c_0}{9}\right) \left(\frac{a_0}{\sqrt{3}} - 1\right)$$

Integrando l'equazione si ottiene:

$$(\varepsilon_c^{pl})_{11}^c = \lambda_c \left(1 + \frac{c_0}{9}\right) \left(\frac{a_0}{\sqrt{3}} - 1\right)$$

Dunque  $\lambda_c$  è nota da  $(\varepsilon_c^{pl})_{11}^c$  e dalle costanti  $a_0$  e  $c_0$ ; una volta nota  $c_0$  è possibile derivare la relazione  $\tau_c(\lambda_c)$ .

Nel caso di compressione biassiale con entrambi gli sforzi principali non nulli pari a  $\sigma_{bc}$ , ( $p = \frac{2}{3} \sigma_{bc} = \frac{2}{3} r_{bc}^\sigma \sigma_c$ ,  $q = \sigma_{bc} = r_{bc}^\sigma \sigma_c$  e  $S_{11} = -\frac{1}{3} r_{bc}^\sigma \sigma_c$ ), la legge di flusso diventa:

$$(d\varepsilon_c^{pl})_{11}^{bc} = d\lambda_c \left(1 + \frac{4}{9} (r_{bc}^\sigma)^2 c_0\right) \left(\frac{a_0}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)$$

E' dunque possibile definire  $c_0$  da  $r_{bc}^\varepsilon$  ed altre costanti:

$$c_0 = \frac{r_{bc}^\varepsilon (\sqrt{3} - a_0) + \left(a_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{r_{bc}^\varepsilon (a_0 - \sqrt{3}) + (r_{bc}^\sigma)^2 (2\sqrt{3} - 4a_0)}$$

### 3.1.3 Previsione della fessurazione ed elasticità con danno

La fessurazione si manifesta in presenza di uno stato tensionale prevalentemente di trazione. Il *concrete smeared cracking model* adotta la *crack detection surface* nello spazio degli sforzi per determinare la formazione di una fessura ed il relativo orientamento. L'elasticità con danno viene in seguito usata per descrivere il comportamento post-critico del materiale.

In meccanica della frattura i materiali lapidei vengono definiti quasi-fragili. Essi sono caratterizzati da un comportamento post-critico, anche detto “tension stiffening”, governato da forze coesive residue. L'origine di tali forze può essere imputata ad interazione atomica, ingranamento degli aggregati ed interazione con le barre. Il *tension stiffening* può esser definito alla luce del criterio energetico della meccanica della frattura.

La teoria della frattura fragile proposta da Hilleborg (1976) si basa sul concetto di energia necessaria per aprire una fessura di area unitaria  $G_f$ . Definito lo sforzo di trazione in funzione dell'apertura della fessura tale valore può essere calcolato come:

$$G_f = \int \sigma_t du .$$

Valori tipici di  $G_f$  sono compresi fra 40 N/m per calcestruzzi standard e 120 N/m per calcestruzzi ad alta resistenza.

Aver assunto  $G_f$  come una proprietà del materiale fa sì che, eliminata la componente elastica dello spostamento  $u^{el}$ , la relazione fra lo sforzo e la rimanente parte degli spostamenti,  $u^{cr} = u - u^{el}$ , è fissa indipendentemente dalle dimensioni del provino. Per esempio, si consideri una singola fessura che si sviluppa all'interno di un provino a cui è imposto uno spostamento:  $u^{cr}$  è lo spostamento relativo fra le due facce della fessura e non cambia usando un provino più lungo o più corto. Dunque, una parte importante del comportamento a trazione dei materiali lapidei è definito in termini di relazione sforzo-spostamento.

## ***Decomposizione della deformazione incrementale***

La deformazione incrementale elastica viene decomposta come:

$$d\varepsilon^{el} = d\varepsilon_d^{el} + d\varepsilon_t^{pl},$$

dove  $d\varepsilon^{el}$  è la deformazione incrementale totale per il problema dello studio della fessurazione,  $d\varepsilon_d^{el}$  è la deformazione incrementale elastica e  $d\varepsilon_t^{pl}$  la deformazione incrementale plastica associata alla fessurazione.

## ***Plasticizzazione***

La *crack detection surface* è la linea di Coulomb:

$$f_t = \hat{q} - \left(3 - b_0 \frac{\sigma_t}{\sigma_t^u}\right) \hat{p} - \left(2 - \frac{b_0}{3} \frac{\sigma_t}{\sigma_t^u}\right) \sigma_t = 0$$

dove  $\sigma_t^u$  è lo sforzo di fessurazione nel caso di trazione monoassiale e  $b_0$  è una costante definita dal valore dello sforzo di rottura a trazione,  $\sigma_I$ , in una condizione di sforzo biassiale quando l'altro sforzo principale non-nullo,  $\sigma_{II}$ , raggiunge il valore di sforzo ultimo a compressione monoassiale,  $\sigma_c^u$ .  $\sigma_t(\lambda_t)$  è un parametro che tiene conto dell'incrudimento ( $\sigma_t$  è lo sforzo a trazione monoassiale equivalente). L'hardening è definito da  $\lambda_t$ , attraverso la relazione  $\sigma_t(\lambda_t)$  implementata nella definizione del *tension stiffening*. (vedi Figura 3-4).

I valori di  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  sono definiti in maniera analoga a  $p$  e  $q$ , escludendo le componenti di sforzo ortogonali a fessure aperte.

Questa superficie ha una forma matematica molto semplice ma trova un notevole riscontro nei risultati sperimentali.

Il valore  $b_0$  si ottiene come segue. Fra i dati di input relativi alla superficie di rottura vi è la definizione di  $f$ , (*failure ratio 4* nel modello in Abaqus) che rappresenta il rapporto fra gli sforzi principali quando, in una prova di sforzo piano, uno degli sforzi principali raggiunge il valore  $\sigma_I = -\sigma_c^u$  e l'altro sforzo principale non nullo ha il valore di  $\sigma_{II} = f \sigma_t^u$ . Il *failure ratio 2* è invece  $r_t^\sigma$ , dove:

$$\sigma_t^u = r_t^\sigma \sigma_c^u$$

In condizioni biassiali la fessura si formerà dunque nel punto in cui gli sforzi principali saranno  $-\sigma_c^u$ ,  $f \sigma_t^u$  e 0. Per questi valori

$$p = \frac{1}{3} (1 - f \sigma_t^u) \sigma_c^u$$

e

$$q = \sigma_c^u \sqrt{1 + (f r_t^\sigma)^2 + f r_t^\sigma}$$

Dunque, con  $\sigma_t = \sigma_t^u$ ,

$$\begin{aligned} f_t &= \sigma_c^u \sqrt{1 + (f r_t^\sigma)^2 + f r_t^\sigma} - \frac{1}{3} (1 - f r_t^\sigma) \sigma_c^u (3 - b_0) - (2 - \frac{b_0}{3}) r_t^\sigma \sigma_c^u \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ed infine:

$$b_0 = 3 \frac{1 + (2 - f) r_t^\sigma - \sqrt{1 + (f r_t^\sigma)^2 + f r_t^\sigma}}{1 + r_t^\sigma (1 - f)}$$

### ***Legge di flusso***

La legge di flusso adottata dal modello è di tipo associato. Se  $f_t = 0$  e  $d\lambda_t > 0$ ,

$$d\varepsilon_t^{pl} = d\lambda_t \frac{\partial f_t}{\partial \sigma}$$

altrimenti  $d\varepsilon_t^{pl} = 0$ .

## Softening

In fase di input il tension stiffening viene definito il valore dello sforzo,  $\sigma_t^u$ , in una prova a trazione monoassiale e lo spostamento in corrispondenza del quale si annullano gli sforzi,  $u_0$ , come evidenziato nella Figura 3-4 sottostante.

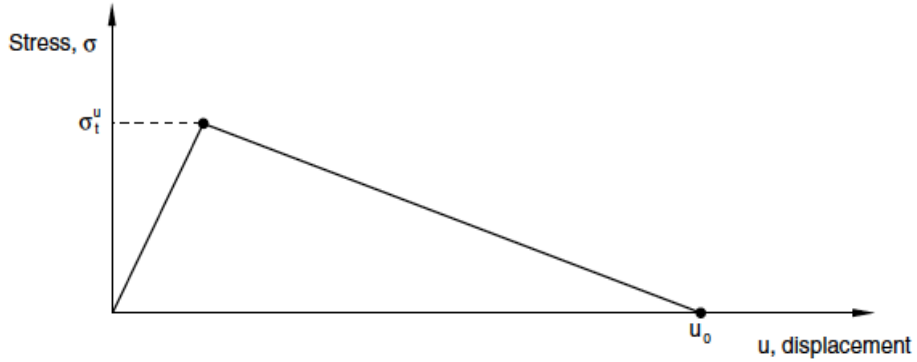


Figura 3-4- Modello di fessurazione basato sull'energia di frattura

Usando la definizione di  $f_t$ , dalla legge di flusso si ricava:

$$d\varepsilon_t^{pl} = d\lambda_t \left( \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{q} + \left( 1 - \frac{b_0}{3} \frac{\sigma_t}{\sigma_t^u} \right) \mathbf{I} \right).$$

A trazione monoassiale  $S_{11} = \frac{2}{3} \sigma_t$  e  $q = \sigma_t$ . Dunque in questo caso:

$$(d\varepsilon_t^{pl})_{11} = d\lambda_t \left( 2 - \frac{b_0}{3} \frac{\sigma_t}{\sigma_t^u} \right);$$

e di conseguenza

$$d\lambda_t = \frac{(d\varepsilon_t^{pl})_{11}}{\left( 2 - \frac{b_0}{3} \frac{\sigma_t}{\sigma_t^u} \right)}$$

Integrando l'equazione si ottiene così il valore di  $\lambda_t$  da  $(d\varepsilon_t^{pl})_{11}$  e si ottiene la relazione  $\sigma_t(\lambda_t)$ .

## ***Elasticità con danno***

Una volta individuata la fessura, viene usato il concetto di elasticità di danno per modellare il materiale fessurato. La legge di elasticità è scritta nella forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el},$$

dove  $\mathbf{D}$  è il tensore elastico del materiale.

Sia  $\alpha$  la direzione della fessura, con il corrispondente sforzo diretto  $\sigma_{\alpha\alpha}$  e deformazione elastica diretta  $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{el}$ .

La generica componente  $D_{\alpha\alpha\beta\gamma}$  è la solita costante elastica del materiale se  $\varepsilon_{\alpha\alpha} \leq 0$ . Se invece  $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{open} > \varepsilon_{\alpha\alpha} > 0$ ,

$$D_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha\alpha}^{open}}{\varepsilon_{\alpha\alpha}^{open}}$$

dove  $\sigma_{\alpha\alpha}^{open}$  è lo sforzo corrispondente alla deformazione  $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{open}$  (come definito dal tension stiffening), con

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{open} = \max_{\text{over history}} (\varepsilon_{\alpha\alpha}^{el}).$$

Se  $\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{\alpha\alpha}^{open}$ ,

$$D_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = \frac{d\sigma_{\alpha\alpha}^{open}}{d\varepsilon_{\alpha\alpha}^{open}}$$

che segue la legge descritta dal tension stiffening.

Il modello trascura l'effetto del coefficiente di Poisson per le fessure aperte: per  $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{el} > 0$ ,  $D_{\alpha\alpha\beta\gamma} = 0$  con  $\beta \neq \alpha$ ,  $\gamma \neq \alpha$ .

I termini legati al taglio nell'elasticità associata a fessure esistenti sono:

$$D_{\alpha\beta\alpha\beta} = \hat{G}, \quad \beta \neq \alpha$$

dove  $\hat{G} = \rho^{close} G$  per  $\varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} < 0$ , e dove  $\hat{G} = \rho^{open} G$  per  $\varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} > 0$ . In queste espressioni  $G$  è il modulo di taglio,  $\rho^{close}$  è una costante definita nella fase di input relativa alla *shear retention*<sup>3</sup> (Figura 3-5) e  $\rho^{open}$  è una funzione lineare di  $\bar{\varepsilon}^{el}$ ,  $\rho^{open} = \left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}^{el}}{\varepsilon^{max}}\right)$ , ed è anch'esso definito dai valori inseriti nello *shear retention*.  $\bar{\varepsilon}^{el} = \langle \varepsilon_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}^{el} \rangle + \langle \varepsilon_{\beta\beta}^{el} \rangle$ , dove  $\langle \cdot \rangle$  sono le parentesi di Macauley tali che

$$\langle f \rangle = \begin{cases} f & \text{se } f \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per una funzione  $f$  qualsiasi.

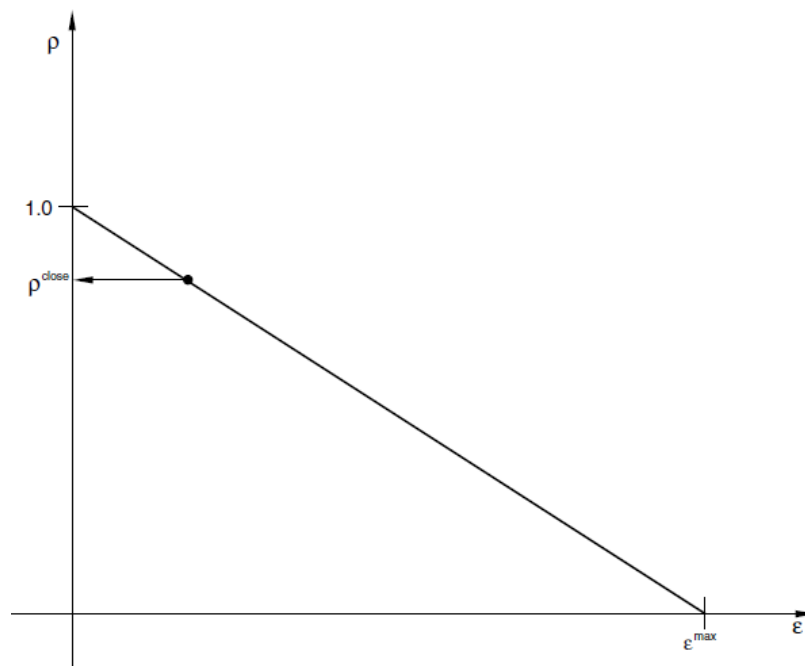


Figura 3-5- *Shear retention*

<sup>3</sup> Come il materiale si fessura, la sua rigidità a taglio si riduce progressivamente. Questo fenomeno è chiamato appunto *shear retention*.



## ***Fessurazione***

Quando la *crack detection surface* ( $f_t$ ) viene attivata, il modello assume si sia formata una fessura. La direzione della fessura,  $\mathbf{n}_\alpha$ , sarà la direzione della parte del massimo incremento di deformazione principale plastico coniugato alla *crack detection surface*,  $\Delta\varepsilon_t^{pl}$ , ortogonale alle direzioni di ogni altra fessura preesistente nello stesso punto. Tale orientazione è memorizzata per i calcoli seguenti, che saranno svolti in un sistema di coordinate locali tale che una delle direzioni del sistema sia proprio  $\mathbf{n}_\alpha$ . La fessurazione non è reversibile nel senso che, una volta formatasi in un punto, essa permane in tutti i calcoli successivi. In seguito la fessura entra nei calcoli attraverso l'elasticità danneggiata, come descritto nel relativo paragrafo. Infine, se la deformazione elastica lungo una fessura è di trazione, gli invarianti usati nella *crack detection surface* sono definiti in un sottospazio degli sforzi in cui tutte le componenti di sforzo associate alla direzione della fessura preesistente sono trascurate, come visto nel paragrafo dedicato. Questo implica che non possano formarsi più di tre fessure in un punto.

## 3.2 Materiali metallici

Il comportamento delle barre in acciaio può essere ragionevolmente definito tramite un legame elasto-plastico perfetto. Questo significa che una volta raggiunta la tensione di snervamento, pari a 450 MPa, si considera l'acciaio in grado di assorbire ulteriori deformazioni, ora di tipo irreversibile, mantenendo lo sforzo costante.

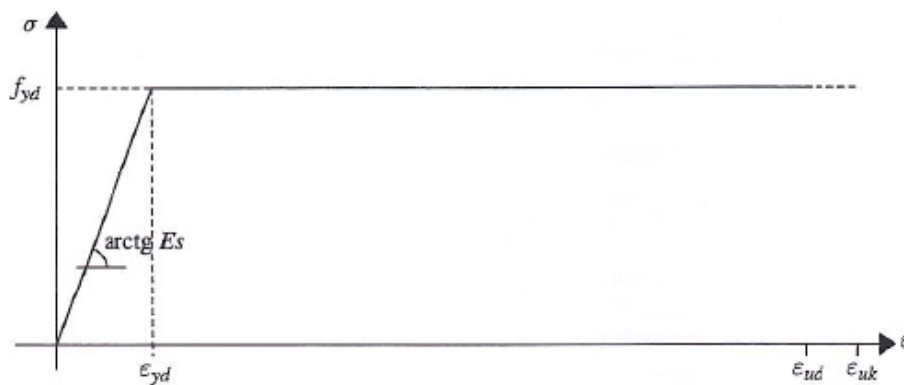


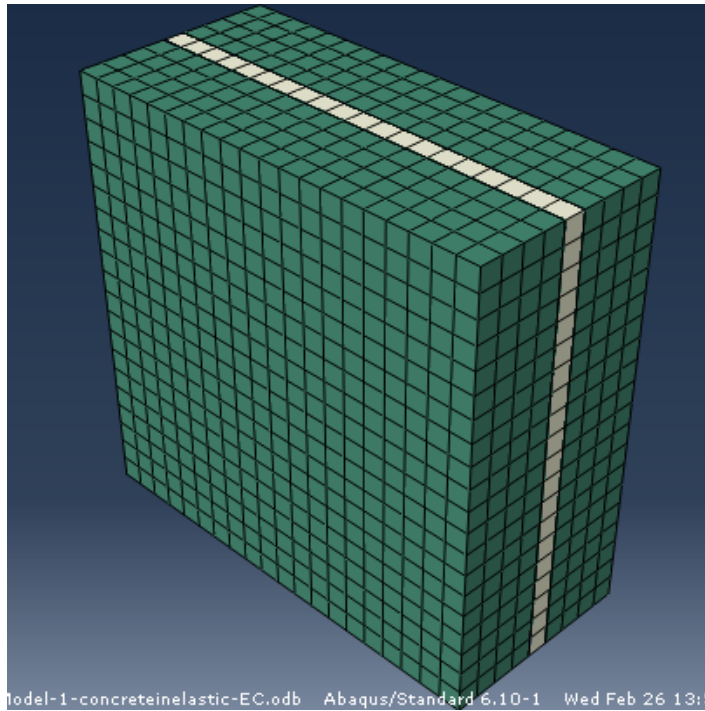
Figura 3-6 - Comportamento elasto - plastico perfetto dell'acciaio

## **4. ANALISI NUMERICHE PRELIMINARI SU ELEMENTI SEMPLICI**

Prima di utilizzare i modelli costitutivi implementati in Abaqus per la simulazione delle prove sperimentali descritte nel capitolo 2, è stato ritenuto opportuno svolgere delle analisi preliminari mirate a verificarne il buon funzionamento su elementi semplici che presentassero disomogeneità nei materiali.

## 4.1 Descrizione modello

Il primo provino studiato è composto da due blocchi di calcestruzzo pieni spessi 20 mm e da uno strato di malta centrale di 5 mm. Il provino nel complesso ha dimensioni 100x100x45 mm (vedi Figura 4-1).



*Figura 4-1- Mesh ad elementi finiti di un provino composto da due blocchi di calcestruzzo ed uno strato di malta*

L'aderenza perfetta fra gli strati è garantito attraverso l'operatore *tie* nel modulo *interaction* di Abaqus. La superficie interna dei blocchi in calcestruzzo è stata definita come *master surface* mentre la corrispondente superficie di malta come *slave surface*.

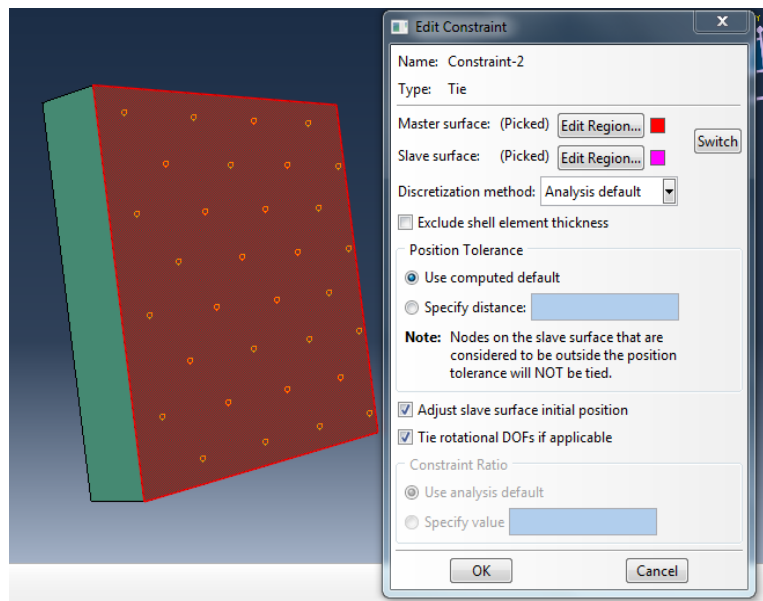


Figura 4-2- Collegamento tipo tie utilizzato

Sul provino sono state effettuate le seguenti prove:

- Trazione semplice
- Compressione semplice
- Flessione semplice

Per la mesh sono stati scelti elementi continui 3D (chiamati *solid* in Abaqus) del tipo C3D8R ad interpolazione lineare [18]. Data la semplice geometria e le piccole dimensioni del provino è stato possibile definire una mesh piuttosto fitta di elementi di forma cubica con lato pari a 5mm.

Per l'analisi è stata adottata una procedura *static, general*. In seguito tuttavia si propenderà per un'analisi alla *Riks*, più indicata per lo studio di comportamenti anelastici che possono presentare fenomeni di *snap-back*.

## 4.2 Proprietà dei materiali

### Malta

Il comportamento in fase elastica della malta è descritto dalle due costanti elastiche  $E$ ,  $\nu$ . In questa prima fase, in assenza di dati più precisi, tali valori vengono ipotizzati:

- Modulo Elastico: 12800 MPa
- Coefficiente di Poisson: 0.1

Il comportamento in fase anelastica è invece modellato con il *concrete smeared cracking* descritto nel capitolo 3.

I parametri sono inseriti rielaborando, secondo le specifiche offerte dall'Eurocodice 2 [19] [20] per l'analisi non lineare, i dati di partenza relativi alla resistenza della malta nelle prove sperimentali svolte dalla *Senini*:

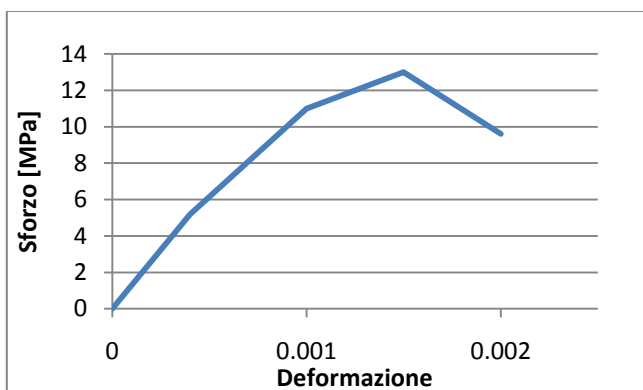


Figura 4-3- Curva sforzo deformazione per la malta in compressione monoassiale

Sforzo a compressione [MPa]	Deformazione plastica
5.1	0
11	0.00015
13	0.000993
9.6	0.0014

Tabella 4-1 – Parametri caratterizzanti il comportamento a compressione

Tabella 4-4- Shear retention

$\rho^{\text{close}}$	$\epsilon^{\text{max}}$
0	$10^{-4}$

Tabella 4-2 - Tension stiffening

$u_0$ [mm]
0.04

Tabella 4-3- Failure ratios

Ratio 1	Ratio 2	Ratio 3	Ratio 4
1.16	0.19	1.28	0.333

### *Calcestruzzo*

Il calcestruzzo è stato inizialmente ipotizzato perfettamente elastico. Il comportamento è quindi descritto dal modulo di Young e dal coefficiente di Poisson:

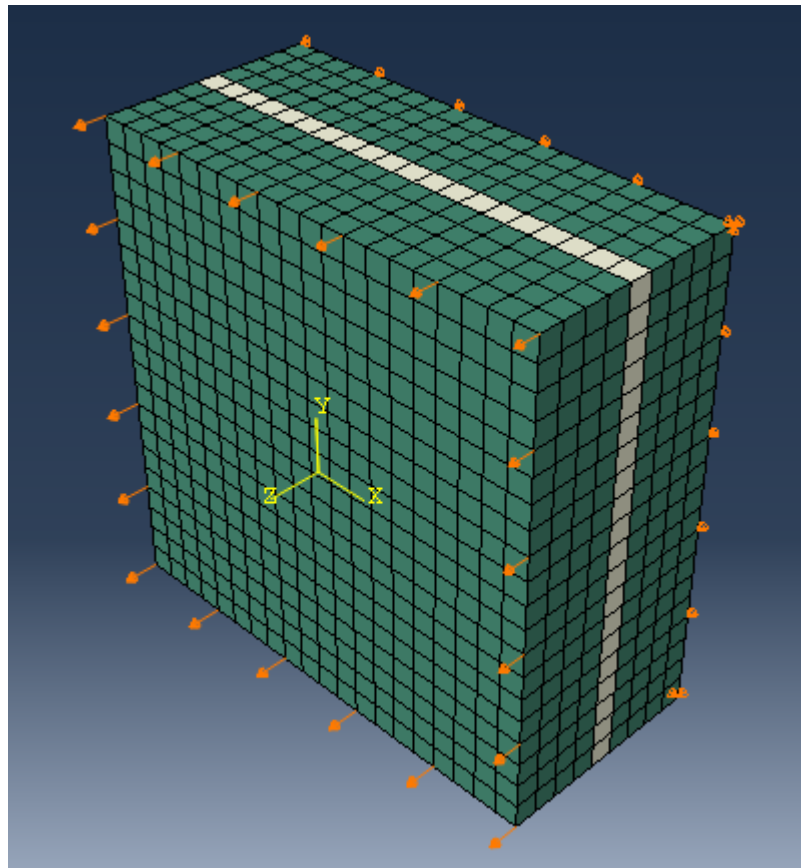
- Modulo Elastico: 33000 MPa
- Coefficiente di Poisson: 0.2

### 4.3 Trazione semplice

Come prima analisi è stata scelta la prova a trazione semplice imponendo uno spostamento sulla superficie superiore  $z = 45 \text{ mm}$  (vedi Figura 4-4).

Gli spostamenti verticali della superficie opposta ( $z = 0$ ) sono invece bloccati.

Le traslazioni nelle altre direzioni sono state bloccate solo in due nodi, permettendo così la libera deformazione trasversale del provino.



*Figura 4-4 - Provino soggetto a trazione semplice*

L'analisi procede con la completa fessurazione dello strato di malta confermando quanto atteso da un'analisi a spostamento imposto. Nella Figura 4-7 sono chiaramente distinguibili le tre fasi della prova:



- Deformazioni elastiche in fase di carico
- Ramo di softening in fase di scarico
- Completa fessurazione con deformazioni progressive a sforzo nullo

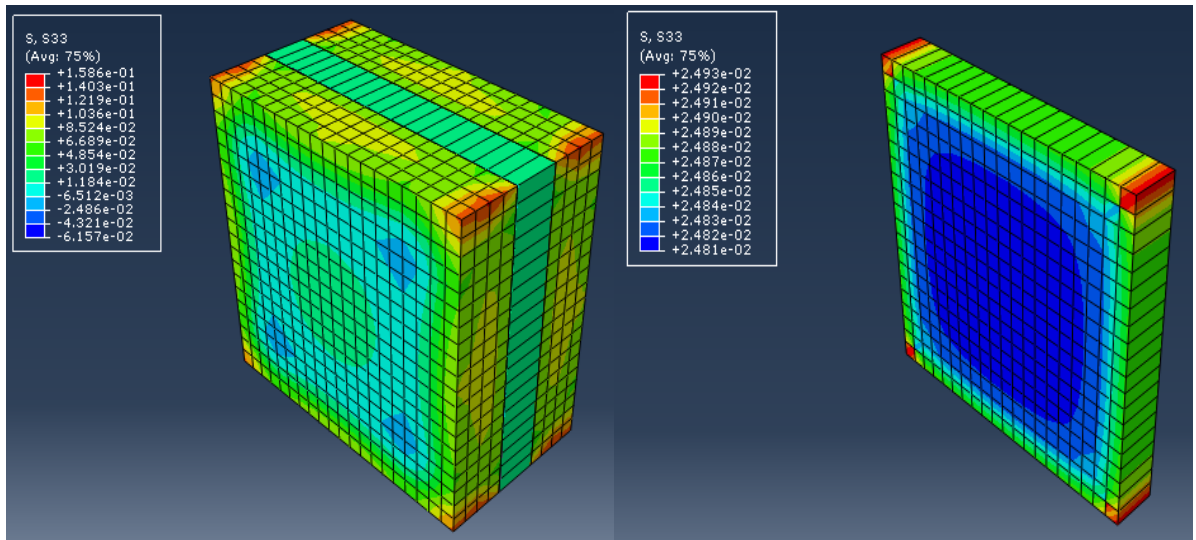


Figura 4-5 - Sforzo assiale al collasso- provino intero

Figura 4-6- Sforzo assiale al collasso- strato di malta

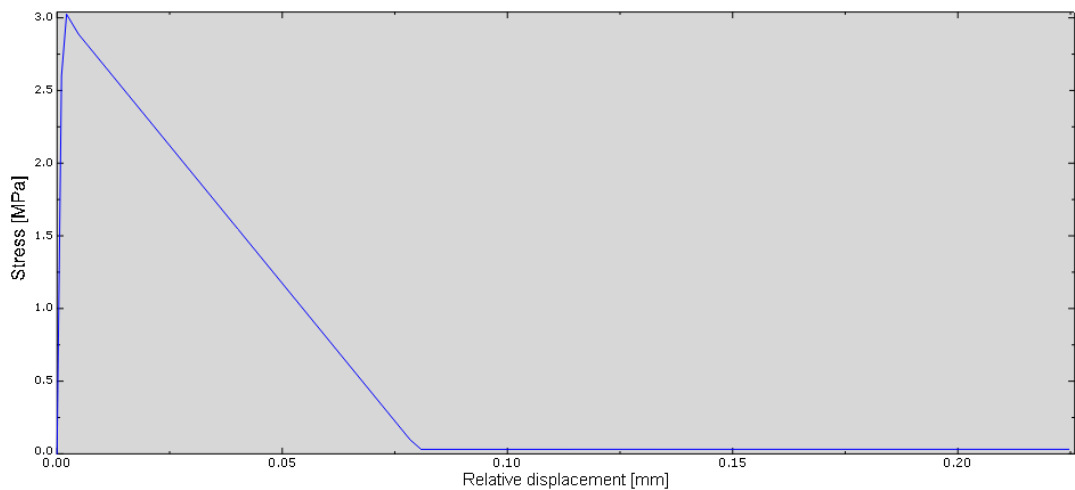
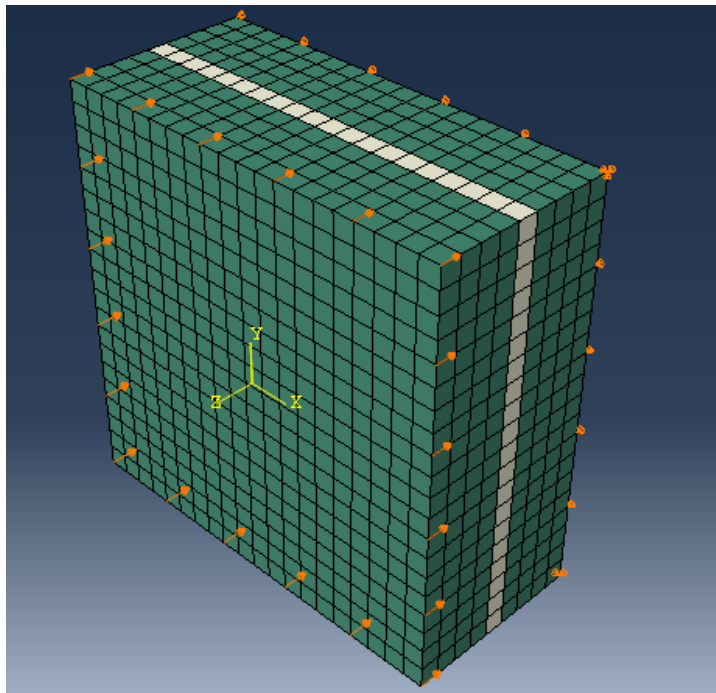


Figura 4-7 - Curva carico – spostamento prova trazione semplice

## 4.4 Compressione semplice

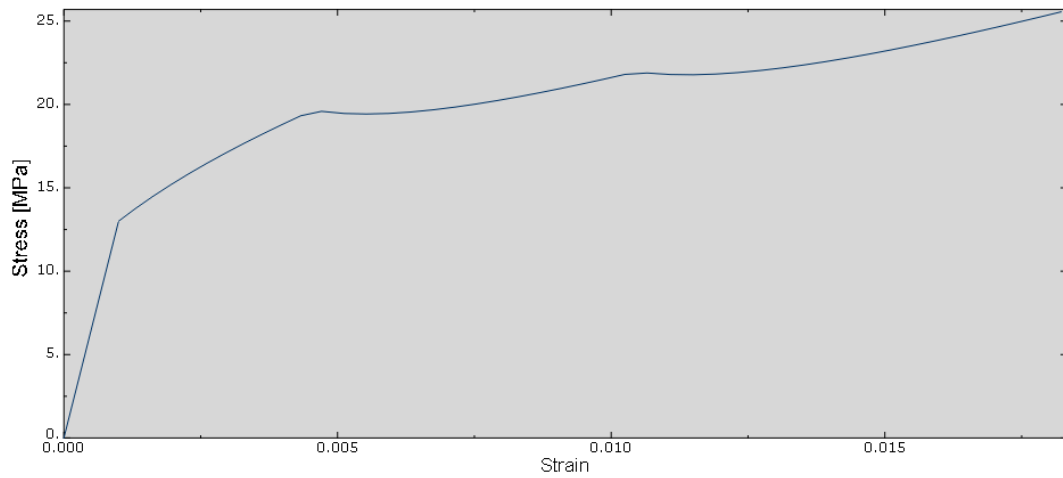
### 4.4.1 Primo tentativo

La modalità di applicazione del carico è la medesima descritta nel caso della trazione semplice (vedi paragrafo 4.3) eccetto per il segno dello spostamento imposto (vedi Figura 4-8).



*Figura 4-8 - Provino soggetto a compressione semplice*

Come evidente dalla Figura 4-9 i risultati di una prova così implementata non sono soddisfacenti essendo evidentemente sovrastimato lo sforzo sostenuto dallo strato di malta centrale.



*Figura 4-9 - Curva sforzo-deformazione nello strato di malta*

Un tale risultato è da imputare all'eccessivo confinamento offerto dai blocchi in calcestruzzo il cui comportamento è stato definito puramente elastico lineare. L'effetto benefico che ne deriva è superiore a quello atteso nella realtà, dove si prevede la plasticizzazione anche del calcestruzzo.

Per ben simulare il comportamento a compressione di un provino siffatto risulta dunque necessaria l'introduzione di un legame elasto-plastico anche per il materiale calcestruzzo.

#### 4.4.2 Implementazione proprietà anelastiche calcestruzzo

Anche in questo caso viene adottato il modello *concrete smeared cracking* descritto nel paragrafo 3.1. Si riportano di seguito le tabelle contenenti i parametri inseriti rielaborando i dati di partenza, relativi alla resistenza del calcestruzzo nelle prove sperimentali svolte dalla *Senini*, secondo le specifiche offerte dall'Eurocodice 2 per l'analisi non lineare.

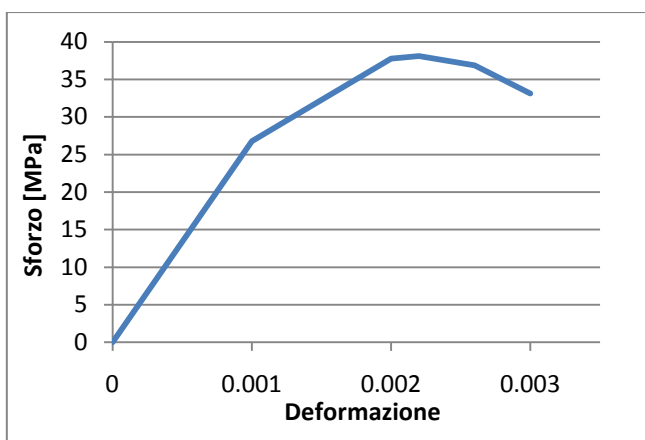


Figura 4-10- Curva sforzo deformazione per il calcestruzzo in compressione monoassiale

Sforzo a compressione [MPa]	Deformazione plastica
26.7	0
37.7	0.000588
38	0.00077
36.75	0.00122
33.01	0.00195

Tabella 4-5- Parametri caratterizzanti il comportamento a compressione

Tabella 4-7 – Failure ratios

Ratio 1	Ratio 2	Ratio 3	Ratio 4
1.16	0.19	1.28	0.333

Tabella 4-6- Tension stiffening

$u_0$ [mm]
0.05

## Esito prova

L'analisi effettuata a seguito di tal modifica risulta finalmente soddisfacente, come testimoniato dai grafici riportati.

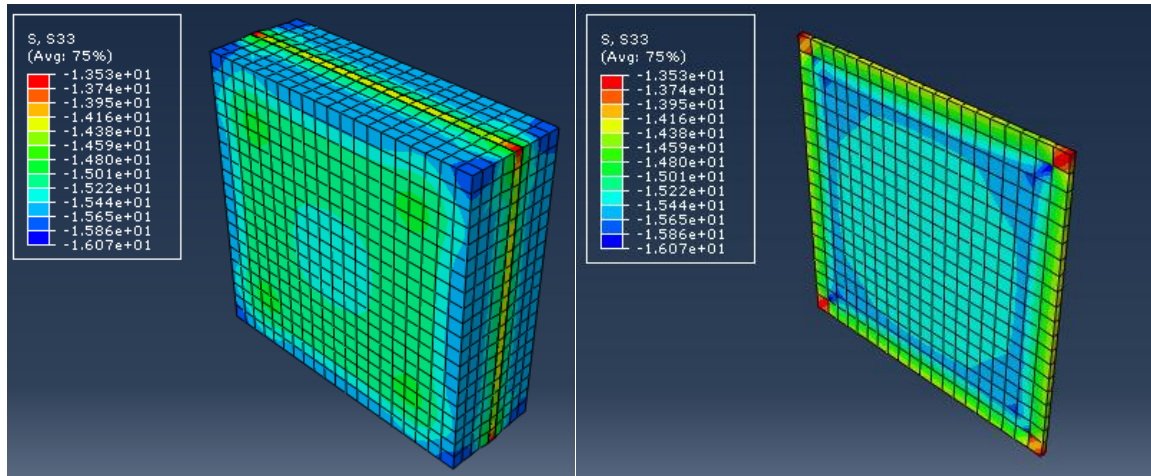


Figura 4-11 - Sforzo assiale - modello completo    Figura 4-12 - Sforzo assiale – strato di malta

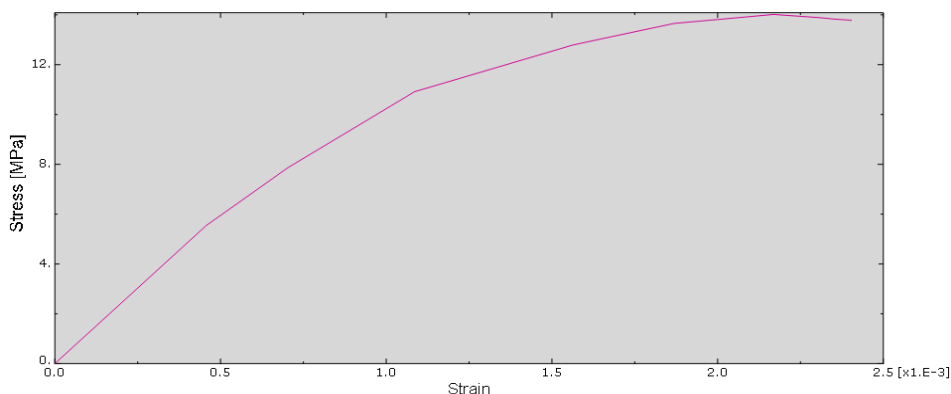
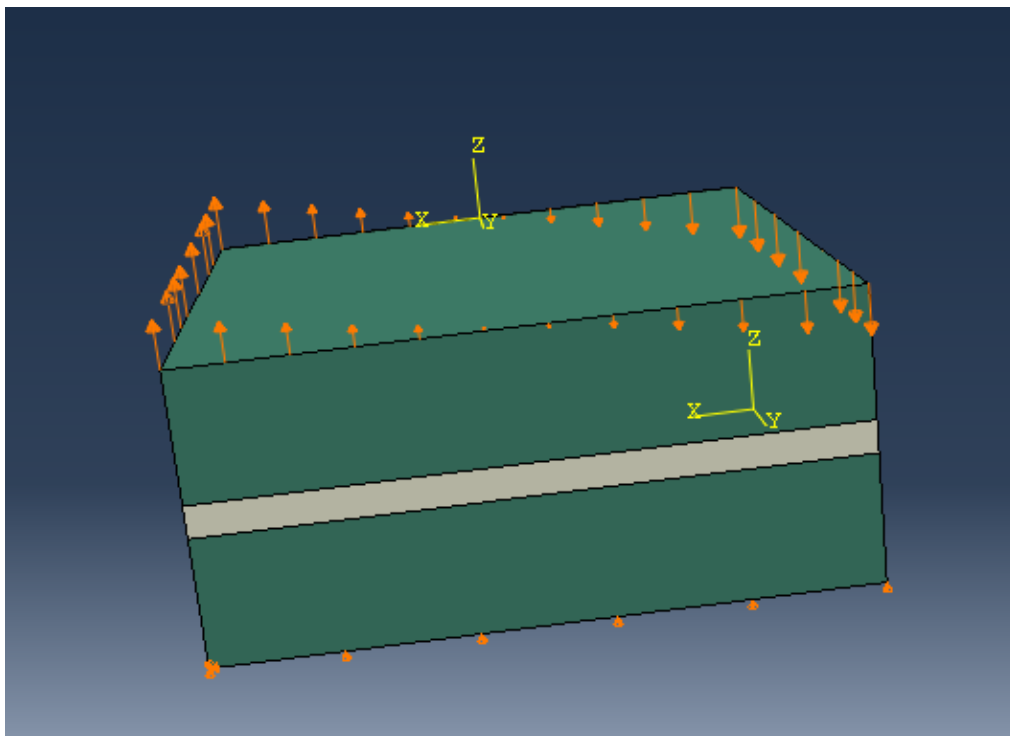


Figura 4-13 - Curva sforzo-deformazione nello strato di malta

Dalla Figura 4-12 si osserva come lo sforzo assiale non superi la resistenza a compressione semplice della malta (13 MPa) solo agli angoli dello strato centrale, mentre all'interno tale valore viene superato. Il fenomeno è ancora da imputare allo stato di sforzo triassiale benefico derivante dal confinamento operato dai blocchi di calcestruzzo. Tale effetto, non trascurabile ma comunque minore se confrontato con i valori osservati nell'analisi precedente, è a questo punto verosimile e giustifica un incremento della resistenza del provino rispetto a quella monoassiale della sola malta.

## 4.5 Flessione semplice

L'analisi viene effettuata imponendo una rotazione rigida di una faccia rispetto all'altra attorno ad un asse di simmetria di una delle basi (asse  $y$  in Figura 4-14). Le condizioni al contorno sulla superficie inferiore rimangono le stesse descritte per la prova di trazione semplice (par. 4.3).



*Figura 4-14 - Provino soggetto a flessione semplice*

I risultati osservati sono soddisfacenti, sviluppandosi la fessurazione nelle fibre tese e plasticizzazione nelle fibre più compresse, come mostrato in Figura 4-17 e Figura 4-18.

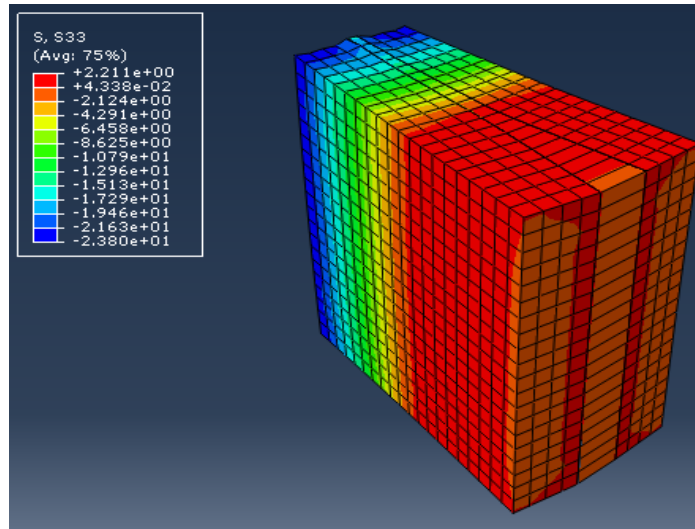


Figura 4-15 - Sforzo assiale al collasso -  
Modello completo

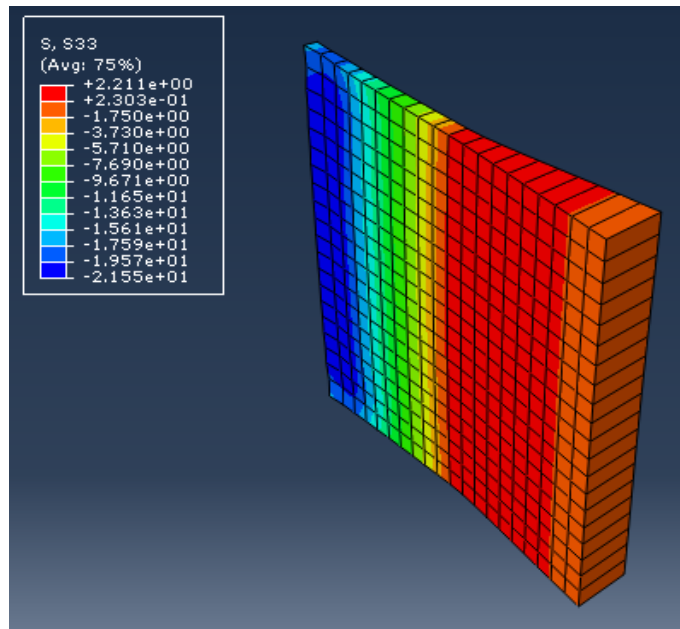


Figura 4-16 - Sforzo assiale al collasso -  
Strato di malta

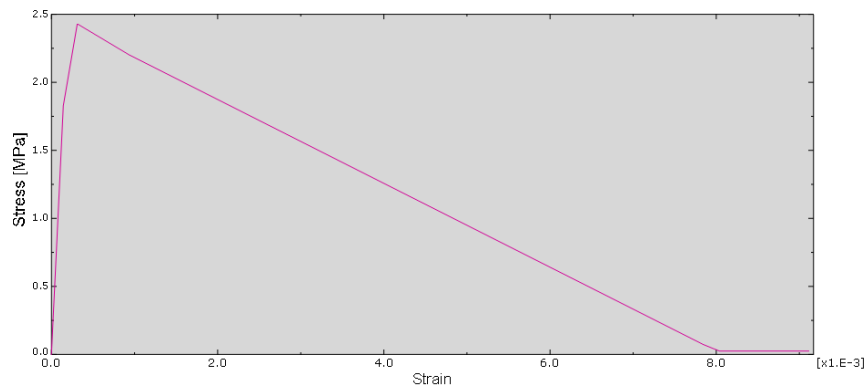


Figura 4-17 - Curva sforzo-deformazione fibre tese nello strato di malta

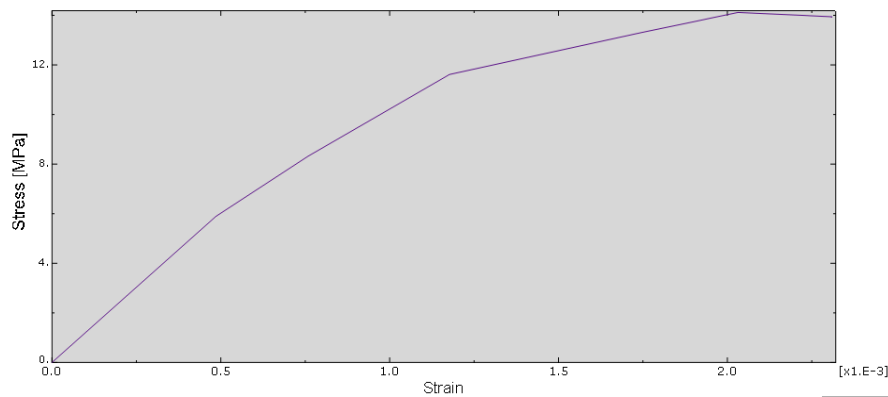


Figura 4-18- Curva sforzo-deformazione fibre compresse nello strato di malta

Imponendo sulla superficie superiore uno spostamento proporzionale alla distanza dal centro si vincola di fatto l'asse centrale rispetto agli spostamenti verticali.

Ne risulta che il centro di istantanea rotazione e di conseguenza l'asse neutro rimangono fissi anche in seguito alla parzializzazione della sezione.

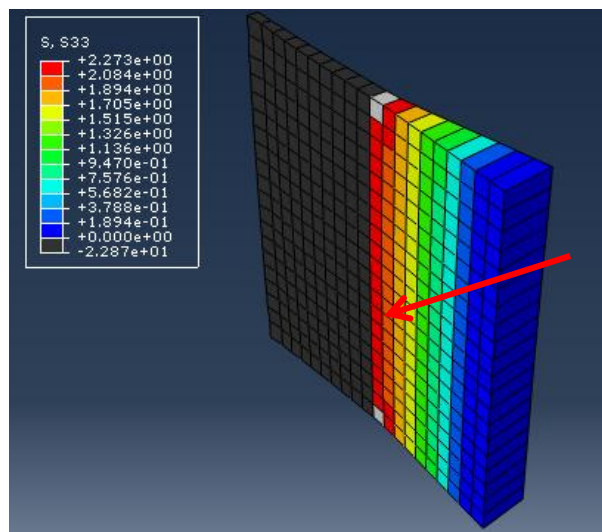


Figura 4-19 - Elementi soggetti ad uno sforzo di trazione in fase di collasso



## 4.6 Flessione semplice con *reference point*

Al fine di produrre un'analisi che preveda la progressiva parzializzazione della sezione si dispone un *reference point* collegato alla superficie superiore tramite un accoppiamento cinematico (*kinematic coupling* nel modulo *interaction* di Abaqus). La rotazione imposta nel *reference point* viene così trasmessa alla sommità del provino senza però impedirne la traslazione verticale.

L'adozione del *reference point* ha anche il fine facilitare l'estrapolazione della curva momento – rotazione, essendo concentrate in unico punto tutte le informazioni relative alle condizioni a contorno.

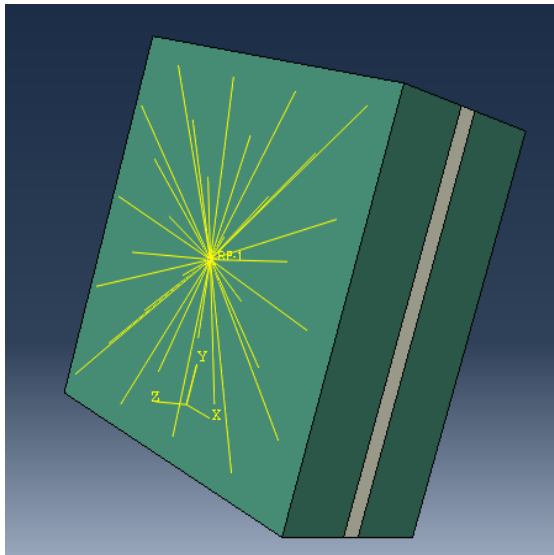


Figura 4-20- Accoppiamento Cinematico

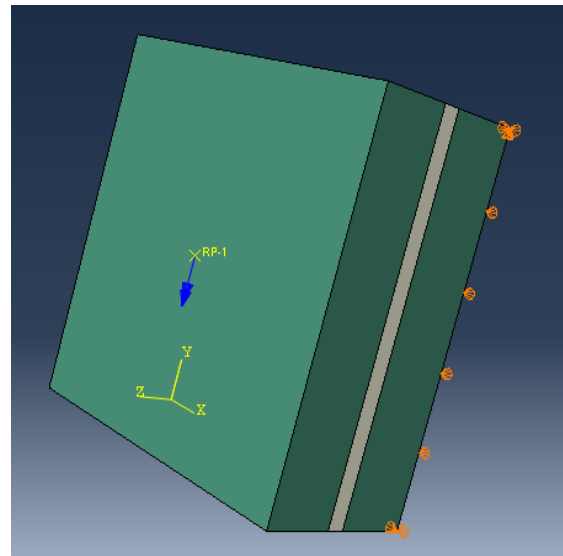


Figura 4-21- Rotazione imposta nel Reference Point

I risultato globale sintetizzato dalla Figura 4-22 ricalca quanto atteso da una prova a flessione semplice.

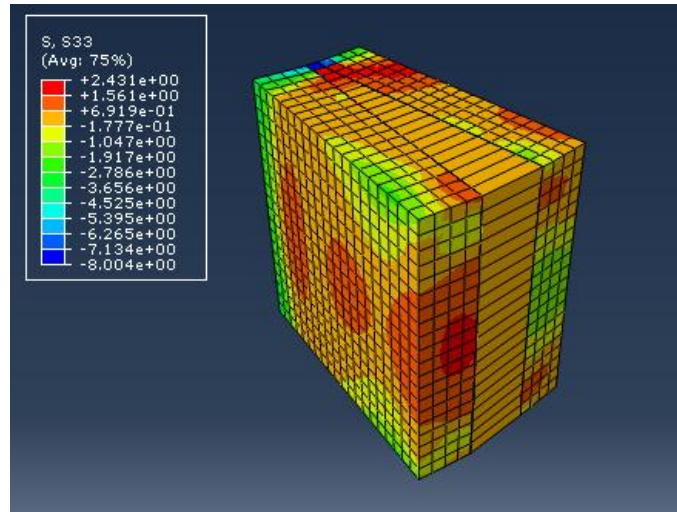


Figura 4-22- Sforzo assiale - Modello completo

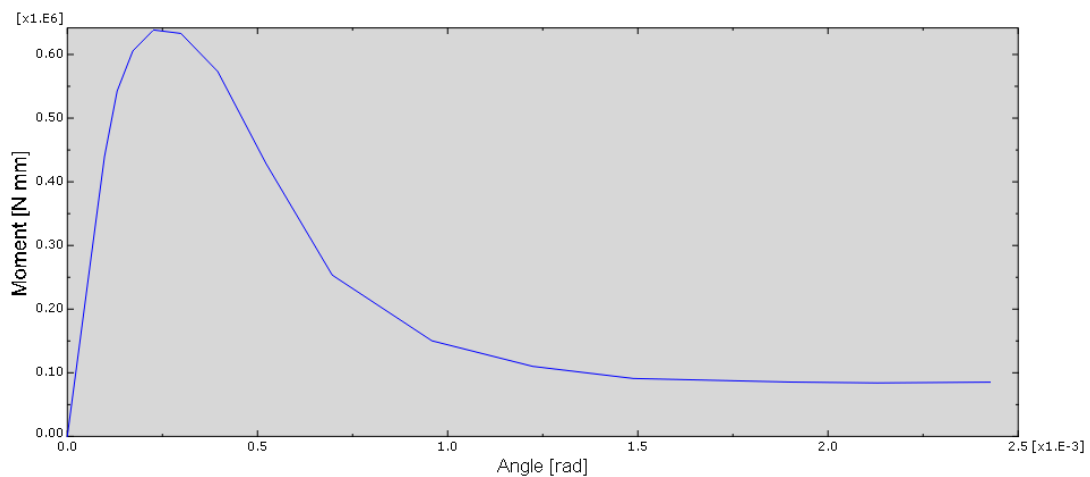
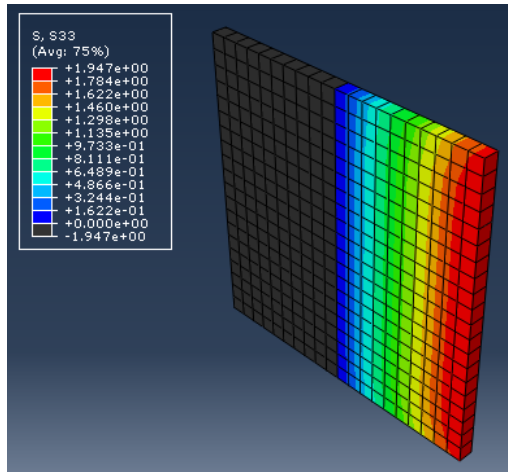


Figura 4-23 - Curva momento – rotazione prova di flessione

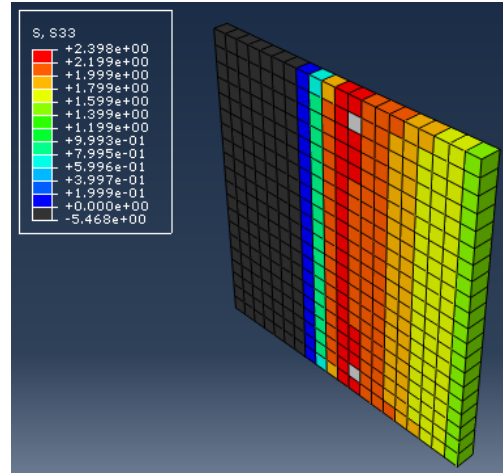
L'andamento descritto in Figura 4-23 mostra tutte le fasi di una prova di flessione su un provino non armato:

- Fase elastica iniziale con malta integra
- Prima fessurazione fino al raggiungimento del momento massimo
- Fase di scarico descritta da un ramo di softening discendente, come atteso per una prova su materiali quasi-fragili.

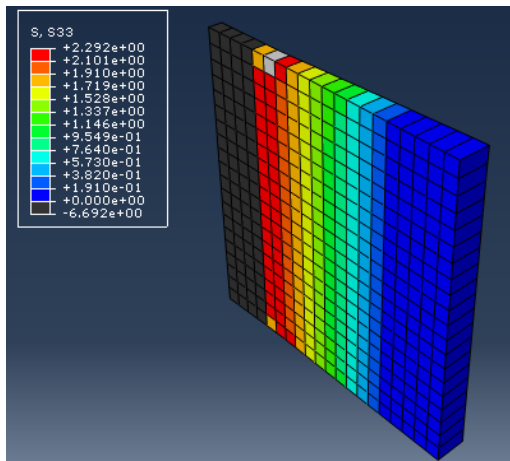
Come anticipato, si osserva una traslazione dell'asse neutro verso le fibre compresse con il procedere della prova:



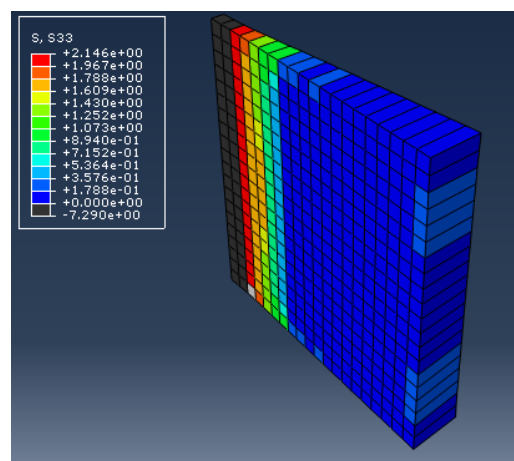
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4-24 – Sforzo assiale relativo ad un rotazione imposta di radianti:

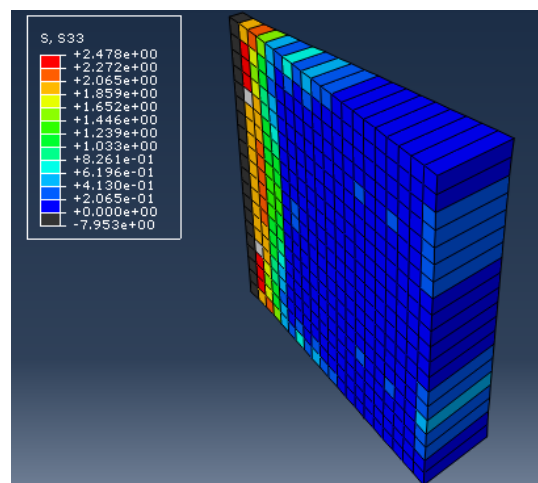
(a)  $7.81E-005$

(b)  $0.000226$

(c)  $0.000522$

(d)  $0.00122$

(e)  $0.00213$



(e)

## 4.7 Flessione semplice di un provino semplice con armatura di rinforzo

Il provino in oggetto ha una sezione come quella del pannello al centro delle campagne sperimentali svolte dalla Senini, ma è alto 45 mm ( $2 \times 20 \text{ mm} + 5 \text{ mm}$ ). Le proprietà assegnate ai materiali e il carico sono le medesime delle prove precedenti mentre si adotta una mesh di lato 10 mm (nella malta gli elementi saranno alti 5 mm come nel modello precedente per questioni geometriche).

Il provino è provvisto di barre di rinforzo con sezione e posizionamento analoghi alle armature previste nei pannelli descritti nel paragrafo 2.2. Le barre sono modellate con elementi *truss* T3D2 ad interpolazione lineare.

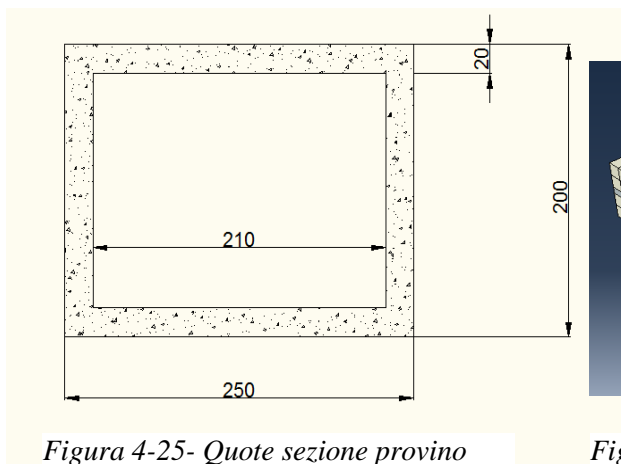


Figura 4-25- Quote sezione provino

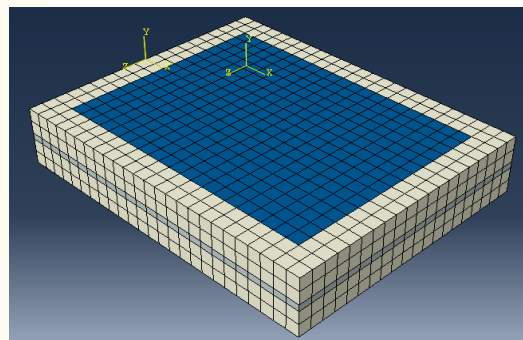


Figura 4-26- Modello provino armato

Le *parts* usate nelle prove precedenti vengono ora divise con riferimento alle quote mostrate in Figura 4-25. Successivamente, come mostrato in Figura 4-26, vengono assegnati i materiali: all'esterno calcestruzzo (bianco) e malta (grigia), all'interno grout di riempimento (blu).

Per rendere la soluzione più semplice vengono definiti parametri di anelasticità del grout solo nello strato centrale all'interno della malta, dove ci si aspetta evolva la frattura, lasciando invece il materiale perfettamente elastico all'interno dei blocchi.

Tale accorgimento evita l'insorgenza di problemi locali dovuti alla concentrazione degli sforzi in prossimità delle barre di rinforzo. Infatti il vincolo di perfetta aderenza, in quanto semplificativo, trascura lo scorrimento relativo barre - materiale dando dunque luogo a localizzazione delle deformazioni (vedi Figura 4-29) e alla suddetta concentrazione degli sforzi. Nel capitolo 4.9 si mostrerà come l'aderenza possa essere modellata in modo da evitare una tale approssimazione.

I parametri descrittivi del grout sono:

$$E = 22646 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.2$$

Tabella 4-8 - Parametri descrittivi il comportamento a compressione

Sforzo a compressione [MPa]	Deformazione plastica
8.5	0
10	0.00076
9.2	0.00115
8.49	0.0014

Tabella 4-9 – Failure ratios e tension stiffening

Ratio 1	Ratio 2	Ratio 3	Ratio 4
1.16	0.17	1.28	0.333

$u_0$ [mm]
0.04

L'acciaio è stato modellato con un comportamento elasto – plastico perfetto definito dai valori:

$$E = 210000 \text{ MPa} \quad \nu = 0.3 \quad \sigma_{lim} = 450 \text{ MPa}$$

Sono state adottate delle barre di rinforzo  $\phi 12$ , con relativa sezione  $A=113 \text{ mm}^2$ .

I risultati dell'analisi numerica mostrano come la prova progredisca con una profonda propagazione della fessura ed il collasso sia dovuto alla frantumazione della malta compressa. L'analisi si conclude quando le deformazioni plastiche raggiungono il valore massimo assegnato e la capacità dello strato di malta di sostenere un carico si esaurisce completamente.

Nell'acciaio lo sforzo non raggiunge il valore limite di snervamento rimanendo in fase elastica.

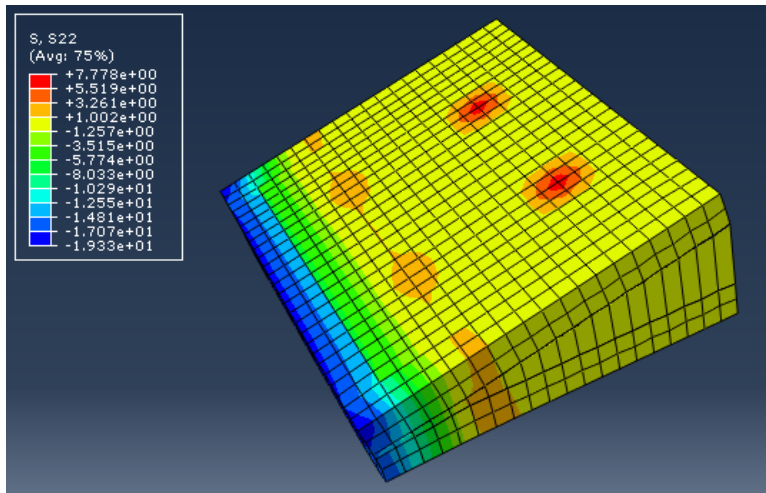


Figura 4-27- Sforzo assiale al collasso - modello completo

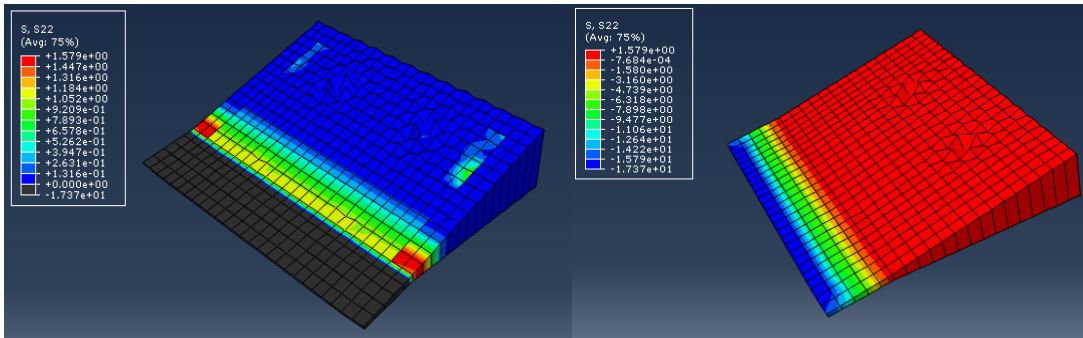


Figura 4-28- Asse neutro al collasso - strato di malta

Figura 4-29- Sforzo assiale al collasso - strato di malta

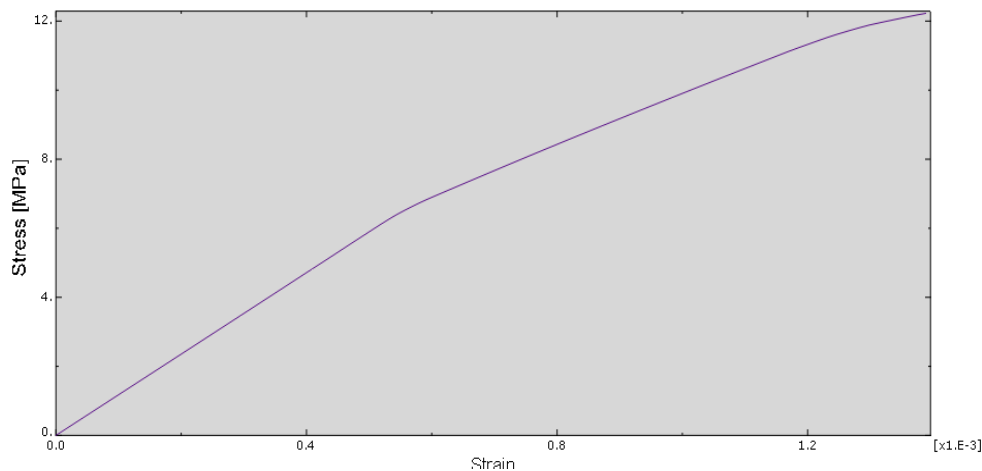


Figura 4-30- Curva sforzo - deformazione strato fibre compresse nello strato di malta

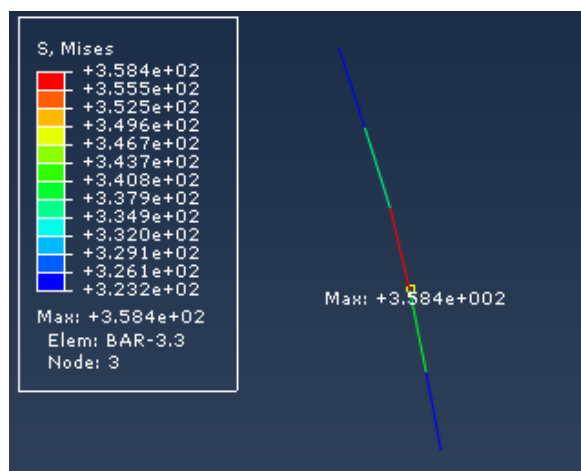
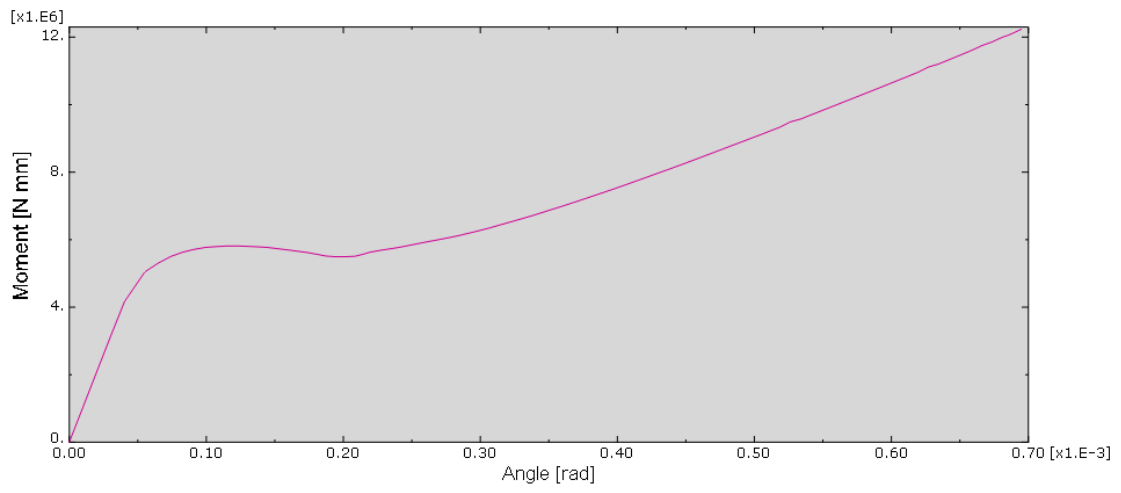


Figura 4-31- Sforzo di Von Mises nelle barre di rinforzo

L'andamento descritto in Figura 4-32 mostra le fasi di una prova di flessione su un provino armato con collasso dovuto allo schiacciamento dello strato di malta compresso:

- Fase elastica iniziale con malta integra
- Prima fessurazione con corrispondente raggiungimento del momento massimo relativo
- Iniziale fase di scarico descritta da un ramo di softening debolmente discendente
- Seconda fase di carico con acciaio che lavora a trazione in fase elastica



*Figura 4-32 - Curva Momento - rotazione imposta*



## 4.8 Flessione semplice di un provino composto da blocchi di grandi dimensioni con armatura di rinforzo

Si passa ora alla simulazione di una prova di flessione su un provino di dimensioni 405x250x200 millimetri in cui sono presenti due blocchi di calcestruzzo vibrocompresso, uno strato di malta, il grout di riempimento e le barre annegate.

Blocchi e strati di malta sono stati modellati con geometria e dimensioni sostanzialmente uguali a quelle mostrate nel paragrafo 4.7. Per ragioni di efficienza computazionale si trascura in questa fase la parte dei blocchi priva di grout di riempimento, concentrando l'attenzione solo sulla parte provvista di rinforzo.

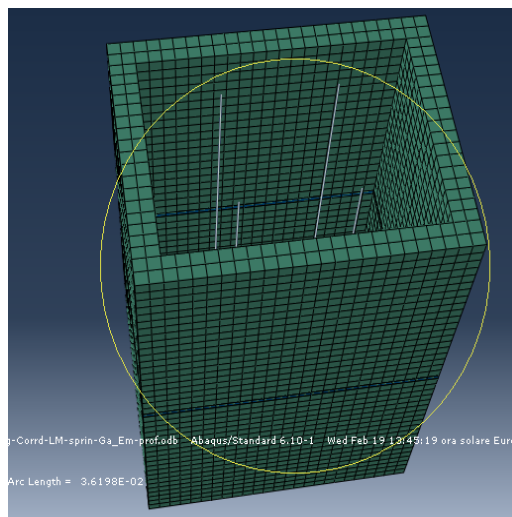
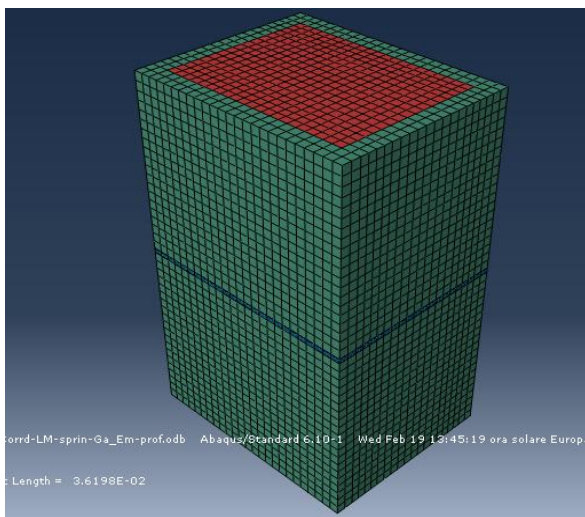


Figura 4-33- Mesh ad elementi finiti del provino    Figura 4-34 - Armature di rinforzo annegate

Il carico e le condizioni a contorno assegnate sono le medesime della prova precedente.

Per quel che concerne le caratteristiche del materiale, l'unica modifica apportata riguarda la resistenza a trazione monoassiale del calcestruzzo, posta arbitrariamente pari alla resistenza a compressione monoassiale (*failure ratio*  $2 = 1$ ).

Questo accorgimento, pur non avendo evidentemente una corrispondenza nella realtà, evita l'insorgenza di problematiche locali legate all'applicazione del carico.

I risultati non vengono tuttavia alterati dal momento che l'evoluzione della frattura è attesa nello strato centrale composto da malta e grout.

Dalla curva momento – rotazione imposta mostrata in Figura 4-35 risulta evidente come l'analisi si interrompa prematuramente prima che le barre possano caricarsi completamente.

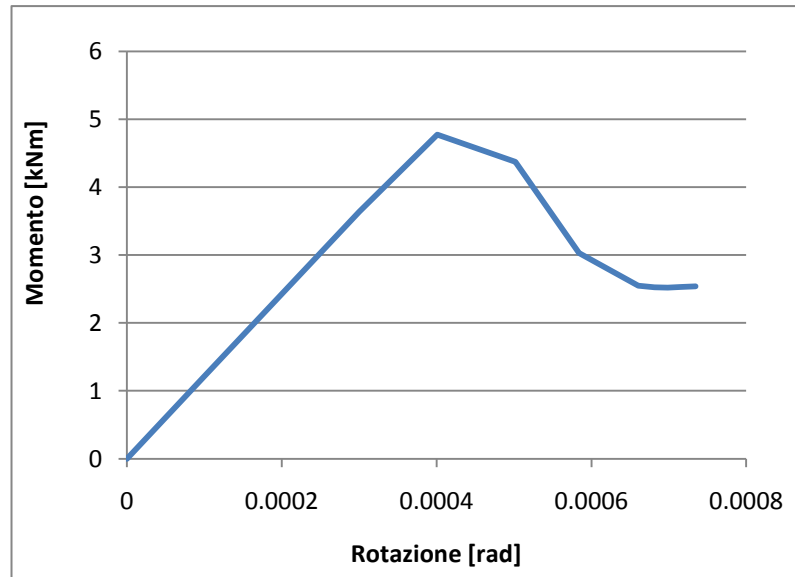


Figura 4-35- Curva momento - rotazione imposta

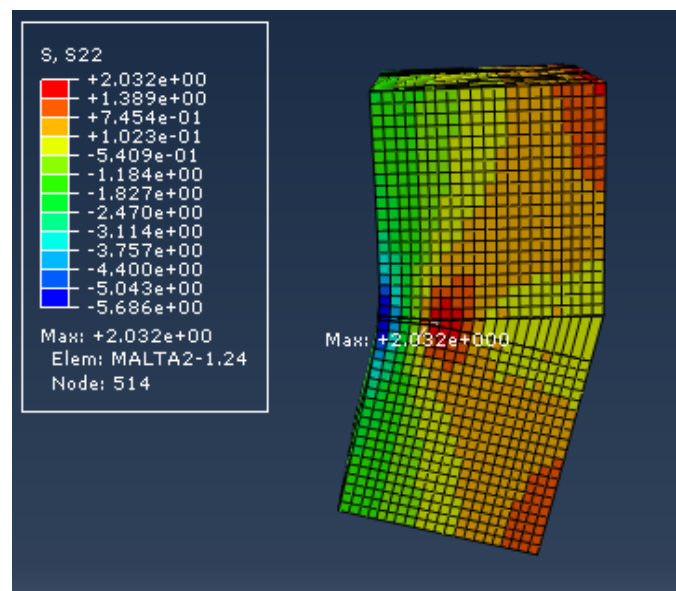


Figura 4-36- Sforzo assiale all'interruzione dell'analisi - modello completo

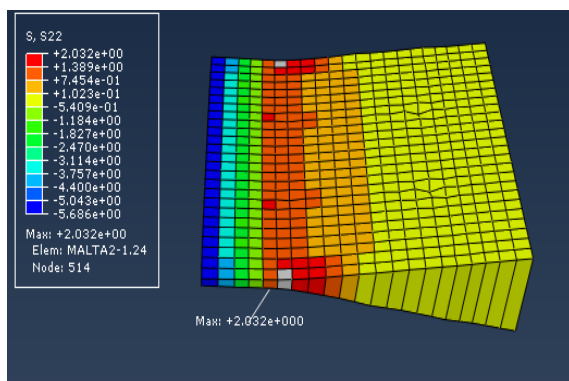


Figura 4-37 - Sforzo assiale all'interruzione dell'analisi – strato di malta

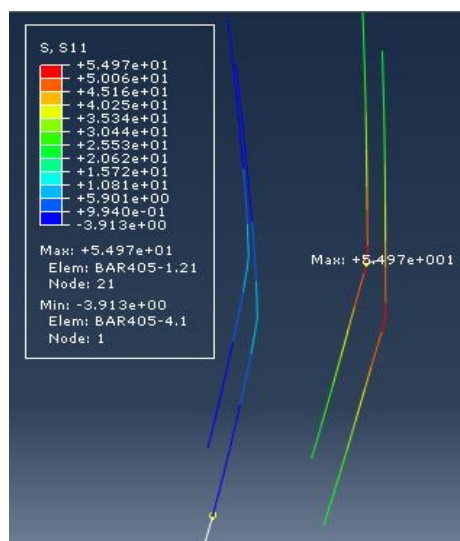


Figura 4-38 - Sforzo assiale all'interruzione dell'analisi – barre di rinforzo

Si ha motivo di credere che i problemi di convergenza derivino dal venir meno dell'ipotesi di Eulero-Bernulli per via dell'eterogeneità del materiale in sezione ed in direzione longitudinale. La differenza dei moduli elastici dei materiali comporta infatti una maggiore deformazione della malta rispetto al grout e la formazione di un forte gradiente di deformazione nello strato centrale (vedi Figura 4-36 e Figura 4-37). Tale condizione fa sì che negli elementi attraversati dall'asse neutro nello strato centrale del provino si sviluppi sia una fessurazione a trazione sia uno schiacciamento a compressione. Il fenomeno rende evidentemente molta difficoltosa la convergenza dell'algoritmo.

Per far fronte a tale problema si è deciso di svolgere un'analisi con un modello avente le medesime geometrie e proprietà, eccetto il modulo elastico dei blocchi eguagliato a quello dell'acciaio (210 GPa). Con tale accorgimento l'analisi procede concentrando le deformazioni principalmente nello strato centrale con l'effetto di renderle lineari. Un blocco più rigido rende peraltro il comportamento post-critico dell'intero provino più duttile, come noto dalla teoria della meccanica della frattura [21].

Non si presentano problemi di convergenza con il raggiungimento dello snervamento dell'acciaio o dello schiacciamento dello strato di malta a seconda delle

deformazioni plastiche concesse a quest'ultimo dal legame costitutivo proposto in fase di input.

In Figura 4-39 sono confrontati gli andamenti estrapolati dalle due analisi. Come atteso, la modifica del modulo elastico dei blocchi implica un notevole irrigidimento del provino alterando sensibilmente i risultati della prova. Mentre infatti il carico limite della fase elastica è sostanzialmente lo stesso, gli spostamenti previsti sono notevolmente inferiori.

Tale modifica permette tuttavia di completare l'analisi fino al raggiungimento del carico ultimo, non influenzato dai parametri elastici.

L'andamento descritto dalla curva in blu nella Figura 4-39 mostra le fasi di una prova di flessione su un provino armato:

- Fase elastica iniziale con malta integra
- Prima fessurazione con corrispondente punto di flesso della curva
- Seconda fase di carico con acciaio che lavora a trazione in fase elastica
- Snervamento delle barre maggiormente tese
- Collasso per schiacciamento della malta compressa

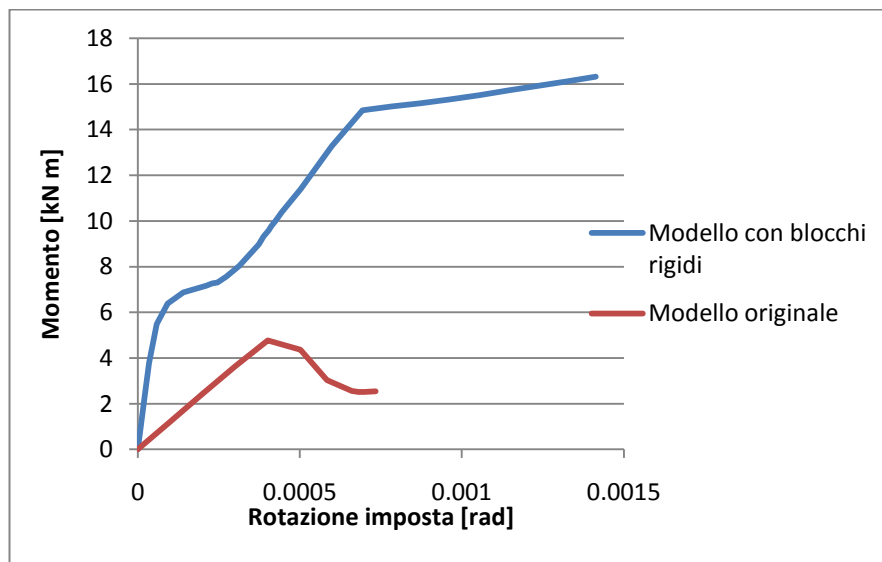


Figura 4-39- Curve momento - rotazione imposta - confronto modelli

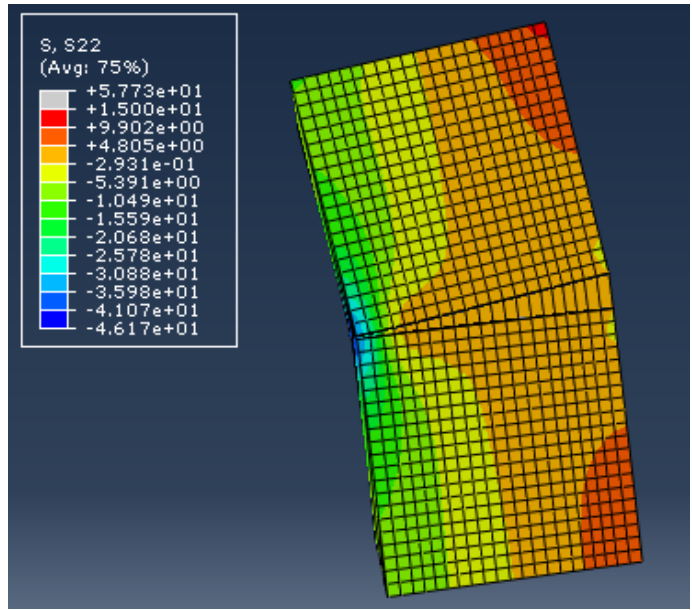


Figura 4-40- Sforzo assiale al collasso - modello completo

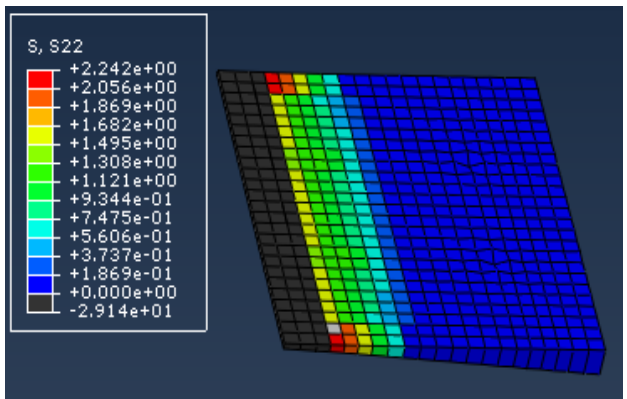


Figura 4-41- Sforzo assiale al collasso - Strato di malta

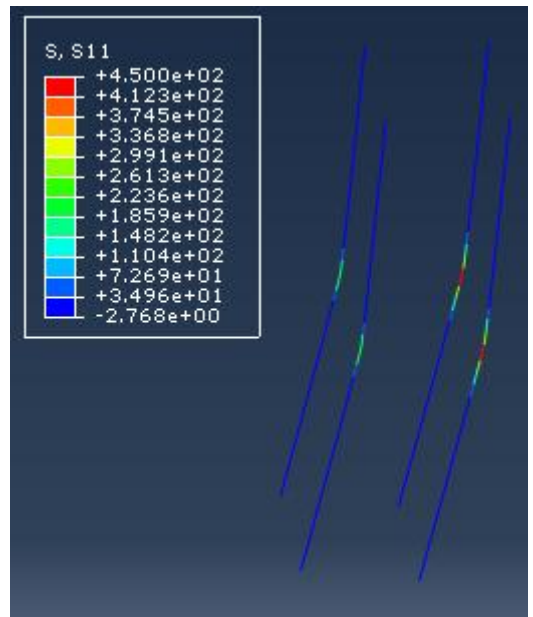


Figura 4-42- Sforzo assiale al collasso - barre di rinforzo

## 4.9 Modellazione aderenza barra di rinforzo - grout

Come anticipato nei paragrafi precedenti la modellazione dell'interazione barre-grout tramite il vincolo di *Embedment* (ovvero perfetta aderenza) si è rivelata troppo rigida e lo sviluppo delle deformazioni nello strato centrale è evidentemente irrealistica. Si è dunque deciso di simulare l'aderenza barre - grout con l'ausilio di molle anelastiche aventi passo di 10 mm lungo l'intero provino [22] [23]. Ogni molla discretizza lo sforzo di aderenza lungo il tratto di influenza collegando i singoli nodi degli elementi *truss* ai corrispettivi nodi degli elementi *solid*<sup>4</sup>. La legge forza - allungamento che definisce il comportamento delle molle è stata implementata moltiplicando lo sforzo di aderenza atteso [24] (vedi Figura 4-43) per la circonferenza del tondino e per il passo delle molle stesse. Il risultato è mostrato in Figura 4-44.

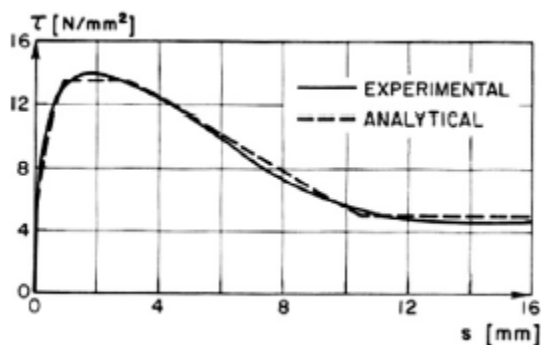


Figura 4-43 - Curva sforzo di aderenza - scorrimento barre

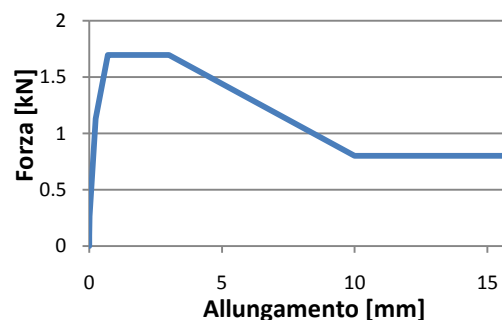


Figura 4-44- Curva forza - allungamento molle

<sup>4</sup> Definendo un'opportuna mesh si è fatto in modo che i due nodi si sovrapponevano nel modello completo

Dal confronto mostrato in Figura 4-45 si evince come l'ipotesi di aderenza perfetta alteri fortemente il risultato in termini di spostamenti (il rapporto fra le due rotazioni in corrispondenza delle quali si ha il momento massimo è di cinquanta). D'altro canto i carichi ultimi stimati con o senza scorrimento delle barre sono coincidenti, confermando quanto atteso dalle ipotesi di base dell'analisi allo stato limite ultimo.

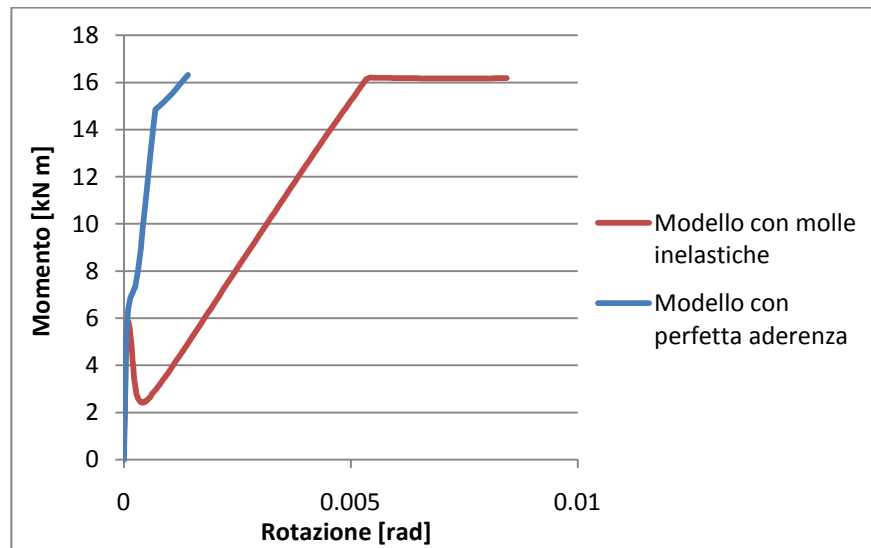


Figura 4-45- Confronto curve momento - rotazione imposta

Il comportamento delle due prove in campo elastico è sostanzialmente coincidente. L'aderenza nella prima fase, detta per l'appunto *chimica*, è dovuta all'interazione a livello atomico fra acciaio e grout ed è caratterizzata da scorrimenti minimi.

Il ramo di softening discendente osservato invece dopo la fase elastica, non presente nel caso di vincolo *embedment*, è da imputare al maggior tempo impiegato dalle barre a caricarsi per via della non perfetta aderenza e dunque al fatto che esse non si facciano immediatamente carico dello sforzo di trazione derivante dalla malta in fase post-critica.

# 5. ANALISI E CONFRONTI PER PANNELLI NON ARMATI

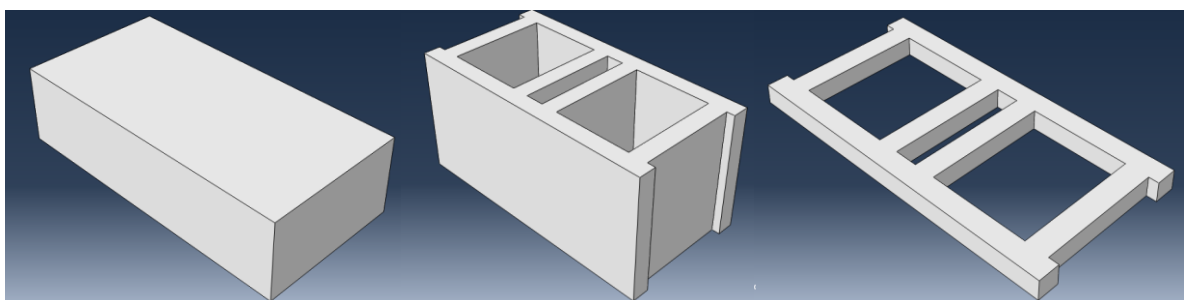
## 5.1 Modellazione

### 5.1.1 Parts

Blocchi e strati di malta sono stati modellati con geometria e dimensioni sostanzialmente uguali a quelle mostrate nel paragrafo 2.1.2.

Assumendo che i risultati fossero debolmente influenzati da rounds e svassi, si è trascurata la presenza di tali dettagli sono in favore di una mesh meno distorta.

Anche le piastre d'acciaio sono modellate in modo da prendere in considerazione l'effetto dell'attrito alle interfacce. Le *parts* usate per modellare il pannello costituito da blocchi forati in calcestruzzo vibrocompresso sono mostrate nelle Figura 5-1, Figura 5-2 e Figura 5-3; quelle che compongono il provino con mattoni pieni in Figura 5-4 e Figura 5-5.



*Figura 5-1 – Piastre in acciaio  
200x100x50*

*Figura 5-2 - Blocchi forati in  
calcestruzzo  
semplificati*

*Figura 5-3- Strati di malta  
semplificati*



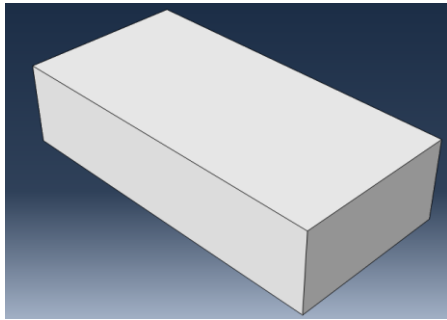


Figura 5-4 - Piastre in acciaio e mattoni pieni

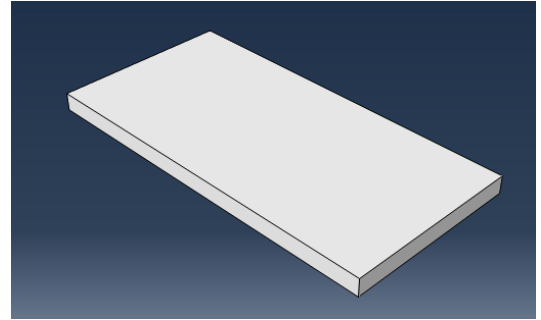


Figura 5-5- Strato di malta

### 5.1.2 Proprietà

Le proprietà dei materiali sono state definite in accordo con i dati sperimentali forniti ed estrapolando i valori dalle curve a 28 giorni ritenute più significative.

#### *Malta*

Al fine di definire il legame costitutivo dello strato di malta, i risultati della prova a compressione effettuata sul provino MS.C8 sono presi in considerazione. Una curva sforzo – deformazione è stata così estrapolata dalla curva forza – spostamento fornita (vedi Figura 5-6).

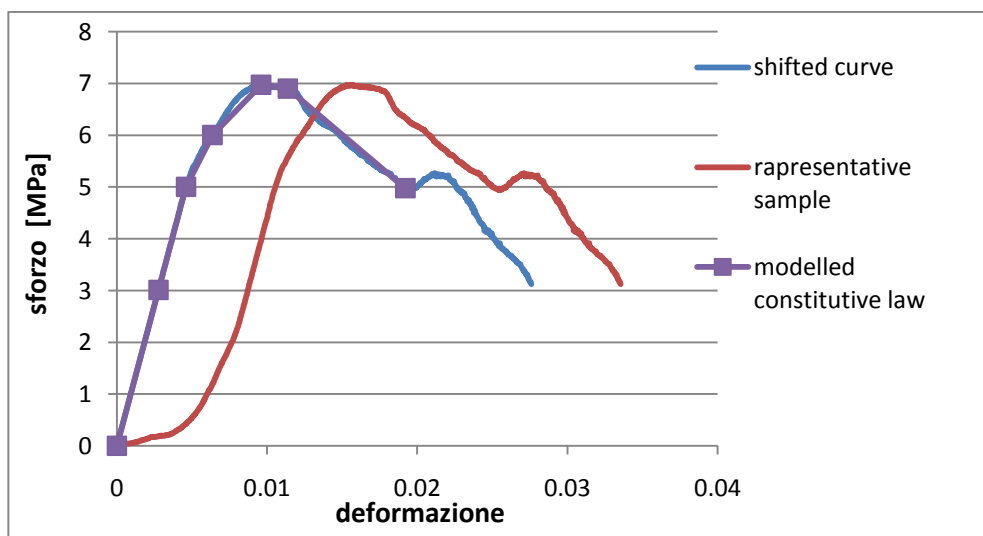


Figura 5-6 - Curva sforzo deformazione per la malta in compressione monoassiale

Il ramo iniziale della curva sperimentale è stato rimosso ed il grafico traslato indietro all'origine stimando un modulo di Young  $E = 1000$  MPa. Solo pochi punti della curva sperimentale sono stati usati per definire la legge costitutiva numerica.

Si è settato il coefficiente di Poisson  $\nu$  pari a 0.06, in accordo con la Tesi di Dottorato svolta da Gihad Mohamad presso l'Università del Minho [26] (Tipo di malta III – Tabella 5-1 e Tabella 5-2).

*Tabella 5-1 - Tipi di malta*

TRAÇO	PROPORÇÃO EM VOLUME Cimento: cal: areia	RELAÇÃO Aglomerante: agregado
I	1: 0,25:3	1 : 2,4
II	1: 0,5:4,5	1 : 3
III	1:1:6	1 : 3

*Tabella 5-2 - Relazione tipo di malta - coefficiente di Poisson*

Argamassa Traço	Mód. de Elasticidade secante (MPa) (Extensômetro)	Mód. de Elasticidade secante (MPa) (LVDT)	Poisson (Extensômetro)
I-a	9946	7137	0,16
II-a	6970	5091	0,10
III-a	3613	3889	0,06

Lo sforzo ultimo a trazione monoassiale è stato calcolato a partire dallo sforzo a trazione per flessione attraverso la relazione proposta dall'Eurocodice 2:

$$f_{ctm,\eta} = \max [(1,6 - h/1\ 000)f_{ctm} ; f_{ctm}]$$

Il risultato è dunque  $f_{ctm} = 2.3$  MPa.

Come anticipato nel capitolo 3, in fase di input il *tension stiffening* viene definito, oltre che dal valore dello sforzo ultimo a trazione monoassiale,  $f_{ctm}$ , dallo spostamento in corrispondenza del quale si annullano gli sforzi,  $u_0$  (vedi Figura 5-7 e Figura 5-8).

Questo valore è arbitrariamente definito pari a:

$$u_0 = 0.04 \text{ mm}$$

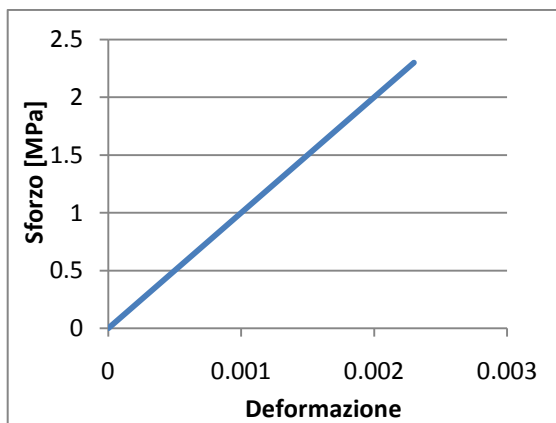


Figura 5-7- Curva sforzo deformazione per la malta in trazione monoassiale – fase elastica

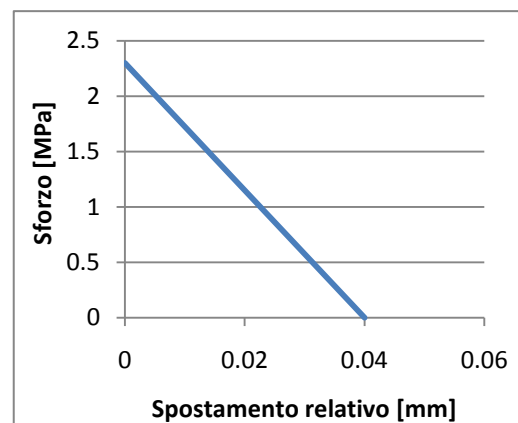


Figura 5-8 – Tension stiffening della malta

## Calcestruzzo

La legge costitutiva del calcestruzzo è stata definita usando i risultati della prova a compressione effettuata sul provino HCB.C5. Sono stati fatti gli stessi passaggi descritti nel paragrafo 3.1. La curva sforzo – deformazione risultante è mostrata nella Figura 5-9. In Figura 5-10 e Figura 5-11 è descritto il comportamento a trazione del materiale.

Tabella 5-3 – Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico del calcestruzzo

E [MPa]	$\nu$	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]	$u_0$ [mm]
7674	0.2	36.6	4.31	0.06

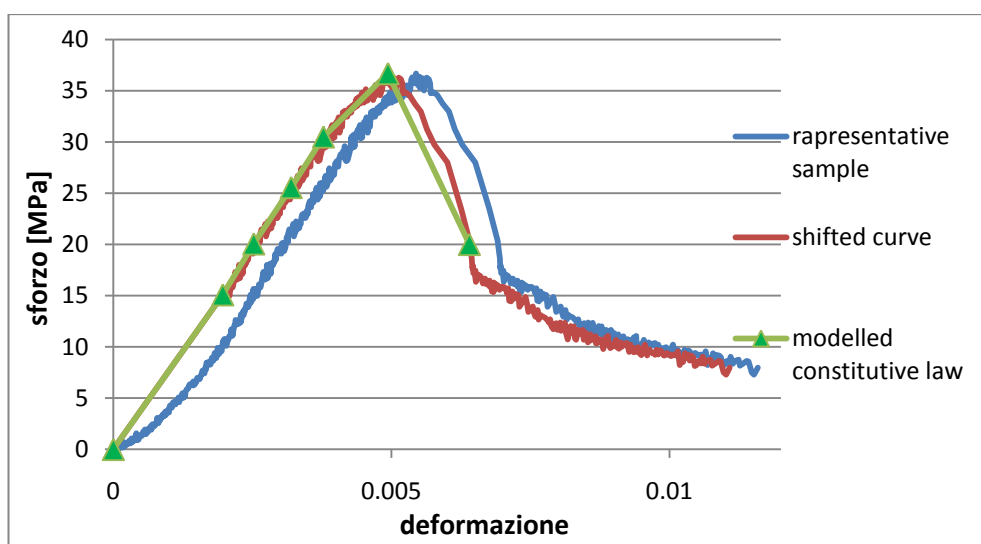
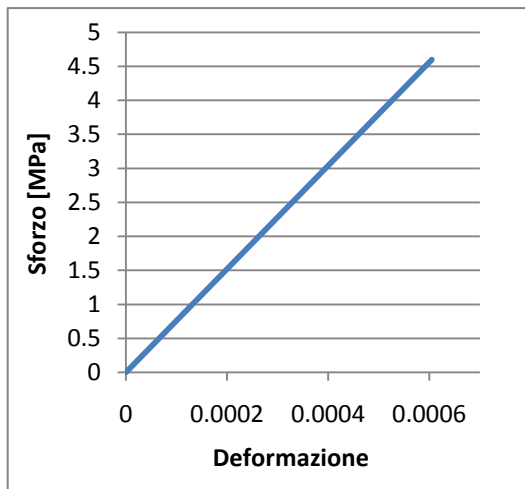
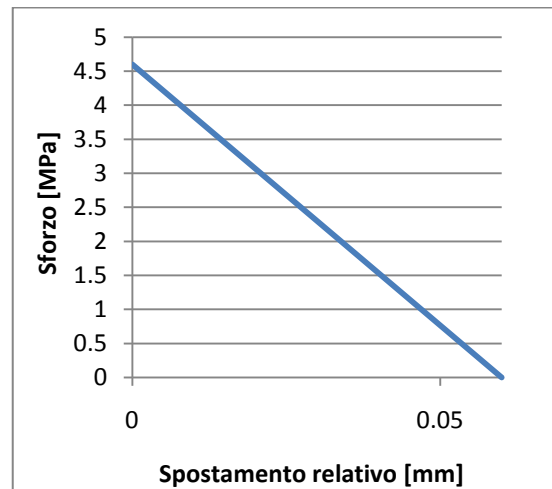


Figura 5-9 – Curva sforzo – deformazione per il calcestruzzo in compressione monoassiale



*Figura 5-10 - Curva sforzo deformazione per il calcestruzzo a trazione monoassiale – fase elastica*



*Figura 5-11 - Tension stiffening del calcestruzzo*

Si osserva come i blocchi in calcestruzzo vibrocompresso utilizzati nella competizione abbiano un modulo elastico inaspettatamente piccolo e lontano dai valori attesi per un materiale con simili proprietà meccaniche ( $E_{cm} \approx 31$  GPa per un calcestruzzo di tipo C25/30 secondo l'EC2).

## Laterizio

La legge costitutiva del mattone in laterizio è stata definita usando i risultati della prova a compressione effettuata sul provino SCB.C5 e gli stessi passaggi fatti per malta e calcestruzzo (vedi Figura 5-12). In Figura 5-13 e Figura 5-14 è invece descritto il comportamento a trazione del materiale. I valori dei parametri meccanici implementati in Abaqus sono mostrati in Tabella 5-4.

Tabella 5-4- Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico del laterizio

E [MPa]	$\nu$	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]	$u_0$ [mm]
2600	0.1	21.2	2.13	0.04

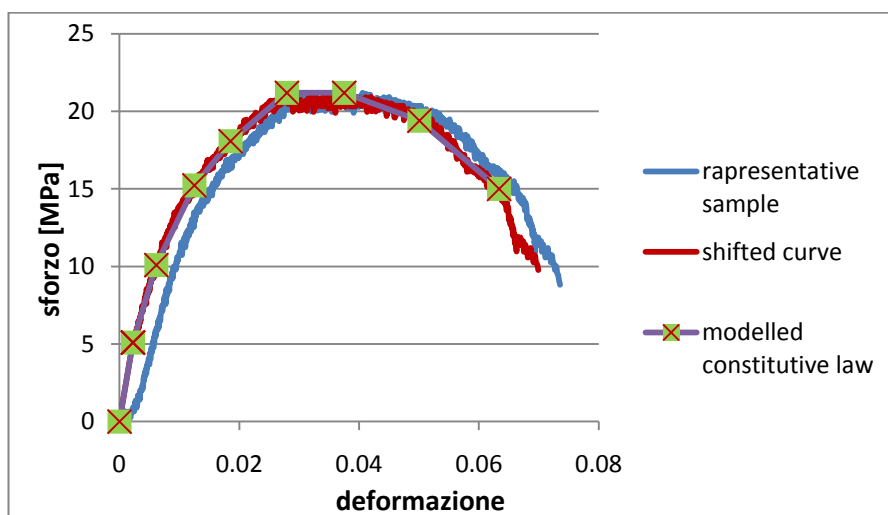


Figura 5-12 - Curva sforzo - deformazione per il laterizio in compressione monoassiale

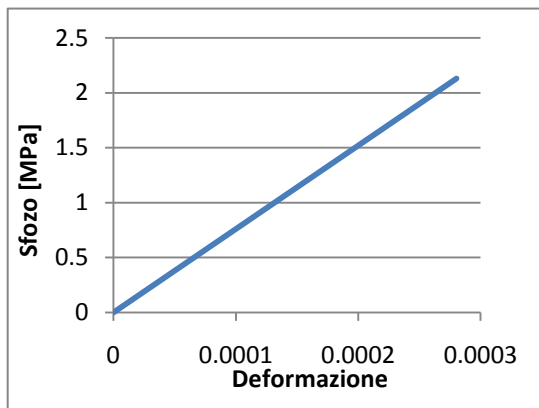


Figura 5-13 – Curva sforzo deformazione per il laterizio a trazione monoassiale – fase elastica

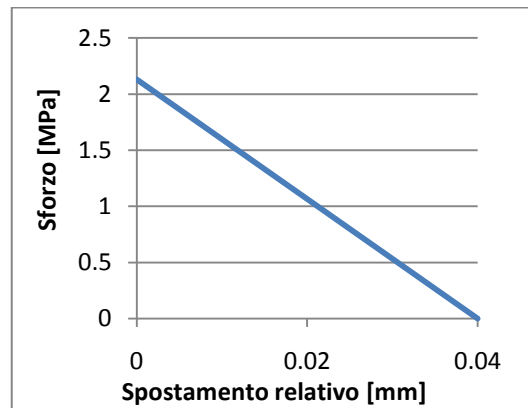


Figura 5-14 - Tension stiffening del laterizio

## Acciaio

L'acciaio è stato modellato con un comportamento perfettamente elastico definito dai valori:

$$E = 210000 \text{ MPa} \quad \nu = 0.3$$

## 5.2 Analisi

Assemblando le parti descritte nei capitoli precedenti, i pannelli murari sono stati modellati nella loro completezza (Figura 5-15)

Blocchi e strati di malta sono stati considerati come perfettamente aderenti (interazione del tipo “tie”).

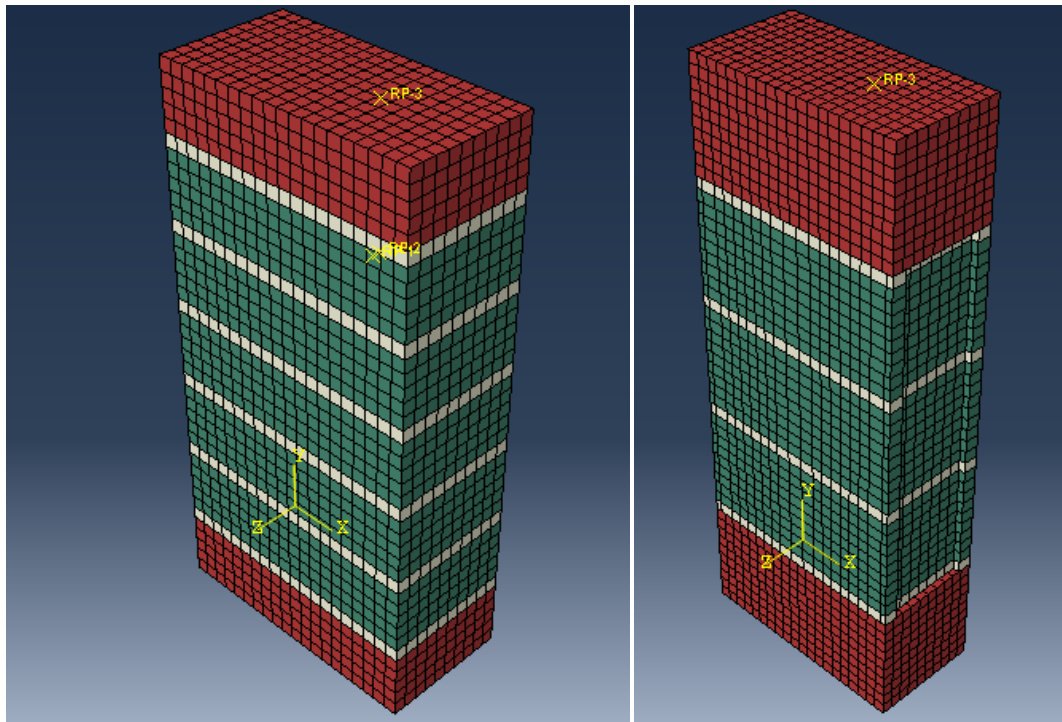
Si è definita la legge di contatto fra piastre in acciaio e strati di malta attraverso un coefficiente di attrito pari a 0.6 mentre compenetrazione lungo la direzione normale è impedita.

Per ogni pannello sono state effettuate diverse prove usando una procedura del tipo static, Riks. Questa è generalmente usata per studiare collassi di strutture instabili e con non linearità geometrica in presenza di materiali e condizioni a contorno non lineari.

Come nel capitolo 4 per la mesh sono stati scelti elementi *solid* del tipo C3D8R ad interpolazione lineare.

Uno spostamento progressivo è imposto in un reference point, posizionato ad una distanza  $e = 0.33$  mm dal baricentro della sezione. Il reference point è collegato all'intera superficie superiore attraverso un accoppiamento cinematico, in modo da mantenere la superficie piana assicurando comunque l'eccentricità.





*Figura 5-15 - Mesh ad elementi finiti dei prismi composti da mattoni pieni e blocchi forati in calcestruzzo*

La base del modello numerico è stata vincolata nei confronti delle traslazioni verticali, mentre si sono bloccati orizzontalmente solo due angoli in modo da evitare un confinamento aggiuntivo. Numerose analisi sono state svolte in modo da definire la dipendenza dei risultati numerici rispetto alla dimensione della mesh e del coefficiente di attrito alla base.

## 5.3 Risultati

### 5.3.1 Pannelli composti da blocchi forati in calcestruzzo

#### 5.4.1.1 Previsione

In fase di gara si è previsto che la rottura del pannello murario composto da blocchi forati in calcestruzzo sia dovuto al collasso dello strato di malta con un carico ultimo:

$$P_{\max} = 58,6 \text{ kN}$$

Nell'analisi gran parte di ogni strato raggiunge lo sforzo limite (Figura 5-17), mentre i blocchi in calcestruzzo rimangono in fase elastica. La Figura 5-18 mostra l'effetto del confinamento operato dai blocchi in calcestruzzo sugli strati di malta; la resistenza di quest'ultimi

crece del 40% grazie uno stato di sforzo triassiale favorevole.

L'analisi si conclude quando le deformazioni plastiche si sviluppano nella loro totalità e la capacità dello strato di malta di sostenere un carico si esaurisce completamente.

La simulazione non coglie il ramo di softening che segue il raggiungimento del carico ultimo nonostante siano stati adottati un modello costitutivo come il *concrete smeared cracking model* ed una procedura di tipo *static, Riks*, idonei allo studio del comportamento post-critico dei materiali. Tale problematica tuttavia non è limitante ai fini della competizione essendo l'obiettivo designato la stima del carico ultimo del pannello.

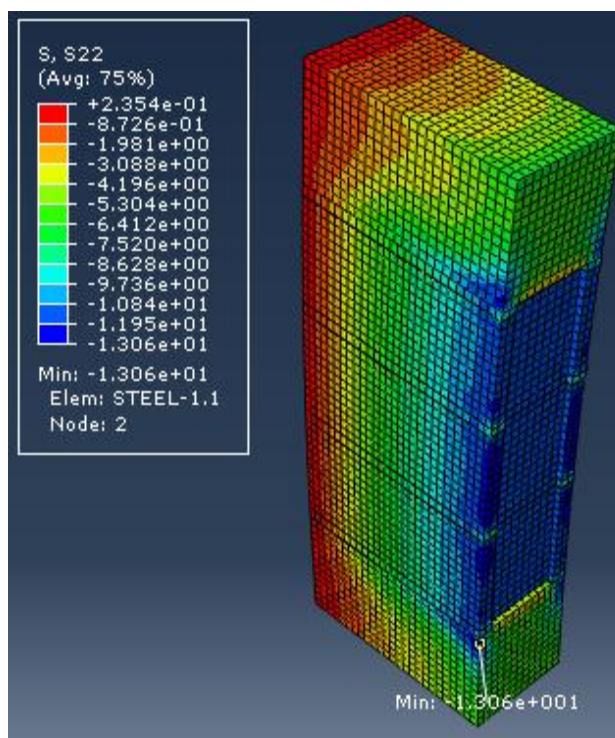


Figura 5-16 - Sforzo assiale al collasso – modello intero

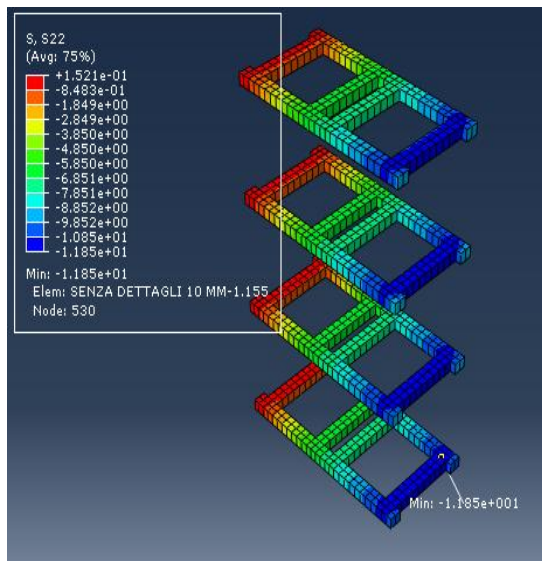


Figura 5-17- Sforzo assiale al collasso - strato di malta

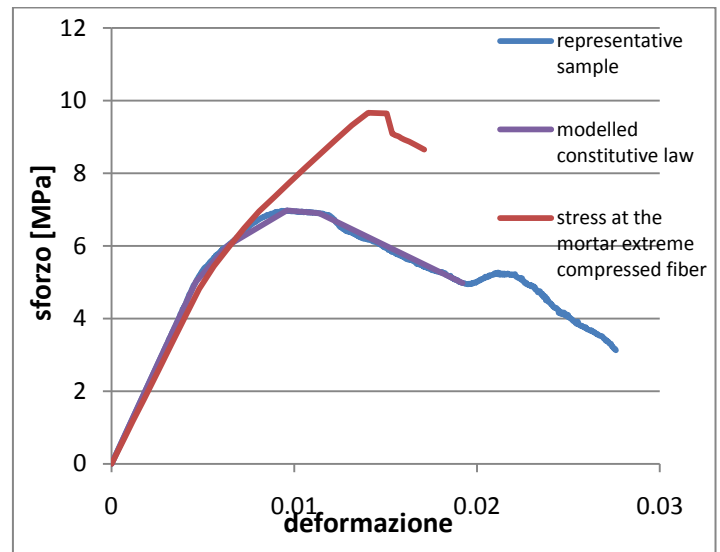


Figura 5-18 - Evoluzione dello sforzo nel punto più compresso nella malta – confronto con la legge costitutiva

Figura 5-19 mostra come la sensibilità del modello nei confronti della dimensione della mesh si sviluppi in prossimità della rottura, mentre nelle fasi precedenti è decisamente trascurabile. Tale effetto è probabilmente da imputare ad instabilità numeriche dell'algoritmo implementato in Abaqus quando lo stato di sforzo si avvicina alla superficie di rottura definita nel capitolo 3. Si ritiene tuttavia che i risultati non siano drammaticamente affetti da una tale sensibilità, osservando che la varianza dei risultati dovuti alla dimensione della mesh è minore della varianza che caratterizza i dati di input.

Considerazioni simili sono state fatte riguardo l'influenza del coefficiente di attrito sui risultati finali. In questo caso un coefficiente pari a 0.6 è stato scelto per stimare il carico di picco.

Un'altra considerazione può esser fatta riguardo la possibilità che il pannello acquisti una resistenza aggiuntiva dopo la completa frantumazione dello strato di malta dal contatto diretto di due blocchi di calcestruzzo. Questa eventualità non è stata trattata nell'analisi numerica, tenendo in considerazione la forte non linearità geometrica che questa condizione implicherebbe.

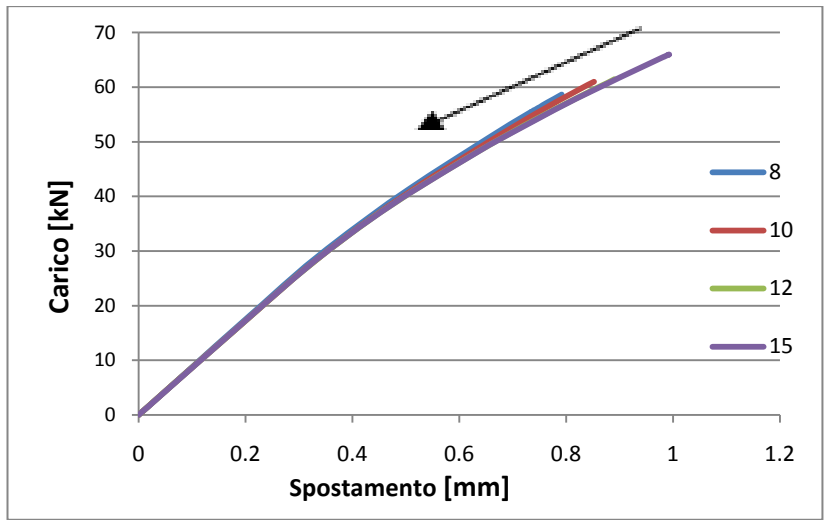


Figura 5-19- Sensitività del carico ultimo al variare della dimensione della mesh [mm]

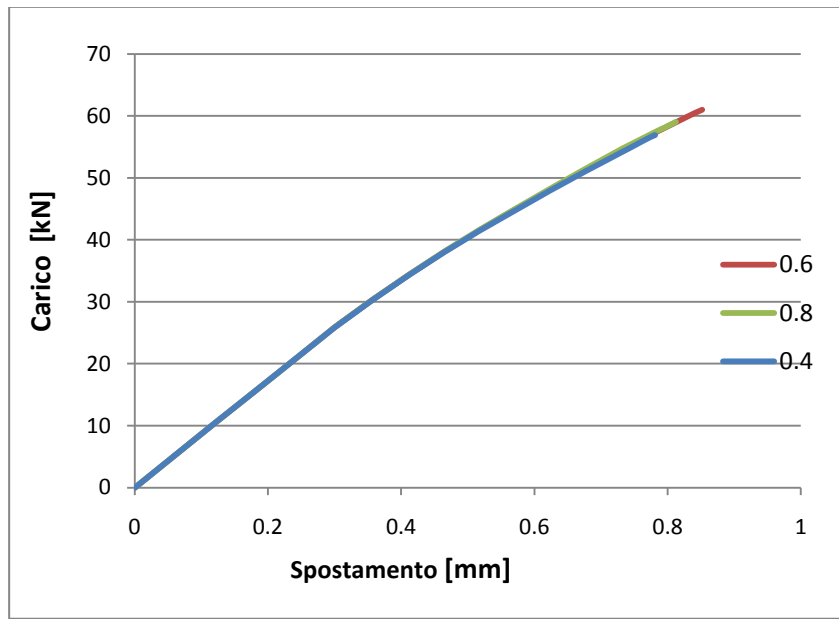


Figura 5-20 - Sensitività del carico ultimo al variare del coefficiente di attrito

## Confronto

Tre provini composti da blocchi forati in calcestruzzo vibrocompresso sono stati testati durante la 9th International Masonry conference tenutasi a Guimarães. I carichi massimi misurati sono mostrati in Tabella 5-5.

Tabella 5-5- Risultati prove sperimentali

Provino	Fmax (kN)
HCB1	48.27
HCB2	52.04
HCB3	47.36
Average	49.2

Dal confronto mostrato in Figura 5-21 si evince che, per quanto il carico di picco dei provini sia stato previsto con sufficiente precisione (errore del 16%), gli spostamenti sono decisamente sottostimati essendo circa 5 volte più piccoli di quelli osservati.

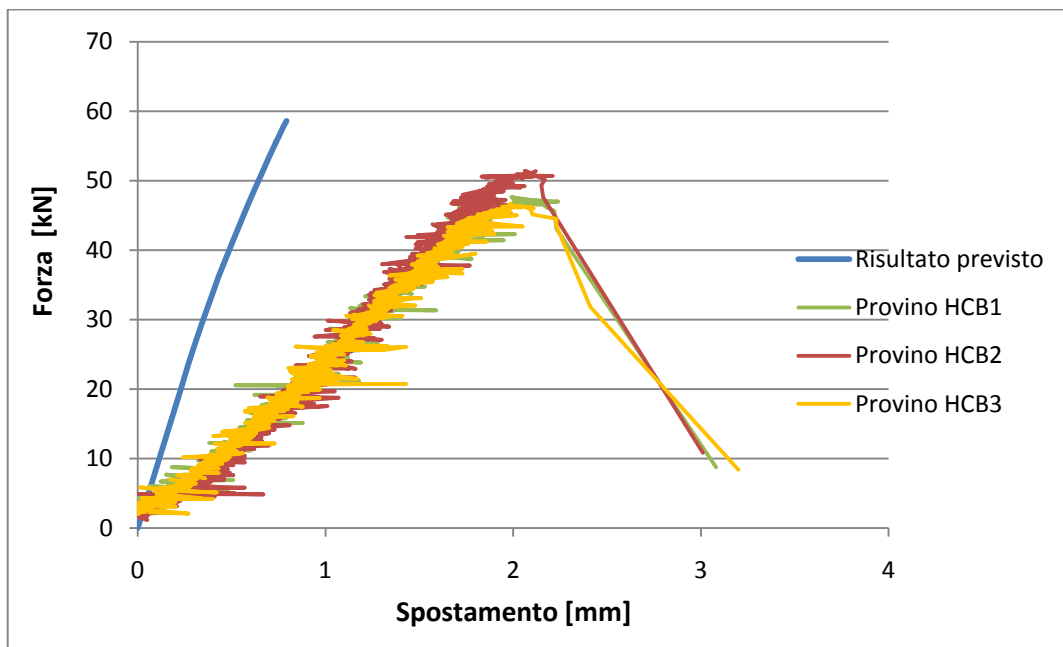
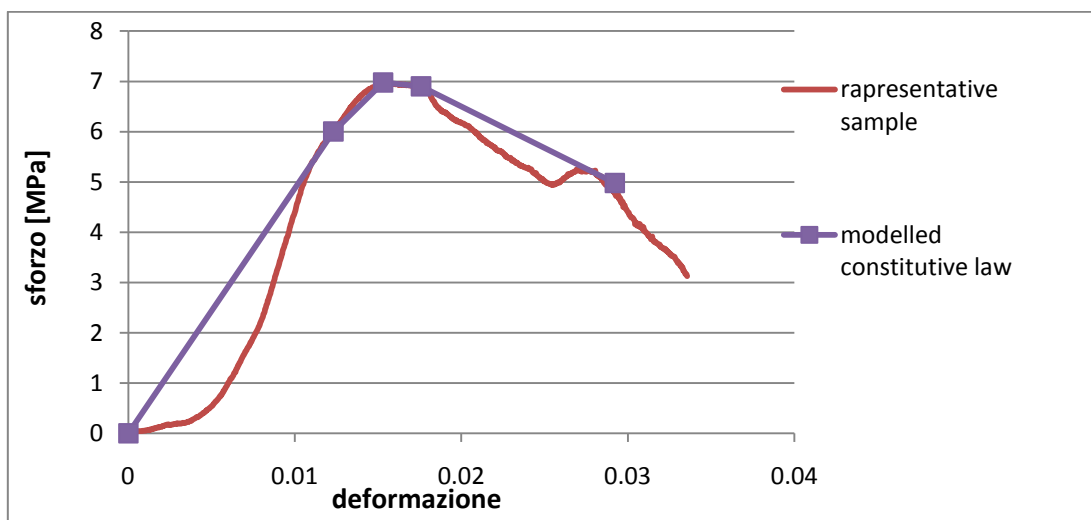


Figura 5-21 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica

### ***Modello corretto***

La discrasia osservata in Figura 5-21 è da imputare essenzialmente alla scelta di implementare le leggi costitutive dei materiali trascurando il ramo di assestamento proprio della fase iniziale delle prove sperimentali. Una tale scelta ha reso il modello numerico assai più rigido alterando così i risultati dell'analisi.

Essendo la fase di assestamento particolarmente marcata nelle curve descriventi il comportamento della malta (vedi Figura 5-5), la legge costitutiva è stato ridefinita al fine di tenerne conto (vedi Figura 5-22). Per quanto detto nel capitolo 3 in merito alla modalità di implementazione del comportamento a compressione di un materiale descritto con il *concrete smeared cracking model*, è stato definito un modulo elastico equivalente pari a 490 MPa.



*Figura 5-22 - Curva sforzo deformazione per la malta in compressione monoassiale*

Dalla Figura 5-23 è evidente come tale modifica abbia sensibilmente incrementato la capacità del modello numerico di cogliere il comportamento dei pannelli. Si è arrivati ad avere un errore rispetto alla media dei spostamenti e dei carichi ultimi misurati nelle tre prove del 9,8% e 6,5% rispettivamente.

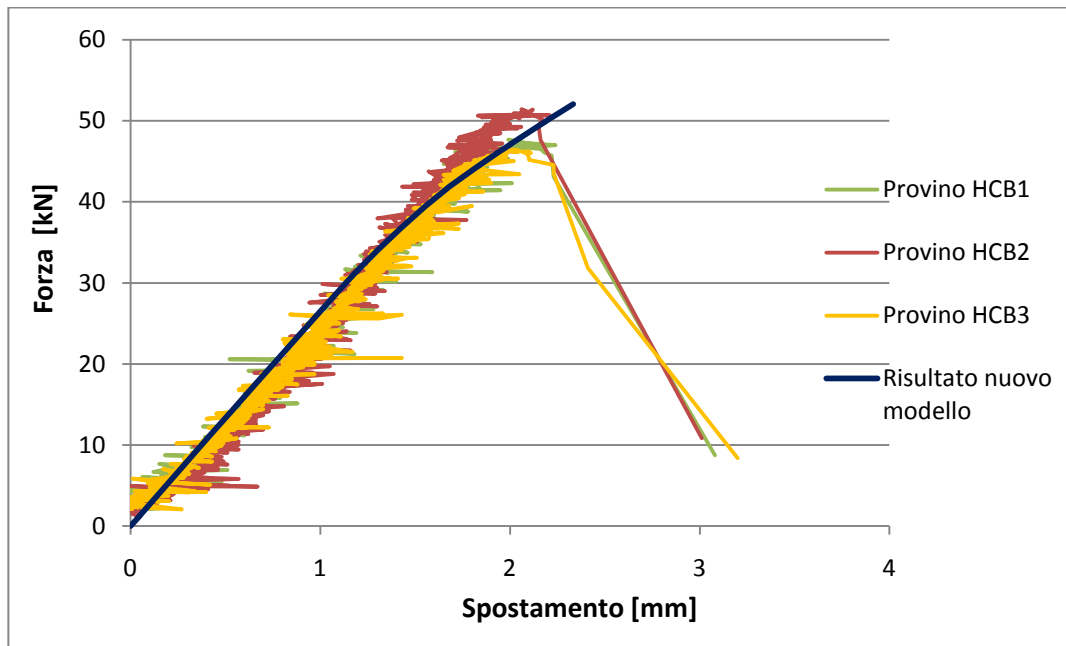


Figura 5-23 - Confronto risultati sperimentali - simulazione

### 5.3.2 Pannelli composti da mattoni pieni in laterizio

In fase di gara si è previsto che il collasso del secondo pannello sia dovuto alla crisi del mattone con un carico ultimo:

$$P_{\max} = 108 \text{ kN}$$

Anche in questa situazione larga parte degli strati di malta raggiunge lo sforzo limite, ma è ancora capace di deformarsi per via del confinamento benefico e della buona duttilità a compressione del

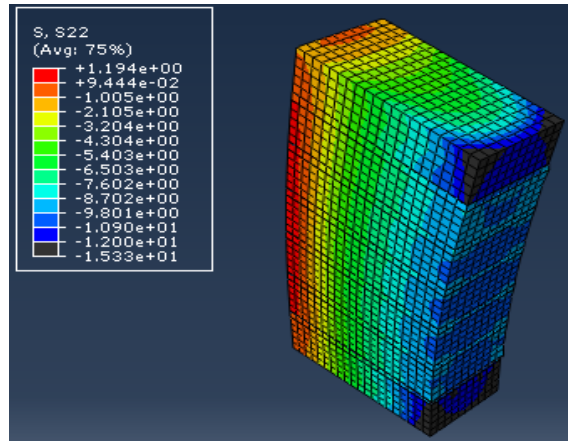


Figura 5-24 – Sforzo assiale al collasso – modello intero

materiale. D'altro canto, i mattoni sono in una situazione fortemente

sfavorevole, con sforzo di compressione nella direzione verticale e trazione nelle due direzioni trasversali<sup>5</sup>. Per tale ragione si è previsto che i blocchi in laterizio, sebbene abbiano una resistenza a compressione superiore a quella della malta, siano responsabili del collasso fragile del pannello.

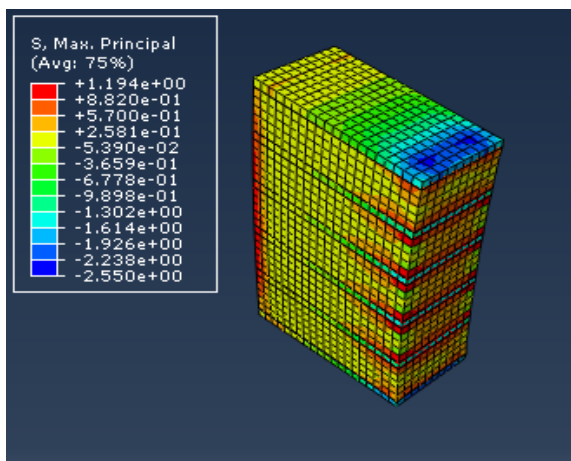


Figura 5-25 – Massimo sforzo principale al collasso

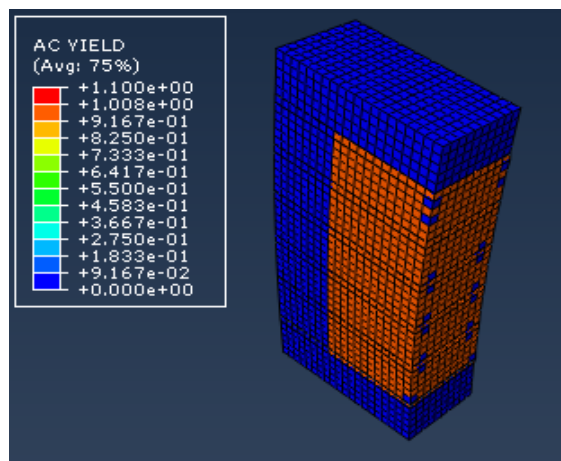


Figura 5-26 – Materiale in fase anelastica al collasso

<sup>5</sup> Questi sforzi si sviluppano perché gli strati di malta (che sono più deformabili) tendono ad espandersi ma sono confinati dai mattoni (che sono più rigidi). Figura 5-25 mostra gli sforzi trasversali di trazione al collasso



Per quanto detto nel paragrafo 3.1, il modello *concrete smeared cracking* adottato per simulare la prova non è particolarmente adatto per una condizione di sforzo triassiale come quella in oggetto, così che il meccanismo di rottura potrebbe non essere colto adeguatamente. Tuttavia, per quanto concerne il carico di picco, si è pensato che i risultati potessero esser comunque considerati affidabili.

L'analisi parametrica svolta mostra una maggiore *mesh sensitivity* rispetto al caso precedente con pannello composto da blocchi forati in calcestruzzo (vedi capitolo 5.3.1). Questo può essere spiegato alla luce di quanto detto nel paragrafo precedente.

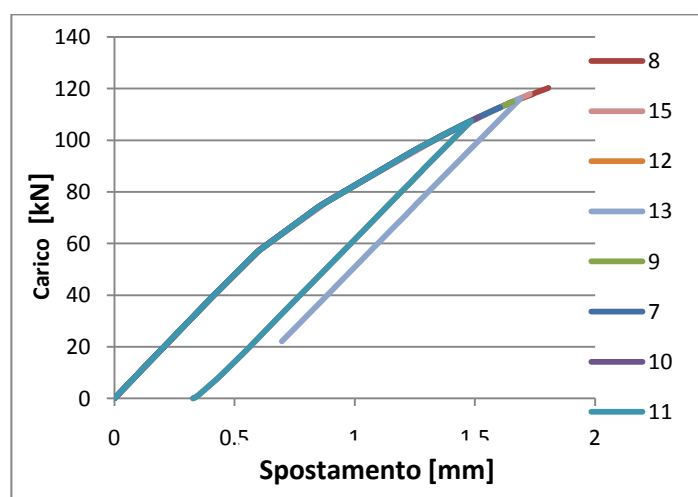


Figura 5-27 - Sensibilità del carico ultimo al variare della dimensione della mesh [mm]

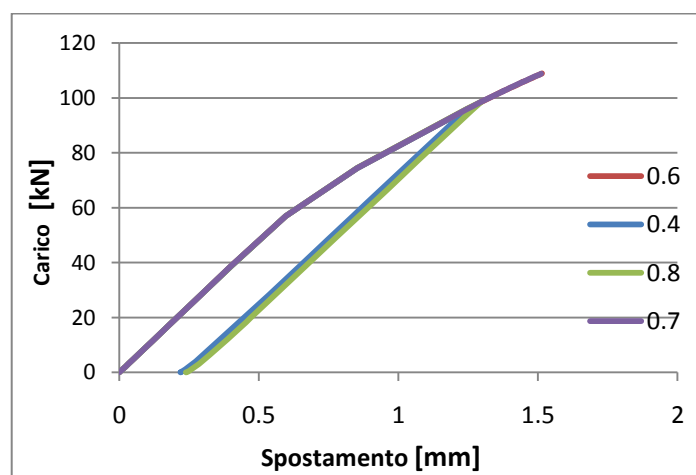


Figura 5-28 - Sensibilità del carico ultimo al variare del coefficiente di attrito

Un'ulteriore considerazione riguardo gli studi su entrambi i pannelli può esser fatta a proposito dell'ipotesi di perfetta aderenza fra strati di malta e blocchi.

La possibilità di un distacco è stata trascurata nelle presenti analisi per via della mancanza di informazioni riguardo i parametri governanti il fenomeno, sebbene sia noto come tale interfaccia possa essere il collegamento più debole della muratura.

## Confronto

Anche nel caso di pannelli composti da mattoni pieni in laterizio sono stati testati tre provini ed i carichi massimi misurati sono mostrati in Tabella 5-6 - Risultati prove sperimentali.

Tabella 5-6 - Risultati prove sperimentali

Provino	Fmax (kN)
SCB1	126.67
SCB2	125.26
SCB3	123.15
Average	125.0

Come nel caso di provini composti da blocchi in calcestruzzo studiati nel paragrafo 5.3.1, dal confronto mostrato in Figura 5-29 si evince che, per quanto il carico di picco dei provini sia stato previsto con sufficiente precisione (errore del 13%), gli spostamenti sono decisamente sottostimati essendo circa un terzo di quelli osservati.

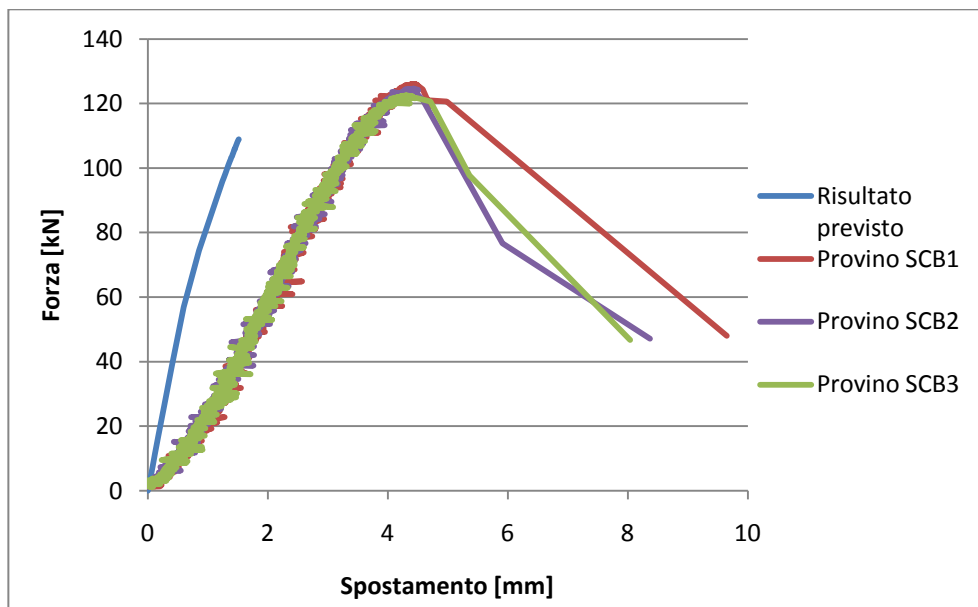


Figura 5-29 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica

### **Modello corretto**

La differenza osservata in Figura 5-29 è anche in questo caso da imputare essenzialmente alla scelta di implementare le leggi costitutive dei materiali trascurando il ramo di assestamento evidente della fase iniziale delle prove sperimentali. Una tale scelta ha reso il modello numerico assai più rigido alterando così i risultati dell'analisi. E' stata dunque ridefinita per la malta la legge costitutiva mostrata in Figura 5-22.

Avendo osservato inoltre come il nuovo modello tendesse ancora a sottostimare il carico ultimo del pannello è stata incrementata in maniera fittizia la resistenza a trazione del laterizio. Una tale modifica ha fatto sì che il collasso avvenisse per crisi degli strati di malta e non più per fessurazione del mattone. Per quanto arbitraria tale correzione è stata ritenuta accettabile avendo considerato che il *concrete smeared cracking model*, non essendo particolarmente adatto alla simulazione di una prova in cui si sviluppi una condizione di sforzo triassiale, potrebbe aver causato un'interruzione dell'analisi prematura.

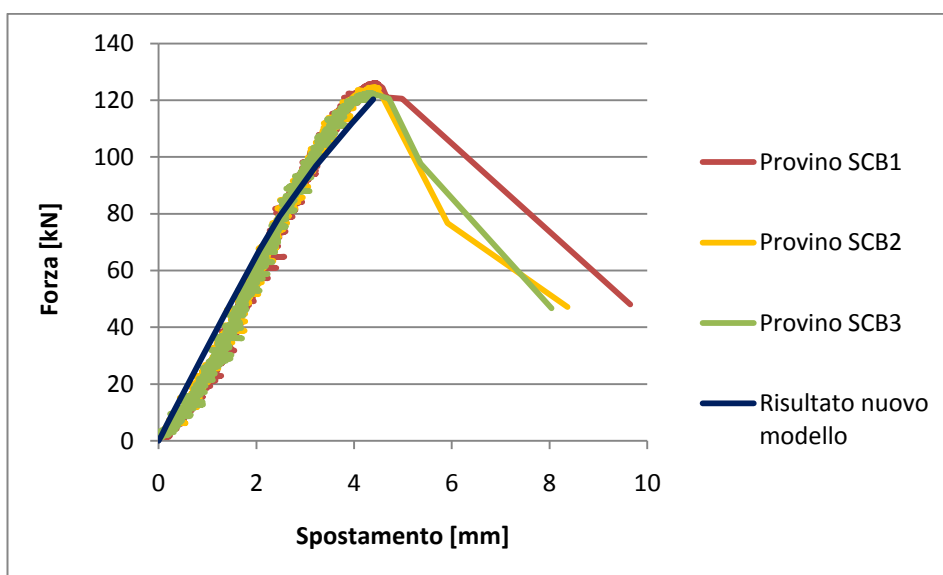


Figura 5-30 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica

Dalla Figura 5-30 è evidente come tale modifiche abbiano anche in questo caso incrementato sensibilmente la capacità del modello numerico di cogliere il comportamento dei pannelli. Si è arrivati ad un errore rispetto alla media dei spostamenti e dei carichi ultimi misurati nelle tre prove del 1,1% e 3,8% rispettivamente.

## **6. ANALISI E CONFRONTI PER PANNELLI ARMATI**

In questo capitolo verranno descritte le fasi attraverso le quali si è arrivati riprodurre la prova sperimentale descritta nel paragrafo 2. Fissate la geometrie e la mesh e definite le proprietà meccaniche dei materiali si è dapprima simulato il comportamento in fase elastica del pannello. Tale prova ha permesso fra l'altro di definire in maniera indiretta la resistenza a trazione della malta e validare la scelta fatta in merito al modulo elastico della stessa.

Apportate poi le opportune modifiche ci si è concentrati sulla validazione del modello in termini di carico ultimo.

Durante le prove sperimentali gli ancoraggi disposti alla base hanno mostrato dei moderati cedimenti. Essendo stati sollevati dubbi sulla loro efficacia si è dunque deciso di studiare due casi con vincolo di appoggio e incastro alla base in modo da simulare rispettivamente il completo sfilamento ed il vincolo rigido.

Infine con l'introduzione di molle inelastiche, mirata a riprodurre l'aderenza fra grout e barre annegate, si è tentato di riprodurre la prova nella sua completezza, inclusa predizione corretta degli spostamenti.

## 6.1 Modellazione

Gli elementi che compongono il pannello sono stati modellati con geometria e dimensioni sostanzialmente uguali a quelle mostrate nel paragrafo 2.2.1. Si sono tuttavia trascurati i dettagli al fine di avere una mesh più regolare.

Le *parts* definite accorpano il grout interno alla malta e al calcestruzzo, in modo da ridurre l'utilizzo di *ties*.

Si è deciso inoltre di trascurare gli strati di malta trasversale e le staffe, considerati influenti ai fini della prova.

Elementi *solid* del tipo C3D8R ad interpolazione lineare sono stati adottati per modellare i materiali lapidei (calcestruzzo vibrocompresso, malta e grout di riempimento). Per le barre di rinforzo vengono invece utilizzati elementi *truss* del tipo T3D2 anch'essi ad interpolazione lineare.

Le barre sono state vincolate rigidamente al grout per mezzo di un'interazione del tipo *embedment*. Solo nel paragrafo 6.3.3 si è tentato di proporre una soluzione alternativa meno rigida tramite adozione di molle anelastiche.

Al fine di ridurre l'onere computazionale della prova, viene sfruttata la simmetria del pannello rispetto all'asse *y*. Tale accorgimento è possibile in quanto non sono attese forti non-linearità geometriche.

Come anticipato sono studiati due casi a seconda che alla base venga imposto una condizione di appoggio o incastro.

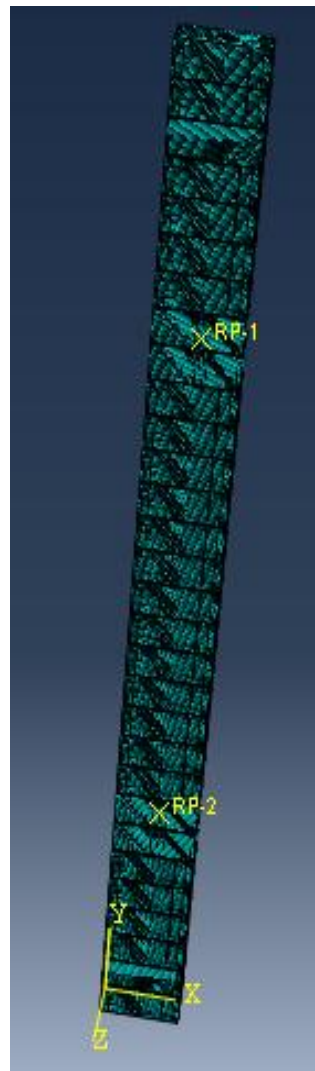


Figura 6-1- Modello completo

Le restanti condizioni a contorno ricalcano invece in maniera più chiara quelle imposte durante le prove sperimentali.

La mesh proposta per gli elementi ha lato di 10 mm nelle zone di maggiore interesse e si degrada progressivamente verso le aree in cui ci si aspetta che i materiali rimangano in fase elastica.

In Figura 6-1 è mostrato il modello completo. Le *parts* usate per modellare il pannello sono riportate nelle Figura 6-2, Figura 6-3 e Figura 6-4.

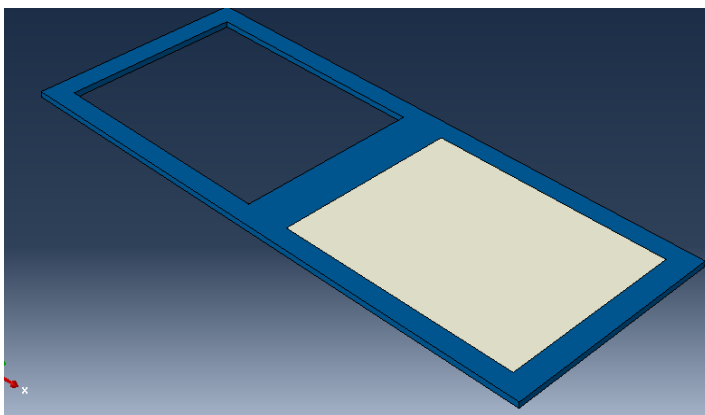


Figura 6-2- Strato di malta (blu) con grout (bianco)

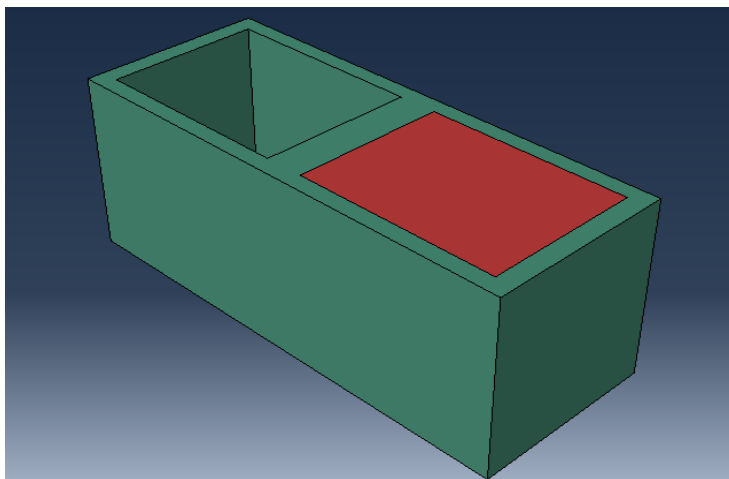


Figura 6-3- Blocco in calcestruzzo (verde) con grout (rosso)



Figura 6-4- Armature di rinforzo



## 6.2 Proprietà

In questo paragrafo si riassumono le proprietà meccaniche dei materiali ed i relativi dati di input, ottenuti rielaborando i valori elencati nel paragrafo 2.2.4 alla luce di quanto descritto nel capitolo 4 e 5.1.2.

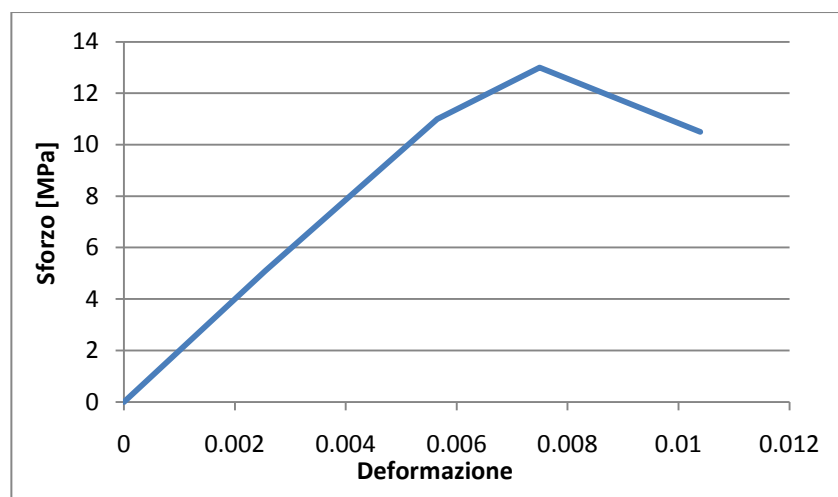
- *Malta*

Nella Tabella 6-1 sono raccolti alcuni dei parametri descrittivi il comportamento del materiale. Come già nel capitolo 4, essi sono ottenuti rielaborando, secondo le specifiche offerte dall'Eurocodice 2 per l'analisi non lineare, i dati di partenza relativi alla resistenza della malta nelle prove sperimentali svolte dalla *Senini*. Lo stesso varrà per gli altri materiali.

La risposta della malta a compressione e a trazione è mostrata rispettivamente attraverso le curve in Figura 6-5 e in Figura 6-6 e Figura 6-7.

*Tabella 6-1- Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico della malta*

<b>E [MPa]</b>	<b><math>\nu</math></b>	<b><math>f_{cm}</math> [MPa]</b>	<b><math>f_{ctm}</math> [MPa]</b>	<b><math>u_0</math> [mm]</b>
2000	0.1	13	1.0	0.04



*Figura 6-5 - Curva sforzo deformazione per la malta in compressione monoassiale*

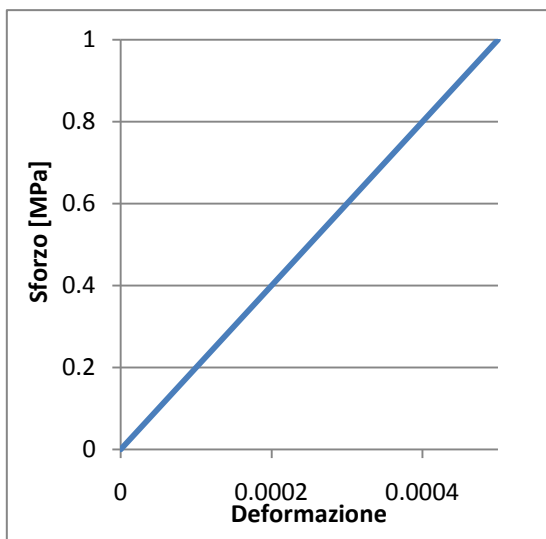


Figura 6-6 - Curva sforzo deformazione della malta a trazione monoassiale - fase elastica

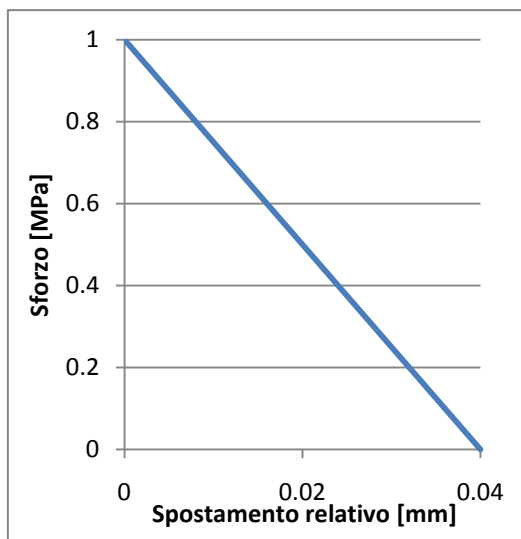


Figura 6-7 - Tension stiffening malta

In seguito ad una ricerca più approfondita ed a quanto osservato nelle prove sperimentali effettuate nell'università del Minho, il modulo elastico della malta è stato assunto con un valore inferiore rispetto a quello proposto nel paragrafo 0. La scelta, arbitraria ma allineata con i valori medi proposti dai vari report consultati è stata poi confermata dai risultati numerici mostrati nel paragrafo 6.3.1. Lo stesso discorso vale per la resistenza a trazione della malta. Il valore è stato definito in seguito a prove numeriche iterative mirate a trovare la coincidenza con i risultati sperimentali.

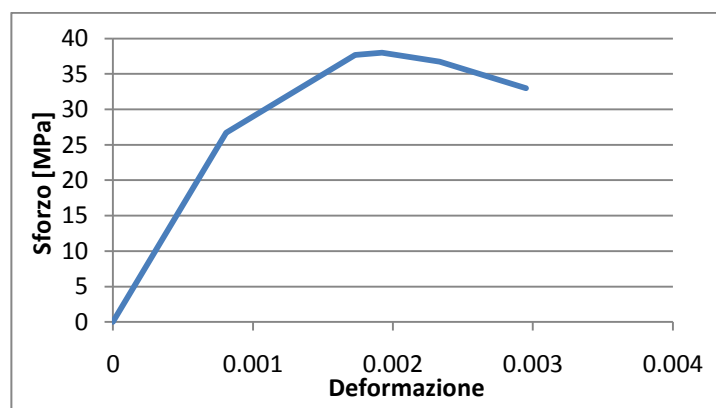
Calcolando il valore della resistenza a trazione attraverso le relazioni fornite dall'Eurocodice 2, nota la resistenza a compressione monoassiale della malta, si ottiene un  $f_{ctm} = 0.9$  MPa, di poco inferiore al valore ricavato dalle iterazioni.

- *Calcestruzzo vibrocompresso dei blocchi*

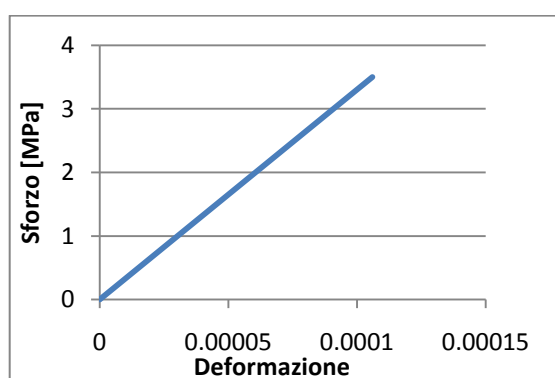
Nella Tabella 6-2 sono raccolti alcuni dei parametri descrittivi il comportamento del materiale. La risposta del calcestruzzo a compressione ed a trazione è mostrata rispettivamente nelle curva in Figura 6-8 ed in Figura 6-9 e Figura 6-10.

*Tabella 6-2 - Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico del calcestruzzo*

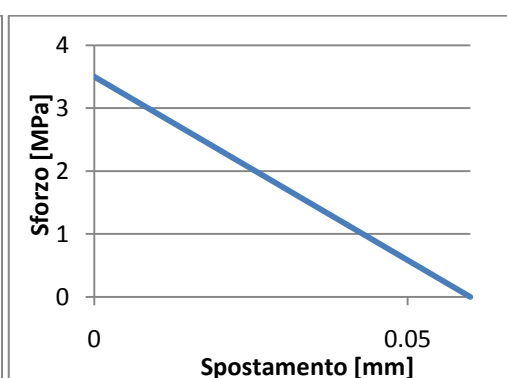
<b>E [MPa]</b>	<b><math>\nu</math></b>	<b><math>f_{cm}</math> [MPa]</b>	<b><math>f_{ctm}</math> [MPa]</b>	<b><math>u_0</math> [mm]</b>
33000 <sup>6</sup>	0.2	37	3.5	0.06



*Figura 6-8 - Curva sforzo deformazione per il calcestruzzo in compressione monoassiale*



*Figura 6-9 - Curva sforzo - deformazione della calcestruzzo a trazione monoassiale - fase elastica*



*Figura 6-10 - Tension stiffening del calcestruzzo*

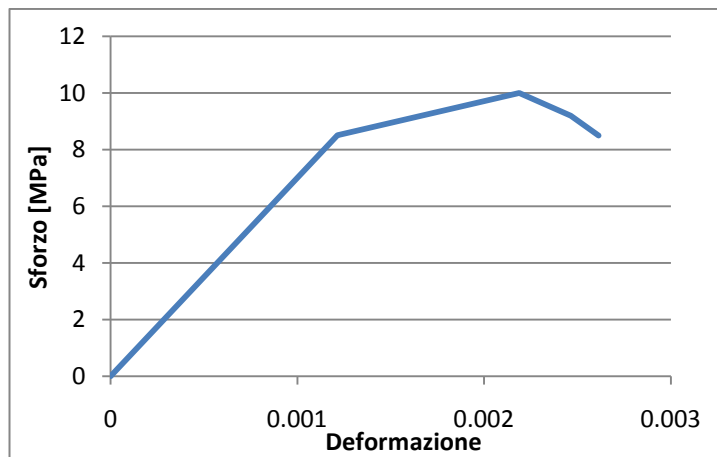
<sup>6</sup> Nelle prove descritte nel paragrafo 6.3.2 il modulo elastico sarà settato pari a 5'000'000 MPa al fine di facilitare la convergenza dell'analisi. Le ragioni sono le stesse espresse nel paragrafo 4.8.

- *Grout*

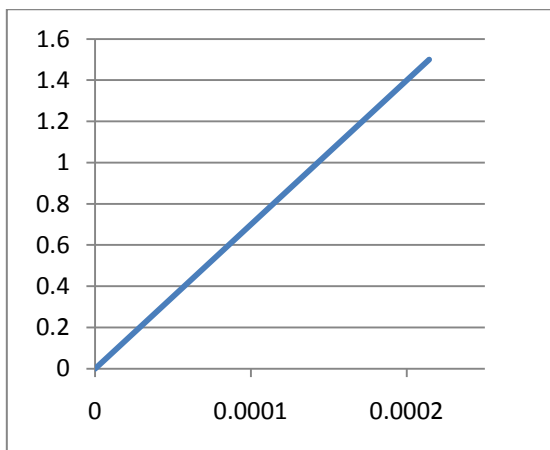
Nella Tabella 6-3 sono raccolti alcuni dei parametri descrittivi il comportamento del materiale. La risposta del grout a compressione ed a trazione è mostrata rispettivamente nelle curva in Figura 6-11 ed in Figura 6-12 e Figura 6-13.

*Tabella 6-3 - Parametri che definiscono il comportamento elastico ed inelastico del grout*

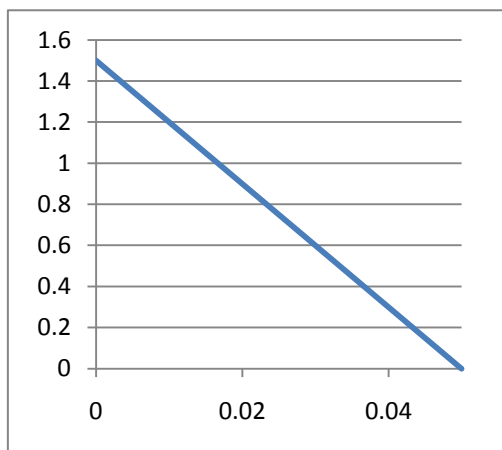
<b>E [MPa]</b>	<b><math>\nu</math></b>	<b><math>f_{cm}</math> [MPa]</b>	<b><math>f_{ctm}</math> [MPa]</b>	<b><math>u_0</math> [mm]</b>
7000	0.2	10	1.5	0.05



*Figura 6-11 - Curva sforzo deformazione per il grout in compressione monoassiale*



*Figura 6-12 - Curva sforzo - deformazione del grout a trazione monoassiale - fase elastica*



*Figura 6-13- Tension stiffening del grout*

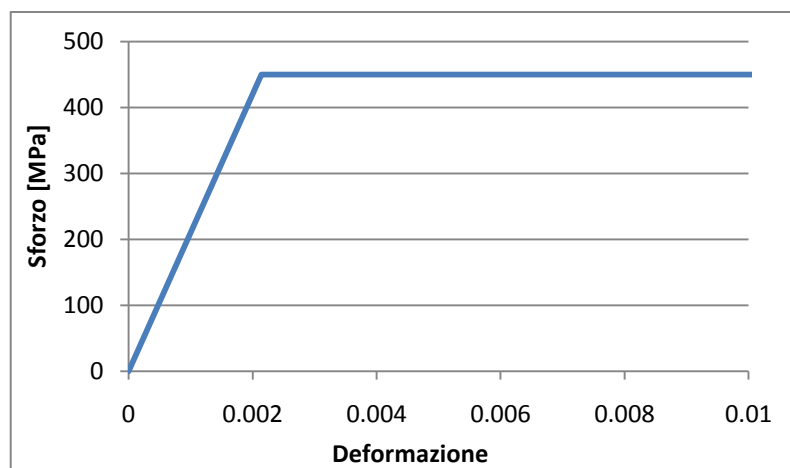
Il grout mostra una resistenza a compressione molto bassa, al limite delle resistenze offerte dai calcestruzzi strutturali. Tale valore può essere giustificato alla luce di alto rapporto acqua\cemento richiesto per garantire una buona colabilità e lavorabilità sul lungo periodo. La cattiva resistenza del materiale non influenza tuttavia il risultato della prova dal momento che, come si vedrà nei paragrafi successivi, il grout in zona compressa rimane sempre in fase elastica.

Si ricorda che esclusivamente il grout racchiuso negli strati di malta è stato implementato con proprietà inelastiche. Il materiale all'interno dei blocchi in calcestruzzo è stato invece definito perfettamente elastico al fine di evitare l'insorgenza di problematiche dovute alla concentrazione degli sforzi a livello locale.

- *Acciaio*

L'acciaio è stato modellato, in accordo con quanto previsto dall'Eurocodice 2, con un comportamento elasto – plastico perfetto definito dai valori:

$$E = 210000 \text{ MPa} \quad \nu = 0.3 \quad \sigma_{\text{lim}} = 450 \text{ MPa}$$



*Figura 6-14 - Modello costitutivo acciaio*

Sono state adottate delle barre di rinforzo  $\phi 12$ , con relativa sezione  $A=113 \text{ mm}^2$ .

## 6.3 Analisi

### 6.3.1 Fase elastica

Si riportano i risultati ottenuti dall'analisi avente come oggetto il modello descritto nei paragrafi precedenti. Come vincolo alla base è stato disposto un incastro, assumendo che almeno in una prima fase gli ancoraggi lavorino propriamente. Come atteso l'analisi si interrompe prematuramente per le ragioni espresse nel paragrafo 4.8 ma comunque il risultato offre degli spunti interessanti.

In Figura 6-15 e Figura 6-16 sono sovrapposte la curva carico – spostamento in mezzeria della prova sperimentale B1 e il grafico estrapolato dal modello numerico. Si osserva come il comportamento venga colto in maniera ottimale sia in campo elastico che in una prima fase di fessurazione.

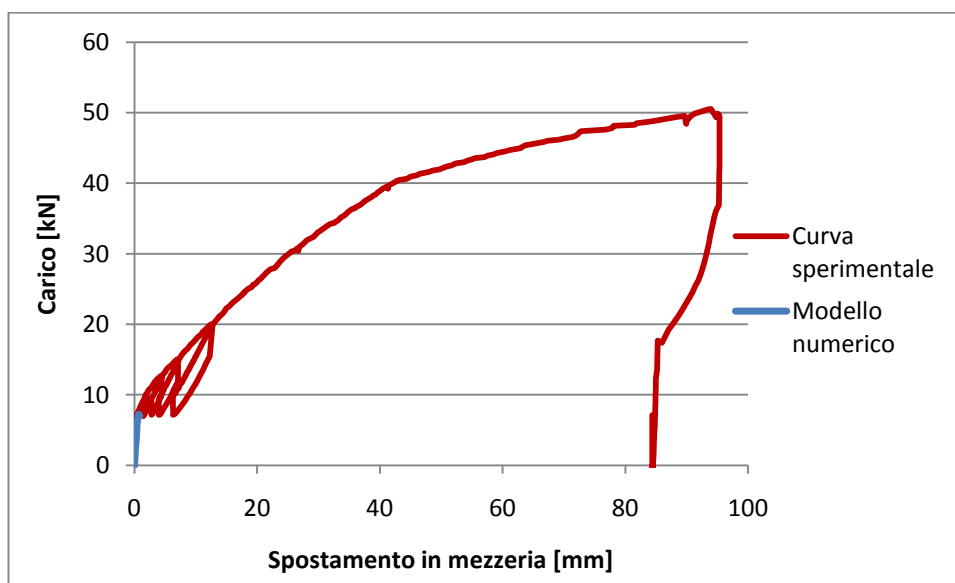


Figura 6-15 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica  
Grafico completo

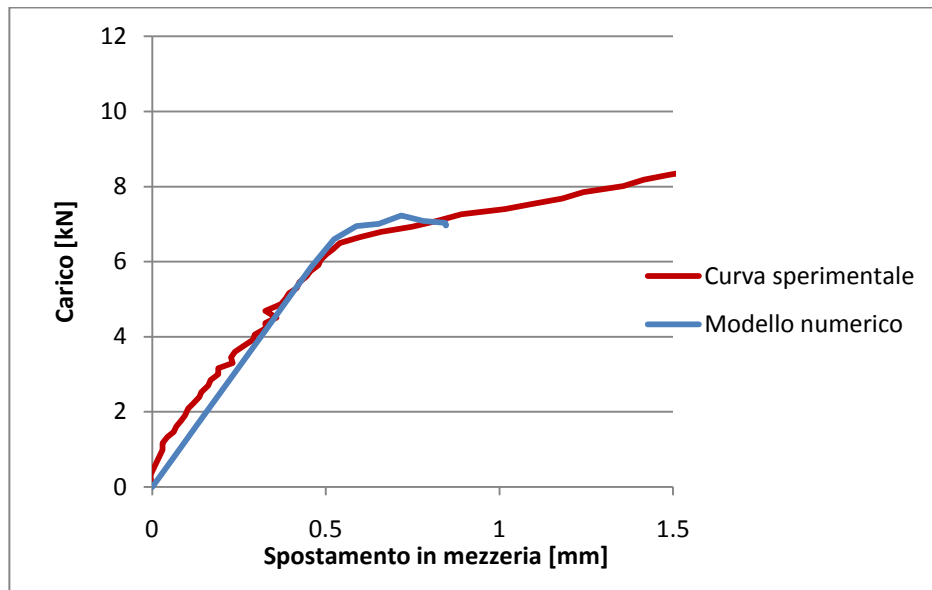


Figura 6-16 - Confronto risultati sperimentali - simulazione numerica  
Zona di interesse

Come anticipato una prova siffatta ha permesso di validare i valori assunti per il modulo elastico e la resistenza a trazione della malta, incogniti a priori. Inizialmente le proprietà meccaniche del materiale erano state sopravvalutate, avendo ipotizzato un modulo elastico  $E = 12900 \text{ MPa}$  ed una resistenza a trazione monoassiale  $f_{tcm} = 2,5 \text{ MPa}$ . Alla luce di tali prove i valori sono stati quindi notevolmente ridotti arrivando ad un  $E = 2000 \text{ MPa}$  e  $f_{tcm} = 1 \text{ MPa}$  (vedi par. 6.2).

### 6.3.2 Stima carico limite ultimo

#### *Appoggio alla base*

Si riportano i risultati ottenuti dall'analisi svolta sul modello avente come vincolo a terra un semplice appoggio. Come anticipato, ai fini di facilitare la convergenza dell'analisi numerica si è incrementata notevolmente la rigidità dei blocchi (calcestruzzo e grout).

Il collasso del pannello così vincolato avviene in corrispondenza di un carico applicato nel *reference point* pari a 11,92 kN, che moltiplicato per due è pari a 23,85 kN (vedi Figura 6-17). Tale valore è di molto al di sotto dei valori ottenuti sperimentalmente (fra i 40 e i 50 kN).

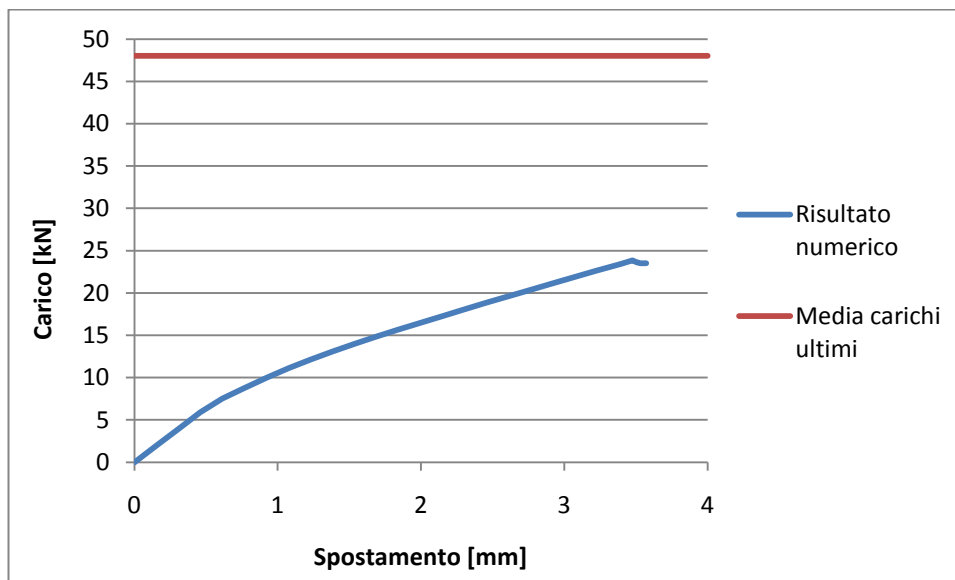


Figura 6-17 - Curva carico - spostamento in mezzeria



Come atteso in tutte le sezioni nella parte centrale soggetta a momento flettente costante si sviluppa una profonda frattura (vedi Figura 6-18 e Figura 6-19). L'analisi si interrompe in seguito allo snervamento delle barre in corrispondenza di tutte le suddette sezioni, raggiungendo lo sforzo limite di 450 MPa (vedi Figura 6-22 e Figura 6-23).

La sezione più sollecitata risulta essere l'ottava a partire dal basso (1.6 m dalla base). A compressione la malta è ancora lontana dai valori limite (Figura 6-20) ma, attraverso un'opportuna alterazione della scala cromatica (vedi Figura 6-21) è possibile osservare come la sezione subisca comunque un principio di parzializzazione.

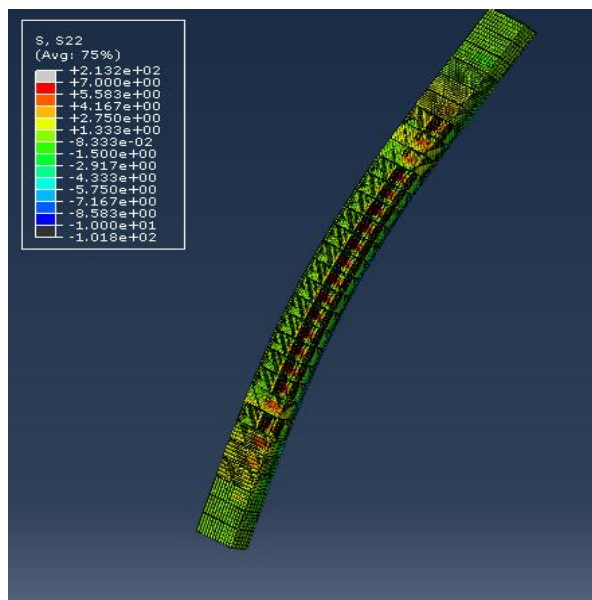


Figura 6-18 - Sforzo assiale al collasso - modello completo

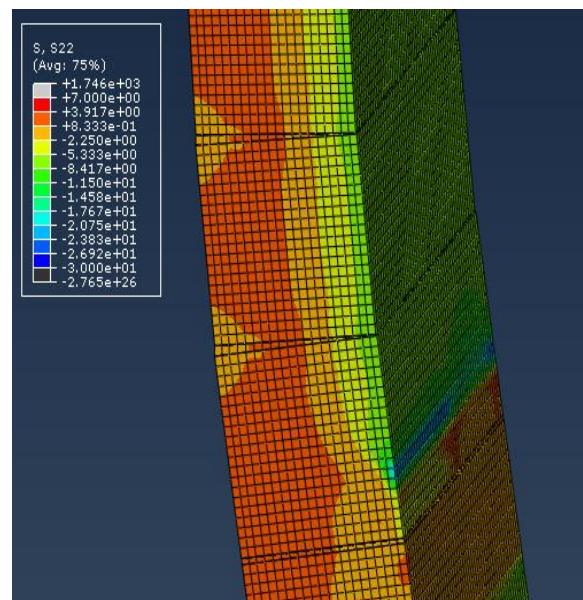


Figura 6-19 - Sforzo assiale al collasso - dettaglio

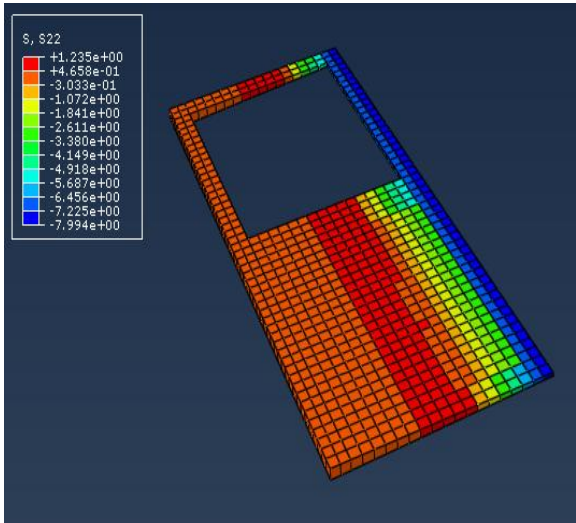


Figura 6-20 - Sforzo assiale al collasso - sezione maggiormente sollecitata

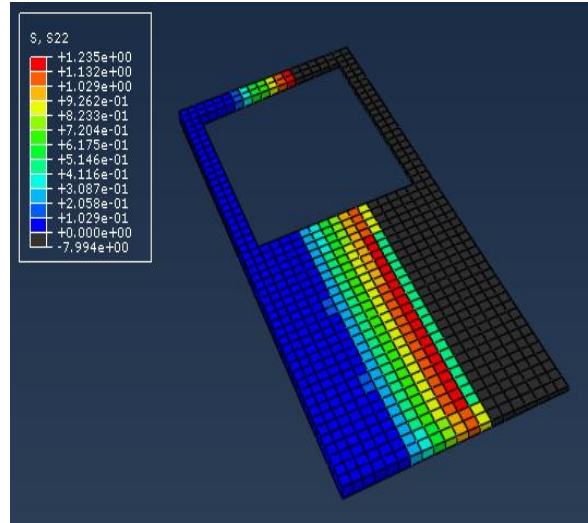


Figura 6-21 – Asse neutro – sezione maggiormente sollecitata

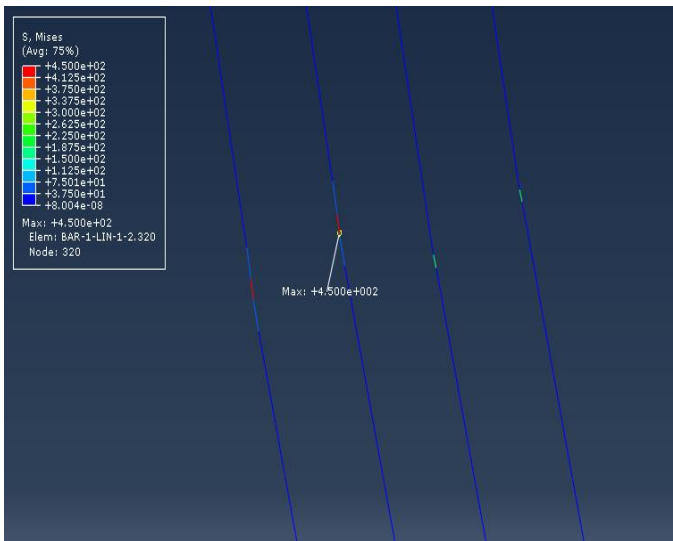


Figura 6-22 - Armature snervate - dettaglio

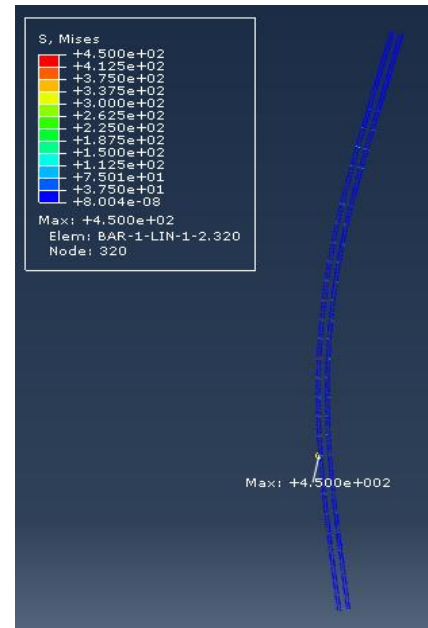
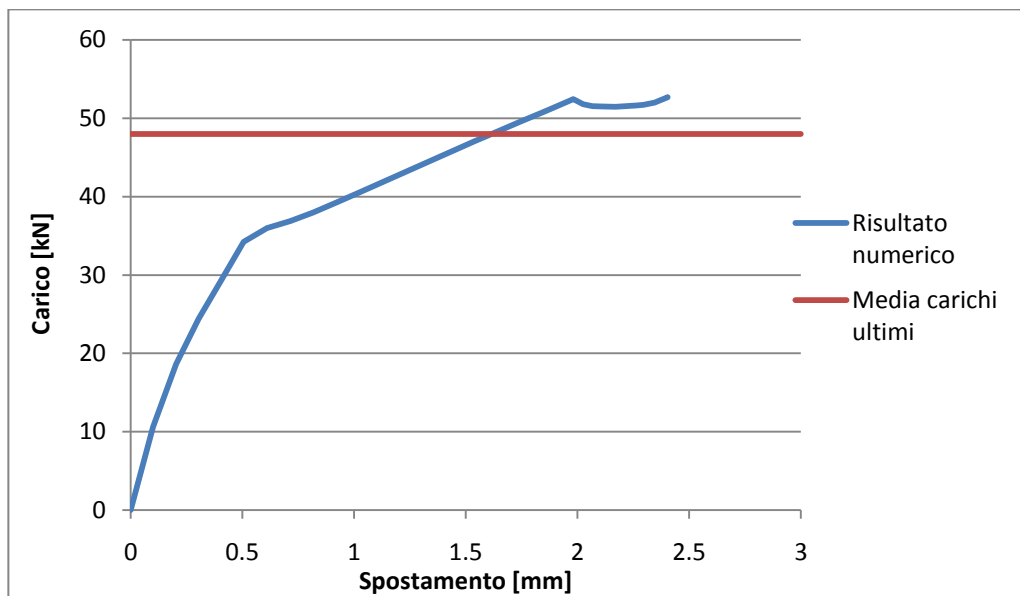


Figura 6-23- Armature snervate

### ***Incastro alla base***

Si riportano i risultati ottenuti dall'analisi svolta sul modello avente come vincolo a terra un incastro perfetto. Anche in questo caso per facilitare la convergenza dell'analisi numerica si è incrementata la rigidità dei blocchi (calcestruzzo e grout).

Il collasso del pannello così vincolato avviene in corrispondenza di un carico applicato nel *reference point* pari a 26,2 kN, che moltiplicato per due è pari a 52,4 kN (vedi Figura 6-17). Tale prova risulta dunque più aderente alle prove sperimentali con un carico ultimo di poco superiore ai valori ottenuti sperimentalmente.



*Figura 6-24 - Curva carico - spostamento in mezzeria*

Tale differenza può essere giustificata alla luce di due considerazioni:

- Lo sfilamento osservato negli ancoraggi, per quanto minimo, causa comunque una riduzione del carico ultimo.
- Le prove sperimentali hanno evidenziato un'estrema ripetibilità dei risultati fatta eccezione per pannelli B2 e B3 (vedi Tabella 2-5). E' lecito pensare dunque che in questi due casi l'effettivo carico di rottura non sia stato colto con precisione e che le prove siano state interrotte prima del raggiungimento

del carico ultimo. Dunque la media dei carichi ultimi misurati sperimentalmente, affetta dai due “outliers” B2 e B3, è probabilmente minore della media dei carichi di rottura effettivi dei pannelli.

Il risultato della prova può essere comunque considerato soddisfacente essendo l'errore in termini di carico ultimo del 8%.

Dalla curva in Figura 6-24 si distinguono tre fasi principali della prova:

- Fino 10 kN il pannello è in fase elastica (Figura 6-25). Raggiunto tale carico si osserva una prima fessurazione nello strato di malta più prossimo alla base, zona in cui si prevede momento sollecitante massimo (Figura 6-26).
- Da 10 kN a 34 kN la fessura nel primo strato di malta si propaga e le fibre compresse iniziano ad entrare in campo inelastico (Figura 6-27, Figura 6-28, Figura 6-30 e Figura 6-31). Le barre si fanno carico degli sforzi di trazione fino al completo snervamento e conseguente formazione di una cerniera plastica alla base (Figura 6-29). Contemporaneamente anche gli strati di malta nel tratto centrale del pannello si fessurano (Figura 6-32).
- Da 34 kN a 52 kN le barre snervate alla base non sono più in grado di sostenere incrementi di carico (Figura 6-33). Il pannello lavora quindi come una trave semplicemente appoggiata con momento massimo nel tratto centrale. Il carico ultimo viene raggiunto con le barre che si snervano in corrispondenza delle fessure createsi fra i due punti di spinta (Figura 6-34, Figura 6-35, Figura 6-36 e Figura 6-37).

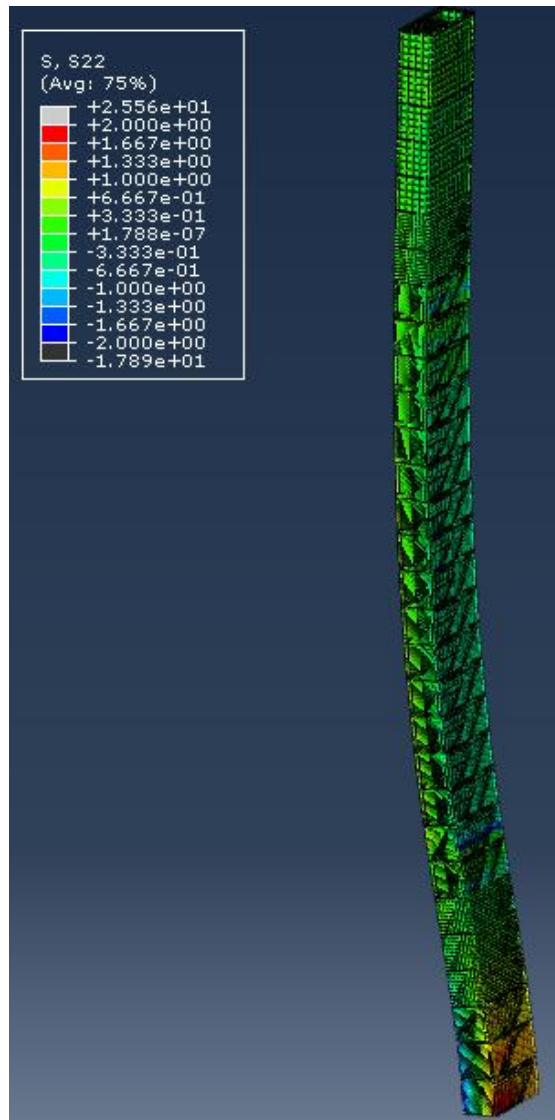


Figura 6-25 - Sforzo assiale con carico 10 kN  
- modello completo

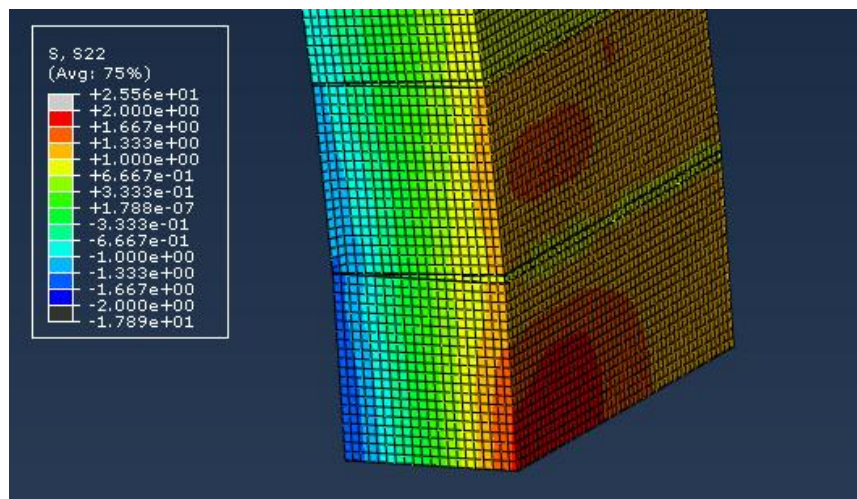


Figura 6-26- Sforzo assiale con carico 10 kN – base del pannello

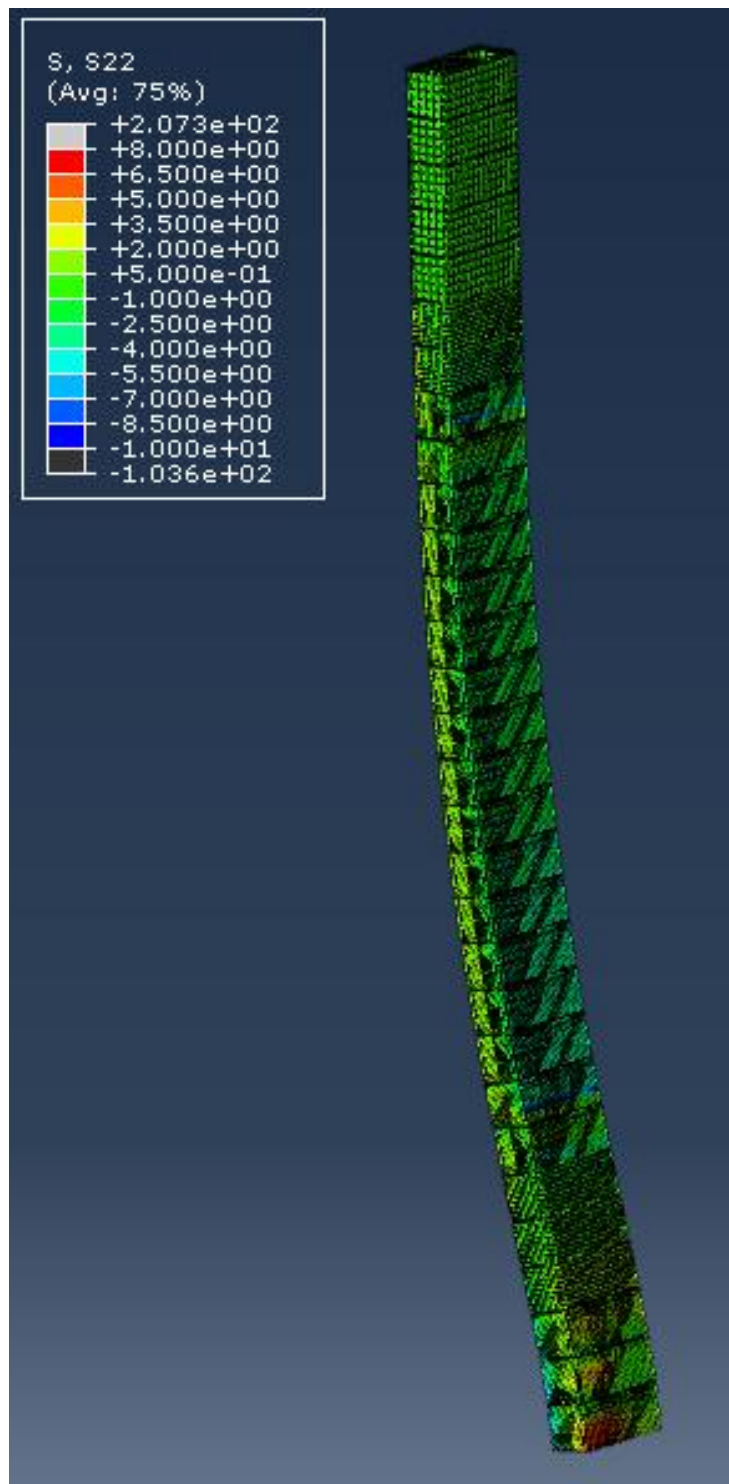


Figura 6-27- Sforzo assiale con carico 34 kN  
- modello completo

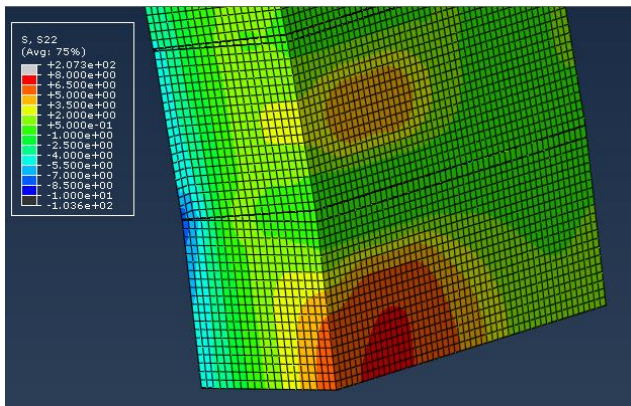


Figura 6-28- Sforzo assiale con carico 34 kN  
– base del pannello

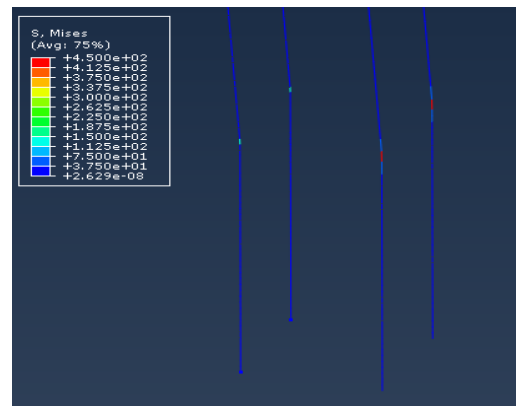


Figura 6-29- Armature snervate con  
carico 34 kN  
– base del pannello

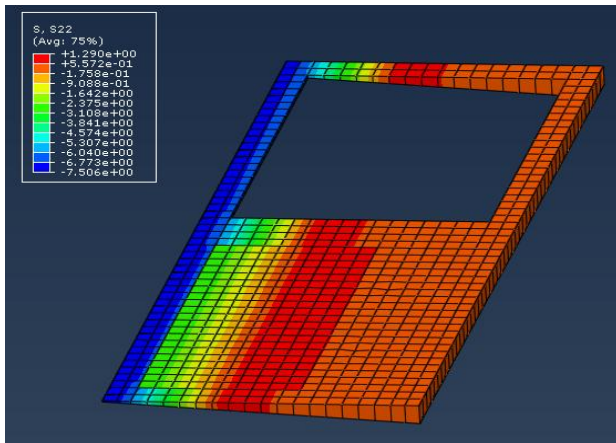


Figura 6-30 - Sforzo assiale con carico 34 kN  
– strato di malta alla base

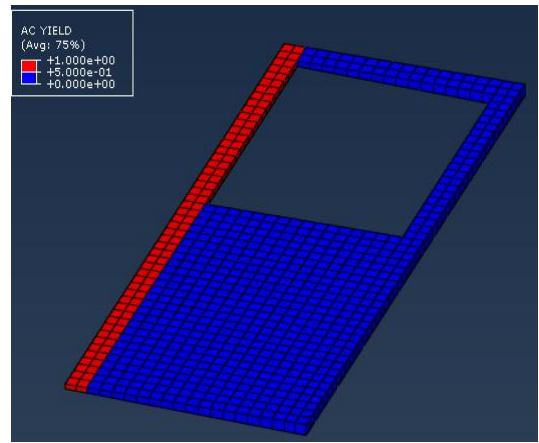


Figura 6-31 – Materiale in fase inelastica con  
carico 34 kN  
- strato di malta alla base

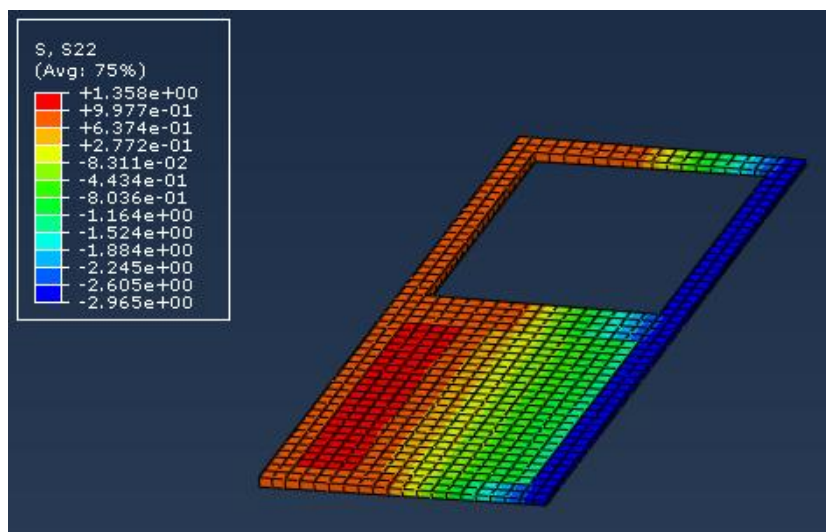
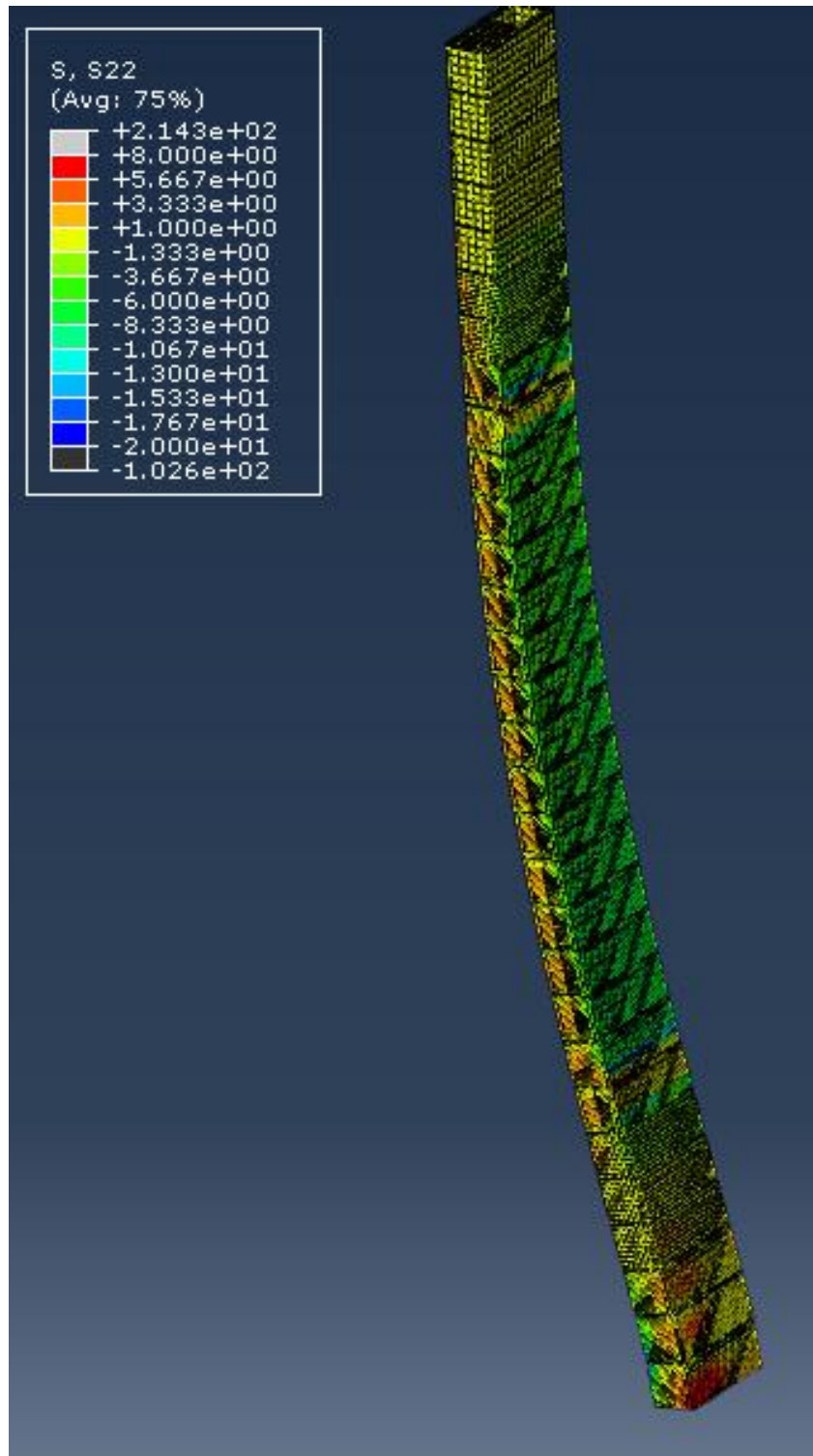


Figura 6-32 - Sforzo assiale con carico 34 kN  
– strato di malta nel tratto centrale



*Figura 6-33- Sforzo assiale al collasso - modello completo*



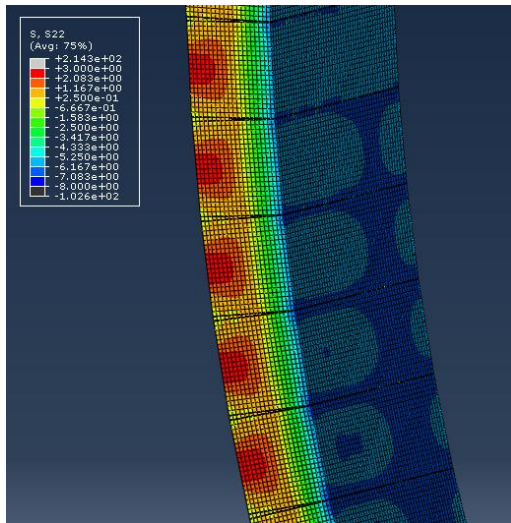


Figura 6-34 - Sforzo assiale al collasso - tratto centrale

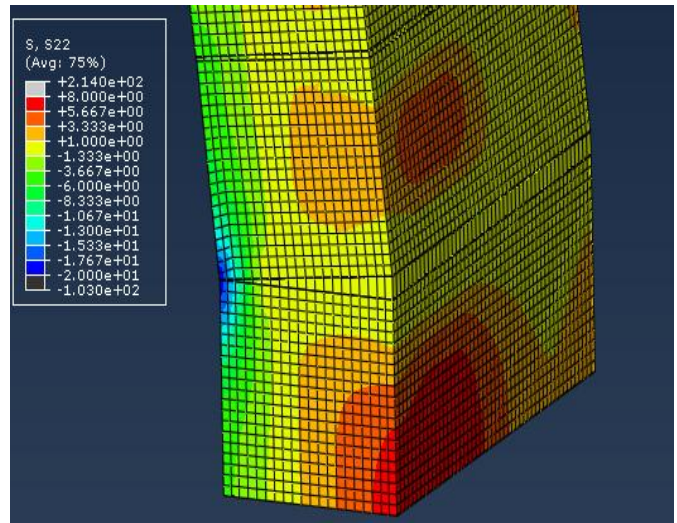


Figura 6-35- Sforzo assiale al collasso – base del pannello

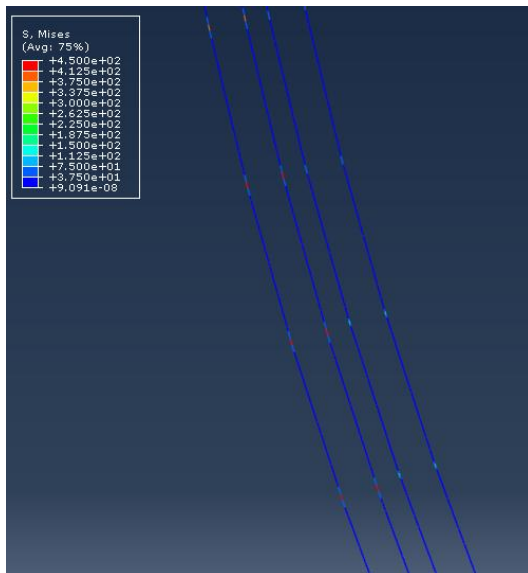


Figura 6-36 - Barre snervate al collasso - tratto centrale

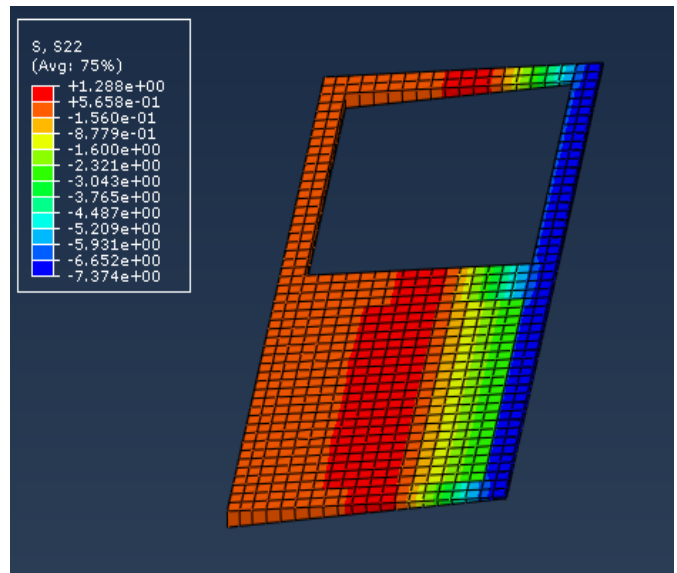


Figura 6-37 - Sforzo assiale al collasso – strato di malta nel tratto centrale

### 6.3.3 Stima degli spostamenti

Al fine di stimare correttamente gli spostamenti, e più in generale dell'intera curva carico – spostamento, si è tentato di modellare l'interazione barre-grout con l'ausilio di molle inelastiche aventi passo di 20 mm lungo l'intero pannello, recuperando quanto mostrato nel paragrafo 4.9. Si era osservato infatti come l'ipotesi di aderenza perfetta alterasse fortemente il risultato in termini di spostamenti (il rapporto fra le due rotazioni in corrispondenza delle quali si aveva il momento massimo era di cinquanta).

Nel tentativo di simulare lo scorrimento delle barre anche nell'ultimo modello numerico sono però insorti problemi di convergenza ed interruzioni premature delle analisi che allo stato attuale non sono ancora stati risolti.

Per quanto visto in letteratura la tematica è ancora oggetto di studio ed è tutt'altro che risolta. Si è convinti tuttavia che l'errore in termini di spostamenti osservato nelle analisi precedenti (la freccia massima nel modello numerico è 50 volte inferiore rispetto alla freccia misurata sperimentalmente) sia proprio dovuto all'ipotesi di perfetta aderenza che, per quanto non alteri i risultati in termini di carico, irrigidisce di molto il modello.

## **7. CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI**

Il lavoro di tesi svolto è stato sviluppato sulla base di prove sperimentali promosse dall'Università del Minho e dalla Senini con oggetto pannelli murari semplici e armati.

L'indagine sui meccanismi di rottura dei pannelli è mirata a predirne il carico ultimo ed è stata svolta attraverso modellazione numerica. Si è utilizzato il software di calcolo Abaqus che consente analisi a elementi finiti tridimensionali.

Il modello costitutivo dei materiali scelto è chiamato "Concrete Smearred Cracking", particolarmente adatto nella simulazione di prove monotone.

Per quanto i modelli costitutivi proposti da Abaqus siano in genere opportunamente validati e di provata affidabilità, si è ritenuto opportuno svolgere delle analisi preliminari mirate a verificarne il buon funzionamento anche in presenza di disomogeneità nei materiali.

Nell'ambito della IMC Students' Challenge sono stati predetti i carichi di rottura di due pannelli composti rispettivamente da mattoni pieni in laterizio e blocchi forati in calcestruzzo vibrocompresso. Le prove sperimentali svolte durante la conferenza a Guimarães hanno validato tale predizione con il conseguimento del secondo posto nella competizione. Alla luce dei dati ottenuti il modello è stato migliorato in modo da cogliere con adeguata precisione non solo il carico ultimo ma l'intera curva carico - spostamento. Gli errori ottenuti sono nell'ordine del 3% nel caso dei pannelli composti da mattoni in laterizio e del 8% nel caso di blocchi in calcestruzzo.

La modellazione dei pannelli armati ha portato ad ottimi risultati in termini di predizione del carico ultimo. Un primo studio è stato finalizzato alla validazione del

modello in fase elastica e alla definizione indiretta dei parametri meccanici della malta, non noti a priori.

Per evitare interruzioni premature dell'analisi prima del raggiungimento del carico ultimo è stato necessario irrigidire arbitrariamente i blocchi e concentrare le deformazioni negli strati di malta. La presenza di quattro materiali interagenti si è rivelata infatti particolarmente complessa da governare.

Il grout all'interno dei blocchi in calcestruzzo è stato implementato con un comportamento perfettamente elastico così da evitare problemi locali dovuti all'interazione con le barre. Tale approssimazione non inficia il risultato dell'analisi essendo attesa la fessurazione esclusivamente negli strati di malta.

Sono stati studiati due modelli che differivano per la tipologia di vincolo a terra: appoggio o incastro. I risultati hanno mostrato come il secondo caso rispecchi maggiormente la condizione reale con una migliore predizione del carico ultimo con un errore del 8%. Ciò ha permesso fra l'altro di fugare i dubbi sul corretto funzionamento degli ancoraggi posti alla base dei pannelli di prova.

Al fine di avere una predizione soddisfacente anche in termini di spostamenti si è tentato di simulare lo scorrimento barre – grout inserendo nel modello numerico delle molle inelastiche. Tale stratagemma, pur avendo portato risultati soddisfacenti durante le prove preliminari svolte su provini di piccole dimensioni, causa difficoltà nella convergenza ed interruzione prematura dell'analisi.

Allo stato attuale non si è ancora giunti ad una soluzione della problematica ma lo studio dell'argomento può essere uno spunto per uno sviluppo futuro mirato a cogliere con sufficiente precisione l'intera curva carico spostamento.

Concludendo, il presente lavoro di tesi propone un approccio all'analisi ed alla modellazione del comportamento meccanico non lineare dei pannelli soggetti a carichi assiali e trasversali validato su dati sperimentali, collocandosi così in un contesto poco studiato ed ancora con ampi margini di ricerca come quello delle murature armate.

## 8. SUMMARY

This thesis work has been developed based on experimental tests sponsored by the University of Minho and Senini carried on ordinary and reinforced masonry prisms.



(a)



(b)



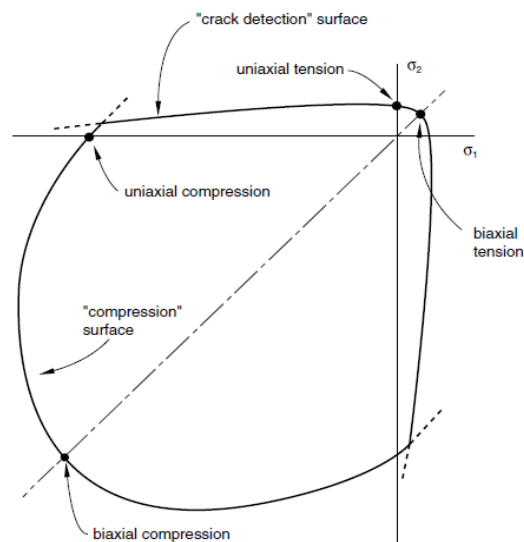
(c)

*Figura 8-1- Final configuration of the panels: a) brick prism; b) hollow concrete prism; c) Reinforced prism*

The investigation into the failure mechanisms of the panels is aimed to predict the ultimate load and was carried out through numerical modeling.

The entire analysis was made using Abaqus CAE, a finite element software that allows to accurately simulate the materials behavior under suitable assumptions.

The constitutive model of the material chosen is called "Concrete Smeared Cracking", suitable for simulation of tests with relatively monotonic loading under fairly low confining pressures.



*Figura 8-2- Concrete smeared cracking yield surface*

Although constitutive models proposed by Abaqus are appropriately validated and of proven reliability, it was considered appropriate to carry out preliminary analysis aimed to check the good operation of the model even in the presence of non-homogeneities of the materials.

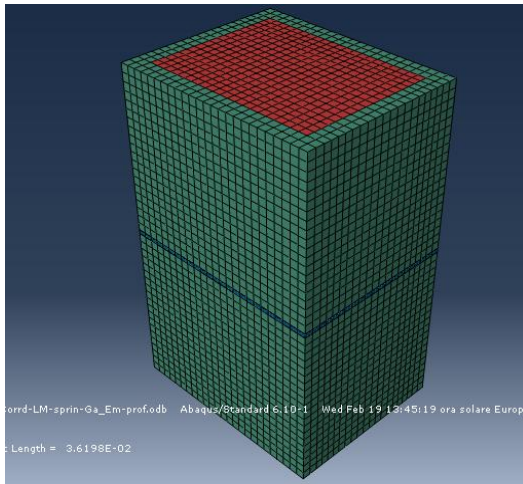


Figura 8-4 - Reinforced sample mesh

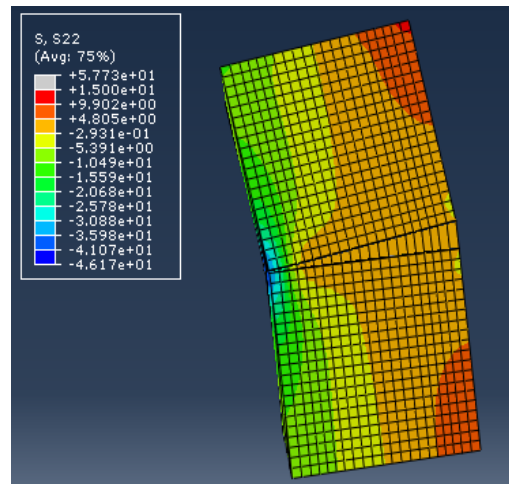


Figura 8-3- Axial stress at collapse

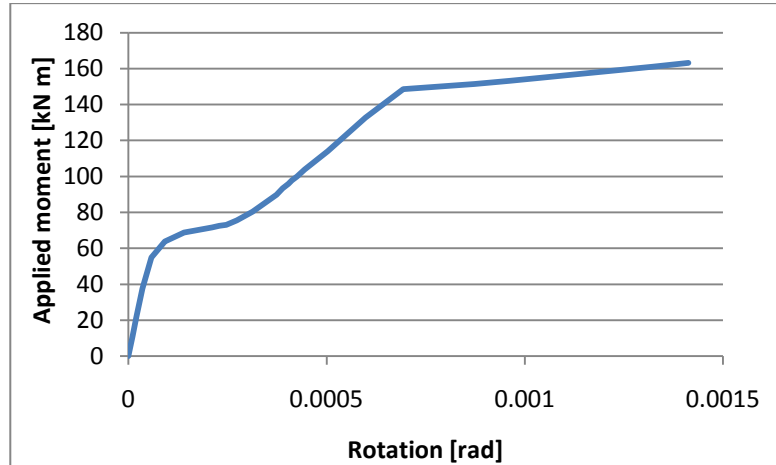


Figura 8-5- Applied moment - rotation curve

For purpose of the IMC Students' Challenge it has been predicted the maximum compressive load of two masonry prisms built with solid bricks, or hollow concrete blocks, and mortar joints.

The tests carried out during the conference in Guimarães have validated this prediction and in turn the second place at the competition has been achieved. In the light of these data the model has been

enhanced in order to capture with reasonably precision not only the ultimate load but the whole load – displacement curve. The errors obtained are in the order of 3% in the case of panels made of bricks and of 8% in the case panels made of concrete blocks.

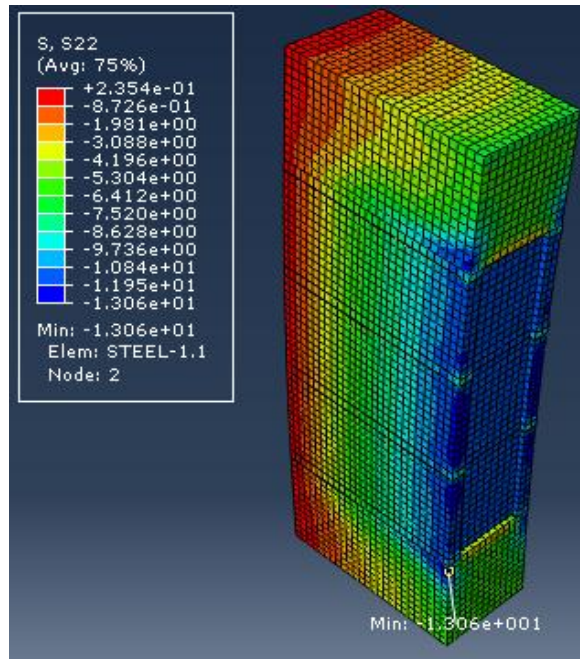


Figura 8-6 - Axial stress at collapse - hollow concrete prism

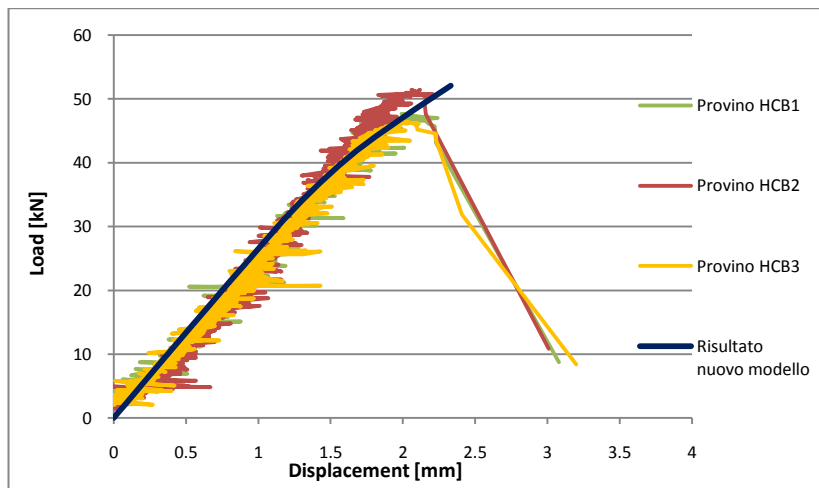


Figura 8-7- Comparison of numerical results with experimental results - brick prisms



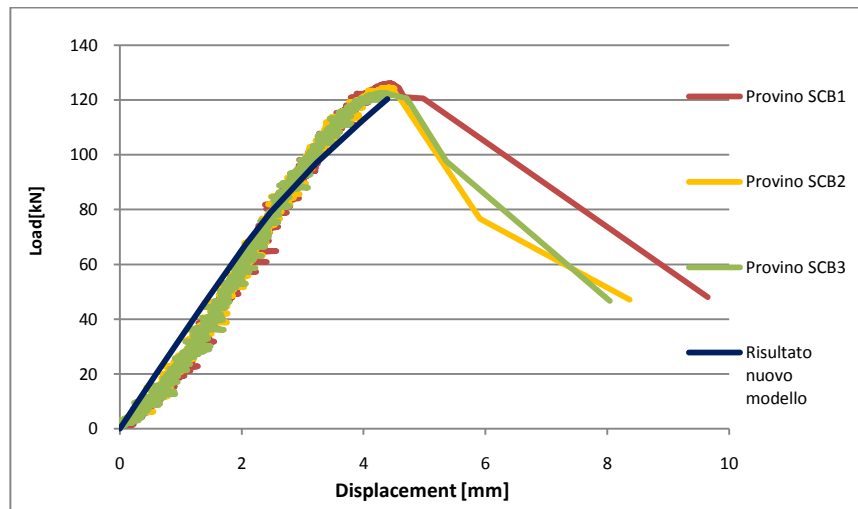


Figura 8-8 - Comparison of numerical results with experimental results - hollow concrete prisms

The modeling of reinforced wall has led to excellent results in terms of prediction of the ultimate load. A first study was aimed at validating the model in the elastic phase and at the definition of indirect mechanical parameters of the mortar, unknown a priori.

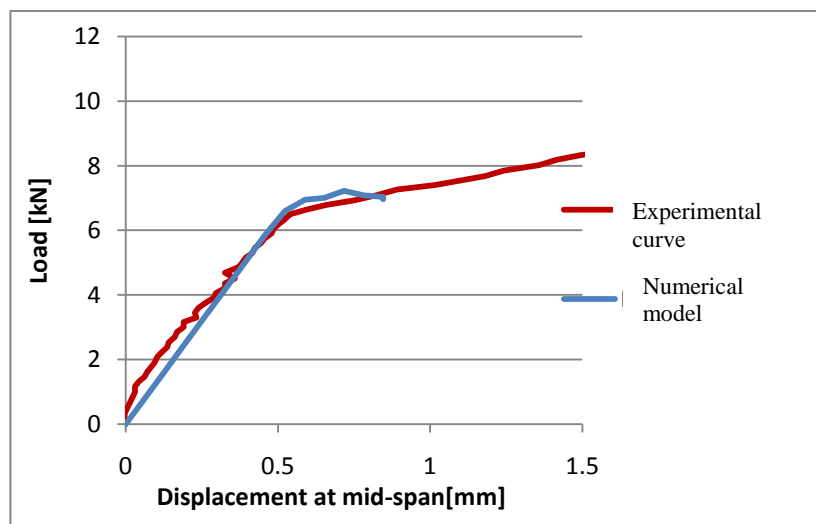


Figura 8-9 - Comparison of numerical results with experimental results - hollow concrete reinforced prism at the early stages

To avoid premature interruption of the analysis before reaching the ultimate load was necessary to stiffen arbitrarily the blocks and to concentrate the strain in the layers of mortar. To deal with the coexistence of four interacting materials has been proved to be particularly complex.

The grout inside the concrete blocks has been implemented with a perfectly elastic behavior in order to avoid problems due to the interaction with local bars. This approximation does not affect the result since the crack is expected to grow only through the mortar layers.

It has been studied two models that differed in the type of constraint at the ground: support or clamp. The results shown that the latter better reflect the real situation with a more accurate prediction of the ultimate load and an error of 8%. This has led, inter alia, to dispel the doubts on the correct operation of the anchors at the base of the test panels.



Figura 8-10- Axial stress at collapse - reinforced panel clamped at the basis

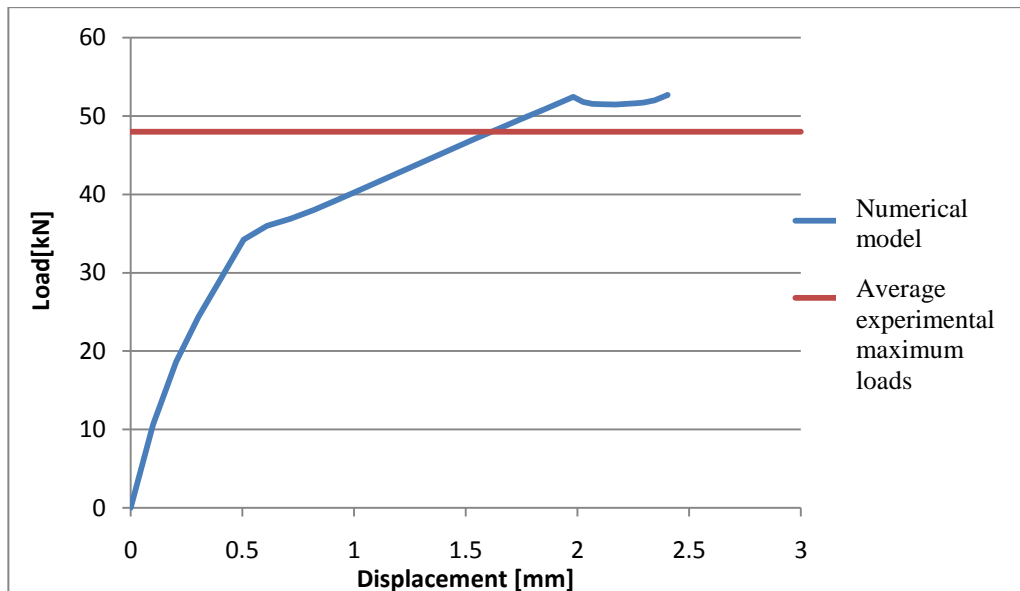


Figura 8-11- Comparison of numerical results with experimental results - hollow concrete reinforced prism

In order to obtain a satisfactory prediction also in terms of displacements it was attempted to simulate the evolution of the slip between bars and grout implementing inelastic springs in the numerical model. This technique, despite having brought good results during the preliminary tests carried on small samples, cause difficulties in convergence and premature termination of the analysis.

At the present time it has not been achieved a solution of the problem but a study of this subject can be a starting step for future development aimed to capture the entire load-displacement curve with sufficient precision.

In conclusion, the described work proposes an approach to the analysis and modeling of non-linear mechanical behavior of masonry panels subjected to axial and transversal loads validated on experimental data, placing itself in a field little studied and still with large margins of research such as reinforced masonry.

## 9. BIBLIOGRAFIA

1. Cis Edil. (2012). *Murature antiespulsione*.
2. FEMA. (2012). *Reducing the Risks of Nonstructural Earthquake Damage*.
3. Ministero delle infrastrutture e dei trasporti. (2008). *Nuove norme Tecniche per le costruzioni 2008*. Roma.
4. Organizing Committee of the 9th International Masonry Conference. (2014). *Rules of the competition*. Guimarães.
5. Organizing Committee of the 9th International Masonry Conference. (2014). *1st Testing Report*. Guimarães.
6. Organizing Committee of the 9th International Masonry Conference. (2014). *2nd Testing Report*. Guimarães.
7. Taliercio, A.; Ardito, R. (2011). *Determinazione della resistenza a flessione di pannelli murari in blocchi di calcestruzzo vibro compattato*. Milano
8. Bertolini, L. (2006). *Materiali da costruzione, Vol. 1*. Novara.
9. Taliercio A. (2006). *Meccanica dei solidi*, Bologna.
10. Bažant, Z. P.; Jiràsek, M. (2002). *Inelastic analysis of structures*. Chichester
11. Chen, W. F.; Han, D.J. (1988). *Plasticity for Structural Engineers*. New York
12. Nielsen M.P. (1984). *Limit analysis and concrete plasticity*. Englewood Cliffs
13. Ansell A.; Hallgren M.; Holmgren J.; Lagerblad B.; Westerberg B. (2012). *Concrete structures*. Stoccolma.
14. Crisfield, M. A. (1986). *Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.

15. Hillerborg, A., M. Modeer, and P. E. Petersson (1976). *Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements*. Cement and Concrete Research, vol. 6
16. Nova, R. (2002). *Fondamenti di meccanica delle terre*. Milano
17. Kupfer, H. B.; Gerstle K. H. (1973). *Behavior of Concrete under Biaxial Stresses*. ASCE 99
18. Cook, R.; Malkus, D.; Plesha, M; Witt, R. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. University of Wisconsin – Madison.
19. Ente Nazionale Italiano di Unificazione. (2005). *Eurocodice 2, Progettazione delle strutture di calcestruzzo, Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici*. Milano.
20. AICAP (2008). *Progettazione di strutture in calcestruzzo armato, guida all'uso dell'EUROCODICE 2, Vol 1*. Roma.
21. Perego U. (2014). *Dispense corso Fracture Mechanics*. Politecnico di Milano.
22. Lin Y. (2010). *Tension stiffening model for reinforced concrete based on bond stress slip relation*. Pennsylvania State University.
23. Casanova A.; Jason L.; Davenne L. (2012). *Bond slip model for the simulation of reinforced concrete structures*. Cauchan.
24. Eligehausen R.; Popov E.P.; Bertero V.V. (1983). *Local bond slip relationships of deformed bars under generalized excitations*. University of California.
25. Gihad M. (2007). *Mechanism failure of concrete block masonry under compression*. Universidade do Minho.