

POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Edile-Architettura

Corso di laurea magistrale in Ingegneria dei Sistemi Edilizi



TESI DI LAUREA MAGISTRALE

***Analisi in regime elasto-viscoso lineare di elementi in
c.a. e c.a.p. a parete sottile e sezione aperta, soggetti a
sollecitazioni di flessione-torsione***

Relatore: Prof. Ing. Marco Andrea Pisani

Tesi di Laurea di:

Giuseppe STEFANONI

Matr. 801272

Stefano STIPITI

Matr. 798934

Anno accademico 2013 – 2014

« La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. »

Galileo Galilei, Il Saggiatore, Cap. VI

Indice dei capitoli

1	Introduzione.....	1
2	Teoria tecnica delle travi a profilo aperto con pareti di piccolo spessore: analisi elastica lineare	4
2.1	Introduzione.....	4
2.2	Considerazioni generali.....	7
2.3	Ipotesi fondamentali.....	8
2.4	Spostamenti e deformazioni.....	9
2.5	Sforzi ed azioni interne	15
2.6	Le equazioni di equilibrio	17
2.7	Il legame costitutivo dei materiali.....	22
2.8	Le coordinate principali.....	24
2.9	Centro di taglio e centro di istantanea rotazione	29
2.10	Esempi.....	31
2.10.1	Coppie torcenti m uniformemente distribuite sull'intera luce	32
2.10.2	Momento torcente $M_t = T$ concentrato in mezzeria.....	36
3	Viscosità del calcestruzzo.....	39
3.1	Introduzione.....	39
3.2	Viscosità lineare	41
3.2.1	Teoremi della viscosità lineare.....	47
3.3	Metodi di analisi in regime elasto-viscoso.....	48
3.3.1	Introduzione.....	48
3.3.2	Modelli semplificati della funzione di viscosità.....	49
3.3.3	Metodo generale.....	63
3.3.4	Metodi algebrizzati.....	83
3.3.5	Serie di Dirichlet	91

4	Impostazione del problema	95
4.1	Il problema del modulo di elasticità tangenziale G e del coefficiente di Poisson ν	95
4.2	Sistema risolvente	98
5	Algebrizzazione del sistema risolvente	104
5.1	Algebrizzazione mediante il metodo di Gauss	104
5.2	Algebrizzazione mediante metodo A. A. E. M.	106
5.3	Deformazioni e tensioni nei materiali	107
5.3.1	Metodo di Gauss	107
5.3.2	Metodo A. A. E. M.	109
5.4	Soluzione del problema della ripartizione del momento torcente in viscoelasticità lineare 110	
5.5	Strutture non omogenee in viscoelasticità lineare	112
5.5.1	Soluzioni teoriche	112
5.5.2	Considerazioni applicative	113
6	Implementazione in MATLAB	114
6.1	Dati di input	115
6.2	Risultati ottenuti	118
6.2.1	Profilo a π	118
6.2.2	Profilo a shed	155
6.3	Osservazioni sul centro di istantanea rotazione	191
7	Conclusioni e sviluppi futuri	195
8	Bibliografia	196
	Ringraziamenti	201

Indice delle figure

Fig.1. 1 – Copertura ad illuminazione indiretta (da Zanon prefabbricati)	1
Fig.1. 2 – Copertura a shed (www.precompressi.com).....	1
Fig.2.1. 1 – Flussi delle tensioni tangenziali	4
Fig.2.1. 2 – Esempi di travi a profilo aperto e parete di piccolo spessore	5
Fig.2.1. 3 – Ingobbamento del profilo.....	5
Fig.2.1. 4 – Profilo a stella	6
Fig.2.2. 1 – Voltine di piccolo spessore	7
Fig.2.3. 1 – Diaframmi trasversali.....	8
Fig.2.4. 1 – Profilo medio della sezione	9
Fig.2.4. 2 – Punti e distante mutue	11
Fig.2.4. 3 – Concio infinitesimo di superficie	12
Fig.2.4. 4 – Proiezione di ds sugli assi x e y	12
Fig.2.4. 5 – Area settoriale	13
Fig.2.5. 1 – Elemento infinitesimo di voltina.....	15
Fig.2.5. 2 – Convenzioni sulle azioni applicate.....	16
Fig.2.6. 1 – Equilibrio della voltina	17
Fig.2.6. 2 – Membrature	19
Fig.2.6. 3 – Tensioni tangenziali sulla voltina.....	20
Fig.2.7. 1 – Profilo delle tensioni tangenziali	23
Fig.2.8. 1 – Andamento di χ [2]	27
Fig.2.8. 2 – Area settoriale del profilo a stella	28
Fig.2.8. 3 – Vincoli	29
Fig.2.9. 1 – Rotazione del profilo	30
Fig.2.9.1. 1 – Diagrammi delle azioni interne – momento torcente distribuito	34
Fig.2.9.2. 1 – Momento torcente concentrato in mezzeria	36
Fig.2.9.2. 2 - Diagrammi delle azioni interne – momento torcente in mezzeria	38
Fig.3.2. 1 – Funzione di viscosità.....	41
Fig.3.2. 2 - Funzione di viscosità secondo modello CEB '90.....	43
Fig.3.2. 3 - Funzione di rilassamento secondo modello CEB '90.....	43
Fig.3.2. 4 – Sovrapposizione degli effetti	44

Fig.3.3. 1 – Modello ereditario di Boltzmann.....	50
Fig.3.3. 2 – Funzione di viscosità secondo Boltzmann	51
Fig.3.3. 3 – Modello ereditario di Kelvin-Voight	51
Fig.3.3. 4 – Comportamento ereditario del materiale	52
Fig.3.3. 5 - Elemento di Kelvin-Voight con un elemento viscoso in serie	53
Fig.3.3. 6 – Comportamento del materiale con elemento viscoso in serie	53
Fig.3.3. 7 – Influenza del tempo di messa in carico sulla funzione di viscosità	54
Fig.3.3. 8 – Confronto tra i modelli	56
Fig.3.3. 9 – Comportamento irreversibile del materiale.....	56
Fig.3.3.2.5. 1 – Confronto tra CEB '90 e fib 2010	62
Fig.3.3.3.1. 1 – Funzione di viscosità.....	64
Fig.3.3.3.4. 1 – Convenzione di segno delle azioni esterne	71
Fig.3.3.4. 1 – Approssimazione dell'integrale di Volterra	83
Fig.3.3.4.1. 1 – Metodo M.S.M.....	87
Fig.3.3.4.2. 1 - Metodo E.M.M.	88
Fig.3.3.4.3. 1 - Metodo A.A.E.M.	89
Fig.3.3.4.4. 1 – Andamento reale della funzione di viscosità.....	90
Fig.3.3.5.1. 1 – Elementi della serie di Dirichlet	92
Fig.4.1. 1 – Torsione alla De Saint Venant.....	96
Fig.6. 1 – Profilo commerciale a π	114
Fig.6. 2 - Profilo commerciale a shed	114
Fig.6.2.1.1. 1 – Punti notevoli del profilo a π	118
Fig.6.2.1.2. 1 – Funzione di viscosità in output– profilo a π	119
Fig.6.2.1.3.1. 1 – Punti notevoli del calcestruzzo – verifica 1° teorema – profilo a π	120
Fig.6.2.1.3.2. 1 - Punti notevoli del calcestruzzo – verifica 2° teorema – profilo a π	123
Fig.6.2.1.3.3. 1 - Punti notevoli del calcestruzzo – verifica asse neutro – profilo a π	126
Fig.6.2.1.4.1. 1 – ψ_1 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	132
Fig.6.2.1.4.1. 2 – ψ_x adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	133
Fig.6.2.1.4.1. 3 – ψ_y adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	133
Fig.6.2.1.4.1. 4 – ψ_θ adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	134
Fig.6.2.1.4.1. 5 – Tensione cavo 21 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	134
Fig.6.2.1.4.1. 6 - Tensione cavo 25 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	135

Fig.6.2.1.4.1. 7 - Tensione cavo 27 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	135
Fig.6.2.1.4.1. 8 - Tensione cavo 41 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	136
Fig.6.2.1.4.1. 9 - Tensione cavo 45 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	136
Fig.6.2.1.4.1. 10 - Tensione cavo 47 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	137
Fig.6.2.1.4.1. 11 - Tensione calcestruzzo in O adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	137
Fig.6.2.1.4.1. 12 - Tensione calcestruzzo in B adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	138
Fig.6.2.1.4.1. 13 - Tensione calcestruzzo in C adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	138
Fig.6.2.1.4.1. 14 - Tensione calcestruzzo in A adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	139
Fig.6.2.1.4.1. 15 - Tensione calcestruzzo in E adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	139
Fig.6.2.1.4.1. 16 - Tensione calcestruzzo in L adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	140
Fig.6.2.1.4.1. 17 - Tensione calcestruzzo in M adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π	140
Fig.6.2.1.4.1. 18 – Deformata lungo l’asse z – caso 1 – profilo a π	142
Fig.6.2.1.4.1. 19 – Rotazione del profilo – caso 1 – profilo a π	142
Fig.6.2.1.4.2. 1– ψ_1 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	144
Fig.6.2.1.4.2. 2– ψ_x adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	145
Fig.6.2.1.4.2. 3– ψ_y adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	145
Fig.6.2.1.4.2. 4– ψ_θ adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	146
Fig.6.2.1.4.2. 5– Tensione cavo 21 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	146
Fig.6.2.1.4.2. 6– Tensione cavo 25 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	147
Fig.6.2.1.4.2. 7– Tensione cavo 27 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	147
Fig.6.2.1.4.2. 8– Tensione cavo 41 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	148
Fig.6.2.1.4.2. 9– Tensione cavo 45 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	148
Fig.6.2.1.4.2. 10– Tensione cavo 47 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	149
Fig.6.2.1.4.2. 11- Tensione calcestruzzo in O adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	149
Fig.6.2.1.4.2. 12- Tensione calcestruzzo in B adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	150
Fig.6.2.1.4.2. 13- Tensione calcestruzzo in C adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	150
Fig.6.2.1.4.2. 14- Tensione calcestruzzo in A adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	151
Fig.6.2.1.4.2. 15- Tensione calcestruzzo in E adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	151
Fig.6.2.1.4.2. 16- Tensione calcestruzzo in L adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	152
Fig.6.2.1.4.2. 17- Tensione calcestruzzo in M adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π	152
Fig.6.2.1.4.2. 18– Deformata lungo l’asse z – caso 2 – profilo a π	154
Fig.6.2.2.1. 1– Punti notevoli del profilo a shed	155
Fig.6.2.2.2. 1 – Funzione di viscosità in output– profilo a shed.....	156

Fig.6.2.2.3.1. 1– Punti notevoli del calcestruzzo – verifica 1° teorema – profilo a shed	157
Fig.6.2.2.3.2. 1- Punti notevoli del calcestruzzo – verifica 2° teorema – profilo a shed	160
Fig.6.2.2.4.1. 1– ψ_1 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	168
Fig.6.2.2.4.1. 2– ψ_x adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	169
Fig.6.2.2.4.1. 3– ψ_y adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	169
Fig.6.2.2.4.1. 4– ψ_θ adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	170
Fig.6.2.2.4.1. 5– Tensione cavo 11 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	170
Fig.6.2.2.4.1. 6– Tensione cavo 21 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	171
Fig.6.2.2.4.1. 7– Tensione cavo 31 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	171
Fig.6.2.2.4.1. 8– Tensione cavo 41 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	172
Fig.6.2.2.4.1. 9– Tensione cavo 42 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	172
Fig.6.2.2.4.1. 10- Tensione calcestruzzo in H adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	173
Fig.6.2.2.4.1. 11- Tensione calcestruzzo in O adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	173
Fig.6.2.2.4.1. 12- Tensione calcestruzzo in F adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	174
Fig.6.2.2.4.1. 13- Tensione calcestruzzo in E adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed	174
Fig.6.2.2.4.1. 14- Tensione calcestruzzo in B adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed.....	175
Fig.6.2.2.4.1. 15- Tensione calcestruzzo in A adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed.....	175
Fig.6.2.2.4.1. 16– Deformata lungo l’asse z – caso 1 – profilo a shed	177
Fig.6.2.2.4.1. 17– Rotazione del profilo – caso 1 – profilo a shed	178
Fig.6.2.2.4.2. 1– ψ_1 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	180
Fig.6.2.2.4.2. 2– ψ_x adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	181
Fig.6.2.2.4.2. 3– ψ_y adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	181
Fig.6.2.2.4.2. 4– ψ_θ adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	182
Fig.6.2.2.4.2. 5– Tensione cavo 11 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	182
Fig.6.2.2.4.2. 6– Tensione cavo 21 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	183
Fig.6.2.2.4.2. 7– Tensione cavo 31 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	183
Fig.6.2.2.4.2. 8– Tensione cavo 41 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	184
Fig.6.2.2.4.2. 9– Tensione cavo 42 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	184
Fig.6.2.2.4.2. 10- Tensione calcestruzzo in H adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	185
Fig.6.2.2.4.2. 11- Tensione calcestruzzo in O adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	185
Fig.6.2.2.4.2. 12- Tensione calcestruzzo in F adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	186
Fig.6.2.2.4.2. 13- Tensione calcestruzzo in E adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed	186

Fig.6.2.2.4.2. 14- Tensione calcestruzzo in B adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed.....	187
Fig.6.2.2.4.2. 15- Tensione calcestruzzo in A adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed.....	187
Fig.6.2.2.4.2. 16– Deformazione del profilo medio in mezzeria della trave – caso 2 – profilo a shed.....	190
Fig.6.2.2.4.2. 17– Rotazione del profilo – caso 2 – profilo a shed	190

Indice delle tabelle

Tab.6.2.1.1. 1 – Caratteristiche geometriche del profilo a π	118
Tab.6.2.1.1. 2 - Proprietà dei punti notevoli del calcestruzzo (a s_x) e dei cavi (a d_x) – profilo a π	119
Tab.6.2.1.2. 1 – Dati per il calcolo della funzione di viscosità – profilo a π	119
Tab.6.2.1.3.1. 1 – Verifica 1° teorema – A.A.E.M.M. - profilo a π	121
Tab.6.2.1.3.1. 2 - Verifica 1° teorema – Gauss - profilo a π	122
Tab.6.2.1.3.2. 1 - Verifica 2° teorema – A.A.E.M.M. - profilo a π	124
Tab.6.2.1.3.2. 2 - Verifica 2° teorema – Gauss - profilo a π	125
Tab.6.2.1.3.3. 1 - Verifica asse neutro- profilo a π	127
Tab.6.2.1.3.4. 1 – Verifica cavo risultante – profilo a π	129
Tab.6.2.1.3.5. 1 - Verifica equilibrio della sezione - cavi - profilo a π	130
Tab.6.2.1.3.5. 2 - Verifica equilibrio della sezione - calcestruzzo - profilo a π	130
Tab.6.2.1.3.5. 3 - Verifica equilibrio della sezione - profilo a π	130
Tab.6.2.1.4.1. 1 – ψ_e – caso 1 – profilo a π	131
Tab.6.2.1.4.1. 2 – σ_{pe} – caso 1 – profilo a π	131
Tab.6.2.1.4.1. 3 – σ_{ce} – caso 1 – profilo a π	132
Tab.6.2.1.4.1. 4 – Deformazione del profilo medio in mezzera della trave – caso 1 – profilo a π	142
Tab.6.2.1.4.2. 1 – ψ_e – caso 2 – profilo a π	143
Tab.6.2.1.4.2. 2– σ_{pe} – caso 2 – profilo a π	143
Tab.6.2.1.4.2. 3 – σ_{ce} – caso 2 – profilo a π	144
Tab.6.2.1.4.2. 4– Deformazione del profilo medio in mezzera della trave – caso 2 – profilo a π	154
Tab.6.2.2.1. 1– Caratteristiche geometriche del profilo a shed	155
Tab.6.2.2.1. 2- Proprietà dei punti notevoli del calcestruzzo (a s_x) e dei cavi (a d_x) – profilo a shed.....	156
Tab.6.2.2.2. 1 - Dati per il calcolo della funzione di viscosità – profilo a shed	156
Tab.6.2.2.3.1. 1– Verifica 1° teorema – A.A.E.M.M. - profilo a shed	158
Tab.6.2.2.3.1. 2- Verifica 1° teorema – Gauss - profilo a shed.....	159
Tab.6.2.2.3.2. 1- Verifica 2° teorema – A.A.E.M.M. - profilo a shed.....	161
Tab.6.2.2.3.2. 2- Verifica 2° teorema – Gauss - profilo a shed.....	162

Tab.6.2.2.3.3. 1– Verifica cavo risultante – profilo a shed.....	164
Tab.6.2.2.3.4. 1- Verifica equilibrio della sezione - cavi - profilo a shed	165
Tab.6.2.2.3.4. 2- Verifica equilibrio della sezione - calcestruzzo - profilo a shed	165
Tab.6.2.2.3.4. 3- Verifica equilibrio della sezione - profilo a shed.....	165
Tab.6.2.2.3.5. 1 – Risposta elastica in output programma	166
Tab.6.2.2.3.5. 2 - [56], tensione cavi in kg/cm ²	166
Tab.6.2.2.3.5. 3 - [56], tensione calcestruzzo in kg/cm ²	166
Tab.6.2.2.4.1. 1– ψ_e – caso 1 – profilo a shed.....	167
Tab.6.2.2.4.1. 2 – σ_{pe} – caso 1 – profilo a shed	167
Tab.6.2.2.4.1. 3 – σ_{ce} – caso 1 – profilo a shed	168
Tab.6.2.2.4.1. 4– Deformazione del profilo medio in mezzeria della trave – caso 1 – profilo a shed.....	177
Tab.6.2.2.4.2. 1– ψ_e – caso 2 – profilo a shed.....	179
Tab.6.2.2.4.2. 2– σ_{pe} – caso 2 – profilo a shed	179
Tab.6.2.2.4.2. 3– σ_{ce} – caso 2 – profilo a shed	180
Tab.6.2.2.4.2. 4– Deformazione del profilo medio in mezzeria della trave – caso 2 – profilo a shed.....	189
Tab.6.3. 1 – Coordinate centro di istantanea rotazione – sezione omogenea	192
Tab.6.3. 2– Coordinate centro di istantanea rotazione – sezione eterogenea.....	194

Indice degli allegati

Allegato 02: Guida all'utente

Allegato 03: Codici di programma profilo a pi greco

Allegato 04: Codici di programma profilo a shed

Abstract in italiano

Nella presente trattazione si estendono i lavori già affrontati relativi all'analisi degli effetti elastoviscosi nella torsione di elementi in c.a. e c.a.p. a parete sottile e sezione aperta, isostaticamente vincolati, prendendo in conto anche la portanza torsionale alla De Saint Venant.

Preliminarmente, si analizzano le grandezze elastiche G e ν , adattandole al campo elastoviscoso lineare.

Per quanto riguarda la funzione di viscosità $J(t, t_0)$, si espongono i modelli proposti dal CEB '90 e dal fib 2010, riscontrando come questi forniscano funzioni con andamento diverso nel corso del tempo.

Successivamente si risolve il problema della ripartizione nel tempo del momento torcente sollecitante tra le portanze torsionali alla Vlasov e alla De Saint Venant. Si dimostra in forma chiusa, sia per le strutture omogenee sia per quelle eterogenee, che la ripartizione del momento torcente rimanga costante nel tempo.

Si confrontano poi i risultati forniti in output dal programma implementato sia per il Metodo Generale sia per il metodo A.A.E.M., per mostrare come lo scostamento tra i due metodi sia di bassissima entità.

Si dimostra infine che il centro di istantanea rotazione della sezione non sia in generale fisso nel tempo.

Abstract in inglese

This thesis deals with the prediction of the long-term behavior of thin walled heterogeneous viscoelastic beams. Namely, the work analyses the cross-section behavior of prestressed concrete beams under axial force, bending and torsion. The approach herein suggested takes into account both uniform torsion (that is De Saint Venant torsion theory) and warping torsion (i.e. Vlasov torsion theory), and therefore deals with a cross section redundancy.

The time evolution of the Poisson's ratio and of the shear modulus are preliminarily studied to determine their behaviour in linear viscoelasticity.

The creep functions CEB'90 and fib 2010 are then compared and the differences found are highlighted.

The problem of the time evolution of the subdivision of the torsional moment between uniform and warping torsion is analysed. The invariance of the subdivision of the torsional moment both for homogeneous structure and for non-homogeneous ones is demonstrated

Last but not least, a computer program that solves the problem already discussed by means of either the General Method and the A.A.E.M. Method (an algebraized approach) is presented and the two methods are compared.

At the end, the fact that the instantaneous center of rotation of the section doesn't stay constant in time is proven.

1 Introduzione

Nel campo delle strutture prefabbricate è assai diffuso l'uso di sezioni dissimmetriche nelle coperture ad illuminazione indiretta (fig.1.1 e fig.1.2). Tali elementi strutturali sono soggetti ad un'azione di torsione anche se caricati del solo peso proprio, mentre il collegamento mutuo avviene attraverso le superfici vetrate che per loro natura non possono essere considerate un vincolo efficace.

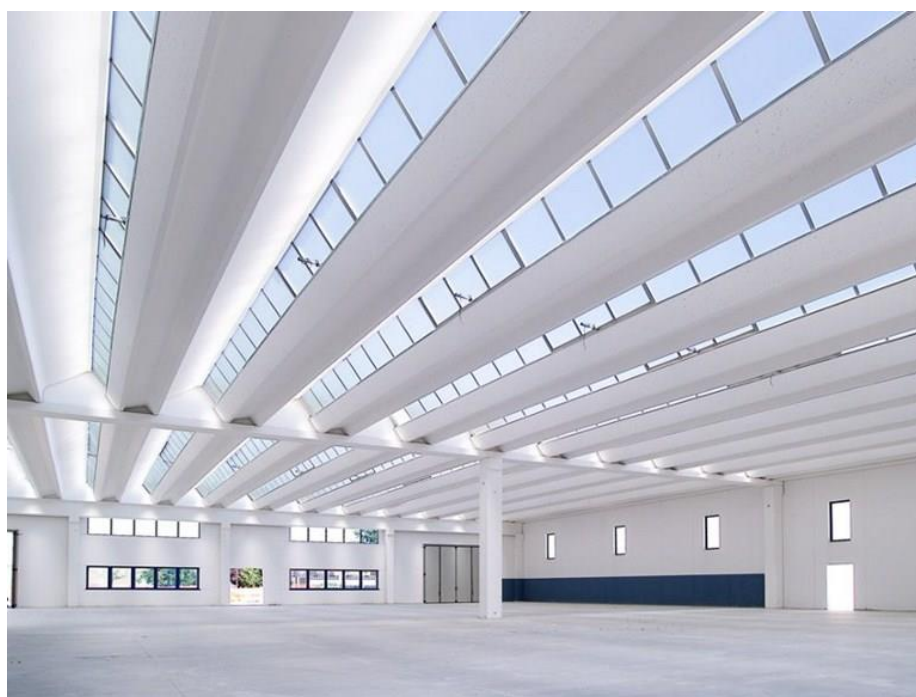


Fig.1. 1 – Copertura ad illuminazione indiretta (da Zanon prefabbricati)

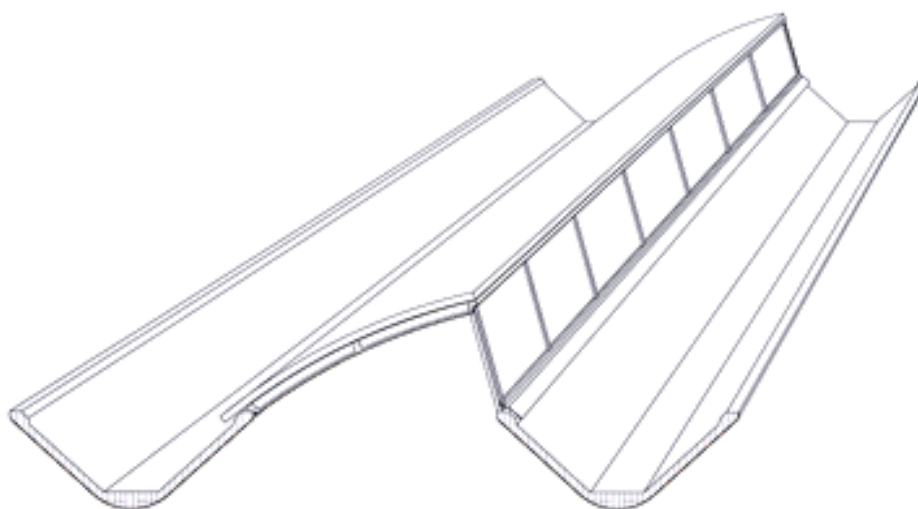


Fig.1. 2 – Copertura a shed (www.precompressi.com)

Un'analisi elastica lineare di questo tipo di strutture può essere utilizzata per lo studio di elementi in cemento armato precompresso, soggetti ad azioni istantanee, nella fase di esercizio.

Una valutazione più approfondita del comportamento di questo tipo di elementi strutturali è però necessaria per poter procedere ad una misura affidabile della sicurezza in tutte le situazioni ove le leggi costitutive dei materiali non si possano ritenere elastiche lineari. In particolare, una corretta determinazione dello stato di tensione e deformazione nelle strutture in cemento armato precompresso già nella fase di esercizio deve necessariamente essere svolta considerando i fenomeni di viscosità e ritiro del calcestruzzo, onde valutare con esattezza il campo di spostamento nonché la variazione dello stato di coazione nelle sezioni. Nella verifica della capacità resistente ultima degli stessi elementi strutturali è poi essenziale la preventiva determinazione della deformazione al limite di decompressione, così come previsto dalle norme vigenti.

Allorché alle sollecitazioni di flessione e forza normale si affianchi la torsione, il problema si complica notevolmente. Questa tesi si propone di estendere e svolgere un confronto tra metodi esistenti atti ad analizzare travi con profilo aperto e parete di piccolo spessore, soggette a carichi sia di lunga durata, che inducono nel tempo stati di autotensione nella trave per effetto dei fenomeni differiti del calcestruzzo e della eterogeneità strutturale, sia di breve durata, ed utilizzando le leggi costitutive monoassiali non più di tipo elastico lineare bensì di tipo elasto-viscoso lineare.

Verrà inoltre preso in considerazione e risolto in forma chiusa il problema della ripartizione del momento torcente applicato a questo tipo di elementi strutturali tra le due portanze torsionali (alla De Saint Venant e alla Vlasov). La presenza concomitante di tali due distinti meccanismi resistenti provoca inevitabilmente un'iperstaticità sezionale del problema, anche quando la trave nel suo insieme è vincolata isostaticamente.

A tale scopo nel capitolo 2 viene presentata l'ormai classica teoria tecnica nota anche come teoria di Vlasov.

Nel capitolo 3 viene trattato il problema del comportamento in esercizio, sotto carichi di lunga durata, di travi in cemento armato ordinario o precompresso, considerando diverse leggi costitutive per il calcestruzzo, tutte di tipo elasto-viscoso lineare.

Nel capitolo 4 viene impostato la soluzione del problema in regime elasto-viscoso lineare sviluppando in particolare considerazioni riguardo il coefficiente di Poisson ed il modulo di elasticità tangenziale.

Nel capitolo 5 il sistema risolvete viene adattato alla formulazione secondo un Metodo Generale (metodo di Gauss), più preciso e pertanto assunto come riferimento per confronti con altri metodi, e secondo un metodo algebrizzato (A.A.E.M.M.), caratterizzato da un minore onere computazionale e di conseguenza più utilizzato nella pratica professionale. Inoltre, in questo capitolo si risolve il problema della ripartizione del momento torcente in viscoelasticità lineare.

Nel capitolo 6 si descrivono i codici di calcolo implementati secondo le espressioni ricavate per i due metodi presentati; i codici sono stati scritti per due profili commerciali comuni, quali il profilo a π e a shed. Si riportano poi le verifiche sulla affidabilità del programma e i risultati forniti per vari casi, confrontando l'accuratezza del metodo algebrizzato rispetto al metodo generale. In ultima analisi vengono effettuate delle osservazioni sul centro di istantanea rotazione della sezione.

Nel capitolo 7 sono infine riportate le conclusioni e la sintesi dei risultati conseguiti da questa tesi.

2 Teoria tecnica delle travi a profilo aperto con pareti di piccolo spessore: analisi elastica lineare

2.1 Introduzione

Come ben noto, quando ad una trave sono applicate importanti torsioni, conviene non solo allontanare il materiale dal suo asse, ma consentire la formazione di flussi di tensioni tangenziali τ costanti nello spessore. Ciò può essere ottenuto nel migliore dei modi realizzando per tali flussi circuiti chiusi entro pareti di piccolo spessore.

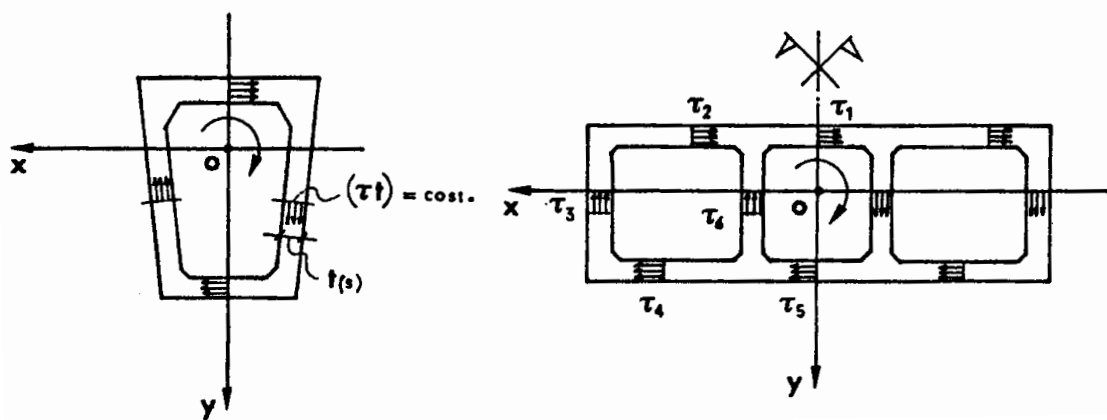


Fig.2.1. 1 – Flussi delle tensioni tangenziali

Tuttavia le sezioni di tipo chiuso, di massimo rendimento in flessotorsione, non sono in genere le più convenienti nel caso di impalcati prefabbricati in calcestruzzo. La ragione fondamentale è rappresentata dal maggior costo di produzione di una sezione chiusa rispetto a quello di una sezione aperta (per quanto riguarda sia le attrezzature di produzione, sia le modalità e i tempi di costruzione). In secondo luogo si può osservare che, fintantoché il rapporto tra il totale carico di utilizzo e il peso proprio della struttura non supera o è di poco maggiore a 1, se si ricorre alla precompressione le sezioni più convenienti sono quelle del tipo a T semplice o a T multiplo (sezioni a π e a pettine), le quali sono appunto di tipo aperto; queste sezioni possono presentare una notevole capacità portante a torsione e realizzare efficaci distribuzioni trasversali dei carichi, sempre che non abbiano le pareti concorrenti sul medesimo asse (sezioni del tipo a stella). ([1], [2], [3])



Fig.2.1. 2 – Esempi di travi a profilo aperto e parete di piccolo spessore

Per comprendere bene come le sezioni di tipo aperto abbiano una buona capacità portante in torsione si considera la mensola di figura 2.1.3 sottoposta alle coppie torcenti m .

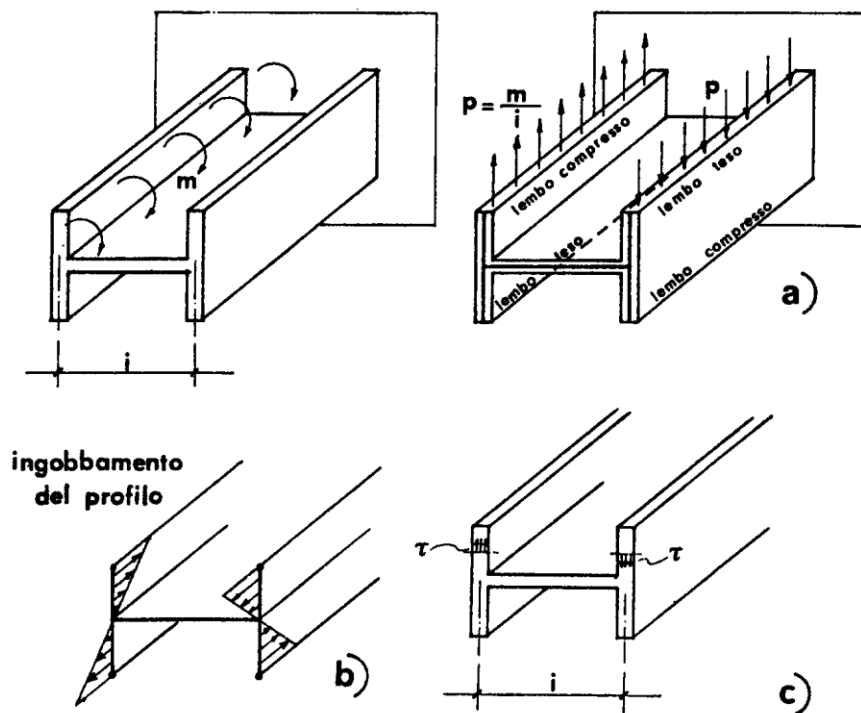


Fig.2.1. 3 – Ingobbamento del profilo

Queste coppie possono essere sostituite dai due carichi $p = \frac{m}{i}$ applicati sulle due ali della sezione ad H che generano quindi nelle ali due flessioni in direzioni opposte: di conseguenza, le sezioni trasversali non restano piane, ma il profilo si ingobba come rappresentato in figura 2.1.3.b; nello spessore delle ali inflesse si generano due flussi di tensioni tangenziali τ costanti nello spessore (figura 2.1.3.c), i quali possono equilibrare le coppie torcenti applicate, avendo tra loro un braccio di leva i , in modo simile a quanto accade nelle sezioni chiuse, dove i flussi di taglio agiscono con ampi bracci di leva.

Sotto torsione si hanno invece elevate sollecitazioni tangenziali allorché le coppie torcenti applicate vengono equilibrate unicamente da tensioni tangenziali distribuite a farfalla nello spessore, il che si verifica per esempio nelle sezioni a stella (figura 2.1.4).

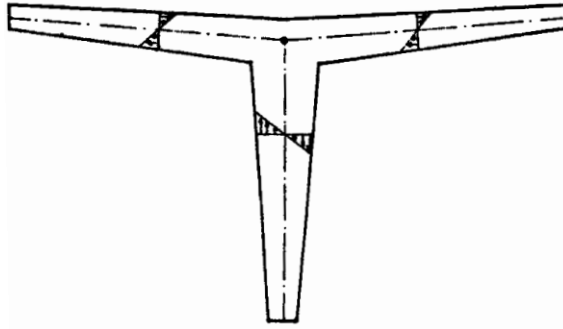


Fig.2.1. 4 – Profilo a stella

Quando la sezione ha la possibilità di sopportare la torsione nel modo rappresentato in figura 2.1.3, non è che non si abbiano i flussi τ a farfalla, ma essi risultano molto ridotti poiché equilibrano solo una parte della torsione complessiva: la sezione presenta, per così dire, due portanze torsionali in parallelo, la prima (figura 2.1.3) viene detta portanza d'ingobbamento e ad essa corrispondono tensioni tangenziali τ costanti nello spessore, la seconda (senza ingobbamento della sezione, che resta perciò piana) viene detta portanza alla De Saint Venant e ad essa corrispondono i consueti flussi di tensioni τ distribuite a farfalla nello spessore.

2.2 Considerazioni generali

Si consideri una trave a sezione costante.

Si definisce trave con pareti di piccolo spessore una volta per la quale detto t lo spessore, d una dimensione caratteristica della sezione retta (altezza o larghezza totale) ed l la lunghezza, siano soddisfatte le relazioni:

$$\frac{t}{d} \leq 0,1 ; \frac{d}{l} \leq 0,1$$

sicché questo tipo di strutture è caratterizzato da un triplice ordine di dimensioni, ciascuna trascurabile rispetto alla successiva.

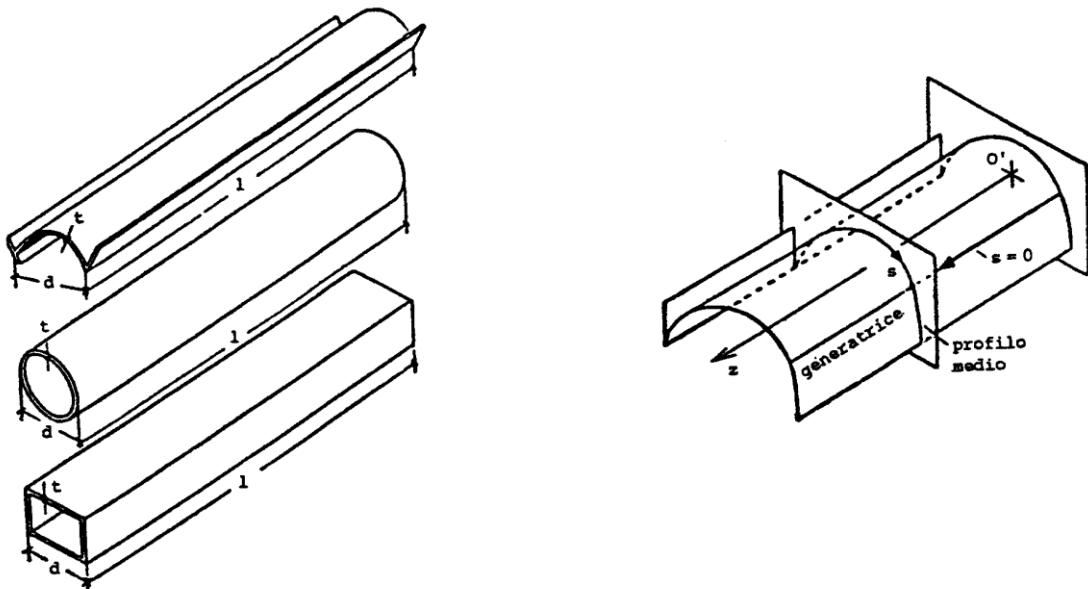


Fig.2.2. 1 – Voltine di piccolo spessore

Detta superficie media il luogo dei punti giacenti nella mezzeria dello spessore, chiameremo profilo medio l'intersezione della superficie media con un piano ortogonale alle generatrici della trave.

Definita la forma del profilo medio, la posizione di qualunque punto della superficie media può essere definita a mezzo della coordinata z coincidente con la parallela ad una generatrice, avente origine arbitraria, e della coordinata curvilinea s , avente anch'essa origine arbitraria (che può ad esempio essere coincidente con un'assegnata generatrice), giacente sul profilo medio.

Si definisce poi trave a profilo aperto e parete di piccolo spessore, una volta tale per cui percorrendo il suo profilo medio a partire da un generico punto non si può raggiungere lo stesso punto, la sezione è cioè monoconnessa.

Nel presente capitolo viene trattata la classica teoria tecnica delle travi con profilo aperto e parete di piccolo spessore, o teoria di Vlasov, basata sull'ipotesi di materiale omogeneo a comportamento elastico lineare.

2.3 Ipotesi fondamentali

La soluzione alla Vlasov si basa sulle seguenti ipotesi:

1) La trave può essere considerata come una volta con profilo medio indeformabile nel suo piano.

L'indeformabilità del profilo nel suo piano può essere ottenuta per esempio mediante diaframmi trasversali (figura 2.3.1), infinitamente rigidi nel loro piano medio, in modo tale da assicurare l'indeformabilità del profilo, e peraltro infinitamente deformabili fuori dal piano medio, in modo da consentire liberamente l'ingobbamento della sezione.

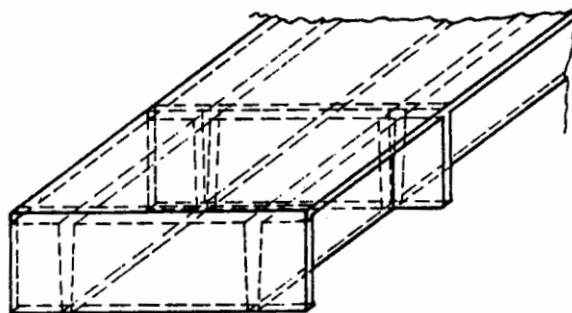


Fig.2.3. 1 – Diaframmi trasversali

L'indeformabilità del profilo può essere anche ottenuta mediante l'applicazione di opportune azioni (presollecitazioni), se è vero che le componenti di deformabilità trasversale dipendono in buona misura dal tipo di azioni applicate.

Nella pratica, per elementi in calcestruzzo, l'ipotesi dell'indeformabilità del profilo è spesso accettabile, in alcuni casi per la forma stessa del profilo e gli spessori in gioco, in altri per l'effettiva presenza di diaframmi o di opportuni collegamenti, in altri casi infine per l'esistenza di tracciati di cavi posti a contrastare le componenti predominanti della deformabilità trasversale.

II) Si assume trascurabile la deformazione per taglio della superficie media.

L'aver posto $\gamma_{zs} = \gamma_{sz} = \gamma = 0$ non significa che siano nulle le tensioni tangenziali τ (legate allo scorrimento γ dalla relazione d'elasticità $G\gamma = \tau$), ma queste tensioni andranno ricavate dalle σ_z attraverso l'equilibrio alla traslazione dell'elemento (dz, ds) in direzione z .

III) La deformazione in direzione z è costante sullo spessore e pari al valore ϵ da essa assunto sulla superficie media.

In considerazione dell'esiguità dello spessore si può assumere che la deformazione sia costante su di esso.

IV) La tensione σ_n nella direzione della normale al profilo medio è trascurabile.

Anche questa ipotesi è giustificata dall'esiguità del profilo.

2.4 Spostamenti e deformazioni

Con riferimento alla figura 2.4.1 si assume l'asse z coincidente con una retta qualunque parallela alle generatrici e con origine arbitraria. In corrispondenza del generico piano $z = \text{cost.}$

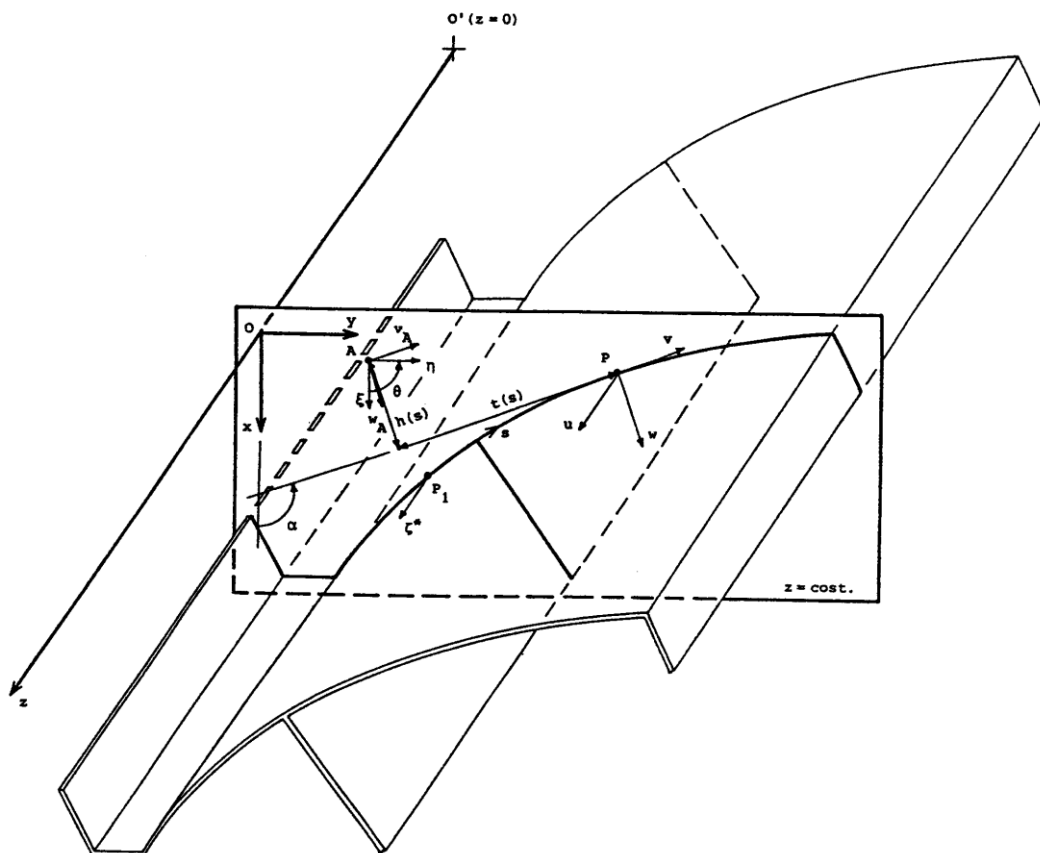


Fig.2.4. 1 – Profilo medio della sezione

Detta O la traccia dell'asse z , si assume tale punto quale origine del sistema di riferimento xy del piano, orientato in maniera arbitraria ma tale da formare un terna destrorsa con l'asse z .

Sia A un generico punto del piano e P_1 l'origine (arbitraria) della coordinata curvilinea s .

Detti:

ξ = spostamento del punto A secondo x

η = spostamento del punto A secondo y

θ = rotazione della sezione (positiva dal semiasse positivo delle x al semiasse positivo delle y) intorno ad A

ζ^* = spostamento del punto P_1 secondo z

ed orientata arbitrariamente la coordinata curvilinea s , si indicheranno con u , v e w le componenti di spostamento del generico punto P appartenente al profilo medio rispettivamente secondo l'asse z (spostamento positivo se concorde con z), secondo la tangente al profilo medio in P (spostamento positivo se concorde con il verso di s), secondo la normale al profilo medio in P (il cui verso positivo sia determinato imponendo che la terna cartesiana w , v , u sia destrorsa).

Si assume l'ipotesi I: la trave può essere considerata come una voltina con profilo medio indeformabile nel suo piano.

Tale ipotesi è in genere giustificata per la presenza di irrigidimenti che vengono disposti in questo tipo di strutture. Tali irrigidimenti vengono di solito realizzati con lastre sottili sicché si può assumere che non offrano alcuna resistenza alla deformazione fuori dal loro piano, quindi lascino completa libertà alla sezione di ingobbarsi, mentre non permettono spostamenti relativi tra due punti del profilo medio. In particolare con l'ipotesi I si ritiene che la superficie media sia uniformemente irrigidita lungo tutta la sua lunghezza.

Detta allora $h(s)$ la distanza della tangente al generico punto P da A e $t(s)$ la distanza della normale in P da A , come mostrato in figura 2.4.1, si può scrivere:

$$\begin{aligned}v(z, s) &= v_A(z, s) + h(s) \theta(z) \\w(z, s) &= w_A(z, s) - t(s) \theta(z)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Gli ultimi termini delle (2.1) rappresentano le componenti di spostamento secondo tangente e normale al profilo P connesse alla rotazione della sezione intorno al punto A (rispetto al quale si valuta θ), che per piccole rotazioni si possono confondere con il prodotto dell'angolo di

rotazione per la distanza A dalla retta che rappresenta la direzione della componente di spostamento in questione.

Detto α l'angolo formato tra la tangente e l'asse delle ascisse, da figura 2.4.1 risulta:

$$\begin{aligned} v_A(z, s) &= \xi(z) \cos \alpha(s) + \eta(z) \sin \alpha(s) \\ w_A(z, s) &= \xi(z) \sin \alpha(s) - \eta(z) \cos \alpha(s) \end{aligned} \quad (2.2)$$

che sostituite nella (2.1) forniscono:

$$\begin{aligned} v(z, s) &= \xi(z) \cos \alpha(s) + \eta(z) \sin \alpha(s) + h(s) \theta(z) \\ w(z, s) &= \xi(z) \sin \alpha(s) - \eta(z) \cos \alpha(s) - t(s) \theta(z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

nelle quali, con riferimento a fig.2.4.2, valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} h(s) &= (x - x_A) \sin \alpha - (y - y_A) \cos \alpha \\ t(s) &= (x - x_A) \cos \alpha + (y - y_A) \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.4)$$

per determinare la componente di spostamento $u(z, s)$ secondo l'asse z si fa uso di un'ulteriore ipotesi II: precisamente, si assume trascurabile la deformazione per taglio della superficie media (che caratterizza lo scorrimento angolare tra le linee di coordinate $z = \text{cost.}$ ed $s = \text{cost.}$).

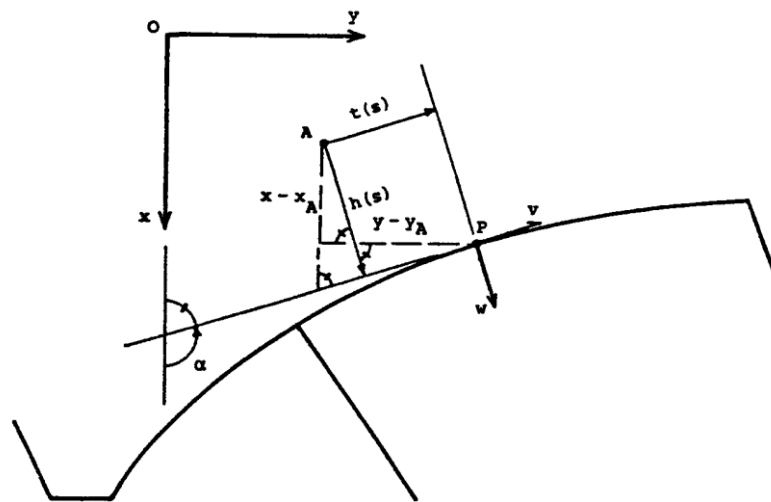


Fig.2.4. 2 – Punti e distanze mutue

In base all'ipotesi II si può quindi scrivere:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

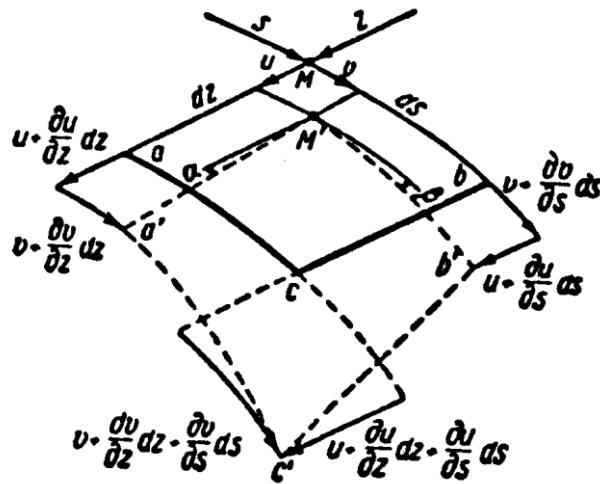


Fig.2.4. 3 – Concio infinitesimo di superficie

da cui essendo $v(z,s)$ noto per la prima delle (2.3) si ottiene:

$$u(z,s) = \zeta^*(z) - \int_{P_1}^P \frac{\partial v(z,s)}{\partial z} ds \quad (2.6)$$

dove $\zeta^*(z)$ è la funzione che rappresenta la costante di integrazione sulla variabile s , rappresenta cioè la componente di spostamento u valutata in P_1 [$\zeta^*(z) = u(z,0)$].

Differenziando la prima delle (2.3) per dz e moltiplicando ambo i membri per ds risulta:

$$\frac{\partial v(z,s)}{\partial z} ds = \xi'(z) \cos \alpha(s) ds + \eta'(z) \sin \alpha(s) ds + h(s) \theta'(z) ds \quad (2.7)$$

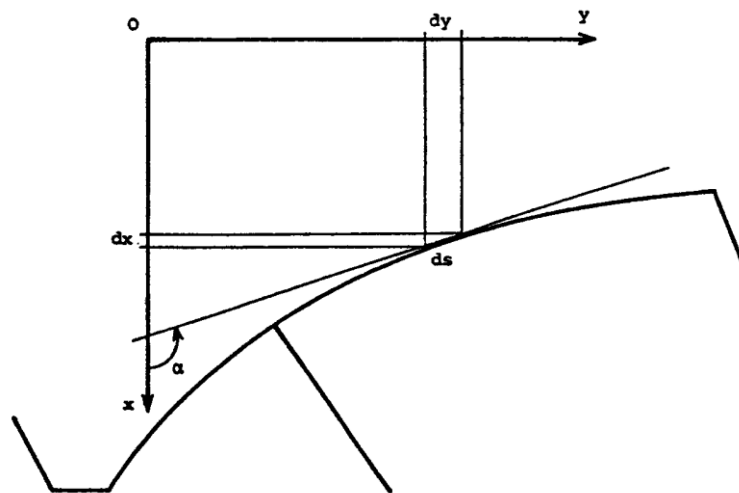


Fig.2.4. 4 – Proiezione di ds sugli assi x e y

che essendo:

$$dx = \cos \alpha ds$$

$$dy = \sin \alpha ds \quad (2.8)$$

e posto:

$$d\omega = h ds \quad (2.9)$$

sostituita nella (2.6) e svolto l'integrale fornisce:

$$u(z, s) = \zeta(z) - \xi'(z) x(s) - \eta'(z) y(s) - \theta'(z) \omega(s) \quad (2.10)$$

dove:

$$\zeta(z) = \zeta^*(z) + \xi'(z) x(0) - \eta'(z) y(0) \quad (2.11)$$

$$\omega(s) = \int_{P_1}^P h(s) ds \quad (2.12)$$

il termine $\omega(s)$ è detto coordinata settoriale e rappresenta il doppio dell'area racchiusa tra l'arco P_1P e le due rette AP_1 ed AP .

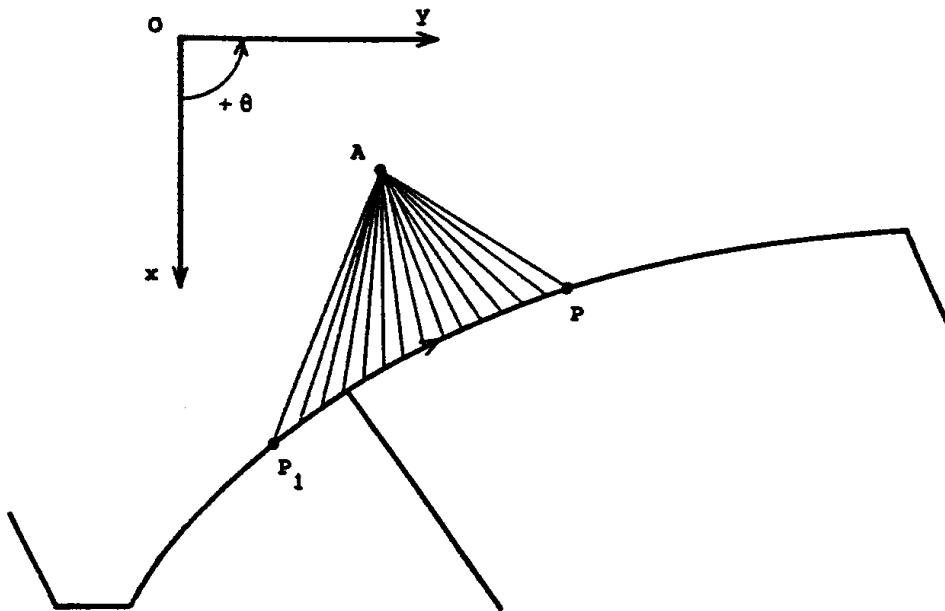


Fig.2.4. 5 – Area settoriale

Assunto $h(s)$ positiva se una rotazione θ positiva dà luogo a spostamenti positivi nella direzione positiva della tangente (s crescenti), il segno di $\omega(s)$ è definito di conseguenza.

In particolare con riferimento alla (2.9) si osserva che qualora si cambi verso alla coordinata curvilinea s , anche il segno di $h(s)$ cambia, cosicché $\omega(s)$ risulta essere indipendente dal verso positivo (definito arbitrariamente) di s .

I primi tre termini della (2.10) esprimono la ben nota legge di Bernoulli-Navier secondo la quale ogni sezione retta, piana prima della deformazione, rimane tale anche a deformazione avvenuta, per cui qualora risulti $\theta' = 0$ tale legge è valida anche per travi con profilo aperto e parete di piccolo spessore. In generale però, a causa della presenza della torsione, $\theta'(z)$ è diverso da zero e quindi la generica sezione retta non rimane più tale a deformazione avvenuta, bensì subisce un ingobbamento; nella trave soggetta a sola torsione i punti del profilo medio subiscono uno spostamento in direzione z proporzionale all'angolo unitario di torsione $\theta'(z)$ ed alla coordinata settoriale $\omega(s)$.

Si osservi che il risultato (2.10) è stato ottenuto sulla base delle ipotesi I e II. La prima di queste in particolare, è resa necessaria dall'esigenza di esprimere in maniera non ambigua i contributi dovuti alla rotazione della sezione e non avrebbe ragione di essere introdotta se questi contributi non venissero considerati. In effetti, come si vedrà al par.2.7, questa ipotesi fa sì che il legame elastico della trave non si riconduca a quello usuale in assenza di torsione.

La deformazione ε in direzione z (positiva se di trazione) può ora essere scritta nella forma:

$$\varepsilon(z, s) = \frac{du}{dz} = \zeta'(z) - \xi''(z)x(s) - \eta''(z)y(s) - \theta''(z)\omega(s) = \underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}(z) \quad (2.13)$$

avendo posto:

$$\underline{\rho}^T(s) = [1 \quad x(s) \quad y(s) \quad \omega(s)]$$

$$\underline{\psi}(z) = [\zeta'(z) \quad -\xi''(z) \quad -\eta''(z) \quad -\theta''(z)] \quad (2.14)$$

In considerazione dell'esiguità dello spessore si può assumere che la deformazione sia costante su di esso, in altre parole si assume l'ipotesi III: la deformazione in direzione z è costante sullo spessore e pari al valore ε da essa assunto sulla superficie media.

2.5 Sforzi ed azioni interne

Sia $\sigma(z,s)$ la tensione media in direzione z (positiva se di trazione). Pur essendo nulla la deformazione tangenziale del profilo per l'ipotesi II, per l'equilibrio locale di un elementino di voltina di dimensioni infinitesime, la corrispondente tensione tangenziale non è nulla. Infatti, detto $\tau_B(z,s)$ il suo valor medio, l'equilibrio richiede che (figura 2.5.1):

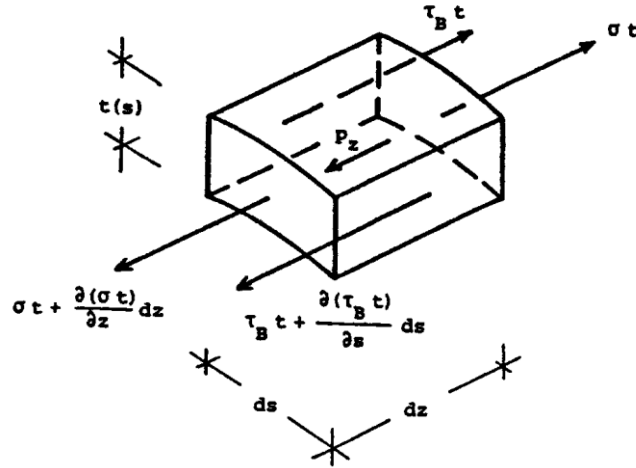


Fig.2.5. 1 – Elemento infinitesimo di voltina

$$t(s) \frac{\partial \sigma(z,s)}{\partial z} dz ds + \frac{\partial [\tau_B(z,s)t(s)]}{\partial s} dz ds + p_z(z,s) dz ds = 0 \quad (2.15)$$

essendo $p_z(z,s)$ la forza per unità di superficie in direzione z .

Risolviendo rispetto a τ_B risulta:

$$\tau_B(z,s) = \frac{1}{t(s)} [S_o(z) - \int_0^s p_z(z,s) ds - \int_0^s t(s) \frac{\partial \sigma(z,s)}{\partial z} ds] \quad (2.16)$$

in cui $S_o(z)$ è la funzione di z che rappresenta la costante d'integrazione in s , ed il cui significato fisico è facilmente comprensibile ponendo $s = 0$ nella (2.16):

$$\tau_B(z,s) = \frac{S_o(z)}{t(0)}; S_o(z) = \tau_B(z,0) t(0) \quad (2.17)$$

Si osservi che nella (2.15) si è assunto τ_B positiva se quella agente sulla sezione di normale uscente avente verso concorde con z è diretta nel verso delle s crescenti.

Le tensioni tangenziali τ non sono però costanti sullo spessore. Detto allora \vec{n} la normale al profilo medio con origine su di esso, risulta:

$$\tau(z,s,n) = \tau_B(z,s) + \tau_{DS}(z,s,n) \quad (2.18)$$

essendo $\tau_{DS}(z,s,n)$ la parte della tensione tangenziale che non compare nell'equilibrio locale espresso dalla (2.15) perché autoequilibrata sullo spessore, ovvero tale per cui risulta:

$$\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{DS}(z,s,n) \, dn = 0 \quad (2.19)$$

Chiameremo allora $M_{DS}(z)$ il momento risultante prodotto da tale componente.

Detto L l'intero profilo medio della sezione, gli sforzi generalizzati possono essere definiti attraverso l'equivalenza energetica:

$$\underline{M}^T \underline{\psi} = \int_L \sigma \varepsilon t \, ds = \int_L \sigma \underline{\rho}^T t \, ds \underline{\psi}(z) \quad (2.21)$$

da cui:

$$\underline{M} = \int_L \sigma(z,s) \underline{\rho}(s) t(s) \, ds \quad (2.22)$$

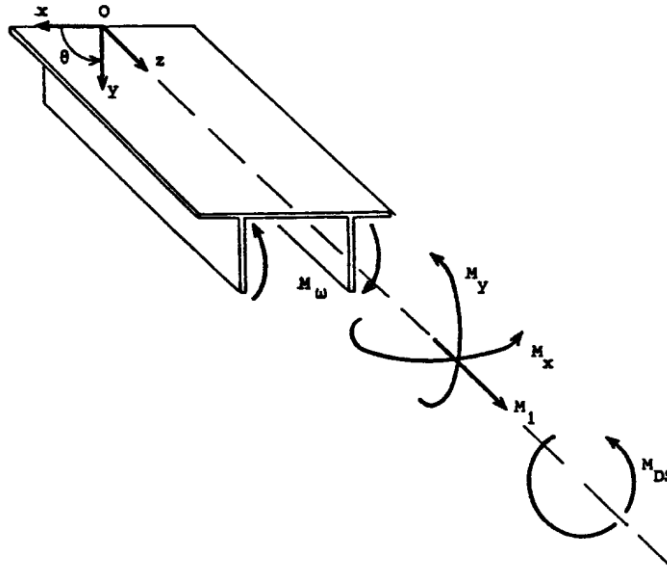


Fig.2.5. 2 – Convenzioni sulle azioni applicate

ovvero:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_L \sigma(z,s) t(s) \, ds = \text{azione assiale} \\ M_x &= \int_L \sigma(z,s) x(s) t(s) \, ds = \text{momento flettente intorno all'asse } y \\ M_y &= \int_L \sigma(z,s) y(s) t(s) \, ds = \text{momento flettente intorno all'asse } x \\ M_\omega &= \int_L \sigma(z,s) \omega(s) t(s) \, ds = \text{bimomento} \end{aligned} \quad (2.23)$$

I versi positivi di tali azioni interne sono riportati in fig.2.5.2.

2.6 Le equazioni di equilibrio

L'equazione (2.13) mette in evidenza la dipendenza della deformazione ε dalle quattro componenti del vettore $\underline{\psi}$, mentre la (2.16) lega la tensione tangenziale media τ_B alla tensione normale σ . Nel paragrafo successivo la tensione normale σ verrà legata alla deformazione ε attraverso la legge costitutiva del materiale, sicché lo stato di sforzo presente nella voltina potrà essere definito come funzione del vettore $\underline{\psi}$ e quindi, in definitiva, dalle quattro componenti di spostamento $\zeta(z)$, $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\theta(z)$, che rappresentano le incognite del problema. Tali incognite possono determinate risolvendo le quattro equazioni di equilibrio di un concio di una voltina di lunghezza infinitesima dz . Precisamente le tre equazioni di equilibrio alla traslazione nella direzione degli assi coordinati x , y , z , e l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno alla generatrice passante per il punto A si scrivono:

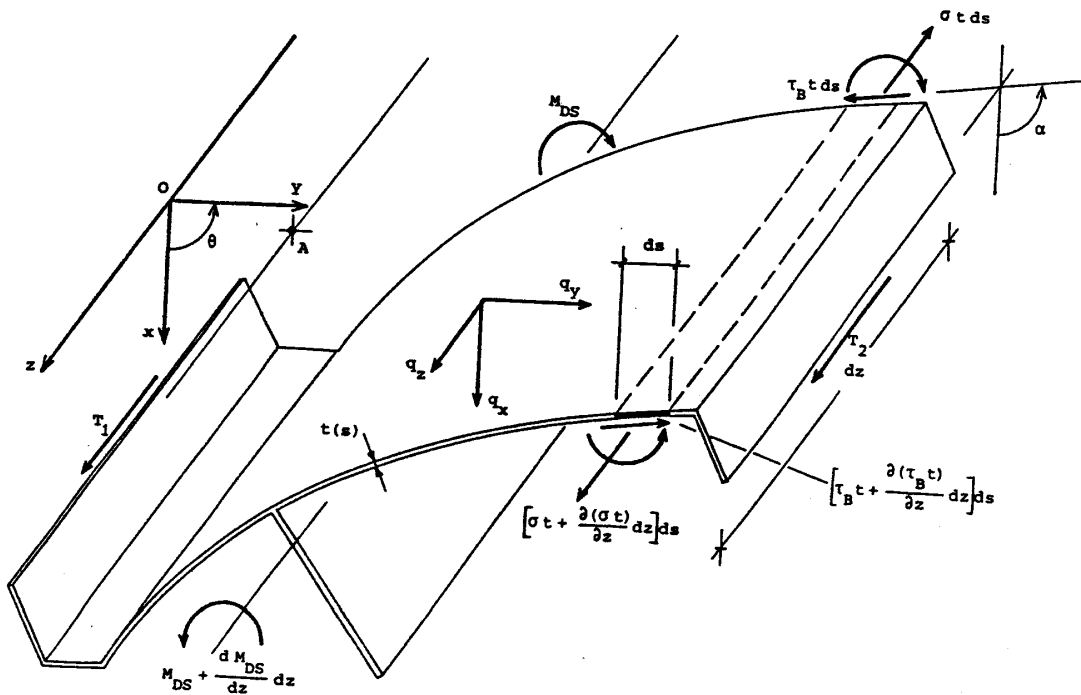


Fig.2.6. 1 – Equilibrio della voltina

$$\begin{aligned}
& \int_L \frac{\partial(\sigma t)}{\partial z} dz ds + \int_L p_z dz ds + \sum_i T_i dz = 0 \\
& \int_L \frac{\partial(\tau_B t)}{\partial z} dz \cos \alpha ds + \int_L p_x dz ds = 0 \\
& \int_L \frac{\partial(\tau_B t)}{\partial z} dz \sin \alpha ds + \int_L p_y dz ds = 0 \\
& \int_L \frac{\partial(\tau_B t)}{\partial z} dz h(s) ds + \frac{dM_{DS}}{dz} dz + \int_L [p_y(x - x_A) - p_x(y - y_A)] dz ds = 0 \quad (2.24)
\end{aligned}$$

dove $p_x(z,s)$, $p_y(z,s)$ e la già nota $p_z(z,s)$ sono le forze esterne per unità di superficie nella direzione degli assi cartesiani, positive se concordi con l'asse cui si riferiscono, mentre con $T_i(z)$ si è indicata la forza per unità di lunghezza che può essere presente in corrispondenza dell'*i*-esimo bordo libero della voltina ($T_i(z)$ è assunto positivo se concorde con z).

Posto:

$$\begin{aligned}
& \int_L p_z(z, s) ds = q_z(z) \\
& \int_L p_x(z, s) ds = q_x(z) \\
& \int_L p_y(z, s) ds = q_y(z) \\
& \int_L [p_y(z, s) \cdot (x(s) - x_A) - p_x(z, s) \cdot (y(s) - y_A)] ds = q_\omega(z)^1 \quad (2.25)
\end{aligned}$$

integrando per parti le (2.24) ad eccezione della prima equazione e tenendo presenti le (2.8) e la (2.9), si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \int_L \frac{\partial\sigma(z, s)}{\partial z} t(s) ds + q_z(z) + \sum_i T_i(z) = 0 \\
& \sum_j \left[\frac{\partial\tau_B(z, s)}{\partial z} t(s) x(s) \right]_{s_{ja}}^{s_{jb}} - \int_L x(s) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial\tau_B(z, s)}{\partial z} t(s) \right] ds + q_x(z) = 0 \\
& \sum_j \left[\frac{\partial\tau_B(z, s)}{\partial z} t(s) y(s) \right]_{s_{ja}}^{s_{jb}} - \int_L y(s) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial\tau_B(z, s)}{\partial z} t(s) \right] ds + q_y(z) = 0 \\
& \sum_j \left[\frac{\partial\tau_B(z, s)}{\partial z} t(s) \omega(s) \right]_{s_{ja}}^{s_{jb}} - \int_L \omega(s) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial\tau_B(z, s)}{\partial z} t(s) \right] ds + \frac{dM_{DS}}{dz} + q_\omega(z) = 0 \quad (2.26)
\end{aligned}$$

¹ q_ω è valutato intorno ad A

dove con l'indice j si sono indicate ordinatamente tutte le membrature, tra loro interconnesse solo ai nodi di estremità, in cui può essere scomposto il profilo medio della sezione retta ed s_{ja} e s_{jb} rappresentano rispettivamente il primo ed il secondo nodo di estremità della membratura j incontrati percorrendo il profilo medio secondo la coordinata curvilinea s .

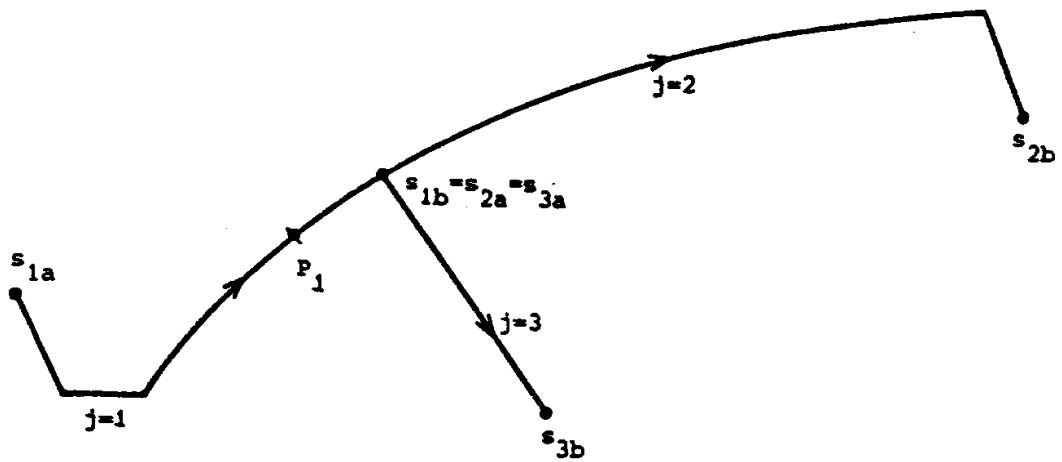


Fig.2.6. 2 – Membrature

Qualora s_{ja} (oppure s_{jb}) definisca un nodo di estremità di una membratura in cui non ne convergono altre, la tensione tangenziale ivi presente è necessariamente dovuta ai carichi esterni (è la tensione tangenziale su un bordo libero), definita in fig.2.6.1 attraverso il termine $T_i(z)$, ovvero ad esempio (fig.2.6.3):

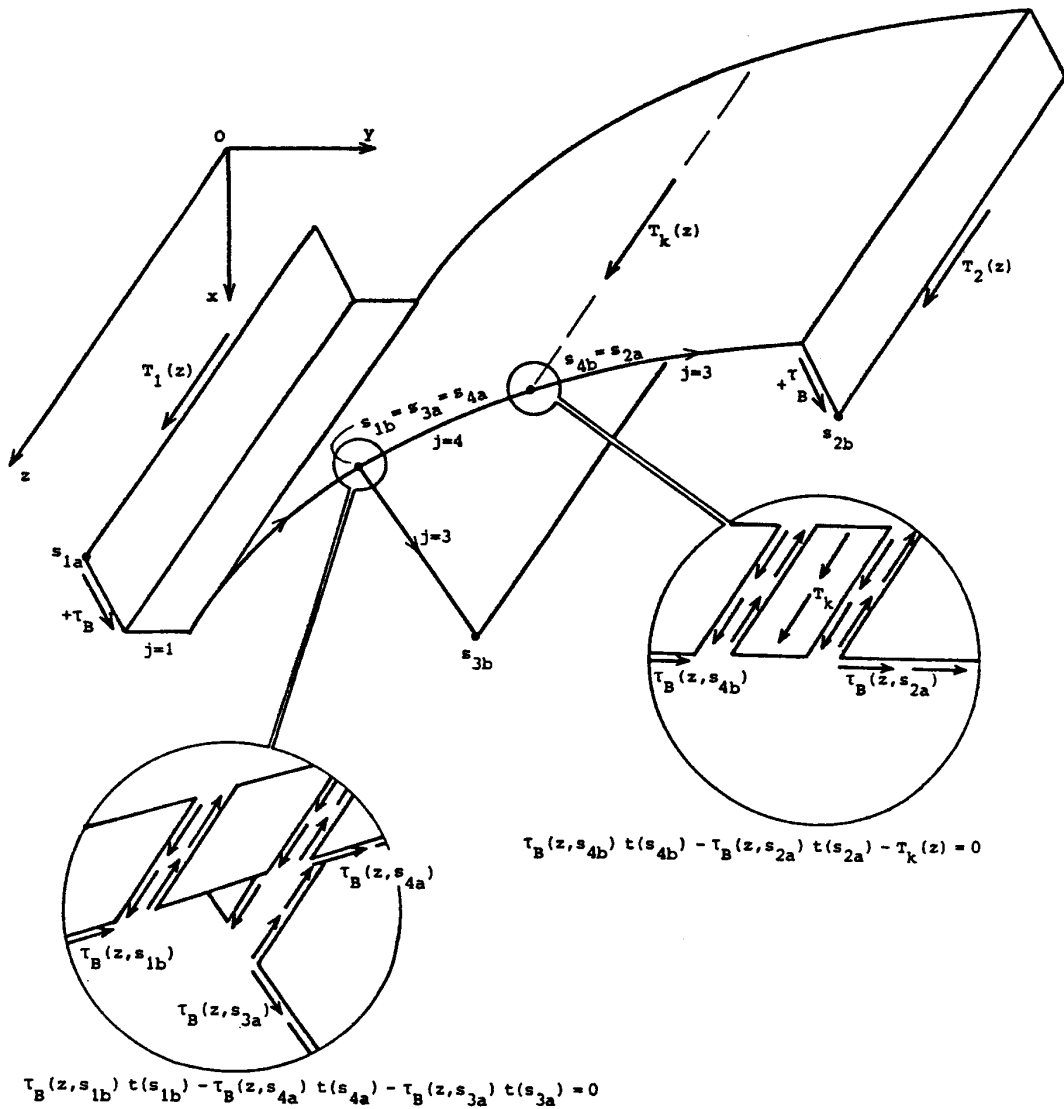


Fig.2.6. 3 – Tensioni tangenziali sulla volta

$$\tau_B(z, s_{2b}) t(s_{2b}) = +T_2(z) \quad (2.28)$$

da cui:

$$\left. \frac{\partial \tau_B(z, s)}{\partial z} t(s) \right|_{s=s_{2b}} = + \frac{dT_2}{dz} \quad (2.29)$$

mentre negli altri nodi, per l'equilibrio la somma delle tensioni tangenziali sui bordi delle membrature ivi concorrenti deve essere nulla, sicché le (2.26) possono scriversi:

$$\begin{aligned}
& \int_L \frac{\partial \sigma(z,s)}{\partial z} t(s) ds + q_z(z) + \sum_i T_i(z) = 0 \\
& - \int_L x(s) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \tau_B(z,s)}{\partial z} t(s) \right] ds + q_x(z) + \sum_i x(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} = 0 \\
& - \int_L y(s) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \tau_B(z,s)}{\partial z} t(s) \right] ds + q_y(z) + \sum_i y(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} = 0 \\
& - \int_L \omega(s) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \tau_B(z,s)}{\partial z} t(s) \right] ds + \frac{dM_{DS}}{dz} + q_\omega(z) + \sum_i \omega(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} = 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

avendo indicato con s_i la coordinata del punto di applicazione di $T_i(z)$.

Dalla (2.15) segue:

$$-\frac{\partial(\tau_B t)}{\partial s} = p_z + \frac{\partial \sigma}{\partial z} t(s) \tag{2.31}$$

che introdotta nelle (2.30) fornisce:

$$\begin{aligned}
& \int_L \frac{\partial \sigma(z,s)}{\partial z} t(s) ds + q_z(z) + \sum_i T_i(z) = 0 \\
& \int_L \frac{\partial^2 \sigma(z,s)}{\partial z^2} x(s) t(s) ds + \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} x(s) ds + q_x(z) + \sum_i x(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} = 0 \\
& \int_L \frac{\partial^2 \sigma(z,s)}{\partial z^2} y(s) t(s) ds + \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} y(s) ds + q_y(z) + \sum_i y(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} = 0 \\
& \int_L \frac{\partial^2 \sigma(z,s)}{\partial z^2} \omega(s) t(s) ds + \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} \omega(s) ds + \frac{dM_{DS}}{dz} + q_\omega(z) + \sum_i \omega(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} = 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

A completamento di quanto detto va osservato che qualora a fianco delle azioni interne precedentemente considerate siano presenti anche forze per unità di lunghezza $T_k(z)$ dirette secondo z ed applicate lungo una generatrice della superficie media, quali in un'analisi elastica possono ad esempio considerarsi le azioni di precompressione, svolgendo l'integrale per parti che porta alla (2.26) sarà necessario dividere in due l'integrale relativo alla membratura su cui si trova la traccia della retta d'azione di $T_k(z)$. La somma delle tensioni sulle due membrature così ottenute deve essere, in corrispondenza del nodo in questione, uguale a $T_k(z)$, sicché è sufficiente annoverare tra le $T_i(z)$ anche la $T_k(z)$ per prendere in conto anche questo tipo di carico.

Dal confronto delle (2.23) con le (2.32) segue poi che:

$$\begin{aligned}
\frac{dM_1}{dz} &= -q_z(z) - \sum_i T_i(z) \\
\frac{d^2 M_x}{dz^2} &= - \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} x(s) ds - q_x(z) - \sum_i x(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \\
\frac{d^2 M_y}{dz^2} &= - \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} y(s) ds - q_y(z) - \sum_i y(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \\
\frac{d^2 M_\omega}{dz^2} &= - \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} \omega(s) ds - \frac{dM_{DS}}{dz} - q_\omega(z) - \sum_i \omega(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz}
\end{aligned} \tag{2.33}^2$$

² Si osservi che né le equazioni (2.22) né le equazioni (2.33) contemplano la legge costitutiva e sono dunque valide qualunque essa sia. Peraltro le (2.33) discendono dalle (2.24) ove compaiono oltre alla σ , anche τ_B ed M_{DS} . Nelle (2.33) τ_B è scomparso in quanto esprimibile, tramite la (2.16), come funzione di σ

2.7 Il legame costitutivo dei materiali

Detta σ_s la tensione in direzione della coordinata curvilinea s , σ_n quella nella direzione della normale alla superficie media ed indicate con ε_s ed ε_n le corrispondenti deformazioni, la legge di Hooke, privata dei termini relativi alla deformazione tangenziale a causa dell'ipotesi II, si scrive:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_n \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma \\ \sigma_s \\ \sigma_n \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

da cui, ricordando che l'ipotesi I impone che ε_s sia nulla ed ammettendo l'ulteriore ipotesi IV: la tensione σ_n nella direzione della normale al profilo medio è trascurabile, giustificata dall'esiguità del profilo, si ottiene:

$$\sigma_s = \nu \sigma \quad (2.35)^3$$

$$\sigma(z, s) = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon = E^* \varepsilon(z, s) \quad (2.36)$$

Nella (2.36) σ è indipendente da n per l'ipotesi III che impone tale condizione alle ε .

Sostituendo la (2.13) nella (2.36) si ottiene:

$$\sigma(z, s) = E^* [\zeta' - \xi''(z) x(s) - \eta''(z) y(s) - \vartheta''(z) \omega(s)] = E^* \underline{\rho}^T \underline{\psi} \quad (2.37)$$

Inoltre in questo caso l'espressione di M_{DS} è quella classica della trattazione alla De Saint Venant per cui può porsi:

$$M_{DS} = G J_d \theta'(z) \quad (2.38)$$

dove:

(poiché introdotto nel par. 2.3 per soddisfare l'equilibrio locale), mentre M_{DS} è ancora presente poiché è stato definito solo concettualmente nel par. 2.3.

Per definire compiutamente M_{DS} è necessario definire la legge costitutiva: se e solo se questa è di tipo elastico lineare allora M_{DS} è esprimibile tramite la (2.38).

Pertanto se si assume $M_{DS} = 0$ le (2.33) sono valide anche in regime fessurato, mentre per $M_{DS} \neq 0$ sarà necessario definire un'espressione sostitutiva della (2.38). Ciò è peraltro impossibile poiché il meccanismo resistente in questa fase dà luogo ad un problema spaziale, incompatibile con una verifica sezionale.

³ Per l'ipotesi IV è $\sigma_n = 0$. Dalla (2.34) è allora subito evidente che σ_s debba essere definito dalla (2.35) se si vuole che sia soddisfatta l'ipotesi I. In altre parole la (2.35) è diretta conseguenza dell'ipotesi di indeformabilità trasversale del profilo ($\varepsilon_s = 0$), giacché per l'ipotesi IV $\sigma_n = 0$, mentre in generale $\sigma \neq 0$.

$$J_d = \frac{\gamma}{3} \sum_i m_i t_i^3 \quad (2.39)$$

essendo m_i la lunghezza dell' i -esimo segmento di retta componente il profilo medio della sezione retta e γ è un coefficiente prossimo all'unità.

In tal caso, come ben noto, le tensioni tangenziale connesse a M_{DS} variano linearmente lungo lo spessore ed assumono valore nullo in corrispondenza della superficie media.

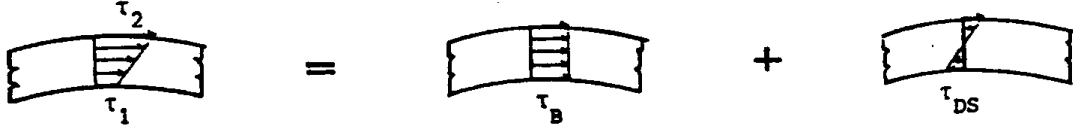


Fig.2.7. 1 – Profilo delle tensioni tangenziali

Sostituendo quindi le (2.37) e la (2.38) nelle (2.32) con la posizione:

$$J_{ij} = \int_L \rho_i(s) \rho_j(s) t(s) ds \quad (2.40)$$

si ottiene infine (2.41):

$$J_{11} \zeta'''(z) - J_{1x} \xi''''(z) - J_{1y} \eta''''(z) - J_{1\omega} \theta''''(z) = -\frac{1}{E^*} [q_z(z) + \sum_i T_i(z)]$$

$$\begin{aligned} J_{1x} \zeta''''(z) - J_{xx} \xi''''(z) - J_{xy} \eta''''(z) - J_{x\omega} \theta''''(z) = \\ = -\frac{1}{E^*} \left[\int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} x(s) ds + q_x(z) + \sum_i x(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{1y} \zeta''''(z) - J_{xy} \xi''''(z) - J_{yy} \eta''''(z) - J_{y\omega} \theta''''(z) = \\ = -\frac{1}{E^*} \left[\int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} y(s) ds + q_y(z) + \sum_i y(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{1\omega} \zeta''''(z) - J_{x\omega} \xi''''(z) - J_{y\omega} \eta''''(z) - J_{\omega\omega} \theta''''(z) + \frac{G J_d}{E^*} \theta''(z) = \\ = -\frac{1}{E^*} \left[\int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} \omega(s) ds + q_\omega(z) + \sum_i \omega(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Le (2.41) mostrano palesemente la dipendenza della soluzione sia dalle caratteristiche geometriche della sezione, prese in conto attraverso i coefficienti del sistema risolvete ove per analogia si sono definiti anche momento statico e momento d'inerzia calcolati facendo uso della coordinata settoriale ω , sia dalle caratteristiche meccaniche del materiale nonché dei carichi, che compaiono nei termini noti del problema.

Essendo i carichi noti, le (2.41) rappresentano un sistema di equazioni differenziali lineari del terzo e del quarto ordine che governano il problema in sede indefinita. Infatti note che siano le

funzioni che rappresentano le componenti di spostamento della sezione, a mezzo delle (2.3), (2.11), (2.13), (2.37), (2.38), è possibile calcolare tutte le grandezze che interessano il problema. L'espressione per τ_B può ottenersi dalla (2.16) con la posizione (2.37). Ovvero posto:

$$\begin{aligned} S_1(s) &= \int_0^s t(s) ds \\ S_x(s) &= \int_0^s x(s) t(s) ds \\ S_y(s) &= \int_0^s y(s) t(s) ds \\ S_\omega(s) &= \int_0^s \omega(s) t(s) ds \end{aligned} \quad (2.42)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \tau_B(z, s) &= \frac{E^*}{t(s)} [-\zeta''(z) S_1(s) + \xi'''(z) S_x(s) + \eta'''(z) S_y(s) + \vartheta'''(z) S_\omega(s)] + \\ &- \frac{1}{t(s)} \int_0^s p_z(z, s) ds + \frac{S_0(z)}{t(s)} = \frac{E^*}{t(s)} \underline{S}^T(s) \underline{\psi}'(z) - \frac{1}{t(s)} \int_0^s p_z(z, s) ds + \frac{S_0(z)}{t(s)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

(valida nel caso in cui le azioni $T_k(z)$ agenti lungo le generatrici della superficie media siano nulle).

2.8 Le coordinate principali

Le equazioni (2.41) possono essere disaccoppiate imponendo le sei uguaglianze:

$$\begin{aligned} J_{1x} &= 0 \\ J_{1y} &= 0 \\ J_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} J_{x\omega} &= 0 \\ J_{y\omega} &= 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$J_{1\omega} = 0 \quad (2.46)$$

Come ben noto le (2.44) definiscono posizione dell'origine e direzione degli assi principali d'inerzia della sezione.

Le (2.45) assegnano invece una posizione precisa al punto A, che chiameremo polo o centro di taglio D (warping center o shear center); per dimostrare ciò si scriva la prima delle (2.4) una volta usando il polo A (generico) ed una volta usando il polo D:

$$\begin{aligned} h_A(s) &= (x - x_A) \sin \alpha - (y - y_A) \cos \alpha \\ h_D(s) &= (x - x_D) \sin \alpha - (y - y_D) \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.47)$$

da cui:

$$\begin{aligned} d\omega_A &= h_A(s) ds \\ d\omega_D &= h_D(s) ds \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$d\omega_D - d\omega_A = (x_A - x_D) \sin \alpha ds - (y_A - y_D) \cos \alpha ds \quad (2.49)$$

ed integrando, ricordando le (2.8):

$$\int_{P_1}^P d\omega_D - \int_{P_1}^P d\omega_A = \int_{P_1}^P (x_A - x_D) dy - \int_{P_1}^P (y_A - y_D) dx \quad (2.50)$$

$$\omega_D - \omega_A = (x_A - x_D) y - (y_A - y_D) x + cost \quad (2.51)$$

$$\omega_D = \omega_A + (x_A - x_D) y - (y_A - y_D) x + cost \quad (2.52)$$

Moltiplicando la (2.52) una volta per $(x t ds)$ ed integrando su tutto il profilo medio L ed una volta per $(y t ds)$ ed integrando rispetto ad L si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_L \omega_A x t ds + (x_A - x_D) \int_L x y t ds - (y_A - y_D) \int_L x^2 t ds + cost \int_L x t ds &= \\ = \int_L \omega_D x t ds & \\ \int_L \omega_A y t ds + (x_A - x_D) \int_L y^2 t ds - (y_A - y_D) \int_L x y t ds + cost \int_L y t ds &= \\ = \int_L \omega_D y t ds & \end{aligned} \quad (2.53)$$

ma per definizione D è il punto rispetto al quale i secondi membri delle (2.53) sono nulli. Inoltre posto che il sistema di riferimento in uso soddisfi le (2.44) ovvero x e y siano gli assi principali d'inerzia della sezione, alcuni integrali delle (2.53) sono nulli; precisamente risulta:

$$\begin{aligned} J_{x\omega_A} - (y_A - y_D) J_{xx} &= 0 \\ J_{y\omega_A} + (x_A - x_D) J_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

sicché la posizione del centro di taglio D nel sistema di riferimento facendo capo agli assi principali d'inerzia, ad un generico polo A nonché ad un'origine arbitraria P_1 della coordinata curvilinea s , è data dalle relazioni:

$$\begin{aligned} x_D &= x_A + \frac{J_{y\omega}}{J_{yy}} \\ y_D &= -y_A + \frac{J_{x\omega}}{J_{xx}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Con la (2.46) viene invece assunta come origine della coordinata curvilinea s un punto, che chiameremo P_0 , non più arbitrario, infatti:

$$J_{1\omega} = \int_{P_1}^{P_0} \omega \, ds = \int_{P_1}^{P_0} \omega \, ds + \int_{P_0}^P \omega \, ds \quad (2.56)$$

da cui, posto $P = P_0$, si ottiene:

$$J_{1\omega}(P_0) = \int_{P_1}^{P_0} \omega \, ds \quad (2.57)$$

che permette di determinare l'origine della coordinata curvilinea s del sistema di riferimento principale; essa infatti coincide con un punto per il quale nel sistema di riferimento con origine di s in P_1 , $J_{1\omega}$ assume il valore dato dalla (2.57). Si osservi che in generale una sezione può possedere più di un punto per il quale la (2.57) è verificata, sicché ciascuno di tali punti può essere assunto come origine della coordinata curvilinea s nel sistema di riferimento principale; la scelta è cioè arbitraria, ma limitata ai punti che soddisfano la (2.57).

Qualora siano soddisfatte le (2.44), (2.45), (2.46), le (2.41) diventano:

$$\begin{aligned} E^* J_{11} \zeta''(z) &= -[q_z(z) + \sum_i T_i(z)] \\ E^* J_{xx} \xi''''(z) &= \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} x(s) \, ds + q_x(z) + \sum_i x(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \\ E^* J_{yy} \eta''''(z) &= \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} y(s) \, ds + q_y(z) + \sum_i y(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \\ E^* J_{\omega\omega} \theta''''(z) - G J_d \theta''(z) &= \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} \omega(s) \, ds + q_\omega(z) + \sum_i \omega(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \end{aligned} \quad (2.58)$$

La prima delle (2.58) determina lo spostamento in direzione z del polo D , dovuto alle azioni assiali; la seconda e la terza si riferiscono alla flessione della voltina rispettivamente nella direzione dell'asse x e dell'asse y . Queste prime tre equazioni sono dunque le ben note equazioni che governano il problema della pressoflessione nella teoria di De Saint Venant, a meno di sostituire il modulo elastico E con E^* .

L'ultima delle (2.58) afferma invece che ai carichi esterni di torsione fanno fronte due portanze in parallelo, di cui la prima $E^* J_{\omega\omega} \theta''''$ è la portanza per ingobbamento (o alla Vlasov), mentre la seconda $- G J_d \theta''$ è la portanza per torsione pura (o alla De Saint Venant). Per tale ragione questa equazione viene detta equazione della torsione mista.

L'importanza relativa di ciascuna portanza torsionale può essere messa in luce attraverso il fattore adimensionale χ :

$$\chi = \sqrt{\frac{l^2 G J_d}{E^* J_{\omega\omega}}} \quad (2.59)$$

essendo l la lunghezza della voltina.

Il confronto tra le due portanze può essere fatto esaminando i valori assunti dal parametro χ . Per grandi valori della rigidità d'ingobbamento $E^*J_{\omega\omega}$ e luci l non troppo grandi si hanno piccoli valori di χ e l'elemento fa fronte alla torsione quasi esclusivamente attraverso l'ingobbamento delle sezioni, derivante da flessioni in sensi "opposti" delle pareti (bi-flessionali): si richiede, quindi, che la luce l non sia troppo grande. Al crescere della luce, infatti, la portanza flessionale di tali pareti diminuisce rapidamente e prende quota al confronto la portanza di torsione pura $GJ_d\theta''$. Per grandi valori della rigidità GJ_d e luci sufficientemente grandi, cosicché la portanza biflessionale risulti modesta, si hanno grandi valori di χ e l'elemento è praticamente soggetto a torsione pura senza ingobbamento delle sezioni.

Nella figura 2.8.1 è riportato in un diagramma al variare di χ l'andamento del rapporto $\Gamma = \frac{M_{\omega}(\chi)}{M_{\omega}(\chi=0)}$ tra il bimomento $M_{\omega}(\chi)$, che si ha per un certo valore di χ nella sezione

di mezzeria di una trave semplicemente vincolata a torsione agli estremi, e il bimomento $M_{\omega}(\chi=0)$, che si ha per $\chi=0$ nella stessa situazione: nella figura sono riportate tre curve, corrispondenti a tre diverse condizioni di carico (coppia torcente M_t concentrata in mezzeria, coppie torcenti m uniformemente distribuite sull'intera luce, bimomenti M_{ω} applicati agli estremi⁴).

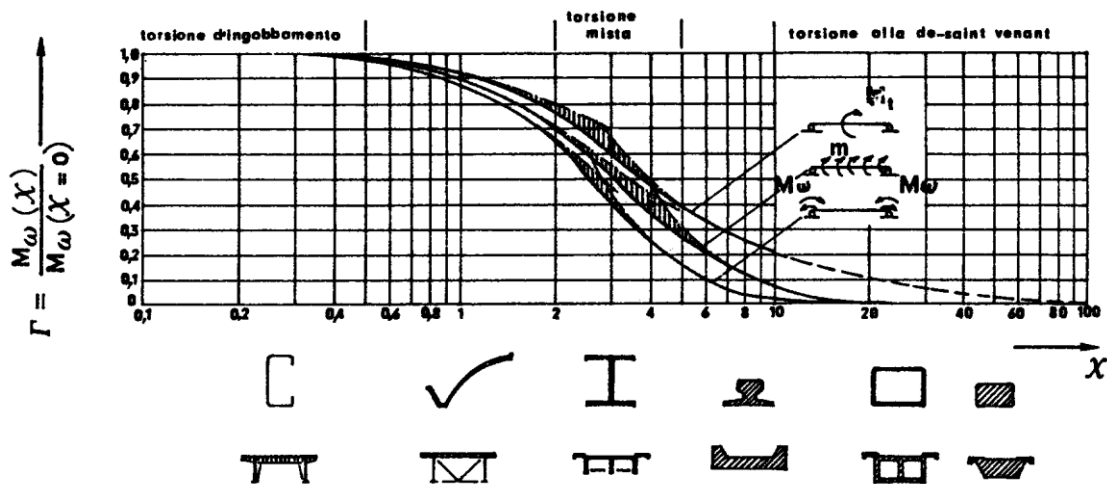


Fig.2.8. 1 – Andamento di χ [2]

⁴ Per sottolineare la bi-flessione della trave, i bimomenti M_{ω} applicati agli estremi sono rappresentati simbolicamente da due momenti flettenti di verso contrario.

Dall'esame della figura si può vedere che la duplicità della portanza torsionale svanisce qualora risulti $\chi < 2$, nel qual caso la portanza alla De Saint Venant è trascurabile rispetto alla portanza torsionale per ingobbamento, sicché l'ultima delle (2.58) diventa:

$$E^* J_{\omega\omega} \theta''''(z) = \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} \omega(s) ds + q_\omega(z) + \sum_i \omega(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \quad (2.60)$$

oppure qualora risulti $\chi > 5$, nel qual caso predomina la portanza torsionale pura:

$$G J_d \theta''(z) = \int_L \frac{\partial p_z(z,s)}{\partial z} \omega(s) ds + q_\omega(z) + \sum_i \omega(s_i) \frac{dT_i(z)}{dz} \quad (2.61)$$

Nel campo $2 \leq \chi \leq 5$ lo studio della torsione deve assolutamente essere condotto sulla base dell'ultima equazione delle (2.58) non potendosi accettare alcuna semplificazione. Per una maggiore approssimazione è però più conveniente estendere il campo della torsione mista tra i limiti $\chi = 1$ e $\chi = 10$. Esaminando gli elementi in calcestruzzo della produzione industriale risulta che, nei casi più frequenti e almeno per le maggiori luci, i valori di χ sono compresi tra circa 3,5 e 7, obbligando perciò ad affrontare il problema attraverso l'ultima delle (2.58).

Va peraltro osservato che i profili formati da membrature ad asse rettilineo concorrenti tutte in un punto, detti profili a stella, non posseggono alcuna resistenza torsionale per ingobbamento. Ciò è facilmente giustificato osservando che qualora si assuma il punto in cui convergono tutte le membrature della sezione quale polo A, per qualsiasi punto di essa risulta $\omega = 0$ sicché necessariamente:

$$J_{1\omega} = J_{x\omega} = J_{y\omega} = J_{\omega\omega} = 0$$

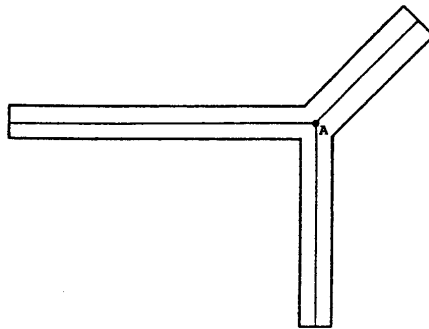


Fig.2.8. 2 – Area settoriale del profilo a stella

Conviene chiarire le condizioni ai limiti. A questo scopo, si definiscono i vincoli torsionali di “forcella” e di “biforcella” (figura 2.8.3), rispettivamente attraverso le condizioni:

per la forcella: $\theta = 0$, $M_\omega = 0$, ossia, $\theta'' = 0$;

per la biforcella: $\theta = 0$, $\theta' = 0$ (ossia, ingobbamento nullo).

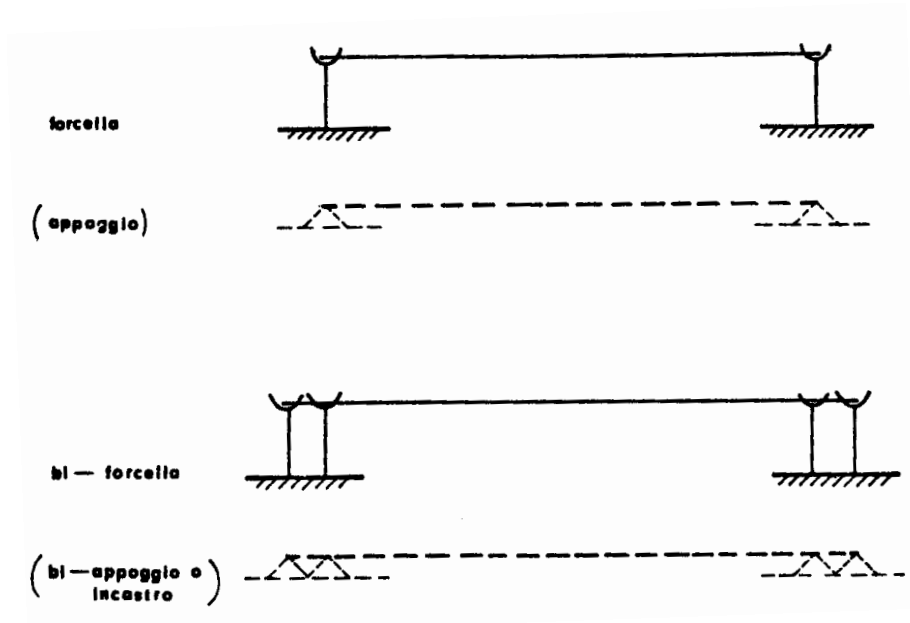


Fig.2.8. 3 – Vincoli

La forcella equivale, perciò, al vincolo di semplice appoggio che si ha nella flessione (nella quale sono nulli la freccia e il momento flettente) e la biforcetta equivale a quello di incastro perfetto (o biappoggio, avente freccia e rotazione nulle); pertanto si può definire la biforcetta come un incastro perfetto a torsione (nel quale però si assume $\theta' = 0$ quindi $M_{DS} = 0$).

2.9 Centro di taglio e centro di istantanea rotazione

Nel paragrafo 2.8 è stato definito il centro di taglio D.

Posto che sia $p_z = T_i = 0$, se la risultante delle azioni agenti nel piano ortogonale all'asse della voltina ha retta d'azione passante per tale punto allora, facendo uso del sistema di riferimento principale, q_ω è nullo (basta ricordare com'è stato definito). Da ciò segue che la quarta delle (2.58) è un'equazione differenziale lineare omogenea. Se poi le condizioni al contorno non impongono valori di ϑ e delle sue derivate diversi da zero allora necessariamente questi saranno nulli su tutta la voltina. Il centro di taglio D che rappresenta una caratteristica geometrica della sezione quale è anche il suo baricentro, presenta quindi il significato fisico di cui si è detto.

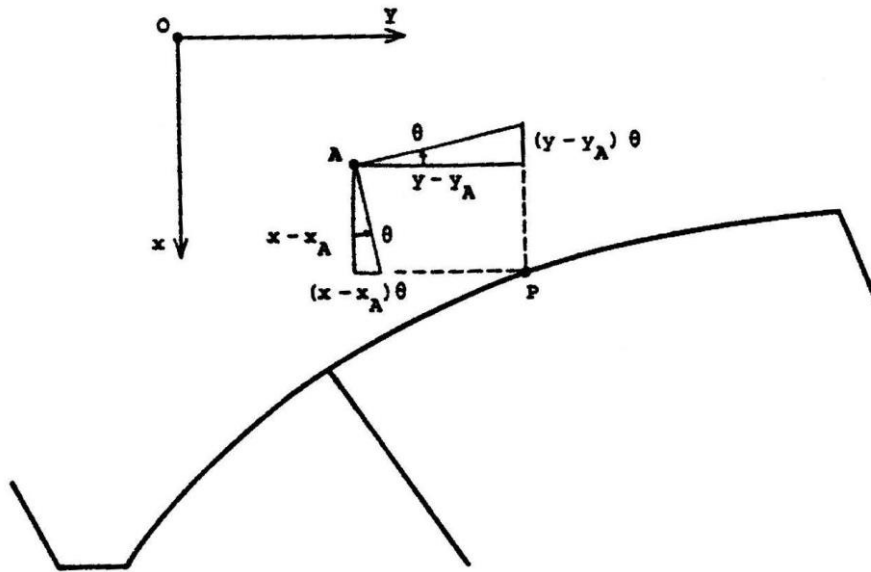


Fig.2.9. 1 – Rotazione del profilo

Altra cosa è il centro di istantanea rotazione Q della sezione il quale può essere determinato imponendo che in tale punto risulti $\xi_P = \eta_P = 0$. Dette x_A, y_A le coordinate di A ed x, y le coordinate di P, con riferimento a fig.2.9.1 e tenendo conto dell'ipotesi I risulta:

$$\xi_P = \xi - (y - y_A) \cdot \vartheta$$

$$\eta_P = \eta + (x - x_A) \cdot \vartheta \quad (2.62)$$

Da cui il punto Q cercato:

$$x_Q = x_A - \frac{\eta}{\vartheta}$$

$$y_Q = y_A + \frac{\xi}{\vartheta} \quad (2.63)$$

Le (2.63) mostrano come la posizione di tale punto sia funzione della deformazione della sezione e quindi in ultima analisi della combinazione dei carichi applicati alla voltina.

2.10 Esempi

Per meglio comprendere quanto detto, si riportano due esempi di applicazione di un'asta rettilinea semplicemente appoggiata a torsione agli estremi, uno con coppie torcenti m uniformemente distribuite sull'intera luce e l'altro con un momento torcente $M_t = T$ concentrato in mezzeria.

L'ultima delle (2.58), l'equazione della torsione mista, si può scrivere (tralasciando l'ultimo termine a secondo membro):

$$E^* J_{\omega\omega} \theta'''' - G J_d \theta'' = m + M'_\omega \quad (2.62)$$

dove:

$m = q_\omega(z)$ è il momento torcente per unità di lunghezza di trave prodotto dai carichi trasversali intorno al polo D

$M_\omega = \int_L p_z(z, s) \omega(s) ds$ è il bimomento per unità di lunghezza di trave prodotto dai carichi longitudinali

Essendo l la luce della trave, si scrive la (2.62) nella forma:

$$\theta'''' - \chi^2 \frac{\theta''}{l^2} = \frac{m+M'_\omega}{E^* J_{\omega\omega}} \quad (2.63)$$

o anche:

$$\frac{d^4 \theta}{dz^4} - \chi^2 \frac{d^2 \theta}{dz^2} = \frac{m+M'_\omega}{E^* J_{\omega\omega}} l^4 = \frac{m+M'_\omega}{G J_d} \chi^2 l^2 \quad (dz = l d\lambda) \quad (2.64)$$

La soluzione della (2.64) si scrive:

$$\theta = C_1 + C_2 \lambda + C_3 Sh(\chi \lambda) + C_4 Ch(\chi \lambda) + \bar{\theta}(\lambda) \quad (2.65)$$

dove $\bar{\theta}(\lambda)$ è un integrale particolare.

Essendo $dz = l d\lambda$, si ha poi:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\theta}{d\lambda} \quad (2.66)$$

e quindi:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{l} \left(C_2 + C_3 \chi Ch(\chi\lambda) + C_4 \chi Sh(\chi\lambda) + \frac{d\bar{\theta}}{d\lambda} \right) \quad (2.67)$$

Similmente si ottiene:

$$M_\omega = -E^* J_\omega \omega \frac{d^2\theta}{dz^2} = -E^* J_\omega \omega \frac{1}{l^2} \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = -\frac{GJ_d}{\chi^2} \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} \quad (2.68)$$

ossia:

$$M_\omega = -G J_d \left(C_3 Sh(\chi\lambda) + C_4 Ch(\chi\lambda) + \frac{1}{\chi^2} \frac{d^2\bar{\theta}}{d\lambda^2} \right) \quad (2.69)$$

e ancora:

$$T_\omega = \frac{dM_\omega}{dz} = \frac{1}{l} \frac{dM_\omega}{d\lambda} = -\frac{GJ_d}{l} \left(C_3 \chi Ch(\chi\lambda) + C_4 \chi Sh(\chi\lambda) + \frac{1}{\chi^2} \frac{d^3\bar{\theta}}{d\lambda^3} \right) \quad (2.70)$$

$$M_{DS} = G J_d \frac{d\theta}{dz} = \frac{GJ_d}{l} \left(C_2 + C_3 \chi Ch(\chi\lambda) + C_4 \chi Sh(\chi\lambda) + \frac{d\bar{\theta}}{d\lambda} \right) \quad (2.71)$$

$$M_t = T_\omega + M_{DS} = \frac{GJ_d}{l} \left(C_2 + \frac{d\bar{\theta}}{d\lambda} - \frac{1}{\chi^2} \frac{d^3\bar{\theta}}{d\lambda^3} \right) \quad (2.72)$$

Se gli estremi della trave sono scarichi, si hanno le condizioni:

$$\text{per } \lambda = 0, \lambda = 1: \quad \theta = \theta'' = 0$$

2.10.1 Coppie torcenti m uniformemente distribuite sull'intera luce

Data la simmetria di carico (oltreché della struttura), se si assume l'origine di λ in mezzeria, nella soluzione (2.65) devono mancare le funzioni di tipo dispari, ossia deve essere:

$$C_2 = C_3 = 0$$

L'integrale particolare della (2.64) è poi:

$$\bar{\theta} = -\frac{ml^2}{2GJ_d} \lambda^2$$

e quindi risulta:

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{d\lambda^2} = -\frac{ml^2}{GJ_d}$$

Si ottiene allora dalle (2.65) e (2.69):

$$\theta = C_1 + C_4 Ch(\chi\lambda) - \frac{ml^2}{2GJ_d} \lambda^2$$

$$M_\omega = -G J_d \left(C_4 \operatorname{Ch}(\chi\lambda) - \frac{1}{\chi^2} \frac{ml^2}{GJ_d} \right)$$

Le condizioni ai limiti (per $\lambda = 1/2$: $\theta = M_\omega = 0$) conducono al sistema:

$$C_1 + C_4 \operatorname{Ch}\left(\frac{\chi}{2}\right) - \frac{ml^2}{8GJ_d} \lambda^2 = 0$$

$$C_4 \operatorname{Ch}\left(\frac{\chi}{2}\right) - \frac{1}{\chi^2} \frac{ml^2}{GJ_d} = 0$$

dal quale si ricava:

$$C_4 = \frac{ml^2}{GJ_d} \frac{1}{\chi^2 \operatorname{Ch}\left(\frac{\chi}{2}\right)}$$

$$C_1 = \frac{ml^2}{GJ_d} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\chi^2} \right)$$

Si hanno quindi le espressioni (si ricordi che l'origine di λ è in mezzzeria):

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{ml^2}{GJ_d} \left(\lambda - \frac{\operatorname{Sh}(\chi\lambda)}{\chi \operatorname{Ch}\left(\frac{\chi}{2}\right)} \right)$$

$$M_\omega = \frac{ml^2}{\chi^2} \left(1 - \frac{\operatorname{Ch}(\chi\lambda)}{\operatorname{Ch}\left(\frac{\chi}{2}\right)} \right)$$

$$T_\omega = -ml \frac{\operatorname{Sh}(\chi\lambda)}{\chi \operatorname{Ch}\left(\frac{\chi}{2}\right)}$$

$$M_{DS} = -ml \left(\lambda - \frac{\operatorname{Sh}(\chi\lambda)}{\chi \operatorname{Ch}\left(\frac{\chi}{2}\right)} \right)$$

$$M_t = -ml\lambda$$

Le funzioni precedenti sono diagrammate per maggior evidenza in fig.2.9.1.1 in corrispondenza al valore $\chi=3$.

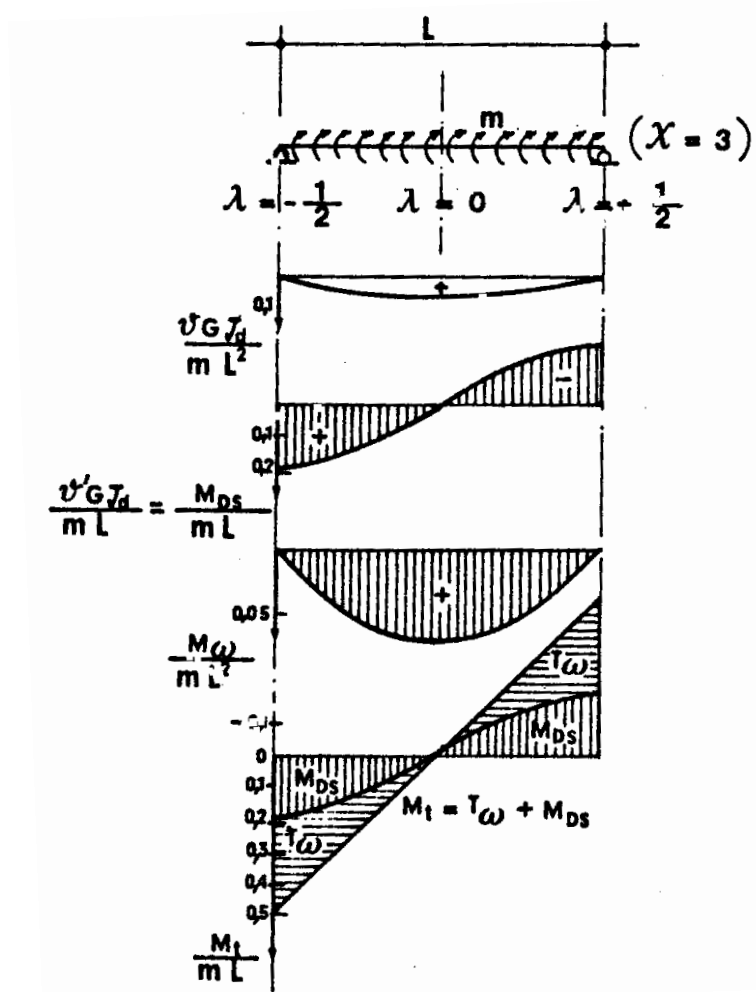


Fig.2.9.1. 1 – Diagrammi delle azioni interne – momento torcente distribuito

Può esser utile osservare che l'andamento del momento torcente complessivo è ovviamente lineare antisimmetrico e che una parte di esso è sopportata dalla portanza di ingobbamento, mentre la parte restante è sopportata dalla portanza alla De Saint Venant; al crescere del parametro χ , questa seconda parte aumenta, fintantoché il momento torcente alla De Saint Venant raggiunge l'intero andamento lineare. Inoltre, all'estremo $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha per θ' il valore:

$$\theta' \left(\lambda = \frac{1}{2} \right) = - \frac{ml}{GJ_d} \left(\frac{1}{2} - \frac{Th \left(\frac{\chi}{2} \right)}{\chi^2} \right)$$

È bene osservare che il corrispondente ingobbamento si ottiene dall'espressione precedente cambiandone il segno, ossia:

$$(-\theta')_{(\lambda=\frac{1}{2})} = \frac{ml}{GJ_d} \left(\frac{1}{2} - \frac{Th\left(\frac{\chi}{2}\right)}{\chi} \right)$$

All'estremo $\lambda = -1/2$ si ha invece:

$$\theta' \left(\lambda = -\frac{1}{2} \right) = \frac{ml}{GJ_d} \left(\frac{1}{2} - \frac{Th\left(\frac{\chi}{2}\right)}{\chi} \right)$$

e il corrispondente ingobbamento vale:

$$(-\theta')_{(\lambda=\frac{1}{2})} = -\frac{ml}{GJ_d} \left(\frac{1}{2} - \frac{Th\left(\frac{\chi}{2}\right)}{\chi} \right)$$

ossia è uguale e di segno contrario a quello ottenuto all'estremo $\lambda = \frac{1}{2}$. Questo fatto è naturale, poiché i prodotti $(-\theta') \cdot \omega(P)$ danno gli spostamenti u secondo z dei punti P del profilo e per uno stesso punto P preso sulle due testate della trave, caricata da un carico simmetrico, si hanno spostamenti uguali e di segno contrario; se però ad entrambi gli estremi della trave si assumono come positivi gli spostamenti u verso l'esterno della luce, occorre cambiare il segno dell'ingobbamento in $\lambda = -\frac{1}{2}$, ottenendosi per un generico punto P di entrambe le testate:

$$u(P) = \frac{ml}{GJ_d} \left(\frac{1}{2} - \frac{Th\left(\frac{\chi}{2}\right)}{\chi} \right) \omega(P)$$

2.10.2 Momento torcente $M_t = T$ concentrato in mezzeria

Il momento torcente è rappresentato in fig.2.9.2.1.a):

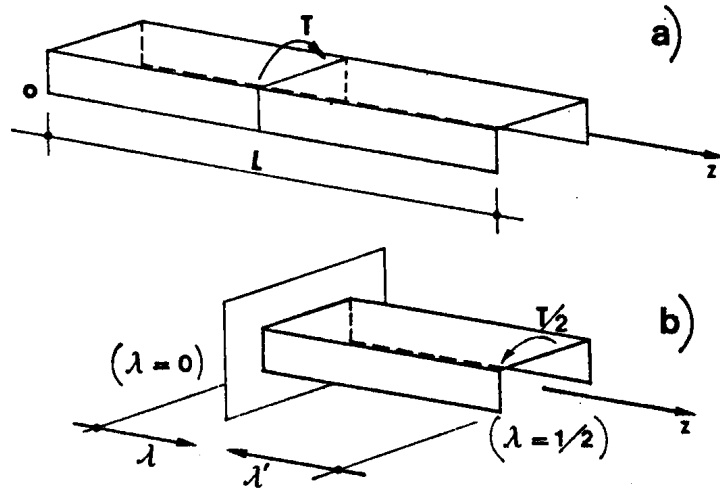


Fig.2.9.2. 1 – Momento torcente concentrato in mezzeria

Consideriamo la mezza trave di fig.2.9.2.1.b), per la quale è $\bar{\theta} = 0$, le condizioni da scriversi sono:

$$\text{per } \lambda = 0: \quad \theta = \theta' = 0$$

$$\text{per } \lambda = 1/2: \quad M_{\omega} = 0; M_t = -T/2$$

Per le quattro costanti $C_1 \div C_4$ risulta quindi il sistema:

$$C_1 + C_4 = 0$$

$$\frac{1}{l}(C_2 + C_3 \chi) = 0$$

$$-G J_d \left(C_3 \operatorname{Sh} \left(\frac{\chi}{2} \right) + C_4 \operatorname{Ch} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) = 0$$

$$\frac{G J_d}{l} (C_2) = -\frac{T}{2}$$

Dal quale si ottengono i valori:

$$C_2 = -\frac{Tl}{2 G J_d}$$

$$C_3 = \frac{Tl}{2 GJ_d \chi}$$

$$C_4 = -C_1 = -\frac{Tl}{2 GJ_d \chi} \frac{Th(\chi)}{2}$$

Per la trave di luce l , le rotazioni $\theta(\lambda)$ sono date ovviamente dalla differenza $-\left[\theta(1/2) - \theta(\lambda)\right]$ fra le rotazioni della mezza trave che si è studiata. Risulta allora, ricordando l'espressione (2.65):

$$\begin{aligned} \theta &= -\left[\left(C_1 + C_2 \frac{1}{2} + C_3 Sh\left(\frac{\chi}{2}\right) + C_4 Ch\left(\frac{\chi}{2}\right) \right) - \left(C_1 + C_2 \lambda + C_3 Sh(\chi\lambda) + C_4 Ch(\chi\lambda) \right) \right] = \\ &= -\left[C_2 \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) + C_3 \left(Sh\left(\frac{\chi}{2}\right) - Sh(\chi\lambda) \right) + C_4 \left(Ch\left(\frac{\chi}{2}\right) - Ch(\chi\lambda) \right) \right] \end{aligned}$$

e con i valori delle costanti sopra ottenuti:

$$\theta = \frac{Tl}{2 GJ_d} \left[\left(\frac{1}{2} - \lambda \right) - \frac{Sh\chi \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)}{\chi Ch\left(\frac{\chi}{2}\right)} \right]$$

Leggendo le coordinate a partire dall'estremo $\lambda = 1/2$, ossia ponendo (fig.2.9.2.1, b)):

$$\frac{1}{2} - \lambda = \lambda'$$

Si può scrivere definitivamente:

$$\theta = \frac{Tl}{2 GJ_d} \left[\lambda' - \frac{Sh\chi\lambda'}{\chi Ch\left(\frac{\chi}{2}\right)} \right]$$

Per le altre grandezze risulta poi:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{Tl}{2 GJ_d} \left[1 - \frac{Ch(\chi\lambda')}{Ch\left(\frac{\chi}{2}\right)} \right]$$

$$M_\omega = \frac{Tl}{2} \left[\frac{Sh(\chi\lambda')}{\chi Ch\left(\frac{\chi}{2}\right)} \right]$$

$$T_{\omega} = \frac{T}{2} \left[\frac{Ch(\chi\lambda')}{Ch\left(\frac{\chi}{2}\right)} \right]$$

$$M_{DS} = \frac{T}{2} \left[1 - \frac{Ch(\chi\lambda')}{Ch\left(\frac{\chi}{2}\right)} \right]$$

$$M_t = \frac{T}{2}$$

In fig.2.9.2.2 sono diagrammate qualitativamente le funzioni precedenti; si nota, in particolare, che in mezzeria il momento torcente applicato è, per così dire, interamente sorretto dalla portanza d'ingobbamento (essendo, infatti, per ragioni di simmetria $\theta' = 0$ e quindi $M_{DS} = GJ_D \theta' = 0$) e che, andando verso gli estremi, il momento torcente complessivo $M_t = T/2 = \text{cost}$ si suddivide fra quello d'ingobbamento (T_{ω}) e quello alla De Saint Venant (M_{DS}) come accade di regola nella torsione mista.

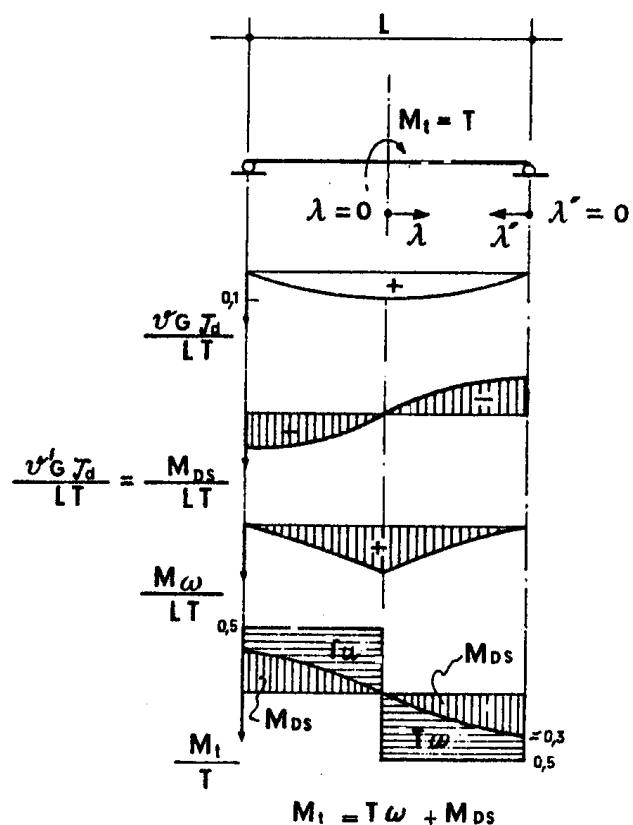


Fig.2.9.2. 2 - Diagrammi delle azioni interne – momento torcente in mezzeria

3 Viscosità del calcestruzzo

3.1 Introduzione

Il calcestruzzo è un materiale con un comportamento reologico complesso, a causa della sua stessa natura di composto artificiale formato da materiali eterogenei di diversa natura. Questo si riflette sull'evoluzione del suo comportamento nel tempo, tramite un marcato effetto viscoso sotto carichi permanenti, nonché una contrazione da ritiro indipendente dallo stato tensionale presente. Tale comportamento è altresì influenzato dalle condizioni ambientali in cui il manufatto viene a trovarsi.

La complessità delle attuali strutture in calcestruzzo, e in particolare degli elementi precompressi, esigono una accurata previsione dei fenomeni differiti nel tempo al fine di procedere ad una corretta progettazione strutturale. D'altro canto la modellazione di tale comportamento differito necessita di espressioni articolate per comprendere l'insieme dei fattori che governano il fenomeno.

La descrizione del comportamento viscoso tramite leggi integrali, se da un lato permette un'efficace e precisa risoluzione del problema, dall'altro richiede un complicato approccio attuabile solo tramite programmi di calcolo automatico complessi. Il progettista invece necessita di formulazioni semplici e di sicura affidabilità durante le fasi di progettazione, lasciando al calcolo automatico la funzione di affinamento della soluzione del problema. Per ottenere soluzioni ingegneristicamente affidabili, ma non particolarmente complesse si ricorre solitamente ad approssimare la legge costitutiva, che contiene un integrale di Volterra, tramite il metodo algebrizzato noto come A.A.E.M. (Age Adjusted Effective Modulus). L'approccio tramite il metodo algebrizzato A.A.E.M. permette una agevole risoluzione del problema mediante facili calcoli manuali e l'utilizzo delle apposite tabelle redatte dal CEB. In casi particolarmente semplici non è necessario neppure ricorrere alle tabelle CEB, essendo disponibili formule di calcolo di immediata implementazione. Per quanto riguarda casi più complessi è sufficiente l'utilizzo di un foglio di calcolo elettronico, il quale consente di svolgere i calcoli più lunghi e onerosi. La risoluzione tramite il metodo algebrizzato, pur non fornendo valori esatti, permette una buona approssimazione del problema, tenuto anche conto che la viscosità del calcestruzzo è influenzata da vari parametri quali l'umidità relativa e la temperatura ambiente in cui il manufatto viene a trovarsi nell'arco della sua vita. Tali parametri come si può ben comprendere sono di difficile stima e valutazione in quanto molto aleatori.

Essendo il calcestruzzo un materiale a comportamento elasto-viscoso, è quindi soggetto allo sviluppo di fenomeni differiti nel tempo. L'insieme dei fenomeni differiti si manifesta sotto forma di deformazioni:

- atensionali, cioè indipendenti dallo stato tensionale presente
- tensionali, cioè dipendenti dalle tensioni presenti permanentemente sulla struttura, la cui origine può essere legata a:
 - carichi applicati
 - distorsioni impresse
 - cedimenti vincolari impressi

Gli effetti viscosi non si manifestano quindi in seguito a sollecitazioni transitorie (quasi istantanee), poiché la loro natura non protratta nel tempo provoca solo risposte di tipo elastico del materiale calcestruzzo, senza dar luogo a fenomeni differiti.

Il comportamento viscoso del calcestruzzo è influenzato da diversi parametri quali il tipo di calcestruzzo, il suo mix-design, le condizioni ambientali in cui si trova durante la maturazione e nell'arco della sua vita e l'età stessa di messa in carico dell'elemento. Quest'ultima variabile indipendente suggerisce di adottare come scala temporale l'età del materiale stesso a partire dall'istante in cui è posto a maturazione. Infatti, le deformazioni viscosi sono di tipo tensionale, dipendono cioè dallo stato di tensione a cui l'elemento è sottoposto. Esse, inoltre, causano un incremento progressivo nel tempo delle deformazioni iniziali elastiche dato dalle sollecitazioni esterne.

Pertanto la deformazione di un manufatto in calcestruzzo ad un istante generico sottoposto ad azioni esterne che perdurano nel tempo è:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) + \varepsilon(t, t_0) \quad (3.1)$$

in cui ad una parte elastica istantanea $\varepsilon(t_0)$ si aggiunge una parte dovuta ai fenomeni viscosi $\varepsilon(t, t_0)$ che crescono progressivamente nel tempo.

Nella formula si sono trascurate le deformazioni dovute ad altri fenomeni quali la dilatazione termica, il ritiro o la deformazione anelastica che esulano dalla presente trattazione.

La viscosità non interviene sulla risposta elastica-istantanea del calcestruzzo, in quanto il materiale istantaneamente ha un comportamento elastico. È opportuno segnalare che se la tensione nel conglomerato non supera il limite di resistenza a trazione, la sezione è interamente reagente e quindi il suo comportamento è lineare. D'altra parte se la resistenza a

trazione viene superata, la risposta istantanea è fortemente non lineare poiché la sezione non è più interamente reagente essendovi la formazione di una zona fessurata.

3.2 Viscosità lineare

La legge costitutiva del calcestruzzo sottoposto ad uno stato di sollecitazione monoassiale costante nel tempo può essere espressa nel modo seguente:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0, \sigma_c(t)) \quad (3.2)$$

in cui la deformazione ad un istante generico $\varepsilon_c(t, t_0)$ dipende dalla tensione applicata all'istante iniziale t_0 , $\sigma_c(t_0)$, per una funzione $J(t, t_0, \sigma_c(t))$ detta funzione di viscosità, che viene a dipendere a sua volta dall'istante di misura della deformazione, dal tempo di messa in carico, e dallo stato tensionale presente sulla sezione stessa.

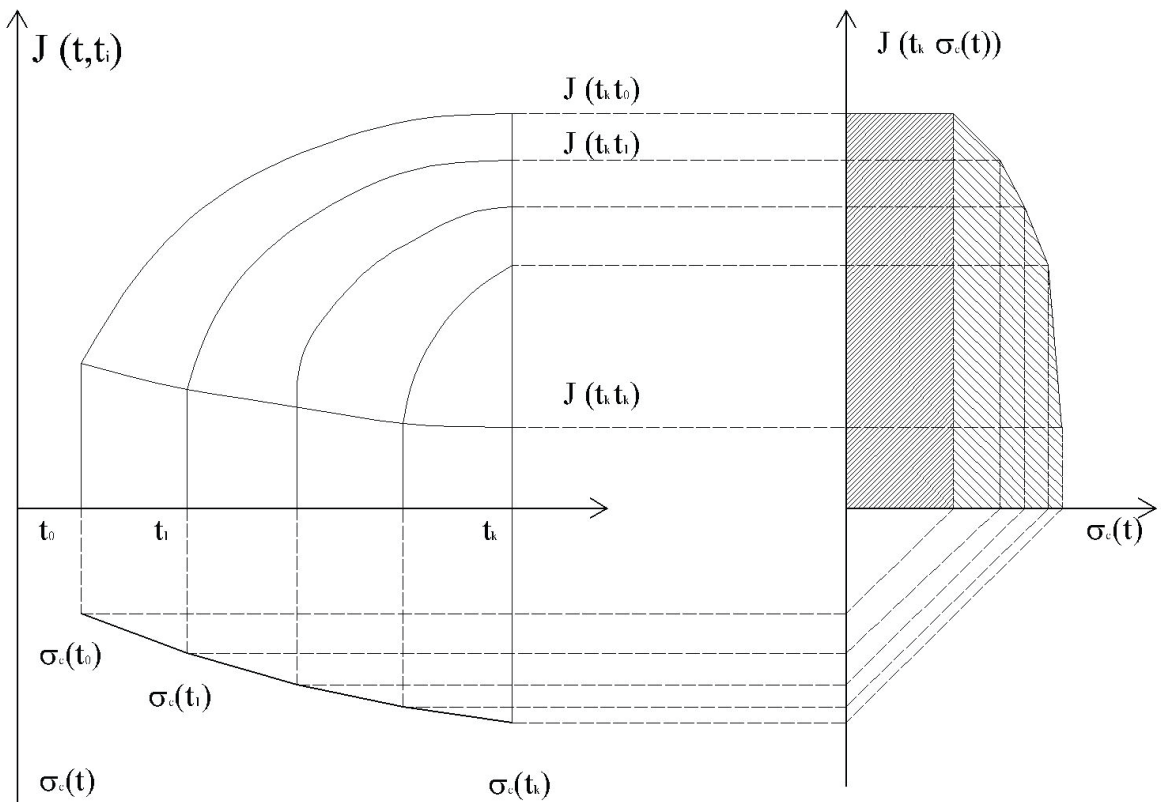


Fig.3.2. 1 – Funzione di viscosità

A seguito di numerose prove di laboratorio compiute su provini in calcestruzzo si è potuto osservare che, mantenendo lo stato tensionale entro i livelli di esercizio, le curve nel piano sforzo-deformazione hanno andamento pressoché lineare, cioè presentano un legame di

proporzionalità lineare tra sforzo e deformazione del calcestruzzo, sicché l'espressione (3.2) diventa:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.3)$$

cioè la funzione di viscosità non è più dipendente dallo stato tensionale presente:

$$J(t, t_0, \sigma_c(t)) \rightarrow J(t, t_0) \quad (3.4)$$

Attraverso varie prove si sono definite le seguenti limitazioni dello stato tensionale nella sezione, tali per cui è valida l'espressione (3.3):

$$-0,8f_{ct} < \sigma_c(t) < 0,4f_{ck} \quad (3.5)$$

La tensione deve cioè essere maggiore dell'80% della resistenza a trazione e inferiore al 40% della resistenza a compressione.

La maggior parte delle strutture presenta sollecitazioni di esercizio inferiori, in quanto il carico permanente è solo una parte del carico totale cui è sottoposta la struttura. È noto infatti che la resistenza di calcolo a compressione è:

$$f_{cc} = 0,85f_{cd} \cong 0,567f_{ck} \quad (3.6)$$

Quindi la sollecitazione in esercizio deve essere di gran lunga inferiore a tale valore e spesso i carichi permanenti provocano valori di sforzo inferiori a $0,3f_{ck}$.

La funzione di viscosità $J(t, t_0)$ rappresenta la deformazione al tempo t causata da uno stato di sforzo unitario costante nel tempo, ed è formata da una parte elastica istantanea e da una parte viscosa:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + C(t, t_0) \quad (3.7)$$

dove $\frac{1}{E_c(t_0)}$ rappresenta la parte elastica, il cui modulo elastico dipende dall'età in cui lo sforzo è applicato sul materiale. Invece il termine $C(t, t_0)$ indica la parte viscosa che per definizione risulta $C(t_0, t_0) = 0$

Analogamente si può definire la relazione inversa della (3.3) ossia:

$$\sigma_c(t, t_0) = \varepsilon_c(t_0) \cdot R(t, t_0) \quad (3.8)$$

in cui il termine $R(t, t_0)$ è la funzione di rilassamento, che rappresenta la tensione misurata all'istante t dovuta ad una deformazione unitaria costante applicata all'istante t_0 .

La funzione di viscosità $J(t, t_0)$ è una funzione di influenza il cui andamento è rappresentato nella fig. 3.2.2. Si può osservare che la curva è una funzione di tipo monotono crescente e presenta un asintoto all'infinito, cioè la deformazione tende a stabilizzarsi nel tempo. La fig.

3.2.2 mostra come la risposta deformativa vari marcatamente al variare dell'istante di messa in carico.

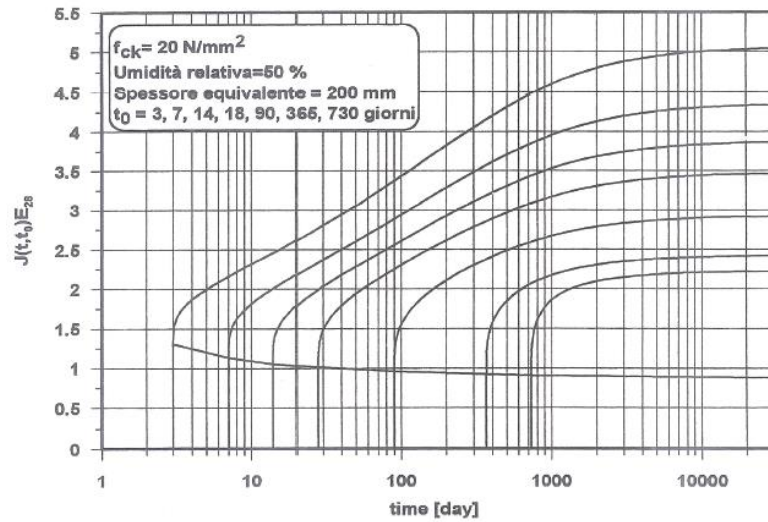


Fig.3.2. 2 - Funzione di viscosità secondo modello CEB '90

Di seguito si riporta anche il diagramma della funzione di rilassamento. Si osserva dalla fig. 3.2.3 che la curva della funzione di rilassamento è monotona decrescente e presenta un asintoto all'infinito, inoltre la curva è dipendente dal modulo elastico del calcestruzzo. Infatti a seconda dell'istante di messa in carico dal grafico si diparte una curva diversa.

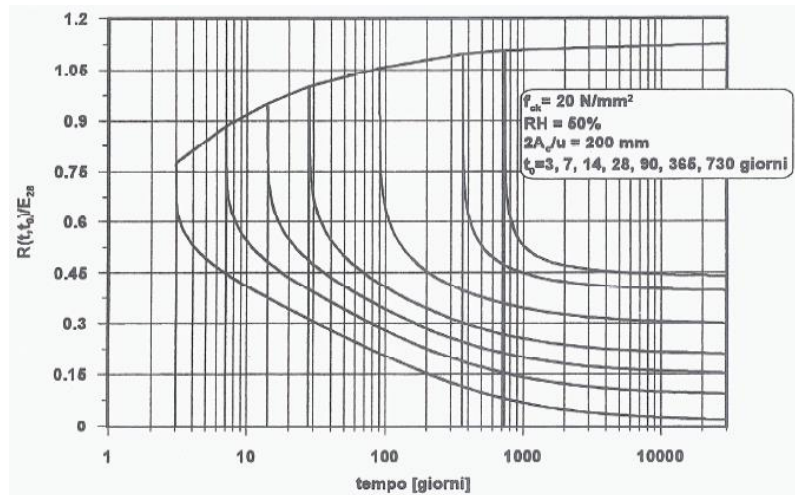


Fig.3.2. 3 - Funzione di rilassamento secondo modello CEB '90

Avendo ipotizzato un comportamento deformativo di tipo lineare nel calcestruzzo, è possibile il calcolo della risposta viscosa dovuta a sollecitazioni agenti contemporaneamente tramite un semplice principio di sovrapposizione degli effetti, cioè la deformazione totale è data dalla somma delle deformazioni dovute a singole azioni:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \varepsilon_{c1}(t, t_0) + \varepsilon_{c2}(t, t_0) = \sigma_{c1}(t_0) \cdot J(t, t_0) + \sigma_{c2}(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.9)$$

Tale approccio non è valido nel caso gli istanti di applicazione del carico siano diversi tra loro, in quanto il calcestruzzo è un materiale invecchiante e quindi il suo modulo elastico non è costante nel tempo così come la sua risposta differita.

Mc Henry [4] definisce una legge costitutiva che risolve il problema nel seguente modo. Egli afferma che la deformazione causata da una generica storia di carico può essere calcolata come somma di piccoli incrementi di tensione applicati in tempi diversi (fig. 3.2.4).

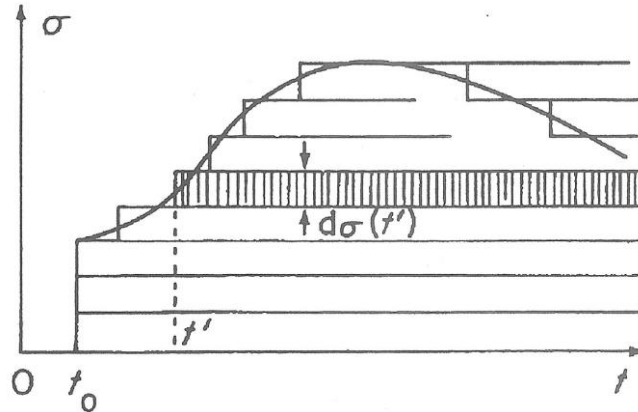


Fig.3.2. 4 – Sovrapposizione degli effetti

Pertanto, la deformazione ad un istante generico, data dalla sommatoria di singole deformazioni, è esprimibile tramite la seguente espressione integrale e si scrive quindi:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau \quad (3.10)$$

Successivamente Volterra ([5], [6], [7], [8]) estende il principio di Mc Henry anche ai materiali invecchianti quale il calcestruzzo, affermando che la legge costitutiva rimane valida se durante la storia di carico non si assiste a brusche variazioni di segno delle deformazioni.

L'espressione (3.10) per un materiale caricato al tempo t_0 di cui si vuole conoscere lo stato deformativo è quindi:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau \quad (3.11)$$

ovvero, qualora si volesse conoscere lo stato tensionale:

$$\sigma_c(t, t_0) = \varepsilon_c(t_0) \cdot R(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\varepsilon_c(\tau)}{d\tau} \cdot R(t, \tau) d\tau \quad (3.12)$$

Si può osservare che, qualora la variazione di tensione sia a salti, l'espressione (3.11) può essere scritta nel seguente modo:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \sum \Delta\sigma_c(\tau) \cdot J(t, \tau) \quad (3.13)$$

A questo punto è interessante osservare che le funzioni di viscosità $J(t, \tau)$ e rilassamento $R(t, \tau)$ non sono fra loro indipendenti, ma possono essere collegate da due equazioni integrali di Volterra.

Ponendo una tensione unitaria costante nel tempo $\sigma_c(t) = 1$ nell'espressione (3.11), essa diviene:

$$\varepsilon_c(t) = J(t, t_0) \quad (3.14)$$

Sostituendo l'equazione (3.14) nell'espressione (3.12) si ottiene:

$$\sigma_c(t) = J(t_0, t_0) \cdot R(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial J(\tau, t_0)}{\partial \tau} \cdot R(t, \tau) d\tau \quad (3.15)$$

Essendo poi la tensione costante nel tempo $\sigma_c(t) = \sigma_c(t_0) = 1$ risulta perciò:

$$J(t_0, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + C(t_0, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} \quad (3.16)$$

e l'equazione (3.15) si trasforma in:

$$1 = \frac{1}{E_c(t_0)} \cdot R(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial J(\tau, t_0)}{\partial \tau} \cdot R(t, \tau) d\tau \quad (3.17)$$

ovvero:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial J(\tau, t_0)}{\partial \tau} \cdot R(t, \tau) d\tau = 1 - \frac{1}{E_c(t_0)} \cdot R(t, t_0) \quad (3.18)$$

L'equazione (3.18) mostra appunto la dipendenza tra $J(t, \tau)$ e $R(t, \tau)$.

Nello stesso modo, ipotizzando una deformazione unitaria costante nel tempo $\varepsilon_c(t) = 1$ e inserendola nell'equazione (3.12), si ottiene il seguente risultato:

$$\sigma_c(t) = R(t, t_0) \quad (3.19)$$

che sostituito nell'equazione (3.10) porta al seguente integrale di Volterra, duale di quello dell'equazione (3.18):

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial R(\tau, t_0)}{\partial \tau} \cdot J(t, \tau) d\tau = 1 - E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.20)$$

Le due equazioni (3.18) e (3.20) sono due integrali di Volterra, risolubili solo per via numerica, e quindi di non facile utilizzo nella realtà progettuale.

Come già espresso, le due equazioni sono linearmente dipendenti, perciò, nota la funzione di viscosità, si può calcolare la funzione di rilassamento e viceversa. Tuttavia, la determinazione sperimentale delle funzioni di rilassamento è piuttosto difficoltosa, mentre è più semplice definire la funzione di viscosità. Per tale motivo si è soliti ricavare la funzione di rilassamento nota che sia la funzione di viscosità.

Le funzioni di viscosità e rilassamento sono entrambe composte da una parte elastica e da una parte viscosa come mostrato nell'espressione (3.7). La funzione di viscosità può essere espressa nel seguente modo:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (3.21)$$

e la funzione di rilassamento si definisce:

$$R(t, t_0) = E_c(t_0) [1 - \rho(t, t_0)] \quad (3.22)$$

Le due funzioni adimensionalizzate, $\varphi(t, t_0)$ e $\rho(t, t_0)$, scritte nelle espressioni (3.21) e (3.22) sono rispettivamente il coefficiente di viscosità $\varphi(t, t_0)$ e il coefficiente di rilassamento $\rho(t, t_0)$.

Il coefficiente di viscosità è così definito:

$$\varphi(t, t_0) \geq 0 \quad (3.23)$$

$$\varphi(t_0, t_0) = 0 \quad (3.24)$$

Mentre il coefficiente di rilassamento è dato:

$$\rho(t, t_0) \geq 0 \quad (3.25)$$

$$\rho(t_0, t_0) = 0 \quad (3.26)$$

Per questo motivo all'istante iniziale t_0 le funzioni di viscosità e rilassamento coincidono con la parte elastica di queste.

Nel tempo sono stati proposti vari modelli della funzione di viscosità e rilassamento in grado di modellare il comportamento viscoso del calcestruzzo.

3.2.1 Teoremi della viscosità lineare

Le strutture omogenee in calcestruzzo, cioè composte da un unico getto in calcestruzzo, in regime elasto-viscoso lineare possiedono alcune particolari proprietà espresse nei teoremi detti della viscosità lineare ([9] [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]).

3.2.1.1 Primo teorema della viscosità lineare

Il primo teorema della viscosità lineare afferma che: “in una struttura omogenea a comportamento elasto-viscoso lineare, coefficiente di Poisson costante nel tempo e vincoli fissi, soggetta a sole azioni statiche, lo stato di sollecitazione coincide con quello valutabile in fase puramente elastica lineare, mentre lo stato di deformazione deve essere valutato sommando a quello elastico gli effetti della viscosità ad esso conseguenti”.

Tale teorema permette di calcolare le tensioni nei vari punti a seguito di un semplice equilibrio elastico evitando di considerare gli effetti viscosi.

3.2.1.2 Secondo teorema della viscosità lineare

Questo teorema assicura che: “In una struttura omogenea a comportamento elasto-viscoso lineare e coefficiente di Poisson costante nel tempo, soggetta a sole azioni geometriche (cedimenti vincolari, deformazioni termiche, ecc.) lo stato di deformazione coincide con quello valutabile in fase puramente elastica-lineare, mentre lo stato di sollecitazione deve essere valutato sommando a quello elastico gli effetti del rilassamento ad esso conseguenti”.

Pertanto gli spostamenti generalizzati di una struttura sono calcolabili semplicemente in campo elastico, tralasciando gli effetti viscosi.

3.2.1.3 Principio del riacquisto del regime principale (terzo teorema della viscosità lineare)

Il teorema del riacquisto del regime principale afferma che: “Se in una struttura soggetta a forze costanti nel tempo ed m volte iperstatica, vengono aggiunti all'istante t_0^+ , immediatamente successivo all'applicazione dei carichi, n vincoli aggiuntivi, le reazioni negli $m+n$ vincoli tendono nel tempo ad assumere quei valori che esse avrebbero se tutti i vincoli fossero preesistenti alle azioni applicate”.

Tale principio permette di considerare la struttura a lungo termine come se i vincoli fossero preesistenti all'applicazione delle forze esterne.

3.3 Metodi di analisi in regime elasto-viscoso

3.3.1 Introduzione

L'equazione integrale di Volterra (3.11 e 3.12):

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau \quad (3.11)$$

$$\sigma_c(t, t_0) = \varepsilon_c(t_0) \cdot R(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\varepsilon_c(\tau)}{d\tau} \cdot R(t, \tau) d\tau \quad (3.12)$$

o i sistemi di tali equazioni integrali, che governano l'evoluzione nel tempo del fenomeno viscoso, costituiscono una complicazione nella trattazione in quanto impongono la conoscenza di un bagaglio matematico approfondito. Pertanto nel trattare il complesso problema della viscosità fin dai suoi albori si sono introdotte semplificazioni laddove ciò fosse possibile senza inficiare la bontà della soluzione e la possibilità di predire con sufficiente affidabilità gli effetti del fenomeno viscoso sulla struttura. I tentativi di semplificazione sono stati effettuati in direzioni differenti, portando ciascuno alla definizione di particolari classi di modelli e di soluzioni.

- *Metodi che adottano leggi elasto-viscose semplificate:* si basano sull'introduzione, nella legge della viscosità, di una funzione di viscosità di tipo particolare, tale cioè da condurre, pur mantenendosi piuttosto ben aderente alla realtà fisica del fenomeno, alla trasformazione dell'equazione integrale di Volterra in un'equazione differenziale, molto più semplice da trattare; nascono così i cosiddetti modelli semplificati (quali quelli di Boltzmann e Dischinger, i primi storicamente a consentire di destreggiarsi con il problema della viscosità in modo anche pratico e ingegneristico oltre che teorico).
- *Metodi algebrizzati:* in questo caso si ipotizzano particolari legami tra sforzi e deformazioni di tipo viscoso, di tipo approssimato se non in alcuni casi particolari, e ci si basa su questi legami, di tipo algebrico e non integrale, in tutti i casi in cui si ricerca la soluzione; il più diffuso tra questi metodi è senz'altro l'Age Adjusted Effective Modulus Method o A.A.E.M.M., basato sulla teoria di Trost.
- *Metodi empirici:* forniscono una valutazione largamente approssimata della funzione di rilassamento mediante l'inversione diretta della funzione di viscosità.
- *Metodi di tipo generale:* i metodi di soluzione oggi più usati sono tuttavia quelli che consentono di trovare una soluzione ben approssimata, mediante l'uso dell'elaboratore elettronico, senza ricorrere a semplificazioni di alcun tipo da imporre

alla funzione di viscosità, la quale è quella che scaturisce dalle evidenze sperimentali, senza alcuna modifica; in questi metodi la sola approssimazione introdotta è nel campo del calcolo numerico, cioè nelle modalità di integrazione. Tra tali metodi i più importanti sono il *Metodo dei nuclei risolvanti*, il *Metodo delle funzioni di rilassamento ridotte*, il *Metodo generale*. I primi due di questi metodi sono più che altro di tipo teorico, in quanto permettono di giungere ad una trattazione completa e compatta del problema e alla determinazione delle funzioni di rilassamento variate che è indispensabile calcolare per avere la soluzione esaustiva del problema; il metodo generale invece è di tipo matematico, e si basa sulla discretizzazione della storia evolutiva temporale della struttura dalla sua nascita fino ad un tempo sufficientemente lungo per essere considerato infinito e sulla trasformazione, tramite tale discretizzazione, dell'originario problema integrale in un nuovo problema di tipo pseudo-elastico incrementale.

3.3.2 Modelli semplificati della funzione di viscosità

Come si è detto, le funzioni di viscosità possono dedursi in modo corretto soltanto per via sperimentale. Difficilmente sono note in forma analitica. Tuttavia, allo scopo di ottenere delle soluzioni di facile impiego, sono state formulate delle leggi costitutive semplificate e particolari, tali da permettere di trasformare le equazioni integrali di Volterra in relazioni di tipo differenziale. Così facendo si riesce in molti casi ad integrare in forma chiusa la relazione differenziale per assegnate storie di tensione o di deformazione, ottenendo l'esatto andamento temporale della deformazione o della tensione che ne conseguono.

3.3.2.1 Modello ereditario di Boltzmann

I primi modelli proposti ([20], [21], [22]) sono quelli di tipo non invecchiante o ereditario (materiale boltzmanniano): si assume che le caratteristiche elastiche e viscosive non mutino al variare del tempo di inizio della messa in carico. Di conseguenza la risposta del materiale ad una data storia di carico dipende solo dalla durata d'azione del carico stesso. La corrispondente teoria è attualmente definita teoria dell'ereditarietà ([23], [24], [25]).

La reologia boltzmanniana si può schematizzare attraverso la combinazione in serie e in parallelo di elementi elastici ed elementi viscosi newtoniani:

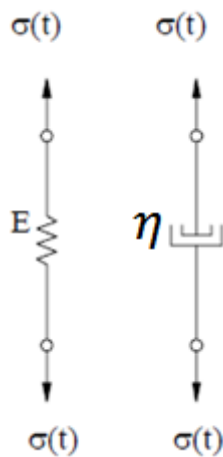


Fig.3.3. 1 – Modello ereditario di Boltzmann

per i quali valgono le seguenti relazioni:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} \quad \text{elemento elastico di Hooke} \quad (3.27)$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad \text{elemento viscoso di Newton} \quad (3.28)$$

Combinando i due elementi nascono elementi più complessi, i quali, in virtù della costanza nel tempo dei parametri E e η , hanno la proprietà di fornire risposte elastiche sempre uguali a parità di $\sigma(t)$ e di dare luogo a funzioni di viscosità e di rilassamento dipendenti soltanto dalla differenza $(t-\tau)$ tra il tempo t di misura e il tempo τ di applicazione della tensione o della deformazione impressa.

La funzione di viscosità si scrive allora:

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E} + C(t - \tau) \quad (3.29)$$

presentandosi per i diversi tempi di messa in carica t_0, t_1, t_2, \dots semplicemente traslata in direzione parallela all'asse dei tempi e con un unico asintoto per t infinito.

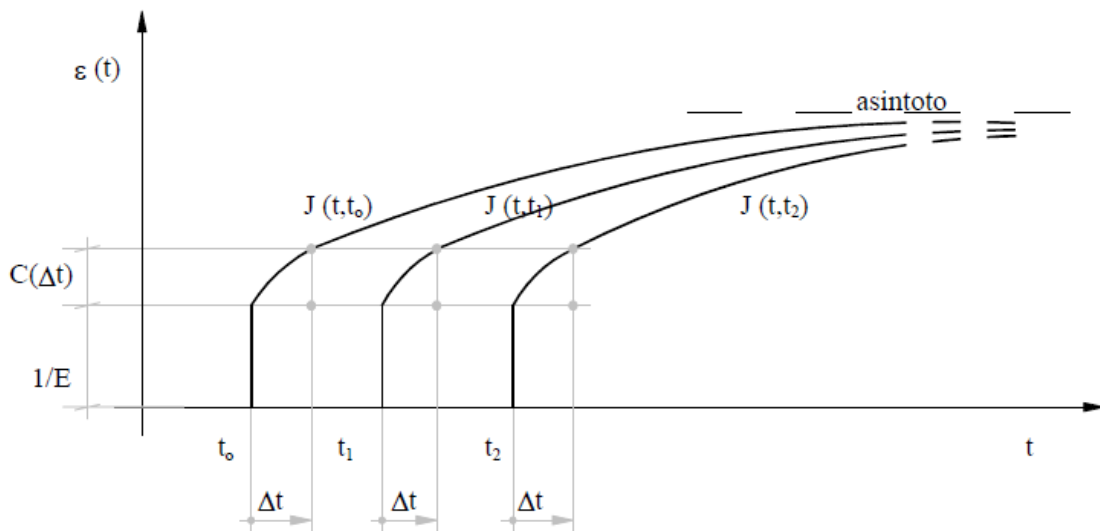


Fig.3.3. 2 – Funzione di viscosità secondo Boltzmann

Tra i vari modelli ereditari proposti, particolare importanza ha il modello di Kelvin-Voight (fig. 3.3.3):

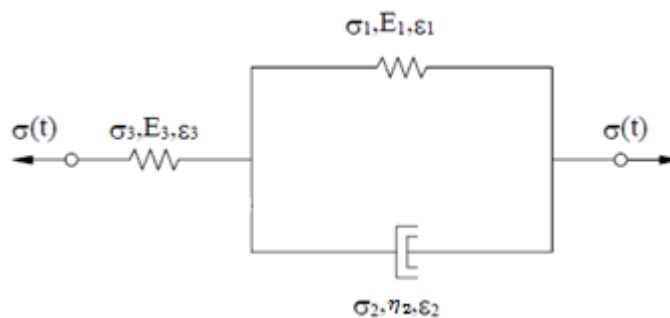


Fig.3.3. 3 – Modello ereditario di Kelvin-Voight

La relazione tra sforzi e deformazioni si ottiene elaborando le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1(t) &= \frac{\sigma_1(t)}{E_1} & \varepsilon_1(t) &= \varepsilon_2(t) \\
 \frac{d\varepsilon_2(t)}{dt} &= \frac{\sigma_2(t)}{\eta_2} & \varepsilon_2(t) + \varepsilon_3(t) &= \varepsilon(t) \\
 \varepsilon_3(t) &= \frac{\sigma_3(t)}{E_3} & \sigma_1(t) + \sigma_2(t) &= \sigma_3(t) = \sigma(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Eliminando le variabili con indice si ottiene l'equazione differenziale tra $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$:

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} \frac{1}{3} + \frac{\sigma(t)}{\eta_2} \left(1 + \frac{E_1}{E_3}\right) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon(t) \frac{E_1}{\nu_2}
 \tag{3.31}$$

Posto:

$E = E_3$ modulo elastico istantaneo

$\varphi_\infty = \frac{E_3}{E_1}$ coefficiente finale di viscosità

$\tau^* = \frac{\nu_2}{E_1}$ tempo di ritardo

e integrando la (3.31) per $\sigma(t) = \text{cost} = 1$, applicata al generico istante $\tau < t$, si ottiene la funzione di viscosità:

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E} \left\{ 1 + \varphi_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau^*}\right) \right] \right\} \quad (3.32)$$

Qualora si assuma $\varepsilon(t) = \text{cost} = 1$, applicata al generico istante $\tau < t$, la funzione di rilassamento diventa:

$$R(t, \tau) = \frac{E}{1+\varphi_\infty} \left\{ 1 + \varphi_\infty \left[\exp\left(-\frac{1+\varphi_\infty}{\tau^*}(t-\tau)\right) \right] \right\} \quad (3.33)$$

Da tale modello, funzione di tre parametri del materiale ($E, \varphi_\infty, \tau^*$), deriva la possibilità di restituire completamente la deformazione o la tensione allo scarico per t molto grande. In maniera analoga, si può affermare che la deformazione viscosa è totalmente reversibile. Infatti, essendo le proprietà viscosi inalterate nel tempo, l'andamento della $\varepsilon(t)$ dopo lo scarico in t'_0 è quello rappresentato in fig. 3.3.4 con asintoto costituito dall'asse dei tempi.

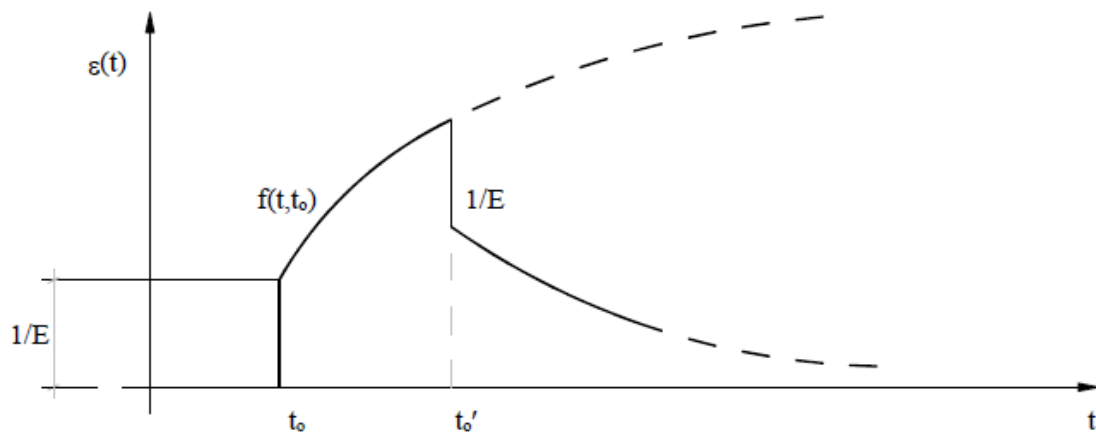


Fig.3.3. 4 – Comportamento ereditario del materiale

Se ad un elemento Kelvin-Voight si aggiunge in serie un elemento viscoso (fig. 3.3.5) si ottiene un modello, funzione di quattro parametri del materiale, che per $t = t_\infty$ presenta un asintoto orizzontale. In questo caso la deformazione o la tensione non sono completamente recuperabili allo scarico. In fig. 3.3.6 è rappresentato l'andamento di $\varepsilon(t)$ dopo lo scarico completo in t'_0 .

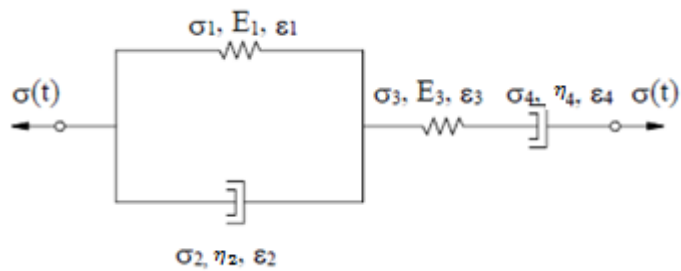


Fig.3.3. 5 - Elemento di Kelvin-Voight con un elemento viscoso in serie

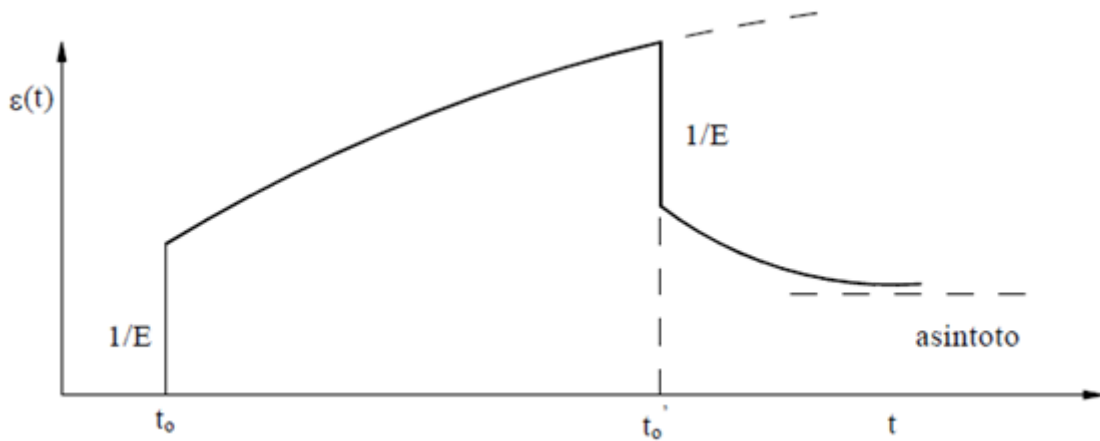


Fig.3.3. 6 – Comportamento del materiale con elemento viscoso in serie

3.3.2.2 Modello invecchiante di Dischinger

I modelli ereditari, del tipo di quelli ora analizzati, non sono però in grado di descrivere l'invecchiamento del materiale, che gioca un ruolo fondamentale nella corretta previsione della deformazione viscosa. Sono quindi nati dei modelli i quali assumono che la deformazione viscosa sia solo di tipo invecchiante e totalmente irreversibile. In seguito a prove sperimentali effettuate da Whitney e Glanville [26] [27], Dischinger [28], [29] avanzò l'ipotesi di curve $J(t, t')$ che, lontano dal tempo di carico, avessero tutte la medesima tangente, cioè fossero parallele. In tal caso, indicando con $C(t, t_0)$ la deformazione letta nell'istante t in seguito ad una tensione unitaria applicata a partire da t_0 , risulta che, partendo da un istante di messa in carico t' successivo a t_0 , $C(t, t') = C(t, t_0) - C(t', t_0)$. La funzione $C(t, t')$ è cioè la differenza tra i valori della stessa funzione $C(t, t_0)$ calcolata negli estremi dell'intervallo (t, t') .

La funzione di viscosità, in tal caso, assume la forma:

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + C(t, t') = \frac{1}{E(t')} + C(t, t_0) - C(t', t_0) \quad (3.34)$$

Considerando due distinti tempi di messa in carico t_0 e t' , il risultato è quello di ottenere una funzione di viscosità $J(t,t')$ che, semplicemente, coincide con la $J(t,t_0)$ traslata in direzione dell'asse delle ε (fig. 3.3.7).

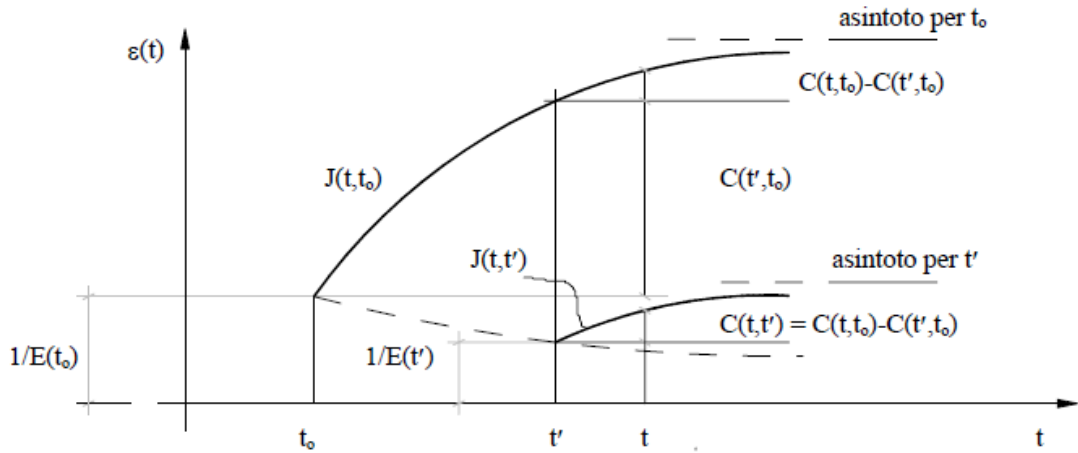


Fig.3.3. 7 – Influenza del tempo di messa in carico sulla funzione di viscosità

Dischinger propose la (3.34) nella forma in cui compare il coefficiente di viscosità $\varphi(t,t_0)$ riferito convenzionalmente a E_{28} (modulo elastico del calcestruzzo valutato a 28 giorni). Quindi, introducendo:

$$\varphi(t, t_0) = C(t, t_0) \cdot E_{28} \quad (3.35)$$

la (3.34) si riscrive:

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \frac{\varphi(t,t_0) - \varphi(t',t_0)}{E_{28}} \quad \text{funzione di Dischinger} \quad (3.36)$$

Sostituendo la (3.36) nell'equazione integrale di Volterra (3.11), in presenza di una deformazione impressa $\bar{\varepsilon}(t)$ di tipo atensionale (ritiro o variazione termica):

$$\varepsilon(t, t_0) - \bar{\varepsilon}(t) = \sigma(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau \quad (3.37)$$

e derivando quest'ultima rispetto al tempo, si ottiene la seguente equazione differenziale che lega fra loro tensione e deformazione:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} - \frac{d\bar{\varepsilon}(t)}{dt} = \frac{1}{E(t)} \frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{1}{E_{28}} \frac{d\varphi(t,t_0)}{dt} \sigma(t) \quad (3.38)$$

La (3.38), equazione di Dischinger in forma generale, è un'equazione differenziale del I ordine a coefficienti variabili. Essa sostituisce in pieno l'equazione integrale di Mc Henry, dalla quale è stata derivata, e può essere integrata una volta che sia nota la forma analitica del coefficiente di viscosità φ , per il quale Dischinger assume l'espressione seguente:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_\infty \{1 - e^{-\beta(t-t_0)}\} \quad (3.39)$$

da cui:

$$\varphi(t, t') = \varphi(t, t_0) - \varphi(t', t_0) = \varphi_\infty \{e^{-\beta(t'-t_0)} - e^{-\beta(t-t_0)}\} \quad (3.40)$$

essendo φ_∞ il valore finale del coefficiente di viscosità.

Sostituendo la (3.39) nella (3.38) ed integrando per $\varepsilon(t) = 1$ e $\bar{\varepsilon}(t) = 0$ si ottiene la funzione di rilassamento:

$$R(t, t') = E(t') \cdot \exp \left\{ - \int_{t'}^t \varphi_\infty \frac{E(\tau)}{E_{28}} \cdot \frac{d}{d\tau} [1 - e^{-\beta(\tau-t_0)}] d\tau \right\} \quad (3.41)$$

Visto che il modulo elastico ha una variazione modesta nel tempo $E_\infty \cong 1,13 \cdot E_{28}$, si può assumere l'ulteriore ipotesi di modulo costante. In tal caso, le funzioni di viscosità e di rilassamento diventano:

$$\begin{aligned} J(t, t') &= \frac{1}{E_{28}} \{1 + \varphi_\infty [e^{-\beta(t'-t_0)} - e^{-\beta(t-t_0)}]\} = \frac{1}{E_{28}} [1 + \varphi(t, t')] \\ R(t, t') &= E_{28} \cdot \exp \{ - \varphi_\infty [e^{-\beta(t'-t_0)} - e^{-\beta(t-t_0)}] \} = E_{28} \cdot e^{-\varphi(t, t')} \end{aligned} \quad (3.42)$$

La funzione di viscosità presenta sempre un asintoto orizzontale per $t \rightarrow \infty$.

Anche l'equazione (3.38) può essere riscritta, effettuando il cambiamento di scala ($\cdot dt/d\varphi$), nel seguente modo:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{d\varphi} = \frac{1}{E_{28}} \frac{d\sigma(t)}{d\varphi} + \frac{\sigma(t)}{E_{28}} \quad (3.43)$$

La (3.43) è una equazione differenziale del I ordine a coefficienti costanti, molto utile nella pratica ingegneristica.

Rispetto al modello ereditario tipo Kelvin-Voight, il modello di Dischinger ha un rilassamento maggiore (fig. 3.3.8); non solo, scaricando completamente il materiale in t'_0 , l'andamento di $\varepsilon(t)$ è di tipo totalmente irreversibile (fig. 3.3.9). Tale approssimazione in molti problemi pratici non è soddisfacente e, per risolvere questo inconveniente, Rush e Jungwirth proposero di correggere la (3.36) inglobando nella risposta elastica istantanea del materiale la parte reversibile della deformazione viscosa. Quest'ultima si sviluppa in tempi più brevi della parte irreversibile e risulta sensibilmente prossima a 0,4 volte la deformazione elastica. In tal modo si adottano un modulo elastico ed un coefficiente di viscosità variati:

$$E^* = \frac{E_{28}}{1,4} \qquad \varphi_\infty^* = \frac{\varphi_\infty - 0,4}{1,4}$$

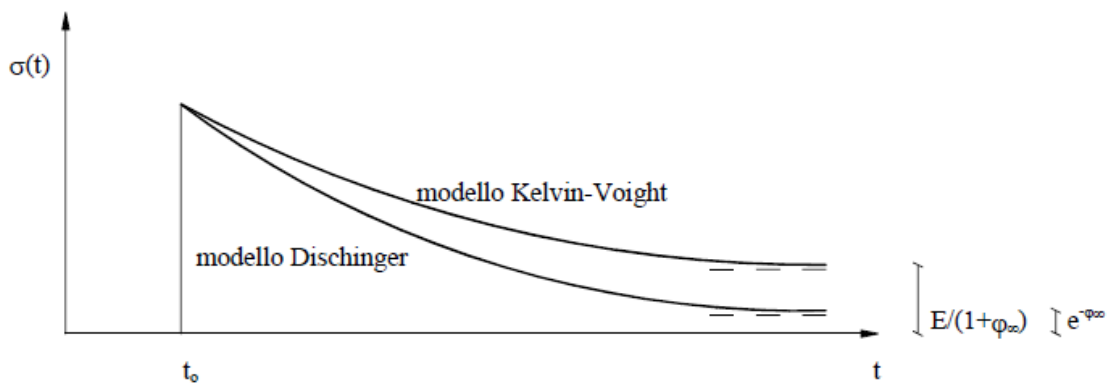


Fig.3.3. 8 – Confronto tra i modelli

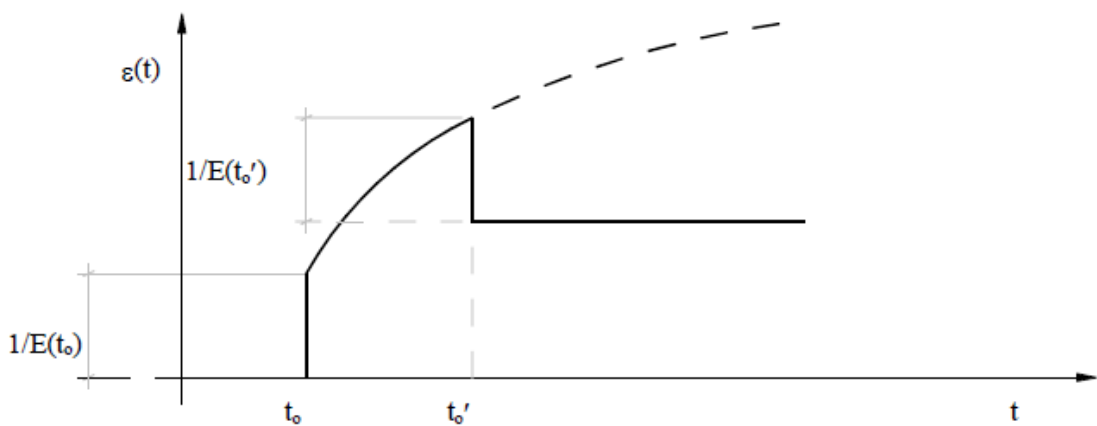


Fig.3.3. 9 – Comportamento irreversibile del materiale

Il modello invecchiante fu utilizzato in via di prima approssimazione da molti autori, in particolare da [30] e [31].

In conclusione, il pregio di questi modelli è quello di fornire una formulazione semplificata della legge costitutiva (differenziale per Dischinger o algebrica per Boltzmann), del tutto equivalente alla formulazione integrale alla Mc Henry (integrale di Volterra). Ciò facilita l'utilizzo di metodi di calcolo analiticamente esatti e quindi rende possibile una soluzione rigorosa in forma chiusa, anche se basata su una funzione di viscosità approssimata. Inoltre i modelli invecchiante ed ereditario rappresentano i due casi limite del comportamento viscoso (irreversibile e totalmente reversibile), mentre il materiale reale presenta una reversibilità parziale e, quindi, si attesta nel mezzo. Soluzioni soddisfacenti si possono già ottenere nel caso in cui la differenza di risultato tra i due comportamenti limite risulti minima.

3.3.2.3 Modello fib 2010

Il calcestruzzo ha un comportamento sia ereditario sia invecchiante: a seguito di numerose prove sperimentali si è giunti ad una formulazione che cerca di essere aderente alla realtà. Il modello proposto dal fib [32], cerca, attraverso vari termini, di cogliere sia gli effetti della componente invecchiante sia della componente ereditaria.

Il modello fib si basa sul comportamento visco-elastico lineare del calcestruzzo (mantenendo lo stato tensionale entro i livelli di esercizio, come già descritto nel paragrafo 3.2), per cui è possibile arrivare a definire la formula (3.11).

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau \quad (3.11)$$

Di particolare interesse è il modello di calcolo del coefficiente di viscosità $\varphi(t, t_0)$, il quale può essere identificato come:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{bc}(t, t_0) + \varphi_{dc}(t, t_0) \quad (3.44)$$

in cui:

$\varphi_{bc}(t, t_0)$ = coefficiente "base" di viscosità

$\varphi_{dc}(t, t_0)$ = coefficiente "asciutto" di viscosità

t: età del calcestruzzo all'istante della misura

t_0 : età di messa in carico del calcestruzzo; tale valore va però modificato in base alla temperatura e al tipo di cemento:

$$t_{0,adj} = t_{0,T} \left[\frac{9}{2+t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ giorni} \quad (3.45)$$

in cui:

α : coefficiente che tiene conto del tipo di cemento:

$\alpha = -1$ per classi di resistenza 32,5 N

$\alpha = 0$ per classi di resistenza 32,5 R, 42,5 N

$\alpha = 1$ per classi di resistenza 42,5 R, 52,5 N, 52,5 R

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp \left[13,65 - \frac{4000}{273+T(\Delta t_i)} \right] \quad (3.46)$$

con:

Δt_i = numero di giorni in cui la temperatura T prevale

$T(\Delta t_i)$ = temperatura in °C presente nel periodo Δt_i

Il coefficiente “base” di viscosità $\varphi_{bc}(t, t_0)$ si può stimare tramite la formula:

$$\varphi_{bc}(t, t_0) = \beta_{bc}(f_{cm}) \cdot \beta_{bc}(t, t_0) \quad (3.47)$$

in cui:

$$\beta_{bc}(f_{cm}) = \frac{1,8}{(f_{cm})^{0,7}} \quad (3.48)$$

$$\beta_{bc}(t, t_0) = \ln \left(\left(\frac{30}{t_{0,adj}} + 0,035 \right)^2 (t - t_0) + 1 \right) \quad (3.49)$$

con:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ [MPa]: resistenza media a compressione all'età di 28 giorni}$$

Il coefficiente “asciutto” di viscosità $\varphi_{dc}(t, t_0)$, invece, si può identificare come:

$$\varphi_{dc}(t, t_0) = \beta_{dc}(f_{cm}) \cdot \beta_{dc}(RH) \cdot \beta_{dc}(t_0) \cdot \beta_{dc}(t, t_0) \quad (3.50)$$

in cui:

$$\beta_{dc}(f_{cm}) = \frac{412}{(f_{cm})^{1,4}} \quad (3.51)$$

$$\beta_{dc}(RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{0,1 \frac{h}{100}}} \quad (3.52)$$

$$\beta_{dc}(t_0) = \frac{1}{0,1 + t_{0,adj}^{0,2}} \quad (3.53)$$

con:

$h = 2 A_c / u$: due volte l'area della sezione [mm²] diviso u, cioè il perimetro della parte in contatto con l'atmosfera [mm]

RH: umidità relativa dell'ambiente [%]

Lo sviluppo della viscosità asciutta con il tempo è descritta da:

$$\beta_{dc}(t, t_0) = \left[\frac{(t-t_0)}{\beta_h + (t-t_0)} \right]^{\gamma(t_0)} \quad (3.54)$$

in cui:

$$\gamma(t_0) = \frac{1}{2,3 + \frac{3,5}{\sqrt{t_{0,adj}}}} \quad (3.55)$$

$$\beta_h = 1,5 h + 250 \alpha_{f_{cm}} \leq 1500 \alpha_{f_{cm}} \quad (3.56)$$

con:

$$\alpha_{f_{cm}} = \left(\frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,5} \quad (3.57)$$

È da sottolineare che in caso di una stima, e quindi quando non è richiesto un alto livello di accuratezza, il bollettino fib contiene anche dei valori tabulati di $\varphi(t, t_0)$, all'età di 50 anni, sotto determinate condizioni di esposizione, di carico e per un calcestruzzo avente classe di resistenza compresa tra C20 e C50.

Inoltre nel testo sono contenute anche indicazioni per il calcolo del coefficiente di viscosità nei calcestruzzi alleggeriti, per calcestruzzi di classe LC12/13, LC16/18 e per il calcolo di $\varphi(t, t_0)$ per elementi sottoposti a sforzi elevati, per cui è necessario considerare la componente non lineare della viscosità.

3.3.2.4 Modello CEB '90

Il modello scelto dal CEB [33] propone una funzione di viscosità del tipo:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \quad (3.58)$$

dove si riconosce un primo termine relativo alla deformazione elastica istantanea e un secondo termine, che rappresenta la deformazione viscosa.

Il modulo elastico del calcestruzzo a 28 giorni si può valutare nel modo seguente:

$$E_{c28} = 2,15 \cdot 10^4 \left[\frac{f_{ck}+8}{10} \right]^{1/3} = 2,15 \cdot 10^4 \left[\frac{f_{cm}}{10} \right]^{1/3} \quad \text{in MPa} \quad (3.59)$$

in cui:

f_{cm} in MPa, è la resistenza caratteristica in compressione del calcestruzzo, valutata a 28 giorni su provini cilindrici ad una temperatura di circa 20°C.

f_{ck} in MPa, è la resistenza media in compressione del calcestruzzo, valutata a 28 giorni su provini cilindrici ad una temperatura di circa 20°C.

Poiché il modulo elastico varia al variare del tempo, per t diverso da 28 giorni si pone:

$$E_c(t) = \beta_E(t) \cdot E_{c28} \quad \text{in MPa} \quad (3.60)$$

con:

$$\beta_E(t) = \{ \exp[s(1 - \sqrt{28/t})] \}^{0,5} \quad \text{in MPa} \quad (3.61)$$

in cui s è un coefficiente che dipende dal tipo di cemento:

$s = 0, 20$ per cemento a presa rapida ed alta resistenza (classe 52.5)

$s = 0, 25$ per cemento normale o a presa rapida (classi 32.5R, 42.5, 42.5R)

$s = 0,38$ per cemento a lento indurimento (classe 32.5).

Il coefficiente di viscosità $\varphi(t, t_0)$ viene calcolato come prodotto di due termini: un coefficiente di viscosità teorico φ_0 e un coefficiente che descrive lo svilupparsi degli effetti viscosi nel tempo:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t - t_0) \quad (3.62)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (3.63)$$

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/100}{0,46 \sqrt[3]{h/100}} \quad (3.64)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{\sqrt{f_{cm}/10}} \quad (3.65)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + t_0^{0,2}} \quad (3.66)$$

$$\beta_c(t - t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0,3} \quad (3.67)$$

$$\beta_H = 150 \cdot \left[1 + \left(1,2 \cdot \frac{RH}{100} \right)^{18} \right] \cdot \frac{h}{100} + 250 \leq 1500 \quad (3.68)$$

dove:

$h = 2A_c/u$ è lo spessore equivalente, in [mm]

A_c è l'area della sezione in calcestruzzo, in [mm²]

u è il perimetro della sezione a contatto con l'ambiente, in [mm]

RH è l'umidità relativa dell'ambiente, in [%]

t è l'età del calcestruzzo nell'istante di misura, in [giorni]

t_0 è l'età del calcestruzzo nell'istante di messa in carico, in [giorni]

I limiti di applicabilità delle formule precedenti sono:

$$20 \text{ MPa} \leq f_{cm} \leq 88 \text{ MPa} \quad (3.69)$$

$$40 \% \leq RH \leq 100 \% \quad (3.70)$$

$$5^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C} \quad (3.71)$$

$$\sigma_c \leq 0,4 f_{ck}(t_0) \quad (3.72)$$

Gli eventuali effetti prodotti dal tipo di cemento e dai cicli termici di maturazione, per $0^\circ\text{C} \leq T \leq 80^\circ\text{C}$, precedenti l'età di carico, devono essere presi in conto per la viscosità, correggendo l'età del calcestruzzo t_0 dell'istante di messa in carico. Precisamente, l'età del calcestruzzo t_0 all'atto della messa in carico da considerare nelle espressioni precedenti, si ottiene dalla relazione:

$$t_0 = t_{0,T} \left[\frac{9}{2+t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ giorni} \quad (3.73)$$

in cui:

$\alpha = -1$ per cementi a lento indurimento (classe 32,5 N)

$\alpha = 0$ per cementi normali o a presa rapida (classe 32,5 R, 42,5, 42,5 R)

$\alpha = 1$ per cementi a presa rapida ed alta resistenza (classe 52,5 N)

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp \left[13,65 - \frac{4000}{273+T(\Delta t_i)} \right] \quad (3.46)$$

con:

Δt_i = numero di giorni in cui il calcestruzzo viene mantenuto alla temperatura $T(\Delta t_i)$

$T(\Delta t_i)$ = temperatura in °C presente nel periodo Δt_i

Essendo poi il periodo effettivo durante il quale il calcestruzzo viene mantenuto sotto carico, l'età t del calcestruzzo all'istante di misura è:

$$t = t_{0,T} + \Delta t$$

Da quanto ora detto segue che la scala dei tempi utilizzata nella valutazione del fenomeno viscoso è traslata rispetto a quella usata per valutare il ritiro.

Le espressioni sopra descritte si complicano ulteriormente se si vogliono descrivere gli effetti di una temperatura costante, diversa dalla temperatura media di 20°C, mentre il conglomerato è sotto carico.

Nel Bollettino CEB n. 215 vengono forniti i diagrammi delle funzioni $J(t, t_0) \cdot E_{c28}$ e $R(t, t_0)/E_{c28}$ in funzione dei diversi parametri.

3.3.2.5 Confronto tra modello CEB '90 e modello fib 2010

Si riportano ora i diagrammi delle funzioni di viscosità, calcolate nel caso specifico del profilo a π del capitolo 6, secondo i due modelli sopra esposti. Confrontando le curve ottenute (fig. 3.3.2.5.1) si possono effettuare le seguenti osservazioni.

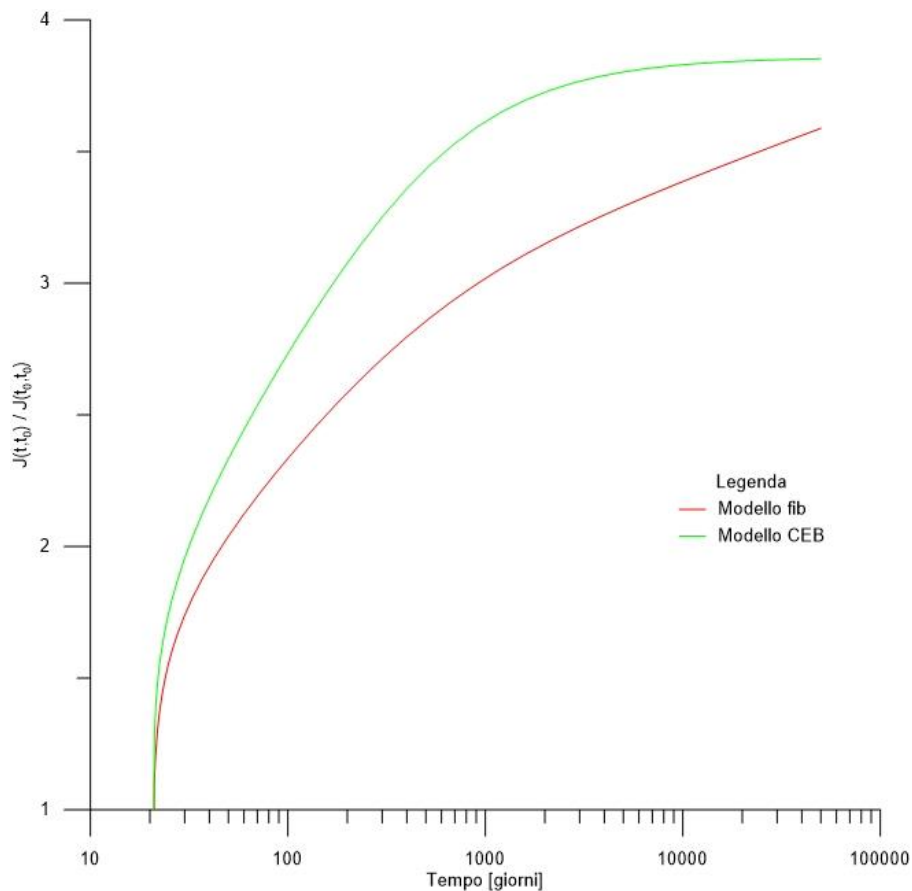


Fig.3.3.2.5. 1 – Confronto tra CEB '90 e fib 2010

Mentre la curva ottenuta secondo il modello CEB (in verde) presenta un comportamento asintotico orizzontale, ossia il fenomeno tende ad esaurirsi nel tempo, la curva ottenuta dal modello fib (in rosso) ha un andamento sempre crescente. La causa di questa importante diversità si può ricercare nelle formule utilizzate nell'implementazione del modello: infatti nel modello fib è presente una funzione logaritmica (3.49), che, come ben noto, tende all'infinito quando il suo argomento tende all'infinito; contrariamente tale funzione non è presente nel modello CEB. Premesso che la legge di viscosità utilizzata dalle norme americane ACI ha foggia analoga al modello CEB '90, nel seguito si preferisce adottare quest'ultimo, che peraltro è il modello attualmente adottato dagli Eurocodici.

3.3.3 Metodo generale

Il metodo generale si basa sulla risoluzione numerica dell'equazione integrale di Volterra. La risoluzione dell'equazione integrale deve essere affrontata per via numerica con opportune tecniche e metodologie risolutive. Si possono utilizzare due procedimenti per risolvere gli integrali di Volterra: il primo è il metodo dei trapezi, il secondo è il metodo delle quadrature di Gauss. Il metodo di Gauss presenta il vantaggio di un minore onere computazionale a parità di precisione, oppure una maggiore precisione a parità di numero di intervalli di tempo prescelti per l'integrazione.

3.3.3.1 Metodo generale: metodo dei trapezi

Il metodo si basa sull'approssimazione della curva con una spezzata poligonale. Quindi l'area sottesa dalla curva calcolata con l'integrale di Volterra viene approssimata da una sommatoria dell'area composta dai trapezi. Si definisce l'area come:

$$\int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau \quad (3.74)$$

Con $t_0 \leq \tau \leq t$ e $\sigma_c(\tau)$ incognita del problema.

Si suddivide l'intervallo $t_0 - t$ in tempi intermedi ($t_0=t_1, t_2, \dots, t_k=t$).

Indicato con $\Delta\sigma_{ci} = \sigma_c(t_i) - \sigma_c(t_{i-1})$ l'incremento della tensione che si manifesta nel generico sottointervallo $t_{i-1} - t_i$, l'incrementale di sovrapposizione può essere determinato in via approssimata calcolando la somma delle aree dei trapezi, individuati dagli estremi di ogni singolo intervallo di tempo.

La (3.74) può, quindi, scriversi come:

$$\int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau = \sum_{i=1}^k \frac{\Delta\sigma_{ci}}{2} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})] \quad (3.75)$$

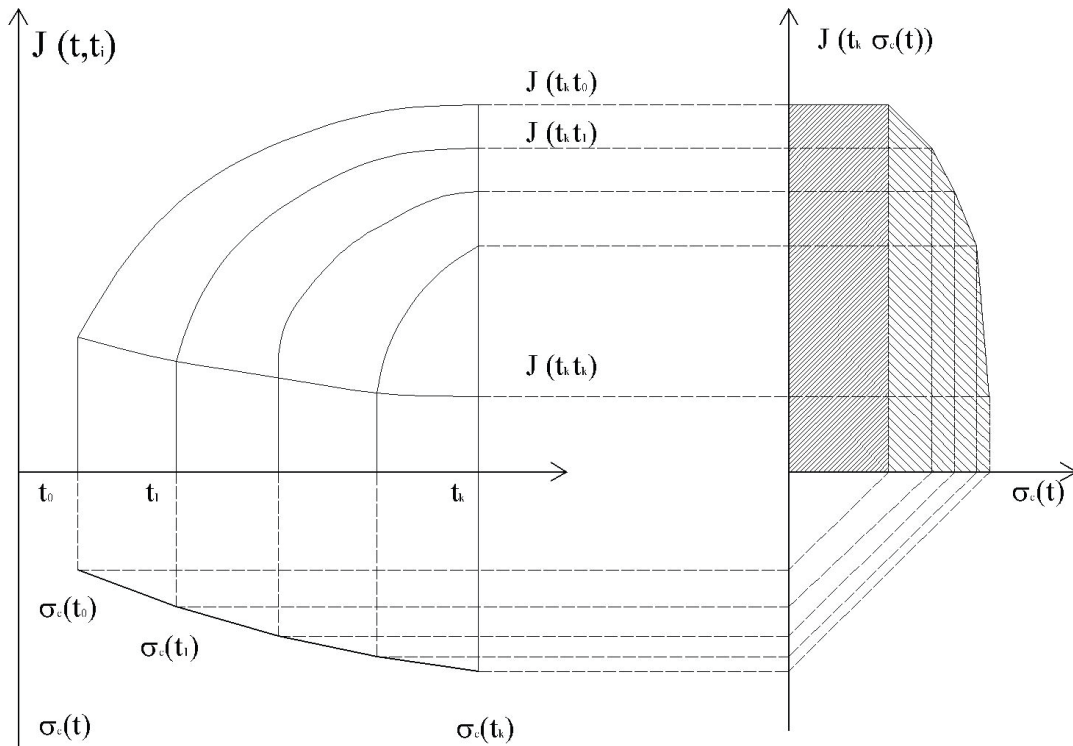


Fig.3.3.3.1. 1 – Funzione di viscosità

L'operazione di sostituzione dell'integrale con una sommatoria è rappresentato in fig. 3.3.3.1.1. A sinistra sono diagrammate le funzioni $J(t, \tau)$ al variare dell'istante $\tau = t_i$ di messa in carico. A destra è diagrammato l'andamento della tensione $\sigma_c(t)$. Riportando le $J(t_k, t_i)$ sull'asse delle ordinate e le $\sigma_c(t)$ sull'asse delle ascisse, si ha che l'integrale è rappresentato dall'area tratteggiata racchiusa dalla curva tratteggiata. Come si può osservare il calcolo dell'area può avvenire come sommatoria dell'area dei trapezi. Dato che la deformazione di tipo viscoso cresce più rapidamente nei primi momenti di messa in carico della struttura, è necessario che gli intervalli siano presi più ravvicinati negli istanti iniziali. Per tale motivo si sceglie una scala di suddivisione di tipo logaritmico.

La scala dei tempi per l'intervallo $t_0 - t$ è fornita dalla seguente relazione (come suggerito dal bollettino fib) [32]:

$$\frac{t_k - t_0}{t_{k-1} - t_0} = q \quad \text{ovvero} \quad \log(t_k - t_0) = \frac{1}{m} \log(t_{k-1} - t_0) \quad (3.76)$$

con $m = 16$ e $t_0 \leq t_k \leq t$

3.3.3.2 Metodo generale: metodo di Gauss

Tale metodo, detto delle quadrature di Gauss, si basa anch'esso, sulla risoluzione numerica dell'integrale di Volterra:

$$\int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau \quad (3.77)$$

con $t_0 \leq \tau \leq t$

Suddividendo l'intervallo d'integrazione $t_0 - t$ in sottointervalli, per la formula d'integrazione di Gauss si ottiene:

$$\int_{t_0}^t d\sigma_c(\tau) \cdot J(t, \tau) = \sum_{i=1}^k c_i \sum_{j=1}^n A_j \left. \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t_{ij}} J(t_k, t_{ij}) \quad (3.78)$$

con:

$$t_{ij} = \frac{a_j(t_i - t_{i-1}) + t_i + t_{i-1}}{2} \quad (3.79)$$

$$c_i = \frac{t_i - t_{i-1}}{2} \quad (3.80)$$

in cui si pone $t_0 = t_1$ e $t = t_k$.

Si osservi che a_j sono le ascisse del j -esimo punto di campionatura nell'intervallo $[-1,1]$, A_j i pesi di quadratura, t_{ij} i punti di campionatura e t_k l'istante di misura.

Il valore della derivata prima può essere calcolata in via approssimata nel modo seguente:

$$\frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cong \frac{\sigma_c(t_i) - \sigma_c(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \quad (3.81)$$

con $t_i < \tau < t_{i-1}$

che sostituita nella (3.78) fornisce:

$$\int_{t_0}^t d\sigma_c(\tau) \cdot J(t, \tau) = \sum_{i=1}^k c_i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\sigma_c(t_i) - \sigma_c(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} J(t_k, t_{ij}) \quad (3.82)$$

e ricordando la definizione di c_i :

$$\int_{t_0}^t d\sigma_c(\tau) \cdot J(t, \tau) = \sum_{i=1}^k \frac{\sigma_c(t_i) - \sigma_c(t_{i-1})}{2} \sum_{j=1}^n A_j \cdot J(t_k, t_{ij}) \quad (3.83)$$

Nella presente trattazione il metodo di Gauss è stato utilizzato nel calcolo dell'integrale di Volterra per giungere al valore di $\chi(t, t_0)$. È vantaggioso usare due punti di campionatura, cioè $n=2$ come descritto in [34]. Anche in questo caso la scala dei tempi per l'intervallo $t_0 - t$ è fornita dalla relazione (3.76), con $m = 8$ e $t_0 \leq t_k \leq t$. Nella presente trattazione si è scelto di utilizzare $t_0 = 0,05$ giorni. Rispetto all'integrazione con la regola dei trapezi questa tecnica migliora anche la precisione dell'integrazione numerica: infatti tramite la formula di interpolazione di Gauss si utilizzano punti di campionamento interni a ciascun intervallo temporale nei quali generalmente l'equazione (3.81) fornisce valori molto meglio approssimati rispetto a quelli nei punti di estremità dell'intervallo stesso, utilizzati nella formula dei trapezi.

3.3.3.3 Metodo generale: metodo dei nuclei risolvanti

L'analisi in fase elastoviscosa di strutture non omogenee lungo il loro asse conduce alla scrittura di un sistema di equazioni integrali di Volterra, risolvibile mediante opportune tecniche numeriche.

Il problema è riconducibile alla ricerca di particolari funzioni denominate nuclei risolvanti e determinabili attraverso la soluzione di un sistema di n^2 equazioni di Volterra, dove n rappresenta l'ordine di iperstaticità della struttura [35]. I nuclei risolvanti, opportunamente raccolti in una matrice quadrata, permettono, in virtù del principio di sovrapposizione, di ottenere la soluzione del problema per integrazione diretta, in presenza di azioni costanti o variabili nel tempo.

Si consideri una struttura monodimensionale piana, a comportamento reologico variabile con il punto e soggetta ad azioni statiche (forze) e geometriche (distorsioni) genericamente variabili nel tempo. Indicato con $\underline{X}(t)$ il vettore delle azioni iperstatiche ad n componenti, utilizzando la simbologia stabilita in [35], nella generica sezione di ascissa s , al tempo t lo stato di sollecitazione è fornito dalla relazione:

$$\underline{S}(t, s) = \underline{S}_0(t, s) + \underline{S}_1(s) \underline{X}(t) \quad (3.84)$$

In tale sezione, riferita al sistema d'assi trirettangolo x, y, z di cui i primi due assi giacenti nel piano della sezione ed il secondo di simmetria per la stessa, detto $\underline{\psi}(t, s)$ il vettore delle componenti di deformazione della sezione, in virtù della legge delle sezioni piane può scriversi:

$$\varepsilon(t, s, y(s)) = \underline{\rho}^T(s) \cdot \underline{\psi}(t, s) \quad (3.85)$$

dove:

$$\underline{\rho}^T(s) = [1 \quad y(s)]$$

Indicata con $\bar{\varepsilon}(t, s, y(s))$ la deformazione longitudinale impressa nella generica sezione, la legge costitutiva elastoviscosa lineare fornisce:

$$\sigma(t, s, y(s)) = \int_0^t d[\varepsilon(t', s, y(s)) - \bar{\varepsilon}(t', s, y(s))] \cdot R(t, t', s, y(s)) \quad (3.86)$$

essendosi indicata con $R(t, t', s, y(s))$ la funzione di rilassamento del materiale, variabile nella sezione e lungo l'asse, ed essendosi considerato l'integrale a secondo membro della (3.86) quale integrale di Stieltjes.

Dalla (3.86), tenendo conto della (3.85), si ha:

$$\sigma(t, s, y(s)) = \int_0^t d[\underline{\rho}^T(s) \cdot \underline{\psi}(t', s) - \bar{\varepsilon}(t', s, y(s))] \cdot R(t, t', s, y(s)) \quad (3.87)$$

e l'equilibrio della sezione si scrive:

$$\int_A \underline{\rho}(s) \cdot \sigma(t, s, y(s)) dA = \underline{S}(t, s) \quad (3.88)$$

ovvero:

$$\int_0^t \underline{G}(t, t', s) \cdot d\underline{\psi}(t', s) = \underline{S}_0(t, s) + \underline{S}_1(s) \cdot \underline{X}(t) + \bar{\underline{S}}(t, s) \quad (3.89)$$

ove si è posto:

$$\underline{G}(t, t', s) = \int_A \underline{\rho}(s) \cdot \underline{\rho}^T(s) \cdot R(t, t', s, y(s)) dA$$

$$\bar{\underline{S}}(t, s) = \int_A \underline{\rho}(s) \cdot d\bar{\varepsilon}(t', s, y(s)) \cdot R(t, t', s, y(s)) dA \quad (3.90)$$

Introdotta la matrice di rigidezza della sezione, valutata con riferimento al modulo elastico $E(t_0, s, y(s))$, calcolato all'istante t_0 di carico, definita dalla relazione:

$$\underline{B}(t_0, s) = \int_A \underline{\rho}(s) \cdot \underline{\rho}^T(s) \cdot E(t_0, s, y(s)) dA \quad (3.91)$$

Si può scrivere:

$$\underline{G}(t, t', s) = \underline{B}(t_0, s) \bar{\underline{G}}(t, t', s) \quad (3.92)$$

e quindi, evidenziando i vettori $\underline{\psi}_{0e}(t, s)$, $\bar{\underline{\psi}}_e(t, s)$, soluzioni elastiche del problema in corrispondenza al modulo $E(t_0, s, y(s))$, aventi espressioni:

$$\underline{\psi}_{0e}(t, s) = \underline{B}^{-1}(t_0, s) \underline{S}_0(t, s)$$

$$\bar{\underline{\psi}}_e(t, s) = \underline{B}^{-1}(t_0, s) \bar{\underline{S}}(t, s) \quad (3.93)$$

la (3.89) si scrive anche:

$$\int_0^t \underline{G}(t, t', s) d\underline{\psi}(t', s) = \underline{\psi}_{0e}(t, s) + \underline{B}^{-1}(t_0, s) \underline{S}_1(s) \underline{X}(t) + \bar{\underline{\psi}}_e(t, s) \quad (3.94)$$

L'applicazione del principio dei lavori virtuali alla struttura resa isostatica fornisce poi:

$$\int_l \underline{S}_I^T(s) \underline{\psi}(t', s) ds = \underline{\delta}_g(t) \quad (3.95)$$

avendo brevemente indicato con $\underline{\delta}_g(t)$ il vettore degli spostamenti per cui compiono lavoro le reazioni iperstatiche e quelle dei vincoli isostatici conseguenti all'applicazione dei sistemi di azioni connessi alla matrice \underline{S}_I^T .

Le (3.94) e le (3.95) conducono alla risoluzione del problema. Precisamente le (3.94) rappresentano un sistema di due equazioni integrali di Volterra nel vettore incognito $\underline{\psi}(t, s)$ a due componenti, funzioni dell'ascissa s che forniscono lo stato di deformazione longitudinale delle sezioni, mentre le (3.95) danno luogo ad un sistema algebrico di n equazioni costituenti le relazioni di congruenza connesse ai vincoli iperstatici.

Il numero totale di incognite è $(n + 2)$ e consiste nelle n componenti $X_j(t)$ del vettore delle reazioni iperstatiche, funzioni del tempo, e nelle due incognite $\psi_i(t, s)$ che definiscono lo stato di deformazione delle sezioni trasversali in accordo all'ipotesi delle sezioni piane e che risultano funzioni oltre che del tempo t , anche dell'ascissa s .

Si osservi che per le strutture isostatiche risulta $\underline{X}(t) = 0$ e per esse il problema della determinazione dello stato tensionale si riduce alla soluzione delle sole due equazioni (3.94), aventi i termini a secondo membro noti, ovvero l'analisi è limitata alle sole sezioni trasversali (analisi sezionale). In presenza di vincoli sovrabbondanti il secondo membro della (3.94) contiene il vettore incognito $\underline{X}(t)$, cosicché le equazioni (3.94) e (3.95) sono fra loro dipendenti, ovvero l'analisi sezionale, espressa dalle (3.94), interagisce con quella strutturale rappresentata dalle (3.95).

La risoluzione delle (3.94), (3.95) in forma simbolica può farsi ricorrendo al concetto di matrice dei nuclei risolvanti [35]. A tale scopo, indicata con $\underline{\overline{G}}_{\underline{R}}$ la matrice dei nuclei risolvanti associata alla $\underline{\overline{G}}$, dalle (3.94) in virtù del principio di sovrapposizione si ha:

$$\underline{\psi}(t, s) = \int_0^t \underline{\overline{G}}_{\underline{R}}(t, t', s) d\underline{\psi}_{0e}(t', s) + \int_0^t \underline{\overline{G}}_{\underline{R}}(t, t', s) \underline{B}^{-1}(t_0, s) \underline{S}_I(s) d\underline{X}(t') + \int_0^t \underline{\overline{G}}_{\underline{R}}(t, t', s) d\underline{\psi}_e(t', s) \quad (3.96)$$

Posto pertanto:

$$\begin{aligned} \int_l \underline{S}_I^T(s) \underline{\overline{G}}_{\underline{R}}(t, t', s) \underline{B}^{-1}(t_0, s) \underline{S}_I(s) ds &= \underline{H}(t, t') \\ \int_0^t \int_l \underline{S}_I^T(s) \underline{\overline{G}}_{\underline{R}}(t, t', s) d\underline{\psi}_{0e}(t', s) ds &= \underline{\delta}_0(t) \\ \int_0^t \int_l \underline{S}_I^T(s) \underline{\overline{G}}_{\underline{R}}(t, t', s) d\underline{\psi}_e(t', s) ds &= \underline{\delta}'_g(t) \end{aligned} \quad (3.97)$$

dalla (3.96), inserita nella (3.95), si ottiene il sistema risolvete nel vettore incognito $\underline{X}(t)$:

$$\int_0^t \underline{H}(t, t') d\underline{X}(t') = \underline{\delta}_g(t) - \underline{\delta}_0(t) - \underline{\delta}'_g(t) \quad (3.98)$$

Introdotta infine la matrice dei nuclei risolvete $\underline{H}_R(t, t')$ associata alla $\underline{H}(t, t')$, la soluzione del problema assume la forma compatta:

$$\underline{X}(t) = \int_0^t \underline{H}_R(t, t') d[\underline{\delta}_g(t') - \underline{\delta}_0(t') - \underline{\delta}'_g(t')] \quad (3.99)$$

Le (3.96), (3.97) e (3.99) costituiscono le relazioni fondamentali per la risoluzione del problema, alla quale si perviene per integrazione diretta quando siano conosciute le matrici dei nuclei risolvete $\underline{\overline{G}}_R(t, t', s)$ e $\underline{H}_R(t, t')$ fra loro dipendenti in virtù della prima delle (3.97).

La determinazione delle matrici dei nuclei risolvete, in accordo alla loro definizione riportata in [35], discende dalla risoluzione di due sistemi matriciali di equazioni integrali di Volterra:

$$\int_0^t \underline{\overline{G}}_R(t, \tilde{t}, s) \frac{\partial \underline{\overline{G}}_R(\tilde{t}, t', s)}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t} = \underline{I}$$

$$\int_0^t \underline{H}_R(t, \tilde{t}) \frac{\partial \underline{H}_R(\tilde{t}, t')}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t} = \underline{I} \quad (3.100)$$

di cui il primo contenente quattro incognite ed il secondo n^2 incognite, stante il rango delle matrici $\underline{\overline{G}}_R$ e \underline{H}_R ed essendo \underline{I} la matrice unità.

La risoluzione delle (3.100) deve necessariamente farsi per via numerica e richiede la preventiva discretizzazione della struttura anche nello spazio, per poter addivenire al calcolo dell'integrale a primo membro della prima delle (3.97), che definisce la matrice $\underline{H}(t, t')$. Per tale operazione, le tecniche standard per la risoluzione delle equazioni integrali di Volterra [32], [36], [37], appaiono ben adatte e forniscono risultati di grande affidabilità.

La soluzione del sistema (3.100) può effettuarsi utilizzando tecniche numeriche standard per discretizzare gli integrali a primo membro oppure formulazioni algebriche approssimate delle leggi costitutive dei materiali. Tuttavia la discretizzazione, pur fornendo soluzioni numericamente esatte e tanto più precise quanto più è fitta la discretizzazione dell'intervallo di tempo in cui si evolve la soluzione, dà luogo a calcolazioni laboriose con sensibili oneri computazionali.

Quale caso particolare è di grande interesse lo studio delle strutture formate da una parte elastoviscosa omogenea e da una parte elastica. Questo problema, affrontabile mediante il

“metodo delle funzioni di rilassamento ridotte”, se risolto facendo uso del concetto di Matrice dei nuclei risolvanti, permette di individuare l'identità esistente fra tali nuclei e le funzioni di rilassamento ridotte. Da tale identità appare evidente come il metodo facente capo a tali funzioni possa riguardarsi quale caso particolare del più generale metodo che utilizza il concetto di matrice dei nuclei risolvanti. Quest'ultimo metodo si presenta pertanto come il più completo ed efficiente per lo studio delle strutture non omogenee lungo l'asse e le soluzioni che ne conseguono sono di grande precisione, ma richiedono oneri computazionale alquanto elevati. Il metodo ha pertanto un grande significato teorico, mentre dal punto di vista pratico è più conveniente fare uso di metodologie meno raffinate ma di più facile impiego.

3.3.3.4 Metodo generale: metodo delle funzioni di rilassamento ridotte

Il metodo consiste nel disaccoppiare il sistema risolvante di equazioni di Volterra mediante un'opportuna trasformazione lineare operata sulle incognite iperstatiche e nella successiva risoluzione facendo appunto ricorso alle funzioni di rilassamento ridotte, conseguenti a funzioni di viscosità variate che tengono conto sinteticamente dell'accoppiamento fra la struttura elastoviscosa e le sue parti elastiche.

Si consideri una sezione eterogenea, riferita alla terna destrorsa x, y, z di cui i primi due assi, contenuti nel piano della sezione, abbiano origine arbitraria in un punto all'interno di essa ed il terzo sia ortogonale al piano della sezione. Indicati rispettivamente con:

ε_z : la componente di deformazione della sezione riferita all'asse longitudinale passante per l'origine degli assi;

χ_x : la curvatura della sezione nel piano xz ;

χ_y : la curvatura della sezione nel piano yz ;

assunte positive se danno luogo ad allungamenti in corrispondenza a valori positivi di x e y (vedi fig. 3.3.3.4.1), per le deformazioni congruenti della sezione, in virtù della legge delle sezioni piane, si può scrivere:

$$\varepsilon(t) = \underline{\rho}^T \cdot \underline{\psi}(t) \quad (3.101)$$

essendo $\underline{\psi}$ il vettore colonna contenente le deformazioni sopra citate, ed avendo posto:

$$\underline{\rho}^T = [1 \quad x \quad y] \quad (3.102)$$

Per le leggi costitutive dei materiali risulta poi:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t d\sigma_c(\tau) \cdot J(t, \tau) + \varepsilon_{sh}(t) \quad (3.37)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_s} \quad (3.103)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_p(t) - \varepsilon_p^0 = \frac{\sigma_p(t)}{E_p} - \varepsilon_p^0 \quad (3.104)$$

dove si sono indicate rispettivamente con ε_{sh} e ε_p^0 la deformazione per ritiro del calcestruzzo e la deformazione elastica impressa alle armature da precompressione (positiva se di trazione).

L'equilibrio della sezione permette di scrivere:

$$\int_{A_c} \sigma_c \cdot \underline{\rho} \cdot dA_c + \sum_{\alpha} \sigma_{s_{\alpha}} \cdot \underline{\rho} \cdot A_{s_{\alpha}} + \sum_j \sigma_{p_j} \cdot \underline{\rho} \cdot A_{p_j} = \underline{M} \quad (3.105)$$

oppure in forma incrementale:

$$\int_{A_c} d\sigma_c \cdot \underline{\rho} \cdot dA_c + \sum_{\alpha} d\sigma_{s_{\alpha}} \cdot \underline{\rho} \cdot A_{s_{\alpha}} + \sum_j d\sigma_{p_j} \cdot \underline{\rho} \cdot A_{p_j} = 0 \quad (3.106)$$

essendo:

$$\underline{M}^T = [N \quad M_x \quad M_y] \quad (3.107)$$

il vettore comprendente le caratteristiche di sollecitazione esterne costanti nel tempo, di cui la forza assiale N è assunta positiva se di trazione, ed i momenti sono assunti positivi se generano tensioni di trazione per x, y positivi.

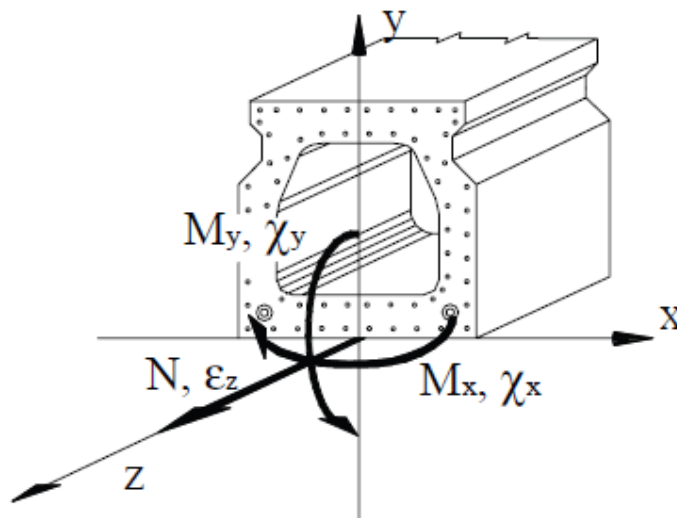


Fig.3.3.3.4. 1 – Convenzione di segno delle azioni esterne

La relazione di compatibilità (3.101), unita a quella di equilibrio (3.105) ed alle leggi costitutive (3.37), (3.103), (3.104), permette la risoluzione del problema secondo le modalità di seguito indicate.

A tale scopo, premoltiplicata la (3.37) per $\underline{\rho}$, integrando sull'area A_c , ricordando che all'istante t_0 il calcestruzzo ha comportamento elastico e che all'istante generico t vale la relazione incrementale (3.106), dopo semplici passaggi si ottiene:

$$\frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \underline{B}_c(t_0) \cdot \underline{\psi}(t) + \int_{t_0}^t \underline{B}_s \cdot d\underline{\psi}(\tau) \cdot J(t, \tau) - \underline{B}_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \cdot \underline{\psi}(t_0) = \frac{M_{sh}(t)}{E_c(t_0)} \quad (3.108)$$

essendo rispettivamente:

$\underline{B}_c(t_0)$: la matrice di rigidezza della parte visco-elastica omogenea;

\underline{B}_s la matrice di rigidezza della parte elastica;

$\underline{M}_{sh}(t)$: il vettore delle componenti di azione interna staticamente equivalenti al ritiro; calcolati elasticamente con riferimento al modulo $E_c(t_0)$ ed aventi rispettivamente espressione:

$$\underline{B}_c(t_0) = E_c(t_0) \cdot \int_{A_c} \underline{\rho} \cdot \underline{\rho}^T \cdot dA_c \quad (3.109)$$

$$\underline{B}_s = E_s \cdot \sum_{\alpha} \underline{\rho}_{\alpha} \cdot \underline{\rho}_{\alpha}^T \cdot A_{s\alpha} + E_p \sum_j \underline{\rho}_j \cdot \underline{\rho}_j^T \cdot A_{pj} \quad (3.110)$$

$$\underline{M}_{sh}(t) = E_c(t_0) \cdot \int_{A_c} \underline{\rho} \cdot \varepsilon_{sh}(t) \cdot dA_c \quad (3.111)$$

Eliminando nella (3.108) il vettore incognito al tempo t si può scrivere:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \underline{B}_c(t_0) + \underline{B}_s \cdot J(t, t_0) \right] \cdot \underline{\psi}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \underline{B}_c(t_0) + \underline{B}_s \cdot J(t, \tau) \right] \cdot d\underline{\psi}(\tau) = \\ & = \left[\underline{B}_c(t_0) + \underline{B}_s \right] \cdot J(t, t_0) \cdot \underline{\psi}(t_0) + \frac{M_{sh}(t)}{E_c(t_0)} \end{aligned} \quad (3.112)$$

ed introdotta la matrice di interazione $\underline{D}^*(t_0)$ data dalla relazione:

$$\underline{D}^*(t_0) = \left[\underline{B}_c(t_0) + \underline{B}_s \right]^{-1} \cdot \underline{B}_c(t_0) \quad (3.113)$$

si ottiene l'equazione fondamentale:

$$\begin{aligned} & \left[\underline{D}^*(t_0) + \left(1 - \underline{D}^*(t_0)\right) E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \right] \cdot \underline{\psi}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[\underline{D}^*(t_0) + \left(1 - \underline{D}^*(t_0)\right) E_c(t_0) \cdot J(t, \tau) \right] \cdot d\underline{\psi}(\tau) \\ & = E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \cdot \underline{\psi}(t_0) + \underline{\psi}_{sh}^{(e)}(t) \end{aligned} \quad (3.114)$$

avendo posto:

$$\underline{\psi}_{sh}^{(e)}(t) = \left[\underline{B}_c(t_0) + \underline{B}_s \right]^{-1} \cdot \underline{M}_{sh}(t) \quad (3.115)$$

La risoluzione della (3.115), effettuata la trasformazione lineare:

$$\underline{\psi}(t) = \underline{K}^*(t_0) \cdot \phi(t) \quad (3.116)$$

dove $\underline{K}^*(t_0)$ è la matrice modale di $\underline{D}^*(t_0)$, conduce alle tre equazioni indipendenti:

$$\begin{aligned} & [\omega_i^*(t_0) + (1 - \omega_i^*(t_0))E_c(t_0) \cdot J(t, t_0)] \cdot \phi_i(t_0) + \int_{t_0}^t [\omega_i^*(t_0) + (1 - \omega_i^*(t_0))E_c(t_0) \cdot J(t, \tau)] \cdot d\phi_i(\tau) \\ & = E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \cdot \phi_i(t_0) + \phi_{sh_i}^{(e)}(t) \quad \text{per } i=1,2,3 \end{aligned} \quad (3.117)$$

dove gli $\omega_i^*(t_0)$ sono gli autovalori della matrice $\underline{D}^*(t_0)$, costituente la matrice diagonale avente espressione:

$$\underline{\Omega}^*(t_0) = \left(\underline{K}^*(t_0) \right)^{-1} \cdot \underline{D}^*(t_0) \cdot \underline{K}^*(t_0) \quad (3.118)$$

Introdotte le funzioni di viscosità variate mediante la relazione:

$$E_c(t_0) \cdot J_i^*(t, \tau) = (1 - \omega_i^*(t_0)) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, \tau) + \omega_i^*(t_0) \quad (3.119)$$

e le corrispondenti funzioni di rilassamento ridotte, soluzioni delle equazioni integrali:

$$R_i^*(t, t') \cdot J_i^*(t, t') + \int_{t'}^t \frac{\partial R_i^*(\tau, t')}{\partial \tau} \cdot J_i^*(t, \tau) \cdot d\tau = 1 \quad (3.120)$$

la soluzione della (3.117) si scrive immediatamente:

$$\phi_i(t) = \frac{1}{1 - \omega_i^*(t_0)} \cdot \left[1 - \omega_i^*(t_0) \cdot \frac{R_i^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \phi_i(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{R_i^*(t, \tau)}{E_c(t_0)} \cdot d\phi_{sh_i}^{(e)}(\tau) \quad (3.121)$$

e quindi, introdotta la matrice diagonale $\underline{R}^*(t, t_0)$ delle funzioni di rilassamento ridotte e ricordando le (3.108) e (3.121), per il vettore incognito $\psi(t)$ si ha l'espressione finale:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(t) = & \underline{K}^*(t_0) \cdot \left[\underline{I} - \underline{\Omega}^*(t_0) \right]^{-1} \cdot \left[\underline{I} - \underline{\Omega}^*(t_0) \cdot \frac{\underline{R}^*(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \left[\underline{K}^*(t_0) \right]^{-1} \cdot \psi(t_0) + \\ & + \underline{K}^*(t_0) \cdot \int_{t_0}^t \frac{R^*(t, \tau)}{E_c(t_0)} \cdot \left[\underline{K}^*(t_0) \right]^{-1} \cdot d\phi_{sh}^{(e)}(\tau) \end{aligned} \quad (3.122)$$

Per $\underline{\psi}(t_0)$ vale la relazione elastica:

$$\underline{\psi}(t_0) = \left[\underline{B}_c(t_0) + \underline{B}_s \right]^{-1} \cdot (\underline{M} - \underline{M}_p) \quad (3.123)$$

essendo \underline{M}_p il vettore di sollecitazione equivalente alla precompressione, dato dalla relazione:

$$\underline{M}_p = \sum_j \underline{\rho} \cdot E_p \cdot \varepsilon_{p_j}^0 \cdot A_{p_j} \quad (3.124)$$

Si osservi che alla (3.122) può darsi una forma più semplice se si ammette che la deformazione da ritiro vari in modo affine a quella viscosa poiché in tal caso risulta immediatamente valutabile l'integrale che compare a secondo membro (le espressioni che seguono sono dedotte a partire dall'ipotesi che il ritiro abbia inizio all'istante t_0 e pertanto il suo valore in tale istante è nullo. Infatti se si ammette che risulti:

$$\varepsilon_{sh}(t) = \frac{\varepsilon_{sh}(\infty)}{\phi(\infty, t_0)} \cdot \phi(t, t_0) \quad (3.125)$$

essendo $\varepsilon_{sh}(\infty)$ e $\phi(\infty, t_0)$ i coefficienti finali di ritiro e viscosità valutati a partire da t_0 .

Effettuata la posizione:

$$\varepsilon_{sh}^*(t) = \frac{\varepsilon_{sh}(\infty)}{\phi(\infty, t_0)} \quad (3.126)$$

si ottiene:

$$\underline{M}_{sh} = E_c(t_0) \cdot \varepsilon_{sh}^*(t) \cdot [E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - 1] \cdot \int_{A_c} \underline{\rho} \cdot dA_c \quad (3.127)$$

$$\underline{\psi}_{sh}^{(e)}(t) = \underline{\psi}_{sh}^* \cdot [E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - 1] \quad (3.128)$$

$$\underline{\psi}_{sh}^* = \left[\underline{B}_c(t_0) + \underline{B}_s \right]^{-1} \cdot E_c(t_0) \cdot \varepsilon_{sh}^* \cdot \int_{A_c} \underline{\rho} \cdot dA_c \quad (3.129)$$

$$\phi_{sh_i}^{(e)}(t) = \phi_{sh_i}^*(t_0) \cdot \frac{E_c(t_0) \cdot J_i^*(t, t_0) - 1}{1 - \omega_i^*(t_0)} \quad (3.130)$$

$$\phi_{sh}^* = \left[\underline{K}^*(t_0) \right]^{-1} \cdot \underline{\psi}_{sh}^* \quad (3.131)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{R_i^*(t, t')}{E_c(t_0)} \cdot d\phi_{sh_i}^{(e)}(t') = \frac{1}{1 - \omega_i^*(t_0)} \cdot \phi_{sh_i}^*(t_0) \cdot \left[1 - \frac{R_i^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (3.132)$$

e la (3.122) assume la forma semplificata:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(t) = & \underline{K}^*(t_0) \cdot \left[\underline{I} - \underline{\Omega}^*(t_0) \right]^{-1} \cdot \left[\underline{I} - \underline{\Omega}^*(t_0) \cdot \frac{\underline{R}^*(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \left[\underline{K}^*(t_0) \right]^{-1} \cdot \underline{\psi}(t_0) + \\ & + \underline{K}^*(t_0) \cdot \left[\underline{I} - \underline{\Omega}^*(t_0) \right]^{-1} \cdot \left[\underline{I} - \frac{\underline{R}^*(t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \left[\underline{K}^*(t_0) \right]^{-1} \cdot \underline{\psi}_{sh}^* \end{aligned} \quad (3.133)$$

La (3.122) oppure la (3.133) forniscono lo stato di deformazione della sezione e, per le (3.133), (3.119) e (3.120) anche lo stato di tensione nelle armature. Per quanto riguarda la tensione nella parte visco-elastica omogenea si osserva che, dette $\Delta\sigma_s$ e $\Delta\sigma_p$ le variazioni di tensione nell'acciaio lento ed in quello preteso, la variazione dello stato di sollecitazione nella sezione ad esse connessa vale:

$$\underline{\Delta M}_s(t) = \underline{B}_s \cdot \underline{\Delta \psi}(t) \quad (3.134)$$

Inoltre, per l'equilibrio, in presenza di sollecitazioni esterne costanti, dette $\underline{\Delta M}_c(t)$ le variazioni di sollecitazione nella sezione prodotte dalla variazione di tensioni nel calcestruzzo, risulta:

$$\underline{\Delta M}_c(t) + \underline{\Delta M}_s(t) = 0 \quad (3.135)$$

Pertanto il vettore $\underline{\Delta M}_c(t)$ rappresenta la variazione nel tempo dello stato di sollecitazione nella parte visco-elastica omogenea generato dall'applicazione del vettore di sollecitazione $\underline{\Delta M}_s(t)$ cambiato di segno.

In virtù della omogeneità della parte visco-elastica, detta $\Delta\sigma_c$ la variazione tensionale che in essa si manifesta, in accordo al primo teorema della viscosità lineare, si può scrivere:

$$\Delta\sigma_c = \underline{\rho}^T \cdot \underline{\Delta \psi}^0 \cdot E_c(t_0) \quad (3.136)$$

essendo $\underline{\Delta \psi}^0$ il vettore di deformazione elastica della parte omogenea, soggetta alla sollecitazione $\underline{\Delta M}_c(t)$.

Per l'equilibrio si ha infine:

$$\underline{B}_c(t_0) \cdot \underline{\Delta \psi}^0 = -\underline{\Delta M}_s(t) \quad (3.137)$$

e quindi dalle (3.135) e (3.136):

$$\Delta\sigma_c = -\underline{\rho}^T \cdot \left[\left(\underline{B}_c(t_0) \right)^{-1} \cdot \underline{B}_s \cdot \underline{\Delta \psi}(t) \right] \cdot E_c(t_0) \quad (3.138)$$

ed il problema è completamente risolto.

Nel caso particolare in cui la sezione omogeneizzata con modulo $E_c(t_0)$ posseda un asse di simmetria ed il piano di sollecitazione sia coincidente con quello di simmetria, il piano di deformazione risulta ortogonale a quello di sollecitazione e per la sua determinazione sono

sufficienti due soli parametri, cosicché il problema contiene solo due incognite ed è possibile determinare l'espressione analitica degli autovalori che risultano radici di un'equazione di secondo grado. Infatti, assunto come origine degli assi il baricentro della sezione omogeneizzata con modulo $E_c(t_0)$, per le matrici di rigidezza $\underline{\underline{B}}_c(t_0)$, $\underline{\underline{B}}_s$, e per la loro somma si ottiene:

$$\underline{\underline{B}}_c(t_0) = E_c(t_0) \cdot \begin{bmatrix} A_c & S_c \\ S_c & I_c \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

$$\underline{\underline{B}}_s = E_s \cdot \begin{bmatrix} A_s & S_s \\ S_s & I_s \end{bmatrix} + E_p \cdot \begin{bmatrix} A_p & S_p \\ S_p & I_p \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

$$\left[\underline{\underline{B}}_c(t_0) + \underline{\underline{B}}_s \right] = E_c(t_0) \cdot \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ 0 & I^* \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

essendo:

A_c , S_c , I_c , A_s , S_s , I_s , A_p , S_p , I_p rispettivamente area, momento statico e momento d'inerzia, rispetto all'asse baricentrico della sezione omogeneizzata a calcestruzzo ortogonale a quello di simmetria, del calcestruzzo, delle armature ordinarie e di quelle ad alta resistenza;

A^* , I^* area e momento d'inerzia rispetto allo stesso asse della sezione omogeneizzata al calcestruzzo.

Dalle precedenti si ha:

$$\left[\underline{\underline{B}}_c(t_0) + \underline{\underline{B}}_s \right]^{-1} = \frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \begin{bmatrix} 1/A^* & 0 \\ 0 & 1/I^* \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

$$\underline{\underline{D}}^*(t_0) = \left[\underline{\underline{B}}_c(t_0) + \underline{\underline{B}}_s \right]^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_c(t_0) = \begin{bmatrix} A_c/A^* & S_c/A^* \\ S_c/A^* & I_c/I^* \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

e per la determinazione degli autovalori $\omega_i^*(t_0)$ risulta l'equazione:

$$\det \left[\omega_i^*(t_0) \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}}^*(t_0) \right] = 0 \quad (3.144)$$

ovvero:

$$\omega_i^{*2}(t_0) - \left[\frac{A_c}{A^*} + \frac{I_c}{I^*} \right] \cdot \omega_i^*(t_0) - \frac{S_c^2}{A^* \cdot I^*} + \frac{A_c \cdot I_c}{A^* \cdot I^*} = 0 \quad (3.145)$$

da cui:

$$\omega_i^*(t_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{A_c}{A^*} + \frac{I_c}{I^*} \pm \sqrt{\left(\frac{A_c}{A^*} - \frac{I_c}{I^*} \right)^2 + \frac{4S_c^2}{A^* \cdot I^*}} \right] \quad (3.146)$$

Per i due autovettori $\underline{\underline{K}}_i^*(t_0)$ si hanno quindi i sistemi:

$$\left[\omega_1^*(t_0) \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}}^*(t_0) \right] \cdot \underline{\underline{K}}_1^*(t_0) = 0$$

$$\left[\omega_2^*(t_0) \cdot \underline{I} - \underline{D}^*(t_0) \right] \cdot \underline{K}_2^*(t_0) = 0 \quad (3.147)$$

dai quali risulta la matrice modale:

$$\underline{K}^*(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & \left(\omega_2^*(t_0) - \frac{I_c}{I^*} \right) \cdot \frac{I^*}{S_c} \\ \left(\omega_1^*(t_0) - \frac{A_c}{A^*} \right) \cdot \frac{A^*}{S_c} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

Indicate pertanto con:

$$\begin{aligned} d_1(t_0) &= \left(\omega_2^*(t_0) - \frac{I_c}{I^*} \right) \cdot \frac{I^*}{S_c} \\ d_2(t_0) &= \frac{1}{\omega_1^*(t_0) - \frac{A_c}{A^*}} \cdot \frac{S_c}{A^*} \end{aligned} \quad (3.149)$$

le due lunghezze caratteristiche della sezione, per la matrice modale e la sua inversa risultano le semplici equazioni:

$$\underline{K}^*(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & d_1(t_0) \\ 1/d_2(t_0) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

$$\left(\underline{K}^*(t_0) \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -d_1(t_0) \\ -1/d_2(t_0) & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{d_2(t_0)}{d_2(t_0) - d_1(t_0)} \quad (3.151)$$

per mezzo delle quali la valutazione delle soluzioni generali appare particolarmente agevole.

Anche nel presente caso è facile mostrare che gli autovalori $\omega_i^*(t_0)$ soddisfano alla limitazione:

$$0 \leq \omega_i^*(t_0) \leq 1 \quad \text{con } i=1, 2, 3 \quad (3.152)$$

In particolare per $\omega_i^*(t_0) = 0$, risulta $\underline{D}^*(t_0) = 0$, ovvero $\underline{B}_s = \infty$, il che significa che le armature costituiscono un vincolo rigido per la sezione che non può pertanto subire alcuna deformazione. Infatti dalle (3.147) e (3.139) risulta $\underline{\psi}_{sh}^{(e)}(t) = 0$, $\underline{\psi}(t_0)$ e quindi dalla (3.138) anche $\underline{\psi}(t) = 0$.

Viceversa per $\omega_i^*(t_0) = 1$, si ha $\underline{D}^*(t_0) = \underline{I}$ e quindi $\underline{B}_s = \underline{0}$, e la sezione si comporta come omogenea poiché le armature presenti non costituiscono un vincolo alla libera deformazione del calcestruzzo.

Dalla (3.151) si ricava:

$$J_i^*(t, t_0) = \frac{1}{R_i^*(t, t_0)} = \frac{1}{E_c(t_0)} \quad (3.153)$$

e l'espressione (3.138) assume una forma indeterminata.

Passando al limite per $\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1$, ricordando la (3.153), si ha:

$$\lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \phi_i(t) = \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \left[\frac{\omega_i^*(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot \frac{\partial R_i^*(t, t_0)}{\partial \omega_i^*(t_0)} + \frac{R_i^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \phi_i(t_0) + \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \phi_{sh_i}^{(e)}(t) \quad (3.154)$$

ovvero:

$$\lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \phi_i(t) = \left[1 + \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \frac{\omega_i^*(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot \frac{\partial R_i^*(t, t_0)}{\partial \omega_i^*(t_0)} \right] \cdot \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \phi_i(t_0) + \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \phi_{sh_i}^{(e)}(t) \quad (3.155)$$

Derivando la (3.152) rispetto a $\omega_i^*(t_0)$ e cercandone il limite per $\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1$ si ottiene poi:

$$\begin{aligned} E_c(t_0) \cdot \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \frac{\partial J_i^*(t, t_0)}{\partial \omega_i^*(t_0)} + \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \int_{t_0}^t \frac{\partial R_i^*(t', t_0)}{\partial t'} \cdot \frac{\partial J_i^*(t', t_0)}{\partial \omega_i^*(t_0)} dt' + \\ + \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \omega_i^*(t_0)} \cdot \frac{\partial R_i^*(t', t_0)}{\partial t'} \partial J_i^*(t', t_0) dt' = 0 \end{aligned} \quad (3.156)$$

da cui, per la (3.152):

$$\lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial \omega_i^*(t_0)} \cdot R_i^*(t, t_0) = E_c(t_0) \cdot [E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) - 1] \quad (3.157)$$

Introducendo la (3.157) nella (3.155) si ha infine:

$$\lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \phi_i(t) = \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \phi_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \lim_{\omega_i^*(t_0) \rightarrow 1} \phi_{sh_i}^{(e)}(t) \quad (3.158)$$

Ricordando la trasformazione lineare (3.116), la (3.147) e la (3.154), tenendo presente che per la assenza di armature risulta $\underline{M}_p = 0$, la (3.154) assume l'espressione:

$$\underline{\psi}(t) = \left(\underline{B}_c(t_0) \right)^{-1} \cdot \underline{M} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \left(\underline{B}_c(t_0) \right)^{-1} \cdot \underline{M}_{sh}(t) \quad (3.159)$$

nella quale si legge il primo teorema della viscosità lineare in termini di spostamenti.

Per quanto riguarda lo stato tensionale si osservi che se le deformazioni di ritiro sono congruenti con l'ipotesi delle sezioni piane, ovvero si abbia:

$$\varepsilon_{sh}(t) = \underline{\rho}^T \cdot \underline{\lambda}_{sh}(t) \quad (3.160)$$

in virtù delle (3.157), (3.159), si ottiene:

$$\left(\underline{\underline{B_c}}(t_0)\right)^{-1} \cdot \underline{M}_{sh}(t) = \underline{\lambda}_{sh}(t) \quad (3.161)$$

e quindi la (3.37), per le (3.159) e (3.160), fornisce la relazione:

$$\begin{aligned} \underline{\rho}^T \cdot \underline{\psi}(t) &= \underline{\rho}^T \cdot \left(\underline{\underline{B_c}}(t_0)\right)^{-1} \cdot \underline{M} \cdot E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \underline{\rho}^T \cdot \underline{\lambda}_{sh}(t) = \\ &= \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t d\sigma_c(t') \cdot J(t, t') + \varepsilon_{sh}(t) \end{aligned} \quad (3.162)$$

la cui soluzione immediata si scrive:

$$\sigma_c(t) = \sigma_c(t_0) = \underline{\rho}^T \cdot \left(\underline{\underline{B_c}}(t_0)\right)^{-1} \cdot \underline{M} \cdot E_c(t_0) \quad (3.163)$$

ritrovando così il primo teorema della viscosità lineare in termini di tensioni.

Per dimostrare la (3.152), applichiamo alla sezione uno stato di deformazione definito dalla relazione:

$$\underline{\psi}(t) = \underline{K}_i^*(t_0) \quad (3.164)$$

L'energia elastica assorbita dal calcestruzzo, dall'acciaio e dall'intera sezione hanno espressione:

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2} \left(\underline{K}_i^*(t_0)\right)^T \cdot \underline{\underline{B_c}}(t_0) \cdot \underline{K}_i^*(t_0) \\ U_s &= \frac{1}{2} \left(\underline{K}_i^*(t_0)\right)^T \cdot \underline{\underline{B_s}} \cdot \underline{K}_i^*(t_0) \\ U &= \frac{1}{2} \left(\underline{K}_i^*(t_0)\right)^T \cdot \left[\underline{\underline{B_c}}(t_0) + \underline{\underline{B_s}}\right] \cdot \underline{K}_i^*(t_0) \end{aligned} \quad (3.165)$$

ma poiché, in virtù delle proprietà degli autovalori, risulta:

$$\omega_i^*(t_0) \cdot \underline{K}_i^*(t_0) = \underline{\underline{D}}^*(t_0) \cdot \underline{K}_i^*(t_0) \quad (3.166)$$

e ricordando la (3.161), la prima delle (3.165) si scrive:

$$U_c = \frac{1}{2} \left(\underline{K}_i^*(t_0)\right)^T \cdot \left[\underline{\underline{B_c}}(t_0) + \underline{\underline{B_s}}\right] \cdot \underline{\underline{D}}^*(t_0) \cdot \underline{K}_i^*(t_0) \quad (3.167)$$

ovvero, per la (3.166):

$$U_c = \frac{1}{2}(\underline{K}_i^*(t_0))^T \cdot \left[\underline{B}_c(t_0) + \underline{B}_s \right] \cdot \underline{K}_i^*(t_0) \cdot \omega_i^*(t_0) \quad (3.168)$$

Confrontando la (3.168) con l'ultima delle (3.165) si ricava:

$$\omega_i^*(t_0) = \frac{U_c}{U} \quad (3.169)$$

e quindi risulta dimostrata la limitazione (3.168) per gli autovalori $\omega_i^*(t_0)$.

Agli stessi risultati si perviene in modo più diretto, adottando l'algoritmo delle funzioni di viscosità ridotte, esprimendo la legge costitutiva del calcestruzzo fornita dalla (3.37) nella forma:

$$\sigma_c(t) = \varepsilon_c(t_0) \cdot R(t, t_0) + \int_{t_0}^t d[\varepsilon_c(t') - \varepsilon_{sh}(t')] \cdot R(t, t') \quad (3.170)$$

ovvero, per la (3.165):

$$\sigma_c(t) = \underline{\rho}^T \cdot \underline{\psi}(t_0) \cdot R(t, t_0) + \int_{t_0}^t [\underline{\rho}^T \cdot d\underline{\psi}(t') - d\varepsilon_{sh}(t')] \cdot R(t, t') \quad (3.171)$$

Dalle (3.169) e (3.110) discende immediatamente:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \underline{B}_c(t_0) \cdot R(t, t_0) + \underline{B}_s \right] \cdot \underline{\psi}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \underline{B}_c(t_0) \cdot R(t, t') + \underline{B}_s \right] \cdot d\underline{\psi}(t') = \\ & = \underline{M} + \int_{t_0}^t d\underline{M}_{sh}(t') \cdot \frac{R(t, t')}{E_c(t_0)} \end{aligned} \quad (3.172)$$

e quindi, ricordando la (3.163), introdotta la matrice di interazione $\underline{D}^*(t_0)$ fornita dalla (3.161), tenendo presente che all'istante t_0 , in fase elastica, risulta:

$$\underline{\psi}(t_0) = \left[\underline{B}_c(t_0) + \underline{B}_s \right]^{-1} \cdot \underline{M} \quad (3.173)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \underline{D}^*(t_0) \cdot R(t, t_0) + \underline{I} - \underline{D}^*(t_0) \right] \cdot \underline{\psi}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \underline{D}^*(t_0) \cdot R(t, t') + \underline{I} - \underline{D}^*(t_0) \right] \cdot d\underline{\psi}(t') = \\ & = \underline{\psi}(t_0) + \int_{t_0}^t d\underline{\psi}_{sh}^{(e)}(t') \cdot \frac{R(t, t')}{E_c(t_0)} \end{aligned} \quad (3.174)$$

Applicando la trasformazione (3.116), ricordando che le funzioni di rilassamento variate hanno espressione:

$$\frac{\bar{R}_i(t,t')}{E_c(t_0)} = \omega_i^*(t_0) \cdot \frac{R(t,t')}{E_c(t_0)} + 1 - \omega_i^*(t_0) \quad (3.175)$$

e posto:

$$\int_{t_0}^t d\underline{\psi}_{sh}^{(e)}(t') \cdot R(t,t') = \underline{\tilde{\psi}}_{sh}(t) \cdot E_c(t_0) \quad (3.176)$$

dalla (3.174) discende:

$$\frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \bar{R}_i(t,t_0) \cdot \phi_i(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \bar{R}_i(t,t') \cdot d\phi_i(t') = \phi_i(t_0) + \tilde{\phi}_{sh_i}(t) \quad (3.177)$$

essendo:

$$\bar{\phi}_{sh_i}(t) = \left(\underline{\underline{K}}^*(t_0) \right)^{-1} \cdot \underline{\tilde{\psi}}_{sh}(t) \quad (3.178)$$

e la soluzione della (3.177), ricordando che:

$$J_i^*(t,t') \cdot R_i^*(t,t') + \int_{t'}^t \frac{\partial \bar{J}_i^*(\tau,t')}{\partial \tau} \cdot \bar{R}_i^*(t,\tau) \cdot d\tau = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.179)$$

si scrive immediatamente:

$$\phi_i(t) = \phi_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot \bar{J}_i^*(t,t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \tilde{\phi}_{sh_i}(t')}{\partial t'} \cdot E_c(t_0) \cdot \bar{J}_i^*(t,t') \cdot dt' \quad (3.180)$$

Introdotta pertanto la matrice diagonale $\bar{\underline{\underline{J}}}(t,t_0) = \text{diag} \left[\bar{J}_i^*(t,t_0) \right]$, per le incognite $\underline{\psi}(t)$ si ha la soluzione:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(t) &= \underline{\underline{K}}^*(t_0) \cdot \bar{\underline{\underline{J}}}(t,t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot \left(\underline{\underline{K}}^*(t_0) \right)^{-1} \cdot \underline{\psi}(t_0) + \\ &+ \underline{\underline{K}}^*(t_0) \cdot \int_{t_0}^t E_c(t_0) \cdot \bar{\underline{\underline{J}}}(t,t') \cdot \left(\underline{\underline{K}}^*(t_0) \right)^{-1} \cdot d\underline{\tilde{\psi}}_{sh}(t') \end{aligned} \quad (3.181)$$

Nel caso in cui valga la (3.173), tenendo conto delle (3.110), (3.175), (3.128), (3.177), si può scrivere:

$$\underline{\tilde{\psi}}_{sh}(t) = \underline{\psi}_{sh}^* \cdot \int_{t_0}^t \frac{\partial J(t',t_0)}{\partial t'} \cdot R(t,t') \cdot dt' = \underline{\psi}_{sh}^* \cdot \left[1 - \frac{R(t,t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (3.182)$$

e quindi l'integrale che compare a secondo membro della (3.180) diviene:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial \tilde{\phi}_{sh_i}(t')}{\partial t'} \cdot E_c(t_0) \cdot \bar{J}_i^*(t, t') \cdot dt' = [E_c(t_0) \cdot \bar{J}_i^*(t, t_0) - 1] \cdot \frac{\phi_{sh_i}^*}{\omega_i^*(t_0)} \quad (3.183)$$

cosicché si ha:

$$\phi_i(t) = \phi_i(t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot \bar{J}_i^*(t, t_0) + [E_c(t_0) \cdot \bar{J}_i^*(t, t_0) - 1] \cdot \frac{\phi_{sh_i}^*}{\omega_i^*(t_0)} \quad (3.184)$$

e per il vettore $\underline{\psi}(t)$:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(t) = & \underline{K}^*(t_0) \cdot \bar{J}_i^*(t, t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot \left(\underline{K}^*(t_0) \right)^{-1} \cdot \underline{\psi}(t_0) + \\ & + \underline{K}^*(t_0) \cdot \left(\underline{\Omega}^*(t_0) \right)^{-1} \cdot [E_c(t_0) \cdot \bar{J}_i^*(t, t_0) - \underline{I}] \cdot \left(\underline{K}^*(t_0) \right)^{-1} \cdot \underline{\psi}_{sh}^* \end{aligned} \quad (3.185)$$

Il confronto tra le (3.184) e (3.185), (3.116), permette di stabilire immediatamente la seguente relazione tra le funzioni $\bar{J}_i^*(t, t_0)$ e $R_i^*(t, t_0)$:

$$\bar{J}_i^*(t, t_0) = \left[1 - \omega_i^*(t_0) \cdot \frac{R_i^*(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \cdot \frac{1}{(1 - \omega_i^*(t_0)) \cdot E_c(t_0)} \quad (3.186)$$

3.3.4 Metodi algebrizzati

I metodi algebrizzati consentono, in generale, di determinare delle soluzioni approssimate di buon livello con un onere computazionale molto contenuto, superando il problema della risoluzione dell'integrale di Volterra. Con il loro uso si adottano ancora delle leggi costitutive affidabili, ma si ricorre a soluzioni approssimate dell'equazione integrale di Volterra riconducendola ad una relazione algebrica lineare di semplice soluzione. L'approssimazione di questo metodo consiste nell'assumere che la deformazione di un materiale sia funzione lineare del coefficiente di viscosità $\varphi(t, t_0)$, ossia:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot \varphi(t, t_0) \quad (3.187)$$

avendo posto ε_0 e ε_1 due costanti.

Come si evince dalla fig.3.3.4.1 l'area dei punti DCGH, di difficile calcolo, che rappresenta l'integrale dell'equazione (3.11) è sostituita dall'area del rettangolo DEFH che utilizza un valore medio della funzione $J(t, \tau)$.

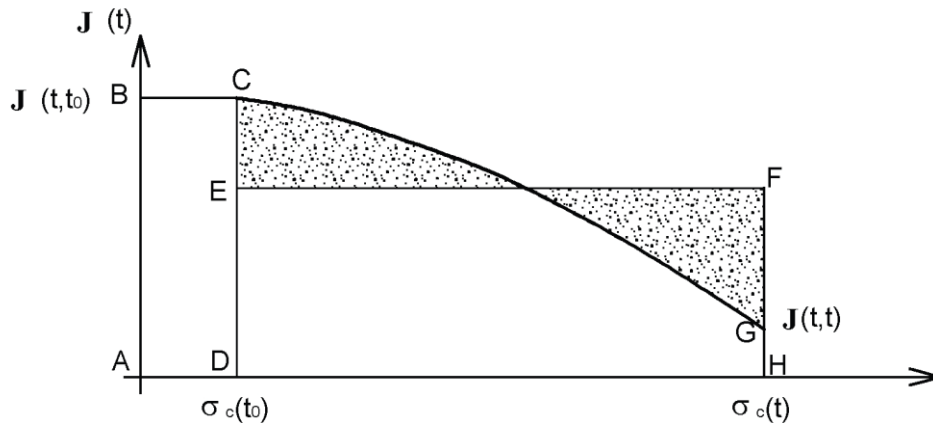


Fig.3.3.4. 1 – Approssimazione dell'integrale di Volterra

Avendo definito la funzione di viscosità:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (3.188)$$

e di rilassamento:

$$R(t, t_0) = E_c(t_0) [1 - \rho(t, t_0)] \quad (3.189)$$

La prima costante, ε_0 , esprime la deformazione elastica istantanea all'atto dell'applicazione del carico al tempo t_0 , mentre la seconda, ε_1 , che moltiplica il coefficiente di viscosità, si ricava dai seguenti passaggi.

Posto:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (3.190)$$

l'equazione (3.171) diviene quindi:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \varepsilon_1 \cdot \varphi(t, t_0) \quad (3.191)$$

Andando poi a sostituire l'espressione (3.191) nell'equazione (3.12):

$$\sigma_c(t) = \varepsilon_c(t_0) \cdot R(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\varepsilon_c(\tau)}{d\tau} \cdot R(t, \tau) d\tau \quad (3.12)$$

si giunge alla seguente espressione:

$$\sigma_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot R(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \varepsilon_1 \cdot \varphi(t, t_0) \right) \cdot R(t, \tau) d\tau \quad (3.192)$$

Essendo $\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \right) = 0$ si ha infine:

$$\sigma_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot R(t, t_0) + \varepsilon_1 \cdot \int_{t_0}^t \frac{\partial \varphi(t, t_0)}{\partial \tau} \cdot R(t, \tau) d\tau \quad (3.193)$$

Si deriva l'equazione (3.188) rispetto a t , tempo di lettura, ottenendo l'espressione della variazione nel tempo della viscosità:

$$\frac{\partial J(\tau, t_0)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_c(t_0)} (1 + \varphi(\tau, t_0)) \right] \quad (3.194)$$

Considerato che il modulo elastico del calcestruzzo è una costante, lo si può portare fuori dalla derivata e riscrivendo quindi l'equazione precedente si ottiene l'uguaglianza:

$$E_c(t_0) \cdot \frac{\partial J(\tau, t_0)}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi(\tau, t_0)}{\partial \tau} \quad (3.195)$$

la quale permette di sostituire il termine $\frac{\partial \varphi(\tau, t_0)}{\partial \tau}$ nell'equazione (3.193) trasformandola nella seguente espressione:

$$\sigma_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot R(t, t_0) + \varepsilon_1 \cdot \int_{t_0}^t E_c(t_0) \frac{\partial J(\tau, t_0)}{\partial \tau} \cdot R(t, \tau) d\tau \quad (3.196)$$

Portando poi fuori dal segno di integrale il modulo elastico si ottiene la seguente espressione:

$$\sigma_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot R(t, t_0) + \varepsilon_1 \cdot E_c(t_0) \cdot \int_{t_0}^t \frac{\partial J(\tau, t_0)}{\partial \tau} \cdot R(t, \tau) d\tau \quad (3.197)$$

L'integrale che compare nell'uguaglianza precedente è il medesimo che appare nell'integrale di Volterra dell'equazione:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial J(\tau, t_0)}{\partial \tau} \cdot R(t, \tau) d\tau = 1 - \frac{1}{E_c(t_0)} \cdot R(t, t_0) \quad (3.18)$$

Perciò è poi possibile eliminare l'integrale che compare nell'equazione (3.197) andando a sostituire questo con l'espressione dell'equazione (3.18):

$$\sigma_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot R(t, t_0) + \varepsilon_1 \cdot E_c(t_0) \cdot \left[1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)}\right] \quad (3.198)$$

L'equazione così ottenuta permette di ricavare l'espressione di ε_1 , costante della (3.175):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_c(t, t_0) - \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} R(t, t_0)}{E_c(t_0) \cdot \left[1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)}\right]} \quad (3.199)$$

Nota il valore della costante si può andare a sostituirlo nell'equazione di partenza (3.175), ottenendo così la seguente espressione della deformazione al tempo t:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\sigma_c(t, t_0) - \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} R(t, t_0)}{E_c(t_0) \cdot \left[1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)}\right]} \cdot \varphi(t, t_0) \quad (3.200)$$

Si definisce il coefficiente di invecchiamento:

$$\chi(t, t_0) = \frac{1}{1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)}} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)} \quad (3.201)$$

Pertanto l'espressione (3.200) si semplifica e può essere scritta nel seguente modo:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)] \quad (3.202)$$

Si ricorda l'equazione integrale di Volterra (3.11):

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau \quad (3.11)$$

La relazione (3.202) rappresenta l'espressione algebrizzata della (3.11). In altre parole si è sostituito l'integrale di Volterra, che compare nella (3.11), con un'espressione algebrica.

E' necessario sottolineare alcuni aspetti inerenti l'espressione algebrizzata della deformazione descritta nella (3.202). Innanzitutto, essa risulta applicabile quando sia noto $\chi(t, t_0)$, ovvero sia nota la funzione di rilassamento $R(t, t_0)$. Questo fatto impone che, per un'assegnata funzione di viscosità $J(t, t_0)$, si debba costruire la funzione $R(t, t_0)$ e quindi il coefficiente $\chi(t, t_0)$, mediante la seguente equazione integrale:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial R(\tau, t_0)}{\partial \tau} d\tau = 1 - E_c(t_0) \cdot J(t, t_0) \quad (3.20)$$

Pertanto, per l'impiego pratico, tale coefficiente, dipendente dal modello di viscosità assunto, deve essere a priori noto, ad esempio attraverso grafici o tabelle o mediante la preventiva risoluzione della (3.20).

La relazione (3.202) trovata è esatta nel caso in cui le deformazioni seguono l'ipotesi di variazione lineare dell'equazione (3.171) cioè con variazione lineare nel tempo, mentre non è valida nel caso di variazioni periodiche o cicliche quali, ad esempio le deformazioni termiche o carichi che ciclicamente vengono posti e rimossi.

Una seconda osservazione importante riguarda il modulo elastico del calcestruzzo $E_c(t_0)$. Nelle equazioni precedenti si fa spesso riferimento al valore valutato al momento della messa in carico del materiale. Frequentemente si semplifica il modulo elastico a 28 giorni E_{c28} . Tale situazione è valida per calcestruzzi caricati in età non troppo giovane. Infatti, per basse età di messa in carico, il modulo elastico è sensibilmente inferiore al valore a 28 giorni.

Il coefficiente $\chi(t, t_0)$ è funzione crescente sia di t sia di t_0 . Questo risultato è facilmente dimostrabile se si osserva che il primo termine che compone l'espressione (3.201) di $\chi(t, t_0)$ è sempre positivo, essendo $R(t, t_0) \leq E_c(t_0)$, mentre il secondo è sempre negativo, essendo $\varphi(t, t_0) \geq 0$. Pertanto, visto la crescita di $\chi(t, t_0)$ con t , il valore massimo di tale coefficiente si avrà per $t \rightarrow \infty$, in corrispondenza a quel modello che a parità di $\varphi(t, t_0)$ renda massima la funzione di rilassamento.

Dagli studi effettuati da Mola [36] si può osservare che la funzione $\chi(t, t_0)$ varia come segue:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \chi(t, t_0) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\frac{dE_c(t)}{dt} \Big|_{t=t_0}}{\frac{\partial R(t, t_0)}{\partial t} \Big|_{t=t_0}} \right] \leq \chi(t, t_0) \leq 1 \quad (3.203)$$

L'espressione (3.203) mostra che il minimo valore di $\chi(t, t_0)$ può essere leggermente inferiore a $1/2$, in quanto per ogni t risulta:

$$\frac{dE_c(t)}{dt} \geq 0 \quad (3.204)$$

$$\frac{\partial R(t, t_0)}{\partial t} \leq 0 \quad (3.205)$$

e pertanto la parentesi quadra nella (3.203) è sempre inferiore all'unità.

Per i modelli che hanno modulo elastico costante, poiché $\frac{dE_c(t)}{dt} = 0$, si ha invece che il minimo valore di $\chi(t, t_0)$ è:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \chi(t, t_0) = \frac{1}{2} \quad (3.206)$$

La scelta del metodo di calcolo di $\chi(t, t_0)$ definisce il metodo algebrizzato scelto.

3.3.4.1 Metodo M.S.M.

Per $\chi(t, t_0) = 0,5$ si ha il "Metodo della tensione media" (M.S.M) (fig.3.3.4.1.1) ed in tal caso l'integrale di sovrapposizione è approssimato per difetto, essendo in generale $\chi(t, t_0) \geq 0,5$. Nei problemi a deformazione assegnata conduce ad una sovrastima della variazione di tensione $\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)$ come si può osservare nell'espressione (3.202). L'impiego del metodo fornisce risultati accettabili solo quando sia veramente piccolo l'errore del calcolo di $\chi(t, t_0)$. Tale errore è crescente con $\varphi(t, t_0)$, come si deduce dalla (3.201), e poiché a bassi valori di $\varphi(t, t_0)$ corrispondono alti valori di $R(t, t_0)$ e quindi modeste variazioni di $\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)$, il metodo è impiegabile con successo in tutti quei casi in cui ci si aspetti una modesta variazione dello stato tensionale nel conglomerato.

Nella figura è evidenziata con l'area tratteggiata l'area calcolata con $\chi(t, t_0) = 0,5$ e per confronto l'andamento reale. Si può ben osservare le differenze esistenti.

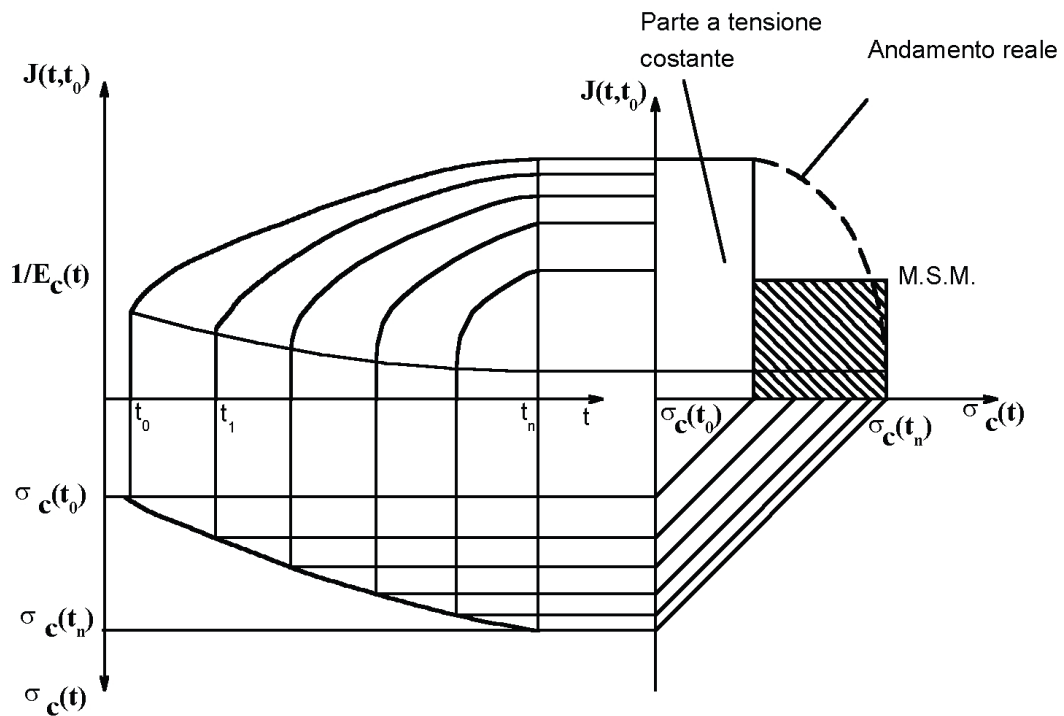


Fig.3.3.4.1. 1 – Metodo M.S.M.

3.3.4.2 Metodo E.M.M.

Ponendo $\chi(t, t_0) = 1$ si ottiene il cosiddetto "Effective Modulus Method" (E.M.M.), che equivale ad approssimare per eccesso l'integrale di sovrapposizione, essendo il valore esatto di $\chi(t, t_0)$ in generale minore dell'unità. Tale metodo fornisce risultati esatti quando si ha uno stato di tensione costante, oppure quando si ha un materiale con caratteristiche viscoso solamente ereditarie, come avviene per i conglomerati caricati in età molto avanzata. In questo caso la (3.202) risulta approssimata per un tempo t generico, mentre è esatta per t tendente ad infinito, per quanto già detto in precedenza. In generale, per un'assegnata storia di deformazione $\varepsilon_c(t, t_0)$, una valutazione per eccesso di $\chi(t, t_0)$ comporta una valutazione per difetto di $\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)$, come si può dedurre dalla (3.202). Tale metodo è adatto a calcestruzzi caricati in età avanzata, cioè con caratteristiche prevalentemente ereditarie (fig. 3.3.4.2.1). Come si può osservare, la zona tratteggiata è superiore alla zona sottesa dalla curva reale.

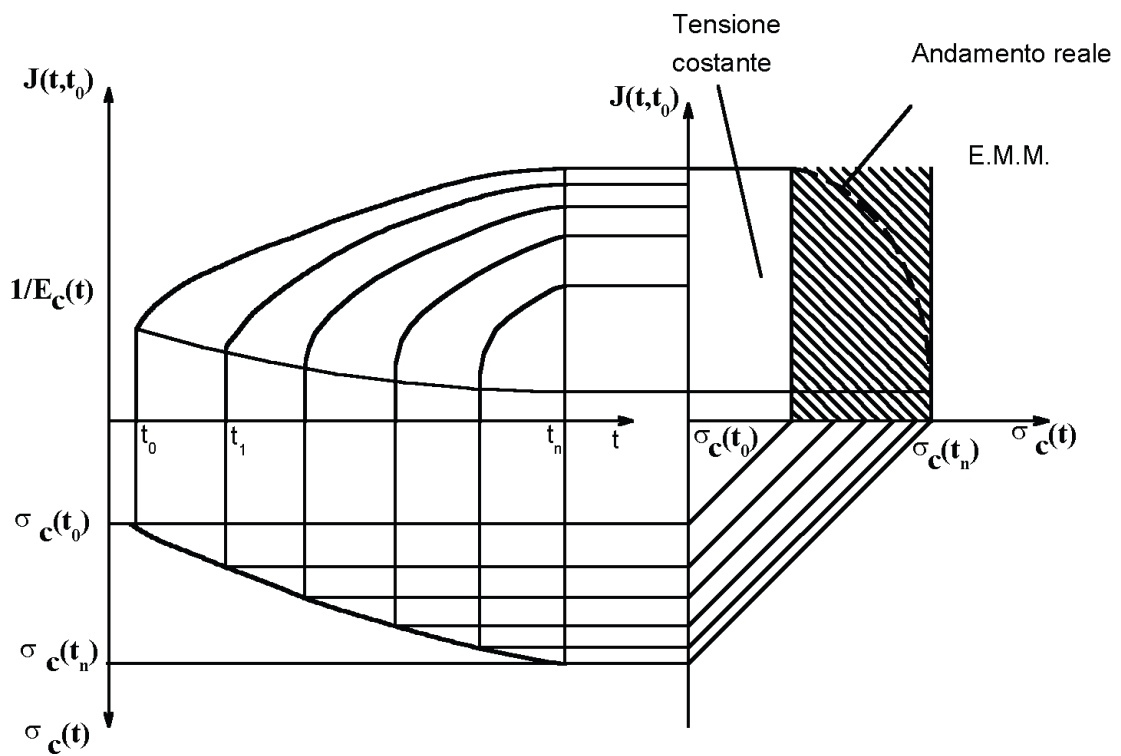


Fig.3.3.4.2. 1 - Metodo E.M.M.

3.3.4.3 Metodo A.A.E.M.

In alternativa si può utilizzare il metodo A.A.E.M. (Age-Adjusted Effective Modulus) ([38], [39]) che è una soluzione intermedia tra i due precedenti. I valori di $\chi(t, t_0)$ per il metodo A.A.E.M. sono tabulati dal C.E.B. sotto forma di grafici oppure, per tempi di confronto superiori a $t = 3 \cdot 10^4$ giorni (valutazione dei fenomeni differiti a tempo infinito), sono calcolabili tramite l'espressione di Chiorino [40]. Questa espressione approssimata vale:

$$\chi(\infty, t_0) \approx \frac{t_0^{0,5}}{n + t_0^{0,5}} \quad (3.207)$$

con:

$$n = \frac{0,13 \sqrt[3]{h}}{e^{h/10000}} \left[1 + \left(1 - \frac{RH}{50} \right) (-0,772 + 2,917 \cdot 10^{-4} \cdot h) \right] \cdot [0,772 + 0,0114 \cdot (f_{cm} - 8)] \quad (3.208)$$

$$h = \frac{2 \text{ area sezione}}{\text{perimetro}} : \text{spessore equivalente in mm} \quad (3.209)$$

RH: umidità relativa dell'ambiente in %

$$f_{cm} = f_{ck} + 8: \text{resistenza media a compressione del calcestruzzo} \quad (3.210)$$

Gli errori commessi dalla formula non superano il 3,5% nelle condizioni più sfavorevoli [37], [41].

Come si può osservare nella fig.3.3.4.3.1 l'area tratteggiata ha dimensione simile all'area sottesa dalla curva reale.

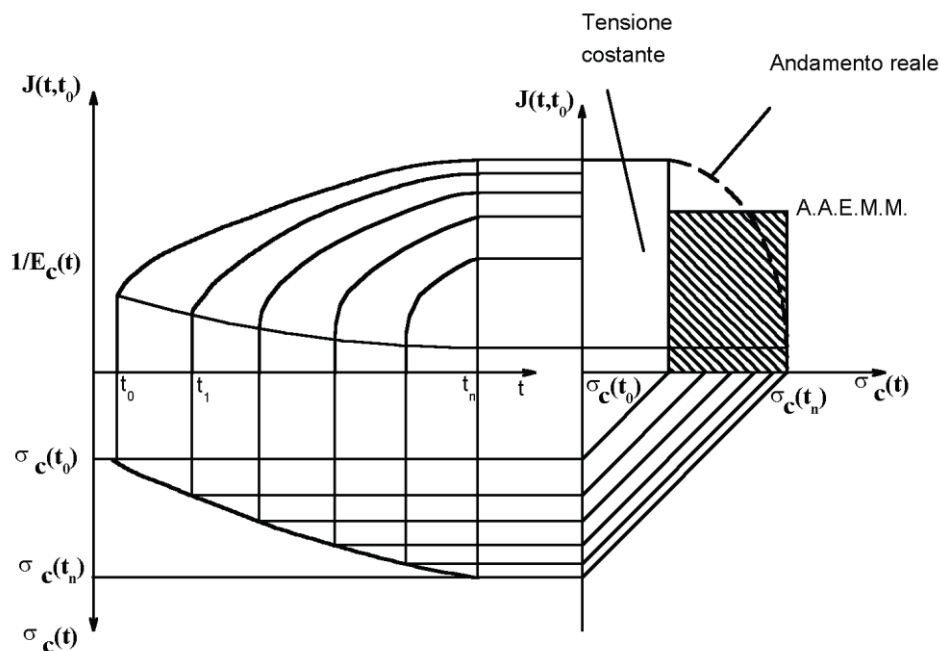


Fig.3.3.4.3. 1 - Metodo A.A.E.M.

3.3.4.4 Confronti

Nell'utilizzo dei diversi metodi cambia perciò il metodo di calcolo della deformazione competente alla variazione del carico nel tempo. La figura mostra graficamente l'andamento reale (fig. 3.3.4.4.1) del valore di $J(t, t_0)$. Si può notare che nel caso di tensioni applicate costanti nel tempo, la metodologia applicata è ininfluente, essendo i risultati dell'equazione (3.202) coincidenti con l'equazione (3.11).

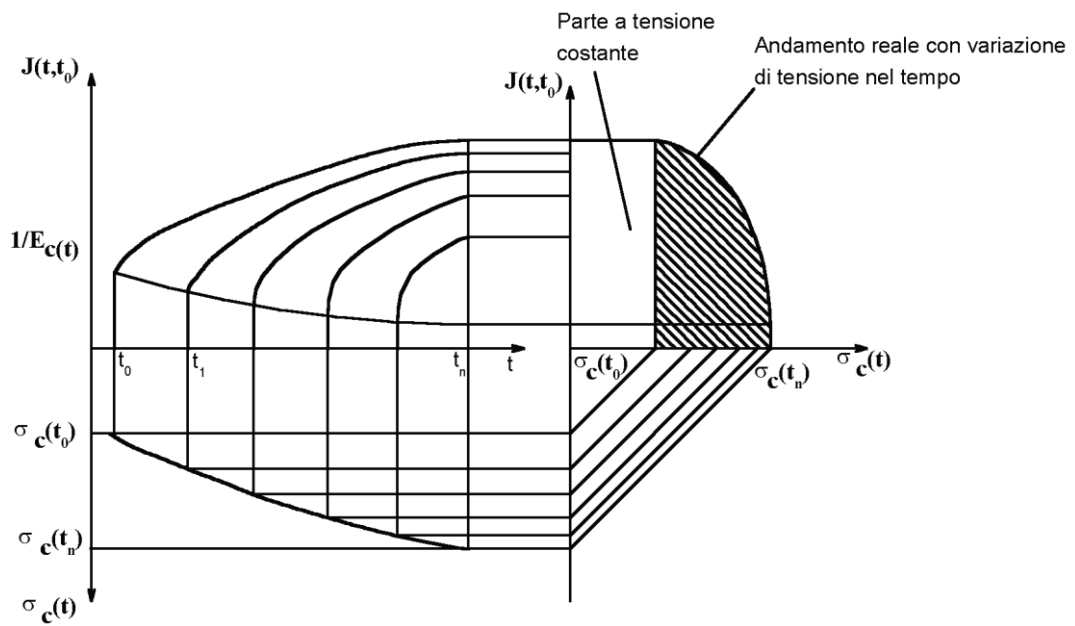


Fig.3.3.4.4. 1 – Andamento reale della funzione di viscosità

Infine si può osservare che per un intervallo $t = 3 \cdot 10^4$ giorni, per valori di umidità relativa e di temperatura riferiti all'ambito europeo, i valori calcolati si discostano poco da $\chi(t, t_0) = 0,8$ come pure suggerito dalla norma CNR 10025 [42] e dall'Eurocodice. Quando è minima la differenza tra la soluzione esatta ed una approssimata con $\chi(t, t_0) = 0,8$, si può ritenere accettabile in taluni casi un approccio molto semplificato al problema utilizzando l'equazione (3.202) con $\chi(t, t_0) = 0,8$.

3.3.5 Serie di Dirichlet

I modelli reologici trasformano l'integrale di Volterra (3.11) in una relazione differenziale introducendo opportune espressioni analitiche per la funzione di viscosità. Il grosso vantaggio consiste nell'eliminazione dell'operatore integrale di convoluzione che compare nelle formulazioni generali (3.11) e (3.12), snellendo le procedure di risoluzione.

Attraverso questo tipo di approccio, sono stati sviluppati modelli più generali e sofisticati, basati su unità di Kelvin e di Maxwell ([43], [44], [45]), che prevedono lo sviluppo in serie di Dirichlet di generiche funzioni di viscosità e di rilassamento, utilizzando come base un insieme di nuclei di forma degenere. Sostituendo la funzione così sviluppata negli integrali di convoluzione che compaiono nelle (3.11) e (3.12), si ottengono, come anticipato nei modelli reologici, formulazioni di tipo differenziale. Queste ultime hanno il doppio vantaggio di essere più facilmente risolvibili rispetto ad equazioni integrali (in quanto possono, ad esempio, essere risolte al passo) e di richiedere un minor onere computazionale e di memoria, non essendo più necessaria la registrazione di tutta la precedente storia tensionale. ([46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53])

3.3.5.1 Funzioni di viscosità

Un nucleo ereditario possiede forma degenere quando costituito da una somma di prodotti di funzioni a variabile singola (t o t'). Una generica funzione di viscosità può essere sviluppata in serie di Dirichlet nel modo seguente:

$$J(t, t') = \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{C_{\mu}(t')} \left\{ 1 - e^{[y_{\mu}(t') - y_{\mu}(t)]} \right\} \quad (3.211)$$

$(\mu = 1, \dots, N)$

dove $C_{\mu}(t')$ e le $y_{\mu}(t')$ sono funzioni incognite del tempo. Il vantaggio di utilizzare uno sviluppo in serie del tipo (3.211) consiste, come già anticipato, nel poter convertire un'equazione integrale in una differenziale. Sostituendo la (3.211) nella (3.11) e dopo alcuni passaggi matematici, si ottiene la deformazione differita totale come somma di termini:

$$\varepsilon(t) = \sum_{\mu=1}^N \varepsilon_{\mu}(t) + \varepsilon_0(t) \quad (3.212)$$

dove le $\varepsilon_{\mu}(t)$ sono soluzioni del sistema di equazioni differenziali:

$$\ddot{\varepsilon}_{\mu}(t) + A_{\mu}(t) \dot{\varepsilon}_{\mu}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{B_{\mu}(t)} \quad (3.213)$$

in cui:

$$A_\mu(t) = \dot{y}_\mu - \frac{\ddot{y}_\mu}{\dot{y}_\mu} \quad (3.214)$$

$$B_\mu(t) = \frac{c_\mu(t)}{\dot{y}_\mu} \quad (3.215)$$

La (3.213) è un'equazione differenziale del secondo ordine e rappresenta la relazione costitutiva di una catena di unità di Kelvin (figura 3.3.5.1.1.a) a patto di considerare:

$$A_\mu(t) = \frac{\eta_\mu(t)}{E_\mu(t) + \dot{\eta}_\mu(t)} \quad (3.216)$$

$$B_\mu(t) = \eta_\mu(t) \quad (3.217)$$

dove $E_\mu(t)$ e $\eta_\mu(t)$ sono, rispettivamente, la rigidità della molla ed il coefficiente di viscosità del dissipatore di ogni singola unità. Eguagliando queste espressioni con quelle ottenute dallo sviluppo della serie di Dirichlet, si ottiene infine:

$$E_\mu(t) = C_\mu(t) - \frac{\dot{c}_\mu(t)}{\dot{y}_\mu(t)} \quad (3.218)$$

$$\eta_\mu(t) = \frac{c_\mu(t)}{\dot{y}_\mu(t)} \quad (3.219)$$

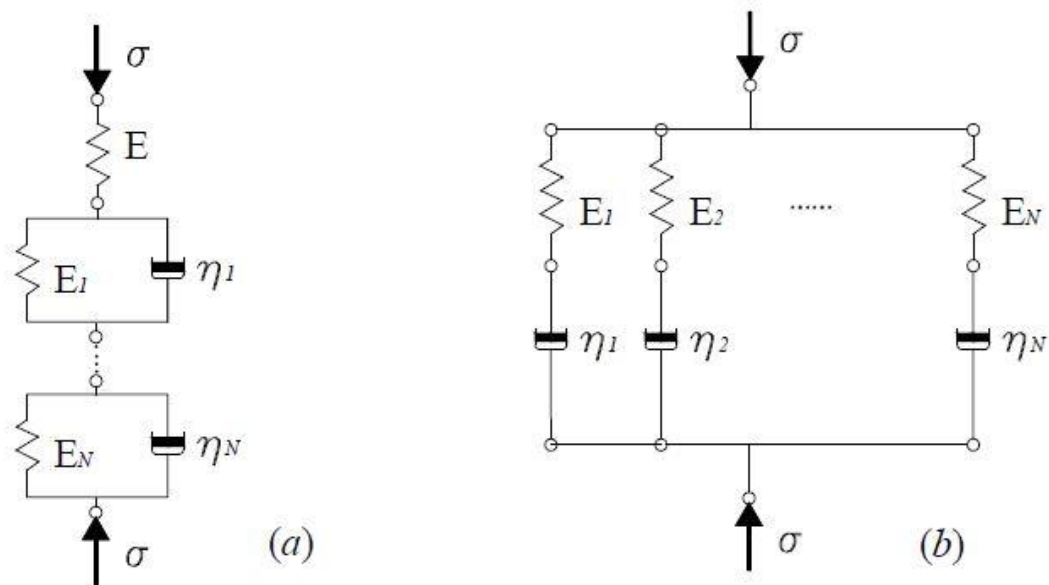


Fig.3.3.5.1. 1 – Elementi della serie di Dirichlet

Si noti che con queste espressioni è sempre possibile identificare i moduli delle unità di catena di Kelvin equivalente ad una funzione di viscosità sviluppata in serie di Dirichlet, ma non il contrario. L'identificazione dei coefficienti dello sviluppo di Dirichlet dai parametri di una catena di Kelvin, infatti, conduce ad un sistema di equazioni differenziali non lineari del secondo ordine che non ha, in generale, soluzione in forma chiusa. Solamente nel caso in cui si consideri una catena con moduli costanti nel tempo, e quindi una funzione di viscosità priva del fenomeno dell'invecchiamento, si ha la completa equivalenza tra le varie grandezze corrispondenti.

Un'opportuna scelta della funzione $y_\mu(t)$ ([54]) può essere la seguente:

$$y_\mu(t) = \left(\frac{t}{\tau_\mu}\right)^{q_\mu} \quad (3.220)$$

con q_μ esponenti da determinarsi. Per semplicità, nel seguito i coefficienti q_μ sono fissati pari all'unità. I tempi τ_μ che compaiono nella (3.220) sono detti tempi di ritardo.

Lo sviluppo della (3.211) descrive una serie di funzioni esponenziali reali. Solitamente il suo primo termine rappresenta la parte istantanea (elastica) della funzione di viscosità. Per fare questo è necessario scegliere un primo tempo di ritardo molto piccolo, ad esempio $\tau_1=10^{-9}$ giorni. In questo modo il primo termine della serie si riduce a $1/C_1(t')$, che rappresenta quindi la deformabilità istantanea. Per costruire una funzione di viscosità mediante serie di Dirichlet è necessario innanzitutto assegnare il numero N di termini della serie. Successivamente si assegnano i corrispondenti tempi di ritardo τ_μ ($\mu = 1, \dots, N$), la scelta dei quali non è arbitraria ma deve soddisfare certe condizioni, pena il mal condizionamento del problema. Un criterio usuale ([49]) prevede di scegliere tali tempi τ_μ equidistanti nella scala logaritmica del tempo a partire dall'istante di messa in carico ($t - t'$), coprendo tutto l'intervallo temporale di interesse. Bazant consiglia di prendere i tempi di ritardo secondo la legge $\tau_\mu = 10^{\mu-1} \tau_1$, cioè uno per ogni ordine di grandezza. Infine, l'ultima fase consiste nella scelta delle funzioni $C_\mu(t')$, che devono essere definite per interpolazione dei dati sperimentali, ad esempio con tecniche di minimizzazione quadratica.

3.3.5.2 Funzioni di rilassamento

Analogamente a quanto appena visto, anche la funzione di rilassamento può essere sviluppata in serie di esponenziali (Dirichlet):

$$R(t, t') = \sum_{\mu=1}^N E_{\mu}(t') e^{[y_{\mu}(t') - y_{\mu}(t)]} \quad (3.221)$$

dove $E_{\mu}(t')$ sono funzioni del tempo e le $y_{\mu}(t')$ hanno lo stesso significato visto precedentemente, con i τ_{μ} detti ora tempi di rilassamento. Anche in questo caso, scegliendo un tempo τ_1 prossimo a zero, il primo termine della serie rappresenta la rigidità istantanea per cui $E_{\mu}(t') = E(t')$. Scelti a priori i τ_{μ} , le $E_{\mu}(t')$ sono ottenute per interpolazione dei dati.

Sostituendo la funzione di rilassamento (3.221) nella (3.12) e operando alcune manipolazioni, si ottiene la legge che esprime la variazione della tensione nel tempo, nella forma:

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^N \sigma_{\mu}(t) \quad (3.222)$$

in cui i singoli termini della sommatoria sono soluzioni delle equazioni differenziali del primo ordine disaccoppiate:

$$\dot{\sigma}_{\mu}(t) + \dot{y}_{\mu}(t) \cdot \sigma_{\mu}(t) = E_{\mu}(t) \cdot [\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}^0(t)] \quad (3.223)$$

$(\mu = 1, \dots, N)$

Appare evidente come la (3.223) sia equivalente all'equazione costitutiva di una catena di unità di Maxwell (figura 3.3.5.1.1.b) in cui le molle hanno rigidità $E_{\mu}(t)$ e i dissipatori hanno coefficiente di viscosità $\eta_{\mu} = E_{\mu}(t) / \dot{y}_{\mu}(t)$, entrambi variabili nel tempo.

Si noti che lo sviluppo della funzione di viscosità conduce ad una formulazione differenziale del secondo ordine mentre quello della funzione di rilassamento ad una del primo ordine e quindi di più facile risoluzione.

4 Impostazione del problema

In questa trattazione si vuole estendere il lavoro già affrontato in [56], relativo all'analisi degli effetti elastoviscosi nella torsione in elementi in c.a. e c.a.p. a parete sottile e sezione aperta.

In [56] era stato considerato il problema ponendo nell'ultima delle (2.58) nullo il termine di portanza alla De Saint Venant. In questa tesi invece la portanza torsionale alla De Saint Venant verrà presa in considerazione, il che peraltro significa che coesistono nella sezione due portanze torsionali distinte legate ciascuna ad un proprio meccanismo di distribuzione dello stato di sollecitazione. In sintesi ciò implicherà una iperstaticità interna nella sezione legata alla ripartizione del momento torcente sollecitante tra le due portanze torsionali.

Preliminarmente occorre analizzare le grandezze elastiche, quali G e ν , adattandole al campo elastoviscoso lineare per poi poter affrontare il problema.

4.1 Il problema del modulo di elasticità tangenziale G e del coefficiente di Poisson ν

Come visto nel capitolo 1, l'equazione della torsione mista, cioè l'ultima delle (2.58), afferma che ai carichi esterni di torsione fanno fronte due portanze in parallelo, di cui la prima $E^* J_{\omega\omega} \theta''''$ è la portanza per ingobbamento (o alla Vlasov), mentre la seconda $-G J_d \theta''$ è la portanza per torsione pura (o alla De Saint Venant).

Ci si sofferma ora sul termine alla De Saint Venant.

È ben noto che nella torsione pura alla De Saint Venant per una sezione circolare vale la seguente equazione di equilibrio:

$$\tau(t, z, r) = \frac{M_{DS}(t, z) \cdot r}{J_p} \quad (4.1)$$

con:

r : distanza dal centro della sezione circolare

J_p : momento d'inerzia polare della sezione circolare

z : ascissa dell'asse della trave

t : età del materiale (tempo)

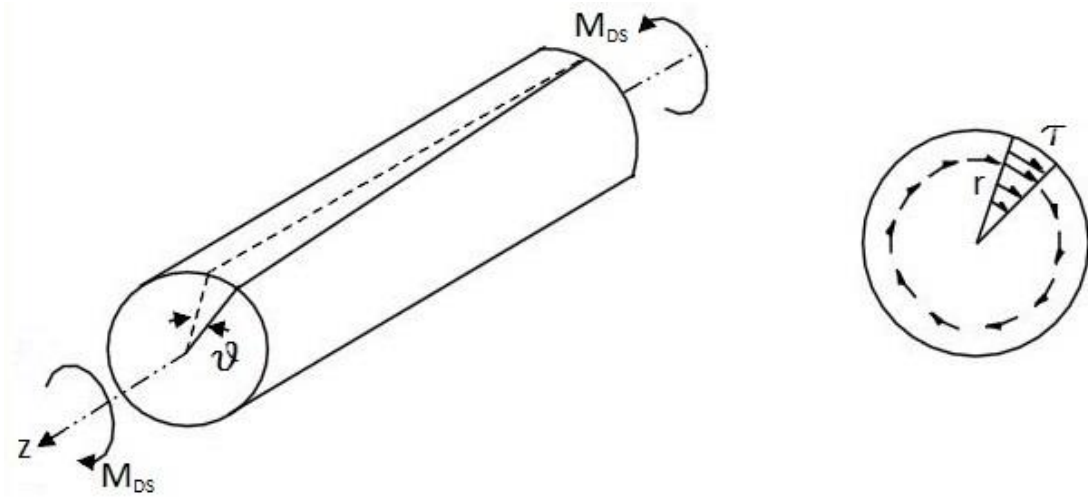


Fig.4.1. 1 – Torsione alla De Saint Venant

La congruenza invece impone:

$$\gamma(t, z, r) = \frac{\partial \vartheta(t, z)}{\partial z} \cdot r \quad (4.2)$$

Pertanto, se la legge costitutiva è elastica-lineare risulta:

$$\tau = \gamma \cdot G \quad (4.3)$$

la soluzione elastica (risposta istantanea) è:

$$\frac{\partial \vartheta(t, z)}{\partial z} = \frac{M_{DS}(t, z)}{G \cdot J_p} \quad (4.4)$$

Ci si pone ora il problema di definire l'equivalente della (4.2) quando la legge costitutiva è elasto-viscosa lineare. Per fare ciò si osservi dapprima che in regime elasto-viscoso lineare, il modulo di Young E viene sostituito dalla funzione di viscosità J (3.21):

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (4.5)$$

La stessa sostituzione può essere applicata anche al modulo di elasticità tangenziale G, come dimostrato in [16]. In particolare è possibile assumere una funzione di viscosità $\tilde{G}(t, t_0)$:

$$\tilde{G}(t, t_0) = \frac{1}{G(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] \quad (4.6)$$

Tra le grandezze elastiche vale la ben nota relazione:

$$G(t_0) = \frac{E(t_0)}{2(1+\nu(t_0))} \quad (4.7)$$

Per cui, se il coefficiente di Poisson ν è costante nel tempo, la (4.6) diviene:

$$\tilde{G}(t, t_0) = 2(1 + \nu) \cdot \frac{1}{E(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] = 2(1 + \nu) \cdot J(t, t_0) \quad (4.8)$$

cosicché il comportamento elasto-viscoso del continuo risulta caratterizzato dall'unica funzione di viscosità $J(t, t_0)$ e dal coefficiente di Poisson ν .

La costanza nel tempo del coefficiente di Poisson ν è asserita dalle pubblicazioni [49], [48], [57], secondo cui il calcestruzzo è un materiale essenzialmente isotropo e in ambiente ad umidità relativa costante il coefficiente di Poisson è sostanzialmente costante nel tempo ($\nu \approx 0,18$).

Pertanto la (4.3) in regime elasto-viscoso lineare diventa:

$$\gamma(t, z, r) = \tau(t_0, z, r) \cdot [2(1 + \nu)] \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \tau(T, z, r)}{\partial T} \cdot [2(1 + \nu)] \cdot J(t, T) dT \quad (4.9)$$

dove:

t_0 : istante di prima messa in carico

t : istante di misura

Nella (4.9) manca il termine relativo al

ritiro perché trattasi di deformazione volumetrica (ovvero con γ nulle).

Sostituendo la (4.1) nella (4.9) si ottiene:

$$\gamma(t, z, r) = \frac{M_{DS}(t_0, z) \cdot r}{J_p} \cdot [2(1 + \nu)] \cdot J(t, t_0) + [2(1 + \nu)] \cdot \frac{r}{J_p} \cdot \int_{t_0}^t \frac{\partial M_{DS}(T, z)}{\partial T} \cdot J(t, T) dT \quad (4.10)$$

e moltiplicando ambo i membri per $1/r$, per la (4.2), si ha:

$$\frac{\partial \vartheta(t, z)}{\partial z} = \frac{[2(1 + \nu)]}{J_p} \left[M_{DS}(t_0, z) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial M_{DS}(T, z)}{\partial T} \cdot J(t, T) dT \right] \quad (4.11)$$

Per la valutazione di J_p , per sezioni diverse dalla circolare:

- in sezioni senza cavità si vedano le formule approssimate proposte da De Saint Venant ([58], [59])
- per i profili cavi chiusi mono o pluricellulari si usa un J_p equivalente sulla base della teoria di Bredt

4.2 Sistema risolvibile

Come presentato in [56] si consideri una generica sezione con profilo aperto e parete di piccolo spessore, eterogenea perché composta da calcestruzzo, il cui comportamento è retto da una legge costitutiva di tipo elasto-viscoso sintetizzata dall'espressione (4.12), ed acciaio, per il quale si assume un comportamento di tipo elastico lineare, espresso dalla relazione (4.13):

$$\varepsilon(t, z, s) = \sigma_c(t_0, z, s) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t d\sigma_c(\tau, z, s) \cdot J(t, \tau) + \bar{\varepsilon}_c(t) \quad (4.12)$$

dove ε è la deformazione della sezione, t è l'istante in cui si misura lo stato di sforzo e deformazione, t_0 è l'istante di messa in carico della struttura ed $\bar{\varepsilon}_c(t)$ è il termine che tiene conto delle deformazioni atensionali (ritiro, variazioni termiche, ecc.);

$$\varepsilon(t, z, s) = \frac{\sigma_e(t_0, z, s)}{E_e} + \bar{\varepsilon}_e - \bar{\bar{\varepsilon}}_e \quad (4.13)$$

dove ε rappresenta la deformazione della sezione a livello della barra di acciaio considerata, E_e è il modulo di Young del materiale, $\bar{\varepsilon}_e$ è ancora il termine che tiene conto delle deformazioni atensionali, mentre $\bar{\bar{\varepsilon}}_e$ rappresenta la deformazione tensionale non congruente con il calcestruzzo (distorsione elastica iniziale di precompressione).

Nella (4.12) si è fatta l'ipotesi che la deformazione atensionale $\bar{\varepsilon}_c$ sia indipendente da s sicché trattando il caso di deformazione termica questa deve essere costante sulla sezione. Inoltre nella (4.13) si è assunto $\bar{\varepsilon}_e$ indipendente dal tempo sicché la deformazione termica deve necessariamente essere costante nel tempo. Ciò vale anche per $\bar{\bar{\varepsilon}}_e$, per cui viene trascurato il fenomeno di rilassamento degli acciai ad alta resistenza pretesi.

Le (2.22) in questo caso si scrivono:

$$\int_{A_c} \sigma_c \rho_i dA_c + \int_{A_e} \sigma_e \rho_i dA_e = M_i \quad (4.14)$$

Per $t=t_0$ la (4.12) diventa:

$$\varepsilon(t_0, z, s) = \sigma_c(t_0, z, s) \cdot J(t_0, t_0) + \bar{\varepsilon}_c(t_0) \quad (4.15)$$

che introdotta nella (4.14) insieme alla (4.13) fornisce:

$$\frac{1}{J(t_0, t_0)} \int_{A_c} [\varepsilon(t_0, z, s) - \bar{\varepsilon}_c(t_0)] \rho_i dA_c + E_e \int_{A_e} [\varepsilon(t_0, z, s) - \bar{\varepsilon}_e + \bar{\bar{\varepsilon}}_e] \rho_i dA_e = M_i \quad (4.16)$$

ovvero per la (2.13) (si usa l'indice "0" per ricordare che $t=t_0$):

$$\frac{1}{J(t_0, t_0)} \int_{A_c} [\zeta'_0 - \xi''_0 x - \eta''_0 y - \theta''_0 \omega] \rho_i dA_c + E_e \int_{A_e} [\zeta'_0 - \xi''_0 x - \eta''_0 y - \theta''_0 \omega] \rho_i dA_e + -\frac{1}{J(t_0, t_0)} \int_{A_c} \bar{\varepsilon}_c(t_0) \rho_i dA_c - E_e \int_{A_e} [\bar{\varepsilon}_e - \bar{\varepsilon}_e] \rho_i dA_e = M_i \quad (4.17)$$

Poiché gli acciai presenti nella sezione (indice "e") sono in barre, gli integrali in A_e più propriamente andranno sostituiti da sommatorie; inoltre giacché acciai ordinari ed acciai ad alta resistenza hanno comunque caratteristiche meccaniche differenti si distinguono per chiarezza i primi, per i quali si userà l'indice "s", dai secondi, il cui indice sarà invece "p".

Posto allora (4.18):

$$J_{c_{ik}} = \int_{A_c} \rho_i \rho_k dA_c = \int_{L_c} \rho_i \rho_k t ds \quad \underline{A} = \begin{vmatrix} J_{c_{11}} & J_{c_{1x}} & J_{c_{1y}} & J_{c_{1\omega}} \\ J_{c_{1x}} & J_{c_{xx}} & J_{c_{xy}} & J_{c_{x\omega}} \\ J_{c_{1y}} & J_{c_{xy}} & J_{c_{yy}} & J_{c_{y\omega}} \\ J_{c_{1\omega}} & J_{c_{x\omega}} & J_{c_{y\omega}} & J_{c_{\omega\omega}} \end{vmatrix}$$

$$J_{s_{ik}} = \sum_{j=1}^{n_s} \rho_i(s_j) \rho_k(s_j) A_{s_j} \quad \underline{S} = \begin{vmatrix} J_{s_{11}} & J_{s_{1x}} & J_{s_{1y}} & J_{s_{1\omega}} \\ J_{s_{1x}} & J_{s_{xx}} & J_{s_{xy}} & J_{s_{x\omega}} \\ J_{s_{1y}} & J_{s_{xy}} & J_{s_{yy}} & J_{s_{y\omega}} \\ J_{s_{1\omega}} & J_{s_{x\omega}} & J_{s_{y\omega}} & J_{s_{\omega\omega}} \end{vmatrix}$$

$$J_{p_{ik}} = \sum_{j=1}^{n_p} \rho_i(s_j) \rho_k(s_j) A_{p_j} \quad \underline{P} = \begin{vmatrix} J_{p_{11}} & J_{p_{1x}} & J_{p_{1y}} & J_{p_{1\omega}} \\ J_{p_{1x}} & J_{p_{xx}} & J_{p_{xy}} & J_{p_{x\omega}} \\ J_{p_{1y}} & J_{p_{xy}} & J_{p_{yy}} & J_{p_{y\omega}} \\ J_{p_{1\omega}} & J_{p_{x\omega}} & J_{p_{y\omega}} & J_{p_{\omega\omega}} \end{vmatrix}$$

$$\underline{C}_0 = \bar{\varepsilon}_c(t_0) \begin{vmatrix} J_{c_{11}} \\ J_{c_{1x}} \\ J_{c_{1y}} \\ J_{c_{1\omega}} \end{vmatrix} \quad \underline{\Psi}_0 = \begin{vmatrix} \zeta'_0 \\ -\xi''_0 \\ -\eta''_0 \\ -\theta''_0 \end{vmatrix}$$

$$D_{s_k} = \sum_{j=1}^{n_s} \bar{\varepsilon}_s \rho_k(s_j) A_{s_j} \quad \underline{D}_s = \begin{vmatrix} D_{s_1} \\ D_{s_x} \\ D_{s_y} \\ D_{s_\omega} \end{vmatrix}$$

$$D_{p_k} = \sum_{j=1}^{n_p} \bar{\varepsilon}_p \rho_k(s_j) A_{p_j} \quad \underline{D}_p = \begin{vmatrix} D_{p_1} \\ D_{p_x} \\ D_{p_y} \\ D_{p_\omega} \end{vmatrix}$$

$$H_{p_k} = \sum_{j=1}^{n_p} \bar{\bar{\epsilon}}_{pj} \rho_k(s_j) A_{pj} \quad \underline{H}_p = \begin{bmatrix} H_{p_1} \\ H_{p_x} \\ H_{p_y} \\ H_{p_\omega} \end{bmatrix}$$

la (4.17) si scrive:

$$\left[\frac{1}{J(t_0, t_0)} \underline{A} + E_s \underline{S} + E_p \underline{P} \right] \underline{\Psi}_0 = \underline{M} + \frac{1}{J(t_0, t_0)} \underline{C}_0 + E_s \underline{D}_s + E_p (\underline{D}_p - \underline{H}_p) \quad (4.19)$$

Risolto il sistema lineare (4.19) è nota la soluzione elastica $\underline{\Psi}_0$ per $t=t_0$, da cui seguono le deformazioni tramite le (2.13) e le tensioni tramite le (4.13) e (4.15):

$$\begin{aligned} \sigma_s(t_0, z, s_j) &= \left[\underline{\rho}^T(s_j) \underline{\Psi}_0 - \bar{\epsilon}_s \right] E_s \\ \sigma_p(t_0, z, s_j) &= \left[\underline{\rho}^T(s_j) \underline{\Psi}_0 - \bar{\epsilon}_p + \bar{\bar{\epsilon}}_{pj} \right] E_p \\ \sigma_c(t_0, z, s) &= \left[\underline{\rho}^T(s) \underline{\Psi}_0 - \bar{\epsilon}_c(t_0) \right] \frac{1}{J(t_0, t_0)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Calcolata la risposta elastica istantanea all'applicazione del carico, ne andrà ora valutata l'evoluzione temporale.

Sostituendo la (2.13) nella (4.12) si ottiene:

$$\begin{aligned} \zeta''(t, z) - \xi''(t, z) x(s) - \eta''(t, z) y(s) - \theta''(t, z) \omega(s) = \\ = \sigma_c(t_0, z, s) J(t, t_0) + \int_{t_0}^t d\sigma_c(\tau, z, s) J(t, \tau) + \bar{\epsilon}_c(t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Moltiplicando la (4.21) una volta per 1, poi per x, quindi per y ed infine per ω , ed integrando su A_c si ha:

$$\begin{aligned} \underline{A} \underline{\Psi}(t, z) &= \int_{A_c} \sigma_c(t_0, z, s) \underline{\rho}(s) J(t, t_0) dA_c + \int_{A_c} \int_{t_0}^t d\sigma_c(\tau, z, s) \underline{\rho}(s) J(t, \tau) dA_c + \\ &+ \int_{A_c} \bar{\epsilon}_c(t) \underline{\rho}(s) dA_c \end{aligned} \quad (4.22)$$

Posto che le azioni interne siano indipendenti dal tempo, differenziando le (4.14) rispetto a t risulta:

$$\int_{A_c} d\sigma_c(t, z, s) \underline{\rho}(s) dA_c + \int_{A_e} d\sigma_e(t, z, s) \underline{\rho}(s) dA_e = \underline{0} \quad (4.23)$$

essendo $\underline{0}$ un vettore nullo, da cui:

$$\int_{A_c} d\sigma_c(t, z, s) \underline{\rho}(s) dA_c = - \int_{A_e} d\sigma_e(t, z, s) \underline{\rho}(s) dA_e \quad (4.24)$$

sicché, utilizzando la (4.13), la (2.13) e le (4.18), si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{A_c} \int_{t_0}^t d\sigma_c(\tau, z, s) \underline{\rho}(s) J(t, \tau) dA_c &= \\ &= - \int_{A_e} \int_{t_0}^t d\sigma_e(\tau, z, s) \underline{\rho}(s) J(t, \tau) dA_e = \\ &= - \int_{t_0}^t \int_{A_e} E_e \underline{\rho}(s) \frac{\partial}{\partial \tau} [\varepsilon(\tau, z, s) - \bar{\varepsilon}_e + \bar{\bar{\varepsilon}}_e] d\tau J(t, \tau) dA_e = \\ &= - \int_{t_0}^t \int_{A_e} E_e \underline{\rho}(s) \underline{\rho}^T(s) \frac{\partial \underline{\Psi}(\tau, z)}{\partial \tau} dA_e J(t, \tau) d\tau = \\ &= - \int_{A_e} E_e \underline{\rho}(s) \underline{\rho}^T(s) dA_e \int_{t_0}^t d\underline{\Psi}(\tau, z) J(t, \tau) = \\ &= - [E_S \underline{\underline{S}} + E_P \underline{\underline{P}}] \int_{t_0}^t d\underline{\Psi}(\tau, z) J(t, \tau) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Inoltre, ricordando la (4.20) e le (4.18), si ha:

$$\begin{aligned} \int_{A_c} \sigma_c(t_0, z, s) \underline{\rho}(s) dA_c &= \int_{A_c} \underline{\rho}(s) \left[\underline{\rho}^T(s) \underline{\Psi}_0 - \bar{\varepsilon}_c(t_0) \right] \frac{1}{J(t_0, t_0)} dA_c = \\ &= \frac{1}{J(t_0, t_0)} \int_{A_c} \underline{\rho}(s) \underline{\rho}^T(s) dA_c \underline{\Psi}_0 - \frac{\bar{\varepsilon}_c(t_0)}{J(t_0, t_0)} \int_{A_c} \underline{\rho}(s) dA_c \\ &= \frac{1}{J(t_0, t_0)} (\underline{\underline{A}} \underline{\Psi}_0 - \underline{\underline{C}}_0) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Assunto:

$$\underline{\underline{C}}(t) = \bar{\varepsilon}_c(t) \begin{vmatrix} J_{c11} \\ J_{c1x} \\ J_{c1y} \\ J_{c1\omega} \end{vmatrix} \quad (4.27)$$

sostituendo le (4.25), (4.26), (4.27), nella (4.22) si ottiene:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\Psi}(t, z) + [E_S \underline{\underline{S}} + E_P \underline{\underline{P}}] \int_{t_0}^t d\underline{\Psi}(\tau, z) J(t, \tau) = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} (\underline{\underline{A}} \underline{\Psi}_0 - \underline{\underline{C}}_0) + \underline{\underline{C}}(t) \quad (4.28)$$

e posto:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \left[E_S \underline{\underline{S}} + E_P \underline{\underline{P}} \right] = \underline{\underline{F}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}}(t) = \underline{\underline{N}}(t)$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{N}}_0 \quad (4.29)$$

premultiplicando ambo i membri della (4.28) per $\underline{\underline{A}}^{-1}$ risulta infine:

$$\underline{\underline{\psi}}(t, z) + \underline{\underline{F}} \int_{t_0}^t d\underline{\underline{\psi}}(\tau, z) J(t, \tau) = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\underline{\psi}}_0 - \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\underline{N}}_0 + \underline{\underline{N}}(t) \quad (4.30)$$

La (4.30) è l'equazione integrale matriciale che governa il problema dell'evoluzione temporale dello stato di deformazione di una sezione con profilo aperto e parete di piccolo spessore soggetta ad azioni di lunga durata, nota che sia la risposta elastica istantanea ottenuta preventivamente risolvendo la (4.19).

Nella (4.30) non deve stupire l'assenza del vettore $\underline{\underline{M}}$ delle azioni interne presenti nella struttura (ed assunte per ipotesi costanti nel tempo) giacché la loro influenza è presa in conto attraverso il vettore $\underline{\underline{\psi}}_0$ che rappresenta la risposta elastica della sezione proprio a tali azioni interne.

Inoltre l'ipotesi che le azioni interne di lunga durata siano indipendenti dal tempo, normalmente soddisfatta dalle condizioni di esercizio di queste strutture, non è essenziale ai fini dell'impostazione dell'equazione matriciale che governa il problema. Qualora infatti le azioni interne fossero funzioni del tempo, la (4.23) diventerebbe:

$$\int_{A_c} d\sigma_c(t, z, s) \underline{\underline{\rho}}(s) dA_c + \int_{A_e} d\sigma_e(t, z, s) \underline{\underline{\rho}}(s) dA_e = d\underline{\underline{M}}(t, z) \quad (4.31)$$

da cui:

$$\begin{aligned} & \int_{A_c} \int_{t_0}^t d\sigma_c(\tau, z, s) \underline{\underline{\rho}}(s) J(t, \tau) dA_c = \\ & = - \left[E_S \underline{\underline{S}} + E_P \underline{\underline{P}} \right] \int_{t_0}^t d\underline{\underline{\psi}}(\tau, z) J(t, \tau) + \int_{t_0}^t d\underline{\underline{M}}(\tau, z) J(t, \tau) \end{aligned} \quad (4.32)$$

e quindi:

$$\underline{\underline{\psi}}(t, z) + \underline{\underline{F}} \int_{t_0}^t d\underline{\underline{\psi}}(\tau, z) J(t, \tau) = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\underline{\psi}}_0 - \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\underline{N}}_0 + \underline{\underline{N}}(t) + \int_{t_0}^t d\underline{\underline{M}}(\tau, z) J(t, \tau) \quad (4.33)$$

In questa trattazione si è peraltro preferito semplificare la (4.33) nella (4.30) perché, come già detto, il caso in cui risulti $dM(\tau) = 0$ copre la quasi totalità delle situazioni in cui si trovano in realtà queste strutture durante il loro esercizio. Inoltre, se tale ipotesi consente trascurabili semplificazioni del calcolo secondo il Metodo Generale, è di importanza capitale perché il Metodo delle Funzioni di Rilassamento Ridotte possa essere considerato competitivo rispetto al precedente.

5 Algebrizzazione del sistema risolvante

La soluzione del problema sezionale attraverso la (4.30) è assai complicata. In particolare, va osservato che le leggi costitutive elastoviscose lineari attualmente disponibili sono date sotto forma di funzioni di viscosità talmente complesse da non potersi determinare in forma chiusa la corrispondente funzione di rilassamento.

La soluzione della (4.30) può dunque essere ottenuta adottando una delle formule di quadratura tipiche del calcolo numerico, oppure adottando ipotesi semplificative.

5.1 Algebrizzazione mediante il metodo di Gauss

La soluzione della (4.30) secondo il Metodo generale si ottiene nel modo seguente: suddiviso l'intervallo $t_0 - t$ in sottointervalli mediante k tempi intermedi ($t_0, t_1, \dots, t_k = t$), se fosse noto $\underline{\psi}(t_k, z)$, l'integrale di sovrapposizione che compare nella (4.30) potrebbe essere determinato in via approssimata mediante la somma delle aree determinate dai punti, detti punti campione di Gauss, interni all' i -esimo intervallo compresi tra t_{i-1} e t_i , sicché, ricordando la (3.83), la (4.30) diventa (si trascura di indicare l'indice z che fino ad ora è stato riportato per ricordare che il calcolo di riferisce ad una assegnata sezione):

$$\underline{\psi}(t_k) + \underline{F} \sum_{i=1}^k \frac{\underline{\psi}(t_i) - \underline{\psi}(t_{i-1})}{2} \sum_{j=1}^n A_j \cdot J(t_k, t_{ij}) = \frac{J(t_k, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\psi}_0 - \frac{J(t_k, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{N}_0 + \underline{N}(t_k) \quad (5.1)$$

dove si ricorda che A_j sono i pesi di quadratura.

Detta:

$$\Delta \underline{\psi}^{(i)} = \underline{\psi}(t_i) - \underline{\psi}(t_{i-1}) \quad (5.2)$$

sottraendo all'equazione (5.1) la stessa scritta $t = t_{k-1}$ si ottiene:

$$\Delta \underline{\psi}^{(k)} + \underline{F} \left[\frac{\Delta \underline{\psi}^{(k)}}{2} \sum_{j=1}^n A_j \cdot J(t_k, t_{kj}) \right] + \underline{F} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta \underline{\psi}^{(i)}}{2} \sum_{j=1}^n A_j \cdot [J(t_k, t_{ij}) - J(t_{k-1}, t_{ij})] = \frac{J(t_k, t_0) - J(t_{k-1}, t_0)}{J(t_0, t_0)} (\underline{\psi}_0 - \underline{N}_0) + \underline{N}(t_k) - \underline{N}(t_{k-1}) \quad (5.3)$$

ovvero posto:

$$n'_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n A_j \cdot J(t_k, t_{kj}) \quad (5.4)$$

$$n''_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n A_j \cdot [J(t_k, t_{ij}) - J(t_{k-1}, t_{ij})] \quad (5.5)$$

$$\Delta J_k = J(t_k, t_0) - J(t_{k-1}, t_0) \quad (5.6)$$

la (5.3) si può scrivere:

$$\Delta \underline{\psi}^{(k)} = (\underline{I} + n'_k \underline{F})^{-1} \left[\frac{\Delta J_k}{J(t_0, t_0)} (\underline{\psi}_0 - \underline{N}_0) + \underline{N}(t_k) - \underline{N}(t_{k-1}) - \underline{F} \sum_{i=1}^{k-1} n''_{ki} \Delta \underline{\psi}^{(i)} \right] \quad (5.7)$$

dove \underline{I} è la matrice unità.

La (5.7) riduce la legge integrale (4.30) ad una legge elastica incrementale. Operativamente allora, calcolata la risposta elastica istantanea risolvendo (4.19), il metodo consiste nell'imporre dapprima $t_k = t_1$ risolvendo quindi la (5.7) e calcolando pertanto $\Delta \underline{\psi}^{(1)}$, noto esso si pone $t_k = t_2$ e si risolve la (5.7) ottenendo $\Delta \underline{\psi}^{(2)}$, e così di seguito fino a $t_k = t$.

L'approssimazione del metodo, che risulta chiaramente applicabile a qualunque tipo di funzione di viscosità, è legata alla suddivisione dell'intervallo $t - t_0$ adottata, poiché quanto più gli intervalli di suddivisione sono scelti con cura, tanto più l'approssimazione dell'integrale di sovrapposizione, ottenuto quale somma delle aree elementari, appare precisa e soddisfacente. Per tale scopo sarà necessario intervalli di tempo piccoli nelle epoche immediatamente seguenti l'applicazione dei carichi poiché in tali epoche le deformazioni viscoso crescono rapidamente, mentre al crescere dell'età della struttura gli intervalli possono diventare via via più grandi, dato che col tempo il fenomeno viscoso tende ad esaurirsi.

Nel caso in questione, avendo assunto che le azioni interne siano indipendenti dal tempo, come già presentato nel capitolo 3, un'efficace suddivisione può ottenersi imponendo che l'ampiezza degli intervalli $(t_k - t_0)$ siano in progressione geometrica ([34]):

$$t_k = (t_{k-1} - t_0) 10^{\frac{1}{m}} + t_0 \quad (3.76)$$

Il valore di m e l'ampiezza del primo intervallo vanno poi determinati in modo da minimizzare l'errore commesso nel sostituire l'integrale di sovrapposizione con una somma finita, tenendo presente la necessità di poter coprire periodi sufficientemente lunghi senza espandere a dismisura il numero degli intervalli. A tale scopo si propongono i valori già esposti al paragrafo 3.3.3.2.

5.2 Algebrizzazione mediante metodo A. A. E. M.

Secondo quanto già mostrato nel paragrafo 3.3.4, dalla (3.11):

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0) \cdot J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \cdot J(t, \tau) d\tau \quad (3.11)$$

si arriva alla (3.202):

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)] \quad (3.202)$$

Lo stesso ragionamento può essere applicato al caso in esame: la (4.30)

$$\underline{\psi}(t, z) + \underline{F} \int_{t_0}^t d\underline{\psi}(\tau, z) J(t, \tau) = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\psi}_0 - \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{N}_0 + \underline{N}(t) \quad (4.30)$$

diviene:

$$\underline{\psi}(t, z) + \underline{F} \frac{\underline{\psi}(t, z) - \underline{\psi}(t_0, z)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)] = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\psi}_0 - \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{N}_0 + \underline{N}(t) \quad (5.8)$$

da cui, ricordando che $\underline{\psi}(t_0, z) = \underline{\psi}_0$, si ricava:

$$\underline{\psi}(t, z) = \left[\underline{I} + \underline{F} \frac{[1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)]}{E_c(t_0)} \right]^{-1} \left[\underline{\psi}_0 \left(\underline{F} \frac{[1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)]}{E_c(t_0)} + \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \right) - \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{N}_0 + \underline{N}(t) \right] \quad (5.9)$$

Operativamente allora, calcolata la risposta elastica istantanea tramite la (4.19), si risolve la (5.9): infatti tale metodo, rispetto al precedente, non necessita di calcolare la soluzione per ogni istante di tempo t_i riducendo così l'onere computazionale e di memoria, non essendo più necessaria la registrazione di tutta la precedente storia tensionale.

5.3 Deformazioni e tensioni nei materiali

5.3.1 Metodo di Gauss

Una volta determinati sia $\underline{\psi}_0$ che gli incrementi nel tempo $\Delta\underline{\psi}^{(i)}$ si può determinare $\underline{\psi}^{(k)}$:

$$\underline{\psi}^{(k)} = \underline{\psi}_0 + \sum_{i=1}^k \Delta\underline{\psi}^{(i)} \quad (5.10)$$

e dalla (5.10) per le (2.13) e (4.13):

$$\varepsilon(t_k, z, s) = \underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}^{(k)}$$

$$\sigma_s(t_k, z, s) = [\varepsilon(t_k, z, s) - \bar{\varepsilon}_s] E_s \quad (5.11)$$

$$\sigma_p(t_k, z, s) = [\varepsilon(t_k, z, s) - \bar{\varepsilon}_p + \bar{\varepsilon}_{pj}] E_p$$

In particolare la deformazione al limite di decompressione della i-esima barra di acciaio ad alta resistenza preteso, all'istante t_k , vale:

$$\varepsilon_t(t_k, z, s) = \varepsilon(t_k, z, s) + \bar{\varepsilon}_{pj} - \sigma_c(t_k, z, s) J(t_k, t_0) \quad (5.12)$$

dove il primo termine a secondo membro rappresenta la deformazione congruente di acciaio e calcestruzzo all'istante considerato, il secondo termine è la distorsione impressa alla barra, sicché la somma dei primi due termini rappresenta la deformazione totale della j-esima barra, mentre l'ultimo termine è la deformazione necessaria per annullare la tensione nel calcestruzzo in corrispondenza della barra considerata.

Restano ancora da valutare le tensioni nel calcestruzzo che, anziché dalla (4.12) che richiederebbe l'ulteriore soluzione di un'equazione integrale di Volterra, si possono ricavare secondo il metodo originale di seguito esposto.

Dalla (4.24) segue che:

$$\int_{A_c} d\sigma_c(t_k, z, s) \underline{\rho}(s) dA_c = - \int_{A_e} d\sigma_e(t_k, z, s) \underline{\rho}(s) dA_e = -d\underline{M}_e^{(k)} \quad (5.13)$$

(si ricordi che si è assunto l'indice "e" per definire gli acciai in genere, sostituito, ove necessario, con gli indici "s" oppure "p" che specificano trattarsi di acciaio ordinario o ad alta resistenza).

Nella (5.13) compare l'incremento delle sollecitazioni nell'acciaio nel tempo infinitesimo dt, cui corrisponde una variazione $d\sigma_c$ della tensione del calcestruzzo. Poiché lo stato di sollecitazione nella sezione è costante (indipendente dal tempo), necessariamente la variazione delle

tensioni negli acciai dovrà essere equilibrata dalla variazione delle tensioni nel calcestruzzo e ciò è quanto esprime la (5.13).

Trasformando i differenziali in differenze finite, la (5.13) diventa:

$$\int_{A_c} \Delta \sigma_c(t_k, z, s) \underline{\rho}(s) dA_c = -\Delta \underline{M}_e^{(k)} \quad (5.14)$$

dove:

$$\Delta \underline{M}_e =$$

$$\sum_{j=1}^{n_s} [\sigma_s(t_k, z, s) - \sigma_s(t_{k-1}, z, s)] \underline{\rho}(s_j) A_{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} [\sigma_p(t_k, z, s) - \sigma_p(t_{k-1}, z, s)] \underline{\rho}(s_j) A_{p_j} \quad (5.15)$$

Assunto poi per analogia con le (2.13) e (4.12):

$$\Delta \sigma_c^{(k)} = \sigma_c(t_k, z, s) - \sigma_c(t_{k-1}, z, s) = \tilde{E}(t_k, t_{k-1}) \underline{\rho}^T(s) \tilde{\underline{\Psi}}(t_k, t_{k-1}, z) \quad (5.16)$$

la (4.54) diventa:

$$\tilde{E} \underline{A} \tilde{\underline{\Psi}} = -\Delta \underline{M}_e^{(k)} \quad (5.17)$$

da cui:

$$\tilde{E} \tilde{\underline{\Psi}} = \underline{A}^{-1} \left(-\Delta \underline{M}_e^{(k)} \right) \quad (5.18)$$

e quindi:

$$\Delta \sigma_c^{(k)} = \underline{\rho}^T(s) \underline{A}^{-1} \left(-\Delta \underline{M}_e^{(k)} \right) \quad (5.19)$$

$$\sigma_c(t_k, z, s) = \sigma_c(t_0, z, s) + \sum_{j=1}^k \Delta \sigma_c^{(j)} \quad (5.20)$$

con:

$\sigma_c(t_0)$ dall'ultima delle (4.20).

Le (5.15), (5.19) e (5.20) permettono quindi di valutare passo passo la variazione dello stato di sforzo nel calcestruzzo, inoltre il suo stato di deformazione all'istante t_k si può valutare direttamente attraverso la (2.13), specializzata per $\underline{\psi} = \underline{\psi}(t_k)$.

5.3.2 Metodo A. A. E. M.

Una volta determinato $\underline{\psi}(t, z)$, dalle (2.13) e (4.13):

$$\varepsilon(t, z, s) = \underline{\rho}^T(s) \underline{\psi}(t, z)$$

$$\sigma_s(t, z, s) = [\varepsilon(t, z, s) - \bar{\varepsilon}_s] E_s \quad (5.21)$$

$$\sigma_p(t, z, s) = [\varepsilon(t, z, s) - \bar{\varepsilon}_p + \bar{\varepsilon}_{pj}] E_p$$

Come prima, la deformazione al limite di decompressione della i-esima barra di acciaio ad alta resistenza preteso, al tempo t, vale:

$$\varepsilon_t(t, z, s) = \varepsilon(t, z, s) + \bar{\varepsilon}_{pj} - \sigma_c(t, z, s) J(t, t_0) \quad (5.22)$$

Dalla (3.202):

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] + \frac{\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)] \quad (3.202)$$

si ricava quindi la tensione nel calcestruzzo:

$$\sigma_c(t) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)} \left[\varepsilon_c(t, z, s) + \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \varphi(t, t_0) [\chi(t, t_0) - 1] \right] \quad (5.23)$$

con:

$$\varepsilon_c(t, z, s) = \varepsilon(t, z, s) - \bar{\varepsilon}_c(t)$$

$\sigma_c(t_0)$ dall'ultima delle (4.20).

5.4 Soluzione del problema della ripartizione del momento torcente in viscoelasticità lineare

Si consideri l'equazione (4.33).

In caso di materiale omogeneo a comportamento elastoviscoso lineare, dalla prima delle (4.29), poiché sono nulle le aree di acciaio lento e preteso (4.18), segue che anche la matrice $\underline{\underline{F}}$ è nulla.

Tralasciando le variazioni atensionali (4.29), anche i vettori $\underline{\underline{N}}(t)$ e $\underline{\underline{N}}_0$ risultano nulli.

Qualora ci fossero variazioni di carico esterno, se ne terrebbe conto tramite il principio di sovrapposizione degli effetti di Mc Henry; quindi, per i vari intervalli di tempo, $\underline{\underline{M}}$ può essere considerato costante, di conseguenza l'ultimo termine della (4.33) è nullo.

Pertanto la (4.33) diviene:

$$\underline{\underline{\psi}}(t, z) = \frac{J(t, t_0)}{J(t_0, t_0)} \underline{\underline{\psi}}_0 \quad (5.24)$$

Tale equazione non rappresenta nient'altro che il primo teorema della viscosità lineare (par.3.2.1.1): "in una struttura omogenea a comportamento elasto-viscoso lineare, coefficiente di Poisson costante nel tempo e vincoli fissi, soggetta a sole azioni statiche, lo stato di deformazione deve essere valutato sommando a quello elastico gli effetti della viscosità ad esso conseguenti". Infatti, ricordando la (3.16) e la (3.21), la (5.24) risulta:

$$\underline{\underline{\psi}}(t, z) = \frac{\frac{1}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)]}{\frac{1}{E_c(t_0)}} \underline{\underline{\psi}}_0 = [1 + \varphi(t, t_0)] \underline{\underline{\psi}}_0 \quad (5.25)$$

Il primo teorema della viscosità lineare conclude poi osservando che "lo stato di sollecitazione coincide con quello valutabile in fase puramente elastica lineare". Per verificare questo asserto si può osservare che le variazioni di tensione nel calcestruzzo possono essere determinate tramite la (5.19), in cui per quanto detto sopra $\Delta \underline{\underline{M}}_e = 0$. Ne segue che le variazioni di tensione $\Delta \sigma_c$ sono identicamente nulle, c.v.d.

Una conseguenza di quanto ora dimostrato riguarda l'evoluzione temporale della ripartizione del momento torcente sollecitante. L'ultima delle (2.58) dimostra infatti chiaramente che il problema della ripartizione del momento torcente sollecitante tra portanza alla Vlasov e alla De Saint Venant induce una iperstaticità interna relativa al comportamento sezionale di queste tipologie strutturali. La constatazione che lo stato di sollecitazione non subisca variazioni temporali implica che anche la ripartizione del momento torcente tra le due portanze

torsionali sia invariante nel tempo. Ciò dipende dal fatto che la portanza torsionale alla Vlasov è legata ad una distribuzione di tensioni normali, per cui se queste non variano non varierà neanche la prima. È quindi evidente che non potrà variare nemmeno la portanza torsionale alla De Saint Venant (che induce invece una distribuzione di tensioni tangenziali), che è la differenza tra il momento torcente sollecitante e quello alla Vlasov.

Osservato dunque che la ripartizione del momento torcente è identica nel caso di sezione omogenea a comportamento elastico e sezione omogenea a comportamento elasto-viscoso, lo stesso non può dirsi in generale nel caso di una sezione eterogenea. Nella equazione (4.30) infatti la matrice $\underline{\underline{E}}$ non è nulla e del resto è un dato di fatto che nel caso di sezione eterogenea non valga il primo principio della viscosità lineare, si abbia cioè una variazione della distribuzione delle tensioni normali all'interno della sezione; ciò tuttavia non implica necessariamente una variazione nel tempo del bitaglio T_ω con azioni applicate costanti. Infatti, ricordando che:

$$T_\omega = \frac{dM_\omega}{dz} \quad (5.26)$$

e sostituendo l'ultima delle (2.23) si ottiene:

$$T_\omega(z, t) = \int_{A_c} \frac{\partial \sigma_c(z, s, t)}{\partial z} \omega(s) dA_c + \int_{A_e} \frac{\partial \sigma_e(z, s, t)}{\partial z} \omega(s) dA_e \quad (5.27)$$

(si ricordi che si è assunto l'indice "e" per definire gli acciai in genere).

Se a parità di carico la viscosità non cambia la ripartizione del momento torcente tra le due portanze torsionali, anche nelle sezioni eterogenee (una parte omogenea elastoviscosa ed una parte omogenea elastica), deve risultare $\frac{\partial T_\omega(z, t)}{\partial t} = 0$ (ricordando che $M_t = T_\omega + M_{DS}$). Infatti, tramite la (5.27), si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\omega(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{A_c} \frac{\partial \sigma_c(z, s, t)}{\partial z} \omega(s) dA_c + \int_{A_e} \frac{\partial \sigma_e(z, s, t)}{\partial z} \omega(s) dA_e \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{A_c} \frac{\partial \sigma_c(z, s, t)}{\partial t} \omega(s) dA_c + \int_{A_e} \frac{\partial \sigma_e(z, s, t)}{\partial t} \omega(s) dA_e \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Per la (5.13), e ricordando dalla prima delle (2.14) che l'ultima componente del vettore $\underline{\underline{p}}$ è proprio $\omega(s)$, i due termini tra parentesi della (5.28) sono uguali ed opposti, per cui:

$$\frac{\partial T_\omega(z, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.29)$$

c.v.d.

5.5 Strutture non omogenee in viscoelasticità lineare

5.5.1 Soluzioni teoriche

Mentre nell'analisi viscoelastica dei solidi omogenei ed isotropi si ottengono sostanziali semplificazioni, soprattutto per la possibilità di applicare i teoremi fondamentali della viscoelasticità lineare, lo studio teorico delle strutture eterogenee in campo viscoelastico si rivela alquanto complesso.

Nel caso di strutture composte da un numero finito di parti tra di loro non omogenee (conci o singole aste) le procedure dell'analisi funzionale secondo Volterra possono in linea di principio essere ancora adottate. L'argomento può essere affrontato estendendo il formalismo degli operatori funzionali di Volterra e Mandel ai sistemi ereditari eterogenei ([60], [61]). In ogni caso si perviene a sistemi di equazioni integrali che possono essere risolti con il metodo della matrice dei nuclei risolvibili, ciò comporta la soluzione simultanea di n^2 equazioni integrali di Volterra essendo n il grado di iperstaticità della struttura [35]. Seppure con un onere computazionale rilevante la soluzione può essere ottenuta utilizzando i procedimenti numerici di risoluzione delle equazioni integrali. Procedure numeriche del tutto generali possono ovviamente essere comunque impostate, basate sull'accoppiamento della discretizzazione nello spazio secondo tecniche standard (suddividendo la struttura in aste, conci o elementi finiti) e della discretizzazione nel tempo (associata ai medesimi procedimenti numerici dell'equazioni integrali, o alle formulazioni approssimate di tipo differenziale equivalenti). Tali procedure, indicate nei documenti tecnici normativi con la denominazione convenzionale General Method, trovano attualmente sempre maggior spazio nelle applicazioni ([34]).

Nel caso particolare, di notevole interesse applicativo, in cui l'eterogeneità sia dovuta solamente alla presenza di n elementi elastici (ad esempio vincoli interni o esterni, o elementi strutturali associati) si riesce, attraverso opportuni formalismi, a disaccoppiare i sistemi di equazioni integrali procedendo alla soluzione di equazioni integrali singole. Ciò è possibile introducendo le cosiddette funzioni di rilassamento ridotte R^* . Per le due condizioni, frequenti nella pratica, di azioni statiche o geometriche (forze o deformazioni impresse) costanti, e per il caso di variazione di schema statico immediatamente successiva all'applicazione dei carichi, possono così ancora ottenersi soluzioni compatte, scritte in forma matriciale, che possono essere considerate come un'estensione dei primi tre teoremi della viscoelasticità lineare. Oltre che per l'analisi delle strutture in calcestruzzo associate a vincoli o elementi strutturali elastici, tali soluzioni possono essere utilizzate anche per l'analisi di sezioni in calcestruzzo contenenti elementi elastici ([25], [35], [56], [62], [63], [64], [65]).

5.5.2 Considerazioni applicative

Le moderne strutture in calcestruzzo sono caratterizzate da eterogeneità. In ragione della complessità dell'apparato teorico ora descritto, e dell'onere computazionale connesso, l'analisi rigorosa delle strutture non omogenee deve essere limitata ai casi di provata significativa influenza della non omogeneità.

Nell'analisi a livello di struttura è certamente possibile introdurre una prima semplificazione, consistente nell'ammettere che l'eterogeneità dovuta alla sola presenza delle armature in acciaio nelle strutture in calcestruzzo armato abbia, per i normali valori di percentuali d'armatura, un effetto limitato sulla risposta viscoelastica d'insieme della struttura stessa. Si può ritenere quindi, in base a vari studi effettuati nel corso degli ultimi anni (si veda per esempio [62], [66]) che l'intera struttura, o la sua parte in calcestruzzo quando si sia in presenza di vincoli od elementi strutturali elastici associati in acciaio, possano in genere essere trattate con sufficiente approssimazione come omogenee (anche in ragione del fatto che solitamente la percentuale geometrica di armatura nella sezione è inferiore al 2%). Risulta così possibile recuperare le formulazioni compatte derivate dai teoremi fondamentali della viscoelasticità per le strutture omogenee a vincoli rigidi (come effettuato nel paragrafo precedente), o le loro estensioni nel caso di vincoli elastici. Ciò comporta non solo una consistente riduzione dell'onere computazionale, ma consente soprattutto una maggiore chiarezza interpretativa dei fenomeni in esame.

Nel caso di strutture precomprese il problema si complica poiché la viscosità tende a modificare in senso negativo lo stato di autotensione indotto dalla precompressione, concepito proprio per ottenere un ottimale comportamento in esercizio. In generale quindi si tende a adottare, per quanto possibile, elementi precompressi isostatici; a questa regola fanno eccezione pochi casi, relativi in generale a ponti per i quali però sempre più spesso si adotta una precompressione non congruente che permette di correggere il tiro dei cavi e dunque anche lo stato di autotensione della struttura in funzione dell'evoluzione temporale del comportamento della stessa.

6 Implementazione in MATLAB

Per la risoluzione del problema teorico, tramite i metodi esposti nei capitoli precedenti, si è scritto un codice di programma per l'implementazione nel software MATLAB R2013b. Tale codice è stato sviluppato in due casi di profili in commercio: una trave ad asse rettilineo con profilo medio a π (fig. 6.1) e una con profilo medio a shed (fig. 6.2). In entrambi i casi sono previsti solo cavi pre-tesi o post-tesi, senza armatura lenta.

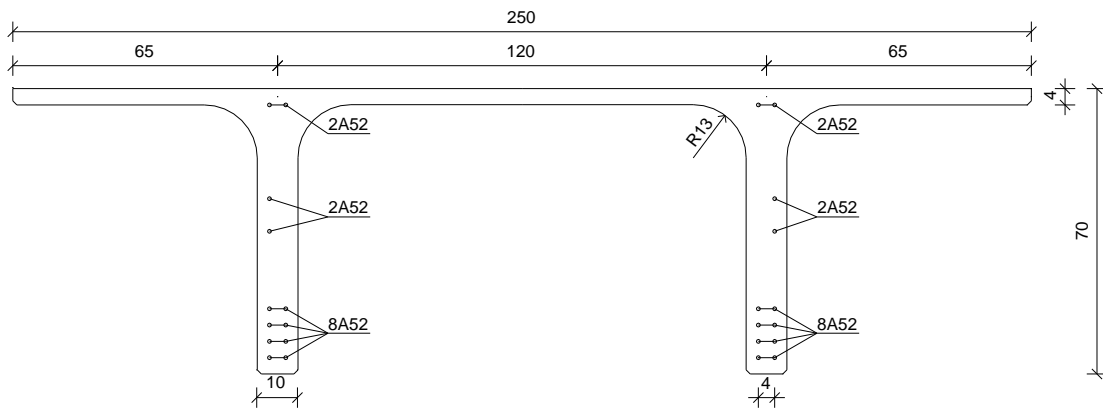


Fig.6. 1 – Profilo commerciale a π

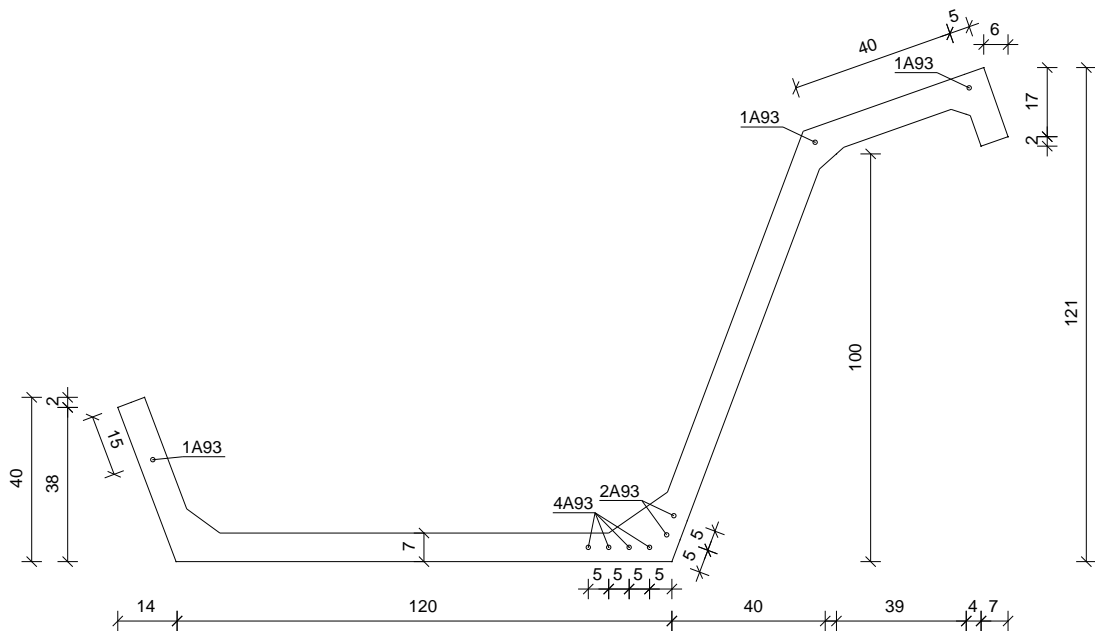


Fig.6. 2 - Profilo commerciale a shed

Nelle figure sono mostrate tutte le dimensioni e le posizioni dei ferri necessarie per inserire i dati di input nel programma.

Si sottolinea che per la scrittura del codice del programma sono state inserite tutte le espressioni viste nei capitoli precedenti; in particolare le equazioni implementate sono state rese parametriche coi dati di input e adeguate al calcolo matriciale proprio del software MATLAB.

6.1 Dati di input

Per entrambi i profili i dati di input da inserire sono i seguenti (tra virgolette il nome della variabile in MATLAB e tra parentesi quadre le unità di misura):

- lunghezza trave "L" [m]
- ascissa "V" [m] alla quale si vuole effettuare la verifica
- peso specifico del materiale composito (c.a.) "peso" [kN/m³]
- spessori delle singole pareti costituenti il profilo "t" [m]
- misure delle singole pareti costituenti il profilo [m]: per il profilo a π si inseriscono direttamente le lunghezze "s" dei segmenti costituenti il profilo medio (fig.6.1.3), per il profilo a shed si inseriscono le coordinate "a" e "b" rispettivamente lungo x e lungo y dei nodi di ogni segmento del profilo medio (fig.6.1.4)
- coordinate dei cavi "sp" [m] (vedi fig.6.1.3 e 6.1.4)
- aree dei cavi "Asp" [m²]
- proprietà fisiche (coefficiente di dilatazione termica lineare "alfa" [1/K]) e meccaniche dei materiali (modulo elastico "Ep" [kN/m²])
- azioni esterne agenti "M1, Mx, My, Mw" [kN, kNm, kNm, kNm²] nella sezione considerata (2.23); per i versi positivi delle azioni applicate si fa riferimento alla figura 2.5.2, che per i casi considerati diventa:

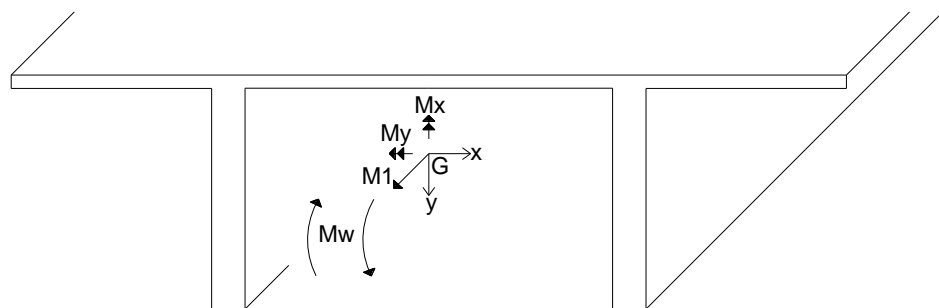


Fig.6.1. 1 – Convenzioni sulle azioni esterne – profilo a π

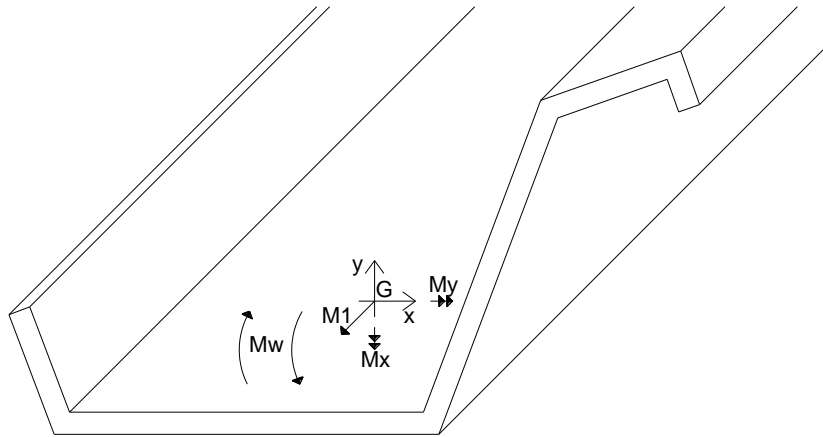


Fig.6.1. 2 - Convenzioni sulle azioni esterne – profilo a shed

Si sottolinea che il programma in base alla geometria della sezione, del peso e dell'ascissa "V" alla quale si vuole effettuare la verifica calcola automaticamente il momento agente dovuto al peso proprio.

- eventuali differenze di temperatura "deltaT" [°C]
- tecnologia di precompressione (pre-tensione o post-tensione) "tec" e tiro iniziale dei cavi "Xm" [kN]; si può inoltre inserire: la perdita per rilassamento "rila" [%], il coefficiente di attrito in curva tra cavo e guaina "attrito" , la distanza "zeta" della sezione considerata dalla testata a tendere più vicina, in cui il tiro del cavo X_m , la somma delle deviazioni angolari "dev" del tracciato del cavo tra la testata a tendere più vicina e la sezione considerata, indipendente dal verso della curvatura [rad], la deviazione angolare convenzionale "kappa"
- per il calcestruzzo: tipo di cemento "alfaj" e "cem", resistenza caratteristica cilindrica "fck" [MPa], tempo di messa in carico "t0J" [giorni], temperatura prevalente (durante la maturazione) "TJ" [°C], umidità relativa dell'ambiente in cui sarà inserito il manufatto "RH" [%]

Per ulteriori informazioni vedere allegato 02 (Guida all'utente).

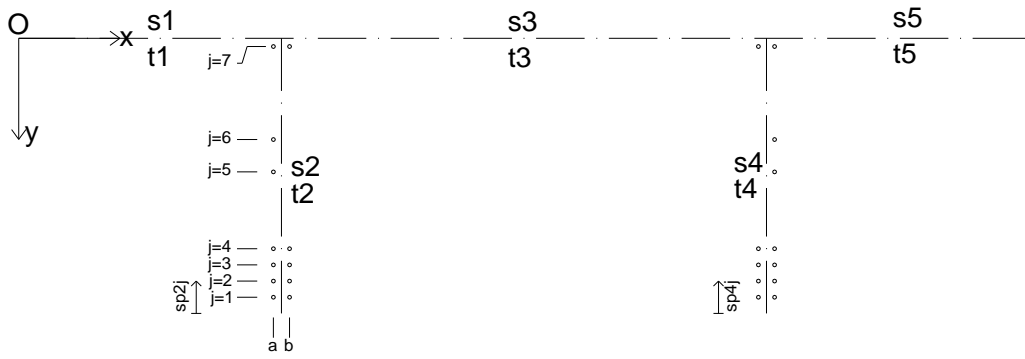


Fig.6.1. 3 – Profilo medio e sue caratteristiche – profilo a π

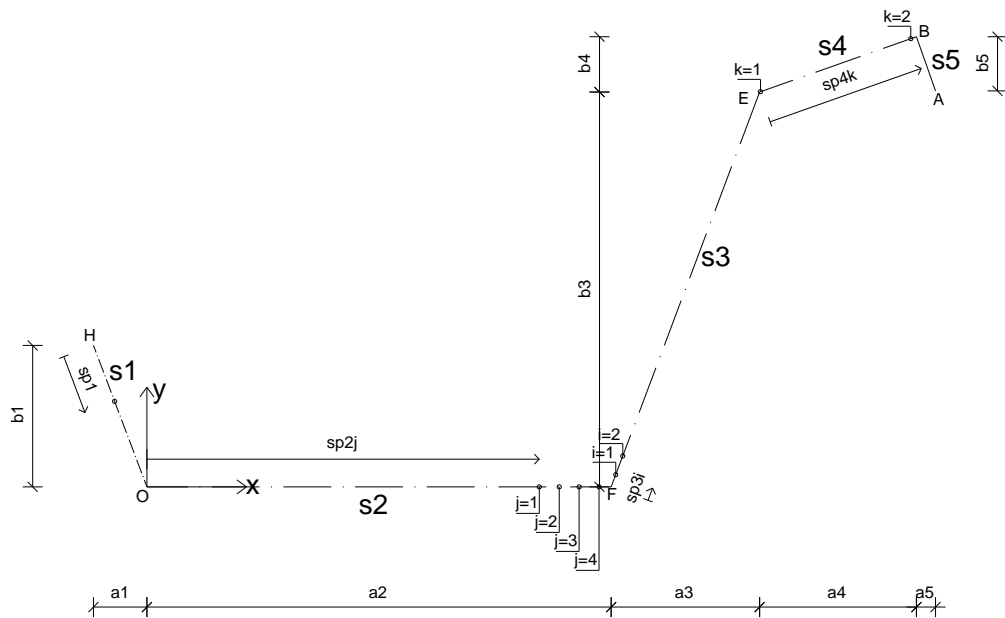


Fig.6.1. 4 - Profilo medio e sue caratteristiche – profilo a shed

6.2 Risultati ottenuti

6.2.1 Profilo a π

6.2.1.1 Proprietà geometriche della sezione

Per quanto concerne le proprietà geometriche della sezione si mostrano di seguito i risultati ottenuti; in particolare nella tabella 6.2.1.1.1 e nella figura 6.2.1.1.1 si mostra il baricentro G rispetto al sistema di riferimento originario di origine O (x_G, y_G), il nuovo sistema di riferimento baricentrico e principale d'inerzia (\bar{x}, \bar{y}), i momenti d'inerzia nel nuovo sistema di riferimento (J_{xx}, J_{yy}), il centro di taglio D rispetto al sistema di riferimento originario di origine O (x_D, y_D), l'origine P_0 della coordinata curvilinea lungo il profilo medio, il momento d'inerzia settoriale rispetto al polo D e all'origine P_0 ($J_{\omega\omega}$). Si riportano inoltre in tab.6.2.1.1.2 e in tab.6.2.1.1.3 le coordinate (ascissa e ordinata) e la coordinata settoriale dei nodi del calcestruzzo e dei cavi rispetto al sistema di riferimento baricentrico e principale d'inerzia (x, y) e rispetto al centro di taglio (ω).

x_G [m]	y_G [m]	J_{xx} [m ⁴]	J_{yy} [m ⁴]	x_D [m]	y_D [m]	$J_{\omega\omega}$ [m ⁶]
1,25	0,21	0,0997	0,0118	1,25	-0,16	0,0691

Tab.6.2.1.1.1 – Caratteristiche geometriche del profilo a π

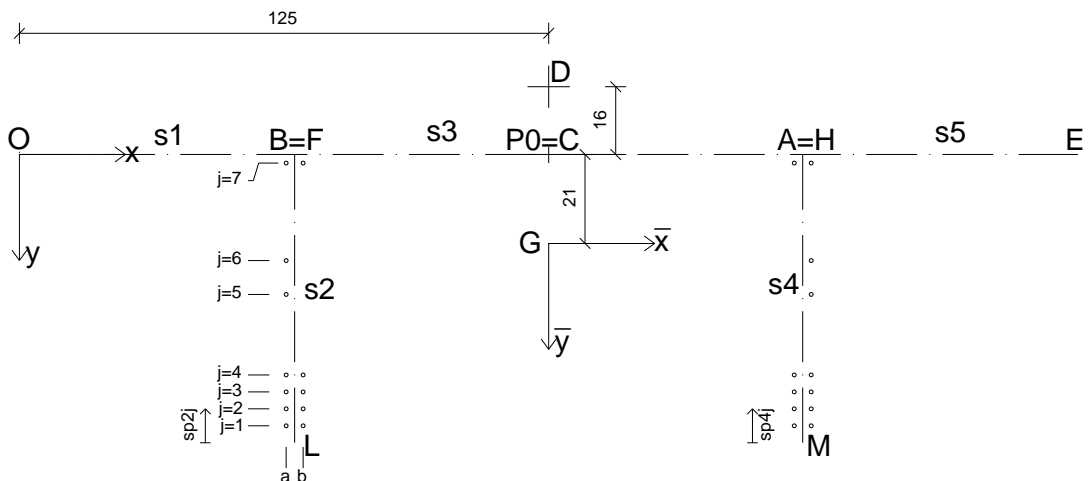


Fig.6.2.1.1.1 – Punti notevoli del profilo a π

punti	x [m]	y [m]	ω [m ²]
O	-1,25	-0,2058	0,2051
B	-0,6	-0,2058	0,0985
C	0	-0,2058	0,0000
A	0,6	-0,2058	-0,0985
E	1,25	-0,2058	-0,2051
F	-0,6	-0,2058	0,0985
L	-0,6	0,4742	-0,3095
H	0,6	-0,2058	-0,0985
M	0,6	0,4742	0,3095

cavi	x [m]	y [m]	ω [m ²]
sp21	-0,6	0,4342	-0,0244
sp22	-0,6	0,3942	-0,0095
sp23	-0,6	0,3542	0,0044
sp24	-0,6	0,3142	0,0173
sp25	-0,6	0,1242	0,0658
sp26	-0,6	0,0442	0,0797
sp27	-0,6	-0,1858	0,0983
sp41	0,6	0,4342	0,0244
sp42	0,6	0,3942	0,0095
sp43	0,6	0,3542	-0,0044
sp44	0,6	0,3142	-0,0173
sp45	0,6	0,1242	-0,0658
sp46	0,6	0,0442	-0,0797
sp47	0,6	-0,1858	-0,0983

Tab.6.2.1.1. 2 - Proprietà dei punti notevoli del calcestruzzo (a sx) e dei cavi (a dx) – profilo a π

6.2.1.2 Funzione di viscosità

Per costruire la funzione di viscosità si fa riferimento a quanto scritto nel paragrafo 3.3.2.3. In particolare i dati di input (oltre alla geometria della sezione, che definisce l'area della sezione e il perimetro a contatto con l'atmosfera), riassunti in Tab.6.2.1.2.1, sono:

α	t_0 [giorni]	T [°C]	f_{ck} [MPa]	RH [%]
0	21	20	40	50

Tab.6.2.1.2. 1 – Dati per il calcolo della funzione di viscosità – profilo a π

Dall'algoritmo implementato si ottiene la seguente funzione di viscosità J:

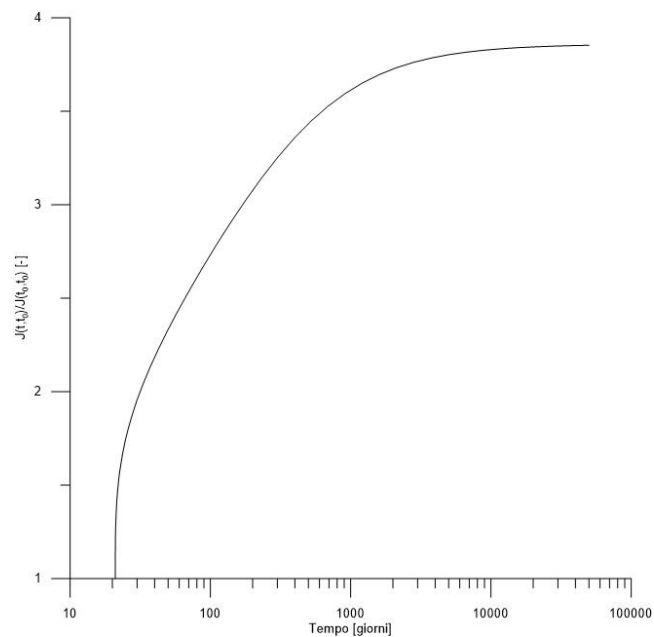


Fig.6.2.1.2. 1 – Funzione di viscosità in output– profilo a π

6.2.1.3 Verifiche del programma

6.2.1.3.1 Verifica del 1° teorema della viscosità (sezione omogenea)

Seguendo l'enunciato del teorema si pongono nulle le deformazioni termiche, nel caso di una sezione costituita da solo calcestruzzo. Nelle seguenti tabelle si verifica che le deformazioni del calcestruzzo (riportato a titolo esemplificativo solo per i punti O, E, M) fornite dal programma "ε_c" coincidano esattamente con "ε_c verifica", ossia quelle calcolate moltiplicando la deformazione elastica per (1+φ). Si verifica inoltre la corrispondenza dei risultati tra il metodo AAEM (tab.6.2.1.3.1.1) e il metodo di Gauss (tab.6.2.1.3.1.2).

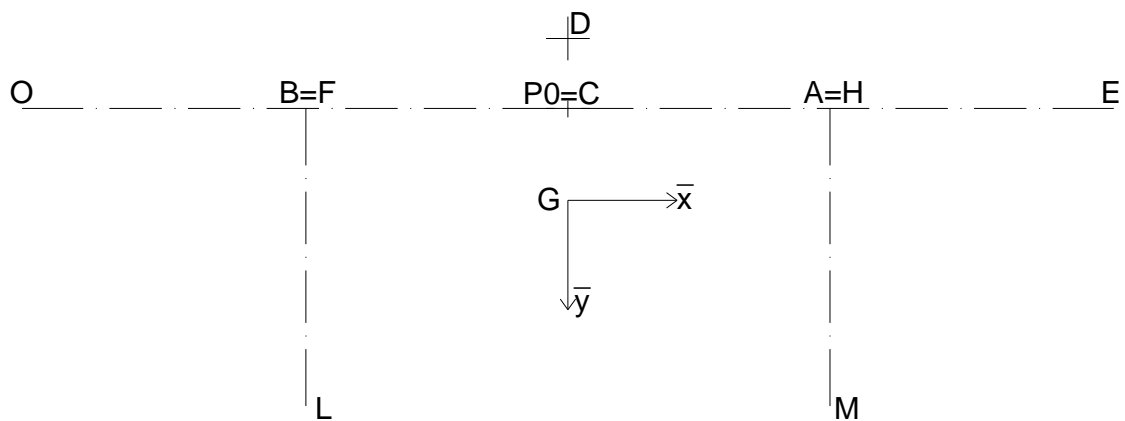


Fig.6.2.1.3.1. 1 – Punti notevoli del calcestruzzo – verifica 1° teorema – profilo a π

Tempi [giorni]	1+φ	ε _c [-]			ε _c verifica			Δε _c verifica		
		O	E	M	O	E	M	O	E	M
20,96	1,00	-0,000286	-0,000168	0,000543	-0,000286	-0,000168	0,000543	0,000000	0,000000	0,000000
21,34	1,37	-0,000392	-0,000230	0,000744	-0,000392	-0,000230	0,000744	0,000000	0,000000	0,000000
21,46	1,40	-0,000402	-0,000235	0,000762	-0,000402	-0,000235	0,000762	0,000000	0,000000	0,000000
21,63	1,44	-0,000412	-0,000242	0,000782	-0,000412	-0,000242	0,000782	0,000000	0,000000	0,000000
21,85	1,48	-0,000423	-0,000248	0,000803	-0,000423	-0,000248	0,000803	0,000000	0,000000	0,000000
22,15	1,52	-0,000436	-0,000255	0,000827	-0,000436	-0,000255	0,000827	0,000000	0,000000	0,000000
22,54	1,57	-0,000449	-0,000263	0,000852	-0,000449	-0,000263	0,000852	0,000000	0,000000	0,000000
23,07	1,62	-0,000464	-0,000272	0,000880	-0,000464	-0,000272	0,000880	0,000000	0,000000	0,000000
23,77	1,68	-0,000480	-0,000281	0,000910	-0,000480	-0,000281	0,000910	0,000000	0,000000	0,000000
24,71	1,74	-0,000497	-0,000291	0,000943	-0,000497	-0,000291	0,000943	0,000000	0,000000	0,000000
25,96	1,80	-0,000516	-0,000302	0,000979	-0,000516	-0,000302	0,000979	0,000000	0,000000	0,000000
27,63	1,87	-0,000536	-0,000314	0,001017	-0,000536	-0,000314	0,001017	0,000000	0,000000	0,000000
29,85	1,95	-0,000558	-0,000327	0,001059	-0,000558	-0,000327	0,001059	0,000000	0,000000	0,000000
32,82	2,03	-0,000582	-0,000341	0,001104	-0,000582	-0,000341	0,001104	0,000000	0,000000	0,000000
36,77	2,12	-0,000608	-0,000356	0,001153	-0,000608	-0,000356	0,001153	0,000000	0,000000	0,000000
42,05	2,22	-0,000635	-0,000372	0,001205	-0,000635	-0,000372	0,001205	0,000000	0,000000	0,000000
49,08	2,32	-0,000664	-0,000389	0,001261	-0,000664	-0,000389	0,001261	0,000000	0,000000	0,000000
58,46	2,43	-0,000695	-0,000408	0,001319	-0,000695	-0,000408	0,001319	0,000000	0,000000	0,000000
70,96	2,54	-0,000728	-0,000427	0,001381	-0,000728	-0,000427	0,001381	0,000000	0,000000	0,000000
87,64	2,66	-0,000762	-0,000446	0,001445	-0,000762	-0,000446	0,001445	0,000000	0,000000	0,000000
109,87	2,78	-0,000797	-0,000467	0,001511	-0,000797	-0,000467	0,001511	0,000000	0,000000	0,000000
139,53	2,91	-0,000831	-0,000487	0,001578	-0,000831	-0,000487	0,001578	0,000000	0,000000	0,000000
179,07	3,03	-0,000866	-0,000507	0,001643	-0,000866	-0,000507	0,001643	0,000000	0,000000	0,000000
231,81	3,14	-0,000900	-0,000527	0,001707	-0,000900	-0,000527	0,001707	0,000000	0,000000	0,000000
302,13	3,25	-0,000931	-0,000546	0,001767	-0,000931	-0,000546	0,001767	0,000000	0,000000	0,000000
395,91	3,36	-0,000960	-0,000563	0,001822	-0,000960	-0,000563	0,001822	0,000000	0,000000	0,000000
520,96	3,45	-0,000986	-0,000578	0,001872	-0,000986	-0,000578	0,001872	0,000000	0,000000	0,000000
687,72	3,53	-0,001009	-0,000591	0,001915	-0,001009	-0,000591	0,001915	0,000000	0,000000	0,000000
910,10	3,59	-0,001029	-0,000603	0,001951	-0,001029	-0,000603	0,001951	0,000000	0,000000	0,000000
1206,65	3,65	-0,001045	-0,000612	0,001982	-0,001045	-0,000612	0,001982	0,000000	0,000000	0,000000
1602,10	3,70	-0,001058	-0,000620	0,002007	-0,001058	-0,000620	0,002007	0,000000	0,000000	0,000000
2129,44	3,73	-0,001068	-0,000626	0,002027	-0,001068	-0,000626	0,002027	0,000000	0,000000	0,000000
2832,67	3,76	-0,001077	-0,000631	0,002043	-0,001077	-0,000631	0,002043	0,000000	0,000000	0,000000
3770,43	3,79	-0,001083	-0,000635	0,002055	-0,001083	-0,000635	0,002055	0,000000	0,000000	0,000000
5020,96	3,80	-0,001088	-0,000638	0,002065	-0,001088	-0,000638	0,002065	0,000000	0,000000	0,000000
6688,57	3,82	-0,001092	-0,000640	0,002072	-0,001092	-0,000640	0,002072	0,000000	0,000000	0,000000
8912,36	3,83	-0,001095	-0,000642	0,002078	-0,001095	-0,000642	0,002078	0,000000	0,000000	0,000000
11877,83	3,84	-0,001097	-0,000643	0,002082	-0,001097	-0,000643	0,002082	0,000000	0,000000	0,000000
15832,35	3,84	-0,001099	-0,000644	0,002085	-0,001099	-0,000644	0,002085	0,000000	0,000000	0,000000
21105,79	3,85	-0,001100	-0,000645	0,002088	-0,001100	-0,000645	0,002088	0,000000	0,000000	0,000000
28138,03	3,85	-0,001101	-0,000645	0,002090	-0,001101	-0,000645	0,002090	0,000000	0,000000	0,000000
37515,67	3,85	-0,001102	-0,000646	0,002091	-0,001102	-0,000646	0,002091	0,000000	0,000000	0,000000

Tab.6.2.1.3.1. 1 – Verifica 1° teorema – A.A.E.M.M. - profilo a π

Tempi [giorni]	1+φ	ε _c [-]			ε _c verifica			Δε _c verifica		
		O	E	M	O	E	M	O	E	M
20,96	1,00	-0,000286	-0,000168	0,000543	-0,000286	-0,000168	0,000543	0,000000	0,000000	0,000000
21,34	1,37	-0,000392	-0,000230	0,000744	-0,000392	-0,000230	0,000744	0,000000	0,000000	0,000000
21,46	1,40	-0,000402	-0,000235	0,000762	-0,000402	-0,000235	0,000762	0,000000	0,000000	0,000000
21,63	1,44	-0,000412	-0,000242	0,000782	-0,000412	-0,000242	0,000782	0,000000	0,000000	0,000000
21,85	1,48	-0,000423	-0,000248	0,000803	-0,000423	-0,000248	0,000803	0,000000	0,000000	0,000000
22,15	1,52	-0,000436	-0,000255	0,000827	-0,000436	-0,000255	0,000827	0,000000	0,000000	0,000000
22,54	1,57	-0,000449	-0,000263	0,000852	-0,000449	-0,000263	0,000852	0,000000	0,000000	0,000000
23,07	1,62	-0,000464	-0,000272	0,000880	-0,000464	-0,000272	0,000880	0,000000	0,000000	0,000000
23,77	1,68	-0,000480	-0,000281	0,000910	-0,000480	-0,000281	0,000910	0,000000	0,000000	0,000000
24,71	1,74	-0,000497	-0,000291	0,000943	-0,000497	-0,000291	0,000943	0,000000	0,000000	0,000000
25,96	1,80	-0,000516	-0,000302	0,000979	-0,000516	-0,000302	0,000979	0,000000	0,000000	0,000000
27,63	1,87	-0,000536	-0,000314	0,001017	-0,000536	-0,000314	0,001017	0,000000	0,000000	0,000000
29,85	1,95	-0,000558	-0,000327	0,001059	-0,000558	-0,000327	0,001059	0,000000	0,000000	0,000000
32,82	2,03	-0,000582	-0,000341	0,001104	-0,000582	-0,000341	0,001104	0,000000	0,000000	0,000000
36,77	2,12	-0,000608	-0,000356	0,001153	-0,000608	-0,000356	0,001153	0,000000	0,000000	0,000000
42,05	2,22	-0,000635	-0,000372	0,001205	-0,000635	-0,000372	0,001205	0,000000	0,000000	0,000000
49,08	2,32	-0,000664	-0,000389	0,001261	-0,000664	-0,000389	0,001261	0,000000	0,000000	0,000000
58,46	2,43	-0,000695	-0,000408	0,001319	-0,000695	-0,000408	0,001319	0,000000	0,000000	0,000000
70,96	2,54	-0,000728	-0,000427	0,001381	-0,000728	-0,000427	0,001381	0,000000	0,000000	0,000000
87,64	2,66	-0,000762	-0,000446	0,001445	-0,000762	-0,000446	0,001445	0,000000	0,000000	0,000000
109,87	2,78	-0,000797	-0,000467	0,001511	-0,000797	-0,000467	0,001511	0,000000	0,000000	0,000000
139,53	2,91	-0,000831	-0,000487	0,001578	-0,000831	-0,000487	0,001578	0,000000	0,000000	0,000000
179,07	3,03	-0,000866	-0,000507	0,001643	-0,000866	-0,000507	0,001643	0,000000	0,000000	0,000000
231,81	3,14	-0,000900	-0,000527	0,001707	-0,000900	-0,000527	0,001707	0,000000	0,000000	0,000000
302,13	3,25	-0,000931	-0,000546	0,001767	-0,000931	-0,000546	0,001767	0,000000	0,000000	0,000000
395,91	3,36	-0,000960	-0,000563	0,001822	-0,000960	-0,000563	0,001822	0,000000	0,000000	0,000000
520,96	3,45	-0,000986	-0,000578	0,001872	-0,000986	-0,000578	0,001872	0,000000	0,000000	0,000000
687,72	3,53	-0,001009	-0,000591	0,001915	-0,001009	-0,000591	0,001915	0,000000	0,000000	0,000000
910,10	3,59	-0,001029	-0,000603	0,001951	-0,001029	-0,000603	0,001951	0,000000	0,000000	0,000000
1206,65	3,65	-0,001045	-0,000612	0,001982	-0,001045	-0,000612	0,001982	0,000000	0,000000	0,000000
1602,10	3,70	-0,001058	-0,000620	0,002007	-0,001058	-0,000620	0,002007	0,000000	0,000000	0,000000
2129,44	3,73	-0,001068	-0,000626	0,002027	-0,001068	-0,000626	0,002027	0,000000	0,000000	0,000000
2832,67	3,76	-0,001077	-0,000631	0,002043	-0,001077	-0,000631	0,002043	0,000000	0,000000	0,000000
3770,43	3,79	-0,001083	-0,000635	0,002055	-0,001083	-0,000635	0,002055	0,000000	0,000000	0,000000
5020,96	3,80	-0,001088	-0,000638	0,002065	-0,001088	-0,000638	0,002065	0,000000	0,000000	0,000000
6688,57	3,82	-0,001092	-0,000640	0,002072	-0,001092	-0,000640	0,002072	0,000000	0,000000	0,000000
8912,36	3,83	-0,001095	-0,000642	0,002078	-0,001095	-0,000642	0,002078	0,000000	0,000000	0,000000
11877,83	3,84	-0,001097	-0,000643	0,002082	-0,001097	-0,000643	0,002082	0,000000	0,000000	0,000000
15832,35	3,84	-0,001099	-0,000644	0,002085	-0,001099	-0,000644	0,002085	0,000000	0,000000	0,000000
21105,79	3,85	-0,001100	-0,000645	0,002088	-0,001100	-0,000645	0,002088	0,000000	0,000000	0,000000
28138,03	3,85	-0,001101	-0,000645	0,002090	-0,001101	-0,000645	0,002090	0,000000	0,000000	0,000000
37515,67	3,85	-0,001102	-0,000646	0,002091	-0,001102	-0,000646	0,002091	0,000000	0,000000	0,000000

Tab.6.2.1.3.1. 2 - Verifica 1° teorema – Gauss - profilo a π

6.2.1.3.2 Verifica del 2° teorema della viscosità (sezione omogenea)

Seguendo l'enunciato del teorema si pongono nulle le azioni statiche esterne, nel caso di una sezione costituita da solo calcestruzzo. Nelle seguenti tabelle si verifica che le componenti del vettore $\underline{\psi}$ fornite dal programma "ψ" siano costanti nel tempo. Si verifica inoltre la corrispondenza dei risultati tra il metodo AAEM (tab.6.2.1.3.2.1) e il metodo di Gauss (tab.6.2.1.3.2.2).

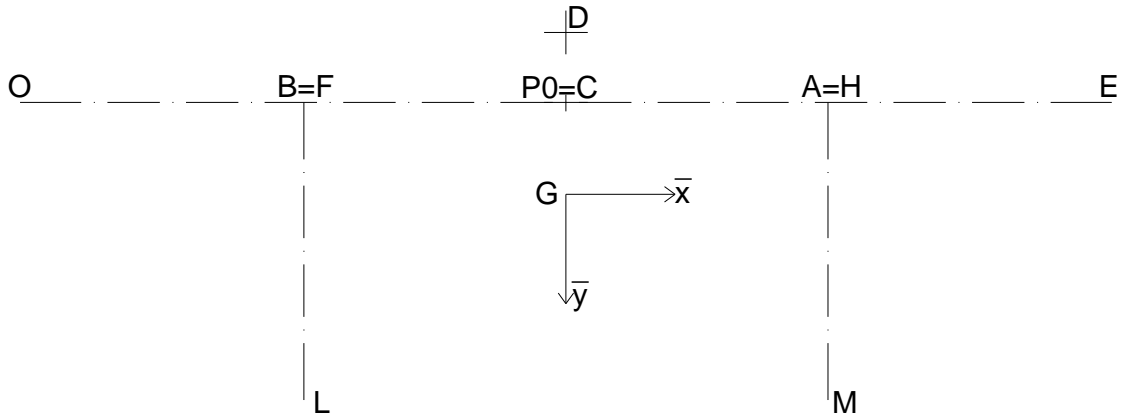


Fig.6.2.1.3.2. 1 - Punti notevoli del calcestruzzo – verifica 2° teorema – profilo a π

Tempi [giorni]	1+φ	ψ			
		1	x	y	θ
20,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,34	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,46	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,63	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,85	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
22,15	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
22,54	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
23,07	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
23,77	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
24,71	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
25,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
27,63	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
29,85	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
32,82	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
36,77	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
42,05	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
49,08	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
58,46	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
70,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
87,64	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
109,87	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
139,53	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
179,07	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
231,81	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
302,13	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
395,91	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
520,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
687,72	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
910,10	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
1206,65	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
1602,10	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
2129,44	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
2832,67	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
3770,43	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
5020,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
6688,57	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
8912,36	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
11877,83	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
15832,35	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21105,79	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
28138,03	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
37515,67	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000

Tab.6.2.1.3.2. 1 - Verifica 2° teorema – A.A.E.M.M. - profilo a π

Tempi [giorni]	1+φ	ψ			
		1	x	y	θ
20,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,34	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,46	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,63	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,85	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
22,15	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
22,54	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
23,07	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
23,77	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
24,71	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
25,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
27,63	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
29,85	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
32,82	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
36,77	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
42,05	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
49,08	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
58,46	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
70,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
87,64	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
109,87	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
139,53	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
179,07	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
231,81	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
302,13	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
395,91	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
520,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
687,72	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
910,10	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
1206,65	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
1602,10	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
2129,44	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
2832,67	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
3770,43	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
5020,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
6688,57	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
8912,36	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
11877,83	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
15832,35	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21105,79	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
28138,03	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
37515,67	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000

Tab.6.2.1.3.2. 2 - Verifica 2° teorema – Gauss - profilo a π

6.2.1.3.3 Verifica dell'asse neutro (sezione omogenea e parzializzata)

Un'ulteriore verifica si è effettuata nel caso di sezione omogenea di solo calcestruzzo sottoposta a semplice flessione (M_y e M_{peso}). Trattandosi quindi di flessione semplice in esercizio l'asse neutro deve coincidere con l'asse baricentrico e principale d'inerzia. Questo è dimostrato nella seguente tabella (tab.6.2.1.3.3.1): si notano tensioni negative nella crosta superiore (compressa), tensioni nulle nei punti H e F (posti in questo caso a quota del baricentro), e tensioni positive nella parte inferiore (tesa); a questo proposito bisogna specificare che il programma considera una legge costitutiva lineare sia in trazione che in compressione, trascurando pertanto il fatto che in realtà il calcestruzzo non resiste a trazione e si fessura.

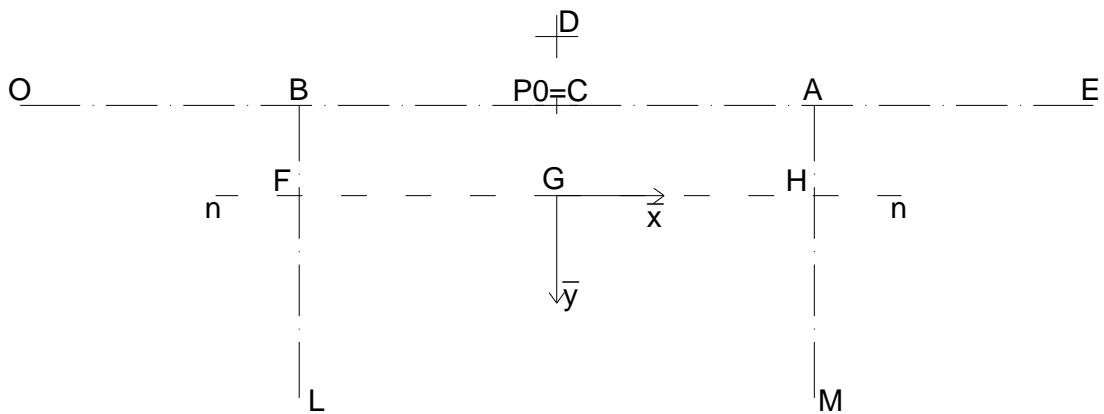


Fig.6.2.1.3.3. 1 - Punti notevoli del calcestruzzo – verifica asse neutro – profilo a π

Tempi [giorni]	σ_c [MPa]								
	O	B	C	A	E	F	L	H	M
20,96	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
21,34	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
21,46	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
21,63	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
21,85	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
22,15	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
22,54	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
23,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
23,77	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
24,71	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
25,96	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
27,63	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
29,85	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
32,82	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
36,77	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
42,05	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
49,08	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
58,46	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
70,96	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
87,64	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
109,87	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
139,53	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
179,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
231,81	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
302,13	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
395,91	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
520,96	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
687,72	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
910,10	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
1206,65	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
1602,10	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
2129,44	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
2832,67	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
3770,43	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
5020,96	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
6688,57	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
8912,36	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
11877,83	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
15832,35	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
21105,79	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
28138,03	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60
37515,67	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	-8,07	0,00	18,60	0,00	18,60

Tab.6.2.1.3.3. 1 - Verifica asse neutro- profilo a π

6.2.1.3.4 Verifica della precompressione con cavo risultante

Si è effettuata un'altra verifica confrontando nel tempo i valori di tiro ottenuti in output dal programma tramite il metodo AAEM con quelli che si ottengono considerando il cavo risultante e tenendo quindi conto delle perdite elastiche istantanee e di quelle viscosse differite nel tempo, con le equazioni contenute in [67]. La verifica si è svolta considerando una sezione soggetta solo a precompressione (senza carichi esterni agenti). In tabella 6.2.1.3.4.1 si notano minimi scostamenti dovuti al fatto che la verifica è effettuata con il cavo risultante (mentre il programma considera ogni singolo cavo) e che la perdita elastica istantanea è ricavata con un coefficiente calcolato a parte (mentre il programma considera la realtà fisica con il vettore $\underline{\psi}$).

Tempo [giorni]	X(t) implementato [MPa]	X(t) cavo risultante [MPa]	Scostamento [%]
20,96	1581	1590	0,6
21,34	1549	1560	0,8
21,46	1546	1558	0,8
21,63	1543	1555	0,8
21,85	1539	1552	0,8
22,15	1536	1548	0,8
22,54	1532	1545	0,8
23,07	1527	1541	0,9
23,77	1523	1536	0,9
24,71	1518	1532	0,9
25,96	1513	1527	0,9
27,63	1507	1521	1,0
29,85	1501	1515	1,0
32,82	1494	1509	1,0
36,77	1487	1503	1,0
42,05	1479	1495	1,1
49,08	1471	1488	1,1
58,46	1463	1480	1,1
70,96	1455	1472	1,2
87,64	1446	1463	1,2
109,87	1437	1455	1,2
139,53	1428	1446	1,3
179,07	1419	1438	1,3
231,81	1411	1429	1,3
302,13	1403	1422	1,3
395,91	1396	1415	1,3
520,96	1390	1409	1,4
687,72	1384	1403	1,4
910,10	1379	1399	1,4
1206,65	1376	1395	1,4
1602,10	1373	1392	1,4
2129,44	1370	1390	1,4
2832,67	1368	1388	1,4
3770,43	1367	1386	1,4
5020,96	1365	1385	1,4
6688,57	1365	1384	1,4
8912,36	1364	1383	1,4
11877,83	1363	1383	1,4
15832,35	1363	1383	1,4
21105,79	1363	1382	1,4
28138,03	1362	1382	1,4
37515,67	1362	1382	1,4

Tab.6.2.1.3.4. 1 – Verifica cavo risultante – profilo a π

6.2.1.3.5 Verifica del rispetto dell'equilibrio nella sezione

Un'ultima verifica si è svolta per riscontrare l'equilibrio nella sezione: si calcolano quindi le risultanti delle trazioni nei cavi moltiplicando le aree dei cavi stessi per la loro tensione (tab.6.2.1.3.5.1) e le risultanti delle compressioni nel calcestruzzo in tab.6.2.1.3.5.1 (essendo una distribuzione di tensione lineare sui segmenti se ne calcola una media e si moltiplica per l'area del tratto di calcestruzzo competente). Come si vede in tab.6.2.1.3.5.3 la differenza è del tutto irrilevante.

pj	A_{pi} [m²]	σ_{pi} [kN/m²]	F_{pi} [kN]
21	0,000104	1286858,91	133,83
22	0,000104	1288564,18	134,01
23	0,000104	1290269,44	134,19
24	0,000104	1291974,71	134,37
25	0,000052	1300074,71	67,60
26	0,000052	1303485,24	67,78
27	0,000104	1313290,51	136,58
41	0,000104	1286858,91	133,83
42	0,000104	1288564,18	134,01
43	0,000104	1290269,44	134,19
44	0,000104	1291974,71	134,37
45	0,000052	1300074,71	67,60
46	0,000052	1303485,24	67,78
47	0,000104	1313290,51	136,58

Tab.6.2.1.3.5. 1 - Verifica equilibrio della sezione - cavi - profilo a π

ci	A_{ci} [m²]	σ_{ci} [kN/m²]	F_{ci} [kN]
A _{c1}	0,026	-5417,17	-140,846
A _{c2}	0,024	-5417,17	-130,012
A _{c3}	0,024	-5417,17	-130,012
A _{c4}	0,026	-5417,17	-140,846
A _{c5}	0,0654	-8130,97	-531,765
A _{c6}	0,0654	-8130,97	-531,765

Tab.6.2.1.3.5. 2 - Verifica equilibrio della sezione - calcestruzzo - profilo a π

F_{CTOT} [kN]	-1605,25
F_{POTOT} [kN]	1616,73
Δ	11,48
Scostamento %	0,71

Tab.6.2.1.3.5. 3 - Verifica equilibrio della sezione - profilo a π

6.2.1.4 Sforzi e deformazioni della sezione

6.2.1.4.1 Caso 1

Per il caso 1 si è implementato il programma con i seguenti dati di input:

- L = 14 m
- V = 7 m
- deltaT = 0 °C
- M1 = 0 kN, Mx = 0 kNm, My = 200 kNm, Momega = 50 kNm², Mpeso ≠ 0
- Xm = 50 kN (uguale per tutti i cavi)
- t0J = 21 giorni
- RH = 50%
- fck = 40 MPa
- Ep = 190000000 kN/m²

I risultati ottenuti sono rappresentati numericamente in termini di risposta elastica al tempo iniziale e graficamente come evoluzione nel tempo, adimensionalizzati rispetto alla risposta elastica stessa.

La risposta elastica è riassunta da tab.6.2.1.4.1.1 a tab.6.2.1.4.1.3. L'evoluzione nel tempo è rappresentata in termini delle componenti di ψ da fig.6.2.1.4.1.1 a fig.6.2.1.4.1.4, in termini di tensioni nei cavi (solo a titolo di esempio quelli in posizione 21, 25, 27, 41, 45, 47) da fig.6.2.1.4.1.5 a fig.6.2.1.4.1.10, in termini di tensioni nei nodi del calcestruzzo da fig.6.2.1.4.1.11 a fig.6.2.1.4.1.17.

ψ Gauss			
1	x	y	ϑ
-0,000138	0,000000	0,000161	-0,000020
ψ AAEMM			
1	x	y	ϑ
-0,000138	0,000000	0,000161	-0,000020

Tab.6.2.1.4.1. 1 – ψ_e – caso 1 – profilo a π

σ_p Gauss [MPa]					
21	25	27	41	45	47
919,86	910,04	900,45	919,67	910,55	901,21
σ_p AAEMM [MPa]					
21	25	27	41	45	47
919,86	910,04	900,45	919,67	910,55	901,21

Tab.6.2.1.4.1. 2 – σ_{pe} – caso 1 – profilo a π

σ_c Gauss [MPa]								
O	B	C	A	E	F	L	H	M
-6,23	-6,15	-6,08	-6,01	-5,93	-6,15	-1,97	-6,01	-2,42
σ_c AAEMM [MPa]								
O	B	C	A	E	F	L	H	M
-6,23	-6,15	-6,08	-6,01	-5,93	-6,15	-1,97	-6,01	-2,42

Tab.6.2.1.4.1. 3 – σ_{ce} – caso 1 – profilo a π

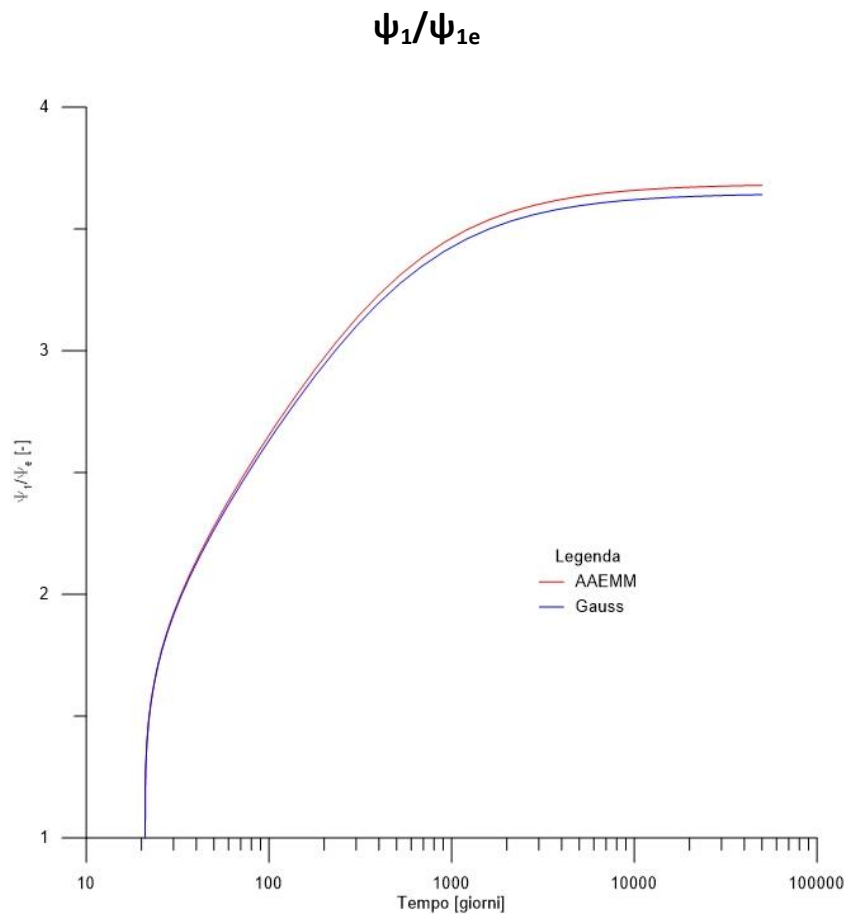


Fig.6.2.1.4.1. 1 – ψ_1 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

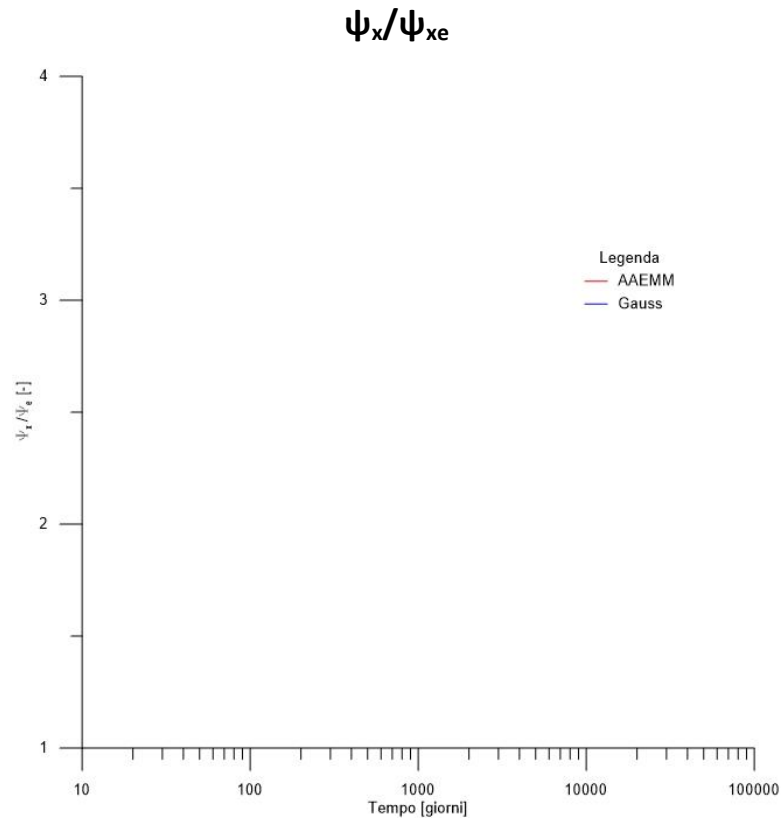


Fig.6.2.1.4.1. 2 – ψ_x adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

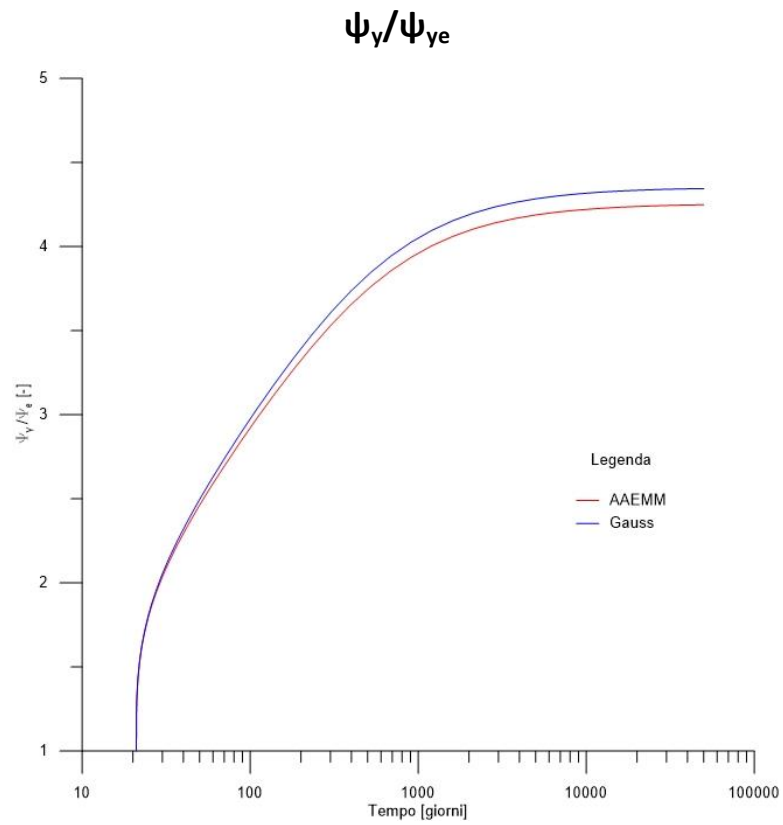


Fig.6.2.1.4.1. 3 – ψ_y adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

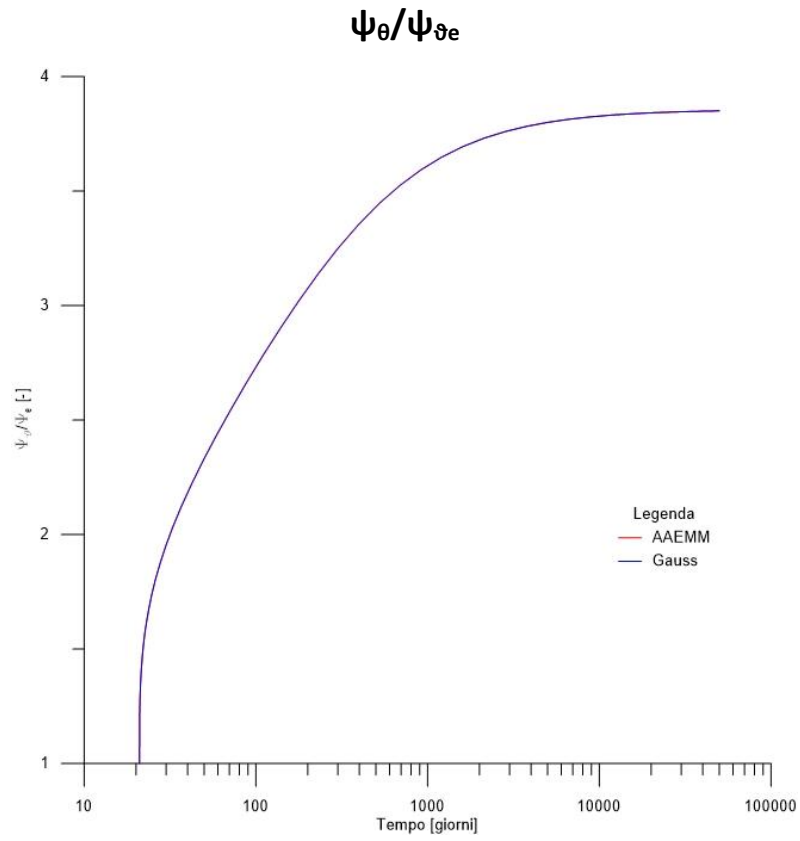


Fig.6.2.1.4.1. 4 – ψ_θ adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

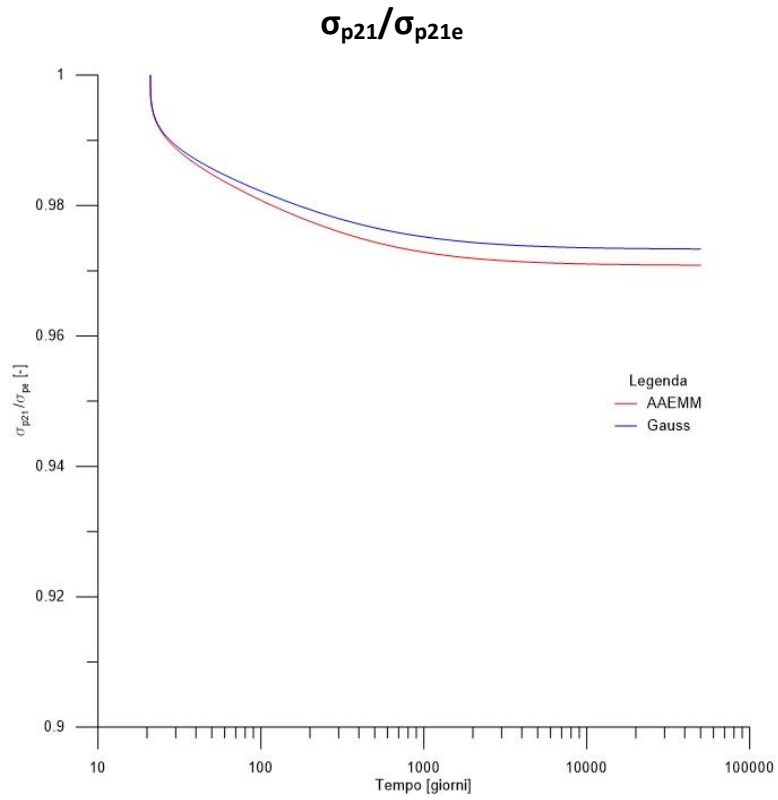


Fig.6.2.1.4.1. 5 – Tensione cavo 21 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

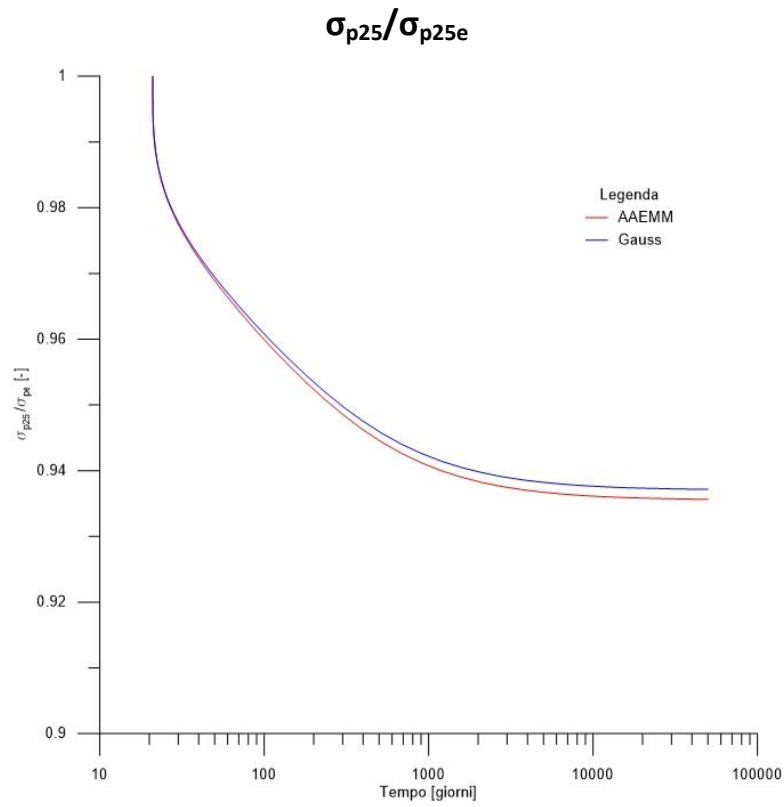


Fig.6.2.1.4.1. 6 - Tensione cavo 25 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

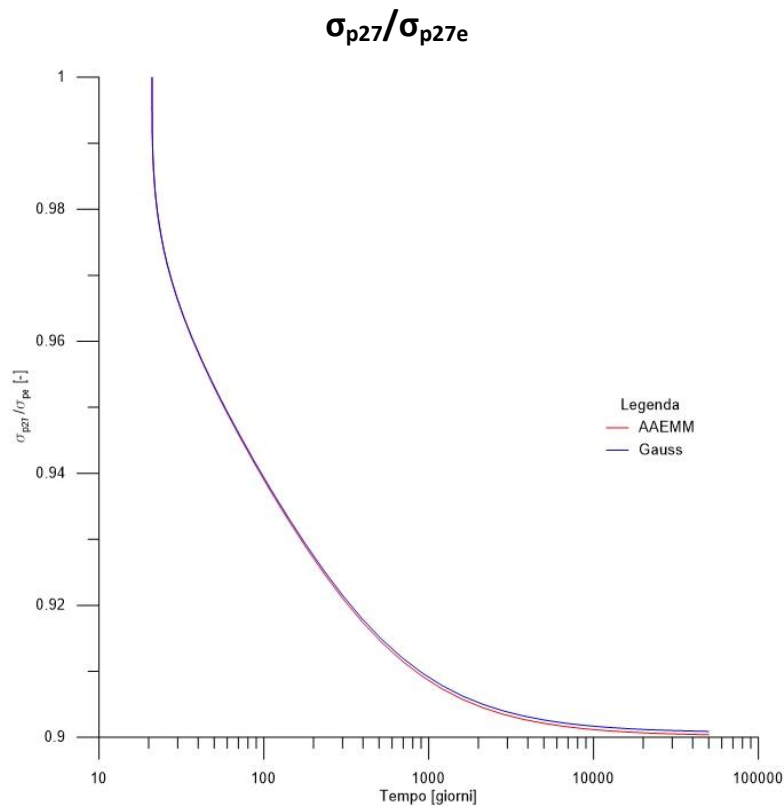


Fig.6.2.1.4.1. 7 - Tensione cavo 27 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

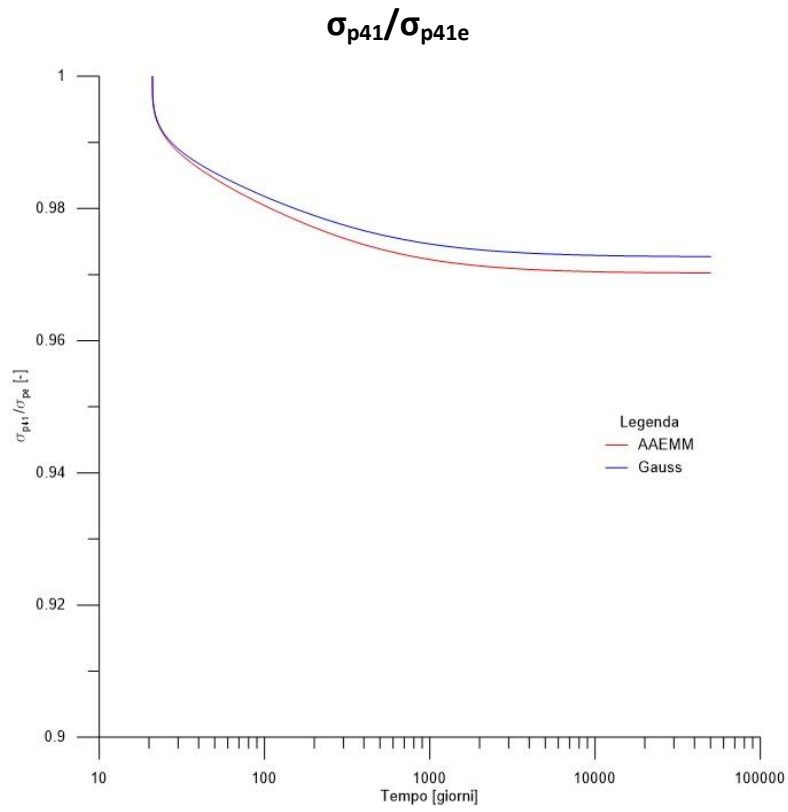


Fig.6.2.1.4.1. 8 - Tensione cavo 41 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

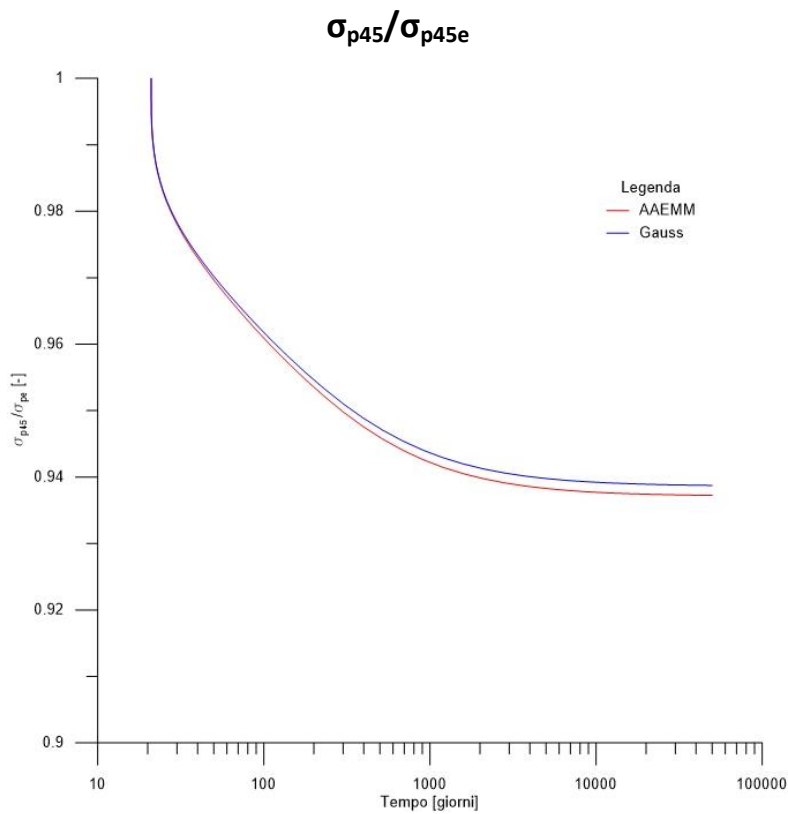
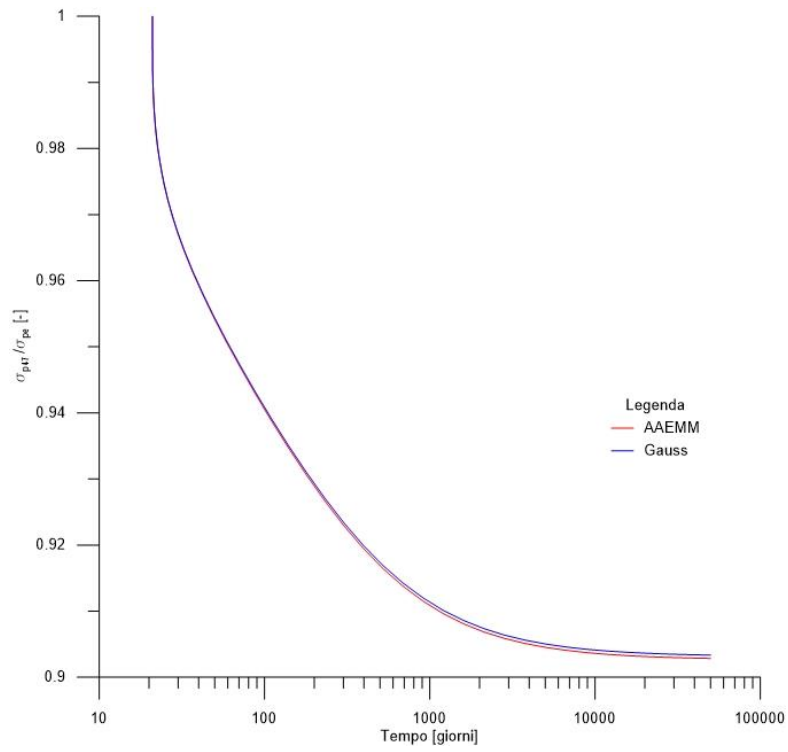
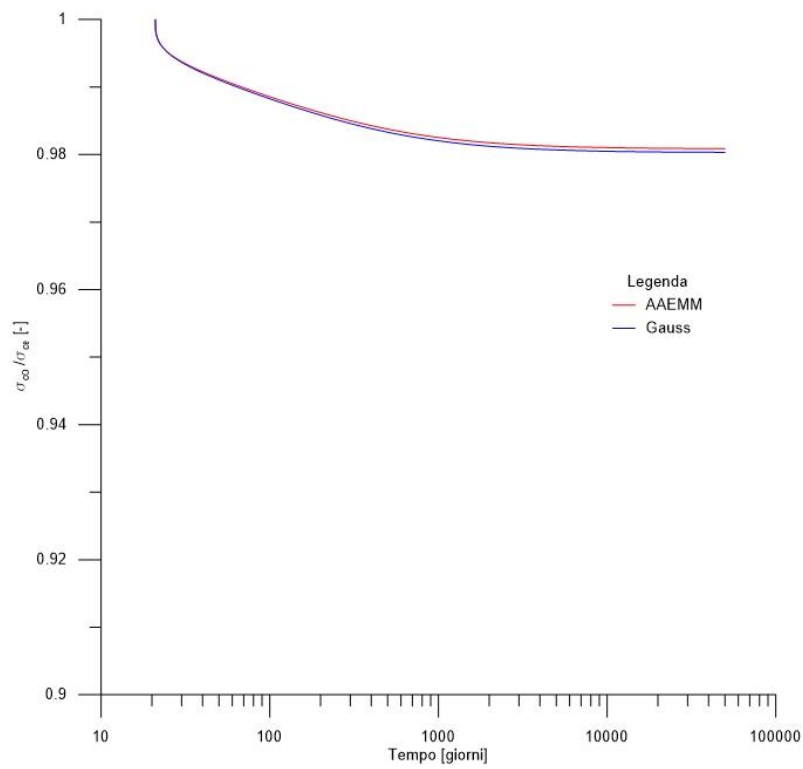


Fig.6.2.1.4.1. 9 - Tensione cavo 45 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

$$\sigma_{p47}/\sigma_{p47e}$$



$$\sigma_{c0}/\sigma_{c0e}$$



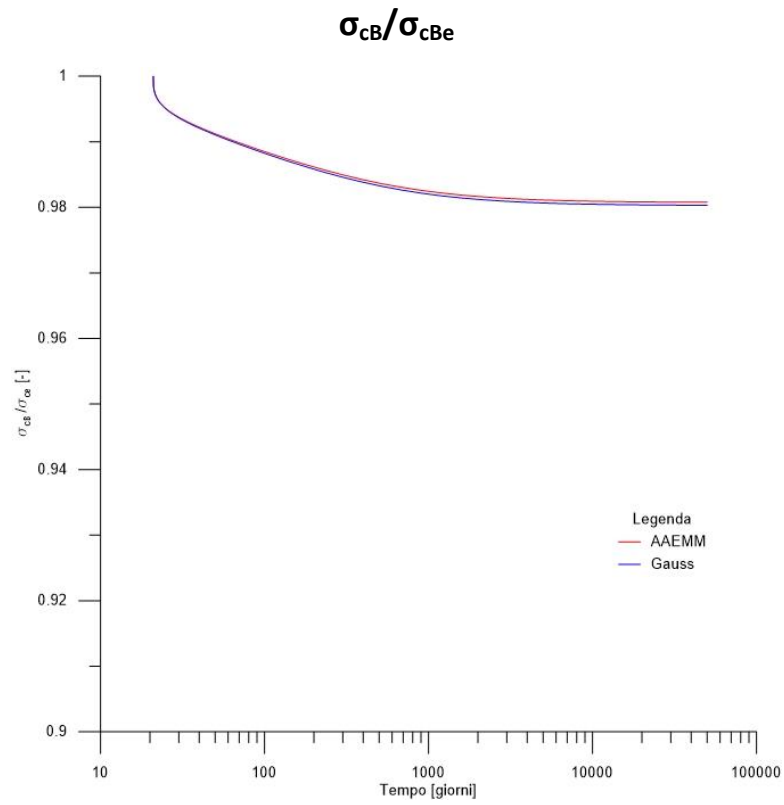


Fig.6.2.1.4.1. 12 - Tensione calcestruzzo in B adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

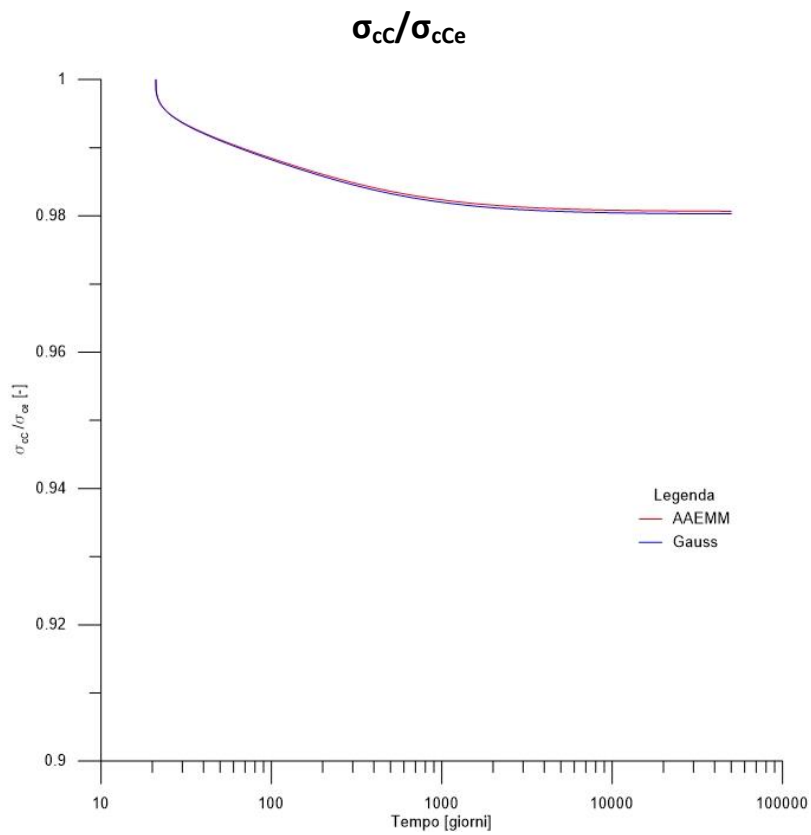


Fig.6.2.1.4.1. 13 - Tensione calcestruzzo in C adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

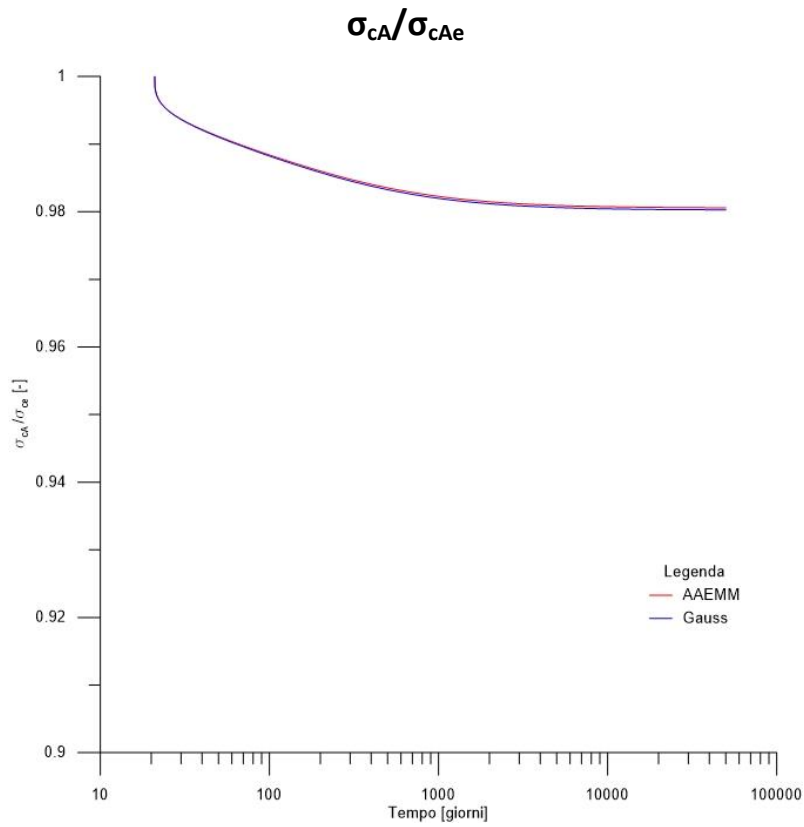


Fig.6.2.1.4.1. 14 - Tensione calcestruzzo in A adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

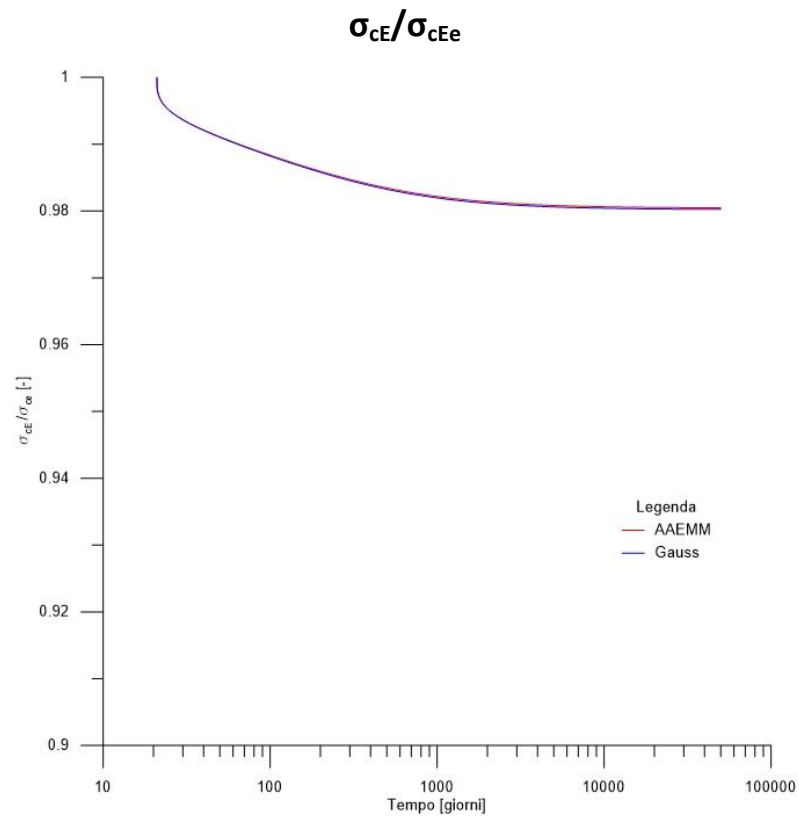


Fig.6.2.1.4.1. 15 - Tensione calcestruzzo in E adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

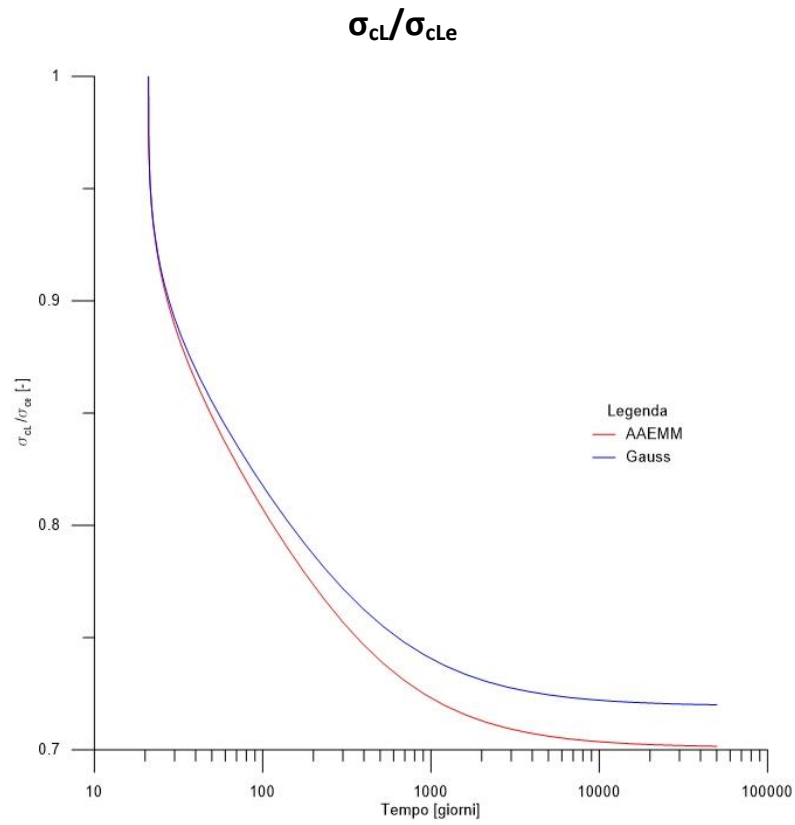


Fig.6.2.1.4.1. 16 - Tensione calcestruzzo in L adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

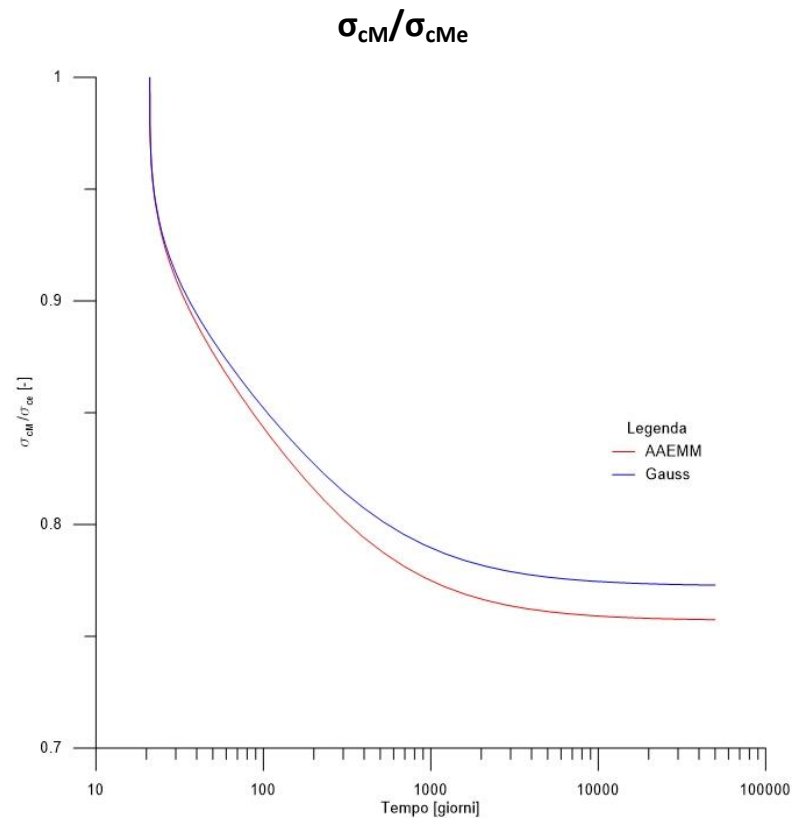


Fig.6.2.1.4.1. 17 - Tensione calcestruzzo in M adimensionalizzata – caso 1 – profilo a π

Nella seguente tabella tab.6.2.1.4.1.4 si riportano i valori degli spostamenti u lungo l'asse della trave z e la rotazione ϑ del profilo rispetto al centro di istantanea rotazione (a titolo di esempio si riportano i valori solo per alcuni punti). Nelle figure 6.2.1.4.1.18 e 6.2.1.4.1.19 si rappresentano rispettivamente gli spostamenti u e la rotazione ϑ in due situazioni specifiche: in nero è rappresentato il profilo indeformato, in blu il profilo deformato al tempo t_0 (deformazione elastica) e in rosso la deformazione dopo 100 anni a causa degli effetti viscosi. Per rendere visivamente apprezzabile il campo degli spostamenti, nella fig.6.2.1.4.1.18 i valori sono stati amplificati di un fattore 50.

Tempi [giorni]	Spostamento u lungo z [m]			Rotazione ϑ [°]	CIR [m]	
	O	E	M		x	y
20,96	-0,001226	-0,001167	-0,000475	-0,057111	9,152392	-0,164096
21,34	-0,001676	-0,001596	-0,000629	-0,078273	9,293168	-0,163873
21,46	-0,001717	-0,001635	-0,000643	-0,080179	9,304901	-0,163854
21,63	-0,001761	-0,001677	-0,000657	-0,082256	9,317545	-0,163833
21,85	-0,001809	-0,001722	-0,000673	-0,084518	9,331160	-0,163811
22,15	-0,001861	-0,001772	-0,000690	-0,086981	9,345808	-0,163787
22,54	-0,001918	-0,001826	-0,000708	-0,089663	9,361554	-0,163761
23,07	-0,001980	-0,001885	-0,000728	-0,092582	9,378462	-0,163732
23,77	-0,002047	-0,001949	-0,000749	-0,095757	9,396596	-0,163702
24,71	-0,002120	-0,002019	-0,000772	-0,099207	9,416017	-0,163669
25,96	-0,002199	-0,002094	-0,000797	-0,102953	9,436781	-0,163634
27,63	-0,002285	-0,002176	-0,000824	-0,107014	9,458936	-0,163596
29,85	-0,002378	-0,002264	-0,000852	-0,111409	9,482518	-0,163555
32,82	-0,002478	-0,002360	-0,000882	-0,116155	9,507540	-0,163511
36,77	-0,002586	-0,002462	-0,000915	-0,121263	9,533991	-0,163465
42,05	-0,002701	-0,002572	-0,000949	-0,126739	9,561818	-0,163415
49,08	-0,002824	-0,002689	-0,000984	-0,132578	9,590922	-0,163363
58,46	-0,002954	-0,002813	-0,001021	-0,138763	9,621136	-0,163307
70,96	-0,003090	-0,002943	-0,001059	-0,145258	9,652219	-0,163250
87,64	-0,003232	-0,003077	-0,001099	-0,152005	9,683837	-0,163191
109,87	-0,003377	-0,003215	-0,001138	-0,158920	9,715568	-0,163130
139,53	-0,003522	-0,003354	-0,001177	-0,165893	9,746901	-0,163070
179,07	-0,003667	-0,003491	-0,001214	-0,172792	9,777267	-0,163011
231,81	-0,003806	-0,003623	-0,001250	-0,179469	9,806078	-0,162954
302,13	-0,003937	-0,003748	-0,001283	-0,185776	9,832788	-0,162900
395,91	-0,004058	-0,003863	-0,001313	-0,191581	9,856948	-0,162851
520,96	-0,004166	-0,003966	-0,001340	-0,196782	9,878264	-0,162808
687,72	-0,004260	-0,004056	-0,001362	-0,201321	9,896615	-0,162770
910,10	-0,004340	-0,004132	-0,001382	-0,205186	9,912054	-0,162737

continua...

1206,65	-0,004407	-0,004196	-0,001397	-0,208401	9,924776	-0,162711
1602,10	-0,004461	-0,004247	-0,001410	-0,211023	9,935066	-0,162689
2129,44	-0,004505	-0,004289	-0,001420	-0,213125	9,943262	-0,162672
2832,67	-0,004539	-0,004321	-0,001428	-0,214786	9,949705	-0,162658
3770,43	-0,004566	-0,004347	-0,001435	-0,216083	9,954717	-0,162647
5020,96	-0,004587	-0,004367	-0,001439	-0,217087	9,958583	-0,162639
6688,57	-0,004603	-0,004382	-0,001443	-0,217858	9,961546	-0,162633
8912,36	-0,004615	-0,004393	-0,001446	-0,218447	9,963805	-0,162628
11877,83	-0,004624	-0,004402	-0,001448	-0,218895	9,965520	-0,162624
15832,35	-0,004631	-0,004409	-0,001450	-0,219234	9,966818	-0,162621
21105,79	-0,004636	-0,004414	-0,001451	-0,219491	9,967799	-0,162619
28138,03	-0,004640	-0,004418	-0,001452	-0,219684	9,968539	-0,162617
37515,67	-0,004643	-0,004421	-0,001452	-0,219830	9,969095	-0,162616

Tab.6.2.1.4.1. 4 – Deformazione del profilo medio in mezzeria della trave – caso 1 – profilo a π

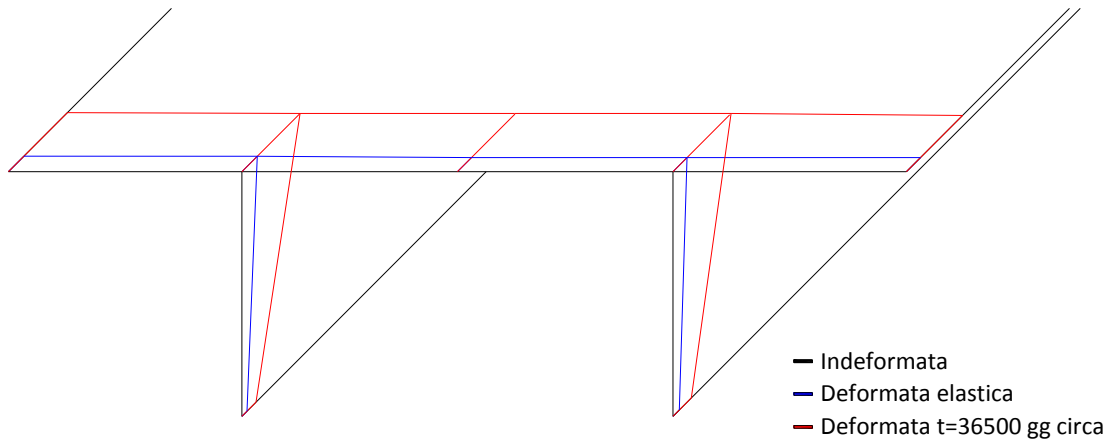


Fig.6.2.1.4.1. 18 – Deformata lungo l'asse z – caso 1 – profilo a π

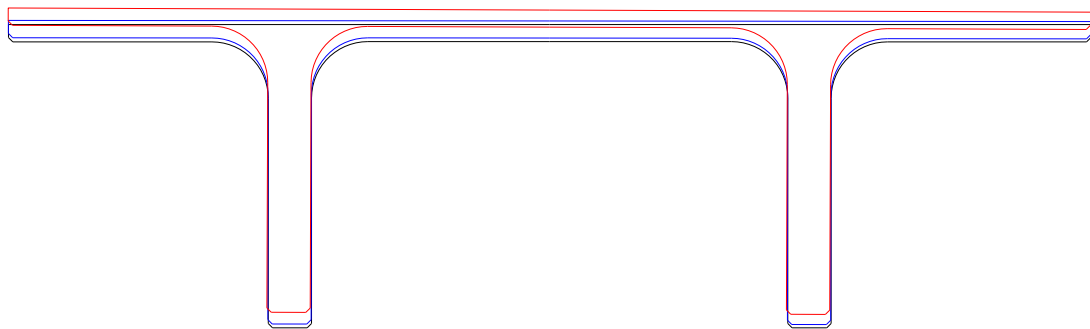


Fig.6.2.1.4.1. 19 – Rotazione del profilo – caso 1 – profilo a π

6.2.1.4.2 Caso 2

Per il caso 2 si è implementato il programma con i seguenti dati di input:

- L = 14 m
- V = 7 m
- deltaT = 0 °C
- M1 = 0 kN, Mx = 0 kNm, My = 300 kNm, Momega = 0 kNm², Mpeso ≠ 0
- Xm = 72 kN (uguale per tutti i cavi)
- t0J = 21 giorni
- RH = 50%
- fck = 40 MPa
- Ep = 190000000 kN/m²

I risultati ottenuti sono rappresentati numericamente in termini di risposta elastica al tempo iniziale e graficamente come evoluzione nel tempo, adimensionalizzati rispetto alla risposta elastica stessa.

La risposta elastica è riassunta da tab.6.2.1.4.2.1 a tab.6.2.1.4.2.3. L'evoluzione nel tempo è rappresentata in termini delle componenti di ψ da fig.6.2.1.4.2.1 a fig.6.2.1.4.2.4, in termini di tensioni nei cavi (solo a titolo di esempio quelli in posizione 21, 25, 27, 41, 45, 47) da fig.6.2.1.4.2.5 a fig.6.2.1.4.2.10, in termini di tensioni nei nodi del calcestruzzo da fig.6.2.1.4.2.11 a fig.6.2.1.4.2.17.

ψ Gauss			
1	x	y	ϑ
-0,000198	0,000000	0,000118	0,000000
ψ AAEMM			
1	x	y	ϑ
-0,000198	0,000000	0,000118	0,000000

Tab.6.2.1.4.2. 1 – ψ_e – caso 2 – profilo a π

σ_p Gauss [MPa]					
21	25	27	41	45	47
1315,09	1308,15	1301,21	1315,09	1308,15	1301,21
σ_p AAEMM [MPa]					
21	25	27	41	45	47
1315,09	1308,15	1301,21	1315,09	1308,15	1301,21

Tab.6.2.1.4.2. 2– σ_{pe} – caso 2 – profilo a π

σ_c Gauss [MPa]								
O	B	C	A	E	F	L	H	M
-7,92	-7,92	-7,92	-7,92	-7,92	-7,92	-5,07	-7,92	-5,07
σ_c AAEMM [MPa]								
O	B	C	A	E	F	L	H	M
-7,92	-7,92	-7,92	-7,92	-7,92	-7,92	-5,07	-7,92	-5,07

Tab.6.2.1.4.2. 3 – σ_{ce} – caso 2 – profilo a π

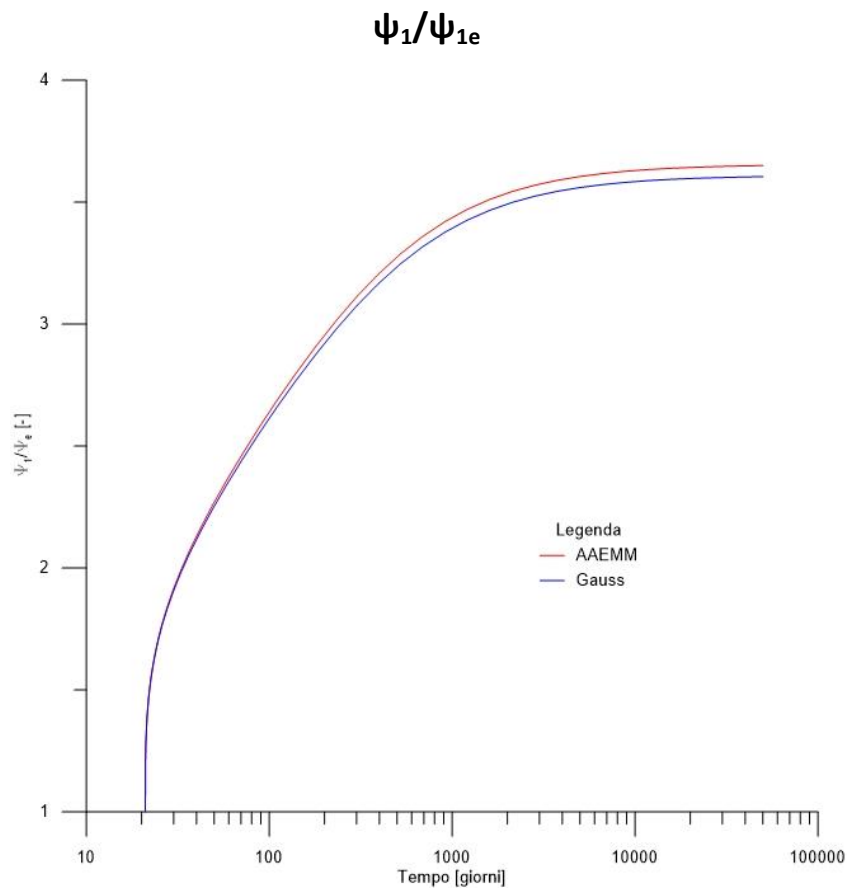


Fig.6.2.1.4.2. 1– ψ_1 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

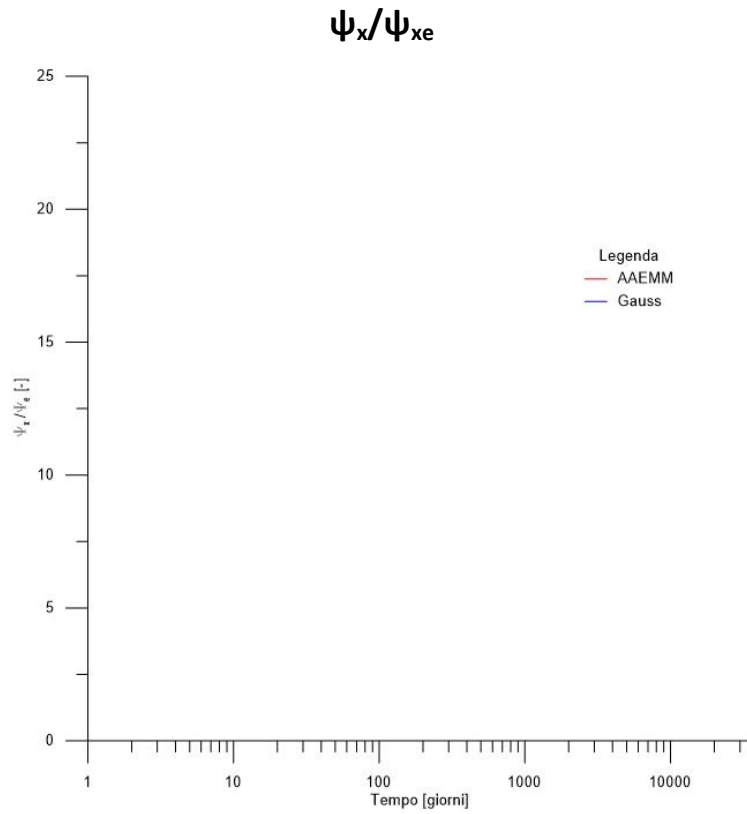


Fig.6.2.1.4.2. 2- ψ_x adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

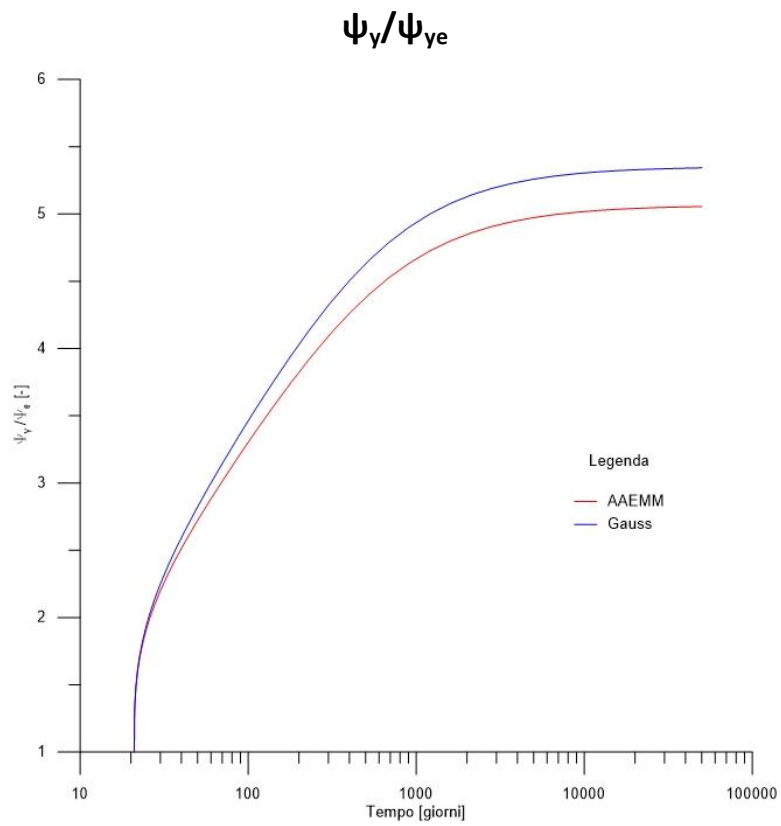


Fig.6.2.1.4.2. 3- ψ_y adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

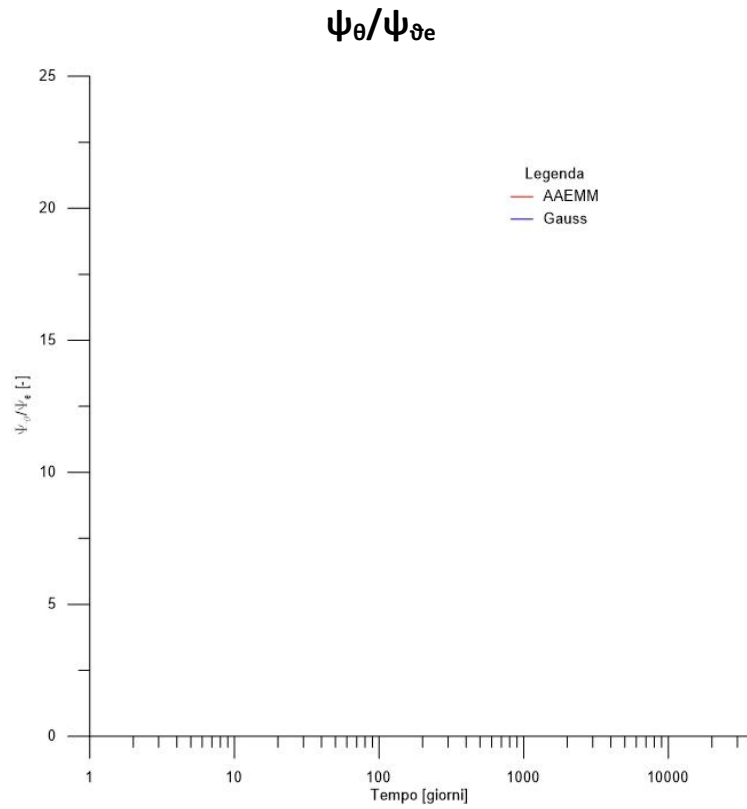


Fig.6.2.1.4.2. 4- ψ_{θ} adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

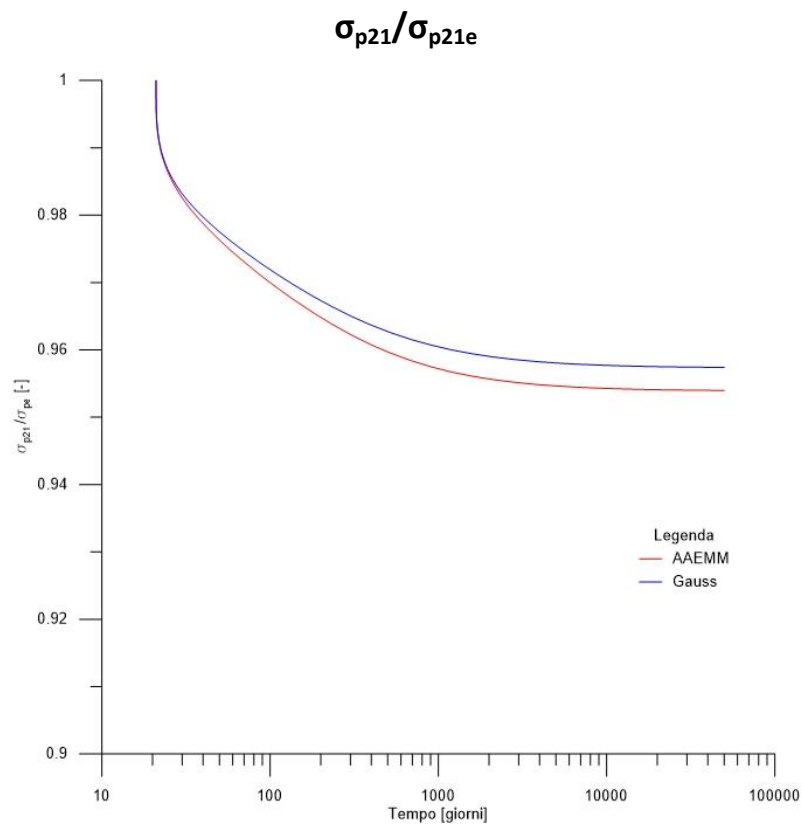


Fig.6.2.1.4.2. 5- Tensione cavo 21 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

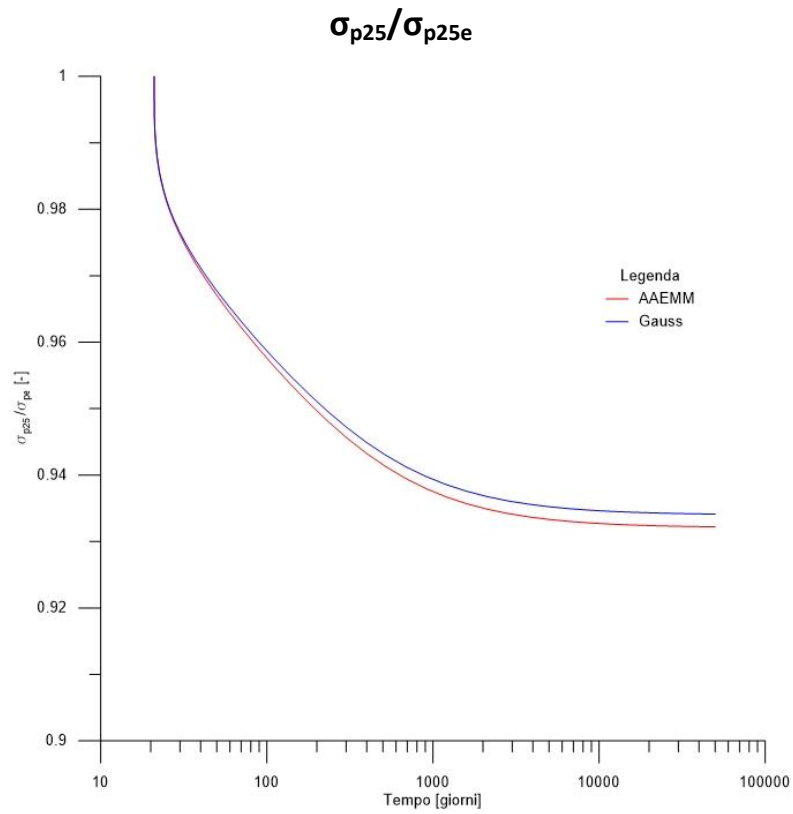


Fig.6.2.1.4.2. 6– Tensione cavo 25 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

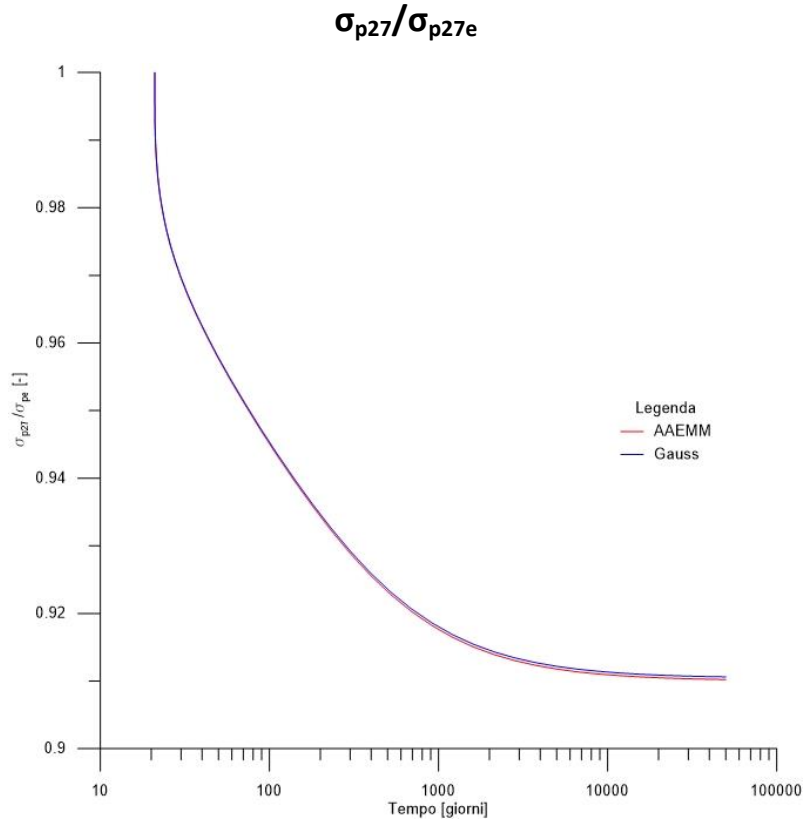


Fig.6.2.1.4.2. 7– Tensione cavo 27 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

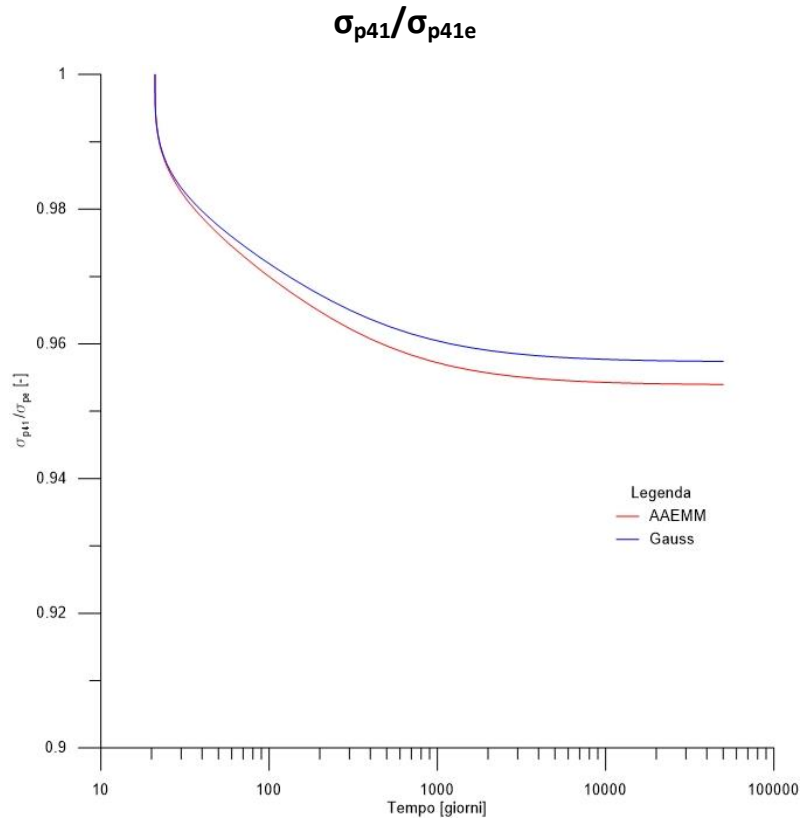


Fig.6.2.1.4.2. 8– Tensione cavo 41 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

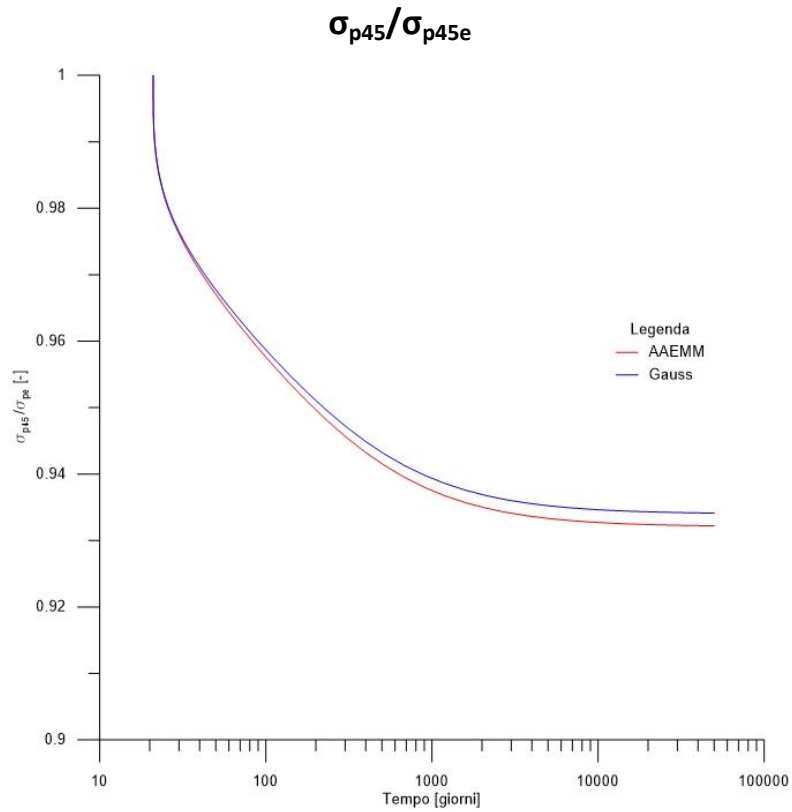


Fig.6.2.1.4.2. 9– Tensione cavo 45 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

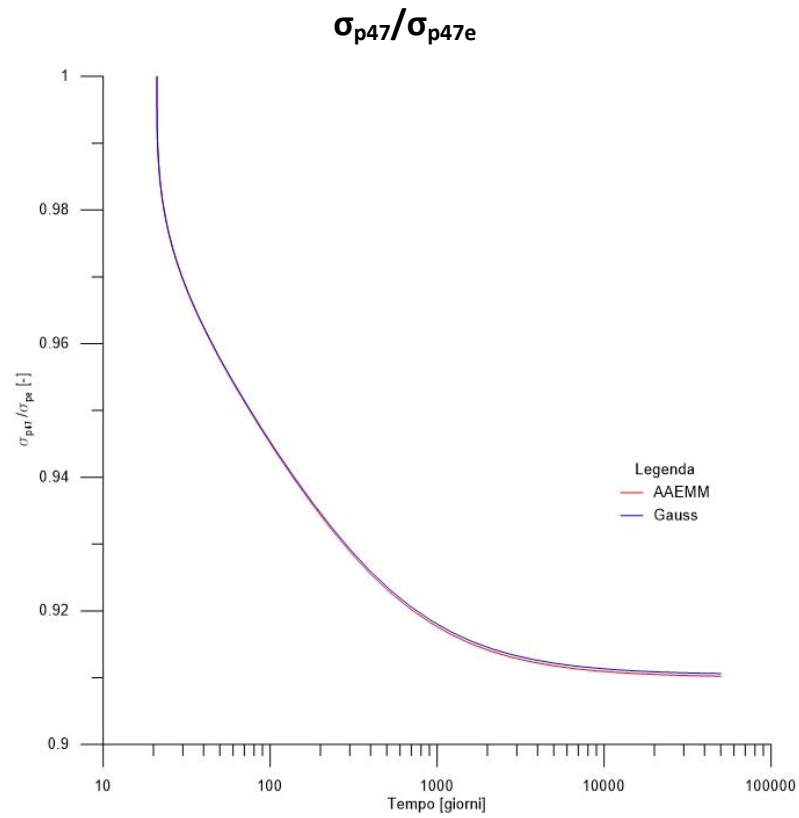


Fig.6.2.1.4.2. 10- Tensione cavo 47 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

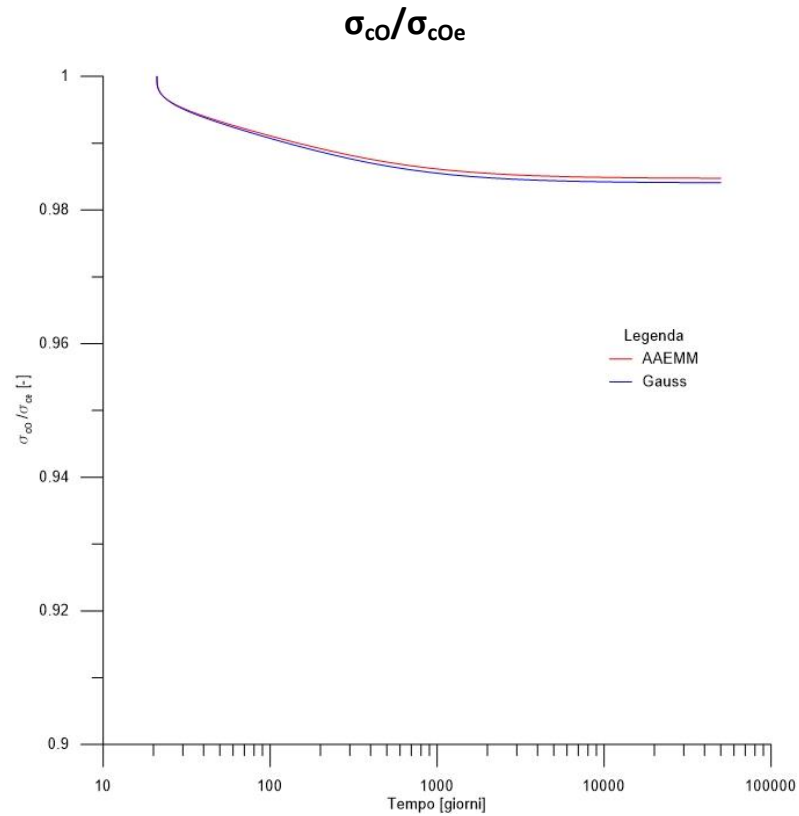


Fig.6.2.1.4.2. 11- Tensione calcestruzzo in O adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

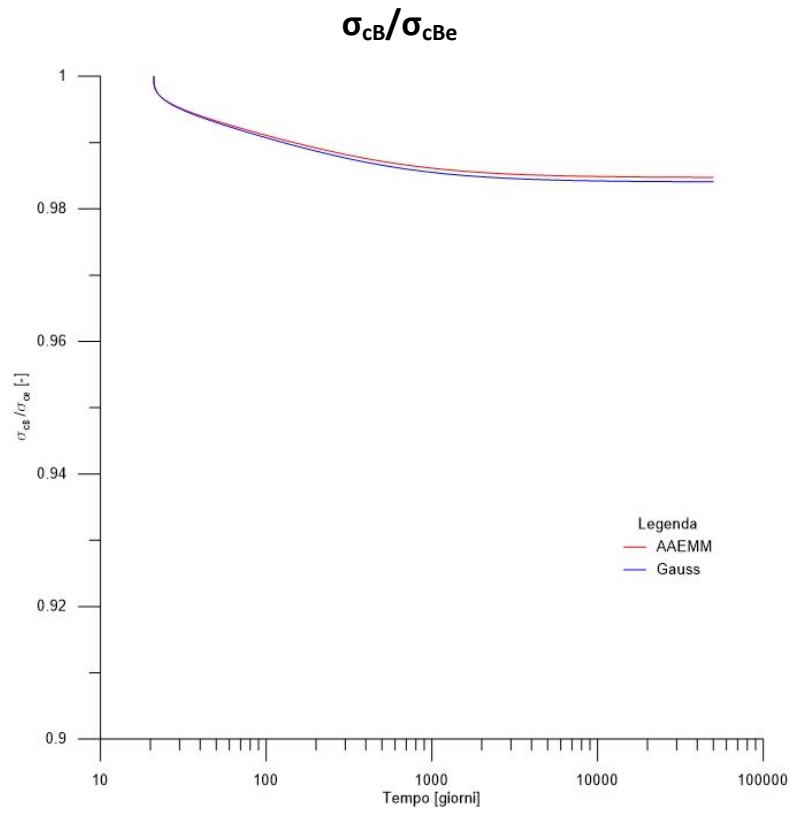


Fig.6.2.1.4.2. 12- Tensione calcestruzzo in B adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

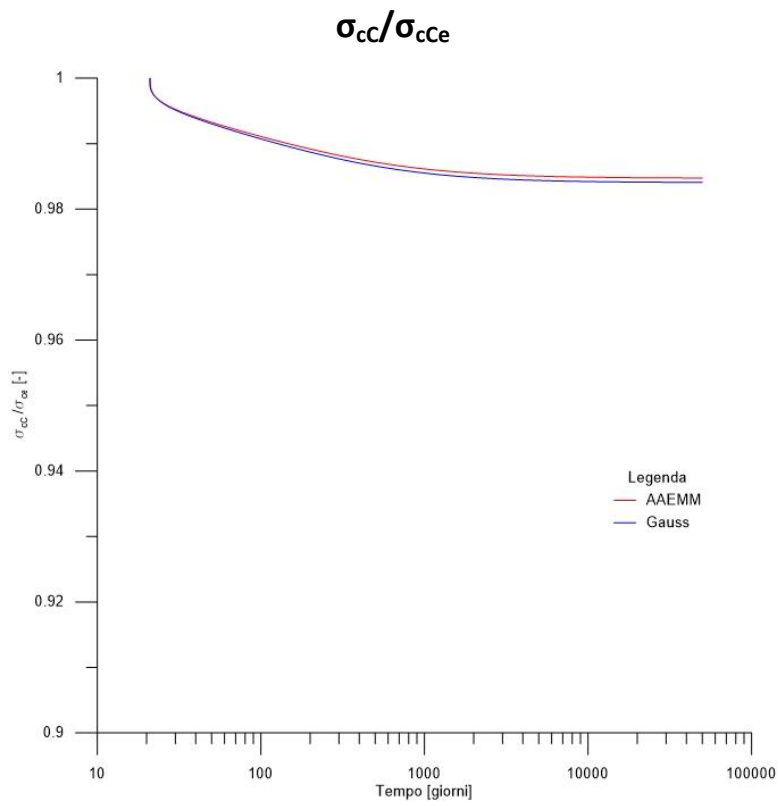


Fig.6.2.1.4.2. 13- Tensione calcestruzzo in C adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

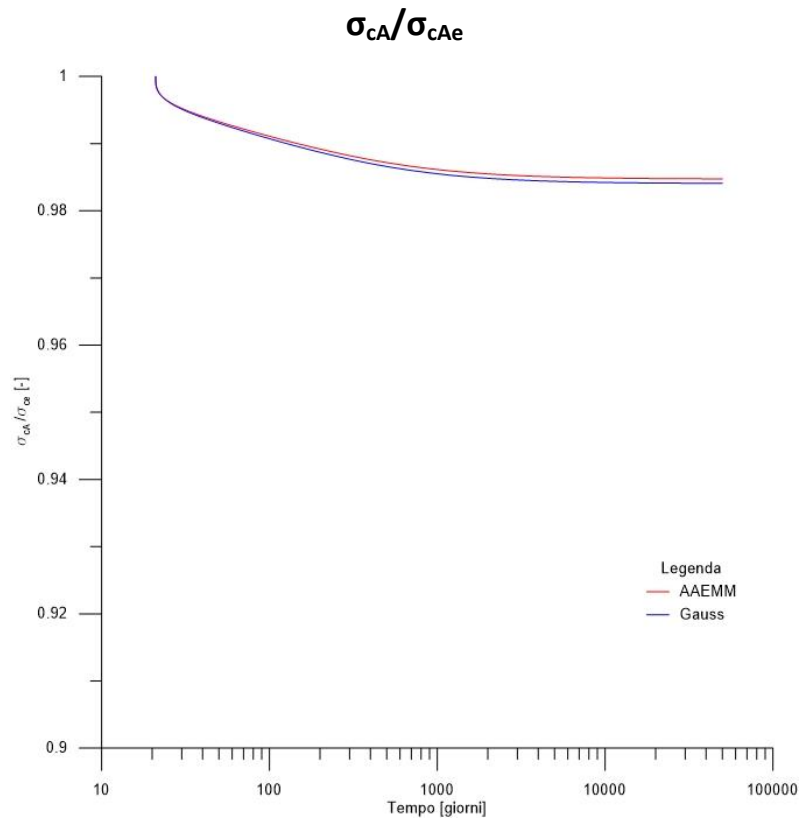


Fig.6.2.1.4.2. 14- Tensione calcestruzzo in A adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

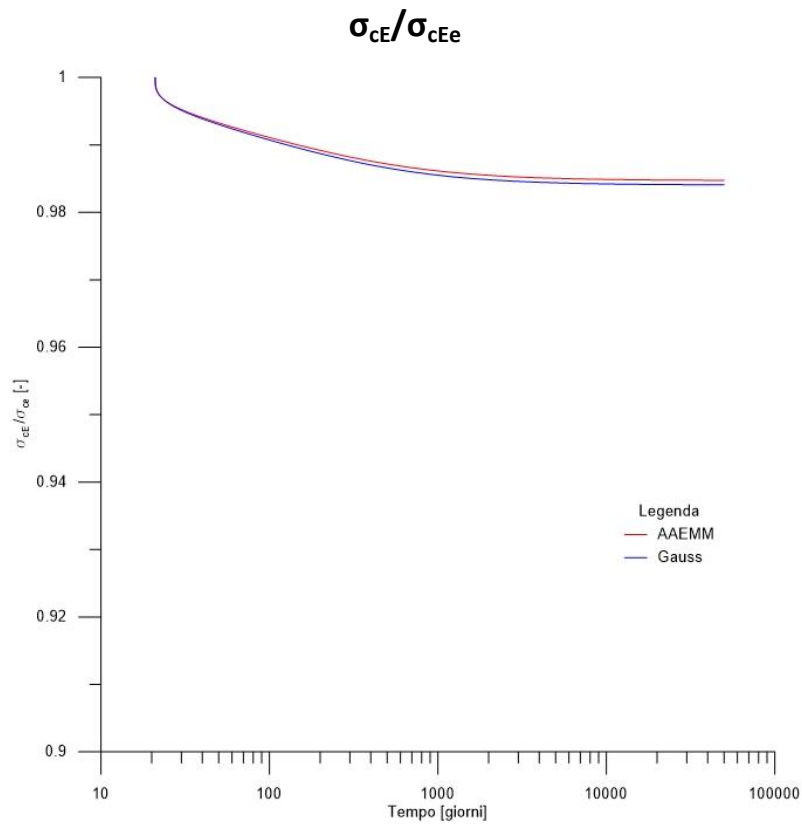


Fig.6.2.1.4.2. 15- Tensione calcestruzzo in E adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

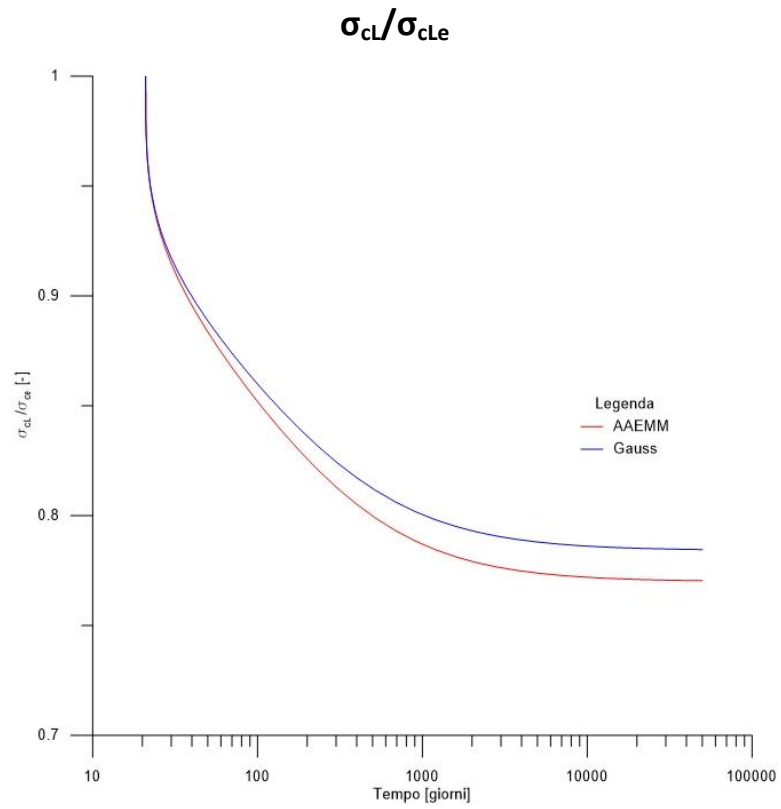


Fig.6.2.1.4.2. 16- Tensione calcestruzzo in L adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

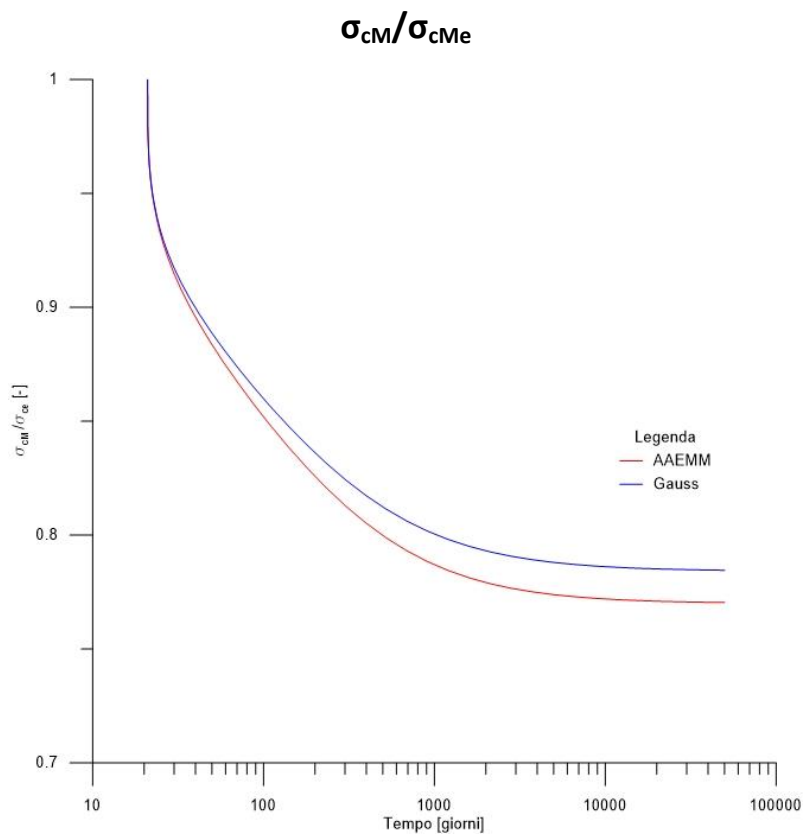


Fig.6.2.1.4.2. 17- Tensione calcestruzzo in M adimensionalizzata – caso 2 – profilo a π

Nella seguente tabella tab.6.2.1.4.2.4 si riportano i valori degli spostamenti u lungo l'asse della trave z e la rotazione ϑ del profilo rispetto al centro di istantanea rotazione (a titolo di esempio si riportano i valori solo per alcuni punti). Nella figura 6.2.1.4.2.18 si rappresentano gli spostamenti u in due situazioni specifiche: in nero è rappresentato il profilo indeformato, in blu il profilo deformato al tempo t_0 (deformazione elastica) e in rosso la deformazione dopo 100 anni a causa degli effetti viscosi. Per rendere visivamente apprezzabile il campo degli spostamenti, nella fig.6.2.1.4.2.18 i valori sono stati amplificati di un fattore 50.

Tempi [giorni]	Spostamento u lungo z [m]			Rotazione ϑ [°]	CIR [m]	
	O	E	M		x	y
20,96	-0,001559	-0,001559	-0,000998	0,000000	-	-
21,34	-0,002133	-0,002133	-0,001324	0,000000	-	-
21,46	-0,002185	-0,002185	-0,001352	0,000000	-	-
21,63	-0,002241	-0,002241	-0,001383	0,000000	-	-
21,85	-0,002302	-0,002302	-0,001417	0,000000	-	-
22,15	-0,002369	-0,002369	-0,001453	0,000000	-	-
22,54	-0,002442	-0,002442	-0,001492	0,000000	-	-
23,07	-0,002521	-0,002521	-0,001534	0,000000	-	-
23,77	-0,002606	-0,002606	-0,001580	0,000000	-	-
24,71	-0,002700	-0,002700	-0,001629	0,000000	-	-
25,96	-0,002801	-0,002801	-0,001681	0,000000	-	-
27,63	-0,002910	-0,002910	-0,001738	0,000000	-	-
29,85	-0,003029	-0,003029	-0,001799	0,000000	-	-
32,82	-0,003157	-0,003157	-0,001863	0,000000	-	-
36,77	-0,003294	-0,003294	-0,001932	0,000000	-	-
42,05	-0,003442	-0,003442	-0,002004	0,000000	-	-
49,08	-0,003599	-0,003599	-0,002081	0,000000	-	-
58,46	-0,003765	-0,003765	-0,002160	0,000000	-	-
70,96	-0,003939	-0,003939	-0,002242	0,000000	-	-
87,64	-0,004120	-0,004120	-0,002326	0,000000	-	-
109,87	-0,004305	-0,004305	-0,002411	0,000000	-	-
139,53	-0,004492	-0,004492	-0,002494	0,000000	-	-
179,07	-0,004676	-0,004676	-0,002576	0,000000	-	-
231,81	-0,004854	-0,004854	-0,002653	0,000000	-	-
302,13	-0,005022	-0,005022	-0,002725	0,000000	-	-
395,91	-0,005177	-0,005177	-0,002790	0,000000	-	-
520,96	-0,005315	-0,005315	-0,002847	0,000000	-	-
687,72	-0,005436	-0,005436	-0,002897	0,000000	-	-
910,10	-0,005538	-0,005538	-0,002939	0,000000	-	-

continua...

1206,65	-0,005624	-0,005624	-0,002973	0,000000	-	-
1602,10	-0,005693	-0,005693	-0,003001	0,000000	-	-
2129,44	-0,005749	-0,005749	-0,003023	0,000000	-	-
2832,67	-0,005793	-0,005793	-0,003041	0,000000	-	-
3770,43	-0,005827	-0,005827	-0,003054	0,000000	-	-
5020,96	-0,005854	-0,005854	-0,003065	0,000000	-	-
6688,57	-0,005874	-0,005874	-0,003073	0,000000	-	-
8912,36	-0,005890	-0,005890	-0,003079	0,000000	-	-
11877,83	-0,005902	-0,005902	-0,003083	0,000000	-	-
15832,35	-0,005911	-0,005911	-0,003087	0,000000	-	-
21105,79	-0,005918	-0,005918	-0,003090	0,000000	-	-
28138,03	-0,005923	-0,005923	-0,003092	0,000000	-	-
37515,67	-0,005927	-0,005927	-0,003093	0,000000	-	-

Tab.6.2.1.4.2. 4– Deformazione del profilo medio in mezzeria della trave – caso 2 – profilo a π

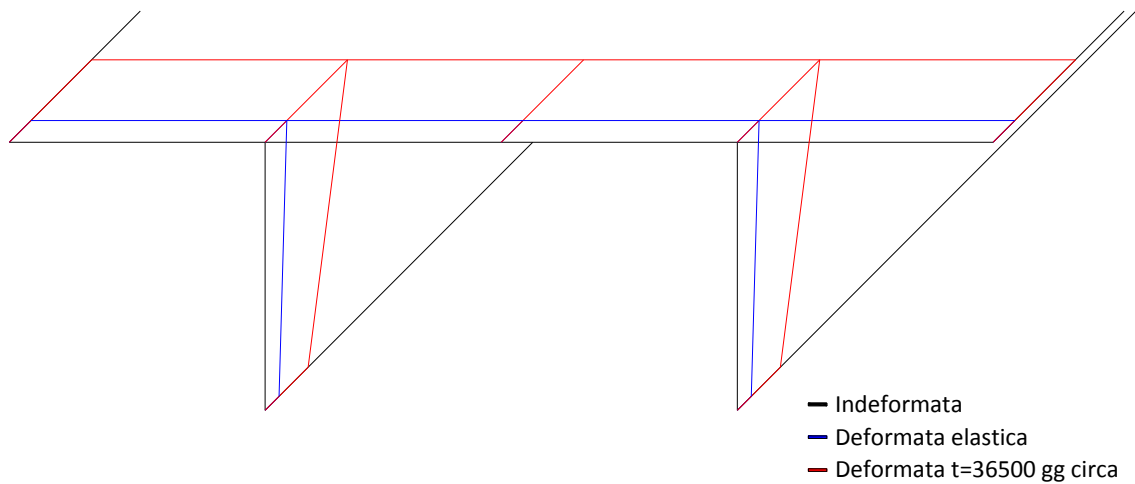


Fig.6.2.1.4.2. 18– Deformata lungo l'asse z – caso 2 – profilo a π

6.2.2 Profilo a shed

6.2.2.1 Proprietà geometriche della sezione

Per quanto concerne le proprietà geometriche della sezione si mostrano di seguito i risultati ottenuti; in particolare nella tabella 6.2.2.1.1 e nella figura 6.2.2.1.1 si mostra il baricentro G rispetto al sistema di riferimento originario di origine O (x_G, y_G), il nuovo sistema di riferimento baricentrico e principale d'inerzia (\bar{x}, \bar{y}) con angolo di rotazione a , i momenti d'inerzia nel nuovo sistema di riferimento (J_{xx}, J_{yy}), il centro di taglio D rispetto al sistema di riferimento originario con origine O (x_D, y_D), l'origine P_0 della coordinata curvilinea lungo il profilo medio (c), il momento d'inerzia settoriale rispetto al polo D e all'origine P_0 ($J_{\omega\omega}$). Si riportano inoltre in tab.6.2.2.1.2 e in tab.6.2.2.1.3 le coordinate (ascissa e ordinata) e la coordinata settoriale dei nodi del calcestruzzo e dei cavi rispetto al sistema di riferimento baricentrico e principale d'inerzia (x, y) e rispetto al centro di taglio (ω).

x_G [m]	y_G [m]	a [rad]	J_{xx} [m ⁴]	J_{yy} [m ⁴]	x_D [m]	y_D [m]	c [m]	$J_{\omega\omega}$ [m ⁶]
0,99	0,39	0,5308	0,0795	0,0533	0,85	-0,09	0,61	0,0027

Tab.6.2.2.1. 1– Caratteristiche geometriche del profilo a shed

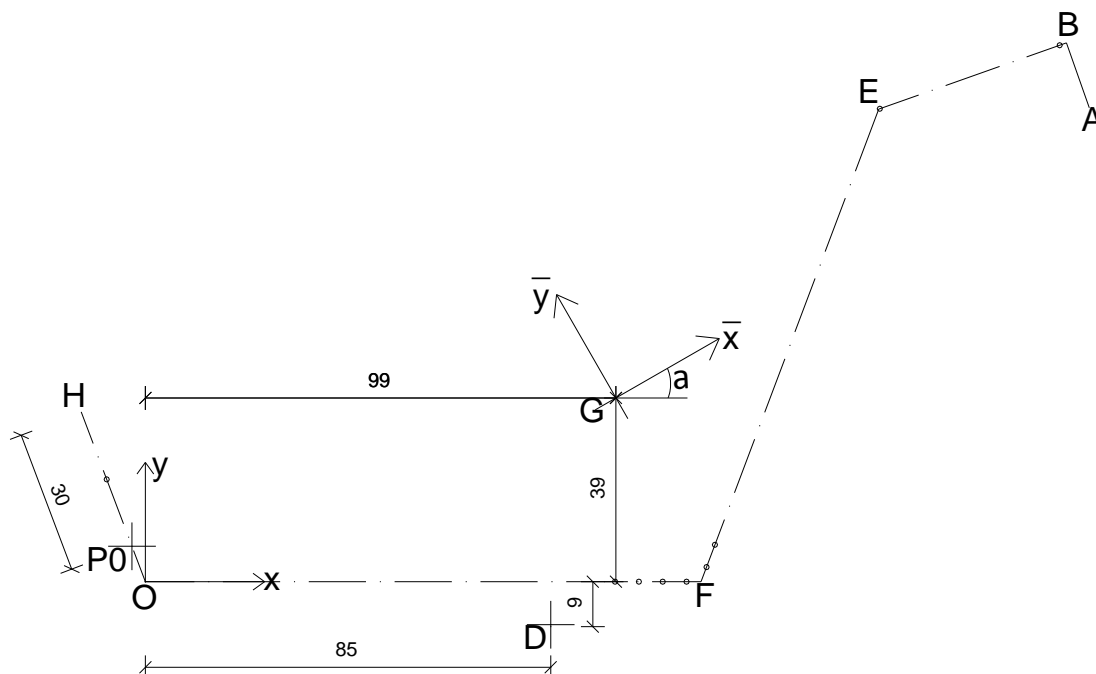


Fig.6.2.2.1. 1– Punti notevoli del profilo a shed

punti	x [m]	y [m]	ω [m ²]
H	-1,027	0,5445	0,2126
O	-1,046	0,1670	-0,0559
F	-0,071	-0,4050	0,0492
E	0,798	0,2559	-0,1946
B	1,219	0,1245	0,2102
A	1,203	-0,0223	0,4343

cavi	x [m]	y [m]	ω [m ²]
sp11	-1,035	0,3947	0,1061
sp21	-0,205	-0,3265	0,0348
sp22	-0,162	-0,3519	0,0395
sp23	-0,119	-0,3772	0,0441
sp24	-0,076	-0,0757	0,0488
sp31	-0,052	-0,3899	0,0436
sp32	-0,012	-0,3596	0,0325
sp41	0,812	0,2515	-0,1809
sp42	1,189	0,1339	0,1814

Tab.6.2.2.1. 2- Proprietà dei punti notevoli del calcestruzzo (a sx) e dei cavi (a dx) – profilo a shed

6.2.2.2 Funzione di viscosità

Per costruire la funzione di viscosità si fa riferimento a quanto scritto nel paragrafo 3.3.2.3. In particolare i dati di input (oltre alla geometria della sezione, che definisce l'area della sezione e il perimetro a contatto con l'atmosfera), riassunti in Tab.6.2.2.2.1, sono:

α	t_0 [giorni]	T [°C]	f_{ck} [MPa]	RH [%]
0	21	20	40	50

Tab.6.2.2.2. 1 - Dati per il calcolo della funzione di viscosità – profilo a shed

Dall'algoritmo implementato si ottiene la seguente funzione di viscosità J:

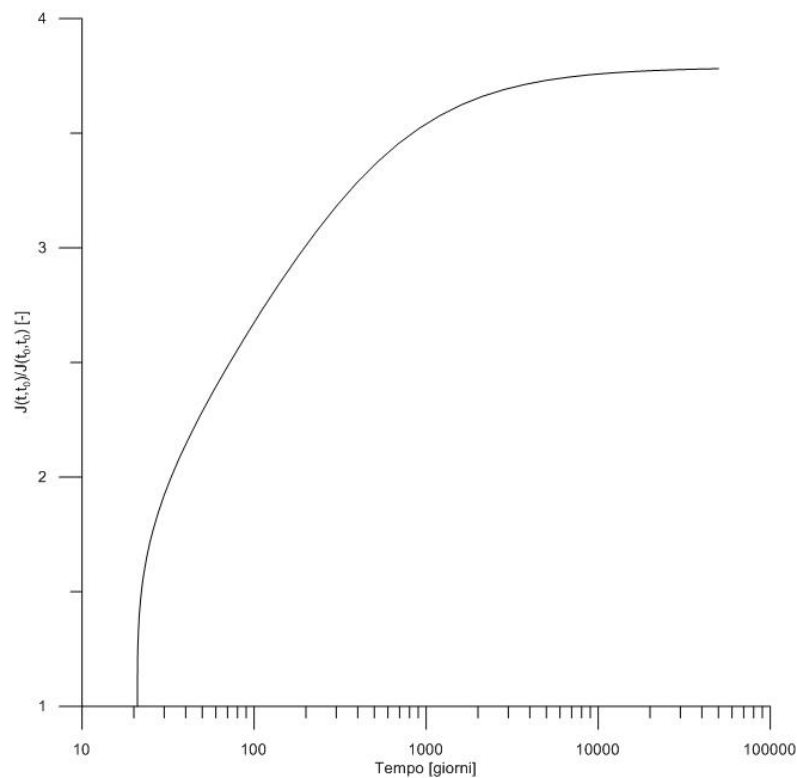


Fig.6.2.2.2. 1 – Funzione di viscosità in output– profilo a shed

6.2.2.3 Verifiche del programma

6.2.2.3.1 Verifica del 1° teorema della viscosità (sezione omogenea)

Valgono le stesse osservazioni del profilo a π . Si riportano a titolo esemplificativo le deformazioni per i punti H, F, A per il metodo A.A.E.M. (tab.6.2.2.3.1.1) e per il metodo di Gauss (tab.6.2.2.3.1.2).

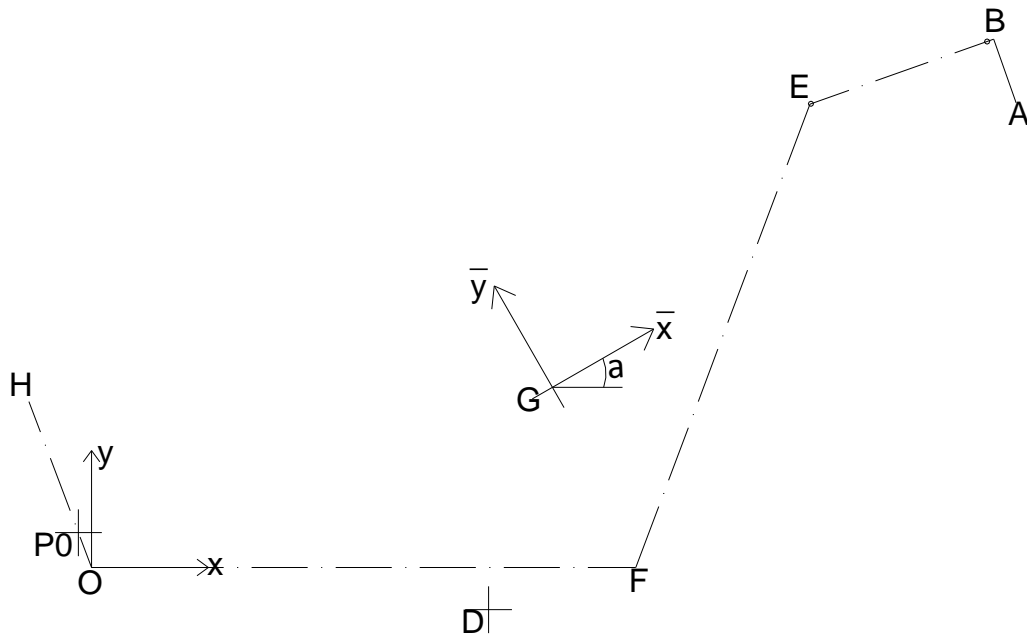


Fig.6.2.2.3.1. 1– Punti notevoli del calcestruzzo – verifica 1° teorema – profilo a shed

Tempi [giorni]	1+φ	ε _c [-]			ε _c verifica			Δε _c verifica		
		H	F	A	H	F	A	H	F	A
20,96	1,00	-0,000186	0,000004	-0,000179	-0,000186	0,000004	-0,000179	0,000000	0,000000	0,000000
21,34	1,36	-0,000252	0,000006	-0,000242	-0,000252	0,000006	-0,000242	0,000000	0,000000	0,000000
21,46	1,39	-0,000258	0,000006	-0,000248	-0,000258	0,000006	-0,000248	0,000000	0,000000	0,000000
21,63	1,42	-0,000264	0,000006	-0,000254	-0,000264	0,000006	-0,000254	0,000000	0,000000	0,000000
21,85	1,46	-0,000272	0,000006	-0,000261	-0,000272	0,000006	-0,000261	0,000000	0,000000	0,000000
22,15	1,50	-0,000279	0,000006	-0,000269	-0,000279	0,000006	-0,000269	0,000000	0,000000	0,000000
22,54	1,55	-0,000288	0,000007	-0,000277	-0,000288	0,000007	-0,000277	0,000000	0,000000	0,000000
23,07	1,60	-0,000297	0,000007	-0,000286	-0,000297	0,000007	-0,000286	0,000000	0,000000	0,000000
23,77	1,65	-0,000307	0,000007	-0,000295	-0,000307	0,000007	-0,000295	0,000000	0,000000	0,000000
24,71	1,71	-0,000318	0,000007	-0,000306	-0,000318	0,000007	-0,000306	0,000000	0,000000	0,000000
25,96	1,77	-0,000329	0,000008	-0,000317	-0,000329	0,000008	-0,000317	0,000000	0,000000	0,000000
27,63	1,84	-0,000342	0,000008	-0,000329	-0,000342	0,000008	-0,000329	0,000000	0,000000	0,000000
29,85	1,92	-0,000356	0,000008	-0,000342	-0,000356	0,000008	-0,000342	0,000000	0,000000	0,000000
32,82	2,00	-0,000371	0,000009	-0,000357	-0,000371	0,000009	-0,000357	0,000000	0,000000	0,000000
36,77	2,08	-0,000387	0,000009	-0,000372	-0,000387	0,000009	-0,000372	0,000000	0,000000	0,000000
42,05	2,18	-0,000404	0,000009	-0,000389	-0,000404	0,000009	-0,000389	0,000000	0,000000	0,000000
49,08	2,28	-0,000422	0,000010	-0,000406	-0,000422	0,000010	-0,000406	0,000000	0,000000	0,000000
58,46	2,38	-0,000442	0,000010	-0,000425	-0,000442	0,000010	-0,000425	0,000000	0,000000	0,000000
70,96	2,49	-0,000462	0,000011	-0,000445	-0,000462	0,000011	-0,000445	0,000000	0,000000	0,000000
87,64	2,61	-0,000484	0,000011	-0,000465	-0,000484	0,000011	-0,000465	0,000000	0,000000	0,000000
109,87	2,72	-0,000506	0,000012	-0,000486	-0,000506	0,000012	-0,000486	0,000000	0,000000	0,000000
139,53	2,84	-0,000528	0,000012	-0,000508	-0,000528	0,000012	-0,000508	0,000000	0,000000	0,000000
179,07	2,96	-0,000550	0,000013	-0,000529	-0,000550	0,000013	-0,000529	0,000000	0,000000	0,000000
231,81	3,08	-0,000571	0,000013	-0,000549	-0,000571	0,000013	-0,000549	0,000000	0,000000	0,000000
302,13	3,18	-0,000591	0,000014	-0,000569	-0,000591	0,000014	-0,000569	0,000000	0,000000	0,000000
395,91	3,28	-0,000610	0,000014	-0,000587	-0,000610	0,000014	-0,000587	0,000000	0,000000	0,000000
520,96	3,38	-0,000626	0,000015	-0,000603	-0,000626	0,000015	-0,000603	0,000000	0,000000	0,000000
687,72	3,45	-0,000641	0,000015	-0,000617	-0,000641	0,000015	-0,000617	0,000000	0,000000	0,000000
910,10	3,52	-0,000654	0,000015	-0,000629	-0,000654	0,000015	-0,000629	0,000000	0,000000	0,000000
1206,65	3,58	-0,000664	0,000015	-0,000639	-0,000664	0,000015	-0,000639	0,000000	0,000000	0,000000
1602,10	3,62	-0,000673	0,000016	-0,000647	-0,000673	0,000016	-0,000647	0,000000	0,000000	0,000000
2129,44	3,66	-0,000680	0,000016	-0,000654	-0,000680	0,000016	-0,000654	0,000000	0,000000	0,000000
2832,67	3,69	-0,000685	0,000016	-0,000659	-0,000685	0,000016	-0,000659	0,000000	0,000000	0,000000
3770,43	3,71	-0,000689	0,000016	-0,000663	-0,000689	0,000016	-0,000663	0,000000	0,000000	0,000000
5020,96	3,73	-0,000693	0,000016	-0,000666	-0,000693	0,000016	-0,000666	0,000000	0,000000	0,000000
6688,57	3,75	-0,000695	0,000016	-0,000669	-0,000695	0,000016	-0,000669	0,000000	0,000000	0,000000
8912,36	3,76	-0,000697	0,000016	-0,000671	-0,000697	0,000016	-0,000671	0,000000	0,000000	0,000000
11877,83	3,76	-0,000699	0,000016	-0,000672	-0,000699	0,000016	-0,000672	0,000000	0,000000	0,000000
15832,35	3,77	-0,000700	0,000016	-0,000673	-0,000700	0,000016	-0,000673	0,000000	0,000000	0,000000
21105,79	3,77	-0,000700	0,000016	-0,000674	-0,000700	0,000016	-0,000674	0,000000	0,000000	0,000000
28138,03	3,78	-0,000701	0,000016	-0,000675	-0,000701	0,000016	-0,000675	0,000000	0,000000	0,000000
37515,67	3,78	-0,000702	0,000016	-0,000675	-0,000702	0,000016	-0,000675	0,000000	0,000000	0,000000

Tab.6.2.2.3.1. 1– Verifica 1° teorema – A.A.E.M.M. - profilo a shed

Tempi [giorni]	1+φ	ε _c [-]			ε _c verifica			Δε _c verifica		
		H	F	A	H	F	A	H	F	A
20,96	1,00	-0,000186	0,000004	-0,000179	-0,000186	0,000004	-0,000179	0,000000	0,000000	0,000000
21,34	1,36	-0,000252	0,000006	-0,000242	-0,000252	0,000006	-0,000242	0,000000	0,000000	0,000000
21,46	1,39	-0,000258	0,000006	-0,000248	-0,000258	0,000006	-0,000248	0,000000	0,000000	0,000000
21,63	1,42	-0,000264	0,000006	-0,000254	-0,000264	0,000006	-0,000254	0,000000	0,000000	0,000000
21,85	1,46	-0,000272	0,000006	-0,000261	-0,000272	0,000006	-0,000261	0,000000	0,000000	0,000000
22,15	1,50	-0,000279	0,000006	-0,000269	-0,000279	0,000006	-0,000269	0,000000	0,000000	0,000000
22,54	1,55	-0,000288	0,000007	-0,000277	-0,000288	0,000007	-0,000277	0,000000	0,000000	0,000000
23,07	1,60	-0,000297	0,000007	-0,000286	-0,000297	0,000007	-0,000286	0,000000	0,000000	0,000000
23,77	1,65	-0,000307	0,000007	-0,000295	-0,000307	0,000007	-0,000295	0,000000	0,000000	0,000000
24,71	1,71	-0,000318	0,000007	-0,000306	-0,000318	0,000007	-0,000306	0,000000	0,000000	0,000000
25,96	1,77	-0,000329	0,000008	-0,000317	-0,000329	0,000008	-0,000317	0,000000	0,000000	0,000000
27,63	1,84	-0,000342	0,000008	-0,000329	-0,000342	0,000008	-0,000329	0,000000	0,000000	0,000000
29,85	1,92	-0,000356	0,000008	-0,000342	-0,000356	0,000008	-0,000342	0,000000	0,000000	0,000000
32,82	2,00	-0,000371	0,000009	-0,000357	-0,000371	0,000009	-0,000357	0,000000	0,000000	0,000000
36,77	2,08	-0,000387	0,000009	-0,000372	-0,000387	0,000009	-0,000372	0,000000	0,000000	0,000000
42,05	2,18	-0,000404	0,000009	-0,000389	-0,000404	0,000009	-0,000389	0,000000	0,000000	0,000000
49,08	2,28	-0,000422	0,000010	-0,000406	-0,000422	0,000010	-0,000406	0,000000	0,000000	0,000000
58,46	2,38	-0,000442	0,000010	-0,000425	-0,000442	0,000010	-0,000425	0,000000	0,000000	0,000000
70,96	2,49	-0,000462	0,000011	-0,000445	-0,000462	0,000011	-0,000445	0,000000	0,000000	0,000000
87,64	2,61	-0,000484	0,000011	-0,000465	-0,000484	0,000011	-0,000465	0,000000	0,000000	0,000000
109,87	2,72	-0,000506	0,000012	-0,000486	-0,000506	0,000012	-0,000486	0,000000	0,000000	0,000000
139,53	2,84	-0,000528	0,000012	-0,000508	-0,000528	0,000012	-0,000508	0,000000	0,000000	0,000000
179,07	2,96	-0,000550	0,000013	-0,000529	-0,000550	0,000013	-0,000529	0,000000	0,000000	0,000000
231,81	3,08	-0,000571	0,000013	-0,000549	-0,000571	0,000013	-0,000549	0,000000	0,000000	0,000000
302,13	3,18	-0,000591	0,000014	-0,000569	-0,000591	0,000014	-0,000569	0,000000	0,000000	0,000000
395,91	3,28	-0,000610	0,000014	-0,000587	-0,000610	0,000014	-0,000587	0,000000	0,000000	0,000000
520,96	3,38	-0,000626	0,000015	-0,000603	-0,000626	0,000015	-0,000603	0,000000	0,000000	0,000000
687,72	3,45	-0,000641	0,000015	-0,000617	-0,000641	0,000015	-0,000617	0,000000	0,000000	0,000000
910,10	3,52	-0,000654	0,000015	-0,000629	-0,000654	0,000015	-0,000629	0,000000	0,000000	0,000000
1206,65	3,58	-0,000664	0,000015	-0,000639	-0,000664	0,000015	-0,000639	0,000000	0,000000	0,000000
1602,10	3,62	-0,000673	0,000016	-0,000647	-0,000673	0,000016	-0,000647	0,000000	0,000000	0,000000
2129,44	3,66	-0,000680	0,000016	-0,000654	-0,000680	0,000016	-0,000654	0,000000	0,000000	0,000000
2832,67	3,69	-0,000685	0,000016	-0,000659	-0,000685	0,000016	-0,000659	0,000000	0,000000	0,000000
3770,43	3,71	-0,000689	0,000016	-0,000663	-0,000689	0,000016	-0,000663	0,000000	0,000000	0,000000
5020,96	3,73	-0,000693	0,000016	-0,000666	-0,000693	0,000016	-0,000666	0,000000	0,000000	0,000000
6688,57	3,75	-0,000695	0,000016	-0,000669	-0,000695	0,000016	-0,000669	0,000000	0,000000	0,000000
8912,36	3,76	-0,000697	0,000016	-0,000671	-0,000697	0,000016	-0,000671	0,000000	0,000000	0,000000
11877,83	3,76	-0,000699	0,000016	-0,000672	-0,000699	0,000016	-0,000672	0,000000	0,000000	0,000000
15832,35	3,77	-0,000700	0,000016	-0,000673	-0,000700	0,000016	-0,000673	0,000000	0,000000	0,000000
21105,79	3,77	-0,000700	0,000016	-0,000674	-0,000700	0,000016	-0,000674	0,000000	0,000000	0,000000
28138,03	3,78	-0,000701	0,000016	-0,000675	-0,000701	0,000016	-0,000675	0,000000	0,000000	0,000000
37515,67	3,78	-0,000702	0,000016	-0,000675	-0,000702	0,000016	-0,000675	0,000000	0,000000	0,000000

Tab.6.2.2.3.1. 2- Verifica 1° teorema – Gauss - profilo a shed

6.2.2.3.2 Verifica del 2° teorema della viscosità (sezione omogenea)

Valgono le stesse osservazioni del profilo a π . Le seguenti tabelle riportano il metodo AAEM (tab.6.2.2.3.2.1) e il metodo di Gauss (tab.6.2.2.3.2.2).

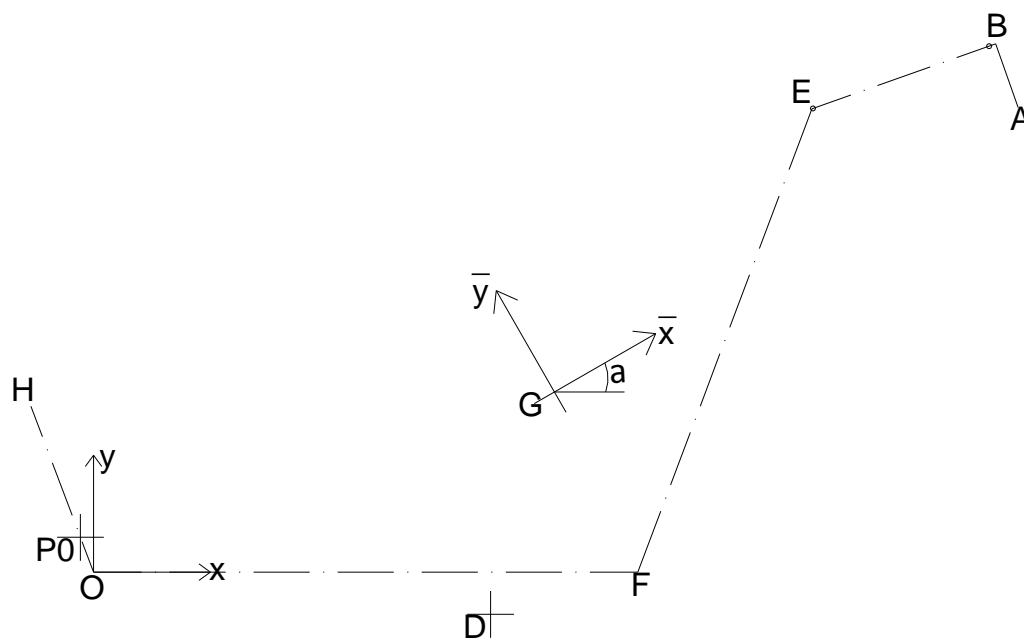


Fig.6.2.2.3.2. 1- Punti notevoli del calcestruzzo – verifica 2° teorema – profilo a shed

Tempi [giorni]	1+φ	ψ			
		1	x	y	ϑ
20,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,34	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,46	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,63	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,85	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
22,15	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
22,54	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
23,07	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
23,77	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
24,71	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
25,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
27,63	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
29,85	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
32,82	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
36,77	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
42,05	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
49,08	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
58,46	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
70,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
87,64	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
109,87	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
139,53	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
179,07	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
231,81	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
302,13	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
395,91	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
520,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
687,72	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
910,10	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
1206,65	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
1602,10	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
2129,44	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
2832,67	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
3770,43	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
5020,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
6688,57	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
8912,36	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
11877,83	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
15832,35	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21105,79	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
28138,03	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
37515,67	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000

Tab.6.2.2.3.2. 1- Verifica 2° teorema – A.A.E.M.M. - profilo a shed

Tempi [giorni]	1+φ	ψ			
		1	x	y	ϑ
20,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,34	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,46	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,63	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21,85	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
22,15	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
22,54	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
23,07	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
23,77	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
24,71	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
25,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
27,63	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
29,85	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
32,82	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
36,77	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
42,05	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
49,08	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
58,46	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
70,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
87,64	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
109,87	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
139,53	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
179,07	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
231,81	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
302,13	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
395,91	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
520,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
687,72	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
910,10	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
1206,65	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
1602,10	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
2129,44	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
2832,67	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
3770,43	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
5020,96	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
6688,57	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
8912,36	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
11877,83	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
15832,35	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
21105,79	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
28138,03	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000
37515,67	1,00	0,000600	0,000000	0,000000	0,000000

Tab.6.2.2.3.2. 2- Verifica 2° teorema – Gauss - profilo a shed

6.2.2.3.3 Verifica della precompressione con cavo risultante

Nella seguente tabella (tab.6.2.2.3.3) si riporta le verifiche con il cavo risultante, analogamente a quanto già fatto per il profilo a π . Si nota che rispetto al caso precedente gli scostamenti percentuali sono minori: questo è dovuto al fatto che minore è il numero di cavi maggiore è veritiera l'approssimazione con un unico cavo risultante.

Tempo [giorni]	X(t) implementato [MPa]	X(t) cavo risultante [MPa]	Scostamento [%]
20,96	908	910	0,2
21,34	900	903	0,3
21,46	899	902	0,3
21,63	899	901	0,3
21,85	898	900	0,3
22,15	897	900	0,3
22,54	896	899	0,3
23,07	895	898	0,3
23,77	894	897	0,3
24,71	893	896	0,3
25,96	891	894	0,4
27,63	890	893	0,4
29,85	888	892	0,4
32,82	887	890	0,4
36,77	885	889	0,4
42,05	883	887	0,4
49,08	881	885	0,4
58,46	879	883	0,5
70,96	877	881	0,5
87,64	874	879	0,5
109,87	872	876	0,5
139,53	869	874	0,5
179,07	867	872	0,6
231,81	865	870	0,6
302,13	863	868	0,6
395,91	861	866	0,6
520,96	859	864	0,6
687,72	857	863	0,6
910,10	856	862	0,7
1206,65	855	861	0,7
1602,10	854	860	0,7
2129,44	853	859	0,7
2832,67	853	859	0,7
3770,43	852	858	0,7
5020,96	852	858	0,7
6688,57	852	858	0,7
8912,36	852	858	0,7
11877,83	851	857	0,7
15832,35	851	857	0,7
21105,79	851	857	0,7
28138,03	851	857	0,7
37515,67	851	857	0,7

Tab.6.2.2.3.3. 1– Verifica cavo risultante – profilo a shed

6.2.2.3.4 Verifica del rispetto dell'equilibrio nella sezione

Valgono le medesime considerazione del profilo a π , con i dati riportati nelle seguenti tabelle.

pj	A_{pj} [m²]	σ_{pj} [kN/m²]	F_{pj} [kN]
11	0,000093	1089865,43	101,36
21	0,000093	1087042,17	101,09
22	0,000093	1086346,45	101,03
23	0,000093	1085650,72	100,97
24	0,000093	1085895,19	100,99
31	0,000093	1085181,74	100,92
32	0,000093	1085774,36	100,98
41	0,000093	1096754,43	102,00
42	0,000093	1068497,42	99,37

Tab.6.2.2.3.4. 1- Verifica equilibrio della sezione - cavi - profilo a shed

ci	A_{ci} [m²]	σ_{ci} [kN/m²]	F_{ci} [kN]
A _{c1}	0,0265	-3576,78	-94,78
A _{c2}	0,0791	-3381,19	-267,45
A _{c3}	0,0764	-3641,55	-278,21
A _{c4}	0,0309	-5386,47	-166,44
A _{c5}	0,0103	-9837,31	-101,32

Tab.6.2.2.3.4. 2- Verifica equilibrio della sezione - calcestruzzo - profilo a shed

F_{cTOT} [kN]	-908,22
F_{pTOT} [kN]	908,70
Δ	0,49
Scostamento %	0,05

Tab.6.2.2.3.4. 3- Verifica equilibrio della sezione - profilo a shed

6.2.2.3.5 Confronto con caso reale

A titolo definitivo si riporta il confronto con un caso reale: si verificano cioè che i valori delle tensioni (risposta elastica al tempo t_0) dei cavi e del calcestruzzo calcolati dal programma (tab.6.2.2.3.5.1) corrispondano a quelli calcolati in [56] (tab.6.2.2.3.5.2 e 6.2.2.3.5.3), nei medesimi punti (la corrispondenza nella lettura si ritrova andando da sinistra verso destra per la prima tabella e dall'alto verso il basso per le due tabelle successive). Si noterà in realtà una lieve differenza nelle tensioni del calcestruzzo: questo è dovuto in minima parte al fatto che in [56] è considerato un profilo in cui sono presenti anche ferri lenti distribuiti lungo tutto il profilo medio (seppure, essendo di diametro 4 mm, il loro contributo sia poco rilevante); un'altra differenza può essere ricercata nel fatto che in [56], per il calcolo numerico, era stato implementato il metodo dei trapezi, mentre in questa trattazione si è utilizzato il metodo di Gauss. Tuttavia la differenza sostanziale tra i risultati è data dal valore del modulo elastico del calcestruzzo E_c , poiché per la sua determinazione in questa trattazione si è utilizzato il CEB 1993 [33], mentre in [56] era stata usata la versione CEB 1984.

Tempi [giorni]	σ_p [MPa]								
	11	21	22	23	24	31	32	41	42
20,96	1089,87	1087,04	1086,35	1085,65	1085,90	1085,18	1085,77	1096,75	1068,50

Tempi [giorni]	σ_c [MPa]					
	H	O	F	E	B	A
20,96	-5,24	-1,91	-4,85	-2,43	-8,34	-11,33

Tab.6.2.2.3.5. 1 – Risposta elastica in output programma

Acciaio ad alta resistenza :

N.	ASCISSA	ORDINATA	COORD. SETT.	DEFORMAZ.	TENSIONE
1	0.1850E+02	-0.1066E+03	0.1579E+04	0.5765E-02	0.1095E+05
2	0.3940E+02	-0.1300E+01	0.7012E+04	0.5716E-02	0.1084E+05
3	0.3940E+02	0.3700E+01	0.8009E+04	0.5712E-02	0.1083E+05
4	0.3940E+02	0.8700E+01	0.8206E+04	0.5708E-02	0.1082E+05
5	0.3940E+02	0.1370E+02	0.8403E+04	0.5705E-02	0.1084E+05
6	0.3770E+02	0.1700E+02	0.8568E+04	0.5704E-02	0.1084E+05
7	0.3790E+02	0.1860E+02	0.8701E+04	0.5708E-02	0.1084E+05
8	-0.6260E+02	0.5700E+02	0.1152E+05	0.5777E-02	0.1098E+05
9	-0.7560E+02	0.9480E+02	0.9892E+04	0.5685E-02	0.1080E+05

Tab.6.2.2.3.5. 2 - [56], tensione cavi in kg/cm²

Calcestruzzo :

N.	ASCISSA	ORDINATA	COORD. SETT.	DEFORMAZ.	TENSIONE
1	0.4400E+01	-0.1118E+03	0.0000E+00	-0.9887E-04	-0.3805E+02
2	0.3940E+02	-0.9880E+02	0.3970E+04	-0.5423E-04	-0.2087E+02
3	0.3940E+02	0.1620E+02	0.8501E+04	-0.1434E-03	-0.5519E+02
4	-0.6160E+02	0.5470E+02	0.1163E+05	-0.6245E-04	-0.2404E+02
5	-0.7610E+02	0.9620E+02	0.9833E+04	-0.1644E-03	-0.6329E+02
6	-0.6160E+02	0.1022E+03	0.7982E+04	-0.2277E-03	-0.8766E+02

Tab.6.2.2.3.5. 3 - [56], tensione calcestruzzo in kg/cm²

6.2.2.4 Sforzi e deformazioni della sezione

6.2.2.4.1 Caso 1

Per il caso 1 si è implementato il programma con i seguenti dati di input:

- L = 14 m
- V = 7 m
- deltaT = 0 °C
- M1 = 0 kNm, Mx = 0 kNm, My = 0 kNm, Momega = 20 kNm², Mpeso ≠ 0
- Xm = 106,5 kN (uguale per tutti i cavi)
- t0J = 21 giorni
- RH = 50%
- fck = 40 MPa
- Ep = 190000000 kN/m²

I risultati ottenuti sono rappresentati numericamente in termini di risposta elastica al tempo iniziale e graficamente come evoluzione nel tempo, adimensionalizzati rispetto alla risposta elastica stessa.

La risposta elastica è riassunta da tab.6.2.2.4.1.1 a tab.6.2.2.4.1.3. L'evoluzione nel tempo è rappresentata in termini delle componenti di ψ da fig.6.2.2.4.2.1 a fig.6.2.1.4.1.4, in termini di tensioni nei cavi (solo a titolo di esempio quelli in posizione 11, 21, 31, 41, 42) da fig.6.2.1.4.1.5 a fig.6.2.1.4.1.9, in termini di tensioni nei nodi del calcestruzzo da fig.6.2.2.4.1.10 a fig.6.2.2.4.1.15.

ψ Gauss			
1	x	y	ϑ
-0,000115	-0,000036	0,000015	-0,000571
ψ AAEMM			
1	x	y	ϑ
-0,000115	-0,000036	0,000015	-0,000571

Tab.6.2.2.4.1. 1- ψ_e – caso 1 – profilo a shed

σ_p Gauss [MPa]				
11	21	31	41	42
1085,76	1085,69	1083,49	1103,76	1061,49
σ_p AAEMM [MPa]				
11	21	31	41	42
1085,76	1085,69	1083,49	1103,76	1061,49

Tab.6.2.2.4.1. 2 – σ_{pe} – caso 1 – profilo a shed

σ_c Gauss [MPa]					
H	O	F	E	B	A
-6,78	-1,50	-5,21	-1,02	-9,86	-14,47
σ_c AAEMM [MPa]					
H	O	F	E	B	A
-6,78	-1,50	-5,21	-1,02	-9,86	-14,47

Tab.6.2.2.4.1. 3 – σ_{ce} – caso 1 – profilo a shed

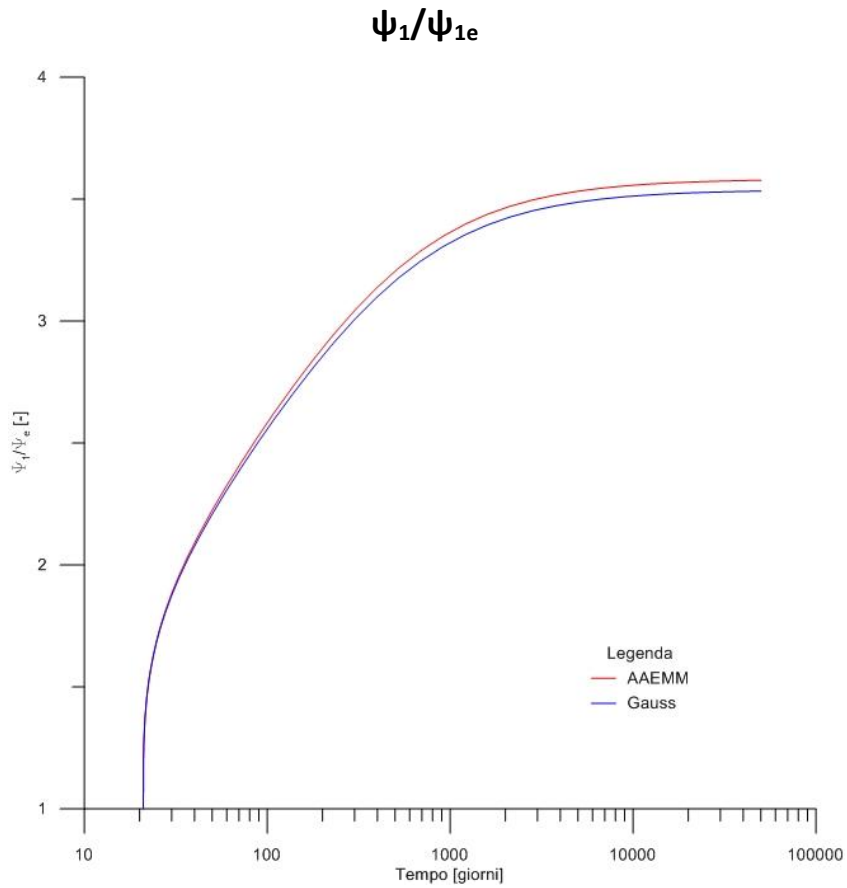


Fig.6.2.2.4.1. 1– ψ_1 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

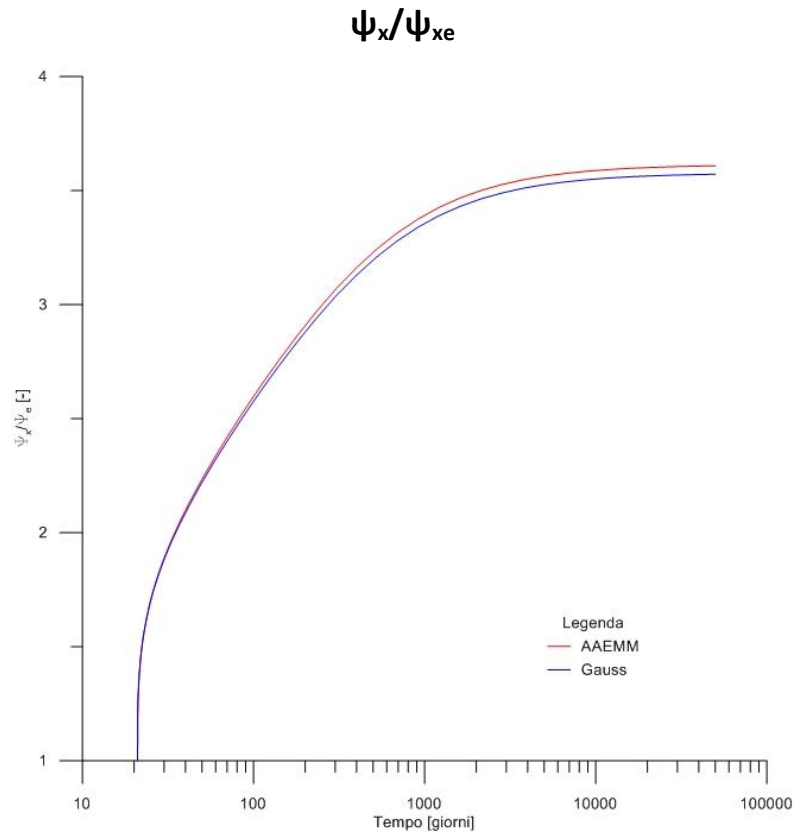


Fig.6.2.2.4.1. 2- ψ_x adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

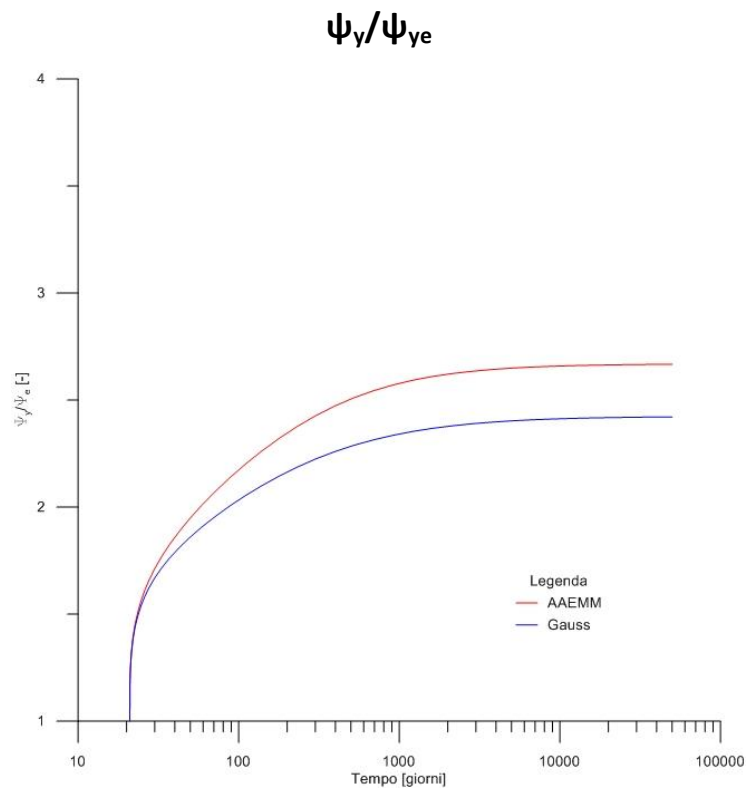


Fig.6.2.2.4.1. 3- ψ_y adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

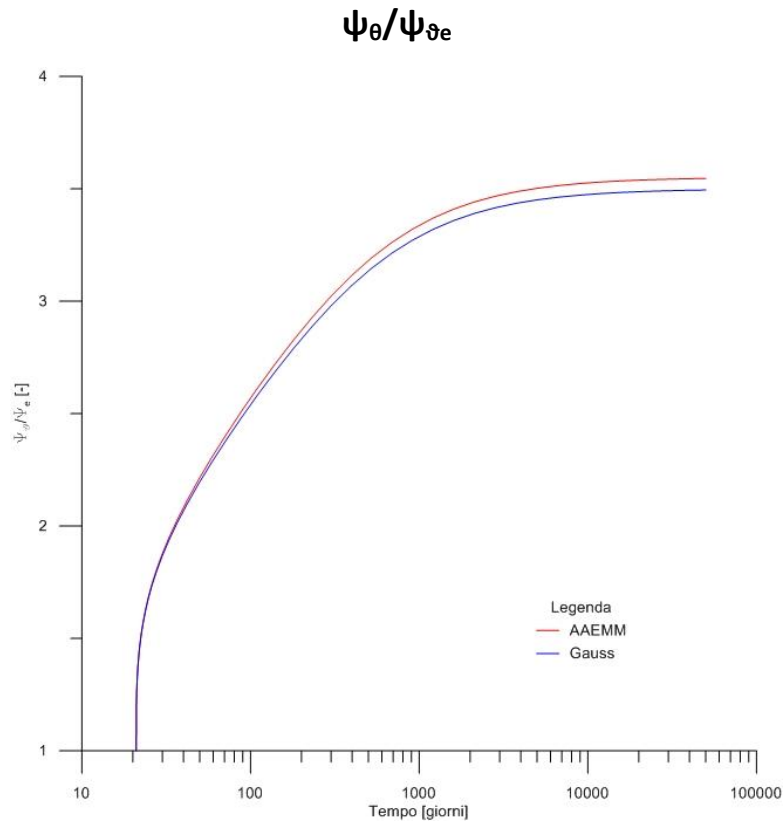


Fig.6.2.2.4.1. 4- ψ_{θ} adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

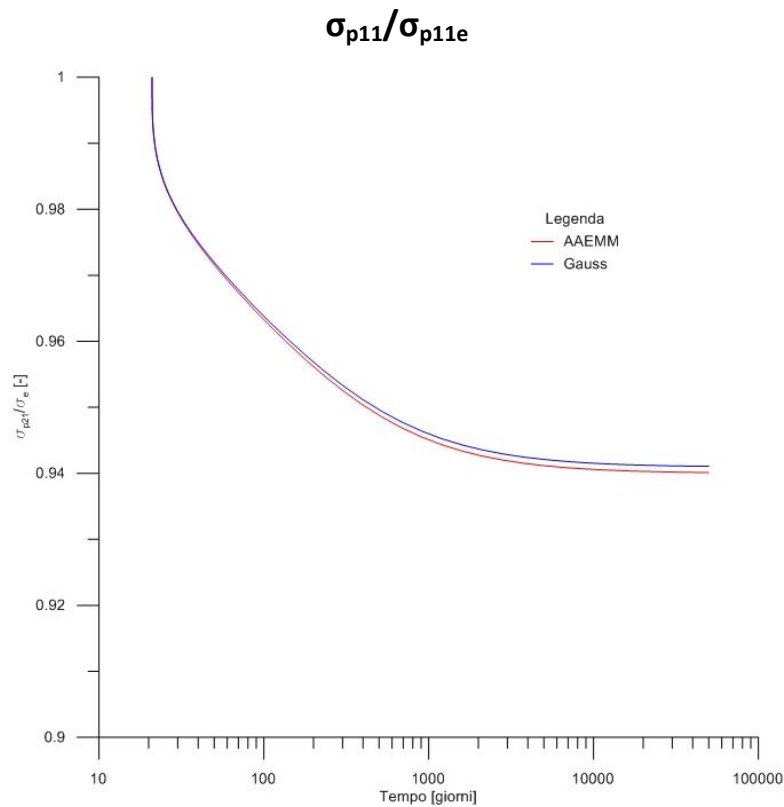


Fig.6.2.2.4.1. 5- Tensione cavo 11 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

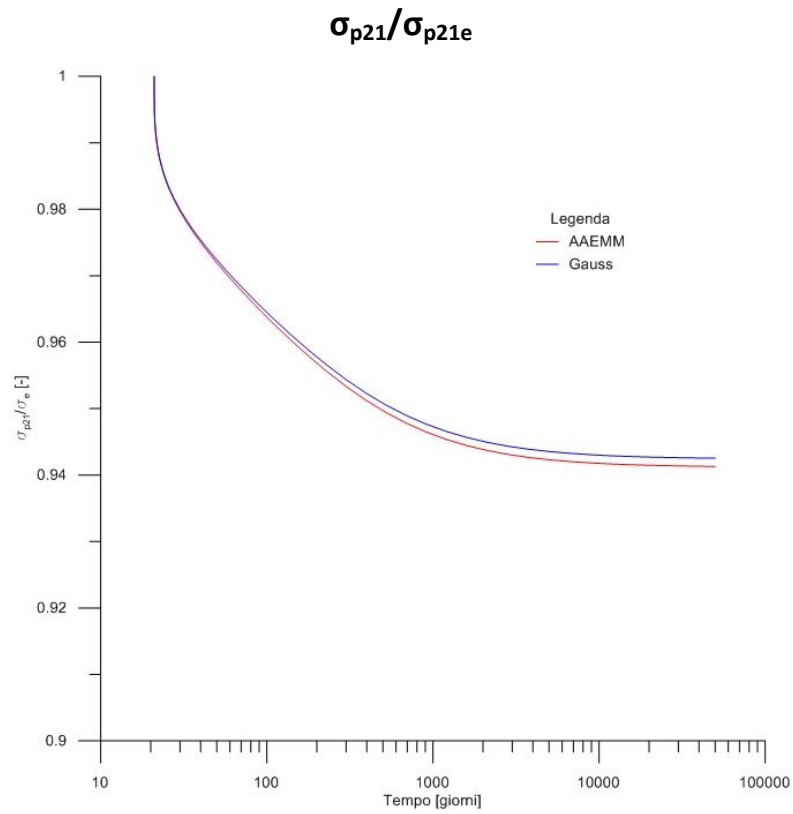


Fig.6.2.2.4.1. 6– Tensione cavo 21 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

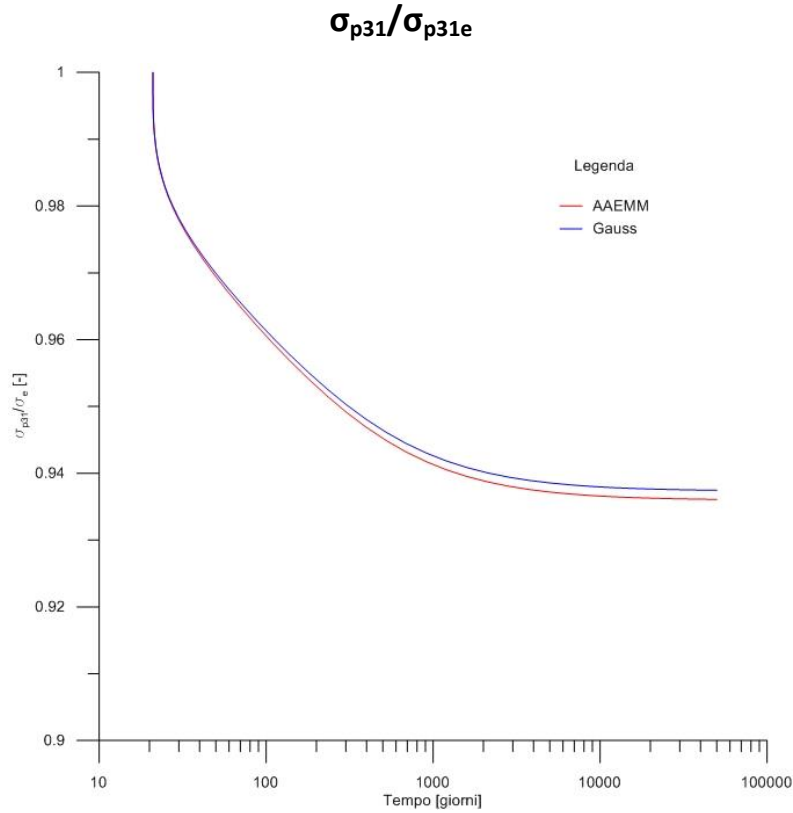


Fig.6.2.2.4.1. 7– Tensione cavo 31 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

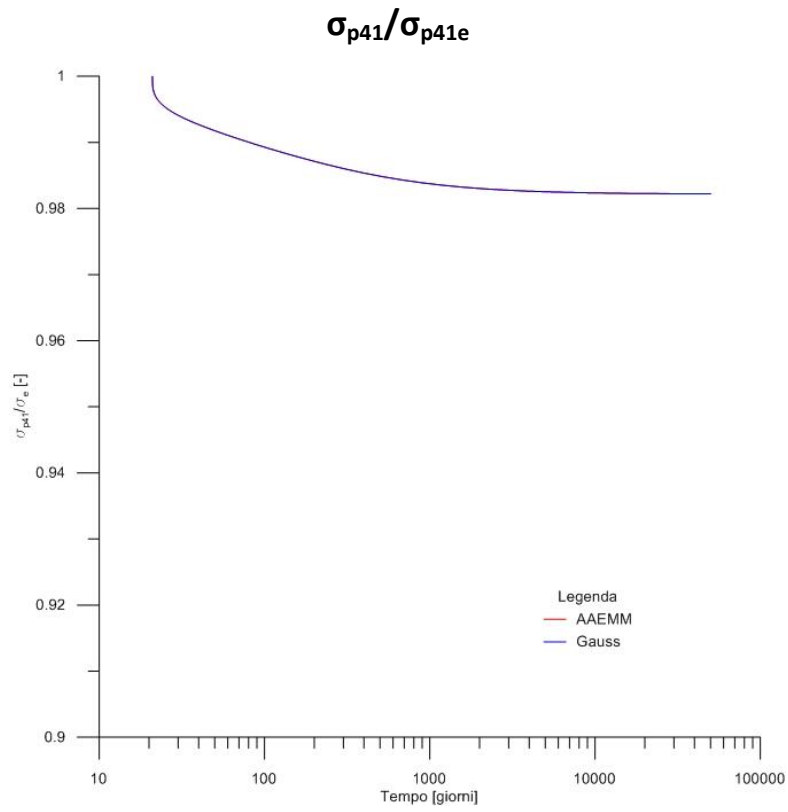


Fig.6.2.2.4.1. 8– Tensione cavo 41 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

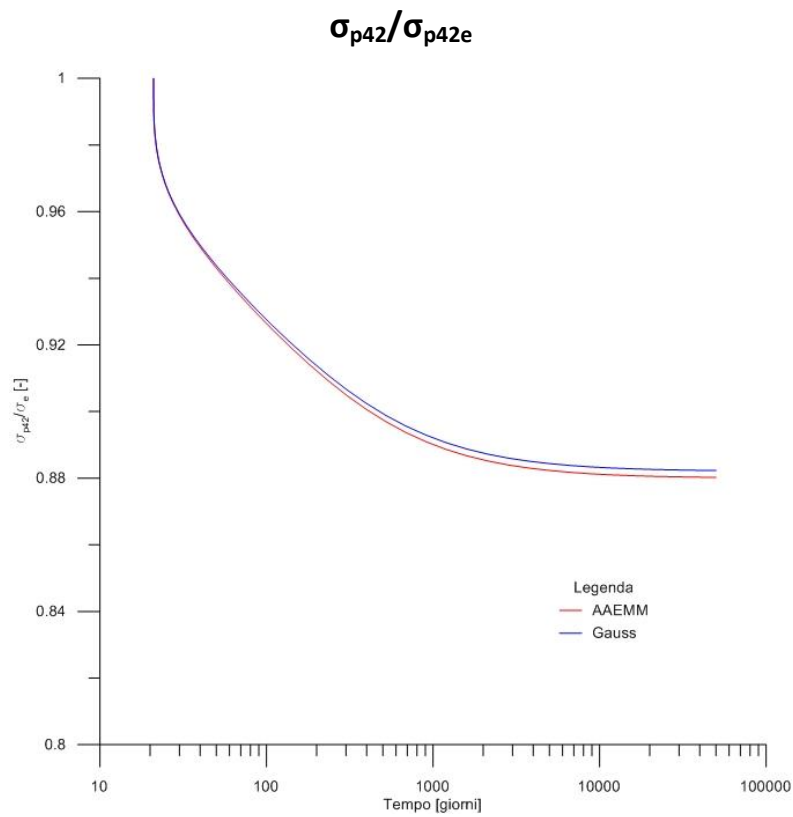


Fig.6.2.2.4.1. 9– Tensione cavo 42 adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

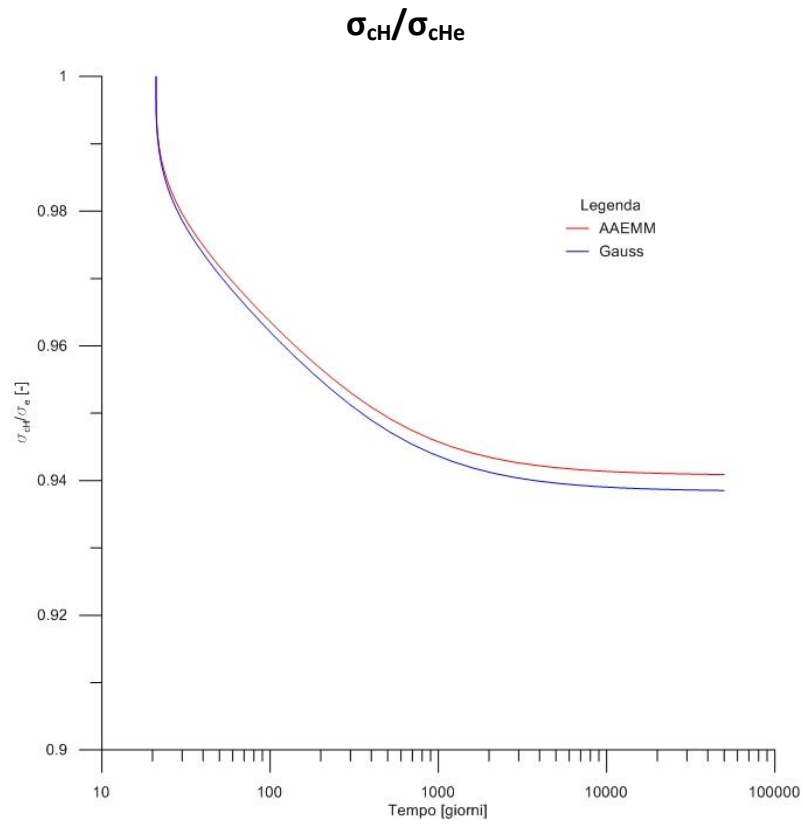


Fig.6.2.2.4.1. 10- Tensione calcestruzzo in H adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

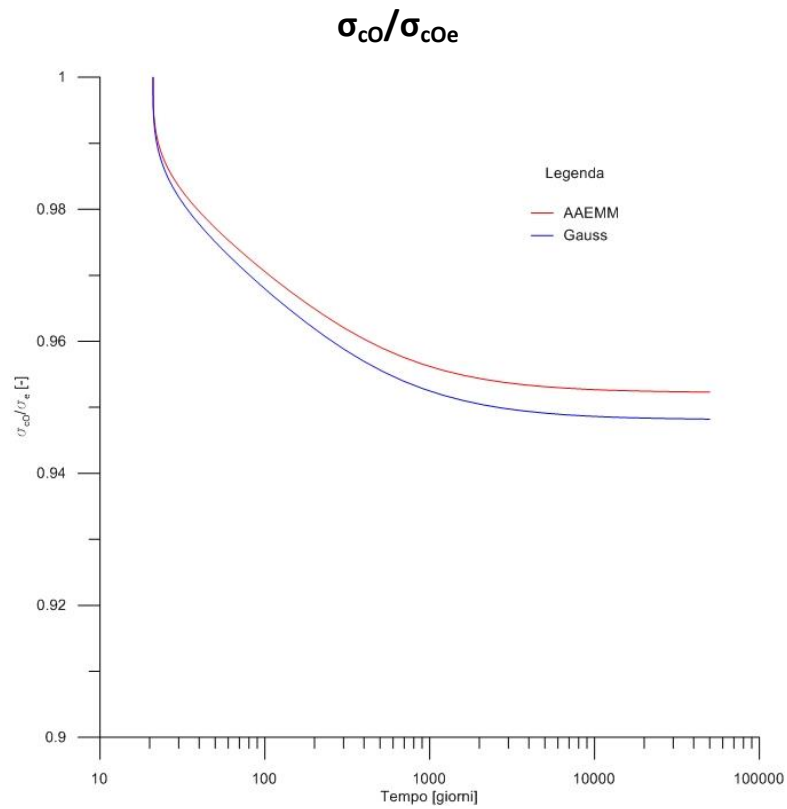


Fig.6.2.2.4.1. 11- Tensione calcestruzzo in O adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

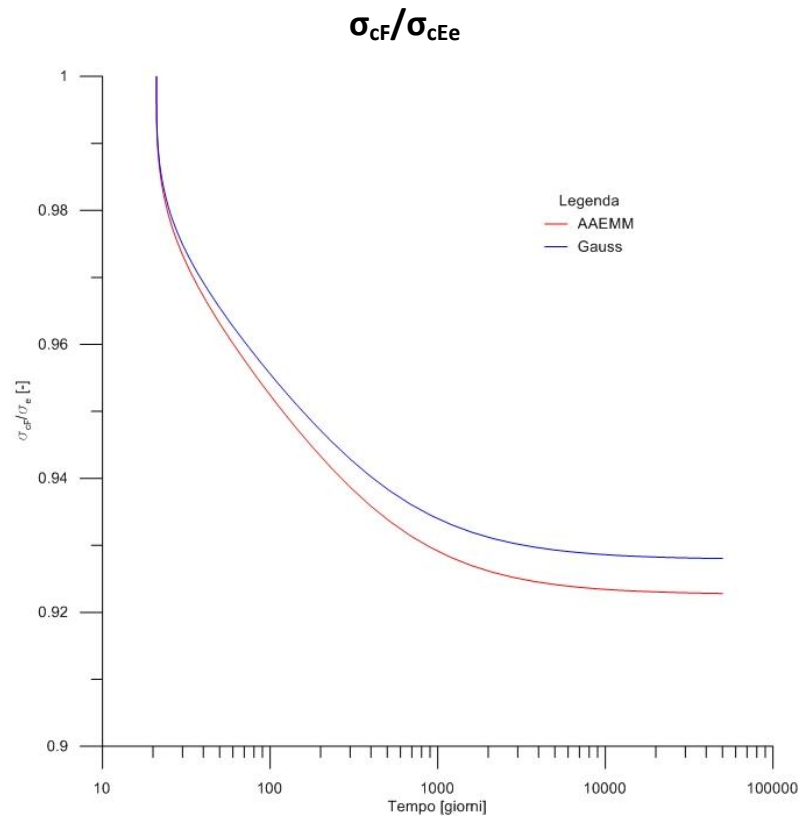


Fig.6.2.2.4.1. 12- Tensione calcestruzzo in F adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

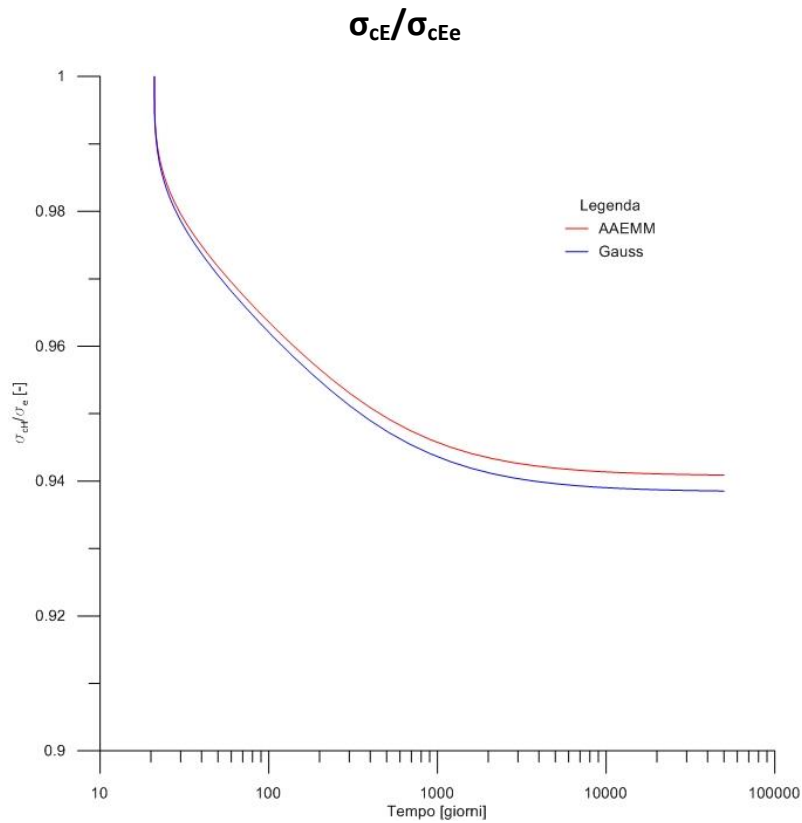


Fig.6.2.2.4.1. 13- Tensione calcestruzzo in E adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

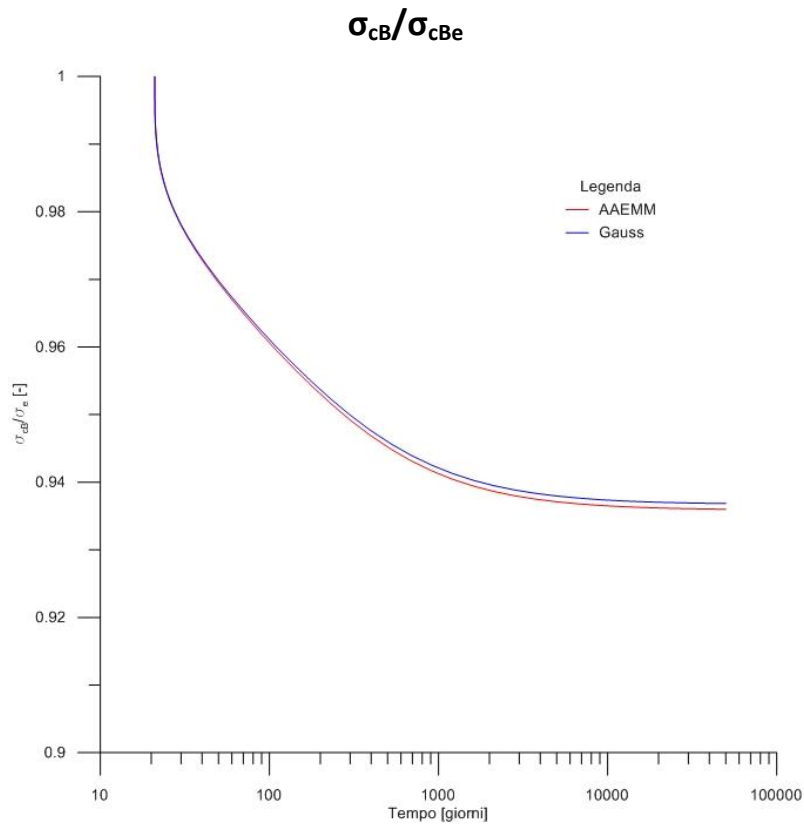


Fig.6.2.2.4.1. 14- Tensione calcestruzzo in B adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

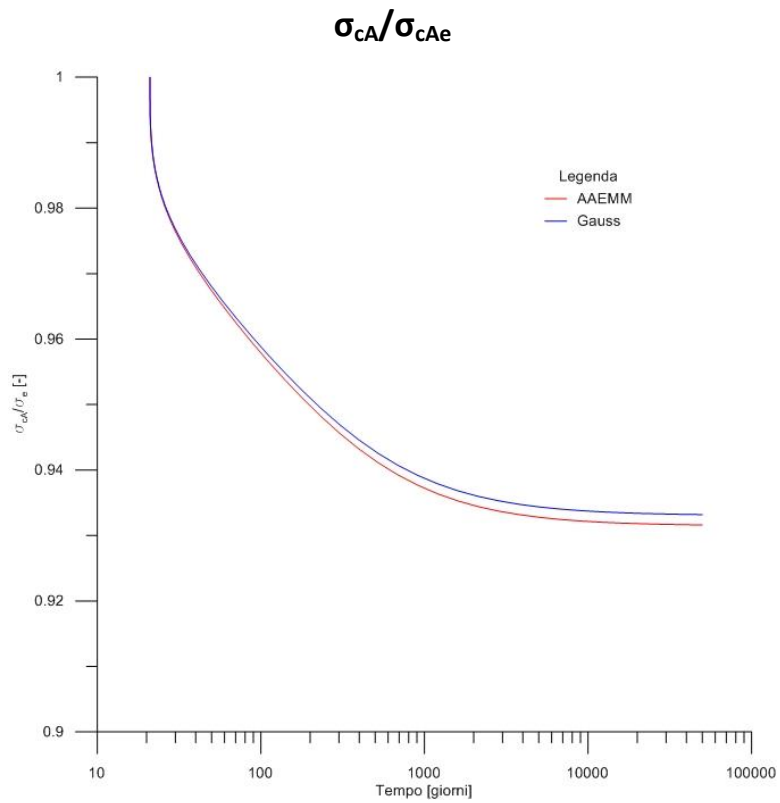


Fig.6.2.2.4.1. 15- Tensione calcestruzzo in A adimensionalizzata – caso 1 – profilo a shed

Nella seguente tabella tab.6.2.2.4.1.4 si riportano i valori degli spostamenti u lungo l'asse della trave z e la rotazione ϑ del profilo rispetto al centro di istantanea rotazione. Nelle figure 6.2.2.4.1.16 e 6.2.2.4.1.17 si rappresentano rispettivamente gli spostamenti u e la rotazione ϑ in due situazioni specifiche: in nero è rappresentato il profilo indeformato, in blu il profilo deformato al tempo t_0 (deformazione elastica) e in rosso la deformazione dopo 100 anni a causa degli effetti viscosi. Per rendere visivamente apprezzabile il campo degli spostamenti, nella fig.6.2.2.4.1.16 i valori sono stati amplificati di un fattore 50.

Tempi [giorni]	Spostamento u lungo z [m]			Rotazione ϑ [°]	CIR [m]	
	H	F	A		x	y
20,96	-0,001335	-0,001025	-0,002848	-1,604126	0,876965	-0,029511
21,34	-0,001798	-0,001378	-0,003832	-2,156973	0,876014	-0,029344
21,46	-0,001840	-0,001409	-0,003920	-2,206339	0,875932	-0,029330
21,63	-0,001885	-0,001444	-0,004016	-2,260048	0,875844	-0,029315
21,85	-0,001934	-0,001481	-0,004120	-2,318465	0,875748	-0,029298
22,15	-0,001987	-0,001521	-0,004233	-2,381978	0,875644	-0,029280
22,54	-0,002045	-0,001565	-0,004356	-2,450998	0,875531	-0,029260
23,07	-0,002108	-0,001613	-0,004490	-2,525960	0,875410	-0,029239
23,77	-0,002177	-0,001665	-0,004635	-2,607315	0,875278	-0,029216
24,71	-0,002251	-0,001721	-0,004792	-2,695526	0,875136	-0,029192
25,96	-0,002331	-0,001782	-0,004962	-2,791055	0,874983	-0,029165
27,63	-0,002418	-0,001848	-0,005146	-2,894353	0,874818	-0,029137
29,85	-0,002512	-0,001919	-0,005345	-3,005832	0,874640	-0,029106
32,82	-0,002614	-0,001995	-0,005559	-3,125837	0,874449	-0,029073
36,77	-0,002722	-0,002077	-0,005789	-3,254600	0,874244	-0,029038
42,05	-0,002839	-0,002165	-0,006035	-3,392186	0,874026	-0,029001
49,08	-0,002962	-0,002258	-0,006296	-3,538415	0,873794	-0,028961
58,46	-0,003093	-0,002356	-0,006571	-3,692776	0,873550	-0,028920
70,96	-0,003230	-0,002458	-0,006860	-3,854325	0,873294	-0,028876
87,64	-0,003372	-0,002565	-0,007159	-4,021594	0,873029	-0,028832
109,87	-0,003517	-0,002673	-0,007464	-4,192512	0,872758	-0,028786
139,53	-0,003663	-0,002782	-0,007772	-4,364402	0,872486	-0,028740
179,07	-0,003807	-0,002890	-0,008075	-4,534056	0,872216	-0,028695
231,81	-0,003947	-0,002994	-0,008368	-4,697942	0,871955	-0,028651
302,13	-0,004079	-0,003092	-0,008645	-4,852525	0,871709	-0,028610
395,91	-0,004200	-0,003182	-0,008900	-4,994659	0,871482	-0,028572
520,96	-0,004309	-0,003263	-0,009128	-5,121957	0,871278	-0,028539
687,72	-0,004404	-0,003334	-0,009327	-5,233043	0,871100	-0,028509
910,10	-0,004484	-0,003394	-0,009496	-5,327612	0,870948	-0,028484

continua...

1206,65	-0,004552	-0,003443	-0,009637	-5,406319	0,870822	-0,028463
1602,10	-0,004607	-0,003484	-0,009752	-5,470525	0,870718	-0,028446
2129,44	-0,004651	-0,003517	-0,009844	-5,522011	0,870636	-0,028432
2832,67	-0,004686	-0,003542	-0,009917	-5,562711	0,870570	-0,028422
3770,43	-0,004713	-0,003563	-0,009974	-5,594509	0,870519	-0,028413
5020,96	-0,004734	-0,003578	-0,010019	-5,619121	0,870479	-0,028407
6688,57	-0,004750	-0,003590	-0,010052	-5,638032	0,870448	-0,028402
8912,36	-0,004763	-0,003599	-0,010078	-5,652478	0,870425	-0,028398
11877,83	-0,004772	-0,003606	-0,010098	-5,663464	0,870407	-0,028395
15832,35	-0,004779	-0,003612	-0,010113	-5,671791	0,870394	-0,028393
21105,79	-0,004785	-0,003616	-0,010124	-5,678086	0,870384	-0,028391
28138,03	-0,004789	-0,003619	-0,010133	-5,682835	0,870376	-0,028390
37515,67	-0,004792	-0,003621	-0,010139	-5,686413	0,870370	-0,028389

Tab.6.2.2.4.1. 4– Deformazione del profilo medio in mezzeria della trave – caso 1 – profilo a shed

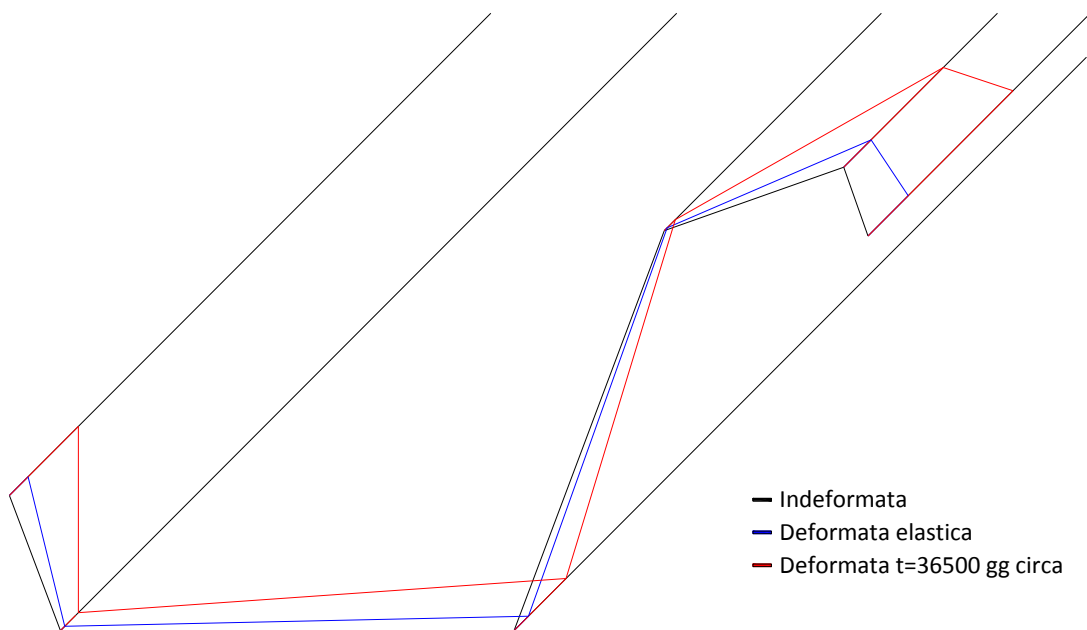


Fig.6.2.2.4.1. 16– Deformata lungo l'asse z – caso 1 – profilo a shed

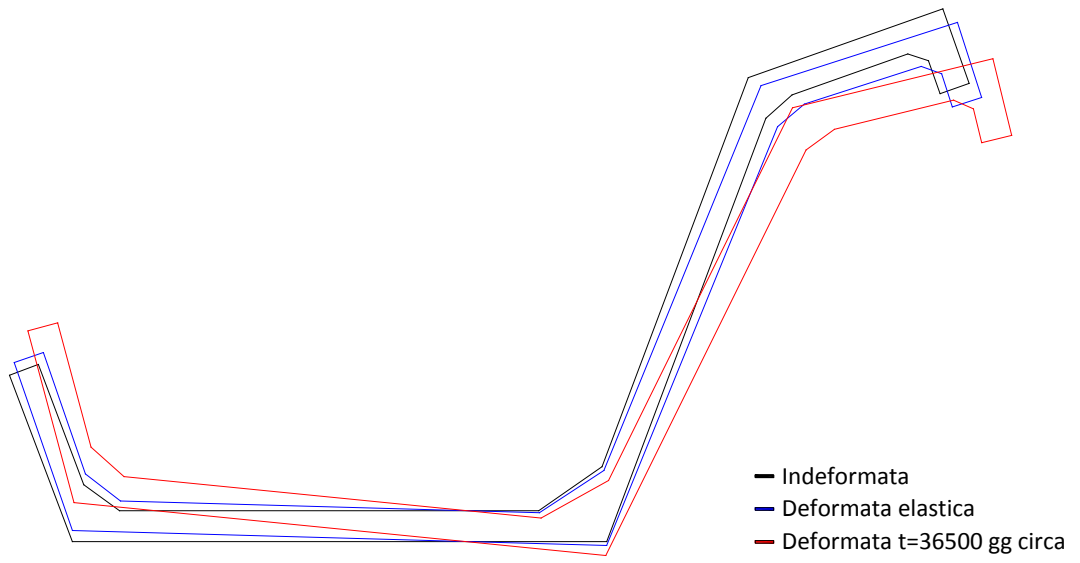


Fig.6.2.2.4.1. 17– Rotazione del profilo – caso 1 – profilo a shed

6.2.2.4.2 Caso 2

Per il caso 2 si è implementato il programma con i seguenti dati di input:

- L = 14 m
- V = 7 m
- $\Delta T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$
- $M_1 = 0 \text{ kN}$, $M_x = 0 \text{ kNm}$, $M_y = 0 \text{ kNm}$, $M_{\omega} = 0 \text{ kNm}^2$, $M_{\text{peso}} \neq 0$
- $X_m = 106,5 \text{ kN}$ (uguale per tutti i cavi)
- $t_0 = 21$ giorni
- RH = 70%
- $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$
- $E_p = 190000000 \text{ kN/m}^2$

I risultati ottenuti sono rappresentati numericamente in termini di risposta elastica al tempo iniziale e graficamente come evoluzione nel tempo, adimensionalizzati rispetto alla risposta elastica stessa.

La risposta elastica è riassunta in tab.6.2.2.4.2.1. L'evoluzione nel tempo è rappresentata in termini delle componenti di ψ da fig.6.2.2.4.2.1 a fig.6.2.1.4.2.4, in termini di tensioni nei cavi (solo a titolo di esempio quelli in posizione 11, 21, 31, 41, 42) da fig.6.2.1.4.2.5 a fig.6.2.1.4.2.9, in termini di tensioni nei nodi del calcestruzzo da fig.6.2.2.4.2.10 a fig.6.2.2.4.2.15.

ψ Gauss			
1	x	y	ϑ
-0,000115	-0,000036	0,000015	-0,000368
ψ AAEMM			
1	x	y	ϑ
-0,000115	-0,000036	0,000015	-0,000368

Tab.6.2.2.4.2. 1- ψ_e – caso 2 – profilo a shed

σ_p Gauss [MPa]				
11	21	31	41	42
1089,87	1087,04	1085,18	1096,76	1068,51
σ_p AAEMM [MPa]				
11	21	31	41	42
1089,87	1087,04	1085,18	1096,76	1068,51

Tab.6.2.2.4.2. 2- σ_{pe} – caso 2 – profilo a shed

σ_c Gauss [MPa]					
H	O	F	E	B	A
-5,24	-1,91	-4,85	-2,43	-8,34	-11,33
σ_c AAEMM [MPa]					
H	O	F	E	B	A
-5,24	-1,91	-4,85	-2,43	-8,34	-11,33

Tab.6.2.2.4.2. 3- σ_{ce} – caso 2 – profilo a shed

$$\psi_1/\psi_{1e}$$

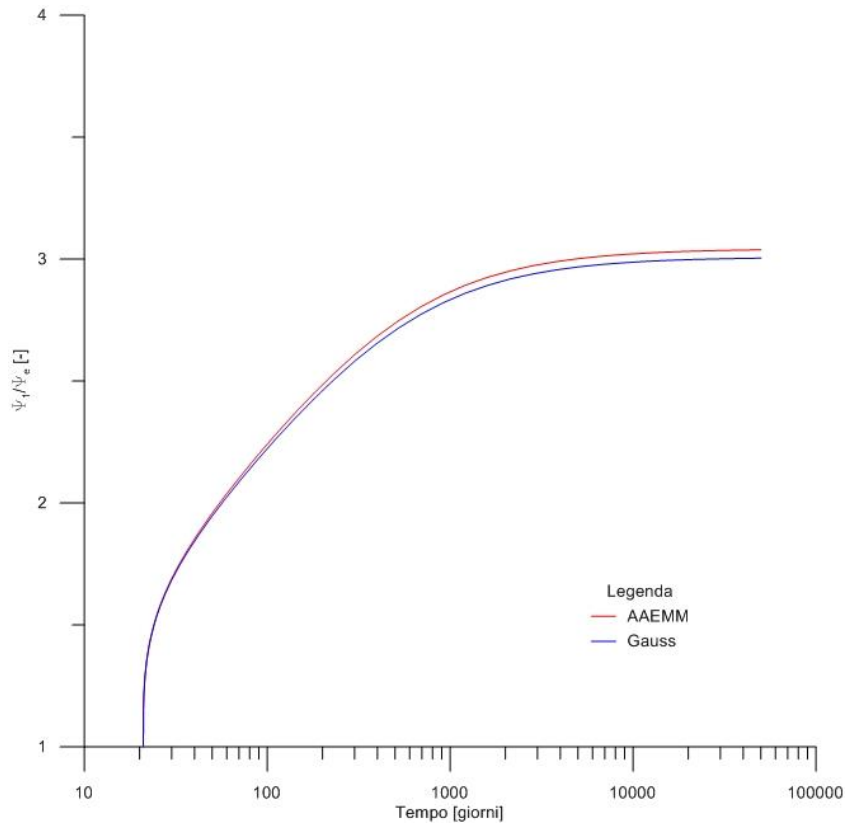


Fig.6.2.2.4.2. 1- ψ_1 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

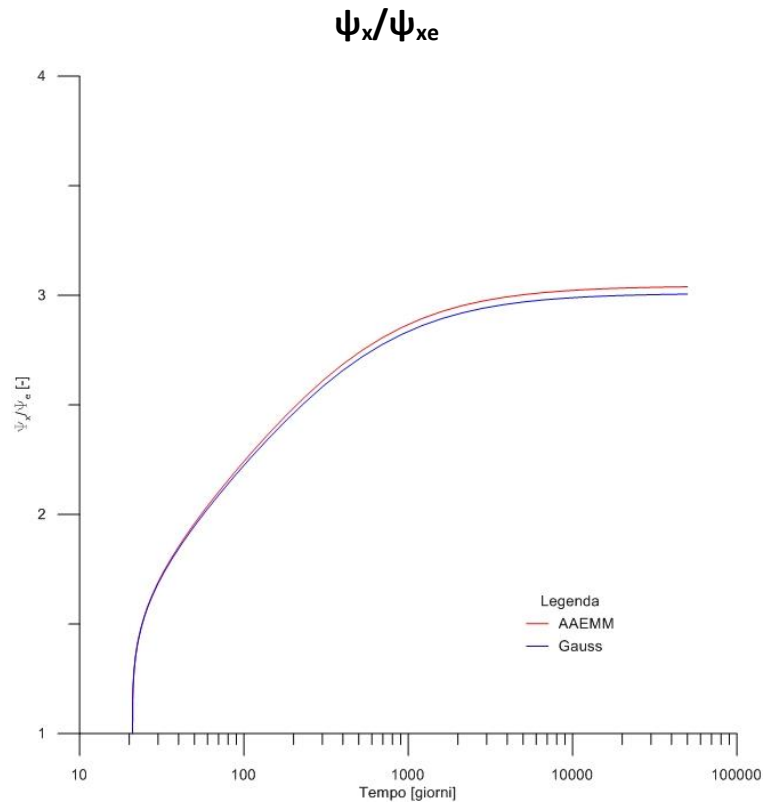


Fig.6.2.2.4.2. 2- ψ_x adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

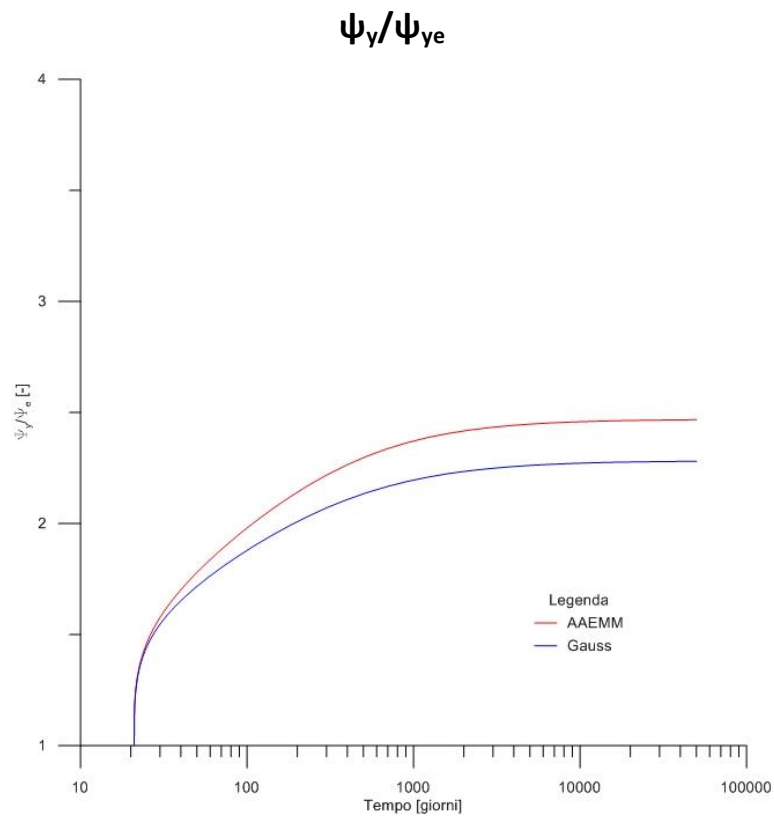


Fig.6.2.2.4.2. 3- ψ_y adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

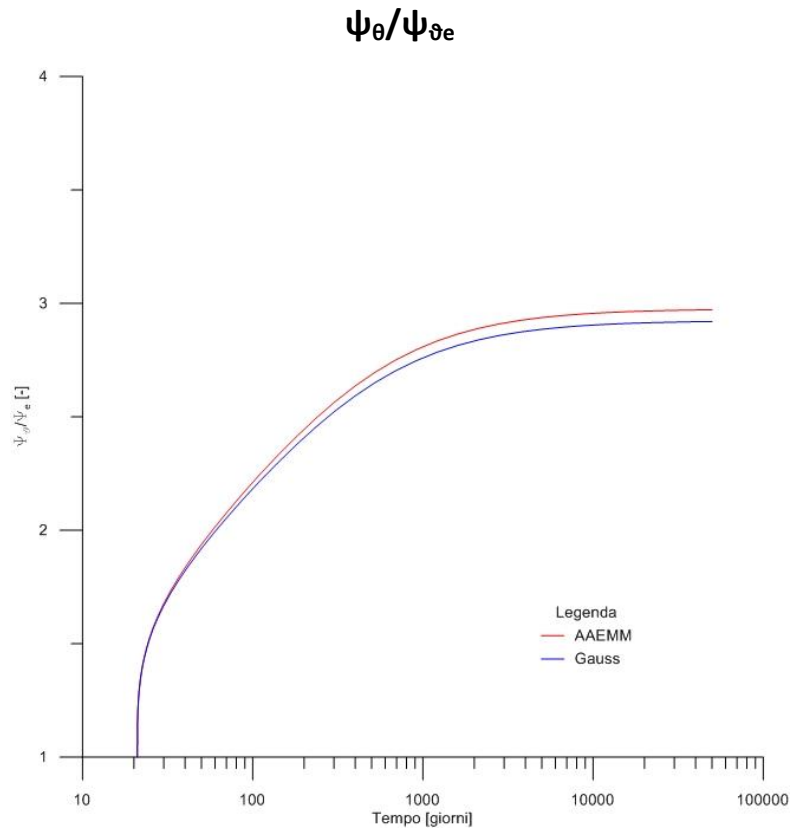


Fig.6.2.2.4.2. 4- ψ_{θ} adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

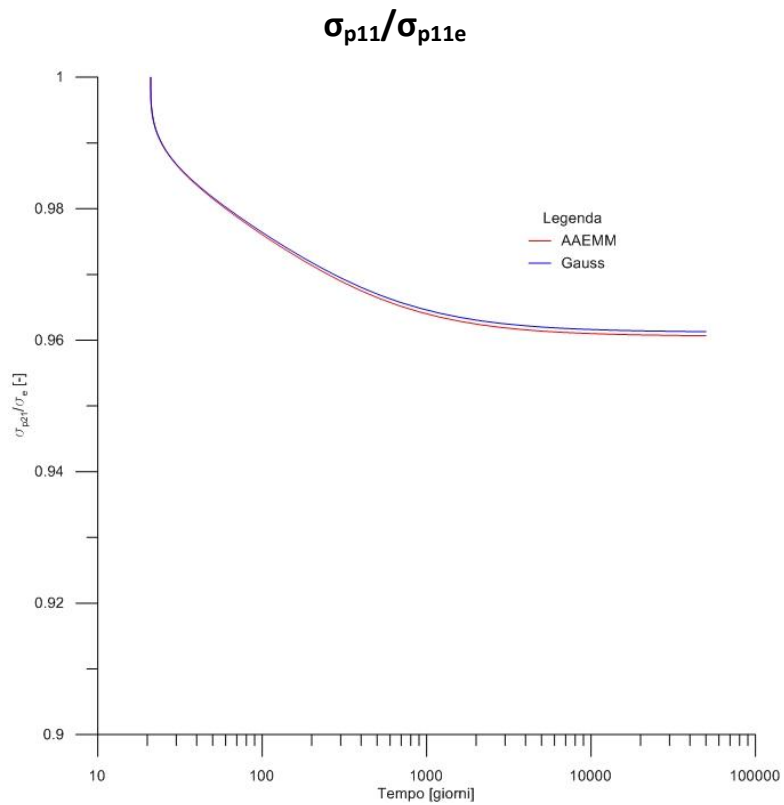


Fig.6.2.2.4.2. 5- Tensione cavo 11 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

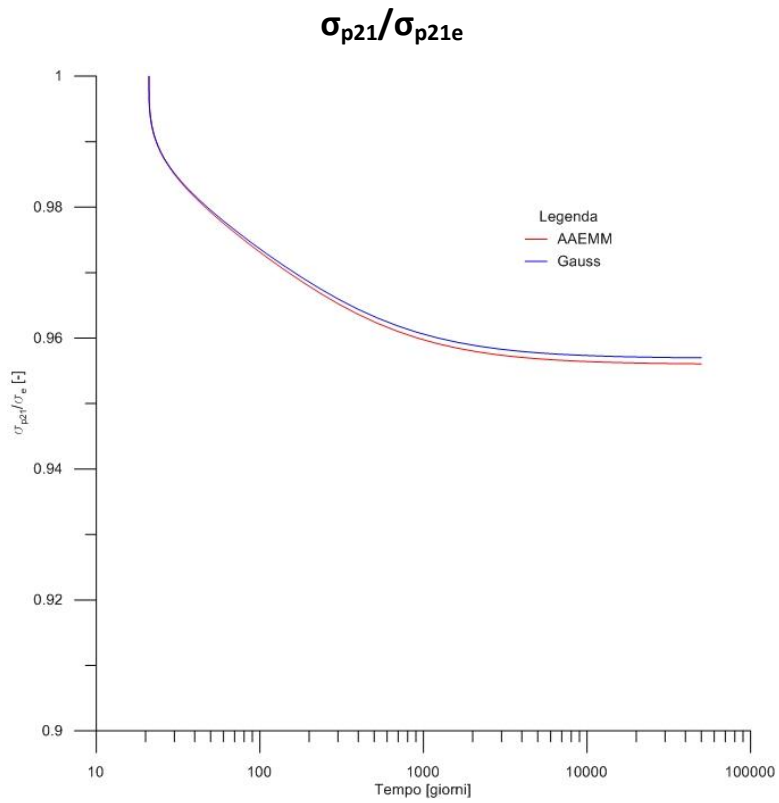


Fig.6.2.2.4.2. 6– Tensione cavo 21 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

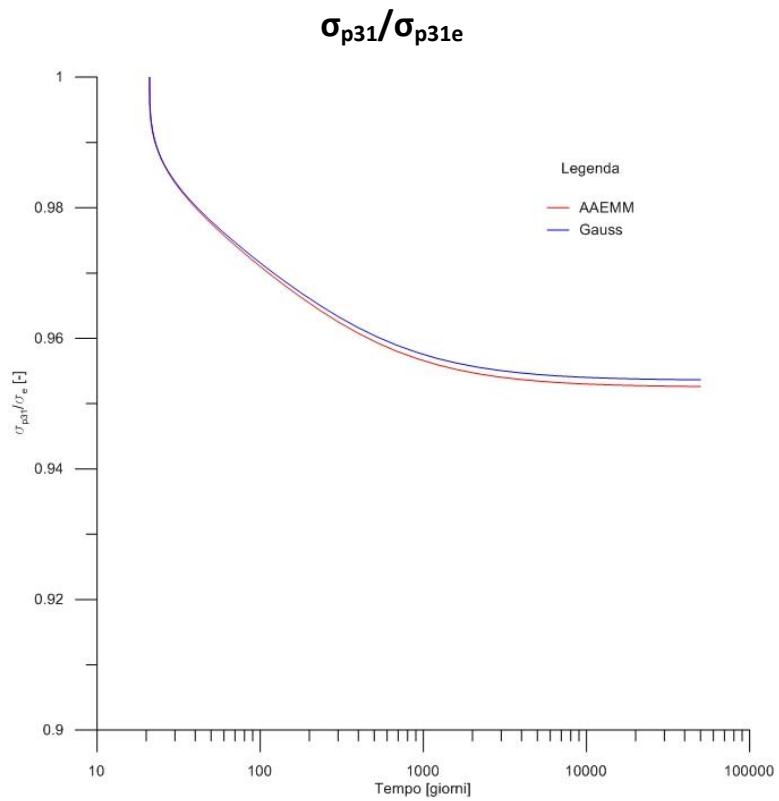


Fig.6.2.2.4.2. 7– Tensione cavo 31 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

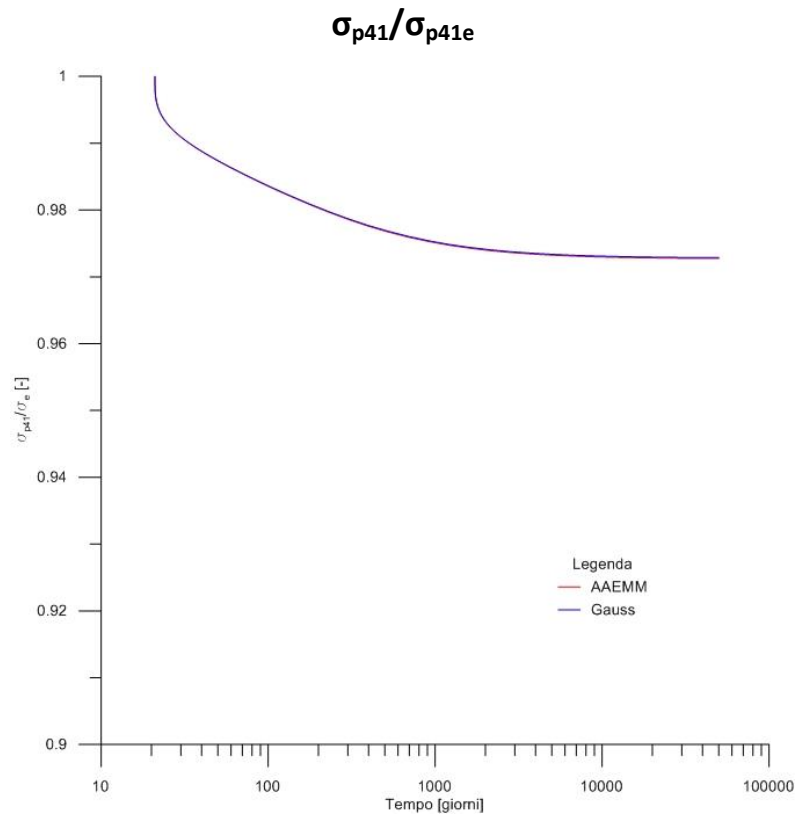


Fig.6.2.2.4.2. 8– Tensione cavo 41 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

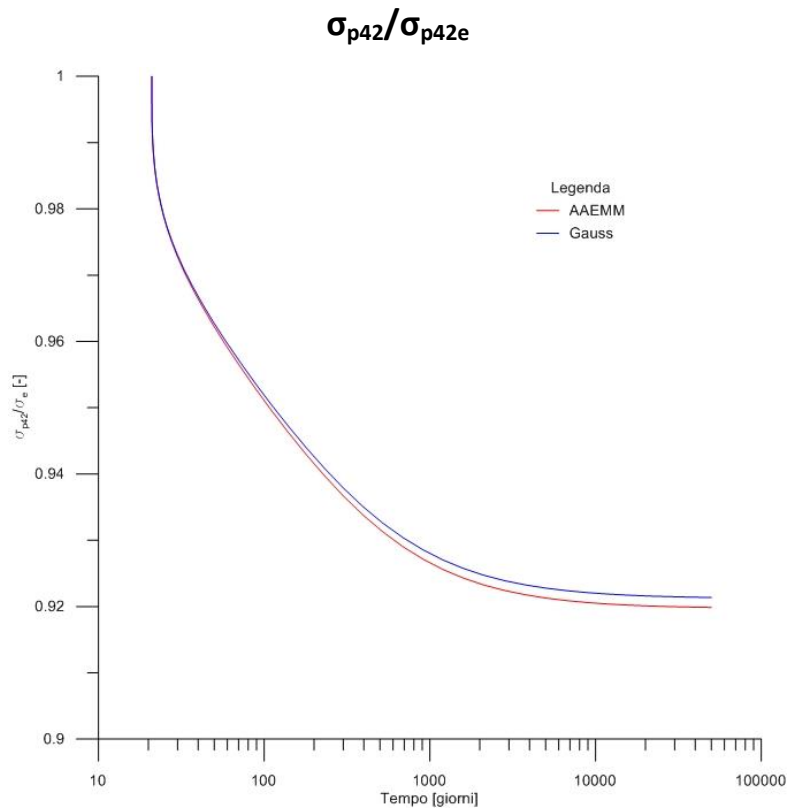


Fig.6.2.2.4.2. 9– Tensione cavo 42 adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

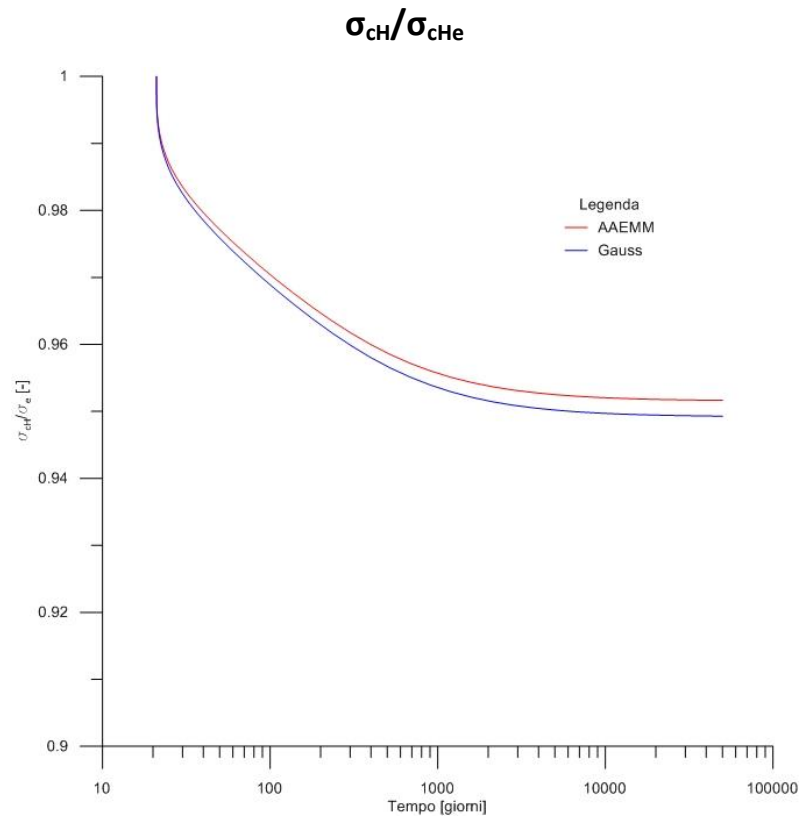


Fig.6.2.2.4.2. 10- Tensione calcestruzzo in H adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

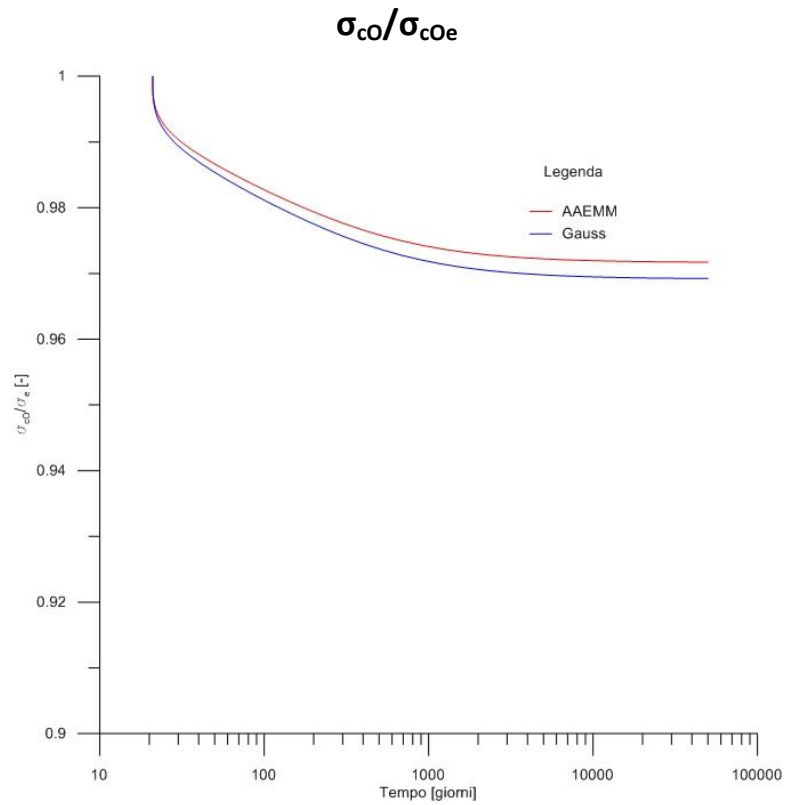


Fig.6.2.2.4.2. 11- Tensione calcestruzzo in O adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

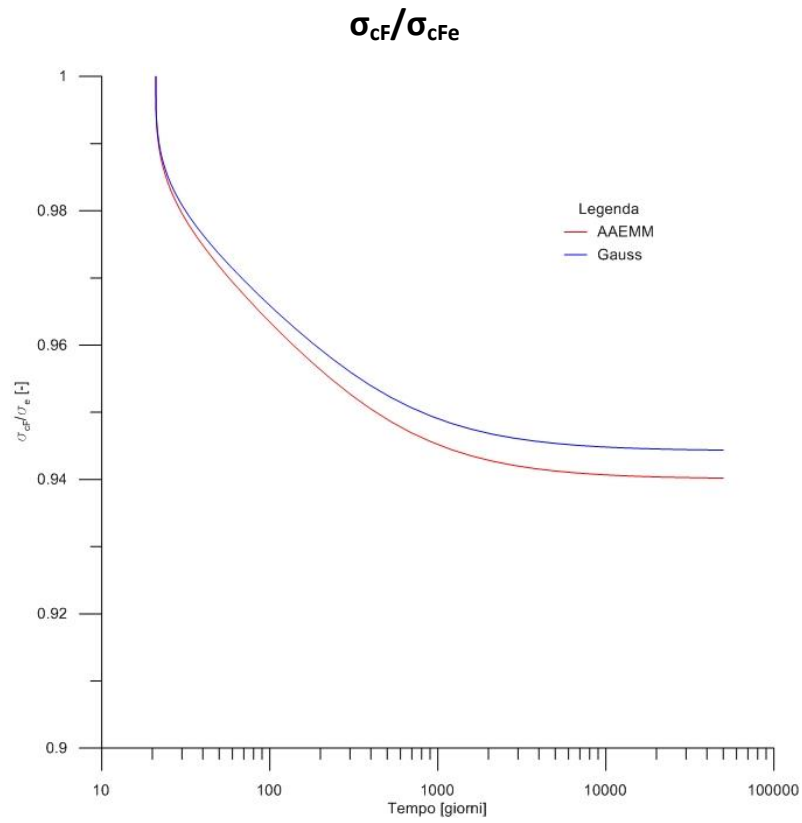


Fig.6.2.2.4.2. 12- Tensione calcestruzzo in F adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

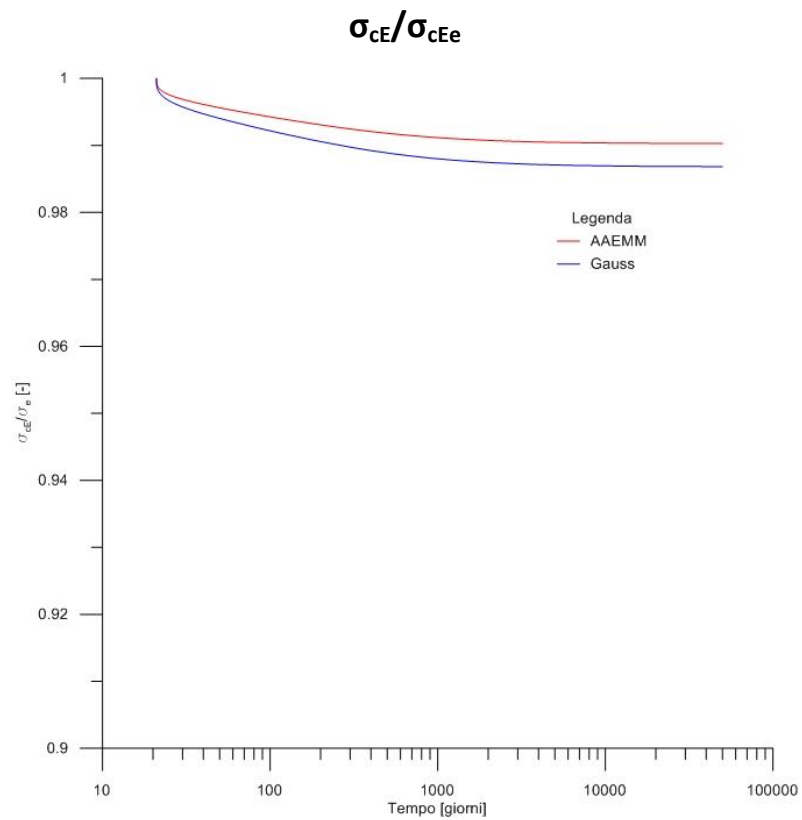


Fig.6.2.2.4.2. 13- Tensione calcestruzzo in E adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

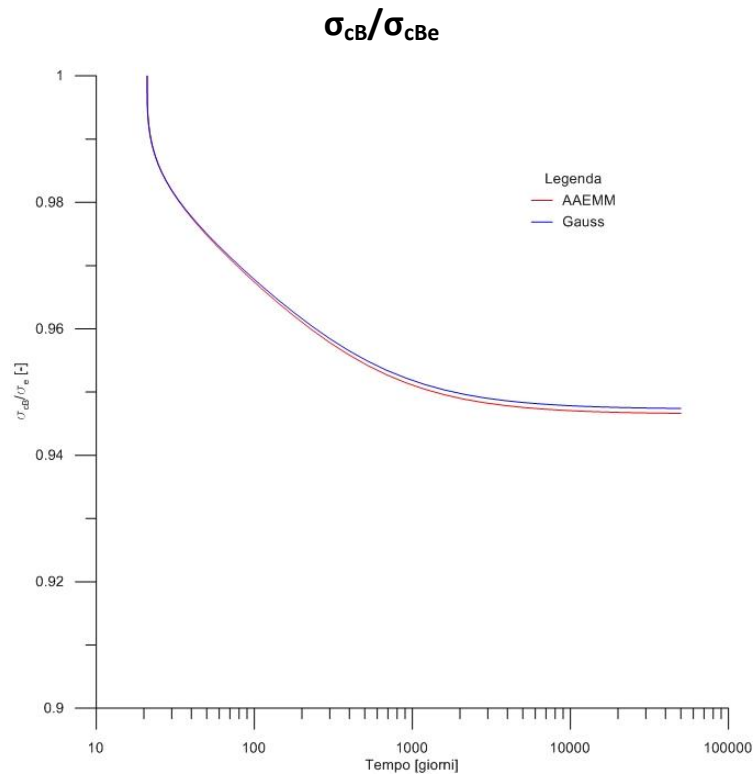


Fig.6.2.2.4.2. 14- Tensione calcestruzzo in B adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

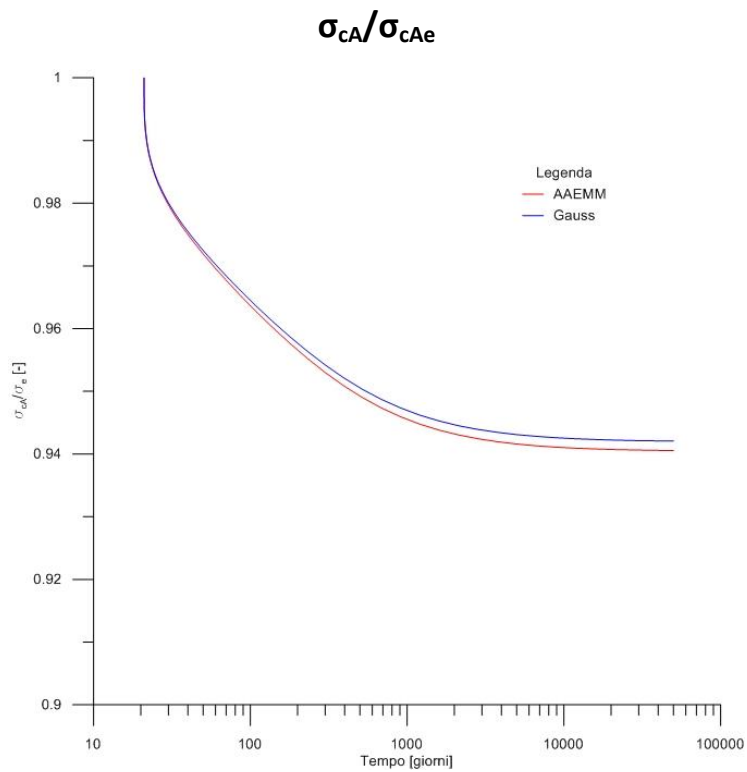


Fig.6.2.2.4.2. 15- Tensione calcestruzzo in A adimensionalizzata – caso 2 – profilo a shed

In tutti i casi esposti, sia per il profilo a π sia per il profilo a shed, si nota che le figure mostrano un decremento nel tempo della tensione degli acciai pretesi prodotta dalla deformazione differita di carattere viscoso del calcestruzzo che a sua volta si decomprime a causa della diminuzione di precompressione della sezione. Infatti, le figure riferite all'andamento temporale del vettore $\underline{\psi}$ rispecchiano quanto ora detto riguardo alla deformazione viscosa del calcestruzzo.

Nella seguente tabella tab.6.2.2.4.2.4 si riportano i valori degli spostamenti u lungo l'asse della trave z e la rotazione ϑ del profilo rispetto al centro di istantanea rotazione. Nelle figure 6.2.2.4.2.16 e 6.2.2.4.2.17 si rappresentano rispettivamente gli spostamenti u e la rotazione ϑ in due situazioni specifiche: in nero è rappresentato il profilo indeformato, in blu il profilo deformato al tempo t_0 (deformazione elastica) e in rosso la deformazione dopo 100 anni a causa degli effetti viscosi. Per rendere visivamente apprezzabile il campo degli spostamenti, nella fig.6.2.2.4.2.16 i valori sono stati amplificati di un fattore 50.

Tempi [giorni]	Spostamento u lungo z [m]			Rotazione ϑ [°]	CIR [m]	
	H	F	A		x	y
20,96	-0,001032	-0,000955	-0,002230	-1,032669	0,891700	0,005656
21,34	-0,001310	-0,001211	-0,002826	-1,307064	0,890709	0,005977
21,46	-0,001335	-0,001234	-0,002880	-1,331572	0,890623	0,006005
21,63	-0,001362	-0,001259	-0,002938	-1,358238	0,890530	0,006035
21,85	-0,001391	-0,001286	-0,003001	-1,387242	0,890429	0,006068
22,15	-0,001424	-0,001315	-0,003070	-1,418778	0,890319	0,006103
22,54	-0,001459	-0,001347	-0,003145	-1,453052	0,890201	0,006141
23,07	-0,001496	-0,001382	-0,003226	-1,490279	0,890072	0,006183
23,77	-0,001538	-0,001420	-0,003314	-1,530684	0,889933	0,006227
24,71	-0,001582	-0,001461	-0,003410	-1,574497	0,889783	0,006276
25,96	-0,001631	-0,001505	-0,003513	-1,621952	0,889621	0,006328
27,63	-0,001683	-0,001553	-0,003626	-1,673272	0,889446	0,006384
29,85	-0,001740	-0,001605	-0,003747	-1,728666	0,889258	0,006444
32,82	-0,001801	-0,001661	-0,003877	-1,788306	0,889055	0,006509
36,77	-0,001867	-0,001721	-0,004017	-1,852315	0,888838	0,006578
42,05	-0,001937	-0,001785	-0,004167	-1,920727	0,888606	0,006652
49,08	-0,002012	-0,001853	-0,004327	-1,993460	0,888360	0,006730
58,46	-0,002091	-0,001925	-0,004495	-2,070269	0,888100	0,006813
70,96	-0,002174	-0,002001	-0,004672	-2,150694	0,887828	0,006899
87,64	-0,002260	-0,002079	-0,004855	-2,234014	0,887546	0,006989
109,87	-0,002348	-0,002160	-0,005042	-2,319211	0,887256	0,007080
139,53	-0,002437	-0,002241	-0,005231	-2,404961	0,886965	0,007172
179,07	-0,002525	-0,002320	-0,005418	-2,489674	0,886676	0,007263
231,81	-0,002611	-0,002398	-0,005598	-2,571592	0,886396	0,007351
302,13	-0,002691	-0,002471	-0,005769	-2,648946	0,886131	0,007434
395,91	-0,002766	-0,002538	-0,005926	-2,720153	0,885887	0,007511
520,96	-0,002832	-0,002599	-0,006067	-2,784002	0,885667	0,007579
687,72	-0,002891	-0,002651	-0,006191	-2,839783	0,885474	0,007639
910,10	-0,002941	-0,002697	-0,006296	-2,887319	0,885310	0,007691
1206,65	-0,002982	-0,002734	-0,006384	-2,926920	0,885173	0,007733
1602,10	-0,003016	-0,002765	-0,006455	-2,959251	0,885060	0,007768
2129,44	-0,003043	-0,002789	-0,006513	-2,985195	0,884970	0,007796
2832,67	-0,003065	-0,002809	-0,006558	-3,005715	0,884899	0,007819
3770,43	-0,003082	-0,002824	-0,006594	-3,021755	0,884843	0,007836
5020,96	-0,003095	-0,002836	-0,006621	-3,034175	0,884800	0,007849
6688,57	-0,003105	-0,002845	-0,006643	-3,043720	0,884766	0,007860
8912,36	-0,003113	-0,002852	-0,006659	-3,051013	0,884741	0,007868
11877,83	-0,003118	-0,002857	-0,006671	-3,056561	0,884722	0,007874
15832,35	-0,003123	-0,002861	-0,006680	-3,060766	0,884707	0,007878
21105,79	-0,003126	-0,002864	-0,006687	-3,063945	0,884696	0,007882
28138,03	-0,003129	-0,002866	-0,006693	-3,066344	0,884688	0,007884
37515,67	-0,003131	-0,002868	-0,006697	-3,068151	0,884681	0,007886

Tab.6.2.2.4.2. 4– Deformazione del profilo medio in mezzeria della trave – caso 2 – profilo a shed

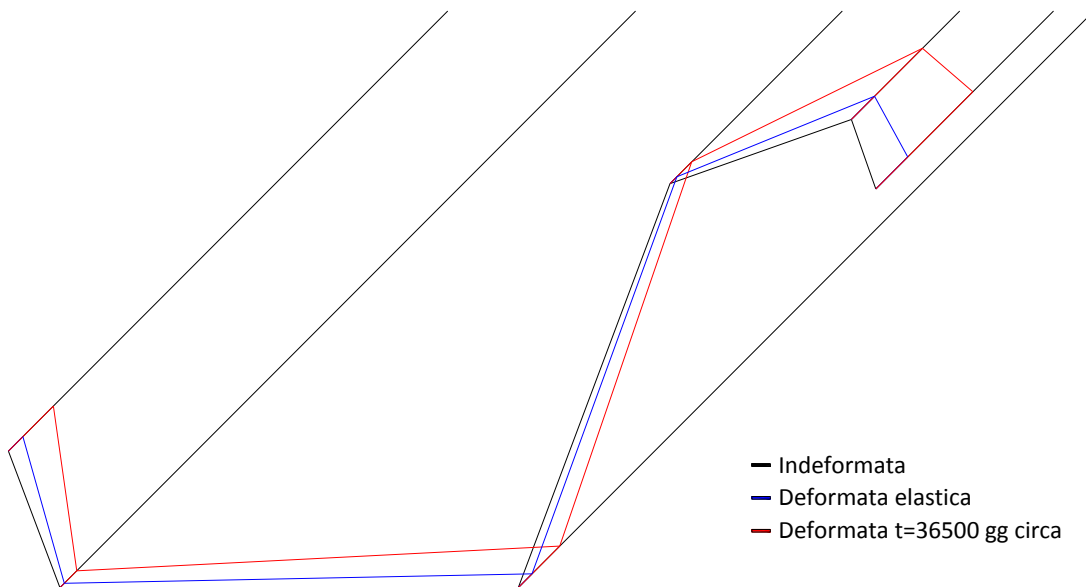


Fig.6.2.2.4.2. 16– Deformazione del profilo medio in mezzeria della trave – caso 2 – profilo a shed

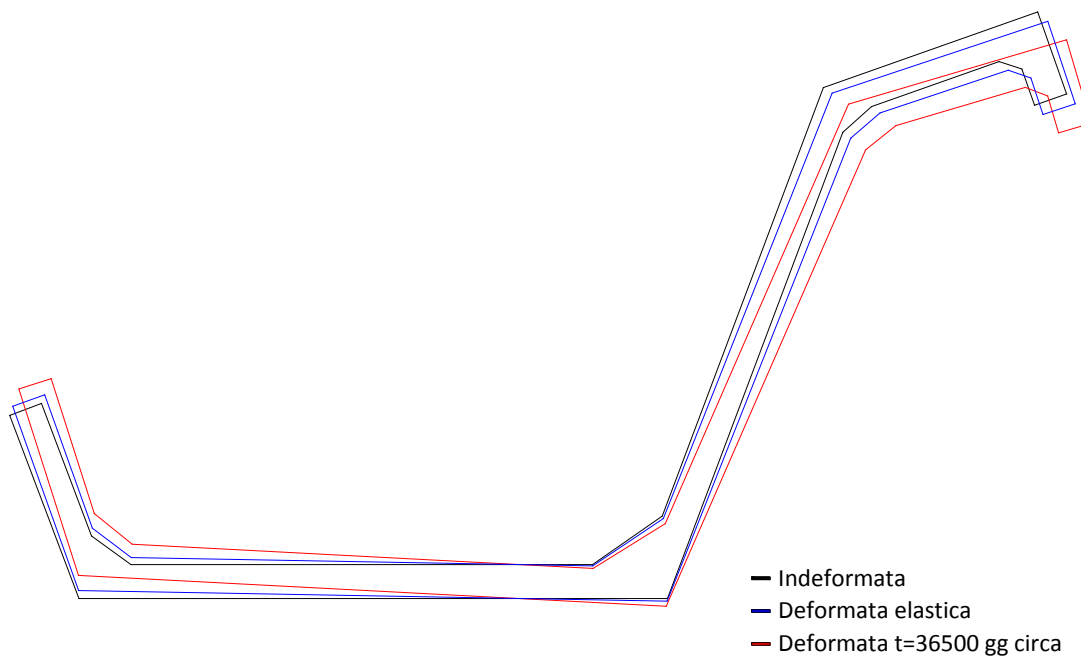


Fig.6.2.2.4.2. 17– Rotazione del profilo – caso 2 – profilo a shed

6.3 Osservazioni sul centro di istantanea rotazione

Come già descritto nel par.2.9, le coordinate del centro di istantanea rotazione sono:

$$\begin{aligned}x_Q &= x_A - \frac{\eta}{\vartheta} \\y_Q &= y_A + \frac{\xi}{\vartheta}\end{aligned}\tag{2.63}$$

con:

ξ = spostamento del punto A secondo x

η = spostamento del punto A secondo y

θ = rotazione della sezione (positiva dal semiasse positivo delle x al semiasse positivo delle y) intorno ad A.

Nei paragrafi precedenti si è mostrato che per le sezioni omogenee valgono i teoremi della viscosità lineare; in particolare il primo teorema lineare (3.2.1.1) indica come lo stato di deformazione evolva nel tempo secondo la quantità $1 + \varphi$. Il vettore $\underline{\psi}$, che rappresenta lo stato di deformazione della sezione, è composto dalle derivate seconde di ξ , η , θ (2.14); per quanto detto, le componenti evolvono anch'esse nel tempo proporzionalmente al valore $1 + \varphi$. Pertanto il rapporto tra di esse nelle (2.63) rimane costante, mostrando come la posizione del centro di istantanea rotazione rimanga fissa nel tempo. Ciò è dimostrato dal programma implementato in MATLAB; in tab.6.3.1 sono riportate le coordinate del centro di istantanea rotazione nel tempo nel caso implementato per la verifica del primo teorema di viscosità lineare (par.6.2.1.3.1).

Tempo [giorni]	X_{CIR} [m]	Y_{CIR} [m]
20,96	0,696204	-0,159421
21,34	0,696204	-0,159421
21,46	0,696204	-0,159421
21,63	0,696204	-0,159421
21,85	0,696204	-0,159421
22,15	0,696204	-0,159421
22,54	0,696204	-0,159421
23,07	0,696204	-0,159421
23,77	0,696204	-0,159421
24,71	0,696204	-0,159421
25,96	0,696204	-0,159421
27,63	0,696204	-0,159421
29,85	0,696204	-0,159421
32,82	0,696204	-0,159421
36,77	0,696204	-0,159421
42,05	0,696204	-0,159421
49,08	0,696204	-0,159421
58,46	0,696204	-0,159421
70,96	0,696204	-0,159421
87,64	0,696204	-0,159421
109,87	0,696204	-0,159421
139,53	0,696204	-0,159421
179,07	0,696204	-0,159421
231,81	0,696204	-0,159421
302,13	0,696204	-0,159421
395,91	0,696204	-0,159421
520,96	0,696204	-0,159421
687,72	0,696204	-0,159421
910,10	0,696204	-0,159421
1206,65	0,696204	-0,159421
1602,10	0,696204	-0,159421
2129,44	0,696204	-0,159421
2832,67	0,696204	-0,159421
3770,43	0,696204	-0,159421
5020,96	0,696204	-0,159421
6688,57	0,696204	-0,159421
8912,36	0,696204	-0,159421
11877,83	0,696204	-0,159421
15832,35	0,696204	-0,159421
21105,79	0,696204	-0,159421
28138,03	0,696204	-0,159421
37515,67	0,696204	-0,159421

Tab.6.3. 1 – Coordinate centro di istantanea rotazione – sezione omogenea

Per quanto concerne le strutture eterogenee invece non si può effettuare lo stesso ragionamento in quanto non si può applicare il primo teorema della viscosità lineare. Infatti, come mostrato nei casi implementati nei paragrafi precedenti, $\underline{\psi}$ varia nel tempo senza che il rapporto tra le sue componenti rimanga costante. Ciò comporta che le coordinate del centro di istantanea rotazione varino nel tempo, come evidenziato in tab.6.3.2 (riferita al caso implementato nel par.6.2.2.4.1).

Tempo [giorni]	x_{CIR} [m]	y_{CIR} [m]
20,96	0,876965	-0,029511
21,34	0,876014	-0,029344
21,46	0,875932	-0,029330
21,63	0,875844	-0,029315
21,85	0,875748	-0,029298
22,15	0,875644	-0,029280
22,54	0,875531	-0,029260
23,07	0,875410	-0,029239
23,77	0,875278	-0,029216
24,71	0,875136	-0,029192
25,96	0,874983	-0,029165
27,63	0,874818	-0,029137
29,85	0,874640	-0,029106
32,82	0,874449	-0,029073
36,77	0,874244	-0,029038
42,05	0,874026	-0,029001
49,08	0,873794	-0,028961
58,46	0,873550	-0,028920
70,96	0,873294	-0,028876
87,64	0,873029	-0,028832
109,87	0,872758	-0,028786
139,53	0,872486	-0,028740
179,07	0,872216	-0,028695
231,81	0,871955	-0,028651
302,13	0,871709	-0,028610
395,91	0,871482	-0,028572
520,96	0,871278	-0,028539
687,72	0,871100	-0,028509
910,10	0,870948	-0,028484

continua...

1206,65	0,870822	-0,028463
1602,10	0,870718	-0,028446
2129,44	0,870636	-0,028432
2832,67	0,870570	-0,028422
3770,43	0,870519	-0,028413
5020,96	0,870479	-0,028407
6688,57	0,870448	-0,028402
8912,36	0,870425	-0,028398
11877,83	0,870407	-0,028395
15832,35	0,870394	-0,028393
21105,79	0,870384	-0,028391
28138,03	0,870376	-0,028390
37515,67	0,870370	-0,028389

Tab.6.3. 2– Coordinate centro di istantanea rotazione – sezione eterogenea

7 Conclusioni e sviluppi futuri

Nella presente trattazione si è esteso il lavoro già affrontato in [56], relativo all'analisi degli effetti elastoviscosi nella torsione di elementi in c.a. e c.a.p. a parete sottile e sezione aperta, prendendo in conto anche la portanza torsionale alla De Saint Venant.

Preliminarmente, nel capitolo 4, si sono analizzate le grandezze elastiche G e ν , adattandole al campo elastoviscoso lineare. In particolare si è visto che il coefficiente di Poisson ν resta sostanzialmente costante nel tempo, mentre il modulo di elasticità tangenziale G risulta linearmente proporzionale alla funzione di viscosità del materiale.

Per quanto riguarda la funzione di viscosità $J(t, t_0)$ si sono esposti i modelli proposti dal CEB '90 e dal fib 2010, riscontrando come questi forniscano funzioni con andamento diverso nel corso del tempo (paragrafo 3.3.2.5); si è quindi motivato l'utilizzo del modello CEB '90 nell'implementazione del programma in MATLAB.

Successivamente si è risolto il problema della ripartizione nel tempo del momento torcente sollecitante tra le portanze torsionali alla Vlasov e alla De Saint Venant. Si è potuto dimostrare in forma chiusa, sia per le strutture omogenee sia per quelle eterogenee, che la ripartizione del momento torcente rimane costante nel tempo; pertanto, per definire il rapporto tra i due meccanismi resistenti è sufficiente un'analisi elastica lineare (capitolo 2).

Nel capitolo 6 si sono mostrati i risultati forniti in output dal programma sia per il Metodo Generale sia per il metodo A.A.E.M.: nei grafici è subito evidente come lo scostamento tra i due metodi sia di bassissima entità (il massimo rilevato è stato dell'1,5% a cento anni dalla messa in carico del calcestruzzo). Il Metodo Generale risulta più preciso ma di più complessa implementazione con un maggior tempo di calcolo, mentre l'A.A.E.M.M., nonostante sia un metodo algebrizzato, fornisce risultati attendibili e sufficientemente precisi, con un minor onere computazionale.

Nel paragrafo 6.3 si è osservato che il centro di istantanea rotazione della sezione non è in generale fisso nel tempo. La sua posizione non si modifica tuttavia nelle strutture omogenee, poiché tutte le componenti di deformazione evolvono secondo $1 + \varphi(t, t_0)$, rendendo le espressioni per il suo calcolo indipendenti dall'andamento temporale della deformazione stessa.

Tutta la trattazione di questo lavoro è stata impostata e sviluppata nel caso di elementi strutturali isostaticamente vincolati. Pertanto una naturale estensione futura di questa tesi riguarda l'analisi delle travi vincolate iperstaticamente.

8 Bibliografia

- [1] A. Migliacci, Teoria tecnica delle travi a profilo aperto con pareti di piccolo spessore, Milano, 1972.
- [2] C. F. Kollbrunner e K. Basler, Torsion in structures, New York, 1969.
- [3] V. Z. Vlasov, Thin-walled elastic beams, Moskva, 1959.
- [4] D. M. Henry, A new aspect of creep in concrete and its application to design, Proc. ASTM, 1943.
- [5] V. Volterra, Questioni generali sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità, Rendiconti Accademia dei Lincei, 1909.
- [6] V. Volterra, Sur les équations intégrées-différentielles et leurs applications, Acta Mathematica, Stockholm: G. Mittag-Leffler Ed., 1912.
- [7] V. Volterra, Lecons sur les fonctions de lignes, Paris: Gauthier-Villars, 1913.
- [8] V. Volterra, Saggi scientifici, Bologna: Zanichelli, 1920.
- [9] G. Colonnetti, Deformazioni plastiche e deformazioni viscosi, Pontificia Academia Scientiarum Acta, Anno VI, vol. VI, n° 24, 1942.
- [10] F. Levi, Distorsioni isomorfe e fenomeni viscosi, La ricerca scientifica, 1948.
- [11] F. Levi, Sugli effetti statici dei fenomeni viscosi, Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei, serie VIII, vol. IV, 1948.
- [12] F. Levi, Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa, Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei, serie VIII, vol. IV, 1948.
- [13] F. Levi e G. Pizzetti, Fluage, plasticité, précontrainte, Paris: Dunod, 1951.
- [14] N. K. Arutyunian, Some problems in the theory of creep (in Russian), Moscow: Techterozdat, 1952.
- [15] F. Mola, Viscosità, analisi strutturale, Atti del Corso di aggiornamento sul progetto agli stati limite delle strutture in cemento armato, Milano: Politecnico di Milano, CLUP, 1983.
- [16] F. Mola, Analisi del comportamento elasto-viscoso lineare del continuo omogeneo ed isotropo sotto stati di tensioni pluriassiali, Studi e Ricerche del Corso di Perfezionamenti per le Costruzioni in Cemento Armato F.lli Pesenti, Vol.5, Politecnico di Milano, 1983.

- [17] M. Chiorino e F.Mola, Analysis of linear visco-elastic structures subjected to delayed restraints, in F.H.Wittman ed., Fundamental Research on creep and shrinkage of concrete, 1982.
- [18] L.Dezi e altri, Homogeneous structures subjected to repeated structural system changes, Journal of Engineering Mechanical Div., ASCE, vol.116, n°8, 1990.
- [19] M.A.Chiorino, Principles for a rational viscoelastic analysis of concrete structures, Accademia delle Scienze, Torino, 2000.
- [20] Z. Boltzmann, Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung, Sitzbericht Akad. Wiss. Wiener Bericht 70, Vol. 1, 1874.
- [21] Islinskii, Longitudinal oscillations for linear creep and relaxation laws (in Russian), Prikl. Matem. i Mekh, vol. 4, n°1, URSS, 1940.
- [22] A. Ross, Creep and shrinkage in plain, reinforced and prestressed concrete, Journal Institution of civil engineers, vol. 21, 1943.
- [23] A. A. Gvozdev, Creep of concrete (in Russian), Proc. of the 2nd National Conference on Theoretical and Applied Mechanics, Mechanics of Solids, Mekhanika Tverdogo Tela, Acad. of Sciences USSR, Moscow, 1964.
- [24] M. A. Chiorino, Influence de l'élasticité différée sur le régime des contraintes des constructions en béton, Cahiers de la Recherche, n° 24, Paris, 1967.
- [25] A. Migliacci, Applicazioni dei principi di viscosità; Strutture formate da aste di calcestruzzo in fase di viscoelasticità lineare, Quaderni del corso di prefes. in c.a., Milano: Tamburini, 1971.
- [26] W. H. Glanville, The creep or flow of concrete under load, Studies in reinforced concrete part III, Building Research technical paper n°12, London, 1930.
- [27] C. S. Whitney, Plain and reinforced concrete arches, Progress report on the limitations of the theory of elasticity, and the effect of plastic flow, shrinkage, temperature variations and the Freyssinet method of adjustment, ACI journal, vol. 28 n°7, 1932.
- [28] F. Dischinger, Untersuchung über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, Der Bauingenieur, H. 33/34, 1937.
- [29] F. Dischinger, Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken, Der Bauingenieur, H.20, 1939.

- [30] N. K. Arutyunian, Creep of concrete (in Russian), Injenierj Jurnal, Mekhanika Tverdogo Tela, Moscow, 1967.
- [31] F. Leonhardt, Spannbeton fur die Praxis, Berlin, 1953.
- [32] fib bulletin 65 Model code 2010.
- [33] CEB, Revision of the design aids of the CEB Design Manual. Structural effects of time-dependent behaviour of concrete, CEB Bulletin n.215, Lausanne, 1993.
- [34] M. A. Pisani, Numerical analysis of creep problems, Computers & Structures, vol. LI, n.1, 1994.
- [35] F. Mola, Analisi in fase viscoelastica lineare di strutture non omogenee lungo il proprio asse, Studi e Ricerche, vol. IX, Italcementi, Bergamo, 1987.
- [36] F. Mola, Metodi di analisi di strutture in c.a. e c.a.p. a comportamento elastico viscoso lineare, Studi e Ricerche, vol. III, Italcementi, Bergamo, 1981.
- [37] Z. P. Bazant, Theory of creep and shrinkage in concrete structures: a precis of recent developments, Mechanics Today, vol. 2, Pergamon Press, London, 1985.
- [38] Z. P. Bazant, Prediction of concrete creep effects using age adjusted effective modulus method, Journal of American Concrete Institute n. 69, 1972.
- [39] H. Trost, Auswirkungen des superpositionsprinzips auf kriech- und relaxations- probleme bei beton un spannbeton, Beton-und Stahlbetonbau, vol. 62, 1967.
- [40] M. A. Chiorino e altri, CEB Design manual on structural effects of time-dependent behavoiur of concrete, 1984.
- [41] M. A. Pisani, Long-term behaviour of beams prestressed with aramid fibrecables, part 2: an approximate solution, Engineering Structures, vol. XXII, n. 12., pp. 1651-1660, December 2000.
- [42] CNR 10025/98, Istruzioni per il progetto, l'esecuzione e il controllo delle strutture prefabbricate in conglomerato cementizio e per le strutture costruite con i sistemi industrializzati, 1998.
- [43] B.Gross, Mathematicall stucture of the theories of viscoelasticity, Paris: Hermann, 1953.
- [44] W.Novacki, Theory of creep (in Polish), Warsaw: Arkady , 1963.
- [45] E.Torroja e A.Paez, Set concrete and reinforced concrete, in Reiner M., building materials, Amsterdam, 1954.

- [46] Z. P. Bazant e S. T. Wu, Dirichlet series creep function for aging concrete, *Journal of Eng. Mech*, Div. 99, 1973.
- [47] Z.P.Bazant e S. Wu, Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell Chain, *Materials and structures (RILEM)*, Vol.7, n° 37, 1974.
- [48] Z. P. Bazant, *Theory of creep and shrinkage in concrete structures: a précis of recent developments*, *Mechanics today*, vol. 2, New York: Pergamon Press, 1975.
- [49] Z. P. Bazant, *Mathematical modelling of creep and shrinkage of concrete*, John Wiley & Sons Ltd, 1988.
- [50] G.Lacidonia e P.Napoli, Analytical modeling of relaxation in concrete in accordance with CEB MC 90 creep formulation, *Proceedings of fifth internat. RILEM symposium creep and shrinkage of concrete*, 1993.
- [51] G.Lacidonia, *Modellazione matematica del comportamento viscoelastico del calcestruzzo*, Dottorato di ricerca in Ingegneria strutturale Politecnico di Torino, 1994.
- [52] Z.P.Bazant e Y.Xi, Continuous retardation spectrum for solidification theory of concrete creep, *Journal of Engineering Mechanics div.*, ASCE vol.121, 1995.
- [53] M.Jirasek e Z.P.Bazant, *Inelastic analysis of structure*, J.Wiley & Sons , 2002.
- [54] Z. P. Bazant e J. C. Chern, Triple power law for concrete creep, *Journal of Eng. Mech.*, 1985.
- [55] Z. P. Bazant e E. Osman, Double power law for basic creep of concrete, 1976.
- [56] M. A. Pisani, *Analisi in esercizio ed allo stato limite ultimo di elementi in c.a. e c.a.p. a parete sottile e sezione aperta, soggetti a sollecitazioni di flesso-torsione, in presenza di azioni di breve e lunga durata*, Tesi di dottorato di ricerca in ingegneria delle strutture.
- [57] A. M. Neville e W. Dilger, *Creep of concrete: plain, reinforce, prestressed*, Amsterdam, 1970.
- [58] O. Belluzzi, *Scienza delle costruzioni*, Vol. 1, Zanichelli, 1966.
- [59] S. P. Timoshenko e J. M. Gere, *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, 1936.
- [60] C. Huet, *Operateurs integrodifferentiels matriciels pour l'etude des systemes a reponse differee presentant du vieillissement*, *Comptes rendues Academie des Sciences*, 1974.
- [61] C. Huet, *Operateurs matriciels en viscoelasticite lineaire avec vieillissement et application aux structures viscoelastiques heterogenes*, 1975.

- [62] M. A. Chiorino, *Moderni orientamenti di ingegneria strutturale e geotecnica*, 2006.
- [63] F. Mola, *Analisi generale in fase viscoelastica lineare di strutture e sezioni a comportamento reologico non omogeneo lungo il proprio asse*, Studi e Ricerche, Vol.8, Politecnico di Milano, 1986.
- [64] F. Mola, *The reduced relaxation function method : an innovative approach to creep analysis of non homogeneous structures*, Int.Conf.on Concrete and Structures, Hong Kong, 1993.
- [65] F. Mola e M. Pisani, *Creep-Analysis of non homogeneous concrete structures, Creep and shrinkage of concrete*, Z.P.Bazant and I.Carol Eds., FN Spon, 1993.
- [66] M. Chiorino e M. Sassone, *Stress redistributions in concrete structures after changes in statical scheme: a comparison between theoretical and approximate solutions*, 2nd International fib congress, Napoli, 2006.
- [67] L. Santarella, *Il cemento armato*, Milano: Hoepli, 1998.
- [68] O. Zienkiewicz e M. Watson, *Some creep effects in stress analysis with particular reference to concrete pressure vessels*, 1966.
- [69] Z. P. Bazant, *Numerically stable algorithm with increasing time steps for integral-type aging creep*, Proc., First Intern. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Tech., vol. 4, part H, Berlin, 1971.

Ringraziamenti

Desideriamo innanzitutto ringraziare il Professor Marco Andrea Pisani, che non solo ci ha saggiamente guidato e incoraggiato durante i lavori di tesi triennale e magistrale, ma è stato un punto di riferimento durante questi anni di università.

Un sentito ringraziamento alla nostra famiglia ed ai nostri cari, che, con il loro incrollabile sostegno morale ed economico, ci hanno permesso di raggiungere questo traguardo.

Ringraziamo i compagni di vita che hanno condiviso questo percorso, una ragazza speciale ed i fantastici amici che ci hanno dato la forza per superare i momenti più difficili e motivo per continuare con fiducia e perseveranza.

Infine un grazie a noi stessi, per esserci sostenuti e supportati con amicizia e solidarietà, sdrammatizzando tutti gli ostacoli che si sono presentati in questi anni, durante corsi, progetti, esami e non ultimo la stesura di questa tesi.