

# POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea in  
Ingegneria Meccanica



Sviluppo di un algoritmo iterativo per l'identificazione del  
danno strutturale

Relatore: Prof. Alfredo CIGADA

Co-relatore: Ing. Giorgio BUSCA

Tesi di Laurea di:

Davide VALLI

Matr. 733907

Anno Accademico 2013 - 2014



# Indice

Indice.....	3
Sommario.....	7
Abstract.....	9
Introduzione.....	11
Capitolo 1 Structural Health Monitoring – SHM.....	15
1.1 Structural Health Monitoring.....	17
1.2 Metodologie di SHM.....	19
1.2.1 Model-Based method.....	20
1.2.2 Data-driven method.....	21
1.2.3 Il processo di identificazione del danno.....	22
1.2.4 La modellazione del sistema per l'SHM.....	22
1.2.5 Tipiche grandezze utilizzabili per l'SHM.....	23
Capitolo 2 MDLAC.....	25
2.1 DLAC.....	26
2.1.1 Matrice di sensibilità.....	28
2.2 MDLAC.....	36
2.2.1 Coefficiente di approssimazione del primo ordine.....	37
2.2.2 Coefficiente di approssimazione del secondo ordine.....	38
2.2.3 Corrispondenza realtà e modello FEM.....	39
2.3 Stato dell'arte.....	40
2.3.1 Sviluppi attuali.....	42
2.3.2 Limiti dello stato dell'arte.....	44
2.4 MDLAC ricorsivo.....	45
2.4.1 Metodo proposto.....	46
2.4.2 Condensazione di Guyan.....	49



Capitolo 3	Qualifica del metodo su dati simulati.....	53
3.1	Struttura del codice di analisi .....	54
3.1.1	Pre-processing.....	54
3.1.2	Processing.....	57
3.1.3	Post-processing.....	58
3.1.4	Applicazione del codice di analisi Abaqus/Matlab.....	60
3.2	Descrizione del modello a elementi finiti.....	61
3.2.1	Modello BRICK.....	61
3.2.2	Modello BEAM .....	66
3.2.3	Soluzione adottata.....	68
3.3	Calcolo della matrice di sensibilità.....	68
3.3.1	Estrazione delle matrici di massa e rigidezza del modello .....	69
3.3.2	Matrice di Massa e Rigidezza condensate con Guyan.....	69
3.4	Scenari di danno simulato .....	72
3.4.1	Ottimizzazione del funzionale e modi utilizzati .....	73
3.4.2	Danno simulato a 1/3 della lunghezza .....	76
3.4.3	Danno simulato a 1/2 della lunghezza .....	83
3.4.4	Danno simulato a 2/3 della lunghezza .....	89
3.5	Risultati.....	96
3.6	Commenti ai risultati .....	96
Conclusioni	.....	97
Bibliografia	.....	101



## Sommario

Il presente lavoro affronta il tema dell'identificazione del danneggiamento nelle strutture mediante tecniche di *Structural Health Monitoring (SHM)* di tipo *Model Based linear*. Viene presentata un'introduzione riguardante il monitoraggio strutturale e le tecniche presenti in letteratura basate sull'analisi delle vibrazioni delle strutture. Viene in seguito proposta l'applicazione ad un caso numerico di danneggiamento del metodo MDLAC, proposto da Messina et al. [1], basato sull'analisi della variazione delle frequenze nelle strutture. A causa delle limitazioni del metodo MDLAC, a causa del mal condizionamento del problema di ottimizzazione del funzionale di correlazione, presente nella formulazione; è stato proposto un metodo applicativo che permette di ridurre il mal condizionamento del problema. Attraverso la riduzione di Guyan del modello numerico FEM, è stato possibile suddividere il processo di identificazione MDLAC in passi successivi, a diversi livelli di dettaglio. L'applicazione MDLAC ricorsiva riduce il mal condizionamento del problema di ottimizzazione, a ogni passo di identificazione. L'applicazione ricorsiva del metodo MDLAC a diversi livelli di condensazione del modello FEM ha permesso di identificare la posizione del danno simulato, in un caso numerico, la dove l'applicazione del metodo MDLAC alla struttura completa non lo permetteva. A prova della migliore stima di identificazione ottenuta attraverso il metodo MDLAC ricorsivo è stata presentata un'applicazione numerica di danneggiamento strutturale.





## **Abstract**

This work is aimed to study the damage identification in structure through linear Model Base method of Structural Health Monitoring (SHM) analysis. A preliminary analysis of state of art concerned the linear Model Based method is done. A critical analysis and a numerical damage identification case study is conducted by applying Model-Based Method, MDLAC. This method is based on the correlation existing between the frequency sensibility function to damage and the frequency change in the structure due damage extant. The functional optimization problem, used to obtain the damages state of structure by MDLAC function, result ill-conditioned. Hence A new application approach to MDLAC method is performed. Guyan reduction is applied to reduce the issue of ill-conditioning of the method and improve the damage identification process performed by MDLAC. A numerical damage identification case is proposed to support the improvement obtained.



# Introduzione

L'evoluzione dei sistemi di misura e di calcolo, svoltasi in quest'ultimo ventennio, ha permesso lo sviluppo di tecniche di supervisione continua delle strutture e dei componenti; prima proibitive per i limiti tecnologici del passato. La possibilità di analizzare grosse moli di dati ha reso possibile l'estensione di numerosi metodi, sviluppati per semplici strutture, anche a casi complessi. E' stato possibile sviluppare una disciplina appartenente alle moderne tecniche di monitoraggio strutturale denominato Structural Health Monitoring (SHM). Si tratta di una disciplina riguardante l'analisi continua del comportamento delle strutture e dei componenti, al fine di valutare le condizioni di salute del componente. L'SHM si differenzia dal semplice monitoraggio strutturale, svolto al fine di definire gli interventi manutentivi. Le strutture vengono analizzate con le tecniche di SHM per definire le condizioni di salute e valutare gli effetti di rischio a rottura in relazione al livello di danneggiamento individuato. La possibilità di disporre di moderne tecnologie di misura, trasmissione dati e sistemi avanzati di calcolo permette l'applicazione delle tecniche di SHM oltre a strutture complesse anche a sistemi di analisi *stand-alone* e remoti. L'SHM permette di pianificare meglio gli interventi manutentivi e ridurre il rischio di rotture inattese, garantendo quindi una maggiore sicurezza delle strutture e l'incolumità delle persone. Esistono diverse classificazioni delle metodologie di SHM. Una classificazione presente in letteratura riguarda la distinzione tra metodologie basate sul modello matematico della struttura denominate *Model-Based*, e metodologie basate unicamente sull'analisi dei dati sperimentali *Data-Driven*. Delle metodologie che si basano sul modello matematico del sistema esistono diverse sotto categorie di classificazione definite in base al parametro modale del sistema analizzato. Tra queste troviamo: *Natural Frequencies*, *Modeshapes*, *Modeshape curvature/Modal strain energy*, *Operational deflection shapes*, *Frequency response function (FRF) and Transmissibility*, *Dynamic flexibility* e *Damping coefficients*.

Esiste un'ulteriore classificazione dei metodi di SHM legata al comportamento della struttura in seguito al danneggiamento. Vengono definite due categorie: metodi *lineari*, ovvero considerano che la struttura mantenga un comportamento *lineare* in seguito al danneggiamento, e metodo *non lineare*, ovvero considerano che la struttura in seguito al danneggiamento possa avere un comportamento *non lineare*.

In questo lavoro proposto viene analizzato l'insieme delle tecniche basate sul comportamento *lineare* delle strutture in seguito al danneggiamento.

Valutate le metodologie di SHM *Model-Based* lineari presenti in letteratura è stato scelto il metodo MDLAC [1], basato sull'analisi della variazione delle frequenze. Il metodo presenta una semplice formulazione di correlazione tra la variazione delle frequenze misurate sperimentali tra la condizione intatta e danneggiata, e la sensibilità della variazione delle frequenze del modello FEM della struttura in seguito a una variazione di modulo elastico localizzata nella struttura. Il danneggiamento nella struttura viene identificato dal metodo MDLAC come una variazione di modulo elastico localizzata negli elementi finiti del modello. Il danneggiamento risulta il vettore di variazioni di modulo elastico relativo agli elementi finiti del modello, che massimizza la funzione di correlazione MDLAC. Il vettore di danneggiamento ottenuto dalla massimizzazione del funzionale MDLAC viene corretto con il fattore di scala lineare proposto in [1], in questo modo si ottiene il valore del danneggiamento in termini assoluti.

Il danneggiamento viene quindi individuato nella struttura con una risoluzione spaziale pari alla discretizzazione del modello. La scelta di questo metodo riguarda la semplicità con cui possono essere identificate sperimentalmente le frequenze proprie del sistema. In letteratura il metodo MDLAC viene citato da numerosi articoli per la sua semplicità applicativa e per essere l'unico metodo basato sulla variazione delle frequenze che permette anche la quantificazione del livello di danneggiamento oltre che alla localizzazione.

Il metodo MDLAC identifica il danneggiamento risolvendo un problema *inverso*. A partire dalla variazione delle frequenze misurate, tra lo stato danneggiato e lo stato intatto, vengono ricostruiti i livelli di danno presenti negli elementi del modello FEM che massimizzano la funzione di correlazione MDLAC. Il problema di ottimizzazione del funzionale di correlazione MDLAC che risolve il problema *inverso* di identificazione del danneggiamento risulta mal condizionato. Il problema del mal condizionamento risulta comune ai metodi *Model-Based*, e viene limitato riducendo le zone d'indagine attraverso delle identificazioni preliminari delle potenziali zone danneggiate nella struttura.

In questo lavoro verrà evidenziato come il mal condizionamento del metodo, determinato dalla dimensione del vettore di danneggiamento incognito notevolmente superiore rispetto al numero di modi misurati non permette l'identificazione del danneggiamento della struttura con il metodo MDLAC nella formulazione proposta da Messina et al. [1]. L'utilizzo della variazione delle frequenze come parametro modale per l'identificazione e il mal condizionamento del problema di ottimizzazione genera una soluzione con dei falsi positivi, rendendo impossibile l'identificazione univoca del danneggiamento. L'utilizzo della variazione delle frequenze come parametro modale per l'identificazione determina di per sé un'identificazione non univoca del danneggiamento, in quanto variazioni di modulo elastico in diverse posizioni possono avere lo stesso effetto sulla variazione dei modi della struttura.

E' quindi necessario svolgere un'indagine preliminare della struttura al fine di ridurre il mal condizionamento del processo di identificazione.

La soluzione proposta in questo lavoro riguarda la suddivisione del processo di identificazione in più passi caratterizzati da diversi livelli di dettaglio di identificazione. Il modello FEM del sistema viene condensato nei suoi gradi di libertà in modo variabile attraverso il metodo di condensazione di Guyan [2]. La condensazione del modello FEM permette di ridurre i gradi di libertà e ottenere diversi livelli di discretizzazione, attraverso la riduzione di opportuni nodi del modello, senza ricorrere alla creazione di una discretizzazione parametrica del modello.

Inizialmente la struttura viene condensata in pochi gruppi di elementi finiti. Questo permette di individuare delle potenziali zone danneggiate della struttura e limitare la dimensione del vettore di danneggiamento incognito. In seguito un'analisi ricorsiva delle zone identificate permette, attraverso una diversa condensazione del modello FEM, di variare il livello di dettaglio dell'identificazione. In questo modo viene mantenuto un rapporto contenuto tra la dimensione del vettore di danneggiamento incognito e il numero di variazioni di frequenza misurate. Risulta, infatti, che il numero di variazioni di frequenza identificabili in una struttura è vincolato da limiti pratici che permettono l'identificazione di un numero limitato di modi.

L'analisi ricorsiva, denominata in questo lavoro come MDLAC ricorsivo, permette di ridurre il mal condizionamento agendo direttamente sul numero di incognite del problema. L'utilizzo della condensazione variabile della struttura permette anche l'esclusione di falsi positivi che, mentre in un dato livello di condensazione non sono distinguibili dalle effettive zone danneggiate, in un diverso livello di condensazione possono essere distinti. Si osserva, infatti, che il livello di danneggiamento che massimizza la funzione di correlazione MDLAC riguardante la posizione effettiva del danneggiamento viene identificato come completamente danneggiato nella formulazione non corretta dal fattore di scala lineare.

Verranno quindi presentati alcuni esempi dell'applicazione del metodo MDLAC ricorsivo a casi simulati di danneggiamento. Il modello di struttura utilizzato per l'applicazione simulata consiste in un modello di trave semplicemente incastrata a sezione costante e parametri costanti, modellato con elementi finiti di tipo *beam*. Si osserverà come la dipendenza del coefficiente di scala lineare, proposto da Messina et al. in [1], dalla matrice di sensibilità non permette una corretta scala del livello di danneggiamento nella posizione individuata. Si è verificato come nel campo di frequenze utilizzato per la prova simulata l'utilizzo del modello di trave di Timoshenko sia equivalente all'utilizzo del modello di trave di Eulero-Bernulli, in relazione anche al livello di condensazione utilizzato.

Il lavoro proposto si sviluppa nella la seguente struttura:

*Capitolo1.* Viene presentata un'introduzione allo Structural Health Monitoring (SHM). Viene presentata la classificazione dei metodi di SHM e le motivazioni per le quali l'SHM riscuote un notevole interesse nella moderna ingegneria strutturale. Viene quindi fornito un quadro generale dell'argomento e indicazioni bibliografiche relative alle metodologie presenti in letteratura.

*Capitolo2.* Viene inizialmente descritto il metodo MDLAC nella formulazione proposta da Messina et al. [1]. In seguito viene presentato il metodo MDLAC nella formulazione ricorsiva sviluppata in questo lavoro. Si farà riferimento alla condensazione del modello FEM della struttura attraverso la condensazione di Guyan [2]. Verrà confrontata la formulazione analitica delle matrici di massa e rigidezza di un elemento finto e le matrici ottenute dalla condensazione di due elementi finiti attraverso la trasformazione di Guyan.

*Capitolo3.* Vengono presentati tre casi di applicazione del metodo MDLAC ricorsivo sviluppato in questo lavoro, applicati a una trave modellata con elementi finiti di tipo *beam*. Il danno simulato consiste nel 30% di riduzione del modulo elastico della trave e posto a  $1/3$ ,  $1/2$  e  $2/3$  dall'incastro. Viene evidenziato come il livello di discretizzazione e quindi la dimensione del vettore di danneggiamento incognito non permette l'identificazione del danneggiamento attraverso il metodo MDLAC non ricorsivo, per via del mal condizionamento del problema di ottimizzazione. Risulta invece possibile identificare con un errore medio del 2% la posizione del danno, attraverso il metodo MDLAC ricorsivo. L'applicazione simulata del metodo MDLAC ricorsivo riguarda un caso ideale in assenza di rumore di misura. Viene applicato un solo livello di intensità di danneggiamento in quando è stato verificato che con 1% e 10% di danneggiamento si presentavano le stesse bontà di identificazione.

# Capitolo 1

## Structural Health Monitoring – SHM

L'analisi delle strutture, il monitoraggio strutturale, la valutazione delle prestazioni delle strutture, sta diventando parte integrante della moderna ingegneria strutturale. Grazie ai recenti livelli di sviluppo dei sensori, nella trasmissione dei dati e nelle tecnologie di analisi dei segnali, è ora possibile analizzare le proprietà strutturali e l'ambiente con una sufficiente chiarezza così da definire il livello di danneggiamento delle strutture e monitorare il loro stato di salute futuro.

Il monitoraggio strutturale porta numerosi benefici sia nell'ambito della progettazione dei sistemi sia nel controllo strutturale. In particolare è possibile ottenere degli avvisi tempestivi sull'insorgere di danni strutturali ottimizzando gli interventi di manutenzione, oltre a permettere un'ottimizzazione della progettazione considerando le reali condizioni di utilizzo.

Lo Structural Health Monitoring (SHM) si tratta di un argomento multidisciplinare che riguarda le moderne tecniche di monitoraggio e i moderni sistemi di misura, la modellazione dei sistemi e le tecniche d'indagine non distruttiva. Si sviluppa nell'analisi del comportamento dei sistemi, nella validazione di modelli matematici e nella creazione di modelli di previsione riguardante lo stato futuro delle strutture.

Il lavoro presentato nei seguenti capitoli s'incentra sull'identificazione dello stato di salute delle strutture e sull'identificazione dei danneggiamenti. Con monitoraggio strutturale verrà intesa un'analisi delle strutture finalizzata a individuare la presenza dei danni nelle strutture così da fornire uno strumento che possa aiutare nella valutazione delle condizioni di sicurezza e nella manutenzione.

La ricerca di danni strutturali sta quindi suscitando un notevole interesse da parte della comunità scientifica nell'ultima decade. Eventi tragici come il collasso del ponte I-35W Saint Anthony Falls Bridge, che collega le due sponde del fiume Mississippi nella periferia nord di Minneapolis nello stato del Minnesota, hanno rivelato come la sola manutenzione programmata e i classici metodi d'ispezione non siano sufficienti per garantire in certe situazioni la completa sicurezza delle strutture. Durante l'ora di punta serale dell'1 Agosto

del 2007 la struttura è collassata causando 13 vittime e 145 feriti. Il ponte completato alla fine degli anni sessanta era caratterizzato da una struttura a traliccio d'acciaio supportato da due fondazioni in cemento armato. La struttura monitorata periodicamente aveva presentato da tempo segni di corrosione alle estremità della capriata in corrispondenza delle giunzioni. Nel 2001 uno studio del dipartimento d'ingegneria civile dell'Università del Minnesota aveva evidenziato la necessità di un monitoraggio strutturale del ponte, e in particolare delle cricche presenti nelle giunzioni sottoposte a corrosione<sup>1</sup>. A seguito delle ispezioni la sostituzione del ponte era stata programmata per il 2020.

Da tragici avvenimenti come questo risulta che la necessità di predisporre di un'identificazione preventiva dei danni strutturali è fondamentale sia per limitare il verificarsi di condizioni di pericolo inatteso sia per attuare adeguate contromisure in relazione allo stato attuale della struttura. Il monitoraggio strutturale permette anche di variare la logica con cui vengono programmati gli interventi di manutenzione. Il programma di manutenzione preventiva permette di valutare lo stato della struttura solamente a intervalli cadenzati. L'applicazione dello *Structural Health Monitoring* permette di attuare interventi solamente quando è ritenuto necessario. In questo modo è possibile migliorare l'efficacia degli interventi sulla struttura e ottimizzare i costi dell'intero programma di manutenzione.

Risulta quindi necessario lo sviluppo di un metodo affidabile e di tipo non distruttivo per il monitoraggio delle strutture che permetta l'analisi nel tempo dello stato di salute.

Attualmente sono presenti numerose metodologie di indagine visiva e strumentale di tipo localizzato come i metodi a ultrasuoni, radiografici o correnti parassite (*eddy-current*). Tutte queste metodologie sono di tipo "locale" e richiedono sia la vicinanza sia la conoscenza a priori della porzione danneggiata, oltre a richiedere che la zona d'indagine sia facilmente raggiungibile. La necessità di analizzare strutture complesse e l'impossibilità di conoscere a priori le zone d'indagine, ha richiesto lo sviluppo di metodologie di tipo "globale", basate sull'analisi della variazione delle caratteristiche dinamiche della struttura. Da qui la nascita delle metodologie di *Structural Health Monitoring* – *SHM* o di Monitoraggio Strutturale. Questo tipo di tecnica d'indagine prevede la creazione di un fitto sistema di misura distribuito nella struttura, che ne misura il comportamento, e riporta le informazioni raccolte in un sistema centrale dedicato alla valutazione dello stato di salute del sistema. Come se si trattasse di un sistema nervoso distribuito che raccoglie e trasferisce le informazioni ad un sistema di controllo centrale che analizza e valuta le condizioni di salute.

---

<sup>1</sup> "Fatigue evaluation of the deck truss of bridge 9340", Dept. of Civil Engineering, University of Minnesota, Minneapolis, MN, 2001,



Un'introduzione generale riguardante i caratteri generali del monitoraggio strutturale con analisi della risposta dinamica è consultabile nei lavori di S.W. Doebling e C.R. Farrar [3] a Los Alamos, R.Barthorpe [4], S. Gopalakrishnan e M. Ruzzene [5], D. Huston [6].

## 1.1 Structural Health Monitoring

Per Monitoraggio Strutturale, *Structural Health Monitoring (SHM)* [3],[4],[5],[6], si intende quel processo che permette di definire le condizioni di integrità di una struttura e prevederne la vita restante con l'utilizzo di opportuni modelli. Consiste principalmente nel predisporre sulla struttura un sistema di misura distribuito e analizzare le variazioni dei parametri del modello nel tempo. Da quest'analisi sarà possibile monitorare lo stato d'integrità e predisporre degli interventi preventivi nel caso in cui la struttura risultasse danneggiata. Le tipologie di misure ed elaborazioni sviluppabili sono tra le più disparate; per tale ragione in questo lavoro di tesi ci concentreremo prettamente sulle misure di vibrazioni e la loro analisi.

L'idea alla base del monitoraggio attraverso l'uso delle vibrazioni è che i parametri modali, quali frequenze, modi del sistema, smorzamento strutturale, sono funzioni delle proprietà fisiche della struttura come massa, rigidità e smorzamento. Da qui risulta che la variazione delle proprietà fisiche, causata da un danneggiamento, determinerà la variazione dei parametri modali.

Le tecniche di monitoraggio strutturale, SHM, si distinguono da quelle di controllo non distruttivo, *Non-Destructive-Evaluation (NDE)*, per l'utilizzo di sistemi di misura installati in modo permanente e per essere una tecnica di tipo "globale". Vengono quindi identificate le variazioni locali del sistema considerando il sistema nella sua interezza e l'analisi può essere anche svolta durante il suo funzionamento.

Le tecniche di controllo non distruttivo, NDE, come il metodo a ultrasuoni o a correnti parassite, sono invece intrinsecamente dei metodi di indagine "locale", sia per il tipo di tecnologia che per il tipo di metodologia di indagine. Permettono di identificare delle variazioni locali del sistema unicamente ispezionando ricorsivamente porzioni limitate e non identificano la variazione delle caratteristiche locali a partire da una variazione "globale" del sistema. Tipicamente questo tipo di tecnica di ispezione necessita che il sistema non sia in uso e che la porzione da ispezionare sia rimossa. Inoltre l'ispezione può essere limitata a zone facilmente accessibili e solitamente richiede l'interpretazione delle misure da parte di personale esperto.

Risulta invece che le tecniche SHM hanno un forte interesse per via della possibilità di utilizzare in sicurezza la struttura durante la vita utile, poter monitorare costantemente il funzionamento dei componenti, ottenere dei benefici economici riducendo i tempi di inattività, aumentare l'efficienza delle

ispezioni eseguendo gli interventi solamente quando sono necessarie e la possibilità di ottimizzare la progettazione del sistema in base alle reali condizioni operative.

Risulta quindi che in molte situazioni nelle quali in caso di rottura dei componenti l'incolumità delle persone è fortemente a rischio o in sistemi a elevate prestazioni nei quali l'ottimizzazione del progetto alle reali condizioni operative risulta fondamentale, o in caso in cui gli interventi di manutenzione risultano onerosi e la vita utile non è facilmente prevedibile, l'applicazione dell'SHM risulta un valido aiuto alla valutazione delle condizioni di sicurezza, alla progettazione e alla riduzione dei costi di manutenzione e di sostituzione.

E' possibile riassumere le potenzialità dell'SHM rappresentando la vita utile del sistema in relazione alle condizioni operative con e senza il monitoraggio strutturale.

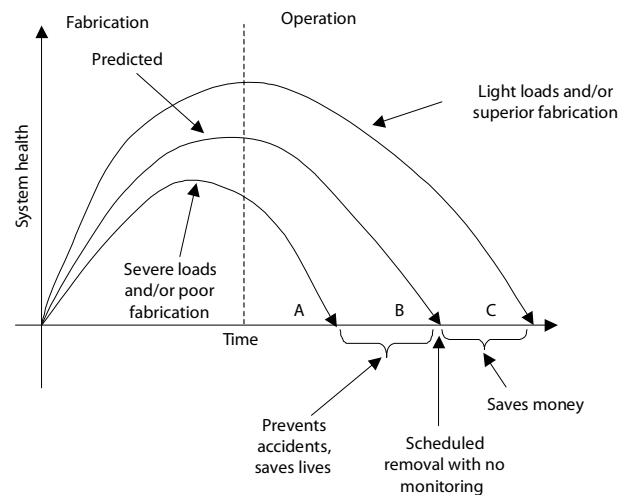


Figura 1.1

L'esempio evidenzia come il ciclo di vita di un sistema possa essere ottimizzato con l'SHM. Nel caso di un utilizzo poco gravoso o di metodi di fabbricazione migliori può essere estesa la vita utile con un risparmio economico evitando una precoce sostituzione come rappresentato nella curva "C"; vice versa il monitoraggio continuo può prevenire improvvise rotture del sistema consigliando la rimozione preventiva di componenti del sistema, curva "A". Con riferimento all'esempio riportato di collasso strutturale (1.1), in quell'occasione la sostituzione preventiva era stata programmata, ma non essendo noto in modo continuativo nel tempo lo stato di salute della struttura, questa era stata stimata in modo troppo ottimistico e il collasso della struttura si è verificato, a seguito di danneggiamenti noti ma monitorati in modo discontinuo, molti anni prima. In altre situazioni oltre alla sicurezza si può valutare anche un aspetto economico, come nei casi di strutture di lancio

aerospaziali dove la vita utile e la sostituzione è definita con l'SHM così valutare la sostituzione solamente quando è necessaria.

I Passi fondamentali del processo SHM si sviluppano a partire dalla definizione della tipologia di danno che potrebbe presentarsi nel sistema e alla pianificazione dei passi dell'analisi che dovrà essere svolta. Alla definizione generale del problema seguono le fasi di raccolta dei dati attraverso le misurazioni, l'estrazione dei parametri del modello utili all'identificazione e l'implementazione dell'algoritmo di identificazione.

## 1.2 Metodologie di SHM

In letteratura vengono comunemente definite due classificazioni principali per i metodi di monitoraggio strutturale : i metodi denominati *data-driven* e quelli denominati *model-based* [4], [6], [7].

Per quanto riguarda i metodi definiti *data-driven* essi sono basati interamente sull'utilizzo di dati sperimentali, non ricorrono a legami costitutivi del sistema, ma tipicamente utilizzano un approccio statistico al fine di determinare in modo quantitativo le variazioni del sistema. I metodi *model-based* si riferiscono invece a una tipologia che basa il processo d'identificazione su un modello matematico del sistema che ne descriva il comportamento. Il modello matematico, numerico a elementi finiti FEM o analitico, viene ripetutamente aggiornato nei suoi parametri costitutivi, in base alle variazioni riscontrate, così da identificare il danneggiamento.

Esiste una categoria di metodi definiti *hybrid-approach*, ibridi, nella quale viene utilizzato un modello numerico, accoppiato a un modello statistico per la discriminazione del danno.

Di seguito sono elencate tre categorie principali:

- *Data-driven*
- *Model-based*
- *Hybrid-approach*

Il processo di identificazione dello stato di salute di un sistema è schematizzabile a partire dai principali macrogruppi di metodi di SHM, *data-driven* e *model-based*. In Figura 1.1 si evidenziano le due principali differenze di approccio tra i metodi *model-based*, subordinati alla creazione di un modello matematico del sistema e basati su leggi fisiche, e *data-driven*, legati unicamente alle misurazioni sul sistema.

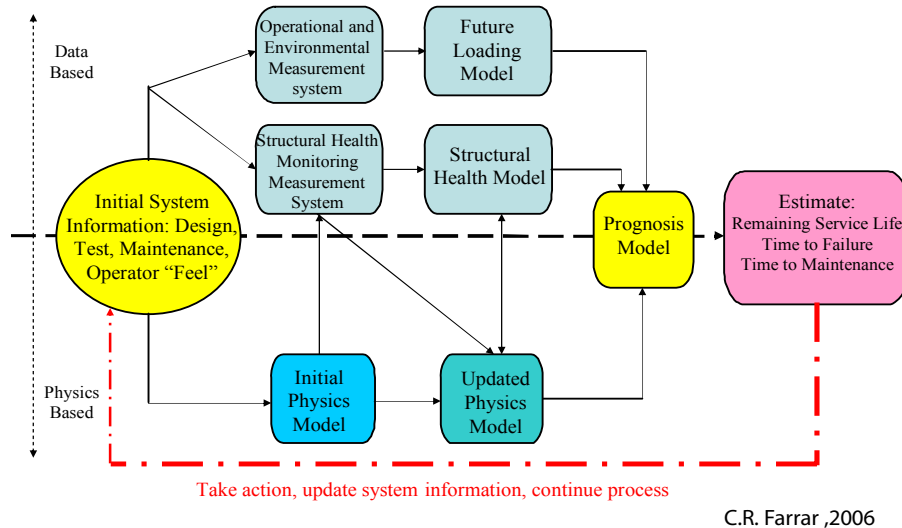


Figura 1.2

### 1.2.1 Model-Based method

I metodi *model-based* sono comunemente basati sullo sviluppo iniziale di un modello matematico del sistema da monitorare che possa correlare con un significato fisico il comportamento del sistema con le equazioni costitutive. Con il termine *model-based* s'identificano comunemente quei metodi che hanno lo scopo di eseguire un *model-updating* del modello FEM, con un aggiornamento continuo del modello sulla base delle nuove variazioni riscontrate nei parametri.

A partire dal modello matematico l'identificazione del danno avviene risolvendo un problema definito "inverso" nel quale si valuta la variazione dei parametri del modello a partire dal comportamento del sistema. Risulta invece un problema "diretto" quando noto il danneggiamento, vengono determinati i parametri perturbati. Tipicamente la soluzione di un problema "inverso" richiede la soluzione di un problema di ottimizzazione mal condizionato, ovvero nel quale il numero di parametri da stimare risulta superiore rispetto ai dati a disposizione. Inoltre risulta comune che per aggirare questo mal condizionamento del problema non sia possibile incrementare il numero di dati disponibili, principalmente per motivi di difficoltà e di costo. Risulta quindi necessaria una condensazione o una riduzione dei parametri da stimare [8].

Questi metodi sono suscettibili agli effetti dovuti alla variabilità nelle misurazioni e alle discrepanze nei parametri del modello. La modellazione delle cricche di danneggiamento si può svolgere a partire da una semplice riduzione

localizzata di rigidità fino ad una complessa modellazione parametrica delle cricche a fatica [9]. Anche se esistono alcune limitazioni intrinseche nell'applicazione di questi modelli, in generale risultano di facile e rapida implementazione. A partire dalla facile misurazione dei parametri sperimentali necessari per implementare il metodo alla semplicità dell'algoritmo di ottimizzazione, è possibile ottenere in poco tempo dei buoni risultati di stima senza dover ricorrere a tarature di algoritmi euristici come in altre tipologie di metodi. Questi metodi sono basati sulle leggi costitutive del sistema ed è possibile attribuire un significato fisico a tutte le scelte e le trasformazioni effettuate dal metodo. Questo facilita molto la lettura dei risultati e permette di comprendere e ottimizzare meglio l'algoritmo.

Nel presente lavoro sono state analizzate alcune metodologie *model-based* lineari basate sull'utilizzo delle frequenze proprie del sistema, delle deformate modali e la loro derivata seconda. Questi metodi sono basati sull'ipotesi che il sistema, inizialmente con un comportamento lineare - elastico, mantenga un comportamento "lineare" anche in presenza di un danno e che quindi sia giustificato l'utilizzo di equazioni lineari di moto. È stato quindi analizzato lo stato dell'arte relativo a questa tipologia di metodi "lineari", escludendo per il momento l'indagine verso i metodi definiti "non lineari".

### 1.2.2 Data-driven method

Una seconda categoria riguarda i metodi *data-driven*. Questa tipologia utilizza un modello statistico e non richiede un modello matematico del sistema. Questi metodi fanno affidamento solamente sui dati sperimentali della risposta dinamica del sistema e la variabilità nelle misure è compensata in modo automatico dal metodo statistico. Questi metodi permettono di risolvere problemi molto complessi, poco conosciuti e per i quali è difficile definire un modello fisico del sistema. L'utilizzo di questi metodi non richiede di conoscere i legami fisici del comportamento del sistema, ma questo comporta anche che è più difficile seguire il processo di analisi proprio perché le soluzioni intermedie non hanno un significato fisico definito, ma dipendono solamente da considerazioni statistiche sui dati sperimentali.

Come per i metodi *model-based* vengono scelti e analizzati alcuni parametri del sistema. La scelta su quali siano i più adatti per l'identificazione del danno si basa sempre sulla valutazione della sensibilità che ha ogni caratteristica rispetto all'entità del danno.

Il modello statistico consiste nell'applicare un *pattern-recognition*, [4], [10], [11] alle misure sperimentali e quantificare lo stato di danneggiamento della struttura. Una classificazione di questi algoritmi si basa su quali siano i dati disponibili. Esistono due condizioni: *supervised-learning*, nel caso in cui sia noto il comportamento sia della struttura intatta sia di quella danneggiata, e

*unsupervised-learning*, nel caso in cui sia noto il comportamento della sola struttura intatta. L'utilizzo dei metodi *unsupervised* solitamente è limitato al primo punto del processo d'identificazione riguardante la rilevazione del danno, ma hanno il vantaggio di richiedere solamente la conoscenza dei parametri della struttura intatta [4].

I metodi *supervised* permettono di risolvere tutti i livelli del processo d'identificazione ma richiedono la conoscenza sia dei parametri del sistema nella condizione intatta che di quella danneggiata.

I metodi *data-driven* algoritmi statistici come *neural-networks*, *support-vector-machines*, *genetic-algorithms*, *cellular-automata*, *statistical-pattern-recognition*, *data-mining*. Per un'introduzione sulle potenzialità di questi algoritmi impiegati nell'SHM si rimanda alla letteratura contenuta in S. Gopalakrishnan e M. Ruzzene [5] e D. Huston [6].

### 1.2.3 Il processo di identificazione del danno

Il processo di identificazione del danno può essere schematizzato, come proposto da Rytter, A. [12], nei seguenti punti:

1. Rilevare – riscontrare se è presente un danno nella struttura.
2. Localizzare – identificare la posizione del danno.
3. Classificare – definire la tipologia di danno rilevata.
4. Valutare – definire la gravità del danno.
5. Previsione – definire la vita residua della struttura o del componente in relazione all'entità del danno.

La scelta del livello di dettaglio nell'identificazione del danno determinerà la tipologia e la strategia del metodo SHM che dovrà essere utilizzato.

### 1.2.4 La modellazione del sistema per l'SHM

La modellazione risulta una fase critica per il processo di SHM [5]. I dati misurati necessitano di un'analisi attraverso robusti modelli matematici non solo per definire la posizione dei danneggiamenti ma anche per quantificare l'entità del danno. Comunemente la modellazione del sistema avviene con modelli ad elementi finiti FEM, i quali risultano versatili nella modellazione anche di geometrie complesse. Risulta che quando le dimensioni dei difetti sono molto piccole può essere necessario eccitare la struttura a elevate frequenze, e quindi per garantire un buon comportamento del modello FEM la mesh deve risultare altrettanto fine. Tipicamente viene raccomandato l'utilizzo di almeno 8-10 elementi finiti per lunghezza d'onda della deformata modale considerata, 4-5 elementi per ogni "ventre". Per garantire quindi un buon comportamento del sistema ad elevate frequenze il numero di elementi della mesh diventa molto

elevato, creando un problema in termini di tempo computazionale necessario all'elaborazione. La modellazione comprende anche la rappresentazione del danneggiamento nel modello FEM. In letteratura sono trattati alcuni casi di danneggiamento di strutture metalliche come cricche superficiali, passanti e danni da corrosione. Nel caso di strutture composte da laminati compositi sono stati analizzati casi di danneggiamento da delaminazione, cricche e danni da impatto. Una seconda fase della modellazione risulta la creazione del modello statistico per l'identificazione del danneggiamento. I due aspetti evidenziati della modellazione, ossia la creazione del modello FEM e del modello statistico di identificazione non sempre sono contemporaneamente presenti nell'applicazione del metodo.

### 1.2.5 Tipiche grandezze utilizzabili per l'SHM

L'identificazione del danneggiamento nelle strutture è subordinata alla scelta dei parametri modali da monitorare e alla loro quantificazione. L'identificazione delle grandezze da considerare è un punto focale nel SHM. Idealmente, le grandezze da utilizzare dovrebbero essere sufficientemente sensibili in relazione all'entità del danno, essere facilmente misurabili o estrapolabili dal sistema permettendo una distinzione univoca della posizione. Si richiede quindi che il metodo sia robusto in relazione ai fattori esterni che possono perturbare le grandezze misurate tanto quanto i danneggiamenti nella struttura. Si fa notare ad esempio come l'effetto delle condizioni ambientali possa far variare le frequenze proprie anche del 5-10% e pertanto il danno per essere identificato con un certo livello di confidenza deve determinare una variazione almeno superiore a questo intervallo [13].

Tra i metodi SHM più diffusi in letteratura e basati sulla risposta dinamica delle strutture, si possono identificare alcune principali grandezze utilizzabili per il processo d'identificazione:

- *Natural Frequencies* [7],[14]
- *Modeshapes* [15],[16],[17],[18]
- *Modeshape curvature/Modal strain energy* [19],[20],[21],[22]
- *Operational deflection shapes (ODS)* [23]
- *Frequency response function (FRF) and Transmissibility* [24]
- *Dynamic flexibility* [17],[16],[25]
- *Damping coefficients* [26],[27],[28]





## Capitolo 2

### MDLAC

Negli ultimi trent'anni è stata condotta un'intensiva ricerca nell'ambito dei metodi di monitoraggio strutturale che utilizzano l'analisi della risposta dinamica della struttura, denominati *vibration-based damage identification method*. Significanti progressi sono stati ottenuti riguardo a metodi, tecniche d'indagine e algoritmi applicati a svariate strutture, da semplici travi o piastre fino a complesse strutture come ponti e altre strutture civili.

Tra i diversi approcci sviluppati per il monitoraggio strutturale, vi è l'analisi della variazione delle frequenze proprie delle strutture denominati *frequency-based method*. Questi metodi utilizzano la variazione delle frequenze proprie come parametro modale per l'identificazione del danneggiamento. Sono dei metodi definiti *model-based*, sono quindi basati sul modello matematico della struttura reale. L'utilizzo delle frequenze proprie richiama un notevole interesse per via della semplicità con cui possono essere misurate; richiede solo pochi punti accessibili e solitamente sono poco influenzate dal rumore sperimentale. Anche se questi metodi richiedono un'analisi dei modi sperimentali per la corrispondenza tra modello reale e modello matematico FEM, la successiva ricerca del danno richiede solo pochi punti di misura per definirne i parametri modali necessari per implementare il metodo.

Vengono classificate due tipologie di approccio utilizzate per valutare le frequenze proprie del sistema: l'approccio *diretto* (*direct, forward-problem*) e l'approccio *inverso* (*inverse-problem*).

L'approccio *diretto* consiste nel determinare le variazioni di frequenza del sistema in relazione ad un danneggiamento noto nella struttura. Consiste nel definire una relazione analitica tra il danno presente nella struttura, nelle sue componenti di posizione e intensità, e la variazione di frequenza causata. Vengono ad esempio definite delle relazioni esplicite tra i valori delle frequenze di risonanza di diverse strutture danneggiate. L'applicabilità di questi metodi è limitata a strutture semplici per le quali sono definibili in modo analitico le equazioni di moto [7] [29].

L'approccio *inverso* consiste nel determinare la posizione e l'intensità del danno a partire dalla misura della variazione delle frequenze proprie del sistema

tra la condizione intatta e quella danneggiata. Il danno viene identificato come la variazione dei parametri strutturali che ha come effetto la variazione di frequenze misurate sul sistema. Solitamente questo tipo di approccio richiede la stima di un numero elevato di parametri a partire da un limitato numero di dati a disposizione, rendendo la soluzione del problema non univoca e il problema mal posto. Lo studio dei metodi basati sull'approccio *inverso* inizia già alla fine degli anni '70 con il lavoro proposto da R.D. Adams (1978) [30], il quale sviluppa un metodo per l'identificazione del danneggiamento in una struttura monodimensionale tramite l'utilizzo della variazione di frequenza.

Le più recenti raccolte sullo stato dell'arte presenti in letteratura relative ai metodi basati sull'analisi delle vibrazioni sono di Z.A. Jassim, N.N. Ali (2013) [31], W. Fan, P. Qiao (2010) [7], E.P. Carden, P. Fanning (2004) [32] e propongono una comparazione di vari metodi *vibration-based*, tra cui quelli basati sulla variazione delle frequenze. O.S. Salawu (1997) [33] presenta una raccolta di metodi basati sulla variazione delle frequenze, indicando quali possono essere i fattori che influenzano negativamente l'identificazione del danneggiamento.

Il lavoro di questa tesi si concentra sull'analisi e l'applicazione del metodo MDLAC [34],[1], proposto da A. Messina, T. Contursi, E.J Williams nel 1997 per l'identificazione di danni multipli nelle strutture a partire dall'analisi della variazione delle frequenze proprie.

## 2.1 DLAC

Il Metodo MDLAC è un'estensione del metodo DLAC, dall'acronimo *Damage Location Assurance Criterion*, proposto dagli stessi autori per il caso di un singolo danneggiamento [35]. Il metodo MDLAC utilizza un modello FEM per individuare attraverso una funzione di correlazione, basata sull'analisi della variazione delle frequenze, quali elementi finiti hanno subito una variazione della propria rigidezza strutturale.

L'espressione DLAC valuta la correlazione tra la variazione di frequenze sperimentali e la variazione teorica delle frequenze del modello soggetto a un danneggiamento noto. Questa formulazione deriva da una espressione simile presentata da D.J Ewins [36], denominata con l'acronimo di *Modal Assurance Criterion* MAC, utilizzata per confrontare la corrispondenza delle deformate modali ottenute in diverse condizioni del sistema. Applicando lo stesso principio di correlazione, è stato esteso il metodo MAC al confronto della variazione di frequenze proprie.

Definiamo quindi la funzione di correlazione DLAC tra la variazione sperimentale delle frequenze della struttura  $\{\Delta f\}$ , tra la condizione intatta e quella danneggiata, e la variazione teorica  $\{\delta f\}$  dovuta a un danneggiamento noto. Il vettore di variazioni di frequenza della struttura libera non smorzata

$\{\Delta f\}$  è ottenuto attraverso un'identificazione modale dei poli del sistema. La variazione teorica  $\{\delta f_j\}$  è ottenuta simulando nel modello FEM un danneggiamento di intensità nota nella posizione  $j$ . Il danneggiamento nella struttura viene ricondotto a una variazione di rigidità nell'elemento  $j$  del modello FEM attraverso la funzione di correlazione DLAC:

$$DLAC(j) = \frac{|\{\Delta f\}^T \cdot \{\delta f_j\}|^2}{(\{\Delta f\}^T \cdot \{\Delta f\}) \cdot (\{\delta f_j\}^T \cdot \{\delta f_j\})} \quad 2.1$$

Simulando ricorsivamente un danneggiamento in ogni elemento della discretizzazione del modello FEM si ottengono le variazioni di frequenze proprie per ogni potenziale posizione  $j$ -esima del danno. I vettori di frequenze così ottenuti relativi a ogni singolo danneggiamento vengono organizzati in una matrice. Ogni campagna di danneggiamento riguarda un'unica intensità di danneggiamento.

Confrontando i valori dell'indice di correlazione DLAC, correlando la variazione sperimentale  $\{\Delta f\}$  con ogni variazione teorica  $\{\delta f_j\}$ , viene individuata la posizione del danneggiamento  $j$  che massimizza l'indice. Le variazioni di frequenza teoriche e sperimentali sono considerate in termini percentuali. In questo modo è possibile considerare allo stesso modo tutte le variazioni di frequenza nella banda d'interesse, senza che i modi in alta frequenza risultino favoriti.

Il valore ottenibile dall'espressione DLAC ( $j$ ) è compreso tra 0 e 1, che indicano rispettivamente la non correlazione e la perfetta correlazione tra la variazione delle frequenze sperimentali e la variazione delle frequenze teorica in presenza di un danneggiamento in posizione " $j$ ".

Viene di seguito rappresentato il diagramma di flusso riguardante il metodo di identificazione DLAC. Si osserva il ramo di iterazione che variando l'indice  $j$ , relativo alla variazione di rigidezza simulata nell'elemento  $j$ -esimo, spazza tutte le possibili zone danneggiate ricercando la posizione che massimizza l'indice DLAC di correlazione.

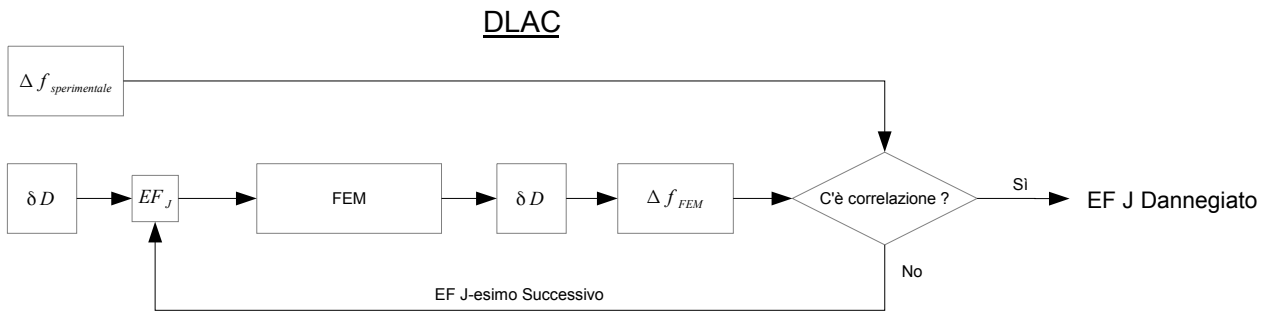


Figura 2.1

### 2.1.1 Matrice di sensibilità

Il metodo DLAC [1] utilizza un database di variazioni di frequenze proprie relative alle potenziali posizioni del danno e relative ad un unico livello di danneggiamento. Il metodo garantisce l'esatta localizzazione solamente se il modello FEM rappresenta correttamente il modello reale nei suoi parametri costitutivi e se il livello del danno è quello realmente presente nella struttura reale. La discrepanza tra modello FEM e modello reale rimane un punto cruciale nell'utilizzo dei metodi *model-based*. Iterando il metodo con vari livelli di danneggiamento per ogni potenziale posizione di danneggiamento è possibile un utilizzo solamente in strutture semplici e modellate con pochi elementi finiti, e risulta inefficiente e proibitivo in situazioni più complesse.

L'evoluzione di questo metodo per l'identificazione di danni multipli consiste in un'approssimazione lineare al primo ordine della sensibilità degli autovalori rispetto alla rigidezza locale del sistema e viene denominato MDLAC.

Viene ora definita la matrice di sensibilità della variazione di frequenze in relazione alla variazione di rigidezza locale della struttura. Si considera l'ipotesi che ogni elemento del modello FEM abbia la stessa probabilità di essere danneggiato e che il danno possa essere modellato come un'omogenea riduzione di rigidezza dell'elemento. Il fattore di riduzione di rigidezza  $D_j$  per l'elemento

j-esimo assume il valore  $D_j = 1$  se l'elemento risulta non danneggiato e  $D_j = 0$  se l'elemento risulta completamente danneggiato, ovvero presenta il 100% di danneggiamento. Si tratta di un termine moltiplicativo che varia in modo omogeneo il modulo elastico del singolo elemento finito.

Definiamo ora le equazioni di moto libero non smorzato in forma matriciale relative a un generico sistema vibrante:

$$[M]\ddot{\underline{X}} + [K]\underline{X} = \underline{0} \quad 2.2$$

Passando in coordinate modali:

$$\underline{X} = [\phi] \cdot \underline{q}; \quad \underline{q} = \underline{q}_0 \cdot e^{i\lambda t}$$

$$[-\lambda^2[\phi]^T[M][\phi] + [\phi]^T[K][\phi]]\underline{q}_0 \cdot e^{i\lambda t} = \underline{0} \quad 2.3$$

$$[diag \lambda^2] = \frac{[\phi]^T[K][\phi]}{[\phi]^T[M][\phi]}$$

In riferimento al k-esimo auto valore  $\lambda_k$ :

$$\lambda_k^2 = \frac{\{\phi_k\}^T[K]\{\phi_k\}}{\{\phi_k\}^T[M]\{\phi_k\}} = \text{autovalore k-esimo al quadrato} \quad 2.4$$

Si consideri ora la matrice di rigidezza globale come sommatoria delle singole matrici di rigidezza relative a ogni elemento finito e  $D_j$  il coefficiente di riduzione relativo al j-esimo elemento.

$$[K] = \sum_{j=1}^m [A]_j^T D_j [K]_j [A]_j = \sum_{j=1}^m D_j [K]_j^G \quad 2.5$$

$$[K]_j^G = [A]_j^T [K]_j [A]_j$$

Dove  $m$  è il numero di elementi finiti del modello e  $[A]_j$  è la matrice di assemblaggio booleana relativa alla matrice di rigidezza nei gradi di libertà globali per l'elemento j-esimo.

La matrice di rigidezza  $j$ -esima assemblata nella matrice globale  $[K_j]^G$  risulta perturbata dal fattore di riduzione  $D_j$  relativo a quell'elemento.

$$\lambda_k^2 = \left[ \frac{\{\phi_k\}^T \sum_{j=1}^m D_j [k_j]^G \{\phi_k\}}{\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_k\}} \right] \quad 2.6$$

Se ogni termine  $D_j [k_j]^G$  viene derivato rispetto al termine di riduzione  $D_j$  si ottiene:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial D_j} \left[ \frac{\{\phi_k\}^T D_j [k_j]^G \{\phi_k\}}{\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_k\}} \right] = \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\{\phi_k\}^T [k_j]^G \{\phi_k\}}{\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_k\}} \right] = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\lambda_k^2)}{\partial D_j} \quad 2.7$$

Si ottiene anche che:

$$\lambda_k^2 = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\lambda_k^2)}{\partial D_j} \partial D_j \quad 2.8$$

Se si considera ora il contributo al  $k$ -esimo autovalore dato dal  $j$ -esimo termine di rigidezza otteniamo la *sensibilità dell'autovalore*  $k$ -esimo,  $\xi_{kj}$ , in relazione alla variazione di rigidezza nell'elemento  $j$ :

$$\xi_{kj} = \frac{\partial(\lambda_k^2)}{\partial D_j} = \frac{\partial}{\partial D_j} \left[ \frac{\{\phi_k\}^T D_j [k_j]^G \{\phi_k\}}{\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_k\}} \right] = \left[ \frac{\{\phi_k\}^T [k_j]^G \{\phi_k\}}{\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_k\}} \right] \quad 2.9$$

Esprimendo ora la sensibilità agli autovalori, in funzione delle frequenze proprie del sistema libero non smorzato, definendo il termine di sensibilità *alle frequenze*,  $\zeta_{k_j}$ :

$$\frac{\partial(\lambda_k^2)}{\partial D_j} \rightarrow \frac{\partial f_k}{\partial D_j} \quad 2.10$$

$$\frac{\partial(\lambda_k^2)}{\partial D_j} \frac{\partial f_k}{\partial(\lambda_k^2)} = \frac{\partial f_k}{\partial D_j}$$

$$f_k = \frac{\sqrt{\lambda_k^2}}{2\pi} ; \sqrt{\lambda_k^2} = 2\pi f_k \quad 2.11$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial(\lambda_k^2)} = \frac{\partial}{\partial(\lambda_k^2)} \cdot \left[ \frac{\sqrt{\lambda_k^2}}{2\pi} \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2}} = \frac{1}{8\pi^2 f_k} \quad 2.12$$

Riprendendo l'equazione (2.10) e sostituendo la relazione (2.12), nota la relazione (2.9) si ottiene:

$$\begin{aligned} \zeta_{k_j} &= \frac{\partial f_k}{\partial D_j} = \frac{\partial(\lambda_k^2)}{\partial D_j} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial(\lambda_k^2)} = \xi_{k_j} \cdot \frac{1}{8\pi^2 f_k} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 f_k} \cdot \left[ \frac{\{\phi_k\}^T [k_j]^G \{\phi_k\}}{\{\phi_k\}^T [M] \{\phi_k\}} \right] \end{aligned} \quad 2.13$$

La relazione (2.13) rappresenta la sensibilità della variazione di frequenza in relazione alla variazione di rigidezza del singolo elemento. Nella definizione della relazione si è assunto che l'autovalore k-esimo del sistema,

$$\lambda_k = \sqrt{\lambda_k^2}$$

sia espresso in [rad / s] e la frequenza k-esima sia espressa in [Hz], da qui la relazione (2.11).

Per una combinazione di danneggiamento multiplo nella struttura, intesa come una variazione arbitraria di ogni singolo fattore di riduzione di rigidità, la variazione nelle frequenze in funzione della variazione del fattore di danneggiamento può essere approssimata con uno sviluppo al primo ordine. Dall'equazione (2.13) la variazione relativa alla k-esima frequenza è ottenuta dalla sommatoria delle sensibilità di ogni j-esimo termine.

$$\begin{aligned} \delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial D_1} \delta D_1 + \frac{\partial f_1}{\partial D_2} \delta D_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial D_m} \delta D_m \\ &\quad \vdots \\ \delta f_p &= \frac{\partial f_p}{\partial D_1} \delta D_1 + \frac{\partial f_p}{\partial D_2} \delta D_2 + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial D_m} \delta D_m \end{aligned}$$

In forma matriciale la sensibilità della variazione di frequenze  $\{\delta f\}$  al danneggiamento  $\{\delta D\}$  è esprimibile come:

$$\{\delta f\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial D_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial D_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial D_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial D_m} \end{bmatrix} \quad 2.14$$

$$\{\delta f\} = [S]\{\delta D\}$$

Il termine  $\delta D_j$  rappresenta la variazione del fattore di riduzione di rigidità tra la condizione intatta e quella danneggiata. Risulta quindi pari a 0 nel caso in cui nell'elemento non ci sia una variazione di rigidità rispetto alla condizione intatta, mentre risulta pari a 1 nel caso in cui l'elemento sia completamente danneggiato.

Rispetto al termine di riduzione  $D_j$ , il termine  $\delta D_j$  rappresenta un termine di variazione rispetto alla condizione intatta, in altre parole una variazione  $\delta D_j$  di rigidità pari al 20% in un elemento finito del modello corrisponde a una rigidità residua  $D_j$  dell'elemento pari all'80% del modulo elastico rispetto alla condizione intatta. Anche il termine di frequenza  $\{\delta f\}$  è da intendersi in termini di variazione e non come valore assoluto di frequenza.

L'equazione matriciale (2.14), essendo un sistema di equazioni sotto determinato, risulta non essere vincolata nella soluzione e ammette valori anche al di fuori dell'intervallo ammissibile  $[0, 1]$ . Risulta che risolvendo il sistema di equazioni tramite la formulazione *pseudo-inversa* del termine di sensibilità si potrebbero avere dei valori di incremento di rigidità senza un preciso significato fisico. Verrà quindi risolto un problema di ottimizzazione vincolato per ottenere il vettore  $\{\delta D\}$  dei parametri incogniti (2.2).



La matrice di sensibilità così ottenuta dipende solamente dal modello FEM nelle condizioni intatte e dalle condizioni di vincolo del modello.

E' possibile dimostrare che la sommatoria dei termini della matrice di sensibilità relativi alla k-esima frequenza risulta proporzionale alla frequenza stessa. Possiamo quindi ricavare dalla (2.8):

$$\lambda_k^2 = (2\pi f_k)^2 = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\lambda_k^2)}{\partial D_j} \partial D_j = 8\pi^2 f_k \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial D_j} \partial D_j \quad 2.15$$

$$\frac{(2\pi f_k)^2}{8\pi^2 f_k} = \frac{1}{8\pi^2 f_k} \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\lambda_k^2)}{\partial D_j} \partial D_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial D_j} \partial D_j \quad 2.16$$

$$\frac{1}{2} f_k = \frac{1}{8\pi^2 f_k} \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\lambda_k^2)}{\partial D_j} \partial D_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial D_j} \partial D_j$$

Essendo la sommatoria di tutti i termini j-esimi di variazione degli autovalori rispetto al termine di riduzione  $\partial D_j$  sia pari a  $\lambda_k^2$ ; nel caso la variazione di danneggiamento relativa a ogni elemento sia pari a 1, ossia ogni elemento risulta completamente danneggiato, la variazione massima rispetto alla k-esima frequenza è pari al 50%.

Dalla matrice di sensibilità possiamo anche osservare quali modi risultano più sensibili alla variazione di rigidità in un determinato elemento finito.

In Figura 2.2 rappresentiamo i valori della matrice di sensibilità delle frequenze per un modello di trave semplicemente incastrata, modellata con 10 elementi finiti *beam*, relativa ai primi 4 modi flessionali. Riportiamo i valori della matrice di sensibilità normalizzata rispetto al valore massimo.

Confrontando le variazioni di frequenza tra la condizione intatta e quella danneggiata possiamo identificare quali modi presentano una maggiore variazione, e tramite la matrice di sensibilità identificare quali elementi presentano una maggiore sensibilità al modo. In questi elementi identificati una variazione di rigidezza nell'elemento influenza maggiormente la variazione di frequenza di un determinato modo.

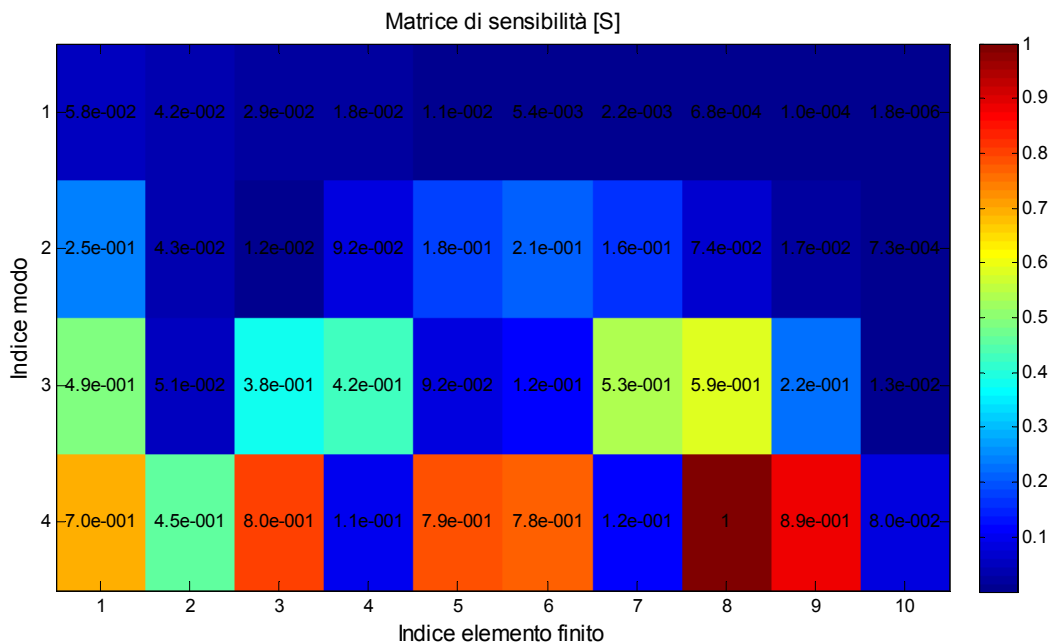


Figura 2.2

In linea di principio questa procedura [1] può essere utilizzata per identificare le potenziali zone d'indagine, restringendo il campo d'analisi e quindi i parametri incogniti.

Riprendendo come riferimento la matrice di sensibilità relativa ai primi 4 modi flessionali di un modello di trave a 10 elementi finiti *beam*, i cui valori sono riportati in Figura 2.2. Si può osservare come nel caso si presentasse una maggiore variazione di frequenza nel modo 3, seguendo il criterio appena esposto, le possibili zone d'indagine sarebbero 6, relative agli elementi finiti 1,3,4,7,8,9. Ancora, nel caso si presentasse una maggiore variazione nel modo 4, le zone sarebbero 7.

Disponendo solamente delle prime 4 frequenze sperimentali il problema di ottimizzazione (2.2) risulterebbe ancora mal posto anche a fronte di una riduzione delle zone d'indagine.

Nel caso in cui la zona d'indagine risultasse estesa e quindi le potenziali zone danneggiate risultassero in numero elevato, ovvero la discretizzazione della struttura modellata agli elementi finiti risultasse fitta, gli elementi della discretizzazione sensibili alla variazione di alcuni modi risulterebbero in numero elevato. In questa condizione non è possibile limitare in modo significativo la zona d'indagine e viene meno l'utilità di questo approccio.

## 2.2 MDLAC

A partire dall'equazione (2.14) e sostituendola nell'equazione (2.1) otteniamo la funzione di correlazione tra la variazione di frequenze misurate  $\{\Delta f\}$  e la sensibilità  $\delta f(\{\delta D\})$  della variazione di frequenze del modello a causa di un danneggiamento  $\{\partial D\}$ .

Il vettore incognito  $\{\partial D\}$  rappresenta lo stato di danneggiamento della struttura ed è ottenuto massimizzando la funzione di correlazione MDLAC. Ogni termine rappresenta la variazione del fattore di riduzione del modulo elastico in un elemento finito del modello che massimizza la funzione di correlazione.

Richiamando la funzione DLAC (2.1):

$$DLAC(j) = \frac{|\{\Delta f\}^T \cdot \{\delta f_j\}|^2}{(\{\Delta f\}^T \cdot \{\Delta f\}) \cdot (\{\delta f_j\}^T \cdot \{\delta f_j\})}$$

E l'equazione di sensibilità (2.14):

$$\{\delta f\} = [S]\{\delta D\}$$

La funzione di correlazione MDLAC risulta:

$$MDLAC(\{\delta D\}) = \frac{|\{\Delta f\}^T \cdot \{\delta f(\{\delta D\})\}|^2}{(\{\Delta f\}^T \cdot \{\Delta f\}) \cdot (\{\delta f(\{\delta D\})\}^T \cdot \{\delta f(\{\delta D\})\})} \quad 2.17$$

Nel processo di ottimizzazione della funzione viene introdotto un vincolo sul dominio del valore della soluzione  $\{\partial D\}$ , così da garantire che la ricerca della soluzione si mantenga nell'intervallo  $[0, 1]$ . E' altresì vero che l'intervallo di ricerca della soluzione può essere ridotto ai fini di alleggerire lo sforzo computazionale, poiché è ragionevole escludere la possibilità che la struttura risulta completamente danneggiata. Il valore iniziale del vettore  $\{\delta D\}$  è fissato a 0.01%, essendo la funzione singolare in corrispondenza del valore 0.

La formulazione MDLAC, per via del legame lineare assunto con lo sviluppo al primo ordine nell'equazione (2.14), fornisce la stima del vettore  $\{\delta D\}$  come una combinazione lineare dell'effettivo valore di danneggiamento. E' quindi necessario definire un fattore di scala per ottenere l'effettivo valore di danneggiamento.

In Figura 2.3 viene riassunto il procedimento di applicazione del metodo MDLAC. Partendo dal modello FEM della struttura vengono estratte deformate modali e frequenze proprie del sistema libero non smorzato. Successivamente, attraverso la matrice di sensibilità della variazione di frequenze in funzione del danneggiamento della struttura, e la correlazione con la variazione sperimentale delle frequenze tra il caso intatto e quello danneggiato, si ottiene il vettore di danneggiamento che massimizza la funzione di correlazione MDLAC.

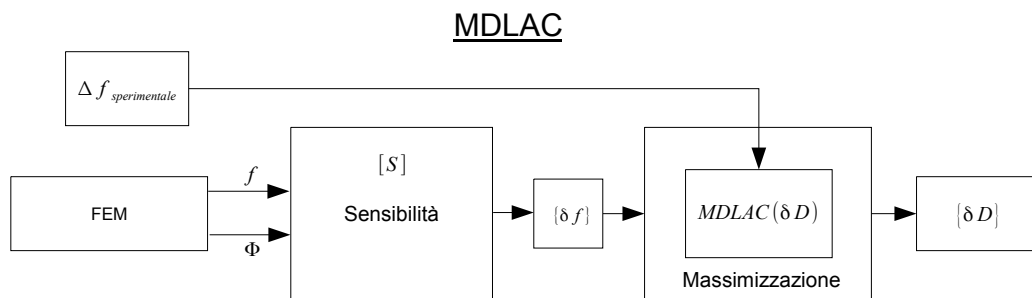


Figura 2.3

### 2.2.1 Coefficiente di approssimazione del primo ordine

Se l'ipotesi di comportamento lineare rispecchia l'effettivo comportamento del modello reale, la variazione di frequenze stimata dall'equazione (2.14) sarà identica alla variazione misurata  $\{\Delta f\}$ .

$$\{\Delta f\} = C \cdot [S]\{\delta D\}_{\text{Reltivo}} \quad 2.18$$

Possiamo quindi calcolare il valore del fattore di scala per ottenere il vettore  $\{\delta D\}$  in termini assoluti. Il fattore di scala  $C$  è calcolato per ogni k-sima frequenza come:

$$C_k = \frac{\Delta f_k}{\{S_k\} \cdot \{\delta D\}_{\text{Reltivo}}} \quad 2.19$$

Un valore più affidabile per ridurre l'effetto dell'errore di misura nelle frequenze è ottenibile attraverso il valore medio dei termini  $C_k$ .

L'espressione del danneggiamento in termini assoluti risulta:

$$\begin{aligned}\{\delta D\}_{\text{Assoluto}} &= \text{mean}(C_k) \cdot \{\delta D\}_{\text{Reltivo}} \\ \{\Delta f\} &= [S]\{\delta D\}_{\text{Assoluto}}\end{aligned}\quad 2.20$$

### 2.2.2 Coefficiente di approssimazione del secondo ordine

All'aumentare del livello di danneggiamento, l'effetto delle non linearità tra variazione di frequenze e il danneggiamento può introdurre errori significativi nella stima dell'effettiva dimensione del danno. Per migliorare la stima nella condizione in cui il sistema, a seguito di un danneggiamento, non mantiene più un comportamento lineare, viene proposto un coefficiente di approssimazione al secondo ordine. Viene quindi sviluppata in serie di Taylor al secondo ordine, nell'intorno della condizione intatta, la variazione dell'autovalore  $k$ -esimo  $\lambda_k$  in seguito ad un danneggiamento nella struttura.

$$\begin{aligned}\lambda_k - \lambda_k^0 &= \left\{ \frac{\partial \lambda_k}{\partial D_1} \dots \frac{\partial \lambda_k}{\partial D_m} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \delta D_1 \\ \delta D_2 \\ \dots \\ \delta D_m \end{Bmatrix} + \dots \\ &+ \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \delta D_1 \\ \delta D_2 \\ \dots \\ \delta D_m \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial D_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial D_1 \partial D_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial D_m \partial D_2} & \dots & \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial D_m^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta D_1 \\ \delta D_2 \\ \dots \\ \delta D_m \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad 2.21$$

$$\lambda_k = \lambda_k^0 + \{s_k\}\{\delta D\} + \frac{1}{2}\{\delta D\}^T [H_k]\{\delta D\} \quad \text{con } k = 1, \dots, p$$

Lin e Lim [37] dimostrano che l'elemento  $k$ -esimo della matrice Hessiana  $[H_k]$ , utilizzato nell'equazione (2.21), può essere determinato come:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial D_j \partial D_i} = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n \lambda_k - \lambda_r^0 \cdot \beta(i)_{kr} \cdot [\beta(j)_{kr} - \beta(j)_{rk}] \\ \text{con } \beta(j)_{rk} = \frac{\{\phi_r^0\}^T \cdot [K_j^0] \cdot \{\phi_k^0\}}{(\lambda_k^0 - \lambda_r^0)} \end{cases}\quad 2.22$$

Dall'equazione (2.22) si ottiene il fattore di scala quadratico relativo al k-esimo modo risolvendo l'equazione di secondo grado nell'incognita  $C_k$ :

$$\left(\frac{1}{2}\{\delta D\}^T [H_k] \{\delta D\}\right) C_k^2 + \{s_k\} \{\delta D\} C_k + \left(4\pi^2 (f_k^{02} - f_k^2)\right) = 0 \quad 2.23$$

Come per il coefficiente lineare si utilizza il valore medio, e moltiplicando i termini di danneggiamento ottenuti dalla minimizzazione per il coefficiente di scala mediato, si ottiene il danneggiamento in termini assoluti.

### 2.2.3 Corrispondenza realtà e modello FEM

L'utilizzo sperimentale del metodo presenta oltre a possibili errori di misura, anche un ulteriore problema legato alla differenza tra il modello FEM e il modello reale. Risulta infatti che il metodo si basa sul calcolo della matrice di sensibilità attraverso le matrici di massa e rigidezza del modello FEM, il quale presenta un'inevitabile discrepanza nei parametri costitutivi rispetto al modello reale. Correlare quindi la variazione teorica di frequenza ottenuta attraverso la matrice di sensibilità e la variazione sperimentale, introduce un inevitabile errore di stima del danneggiamento. Applicando un *model-updating* al modello FEM è possibile ridurre questa discrepanza e calcolare una matrice di sensibilità più fedele alla realtà.

L'effettiva necessità di applicare un *model-updating* al modello FEM va comunque valutata in relazione allo sforzo computazionale aggiuntivo e ai benefici ottenibili. Nel caso di strutture semplici e omogenee il *model-updating* può consistere semplicemente nell'adeguamento delle caratteristiche del materiale e alla caratterizzazione dei vincoli. In situazioni più complesse può essere utile una valutazione critica dell'errore di identificazione introdotto dalla discrepanza tra il modello reale e il modello FEM. La discrepanza percentuale tra le frequenze proprie non smorzate del modello FEM e del modello reale risulta di alcuni punti percentuali [1] e comparabile con quello ottenibile in presenza di danno strutturale. Il *model-updating* del modello FEM risulta a meno di strutture particolarmente semplici oneroso dal punto di vista computazionale.

A. Messina et al. [1] identificano correttamente il danneggiamento nella struttura sperimentale, riscontrando delle discrepanze tra le frequenze del modello numerico e sperimentali dell'ordine del 2, 4%.

In letteratura non è presente alcuna applicazione del metodo MDLAC a una struttura reale a cui sia stata affiancata la procedura di *model-updating* al modello FEM.

## 2.3 Stato dell'arte

Il metodo MDLAC, dall'acronimo *Multiple Damage Location Assurance Criterion*, fu proposto per la prima volta da A. Messina et al. nel 1997 [34] con l'intento di risolvere il problema dell'identificazione dei danni multipli nelle strutture. A partire dal modello ad elementi finiti della struttura analizzata, viene definita la sensibilità della variazione delle frequenze del modello in funzione della variazione del modulo elastico degli elementi finiti. Il danno viene infatti identificato dal metodo MDLAC come una variazione del modulo elastico localizzata nella struttura. Il metodo determina il vettore di danneggiamento, di dimensione pari al numero di elementi finiti del modello, che massimizza la correlazione MDLAC tra la variazione delle frequenze misurate e la sensibilità delle frequenze al danneggiamento. A. Messina et al. conducono due simulazioni numeriche di danneggiamento multiplo utilizzando due strutture a traliccio, composte rispettivamente da 15 e 51 elementi finiti di tipo *beam*. In questa applicazione numerica il danneggiamento è modellato come una riduzione omogenea della rigidità dell'elemento finito danneggiato. Dalle prove condotte dagli autori, si osserva come l'algoritmo identifica correttamente le posizioni danneggiate, ma vengono anche identificate come potenzialmente danneggiate le posizioni che risultano, in base alla geometria della struttura, simmetriche rispetto a quelle effettivamente danneggiate. Il numero di elementi finiti con cui è discretizzato il modello, rappresenta le potenziali zone danneggiate della struttura e quindi la dimensione del vettore di danneggiamento incognito. L'algoritmo di ottimizzazione, utilizzato per ottenere il vettore di danneggiamento, risolve un sistema mal condizionato e tende a generare una soluzione che presenta dei falsi positivi nelle zone adiacenti alle reali posizioni del danneggiamento. Più il sistema risulta sotto determinato, quindi maggiore è il rapporto tra dimensione del vettore di danneggiamento e il numero delle frequenze note, più la soluzione presenterà dei falsi positivi. Nell'articolo proposto da A. Messina et al. la dimensione limitata del vettore di danneggiamento e l'utilizzo dei primi dieci modi, del modello rende il problema poco mal condizionato. In questo modo è possibile identificare correttamente le zone danneggiate ottenendo pochi falsi positivi.

Messina et al. [1] evidenziano che il danneggiamento, in alcune posizioni della struttura, può avere un differente effetto su alcune frequenze rispetto ad altre. Questa maggiore sensibilità di alcune frequenze in relazione alla posizione del danno è osservabile nei valori della matrice di sensibilità, nella quale ogni elemento della matrice rappresenta la sensibilità di una determinata frequenza alla variazione di rigidità di un determinato elemento del modello. Osservando i modi che presentano una maggiore variazione di frequenza tra caso intatto e caso danneggiato possono essere individuate delle potenziali zone danneggiate in base al valore della sensibilità che gli elementi hanno per questi modi. La



validazione sperimentale del metodo è stata condotta su una struttura a travi cilindriche nella quale il danneggiamento è stato simulato riducendo il diametro della sezione in corrispondenza di un equivalente elemento finito del modello FEM. Sperimentalmente si osserva come l'algoritmo riesca a indicare la zona danneggiata, ma individua anche altre zone danneggiate vicine a quella effettiva. La possibilità di discriminare spazialmente la zona danneggiata dipende dalla lunghezza d'onda del modo sensibile al danno. Se la lunghezza d'onda del modo risulta superiore alla dimensione dell'elemento finito lungo la direzione di propagazione della deformata modale, è possibile che siano identificati dal metodo anche alcuni elementi vicini a quello realmente danneggiato. Nell'articolo si cerca di migliorare la risoluzione spaziale aumentando da 10 a 12 il numero di modi utilizzati dall'algoritmo MDLAC, introducendo modi in più alta frequenza. E' stato riscontrato che non tutti i modi aggiuntivi apportano un miglioramento della risoluzione spaziale e che in un'applicazione diagnostica sperimentale 12 modi risultano un limite pratico del metodo. Dai risultati sperimentali ottenuti nell'articolo, si osserva che essendoci una riduzione di massa del tratto di struttura danneggiato oltre alla riduzione di rigidezza, si ha una minore variazione sperimentale di frequenze, che si ripercuote in una sottostima del danneggiamento. L'effetto sulla variazione delle frequenze della riduzione di massa è simile alla riduzione di rigidezza nell'elemento, ma la riduzione di massa non viene considerata e il metodo MDLAC attribuisce la variazione di frequenza solo alla variazione di rigidezza del modello. Va sottolineato che nell'articolo non viene presentata una procedura di *model-updating* del modello FEM per ridurre la discrepanza tra le frequenze sperimentali e quelle simulate. Gli autori di questo articolo evidenziano come a loro conoscenza l'MDLAC sia l'unico metodo che dall'analisi della sola variazione delle frequenze sia in grado di definire il danneggiamento sia nella posizione sia nell'intensità in modo assoluto.

Shi et al. [18] hanno esteso il modello MDLAC all'utilizzo delle forme modali incomplete. Utilizzando la stessa formulazione di correlazione proposta da Messina et al. [1], i valori delle deformate modali nei punti di misura vengono direttamente correlati con la controparte analitica, agli stessi gradi di libertà, della sensibilità dei modi al danneggiamento. Rispetto ai metodi basati sull'analisi della flessibilità [38] non è richiesta la conoscenza dei modi completi del modello ed è possibile limitare il numero di sensori per la misura delle deformate. Viene confrontata l'identificazione della posizione del danneggiamento effettuata con il metodo MDLAC proposto in questo articolo, che utilizza le variazioni delle forme modali, e il metodo MDLAC proposto da Messina et al. [1] basato sulla variazione di frequenze. Dai risultati presentati si osserva che il metodo MDLAC che utilizza le variazioni di deformate modali riesce a discriminare meglio le zone danneggiate rispetto al metodo MDLAC basato sulle variazioni di frequenza. In seguito all'identificazione preliminare delle zone potenzialmente danneggiate con l'utilizzo delle deformate modali

incomplete, l'esatta posizione del danneggiamento viene ottenuta con l'applicazione del metodo MDLAC basato sulla variazione delle frequenze. I due differenti approcci al metodo MDLAC sono applicati al modello simulato della struttura reticolare bidimensionale proposta da Messina [1]. Viene confrontata la bontà di stima nel caso in cui sia presente un rumore di misura simulato. Dai risultati presentati nell'articolo, si può osservare che l'utilizzo delle forme modali nella formulazione di correlazione MDLAC permette una circoscrizione delle potenziali zone danneggiate, essendo le deformate modali più sensibili alla posizione del danneggiamento rispetto alle frequenze, ma meno alla quantificazione del danno. Con la selezione preliminare delle potenziali zone danneggiate si è cercato di migliorare il mal condizionamento del metodo di ottimizzazione della funzione di correlazione MDLAC.

B.H. Koh (2006) [39] propone l'applicazione del metodo MDLAC ad un modello simulato di ponte strallato. Il metodo MDLAC, nella formulazione basata sull'analisi della variazione delle frequenze, viene accoppiato con un algoritmo genetico al fine di discriminare le zone effettivamente danneggiate dai falsi positivi.

H.Y. Guo (2005) [40] utilizza l'*information-fusion-technique* per ottenere un'identificazione che sfrutti contemporaneamente i risultati ottenuti dal metodo MDLAC basato sull'analisi della variazione delle deformate modali [18] e un metodo che analizza la variazione delle frequenze. Nell'articolo viene presentata l'identificazione dello stato di danneggiamento in un modello bidimensionale reticolare nel caso siano applicate singolarmente le tecniche d'identificazione presentate nell'articolo e nel caso in cui si utilizzi l'*information-fusion*. Dai risultati presentati l'*information-fusion* permette di discriminare le effettive zone danneggiate e riduce i falsi positivi nelle zone adiacenti a quelle realmente danneggiate.

### 2.3.1 Sviluppi attuali

Attualmente le trattazioni che riguardano l'applicazione del metodo MDLAC sono orientate alla soluzione delle limitazioni intrinseche del metodo, che risultano anche proprie della classe di appartenenza del metodo, ovvero i *model-based* e *inverse-approach-method*. Le principali problematiche riscontrabili nell'applicazione del metodo MDLAC riguardano lo sforzo computazionale richiesto per la soluzione dell'algoritmo di ottimizzazione e la presenza di falsi positivi nelle zone adiacenti alle reali zone danneggiate. Mentre lo sforzo computazionale è in relazione alla dimensione del vettore di danneggiamento incognito e quindi all'estensione della potenziale zona danneggiata, il mal condizionamento del metodo dipende dal numero di modi sperimentali che è possibile identificare. Risulta, infatti, che tipicamente il

numero di modi identificabili sperimentalmente sia notevolmente inferiore alla dimensione del vettore di danneggiamento incognito.

In letteratura è stata valutata la possibilità di svolgere un'analisi preliminare della struttura individuando le potenziali zone danneggiate e quindi limitare la dimensione del vettore di danneggiamento. In questo modo è possibile ridurre sia lo sforzo computazionale sia il mal condizionamento del metodo.

N.Kim et al. (2014) [41] eseguono un'analisi preliminare della struttura individuando delle potenziali zone danneggiate attraverso l'analisi della correlazione tra la risposta statica della struttura nella condizione intatta e in quella danneggiata. Le zone identificate vengono in seguito analizzate attraverso un algoritmo genetico. L'algoritmo genetico ottimizza un indice di correlazione che comprende una funzione obiettivo [39] e il metodo MDLAC basato sull'analisi della variazione delle frequenze. La funzione obiettivo [39] viene accoppiata al metodo MDLAC per risolvere la poca sensibilità del metodo MDLAC rispetto agli elementi intatti [42], [43]. In seguito alla preliminare identificazione delle potenziali zone danneggiate l'algoritmo genetico permette di identificare i danneggiamenti nella struttura escludendo i falsi positivi.

K. Szopa et. al (2013) [44] utilizza il metodo MDLAC per l'identificazione del danneggiamento in un modello simulato di una torre di trasmissione di energia elettrica. Viene creato un database delle possibili combinazioni di danneggiamento variando la posizione del danneggiamento e tre livelli di intensità. Si verifica che simulato un danneggiamento nel modello questo viene identificato correttamente ricercando il valore MDLAC ottenuto dall'analisi all'interno del database creato. Risulta una soluzione onerosa e di scarsa applicabilità in strutture complesse per via della costruzione del database, e limitata all'identificazione dei soli livelli di danneggiamento contenuti nel database.

Z. Tabrizian et al. (2013) [45] analizzano la funzione di correlazione [39] attraverso un algoritmo genetico al fine di distinguere le effettive zone danneggiate dai falsi positivi identificati. Il metodo è stato applicato a un modello numerico discretizzato con un numero di elementi finiti vicino al numero di modi e frequenze proprie misurate. Il problema di ottimizzazione della funzione di correlazione risulta quindi non fortemente mal condizionato. Dai risultati ottenuti nell'articolo, si osserva un aumento del numero dei falsi positivi nella stima del danneggiamento nel caso in cui il numero di modi utilizzato viene ridotto. Nella prova condotta il rapporto tra il numero di modi a disposizione e la dimensione del vettore, di danneggiamento incognito risulta in questo caso favorevole al buon condizionamento del metodo, favorendo anche la reiezione del rumore sperimentale.

S.M. Seyedpoor (2012) [46] utilizza l'energia di deformazione, che richiede la conoscenza delle deformate modali sia nella condizione intatta sia nelle condizione danneggiata, per l'identificazione preliminare delle potenziali

zone danneggiate. Successivamente un algoritmo euristico di *swarm-optimization* sfrutta la funzione MDLAC di correlazione per definire il danneggiamento nelle zone identificate dalla preliminare identificazione.

Dalle prime applicazioni del metodo, verificata la sua effettiva sensibilità all'identificazione del danneggiamento, si è cercato di risolvere le due problematiche intrinseche del metodo ovvero il metodo risulta comunemente mal posto e l'utilizzo delle variazioni di frequenza fornisce un'indicazione non univoca della posizione del danneggiamento. Il danneggiamento in diverse posizioni della struttura può creare la stessa variazione di frequenze e quindi l'identificazione può risultare non univoca.

Si è cercato da un lato di limitare la zona d'indagine individuando le potenziali zone danneggiate, migliorando così il condizionamento del metodo attraverso dei metodi basati sull'analisi delle deformate modali, e dall'altro si è cercato di identificare le effettive posizioni danneggiate attraverso l'utilizzo di metodi euristici.

### **2.3.2 Limiti dello stato dell'arte**

I principali limiti evidenziati del metodo MDLAC riguardano la possibilità di ottenere delle soluzioni non univoche di identificazione per via dell'utilizzo delle variazioni di frequenza come parametro di correlazione e l'identificazione di falsi positivi nel caso in cui il metodo risulti fortemente mal condizionato.

Il mal condizionamento del metodo MDLAC è legato alla discretizzazione del modello FEM. Risulta, infatti, che in base alla complessità della struttura è richiesta una discretizzazione minima per garantire una corretta rappresentazione del comportamento reale. Tale discretizzazione determina anche la risoluzione spaziale con cui il danno può essere identificato e quantificato. Il numero di frequenze identificabili, quindi il numero di equazioni a disposizione, risulta invece legato alla tipologia di struttura e alla tecnologia utilizzata per il sistema di misura. In questo caso l'utilizzo delle frequenze, da un lato presenta un vantaggio per la facilità con cui possono essere misurate, ma dall'altro risulta limitato il numero massimo di quelle identificabili in una banda di frequenza definita.

Risulta quindi che il mal condizionamento del metodo sia una condizione che non può essere risolta con l'aumento dei parametri misurati. Va ricercato un metodo per ridurre il mal condizionamento del metodo limitando le zone d'indagine e quindi la dimensione del vettore di danneggiamento.

Le applicazioni del metodo MDLAC presenti in letteratura riguardano per lo più simulazioni numeriche caratterizzate da un rapporto tra dimensione del vettore di danneggiamento e numero di frequenze sperimentali tale da non rendere il problema di ottimizzazione fortemente mal condizionato. Consolidata la bontà di stima del metodo in condizioni di buon condizionamento del

problema, non è stata analizzata l'applicabilità del metodo in condizioni di forte mal condizionamento. L'utilizzo delle deformate modali ha permesso di identificare in modo preliminare delle potenziali zone danneggiate della struttura, riducendo, di fatto, il mal condizionamento del metodo. Risulta però che l'identificazione preliminare sia applicata a un problema poco mal condizionato, dove il numero di incognite è inferiore a dieci volte il numero di equazioni a disposizione.

Il metodo MDLAC permette di identificare il danneggiamento nella struttura con la risoluzione del modello FEM da cui viene definita la matrice di sensibilità. La discretizzazione del modello, come descritto in precedenza, definisce anche la dimensione del vettore di danneggiamento incognito e in relazione alle variazioni di frequenza misurate, anche il mal condizionamento del metodo. Risulta che il processo di identificazione può essere suddiviso in più identificazioni successive a diversi livelli di discretizzazione del modello FEM.

In letteratura non è stata valutata la possibilità di applicare al metodo MDLAC la riduzione del vettore di danneggiamento attraverso la condensazione dei gradi di libertà del modello FEM o attraverso la costruzione di una discretizzazione parametrica del modello. Inoltre non è presente uno studio sul limite del metodo nel caso in cui il rapporto tra i dati disponibili e le incognite sia notevolmente sfavorevole al fine del buon condizionamento del metodo.

E' quindi interessante proporre l'applicazione del metodo nella condizione in cui il problema di identificazione risulti mal condizionato e l'indagine della struttura sia suddivisa in successivi passi di identificazione. In questo modo l'identificazione viene effettuata in modo graduale, restringendo l'analisi alle sole zone che presentano un apprezzabile livello di danneggiamento, rendendo il problema di ottimizzazione della funzione di correlazione MDLAC in alcuni casi anche ben posto.

## **2.4 MDLAC ricorsivo**

Come discusso in precedenza la principale criticità del metodo risulta il mal condizionamento. Il rapporto tra dimensione del vettore di danneggiamento incognito e il numero di modi misurati risulta tipicamente sfavorevole al buon condizionamento del metodo.

Le soluzioni presenti in letteratura per ridurre la dimensione del vettore di danneggiamento, attraverso una selezione preliminare delle potenziali zone danneggiate, richiedono la misura dei modi sperimentali [18], mettendo così in secondo piano le caratteristiche di semplicità del metodo. Altri metodi proposti agiscono a valle dell'identificazione del modello completo e si concentrano sulla distinzione delle effettive posizioni danneggiate dai falsi positivi [41].

Nel presente lavoro viene proposta la possibilità di suddividere il processo di identificazione del danneggiamento in più passi successivi di identificazione.

Dalla creazione dei gruppi di elementi finiti del modello FEM viene definito il livello di dettaglio del passo di identificazione. Il modello FEM viene condensato attraverso la condensazione di Guyan [47] delle macro zone create e viene analizzato con il metodo MDLAC.

In modo ricorsivo si prosegue all'analisi delle sole porzioni che evidenziano un livello di danneggiamento apprezzabile. Successivi passi di identificazione delle sole zone potenzialmente danneggiate permettono di migliorare il livello di dettaglio dell'identificazione, fino a individuare il danneggiamento con la risoluzione del modello FEM iniziale.

In questo modo è possibile ridurre la dimensione del vettore di danneggiamento incognito ad ogni passo di identificazione, rendendo il problema di ottimizzazione in alcuni casi anche ben condizionato.

### **2.4.1 Metodo proposto**

Il metodo proposto in questo lavoro riguarda la possibilità di variare la discretizzazione del modello in modo ricorsivo attraverso la condensazione del modello FEM di partenza. Il termine ricorsivo utilizzato per il metodo proposto si riferisce alla possibilità iterare il processo di identificazione con vari livelli di dettaglio, attraverso l'analisi delle sole porzioni della struttura potenzialmente danneggiate.

Il sistema analizzato viene modellato a elementi finiti con una sufficiente discretizzazione spaziale tale da garantire un corretto comportamento dinamico e una risoluzione utile all'identificazione del danneggiamento. Vengono successivamente estratte le matrici di massa e rigidezza, le frequenze proprie libere non smorzate e i corrispondenti modi di vibrare.

Definito il modello FEM della struttura, la bontà di stima del metodo MDLAC risulta fortemente degradata dalla dimensione del vettore di danneggiamento incognito e quindi dalla discretizzazione del modello.

All'aumentare della dimensione del vettore di danneggiamento rispetto al numero di frequenze sperimentali misurate, il processo di ottimizzazione della funzione di correlazione MDLAC non riesce più a discriminare correttamente le zone intatte da quelle danneggiate e vengono individuati dei falsi positivi adiacenti alle reali posizioni del danneggiamento.

Per ovviare a questo problema, non essendo possibile aumentare il numero di frequenze sperimentali misurate, vengono creati dei macro gruppi di elementi finiti adiacenti del modello FEM attraverso la condensazione delle matrici di massa e rigidezza. In questo modo è possibile variare la discretizzazione del modello e quindi la dimensione del vettore di danneggiamento. Il vettore di danneggiamento ridotto rappresenta lo stato di danneggiamento del sistema condensato. Ogni elemento del vettore di danneggiamento è la variazione del fattore di riduzione di rigidezza relativo al gruppo di elementi finiti condensato.

Il processo ricorsivo di identificazione consiste quindi nel condensare le matrici del modello intatto riducendo di fatto la discretizzazione del modello ma senza ricorrere alla costruzione di una nuova *mesh*. Tramite la condensazione di gruppi di elementi finiti adiacenti e l'applicazione del metodo MDLAC viene determinato il vettore di danneggiamento relativo alla condensazione del modello. Successivamente vengono selezionati in modo interattivo i macro elementi che presentano i valori più elevati di danneggiamento e viene variata la condensazione del modello FEM iniziale aumentando il numero di raggruppamenti di elementi finiti. Solamente le zone individuate come potenzialmente danneggiate vengono analizzate nei passi successivi. Il processo ricorsivo di condensazione si conclude quando viene raggiunto il livello di discretizzazione del modello FEM iniziale e non è più possibile un'ulteriore indagine delle zone identificate. Ad ogni livello di discretizzazione scelto è opportuno mantenere un numero di parametri incogniti inferiore al doppio del numero di variazioni di frequenze sperimentali misurate, per non rendere il problema di ottimizzazione della funzione di correlazione MDLAC eccessivamente sotto determinato.

Si è preferito mantenere una discretizzazione uniforme della struttura per non introdurre una dipendenza della soluzione rispetto alla non omogeneità della discretizzazione del modello.

Dalle matrici condensate viene calcolata a ogni iterazione la matrice di sensibilità utilizzando i modi e le frequenze proprie del modello FEM discretizzato iniziale. Questo significa che le matrici utilizzate sono relative a un modello con un numero inferiore di elementi finiti rispetto al modello a cui fanno riferimento i modi e le frequenze utilizzate. Il modello FEM di partenza fornirà una stima delle frequenze e dei modi più vicina alla realtà avendo una discretizzazione che, a seguito di un'analisi di convergenza sulla discretizzazione, le frequenze e i modi risultino convergenti. E' quindi possibile utilizzare a ogni livello di condensazione del modello FEM iniziale le sole frequenze e i soli modi che effettivamente possono essere rappresentati correttamente a quel dato livello di condensazione.

L'algoritmo adattivo presentato effettua un processo di *local-zooming* che partendo da un modello caratterizzato da una fitta discretizzazione permette di variare il livello di dettaglio dell'identificazione.

Viene di seguito proposto un esempio di procedimento ricorsivo di condensazione delle matrici di massa e rigidezza.

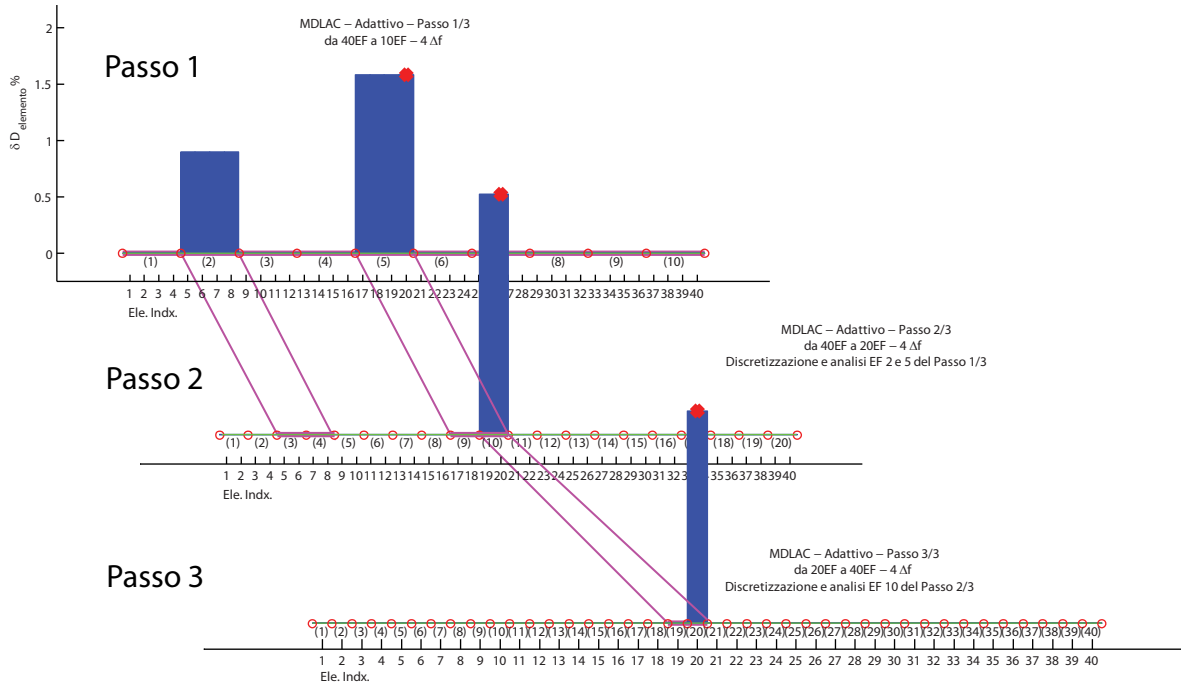


Figura 2.4

I passi dell’algoritmo ricorsivo presentati in Figura 2.4 consistono in una prima condensazione del modello FEM al *passo 1* e la selezione preliminare delle zone potenzialmente danneggiate, identificate in questo caso come la *zona 2* e la *zona 5*. Successivamente il modello iniziale viene nuovamente condensato con una discretizzazione più fitta, aumentando quindi il numero di raggruppamenti di elementi finiti nel modello FEM iniziale. Vengono analizzate le sole zone precedentemente individuate al *passo 1*. L’identificazione si termina quando viene raggiunta la discretizzazione iniziale del modello FEM e non è più possibile aumentare il livello di dettaglio dell’identificazione. Il metodo adattivo, in riferimento all’esempio in Figura 2.4, permette di ridurre la dimensione del vettore di danneggiamento incognito, e quindi il numero di parametri da stimare da 40 a poche unità. La rilevanza di questo approccio è apprezzabile maggiormente nel caso in cui il modello FEM presenti un numero elevato di elementi finiti. In questa condizione l’algoritmo di ottimizzazione della funzione di correlazione MDLAC fornisce l’identificazione di un vettore di danneggiamento che, all’aumentare del numero di falsi positivi in relazione al



mal condizionamento del metodo, rende impossibile identificare in modo univoco la posizione del danno.

Viene di seguito proposto il diagramma di flusso del metodo MDLAC nella formulazione ricorsiva che utilizza la condensazione variabile del modello.

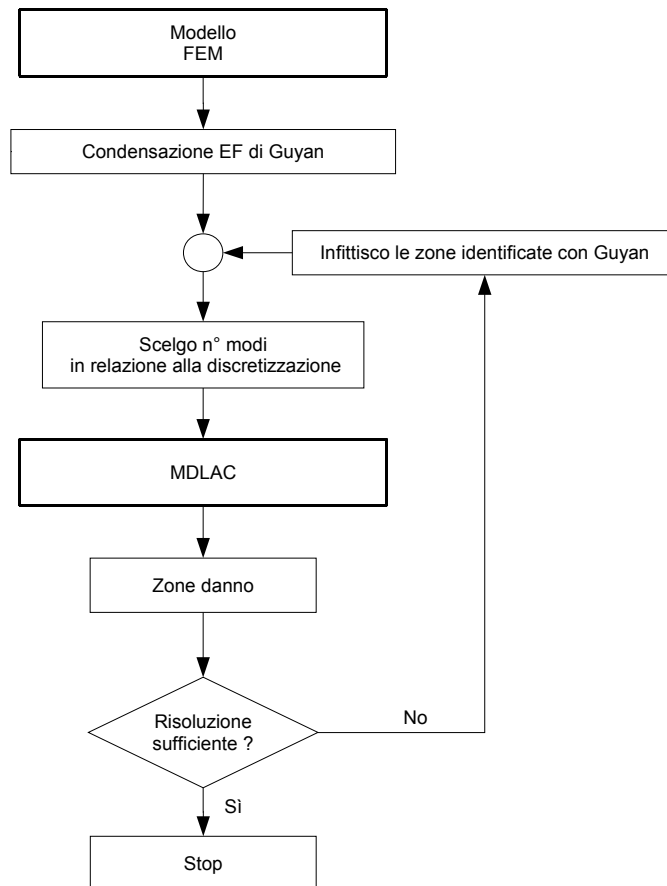


Figura 2.5

## 2.4.2 Condensazione di Guyan

La condensazione del modello FEM e quindi anche la possibilità di variare la dimensione del vettore di danneggiamento incognito ha permesso di superare la difficoltà di creare una *mesh* parametrica. La *mesh* parametrica risulta di difficile implementazione ad esempio in strutture geometricamente complesse e necessita la reiterazione dell'intera simulazione FEM.

Utilizzando invece un approccio di condensazione si ha la possibilità di eseguire un'unica analisi, anche onerosa dal punto di vista computazionale, e variare la discretizzazione del modello agendo direttamente sulle matrici di massa e rigidezza.

Per la condensazione del modello FEM viene utilizzata la condensazione di Guyan [47], che consente di variare il numero di gradi di libertà del modello. Il metodo di condensazione consiste nella partizione delle matrici di massa e rigidezza del sistema, separando i gradi di libertà *master* da quelli *slave*. I gradi di libertà *master* sono quelli che vengono mantenuti a valle della condensazione, mentre i gradi di libertà *slave* non sono più rappresentati nel modello condensato. Nelle deformate modali che è possibile rappresentare correttamente attraverso i gradi di libertà *master*, a valle della condensazione, i gradi di libertà *slave* hanno un comportamento quasi statico in relazione al moto dei gradi di libertà *master*. I gradi di libertà *slave* interposti tra i gradi di libertà *master* non partecipano alla definizione della deformata modale della struttura. Risulta che la deformata modale tra due nodi *master* con interposti dei gradi di libertà *slave*, non è influenzata da questi ultimi.

Il legame tra gradi di libertà *master* e gradi di libertà *slave* viene ricavato da Guyan con l'ipotesi che, all'interno della banda di frequenze considerata, il contributo al moto delle forze inerziali legate ai gradi di libertà *slave* risulta trascurabile in relazione alle forze elastiche relative ai gradi di libertà *master*.

Utilizzando il metodo di Guyan è possibile ottenere le matrici di massa e rigidezza ridotte, relative a un sistema governato dai soli gradi di libertà *master*. La riduzione del modello FEM consiste nel ridurre il numero di elementi del sistema sopprimendo opportuni nodi *slave* dal modello, creando di fatto degli elementi aggregati rispetto al modello di partenza.

La condensazione di Guyan risulta dunque dalla partizione delle matrici di massa e rigidezza, separando i gradi di libertà *master* da quelli *slave*.

$$\begin{pmatrix} [K_{mm} & K_{ms}] \\ [K_{ms}^T & K_{ss}] \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} [M_{mm} & M_{ms}] \\ [M_{ms}^T & M_{ss}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{D}_m \\ \bar{D}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 2.24$$

Considerando quindi trascurabile il contributo inerziale dei gradi di libertà *slave* rispetto ai termini elastici relativi ai gradi di libertà *master*:

$$\{\bar{D}_s\} = -[K_{ss}]^{-1}[K_{ms}]^T\{\bar{D}_m\} \quad 2.25$$

Quindi la trasformazione risulta:

$$\begin{Bmatrix} \bar{D}_m \\ \bar{D}_s \end{Bmatrix} = [T] \{D_m\} \quad 2.26$$

$$[T] = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1} K_{ms}^T \end{bmatrix} \quad 2.27$$

Il problema agli autovalori condensato risulta quindi:

$$([K_r] - \lambda[M_r])\{\bar{D}_m\} \quad 2.28$$

$$[K_r] = [T]^T [K_r] [T]^T \quad \text{e} \quad [M_r] = [T]^T [M_r] [T]^T \quad 2.29$$

Iterativamente, come descritto in precedenza (2.4.1), viene analizzata la struttura in modo progressivo, variando la condensazione del modello e quindi variando il livello di discretizzazione del modello a elementi finiti. La condensazione avviene con raggruppamenti omogenei di elementi finiti adiacenti. Il modello condensato risulta descritto dai soli gradi di libertà *master*.

Dalla condensazione di Guyan, descritta nell'equazione (2.29), la matrice di rigidezza condensata risulta esattamente la matrice di rigidezza del modello FEM agli stessi gradi di libertà. Non vengono introdotte delle approssimazioni nella trasformazione della matrice di rigidezza. La matrice di massa contiene dei termini di rigidezza a seguito della trasformazione (2.27) e risulta un'approssimazione della matrice di massa del modello FEM condensato.

Essendo quindi la matrice di massa condensata un'approssimazione della matrice di massa del modello FEM descritto dai soli gradi di libertà *master*, gli autovalori dei modi rappresentabili dal modello condensato con Guyan risultano maggiori rispetto agli stessi autovalori del modello completo iniziale.



## Capitolo 3

### Qualifica del metodo su dati simulati

L'applicazione numerica del metodo consiste nell'analisi e nell'identificazione del danno simulato in una struttura modellata ad elementi finiti. Il processo di identificazione si suddivide in due fasi: la modellazione ad elementi finiti della struttura e la successiva applicazione del metodo *MDLAC ricorsivo* al modello simulato, introdotto nel paragrafo (2.4) di questo lavoro. La fase preliminare di modellazione consiste nella realizzazione di due tipologie di modello ad elementi finiti: un modello tridimensionale ad elementi solidi *brick* e un modello più semplice bidimensionale ad elementi finiti *beam*.

A partire dal modello della struttura, l'estrazione delle matrici di massa e rigidità del modello FEM, l'applicazione del metodo MDLAC [1], sono svolte attraverso un codice *Matlab*<sup>2</sup>. Il codice sviluppato interfaccia la fase di soluzione del problema agli autovalori e autovettori del modello ad elementi finiti, implementato in *Abaqus*<sup>3</sup>, e la fase di elaborazione e di identificazione implementata in linguaggio *Matlab*.

La scelta di modellare la struttura agli elementi finiti in ambiente *Abaqus* è dettata dalla facilità con cui è possibile definire il modello e la sua discretizzazione, oltre alla possibilità di definire in modo semplice le caratteristiche di vincolo.

La struttura utilizzata è una trave snella semplicemente incastrata a sezione rettangolare, con lo spessore nettamente inferiore rispetto allo sviluppo trasversale. In questo modo è possibile avere modi principalmente flessionali normali allo sviluppo longitudinale.

Inizialmente, rispetto ai casi sviluppati in letteratura, si è cercato di identificare il danneggiamento all'interno del volume solido, modellando il componente ad elementi finiti con una discretizzazione solida.

La simulazione numerica del metodo MDLAC è stata sviluppata quindi partendo da un modello solido della trave. L'utilizzo di un modello solido discretizzato con un numero elevato di elementi finiti ha richiesto lo sviluppo di un codice *Matlab* di interpretazione e elaborazione dei risultati, ottenuti da

---

<sup>2</sup> MATLAB, linguaggio di calcolo numerico della MathWorks.

<sup>3</sup> Abaqus – Simulia, software CAE general purpose per l'analisi a elementi finiti.

*Abaqus*, efficiente dal punto di vista del tempo computazionale. Ha permesso, inoltre, di comprendere i limiti del metodo in relazione alla mole di dati gestibile. L'applicazione del metodo MDLAC non ricorsivo, al modello a elementi finiti solido, ha subito evidenziato la necessità di ridurre il carico computazionale dell'identificazione attraverso la selezione preliminare delle potenziali zone danneggiate della struttura.

Per la simulazione numerica del metodo MDLAC ricorsivo si è sviluppato un modello più semplice bidimensionale modellato con elementi finiti di tipo *beam*. Il modello più semplice ha permesso di testare la validità del metodo in condizioni di forte mal condizionamento e al tempo stesso ha permesso un maggiore controllo sulla bontà dei risultati.

### **3.1 Struttura del codice di analisi**

Per la qualifica numerica del metodo è stato sviluppato un codice in ambiente *Matlab* che permettesse di interfacciare la fase di modellazione e soluzione del problema agli autovalori e autovettori, con la fase dedicata all'organizzazione e all'elaborazione dei risultati. Mentre la fase di modellazione e analisi del modello FE è svolta in ambiente *Abaqus*, la fase di elaborazione dei risultati è svolta in ambiente *Matlab*. La necessità di estrarre le matrici di massa e rigidità, le deformate modali del modello simulato solido tridimensionale ha richiesto l'implementazione di un codice che integrasse l'analisi del modello e la successiva interpretazione e elaborazione automatica dei risultati. La fitta discretizzazione del modello determina una mole di dati che non può essere gestita manualmente. Il codice sviluppato di analisi prescinde dal tipo di modello FEM e dalle caratteristiche meccaniche e fisiche della struttura. Questo permette di analizzare strutture sia modellate con elementi solidi *brick* che elementi strutturali di tipo *beam*, anche con caratteristiche non omogenee nella struttura.

L'analisi del modello si compone di tre fasi: la fase di *pre-processing*, la fase di *processing* e quella di *post-processing*.

#### **3.1.1 Pre-processing**

La fase di *pre-processing*, nella quale viene definito il modello ad elementi finiti nella geometria e nelle caratteristiche meccaniche e fisiche, viene svolta attraverso l'interfaccia utente di *Abaqus-CAE*. In questa fase vengono definite anche le condizioni di vincolo del modello e il tipo di analisi da eseguire. Dalla fase di *pre-processing* viene creato, attraverso l'interfaccia utente di *Abaqus*, il file *\*.inp* di input. Il file di input creato racchiude tutte le informazioni riguardanti il modello a elementi finiti, il tipo di analisi da eseguire e gli output richiesti alla simulazione. Il file di input creato da *Abaqus* viene

completato con l'aggiunta delle *keywords*<sup>4</sup> necessarie per definire gli output desiderati della simulazione FEM.

Da interfaccia utente viene scelta l'analisi di tipo *linear-perturbation* e l'analisi *frequency*. L'analisi *linear-perturbation* consiste nell'analizzare il comportamento del sistema linearizzato nell'intorno della posizione di equilibrio stabile. Le deformate modali e le frequenze proprie vengono ricavate dal problema lineare attraverso l'analisi *frequency*. Viene quindi definito il numero di frequenze da determinare attraverso l'analisi agli autovalori e auto vettori del modello.

*Abaqus* non permette di eseguire più di un'analisi, definita *step*, contemporaneamente. E' possibile considerare l'effetto sui modi e sulle frequenze di carichi esterni e non linearità geometriche eseguendo l'analisi *frequency* in sequenza ad altre analisi che introducono le variazioni sullo stato del modello. Le condizioni analizzate da ogni singolo *step* riguardano lo stato finale del modello allo *step* di analisi precedente. L'entità del danno simulato nella struttura risulta una riduzione del modulo elastico dell'intera sezione della trave. Il comportamento della struttura risulta lineare e quindi è possibile escludere l'analisi non lineare del modello.

Definito il tipo di analisi sul modello, viene creato il file *\*.inp* e completato con le stringhe di codice per l'estrazione delle deformate modali nei nodi desiderati e l'estrazione delle matrici di massa e rigidezza del modello. Le stringhe di codice utilizzate per l'estrazione dei modi nei nodi desiderati e le matrici di massa e rigidezza utilizzano le funzioni *keyword* di *Abaqus*. L'utilizzo di queste stringhe di comando fa riferimento alla documentazione del programma. Viene di seguito descritto il diagramma di flusso relativo alla fase di *pre-processing*.

---

<sup>4</sup> *Keywords*, funzioni utilizzate come istruzioni all'interno del file *\*.inp*. Ogni riferimento per il corretto utilizzo è presente nella documentazione del software *Abaqus*.

Dalla fase di *pre-processing* si ottengono i file di input *\*.inp* per le prove simulate dei casi di danneggiamento.

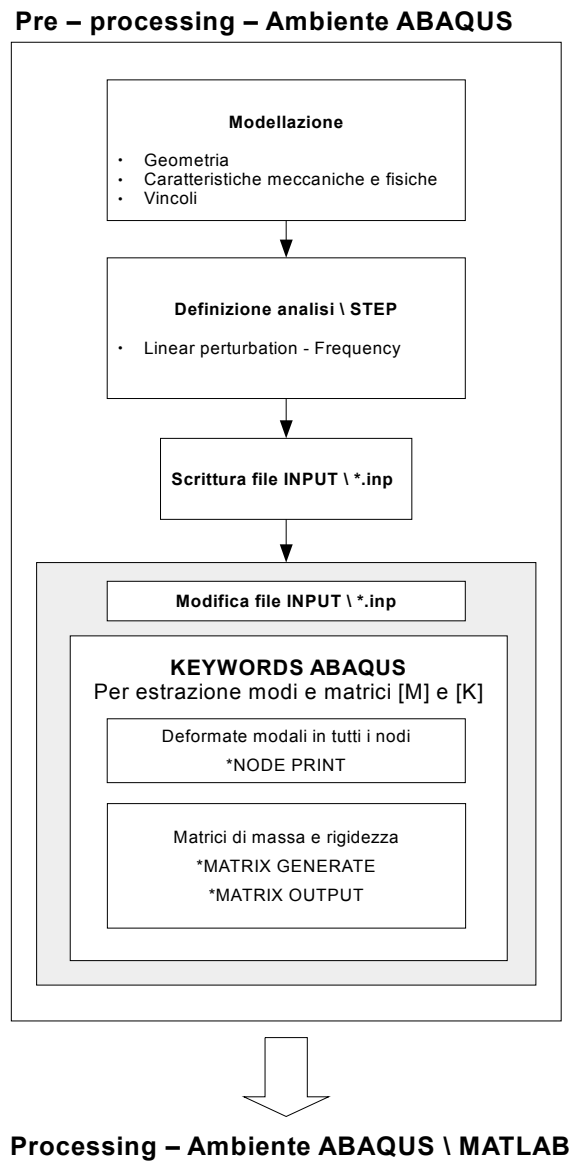


Figura 3.1



### 3.1.2 Processing

La fase di *Processing* consiste nella soluzione del problema agli autovalori e autovettori del modello FEM. Questa fase esegue le istruzioni contenute nel file *\*.inp* creato e modificato nella fase di *pre-processing*. Il file di input creato viene processato dal solutore *Abaqus* e viene eseguita l'analisi agli autovalori e autovettori per piccole oscillazioni con il metodo di *Lanczos*<sup>5</sup>. Il codice *Matlab* utilizzato per l'estrazione dei parametri del modello e per l'identificazione avvia l'esecuzione del file di input in *Abaqus*. Dalla fase di *processing* vengono quindi ottenute le frequenze proprie non smorzate del modello, i modi e le matrici di massa e rigidezza. Le frequenze proprie e i modi del modello, nei gradi di libertà del modello, sono estratti da *Abaqus* in forma di file di testo con estensione *\*.dat*. Le matrici di massa e rigidezza sono sempre estratte in forma di file di testo ma con l'estensione *\*.mtx*.

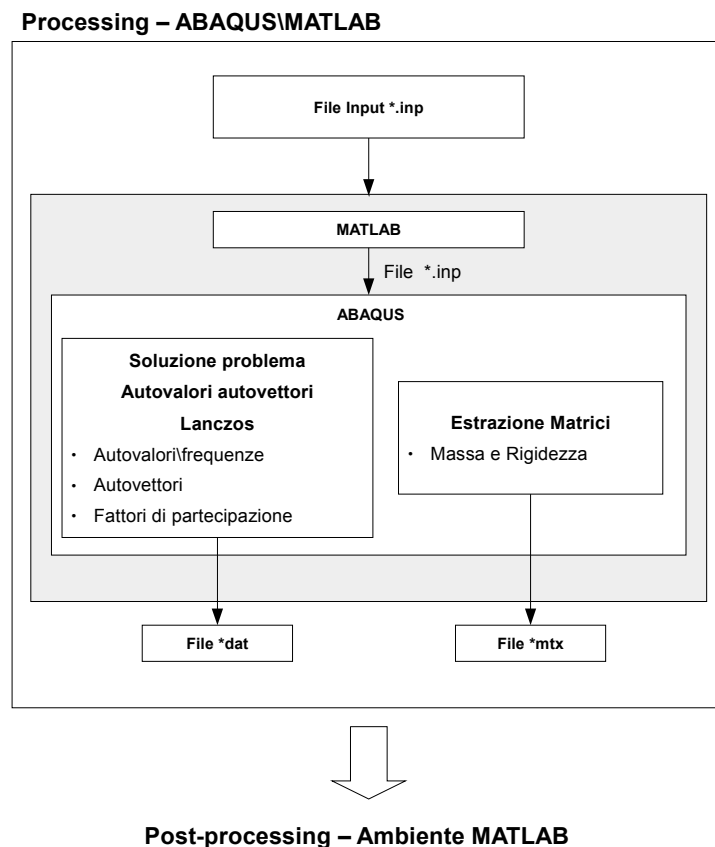


Figura 3.2

<sup>5</sup> Rif. Cap. 2.5.1, Abaqus theory manual, Abaqus Documentation.

### 3.1.3 Post-processing

I risultati ottenuti dalla fase di *processing*, vengono organizzati e analizzati nella fase di *post-processing*.

I risultati ottenuti dalla simulazione del modello FEM in formato di testo vengono interpretati e organizzati dal codice *Matlab* così da essere utilizzabili per l'identificazione del danneggiamento. Il programma di interpretazione e organizzazione dei risultati è stato ottimizzato in modo da ridurre il più possibile il tempo richiesto per l'importazione in ambiente *Matlab* dei risultati ottenuti dalla simulazione in *Abaqus*.

La fase di *post-processing*, o di analisi dei risultati della simulazione FEM si suddivide in tre fasi: interpretazione dei risultati di *Abaqus* dal formato di testo, organizzazione dei risultati e identificazione del danneggiamento.

La prima fase di interpretazione dei risultati consiste nella estrazione in blocco delle informazioni utili dai file di testo contenenti i risultati della simulazione di *Abaqus*. I principali campi di interesse estratti dalla simulazione FEM riguardano: deformate modali, frequenze proprie del modello e fattori di partecipazione del modo, indici e coordinante dei nodi, matrici di massa e rigidezza del modello. L'importazione in blocco è svolta attraverso la funzione *importdata*<sup>6</sup> del codice *Matlab*. In questo modo è stato possibile snellire la procedura di importazione dei risultati di *Abaqus* dai file di testo in ambiente *Matlab*. L'efficacia di questo metodo di importazione è risultata utile nell'analisi della struttura modellata con elementi finiti *brick*.

La seconda fase di *post-processing* riguarda l'organizzazione dei dati importati dai file di testo. In questa fase vengono create le variabili riguardanti lo stato intatto e danneggiato della struttura e le matrici di massa e rigidezza del modello intatto in formato sparso.

La terza fase di *post-processing* è dedicata all'identificazione del danneggiamento con il metodo MADLAC ricorsivo. Consiste nella creazione della matrice della distribuzione spaziale degli elementi del modello e la condensazione ricorsiva, attraverso la riduzione di Guyan [2], degli elementi rispetto a una direzione desiderata. Nel caso della trave o di un componente a sviluppo longitudinale, la condensazione degli elementi parte da un estremo del componente lungo la direzione longitudinale. Definiti i gruppi di elementi finiti che devono essere condensati per ridurre i gradi di libertà del modello si procede all'identificazione del modello FEM condensato con il metodo MDLAC alla variazione delle frequenze.

---

<sup>6</sup> *Importdata*, toolbox data import and export, sw. Matlab

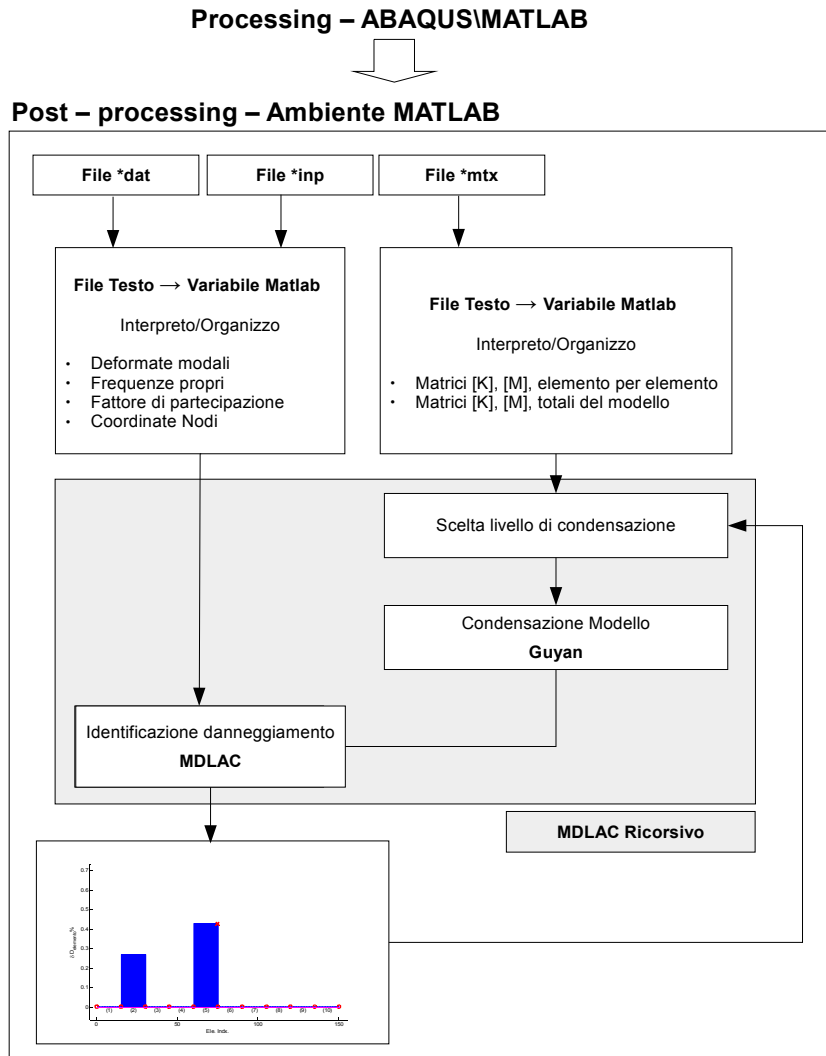


Figura 3.3

### 3.1.4 Applicazione del codice di analisi Abaqus/Matlab

Le fasi di *pre-processing*, *processing* e *post-processing*, ad esclusione della terza fase di *post-processing*, sono comuni al modello ad elementi finiti *brick* e *beam*.

L'identificazione del danneggiamento della struttura in modo ricorsivo attraverso la riduzione di Guyan [2] del modello FEM è stata sviluppata solamente per il modello *beam*. Per il modello solido *brick* è stata sviluppata la procedura di raggruppamento variabile degli elementi secondo la distribuzione spaziale ma non la condensazione delle matrici. Nel caso del modello solido *brick* il raggruppamento è sviluppato in direzione longitudinale, con gruppi uniformi e per livelli nello spessore. In questo modo ogni gruppo di elementi finiti risulta appartenente a una posizione longitudinale e a un livello di elementi finiti nello spessore. Nel caso *brick* analizzato il modello presenta 2 elementi finiti nello spessore. Risultano quindi due livelli di raggruppamento longitudinale.

Per valutare l'effettiva applicabilità e la bontà d'identificazione del metodo ricorsivo, si è preferito, per il momento, ridurre la complessità del problema di identificazione, che si riferisce per lo più a una difficoltà di implementazione della condensazione dei gruppi creati, a un problema più semplice bidimensionale *beam*.

Il lavoro presentato vuole verificare la possibilità di applicare la condensazione al modello FEM e identificare ricorsivamente il danneggiamento del modello con diversi livelli di condensazione, eseguendo un'unica soluzione del problema agli autovalori e autovettori. L'estensione del metodo a modelli solidi *brick* a diverse geometrie riguarda l'adeguamento della fase di raggruppamento e condensazione del modello in base alla geometria.

## 3.2 Descrizione del modello a elementi finiti

Sono state sviluppate due modellazioni della struttura: un modello solido tridimensionale con elementi *brick* della trave, caratterizzato da una fitta discretizzazione omogenea e un modello *beam* bidimensionale più semplice.

Il modello *brick*, più complesso dal punto di vista della discretizzazione, permette di modellare il danneggiamento in una porzione di volume della struttura.

Il modello più semplice bidimensionale modellato con un minor numero di elementi finiti *beam*, rispetto al modello solido, ha permesso di valutare il metodo ricorsivo proposto in questo lavoro, che risulta comunque orientato alla soluzione di problemi con elevato numero di elementi finiti.

### 3.2.1 Modello BRICK

Il modello tridimensionale solido della trave, modellato in *Abaqus*, è costituito da una trave incastrata e da un estremo libero. Il modello presenta una discretizzazione omogenea in direzione longitudinale, in direzione trasversale e nello spessore. Questo per non introdurre una variabilità nel modello data da una discretizzazione non omogenea. Sono stati utilizzati elementi solidi *brick* continui lineari *C3D8*<sup>7</sup> a 8 nodi, con lati di uguali dimensioni. Questa tipologia di elemento presenta 3 gradi di libertà di traslazione nelle tre componenti cartesiane. Le caratteristiche meccaniche e fisiche dell'elemento finito sono definite in modo omogeneo all'interno del volume e costanti in tutta la struttura (Figura 3.4).

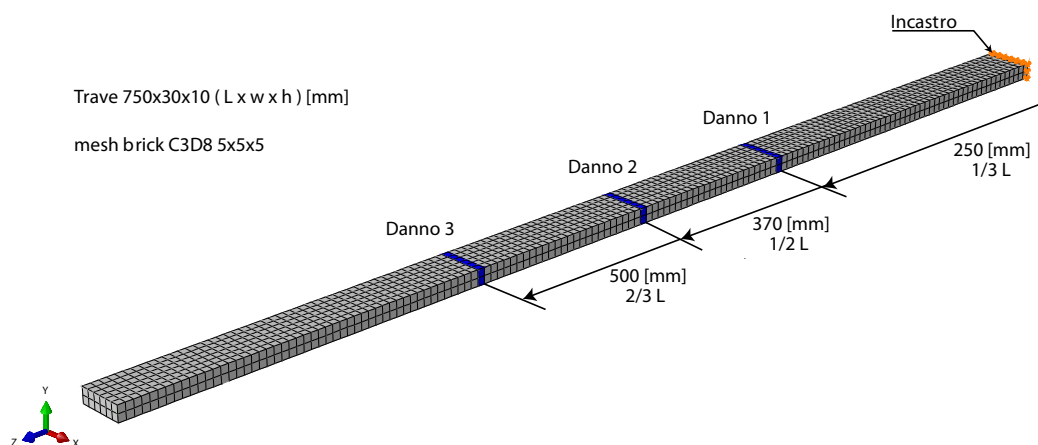


Figura 3.4 – Modello *Brick*

<sup>7</sup> C3D8, identificativo Abaqus elemento continuo lineare general purpose di tipo “Brick”.

La trave è vincolata a terra con un vincolo di incastro applicato alla superficie trasversale, ad un estremo. Il vincolo utilizzato rappresenta la condizione di incastro ideale la cui rigidità è il massimo valore numerico interpretabile da solutore ad elementi finiti presente in *Abaqus*.

Il modello non contiene lo smorzamento struttura in quanto il metodo MDLAC richiede la conoscenza delle deformate modali e le frequenze proprie del sistema libero non smorzato.

Di seguito vengono riportati in dettaglio i parametri geometrici e fisici del modello.

*Definizione geometria*

Lunghezza	750	[mm]
Sezione (lxs)	30 x 10	[mm]

*Definizione proprietà meccaniche*

Densità	2.7e-09	[ton/mm <sup>3</sup> ]
E	69000	[MPa]
$\nu$	0.33	

Tabella 1- Caratteristiche geometriche e fisiche del modello *brick*

*Descrizione elemento finito*

Tipo	Cubico Brick Lineare C3D8	
Dimensione	5 x 5 x 5	[mm]
Gradi di libertà	X, Y, Z	
Gradi di libertà Abaqus	U1, U2, U3	

Tabella 2

### 3.2.1.1 Danno simulato modello BRICK

Presentiamo ora il caso di identificazione del danno simulato nel modello *Brick*. Il danno viene modellato come una riduzione omogenea di modulo elastico nell'intera sezione trasversale con dimensione longitudinale pari a un elemento finto come rappresentato in Figura 3.4. Viene simulato un danneggiamento, con riferimento la Figura 3.4, in corrispondenza di *Danno2*.

Viene simulata una variazione del fattore di riduzione  $\delta Dj$  pari al 30%, ovvero il danno della sezione completa della trave risulta del 30%. La variazione  $\delta Dj$  del modulo elastico equivale a un modulo elastico residuo dell'elemento finito, che corrisponde al fattore di riduzione  $Dj$  del modulo elastico, del 70%.

Riassumiamo le condizioni della prova:

<i>Definizione danno</i>		
Quota dall'incastro	249.5	[mm]
Dimensione Z	5	[mm]
Dimensione Y	10	[mm]
Indice EF modello FEM	[1789:1:1800]	
<i>Definizione proprietà meccaniche danno</i>		
Densità	2.7e-09	[ton/mm <sup>3</sup> ]
$\delta D$	0.3	
$E \cdot (1 - \delta D)$	48300	[MPa]
$\nu$	0.33	

Tabella 3

<i>Parametri modali</i>			
	$f_0$ [Hz]	$f_{30\%}$ [Hz]	$\Delta\%$
Modo 1	12.619	12.598%	0.01%
Modo 2	42.929	42.858%	0.16%
Modo 3	79.027	78.945%	0.10%
Modo 4	221.050	220.550%	0.22%

Tabella 4

L'identificazione del danno è condotta con il metodo MDLAC non ricorsivo, basato sulla variazione delle frequenze. Il vettore di danneggiamento ottenuto dalla soluzione del problema di ottimizzazione della funzione di correlazione MDLAC viene organizzato e rappresentato per ogni livello di elementi finiti in direzione  $Y$  del modello FEM. I primo livello e il secondo livello corrispondono alla posizione  $+ 5$  [mm] e  $- 5$  [mm] in coordinata  $Y$  rispetto all'asse neutro della trave. Lo stato di danneggiamento identificato per i due livelli della struttura risulta:

Il vettore di danneggiamento per il livello  $[+5;0]$  [mm] risulta :

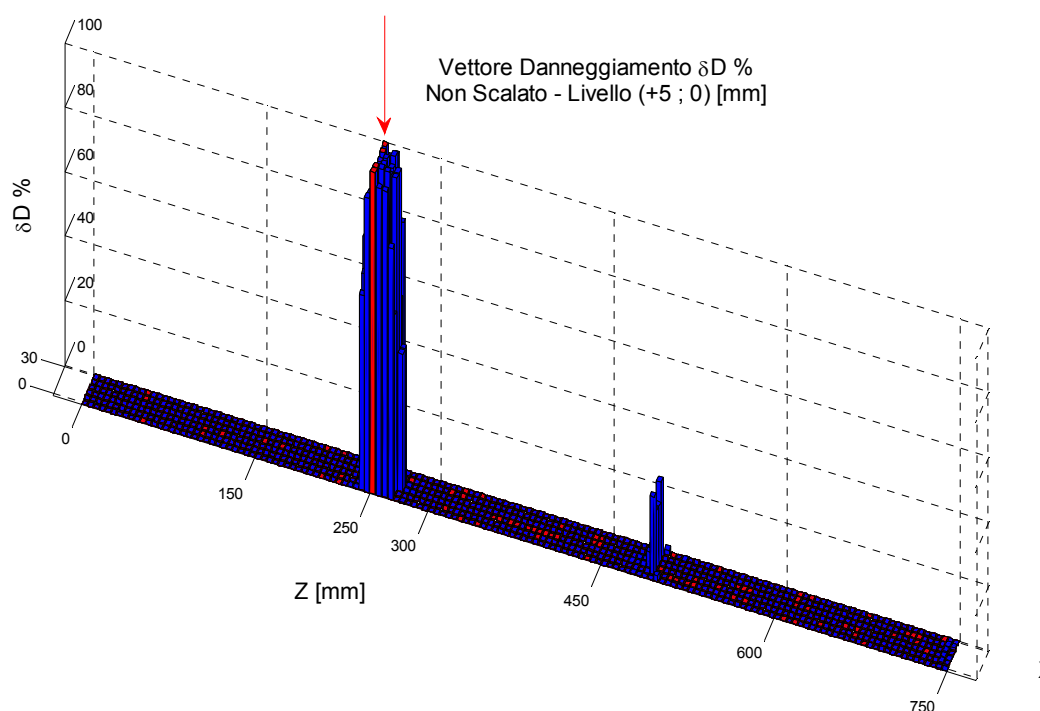


Figura 3.5 – Livello +5mm ; 0mm, posizione danno 250mm



Il vettore di danneggiamento per il livello [-5;0] [mm] risulta :

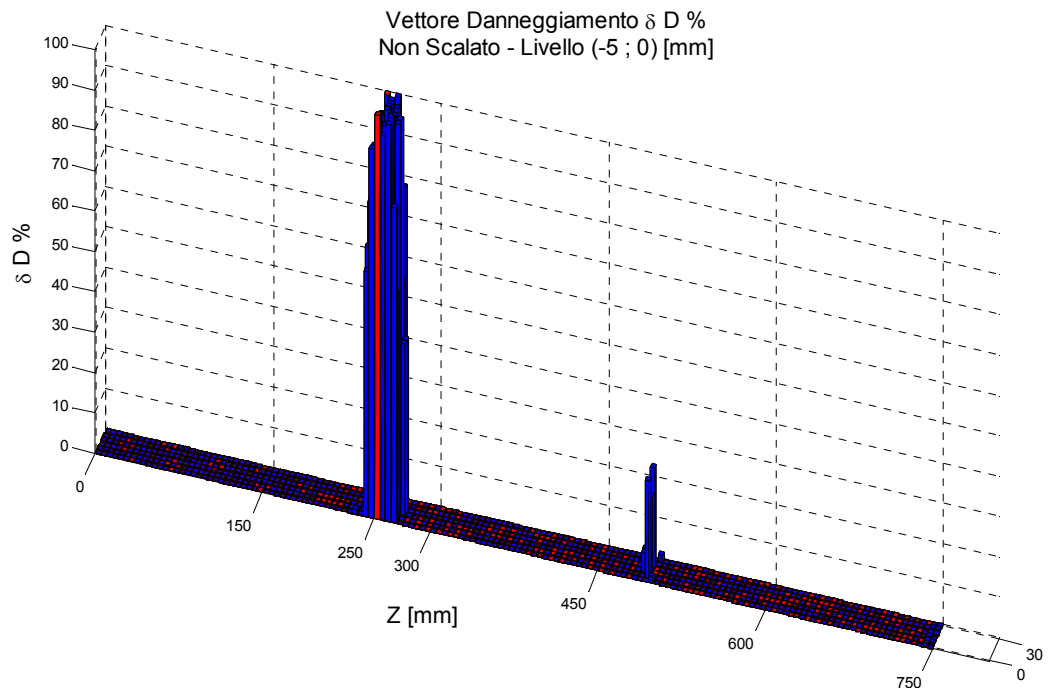


Figura 3.6 – Livello -5mm ; 0mm, posizione danno 250mm

A questo livello di discretizzazione è possibile identificare la posizione del danneggiamento. La discretizzazione longitudinale risulta di 150 elementi finiti. L'utilizzo delle deformate modali flessionali e la discretizzazione contenuta in direzione longitudinale permette di individuare la posizione del danno. Risulta che il numero di parametri la cui variazione influisce sulla variazione dei modi flessionali è limitato alla variazione della rigidezza del numero di elementi finiti presenti nello sviluppo longitudinale. All'aumentare della discretizzazione il metodo non ricorsivo non riesce a definire una posizione univoca del danno.

L'applicazione e la verifica del corretto funzionamento del metodo ricorsivo è stata applicata a un modello più semplice, che permette di semplificare il processo di verifica delle trasformazioni del modello e dei risultati ottenuti.

### 3.2.2 Modello BEAM

Il modello bidimensionale è modellato con elementi finiti di tipo *beam* di Eulero-Bernulli.

La trave viene discretizzata longitudinalmente in modo omogeneo. Gli elementi finiti di tipo *beam* modellano la sezione della trave con parametri geometrici e fisici costanti. Il modello di trave analizzato rispetta la modellazione di Eulero-Bernulli [48], ovvero la trave risulta snella e la lunghezza risulta 8,10 volte superiore alla massima dimensione in pianta. In questo tipo di travi modellate secondo la teoria di Eulero-Bernulli l'azione tagliante ha scarso effetto sulla deformazione della trave e per questo viene trascurata. Qualora la dimensione degli elementi finiti del modello non soddisfa le ipotesi del modello di trave snella di Eulero-Bernulli, è necessario modellare la trave con elementi *beam* B21 lineari di Timoshenko. Il modello di trave di Timoshenko considera gli effetti di deformazione dovuti all'azione di taglio.

Per i modi considerati nell'identificazione il modello di Eulero-Bernulli presenta lo stesso comportamento del modello di Timoshenko [48], pertanto è stato mantenuto il modello di Eulero-Bernulli per tutti i livelli di discretizzazione utilizzati nell'identificazione con il metodo MDLAC ricorsivo.

Il modello di trave *beam* di Eulero-Bernulli implementato in *Abaqus* utilizza funzioni di forma cubiche per la definizione delle deformazioni degli elementi finiti. I gradi di libertà di un elemento finito *beam* risultano 3 per ciascun dei due nodi dell'elemento. I gradi di libertà sono di traslazione, assiale e trasversale all'asse longitudinale della trave, e di rotazione intorno all'asse uscente dal piano. Per la modellazione sono utilizzati elementi *beam* di Eulero-Bernulli B23<sup>8</sup>. La trave modellata è vincolata a terra con un incastro ad un estremo. Le condizioni di vincolo risultano le stesse del modello solido a elementi di tipo *brick*.

---

<sup>8</sup> B23, identificativo Abaqus elemento strutturale cubico "Beam" Eulero-Bernulli.

Le caratteristiche geometriche, meccaniche e fisiche risultano le stesse definite per il modello a elementi *brick* e vengono riportate in Tabella 5.

*Definizione geometria*

Lunghezza	750	[mm]
Sezione (lxs)	30 x 10	[mm]

*Definizione proprietà meccaniche*

Densità	2.7e-09	[ton/mm3]
E	69000	[MPa]
v	0.33	

Tabella 5 – Caratteristiche geometriche e fisiche del modello *beam*

*Descrizione elemento finito*

Tipo	Beam Cubico B23	
Dimensione X	1	[mm]
Sezione Beam (lxh)	30 x 10	[mm]
Gradi di libertà	X, Y, rotZ	
Gradi di libertà Abaqus	U1, U2, UR3	

Tabella 6

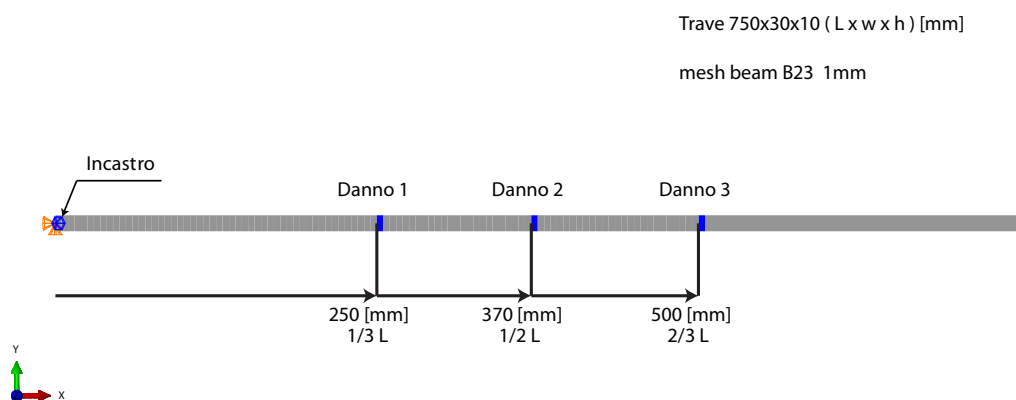


Figura 3.7 – Modello *Beam*

### 3.2.3 Soluzione adottata

La validazione numerica del metodo MDLAC ricorsivo è sviluppata sul modello *beam* della struttura. Il modello *beam* permette di valutare l'applicazione del metodo MDLAC ricorsivo in condizioni di forte mal condizionamento. Il modello *beam*, rispetto al modello *brick*, risulta una modellazione più semplice della struttura e permette un maggior controllo delle trasformazioni di condensazione e dei risultati dell'identificazione. La difficoltà aggiuntiva presente nel modello *brick*, rispetto al modello *beam*, risiede unicamente nell'implementazione e nella verifica della correttezza computazionale della riduzione di Guyan [2]. Si è quindi preferito orientare lo sviluppo del metodo alla simulazione numerica e alla validazione sperimentale, utilizzando un modello più semplice e valutata la bontà dei risultati estendere l'applicazione al caso tridimensionale solido.

Il modello scelto risulta dunque il modello bidimensionale *beam*. La discretizzazione del modello definisce un problema fortemente mal condizionato, essendo la dimensione del vettore di danneggiamento maggiore di oltre 10 volte il numero di variazioni di frequenza misurate.

### 3.3 Calcolo della matrice di sensibilità

Il calcolo della matrice di sensibilità, descritta nel paragrafo (2.1.1), risulta la componente principale del metodo ricorsivo di identificazione proposto. Dalla matrice di sensibilità viene, infatti, definita la sensibilità degli elementi condensati e quindi attraverso la funzione di correlazione MDLAC il livello di danneggiamento del sistema condensato.

Partendo dalle matrici di massa e rigidità estratte dalla simulazione *Abaqus* del modello, vengono creati dei gruppi di elementi finiti del modello. I gruppi creati corrispondono a un equivalente macro elemento finito ottenuto dalla riduzione di Guyan [2] degli elementi appartenenti al gruppo.

I modi e le frequenze utilizzati per il calcolo della matrice di sensibilità sono ottenuti dal modello FEM non condensato. La sensibilità della variazione di frequenza per effetto del danneggiamento della struttura è valutata solamente per i modi rappresentabili correttamente dal modello condensato. Le deformate modali, definite nei soli gradi di libertà presenti in seguito alla condensazione, devono essere correttamente ricostruite dal modello condensato.

Dalla matrice di sensibilità del modello FEM condensato si determina lo stato di danneggiamento applicando il metodo di correlazione MDLAC.

La matrice di sensibilità viene ricalcolata per ogni livello di condensazione, utilizzando solamente le frequenze e le deformate modali rappresentabili dallo stato di condensazione.

### 3.3.1 Estrazione delle matrici di massa e rigidezza del modello

Le matrici di massa e rigidezza del modello FEM non condensato sono estratte attraverso le istruzioni *keywords* di *Abaqus* come descritto nel paragrafo (3.1.1) e seguenti. Le matrici sono estratte in formato di file di testo formattato.

Al fine di applicare la condensazione al modello le matrici sono estratte in formato *element by element*. Questo tipo di formattazione permette di ricavare le matrici di massa e rigidezza di ogni elemento singolarmente, ovvero non assemblate con altri elementi.

Ogni matrice di rigidezza e di massa di ogni singolo elemento viene assemblata in formato sparso nella matrice dei gradi di libertà completi del modello. Ogni termine della matrice di rigidezza relativo al singolo elemento finito è descritto con l'indice dell'elemento finito di appartenenza, l'indice del nodo e il grado di libertà di appartenenza.

La struttura analizzata presenta caratteristiche meccaniche e fisiche omogenee e una discretizzazione omogenea. I termini delle matrici di massa e rigidezza risultano pertanto uguali in ogni elemento finito. L'estrazione e l'assemblaggio delle matrici dal file di testo è stati implementati in modo da poter analizzare anche strutture non omogenee e quindi processare elementi con caratteristiche meccaniche e fisiche diverse.

Del modello FEM implementato vengono estratte anche le matrici di massa e rigidezza già assemblate, relative al modello completo.

Vengono confrontate le matrici del modello FEM ottenute assemblando nei gradi di libertà globali le singole matrici associate ai singoli elementi finiti e le matrici del modello completo estratte dal modello FEM. Viene così verificato che le matrici dei singoli elementi siano state assemblate correttamente nei gradi di libertà totali del modello FEM.

### 3.3.2 Matrice di Massa e Rigidezza condensate con Guyan

Il metodo ricorsivo proposto in questo lavoro, descritto nel paragrafo (2.4), riduce i gradi di libertà del modello FEM al fine di ridurre la discretizzazione del modello analizzato ad ogni passo del metodo ricorsivo di identificazione del danneggiamento. La condensazione delle matrici di massa e rigidezza attraverso il metodo di riduzione di Guyan,[2],[47], consiste nel ridurre e rappresentare il modello FEM iniziale nei soli gradi di libertà, *master*, desiderati. Dalla riduzione di Guyan risulta che la matrice di rigidezza risulta trasformata secondo una riduzione statica e non risulta un'approssimazione ma è esattamente la matrice di rigidezza del sistema modellato nei soli gradi di libertà ridotti, *master*. La matrice di massa risulta invece un'approssimazione della matrice di massa effettiva del modello ridotto e risulta una combinazione dei termini di massa e rigidezza del modello.

Viene quindi presentato l'esempio di condensazione della matrice di massa di 3 elementi finiti omogenei di Eulero-Bernulli di lunghezza pari a "L", disposti in linea retta. Se si considera la riduzione di Guyan dei 3 elementi finiti. Vengono mantenuti come gradi del modello condensato i nodi estremi, *master*. La matrice di massa del modello condensato rappresentato da un unico elemento finito di lunghezza "3L", Figura 3.9, se confrontata con la matrice di massa relativa ad un singolo elemento finiti *beam* di Eulero-Bernulli di lunghezza "3L", Figura 3.8, differisce dai soli termini assiali evidenziati in grassetto.

Riassumendo: in Figura 3.8 è rappresentata la matrice di massa relativa ad 1 elemento finito di tipo *beam* di Eulero-Bernulli di lunghezza "3L". In Figura 3.9 è rappresentata la matrice di massa condensata attraverso la riduzione di Guyan di 3 elementi finiti di lunghezza "L" in 1 elemento finito condensato di lunghezza "3L". Risultando limitata alle componenti assiali la variazione delle frequenze relative al modello condensato risulta trascurabile. La discrepanza è presente quando si analizza un modello condensato, nell'ultimo passo di identificazione ricorsiva il modello non risulta condensato e la discrepanza se pur minima risulta nulla.

$$[M]_{1EF} = \begin{bmatrix} & \mathbf{x_1} & y_1 & \vartheta_1 & \mathbf{x_2} & y_2 & \vartheta_2 \\ \mathbf{x_1} & \frac{\mathbf{39 L m}}{\mathbf{35}} & 0 & 0 & \frac{\mathbf{27 L m}}{\mathbf{70}} & 0 & 0 \\ y_1 & 0 & \frac{39 L m}{35} & \frac{33 L^2 m}{70} & 0 & \frac{27 L m}{70} & -\frac{39 L^2 m}{140} \\ \vartheta_1 & 0 & \frac{33 L^2 m}{70} & \frac{9 L^3 m}{35} & 0 & \frac{39 L^2 m}{140} & -\frac{27 L^3 m}{140} \\ \mathbf{x_2} & \frac{\mathbf{27 L m}}{\mathbf{70}} & 0 & 0 & \frac{\mathbf{39 L m}}{\mathbf{35}} & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & \frac{27 L m}{70} & \frac{39 L^2 m}{140} & 0 & \frac{39 L m}{35} & -\frac{33 L^2 m}{70} \\ \vartheta_2 & 0 & -\frac{39 L^2 m}{140} & -\frac{27 L^3 m}{140} & 0 & -\frac{33 L^2 m}{70} & \frac{9 L^3 m}{35} \end{bmatrix}$$

Figura 3.8 – [M] di 1 EF di lunghezza 3L

$$[M]_{Guyan} = \begin{bmatrix} & x_1 & y_1 & \vartheta_1 & x_2 & y_2 & \vartheta_2 \\ x_1 & \frac{319 L m}{315} & 0 & 0 & \frac{307 L m}{630} & 0 & 0 \\ y_1 & 0 & \frac{39 L m}{35} & \frac{33 L^2 m}{70} & 0 & \frac{27 L m}{70} & -\frac{39 L^2 m}{140} \\ \vartheta_1 & 0 & \frac{33 L^2 m}{70} & \frac{9 L^3 m}{35} & 0 & \frac{39 L^2 m}{140} & -\frac{27 L^3 m}{140} \\ x_2 & \frac{307 L m}{630} & 0 & 0 & \frac{319 L m}{315} & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & \frac{27 L m}{70} & \frac{39 L^2 m}{140} & 0 & \frac{39 L m}{35} & -\frac{33 L^2 m}{70} \\ \vartheta_2 & 0 & -\frac{39 L^2 m}{140} & -\frac{27 L^3 m}{140} & 0 & -\frac{33 L^2 m}{70} & \frac{9 L^3 m}{35} \end{bmatrix}$$

Figura 3.9 – [M] 3EF di lunghezza L condensati con Guyan a 1EF

### 3.4 Scenari di danno simulato

Viene presentata ora l'applicazione simulata del metodo MDLAC ricorsivo. La prova è condotta sulla trave semplicemente incastrata modellata con elementi finiti *beam* di Eulero-Bernulli. Il danno viene simulato come una riduzione globale della rigidità strutturale dell'intera sezione. Vengono simulate tre posizioni di danneggiamento in tre livelli di danno. Il danno viene simulato a 1/3, 1/2 e 2/3 della lunghezza. I livelli di danno simulati sono una riduzione del modulo elastico dell'intera sezione dell'elemento finito pari al 1%, 10% e 30%. Viene presentato il processo di identificazione effettuato con il metodo MDLAC non ricorsivo applicato al modello FEM non condensato discretizzato con 750 elementi finiti di tipo *beam*. Successivamente viene presentato il processo di identificazione del danneggiamento della stessa struttura, effettuato con il metodo MDLAC ricorsivo proposto in questo lavoro.

Ogni vettore di danneggiamento identificato viene presentato nella forma ottenuta dall'ottimizzazione del funzionale MDLAC e nella forma corretta con il fattore di scala lineare presentato da Messina et al. [1].

Verrà evidenziato come il metodo MDLAC non ricorsivo [1], quindi nella formulazione descritta al paragrafo (2.2), a causa del forte mal condizionamento del problema di ottimizzazione non riesce ad identificare la posizione del danneggiamento nei casi proposti. Il metodo MDLAC nella formulazione ricorsiva proposta in questo lavoro riesce a localizzare la posizione del danno nei casi proposti con un errore sulla posizione del 2%. Si tratta di una simulazione ideale nella quale le misure non sono soggette a rumore sperimentale e le frequenze misurate del modello nella condizione danneggiate sono ottenute da un modello che rispecchia le stesse caratteristiche meccaniche e fisiche del modello intatto.

Il modello simulato è una trave semplicemente incastrata discretizzata con 750 elementi finiti di tipo *beam*, ciascuno di 1 millimetro di lunghezza.

Viene presentata l'identificazione del solo livello di danno posto al 30% di riduzione del modulo elastico, in quanto per i livelli di danno al 1% e 10% si presentano le stesse bontà di stima e le stesse problematiche. Per tutti i livelli di danneggiamento e di posizione si presenta un problema di scala del livello di danneggiamento. Il fattore di scala lineare proposto da [1], e descritto al paragrafo (2.2.1), presenta una dipendenza dalla matrice di sensibilità. Il valore dei termini della matrice di sensibilità aumenta all'aumentare della discretizzazione e quindi al diminuire della dimensione longitudinale dell'elemento finito *beam*. La dipendenza della matrice di sensibilità dalla lunghezza dell'elemento finito determina che all'aumentare della discretizzazione il fattore di scala non permette la corretta quantificazione del livello di danneggiamento. E' stato riscontrato come utilizzando il modello di trave di Timoshenko, in relazione alla forma tozza dell'elemento finito nel



modello non condensato a 750 elementi finiti, si presenti lo stesso problema nella scala del livello di danneggiamento identificato.

### 3.4.1 Ottimizzazione del funzionale e modi utilizzati

La funzione di correlazione MDLAC viene ottimizzata attraverso la funzione di minimizzazione *fmincon* presente nelle librerie di ottimizzazione dei funzionali di *Matlab*. L'algoritmo di ottimizzazione minimizza il funzionale negato MDLAC; viene quindi di fatto massimizzato il funzionale. L'algoritmo di ottimizzazione utilizza dei vincoli per definire il dominio della soluzione. L'ottimizzazione ammette quindi soluzioni che stiano tra la condizione di struttura completamente intatta e completamente danneggiata. La condizione completamente intatta risulta definita da un vettore di danneggiamento pari a 0 in tutti i suoi elementi, mentre la struttura completamente danneggiata è rappresentata dal vettore di danneggiamento con valore pari a 1 in tutti i suoi elementi. Il vettore di soluzione iniziale è inizializzato a  $1e-3$ , vista la singolarità del funzionale nel caso di struttura completamente intatta.

Durante l'analisi ricorsiva vengono utilizzate le frequenze e i modi ottenuti dal modello non condensato FEM discretizzato con 750 elementi finiti.

Al variare della discretizzazione il numero di frequenze rappresentabile dal modello condensato risulta differente. Ad ogni livello di discretizzazione ottenuto attraverso la condensazione vengono utilizzati i soli modi del modello FEM non condensato della struttura effettivamente rappresentabili.

Risulta che le prime 4 frequenze proprie del modello risultano correttamente rappresentate dalla condensazione più grossolana utilizzata per l'identificazione, pari a 10 elementi finiti, ottenuti dalla condensazione di 75 elementi finiti del modello FEM iniziale.

In Figura 3.10 è rappresentato l'andamento delle prime 4 frequenze flessionali del modello. Si nota che le prime 4 frequenze ottenute con i diversi livelli di discretizzazione risultano indistinguibili.

In Figura 3.11 è rappresentata la discrepanza, tra il modello a 10 elementi finiti e il modello a 750 elementi finiti, relativa alle frequenze del modello FEM di Eulero-Bernulli modellato con 750 elementi finiti.

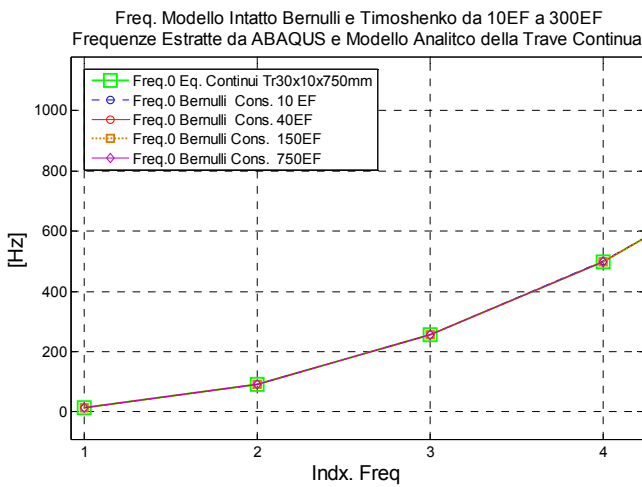


Figura 3.10

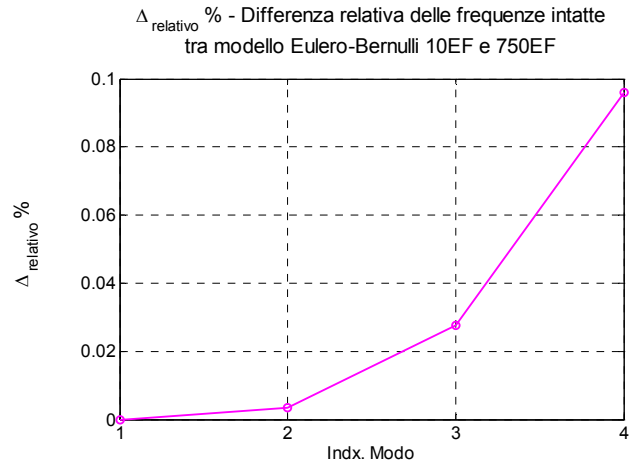


Figura 3.11

Da un'analisi di convergenza sulle frequenze del modello in relazione alla discretizzazione del modello, le frequenze ottenibili al variare della discretizzazione convergono a quelle proprie del modello discretizzato con 300 elementi finiti.

Dall'osservazione delle prime 4 frequenze del modello risulta che è possibile rappresentarle correttamente e quindi utilizzarle per l'identificazione al livello di condensazione più grossolano, pari a 10 elementi finiti.

L'utilizzo delle prime 4 frequenze del modello rispetta anche il limite pratico sperimentale relativo al numero massimo limitato di frequenze identificabili sperimentalmente.

La matrice di sensibilità viene calcolata relativa a vari livelli di condensazione del modello. Risulta che le frequenze e i modi utilizzati ad ogni livello di condensazione sono sempre propri del modello FEM non condensato. Questo può risultare una forzatura in quanto le matrici di massa e rigidezza del modello condensato sono relative ad un sistema i cui autovalori differiscono in termini percentuali rispetto al modello non condensato come presentato in Figura 3.11. Potrebbe quindi risultare che la matrice di sensibilità risulti più sensibile alla variazione di frequenze e ci sia una sovrastima dell'effettivo danneggiamento. La discrepanza in termini relativi decresce rapidamente con l'infittirsi del livello di condensazione. Risulta quindi un problema isolato ai primi passi di condensazione. Come presentato in Tabella 7, la matrice di sensibilità del modello a 10 elementi finiti ottenuto dalla condensazione del modello a 750 elementi finiti, risulta maggiore della matrice di sensibilità del modello FEM modellato con 10 elementi finiti non condensato.

$$\frac{([S]_{10EF} - [S]_{da750a10EF})}{[S]_{10EF}}$$

Indice elemento finito

	EF 1	EF 2	EF 3	EF 4	EF 5	EF 6	EF 7	EF 8	EF 9	EF 10
◦	-2.98E-09	6.03E-05	-8.66E-05	-2.98E-09	-2.43E-09	-8.34E-10	-2.98E-09	8.95E-08	-9.29E-07	-6.01E-09
◦	-9.41E-05	-0.00014	0.012561	-0.00155	-0.00014	-0.00028	0.000283	-0.00018	0.001616	0.014481
◦	-0.0003	0.00437	-0.00053	0.000236	-0.00223	-7.39E-05	-0.00057	-0.00027	-0.00038	-0.00135
◦	-0.00088	-0.00153	-0.00097	-0.00284	-0.00088	-0.00082	-0.00193	-0.00085	-0.00097	0.002087

Tabella 7 – Discrepanza relativa tra sensibilità modello 10EF e sensibilità modello 750EF ridotto a 10EF

### 3.4.2 Danno simulato a 1/3 della lunghezza

Viene presentata l'analisi del caso simulato attraverso il metodo MDLAC proposto da Messina et al. [1] e attraverso il metodo ricorsivo proposto in questo lavoro. Viene simulato il danno in corrispondenza di 1/3 della lunghezza della trave, ovvero a 249.5 [mm] dall'incastro. Il danno simulato nella sezione trasversale completa della trave risulta pari al 30% di riduzione del modulo elastico. Vengono utilizzate le deformate modali e le frequenze riportate in Tabella 8.

<i>Definizione danno</i>			
Quota dall'incastro	249.5		[mm]
Dimensione X	1		[mm]
Indice EF modello FEM	250		
<i>Definizione proprietà meccaniche danno</i>			
Densità	2.7e-09		[ton/mm <sup>3</sup> ]
$\delta D$	0.3		
$E \cdot (1 - \delta D)$	48300		[MPa]
$\nu$	0.33		
<i>Parametri modali</i>			
	$f_0$ [Hz]	$f_{30\%}$ [Hz]	$\Delta\%$
Modo 1	14.518	14.5130	0.03%
Modo 2	90.981	90.963	0.01%
Modo 3	254.750	254.630	0.04%
Modo 4	499.210	499.190	0.00%

Tabella 8

### 3.4.2.1 Analisi con MDLAC

La struttura viene analizzata con il metodo MDLAC nella formulazione [34] non ricorsiva. Viene confrontato il vettore di danneggiamento  $\{\delta D\}$ , nella forma ottenuta dall'ottimizzazione del funzionale MDLAC e nella forma corretta dal fattore di scala lineare [1].

Il modello simulato presenta un danneggiamento in corrispondenza di 1/3 della lunghezza, ovvero posto a 249.5 [mm] dall'incastro. Il danneggiamento corrispondente al 30% di riduzione del modulo elastico è pesto nell'elemento finito 250 del modello *beam*. Il danneggiamento è modellato come una riduzione del modulo elastico della sezione trasversale completa della trave modellata. La posizione del danneggiamento è evidenziata dalla freccia di colore *rosso*. In Figura 3.12 è rappresentato il vettore di danneggiamento non scalato e Figura 3.13 il vettore di danneggiamento corretto con il fattore di scala lineare.

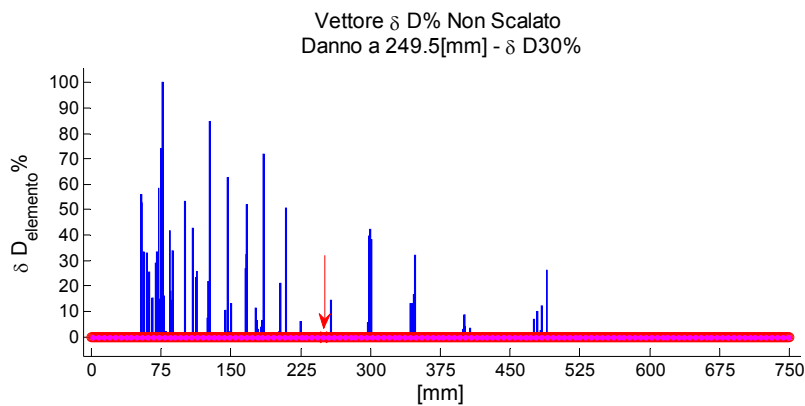


Figura 3.12

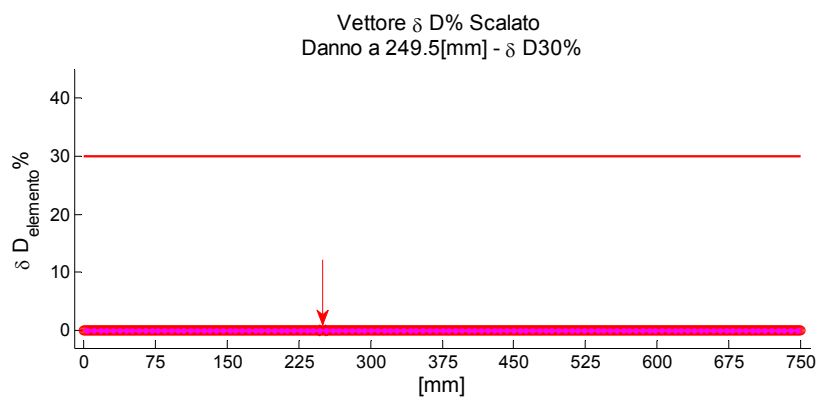


Figura 3.13

La posizione effettiva del danno simulato indicata dalla freccia non viene identificata dal metodo MDLAC non ricorsivo.

Il problema di ottimizzazione del funzionale MLDAC utilizzato per determinare il vettore di danneggiamento  $\{\delta D\}$  incognito, risulta fortemente malcondizionato. Non è possibile con il semplice metodo MDLAC non ricorsivo individuare in modo univoco la zona potenzialmente danneggiata e individuare il danneggiamento. Il fattore di scala lineare proposto da Messina et al. [1] non permette di ottenere una corretta correzione e quantificazione del livello di danneggiamento.

### 3.4.2.2 Analisi con MDLAC ricorsivo

Presentiamo ora l'applicazione del processo di identificazione ricorsiva proposto in questo lavoro. Verranno presentati i passi d'indagine, intervallando i risultati ottenuti del vettore  $\delta D$  di danneggiamento non scalato, e scalato con il coefficiente di scala lineare [1].

*Passo 1* dell'analisi. Il modello FEM iniziale viene condensato in 10 elementi finti equivalenti. Si ottengono 10 EF equivalenti dalla condensazione di 75 elementi del modello FEM iniziale. Il livello di danneggiamento posto a 0.4%, in Figura 3.15 indica il valore di danneggiamento dell'elemento finito condensato nell'attuale livello di discretizzazione. E' ottenuto considerando che il danneggiamento del 30% sia distribuito in modo uniforme in tutti gli elementi condensati. Risulta quindi che l'elemento finito ottenuto dalla condensazione di un gruppo di elementi finiti, tra i quali anche l'elemento effettivamente danneggiato al 30%, attraverso l'identificazione, deve presentare un indice di danneggiamento pari a 0.4%.

Si osserva come viene correttamente identificata la posizione del danneggiamento nella la macro zona della struttura. Risulta che il livello di danneggiamento equivalente all'elemento della discretizzazione attuale è sovrastimato. Il livello di danneggiamento della struttura complessivo risulta del 40%. Questo valore è ottenuto dalla somma dello stato di danneggiamento stimato per il numero di elementi presenti in un gruppo di elementi condensati.

Il passo successivo consiste nell'identificazione dei soli elementi finiti nell'intorno della posizione individuata. Vengono quindi analizzati gli elementi finiti 3, 4, 5 dell'attuale discretizzazione.

*Passo 1 – Danno a 249.5 [mm] –  $\delta D$  30%*

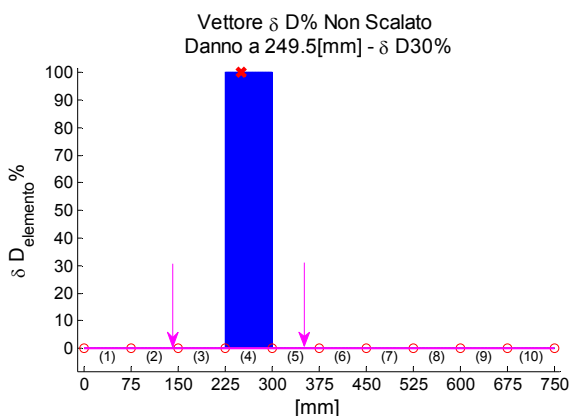


Figura 3.14 – Passo 1, non scalato

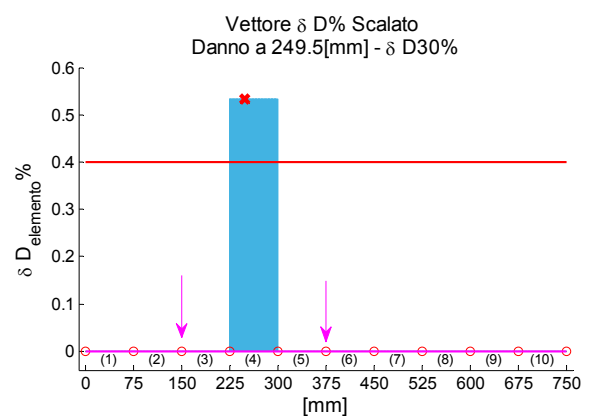
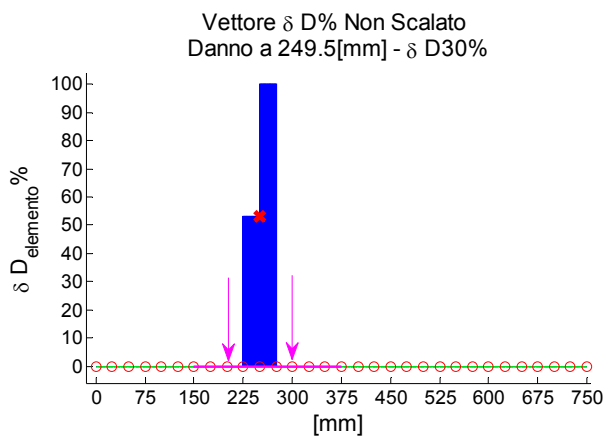


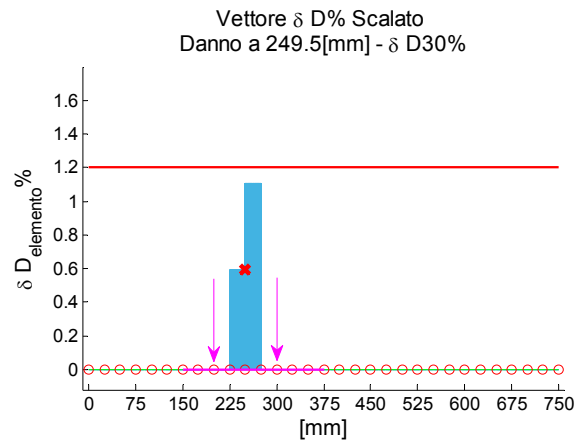
Figura 3.15 – Passo 1, scalato

Passo 2 dell'analisi. Condensazione del modello FEM iniziale in 30 elementi finiti equivalenti. Ogni elemento finito condensato è ottenuto dalla condensazione di 25 elementi finiti del modello FEM iniziale.

Passo 2 – Danno a 249.5 [mm] –  $\delta D$  30%



Zoom Locale



Zoom Locale

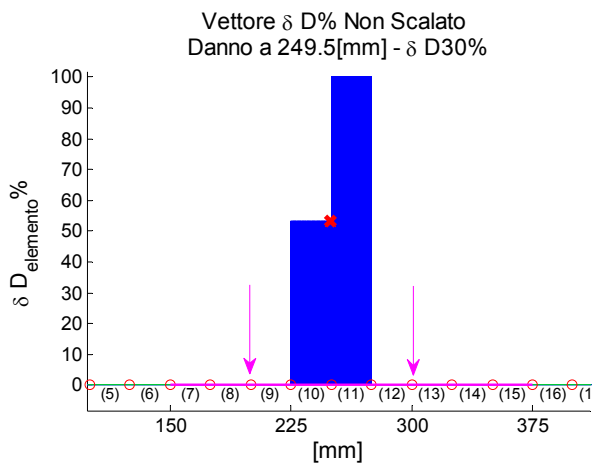


Figura 3.16 – Passo 2, non scalato

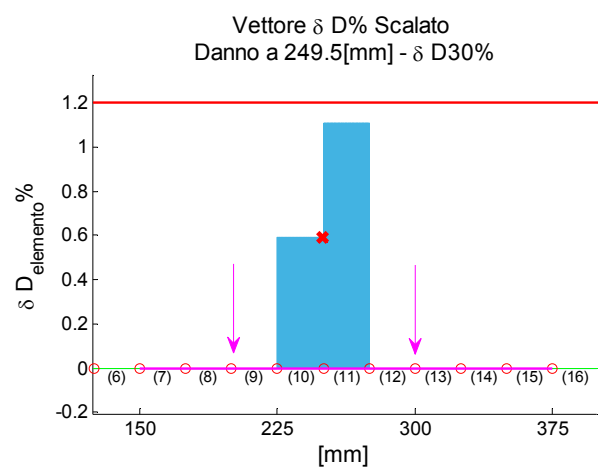


Figura 3.17 – Passo 2, scalato

Gli elementi finiti identificati come danneggiati risultano essere 10, 11. Il valore di danneggiamento stimato della struttura risulta il 42.53%. Analizzo gli elementi 9, 10, 11, 12, evidenziati nell'intervallo in e Figura 3.17.



Passo 3 dell'analisi. Condensio il modello FEM in 150 elementi finti equivalenti. Ogni elemento finito condensato corrisponde a 5 elementi finti adiacenti del modello FEM iniziale.

Passo 3 – Danno a 249.5 [mm] –  $\delta D$  30%

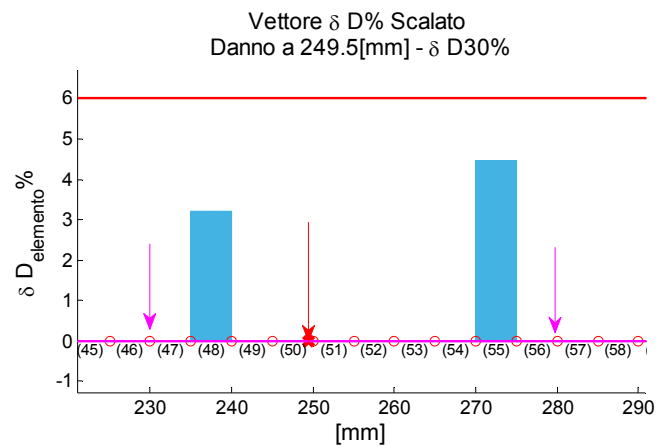
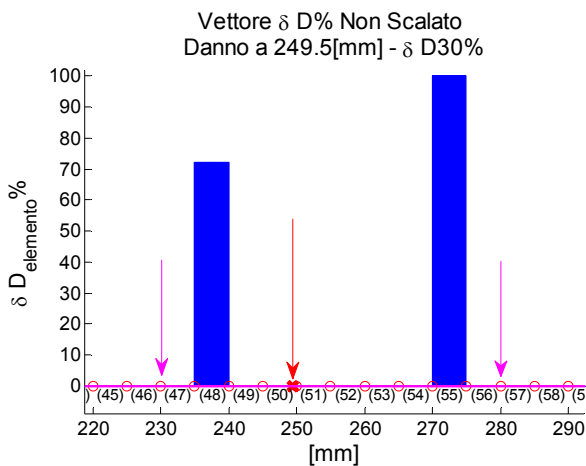
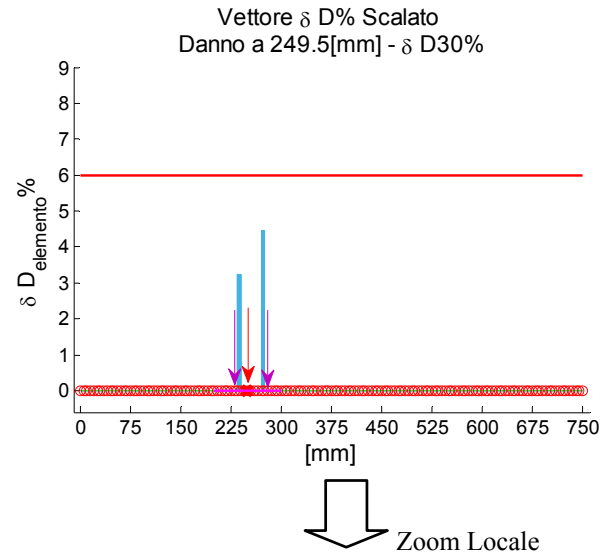
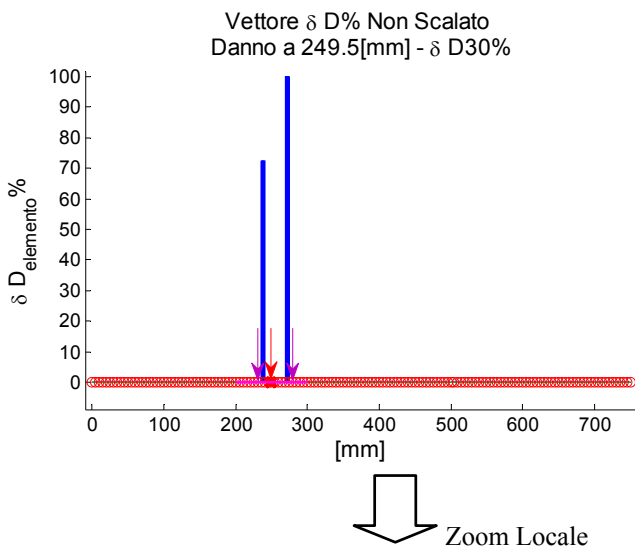


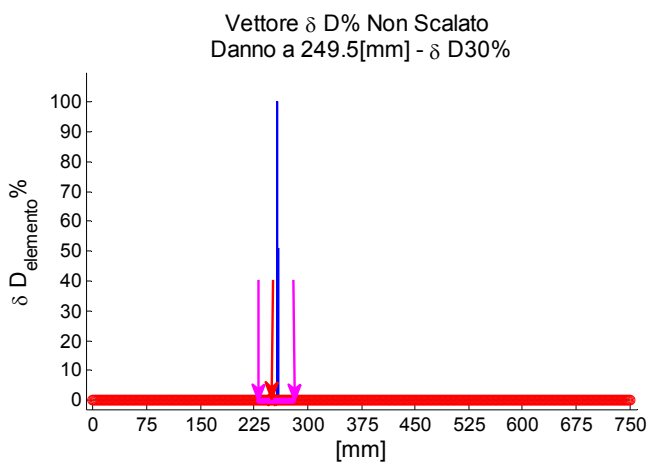
Figura 3.18 – Passo 3, non scalato

Figura 3.19 – Passo 3, scalato

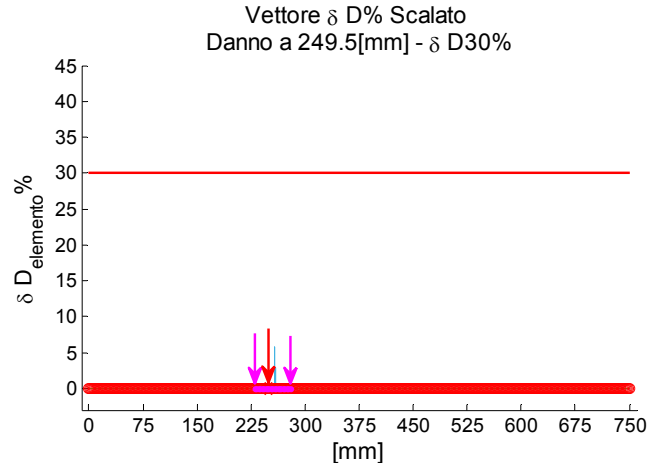
Il danneggiamento complessivo della struttura risulta identificato pari al 38.33%. Viene ulteriormente identificata la zona compresa tra le frecce di colore magenta. La freccia centrale indica la posizione effettiva del danneggiamento. Analizzo gli elementi nell'intervallo compreso tra l'elemento 47 e l'elemento finito 56.

Passo 4 dell'analisi. Analizzo la porzione del modello FEM della struttura non condensata, relativa agli elementi condensati identificati al passo precedente.

Passo 4 – Danno a 249.5 [mm] –  $\delta D$  30%



Zoom Locale



Zoom Locale

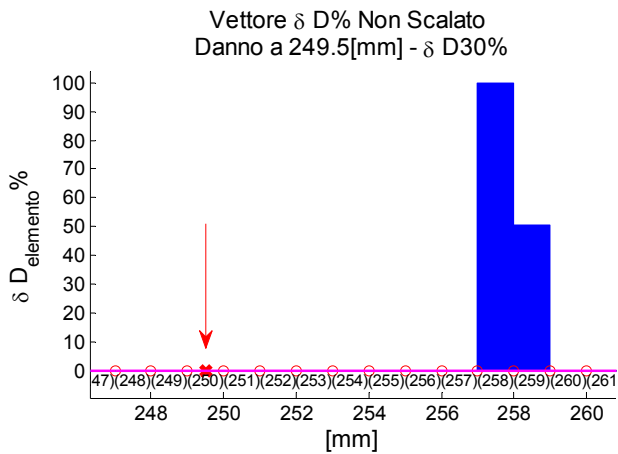


Figura 3.20 – Passo 4, non scalato

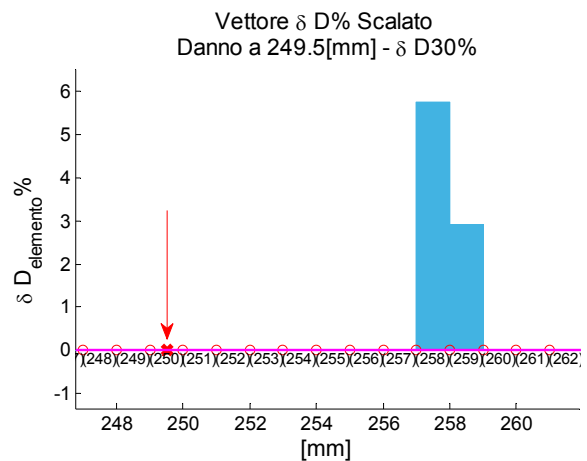


Figura 3.21 – Passo 4, scalato

Vengono identificati come danneggiati gli elementi finiti 258 e 259. Il valore globale di danneggiamento risulta del 8 %. L'errore di localizzazione risulta del 1.2%.

### 3.4.3 Danno simulato a 1/2 della lunghezza

Viene presentata l'analisi del caso simulato attraverso il metodo MDLAC non ricorsivo e attraverso il metodo ricorsivo proposto in questo lavoro. Viene analizzato il danno simulato in corrispondenza di 1/2 della lunghezza della trave, ovvero posto a 374.5 [mm] dall'incastro. Il danno simulato nella sezione trasversale completa della trave risulta pari al 30% di riduzione del modulo elastico. Vengono utilizzate le deformate modali e le frequenze riportate in Tabella 9.

Le condizioni della prova sono riassunte in Tabella 9.

<i>Definizione danno</i>			
Quota dall'incastro	374.5		[mm]
Dimensione X	1		[mm]
Indice EF modello FEM	375		
<i>Definizione proprietà meccaniche danno</i>			
Densità	2.7e-09		[ton/mm <sup>3</sup> ]
$\delta D$	0.3		
$E \cdot (1 - \delta D)$	48300		[MPa]
$\nu$	0.33		
<i>Parametri modali</i>			
	$f_0$ [Hz]	$f_{30\%}$ [Hz]	$\Delta\%$
Modo 1	14.518	14.516	0.01%
Modo 2	90.981	90.929	0.05%
Modo 3	254.750	254.750	0%
Modo 4	499.210	498.920	0.05%

Tabella 9

### 3.4.3.1 Analisi con MDLAC

Viene identificato il danneggiamento della struttura utilizzando l'algoritmo MDLAC non ricorsivo, applicato al modello FEM non condensato.

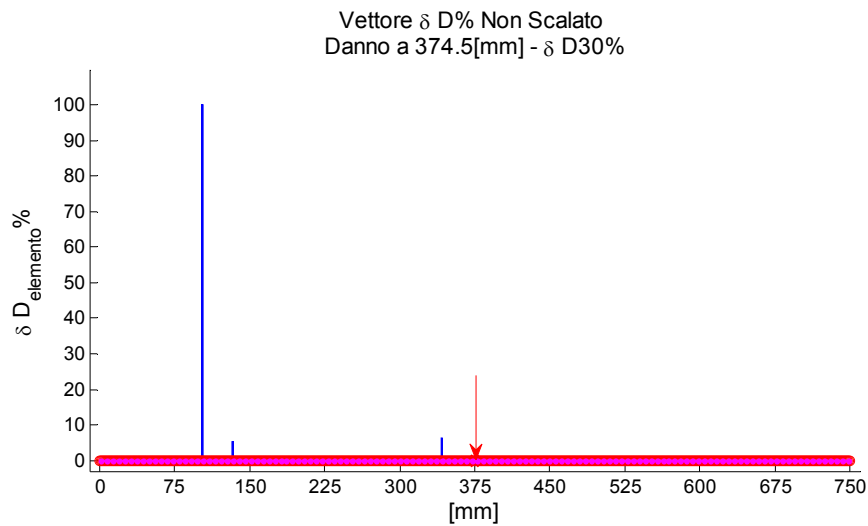


Figura 3.22

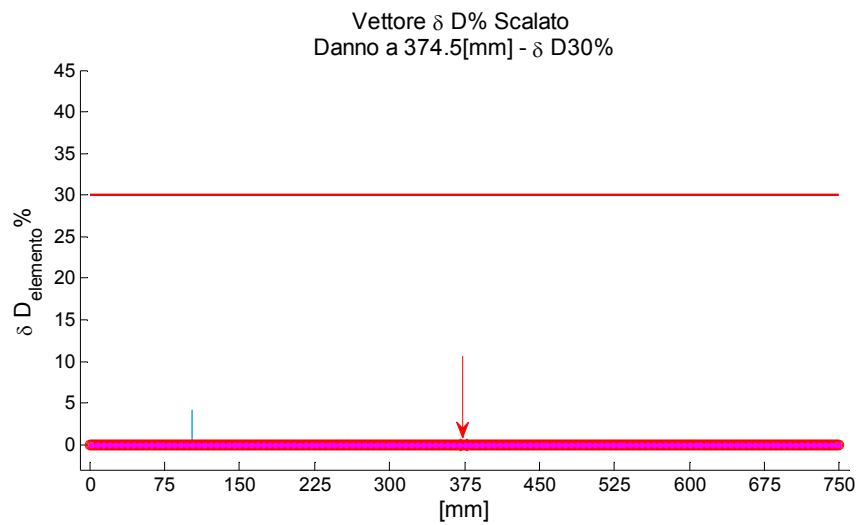


Figura 3.23

La posizione effettiva del danno simulato indicata dalla freccia non viene identificata dal metodo MDLAC non ricorsivo.

### 3.4.3.2 Analisi con MDLAC ricorsivo

*Passo 1* dell'analisi. Il modello FEM iniziale viene condensato in 10 elementi finti equivalenti. Si ottengono 10 EF equivalenti ottenuti dalla condensazione di 75 elementi del modello FEM iniziale. Il danneggiamento complessivo della struttura viene identificato al 38.97%. Vengono analizzati gli elementi finiti condensati 4, 5, 6. Escludo la zona compresa tra gli elementi 1, 2, 3 in quanto le potenziali zone danneggiate presentano un indice di danneggiamento non scalato, che massimizza la funzione di correlazione, pari al 100%. Il criterio di scelta imposto prevede di indagare ulteriormente solamente le zone che presentano un livello di danneggiamento non scalato maggiore dell'80%. Vengono prese in considerazione zone e gruppi di elementi identificati vicini e con indici di danneggiamento simili. Si è verificato che in questo caso comprendere anche l'elemento condensato di indice 2 nell'identificazione, ad un passo successivo è possibile escluderlo dall'analisi in quanto presenterebbe un indice di danneggiamento pari al 30%, rispetto all'elemento condensato indice 5 che presenterebbe ancora un indice di danneggiamento pari al 100%.

*Passo 1 – Danno a 374.5 [mm] –  $\delta D$  30%*

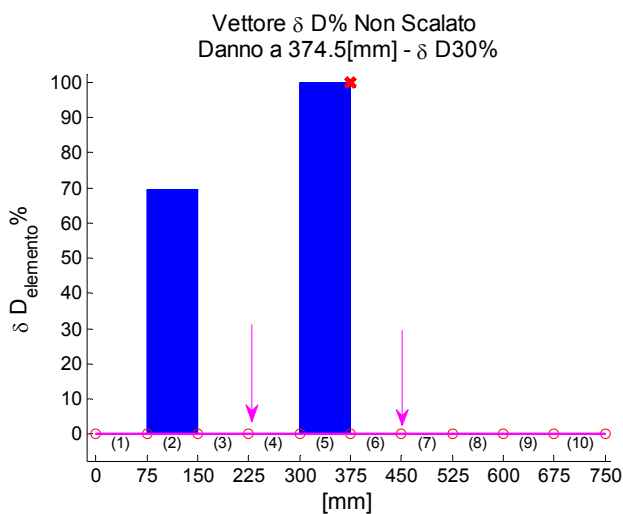


Figura 3.24 – Passo 1, non scalato

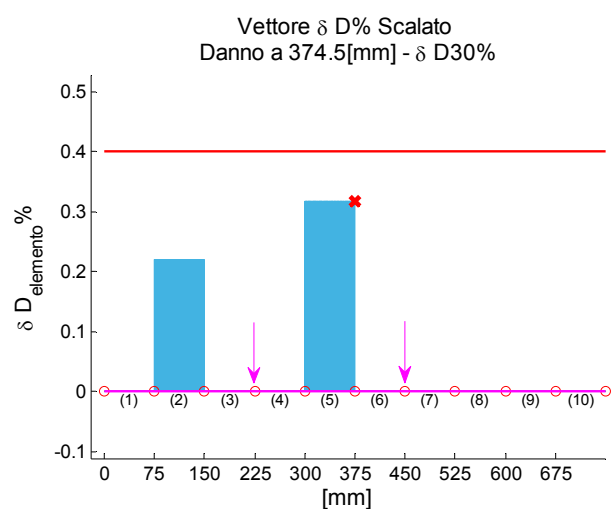


Figura 3.25 – Passo 1, scalato

Passo 2 dell'analisi. Il modello FEM iniziale viene condensato in 30EF. Ogni elemento finito è ottenuto condensando 25 elementi finiti del modello FEM iniziale.

Passo 2 – Danno a 374.5 [mm] –  $\delta D$  30%

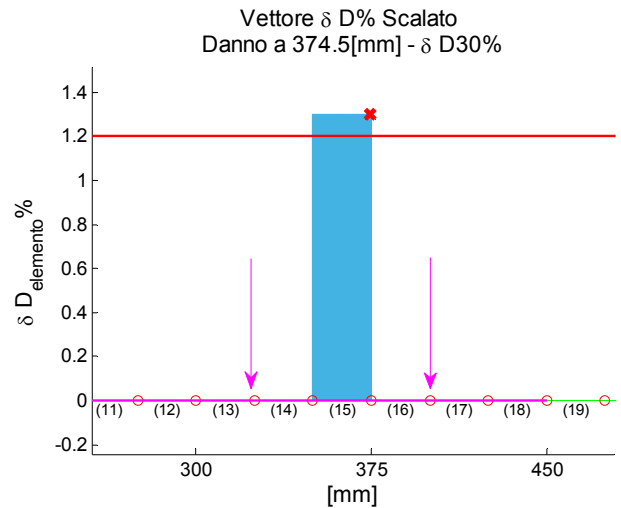
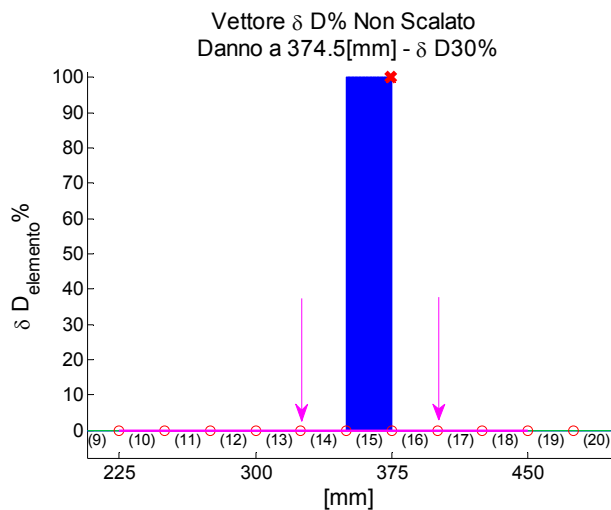
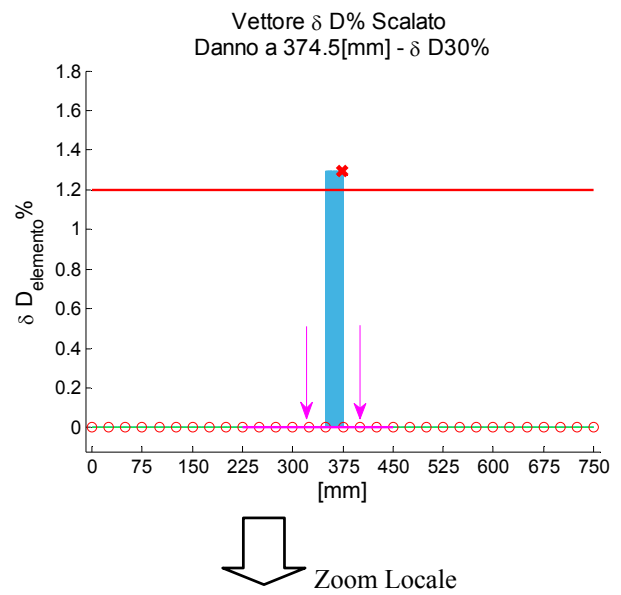
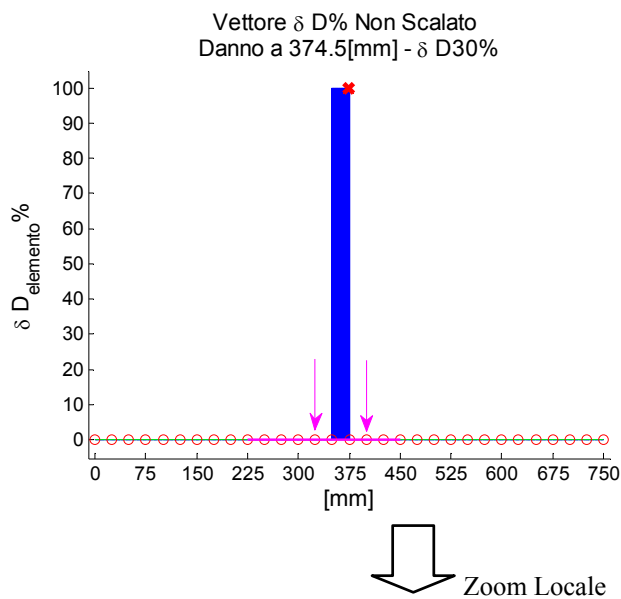


Figura 3.26 – Passo 2, non scalato

Figura 3.27 – Passo 2, scalato

Il danno complessivo stimato della struttura è del 32.43%. Vengono analizzati gli elementi condensati 14, 15, 16.

*Passo 3* dell'analisi. Condensio il modello FEM in 150 elementi finti equivalenti. Ogni elemento finito condensato corrisponde a 5 elementi finti adiacenti del modello FEM iniziale.

*Passo 3 – Danno a 374.5 [mm] –  $\delta D$  30%*

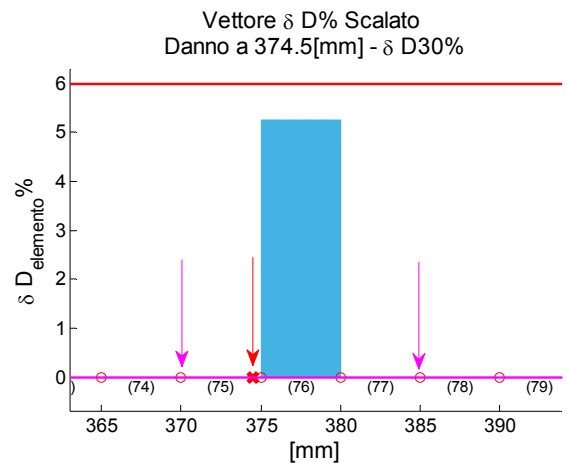
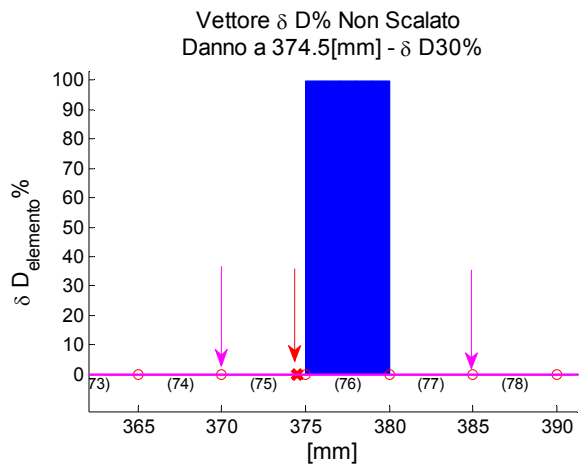
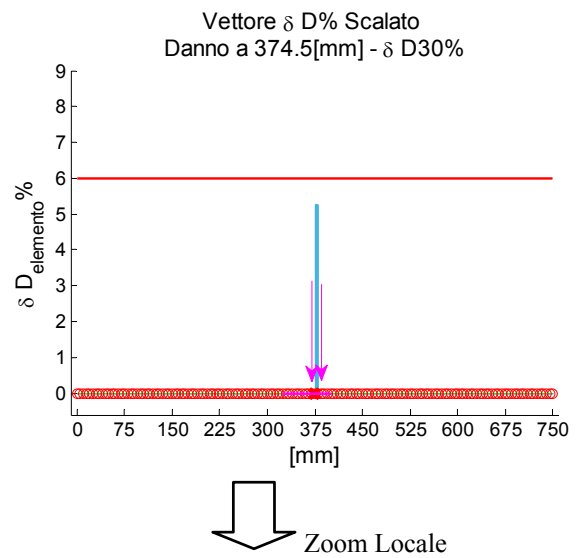
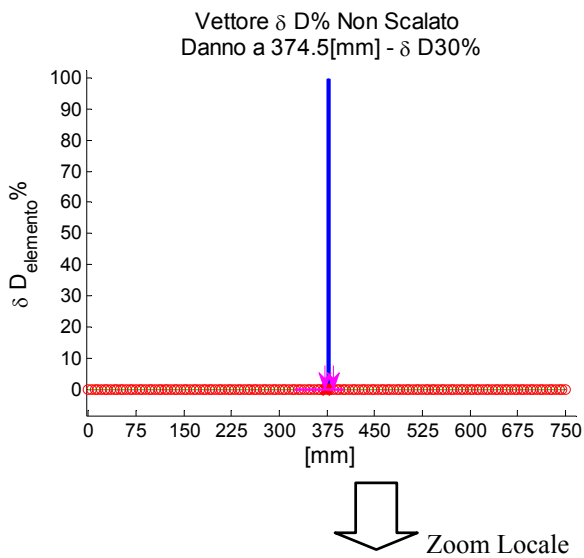


Figura 3.28 – Passo 3, non scalato

Figura 3.29 – Passo 3, scalato

Il danno complessivo della struttura stimato è del 26,25%. Vengono analizzati gli elementi finiti condensati 75, 76, 77.

*Passo4* dell'analisi. Vengono analizzati gli elementi finiti del modello FEM non condensato relativi alla zona identificata dal passo precedente.

*Passo 4 – Danno a 374.5 [mm] –  $\delta D$  30%*

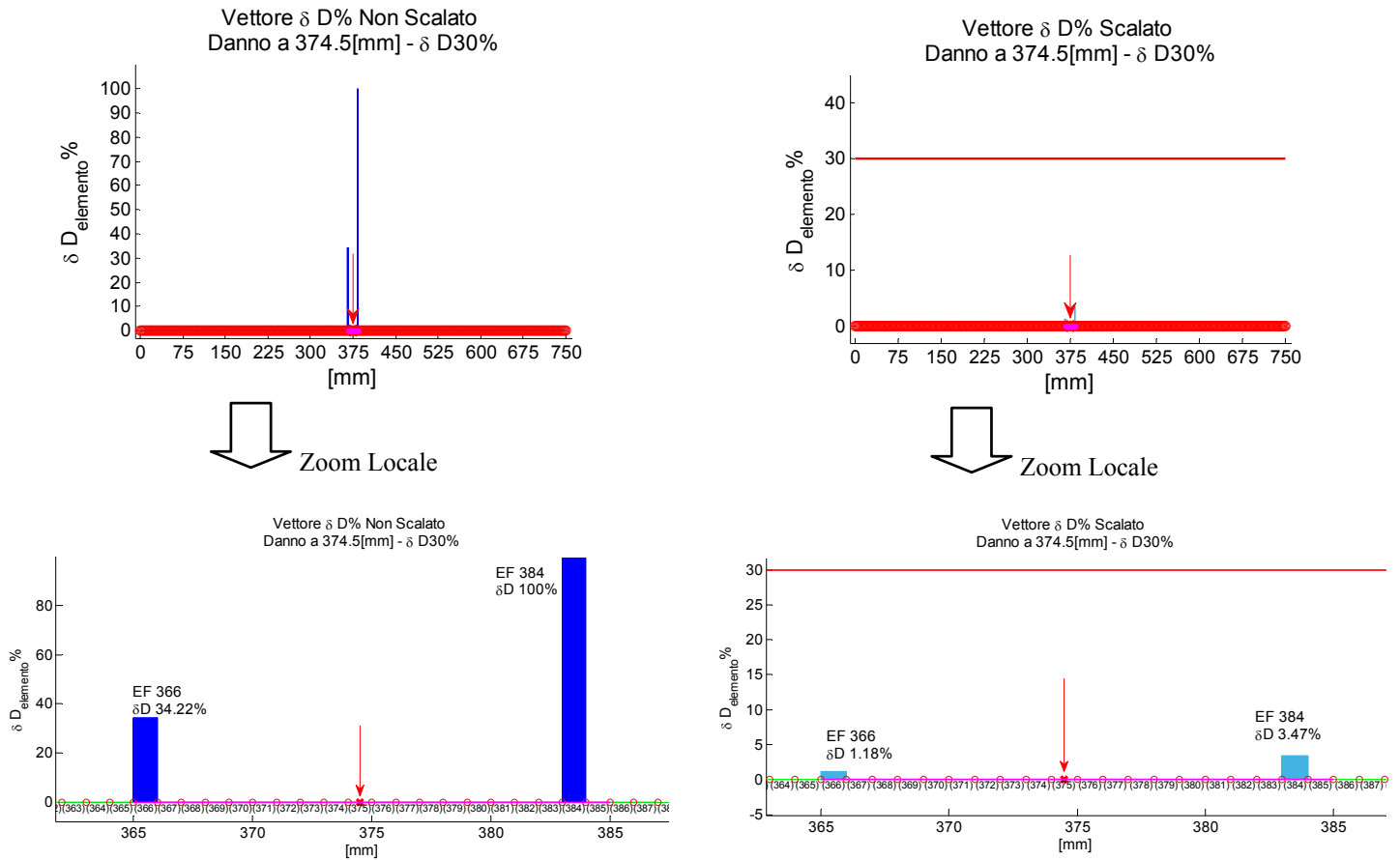


Figura 3.30 – Passo 4, non scalato

Figura 3.31 – Passo 4, scalato

Il danneggiamento viene localizzato con un errore del 1.2%. Il danneggiamento complessivo della struttura viene stimato al 6.61%.



### 3.4.4 Danno simulato a 2/3 della lunghezza

Viene presentata l'analisi del caso simulato attraverso il metodo MDLAC non ricorsivo e attraverso il metodo ricorsivo proposto in questo lavoro. Viene analizzato il danno simulato in corrispondenza di 2/3 della lunghezza della trave, ovvero posto a 499.5 [mm] dall'incastro. Il danno simulato nella sezione trasversale completa della trave risulta pari al 30% di riduzione del modulo elastico. Vengono utilizzate le deformate modali e le frequenze riportate in Tabella 10

Le condizioni della prova sono riassunte in Tabella 10.

<i>Definizione danno</i>			
Quota dall'incastro	499.5		[mm]
Dimensione X	1		[mm]
Indice EF modello FEM	500		
<i>Definizione proprietà meccaniche danno</i>			
Densità	2.7e-09		[ton/mm <sup>3</sup> ]
$\delta D$	0.3		
$E \cdot (1 - \delta D)$	48300		[MPa]
$\nu$	0.33		
<i>Parametri modali</i>			
	$f_0$ [Hz]	$f_{30\%}$ [Hz]	$\Delta\%$
Modo 1	14.518	14.516	0.01%
Modo 2	90.981	90.929	0.05%
Modo 3	254.750	254.750	0
Modo 4	499.210	498.920	0.05%

Tabella 10

### 3.4.4.1 Analisi con MDLAC

Viene identificato il danneggiamento della struttura utilizzando l'algoritmo MDLAC, applicato al modello FEM non condensato.

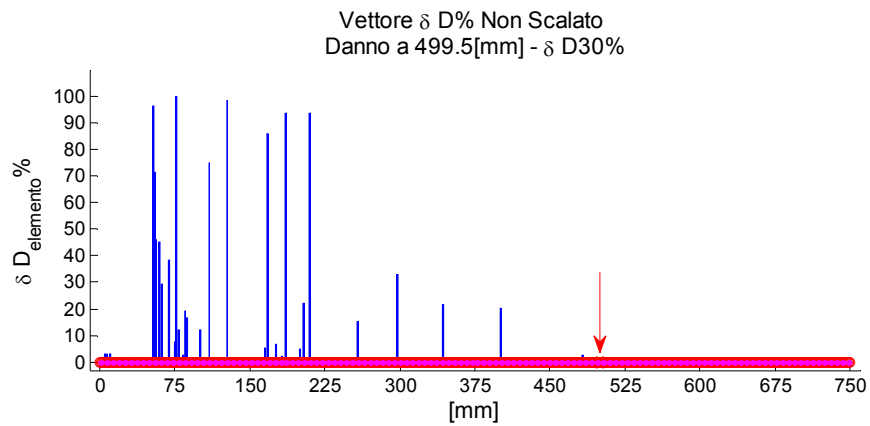


Figura 3.32

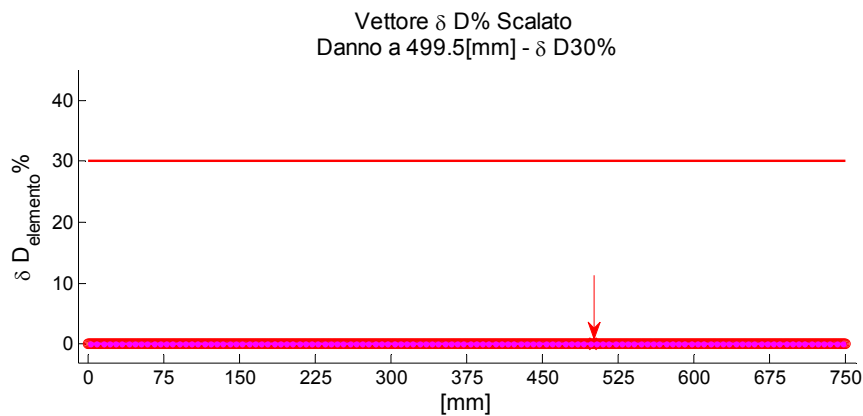


Figura 3.33

In Figura 3.32 è presentato il vettore di danneggiamento  $\delta D$  non scalato con il coefficiente lineare. In Figura 3.33 è presentato il vettore di danneggiamento scalato dal coefficiente di scala lineare.

La posizione effettiva del danno simulato indicata dalla freccia non viene identificata dal metodo MDLAC non ricorsivo.

### 3.4.4.2 Analisi con MDLAC ricorsivo

*Passo 1* dell'analisi. Il modello FEM iniziale viene condensato in 10 elementi finti equivalenti. Si ottengono 10 EF equivalenti ottenuti dalla condensazione di 75 elementi del modello FEM iniziale. Il danneggiamento complessivo della struttura viene identificato al 38.97%. Vengono analizzati gli elementi finiti condensati 6, 7, 8.

*Passo 1 – Danno a 499.5 [mm] –  $\delta D$  30%*

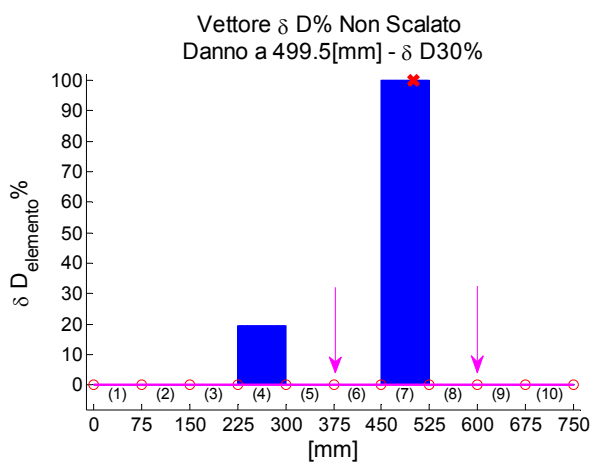


Figura 3.34 – Passo 1, non scalato

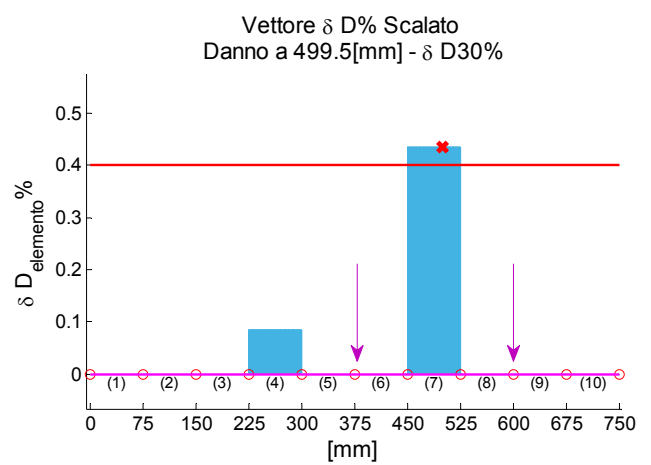


Figura 3.35 – Passo 1, scalato

Passo2 dell'analisi. Condensio il modello FEM in 30 elementi finiti. Ogni elemento finito è ottenuto condensando 25 elementi finiti.

Passo 2 – Danno a 499.5 [mm] –  $\delta D$  30%

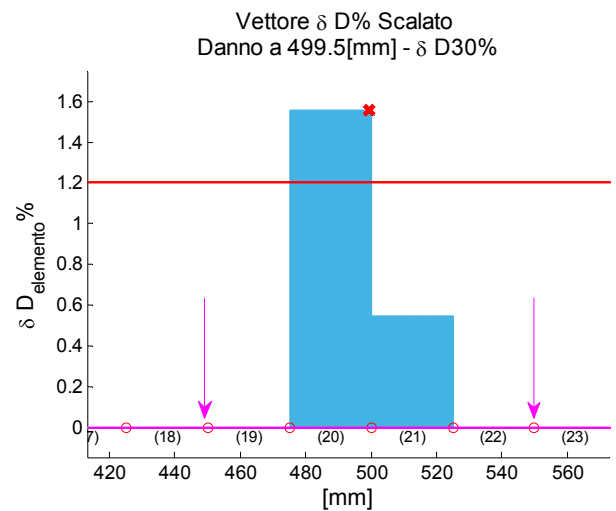
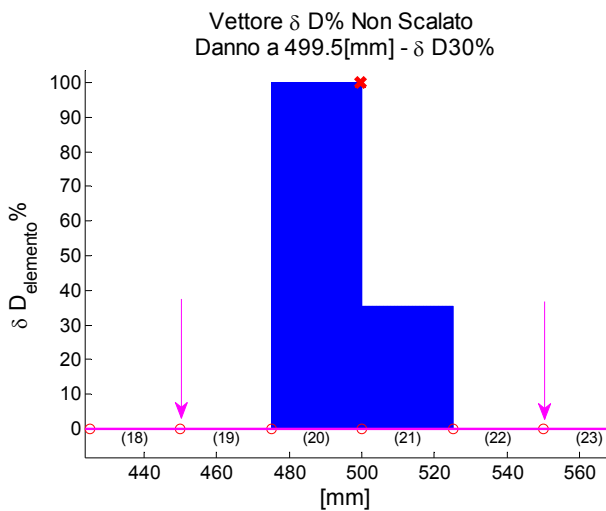
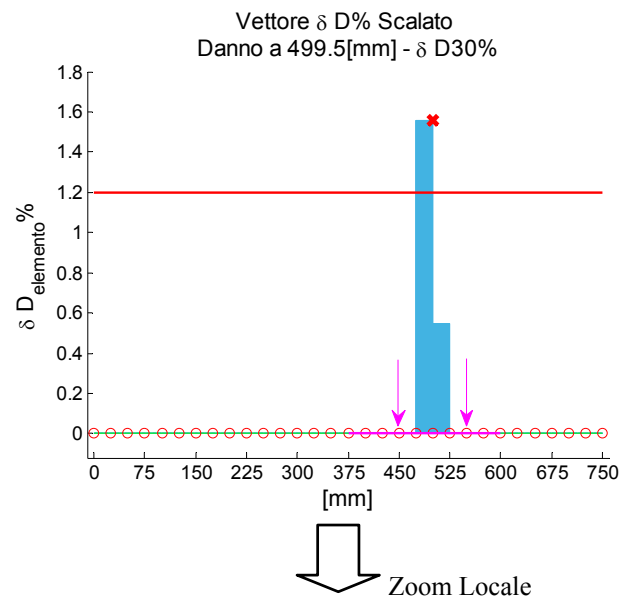
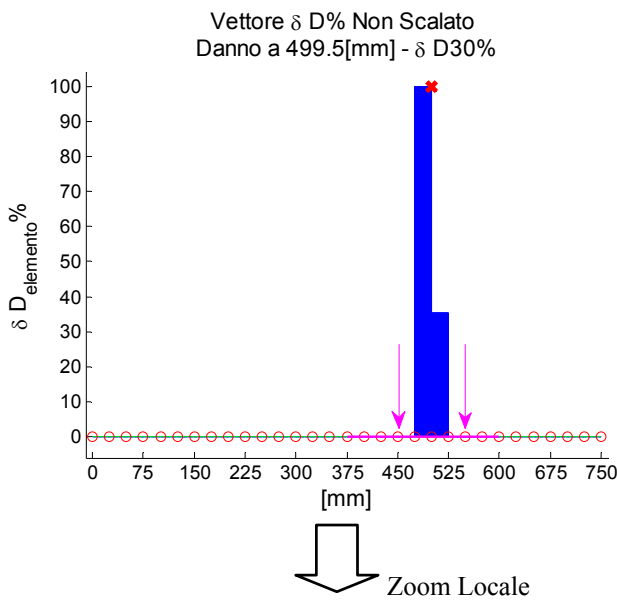


Figura 3.36 – Passo 2, non scalato

Figura 3.37 – Passo 2, scalato

Il livello di danneggiamento complessivo identificato della struttura è del 42.53%. Vengono ulteriormente analizzati gli elementi finiti 19, 20, 21, 22 del modello condensato.

*Passo 3* dell'analisi. Condensio il modello FEM in 150 elementi finiti. Ogni elemento finito è ottenuto dalla condensazione di 5 elementi finiti del modello FEM iniziale.

*Passo 3 – Danno a 499.5 [mm] –  $\delta D$  30%*

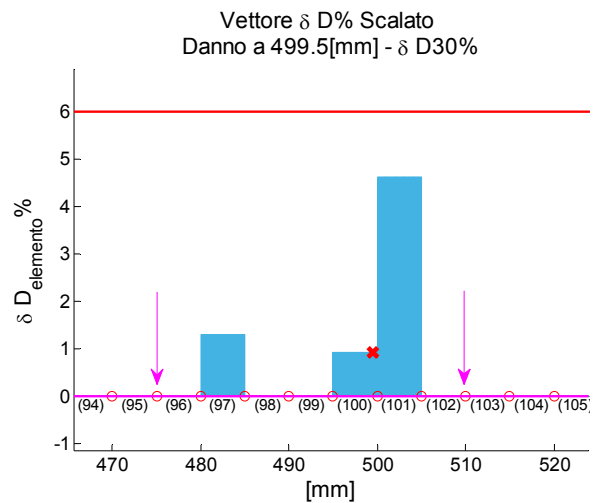
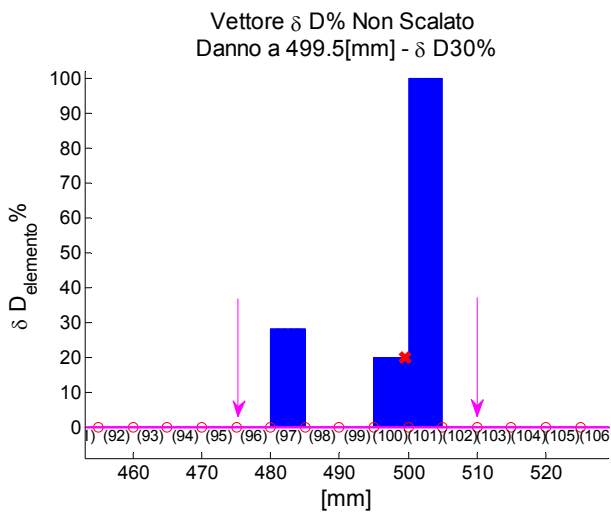
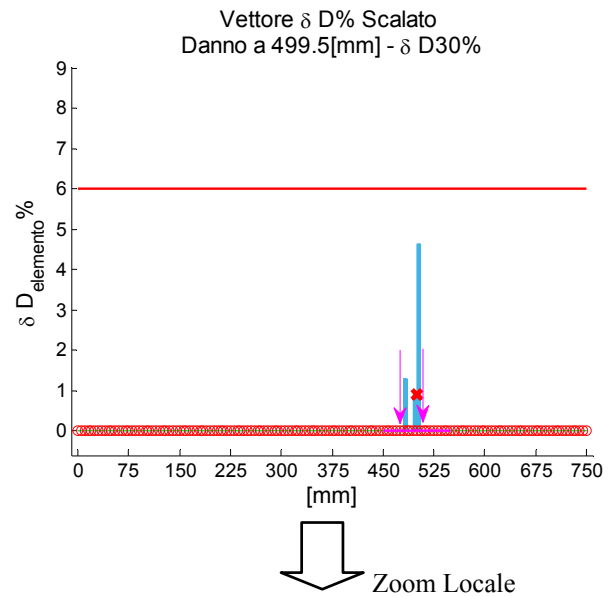
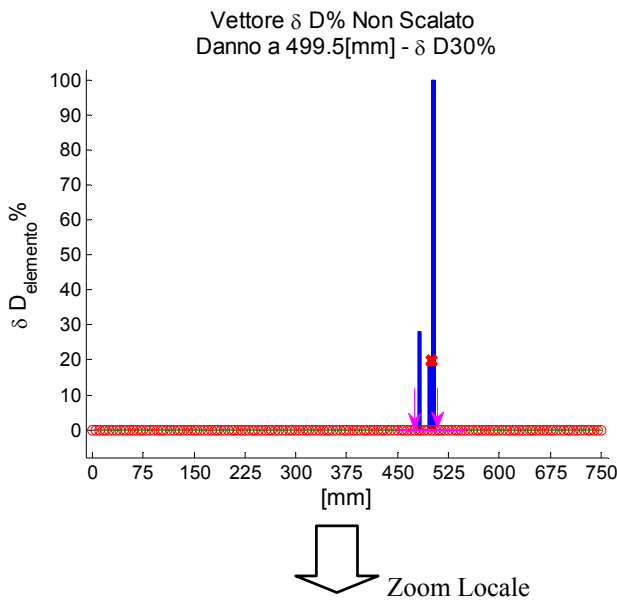


Figura 3.38 – Passo 3, non scalato

Figura 3.39 – Passo 3, scalato

Il livello di danneggiamento della struttura stimato è del 34.24%. Vengono analizzati gli elementi finiti del modello condensato nell'intervallo 96 e 102,

evidenziato in Figura 3.39. Gli elementi nell'intervallo vengono considerati come una zona unica di indagine, data l'estensione della zona d'indagine pari a 35 millimetri e la massima discretizzazione del modello pari a 1 millimetro.

*Passo4* dell'analisi. Analizzo le zone del modello FEM di partenza non condensato individuate al passo precedente. Lo stato di danneggiamento del modello è stimato pari al 15.59%. La posizione del danneggiamento è identificata in corrispondenza dell'elemento finito 480 del modello FEM. L'errore sulla localizzazione risulta del 2.6%. In Figura 3.40 è presentato il vettore di danneggiamento non scalato e in Figura 3.42 il dettaglio locale del vettore non scalato. Figura 3.41 è presentato il vettore di danneggiamento corretto con il fattore di scala e in Figura 3.43 il dettaglio locale del vettore.

*Passo 4 – Danno a 499.5 [mm] –  $\delta D$  30%*

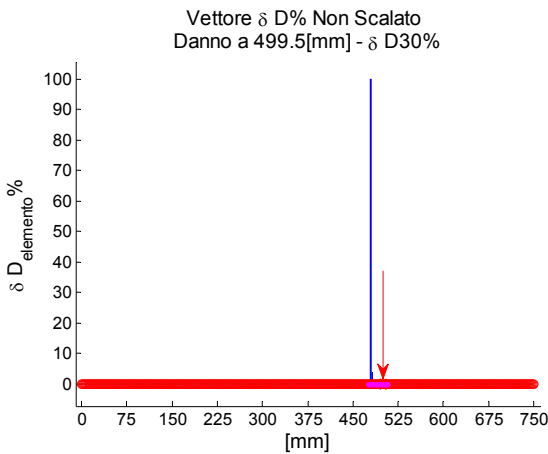


Figura 3.40

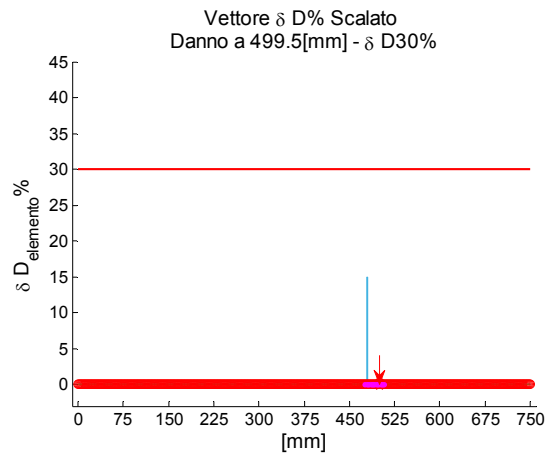


Figura 3.41



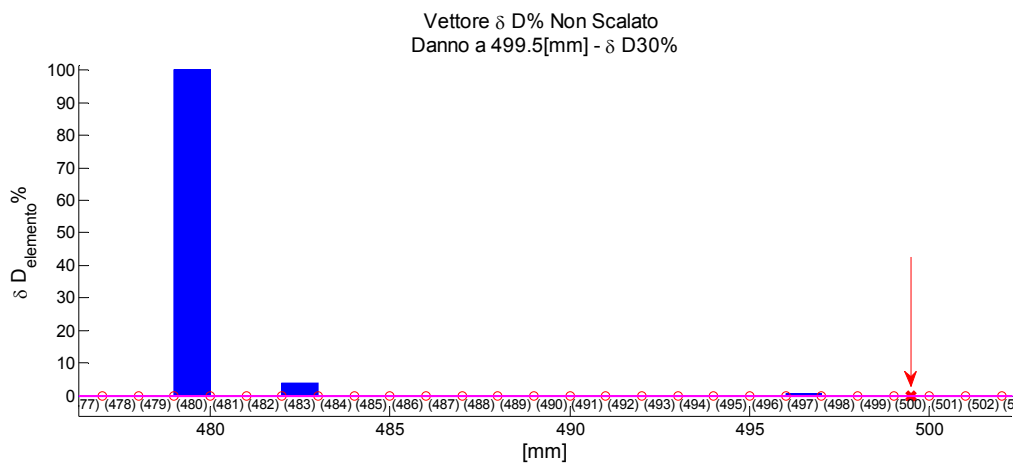


Figura 3.42 – Passo 4, non scalato, Zoom Locale

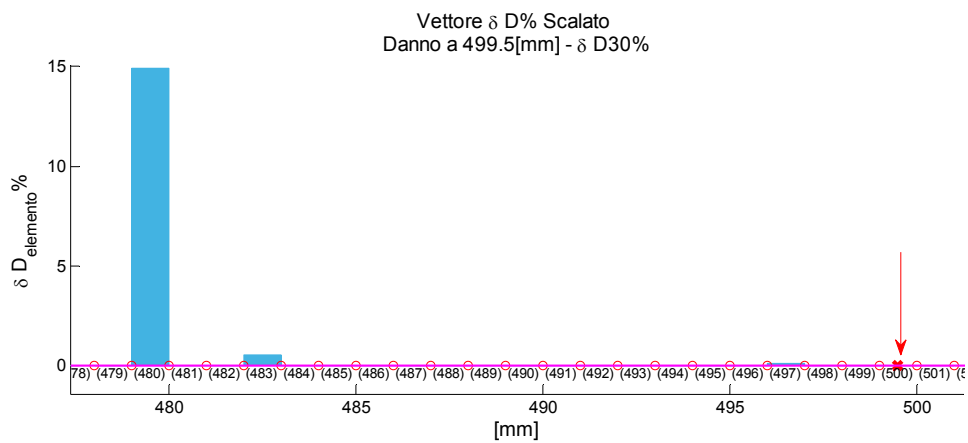


Figura 3.43 – Passo 4, scalato, Zoom Locale

### 3.5 Risultati

Nei casi di danneggiamento simulato presentati si osserva il metodo MDLAC nella formulazione non ricorsiva proposta da Messina et al. [1], a causa del forte mal condizionamento del metodo non riesce a identificare la posizione del danneggiamento. Il metodo MDLAC ricorsivo sviluppato in questo lavoro permette di identificare la posizione del danno simulato con un errore rispettivamente nei casi a 1/3, 1/2 e 2/3 del 1.2%, 1.2%, 2.6%. Il livello di danneggiamento per via del fattore di scala lineare proposto da Messina et al. [1] non viene correttamente stimato nel caso in cui, nei passi del metodo ricorsivo, la discretizzazione superi i 150 elementi finti.

### 3.6 Commenti ai risultati

Dai risultati ottenuti si può osservare come il metodo MDLAC ricorsivo permetta di identificare la posizione del danneggiamento con un errore medio dell'1.6%, ovvero la posizione effettiva del danneggiamento si trova in un intorno dalla posizione individuata dal metodo ricorsivo di 25 millimetri di estensione. Le prove simulate sono condotte in assenza di rumore di misura e lontano dai vincoli. Resta comunque impossibile identificare la posizione del danno con l'utilizzo del metodo MDLAC non ricorsivo nei casi presentati. La prova simulata è stata condotta imponendo un limite sul numero massimo di frequenze utilizzabile. E' ragionevole considerare che il numero di modi disponibili per un'applicazione del metodo sia superiore almeno ai primi 4 modi della struttura. La prova simulata presenta un danneggiamento di 1 millimetro di lunghezza e la discretizzazione del modello FEM risulta pari a 1 millimetro. L'utilizzo di questa discretizzazione permette un errore di localizzazione minimo pari all'estensione della zona danneggiata. Il livello di danneggiamento non viene correttamente scalato dal fattore di scala proposto da Messina et al. [14]. La dipendenza del fattore di scala dalla matrice di sensibilità induce che all'aumentare della discretizzazione i valori della matrice di sensibilità aumentano con il diminuire della dimensione dell'elemento finto, e quindi il fattore di scala tende a sotto stimare il livello di danneggiamento. E' stato verificato che con l'utilizzo del modello di trave di Timoshenko si presenta la stessa criticità riscontrata con il modello di trave di Eulero-Bernulli in relazione al fattore di scala lineare. Il tempo computazionale del metodo MDLAC ricorsivo risulta inferiore rispetto all'applicazione del metodo MDLAC al modello non condensato.



## Conclusioni

Lo scopo del presente lavoro è la scelta, l'analisi e l'applicazione numerica di una tecnica di monitoraggio strutturale (SHM). Il presente lavoro è stato orientato all'analisi delle tecniche di SHM *Model Based* applicate a sistemi che a seguito del danneggiamento mantengono un comportamento lineare. A partire da una prima fase conoscitiva delle metodologie presenti in letteratura di tipo *Model Based* e lineari, si è passati all'applicazione del metodo di SHM scelto ad un modello simulato. La fase di studio dello stato dell'arte dei metodi *Model Based* ha fatto emergere il metodo MDLAC, sviluppato da Messina et al. [14], come possibile primo approccio all'identificazione del danneggiamento nelle strutture. Il metodo è stato scelto per via della semplicità di implementazione e per l'utilizzo delle variazioni di frequenza come parametro modale dell'identificazione. L'utilizzo delle frequenze infatti richiede pochi punti di misura e risulta nella stragrande maggioranza delle strutture una procedura semplice di identificazione. La fase applicativa del processo di identificazione richiede la definizione di un modello ad elementi finiti della struttura di prova. E' stata scelta come struttura di prova una trave snella semplicemente incastrata che presenti momenti d'inerzia principali sensibilmente diversi, in questo modo è possibile ottenere delle deformate flessionali disaccoppiate, nelle direzioni principali, e con i primi modi flessionali in un unico piano. Il modello FEM inizialmente sviluppato consiste in un modello solido ad elementi *brick*, così da poter simulare il danneggiamento parziale della sezione trasversale. Il danno strutturale simulato in diverse posizioni longitudinali della trave è stato modellato come una riduzione di modulo elastico degli elementi finiti del modello FEM. A questo caso simulato sono state applicate in via preliminare le tecniche di identificazione, che analizzano le variazioni del comportamento delle strutture MAC e COMAC [36]. Si è osservata la poca sensibilità di questi metodi a danni localizzati e di piccola entità. Si è quindi passati all'analisi e all'applicazione del metodo MDLAC. Il metodo MDLAC per la sua formulazione presenta sì una semplicità applicativa ma presenta delle criticità intrinseche. La principale criticità riguarda la dimensione del vettore di danneggiamento incognito, legata alla discretizzazione del modello FEM della struttura. Il danneggiamento viene infatti identificato come una variazione di modulo elastico negli elementi del modello. La risoluzione spaziale con cui può essere identificato il danneggiamento dipende dalla discretizzazione del modello. Il problema di ottimizzazione del funzionale di correlazione MDLAC risulta quindi in generale

fortemente mal condizionato, risultando la dimensione del vettore di danneggiamento notevolmente superiore al numero di frequenze misurate disponibili per l'identificazione. Il mal condizionamento del metodo determina l'identificazione di falsi positivi e l'impossibilità di identificare in modo univoco il danneggiamento. Nasce quindi la necessità di individuare una possibile strategia di riduzione del numero di incognite del problema in relazione al numero di frequenze misurate note. La strategia proposta in questo lavoro consiste nella condensazione variabile del modello attraverso la condensazione di Guyan [2]. La scelta di questa strategia, che rappresenta il metodo più diffuso in letteratura per la condensazione dei gradi di libertà dei modelli ad elementi finiti, è nata dall'idea di fornire un metodo che permettesse la riduzione del mal condizionamento del metodo attraverso la trasformazione fisica del problema. E' stato quindi creato un modello simulato più semplice, bidimensionale ad elementi *beam*, per l'applicazione della condensazione variabile e l'analisi ricorsiva del modello condensato attraverso il metodo MDLAC di identificazione. Il danno simulato nel modello *beam* consiste nella riduzione del modulo elastico in un elemento finito, e quindi la riduzione del modulo elastico nell'intera sezione trasversale. Il metodo MDLAC ricorsivo proposto in questo lavoro consiste quindi nell'applicazione ricorsiva del metodo MDLAC a diversi livelli di condensazione della struttura. Il modello FEM iniziale, caratterizzato da una discretizzazione tale da garantire una desiderata risoluzione spaziale per l'identificazione del danneggiamento, viene progressivamente condensato a vari livelli di raggruppamento. A partire da una condensazione grossolana di elementi adiacenti della trave vengono progressivamente identificate, attraverso l'applicazione ricorsiva del metodo MDLAC, le potenziali zone danneggiate. Ad ogni livello di condensazione viene successivamente analizzata con una condensazione più fitta, e quindi con un maggiore livello di dettaglio, solamente la zona identificata come potenzialmente danneggiata. Viene così ridotta la dimensione del vettore di danneggiamento incognito ad ogni livello di condensazione, e quindi a ogni passo del metodo MDLAC ricorsivo. Vengono quindi analizzate diverse posizioni di danneggiamento e diversi livelli di variazione del modulo elastico negli elementi danneggiati. Vengono analizzate 3 posizioni di danneggiamento rispettivamente a  $1/3$ ,  $1/2$  e  $2/3$  delle lunghezze della trave a partire dall'incastro. I livelli di danneggiamento analizzati riguardano la riduzione dell'1%, 10%, 20%, 30% del modulo elastico degli elementi danneggiati. Il modello di trave ad elementi *beam* utilizzato è discretizzato con 750 elementi finiti. In tutti i casi analizzati si osserva come attraverso il metodo MDLAC non ricorsivo, il mal condizionamento del problema non permette di identificare la posizione del danno simulato. Il metodo MDLAC ricorsivo proposto in questo lavoro permette di identificare la posizione del danneggiamento con un errore medio del 2%. Il metodo è stato applicato in condizioni ideali di assenza di rumore di misura e con le variazioni di frequenza misurate ottenute in assenza di

discrepanze nella modellazione tra la struttura intatta e quella danneggiata. Dall'analisi dei casi sviluppati presentati in questo lavoro si osserva che la dipendenza del coefficiente di scala lineare dalla matrice di sensibilità proposto da Messina et al. [14] non permette di ottenere una corretta scala dell'indice di danneggiamento ottenuto dal problema di ottimizzazione del funzionale di correlazione MDLAC. Si osserva che all'infittirsi delle condensazione l'applicazione del coefficiente lineare di scala fornisce una forte sottostima del reale livello di danneggiamento. Questa criticità è stata evidenziata tardi e la soluzione richiede una nuova formulazione del fattore di scala, richiedendo ulteriori tempi di sviluppo. Va comunque sottolineato che il danneggiamento viene localizzato anche con bassi livelli di danneggiamento, ma al momento non correttamente scalato.

In conclusione il metodo MDLAC ricorsivo presentato in questo lavoro dalla sua semplicità applicativa permette di identificare il danneggiamento in condizioni di forte mal condizionamento del problema di ottimizzazione, dove a causa di quest'ultima criticità il metodo MDLAC non ricorsivo non riesce a fornire un'indicazione univoca della posizione del danno.

Possibili sviluppi futuri potranno essere sia l'applicazione sperimentale del metodo ricorsivo proposto, sia l'analisi numerica e sperimentale di diverse tipologie di danno, singoli e multipli. L'estensione del metodo ricorsivo a modelli solidi tridimensionali *brick* risulta un ulteriore passo di sviluppo. La semplicità del metodo e la possibilità di suddividere il processo di identificazione in più passi successivi a diversi livelli di dettaglio, senza ricorrere alla creazione di una discretizzazione variabile del modello FEM, può diventare uno strumento per la valutazione preliminare dello stato di salute della struttura e per predisporre una più dettagliata analisi dello stato di danneggiamento. Una valutazione dello sforzo computazionale effettivo richiesto dal metodo per l'analisi di casi specifici può permettere lo sviluppo di dispositivi *stand-alone* di identificazione dedicati.



## Bibliografia

- [1] T. C. Messina, A. , E. J. Williams, “Structural damage detection by sensitivity and statistical-based method,” 1998.
- [2] R. Guyan, “Reduction of stiffness and mass matrices,” 1965.
- [3] S. W. Doebling, C. R. Farrar, M. B. Prime, and D. W. Shevitz, “Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review,” 1996.
- [4] R. J. Barthorpe, “On Model and Data Based Approaches to Structural Health Monitoring,” 2010.
- [5] M. Ruzzene and S. Hanagud, “Computational techniques for structural health monitoring,” 2011.
- [6] D. R. Huston, “Structural sensing, health monitoring, and performance evaluation.”
- [7] W. Fan and P. Qiao, “Vibration-based Damage Identification Methods: A Review and Comparative Study,” Apr. 2010.
- [8] C. P. Fritzen, D. Jennewein, and T. Kiefer, “Damage detection based on model updating methods,” 1997.
- [9] M. I. Friswell and J. E. T. Penny, “Crack modeling for structural health monitoring,” Oct. 2002.
- [10] L. Vegas, “Pattern recognition for structural health monitoring,” 2000.
- [11] M. Fugate, H. Sohn, and C. Farrar, “Unsupervised learning methods for vibration-based damage detection,” 2000.
- [12] A. Rytter, “Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures.” 1993.

- [13] W. Fan, "Vibration-based Damage Identification Methods: A Review and Comparative Study," Apr. 2010.
- [14] a. Messina, E. J. Williams, and T. Contursi, "Structural Damage Detection By a Sensitivity and Statistical-Based Method," Oct. 1998.
- [15] J.-M. Ndambi, J. Vantomme, and K. Harri, "Damage assessment in reinforced concrete beams using eigenfrequencies and mode shape derivatives," Apr. 2002.
- [16] Z. Zhou, L. D. Wegner, and B. F. Sparling, "Vibration-Based Detection of Small-Scale Damage on a Bridge Deck," 2007.
- [17] O. Huth, G. Feltrin, J. Maeck, N. Kilic, M. Motavalli, and R. Bridge, "Damage Identification Using Modal Data : Experiences on a Prestressed Concrete Bridge," 2005.
- [18] Z. Shi, S. Law, and L. Zhang, "Damage localization by directly using incomplete mode shapes," 2000.
- [19] Z. Zhang and a. E. Aktan, "Application of Modal Flexibility and Its Derivatives in Structural Identification," 1998.
- [20] D. Wu and S. S. Law, "Sensitivity of Uniform Load Surface Curvature for Damage Identification in Plate Structures," 2005.
- [21] C. S. Hamey, "Experimental Damage Identification of Carbon/Epoxy Composite Beams Using Curvature Mode Shapes," Dec. 2004.
- [22] C. Ratcliffe, "A frequency and curvature based experimental method for locating damage in structures," 2000.
- [23] A. Ghoshal, M. J. Sundaresan, M. J. Schulz, and P. F. Pai, "Structural health monitoring techniques for wind turbine blades," 2000.
- [24] N. M. M. Maia, J. M. M. Silva, E. a. M. Almas, and R. P. C. Sampaio, "Damage Detection in Structures: From Mode Shape To Frequency Response Function Methods," May 2003.
- [25] U. Lee and J. Shin, "A frequency-domain method of structural damage identification formulated from the dynamic stiffness equation of motion," 2002.

- [26] R. O. Curadelli, J. D. Riera, D. Ambrosini, and M. G. Amani, "Damage detection by means of structural damping identification," Dec. 2008.
- [27] P. Verboven, B. Cauberghe, and P. Guillaume, "Improved total least squares estimators for modal analysis," Sep. 2005.
- [28] B. G. Hearn and R. B. Testa, "Modal analysis for damage detection in structures," 1992.
- [29] B. R. Y. Liang, J. Hu, and F. Choy, "Theoretical study of crack-induced eigenfrequency changes on beam structures," 1992.
- [30] R. D. Adams, P. Cawley, C. J. Pye, and B. J. Stone, "A Vibration Technique for Non-Destructively Assessing the Integrity of Structures."
- [31] Z. a. Jassim, N. N. Ali, F. Mustapha, and N. a. Abdul Jalil, "A review on the vibration analysis for a damage occurrence of a cantilever beam," Jul. 2013.
- [32] E. P. Carden, "Vibration Based Condition Monitoring: A Review," Dec. 2004.
- [33] O. S. Salawu, "Detection of structural damage through changes in frequency: a review," Sep. 1997.
- [34] T. Contursi, A. Messina, and E. J. Williams, "A Multiple-Damage Location Assurance Criterion Based on Natural Frequency Changes," Sep. 1998.
- [35] E. Williams, "A frequency-change correlation approach to damage detection," 1997.
- [36] D. J. Ewins, "Modal Testing:," 2000.
- [37] M. K. L. R.M. Lin, "Methods For Calculating Derivatives of Eigenvalue and Eigenvectors," pp. 1554–1558.
- [38] A. Pandey and M. Biswas, "Experimental verification of flexibility difference method for locating damage in structures," 1995.

- [39] B. H. Koh and S. J. Dyke, "Structural health monitoring for flexible bridge structures using correlation and sensitivity of modal data," Feb. 2007.
- [40] H. Y. Guo, "Structural damage detection using information fusion technique," Jul. 2006.
- [41] N.-I. Kim, H. Kim, and J. Lee, "Damage detection of truss structures using two-stage optimization based on micro genetic algorithm," Sep. 2014.
- [42] M. Nobahari and S. M. Seyedpoor, "Structural damage detection using an efficient correlation-based index and a modified genetic algorithm," May 2011.
- [43] Z. Tabrizian, G. Ghodrati Amiri, and M. Hossein Ali Beigy, "Charged System Search Algorithm Utilized for Structural Damage Detection," 2014.
- [44] K. Szopa, "Low frequency identification of critical states of transmission tower structures," 2013.
- [45] Z. Tabrizian, E. Afshari, and G. Amiri, "A new damage detection method: Big Bang-Big Crunch (BB-BC) algorithm," 2013.
- [46] S. M. Seyedpoor, "A two stage method for structural damage detection using a modal strain energy based index and particle swarm optimization," Jan. 2012.
- [47] R. Cook, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis." .
- [48] A. Corigliano and A. Taliercio, "*Meccanica Computazionale.*" .