



**POLITECNICO DI MILANO**

FACOLTÀ DI SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

## **Copertura rischio tasso d'interesse in Solvency II**

Tesi di laurea di:  
**Gregorio Antonio POLITO**  
Matricola 795758

Relatore:  
**Dott. Roberto BAVIERA**

**Anno Accademico 2013-2014**

## **Abstract**

In recent years, interest rates have slumped to historical low levels in the euro-zone, resulting in a substantial increase in Mark-to-Market value of liabilities and assets of financial institutions. In the insurance sector Solvency II has imposed the use of a new valuation method of liabilities: the so-called Wilson-Smith method. This method uses only listed instruments up to maturities of 20 years, replicating the discount factors calculated by the bootstrap of market data in those deadlines, and requires that the forward rate converges to an asymptotic value, the Ultimate Forward Rate. Through this assessment we see a depreciation of the liabilities, but at the same time we encounter some difficulties in interest rate risk management. The sensitivities computed are anomalous since they are focused only on the first 20 time buckets and feature variations of sign. Of course, these anomalies are also noticed in the search of hedging strategies following the classic approach of replicating the sensitivity of liabilities. In fact, the resulting strategy is focused on the first 20 buckets and produces oscillations in the latest. The present work aims to seek a hedging strategy using a non-standard rule that avoids replicating the abnormal sensitivity and at the same time ensures a hedging against interest rate movements. In order to compare these strategies, we will use different criteria and assume various strategic behavior, studying the characteristics at the actual date as well as in the future, through the simulation of scenarios both deterministic-stochastic and we will notice that the strategy generated in the non-standard approach is much better than the classical one.

## Sommario

Negli ultimi anni nell'area euro si è assistito ad un sostanziale aumento delle attività e passività valutate Mark-to-Market da parte delle istituzioni finanziarie. Solvency II ha imposto nel settore assicurativo l'utilizzo di una nuova metodologia di valutazione delle passività: il metodo di Wilson-Smith. Tale metodo utilizza solo gli strumenti quotati sul mercato con scadenze minori a 20 anni, replicando i fattori di sconto calcolati dal bootstrap dei dati di mercato in tali scadenze, ed impone che il tasso forward converga ad un valore asintotico, detto Ultimate Forward Rate, nella situazione corrente caratterizzata da bassi tassi d'interesse. Attraverso tale valutazione si assiste ad un deprezzamento delle passività, ma allo stesso tempo si presentano delle complessità nuove nella gestione del rischio del tasso d'interesse. Le sensitivity prodotte risultano alquanto "anomale" dato che sono concentrate solo sui primi 20 bucket temporali e presentano variazioni di segno. Naturalmente tali "anomalie" si riflettono sulle strategie di copertura: seguendo l'approccio classico la strategia risultante è concentrata sui primi 20 bucket e presenta delle oscillazioni sugli ultimi. Il presente lavoro di tesi propone una strategia di copertura alternativa utilizzando una regola non standard che eviti di replicare le anomalie delle sensitivity e che, allo stesso tempo, garantisca una copertura dai movimenti dei tassi d'interesse. Al fine di paragonare tali strategie, vengono ipotizzati diversi criteri e comportamenti strategici, studiandone le caratteristiche non solo alla data di valutazione, ma anche in quelle successive, attraverso la simulazione di scenari sia deterministici che stocastici, e si osserva che la strategia alternativa proposta produce risultati molto migliori rispetto alla copertura standard, il cui valore è stabilito a livello regolamentare.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Solvency II</b>	<b>8</b>
1.1 Primi passi verso Solvency II e l'influenza di Basilea . . . . .	10
1.1.1 Il Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria . . . . .	11
1.1.2 Caratteristiche affini e non tra la normativa assicurativa e bancaria	13
1.2 Architettura di Solvency II . . . . .	13
1.2.1 Pilastro I . . . . .	13
1.2.2 Pilastro II . . . . .	17
1.2.3 Pilastro III . . . . .	18
<b>2 Metodo di Wilson Smith</b>	<b>21</b>
2.1 Definizione del metodo . . . . .	22
2.1.1 Il metodo di Wilson-Smith in dettaglio . . . . .	24
2.2 Calibrazione del metodo . . . . .	29
2.3 Commenti sul metodo di Wilson-Smith . . . . .	29
2.3.1 Metodo di Wilson-Smith Alternativo . . . . .	30
2.4 Valutazione delle passività . . . . .	32
<b>3 Sensitivity rispetto al tasso d'interesse nel Modello di Wilson-Smith</b>	<b>35</b>
3.1 Definizione delle Sensitivity . . . . .	36
3.2 Analisi del DV01 nel metodo di Wilson-Smith e Wilson-Smith Alternativo	38
3.2.1 Caso di Wilson-Smith . . . . .	39
3.2.2 Caso di Wilson-Smith Alternativo . . . . .	41
<b>4 Hedging delle Sensitivity</b>	<b>43</b>
4.1 Accounting 0 . . . . .	44
4.2 Accounting 1 . . . . .	46
4.3 Accounting 2 . . . . .	47
4.3.1 Approccio standard . . . . .	48
4.3.2 Approccio non standard . . . . .	50

<i>INDICE</i>	4
<b>5 Analisi della copertura nel tempo</b>	<b>54</b>
5.1 Qualità della strategia nel tempo: Caso Statico . . . . .	55
5.2 Qualità della strategia nel tempo: Caso Dinamico . . . . .	57
<b>6 Analisi della copertura nel tempo: Scenario Stocastico</b>	<b>63</b>
6.1 Calibrazione del modello G2++ . . . . .	66
6.2 Applicazione dello Scenario Stocastico . . . . .	69
6.3 Qualità della strategia nel tempo: Scenario Stocastico . . . . .	70
<b>7 Hedging Liquido</b>	<b>73</b>
7.1 Sensitivity a blocchi . . . . .	73
7.2 Strategia di copertura a blocchi . . . . .	76
7.2.1 Accounting 0 . . . . .	76
7.2.2 Accounting 1 . . . . .	78
7.2.3 Accounting 2 . . . . .	79
7.3 Qualità della strategia nel tempo: Scenari Deterministici e Stocastici . . . . .	82
7.3.1 Scenario Deterministico: Caso Statico . . . . .	82
7.3.2 Scenario Deterministico: Caso Dinamico . . . . .	83
7.3.3 Scenario Stocastico . . . . .	84
<b>Conclusioni</b>	<b>88</b>
<b>A Codici Matlab</b>	<b>91</b>
A.1 Estrazione/Interpolazione dei dati di mercato . . . . .	91
A.1.1 Data di settlement . . . . .	91
A.1.2 Manipolazione dei dati di mercato . . . . .	93
A.2 Calcolo delle curve di sconto nei diversi metodi . . . . .	95
A.2.1 Bootstrap della curva swap . . . . .	95
A.2.2 Metodo di Wilson-Smith . . . . .	96
A.2.3 Metodo di Wilson-Smith Alternativo . . . . .	98
A.3 Calcolo delle Sensitivity . . . . .	99
A.4 Calcolo delle strategie di copertura . . . . .	99
A.5 Simulazione Deterministica e Stocastica degli scenari futuri . . . . .	100
A.6 Modello di Hull-White . . . . .	101
A.6.1 Calibrazione del Modello . . . . .	102
A.7 Criteri di Qualità . . . . .	105
<b>Glossario</b>	<b>107</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>110</b>

# Introduzione

La valutazione *Mark-to-Market* delle voci del bilancio di una compagnia assicurativa (di seguito indicata equivalentemente con Assicurazione o Compagnia) garantisce il massimo della coerenza con i dati di mercato, producendo un *fair-value* che da un lato incorpora tutte le informazioni disponibili, ma dall'altro è influenzato dai movimenti del mercato. Quindi sebbene una tale valutazione garantisca il massimo della trasparenza, questa può generare delle criticità.

Nell'area euro la curva di sconto viene ottenuta attraverso una metodologia standard, chiamata bootstrap, che parte dai tassi swap quotati nel mercato interbancario e ottiene i fattori di sconto che riproducono tali tassi. Nelle assicurazioni sulla durata della vita, ed in particolare nelle assicurazioni sulla vita tradizionale quali le rendite vitalizie, e nel settore pensionistico (previdenza complementare e pension benefits) la parte lunga della curva gioca un ruolo rilevante. Si pensi ad esempio ad un assicurato che inizia a versare i premi all'inizio della sua carriera lavorativa, circa a 20 anni di età, contribuirà per altri 50 anni per poi ricevere - in caso di sopravvivenza - una pensione per altri 20/30 anni, o in caso di pensione di reversibilità l'orizzonte temporale può essere ancora più lungo. Ne consegue chiaramente che le prestazioni erogate dalla compagnia risentono del comportamento dei tassi e in una valutazione *Mark-to-Market* risentono significativamente della parte lunga della curva, su orizzonti temporali superiori ai 70 e persino agli 80 anni. Su tali orizzonti temporali non esistono strumenti quotati sul mercato interbancario ed inoltre può sorgere un evidente problema di liquidità anche per scadenze più brevi.

Solvency II introduce una nuova metodologia di valutazione *Mark-to-Market* delle passività: il metodo di Wilson-Smith [Smith 2000]. Tale approccio considera che i dati di mercato più liquidi siano quelli dei primi 20 anni, il cosiddetto *Last Liquid Point* (LLP), ed introduce un tasso forward asintotico denominato *Ultimate Forward Rate* (di seguito UFR). Quindi per i primi 20 anni si replica la curva di sconto ottenuta mediante il bootstrap dei dati di mercato e per quelli successivi si genera una curva dei tassi che tende a tale valore asintotico. Per costruzione tale metodo prevede un salto nella liquidità dei tassi di mercato, in quanto le scadenze successive al 20-esimo anno sono considerate non liquide, producendo un'indipendenza dai movimenti di mercato per le scadenze successive a tale limite. Solvency II ha di fatto stabilito una metodologia per la valutazione delle passività, in pratica una regola di Accounting, dove il valore delle passività (e quindi della

compagnia) a diversi orizzonti temporali nel futuro dipende dai tassi d'interesse correnti.

La regola di Accounting evidenzia quindi un rischio tasso d'interesse ed ha come naturale conseguenza la necessità della gestione di questo rischio. In altri termini, la compagnia non risulta sensibile solo ai valori della curva dei tassi d'interesse in un dato momento (e.g. quello della redazione del bilancio o della verifica del margine di solvibilità) ma agli impatti che possono generare una loro modifica nel tempo. La regolamentazione interviene quindi sul *modus operandi* delle assicurazioni. Un esempio può chiarire questo punto che risulta centrale in questo studio. Si supponga che una Compagnia abbia commercializzato una rendita vitalizia al 3%. Non ci sono problemi fintanto i tassi d'interesse (ed in particolare quelli sugli orizzonti temporali più lunghi) rimangono sopra tale valore critico: la compagnia otterrà dagli asset, in cui ha investito i premi, dei rendimenti superiori a quanto garantito. Tuttavia un tasso tecnico scelto in maniera conservativa al momento della stipula del contratto può rivelarsi sufficientemente prudentiale nel caso in cui i tassi d'interesse scendano sotto tale valore critico. Naturalmente questa eventualità va chiaramente gestita prima del suo verificarsi.

Cambiare la modalità valutativa delle passività da una Riserva Matematica caratterizzata da un unico tasso tecnico stabilito alla stipula con una valutazione *Mark-to-Market* evidenzia quindi la presenza del rischio tasso d'interesse in particolare per le assicurazioni che generano prestazioni in un futuro lontano diverse decine di anni. Questo rischio ha degli impatti sulla solvibilità stessa dell'impresa assicurativa: va monitorato e quindi gestito. Con Solvency II inizia quindi un Asset Liability Management in ambito assicurativo, problema più complesso del corrispondente problema di gestione in ambito bancario: la complessità deriva dal fatto che spesso sugli orizzonti temporali summenzionati non si trovano Asset sul mercato con scadenze simili o comunque con una non sufficiente liquidità.

Il rischio tasso d'interesse viene

- evidenziato dalle sensitivity, ovvero quelle grandezze che indicano la variazione di valore della grandezza d'interesse (le passività) al modificarsi di un parametro di mercato (i tassi swap quotati) e
- gestito con regole di copertura (hedging).

Volendo determinare il profilo di rischio del tasso d'interesse che una determinata compagnia si ritrova a dover gestire conseguentemente all'utilizzo della metodologia imposta da Solvency II, si osserva che la presenza del LLP nella costruzione della curva di sconto di Wilson-Smith complica l'interpretazione, e di conseguenza l'utilizzo, delle sensitivity. Utilizzando una valutazione *Mark-to-Market*, ci si aspetta che ci sia una corrispondenza tra i movimenti dei tassi di mercato e quelli delle passività valutate: se i tassi si muovono verso l'alto le passività devono diminuire in valore assoluto, oppure aumentare in caso di ribasso dei tassi.

Quello che si osserva è invece che su alcune scadenze le sensitivity sono positive, ovvero le passività aumentano all'aumentare dei tassi (e viceversa). Questo risultato è già noto in letteratura (cfr. [Lord 2012] e [Kocken 2012]). Le conseguenze in termini di copertura sono ancora più sorprendenti.

I risultati principali di questo lavoro di tesi sono i seguenti tre:

1. Un primo risultato consiste nell'aver mostrato con un modello semplificato il meccanismo all'origine di queste sensitivity "anomale".
2. Un secondo risultato è quello di aver evidenziato come, se si utilizza in maniera acritica la metodologia standard (cfr. [Hagan 2006]), si ottengono delle coperture di segno opposto e di diversi ordini di grandezza superiori a quelle che si sarebbero ottenute valutando le passività con la curva del bootstrap.
3. Il terzo significativo contributo è quello di proporre una maniera alternativa di associare alle sensitivity una regola di hedging. In particolare, in relazione alla metodologia standard di hedging, si dimostra come la strategia proposta risulti molto più efficiente nel caso in cui sia considerata come copertura statica (effettuata un'unica volta alla data di valutazione) e presenti costi enormemente ridotti in caso di copertura dinamica.

Nel capitolo 1 si sviluppano i passi principali che portano alla definizione di Solvency II, con il necessario confronto con Basilea II, e all'analisi approfondita della sua architettura e delle sue norme. Nel capitolo 2 si studia ed applica il metodo di Wilson-Smith, dimostrandone la costruzione, spiegando i dettagli della calibrazione ed analizzando vantaggi e svantaggi; si introduce inoltre un metodo alternativo che cerchi di sopperire agli aspetti negativi dello stesso. Nel capitolo 3 si considera il tipico profilo delle passività di un'Assicurazione esemplificativa e si analizzano le sensitivity prodotte dal metodo in esame, con un confronto con quelle derivanti da una valutazione con la curva di sconto prodotta dal bootstrap della curva swap. Nel capitolo 4 si definiscono le strategie di copertura nei diversi tipi di Accounting, focalizzando l'attenzione sull'Accounting che impone una valutazione MtM della copertura e con Wilson-Smith delle passività. Nel capitolo 5 si studia l'evoluzione delle strategie nel tempo, con l'utilizzo di scenari deterministici. Nel capitolo 6 si definisce il modello stocastico G2++, la sua calibrazione dai dati di mercato e la sua applicazione al fine di produrre delle curve di sconto nel futuro con conseguente confronto delle strategie prodotte. Nel capitolo 7 si analizza un caso reale di hedging utilizzando solo gli strumenti più liquidi presenti sul mercato, studiando le sensitivity e confrontando le diverse coperture generate, sotto scenari sia deterministici che stocastici.



# Capitolo 1

## *Solvency II*

L'Articolo 1882 del Codice Civile [Cod Civ] recita:

*L'assicurazione è il contratto col quale l'assicuratore, verso pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno ad esso prodotto da un sinistro, ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana.*

In tal modo si assiste al trasferimento del rischio di eventi dannosi dall'assicurato all'assicuratore. Quest'ultimo è esposto, di conseguenza, nello svolgimento della propria attività, ad una serie di rischi che mettono in pericolo la solvibilità dell'impresa, ovvero la sua capacità di far fronte agli impegni assunti nei confronti degli assicurati.

Il rischio di insolvenza, data la sua natura, è insito in tutte le imprese assicurative che compongono il settore a livello globale, pertanto, a tutela della stabilità del sistema economico, nasce l'esigenza di un sistema di vigilanza che provveda al controllo tramite direttive applicabili all'intero mondo assicurativo.

In particolare, dal 1993 con la nascita dell'Unione Europea, si è assistito alla creazione di un impianto normativo comune a tutti i Paesi membri che, nel corso degli anni, si è progressivamente adeguato alle evoluzioni del mercato mediante una serie di direttive.

Generare un insieme di norme unico, ma che allo stesso tempo sia in grado di essere applicato ai diversi contesti socio-economici dei Paesi dell'Unione Europea, non è semplice. A tal fine, negli anni, sono stati condotti diversi studi che hanno portato alla creazione di una serie normative denominate *Solvency*.

I primi esempi di regolamentazione del settore assicurativo risalgono alla Comunità Economica Europea che negli anni '70 introduce tramite le direttive 73/239/EEC [EEC 1973] (per le assicurazioni diverse da quella sulla vita) e 79/267/EEC [EEC 1979] (per le assicurazioni sulla vita) la necessità

[...] che le imprese di assicurazione dispongano, oltre che delle riserve<sup>1</sup> tecniche, comprese le riserve matematiche, sufficienti a far fronte agli impegni contratti, di una riserva complementare, detta margine di solvibilità, rappresentata dal patrimonio libero e, con l'accordo dell'autorità di controllo, da elementi impliciti del patrimonio, onde far fronte al carattere aleatorio dell'esercizio [...]

Il calcolo del margine di solvibilità differisce nel caso si tratti di assicurazioni sulla vita e non, in particolare in 73/239/EEC esso è “determinato in funzione di due indici di sicurezza fondati l'uno sui premi e l'altro sui sinistri” mentre in 79/267/EEC è “determinato in funzione ora delle riserve matematiche e dei capitali sotto rischio presi a carico dall'impresa, ora dei premi o contributi incassati, ora unicamente delle riserve, ed ora in funzione dei fondi delle associazioni tontinarie<sup>2</sup>”.

Alla luce della nascita dell'Unione Europea e dei nuovi scenari con essa definiti, si avverte la necessità di testare la validità delle regolamentazioni di solvibilità e di proporre eventuali nuove soluzioni per superare i problemi emersi nella ventennale applicazione delle suddette direttive. A tal fine, nel 1994 le Autorità di Vigilanza dei Paesi dell'Unione Europea organizzano un gruppo di lavoro presieduto dal Dott. Helmut Müller [Müller 1997].

Dopo 3 anni, il gruppo di lavoro giunge alla redazione di un report in cui viene dimostrato chiaramente che, anche se le regole di solvibilità fossero state applicate più rigorosamente di quanto richiesto dalle direttive in vigore, non si sarebbe potuta evitare una serie di crolli economici accaduti. Il margine di solvibilità, dunque, di regola adempie alla sua funzione di avvertimento, ma non può sostituire un'analisi dello stato aziendale e ancor meno la copertura fornita dalle riserve tecniche.

Tale report pone le basi per la stesura delle direttive pubblicate nel 2002 sotto il nome di Solvency I (ramo vita [EC 2002a] e ramo non vita [EC 2002b]), in cui non si apportano sostanziali modifiche ai requisiti imposti dalle direttive degli anni '70, ma si disciplina il “fondo minimo di garanzia il cui importo e la cui composizione siano tali da fornire la garanzia che le imprese dispongano di mezzi adeguati fin dal momento della loro costituzione e che, nel corso dell'attività, il margine di solvibilità non scenda in nessun caso al di sotto di un livello minimo di sicurezza.”

---

<sup>1</sup>Con il termine riserva si intende l'importo che deve essere accantonato dalla compagnia assicurativa per far fronte agli obblighi futuri assunti verso gli assicurati.

<sup>2</sup>Le associazioni tontinarie fanno riferimento alla tontina che rappresenta un primo esempio di assicurazione sulla vita. La tontina, dal nome del banchiere napoletano Lorenzo Tonti (1630-1685), è un contratto in cui ognuno dei partecipanti paga la sua quota di ingresso, dopodiché il capitale raccolto viene investito ed i partecipanti godono degli utili derivanti dagli investimenti fino alla loro morte, al momento della quale la quota di capitale viene ripartita fra i restanti appartenenti alla tontina.

## 1.1 Primi passi verso Solvency II e l'influenza di Basilea

Nel periodo che precede la stesura di Solvency I, già si prefigurava la volontà, da parte di alcuni Paesi, di servirsi di un criterio basato sul rischio per calcolare il minimo margine di solvibilità. Traguardo raggiunto nel 2009 attraverso la direttiva 2009/138/EC[EC 2009] denominata Solvency II.

Tale direttiva sorge in un contesto segnato da crisi finanziarie che hanno provocato significativi cambiamenti nel settore finanziario ed assicurativo. In tale condizione di incertezza, è stato naturale il passaggio da un sistema con regole statiche, in cui il calcolo dei capitali richiesti dalle normative è basato su regole predefinite, ad un sistema di regole basato su principi che individuino al meglio le situazioni di rischio cui le imprese assicuratrici sono sottoposte.

Solvency II è caratterizzata da due fasi: una prima, sviluppata da Maggio 2001 ed Aprile 2003, basata sullo studio dei problemi di insolvenza e una seconda, da Dicembre 2003 agli inizi del 2007, di sviluppo di regole dettagliate.

Due studi significativi relativi alla prima fase: uno condotto da KPMG [KPMG 2002] che delinea la necessità di una struttura di supervisione fondata su tre pilastri, come in Basilea II, ed un secondo conosciuto come *Sharma report* [Sharma 2002] che delinea tre elementi utili al monitoraggio del rischio dell'impresa:

1. adeguatezza e solvibilità del capitale;
2. indicatori in grado di diagnosticare preventivamente potenziali minacce alla solvibilità;
3. validi sistemi interni di gestione del rischio.

La seconda fase di Solvency II, tesa a sviluppare delle regole ben precise al fine di semplificare ed accelerare la legislazione europea, insiste sulla necessità di garantire trasparenza piena ed istituzionalizzata in ogni fase del processo legislativo introducendo un controllo tra le diverse istituzioni. Tale fase è stata influenzata dall'approccio a quattro livelli suggerito in [Lamfalussy 2001], report redatto da un gruppo di lavoro presieduto da Lamfalussy:

*Livello 1* Si definiscono i principi fondamentali, la cui adozione dovrà essere preceduta da una consultazione di tutti gli interessati da parte della Commissione Europea

*Livello 2* Si definiscono i dettagli di quanto proposto al livello precedente dopo aver consultato i principali attori del mercato. Tale processo di consultazione è condotto dall'EIOPA<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>European Insurance and Occupational Pensions Authority

*Livello 3* Si effettua una cooperazione delle autorità di regolamentazione nazionali al fine di garantire un coerente recepimento delle conclusioni cui si è giunti nei livelli 1 e 2

*Livello 4* Si controlla, sotto la supervisione della Commissione Europea, l'applicazione della normativa in questione all'interno dei Paesi membri.

Al fine di valutare l'impatto che tale normativa genera sulle compagnie assicurative, CEIOPS<sup>4</sup> ha poi sottoposto ai destinatari di Solvency II degli studi di impatto QIS (Quantitative Impact Study).

Prima di procedere con l'analisi approfondita della struttura a tre pilastri di Solvency II è imprescindibile una digressione sulla normativa bancaria che ha ispirato lo studio condotto da KPMG.

### 1.1.1 Il Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria

Nel 1974 le banche centrali del G-10<sup>5</sup> fondano il Comitato di Basilea con l'obiettivo di definire una regolamentazione della Vigilanza Bancaria, per assicurare stabilità al sistema finanziario globale. Tale Comitato non ha potere legislativo, ma formula proposte che dovranno essere recepite nell'ambito dei singoli ordinamenti nazionali, al fine di un sistema finanziario sempre più globalizzato.

Il Comitato di Basilea giunge alla stesura di una prima normativa nel 1988, denominata Basilea I [BIS 1988]. Viene introdotto un requisito di patrimonio minimo al fine di far fronte al rischio di credito, derivante dal rapporto con altri intermediari soggetti al fallimento, e di mercato, generato dalla compravendita di strumenti finanziari.

Tale requisito rappresenta la quota di capitale destinata a proteggere i depositanti dal rischio che gli attivi bancari subiscano delle perdite, risultando insufficienti a ripagare i debiti. Il requisito minimo di capitale corrisponde all'8% dei crediti che la banca ha nei confronti dei clienti e sono previsti dei coefficienti di ponderazione in funzione della tipologia di clientela.

Nel 1999, al fine di compensare i limiti della normativa vigente, quali l'assenza dei rischi operativi e la diversificazione dei portafogli come strumento di riduzione del rischio, viene generato un documento di consultazione destinato alle osservazioni dei singoli Paesi, delle

---

<sup>4</sup>Il *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors* è un organo fondato nel 2003 al fine di assistere la Commissione Europea nell'implementazione delle direttive dell'Unione Europea.

<sup>5</sup>Il Gruppo dei 10 (G-10) è una organizzazione internazionale, fondata nel 1962, che riunisce undici Paesi di grande rilevanza economica nel mondo: Belgio, Canada, Francia, Germania, Giappone, Italia, Paesi Bassi, Regno Unito, Stati Uniti, Svezia e Svizzera. I Ministri economici e finanziari e i Governatori delle banche centrali del G-10 si riuniscono annualmente in occasione dell'assemblea annuale del Fondo Monetario Internazionale (FMI). I Paesi membri del G-10 aderiscono al General Arrangements to Borrow (GAB) (Accordo generale per l'ottenimento di prestiti), un accordo per l'ottenimento dei prestiti supplementari, che possono essere ottenuti nel caso in cui i ricorsi monetari stimati dallo FMI siano inferiori alle necessità reali di un paese membro. Fonte: <http://www.imf.org>.

associazioni bancarie e degli studiosi che porta nel 2005 alla versione definitiva di Basilea II [BIS 2005]. Quest'ultima si caratterizza per la seguente struttura a tre pilastri:

- Requisiti patrimoniali: si riforma la regola dell'8% considerando il rating borsistico, diversificando i diversi rischi dei singoli prestiti e considerando il rischio operativo (legato a frodi, terremoti, crash informatici, ecc.).
- Controllo prudenziale: si accrescono i poteri di controllo delle Autorità di Vigilanza, che dovranno verificare, oltre ai requisiti minimi basati su un puro calcolo matematico, anche l'applicazione, da parte degli istituti di credito, di politiche e procedure organizzative, per la misura e il governo dei propri rischi.
- Disciplina di Mercato: si obbligano gli istituti di credito a fornire maggiori informazioni al mercato, affinché il pubblico degli investitori possa verificare in maniera chiara e trasparente, le condizioni di rischio e di patrimonio delle singole banche.

Infine negli ultimi anni, a seguito alla crisi finanziaria del 2008, è stata sviluppata una nuova normativa che prende il nome di Basilea III [BIS 2011]. L'obiettivo che si persegue è quello di prevenire l'eccessiva assunzione di rischi da parte delle banche e di generare un sistema finanziario più solido. Le novità riguardano:

- Introduzione di standard minimi di liquidità: si richiede che le banche mantengano uno stock di risorse liquide che consenta di superare una fase di accentuato deflusso di fondi della durata di 30 giorni senza dover ricorrere al mercato o al rifinanziamento presso la Banca Centrale.
- Definizione di un capitale regolamentare: si impongono requisiti di capitale più stringenti nei confronti di strumenti di alta qualità patrimoniale. Livelli di capitale adeguati e di qualità aumentano la capacità delle banche di fronteggiare i rischi di perdite.
- Copertura dei rischi di mercato e di controparte, evitando la sottostima degli stessi: si indicano dei parametri chiave per il calcolo dei capitali a rischio e le correlazioni tra le attività, anche sotto scenari di stress.
- Livello di leva finanziaria: si stabilisce un requisito minimo di capitale che le banche dovranno detenere rispetto al totale dell'attivo non ponderato per il rischio (leverage ratio), determinato in maniera tale da considerare tutte le attività di una banca (in bilancio e fuori bilancio) e che sia neutrale rispetto alle diverse regole contabili.
- Misure Anticicliche<sup>6</sup>: si introducono misure finalizzate alla riduzione della prociclicità, attraverso la detenzione di risorse patrimoniali superiori a quelle minime (*buffer*).

---

<sup>6</sup>Con il termine *anticiclico* (al contrario *prociclico*) si riferisce ad un andamento caratterizzato da una variazione in direzione opposta (concorde) ai principali indicatori del ciclo economico.

## 1.1.2 Caratteristiche affini e non tra la normativa assicurativa e bancaria

Comparando i due regimi regolatori, Basilea e Solvency, occorre avere in mente che è necessario che essi siano compatibili al fine di avere una regolamentazione coerente all'interno del settore finanziario: prodotti simili devono essere trattati in modo simile tra i due regimi, al fine di evitare opportunità di arbitraggio regolamentare e di creare un livello comune tra i partecipanti dei mercati finanziari. D'altro canto, a causa delle diverse attività finanziarie condotte nei due settori, le regolamentazioni tra banche e assicurazioni devono differenziarsi.

Una prima causa di differenziazione si riscontra nelle diverse tipologie di rischio a cui sono soggette. Se da un lato le banche sono esposte maggiormente a rischi di carattere finanziario, quindi legati agli andamenti del mercato, le cui fluttuazioni sono fortemente correlate tra loro, dall'altro le compagnie assicurative sono soggette anche a rischi di carattere non strettamente finanziario, ad esempio le condizioni meteorologiche o i cambi demografici, i quali non presentano rilevanti correlazioni con fattori finanziari.

Un altro elemento distintivo è rappresentato dalle diverse tipologie di finanziamenti a cui le imprese possono attingere. Le banche si finanziano principalmente tramite prestiti e depositi a breve termine, mentre le compagnie assicurative utilizzano i premi che vengono pagati in anticipo dai clienti, ma liquidati nel lungo periodo. Dal punto di vista bancario, l'alta liquidità dei finanziamenti a breve termine genera un'elevata capacità di far fronte a casi di rischio sistemico, causato dal diffondersi di cattive notizie che potrebbero diramarsi in tutto il sistema bancario e generare un effetto di contagio. Nel settore assicurativo tale rischio è limitato a causa di finanziamenti a più lungo termine e al fatto che i clienti sono fortemente disincentivati a chiudere il proprio contratto assicurativo prematuramente, d'altro canto ciò che predomina è il rischio di un isolato fallimento.

## 1.2 Architettura di Solvency II

Nella presente sezione verranno analizzati in dettaglio i tre pilastri di Solvency II. Nel primo Pilastro si analizzeranno gli aspetti quantitativi del calcolo di capitali e delle riserve tecniche, nel secondo Pilastro si analizzeranno gli aspetti qualitativi della gestione e vigilanza del rischio e nel terzo Pilastro gli obblighi di pubblicità e trasparenza imposti dalla normativa.

### 1.2.1 Pilastro I

#### Requisiti di capitale ponderati per il rischio

Nel calcolo dei requisiti di capitale di cui ogni compagnia assicuratrice deve disporre al fine di prevenire casi di insolvenza (*Solvency Capital Requirement SCR*), è necessario

avere una valutazione completa, dal punto di vista quantitativo, di tutti i rischi a cui si è esposti. In [EC 2009] sono definite le seguenti sei classi di rischio con le specifiche descritte da [QIS5 2010a]

- Rischio di sottoscrizione per l'assicurazione non vita: è derivante dai sinistri coperti e dalla conduzione dell'attività di sottoscrizione del contratto.
- Rischio di sottoscrizione per l'assicurazione vita: è analogo al caso non vita.
- Rischio di sottoscrizione per l'assicurazione malattia: è analogo al caso non vita.
- Rischio di mercato: deriva dal livello o volatilità dei prezzi di mercato degli strumenti finanziari.
- Rischio di credito: riflette le possibili perdite dovute a fallimenti inattesi, o al deterioramento del grado di credito della controparte.
- Rischio operativo: deriva dalla inadeguatezza o dalla disfunzione dei processi aziendali interni, o da personale e sistemi, oppure da eventi esogeni. Tale classe dovrebbe includere i rischi legali, ed escludere i rischi derivanti da decisioni strategiche, nonché rischi di reputazione.

Inoltre nel [QIS5 2010a] viene considerata un'ulteriore classe che è quella del rischio intangibile<sup>7</sup>. Tale rischio è definito dal rischio di mercato degli asset intangibili, come calo del prezzo di mercato e assenza di liquidità, e dal rischio interno, come la commercializzazione o il deterioramento dell'immagine pubblica del prodotto, legato alla natura specifica di tali asset.

Inoltre ad ogni classe possono essere associate diverse sottoclassi, come mostrato dalla Figura (1.1) a fine capitolo.

Il calcolo di SCR secondo il metodo standard, corrisponde al Value at Risk<sup>8</sup> (VaR) con un livello di confidenza pari a 99.5% su un periodo di un anno. Al fine di ottenere una copertura totale della compagnia, il calcolo del VaR è applicato allo stesso modo su tutti le diverse classi di rischio e poi viene aggregato tramite dei coefficienti di correlazione.

---

<sup>7</sup>Tale rischio è legato al capitale *intangibile*, asset che non possono essere incorporati in beni fisici o attività finanziarie. Gli asset intangibili possono essere distinti in due tipi: quelli derivanti da protezioni legali, come i brevetti, le licenze, il copyright o i marchi registrati che, insieme al segreto industriale, sono generalmente raggruppati nella categoria di proprietà intellettuale, e quelli competitivi, come il capitale umano, l'efficacia dei processi organizzativi e la capacità innovativa che determinano la performance delle imprese.

<sup>8</sup>In termini matematici, il VaR con livello di confidenza  $\alpha$  in relazione ad un anno corrisponde a

$$\inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\}$$

in cui  $P$  è una misura di probabilità e  $L$  è una variabile aleatoria che rappresenta la perdita (Loss).

Inoltre SCR dovrebbe coprire non solo le polizze già vendute, ma anche quelle che verranno vendute entro l'anno.

Lo SCR aggregato sulle suddette sette classi di rischio, ad esclusione di quello operativo, viene definito il requisito base di capitale (Basic Solvency Capital Requirement BSCR) e corrisponde a

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} + SCR_{intang}$$

dove

- $Corr_{i,j}$  = matrice di correlazione tra le diverse classi di rischio
- $SCR_{mkt}$  = Capitale richiesto per il rischio di mercato
- $SCR_{crd}$  = Capitale richiesto per il rischio di credito
- $SCR_{life}$  = Capitale richiesto per il rischio di sottoscrizione contratto tipo vita
- $SCR_{nl}$  = Capitale richiesto per il rischio di sottoscrizione contratto tipo non vita
- $SCR_{health}$  = Capitale richiesto per il rischio di sottoscrizione contratto tipo malattia
- $SCR_{intang}$  = Capitale richiesto per il rischio intangibile
- $i, j = \{mkt, crd, life, health, nl\}$

Nel metodo standard,  $Corr$  corrisponde alla seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1 & 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 1 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo SCR totale è definito tramite

$$SCR = Adj + BSCR + SCR_{op}$$

in cui

- $Adj$  corrisponde agli aggiustamenti dovuti a perdite di capacità di assorbimento delle riserve tecniche e delle imposte differite.
- $SCR_{op}$  = Capitale richiesto per il rischio operativo



Inoltre la normativa prevede che il calcolo di SCR venga effettuato tramite l'utilizzo di modelli interni validati dalle Autorità di Vigilanza, al fine di scegliere un metodo che sia conforme alla natura, dimensione e complessità della compagnia. Sono riconosciuti 5 livelli di sofisticazione dei modelli: interno completo, formula standard, formula standard con parametri specifici, formula standard che è parzialmente sostituita da modelli interni (ad esempio per alcune sottoclassi di rischio) e formula standard con semplificazioni nel caso di piccole imprese. L'utilizzo dei precedenti modelli è a discrezione delle compagnie e deve essere conforme alle regole di base su cui è stata definita la formula standard.

In realtà lo SCR rappresenta il livello di capitale target che si dovrebbe accantonare, la soglia minima è definita dallo MCR (Minimum Capital Requirement) che corrisponde ad una percentuale compresa tra 25% e 45% dello SCR. Non appena il capitale della compagnia scende al di sotto dello MCR le Autorità di Vigilanza intervengono per revocare la licenza assicurativa. Se il capitale invece è al di sotto dello SCR, ma non dello MCR, la compagnia ha un periodo compreso tra i 6 e 9 mesi per poter recuperare il capitale mancante per il raggiungimento della soglia SCR.

### ***Fair Value***

Utilizzando un approccio basato sul rischio nella valutazione delle riserve tecniche da inserire nel bilancio della compagnia assicurativa, occorre definire un metodo di *fair value*. Tale metodologia deve rispettare i seguenti principi:

- le attività devono essere valutate all'importo al quale potrebbero essere scambiate tra parti consapevoli e consenzienti in un'operazione svolta alle normali condizioni di mercato;
- le passività devono essere valutate all'importo al quale potrebbero essere trasferite, o regolate, tra parti consapevoli e consenzienti in un'operazione svolta alle normali condizioni di mercato.

In tale valutazione delle passività non è effettuato alcun aggiustamento che tenga conto del merito di credito proprio dell'impresa di assicurazione.

In particolare nell'Articolo 77 in [EC 2009] si evince che il valore delle riserve è calcolato tramite la migliore stima, che corrisponde alla media dei flussi di cassa futuri ponderata con la probabilità che essi si materializzino, più un margine di rischio, che è un ammontare tale da garantire che il valore delle riserve tecniche sia equivalente all'importo di cui le imprese di assicurazione avrebbero bisogno per assumersi e onorare le obbligazioni di assicurazione per tutta la loro durata di vita. Qualora si conoscesse la distribuzione probabilistica, la migliore stima è banalmente il valore atteso di tutte le attività e passività future. In caso contrario, si utilizzano delle ipotesi realistiche o dei metodi attuariali e statistici adeguati per stimare la probabilità dei flussi di cassa futuri.

Il fair value può essere calcolato in due modi:

- Approccio Mark-to-Market MtM, basato sul principio secondo il quale il valore delle attività è definito in funzione dei prezzi correnti di mercato. Questo è considerato l'approccio di default, in quanto permette di valutare la reale situazione finanziaria della Compagnia, infatti non si effettua alcuna stima del valore degli asset ma si utilizzano le informazioni presenti realmente sul mercato.
- Approccio Mark-to-Model, da utilizzare nei casi in cui non sia possibile fare uso del precedente. Il principio di tale approccio è quello di estrapolare quante più informazioni possibili da strumenti osservabili sul mercato e quante meno da quelli non osservabili. Tale approccio è utilizzato per la valutazione di strumenti non quotati sul mercato o non replicabili, e nella maggior parte dei casi, delle passività.

## 1.2.2 Pilastro II

### Gestione del rischio e Vigilanza

Solvency II stabilisce un sistema efficace per la gestione dei seguenti settori:

- sottoscrizione e costituzione di riserve: rischio di perdite o di cambiamenti avversi nel valore delle passività, causato da inadeguati prezzi e riserve;
- gestione delle attività e delle passività: variazione del valore economico delle attività/passività possedute;
- investimenti, in particolare derivati ed impegni simili: rischio correlato al rischio di mercato;
- gestione dei rischi di liquidità e di concentrazione: rischi generati dall'incapacità di far fronte ai propri impegni;
- gestione dei rischi operativi;
- riassicurazione e altre tecniche di attenuazione del rischio: permettono di mitigare i rischi di una compagnia, generando possibili rischi di controparte.

Inoltre [CEIOPS 2009] introduce anche la gestione del rischio di credito, del rischio strategico (deriva dalla implementazione impropria di decisioni o dalla mancanza di reattività ai cambiamenti di mercato) e del rischio reputazionale (derivante dal deterioramento dell'immagine della compagnia).

Nel mondo assicurativo non vi è un'esplicita richiesta di aumento dei capitali da accantonare per la gestione del rischio in quanto questo rientra nel calcolo dello SCR, si ricordi

infatti che se i capitali richiesti giungono a livelli inferiori allo SCR, non vi è l'immediato intervento delle Autorità.

Anche per quanto riguarda la gestione dei rischi si possono utilizzare dei modelli parzialmente o totalmente interni. Tali modelli devono essere testati, convalidati e documentati, affinché le Autorità di Vigilanza possano intervenire prontamente e preventivamente in casi di forte stress finanziario, al fine di tutelare sia i contraenti che i beneficiari delle assicurazioni.

### 1.2.3 Pilastro III

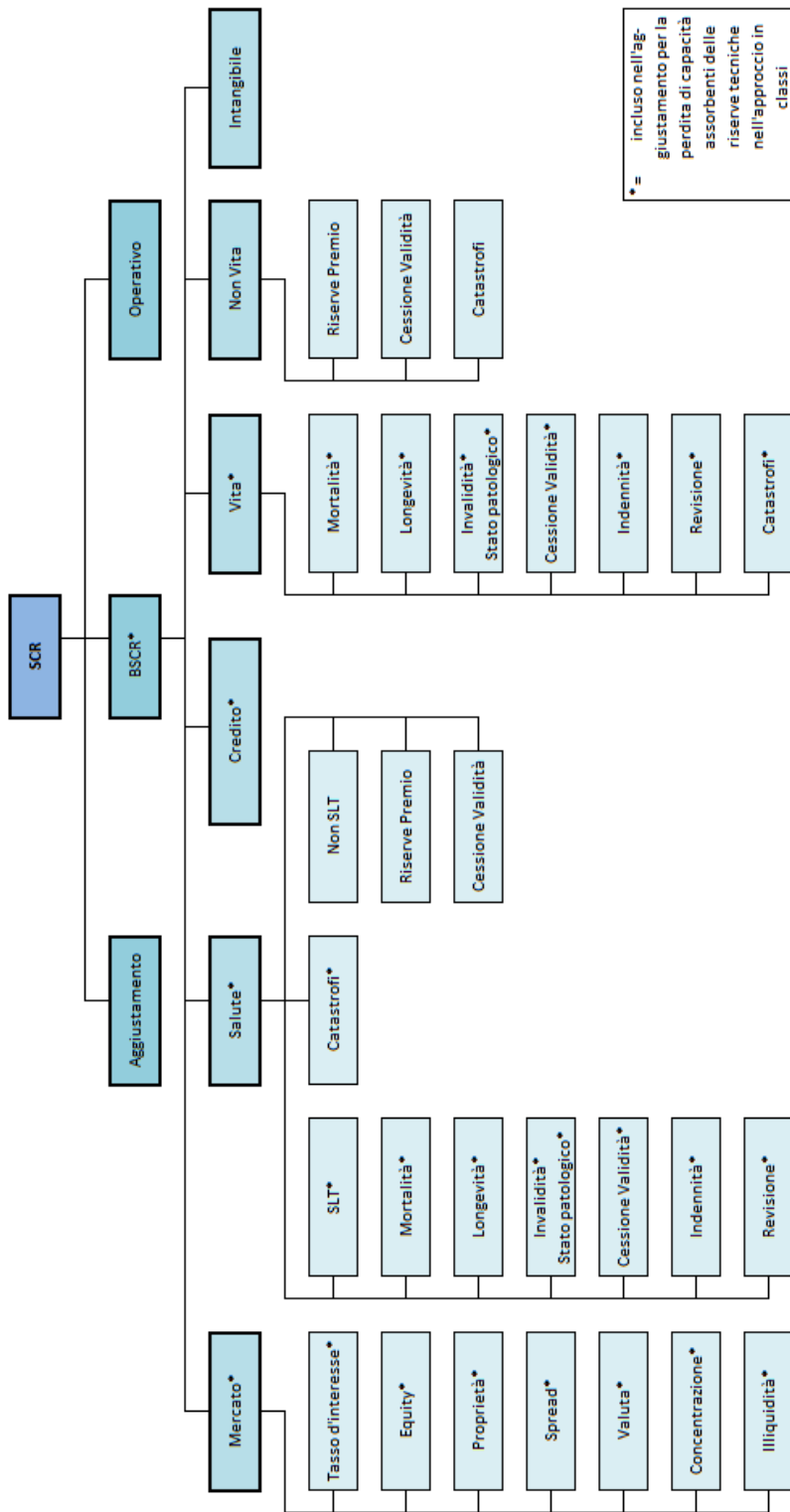
#### Disciplina di Mercato

L'ultimo obiettivo di Solvency II riguarda la promozione di una disciplina di mercato finalizzata alla trasparenza e all'armonizzazione delle imprese assicuratrici. A tal fine si necessita che le compagnie

- inviino annualmente una relazione al CEIOPS (Segnalazione di Vigilanza) contenente “la maggiorazione media del capitale per impresa e la distribuzione delle maggiorazioni del capitale imposte dall'autorità di vigilanza durante l'anno precedente, misurate in percentuale del requisito patrimoniale di solvibilità”, Articolo 52 [EC 2009]. Conseguentemente CEIOPS pubblica le informazioni acquisite riguardo la maggiorazione del capitale, a livello aggregato per tutti gli Stati membri, e la distribuzione delle maggiorazioni, singolarmente per ogni Stato.
- pubblichino una relazione annuale sulla loro solvibilità e condizione finanziaria (Informativa al Pubblico). Dall'Articolo 51 [EC 2009], tale relazione contiene in forma integrale:
  - una descrizione dell'attività e dei risultati dell'impresa;
  - una descrizione del sistema di governance e una valutazione della sua adeguatezza rispetto al profilo di rischio dell'impresa;
  - una descrizione, effettuata separatamente per ciascuna categoria di rischio, dell'esposizione al rischio, delle concentrazioni di rischio, dell'attenuazione del rischio e della sensibilità al rischio;
  - una descrizione, effettuata separatamente per le attività, le riserve tecniche e le altre passività, delle basi e dei metodi utilizzati per la loro valutazione, nonché la spiegazione di eventuali differenze rilevanti rispetto alle basi e ai metodi utilizzati per la loro valutazione nel bilancio;
  - una descrizione della gestione del capitale che includa: la struttura, l'importo e la qualità dei propri fondi; gli importi del requisito patrimoniale di solvibilità e del requisito patrimoniale minimo.

Occorre sottolineare che la Segnalazione di Vigilanza è imposta solo nel settore assicurativo e non bancario. Questa distinzione deriva dalla necessità che le compagnie assicuratrici pubblichino informazioni sia a livello singolo che a livello di gruppo, data l'assenza di interdipendenza tra le diverse compagnie assicurative, al contrario di quanto avviene per le banche.

Nel presente lavoro di tesi si focalizza l'attenzione sui primi due Pilastri della normativa: valutazione Mark-to-Market e gestione del rischio. In particolare si analizza in dettaglio la nuova metodologia di valutazione delle passività definita in [QIS5 2010b], come essa è influenzata dai movimenti dei tassi di mercato e come si possono generare delle strategie di copertura al fine di coprirsi da tale rischio.



\* = incluso nell'aggiustamento per la perdita di capacità assorbenti delle riserve tecniche nell'approccio in classi

Figura 1.1: Grafico delle classi e sotto-classi di rischio che compongono il BSCR (Basic Solvency Capital Requirement). Lo SCR è dato dalla somma tra l'aggiustamento per la perdita delle capacità assorbenti delle riserve tecniche (il cui calcolo è costruito sulle classi contrassegnate da \*), il BSCR e il capitale derivante dal rischio operativo. SLT=Technica Base Simile all'assicurazione sulla vita (similar technical basis to that of life insurance).

# Capitolo 2

## Metodo di Wilson Smith

La valutazione delle passività a lungo termine tramite metodi coerenti con il mercato garantisce la trasparenza nel calcolo di tali voci nel bilancio, ma di conseguenza le stesse sono caratterizzate da un'elevata volatilità. Inoltre, data l'assenza di strumenti liquidi che permettano di calcolare i fattori di sconto<sup>1</sup> per scadenze eccessivamente lontane, risulta necessario l'abbandono di tale valutazione in favore di altri modelli che siano più stabili nel trattamento di lunghe scadenze.

In [QIS5 2010b] si definisce un metodo di interpolazione-estrapolazione per il calcolo della curva di sconto denominato metodo di Wilson-Smith [Smith 2000]. Tale metodo utilizza i dati di mercato più liquidi per estrapolare i valori per le scadenze successive all'ultimo punto di liquidità *LLP* (Last Liquid Point), fissato nella pratica a 20 anni. Questa metodologia permette di ottenere un metodo di calcolo della curva di sconto che sia stabile e robusto, che rispecchi le condizioni attuali del mercato ed, allo stesso tempo, abbia un punto di equilibrio a lungo termine.

Nel metodo di Wilson-Smith, l'equilibrio a lungo termine è definito dallo UFR (Ultimate Forward Rate) che rappresenta il valore asintotico del tasso forward<sup>2</sup>. Lo *UFR* è calcolato

---

<sup>1</sup>Il fattore di sconto  $P(t, T)$  in  $t$  ad una data scadenza  $T$  rappresenta il valore assunto alla data  $t$  di un'unità in  $T$ , naturalmente se  $t = T$  il fattore di sconto deve valere 1. Utilizzando il di tasso privo di rischio  $r$ , il fattore di sconto è definito da

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathbb{F}_t \right]$$

in cui  $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathbb{F}_t]$  rappresenta il valore atteso condizionato all'informazione disponibile alla data  $t$ . Se si considera il fattore di sconto calcolato alla data  $t$  per tutte le possibili scadenze si parla di curva di sconto.

<sup>2</sup>Il tasso forward  $F_{s,e}(t)$  rappresenta il tasso d'interesse in  $t$  in riferimento ad un flusso calcolato in  $t_s$  e pagato in  $t_e$ . Utilizzando la nozione di fattore di sconto  $P(t, T)$  esso è definito dalla formula

$$F_{s,e}(t) = \left( \frac{P(t, t_s)}{P(t, t_e)} - 1 \right) \frac{1}{\delta(t_s, t_e)}$$

in cui  $\delta(t_s, t_e)$  è la frazione d'anno che intercorre tra le date  $t_s$  e  $t_e$  utilizzando la convenzione *Act/360*. In

come la somma del tasso di inflazione e di interesse a lungo periodo (rispettivamente 2% e 2.2%) ed equivale a 4.2%.

Al fine di riflettere le informazioni del mercato presenti nella parte liquida, il metodo di Wilson-Smith replica perfettamente i fattori di sconto annuali fino al LLP, senza introdurre degli aggiustamenti della curva, ed interpola per ottenere quelli in scadenze corrispondenti a frazioni di anno.

## 2.1 Definizione del metodo

In riferimento alla data attuale  $t_0 = 0$ , che nel presente lavoro di tesi corrisponde al 31/12/2013, la curva di sconto  $P(t)$  nel modello di Wilson-Smith, indicata in seguito come curva Wilson-Smith, è definita da

$$P(t) := \frac{1}{(1 + UFR)^t} + \sum_{i=1}^{LLP} \zeta_i W(t, u_i) \quad (2.1)$$

con

$$W(t, u) := \frac{1}{(1 + UFR)^{t+u}} \left[ \alpha \cdot \min(t, u) - e^{-\alpha \cdot \max(t, u)} \sinh(\alpha \cdot \min(t, u)) \right] \quad (2.2)$$

in cui i parametri  $u_i$  con  $i = 1, \dots, LLP$  rappresentano le scadenze in anni della parte liquida, le funzioni  $W(\cdot, \cdot)$  (Figura (2.1)) sono le funzioni nucleo del metodo di Wilson-Smith e le variabili  $\zeta_i$  con  $i = 1, \dots, LLP$  vengono definite imponendo che i fattori di sconto di Wilson-Smith delle scadenze liquide corrispondano a quelli della curva *Euribor*, calcolata tramite il bootstrapping<sup>3</sup> degli swap quotati sul mercato e del fixing dell'*Euribor* a 6 mesi (si veda la Tabella (2.1) a fine capitolo),  $m_i$  con  $i = 1, \dots, LLP$

$$m_i = P(u_i) = \frac{1}{(1 + UFR)^{u_i}} + \sum_{j=1}^{LLP} \zeta_j W(u_i, u_j)$$

---

caso si considerino scadenze successive  $t_s = t_{i-1}$  e  $t_e = t_i$  si utilizza la notazione  $F_i(t)$ .

<sup>3</sup>Con il termine bootstrapping si indica il calcolo dei fattori di sconto a partire dalle quote di mercato degli strumenti finanziari. Nel caso in esame si considerano gli Interest Rate Swap o semplicemente Swap, che sono dei contratti in cui due individui accettano di scambiarsi dei tassi di interesse in prefissati istanti fino alla scadenza  $t_n$ . Gli Swap considerati nel presente lavoro scambiano annualmente il tasso fisso  $S_n(t_0)$  (valore di mercato in  $t_0$  di uno swap a scadenza  $t_n$ ) in cambio del tasso forward *Euribor* con frequenza semestrale. Al fine di avere un contratto equo il valore attuale netto NPV dello Swap deve essere nullo

$$0 = S_n(t_0) \sum_{k=1}^n \delta(t_{k-1}, t_k) P(t_0, t_k) - \sum_{i=1}^n F_i(t_0) \delta^f(t_{i-1}, t_i) P(t_0, t_i)$$

in cui  $\delta(\cdot, \cdot)$  è la frazione d'anno che intercorre tra le scadenze annuali con la convenzione  $30/360$  e  $\delta^f(\cdot, \cdot)$  si riferisce alle scadenze semestrali del tasso variabile con la convenzione  $Act/360$ . Nell'ipotesi di un modello single-curve (stessa curva per il calcolo dei fattori di sconto e dei forward), utilizzando la formula del tasso forward *Euribor*, si ottiene il fattore di sconto in  $t_0$  riferito alla scadenza  $t_n$ . Considerando i tassi Swap in

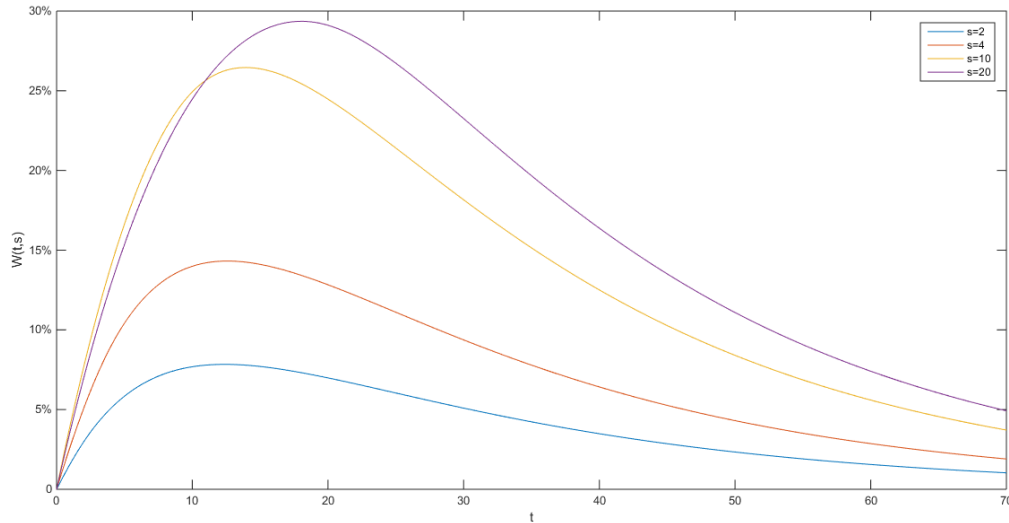


Figura 2.1: Rappresentazione delle funzioni di nucleo di Wilson-Smith al variare dei parametri di input con  $\alpha = 0.1$ .

in termini vettoriali

$$\underline{m} = \underline{\mu} + W\underline{\zeta}$$

con  $(\underline{m})_i = m_i$ ,  $(\underline{\zeta})_i = \zeta_i$ ,  $(W)_{ij} = W(u_i, u_j)$  e  $(\underline{\mu})_i = \frac{1}{(1+UFR)^{u_i}}$  con  $i, j = 1, \dots, LLP$ . Quindi le incognite  $\underline{\zeta}$  vengono calcolate dalla risoluzione del sistema lineare

$$\underline{\zeta} = W^{-1}(\underline{m} - \underline{\mu})$$

al variare delle scadenze  $t_n$ , si esegue il bootstrap iterativamente, ottenendo la curva di sconto

$$P(t_0, t_n) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \delta(t_0, t_n)S_n(t_0)} & \text{se } n = 1 \\ \frac{1 - S_n(t_0) \sum_{i=1}^{n-1} \delta(t_{i-1}, t_i) P(t_0, t_i)}{1 + \delta(t_{n-1}, t_n)S_n(t_0)} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Il fattore di sconto tra  $t_0$  e  $t_0 + 6m$  è dato dalla definizione del tasso di deposito a 6 mesi  $Euribor_{6m}(t_0)$

$$P(t_0, t_0 + 6m) = \frac{1}{1 + \delta(t_0, t_0 + 6m)Euribor_{6m}(t_0)}$$

Occorre specificare che sul mercato non si hanno a disposizione swap per ogni scadenza desiderata, quindi i tassi swap che non sono presenti sul mercato sono interpolati a partire da quelli quotati attraverso delle spline di tipo naturale. In particolare si impone la derivata prima nulla all'estremo di sinistra e la derivata seconda nulla a quello di destra, in modo tale da estrarre in maniera piatta gli swap con scadenze maggiori dell'ultimo quotato.



La matrice  $W$  è simmetrica ed invertibile, data l'impossibilità di esprimere una determinata riga/colonna della matrice  $W$  in funzione delle altre. A supporto di tale tesi, si è cercato empiricamente il valore del parametro  $\alpha$  in corrispondenza del quale il determinante della matrice  $W$  risulti nullo e si è osservato che la condizione è soddisfatta per valori estremamente piccoli, dell'ordine di  $10^{-6}$ , o negativi, in contrasto con quanto asserito nel [QIS5 2010b], in cui si afferma che studi empirici hanno mostrato che  $\alpha$  dovrebbe essere pari circa a 0.1, assicurando così risultati economicamente significativi.

### 2.1.1 Il metodo di Wilson-Smith in dettaglio

In questa sezione si mostra in dettaglio la dimostrazione rigorosa del metodo di Wilson-Smith come minimizzazione di un funzionale in presenza di vincoli, con un approccio diverso da quello seguito in [Smith 2000], partendo da un noto risultato di analisi funzionale.

**Teorema.** *La curva di sconto  $P(t)$  del metodo di Wilson-Smith corrisponde al minimo del seguente funzionale*

$$J(P) = \frac{1}{2\alpha^3} \int_0^\infty \left[ \frac{d^2}{dt^2} (e^{f_\infty t} P(t)) \right]^2 dt + \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty \left[ \frac{d}{dt} (e^{f_\infty t} P(t)) \right]^2 dt \quad (2.3)$$

sotto le condizioni che

$$P(0) = 1 \quad e \quad P(u_i) = m_i \quad \forall i = 1, \dots, LLP$$

*Osservazione 1.* I prefattori  $\alpha$  rendono il funzionale adimensionale e  $f_\infty = \ln(1 + UFR)$ .

La scelta di minimizzare un tale funzionale deriva dalla seguente semplice osservazione  
*Osservazione 2.* Si supponga che il tasso zero-rate<sup>4</sup>  $Z(t)$  sia circa uguale a  $f_\infty$  allora, considerando il fattore di sconto  $P(t)$ , risulta

$$e^{f_\infty t} P(t) \approx 1$$

e dallo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione  $\ln(1+x)$  si ottiene

$$\ln(e^{f_\infty t} P(t)) \approx e^{f_\infty t} P(t) - 1 \quad (2.4)$$

Dalla formula di calcolo del tasso forward  $f(t)$  in capitalizzazione continua  $P(t) = e^{-\int_0^t f(s) ds}$  e dalla differenziazione prima e seconda dell'espressione (2.4) si osserva

$$\frac{d}{dt} (e^{f_\infty t} P(t) - 1) \approx \frac{d}{dt} \ln(e^{f_\infty t} P(t)) = f_\infty + \frac{P'(t)}{P(t)} \quad (2.5)$$

---

<sup>4</sup>Tasso d'interesse  $Z(t_0, t)$  definito a partire dal fattore di sconto  $P(t_0, t)$  tramite la seguente relazione

$$Z_t = -\frac{\ln(P(t_0, t))}{\delta(t_0, t)}$$

dove  $\delta(t_0, t)$  è la frazione d'anno che intercorre tra  $t_0$  e  $t$  con la convenzione Act/365.

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( e^{f_\infty t} P(t) - 1 \right) \approx \frac{d}{dt} \left( \frac{P'(t)}{P(t)} \right) \quad (2.6)$$

Con  $\frac{P'(t)}{P(t)} = -f(t)$ . Alla luce di (2.5) e (2.6), si osserva che minimizzare il secondo addendo di (2.3) equivale ad imporre che il tasso forward sia quanto più vicino al tasso asintotico  $f_\infty$  mentre dalla minimizzazione del primo addendo si richiede che il tasso forward varii in modo abbastanza regolare.

Al fine di minimizzare il funzionale  $J$  si utilizza il seguente teorema, per la cui dimostrazione si rimanda a [Ito 2012] pag. 18.

**Teorema della Norma Minima.** *Sia  $X$  uno spazio di Hilbert dotato di prodotto scalare  $(\cdot, \cdot)_X$ , con norma associata  $|\cdot|_X$ , e si consideri il seguente problema*

$$\min_{x \in X} |x|_X^2 \text{ soggetto a } (x, y_i)_X = c_i, \quad i = 1, \dots, LLP$$

*Si supponga che  $\{y_i\}$  siano linearmente indipendenti. Allora esiste un'unica soluzione  $x^*$  al suddetto problema e  $x^* = \sum_{i=1}^{LLP} \underline{\beta}_i y_i$  dove  $\underline{\beta}$  soddisfa*

$$G\underline{\beta} = \underline{c}, \quad G_{ij} = (y_i, y_j)_X$$

*Dimostrazione.* Consiste in un'applicazione del Teorema della Norma Minima al caso in esame, definendo lo spazio di Sobolev

$$H^1(0, \infty) = \left\{ x : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), x \in L^2(0, \infty) : \frac{d}{dt} x \in L^2(0, \infty) \right\}$$

dotato del prodotto scalare

$$(x, y)_X = \frac{1}{\alpha^3} \int_0^\infty \left[ \frac{d}{dt} x(t) \right] \left[ \frac{d}{dt} y(t) \right] dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty x(t) y(t) dt$$

Si mostra come il problema può essere visto come una minimizzazione della norma nello spazio  $H^1(0, \infty)$ . Definendo la funzione  $u(t) = \frac{d}{dt} (e^{f_\infty t} P(t))$ , si esprime il funzionale (2.3) nella forma

$$J(u) = \frac{1}{2\alpha^3} \int_0^\infty \left[ \frac{d}{dt} u(t) \right]^2 dt + \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty u(t)^2 dt = \frac{1}{2} |u|_X^2$$

Affinchè le funzioni  $P(\cdot)$  appartengano allo spazio di Sobolev in questione, si richiede che  $P(\cdot)$  sia due volte differenziabile quasi ovunque in  $(0, \infty)$  e che

$$P(0) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} (e^{f_\infty t} P(t)) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2}{dt^2} (e^{f_{\infty} t} P(t)) = 0$$

oltre a  $P(u_i) = m_i \forall i = 1, \dots, LLP$ .

Dato che il funzionale che si vuole minimizzare è invariante per traslazioni rigide della funzione  $e^{f_{\infty} t} P(t)$  (si osservi che  $\frac{d}{dt} (e^{f_{\infty} t} P(t) + k) = \frac{d}{dt} (e^{f_{\infty} t} P(t))$  con  $k \in \mathbb{R}$ ), si definisce la funzione  $V(\cdot)$  tale che

$$e^{f_{\infty} t} V(t) := e^{f_{\infty} t} P(t) - 1 \quad (2.7)$$

da cui risulta

$$V(0) = 0 \text{ e } V(u_i) = m_i - e^{-f_{\infty} u_i} = c_i \forall i = 1, \dots, LLP$$

Quindi si applica il Teorema della Norma Minima sulle funzioni  $V(\cdot)$  che hanno condizione iniziale nulla e si ricercano le funzioni nucleo di Wilson-Smith  $W(t, u_i) = W_i(t)$  risolvendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^3} \int_0^{\infty} \left[ \frac{d^2}{dt^2} (e^{f_{\infty} t} W_i(t)) \right] \left[ \frac{d^2}{dt^2} (e^{f_{\infty} t} V(t)) \right] dt \\ + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} (e^{f_{\infty} t} W_i(t)) \right] \left[ \frac{d}{dt} (e^{f_{\infty} t} V(t)) \right] dt = c_i \end{aligned}$$

in cui le funzioni  $W_i(t)$  e  $V(t)$  sono due volte differenziabili quasi ovunque in  $(0, \infty)$  ed hanno le seguenti condizioni al bordo

$$V(0) = W_i(0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} (e^{f_{\infty} t} V(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} (e^{f_{\infty} t} W_i(t)) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2}{dt^2} (e^{f_{\infty} t} V(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^2}{dt^2} (e^{f_{\infty} t} W_i(t)) = 0$$

Si osserva che le suddette condizioni, a meno della condizione iniziale, sono le stesse di quelle richieste per la funzione  $P(\cdot)$ . Inoltre, considerando che

$$c_i = V(u_i) = e^{-f_{\infty} u_i} \int_0^{u_i} \frac{d}{dt} (e^{f_{\infty} t} V(t)) dt$$

e indicando con

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} (e^{f_{\infty} t} V(t)) \\ w_i(t) &= \frac{d}{dt} (e^{f_{\infty} t} W_i(t)) \end{aligned}$$

si ottiene

$$\frac{1}{\alpha^3} \int_0^\infty \frac{d}{dt} w_i(t) \frac{d}{dt} v(t) dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty w_i(t) v(t) dt = e^{-f_\infty u_i} \int_0^{u_i} v(t) dt$$

Utilizzando l'integrazione per parti, il teorema fondamentale del calcolo integrale e le condizioni al bordo risulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^3} \int_0^\infty \frac{d}{dt} w_i(t) \frac{d}{dt} v(t) dt + \frac{1}{\alpha} \left[ -v(t) \int_t^\infty w_i(s) ds \right]_0^\infty + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \left( \int_t^\infty w_i(s) ds \right) \frac{d}{dt} v(t) dt = \\ = -e^{-f_\infty u_i} \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0, u_i]}(t) \left( \int_t^\infty \frac{d}{ds} v(s) ds \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^3} \int_0^\infty \frac{d}{ds} w_i(s) \frac{d}{ds} v(s) ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty w_i(t) dt \right] \frac{d}{ds} v(s) ds + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \left( \int_t^\infty w_i(s) ds \right) \frac{d}{dt} v(t) dt = \\ = -e^{-f_\infty u_i} \int_0^\infty \frac{d}{ds} v(s) \left( \int_0^s \mathbb{1}_{[0, u_i]}(t) dt \right) ds \end{aligned}$$

Da cui si ricava la seguente formulazione debole o integrale della soluzione ricercata

$$\frac{1}{\alpha^3} \int_0^\infty \frac{d}{ds} v(s) \left[ \frac{d}{ds} w_i(s) - \alpha^2 \int_0^s w_i(t) dt + \alpha^3 e^{-f_\infty u_i} \int_0^s \mathbb{1}_{[0, u_i]}(t) dt \right] ds = 0$$

Dall'arbitrarietà di  $v$  si ricava la seguente formulazione forte

$$\frac{d}{ds} w_i(s) - \alpha^2 \int_0^s w_i(t) dt + \alpha^3 e^{-f_\infty u_i} \int_0^s \mathbb{1}_{[0, u_i]}(t) dt = 0$$

Ritornando alla variabile originaria  $W_i(t)$ , la funzione nucleo è data dalla risoluzione delle seguente equazione

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( e^{f_\infty t} W_i(t) \right) - \alpha^2 e^{f_\infty t} W_i(t) + \alpha^3 \min(t, u_i) e^{-f_\infty u_i} = 0$$

Definendo la variabile  $\hat{W}_i(t) := W_i(t) e^{f_\infty t}$  si ottiene un'equazione differenziale ordinaria nella funzione  $\hat{W}_i(t)$ . Utilizzando la trasformata di Laplace, e la condizione sul valore iniziale della funzione, si ottiene

$$s^2 U(s) - k - \alpha^2 U(s) + \alpha^3 e^{-f_\infty u_i} \frac{1 - e^{-s u_i}}{s^2} = 0$$

In cui si indica con  $k$  la condizione sulla derivata della funzione  $\hat{W}_i$  in 0 e  $\frac{1 - e^{-s u_i}}{s^2}$  la trasformata di Laplace della funzione  $\min(t, u_i)$ .

Utilizzando l'antitrasformata di Laplace e la linearità della stessa

$$\hat{W}_i(t) = k \frac{\sinh(\alpha t)}{\alpha} - e^{-f_\infty u_i} \sinh(\alpha t) + e^{-f_\infty u_i} \alpha t + e^{-f_\infty u_i} (\sinh(\alpha(t - u_i)) - \alpha(t - u_i)) \mathbb{1}_{[u_i, \infty)}(t)$$

Dalla scomposizione del dominio della funzione

$$\hat{W}_i(t) = k \frac{\sinh(\alpha t)}{\alpha} - e^{-f_\infty u_i} \sinh(\alpha t) + e^{-f_\infty u_i} \begin{cases} \alpha t & t \leq u_i \\ \alpha u_i + \sinh(\alpha(t - u_i)) & t \geq u_i \end{cases}$$

Imponendo la condizione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \hat{W}_i(t) = 0$$

ed utilizzando la definizione delle funzioni iperboliche, si ricava il valore dell'incognita

$$k = \alpha e^{-f_\infty u_i} (1 - e^{-\alpha u_i})$$

Si osserva inoltre che tale valore dell'incognita verifica anche la condizione sulla derivata seconda. Tramite successive semplificazioni, si esplicita la funzione

$$\hat{W}_i(t) = e^{-f_\infty u_i} [\alpha \cdot \min(t, u_i) - e^{-\alpha \cdot \max(t, u_i)} \sinh(\alpha \cdot \min(t, u_i))]$$

da cui si ritrova (2.2)

$$W(t, u_i) = W_i(t) = e^{-f_\infty(t+u_i)} [\alpha \cdot \min(t, u_i) - e^{-\alpha \cdot \max(t, u_i)} \sinh(\alpha \cdot \min(t, u_i))]$$

Tale risultato conferma la lineare indipendenza degli  $\{y_i\}$ , per quanto osservato in fase di definizione del modello. Inoltre, attraverso una semplice integrazione, si verifica che

$$(y_i, y_j)_X = W(u_i, u_j)$$

per ogni  $i, j = 1, \dots, LLP$ .

Applicando il teorema della minimizzazione della norma, la funzione che minimizza il funzionale è

$$V^*(t) = \sum_{i=1}^{LLP} z_i \cdot W_i(t)$$

Da cui il vettore di incognite  $\underline{z}$  sono calcolate risolvendo il sistema

$$\underline{c} = \mathbb{W} \underline{z}$$

con  $\underline{c}$  vettore di componenti  $m_i - e^{-f_\infty u_i} \forall i = 1, \dots, LLP$  e  $\mathbb{W}$  matrice quadrata di dimensione LLP con componenti  $(\mathbb{W})_{i,j} = W_i(u_j) = W(u_i, u_j)$ .

Utilizzando la (2.7), si ricava il fattore di sconto  $P^*(\cdot)$  che minimizza il funzionale (2.3)

$$P^*(t) = e^{-f_\infty t} + \sum_{i=1}^{LLP} z_i W_i(t)$$

che corrisponde al fattore di sconto definito dalla formula di Wilson-Smith (2.1). □

## 2.2 Calibrazione del metodo

Dalle definizioni (2.1) e (2.2) si osserva che il modello, fissati i parametri  $u_i$  e  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, LLP$ , è funzione della variabile  $\alpha$  che rappresenta la velocità di convergenza del tasso forward allo UFR. Al fine di semplificare le notazioni utilizzate, il tasso forward verrà indicato con la funzione  $F_t$  che corrisponde al tasso calcolato in 0 in riferimento al periodo che intercorre tra  $[t-1, t]$  con  $t$  espresso in anni ed in tal caso la formula di calcolo del tasso diventa

$$F_t = \frac{P(t-1)}{P(t)} - 1$$

con  $P(t)$  fattore di sconto tra zero e  $t$ . Nel caso si consideri il modello di Wilson-Smith si utilizza  $P(t)$  definito da (2.1) ed il forward  $F_t^{WS}$ .

Al fine di specificare il grado di velocità, occorre definire un istante di tempo  $T_{conv}$  in cui verificare se si è “abbastanza vicini” allo UFR.

Dal [QIS5 2010b] si osserva che occorre considerare  $T_{conv}$  compreso tra 70 e 120 anni e che si ritiene che il tasso forward di Wilson-Smith in  $T_{conv}$  è “vicino” allo UFR se si verifica

$$\left\| UFR - F_{T_{conv}}^{WS} \right\| \leq 3bp \quad (2.8)$$

in cui  $1bp \equiv 0.01\%$ .

La scelta di  $T_{conv}$  ha delle ripercussioni a livello di stabilità del tasso forward: se la convergenza avviene in tempi brevi, da un lato si stabilizza il valore del tasso allo UFR ma dall'altro si è maggiormente soggetti ad eventuali modifiche del tasso asintotico.

L'incognita  $\alpha$  del modello di Wilson-Smith è calibrata tramite la seguente procedura iterativa:

1. Si fissa il valore iniziale  $\alpha = 0.1$ ;
2. Si verifica la condizione (2.8)
  - 2.a Se è verificata, il valore dell'incognita è  $\alpha$ ;
  - 2.b Se non è verificata, si calcola un nuovo  $\alpha$  e si ritorna al punto 2.

Nel presente lavoro si considera un  $T_{conv}$  pari a 70 anni, come suggerito in [QIS5 2010b]. Inoltre empiricamente si verifica che il valore iniziale  $\alpha = 0.1$  soddisfa la condizione (2.8).

## 2.3 Commenti sul metodo di Wilson-Smith

Il metodo di Wilson Smith presenta diversi vantaggi e svantaggi.

I principali aspetti positivi sono rappresentati dalla trasparenza e semplicità a livello di implementazione, oltre all'assenza di aggiustamenti dei fattori di sconto di mercato nella

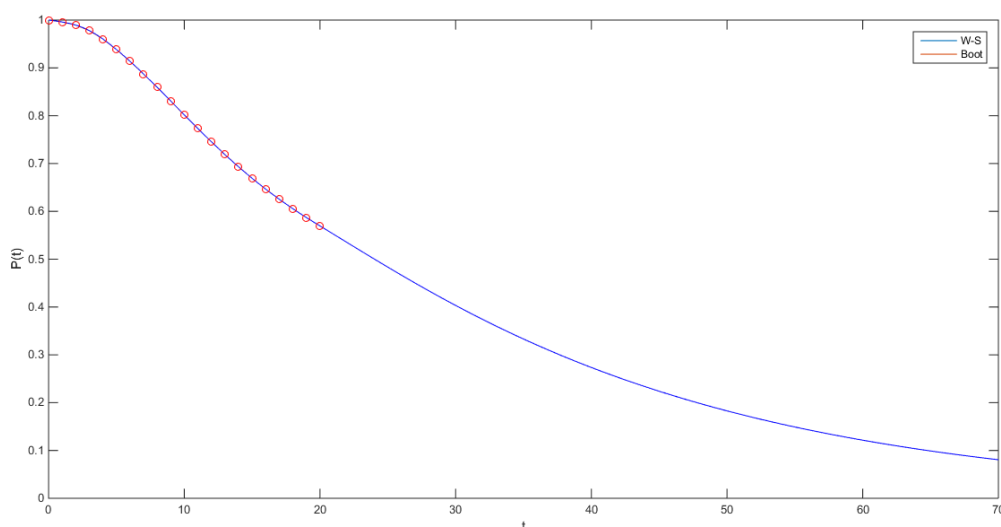


Figura 2.2: Rappresentazione grafica del fattore di sconto di Wilson-Smith, con particolare attenzione sulla capacità interpolativa-estrapolativa tra i fattori di sconto calcolati con il Bootstrap della curva swap in scadenze che vanno da 0 a 70 anni di passo 0.2. Si verifica inoltre il fit perfetto dei fattori di sconto di mercato nelle scadenze annuali della parte liquida.

parte liquida. Inoltre tale metodo è definito in modo tale da avere insieme sia la fase di estrapolazione che di interpolazione. A verifica di quest'ultimo aspetto si osservi Figura (2.2) in cui è stato calcolato il fattore di sconto di Wilson-Smith in maniera “continua”.

Gli svantaggi del metodo riguardano principalmente il fatto che il valore del tasso forward nelle scadenze successive a  $t_{20}$  dipende anche dai bucket temporali precedenti e che il modello non tiene conto delle informazioni derivanti dalla parte semi-liquida, le scadenze successive a LLP, dato che le uniche informazioni utilizzate riguardano i fattori di sconto di mercato nelle scadenze  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, LLP$ .

Al fine di cercare di ovviare al secondo svantaggio, [Kocken 2012] propone come soluzione di abbandonare il metodo imposto da Solvency II in favore del metodo di Wilson-Smith Alternativo.

### 2.3.1 Metodo di Wilson-Smith Alternativo

Al fine di utilizzare le informazioni dettate dal mercato anche in scadenze che siano semi-liquide (nella parte successiva a LLP), in [Kocken 2012] si propone il modello definito

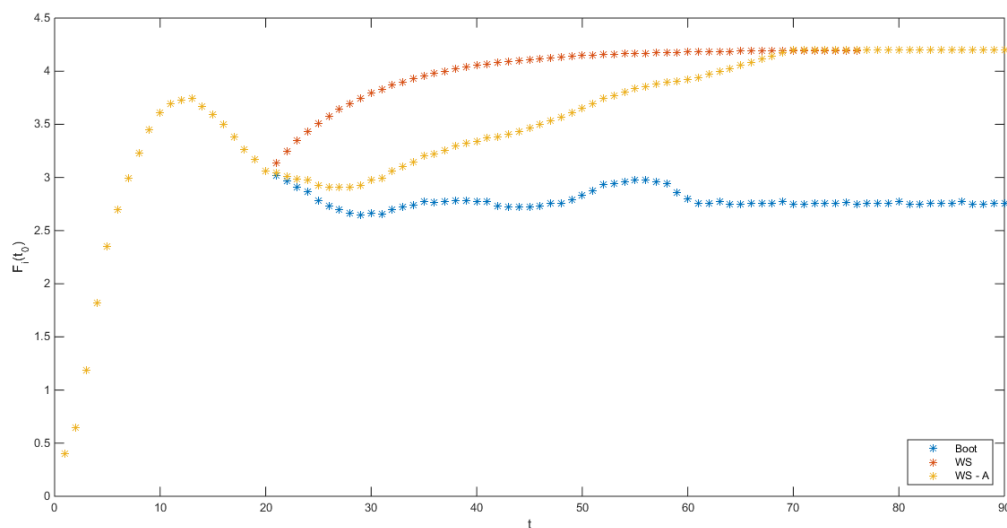


Figura 2.3: Confronto tra il tasso forward (in percentuale) calcolato in  $t_0$  nei diversi metodi: Bootstrap della curva swap, Wilson-Smith e Wilson-Smith Alternativo.

da

$$F_t^{WS-A} = \begin{cases} F_t^{Boot} & t \leq LLP \\ (1 - \omega(t))F_t^{Boot} + \omega(t) \cdot UFR & LLP \geq t \geq T_{conv} \\ UFR & t \geq T_{conv} \end{cases}$$

con  $\omega(t)$  una funzione che definisce dei pesi crescenti e  $T_{conv}$  rappresenta la scadenza in cui convergere allo UFR. Imponendo la continuità del tasso forward definito con il modello alternativo, la funzione  $\omega(t)$  deve valere 1 per  $t = LLP$  e UFR per  $t = T_{conv}$ .

Nel caso in esame si considera una funzione lineare nel parametro  $t$ , da cui si ottiene

$$\omega(t) = \frac{UFR - F_{LLP}^{Boot}}{T_{conv} - LLP} (t - LLP) + F_{LLP}^{Boot}$$

In generale si potrebbe utilizzare una qualsiasi funzione purchè si imponga la continuità del tasso forward. Tale metodo, per definizione, risente completamente dei dati di mercato nella parte precedente a  $t_{LLP}$  e poi man mano che si va oltre a tale scadenza, tale influenza diminuisce fino ad annullarsi.

Occorre notare che la metodologia proposta da [Kocken 2012] non può essere applicata realmente nel settore assicurativo in quanto questa comporterebbe l'abbandono del metodo imposto dalla normativa. Risulta invece applicabile nel settore pensionistico.

Infine in Figura (2.3) è rappresentato il tasso forward definito nei diversi metodi al fine di comparare tali modelli nel loro insieme. A tal proposito sarebbe opportuno verificare come



le diverse curve di sconto generate valutano un portafoglio di passività di una compagnia di assicurazione di medie dimensioni.

## 2.4 Valutazione delle passività

Dalle precedenti definizioni, si osserva che, imponendo la convergenza asintotica del tasso forward all'UFR, si richiede che i tassi a lungo termine siano fissati ad un determinato valore desiderato, che risulta del tutto distante dal valore che si avrebbe nella realtà. Infatti dal tasso forward calcolato tramite il bootstrap della curva swap si osserva un tasso medio di lungo periodo pari a 2.75% (quasi la metà di quello imposto da Wilson-Smith).

Quindi attraverso l'introduzione dei metodi in esame, le passività assumeranno dei valori più bassi, in termini assoluti, favorendo le compagnie assicurative che dovranno accantonare dei requisiti di capitali minori.

Nel presente lavoro si considera l'ipotesi di run-off che rappresenta la situazione in cui la Compagnia non genera nuovi contratti, quindi si ipotizza che le prestazioni previste restino costanti nel tempo. A titolo di esempio, si considerino i flussi di cassa (CF) in Figura (2.4) che rappresentano le prestazioni che una compagnia deve sostenere durante un normale periodo di attività al fine di far fronte ai propri doveri nei confronti dei propri clienti. Nel caso in esame si considera il caso tipico in cui si prevede di dover pagare prestazioni per i prossimi 80 anni.

Dalla valutazione delle passività nei diversi metodi

Bootstrap	=	-3,460,002,694.98 €
Wilson-Smith	=	-3,373,565,846.47 €
Wilson-Smith Alternativo	=	-3,431,429,388.94 €

si osserva che il metodo di Wilson-Smith, tra tutti, produce un valore minore (in termini assoluti) in linea con quanto affermato in precedenza e che il metodo di Wilson-Smith Alternativo invece non produce un sostanziale deprezzamento delle passività. In relazione alla valutazione effettuata con la curva *Euribor* il metodo di Wilson-Smith produce un decremento di 2.5% mentre il metodo di Wilson-Smith Alternativo di 0.8%.

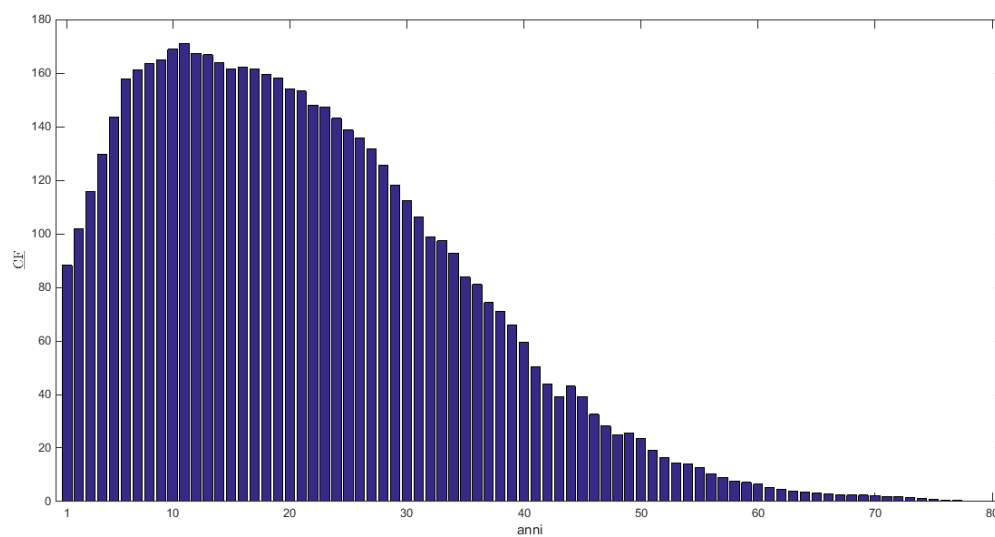


Figura 2.4: Esempio di passività (in milioni di Euro) a cui è soggetta una compagnia assicuratrice di medie dimensioni, nei diversi anni sotto l'ipotesi di run-off.

<i>Scadenza</i>	<i>Quota di mercato %</i>
6M	0.389
1Y	0.404
2Y	0.524
3Y	0.743
4Y	1.007
5Y	1.266
6Y	1.492
7Y	1.691
8Y	1.867
9Y	2.025
10Y	2.164
11Y	2.283
12Y	2.384
13Y	2.469
14Y	2.538
15Y	2.594
16Y	2.638
17Y	2.671
18Y	2.695
19Y	2.713
20Y	2.726
25Y	2.752
30Y	2.744
40Y	2.744
50Y	2.745
60Y	2.758

Tabella 2.1: Quote di mercato dei tassi swap (valore medio tra BID e ASK), in funzione delle scadenze, e del fixing dell'Euribor a 6m presenti sul mercato alla data  $t_0=31/12/2013$ .

## Capitolo 3

# Sensitivity rispetto al tasso d'interesse nel Modello di Wilson-Smith

Nel presente lavoro di tesi si vuole focalizzare l'attenzione sul rischio di mercato e sulle conseguenze che esso comporta, quindi verranno trattate solo le passività. Naturalmente ogni compagnia assicurativa possiede anche degli attivi finanziari che sono influenzati dal movimento dei tassi, ma “tipicamente” tale influenza è di segno opposto a quello delle passività. Tuttavia gli asset sono normalmente con una duration<sup>1</sup> molto inferiore (tipicamente inferiore ai 20 anni) alle passività del ramo “vita” di una tipica assicurazione (cfr. ad esempio Figura (2.4)). Il rischio della compagnia è dato dalla non corrispondenza di duration tra attivi e passivi e dalle complessità nella gestione del rischio attraverso il metodo di Wilson-Smith.

Nel caso considerato in questa tesi si considera un'assicurazione dove le prestazioni assicurative non dipendono in alcun modo dai rendimenti realmente ottenuti nel portafoglio degli attivi. In questo caso il problema è separabile e permette di considerare unicamente le passività.

Nei prossimi capitoli verrà trattato uno degli argomenti chiave di Solvency II, che costituisce uno dei Pilastri della normativa: la gestione del rischio di mercato causato da movimenti del tasso d'interesse. Dalla valutazione Mark-to-Market delle passività, tale rischio si manifesta nel seguente modo: se i tassi diminuiscono, il valore assoluto delle passività aumenta. Nel presente capitolo si studierà la propagazione dei movimenti dei tassi sui portafogli delle passività posseduti dalla compagnia, e come queste cambiano in funzione delle diverse metodologie di valutazione. A tal fine occorre definire la sensibilità di uno strumento a variazioni di determinati input: le sensitivity.

---

<sup>1</sup>In questo caso con il termine duration si intende la media delle scadenze dei flussi finanziari del portafoglio in questione, ponderata per il valore attuale dei flussi stessi.

### 3.1 Definizione delle Sensitivity

In termini matematici, le sensitivity possono essere definite tramite delle derivate parziali rispetto alle variabili che ne determinano il valore. Nel caso di valutazione del valore attuale di un portafoglio in un modello single-curve, le sensitivity più utilizzate sono la zero-rate sensitivity, calcolata rispetto alla variazione dello zero-rate, ed il DV01, (Dollar Value of an 01) definito sulla base dello shift di  $1bp$  del tasso swap che è utilizzato come input per il bootstrap.

Dalle formule di calcolo del bootstrap della curva swap e dalla definizione di zero-rate la relazione che lega le due sensitivity è la seguente

$$\frac{\partial S_n}{\partial Z_i} = \begin{cases} \frac{1-P(t_n)}{(BPV_n)^2} (t_i \delta_i P(t_i)) & i < n \\ \frac{1-P(t_n)}{(BPV_n)^2} (t_i \delta_i P(t_n)) + \frac{t_n P(t_n)}{BPV_n} & i = n \\ 0 & i > n \end{cases} \quad (3.1)$$

dove

- $S_n$  tasso swap con scadenza  $t_n$  in  $t_0 = 0$ ,
- $Z_i$  zero-rate con scadenza  $t_i$ ,
- $P(\cdot)$  è la curva di sconto bootstrappata dai dati di mercato,
- $\delta_i$  è la frazione d'anno in 30/360 tra le date  $t_{i-1}$  e  $t_i$  con  $1 = 1, \dots, n$ ,
- $BPV_n = \sum_{i=1}^n \delta_i P(t_i)$  è detto Basis Point Value.

In termini matriciali (3.1) rappresenta lo Jacobiano del tasso swap rispetto allo zero-rate. Si può osservare che tale matrice è triangolare superiore e, grazie alla stretta positività degli elementi diagonali, invertibile. Attraverso (3.1) è possibile passare da una sensitivity all'altra.

Dallo sviluppo di Taylor della differenza tra il fattore di sconto in  $t_n$  perturbato sul tasso swap  $S_i$  e quella non perturbata

$$P^i(t_n) - P(t_n) = \frac{\partial P(t_n)}{\partial S_i} \cdot 1bp + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(t_n)}{\partial S_i^2} \cdot (1bp)^2 + \dots$$

si osserva che la suddetta differenza può essere considerata lineare nello shift dato che il termine quadratico è trascurabile essendo circa quattro ordini di grandezza inferiore, quindi

$$P^i(t_n) - P(t_n) \approx \frac{\partial P(t_n)}{\partial S_i} \cdot 1bp$$

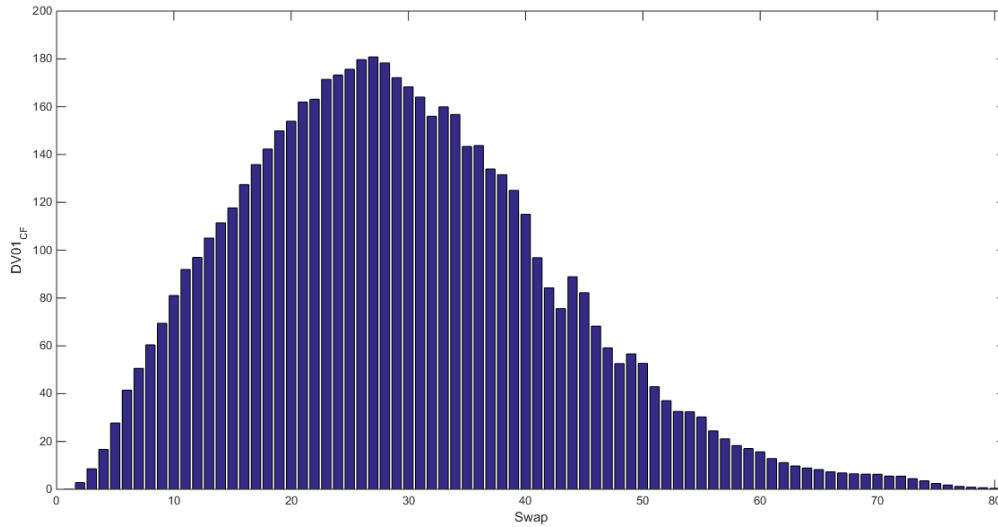


Figura 3.1: DV01 (in migliaia) delle passività calcolate con la curva *Euribor*.

in cui

$$\frac{\partial P(t_n)}{\partial S_i} = \begin{cases} -\frac{\delta_n}{(1+\delta_n S_n)^2} & n = i \\ \frac{1}{1+\delta_n S_n} \frac{\delta_i^2}{(1+S_i \delta_i)^2} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{n-i-1} \prod_{j=k}^{n-i-1} \left( \frac{-\delta_{n-j}}{1+S_{n-j} \delta_{n-j}} \right) \right] & i < n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

Quindi, nel bootstrap, uno shift positivo produce un abbassamento di circa  $1bp$  del fattore di sconto in corrispondenza della scadenza dello swap e una lieve perturbazione verso l'alto per le scadenze maggiori. Utilizzando tale curva di sconto, si definisce il DV01 delle passività  $\underline{CF}$  come il vettore costituito dalle componenti

$$(\underline{DV01}_{CF})_i = \sum_{n=1}^{N_{CF}} CF_n \left( P^i(t_n) - P(t_n) \right) \quad (3.2)$$

con  $i = 1, \dots, N_{CF}$ . Naturalmente, se si considerassero perturbazioni successive all'ultimo flusso di cassa, queste non sarebbero osservabili in quanto il fattore di sconto in  $t_{N_{CF}}$  non dipende dal tasso swap con scadenza  $t_{N_{CF}+1}$ . Quindi nel caso del Bootstrap il DV01 avrà ogni componente proporzionale al flusso di cassa che si riscontra in quella determinata scadenza, come si nota da Figura (3.1).

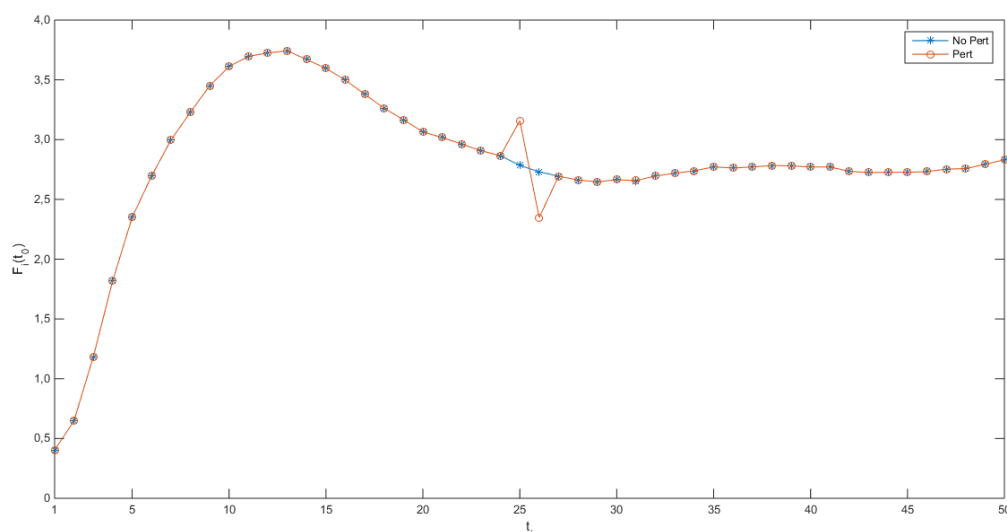


Figura 3.2: Esempio di come Confronto tra il tasso forward (in percentuale) generato con la curva *Euribor* nel caso si perturbi il tasso swap con scadenza  $t_{25}$  di  $1bp$  e il caso non si effettui alcuno shift, al fine di osservare come si propaga tale perturbazione sul tasso forward.

## 3.2 Analisi del DV01 nel metodo di Wilson-Smith e Wilson-Smith Alternativo

Per costruzione, sia il metodo di Wilson-Smith che quello Alternativo replicano perfettamente i fattori di sconto generati con il bootstrap nelle prime LLP scadenze. Quindi perturbazioni su tali bucket temporali si mantengono intatte anche negli altri metodi. Se invece si considerano perturbazioni su swap con scadenze successive a  $t_{LLP}$  i diversi metodi hanno dei comportamenti nettamente differenti.

Al fine di analizzare nel dettaglio le sensitivity che si hanno attraverso il metodo di Wilson-Smith e Wilson-Smith Alternativo, si studierà come la perturbazione sul tasso swap si propaga sul tasso forward. Occorre sottolineare che si fa riferimento al tasso forward in quanto il metodo di Wilson-Smith, per definizione, introduce un asintoto (UFR) a cui converge tale tasso. Quindi si studia il tasso forward al fine di osservare come le perturbazioni sui tassi swap modifichino la convergenza all'UFR.

Come osservato in precedenza, la curva di sconto generata dal bootstrap subisce una consistente perturbazione nella scadenza in cui è stato perturbato il tasso swap, di conseguenza sul tasso forward si genera uno spike: se si perturba il tasso swap con scadenza  $t_n$ , il tasso forward, poichè dipende da coppie successive di fattori di sconto, subisce uno shift

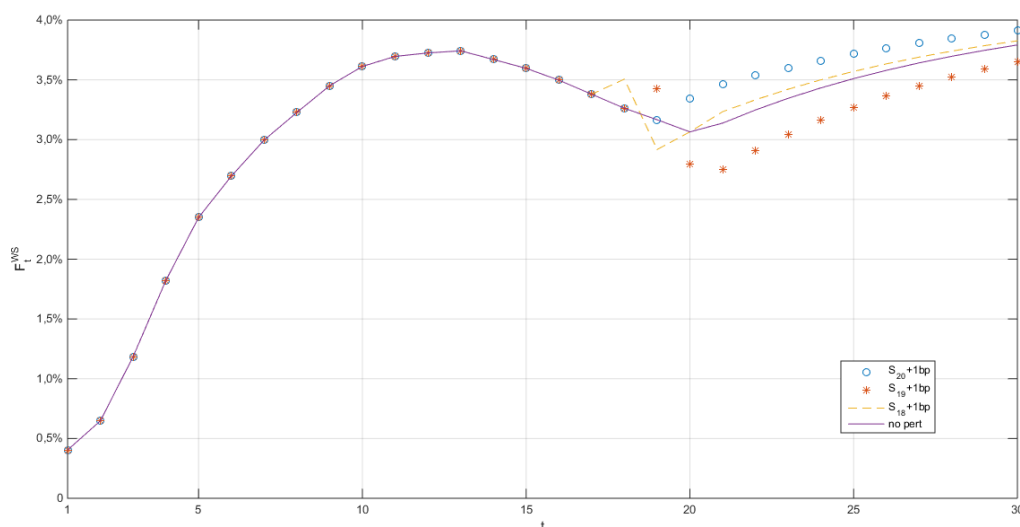


Figura 3.3: Confronto tra le diverse tipologie di convergenza allo UFR, determinate dai valori assunti nella regione liquida. Sono stati considerati i tre casi: perturbazione del tasso swap con scadenza 18 anni, 19 anni, 20 anni e caso privo di perturbazioni.

positivo in  $t_n$ , uno negativo in  $t_{n+1}$  e nullo altrove (si veda Figura (3.2)).

### 3.2.1 Caso di Wilson-Smith

Nel precedente capitolo si era osservato che la parte liquida determina il valore assunto dal tasso forward nella parte non liquida. Quindi differenti conformazioni di tale tasso nei punti che vanno da 1 a 20 generano diverse situazioni nella parte non liquida.

Si consideri per il momento una versione semplificata del metodo di Wilson-Smith, in cui si ipotizza che il tasso forward calcolato tramite tale metodo per scadenze successive a  $t_{20}$  sia una semplice convergenza esponenziale verso lo UFR a partire dal tasso forward sul 20-esimo anno. In tal caso, si osserva che perturbando il tasso swap con scadenza  $t_{19}$ , il forward  $F_{20}(t_0)$  subisce uno shift verso il basso, abbassando il punto di partenza dell'esponenziale rispetto al caso non perturbato. Se invece la perturbazione è effettuata sulla scadenza  $t_{20}$ , si genera una convergenza che parte da un punto più alto.

Inoltre, poichè nella realtà il forward generato dal metodo di Wilson-Smith non dipende solo dalla scadenza  $t_{20}$ , ma anche dalle precedenti, non si hanno solo i due movimenti suddetti, ma si verifica che la convergenza allo UFR è determinata anche da perturbazioni su scadenze  $t_{16}$ ,  $t_{17}$  e  $t_{18}$ , come si evince da Figura (3.3), in quanto anche queste ultime determinano il tasso forward nelle scadenze non liquide.



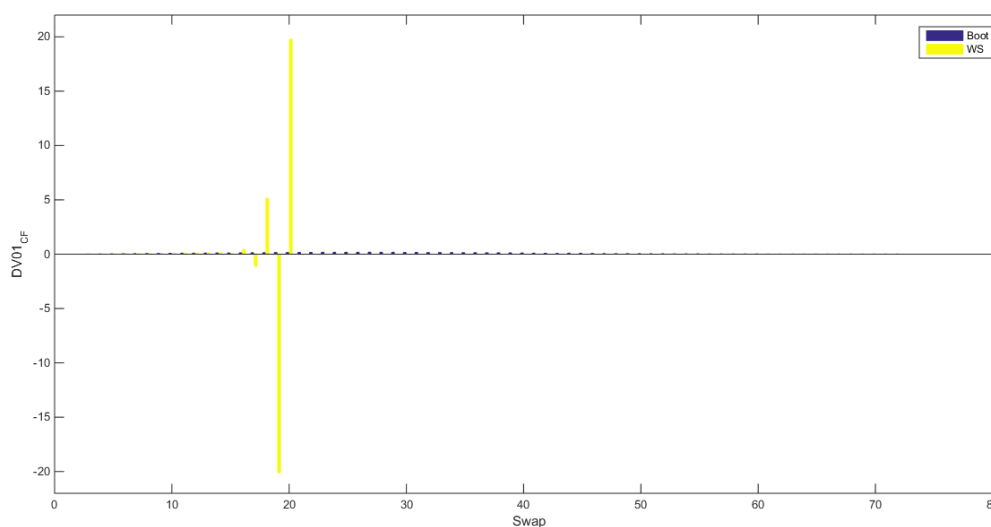


Figura 3.4: Confronto tra DV01 (in milioni) delle passività calcolati attraverso la curva Wilson-Smith e la curva *Euribor*, perturbando i singoli tassi swap di  $1bp$ . Nel primo caso si osservano dei picchi che sono circa tre ordini di grandezza superiori rispetto al secondo.

Naturalmente, tale andamento oscillatorio del tasso forward perturbato attorno a quello non perturbato, si ritrova nel calcolo del DV01 nel caso di Wilson-Smith (calcolato attraverso la formula (3.2)), dato che le passività della parte non liquida saranno pesate in diverso modo a seconda della perturbazione che si considera. In particolare, considerando principalmente gli shift sui tassi swap con scadenze  $t_{19}$  e  $t_{20}$ , si nota che con lo shift sul 20-esimo anno si osserva un abbassamento della curva Wilson-Smith, con conseguente incremento del DV01 delle passività in corrispondenza di tale shift, mentre con lo shift sul 19-esimo anno si genera un innalzamento della curva Wilson-Smith, con un conseguente DV01 fortemente negativo sul 19-esimo. Tale fenomeno si propaga in maniera smorzata procedendo a ritroso, mentre per perturbazioni su swap con scadenze successive a  $t_{20}$  il DV01 è nullo.

Come mostrato in Figura (3.4), dal confronto delle sensitivity calcolate attraverso il bootstrap della curva swap ed il metodo di Wilson-Smith, si nota che se da un lato Wilson-Smith genera delle Sensitivity solo nella parte liquida, dall'altro le passività presenti in scadenze maggiori di LLP si riversano su quelle liquide, in particolare sui bucket che vanno dal 16 al 20. Tale comportamento genera delle differenze sostanziali da un punto di vista quantitativo, oltre che qualitativo, infatti sui bucket temporale  $t_{20}$  e  $t_{19}$  nel metodo di Wilson-Smith si osservano dei picchi che sono 1000 volte più grandi delle sensitivity calcolate con il bootstrap.

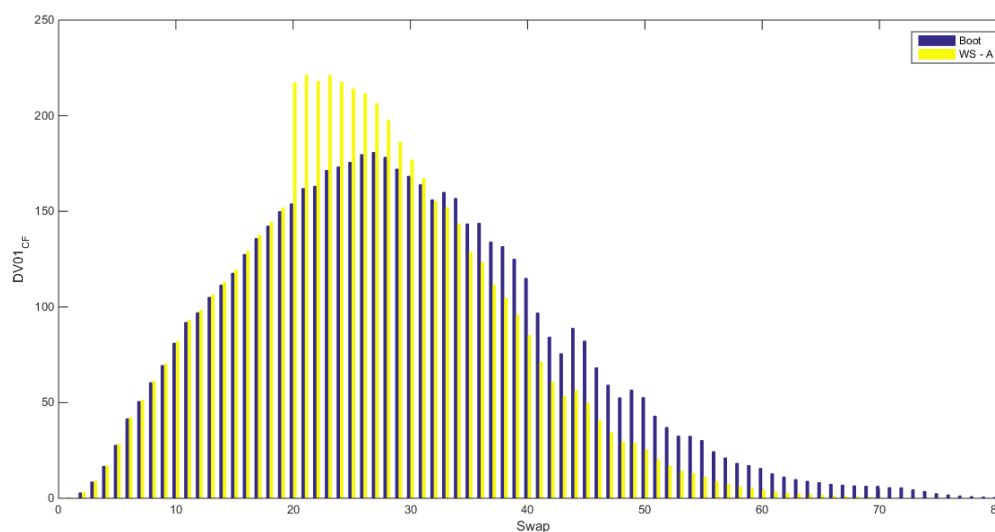


Figura 3.5: Confronto tra le DV01 (in migliaia) ottenute attraverso il metodo di Wilson-Smith Alternativo ed il Bootstrap della curva swap.

### 3.2.2 Caso di Wilson-Smith Alternativo

Quest'ultimo caso, per costruzione, presenta delle caratteristiche comuni ai due casi precedenti (Bootstrap e Wilson-Smith). Se si considerano delle perturbazioni sui tassi swap con scadenze superiori o uguali a  $T_{conv}$ , queste non si osservano poichè il tasso forward ha già raggiunto il tasso asintotico UFR. Tutte le altre perturbazioni invece vengono osservate in modi diversi:

- per perturbazioni sulla parte liquida, queste generano una configurazione uguale al caso del bootstrap,
- per shift sulla parte semi-liquida (tra LLP e  $T_{conv}$ ), si hanno delle perturbazioni che si smorzano a causa della presenza della funzione peso, fino ad azzerarsi, con conseguente convergenza all'UFR.

Quindi il DV01 nel caso di Wilson-Smith Alternativo per le scadenze liquide risulta molto simile alle sensitivity del bootstrap, come si osserva da Figura (3.5). Focalizzando l'attenzione sugli shift sui tassi swap con scadenze semi-liquide, si osserva la combinazione dei due effetti sopra descritti: nelle scadenze appena successive al  $t_{20}$  si ha da un lato l'innalzamento del tasso forward e dall'altro la perturbazione del bootstrap si propaga in maniera quasi invariata, generando un salto nel DV01; man mano che ci si allontana da  $t_{20}$ , il tasso forward converge all'UFR e la perturbazione di propaga in maniera sempre minore. Inoltre si evidenzia l'assenza di oscillazioni del tasso forward perturbato attorno

al caso non perturbato, generando uno DV01 con componenti tutte dello stesso segno e per la quasi totalità diverse da zero.

## Capitolo 4

# Hedging delle Sensitivity

I modelli di valutazione delle voci del bilancio effettuati Mark-to-Market generano delle Sensitivity dovute alla volatilità degli strumenti quotati sul mercato e di conseguenza, per definizione, non si riesce ad essere immuni all'incertezza del mercato. Al fine di coprirsi da tale rischio è opportuno adottare una strategia di hedging, in modo da evitare di essere totalmente in balia dei movimenti di mercato.

La definizione di una strategia di copertura comporta una necessaria domanda riguardo quali strumenti utilizzare e quali proprietà essi devono avere. Una caratteristica essenziale deve essere la liquidità in quanto la scelta della quantità degli strumenti da utilizzare per la copertura non è nota a priori e non può essere vincolata a limiti di disponibilità.

Nel caso in esame si vuole definire una copertura per le sensitivity generate dalla valutazione Mark-to-Market delle passività (si ricordi che i metodi definiti nel secondo capitolo fanno parte di tale categoria di valutazioni). Attraverso l'ipotesi di run-off, si suppone che la compagnia assicurativa non generi nuovi business e, di conseguenza, che le prestazioni previste restino costanti nel tempo. Inoltre si considera che tali passività siano definite solo dalle prestazioni future e dai costi di gestione associati e siano indipendenti da eventuali flussi di cassa generati da attività possedute dall'assicurazione.

L'approccio classico praticato comunemente sul mercato per la ricerca della strategia di copertura è sintetizzato in [Hagan 2006] pag.125

*... si supponga di utilizzare  $n$  strumenti nel bootstrap e di volersi hedgiare proprio dagli stessi  $n$  movimenti dei tassi. In tal caso è facile osservare che si può costruire un hedging perfetto. Prima di tutto si calcola la matrice quadrata  $P$  dove  $P_{ij}$  è il cambiamento di prezzo dello strumento del bootstrap  $j$ -esimo sotto l' $i$ -esima curva<sup>1</sup>. Poi si calcola la variazione di valore del portafoglio rischioso in esame sotto la curva  $i$ -esima in modo da formare un vettore colonna  $\Delta V$ . La quantità dell' $i$ -esimo strumento del bootstrap richiesta per una replica perfetta è la quantità  $Q_i$  dove  $Q$  è la soluzione del sistema lineare  $PQ = \Delta V$ . Assumendo che  $P$  sia invertibile, si ricava la soluzione.*

---

<sup>1</sup>Con l'espressione  *$i$ -esima curva* si intende la curva di sconto in cui è stato perturbato il tasso swap con scadenza  $t_i$ .

In questo studio si utilizzano gli swap come strumenti per la copertura, si ricordi che la curva *Euribor* è stata generata dal bootstrap dei tassi swap, e le passività come portafoglio rischioso da hedgiare.

Naturalmente la scelta della metodologia di Accounting delle passività impatta in maniera significativa la gestione del rischio tasso d'interesse e quindi la scelta dell'hedge. Per verificarlo si considerano tre possibili scelte di Accounting

*Acc 0* Passività e Swap valutati con la curva *Euribor*,

*Acc 1* Passività e Swap valutati con il metodo di Wilson-Smith,

*Acc 2* Passività valutate con la curva Wilson-Smith e Swap con la curva *Euribor*.

Anche se la prassi si sta muovendo verso la terza possibilità di Accounting, analizzare in dettaglio le prime due consente di comprendere le conseguenze della scelta dell'hedge per un'adeguata copertura dal rischio tasso d'interesse.

Nel presente capitolo si calcolano le coperture alla data di valutazione  $t_0$  e si ipotizza di aver a disposizione tutti gli swap necessari al fine di generare l'hedging, ipotizzando che essi siano tutti disponibili sul mercato. Mentre nei prossimi capitoli si analizzerà l'evoluzione dei diversi hedging nel futuro e il caso in cui si costruisca una copertura solo con gli swap che sono realmente presenti sul mercato. Nelle seguenti sezioni, inoltre, si osserverà come le anomalie riscontrate nel calcolo delle sensitivity delle passività con la curva Wilson-Smith si riversano nella strategia di copertura generata con l'approccio comunemente utilizzato e come si necessiti di definire una nuova regola di hedging al fine di generare delle strategie che risultino più stabili negli anni. Infatti, avendo a disposizione delle passività su un orizzonte temporale che giunge fino a 80 anni, occorre trovare una strategia di copertura che non necessiti di esser modificata completamente nel corso degli anni.

## 4.1 Accounting 0

La valutazione delle passività attraverso la curva *Euribor*, come osservato nel precedente capitolo, comporta una sensitivity a tutti gli shift attuati sui tassi swap. Valutando anche gli swap con tale curva di sconto, in un modello single-curve, si definisce il DV01 per uno swap con scadenza  $t_n$  rispetto ad una perturbazione sul tasso swap con scadenza  $t_i$

$$DV01_{swap}(i, n) = S_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k P^i(t_k) - (1 - P^i(t_n)) - (S_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k P(t_k) - (1 - P(t_n))) = S_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k (P^i(t_k) - P(t_k)) + P^i(t_n) - P(t_n) \quad (4.1)$$

dove, dall'annullamento del valore attuale netto dello swap, risulta

$$DV01_{swap}(i, n) = S_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k P^i(t_k) - (1 - P^i(t_n))$$

Poichè si risente di tutte le perturbazioni sugli swap, si considerano un numero di swap  $N_{swp}$  pari a quello dei flussi di cassa  $N_{CF}$ . Utilizzando tali swap, definendo le quantità

$$B = \begin{bmatrix} P^1(t_1) - P(t_1) & P^1(t_2) - P(t_2) & \cdots & P^1(t_{N_{swp}}) - P(t_{N_{swp}}) \\ P^2(t_1) - P(t_1) & P^2(t_2) - P(t_2) & \cdots & P^2(t_{N_{swp}}) - P(t_{N_{swp}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{N_{swp}}(t_1) - P(t_1) & P^{N_{swp}}(t_2) - P(t_2) & \cdots & P^{N_{swp}}(t_{N_{swp}}) - P(t_{N_{swp}}) \end{bmatrix}$$

che è una matrice triangolare superiore, dato che il fattore di sconto ad una data non è influenzato da perturbazioni avvenute in date successive, e

$$S = \begin{bmatrix} 1 + \delta_1 S_1 & \delta_1 S_2 & \cdots & \delta_1 S_{N_{swp}} \\ 0 & 1 + \delta_2 S_2 & \cdots & \delta_2 S_{N_{swp}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + \delta_{N_{swp}} S_{N_{swp}} \end{bmatrix}$$

che è una matrice fortemente diagonale (differenza di 2 ordini di grandezza tra gli elementi diagonali ed extra-diagonali).

Si può scrivere (4.1) in forma matriciale

$$DV01_{swp} = B \cdot S$$

Utilizzando la definizione di  $B$  e considerando che si è nell'Accounting 0, si scrive in forma matriciale anche  $\underline{DV01}_{CF}$ :

$$\underline{DV01}_{CF} = B \cdot \underline{CF}$$

Nell'ottica di generare una copertura  $\underline{W}$  tale da annullare la sentivity del portafoglio delle passività, si procede come indicato in [Hagan 2006], risolvendo il sistema lineare

$$DV01_{swp} \cdot W + \underline{DV01}_{CF} = 0$$

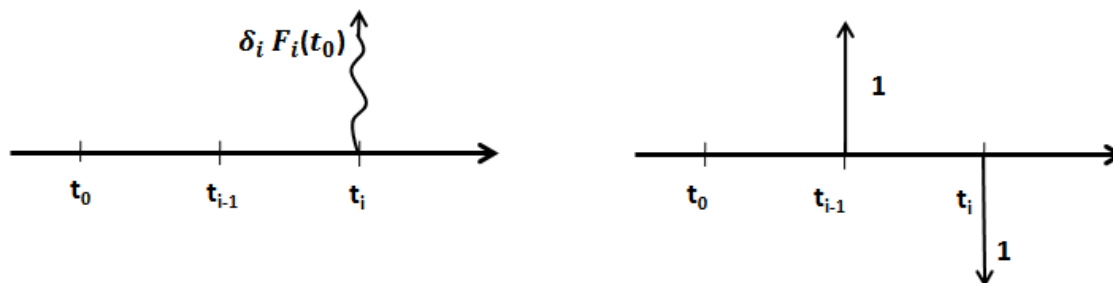
che corrisponde a

$$B \cdot S \cdot W + B \cdot \underline{CF} = 0$$

dall'invertibilità di  $B$  si ottiene

$$S \cdot W + \underline{CF} = 0 \tag{4.2}$$

quindi la strategia di copertura nel caso in cui sia gli swap che le passività siano valutate allo stesso modo è indipendente dalla curva di sconto utilizzata. Tale indipendenza deriva dal considerare un approccio mono-curva per la valutazione degli swap con la curva *Euribor*. Attraverso tale ipotesi tutti i flussi della gamba variabile dello swap sono scomposti in due flussi deterministici come illustrato di seguito



quindi la strategia di copertura si genera dall'annullamento anno per anno di tutti i flussi di cassa sia delle passività che degli swap, partendo dall'ultimo flusso, e procedendo a ritroso fino al primo, ma tale procedura equivale proprio all'algoritmo per la risoluzione di sistemi lineari triangolari superiori applicato a (4.2).

La strategia generata (vedi Figura (4.1)), per costruzione, è statica, in quanto anche negli anni futuri si dovrà risolvere un sistema lineare triangolare superiore ed inoltre, approssimativamente, le componenti di tale copertura sono proporzionali alle rispettive passività. Queste due proprietà rendono tale strategia un benchmark per qualsiasi altra copertura.

## 4.2 Accounting 1

Il metodo di Wilson-Smith risente degli shift sui tassi swap, solo per perturbazioni nella parte liquida (da 1 anno a  $LLP$  anni), quindi, come osservato nel precedente capitolo, il vettore  $DV01_{CF}^{WS}$  ha solo le prime  $LLP$  componenti non nulle.

Utilizzando la curva di sconto generata con il metodo di Wilson-Smith e considerando di scomporre il flusso variabile del tasso forward in due flussi deterministici, semplificando l'espressione (4.1), il DV01 risulta

$$DV01_{swp}^{WS}(i, n) = S_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k (P^i(t_k) - P(t_k)) + P^i(t_n) - P(t_n) \quad (4.3)$$

in tal caso la matrice  $DV01_{swp}^{WS}$  ha tutte le componenti nulle per perturbazioni maggiori di  $LLP$  e quindi non è invertibile. Considerando le matrici  $B$  e  $S$  con la curva di sconto di Wilson-Smith, si osserva che la strategia di copertura risulta essere soluzione di

$$B \cdot S \cdot W + B \cdot CF = 0$$

in cui la matrice  $B$  non è invertibile e, avendo le righe maggiori di  $LLP$  nulle il sistema ha infinite soluzioni.

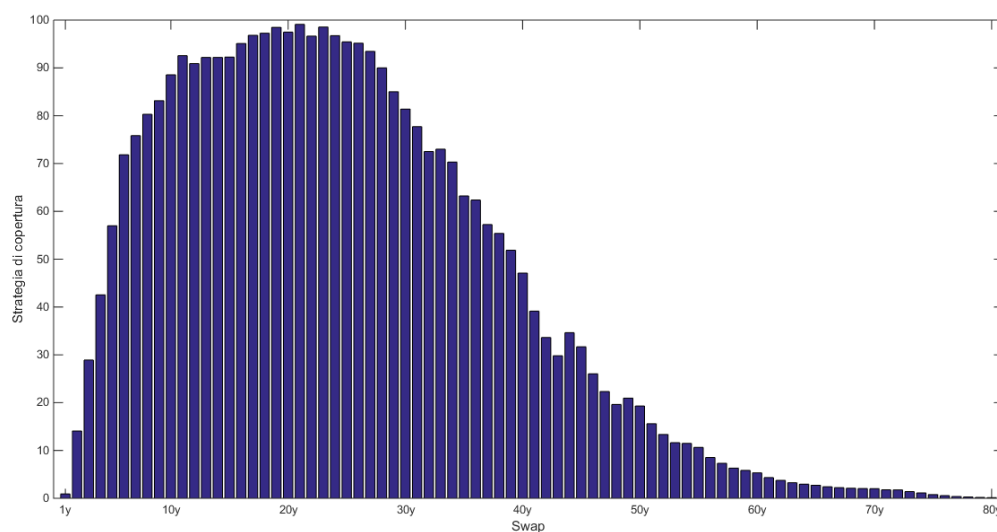


Figura 4.1: Strategia di copertura (in milioni) in  $t_0$  nel caso si considerino gli Accounting 0 e Accounting 1.

Si osserva che la soluzione ottenuta nel caso dell'Accounting 0 risolve tale sistema, quindi tale strategia sarebbe la candidata al fine di eliminare le infinite soluzioni.

A supporto di tale tesi, si osservi che, se si fosse al 60-esimo anno ci si dovrebbe coprire solo dalle 20 perturbazioni dei tassi swap. Per definizione, il metodo di Wilson-Smith nella parte liquida replica perfettamente il fattore di sconto ottenuto dal bootstrap della curva swap, quindi la matrice  $B$  sarebbe invertibile e la strategia di copertura risultante coinciderebbe con le ultime 20 componenti del vettore  $\underline{W}$ . Quindi l'utilizzo della strategia di copertura dell'Accounting 0 permette di avere un hedging statico anche nell'Accounting 1.

Naturalmente quanto affermato per il metodo di Wilson-Smith vale anche la versione Alternativa, dato che in tale Accounting si avrebbero  $N_{CF} - T_{conv}$  componenti che generano infinite soluzioni. Quindi la scelta della strategia  $\underline{W}$  garantisce una copertura statica dalle sensitivity generate dalle passività, sia alla data  $t_0$  che in futuro.

### 4.3 Accounting 2

L'utilizzo del fair-value per la valutazione degli strumenti finanziari, comporta che essi debbano essere valutati attraverso il proprio valore di mercato, che corrisponde alla loro quotazione qualora fosse disponibile. Inoltre Solvency II ha imposto che la valutazione



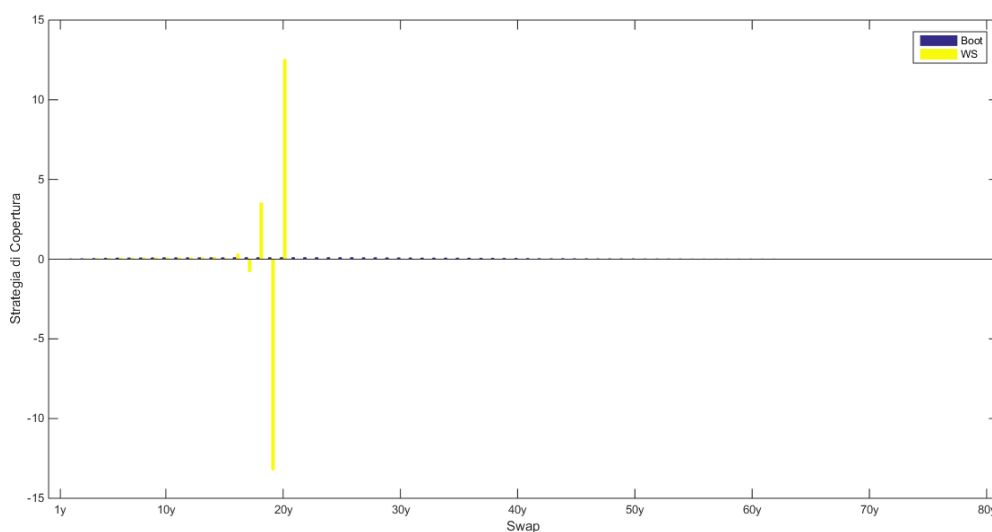


Figura 4.2: Confronto strategie di copertura (in miliardi) in  $t_0$  tra il caso dell'Accounting 0 e Accounting 2 con il metodo di Wilson-Smith e l'approccio standard. La copertura definita nel primo caso è circa due ordini di grandezza inferiore rispetto al secondo.

delle passività venga effettuata attraverso il metodo di Wilson-Smith. Per questi motivi tale Accounting è quello più vicino ad un possibile caso reale.

In tal caso si vuole generare una copertura in cui i fattori di sconto siano diversi a seconda che si tratti di passività o swap, rendendo impossibile l'utilizzo della strategia ottenuta dalle precedenti tipologie di Accounting.

### 4.3.1 Approccio standard

L'approccio standard di copertura del rischio tasso d'interesse descritto in [Hagan 2006] prevede la risoluzione del sistema

$$DV01_{swp} \cdot \underline{W}_{std} + \underline{DV01}_{CF}^{WS} = 0 \quad (4.4)$$

in cui, come osservato precedentemente, la matrice  $DV01_{swp}$  è invertibile mentre il vettore  $\underline{DV01}_{CF}^{WS}$  ha le prime  $LLP$  componenti non nulle, di cui le ultime di segno variabile. In tal caso, la strategia non è indipendente dai fattori di sconto: la strategia di copertura si ottiene dalla risoluzione del sistema lineare (4.4).

Come si evince da Figura (4.2), la copertura generata nel caso dell'Accounting 0 è trascurabile in relazione a quella generata con Accounting 2. Infatti gli Swap con scadenza 19 e 20 anni sono dell'ordine di 10 miliardi mentre nel caso di  $\underline{W}$  si tratta di 100 milioni. Inoltre, come si osservava nello studio di  $\underline{DV01}_{CF}^{WS}$ , la strategia  $\underline{W}_{std}$  ha delle componenti

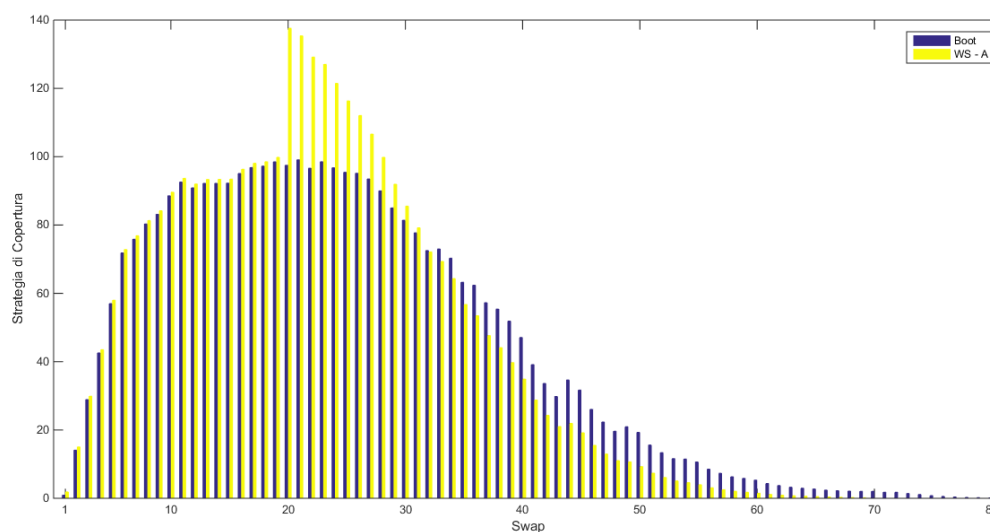


Figura 4.3: Confronto tra la strategia di copertura (in milioni) definita con il bootstrap e con il metodo di Wilson-Smith Alternativo nel caso dell’approccio standard.

di segno variabile e nulle dal LLP in poi.

Nel caso del metodo di Wilson-Smith Alternativo, si veda Figura (4.3), dato che si risente anche delle perturbazioni successive alla parte liquida e non si ha l’inversione delle sensitivity, si osserva che l’approccio standard di calcolo della strategia di copertura genera un hedging  $\underline{W}_{std}^A$  molto vicino a quello del bootstrap. Le differenze sostanziali riguardano l’ultimo swap che risulta non essere nullo, infatti in  $T_{conv}$  si raggiunge in modo definitivo lo UFR, quindi la strategia è composta solo dai primi  $T_{conv} - 1$  swap, e la conformazione della strategia nelle scadenze successive a  $t_{20}$ , spiegate dalla sensitivity del metodo in esame. L’assenza di pesi di segno variabile ed il fatto che si utilizzino sempre meno swap man mano che ci si allontana dal LLP, rendono l’approccio standard una valida metodologia di calcolo della copertura. Tutt’altro soddisfacente è la strategia che si ottiene nel caso di Wilson-Smith. Mentre la strategia  $\underline{W}$  o  $\underline{W}_{std}^A$  ha componenti tutte dello stesso segno e non nulle per quasi la totalità delle scadenze, quella  $\underline{W}_{std}$  verifica esattamente l’opposto. Con uno sguardo al futuro, se si decidesse di annullare le sensitivity di Wilson-Smith anno per anno, si dovrebbe modificare radicalmente la struttura della strategia, cosa che non accade negli altri casi.

A causa delle suddette osservazioni, l’approccio standard di ricerca della copertura genera un hedging decisamente diverso dal benchmark  $\underline{W}$  nel caso del metodo di Wilson-Smith, quindi si vuole cercare una strategia alternativa abbandonando il metodo standard.

### 4.3.2 Approccio non standard

L'utilizzo dell'approccio standard per la ricerca della strategia di copertura, che consiste nella risoluzione del sistema lineare (4.4), comporta necessariamente che la strategia di copertura rifletta le anomalie del DV01 delle passività definite con la curva Wilson-Smith, infatti la matrice da invertire è fortemente diagonale. Nella presente sezione si definisce una nuova metodologia di costruzione della strategia di copertura che permette di risolvere le criticità della strategia definita con l'approccio standard.

L'obiettivo che si vuole raggiungere è quello di definire una copertura che sia quanto più simile al benchmark  $\underline{W}$  ma che invece riesca a fornire un hedging ai movimenti dei tassi d'interesse anche nel caso dell'Accounting 2.

Come si è osservato nelle precedenti sezioni, ogni componente della copertura  $\underline{W}$  è proporzionale alla rispettiva passività, quindi si cerca la strategia nuova considerando la scomposizione del vettore  $\underline{CF}$  nelle sue componenti. In tal caso, la copertura  $\underline{W}^n$  generata dall'Accounting 0 con la passività solo in  $t_n$  è soluzione di

$$DV01_{swp} \cdot \underline{W}^n + \underline{DV01}_{CF^n} = 0 \quad (4.5)$$

in cui  $DV01_{CF^n}^{WS}$  rappresenta la sensitivity del vettore  $\underline{CF}^n$  valutato con la curva *Euribor*, dove  $\underline{CF}^n$  è un vettore di zeri ad esclusione della posizione n-esima in cui vi è  $(\underline{CF})_n$ . Utilizzando la notazione matriciale dell'Accounting 0, la precedente equazione equivale a

$$S \cdot \underline{W}^n + \underline{CF}^n = 0$$

dove  $S$  è la matrice precedentemente definita.

Considerando una passività alla volta, si definisce la nuova strategia di copertura attraverso la formula

$$\underline{W}_{Nstd}^n = K_n \cdot \underline{W}^n \quad (4.6)$$

in cui

$$K_n = \begin{cases} 1 & n \leq LLP \\ \frac{PAR\_DV01_{CF^n}^{WS}}{PAR\_DV01_{CF^n}} & n > LLP \end{cases}$$

e  $PAR\_DV01_{CF^n}$  (rispettivamente  $PAR\_DV01_{CF^n}^{WS}$ ) rappresenta la sensitivity per shift paralleli dei tassi swap<sup>2</sup> del portafoglio composto solo dal flusso di cassa in  $t_n$  calcolato con la curva *Euribor* (Wilson-Smith).

La copertura che deriva dall'insieme di tutte le passività risulta essere

$$\underline{W}_{Nstd} = \sum_{i=1}^{N_{CF}} \underline{W}_{Nstd}^i \quad (4.7)$$

---

<sup>2</sup>Dato un generico portafoglio, la componente k-esima di tale sensitivity è data dalla variazione di valutazione del portafoglio tra il caso in cui siano stati perturbati tutti i primi k tassi swap di *1bp* e quello in cui non ci sono stati shift. Nella valutazione attraverso la curva *Euribor*, in prima approssimazione, tale sensitivity può essere espressa sommando le sensitivity generate dai singoli shift dei primi k tassi swap.

Al fine di analizzare in dettaglio la strategia ottenuta con tale metodologia, si studia il valore assunto dalla costante  $K_n$  con  $n = LLP + 1, \dots, N_{CF}$ . Come già detto, alla data di valutazione  $t_0$  il metodo di Wilson-Smith genera una curva di sconto che replica la curva *Euribor* per scadenze inferiori a LLP ed è al di sotto di quella del Bootstrap per scadenze superiori a LLP. Di conseguenza la costante  $K_n$  è progressivamente più piccola man mano che ci si allontana dal LLP, a meno di casi anomali in cui si verifica il fenomeno inverso: tale casistica implicherebbe che il tasso forward della curva *Euribor* fosse più alto di quello di Wilson-Smith, ma ai dati di mercato odierni tale fenomeno è impossibile.

Per definizione la strategia di copertura così definita hedgia le sensitivity per shift singoli nel caso del portafoglio composto solo da flussi di cassa liquidi (presenti negli anni  $1, \dots, LLP$ ) e quelle per shift paralleli per le passività maggiori di LLP con la valutazione attraverso la curva Wilson-Smith. D'altronde tale tipologia di sensitivity non si discosta dal caso reale come si evince dal PCA<sup>3</sup> applicato alla matrice di varianza-covarianza dei tassi swap osservati sul mercato negli ultimi cinque anni. Tale metodo si applica calcolando gli autovalori ed autovettori della matrice di varianza-covarianza in questione e di seguito si considerano i pesi (autovalori) maggiori al fine di identificare i principali movimenti (autovettori). Il risultato di tale analisi è che i movimenti di tali quotazioni sono principalmente tre, come si evince da Figura (4.4): quello di traslazione rigida, con un peso di circa il 96,2%, quello di inclinazione, con un peso del 2.6%, e quello a V, con un peso di circa 1% (come si può notare la somma di tali percentuali riesce spiegare il 99.8% dei moti dei tassi). Quindi i movimenti della parte più liquida sono tradotti da movimenti dei singoli swap, mentre nella parte meno liquida i tassi si muovono in maniera piatta, data la loro illiquidità.

Dal confronto della strategia  $\underline{W}_{Nstd}$  e  $\underline{W}$ , si veda Figura (4.5), si osserva che la strategia generata è molto vicina a quella benchmark: è costituita da swap tutti dello stesso segno, uno per ogni scadenza delle passività, ha ordini di grandezza molto simili a quelli della strategia  $\underline{W}$  ed ha il pregio di utilizzare in quantità sempre meno swap man mano che ci si allontana dalla parte liquida.

Nel seguito si dimostra come è possibile ottenere la strategia definita da (4.6) attraverso semplici passaggi algebrici a partire dall'equazione (4.5) che rappresenta l'equazione che genera la copertura standard nel caso dell'Accounting 0. Attraverso le successive equivalenze seguenti

$$\begin{aligned} DV01_{swp} \cdot \underline{W}^n &= -\underline{DV01}_{CF^n} \\ (DV01_{swp} \cdot \underline{W}^n)^T &= -\left(\underline{DV01}_{CF^n}\right)^T \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Il Principal Component Analysis PCA rappresenta una tecnica di rotazione degli assi, permettendo una decomposizione del problema nelle principali componenti che ne determinano il valore, per approfondimenti si veda [Embrechts 2005].

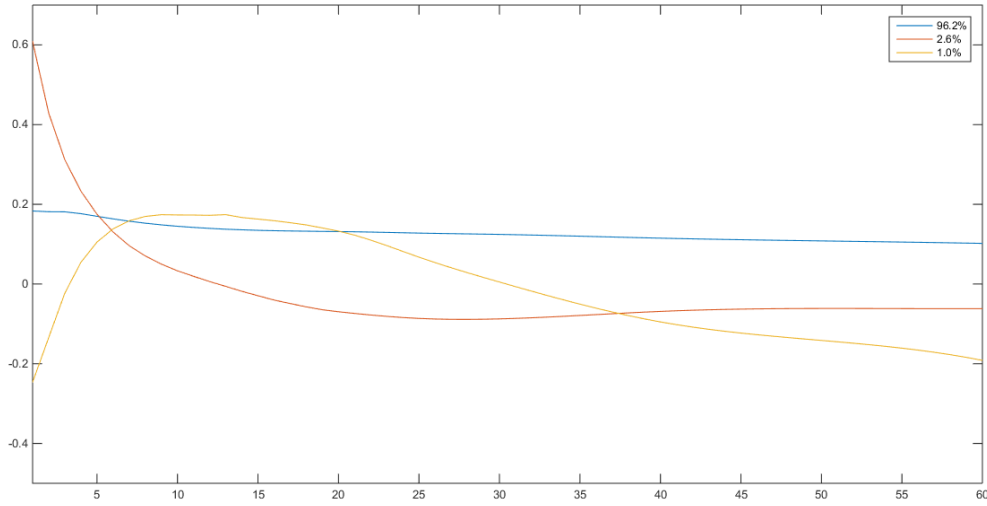


Figura 4.4: Movimenti principali delle quotazioni di mercato dei tassi swap osservati sul mercato negli ultimi 5 anni (sono state considerate le quotazioni pubblicate ogni giorno a partire dalla data  $t_0$  e procedendo a ritroso), definiti attraverso l'applicazione del PCA. Nella legenda è indicato il peso del corrispondente movimento.

con  $(\cdot)^T$  operatore di trasposizione

$$(DV01_{swp} \cdot \underline{W}^n)^T \mathbb{1}_{N_{swp}} = - \left( \underline{DV01}_{CF^n} \right)^T \mathbb{1}_{N_{swp}}$$

$\mathbb{1}_{N_{swp}}$  vettore di unità di dimensione  $N_{swp}$

$$(\underline{W}^n)^T \cdot (DV01_{swp})^T \mathbb{1}_{N_{swp}} = - \left( \underline{DV01}_{CF^n} \right)^T \mathbb{1}_{N_{swp}}$$

ricordando che  $DV01_{swp}$  è una matrice triangolare superiore, si osserva che le componenti del vettore  $(DV01_{swp})^T \mathbb{1}_{N_{swp}}$  e  $\left( \underline{DV01}_{CF^n} \right)^T \mathbb{1}_{N_{swp}}$  sono la sensitivity per shift paralleli dei tassi swap del portafoglio degli swap e del singolo flusso di cassa in  $t_n$ . L'equazione precedente indica che la copertura  $\underline{W}^n$  copre anche le sensitivity per shift paralleli.

Moltiplicando e dividendo il secondo membro della precedente equazione per

$$PAR\_DV01_{CF^n}^{WS}$$

si osserva che

$$(\underline{W}^n)^T \cdot (DV01_{swp})^T \mathbb{1}_{N_{swp}} = - \frac{\left( \underline{DV01}_{CF^n} \right)^T \mathbb{1}_{N_{swp}}}{PAR\_DV01_{CF^n}^{WS}} \cdot PAR\_DV01_{CF^n}^{WS}$$

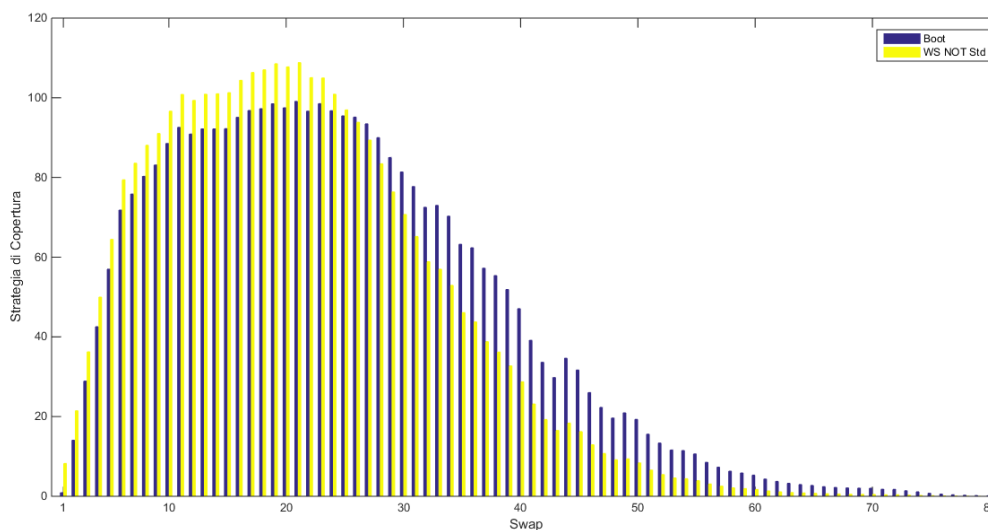


Figura 4.5: Confronto tra la strategia di copertura (in milioni) definita con la curva *Euribor* e la curva Wilson-Smith nel caso dell'approccio non standard.

definendo la costante

$$\hat{K}_n = \frac{PAR\_DV01_{CF^n}^{WS}}{\left(DV01_{CF^n}\right)^T \mathbb{1}_{N_{swp}}}$$

si ottiene

$$\left(\hat{K}_n \cdot \underline{W}^n\right)^T \cdot \left(DV01_{swp}\right)^T \mathbb{1}_{N_{swp}} = -PAR\_DV01_{CF^n}^{WS}$$

Quindi, dalla precedente equazione si osserva che la copertura  $\hat{K}_n \cdot \underline{W}^n$  è uguale a  $\underline{W}^n$  con  $n = 1, \dots, LLP$  ed annulla le sensitivity per shift paralleli nel caso di valutazione delle passività con la curva Wilson-Smith per  $n > LLP$ , in linea con quanto osservato precedentemente. Inoltre, utilizzando l'approssimazione secondo cui  $\left(DV01_{CF^n}\right)^T \mathbb{1}_{N_{swp}} \approx PAR\_DV01_{CF^n}$ , si ottiene la costante  $K_n \approx \hat{K}_n$  precedentemente definita.

# Capitolo 5

## Analisi della copertura nel tempo

Con l'ipotesi di run-off della compagnia assicurativa, si considerano delle passività costanti e distribuite in un arco temporale ad una distanza di 80 anni dalla data di valutazione  $t_0$ . Risulta dunque necessaria un'analisi del comportamento delle coperture precedentemente definite nel futuro, sotto i possibili scenari che si potrebbero verificare, simulati in maniera sia deterministica che stocastica. L'importanza di tali simulazioni risiede nell'influenza che queste possono avere nelle scelte da compiere e nella delineazione di un profilo di rischio della compagnia. A tal proposito, non è necessario solo effettuare simulazioni realistiche o prudenziali, al contrario, occorre generare degli scenari di stress che rappresentano i casi estremi che porterebbero al potenziale fallimento della compagnia.

Nel presente lavoro si utilizzano i seguenti scenari deterministici e stocastici

- Scenario Forward: il tasso forward calcolato in  $t_0$  resta costante nel tempo;
- Scenario Forward +1%: il tasso forward calcolato in  $t_0$  subisce una traslazione rigida di +1%;
- Scenario Forward -1%: il tasso forward calcolato in  $t_0$  subisce una traslazione rigida di -1%;
- Scenario generato con il modello di Hull-White: si simula stocasticamente il tasso risk-free attraverso il modello di Hull-White.

Nel presente capitolo si studieranno i primi tre scenari deterministici, mentre l'ultimo sarà oggetto di studio del prossimo capitolo.

Dei tre scenari deterministici suddetti, il caso in cui il tasso forward si abbassa rappresenta il caso più dannoso per la compagnia poichè porterebbe ad un innalzamento della curva di sconto e quindi ad una maggiore valorizzazione delle passività (in valore assoluto).

Infine, per poter testare a pieno la qualità delle strategie, si analizzeranno e paragoneranno i diversi comportamenti strategici assunti da una compagnia assicurativa (caso statico o dinamico, hedgiato o non hedgiato) sulla base di alcuni criteri che variano a

seconda delle diverse situazioni. Tali criteri sono espressi in termini di variazione dello scenario stressato rispetto a quello base che è rappresentato da quello forward.

Nel seguente studio si utilizzerà l'Accounting 2, quello imposto dalla normativa Solvency II, quindi le passività saranno trattate utilizzando il metodo di Wilson-Smith (e Wilson-Smith Alternativo) e gli swap tramite la curva *Euribor*.

## 5.1 Qualità della strategia nel tempo: Caso Statico

Si ipotizza di non modificare il portafoglio di copertura nel tempo. Le strategie che si possono adottare sono le seguenti:

- non si utilizza alcuna strategia di copertura: si decide di non coprirsi da alcun rischio essendo così soggetti alle sole passività;
- si utilizza la strategia  $\underline{W}$  definita dall'Accounting 0, che è statica per definizione;
- si utilizza la strategia  $\underline{W}_{std}$  generata nell'Accounting 2 tramite l'approccio standard in maniera statica;
- si utilizza la strategia  $\underline{W}_{Nstd}$  generata nell'Accounting 2 tramite l'approccio non standard in maniera statica.

Utilizzando le strategie b., c. e d. si rinuncia implicitamente ad annullare le sensitivity negli anni successivi a  $t_0$ .

Al fine di paragonare le strategie suddette, si definisce la variazione di valore attuale netto delle passività tra lo scenario shiftato e quello forward attraverso la seguente formula

$$\Delta NPV_{CF}^{\pm}(t_n) = \sum_{i=1}^{N_{CF}-n} (\underline{CF})_{i+n} \left( P^{\pm}(t_n, t_i) - P^0(t_n, t_i) \right) \quad (5.1)$$

con  $n = 1, \dots, N_{CF}$ .  $P^{\pm}(t_n, \cdot)$  (rispettivamente  $P^0(t_n, \cdot)$ ) è la curva di sconto in  $t_n$  sotto lo Scenario Forward  $\pm 1\%$  (Scenario Forward) generata con il metodo di Wilson-Smith. Si osserva che il portafoglio delle passività in ogni anno tiene conto solo di quelle non ancora estinte.

Per quanto riguarda il portafoglio degli swap la variazione di NPV in  $t_n$  è data da

$$\Delta NPV_{swp}^{\pm}(t_n) = \sum_{i=1}^{N_{swp}-n} (\underline{N})_{i+n} \cdot \left[ S_{i+n}(t_0) \sum_{k=1}^i \delta_k \left( P^{\pm}(t_n, t_k) - P^0(t_n, t_k) \right) + P^{\pm}(t_n, t_i) - P^0(t_n, t_i) \right] \quad (5.2)$$

con  $n = 1, \dots, N_{swp}$ . In cui  $\underline{N}$  è la generica strategia di copertura generata in  $t_0$  e le curve di sconto in questione riguardano quelle generate con il bootstrap della curva swap. Naturalmente in  $t_0$ , non essendovi applicato nessuno shift, le suddette variazioni sono nulle.



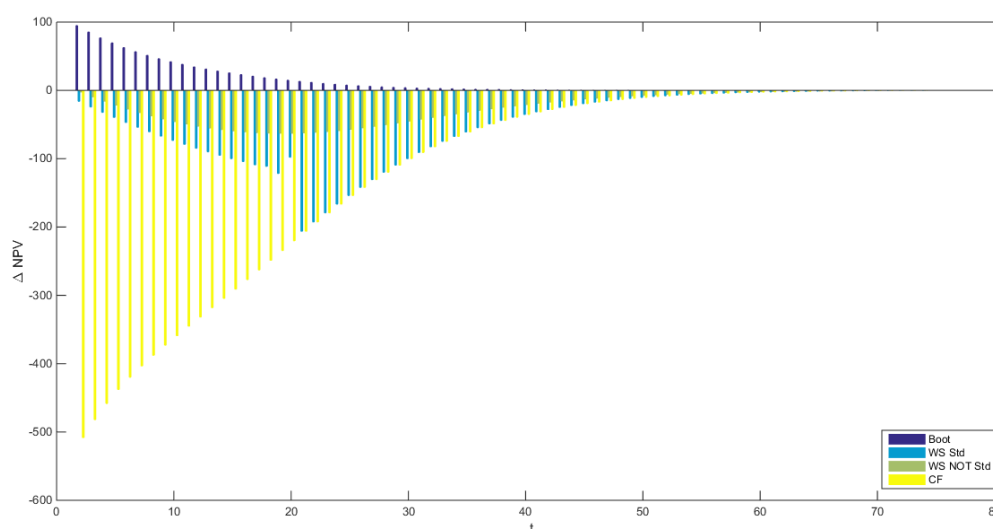


Figura 5.1: Confronto tra la variazioni di NPV (in milioni) dello scenario deterministico -1% rispetto al caso non shiftato, considerando le diverse strategie: portafoglio unhedged, strategia definita tramite il Bootstrap, metodo di Wilson-Smith con approccio standard e metodo di Wilson-Smith con approccio non standard.

Dal confronto tra le diverse strategie statiche in relazione allo Scenario Forward -1%, mostrato in Figura (5.1), si osservano dei diversi comportamenti per ogni suddetta strategia, hedgiata o no.

- Tale Scenario genera una sopravvalutazione delle passività, conducendo ad una variazione di valore attuale negativa, che decresce nel tempo a causa del minor numero di passività a cui si deve far fronte.
- Occorre osservare che se la valutazione delle passività fosse stata effettuata con il bootstrap, il valore attuale netto del portafoglio composto da  $\underline{CF}$  e  $\underline{W}$  sarebbe nullo in ogni anno grazie all'indipendenza della copertura dalla curva di sconto. Quindi la strategia  $\underline{W}$ , valutando le passività con il metodo di Wilson-Smith, genera un overhedging (tale strategia, per costruzione, copre valutazioni più alte delle passività) portando ad avere utili anche in tale scenario avverso.
- Utilizzando la strategia  $\underline{W}_{std}$  si osserva che, poichè essa è non nulla solo nei primi LLP anni, da  $t_{LLP}$  in poi il portafoglio non sarà più hedgiato, generando una variazione di NPV uguale al caso non hedgiato.
- Al contrario del caso c., la strategia  $\underline{W}_{Nstd}$  è non nulla in tutte le scadenze, quindi è in grado di fornire una copertura in tutti gli anni, da  $t_1$  a  $t_{NCF}$ .

Un secondo criterio che si utilizza nella valutazione della qualità delle coperture è la variazione della cassa generata dai portafogli posseduti nei diversi casi tra lo scenario shiftato e quello forward. Tale variazione di cassa nella strategia a. è nulla per definizione. Per i casi b., c. e d. essa è definita da

$$\Delta CASH^\pm(t_n) = \sum_{i=n}^{N_{swp}} (\underline{N})_i \left[ -\tilde{\delta}_1 F^\pm(t_n, t_{n+0.5}, t_{n+1}) - \tilde{\delta}_0 \frac{F^\pm(t_n, t_n, t_{n+0.5})}{P^\pm(t_n, t_{n+0.5}, t_{n+1})} - \left( -\tilde{\delta}_1 F^0(t_n, t_{n+0.5}, t_{n+1}) - \tilde{\delta}_0 \frac{F^0(t_n, t_n, t_{n+0.5})}{P^0(t_n, t_{n+0.5}, t_{n+1})} \right) \right] \quad (5.3)$$

con  $n = 1, \dots, N_{swp}$ , dove  $F^\pm(t_n, t_k, t_j)$  (rispettivamente  $F^0(t_n, t_k, t_j)$ ) rappresenta il tasso forward calcolato nello Scenario Forward  $\pm 1\%$  (Scenario Forward) calcolato in  $t_n$ , rispetto al periodo  $[t_k, t_j]$  e  $P^\pm(t_n, t_k, t_j)$  (risp.  $P^0(t_n, t_k, t_j)$ ) è il relativo fattore di sconto forward nel caso con shift (senza shift). Inoltre si è utilizzata la notazione  $t_{n+0.5}$  per indicare la scadenza  $n$ -anni e  $6$ -mesi e  $\tilde{\delta}_1$  (risp.  $\tilde{\delta}_0$ ) per la frazione d'anno che intercorre tra la scadenza semestrale ed annuale, successive a  $t_n$  in Act/360 (tra la data attuale  $t_n$  e la scadenza semestrale successiva in 30/360).

Si osserva che il contributo alla variazione della cassa è fornito solo dalla gamba variabile degli swap. Come si osserva da Figura (5.2) lo Scenario Forward  $-1\%$ , per definizione, comporta un abbassamento dei tassi forward, quindi, utilizzando dei Receiver-Swap, la cassa generata da tale copertura statica è positiva.

Questo è ciò che accade per le strategie  $\underline{W}$  e  $\underline{W}_{Nstd}$  in cui tale scenario genera degli utili per tutte le scadenze, mentre nel caso in cui si utilizzi  $\underline{W}_{std}$  si osservano delle oscillazioni in  $t_{LLP-1}$  e  $t_{LLP}$ , che producono una perdita in  $t_{LLP-1}$  e un piccolo positivo in  $t_{LLP}$ , e per scadenze successive a  $t_{LLP}$  non si hanno più dei flussi di cassa.

Per quanto riguarda lo Scenario Forward  $+1\%$ , necessariamente, si osserva una situazione speculare rispetto a quanto osservato in precedenza sia nel calcolo della variazione di valore attuale che di cassa generata.

## 5.2 Qualità della strategia nel tempo: Caso Dinamico

In tal caso si vuole adottare una copertura di tipo dinamico in cui ogni anno viene definita una nuova strategia attraverso i due approcci indicati in Accounting 2. Quindi le scelte strategiche che si possono presentare riguardano le coperture  $\underline{W}_{std}$  e  $\underline{W}_{Nstd}$ .

Al fine di comprendere l'evoluzione delle strategie negli anni, occorre fare delle considerazioni sul comportamento in  $t_1$  delle strategie definite in  $t_0$ .

1. La strategia  $\underline{W}_{std}$  non fornisce più una copertura, dato che essa dipende dalla curva di sconto utilizzata. Nel caso di Wilson-Smith le maggiori differenze sono dovute ad una nuova inversione delle sensitività nelle scadenze tra 16 e 20 anni a partire da  $t_1$ .

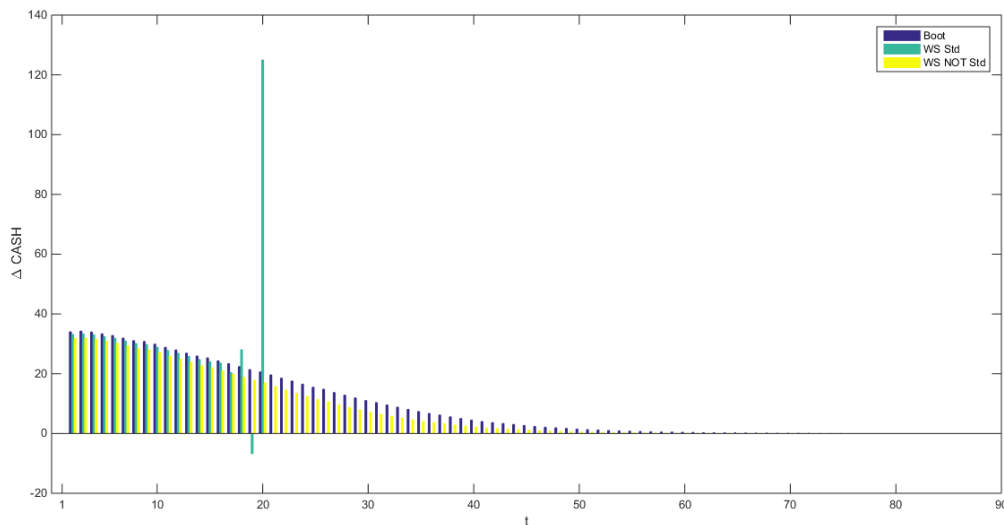


Figura 5.2: Confronto tra le variazioni di cassa generata (in milioni) dello scenario deterministico -1% rispetto al caso non shiftato, considerando le diverse strategie: Bootstrap, metodo di Wilson-Smith con approccio standard e metodo di Wilson-Smith con approccio non standard.

Mentre nel caso di Wilson-Smith Alternativo la maggior differenza risiede nella parte successiva a LLP anni, a partire da  $t_1$ , dato che la sensitivity in  $t_1$  presenta maggiori differenze in tali scadenze.

2. La strategia  $W_{Nstd}$  non fornisce una copertura (anch'essa dipende dalla curva di sconto utilizzata). Ripercorrendo la costruzione della stessa si osserva che  $\underline{W}^n$  è costante, quindi le differenze maggiori interessano le scadenze successive ad una distanza di LLP anni da  $t_1$ .

I commenti precedenti sono validi per tutte le scadenze precedenti a  $N_{CF-LLP}$  anni. Oltre tale limite, tutti i metodi utilizzati nel presente lavoro di tesi generano dei fattori di sconto uguali tra loro, quindi swap e passività sono calcolate sulle medesime curve di sconto (caso di Accounting 0). Quindi la copertura generata in tale istante è statica gode dei benefici della strategia  $\underline{W}$ .

Volendo utilizzare i criteri introdotti nella precedente sezione, occorre modificare le formule (5.2) e (5.3) per tener conto della dinamicità delle coperture. In particolare

$$\Delta NPV_{swp}^{\pm}(t_n) = \sum_{i=1}^{N_{swp}-n} (\underline{N}^{\pm}(t_{n-1}))_i \cdot \left[ S_{i+n}(t_0) \sum_{k=1}^i \delta_k P^{\pm}(t_n, t_k) - 1 + P^{\pm}(t_n, t_i) \right] - \sum_{i=1}^{N_{swp}-n} (\underline{N}^0(t_{n-1}))_i \cdot \left[ S_{i+n}(t_0) \sum_{k=1}^i \delta_k P^0(t_n, t_k) - 1 + P^0(t_n, t_i) \right] \quad (5.4)$$

con  $n = 1, \dots, N_{CF}$ , e

$$\begin{aligned} \Delta CASH^\pm(t_n) = & \sum_{i=n}^{N_{swp}} (\underline{N}^\pm(t_{n-1}))_{i-n+1} \left[ \delta_i S_i(t_0) - \tilde{\delta}_1 F^\pm(t_n, t_{n+0.5}, t_{n+1}) - \tilde{\delta}_0 \frac{F^\pm(t_n, t_n, t_{n+0.5})}{P^\pm(t_n, t_{n+0.5}, t_{n+1})} \right] \\ & - \sum_{i=n}^{N_{swp}} (\underline{N}^0(t_{n-1}))_{i-n+1} \left[ \delta_i S_i(t_0) - \tilde{\delta}_1 F^0(t_n, t_{n+0.5}, t_{n+1}) - \tilde{\delta}_0 \frac{F^0(t_n, t_n, t_{n+0.5})}{P^0(t_n, t_{n+0.5}, t_{n+1})} \right] \\ & - \sum_{i=n}^{N_{swp}} (\underline{N}^\pm(t_{n-1}))_{i-n+1} PV_i^\pm(t_n) - \left( - \sum_{i=n}^{N_{swp}} (\underline{N}^\pm(t_{n-1}))_{i-n+1} PV_i^0(t_n) \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$n = 1, \dots, N_{swp}$ , dove  $\underline{N}^\pm(t_{n-1})$  (risp.  $\underline{N}^0(t_{n-1})$ ) rappresenta la strategia generata l'anno precedente a  $t_n$  sotto lo scenario forward con shift (senza shift).

Occorre precisare che si suppone che i tassi swap non cambino anno dopo anno, nella cassa occorre detrarre la quantità  $PV_i^\pm(t_n)$  nel caso dello Scenario Forward  $\pm 1\%$ ,  $PV_i^0(t_n)$  per lo Scenario Forward, al fine di rendere gli swap con NPV nullo. Quindi in  $t_n$  se si suppone di possedere uno swap con scadenza  $t_i$ ,

$$PV_i^*(t_n) = S_{i+n}(t_0) \sum_{k=1}^i \delta_{k+n} P^*(t_n, t_{k+n}) - (1 - P^*(t_n, t_{i+n}))$$

in cui  $*$  assume valore  $\pm$  o  $0$  a seconda dello scenario considerato.

Tale contributo non era stato considerato nella sezione precedente in quanto le strategie erano statiche e, per definizione, gli swap acquistati in  $t_0$  avevano NPV nullo.

Per quanto riguarda la variazione di valore attuale della strategia di copertura rispetto allo scenario  $-1\%$ , si osserva che, mentre il metodo standard produce delle variazioni pressochè nulle, la strategia non standard verifica delle piccole variazioni negative. Al fine di analizzare il contributo della strategia di copertura e delle passività si osserva che  $\underline{W}_{Nstd}$  differisce in media dello  $0.3\%$  dalla variazione delle sole  $\underline{CF}$ . Inoltre, analizzando la variazione di cassa generata, si osserva che tali coperture generano dei flussi di cassa che sono del tutto simili tra di loro. I risultati ottenuti si ripetono in maniera speculare nel caso nello scenario con shift positivo.

Un ulteriore criterio che deve essere preso in considerazione nell'utilizzo di strategie dinamiche è rappresentato dai costi generati dal passaggio da una strategia ad un'altra nei diversi anni. A tal fine si definisce la funzione

$$COST(t_n) = 1bp \cdot \sum_{i=1}^{N_{swp}-n} (\Delta \underline{N}(t_n))_i BPV_i(t_n) \quad (5.6)$$

con  $n = 0, \dots, N_{CF} - 1$ ,  $BPV_i(t_n) = \sum_{k=1}^i \delta_{k+n} P(t_n, t_{k+n})$  e

$$(\Delta \underline{N}(t_n))_i = \begin{cases} |(\underline{N}(t_n))_i - (\underline{N}(t_{n-1}))_i| & n \geq 1 \\ |(\underline{N}(t_n))_i| & n = 0 \end{cases}$$

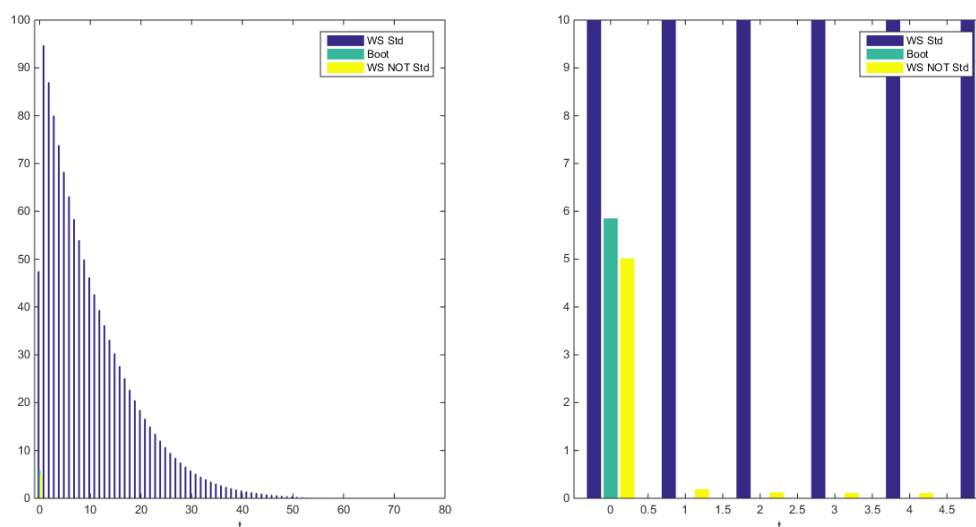


Figura 5.3: Confronto tra i costi (in milioni) di generazione delle strategie dinamiche sotto lo scenario deterministico  $-1\%$  nel metodo di Wilson Smith. In blu la strategia generata con l'approccio standard ed in giallo con quello non standard. Inoltre a destra un ingrandimento della prima sotto-figura sui primi bucket temporali.

In cui si ipotizza che ci sia una differenza di  $1bp$  tra la quotazione ASK/BID e MID dei tassi swap che si vogliono acquistare, quindi il costo è dato dal  $1bp$  per l'annuity  $BPV$  dello swap.

Analizzando i costi prodotti nel tempo dalle strategie  $\underline{W}_{std}$  e  $\underline{W}_{Nstd}$ , osservando Figura (5.3), si nota che la strategia prodotta con l'approccio standard ha un costo sempre superiore a quella non standard. In particolare in  $t_0$  si evidenzia una differenza di un ordine di grandezza mentre nelle scadenze successive la differenza si amplifica giungendo a tre ordini. Inoltre, dal confronto con il costo di generazione dell'hedging benchmark  $\underline{W}$ , si osserva che la strategia di copertura non standard ha un costo iniziale inferiore del  $14\%$ , come si evince dall'ingrandimento in Figura (5.3). La grande differenza verificata dal confronto dei costi di  $\underline{W}_{std}$  e  $\underline{W}_{Nstd}$  deriva da quanto affermato all'inizio della presente sezione sulla generazione delle strategie in  $t_1$  e si riscontra del tutto inalterata in tutti e tre scenari deterministici.

Un ultimo commento riguarda il metodo di Wilson-Smith Alternativo. Se si considerasse la strategia generata in  $t_0$  in maniera statica e lo scenario  $-1\%$  (nel caso  $+1\%$  si ottiene la situazione speculare), dal confronto delle variazioni di NPV mostrato in Figura (5.4), tra l'utilizzo delle strategie  $\underline{W}$ ,  $\underline{W}_{std}^A$  ed il caso non coperto, si osserva che  $\underline{W}$  è un over-hedging, mentre la strategia con il metodo Alternativo ha una variazione inferiore in modulo a quella che si otterrebbe nel caso di assenza di copertura. Inoltre da  $T_{conv}$  in poi

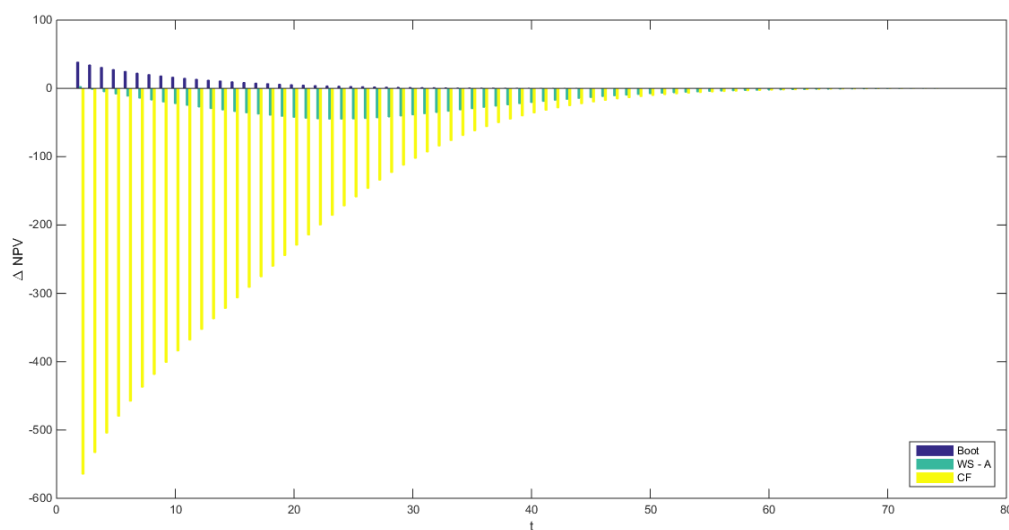


Figura 5.4: Confronto tra la variazione di NPV (in milioni) delle strategie statiche sotto lo scenario deterministico -1% tra il metodo Bootstrap, Wilson-Smith Alternativo e il caso non hedgiato.

non si osserva alcuna copertura. Nell'analisi dei flussi di cassa generati nel caso statico invece si osserva che fino alla parte liquida si hanno delle variazioni del tutto equivalenti e di seguito queste sono più basse nel metodo Alternativo rispetto alla strategia definita con l'Accounting 0, come si evince da Figura (5.5). Nel caso di strategia dinamica invece si osserva che la variazione di NPV è molto bassa (ordine dell'unità) e la cassa generata è del tutto analoga a quella analizzata nel caso di Wilson-Smith. Quindi utilizzando il criterio dei costi, si osserva che, dopo un esborso iniziale pari a circa 5.5 milioni, inferiore del 4.2% rispetto al caso statico  $\underline{W}$ , i costi sono ridotti di un decimo negli anni successivi. Tale caratteristica si riscontra in tutti e tre gli scenari deterministici.

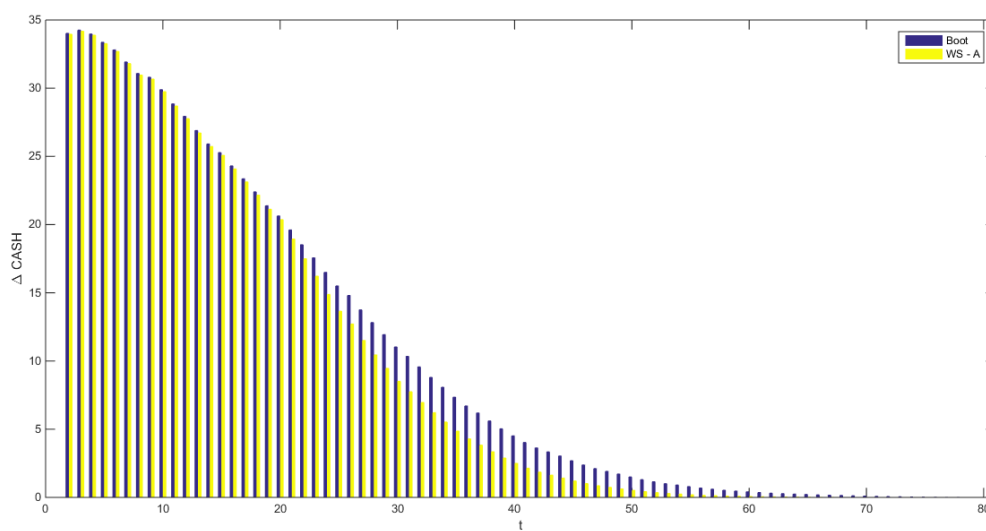


Figura 5.5: Confronto tra la variazione di cassa generata (in milioni) delle strategie statiche sotto lo scenario deterministico  $-1\%$  tra il metodo Bootstrap e Wilson-Smith Alternativo.

## Capitolo 6

# Analisi della copertura nel tempo: Scenario Stocastico

La generazione di Scenari Stocastici nella simulazione dell'evoluzione delle curve di sconto nel tempo permette di avere un quadro più variegato delle possibili situazioni che si possono incontrare nel futuro, dalla più prudente alla più rischiosa. Al fine di rendere l'utilizzo di tale scenario quanto più efficiente possibile occorre procedere con un metodo di tipo Monte Carlo, che consiste nella generazione di un numero elevato (in teoria, infinito) di scenari<sup>1</sup> che permettano di ottenere un'analisi indipendente dalla stocasticità del processo. Se si usassero poche simulazioni si incorrerebbe il rischio di analizzare solo delle situazioni che sarebbero del tutto lontane da quelle che potrebbero accadere in futuro.

Per poter applicare tale modello stocastico, si deve scegliere una funzione a cui attribuire una dinamica stocastica. Mentre negli Scenari Deterministici si è stressato il tasso forward in  $t_0^+$ , nel presente capitolo si simula la curva di sconto nei diversi anni di riferimento. In particolare utilizzando la definizione di tasso risk-free  $r_t$  risulta

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathbb{F}_t \right] \quad (6.1)$$

in cui il tasso

$$r_t = \varphi_t + \sum_{i=1}^{N_{stoc}} x_t^i$$

con la condizione iniziale  $r_0$  costante,  $\varphi_t$  una funzione deterministica del tempo e  $x_t^i$  un numero prefissato  $N_{stoc}$  di processi stocastici che si ipotizza compongano il tasso privo di rischio. Nel presente lavoro di tesi si considerano due processi stocastici,  $N_{stoc} = 2$ , e si

---

<sup>1</sup>Naturalmente occorre tener conto del costo computazionale a cui si va incontro nella generazione delle singole simulazioni. Nel presente lavoro le analisi stocastiche sono state effettuate utilizzando un numero di simulazioni per bucket temporale pari a 1000 (sia nel presente capitolo che nel successivo).



ipotizza che tali processi abbiano la seguente dinamica

$$\begin{aligned} dx_t &= (\theta_1(t) - a_1(t) \cdot x_t)dt + \sigma_1 dW_1(t) & x_0 &= c_x \\ dy_t &= (\theta_2(t) - a_2(t) \cdot y_t)dt + \sigma_2 dW_2(t) & y_0 &= c_y \end{aligned}$$

che fa parte dei processi di Ornstein-Uhlenbeck, caratterizzati da una *mean-reversion* che impone una convergenza al valore medio  $a_i(t)/\theta_i(t)$  con la velocità  $\theta_i(t)$ , con  $a_i(t)$  e  $\theta_i(t)$  funzioni deterministiche e  $\sigma_i$  coefficiente di volatilità  $i = 1, 2$ . Inoltre  $c_x$  e  $c_y$  sono delle costanti che rappresentano il valore iniziale dei processi.

La stocasticità risiede nei moti browniani  $W_i(t)$  con  $i = 1, 2$ , correlati tra loro attraverso il coefficiente di correlazione  $\rho$  tale che

$$dW_1(t) \cdot dW_2(t) = \rho \cdot dt$$

Un tasso risk-free così definito fa parte della classe dei modelli di Hull-White a 2 fattori. Utilizzando le assunzioni sulle funzioni deterministiche presenti in [Brigo 2001], si ottiene il modello G2++. In particolare si impone

- $\theta_i(t) \equiv 0$   $i = 1, 2$ ,
- $a_i(t) = a_i$   $i = 1, 2$  costanti indipendenti dal tempo,
- $c_x = c_y = 0$ .

La dinamica dei processi  $x_t$  e  $y_t$  diventa

$$\begin{aligned} dx_t &= -a_1 \cdot x_t dt + \sigma_1 dW_1(t) & x_0 &= 0 \\ dy_t &= -a_2 \cdot y_t dt + \sigma_2 dW_2(t) & y_0 &= 0 \end{aligned}$$

In termini integrali si osserva che, fissando  $s < t$

$$x_t = x_s e^{-a_1(t-s)} + \sigma_1 \int_s^t e^{-a_1(t-u)} dW_1(u) \quad (6.2)$$

$$y_t = y_s e^{-a_2(t-s)} + \sigma_2 \int_s^t e^{-a_2(t-u)} dW_2(u) \quad (6.3)$$

quindi i processi  $x_t$  e  $y_t$  condizionatamente a  $\mathbb{F}_s$  sono rispettivamente distribuiti normalmente con media

$$x_s e^{-a_1(t-s)} \quad \text{e} \quad y_s e^{-a_2(t-s)}$$

e varianza

$$\sigma_1^2 \int_s^t e^{-2a_1(t-u)} du \quad \text{e} \quad \sigma_2^2 \int_s^t e^{-2a_2(t-u)} du$$

In tali condizioni il processo  $r_t$  è definito da

$$r_t = x_s e^{-a_1(t-s)} + y_s e^{-a_2(t-s)} + \sigma_1 \int_s^t e^{-a_1(t-u)} dW_1(u) + \sigma_2 \int_s^t e^{-a_2(t-u)} dW_2(u) + \varphi_t$$

con  $s < t$  e la condizione iniziale  $r_0 = \varphi_0$ . Poichè i due processi hanno mean-reversion verso lo zero, la funzione  $\varphi_t$  definisce il valore medio verso cui i processi devono convergere.

Al fine di calcolare la curva di sconto (6.1) con  $r_t$  precedentemente introdotto, occorre calcolare

$$\int_t^T [x_u + y_u] du$$

che condizionato a  $\mathbb{F}_t$  è una variabile aleatoria distribuita normalmente con media

$$M(t, T) = \int_t^T [x_t e^{-a_1(u-t)} + y_t e^{-a_2(u-t)}] du = \frac{1 - e^{-a_1(T-t)}}{a_1} x_t + \frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2} y_t \quad (6.4)$$

e varianza

$$\begin{aligned} V(t, T) = \text{Var} \left\{ \frac{\sigma_1}{a_1} \int_t^T [1 - e^{-a_1(T-u)}] dW_1(u) + \frac{\sigma_2}{a_2} \int_t^T [1 - e^{-a_2(T-u)}] dW_2(u) \mid \mathbb{F}_t \right\} = \\ \frac{\sigma_1^2}{a_1^2} \left[ T - t + \frac{2}{a_1} e^{-a_1(T-t)} - \frac{1}{2a_1} e^{-2a_1(T-t)} - \frac{3}{2a_1} \right] \\ + \frac{\sigma_2^2}{a_2^2} \left[ T - t + \frac{2}{a_2} e^{-a_2(T-t)} - \frac{1}{2a_2} e^{-2a_2(T-t)} - \frac{3}{2a_2} \right] + \\ 2\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{a_1 a_2} \left[ T - t + \frac{e^{-a_1(T-t)} - 1}{a_1} + \frac{e^{-a_2(T-t)} - 1}{a_2} - \frac{e^{-(a_1+a_2)(T-t)} - 1}{a_1 + a_2} \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

in cui  $\text{Var}\{\cdot \mid \mathbb{F}_t\}$  rappresenta la varianza condizionata alle informazioni in  $t$ . Inoltre si osserva che nel precedente calcolo si è tenuto conto della correlazione tra i due moti browniani.

Utilizzando le formule (6.4) e (6.5) si ottiene il valore della curva di sconto

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T \varphi_u du - \frac{1 - e^{-a_1(T-t)}}{a_1} x(t) - \frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right\}$$

che rappresenta il valore atteso condizionato di un processo lognormale.

Al fine di generare un modello che sia consistente con le informazioni presenti sul mercato in  $t_0 = 0$ , si impone

$$P^M(T) = P(0, T) = \exp \left\{ - \int_0^T \varphi_u du + \frac{1}{2} V(0, T) \right\}$$

in cui  $P^M(\cdot)$  rappresenta la curva di sconto bootstrappata dai dati di mercato. Osservando che

$$\exp \left\{ - \int_t^T \varphi_u du \right\} = \frac{P^M(T)}{P^M(t)} \exp \left\{ - \frac{1}{2} (V(0, T) - V(0, t)) \right\}$$

si ottiene la curva di sconto definita dal modello stocastico G2++

$$P(t, T) = \frac{P^M(T)}{P^M(t)} e^{A(t, T)} \quad (6.6)$$

con

$$A(t, T) = \frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)] - \frac{1 - e^{-a_1(T-t)}}{a_1}x(t) - \frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2}y(t)$$

## 6.1 Calibrazione del modello G2++

Il modello precedentemente definito è funzione dei cinque parametri  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\rho$ , oltre alla dipendenza temporale da  $t$  e  $T$ . Mentre questi ultimi due sono delle variabili del modello che assumeranno valori diversi a seconda delle diverse curve di sconto che vogliono simulare, gli altri cinque devono essere determinati attraverso una calibrazione del modello ai dati di mercato, che, nel caso in esame, sono rappresentati dalle swaption. Tali strumenti sono delle opzioni di tipo europeo con possibilità di esercizio solo ad una determinata scadenza  $T_\alpha$  e con strike  $K$ , in cui si ha il diritto di entrare in un payer-swap forward  $S_{\alpha\beta}(T_\alpha)$  che paga il tasso fisso  $K$  e con scadenza  $T_\beta$  (la differenza tra  $T_\beta$  e  $T_\alpha$  rappresenta la durata dello swap sottostante ed è detto tenor), nel caso di Payer-Swaption, o in un receiver-swap forward in caso di Receiver-Swaption. Il prezzo di tali opzioni in  $t_0 = 0$  è dato da

$$PS_{\alpha\beta}(0) = \mathbb{E} \left[ D(0, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(T_\alpha, T_i) (S_{\alpha\beta}(T_\alpha) - K)^+ \right] = \\ P(0, T_\alpha) \mathbb{E}^\alpha \left[ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(T_\alpha, T_i) (S_{\alpha\beta}(T_\alpha) - K)^+ \right]$$

in caso di Payer-Swaption

$$RS_{\alpha\beta}(0) = \mathbb{E} \left[ D(0, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(T_\alpha, T_i) (K - S_{\alpha\beta}(T_\alpha))^+ \right] = \\ P(0, T_\alpha) \mathbb{E}^\alpha \left[ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(T_\alpha, T_i) (K - S_{\alpha\beta}(T_\alpha))^+ \right]$$

in caso di Receiver-Swaption. In cui  $T_i$  sono le scadenze annuali da  $T_\alpha$  a  $T_\beta$ , con relativa frazione d'anno  $\delta_i$  in 30/360 e  $D(0, \cdot)$  rappresenta il fattore di sconto stocastico alla data attuale. Inoltre in entrambi i casi la seconda uguaglianza deriva dalla  $T_\alpha$ -Forward-Measure (da cui deriva il valore atteso  $\mathbb{E}^\alpha[\cdot]$ ), che permette portare fuori dal valore atteso il fattore di sconto stocastico in quanto diventa una martingala grazie al cambio di misura.

Attraverso il modello di Black (per dettagli riguardo al cambio di misura e sulle formule di Black che seguono, si veda [Björk 2009])

$$PS^{Black}(0) = P(0, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(0, T_i) [S_{\alpha\beta}(0)N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$RS^{Black}(0) = P(0, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(0, T_i) [KN(-d_2) - S_{\alpha\beta}(0)N(-d_1)]$$

con  $N(\cdot)$  funzione di densità cumulata di una normale di media 0 e varianza 1 e

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_{\alpha\beta}\sqrt{T_\alpha}} \ln\left(\frac{S_{\alpha\beta}(0)}{K}\right) + 0.5 \cdot \sigma_{\alpha\beta}\sqrt{T_\alpha}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{\alpha\beta}\sqrt{T_\alpha}$$

dove  $\sigma_{\alpha\beta}$  è la volatilità di Black. Ai fini della calibrazione si considerano delle opzioni ATM in cui

$$K = K_{ATM} = S_{\alpha\beta}(0) = \frac{P(0, T_\alpha) - P(0, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(0, T_i)}$$

in tal caso il prezzo della Payer e Receiver-Swaption sono uguali e si possono utilizzare le volatilità quotate sul mercato  $\sigma_{\alpha\beta}$ .

Nel caso in cui non si utilizzi il modello di Black ma il G2++ il prezzo delle suddette opzioni è dato da

$$PS_{\alpha\beta}^{G2++}(0) = P(0, T_\alpha) [N(-\hat{d}_2) - P_{\alpha\beta}(0; K)N(-\hat{d}_1)]$$

nel caso di Payer, e

$$RS_{\alpha\beta}^{G2++}(0) = P(0, T_\alpha) [P_{\alpha\beta}(0; K)N(\hat{d}_1) - N(\hat{d}_2)]$$

dove

$$\hat{d}_1 = \frac{1}{\nu_{\alpha\beta}\sqrt{T_\alpha}} \ln(P_{\alpha\beta}(0; K)) + 0.5 \cdot \nu_{\alpha\beta}\sqrt{T_\alpha}$$

$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \nu_{\alpha\beta}\sqrt{T_\alpha}$$

$$P_{\alpha\beta}(0; K) = K \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \delta_i P(0, T_\alpha, T_i) + P(0, T_\alpha, T_\beta)$$

in cui  $P(t_0, t_i, t_{i+1})$  è il fattore di sconto forward in  $t_0$  riferito al periodo tra  $t_i$  e  $t_{i+1}$ . In tal caso la volatilità  $\nu_{\alpha\beta}$  è riferita dal modello G2++ e vale

$$T_\alpha \nu_{\alpha\beta}^2 = \Sigma_1(\alpha, \beta)^2 \frac{1 - e^{-2a_1 T_\alpha}}{2a_1} + \Sigma_2(\alpha, \beta)^2 \frac{1 - e^{-2a_2 T_\alpha}}{2a_2} + 2\rho \Sigma_1(\alpha, \beta) \Sigma_2(\alpha, \beta) \frac{1 - e^{-(a_1+a_2)T_\alpha}}{a_1 + a_2}$$

con

$$\Sigma_i(\alpha, \beta) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \gamma_i^{\alpha\beta} \frac{\sigma_i}{a_i} (1 - e^{-a_i(T_i - T_\alpha)}) \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (6.7)$$

e

$$\gamma_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{P(0; K)} \begin{cases} K \delta_i P(0, T_\alpha, T_i) & i \neq \beta \\ (1 + K \delta_\beta) P(0, T_\alpha, T_\beta) & i = \beta \end{cases}$$

Per i dettagli delle suddette formule si faccia riferimento a [Baviera 2006].

Utilizzando lo strike ATM definito in precedenza si osserva che  $P(0; K_{ATM}) = 1$  da cui si ottiene che il prezzo della Receiver è uguale a quello della Payer-Swaption, pari a

$$PS_{\alpha\beta}^{G2++}(0) = RS_{\alpha\beta}^{G2++}(0) = P(0, T_\alpha)(2N(\hat{d}_1) - 1)$$

Imponendo la parità tra il prezzo calcolato con il metodo di Black e G2++ si ricava la volatilità che deve avere il modello di Hull-White al fine di essere il linea con i prezzi di mercato

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{T_\alpha}} N^{-1} \left( \frac{PS_{\alpha\beta}^{Black}(0)}{2P(0, T_\alpha)} + \frac{1}{2} \right)$$

con  $N^{-1}(\cdot)$  l'inverso della funzione cumulata della normale e  $PS_{\alpha\beta}^{Black}(0)$  il prezzo della swaption ATM nel modello di Black in  $t_0 = 0$ .

Per poter calibrare i parametri del mercato, si effettua la seguente minimizzazione

$$\min_{a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho} \sum_{\alpha\beta} \left| \frac{\nu_{\alpha\beta} - \hat{\sigma}_{\alpha\beta}}{\hat{\sigma}_{\alpha\beta}} \right|^2$$

considerando le combinazioni tra  $\alpha$  e  $\beta$  in modo da considerare solo le opzioni più liquide. Occorre sottolineare che si ricorre ad una minimizzazione relativa a causa delle diverse volatilità corrispondenti a diverse scadenze, quindi una tale tipologia di minimizzazione risulta necessaria al fine di avere dei risultati soddisfacenti.

Utilizzando le volatilità delle swaption più liquide quotate sul mercato alla data  $t_0$ , riportate nella Tabella (6.1), il risultato della precedente calibrazione produce i seguenti parametri

$$\begin{aligned} a_1 &= 4.7330 \\ a_2 &= 0.0315 \\ \sigma_1 &= 0.3169 \\ \sigma_2 &= 0.0103 \\ \rho &= -0.9562 \end{aligned}$$

<i>Scadenza/Tenor</i>	<i>Quota di mercato %</i>
1Y/5Y	43.99
1Y/10Y	29.81
1Y/30Y	22.65
5Y/5Y	28.05
10Y/10Y	22.44

Tabella 6.1: Quote di mercato delle volatilità delle swaption più liquide, in funzione delle scadenze/tenor, presenti sul mercato alla data  $t_0$ .

Occorre infine sottolineare che nell'implementazione della calibrazione del modello si è utilizzata la variabile  $\epsilon$  in funzione della quale si è definito il parametro di correlazione  $\rho = -1 + |\epsilon|$ . In tal modo si riesce a garantire che il modello G2++ non degeneri in un modello mono-fattoriale ed inoltre si può adottare una minimizzazione senza l'imposizione di alcun vincolo sulle variabili da calibrare.

## 6.2 Applicazione dello Scenario Stocastico

Al fine di simulare dei processi stocastici e quindi poter costruire la curva di sconto negli anni successivi a  $t_0$  definita attraverso la formula (6.6) occorre seguire alcuni passi

1. Dalla dinamica dei processi  $x_t$  e  $y_t$  espressa da (6.2) e (6.3) rispettivamente, si osserva che se si considera la data iniziale, i processi sono delle normali a media 0 e varianza

$$\sigma_1^2 \int_0^t e^{-2a_1(t-u)} du \quad \text{e} \quad \sigma_2^2 \int_0^t e^{-2a_2(t-u)} du$$

Per generare tali variabili aleatorie in modo che siano correlate attraverso il coefficiente di correlazione  $\rho$  si generano due variabili normali di media 0 e varianza 1  $n_1$  e  $n_2$  e si costruiscono le variabili aleatorie  $N_1$  e  $N_2$  attraverso il seguente modo

$$N_1 = n_1$$

$$N_2 = \rho n_1 + \sqrt{1 - \rho^2} n_2$$

quindi i processi  $x_t$  e  $y_t$  simulati in  $t$  corrispondono a

$$x_t = N_1 \sigma_1 \sqrt{\frac{1}{2a_1} (1 - e^{-2a_1 t})}$$

$$y_t = N_2 \sigma_2 \sqrt{\frac{1}{2a_2} (1 - e^{-2a_2 t})}$$

2. Utilizzando i processi simulati in 1. si calcola la curva di sconto  $P(t, \cdot)$  attraverso (6.6) al variare della scadenze a cui si vuole riferirsi.

### 6.3 Qualità della strategia nel tempo: Scenario Stocastico

Le curve di sconto generate seguendo l'algoritmo descritto in precedenza, per definizione, sono dipendenti dalle simulazioni delle variabili che si generano. Gli scenari stocastici potrebbero riferirsi a degli eventi estremamente irreali con basse probabilità che si verifichino. Risulta necessario, dunque, effettuare quante più possibili simulazioni al fine di osservare delle situazioni che potrebbero verificarsi realmente oltre a quelle più improbabili. In tal caso si osserva che per ogni scadenza fissata si avranno tanti risultati quanti sono le simulazioni effettuate. Al fine di eliminare la stocasticità dei processi, si potrebbe effettuare una media per ogni scadenza su tutti gli scenari osservati.

Procedendo come fatto in precedenza, si osserva che risulta difficile effettuare un'analisi in riferimento allo Scenario Forward, in quanto, per costruzione, lo scenario stocastico non presenta un trend ben specificato come nei casi deterministici. L'analisi della variazione della cassa e del valore attuale netto porterebbe ad un valore nullo per ogni bucket temporale. Infatti in ogni scadenza si verificherebbero simultaneamente casi simili allo Scenario Forward shiftato positivamente e negativamente, con un valore medio pressochè nullo.

Rimane valido invece l'utilizzo degli scenari stocastici per studiare l'evoluzione dei costi. In particolare per verificare se il comportamento analizzato precedentemente, secondo cui la strategia di copertura generata dal metodo standard raccontato in [Hagan 2006] genera dei costi di riaggiustamento molto superiori a quella definita dall'approccio non standard, continua ad essere valida anche in condizioni di forte stress. Dall'analisi della Figura (6.1) si osserva che effettivamente tale comportamento continua a verificarsi. Infatti si può osservare che, ad esclusione del primo bucket temporale che corrisponde al costo iniziale che è deterministico, dato che la strategia è fissata, nelle altre scadenze si osservano dei diversi picchi sia nella strategia generata con il metodo standard che non. Tali picchi derivano da situazioni irreali in cui il tasso forward non perturbato è sempre al di sopra dell'UFR (se ci si trovasse in tale scenario risulterebbe inutile l'approccio di Wilson-Smith, dato che i tassi sarebbero più alti del necessario).

Nel metodo di Wilson Smith Alternativo si osserva che anche nel caso stocastico, come in quello deterministico, dopo un esborso iniziale di qualche milione di euro, negli anni successivi si verifica una sostanziale diminuzione dei costi, in tutti gli scenari simulati, come si vede da Figura (6.2). Inoltre si nota che ci sono alcuni picchi che testimoniano le diverse strategie generate con gli scenari stocastici ma anche nei casi più estremi il costo risulta molto più basso dell'esborso iniziale. Infine effettuando una media per ogni bucket

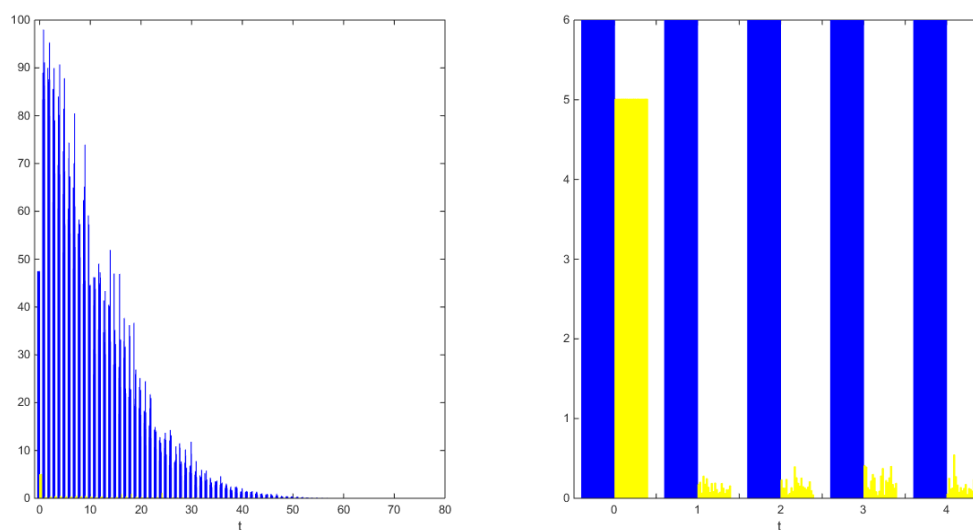


Figura 6.1: Confronto tra i costi (in milioni) di generazione delle strategie dinamiche sotto scenari stocastici nel metodo di Wilson Smith. In blu la strategia generata con l'approccio standard ed in giallo con quello non standard. Inoltre a destra un ingrandimento della prima sotto-figura sui primi bucket temporali.

temporale si verifica la presenza di un trend che porta alla diminuzione del costo nel tempo, fino al suo annullamento dalle scadenze  $t_{60}$  in poi dato che si entrerebbe nella strategia statica.



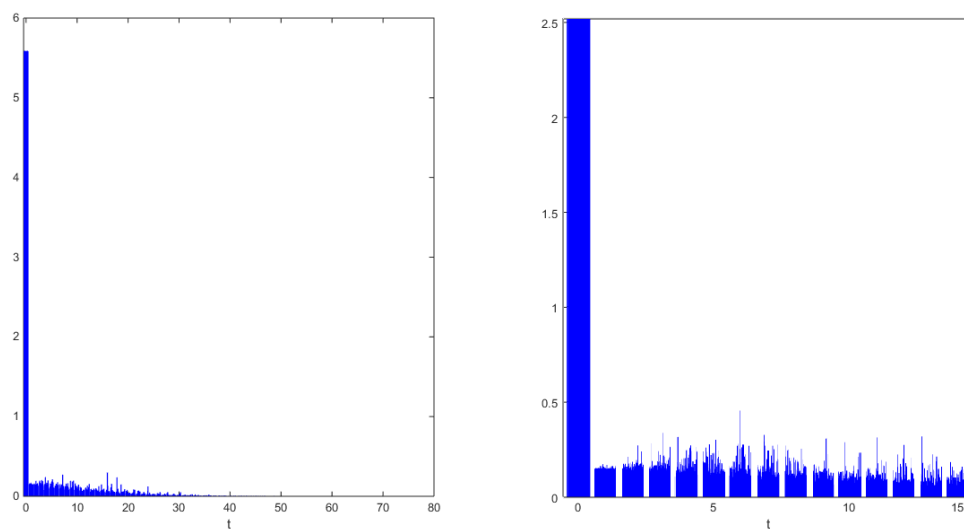


Figura 6.2: Confronto tra i costi (in milioni) di generazione delle strategie dinamiche sotto scenari stocastici nel metodo di Wilson Smith Alternativo. A destra un ingrandimento della prima sotto-figura sui primi bucket temporali.

# Capitolo 7

## Hedging Liquido

In tutta la precedente analisi si è fatto uso dell'ipotesi secondo cui si possa generare una strategia di copertura avendo a disposizione tutti gli swap necessari. In realtà tale ipotesi è abbastanza restrittiva dato che sul mercato non si trovano quotati degli swap per tutte le scadenze. Sarebbe opportuno generare una copertura solo con gli swap realmente presenti sul mercato, in modo da poter simulare realmente una copertura. A tal fine si deve definire un *bucket* di swap liquidi tra cui scegliere gli strumenti con cui definire la copertura.

Per poter effettuare un'analisi completa occorre analizzare le sensitivity definite su tali swap, generare delle strategie di copertura e confrontarle tra loro in funzione della loro evoluzione nel tempo.

### 7.1 Sensitivity a blocchi

Come osservato in precedenza, le sensitivity rappresentano la variazione di un determinato portafoglio in funzione di alcuni fattori che lo determinano. Nel caso in esame, in cui non si dispone di tutti gli swap, occorre perturbare solo quelli che fanno parte del bucket considerato. Attraverso l'approccio suggerito in [Hagan 2006], si utilizzano delle perturbazioni triangolari in riferimento ai bucket. Tale tipologia di perturbazione deriva dalla stretta correlazione esistente tra i movimenti di un determinato tasso swap e di quelli ad esso vicini.

Mentre nelle sensitivity utilizzate nei precedenti capitoli si dava uno shift di  $1bp$  ad ogni swap e quindi si osservavano  $N_{swp}$  perturbazioni, nel caso si consideri un bucket composto da  $\{t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_U}\}$  ci si aspetta di avere  $U$  perturbazioni. A tal proposito viene definita la perturbazione di tipo triangolare  $\omega_i^j$ , che indica lo shift che subisce il tasso swap con

scadenza  $\hat{t}_i$  se si considera il bucket  $t_{k_j}$ , nel seguente modo

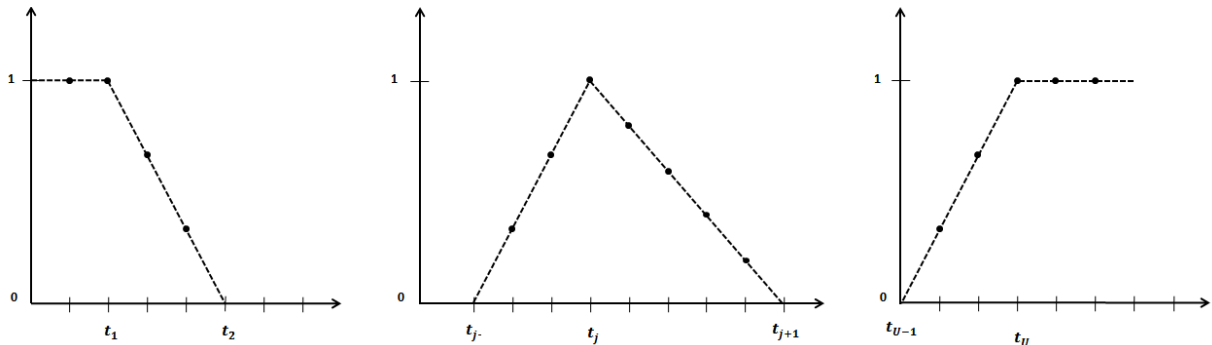
$$\omega_i^{(1)} = \begin{cases} 1 & i \leq k_1 \\ \frac{t_{k_2} - \hat{t}_i}{t_{k_2} - t_{k_1}} & k_1 < i \leq k_2 \end{cases}$$

$$\omega_i^{(j)} = \begin{cases} \frac{\hat{t}_i - t_{k_{j-1}}}{t_{k_j} - t_{k_{j-1}}} & k_{j-1} \leq i < k_j \\ 1 & i = k_j \\ \frac{t_{k_{j+1}} - \hat{t}_i}{t_{k_{j+1}} - t_{k_j}} & k_j < i \leq k_{j+1} \end{cases} \quad \forall j = 2, \dots, U-1$$

e

$$\omega_i^{(U)} = \begin{cases} \frac{\hat{t}_i - t_{k_{U-1}}}{t_{k_U} - t_{k_{U-1}}} & k_{U-1} \leq i < k_U \\ 1 & k_U \leq i \end{cases}$$

Al fine di non appesantire la precedente notazione si è considerato uno shift unitario, ma i pesi precedenti devono essere moltiplicati di  $1bp$  al fine di ottenere la perturbazione desiderata. Si può verificare, inoltre, che la somma degli shift che agiscono su ogni singolo tasso swap è pari a  $1bp$ . Inoltre nella figura di seguito riportata si possono osservare tre esempi qualitativi di applicazione dei pesi, in particolare  $\omega_i^{(1)}$ ,  $\omega_i^{(j)}$  e  $\omega_i^{(U)}$



Attraverso le perturbazioni suddette si ottengono delle sensitivity rispetto al bucket di swap considerato. Nella presente trattazione si considerano liquidi gli swap con scadenze

$$\{t_1, t_2, \dots, t_{25}, t_{30}, t_{40}, t_{50}\}$$

Naturalmente avendo a disposizione swap con scadenze successive al 20-esimo anno, ci si aspetta che il metodo di Wilson-Smith e il Bootstrap generino diverse sensitivity.

Nel caso del Bootstrap della curva swap, data la linearità del DV01 rispetto alla perturbazione sul tasso, si osserva che le sensitivity a blocchi rappresentano una composizione lineare delle sensitivity rispetto ai singoli shift tramite dei coefficienti che sono rappresentati dagli  $\omega_i^{(j)}$  precedentemente definiti. In particolare risulta

$$(\widehat{DV01}_{CF})_{k_j} = \sum_{i=k_{j-1}}^{k_{j+1}} \omega_i^{(j)} (DV01_{CF})_i \quad (7.1)$$

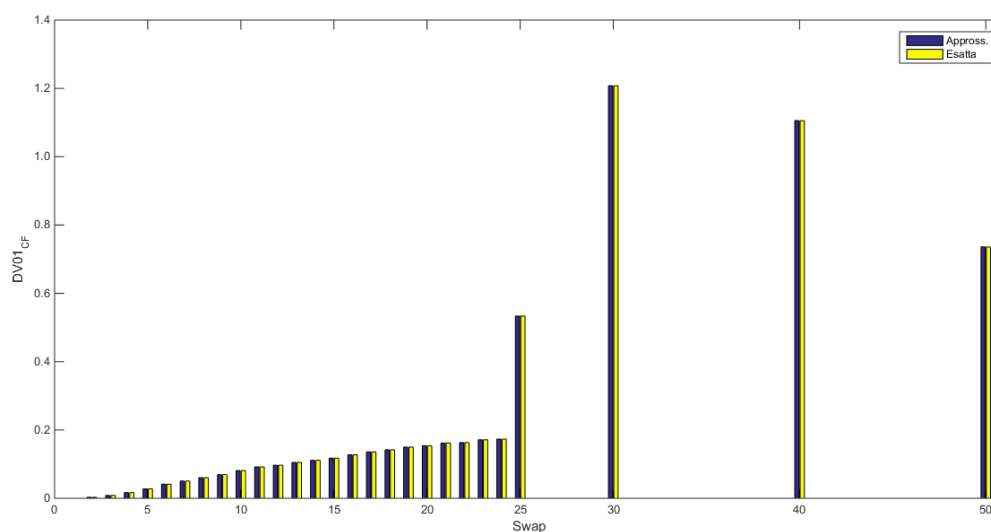


Figura 7.1: Confronto tra il DV01 (in milioni) a blocchi del portafoglio composto dai flussi di cassa nel caso di valutazione con la curva *Euribor* con la formula esatta ed approssimata.

in cui  $\widehat{DV01}_{CF}$  rappresenta la sensitivity del portafoglio delle passività dovuta a perturbazioni di carattere triangolare. A supporto di tale tesi, si osservi Figura (7.1) in cui è rappresentata l'equivalenza tra il DV01 prodotto perturbando triangolarmente i tassi swap del bucket considerato e il caso in cui si deriva tale sensitivity come una combinazione lineare convessa attraverso (7.1). Inoltre si osserva che le sensitivity sugli ultimi quattro bucket sono maggiori rispetto alle altre dato che su di essi si riversano quelle dei flussi di cassa al di fuori dei bucket. Nel metodo di Wilson-Smith, invece, data la presenza di Swap con scadenza successiva a  $t_{LLP}$ , ci si aspetta che si verifichi un andamento simile al caso studiato nei precedenti capitoli, in quanto le perturbazioni in corrispondenza degli Swap con scadenza  $t_{20}$  e  $t_{19}$  in maniera più rilevante, ma anche  $t_{18}$  e  $t_{17}$ , comportano delle oscillazioni del tasso forward attorno al caso non perturbato: la perturbazione in  $t_{20}$  corrisponde ad un innalzamento del tasso forward, quella in  $t_{19}$  ad un abbassamento e così via. In tale contesto si generano necessariamente delle sensitivity oscillanti come si osserva da Figura (7.2), in cui si mette inoltre a confronto lo  $DV01_{CF}$  generato con i due metodi in questione e si osserva che da un punto di vista quantitativo che la sensitivity prodotta dal metodo di Wilson-Smith raggiunge un massimo dell'ordine di 10 milioni, mentre il massimo del Bootstrap è dell'ordine del milione e per scadenze successive a  $t_{20}$  il metodo di Wilson-Smith non risente delle perturbazioni.

Analizzando invece il metodo di Wilson-Smith Alternativo, come si evince da Figura (7.3), si osserva che per le perturbazioni precedenti al  $t_{20}$  il comportamento è molto simile a quello del Bootstrap, mentre per scadenze successive si osserva i due comportamenti tipici

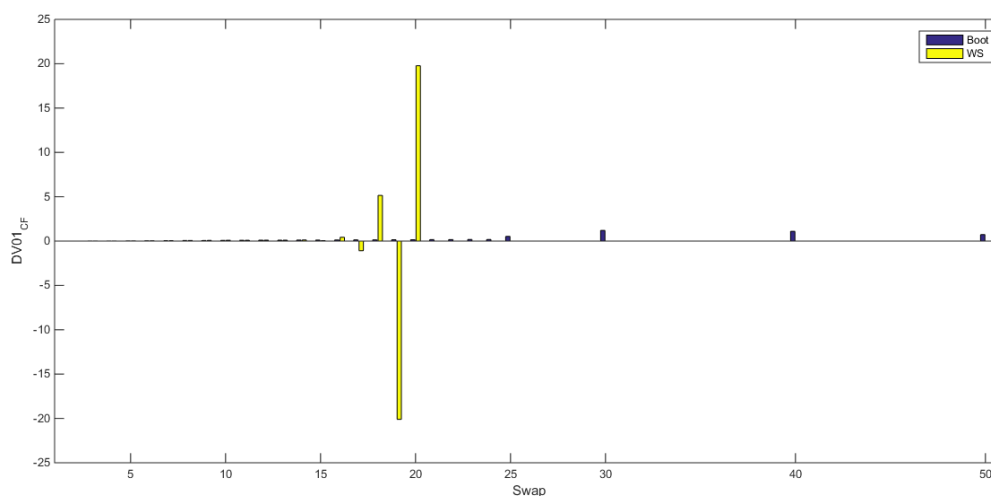


Figura 7.2: Confronto tra il DV01 (in milioni) a blocchi del portafoglio composto dai flussi di cassa nel caso di valutazione con la curva *Euribor* e la curva Wilson-Smith.

di tale metodo: l'innalzamento del tasso verso l'asintoto *UFR* con conseguente diminuzione dell'effetto perturbativo sul tasso forward. Tali comportamenti generano un innalzamento delle sensitivity nella parte immediatamente successiva a  $t_{20}$  e un abbassamento per le scadenze più lontane in riferimento al metodo Bootstrap. In tal caso si osserva che gli ordini di grandezza sono equivalenti tra loro e che il metodo Alternativo risente di tutte le perturbazioni effettuate sul bucket.

## 7.2 Strategia di copertura a blocchi

Al fine di analizzare i diversi tipi di Accounting a cui ci si potrebbe sottoporre, si analizzano i tre casi evidenziati nei precedenti capitoli. Occorre sottolineare che mentre prima si era alla presenza di uno swap per ogni passività da cui ci si voleva hedgiare, nel presente capitolo i flussi di cassa  $CF$  sono gli stessi ma gli swap a disposizione sono solo quelli presenti nel bucket assegnato, quindi ci si aspetta dei comportamenti differenti da quelli evidenziati nello studio del caso non a blocchi.

### 7.2.1 Accounting 0

Nel caso in cui si valutassero sia gli swap che i flussi di cassa con la curva *Euribor*, si osserva che la soluzione che annulla le sensitivity non può più essere indipendente dalla curva di sconto utilizzata, in quanto ogni anno si dovranno considerare degli swap con scadenze

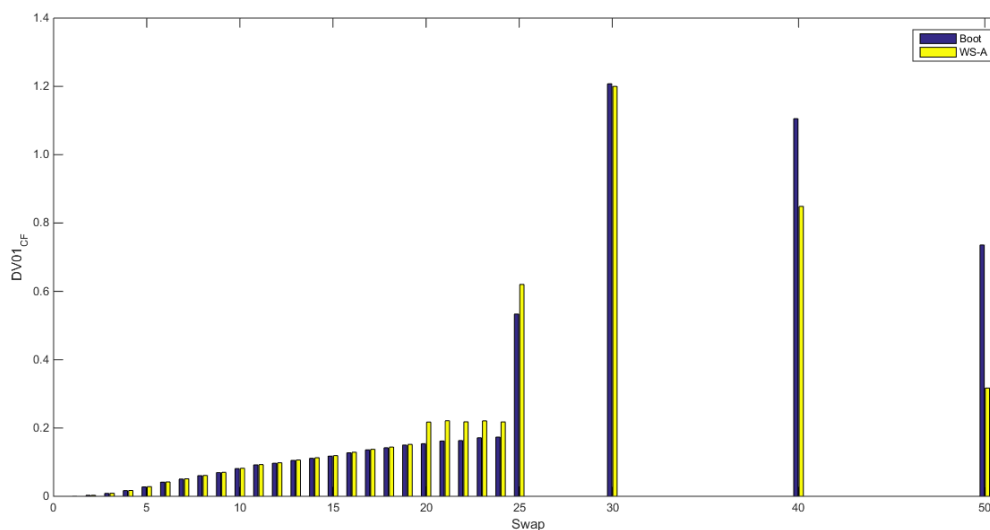


Figura 7.3: Confronto tra il DV01 (in milioni) a blocchi del portafoglio composto dai flussi di cassa nel caso di valutazione con la curva *Euribor* ed il metodo di Wilson-Smith Alternativo.

diverse: se nel primo anno considero quelli con scadenze  $\{t_1, t_2, \dots, t_{25}, t_{30}, t_{40}, t_{50}\}$ , l'anno successivo dovrò generare una copertura con gli swap  $\{t_1, t_2, \dots, t_{25}, t_{30}, t_{40}, t_{50}\}$ , utilizzando delle scadenze che prima non erano presenti (ad esempio l'anno successivo a  $t_0$  si utilizza lo swap  $t_{25}$  che corrisponde a  $t_{26}$  in riferimento alla data iniziale). Quindi si dovrà riadattare la copertura d'anno in anno al fine di garantire un hedging dalle sensitivity prodotte da tutti i flussi di cassa. Utilizzando l'approccio classico descritto in [Hagan 2006] secondo cui la strategia di copertura è data dall'annullamento delle sensitivity del portafoglio composto sia dagli swap che dalle passività, si risolve il sistema

$$DV01_{swp} \cdot \widehat{W} + DV01_{CF} = 0$$

che ha un'unica soluzione dato che la matrice  $DV01_{swp}$  ha gli elementi diagonali che predominano, garantendo l'invertibilità della stessa ed una proporzionalità tra i le componenti della strategia  $\widehat{W}$  e quelle del  $DV01_{CF}$ , come si evince da Figura (7.4). Tale stretto legame genera una copertura che ha delle componenti tutte diverse da zero e con una maggiore concentrazione sugli ultimi quattro bucket (su cui si concentrano maggiormente le sensitivity).

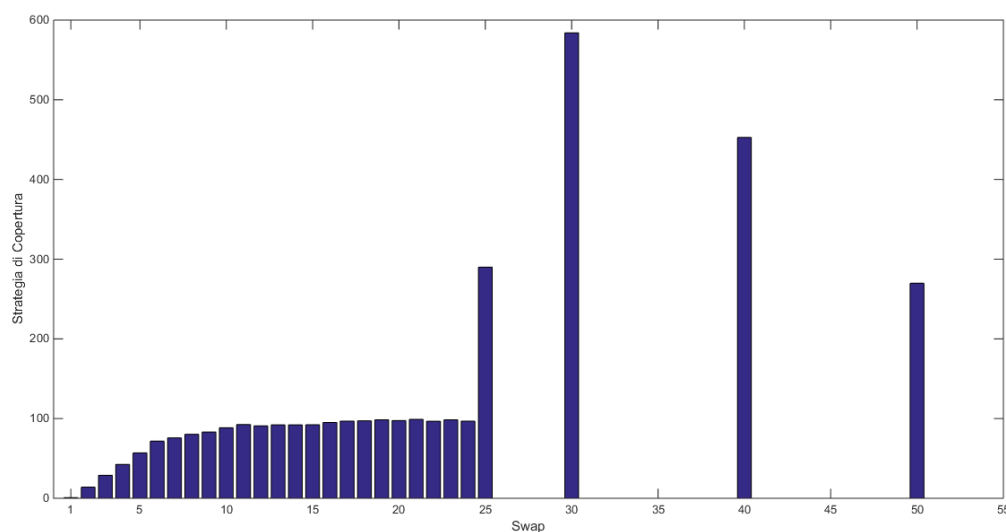


Figura 7.4: Strategia di copertura (in milioni) nel caso delle sensitivity a blocchi generate con la curva *Euribor*.

## 7.2.2 Accounting 1

Tale tipologia di Accounting riguarda la valutazione degli swap e dei flussi di cassa con il metodo di Wilson-Smith, utilizzando un modello single-curve per la valutazione dei primi (in cui il tasso variabile è scomposto in sue flussi deterministici). In accordo con quanto osservato precedentemente sulle sensitivity a blocchi prodotte da Wilson-Smith, si osserva che la risoluzione del sistema lineare proposta in [Hagan 2006] genera la presenza di infinite soluzioni. Al fine di trovare una soluzione unica, occorre sottolineare che non si può utilizzare la strategia definita precedentemente in quanto essa non è più frutto dell'annullamento dei flussi di cassa del portafoglio composto da swap e passività. Quindi si utilizza  $\widehat{W}$  per eliminare le infinite soluzioni e poi si risolve il sistema lineare reso invertibile, procedendo nel seguente modo:

1. si identifica il numero delle variabili che generano infinite soluzioni  $N_\infty$ ;
2. si genera il vettore  $\widehat{W}^{WS}$  sostituendo alle ultime  $N_\infty$  componenti le rispettive del vettore  $\widehat{W}$ ;
3. il prodotto tra la matrice  $DV01_{sup}$  il vettore definito in 2. deve essere inglobato con il termine noto  $DV01_{CF}^{WS}$ ;

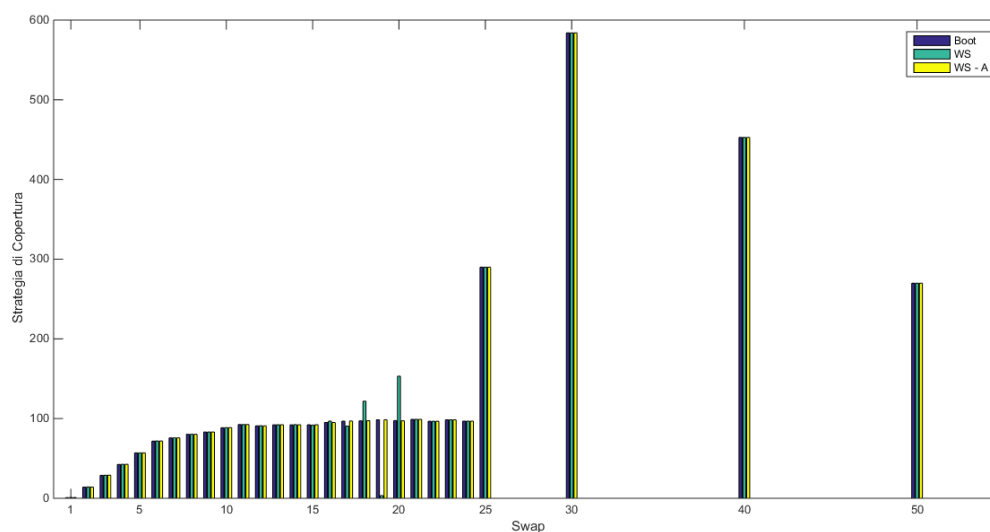


Figura 7.5: Confronto tra le strategia di copertura (in milioni) a blocchi, nel caso dell'Accounting 0 (Bootstrap), e Accounting 1 (Wilson-Smith e Wilson-Smith Alternativo).

- la matrice in cui si eliminano le ultime  $N_\infty$  righe e colonne ora è invertibile e dalla risoluzione del sistema lineare con termine noto definito in 3. si ottengono le componenti mancanti del vettore  $\widehat{W}^{WS}$ .

Naturalmente tale algoritmo si può applicare anche nell'Accounting 1 nel caso delle sensitivity per shift di tutti i tassi swap, studiato nei precedenti capitoli, ed il risultato che si ottiene coincide con la strategia  $\underline{W}$ , in quanto essa non dipende dalla curva di sconto utilizzata.

La strategia che si ottiene in questo caso si osserva che è molto simile a quella generata dal Bootstrap con differenze sui bucket  $t_{18}$ ,  $t_{19}$  e  $t_{20}$ , mentre nel caso di utilizzo del metodo di Wilson-Smith Alternativo invece, come già osservato in precedenza, non si hanno infinite soluzioni in quanto si risente di tutte le perturbazioni triangolari. Quindi, come si verifica nella Figura (7.5), ci si aspetta una copertura molto simile a quella generata nell'Accounting 0.

### 7.2.3 Accounting 2

Valutando gli swap con la curva di sconto bootstrappata dai tassi swap e le passività con il metodo di Wilson-Smith, si è osservato che la matrice  $DV01_{swp}$  è invertibile, quindi utilizzando l'approccio standard di annullamento delle sensitivity al fine di generare la strategia di copertura si osserva che la soluzione  $\widehat{W}_{std}$  del sistema lineare corrisponde ad



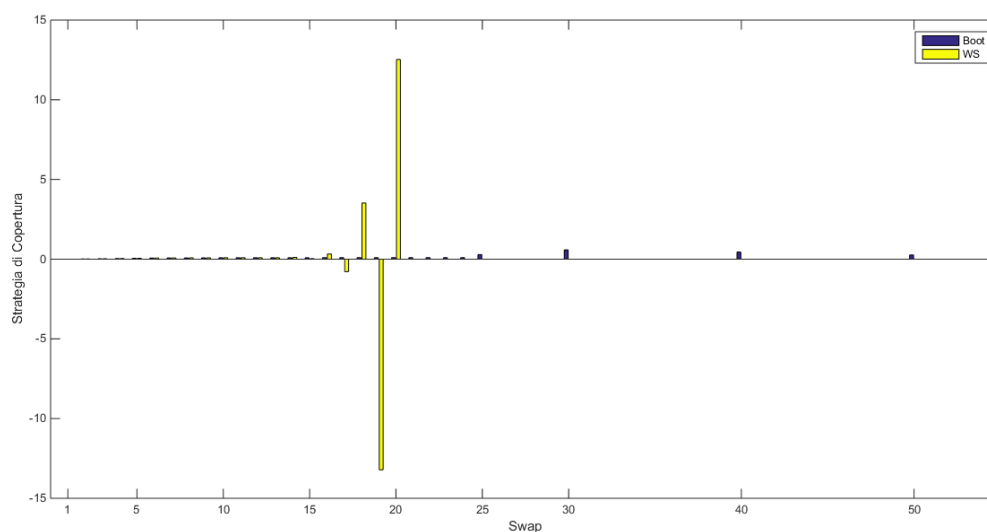


Figura 7.6: Confronto tra la strategia di copertura a blocchi (in miliardi) nel caso in cui sia generata con il Bootstrap della curva swap o il metodo di Wilson-Smith.

avere delle oscillazioni sui bucket  $t_{20}$  e  $t_{19}$  principalmente,  $t_{18}$  e  $t_{17}$  in quantità minore, e poi una copertura nulla in corrispondenza dei  $t_i$  con  $i > 20$ , come si osserva da Figura (7.6). In tale confronto inoltre si evince l'enorme differenza tra i massimi raggiunti nel caso dell'approccio standard e quello dell'Accounting 0: nel primo si osservano picchi dell'ordine di 10 miliardi, mentre nel secondo si parla di 100 milioni (infatti dal grafico la strategia  $\widehat{W}$  è trascurabile in confronto a  $\widehat{W}_{std}$ ).

Al fine di evitare di ottenere una strategia che risulti di segno variabile e che differisca sostanzialmente da quella definita in Accounting 0, si genera un'ulteriore copertura attraverso il metodo non standard definito nei capitoli precedenti. Quindi si procede considerando un flusso di cassa alla volta, risolvendo il sistema lineare generato dall'Accounting 0 e moltiplicando tale soluzione per il parametro  $K_n$ , definito come il rapporto delle sensitivity per shift paralleli tra il caso di Wilson-Smith e del bootstrap. In tal caso si osserva che il flusso di cassa  $(CF)_n$  deve risentire delle perturbazioni parallele di  $1bp$  di tutti gli swap fino alla scadenza  $t_n$ , caratteristica che si riscontra per costruzione:

- nel caso del bootstrap l'utilizzo dell'approssimazione lineare comporta che sommando per righe la matrice  $DV01_{swp}$  ogni swap risulta shiftato di  $1bp$  da  $t_1$  a  $t_n$  (grazie a quanto osservato in precedenza sulle perturbazioni triangolari)
- nel caso del metodo di Wilson-Smith perturbando parallelamente tutti gli swap da  $t_1$  ad ogni scadenza  $t_k$  del bucket considerato, il flusso di cassa in  $t_n$  risente solo delle

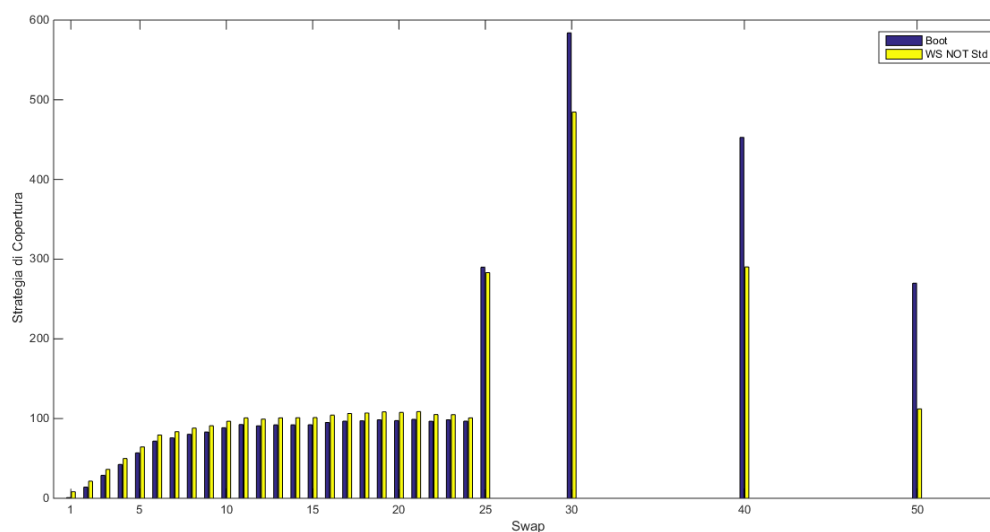


Figura 7.7: Confronto tra la strategia di copertura a blocchi (in miliardi) nel caso in cui sia generata con il Bootstrap della curva swap o il metodo di Wilson-Smith con l’approccio non standard.

perturbazioni fino a  $t_n$ , infatti se si considera il bucket  $t_k$  con  $k \geq n$ , gli shift su  $t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_k$  non entrano in gioco nella valutazione.

La strategia risultante  $\widehat{W}_{Nstd}$  nel caso a blocchi ha le medesime caratteristiche di quella dell’hedging non liquido: se si considera il portafoglio CF composto solo dai primi 20 flussi si osserva la stessa strategia generata nell’Accounting 0, mentre per scadenze superiori si ha che Wilson-Smith valuta in maniera minore le passività quindi sono al di sotto della strategia  $\widehat{W}$ , come si evince dal confronto mostrato in Figura (7.7), in cui gli ordini di grandezza sono confrontabili tra loro.

Nel metodo di Wilson-Smith Alternativo, utilizzando l’approccio standard di generazione della copertura, si osserva che la risoluzione del sistema lineare produce una copertura che qualitativamente è simile alle sensitivity da cui deriva. Infatti dal confronto con la strategia ottenuta nel caso dell’Accounting 0, si osserva che per le scadenze precedenti a  $t_{20}$  le due coperture sono approssimativamente uguali, mentre man mano che ci si allontana da tale scadenza, si passa da una copertura maggiore sui bucket  $t_{21}, \dots, t_{25}$ , circa il 20% in media, ad una progressiva diminuzione fino ad essere circa la metà.

## 7.3 Qualità della strategia nel tempo: Scenari Deterministici e Stocastici

Come effettuato nel caso dell'hedging non liquido, si vogliono confrontare le diverse strategie generate in funzione di alcuni criteri e diversi comportamenti strategici, ponendo maggiore attenzione nell'ultimo caso di accounting che corrisponde al caso più realistico di valutazione. A tal fine si studia quest'ultimo con la sua evoluzione nel tempo osservando cosa succede nel caso in cui si decida di non modificare la strategia generata in  $t_0$ , caso statico, o nel caso in cui si decida di continuare ad annullare le sensitivity anno dopo anno, caso dinamico. Infine occorre specificare che si confronteranno i risultati ottenuti con la strategia dell'Accounting 0 che rappresenta la situazione precedente all'introduzione del metodo di Wilson-Smith per la valutazione delle passività e si focalizzerà l'attenzione sullo scenario deterministico con uno shift negativo del tasso Forward in  $t_0^+$ .

Il caso in cui si utilizza il metodo di Wilson-Smith Alternativo, verrà trattato a fine capitolo in modo da dare uno sguardo unico sui diversi scenari sia deterministici che stocastici.

### 7.3.1 Scenario Deterministico: Caso Statico

In tal caso si analizzano i criteri di variazione di valore attuale netto e di cassa, entrambi in relazione al portafoglio composto dalla strategia di copertura e dalle passività. Per poter utilizzare le formule (5.1) e (5.2) per lo NPV e (5.3) per la cassa, occorre considerare gli swap a disposizione e quindi quelli che compongono il bucket assegnato. Dal confronto dello NPV tra il portafoglio non hedgiato e le strategie  $\widehat{W}$ ,  $\widehat{W}_{std}$  e  $\widehat{W}_{Nstd}$ , mostrati in Figura (7.8), si osserva il verificarsi della medesima situazione descritta nei precedenti capitoli, in particolare

- caso non hedgiato: la valutazione delle passività nel caso di uno shift di -1% genera un sottovalutazione di  $\underline{CF}$ ;
- $\widehat{W}$ : la variazione di NPV genera degli utili fino al bucket  $t_{25}$ , in quanto fino a tale scadenza si hanno a disposizione tutti gli swap, e man mano che ci si allontana da  $t_{25}$  si è sempre meno hedgiati, generando delle perdite;
- $\widehat{W}_{std}$ : dopo il 20-esimo anno il portafoglio non fornisce alcuna copertura essendo questo composto solo dai primi 20 swap;
- $\widehat{W}_{Nstd}$ : per costruzione la copertura è sempre garantita in quanto i bucket non nulli sono gli stessi di quelli di  $\widehat{W}$ .

In tutti e tre i casi hedgiati, si osserva che, per costruzione, il portafoglio sarà scoperto dal 51-esimo anno in poi, a causa del bucket considerato.

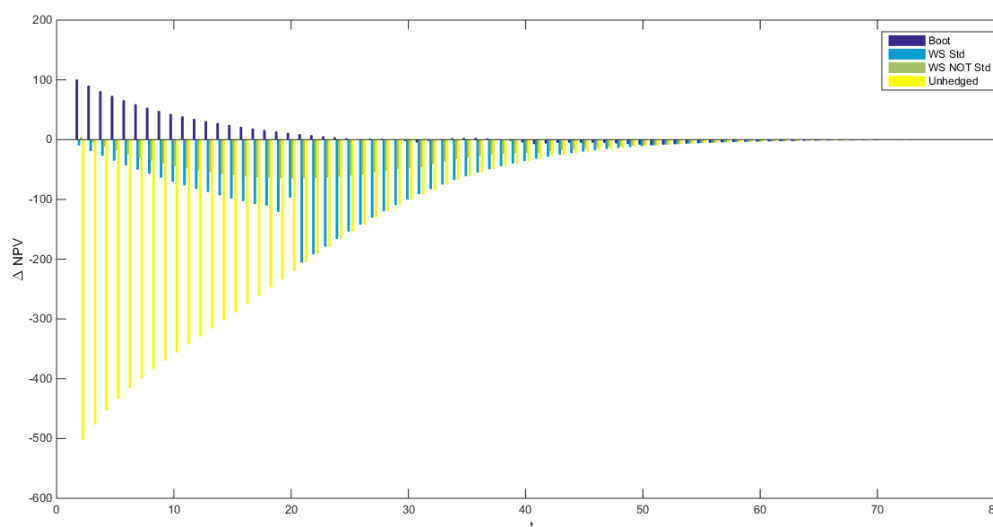


Figura 7.8: Confronto tra la variazione di NPV (in milioni) nelle diverse strategie statiche a blocchi nel caso dello Scenario Deterministico -1%, rispetto al caso non shiftato.

Dal confronto della cassa, si veda Figura (7.9) invece si osserva che mentre la strategia definita con l'Accounting 0 e quella con l'approccio non standard sono molto simili tra di loro, con dei tratti costanti dati dai bucket in esame, la strategia generata con l'approccio standard non genera più dei flussi di cassa dal 20-esimo anno in poi ed inoltre produce delle perdite nel 19-esimo anno, nonostante i tassi forward si fossero abbassati.

Naturalmente un comportamento del tutto speculare rispetto all'asse delle ascisse si osserva nel caso si consideri uno shift verso l'alto del tasso forward in  $t_0^+$ , come osservato nel caso di hedging non liquido.

### 7.3.2 Scenario Deterministico: Caso Dinamico

Ipotizzando di annullare ogni anno le sensitivity nei diversi metodi e tipologie di Accounting, utilizzando degli Swap ad NPV non nullo negli anni successivi a  $t_0$ , si utilizzano le formule 5.4, per la variazione di NPV, e 5.5, per quella della cassa, considerando opportunamente gli swap in perimetro. Occorre inoltre sottolineare che nel caso di copertura a blocchi anche la strategia generata con l'Accounting 0 può essere creata dinamicamente. Inoltre si osserva che, la variazione di NPV nel caso di shift negativo, rispetto allo scenario forward, produce un over-hedging nel caso dell'Accounting 0 e delle variazioni trascurabili negli altri due casi, infatti mettendo a confronto i  $\Delta NPV$  delle sole passività con quelli delle sole coperture, si osserva che sono del tutto simili tra di loro (tale comportamento deriva dal fatto che di anno in anno sono state annullate le sensitivity). A livello di cassa

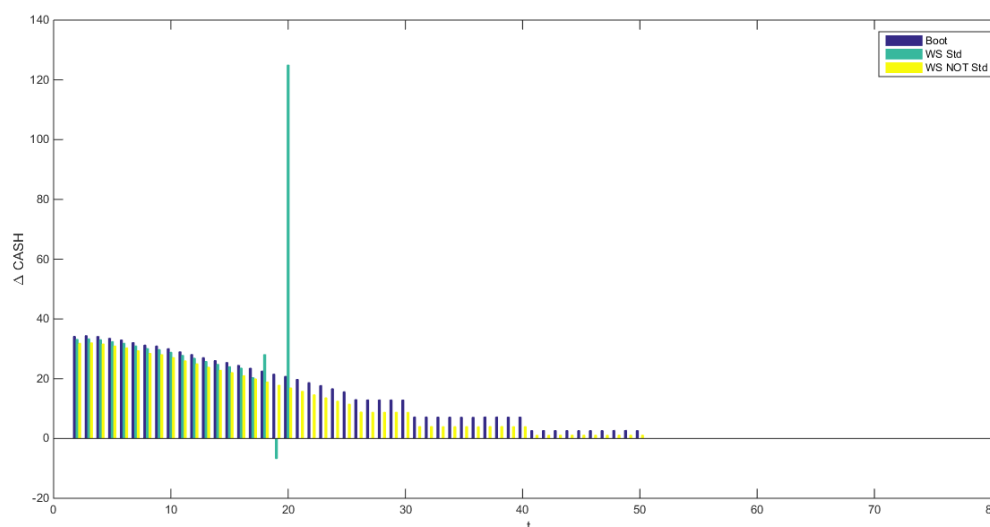


Figura 7.9: Confronto tra la variazione di flussi di cassa (in milioni) nelle diverse strategie statiche a blocchi nel caso dello Scenario Deterministico -1%, rispetto al caso non shiftato.

generata si verifica che tutte le tre strategie  $\widehat{W}$ ,  $\widehat{W}_{std}$  e  $\widehat{W}_{Nstd}$  presentano dei risultati molto simili tra di loro sia da un punto di vista qualitativo che quantitativo.

Inoltre anche in questo caso si osserva un comportamento del tutto speculare all'asse delle ascisse nel caso in cui si consideri uno shift verso l'alto del tasso forward in  $t_0^+$ .

Come effettuato nel caso di hedging non liquido, nel caso dinamico ci si avvale di un ulteriore criterio: i costi di generazione delle coperture negli anni. Utilizzando la formula (5.6) si calcolano i costi rappresentati in Figura (7.10).

Come si evince dal grafico, il costo di generazione della strategia attraverso l'approccio standard comporta dei costi nettamente superiori rispetto al caso non standard o all'Accounting 0, infatti c'è un ordine di grandezza di differenza. Inoltre dal confronto tra la strategia  $\widehat{W}$  e  $\widehat{W}_{Nstd}$  si osserva che la seconda ha un costo inferiore di circa il 12%. Confrontando questi ultimi due costi con il caso analizzato nei precedenti capitoli, si osserva che l'hedging a blocchi nelle scadenze  $t_i$  con  $i \geq 1$  costa di più rispetto a quello non liquido, in quanto, come osservato precedentemente, ogni anno bisogna acquistare degli swap che prima non si possedevano in perimetro.

### 7.3.3 Scenario Stocastico

Come osservato nel precedente capitolo, nel caso degli scenari stocastici dall'analisi della variazione di valore attuale e della cassa generata non si riescono ad estrarre dei risultati utili al fine del confronto tra le strategie. Quindi si focalizzerà l'attenzione sui

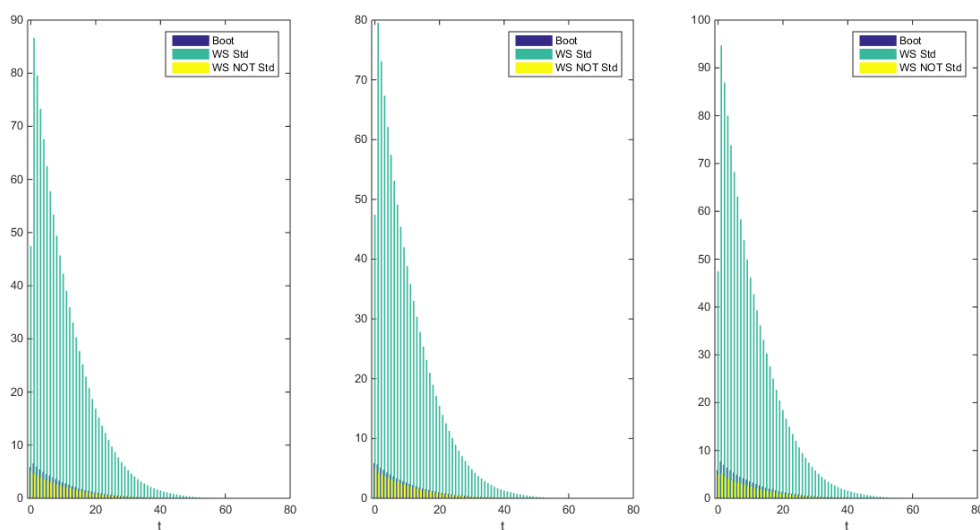


Figura 7.10: Confronto tra i costi (in milioni) di generazione delle strategie dinamiche a blocchi sotto scenari deterministici. Da sinistra verso destra: Scenario Forward, Scenario Forward +1% e Scenario Forward -1%.

costi di generazione delle coperture dinamiche nei diversi anni, testando anche scenari di forte stress. Dal confronto tra la generazione degli hedging in esame, come si evince da Figura (7.11), si osserva che anche in questo caso la strategia di copertura prodotta con il metodo standard e la valutazione di Wilson-Smith genera dei costi che sono di gran lunga superiori a quelli del Bootstrap e dell'approccio non standard. Infatti la prima raggiunge dei picchi dell'ordine di centinaia di milioni, mentre le altre dell'ordine di qualche decina di milioni.

In particolare, nell'approccio di generazione non standard, si verifica la presenza di picchi (scenari fortemente stressati) che alzano notevolmente i costi di generazione. Infine si osserva che se da un lato i costi della strategia non standard mediamente sono confrontabili con la strategia  $\widehat{W}$ , dall'altro in media risultano essere sempre minori a quelli generati con il metodo standard.

Un ultimo commento riguarda l'analisi del comportamento nel futuro della strategia prodotta con il metodo di Wilson-Smith Alternativo nel caso dell'Accounting 2. Al fine di testarne le qualità verrà messa a confronto con la strategia generata dall'Accounting 0. Come effettuato in precedenza, la trattazione si divide tra gli scenari deterministici (con attenzione sullo scenario con shift negativo, quello positivo è analogo ma con una riflessione rispetto all'asse delle ascisse) e scenari stocastici. Per quanto riguarda il primo caso sotto l'ipotesi di strategia statica, da Figura (7.12), si osserva che anche nel caso a

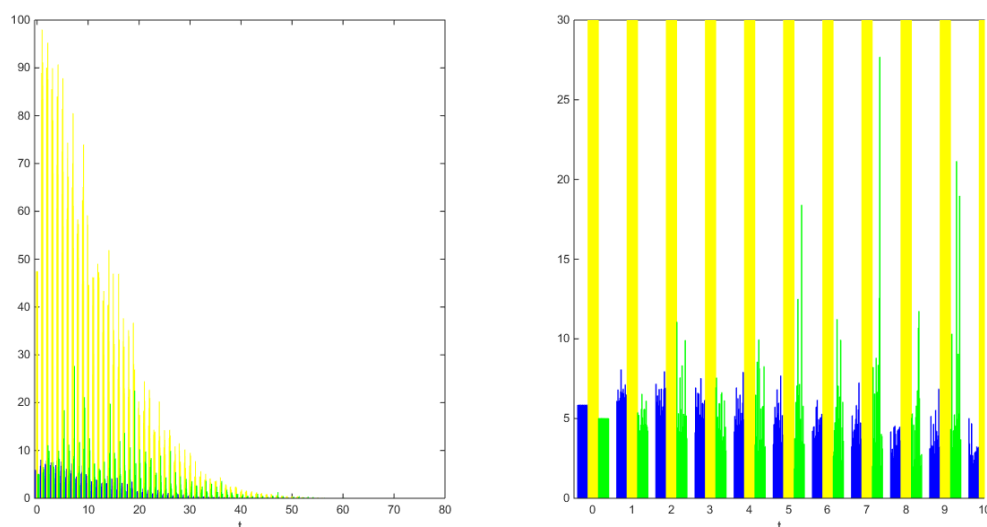


Figura 7.11: Confronto tra i costi (in milioni) di generazione delle strategie dinamiche a blocchi sotto scenari stocastici nei diversi metodi: Bootstrap (in blu), Wilson-Smith standard (in giallo) e Wilson-Smith non standard (in verde). Nella sotto-figura di destra è riportato l'ingrandimento della prima su i primi nove bucket temporali.

blocchi la strategia  $\widehat{W}$  produce degli utili nello Scenario Deterministico -1%, soprattutto sui primi anni, poi man mano che viene a mancare la copertura, produce delle perdite, fino al momento in cui non vi è più una copertura e le strategie unhedged, quella generata con Wilson-Smith Alternativo e quella del Bootstrap coincidono.

Dal punto di vista della variazione di cassa generata, si osserva da Figura (7.12) che per la parte liquida le coperture sono molto simili tra di loro, mentre di seguito, si nota che la strategia alternativa produce una variazione di cassa inferiore a quella del bootstrap con tratti costanti generati da un hedging composto solo da alcuni swap. Inoltre si osserva che dal 50-esimo anno in poi non si hanno più flussi di cassa in quanto la strategia non fornisce più una copertura. Nel caso dinamico invece si osserva che la strategia dinamica  $\widehat{W}$  genera una variazione di NPV positiva nello Scenario Deterministico -1%, mentre la strategia generata con il metodo di Wilson-Smith Alternativo produce delle perdite trascurabili rispetto agli utili (differenza massima di un ordine di grandezza). A livello di cassa le due sono approssimativamente uguali. Naturalmente, come si evince da Figura (7.13), dall'analisi dei costi, sia nel caso degli scenari deterministici che stocastici, si verifica che in media i costi generati dalla copertura dinamica definita dall'Accounting 0 sono sempre superiori al caso di valutazione con Wilson-Smith Alternativo.

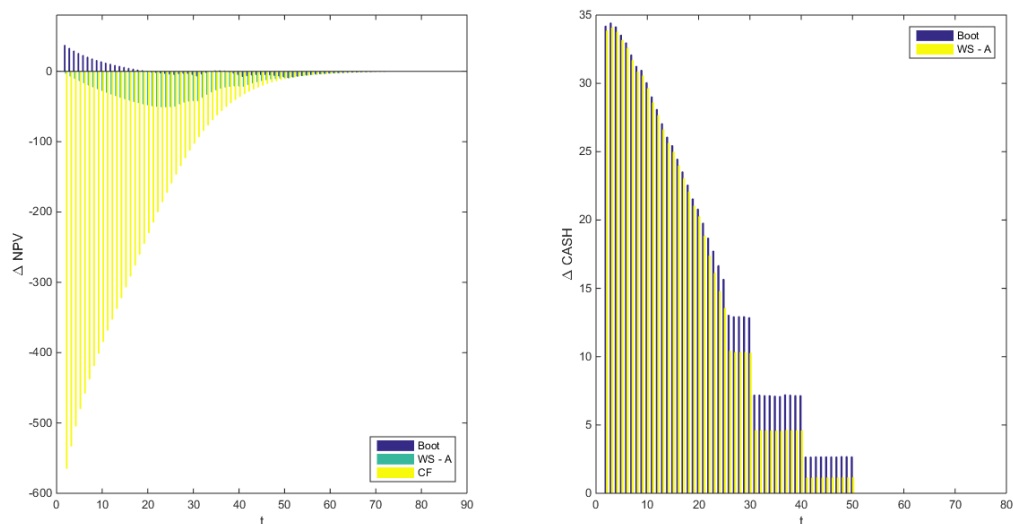


Figura 7.12: Confronto di variazione di NPV (in milioni) e di cassa generata (in milioni) tra le diverse strategie a blocchi, coperte e non hedgiate, con l'utilizzo del metodo di Wilson-Smith Alternativo e dello Scenario Deterministico -1%.

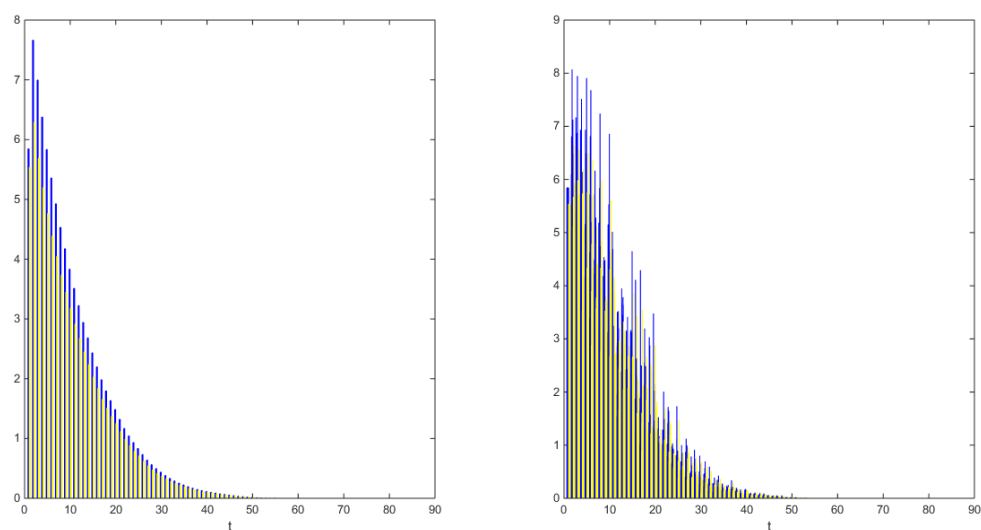


Figura 7.13: Confronto di costi generati (in milioni) tra le diverse strategie dinamiche (Bootstrap in blu e Wilson-Smith Alternativo in giallo). In particolare a sinistra lo Scenario Deterministico -1% e destra lo Scenario Stocastico.



# Conclusioni

Dall'analisi condotta nel presente lavoro di tesi si evince che il metodo di Wilson-Smith produce degli impatti rilevanti che modificano completamente le sensitivity e, di conseguenza, le strategie di copertura, conducendo a delle situazioni completamente diverse rispetto alla valutazione effettuata attraverso la curva *Euribor*. Se da un lato il metodo introdotto da Solvency II produce una minore valorizzazione delle passività, dall'altro genera delle difficoltà sostanziali in termini di gestione del rischio del portafoglio delle passività.

L'aspetto anomalo di tale metodologia riguarda il profilo delle sensitivity che vengono prodotte. Infatti la curva Wilson-Smith è influenzata solo da perturbazioni sui tassi swap con scadenze  $t_1, t_2, \dots, t_{20}$ , presenta delle inversioni di segno sugli ultimi quattro bucket temporali ed una sostanziale differenza in ordini di grandezza in relazione alle sensitivity prodotte con l'uso della curva *Euribor*. Per costruzione il metodo di Wilson-Smith produce un tasso forward sostanzialmente differente a quello prodotto dalla curva *Euribor*, di conseguenza i comportamenti anomali possono essere spiegati in funzione di tale tasso.

- a. Per definizione, il metodo di Wilson-Smith non utilizza le informazioni di mercato presenti in date successive a LLP (pari a 20) anni dalla data di valutazione e, per tali scadenze, converge esponenzialmente al tasso asintotico UFR. Di conseguenza la curva Wilson-Smith non risente delle perturbazioni sui tassi swap per le scadenze superiori a 20 anni, quindi le sensitivity prodotte sono concentrate solo sui primi 20 anni.
- b. Dalla definizione del metodo di Wilson-Smith, si osserva che i primi LLP fattori di sconto riproducono perfettamente i rispettivi della curva *Euribor*, di conseguenza anche il tasso forward calcolato con i due metodi coincide per i primi LLP anni. Come discusso in fase di analisi delle sensitivity, utilizzando la versione semplificata del metodo di Wilson-Smith, in cui si ipotizza che il tasso forward converge esponenzialmente a partire dal tasso forward del 20-esimo anno, si osserva che la perturbazione del tasso swap con scadenza 19 anni (risp 20 anni) produce uno spike nel tasso forward con un movimento verso l'alto in corrispondenza del 19-esimo anno e verso il basso nel 20-esimo (verso l'alto nel 20-esimo anno e nullo nel 19-esimo). Di conseguenza in un caso si abbassa il punto di partenza dell'esponenziale, mentre nell'altro si alza,

giustificando l'inversione di segno nelle sensitivity sui bucket  $t_{19}$  e  $t_{20}$ . Naturalmente il metodo di Wilson-Smith non è influenzato solo dalle due suddette scadenze ma anche dalle precedenti, quindi le sensitivity prodotte presentano delle inversioni, in maniera smorzata, anche sui due bucket temporali precedenti.

- c. Utilizzando l'ipotesi di run-off, il portafoglio delle passività previste è costante negli anni e, nel caso in esame, è distribuito su 80 anni. Dalla spiegazione effettuata nel punto precedente, si osserva che le passività che hanno scadenze maggiori a 20 anni si riversano sui bucket precedenti, in particolare sugli ultimi quattro, infatti le passività nei bucket maggiori a LLP sono valutate sul tasso forward che converge all'UFR, di conseguenza sono influenzate principalmente dalle perturbazioni su  $t_{19}$  e  $t_{20}$  e, in maniera ridotta, anche dai precedenti.

Al fine di completare la gestione del rischio nella valutazione delle passività imposta da Solvency II, si generano delle strategie di copertura utilizzando gli swap della generazione della curva *Euribor*. Una valutazione coerente con le informazioni di mercato e con le norme di Solvency II, comporta che gli swap debbano essere valutati Mark-to-Market e le passività con la curva Wilson-Smith. Utilizzando la metodologia standard di hedging (cfr. [Hagan 2006]), secondo la quale la copertura è generata in modo tale da replicare le sensitivity delle passività, si osserva che si ottiene una copertura che replica le anomalie riscontrate precedentemente (gli elementi diagonali della matrice delle sensitivity degli swap sono circa due ordini di grandezza superiori rispetto a quelli sopra-diagonali). Infatti la strategia è concentrata solo sui primi 20 bucket, presenta delle inversioni di segno e differenze in termini di ordini di grandezza tra la strategia definita con swap e passività valutati con la curva *Euribor*. In caso si decida di annullare le sensitivity anno per anno, la strategia generata con tale metodologia deve essere radicalmente modificata: l'anno successivo a quello considerato si ripresenteranno le inversioni di segno riscontrate precedentemente ma tutte spostate di un bucket temporale in avanti (se prima la strategia di copertura aveva un picco verso l'alto in corrispondenza del 20-esimo, l'anno successivo il picco sarà verso il basso).

Per evitare di ritrovare i comportamenti anomali generati dalle sensitivity di Wilson-Smith nelle strategie di copertura, si ricerca una regola di hedging non standard. A tal fine si considera una passività alla volta e si genera una strategia di copertura a partire da quella generata nel caso della valutazione degli swap e delle passività con la curva Wilson-Smith. Per definizione, la strategia di copertura generata annulla le sensitivity per singoli shift degli swap con scadenze più liquide (da  $t_1$  a  $t_{20}$ ) e le sensitivity per shift paralleli nelle scadenze meno liquide. L'annullamento di tale tipologia di sensitivity è giustificata dal PCA applicato ai tassi swap quotati sul mercato, infatti, a causa della diversa liquidità, i movimenti dei tassi swap sono poco correlati tra loro per le scadenze liquide, mentre quelli con scadenze successive si muovono in maniera sostanzialmente piatta. La strategia risultante ha i seguenti aspetti positivi:

- ha componenti non nulle per ogni swap del bucket considerato,
- tutte le componenti sono dello stesso segno,
- utilizza una quantità minore di swap con scadenze maggiori di LLP (meno liquide), rispetto alla strategia generata con la valutazione di swap e passività con la curva *Euribor*.

Inoltre la copertura generata con il metodo non standard produce dei risultati sostanzialmente migliori rispetto a quella dell'approccio standard.

In primo luogo, se si considera di utilizzare in maniera statica le due strategie, si osserva che la strategia standard non produce alcun hedging per scadenze maggiori di LLP, quindi i flussi di cassa generati e le variazioni di NPV a cui si è soggetti in tali scadenze sono equivalenti a quelli delle passività. Con l'approccio non standard, invece, dato che la copertura ha componenti non nulle anche per scadenze maggiori di LLP.

In secondo luogo, nel caso in cui si decida di aggiornare anno per anno la strategia di copertura, si osserva che, mentre la strategia standard produce dei costi di copertura molto elevati anno dopo anno, causati dall'inversione di segno dell'hedging, la strategia non standard, a seguito di un costo iniziale, sempre inferiore a quello del caso standard, riduce drasticamente i costi negli anni successivi.

Queste due ultime osservazioni mostrano come l'utilizzo in maniera acritica di una regola di hedging possa produrre dei risultati non soddisfacenti che suggerirebbero, qualora fosse possibile, di sostituire il metodo di Wilson-Smith con altri metodi alternativi. Nel presente lavoro, invece, si è mostrato come la ricerca di una nuova metodologia di copertura possa produrre dei risultati migliori rispetto al caso classico ed allo stesso tempo coprire dai reali movimenti dei tassi swap di mercato.

# Appendice A

## Codici Matlab

Nella presente Appendice verranno presentate le funzioni più rilevanti al fine della costruzione e analisi delle strategie di copertura secondo i diversi scenari, Accounting e metodologie di calcolo.

### A.1 Estrazione/Interpolazione dei dati di mercato

La presente sezione è dedicata alla formattazione dei dati di mercato. In particolare al calcolo delle scadenze annuali e semestrali, estrapolazione/interpolazione dei tassi swap, e della data di settlement definita come due giorni successivi alla data di valutazione  $t_0$ .

```
function [Date,Swap,t_settl,Swap_type,Date_6m]=Swap_Curve(t0,Swap_type_guess,Last_Swap_Date)
% Formattazione dei dati di mercato ed estrapolazione di Date e Swap
% INPUT
% Last_Swap_Date = ultimo anno di riferimento per il calcolo di Swap/Date
% t0 = data di inizio
% Swap_type_guess = tipologia di swap che si vuole selezionare dal mercato
% OUTPUT
% t_settl = t0 2 business day dopo t0
% Swap_type = tipologia di swap realmente considerati tra Swap_type_guess
% Date/Swap = date/swap da t_settl a t_settl+fine
t_settl=mod_follow(t0,2);
[SWAP,DATE]=xlsread('C:\Users\Admin\Desktop\TESI\Dati\Swaps.xls',1);
% formattazione dati di mercato
[SWAP,DATE]=format_func(SWAP,DATE);
% Estrapolazione/Interpolazione degli Swap
% Estrapolazione Date
[Swap,Date,Swap_type,Date_6m]=Compute_MKT_Data(Swap_type_guess,...
        SWAP,DATE,t0,t_settl,Last_Swap_Date);
end
```

#### A.1.1 Data di settlement

Calcolo della data di settlement, attraverso la convenzione mod-follow, ricercando i primi due giorni lavorativi successivi a  $t_0$ . A tal fine viene utilizzata la funzione che calcola

le occorrenze del venerdì e lunedì di Pasqua *compute\_Easter.m* e *check\_holiday* che testa se la data in esame è una festa o no.

```
function date=mod_follow(date,day_step)
% Correzione di date in modo tale che sia un giorno lavorativo (convenzione
% mod follow)
% day_step = 0 ricerco il giorno utile senza vincoli
% day_step = i ricerco la prima data ad una distanza i (lo uso per il passaggio da
% t0 a t_settl)
[E1,E2]=compute_Easter(year(date));
holiday=['01/Jan';'01/May';'25/Dec';'26/Dec'];
last_day_month=eomday(year(date),month(date)); %ultimo giorno del mese
t0=date;
backward=0; % ricerca in avanti
if day_step==0
    flag_t_settl=0;
else
    flag_t_settl=1;
    date=next_day(t0,flag_t_settl,day_step);
end
% Ricerca forward del primo giorno non festivo o sabato
search_date=0;
while(day(date)<=last_day_month & search_date + backward==0) % ricerca in avanti
    [Succ_Holiday_flag,Succ_Sat_flag,Succ_Sun_flag]=check_holiday(date,holiday,E1,E2);
    if Succ_Sat_flag==1 % sabato
        [date,backward]=next_day(date,flag_t_settl,2);
    elseif Succ_Sun_flag==1 % domenica
        [date,backward]=next_day(date,flag_t_settl,1);
    elseif Succ_Holiday_flag==1 % festivo
        [date,backward]=next_day(date,flag_t_settl,1);
    else
        search_date=date;
    end
end
if search_date==0 % mi muovo backward, la ricerca non ha dato risultato
    date=next_day(t0,flag_t_settl,-1);
    while(day(date)>=1 & search_date==0) % ricerca a ritroso
        [Prec_Holiday_flag,Prec_Sat_flag,Prec_Sun_flag]=check_holiday(date,holiday,E1,E2);
        if Prec_Sat_flag==1
            date=next_day(date,flag_t_settl,-1); %sabato
        elseif Prec_Sun_flag==1
            date=next_day(date,flag_t_settl,-2); %domenica
        elseif Prec_Holiday_flag==1
            date=next_day(date,flag_t_settl,-1); % festivo
        else
            search_date=date;
        end
    end
end
date=search_date;
end

function [date_new,backward]=next_day(date,flag_t_settl,day_step)
% Calcolo di date_new ad una distanza di day_step giorni da date.
% Se flag_t_settl=1 vado anche nel mese successivo (backward=0)
% Se flag_t_settl=0 non vado nel mese successivo e se sono alla fine del
% mese vado a ritroso (backward=1)
date_new=date;
backward=0;
last_month_day=eomday(year(date),month(date));
if day(date) + day_step <= last_month_day % sono prima della fine del mese
    date_new=datestr([num2str(day(date)+day_step) date(3:end)],'dd/mmm/yyyy');
```

```

else
    backward=1; % procedo a ritroso
    if flag_t_settl==1
        date_new=next_month_date(date,day_step); % vado nel mese successivo
    end
end
end
end

function [date_new]=next_month_date(date,day_step)
% Ricerca della prima data date_new successiva a date ad una distanza di
% day_step giorni
[-,M]=month(date);
last_month_day=eomday(year(date),month(date));
next_month_day= -last_month_day + day_step + day(date); %giorno del mese successivo
if not(strcmp('Dec',M)); % devo modificare il mese
    date=datestr([num2str(next_month_day) '/' num2str(month(date)+1) '/' year(date)],...
                'dd/mmm/yyyy');
else % modifico anche l'anno
    date=datestr([num2str(next_month_day) '/' 'Jan' '/' num2str(year(date)+1)], 'dd/mmm/yyyy');
end
date_new=date;
end

```

## A.1.2 Manipolazione dei dati di mercato

Vengono generate delle matrici contenenti i dati estratti da Escel e si estrapolano i tassi swap dai dati di mercato e si interpolano quelli non quotati attraverso il metodo interpolativo delle spline, utilizzando le scadenze annuali a partire dalla data  $t_0$  e selezionando tra queste le scadenze degli swap quotati attraverso la funzione *Date\_selection.m*. Inoltre vengono calcolate anche le scadenze semestrali a partire dalla data di valutazione.

```

function [Swap,Date]=format_func(SWAP,DATE)
% Formattazione di SWAP e DATE eliminando i NaN e definizione del formato
% gg/mmm(str)/aaaa per le date
Swap=[];
for i=1:length(SWAP(1,:))
    if(~isnan(SWAP(1,i)))
        Swap=[Swap SWAP(:,i)];
    end
end
format_Input='dd/mm/yyyy';
Date=[];
for i=1:2:length(DATE(1,:))
    Date=[Date datenum(DATE(3:end,i),format_Input)];
end
Date_temp=zeros(length(Date(:,1)),length(Date(1,:)));
for i=1:length(Date(:,1))
    for j=1:length(Date(1,:))
        if not isempty(Date(i,j))
            Date_temp(i,j)=Date(i,j);
        end
    end
end
Date=Date_temp;
end

function [Swap,Date,Swap_type,Date_6m]=...

```

```

        Compute_MKT_Data(Swap_type_guess,SWAP,DATE,t0,t_settl,t_end)
% Selezione degli Swap e delle Date dai dati di mercato
% INPUT
% Swap_type_guess = tipo di swap che si vorrebbero considerare dal mercato
% SWAP = Tassi Swap del mercato
% DATE = Date del mercato
% t0 = data da ricercare in DATE ( inizio del contratto )
% t_settl = t0 2 business day dopo t0
% OUTPUT
% Swap_type = tipo swap presente nel mercato tra quelli in Swap_type_guess
% Swap = Swap estrapolati/interpolati
% Date = date da t_settl a t_settl+fine
Swap_type_mkt_Guess=[1:20 25 30 40 50 60]; %tipologia di Swap potenzialmente quotati in t0
Ncol=length(DATE(1,:));
Nrow=length(DATE(:,1));
Swap_type_mkt=zeros(Ncol,1);
Swap_avai_mkt=[];
for j=1:Ncol
    for i=1:Nrow
        if datenum(t0,'dd/mmm/yyyy')==DATE(i,j);
            % tipo Swap realmente presente sul mercato alla data t0
            Swap_type_mkt(j)=Swap_type_mkt_Guess(j);
            % valore Swap presente sul mercato
            Swap_avai_mkt=[Swap_avai_mkt; SWAP(i,j)];
            break
        end
    end
end
Swap_type=[];
for i=1:length(Swap_type_guess)
    % verifica presenza delle tipologie dello swap tra quelle volute
    idx=(Swap_type_guess(i)*ones(Ncol,1)==Swap_type_mkt);
    Swap_type=[Swap_type Swap_type_mkt(idx)];
end
Swap_sel=zeros(length(Swap_type),1);
for i=1:length(Swap_type)
    % salvataggio del valore dello swap tra quelli desiderati
    idx=(Swap_type(i)*ones(Ncol,1)==Swap_type_mkt);
    Swap_sel(i)=Swap_avai_mkt(idx);
end
% Creazione del vettore scadenze tra t_settl e t_settl+t_end
Date=Date_setting(t_settl,t_end,0);
% Selezione delle date da considerare in riferimento a Swap_type da
% utilizzare nella spline
Date_sel=Date_selection(Date,Swap_type);
% Interpolazione dei valori degli Swap in Date
pp=csape(Date_sel,[0 Swap_sel' 0],[[ 2 1 ]]);
Swap=Swap_sel(end)*ones(t_end,1);
Swap(1:Swap_type(end))=ppval(pp,Date(1:Swap_type(end)));
Date_6m=Date_setting(t_settl,t_end,1);
end

function Date_set=Date_setting(t_settl,t_end,step_6m)
% Set completo di Date da t_settl+1y a t_settl+t_end
% step_6m = 1 il passo di calcolo delle date Å 6m (0 1 anno)
if step_6m==0
    Date_set=zeros(t_end,1);
    for i=1:t_end
        Date_set(i)=datenum(adj_y(t_settl,i),'dd/mmm/yyyy');
    end
elseif step_6m==1
    Date_set=zeros(t_end*2,1);

```

```

    for i=1:t_end*2
        Date_set(i)=datenum(adj_6m(t_settl,i),'dd/mmm/yyyy');
    end
end
end

function datey=adj_6m(date,step_6m)
% Ricerca di un giorno lavorativo data+step_6m con la convenzione mod-follow
Y_num=year(date);
D_num=day(date);
M_num=month(date);
incr_y=0; % =1 se con lo step_6m vado nell'anno successivo
if mod(step_6m,2)~=0 % se ==0 equivale step_6m corrisponde a 1 anno
    if M_num+6>12
        M_new_str=num2str(M_num-6);
        incr_y=1;
    else
        M_new_str=num2str(M_num+6);
    end
else
    M_new_str=num2str(month(date));
end
Y_str= Y_num + fix(step_6m/2) + incr_y; % calcolo l'anno
datey=datestr(datenum(Y_str, str2num(M_new_str),D_num),'dd/mmm/yyyy');
datey=mod_follow(datey,0);
end

function datey=adj_y(date,step_year)
% Ricerca di un giorno lavorativo ad step_year anni da data
datey=date;
Y=year(date);
datey=datestr([datey(1:7) num2str(Y+step_year)],'dd/mmm/yyyy');
datey=mod_follow(datey,0);
end

```

## A.2 Calcolo delle curve di sconto nei diversi metodi

Nella presente sezione viene calcolato la curva di sconto bootstrappando i dati di mercato, attraverso il metodo di Wilson-Smith e Wilson-Smith Alternativo.

### A.2.1 Bootstrap della curva swap

```

function [DF,Fw_rate,Z_rate]=DF_Bootstrap(PSwap,Date,t_settl)
% Metodo di calcolo dei fattori di sconto Bootstrap, sotto i diversi
% scenari perturbati
% OUTPUT
% DF = Fattori di sconto
% Fw_rate = Tasso Forward
% Z_rate = zero-rate
% INPUT
% PSwap = matrice degli Swap perturbati, la prima colonna e' quella non
% perturbata
% Date = vettore di scadenze da t_settl+1y a t_settl+Last_DF
% t_settl = data di riferimento per il calcolo dei fattori di sconto
t_end=length(Date);

```



```

N_pert=length(P_Swap(1,:)); % num di perturbazioni + 1
delta_i=zeros(t_end,1);
delta_i(1)=yearfrac(datenum(t_sett1),Date(1),6);% 30/360
DF=zeros(t_end,N_pert);
DF(1,:)=1./(1+delta_i(1)*ones(1,N_pert).*P_Swap(1,:));
if t_end>1
    delta_i(2:end)=yearfrac(Date(1:end-1),Date(2:end),6);%30/360
    % Bootstrap
    for i=2:t_end
        delta_iM=delta_i(1:i-1)*ones(1,N_pert); % delta_i in forma matriciale
        DF(i,:)=(1-sum(delta_iM.*DF(1:i-1,:),1).*P_Swap(i,:)).
            ./ (1+P_Swap(i,:)*delta_i(i));
    end
end
% Fwd Rate
DFtemp=[ones(1,N_pert);DF];
Fw_rate=(DFtemp(1:end-1,:)./DFtemp(2:end,:)-1);
% Zero Rate
Z_rate=zeros(t_end,N_pert);
Z_rate=-log(DF)./(yearfrac(datenum(t_sett1),Date,3)*ones(1,N_pert));
end

```

## A.2.2 Metodo di Wilson-Smith

```

function [DF_WS,FWD_WS]=DF_Wilson_Smith(DF,UFR,LLP,T_conv)
% Metodo di Wilson-Smith
% INPUT
% DF = matrice fattori di sconto calcolati con il Bootstrap
% OUTPUT
% DF_WS = Matrice dei fattori di sconto
% FWD_WS = Matrice dei Tassi Forward
N_pert=length(DF(1,:)); % numero di perturbazioni + 1
% Richiamo le variabili del modello
FWD_WS=zeros(size(DF));
PDF_WS=zeros(size(DF));
% Definizione formule Metodo di Wilson Smith
u_i=1:LLP;
u_i=u_i'*ones(1,N_pert);
% Fattori di sconto parte liquida del metodo
m=DF(1:LLP,:);
Disc_Fact_WS=@(T,x) Disc_Fact_WS(UFR,u_i,x,m,T,LLP);
Forward_Rate_WS=@(T,x) Forward_Rate_WS_func(UFR,u_i,x,m,T,LLP);
alpha0=0.1*ones(N_pert,1); % dato iniziale del metodo
% Ricerca dello zero della funzione (in funzione di alpha) che impone il
% tasso forward a t_conv anni al valore UFR-3bp
opt=optimset('Display','off','TolX',1e-10);
alphax=fsolve(@(x) condition_WS(x,UFR,u_i,m,T_conv,LLP),alpha0,opt);
% Verifico se in alpha0 sono già nei limiti della convergenza
idx_cont=(abs(UFR-Forward_Rate_WS(T_conv,0.1*ones(N_pert,1)))>3e-4);
alphax(not(idx_cont))=alpha0(not(idx_cont));
% Fattori di sconto
for jt=1:length(DF_WS(:,1))
    DF_WS(jt,:)=Disc_Fact_WS(jt,alphax);
end
% Tassi Forward
for jt=1:length(FWD_WS(:,1))
    FWD_WS(jt,:)=Forward_Rate_WS(jt,alphax);
end
end
function Forward_Rate_WS=Forward_Rate_WS_func(UFR,u_i,alpha,m,T,LLP)

```

```

% Calcolo del tasso Forward con il metodo fi Wilson-Smith
z=zeta_i(u_i,m,alpha,UFR,LLP); % matrice dei parametri del modello
alpha_M=ones(length(u_i(:,1)),1)*alpha'; % alpha matricial
% Definizione di funzioni ausiliari
A_Den=1+sum(z.*(1+UFR).^(-u_i).*(alpha_M.*min(u_i,T)),1);
B_Den=sum(z.*(1+UFR).^(-u_i).*(-exp(-alpha_M.*max(u_i,T)).*...
    sinh(alpha_M.*min(u_i,T))),1);
A_Num=1+sum(z.*(1+UFR).^(-u_i).*(alpha_M.*min(u_i,T-1)),1);
B_Num=sum(z.*(1+UFR).^(-u_i).*(-exp(-alpha_M.*max(u_i,T-1)).*...
    sinh(alpha_M.*min(u_i,T-1))),1);
% Calcolo del tasso Forward del modello
Forward_Rate_WS=(1+UFR)*(A_Num+B_Num)/(A_Den+B_Den)-1;
end

function g=condition_WS(alpha,UFR,u_i,m,T_conv,LLP)
% Calcolo di g=(UFR-3bp)-F40, funzione di convergenza
% INPUT
% alpha = parametro del modello
% UFR = ultimate forward rate
% u_i = matrice con le colonne le scadenze liquide
% m = fattori di sconto della parte liquida, calcolati con il Bootstrap
% Calcolo dei parametri del modello di Wilson-Smith
z=zeta_i(u_i,m,alpha,UFR,LLP);
N=length(u_i(:,1));
alpha_M=ones(N,1)*alpha'; % alpha matriciale
temp=(1+UFR).^(-u_i);
% F40 = UFR-Num/Den
Num=sum(z.*temp.*( (1+UFR)*(exp(alpha_M)-1).*sinh(u_i.*alpha_M) ) ,1);
Den=sum(z.*temp.*(u_i.*exp(T_conv*alpha_M).*...
    alpha_M-sinh(alpha_M.*u_i)),1)+exp(T_conv*alpha');
g=-3e-4+Num./Den;
end

function W=f_W(s,t,alpha,UFR)
% Funzione nucleo di Wilson-Smith W
% INPUT : parametri del modello (s,t valori istanti temporali in anni)
alpha_M=ones(length(t(:,1)),1)*alpha'; % alpha matriciale
% Calcolo della funzione W
A1= alpha_M.*min(s,t);
A2= exp(-alpha_M.*max(s,t));
A3= exp(alpha_M.*min(s,t))-exp(-alpha_M.*min(s,t));
W= (1+UFR).^(-(t+s)).*(A1-0.5.*A2.*A3);
end

function [DF_WS]=Disc_Fact_WS(UFR,u_i,alpha,m,t,LLP)
% Calcolo del fattore di sconto con Wilson Smith
% INPUT
% UFR = Ultimate Forward Rate
% u_i = matrice con le colonne le scadenze liquide
% alpha = parametro del modello
% m = fattori di sconto della parte liquida, calcolati con il Bootstrap
% t = scadenza (in anni) in cui calcolare il fattore di sconto
% Applicazione della formula di Wilson-Smith
z=zeta_i(u_i,m,alpha,UFR,LLP);
temp=z'*f_W(t,u_i,alpha,UFR);
DF_WS=zeros(length(m(1,:)),1);
DF_WS(:)=(1+UFR).^(-t)+diag(temp)';
end

```

Per l'inversione della matrice nucleo di Wilson-Smith si utilizza la fattorizzazione LU, con conseguente risoluzione del sistema triangolare superiore (risp. inferiore) con la funzione

*MEG\_tria\_up.m (MEG\_tria\_down.m).*

```
function [z]=zeta_i(u_i,m,alpha,UFR,LLP)
% Calibrazione dei prefattori z del nucleo di Wilson-Smith
% INPUT
% UFR = Ultimate Forward Rate
% u_i = matrice con le colonne le scadenze liquide
% alpha = parametro del modello
% m = fattori di sconto della parte liquida, calcolati con il Bootstrap
% LLP = Last Liquid Point
mu=(1+UFR).^(-u_i);
N=length(alpha);
% Calcolo delle funzioni nucleo
W=zeros(LLP,LLP*N);
for i=1:LLP
    Wt=f_W(u_i(i),u_i,alpha,UFR);
    W(:,i:LLP:end)=Wt;
end
z=zeros(LLP,N);
for i=1:N
    % Dato che la matrice  $W \tilde{A}^{-1}$  simmetrica, utilizzo la decomposizione LU
    [L,U,P]=lu(W(:,(i-1)*LLP+(1:LLP)));
    % Metodo di risoluzione dei sistemi lineari triangolari inferiori
    z_temp=MEG_tria_down(P*(m(:,i)-mu(:,i)),L);
    % Metodo di risoluzione dei sistemi lineari triangolari superiori
    z(:,i)=MEG_tria_up(z_temp,U);
end
end
```

### A.2.3 Metodo di Wilson-Smith Alternativo

```
function [DF_WSA,FWS_A]=DF_Alternative_WS(Fw_rate,UFR,LLP,T_conv)
% Metodo di Wilson-Smith Alternativo
% INPUT
% Fw_rate = matrice tassi forward calcolati con il Bootstrap
% UFR = Ultimate Forward Rate
% LLP = Last Liquid Point
% T_conv = anno di convergenza
% OUTPUT
% DF_WSA = Fattori di sconto
% FWS_A = Tassi Forward
% Ultimo anno di calcolo del tasso forward / fattore di sconto
t_end=length(Fw_rate(:,1));
FWS_A=zeros(size(Fw_rate));
% Nella parte liquida il tasso forward coincide con quello calcolato con il Bootstrap
FWS_A(1:LLP,:)=Fw_rate(1:LLP,:);
% Calcolo dei forward nella parte semi-liquida, convergenza pesata
% Calcolo dei pesi e del conseguente tasso Forward
weight=ones(t_end-LLP,1);
temp=((LLP+1:T_conv)'-LLP)/(T_conv-LLP); % Pesi da LLP+1 a T_conv
weight(1:T_conv-LLP)=temp(1:T_conv-LLP);
FWS_A(LLP+1:end,:)=Fw_rate(LLP+1:end,:).*((1-weight)*...
    ones(1,length(Fw_rate(1,:)))+UFR*weight*ones(1,length(Fw_rate(1,:)));
% Calcolo dei fattori di sconto
DF_WSA_temp=[ones(1,length(Fw_rate(1,:)));ones(size(Fw_rate))];
for j=2:t_end+1
    DF_WSA_temp(j,:)=DF_WSA_temp(j-1,:)/...
        (1+FWS_A(j-1,:));
end
DF_WSA=DF_WSA_temp(2:end,:);
end
```

## A.3 Calcolo delle Sensitivity

Con la seguente funzione viene calcolato il DV01 sia del portafoglio degli swap che delle passività sulla medesima curva.

```
function [DV01_swp,DV01_CF]=DV01(Perturb_DF,CF,Swap,delta_i,Nswp,Npert)
% Calcolo della variazione di NPV rispetto le diverse perturbazioni
% INPUT
% Perturb_DF = matrice in cui le colonne sono i fattori di sconto ottenuti con i
%   diversi modi
% CF = Flussi di Cassa
% Swap = Tassi swap
% delta_i = frazioni d'anno in 30/360
% Nswp = swap del Portafoglio di copertura
% Npert = perturbazioni considerate
% OUTPUT
% DV01_swp = matrice di componenti (i,n) con
%   i=indice dello Swap perturbato
%   n=scadenza dello Swap
% DV01_CF = vettore le cui componenti sono la variazione di Present Value
%   rispetto le diverse perturbazioni
DV01_CF=zeros(length(Npert),1);
DV01_swp=zeros(length(Npert),length(Nswp));
for i=1:length(Npert)
    DV01_CF(i)=sum(CF.*(Perturb_DF(1:length(CF),i+1)-Perturb_DF(1:length(CF),1)));
    for n=1:length(Nswp)
        DV01_swp(i,n)=( Swap( Nswp(n) ) *sum(delta_i(1:Nswp(n)).*...
            (Perturb_DF(1:Nswp(n),i+1)-Perturb_DF(1:Nswp(n),1)))+...
            (Perturb_DF(Nswp(n),i+1)-Perturb_DF(Nswp(n),1)));
    end
end
end
end
```

## A.4 Calcolo delle strategie di copertura

In tale sezione viene calcolata la strategia di copertura con l'approccio non standard considerando un singolo flusso di cassa alla volta. L'output di tale funzione è una matrice le cui colonne rappresentano le coperture ai diversi flussi.

```
function W_Accounting=Weight_Accounting(Perturb_DF,PShiftDF_WS,CF,W_single_CF)
% Calcolo dei pesi di copertura W_Accounting nel caso in cui si consideri un flusso di
% cassa alla volta e si voglia annullare le sensitivity per shift paralleli
% dei tassi Swap
% INPUT
% Perturb_DF = fattori di sconto caso Bootstrap perturbati per singoli shift
% PShiftDF_WS = fattori di sconto Wilson Smith perturbati con shift paralleli dei tassi
% CF = flussi di cassa
% W_single_CF = matrice le cui colonne sono l'hedging delle sensitivity
%   dovute ai singoli shift dei tassi Swap, considerando un
%   singolo flusso di cassa alla volta
N=length(W_single_CF(1,:));
W_Accounting=zeros(size(W_single_CF));
for n=1:N
    CF_temp=zeros(N,1);
    CF_temp(n)=CF(n);
    DV01_Boot_P_shift_n_approx=CF(n)*sum(Perturb_DF(n,2:end)-Perturb_DF(n,1));
    DV01_WS_P_shift_n=sum(CF_temp.*(PShiftDF_WS(1:N,n+1)-PShiftDF_WS(1:N,1)));
end
```

```

W_Accounting(:,n)=W_single_CF(:,n).*(DV01_WS_P_shift_n./DV01_Boot_P_shift_n_approx);
end
end

```

## A.5 Simulazione Deterministica e Stocastica degli scenari futuri

Con la seguente funzione vengono calcolate le curve di sconto sotto i diversi scenari, sia deterministici che stocastici, a seconda degli input. Viene utilizzata la funzione *Perturb\_DF\_compute.m* che prendendo il input la matrice con gli swap perturbati, calcolati con la funzione *Tria\_pert.m* (la prima colonna corrisponde al caso non perturbato), restituisce una matrice per ogni curva di sconto (delle stesse dimensioni della matrice degli swap), le cui colonne sono i fattori di sconto calcolati con i rispettivi tassi swap.

```

function [Perturb_DF_Y,Perturb_DF_WS_Y,Perturb_DF_WSA_Y]=
    Scenario(Date,Y,Forward_Rate_Pert,Perturb,LLP,UFR,T_conv,RND_VECT,ParamHW,DF)
% Calcolo dei fattori di sconto muovendosi sulla curva Forward_Rate_Pert
% INPUT
% Date = scadenze annuali
% Y = differimento in Anni dalla data iniziale
% Perturb = perturbazione da effettuare sugli Swap
% RND_VECT = matrice di simulazioni di variabili normali standard
% ParamHW = parametri calibrati del modello di Hull-White
% DF = curva di sconto del bootstrap non perturbata
% OUTPUT
% Perturb_DF_Y = fattori di sconto caso Bootstrap
% Perturb_DF_WS_Y = fattori di sconto caso Wilson Smith
% Perturb_DF_WSA_Y = fattori di sconto caso Wilson Smith Alternativo
N=length(Forward_Rate_Pert)-Y;
delta_i=yearfrac(Date(Y:end-1),Date(Y+1:end),6);
if nargin==7
    % Calcolo dei Fattori di Sconto in t_settl+Y
    DFY=zeros(N,1);
    DFY(1)=1/(1+Forward_Rate_Pert(Y+1));
    for ii=2:N
        DFY(ii)=DFY(ii-1)/(1+Forward_Rate_Pert(ii+Y));
    end
    % Calcolo dei tassi Swap in t_settl+Y
    Swp=zeros(N,1);
    for i=1:N
        Swp(i)=(1-DFY(i))/sum(delta_i(1:i).*DFY(1:i));
    end
    % Calcolo dei fattori di sconto nei diversi metodi e perturbazioni
    P_Swp_temp_tria=f_Tria_pert(Perturb,Swp);
    if nargin==2 %Perturbazione parallela
        P_Swp_temp_parallel=zeros(N,length(Perturb));
        for iter=1:length(Perturb)
            % gli swap precedenti a bucket(iter) sono perturbati
            % parallelamente
            P_Swp_temp_parallel(1:Perturb(iter),iter)=Swp(1:Perturb(iter))+1e-4;
        end
        PSwp=[Swp P_Swp_temp_parallel];
        [Perturb_DF_Y,Perturb_DF_WS_Y]=...
            Perturb_DF_compute(PSwp,Date(Y+1:end),Date(Y),LLP,UFR,T_conv);
    else

```

```

        PSwp= [Swp P_Swp_temp_trial];
        [Perturb_DF_Y,Perturb_DF_WS_Y,Perturb_DF_WSA_Y]=...
            Perturb_DF_compute(PSwp,Date(Y+1:end),Date(Y),LLP,UFR,T_conv);
    end
elseif nargin>=8
    % Generazione delle curve di sconto stocastiche
    Perturb_DF_Y=zeros(N,Perturb+1,length(RND_VECT(:,1)));
    Perturb_DF_WS_Y=zeros(N,Perturb+1,length(RND_VECT(:,1)));
    Perturb_DF_WSA_Y=zeros(N,Perturb+1,length(RND_VECT(:,1)));
    for j=1:length(RND_VECT(:,1)) % per tutte le simulazioni
        N=length(DF)-Y;
        % Calcolo del fattore di sconto stocastico
        DFY=func_DFfwd_HW(Y,(Y+1:length(DF))',ParamHW,DF,RND_VECT(j,:));
        % Calcolo dei tassi swap
        Swp=zeros(N,1);
        for i=1:N
            Swp(i)=(1-DFY(i))/sum(delta_i(1:i).*DFY(1:i));
        end
        % Calcolo dei fattori di sconto nei diversi metodi e perturbazioni
        P_Swp_temp_trial=f_Tria_pert(Perturb,Swp);

        if nargout==2 %Pert parallela

            P_Swp_temp_parallel=zeros(N,length(Perturb));
            for iter=1:length(Perturb)
                % gli swap precedenti a bucket(iter) sono perturbati
                % parallelamente
                P_Swp_temp_parallel(1:Perturb(iter),iter)=Swp(1:Perturb(iter))+1e-4;
            end
            PSwp=[Swp P_Swp_temp_parallel];
            [Perturb_DF_Y(:,j),Perturb_DF_WS_Y(:,j)]=...
                Perturb_DF_compute(PSwp,Date(Y+1:end),Date(Y),LLP,UFR,T_conv);
        else
            PSwp= [Swp P_Swp_temp_trial];
            [Perturb_DF_Y(:,j),Perturb_DF_WS_Y(:,j),Perturb_DF_WSA_Y(:,j)]=...
                Perturb_DF_compute(PSwp,Date(Y+1:end),Date(Y),LLP,UFR,T_conv);
        end
    end
end
end
end
end
end

```

Nella precedente funzione si è fatto uso della funzione *DFfwd\_HW.m* che calcola il fattore di sconto stocastico con il modello di Hull-White. Tale funzione, insieme a quelle di calibrazione sono indicate nella sezione successiva.

## A.6 Modello di Hull-White

Nella presente sezione si calcola la curva di sconto stocastica e si calibrano i parametri nel modello di Hull-White si ad uno (Modello di Jamshidian) che a due fattori (Modello G2++). Nel caso del modello di Hull-White ad un fattore, si utilizza la definizione presente in [Brigo 2001] e la calibrazione è effettuata utilizzando la formula esatta di calcolo del prezzo delle swaption in [Jamshidian 1989].

```

function DFfwd_HW=func_DFfwd_HW(t,T,ParamHW,DF,rnd)
% Calcolo del fattore di sconto con il modello di Hull-White di un flusso
% in T rispetto a t. Si utilizzano i parametri calibrati ParamHW

```

```

if length(ParamHW)==2
    a1=ParamHW(1);
    a2=1;
    s1=ParamHW(2);
    s2=0;
    rho=0;
    x= sqrt(s1^2/(2*a1)*(1-exp(-2*a1*t)))*rnd(1);
    y=0;
elseif length(ParamHW)==5
    a1=ParamHW(1);
    a2=ParamHW(2);
    s1=ParamHW(3);
    s2=ParamHW(4);
    rho=ParamHW(5);
    x= sqrt(s1^2/(2*a1)*(1-exp(-2*a1*t)))*rnd(1);
    y= sqrt(s2^2/(2*a2)*(1-exp(-2*a2*t)))*(rho*rnd(1)+rnd(2)*sqrt(1-rho^2));
end
% Definizione delle formule per il calcolo del fattore di sconto
V=@(t,T) (s1/a1)^2*(T-t+2/a1*exp(-a1*(T-t))-exp(-2*a1*(T-t))/(2*a1)-3/(2*a1))+...
    (s2/a2)^2*(T-t+2/a2*exp(-a2*(T-t))-exp(-2*a2*(T-t))/(2*a2)-3/(2*a2))+...
    (s1/a1)*(s2/a2)*2*rho*(T-t+(exp(-a1*(T-t))-1)/a1+(exp(-a2*(T-t))-1)/a2-...
    (exp(-(a1+a2)*(T-t))-1)/(a1+a2));
A=0.5*(V(t,T)-V(0,T)+V(0,t))-((1-exp(-a1*(T-t)))/a1)*x-...
    ((1-exp(-a2*(T-t)))/a2)*y;
DF_temp=[1;DF];
DFfwd_HW=DF_temp(T+1)/DF_temp(t+1).*exp(A);
end

```

## A.6.1 Calibrazione del Modello

```

function ParamHW=G2ppCalib(Date,DF,flag_fact)
% Calibrazione del modello Hull-White a 1 fattore (flag_fact=1) o 2 fattori
% (flag_fact==2)
% Dati di mercato
[vol_mkt]=xlsread('C:\Users\Admin\Desktop\TESI_G\Dati\Swaps.xls',2,'A1:K13');
Maturity_vect=[1 2 3 4 5 7 10 15 20];
Tenor_vect=[1 2 3 4 5 7 8 10 20 30];
if flag_fact==1
%% Calibrazione solo con Swaption Liquide con formula di Jamshidian
% Prezzo Swaption ATM con formula di Black
Swpt_Price_BLK=[Swpt_PriceBlk(Date,1,5,vol_mkt(5,1)/100,DF);
    Swpt_PriceBlk(Date,1,10,vol_mkt(8,1)/100,DF);
    Swpt_PriceBlk(Date,1,30,vol_mkt(10,1)/100,DF);
    Swpt_PriceBlk(Date,5,5,vol_mkt(5,5)/100,DF);
    Swpt_PriceBlk(Date,10,10,vol_mkt(8,7)/100,DF)];
% Prezzo Swaption ATM con formula di Jamshidian
Swpt_Price_HW1F=@(a,sig) [Price_Jamshidian(Date,1,5,DF,a,sig);
    Price_Jamshidian(Date,1,10,DF,a,sig);
    Price_Jamshidian(Date,1,30,DF,a,sig);
    Price_Jamshidian(Date,5,5,DF,a,sig);
    Price_Jamshidian(Date,10,10,DF,a,sig)];
x0=[0.5 0.01];
opt=optimset('Display','off','TolX',1e-10);
[ParamL_Jam,FminL_Jam]=fminsearch(@ (x) sum(((Swpt_Price_BLK-...
    Swpt_Price_HW1F(x(1),x(2)))./Swpt_Price_BLK).^2),x0,opt);
%% Calibrazione con Swaption meno Liquide con formula di Jamshidian
% Prezzo Swaption ATM con formula di Black
Swpt_Price_BLKNL=[Swpt_Price_BLK ;
    Swpt_PriceBlk(Date,10,20,vol_mkt(9,7)/100,DF)];

```

```

    Swpt_PriceBlk(Date,10,30,vol_mkt(10,7)/100,DF);
    Swpt_PriceBlk(Date,20,20,vol_mkt(9,9)/100,DF);
    Swpt_PriceBlk(Date,20,30,vol_mkt(10,9)/100,DF)];
% Prezzo Swaption ATM con formula di Jamshidian
Swpt_Price_HW1FNL=@(a,sig) [Swpt_Price_HW1F(a,sig);
    Price_Jamshidian(Date,10,20,DF,a,sig);
    Price_Jamshidian(Date,10,30,DF,a,sig);
    Price_Jamshidian(Date,20,20,DF,a,sig);
    Price_Jamshidian(Date,20,30,DF,a,sig)];
opt=optimset('Display','off','TolX',1e-10);
[ParamNL_Jam,FminNL_Jam]=fminsearch(@ (x) sum(((Swpt_Price_BLKNL-...
    Swpt_Price_HW1FNL(x(1),x(2)))./Swpt_Price_BLKNL).^2),x0,opt);
ParamHW=ParamL_Jam;
elseif flag_fact==2
%% Calibrazione modello G2++
% Swaption liquide
% Volatilità Swaption ATM con formula di Black
Vol_GaussL=[Swpt_VolGauss(1,DF,Swpt_PriceBlk(Date,1,5,vol_mkt(5,1)/100,DF));
    Swpt_VolGauss(1,DF,Swpt_PriceBlk(Date,1,10,vol_mkt(8,1)/100,DF));
    Swpt_VolGauss(1,DF,Swpt_PriceBlk(Date,1,30,vol_mkt(10,1)/100,DF));
    Swpt_VolGauss(5,DF,Swpt_PriceBlk(Date,5,5,vol_mkt(5,5)/100,DF));
    Swpt_VolGauss(10,DF,Swpt_PriceBlk(Date,10,10,vol_mkt(8,7)/100,DF))];
% Volatilità Swaption ATM con modello G2++
Vol_G2ppL=@(a1,a2,sig1,sig2,eps) [Swpt_VolG2pp(Date,1,5,a1,a2,sig1,sig2,-1+abs(eps),DF);
    Swpt_VolG2pp(Date,1,10,a1,a2,sig1,sig2,-1+abs(eps),DF);
    Swpt_VolG2pp(Date,1,30,a1,a2,sig1,sig2,-1+abs(eps),DF);
    Swpt_VolG2pp(Date,5,5,a1,a2,sig1,sig2,-1+abs(eps),DF);
    Swpt_VolG2pp(Date,10,10,a1,a2,sig1,sig2,-1+abs(eps),DF)];
x0=[0.4 0.5 0.01 0.1 -0.01];
opt=optimset('Display','off','TolX',1e-10);
[ParamL_G2pp,FminL_G2pp]=fminsearch(@ (x) sum(((Vol_GaussL-...
    Vol_G2ppL(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5)))./Vol_GaussL).^2),x0,opt);
ParamL_G2pp(end)=-1+abs(ParamL_G2pp(end));
% Swaption meno liquide
% Volatilità Swaption ATM con formula di Black
Vol_GaussNL=[Vol_GaussL;
    Swpt_VolGauss(10,DF,Swpt_PriceBlk(Date,10,20,vol_mkt(9,7)/100,DF));
    Swpt_VolGauss(10,DF,Swpt_PriceBlk(Date,10,30,vol_mkt(10,7)/100,DF));
    Swpt_VolGauss(20,DF,Swpt_PriceBlk(Date,20,20,vol_mkt(9,9)/100,DF));
    Swpt_VolGauss(20,DF,Swpt_PriceBlk(Date,20,30,vol_mkt(10,9)/100,DF))];
% Volatilità Swaption ATM con modello G2++
Vol_G2ppNL=@(a1,a2,sig1,sig2,eps) [Vol_G2ppL(a1,a2,sig1,sig2,eps);
    Swpt_VolG2pp(Date,10,20,a1,a2,sig1,sig2,-1+abs(eps),DF);
    Swpt_VolG2pp(Date,10,30,a1,a2,sig1,sig2,-1+abs(eps),DF);
    Swpt_VolG2pp(Date,20,20,a1,a2,sig1,sig2,-1+abs(eps),DF);
    Swpt_VolG2pp(Date,20,30,a1,a2,sig1,sig2,-1+abs(eps),DF)];
opt=optimset('Display','off','TolX',1e-10);
[ParamNL_G2pp,FminNL_G2pp]=fminsearch(@ (x) sum(((Vol_GaussNL-...
    Vol_G2ppNL(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5)))./Vol_GaussNL).^2),x0,opt);
ParamNL_G2pp(end)=-1+abs(ParamNL_G2pp(end));
ParamHW=ParamL_G2pp;
end
end

```

Calcolo dei prezzi/volatività implicite delle swaption ATM attraverso i diversi metodi.

## Modello di Black

```

function Swpt_Price=Swpt_PriceBlk(Date,Maturity,Tenor,vol_mkt,DF)
% Calcolo del prezzo di una Swaption ATM Swpt_Price con la formula di

```



```

% Black utilizzando i dati di mercato
% Fattore di sconto fwd
DFfwd=DF(Maturity+1:Maturity+Tenor)/DF(Maturity);
% BPV forward
BPV_fwd=sum(yearfrac(Date(Maturity:Maturity+Tenor-1),...
    Date(Maturity+1:Maturity+Tenor),6).*DFfwd(1:end));
% Strike ATM
KATM=(1-DFfwd(end))/BPV_fwd;
% Formula di Black
d1=0.5*vol_mkt*sqrt(Maturity);
Swpt_Price=DF(Maturity)*BPV_fwd*KATM*(2*normcdf(d1)-1);
end

function vol_Gauss= Swpt_VolGauss(Maturity,DF,SwptPrice)
% Calcolo della volatilità implicita vol_Gauss del modello gaussiano
vol_Gauss=2*norminv((SwptPrice/DF(Maturity)+1)*0.5)/sqrt(Maturity);
end

```

## Modello di Jamshidian

Nelle seguente funzione si implementa l'algoritmo di Jamshidian e si utilizza la funzione *newton.m* per l'annullamento della funzione monotona decrescente con il metodo di Newton, *Call.m* per il calcolo del prezzo di un'opzione call europea e *f\_c.m* per le cedole di una bond option.

```

function Price=Price_Jamshidian(Date,Maturity,Tenor,DF,a,sig)
% Calcolo del Prezzo di una Swaption ATM con la formula esatta di Jamshidian
% Fattore di sconto fwd
DFfwd=DF(Maturity+1:Maturity+Tenor)/DF(Maturity);
dt=yearfrac(Date(Maturity:Maturity+Tenor-1),Date(Maturity+1:Maturity+Tenor),6);
% Strike ATM
KATM=(1-DFfwd(end))/...
    sum(dt.*DFfwd(1:end));
% Fattore di sconto Hull-White 1 fattore
B=@(x,t,T) DF_1factor(t,T,x,a,sig,DF);
dB=@(x,t,T) dB_func(t,T,x,a,sig,DF);
c=f_c(dt,KATM,Tenor); % calcolo delle cedole della Coupon Bond Option
opt=optimset('Display','off');
fun=@(x) sum(B(x,Maturity,(Maturity+1:Maturity+Tenor)).*c)-1; % funzione da annullare
dfun=@(x) sum(dB(x,Maturity,(Maturity+1:Maturity+Tenor)).*c); % derivata della funzione
x_star_vect=newton(0.1,100,1e-8,fun,dfun);
x_star=x_star_vect(end);
K_j=B(x_star,Maturity,(Maturity+1:Maturity+Tenor));
Price=sum(c.*Call(DF,Maturity,(Maturity+1:Maturity+Tenor)',K_j,a,sig));
end

```

Sono state utilizzate le seguenti funzioni ausiliarie

```

function dB=dB_func(t,T,x,a,sig,DF)
% Calcolo della derivata del fattore di sconto nel modello di Jamshidian
% rispetto al tasso risk-free
V=@(t,T) (sig/a)^2*(T-t+2/a*exp(-a*(T-t))-exp(-2*a*(T-t)))/(2*a)-3/(2*a));
Bt_T=@(t,T) 1/a*(1-exp(-a*(T-t)));
A=0.5*(V(t,T)-V(0,T)+V(0,t))-Bt_T(t,T)*x;
DF_temp=[1;DF];
dB=DF_temp(T+1)/DF_temp(t+1).*exp(A).*(-Bt_T(t,T));
end

function B=DF_1factor(t,T,x,a,sig,DF)
% Fattore di sconto modello di Jamshidian in funzione del tasso risk-free

```

```

V=@(t,T) (sig/a)^2*(T-t+2/a*exp(-a*(T-t))-exp(-2*a*(T-t))/(2*a)-3/(2*a));
Bt_T=@(t,T) 1/a*(1-exp(-a*(T-t)));
A=0.5*(V(t,T)-V(0,T)+V(0,t))-Bt_T(t,T)*x;
DF_temp=[1;DF];
B=DF_temp(T+1)/DF_temp(t+1).*exp(A);
end

```

## Modello G2++

```

function vol_G2pp= Swpt_VolG2pp(Date,Maturity,Tenor,a1,a2,sig1,sig2,rho,DF)
% Calcolo della volatilità (dev_std) di una Swaption ATM con il modello G2++
% Fattore di sconto fwd
DFfwd=DF(Maturity+1:Maturity+Tenor)/DF(Maturity);
dt=yearfrac(Date(Maturity:Maturity+Tenor-1),Date(Maturity+1:Maturity+Tenor),6);
% Strike ATM
KATM=(1-DFfwd(end))/...
    sum(dt.*DFfwd(1:end));
t0_Mat=Maturity;
gamma=gamma_func(DFfwd,KATM,Tenor,dt);
S1=sum(gamma*sig1/a1.*(1-exp(-a1*((Maturity+1:Maturity+Tenor)'-Maturity))));
S2=sum(gamma*sig2/a2.*(1-exp(-a2*((Maturity+1:Maturity+Tenor)'-Maturity))));
vol_t0_Mat=sqrt(S1.^2.*(1-exp(-2*a1*t0_Mat))/(2*a1)+S2.^2.*(1-exp(-2*a2*t0_Mat))/(2*a2)+...
    2*rho*S1.*S2.*(1-exp(-(a1+a2)*t0_Mat))/(a1+a2));
vol_G2pp=vol_t0_Mat./sqrt(Maturity);
end

function gamma=gamma_func(DFfwd,KATM,Tenor,dt)
% Calcolo del vettore gamma
gamma=zeros(Tenor,1);
gamma(end)=(KATM*dt(end)+1)*DFfwd(end);
if Tenor>1
    gamma(1:end-1)=KATM*dt(1:end-1).*DFfwd(1:end-1);
end
end

```

## A.7 Criteri di Qualità

Nella presente sezione verranno definiti i criteri utilizzati nella definizione delle qualità nel tempo delle diverse strategie.

### Variazione di NPV

Questo criterio viene implementato calcolando la differenza tra il valore attuale dei diversi portafogli sotto i diversi scenari.

Tali NPV sono definiti nel caso delle passività nel seguente modo

```

function PV=CF_PV(CF,DF)
% Calcolo del Present Value PV del portafoglio composto solo da CF
% INPUT
% CF = portafoglio di flussi di cassa
% DF = matrice le cui colonne hanno i fattori di sconto di diversi metodi
CF_M=CF*ones(1,length(DF(1,:))); % CF in forma matriciale
PV=sum(DF.*CF_M,1)';
end

```

mentre nel caso degli swap

```
function NPV_swap=NPV_Swp_func(DF,W,Swap,delta_i)
% Valutazione della variazione di NPV nel portafoglio definito da W e Swap
% Se W e DF sono delle matrici allora si considera ogni colonna come se
% fosse riferita ad un anno diverso
Years=length(W(1,:)); % Anni da considerare
BPV=cumsum(DF.*(delta_i*ones(1,Years)),1);
NPV_swap_Matrix=W.*(Swap(1:length(DF(:,1)))*ones(1,Years).*(BPV-(1-DF)));
NPV_swap=sum(NPV_swap_Matrix,1)';
end
```

## Variazione di cassa generata

La variazione è ottenuta dalla differenza di cassa generata nei diversi metodi. La cassa generata dagli swap è la seguente

```
function CASH=CASH_Generated(Forward_6m,delta6m,cap_factor,Swap,delta_i,DF,W,flag_static)
% Calcolo della cassa generata dal portafoglio composto dai soli swap
% INPUT
% Forward_6m = vettore di due elementi che sono rispettivamente il tasso
% spot tra t0 e t0+6m e il tasso forward tra t0+6m e t0+1y
% cap_factor = fattore di capitalizzazione tra t0+6m e t0+1y
% Swap = tassi swap del mercato
% delta_i/delta6m = frazioni d'anno tra le scadenze semestrali ed annuali
% DF = curva di sconto bootstrappata dai dati di mercato
% W = strategia di copertura
% flag_static = 1 non si deve considerare l'annullamento del NPV degli swap
% Calcolo del flusso variabile
Float_Cash=cap_factor*Forward_6m(1)*delta6m(1)+...
    Forward_6m(2)*delta6m(2);
if flag_static==1
    null_NPV_Swap=0;
else
    null_NPV_Swap=Swap.*cumsum(delta_i.*DF)-(1-DF);
end
% Calcolo della cassa
CASH=sum((-Float_Cash+delta_i.*Swap-null_NPV_Swap).*W);
end
```

## Costi di copertura

Nella presente sezione viene calcolata l'evoluzione dei costi nel tempo ed anche il loro valore attuale.

```
function [Cost,DiscountedCost]=Cost_func(DF,W,delta_i)
% Calcolo del costo della copertura W
% OUTPUT
% Cost = vettore riga dei costi delle strategie W da oggi in futuro
% DiscountedCost = costo odierno delle strategie W
% INPUT
% DF = matrice le cui colonne sono i fattori di sconto da oggi (colonna 1)
% a data futura
% W = matrice dei pesi le cui colonne sono i Pesi nei diversi anni
% delta_i = vettore delle frazioni anno in 30/360

% considero una differenza tra bid ed ask pari a 1bp
```

```
bid_ask=1e-4;
Years=length(W(1,:))-1; % Anni da considerare
BPV=cumsum(DF.*(delta_i*ones(1,Years+1)),1);
delta_Wy=zeros(size(W)); % variazione dei pesi in anni successivi
delta_Wy(:,1)=W(:,1);
if Years>0 % ho dei pesi non solo alla data odierna
    delta_Wy(:,2:end)=W(:,2:end)-W(:,1:end-1); % variazione di pesi tra due anni consecutivi
end
Cost=sum(abs(delta_Wy).*bid_ask.*BPV,1);
DiscountedCost=Cost(1);
if Years>0
    DiscountedCost = DiscountedCost + sum(DF(1:Years,1).*Cost(2:end)');
end
end
```

# Notazioni

$t_0$  data attuale di riferimento in cui si effettua la valutazione, scelta uguale al 31/12/2013

$t_n$  anno di riferimento ad una distanza di  $n$  anni dalla data attuale  $t_0$

$\delta_i$  frazione d'anno tra le date  $t_{i-1}$  e  $t_i$  con la convenzione 30/360

$S_n$  tasso swap quotato sul mercato in  $t_0 = 0$  con scadenza  $t_n$ , tale notazione equivale a  $S_n(t_0)$

$LLP$  ultimo anno di liquidità degli swap nel modello di Wilson-Smith (Last Liquid Point), scelto pari a 20 anni

$UFR$  tasso forward asintotico pari a 4.2%

$T_{conv}$  scadenza in cui si impone che il tasso forward sia ad una distanza inferiore a  $3bp$  dallo UFR, fissato uguale a 70 anni

$\underline{CF}$  vettore le cui componenti rappresentano le passività della compagnia assicuratrice nei diversi anni

$N_{CF}$  dimensione del vettore  $\underline{CF}$ , pari a 80

$N_{swp}$  numero di swap presenti nel bucket a disposizione

$F_{s,e}(t)$  tasso forward in  $t$ , calcolato tra  $t_s$  e  $t_e$ . Nel caso in cui  $t_s = t_{i-1}$  e  $t_e = t_i$ , con  $t_i$  scadenze annuali si utilizza la notazione  $F_i(t)$

$F_t$  tasso forward in  $t_0$ , calcolato tra  $t - 1$  e  $t$ ,  $t$  è espresso in anni

$F_t^{Boot}$  tasso forward in  $t_0$ , calcolato tra  $t - 1$  e  $t$ ,  $t$  è espresso in anni, con il fattore di sconto calcolato tramite il bootstrap della curva swap

$F_t^{WS}$  tasso forward in  $t_0$ , calcolato tra  $t - 1$  e  $t$ ,  $t$  è espresso in anni, con il fattore di sconto definito tramite il metodo di Wilson-Smith

$F_t^{WS-A}$  tasso forward in  $t_0$ , calcolato tra  $t - 1$  e  $t$ ,  $t$  è espresso in anni, con il fattore di sconto definito tramite il metodo di Wilson-Smith Alternativo

$P(t_n)$  fattore di sconto calcolato tra  $t_0$  e  $t_n$

$P(t_0, t_i, t_{i+1})$  fattore di sconto forward in  $t_0$  calcolato tra  $t_i$  e  $t_{i+1}$

$P^0(t_n, t_i)$  fattore di sconto tra  $t_n$  e  $t_i$  sotto lo scenario in cui i tassi realizzati sono uguali ai tassi forward in  $t_0$

$P^i(t_n)$  fattore di sconto da  $t_0$  a  $t_n$  calcolato perturbando il tasso swap con scadenza  $t_i$  di uno shift positivo pari a 1bp

$P^\pm(t_n, t_i)$  fattore di sconto riferito tra  $t_n$  e  $t_i$  sotto lo scenario in cui i tassi realizzati sono uguali ai tassi forward in  $t_0$ , shiftati parallelamente di +1% o -1%

$\underline{DV01}_{CF}$  vettore le cui componenti rappresentano la variazione di Present Value delle passività tra il caso in cui sia stato perturbato un tasso swap e il caso non perturbato, nel caso in cui si utilizzi la curva *Euribor*

$\underline{DV01}_{CF}^{WS}$  vettore le cui componenti rappresentano la variazione di Present Value delle passività tra il caso in cui sia stato perturbato un tasso swap e il caso non perturbato, nel caso in cui si utilizzi la curva Wilson-Smith

$DV01_{sup}$  matrice le cui componenti sono la variazione di NPV dello swap in esame tra il caso perturbato e quello non perturbato, utilizzando la curva *Euribor*

$DV01_{sup}^{WS}$  matrice le cui componenti sono la variazione di NPV dello swap in esame tra il caso perturbato e quello non perturbato, utilizzando la curva Wilson-Smith

$\widehat{DV01}_{CF}$  vettore le cui componenti rappresentano la variazione di Present Value delle passività tra il caso in cui sia stato perturbato triangolarmente un tasso swap e il caso non perturbato, utilizzando la curva *Euribor*

$\widehat{DV01}_{CF}^{WS}$  vettore le cui componenti rappresentano la variazione di Present Value delle passività tra il caso in cui sia stato perturbato triangolarmente un tasso swap e il caso non perturbato, utilizzando la curva Wilson-Smith

$\widehat{DV01}_{sup}$  matrice le cui componenti sono la variazione di NPV dello swap in esame tra il caso perturbato triangolarmente e quello non perturbato, utilizzando la curva *Euribor*

$\underline{W}$  strategia di copertura nel caso si valutino sia le passività che gli swap con la curva *Euribor*

$\underline{W}^n$  strategia di copertura nel caso in cui le passività abbiano solo un flusso di cassa in  $t_n$  e si valutino sia tali passività che gli swap con la curva *Euribor*

$\underline{W}_{std}$  strategia di copertura nel caso si valutino gli swap con la curva *Euribor* e le passività con la curva Wilson-Smith, con l'approccio standard

$\underline{W}_{std}^A$  strategia di copertura nel caso si valutino gli swap con la curva *Euribor* e le passività con il metodo di Wilson-Smith Alternativo, con l'approccio standard

$\underline{W}_{Nstd}$  strategia di copertura nel caso si valutino gli swap con la curva *Euribor* e le passività con la curva Wilson-Smith, con l'approccio non standard

$\widehat{W}$  strategia di copertura nel caso si valutino sia le passività che gli swap con la curva *Euribor*, con perturbazioni triangolari

$\widehat{W}^{WS}$  strategia di copertura nel caso si valutino sia le passività che gli swap con la curva Wilson-Smith, con perturbazioni triangolari

$\widehat{W}_{std}$  strategia di copertura nel caso si valutino gli swap con la curva *Euribor* e le passività con la curva Wilson-Smith, con l'approccio standard e perturbazioni di tipo triangolare

$\widehat{W}_{Nstd}$  strategia di copertura nel caso si valutino gli swap con la curva *Euribor* e le passività con la curva Wilson-Smith, con l'approccio non standard e perturbazioni di tipo triangolare

$COST(t_n)$  costo in  $t_n$  di generazione/aggiustamento della strategia di copertura considerando il tasso MID degli swap e una variazione tra BID/ASK e MID pari a *1bp*

$\Delta CASH^\pm(t_n)$  variazione di cassa in  $t_n$  generata dal portafoglio composto dagli swap e *CF* tra lo scenario in cui il tasso forward calcolato in  $t_0$  sia shiftato di  $\pm 1\%$  e quello non shiftato, con l'utilizzo della strategia dinamica e l'annullamento del valore attuale netto degli swap

$\Delta NPV_{CF}^\pm(t_n)$  variazione di NPV in  $t_n$  del portafoglio composto dai *CF* tra lo scenario in cui il tasso forward calcolato in  $t_0$  sia shiftato di  $\pm 1\%$  e quello non shiftato

$\Delta NPV_{swp}^\pm(t_n)$  variazione di NPV in  $t_n$  del portafoglio composto dagli swap tra lo scenario in cui il tasso forward calcolato in  $t_0$  sia shiftato di  $\pm 1\%$  e quello non shiftato, con l'utilizzo della strategia dinamica

# Bibliografia

- [Baviera 2006] Baviera R., *Bond Market Model*, International Journal of Theoretical and Applied Finance 9, 2006, 577-596.
- [BIS 1988] Bank for International Settlements, *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, Basel Committee on Banking Supervision, 1988.
- [BIS 2005] Bank for International Settlements, *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - A revised Framework*, Basel Committee on Banking Supervision, 2005.
- [BIS 2011] Bank for International Settlements, *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*, Basel Committee on Banking Supervision, 2011.
- [Björk 2009] Björk T., *Arbitrage theory in continuous time*, Oxford University Press, 2009.
- [Brigo 2001] Brigo D., Mercurio F., *Interest Rate Models: Theory and Practice*, Springer Finance, Heidelberg, 2001.
- [CEIOPS 2009] Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: System of Governance* consultation paper, 2009.
- [Cod Civ] Codice Civile, *Articolo 1882*, Libro IV, Titolo III, Capo XX, Sezione I, 2014.
- [EC 2002a] European Commission, *Directive 2002/83/EC of the European Parliament and of the Council of 5 November 2002 concerning life assurance*, Official Journal of the European Communities, 2002.
- [EC 2002b] European Commission, *Directive 2002/13/EC of the European Parliament and of the Council of 5 March 2002 amending Council Directive 73/239/EEC as regards the solvency margin requirements for non-life insurance undertakings*, Official Journal of the European Communities, 2002.



- [EC 2009] European Commission, *Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)*, Official Journal of the European Union, 2009.
- [EEC 1973] European Economic Community, *First Council Directive 73/239/EEC of 24 July 1973 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to the taking up and pursuit of the business of direct insurance other than life assurance*, Official Journal of the European Communities, 1973.
- [EEC 1979] European Economic Community, *First Council Directive 79/267/EEC of 5 March 1979 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to the taking-up and pursuit of the business of direct life assurance*, Official Journal of the European Communities, 1979.
- [Embrechts 2005] Embrechts P., Frey R., McNeil A. J., *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, 2005.
- [Hagan 2006] Hagan P. S., West G., *Interpolation Methods for Curve Construction*, Routledge, Applied Mathematical Finance, 13, 2006, 89-129.
- [Ito 2012] Ito K., *Functional Analysis and Optimization*, North Carolina State University, monografia, 2012.
- [Jamshidian 1989] Jamshidian F., *An Exact Bond Option Formula*, The Journal of Finance 44, 1989, 205-209.
- [Kocken 2012] Kocken T., Oldenkamp B., Potters J., *Dangerous design flaws in the Ultimate Forward Rate: The impact on risk, stakeholders and hedging costs*, Cardano working paper, 2012.
- [KPMG 2002] KPMG, *Study into the Methodologies to Assess the Overall Financial Position of an Insurance Undertaking from the Perspective of Prudential Supervision*, Contract ETD/2000/BS-3001/C/45, 2002.
- [Lamfalussy 2001] The Committee of Wise Men, *Final Report of the Committee of Wise Men on the Regulation of European Securities Markets*, final report, 2001.
- [Lord 2012] Lord R., *The Ultimate Forward Rate - Background, Issues and Impact*, TopQuants Autumn Event 2012, Amsterdam, 2012.
- [Müller 1997] Müller H., *Solvency of Insurance Undertakings*, Conference of the European Union Member States, report, 1997.
- [QIS5 2010a] Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, *Quantitative Impact Study 5: Technical Specifications*, working document, 2010.

- [QIS5 2010b] Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, *Quantitative Impact Study 5: Risk-free interest rates - Extrapolation method*, working document, 2010.
- [Sandstörn 2006] Sandstörn A., *Solvency: Models, Assessment and Regulation*, Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [Sharma 2002] Conference of Insurance Supervisory Services of the Member States of the European Union, *Prudential Supervision of Insurance Undertakings*, report, 2002.
- [Smith 2000] Smith A., Wilson T., *Fitting yield curves with long term constraints*, Bacon and Woodrow working paper, 2000.