

POLITECNICO DI MILANO

FACOLTÀ DI INGEGNERIA DEI SISTEMI
CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA MATEMATICA



TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**OTTIMIZZAZIONE DI FORMA PER
PROBLEMI DI INTERAZIONE
FLUIDO-STRUTTURA**

Relatore: Prof. Sandro Salsa
Correlatore: Dr. Ing. Andrea Manzoni

Luca Ponti
Matr. 798501

ANNO ACCADEMICO 2014/2015

Indice

Sommario	9
Abstract	11
Introduzione	13
1 Problemi di interazione fluido-struttura	17
1.1 Formulazione Arbitrary Lagrangian Eulerian	17
1.2 Modelli per la dinamica del fluido e della struttura	22
1.2.1 Problema di Stokes	22
1.2.2 Legge di Hooke e modello di Koiter	23
1.3 Formulazione del problema FSI	25
1.3.1 Formulazione debole del problema FSI	28
1.3.2 Stime di stabilità del problema FSI	29
1.4 Metodi numerici per problemi FSI	31
1.4.1 Metodo Dirichlet-Neumann	32
1.4.2 Approssimazione con il metodo degli elementi finiti	36
1.4.3 Calcolo della velocità di deformazione del dominio	38
2 Ottimizzazione di forma	39
2.1 Cenni teorici	40
2.2 Derivata di Forma	42
2.2.1 Deformazione dei domini	43
2.2.2 Elementi di Shape Calculus	44
2.2.3 Operatori tangenziali	48
2.3 Condizioni di ottimalità	50
2.3.1 Approccio basato sul problema aggiunto	50
2.3.2 Approccio basato sui moltiplicatori di Lagrange	51
2.4 Condizioni di ottimalità per un problema di Stokes stazionario	53
2.5 Condizioni di ottimalità per un problema di Stokes non stazionario	60

3	Ottimizzazione di forma per un problema di interazione fluido-struttura	65
3.1	Descrizione del problema	66
3.2	Risultato fondamentale	69
3.3	Esistenza di una forma ottima	71
3.4	Formulazione punto-sella del problema	72
3.5	Condizioni di ottimalità	75
3.5.1	Problema aggiunto per il fluido	75
3.5.2	Problema aggiunto per il solido	77
3.5.3	Calcolo della derivata di forma del Lagrangiano	89
4	Metodi numerici per l'ottimizzazione di forma in ambito FSI	93
4.1	Una procedura iterativa per l'ottimizzazione di forma	94
4.2	Soluzione numerica del problema aggiunto FSI	95
4.3	Un metodo di discesa per l'ottimizzazione di forma	96
4.3.1	Vincoli di volume	98
4.3.2	Aggiornamento del dominio	99
4.4	NURBS Free Form Deformation	101
4.4.1	Curve e superfici NURBS	102
4.4.2	Free Form Deformation	104
5	Simulazioni numeriche	109
5.1	Problema di interazione fluido-struttura	110
5.2	Ottimizzazione di forma per problemi FSI	116
5.3	Il caso di struttura rigida e struttura deformabile a confronto	120
5.4	Design ottimo: Adjoint-based vs. Adjoint-free	123
	Conclusioni	125
	Ringraziamenti	127
	Bibliografia	129

Elenco delle figure

1.1	Dominio computazionale Ω fisso in un moto definito mediante una descrizione euleriana.	19
1.2	Rappresentazione della formulazione Euleriana, Lagrangiana e ALE	20
1.3	Dominio computazionale $\omega(t)$ in un moto descritto mediante una formulazione ALE	21
1.4	Dominio fluido nel problema di interazione fluido-struttura	26
1.5	Schema riassuntivo dell’algoritmo per la risoluzione di un problema di interazione fluido - struttura, ad ogni passo temporale.	35
2.1	Perturbazione del dominio Ω_0 dovuta alla mappa θ	44
2.2	Domini utilizzati nella definizione del problema di <i>Shape Optimization</i> per flussi di Stokes non stazionario.	54
3.1	Evoluzione temporale del dominio di riferimento con e senza interazione fluido-struttura	66
3.2	Domini definiti nel problema di controllo di flusso in presenza di interazione fluido-struttura	69
3.3	Perturbazione del dominio $\Omega(t)$ per effetto della mappa $S_{\rho,t}$	78
4.1	Esempi di deformazioni mediante la mappa <i>Free Form Deformation</i>	101
4.2	Esempio di curva parametrizzata mediante NURBS.	103
4.3	Esempio di superficie NURBS.	104
5.1	Dominio di riferimento per il problema FSI	110
5.2	Velocità a diversi istanti temporali.	113
5.3	Pressione a diversi istanti temporali.	114
5.4	Spostamento della struttura in diversi istanti temporali.	115
5.5	Dominio computazionale per il problema di <i>design</i> ottimo con FSI in presenza di interazione fluido-struttura.	116
5.6	Andamento del funzionale costo J , al variare del metodo di aggiornamento del dominio.	117
5.7	Profilo inferiore della forma ottima al variare del metodo di aggiornamento del dominio.	118

5.8	Dominio computazione fluido con profilo inferiore interamente interessato dal processo di ottimizzazione.	119
5.9	Profilo inferiore del <i>design ottimo</i> senza vincoli sul bordo inferiore. . .	120
5.10	Profilo inferiore del <i>design ottimo</i> nel caso FSI e nel caso di una struttura rigida.	121
5.11	Spostamento della struttura, al variare del modulo di Young E , in diversi istanti temporali.	122
5.12	Particolare del profilo inferiore della forma ottima al variare del parametro E	123
5.13	Profilo inferiore della forma ottima ottenuta con il metodo <i>Adjoint-free</i> , <i>Adjoint-based</i> e nel caso rigido.	124

Elenco delle tabelle

5.1	Dettagli sulla discretizzazione spaziale del dominio fluido e solido. . .	110
5.2	Parametri fisici e geometrici del problema di interazione fluido-struttura.	111
5.3	Risultati di convergenza dell'algoritmo iterativo al variare del parametro di rilassamento γ	112
5.4	Dettagli relativi alla discretizzazione spaziale per il problema fluido e il problema solido nel problema di <i>Shape Optimization</i>	116
5.5	Risultati di convergenza del processo di ottimizzazione, al variare del metodo di aggiornamento del dominio.	119
5.6	Distanza tra la forma ottima ottenuta con il metodo <i>Adjoint-free</i> , <i>Adjoint-based</i> e nel caso rigido.	124

Sommario

In questa Tesi di Laurea Magistrale vengono presentati dei metodi teorici e numerici per la soluzione di problemi di ottimizzazione di forma in ambito fluidodinamico, in presenza di interazione tra fluido e struttura. In particolare vengono considerati flussi bidimensionali viscosi a basso numero di Reynolds descritti da equazioni di Stokes non stazionarie, e solidi lineari elastici il cui spostamento è governato dal *modello di Koiter*.

Dopo un'introduzione ai problemi di interazione fluido-struttura e ai principali risultati per l'analisi di problemi di *design ottimo*, viene formulato e analizzato un problema di ottimizzazione di forma per flussi di Stokes in condotti elastici. In particolare, dopo aver dimostrato l'esistenza di almeno una soluzione per tali problemi, viene ricavato un sistema di condizioni necessarie di ottimalità al primo ordine mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, in cui la scrittura del problema aggiunto per la componente solida richiede nozioni di derivazione classica e di derivazione rispetto alla forma.

Dal punto di vista computazionale, viene presentato un metodo numerico iterativo di tipo *Dirichlet-Neumann* per la risoluzione del problema di stato. Lo stesso schema, opportunamente modificato, viene utilizzato per ottenere una soluzione del problema aggiunto, necessaria per caratterizzare la forma ottima. Per il trattamento delle deformazioni del dominio durante la procedura di ottimizzazione viene impiegata un'estensione della mappa *Free Form Deformation (FFD)* basata su Non Uniform Rational B-Splines (*NURBS*). Tale metodologia viene validata su un problema modello che prevede la minimizzazione dell'energia dissipata da un flusso di Stokes in un condotto elastico mediante l'ottimizzazione della forma di una parte del condotto.

Parole chiave: ottimizzazione di forma; interazione fluido-struttura; flussi di Stokes non stazionari; *modello di Koiter*; *NURBS Free Form Deformation*.

Abstract

The main goal of this Master Thesis is to present some analytical and numerical methods for the solution of shape optimization problems in the framework of computational fluid dynamics problem in presence of fluid-structure interaction (FSI). In particular, we consider two-dimensional flows at low Reynolds numbers (modelled by unsteady Stokes equations) in an elastic domain described by means of a *Koiter's model*.

We first introduce several results for the analysis of FSI and Shape Optimization problems, by means of which is presented a shape optimization problem dealing with Stokes flows in an elastic pipe. We discuss the well posedness of this problem showing the existence of (at least) one solution. Then, we formulate a system of first order optimality conditions exploiting the Lagrange multipliers method. In particular, classical differentiation and shape differentiation results are employed in order to obtain the adjoint problem for the solid sub-problem.

From the computational point of view, we exploit a numerical iterative *Dirichlet-Neumann* scheme to solve the state FSI problem. This method, suitably modified, is also used to solve the adjoint problem in order to characterize the solution of the Shape Optimization problem. Concerning domain deformations, we present a method based on a suitable extension of *Free Form Deformation* map parametrized with Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS). Some test cases dealing with unsteady two-dimensional Stokes flows in an elastic pipe are shown to prove the computational performance of the proposed numerical strategy, as well to confirm the theoretical results shown in this Thesis.

Keywords: shape optimization; fluid-structure interaction; unsteady Stokes flows; *Koiter's model*; *NURBS Free Form Deformation*.

Introduzione

L'analisi e la soluzione dei problemi di controllo ottimo governati da equazioni a derivate parziali (EDP) sono diventate, negli ultimi anni, risorse fondamentali in numerosi settori dell'ingegneria e delle scienze applicate. Tali problemi, infatti, si presentano naturalmente sia in contesti classici come l'aerodinamica e la termofluidodinamica, che in campi di ricerca sviluppati più recentemente, quali l'emodinamica e la microfluidodinamica. In questi ambiti, si agisce su alcuni dati (come ad esempio la portata del flusso entrante, la distribuzione del materiale di un profilo aerodinamico o la sua forma) per migliorare le prestazioni del sistema in esame, ad esempio, minimizzando l'energia dissipata o le resistenze aerodinamiche. Indipendentemente dal contesto considerato, in un problema di controllo ottimo si ha a disposizione un *sistema fisico* (descritto mediante un *modello* a derivate parziali), sul quale si vuole agire mediante un opportuno *controllo*, in modo da raggiungere un comportamento desiderato, rispettando determinati *vincoli*.

Dal punto di vista teorico, l'analisi di tali problemi si avvale di numerosi e complessi strumenti (quali l'analisi funzionale, il calcolo delle variazioni e l'ottimizzazione), grazie ai quali è possibile dimostrare l'esistenza (e, laddove possibile, l'unicità) del controllo ottimo, e ricavare alcune *condizioni di ottimalità* mediante le quali caratterizzare il controllo ottimo. A partire dal sistema delle condizioni di ottimalità è possibile implementare strategie computazionali che, sfruttando i metodi per l'ottimizzazione numerica e la soluzione approssimata del problema di stato (e di un opportuno problema aggiunto), permettono di approssimare la soluzione ottima.

Un'importante famiglia di problemi di controllo ottimo è rappresentata dai problemi di *ottimizzazione di forma*, in cui la variabile di controllo è il dominio stesso su cui sono definite le equazioni che descrivono il sistema fisico. In ambito fluidodinamico, infatti, tali problemi vengono risolti per progettare strutture con una maggiore resistenza alle deformazioni e che minimizzino le forze d'attrito. Esempi di questa tipologia di problemi possono essere trovati in ingegneria aerospaziale (ad esempio, in [MP09], nella ricerca della forma ottima di un profilo alare), in ingegneria navale (nel *design* di alcune componenti navali, come in [PQ05]) e in ingegneria biomedica, in cui numerosi studi sono stati recentemente effettuati per determinare la forma ottima di alcune componenti mediche (si veda ad esempio [MQR12], in cui viene studiato un problema di ottimizzazione di forma per un bypass aorto-coronarico).

Nei casi sopra elencati, il *sistema fisico* analizzato comprende una componente fluida (aria, acqua o sangue) a contatto con una componente solida (il profilo alare, le appendici di uno scafo o una protesi vascolare come un bypass). I *modelli* utilizzati per descrivere tali fenomeni nell'ambito dell'ottimizzazione di forma, invece, considerano il caso di domini rigidi e non deformati per effetto dell'interazione con il fluido. La scelta di semplificare tali modelli è dettata dalla complessità insita nei problemi di interazione fluido-struttura. Infatti, a causa dell'interazione tra i due materiali, si verifica uno spostamento della struttura elastica che si traduce in una deformazione del dominio su cui i due mezzi sono definiti; in altri termini, il dominio è esso stesso un'incognita del problema. Cercare di ottimizzare la forma di un dominio sul quale è definito un problema di interazione fluido-struttura è quindi generalmente più complicato rispetto al caso di una geometria rigida, per la necessità di dover imporre deformazioni del dominio in modo da minimizzare il funzionale costo, e al tempo stesso trattare il dominio come vera e propria incognita del problema di stato.

In letteratura sono disponibili pochi esempi di risultati teorici e numerici per l'ottimizzazione di forma nel caso di problemi di interazione fluido-struttura. Dal punto di vista teorico, un esempio di analisi di problemi di controllo ottimo (non di forma) per problemi di interazione fluido-struttura si trova nella monografia di Moubachir e Zolésio [MZ06], in cui viene determinata la portata di flusso entrante in un tubo (descritto come un solido elastico lineare), in modo tale da minimizzare lo spostamento delle pareti del tubo per effetto del flusso del fluido stesso.

Dal punto di vista applicativo si segnalano, invece, i lavori di Heinrich, Duvigneau e Blanchard [HDB11] e di Schäfer, Sternel, Becker e Pironkov [SSBP10], i quali hanno presentato un algoritmo iterativo per l'ottimizzazione di forma per problemi FSI con frontiera mobile, senza tuttavia presentare un'analisi teorica completa del problema.

Il principale obiettivo di questa Tesi di Laurea è approfondire, sia dal punto di vista teorico che da quello numerico, l'analisi e la risoluzione di problemi di ottimizzazione di forma in ambito fluidodinamico in presenza di interazione fluido-struttura. Un esempio di particolare interesse applicativo che ha motivato l'analisi di questa classe di problemi riguarda la progettazione di un componente medico (ad esempio un bypass aorto-coronarico) che tenga conto non solo del moto del sangue all'interno di un'arteria, ma anche dell'interazione tra il fluido e il vaso sanguigno in cui esso scorre. In questo elaborato viene dunque considerato un caso test bidimensionale per presentare un'analisi teorica e una strategia computazionale volte alla soluzioni di tali problemi.

In particolare:

- nel Capitolo 1 viene presentata la formulazione astratta e un risultato di esistenza di un problema di interazione fluido-struttura (*fluid-structure interaction, FSI*) in cui un fluido viscoso scorre all'interno di un dominio elastico. Particolare attenzione viene posta alla formulazione cinematica con cui descrivere il moto del fluido e del solido, e alle condizioni di interfaccia tra le due componenti. Viene inoltre illustrato uno schema numerico iterativo con il quale risolvere un problema di interazione fluido-struttura;
- nel Capitolo 2 viene introdotta la formulazione astratta di un problema di ottimizzazione di forma (*Shape Optimization*). Viene inoltre fornito un risultato di esistenza per tali problemi. Mediante l'introduzione di opportune mappe (dette *perturbazioni dell'identità*), vengono inoltre presentati i principali elementi di *Shape Calculus* necessari per la derivazione di un funzionale rispetto alla forma; grazie a tali risultati sarà possibile scrivere le condizioni di ottimalità, mediante le quali caratterizzare la forma ottima desiderata. In particolare vengono illustrati due approcci per ottenere la formulazione di un problema aggiunto e di una equazione di sensitività (ovvero il gradiente di forma del funzionale costo), con cui caratterizzare la forma ottima;
- nel Capitolo 3 viene formalizzato il problema di controllo del flusso mediante ottimizzazione di forma in presenza di interazione fluido-struttura. Utilizzando gli strumenti teorici introdotti nei Capitoli precedenti, vengono ricavate le condizioni di ottimalità con cui caratterizzare la forma ottima. In particolare, introducendo un opportuno funzionale Lagrangiano, viene presentata una *formulazione punto-sella* di tale problema, grazie alla quale risulta più agevole ricavare il problema aggiunto e l'equazione di sensitività. Particolare attenzione viene posta alla derivazione del problema aggiunto per il sotto-problema solido; infatti, data la correlazione che sussiste tra spostamento del solido e definizione del dominio fluido, è impossibile derivare il funzionale Lagrangiano rispetto allo spostamento della struttura utilizzando i classici teoremi di calcolo differenziale. A tale scopo, vengono invece utilizzati i risultati di *Shape Calculus* introdotti nel Capitolo precedente, opportunamente elaborati;
- nel Capitolo 4 viene presentato un metodo iterativo per l'approssimazione numerica di un problema di *Shape Optimization* basato sul *metodo del gradiente*. Vengono inoltre presentate tre modalità con cui deformare numericamente un dominio: un approccio basato sulle variazioni locali della frontiera, un approccio basato sulla mappa *Free Form Deformation* e un ultimo metodo basato su un'estensione di tale mappa *FFD*, chiamata *NURBS FFD*. In questo Capitolo, viene inoltre proposto un risolutore di problemi aggiunti per problemi FSI, basato sullo schema iterativo utilizzato per la risoluzione del problema di stato;

- nel Capitolo 5 vengono infine illustrati i risultati numerici di alcune simulazioni relative ai problemi di interazione fluido-struttura e di *design* ottimali in quest'ambito, ottenuti implementando in linguaggio *C++*, mediante la libreria *libMesh* per la gestione degli elementi finiti, i metodi numerici presentati nei Capitoli precedenti.

Capitolo 1

Problemi di interazione fluido-struttura

In questo Capitolo viene introdotto un modello matematico per descrivere un problema di interazione fluido-struttura (*fluid-structure interaction* o *FSI*); in particolare ci concentreremo sulla descrizione del moto di un fluido viscoso laminare descritto dalle equazioni di Stokes non stazionarie, che scorre all'interno di un solido elastico.

Nella Sezione 1.1 vengono enunciate le principali proprietà della formulazione *Euleriana* e *Lagrangiana* del moto di un continuo. Accanto a queste, viene definita una terza formulazione, chiamata *Arbitrary Lagrangian Eulerian* o *Formulazione ALE*, mediante la quale verrà in seguito descritto il moto del fluido (Sezione 1.2.1).

Nella Sezione 1.2.2 viene introdotta la legge di Hooke, con la quale descrivere il campo di spostamenti di un generico solido elastico. Grazie a particolari ipotesi sul problema affrontato, sarà possibile utilizzare un modello più semplice chiamato *modello di Koiter* per la descrizione del movimento della struttura. Le equazioni per la componente fluida e per la componente solida verranno infine accoppiate nella Sezione 1.3, definendo in questo modo il problema di interazione fluido-struttura.

Un algoritmo per la risoluzione numerica di un problema FSI viene proposto nella sezione 1.4. Tale algoritmo basato su un approccio di tipo *metodo Dirichlet-Neumann*, prevede la risoluzione iterativa di un sotto-problema fluido e di un sotto-problema solido, utilizzando il metodo degli elementi finiti, fino a convergenza delle condizioni di accoppiamento FSI, imposte all'interfaccia tra fluido e struttura.

1.1 Formulazione Arbitrary Lagrangian Eulerian

La scelta di un appropriato sistema di coordinate rappresenta un aspetto chiave nella definizione dei problemi di interazione fluido-struttura e, in generale, nella definizione di problemi definiti su domini con frontiera mobile.

A tal proposito, questa sezione è dedicata allo studio della cinematica dei continui fornendo una descrizione *Euleriana* e *Lagrangiana* del moto di un dominio di

riferimento, e introducendo una terza formulazione, chiamata *Arbitrary Lagrangian Eulerian*, con la quale descrivere l'evoluzione di un dominio con frontiera mobile.

Si consideri un dominio $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ aperto, limitato e semplicemente connesso con frontiera regolare, denominato *configurazione di riferimento*.

Definiamo *movimento* la mappa regolare $\hat{\varphi}$:

$$\hat{\varphi} : \hat{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\hat{\mathbf{x}}, t) \longrightarrow \mathbf{x} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad (1.1)$$

che associa ad ogni *punto materiale* $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$ una posizione $\mathbf{x} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ nella *configurazione attuale* $\Omega(t)$, per ogni $t \geq 0$.

Si definisce *gradiente di deformazione* il tensore:

$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, t) \quad \text{ovvero} \quad F_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j}, \quad (1.2)$$

in cui il simbolo $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}$ indica il gradiente rispetto alla coordinata materiale $\hat{\mathbf{x}}$.

Affinchè la mappa $\hat{\varphi}$ sia invertibile e che preservi l'orientamento, assumiamo che lo Jacobiano della deformazione, indicato con

$$\mathcal{J} = \det \hat{\mathbf{F}}, \quad (1.3)$$

sia strettamente positivo, per ogni $t \geq 0$. In questo modo risulta quindi possibile definire un qualsiasi campo vettoriale q nella configurazione di riferimento o in quella attuale, a seconda della necessità del problema.

Si consideri ad esempio il campo vettoriale $\hat{\rho} : \hat{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito nella configurazione di riferimento, tale per cui $\hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ indica la densità del punto materiale $\hat{\mathbf{x}}$ al tempo t . Possiamo definire la stessa quantità nella configurazione attuale, grazie alla seguente relazione:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \hat{\rho}(\hat{\varphi}_t^{-1}(\mathbf{x}), t), \quad \mathbf{x} \in \Omega(t), \quad (1.4)$$

in cui si è posto $\hat{\varphi}_t(\cdot) = \hat{\varphi}(\cdot, t)$.

La descrizione della meccanica di un materiale continuo nella sua configurazione di riferimento $\hat{\Omega}$, ottenuta usando coordinate materiali $(\hat{\mathbf{x}}, t)$, viene chiamata *formulazione Lagrangiana*. Viceversa, la descrizione della meccanica di un materiale continuo nella sua configurazione attuale $\Omega(t)$, descritta nelle coordinate (\mathbf{x}, t) , viene chiamata *formulazione Euleriana*.

La scelta del sistema di coordinate da utilizzare è molto importante in meccanica dei continui, e soprattutto nei problemi di interazione fluido-struttura, e dipende dal problema da affrontare.

La formulazione Lagrangiana viene spesso usata nella descrizione della meccanica dei solidi in quanto si concentra sul *punto materiale* $\hat{\mathbf{x}}$ e sulla sua evoluzione temporale. Dal punto di vista computazionale, se il dominio $\hat{\Omega}$ viene discretizzato

introducendo un'opportuna griglia spaziale, questa formulazione richiede di imporre uno spostamento ad ogni nodo della mesh, necessario per seguire un determinato punto materiale durante il suo moto (Figura 1.2, al centro).

Nella formulazione Euleriana, invece, l'attenzione viene posta sul *punto spaziale* \mathbf{x} ; per tale motivo questa formulazione risulta particolarmente efficace in problemi di fluidodinamica. Dal punto di vista computazionale, questo approccio comporta l'introduzione di un volume di controllo *fisso*, discretizzato mediante una opportuna griglia di calcolo, mentre il materiale continuo è in movimento rispetto tale griglia (Figura 1.1).

Una terza formulazione per la descrizione della dinamica di un continuo, originariamente introdotta in [Noh64], si ottiene modificando la formulazione Euleriana in modo tale che il volume di controllo non sia più fissato, ma segua invece le particelle materiali in movimento.

In questa formulazione, chiamata *Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)*, a partire da un dominio computazionale di riferimento $\tilde{\omega}$ (solitamente coincidente con il dominio di riferimento $\hat{\Omega}$), viene dunque introdotta una mappa $\tilde{\mathcal{A}}$ (chiamata *mappa ALE*):

$$\tilde{\mathcal{A}} : \tilde{\omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\mathbf{x}}, t), \quad (1.5)$$

che associa, ad ogni punto $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\omega}$, una posizione $\mathbf{x} = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ nel dominio computazionale attuale $\omega(t)$, per ogni $t \geq 0$.

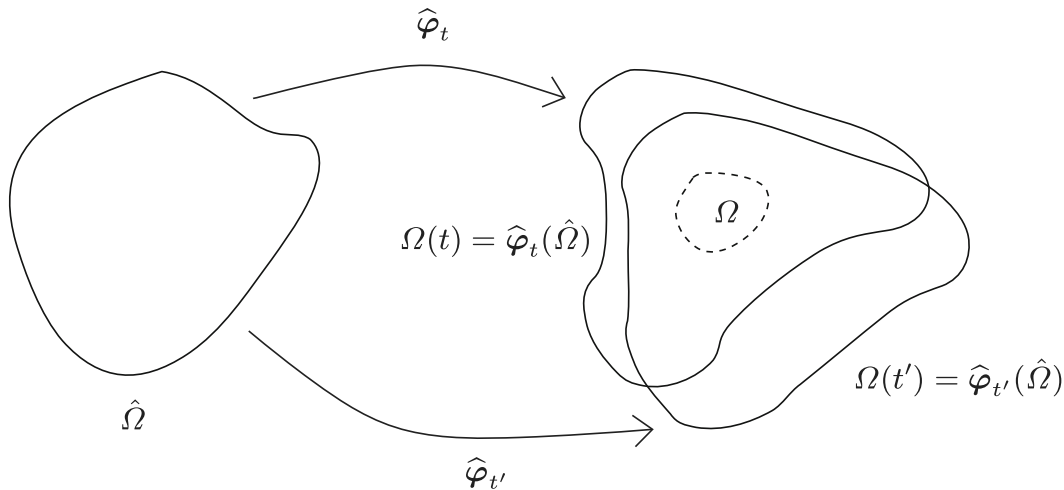


Figura 1.1: Dominio computazionale Ω fisso in un moto definito mediante una descrizione euleriana (immagine tratta da [FFGQ09]).

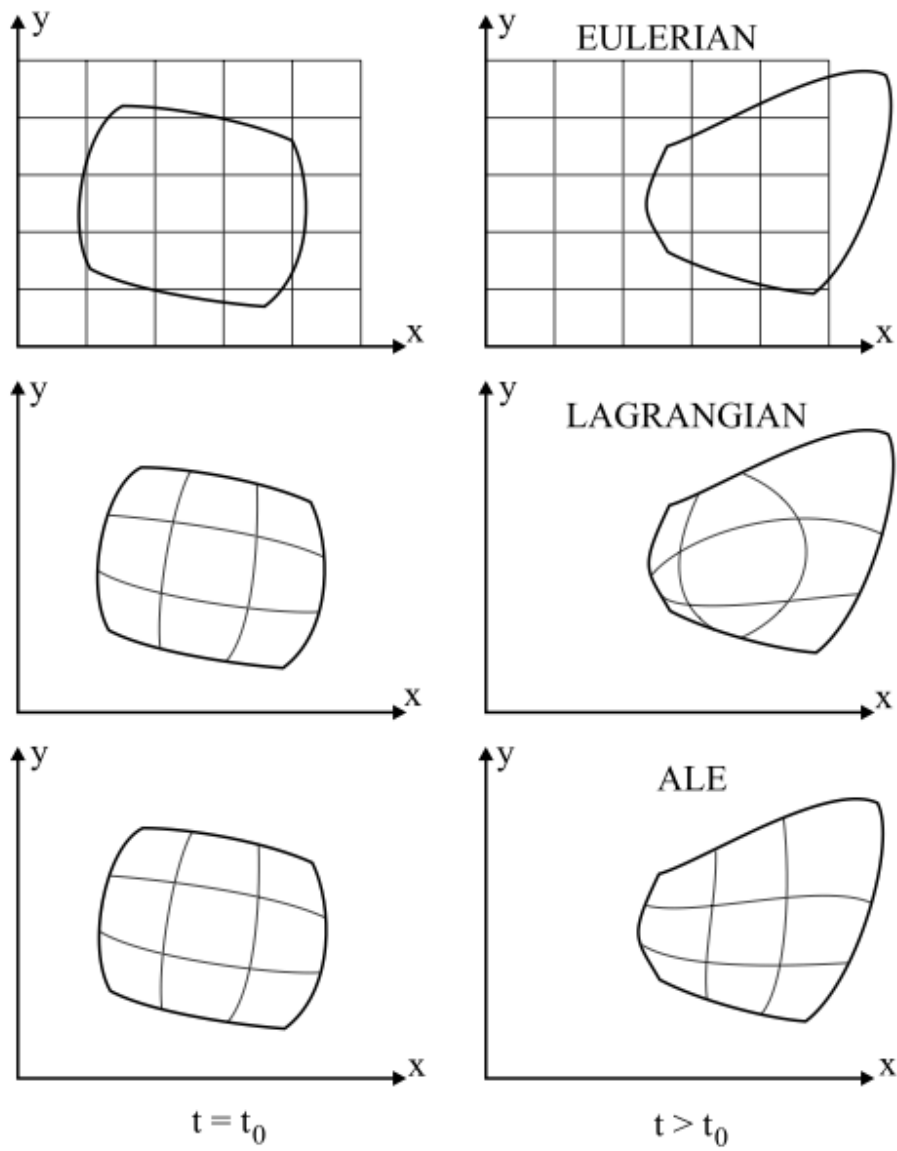


Figura 1.2: Rappresentazione della formulazione Euleriana, Lagrangiana e ALE (immagine tratta da [BP04]).

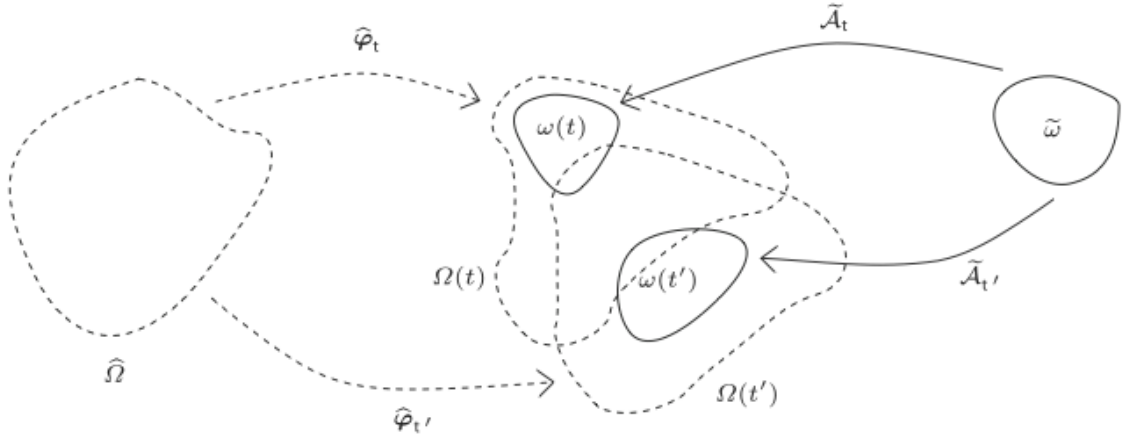


Figura 1.3: Dominio computazionale $\omega(t)$, definito a partire dal dominio di riferimento $\hat{\Omega}$ e dal dominio computazionale di riferimento $\tilde{\omega}$ (immagine tratta da [FFGQ09]).

Dato un generico campo vettoriale $\tilde{\mathbf{q}} : \tilde{\omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definito sul dominio di riferimento ALE, la sua descrizione euleriana è data da:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{q}}(\tilde{\mathcal{A}}_t^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \quad \forall \mathbf{x} \in \omega(t) \quad t \geq 0, \quad (1.6)$$

avendo posto $\tilde{\mathcal{A}}_t(\cdot) = \tilde{\mathcal{A}}(\cdot, t)$.

È inoltre possibile associare, ad ogni mappa ALE \mathcal{A} , una velocità \mathbf{w} del dominio, definita (mediante una descrizione euleriana) nel seguente modo:

$$\mathbf{w}(\cdot, t) = \tilde{\mathbf{w}}(\cdot, t) \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_t}{\partial t} \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} \quad t \geq 0. \quad (1.7)$$

Nella formulazione ALE, come mostrato nello schema in Figura 1.3, il dominio di computazione $\omega(t)$, viene dunque definito a partire dai domini di riferimento $\hat{\Omega}$ e $\tilde{\omega}$ mediante due movimenti: il moto del continuo φ , dettato dalle leggi fisiche con le quali esso è descritto, e il movimento $\tilde{\mathcal{A}}_t$ del dominio computazionale.

Per completare la panoramica delle formulazioni mediante le quali un moto può essere descritto, presentiamo brevemente le relazioni che sussistono tra le derivate in tempo nelle tre diverse formulazioni. Per un generico campo euleriano q :

- la derivata euleriana (o *Eulerian time-derivative*)

$$\frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega(t), \quad (1.8)$$

valuta la variazione del campo q in un punto \mathbf{x} appartenente allo spazio fisico della configurazione attuale;

- la derivata materiale (o *material time-derivative*)

$$\frac{D}{Dt}q(\mathbf{x}, t) := \frac{d}{dt}q(\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}, t), t), \quad \mathbf{x} = \hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad (1.9)$$

indica la variazione di q valutata da un osservatore che si muove con la particella fisica $\hat{\mathbf{x}}$, la quale si trova nel punto spaziale \mathbf{x} al tempo t ;

- la derivata ALE (*ALE time-derivative*)

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathcal{A}}} = \frac{d}{dt}q(\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\mathbf{x}}, t), t), \quad \mathbf{x} = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\mathbf{x}}, t). \quad (1.10)$$

indica la variazione di q in un punto che si muove con il dominio computazionale.

Si noti che vale la seguente relazione, facilmente dimostrabile utilizzando la regola della *chain-rule* per la derivata:

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathcal{A}}} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla q. \quad (1.11)$$

1.2 Modelli per la dinamica del fluido e della struttura

In questa Sezione vengono introdotte le equazioni di Stokes non stazionarie e le equazioni dell'elastodinamica che governano, rispettivamente, il moto di un fluido viscoso, Newtoniano incomprimibile, a basso numero di Reynolds e lo spostamento di una struttura elastica lineare, omogenea ed isotropa.

Per maggiori dettagli sulla procedura con la quale tali equazioni vengono ricavate si rimanda ad esempio a [FFGQ09]. Queste equazioni verranno poi utilizzate nella definizione di un problema di interazione fluido-struttura, in cui verranno assegnate opportune condizioni di accoppiamento tra le diverse componenti.

1.2.1 Problema di Stokes

Si consideri un generico dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ contenente un fluido Newtoniano incomprimibile con densità ρ_F e viscosità dinamica μ_F . Siano $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $p(\mathbf{x}, t)$ con $\mathbf{x} \in \Omega$ e $t \in (0, T)$, rispettivamente, la velocità e la pressione del fluido, governate dalle equazioni di Navier-Stokes. Assumiamo inoltre che il termine convettivo dell'equazione di Navier-Stokes sia di ordine inferiore rispetto al termine diffusivo; consideriamo dunque il caso di flussi a basso numero di Reynolds. In questo modo le equazioni di Stokes risultano essere un buon modello per caratterizzare il comportamento di tale fluido.

Introduciamo dunque la formulazione Euleriana delle equazioni di Stokes:

$$\begin{cases} \rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p - \mu_F \Delta \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) . \end{cases} \quad (1.12)$$

La prima equazione in (1.12) rappresenta la conservazione del momento, mentre la seconda equazione rappresenta una caratterizzazione dell'incomprimibilità del fluido. Ricordiamo inoltre che in un fluido Newtoniano il tensore degli sforzi di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^F$ è dato dalla seguente relazione:

$$\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) = \mu_F \nabla \mathbf{u} - p \mathbf{I} , \quad (1.13)$$

dove \mathbf{I} rappresenta il tensore identità.

Per ottenere la formulazione ALE delle equazioni di Stokes occorre applicare la formula di trasporto enunciata in (1.11) alla prima equazione del sistema (1.12), ottenendo:

$$\begin{cases} \rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\tilde{\mathcal{A}}} - \rho_F \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \mu_F \Delta \mathbf{u} = 0 & \text{in } Q \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } Q . \end{cases} \quad (1.14)$$

dove indichiamo con

$$Q = \bigcup_t \Omega(t)$$

il dominio spazio-temporale su cui è definito il problema di Stokes. Notiamo che ora anche il dominio $\Omega(t)$ dipende dal tempo; ricordiamo a tal proposito che \mathbf{w} è la velocità del dominio computazionale, definita in (1.7)

Opportune condizioni al contorno e condizioni iniziali del problema (1.14), verranno introdotte nella Sezione 1.3.

1.2.2 Legge di Hooke e modello di Koiter

Descriviamo ora il moto di una struttura solida elastica, isotropa ed omogenea di densità $\hat{\rho}_S$ mediante l'evoluzione del suo spostamento $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ nel tempo, definito su un dominio di riferimento $\hat{\Omega}$.

Utilizzando la legge di conservazione della quantità di moto (si veda a tal proposito [FFGQ09]), scritta in formulazione Lagrangiana, si ottiene la seguente relazione:

$$\hat{\rho}_S \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\eta}}}{\partial t^2} - \operatorname{div}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\boldsymbol{\Pi}} = \hat{\rho}_S \hat{\mathbf{f}} , \quad \text{in } \hat{\Omega} \times (0, T) , \quad (1.15)$$

in cui $\hat{\boldsymbol{\Pi}}$ viene chiamato *primo tensore di Piola-Kirchhoff*, mentre $\hat{\mathbf{f}}$ rappresenta la forzante che agisce sulla struttura solida in formulazione Lagrangiana.

Occorre ora definire una relazione costitutiva che leghi il tensore degli sforzi a quello delle deformazioni, caratterizzando in questo modo il materiale considerato.

Nei materiali elastici, tale equazione costitutiva viene scritta in termini del tensore degli spostamenti di *Green-Lagrange* così definito:

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\boldsymbol{\eta}} + (\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\boldsymbol{\eta}})^T) + \frac{1}{2} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\boldsymbol{\eta}}(\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\boldsymbol{\eta}})^T. \quad (1.16)$$

È possibile dimostrare che, sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti, tale tensore può essere espresso nel seguente modo:

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\boldsymbol{\eta}} + (\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\boldsymbol{\eta}})^T). \quad (1.17)$$

Un modo più agevole per esprimere le relazioni costitutive prevede l'introduzione del *secondo tensore di Piola-Kirchoff* $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\mathbf{F}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Pi}}$, simmetrico, in cui $\hat{\mathbf{F}}$ rappresenta il gradiente di deformazione.

Ricordiamo inoltre che in un materiale *elastico* gli sforzi sono funzione delle deformazioni attuali, ma non delle deformazioni passate. Inoltre, se il materiale è *omogeneo e isotropo*, le proprietà meccaniche non dipendono dalla posizione, e la risposta del materiale alle deformazioni è la stessa in tutte le direzioni. Per materiali elastici, omogenei ed isotropi vale infine la *Legge di Hooke*, esprimibile attraverso la seguente relazione:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \lambda \operatorname{tr}(\hat{\epsilon})\mathbf{I} + 2\mu\hat{\epsilon} \quad (1.18)$$

dove λ e μ sono chiamati rispettivamente primo e secondo coefficiente di Lamé.

In letteratura, la legge di Hooke viene spesso espressa in termini del *modulo di Young* E e del *coefficiente di Poisson* ν , parametri caratterizzanti solidi elastici lineari. In particolare, è possibile esprimere la relazione (1.18) nella seguente forma:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr}(\hat{\epsilon})\mathbf{I} + 2\frac{E}{2(1+\nu)}\hat{\epsilon}. \quad (1.19)$$

Numerosi studi in campo emodinamico (si vedano ad esempio [FFGQ09] e [NV08]), sono stati indirizzati alla riduzione della dimensione del problema della struttura solida; in particolare, facendo opportune assunzioni su alcune proprietà del solido elastico considerato, è possibile tradurre il problema tridimensionale descritto dalla legge di Hooke in un problema mono-dimensionale.

Mediante questo modello, chiamato *modello di Koiter*, è possibile approssimare il condotto con un cilindro di raggio R e lunghezza L in cui l'unica direzione spaziale considerata è quella assiale. Si assume inoltre che le pareti dell'arteria siano membrane sottili, descritte dunque da una superficie bidimensionale di densità ρ_S e spessore h_S .

La configurazione di riferimento $\hat{\omega}$ della membrana può essere descritta in forma parametrica attraverso la mappa $\boldsymbol{\psi}$ così definita:

$$\boldsymbol{\psi} : (0, L) \times (0, 2\pi) \rightarrow \hat{\omega} \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.20)$$

$$\boldsymbol{\psi}(z, \theta) = (R \cos\theta, R \sin\theta, z)^T, \quad \forall (z, \theta) \in (0, L) \times (0, 2\pi).$$

Assumiamo inoltre che:

- la membrana sia soggetta a **piccoli spostamenti** in direzione normale; ovvero assumiamo che il campo vettoriale dello spostamento della membrana può essere scritto nella seguente forma: $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (0, 0, \eta)^T$;
- il rapporto h_S/R sia così piccolo da risultare trascurabile. Questa condizione si traduce nell'assenza di termini di flessione (o *bending*);
- la membrana sia fissata alle estremità. Questo equivale ad imporre:

$$\eta = 0 \quad \text{su } z = 0 \text{ e } z = L ; \quad (1.21)$$

- sia presente una condizione di pre-stress determinata dal gradiente di deformazione F^0 , che assumiamo essere diagonale, e da un tensore di pre-stress della forma:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_S \end{bmatrix} .$$

Si noti che tale pre-stress agisce solo in direzione longitudinale.

Sotto queste ipotesi è possibile ricavare una formulazione mono-dimensionale per l'equazione che governa la struttura solida. Tale formulazione, chiamata *generalized string model*, conduce alla seguente equazione:

$$\rho_S h_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \beta \eta = f \quad z \in (0, L), \quad \forall t \geq 0 , \quad (1.22)$$

in cui $\beta \in \mathbb{R}$ è un parametro non negativo legato alle proprietà viscoelastiche della membrana, definito dalla seguente relazione:

$$\beta = \frac{E h_S}{R^2(1 - \nu^2)} . \quad (1.23)$$

Per maggiori informazioni sul *modello di Koiter* e per la definizione generale della formulazione *generalized string model* si rimanda a [FFGQ09].

1.3 Formulazione del problema FSI

In questa Sezione introduciamo la formulazione di un problema modello di flusso in presenza di interazione tra fluido e struttura (*FSI problem*), sfruttando le equazioni di Stokes e la legge di Hooke introdotte nella Sezione precedente. Supponiamo di voler modellizzare il moto del flusso sanguigno all'interno di un tubo, le cui pareti possono essere descritte mediante il *modello di Koiter*.

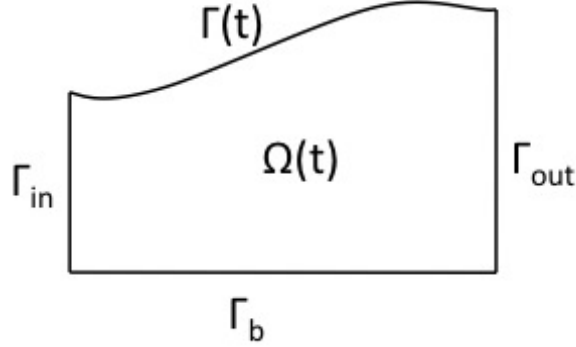


Figura 1.4: Dominio bidimensionale su cui è definito il sotto-problema fluido del problema di interazione fluido-struttura.

Grazie alla simmetria cilindrica possiamo assumere che il fluido, governato dalle equazioni di Stokes, fluisca in un dominio $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ come quello raffigurato in Figura 1.4. La forma di tale dominio $\Omega(t)$, al variare del tempo t , non è nota a priori ma dipende dall'interazione tra il fluido e l'arteria.

Si consideri in particolare la geometria descritta dalla Figura 1.4, in cui la membrana solida è a contatto con il fluido solo sulla porzione di frontiera $\Gamma(t) \subset \partial\Omega(t)$, la cui forma varia dunque nel tempo. Assumiamo inoltre che la struttura sia soggetta solamente a spostamenti in direzione verticale e che la porzione di frontiera $\Gamma_{in} \cup \Gamma_b \cup \Gamma_{out}$ sia fissa e dunque la sua forma non venga alterata nel tempo.

Per risolvere il problema solido si introduce un dominio monodimensionale di riferimento $\Gamma_0 = (0, L)$. È dunque possibile esprimere la porzione di frontiera $\Gamma(t)$ come immagine di Γ_0 rispetto allo spostamento η ; in particolare vale la seguente relazione:

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 \circ (\eta \mathbf{e}_2). \quad (1.24)$$

Introducendo il dominio di riferimento $\Omega_0 = (0, L) \times (0, R)$ e una famiglia di mappe *ALE* $\tilde{\mathcal{A}}_t$, parametrizzate rispetto a t , è possibile definire il generico dominio $\Omega(t)$ come immagine del dominio di riferimento Ω_0 rispetto alla mappa $\tilde{\mathcal{A}}_t$. In particolare possiamo definire la famiglia di mappe $\tilde{\mathcal{A}}_t$ nel seguente modo:

$$\tilde{\mathcal{A}}_t : \Omega_0 \longrightarrow \Omega(t), \quad \tilde{\mathcal{A}}_t(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \eta(x, t) \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \Omega_0. \quad (1.25)$$

Lo spostamento η della struttura, come visto nella sezione precedente, è soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} \rho_S h_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \beta \eta = f & \text{su } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \eta(0, t) = \eta(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T). \end{cases} \quad (1.26)$$

L'evoluzione del fluido è dettata dalle equazioni di Stokes non stazionarie, a cui è necessario aggiungere una condizione iniziale e opportune condizioni al contorno. Otteniamo quindi il seguente problema di Stokes (in forma ALE):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\tilde{\mathcal{A}}} - \rho_F \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \mu_F \Delta \mathbf{u} = 0 & \text{in } Q \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } Q \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} & \text{su } \Gamma_{in} \times (0, T) \\ -p \mathbf{n} + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{su } \Gamma_{out} \times (0, T) \\ \mathbf{u} = 0 & \text{su } \Gamma_b \times (0, T) \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 & \text{in } \Omega(0) \end{array} \right. \quad (1.27)$$

dove indichiamo con

$$Q = \bigcup_t \Omega(t) \quad (1.28)$$

il dominio spazio-temporale su cui è definito il problema di interazione fluido-struttura.

Le condizioni al contorno applicate al problema sono definite nel seguente modo:

- sulla porzione di dominio $\Gamma_{in} \subset \partial\Omega(t)$ imponiamo un flusso entrante mediante condizioni di Dirichlet non omogenee;
- sul bordo di *outflow* $\Gamma_{out} \subset \partial\Omega(t)$ sono state imposte condizioni di Neumann omogenee (sforzo nullo);
- sulla porzione di frontiera $\Gamma_b \subset \partial\Omega(t)$, in vista dell'applicazione presente nel Capitolo 3, supponiamo sia presente una struttura rigida (condizioni di Dirichlet omogenee).

Introduciamo ora delle condizioni sulla porzione di frontiera $\Gamma(t) \subset \partial\Omega(t)$, necessarie per accoppiare il modello fluido con il modello della struttura solida (si vedano ad esempio [FFGQ09] e [For12]). In particolare si impone:

- la continuità della velocità, espressa da:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma(t)} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} \right) \Big|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_2, \quad (1.29)$$

in cui $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ è il versore parallelo all'asse delle ordinate;

- la continuità degli sforzi normali

$$f = -\mathcal{J} \left(\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \right) \Big|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_2, \quad (1.30)$$

dove \mathbf{n} rappresenta il versore normale uscente da $\Gamma(t)$, $\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p)$ il tensore degli sforzi di Cauchy (definito in (1.13)) relativo al problema di Stokes, e $\mathcal{J} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2}$ indica lo Jacobiano della trasformazione dalle coordinate Euleriane a quelle Lagrangiane.

1.3.1 Formulazione debole del problema FSI

In questa Sezione viene fornita la formulazione debole del problema di interazione fluido-struttura presentato nel paragrafo precedente. Introduciamo a tal proposito i seguenti spazi funzionali:

$$V_F^t = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega(t); \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_{\Gamma_b} = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{v}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{u}_{in} \} ,$$

$$V_0^t = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega(t); \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_{\Gamma_b \cup \Gamma_{in}} = \mathbf{0} \} ,$$

$$Q_F^t = \{ q \in L^2(\Omega(t)) \} ,$$

$$V_S = \{ \psi \in H^1(\Gamma_0) : \psi(0) = \psi(L) = 0 \}$$

necessari per formulare in senso variazionale il problema per la componente fluida (1.27) e il problema per la struttura, definito in (1.22). Al fine di ottenere una formulazione debole del problema fluido, moltiplichiamo la prima equazione in (1.27) per una funzione test $\mathbf{v} \in V_0^t$ e la seconda equazione per una funzione test $q \in Q_F^t$. Dopo aver integrato le due equazioni sul loro dominio di definizione $\Omega(t)$, si ottiene la seguente formulazione debole: per ogni $t \in (0, T)$, trovare $\mathbf{u} \in V_F^t$ e $p \in Q_F^t$ tale che:

$$\begin{aligned} & \rho_F \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathcal{A}}} \cdot \mathbf{v} \right) d\mathbf{x} - \rho_F \int_{\Omega(t)} ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega(t)} (p \operatorname{div} \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ & \quad + \mu_F \int_{\Omega(t)} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma(t)} ((\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0^t , \\ & \int_{\Omega(t)} (q \operatorname{div} \mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in Q_F^t , \\ & \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 . \end{aligned} \tag{1.31}$$

Analogamente a quanto fatto per il modello fluido, è possibile ricavare la seguente formulazione debole del problema per la componente solida (1.22): per ogni $t \in (0, T)$ trovare $\eta \in V_S$ tale che:

$$\rho_S h_S \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \psi \right) dz + \mu_S \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz + \beta \int_{\Gamma_0} \eta \psi dz = \int_{\Gamma_0} f \psi dz \tag{1.32}$$

$\forall \psi \in V_S.$

Introduciamo ora una formulazione globale del problema di interazione fluido-struttura, considerando il seguente spazio funzionale:

$$S^t = \{ (\mathbf{v}, \psi) \in V_0^t \times V_S : \mathbf{v}|_{\Gamma(t)} = \psi \mathbf{e}_2 \} . \tag{1.33}$$

Sommando le equazioni (1.31) e (1.32), si ottiene la seguente formulazione debole: trovare $\mathbf{u} \in V_F^t$, $p \in Q_F^t$ e $\eta \in V_S$ tale che:

$$\begin{aligned}
& \rho_F \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathcal{A}}} \cdot \mathbf{v} \right) d\mathbf{x} - \rho_F \int_{\Omega(t)} \left((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) d\mathbf{x} - \int_{\Omega(t)} (p \operatorname{div} \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\
& + \mu_F \int_{\Omega(t)} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x} + \rho_S h_S \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \psi \right) dz \\
& + \mu_S \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz + \beta \int_{\Gamma_0} \eta \psi dz = 0 \\
& \int_{\Omega(t)} (q \operatorname{div} \mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0 \\
& \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0
\end{aligned}
\quad \forall (\mathbf{v}, \psi, q) \in S^t \times Q_F^t. \tag{1.34}$$

Si noti che, grazie alla scelta dello spazio funzionale S^t definito in (1.33) e alla condizione di accoppiamento che impone la continuità degli sforzi normali espressa in (1.30), il termine di bordo $\int_{\Gamma(t)} (\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\sigma$ presente nella formulazione debole del fluido e il termine $\int_{\Gamma_0} f \psi dz$ si elidono.

Enunciamo ora un teorema che garantisce l'esistenza di almeno una soluzione debole del problema (1.34).

Teorema 1.1. *Si consideri il problema (1.34); allora esiste $T > 0$ e una soluzione debole $(\mathbf{u}, p, \eta) \in V_F^t \times Q_F^t \times V_S$ definita nell'intervallo $[0, T]$.*

Inoltre, una delle seguenti affermazioni è vera:

- $T = +\infty$;
- $\lim_{t \rightarrow T} \min_{z \in [0, L]} (R + \eta(z, t)) = 0$.

Questo risultato dunque garantisce l'esistenza (globale in tempo) della soluzione di un problema FSI, a patto che la struttura solida posta sul bordo $\Gamma(t)$ non intersechi il bordo inferiore del dominio fluido. Per ulteriori dettagli e per la dimostrazione di tale risultato si rimanda a [CDEG05] e a [MC13]

1.3.2 Stime di stabilità del problema FSI

In questa Sezione vengono presentate alcune *stime di stabilità* per la soluzione (\mathbf{u}, p, η) di problema FSI. A tal proposito, ponendo $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ nella formulazione debole del problema fluido, introdotta in (1.31), e ricordando che per l'equazione di continuità si ha $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho_F \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathcal{A}}} \cdot \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} - \rho_F \int_{\Omega(t)} \left((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} \\ + \mu_F \int_{\Omega(t)} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma(t)} \left((\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = 0 . \end{aligned} \quad (1.35)$$

Utilizzando la definizione della velocità del dominio computazionale \mathbf{w} , è possibile dimostrare ([CDEG05]) la seguente relazione:

$$\rho_F \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathcal{A}}} \cdot \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} - \rho_F \int_{\Omega(t)} \left((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = \frac{\rho_F}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} , \quad (1.36)$$

con la quale è possibile riscrivere l'espressione (1.35), nel seguente modo:

$$\frac{\rho_F}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \mu_F \int_{\Omega(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Gamma(t)} \left((\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = 0 . \quad (1.37)$$

Per quanto riguarda il problema per il solido, ponendo $\psi = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ nella formulazione (1.32), si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \rho_S h_S \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) dz + \mu_S \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial t} \right) dz \\ + \beta \int_{\Gamma_0} \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} dz - \int_{\Gamma_0} f \frac{\partial \eta}{\partial t} dz = \\ = \frac{\rho_S h_S}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dz + \frac{\mu_S}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 dz \\ + \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_0} |\eta|^2 dz - \int_{\Gamma_0} f \frac{\partial \eta}{\partial t} dz = 0 . \end{aligned} \quad (1.38)$$

Ricordando le condizioni di accoppiamento relative alla continuità della velocità (espressa in (1.29)) e degli sforzi (introdotta in (1.30)) all'interfaccia, e sommando le equazioni (1.37) e (1.38), si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_F}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \mu_F \int_{\Omega(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \frac{\rho_S h_S}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dz \\ + \frac{\mu_S}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_0} |\eta|^2 dz = 0 . \end{aligned} \quad (1.39)$$

Seguendo un procedimento comune alla teoria dell'analisi delle EDP, per ottenere le stime desiderate, integriamo l'equazione (1.39) sull'intervallo $(0, t)$ ottenendo:

$$\begin{aligned} \rho_F \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega(t); \mathbb{R}^2)}^2 + 2\mu_F \int_0^t \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega(t); \mathbb{R}^2)}^2 dt + \rho_S h_S \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 \\ \mu_S \left\| \frac{\partial \eta}{\partial z} \right\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 + \beta \|\eta(\cdot, t)\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 \leq \rho_F \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega(0); \mathbb{R}^2)}^2 . \end{aligned} \quad (1.40)$$

Supponendo che $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega(0); \mathbb{R}^2)$, possiamo concludere che:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega(t); \mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega(t); \mathbb{R}^2)) , \\ \eta &\in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_0)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Gamma_0)) . \end{aligned} \tag{1.41}$$

A questo punto, utilizzando la condizione *inf-sup* (si veda ad esempio [Qua12]), è possibile determinare una stima di stabilità per la pressione p del fluido; in particolare si dimostra che:

$$p \in L^2(0, T; L^2(\Omega(t))) . \tag{1.42}$$

Le stime calcolate in questa Sezione verranno in seguito utilizzate nel Capitolo 3 per dimostrare l'esistenza della soluzione di un problema di ottimizzazione di forma per un problema FSI.

1.4 Metodi numerici per problemi FSI

Nel corso dell'ultimo decennio sono stati introdotti (e applicati in svariati campi dell'ingegneria) numerosi approcci numerici per la risoluzione di problemi di interazione fluido-struttura (si vedano ad esempio [HT06], [Rus12], [NV08], [BQQ08], [CGN05] e [FG09]). In base al metodo numerico con cui l'accoppiamento del fluido e del solido viene risolto, queste tecniche si dividono in due classi fondamentali:

- **metodi monolitici:** queste tecniche (si vedano ad esempio [HT06], [CDFQ11] e [Hei04]) si basano sulla risoluzione simultanea del problema sul dominio occupato dal solido e il problema definito sul dominio occupato dal fluido. Tipicamente, tali metodi, vengono utilizzati con un opportuno preconditionatore. Sebbene siano altamente non lineari e siano onerosi computazionalmente, questi metodi hanno il vantaggio di risultare tipicamente robusti;
- **metodi partizionati:** in queste tecniche la risoluzione di un problema di interazione fluido-struttura comporta la risoluzione del sotto-problema fluido e di un sotto-problema solido in un procedimento iterativo, fino al soddisfacimento di un opportuno criterio d'arresto. Il legame tra questi due sotto-problemi viene fornito dalle condizioni di accoppiamento: ad ogni istante temporale lo sforzo normale del fluido sulla frontiera del dominio determina la forzante del problema solido, mentre la configurazione della struttura determina il dominio su cui il problema fluido deve essere risolto. Esempi di queste tecniche possono essere trovati ad esempio in [Rus12], [NV08], [CGN05] e in [FG09]. Rispetto ai metodi monolitici, questi metodi sono computazionalmente meno onerosi in quanto si occupano di risolvere i due sotto-problemi separatamente e hanno il vantaggio di poter utilizzare solutori per il problema fluido e per il problema solido implementati precedentemente.

Nel prossimo paragrafo viene presentato un algoritmo per la risoluzione di un problema FSI basato su uno schema partizionato in cui le condizioni di accoppiamento vengono trasmesse con un metodo di tipo *Dirichlet-Neumann*. L'idea alla base di questo algoritmo è quello di risolvere, ad ogni passo temporale:

- un sotto-problema fluido in cui la condizione (1.29) di continuità delle velocità viene imposta sull'interfaccia $\Gamma(t)$ mediante una condizione di Dirichlet;
- un sotto-problema solido in cui la condizione (1.30) di continuità degli sforzi normali viene introdotta mediante una condizione di Neumann sull'interfaccia $\Gamma(t)$.

Questi due problemi vengono risolti iterativamente aggiornando le condizioni al contorno sull'interfaccia $\Gamma(t)$, fino al soddisfacimento di un opportuno criterio di convergenza, che presenteremo nel prossimo paragrafo.

1.4.1 Metodo Dirichlet-Neumann

In questa Sezione viene presentato un metodo numerico partizionato di tipo *Dirichlet-Neumann*, per la risoluzione di un problema di interazione fluido-struttura.

Si consideri, a tal proposito il seguente sotto-problema-fluido:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\tilde{\mathcal{A}}} - \rho_F \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \mu_F \Delta \mathbf{u} = 0 & \text{in } Q \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } Q \\ \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} \right) \Big|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_2 & \text{su } G, \end{array} \right. \quad (1.43)$$

completato con opportune condizioni iniziali e condizioni al contorno su $\partial\Omega(t) \setminus \Gamma(t)$, dove indichiamo con

$$G = \bigcup_t \Gamma(t) \quad (1.44)$$

la frontiera su cui avviene l'interazione tra fluido e struttura. Si noti che in questo sotto-problema la condizione di accoppiamento che garantisce la continuità della velocità nelle due fasi viene imposta come condizione al bordo di Dirichlet sull'interfaccia $\Gamma(t)$.

Consideriamo ora il seguente sotto-problema solido:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_S h_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \beta \eta = f & \text{su } \Gamma_0 \times (0, T) \\ f = - \mathcal{J} (\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_2 & \text{su } \Gamma_0 \times (0, T) \end{array} \right. \quad (1.45)$$

Introduciamo una discretizzazione temporale dei problemi (1.43) e (1.45); a tal proposito, sia $t^n = n \Delta t$ dove Δt indica il passo di discretizzazione temporale e $n = 0, \dots, N$ tale che $t^N = T$. Si denoti con g^n la generica funzione $g(t)$ valutata in t^n e con Ω^n il dominio $\Omega(t)$ valutato in t^n . In modo analogo, $\Gamma^n = \Gamma(t^n)$ indica l'interfaccia del problema FSI nell'istante temporale t^n .

Per discretizzare il sotto-problema fluido utilizziamo il metodo di *Eulero implicito*, con un trattamento semi-implicito del termine convettivo per evitare non-linearità nel problema. Consideriamo invece uno schema di approssimazione BDF (*Backward Differentiation Formula*) del primo ordine per approssimare il sotto-problema solido. Secondo tale schema, la derivata seconda dello spostamento della struttura η viene approssimata da:

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right|_{t=t^{n+1}} \simeq \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (1.46)$$

Si noti che tale approssimazione deve essere necessariamente adattata e riformulata nel primo istante temporale, per tenere conto delle condizioni iniziali.

Possiamo quindi formulare il problema semi-discreto nel seguente modo: dato \mathbf{u}^0, p^0 e η^0 , per ogni $n = 1, \dots, N$, trovare $\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}$ e η^{n+1} tale che:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \rho_F \mathbf{w}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} - \mu_F \Delta \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{in } \Omega^n \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{in } \Omega^n \\ \mathbf{u}^{n+1} = \left(\left(\frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} \right) \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} \right) \Big|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_2 & \text{su } \Gamma^n; \end{array} \right. \quad (1.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_S h_S \frac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\Delta t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \eta^{n+1}}{\partial z^2} + \beta \eta^{n+1} = f^{n+1} \quad \text{su } \Gamma_0 \\ f^{n+1} = - \mathcal{J}^n (\boldsymbol{\sigma}^{n+1} \mathbf{n}^n) \Big|_{\Gamma^n} \cdot \mathbf{e}_2, \end{array} \right. \quad (1.48)$$

dove indichiamo con \mathbf{n}^n il versore normale uscente dalla porzione di frontiera Γ^n e con $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$, il tensore degli sforzi del mezzo fluido valutato all'istante t^{n+1} . Si noti che, all'istante temporale t^{n+1} , il dominio di definizione del problema (1.47) è Ω^n , ovvero il dominio valutato nell'istante precedente; analogamente il determinante dello Jacobiano \mathcal{J} presente nella condizione di accoppiamento del problema solido (1.48), è valutato nell'istante t^n . Queste scelte sono dovute alla decisione di rendere lineari i due sotto-problemi studiati.

Si osservi inoltre che, a causa delle condizioni di accoppiamento fornite, il sotto-problema fluido definito in (1.47) e il sotto-problema solido definito in (1.48) sono ancora accoppiati e, di conseguenza, non possono essere risolti separatamente. Per separare tali problemi si utilizza un metodo di punto fisso introducendo, ad ogni istante temporale, un ciclo iterativo in cui i due problemi per le due componenti

vengono risolti aggiornando ad ogni iterazione il valore delle condizioni al bordo del problema fluido e il valore della forzante nel problema solido.

A tale scopo consideriamo il seguente algoritmo (di cui viene fornita una rappresentazione schematica in Figura 1.5): per ogni istante temporale, dato un valore iniziale η_0 dello spostamento della struttura, la soluzione $(\mathbf{u}^n, p^n, \eta^n)$ al tempo precedente e una tolleranza $\tau \geq 0$ fissata, occorre, per ogni $k = 1, 2, \dots$:

1. **risolvere il sotto-problema fluido:** trovare (\mathbf{u}_k, p_k) tale che:

$$\begin{cases} \rho_F \frac{\mathbf{u}_k - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \rho_F \mathbf{w}^n \cdot \nabla \mathbf{u}_k + \nabla p_k - \mu_F \Delta \mathbf{u}_k = 0 & \text{in } \Omega^n \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0 & \text{in } \Omega^n \\ \mathbf{u}_k = \left(\left(\frac{\eta_{k-1} - \eta^n}{\Delta t} \right) \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} \right) \Big|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_2 & \text{su } \Gamma^n ; \end{cases} \quad (1.49)$$

2. **risolvere il sotto-problema solido:** trovare $\tilde{\eta}_k$ tale che:

$$\begin{cases} \rho_S h_S \frac{\tilde{\eta}_k - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{\Delta t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \tilde{\eta}_k}{\partial z^2} + \beta \tilde{\eta}_k = f_k & \text{su } \Gamma_0 \\ f_k = -\mathbf{J}^n (\boldsymbol{\sigma}_k \mathbf{n}^n) \Big|_{\Gamma^n} \cdot \mathbf{e}_2 ; \end{cases} \quad (1.50)$$

3. **rilassare la struttura,** aggiornandola secondo la seguente relazione:

$$\eta_k = \gamma \tilde{\eta}_k + (1 - \gamma) \eta_{k-1} , \quad (1.51)$$

dove $\gamma \in (0, 1)$ è un *parametro di rilassamento*;

4. **verificare il test di convergenza:**

- se $\|\eta_k - \eta_{k-1}\|_{L^2(\Gamma_0)} < \tau$ allora porre $\eta^{n+1} = \eta_k$ e $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_k$;
- altrimenti porre $k = k + 1$ e tornare allo step 1.

Risultati di convergenza di tale algoritmo possono essere trovati in [CGN05] e in [FG09]. In entrambi i lavori viene sottolineata l'importanza del passo di rilassamento per il trattamento della struttura; in particolare viene indicata come condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo una scelta del parametro γ tale che

$$0 < \gamma < \bar{\gamma} < 1 , \quad (1.52)$$

dove $\bar{\gamma}$ dipende dalle caratteristiche fisiche e geometriche del problema in esame.

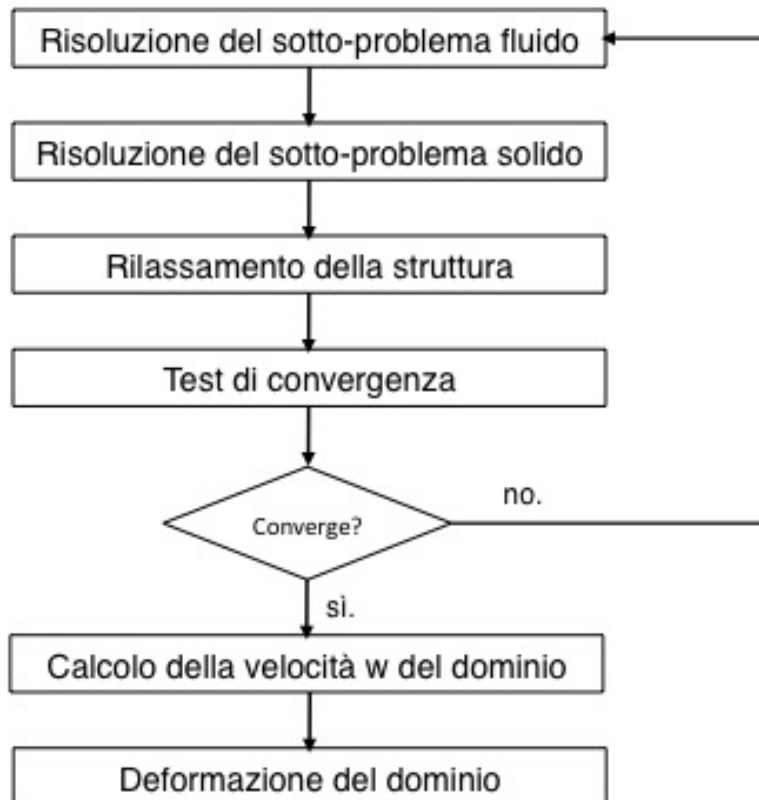


Figura 1.5: Schema riassuntivo dell'algoritmo per la risoluzione di un problema di interazione fluido - struttura, ad ogni passo temporale.

1.4.2 Approssimazione con il metodo degli elementi finiti

In questa Sezione richiamiamo i principali concetti legati al metodo degli elementi finiti, necessario per l'approssimazione numerica del sotto-problema fluido (1.49) e del sotto-problema solido (1.50).

A tale scopo introduciamo le triangolazioni conformi $\mathcal{T}_{h,n}^F$ e \mathcal{T}_h^S dei domini Ω^n e Γ^0 , definite come segue:

$$\mathcal{T}_{h,n}^F = \{K^F \text{ poligoni} : \bigcup K^F = \Omega^n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_h^S = \{K^S \text{ intervalli} : \bigcup K^S = \Gamma_0\}, \quad (1.53)$$

dove h denota il passo di discretizzazione spaziale. Introduciamo inoltre i seguenti spazi degli elementi finiti di grado r :

$$\begin{aligned} X_{h,n}^r &= \{\mathbf{v}_h \in C^0(\Omega^n; \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}_h|_{K^F} \in \mathbb{P}_r, \forall K^F \in \mathcal{T}_{h,n}^F\}, \\ Y_{h,n}^r &= \{q_h \in C^0(\Omega^n) : q_h|_{K^F} \in \mathbb{P}_r, \forall K^F \in \mathcal{T}_{h,n}^F\}, \\ Z_h^r &= \{\xi_h \in C^0(\Gamma_0) : \xi_h|_{K^S} \in \mathbb{P}_r, \forall K^S \in \mathcal{T}_h^S\}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

dove indichiamo con \mathbb{P}_r lo spazio dei polinomi di grado globale minore o uguale a r , per $r = 1, 2, \dots$

Fissati i gradi r, l, k dei polinomi con i quali approssimare le variabili \mathbf{u}, p, η , definiamo gli spazi $V_{h,n}^F \subset X_{h,n}^F \cap V$ e $Q_{h,n} \subset Y_{h,n}^l \cap Q$ dotati delle opportune condizioni al contorno per il problema in esame. Per quanto riguarda la componente solida definiamo lo spazio $V_h^S \subset Z_h^k \cap V^S$ corredato di condizioni di Dirichlet omogenee al bordo. Indichiamo inoltre con

$$\{\varphi_j^F \in V_{h,n}^F\}, \quad \{\psi_j \in Q_{h,n}\}, \quad \{\varphi_j^S \in V_h^S\}, \quad (1.55)$$

le funzioni di base Lagrangiane per gli spazi $V_{h,n}^F$, $Q_{h,n}$ e V_h^S rispettivamente. Ricordiamo che una *base Lagrangiana* $\varphi_j^F \in V_{h,n}^F$ è definita nel seguente modo:

$\varphi_j^F(N_i^F) = \delta_{ij}$, dove $N_i^F = 1, \dots, N_h^F$ indica l'*i*-esimo nodo della triangolazione $\mathcal{T}_{h,n}^F$. Definizioni analoghe valgono per le basi $\psi_j \in Q_{h,n}$ e $\varphi_j^S \in V_h^S$.

Introdotte le variabili $\mathbf{u}_h \in V_{h,n}^F$, $p_h \in Q_{h,n}$ e $\eta_h \in V_h^S$, approssimazioni di \mathbf{u}_k , p_k e $\tilde{\eta}_k$ definite nello schema iterativo nella Sezione 1.4, è possibile scrivere il problema di Galerkin per il sotto-problema fluido (1.49) e per la componente solida (1.50) nel seguente modo:

- data la velocità \mathbf{w}_h^n del dominio computazionale Ω^n e la soluzione \mathbf{u}_h^n valutata nell'istante t^n , trovare $\mathbf{u}_h \in V_{h,n}^F$ e $p_h \in Q_{h,n}$ tale che:

$$\begin{aligned} \rho_F \int_{\Omega^n} \frac{\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \rho_F \int_{\Omega^n} [(\mathbf{w}_h^n \cdot \nabla) \mathbf{u}_h] \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^n} p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ + \mu_F \int_{\Omega^n} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{h,n}^{F,0} \\ \int_{\Omega^n} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} \quad \forall q_h \in Q_{h,n}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

dove indichiamo con $V_{h,n}^{F,0}$ lo spazio degli elementi appartenenti a $X_{h,n}^r$ con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo.

- data un'approssimazione f_h del termine f_k definita in (1.50) e la soluzione del sotto-problema solido η_h^n e η_h^{n-1} valutata negli istanti temporali t^n e t^{n-1} , trovare $\eta_h \in V_h^S$ tale che:

$$\begin{aligned} \rho_S h_s \int_{\Gamma_0} \frac{\eta_h - 2\eta_h^n + \eta_h^{n-1}}{\Delta t^2} \xi_h dz + \mu_S \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \eta_h}{\partial z} \frac{\partial \xi_h}{\partial z} dz \\ + \beta \int_{\Gamma_0} \eta_h \xi_h dz = \int_{\Gamma_0} f_h \xi_h dz \quad \forall \xi_h \in V_h^S. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Questi due problemi dovranno essere risolti iterativamente nel metodo presentato nella Sezione 1.4 per ottenere la soluzione del problema FSI in esame.

A questo punto, per ottenere una formulazione algebrica dei problemi per la componente fluida (1.56) e per la componente solida (1.57), esprimiamo le variabili \mathbf{u}_h , p_h e η_h in funzione delle basi $\boldsymbol{\varphi}_j^F \in V_{h,n}^F$, $\psi_j \in Q_{h,n}$ e $\varphi_j^S \in V_h^S$, ottenendo:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_h^F} \mathbf{u}_i \boldsymbol{\varphi}_i^F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^n, \quad \text{con } \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_h(N_i^F), \quad (1.58)$$

e definizioni analoghe per le variabili p_h e η_h . Introducendo ora le seguenti matrici:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^F &= [a_{ij}^F], & a_{ij}^F &= \mu_F \int_{\Omega^n} \nabla \boldsymbol{\varphi}_i^F : \nabla \boldsymbol{\varphi}_j^F d\mathbf{x}, \\ \mathbf{B} &= [b_{ij}], & b_{ij} &= - \int_{\Omega^n} \psi_j \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i d\mathbf{x}, \\ \mathbf{T} &= [t_{ij}] & t_{ij} &= \rho_F \int_{\Omega^n} [(\mathbf{w}_h^n \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_i^F] \cdot \boldsymbol{\varphi}_j^F d\mathbf{x}, \\ \mathbf{M}^F &= [m_{ij}^F], & m_{ij}^F &= \rho_F \int_{\Omega^n} \boldsymbol{\varphi}_i^F \cdot \boldsymbol{\varphi}_j^F d\mathbf{x}, \\ \mathbf{M}^S &= [m_{ij}^S], & m_{ij}^S &= \int_{\Gamma_0} \varphi_i^S \varphi_j^S dz, \\ \mathbf{A}^S &= [a_{ij}^S], & a_{ij}^S &= \mu_S \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_i^S}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j^S}{\partial z} dz, \end{aligned} \quad (1.59)$$

è possibile esprimere il problema di Galerkin per il sotto-problema fluido (1.56) mediante la seguente formulazione algebrica:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}^F - \mathbf{T} + \mathbf{A}^F & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}^F \mathbf{U}^n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1.60)$$

dove indichiamo con \mathbf{U} e \mathbf{P} i seguenti vettori:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_i], \quad \mathbf{P} = [p_i]. \quad (1.61)$$

Analogamente, è possibile scrivere il problema di Galerkin per il sotto-problema solido (1.57) come segue:

$$\left[\left(\frac{\rho_S h_S}{\Delta t^2} + \beta \right) \mathbf{M}^S + \mathbf{A}^S \right] \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{F}^S + 2 \frac{\rho_S h_S}{\Delta t^2} \mathbf{M}^S \boldsymbol{\Lambda}^n - \frac{\rho_S h_S}{\Delta t^2} \mathbf{M}^S \boldsymbol{\Lambda}^{n-1}, \quad (1.62)$$

dove i vettori $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{N_h^S}$ e $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N_h^S}$ sono così definiti:

$$\boldsymbol{\Lambda} = [\eta_i], \quad \mathbf{F}^S = [f_j^S] \quad \text{con} \quad f_j^S = \int_{\Gamma_0} f_h \varphi_j^S dz.$$

Per ulteriori dettagli e per l'analisi di stabilità e di convergenza del metodo degli elementi finiti presentato in questa Sezione si rimanda a [Qua12] e a [FGG07].

1.4.3 Calcolo della velocità di deformazione del dominio

Concludiamo l'analisi dell'algoritmo numerico partizionato di tipo *Dirichlet-Neumann* analizzando l'espressione della velocità (euleriana) \mathbf{w}^n del dominio Ω^n , necessaria per la risoluzione del sotto-problema fluido, soffermandoci in particolare sulle modalità attraverso le quali tale velocità può essere calcolata numericamente.

Ricordiamo la definizione di velocità \mathbf{w} di un dominio deformato attraverso una mappa ALE $\tilde{\mathcal{A}}_t$:

$$\mathbf{w}(\cdot, t) = \tilde{\mathbf{w}}(\cdot, t) \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_t}{\partial t} \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} \quad t \geq 0. \quad (1.63)$$

Nel problema studiato in questo Capitolo il dominio $\Omega(t)$ su cui risolvere il problema fluido dipende dallo spostamento della struttura. In particolare su $\Gamma(t)$, unica porzione di frontiera del dominio $\Omega(t)$ mobile, a partire dalla condizione di accoppiamento (1.29) che garantisce la continuità della velocità tra fluido e struttura e la definizione (1.25) della mappa ALE $\tilde{\mathcal{A}}_t$, è possibile dimostrare la validità della seguente relazione:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 \quad \text{su } \Gamma(t).$$

A questo punto, per ogni $t \in (0, T)$, è possibile estendere $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ su tutto il dominio $\Omega(t)$ mediante un'estensione armonica, ottenuta risolvendo il seguente problema:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{w} = 0 & \text{in } \Omega(t) \\ \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 & \text{su } \Gamma(t) \\ \mathbf{w} = \mathbf{0} & \text{su } \partial\Omega(t) \setminus \Gamma(t). \end{cases} \quad (1.64)$$

Nella Sezione 5.1 utilizzeremo l'algoritmo partizionato *Dirichlet-Neumann* e il metodo degli elementi finiti per risolvere un problema di interazione fluido-struttura.

Capitolo 2

Ottimizzazione di forma

In questo Capitolo viene introdotta la formulazione astratta di un generico problema di ottimizzazione di forma (o *Shape Optimization*) e viene presentata una caratterizzazione della forma ottima, mediante la scrittura di opportune condizioni di ottimalità.

Dopo un breve richiamo ai problemi di controllo ottimo per EDP, nella Sezione 2.1, viene fornito un risultato di esistenza della forma ottima per un generico problema di ottimizzazione di forma. Nella Sezione 2.2.1 viene presentata una tipologia di mappa chiamata *perturbazione dell'identità* mediante la quale, nella Sezione 2.2.2, viene introdotto il concetto di derivata rispetto alla forma. Vengono inoltre illustrati due possibili approcci per scrivere le condizioni di ottimalità con cui caratterizzare la forma ottima. In particolare:

- nella Sezione 2.3.1, viene presentato un approccio basato sul problema aggiunto, mediante il calcolo della *Shape Derivative* della soluzione del problema di stato;
- un metodo più rapido per scrivere le condizioni di ottimalità, viene introdotto nella Sezione 2.3.2. Mediante questo approccio, basato sui moltiplicatori di Lagrange, il problema di ottimizzazione di forma viene formulato come un problema *punto-sella*.

Per mostrare l'equivalenza tra i due approcci, nella Sezione 2.4, le condizioni di ottimalità per un problema di Stokes stazionario vengono scritte utilizzando sia il metodo basato sul problema aggiunto, sia il metodo basato sui moltiplicatori di Lagrange. Infine, nella Sezione 2.5 viene formulato un problema di ottimizzazione di forma per le equazioni di Stokes non stazionarie. Di tale problema viene ricavato il sistema delle condizioni necessarie di ottimalità al primo ordine mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I risultati presentati in questo Capitolo verranno in seguito utilizzati per dimostrare un risultato di esistenza di un problema di controllo di *design* ottimale, in presenza di interazione tra fluido e struttura, e per scrivere le condizioni di ottimalità di tale problema nel Capitolo 3.

2.1 Cenni teorici

L'obiettivo di un problema di controllo ottimo per EDP è quello di intervenire su un sistema, descritto da un problema a derivate parziali, in modo da raggiungere un obiettivo desiderato.

Da un punto di vista astratto, un generico problema di controllo può essere formulato come la minimizzazione di un funzionale J dipendente dalla soluzione di un *problema di stato*, su un insieme di controlli ammissibili \mathcal{U}_{ad} , come segue: determinare, se esiste, un controllo $\hat{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ tale che:

$$J(\hat{u}) = \min_{u \in \mathcal{U}_{ad}} J(u),$$

dove u è la *variabile di controllo* appartenente ad un insieme $\mathcal{U}_{ad} \subseteq \mathcal{U}$, detto *insieme dei controlli ammissibili*.

I problemi di ottimizzazione di forma sono problemi di controllo ottimo in cui la variabile di controllo non è un termine forzante, un dato al bordo o un coefficiente dell'operatore di stato, ma il dominio Ω su cui il funzionale costo J e il problema di stato stesso sono definiti.

Tale problema può essere formulato nel seguente modo: determinare il dominio $\hat{\Omega} \in \mathcal{O}_{ad}$ tale che:

$$J(\hat{\Omega}) = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega), \quad (2.1)$$

dove:

- $\Omega \in \mathcal{O}_{ad}$ rappresenta la **variabile di controllo** e $\mathcal{O}_{ad} \subseteq \mathcal{O}$ è l'insieme delle forme ammissibili, sufficientemente regolare per garantire l'esistenza di un controllo ottimo.

L'insieme di forme ammissibili \mathcal{O}_{ad} viene individuato mediante opportuni vincoli di natura fisica come, ad esempio, vincoli di volume (si veda a tal proposito [All00]) definiti nel seguente modo:

$$\mathcal{O}_{ad} = \{\Omega \in \mathcal{O} : |\Omega| = V_0\}, \quad (2.2)$$

con V_0 volume fissato;

- la **funzione di stato** $y = y(\Omega)$ con $y \in \mathcal{V}(\Omega)$ è la soluzione di un **problema di stato** alle derivate parziali definito sul dominio Ω ;
- la **funzione di osservazione** $z(\Omega)$ è definita attraverso l'operatore di osservazione $C(\Omega)$, con $C : \mathcal{V}(\Omega) \rightarrow Z(\Omega)$;
- $J : \mathcal{O}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ è il **funzionale costo** definito attraverso la **funzione obiettivo** $F : Z(\Omega) \times \mathcal{O}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ come: $J(\Omega) = F(z(\Omega), \Omega)$.

Viene ora presentato un risultato, per la cui dimostrazione si rimanda a [HM03] e a [HP05], che garantisce, sotto particolari ipotesi, l'esistenza di almeno una forma ottima.

Teorema 2.1. *Siano $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{V}(\Omega_n)$ con $\Omega_n \in \mathcal{O}$ e sia $y \in \mathcal{V}(\Omega)$ con $\Omega \in \mathcal{O}$. Si consideri una topologia τ di \mathcal{O} e si indichi con $y_n \rightsquigarrow y$ una opportuna nozione di convergenza di y_n a y . Si assuma inoltre che il problema di stato sia ben posto e si consideri il grafico \mathcal{G} della mappa $y(\cdot)$ ristretta ad \mathcal{O}_{ad} , definito come segue:*

$$\mathcal{G} = \{(\Omega, y(\Omega)), \forall \Omega \in \mathcal{O}_{ad}\}.$$

Si assuma infine che:

- **\mathcal{G} sia compatto:** per ogni successione $\{(\Omega_n, y(\Omega_n))\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{G}$ esiste una sottosuccessione $\{(\Omega_{n_k}, y(\Omega_{n_k}))\}_{k \geq 1}$ ed un elemento $(\Omega, y(\Omega)) \in \mathcal{G}$ tali che:

$$\Omega_{n_k} \xrightarrow{\tau} \Omega, \quad y(\Omega_{n_k}) \rightsquigarrow y(\Omega), \quad \text{per } k \rightarrow \infty;$$

- **J sia semicontinuo inferiormente:** per ogni successione di domini $\{\Omega_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}$ e di funzioni $\{y_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{V}(\Omega_n)$, per ogni $\Omega \in \mathcal{O}$ e $y \in \mathcal{V}(\Omega)$ tali che

$$\Omega_{n_k} \xrightarrow{\tau} \Omega, \quad y_n \rightsquigarrow y,$$

risulta $J(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(\Omega_n)$.

Allora esiste almeno un dominio $\hat{\Omega} \in \mathcal{O}_{ad}$ tale che:

$$J(\hat{\Omega}) = \min_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega).$$

Dimostrare la compattezza del grafico \mathcal{G} della mappa $y(\cdot)$, ristretto all'insieme \mathcal{O}_{ad} a partire dalla definizione, può essere abbastanza complicato. Per tale motivo, per verificare la prima ipotesi del Teorema 2.1, viene spesso utilizzata (si veda ad esempio [HP05]) una procedura basata sulla verifica delle seguenti proprietà:

- **compattezza di \mathcal{O}_{ad} in \mathcal{O} :** per ogni successione $\{\Omega_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}_{ad}$, esiste una sottosuccessione $\{\Omega_{n_k}\}_{k \geq 1}$ ed un dominio $\Omega \in \mathcal{O}_{ad}$ tale che $\Omega_{n_k} \xrightarrow{\tau} \Omega$ per $k \rightarrow \infty$;
- **continuità di $y(\Omega)$ rispetto al dominio:** data la successione $\{\Omega_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}_{ad}$ ed il dominio $\Omega \in \mathcal{O}_{ad}$, vale la seguente implicazione:

$$\Omega_n \xrightarrow{\tau} \Omega \Rightarrow y(\Omega_n) \rightsquigarrow y(\Omega). \quad (2.3)$$

Si noti che, a differenza dei problemi di controllo ottimo, l'insieme \mathcal{O} delle forme ammissibili non è naturalmente dotato di una nozione di convergenza; per poter applicare il Teorema 2.1, e in particolare per dimostrare la continuità della soluzione del problema di stato rispetto al dominio, occorre introdurre una opportuna topologia τ di \mathcal{O} . A tale scopo definiamo il concetto di convergenza basato sulla distanza di *Hausdorff* nel seguente modo:

Definizione 2.1. *Si consideri un compatto $D \subset \mathbb{R}^n$ e il seguente insieme \mathcal{O} :*

$$\mathcal{O} = \{ \Omega \text{ aperto} : \Omega \subset D \} ;$$

allora si dice che la successione $\{\Omega_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}$ converge nel senso di Hausdorff a $\Omega \in \mathcal{O}$ ($\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$) se:

$$d^H(D \setminus \Omega_n, D \setminus \Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 ,$$

in cui la distanza di Hausdorff d^H è definita come segue:

$$d^H(K_1, K_2) = \max\left(\sup_{x \in K_1} \inf_{y \in K_2} \|x - y\|, \sup_{y \in K_2} \inf_{x \in K_1} \|x - y\|\right).$$

A differenza di altre topologie definite sull'insieme delle forme ammissibili \mathcal{O} (si veda ad esempio la convergenza nel senso delle funzioni caratteristiche), per la topologia di Hausdorff è possibile dimostrare (si veda ad esempio [HP05]) il seguente risultato di compattezza:

Teorema 2.2. *Sia $\{\Omega_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}$; allora esiste una sottosuccessione $\{\Omega_{n_k}\}_{k \geq 1}$ ed un dominio $\Omega \in \mathcal{O}$ tale per cui: $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega$.*

Grazie a questo risultato, sotto opportune ipotesi di regolarità sull'insieme delle forme ammissibili \mathcal{O}_{ad} , è possibile verificare la compattezza di \mathcal{O}_{ad} nell'insieme \mathcal{O} , proprietà necessaria per l'applicazione del Teorema 2.1 che garantisce l'esistenza di (almeno) una soluzione di un problema di ottimizzazione di forma.

Per un'applicazione del Teorema 2.1 si rimanda alla Sezione 3.3, in cui viene dimostrata l'esistenza di una forma ottima per un problema di controllo del flusso mediante ottimizzazione di forma in presenza di interazione tra fluido e struttura.

2.2 Derivata di Forma

Analogamente ai problemi di controllo ottimo, occorre caratterizzare la forma ottima mediante opportune condizioni di ottimalità grazie alle quali sviluppare un metodo di approssimazione numerica. Il concetto di derivazione rispetto al dominio è fondamentale per raggiungere questo scopo.

L'idea principale su cui tale concetto si basa è la definizione di un dominio di riferimento Ω_0 , un sottoinsieme aperto e sufficientemente regolare di \mathbb{R}^n , tale

per cui ogni forma ammissibile appartenente a \mathcal{O}_{ad} possa essere ottenuta mediante l'applicazione di un diffeomorfismo di Ω_0 .

Un metodo per ottenere trasformazioni di questo tipo, mediante l'uso di mappe chiamate *perturbazioni dell'identità*, è riportato nella Sezione successiva.

2.2.1 Deformazione dei domini

Si consideri il dominio di riferimento $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ e si introduca uno spazio di diffeomorfismi (mappe differenziabili con inversa differenziabile) su \mathbb{R}^n , definito nel seguente modo:

$$\mathcal{T} = \{ \mathbf{T} \text{ tale che } (\mathbf{T} - \mathbf{I}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), (\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{I}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \}, \quad (2.4)$$

in cui indichiamo con \mathbf{I} la mappa identità. Si ricordi che sullo spazio di Sobolev

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) = \{ \mathbf{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) : \nabla \mathbf{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \}, \quad (2.5)$$

è possibile definire la seguente norma:

$$\| \mathbf{u} \|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (| \mathbf{u}(\mathbf{x}) |_{\mathbb{R}^n} + | \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) |_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}). \quad (2.6)$$

Ogni diffeomorfismo $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$ può essere espresso come una deformazione dell'identità. In particolare, per ogni $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$ esiste una mappa $\boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}. \quad (2.7)$$

Viceversa, sotto opportune ipotesi sulla biezione $\boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, è possibile garantire che la mappa $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}$ appartiene allo spazio dei diffeomorfismi \mathcal{T} (si veda [All00] per la dimostrazione):

Lemma 2.1. *Sia $\boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tale per cui $\| \boldsymbol{\theta} \|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)} < 1$; allora l'applicazione $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}$ è una biezione di \mathbb{R}^n che appartiene allo spazio dei diffeomorfismi \mathcal{T} definito in (2.4).*

Questo risultato garantisce che, dato un generico $\boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ sufficientemente piccolo, l'applicazione $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}$ è un diffeomorfismo di \mathbb{R}^n .

È ora possibile introdurre il seguente spazio di forme ammissibili ottenuto mediante deformazione del dominio di riferimento Ω_0 :

$$\mathcal{C}(\Omega_0) = \{ \Omega \text{ tale che } \exists \mathbf{T} \in \mathcal{T} : \Omega = \mathbf{T}(\Omega_0) \}. \quad (2.8)$$

Grazie alla continuità delle funzioni appartenenti a $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, le applicazioni $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, oltre ad essere dei diffeomorfismi, sono omeomorfismi, applicazioni continue con inversa continua. Per tale motivo le forme ammissibili $\Omega \in \mathcal{C}(\Omega_0)$, ottenute mediante l'applicazione di un omeomorfismo, condividono la stessa topologia di Ω_0 .

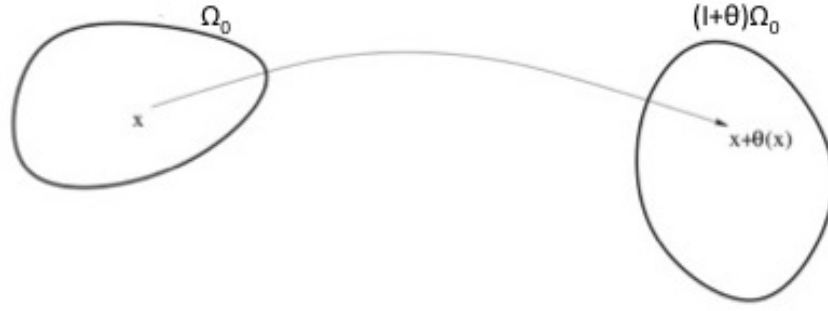


Figura 2.1: Perturbazione del dominio Ω_0 dovuta alla mappa θ (Fonte: [All00]).

È dunque possibile definire un generico dominio $\Omega \in \mathcal{O}_{ad}$ nel seguente modo:

$$\Omega = \{\mathbf{T}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega_0\} = \{\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega_0\}.$$

Un esempio di mappa di tipo *perturbazione dell'identità*, chiamata *Free Form Deformation* basata su NURBS verrà presentata nella Sezione 4.4. e verrà in seguito utilizzata negli algoritmi numerici proposti.

2.2.2 Elementi di Shape Calculus

In questa Sezione vengono presentati i principali risultati relativi allo *Shape Calculus*, necessari per la scrittura delle condizioni di ottimalità, mediante le quali caratterizzare la forma ottima. Dopo aver introdotto i concetti di *shape derivative* e *material derivative*, vengono introdotte alcune regole di derivazione di funzionali rispetto al dominio.

A partire dalla definizione della famiglia di mappe di tipo *perturbazione dell'identità*, introdotte nella Sezione precedente, è possibile introdurre il seguente concetto di derivazione rispetto al dominio:

Definizione 2.2. Si dice che $J : \mathcal{C}(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile rispetto al dominio in Ω_0 se la funzione

$$\boldsymbol{\theta} \mapsto J((\mathbf{I} + \boldsymbol{\theta})(\Omega_0)),$$

è differenziabile in 0 in $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. In tal caso si definisce derivata euleriana di J , in Ω_0 e in direzione $\boldsymbol{\theta}$, il seguente limite:

$$dJ(\Omega_0; \boldsymbol{\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J((\mathbf{I} + \rho\boldsymbol{\theta})(\Omega_0)) - J(\Omega_0)}{\rho}.$$

Vale inoltre la seguente relazione:

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \langle \nabla J, \boldsymbol{\theta} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)},$$

dove l'elemento ∇J prende il nome di *Shape Gradient del funzionale J* .

Vengono ora presentate alcune regole per la derivazione rispetto al dominio di integrali di funzioni definite su \mathbb{R}^n e non dipendenti dal dominio di integrazione. Nel resto del paragrafo supponiamo che tali funzioni siano sufficientemente regolari per poter operare tutte le derivazioni o integrazioni per parti necessarie.

Teorema 2.3. *Sia Ω_0 un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .*

1. *Sia $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$; allora $J = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ è differenziabile in Ω_0 e vale:*

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega_0} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n})f \, d\sigma, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n),$$

in cui \mathbf{n} è la normale uscente al bordo $\partial\Omega_0$.

2. *Sia $g \in W^{2,1}(\mathbb{R}^n)$; allora $J = \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x})d\sigma$ è differenziabile in Ω_0 e vale:*

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega_0} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + Hf \right) d\sigma, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n),$$

in cui $H = \text{div } \mathbf{n}$ rappresenta la curvatura media di $\partial\Omega_0$.

La dimostrazione di tale risultato ([SZ92], [All00]) è un'applicazione della definizione 2.2 di derivata euleriana rispetto al dominio.

In numerosi problemi di ottimizzazione di forma il funzionale costo $J(\cdot)$ viene espresso mediante un integrale, la cui integranda dipende dalla funzione di stato $y = y(\Omega)$. Si ricorda che la funzione di stato dipende dal dominio Ω su cui essa è definita; per tal motivo occorre estendere il risultato enunciato nel Teorema 2.3, presentando opportune regole di derivazione di integrali la cui integranda dipende dal dominio di integrazione stesso.

A tal proposito vengono fornite la definizione di *shape derivative* e *material derivative* di una funzione y dipendente dal dominio Ω .

Definizione 2.3. *Sia $y = y(\Omega, x) \in W(\Omega)$, con $W(\Omega)$ un opportuno spazio di Sobolev.*

1. *La derivata euleriana (o shape derivative) $y'(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ è il funzionale lineare e continuo in $\boldsymbol{\theta}$ tale per cui:*

$$y((\mathbf{I} + \boldsymbol{\theta})(\Omega_0), \mathbf{x}) = y(\Omega_0, \mathbf{x}) + y'(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) + o(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{con} \quad \lim_{\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|o(\boldsymbol{\theta})\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|} = 0.$$

2. *La derivata lagrangiana (o material derivative) $y(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ è il funzionale lineare e continuo in $\boldsymbol{\theta}$ definito nel seguente modo:*

$$y(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = y'(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) + \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) \cdot \nabla y(\Omega_0, \mathbf{x}).$$

In questo modo possiamo estendere il Teorema 2.3 come segue:

Teorema 2.4. *Sia Ω_0 un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .*

1. *Sia $y(\Omega) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$; allora il funzionale $J = \int_{\Omega} y(\Omega) d\mathbf{x}$ è differenziabile in Ω_0 e vale:*

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\Omega_0} (y'(\boldsymbol{\theta}) + \operatorname{div}(y(\Omega_0)\boldsymbol{\theta})) d\mathbf{x}, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

2. *Sia $y(\Omega) \in W^{2,1}(\mathbb{R}^n)$; allora $J = \int_{\partial\Omega} y(\Omega) d\sigma$ è differenziabile in Ω_0 e vale:*

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega_0} \left(y'(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} \left(\frac{\partial y(\Omega_0)}{\partial \mathbf{n}} + Hy(\Omega_0) \right) \right) d\sigma, \\ \forall \boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Ricordando la definizione di derivata del funzionale J in Ω_0 in direzione $\boldsymbol{\theta}$, è possibile fornire una versione alternativa, ma del tutto equivalente, del Teorema 2.4 (si veda a tal proposito [SZ92] e [MZ06]), in vista dell'analisi di sensitività della forma ottima di un problema di controllo del flusso mediante ottimizzazione di forma in presenza di interazione fluido-struttura, di cui ci occuperemo nel Capitolo 3.

In particolare, fissato un parametro reale positivo $\rho > 0$ e introducendo la mappa $\mathbf{S}_\rho = (\mathbf{I} + \rho\boldsymbol{\theta})$, è possibile esprimere la derivata di forma di un funzionale nel seguente modo:

Teorema 2.5. *Sia Ω_0 un dominio fissato con frontiera Lipschitziana e sia Ω_ρ un dominio ottenuto mediante una deformazione di Ω_0 , riconducibile alla forma $\Omega_\rho = (\mathbf{I} + \rho\boldsymbol{\theta})(\Omega_0)$. Sia inoltre $y \in W(D)$ definita su un dominio D tale che $D \supseteq \Omega \cap \Omega_\rho$, con $W(D)$ un opportuno spazio di Sobolev; allora vale la seguente relazione:*

$$\frac{d}{d\rho} \left(\int_{\Omega_\rho} y(\rho) d\mathbf{x} \right) \Big|_{\rho=0} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial y(\rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_0} y(0)(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma.$$

Teorema 2.6. *Sia Ω_0 un dominio fissato con frontiera Lipschitziana e sia Γ_0 una porzione di tale frontiera. Sia $\mathbf{S}_\rho = (\mathbf{I} + \rho\boldsymbol{\theta})$ e $\Gamma_\rho = \mathbf{S}_\rho(\Gamma)$; allora vale il seguente risultato:*

$$\frac{d}{d\rho} \left(\int_{\Gamma_\rho} y(\rho) d\sigma \right) \Big|_{\rho=0} = \int_{\Gamma_0} \left(y'(0) + \left(Hy(0) + \frac{\partial y(0)}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \right) d\sigma.$$

Si noti che nel Teorema 2.5 e nel Teorema 2.6 la dipendenza della funzione di stato y rispetto al dominio è data dal parametro ρ .

Utilizzando i teoremi di *Shape Calculus* introdotti è inoltre possibile esplicitare l'espressione della derivata di forma del flusso di un campo vettoriale $\mathbf{E} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definito sulla frontiera del dominio deformato. In particolare, vale il seguente lemma:

Lemma 2.2. *Sia Ω_0 un dominio fissato con frontiera Lipschitziana $\partial\Omega_0$ e sia $\Gamma \subseteq \partial\Omega_0$. Sia $\mathbf{S}_\rho = (\mathbf{I} + \rho\boldsymbol{\theta}) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_\rho$ tale che: $\Gamma_\rho = \mathbf{S}_\rho(\Gamma)$ e $\Omega_\rho = \mathbf{S}_\rho(\Omega_0)$. Sia inoltre $\mathbf{E}(\rho)$ un campo vettoriale definito su Γ_ρ e sia \mathbf{n}^ρ il versore normale uscente dal bordo Γ_ρ . Vale allora la seguente relazione:*

$$\left. \frac{d}{d\rho} \int_{\Gamma_\rho} \mathbf{E}(\rho) \cdot \mathbf{n}^\rho d\sigma dt \right|_{\rho=0} = \int_{\Gamma} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} \cdot \mathbf{n} + \operatorname{div} \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \right) d\sigma dt. \quad (2.9)$$

La dimostrazione di tale lemma è una diretta conseguenza del Teorema 2.5 per l'espressione della derivata di forma di un funzionale dipendente dal dominio su cui esso è definito, e del teorema della divergenza.

Concludiamo questa Sezione, enunciando un risultato che caratterizza la struttura della derivata di forma del funzionale costo J . Tale risultato ([DZ11]) verrà in seguito utilizzato nell'implementazione di un algoritmo numerico per la risoluzione di un generico problema di ottimizzazione di forma.

Teorema 2.7 (di struttura di Hadamard). *Siano Ω_0 un dominio sufficientemente regolare e $J : \mathcal{C}(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale costo derivabile in Ω_0 e sufficientemente regolare. Allora esiste una distribuzione scalare $g(\Omega_0)$ con supporto su $\partial\Omega_0$ tale per cui $g \in \mathcal{D}'(\partial\Omega_0)$ e per ogni $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ vale:*

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \langle g(\Omega_0), \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\mathcal{D}'(\partial\Omega_0) \times \mathcal{D}(\partial\Omega_0)}. \quad (2.10)$$

Inoltre, se $g \in L^1(\partial\Omega_0)$ vale la seguente formula di Hadamard:

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} g(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \quad (2.11)$$

Si noti che utilizzando la formula di Hadamard è possibile esplicitare la struttura dello *shape gradient* ∇J del funzionale costo J in termini del campo scalare g ; infatti vale:

$$\nabla J = g(\Omega_0)|_{\partial\Omega_0} \mathbf{n}. \quad (2.12)$$

Come annunciato in precedenza, questa formulazione sarà alla base del metodo numerico che presenteremo nel Capitolo 4 per la risoluzione di un generico problema di ottimizzazione di forma.

2.2.3 Operatori tangenziali

Una formulazione alternativa dei risultati di derivazione di un funzionale rispetto alla forma richiede l'introduzione di alcuni *operatori tangenziali*, quali il *gradiente tangenziale*, la *divergenza tangenziale* e lo *Jacobiano tangenziale*.

Nella nostra trattazione, e in particolare nel Capitolo 3, faremo uso di questi operatori nella semplificazione delle condizioni di ottimalità per un problema di ottimizzazione di forma.

In questa Sezione introduciamo le definizioni di gradiente, divergenza e Jacobiano tangenziale fornendo inoltre alcuni risultati riguardando le relazioni che sussistono tra questi operatori e i classici operatori differenziali. Ulteriori dettagli su questi operatori si possono trovare in [DZ11] e in [SS10].

Definizione 2.4. *Data una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\Gamma \in C^2$ e un campo $g \in C^2(\Gamma)$, il gradiente tangenziale $\nabla_\Gamma g$ di g è definito come la proiezione del gradiente sul piano tangente a Γ . In altre parole, vale la seguente relazione:*

$$\nabla_\Gamma g := \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial g}{\partial \tau_i} \tau_i \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad (2.13)$$

dove $\{\tau_i\}_{i=1, \dots, d-1}$ è una base ortonormale dello spazio tangente.

In modo analogo, si definisce la divergenza tangenziale come segue:

Definizione 2.5. *Data una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\Gamma \in C^2$ e un campo vettoriale differenziabile $\mathbf{w} \in C^1(\Gamma; \mathbb{R}^d)$, la divergenza tangenziale $div_\Gamma \mathbf{w}$ di \mathbf{w} è definita nel seguente modo:*

$$div_\Gamma \mathbf{w} := \sum_{i=1}^{d-1} \left\langle \frac{\partial w_i}{\partial \tau_i}, \tau_i \right\rangle \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

È possibile dimostrare che le precedenti definizioni sono indipendenti dalla scelta della base ortonormale allo spazio tangente $\{\tau_i\}_{i=1, \dots, d-1}$. Operativamente è possibile caratterizzare questi operatori in funzione degli operatori differenziali classici.

Se g è una funzione estesa in un intorno della curva Γ , tale per cui $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}$ esiste; allora il gradiente tangenziale può essere espresso come:

$$\nabla_\Gamma g = \nabla g - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}, \quad (2.15)$$

dove \mathbf{n} rappresenta il versore normale uscente alla curva Γ .

Analogamente, se \mathbf{w} è un campo vettoriale esteso in un intorno della curva Γ ; allora:

$$div_\Gamma \mathbf{w} = div \mathbf{w} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.16)$$

Inoltre, se $g \in W^{1,1}(\Omega)$ e $\mathbf{w} \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, allora vale la seguente formula di integrazione per parti (per la cui dimostrazione si rimanda a [DZ11]):

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \nabla_{\Gamma} g \, d\sigma = - \int_{\Gamma} g \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{w} \, d\sigma + \int_{\Gamma} H g \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (2.17)$$

dove $H = \operatorname{div} \mathbf{n}$ indica la curvatura media della superficie Γ .

Introduciamo ora il concetto di Jacobiano tangenziale, utilizzando la definizione (2.4) di gradiente tangenziale.

Definizione 2.6. *Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva tale che $\Gamma \in C^2$ e $\mathbf{w} \in C^1(\Gamma; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale differenziabile; lo Jacobiano tangenziale è definito dalla seguente matrice:*

$$(\nabla_{\Gamma} \mathbf{w})_i = (\nabla_{\Gamma} w_i)^T. \quad (2.18)$$

In altri termini, le righe della matrice dello *Jacobiano tangenziale* sono date dal gradiente tangenziale delle componenti del campo vettoriale \mathbf{w} . Se \mathbf{w} è un campo vettoriale esteso in un intorno di Γ , tale per cui la derivata in direzione normale esiste, utilizzando la caratterizzazione del gradiente tangenziale, espressa in (2.15), è possibile esprimere lo Jacobiano tangenziale di un campo vettoriale \mathbf{w} in funzione dello Jacobiano classico, come segue:

$$\nabla_{\Gamma} \mathbf{w} = \nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{w} \mathbf{n} \mathbf{n}^T. \quad (2.19)$$

Concludiamo questa Sezione occupandoci delle proprietà di cui gode lo Jacobiano tangenziale del versore normale \mathbf{n} alla curva Γ . In molti problemi di ottimizzazione di forma, il calcolo dello Jacobiano tangenziale è necessario al fine di trovare un'espressione della derivata di forma del funzionale costo J , compatibile con il Teorema 2.7 di struttura di Hadamard (si veda ad esempio [SS10]).

Presentiamo dunque un risultato che verrà in seguito utilizzato nella semplificazione delle condizioni di ottimalità nel Capitolo 3:

Lemma 2.3. *Sia $\Gamma \in C^2$ una curva in \mathbb{R}^n e sia \mathbf{n} il versore normale uscente a tale curva; allora vale la seguente relazione:*

$$\nabla_{\Gamma} \mathbf{n} = \nabla \mathbf{n} - \mathbf{N}; \quad (2.20)$$

in cui \mathbf{N} è la matrice così definita: $N_{ij} = n_i \delta_{ij}$.

Dimostrazione. Utilizzando la definizione (2.6) di Jacobiano tangenziale e la definizione (2.15) di gradiente tangenziale, è possibile dimostrare che la i -esima riga della matrice $\nabla_{\Gamma} \mathbf{n}$ è data da:

$$(\nabla_{\Gamma} \mathbf{n})_i = (\nabla_{\Gamma} n_i)^T = \left(\nabla n_i - \frac{\partial n_i}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} \right)^T = (\nabla n_i - n_i \mathbf{e}_i)^T, \quad (2.21)$$

da cui segue la tesi. \square

Nella prossima Sezione verranno utilizzati i risultati di *Shape Calculus* fino ad ora introdotti per ricavare delle condizioni di ottimalità con le quali caratterizzare la forma ottima in un problema di ottimizzazione di forma.

2.3 Condizioni di ottimalità

In questa Sezione vengono presentati due approcci mediante i quali è possibile scrivere le condizioni di ottimalità per un problema di ottimizzazione di forma. In particolare:

- nel primo approccio, basato sul problema aggiunto, vengono utilizzati i risultati di *Shape Calculus* introdotti nella Sezione 2.2.2 per introdurre un opportuno problema aggiunto mediante il quale è possibile esprimere la derivata di forma del funzionale costo J ;
- nel secondo approccio, basato sui moltiplicatori di Lagrange, il problema di ottimizzazione di forma viene riscritto come un problema di ottimizzazione vincolata. In questo modo è possibile ricavare le condizioni di ottimalità più rapidamente, caratterizzando la soluzione di un problema di *Shape Optimization* come punto sella di un opportuno funzionale Lagrangiano.

2.3.1 Approccio basato sul problema aggiunto

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione di forma: determinare $\hat{\Omega} \in \mathcal{O}_{ad}$ tale che:

$$J(\hat{\Omega}) = \min_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega), \quad \text{con } J(\Omega) = \int_{\Omega} j(\mathbf{x}, y(\Omega), \nabla y(\Omega)) d\mathbf{x}, \quad (2.22)$$

con j continua in $y(\Omega)$ e in $\nabla y(\Omega)$, e che soddisfi opportune ipotesi di regolarità, espresse in [HP05]. Si supponga che la funzione di stato sia soluzione di un problema di stato espresso nella seguente forma variazionale: trovare $y(\Omega) \in \mathcal{V}(\Omega)$ tale che:

$$a(y(\Omega), v; \Omega) = F(v; \Omega), \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega). \quad (2.23)$$

Grazie ai risultati di *Shape Calculus* introdotti nella Sezione 2.2.2, derivando opportunamente il problema (2.23), è possibile scrivere la *shape derivative* $y'(\Omega)$ come soluzione di un secondo problema variazionale definito sul dominio di riferimento Ω_0 che, in forma astratta, può essere scritto come segue: trovare $y'(\Omega_0) \in \mathcal{V}(\Omega_0)$ tale che:

$$c(y'(\Omega_0), v; \Omega_0) = G(v; \Omega_0) \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega_0), \quad (2.24)$$

dove indichiamo con c e G rispettivamente l'operatore bilineare e il funzionale lineare ottenuti derivando il problema (2.23).

Derivando il funzionale costo J introdotto in (2.22), rispetto al dominio Ω_0 in direzione θ , si ottiene:

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial j}{\partial y} y'(\Omega_0) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_0} j(\theta \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \omega_1(y'(\Omega_0)) + \omega_2(\theta \cdot \mathbf{n}), \quad (2.25)$$

in cui i contributi dell'integrale su Ω_0 e sulla frontiera di Ω_0 sono contenuti rispettivamente nei funzionali ω_1 e ω_2 .

Per semplificare la scrittura delle condizioni di ottimalità ed ottenere un'espressione della derivata di forma $J'(\Omega_0)(\theta)$ che non coinvolga la *shape derivative* $y'(\Omega_0)$, possiamo utilizzare le informazioni contenute nel problema (2.24) introducendo il seguente problema aggiunto: trovare $p(\Omega_0) \in \mathcal{V}(\Omega_0)$ tale che:

$$c^*(p(\Omega_0), \psi, \Omega) = \omega_1(\psi), \quad \forall \psi \in \mathcal{V}(\Omega_0), \quad (2.26)$$

dove si indica con c^* l'aggiunto dell'operatore associato alla forma variazionale c . In questo modo, utilizzando l'identità di Lagrange¹ e il problema definito in (2.24) per la *shape derivative* $y'(\Omega)$, si ottiene la seguente relazione:

$$\omega_1(y'(\Omega_0)) = c^*(p(\Omega_0), y'(\Omega_0); \Omega_0) = c(y'(\Omega_0), p(\Omega_0); \Omega_0) = G(p(\Omega_0); \Omega_0). \quad (2.27)$$

Risulta dunque possibile caratterizzare la soluzione del problema di ottimizzazione di forma mediante le seguenti condizioni di ottimalità:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(y(\Omega), v; \Omega) = F(v; \Omega), & \forall v \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (\text{problema di stato}) \\ c^*(p(\Omega_0), \psi; \Omega_0) = \omega_1(\psi), & \forall \psi \in \mathcal{V}(\Omega_0) \quad (\text{problema aggiunto}) \\ J'(\Omega_0)(\theta) = G(p(\Omega_0); \Omega_0) + \omega_2(\theta \cdot \mathbf{n}) & (\text{equazione di sensitività}) \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Risultati analoghi valgono nel caso in cui il funzionale costo J sia definito sulla frontiera del dominio Ω , modificando opportunamente la definizione dei funzionali ω_1 e ω_2 , in base alla derivata del funzionale J .

2.3.2 Approccio basato sui moltiplicatori di Lagrange

Consideriamo nuovamente il problema di ottimizzazione di forma definito in (2.22) dove $y = y(\Omega)$ è la variabile di stato, soluzione del problema:

$$a(y(\Omega), v; \Omega) = F(v; \Omega), \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega).$$

¹Sia $A \in \mathcal{L}(V, V')$ con V spazio di Hilbert, V' il suo spazio duale e $\mathcal{L}(V, V')$ lo spazio degli operatori lineari da V a V' . Sia inoltre $A^* : V \rightarrow V$ l'aggiunto dell'operatore A , allora vale la seguente relazione nota come *identità di Lagrange*:

$${}_{V'}\langle A^* w, v \rangle_V = {}_{V'}\langle Av, w \rangle_V \quad \forall v, w \in V.$$

Adottando un approccio tipico dei problemi di ottimizzazione, si considera il problema di stato come vincolo in un problema di ottimizzazione vincolata. A tal proposito, definiamo il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} come la somma del funzionale costo $J(\cdot)$ e della formulazione variazionale del problema di stato, introducendo un opportuno moltiplicatore di Lagrange $\psi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ (o *stato aggiunto*).

Il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} assume dunque la seguente forma:

$$\mathcal{L}(\phi, \psi; \Omega) = \int_{\Omega} (j(\phi) - a(\phi, \psi; \Omega) + F(\psi; \Omega)) \, d\mathbf{x}, \quad (2.29)$$

con $y \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Si osservi che è possibile esprimere la relazione che sussiste tra il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} e il funzionale costo J nel seguente modo:

$$J(\Omega) = \min_{\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)} \sup_{\psi \in H^1(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}(\phi, \psi; \Omega); \quad (2.30)$$

infatti, supponendo che il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} sia concavo e continuo rispetto alla variabile ψ e che sia continuo e convesso rispetto la variabile ϕ , vale la seguente uguaglianza:

$$\sup_{\psi \in H^1(\mathbb{R}^n)} \mathcal{L}(\phi, \psi; \Omega) = \begin{cases} J(\Omega) & \text{se } \phi = y(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.31)$$

Grazie all'introduzione della formulazione (2.30) (chiamata *formulazione punto-sella*) è possibile caratterizzare la soluzione del problema di stato $y = y(\Omega)$ e la soluzione del problema aggiunto $p = p(\Omega)$ come punto sella del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} ; si vedano ad esempio [ET87] e [DZ11] per ulteriori dettagli.

Per completezza, si ricordi la definizione di punto sella (\bar{u}, \bar{p}) di un generico funzionale L :

Definizione 2.7. *Dato un funzionale $L : U \times P \rightarrow \mathbb{R}$ con U e P spazi di Hilbert, il punto $(\bar{u}, \bar{p}) \in U \times P$ si dice punto sella del funzionale L se vale:*

$$L(\bar{u}, p) \leq L(\bar{u}, \bar{p}) \leq L(u, \bar{p});$$

ovvero, se valgono le seguenti relazioni:

$$L(\bar{u}, \bar{p}) = \inf_{u \in U} L(u, \bar{p}) \quad e \quad L(\bar{u}, \bar{p}) = \sup_{p \in P} L(\bar{u}, p).$$

Si noti che lo spazio $H^1(\mathbb{R}^n)$ non dipende dal dominio Ω , quindi le variabili y , p e Ω sono tra loro indipendenti. Derivando dunque il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} , rispetto alle variabili y e p e rispetto alla forma, è possibile scrivere le condizioni di ottimalità. In particolare:

- richiedendo che all'ottimo la derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto alla variabile p sia nulla, si ottiene il **problema di stato**:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(y(\Omega), p; \Omega), \psi \right\rangle = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{V}(\Omega); \quad (2.32)$$

- richiedendo che all'ottimo la derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto alla variabile y sia nulla, si ottiene il **problema aggiunto**:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(y, p(\Omega); \Omega), \phi \right\rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{V}(\Omega); \quad (2.33)$$

- valutando la derivata di \mathcal{L} rispetto al dominio Ω ponendo $y = y(\Omega_0)$ e $p = p(\Omega_0)$, si ottiene la derivata di forma del funzionale costo:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(y(\Omega_0), p(\Omega_0); \Omega_0), \boldsymbol{\theta} \right\rangle = J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.34)$$

Si noti che tale risultato (per la cui dimostrazione si rimanda a [DZ11]) permette di ottenere un'espressione della derivata di forma di J che non dipende dalla *shape derivative* $y'(\Omega_0)$.

2.4 Condizioni di ottimalità per un problema di Stokes stazionario

In questa Sezione viene formulato un problema di ottimizzazione di forma in cui il problema di stato è espresso dalle equazioni di Stokes stazionarie. Di tale problema vengono scritte le condizioni necessarie di ottimalità al primo ordine mediante entrambi gli approcci presentati nella Sezione precedente.

Facendo riferimento alla Figura (2.1), si consideri il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tale per cui $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_F$ con $\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_F$ porzione di dominio fissata e $\Gamma \neq \emptyset$ porzione di frontiera variabile del dominio. Si consideri inoltre $\mathbf{u}_{in} \in H^{1/2}(\Gamma_{in}; \mathbb{R}^2)$ e il seguente problema ottimizzazione di forma: determinare $\hat{\Omega} \in \mathcal{O}_{ad}$ tale per cui:

$$J(\hat{\Omega}) = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega),$$

con

$$J(\Omega) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}(\Omega)|^2 d\mathbf{x}, \quad (2.35)$$

soggetto al seguente problema di stato:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} & \text{su } \Gamma_{in} \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma \cup \Gamma_F \\ \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = 0 & \text{su } \Gamma_{out}. \end{cases} \quad (2.36)$$

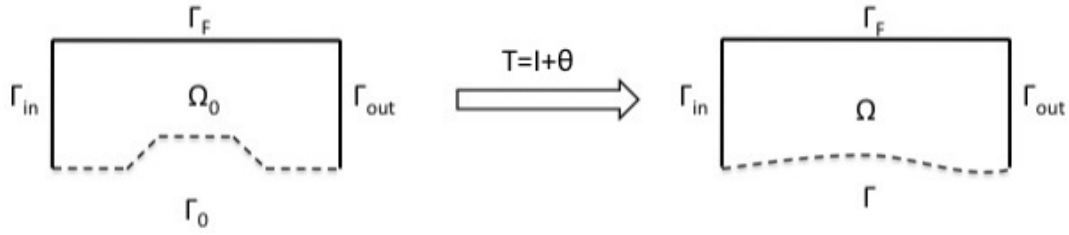


Figura 2.2: Domini utilizzati nella definizione del problema di *Shape Optimization* in esame. In linea tratteggiata, la porzione di dominio interessata dal processo di ottimizzazione.

Al fine di ricavare la formulazione debole del problema di Stokes stazionario, si introducano i seguenti spazi funzionali:

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{u}_{in} \text{ e } \mathbf{v}|_{\Gamma \cup \Gamma_F} = \mathbf{0} \}, \\
V_0(\Omega) &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{v}|_{\Gamma \cup \Gamma_F} = \mathbf{0} \}, \\
Q(\Omega) &= L^2(\Omega; \mathbb{R}^2).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

La formulazione debole del problema di stato è la seguente: trovare $\mathbf{u} \in V(\Omega)$ e $q \in Q(\Omega)$ tale che:

$$\begin{aligned}
\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0(\Omega); \\
\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= 0 \quad \forall q \in Q(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Si definisca inoltre l'insieme delle forme ammissibile \mathcal{O}_{ad} nel seguente modo:

$$\mathcal{O}_{ad} = \{ \Omega \in \mathcal{C}(\Omega_0) : \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_F \subset \partial\Omega \text{ e } |\Omega| = |\Omega_0| \}. \tag{2.39}$$

dove $\mathcal{C}(\Omega_0)$, definito in (2.8), indica l'insieme dei domini ottenuti mediante deformazione del dominio di riferimento Ω_0 , per effetto del diffeomorfismo $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}$.

Richiedere che le porzioni di dominio Γ_{in} , Γ_{out} e Γ_F non vengano deformate nel processo di ottimizzazione, equivale a considerare un campo di spostamento $\boldsymbol{\theta}$ tale che:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_F. \tag{2.40}$$

Per l'analisi di buona posizione del problema di Stokes stazionario si rimanda, ad esempio, a [Qua12], mentre per risultati di esistenza e unicità del problema di ottimizzazione di forma presentato si veda [HP10] e [BMRS14].

Approccio basato sul problema aggiunto

Come già visto nella Sezione precedente, la derivata di forma del funzionale costo J dipende dalla *shape derivative* della soluzione del problema di stato che viene ricavata nel seguente teorema mediante opportuni risultati di *Shape Calculus*.

Teorema 2.8. Sia \mathcal{O}_{ad} definito in (2.39) e si consideri il problema di Stokes definito in (2.36). Si consideri inoltre la perturbazione dell'identità $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}$ che rispetti la condizione al contorno imposta in (2.40). Allora la shape derivative $(u'(\Omega_0), p'(\Omega_0))$ in direzione $\boldsymbol{\theta}$ è soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u}' + \nabla p' = \mathbf{0} & \text{in } \Omega_0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u}' = 0 & \text{in } \Omega_0 \\ \mathbf{u}' = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_{in} \cup \Gamma_F \\ \mathbf{u}' = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) & \text{su } \partial \Omega_0 \setminus (\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}) \\ \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p' \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_{out} \end{cases} \quad (2.41)$$

Dimostrazione. Procediamo con la derivazione dell'equazione di stato, derivando singolarmente le condizioni di Dirichlet e le equazioni di Stokes.

- **Condizioni di Dirichlet.**

Si ponga:

$$\mathbf{u}_D = \begin{cases} \mathbf{u}_{in} & \text{su } \Gamma_{in} \\ \mathbf{0} & \text{su } \Gamma \cup \Gamma_F \end{cases} \quad \Gamma_D = \Gamma_{in} \cup \Gamma \cup \Gamma_F. \quad (2.42)$$

In questo modo è possibile scrivere le condizioni al contorno di Dirichlet nel seguente modo:

$$\int_{\Gamma_D} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\sigma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2). \quad (2.43)$$

Derivando tale integrale di bordo rispetto al dominio si ottiene:

$$\int_{\Gamma_{D,0}} \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\sigma + \int_{\Gamma_{D,0}} \left(\frac{\partial (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{n}} + H(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot \boldsymbol{\psi} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma = 0, \quad (2.44)$$

dove indichiamo con $\Gamma_{D,0} = \Gamma_{in} \cup \Gamma_F \cup \Gamma_0$ la porzione di frontiera del dominio di riferimento Ω_0 su cui sono imposte condizioni di Dirichlet (sia omogenee sia non omogenee) e con Γ_0 la porzione di frontiera di Ω_0 che può essere deformata.

Per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{\psi}$ e applicando le condizioni al contorno di Dirichlet si ottiene la seguente relazione:

$$\mathbf{u}' = -\frac{\partial (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D)}{\partial \mathbf{n}} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \quad (2.45)$$

da cui, ricordando che $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ su Γ_{in} e sulla porzione di frontiera Γ_F , si ottengono le seguenti condizioni al contorno per il problema della *shape derivative*:

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_{in} \cup \Gamma_F \\ \mathbf{u}' = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) & \text{su } \Gamma_0; \end{cases} \quad (2.46)$$

• **Equazioni di Stokes.**

Si ponga $\mathbf{v} = \boldsymbol{\phi} \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ nella prima equazione del sistema di Stokes nella formulazione debole (2.38). Derivando tale equazione si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
& \nu \int_{\Omega_0} \nabla \mathbf{u}' : \nabla \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_0} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\phi}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \\
& \quad - \int_{\Omega_0} p' \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_0} (p \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma = \\
& -\nu \int_{\Omega_0} \Delta \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Gamma_{out}} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\sigma + \int_{\Omega_0} \nabla p' \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{out}} p' \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\
& \quad + \int_{\Gamma_0} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\phi}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma - \int_{\Gamma_0} (p \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned}
-\nu \Delta \mathbf{u}' + \nabla p' &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_0 ; \\
\nu \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{n}} - p' \mathbf{n} &= \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma_{out} .
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto per la prima equazione, ponendo $q = \xi \in C^\infty(\Omega)$, deriviamo l'equazione di continuità nella formulazione debole (2.38) ottenendo:

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div} \mathbf{u}' \, \xi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_0} \operatorname{div} \mathbf{u}' \, \xi \, (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma = 0.$$

Considerando quindi $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ottiene la seguente equazione per la *shape derivative*:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = 0 \quad \text{su } \Omega_0; \tag{2.49}$$

ponendo invece $\xi \in C^\infty(\Omega)$ si ottiene la seguente relazione, che verrà utilizzata in seguito nella scrittura delle condizioni di ottimalità del problema di ottimizzazione di forma considerato:

$$\int_{\Gamma_0} \operatorname{div} \mathbf{u}' \, \xi \, (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma = 0. \tag{2.50}$$

□

Nel seguente risultato viene utilizzata la *shape derivative* del problema di stato appena ricavata per formulare un opportuno problema aggiunto, mediante il quale sarà possibile fornire un'espressione della derivata di forma del funzionale costo J che non dipende dalla *shape derivative* ($u'(\Omega_0), p'(\Omega_0)$)

In particolare, il problema aggiunto che si ottiene è a sua volta un problema di Stokes stazionario, con forzante e condizioni al contorno dipendenti dal problema di stato e dalla derivata del funzionale costo.

Teorema 2.9. Sia \mathcal{O}_{ad} definito in (2.39) e si consideri la perturbazione dell'identità $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}$ che rispetti la condizione al contorno imposta in (2.40).

Sia (\mathbf{u}, p) soluzione del problema di stato (2.36), allora la derivata di forma in Ω_0 in direzione $\boldsymbol{\theta}$, del funzionale costo J definito in (2.35), assume la seguente espressione:

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \nu \int_{\Gamma_0} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v})(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma - \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_0} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\mathbf{x}, \quad (2.51)$$

dove (\mathbf{v}, q) rappresenta la soluzione del seguente problema aggiunto:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla q = -\alpha \Delta \mathbf{u} & \text{in } \Omega_0 \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{in } \Omega_0 \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_0 \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_F \\ \nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - q \mathbf{n} = \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} & \text{su } \Gamma_{out}. \end{cases} \quad (2.52)$$

Dimostrazione. Derivando il funzionale costo J rispetto al dominio in Ω_0 , in direzione $\boldsymbol{\theta}$, si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) &= \alpha \int_{\Omega_0} \nabla \mathbf{u}' : \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_0} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \\ &= -\alpha \int_{\Omega_0} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Gamma_{out}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}' \, d\sigma - \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_0} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Con l'obiettivo di eliminare la dipendenza dell'espressione della derivata di forma $J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta})$, espressa in (2.53), dalla *shape derivative* \mathbf{u}' , moltiplichiamo per la variabile aggiunta \mathbf{v} l'equazione di Stokes in (2.41). In questo modo si ottiene:

$$\nu \int_{\Omega_0} \nabla \mathbf{u}' : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \int_{\Omega_0} p' \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega_0} p' \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0. \quad (2.54)$$

Si noti che, grazie alle condizioni al bordo definite nel problema (2.41) e all'equazione di continuità per il problema aggiunto, gli ultimi tre termini in (2.54) sono nulli.

Moltiplicando per \mathbf{u}' l'equazione di Stokes del problema aggiunto, definito in (2.52), si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega_0} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{u}' \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_0} \left(\left(\nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - q \mathbf{n} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma - \\ \alpha \int_{\Gamma_{out}} \mathbf{u}' \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}' \, d\mathbf{x} = -\alpha \int_{\Omega_0} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Eguagliando le espressioni (2.54) e (2.55) si ottiene:

$$-\alpha \int_{\Omega_0} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Gamma_{out}} \mathbf{u}' \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma = \int_{\Gamma_0} \left(\left(\nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - q \mathbf{n} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma. \quad (2.56)$$

Utilizzando la definizione (2.16) di divergenza tangenziale e la formula (2.17) di integrazione per parti per operatori tangenziali, è possibile verificare che:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_0} q \left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \int_{\Gamma_0} q \left(\operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \\
\int_{\Gamma_0} q (\operatorname{div}_{\Gamma_0} \mathbf{u}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Gamma_0} (q (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n})) d\sigma + \int_{\Gamma_0} H(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Risulta quindi possibile esprimere la derivata di forma del funzionale costo J nel seguente modo:

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \nu \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma - \frac{\nu}{2} \int_{\Gamma_0} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \tag{2.58}$$

Per semplificare ulteriormente l'espressione di $J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta})$ appena trovata, ricordiamo la definizione di prodotto tra tensori: dati i vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} si definisce prodotto scalare l'applicazione bilineare e continua tale per cui $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$.

Ricordando inoltre che $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ su Γ_0 implica che $\nabla \mathbf{u}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \otimes \mathbf{n}$, è possibile dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \right) : \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right),$$

con cui è possibile dimostrare che la derivata del funzionale costo J , in direzione $\boldsymbol{\theta}$ e valutata in Ω_0 , assume la seguente forma:

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \nu \int_{\Gamma_0} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma - \frac{\nu}{2} \int_{\Gamma_0} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma, \tag{2.59}$$

□

Ricordando infine il teorema di struttura di Hadamard (2.7), è possibile utilizzare l'espressione (2.51) della derivata di forma del funzionale J in Ω_0 , per determinare lo *Shape Gradient* del funzionale costo J , che risulta valere, nel caso in esame:

$$\nabla J = \left[\nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \frac{\nu}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 \right] \mathbf{n}. \tag{2.60}$$

Approccio basato sui moltiplicatori di Lagrange

Mostriamo ora come sia possibile scrivere in modo più rapido le condizioni di ottimalità per caratterizzare la soluzione di un problema di ottimizzazione di forma, utilizzando un approccio basato sui moltiplicatori di Lagrange

A tal proposito, consideriamo il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} in cui le condizioni al contorno di Dirichlet vengono introdotte mediante un moltiplicatore di Lagrange λ . Tale metodo è una procedura standard utilizzata per introdurre condizioni al

contorno di Dirichlet e condizioni iniziali (in problemi non stazionari) nel funzionale Lagrangiano (si veda ad esempio [All00], [BNT05] e [Ded07])

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q; \Omega) &= \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Si noti che:

- imponendo che le derivate di \mathcal{L} rispetto a \mathbf{v} e q siano nulle, si ottiene il problema di stato (equazioni di Stokes);
- imponendo che la derivata di \mathcal{L} rispetto a $\boldsymbol{\lambda}$ sia nulla, si ottengono le condizioni al bordo di Dirichlet per il problema di stato.

Per alleggerire la notazione, da questo momento eviteremo di indicare le dipendenze del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} , specificando le variabili e i domini da cui esso dipende solamente in casi di ambiguità. Concentriamoci ora sulla scrittura del problema aggiunto e sull'espressione della derivata di forma del Lagrangiano; a tal proposito imponiamo che si annulli la derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto alla variabile \mathbf{u} nulla, per ogni variazione $\boldsymbol{\phi} \in V_0$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}, \boldsymbol{\phi} \right\rangle &= \alpha \int_{\Omega_0} \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\phi} d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega_0} \Delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_0} \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} q d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{D,0}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\phi} d\sigma \\ &= \int_{\Omega_0} (-\alpha \Delta \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{v} - \nabla q) \cdot \boldsymbol{\phi} d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega_0} \left(\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - \nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot \boldsymbol{\phi} d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial \Omega_0} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\partial \Omega_0} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n} q d\sigma + \int_{\Gamma_{D,0}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\phi} d\sigma = 0, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in V_0; \end{aligned} \quad (2.62)$$

da cui otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla q &= -\alpha \Delta \mathbf{u} \quad \text{su } \Omega_0, \\ \nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - q \mathbf{n} &= \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{su } \Gamma_{out}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma_{D,0}, \\ \boldsymbol{\lambda} &= -\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - q \mathbf{n} \quad \text{su } \Gamma_{D,0}. \end{aligned}$$

Tali relazioni costituiscono l'equazione del momento per il problema aggiunto e le corrispondenti condizioni al contorno.

Analogamente, imponendo che la derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto alla variabile p sia nulla per ogni variazione $\psi \in Q$, si ottiene l'equazione di continuità per il problema aggiunto:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}, \psi \right\rangle = - \int_{\Omega_0} \nabla \psi \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} \psi \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\partial \Omega_0} \psi \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma = 0, \quad \forall \psi \in Q. \quad (2.63)$$

Ponendo infatti $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si ottiene: $\operatorname{div} \mathbf{z} = 0$ in Ω_0 .

Valutiamo ora la derivata di forma del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} in Ω_0 in direzione $\boldsymbol{\theta}$.

$$\begin{aligned} J'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}) &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}, \boldsymbol{\theta} \right\rangle \\ &= \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\alpha}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \operatorname{div} \mathbf{u} q - (\nabla p - \nu \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{z} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\nu}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \end{aligned}$$

Utilizzando l'espressione di $\boldsymbol{\lambda}$ ricavata precedentemente e l'uguglianza (2.57), è possibile semplificare l'espressione della derivata di forma nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}, \boldsymbol{\theta} \right\rangle &= \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\alpha}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \frac{\partial((- \alpha \nabla \mathbf{u} \mathbf{n} + \nu \nabla \mathbf{v} \mathbf{n} - q \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \\ &= \nu \int_{\Gamma_0} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma - \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_0} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Lo *Shape Gradient* del funzionale costo J assume dunque la seguente forma:

$$\nabla J = \left[\nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \frac{\nu}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 \right] \mathbf{n}. \quad (2.65)$$

Si osservi che il problema aggiunto e lo *Shape Gradient* relativi al problema di ottimizzazione di forma studiato, scritti mediante l'approccio basato sul problema aggiunto e mediante l'approccio basato sui moltiplicatori di Lagrange, sono equivalenti.

Nei Capitoli successivi utilizzeremo l'approccio basato sui moltiplicatori di Lagrange per scrivere le condizioni di ottimalità di un problema di controllo di flusso, mediante ottimizzazione di forma, in presenza di interazione tra fluido e struttura. Tale scelta è dettata dalla difficoltà del problema in esame e dalla possibilità fornita da tale approccio, di non dover calcolare la *shape derivative* della funzione di stato.

2.5 Condizioni di ottimalità per un problema di Stokes non stazionario

In questa Sezione vengono ricavate le condizioni di ottimalità di un problema di ottimizzazione di forma per equazioni di Stokes non stazionarie. In particolare, utilizzeremo il metodo basato sui moltiplicatori di Lagrange, introdotti nella Sezione 2.3.2, per ottenere l'espressione del problema aggiunto e dello *Shape Gradient* del funzionale costo J .

Si noti che il problema di Stokes non stazionario è equivalente ad un problema di interazione fluido-struttura in cui la struttura solida è rigida e non influenza pertanto la forma del dominio su cui la componente fluida è definita.

Dato $\mathbf{u}_{in} \in L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_{in}; \mathbb{R}^2))$ e facendo riferimento alla Figura 2.2, si consideri il seguente problema di Stokes non stazionario:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu_F \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} & \text{su } \Gamma_{in} \times (0, T) \\ \mu_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_{out} \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma \cup \Gamma_F \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{in } \Omega \times \{0\} , \end{array} \right. \quad (2.66)$$

e il seguente problema di ottimizzazione di forma: determinare il dominio $\tilde{\Omega} \in \mathcal{O}_{ad}$ tale che:

$$J(\tilde{\Omega}) = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega) , \quad (2.67)$$

con

$$J(\Omega) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}(\Omega)|^2 \, d\mathbf{x} \, dt , \quad (2.68)$$

e lo spazio delle forme ammissibili $\mathcal{O}_{ad} \subset \mathcal{O}$ definito in (2.39).

L'esistenza della soluzione (\mathbf{u}, p) del problema di Stokes stazionario, è una conseguenza del metodo di Faedo-Galerkin (si veda ad esempio [Sal10]); mentre per maggiori dettagli sull'analisi del problema di *Shape Optimization* in esame si rimanda ad esempio [BMRS14].

In vista dell'applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la scrittura delle condizioni di ottimalità, introduciamo i seguenti spazi funzionali, in cui le condizioni al contorno di Dirichlet vengono imposte in modo essenziale:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= L^2(0, T; H^1_{\Gamma \cup \Gamma_F}(\Omega; \mathbb{R}^2)) , \\ V_0(\Omega) &= L^2(0, T; H^1_{\Gamma_D}(\Omega; \mathbb{R}^2)) , \\ Q(\Omega) &= L^2(0, T; L^2(\Omega)) , \end{aligned} \quad (2.69)$$

dove $\Gamma_D \subset \partial\Omega$, definito in (2.42), indica la porzione di frontiera su cui sono imposte condizioni di Dirichlet (omogenee e non), e lo spazio di Sobolev H^1_{Γ} è definito come segue:

$$H^1_{\Gamma}(\Omega; \mathbb{R}^2) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0\}. \quad (2.70)$$

La formulazione debole del problema di stato (2.66) è dunque la seguente: trovare $\mathbf{u} \in V(\Omega)$ e $p \in Q(\Omega)$ tale che:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \mu_F \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - p \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\mathbf{x} dt &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0(\Omega) \\ \int_0^T \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} dt &= 0 \quad \forall q \in Q(\Omega) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto nella Sezione precedente introduciamo il seguente funzionale Lagrangiano \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q; \boldsymbol{\lambda}_D, \boldsymbol{\lambda}; \Omega) &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \left(\rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu_F \Delta \mathbf{u} + \nabla p \right) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_D \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) d\sigma dt + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}_0 \cdot (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

in cui le condizioni al bordo di Dirichlet, definite sulla porzione di frontiera Γ_D sono state imposte mediante l'introduzione di un opportuno moltiplicatore di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_D$. Le condizioni iniziali del problema di Stokes non stazionario vengono invece introdotte nel funzionale Lagrangiano \mathcal{L} mediante il moltiplicatore di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_0$.

Derivando opportunamente il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} , definito in (2.72), è possibile ottenere l'espressione del problema di stato, del problema aggiunto e della equazione di sensitività, da cui ricavare lo *Shape Gradient*.

In particolare, derivando il funzionale \mathcal{L} rispetto alle variabili \mathbf{v} e q e, annullando tale derivata per ogni variazione $\delta \mathbf{v} \in V_0(\Omega)$ e $\delta q \in Q(\Omega)$, si ottiene il problema di stato (equazioni di Stokes non stazionarie). Le condizioni al contorno di Dirichlet e le condizioni iniziali di tale problema si ottengono annullando le derivate del funzionale Lagrangiano rispetto ai moltiplicatori $\boldsymbol{\lambda}_D$ e $\boldsymbol{\lambda}_0$.

Per quanto riguarda l'espressione del problema aggiunto, necessario per caratterizzare la forma ottima del problema di *Shape Optimization* in esame, occorre derivare il funzionale Lagrangiano rispetto alle variabili \mathbf{u} e p . In particolare si ottiene

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle &= \alpha \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \delta \mathbf{u} d\mathbf{x} dt + \int_0^T \int_{\Omega} q \operatorname{div} \delta \mathbf{u} d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \left(\rho_F \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} - \mu_F \Delta \delta \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_D \cdot \delta \mathbf{u} d\sigma dt + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}_0 \cdot \delta \mathbf{u}(0) d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \in V(\Omega),$$

da cui, integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle &= -\alpha \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\partial \Omega} \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} \left(\rho_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu_F \Delta \mathbf{v} - \nabla q \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\partial \Omega} \left(q \mathbf{n} - \mu_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma \, dt - \mu_F \int_0^T \int_{\partial \Omega} \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \, dt \\
&- \rho_F \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{v}(T) - \delta \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{v}(0)) \, d\mathbf{x} \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_D \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma \, dt + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}_0 \cdot \delta \mathbf{u}(0) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Annullando tale derivata per ogni $\delta \mathbf{u} = \phi \in V(\Omega)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\rho_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu_F \Delta \mathbf{v} - \nabla q &= \alpha \Delta \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\
\begin{cases} \mathbf{v} = 0 \\ \boldsymbol{\lambda}_D = -\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - q \mathbf{n} + \mu_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \end{cases} &\text{su } \Gamma_D \times (0, T), \\
\sigma^F(\mathbf{v}, q) = \alpha \nabla \mathbf{u} \mathbf{n} &\text{su } \Gamma_{out} \times (0, T), \\
\mathbf{v} = 0 &\text{su } \Omega \times \{T\}, \\
\boldsymbol{\lambda}_0 = -\mathbf{v}(0) &\text{su } \Omega \times \{0\}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Procedendo in modo analogo, per la variabile p si ricava:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}, \delta p \right\rangle &= - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \delta p \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \, dt = \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} \delta p \, \text{div } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \, dt - \int_0^T \int_{\partial \Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma \, dt = 0 \\
&\quad \forall \delta p \in Q(\Omega),
\end{aligned} \tag{2.76}$$

da cui, ponendo $\delta p = \psi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0, T))$, si ottiene l'equazione di continuità del problema aggiunto:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{su } \Omega \times (0, T). \tag{2.77}$$

Ricapitolando, nel caso non stazionario il problema aggiunto in forma forte delle equazioni di Stokes non stazionario risulta:

$$\begin{cases} \rho_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu_F \Delta \mathbf{v} - \nabla q = \alpha \Delta \mathbf{u} & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_D \times (0, T) \\ \sigma^F(\mathbf{v}, q) = \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} & \text{su } \Gamma_{out} \times (0, T) \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{su } \Omega \times \{T\}. \end{cases} \tag{2.78}$$

Ricordando la condizione al contorno (2.40) per il campo di spostamento $\boldsymbol{\theta}$, è possibile esprimere la derivata del funzionale \mathcal{L} , rispetto al dominio Ω_0 in direzione $\boldsymbol{\theta}$, nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}, \boldsymbol{\theta} \right\rangle &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_0} (q \operatorname{div} \mathbf{u}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu_F \Delta \mathbf{u} + \nabla p \right) \cdot \mathbf{v} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(H \boldsymbol{\lambda}_D \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_D \cdot \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \, dt ; \end{aligned} \quad (2.79)$$

in cui si ricorda che $H = \operatorname{div} \mathbf{n}$ rappresenta la curvatura media di Γ_0 .

Analogamente a quanto visto nella Sezione 2.4, imponendo le condizioni al contorno del problema aggiunto e il valore del moltiplicatore di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_D$, espresso in (2.75) è possibile dimostrare che

$$J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\mu_F \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{u} - \frac{\alpha}{2} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \, dt , \quad (2.80)$$

da cui è possibile definire lo *Shape Gradient* del problema di ottimizzazione di forma, nel seguente modo:

$$\nabla J = \left[\mu_F \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{u} - \frac{\alpha}{2} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \right] \mathbf{n} . \quad (2.81)$$

Si noti che il problema aggiunto per le equazione di Stokes non stazionarie è anch'esso un problema di Stokes *backward* in tempo, corredato di opportune condizioni al contorno dipendenti dalla soluzione del problema di stato.

Per risultati numerici inerenti a tale problema si rimanda alla Sezione 5.2, in cui viene approfondito il confronto tra tale problema e il problema di *Shape Optimization* in presenza di interazione fluido-struttura.

Capitolo 3

Ottimizzazione di forma per un problema di interazione fluido-struttura

In questo Capitolo viene formulato e analizzato un problema di ottimizzazione di forma per un sistema fluido in presenza di interazione fluido-struttura (FSI).

In particolare, nella Sezione 3.1 vengono brevemente richiamate le equazioni di un problema FSI e viene descritto il problema di *Shape Optimization* studiato.

Si noti che, rispetto ai casi discussi nel Capitolo precedente, un problema di ottimizzazione di forma in cui la funzione di stato è soluzione di un problema FSI presenta una difficoltà aggiuntiva data dalla deformazione del dominio in tempo per effetto dell'interazione tra fluido e struttura. In Figura 3.1 viene fornita una rappresentazione schematica di questa problematica, di cui occorre tener conto durante la scrittura delle condizioni di ottimalità del problema.

Nella Sezione 3.2 vengono enunciati i risultati fondamentali di questo Capitolo relativi all'esistenza di un *design* ottimale e alla scrittura delle condizioni di ottimalità per il problema di ottimizzazione di forma considerato. Vengono dunque ricavati lo *Shape Gradient* del funzionale costo J e il problema aggiunto da risolvere per poter caratterizzare la soluzione del problema di *Shape Optimization*.

La dimostrazione di tali risultati verrà presentata nelle successive Sezioni di questo Capitolo. Prendendo spunto dal lavoro di Moubachir e Zolésio [MZ06] le condizioni di ottimalità vengono ricavate utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, descritto nella Sezione 2.3.2.

In particolare, lo schema generale utilizzato nella dimostrazione è il seguente:

1. vengono inizialmente descritti i domini e il tipo di deformazioni coinvolte nel processo di ottimizzazione e nel problema FSI (Sezione 3.1);
2. nella Sezione 3.4, viene presentata una *formulazione punto-sella* del problema di ottimizzazione, mediante l'introduzione di un funzionale Lagrangiano \mathcal{L} ;

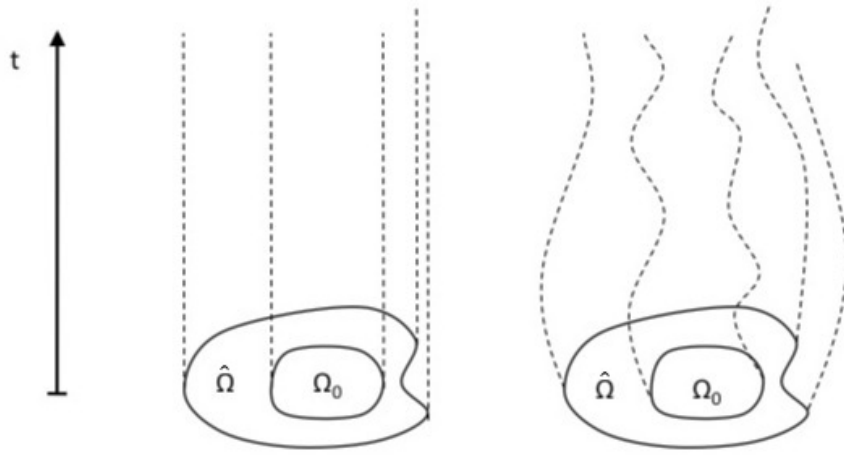


Figura 3.1: Evoluzione temporale del dominio di riferimento Ω_0 e del dominio ottimale $\hat{\Omega}$. A sinistra, il caso di *Shape Optimization* senza interazione fluido-struttura, a destra l'evoluzione temporale dei domini soggetti a FSI.

3. derivando il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto alle variabili di stato del sotto-problema fluido, ricaviamo nella Sezione 3.5.1 la formulazione forte del problema aggiunto per il sotto-problema fluido;
4. nella Sezione 3.5.2 ci occupiamo della scrittura del problema aggiunto per il sotto-problema solido, derivando opportunamente il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} . Utilizzando elementi di geometria differenziale, tale problema verrà infine espresso in forma forte;
5. nella Sezione 3.5.3, viene infine calcolato lo *Shape Gradient* del funzionale costo J utilizzando i risultati di *Shape Calculus*, introdotti nella Sezione 2.2.2.

3.1 Descrizione del problema

In questa Sezione viene formulato il problema di ottimizzazione di forma, la cui analisi costituisce l'obiettivo di questo lavoro.

Consideriamo il dominio fluido $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$, in cui la membrana elastica deformabile per effetto dell'interazione con il fluido che scorre nel dominio è presente sulla porzione di frontiera $\Gamma(t) \subset \partial\Omega(t)$. Si supponga inoltre che gli spostamenti della struttura siano solo in direzione verticale e che la porzione di frontiera $\Gamma_{in} \cup \Gamma_b \cup \Gamma_{out}$ sia rigida. Introducendo un dominio iniziale $\Omega(0)$ e una famiglia di mappe $\tilde{\mathcal{A}}_t : \Omega(0) \rightarrow \Omega(t)$, parametrizzate rispetto al parametro t (mappe ALE), è possibile definire il generico dominio $\Omega(t)$ nel seguente modo:

$$\Omega(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \tilde{\mathcal{A}}_t(\mathbf{x}_0) \text{ con } \mathbf{x}_0 \in \Omega(0)\} \quad \forall t \in (0, T), \quad (3.1)$$

con $\tilde{\mathcal{A}}_t$ definita come segue:

$$\tilde{\mathcal{A}}_t(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} + \eta(x, t)\mathbf{e}_2 & \text{su } \Gamma(0) \\ Ext(\mathbf{x} + \eta(x, t)\mathbf{e}_2) & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (3.2)$$

in cui $Ext(\psi)$ rappresenta una estensione armonica di ψ da $\Gamma(0)$ a $\Omega(0)$. Siano inoltre $\mathbf{u}_{in} \in H^{1/2}(\Gamma_{in}; \mathbb{R}^2)$ e $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega(0); \mathbb{R}^2)$.

Supponiamo che lo spostamento η della struttura sia governata dal *modello di Koiter* presentato nella Sezione 1.2.2, definito sul dominio di riferimento $\Gamma_0 = (0, L)$. Si ricordi che la relazione che sussiste Γ_0 e $\Gamma(t)$ è la seguente:

$$\Gamma(t) = \tilde{\mathcal{A}}_t(\Gamma_0), \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.3)$$

Il sistema di stato che descrive l'interazione fluido-struttura è dunque il seguente:
problema fluido:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p - \mu_F \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{in } Q \\ div \mathbf{u} = 0 & \text{in } Q \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} & \text{su } \Gamma_{in} \times (0, T) \\ -p \mathbf{n} + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_{out} \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_b \times (0, T) \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 & \text{in } \Omega(0), \end{array} \right. \quad (3.4)$$

problema solido:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_S h_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \beta \eta = f & \text{su } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \eta(0, t) = \eta(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T) \\ \eta|_{t=0} = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial z}|_{t=0} = 0 & \text{su } \Gamma_0, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

condizioni di accoppiamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}|_{\Gamma(t)} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} \right) \Big|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_2 \\ f = -\mathcal{J}(\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_2; \end{array} \right. \quad (3.6)$$

in cui ricordiamo che Q , definito in (1.28), rappresenta il dominio spazio-temporale su cui il problema di interazione fluido-struttura è definito, mentre \mathcal{J} indica lo Jacobiano della trasformazione dalle coordinate Euleriane a quelle Lagrangiane.

Consideriamo il seguente problema di ottimizzazione di forma: determinare il dominio $\hat{\Omega}$, coincidente con il dominio $\Omega(0)$ del problema FSI valutato all'istante

iniziale, tale da minimizzare l'energia dissipata dal fluido nel problema di interazione fluido-struttura definito dalle equazioni (3.4), (3.5) e (3.6).

Sottolineiamo come la frontiera $\Gamma_b^M \subseteq \Gamma_b$ con $\Gamma_b^M \neq \emptyset$ su cui possiamo agire per raggiungere l'ottimo del funzionale costo J è un bordo rigido per il problema FSI. In altri termini, la porzione di frontiera del dominio che si deforma per effetto dell'interazione con il fluido non è quella soggetta all'ottimizzazione di forma

Il problema di ottimizzazione di forma considerato può essere dunque espresso nel seguente modo: determinare $\hat{\Omega} \in \mathcal{O}_{ad}$ tale che:

$$J(\hat{\Omega}) = \min_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega), \quad (3.7)$$

in cui il funzionale costo J è dato da

$$J(\Omega) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega(t)} |\nabla \mathbf{u}(\Omega)|^2 d\mathbf{x} \quad (3.8)$$

e lo spazio $\mathcal{O}_{ad} \subset \mathcal{O}$ delle *forme ammissibili* è definito nel seguente modo:

$$\mathcal{O}_{ad} = \{\Omega \in \mathcal{O} : \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_b^F \cup \Gamma_0 \subset \partial\Omega \text{ e } |\Omega| = V_0\}, \quad (3.9)$$

con V_0 volume fissato.

Si noti che il funzionale costo J dipende dal dominio Ω sia direttamente, sia attraverso le variabili di stato del problema studiato nel seguente modo:

$$J(\Omega) = \tilde{J}(\Omega, \mathbf{u}(\Omega), p(\Omega), \eta(\Omega)), \quad \forall \Omega \in \mathcal{O}_{ad}. \quad (3.10)$$

Da questo momento, per non appesantire la notazione, tralascieremo la dipendenza rispetto al dominio delle variabili di stato, indicandole semplicemente con \mathbf{u} , p e η .

Introduciamo ora un dominio di riferimento Ω_0 e definiamo la generica forma ammissibile $\Omega \in \mathcal{O}_{ad}$ attraverso una deformazione del dominio Ω_0 ottenuta mediante l'applicazione di una mappa *perturbazione dell'identità*, come visto nella Sezione 2.2.1. Ogni forma ammissibile Ω può quindi essere espressa nel seguente modo:

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in \Omega_0\} \quad \text{con } \mathbf{T}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}_0). \quad (3.11)$$

Ricapitolando, abbiamo finora definito tre famiglie di domini (rappresentati in fig. 3.2):

- il dominio di riferimento Ω_0 ;
- il dominio ottimo $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(0)$ definito attraverso una deformazione del dominio di riferimento Ω_0 ottenuta mediante l'applicazione della mappa $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{I} + \hat{\boldsymbol{\theta}}$;

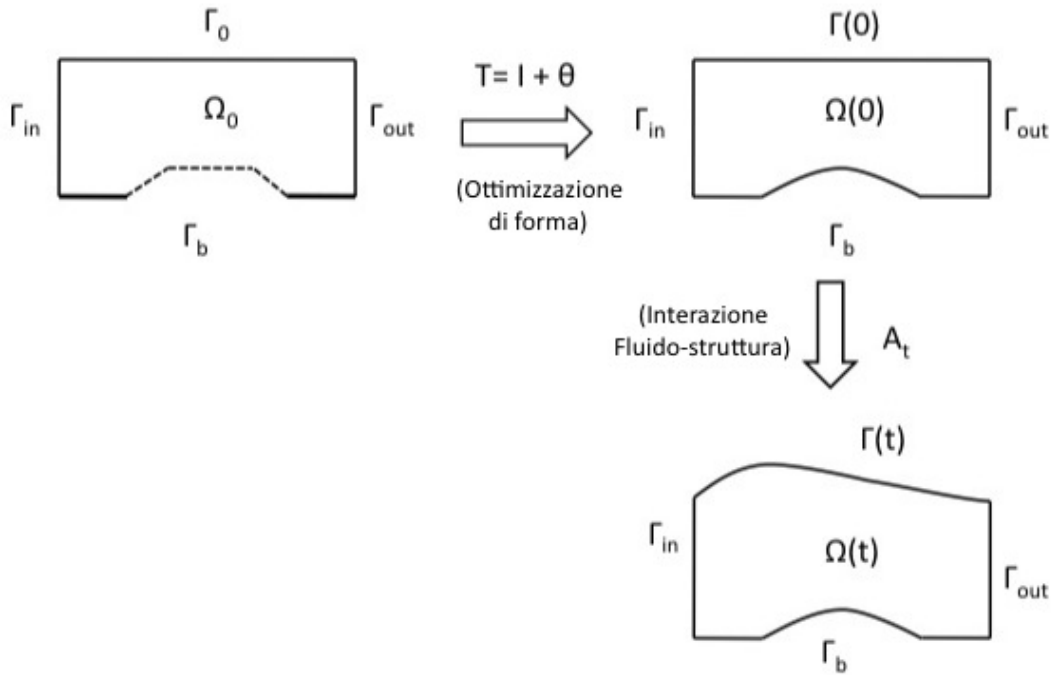


Figura 3.2: Domini fino ad ora utilizzati e mappe necessarie per definirli

- i domini tempo-dipendenti $\Omega(t)$, dipendenti dalla soluzione del problema elastico e ottenuti come deformazioni di $\Omega(0)$ per effetto dell'interazione tra fluido e struttura.

Per non appesantire la notazione poniamo $\Omega = \Omega(0)$, riservandoci il diritto di esplicitare il dominio considerato in caso di ambiguità.

3.2 Risultato fondamentale

In questa Sezione enunciamo il risultato principale di questo Capitolo, illustrando le condizioni di ottimalità con cui caratterizzare la soluzione del problema di ottimizzazione di forma considerato.

Teorema 3.1. *Sia $\mathbf{u}_{in} \in H^{1/2}(\Gamma_{in}; \mathbb{R}^2)$; allora il seguente problema di ottimizzazione di forma: determinare il dominio $\hat{\Omega} \in \mathcal{O}_{ad}$ tale che:*

$$J(\hat{\Omega}) = \min_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega), \quad (3.12)$$

dove:

1. lo spazio $\mathcal{O}_{ad} \subset \mathcal{O}$ delle forme ammissibili è definito in (3.9),
2. (\mathbf{u}, p, η) è una soluzione debole del problema di stato (3.4), (3.5) e (3.6),

3. il funzionale costo J è definito in (3.8),

ammette soluzione $\hat{\Omega}$.

Teorema 3.2. *Nelle ipotesi del Teorema 3.1, lo Shape Gradient del funzionale costo*

$$J(\Omega) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega(t)} |\nabla \mathbf{u}(\Omega)|^2 d\mathbf{x} \quad (3.13)$$

è dato da:

$$\nabla J = \left[\mu_F \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{z} - \frac{\alpha}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 \right] \mathbf{n}, \quad (3.14)$$

dove (\mathbf{v}, q, ψ) è soluzione debole del seguente problema aggiunto:

• **problema aggiunto per il sotto-problema fluido:**

$$\begin{cases} \rho_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu_F \Delta \mathbf{v} - \nabla q = \alpha \Delta \mathbf{u} & \text{in } Q \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{in } Q \\ \mathbf{v}(T) = \mathbf{0} & \text{in } Q \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_D \times (0, T) \\ \boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{v}, q) \mathbf{n} = \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} & \text{su } \Gamma_{out} \times (0, T), \end{cases} \quad (3.15)$$

dove Q , definito in (1.28), rappresenta il dominio spazio-temporale su cui è definito il sotto-problema fluido;

• **problema aggiunto per il sotto-problema solido:**

$$\begin{cases} \rho_S h_S \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \beta \psi = g & \text{su } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T) \\ \psi(x)|_{t=T} = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x) \Big|_{t=T} = 0 & \forall x \in \Gamma_0; \end{cases} \quad (3.16)$$

• **condizioni di accoppiamento:**

$$\begin{cases} \mathbf{v}|_{\Gamma(t)} = (\psi \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1}) \mathbf{e}_2 \\ g = \left(\frac{\alpha}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 n_2 - \rho_F \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \right) n_2 - \rho_F (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) ((\nabla_{\Gamma(t)} \mathbf{n} + \mathbf{N}) \mathbf{u}_S) \cdot \mathbf{e}_2 \right) \Big|_{\Gamma(t)} \end{cases} \quad (3.17)$$

dove n_2 rappresenta la seconda componente del versore normale uscente dall'interfaccia $\Gamma(t)$.

La dimostrazione di questi due risultati viene fornita nelle successive Sezioni.

3.3 Esistenza di una forma ottima

Al fine di dimostrare il Teorema 3.1, e garantire quindi l'esistenza di una forma ottima per il problema di *Shape Optimization* definito nella Sezione 3.1, occorre verificare le ipotesi del Teorema di esistenza 2.1. In particolare, occorre dimostrare che il problema in esame soddisfa le seguenti proprietà:

- **compattezza di \mathcal{O}_{ad} in \mathcal{O}** : data la successione $\{\Omega_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{O}_{ad}$, la topologia di Hausdorff, introdotta nella Sezione 2.1, garantisce l'esistenza di una sottosuccessione $\{\Omega_{n_k}\}_{k \geq 1}$ e di un dominio $\Omega \in \mathcal{O}$ tale che $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega$.

Per dimostrare che $\Omega \in \mathcal{O}_{ad}$, è possibile utilizzare il vincolo di volume $|\Omega| = V_0$, imposto nella definizione dell'insieme delle forme ammissibili \mathcal{O}_{ad} . Tale vincolo infatti garantisce la chiusura di \mathcal{O}_{ad} in \mathcal{O} rispetto alla convergenza di Hausdorff (per la dimostrazione di tale risultato, si rimanda a [HP05] e a [All00]);

- **continuità della soluzione del problema di stato rispetto al dominio**: sia $D \supset \Omega_n \forall n \geq 1$ un insieme compatto. Siano $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(\Omega_n)$ e $p_n = p(\Omega_n)$ e si estendano tali variabili a zero in $D \setminus \Omega_n$. Mediante un procedimento analogo a quello seguito nella Sezione 1.3.2, è possibile dimostrare alcune stime di stabilità per le variabili estese, chiamate $\tilde{\mathbf{u}}_n$ e \tilde{p}_n . Passando ad un'eventuale sottosuccessione, grazie al teorema di Banach-Alaoglu è possibile dimostrare che

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_n &\rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{in } L^2(0, T; H^1(D, \mathbb{R}^2)), \\ \tilde{p}_n &\rightarrow \tilde{p} \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(D)). \end{aligned}$$

Occorre inoltre verificare che $\tilde{\mathbf{u}}$ e \tilde{p} siano soluzioni del problema di stato (3.4) definito nella Sezione 3.1; a tal proposito si rimanda a [SS14], in cui tale verifica viene effettuata per un problema di Navier-Stokes definito su domini tempo-dipendente. Il caso di Stokes può quindi essere facilmente dedotto da questo risultato;

- **semicontinuità inferiore del funzionale costo J** : è possibile dimostrare (si veda ad esempio [Fuj88]) la semicontinuità inferiore (sequenziale) di un generico funzionale J della forma

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} j(\nabla y(\Omega)) \, dx$$

con $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua, non negativa e convessa (come accade per il funzionale costo J definito in (3.8)) e $y = (\mathbf{u}, p, \eta)$ soluzione del problema di stato (3.4), (3.5) e (3.6).

Risulta quindi possibile applicare il Teorema 2.1 al problema definito nella Sezione 3.1 per garantire l'esistenza di una forma ottima per un problema di ottimizzazione di forma per un problema FSI.

3.4 Formulazione punto-sella del problema

Al fine di ricavare le condizioni di ottimalità espresse nel Teorema 3.2, in questa Sezione viene fornita la formulazione punto-sella del problema di ottimizzazione di forma in esame, introducendo un opportuno funzionale Lagrangiano, analogamente a quanto visto nella Sezione 2.3.2.

A tal proposito introduciamo i seguenti spazi funzionali dipendenti dal tempo:

$$\begin{aligned}
 X_F^t(\Omega) &= \{ \mathbf{v} \in H_{\Gamma_b}^1(\Omega(t); \mathbb{R}^2) : \mathbf{v}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{u}_{in} \} , \\
 V_F(\Omega) &= H^1(0, T; (H^2(\Omega(t)); \mathbb{R}^2) \cap X_F^t) , \\
 V_0(\Omega) &= H^1(0, T; (H^2(\Omega(t)); \mathbb{R}^2) \cap H_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_b}^1(\Omega(t); \mathbb{R}^2) , \\
 Q_F(\Omega) &= H^1(0, T; H^1(\Omega(t)) , \\
 V_S &= H^2(0, T; H^2(\Gamma_0) \cap H_{\{0\} \cup \{L\}}^1(\Gamma_0)) ,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

in cui lo spazio di Sobolev $H_{\Gamma}^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ con $\Gamma \subset \partial\Omega$ è definito in (2.70).

Rispetto a un classico problema di fluidodinamica, nel caso in esame richiediamo una maggiore regolarità della soluzione; in particolare, cerchiamo una soluzione \mathbf{u} che abbia derivate seconde in L^2 in spazio e derivate prime in L^2 in tempo. Questa richiesta è infatti necessaria per poter definire correttamente il problema aggiunto e le condizioni di ottimalità del problema di ottimizzazione di forma considerato.

In modo analogo a quanto visto nella Sezione 2.3.2, introduciamo il funzionale Lagrangiano ottenuto sommando il funzionale costo J e la formulazione debole del problema di stato FSI e introducendo le condizioni al bordo di Dirichlet mediante opportuni moltiplicatori di Lagrange.

In particolare è possibile ottenere la formulazione debole del problema FSI moltiplicando:

- l'equazione del momento del sistema di Stokes in (3.4) per una funzione test $\mathbf{v} \in V_F(\Omega)$;
- l'equazione di continuità in (3.4) per una funzione test $q \in Q_F(\Omega)$;
- l'equazione del modello di Koiter (3.5) per una funzione test $\psi \in V_S$;

e integrando queste equazioni ciascuna sul loro dominio.

Denotiamo con $\Gamma_D = \Gamma_{in} \cup \Gamma_b$ la porzione di frontiera del dominio fluido su cui sono imposte condizioni di Dirichlet (omogenee e non) e consideriamo la funzione $\mathbf{u}_D : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}^2$ così definita:

$$\mathbf{u}_D = (u_D, 0)^T \quad \text{con } u_D = \begin{cases} \mathbf{u}_{in} \cdot \mathbf{e}_1 & \text{su } \Gamma_{in} \\ 0 & \text{su } \Gamma_b. \end{cases} \tag{3.19}$$

Consideriamo inoltre i moltiplicatori di Lagrange λ_F e λ_S , relativi alle condizioni di Dirichlet imposte rispettivamente sul problema fluido e sul problema solido, e i

moltiplicatori λ_S^0 e λ_S^1 , relativi alle condizioni iniziali del problema per il solido, tali per cui

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_F &\in W_F = L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2)), \quad \lambda_S \in W_S = L^2(0, T), \\ \lambda_S^0 &\in W_S^0 = H^1(\Gamma_0), \quad \lambda_S^1 \in W_S^1 = L^2(\Gamma_0). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} assume dunque la seguente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \eta; \mathbf{v}, q, \psi; \Omega) &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega(t)} \left[\left(\rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p - \mu_F \Delta \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} - q \operatorname{div} \mathbf{u} \right] d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\rho_S h_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \beta \eta - f \right) \psi dz dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) d\sigma + \int_0^T [\lambda_S \eta]_0^L dt \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} \left(\lambda_S^0 \eta(0) + \lambda_S^1 \frac{\partial \eta}{\partial t}(0) \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Si noti che, nell'espressione del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} appena introdotta, non sono state utilizzate le condizioni di accoppiamento espresse in (3.6); per questo motivo, il problema di interazione fluido-struttura risulta disaccoppiato.

A tal proposito, introducendo lo spazio funzionale S , definito come segue:

$$S(\Omega) = \{(\mathbf{v}, \psi) \in V_0(\Omega) \times V_S \text{ t.c. } \mathbf{v}(t)|_{\Gamma(t)} = (\psi \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1}) \mathbf{e}_2 \quad \forall t \in (0, T)\}, \quad (3.22)$$

è possibile ottenere una formulazione del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} , in cui il modello solido e il modello fluido sono accoppiati. In particolare, integrando per parti e utilizzando le condizioni al bordo imposte dal problema di stato, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \eta; \mathbf{v}, q, \psi; \Omega) &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega(t)} \left(\rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu_F \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - q \operatorname{div} \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\rho_S h_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \psi + \mu_S \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta \eta \psi \right) \psi dz dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) d\sigma dt + \int_0^T [\lambda_S \eta]_0^L d\sigma dt \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} \left(\lambda_S^0 \eta(0) + \lambda_S^1 \frac{\partial \eta}{\partial t}(0) \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.23)$$

In vista della scrittura del problema aggiunto, integriamo per parti (rispetto al tempo) il termine $\int_0^T \int_{\Omega(t)} \rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} dt$. Si noti però che il dominio $\Omega(t)$ sul quale

si sta integrando è tempo dipendente; di conseguenza, nel momento in cui si effettua un'integrazione per parti in tempo è necessario introdurre un termine che consideri la deformazione del bordo del dominio; si ha dunque:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \, dt &= - \int_0^T \int_{\Omega(t)} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \, d\mathbf{x} \, dt \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \, dt + \int_{\Omega(T)} \mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{v}(T) \, d\mathbf{x} \, dt - \int_{\Omega(0)} \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{v}(0) \, d\mathbf{x} \, dt, \end{aligned} \quad (3.24)$$

in cui \mathbf{u}_S rappresenta la velocità di deformazione della porzione di frontiera $\Gamma(t)$, espressa nel seguente modo:

$$\mathbf{u}_S = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \circ \eta^{-1} \right) \mathbf{e}_2. \quad (3.25)$$

Si noti che, utilizzando la formula di integrazione per parti in tempo appena introdotta, nella formulazione debole del problema di stato per il fluido si ottiene una formulazione ALE del problema, equivalente a quella introdotta nella Sezione 1.2.1.

Utilizzando dunque la relazione espressa in (3.24), è possibile fornire la seguente espressione del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \eta; \mathbf{v}, q, \psi; \Omega) &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \\ &- \int_0^T \int_{\Omega(t)} \left(-\rho_F \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu_F \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - q \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \, d\mathbf{x} \, dt \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\rho_S h_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \psi + \mu_S \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta \eta \psi \right) \psi \, dz \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \, d\sigma \, dt + \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \, dt \\ &- \rho_F \int_{\Omega(T)} \mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{v}(T) \, d\mathbf{x} + \rho_F \int_{\Omega(0)} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}(0) \, d\mathbf{x} + \int_0^T [\lambda_S \eta]_0^L \, dt \\ &+ \int_{\Gamma_0} \left(\lambda_S^0 \eta(0) + \lambda_S^1 \frac{\partial \eta}{\partial t}(0) \right) \, d\sigma. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si noti che l'assenza dell'introduzione di un moltiplicatore di Lagrange in \mathcal{L} per l'imposizione delle condizioni iniziali è dovuto all'imposizione in modo naturale di tali condizioni. Per non appesantire la notazione, si denoti con $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, p, \eta)$ la soluzione debole del problema di stato e con $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, q, \psi)$ la soluzione debole del problema aggiunto. Si indichino inoltre con X e Y i seguenti spazi funzionali:

$$X(\Omega) = V_F(\Omega) \times Q_F(\Omega) \times V_S \quad \text{e} \quad Y(\Omega) = V_0(\Omega) \times Q_F(\Omega) \times V_S. \quad (3.27)$$

Analogamente a quanto fatto nella Sezione 2.3.2, è ora possibile introdurre la *formulazione punto-sella* del problema di ottimizzazione di forma, nel seguente modo: determinare il dominio $\hat{\Omega} \in \mathcal{O}_{ad}$ tale per cui:

$$J(\hat{\Omega}) = \min_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} \min_{\mathbf{U} \in X(\Omega)} \sup_{\mathbf{V} \in Y(\Omega)} \mathcal{L}(\mathbf{U}; \mathbf{V}; \Omega) . \quad (3.28)$$

Nella prossima Sezione utilizzeremo l'espressione del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} definito in (3.26) per derivare le condizioni necessarie di ottimalità, con cui caratterizzare la soluzione ottima del problema di ottimizzazione di forma.

3.5 Condizioni di ottimalità

Per determinare il sistema di condizioni necessarie di ottimalità (al primo ordine) seguiamo il procedimento visto nella Sezione 2.3.2. In particolare, per quanto riguarda il problema di stato FSI:

- imponendo che si annulli la derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto alle variabili \mathbf{v} e p , si ottiene il problema di stato per la componente fluida;
- annullando la derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto alla variabile ψ si ottiene il problema di stato per la componente solida;
- imponendo nulla la derivata del funzionale Lagrangiano rispetto ai moltiplicatori di Lagrange λ_F e λ_S , si ricavano le condizioni di Dirichlet rispettivamente imposte sul problema fluido e sul problema solido;
- le condizioni iniziali del problema solido vengono infine ricavate imponendo che si annulli la derivata del funzionale \mathcal{L} rispetto ai moltiplicatori di Lagrange λ_S^0 e λ_S^1 .

Nelle Sezioni 3.5.1 e 3.5.2 ricaviamo l'espressione del problema FSI aggiunto, concentrandoci sul problema fluido e sul problema solido separatamente. Infine, nella Sezione 3.5.3 verranno utilizzati gli strumenti di *Shape Calculus* introdotti nella Sezione 2.2.2 per derivare il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} definito in (3.26), rispetto al dominio Ω e ottenere un'espressione dello *Shape Gradient* del funzionale costo J .

3.5.1 Problema aggiunto per il fluido

In modo analogo a quanto fatto per la scrittura del problema aggiunto di Stokes nella Sezione 2.4, il problema aggiunto per il fluido di un problema FSI si ottiene derivando il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} , espresso in 3.26, rispetto alle variabili p e \mathbf{u} .

Imponendo che la derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto a p sia nulla per ogni variazione $\delta p \in Q_F(\Omega)$, si ottiene la seguente relazione:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}, \delta p \right\rangle = \int_0^T \int_{\Omega(t)} \delta p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \, dt = 0 \quad \forall \delta p \in Q_F(\Omega), \quad (3.29)$$

da cui si evince la seguente equazione di continuità per la variabile aggiunta \mathbf{v} :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{su } \Omega(t) \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.30)$$

Analogamente, derivando il funzionale Lagrangiano rispetto alla variabile \mathbf{u} e annullando tale derivata per ogni variazione $\delta \mathbf{u} \in V_F(\Omega)$, si ricava la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right\rangle &= \alpha \int_0^T \int_{\Omega(t)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \lambda_F \delta \mathbf{u} \, d\sigma \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega(t)} \left(-\rho_F \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu_F \nabla \delta \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - q \operatorname{div} \delta \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} \, dt \\ &\quad - \rho_F \int_{\Omega(T)} \delta \mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{v}(T) \, d\mathbf{x} + \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \, dt \\ &= -\alpha \int_0^T \int_{\Omega(t)} \Delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \, dt + \alpha \int_0^T \int_{\partial \Omega(t)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega(t)} \left(-\rho_F \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mu_F \delta \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{v} + \nabla q \cdot \delta \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\partial \Omega(t)} \left(\mu_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - q \mathbf{n} \right) \delta \mathbf{u} \, d\sigma \, dt \\ &\quad + \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \lambda_F \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma \, dt = 0, \\ &\hspace{25em} \forall \delta \mathbf{u} \in V_F(\Omega). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Scegliendo opportune variazioni $\delta \mathbf{u} \in V_F(\Omega)$ nella espressione (3.31) e utilizzando l'equazione di continuità per il problema aggiunto derivata in (3.30), si ricava il seguente problema aggiunto per il fluido, scritto in forma forte:

$$\begin{cases} \rho_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu_F \Delta \mathbf{v} - \nabla q = \alpha \Delta \mathbf{u} & \text{in } Q \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{in } Q \\ \mathbf{v}(T) = \mathbf{0} & \text{in } \Omega(T) \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{su } \Gamma_D \times (0, T) \\ \sigma^F(\mathbf{v}, q) \mathbf{n} = \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} & \text{su } \Gamma_{out} \times (0, T) \end{cases} \quad (3.32)$$

a cui si aggiungono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\psi \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1}) \mathbf{e}_2 \quad \text{su } G, \\ \lambda_F &= \sigma^F(\mathbf{v}, q) \mathbf{n} - \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{su } \Gamma_D \times (0, T), \\ \rho_F (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} - \sigma^F(\mathbf{v}, q) \mathbf{n} &= -\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{su } G, \end{aligned} \quad (3.33)$$

con G , definito in (1.44), frontiera spazio-temporale su cui avviene l'interazione tra fluido e struttura. In particolare, la prima uguaglianza di (3.33) è imposta in modo essenziale tramite la scelta dello spazio $S(\Omega)$, mentre le altre relazioni, che verranno in seguito utilizzate per la semplificazione delle condizioni di ottimalità, sono state ottenute ponendo, rispettivamente $\delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\Gamma_D; \mathbb{R}^2)$ e $\delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\Gamma(t); \mathbb{R}^2)$ nell'espressione (3.31).

Si noti che il problema aggiunto per il fluido assume la forma di un problema di Stokes *backward*, con condizione finale nulla; tale risultato risulta compatibile con la forma di un problema aggiunto per un problema di Stokes non stazionario, ricavata nella Sezione 2.5.

3.5.2 Problema aggiunto per il solido

In questa Sezione viene presentato un metodo per la derivazione dell'espressione del problema aggiunto per il solido. Non è infatti possibile procedere come nel caso della componente fluida in quanto, a differenza delle variabili di velocità \mathbf{u} e pressione p , lo spostamento η del solido influenza direttamente la forma del dominio $\Omega(t)$, definita da

$$\Omega(t) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \tilde{\mathcal{A}}_t(\mathbf{x}_0) \text{ con } \mathbf{x}_0 \in \Omega(0) \}, \quad \forall t \in (0, T) \quad (3.34)$$

dove $\tilde{\mathcal{A}}_t$ è la mappa ALE definita come segue:

$$\tilde{\mathcal{A}}_t(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} + \eta(x, t) \mathbf{e}_2 & \text{su } \Gamma(0) \\ Ext(\mathbf{x} + \eta(x, t) \mathbf{e}_2) & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3.35)$$

Occorre dunque comprendere cosa significhi derivare il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto allo spostamento della struttura η . A questo scopo, si introduca una perturbazione dello spostamento del solido η , scritto nella forma $\eta + \rho \delta \eta$, con $\rho > 0$ parametro reale positivo. Si osservi che, a fronte di questa perturbazione, si ottiene anche una deformazione del dominio $\Omega(t)$. A tal proposito, denotiamo con $\Omega_\rho(t)$ il dominio così definito:

$$\Omega_\rho(t) = \{ \mathbf{S}_{\rho, t}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega(t) \} \quad \rho > 0, \quad (3.36)$$

dove $\mathbf{S}_{\rho, t} : \Omega(t) \rightarrow \Omega_\rho(t)$ è la mappa data da:

$$\mathbf{S}_{\rho, t}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} + \rho \delta \eta \mathbf{e}_2 & \text{su } \Gamma(t) \\ Ext_{\Omega(t)}(\mathbf{x} + \rho \delta \eta \mathbf{e}_2) & \text{in } \overline{\Omega(t)} \setminus \Gamma(t), \end{cases} \quad (3.37)$$

ed $Ext_{\Omega(t)}(\psi)$ rappresenta una estensione armonica di ψ da $\Gamma(t)$ a $\Omega(t)$.

Denotiamo con $\Gamma_\rho(t)$ la porzione di frontiera di $\Omega_\rho(t)$ ottenuta come deformazione di $\Gamma(t)$ mediante la mappa $\mathbf{S}_{\rho, t}$, ovvero $\Gamma_\rho(t) = \mathbf{S}_{\rho, t}(\Gamma(t))$. Si noti che è possibile definire $\boldsymbol{\gamma} \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tale per cui:

$$\mathbf{S}_\rho(t) = (\mathbf{I} + \rho \boldsymbol{\gamma}) ; \quad (3.38)$$

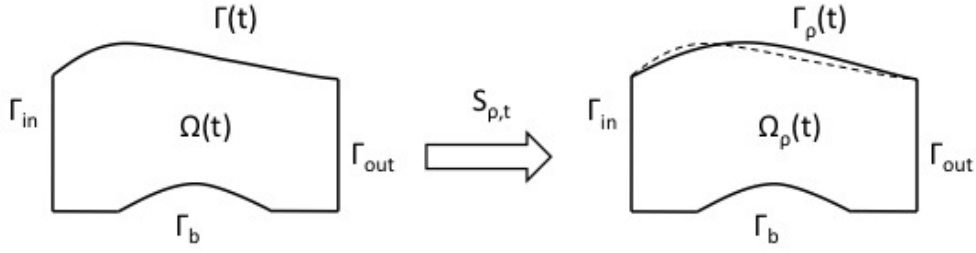


Figura 3.3: Perturbazione del dominio $\Omega(t)$ per effetto della mappa $S_{\rho,t}$

in particolare, il campo vettoriale γ viene definito come segue:

$$\gamma = \begin{cases} \delta\eta \mathbf{e}_2 & \text{su } \Gamma(t) \\ Ext_{\Omega(t)}(\delta\eta \mathbf{e}_2) & \text{in } \Omega(t) \setminus \Gamma(t). \end{cases} \quad (3.39)$$

In Figura 3.3 viene mostrato l'effetto della perturbazione $\mathbf{S}_{\rho,t}$ sul dominio $\Omega(t)$. Si noti che $\mathbf{S}_{\rho,t}$ è indipendente dalla scelta della mappa necessaria per la definizione della forma ottima nel procedimento di *Shape Optimization*.

Grazie all'introduzione della perturbazione $\rho\delta\eta$ e del dominio associato $\Omega_\rho(t)$, è possibile derivare il Lagrangiano \mathcal{L} rispetto alla variabile η ; infatti tale operazione è equivalente a derivare lo stesso Lagrangiano rispetto alla variabile ρ e valutare tale derivata in $\rho = 0$.

Lo scopo di questa sezione sarà dunque calcolare la seguente derivata:

$$\left(\frac{d}{d\rho} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \eta + \rho\delta\eta, p; \mathbf{v}, \psi, q; \Omega) \right) \Big|_{\rho=0}. \quad (3.40)$$

Si noti che, introducendo una perturbazione del tipo $I + \rho\delta\eta$, gli integrali all'interno del Lagrangiano verranno effettuati sul dominio $\Omega_\rho(t)$, mentre la velocità \mathbf{u} e la pressione p del fluido sono definite sul dominio $\Omega(t)$.

Occorre dunque introdurre la mappa $\mathbf{R}_{\rho,t} = S_{\rho,t}^{-1} = (\mathbf{I} + \rho\gamma)^{-1}$; in questo modo è possibile definire un nuovo Lagrangiano \mathcal{L}_ρ tenendo conto della perturbazione introdotta sulla variabile η . Si indichi con g_ρ , la generica funzione $g(\cdot, t)$ composta con la mappa $\mathbf{R}_{\rho,t}$, ovvero si ponga $g_\rho = g \circ \mathbf{R}_{\rho,t}$. In questo modo, il funzionale Lagrangiano \mathcal{L}_ρ assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho(\mathbf{u}, \eta + \rho\delta\eta, p; \mathbf{v}, \psi, q; \Omega) &= J_\rho(\mathbf{u}) - \int_0^T \int_{\Omega_\rho(t)} G(\rho) \, d\mathbf{x} \, dt \\ &- \int_0^T \int_0^L m(\rho) \, dz \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_\rho(t)} \phi(\rho) \, d\sigma \, dt - \int_0^T b_F(\rho) \, dt \\ &- \int_0^T b_S(\rho) \, dt - f_F(\rho) - \int_{\Gamma_0} f_S(\rho) \, d\sigma, \end{aligned} \quad (3.41)$$

in cui:

- $J_\rho(\mathbf{u})$ rappresenta il funzionale costo J mappato nel dominio $\Omega_\rho(t)$:

$$J_\rho(\mathbf{u}) = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega_\rho(t)} |\nabla(\mathbf{u}_\rho)|^2 d\mathbf{x} dt; \quad (3.42)$$

- $G(\rho)$ è dato dai termini del Lagrangiano derivanti dall'equazione di stato del fluido e definiti sul dominio $\Omega_\rho(t)$:

$$G(\rho) = -\rho_F \mathbf{u}_\rho \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\rho}{\partial t} - p_\rho \operatorname{div} \mathbf{v}_\rho + \mu_F \nabla \mathbf{u}_\rho : \nabla \mathbf{v}_\rho - q_\rho \operatorname{div} \mathbf{u}_\rho; \quad (3.43)$$

- $m(\rho)$ è data da quella parte di sistema derivante dalle equazioni del solido, definite sul dominio spaziale $\Gamma_0 = (0, L)$, in cui viene considerata la perturbazione dello spostamento η , ovvero:

$$m(\rho) = \rho_S h_S \frac{\partial^2(\eta + \rho\delta\eta)}{\partial t^2} \psi + \mu_S \frac{\partial(\eta + \rho\delta\eta)}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta(\eta + \rho\delta\eta) \psi; \quad (3.44)$$

- $\phi(\rho)$ comprende i termini di bordo definiti su $\Gamma_\rho(t)$:

$$\phi(\rho) = -\rho_F (\mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{v}_\rho) \left(\frac{\partial(\eta + \rho\delta\eta)}{\partial t} \circ (\eta + \rho\delta\eta)^{-1} \mathbf{e}_2 \right) \cdot \mathbf{n}^\rho, \quad (3.45)$$

dove indichiamo con \mathbf{n}^ρ il versore normale uscente dal bordo $\Gamma_\rho(t)$;

- $b_F(\rho)$ contiene il contributo delle condizioni al bordo di Dirichlet del problema fluido, imposte sulla porzione di frontiera Γ_D :

$$b_F(\rho) = - \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_{F,\rho}(\mathbf{u}_\rho - \mathbf{u}_D) d\sigma; \quad (3.46)$$

- $b_S(\rho)$ comprende le condizioni al bordo di Dirichlet imposte al problema solido:

$$b_S(\rho) = - [\lambda_S(\eta + \rho\delta\eta)]_0^L; \quad (3.47)$$

- $f_F(\rho)$ rappresenta i contributi all'istante iniziale e finale dell'equazione di stato per la componente fluida:

$$f_F(\rho) = \int_{\Omega_\rho(T)} \rho_F (\mathbf{u}_\rho(T) \cdot \mathbf{v}_\rho(T)) d\mathbf{x} - \rho_F \int_{\Omega_\rho(0)} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}_\rho(0) d\mathbf{x}; \quad (3.48)$$

- $f_S(\rho)$ comprende, infine, i termini all'istante iniziale e finale dell'equazione di stato per il solido:

$$f_S(\rho) = -\lambda_S^0(\eta + \rho\delta\eta)(0) - \lambda_S^1 \frac{\partial(\eta + \rho\delta\eta)}{\partial t}(0). \quad (3.49)$$

Possiamo a questo punto derivare l'espressione del Lagrangiano rispetto a ρ . Enunciamo, a tal proposito, due risultati (per la cui dimostrazione si veda [MZ06]) riguardanti la derivata della mappa $\mathbf{R}_{\rho,t}$.

Lemma 3.1. *Sia $\mathbf{R}_{\rho,t} : \Omega(t) \rightarrow \Omega_\rho(t)$ tale che $\mathbf{R}_{\rho,t} = (\mathbf{I} + \rho \boldsymbol{\gamma})^{-1}$, allora:*

$$\left. \frac{d\mathbf{R}_{\rho,t}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = -\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.50)$$

con $\boldsymbol{\gamma}$ definita in (3.39).

Lemma 3.2. *Sia $\mathbf{R}_{\rho,t} : \Omega(t) \rightarrow \Omega_\rho(t)$ tale che $\mathbf{R}_{\rho,t} = (\mathbf{I} + \rho \boldsymbol{\gamma})^{-1}$, e $\mathbf{u} \in W(\Omega(t))$ con $W(\Omega(t))$ un opportuno spazio di Sobolev, allora:*

$$\left. \frac{d\mathbf{u}_\rho}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \left. \frac{d(\mathbf{u} \circ \mathbf{R}_{\rho,t})}{d\rho} \right|_{\rho=0} = -\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}. \quad (3.51)$$

Utilizzando i teoremi di *Shape Calculus* introdotti nella Sezione 2.2.2 e i due lemmi appena introdotti, procediamo con la derivazione del Lagrangiano \mathcal{L}_ρ definito in (3.41).

In vista dell'applicazione del Lemma 2.6 per il calcolo della derivata rispetto a ρ di un integrale definito in $\Omega_\rho(t)$, calcoliamo la derivata del termine $G(\rho)$ rispetto al parametro ρ , valutando tale derivata in $\rho = 0$. Si ottiene dunque:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} &= \rho_F \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial(\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma})}{\partial t} \right] + [p \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) + (\nabla p \cdot \boldsymbol{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{v}] \\ &\quad - \mu_F [\nabla(\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) : \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{v} : \nabla(\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma})] + [(\nabla q \cdot \boldsymbol{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{u} + q \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma})] \end{aligned}$$

da cui, complessivamente:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} \left(\int_0^T \int_{\Omega_\rho(t)} G(\rho) \right) \right|_{\rho=0} &= \int_0^T \int_{\Omega(t)} \rho_F \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial(\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma})}{\partial t} \right] dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega(t)} [p \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) + (\nabla p \cdot \boldsymbol{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{v}] dx dt \\ &\quad - \mu_F \int_0^T \int_{\Omega(t)} [\nabla(\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) : \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{v} : \nabla(\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma})] dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega(t)} [(\nabla q \cdot \boldsymbol{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{u} + q \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma})] dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \left[-\rho_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu_F \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - q \operatorname{div} \mathbf{u} \right] (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Occupiamoci ora della derivata del termine $\phi(\rho)$, comprendente i termini del Lagrangiano \mathcal{L}_ρ definiti sull'interfaccia tra fluido e struttura Γ_ρ . In particolare, in vista dell'applicazione del Lemma 2.2, esprimiamo $\phi(\rho)$ in funzione del campo vettoriale $\mathbf{E}(\rho)$ definito come segue:

$$\mathbf{E}(\rho) = -\rho_F(\mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{v}_\rho) \left(\frac{\partial(\eta + \rho\delta\eta)}{\partial t} \circ (\eta + \rho\delta\eta)^{-1} \right) \mathbf{e}_2. \quad (3.53)$$

Vale dunque la seguente relazione:

$$\phi(\rho) = \mathbf{E}(\rho) \cdot \mathbf{n}^\rho. \quad (3.54)$$

Enunciamo inoltre il seguente Lemma ([MZ06]) con il quale sarà in seguito possibile calcolare la derivata del termine $E(\rho)$ rispetto al parametro ρ e valutare tale derivata in $\rho = 0$:

Lemma 3.3. *Sia $\eta \in H^2(0, T; H^2(\Gamma(t)))$, allora vale il seguente risultato:*

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &:= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial(\eta + \rho\delta\eta)}{\partial t} \circ (\eta + \rho\delta\eta)^{-1} \right) \Big|_{\rho=0} \mathbf{e}_2 = \\ &= \frac{\partial(\delta\eta \circ \eta^{-1})}{\partial t} \mathbf{e}_2 - \nabla \left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial t} \circ \eta^{-1} \right) \mathbf{e}_2 \right) \gamma. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Grazie al lemma appena introdotto e alla definizione di velocità del solido \mathbf{u}_S espressa in (3.25), è possibile dimostrare la seguente relazione:

$$\frac{\partial\mathbf{E}(\rho)}{\partial\rho} \Big|_{\rho=0} = -\rho_F(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{W}_0 + \rho_F [(\nabla\mathbf{u}\gamma) + (\nabla\mathbf{v}\gamma)] \mathbf{u}_S. \quad (3.56)$$

In modo analogo a quanto fatto per il termine $G(\rho)$, utilizzando i Teoremi 2.5 e 2.6 e i lemmi introdotti in questa Sezione, è possibile calcolare le derivate dei restanti termini che compongono il funzionale Lagrangiano \mathcal{L}_ρ rispetto al parametro reale ρ . In particolare, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left(\int_0^T \int_{\Gamma_\rho(t)} \phi(\rho) d\sigma \right) \Big|_{\rho=0} &= -\rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &+ \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} [(\nabla\mathbf{u}\gamma) \cdot \mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v}\gamma) \cdot \mathbf{u}] (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \operatorname{div}(\rho_F(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}_S)(\gamma \cdot \mathbf{n}) dz dt; \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left(\int_0^T \int_{\Gamma_0} m(\rho) d\sigma \right) \Big|_{\rho=0} = \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\rho_S h_S \frac{\partial^2 \delta\eta}{\partial t^2} \psi + \mu_S \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\delta\eta}{\partial z} + \beta\psi \right) d\sigma dt; \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d f_F}{d\rho} \right|_{\rho=0} &= -\rho_F \int_{\Omega(T)} [(\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{u}](T) d\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Gamma(T)} \rho_F (\mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{v}(T)) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \rho_F \int_{\Omega(0)} \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma})(0) d\mathbf{x} \\
&- \rho_F \int_{\Gamma(0)} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}(0)) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma;
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\left. \frac{d}{d\rho} \left(\int_0^T b_F dt \right) \right|_{\rho=0} = \int_0^T \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) + (\nabla \boldsymbol{\lambda}_F \boldsymbol{\gamma}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D)) d\sigma dt; \tag{3.60}$$

$$\left. \frac{d}{d\rho} \left(\int_{\Gamma_0} f_S(\rho) d\sigma \right) \right|_{\rho=0} = - \int_{\Gamma_0} \left(\lambda_S^0 \delta \eta(0) + \lambda_S^1 \frac{\partial \delta \eta}{\partial t}(0) \right) d\sigma \tag{3.61}$$

$$\left. \frac{d}{d\rho} \left(\int_0^T b_S dt \right) \right|_{\rho=0} = - \int_0^T [\lambda_S \delta \eta]_0^L d\sigma dt; \tag{3.62}$$

$$\left. \frac{d J_\rho}{d\rho} \right|_{\rho=0} = -\alpha \int_0^T \int_{\Omega(t)} \nabla \mathbf{u} : \nabla (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{x} dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt. \tag{3.63}$$

Introduciamo a questo punto, per alleggerire la notazione, i funzionali A_Ω , B_Γ e C_{Γ_0} contenenti rispettivamente i termini della derivata del Lagrangiano \mathcal{L}_ρ rispetto a ρ definiti sul dominio fluido $\Omega(t)$, i contributi della derivata del Lagrangiano definiti sulla porzione di frontiera $\Gamma(t)$, interfaccia tra membrana e fluido e, infine, i termini definiti sul dominio di riferimento Γ_0 . In questo modo è dunque possibile scrivere la derivata del funzionale Lagrangiano rispetto a ρ , nella seguente forma:

$$\left. \frac{d \mathcal{L}_\rho}{d\rho} \right|_{\rho=0} = A_\Omega + B_\Gamma + C_{\Gamma_0}, \tag{3.64}$$

in cui:

$$\begin{aligned}
A_\Omega &= -\alpha \int_0^T \int_{\Omega(t)} \nabla \mathbf{u} : \nabla (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{x} dt - \int_0^T \int_{\Omega(t)} \rho_F \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma})}{\partial t} \right] d\mathbf{x} dt \\
&- \int_0^T \int_{\Omega(t)} [p \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) + (\nabla p \cdot \boldsymbol{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{v}] d\mathbf{x} dt \\
&+ \mu_F \int_0^T \int_{\Omega(t)} [\nabla (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) : \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{v} : \nabla (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma})] d\mathbf{x} dt \\
&+ \rho_F \int_{\Omega(T)} [(\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{u}](T) d\mathbf{x} - \rho_F \int_{\Omega(0)} \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma})(0) d\mathbf{x} \\
&- \int_0^T \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) + (\nabla \boldsymbol{\lambda}_F \boldsymbol{\gamma}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D)) d\sigma dt;
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
B_\Gamma &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt + \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \left[-\rho_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu_F \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - q \operatorname{div} \mathbf{u} \right] (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \operatorname{div}(\rho_F (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}_S) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\
&\quad - \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} [(\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{u}] (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\
&\quad - \int_{\Gamma(T)} \rho_F (\mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{v}(T)) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \rho_F \int_{\Gamma(0)} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}(0)) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma ;
\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
C_{\Gamma_0} &= - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\rho_S h_S \frac{\partial^2 \delta \eta}{\partial t^2} \psi + \mu_S \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \delta \eta}{\partial z} + \beta \psi \right) dz dt \\
&\quad + \int_0^T [\lambda_S \delta \eta]_0^L dt + \int_{\Gamma_0} \left(\lambda_S^0 \delta \eta(0) + \lambda_S^1 \frac{\partial \delta \eta}{\partial t}(0) \right) dz .
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Cerchiamo ora un modo per semplificare alcuni termini della derivata di \mathcal{L} rispetto a ρ . Seguendo la strategia di Moubachir e Zolésio [MZ06], assumiamo che $(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q)$ sia un punto di sella per il Lagrangiano \mathcal{L} ; in questo caso è possibile dimostrare il seguente lemma (chiamato *shape derivative kernel identity*):

Lemma 3.4. *Sia $(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q) \in V_F(\Omega) \times Q_F(\Omega) \times V_0(\Omega) \times Q_F(\Omega)$ un punto di sella del Lagrangiano \mathcal{L} definito in (3.26). Vale allora la seguente identità:*

$$\begin{aligned}
&\alpha \int_0^T \int_{\Omega(t)} \nabla \mathbf{u} : \nabla (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{x} dt + \rho_F \int_0^T \int_{\Omega(t)} \left((\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma})}{\partial t} \right) d\mathbf{x} dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega(t)} (p \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) + q \operatorname{div} (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma})) d\mathbf{x} dt \\
&- \mu_F \int_0^T \int_{\Omega(t)} (\nabla \mathbf{u} : \nabla (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) + \nabla (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) : \nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x} dt \\
&- \rho_F \int_{\Omega(T)} ((\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma})) (T) d\mathbf{x} + \rho_F \int_{\Omega(0)} \mathbf{u}_0 \cdot (\nabla \mathbf{v}(0) \boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{x} \\
&+ \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) + (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{v}) d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega(t)} ((\nabla p \cdot \boldsymbol{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{v} + (\nabla q \cdot \boldsymbol{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{u}) d\mathbf{x} dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_D} (\nabla \boldsymbol{\lambda}_F \boldsymbol{\gamma}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) d\sigma dt = 0
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Definiamo un nuovo funzionale Lagrangiano \mathcal{L}^d , nel quale le funzioni test del problema solido e quelle del problema fluido sono discontinue all'interfaccia;

ovvero consideriamo nella relazione (3.26) funzioni test (\mathbf{v}, ψ) non più appartenenti allo spazio $S(\Omega)$, il quale garantisce la continuità all'interfaccia, ma semplicemente appartenenti allo spazio: $V_0(\Omega) \times V_S$.

In tal modo si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^d(\mathbf{u}, \eta, p; \mathbf{v}, \psi, q; \Omega) &= \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{u}, \eta, p; \mathbf{v}, \psi, q; \Omega) + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \psi \circ \eta^{-1} \mathbf{e}_2) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Si ricordi che, per ipotesi, $(\mathbf{u}, p, \mathbf{v}, q)$ è un punto di sella per il Lagrangiano \mathcal{L} ; di conseguenza la derivata di \mathcal{L} , rispetto a (\mathbf{u}, \mathbf{v}) , valutata su qualsiasi variazione $(\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) \in V_F(\Omega) \times V_0(\Omega)$, deve essere nulla. Vale dunque la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}^d}{\partial (\mathbf{u}, \mathbf{v})}, (\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) \right\rangle &= \alpha \int_0^T \int_{\Omega(t)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \delta \mathbf{u} d\mathbf{x} dt \\ &+ \rho_F \int_0^T \int_{\Omega(t)} \left(\delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \right) d\mathbf{x} dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega(t)} (p \operatorname{div}(\delta \mathbf{v}) + q \operatorname{div}(\delta \mathbf{u})) d\mathbf{x} dt \\ &- \mu_F \int_0^T \int_{\Omega(t)} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \delta \mathbf{v} + \nabla \delta \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x} dt \\ &- \rho_F \int_{\Omega(T)} (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v})(T) d\mathbf{x} + \rho_F \int_{\Omega(0)} \mathbf{u}_0 \cdot \delta \mathbf{v}(0) d\mathbf{x} \\ &+ \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_F \cdot \delta \mathbf{u} d\sigma dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{v} + (\mu_F \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \psi \circ \eta^{-1} \mathbf{e}_2) d\sigma dt = 0 \\ &\quad \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) \in V_F(\Omega) \times V_0(\Omega). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Procedendo in modo analogo per le variabili p, q e $\boldsymbol{\lambda}_F$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}^d}{\partial (p, q)}, (\delta p, \delta q) \right\rangle &= \int_0^T \int_{\Omega(t)} (\delta p \operatorname{div} \mathbf{v} + \delta q \operatorname{div} \mathbf{u}) d\mathbf{x} dt \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \delta p (\mathbf{v} - \psi \circ \eta^{-1} \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt = 0 \\ &\quad \forall (\delta p, \delta q) \in Q_F(\Omega) \times Q_F(\Omega); \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}^d}{\partial \boldsymbol{\lambda}_F}, \delta \boldsymbol{\lambda}_F \right\rangle &= \int_0^T \int_{\Omega_D} \delta \boldsymbol{\lambda}_F (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) d\sigma dt = 0 \\ &\quad \forall \delta \boldsymbol{\lambda}_F \in W_F. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Sommando le relazioni (3.69), (3.70) e (3.71) appena ricavate, si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned}
& \alpha \int_0^T \int_{\Omega(t)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \, dt + \rho_F \int_0^T \int_{\Omega(t)} \left(\delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} \right) d\mathbf{x} \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega(t)} (p \operatorname{div}(\delta \mathbf{v}) + q \operatorname{div}(\delta \mathbf{u})) \, d\mathbf{x} \, dt \\
& - \mu_F \int_0^T \int_{\Omega(t)} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \delta \mathbf{v} + \nabla \delta \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \, dt \\
& - \rho_F \int_{\Omega(T)} (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v})(T) \, d\mathbf{x} + \rho_F \int_{\Omega(0)} \mathbf{u}_0 \cdot \delta \mathbf{v}(0) \, d\mathbf{x} \\
& + \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\sigma \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_F \cdot \delta \mathbf{u} \, d\sigma \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{v} + (\mu_F \nabla \delta \mathbf{u} \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \psi \circ \eta^{-1} \mathbf{e}_2) \, d\sigma \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega(t)} (\delta p \operatorname{div} \mathbf{v} + \delta q \operatorname{div} \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \, dt \\
& - \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \delta p (\mathbf{v} - \psi \circ \eta^{-1} \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_D} \delta \boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \, d\sigma \, dt = 0 \\
& \quad \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}, \delta p, \delta q, \delta \boldsymbol{\lambda}_F) \in V_F(\Omega) \times V_0(\Omega) \times Q_F(\Omega) \times Q_F(\Omega) \times W_F.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Imponendo, infine, nella relazione (3.72) le seguenti perturbazioni:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u} &= \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}, & \delta \mathbf{v} &= \nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}, \\
\delta p &= \nabla p \cdot \boldsymbol{\gamma}, & \delta q &= \nabla q \cdot \boldsymbol{\gamma}, \\
\delta \boldsymbol{\lambda}_F &= \nabla \boldsymbol{\lambda}_F \boldsymbol{\gamma},
\end{aligned}$$

e ricordando che sull'interfaccia $\Gamma(t)$ la velocità del fluido e del solido sono continue -tale condizione è imposta in modo essenziale mediante la definizione dello spazio $S(\Omega)$ - ovvero:

$$\mathbf{v} = \psi \circ \eta^{-1} \mathbf{e}_2, \quad \text{su } \Gamma(t) \tag{3.73}$$

segue la tesi. \square

Grazie alla *shape derivative kernel identity* appena dimostrata, è possibile semplificare il termine A_Ω definito in (3.65); sommando infatti alla definizione di A_Ω l'identità enunciata nel Lemma 3.4, si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
A_\Omega &= \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\rho_F (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) + (\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{v})) \, d\sigma \, dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) \, d\sigma \, dt.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Occupiamoci ora di semplificare il secondo termine B_Γ definito in (3.66) andando ad esplicitare il termine di divergenza presente in esso. A tal proposito, utilizziamo il seguente lemma dall'immediata verifica:

Lemma 3.5. *Siano \mathbf{u} e \mathbf{v} , la velocità del fluido, rispettivamente, nel problema di stato (3.4) e nel problema aggiunto (3.32). Sia inoltre \mathbf{u}_S la velocità di spostamento della membrana solida definita in (3.25); vale dunque la seguente relazione:*

$$\operatorname{div}(\rho_F(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}_S) = \rho_F \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_S + \rho_F(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{u}_S. \quad (3.75)$$

Sommando quindi i contributi dei funzionali A_Ω espresso in (3.74), B_Γ introdotto in (3.66), e del funzionale C_{Γ_0} definito in (3.67), è possibile dimostrare che la derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto al parametro ρ assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{L}}{d\rho} \right|_{\rho=0} &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma}) d\sigma dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \left[-\rho_F \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu_F \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - q \operatorname{div} \mathbf{u} \right] (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &\quad + \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &\quad + \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\rho_F \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_S + \rho_F(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{u}_S) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &\quad - \int_{\Gamma(T)} \rho_F(\mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{v}(T)) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \rho_F \int_{\Gamma(0)} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}(0)) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\rho_S h_S \frac{\partial^2 \delta \eta}{\partial t^2} \psi + \mu_S \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \delta \eta}{\partial z} + \beta \psi \right) dz dt + \int_0^T [\lambda_S \delta \eta]_0^L dt \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} \left(\lambda_S^0 \delta \eta(0) + \lambda_S^1 \frac{\partial \delta \eta}{\partial t}(0) \right) dz. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Tale espressione può essere nuovamente semplificata, esplicitando il termine contenente il campo vettoriale \mathbf{W}_0 che, ricordiamo, è definito come segue:

$$\mathbf{W}_0 = \frac{\partial(\delta \eta \circ \eta^{-1})}{\partial t} \mathbf{e}_2 - \nabla \mathbf{u}_S \boldsymbol{\gamma} \quad (3.77)$$

ed eliminando da tale termine la derivata in tempo della variazione $\delta \eta$. Questa scelta, oltre a semplificare l'espressione della derivata del funzionale (3.76) come anticipato, sarà utile in seguito per esprimere il problema aggiunto per il solido, in forma forte.

Un'ulteriore semplificazione dell'espressione (3.76) è possibile grazie al seguente risultato (per la cui dimostrazione si rimanda a[MZ06]):

Lemma 3.6. *Sia \mathbf{E} una campo vettoriale definito sul dominio D tale che $\Omega(t) \subset D \forall t \geq 0$; vale allora la seguente identità:*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial(\delta\eta \circ \eta^{-1})}{\partial t} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_2 &= \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \left[-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - (\operatorname{div}_{\Gamma(t)} \mathbf{u}_S) \mathbf{E} - \nabla \mathbf{E} \mathbf{u}_S \right] \cdot \boldsymbol{\gamma} \\ &+ \left[\int_{\Gamma(t)} \mathbf{E} \boldsymbol{\gamma} \right]_0^T. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Applichiamo questo lemma nel caso in cui $\mathbf{E} = \rho_F(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}$ ed utilizziamo la definizione di divergenza tangenziale (si veda la Sezione 2.2.3), ottenendo:

$$\begin{aligned} \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial(\delta\eta \circ \eta^{-1})}{\partial t} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 &= -\rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} \right) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &- \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \left(\operatorname{div} \mathbf{u}_S - \frac{\partial \mathbf{u}_S}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \right) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &- \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\nabla((\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}) \mathbf{u}_S) \cdot \boldsymbol{\gamma} d\sigma dt \\ &+ \rho_F \int_{\Gamma(T)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(T) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma - \rho_F \int_{\Gamma(0)} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}(0)) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Si noti che, all'interno della relazione espressa in (3.79), compare lo Jacobiano del termine $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}$; è possibile semplificare questo termine con l'ausilio del seguente lemma:

Lemma 3.7. *Sia $\mathbf{u}_S = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \circ \eta^{-1}\right) \mathbf{e}_2$ la velocità di spostamento del solido in direzione verticale e \mathbf{n} il versore normale uscente dalla porzione di frontiera $\Gamma(t)$; allora vale la seguente relazione:*

$$\begin{aligned} \rho_F (\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_S) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) - \rho_F (\nabla((\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}) \mathbf{u}_S) \cdot \boldsymbol{\gamma} &= \\ &- \rho_F (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) ((\nabla_{\Gamma(t)} \mathbf{n} + \mathbf{N}) \mathbf{u}_S) \cdot \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Dimostrazione. Poniamo $f = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ e $\mathbf{u}_S = (0, u_S)^T$ per non appesantire la notazione. In questo modo, ricordando la definizione di velocità del solido \mathbf{u}_S e che la mappa $\boldsymbol{\gamma}$, definita in (3.39), ristretta sulla porzione di frontiera $\Gamma(t)$ vale $\delta\eta \mathbf{e}_2$, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \rho_F (\nabla f \cdot \mathbf{u}_S) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) &= \rho_F \frac{\partial f}{\partial y} \delta\eta u_S n_2, \\ \rho_F (\nabla(f \mathbf{n}) \mathbf{u}_S) \cdot \boldsymbol{\gamma} &= \rho_F \frac{\partial(f n_2)}{\partial y} u_S \delta\eta = \rho_F \left(\frac{\partial f}{\partial y} n_2 + \frac{\partial n_2}{\partial y} f \right) u_S \delta\eta, \end{aligned}$$

in cui n_2 rappresenta la seconda componente del versore normale uscente alla curva $\Gamma(t)$. Sottraendo la seconda relazione alla prima si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho_F(\nabla f \cdot \mathbf{u}_S)(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) - \rho_F(\nabla(f \mathbf{n}) \mathbf{u}_S) \cdot \boldsymbol{\gamma} &= \\ &= -\rho_F \frac{\partial n_2}{\partial y} f u_S \delta \eta = -\rho_F(\nabla \mathbf{n} f \mathbf{u}_S) \cdot \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Utilizzando il Lemma 2.3, che esprime la relazione tra Jacobiano del versore normale \mathbf{n} e Jacobiano tangenziale $\nabla_{\Gamma(t)} \mathbf{n}$ di tale versore, segue la tesi. \square

Concludiamo questa Sezione utilizzando il risultato fornito dal Lemma 3.7 e dalla relazione (3.79), per semplificare l'espressione della derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} espresso in (3.76), nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{L}}{d\rho} \right|_{\rho=0} &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &\quad - \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \right) (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &\quad - \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) ((\nabla_{\Gamma(t)} \mathbf{n} + \mathbf{N}) \mathbf{u}_S) \cdot \boldsymbol{\gamma} d\sigma dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\rho_S h_S \frac{\partial^2 \delta \eta}{\partial t^2} \psi + \mu_S \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \delta \eta}{\partial z} + \beta \psi \right) d\sigma dt + \int_0^T [\lambda_S \delta \eta]_0^L dt \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} \left(\lambda_S^0 \delta \eta(0) + \lambda_S^1 \frac{\partial \delta \eta}{\partial t}(0) \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Nella Sezione 2.3.2 abbiamo visto che per scrivere la formulazione debole del problema aggiunto per la componente solida, mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange basata su una formulazione punto-sella del problema di ottimizzazione di forma, occorre annullare la derivata del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} , per ogni variazione $\delta \eta \in V_S$. Occorre dunque imporre:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}, \delta \eta \right\rangle = \left. \frac{d\mathcal{L}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad \forall \delta \eta \in V_S. \quad (3.83)$$

Per ottenere la forma forte del problema aggiunto per la componente solida, integriamo per parti l'espressione (3.82); in questo modo si ottiene:

$$\begin{cases} \rho_S h_S \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \beta \psi = g & \text{su } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 & \forall t \in (0, T) \\ \psi(x)|_{t=T} = \frac{\partial \psi}{\partial t}(x) \Big|_{t=T} = 0 & \forall x \in \Gamma_0, \end{cases} \quad (3.84)$$

con la forzante g espressa dalla seguente relazione:

$$g = \left(\frac{\alpha}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 n_2 - \rho_F \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} \right) n_2 - \rho_F (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) ((\nabla_{\Gamma} \mathbf{n} + \mathbf{N}) \mathbf{u}_S) \cdot \mathbf{e}_2 \right) \Big|_{\Gamma(t)} \quad (3.85)$$

in cui n_2 rappresenta la seconda componente del versore normale uscente \mathbf{n} dalla curva $\Gamma(t)$. Ponendo inoltre $\delta\eta = \phi \in \mathcal{D}(\{0\})$ e $\delta\eta = \phi \in \mathcal{D}(\{L\})$, è possibile dimostrare che il moltiplicatore di Lagrange λ_S , associato alle condizioni di Dirichlet del problema relativo alla struttura solida, assume la seguente forma:

$$\lambda_S = -\mu_S \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{su } (\{0\} \cup \{L\}) \times (0, T). \quad (3.86)$$

In modo analogo, è possibile esplicitare anche il valore dei moltiplicatori di Lagrange λ_S^0 e λ_S^1 , relativi alle condizioni iniziali del problema di stato per il solido.

In particolare valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \lambda_S^0 &= -\frac{\partial \psi}{\partial t}(0) \quad \text{su } \Gamma_0 \times \{0\}, \\ \lambda_S^1 &= \psi(0) \quad \text{su } \Gamma_0 \times \{0\}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

Si noti che il problema aggiunto per la struttura presentato in (3.84) assume una forma analoga al problema di stato per la componente solida (ottenuta mediante un *modello di Koiter*), con una forzante dipendente dalla soluzione del problema di stato (sia fluido che solido) e dalla velocità \mathbf{v} , soluzione del problema aggiunto per il fluido. Anche il problema aggiunto per la componente solida risulta *backward* in tempo; si può dedurre questa caratteristica del problema notando che le condizioni iniziali per il problema sono fornite per l'istante temporale $t = T$. Queste condizioni saranno di grande importanza nel Capitolo 4, nel momento in cui verrà presentato un algoritmo numerico per la risoluzione di un problema di ottimizzazione di forma in cui il problema di stato è un problema FSI.

3.5.3 Calcolo della derivata di forma del Lagrangiano

Per concludere la dimostrazione del risultato presentato nella Sezione 3.2 occorre fornire una caratterizzazione dell'espressione dello *Shape Gradient* del funzionale costo J . Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per calcolare la derivata di forma del funzionale costo J occorre calcolare la *shape derivative* del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} definito in (3.26) e valutarla rispetto alla generica variazione $\boldsymbol{\theta} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Ricordiamo, con riferimento alla figura (3.2), che l'unica porzione di dominio su cui si può agire durante il processo di ottimizzazione, nel problema studiato, è $\Gamma_b^M \subseteq \Gamma_b$ con $\Gamma_b^M \neq \emptyset$. È possibile tradurre questa ipotesi in una condizione sul campo di spostamento θ . Come visto nella Sezione 3.1, ogni dominio ammissibile

$\Omega \in \mathcal{O}_{ad}$ può essere definito come immagine di un dominio di riferimento Ω_0 , mediante una mappa del tipo *perturbazione dell'identità* $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}$; richiedere dunque che la porzione di frontiera $\partial\Omega_0 \setminus \Gamma_b^M$ sia fissa equivale ad imporre la seguente condizione sul campo di spostamento $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_b^M. \quad (3.88)$$

Prima di procedere con la derivazione del funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto al dominio Ω , integriamo per parti il contributo dell'equazione di stato per il fluido che compare nel funzionale Lagrangiano. In questo modo il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} assume una forma analoga al funzionale Lagrangiano introdotto nella Sezione 2.4 per la scrittura delle condizioni di ottimalità nel caso di un problema di Stokes stazionario. Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \eta; \mathbf{v}, q, \psi; \Omega) &= \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Omega(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega(t)} \left(-\rho_F \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p - \mu_F \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - q \operatorname{div} \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\sigma dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\rho_S h_S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \psi + \mu_S \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta \eta \psi \right) \psi dz dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) d\sigma dt + \rho_F \int_0^T \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &\quad - \rho_F \int_{\Omega(T)} \mathbf{u}(T) \cdot \mathbf{v}(T) d\mathbf{x} + \rho_F \int_{\Omega(0)} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}(0) d\mathbf{x} + \int_0^T [\lambda_S \eta]_0^L dt \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} \left(\lambda_S^0 \delta \eta(0) + \lambda_S^1 \frac{\partial \delta \eta}{\partial t}(0) \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Siamo dunque pronti per derivare il funzionale Lagrangiano \mathcal{L} rispetto al dominio Ω in direzione $\boldsymbol{\theta}$. Utilizzando i risultati di *Shape Calculus* introdotti nella Sezione 2.2.2, e in particolare i risultati sulla derivazione di integrali la cui integranda non dipende dal dominio Ω , e imponendo la condizione (3.88), si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{aligned} J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega_0}, \boldsymbol{\theta} \right\rangle = \\ &\quad \int_0^T \int_{\Gamma_b^M} \left(\frac{\alpha}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \rho_F \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla p + \mu_F \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + q \operatorname{div} \mathbf{u} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &\quad \int_0^T \int_{\Gamma_b^M} \left(H \boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) + \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_F \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D))}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.90)$$

È possibile ora semplificare l'espressione di tale derivata, sfruttando l'equazione di continuità del problema fluido e le condizioni al contorno del problema di stato e del problema aggiunto. In particolare, si ricordi che

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \text{su } \Gamma_b^M. \quad (3.91)$$

Utilizzando l'espressione di $\boldsymbol{\lambda}_F$ definita in (3.33), ricavata durante la scrittura del problema aggiunto per il fluido, è possibile dimostrare, in modo analogo a quanto fatto nella Sezione 2.4, che la derivata di forma del funzionale costo J assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} J'(\Omega_0)(\boldsymbol{\theta}) &= \int_0^T \int_{\Gamma_b^M} \left(\frac{\alpha}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \frac{\partial((\boldsymbol{\sigma}^F(\mathbf{v}, q) \mathbf{n} - \alpha \nabla \mathbf{u} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt \\ &= \mu_F \int_0^T \int_{\Gamma_b^M} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{z})(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt - \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_b^M} |\nabla \mathbf{u}|^2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Si noti che tale espressione della derivata di forma del funzionale J assume una forma compatibile con la *formula di Hadamard*, definita nel Teorema 2.7. Inoltre lo *Shape Gradient* ∇J del funzionale costo J è dato da:

$$\nabla J = \left[\mu_F \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{z} - \frac{\alpha}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 \right] \mathbf{n}. \quad (3.93)$$

Con questo concludiamo l'analisi teorica e la scrittura delle condizioni di ottimalità di un problema di controllo di flusso mediante ottimizzazione di forma, in presenza di interazione fluido-struttura.

I risultati ottenuti in questo Capitolo sono alla base dei metodi di approssimazione numerici descritti nel Capitolo successivo per la soluzione di un problema di *design* ottimale in presenza di interazione tra fluido e struttura.

Capitolo 4

Metodi numerici per l'ottimizzazione di forma in ambito FSI

Dopo aver introdotto i concetti teorici relativi ai problemi di ottimizzazione di forma (Capitolo 2) e aver enunciato le condizioni di ottimalità per un problema di controllo del flusso mediante *Shape Optimization* in presenza di interazione fluido-struttura (nel Capitolo 3), descriviamo in questo Capitolo alcuni metodi numerici per la risoluzione di tali problemi.

In particolare, nella Sezione 4.1 viene presentato uno schema iterativo per la risoluzione di problemi di *Shape Optimization*, che verrà illustrato in dettaglio nelle Sezioni successive. In particolare, viene introdotto un algoritmo per la risoluzione del problema aggiunto relativo ad un problema FSI, basato sul metodo *Dirichlet-Neumann* utilizzato nella risoluzione del problema di stato nella Sezione 1.4.

Dopo un breve richiamo al *metodo del gradiente* per un generico problema di ottimizzazione, nella Sezione 4.3 viene mostrato come estendere questo algoritmo al caso dell'ottimizzazione di forma. In particolare, vengono illustrate le procedure mediante le quali scegliere il passo di discesa e imporre opportuni vincoli di volumi al dominio cercato. Nella Sezione 4.3.2 vengono presentati tre diversi approcci mediante i quali è possibile deformare il dominio di riferimento durante il processo di ottimizzazione. Nella Sezione 4.4 ci soffermeremo su una di queste tecniche illustrando un algoritmo numerico che implementa un'estensione della mappa *Free Form Deformation* basata sulle Non-Uniform Rational B-Splines (o NURBS). Grazie a questo schema numerico è possibile deformare il dominio di riferimento in maniera veloce ed efficiente.

4.1 Una procedura iterativa per l'ottimizzazione di forma

In questa Sezione viene descritto lo schema iterativo, basato su un approccio di tipo *ottimizza e discretizza* per la risoluzione di un problema di ottimizzazione di forma. Secondo questo approccio occorre in una prima fase scrivere le condizioni di ottimalità e, in una seconda fase, discretizzare il sistema di queste condizioni.

A partire da una configurazione iniziale $\Omega^{(0)}$, l'algoritmo iterativo presentato, alla k -esima iterazione, può essere schematizzato nel seguente modo:

1. si discretizza e si risolve il problema di stato sul dominio $\Omega^{(k)}$; ciò equivale a risolvere il problema FSI mediante il metodo partizionato basato su una mappa di tipo *Dirichlet-Neumann* presentato nella Sezione 1.4, per ricavare la velocità $\mathbf{u}_h^{(k)}$ e la pressione $p_h^{(k)}$ del fluido e lo spostamento $\eta_h^{(k)}$ della struttura. Per non appesantire la notazione, denotiamo con $\mathbf{y}_h^{(k)} = (\mathbf{u}_h^{(k)}, p_h^{(k)}, \eta_h^{(k)})$;
2. si valuta il funzionale costo: $J_h(\Omega^{(k)}) = J(\Omega^{(k)}, \mathbf{y}_h^{(k)})$;
3. si discretizza e si risolve il problema aggiunto sul dominio $\Omega^{(k)}$ per ricavare le variabili aggiunte, che indicheremo con $\mathbf{z}_h^{(k)}$. Per maggiori dettagli sulla risoluzione del problema aggiunto FSI, si rimanda alla Sezione 4.2.
4. utilizzando le variabili di stato $\mathbf{y}_h^{(k)}$ e le variabili aggiunte $\mathbf{z}_h^{(k)}$, si calcola lo *shape gradient* del funzionale costo J_h : $\nabla J_h(\Omega^{(k)}) = \nabla J(\Omega^{(k)}, \mathbf{y}_h^{(k)}, \mathbf{z}_h^{(k)})$;
5. le informazioni ottenute mediante lo *shape gradient* vengono elaborate per aggiornare la forma in un nuovo dominio $\Omega^{(k+1)}$;

fino al soddisfacimento di una certa *condizione di arresto*. In letteratura, le scelte più comuni di condizioni di arresto nei problemi di ottimizzazione (e in particolare di *Shape Optimization*) tengono in conto:

- il numero di iterazioni dell'algoritmo;
- un'opportuna norma $\|\cdot\|$ dello *Shape Gradient*: si arresta la procedura quando $\|\nabla J_h(\Omega^{(k)})\| < \tau$, per una tolleranza $\tau > 0$ fissata;
- la differenza tra il funzionale costo valutato in due iterazioni successive: si arresta la procedura quando $|J_h(\Omega^{(k+1)}) - J_h(\Omega^{(k)})| < \tau$, per una tolleranza $\tau > 0$ fissata.

Maggiori dettagli computazionali su questa procedura vengono forniti nelle successive Sezioni.

4.2 Soluzione numerica del problema aggiunto FSI

In questa Sezione viene illustrato un algoritmo per la risoluzione del problema aggiunto (presentato nella Sezione 3.2) ottenuto a partire da un problema di interazione fluido-struttura.

Osserviamo in particolare che il problema aggiunto da risolvere è anch'esso un problema FSI *backward* in tempo, corredato di opportune condizioni finali. Per tale motivo lo schema presentato viene basato sul metodo partizionato in cui le condizioni di accoppiamento sono imposte mediante una mappa di tipo *Dirichlet-Neumann* (definito nella Sezione 1.4), opportunamente modificato.

Si consideri la discretizzazione temporale, utilizzata per la risoluzione del problema di stato: sia a tal proposito, $t^n = n \Delta t$ dove Δt indica il passo di discretizzazione temporale e $n = 0, \dots, N$ tale per cui $t^N = T$ e si denoti con g^n la generica funzione $g(t)$, valutata al tempo $t = t^n$.

Il problema aggiunto al tempo t^n viene risolto sul dominio Ω^n , che rappresenta il dominio deformato per effetto dell'interazione tra il fluido e la struttura, nel problema di stato, al tempo t^n (si veda [PVV11] per maggiori dettagli). Nel problema aggiunto dunque i domini tempo-dipendenti non vengono modificati, ma sono noti dalla risoluzione del problema di stato.

Ricordando che il problema aggiunto è *backward* in tempo, lo schema iterativo presentato è il seguente: al tempo t^n , fissata una tolleranza $\tau \geq 0$, data la soluzione $(\mathbf{u}^n, p^n, \eta^n; \Omega^n)$ del problema di stato all'istante temporale t^n e la soluzione $(\mathbf{v}^{n+1}, q^{n+1}, \psi^{n+1})$ del problema aggiunto all'istante temporale t^{n+1} , occorre, per ogni $k = 1, 2, \dots$:

1. **risolvere il sotto-problema fluido aggiunto:** trovare (\mathbf{v}_k, q_k) tale che:

$$\begin{cases} \rho_F \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}_k}{\Delta t} - \nabla q_k + \mu_F \Delta \mathbf{v}_k = \alpha \Delta \mathbf{u}^n & \text{in } \Omega^n \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_k = 0 & \text{in } \Omega^n \\ \mathbf{v}_k = \left(\psi_{k-1} \circ \tilde{\mathcal{A}}_t^{-1} \right) \Big|_{\Gamma(t)} \cdot \mathbf{e}_2 & \text{su } \Gamma^n ; \end{cases} \quad (4.1)$$

2. **risolvere il sotto-problema solido aggiunto:** trovare $\tilde{\psi}_k$ tale che:

$$\begin{cases} \rho_S h_S \frac{\tilde{\psi}_k - 2\eta^{n+1} + \eta^{n+2}}{\Delta t^2} - \mu_S \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_k}{\partial z^2} + \beta \tilde{\psi}_k = g_k & \text{su } \Gamma_0 \\ g_k = \left(\frac{\alpha}{2} |\nabla \mathbf{u}^n|^2 n_2(\Gamma^n) - \rho_F \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}_k \right) n_2(\Gamma^n) \right) \Big|_{\Gamma^n} \\ \quad - (\rho_F (\mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v}_k) (G^n \mathbf{u}_S^n) \cdot \mathbf{e}_2) \Big|_{\Gamma^n} ; \end{cases} \quad (4.2)$$

dove si indica con $n_2(\Gamma^n)$ la seconda componente del versore normale uscente dalla curva Γ^n e con

$$G^n = \nabla_{\Gamma^n}(\mathbf{n}(\Gamma^n)) + \mathbf{N}(\Gamma^n) ; \quad (4.3)$$

3. **effettuare un passo di rilassamento**, aggiornando la struttura secondo la seguente relazione:

$$\psi_k = \omega \tilde{\psi}_k + (1 - \omega) \psi_{k+1} , \quad (4.4)$$

dove $\omega \in (0, 1)$ è un *parametro di rilassamento*;

4. **eseguire il seguente test di convergenza:**

- se $\|\psi_k - \psi_{k+1}\|_{L^2(\Gamma_0)} < \tau$ allora porre $\psi^n = \psi_k$ e $\mathbf{v}^n = \mathbf{v}_k$;
- altrimenti porre $k = k + 1$ e tornare allo step 1.

Dopo aver opportunamente approssimato il sotto-problema per la componente fluida (4.1) e il sotto-problema per la componente solida (4.2), utilizzando il metodo degli elementi finiti in modo analogo a quanto fatto per il problema di stato nella Sezione 1.4.2, lo schema iterativo presentato in questa Sezione fornisce la soluzione approssimata del problema aggiunto FSI.

4.3 Un metodo di discesa per l'ottimizzazione di forma

Analogamente ai problemi di ottimizzazione in \mathbb{R}^n , per la risoluzione di problemi di ottimizzazione di forma è possibile sviluppare una procedura basata sulla ricerca di opportune direzioni di discesa (come ad esempio il metodo del gradiente).

Ricordiamo brevemente l'algoritmo su cui si basa il metodo del gradiente in \mathbb{R}^n . Dato un funzionale costo $J(\mathbf{x})$ da minimizzare e un punto iniziale \mathbf{x}_0 , tale metodo prevede la costruzione di una successione di punti $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 0}$, che approssima il valore ottimo \mathbf{x}^* , fino al soddisfacimento di un opportuno criterio di arresto. La regola secondo la quale tale successione viene costruita è la seguente:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k ,$$

in cui α_k rappresenta il passo di discesa, mentre \mathbf{d}_k è la direzione in cui il punto \mathbf{x}_{k+1} verrà ricercato. Nel metodo del gradiente si sceglie la direzione $\mathbf{d}_k = -\nabla J(\mathbf{X}_k)$; grazie a questa scelta è possibile dimostrare che, per opportuni valori del passo α_k , vale $J(\mathbf{x}_{k+1}) < J(\mathbf{x}_k)$, ovvero che il metodo del gradiente è un **metodo di discesa**.

Nella Sezione 2.2.2, abbiamo visto che per un'ampia classe di problemi di *Shape Optimization*, vale il teorema di struttura di Hadamard, secondo il quale la derivata di forma un funzionale J può essere espressa nel seguente modo (*Formula di Hadamard*):

$$J'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\Gamma_M} g(\Omega)(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) d\sigma; \quad (4.5)$$

dove indichiamo con $\Gamma_M \subseteq \partial\Omega$ la porzione di frontiera soggetta al processo di ottimizzazione (ricordiamo che vale $\boldsymbol{\theta} = 0$ su $\partial\Omega \setminus \Gamma_M$). Si ricordi che, utilizzando il teorema di Struttura di Hadamard, lo *Shape Gradient* ∇J del funzionale J assume la seguente forma:

$$\nabla J = g(\Omega)|_{\Gamma_M} \mathbf{n}. \quad (4.6)$$

Possiamo dunque utilizzare questa informazione per definire una direzione di discesa, aggiornando il dominio, alla k -esima iterazione dello schema presentato nella Sezione 4.1, mediante una variazione locale del contorno, nel seguente modo:

$$\partial\Omega^{(k+1)} = \mathbf{T}_k(\partial\Omega^{(k)}) = (\mathbf{I} + \alpha_k \boldsymbol{\theta}_k)(\partial\Omega^{(k)}), \quad \text{con } \boldsymbol{\theta}_k = -g(\Omega^{(k)})\mathbf{n}^{(k)}, \quad (4.7)$$

in cui $\mathbf{n}^{(k)}$ indica il versore uscente da $\partial\Omega^{(k)}$ e α_k è un opportuno passo di ottimizzazione.

Per poter definire il dominio $\Omega^{(k+1)}$ occorre dunque estendere, all'interno del dominio $\Omega^{(k)}$, il campo di spostamenti $\boldsymbol{\theta}_k$ definito solamente sulla frontiera $\partial\Omega^{(k)}$, a partire dal valore di tale campo sulla porzione di dominio $\Gamma_M^{(k)}$, frontiera del dominio $\Omega^{(k)}$ deformabile in seguito al processo di ottimizzazione. Per questo motivo è possibile estendere il campo di spostamenti arbitrariamente nel dominio $\Omega^{(k)}$.

In particolare consideriamo il campo di spostamenti $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k$, estensione armonica di $\boldsymbol{\theta}_k$ di tipo *Dirichlet-Neumann* all'interno del dominio $\Omega^{(k)}$, data dalla soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k = \mathbf{0} & \text{in } \Omega^{(k)} \\ \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k}{\partial \mathbf{n}^k} = -g(\Omega^{(k)})\mathbf{n}^k & \text{su } \Gamma_M^{(k)} \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} & \text{su } \partial\Omega^{(k)} \setminus \Gamma_M^{(k)}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Grazie ai teoremi di regolarità ellittica, tale estensione garantisce una maggior regolarità della soluzione, e quindi impedisce la formazione di forti oscillazioni della frontiera $\partial\Omega^{(k)}$ a fronte di funzioni $g(\Omega^{(k)})$ poco regolari:

Analogamente al metodo del gradiente in dimensione finita, è possibile dimostrare che, per piccoli valori del passo di ottimizzazione α_k , l'algoritmo iterativo introdotto nella Sezione 4.1, risulta essere un metodo di discesa. Infatti, sviluppando il funzionale costo J utilizzando la formula di Taylor si ottiene:

$$\begin{aligned}
J(\Omega^{(k+1)}) &= J(\Omega^{(k)}) + J'(\Omega^{(k)})(\boldsymbol{\theta}_k) + o(\alpha) = \\
&= J(\Omega^{(k)}) + \int_{\Gamma_M^{(k)}} g(\Omega^{(k)})(\boldsymbol{\theta}_k \cdot \mathbf{n}^{(k)}) d\sigma + o(\alpha) \\
&= J(\Omega^{(k)}) - \int_{\Gamma_M^{(k)}} g(\Omega^{(k)})^2 d\sigma + o(\alpha) < J(\Omega^{(k)}).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Si noti che, la relazione dimostrata in (4.9), non vale per ogni passo α_k , ma solo per alcuni valori del passo di ottimizzazione. In particolare, è possibile dimostrare che il metodo iterativo proposto è un metodo di discesa se il passo di discesa α_k soddisfa le condizioni di Wolfe ([NW06]), o le condizioni di Armijo ([LY08]).

Nell'algoritmo presentato si predilige la precisione a discapito della velocità di convergenza; per questo motivo viene utilizzato un passo α_k costante, relativamente piccolo ed eventualmente aggiornato con una procedura di *back-tracking*. Questa tecnica consiste nel risolvere il problema all'iterazione k -esima in cui il dominio $\Omega^{(k)}$ è definito dalla relazione $\Omega^{(k)} = (\mathbf{I} + \alpha_{k-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) \Omega^{(k-1)}$ e, nel caso in cui non si riesca a pervenire ad una soluzione del problema di stato a causa di griglie di calcolo troppo lasche o troppo fitte (indice di instabilità nel metodo), o nel caso in cui si verifichi $J(\Omega^{(k)}) > J(\Omega^{(k+1)})$, la precedente scelta di $\Omega^{(k)}$ viene scartata e sostituita dal seguente dominio:

$$\Omega^{(k)} = \left(\mathbf{I} + \frac{\alpha_{k-1}}{\rho} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \right) \Omega^{(k-1)} \quad \text{con } \rho > 1. \tag{4.10}$$

Nella prossima Sezione ci occuperemo di un problema fino a questo momento lasciato in sospeso: come includere nell'algoritmo fin qui descritto opportune condizioni per tenere conto di eventuali vincoli di volume.

4.3.1 Vincoli di volume

In numerosi problemi di ottimizzazione di forma, così come nel caso in esame, l'insieme delle forme ammissibili $\mathcal{O}_{ad} \subseteq \mathcal{O}$ è definito tramite un vincolo di volume nel seguente modo:

$$\mathcal{O}_{ad} = \{ \Omega \in \mathcal{O} : |\Omega| = V_0 \}, \tag{4.11}$$

dove V_0 indica un volume fissato, costante. Tale vincolo di volume può essere imposto mediante *penalizzazione* introducendo un opportuno moltiplicatore di Lagrange $l_k \in \mathbb{R}$. In questo modo, la direzione di discesa del metodo del gradiente, all'iterazione k , viene così definita:

$$J'(\Omega^{(k)})(\boldsymbol{\theta}_k) + l_k V'(\Omega^{(k)})(\boldsymbol{\theta}_k), \tag{4.12}$$

dove $V(\Omega) = |\Omega|$ indica il volume del dominio Ω , mentre $V'(\Omega)(\boldsymbol{\theta})$ rappresenta la derivata di forma del volume del dominio, in direzione $\boldsymbol{\theta}$.

Per poter caratterizzare operativamente la relazione (4.12), occorre fornire una regola di aggiornamento per il moltiplicatore di Lagrange l_k . Siccome sarebbe troppo

dispendioso imporre esattamente il vincolo di volume ad ogni iterazione k , è preferibile optare per una scelta del moltiplicatore l_{k+1} basata sul volume del dominio $\Omega^{(k)}$ al passo precedente.

Fissato dunque una moltiplicatore l_0 iniziale e un parametro reale positivo $\epsilon > 0$, una prima scelta per effettuare tale aggiornamento si basa sul confronto tra il volume del dominio $\Omega^{(k)}$ e il volume di riferimento V_0 . In particolare si pone:

$$l_{k+1} = \begin{cases} l_k + \epsilon & \text{se } |\Omega^{(k)}| < V_0 \\ l_k & \text{se } |\Omega^{(k)}| = V_0 \\ l_k - \epsilon & \text{se } |\Omega^{(k)}| > V_0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Tale metodo presenta tuttavia un aspetto negativo legato alla scelta per parametro ϵ : quest'ultimo, se scelto troppo grande, può portare a grandi oscillazioni del volume dei domini deformati.

Un approccio più raffinato per l'aggiornamento del moltiplicatore di Lagrange l_k è stato proposto da Allaire e Pantz (si veda ad esempio [AP06]). Secondo questo metodo, il vincolo di volume viene imposto all'ottimo, in media sul bordo Γ_M , ponendo:

$$l_{k+1} = \frac{l_k + l}{2} + \epsilon_l (V(\Omega^{(k)}) - V_0) \quad \text{con } l = -\frac{\int_{\Gamma_M^{(k)}} g(\Omega) d\sigma}{\int_{\Gamma_M^{(k)}} d\sigma}; \quad (4.14)$$

con $\epsilon_l \in \mathbb{R}$ parametro positivo, sufficientemente piccolo. Tale approccio per l'imposizione del vincolo di volume verrà in seguito utilizzato, nella nostra trattazione, nella risoluzione approssimata di problemi di Ottimizzazione di Forma, i cui risultati saranno discussi nella Sezione 5.2.

4.3.2 Aggiornamento del dominio

Nelle Sezioni precedenti è stato mostrato come è possibile calcolare il campo di spostamento $\tilde{\theta}_k$ a partire dalle informazioni contenute nello *Shape Gradient* del funzionale costo J , con lo scopo di definire il dominio $\Omega^{(k+1)}$ all'interno dello schema iterativo proposto nella Sezione (4.1).

In letteratura sono stati presentati numerosi approcci computazionali per applicare il campo di spostamento $\tilde{\theta}_k$, al dominio $\Omega^{(k)}$. In base ai gradi di libertà utilizzati e al metodo con cui lo spostamento viene applicato, è possibile distinguere tra i seguenti metodi:

- variazione locale del contorno (o *boundary local variation*). Tale tecnica considera come gradi di libertà i nodi della griglia di calcolo che approssima il dominio $\Omega^{(k)}$, appartenenti alla frontiera del corpo da deformare. Per descrivere una deformazione mediante tale metodo occorre solamente definire lo spostamento θ_k in tali nodi, utilizzando l'espressione (4.7). Estendendo il campo

di spostamento θ_k opportunamente (ad esempio utilizzando l'estensione armonica (4.8)), è possibile deformare ogni nodo interno della griglia di calcolo. Alcune applicazioni di tale metodo in relazione a problemi di ottimizzazione di forma possono essere trovate in [AP06] e [Pir07];

- *Free Form Deformation map* (o *mappa FFD*). Introdotto in [SP86], questo metodo è stato recentemente utilizzato per risolvere problemi di *Shape Optimization* in [MQR12], [Man12] e [BMRS14]. Questa tecnica consiste nel racchiudere il dominio $\Omega^{(k)}$ in un volume di riferimento (un parallelepipedo in \mathbb{R}^3 o un rettangolo in \mathbb{R}^2), nel quale è definita una griglia uniforme di punti di controllo (che rappresentano i gradi di libertà del metodo). La deformazione viene definita sul dominio, mediante un'interpolazione degli spostamenti imposti su tali punti di controllo utilizzando polinomi di Bernstein monodimensionali. Questa mappa è detta di tipo *free form* in quanto risulta indipendente dalla geometria del corpo da deformare; per questo motivo, tale metodo può essere utilizzato per problemi di *Shape Optimization* con domini dalla forma arbitrariamente complessa. D'altra parte, utilizzando una griglia di punti di controllo spazialmente uniforme (senza dunque avere la possibilità di controllare la disposizione di tali punti) non è possibile descrivere correttamente deformazioni complesse senza aumentare il numero di gradi di libertà. Al fine di eliminare tale problema, sono state introdotte numerose estensioni della mappa *FFD*, chiamate *Extended Free Form Deformation map (EFFD)*;
- *Non Rational Uniform B-Spline Free Form Deformation* (o *NURBS FFD*). Tale tecnica, utilizzata nel contesto dei problemi di ottimizzazione di forma in [Qia10] e [AN08] è basata su un'estensione della mappa *FFD*. In particolare, oltre che per la scelta dei polinomi utilizzati nella definizione della deformazione (non più polinomi di Bernstein, ma B-Splines), la mappa *FFD* basata su *NURBS* si differenzia dalla mappa *FFD* classica per la scelta dei gradi di libertà. Infatti, per imporre correttamente una deformazione mediante la mappa *Free Form Deformation* classica occorre definire lo spostamento di *tutti* i punti di controllo; utilizzando la mappa *NURBS-FFD* occorre invece fornire solamente il comportamento di alcuni punti (chiamati *variabili di design*), la cui posizione è decisa dall'utente.
- *Radial Basis Function Method* (o *RBF method*). In questa tecnica la deformazione viene definita su alcuni punti chiamati *nodi* (i gradi di libertà di questo metodo) disposti a discrezione dell'utente all'interno del dominio di riferimento. Lo spostamento del generico punto \mathbf{x} viene quindi ricavato interpolando lo spostamento valutato nei nodi mediante un'opportuna funzione interpolante ϕ , dipendente dalla distanza del punto \mathbf{x} dai nodi. In ambito dell'ottimizzazione di forma tale tecnica è stata utilizzata, ad esempio, in [JA07], [JPRW10] e [MAR08]

Nella nostra trattazione la deformazione dei domini per effetto del processo di ottimizzazione di forma viene gestita utilizzando il metodo basato sulla mappa *NURBS FFD*. In particolare, per garantire una maggiore regolarità della frontiera del dominio deformato, lo spostamento delle variabili di design viene valutato a partire dal campo $\tilde{\theta}$, soluzione del problema (4.8).

Nella prossima Sezione verranno forniti ulteriori dettagli sulla mappa *Free Form Deformation* basata su NURBS e verrà presentato uno schema numerico con il quale deformare in modo efficiente i domini durante la procedura di ottimizzazione.

4.4 NURBS Free Form Deformation

In questa Sezione viene introdotta una mappa di tipo *Free Form Deformation* per la deformazione dei domini, molto efficiente numericamente in casi di piccoli spostamenti o nel caso in cui si richieda una buona regolarità del dominio deformato.

Per definire una mappa *FFD* occorre racchiudere la configurazione di riferimento del volume da deformare in un volume di controllo sul quale è definita una griglia di punti di controllo. Mediante l'introduzione di opportuni spostamenti su alcuni punti chiamati *variabili di design*, viene definita la deformazione da applicare a tale volume.

In questo elaborato consideriamo un'estensione della mappa *Free Form Deformation* in cui il volume di controllo viene parametrizzato mediante l'uso di *Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)*; per maggiori dettagli si veda ad esempio [LW94], [Sar04] e [SOP⁺13].

Le NURBS, rappresentazioni matematiche di geometrie tridimensionali, sono molto utilizzate nell'ambito del *Computer Aided Design (CAD)* per la loro versatilità; esse sono infatti in grado di definire allo stesso tempo geometrie elementari quali curve e superfici, e oggetti più complessi quali componenti industriali, in modo semplice e poco dispendioso in termini di memoria e variabili di design.

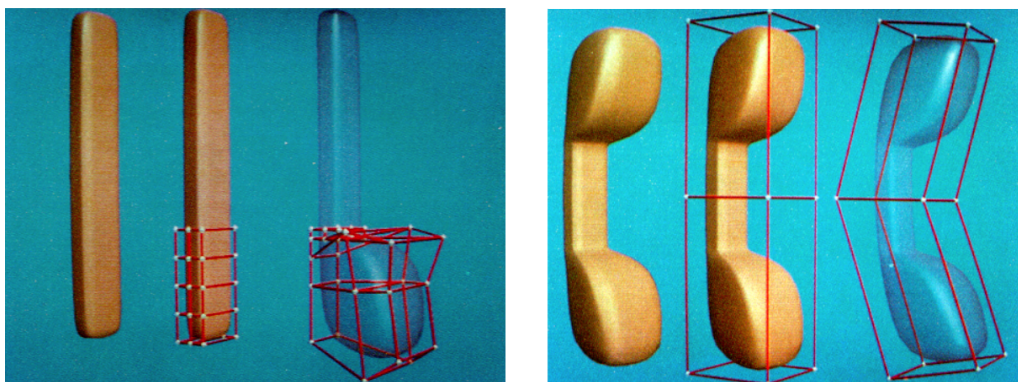


Figura 4.1: Esempi di deformazioni mediante la mappa *Free Form Deformation* (immagine tratta da [SP86]).

Nella Sezione 4.4.1 vengono introdotte le definizioni di curve e superfici parametrizzate mediante *NURBS*, che verranno utilizzate nella Sezione 4.4.2 nella presentazione di un algoritmo *FFD NURBS* per la deformazione di un dominio.

4.4.1 Curve e superfici NURBS

In questa Sezione vengono presentate le principali proprietà delle Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS), i concetti chiave relativi a questa tecnica e la notazione usata per il resto della Sezione.

4.4.1.1 Definizione di curve NURBS

Introduciamo inizialmente la definizione di curva NURBS di grado p , parametrizzata da una variabile u che prende valori nell'intervallo (a, b) .

Sia $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1,\dots,n}$ un insieme di *punti di controllo* con $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^2$ e sia $\{w_i\}_{i=1,\dots,n}$, con $w_i \in \mathbb{R}$ un insieme di pesi associati a tali punti di controllo. Introduciamo inoltre un vettore di nodi \mathbf{U} , definito nel seguente modo:

$$\mathbf{U} = (\overbrace{a, \dots, a}^{p+1 \text{ volte}}, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{m-p-1}, \overbrace{b, \dots, b}^{p+1 \text{ volte}}). \quad (4.15)$$

Si osservi che tale vettore contiene $r + 1$ elementi, dove $r = n + p + 1$; a parità di numero di punti di controllo scelti per definire una curva, il nodo di vettori cambia a seconda del grado della curva NURBS scelto. Una curva NURBS di grado p è quindi definita dalla seguente identità:

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i}{\sum_{i=1}^n w_i N_{i,p}(u)}, \quad u \in [a, b], \quad (4.16)$$

in cui $N_{i,p}(u)$ sono le basi B-Spline di grado p associate al vettore di nodi \mathbf{U} , definite ricorsivamente rispetto al grado p attraverso la formula di Cox-de Boor (si veda ad esempio [PT95]). A tal proposito, definiamo le basi N di grado 0 come

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (4.17)$$

dove indichiamo con u_i i nodi contenuti nel vettore \mathbf{U} . Le basi $N_{i,p}$ di ordine superiore vengono definite ricorsivamente in base alla formula:

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u). \quad (4.18)$$

Un'importante proprietà di questa rappresentazione, di cui ogni implementazione dovrebbe tener conto, è relativa al supporto di queste basi. Infatti è possibile verificare che $N_{i,1}(u)$ è diverso da 0 solo tra u_i e u_{i+1} , così come il supporto di $N_{i,2}$ è l'intervallo compreso tra i nodi u_i e u_{i+2} . In generale possiamo affermare che esistono al massimo p funzioni di base non nulle necessarie per descrivere una curva NURBS di ordine p .

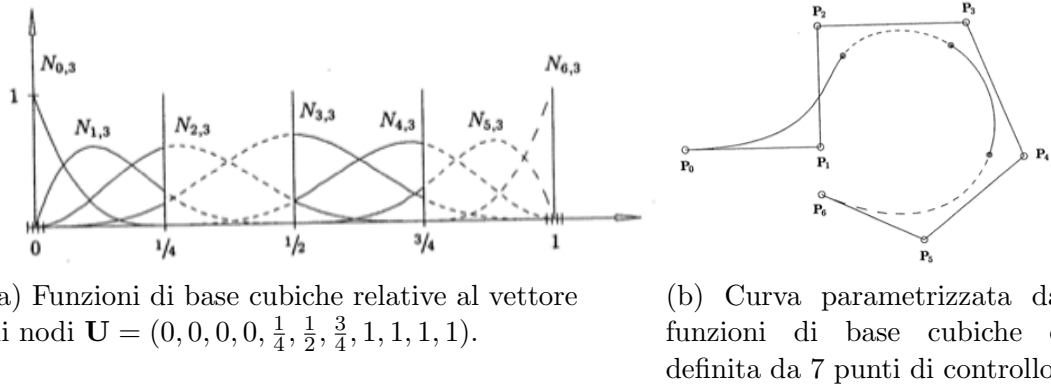


Figura 4.2: Esempio di curva parametrizzata mediante NURBS. (Fonte [PT95])

4.4.1.2 Definizioni di superfici NURBS

La definizione delle superfici NURBS è un'estensione di quella data per le curve definite precedentemente. Senza perdita di generalità, supponiamo che la superficie NURBS sia parametrizzata da due variabili (u, v) a valori in $(0, 1)^2$.

Sia $\{\mathbf{P}_{i,j}\} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ con $\mathbf{P}_{i,j} \in \mathbb{R}^2$ una griglia di *punti di controllo* e sia $\{w_{i,j} \in \mathbb{R}\}$ un insieme di pesi associati a tali punti di controllo. Siano inoltre \mathbf{U} e \mathbf{V} vettori di nodi definiti nel seguente modo:

$$\mathbf{U} = \left(\overbrace{0, \dots, 0}^{p+1 \text{ volte}}, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{r-p-1}, \overbrace{1, \dots, 1}^{p+1 \text{ volte}} \right),$$

$$\mathbf{V} = \left(\overbrace{0, \dots, 1}^{q+1 \text{ volte}}, v_{q+1}, v_{q+2}, \dots, v_{s-q-1}, \overbrace{1, \dots, 1}^{q+1 \text{ volte}} \right);$$

dove p e q definiscono i gradi delle funzioni di base rispettivamente in direzione u e in direzione v . Il vettore \mathbf{U} contiene dunque $r + 1$ nodi con $r = n + p + 1$ e, analogamente, il vettore \mathbf{V} contiene $s + 1$ nodi con $s = m + q + 1$. Una superficie NURBS di ordine (p, q) è definita dalla seguente formulazione parametrica:

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}; \quad (4.19)$$

in cui le basi $N_{i,p}(u)$ sono definite in (4.18). Un particolare tipo di superfici, che verranno utilizzate successivamente nella definizione della mappa *FFD*, prevede che tutti i pesi $w_{i,j}$ dei punti di controllo $\mathbf{P}_{i,j}$ siano unitari. In questo modo, sfruttando le proprietà di partizione dell'unità delle basi, è possibile semplificare la definizione di una superficie NURBS nel seguente modo:

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}. \quad (4.20)$$

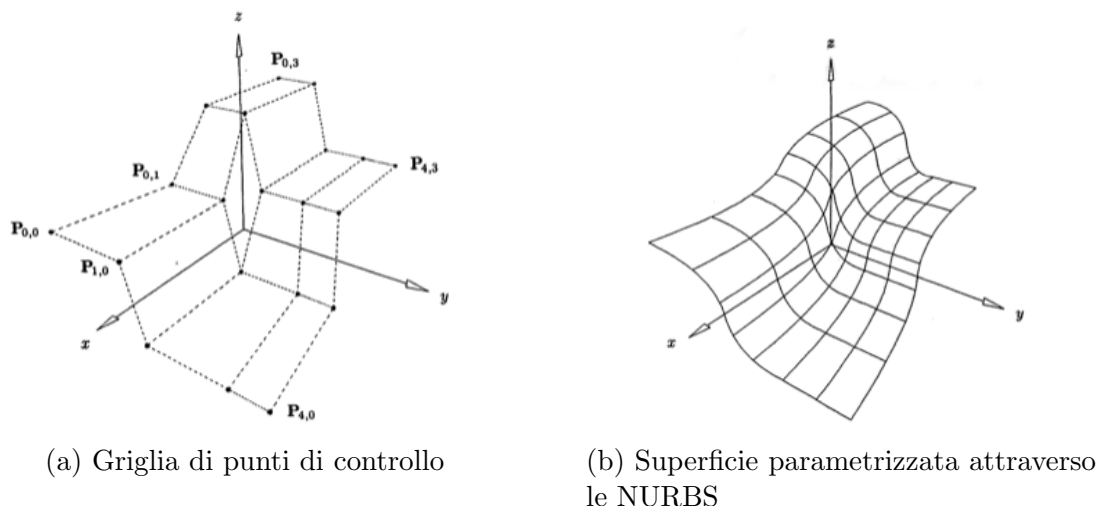


Figura 4.3: Esempio di superficie NURBS (Fonte [PT95]).

Definizioni analoghe possono essere fornite per volumi parametrizzati mediante NURBS; per ulteriori dettagli si veda [PT95].

4.4.2 Free Form Deformation

In questa Sezione viene presentato uno schema numerico per la deformazione di un generico dominio di riferimento mediante la mappa *Free Form Deformation* basata su NURBS.

L'idea generale su cui tale tecnica si basa, è la seguente: si introduce un volume di controllo che contenga tutti gli oggetti che si desidera deformare; in seguito vengono definiti degli spostamenti su un insieme di punti di controllo definiti su tale volume. Mediante un'opportuna interpolazione di tali spostamenti, viene deformato l'intero volume di controllo e tutti gli oggetti che esso contiene. In particolare, l'algoritmo presentato in questa Sezione può essere riassunto nei seguenti punti:

1. **inizializzazione:** in questa fase si decidono il grado delle B-Spline p, q da utilizzare e il numero di punti di controllo l, m in ogni direzione coordinata, necessari per parametrizzare il volume di riferimento. Viene inoltre creato il volume di controllo (*bounding box*) che conterrà gli oggetti da deformare;
2. **spostamento dei punti di controllo:** in questa fase si introducono delle variabili di design su cui vengono imposti gli spostamenti desiderati. In seguito si calcolano le posizioni $\tilde{\mathbf{P}}_{i,j}$ in cui i punti di controllo $\mathbf{P}_{i,j}$ del volume NURBS devono essere spostati per meglio approssimare le deformazioni desiderate;
3. **deformazione:** una volta calcolato il vettore degli spostamenti dei punti di controllo $\mathbf{d}_{i,j}$, si modifica il volume di controllo. Si noti che il volume NURBS

deformato è dato dalla seguente espressione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \sum_{i,j=0}^{l,m} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\tilde{\mathbf{P}}_{i,j}; \quad (4.21)$$

in cui $\mathbf{p} = (u, v)$ rappresenta il generico punto all'interno del volume di riferimento non deformato.

Vengono ora riportati i dettagli relativi a ciascuna di queste tre fasi.

4.4.2.1 Inizializzazione

Lo scopo di tale inizializzazione è definire un volume di riferimento NURBS, tale per cui la funzione deformazione definita in (4.21), quando non sono applicate deformazioni esterne, sia la funzione identità.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ il dominio da deformare, p, q il grado delle B-Spline da utilizzare e l, m il numero di punti di controllo per ogni direzione coordinata. Introduciamo ora un parallelepipedo di controllo $V \supseteq \Omega$ con $V = (x_{min}, x_{max}) \times (y_{min}, y_{max})$.

Sebbene l'apparato teorico funzioni anche nel caso in cui $V = \Omega$, è consigliabile che tutta la frontiera di Ω sia strettamente contenuta in V ; in questo modo si garantisce che, se il bordo di Ω prima della deformazione è C^1 localmente, questo conservi la sua regolarità una volta deformato. Per poter definire un volume NURBS occorre introdurre una griglia di punti di controllo all'interno del parallelepipedo V . Il modo più facile per costruire tale griglia è creare, per ogni direzione spaziale, un insieme di nodi uniformemente distribuiti. Con questo procedimento, tuttavia, la funzione deformazione definita in (4.21) in assenza di deformazioni esterne, non è la funzione identità; per questo motivo occorre dunque scegliere la posizione dei punti di controllo (e dei nodi) dei volumi NURBS diversamente.

Introduciamo dunque una griglia provvisoria uniforme con $l' = p + 1$ e $m' = q + 1$ punti di controllo per ogni direzione spaziale indicando con

$$\mathbf{P}_{i,j} = (x_i, y_j)^T, \quad (4.22)$$

un generico punto di tale griglia, dove $x_i = x_{min} + (i - 1)\frac{x_{max} - x_{min}}{l' - 1}$ per $i = 1, \dots, l'$ e y_j analogamente definita. I corrispondenti vettori di nodi sono della forma:

$$\mathbf{U} = (\overbrace{x_{min}, \dots, x_{min}}^{p+1 \text{ volte}}, \overbrace{x_{max}, \dots, x_{max}}^{p+1 \text{ volte}}), \quad \mathbf{V} = (\overbrace{y_{min}, \dots, y_{min}}^{q+1 \text{ volte}}, \overbrace{y_{max}, \dots, y_{max}}^{q+1 \text{ volte}}),$$

È possibile dimostrare che la griglia di punti di controllo e i vettori di nodi così definiti generino una mappa *NURBS-FFD* che, in assenza di deformazioni imposte dall'utente, risulta essere la mappa identità (per la dimostrazione si rimanda a [PT95] e a [SOP⁺13]). A questo punto si espande la griglia provvisoria di grandezza l', m' in una griglia in cui sono presenti $l \times m$ punti di controllo, attraverso un algoritmo presentato in [PT95] che opera in ogni singola direzione spaziale indipendentemente.

In direzione x , in cui occorre inserire $l-l'$ nodi e punti di controllo, tale algoritmo prevede per ogni $n = 1, \dots, l-l'$, indicando con \mathbf{Q}_i i punti di controllo attuali:

1. l'inserimento del nodo $u^n = x_{min} + (i-1) \frac{x_{max} - x_{min}}{l-l'-1}$ nel vettore \mathbf{U} ;
2. l'aggiornamento della posizione dei nuovi punti di controllo \mathbf{P}_i secondo la relazione:

$$\mathbf{P}_i = \alpha_i \mathbf{Q}_i + (1 - \alpha_i) \mathbf{Q}_{i-1}, \quad (4.23)$$

dove

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & i \leq k-p \\ \frac{u^n - u_i}{u_{i+p} - u_i} & k-p+1 \leq i \leq k \\ 1 & i \geq k+1. \end{cases} \quad (4.24)$$

Si noti che ad ogni inserimento vengono modificati solo p punti di controllo. Utilizzando la griglia di punti di controllo ottenuta applicando l'algoritmo presentato in questa Sezione nelle due direzioni coordinate è possibile dimostrare che la funzione deformazione (4.21), può essere espressa nel seguente modo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \sum_{i,j=0}^{l,m} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{d}_{i,j}, \quad (4.25)$$

dove $\mathbf{d}_{i,j} = |\tilde{\mathbf{P}}_{i,j} - \mathbf{P}_{i,j}|$ rappresenta lo spostamento del generico punto di controllo $\mathbf{P}_{i,j}$, il cui calcolo rappresenta l'obiettivo della fase dell'algoritmo successiva.

Nella prossima Sezione viene presentato un metodo mediante il quale è possibile definire lo spostamento $\mathbf{d}_{i,j}$ di ogni singolo punto di controllo per imporre al dominio la deformazione desiderata.

4.4.2.2 Spostamento dei punti di controllo

Siano $\mathbf{p}_s, s = 1, \dots, d$ dei punti all'interno del dominio di controllo V , chiamati *variabili di design*, che intendiamo spostare rispettivamente nelle posizioni \mathbf{q}_s . Lo scopo di questa fase è individuare la mappa FFD (4.25) tale per cui la distanza euclidea tra \mathbf{q}_s e $\mathbf{F}(\mathbf{p}_s)$ sia minima.

Uno dei grandi vantaggi della mappa *NURBS-FFD* consiste nell'introduzione di queste variabili di design, le quali possono essere disposte a discrezione dell'utente e non distribuite uniformemente in tutto il volume di controllo, come è invece necessario fare nella classica mappa *FFD*. Ad esempio, per deformare un dominio su cui risolvere un problema a derivate parziali è sufficiente collocare queste variabili di design lungo la sua frontiera per tenere traccia dell'intera deformazione.

Per calcolare lo spostamento $\mathbf{d}_{i,j}$ del generico punto di controllo (i, j) nella griglia sfruttiamo un algoritmo iterativo che minimizzi la distanza tra \mathbf{q}_s e $\mathbf{F}(\mathbf{p}_s)$.

Ricordiamo che alla t -esima iterazione la deformazione del punto \mathbf{p}_s è definita come segue:

$$\mathbf{F}^{(t)}(\mathbf{p}_s) = \mathbf{F}^{(t-1)}(\mathbf{p}_s) + \sum_{i,j=0}^{l,m} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\mathbf{d}_{i,j}^{(t)}, \quad (4.26)$$

dove $\mathbf{d}_{i,j}^{(t)}$ rappresenta lo spostamento del punto di controllo (i, j) nella griglia, alla t -esima iterazione. Per non appesantire la notazione introduciamo una numerazione globale dei punti di controllo della griglia, assegnando loro un intero $id = 1, \dots, N$ con $N = (l+1)(m+1)$. Notiamo che ad ogni id è associata un'unica coppia di indici (i, j) che indica un singolo punto di controllo.

In questo modo possiamo riscrivere l'identità (4.26) come segue:

$$\mathbf{F}^{(t)}(\mathbf{p}_s) = \mathbf{F}^{(t-1)}(\mathbf{p}_s) + \sum_{id=0}^N B_{id}(\mathbf{p}_s)\mathbf{d}_{id}^{(t)}, \quad (4.27)$$

dove indichiamo con $B_{id}(u, v) = N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$ il prodotto delle basi B-Splines, valutate nel generico punto del volume di controllo indeformato $\mathbf{p} = (u, v)$.

A questo punto, la ricerca del vettore degli spostamenti $\mathbf{d}^{(t)}$ si traduce nel seguente problema di minimizzazione:

$$\mathbf{d}^{(t)} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}}{\operatorname{argmin}} \sum_{s=1}^2 \left\| \sum_{id=0}^N B_{id}(\mathbf{p}_s)\mathbf{x} - (\mathbf{q}_s - \mathbf{F}^{(t-1)}(\mathbf{p}_s)) \right\|_2^2. \quad (4.28)$$

Tra i numerosi metodi per risolvere questo problema, in questo lavoro viene impiegata la strategia presentata da Saraga in [Sar04], in cui il vettore di spostamenti $\mathbf{d}^{(t)}$ è individuato ad ogni iterazione risolvendo il seguente sistema lineare:

$$(\alpha \mathbf{G} + (1 - \alpha)\mathbf{I})\mathbf{d}^{(t)} = \mathbf{H}^{(t)}, \quad (4.29)$$

dove \mathbf{I} indica la matrice identità, mentre $\alpha \in [0, 1]$ è un parametro reale positivo.

Le componenti della matrice \mathbf{G} e del vettore $\mathbf{H}^{(t)}$ sono definiti nel seguente modo:

$$G_{ij} = \sum_{s=1}^d B_i(\mathbf{p}_s)B_j(\mathbf{p}_s), \quad H_i^{(t)} = \sum_{s=1}^d B_i(\mathbf{p}_s)(\mathbf{q}_s - \mathbf{F}^{(t-1)}(\mathbf{p}_s)). \quad (4.30)$$

Per risolvere il sistema (4.29) è possibile considerare tre sistemi lineari, uno per ogni coordinata spaziale, e risolverli indipendentemente usando una decomposizione di Cholesky (si veda ad esempio [Sar04]). Il parametro $\alpha \in (0, 1)$ rappresenta un compromesso tra la regolarità della frontiera del dominio deformato mediante la mappa NURBS-FFD e l'approssimazione delle variabili di design; in particolare aumentando tale valore è possibile aumentare le capacità interpolanti della mappa NURBS-FFD, facendo sì che la distanza tra $\mathbf{F}(\mathbf{p}_s)$ e \mathbf{q}_s sia minima.

4.4.2.3 Deformazione

Una volta trovato il vettore degli spostamenti dei punti di controllo, possiamo passare alla terza e ultima fase dell'algoritmo che consiste nella deformazione vera e propria. Per deformare dunque un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ occorre spostare ogni punto \mathbf{p} della griglia computazionale che approssima tale dominio, secondo la relazione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \sum_{i,j=0}^{l,m} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\mathbf{d}_{i,j} ,$$

dove \mathbf{d} rappresenta il vettore di spostamenti dei punti di controllo individuato precedentemente.

La mappa *Free Form Deformation* basata su NURBS verrà utilizzata nel Capitolo successivo per gestire la deformazione del dominio di riferimento all'interno di uno schema numerico per la risoluzione di un problema di ottimizzazione di forma.

Capitolo 5

Simulazioni numeriche

In questo Capitolo vengono illustrati i risultati di alcuni problemi di design ottimale in presenza di interazione fluido-struttura, ottenuti mediante l'algoritmo numerico descritto nel Capitolo precedente.

Consideriamo inizialmente (Sezione 5.1) la soluzione di un problema FSI, ottenuta mediante il metodo partizionato *Dirichlet-Neumann* presentato nella Sezione 1.4. Di tale metodo viene inoltre studiata la velocità di convergenza al variare del parametro di rilassamento γ .

Nelle Sezioni successive vengono considerati invece problemi di ottimizzazione di forma per flussi di Stokes in geometrie bidimensionali in presenza di interazione fluido-struttura, analizzando in particolare:

- la regolarità della frontiera del dominio deformato al variare del metodo di deformazione del dominio e della forma della configurazione di riferimento (Sezione 5.2), fornendo un confronto con risultati presenti in letteratura per il caso rigido;
- la relazione tra il problema di *design* ottimale in presenza di interazione tra fluido e solido e l'analogo caso rigido. Nella Sezione 5.3 viene inoltre presentata un'analisi di sensitività della forma ottima al variare del modulo elastico della struttura;
- la possibilità di ridurre la difficoltà della risoluzione di tale problema, presentando nella Sezione 5.4 un metodo di approssimazione numerica che trascuri l'effetto del problema aggiunto per il sotto-problema solido.

I risultati delle simulazioni numeriche presentati in questo Capitolo sono stati ottenuti implementando nell'ambiente della libreria *libMesh* in linguaggio *C++*:

- un risolutore per il problema di interazione fluido-struttura basato sul metodo presentato nella Sezione 1.4, approssimato con il metodo degli elementi finiti;

- un risolutore per il problema FSI aggiunto, descritto nella Sezione 4.2;
- una libreria per la gestione delle deformazioni dei domini mediante la mappa *NURBS Free Form Deformation*;
- lo schema iterativo presentato nel Capitolo precedente per la risoluzione di un problema di *design* ottimale per flussi di Stokes.

5.1 Problema di interazione fluido-struttura

In questa Sezione presentiamo i risultati di alcune simulazioni numeriche per un problema FSI ottenuti mediante l'uso dell'algoritmo partizionato *Dirichlet-Neumann*, descritto nella Sezione 1.4 soffermandoci in particolare sulla convergenza del metodo iterativo e sullo spostamento della struttura indotto dal moto del fluido.

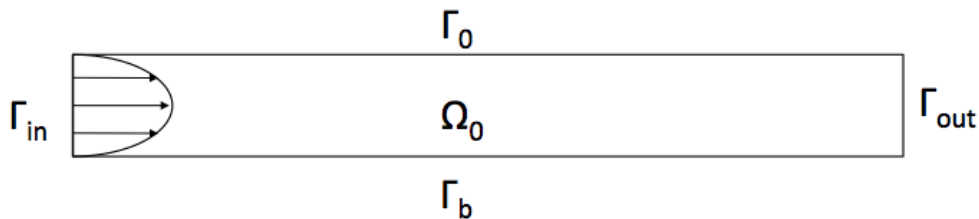


Figura 5.1: Dominio di riferimento per il problema FSI

Consideriamo, con riferimento alla Figura 5.1 una geometria di riferimento bidimensionale $\Omega_0 = (0, L) \times (0, R)$ per la risoluzione del problema fluido e un dominio monodimensionale di riferimento $\Gamma_0 = (0, L)$ per la risoluzione del problema solido. Sia per il problema solido sia per il problema fluido si considerano condizioni iniziali di flusso e spostamento della struttura nulle.

Per la discretizzazione temporale si consideri sull'intervallo temporale $(0, T) = (0, 0.03s)$ un passo temporale $\Delta t = 0.005 s$; per quanto riguarda i domini computazionali si vedano i dettagli riguardanti la discretizzazione spaziale nella Tabella 5.1.

	Numero di nodi	Numero di elementi
Fluido	2002	941
Solido	161	80

Tabella 5.1: Dettagli sulla discretizzazione spaziale del dominio fluido e solido

Parametri Geometrici			
Altezza del dominio	R	0.5	cm
Lunghezza del dominio	L	6	cm
Parametri del Fluido			
Densità	ρ_F	1	$g\ cm^{-3}$
Viscosità	μ_F	0.63	P
Parametri del Solido Elastico			
Densità	ρ_S	1.1	$g\ cm^{-3}$
Altezza del solido	h_S	0.1	cm
Viscosità	μ_S	$2.5 \cdot 10^4$	P
Coefficiente di reazione	β	$4 \cdot 10^5$	$dyn\ cm^{-3}$
Modulo di Young	E	$0.75 \cdot 10^6$	$dyn\ cm^{-2}$
Coefficiente di Poisson	ν	0.5	-

Tabella 5.2: Parametri fisici e geometrici utilizzati nella simulazione numerica

In particolare, sono stati utilizzati elementi finiti \mathbb{P}^2 per descrivere lo spostamento del solido e la velocità del fluido, ed elementi finiti \mathbb{P}^1 per la pressione. Tale scelta di elementi finiti garantisce il soddisfacimento della condizione *inf-sup* a livello discreto, e dunque l'unicità della pressione nel sistema di Stokes (si veda a tal proposito [Qua12]).

Nella Tabella 5.2 sono riportati i valori dei parametri utilizzati per definire il problema fluido e per caratterizzare il solido elastico considerato (dati tratti da [For12] e [NV08]). Per quanto riguarda le condizioni di *inlet* del problema fluido, fissata una velocità massima $u_{max} = 75\text{cm/s}$, la velocità di ingresso \mathbf{u}_{in} assume la seguente forma:

$$\mathbf{u}_{in} = (u_{in}, 0)^T \quad \text{con } u_{in} = \begin{cases} -\frac{4u_{max}}{R}y \left(\frac{y}{R} - 1\right) & \text{per } t \leq 0.01s \\ 0 & \text{per } t > 0.01s. \end{cases} \quad (5.1)$$

Nel primo caso test abbiamo studiato l'effetto del parametro di rilassamento γ nell'algoritmo partizionato considerato nella Sezione 1.4 analizzando la relazione che sussiste tra tale parametro e la convergenza dell'algoritmo.

A tal proposito, fissato un parametro di tolleranza $\tau = 1 \cdot 10^{-5}$, abbiamo risolto il problema FSI modificando il parametro di rilassamento. In Tabella (5.3) sono riportati i valori di γ per i quali l'algoritmo non converge, e i valori di γ per i quali invece l'algoritmo fornisce una soluzione del problema FSI. Inoltre, in caso di convergenza, viene indicato il numero di iterazioni medie (rispetto agli istanti temporali su cui il problema FSI viene risolto) e il massimo numero di iterazioni per arrivare a convergenza.

γ	Convergenza	Numero di it. medie	Numero di it. massime
1	no	-	-
0.95	no	-	-
0.9	no	-	-
0.85	sì	13	17
0.8	sì	7	10
0.75	sì	6	7
0.7	sì	5	6

Tabella 5.3: Risultati di convergenza dell’algoritmo iterativo al variare del parametro di rilassamento γ .

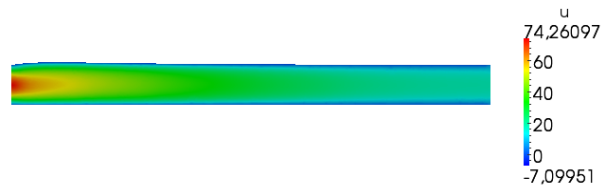
Il primo risultato che si evince dalla Tabella 5.3 è la necessità del passo di rilassamento all’interno dell’algoritmo partizionato *Dirichlet-Neumann*, senza il quale (ponendo dunque $\gamma = 1$) la norma dell’errore $\|\eta_k - \eta_{k-1}\|_{L^2(\Gamma_0)}$ continua a crescere, impedendo all’algoritmo di arrivare a convergenza. Inoltre, in accordo con i risultati teorici, esiste un valore $\bar{\gamma} < 1$ tale per cui l’algoritmo, per parametri di rilassamento $\gamma < \bar{\gamma}$ converge, mentre per valori più grandi di tale soglia l’algoritmo non fornisce una soluzione del problema FSI. Osservando il numero di iterazioni (sia medie che massime) necessarie per arrivare a convergenza, si nota una velocità di convergenza maggiore al diminuire del parametro di rilassamento γ . Questa tendenza è facilmente spiegabile dal significato del parametro γ . Infatti nello step di rilassamento, a causa della relazione espressa in (1.51), l’informazione derivante dalla risoluzione del sotto-problema solido (lo spostamento della struttura η_k) viene influenzata dalla soluzione del sotto-problema solido al passo precedente η_{k-1} (il contributo della soluzione η_{k-1} è tanto più grande quanto più il passo di rilassamento γ è piccolo).

Mostriamo in seguito i risultati di una simulazione di un problema FSI in cui abbiamo fissato $\gamma = 0.75$, valore scelto in quanto buon compromesso tra bontà dell’algoritmo ed elevata velocità di convergenza.

In particolare in Figura 5.2 viene mostrato il profilo della velocità a diversi istanti di tempo fronte di un flusso in ingresso \mathbf{u}_{in} espresso in (5.1), mentre in Figura 5.3 viene rappresentato l’andamento della pressione al variare del tempo sul dominio $\Omega(t)$. Si noti in particolare l’onda di pressione che si propaga all’interno del dominio, tipica di un problema con un ingresso impulsivo (si veda ad esempio [For12] per risultati analoghi), e la diminuzione del valore massimo della pressione dovuto alla risoluzione di un problema di Stokes. In Figura 5.4 viene mostrato il valore dello spostamento η della struttura in diversi istanti temporali. Si osservi che tali spostamenti sono relativamente piccoli; il loro valore è infatti compreso tra -0.01 cm e 0.04 cm , valori minori di un decimo della dimensione del tubo (il cui raggio ricordiamo essere $R = 0.5\text{ cm}$). Questo causa piccole deformazioni del dominio di riferimento, come si può notare nei domini deformati nelle Figure 5.2 e 5.3.



(a) $t = 0.005$



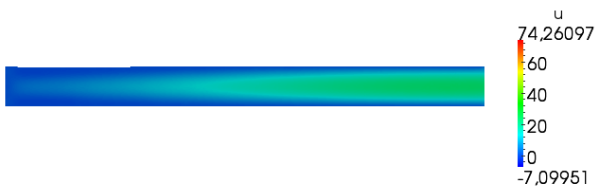
(b) $t = 0.01$



(c) $t = 0.015$



(d) $t = 0.02$



(e) $t = 0.025$



(f) $t = 0.03$

Figura 5.2: Velocità a diversi istanti temporali.



(a) $t = 0.005$



(b) $t = 0.01$



(c) $t = 0.015$



(d) $t = 0.02$

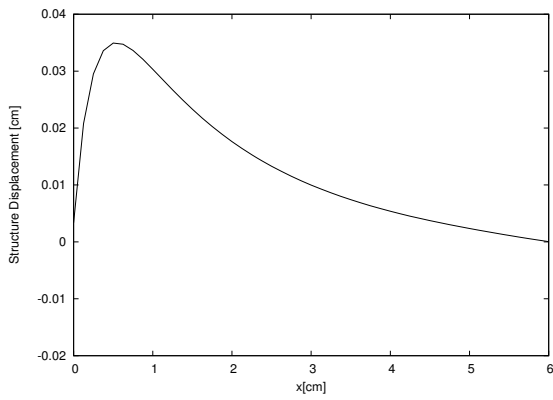


(e) $t = 0.025$

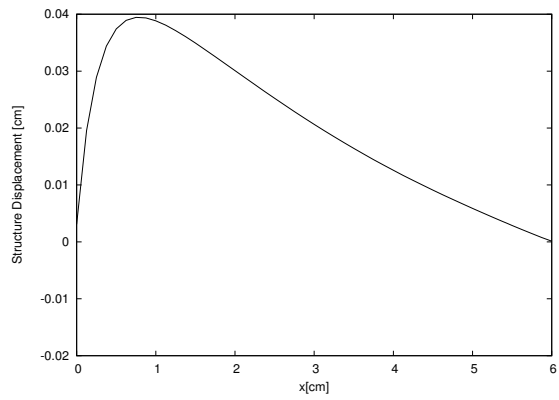


(f) $t = 0.03$

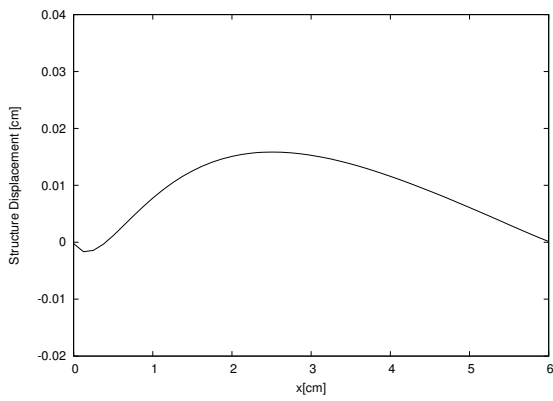
Figura 5.3: Pressione a diversi istanti temporali.



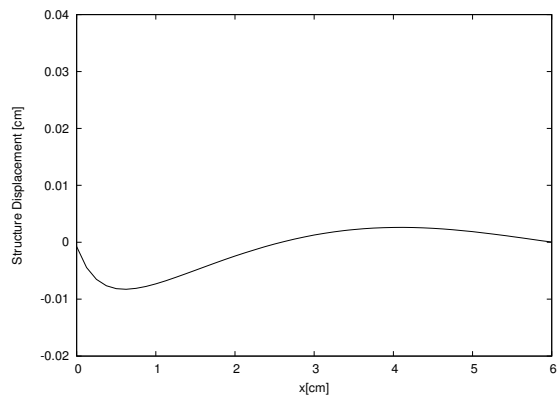
(a) $t = 0.005$



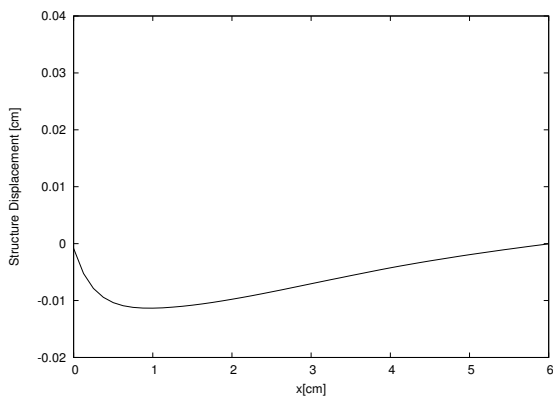
(b) $t = 0.01$



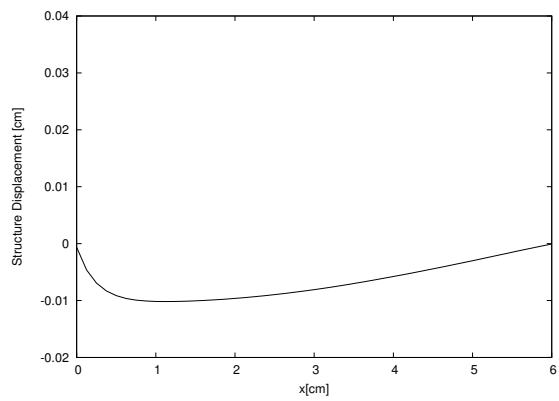
(c) $t = 0.015$



(d) $t = 0.02$



(e) $t = 0.025$



(f) $t = 0.03$

Figura 5.4: Spostamento della struttura in diversi istanti temporali.

5.2 Ottimizzazione di forma per problemi FSI

In questa Sezione presentiamo alcuni risultati relativi alla soluzione di un problema di *design* ottimale per flussi di Stokes in presenza di interazione fluido-struttura.

In particolare nei casi test presentati considereremo fluido e struttura definiti dai parametri fisici descritti nella Tabella (5.2) e profilo in ingresso \mathbf{u}_{in} definito nella Sezione (5.1).

Si consideri il dominio di riferimento Ω_0 , descritto in figura (5.5). Per la discretizzazione temporale si consideri l'intervallo temporale $(0, 0.03s)$ e un passo temporale $\Delta t = 0.005 s$; per ulteriori dettagli relativi alla discretizzazione spaziale si consulti la Tabella 5.4.

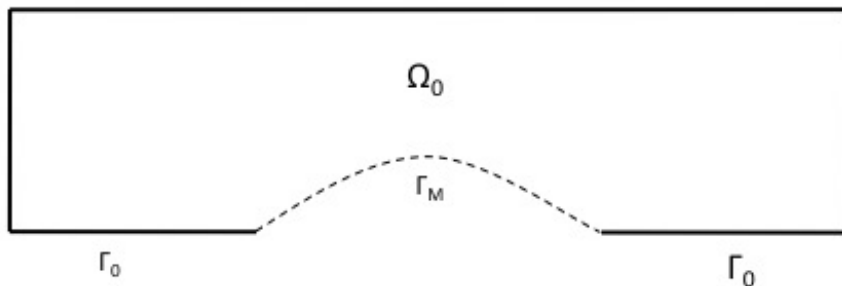


Figura 5.5: Dominio computazionale per il problema FSI. Con linea tratteggiata viene segnalata la porzione di frontiera interessata dal processo di ottimizzazione.

	Numero di nodi	Numero di elementi
Fluido	2313	1088
Solido	241	120

Tabella 5.4: Dettagli relativi alla discretizzazione spaziale per il problema fluido e il problema solido.

Utilizzando lo schema iterativo introdotto nella Sezione 4.1 risolviamo il problema di ottimizzazione di forma utilizzando due diversi metodi di aggiornamento del dominio:

- il metodo *boundary local variation* (descritto nella Sezione 4.3.2);
- l'algoritmo basato sulla mappa NURBS-FFD¹ (illustrato nella Sezione 4.4).

¹Nelle simulazioni effettuate mediante l'algoritmo basato sulla mappa NURBS-FFD, il volume di controllo è stato parametrizzato utilizzando 40 punti di controllo in direzione x e 10 punti di controllo in direzione y , e *B-Splines* di grado 3 in entrambe le direzioni.

In Figura 5.7 viene mostrato il profilo inferiore della frontiera della forma ottima ottenuta al termine dello schema iterativo nei due casi considerati. Nonostante l'uso degli stessi parametri per descrivere il problema affrontato, i profili delle forme ottime ottenute nelle due simulazioni sono differenti tra loro. Questa caratteristica è dovuta all'uso di algoritmi differenti per l'aggiornamento del dominio; infatti, alla k -esima iterazione, le informazioni contenute nel campo di spostamento θ_k , sono utilizzate in maniera diversa dai due metodi. Nel metodo *BLV*, ogni nodo \mathbf{p} della griglia computazionale utilizzata per discretizzare il dominio alla k -esima iterazione viene deformato secondo il campo di spostamento $\tilde{\theta}_k$ nel punto $\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\theta}_k(\mathbf{p})$.

L'algoritmo basato sulla mappa NURBS FFD, invece, utilizza solamente le informazioni del campo di spostamento valutato nelle variabili di design per definire una nuova mappa che garantisca una maggiore regolarità della frontiera del dominio deformato. Si noti infatti che le porzioni di frontiera del dominio di riferimento deformate mediante la mappa NURBS FFD, risultano essere prive di oscillazioni, a differenza delle porzioni di frontiera deformate mediante la tecnica *Boundary Local Variation*. All'aumentare delle iterazioni nell'algoritmo proposto, l'uso di diverse mappe per deformare il dominio può dunque portare a configurazioni differenti.

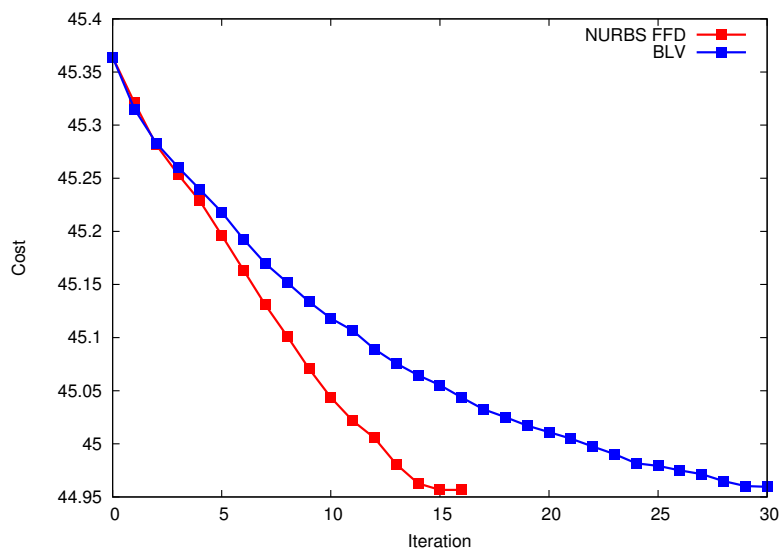
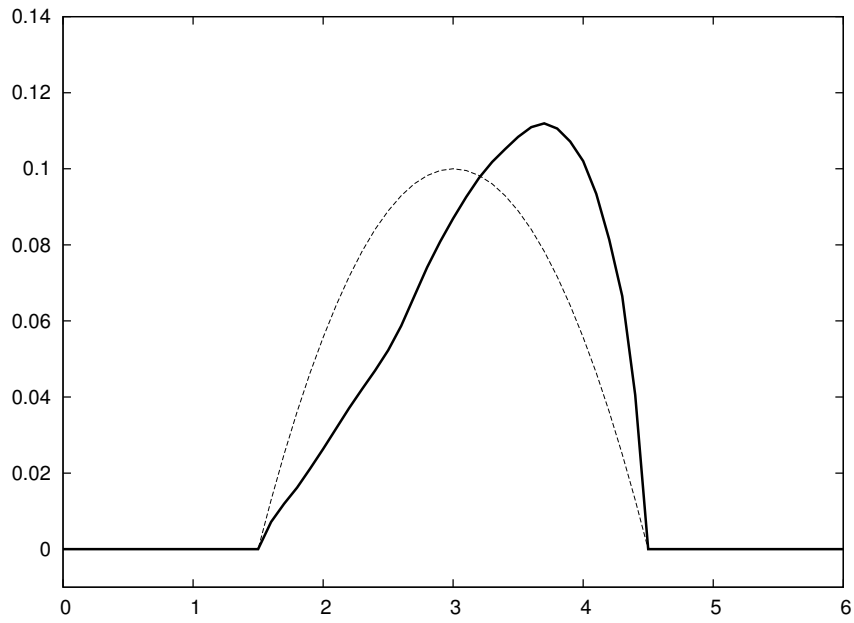


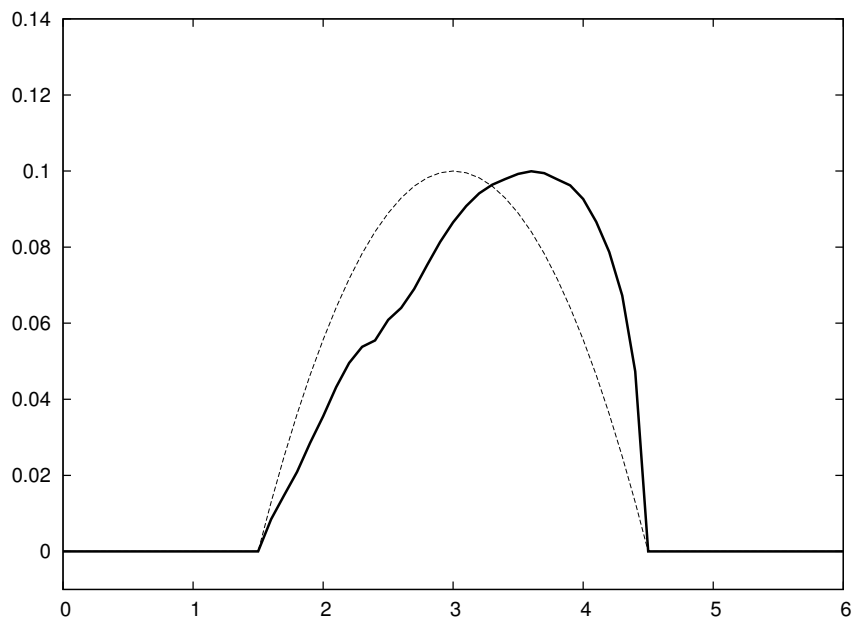
Figura 5.6: Andamento del funzionale costo J , al variare del metodo di aggiornamento del dominio.

Rispetto al metodo *BLV*, lo schema iterativo in cui l'aggiornamento del dominio è effettuato mediante la mappa NURBS-FFD, converge in un numero di iterazioni minore, come si evince dall'andamento del funzionale costo mostrato in figura 5.6.

In Tabella 5.5 sono presenti i valori del funzionale costo J al termine del processo di ottimizzazione; si noti che utilizzando l'algoritmo basato sulla mappa *NURBS FFD*, tale costo è minore rispetto al funzionale costo calcolato nel dominio ottimo ottenuto utilizzando il metodo *BLV* per l'aggiornamento del dominio.



(a) Mappa *NURBS FFD*



(b) Metodo BLV

Figura 5.7: Profilo inferiore della forma ottima per problema di *Shape Optimization* descritto nel Capitolo (3), al variare del metodo di aggiornamento del dominio.

	Mappa <i>NURBS FFD</i>	Metodo <i>BLV</i>
Iterazioni	16	30
Costo J	44.9566	44.9596

Tabella 5.5: Numero di iterazioni per arrivare a convergenza e valore del funzionale costo al termine del processo di ottimizzazione, al variare del metodo di aggiornamento del dominio.

A causa dei vantaggi che tale tecnica comporta, nelle simulazioni successive utilizzeremo come metodo di aggiornamento del dominio, l'algoritmo basato sulla mappa NURBS-FFD.

Vengono mostrati ora i risultati di una simulazione effettuata considerando il dominio di riferimento, riportato in Figura 5.8. Si noti che, a differenza del caso test precedente, la superficie interessata dal processo di ottimizzazione è l'intera porzione di frontiera inferiore.

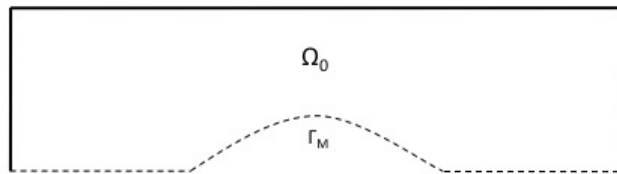


Figura 5.8: Dominio computazione fluido. I bordi in linea tratteggiata indicano la porzione di frontiera interessata dal processo di ottimizzazione.

Il *design ottimo* ottenuto in questo caso test è mostrato in Figura 5.9. In particolare l'allargamento del condotto in prossimità del bordo di *inlet* sembra compatibile con analoghi risultati in letteratura: in [FPV14] si verifica la stessa tendenza in un problema di ottimizzazione di forma nel caso di un flusso di Stokes non stazionario, in assenza di vincoli sul perimetro della frontiera del dominio.

Si noti inoltre che in prossimità di punti della frontiera non C^1 localmente nel dominio di riferimento, il profilo inferiore del dominio deformato presenta alcune irregolarità; questo è dovuto ad una proprietà della mappa NURBS-FFD. Infatti, l'uso di algoritmi basati su tale mappa garantisce che la frontiera dei domini deformati sia C^1 localmente solamente in porzioni di frontiera C^1 nella configurazione di riferimento.

Nelle simulazioni successive, per avere una maggiore leggibilità e regolarità dei risultati ottenuti, vengono considerati esclusivamente domini di riferimento, in cui la superficie interessata dal processo di ottimizzazione è descritta in figura 5.5.

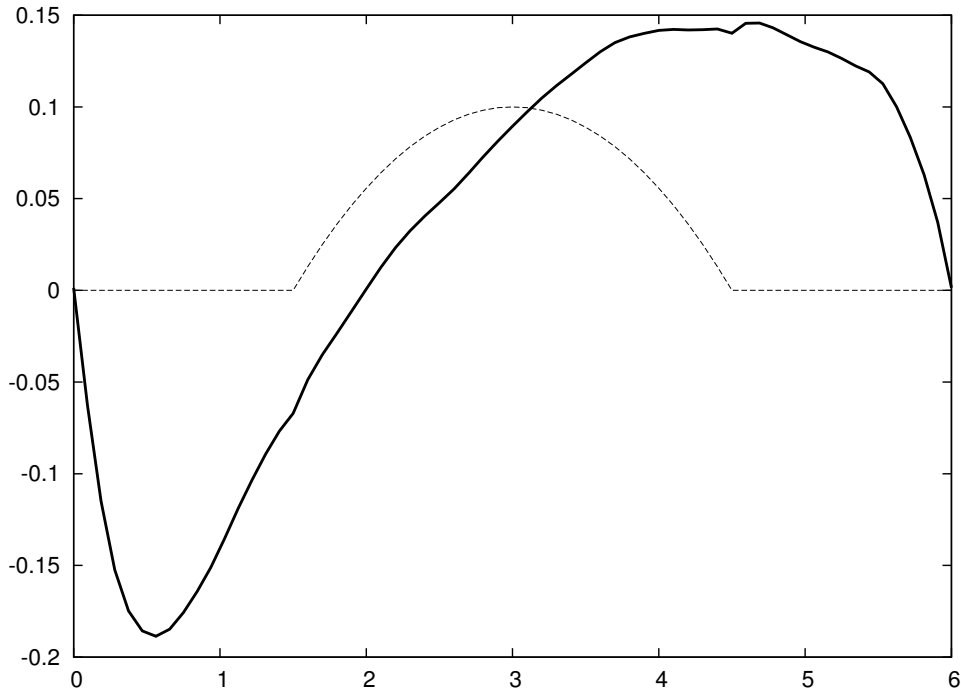


Figura 5.9: Profilo inferiore del *design ottimo* per il problema di ottimizzazione di forma, in cui la porzione di frontiera interessata dal processo di ottimizzazione è rappresentata da tutto il profilo inferiore.

5.3 Il caso di struttura rigida e struttura deformabile a confronto

In questa Sezione viene effettuato un confronto tra i risultati di un problema di un problema di ottimizzazione di forma per flussi di Stokes in presenza di interazione fluido-struttura e quelli ottenuti a partire dalla stessa configurazione iniziale nel caso di pareti rigide. In particolare, per descrivere problemi FSI con struttura rigida vengono utilizzate le equazioni di Stokes non stazionarie, con dominio fissato, non tempo-dipendente. Per la scrittura delle condizioni di ottimalità di tale problema si rimanda alla Sezione 2.5.

Dalla figura 5.10, in cui vengono mostrati i profili della porzione inferiore di frontiera dei *design ottimi* ottenuti nei due casi, si evince l'impatto dell'interazione fluido-struttura sulla soluzione ottima del problema.

Indicando con $\hat{\Omega}_{FSI}$ la forma ottima ottenuta nel caso FSI e con $\hat{\Omega}_S$ il dominio ottenuto nel caso rigido, possiamo valutare su questi due domini il funzionale costo $J_{FSI} = J(\mathbf{u}_{FSI}, p_{FSI}, \eta_{FSI})$ in cui $(\mathbf{u}_{FSI}, p_{FSI}, \eta_{FSI})$ è la soluzione del problema di stato FSI, ottenendo:

$$44.9566 = J_{FSI}(\tilde{\Omega}_{FSI}) \leq J_{FSI}(\tilde{\Omega}_S) = 44.9882 . \quad (5.2)$$

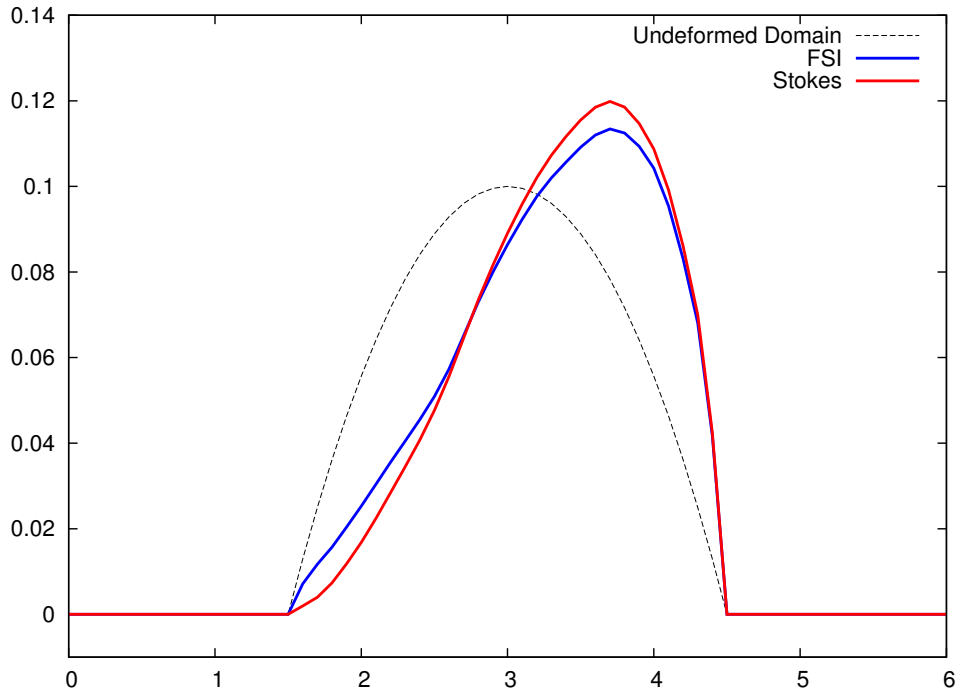


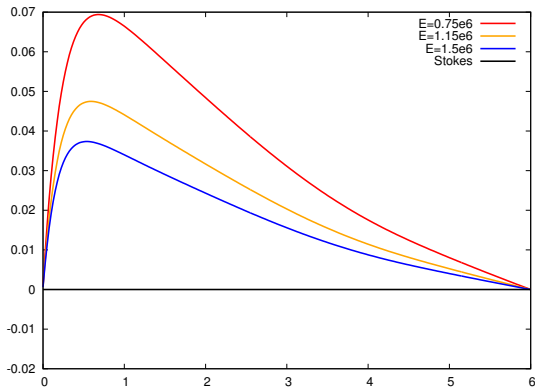
Figura 5.10: Profilo inferiore del *design ottimo* nel caso FSI e nel caso di una struttura rigida.

Studiamo ora la continuità della soluzione trovata rispetto alla rigidità della struttura considerata e, in particolare, rispetto al valore del *modulo di Young* E del solido elastico. Aumentando infatti il valore di E , il solido risulta essere più resistente alle deformazioni dovute all'interazione tra fluido e struttura.

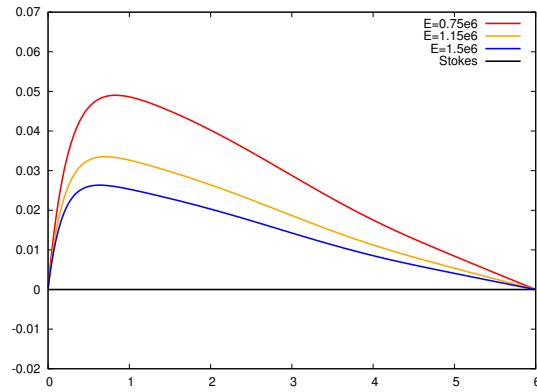
Tale caratteristica può essere verificata in Figura 5.11, dove viene mostrato lo spostamento η della struttura (sulla porzione di frontiera $\Gamma_0(t)$ del dominio di riferimento $\Omega_0(t)$), al variare del tempo $t \in (0, T)$ e al variare del valore del modulo di Young E utilizzato per descrivere la struttura.

I profili inferiori delle forme ottime ottenute al variare della rigidità della struttura, vengono invece mostrate in Figura 5.12. Si noti che, come del resto è piuttosto logico aspettarsi, aumentando il valore del modulo di Young (e quindi irrigidendo la struttura), il profilo ottimo tende a quello ottenuto nel caso di un flusso di Stokes non stazionario in un condotto analogo con parete rigida.

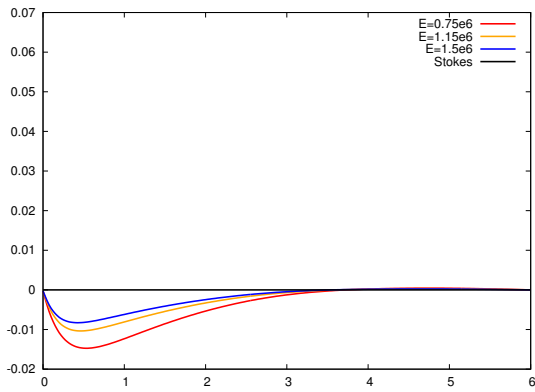
Concludiamo questa Sezione confrontando il tempo di esecuzione del processo di ottimizzazione in presenza di iterazione fluido-struttura in relazione al caso rigido. In particolare, una singola iterazione dello schema iterativo presentato nella Sezione 4.1 viene effettuata in 2.09 minuti nel caso rigido e in 3.34 minuti nel caso FSI. Risolvere il problema di stato con dominio mobile e il problema aggiunto per la componente solida comporta dunque un aumento dei tempi di esecuzione di più del 50%.



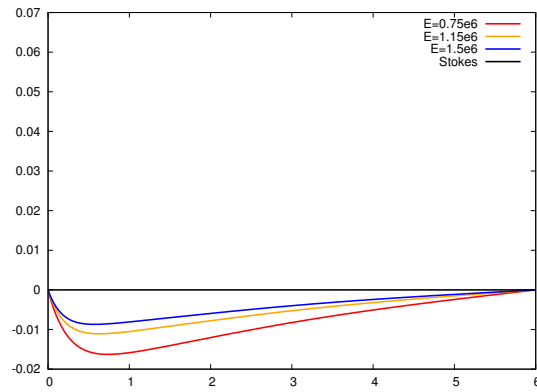
(a) $t = 0.005$



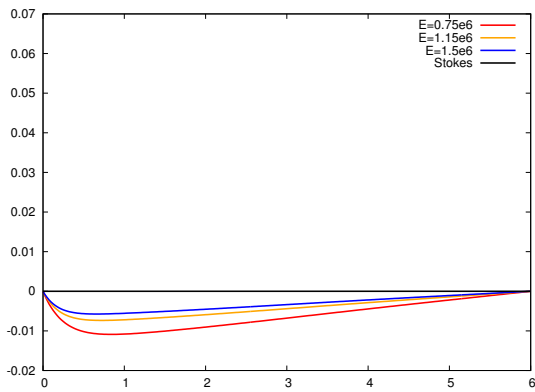
(b) $t = 0.01$



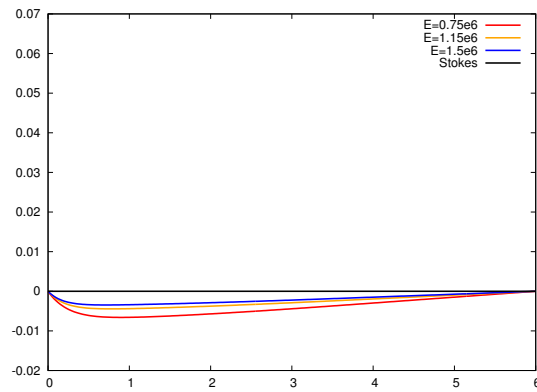
(c) $t = 0.015$



(d) $t = 0.02$



(e) $t = 0.025$



(f) $t = 0.03$

Figura 5.11: Spostamento della struttura, al variare del modulo di Young E , in diversi istanti temporali.

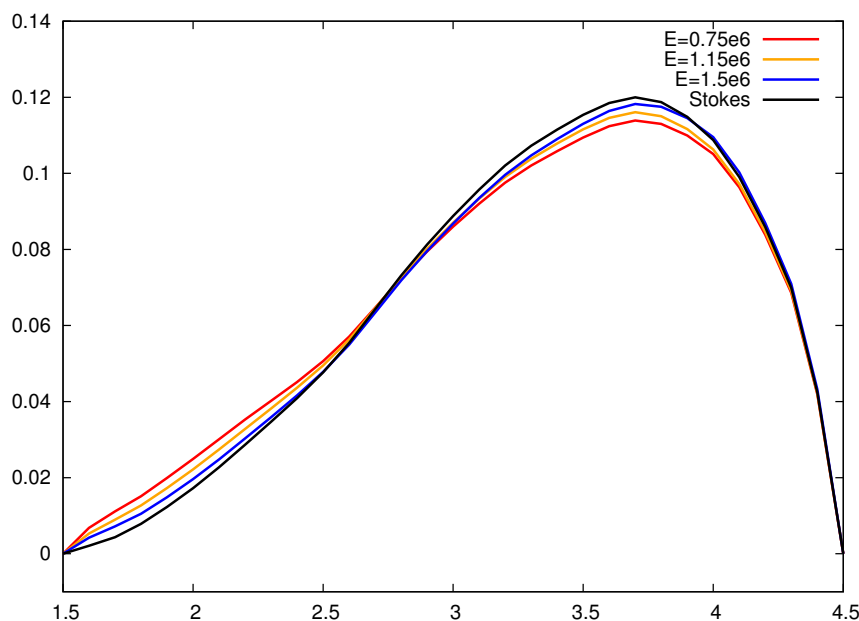


Figura 5.12: Particolare del profilo inferiore della forma ottima al variare del parametro E .

5.4 Design ottimo: Adjoint-based vs. Adjoint-free

Derivare e risolvere il problema aggiunto per la componente solida risulta essere un'operazione lunga e spesso, come visto nel Capitolo 3, piuttosto difficoltosa. Evitare di introdurre il problema aggiunto permetterebbe dunque un notevole risparmio computazionale. In questa Sezione vengono mostrati i risultati di una simulazione numerica del problema di ottimizzazione di forma nel caso FSI in cui venga trascurata la soluzione del problema aggiunto per il sotto-problema solido.

In particolare un metodo *Adjoint-free* prevede, ad ogni iterazione $k = 1, 2, \dots$

1. la soluzione del problema di stato FSI con dominio mobile per ogni istante temporale;
2. la valutazione del funzionale costo $J = J(\Omega^{(k)})$ e la soluzione del *problema aggiunto fluido*.

Si noti dunque che tale metodo non prevede né la risoluzione, né la definizione di un problema aggiunto per il solido; tale scelta potrebbe essere giustificata dai piccoli valori assunti dalla variabile aggiunta ψ . Inoltre, tale metodo può essere utilizzato solamente in casi in cui l'interfaccia tra solido e fluido non si trovi sulla porzione di frontiera interessata dal processo di ottimizzazione.

In Figura 5.13 viene mostrata (in rosso) la porzione di frontiera inferiore del *design ottimo* ottenuto utilizzando il metodo *Adjoint-free* descritto in questa Sezione, (in blu) l'analogo ottenuto mediante l'algoritmo *Adjoint-based* usato in tutti i precedenti casi test, e (in nero) quello ottenuto risolvendo il problema in assenza di interazione FSI. Un ulteriore confronto tra i domini ottenuti può essere trovato in Tabella (5.6), dove viene calcolata la distanza in norma L^2 tra i profili inferiori delle forme ottime ottenute.

Come si può vedere dalla Figura 5.13, trascurare la soluzione del problema aggiunto per la componente solida ha un notevole impatto sul design ottimo; la soluzione ottenuta con il metodo *Adjoint-free* risulta piuttosto distante da quella ottenuta con il metodo *Adjoint-based* se confrontata al caso rigido.

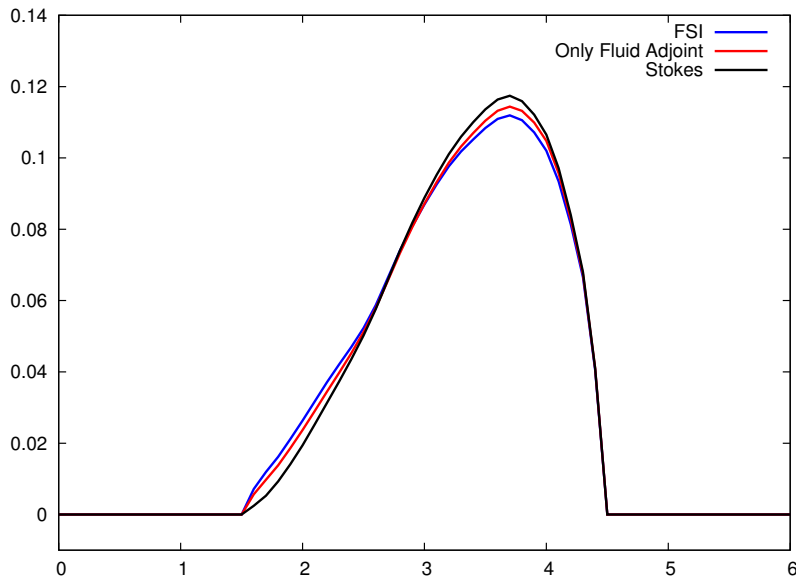


Figura 5.13: Profilo inferiore della forma ottima ottenuta con il metodo *Adjoint-free*, *Adjoint-based* e nel caso rigido.

FSI con Aggiunto Solido	Stokes non stazionario
0.00322397 cm	0.00446587 cm

Tabella 5.6: Distanza in norma L^2 tra il profilo inferiore della forma ottima ottenuto on il metodo *Adjoint-free*, *Adjoint-based* e nel caso rigido.

In base ai risultati ottenuti, non possiamo dunque affermare che, per il problema di *Shape Optimization* introdotto nel Capitolo 3, il metodo ottenuto considerando solamente il problema aggiunto per la componente fluida permetta di ottenere una buona approssimazione del problema risolto accoppiando tale sotto-problema al problema aggiunto per la componente solida.

Conclusioni

In questa Tesi di Laurea sono stati sviluppati alcuni metodi analitici e numerici per l'ottimizzazione di forma nel caso di problemi di fluidodinamica in presenza di interazione fluido-struttura.

In particolare è stato considerato un flusso bidimensionale (il cui moto è governato dalle equazioni di Stokes non stazionarie) che scorre in un condotto con pareti elastiche descritte mediante il *modello di Koiter* monodimensionale. Sebbene si tratti di un caso modello tale problema presenta tutte le difficoltà teoriche e numeriche che possono sorgere in questi casi.

Di tale problema è stata fornita una *formulazione punto-sella*, caratterizzando la forma ottima come punto sella di un opportuno funzionale Lagrangiano, ed è stata verificata l'esistenza di (almeno) una soluzione. Infine, utilizzando l'approccio basato sui moltiplicatori di Lagrange, sono state scritte le condizioni di ottimalità, facendo particolare attenzione alla scrittura del problema aggiunto per il solido.

Tali condizioni di ottimalità sono state infine utilizzate nella definizione di un opportuno metodo numerico per l'ottimizzazione di forma nel caso di un problema FSI basato sul metodo del gradiente. Un'ulteriore difficoltà, affrontata in questo ambito, è rappresentata dalla soluzione del problema aggiunto FSI, *backward* in tempo e definito su un dominio mobile, per cui pochi risultati numerici sono presenti in letteratura. A questo scopo è stato sviluppato un risolutore numerico per tali problemi, basati sul metodo utilizzato per la risoluzione del problema di stato FSI.

Per poter modificare la configurazione del dominio durante il processo di ottimizzazione è stata sviluppata una tecnica di tipo NURBS-FFD che permette di sfruttare la bassa dimensionalità tipica delle mappe *Free Form Deformation* e la flessibilità nella scelta dei punti di controllo offerte dalla rappresentazione *NURBS*. Tale tecnica risulta molto vantaggiosa rispetto al metodo basato sulla variazione locale della frontiera (metodo *BLV*) permettendo di gestire le deformazioni del dominio in funzione di un numero ridotto di punti di controllo e garantendo una maggiore regolarità della frontiera del dominio deformato.

La bontà degli strumenti teorici e numerici sviluppati è stata testata risolvendo alcuni problemi di ottimizzazione di forma riguardanti flussi di Stokes bidimensionali in condotti elastici definiti da una geometria idealizzata. In particolare:

- è stato proposto un confronto tra le forme ottimali ottenute utilizzando tecniche di deformazioni dei domini differenti. Tali *design* sono stati in seguito validati con risultati analoghi, ottenuti nel caso rigido, presenti in letteratura;
- è stata effettuata un'analisi di sensitività rispetto ai parametri elastici del solido ritrovando, aumentando la rigidità della struttura, i risultati ottenuti nel caso rigido;
- è stata infine sottolineata l'influenza del problema aggiunto della componente solida confrontando i risultati ottenuti con un metodo *Adjoint-based* (analogo ai casi test proposti precedentemente) e un metodo *Adjoint-free* (ottenuto trascurando gli effetti del sotto-problema aggiunto solido), in relazione al *design* ottimo ottenuto nel caso rigido.

Sebbene il presente lavoro abbia interessato la soluzione di un problema modello, esso ha permesso, presentando una procedura di analisi teorica e numerica, di affrontare (e superare) numerose difficoltà legate allo studio di problemi di ottimizzazione di forma in ambito fluidodinamico in presenza di interazione fluido-struttura, per i quali pochi risultati (sia analitici che numerici) sono presenti in letteratura. In particolare, la duplice natura di dipendenza dalla forma (dal problema di stato, in cui fluido e struttura sono accoppiati mediante condizioni di natura geometrica, e dal problema di ottimizzazione, in cui la variabile rispetto alla quale minimizzare il funzionale costo è proprio la configurazione indeformata del dominio) rende tale problema notevolmente complesso, anche nel caso di flussi di Stokes in semplici geometrie bidimensionali.

A partire dall'analisi presentata in questa Tesi di Laurea sono possibili numerosi sviluppi e approfondimenti, i più importanti dei quali riguardano:

- la soluzione di problemi di ottimizzazione di forma nel caso di un problema di stato più complesso considerando, ad esempio, flussi di Navier-Stokes in condotti deformabili, quali vasi sanguigni, descritti da leggi costitutive meno semplici e più realistiche. Tale scelta permetterebbe, inoltre, lo studio di problemi di interazione fluido-struttura dalla geometria più complessa, sia bidimensionale che tridimensionale;
- la soluzione di problemi di ottimizzazione di forma nel caso in cui le porzioni di frontiera su cui agire per poter minimizzare il funzionale costo non sono rigide ma sono soggette a deformazioni per effetto del flusso del fluido, a differenza di ciò che accade nei casi considerati;
- l'impiego di risolutori numerici per i problemi di interazione fluido-struttura e di metodi di ottimizzazione (quali Newton e quasi Newton) con velocità di convergenza maggiori, soprattutto in vista dell'applicazione a problemi caratterizzati da una più alta dimensionalità come nei casi di interesse applicativo.

Ringraziamenti

A conclusione di questo lavoro di Tesi desidero ringraziare tutti coloro che mi sono stati vicino nel corso di questi anni di studi e che mi hanno aiutato nel raggiungimento di questo traguardo.

Desidero ringraziare il Prof. Salsa per i consigli dati, la disponibilità fornita e, soprattutto, per la passione trasmessa dalla prima lezione a oggi. Un caloroso ringraziamento è rivolto al Dr. Ing. Andrea Manzoni per tutto il tempo e l'attenzione dedicata a questo lavoro. Lo ringrazio, in particolar modo, per aver sempre creduto in me e nella mia Tesi e per aver risposto con cura e (tanta) pazienza a tutti i dubbi che, nel corso di questi ultimi mesi, gli ho sottoposto.

Ringrazio inoltre Francesco Ballarin per tutto il tempo passato ad aiutarmi e per tutti i consigli relativi alla parte computazionale di questa Tesi forniti in questi mesi. Desidero ringraziare il Prof. Parolini per il tempo dedicatomi e per l'interesse mostrato per questo lavoro.

Un dovuto ringraziamento va a tutti coloro, la cui strada, in questi 5 anni, ha incrociato la mia; grazie Andrea, Francesco, Stefano, Claudia, Pasquale, Paolo e grazie in particolare a Michele con cui ho condiviso lezioni, progetti, pranzi e passioni.

Desidero inoltre ringraziare Giorgio per aver dovuto sopportare domande tecniche, drammi esistenziali e tormenti vari, trovando sempre il modo di aiutarmi.

Grazie a Teo per la sua costante e rassicurante presenza (al pari di una mia seconda e indipendente personalità) e per la certezza di poter contare su di lui in ogni occasione.

Un sentito e caloroso “grazie” è rivolto alla mia famiglia per aver creduto nel mio potenziale e per avermi sempre sostenuto con tutto l'affetto e l'attenzione necessari.

Uno speciale ringraziamento è rivolto a Vittoria per avermi dato, nel corso degli ultimi anni, abbastanza motivi per ringraziarla per poter riempire, senza difficoltà alcuna, altre cento pagine. Grazie.

Bibliografia

- [All00] G. Allaire. *Conception optimale de structures*. Springer Berlin, 2000.
- [AN08] E. I. Amoiralis and I. K. Nikolos. Free-form deformation versus b-spline representation in inverse airfoil design. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 8(2):01–13, 2008.
- [AP06] G. Allaire and O. Pantz. Structural optimization with FreeFem++. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32(3):173–181, 2006.
- [BMRS14] F. Ballarin, A. Manzoni, G. Rozza, and S. Salsa. Shape optimization by free-form deformation: Existence results and numerical solution for Stokes flows. *Journal of Scientific Computing*, 60(3):537–563, 2014.
- [BNT05] I. Babuška, F. Nobile, and R. Tempone. Worst case scenario analysis for elliptic problems with uncertainty. *Numerische Mathematik*, 101(2):185–219, 2005.
- [BP04] R. Boman and J.P. Ponthot. Finite element simulation of lubricated contact in rolling using the Arbitrary Lagrangian–Eulerian formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:4323–4353, 2004.
- [BQQ08] S. Badia, A. Quaini, and A. Quarteroni. Splitting methods based on algebraic factorization for fluid-structure interaction. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(4):1778–1805, 2008.
- [CDEG05] A. Chambolle, B. Desjardins, M. J. Esteban, and C. Grandmont. Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 7(3):368–404, 2005.
- [CDFQ11] P. Crosetto, S. Deparis, G. Fourestey, and A. Quarteroni. Parallel algorithms for fluid-structure interaction problems in haemodynamics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(4):1598–1622, 2011.

- [CGN05] P. Causin, J.F. Gerbeau, and F. Nobile. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid–structure problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(42-44):4506–4527, 2005.
- [Cro11] P. Crosetto. *Fluid-Structure Interaction Problems in Hemodynamics: Formulation, Solver, Preconditioners and Applications*. Phd Thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2011.
- [CSMT99] C. Conca, J. H. San Martín, and M. Tucsnak. Motion of a rigid body in a viscous fluid. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328(1):473–478, 1999.
- [DE99] B. Desjardins and M. J. Esteban. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in viscous fluid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 146(1):59–71, 1999.
- [Ded07] L. Dedè. Optimal flow control for Navier-Stokes equations: drag minimization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 55(4):347–366, 2007.
- [DGHL03] Q. Du, M.D. Gunzburger, L.S. Hou, and J. Lee. Analysis of linear fluid-structure interaction problem. *Discrete and continuous dynamical systems*, 9(3):633–650, 2003.
- [DZ11] M.C. Delfour and J.P. Zolésio. *Shape and Geometries: metrics, analysis, differential calculus and optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [ET87] I. Ekeland and R. Temam. *Convex Analysis and Variational Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [FFGQ09] M.A. Fernández, L. Formaggia, J.F. Gerbeau, and A. Quarteroni. The derivation of the equations for fluids and structure. In L. Formaggia, A Quarteroni, and A. Veneziani, editors, *Cardiovascular Mathematics*, volume 1 of *Modeling, Simulation and Applications (MS&A)*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2009.
- [FG09] M.A. Fernández and J.F. Gerbeau. Algorithms for fluid-structure interaction problems. In L. Formaggia, A Quarteroni, and A. Veneziani, editors, *Cardiovascular Mathematics*, volume 1 of *Modeling, Simulation and Applications (MS&A)*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2009.
- [FGG07] M.A. Fernández, J.F. Gerbeau, and C. Grandmont. A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(4):794–821, 2007.

- [For12] D. Forti. *Comparison of Shape Parametrization Techniques for Fluid-Structure Interaction Problems*. Master Thesis, Politecnico di Milano, 2012.
- [FPV14] I Fumagalli, N. Parolini, and M. Verani. Shape optimization for Stokes flow: a reference domain approach. Mox report no. 12/2014, Politecnico di Milano, 2014.
- [Fuj88] N. Fujii. Lower semicontinuity in domain optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 59(3):407–422, 1988.
- [Gra02] C. Grandmont. Existence for a three-dimensional steady state fluid-structure interaction problem. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 4:76–94, 2002.
- [HDB11] C. Heinrich, R. Duvigneau, and L. Blanchard. Isogeometric shape optimization in fluid-structure interaction. Rapport de recherche no 7639, Institut national de recherche en informatique et en automatique, 2011.
- [Hei04] M. Heil. An efficient solver for the fully-coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1-2):1–23, 2004.
- [HM03] J. Haslinger and R.A.E. Mäkinen. *Introduction to shape optimization: theory, approximation and computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [HP05] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes: une analyse géométrique*. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 2005.
- [HP10] A. Henrot and Y. Privat. What is the optimal shape of a pipe? *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 196(1):281–302, 2010.
- [HT06] J. Hron and S. Turek. A monolithic fem/multigrid solver for an ale formulation of fluid-structure interaction with application in biomechanics. *Fluid-structure interaction, Lect. Notes Eng Comput. Sci.*, 53:146–170, 2006.
- [JA07] S. Jakobsson and O. Amoignon. Mesh deformation using radial basis functions for gradient-based aerodynamic shape optimization. *Comput. Fluids*, 36:1119–1136, 2007.
- [JPRW10] S. Jakobsson, M. Patriksson, J. Rudholm, and A. Wojciechowski. A method for simulation based optimization using radial basis functions. *Optim. Eng.*, 11(4):501–532, 2010.

- [Leq11] J. Lequeurre. Existence of strong solutions to a fluid-structure system. *SIAM, J. Math. Anal.*, 43(1):398–410, 2011.
- [Lio71] J.L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, volume 170. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971.
- [LW94] H. J. Lamousin and W. N. Waggenspack. Nurbs-based free-form deformations. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 14(6), 1994.
- [LY08] D. G. Luenberger and Y. Ye. *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, 2008.
- [Man12] A. Manzoni. *Reduced Models for Optimal Control, Shape Optimization and Inverse Problems in Haemodynamics*. Phd Thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2012.
- [MAR08] A.M. Morris, C.B. Allen, and T.C.S. Rendall. CFD-based optimization of aerofoils using radial basis functions for domain element parameterization and mesh deformation. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 58:827–860, 2008.
- [MC13] B. Muha and S. Canić. Existence of a weak solution to a nonlinear fluid-structure interaction problem modeling the flow of an incompressible, viscous fluid in a cylinder with deformable walls. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 207(3):919–968, 2013.
- [MP09] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Applied shape optimization for fluids*. Oxford University Press, 2009.
- [MQR12] A. Manzoni, A. Quarteroni, and G. Rozza. Shape optimization for viscous flows by reduced basis methods and free-form deformation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70(5):646–670, 2012.
- [MS76] F. Murat and J. Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Internal report no 76 015, Laboratoire d’Analyse Numérique de l’Université de Paris, 1976.
- [MZ06] M. Moubachir and J.P. Zolésio. *Moving Shape Analysis and Control. Applications to Fluid Structure Interactions*. Chapman & Hall, 2006.
- [Noh64] W.F. Noh. A time-dependent two-space-dimensional coupled Eulerian-Lagrangian code. *Methods in computational physics*, 3:117–179, 1964.
- [NV08] F. Nobile and C. Vergara. An effective fluid-structure interaction formulation for vascular dynamics by generalised robin conditions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(2):731–763, 2008.

- [NW06] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, 2006.
- [Pir07] O. Pironneau. Optimal shape design by local boundary variations. *Optimal Shape Design Lecture Notes in Mathematics*, 1740:343–384, 2007.
- [PQ05] N. Parolini and A. Quarteroni. Mathematical models and numerical simulations for the America’s Cup. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(9-11):1001–1026, 2005.
- [PT95] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS Book*. Springer, 1995.
- [PVV11] M. Perego, A. Veneziani, and C. Vergara. A variational approach for estimating the compliance of the cardiovascular tissue: an inverse fluid-structure interaction problem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(3):1181–1211, 2011.
- [Qia10] X. Qian. Full analytical sensitivities in nurbs based isogeometric shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(29-32):2059–2071, 2010.
- [Qua12] A. Quarteroni. *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*. Springer-Verlag Italia, 2012.
- [Rus12] G. Rusnàkovà. *Numerical Modelling of Fluid-Structure Interaction with Application in Hemodynamics*. Dissertation Thesis, Johannes Gutenberg University in Mainz, 2012.
- [Sal10] S. Salsa. *Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni*. Springer Verlag, 2010.
- [Sar04] R.F. Sarraga. Modifying cad/cam surfaces according to displacements prescribed at a finite set of points. *Computer Aided-Design*, 36(4):343–349, 2004.
- [SOP⁺13] A. Sacharow, S. Odendahl, A. Peuker, D. Biermann, T. Surmann, and A. Zabel. Iterative, simulation-based shape modification by free-form deformation of the nc programs. *Advances in Engineering Software*, 56:63–71, 2013.
- [SP86] T.W. Sederberg and S.R. Parry. Free-form deformation of solid geometric models. In *Proceedings SIGGRAPH 86*, pages 151–160, 1986.
- [SS10] S. Schmidt and V. Schulz. Shape derivatives for general objective functions and the incompressible Navier-Stokes equations. *Control and Cybernetics*, 39(3):677–713, 2010.

- [SS14] J. Sokolowski and J. Stebel. Shape optimization for non-newtonian fluids in time-dependent domains. *Evolution Equations and Control Theory*, 3(2):331–348, 2014.
- [SSBP10] S. Schäfer, D.C. Sernel, G. Becker, and P. Pironkov. Efficient numerical simulation and optimization of fluid-structure interaction. *Fluid Structure Interaction II - Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 73:131–158, 2010.
- [SZ92] J. Sokolowski and J.P. Zolésio. *Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis*. Springer Series in Computational Mathematics, 1992.