

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica



ASSET ALLOCATION, REMUNERAZIONE E FLOW FUND

Tesi di Laurea di:

Eugenia LAURO

Matricola 786858

Relatore:

Prof. Emilio BARUCCI

Anno Accademico 2013-2014

ABSTRACT

We consider, in several contexts, the optimal asset allocation problem faced by a fund manager, who selects continuously in time an investment policy to maximize his expected utility of compensation. The dynamic of the fund is affected by the presence of inflows and outflows. The fund flows depend on the fund's performance relative to a benchmark.

The manager's salary can be based on the value of assets under management at the evaluation date or exclusively on the relative performance.

We find that the optimal policy is always connected to the benchmark's one and shows risk-shifting behavior or a tracking error increase in the underperformance region.

SOMMARIO

Consideriamo il problema di allocazione ottima in vari contesti modellistici. Il punto di vista assunto è quello del manager di un fondo d'investimento, il quale sceglie nel continuo la strategia che gli consente di massimizzare l'utilità attesa derivante dalla retribuzione ricevuta. Introduciamo nella dinamica del fondo la possibilità di flussi di capitale sia in entrata che in uscita.

Analizziamo diversi schemi retributivi, dipendenti dal valore degli asset gestiti o dalla performance relativa rispetto ad un benchmark.

Le strategie ottime trovate sono sempre legate a quella del benchmark e osserviamo fenomeni di risk-shifting/aumento del tracking error, specialmente quando la performance del fondo è inferiore a quella del benchmark.

INDICE

ABSTRACT	i
ELENCO DELLE FIGURE	iv
INTRODUZIONE	1
1 GESTIONE DEGLI ASSET CON PERFORMANCE RELATIVA E FLOW FUND	3
1.1 Option Compensation	3
1.2 Flussi di capitale e Risk-Shifting	7
1.3 Performance fee e allocazione ottima	11
1.4 Risultati empirici	13
2 FLOW FUND IN UN PROBLEMA DI ASSET ALLOCATION	16
2.1 La struttura del modello	16
2.2 Risoluzione	18
2.2.1 Struttura del problema di controllo ottimo . . .	18
2.2.2 Equazione Hamilton Jacobi Bellman	19
2.2.3 Risultati	19
2.2.4 Analisi dei risultati	21
2.3 Statica comparata	22
2.4 Flow Fund sul rendimento logaritmico	24
2.5 Statica comparata	26
3 LA PERFORMANCE RELATIVA	31
3.1 Flussi di capitale esponenziali	31
3.1.1 Mercati completi	33
3.1.2 Mercati incompleti	37
3.2 Retribuzione tramite Opzione	40
3.2.1 Il Metodo Martingala nel Problema Standard .	41
3.2.2 Risoluzione nel caso Option Compensation . . .	44
3.2.3 Analisi dei risultati	51
3.3 Collar type	55
3.3.1 Risoluzione	57
3.3.2 Analisi dei risultati	60
3.4 Possibilità di performance fee negative	62

3.4.1	Risoluzione	63
3.4.2	Analisi dei risultati	65
4	UN MODELLO CON MEAN REVERSION	69
4.1	Market price of risk	69
4.2	Risoluzione	70
4.3	Analisi dei risultati	73
4.3.1	La funzione valore $V(t, X, F)$	73
4.3.2	Confronto tra le strategie	75
4.3.3	Statica comparata	76
5	CONCLUSIONI	80
	BIBLIOGRAFIA	82

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1.1	Esposizione al rischio ottima $\hat{\vartheta}_t$ per il manager	9
Figura 1.2	Esposizione ottima $\hat{\vartheta}_t$ al variare della maturity	10
Figura 2.1	La strategia ottima per diversi valori di α	22
Figura 2.2	Coefficiente della <i>normal strategy</i> π^N	26
Figura 2.3	Coefficiente della <i>benchmark strategy</i> β	27
Figura 2.4	Variazione della strategia ottima π^* rispetto alla volatilità σ	28
Figura 2.5	La strategia ottima π^* al variare di α	30
Figura 2.6	Variazione dei pesi presenti in π^* rispetto ad η	30
Figura 3.1	Relazione tra flussi e rendimenti logaritmici .	32
Figura 3.2	Funzione utilità di partenza e versione concava	46
Figura 3.3	La performance ottima al tempo finale	48
Figura 3.4	La distanza ottima dalla benchmark strategy .	52
Figura 3.5	La distanza ottima al variare di ϑ	53
Figura 3.6	Performance fee percepita dal manager con $H=4$.	55
Figura 3.7	Funzione utilità di partenza e versione concava	56
Figura 3.8	La distanza ottima dalla benchmark strategy .	60
Figura 3.9	La distanza ottima $\delta^* = \pi^* - \beta$ in funzione dei flussi di capitale	65
Figura 4.1	Le funzioni $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$	74
Figura 4.2	La funzione $\Phi(t, X)$	74
Figura 4.3	La strategia su \bar{x}	77
Figura 4.4	La strategia su λ	77
Figura 4.5	La strategia su σ_x	78

INTRODUZIONE

L'aumento del numero di fondi d'investimento presenti sul mercato e dei volumi gestiti dagli stessi ha portato negli anni ad un interesse crescente da parte degli analisti finanziari. Molti studi esaminano i potenziali *agency issue* tra shareholder e manager del fondo, analizzando se e come il manager, in seguito a variazioni della performance relativa rispetto ad un benchmark fissato, modifichi la strategia di investimento del fondo, e dunque il livello di rischio dello stesso, rendendolo non in linea con le preferenze degli investitori.

Questo comportamento è legato sia allo schema di compensazione del manager che alle scelte che compiono gli investitori: il manager punta alla massimizzazione del proprio compenso, che dipende dal suo successo nel generare flussi di nuovi investimenti, i quali sono indirizzati quasi esclusivamente verso quei fondi che hanno performance migliori; inoltre c'è evidenza empirica che la relazione tra performance relativa e flussi non sia simmetrica (tipicamente gli outflow sono minori degli inflow a parità di variazione della performance) né lineare [Sirri e Tufano (1998), Chevalier e Ellison (1999)].

Se dunque il compenso del manager cresce in proporzione agli afflussi di nuovo capitale, la convessità della relazione tra performance e flussi crea un incentivo implicito a distorcere l'allocazione degli asset per aumentare la probabilità degli inflow futuri.

Sulla scia della letteratura esistente proponiamo un modello ampliato per quanto riguarda lo schema retributivo e analizziamo il problema di asset allocation che affronta il manager, con l'intento di quantificare gli effetti degli incentivi sul profilo di rischio del fondo stesso. Il contratto del manager prevede un compenso dipendente dal valore degli asset gestiti (*management fee*) o dalla performance relativa tra il fondo e un benchmark fissato (*performance fee*); come già osservato, il confronto con il benchmark influenza le scelte degli investitori, che investono nel fondo attratti dagli extra return e viceversa ritirano il proprio denaro in caso di performance relativa negativa: questi *inflow/outflow* incidono direttamente sul valore del fondo.

Analizziamo diverse tipologie di payoff e illustriamo differenze e analogie tra i vari casi studiati. Tra i payoff studiati includiamo retribuzioni di tipo opzione sulla performance, ciò porterà all'utilizzo di

diverse metodologie risolutive per il problema di ottimo del manager, come l'equazione di Hamilton Jacobi Bellman ed il metodo martingala. Studiamo infine un modello economico differente dai precedenti, in quanto il rendimento e la volatilità non sono più costanti ma sono a loro volta processi stocastici legati da una dinamica con mean reversion.

I risultati principali del lavoro di tesi sono che la presenza dei flow fund comporta un minore rischio per il fondo e quindi per gli investitori. Inoltre performance fee diverse portano a strategie del manager diverse tra loro e diversificate tra underperformance e overperformance.

Il lavoro di tesi ha la seguente struttura: nel Capitolo 1 illustriamo i principali studi su questi argomenti, da cui traiamo spunto anche per i capitoli successivi. Nel Capitolo 2 studiamo un modello in cui il valore del fondo è soggetto alla possibilità di inflow/outflow dipendente dalla performance relativa rispetto a un benchmark. Nel Capitolo 3 viene considerato un caso di asset allocation in cui il manager viene retribuito tramite una fee che dipende dalla performance del fondo rispetto a un benchmark con diverse tipologie di payoff. Nel Capitolo 4 studiamo un'estensione del modello analizzato da Kim-Omberg in [14] in cui introduciamo l'aspetto dei flow fund all'interno del modello che presenta un market price of risk con dinamica mean reverting. Nel Capitolo 5 presentiamo le principali conclusioni derivanti dal nostro studio sui vari modelli analizzati.

GESTIONE DEGLI ASSET CON PERFORMANCE RELATIVA E FLOW FUND

In questo capitolo vengono presentati e analizzati i risultati principali di vari studi sulle strategie di investimento. Nella sezione 1.1 il compenso del manager è espresso come un'opzione call sul valore degli asset, nella sezione 1.2 viene trattato il ruolo che hanno i flussi di capitale se la compensazione dipende dal valore degli asset gestiti, nella sezione 1.3 viene presentato un modello flessibile in cui il compenso del manager dipende unicamente dalla performance relativa. La sezione 1.4 è dedicata ai risultati empirici ottenuti negli studi considerati.

1.1 OPTION COMPENSATION

Nell'ambito dello studio degli effetti dello schema di compensazione sulla propensione al rischio del manager riportiamo i risultati ottenuti in [4], considerati un punto di partenza in molti lavori successivi. Il caso considerato è quello di un manager, avverso al rischio, remunerato tramite un'opzione call sugli asset che gestisce, con valore iniziale X_0 . La sua ricchezza alla data finale T è

$$\alpha (X_T - B_T)^+ + K$$

dove α rappresenta il numero di opzioni o la percentuale sui profitti, B_T lo strike price o il payoff benchmark, K include la componente fissa del compenso e la ricchezza personale. È fondamentale assumere che il manager non possa replicare e vendere questa opzione: se così non fosse il suo obiettivo sarebbe massimizzare il valore massimizzando la volatilità degli asset gestiti, ed il problema non ammetterebbe soluzione. Sul mercato (completo e privo di arbitraggio) sono presenti un asset privo di rischio con tasso istantaneo r ed n asset rischiosi. Dato il browniano n -dimensionale W , definito sullo spa-

zio completo di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, i processi di prezzo dei titoli rischiosi soddisfano

$$\frac{dP_{i,t}}{P_{i,t}} = (r_t + \mu_{i,t})dt + \sigma'_{i,t}dW_t \quad i = 1, \dots, n$$

dove i processi r , μ_i e σ'_i soddisfano le ipotesi di misurabilità rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}$ e limitatezza. In particolare, la matrice di covarianza $\Sigma = \sigma\sigma'$ è invertibile.

Il processo n -dimensionale π_t , le cui componenti rappresentano il valore dell'investimento nei vari titoli rischiosi al tempo t , è una strategia ammissibile se è $\{\mathcal{F}_t\}$ misurabile, tale che il valore del portafoglio non scenda sotto lo zero, e vale $\int_0^T \|\pi_t\|^2 dt < \infty$ q.c. Il valore del portafoglio evolve secondo

$$dX_t = (r_t X_t + \pi'_t \mu_t)dt + \pi'_t \sigma_t dW_t$$

Nel caso generale lo strike B_T è una variabile aleatoria $\{\mathcal{F}_T\}$ misurabile, positiva e tale che

$$\mathbb{E}[\zeta_T B_T] < \infty$$

dove ζ_t è lo *stochastic discount factor* definito da

$$\zeta_t = \exp \left\{ - \int_0^t \left(r_s + \frac{1}{2} \|\vartheta_s\|^2 \right) ds - \int_0^t \vartheta'_s dW_s \right\} \quad \text{e} \quad \vartheta_t = \sigma_t^{-1} \mu_t$$

La soluzione in forma esplicita al problema di ottimizzazione verrà ottenuta scegliendo B_T costante o deterministico rispetto al tempo T . Il manager sceglie tra le strategie ammissibili quella che massimizza l'utilità attesa dalla ricchezza al tempo finale. La funzione $U(x)$ appartiene alla famiglia HARA, le condizioni sui parametri garantiscono che sia crescente, concava, definita su un dominio che contiene $[K, \infty)$, differenziabile con continuità (almeno) due volte e tale che $\lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0$. Inoltre la funzione inversa dell'utilità marginale, $I = U'^{-1}$, è ben definita e differenziabile sul suo dominio $(0, \infty)$, decresce ed è convessa.

$$U(x) = \frac{1 - \gamma}{\gamma} \left(\frac{A(x - w)}{1 - \gamma} \right)^\gamma$$

con $\gamma < 1$, $w < K$, $A > 0$. Il problema di massimizzazione è dunque

$$\max_{\pi} \mathbb{E} [U(\alpha (X_T - B_T)^+ + K)] \quad (1.1)$$

sotto i vincoli

$$dX_t = (r_t X_t + \pi_t' \mu_t) dt + \pi_t' \sigma_t dW_t \quad e \quad X_t \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.2)$$

Sfruttando i risultati della *martingale pricing theory* il problema dinamico in (1.1) e (1.2) è equivalente al problema statico

$$\max_{X_T} \mathbb{E} [U(\alpha (X_T - B_T)^+ + K)] \quad (1.3)$$

sotto i vincoli

$$\mathbb{E}[\zeta_T X_T] \leq X_0 \quad e \quad X_T \geq 0 \quad (1.4)$$

Poiché la funzione obiettivo $U(\alpha (X_T - B_T)^+ + K)$ non è concava in X_T le condizioni al primo ordine non sono sufficienti a determinare univocamente una soluzione: questa viene trovata applicando la metodologia standard alla “versione concava” di U , definendo la funzione

$$u(x, b) = \begin{cases} U(\alpha (x - B_T)^+ + K) & x \geq 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}$$

e la sua versione concava

$$\tilde{u}(x, b) = \begin{cases} -\infty & x < 0 \\ u(0) + u'(\hat{x}(b), b)x & 0 \leq x \leq \hat{x}(b) \\ u(x, b) & x \geq \hat{x}(b) \end{cases}$$

La $\tilde{u}(x, b)$ viene ottenuta rimpiazzando parte della $u(x, b)$ con una corda, tra i punti $x = 0$ ed $x = \hat{x} > b$, in modo che la funzione risultante sia la più piccola funzione concava che domina quella di partenza. La soluzione ottenuta lavorando con la \tilde{u} è ottima anche per la u perché non assume mai valori per i quali le due funzioni sono diverse, cioè il payoff ottimo X_T non assume mai valori tra 0 e $\hat{x}(B_T)$. Per trovare la soluzione occorre la funzione inversa della \tilde{u} , denotata

$$i(y, b) = [(I(y/\alpha) - K)/\alpha + b] \mathbb{1}_{\{y < u'(\hat{x}(b), b)\}}$$

La funzione i è l'inversa di \tilde{u} (definita a tratti) nel senso che

$$y \in \tilde{u}'(i(y, b), b) \quad \forall b > 0$$

Riferendoci al problema (1.3) e (1.4) si ottiene, nel caso di benchmark costante o privo di rischio, il valore ottimo del fondo alla data T

$$X_T^* = [(I(\lambda^* \zeta_T / \alpha) - K) / \alpha + B_T] \mathbb{1}_{\{\zeta_T < z^*\}}$$

dove λ^* risolve

$$\mathbb{E}[\zeta_T i(\lambda \zeta_T, B_T)] = X_0$$

e

$$z^* = \alpha U'(\alpha(\hat{x}(B_T) - B_T) + K) / \lambda^*$$

Nel caso generale non è possibile ottenere espressione esplicite per $X_t^* = \mathbb{E}_t[(\zeta_T / \zeta_t) X_T^*]$ e per la strategia ottima π_t^* , ciò è possibile quando i coefficienti r , μ e σ dei processi di prezzo sono costanti e l'utilità del manager è di tipo DARA. Sotto queste ipotesi, con un benchmark $B_T = B_0 e^{rT}$, si ottiene il valore di portafoglio ottimo

$$X_t^* = e^{-r(T-t)} \left[\hat{x} N(d_1) + (\hat{x} - B_T + k/\alpha) \left(N(d_2) \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} - N(d_1) \right) \right]$$

e la strategia ottima

$$\pi_t^* = \left\{ \frac{X_t^*}{1-\gamma} + e^{-r(T-t)} \left[\frac{\hat{x} N'(d_1)}{\|\vartheta\| \sqrt{T-t}} - \frac{B_T - k/\alpha}{1-\gamma} N(d_1) \right] \right\} \Sigma^{-1} \mu$$

con $\hat{x} = \hat{x}(B_T)$, $d_1 = [\ln(z^*/\zeta_t) + (r - \|\vartheta\|^2/2)(T-t)] / \|\vartheta\| \sqrt{T-t}$, $d_2 = \|\vartheta\| \sqrt{T-t} / (1-\gamma)$, $\Sigma = \sigma\sigma'$.

Viene infine analizzato il comportamento della soluzione per valori limite del discount factor ζ_t e all'avvicinarsi della data T di esercizio dell'opzione:

- A. Quando $\zeta_t \rightarrow 0$ il manager sta gestendo asset con un valore sempre maggiore (tendente ad infinito), e sceglie la strategia a peso costante $\pi_t^*/X_t^* = \Sigma^{-1} \mu / (1-\gamma)$. Questa strategia a volatilità costante è quella trovata da Merton per il problema standard, ed è quella che si troverebbe se il manager venisse ricompensato con una quota lineare dei profitti.
- B. Al contrario, quando $\zeta_t \rightarrow +\infty$ la performance del portafoglio è molto negativa ed il valore X_t degli asset gestiti si avvicina allo zero: per evitare situazioni di insolvenza, anche l'investimento π_t nei titoli rischiosi va a zero ed il portafoglio viene dirottato verso il titolo privo di rischio. Tuttavia ciò avviene più lentamente del declino del valore del portafoglio, in modo che la

proporzione investita π_t/X_t , e dunque la volatilità, converga ad infinito all'avvicinarsi della bancarotta.

- c. All'avvicinarsi della data di valutazione della performance, cioè quando $t \rightarrow T$, il comportamento cambia a seconda dell'appetibilità che l'opzione ha per il manager. Per gli stati del mondo in cui l'opzione è in the money, $\zeta_T < z^*$, la proporzione investita converge ad una quota che può eventualmente essere minore rispetto a quella del problema standard riportata in (A). Diversamente, di fronte ad un'opzione che non verrà esercitata, il comportamento del manager è quello riportato in (B).

1.2 FLUSSI DI CAPITALE E RISK-SHIFTING

Riferendoci a [1] consideriamo il caso in cui il compenso è una frazione del valore del fondo ad una certa data T , ed il valore del fondo a T è determinato dalle scelte di portafoglio durante il periodo considerato e dalle entrate/uscite di capitale, che avvengono esclusivamente a T . Il framework economico è il classico "Black and Sholes", pertanto sono disponibili per l'investitore due opportunità, un titolo privo di rischio con tasso di interesse costante r (*money market account*) ed un titolo rischioso S (*stock*), a coefficienti costanti, la cui incertezza è guidata da un moto Browniano ω :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\omega_t$$

Il portafoglio W gestito dal manager evolve secondo la dinamica

$$dW_t = [(1 - \vartheta_t)r + \vartheta_t\mu] W_t + \vartheta_t\sigma W_t d\omega_t$$

dove ϑ_t denota la frazione del portafoglio investita nello stock. Il confronto con il benchmark Y determina il tasso f_T di inflow/outflow

$$dY_t = [(1 - \beta)r + \beta\mu] Y_t + \beta\sigma Y_t d\omega_t$$

$$f_T = \begin{cases} f_L & \text{se } R_T^W - R_T^Y < \eta_L \\ f_L + \psi(R_T^W - R_T^Y - \eta_L) & \text{se } \eta_L \leq R_T^W - R_T^Y < \eta_H \\ f_H \equiv f_L + \psi(\eta_H - \eta_L) & \text{se } R_T^W - R_T^Y \geq \eta_H \end{cases}$$

con $f_L, \psi > 0$, $\eta_L \leq \eta_H \in \mathbb{R}$, $R_t^Y = \log(Y_t/Y_0)$ e analogo per R_t^W . Le preferenze del manager sono date da una funzione utilità CRRA, ed il problema di ottimizzazione è dato da:

$$\max_{\vartheta} \mathbb{E} [u(W_T f_T)] \quad \text{con} \quad u(W_T f_T) = \frac{(W_T f_T)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0$$

In assenza di incentivi impliciti ($f_T = 1$), il manager mantiene un'esposizione al rischio costante e indipendente dalla performance del benchmark [Merton (1971)]

$$\vartheta_t^N = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \quad \text{normal risk exposure}$$

La soluzione, nel caso generale, viene ricavata tramite l'approccio *martingala* ed è espressa in funzione dello *stochastic discount factor*. L'espressione, che è esplicita ma molto elaborata, coinvolge sia la distribuzione cumulata N che la densità φ di una normale standard e l'inversa J della derivata della funzione utilità.

Se $\vartheta^N > \vartheta^Y$ (economia tipo (a))

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_t &= \vartheta^N + \left[N(d(\hat{\kappa}, \zeta_a)) - N(d(\hat{\kappa}, \hat{\zeta})) \right] (\gamma/\hat{\kappa} - 1) A \vartheta^N Z(\hat{\kappa}) \zeta_t^{-1/\hat{\kappa}} / \hat{W}_t \\ &\quad + \frac{\gamma \vartheta^N}{\kappa \sqrt{T-t} \hat{W}_t} \left\{ \left[\varphi(d(\hat{\kappa}, \zeta_a)) - \varphi(d(\hat{\kappa}, \hat{\zeta})) \right] A Z(\hat{\kappa}) \zeta_t^{-1/\hat{\kappa}} \right. \\ &\quad \left. + \left[\varphi(d(\gamma, \hat{\zeta})) f_H^{(1/\gamma-1)} - \varphi(d(\gamma, \zeta_a)) f_L^{(1/\gamma-1)} \right] Z(\gamma) (\hat{y} \zeta_t)^{-1/\gamma} \right\} \\ \hat{W}_T &= \frac{1}{f_H} J \left(\frac{\hat{y}}{f_H} \zeta_T \right) \mathbb{1}_{\{\zeta_T < \hat{\zeta}\}} + e^{\eta_H Y_T} \mathbb{1}_{\{\hat{\zeta} \leq \zeta_T < \zeta_a\}} \\ &\quad + \frac{1}{f_L} J \left(\frac{\hat{y}}{f_L} \zeta_T \right) \mathbb{1}_{\{\zeta_a \leq \zeta_T\}} \end{aligned}$$

Se $\vartheta^N < \vartheta^Y$ (economia tipo (b))

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_t &= \vartheta^N + \left[N(d(\hat{\kappa}, \hat{\zeta})) - N(d(\hat{\kappa}, \zeta_b)) \right] (\gamma/\hat{\kappa} - 1) A \vartheta^N Z(\hat{\kappa}) \zeta_t^{-1/\hat{\kappa}} / \hat{W}_t \\ &\quad + \frac{\gamma \vartheta^N}{\kappa \sqrt{T-t} \hat{W}_t} \left\{ \left[\varphi(d(\hat{\kappa}, \hat{\zeta})) - \varphi(d(\hat{\kappa}, \zeta_b)) \right] A Z(\hat{\kappa}) \zeta_t^{-1/\hat{\kappa}} \right. \\ &\quad \left. + \left[\varphi(d(\gamma, \zeta_a)) f_L^{(1/\gamma-1)} - \varphi(d(\gamma, \hat{\zeta})) f_H^{(1/\gamma-1)} \right] Z(\gamma) (\hat{y} \zeta_t)^{-1/\gamma} \right\} \\ \hat{W}_T &= \frac{1}{f_L} J \left(\frac{\hat{y}}{f_L} \zeta_T \right) \mathbb{1}_{\{\zeta_T < \zeta_b\}} + e^{\eta_H Y_T} \mathbb{1}_{\{\zeta_b \leq \zeta_T < \hat{\zeta}\}} \\ &\quad + \frac{1}{f_H} J \left(\frac{\hat{y}}{f_H} \zeta_T \right) \mathbb{1}_{\{\hat{\zeta} \leq \zeta_T\}} \end{aligned}$$

dove

1. \hat{y} risolve $\mathbb{E}[\zeta_T \hat{W}_T] = W_0$
2. $\hat{\kappa} = \kappa / (\beta \sigma)$
3. $\hat{\zeta} = (\hat{y} A^\gamma / f_H^{1-\gamma})^{1/(\gamma/\hat{\kappa}-1)}$
4. $A = W_0 \exp\left[\frac{\eta_H}{T} + (1-\beta)r + \beta(\mu - \beta\sigma^2/2 - (r + \kappa^2/2)\sigma/\kappa)\right] T$
5. $Z(v) = \exp\left[\frac{1-v}{v} \left(r + \frac{\kappa^2}{2v}\right) (T-t)\right]$
6. $g(\zeta) = \left[\gamma \left(\frac{\hat{y}}{f_t} \zeta\right)^{1-1/\gamma} - \left(\frac{\zeta^{1/\hat{\kappa}}}{A f_H}\right)^{\gamma-1}\right] / (1-\gamma) + \hat{y} A \zeta^{1-1/\hat{\kappa}}$
7. $g(\zeta_a) = g(\zeta_b) = 0$
8. $d(v, x) = \left[\ln \frac{x}{\zeta_t} + \left(r + \frac{2-v}{2v} \kappa^2\right) (T-t)\right] / \kappa \sqrt{T-t}$

La rappresentazione grafica in Figura 1.1 è uno strumento più diretto per l'analisi della strategia ottima.

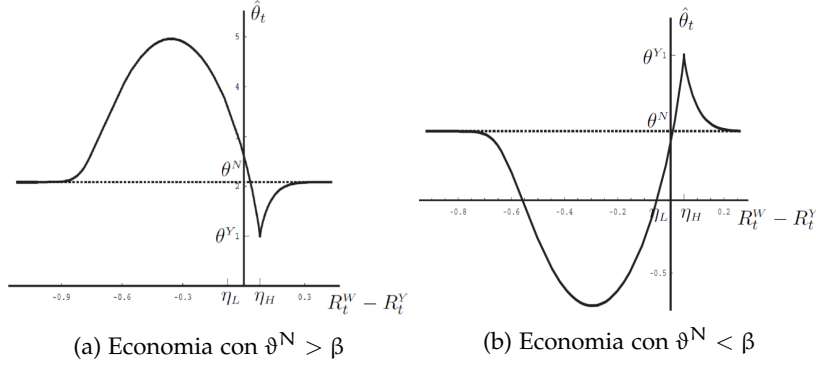


Figura 1.1: Esposizione al rischio ottima $\hat{\vartheta}_t$ per il manager

Le scelte effettuate dal manager dipendono dalla sua avversione al rischio e dalla convessità nel suo payoff nell'intorno della soglia inferiore η_L . La presenza di incentivi impliciti porta il manager ad assumere più rischio (aumentando la distanza tra la volatilità del fondo e quella del benchmark) in corrispondenza di un range di valori di performance detto *risk-shifting* range; la direzione della deviazione da ϑ^N dipende dal confronto tra ϑ^N e l'esposizione al rischio β del benchmark: un manager più propenso al rischio, ovvero la cui policy in assenza di incentivi è più rischiosa rispetto al benchmark, decide di aumentare la volatilità del fondo, mentre si avrà un comportamento opposto per un manager più avverso al rischio. Entrambe le economie sono plausibili in quanto sono identificate in base alle preferenze del manager, espresse nel parametro γ . Nell'economia di tipo (b)

la deviazione dal benchmark comporta una riduzione della volatilità del portafoglio, ma questo non significa che la strategia sia meno rischiosa: se l'ambito è quello della valutazione relativa la misura di rischio più indicata non è la volatilità del portafoglio σ_t^W , bensì la distanza $|\sigma_t^W - \sigma_t^Y|$.

I risultati in figura 1.1 sono molto generali e validi anche per diverse specificazioni della f_T : oltre alla descritta *collar-type* viene studiato il caso digitale per evidenziare gli effetti di discontinuità nel payoff del manager ed un caso con forte convessità, basandosi su quanto documentato in [10], rispettivamente

$$f_T = \begin{cases} f_L & \text{se } R_T^W - R_T^Y < \eta \\ f_H & \text{se } R_T^W - R_T^Y \geq \eta, \quad 0 < f_L \leq f_H, \eta \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.5)$$

$$f_T = \begin{cases} f_L & \text{se } R_T^W - R_T^Y < \eta \\ f_L + \psi(e^{R_T^W - R_T^Y} - e^\eta) & \text{se } R_T^W - R_T^Y \geq \eta. \end{cases} \quad (1.6)$$

Poiché il manager è avverso al rischio, il risk-shifting range e la conseguente esposizione al rischio sono finiti: quando il rendimento del fondo è molto indietro o molto avanti rispetto al benchmark il manager non si discosta dalla *golden rule* di Merton. Lo shift massimo si ottiene nell'intorno della soglia inferiore η_L , mentre in corrispondenza di η_H il manager blocca i suoi guadagni imitando il benchmark. Ciò non è in contrasto con i risultati in Carpenter [4], in cui la volatilità del fondo può crescere illimitatamente, in quanto è l'assenza di ripercussioni negative (gli outflow) in caso di deterioramento della performance che inibisce l'avversione al rischio del manager. Fa eccezione il caso (1.6), dove nella zona di overperformance non si converge a ϑ^N : ciò accade perché il tasso di inflow f_T continua a crescere indefinitamente con il miglioramento della performance, una caratteristica assente nelle altre specificazioni.

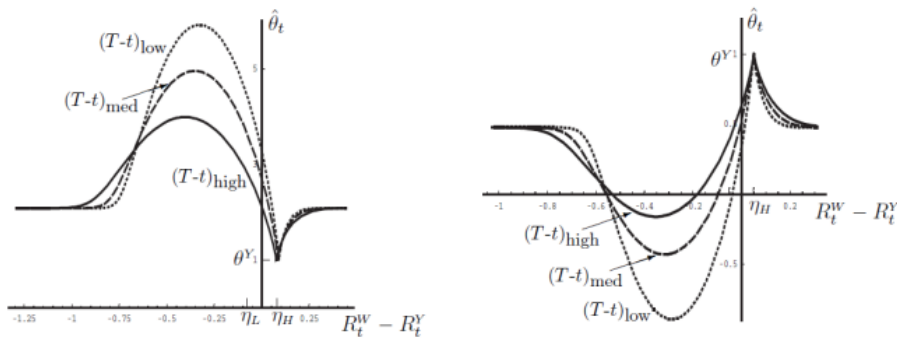


Figura 1.2: Esposizione ottima $\hat{\vartheta}_t$ al variare della maturity

Inoltre la strategia $\hat{\vartheta}_t$ è funzione della maturity $T - t$, ed il risk shifting si accentua all'avvicinarsi della data di valutazione T : ad inizio anno prevalgono considerazioni legate all'avversione al rischio, e le deviazioni nel risk shifting range sono minori, sebbene questo range sia più ampio. Al contrario verso la fine è l'incentivo a battere il benchmark che guida il manager, e le deviazioni sono molto più consistenti, come in Figura 1.2.

I disallineamenti, causati da incentivi impliciti ed espliciti (differente avversione al rischio), tra la strategia ottima per l'investitore e quella del manager si riflettono in costi, per l'investitore, significativi: ad esempio quando l'avversione relativa dell'investitore è 2 e quella del manager 1, il costo è di circa il 10% della ricchezza iniziale.

1.3 PERFORMANCE FEE E ALLOCAZIONE OTTIMA

In [5] gli autori studiano le scelte del manager di un fondo d'investimento quando lo schema retributivo si basa interamente sul confronto tra la performance del fondo e quella di un indice benchmark. Gli autori trovano che la deviazione del portafoglio ottimo rispetto al portafoglio benchmark è funzione della performance e, sotto la plausibile ipotesi che il compenso del manager non sia mai nullo, concludono che il manager tende a deviare maggiormente dal benchmark (aumento del *tracking error*) quando la performance relativa è in declino. Tuttavia, come è evidenziato anche in [1], ciò non implica che il manager scelga di aumentare la volatilità del portafoglio.

Il manager può investire nell'indice benchmark S e in un titolo alternativo A

$$\frac{dS}{S} = \alpha_S dt + \sigma_S dz \quad \frac{dA}{A} = \alpha_A dt + \sigma_A dq$$

dove $\sigma_S dz \sigma_A dq = \sigma_{AS} dt$. $\sigma_A, \sigma_S, \sigma_{AS}$ sono ipotizzate costanti, mentre per α_A e α_S si richiede che sia costante $\alpha_A - \alpha_S$. Se il manager investe la proporzione ω in A ed il resto del portafoglio in S , il valore V del portafoglio e il processo di performance relativa $G = V/S$ hanno le seguenti dinamiche:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= [(1 - \omega)\alpha_S + \omega\alpha_A] dt + (1 - \omega)\sigma_S dz + \omega\sigma_A dq \\ \frac{dG}{G} &= \omega (\alpha_A - \alpha_S + \sigma_S^2 - \sigma_{AS}) dt + \omega(\sigma_A dq - \sigma_S dz) \end{aligned}$$

Per il manager è essenziale battere il benchmark: così facendo attrae

nuovi flussi di capitale e riceve un compenso maggiore alla data T (tipicamente la fine dell'anno). Dunque l'obiettivo sarà massimizzare il compenso ricevuto rispetto alla propria utilità $U(x) = x^\gamma/\gamma$, $\gamma < 1$:

$$\max_{\omega_s, \forall s \in [t, T]} \mathbb{E}_t[U(P[G_T])] \quad \text{con} \quad P[G_T] = \left(a + \frac{b}{c}G_T\right)^c$$

dove $b > 0$, $c > 0$, $a > -b/c$, $c\gamma < 1$. I parametri della $P(G)$ rendono molto flessibile lo schema di compensazione, che può essere lineare, convesso o concavo. Le condizioni sui parametri garantiscono che $U(P[G_T])$ sia concava in G_T e che il manager abbia a disposizione una strategia fattibile che garantisca ricchezza positiva a T , ovvero investire totalmente nel benchmark. Diversamente da [1] i flussi di capitale non sono presenti esplicitamente nel modello e l'utilità non dipende dal valore degli asset gestiti, tuttavia i risultati ottenuti in termini di aumento del tracking error sono comparabili.

Il problema di allocazione ottima viene risolto tramite l'equazione Hamilton Jacobi Bellman ottenendo

$$J(G, t) = \frac{1}{\gamma} \left(a + \frac{b}{c}G\right)^{c\gamma} e^{-\vartheta(T-t)} \quad \text{value function}$$

$$\omega^* = \frac{\alpha_G}{(1 - c\gamma)\sigma_G^2} \left(1 + \frac{ac}{bG}\right) \quad \text{optimal strategy.}$$

dove

$$\vartheta = -c\gamma\alpha_G^2/[2(1 - c\gamma)\sigma_G^2]$$

$$\alpha_G = \alpha_A - \alpha_S + \sigma_S^2 - \sigma_{AS}$$

$$\sigma_G^2 = \sigma_A^2 - 2\sigma_{AS} + \sigma_S^2$$

Per l'analisi della strategia ottima si considera la derivata

$$\frac{\partial |\omega^*|}{\partial G} = -a \frac{c|\alpha_G|}{(1 - c\gamma)bG^2\sigma_G^2}$$

Nel caso $a > 0$ il manager reagisce ad un declino nella performance relativa G aumentando il tracking error, cioè riducendo l'investimento nel benchmark a favore del titolo alternativo: ciò non implica necessariamente un aumento della volatilità del fondo. Per il caso $a < 0$, il compenso $P[G]$ è potenzialmente negativo (se ad esempio $G \rightarrow 0$) ed il manager, di fronte ad un declino della performance, cerca di evitare l'annullamento del compenso imitando più da vicino il

benchmark.

Nel modello proposto, la proporzione ω che minimizza la deviazione standard dei return è data da

$$\omega_{\min} = \frac{\sigma_S^2 - \sigma_{AS}}{\sigma_G^2}$$

ed è possibile riscrivere ω^* come

$$\omega^* = \omega_{\min} \frac{\alpha_G}{(\sigma_S^2 - \sigma_{AS})(1 - c\gamma)} \left(1 + \frac{ac}{bG}\right) \quad (1.7)$$

Sia ora $c\gamma < 1$ e $a > 0$, in modo che la soluzione al problema di allocazione esista (e sia limitata) e sia tale che il manager devia maggiormente dal benchmark quando la performance è in declino.

Se, in riferimento a (1.7), valgono

$$\frac{\alpha_G}{(\sigma_S^2 - \sigma_{AS})} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\alpha_G}{(\sigma_S^2 - \sigma_{AS})(1 - c\gamma)} \left(1 + \frac{ac}{bG}\right) < 1 \quad (1.8)$$

ω^* e ω_{\min} hanno lo stesso segno e $|\omega^*| < |\omega_{\min}|$. In questo caso il peggioramento della performance relativa fa aumentare $|\omega^*|$ e implica quindi l'avvicinamento di ω^* a ω_{\min} , ovvero un effetto di *riduzione* della volatilità del fondo; al contrario se le condizioni in (1.8) non sono soddisfatte il declino della performance ha l'effetto di aumentare la volatilità.

In conclusione si può avere un allontanamento dal benchmark collegato all'underperformance, ma ciò non esclude che il portafoglio si avvicini a quello che minimizza la deviazione standard. Quindi l'indicatore corretto del *risk-shifting* è dato dal tracking-error piuttosto che dalla volatilità complessiva dell'investimento.

1.4 RISULTATI EMPIRICI

In [6], Reed e Wu esplorano l'ipotesi che battere l'indice S&P500 sia un fattore determinante dell'attitudine al rischio dei manager, trovando evidenza in tal senso: il gestore del fondo blocca la propria posizione in relazione all'indice, dopo averlo battuto, muovendosi verso strategie che riducono il rischio.

L'analisi empirica in [1] si riallaccia ai risultati in [6, 8, 11], con l'intento di analizzare il caso, non trattato nei lavori precedenti, in cui il manager desidera, in assenza di incentivi impliciti, un'esposizione al rischio minore rispetto al benchmark. Il benchmark considerato

è ancora lo S&P500. La prima ipotesi testata è che la deviazione standard del tracking error sia più alta se il rendimento del fondo è inferiore rispetto al rendimento dello S&P500, e, come in [5], si ottiene evidenza del fenomeno.

Nel secondo test vengono identificati i manager che normalmente sceglierebbero un portafoglio meno rischioso dello S&P500. Sebbene si riscontri che, in caso di underperformance, venga data una preferenza per investimenti meno rischiosi (così come previsto nel modello teorico), la magnitudine del fenomeno è molto inferiore a quanto teorizzato.

Infine, i dati confermano che il risk-shifting range è finito e che il manager non è incentivato a rischiare se è molto indietro rispetto al benchmark.

In [5] vengono testate due ipotesi:

$$\frac{\sigma_{2L}}{\sigma_{1L}} > \frac{\sigma_{2W}}{\sigma_{1W}} \quad (1.9)$$

$$\frac{\sigma_{G,2L}}{\sigma_{G,1L}} > \frac{\sigma_{G,2W}}{\sigma_{G,1W}} \quad (1.10)$$

dove σ_{2L} denota la deviazione standard del tasso di rendimento, durante la 2° metà dell'anno, di un fondo considerato perdente (loser) rispetto al benchmark; σ_{1L} , σ_{2W} , σ_{1W} hanno interpretazione analoga (W =winner). In (1.10) viene considerata la deviazione standard del tasso di rendimento del portafoglio in eccesso rispetto al benchmark.

Nei test eseguiti l'ipotesi (1.9) viene rifiutata: non c'è evidenza che nei fondi con scarse prestazioni i manager aumentino la s.d del rendimento nella 2° metà dell'anno; al contrario, i dati di alcuni intervalli temporali mostrano evidenza del fenomeno opposto: la s.d viene ridotta in seguito al periodo di underperformance. Questi risultati, così come quelli in [8] e [GNW 2005], sono in contrasto con quanto trovato in [9].

Per quanto riguarda l'ipotesi (1.10), i test condotti portano ad accettarla, concludendo che c'è molta più evidenza di una relazione inversa tra performance e ampiezza del tracking error.

In [7] gli autori, partendo dalla constatazione che l'esposizione al rischio dei fondi comuni cambia in maniera significativa nel tempo, esaminano gli effetti che tale risk-shifting ha sulla performance. Questi effetti dipendono dalle cause economiche all'origine del risk-shifting.

Un manager molto attivo nella gestione del fondo potrebbe essere motivato da interessi personali: egli cerca di massimizzare il proprio

compenso attirando nuovi investitori nel fondo, sapendo che questi premiano la performance positiva e non penalizzano equivalentemente quella negativa (vedi [9, 10, 11]).

In alternativa la maggiore attività potrebbe essere il risultato dell'abilità del manager nella selezione dei titoli e nella previsione dei movimenti futuri del mercato (*market timing*). Se esistesse una relazione positiva tra risk-shifting e abilità sarebbe logico aspettarsi performance superiori.

Sfortunatamente l'analisi empirica mostra che i fondi che cambiano i propri livelli di rischio hanno prestazioni inferiori rispetto a quelli con profili di rischio più stabili. Queste prestazioni inferiori sono significative principalmente per quei fondi che aumentano l'esposizione al rischio idiosincratice o che aumentano il tracking error rispetto al loro benchmark, mentre ridurre il livello di liquidità a vantaggio delle partecipazioni azionarie o aumentare l'esposizione al rischio sistematico porta a riduzioni più contenute della performance.

Gli autori concludono che, essendo legato al deterioramento della performance, il risk-shifting è dannoso per gli investitori e andrebbe evitato.

2

FLOW FUND IN UN PROBLEMA DI ASSET ALLOCATION

In questo capitolo ricaviamo la strategia di allocazione ottima in un modello a coefficienti costanti, descritto nella sezione 2.1. In questo contesto inseriamo la possibilità di flow fund all'interno del fondo, ossia la possibilità da parte degli investitori di inserire nuovi capitali o di detrarre parte di quelli già esistenti. In base a quanto documentato in studi empirici, colleghiamo questo fenomeno alla performance relativa rispetto a un benchmark. Inoltre ci poniamo in un contesto temporale finito in cui l'asset manager riceve la management fee soltanto al tempo finale della sua gestione. Nella sezione 2.2 presentiamo la tecnica risolutiva ed i primi risultati, commentati nella sezione 2.3. Nelle sezioni successive studiamo un modello alternativo, con una differente specificazione dei flussi di capitale.

2.1 LA STRUTTURA DEL MODELLO

Il modello economico preso in esame è composto da un asset risk-free con tasso istantaneo r e da un asset rischioso S_t con dinamica

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t) \quad S_0 > 0 \quad (2.1)$$

dove μ e σ rappresentano il drift e la volatilità, ipotizzate costanti, e B_t è un processo di Wiener standard definito su uno spazio completo di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La filtrazione di riferimento è $\{\mathcal{F}_t\}$, ottenuta aumentando la filtrazione naturale del Browniano B_t con gli insiemi \mathbb{P} -nulli. Il benchmark Y_t rispetto al quale viene valutata la performance del manager è un *value-weighted portfolio* con una frazione β investita nel titolo rischioso S_t e $(1 - \beta)$ nel titolo risk-free

$$dY_t = [(1 - \beta)r + \beta\mu]Y_t dt + \beta\sigma Y_t dB_t \quad Y_0 > 0 \quad (2.2)$$

Il manager opera in un mercato a tempo continuo completo e privo di arbitraggio ed il processo π_t rappresenta la percentuale degli asset che egli sceglie di investire in S_t , ovvero l'esposizione al rischio del fondo. Una strategia di trading π_t è ammissibile se impedisce situazioni di bancarotta (valore degli asset gestiti negativo), è progressivamente misurabile rispetto ad $\{\mathcal{F}_t\}$ e se $\int_0^T \pi_t^2 < \infty$ quasi certamente. L'evoluzione del fondo W_t , trascurando i flussi dovuti al confronto con Y_t , è data da

$$dW_t = [(1 - \pi_t)r + \pi_t\mu]W_t dt + \pi_t\sigma W_t dB_t \quad W_0 > 0 \quad (2.3)$$

Assumiamo, senza perdita di generalità, $W_0 = Y_0$.

Il processo G che modella inflow e outflow ha la dinamica

$$dG_t = \eta \left(\frac{dW_t}{W_t} - \frac{dY_t}{Y_t} \right) = \eta [(\pi_t - \beta)(\mu - r)dt + (\pi_t - \beta)\sigma dB_t] \quad (2.4)$$

da cui si ottiene la dinamica complessiva

$$\begin{aligned} \frac{dF_t}{F_t} &= [(1 - \pi_t)r + \pi_t\mu]dt + \pi_t\sigma dB_t + dG_t \\ &= [r + (\mu - r)(\pi_t + \eta(\pi_t - \beta))]dt + \sigma[\pi_t + \eta(\pi_t - \beta)]dB_t \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove la componente $F_t dG_t$ rappresenta il contributo dei flow fund alla dinamica del fondo.

La funzione utilità che rappresenta le preferenze del manager è una funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty)$ concava, non decrescente, semicontinua dall'alto, che soddisfa:

- la semiretta $dom(u) = \{x \in \mathbb{R} : u(x) > -\infty\}$ è un sottoinsieme non vuoto di $[0, \infty)$
- u' è continua, positiva, strettamente decrescente sull'interno di $dom(u)$, e

$$u'(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$$

Poniamo come \bar{x} l'estremo inferiore di $dom(u)$, in modo che $\bar{x} \in [0, \infty)$ e che sia $dom(u) = [\bar{x}, \infty)$ o $dom(u) = (\bar{x}, \infty)$. Consideriamo una classe di funzioni utilità comunemente utilizzate, al variare del parametro $a \in [0, 1)$

$$u(x) = \begin{cases} x^a/a & x \geq 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

nel caso $\alpha = 0$

$$u(x) = \begin{cases} \log x & x > 0 \\ -\infty & x \leq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Per queste funzioni utilità l'indice di avversione relativa al rischio di Arrow-Pratt, $-xu''(x)/u'(x)$, è costante e pari a $1 - \alpha$; inoltre $\bar{x} = 0$. La funzione $u' : (0, \infty) \rightarrow (0, u'(0))$ ha inversa strettamente decrescente e continua $i : (0, u'(0+)) \rightarrow (0, \infty)$. Poniamo $i(y) = 0$ per tutte le $y \in [u'(0+), \infty]$, in modo che i sia definita, finita e continua sull'intera semiretta $(0, \infty)$. Il problema di ottimizzazione è dato da

$$\max_{\pi_t} \mathbb{E}[u(\gamma F_T)] \quad (2.8)$$

dove γ rappresenta la quota del fondo che il manager percepisce come compenso.

2.2 RISOLUZIONE

2.2.1 Struttura del problema di controllo ottimo

- Spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$
- Variabili di stato $X = (X_t)$: processo adattato a valori in \mathbb{R}^n che rappresenta l'evoluzione delle variabili quantitative che descrivono il sistema, nel caso esaminato $X_t = F_t$ a valori in $(0, +\infty)$, con dinamica $dX_t = \mu(t, X_t, \pi_t)dt + \sigma(t, X_t, \pi_t)dB_t$ (\diamond)
- Controllo $\pi = (\pi_t)$: processo il cui valore viene stabilito a t in base all'informazione disponibile \mathcal{F}_t , e che può influenzare la dinamica di X

Dato un controllo ammissibile denotiamo con X^π la soluzione dell'equazione differenziale stocastica (\diamond), consideriamo la funzione $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, nel caso esaminato $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e definiamo

$$\begin{aligned} J(t, x; \pi) &= \mathbb{E}_t[\Phi(X^\pi(T))] && \text{objective functional} \\ V(t, x) &= \sup_{\pi} J(t, x; \pi) && \text{value function} \end{aligned}$$

il controllo ammissibile π^* è *ottimo* se $V(t, x) = J(t, x; \pi^*)$.

2.2.2 Equazione Hamilton Jacobi Bellman

Sia $c(t, X_t, \pi_t) = \sigma(t, X_t, \pi_t) \cdot \sigma^\top(t, X_t, \pi_t)$. Denotiamo con $\mu^\pi, \sigma^\pi, c^\pi$ i coefficienti dell' EDS (\diamond) e introduciamo l'operatore

$$\mathcal{A}^\pi = \sum_{i=1}^n \mu_i^\pi \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{i,j}^\pi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Sotto le ipotesi di regolarità della value function $V(t, x)$ e di esistenza del controllo ottimo π^* , si ha che:

- V soddisfa l'equazione di Hamilton Jacobi Bellman

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup_{\pi} [\mathcal{A}^\pi V(t, x)] = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ V(T, x) = \Phi(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, il sup si ottiene per $\pi = \pi^*$

2.2.3 Risultati

Applicando l'equazione HJB al caso studiato, ricaviamo la strategia ottima per $\mathbb{E}_t[u(F(T))]$, che massimizza anche $\mathbb{E}_t[u(\gamma F(T))]$.

TEOREMA 1

Dato il problema di controllo ottimo stocastico descritto da (2.8) e (2.5), definito $V(t, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[u(F^\pi(T)) | F(t) = f]$, si ha la value function

$$V(t, F(t)) = \begin{cases} h(t; a) F(t)^a & \text{se } a \neq 0 \\ h(t; a) + \log F(t) & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

con

$$h(t; a) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{a\vartheta(a)(T-t)} & \text{se } a \neq 0 \\ \vartheta(0)(T-t) & \text{se } a = 0 \end{cases} \quad e \quad \vartheta(a) = r + \frac{(\mu - r)^2}{2(1-a)\sigma^2}$$

La strategia ottima associata prevede un peso costante nel titolo rischioso

$$\pi(t, F(t); a) = \pi^* \equiv \frac{1}{1+\eta} \left[\frac{\mu - r}{(1-a)\sigma^2} + \eta\beta \right] \quad (2.9)$$

Dimostrazione.

caso $\alpha \neq 0$ $V(t, f)$ soddisfa l'equazione HJB

$$\begin{cases} V_t + \sup_{\pi} [\mu_{\mathbb{F}}^{\pi} V_f + \frac{1}{2} (\sigma_{\mathbb{F}}^{\pi})^2 V_{ff}] = 0 & \forall (t, f) \in [0, T] \times (0, +\infty) \\ V(T, f) = \frac{1}{\alpha} f^{\alpha} & \forall f \in (0, +\infty). \\ \lim_{f \rightarrow 0} V(t, 0) = 0 & \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

in questa equazione V_t, V_f sono le derivate parziali di V rispetto a t, f e i coefficienti sono

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{F}}^{\pi} &= \mu_{\mathbb{F}}^{\pi}(t, f) = f[r + (\mu - r)(\pi + \eta(\pi - \beta))]. \\ (\sigma_{\mathbb{F}}^{\pi})^2 &= \sigma_{\mathbb{F}}^{\pi}(t, f)^2 = f^2 \sigma^2 [\pi + \eta(\pi - \beta)]^2. \end{aligned}$$

Per un dato (t, f) risolviamo il problema di massimizzazione statico trovando

$$\pi^*(t, f) \equiv \pi^*(t, f; V) = \frac{1}{1 + \eta} \left[-\frac{V_f}{f V_{ff}} \frac{\mu - r}{\sigma^2} + \eta \beta \right]$$

la soluzione ottima per π dipende quindi dalla $V(t, f)$, che viene trovata risolvendo la PDE

$$\begin{cases} V_t + \mu_{\mathbb{F}}^{\pi^*} V_f + \frac{1}{2} (\sigma_{\mathbb{F}}^{\pi^*})^2 V_{ff} = 0 & \forall (t, f) \in [0, T] \times (0, +\infty) \\ V(T, f) = \frac{1}{\alpha} f^{\alpha} & \forall f \in (0, +\infty). \\ \lim_{f \rightarrow 0} V(t, 0) = 0 & \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.10)$$

dove i coefficienti $\mu_{\mathbb{F}}^{\pi^*}$ e $\sigma_{\mathbb{F}}^{\pi^*}$ vengono ottenuti sostituendo π^* nelle espressioni di $\mu_{\mathbb{F}}^{\pi}$ e $\sigma_{\mathbb{F}}^{\pi}$. Per risolvere (2.10) ipotizziamo la *guess solution* $V(t, f) = h(t)f^{\gamma}$. Imponendo la condizione finale otteniamo $\gamma = \alpha$ e $h(T) = 1/\alpha$, e sostituendo la guess solution in (2.10) otteniamo la seguente ODE (lineare a coefficienti costanti) per $h(t)$:

$$\dot{h}(t) + h(t) \alpha \left[r + \frac{(\mu - r)^2}{2(1 - \alpha)\sigma^2} \right] = 0$$

che ha soluzione

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha \vartheta (T - t)) \\ \vartheta &= r + \frac{(\mu - r)^2}{2(1 - \alpha)\sigma^2} \end{aligned}$$

Infine sostituendo la $V(t, f)$ nell'espressione di π^* si ottiene

$$\pi^* = \frac{1}{1 + \eta} \left[\frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2} + \eta\beta \right]$$

caso $\alpha = 0$ Lo svolgimento è analogo al caso precedente, con modifiche per la condizione finale e al bordo dell'equazione HJB. La guess solution è ora $V(t, f) = \log(f) + h(t)$, e si ottiene la ODE per $h(t)$:

$$\dot{h}(t) + \left[r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \right] = 0$$

che ha soluzione

$$h(t) = \left[r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \right] (T - t) \quad \square$$

2.2.4 Analisi dei risultati

In questo modello semplificato la strategia ottima è costante nel tempo ed indipendente dal valore del fondo. È data dalla combinazione tramite i pesi $1/(1 + \eta)$ e $\eta/(1 + \eta)$ della normal strategy π^N e della strategia del benchmark β , quindi è sempre intermedia tra le due. La normal strategy $\pi^N = (\mu - r)/[(1 - \alpha)\sigma^2]$ è quella ottenuta nel problema di allocazione ottima con utilità terminale e in assenza di consumo intermedio.

La distanza dalla strategia del benchmark è data da

$$\pi^* - \beta = \frac{1}{1 + \eta} \left[\frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2} - \beta \right] = \frac{1}{1 + \eta} [\pi^N - \beta]$$

Osserviamo che la deviazione è positiva (negativa) quando $\pi^N > \beta$ ($\pi^N < \beta$): se il confronto è con un benchmark poco aggressivo il manager sceglie una posizione maggiore dello stesso, viceversa sceglie una posizione minore. Se la misura di rischio è quella considerata in [1], ovvero $\sigma|\pi - \beta|$, i due comportamenti sono ugualmente rischiosi ed investire meno in termini assoluti nel titolo S non si può considerare un atteggiamento prudentiale.

Esiste quindi un parallelo con quanto descritto in [1] per ciò che riguarda la deviazione rispetto al benchmark, mentre è differente quella rispetto alla π^N : in [1] esiste una fascia di rendimenti che provoca posizioni più estreme rispetto alla normal strategy e lontane dal benchmark, nel modello considerato la strategia ottima è invece sempre

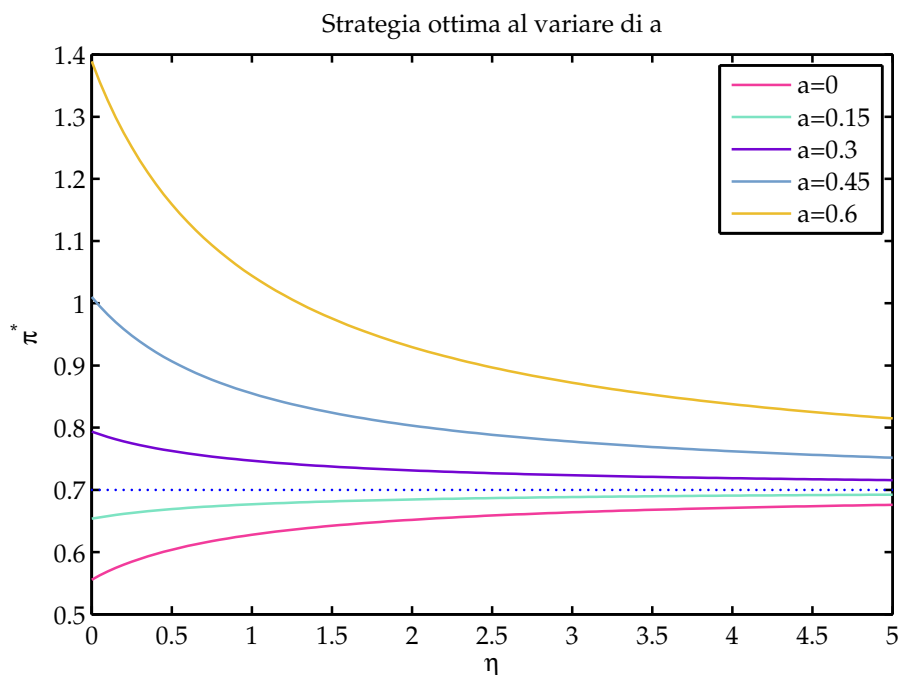


Figura 2.1: La strategia ottima per diversi valori di a . Sono stati utilizzati i seguenti valori per i parametri del modello: $\mu - r = 5\%$ $\sigma = 0.3$ $\beta = 0.7$. La normal strategy corrisponde ad $\eta = 0$. La linea puntinata corrisponde alla benchmark strategy β .

intermedia tra le due, come se gli inflow avessero l'effetto di avvicinare la strategia del manager a β . Questa differenza è dovuta alla diversa modellizzazione dei flussi di capitale tra il caso in esame e quanto presentato in [1]: in un modello in cui la dinamica dei flussi è continua e non concentrata in un unico istante temporale futuro il confronto con il benchmark è costante ed è possibile che questo, unito al fatto che gli outflow non sono limitati inferiormente, influenzi il manager verso una strategia meno rischiosa.

2.3 STATICA COMPARATA

Analizziamo ora l'effetto prodotto nella strategia ottima π^* da variazioni dei parametri del modello. Ipotizziamo che ci sia un extra-rendimento rispetto al tasso privo di rischio, così da incentivare l'investimento nel titolo rischioso: vale quindi $\mu - r > 0$.¹ Data la strategia ottima in (2.9), come è facilmente prevedibile, un aumento del premio

¹ Questa ipotesi sarà considerata valida per tutti i modelli successivi

per il rischio $\mu - r$ comporta un aumento dell'investimento nel titolo rischioso. L'andamento rispetto ai restanti parametri è dato da

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \sigma} = -\frac{2(\mu - r)}{(1 + \eta)(1 - a)\sigma^3} < 0 \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta} = \frac{\eta}{1 + \eta} > 0 \quad (2.11b)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial a} = \frac{\mu - r}{(1 + \eta)(1 - a)^2 \sigma^2} > 0 \quad (2.11c)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \eta} = \frac{1}{(1 + \eta)^2} \left[\beta - \frac{\mu - r}{\sigma^2(1 - a)} \right] \geq 0 \quad (2.11d)$$

- A. La (2.11a) rappresenta l'avversione al rischio del manager: di fronte ad un aumento della volatilità la frazione investita nello stock diminuisce.
- B. Il risultato in (2.11b) è quanto ci aspettiamo, dato che la strategia ottima è il risultato della media pesata (tramite pesi positivi) di β e π^N . Deduciamo inoltre che la misura in cui il manager è incentivato a seguire la strategia del benchmark dipende fortemente dal parametro η , che pesa il contributo dato dagli inflow alla dinamica del fondo. Poiché $\eta/(1 + \eta)$ è crescente con η e $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta/(1 + \eta) = 1$, maggiore è il peso che viene attribuito alla valutazione relativa maggiore sarà l'attitudine ad imitare le variazioni di β : al limite queste verranno replicate esattamente su π^* .
- C. Dalla definizione della funzione utilità in (2.7) ricaviamo il coefficiente relativo di avversione al rischio $R_R = 1 - a$. Un aumento di a in (2.11c) è equivalente ad una diminuzione dell'avversione al rischio, che comporta coerentemente una quota maggiore del fondo investita nel titolo rischioso, come in Figura 2.1. Osserviamo che l'effetto è tanto maggiore quanto meno il manager è avverso al rischio.
- D. L'andamento di π^* rispetto ad η non è univocamente determinato, ma dipende dal confronto tra β e $\pi^N = (\mu - r)/[(1 - a)\sigma^2]$. Osserviamo che π^N è la quota ottima investita nel titolo rischioso quando $F_t \equiv W_t$, ovvero quando il manager non deve preoccuparsi della valutazione relativa ($\eta=0$). È possibile riscrivere la (2.9) come

$$\pi^* = \frac{1}{1 + \eta} \pi^N + \frac{\eta}{1 + \eta} \beta$$

All'aumentare di η , π^* si avvicina a β :

- a) se $\pi^N > \beta$, ovvero se il manager è normalmente portato ad investire più del benchmark nello stock la derivata sarà negativa e π^* si avvicinerà a β dall'alto.
- b) se $\pi^N < \beta$ avverrà il contrario, e l'incremento di η comporterà un aumento per π^*

Questi andamenti sono riscontrabili in Figura 2.1.

In generale, aumentare η equivale ad aumentare la sensitività degli investitori rispetto alle variazioni nella performance relativa. In questo modello inflow e outflow sono simmetrici: una performance positiva produce inflow pari, in valore assoluto, agli outflow prodotti da un'analogia performance negativa. Ciò spinge il manager, avverso al rischio, a limitare la possibilità di outflow, che intaccherebbero pesantemente il valore del fondo, avvicinando la propria esposizione al rischio a quella del benchmark.

2.4 FLOW FUND SUL RENDIMENTO LOGARITMICO

Consideriamo una formulazione alternativa del processo G , definito in (2.4), che modella la dinamica di inflow e outflow

$$G_t = \eta \log(W_t/Y_t)$$

$$dG_t = \eta(\pi_t - \beta) \left\{ \left[\mu - r - \frac{1}{2} \sigma^2 (\pi_t + \beta) \right] dt + \sigma dB_t \right\} \quad (2.12)$$

questa formulazione presuppone una relazione lineare tra performance del fondo (in relazione al benchmark) e flussi: considerati i rendimenti logaritmici $R_t^W = \log(W_t/W_0)$ e $R_t^Y = \log(Y_t/Y_0)$, con $W_0 = Y_0$, in (2.12) abbiamo posto i flussi pari alla differenza tra questi rendimenti. In questo modello, così come nel precedente, inflow e outflow hanno la stessa intensità e sono equiprobabili. Il contributo dei flow fund alla dinamica del fondo è dato da $F_t dG_t$. Otteniamo quindi la dinamica complessiva

$$\frac{dF_t}{F_t} = \left[r + (\mu - r)(\pi_t + \eta(\pi_t - \beta)) - \frac{1}{2} \sigma^2 \eta (\pi_t^2 - \beta^2) \right] dt$$

$$+ \sigma [\pi_t + \eta(\pi_t - \beta)] dB_t \quad (2.13)$$

Procedendo come nella sezione 2.2, ricaviamo la strategia ottima per $\mathbb{E}_t[u(F(T))]$.

TEOREMA 2

Dato il problema di controllo ottimo stocastico descritto da (2.8) e (2.13), definito $V(t, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[u(F^{\pi}(T)) | F(t) = f]$, si ha la value function

$$V(t, F(t)) = \begin{cases} h(t; \alpha) F(t)^{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ h(t; \alpha) + \log F(t) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

con

$$h(t; \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha P(\beta; \alpha)(T-t)} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ P(\beta; 0)(T-t) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

$P(\beta; \alpha) = p_0(\alpha) + p_1(\alpha)\beta + p_2(\alpha)\beta^2$ è un polinomio di secondo grado in β con coefficienti dipendenti dal parametro α

$$\begin{aligned} \bullet p_0(\alpha) &= r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \frac{(1 + \eta)^2}{\eta + (1 + \eta)^2(1 - \alpha)} \\ \bullet p_1(\alpha) &= -\frac{\eta^2(\mu - r)}{\eta + (1 + \eta)^2(1 - \alpha)} \\ \bullet p_2(\alpha) &= \frac{\sigma^2 \eta [(1 + \eta)^2(1 - \alpha)^2(1 + 2\eta) + \eta^2 + \eta(1 - \alpha)(2 + 4\eta + \eta^2)]}{2 [\eta + (1 + \eta)^2(1 - \alpha)]^2} \end{aligned}$$

Nel caso $\alpha = 0$ i coefficienti si semplificano in

$$\begin{aligned} \bullet p_0(0) &= r + \frac{(\mu - r)^2(1 + \eta)^2}{2\sigma^2(1 + 3\eta + \eta^2)} \\ \bullet p_1(0) &= -\frac{\eta^2(\mu - r)}{1 + 3\eta + \eta^2} \\ \bullet p_2(0) &= \frac{\sigma^2 \eta (1 + 6\eta + 10\eta^2 + 3\eta^3)}{2(1 + 3\eta + \eta^2)^2} \end{aligned}$$

La strategia ottima associata prevede un peso costante nel titolo rischioso

$$\pi(t, F(t); \alpha) = \pi^* \equiv \frac{1 + \eta}{\eta + (1 + \eta)^2(1 - \alpha)} \left[\frac{\mu - r}{\sigma^2} + \eta\beta(1 - \alpha) \right] \quad (2.14)$$

Dimostrazione.

Poiché la dimostrazione segue lo stesso schema della dimostrazione del Teorema 1, illustriamo brevemente il caso $\alpha \neq 0$. Le condizioni al bordo nell'equazione HJB non cambiano, mentre i coefficienti sono

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{F}}^{\pi} &= f \left[r + (\mu - r)(\pi + \eta(\pi - \beta)) - \frac{1}{2} \sigma^2 \eta (\pi^2 - \beta^2) \right] \\ (\sigma_{\bar{F}}^{\pi})^2 &= f^2 \sigma^2 [\pi + \eta(\pi - \beta)]^2. \end{aligned}$$

Il problema di massimizzazione statica è risolto da

$$\pi^*(t, f; V) = \frac{(1 + \eta) \left[-\frac{\mu - r}{\sigma^2} V_f + \eta \beta f V_{ff} \right]}{-\eta V_f + (1 + \eta)^2 f V_{ff}}$$

La guess solution è ancora $V(t, f) = h(t)f^a$, e dall'equazione HJB otteniamo la ODE $\dot{h}(t) + aP(\beta; a)h(t) = 0$ □

2.5 STATICA COMPARATA

Come fatto nella sezione 2.3 procediamo all'analisi della soluzione ottenuta analizzandone l'andamento in funzione dei parametri del modello. Osserviamo che la struttura della strategia ottima è ancora della forma

$$\pi^* = A(\eta; a)\pi^N + B(\eta; a)\beta$$

con $A(\eta; a)$, $B(\eta; a)$ tali che

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} A(\eta; a) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} B(\eta; a) = 1 \quad (2.15)$$

come si può osservare nelle figure 2.2, 2.3: le considerazioni fatte nella sezione 2.3 circa l'avvicinarsi di π^* a β sono dunque ancora valide.

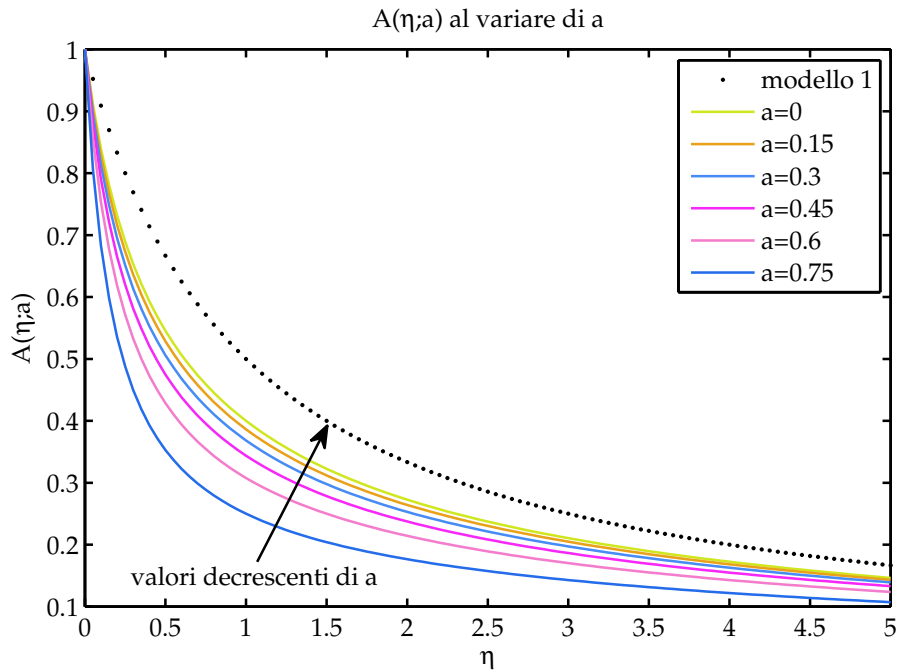


Figura 2.2: Coefficiente della *normal strategy* π^N

La Figura 2.2 illustra l'andamento del peso della *normal strategy* π^N : per tutti i livelli di avversione al rischio è minore del peso ottenuto nel

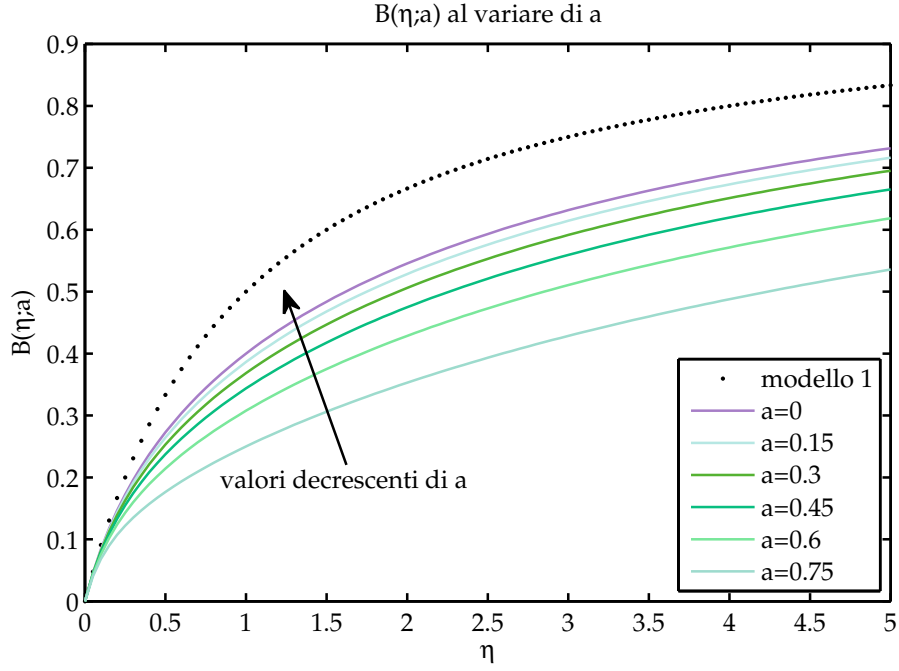


Figura 2.3: Coefficiente della *benchmark strategy* β

primo modello; poichè questo accade anche per il peso che moltiplica β , in Figura 2.3, concludiamo che la strategia ottima prevede un investimento minore nel titolo rischioso rispetto al modello precedente. Ciò è dovuto al termine aggiuntivo

$$-\frac{1}{2}\sigma^2(\pi_t + \beta)$$

nella formulazione di $G(W_t, Y_t)$ in (2.12). Le derivate rispetto ai parametri sono date da

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \sigma} = -\frac{(\mu - r)(1 + \eta)}{\eta + (1 + \eta)^2(1 - a)} \frac{2}{\sigma^3} < 0 \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta} = \frac{\eta(1 + \eta)}{(1 + \eta)^2 + \frac{\eta}{1-a}} = B(\eta; a) > 0 \quad (2.16b)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial a} = \frac{1 + \eta}{[\eta + (1 + \eta)^2(1 - a)]^2} \left[(1 + \eta)^2 \frac{\mu - r}{\sigma^2} - \eta^2 \beta \right] \geq 0 \quad (2.16c)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \eta} = \frac{dA(\eta; a)}{d\eta} \pi^N + \frac{dB(\eta; a)}{d\eta} \beta \geq 0 \quad (2.16d)$$

- A. In (2.16a) e (2.16b) vediamo confermate le risposte del manager di fronte ad incrementi dei parametri ottenute nel modello precedente. Rispetto a tale modello ciò che cambia non è il segno ma la magnitudine delle derivate, come riportato nelle figure 2.3 e 2.4: nel secondo modello π^* è meno sensibile a variazioni

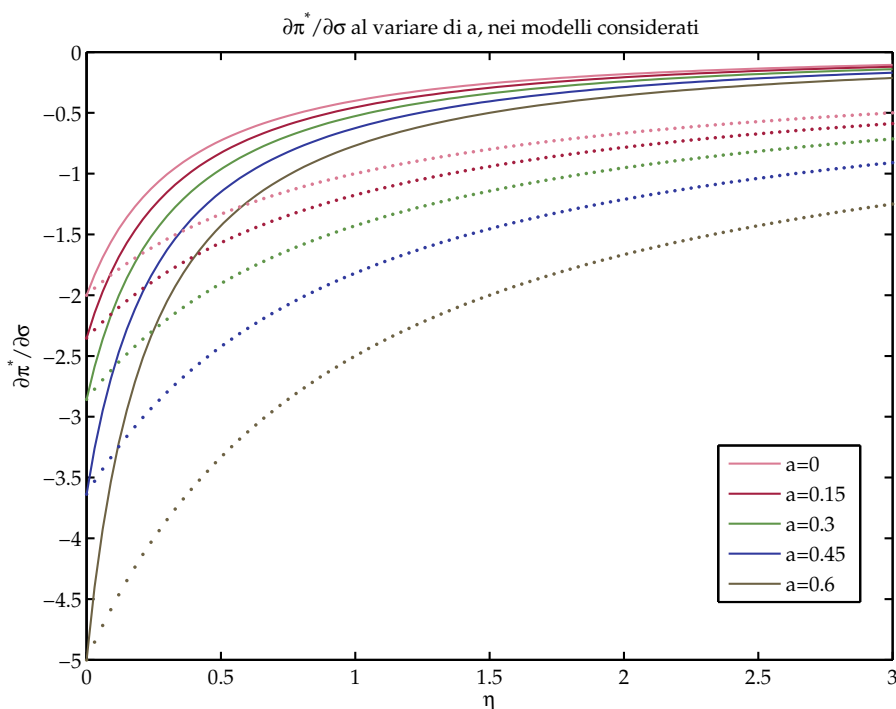


Figura 2.4: Variazione della strategia ottima π^* rispetto alla volatilità σ . La linea puntinata si riferisce al modello 1, la linea solida al modello 2. I valori sono stati normalizzati rispetto al fattore $(\mu - r)/\sigma^3$.

della volatilità, e per $\eta \geq 2.5$ la strategia è fondamentalmente indipendente da σ per tutti i valori di a considerati. In entrambi i modelli $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \partial\pi^*/\partial\sigma = 0$: ciò è coerente con (2.15). Analogamente π^* è meno sensibile, rispetto al modello precedente, a variazioni della benchmark strategy β e questo effetto è più marcato quando il manager è poco avverso al rischio.

- B. In Figura 2.5 è rappresentata la strategia π^* per diversi valori di a . Osserviamo che l'andamento è crescente con a , ovvero minore è l'avversione al rischio maggiore è l'investimento nel titolo S : questo è un risultato intuitivo e che conferma quanto trovato nel modello precedente. Tuttavia la derivata in (2.16c) non ha a priori segno sempre positivo, in quanto è presente il fattore $(1 + \eta)^2(\mu - r)/\sigma^2 - \eta^2\beta$, il quale

- a) è sempre positivo se $(\mu - r)/\sigma^2 \geq \beta$
- b) è positivo $\forall \eta \leq \bar{\eta}$ se $(\mu - r)/\sigma^2 < \beta$, dove $\bar{\eta}$ è la radice positiva del fattore in questione. Per valori realistici dei parametri si ottiene $\bar{\eta}$ molto elevato, quindi sebbene esista la

possibilità che la strategia cresca con l'avversione al rischio, ciò accade per valori non plausibili di η .

- c. In caso di un incremento di η , è ancora il confronto tra π^N e β a determinare se l'investimento nel titolo sarà maggiore o minore.
- a) Per le η tali che $|dA/d\eta| > |dB/d\eta|$ ($\eta < 1$ in Figura 2.6), se $\beta < \pi^N$ allora $\partial\pi^*/\partial\eta < 0$
 - b) Per le η tali che $|dA/d\eta| < |dB/d\eta|$ ($\eta > 1$), se $\beta > \pi^N$ allora $\partial\pi^*/\partial\eta > 0$
 - c) Per $\eta = 1$ vale $|dA/d\eta| = |dB/d\eta|$ e si ha:
 - $\beta > \pi^N \implies \partial\pi^*/\partial\eta > 0$
 - $\beta < \pi^N \implies \partial\pi^*/\partial\eta < 0$

Come nel modello precedente, per i valori di η che rendono π^* intermedia tra π^N e β , quando $\beta > \pi^N$ la derivata è positiva perché la strategia ottima si avvicina a β (valore limite per $\eta \rightarrow \infty$) dal basso, diversamente è negativa in quanto la strategia ottima si avvicina a β dall'alto.

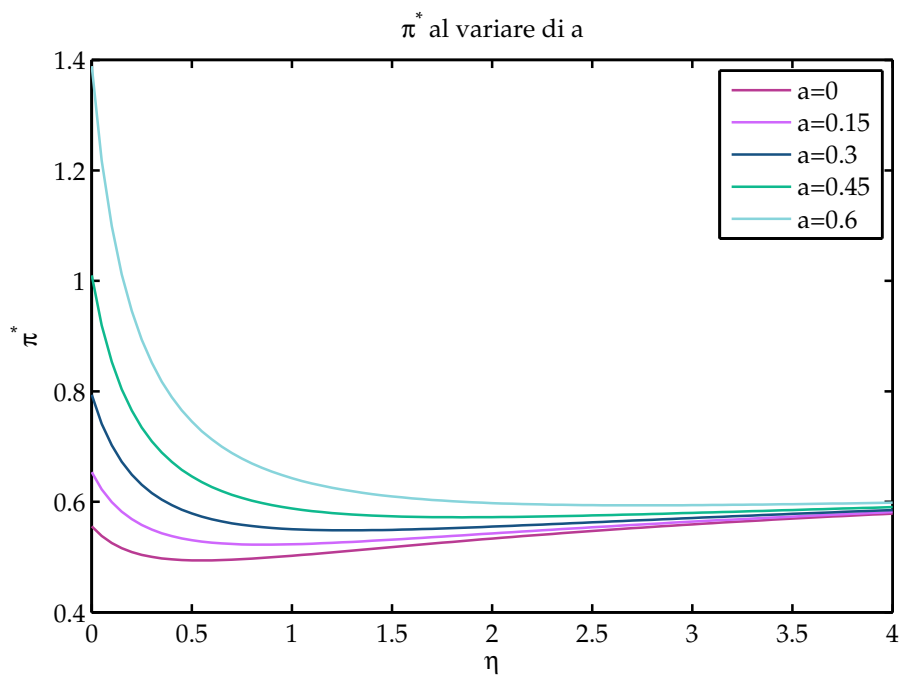


Figura 2.5: La strategia ottima π^* per diversi valori di avversione al rischio. Sono stati utilizzati i seguenti valori per i parametri del modello: $\mu - r = 5\%$ $\sigma = 0.3$ $\beta = 0.7$. Si ottiene $\bar{\eta} = 8.16$.

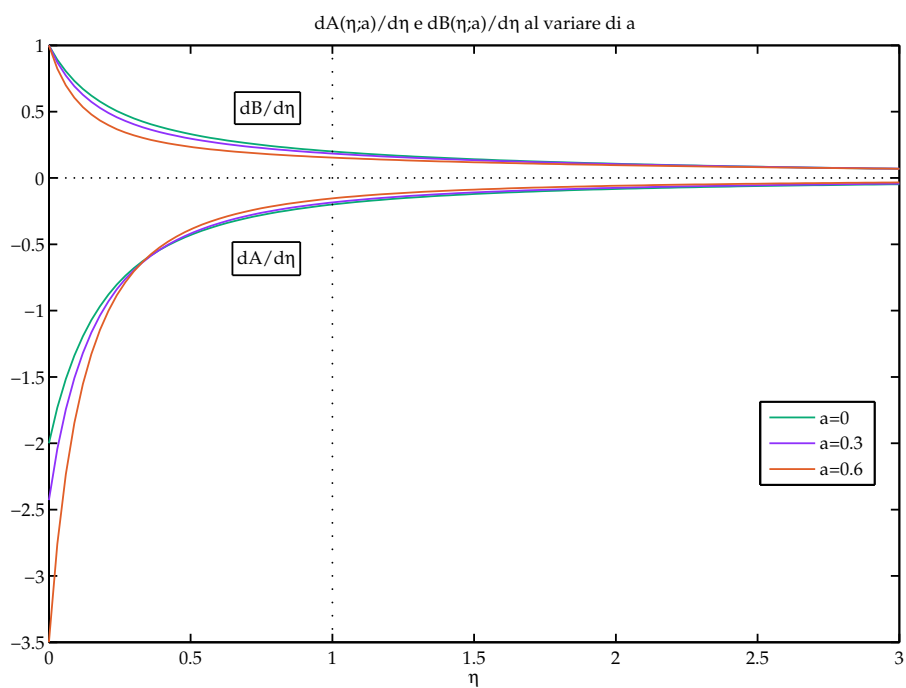


Figura 2.6: Variazione dei pesi presenti in π^* rispetto ad η

3

LA PERFORMANCE RELATIVA

In questo capitolo il focus è sul confronto con il benchmark e l'obiettivo è la massimizzazione della performance relativa e dei flussi di capitale che ne conseguono. A differenza dei modelli precedenti, il compenso del manager non è legato al valore complessivo degli asset sotto gestione a scadenza F_T , ma dipende esclusivamente dal posizionamento rispetto al benchmark: tanto maggiore è la sua capacità di attirare nuovi investitori, tanto maggiore sarà il suo compenso.

La relazione flussi-rendimenti non è più lineare e simmetrica ma convessa e sbilanciata verso i flussi positivi. Questa asimmetria porta il manager ad assumere più rischio, specialmente se il compenso non risente dell'eventuale deterioramento della performance. Se sono previste penalizzazioni legate all'underperformance il comportamento del manager è differente: analizziamo questa situazione nella sezione 3.4. Analizziamo diverse tipologie di payoff per la fee ricevuta dal manager ma in tutti i casi la remunerazione del manager dipenderà esclusivamente dalla performance relativa rispetto al benchmark al tempo finale T .

3.1 FLUSSI DI CAPITALE ESPONENZIALI

In questa sezione viene ipotizzata una relazione esponenziale tra flussi e performance relativa:

$$G(t) = \exp [\alpha(R_t^W - R_t^Y)] - 1 \quad (3.1)$$

dove R_t^W e R_t^Y sono i rendimenti logaritmici rispettivamente del fondo e del benchmark; grazie alla normalizzazione $W_0 = Y_0$ otteniamo

$$G(t) = \left(\frac{W(t)}{Y(t)} \right)^\alpha - 1 = X(t) - 1$$

dove i processi Y_t e W_t hanno le dinamiche (2.2)-(2.3) ed abbiamo definito $X(t) = [W(t)/Y(t)]^\alpha$.

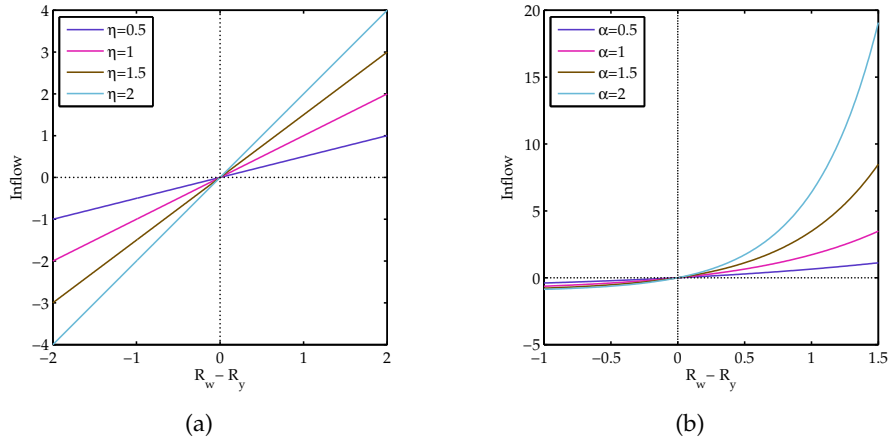


Figura 3.1: Relazione tra flussi e rendimenti logaritmici

La specificazione precedente di G_t in (2.12) è in Figura 3.1a, quella attuale in 3.1b. La forma esponenziale è in linea con la relazione empirica trovata in [10], in cui gli autori documentano come la relazione tra performance relativa e flussi non sia simmetrica (tipicamente gli outflow sono minori degli inflow a parità di variazione della performance) né lineare, bensì convessa e sbilanciata verso flussi positivi.

Nel capitolo precedente la retribuzione consisteva in una quota fissa del valore degli asset gestiti a scadenza. Ora lo schema retributivo è interamente legato alla performance, intesa non in assoluto ma in termini di posizionamento rispetto al benchmark e dei flussi di capitale che ne conseguono. Il compenso è dato da

$$B(1 + G(T)) = B X(T), \quad B > 0$$

dove B è il compenso ricevuto quando il fondo ed il benchmark hanno lo stesso rendimento. Maggiore sarà il tasso di inflow ricevuti più sarà alto il compenso, mentre nel peggior caso di underperformance, che comporta un valore degli asset gestiti pari a zero, il compenso del manager è nullo.

Studiamo il problema di allocazione ottima in due diversi setting economici: un primo caso in cui le ipotesi sono quelle della sezione 2.1, cioè il fondo ed il benchmark hanno le stesse possibilità di investimento ed il mercato è quindi completo. Un secondo caso in cui il benchmark non è perfettamente replicabile in quanto comprende una componente aggiuntiva di rischio.

3.1.1 Mercati completi

Attraverso la scelta della proporzione π (o equivalentemente la distanza δ di questa dalla strategia β) da investire nel titolo S il manager determina quello che sarà il posizionamento rispetto ad Y al tempo T , in base al quale verrà determinata la sua ricchezza. Di conseguenza il problema di ottimizzazione è dato da:

$$\max_{\pi_t} \mathbb{E} [u(B X_T)] = B^\alpha \max_{\pi_t} \mathbb{E} [u(X_T)] \quad (3.2)$$

Una semplice applicazione del lemma di Ito fornisce la dinamica:

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{X_t} &= \alpha \left[(\pi_t - \beta)(\mu - r) + \frac{\sigma^2}{2} (\alpha(\pi_t - \beta)^2 - (\pi_t^2 - \beta^2)) \right] dt \\ &\quad + \alpha(\pi_t - \beta)\sigma dB_t \\ &= \alpha \left[\delta_t(\mu - r - \sigma^2\beta) + \frac{\sigma^2}{2} \delta_t^2 (\alpha - 1) \right] dt + \alpha\delta_t\sigma dB_t \end{aligned} \quad (3.3)$$

Osserviamo che la (3.2) può essere riscritta come

$$B^\alpha \max_{\pi_t} \mathbb{E} \left[\hat{u} \left(\frac{W_T}{Y_T} \right) \right] \quad \text{con} \quad \hat{u}(z) = \begin{cases} \frac{z^{\alpha\alpha}}{\alpha} & \text{se } \alpha\alpha < 1, \\ \alpha \log z & \text{se } \alpha = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

L'ipotesi $\alpha < 1/\alpha$ è essenziale per rendere \hat{u} concava, e quindi qualificarla come funzione utilità; il coefficiente relativo di avversione al rischio è ora $R_R = 1 - \alpha\alpha$.

TEOREMA 3

Dato il problema di controllo ottimo stocastico descritto da (3.2) e (3.3), definito $V(t, x) = \sup_{\pi} \mathbb{E} [u(X^\pi(T)) | X(t) = x]$, si ha la value function

$$V(t, X(t)) = \begin{cases} h(t; \alpha) X(t)^\alpha & \text{se } \alpha \neq 0 \\ h(t; \alpha) + \log X(t) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

con

$$h(t; \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\vartheta(\alpha)(T-t)} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \vartheta(0)(T-t) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\vartheta(\alpha) = \frac{\alpha\sigma^2}{2(1-\alpha\alpha)} \left(\frac{\mu-r}{\sigma^2} - \beta \right)^2$$

La strategia associata prevede un peso costante nel titolo rischioso

$$\pi(t, X(t); \alpha) = \pi^* \equiv \frac{1}{1 - \alpha\alpha} \left[\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \beta\alpha\alpha \right] \quad (3.5)$$

Osservazione 1. Nel caso $\alpha = 0$ si ha $\pi^* = (\mu - r)/\sigma^2$. La presenza del benchmark non influenza la soluzione poiché

$$\begin{aligned} \max_{\pi_t} \mathbb{E} [u(X_T)] &= \max_{\pi_t} \mathbb{E} [\alpha \log(W_T/Y_T)] = \max_{\pi_t} \mathbb{E} [\log W_T - \log Y_T] \\ &\propto \max_{\pi_t} \mathbb{E} [\log W_T] = \max_{\pi_t} \mathbb{E} [u(W_T)] \end{aligned}$$

Il problema considerato si riconduce al classico problema di investimento tra un asset risk-free ed un asset rischioso con dinamica lognormale, in cui si massimizza l'utilità dovuta alla ricchezza al tempo finale.

Dimostrazione.

caso $\alpha \neq 0$ $V(t, x)$ soddisfa l'equazione HJB

$$\begin{cases} V_t + \sup_{\pi} [\mu_X^{\pi} V_x + \frac{1}{2} (\sigma_X^{\pi})^2 V_{xx}] = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times (0, +\infty) \\ V(T, x) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} & \forall x \in (0, +\infty). \\ \lim_{x \rightarrow 0} V(t, 0) = 0 & \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

in questa equazione V_t, V_x sono le derivate parziali di V rispetto a t, x e i coefficienti sono

$$\begin{aligned} \mu_X^{\pi} &= x\alpha \left[(\pi - \beta)(\mu - r - \sigma^2\beta) + \frac{\sigma^2}{2} (\alpha - 1)(\pi - \beta)^2 \right] \\ (\sigma_X^{\pi})^2 &= x^2 \alpha^2 \sigma^2 (\pi - \beta)^2 \end{aligned}$$

Per un dato (t, x) risolviamo il problema di massimizzazione statico trovando

$$\pi^*(t, x) = \frac{1}{(\alpha - 1)V_x + \alpha x V_{xx}} \left[\left(\alpha\beta - \frac{\mu - r}{\sigma^2} \right) V_x + \alpha\beta x V_{xx} \right]$$

la soluzione ottima per π dipende quindi dalla $V(t, x)$, che viene trovata risolvendo la PDE

$$V_t + \mu_X^{\pi^*} V_x + \frac{1}{2} (\sigma_X^{\pi^*})^2 V_{xx} = 0 \quad (3.6)$$

dove i coefficienti $\mu_X^{\pi^*}$ e $\sigma_X^{\pi^*}$ vengono ottenuti sostituendo π^* nelle espressioni di μ_X^{π} e σ_X^{π} . Per risolvere (3.6) ipotizziamo la guess solution $V(t, x) = h(t)x^{\alpha}$. Imponendo la condizione finale otteniamo

$h(T) = 1/\alpha$, e sostituendo la guess solution in (3.6) otteniamo la seguente ODE (lineare a coefficienti costanti) per $h(t)$:

$$\dot{h}(t) + h(t)\alpha \frac{\alpha\sigma^2}{2(1-\alpha\alpha)} \left[\frac{\mu-r}{\sigma^2} - \beta \right]^2 = 0$$

risolta da

$$h(t) = \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha\vartheta(T-t))$$

$$\vartheta = \frac{\alpha\sigma^2}{2(1-\alpha\alpha)} \left[\frac{\mu-r}{\sigma^2} - \beta \right]^2$$

Infine sostituendo la $V(t, x)$ nell'espressione di π^* si ottiene

$$\pi^* = \frac{1}{1-\alpha\alpha} \left[\frac{\mu-r}{\sigma^2} - \beta\alpha\alpha \right]$$

caso $\alpha = 0$ Come osservato la strategia ottima è data da

$$\pi^* = \frac{\mu-r}{\sigma^2}$$

La guess solution è ora $V(t, f) = \log(f) + h(t)$, e si ottiene la ODE per $h(t)$:

$$\dot{h}(t) + \frac{\alpha\sigma^2}{2} \left(\frac{\mu-r}{\sigma^2} - \beta \right)^2 = 0$$

risolta da

$$h(t) = \frac{\alpha\sigma^2}{2} \left(\frac{\mu-r}{\sigma^2} - \beta \right)^2 (T-t) \quad \square$$

Riscriviamo la strategia come

$$\delta^* = \pi^* - \beta = \frac{\mu-r - \beta\sigma^2}{\sigma^2(1-\alpha\alpha)}$$

per evidenziarne alcuni aspetti.

A. Esiste una combinazione di parametri che rende nulla la distanza tra la strategia del fondo e quella del benchmark:

$$\beta = (\mu-r)/\sigma^2 \implies \pi^* = \beta$$

B. Lo scarto dal benchmark può essere positivo o negativo in base al segno di $\mu-r - \beta\sigma^2$

a) $\beta > (\mu-r)/\sigma^2 \implies \pi^* < (\mu-r)/\sigma^2 \implies \pi^* < \beta$

b) $\beta < (\mu-r)/\sigma^2 \implies \pi^* > (\mu-r)/\sigma^2 \implies \pi^* > \beta$

- c. Lo scarto dal benchmark, in termini assoluti, è decrescente rispetto all'avversione al rischio: un manager meno avverso al rischio è disposto ad allontanarsi maggiormente.
- d. Il parametro che determina l'intensità dei flussi, α , ha un effetto analogo:

$$\frac{\partial |\delta^*|}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{(1 - \alpha\alpha)^2} \left[\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \beta \right] \text{sgn}(\delta^*)$$

dal punto (b) gli ultimi due termini sono concordi, quindi la derivata è sempre positiva. Coerentemente con la natura del modello, più è grande l'asimmetria tra inflow e outflow e maggiori incentivi esistono per allontanarsi dal benchmark.

In generale il comportamento del manager, interessato a massimizzare il suo compenso, è quindi molto diverso da quello che avrebbe un investitore interessato a massimizzare il valore del proprio investimento, anche nel caso in cui avessero le stesse preferenze (la stessa funzione di utilità). Questo fenomeno è più marcato quando il benchmark è relativamente rischioso, come nel caso (a) di (b).

La principale novità nel comportamento del manager riguarda la dipendenza della strategia ottima dall'esposizione β , in quanto

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta} = -\frac{\alpha\alpha}{1 - \alpha\alpha} < 0 \quad (3.7)$$

Se consideriamo $\beta > (\mu - r)/\sigma^2$, all'aumentare di β si ha un aumento del tracking error $|\pi^* - \beta|$. Questo risultato è coerente con la natura del modello: se il manager si allineasse al benchmark otterrebbe l'annullamento dei flussi di capitale, positivi e negativi, riducendo il suo compenso alla sola parte fissa. Grazie alla forma esponenziale in (3.1) allontanarsi dal benchmark consente di ottenere inflow molto importanti se confrontati con gli outflow corrispondenti, che in ogni caso non intaccherebbero la ricchezza finale del manager: egli è dunque incentivato verso un'esposizione π^* lontana dall'esposizione β . Nel caso in cui questo significhi ridurre la volatilità del fondo, il manager non sta agendo in maniera *prudente*. Infatti, come osservato in [1],

“In uno scenario di valutazione relativa qualsiasi strategia che preveda una deviazione dal benchmark è intrinsecamente rischiosa. Assumendo più rischio sistematico del benchmark (aumento della volatilità del portafoglio), il manager punta a migliorare la sua posizione relativa

quando il benchmark sale. Analogamente, assumendo meno rischio sistematico (riduzione della volatilità), il manager punta a migliorare la sua posizione relativa quando il benchmark scende”

3.1.2 Mercati incompleti

In questa sezione ampliamo il modello considerando il caso in cui l'incertezza nella dinamica del benchmark è dovuta, oltre che all'investimento nel titolo S , ad un ulteriore moto browniano B_0 , tramite il coefficiente positivo σ_0 .

$$\begin{aligned} dY_t &= [\beta(\mu - r) + r]Y_t dt + \beta\sigma dB_t + \sigma_0 dB_{0,t} \\ dB(t)dB_0(t) &= \rho dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

La dinamica del processo $X(t) = [W(t)/Y(t)]^\alpha$ è ora data da

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{X_t} &= \alpha \left[(\pi_t - \beta)(\mu - r - \sigma^2\beta - \alpha\rho\sigma\sigma_0) + \frac{\sigma^2}{2}(\alpha - 1)(\pi_t - \beta)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\alpha + 1)\frac{\sigma_0^2}{2} + \rho\beta\sigma\sigma_0 \right] dt + \alpha(\pi_t - \beta)\sigma dB_t - \alpha\sigma_0 dB_{0,t} \\ &= \alpha \left[\delta(\mu - r - \sigma^2\beta - \alpha\rho\sigma\sigma_0) + \frac{\sigma^2}{2}(\alpha - 1)\delta^2 \right. \\ &\quad \left. + (\alpha + 1)\frac{\sigma_0^2}{2} + \rho\beta\sigma\sigma_0 \right] dt + \alpha\delta\sigma dB_t - \alpha\sigma_0 dB_{0,t} \end{aligned} \quad (3.9)$$

In analogia alla sezione precedente abbiamo il seguente teorema

TEOREMA 4

Dato il problema di controllo ottimo stocastico descritto da (3.2) e (3.9), definito $V(t, x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[u(X^\pi(T)) | X(t) = x]$, si ha la value function

$$V(t, X(t)) = \begin{cases} h(t; a)X(t)^a & \text{se } a \neq 0 \\ h(t; a) + \log X(t) & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

con

$$h(t; a) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{a\vartheta(a)(T-t)} & \text{se } a \neq 0 \\ \vartheta(0)(T-t) & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$$\vartheta(a) = \alpha \left[\frac{(\mu - r - \beta\sigma^2 - \rho\sigma\sigma_0 a\alpha)^2}{2(1 - a\alpha)\sigma^2} + \rho\beta\sigma\sigma_0 + (1 + a\alpha)\frac{\sigma_0^2}{2} \right]$$

La strategia associata prevede un peso costante nel titolo rischioso

$$\pi(t, X(t); \alpha) = \pi^* \equiv \frac{1}{1 - \alpha} \left[\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \beta \alpha - \rho \alpha \frac{\sigma_0}{\sigma} \right] \quad (3.10)$$

Dimostrazione.

Lo schema seguito è quello della dimostrazione del teorema 3, in questo caso i coefficienti dell'equazione HJB sono

$$\begin{aligned} \mu_X^\pi &= \alpha \left[(\pi_t - \beta)(\mu - r - \sigma^2 \beta - \alpha \rho \sigma \sigma_0) + \frac{\sigma^2}{2} (\alpha - 1) (\pi_t - \beta)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\alpha + 1) \frac{\sigma_0^2}{2} + \rho \beta \sigma \sigma_0 \right] \\ (\sigma_X^\pi)^2 &= \alpha^2 \left[\sigma^2 (\pi_t - \beta)^2 + \sigma_0^2 - 2 \rho \sigma \sigma_0 (\pi_t - \beta) \right] \end{aligned}$$

Quindi risolviamo il problema di massimizzazione statico trovando la strategia ottima $\pi^*(t, x)$ in funzione di $V(t, x)$, che viene trovata risolvendo la PDE

$$V_t + \mu_X^{\pi^*} V_x + \frac{1}{2} (\sigma_X^{\pi^*})^2 V_{xx} = 0$$

tramite la guess solution $V(t, x) = h(t)x^\alpha$. Sostituendo otteniamo la strategia ottima (3.10) e l'ODE per $h(t)$

$$\dot{h}(t) + \alpha \vartheta(\alpha) h(t) = 0 \quad \square$$

Osservazione 2. Se $\rho = 0$ la strategia ottima è uguale a quella trovata nel caso in cui nella dinamica del benchmark è presente il solo browniano B , cioè

$$\pi_0^* = \frac{1}{1 - \alpha} \left[\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \beta \alpha \right] \quad (3.11)$$

Questo risultato indica che, sebbene σ_0 abbia un impatto nella value function, la sua presenza non modifica la strategia ottima. Da un diverso punto di vista possiamo dire che poiché la fonte di volatilità introdotta è indipendente dalle opportunità di investimento il manager non ha a disposizione strumenti per fare hedging rispetto a questa: anche se volesse modificare la strategia per tenere conto di questa volatilità aggiuntiva gli strumenti che ha a disposizione

non lo consentono. Separando Y nelle due parti replicabile Y_R e non replicabile Y_N otteniamo

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_R(t)Y_N(t) \\ Y_N(t) &= e^{-\sigma_0^2/2 t + \sigma_0 B_0(t)} \\ Y_R(t) &= Y(0)e^{(\beta(\mu - r) + r - \sigma^2/2)t + \sigma\beta B(t)} \end{aligned}$$

e sfruttando l'indipendenza tra Y_N e Y_R ($\rho = 0$) possiamo riscrivere il problema di massimizzazione come

$$\begin{aligned} \max_{\pi_t} \mathbb{E} \left[u \left(\left(\frac{W_T}{Y_T} \right)^\alpha \right) \right] &= \max_{\pi_t} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{W_T}{Y_{R,T}} \right)^{\alpha\alpha} \left(\frac{1}{Y_{N,T}} \right)^{\alpha\alpha} \right] \\ &= \max_{\pi_t} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{W_T}{Y_{R,T}} \right)^{\alpha\alpha} \right] \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{Y_{N,T}} \right)^{\alpha\alpha} \right] \end{aligned}$$

Il termine $1/Y_N$ non dipende da π , quindi è ininfluenza ai fini della strategia ottima, che viene trovata massimizzando l'utilità attesa della stessa variabile della sezione precedente, mentre compare nella value function.

In generale la strategia è esprimibile come

$$\pi^* = p \frac{\mu - r}{\sigma^2} + (1 - p) \left(\beta + \rho \frac{\sigma_0}{\sigma} \right), \quad p = \frac{1}{1 - \alpha\alpha} > 1 \quad (3.12)$$

ovvero è una combinazione tra due termini

- la golden rule del problema standard di investimento
- la strategia β del benchmark, modificata per tenere conto dell'ulteriore componente di rischio

Rispetto alla strategia π_0^* , ottima nel caso in cui è possibile una replica perfetta del benchmark (mercati completi), è presente un termine aggiuntivo

$$\pi^* = \pi_0^* + (1 - p)\rho \frac{\sigma_0}{\sigma}$$

e la differenza

$$\Delta\pi = (1 - p)\rho \frac{\sigma_0}{\sigma}$$

può essere positiva o negativa, secondo il segno della correlazione

- $\rho < 0 \implies \Delta\pi > 0$
- $\rho > 0 \implies \Delta\pi < 0$

La derivata della strategia (3.12) rispetto alla correlazione è pari a $(1 - \rho)\sigma_0/\sigma$, quindi è sempre negativa, e l'investimento massimo nel titolo si ha per $\rho = -1$: in caso di correlazione negativa il manager percepisce il benchmark come più stabile e meno rischioso ed è portato a investire di più, in assoluto e rispetto al caso con mercati completi.

Se la correlazione è positiva è invece più probabile che il benchmark performi molto positivamente o molto negativamente, in quanto la sua volatilità è aumentata

$$\sigma_Y^2 = \beta^2 \sigma^2 + \sigma_0^2 + 2\rho\beta\sigma\sigma_0$$

L'aumento di rischiosità del benchmark equivale, nel caso con mercati completi, ad un aumento di β , e gli effetti sulla strategia sono gli stessi: π^* diminuisce e si allontana dal benchmark quando $\beta > (\mu - r)/\sigma^2$, diversamente si avvicina.

3.2 RETRIBUZIONE TRAMITE OPZIONE

Studiamo un caso in cui la relazione tra performance e compenso presenta una forte non linearità. L'interesse primario del manager è superare il benchmark, in quanto egli percepirà la performance fee solo se al tempo T sarà in grado di attrarre nuovi capitali da gestire. Il compenso è nullo finché la performance del fondo è inferiore a quella del benchmark e cresce linearmente per valori superiori. Il processo G in (3.1) è comprensivo dei flussi in entrata e uscita rispetto al fondo, ma in caso di outflow non ci sono penalizzazioni per il manager. Per ottenere la soluzione in forma esplicita è necessario porre il parametro $\alpha = 1$. La componente variabile del suo compenso è quindi

$$G(T)^+ = \left[\frac{W(T)}{Y(T)} - 1 \right]^+ = [X(T) - 1]^+$$

Il mercato in cui opera e le opportunità d'investimento, le strategie ammissibili e la funzione utilità sono quelle descritte nella sezione 2.1. Il manager sceglie la strategia di investimento che gli consente di massimizzare l'utilità derivante dalla componente variabile, il problema da risolvere è

$$\max_{\pi_t} \mathbb{E} [u((X(T) - 1)^+)] \quad (3.13)$$

sotto i vincoli di dinamica

$$\frac{dX_t}{X_t} = [(\pi_t - \beta)(\mu - r - \beta\sigma^2)] dt + (\pi_t - \beta)\sigma dB_t \quad (3.14)$$

e di ammissibilità

$$X_t \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.15)$$

Nella risoluzione applichiamo il metodo martingala seguendo quanto fatto da Carpenter in [4]. Rispetto al problema di investimento standard siamo in presenza di una funzione da massimizzare non concava nella variabile di riferimento, a causa della composizione dell'utilità u con la funzione parte positiva.

3.2.1 Il Metodo Martingala nel Problema Standard

Nel problema standard viene considerato un investitore, con dotazione iniziale pari a x , che massimizza l'utilità attesa della ricchezza al tempo finale T . Per i risultati esposti facciamo riferimento a quanto sviluppato da Karatzas e Shreve in [13] tramite la teoria delle martingale. Gli elementi fondamentali sono

- il mercato in cui opera l'investitore, completo e a coefficienti costanti come in sezione 2.1
- la funzione utilità u , la derivata u' e la sua inversa i , già descritte in sezione 2.1
- il processo ζ_t , detto *state price density* o *stochastic discount factor*, definito

$$\zeta_t = e^{-(r+\vartheta^2/2)t - \vartheta B_t} \quad \text{con} \quad \vartheta = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (3.16)$$

Il fattore di sconto stocastico (s.d.f) determina il prezzo di qualsiasi attività finanziaria: dato il payoff futuro $X(T)$ ed il prezzo attuale $p(0)$ dello strumento che lo garantisce, lo s.d.f $\zeta(T)$ è tale che

$$p(0) = \mathbb{E}[\zeta(T)X(T)]$$

Può essere collegato ad un modello economico di consumo intertemporale, in cui

$$p(0) = \mathbb{E} \left[\beta \frac{u'(C(T))}{u'(C(0))} X(T) \right]$$

dove β è il tasso di sconto ($\beta < 1$) temporale e u' rappresenta l'utilità marginale del consumo. Nel modello u' diminuisce all'aumentare di C poiché gli individui valutano di più il denaro se questo arriva quando ne hanno davvero bisogno (consumo basso = "bad state"). La relazione che collega lo s.d.f al saggio marginale di sostituzione intertemporale è quindi

$$\zeta(T) = \beta \frac{u'(C(T))}{u'(C(0))}$$

ed indica che un valore alto di $\zeta(T)$ corrisponde ad un bad state.

Se il payoff $X(T)$ è quello di una Arrow-Debreu security, otteniamo $p(\omega) = \pi(\omega)\zeta_T(\omega)$, cioè la variabile aleatoria $\zeta_T(\omega)$ rappresenta il prezzo $p(\omega)$ di una security che paga 1 se al tempo T si verifica l'evento ω , in relazione alla probabilità $\pi(\omega)$ che questo si verifichi.

Il problema da risolvere è

$$\max_{\pi_t \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}[u(X_T)] \quad (3.17)$$

s.t

$$dX_t = (rX_t + (\mu - r)\pi_t X_t) dt + \pi_t X_t \sigma dB_t \quad X(0) = x \quad (3.18)$$

dove $\mathcal{A}(x)$ è l'insieme delle strategie di investimento ammissibili per la dotazione iniziale x . Il problema dinamico di scelta della strategia π_t ottima è equivalente al problema statico di determinazione della ricchezza finale X_T ottima, e dunque è questo che viene risolto. Ciò è possibile perché esiste una corrispondenza biunivoca tra le ricchezze X_T ottenibili tramite π_t ammissibili e le variabili $W \mathcal{F}_T$ misurabili che soddisfano $\mathbb{E}(\zeta(T)W) \leq x$.

Formalizziamo questo risultato: definiamo $\mathcal{L}(x)$ come l'insieme delle variabili W su $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ che soddisfano $\mathbb{E}(\zeta(T)W) \leq x$.

1. Se $\pi_t \in \mathcal{A}(x)$ e $X(\cdot)$ è il corrispondente processo di ricchezza ottenuto risolvendo (3.18), allora vale $\mathbb{E}(\zeta(T)X(T)) \leq x$, cioè $X(T) \in \mathcal{L}(x)$
2. $\forall W \in \mathcal{L}(x) \exists \pi_t \in \mathcal{A}(x)$ e $X(\cdot)$ corrispondente t.c $X(T) = W$ q.c

Per comprendere il punto 1 consideriamo la soluzione a (3.18) ed il cambio di misura che elimina il termine di drift $\mu - r$ dall'espressione integrale di X_t : sfruttando la martingala

$$Z(t) = e^{rt} \zeta(t) = e^{-(\vartheta^2/2)t - \vartheta B_t}$$

definiamo la misura

$$Q = \mathbb{E}[Z(T)\mathbb{1}_A], \quad A \in \mathcal{F}_T$$

ed il browniano su Q

$$\tilde{B}(t) = B(t) + \vartheta t$$

Possiamo esprimere X_t evidenziando \tilde{B}_t

$$X(t)e^{-rt} = x + \int_0^t e^{-rs} X(s) \pi(s) \sigma d\tilde{B}_s$$

Consideriamo ora che per $\pi \in \mathcal{A}(x)$ la parte sinistra è sempre non negativa e la destra è una martingala locale sotto Q. Dunque $X_t e^{-rt}$ è una supermartingala non negativa sotto Q. Applicando la proprietà di supermartingala ad X_T si ottiene

$$\mathbb{E}_Q [e^{-rT} X(T)] \leq x \longrightarrow \mathbb{E} [e^{-rT} Z(T) X(T)] \leq x \quad (3.19)$$

La riformulazione del problema in (3.17) è

$$\max_{X_T} \mathbb{E}[u(X_T)] \quad (3.20)$$

s.t

$$\mathbb{E} [\zeta(T) X(T)] \leq x \quad X(T) \geq 0$$

La soluzione è caratterizzata nel teorema seguente

TEOREMA 5

Se sono soddisfatte le ipotesi

- (i) $\mathbb{E} [\zeta(T)] < \infty$
- (ii) $\mathcal{X}(y) = \mathbb{E} [\zeta(T) i(y\zeta(T))] < \infty \quad \forall y \in (0, \infty)$

Allora

1. $X^*(T) = i(y(x)\zeta(T))$
2. $X^*(t) = \frac{1}{\zeta(t)} \mathbb{E} [\zeta(T) X^*(T) | \mathcal{F}_t]$
3. $\pi^*(t) = \frac{1}{\sigma} \left[\vartheta + \frac{\varphi(t)}{M(t)} \right]$

dove y è la funzione inversa di \mathcal{X} ed $M(t)$ è la martingala definita come

$$M(t) = \zeta(t) X^*(t) = x + \int_0^t \varphi(s) dB_s$$

Dunque $X^*(T) \in \mathcal{L}(x)$ e soddisfa (3.19) all'uguaglianza, sappiamo che il processo $X^*(t)\zeta(t)$ è una martingala e che esiste una strategia di investimento π_t^* associata a $X^*(t)$.

Per ricavare la strategia ottima si considera

$$\begin{aligned} d(X^*(t)e^{-rt}) &= d\left(\int_0^t e^{-rs}X^*(s)\pi^*(s)\sigma d\tilde{B}_s\right) \\ &= e^{-rt}X^*(t)\pi^*(t)\sigma [dB_t + \vartheta dt] \end{aligned}$$

dal punto 2 del teorema

$$X^*(t)e^{-rt} = \frac{M(t)}{Z(t)}$$

differenziando si ottiene

$$d\left(\frac{M(t)}{Z(t)}\right) = \frac{1}{Z(t)}(\vartheta M(t) + \varphi(t)) [dB_t + \vartheta dt]$$

Infine ricaviamo

$$\begin{aligned} X^*(t)\pi^*(t)\sigma &= \frac{e^{rt}}{Z(t)}(\vartheta M(t) + \varphi(t)) \\ &= \frac{1}{\zeta(t)}(\vartheta \zeta(t)X^*(t) + \varphi(t)) \\ &= \vartheta X^*(t) + \frac{\varphi(t)}{\zeta(t)} \end{aligned}$$

3.2.2 Risoluzione nel caso Option Compensation

Come detto in precedenza i risultati ottenuti nel teorema 5 non possono essere applicati direttamente al problema in (3.13) poiché la funzione utilità non è concava. Inoltre la dinamica della variabile di stato X in (3.14) è differente da quella "standard" considerata da Carpenter in [4] e Karatzas e Shreve in [13], dunque sono necessarie delle modifiche alle definizioni precedentemente date, in particolar modo per ciò che riguarda il fattore di sconto stocastico.

Procedendo come nella sezione 3.2.1 consideriamo l'espressione integrale della X

$$X(t) = X_0 + \int_0^t (\mu - r - \beta\sigma^2)X(s)\delta(s)ds + \int_0^t \sigma X(s)\delta(s)dB_s \quad (3.21)$$

dove $\delta(s) = \pi(s) - \beta$, e possiamo ricavare equivalentemente la strategia π^* ottima o la δ^* .

Osservazione 3. Sarebbe possibile ottenere questa espressione della $X(t)$ nel problema standard se il titolo privo di rischio avesse rendimento nullo ed il titolo rischioso rendimento pari a $\mu - r - \beta\sigma^2$.

Il cambio di misura che elimina la componente di drift sfrutta la martingala

$$Z(t) = e^{-(\vartheta^2/2)t - \vartheta B_t} \quad \text{con} \quad \vartheta = \frac{\mu - r}{\sigma} - \beta\sigma$$

e riscrivendo la (3.21) in funzione del browniano $\tilde{B}(t) = B(t) + \vartheta t$ otteniamo

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \sigma X(s) \delta(s) d\tilde{B}_s \quad (3.22)$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'ammissibilità è in questo caso

$$\mathbb{E}_Q[X(T)] \leq X_0 \longrightarrow \mathbb{E}[Z(T)X(T)] \leq X_0$$

In base all'osservazione 3 deduciamo che il fattore di sconto stocastico ζ_t , così come definito in [13], coincide con la martingala Z_t . Il problema in (3.13)-(3.14) è equivalente a

$$\max_{X_T} \mathbb{E}[u((X_T - 1)^+)] \quad (3.23)$$

s.t

$$\mathbb{E}[\zeta(T)X(T)] \leq X_0 \quad X(T) \geq 0$$

La risoluzione è articolata nei seguenti passi

- Passaggio al problema standard tramite "versione concava" dell'utilità
- Risoluzione del problema ottenuto
- Verifica dell'ottimalità della soluzione trovata rispetto al problema di partenza

Definiamo

$$U(x) = \begin{cases} u((x - 1)^+) & \text{se } x \geq 0 \\ -\infty & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e consideriamo la sua versione concava $\tilde{U}(x)$ ottenuta sottendendo con una corda la zona che dà origine alla non concavità, come in Figura 3.2. Tale corda ha come estremi $(0, U(0))$ ed il punto $(\hat{x}, U(\hat{x}))$,

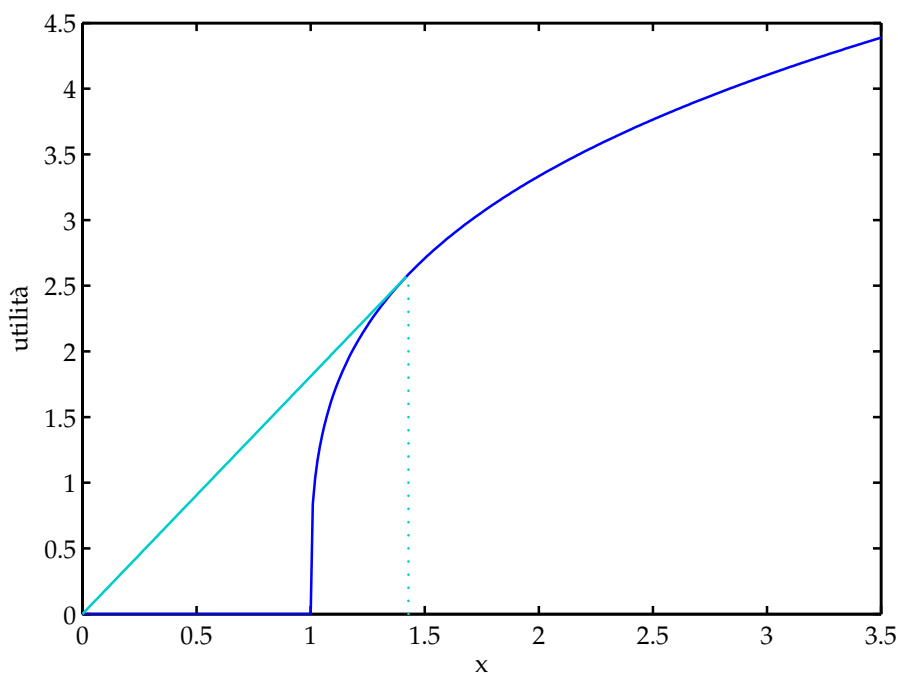


Figura 3.2: Funzione utilità di partenza e sua versione concava, per $\alpha = 0.3$. La linea blu corrisponde alla funzione utilità di partenza $U(x) = u((x-1)^+)$, la linea azzurra evidenzia la corda, mentre quella puntinata segna il punto di raccordo $\hat{x} = 1.43$.

dove \hat{x} va determinato in modo che non ci siano cambi di concavità nella \tilde{U} risultante.

$$\tilde{U}(x) = \begin{cases} U(x) & \text{se } x > \hat{x} \\ xU'(\hat{x}) & \text{se } 0 \leq x \leq \hat{x} \\ -\infty & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Determiniamo \hat{x} imponendo che la pendenza m della corda sia uguale alla pendenza della U nel punto di congiunzione

$$m = \frac{U(\hat{x}) - U(0)}{\hat{x} - 0} = U'(\hat{x})$$

ipotesi: $\hat{x} > 1$

$$\frac{(\hat{x} - 1)^\alpha}{\alpha \hat{x}} = (\hat{x} - 1)^{\alpha-1}$$

da cui otteniamo

$$\hat{x} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Osservazione 4. Poiché $0 < \alpha < 1$ l'ipotesi $\hat{x} > 1$ è soddisfatta.

Dalla (3.24) ricaviamo la funzione $\tilde{U}' : (0, \infty) \rightarrow (0, \tilde{U}'(0))$ e la sua inversa $I : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

$$\tilde{U}'(x) = \begin{cases} U'(x) & \text{se } x > \hat{x} \\ U'(\hat{x}) & \text{se } 0 \leq x \leq \hat{x} \end{cases} \quad I(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \geq \tilde{U}'(\hat{x}) \\ i(z) + 1 & \text{se } 0 < z < \tilde{U}'(\hat{x}) \end{cases}$$

Poiché le x a cui viene applicata u' sono sempre maggiori di 1 abbiamo $U'(x) = u'(x-1) = (x-1)^{\alpha-1}$. Analogamente per le z considerate vale $i(z) = z^{1/(\alpha-1)}$.

In termini di \tilde{U} , il problema del manager è

$$\max_{X_T} \mathbb{E}[\tilde{U}(X_T)] \quad (3.25)$$

s.t

$$\mathbb{E}[\zeta(T)X(T)] \leq X_0 \quad X(T) \geq 0$$

Seguendo il teorema 5 formuliamo il

TEOREMA 6

Sia

$$I(z) = [i(z) + 1] \mathbb{1}_{\{z < u'(\hat{x}-1)\}} \quad \forall z > 0 \quad (3.26)$$

Se sono soddisfatte le ipotesi

$$(i) \mathbb{E}[\zeta(T)] < \infty$$

$$(ii) \mathcal{X}(y) = \mathbb{E}[\zeta(T)I(y\zeta(T))] < \infty \quad \forall y \in (0, \infty)$$

Allora

$$X^*(T) = I(y(X_0)\zeta(T)) \quad (3.27)$$

$$X^*(t) = \mathbb{E}_t \left[\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} X^*(T) \right] \quad (3.28)$$

$$\delta^*(t) = \frac{1}{\sigma} \left[\vartheta + \frac{\varphi(t)}{M(t)} \right] \quad (3.29)$$

Osservazione 5. La funzione indicatrice in (3.26) è equivalente all'indicatrice dell'insieme $\{z < U'(\hat{x})\}$, a sua volta equivalente all'insieme $\{I(z) > \hat{x}\}$. Di conseguenza X_T^* assume valori in un sottoinsieme dei domini di \tilde{U} e U in cui le due funzioni coincidono, quindi $\tilde{U}(X_T^*) = U(X_T^*)$. Inoltre $y(X_0)$ è l'unico¹ valore per y , che denotiamo y^* , che soddisfa $\mathcal{X}(y^*) = X_0$. Dall'ipotesi $W_0 = Y_0$ abbiamo $X_0 = 1$, e ricaviamo y^* simulando il fattore di sconto stocastico in base alla sua dinamica.

¹ $\mathcal{X}(y)$ è una funzione monotona decrescente in y

Possiamo riscrivere X_T^* come

$$X^*(T) = I(y^* \zeta(T)) = [i(y^* \zeta(T)) + 1] \mathbb{1}_{\{\zeta(T) < \gamma\}} \quad (3.30)$$

con

$$\gamma = u'(\hat{x} - 1)/y^*$$

Mostriamo l'ottimalità di X_T^* per il problema di partenza in (3.23)

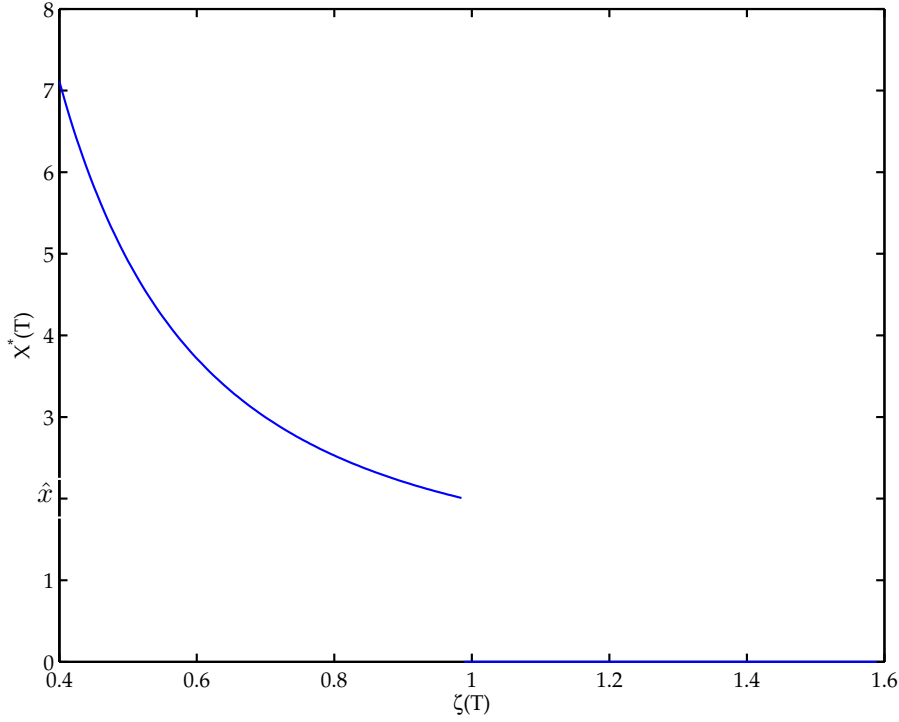


Figura 3.3: La performance ottima al tempo finale in funzione del fattore di sconto ζ_T . I valori per i parametri del modello sono in Tabella 1.

provando che un qualsiasi altro payoff Y , che rispetti il vincolo di ammissibilità, porta ad un'utilità attesa minore

$$\mathbb{E}[U(Y) - U(X_T^*)] = \mathbb{E}[U(Y) - \tilde{U}(X_T^*)] \quad (3.31)$$

$$\leq \mathbb{E}[\tilde{U}(Y) - \tilde{U}(X_T^*)] \quad (3.32)$$

$$< \mathbb{E}[y^* \zeta_T (Y - X_T^*)] \quad (3.33)$$

$$= y^* (\mathbb{E}[\zeta_T Y] - X_0) \leq 0 \quad (3.34)$$

La disuguaglianza in (3.32) deriva dal fatto che, come si verifica in Figura 3.2, \tilde{U} domina U . La (3.33) discende dalle proprietà di crescita della \tilde{U} :

$$\tilde{U}(y) - \tilde{U}(x) \leq m(y - x) \quad \forall m \in \tilde{U}'(x)$$

se $x > \hat{x}$ e $y \neq x$, come nel nostro caso, vale il minore stretto. La (3.34) è dovuta alla proprietà di martingala di $\zeta_t X_t^*$ e al vincolo di ammissibilità.

Ricaviamo i valori intermedi $X^*(t)$ calcolando esplicitamente il valore atteso in (3.28)

$$X^*(t) = \underbrace{\mathbb{E}_t \left[\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} \mathbb{1}_{\{\zeta(T) < \gamma\}} \right]}_{(I)} + \underbrace{\mathbb{E}_t \left[\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} (i(y^* \zeta(T)) + 1) \mathbb{1}_{\{\zeta(T) < \gamma\}} \right]}_{(II)} \quad (3.35)$$

Per calcolare (I) e (II) sfruttiamo i seguenti risultati

- La distribuzione del processo ζ è lognormale, quindi

$$\forall t \quad \frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} = e^{-V_t} \quad \text{con} \quad V_t \sim N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$$

$$\text{dove } \hat{\mu} = \vartheta^2(T-t)/2 \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \vartheta^2(T-t)$$

- Dalla proprietà di indipendenza degli incrementi del moto browniano si ha che $\zeta(T)/\zeta(t)$ è indipendente rispetto alla sigma algebra \mathcal{F}_t
- Formula per la risoluzione di integrali gaussiani

$$\int \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2x^2 + bx + c} dx = e^c + \frac{b^2}{2a^2} \int \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b/a^2}{1/a}\right)^2} dx$$

- $i(y^* \zeta(T)) = (\hat{x} - 1) \left(\frac{\zeta(T)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$

Di conseguenza otteniamo che

$$\begin{aligned} (I) &= \mathbb{E}_t \left[e^{-V_t} \mathbb{1}_{\{e^{-V_t} < \gamma/\zeta(t)\}} \right] = \int_{\ln \frac{\zeta(t)}{\gamma}}^{+\infty} e^{-v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{(v-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}} dv \\ &= \int_{\ln \frac{\zeta(t)}{\gamma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(v-(\hat{\mu}-\hat{\sigma}^2))^2}{\hat{\sigma}^2}} dv = \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = N(d_1) \end{aligned}$$

dove

$$d_1 = \frac{1}{|\hat{\sigma}|} \left[\ln \frac{\gamma}{\zeta_t} + (\hat{\mu} - \hat{\sigma}^2) \right] = \frac{1}{|\vartheta|\sqrt{T-t}} \left[\ln \frac{\gamma}{\zeta_t} - \frac{\vartheta^2}{2}(T-t) \right]$$

Lo svolgimento del valore atteso in (II) è analogo a quanto fatto per calcolare (I):

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} &= (\hat{\chi} - 1) \left(\frac{\zeta(t)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{\zeta(T)/\zeta(t) < \gamma/\zeta(t)\}} \right] \\
 &= (\hat{\chi} - 1) \left(\frac{\zeta(t)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \mathbb{E} \left[e^{-V_t \frac{\alpha}{\alpha-1}} \mathbb{1}_{\{e^{-V_t} < \gamma/\zeta(t)\}} \right] \\
 &= (\hat{\chi} - 1) \left(\frac{\zeta(t)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{\frac{\alpha\vartheta^2}{2(1-\alpha)^2}(T-t)} N(d_2) \\
 &= (\hat{\chi} - 1) \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} N(d_2) \quad \text{con} \quad d_2 = d_1 + \frac{|\vartheta|\sqrt{T-t}}{1-\alpha}
 \end{aligned}$$

Unendo i due termini si ottiene

$$X^*(t) = N(d_1) + (\hat{\chi} - 1) \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} N(d_2) \quad (3.36)$$

È possibile ricavare esplicitamente anche la strategia ottima che genera X_t^* , tramite il differenziale della martingala $M(t) = \zeta(t)X^*(t)$.

$$dM(t) = X^*(t)d\zeta(t) + \zeta(t)dX^*(t) + dX^*(t)d\zeta(t) \quad (3.37)$$

Tutti i termini in dt che emergono dagli ultimi due termini si semplificano, come è ovvio aspettarsi dato che M è una martingala, e si ottiene

$$dM(t) = \varphi(t)dB(t)$$

con

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \vartheta\zeta(t) \left[-X^*(t) + \frac{\hat{\chi}N'(d_1)}{|\vartheta|\sqrt{T-t}} + \frac{\hat{\chi}-1}{1-\alpha} \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} N(d_2) \right] \\
 &= \vartheta\zeta(t) \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} X^*(t) + \frac{\hat{\chi}N'(d_1)}{|\vartheta|\sqrt{T-t}} - \frac{N(d_1)}{1-\alpha} \right]
 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dalla (3.29) e (3.38) otteniamo

$$\delta^*(t) = \frac{\vartheta}{\sigma X^*(t)} \left[\frac{X^*(t)}{1-\alpha} + \frac{\hat{\chi}N'(d_1)}{|\vartheta|\sqrt{T-t}} - \frac{N(d_1)}{1-\alpha} \right] \quad (3.39)$$

3.2.3 *Analisi dei risultati*

Analizziamo i risultati ottenuti partendo dalla performance ottima al tempo finale

$$X^*(T) = \left[(\hat{x} - 1) \left(\frac{\gamma}{\zeta(T)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1 \right] \mathbb{1}_{\{\zeta(T) < \gamma\}}$$

Riferendoci alla Figura 3.3 osserviamo che la performance relativa ottima al tempo finale presenta una discontinuità in $\zeta(T) = \gamma$ e passa dal valore \hat{x} a zero. Questo significa che sono ottime per il manager solo le performance che rendono l'opzione con cui viene retribuito in the money di almeno la quantità $\hat{x} - 1$. Le restanti performance (tra 1 ed \hat{x}) sono positive in quanto il fondo batte il benchmark ed il compenso al tempo T che ne consegue è maggiore di zero, ma non sono "desiderabili" dal manager.

La performance ottima, quando non è nulla, è inversamente proporzionale al fattore di sconto $\zeta(T)$: più sono economici i payoff ($\zeta(T) \rightarrow 0$) maggiore è il compenso che il manager può ottenere. Questo andamento è tanto più accentuato quanto più il manager è propenso al rischio.

Consideriamo ora la performance ottima $X^*(t)$ e la strategia d'investimento $\pi^*(T) = \delta^*(t) + \beta$ associata. Il comportamento del manager di fronte a situazioni limite è il seguente

- *very bad state*: con $\zeta(t) \rightarrow +\infty$ si ha $X(t) \rightarrow 0$, quindi

$$\delta^*(t) \rightarrow \pm\infty \quad \text{e} \quad \pi^*(t) \rightarrow \pm\infty$$

- *very good state*: con $\zeta(t) \rightarrow 0$ si ha $X(t) \rightarrow +\infty$, quindi

$$\delta^*(t) \rightarrow \frac{\vartheta}{\sigma(1-\alpha)} \quad \text{e} \quad \pi^*(t) \rightarrow \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\mu-r}{\sigma^2} - \beta\alpha \right)$$

Maggiore è la performance relativa, minore è la possibilità che l'opzione sia out of the money a fine periodo, e la strategia si allinea a quella trovata in (3.5), come se il problema di ottimo affrontato dal manager fosse $\max \mathbb{E}[u(X_T)]$ piuttosto che $\max \mathbb{E}[u(X_T - 1)^+]$.

Riferendoci alla Figura 3.4 osserviamo che il manager sceglie una strategia più o meno aggressiva rispetto al benchmark in base al posizionamento di quest'ultimo rispetto alla golden rule

$$\text{A. } \beta > (\mu - r)/\sigma^2 \implies \pi^*(t) < \beta \quad \forall t$$

B. $\beta < (\mu - r) / \sigma^2 \implies \pi^*(t) > \beta \forall t$

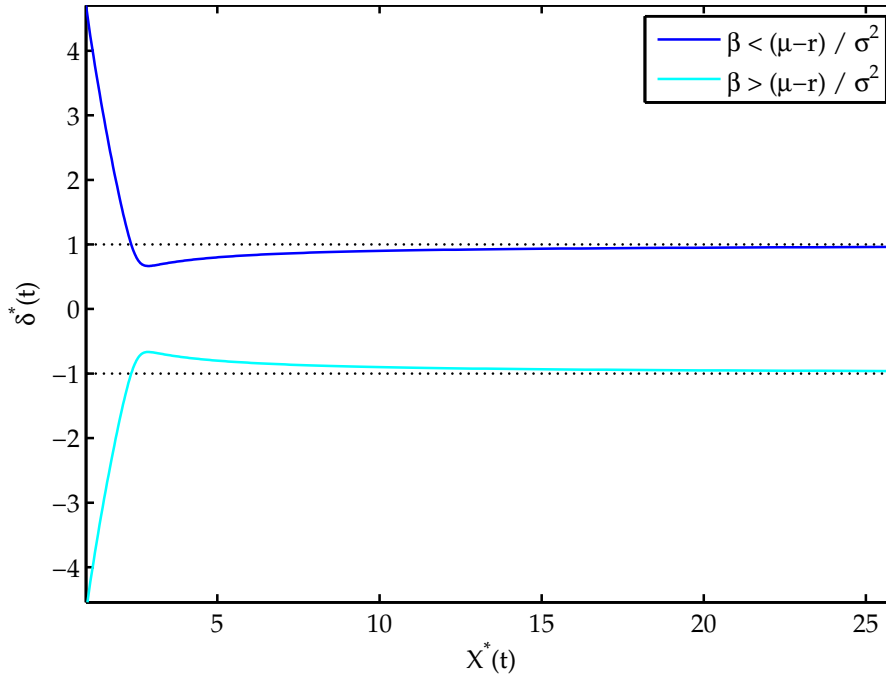


Figura 3.4: La distanza ottima dalla benchmark strategy in funzione della performance relativa $X^*(t)$. Le linee puntinate corrispondono alla soluzione, costante nel tempo ed indipendente dalla performance, trovata in sezione 3.1.1. I valori per i parametri del modello sono in Tabella 1, l'istante t considerato è tale che $T - t = 1$.

Le due possibili strategie comportano livelli diversi di volatilità per il fondo ma sono equivalenti per ciò che riguarda la misura di rischio considerata, il tracking error. In questo senso sono entrambe meno rischiose ($\delta^*(t)$ più vicino allo zero) della strategia (3.5) per un range di valori di $X^*(t)$: compensare il manager tramite opzione non necessariamente porta il manager ad assumere rischi aggiuntivi.

Al contrario, quanto la performance è molto negativa ($X^*(t) \rightarrow 0$) il manager cerca di recuperare aumentando sempre di più la distanza dal benchmark.

Parametri								
$\mu - r$	σ	α	\hat{x}	T	β	ϑ	y^*	γ
0,03	0,2	0,5	2	2	0,25	0,1	1,011	0,989
					1,25	-0,1	1,006	0,994

Tabella 1: Valori dei parametri per il modello con compensazione tramite opzione.

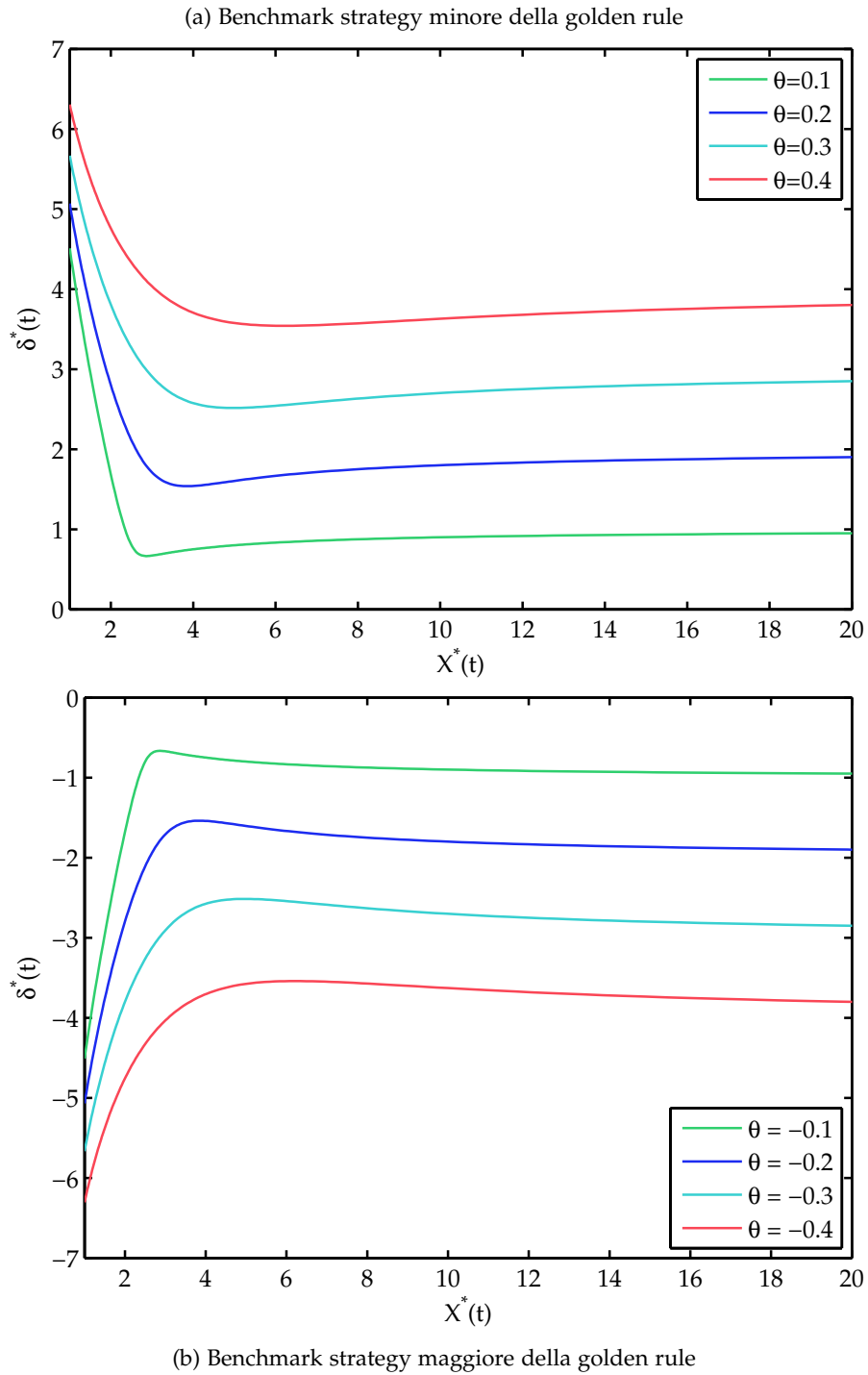


Figura 3.5: La distanza ottima dalla benchmark strategy in funzione della performance relativa $X^*(t)$, al variare di ϑ . L'istante t considerato è tale che $T - t = 1$.

I parametri μ, r, σ e β sono presenti nella soluzione δ_t^* esclusivamente attraverso la combinazione

$$\vartheta = \sigma \left(\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \beta \right)$$

che possiamo considerare il parametro principale del modello.

Il suo segno determina se l'investimento del titolo rischioso sarà maggiore o minore di β , in modo che la performance relativa ottima abbia drift positivo

$$\frac{dX_t}{X_t} = \delta_t \vartheta \sigma dt + \delta_t \sigma dB_t$$

- δ_t^* positivi corrispondono a ϑ positivi
- δ_t^* negativi corrispondono a ϑ negativi

In Figura 3.5 è rappresentata la distanza ottima per diversi valori di ϑ : nel grafico (a) consideriamo valori positivi, nel grafico (b) valori negativi.

Poiché vale $\partial \delta^* / \partial |\vartheta| = \text{sgn } \vartheta \partial \delta^* / \partial \vartheta$, all'aumentare del modulo di ϑ

- δ^* cresce per $\vartheta > 0$
- δ^* decresce per $\vartheta < 0$, raggiungendo valori sempre più negativi

In entrambi i casi la distanza dal benchmark aumenta tanto più ϑ è lontano dallo zero, ovvero $\partial |\delta^*| / \partial |\vartheta| > 0$. Quanto più la benchmark strategy è diversa dalla golden rule, tanto più π^* sarà lontano da β e la direzione della deviazione dipenderà dal posizionamento di β rispetto a $\mu - r / \sigma^2$. Questo è un risultato che ci aspettiamo in quanto nel nostro caso valori di $|\vartheta|$ maggiori implicano una media di lungo periodo del processo da massimizzare più alta.

Analizziamo l'impatto sulla strategia delle variazioni dei parametri del modello

- $\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta} = \frac{\partial \pi^*}{\partial \vartheta} (-\sigma) < 0$
- $\frac{\partial \pi^*}{\partial \alpha} > 0$
- $\frac{\partial \pi^*}{\partial \sigma} < 0$
- $\frac{\partial \pi^*}{\partial (\mu - r)} = \frac{\partial \pi^*}{\partial \vartheta} \frac{1}{\sigma} > 0$

Le risposte a variazioni dei parametri confermano quelle ottenute finora: il manager investirà maggiormente nel titolo rischioso quando la volatilità è bassa, il premio per il rischio alto e il coefficiente di avversione al rischio ($1 - \alpha$) è basso. Tuttavia la strategia implementata dal manager è da considerarsi più o meno rischiosa in funzione della distanza dalla strategia benchmark.

3.3 COLLAR TYPE

Consideriamo, come variante della retribuzione tramite opzione, il caso in cui esiste un limite superiore al compenso ottenibile. Il manager vedrà premiati i miglioramenti nella performance relativa (e i maggiori afflussi di capitale nel fondo) fino al raggiungimento della soglia H , oltre la quale ulteriori crescite della performance non produrranno aumenti nel compenso.

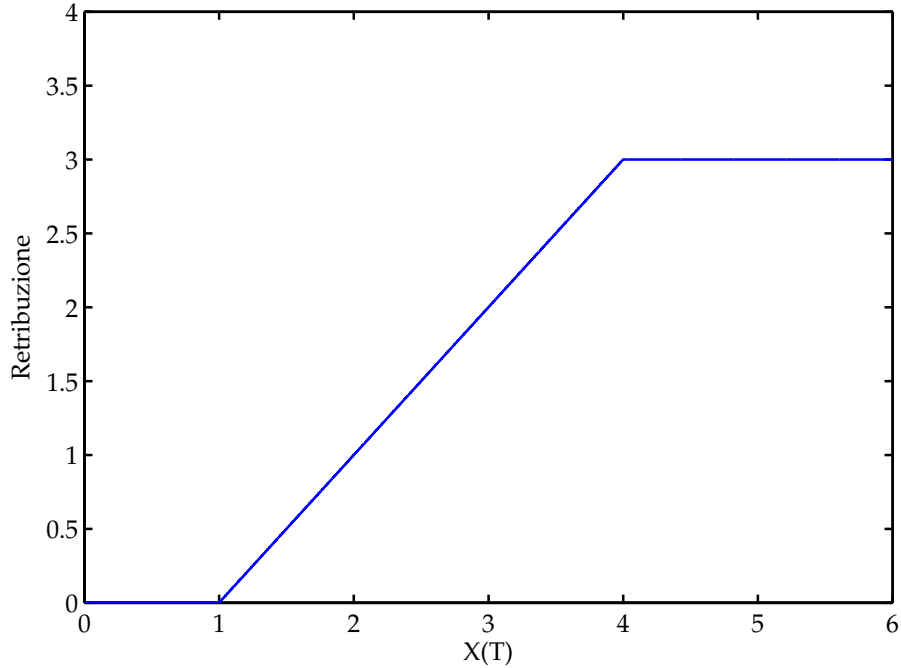


Figura 3.6: Performance fee percepita dal manager con $H=4$.

L'obiettivo del manager è

$$\max_{\pi_t} \mathbb{E} \left[u \left((X(T) - 1)^+ - (X(T) - H)^+ \right) \right] \quad (3.40)$$

sotto i vincoli di dinamica

$$\frac{dX_t}{X_t} = [(\pi_t - \beta)(\mu - r - \beta\sigma^2)] dt + (\pi_t - \beta)\sigma dB_t$$

e di ammissibilità

$$X_t \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

Il problema di massimizzazione dinamica in (3.40) è equivalente al problema di massimizzazione statica

$$\max_{X_T} \mathbb{E} [u((X_T - 1)^+ - (X_T - H)^+)] \quad (3.41)$$

s.t

$$\mathbb{E} [\zeta(T)X(T)] \leq X_0 \quad X(T) \geq 0$$

Gli step della risoluzione sono invariati rispetto al caso precedente:

- Passaggio al problema standard tramite “versione concava” dell’utilità
- Risoluzione del problema ottenuto
- Verifica dell’ottimalità della soluzione trovata rispetto al problema di partenza

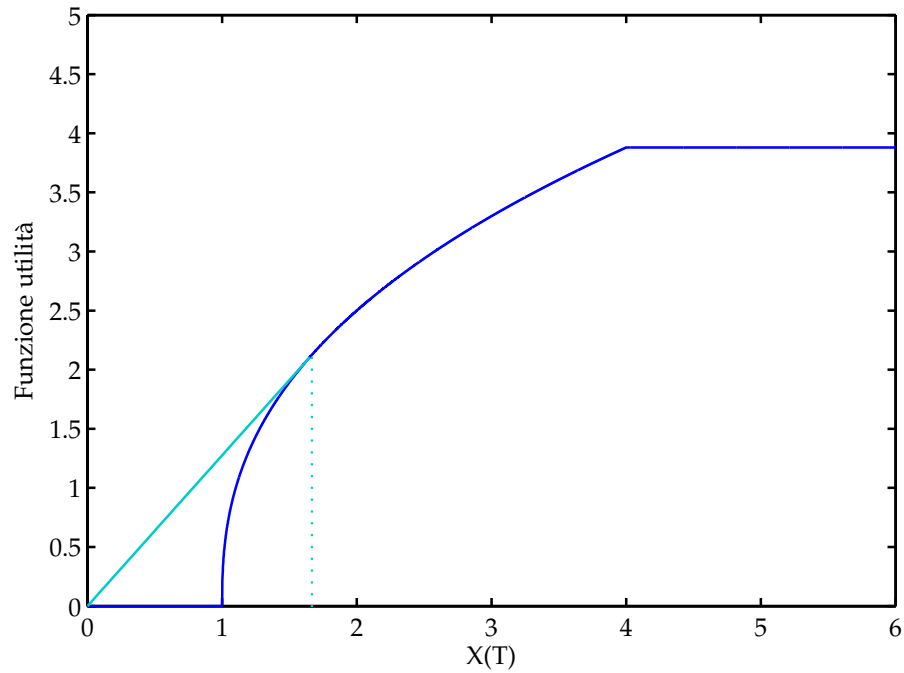


Figura 3.7: Funzione utilità di partenza e sua versione concava, per $\alpha = 0.4$ e $H = 4$.

3.3.1 Risoluzione

Definiamo

$$U(x) = \begin{cases} u((x-1)^+ - (x-H)^+) & \text{se } x \geq 0 \\ -\infty & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$U(x)$ è la funzione utilità considerata, $\tilde{U}(x)$ è la sua versione concava ottenuta sottendendo con una corda la zona che dà origine alla non concavità, come nel caso precedente.

$$\tilde{U}(x) = \begin{cases} U(x) & \text{se } x > \hat{x} \\ xU'(\hat{x}) & \text{se } 0 \leq x \leq \hat{x} \\ -\infty & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Determiniamo \hat{x} imponendo che la pendenza m della corda sia uguale alla pendenza della U nel punto di congiunzione

$$m = \frac{U(\hat{x}) - U(0)}{\hat{x} - 0} = U'(\hat{x})$$

ipotesi: $\hat{x} > 1$ e $H > \hat{x}$

$$\frac{(\hat{x}-1)^a}{a\hat{x}} = (\hat{x}-1)^{a-1}$$

da cui otteniamo

$$\hat{x} = \frac{1}{1-a}$$

Osservazione 6. Poiché $0 < a < 1$ l'ipotesi $\hat{x} > 1$ è soddisfatta e la seconda ipotesi vale se poniamo $H > 1/(1-a)$.

Dalla (3.42) ricaviamo la funzione $\tilde{U}' : (0, \infty) \rightarrow (0, \tilde{U}'(0))$ e la sua inversa $I : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

$$\tilde{U}'(x) = \begin{cases} U'(x) & \text{se } x > \hat{x} \\ U'(\hat{x}) & \text{se } 0 \leq x \leq \hat{x} \end{cases} \quad I(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \geq \tilde{U}'(\hat{x}) \\ i(z) + 1 & \text{se } \tilde{U}'(H) < z < \tilde{U}'(\hat{x}) \\ H & \text{se } 0 < z \leq \tilde{U}'(\hat{x}) \end{cases}$$

In termini di \tilde{U} , il problema del manager è

$$\max_{X_T} \mathbb{E}[\tilde{U}(X_T)] \quad (3.43)$$

s.t

$$\mathbb{E}[\zeta(T)X(T)] \leq X_0 \quad X(T) \geq 0$$

Seguendo il teorema 5 formuliamo il

TEOREMA 7

Sia

$$I(z) = H\mathbb{1}_{\{0 < z \leq u'(H-1)\}} + [i(z) + 1]\mathbb{1}_{\{u'(H-1) < z < u'(\hat{x}-1)\}} \quad \forall z > 0 \quad (3.44)$$

Se sono soddisfatte le ipotesi

(i) $\mathbb{E} [\zeta(T)] < \infty$

(ii) $\mathcal{X}(y) = \mathbb{E} [\zeta(T)I(y\zeta(T))] < \infty \quad \forall y \in (0, \infty)$

Allora

$$X^*(T) = I(y(X_0)\zeta(T)) \quad (3.45)$$

$$X^*(t) = \mathbb{E}_t \left[\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} X^*(T) \right] \quad (3.46)$$

$$\delta^*(t) = \frac{1}{\sigma} \left[\vartheta + \frac{\varphi(t)}{M(t)} \right] \quad (3.47)$$

Possiamo riscrivere X^*_T come

$$X^*(T) = H\mathbb{1}_{\{\zeta(T) \leq \gamma_1\}} + [i(y^*\zeta(T)) + 1]\mathbb{1}_{\{\gamma_1 < \zeta(T) < \gamma_2\}} \quad (3.48)$$

con

$$\gamma_1 = \frac{u'(H-1)}{y^*} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{u'(\hat{x}-1)}{y^*}$$

Ricaviamo i valori intermedi $X^*(t)$ calcolando esplicitamente il valore atteso in (3.46)

$$\begin{aligned} X^*(t) = & \underbrace{\mathbb{E}_t \left[\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} H\mathbb{1}_{\{\zeta(T) < \gamma_1\}} \right]}_{(0)} + \underbrace{\mathbb{E}_t \left[\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} \mathbb{1}_{\{\gamma_1 < \zeta(T) < \gamma_2\}} \right]}_{(I)} \\ & + \underbrace{\mathbb{E}_t \left[\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} (i(y^*\zeta(T)) + 1)\mathbb{1}_{\{\gamma_1 < \zeta(T) < \gamma_2\}} \right]}_{(II)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Per ricavare i valori di (0), (I) e (II) procediamo come in precedenza e otteniamo

$$\begin{aligned} (0) = & \mathbb{E}_t \left[H e^{-V_t} \mathbb{1}_{\{e^{-V_t} < \gamma_1/\zeta(t)\}} \right] \\ = & \int_{\ln \frac{\zeta(t)}{\gamma_1}}^{+\infty} e^{-v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{(v-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}} dv = H N(d_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I) &= \mathbb{E}_t \left[e^{-V_t} \mathbb{1}_{\{\gamma_2/\zeta(t) < e^{-V_t} < \gamma_2/\zeta(t)\}} \right] \\
&= \int_{\ln \frac{\zeta(t)}{\gamma_2}}^{\ln \frac{\zeta(t)}{\gamma_1}} e^{-v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{(v-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}} dv = N(d_1) - N(d_3)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{|\hat{\sigma}|} \left[\ln \frac{\gamma_2}{\zeta_t} + (\hat{\mu} - \hat{\sigma}^2) \right] = \frac{1}{|\hat{\sigma}|\sqrt{T-t}} \left[\ln \frac{\gamma_2}{\zeta_t} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}(T-t) \right] \\
d_3 &= \frac{1}{|\hat{\sigma}|} \left[\ln \frac{\gamma_1}{\zeta_t} + (\hat{\mu} - \hat{\sigma}^2) \right] = \frac{1}{|\hat{\sigma}|\sqrt{T-t}} \left[\ln \frac{\gamma_1}{\zeta_t} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}(T-t) \right]
\end{aligned}$$

Lo svolgimento del valore atteso in (II) è analogo a quanto fatto per calcolare (I):

$$\begin{aligned}
(II) &= (\hat{x} - 1) \left(\frac{\zeta(t)}{\gamma_2} \right)^{\frac{1}{a-1}} \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} \right)^{\frac{a}{a-1}} \mathbb{1}_{\{\zeta(T)/\zeta(t) < \gamma_2/\zeta(t)\}} \right] \\
&\quad - (H - 1) \left(\frac{\zeta(t)}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{a-1}} \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} \right)^{\frac{a}{a-1}} \mathbb{1}_{\{\zeta(T)/\zeta(t) < \gamma_1/\zeta(t)\}} \right] \\
&= (\hat{x} - 1) \left(\frac{\zeta(t)}{\gamma_2} \right)^{\frac{1}{a-1}} \mathbb{E} \left[e^{-V_t \frac{a}{a-1}} \mathbb{1}_{\{e^{-V_t} < \gamma/\zeta(t)\}} \right] \\
&\quad - (H - 1) \left(\frac{\zeta(t)}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{a-1}} \mathbb{E} \left[e^{-V_t \frac{a}{a-1}} \mathbb{1}_{\{e^{-V_t} < \gamma_1/\zeta(t)\}} \right] \\
&= (\hat{x} - 1) \left(\frac{\zeta(t)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{a-1}} e^{\frac{a\hat{\sigma}^2}{2(1-a)^2}(T-t)} N(d_2) \\
&\quad - (H - 1) \left(\frac{\zeta(t)}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{a-1}} e^{\frac{a\hat{\sigma}^2}{2(1-a)^2}(T-t)} N(d_4) \\
&= (\hat{x} - 1) \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} N(d_2) - (H - 1) \frac{N'(d_3)}{N'(d_4)} N(d_4) \\
&\quad \text{con} \quad d_2 = d_1 + \frac{|\hat{\sigma}|\sqrt{T-t}}{1-a} \quad \text{e} \quad d_4 = d_3 + \frac{|\hat{\sigma}|\sqrt{T-t}}{1-a}
\end{aligned}$$

Unendo i due termini si ottiene

$$\begin{aligned}
X^*(t) &= (H - 1) \left[N(d_3) - \frac{N'(d_3)}{N'(d_4)} N(d_4) \right] \\
&\quad + N(d_1) + (\hat{x} - 1) \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} N(d_2)
\end{aligned}$$

Ora possiamo ricavare la strategia ottima $\delta^*(t)$ tramite la (3.47)

$$\delta^*(t) = \frac{\vartheta}{\sigma X^*(t)} \left[\frac{X^*(t)}{1-\alpha} - \frac{N(d_1)}{1-\alpha} + \frac{\hat{x}N'(d_1)}{|\vartheta|\sqrt{T-t}} - \frac{(H-1)N(d_3)}{1-\alpha} \right] \quad (3.50)$$

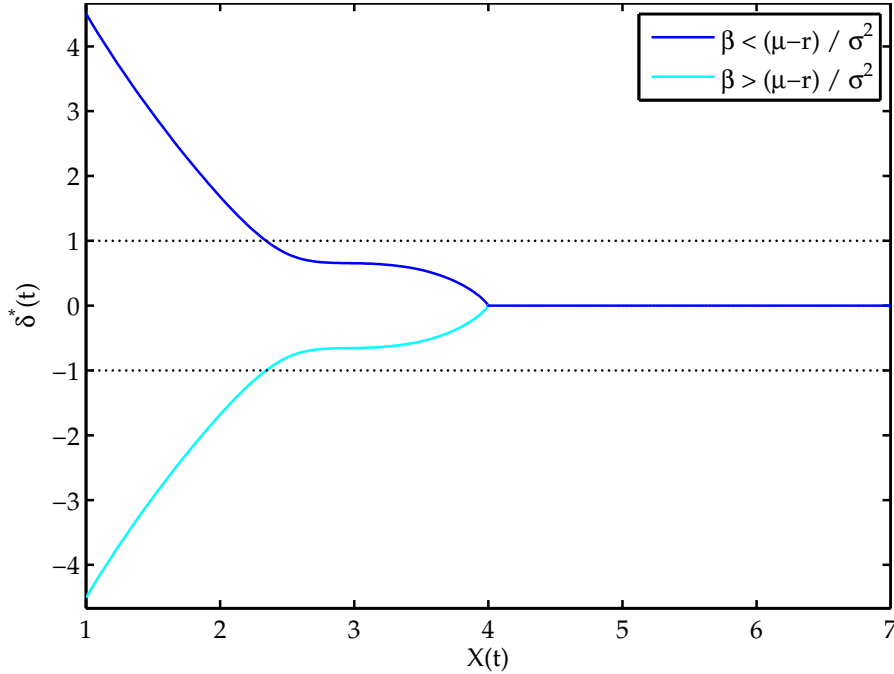


Figura 3.8: La distanza ottima dalla benchmark strategy in funzione della performance relativa $X(t)$. Le linee puntinate corrispondono alla soluzione, costante nel tempo ed indipendente dalla performance, trovata in sezione 3.1.1. I valori per i parametri del modello sono in Tabella 1, l'istante t considerato è tale che $T - t = 1$.

3.3.2 Analisi dei risultati

Dalla Figura 3.8 osserviamo che

- A. Anche nel caso in cui la retribuzione è limitata superiormente, il rischio assunto nel bad state ($X_t \rightarrow 0$ quando $\zeta_t \rightarrow \infty$) è illimitato. Il risk shifting si verifica indipendentemente da come è strutturato lo schema retributivo per performance positive ($X_t^* > 1$), in quanto ciò che lo origina è il cambio di concavità corrispondente a $X(t) = 1$: questa è infatti la soglia che indica se il benchmark viene superato e quindi se si passa da flussi in uscita dal fondo a flussi in entrata.

- B. La strategia si differenzia da quella trovata nel caso di retribuzione potenzialmente illimitata quando $X(t)$ si avvicina ad H , in quanto si ha che $\pi^*(t) \rightarrow \beta$. H rappresenta un “punto di arrivo” per il manager, il quale non riceverà compensi superiori ad $H - 1$ indipendentemente dal livello effettivamente raggiunto a T . Per questo motivo le performance $X(t)$ superiori ad H non sono parte della soluzione (non sono considerate ottime): il manager non è incentivato a raggiungere performance sempre più elevate se facendolo non ottiene benefici.

Consideriamo ora la performance ottima $X^*(t)$ e la strategia d’investimento $\pi^*(t) = \delta^*(t) + \beta$ associata. Il comportamento del manager di fronte a situazioni limite è il seguente

- *very bad state*: con $\zeta(t) \rightarrow +\infty$ si ha $X(t) \rightarrow 0$, quindi

$$\delta^*(t) \rightarrow \pm\infty \quad \text{e} \quad \pi^*(t) \rightarrow \pm\infty$$

- *very good state*: con $\zeta(t) \rightarrow 0$ si ha $X(t) \rightarrow H$, quindi

$$\delta^*(t) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \pi^*(t) \rightarrow \beta$$

- con $H \rightarrow +\infty$ si ha $X^*(t) \rightarrow N(d_1) + (\hat{x} - 1) \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} N(d_2)$,

$$\delta^*(t) \rightarrow \frac{\vartheta}{\sigma X^*(t)} \left[\frac{X^*(t)}{1 - \alpha} - \frac{N(d_1)}{1 - \alpha} + \frac{\hat{x} N'(d_1)}{|\vartheta| \sqrt{T - t}} \right]$$

Come ci aspettiamo, per $H \rightarrow +\infty$ la distanza ottima torna ad essere la (3.39) del caso option compensation, e abbiamo

$$\delta_{t,\text{option}}^* \geq \delta_{t,\text{collar}}^* \quad \forall t \forall H.$$

Osserviamo che la distanza rispetto al benchmark è crescente con H , in quanto il manager è disposto a rischiare di più per raggiungere performance migliori.

La strategia trovata presenta punti in comune e differenze con i risultati ottenuti da Basak, Pavlova, Shapiro in [1]

- A. In entrambi i casi sono possibili due economie: il risk shifting non è equivalente ad investimenti maggiori nel titolo rischioso, ma consiste in deviazioni sia positive sia negative rispetto alla normal strategy, a seconda del posizionamento del benchmark

- b. La strategia del manager si avvicina (fino a coincidere) a quella del banchmark quando la performance si avvicina alla soglia superiore H (η_H in [1])
- c. Il risk shifting è sempre più marcato quando il fondo ha scarso rendimento, fino a prevedere un'esposizione al rischio infinita: ciò non accade in [1], dove si ha allineamento alla normal strategy quando il rendimento relativo è estremamente basso. Nel nostro caso il manager non ha nulla da perdere: le (eventuali) perdite dovute ad un comportamento così rischioso non si ripercuotono sulla sua retribuzione.

3.4 POSSIBILITÀ DI PERFORMANCE FEE NEGATIVE

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come l'assenza di ripercussioni negative sul compenso porti il manager a posizioni più rischiose e lontane dagli interessi degli investitori del fondo. Queste considerazioni sono ancora più valide se lo schema retributivo, in aggiunta al termine di performance, prevede un ammontare fissato di denaro A , così che il compenso complessivo sia $A + B(1 + G(T))$.

Analizziamo come cambia la strategia quando una performance negativa comporta una riduzione, comunque non eccessiva, della retribuzione. Possiamo introdurre questa caratteristica pensando che il tasso da applicare alla componente variabile del compenso sia quello complessivo dato sia dai flussi in entrata che da quelli in uscita, ovvero $G(T)$. Il compenso complessivo è ora

$$A + BG(T)$$

ed esiste quindi la possibilità che sia negativo, se la componente fissa A , pur essendo positiva, è minore di B e la performance è molto negativa, con $G(T) \rightarrow -1$.

I flussi di capitale sono ancora esponenziali rispetto al delta tra i rendimenti logaritmici del fondo e del benchmark, ma è possibile ottenere soluzioni in forma chiusa solo per $\alpha = 1$.

$$G(t) = e^{(R_t^W - R_t^Y)} - 1 = \frac{W(t)}{Y(t)} - 1 \quad (3.51)$$

$$dG_t = (G_t + 1) [\delta_t (\mu - r - \sigma^2 \beta) dt + \delta_t \sigma dB_t] \quad \delta_t = \pi_t - \beta \quad (3.52)$$

3.4.1 Risoluzione

L'obiettivo del manager è la massimizzazione del compenso, dunque il problema di ottimizzazione è dato da:

$$\max_{\delta_t} \mathbb{E}[u(A + BG_T)] \quad (3.53)$$

TEOREMA 8

Dato il problema di controllo ottimo stocastico descritto da (3.53) e (3.52), definito $V(t, g) = \sup_{\delta} \mathbb{E}[u(A + BG^\delta(T)) | G(t) = g]$, si ha la value function

$$V(t, G(t)) = \begin{cases} h(t; a)(A + BG(t))^\alpha & \text{se } a \neq 0 \\ h(t; a) + \log X(t) & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

con

$$h(t; a) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{a\vartheta(a)(T-t)} & \text{se } a \neq 0 \\ \vartheta(0)(T-t) & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$$\vartheta(a) = \frac{\sigma^2}{2(1-a)} \left(\frac{\mu-r}{\sigma^2} - \beta \right)^2$$

La strategia associata prevede una distanza dal benchmark data da

$$\delta^*(t, G(t); a) = \frac{\mu-r-\sigma^2\beta}{(1-a)\sigma^2} \frac{A + BG(t)}{B + BG(t)} \quad (3.54)$$

Dimostrazione.

caso $a \neq 0$ Definiamo $\hat{g} = A + Bg$, la $V(t, \hat{g})$ soddisfa l'equazione HJB

$$\begin{cases} V_t + \sup_{\delta} [\mu_{\hat{g}}^{\delta} V_{\hat{g}} + \frac{1}{2}(\sigma_{\hat{g}}^{\delta})^2 V_{\hat{g}\hat{g}}] = 0 & \forall (t, \hat{g}) \in [0, T) \times (0, +\infty) \\ V(T, \hat{g}) = \frac{1}{\alpha} \hat{g}^\alpha & \forall \hat{g} \in (0, +\infty). \\ \lim_{\hat{g} \rightarrow 0} V(t, 0) = 0 & \forall t \in [0, T) \end{cases}$$

in questa equazione $V_t, V_{\hat{g}}$ sono le derivate parziali di V rispetto a t, \hat{g} e i coefficienti sono

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{g}}^{\delta} &= (g+1)\delta(\mu-r-\sigma^2\beta) \\ (\sigma_{\hat{g}}^{\delta})^2 &= (g+1)^2\delta^2\sigma^2 \end{aligned}$$

Per un dato (t, \hat{g}) risolviamo il problema di massimizzazione statico trovando

$$\delta^*(t, \hat{g}) = -\frac{\mu - r - \sigma^2 \beta}{B(g+1)\sigma^2} \frac{V_{\hat{g}}}{V_{\hat{g}\hat{g}}}$$

la soluzione ottima per δ dipende quindi dalla $V(t, \hat{g})$, che viene trovata risolvendo la PDE

$$V_t + \mu_{\hat{g}}^{\delta^*} V_{\hat{g}} + \frac{1}{2} (\sigma_{\hat{g}}^{\delta^*})^2 V_{\hat{g}\hat{g}} = 0 \quad (3.55)$$

dove i coefficienti $\mu_{\hat{g}}^{\delta^*}$ e $\sigma_{\hat{g}}^{\delta^*}$ vengono ottenuti sostituendo δ^* nelle espressioni di $\mu_{\hat{g}}^{\delta}$ e $\sigma_{\hat{g}}^{\delta}$. Per risolvere (3.55) ipotizziamo la guess solution $V(t, g) = h(t)\hat{g}^a$. Imponendo la condizione finale otteniamo $h(T) = 1/a$, e sostituendo la guess solution in (3.55) otteniamo la seguente ODE (lineare a coefficienti costanti) per $h(t)$:

$$\dot{h}(t) + h(t)a \left[\frac{1}{2} \frac{(\mu - r - \sigma^2 \beta)^2}{\sigma^2(1-a)} \right] = 0$$

risolta da

$$h(t) = \frac{1}{a} \exp(a\vartheta(T-t))$$

$$\vartheta = \frac{\sigma^2}{2(1-a)} \left[\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \beta \right]^2$$

Infine sostituendo la $V(t, \hat{g})$ nell'espressione di δ^* si ottiene

$$\delta^* = \frac{\mu - r - \sigma^2 \beta}{\sigma^2(1-a)} \frac{A + Bg}{B + Bg}$$

caso $a = 0$ Come osservato la strategia ottima è data da

$$\delta^* = \frac{\mu - r - \sigma^2 \beta}{\sigma^2} \frac{A + Bg}{B + Bg}$$

La guess solution è ora $V(t, g) = \log(A + Bg) + h(t)$, e si ottiene la ODE per $h(t)$:

$$\dot{h}(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r - \sigma^2 \beta}{\sigma} \right)^2 = 0$$

risolta da

$$h(t) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \beta \right)^2 (T-t) \quad \square$$

3.4.2 *Analisi dei risultati*

Analizziamo la strategia ottenuta in termini di

- segno, annullamento
- dipendenza dai flussi $G(t)$
- dipendenza dai parametri

La strategia scelta dal manager prevede un investimento nel titolo rischioso maggiore o minore di β , secondo il segno di δ^* . A priori questo è determinato dai due fattori

$$\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \beta \quad \text{e} \quad 1 + \frac{A - B}{B(1 + G(t))}$$

ma vedremo che il solo confronto tra la strategia del benchmark e la golden rule basta ad indicare la direzione della deviazione dal benchmark, come nei modelli precedenti.

Per quanto riguarda l'andamento della strategia in funzione dei flussi di capitale dobbiamo considerare anche il segno del compenso nel peggior caso di underperformance, cioè $A - B$.

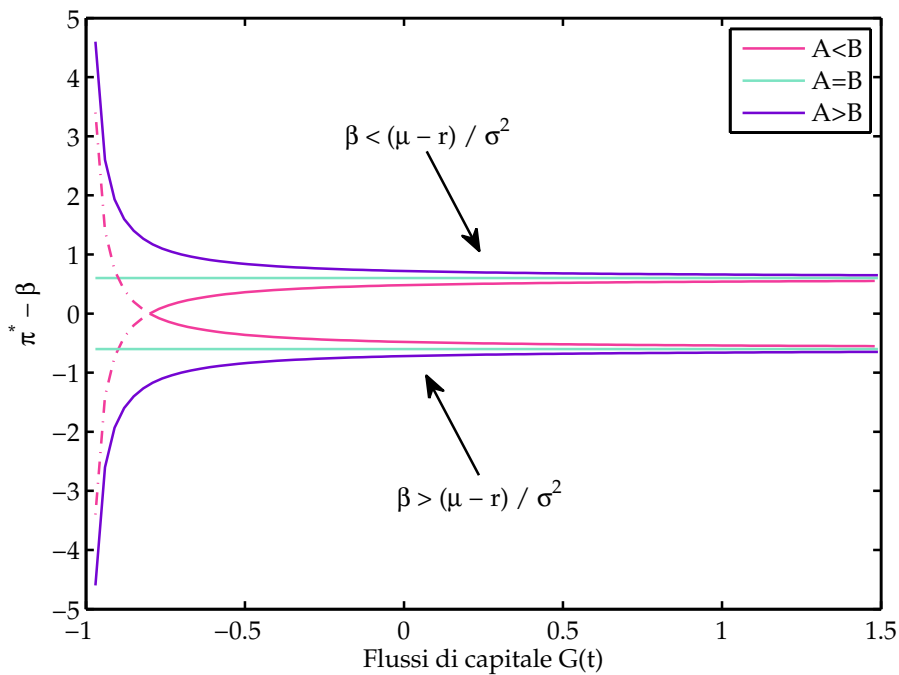


Figura 3.9: La distanza ottima $\delta^* = \pi^* - \beta$ in funzione dei flussi di capitale, al variare dei parametri β A e B . Sono stati utilizzati i seguenti valori per i parametri del modello: $\mu - r = 5\%$, $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $-A/B = -0.8$ (nel caso $A < B$).

In base alla Figura 3.9 osserviamo che

- A. La distanza δ^* è invariante rispetto a $G(t)$ quando $A = B$, e corrisponde alla soluzione trovata nel modello base in sezione 3.1.1, in cui la strategia ottima è

$$\pi_0^* = \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{\mu-r}{\sigma^2} - \alpha\beta \right]$$

Questo è un risultato ovvio in quanto se $A = B$ la retribuzione è $B + BG(T) = BX(T)$ ed il problema di ottimo coincide con quello in (3.2). Ciò che rende diversa la distanza ottima, e quindi la strategia, rispetto al caso base è il segno di $A - B$, il compenso nel peggior caso di underperformance. Qualunque siano i valori di A e B la strategia costante (3.5) viene scelta dal manager quando la performance del fondo è molto superiore a quella del benchmark, cioè quando $G(T) \geq 2$.

- B. Quando $A > B$ il manager ha la garanzia che il suo compenso sarà positivo indipendentemente dalla performance del fondo. Questo incentiva il manager ad aumentare il tracking error accentuando le deviazioni dal benchmark presenti nel modello base

a) se $\beta < (\mu - r)/\sigma^2 \implies \pi^* > \beta$

b) se $\beta > (\mu - r)/\sigma^2 \implies \pi^* < \beta$

L'aumento del tracking error comporta l'aumento della rischiosità della strategia, specialmente in caso di outflow. Al limite, con $G(t) \rightarrow -1$, l'esposizione al rischio è infinita. Nella realtà non si osservano mai esposizioni al rischio così elevate; tuttavia un tasso di inflow così negativo corrisponde nel modello ad un valore di fondo pari a zero, ed i fondi d'investimento vengono liquidati ben prima che il valore degli asset sotto gestione si annulli.

- c. Quando $A < B$ il tracking error è ridotto rispetto al caso base, e di conseguenza la rischiosità della strategia risulta inferiore. Le due parti tratteggiate della linea rosa sono ottenute dall'equazione (3.54) per $G < -A/B$ e rappresentano strategie che non sono parte della soluzione e non vengono implementate dal manager. Queste strategie non sono ammissibili perché ottenute per $G(t)$ tali da rendere il compenso complessivo negativo, per il quale si avrebbe utilità $-\infty$. Il manager è comunque in grado

di evitare un compenso nullo (ed utilità marginale infinita). Al tempo $t = 0$ vale infatti $W_0 = Y_0$, dunque $G(0) = 0$ e la strategia iniziale del manager è

$$\pi^*(0) = \beta + \frac{A(\mu - r - \sigma^2\beta)}{B(1 - \alpha)\sigma^2}$$

Durante il periodo di gestione il fondo ed il benchmark avranno rendimenti diversi (la strategia iniziale è diversa da β) e di conseguenza verranno attirati nuovi investitori/gli investitori presenti ritireranno i propri investimenti. In caso di performance relativa negativa $G(t)$ diminuisce, se arriva a toccare il valore negativo $-A/B$ si ha $\delta^*(t) = 0$, cioè $\pi^*(t) = \beta$. Di fronte ad un significativo declino della performance, che comporta una performance fee negativa, il manager reagisce allineandosi al benchmark: così facendo rende nullo il tasso di inflow/outflow e ne blocca la dinamica ($\delta(t) = 0 \Rightarrow dG(t) = 0$). Così facendo il manager si assicura contro la possibilità di non venire retribuito al tempo finale T , garantendosi un compenso pari ad A . Le strategie (linee tratteggiate in Figura 3.9) che prevedono un tracking error sempre maggiore per performance molto negative non sono ottimali per il manager.

Analizziamo l'impatto sulla strategia delle variazioni dei parametri del modello

- $\frac{\partial \pi^*}{\partial (\mu - r)} = \frac{1}{(1 - \alpha)\sigma^2} \frac{A + BG(t)}{B + BG(t)} > 0$
- $\frac{\partial \pi^*}{\partial \sigma} = -\frac{2(\mu - r)}{(1 - \alpha)\sigma} \frac{A + BG(t)}{B + BG(t)} < 0$
- $\frac{\partial |\delta^*|}{\partial \alpha} = \text{sgn } \delta^* \frac{\mu - r - \sigma^2\beta}{(1 - \alpha)^2\sigma^2} \frac{A + BG(t)}{B + BG(t)} > 0$
- $\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta} = \frac{1}{1 - \alpha} \left(1 - \alpha - \frac{A + BG(t)}{B + BG(t)} \right) \geq 0$

Le risposte a variazioni dei parametri confermano quelle ottenute nel modello base, e sono amplificate o ridotte grazie al fattore $(A + BG(t))/(B + BG(t))$. Quando la remunerazione prevede una componente positiva anche nel caso peggiore di underperformance il manager non è incentivato a replicare sulla propria strategia le variazioni che osserva in quella del benchmark e si muove nella direzione opposta, come nel caso base. Se invece la componente maggioritaria della retribuzione è quella variabile, esiste una soglia per gli outflow, legata

all'avversione al rischio, oltre la quale il manager replica le variazioni del benchmark in un'ottica di minimizzazione del rischio.

Lo stesso livello di performance può quindi corrispondere a scelte diverse in base alla retribuzione attesa.

Il coefficiente $\frac{A+BG(t)}{B+BG(t)}$

- amplifica il tracking error quando $A > B$, l'aumento è tanto maggiore quanto peggiore è la performance relativa
- riduce il tracking error quando $A < B$, la riduzione è tanto maggiore quanto peggiore è la performance relativa, fino al valore limite $-A/B$

In conclusione, nel caso base il manager non viene influenzato dalla presenza di inflow /outflow e la strategia che adotta rimane costante per tutto il periodo di valutazione. Nel caso esaminato lo standing relativo ed i flussi di capitale che comporta influenzano il manager, il quale quando può contare su un'entrata sicura alla fine del periodo di valutazione sceglie di rischiare di più rispetto al caso base, con un'esposizione al rischio che diverge per performance molto scarse. Se il manager non può fare affidamento su un'entrata fissa ed indipendente dalla performance, in caso di outflow consistenti sceglie di annullare il rischio replicando la strategia del benchmark: il comportamento è ora più conservativo del caso base.

4

UN MODELLO CON MEAN REVERSION

In questo capitolo analizziamo un'estensione significativa del modello visto nel Capitolo 2. Introduciamo infatti, come fatto in [14], che i parametri dell'asset rischioso μ e σ siano processi stocastici legati tra loro tramite il processo di market price of risk, che segue una dinamica mean reverting. Questo porta ad una strategia più elaborata. L'obiettivo principale è analizzare come incide la presenza dei flow fund nelle scelte del manager.

4.1 MARKET PRICE OF RISK

Introduciamo un elemento realistico nel modello economico considerato finora: il processo stocastico che descrive il titolo rischioso S_t non è più a coefficienti costanti, ed è descritto da

$$dS_t = S_t [\mu(t)dt + \sigma(t)dB_t] \quad S_0 > 0$$

dove il tasso $\mu(t)$ e la volatilità $\sigma(t)$ seguono a loro volta dinamiche diffusive. Definiamo

$$X(t) = \frac{\mu(t) - r}{\sigma(t)}$$

come il *market price of risk* (M.P.R), che rappresenta quanto l'asset compensa, in termini di ritorni, il rischio assunto dall'investitore. Assumiamo per X una dinamica di tipo Orstein-Uhlenbeck

$$dX_t = -\lambda(X_t - \bar{x})dt + \sigma_x dB_x \quad (4.1)$$

dove la velocità di ritorno alla media λ , la volatilità σ_x e la media di lungo periodo \bar{x} sono costanti e positive. Il processo B_x è un ulteriore moto Browniano standard, la cui correlazione con B_t è data da

$$dB(t)dB_x(t) = \rho dt$$

Il premio per il rischio $\mu(t) - r$ può assumere valori negativi o nulli, ma tenderà a tornare verso valori positivi: se fosse nullo o negativo per lunghi periodi non vi sarebbe alcun incentivo per l'investitore a detenere il titolo rischioso. Nel caso in cui l'investimento in S venga percepito come troppo rischioso aumenterà la domanda per il bond, e di conseguenza il suo valore, mentre il valore dello stock resterà invariato o diminuirà: questo porta ad una *yield* maggiore per il bond ed un *return* minore per il titolo, e scegliendo l'investimento nel titolo si ha un premio per il rischio negativo perché il ritorno atteso dallo stock è inferiore a quanto ci si aspetta di ottenere dal bond.

Il processo X è l'unica variabile di stato, oltre al processo che descrive il valore del fondo F , che occorre nella descrizione del sistema. Partendo dalla dinamica di F è infatti possibile scrivere

$$\begin{aligned} \frac{dF_t}{F_t} &= [r + (\mu_t - r)y_t] dt + \sigma_t y_t dB_t = r dt + \sigma_t y_t (X_t dt + dB_t) \\ &= r dt + \vartheta_t dR_t \end{aligned} \quad (4.2)$$

con $y_t = \pi_t + \eta(\pi_t - \beta)$, $\vartheta_t = \sigma_t y_t$ e $dR_t = [dS/S - r dt] / \sigma_t$. Dalla definizione del processo R si evince che il M.P.R X riassume tutta l'informazione necessaria per descrivere il problema di investimento.

Le preferenze del manager sono descritte dall'utilità in (2.7) ed il problema di massimizzazione è ancora

$$\max_{\pi_t} \mathbb{E}[u(F_T)] \quad (4.3)$$

4.2 RISOLUZIONE

TEOREMA 9

Dato il problema di controllo ottimo stocastico descritto da (4.1), (4.2) e (4.3), definito $V(t, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[u(F^\pi(T)) | X(t) = x, F(t) = f]$, si ha la value function

$$V(t, X(t), F(t)) = \begin{cases} \Phi(t, X; \alpha) F(t)^\alpha & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \Phi(t, X; \alpha) + \log F(t) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

con

$$\Phi(t, X; \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \exp \{A(t) + B(t)X + C(t)X^2/2\} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ A_0(t) + B_0(t)X + C_0(t)X^2/2 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

La strategia associata è data da

$$y^*(t, X(t); \alpha) = \frac{1}{(1-\alpha)\sigma(t)} \left[X(t) + \rho\sigma_x(B(t) + X(t)C(t)) \right] \quad (4.4)$$

$$y^*(t, X(t); 0) = \frac{X(t)}{\sigma(t)} = \frac{\mu(t) - r}{\sigma^2(t)} \quad (4.5)$$

$$\pi^*(t, X(t); \alpha) = \frac{1}{1+\eta} (y^* + \eta\beta) \quad (4.6)$$

Dimostrazione.

caso $\alpha \neq 0$ Definito $y_t = \pi_t + \eta(\pi_t - \beta)$, $V(t, x, f)$ soddisfa l'equazione HJB

$$V_t + \sup_y [\mu_F V_f + \mu_X V_x + \frac{1}{2} (ff\sigma^2 V_{ff} + \sigma_x^2 V_{xx} + 2\rho f\sigma\sigma_x V_{xf})] = 0$$

$\forall t \in [0, T]$ e $\forall (x, f) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, unita alla condizione finale

$$V(T, x, f) = \frac{1}{\alpha} f^\alpha \quad \forall (x, f) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \quad (4.7)$$

I coefficienti sono dati da

$$\mu_F = f[r + (\mu - r)y] \quad \text{e} \quad \mu_X = -\lambda(x - \bar{x})$$

Il problema di massimizzazione statica fornisce

$$y^*(t, x, f; V) = -\frac{1}{fV_{ff}\sigma} \left[xV_f + \rho\sigma_x V_{xf} \right] \quad (4.8)$$

e possiamo riscrivere l'equazione HJB come

$$V_t + rfV_f - \frac{1}{2}\sigma^2 f^2 y^{*2} V_{ff} - \lambda(x - \bar{x})V_x + \frac{1}{2}\sigma_x^2 V_{xx} = 0 \quad (4.9)$$

Ipotizziamo la guess solution

$$V(t, x, f) = \Phi(t, x) f^\alpha = \frac{1}{\alpha} \exp \{ A(t) + B(t)x + C(t)x^2/2 \} f^\alpha \quad (4.10)$$

che soddisfa la (4.7) se $A(T) = B(T) = C(T) = 0$. Di conseguenza l'investimento ottimo sarà

$$y^*(t, x) = \frac{1}{(1-\alpha)\sigma} \left[x + \rho\sigma_x (B(t) + xC(t)) \right] \quad (4.11)$$

Ulteriori sostituzioni delle equazioni (4.10) e (4.11) nella (4.9) portano

ad un'espressione polinomiale di secondo grado in x ; l'annullamento dei tre coefficienti è equivalente al sistema di equazioni differenziali

$$\dot{C}(t) + cC^2(t) + bC(t) + d = 0 \quad (4.12a)$$

$$\dot{B}(t) + cB(t)C(t) + \frac{b}{2}B(t) + \lambda\bar{x}C(t) = 0 \quad (4.12b)$$

$$\dot{A}(t) + \frac{c}{2}B^2(t) + \frac{\sigma_x^2}{2}C(t) + \lambda\bar{x}B(t) + ra = 0 \quad (4.12c)$$

con i parametri

$$b = 2(\rho\sigma_x d - \lambda) \quad c = \sigma_x^2(1 + d\rho^2) \quad d = a/(1 - a) \quad (4.13)$$

L'equazione di Riccati (4.12a) può essere riscritta come

$$\int \frac{dC}{cC^2 + bC + d} = -t$$

ed il segno del discriminante $b^2 - 4dc$ determina la forma della soluzione. Quando $4\lambda^2 [1 - d(2\rho\sigma_x/\lambda + \sigma_x^2/\lambda^2)] > 0$, denotando come α la radice del discriminante, si ha

$$C(t) = \frac{2d(1 - e^{-(T-t)\alpha/c})}{2\alpha - (b + \alpha)(1 - e^{-(T-t)\alpha/c})} \quad (4.14)$$

Una volta determinata $C(t)$, $B(t)$ è esprimibile come

$$\begin{aligned} \dot{B}(t) + B(t) \left[\frac{cC(t) + b/2}{P(t)} + \frac{\lambda\bar{x}C(t)}{Q(t)} \right] &= 0 \\ B(t) &= e^{-\int P(t)dt} \left(k - \int Q(t)e^{\int P(t)dt} dt \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

dove k è una costante reale fissata imponendo la condizione finale $B(T) = 0$. Analogamente per $A(t)$ si ha

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) + \underbrace{B^2(t)c/2 + C(t)\sigma_x^2/2 + \lambda\bar{x}B(t) + ra}_{U(t)} &= 0 \\ A(t) &= -\int U(t)dt + k \end{aligned} \quad (4.16)$$

caso $a = 0$ Lo svolgimento è analogo al caso precedente. La guess solution $V(t, x, f) = A_0(t) + B_0(t)x + C_0(t)x^2/2 + \log f$ soddisfa la (4.7) se $A_0(T) = B_0(T) = C_0(T) = 0$ e implica la strategia $y^*(x) = x/\sigma$. Sostituendo nella (4.9) arriviamo ancora ad un'espressione polino-

miale di secondo grado in x ; l'annullamento dei tre coefficienti è equivalente al sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\dot{C}(t) - 2\lambda C(t) + 1 &= 0 \\ \dot{B}(t) - \lambda B(t) + \lambda \bar{x} C(t) &= 0 \\ \dot{A}(t) + \lambda \bar{x} B(t) + \sigma_x^2 / 2 C(t) + r &= 0\end{aligned}$$

risolto da

$$\begin{aligned}C(t) &= \frac{1}{2\lambda} \left[1 - e^{-2\lambda(T-t)} \right] \\ B(t) &= \frac{\bar{x}}{2\lambda} \left[1 - e^{-\lambda(T-t)} \right]^2 \\ A(t) &= \left(\frac{\bar{x}^2}{4\lambda} - \frac{\sigma_x^2}{8\lambda^2} \right) \left[1 - e^{-2\lambda(T-t)} \right] - \frac{\bar{x}^2}{\lambda} \left[1 - e^{-\lambda(T-t)} \right] \\ &\quad + \left(r + \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\sigma_x^2}{4\lambda} \right) (T-t)\end{aligned} \quad \square$$

4.3 ANALISI DEI RISULTATI

4.3.1 La funzione valore $V(t, X, F)$

Per analizzare la funzione valore

$$V(t, X, F) = F^\alpha \Phi(t, X) = \frac{F^\alpha}{\alpha} e^{A(t) + B(t)X + C(t)X^2/2}$$

rappresentiamo $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$, ottenute tramite la funzione ode45 di MATLAB, in figura 4.1

Parametri						
σ_x	λ	ρ	\bar{x}	α	r	T
0,5	0,8	0,8	0,6	0,2	0,03	2

Tabella 2: Valori dei parametri per il modello con mean reversion.

La funzione Φ , che incorpora le dipendenze della funzione valore dal tempo e dal M.P.R, è rappresentata in figura 4.2. Per ogni istante temporale esiste un valore del M.P.R che rende minima la Φ , e di conseguenza la funzione valore V

$$\frac{\partial V}{\partial X} \propto \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \Phi(t, X) [B(t) + C(t)X]$$

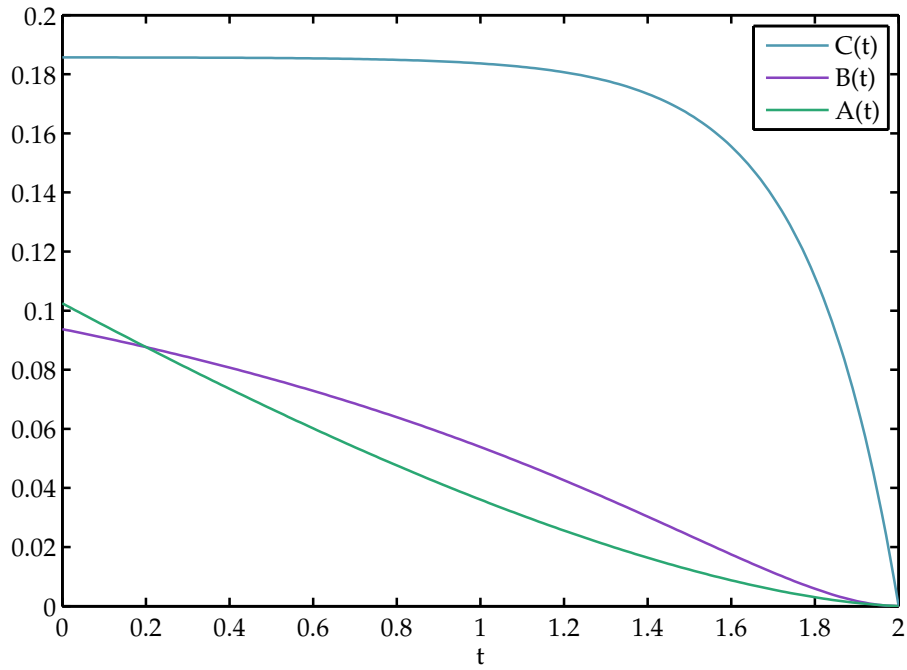


Figura 4.1: Le funzioni $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$, per il set di parametri in tabella 2

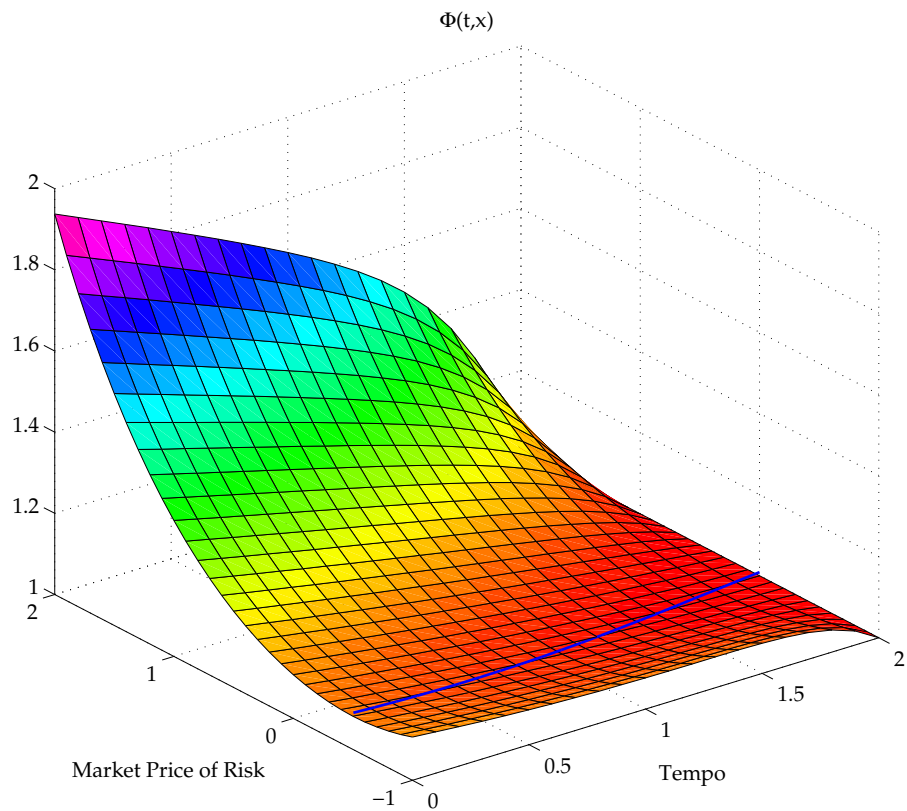


Figura 4.2: La funzione $\Phi(t,X)$ per il set di parametri in tabella 2. La linea blu evidenzia, per ogni tempo, il valore minimo della $\Phi(t,X)$

da cui

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0 \iff X = -\frac{B(t)}{C(t)}$$

Denotiamo come $X^*(t)$ questo particolare valore del M.P.R e osserviamo che $X^*(t) < 0 \forall t$.

- A. se $X(t) > X^*(t)$ vengono preferiti valori maggiori del M.P.R
- B. se $X(t) < X^*(t)$ vengono preferiti valori minori del M.P.R poiché aumentano la distanza dallo zero (valore che verrà raggiunto in ogni caso a causa della mean reversion)

È intuitivo che il manager preferisca premi per il rischio sempre maggiore quando il M.P.R è positivo, in quanto rendono possibili guadagni (e quindi funzioni valore) maggiori. La presenza di mean reversion verso un valore positivo rende attrattivi valori maggiore anche per M.P.R (non troppo) negativi, mentre superata la soglia $X^*(t)$ la funzione valore è decrescente rispetto al M.P.R. Poiché il manager può vendere allo scoperto il titolo, è più importante il valore assoluto del M.P.R che il suo segno, e con valori più estremi è meno probabile tornare velocemente verso lo zero.

Come appare in figura 4.2, la funzione valore è decrescente nel tempo: ciò riflette il fatto che all'avvicinarsi della data T di valutazione degli obiettivi raggiunti il manager ha sempre meno possibilità di modificare la posizione in cui si trova.

4.3.2 Confronto tra le strategie

Nel modello a coefficienti costanti del capitolo 2 si ha

$$\pi_1^* = \frac{1}{1+\eta} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{\mu-r}{\sigma^2} + \eta\beta \right] \quad (4.17)$$

Se $\rho = 0$ la dinamica del M.P.R non è correlata con quella del titolo in cui è possibile investire; in questa situazione il manager può solo prendere atto del fatto che il return atteso e la volatilità del titolo non siano più costanti, e la struttura della strategia ottima è invariata rispetto alla (4.17). Si ha lo stesso effetto quando $\alpha = 0$ (utilità logaritmica) e quando $\sigma_x = 0$. In quest'ultimo caso $\mu(t)$ e $\sigma(t)$ non sono processi stocastici ma funzioni deterministiche del tempo. Esiste inol-

tre un valore del M.P.R, dipendente dal tempo, che produce lo stesso effetto:

$$X(t) = X^*(t) < 0 \implies \pi^*(t) = \frac{1}{1+\eta} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{\mu(t)-r}{\sigma^2(t)} + \eta\beta \right] \quad (4.18)$$

Poiché sono più naturali premi per il rischio positivi, caratteristica di cui si tiene conto nella scelta di un valore positivo per la media di lungo periodo \bar{x} , è molto probabile che la strategia implementata sia diversa dalla (4.18): l'investimento nel titolo rischioso potrà essere maggiore o minore rispetto a questa, e la correlazione ρ è il parametro che influenza la direzione della deviazione.

$$\Delta\pi = \frac{\rho\sigma_x [X(t)C(t) + B(t)]}{\sigma(t)(1+\eta)(1-\alpha)} \quad (4.19)$$

Il segno di $\Delta\pi$ dipende dalla correlazione ρ e dal valore del market price of risk $X(t)$.

Il manager investe maggiormente nel titolo rischioso, cioè $\Delta\pi > 0$, per sfruttare gli effetti dovuti alla correlazione tra il titolo ed il premio per il rischio. Considerando la direzione della $X(t)$ che rende la value function maggiore, se questa direzione corrisponde a un valore maggiore del titolo rischioso allora il manager investirà maggiormente in esso altrimenti attuerà la strategia opposta.

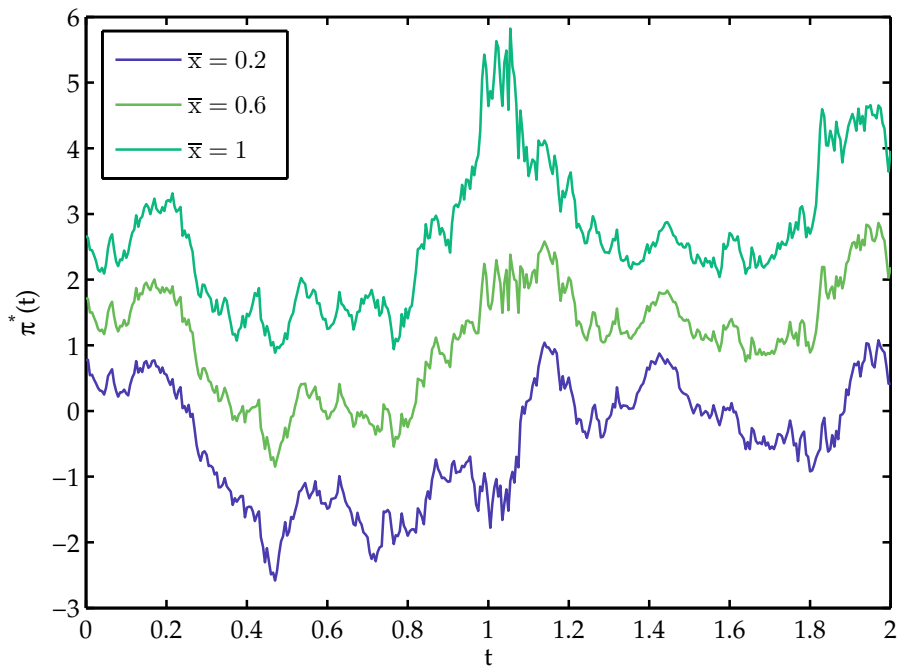
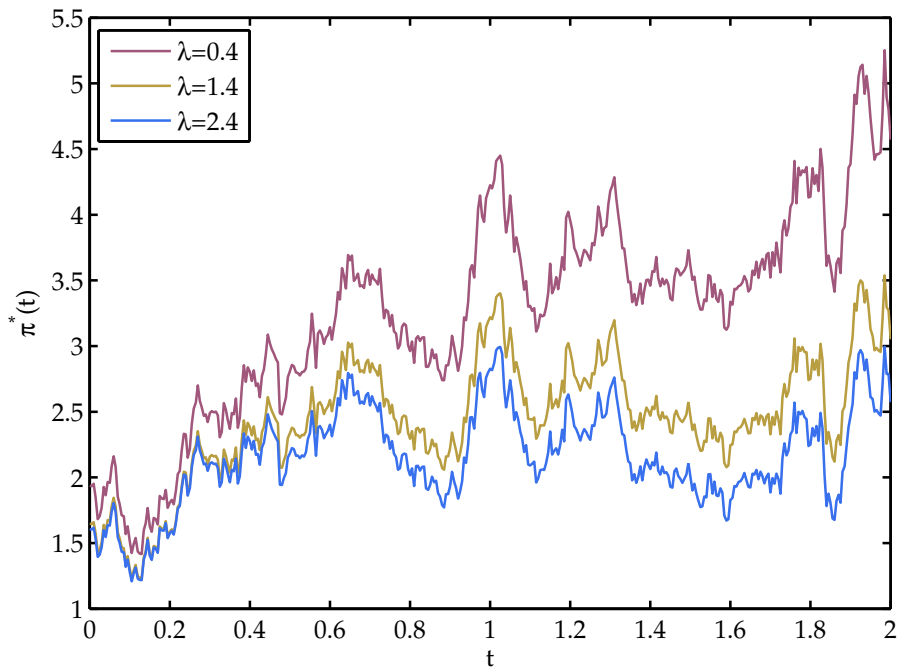
Quando $\rho > 0$ e $X(t) > X^*(t)$ la funzione valore è crescente con il premio per il rischio e la correlazione positiva associa a $X(t)$ maggiori valori del titolo $S(t)$ maggiori: la strategia che massimizza il compenso atteso prevede quindi un investimento più alto nel titolo rischioso. Nel caso $\rho > 0$ e $X(t) < X^*(t)$ l'effetto è opposto in quanto i premi per il rischio "desiderati" sono correlati ad un valore minore del titolo. I casi restanti sono analoghi a quelli esaminati.

In generale il manager ricerca la "somma" dei due effetti positivi:

- Premi per il rischio $X(t)$ favorevoli
- Valori del titolo rischioso elevati

4.3.3 *Statica comparata*

Ora analizziamo la soluzione trovata al variare dei parametri che descrivono il fenomeno del market price of risk all'interno del modello. Per fare questo simuliamo l'andamento del processo $X(t)$ ottenendo così la soluzione ottima π^* al variare del tempo.

Figura 4.3: La strategia su \bar{x} Figura 4.4: La strategia su λ

In Figura 4.3 è simulato l'andamento della strategia ottima per diversi valori della media di lungo periodo \bar{x} . Come ci aspettiamo ad \bar{x} crescenti corrisponde un investimento maggiore nel titolo rischioso perché il market price of risk sarà mediamente più alto e di conseguenza il titolo sarà più vantaggioso rispetto al risk free asset.

In Figura 4.4 e 4.5 vediamo come ad $X(t)$ poco variabili corrispondono investimenti minori nel titolo $S(t)$, inoltre si avrà anche minore variabilità temporale della strategia ottima. La variabilità di $X(t)$, sebbene costituisca una fonte di incertezza (quindi di rischio), ha un effetto complessivo positivo in quanto sono raggiungibili valori di M.P.R che rendono il titolo molto vantaggioso per il manager. Un aumento della velocità di ritorno alla media λ ha lo stesso effetto di una riduzione della volatilità σ_x , ovvero una concentrazione del market price of risk intorno alla media di lungo periodo \bar{x} .

Per concludere notiamo che la strategia ottima π^* risulta crescente con il parametro ρ questo effetto, come detto in precedenza, dipende dal posizionamento del M.P.R ma per valori positivi di $X(t)$ si nota che il $\Delta\pi$ cresce con il valore di correlazione.

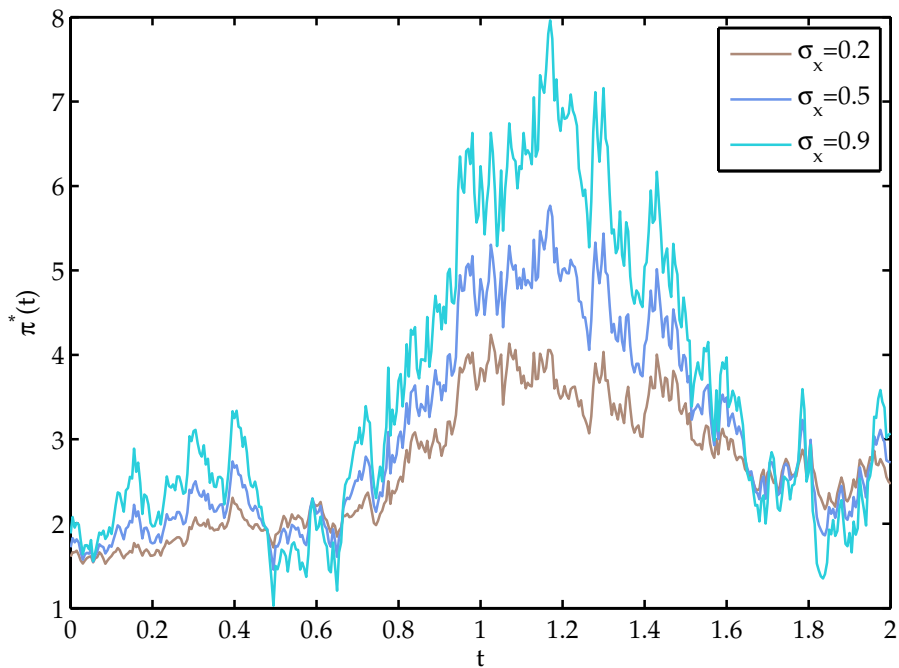


Figura 4.5: La strategia su σ_x

Come nel modello a coefficienti costanti la presenza di flow fund influenza la strategia ottima π_t^* . Il manager investe nel titolo una proporzione intermedia tra

- $y^*(t)$, la “normal strategy” di questo modello, ovvero la strate-

gia ottima in assenza di flow fund

- β , l'esposizione scelta dal benchmark

Il peso che hanno i flow fund nella dinamica del fondo determina in che percentuale viene replicata la strategia del benchmark. Inoltre come visto in precedenza il manager tende a replicare perfettamente il benchmark quando i flow fund diventano determinanti per la dinamica del valore del fondo infatti

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \pi^* = \beta$$

In conclusione, l'effetto principale dei flow fund è quello di ridurre la dipendenza della strategia dalla variabile di stato del mercato (il market price of risk) in favore dell'avvicinamento alla benchmark strategy. Poiché quest'ultima è costante , si ha come effetto secondario una minore variabilità della strategia ottima nel tempo.

5

CONCLUSIONI

Nei capitoli precedenti abbiamo descritto il problema di allocazione ottima che il manager affronta per determinare la strategia che massimizza la sua utilità attesa. Sono stati considerati diversi setting per il mercato in cui opera e due principali tipologie di remunerazione, una legata al valore degli asset gestiti ed una legata alla performance e ai flussi di capitale in entrata/uscita dal fondo.

Per la maggior parte della nostra analisi abbiamo adottato il setting più semplice possibile, un'economia di tipo Black and Scholes con una singola fonte di rischio, in quanto offre maggiore trattabilità analitica. I risultati ottenuti nei casi di incompletezza del mercato e coefficienti stocastici sono in linea con quelli ottenuti con mercati completi e coefficienti costanti. L'afflusso di nuovi capitali (ed il ritiro di quelli già presenti) avviene in maniera continua in base al confronto con il benchmark.

Se la relazione performance-flowfund è lineare e la funzione obiettivo del manager dipende dal valore complessivo degli asset sotto gestione, la strategia ottima si colloca tra la normal strategy (strategia ottenuta risolvendo il problema in assenza di flowfund) e la benchmark strategy, e maggiore è il peso dei flowfund nel determinare il valore del fondo, più vicina sarà la strategia ottima a quella del benchmark. Basandoci sul tracking error come misura di rischio, il risultato ottenuto indica una posizione conservativa.

La strategia si fa più rischiosa quando la relazione performance-flowfund ipotizzata è esponenziale ed il manager è interessato a massimizzare gli inflow ricevuti, o equivalentemente la performance relativa: per battere un benchmark poco aggressivo il manager aumenta l'esposizione sul titolo rischioso, e la riduce nel caso opposto. Strategie d'investimento anche molto diverse vanno considerate ugualmente rischiose in quanto presentano lo stesso tracking error. Inoltre maggiore è l'asimmetria tra inflow ed outflow più disposto sarà il

manager a rischiare, in quanto i possibili guadagni sono molto più consistenti delle eventuali perdite.

Se introduciamo una componente di rischio aggiuntiva nella dinamica del benchmark (ora non perfettamente replicabile) la reazione del manager dipende dal segno della correlazione con il titolo rischioso: quando questa è negativa il manager percepisce il benchmark come più stabile e meno rischioso ed è portato ad investire di più, in assoluto e rispetto al caso precedente.

Lo schema retributivo prevede una parte fissa A ed una legata al tasso di inflow, B . Se $A > B$ il compenso è positivo anche nel peggior caso di underperformance e il deterioramento della performance va di pari passo con l'aumento del tracking error e della rischiosità della strategia. Questo non accade quando $A < B$, caso in cui esiste un limite inferiore della performance in corrispondenza del quale il manager replica il benchmark.

Abbiamo infine considerato due casi in cui la relazione tra performance e compenso presenta una forte non linearità, in quanto il manager percepisce la performance fee solo se è in grado di attrarre nuovi capitali da gestire. La non concavità del payoff implica l'aumento del tracking error in caso di underperformance, mentre la strategia si allinea a quella trovata nel caso senza cambi di concavità (caso base) se la performance del fondo è molto maggiore di quella del benchmark. Se la retribuzione ottenibile è limitata superiormente il focus del manager è raggiungere il livello di performance oltre il quale ulteriori aumenti non si riflettono in un compenso (e quindi un'utilità) maggiore. La strategia è più conservativa rispetto al caso precedente e la rischiosità diminuisce all'aumento della performance. In entrambi i casi esistono livelli di performance che comportano strategie meno rischiose di quelle ottenute nel caso base: un compenso di tipo opzione non incentiva inevitabilmente il manager a rischiare.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Suleyman BASAK, Anna PAVLOVA, Alexander SHAPIRO. *Optimal Asset Allocation and Risk Shifting in Money Management*. The Review of Financial Studies, 2007.
- [2] James E. HODDER, Jens C. JACKWERTH. *Incentive Contracts and Hedge Fund Management*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2007.
- [3] Andrew J.G. CAIRNS, David BLAKE, Kevin DOWD. *Stochastic Life-styling: Optimal Dynamic Asset Allocation for Defined Contribution Pension Plans*. Journal of Economic Dynamics and Control, 2006.
- [4] Jennifer CARPENTER. *Does Option Compensation Increase Managerial Risk Appetite?*. The Journal of Finance, 2000.
- [5] Hsiu-lang CHEN, George G. PENNACCHI. *Does Prior Performance Affect a Mutual Fund's Choice of Risk? Theory and Further Empirical Evidence*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2009.
- [6] Adam V. REED, Ling WU. *Racing the Clock: Benchmarking or Tournaments in Mutual Fund Risk-Shifting?*. Working paper, 2005.
- [7] Jennifer HUANG, Clemens SIALM, Hanjiang ZHANG. *Risk Shifting and Mutual Fund Performance*. The Review of Financial Studies, 2007.
- [8] Jeffrey A. BUSSE. *Another Look at Mutual Fund Tournaments*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2001.
- [9] Keith C. BROWN, Van HARLOW, Laura T. STARKS. *Of tournaments and temptations: An analysis of managerial incentives in the mutual fund industry*. The Journal of Finance, 1996.
- [10] Erik R. SIRRI, Peter TUFANO. *Costly search and mutual fund flows*. The Journal of Finance, 1998.
- [11] Judith CHEVALIER, Glenn ELLISON. *Career concerns of mutual fund managers*. The Quarterly Journal of Economics, 1999.
- [12] Robert C. MERTON. *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model*. Journal of Economic Theory, 1971.

- [13] Ioannis KARATZAS, Steven E. SHREVE. *Methods of Mathematical Finance*. Springer, 1998.
- [14] Tong S. KIM and Edward OMBERG. *Dynamic nonmyopic portfolio behavior*. The Review of Financial Studies, 1996.