



POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

**Corso di Laurea Magistrale
in Ingegneria Aeronautica**

**Formulazione semplificata per il controllo
e la stabilità statica longitudinali
applicata al velivolo MB-339CD**

Relatore: Prof. Lorenzo Trainelli

Tesi di Laurea di:
Cosimo Quintano
matr. 734017

Anno accademico 2013-2014

Alla mia famiglia

Ringrazio il Prof. Lorenzo Trainelli che con grande disponibilità mi ha seguito nella realizzazione di questo lavoro.

Un ringraziamento particolare va a mia moglie Chiara che mi ha sempre aiutato a conciliare gli impegni familiari, di studio e di lavoro.

Sommario

Una teoria semplificata per il controllo e la stabilità statica longitudinali, è stata applicata al database aerodinamico del velivolo Aermacchi MB-339CD. In accordo con questa teoria, valida sotto le ipotesi di aerodinamica lineare e volo subsonico simmetrico stazionario, la distribuzione delle forze aerodinamiche viene rappresentata attraverso due sole forze, agenti in due punti caratteristici, il punto neutro ed il punto di controllo. Sono stati trattati i seguenti casi: volo rettilineo uniforme a comandi bloccati e a comandi liberi, volo in manovra simmetrica stazionaria e volo rettilineo in condizioni terminali. I risultati della teoria semplificata sono stati inoltre confrontati con quelli ottenuti dall'applicazione di una recente teoria sugli effetti delle non linearità sul centro aerodinamico in regime subsonico, in base alla quale il punto neutro non è un punto fisso sull'asse longitudinale, ma giace su una retta chiamata asse neutro.

Parole chiave: controllo longitudinale, stabilità statica longitudinale, punto neutro, punto di controllo, asse neutro, Aermacchi MB-339CD.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Inquadramento e motivazione	1
1.2	Struttura del lavoro	2
2	Equilibrio e stabilità statica longitudinali in volo rettilineo uniforme	5
2.1	Formulazione classica	5
2.1.1	Portanza e momento di beccheggio a comandi bloccati	5
2.1.2	Stabilità statica e concetto di punto neutro	10
2.1.3	Momento di cerniera e trattazione a comandi liberi	11
2.2	Formulazione estesa di Phillips, Alley e Niewoehner	13
2.3	Formulazione semplificata a comandi bloccati	18
2.3.1	Equazioni costitutive	18
2.3.2	Punti caratteristici	19
2.3.3	Approssimazioni	22
2.3.4	Schema semplificato delle forze	24
2.3.5	Trim	24
2.4	Formulazione semplificata a comandi liberi	26
2.4.1	Momento di cerniera dell'equilibratore	26
2.4.2	Punti caratteristici	28
2.4.3	Schema semplificato delle forze	29
2.4.4	Trim	30
2.4.5	Confronto tra formulazione a comandi bloccati e a comandi liberi	31
2.5	Schema a due superfici	32
3	Equilibrio e stabilità statica longitudinali in manovra simmetrica	35
3.1	Formulazione classica	35
3.2	Formulazione semplificata	38
3.2.1	Equazioni costitutive e punto d'incidenza equivalente	38
3.2.2	Punto di manovra	41

3.2.3	Schema semplificato delle forze	42
3.2.4	Trim	43
4	Applicazione al database aerodinamico MB-339CD	45
4.1	Descrizione del velivolo	45
4.2	Descrizione del database aerodinamico	47
4.2.1	Formule generali	48
4.2.2	Correzione per l'ipersostentazione e l'effetto suolo	49
4.3	Elaborazione dei dati.	49
4.3.1	Volo rettilineo uniforme - Comandi bloccati	50
4.3.2	Volo rettilineo uniforme - Comandi liberi	63
4.3.3	Manovra simmetrica	64
4.3.4	Volo rettilineo in condizioni terminali	75
4.4	Discussione dei risultati	79
5	Conclusioni	83
	Bibliografia	85
	Appendice A Sistemi di riferimento e cinematica del velivolo	87
A.1	Sistemi di riferimento	87
A.1.1	Riferimento orizzonte locale	87
A.1.2	Riferimento solidale	87
A.1.3	Riferimento aerodinamico	88
A.2	Cinematica del velivolo	88
A.2.1	Velivolo rigido	88
A.2.2	Atto di moto rigido	88
A.2.3	Componenti della velocità	89
A.2.4	Componenti della velocità angolare	89
A.2.5	Angoli aerodinamici	89
A.2.6	Angoli di traiettoria	90
A.2.7	Angoli di Eulero	90
	Appendice B Equazioni del moto	93
B.1	Forze agenti sul velivolo	93
B.2	Equazioni del volo rettilineo	94
B.2.1	Equazioni del volo rettilineo stazionario	95
B.3	Manovre notevoli	95
B.3.1	Fattore di carico	95
B.3.2	Virata corretta	96
B.3.3	Richiamata e affondata	98

Elenco delle figure

2.1	Teoria classica. Forze agenti sull'ala.	6
2.2	Teoria classica. Forze agenti sulla coda.	7
2.3	Schema semplificato delle forze in volo livellato a comandi bloccati.	25
2.4	Schema tradizionale delle forze in volo livellato nel modello a due superfici.	34
3.1	Schema semplificato delle forze in manovra.	44
4.1	Tre viste del velivolo MB-339CD.	46
4.2	Errore di approssimazione per C_L , $M=0.2$	51
4.3	Errore di approssimazione per C_m , $M=0.2$	51
4.4	Errore di approssimazione per C_D , $M=0.2$	52
4.5	Errore di approssimazione per C_L , $M=0.5$	52
4.6	Errore di approssimazione per C_m , $M=0.5$	53
4.7	Errore di approssimazione per C_D , $M=0.5$	53
4.8	Punto neutro adimensionale a $M = 0.2$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$, determinato mediante approssimazione cubica dei coefficienti aerodinamici.	55
4.9	Punto neutro adimensionale a $M = 0.5$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$, determinato mediante approssimazione cubica dei coefficienti aerodinamici.	56
4.10	Teoria semplificata. Punto neutro adimensionale determinato mediante approssimazione cubica e lineare dei coefficienti aerodinamici, a $M = 0.2$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$	56
4.11	Teoria semplificata. Punto neutro adimensionale determinato mediante approssimazione cubica e lineare dei coefficienti aerodinamici, a $M = 0.5$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$	57
4.12	Teoria semplificata. Errore dovuto all'approssimazione lineare rispetto a quella cubica nella determinazione del punto neutro a $M = 0.2$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$	57

4.13	Teoria semplificata. Errore dovuto all'approssimazione lineare rispetto a quella cubica nella determinazione del punto neutro a $M = 0.5$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$	58
4.14	Asse neutro e coordinate del centro aerodinamico del velivolo secondo la teoria di Phillips, Alley e Niewoehner, $M=0.2$	59
4.15	Asse neutro e coordinate del centro aerodinamico del velivolo secondo la teoria di Phillips, Alley e Niewoehner, $M=0.5$	60
4.16	Punto neutro secondo la teoria semplificata e la teoria estesa, $M=0.2$	60
4.17	Punto neutro secondo la teoria semplificata e la teoria estesa, $M=0.5$	61
4.18	Distanza tra i punti neutri ricavati secondo la teoria semplificata e la teoria estesa, $M=0.2$	61
4.19	Distanza tra i punti neutri ricavati secondo la teoria semplificata e la teoria estesa, $M=0.5$	62
4.20	Punto di controllo adimensionale, $M=0.2$	62
4.21	Punto di controllo adimensionale, $M=0.5$	63
4.22	Punto neutro a comandi liberi e a comandi bloccati a $M = 0.2$	65
4.23	Punto neutro a comandi liberi e a comandi bloccati a $M = 0.5$	65
4.24	Punto neutro adimensionale a comandi liberi a $M = 0.2$ e $M = 0.5$	66
4.25	Punto di incidenza equivalente adimensionale a $M = 0.2$ e $M = 0.5$, nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$ con approssimazione lineare di $C_{L/\alpha}$ e $C_{L/\dot{q}}$	67
4.26	Punto di manovra adimensionale in virata corretta, con $\Phi = 15^\circ$, $z = 0$, $W = 3850 \text{ kg}_f$	69
4.27	Punto di manovra in virata corretta al variare dell' <i>angolo di bank</i> Φ	70
4.28	Punto di manovra in virata corretta con $\Phi = 15^\circ$ al variare della quota z	70
4.29	Punto di controllo adimensionale in virata corretta, $M = 0.2$	71
4.30	Punto di controllo adimensionale in virata corretta, $M = 0.5$	71
4.31	Punto di manovra adimensionale in richiamata a quota zero.	73
4.32	Punto di manovra in richiamata al variare della quota z	73
4.33	Punto di controllo adimensionale in richiamata, $M = 0.2$	74
4.34	Punto di controllo adimensionale in richiamata, $M = 0.5$	74
4.35	Punto neutro adimensionale in configurazione <i>take off</i> , carrello retratto ed in assenza di effetto suolo, $M = 0.2$	76
4.36	Punto neutro adimensionale in configurazione <i>landing</i> , carrello retratto ed in assenza di effetto suolo, $M = 0.2$	77

4.37	Punto neutro adimensionale in configurazione <i>take off</i> , carrello retratto ed in condizioni di effetto suolo, $M = 0.2$	77
4.38	Punto neutro adimensionale in configurazione <i>landing</i> , carrello retratto ed in condizioni di effetto suolo, $M = 0.2$	78
4.39	Punto neutro adimensionale in configurazione <i>take off</i> , carrello esteso ed in condizioni di effetto suolo, $M = 0.2$	78
4.40	Punto neutro adimensionale in configurazione <i>landing</i> , carrello esteso ed in condizioni di effetto suolo, $M = 0.2$	79

Elenco delle tabelle

4.1	Caratteristiche tecniche del velivolo MB-339CD.	45
4.2	Valori di $\max(\epsilon_{int})$ al variare del tipo di approssimazione, M=0.2.	54
4.3	Valori di $\max(\epsilon_{int})$ al variare del tipo di approssimazione, M=0.5.	54
4.4	Valori medi del <i>free elevator factor</i>	64
4.5	Punto neutro adimensionale ($\xi_{\bar{N}} - \xi_G$) in volo rettilineo uniforme.	80
4.6	Valori medi del punto neutro adimensionale in manovra ($\xi_{\bar{M}} - \xi_{\bar{N}}$) a quota zero.	80
4.7	Punto neutro adimensionale ($\xi_{\bar{N}} - \xi_G$) in configurazioni con flap estesi con e senza effetto suolo, $M = 0.2$	81

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Inquadramento e motivazione

Questa tesi nasce principalmente con l'intento di verificare la validità di una teoria semplificata, concepita dal Prof. Marco Borri, docente di Meccanica del Volo presso il Politecnico di Milano, e proposta in diversi lavori [1, 2, 3], relativa all'equilibrio, la stabilità ed il controllo del velivolo, mediante l'applicazione allo studio dell'equilibrio e della stabilità statica di un velivolo ispirati all'addestratore MB-339CD.

Tradizionalmente, nei corsi di Meccanica del Volo vengono trattati in sequenza i seguenti argomenti: trim e stabilità dell'ala isolata, la necessità del piano orizzontale per il controllo longitudinale, gli effetti dovuti alla fusoliera, la costruzione delle formule di portanza e momento di beccheggio come somma dei contributi di ala-fusoliera e del piano orizzontale e, infine, il controllo longitudinale. In tale contesto, le equazioni cui si perviene, benché matematicamente semplici, contengono un numero elevato di termini, molti dei quali dipendono dall'architettura del velivolo.

La teoria semplificata, valida sotto le ipotesi di aerodinamica lineare e volo simmetrico stazionario, non nasce al fine di sostituire quella classica, ma per fornire uno schema semplificato delle forze agenti sul velivolo, indipendente da una particolare architettura o configurazione e basato sull'introduzione di un punto notevole, detto *punto di controllo*, che risulta duale al ben noto punto neutro, ossia il centro aerodinamico del velivolo.

L'applicazione della teoria semplificata ha permesso l'analisi del posizionamento dei punti neutro e di controllo, in volo rettilineo ed in manovra simmetrica, a diversi valori del numero di Mach e per diverse configurazioni del velivolo. In questo modo, si è potuto osservare la buona approssimazione dell'ipotesi di 'solidarietà' di questi punti, ossia della costanza della loro posizione in assi corpo, a valori fissati di angolo d'incidenza e numero di

Mach, nonché la variazione in funzione della configurazione del velivolo (flap, carrello) e dell'effetto suolo.

1.2 Struttura del lavoro

Il capitolo 2 é interamente dedicato alla condizione di volo rettilineo uniforme. Dapprima viene illustrata la teoria classica del controllo e della stabilit  statica longitudinali a comandi bloccati, secondo lo schema che tradizionalmente viene seguito nei corsi di Meccanica del Volo, e che vede la trattazione di portanza e momento di beccheggio dell'ala isolata, contributi di fusoliera e gondole motore, contributo della coda, controllo longitudinale, criterio di stabilit  statica longitudinale (si veda, ad esempio, la discussione in [4, 5, 6]). Si passa poi all'analisi del momento di cerniera e alla formulazione a comandi liberi. Prima della formulazione semplificata, viene presentata una recente teoria sviluppata da Phillips, Alley e Niewoehner [7], secondo la quale le non linearit  aerodinamiche in campo subsonico sono responsabili degli spostamenti del punto neutro. In accordo con questa teoria, il punto neutro giace su una retta, chiamata *asse neutro*, che forma con l'asse di rollio un angolo che varia con l'incidenza. Si passa poi alla teoria semplificata relativa al volo rettilineo uniforme, sia a comandi liberi, sia a comandi bloccati. In entrambi i casi la rappresentazione della distribuzione delle forze aerodinamiche si riduce a due sole forze applicate in due punti caratteristici, il punto neutro ed il punto di controllo [1, 2, 3].

Il capitolo 3 é relativo alla manovra simmetrica stazionaria. Seguendo lo stesso approccio del capitolo precedente, vengono trattate parallelamente la teoria classica e quella semplificata. Nell'ambito di quest'ultima teoria, grazie all'introduzione del *punto di incidenza equivalente*, definito come il punto dell'asse di rollio in cui misurare l'incidenza affin  la portanza non dipenda dalla velocit  angolare di beccheggio q , la rappresentazione delle forze aerodinamiche, analogamente al volo rettilineo uniforme, si basa su due sole forze, applicate in altri due punti caratteristici, il punto neutro in manovra, o punto di manovra, e il punto di controllo in manovra [1, 2, 3].

Il capitolo 4 é dedicato all'applicazione della teoria semplificata al database aerodinamico ed alla discussione dei risultati. Dopo una breve descrizione del velivolo, vengono illustrati i modelli matematici dei coefficienti aerodinamici e del coefficiente momento di cerniera dell'equilibratore. Oltre le formule generali, sono riportate le correzioni da apportare nei casi di configurazioni con flap estesi e condizioni di effetto suolo. Poich  il database contiene tutti i dati richiesti dai modelli matematici, ma non possono essere direttamente applicati nelle formule previste dalla teoria, sono state ricavate nuove relazioni che potremmo definire operative, poich  permettono un diretto utilizzo dei

dati a disposizione. Relativamente al volo rettilineo uniforme, sia a comandi liberi che a comandi comandi bloccati, sono state determinate le posizioni del punto neutro e del punto di controllo. Nel caso a comandi bloccati, il centro aerodinamico del velivolo é stato determinato sia secondo la teoria semplificata che secondo la teoria estesa di Phillips, Alley e Niewoehner. Nella formulazione a comandi liberi, i punti caratteristici sono stati calcolati solo con riferimento alla teoria semplificata. Si passa poi all'analisi dei dati relativi alla manovra simmetrica stazionaria, in particolare alla determinazione del punto di incidenza equivalente, del punto neutro e del punto di controllo in manovra, nei casi di virata corretta e di richiamata. Infine viene analizzata la stabilit  statica longitudinale in volo rettilineo uniforme in condizioni terminali. Il capitolo si conclude con la discussione dei risultati.

Il capitolo 5, raggiunti gli obiettivi di questo studio, é infine riservato alle conclusioni.

Capitolo 2

Equilibrio e stabilità statica longitudinale in volo rettilineo uniforme

2.1 Formulazione classica

2.1.1 Portanza e momento di beccheggio a comandi bloccati

Ala isolata

Si consideri un'ala di superficie S^w posta a quota z sotto il baricentro del velivolo (figura 2.1). Le forze aerodinamiche possono essere rappresentate come portanza L^w e resistenza D^w agenti sul centro aerodinamico A^w , insieme ad una coppia $M_{A^w}^w$ indipendente dall'angolo di incidenza α_w .

Il momento di beccheggio rispetto al centro di massa sarà:

$$M_G^w = M_{A^w}^w + (L^w \cos \alpha_w + D^w \sin \alpha_w)(h_G - h_{A^w})\bar{c}^w + (L^w \sin \alpha_w - D^w \cos \alpha_w)z \quad (2.1)$$

in cui h_G e h_{A^w} sono le distanze adimensionali del centro di massa e del centro aerodinamico dell'ala dal bordo d'attacco della corda media aerodinamica \bar{c}^w , positive da prua verso poppa.

Se si assume che l'incidenza sia piccola, si possono fare le seguenti approssimazioni:

$$\cos \alpha_w \approx 1, \quad \sin \alpha_w \approx \alpha_w \quad (2.2)$$

e, dividendo la (2.1) per $\frac{1}{2}\rho V^2 S^w \bar{c}^w$, si ottiene la seguente relazione adimensionalizzata:

$$C_{m_G}^w = C_{m_{A^w}}^w + (C_L^w + C_D^w \alpha_w)(h_G - h_{A^w}) + (C_L^w \alpha_w - C_D^w)\zeta \quad (2.3)$$

dove $\zeta = z/\bar{c}^w$.

L'esperienza mostra che spesso l'ultimo termine può essere trascurato, così come $C_D^w \alpha_w$, piccolo rispetto C_L^w [4]. Con queste semplificazioni e,

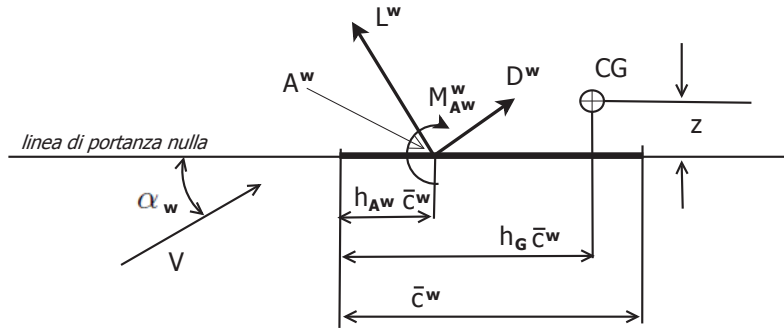


Figura 2.1: Teoria classica. Forze agenti sull'ala.

assumendo che la curva $C_L - \alpha$ sia lineare, si ottiene:

$$\begin{aligned} C_{m_G}^w &= C_{m_{A^w}}^w + C_L^w (h_G - h_{A^w}) \\ &= C_{m_{A^w}}^w + C_{L/\alpha_w}^w \alpha_w (h_G - h_{A^w}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Fusoliera e gondole motore

Analogamente all'ala isolata, le forze aerodinamiche agenti sulla fusoliera possono essere rappresentate come portanza, resistenza e momento rispetto al centro aerodinamico. Inoltre, per piccole incidenze si assume che la portanza vari linearmente con α . Tuttavia, nel momento in cui si considera il *velivolo parziale*, inteso come ala e fusoliera, la semplice sovrapposizione delle forze aerodinamiche agenti su ciascuno di essi porta a risultati errati, poiché il campo di velocità attorno alla fusoliera viene modificato dalla presenza dell'ala e viceversa.

L'aggiunta della fusoliera e delle gondole motore all'ala viene di solito rappresentata come uno spostamento in avanti del centro aerodinamico, un incremento della pendenza della curva di portanza ed un decremento del coefficiente di momento di beccheggio rispetto al centro aerodinamico. Per il *velivolo parziale* vale la seguente relazione, del tutto analoga alla (2.4) ma

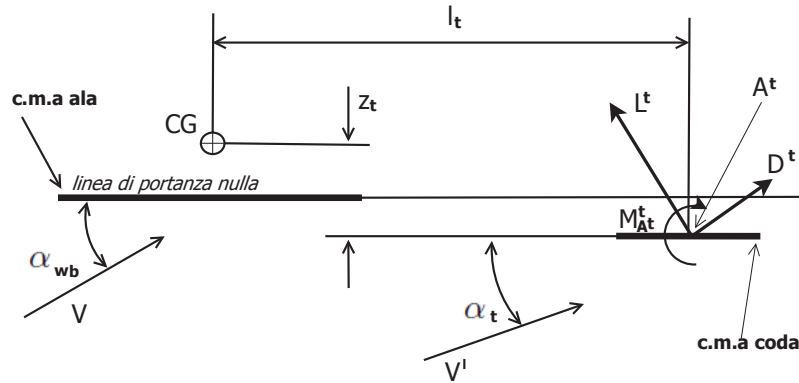


Figura 2.2: Teoria classica. Forze agenti sulla coda.

in cui i parametri hanno un valore differente:

$$\begin{aligned} C_{m_G}^{wb} &= C_{m_{A^{wb}}}^{wb} + C_L^{wb}(h_G - h_{A^{wb}}) \\ &= C_{m_{A^{wb}}}^{wb} + C_{L/\alpha_{wb}}^{wb}\alpha_{wb}(h_G - h_{A^{wb}}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Coda

La rappresentazione delle forze agenti sulla coda isolata é identica a quella vista nel caso dell'ala isolata. Tuttavia, quando si prende in esame la coda come parte del velivolo completo, é necessario considerare che, a causa della presenza dell'ala, il flusso di aria che la investe viene deviato verso il basso e, pertanto, l'incidenza della coda α_t é diversa da quella del velivolo parziale α_{wb} . L'angolo formato tra la direzione del evento relativo visto dall'ala V e quello visto dalla coda V' prende il nome di *downwash* ε .

Il contributo della coda alla portanza del velivolo, che per definizione é perpendicolare al vettore della velocità, é:

$$L^t \cos \varepsilon - D^t \sin \varepsilon \quad (2.6)$$

Poiché ε é sempre matematicamente piccolo ($\sin \varepsilon \approx \varepsilon$), $D^t \varepsilon$ può essere trascurato rispetto L^t . Ne deriva che il contributo della coda alla portanza

del velivolo completo si riduce a L^t . Introduciamo il coefficiente di portanza della coda:

$$C_L^t = \frac{L^t}{\frac{1}{2}\rho V^2 S^t} \quad (2.7)$$

La portanza complessiva del velivolo é:

$$L = L^{wb} + L^t \quad (2.8)$$

ovvero, in termini di coefficienti:

$$C_L = C_L^{wb} + \frac{S^t}{S^{wb}} C_L^t \quad (2.9)$$

Il momento di beccheggio della coda rispetto al centro di massa é:

$$M_G^t = -l_t [L^t \cos(\alpha_{wb} - \varepsilon) + D^t \sin(\alpha_{wb} - \varepsilon)] - z_t [D^t \cos(\alpha_{wb} - \varepsilon) - L^t \sin(\alpha_{wb} - \varepsilon)] + M_{A^t}^t \quad (2.10)$$

dove l_t e z_t sono rispettivamente la distanza del centro aerodinamico della coda dal centro di massa in direzione orizzontale e verticale (figura 2.2).

L'esperienza mostra che il primo termine é preponderante, mentre gli altri sono trascurabili [4], pertanto:

$$M_G^t = -l_t L^t = -l_t \frac{1}{2} \rho V^2 S^t C_L^t \quad (2.11)$$

In termini di coefficienti si ha:

$$C_{m_G}^t = \frac{M_G^t}{\frac{1}{2} \rho V^2 S^{wb} \bar{c}^w} = -V_H C_L^t \quad (2.12)$$

dove:

$$V_H = \frac{l_t}{\bar{c}^w} \frac{S^t}{S^{wb}} \quad (2.13)$$

Poiché il centro di massa non é necessariamente un punto fisso sul velivolo, ne deriva che V_H non é costante al variare delle condizioni di carico. Risulta quindi piú conveniente dapprima calcolare il momento della coda rispetto ad un punto fisso, il centro aerodinamico del velivolo parziale, ed utilizzare questo risultato per ottenere una espressione del momento di beccheggio rispetto al baricentro che dipenda da un termine costante. Definendo il coefficiente volumetrico di coda:

$$\bar{V}_H = \frac{\bar{l}_t}{\bar{c}^w} \frac{S^t}{S^{wb}} \quad (2.14)$$

dove \bar{l}_t é la distanza tra i centri aerodinamici del velivolo parziale e della coda, il momento di beccheggio rispetto al centro aerodinamico del velivolo parziale risulta:

$$\bar{C}_{m_{Awb}}^t = -\bar{V}_H C_L^t \quad (2.15)$$

Poiché vale la seguente relazione:

$$V_H = \bar{V}_H - (h_G - h_{Awb}) \frac{S^t}{S_{wb}} \quad (2.16)$$

il momento di beccheggio della coda rispetto al baricentro sarà:

$$C_{m_G}^t = -\bar{V}_H C_L^t + (h_G - h_{Awb}) \frac{S^t}{S_{wb}} C_L^t \quad (2.17)$$

Sommando la (2.5) con la (2.17) ed utilizzando la (2.9) si ricava la relazione del momento di beccheggio del velivolo completo, nel caso in cui si possa considerare nullo il contributo dovuto al sistema propulsivo:

$$C_{m_G} = C_{m_{Awb}}^{wb} + C_L(h_G - h_{Awb}) - \bar{V}_H C_L^t \quad (2.18)$$

Controllo longitudinale

Si consideri il caso in cui il controllo longitudinale avvenga mediante l'equilibratore e si assuma che le variazioni di portanza e di momento siano lineari rispetto l'angolo δ_e con cui viene ruotato:

$$\begin{aligned} \Delta C_L &= C_{L/\delta_e} \delta_e \\ \Delta C_{m_G} &= C_{m_G/\delta_e} \delta_e \end{aligned} \quad (2.19)$$

La convenzione usuale é di considerare positive le deflessioni verso il basso dell'equilibratore; ciò comporta C_{L/δ_e} positivi e C_{m_G/δ_e} negativi. Portanza e momento si esprimono come:

$$\begin{aligned} C_L(\alpha, \delta_e) &= C_L(\alpha, 0) + C_{L/\delta_e} \delta_e \\ C_{m_G}(\alpha, \delta_e) &= C_{m_G}(\alpha, 0) + C_{m_G/\delta_e} \delta_e \end{aligned} \quad (2.20)$$

in cui $C_L(\alpha, 0)$ e $C_{m_G}(\alpha, 0)$ sono i valori di portanza e momento quando $\delta_e = 0$.

Nel caso di portanza e momento lineari valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L/\alpha} \alpha + C_{L/\delta_e} \delta_e + C_{L_0} \\ C_{m_G} &= C_{m_G/\alpha} \alpha + C_{m_G/\delta_e} \delta_e + C_{m_{G_0}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Trim

La condizione di trim richiede che sia $C_{m_G} = 0$, per cui dalla seconda delle (2.20) si ricava:

$$\delta_{e_{trim}} = -\frac{C_{m_G}(\alpha, 0)}{C_{m_G/\delta_e}} \quad (2.22)$$

In condizioni di trim il coefficiente di portanza é:

$$\begin{aligned} C_{L_{trim}} &= C_L(\alpha, 0) + C_{L/\delta_e} \delta_{e_{trim}} \\ &= C_L(\alpha, 0) - \frac{C_{L/\delta_e}}{C_{m_G/\delta_e}} C_{m_G}(\alpha, 0) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nel caso di portanza e momento lineari il sistema di equazioni per risolvere il problema del trimmaggio é il seguente:

$$\begin{bmatrix} C_{L/\alpha} & C_{L/\delta_e} \\ C_{m_G/\alpha} & C_{m_G/\delta_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{trim} \\ \delta_{e_{trim}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{L_{trim}} \\ -C_{m_{G0}} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} \alpha_{trim} &= \frac{C_{m_{G0}} C_{L/\delta_e} + C_{m_G/\delta_e} C_{L_{trim}}}{C_{L/\alpha} C_{m_G/\delta_e} - C_{L/\delta_e} C_{m_G/\alpha}} \\ \delta_{e_{trim}} &= -\frac{C_{m_{G0}} C_{L/\alpha} + C_{m_G/\alpha} C_{L_{trim}}}{C_{L/\alpha} C_{m_G/\delta_e} - C_{L/\delta_e} C_{m_G/\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.1.2 Stabilità statica e concetto di punto neutro

Si consideri il caso di un velivolo in volo rettilineo uniforme in cui l'equilibratore sia bloccato in una determinata posizione, tale per cui il velivolo sia trimmato, ovvero che siano nulle le risultanti di forze e momenti rispetto al centro di massa.

La configurazione di equilibrio considerata é staticamente stabile se, a seguito di una piccola variazione di incidenza, il velivolo genera un sistema di forze che tendono a farlo tornare nella condizione iniziale. In altre parole, un velivolo é staticamente stabile se, ad una perturbazione dell'incidenza, corrisponde l'insorgere di un momento di beccheggio rispetto al centro di massa di segno opposto:

$$M_{G/\alpha} < 0 \quad (2.26)$$

ovvero, in termini di coefficiente di momento:

$$\boxed{C_{m_G/\alpha} < 0} \quad (2.27)$$

La verifica del soddisfacimento della (2.27), che prende il nome di *criterio di stabilità statica longitudinale a comandi bloccati*, riveste un'importanza fondamentale sin dalle prime fasi del progetto preliminare del velivolo, avendo la stabilità statica longitudinale riflessi rilevanti sia sulle qualità di volo che sulla sicurezza.

In tale contesto, assume un ruolo fondamentale il *punto neutro*, ovvero la posizione del baricentro al quale si verifica $C_{m_G/\alpha} = 0$. In tale condizione si ha stabilità neutra, ovvero a seguito di una perturbazione dell'incidenza, il velivolo non risponde con un momento di beccheggio né a cabrare né a picchiare.

La posizione del punto neutro si ottiene derivando l'equazione (2.18) rispetto all'incidenza:

$$C_{m_G/\alpha} = C_{L/\alpha}(h_G - h_{A^{wb}}) - \bar{V}_H C_{L/\alpha}^t \quad (2.28)$$

in cui è stata applicata la definizione di centro aerodinamico per il quale vale $C_{m_A/\alpha}^{wb} = 0$. La posizione del punto neutro N sarà quindi:

$$h_N = h_{A^{wb}} + \frac{\bar{V}_H C_{L/\alpha}^t}{C_{L/\alpha}} \quad (2.29)$$

Ricavando $h_{A^{wb}}$ dall'ultima equazione e sostituendolo nella (2.28) si ottiene:

$$C_{m_G/\alpha} = C_{L/\alpha}(h_G - h_N). \quad (2.30)$$

Dalla (2.30) risulta che affinché sia soddisfatto il criterio di stabilità statica longitudinale il centro di massa deve trovarsi davanti al punto neutro, ovvero deve essere $h_G - h_N < 0$.¹

2.1.3 Momento di cerniera e trattazione a comandi liberi

Le forze aerodinamiche agenti sulla superficie di controllo producono un momento H_e in corrispondenza della cerniera attorno a cui ruota l'equilibratore. Il coefficiente del momento di cerniera è così definito:

$$C_{h_e} = \frac{H_e}{\frac{1}{2}\rho V^2 S^e \bar{c}^e} \quad (2.31)$$

in cui S^e è la superficie dell'equilibratore, mentre \bar{c}^e è la corda media aerodinamica dell'equilibratore. In molti casi pratici è ingegneristicamente accettabile ipotizzare per il coefficiente di momento di cerniera una legge lineare del tipo:

$$C_{h_e} = C_{h_{e_0}} + C_{h_e/\alpha^t} \alpha_t + C_{h_e/\delta_e} \delta_e + C_{h_e/\delta_t} \delta_t \quad (2.32)$$

¹Si ricorda che h_G e h_N sono le distanze adimensionalizzate di baricentro e punto neutro dal bordo d'attacco della corda media aerodinamica, positive da prua verso poppa.

in cui α_t é l'incidenza vista dalla coda e l'ultimo termine si riferisce al contributo dell'aletta di trim.

Nel caso di volo a comandi liberi, si suppone che il pilota non eserciti alcuna azione sulla barra e che, conseguentemente, l'equilibratore venga lasciato libero di muoversi sotto l'azione delle forze aerodinamiche, nell'ipotesi in cui si possano ritenere trascurabili le forze inerziali associate alla sua massa. Se il velivolo si muove in volo rettilineo uniforme a comandi liberi, l'equilibratore sarà ruotato di un certo angolo a cui corrisponde momento di cerniera nullo. Si parla di stabilità statica longitudinale a comandi liberi se, a seguito di una perturbazione dello stato di equilibrio, il velivolo tende a tornare nelle condizioni iniziali mediante la libera rotazione dell'equilibratore che riporta a zero il valore del momento di cerniera.

Se il controllo viene lasciato libero, il momento di cerniera sarà nullo ($C_{h_e} = 0$) e dalla (2.32) si ricava l'angolo di cui é deflesso l'equilibratore:

$$\delta_{e_{free}} = -\frac{1}{C_{h_e/\delta_e}}(C_{h_{e_0}} + C_{h_e/\alpha_t}\alpha_t + C_{h_e/\delta_t}\delta_t) \quad (2.33)$$

I corrispondenti valori di portanza e momento sono:

$$\begin{aligned} C_{L_{free}} &= C_{L/\alpha}\alpha + C_{L/\delta_e}\delta_{e_{free}} + C_{L_0} \\ C_{m_{G_{free}}} &= C_{m_G/\alpha}\alpha + C_{m_G/\delta_e}\delta_{e_{free}} + C_{m_{G_0}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Sostituendo la (2.33) nelle (2.34) si ha:

$$\begin{aligned} C_{L_{free}} &= C'_{L/\alpha} + C'_{L_0} \\ C_{m_{G_{free}}} &= C'_{m_G/\alpha} + C'_{m_{G_0}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

dove:

$$\begin{aligned} C'_{L_0} &= C_{L_0} - \frac{C_{L/\delta_e}}{C_{h_e/\delta_e}}(C_{h_{e_0}} + C_{h_e/\delta_t}\delta_t) \\ C'_{L/\alpha} &= C_{L/\alpha} - \frac{C_{L/\delta_e}C_{h_e/\alpha_t}}{C_{h_e/\delta_e}} \\ C'_{m_{G_0}} &= C_{m_{G_0}} - \frac{C_{m_G/\delta_e}}{C_{h_e/\delta_e}}(C_{h_{e_0}} + C_{h_e/\delta_t}\delta_t) \\ C'_{m_G/\alpha} &= C_{m_G/\alpha} - \frac{C_{m_G/\delta_e}C_{h_e/\alpha_t}}{C_{h_e/\delta_e}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

La posizione del *punto neutro a comandi liberi* é determinabile mediante la seguente relazione:

$$(h_G - h'_N) = \frac{C'_{m_G/\alpha}}{C'_{L/\alpha}} \quad (2.37)$$

Sia la formulazione a comandi liberi che a comandi bloccati rappresentano due idealizzazioni della realtà, in quanto non esistono equilibratori privi di massa e di attrito né strutture completamente rigide. Ad ogni modo lo studio di queste due condizioni ideali é di grande interesse poiché rappresentano gli estremi di tutte le situazioni reali che si possono presentare.

Analogamente al caso a comandi bloccati, la condizione di stabilità statica longitudinale a comandi liberi richiede che sia:

$$\boxed{C'_{m_G/\alpha} < 0} \quad (2.38)$$

che si traduce nella condizione che la posizione che il centro di massa si trovi davanti al punto neutro a comandi liberi, ovvero che sia soddisfatta la disequazione $h_G - h'_N < 0$.

2.2 Formulazione estesa di Phillips, Alley e Niewoehner

Nel paragrafo precedente é stato introdotto il punto neutro e sono state illustrate le classiche assunzioni per piccole incidenze, ossia la linearità dei coefficienti di portanza e momento di beccheggio, l'approssimazione lineare delle funzioni trigonometriche e l'ipotesi di resistenza trascurabile. Fatte tali assunzioni, tradizionalmente il punto neutro, che può essere considerato il centro aerodinamico del velivolo, viene presentato come un punto fisso sull'asse longitudinale.

In questo paragrafo viene illustrata una recente teoria proposta da Phillips, Alley e Niewoehner [7], secondo la quale le non linearità aerodinamiche, le funzioni trigonometriche e la resistenza possono far variare significativamente la posizione del centro aerodinamico, anche ad angoli di incidenza non molto elevati al di sotto dello stallo.

In accordo con questa formulazione, il centro aerodinamico del velivolo é in generale un punto appartenente ad una retta, inclinata rispetto l'asse longitudinale.

É evidente che al di fuori dell'approssimazione di aerodinamica lineare, non possono esistere punti del velivolo rispetto ai quali il momento di beccheggio é totalmente indipendente dall'incidenza. Quindi, nel caso in cui si prendano in considerazione la resistenza e le non linearità trigonometriche e aerodinamiche, é possibile dare una definizione generalizzata di centro aerodinamico. Esso, in generale, giace nel piano di simmetria del velivolo e deve soddisfare le seguenti condizioni:

1. il momento di beccheggio rispetto al centro aerodinamico deve essere invariante rispetto a piccole variazioni di angoli di incidenza:

$$C_{m_N/\alpha} \equiv 0 \quad (2.39)$$

2. la posizione del centro aerodinamico deve essere invariante rispetto a piccole variazioni di angoli di incidenza:

$$\begin{aligned} x_{N/\alpha} &\equiv 0 \\ y_{N/\alpha} &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si noti che la (2.39) non implica che il momento di beccheggio rispetto al centro aerodinamico sia indipendente dall'angolo di incidenza. Per richiedere che C_{m_N} sia indipendente da α bisognerebbe imporre che non solo la prima, ma anche le derivate di ordine superiore siano uguali a zero. Analogamente, le (2.40) non richiedono che la posizione del centro aerodinamico sia indipendente dall'angolo di incidenza. Benché si stia imponendo che le derivate prime di x_N e y_N rispetto ad α siano uguali a zero, ciò non vuol dire che lo siano anche le derivate di ordine superiore; ne consegue che la posizione del centro aerodinamico può variare con l'incidenza.

Ponendosi in assi corpo, la regola per trasportare il momento di beccheggio da un generico punto P ad un generico punto Q si scrive:

$$M_Q = M_P + (x_Q^b - x_P^b)Z - (z_Q^b - z_P^b)X \quad (2.41)$$

dove X e Z sono due delle tre componenti della forza aerodinamica che, ovviamente, dipendono dall'angolo di incidenza:

$$X = -D \cos \alpha + L \sin \alpha \quad (2.42)$$

$$Z = -D \sin \alpha - L \cos \alpha \quad (2.43)$$

Sostituendo le equazioni (2.42) e (2.43) nella (2.41) si ha:

$$M_Q = M_P + (x_Q^b - x_P^b)(-D \sin \alpha - L \cos \alpha) - (z_Q^b - z_P^b)(-D \cos \alpha + L \sin \alpha) \quad (2.44)$$

che, derivata rispetto ad α , diventa:

$$\begin{aligned} M_{Q/\alpha} &= M_{P/\alpha} + (x_Q^b - x_P^b)(-D_{/\alpha} \sin \alpha - D \cos \alpha - L_{/\alpha} \cos \alpha + L \sin \alpha) \\ &\quad - (z_Q^b - z_P^b)(-D_{/\alpha} \cos \alpha + D \sin \alpha + L_{/\alpha} \sin \alpha + L \cos \alpha) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dividendo la (2.45) per la pressione dinamica q_d , per la superficie alare S^{wb} e per la corda media aerodinamica \bar{c}^w , facendo coincidere il punto P con il

centro di massa G ($P \equiv G$) ed il punto Q con il centro aerodinamico N si trova:

$$\begin{aligned} -C_{m_G/\alpha} &= (\xi_N^* - \xi_G)(-C_{D/\alpha} \sin \alpha - C_D \cos \alpha - C_{L/\alpha} \cos \alpha + C_L \sin \alpha) \\ &\quad - (\eta_N^* - \eta_G)(-C_{D/\alpha} \cos \alpha + C_D \sin \alpha + C_{L/\alpha} \sin \alpha + C_L \cos \alpha) \end{aligned} \quad (2.46)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} C_{m_G/\alpha} &= (\xi_N^* - \xi_G)[(C_{D/\alpha} - C_L) \sin \alpha + (C_D + C_{L/\alpha}) \cos \alpha] \\ &\quad + (\eta_N^* - \eta_G)[(C_D + C_{L/\alpha}) \sin \alpha + (-C_{D/\alpha} + C_L) \cos \alpha] \end{aligned} \quad (2.47)$$

dove con ξ_N^* e η_N^* sono state indicate le coordinate adimensionali del centro aerodinamico determinate secondo la presente formulazione. Si noti che la (2.46), ed equivalentemente la (2.47), rappresenta una retta. Infatti, ponendo:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_N &= (\xi_N^* - \xi_G) \\ \bar{\eta}_N &= (\eta_N^* - \eta_G) \\ r &= C_{m_G/\alpha} \\ s &= (-C_{D/\alpha} \sin \alpha - C_D \cos \alpha - C_{L/\alpha} \cos \alpha + C_L \sin \alpha) \\ t &= (-C_{D/\alpha} \cos \alpha + C_D \sin \alpha + C_{L/\alpha} \sin \alpha + C_L \cos \alpha) \end{aligned} \quad (2.48)$$

si può scrivere:

$$\bar{\eta}_N = \frac{1}{t}(s \bar{\xi}_N + r) \quad (2.49)$$

che é chiaramente una retta con pendenza $m = \frac{s}{t}$, che intercetta l'asse delle ordinate nel punto $d = \frac{r}{t}$. [7] definisce questa retta *asse neutro*, ossia il luogo dei punti rispetto ai quali é nulla la variazione del momento di beccheggio rispetto l'angolo di incidenza, soddisfacendo, quindi, il primo criterio della definizione generalizzata di centro aerodinamico.

La seconda condizione che deve soddisfare il centro aerodinamico é l'invarianza della posizione per piccole variazioni di incidenza. Quindi, derivando ancora una volta rispetto l'incidenza l'equazione dell'asse neutro (2.47) ed applicando le (2.40) si ottiene:

$$\begin{aligned} C_{m_G/\alpha\alpha} &= \bar{\xi}_N(C_{D/\alpha\alpha} \sin \alpha + C_{D/\alpha} \cos \alpha + C_{D/\alpha} \cos \alpha - C_D \sin \alpha + \\ &\quad C_{L/\alpha\alpha} \cos \alpha - C_{L/\alpha} \sin \alpha - C_{L/\alpha} \sin \alpha - C_L \cos \alpha) + \\ &\quad \bar{\eta}_N(-C_{D/\alpha\alpha} \cos \alpha + C_{D/\alpha} \sin \alpha + C_{D/\alpha} \sin \alpha + C_D \cos \alpha + \\ &\quad C_{L/\alpha\alpha} \sin \alpha + C_{L/\alpha} \cos \alpha + C_{L/\alpha} \cos \alpha - C_L \sin \alpha) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Manipolando l'equazione appena scritta, si trova:

$$\begin{aligned} C_{m_G/\alpha\alpha} &= \bar{\xi}_N[(-C_D - 2C_{L/\alpha} + C_{D/\alpha\alpha}) \sin \alpha + (-C_L + 2C_{D/\alpha} + C_{L/\alpha\alpha}) \cos \alpha] + \\ &\quad \bar{\eta}_N[(-C_L + 2C_{D/\alpha} + C_{L/\alpha\alpha}) \sin \alpha + (C_D + 2C_{L/\alpha} - C_{D/\alpha\alpha}) \cos \alpha] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Si noti che anche la (2.51) é l'equazione di una retta.

Poiché il centro aerodinamico deve soddisfare entrambi i criteri espressi dalle (2.39) e (2.40), le sue coordinate si trovano dall'intersezione tra l'asse neutro descritto dall'equazione (2.47) e la retta descritta dall'equazione (2.51). Ponendo:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= (C_{D/\alpha} - C_L) \\ \hat{b} &= (C_D + C_{L/\alpha}) \\ \hat{c} &= (-C_D - 2C_{L/\alpha} + C_{D/\alpha\alpha}) \\ \hat{d} &= (-C_L + 2C_{D/\alpha} + C_{L/\alpha\alpha})\end{aligned}\tag{2.52}$$

la (2.47) e la (2.51) diventano:

$$\begin{aligned}C_{m_G/\alpha} &= \bar{\xi}_N(\hat{a} \sin \alpha + \hat{b} \cos \alpha) + \bar{\eta}_N(\hat{b} \sin \alpha - \hat{a} \cos \alpha) \\ C_{m_G/\alpha\alpha} &= \bar{\xi}_N(\hat{c} \sin \alpha + \hat{d} \cos \alpha) + \bar{\eta}_N(\hat{d} \sin \alpha - \hat{c} \cos \alpha)\end{aligned}\tag{2.53}$$

Ponendo inoltre:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \hat{a} \sin \alpha + \hat{b} \cos \alpha \\ \hat{l} &= \hat{b} \sin \alpha - \hat{a} \cos \alpha \\ \hat{m} &= \hat{c} \sin \alpha + \hat{d} \cos \alpha \\ \hat{n} &= \hat{d} \sin \alpha - \hat{c} \cos \alpha\end{aligned}\tag{2.54}$$

il sistema di due equazioni e due incognite $(\bar{\xi}_N, \bar{\eta}_N)$ si può scrivere nella seguente forma compatta:

$$\begin{aligned}C_{m_G/\alpha} &= \bar{\xi}_N \hat{i} + \bar{\eta}_N \hat{l} \\ C_{m_G/\alpha\alpha} &= \bar{\xi}_N \hat{m} + \bar{\eta}_N \hat{n}\end{aligned}\tag{2.55}$$

In forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{l} \\ \hat{m} & \hat{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_N \\ \bar{\eta}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{m_G/\alpha} \\ C_{m_G/\alpha\alpha} \end{bmatrix}\tag{2.56}$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi}_N \\ \bar{\eta}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{l} \\ \hat{m} & \hat{n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{m_G/\alpha} \\ C_{m_G/\alpha\alpha} \end{bmatrix}\tag{2.57}$$

In [7] vengono proposte le seguenti relazioni² per la determinazione della posizione del centro aerodinamico rispetto ad un riferimento arbitrario (indicato

²Queste relazioni sono state adimensionalizzate rispetto la corda di riferimento e sono state opportunamente ruotate, atteso che in [7] non viene utilizzato un sistema assi corpo, ma l'asse x diretto dalla prua alla coda e l'asse z é diretto dal basso verso l'alto.

con il pedice 0):

$$\begin{aligned}\xi_N^* &= -\frac{C_{A/\alpha}C_{m_0/\alpha\alpha} - C_{m_0/\alpha}C_{A/\alpha\alpha}}{C_{N/\alpha}C_{A/\alpha\alpha} - C_{A/\alpha}C_{N/\alpha\alpha}} \\ \eta_N^* &= -\frac{C_{N/\alpha}C_{m_0/\alpha\alpha} - C_{m_0/\alpha}C_{N/\alpha\alpha}}{C_{N/\alpha}C_{A/\alpha\alpha} - C_{A/\alpha}C_{N/\alpha\alpha}}\end{aligned}\quad (2.58)$$

in cui C_A e C_N sono rispettivamente il coefficiente assiale ed il coefficiente normale:

$$\begin{aligned}C_A &= C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha \\ C_N &= C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha\end{aligned}\quad (2.59)$$

Ovviamente, risolvendo il sistema (2.57) o le (2.58) si perviene ai medesimi risultati.

Utilizzando le classiche approssimazioni di aerodinamica lineare e trascurando la resistenza, le (2.59) si approssimano come:

$$\begin{aligned}C_A &\approx -C_{L/\alpha}(\alpha - \alpha_0)\alpha \\ C_N &\approx C_{L/\alpha}(\alpha - \alpha_0)\end{aligned}\quad (2.60)$$

dove α_0 indica l'angolo di incidenza a cui corrisponde portanza nulla. Derivando rispetto α le relazioni appena scritte si ha:

$$\begin{aligned}C_{A/\alpha} &\approx -C_{L/\alpha}(2\alpha - \alpha_0) \\ C_{N/\alpha} &\approx C_{L/\alpha}\end{aligned}\quad (2.61)$$

Applicando queste approssimazioni alle derivate seconde che compaiono nelle (2.58) si trova:

$$\begin{aligned}C_{A/\alpha\alpha} &\approx -2C_{L/\alpha} \\ C_{N/\alpha\alpha} &\approx 0 \\ C_{m_0/\alpha\alpha} &\approx 0\end{aligned}\quad (2.62)$$

e si ottengono infine i classici risultati approssimati:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_N &\approx \frac{C_{m_0/\alpha}}{C_{L/\alpha}} \\ \bar{\eta}_N &\approx 0\end{aligned}\quad (2.63)$$

2.3 Formulazione semplificata a comandi bloccati

In questo paragrafo viene presentata la formulazione semplificata per lo studio dell'equilibrio, della stabilità e del controllo del velivolo a comandi bloccati [1, 2, 3].

Alla base della teoria semplificata ci sono le seguenti ipotesi: il volo avviene in regime subsonico ad incidenze moderate ed efficienze aerodinamiche medie o elevate e le curve di portanza e di momento sono lineari rispetto agli angoli di incidenza e di deflessione dell'equilibratore. Nel caso di andamenti nonlineari, la teoria si applica nell'intorno di valori di equilibrio per questi angoli.

Nessuna assunzione viene posta sull'architettura del velivolo e della sua velatura, che può quindi essere tradizionale con coda posteriore, *canard*, a tre superfici, *boxwing*, etc.

Sotto tali assunzioni, lo schema delle forze aerodinamiche agenti sul velivolo, sia nel caso a comandi liberi che a comandi bloccati, si riduce a due sole forze, definite *portanza d'incidenza (attitude lift)* e *portanza di controllo (control lift)*, applicate rispettivamente nel *punto neutro* e nel *punto di controllo*.

2.3.1 Equazioni costitutive

Equazioni costitutive in forma non omogenea

In condizioni di volo rettilineo uniforme, consideriamo le seguenti equazioni costitutive per le risultanti di portanza L e momento di beccheggio M_P :

$$\begin{aligned} L &= L(\alpha, \delta) \\ M_P &= M_P(\alpha, \delta) \end{aligned} \tag{2.64}$$

in cui α é l'angolo di incidenza e δ é la deflessione del controllo longitudinale, che supponiamo essere l'equilibratore, tenuto conto che ciò non limita la generalità della trattazione, atteso che il modello di aeroplano é completamente arbitrario e che i risultati cui si perviene non dipendono da un particolare tipo di controllo longitudinale (equilibratore, stabilizzatore, elevone, etc.). Pertanto, da qui in avanti, per la deflessione dell'equilibratore si utilizzerá la notazione δ . Sotto le ipotesi di α e δ piccoli³, si possono scrivere le seguenti relazioni lineari:

$$\boxed{\begin{aligned} L &= L_{/\alpha}\alpha + L_{/\delta}\delta + L_0 \\ M_P &= M_{P/\alpha}\alpha + M_{P/\delta}\delta + M_{P0} \end{aligned}} \tag{2.65}$$

³Si noti che in condizioni di volo rettilineo uniforme l'angolo di incidenza α é lo stesso per tutti i punti del velivolo.

dove si assume che i coefficienti $L_{/\alpha}$, $L_{/\delta}$, L_0 , $M_{P/\alpha}$, $M_{P/\delta}$, M_{P0} sono proporzionali alla pressione dinamica di riferimento attraverso delle apposite costanti e sono indipendenti sia da α che da δ .

Equazioni costitutive in forma omogenea

Definiamo con α_0 e δ_0 i valori dell'angolo di incidenza e di deflessione di equilibratore ai quali si annulla sia il risultante della portanza che del momento di beccheggio ($L = M_P = 0$):

$$\begin{aligned} L_{/\alpha}\alpha_0 + L_{/\delta}\delta_0 + L_0 &= 0 \\ M_{P/\alpha}\alpha_0 + M_{P/\delta}\delta_0 + M_{P0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Risolvendo il sistema precedente, si ricavano α_0 e δ_0 :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{M_{P/\delta}L_0 - M_{P0}L_{/\delta}}{M_{P/\alpha}L_{/\delta} - M_{P/\delta}L_{/\alpha}} \\ \delta_0 &= \frac{M_{P0}L_{/\alpha} - M_{P/\alpha}L_0}{M_{P/\alpha}L_{/\delta} - M_{P/\delta}L_{/\alpha}} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Si dimostra facilmente che α_0 e δ_0 sono indipendenti dalla particolare scelta del polo P .

Sottraendo membro a membro le (2.66) dalle (2.65), si ricavano le equazioni costitutive in forma omogenea:

$$\boxed{\begin{aligned} L &= L_{/\alpha}(\alpha - \alpha_0) + L_{/\delta}(\delta - \delta_0) \\ M_P &= M_{P/\alpha}(\alpha - \alpha_0) + M_{P/\delta}(\delta - \delta_0) \end{aligned}} \quad (2.68)$$

Si noti che, trattandosi di differenze tra angoli, $(\alpha - \alpha_0)$ e $(\delta - \delta_0)$ assumono il significato di angoli assoluti, essendo indipendenti dall'origine rispetto al quale vengono misurati.

2.3.2 Punti caratteristici

Punto neutro a comandi bloccati

Si definisce *punto neutro a comandi bloccati* N (o *centro aerodinamico del velivolo*), il punto sull'asse di rollio rispetto al quale il momento di beccheggio non dipende dall'incidenza:

$$\boxed{N : \frac{\partial M_N}{\partial \alpha} = 0} \quad (2.69)$$

Cerchiamo ora una relazione che permetta di calcolare il punto neutro. Se indichiamo con (X, Y, Z) le componenti della forza aerodinamica, il risultante di tale forza in *assi corpo*⁴ sarà esprimibile come:

$$\mathbf{F} = X\mathbf{e}_x^b + Y\mathbf{e}_y^b + Z\mathbf{e}_z^b \quad (2.70)$$

Indicando con P il punto di applicazione del risultante della forza aerodinamica, la regola generale del trasporto del momento di beccheggio dal punto P al punto Q é la seguente:

$$M_Q = M_P + (x_Q^b - x_P^b)Z - (z_Q^b - z_P^b)X \quad (2.71)$$

La relazione tra le componenti della forza aerodinamica rispetto ai riferimenti assi corpo e assi vento é data da:

$$\begin{aligned} X &= -D \cos \alpha + L \sin \alpha \\ Z &= -D \sin \alpha - L \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.72)$$

Se il punto Q giace sull'asse di rollio, avrà la stessa quota del punto P ed evidentemente la regola del trasporto del momento si ridurrá a:

$$M_Q = M_P + (x_Q^b - x_P^b)Z \quad (2.73)$$

Sostituendo la componente Z che é in funzione di portanza e resistenza, si ha:

$$M_Q = M_P + (x_Q^b - x_P^b)(-D \sin \alpha - L \cos \alpha) \quad (2.74)$$

ovvero:

$$M_Q = M_P - (x_Q^b - x_P^b)(D \sin \alpha + L \cos \alpha) \quad (2.75)$$

che, derivata rispetto ad α , porta a scrivere:

$$M_{Q/\alpha} = M_{P/\alpha} - (x_Q^b - x_P^b)(D_{/\alpha} \sin \alpha + D \cos \alpha + L_{/\alpha} \cos \alpha - L \sin \alpha) \quad (2.76)$$

Facendo coincidere il generico punto Q con il punto punto neutro N ($Q \equiv N$) si ha:

$$M_{N/\alpha} = M_{P/\alpha} - (x_N^b - x_P^b)(D_{/\alpha} \sin \alpha + D \cos \alpha + L_{/\alpha} \cos \alpha - L \sin \alpha) \quad (2.77)$$

Il punto neutro é per definizione il punto rispetto al quale il momento di beccheggio non dipende dall'angolo di incidenza ($M_{N/\alpha} = 0$). Conseguentemente deve essere:

$$0 = M_{P/\alpha} - (x_N^b - x_P^b)(D_{/\alpha} \sin \alpha + D \cos \alpha + L_{/\alpha} \cos \alpha - L \sin \alpha) \quad (2.78)$$

⁴Per una descrizione completa del sistema di riferimento assi corpo si rimanda all'Appendice A.

da cui si ricava, ponendo $P \equiv G$, la relazione per determinare la distanza del punto neutro dal baricentro:

$$x_N - x_G = \frac{M_{G/\alpha}}{(D_{/\alpha} \sin \alpha + D \cos \alpha + L_{/\alpha} \cos \alpha - L \sin \alpha)} \quad (2.79)$$

che, adimensionalizzata rispetto la corda media aerodinamica dell'ala \bar{c} , diventa:

$$\xi_N - \xi_G = \frac{C_{m_{G/\alpha}}}{(C_{D_{/\alpha}} \sin \alpha + C_D \cos \alpha + C_{L_{/\alpha}} \cos \alpha - C_L \sin \alpha)} \quad (2.80)$$

La (2.80) mette in evidenza che, in generale, il punto neutro dipende dall'incidenza. Tale dipendenza compare sia esplicitamente nei termini in seno e coseno che implicitamente nei coefficienti aerodinamici. Si noti che per avere valori adimensionali di $C_{D_{/\alpha}}$ e $C_{L_{/\alpha}}$, essi devono essere calcolati come derivate di C_D e C_L rispetto l'incidenza α espressa in radianti.

Punto di controllo a comandi bloccati

Nella teoria semplificata proposta al Politecnico di Milano viene definito *punto di controllo* il punto sull'asse di rollio rispetto al quale il momento di beccheggio non dipende dalla deflessione dell'equilibratore:

$$C : \frac{\partial M_C}{\partial \delta} = 0 \quad (2.81)$$

Derivando rispetto la deflessione dell'equilibratore la regola (2.75) relativa al trasporto del momento di beccheggio tra due generici punti P e Q appartenenti all'asse di rollio, si ha:

$$M_{Q/\delta} = M_{P/\delta} - (x_Q^b - x_P^b)(D_{/\delta} \sin \alpha + L_{/\delta} \cos \alpha) \quad (2.82)$$

Facendo coincidere il punto Q con il punto di controllo C ($Q \equiv C$) ed il punto P con il centro di massa G ($P \equiv G$) ed utilizzando la definizione (2.81) si ha:

$$0 = M_{G/\delta} - (x_C^b - x_G^b)(D_{/\delta} \sin \alpha + L_{/\delta} \cos \alpha) \quad (2.83)$$

da cui si ricava la relazione per determinare la distanza del punto di controllo dal centro di massa:

$$x_C - x_G = \frac{M_{G/\delta}}{(D_{/\delta} \sin \alpha + L_{/\delta} \cos \alpha)} \quad (2.84)$$

che in forma adimensionale é:

$$\xi_C - \xi_G = \frac{C_{m_{G/\delta}}}{(C_{D_{/\delta}} \sin \alpha + C_{L_{/\delta}} \cos \alpha)} \quad (2.85)$$

2.3.3 Approssimazioni

Semplificazioni per il punto neutro a comandi bloccati

Sfruttando la definizione di efficienza aerodinamica ($E := L/D$) le (2.72) possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} X &= -D \cos \alpha (1 + E \tan \alpha) \\ Z &= -L \cos \alpha \left(1 + \frac{\tan \alpha}{E} \right) \end{aligned} \quad (2.86)$$

Se si assume che il volo avvenga ad incidenze moderate ($\alpha \ll 1$ rad), si possono fare le seguenti approssimazioni:

- $\cos \alpha \approx 1$;
- $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$,

che permettono di scrivere:

$$\begin{aligned} X &= -D (1 + E \alpha) \\ Z &= -L \left(1 + \frac{\alpha}{E} \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Inoltre, se si assume che il volo avvenga ad efficienze aerodinamiche medie o elevate ($E \geq O(1)$), il rapporto (α/E) può essere ritenuto trascurabile rispetto l'unità, mentre in generale questo non vale per il prodotto ($E \alpha$):

$$\begin{aligned} X &= -D - E \alpha \\ Z &= -L \end{aligned} \quad (2.88)$$

Sotto le ipotesi citate, la regola del trasporto del momento di beccheggio (2.71) può quindi essere scritta come:

$$M_Q = M_P - (x_Q^b - x_P^b)L + (z_Q^b - z_P^b)(D + E \alpha) \quad (2.89)$$

che, nel caso in cui i punti Q e P giacciono entrambi sull'asse di rollio ($z_Q^b - z_P^b = 0$), si semplifica in:

$$M_Q = M_P - (x_Q^b - x_P^b)L \quad (2.90)$$

Derivando l'ultima equazione rispetto ad α , facendo coincidere il punto Q con il punto neutro \bar{N} ($Q \equiv \bar{N}$) ed il punto P con il baricentro G ($P \equiv G$), si trova:

$$M_{\bar{N}/\alpha} = M_{G/\alpha} - (x_{\bar{N}}^b - x_G^b)L/\alpha \quad (2.91)$$

in cui la notazione $\bar{\bullet}$ indica che valgono le ipotesi di incidenze moderate ed efficienze aerodinamiche medie o elevate.

Infine, applicando la definizione di punto neutro (2.69), si ottiene:

$$x_{\bar{N}} - x_G = \frac{M_{G/\alpha}}{L/\alpha} \quad (2.92)$$

che, in forma adimensionale, si scrive:

$$\boxed{\xi_{\bar{N}} - \xi_G = \frac{C_{m_{G/\alpha}}}{C_{L/\alpha}}} \quad (2.93)$$

Considerato che la pendenza della curva di portanza é positiva, almeno nell'intervallo di incidenze prima dello stallo, la condizione di stabilitá statica longitudinale si traduce nel fatto che il centro di massa deve trovarsi davanti al punto neutro, ossia:

$$\boxed{\xi_G - \xi_{\bar{N}} > 0} \quad (2.94)$$

Semplificazioni per il punto di controllo a comandi bloccati

Sotto le ipotesi di angoli di incidenza moderati ($\alpha \ll 1$ rad) ed efficienze aerodinamiche medie o elevate ($E \geq O(1)$), analogamente a quanto già visto precedentemente, la regola per trasportare il momento di beccheggio dal baricentro al punto di controllo é:

$$M_C = M_G - (x_{\bar{C}} - x_G) L \quad (2.95)$$

che, derivata rispetto alla deflessione dell'equilibratore δ e, tenuto conto che per definizione $M_{C/\delta} = 0$, diventa:

$$0 = M_{G/\delta} - (x_{\bar{C}} - x_G) L/\delta \quad (2.96)$$

da cui si ricava la relazione semplificata per calcolare la posizione del punto di controllo dal centro di massa:

$$x_{\bar{C}} - x_G = \frac{M_{G/\delta}}{L/\delta} \quad (2.97)$$

che in forma adimensionalizzata é:

$$\boxed{\xi_{\bar{C}} - \xi_G = \frac{C_{m_{G/\delta}}}{C_{L/\delta}}} \quad (2.98)$$

2.3.4 Schema semplificato delle forze

Se nella (2.92) e nella (2.97) al posto del centro di massa G si considera un generico punto P dell'asse di rollio, risulta evidente che per il punto neutro vale la relazione:

$$M_{P/\alpha} = L_{/\alpha}(x_{\bar{N}} - x_P) \quad (2.99)$$

mentre per il punto di controllo risulta:

$$M_{P/\delta} = L_{/\delta}(x_{\bar{C}} - x_P) \quad (2.100)$$

Sostituendo le (2.99) e le (2.100) nelle equazioni costitutive in forma omogenea (2.68), si trova:

$$\begin{aligned} L &= L_{/\alpha}(\alpha - \alpha_0) + L_{/\delta}(\delta - \delta_0) \\ M_P &= (x_{\bar{N}} - x_P)L_{/\alpha}(\alpha - \alpha_0) + (x_{\bar{C}} - x_P)L_{/\delta}(\delta - \delta_0) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Definendo la portanza d'incidenza a comandi bloccati L^a (*stick fixed attitude lift*) e la portanza di controllo a comandi bloccati L^c (*stick fixed control lift*) rispettivamente:

$$\begin{aligned} L^a &:= L_{/\alpha}(\alpha - \alpha_0) \\ L^c &:= L_{/\delta}(\delta - \delta_0) \end{aligned} \quad (2.102)$$

le relazioni di portanza e momento di beccheggio possono essere scritte in forma più compatta:

$$\begin{aligned} L &= L^a + L^c \\ M_P &= (x_{\bar{N}} - x_P)L^a + (x_{\bar{C}} - x_P)L^c \end{aligned} \quad (2.103)$$

La distribuzione delle forze aerodinamiche é quindi equivalente alle sole componenti di portanza d'incidenza e di controllo applicate rispettivamente in corrispondenza del punto neutro e del punto di controllo (figura 2.3).

2.3.5 Trim

In condizioni di volo rettilineo uniforme trimmato, e sotto le usuali ipotesi di incidenze moderate ed efficienze aerodinamiche medie o elevate, l'equilibrio in direzione verticale e al momento di beccheggio rispetto ad un generico punto P sull'asse di rollio si esprime come:

$$\begin{aligned} L &= W \\ M_P &= (x_G - x_P)W \end{aligned} \quad (2.104)$$

dove W rappresenta la forza peso.

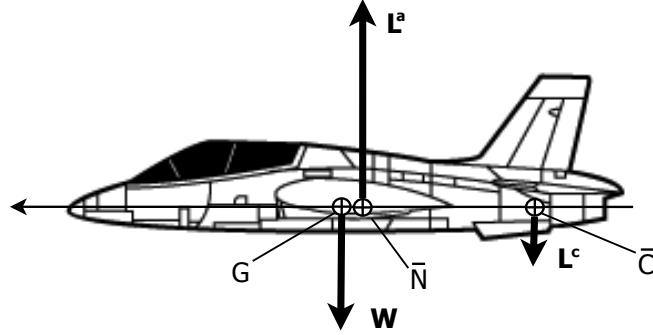


Figura 2.3: Schema semplificato delle forze in volo livellato a comandi bloccati.

Chiamiamo α_{LF} e δ_{LF} i valori di α e δ corrispondenti alle condizioni di trim. Combinando le (2.68) con le (2.104) si ottengono le equazioni costitutive in forma omogenea in condizioni di volo livellato trimmato:

$$\begin{aligned} L_{/\alpha}(\alpha_{LF} - \alpha_0) + L_{/\delta}(\delta_{LF} - \delta_0) &= W \\ M_{P/\alpha}(\alpha_{LF} - \alpha_0) + M_{P/\delta}(\delta_{LF} - \delta_0) &= (x_G - x_P)W \end{aligned} \quad (2.105)$$

Sostituendo la (2.99) e la (2.100) nella seconda delle (2.105), si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} L_{/\alpha}(\alpha_{LF} - \alpha_0) + L_{/\delta}(\delta_{LF} - \delta_0) &= W \\ L_{/\alpha}(x_{\bar{N}} - x_P)(\alpha_{LF} - \alpha_0) + L_{/\delta}(x_{\bar{C}} - x_P)(\delta_{LF} - \delta_0) &= (x_G - x_P)W \end{aligned} \quad (2.106)$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} \alpha_{LF} - \alpha_0 &= \frac{x_G - x_{\bar{C}}}{x_{\bar{N}} - x_{\bar{C}}} \frac{W}{L_{/\alpha}} \\ \delta_{LF} - \delta_0 &= \frac{x_{\bar{N}} - x_G}{x_{\bar{N}} - x_{\bar{C}}} \frac{W}{L_{/\delta}} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Si noti che $(\alpha_{LF} - \alpha_0)$ e $(\delta_{LF} - \delta_0)$ sono inversamente proporzionali alla pressione dinamica.

Definendo la lunghezza adimensionale e :

$$e := \frac{x_G - x_N}{x_N - x_C} \quad (2.108)$$

le (2.107) possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned}\alpha_{LF} - \alpha_0 &= (1 + e) \frac{W}{L/\alpha} \\ \delta_{LF} - \delta_0 &= -e \frac{W}{L/\delta}\end{aligned}\tag{2.109}$$

Il numeratore di e coincide con quello del classico margine statico s , così definito:

$$s = \frac{x_G - x_N}{\bar{c}}\tag{2.110}$$

Si noti che nella definizione di e non è stato utilizzato il simbolo \bar{N} poiché, per la determinazione del punto neutro, a rigore, le ipotesi di piccole incidenze ed efficienze aerodinamiche medie o elevate possono anche non valere.

Per gli aeroplani tradizionali ($x_N > x_C$) stabili ($x_G > x_N$), risulta $e > 0$ e, conseguentemente $\alpha_{LF} > \alpha_0$ e $\delta_{LF} < \delta_0$. Per gli aeroplani canard ($x_N < x_C$) stabili ($x_G > x_N$), risulta $e < 0$; ne deriva che $\alpha_{LF} > \alpha_0$ se $|e| \ll 1$, mentre risulta $\delta_{LF} > \delta_0$.

Siano L_{LF}^a e L_{LF}^c rispettivamente i valori della portanza d'incidenza e di controllo, entrambi costanti rispetto alla velocità di volo e alla quota, corrispondenti alle condizioni di volo livellato trimmato:

$$\begin{aligned}L_{LF}^a &= (1 + e) W \\ L_{LF}^c &= -e W\end{aligned}\tag{2.111}$$

Si osserva che per aeroplani stabili ($x_G > x_N$) con piano di coda tradizionale ($x_N > x_C$), e quindi $e > 0$, L_{LF}^c è sempre negativo e risulta $L_{LF}^a > W$. Al contrario, nel caso di aeroplani canard stabili ($x_C > x_N$, $x_G > x_N$), risulta $e < 0$ e L_{LF}^c è positivo.

2.4 Formulazione semplificata a comandi liberi

2.4.1 Momento di cerniera dell'equilibratore

Per il momento di cerniera ipotizziamo una legge costitutiva lineare:

$$H(\alpha^t, \delta) = H_{/\alpha^t} \alpha^t + H_{/\delta} \delta + H_0^t\tag{2.112}$$

avendo indicato con α^t l'angolo di incidenza del piano di coda e con H_0^t il momento di cerniera nella condizione $\alpha^t = 0$ e $\delta = 0$. L'angolo di incidenza della coda α^t dipende dall'angolo di incidenza del velivolo α , dal calettamento

dell'equilibratore i^{ht} e dal downwash ε , supposto lineare per piccole incidenze:

$$\begin{aligned}\alpha^t &= \alpha - \varepsilon + i^{ht} \\ &= \alpha - \varepsilon_0 - \varepsilon_{/\alpha}\alpha + i^{ht} \\ &= (1 - \varepsilon_{/\alpha})\alpha + (i^{ht} - \varepsilon_0)\end{aligned}\tag{2.113}$$

La legge costitutiva del momento di cerniera si può quindi scrivere:

$$H(\alpha, \delta) = H_{/\alpha^t}(1 - \varepsilon_{/\alpha})\alpha + H_{/\delta}\delta + H_0^t + H_{/\alpha^t}(i^{ht} - \varepsilon_0)\tag{2.114}$$

Indicando con:

$$H_{/\alpha} = H_{/\alpha^t}(1 - \varepsilon_{/\alpha})\tag{2.115}$$

$$H_0 = H_0^t + H_{/\alpha^t}(i^{ht} - \varepsilon_0)\tag{2.116}$$

la legge costitutiva diventa:

$$H(\alpha, \delta) = H_{/\alpha}\alpha + H_{/\delta}\delta + H_0\tag{2.117}$$

Dalla (2.114) discende l'analogia legge costitutiva del coefficiente di momento di cerniera:

$$C_{h_e}(\alpha, \delta) = C_{h_e/\alpha}\alpha + C_{h_e/\delta}\delta + C_{h_e0}\tag{2.118}$$

dove:

$$C_{h_e/\alpha} = C_{h_e/\alpha^t}(1 - \varepsilon_{/\alpha})\tag{2.119}$$

$$C_{h_e0} = C_{h_e0}^t + C_{h_e/\alpha^t}(i^{ht} - \varepsilon_0)\tag{2.120}$$

Inoltre, la legge costitutiva del momento di cerniera si può scrivere come:

$$H(\alpha, \delta) = H_{/\alpha}(\alpha - \alpha_0) + H_{/\delta}(\delta - \delta_0) + \hat{H}_0\tag{2.121}$$

dove:

$$\hat{H}_0 = H_0 + H_{/\alpha}\alpha_0 + H_{/\delta}\delta_0\tag{2.122}$$

Dalla (2.121), in cui compaiono i termini $H_{/\alpha}$ e $H_{/\delta}$, chiamati rispettivamente *floating tendency* e *restoring tendency*, è possibile ricavare $(\delta - \delta_0)$:

$$\delta - \delta_0 = -\frac{H_{/\alpha}}{H_{/\delta}}(\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{H_{/\delta}}(H - \hat{H}_0)\tag{2.123}$$

Sostituendo la (2.123) nelle (2.68), le equazioni costitutive di portanza e momento si possono scrivere in modo da esplicitare la dipendenza dal momento di cerniera H :

$$\begin{aligned}L &= L'(\alpha, H) = L'_{/\alpha}(\alpha - \alpha_0) + L'_{/H}(H - \hat{H}_0) \\ M_P &= M'_P(\alpha, H) = M'_{P/\alpha}(\alpha - \alpha_0) + M'_{P/H}(H - \hat{H}_0)\end{aligned}\tag{2.124}$$

avendo definito:

$$L'_{/\alpha} := L_{/\alpha} - \frac{H_{/\alpha}}{H_{/\delta}} L_{/\delta} \quad (2.125)$$

$$M'_{P/\alpha} := M_{P/\alpha} - \frac{H_{/\alpha}}{H_{/\delta}} M_{P/\delta} \quad (2.126)$$

$$L'_{/H} := \frac{L_{/\delta}}{H_{/\delta}} \quad (2.127)$$

$$M'_{P/H} := \frac{M_{P/\delta}}{H_{/\delta}} \quad (2.128)$$

Si noti che la (2.124) rappresenta la base della formulazione a comandi liberi per lo studio della stabilità e delle condizioni di trim. Infatti, la dipendenza di portanza e momento da H permette l'applicazione del controllo imponendo il momento di cerniera. Quello a comandi liberi ($H = 0$) è quindi un caso particolare della presente formulazione.

2.4.2 Punti caratteristici

Punto neutro a comandi liberi

Il *punto neutro a comandi liberi* N' è definito come il punto sull'asse di rollio rispetto al quale il momento di beccheggio a comandi liberi non dipende dall'angolo di incidenza:

$$\boxed{N' : \frac{\partial M_{N'}}{\partial \alpha} = 0} \quad (2.129)$$

Analogamente a quanto visto nel caso a comandi bloccati, sotto le ipotesi di volo ad incidenze moderate ($\alpha \ll 1$ rad) ed efficienze aerodinamiche medie o elevate ($E \geq O(1)$), la posizione di \bar{N}' rispetto ad un generico punto P dell'asse longitudinale è:

$$x_{\bar{N}'} - x_P = \frac{M'_{P/\alpha}}{L'_{/\alpha}} \quad (2.130)$$

Adimensionalizzando rispetto la corda media aerodinamica dell'ala, la distanza del punto neutro a comandi liberi dal baricentro può essere calcolata mediante la seguente relazione:

$$\boxed{\xi_{\bar{N}'} - \xi_G = \frac{C'_{mG/\alpha}}{C'_{L/\alpha}}} \quad (2.131)$$

avendo definito:

$$C'_{L/\alpha} := C_{L/\alpha} - \frac{C_{h_e/\alpha}}{C_{h_e/\delta}} C_{L/\delta} \quad (2.132)$$

$$C'_{m_G/\alpha} := C_{m_G/\alpha} - \frac{C_{h_e/\alpha}}{C_{h_e/\delta}} C_{m_G/\delta} \quad (2.133)$$

Punto di controllo a comandi liberi

Il punto di controllo a comandi liberi C' é definito come il punto sull'asse di rollio rispetto al quale il momento di beccheggio a comandi liberi non dipende dal momento di cerniera:

$$\boxed{C' : \frac{\partial M'_C}{\partial H} = 0} \quad (2.134)$$

Analogamente a quanto visto nel caso a comandi bloccati, sotto le ipotesi di volo ad incidenze moderate ($\alpha \ll 1$ rad) ed efficienze aerodinamiche medie o elevate ($E \geq O(1)$), la posizione di \bar{C}' rispetto ad un generico punto P dell'asse longitudinale é:

$$x_{\bar{C}'} - x_P = \frac{M'_{P/H}}{L'_{/H}} \quad (2.135)$$

Si dimostra facilmente che il punto di controllo a comandi liberi coincide con il punto di controllo a comandi bloccati:

$$\boxed{x_{\bar{C}'} - x_P = x_{\bar{C}} - x_P} \quad (2.136)$$

infatti:

$$\begin{aligned} x_{\bar{C}'} - x_P &= \frac{M'_{P/H}}{L'_{/H}} \\ &= \frac{M_{P/\delta}}{H_{/\delta}} \frac{H_{/\delta}}{L_{/\delta}} \\ &= \frac{M_{P/\delta}}{L_{/\delta}} \\ &= x_{\bar{C}} - x_P \end{aligned} \quad (2.137)$$

2.4.3 Schema semplificato delle forze

Utilizzando la (2.130) e la (2.135) nella seconda equazione delle (2.124), la legge costitutiva del momento di beccheggio si può scrivere nel seguente modo:

$$M_P = (x_{\bar{N}'} - x_P) L'_{/\alpha} (\alpha - \alpha_0) + (x_{\bar{C}'} - x_P) L'_{/H} (H - \hat{H}_0) \quad (2.138)$$

Vengono definite a rispettivamente portanza di incidenza a comandi liberi L'^a (*stick free attitude lift*) e portanza di controllo a comandi liberi L'^c (*stick*

free control lift) le seguenti forze:

$$\begin{aligned} L'^a &:= L'_{/\alpha}(\alpha - \alpha_0) \\ L'^c &:= L'_{/H}(H - \hat{H}_0) \end{aligned} \quad (2.139)$$

Ne consegue che portanza e momento di beccheggio possono essere scritti in forma piú compatta:

$$\begin{aligned} L &= L'^a + L'^c \\ M_P &= (x_{\bar{N}'} - x_P)L'^a + (x_{\bar{C}'} - x_P)L'^c \end{aligned} \quad (2.140)$$

Si giunge infine al seguente risultato: la distribuzione delle forze aerodinamiche può essere rappresentata molto semplicemente dalle sole forze L'^a e L'^c , applicate rispettivamente nei punti \bar{N}' e \bar{C}' .

2.4.4 Trim

Come visto in precedenza, in condizioni di volo rettilineo uniforme trimmato, valgono le equazioni (2.104) relative all'equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione. Pertanto, le equazioni di portanza e momento di beccheggio (2.124) diventano:

$$\begin{aligned} L'_{/\alpha}(\alpha_{LF} - \alpha_0) + L'_{/H}(H_{LF} - \hat{H}_0) &= W \\ M'_{P/\alpha}(\alpha_{LF} - \alpha_0) + M'_{P/H}(H_{LF} - \hat{H}_0) &= (x_G - x_P)W \end{aligned} \quad (2.141)$$

ovvero, tenuto conto delle relazioni (2.130) e (2.135):

$$\begin{aligned} L'_{/\alpha}(\alpha_{LF} - \alpha_0) + L'_{/H}(H - \hat{H}_0) &= W \\ (x_{\bar{N}'} - x_P)L'_{/\alpha}(\alpha_{LF} - \alpha_0) + (x_{\bar{C}'} - x_P)L'_{/H}(H_{LF} - \hat{H}_0) &= (x_G - x_P)W \end{aligned} \quad (2.142)$$

Dalle precedenti equazioni é possibile ricavare $(\alpha_{LF} - \alpha_0)$ e $(H_{LF} - \hat{H}_0)$:

$$\begin{aligned} \alpha_{LF} - \alpha_0 &= \frac{x_G - x_{\bar{C}'}}{x_{\bar{N}'} - x_{\bar{C}'}} \frac{W}{L'_{/\alpha}} \\ H_{LF} - \hat{H}_0 &= \frac{x_{\bar{N}'} - x_G}{x_{\bar{N}'} - x_{\bar{C}'}} \frac{W}{L'_{/H}} \end{aligned} \quad (2.143)$$

Definiamo ora la lunghezza adimensionale e' :

$$e' := \frac{x_G - x_{N'}}{x_{N'} - x_C} \quad (2.144)$$

Utilizzando la definizione appena data, le (2.143) possono essere scritte come:

$$\begin{aligned}\alpha_{LF} - \alpha_0 &= (1 + e') \frac{W}{L'_{/\alpha}} \\ H_{LF} - \hat{H}_0 &= -e' \frac{W}{L'_{/H}}\end{aligned}\tag{2.145}$$

Si noti che $(H_{LF} - \hat{H}_0)$ é indipendente sia dalla quota che dalla velocità di volo.

La *stick free attitude lift* e la *stick free control lift*, costanti rispetto velocità di volo e quota, possono essere espresse in funzione di e' :

$$\begin{aligned}L'_{LF}{}^a &= (1 + e') W \\ L'_{LF}{}^c &= -e' W\end{aligned}\tag{2.146}$$

Analogamente al caso a comandi bloccati, il criterio di stabilità statica a comandi liberi:

$$\boxed{M'_{G/\alpha} < 0}\tag{2.147}$$

si traduce nella condizione che il baricentro si trovi in posizione piú avanzata rispetto al punto neutro a comandi liberi:

$$\boxed{x_G - x_{\bar{N}'} > 0}\tag{2.148}$$

2.4.5 Confronto tra formulazione a comandi bloccati e a comandi liberi

Abbiamo visto la coincidenza tra il punto di controllo a comandi bloccati e quello a comandi liberi. Per confrontare la posizione del punto neutro a comandi bloccati con quello a comandi liberi viene introdotto il *free elevator factor*:

$$k := \frac{L'_{/\alpha}}{L_{/\alpha}} = 1 - \frac{H_{/\alpha}}{H_{/\delta}} \frac{L_{/\delta}}{L_{/\alpha}}\tag{2.149}$$

La distanza tra il punto neutro a comandi liberi e quello a comandi bloccati é:

$$x_{\bar{N}'} - x_{\bar{N}} = \frac{M'_{P/\alpha}}{L'_{/\alpha}} - \frac{M_{P/\alpha}}{L_{/\alpha}}\tag{2.150}$$

Manipolando l'ultima relazione e facendo uso della definizione di k si trova:

$$x_{\bar{N}'} - x_{\bar{N}} = \frac{1 - k}{k} (x_{\bar{N}} - x_{\bar{C}})\tag{2.151}$$

Poiché negli aeroplani di architettura tradizionale $x_{\bar{N}} > x_{\bar{C}}$, ne deriva che il punto neutro a comandi liberi si troverá davanti a quello a comandi bloccati se $k < 1$; viceversa se $k > 1$ il punto neutro a comandi bloccati sará davanti a quello a comandi liberi.

2.5 Schema a due superfici

In questo paragrafo viene illustrato un modello generale di calcolo dei coefficienti costitutivi idealizzando il velivolo attraverso due superfici isolate, arbitrariamente calettate tra loro, in cui l'interazione aerodinamica é rappresentata dal solo *downwash* della prima sulla seconda.

Come visto in precedenza, in un modello di questo tipo, la portanza ed il momento di beccheggio rispetto ad un punto P qualsiasi dell'asse di rollio vengono considerati come somma dei contributi dovuti al *velivolo parziale* (ala-fusoliera), indicati con l'apice wb , e quelli dovuti al piano di coda, indicati con l'apice t :

$$\begin{aligned} L &= L^{wb} + L^t \\ M_P &= M_P^{wb} + M_P^t \end{aligned} \quad (2.152)$$

Se ala e piano orizzontale sono sufficientemente lontani, il campo aerodinamico dell'ala non é influenzato (o lo é in maniera trascurabile) dalla presenza della coda, mentre il campo aerodinamico della coda é sempre influenzato dalla presenza dell'ala. Sotto tali ipotesi, si possono fare le seguenti assunzioni:

- il coefficiente di portanza e di momento di beccheggio del velivolo parziale non dipendono dalla deflessione dell'equilibratore:

$$\begin{aligned} C_{L/\delta}^{wb} &= 0 \\ C_{m/\delta}^{wb} &= 0 \end{aligned} \quad (2.153)$$

- l'angolo di incidenza del velivolo parziale é pari all'incidenza del velivolo completo piú l'angolo di calettamento i^{wb} , definito come l'angolo che la retta di portanza nulla del velivolo parziale forma con l'asse di rollio, definito positivo in senso orario:

$$\alpha^{wb} = \alpha + i^{wb} \quad (2.154)$$

- l'angolo di incidenza della coda é dato dall'incidenza del velivolo parziale, ridotto del *downwash* ed aumentato dell'angolo di calettamento i^{ht} ,

definito come l'angolo che la retta di portanza nulla della coda forma con l'asse di rollio, definito positivo in senso orario:

$$\alpha^t = \alpha + i^{ht} - \varepsilon \quad (2.155)$$

dove ε si suppone lineare e, quindi, esprimibile come $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_{/\alpha}\alpha + \varepsilon_0$. Siano A^{wb} e A^t rispettivamente i centri aerodinamici di ala e coda, per i quali valgono le relazioni $M_{A^{wb}/\alpha}^{wb} = 0$ e $M_{A^t/\alpha}^t = 0$.

Per il velivolo parziale portanza e momento di beccheggio si esprimono come:

$$\begin{aligned} L^{wb} &= q_d^{wb} S^{wb} C_{L/\alpha}^{wb} \alpha^{wb} \\ M_P^{wb} &= M_{A^{wb}}^{wb} + (x_{A^{wb}} - x_P) L^{wb} \end{aligned} \quad (2.156)$$

mentre per il piano di coda si ha :

$$\begin{aligned} L^t &= q_d^t S^t (C_{L/\alpha}^t \alpha^t + C_{L/\delta}^t \delta) \\ M_P^t &= M_{A^t}^t + (x_{A^t} - x_P) L^t \end{aligned} \quad (2.157)$$

Solitamente q_d^{wb} e S^{wb} sono considerati valori di riferimento per il velivolo completo e chiamati q_d e S . Pertanto, portanza e momento di beccheggio assumono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} L &= q_d S [C_{L/\alpha}^{wb} \alpha^{wb} + \eta \sigma (C_{L/\alpha}^t \alpha^t + C_{L/\delta}^t \delta)] \\ M_P &= q_d S [(x_{A^{wb}} - x_P) C_{L/\alpha}^{wb} \alpha^{wb} + (x_{A^t} - x_P) \eta \sigma (C_{L/\alpha}^t \alpha^t + C_{L/\delta}^t \delta)] + \\ &M_{A^{wb}}^{wb} + M_{A^t}^t \end{aligned} \quad (2.158)$$

dove $\eta := \frac{q_d^t}{q_d^{wb}}$ e $\sigma := \frac{S^t}{S^{wb}}$.

Utilizzando per portanza e momento di beccheggio leggi costitutive lineari del tipo $L = L_{/\alpha}\alpha + L_{/\delta}\delta + L_0$ e $M_P = M_{P/\alpha}\alpha + M_{P/\delta}\delta + M_{P0}$, si perviene alle seguenti relazioni dei coefficienti aerodinamici:

$$\begin{aligned} L_{/\alpha} &= q_d S [C_{L/\alpha}^{wb} + \eta \sigma C_{L/\alpha}^t (1 - \varepsilon_{/\alpha})] \\ L_{/\delta} &= q_d S \eta \sigma C_{L/\delta}^t \\ L_0 &= q_d S [C_{L/\alpha}^{wb} i^{wb} + \eta \sigma C_{L/\alpha}^t (i^{ht} - \varepsilon_0)] \\ M_{P/\alpha} &= q_d S [(x_{A^{wb}} - x_P) C_{L/\alpha}^{wb} + (x_{A^t} - x_P) \eta \sigma C_{L/\alpha}^t (1 - \varepsilon_{/\alpha})] \\ M_{P/\delta} &= q_d S (x_{A^t} - x_P) \eta \sigma C_{L/\delta}^t \\ M_0 &= q_d S [(x_{A^{wb}} - x_P) C_{L/\alpha}^{wb} i^{wb} + (x_{A^t} - x_P) \eta \sigma C_{L/\alpha}^t (i^{ht} - \varepsilon_0)] + \\ &M_{A^{wb}}^{wb} + M_{A^t}^t \end{aligned} \quad (2.159)$$

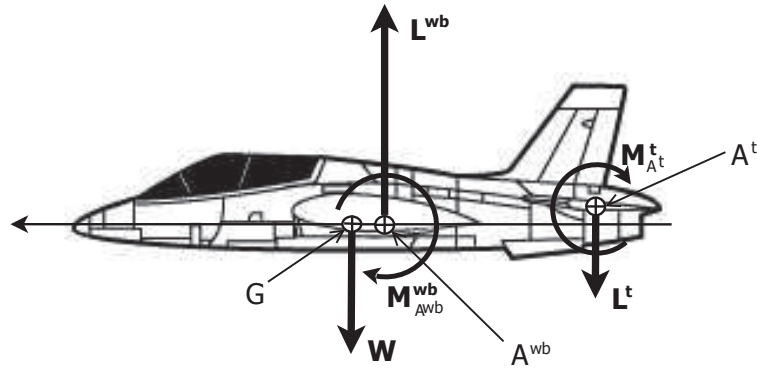


Figura 2.4: Schema tradizionale delle forze in volo livellato nel modello a due superfici.

ed alla seguente espressione per la posizione del punto neutro:

$$x_N = \frac{x_{A^{wb}} C_{L/\alpha}^{wb} + x_{A^t} \eta \sigma C_{L/\alpha}^t (1 - \varepsilon/\alpha)}{C_{L/\alpha}^{wb} + \eta \sigma C_{L/\alpha}^t (1 - \varepsilon/\alpha)}. \quad (2.160)$$

Capitolo 3

Equilibrio e stabilità statica longitudinale in manovra simmetrica

3.1 Formulazione classica

Nello studio della stabilità statica longitudinale in manovra é fondamentale la conoscenza della posizione del centro di massa alla quale si verifica:

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial n} = 0 \quad (3.1)$$

condizione alla quale la minima rotazione dell'equilibratore δ_e comporta valori elevati del fattore di carico n (teoricamente tendenti all'infinito), non sopportabili dal velivolo.

Ne deriva che, affinché l'aeroplano risponda correttamente ai movimenti delle superfici di controllo, il centro di massa deve essere sufficientemente lontano dal punto di manovra. Inoltre, per far sí che ad una rotazione verso il basso dell'equilibratore (con il pilota che spinge la barra in avanti) corrisponda un'accelerazione verso il basso e, viceversa, ad una rotazione verso l'alto dell'equilibratore (con il pilota tira la barra verso di sé), corrisponda un'accelerazione verso l'alto, deve essere verificata la condizione di stabilità statica longitudinale in manovra [8]:

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial n} < 0 \quad (3.2)$$

Nei successivi paragrafi vengono trattate due manovre simmetriche notevoli, la richiamata stazionaria e la virata corretta stazionaria, seguendo una delle formulazioni tradizionalmente utilizzate nella Meccanica del Volo [4].

Richiamata

Si consideri un velivolo che, a partire da una condizione di volo orizzontale uniforme, esegua una manovra di richiamata ruotando l'equilibratore da δ_e

a $\delta_e + \Delta\delta_e$. La velocità angolare di beccheggio q (*pitch rate*)¹ é:

$$q = \frac{g}{V} (n - 1) \quad (3.3)$$

dove g é l'accelerazione di gravità e V la velocità di volo. A causa della velocità angolare, il flusso d'aria dietro il velivolo viene curvato, modificando la distribuzione delle forze aerodinamiche rispetto il volo livellato. L'incidenza α , intesa come angolo tra il vento relativo e la linea a portanza nulla del velivolo, subisce quindi un incremento $\Delta\alpha$.

Assumiamo che q e le variazioni $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta_e$ siano piccole, cosicché sia possibile rappresentare attraverso leggi lineari le variazioni di portanza e di momento:

$$\begin{aligned} \Delta C_L &= C_{L/\alpha} \Delta\alpha + C_{L/\hat{q}} \hat{q} + C_{L/\delta_e} \Delta\delta_e \\ \Delta C_m &= C_{m/\alpha} \Delta\alpha + C_{m/\hat{q}} \hat{q} + C_{m/\delta_e} \Delta\delta_e \end{aligned} \quad (3.4)$$

avendo introdotto la velocità di beccheggio adimensionale:

$$\hat{q} = \frac{q\bar{c}}{2V} \quad (3.5)$$

Dalla (3.3) si ha:

$$\hat{q} = (n - 1) \frac{g\bar{c}}{2V^2} \quad (3.6)$$

Definendo la quantità μ :

$$\mu = \frac{2W}{g\rho S\bar{c}} \quad (3.7)$$

ed il coefficiente di portanza in volo livellato:

$$C_{L_{LF}} = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \quad (3.8)$$

la (3.6) diventa:

$$\hat{q} = (n - 1) \frac{C_{L_{LF}}}{2\mu} \quad (3.9)$$

La variazione del coefficiente di portanza in richiamata rispetto al volo rettilineo uniforme é:

$$\Delta C_L = (n - 1) C_{L_{LF}} \quad (3.10)$$

¹Per una trattazione dettagliata delle equazioni del moto della richiamata si rimanda all'appendice B.

mentre la variazione del coefficiente di momento rispetto al centro di massa é nulla ($\Delta C_{m_G} = 0$) poiché si é assunto che la manovra sia stazionaria e che il velivolo sia trimmato. Pertanto le (3.4) diventano:

$$\begin{aligned}\Delta C_L &= C_{L/\alpha} \Delta\alpha + (n-1) C_{L/\hat{q}} \frac{C_{L_{LF}}}{2\mu} + C_{L/\delta_e} \Delta\delta_e \\ 0 &= C_{m/\alpha} \Delta\alpha + (n-1) C_{m/\hat{q}} \frac{C_{L_{LF}}}{2\mu} + C_{m/\delta_e} \Delta\delta_e\end{aligned}\quad (3.11)$$

dalle quali si possono ricavare le espressioni di $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta_e$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\delta_e}{n-1} &= -\frac{C_{L_{LF}}}{\Delta} \left[C_{m/\alpha} - \frac{1}{2\mu} (C_{L/\hat{q}} C_{m/\alpha} - C_{L/\alpha} C_{m/\hat{q}}) \right] \\ \frac{\Delta\alpha}{n-1} &= \frac{1}{C_{L/\alpha}} \left(C_{L_{LF}} - C_{L/\hat{q}} \frac{C_{L_{LF}}}{2\mu} - C_{L/\delta_e} \frac{\Delta\delta_e}{n-1} \right)\end{aligned}\quad (3.12)$$

dove $\Delta = C_{L/\alpha} C_{m/\delta_e} - C_{L/\delta_e} C_{m/\alpha}$. Le derivate $C_{m/\hat{q}}$ e $C_{L/\hat{q}}$ in generale dipendono dalla posizione del centro di massa.

Ricordando che vale la relazione (2.30) $C_{m/\alpha} = C_{L/\alpha}(h_G - h_N)$, la prima delle (3.12) si scrive:

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_{L_{LF}} C_{L/\alpha} (2\mu - C_{L/\hat{q}})}{2\mu\Delta} \left(h_G - h_N + \frac{C_{m/\hat{q}}}{2\mu - C_{L/\hat{q}}} \right)\quad (3.13)$$

Il punto in cui si annulla $\Delta\delta_e/(n-1)$ é il *punto di manovra M*:

$$h_M = h_N - \frac{C_{m/\hat{q}}(h_M)}{2\mu - C_{L/\hat{q}}(h_M)}\quad (3.14)$$

dove $C_{m/\hat{q}}(h_M)$ e $C_{L/\hat{q}}(h_M)$ sono due derivate valutate in $h_G = h_M$.

Virata corretta

Nella virata corretta la velocità angolare di beccheggio q si può esprimere come²:

$$q = \frac{n^2 - 1}{n} \frac{g}{V} = (n-1) \frac{(n+1)}{n} \frac{g}{V}\quad (3.15)$$

Procedendo in maniera del tutto analoga a quanto visto per la richiamata, si ricavano le espressioni di $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta_e$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\delta_e}{n-1} &= -\frac{C_{L_{LF}}}{\Delta} \left[C_{m/\alpha} - \left(\frac{n+1}{n} \right) \frac{1}{2\mu} (C_{L/\hat{q}} C_{m/\alpha} - C_{L/\alpha} C_{m/\hat{q}}) \right] \\ \frac{\Delta\alpha}{n-1} &= \frac{1}{C_{L/\alpha}} \left[C_{L_{LF}} - \left(\frac{n+1}{n} \right) C_{L/\hat{q}} \frac{C_{L_{LF}}}{2\mu} - C_{L/\delta_e} \frac{\Delta\delta_e}{n-1} \right]\end{aligned}\quad (3.16)$$

²Per una trattazione dettagliata delle equazioni del moto della virata corretta si rimanda all'appendice B.

Tenendo conto della (2.30) si trova:

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_{L_{LF}}C_{L/\alpha}[2\mu - \left(\frac{n+1}{n}\right)C_{L/\dot{q}}]}{2\mu\Delta} \left[h_G - h_N + \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)C_{m/\dot{q}}}{2\mu - \left(\frac{n+1}{n}\right)C_{L/\dot{q}}} \right] \quad (3.17)$$

da cui si ricava il punto di manovra in virata corretta:

$$h_M = h_N - \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)C_{m/\dot{q}}(h_M)}{2\mu - \left(\frac{n+1}{n}\right)C_{L/\dot{q}}(h_M)} \quad (3.18)$$

3.2 Formulazione semplificata

In questo paragrafo viene illustrata la formulazione semplificata per la manovra simmetrica stazionaria. Dapprima vengono presentate le equazioni costitutive di portanza e momento di beccheggio in cui compare la velocità angolare di beccheggio q . Successivamente, grazie all'introduzione del *punto di incidenza equivalente*, definito come il punto sull'asse longitudinale in cui misurare l'incidenza in modo tale che la portanza non dipenda da q , la rappresentazione delle forze aerodinamiche agenti sul velivolo in manovra stazionaria diviene sorprendentemente semplice poiché si basa su due sole forze, applicate in due punti opportunamente definiti: il *punto neutro in manovra*, o *punto di manovra*, ed il *punto di controllo in manovra*.

3.2.1 Equazioni costitutive e punto d'incidenza equivalente

Equazioni costitutive in forma non omogenea

Abbiamo visto che, nel caso di volo livellato, portanza e momento di beccheggio dipendono dall'incidenza α e dalla deflessione δ della superficie di controllo, che supponiamo essere l'equilibratore.

Nel caso di manovra simmetrica stazionaria, le equazioni costitutive (2.64) e (2.65) devono essere modificate per due motivi: é necessario specificare la dipendenza dalla velocità angolare di beccheggio q ed é necessario tener presente che l'angolo di incidenza varia a seconda del punto in cui viene valutato. Si perviene, quindi, alle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{aligned} L &= L(\alpha_R, q, \delta) \\ M_P &= M_P(\alpha_R, q, \delta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

in cui il pedice R indica il generico punto dell'asse di rollio in cui viene valutata l'incidenza. La dipendenza dal punto R può essere esplicitata nelle

equazioni costitutive di portanza e momento in forma non omogenea:

$$\begin{cases} L = L_{/\alpha}\alpha_R + [L_{/q}]_R q + L_{/\delta}\delta + L_0 \\ M_P = M_{P/\alpha}\alpha_R + [M_{P/q}]_R q + M_{P/\delta}\delta + M_{P0} \end{cases} \quad (3.20)$$

dove $[L_{/q}]_R$ e $[M_{P/q}]_R$ sono proporzionali al rapporto tra la pressione dinamica e la velocità di volo, mentre gli altri coefficienti coincidono con quelli visti per il volo livellato. La notazione $[]_R$ é stata usata per indicare la dipendenza di questi coefficienti dal punto R in cui viene misurato l'angolo di incidenza.

Per elaborare opportunamente le (3.20), ricaviamo la *regola del trasporto dell'angolo di incidenza*. In condizioni di volo simmetrico e ipotizzando il velivolo rigido, la distribuzione delle velocità tra due punti P e Q appartenenti all'asse longitudinale si traduce nella seguente *regola del trasporto delle velocità*:

$$\begin{aligned} u_Q &= u_P \\ w_Q &= w_P - (x_Q - x_P) q \end{aligned} \quad (3.21)$$

dove u e w sono rispettivamente le componenti cartesiane orizzontali e verticali della velocità. Vediamo ora come ricavare una regola analoga che valga per l'incidenza. L'angolo d'incidenza é così definito:

$$\alpha := \arctan \frac{w}{u} \quad (3.22)$$

Sotto le usuali approssimazioni di basse incidenze si ha:

$$\begin{aligned} u_P &= V \\ w_P &= V \alpha_P \end{aligned} \quad (3.23)$$

Combinando la seconda equazione delle (3.21) con la seconda delle (3.23) si ottiene infine la regola per il trasporto dell'angolo di incidenza:

$$\alpha_Q = \alpha_P - (x_Q - x_P) \frac{q}{V} \quad (3.24)$$

Tornando alla (3.20) si dimostra facilmente che, scegliendo un differente punto S in cui valutare l'angolo di incidenza i coefficienti $L_{/\alpha}$, $L_{/\delta}$, L_0 , $M_{P/\alpha}$, $M_{P/\delta}$ e M_{P0} non cambiano, mentre:

$$[L_{/q}]_S = [L_{/q}]_R - \frac{x_R - x_S}{V} L_{/\alpha} \quad (3.25)$$

$$[M_{P/q}]_S = [M_{P/q}]_R - \frac{x_R - x_S}{V} M_{P/\alpha} \quad (3.26)$$

come conseguenza della regola del trasporto dell'angolo di incidenza.

Punto di incidenza equivalente

Sotto le usuali ipotesi semplificative, valutando l'incidenza nel generico punto R , derivando rispetto q la (2.75) relativa al trasporto del momento di beccheggio tra due generici punto P e Q appartenenti all'asse longitudinale, si trova:

$$[M_{Q/q}]_R = [M_{P/q}]_R - (x_Q - x_P)[L/q]_R \quad (3.27)$$

Nel riferimento [1] viene introdotto il *punto di incidenza equivalente* come il punto sull'asse di rollio in cui misurare l'incidenza in modo che la portanza non dipenda da q :

$$E : \left[\frac{\partial L}{\partial q} \right]_E = 0 \quad (3.28)$$

La posizione di questo punto rispetto un generico punto dell'asse longitudinale si ricava dalla (3.25):

$$x_E - x_P = - \frac{[L/q]_P V}{L/\alpha} \quad (3.29)$$

Dalla definizione appena data si nota che E non dipende né dalla quota né dalla velocità.

Valutando l'angolo di incidenza in E , le equazioni costitutive di portanza e momento si semplificano nelle seguenti:

$$\begin{aligned} L &= L/\alpha \alpha_E + L/\delta \delta + L_0 \\ M_P &= M_{P/\alpha} \alpha_E + [M_{P/q}]_E q + M_{P/\delta} \delta + M_{P_0} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Equazioni costitutive in forma omogenea

Combinando le (3.26), (3.29) e (3.27) si ha:

$$\begin{aligned} [M_{P/q}]_E &= [M_{P/q}]_R + \frac{x_E - x_R}{V} M_{P/\alpha} \\ &= [M_{P/q}]_R - \frac{[L/q]_R}{L/\alpha} M_{P/\alpha} \\ &= [M_{P/q}]_R - (x_{\bar{N}} - x_P)[L/q]_R \\ &= [M_{\bar{N}/q}]_R \end{aligned} \quad (3.31)$$

Inoltre, poiché per definizione il punto neutro é il punto rispetto al quale il momento di beccheggio non dipende dall'incidenza, si può scrivere:

$$[M_{\bar{N}/q}]_E = M_{\bar{N}/q} \quad (3.32)$$

Tenuto conto di queste considerazioni, sottraendo le (2.66) dalle (3.30), si trovano le equazioni costitutive in forma omogenea per la manovra:

$$\boxed{\begin{aligned} L &= L_{/\alpha}(\alpha_E - \alpha_0) + L_{/\delta}(\delta - \delta_0) \\ M_P &= M_{P/\alpha}(\alpha_E - \alpha_0) + M_{P/\delta}(\delta - \delta_0) + M_{\bar{N}/q} q \end{aligned}} \quad (3.33)$$

dove si nota che le differenze con quelle relative al volo rettilineo sono rappresentate da:

- la misura dell'angolo d'incidenza nel punto d'incidenza equivalente E ;
- l'aggiunta di un termine addizionale al momento di beccheggio, indipendente dal polo di riduzione del momento stesso (ossia, una pura coppia).

3.2.2 Punto di manovra

In condizioni di manovra simmetrica stazionaria, sotto le ipotesi di volo ad incidenze moderate ($\alpha \ll 1$ rad) ed efficienze aerodinamiche medie o elevate ($E \geq O(1)$), le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione rispetto un generico punto P dell'asse longitudinale si scrivono:

$$\begin{aligned} L &= nW \\ M_P &= (x_G - x_P)nW \end{aligned} \quad (3.34)$$

Chiamiamo α_{EMF} e δ_{MF} rispettivamente l'angolo di incidenza valutato nel punto E e la deflessione dell'equilibratore corrispondenti alle condizioni di trim in manovra. Consideriamo le seguenti equazioni incrementali di portanza e momento di beccheggio, ricordando che con α_{LF} e con δ_{LF} vengono indicati l'angolo di incidenza e di deflessione dell'equilibratore corrispondenti alle condizioni di trim in volo livellato:

$$\begin{aligned} L_{/\alpha}(\alpha_{EMF} - \alpha_{LF}) + L_{/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) &= (n - 1) W \\ M_{P/\alpha}(\alpha_{EMF} - \alpha_{LF}) + M_{P/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) + M_{\bar{N}/q} q &= (x_G - x_P)(n - 1) W \end{aligned} \quad (3.35)$$

Se il momento di beccheggio viene valutato nel punto neutro ($P \equiv \bar{N}$), le (3.35) diventano:

$$\begin{aligned} L_{/\alpha}(\alpha_{EMF} - \alpha_{LF}) + L_{/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) &= (n - 1) W \\ M_{\bar{N}/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) + M_{\bar{N}/q} q &= (x_G - x_{\bar{N}})(n - 1) W \end{aligned} \quad (3.36)$$

Si definisce *punto di manovra*:

$$\boxed{x_{\bar{M}} - x_{\bar{N}} := \frac{M_{\bar{N}/q}}{(n-1)W} q} \quad (3.37)$$

Sfruttando la definizione appena data, é possibile ricavare il termine $M_{\bar{N}/q} q$ e riscrivere le (3.36) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} L_{/\alpha}(\alpha_{EMF} - \alpha_{LF}) + L_{/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) &= (n-1)W \\ M_{N/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) &= (x_G - x_{\bar{M}})(n-1)W \end{aligned} \quad (3.38)$$

da cui si ricavano $(\alpha_{EMF} - \alpha_{LF})$ e $(\delta_{MF} - \delta_{LF})$:

$$\begin{aligned} \alpha_{EMF} - \alpha_{LF} &= \left(1 + \frac{x_{\bar{N}} - x_{\bar{M}}}{x_G - x_{\bar{C}}}\right) (n-1)(\alpha_{LF} - \alpha_0) \\ \delta_{MF} - \delta_{LF} &= \left(1 + \frac{x_{\bar{N}} - x_{\bar{M}}}{x_G - x_{\bar{N}}}\right) (n-1)(\delta_{LF} - \delta_0) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Introducendo la quantità adimensionale ϕ :

$$\phi := \frac{x_N - x_M}{x_N - x_C} \quad (3.40)$$

le (3.39) possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} \alpha_{EMF} - \alpha_{LF} &= [1 + (e + \phi)] (n-1) \frac{W}{L_{/\alpha}} \\ \delta_{MF} - \delta_{LF} &= -(e + \phi)(n-1) \frac{W}{L_{/\delta}} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Confrontando queste equazioni con le omologhe in volo livellato (2.109), si nota che la manovra ha non solo l'effetto di trasformare W in $(n-1)W$, ma anche quello di cambiare e in $(e + \phi)$.

3.2.3 Schema semplificato delle forze

Scriviamo l'incremento di portanza e di momento di beccheggio dovuto alla manovra rispetto al volo livellato:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L_{MF} - L_{LF} = L_{/\alpha}(\alpha_{EMF} - \alpha_{LF}) + L_{/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) \\ \Delta M_P &= M_{P_{MF}} - M_{P_{LF}} = (x_{\bar{N}} - x_P)L_{/\alpha}(\alpha_{EMF} - \alpha_{LF}) + \\ &\quad (x_{\bar{C}} - x_P)L_{/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) + M_{\bar{N}/q}q \end{aligned} \quad (3.42)$$

Osservando che:

$$\begin{aligned} M_{\bar{N}/q} q &= (x_{\bar{M}} - x_{\bar{N}})(n - 1) W \\ &= (x_{\bar{M}} - x_{\bar{N}})(L_{MF} - L_{LF}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

l'equazione relativa all'incremento del momento di beccheggio si può riscrivere così:

$$M_{P_{MF}} - M_{P_{LF}} = (x_{\bar{M}} - x_P)L_{/\alpha}(\alpha_{E_{MF}} - \alpha_{LF}) + (x_{\bar{B}} - x_P)L_{/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) \quad (3.44)$$

avendo definito il *punto di controllo in manovra* \bar{B} :

$$x_{\bar{B}} - x_P := x_{\bar{C}} - x_P + x_{\bar{M}} - x_{\bar{N}} \quad (3.45)$$

I risultati cui si é giunti mostrano che l'effetto della manovra é quello di spostare il punto neutro \bar{N} ed il punto di controllo \bar{C} nelle nuove posizioni del punto di manovra \bar{M} e del punto di controllo in manovra \bar{B} .

Utilizzando la seguente notazione:

$$\begin{aligned} \Delta L_{MF}^a &= L_{MF}^a - L_{LF}^a = L_{/\alpha}(\alpha_{E_{MF}} - \alpha_{LF}) \\ \Delta L_{MF}^c &= L_{MF}^c - L_{LF}^c = L_{/\delta}(\delta_{MF} - \delta_{LF}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

gli incrementi di portanza e momento in manovra rispetto al volo livellato si scrivono:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \Delta L_{MF}^a + \Delta L_{MF}^c \\ \Delta M_P &= (x_{\bar{M}} - x_P)\Delta L_{MF}^a + (x_{\bar{C}} - x_P)\Delta L_{MF}^c \end{aligned} \quad (3.47)$$

Analogamente a quanto visto per il volo rettilineo uniforme, anche nel caso di manovra lo schema delle forze aerodinamiche risulta molto semplice: ΔL_{MF}^a applicato nel punto di manovra \bar{M} e ΔL_{MF}^c applicato nel punto di controllo in manovra \bar{B} (figura 3.1).

3.2.4 Trim

Scriviamo le equazioni costitutive in forma omogenea in condizioni di trim, combinando le (3.33) con le (3.34):

$$\begin{aligned} L_{/\alpha}(\alpha_{E_{MF}} - \alpha_0) + L_{/\delta}(\delta_{MF} - \delta_0) &= n W \\ M_{P_{/\alpha}}(\alpha_{E_{MF}} - \alpha_0) + M_{P_{/\delta}}(\delta_{MF} - \delta_0) &= (x_G - x_P)n W - M_{\bar{N}/q} q \end{aligned} \quad (3.48)$$

La precedente coppia di equazioni permette di trovare $(\alpha_{E_{MF}} - \alpha_0)$ e $(\delta_{MF} - \delta_0)$:

$$\begin{aligned} \alpha_{E_{MF}} - \alpha_0 &= n (\alpha_{LF} - \alpha_0) - \frac{M_{\bar{N}/q}}{M_{\bar{C}/\alpha}} q \\ \delta_{MF} - \delta_0 &= n (\delta_{LF} - \delta_0) - \frac{M_{\bar{N}/q}}{M_{\bar{N}/\delta}} q \end{aligned} \quad (3.49)$$

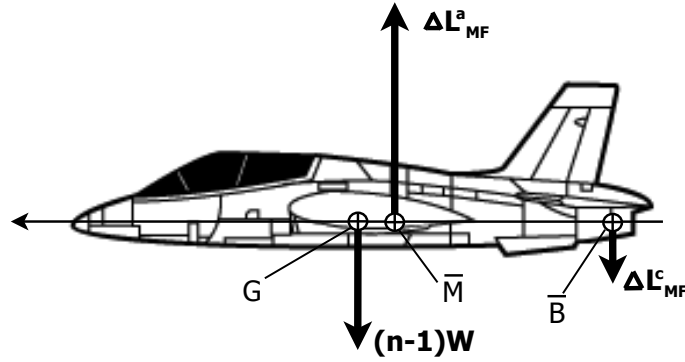


Figura 3.1: Schema semplificato delle forze in manovra.

Infine, utilizzando la grandezza adimensionale ϕ definita dalla (3.40), le (3.49) possono essere riscritte come segue:

$$\begin{aligned}\alpha_{EMF} - \alpha_0 &= \left[n + (n-1) \frac{\phi}{1+e} \right] (\alpha_{LF} - \alpha_0) \\ \delta_{MF} - \delta_0 &= \left[n - (n-1) \frac{\phi}{e} \right] (\delta_{LF} - \delta_0)\end{aligned}\tag{3.50}$$

Sia nel caso di virata corretta che di richiamata si ha $\phi > 0$ per aeroplani con architettura tradizionale ($x_N > x_C$) e $\phi < 0$ per aeroplani canard ($x_N < x_C$).

Capitolo 4

Applicazione al database aerodinamico MB-339CD

4.1 Descrizione del velivolo

L'Aermacchi MB-339CD é un velivolo a getto monomotore biposto da addestramento e da appoggio tattico leggero prodotto dall'Aermacchi (ora AleniaAermacchi S.p.A.). Può essere armato con carichi esterni fino a 2.040 kg, come il pod per mitragliatrici o il cannone cal. 30 mm, i serbatoi ausiliari e i missili aria-aria a guida infrarossa. É inoltre dotato di un'avionica avanzata, di schermi polifunzionali a colori e moderni sistemi di navigazione.

Di seguito si riportano le principali caratteristiche tecniche.

Dimensioni	lunghezza	10.97 m
	apertura alare	10.85 m
	altezza	3.99 m
	superficie alare	19.3 m ²
Peso	peso a vuoto	3330 kg
	peso massimo al decollo (<i>clean</i>)	4950 kg
	peso massimo al decollo (<i>armed</i>)	6350 kg
Propulsione	1 turbogetto	Rolls-Royce Viper 632-43
	Spinta	1815 kg
Prestazioni	velocità / Mach limite	500 KCAS/0.82 M
	Rateo di salita max	6.450 ft/min
	fattore di carico limite	+7.33/-4 g
	corsa di decollo/atterraggio	620 m / 480 m
	autonomia massima	2200 km
	tangenza	13000 m

Tabella 4.1: Caratteristiche tecniche del velivolo MB-339CD.

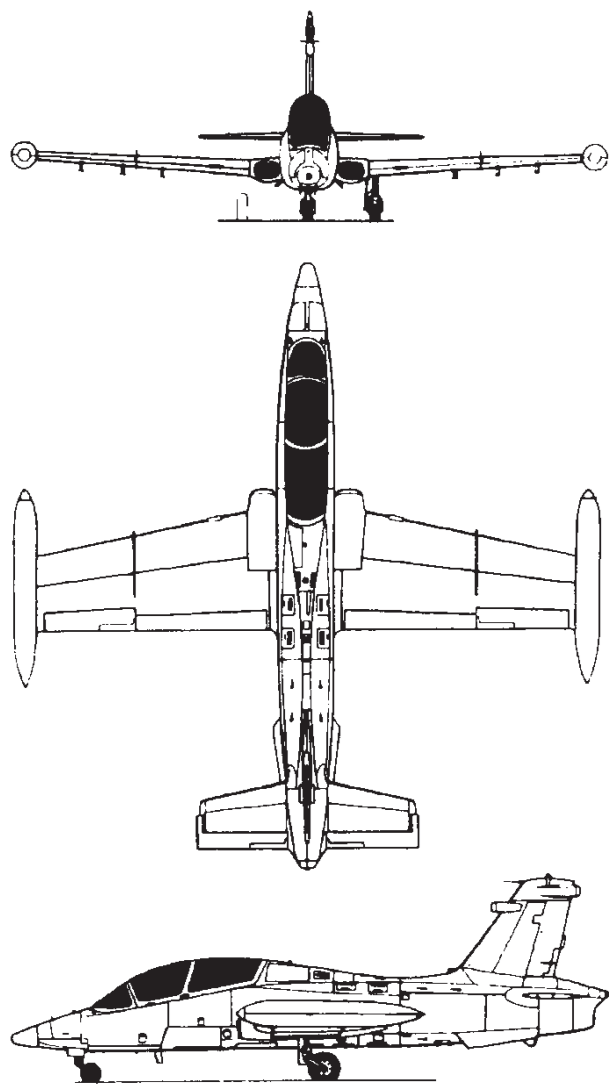


Figura 4.1: Tre viste del velivolo MB-339CD.

Nelle fasi terminali il velivolo MB-339CD utilizza ipersostentatori sul bordo di uscita (*flap*) del tipo *single slotted*, che possono assumere tre posizioni: $\delta_f = 0^\circ$ in configurazione *clean*, $\delta_f = 28^\circ$ in decollo e $\delta_f = 66^\circ$ in atterraggio.

4.2 Descrizione del database aerodinamico

Il database aerodinamico contiene tutte le informazioni previste dai modelli matematici dei coefficienti aerodinamici del velivolo completo e dei coefficienti dei momenti di cerniera delle superfici di controllo.

I dati provengono da:

- database aerodinamici precedenti;
- test in galleria del vento a bassi numeri di Mach, effettuati su un modello di MB-339CD;
- test ad alti numeri di Mach eseguiti su un modello di MB-339A.

I coefficienti aerodinamici e le derivate aerodinamiche sono globali, ovvero riferiti al velivolo completo. Il polo di riferimento é il centro di massa.

Ogni dato del database viene fornito in funzione delle variabili da cui lo stesso dipende. Ogni variabile può essere pensata come il vettore dei punti in cui il dato aerodinamico é stato valutato.

Se un generico dato dipende da una sola variabile, sarà chiaramente rappresentabile come un vettore di lunghezza pari a quella della variabile da cui lo stesso dipende. É il caso, ad esempio, della derivata del coefficiente di momento di cerniera rispetto la deflessione dell'equilibratore C_{h/δ_e} , che nel database viene fornito soltanto in funzione del numero di Mach; in particolare si hanno dieci valori di C_{h/δ_e} in corrispondenza di dieci numeri di Mach.

Se, invece, il dato dipende da due variabili, di lunghezza m e n , risulta evidente che lo stesso sarà rappresentabile attraverso una matrice di dimensioni $m \times n$. É il caso dei coefficienti di portanza, di momento e di resistenza, forniti in funzione dell'angolo di incidenza e del numero di Mach. Si sottolinea, tuttavia, che coefficienti dipendenti dalle stesse variabili possono avere dimensioni diverse, poiché i dati hanno origini diverse. Si prendano ad esempio due coefficienti aerodinamici, entrambi dipendenti dal numero di Mach. Se il primo é stato valutato a $M=0.2$, $M=0.4$ e $M=0.5$, sarà rappresentabile come un vettore 1×3 ; se il secondo é stato valutato a $M=0.2$, $M=0.4$, $M=0.5$ e $M=0.6$, avrà dimensioni 1×4 . Per questo motivo nel database viene attribuito un nome diverso ad ogni insieme di valori dello stesso parametro (numero di Mach, incidenza, quota). Ad esempio si può chiamare Mach1 la variabile corrispondente ai numeri di Mach 0.2, 0.4 e 0.5, mentre si può dare il nome Mach2 all'insieme dei numeri di Mach 0.2, 0.4, 0.5, 0.6.

4.2.1 Formule generali

Di seguito si riportano i modelli matematici dei coefficienti aerodinamici di interesse¹:

$$C_L = C_L^{basic}(\alpha, M) + C_{L/\delta_e}(\alpha, M) \delta_e + C_{L/\hat{q}}(\alpha, M) \frac{q\bar{c}}{2V} + C_{L/\dot{\alpha}}(M) \frac{\dot{\alpha}\bar{c}}{2V} + \Delta C_L^{\delta_a}(\alpha, M, \delta_a) + \Delta C_L^{\tau_a}(M, \tau_a) \quad (4.1)$$

$$C_m = C_m^{basic}(\alpha, M) + C_{m/\delta_e}(\alpha, M) \delta_e + C_{m/\hat{q}}(\alpha, M) \frac{q\bar{c}}{2V} + C_{m/\dot{\alpha}}(M) \frac{\dot{\alpha}\bar{c}}{2V} + \Delta C_m^{\delta_a}(\alpha, M, \delta_a) + \Delta C_m^{\tau_a}(M, \tau_a) + \Delta C_m^{\delta_{AB}}(\alpha, \delta_{AB}) \quad (4.2)$$

$$C_D = C_D^{basic}(\alpha, M) + \Delta C_D^\beta(\alpha, |\beta|) + \Delta C_D^{\delta_a}(\alpha, M, \delta_a) + \Delta C_D^{\delta_{AB}}(\alpha, \delta_{AB}) \quad (4.3)$$

$$C_{h_e} = C_{h_e/\alpha}(M) [\alpha - \varepsilon(\alpha, M) + i^{ht}] + C_{h_e/\delta_e}(M) \delta_e + \Delta C_h^{\tau_e}(M, \delta_e, \tau_e) \quad (4.4)$$

in cui si é indicato²:

- con l'apice *basic* il valore assunto dal coefficiente aerodinamico se tutte le variazioni (dovute a deflessione di superfici di controllo, alette compensatrici, velocità angolare di beccheggio, etc.) sono nulle;
- con \bar{c} la corda media aerodinamica dell'ala;
- con δ_a l'angolo di deflessione degli alettoni;

¹Per ragioni di riservatezza i modelli matematici presentati in questo studio costituiscono una versione ridotta e semplificata rispetto quelli utilizzati dall'azienda costruttrice. Ciò tuttavia non inficia il presente lavoro tenuto conto che vengono comunque presi in esame tutti i coefficienti di interesse per l'analisi della stabilità statica longitudinale, in accordo con le teorie presentate nei precedenti capitoli. Ad esempio, poiché il velivolo viene assunto come rigido, non vengono presi in esame i coefficienti che modellano l'aeroelasticità. Inoltre, laddove non necessario, non viene esplicitato il modello utilizzato per il calcolo di talune variazioni; ad esempio non viene mostrato il metodo di calcolo della variazione del coefficiente di portanza dovuta alle deflessioni degli alettoni.

²Per brevità si riporta solo il significato dei simboli precedentemente non definiti o che potrebbero essere non correttamente interpretati.

- con τ_a l'angolo di deflessione delle alette compensatrici degli alettoni;
- con δ_{AB} l'angolo di deflessione dell'aerofreno;
- con β l'angolo di deriva (*sideslip*);
- con τ_e l'angolo di deflessione delle alette compensatrici degli equilibratori;

4.2.2 Correzione per l'ipersostentazione e l'effetto suolo

I coefficienti di portanza, di momento e di resistenza possono essere corretti nel caso di ipersostentazione, di effetto suolo (*ground effect*, GE) e di estrazione del carrello di atterraggio (*landing gear*, LG):

$$\begin{aligned}\Delta C_L^{flap} &= \Delta C_L^{flap}(\alpha, \delta_f) \\ \Delta C_L^{GE} &= \Delta C_L^{GE}(\alpha, \delta_f) K_{GE}(z)\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}\Delta C_m^{flap} &= \Delta C_m^{flap}(\alpha, \delta_f) K_\varepsilon(\alpha, \delta_f) \\ \Delta C_m^{GE} &= \Delta C_m^{GE}(\alpha, \delta_f) K_{GE}(z) \\ \Delta C_m^{LG} &= \Delta C_m^{LG}(\alpha)\end{aligned}\quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\Delta C_D^{flap} &= \Delta C_D^{flap}(\alpha, \delta_f) \\ \Delta C_D^{GE} &= \Delta C_D^{GE}(\alpha, \delta_f) K_{GE}(z) \\ \Delta C_D^{LG} &= \Delta C_D^{LG}(\alpha, \delta_f)\end{aligned}\quad (4.7)$$

dove si é indicato:

- con K_{GE} un fattore di effetto suolo dipendente dalla quota z sulla pista;
- con K_ε il fattore di attenuazione del *downwash*.

Si noti che il modello matematico non prevede variazioni del coefficiente di portanza in caso di estrazione del carrello di atterraggio.

4.3 Elaborazione dei dati.

In questo paragrafo vengono illustrati i risultati ottenuti dall'elaborazione dei dati, rappresentando che tutti i valori adimensionali, per ragioni di riservatezza, sono stati moltiplicati per un fattore che non viene dichiarato nel presente lavoro.

4.3.1 Volo rettilineo uniforme - Comandi bloccati

Dati disponibili e determinazione del punto neutro

Ai fini della determinazione del punto neutro a comandi bloccati, la banca dati aerodinamica contiene i dati relativi al C_L , C_D e C_m .

Spesso, negli sviluppi teorici della Meccanica del Volo, per incidenze lontane dal valore di stallo, si assume che le forze aerodinamiche dipendano sostanzialmente linearmente dall'angolo d'incidenza e dalla deflessione dell'equilibratore. Tuttavia, esaminando il database dello MB-339CD, si osserva che questa dipendenza è più complessa, con curve significativamente non lineari anche a basse incidenze e bassi numeri di Mach.

Inoltre, il database non contiene funzioni continue dei coefficienti aerodinamici, ma dati discreti valutati ad intervalli non sempre regolari dei valori delle variabili. L'interpolazione, ad esempio mediante *splines*, di queste curve comporta errori potenzialmente significativi per i valori dei coefficienti negli intervalli tra i valori dati, e delle loro derivate, per cui si è optato per delle approssimazioni di tipo globale, di tipo polinomiale. L'errore di approssimazione ϵ_{int} è pari alla differenza tra il valore presente nel database x e quello approssimato x^* ($\epsilon_{int} = x - x^*$). Le figure da 4.2 a 4.7 mostrano per i coefficienti C_L , C_m e C_D , a $M=0.2$ e $M=0.5$, gli errori di approssimazione lineare³, quadratica e cubica, nell'intervallo di incidenze $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$ che, d'ora in avanti, sarà quello di riferimento poiché di maggior interesse in questo studio.

³Per ovvie ragioni relativamente al C_D non è stata effettuata l'approssimazione lineare.

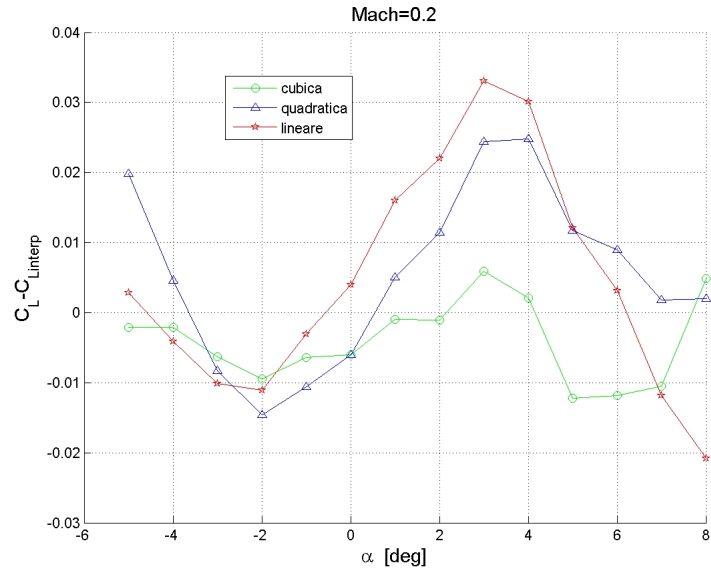


Figura 4.2: Errore di approssimazione per C_L , $M=0.2$.

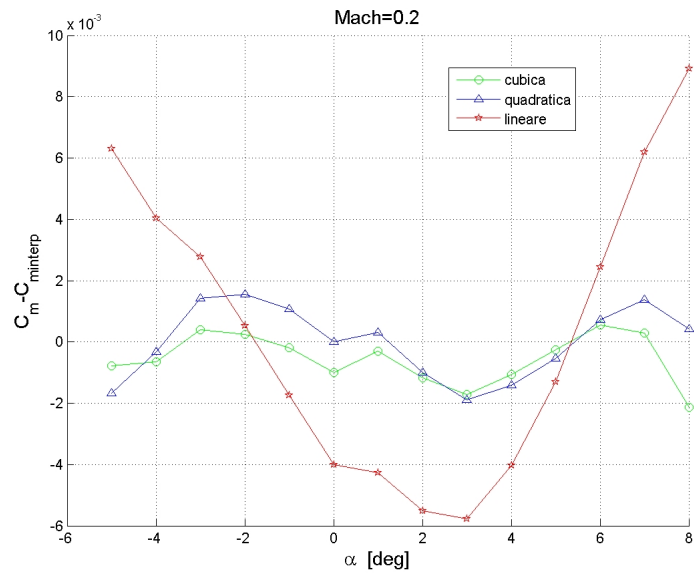


Figura 4.3: Errore di approssimazione per C_m , $M=0.2$.

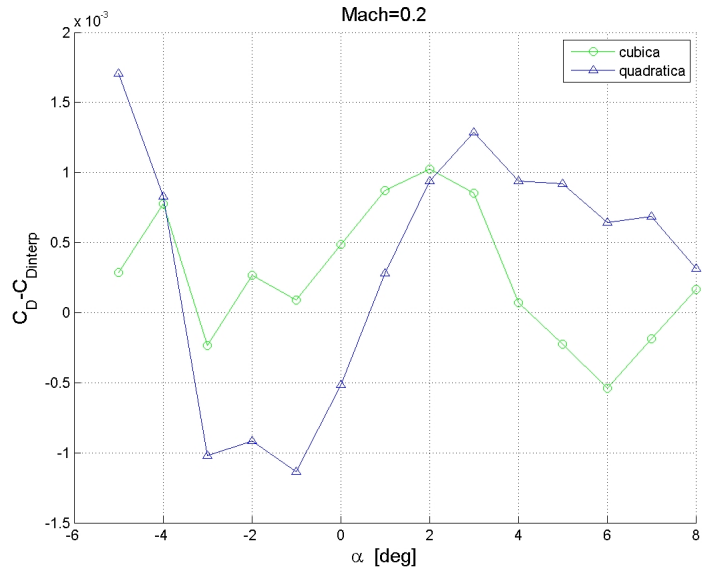


Figura 4.4: Errore di approssimazione per C_D , $M=0.2$.

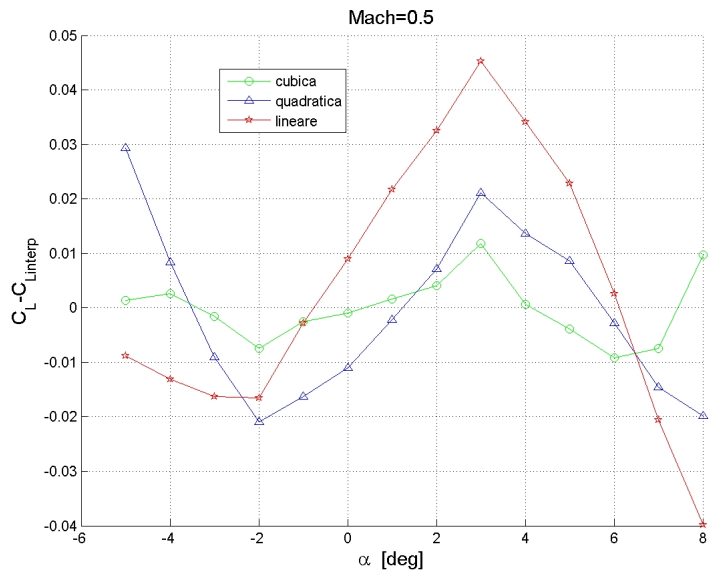


Figura 4.5: Errore di approssimazione per C_L , $M=0.5$.

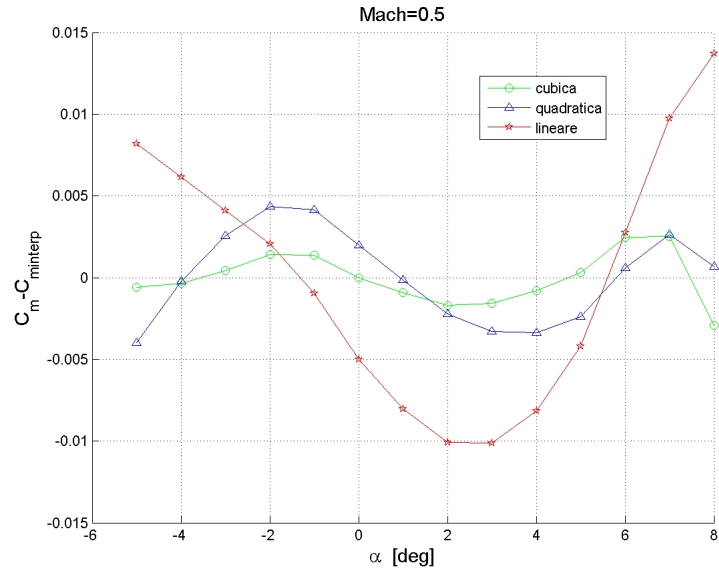


Figura 4.6: Errore di approssimazione per C_m , $M=0.5$.

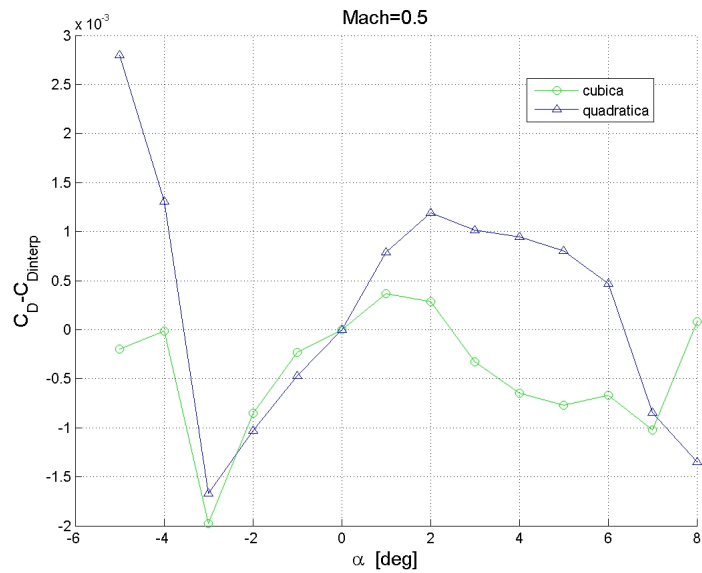


Figura 4.7: Errore di approssimazione per C_D , $M=0.5$.

Per avere un'idea piú precisa di quanto l'approssimazione lineare si discosti dai dati del database aerodinamico e dai risultati ottenibili utilizzando polinomi approssimanti di ordine superiore, si possono confrontare i valori assoluti degli errori massimi $\max(|\epsilon_{int}|)$ (tabelle 4.2 e 4.3).

	<i>lineare</i>	<i>quadratica</i>	<i>cubica</i>
C_L	0.033	0.025	0.012
C_m	0.0089	0.0019	0.0021
C_D	//	0.0017	0.001

Tabella 4.2: Valori di $\max(|\epsilon_{int}|)$ al variare del tipo di approssimazione, $M=0.2$.

	<i>lineare</i>	<i>quadratica</i>	<i>cubica</i>
C_L	0.045	0.029	0.012
C_m	0.0137	0.0043	0.0029
C_D	//	0.0028	0.0020

Tabella 4.3: Valori di $\max(|\epsilon_{int}|)$ al variare del tipo di approssimazione, $M=0.5$.

Dalla tabella 4.3 si nota che l'errore massimo dovuto all'approssimazione lineare di C_m é quasi cinque volte quello dell'approssimazione cubica. Ciononostante nulla si può dire a priori sugli effetti che le differenti approssimazioni (lineari, quadratiche o cubiche) producono sulla determinazione del punto neutro, se non che, nel caso di aerodinamica non lineare, dipende dall'incidenza e, conseguentemente, si muove lungo l'asse di rollio⁴. Con l'elaborazione dei dati si valuterá se i movimenti del punto neutro al variare dell'incidenza siano o meno ingegneristicamente significativi.

A tal fine, si considerino le relazioni (2.80) e (2.93) per calcolare il punto neutro che, per comoditá si riportano di seguito:

$$\xi_N - \xi_G = \frac{C_{mG/\alpha}}{(C_{D/\alpha} \sin \alpha + C_D \cos \alpha + C_{L/\alpha} \cos \alpha - C_L \sin \alpha)}$$

$$\xi_{\bar{N}} - \xi_G = \frac{C_{mG/\alpha}}{C_{L/\alpha}}$$

Come visto nel capitolo 2 la (2.80) ha valore generale, mentre la (2.93) é valida nel caso di incidenze moderate ed efficienze aerodinamiche medie o elevate.

⁴In accordo con la teoria classica e con la teoria semplificata, il punto neutro giace lungo l'asse longitudinale, assumendo, quindi, che la sua quota sia paria a zero.

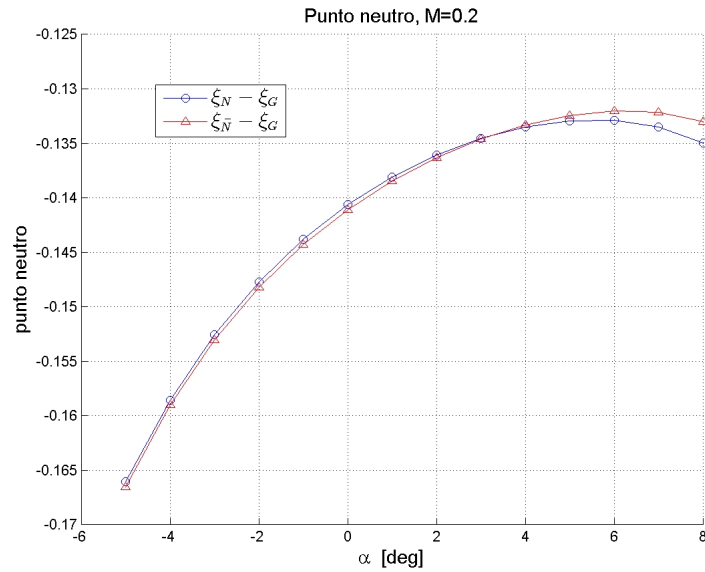


Figura 4.8: Punto neutro adimensionale a $M = 0.2$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$, determinato mediante approssimazione cubica dei coefficienti aerodinamici.

Approssimando C_L , C_m e C_D con polinomi di terzo grado, i risultati ottenuti utilizzando la (2.80) e la (2.93), sono praticamente coincidenti (figure 4.8 e 4.9).

Ora ci si chiede come varia la posizione del punto neutro se l'aerodinamica viene approssimata linearmente. A tal proposito si vedano le figure 4.10 e 4.11 in cui il punto neutro è stato determinato con la (2.93), ma utilizzando due diverse approssimazioni, lineare e cubica.

Benché le due curve siano totalmente differenti, il massimo scostamento tra i risultati è molto contenuto (figure 4.12 e 4.13).

Applicando il database aerodinamico alla formulazione estesa di Phillips, Alley e Niewoehner, i risultati evidenziano che per piccole incidenze lo spostamento dell'ascissa del centro aerodinamico è molto contenuto, a differenza dell'ordinata che varia notevolmente (figure 4.14 e 4.15).

Nelle figure da 4.16 a 4.19 si confrontano i risultati ottenuti con la teoria semplificata con quelli della teoria estesa. Per basse incidenze le differenze tra il punto neutro determinato secondo la teoria semplificata e il punto neutro determinato con la teoria estesa sono molto ridotte (figure 4.18 e 4.19).

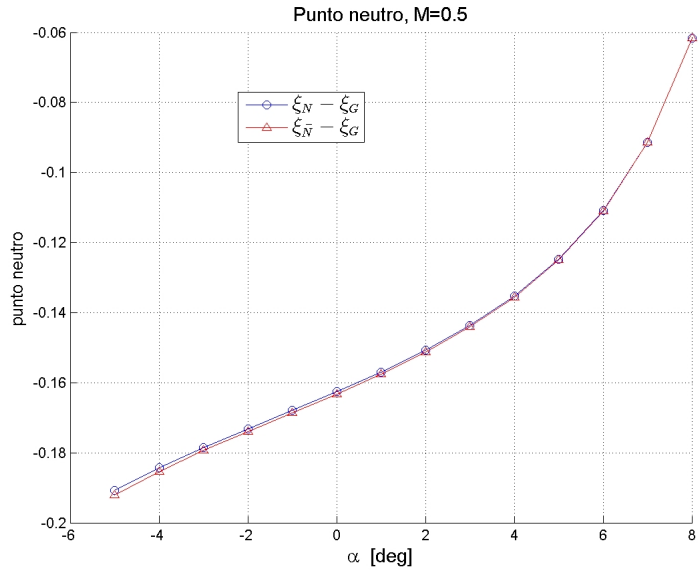


Figura 4.9: Punto neutro adimensionale a $M = 0.5$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$, determinato mediante approssimazione cubica dei coefficienti aerodinamici.

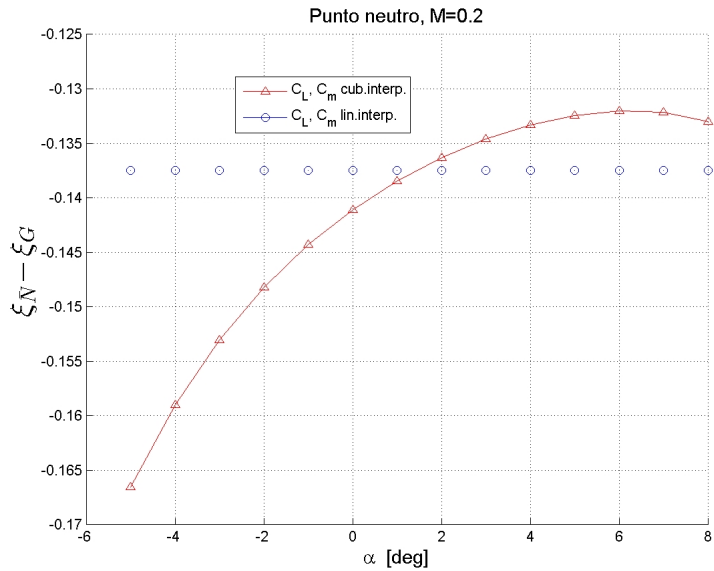


Figura 4.10: Teoria semplificata. Punto neutro adimensionale determinato mediante approssimazione cubica e lineare dei coefficienti aerodinamici, a $M = 0.2$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$.

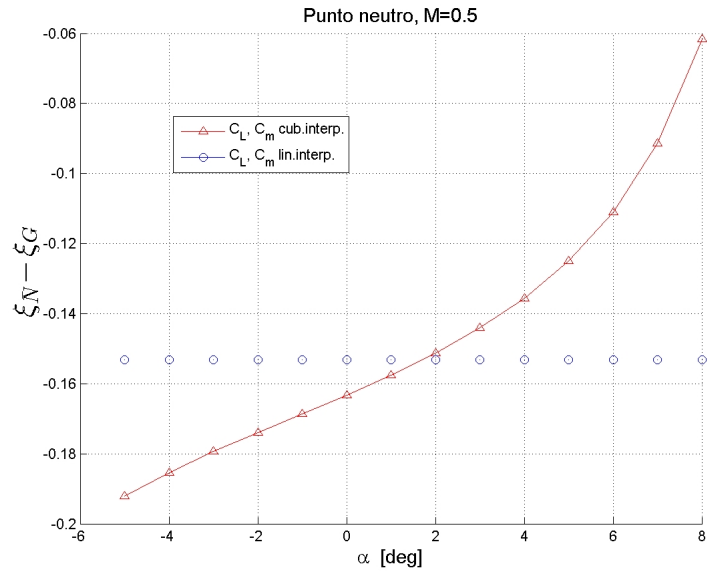


Figura 4.11: Teoria semplificata. Punto neutro adimensionale determinato mediante approssimazione cubica e lineare dei coefficienti aerodinamici, a $M = 0.5$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$.

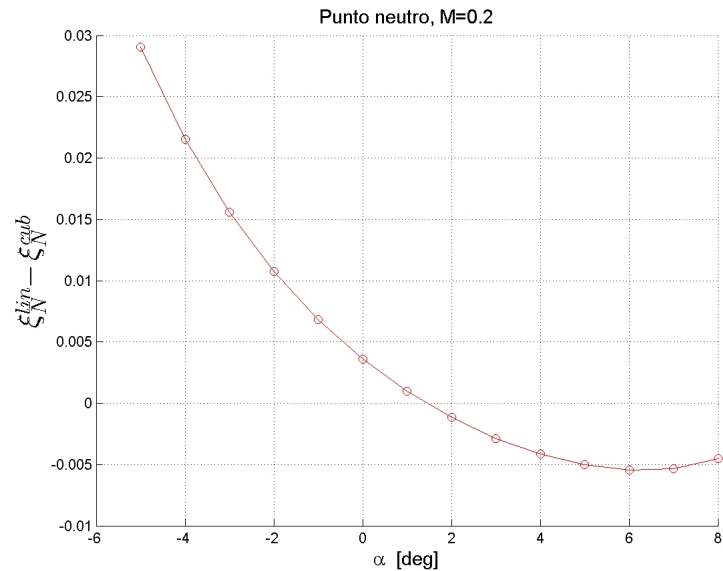


Figura 4.12: Teoria semplificata. Errore dovuto all'approssimazione lineare rispetto a quella cubica nella determinazione del punto neutro a $M = 0.2$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$.

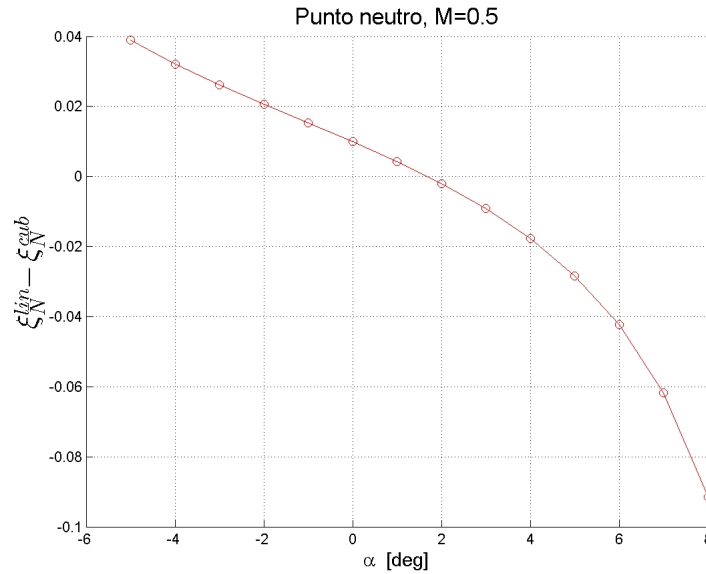


Figura 4.13: Teoria semplificata. Errore dovuto all'approssimazione lineare rispetto a quella cubica nella determinazione del punto neutro a $M = 0.5$ nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$.

Dati disponibili e determinazione del punto di controllo

La banca dati aerodinamica contiene i dati relativi a C_{L/δ_e} e C_{m/δ_e} . Per il calcolo del punto di controllo si possono utilizzare le relazioni (2.85) e (2.98), che vengono riportate di seguito per comodità:

$$\xi_C - \xi_G = \frac{C_{m_G/\delta_e}}{(C_{D/\delta_e} \sin \alpha + C_{L/\delta_e} \cos \alpha)}$$

$$\xi_{\bar{C}} - \xi_G = \frac{C_{m_G/\delta_e}}{C_{L/\delta_e}}$$

Poiché la banca dati aerodinamica non contiene i dati relativi alla derivata C_{D/δ_e} , si assumerà che questa sia trascurabile.

Si noti che C_{L/δ_e} e C_{m/δ_e} dipendono sia dall'incidenza che dal numero di Mach, pertanto il punto di controllo dipende da entrambi questi parametri.

I risultati, relativi alle condizioni di volo a Mach=0.2 e Mach=0.5, sono riportati rispettivamente nelle figure 4.20 e 4.21. Si nota che solo per piccoli intervalli di incidenza gli spostamenti del punto di controllo sono molto limitati.

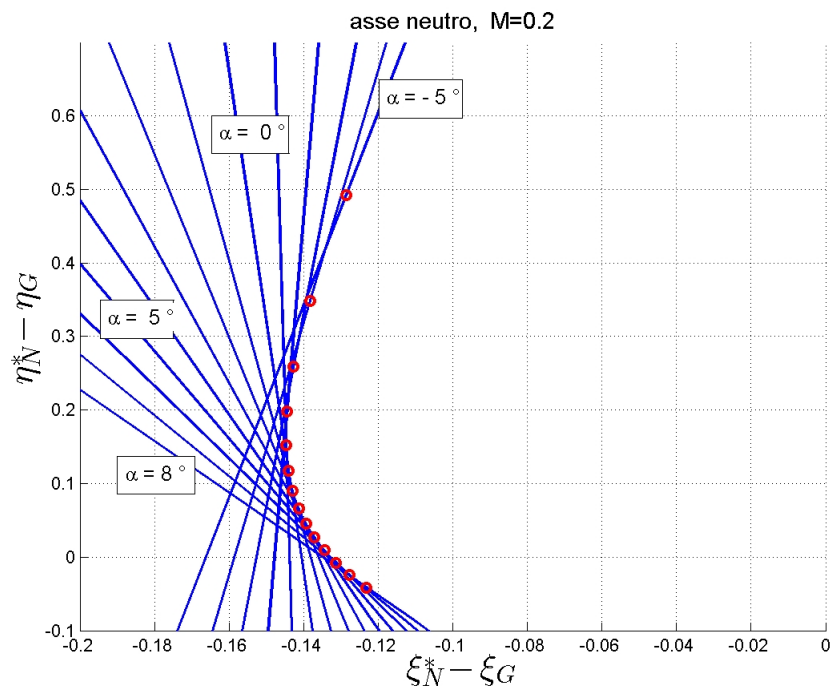


Figura 4.14: Asse neutro e coordinate del centro aerodinamico del velivolo secondo la teoria di Phillips, Alley e Niewoehner, $M=0.2$.

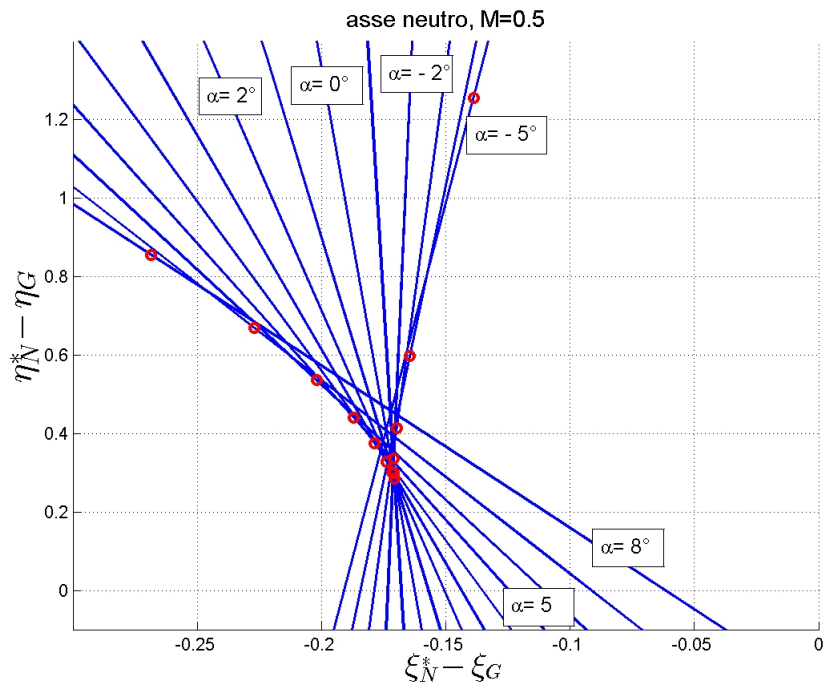


Figura 4.15: Asse neutro e coordinate del centro aerodinamico del velivolo secondo la teoria di Phillips, Alley e Niewoehner, $M=0.5$.

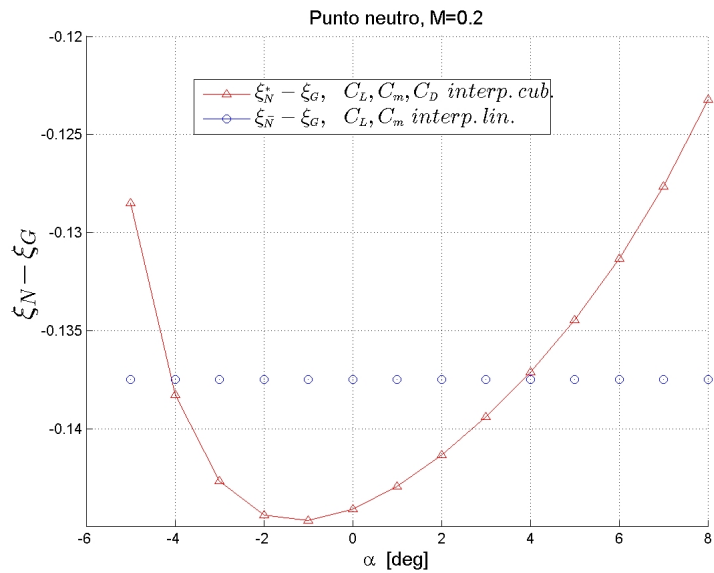


Figura 4.16: Punto neutro secondo la teoria semplificata e la teoria estesa, $M=0.2$.

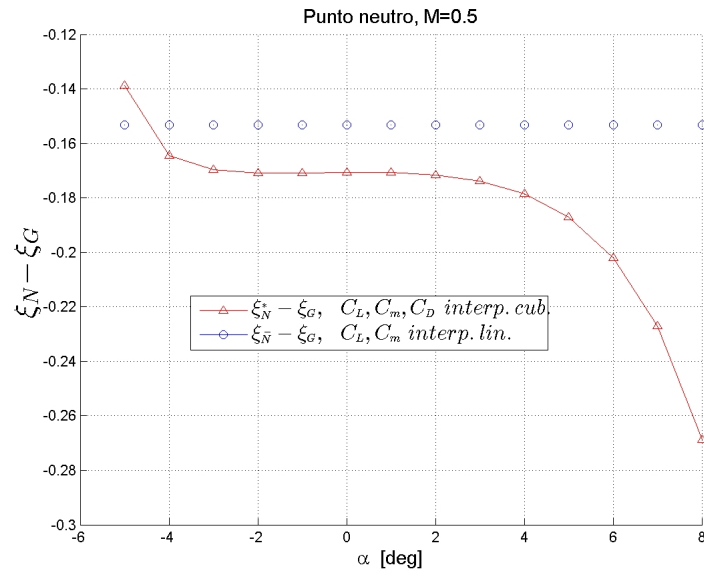


Figura 4.17: Punto neutro secondo la teoria semplificata e la teoria estesa, M=0.5.

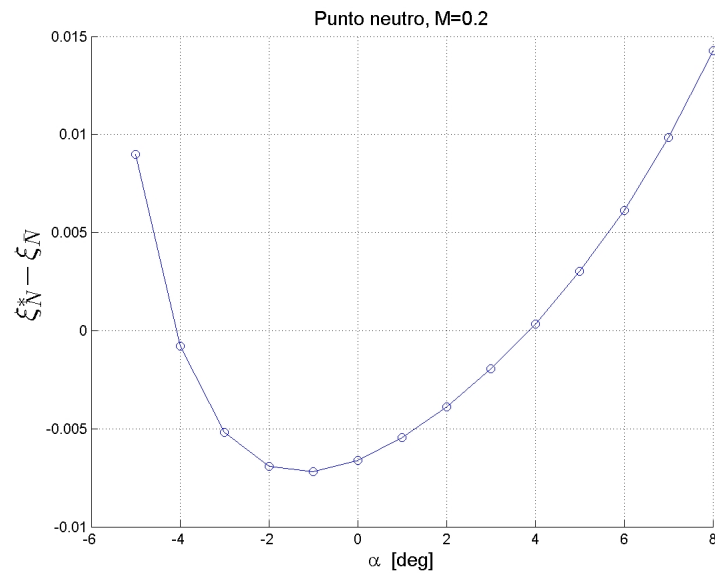


Figura 4.18: Distanza tra i punti neutri ricavati secondo la teoria semplificata e la teoria estesa, M=0.2.

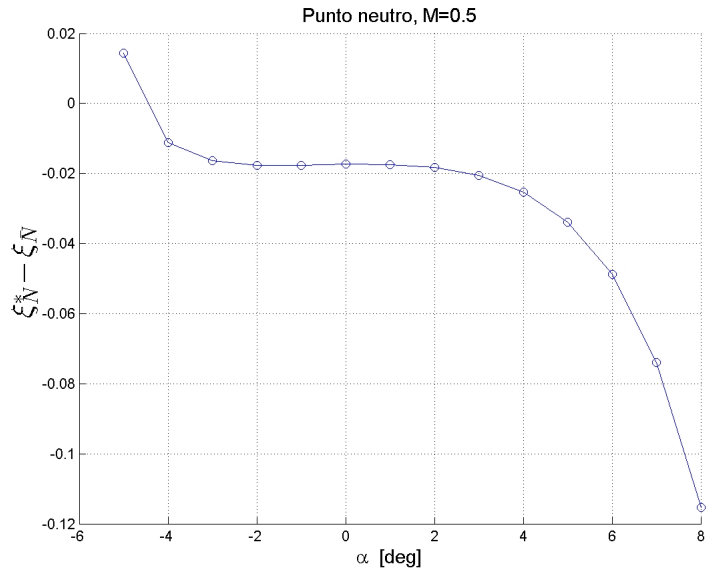


Figura 4.19: Distanza tra i punti neutri ricavati secondo la teoria semplificata e la teoria estesa, $M=0.5$.

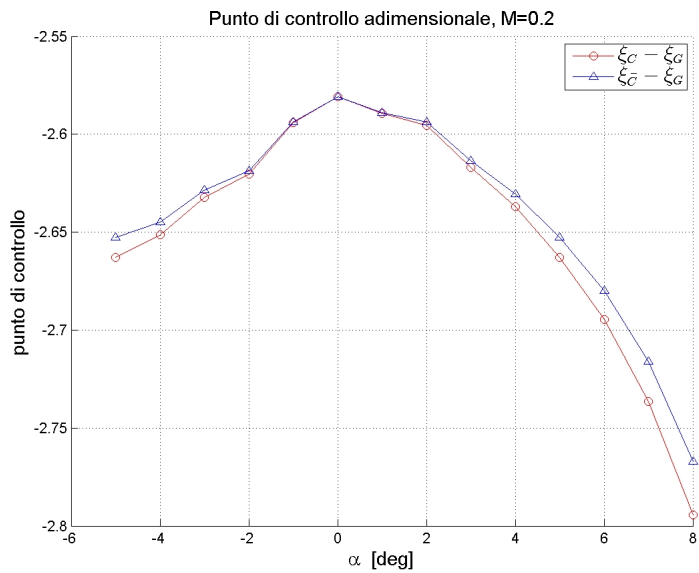


Figura 4.20: Punto di controllo adimensionale, $M=0.2$.

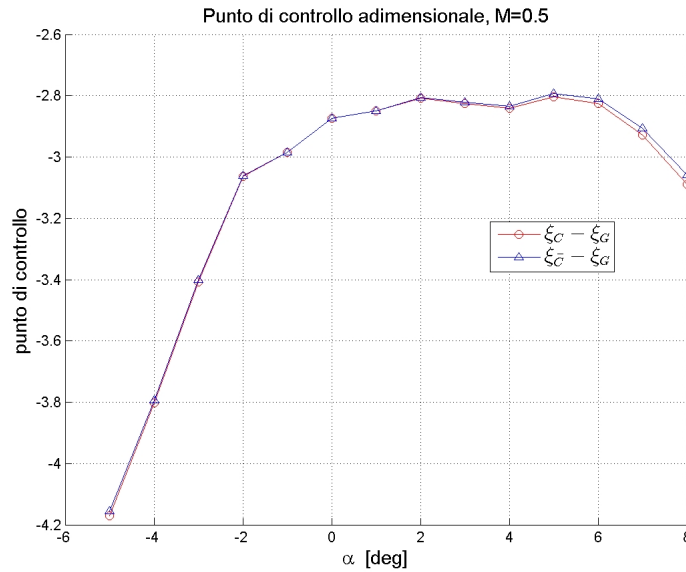


Figura 4.21: Punto di controllo adimensionale, M=0.5.

4.3.2 Volo rettilineo uniforme - Comandi liberi

La relazione per calcolare il punto neutro adimensionale a comandi liberi si ottiene combinando le (2.131), (2.132) e (2.133):

$$\xi_{\bar{N}'} - \xi_G = \frac{C_{m_G/\alpha} - \frac{C_{h_e/\alpha}}{C_{h_e/\delta_e}} C_{m_G/\delta_e}}{C_{L/\alpha} - \frac{C_{h_e/\alpha}}{C_{h_e/\delta_e}} C_{L/\delta_e}} \quad (4.8)$$

Come si evince dai modelli matematici del coefficiente di portanza (4.1) e del coefficiente del momento di cerniera (4.4), la banca dati aerodinamica contiene tutti i termini che compaiono nella (4.8), ad eccezione del $C_{h_e/\alpha}$ che deve essere determinato mediante la (2.119):

$$C_{h_e/\alpha} = C_{h_e/\alpha}(1 - \varepsilon/\alpha)$$

la quale, a sua volta, richiede la conoscenza della derivata dell'angolo di *downwash* rispetto l'incidenza ε/α . Dai dati a disposizione emerge che il *downwash* é con ottima approssimazione lineare nell'intervallo di incidenze di interesse ($-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$), sia a $M = 0.2$ che a $M = 0.5$, ed é pertanto esprimibile nella forma $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon/\alpha$.

Osservando la 4.8 si nota che, anche nel caso in cui si utilizzi un'approssimazione lineare per $C_{L/\alpha}$ e $C_{m/\alpha}$, il punto neutro a comandi liberi N' dipende dall'incidenza attraverso i coefficienti C_{L/δ_e} e C_{m/δ_e} .

Dall'elaborazione dei dati (figura 4.22 e 4.23) emerge, tuttavia, che la dipendenza da α , nell'intervallo di incidenze considerato, é del tutto trascurabile.

I risultati evidenziano, inoltre, che il punto neutro a comandi liberi é molto vicino a quello a comandi bloccati, ma in posizione leggermente piú arretrata. Ciò sembrerebbe inusuale, ma é dovuto al fatto che per questo velivolo il $C_{h/\alpha}$ é positivo anziché negativo, come invece accade nella maggioranza dei casi. Ad ogni modo la differenza tra i due punti é così piccola da potersi ritenere ingegneristicamente trascurabile.

Ciò é confermato anche dal *free elevator factor* k che, in termini di coefficienti, si scrive:

$$k = 1 - \frac{C_{L/\delta_e} C_{h/\alpha}}{C_{L/\alpha} C_{h/\delta_e}} \quad (4.9)$$

e che assume valori medi⁵ k^* positivi ma vicini all'unitá (tabella 4.4).

	k^*
$M = 0.2$	1.0025
$M = 0.5$	1.0020

Tabella 4.4: Valori medi del *free elevator factor*.

Infine, come nel caso a comandi bloccati, anche in quello a comandi liberi il punto neutro arretra all'aumentare del numero di Mach (figura 4.24).

Determinazione del punto di controllo a comandi liberi

La coincidenza del punto di controllo a comandi bloccati con quello a comandi liberi, discussa al paragrafo 2.4.2, puó essere verificata solo analiticamente poiché la banca dati aerodinamica non contiene le misure dirette di $M'_{G/H}$ e $L'_{/H}$, i quali sono determinabili solo dalle definizioni (2.127) e (2.128) utilizzando i dati relativi a C_{L/δ_e} , C_{m_G/δ_e} e C_{h/δ_e} .

4.3.3 Manovra simmetrica

Punto di incidenza equivalente

Dalla (3.29) si ricava la relazione per determinare la distanza del punto di incidenza equivalente dal baricentro:

$$x_E - x_G = -\frac{[L/q]_G}{L/\alpha} V \quad (4.10)$$

⁵Come risulta evidente dalla (4.9), k dipende dall'incidenza attraverso dal C_{L/δ_e} .

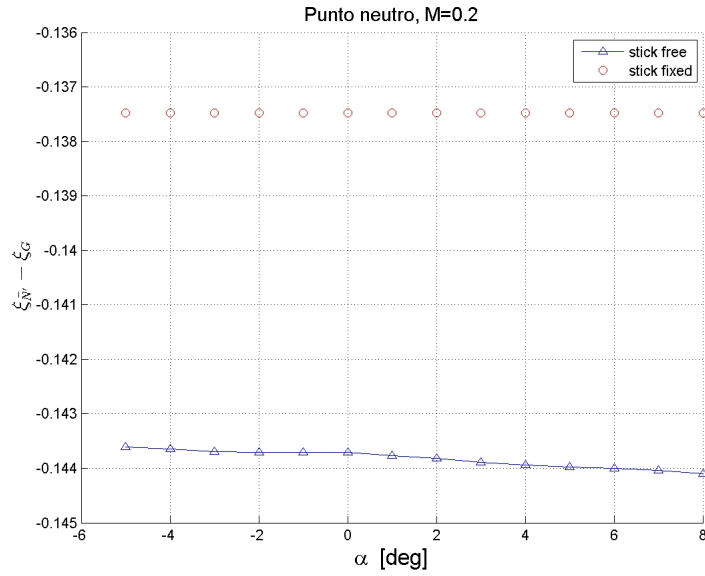


Figura 4.22: Punto neutro a comandi liberi e a comandi bloccati a $M = 0.2$.

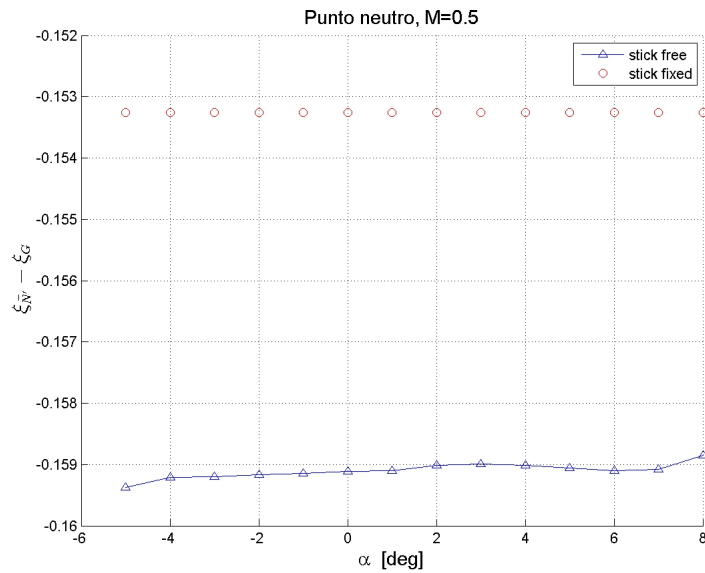


Figura 4.23: Punto neutro a comandi liberi e a comandi bloccati a $M = 0.5$.

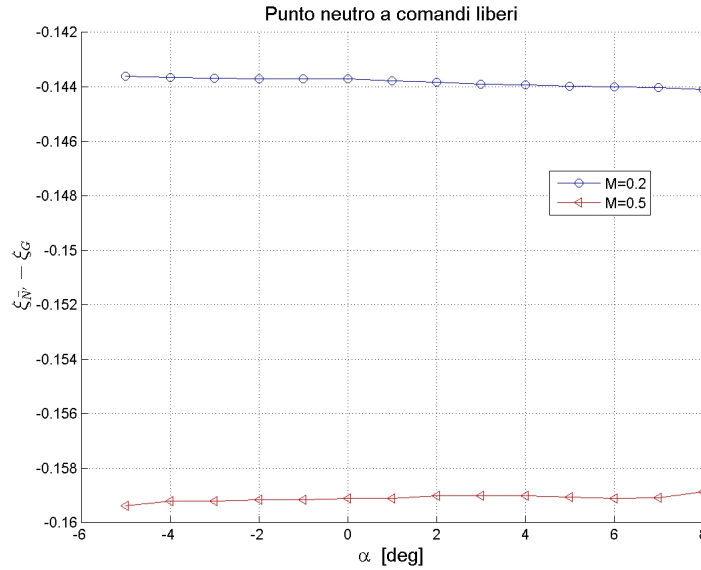


Figura 4.24: Punto neutro adimensionale a comandi liberi a $M = 0.2$ e $M = 0.5$.

La banca dati aerodinamica contiene i dati relativi al $C_{L/\alpha}$ e $[C_{L/\hat{q}}]_G$. Per snellire la notazione, d'ora in avanti si ometterá il simbolo $[]_G$ che, si ricorda, indica il punto in cui l'incidenza viene misurata.

Considerato che:

$$C_{L/\hat{q}} = \frac{\partial C_L}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial C_L}{\partial (\frac{q\bar{c}}{2V})} = \frac{2V}{\bar{c}} C_{L/q} \quad (4.11)$$

per calcolare la posizione del punto E bisognerà utilizzare la seguente relazione:

$$x_E - x_G = -\frac{L/\hat{q}(\frac{\bar{c}}{2V})}{L/\alpha} V = -\frac{L/\hat{q}}{2L/\alpha} \bar{c} \quad (4.12)$$

ovvero la seguente formula adimensionale:

$$\xi_E - \xi_G = -\frac{C_{L/\hat{q}}}{2C_{L/\alpha}} \quad (4.13)$$

Poiché per il velivolo MB-339CD il $C_{L/\hat{q}}$ dipende dall'incidenza, ne consegue che anche nel caso in cui venga utilizzata un'approssimazione lineare dell'aerodinamica, E sarà funzione dell'incidenza. Dal confronto dei risultati per $M = 0.2$ e $M = 0.5$ si rileva che, a parità di incidenza, il punto E arretra all'aumentare del numero di Mach (figura 4.25).

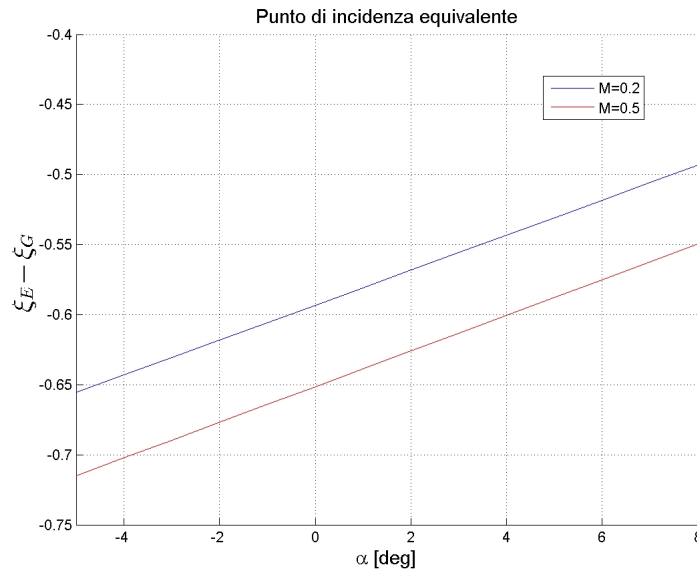


Figura 4.25: Punto di incidenza equivalente adimensionale a $M = 0.2$ e $M = 0.5$, nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$ con approssimazione lineare di $C_{L/\alpha}$ e $C_{L/\hat{q}}$.

Punto di manovra

Il punto di manovra é stato definito dalla (3.37):

$$x_{\bar{M}} - x_{\bar{N}} := \frac{M_{\bar{N}/q}}{(n-1)W} q$$

Poiché la banca dati aerodinamica contiene i dati relativi a $C_{m_G/\hat{q}}$, é necessario trasportare il momento da G a \bar{N} . Dalla definizione di velocità angolare di beccheggio adimensionale si ha:

$$q = \frac{2V}{\bar{c}} \hat{q} \quad (4.14)$$

Il momento di beccheggio rispetto al punto neutro é:

$$M_{\bar{N}} = q_d S \bar{c} C_{m_{\bar{N}}} \quad (4.15)$$

Derivando la (4.15) rispetto a q si ottiene:

$$M_{\bar{N}/q} = \frac{\partial M_{\bar{N}}}{\partial q} = \frac{q_d S \bar{c}}{\frac{2V}{\bar{c}}} \frac{\partial(C_{m_{\bar{N}}})}{\partial \hat{q}} = \frac{q_d S \bar{c}^2}{2V} C_{m_{\bar{N}}/\hat{q}} \quad (4.16)$$

da cui si ricava il legame tra il coefficiente di momento derivato rispetto a q e quello derivato rispetto a \hat{q} :

$$C_{m_{\bar{N}}/q} = \frac{\bar{c}}{2V} C_{m_{\bar{N}}/\hat{q}} \quad (4.17)$$

Manipolando la definizione di punto di manovra (3.37), e tenuto conto della (4.17), si trova:

$$\xi_{\bar{M}} - \xi_{\bar{N}} = \frac{q_d S C_{m_{\bar{N}}/q}}{(n-1)W} q = \frac{q_d S \frac{\bar{c}}{2V} C_{m_{\bar{N}}/\hat{q}}}{(n-1)W} q \quad (4.18)$$

in cui compare la dipendenza da \hat{q} e da q .

Ad incidenze moderate ed efficienze aerodinamiche medio elevate, il trasporto del momento di beccheggio dal centro di massa al punto neutro si esprime come:

$$M_{\bar{N}} = M_G - (x_{\bar{N}} - x_G)L \quad (4.19)$$

che, derivata rispetto \hat{q} , in forma adimensionale diventa:

$$C_{m_{\bar{N}}/\hat{q}} = C_{m_G/\hat{q}} - (\xi_{\bar{N}} - \xi_G) C_{L/\hat{q}} \quad (4.20)$$

Sostituendo la (4.20) nella (4.18) si ha:

$$\boxed{\xi_{\bar{M}} - \xi_{\bar{N}} = \frac{q_d S \bar{c}}{2V(n-1)W} [C_{m_G/\hat{q}} - (\xi_{\bar{N}} - \xi_G) C_{L/\hat{q}}] q} \quad (4.21)$$

Per determinare il punto di controllo in manovra é sufficiente applicare la definizione (3.45):

$$\boxed{\xi_{\bar{B}} - \xi_G := \xi_{\bar{C}} - \xi_G + \xi_{\bar{M}} - \xi_{\bar{N}}} \quad (4.22)$$

Virata corretta

La velocità angolare di beccheggio q nel caso di virata corretta é data dalla (3.15):

$$q_{turn} = \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) \frac{g}{V}$$

che, può essere sostituita nella (4.18):

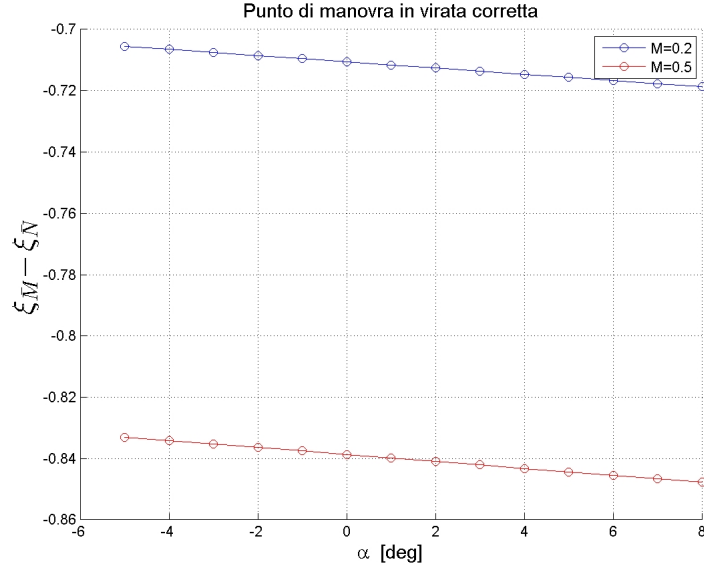


Figura 4.26: Punto di manovra adimensionale in virata corretta, con $\Phi = 15^\circ$, $z = 0$, $W = 3850 \text{ kg}_f$.

$$\begin{aligned}
 \xi_{\bar{M}} - \xi_{\bar{N}} &= \frac{q_d S \bar{c} C_{m_{\bar{N}}/\hat{q}}}{2V(n-1)W} \frac{n^2 - 1}{n} \frac{g}{V} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S \bar{c} C_{m_{\bar{N}}/\hat{q}}}{2V^2(n-1)W} \frac{n^2 - 1}{n} g \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\rho S \bar{c}}{W} g C_{m_{\bar{N}}/\hat{q}} \left(\frac{n+1}{n} \right)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Infine, utilizzando la (4.20), si giunge alla seguente espressione per la determinazione del punto di manovra adimensionale nel caso di virata corretta:

$$\boxed{(\xi_{\bar{M}} - \xi_{\bar{N}})_{turn} = \frac{1}{4} \frac{\rho}{W} S \bar{c} g \left(\frac{n+1}{n} \right) [C_{m_G/\hat{q}} - (\xi_{\bar{N}} - \xi_G) C_{L/\hat{q}}]} \tag{4.24}$$

I risultati hanno dimostrato (figura 4.26) che la dipendenza del punto di manovra dall'incidenza é del tutto trascurabile. All'aumentare del numero di Mach si assiste ad un allontanamento del punto di manovra dal punto neutro. Nelle figure 4.27 e 4.28 si mostra l'avanzamento del punto di manovra all'aumentare dell'angolo di bank Φ ed della quota z .

Infine, nelle figure 4.29 e 4.30 si riportano i risultati relativi al punto di controllo in virata corretta.

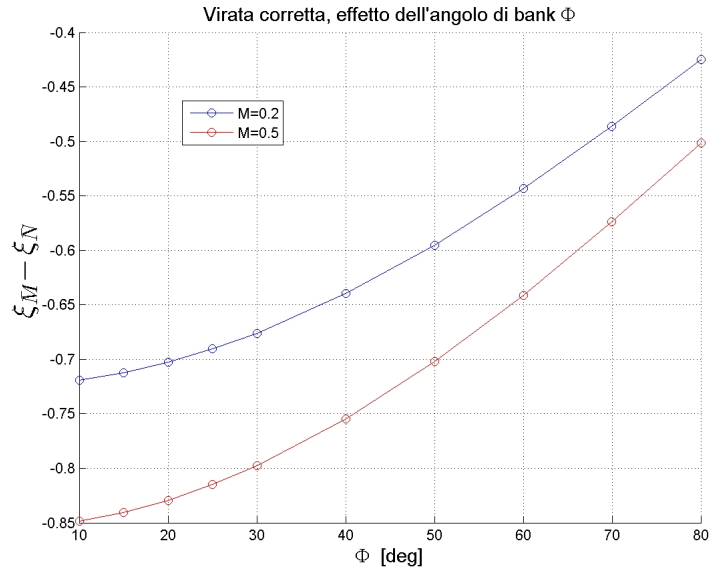


Figura 4.27: Punto di manovra in virata corretta al variare dell'angolo di bank Φ .

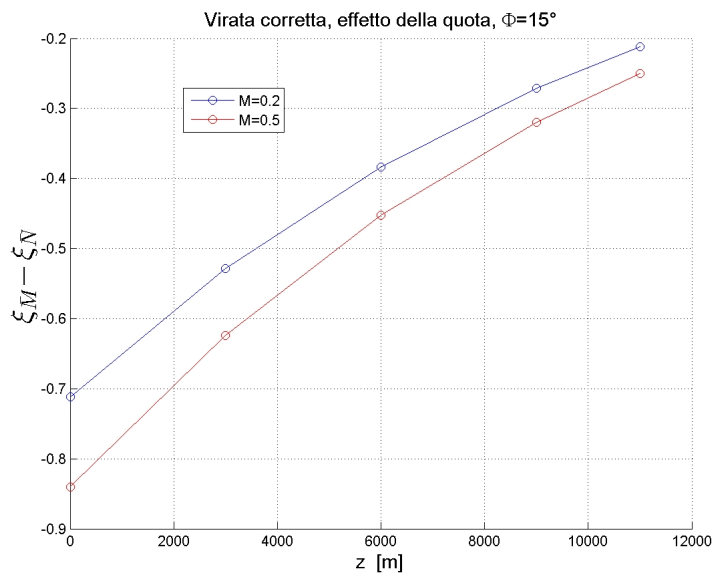


Figura 4.28: Punto di manovra in virata corretta con $\Phi = 15^\circ$ al variare della quota z .

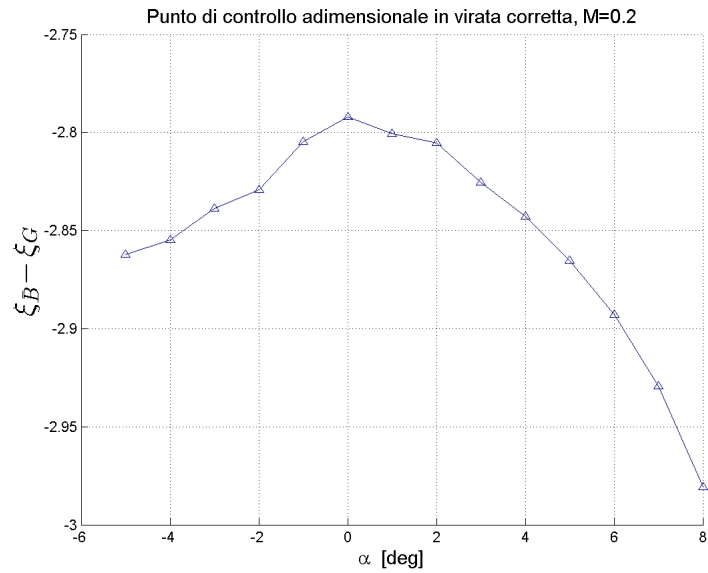


Figura 4.29: Punto di controllo adimensionale in virata corretta, $M = 0.2$.

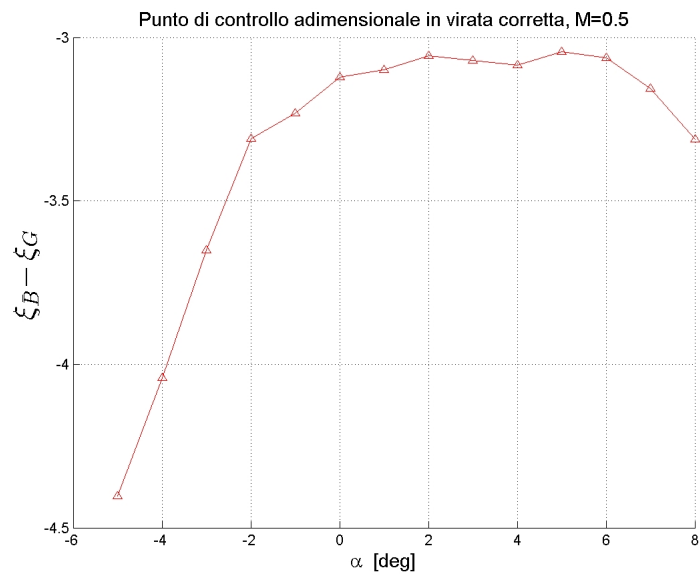


Figura 4.30: Punto di controllo adimensionale in virata corretta, $M = 0.5$.

Richiamata

La velocità angolare di beccheggio q nel caso di richiamata é espressa dalla (3.3):

$$q_{pull-up} = (n - 1) \frac{g}{V}$$

che, sostituita nella (4.18) porta a scrivere:

$$(\xi_{\bar{M}} - \xi_{\bar{N}})_{pull-up} = \frac{q_d S \bar{c} C_{m_{\bar{N}/\dot{q}}}}{2W} \frac{g}{V^2} \quad (4.25)$$

Esplicitando l'espressione della pressione dinamica q_d ed utilizzando la (4.20), si ottiene la posizione adimensionale del punto di manovra nel caso di richiamata stazionaria:

$$\boxed{(\xi_{\bar{M}} - \xi_{\bar{N}})_{pull-up} = \frac{1}{4} \frac{\rho}{W} S \bar{c} g [C_{m_{G/\dot{q}}} - (\xi_{\bar{N}} - \xi_G) C_{L/\dot{q}}]} \quad (4.26)$$

La (4.26) mette in evidenza che il punto di manovra in richiamata non dipende dal fattore di carico.

Analogamente al punto di manovra in virata corretta, il punto di manovra in richiamata può ritenersi un punto fisso del velivolo, essendo trascurabile la dipendenza dall'incidenza (figura 4.31), arretra all'aumentare del numero di Mach ed avanza all'aumentare della quota (figura 4.32). Nelle figure 4.33 e 4.34 si riportano i risultati relativi al punto di controllo in richiamata.

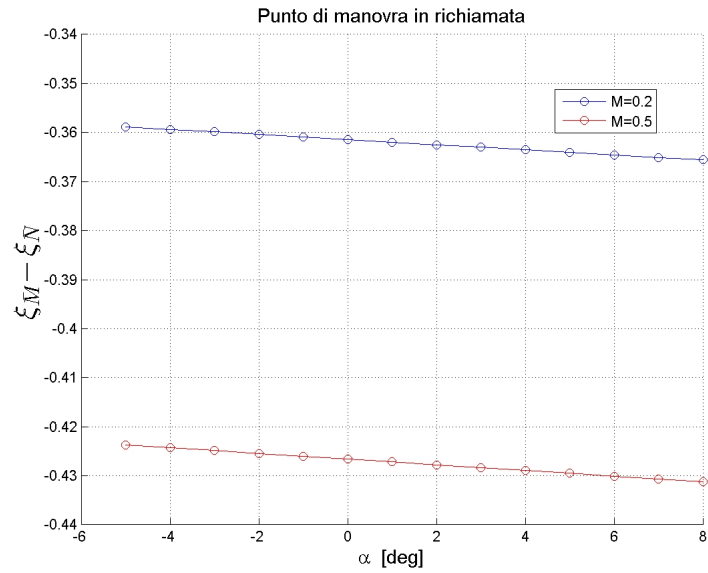


Figura 4.31: Punto di manovra adimensionale in richiamata a quota zero.

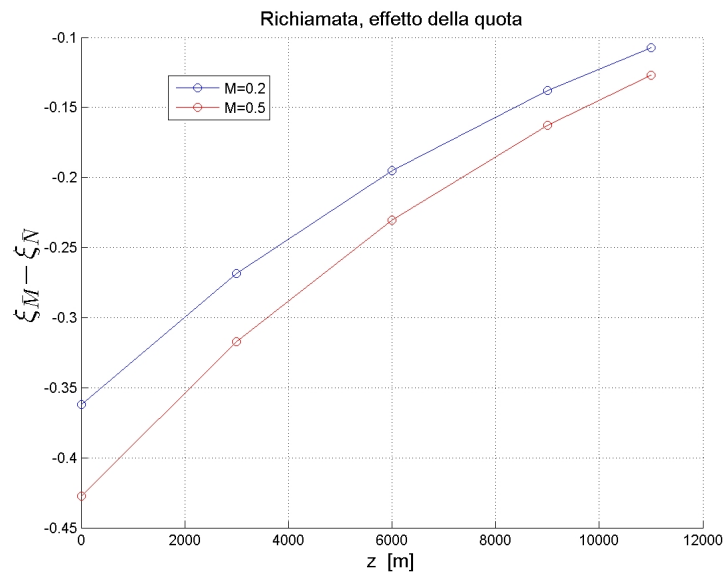


Figura 4.32: Punto di manovra in richiamata al variare della quota z .

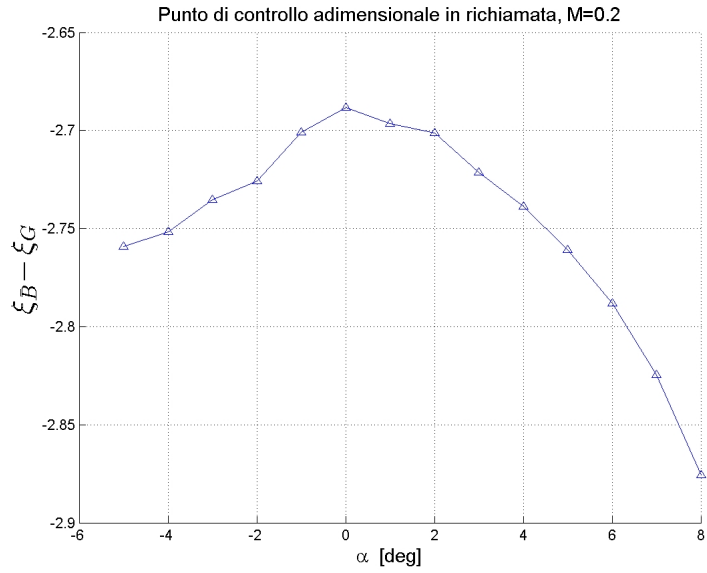


Figura 4.33: Punto di controllo adimensionale in richiamata, $M = 0.2$.

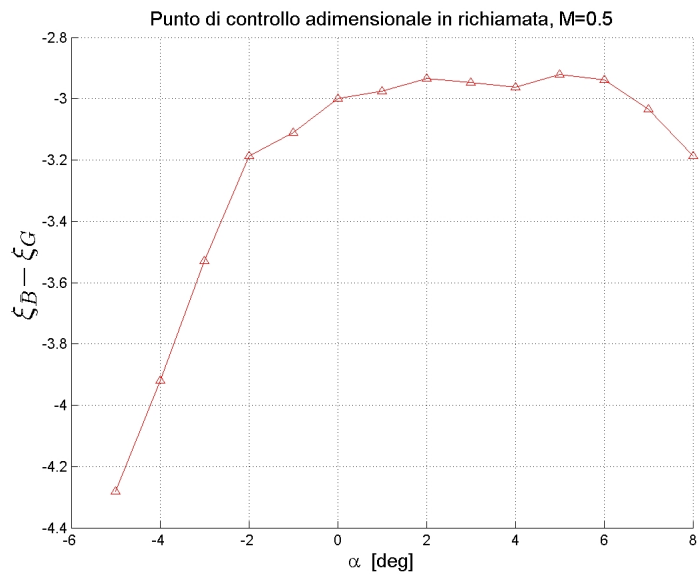


Figura 4.34: Punto di controllo adimensionale in richiamata, $M = 0.5$.

4.3.4 Volò rettilineo in condizioni terminali

In questo paragrafo vengono illustrati i risultati relativi al calcolo del centro aerodinamico del velivolo nelle configurazioni *take off* ($\delta_f = 28^\circ$) e *landing* ($\delta_f = 66^\circ$), prendendo in esame anche le variazioni dei coefficienti aerodinamici legate al cosiddetto effetto suolo⁶ ed alla presenza del carrello d'atterraggio a Mach=0.2 e quota zero.

In particolare sono stati studiati i seguenti casi:

- configurazione di decollo/atterraggio in assenza di effetto suolo e carrello retratto;
- configurazione di decollo/atterraggio in condizioni di effetto suolo e carrello retratto;
- configurazione di decollo/atterraggio in condizioni di effetto suolo e carrello esteso.

Il punto neutro é stato determinato sia mediante le relazioni (2.80) e (2.93) relative alla teoria semplificata, sia mediante la (2.57) della teoria estesa di Phillips, Alley e Niewoehner. Per l'applicazione della (2.80) e della (2.57) i coefficienti C_L , C_m e C_D sono stati approssimati con polinomi di terzo grado, mentre per la (2.93) é stata utilizzata sia un'approssimazione cubica, sia lineare.

L'intervallo di incidenze preso in esame é $-5^\circ \leq \alpha \leq 5^\circ$ in assenza di effetto suolo, mentre é di $-1^\circ \leq \alpha \leq 5^\circ$ in presenza di effetto suolo.

In assenza di effetto suolo e carrello retratto, le differenze fra le diverse formulazioni in configurazione di decollo sono irrilevanti in tutto l'intervallo di incidenze considerato, mentre in configurazione di atterraggio sono trascurabili nell'intervallo $-4^\circ \leq \alpha \leq 4^\circ$ (figure 4.35 e 4.36).

I risultati hanno evidenziato che in caso di effetto suolo, l'estrazione del carrello non influenza minimamente la posizione del punto neutro, come é evidente confrontando i grafici 4.37 e 4.38 con i grafici 4.39 e 4.40.

Quando si prende in esame l'effetto suolo, in configurazione di decollo le differenze tra le diverse formulazioni sono piccole tra $-1^\circ \leq \alpha \leq 3^\circ$ (figure 4.37 e 4.39). In configurazione di atterraggio i risultati della formulazione estesa si allontanano da quelli della formulazione semplificata; in particolare

⁶L'effetto suolo é un fenomeno aerodinamico che si verifica quando il velivolo vola molto vicino al terreno e che si manifesta come un aumento dell'efficienza aerodinamica ($E = L/D$) grazie alla riduzione della resistenza indotta (della quale sono responsabili i vortici di scia e la viscosità dell'aria). Ciò é dovuto al fatto che il *downwash* dietro l'ala, ossia lo spostamento di massa d'aria verso il basso, responsabile della resistenza indotta, é ostruito dal terreno.

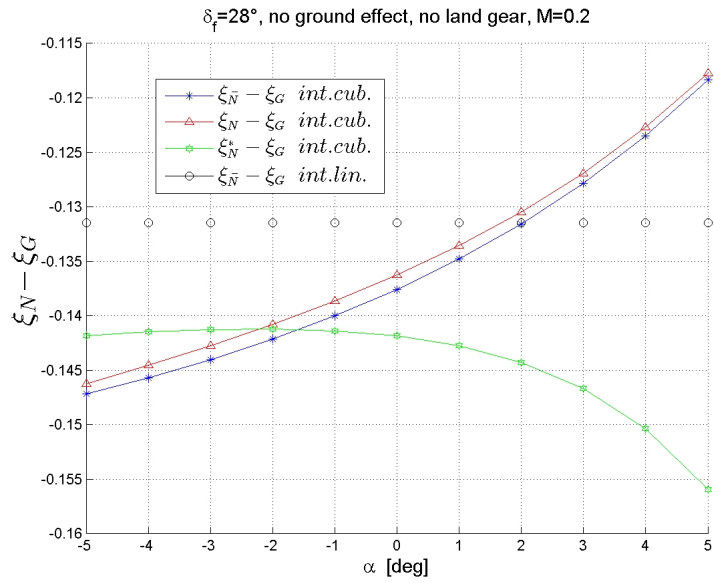


Figura 4.35: Punto neutro adimensionale in configurazione *take off*, carrello represso ed in assenza di effetto suolo, $M = 0.2$.

tra $\alpha = 2$ ed $\alpha = 3$ (figure 4.38 e 4.40) si nota uno spostamento eccessivo del punto neutro, improbabile dal punto di vista fisico, probabilmente dovuto a errori di carattere numerico.

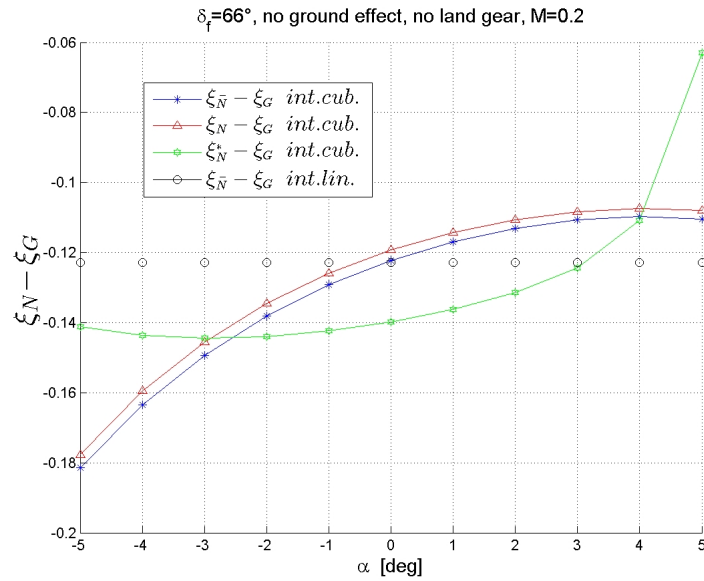


Figura 4.36: Punto neutro adimensionale in configurazione *landing*, carrello represso ed in assenza di effetto suolo, $M = 0.2$.

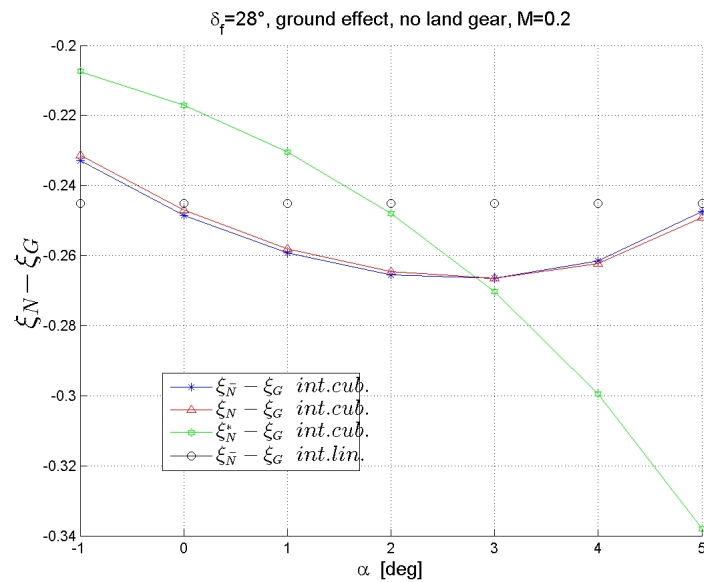


Figura 4.37: Punto neutro adimensionale in configurazione *take off*, carrello represso ed in condizioni di effetto suolo, $M = 0.2$.

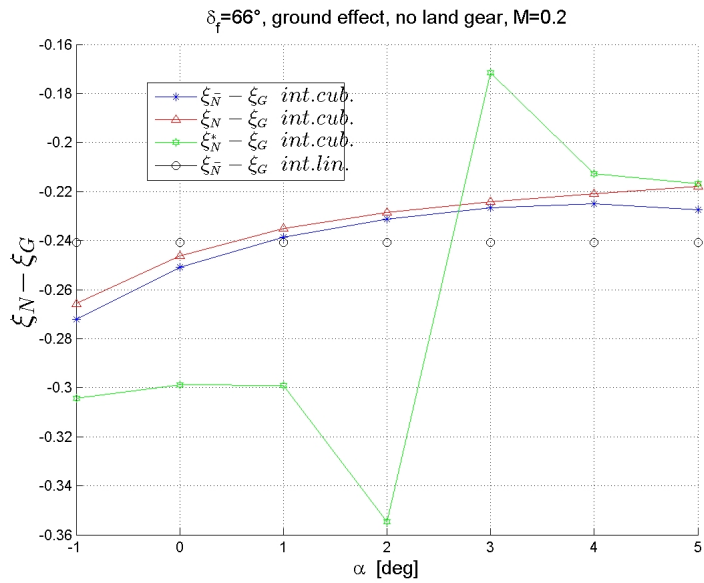


Figura 4.38: Punto neutro adimensionale in configurazione *landing*, carrello represso ed in condizioni di effetto suolo, $M = 0.2$.

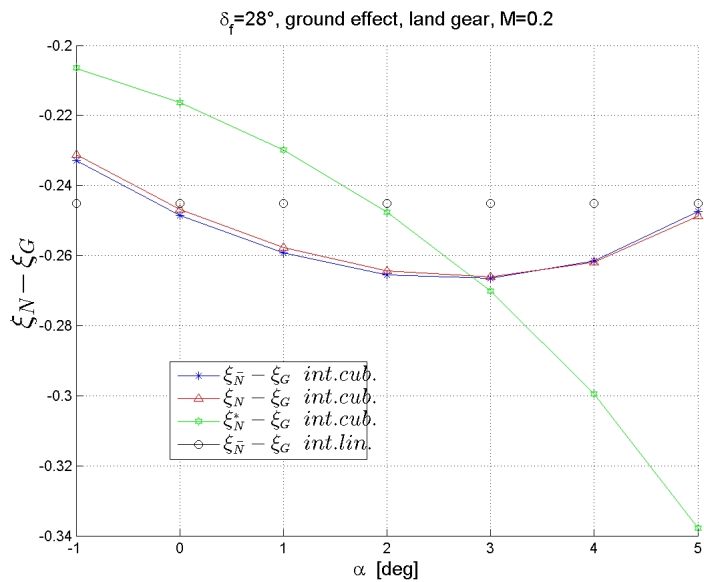


Figura 4.39: Punto neutro adimensionale in configurazione *take off*, carrello esteso ed in condizioni di effetto suolo, $M = 0.2$.

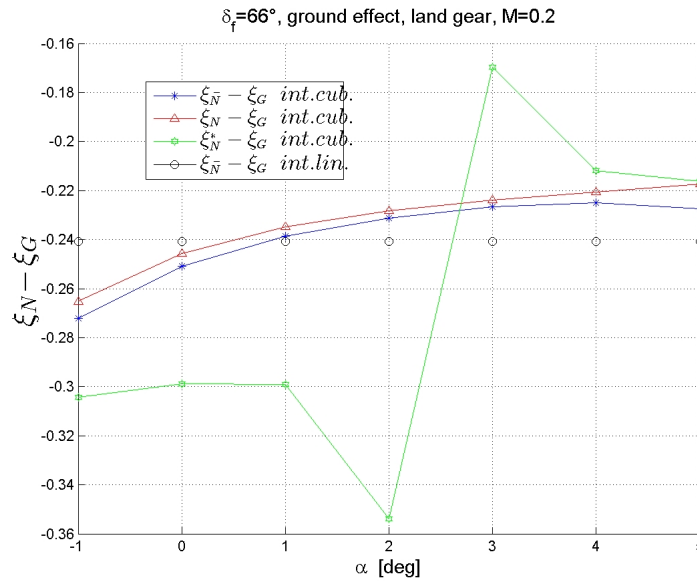


Figura 4.40: Punto neutro adimensionale in configurazione *landing*, carrello esteso ed in condizioni di effetto suolo, $M = 0.2$.

4.4 Discussione dei risultati

Volo rettilineo uniforme

L'elaborazione dei dati ha dimostrato che per piccole incidenze ($-4^\circ \leq \alpha \leq 5^\circ$) e velocità di volo fino a $Mach=0.5$, per la determinazione del punto neutro a comandi bloccati \bar{N} si può utilizzare la relazione semplificata (2.93) senza discostarsi in modo non trascurabile dai risultati che si ottengono tenendo conto degli effetti della resistenza, delle relazioni trigonometriche che compaiono nelle relazioni di portanza e resistenza e delle non linearità aerodinamiche. Ne deriva che la (2.93) rappresenta la soluzione migliore per una prima stima del margine statico in fase di progetto preliminare. Per quanto riguarda il punto di controllo \bar{C} , è stato verificato che la dipendenza dall'incidenza è contenuta per piccoli angoli, anche se per intervalli differenti in relazione alla velocità di volo ($-2^\circ \leq \alpha \leq 3^\circ$ a $Mach=0.2$ e $1^\circ \leq \alpha \leq 6^\circ$ a $Mach=0.5$).

Relativamente al caso a comandi liberi è emerso che il punto neutro \bar{N}' può ritenersi indipendente dall'incidenza e che, nell'intervallo $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$, coincide praticamente con quello a comandi bloccati, essendo essi separati da una distanza adimensionale di circa $5.85 \cdot 10^{-3}$. Il punto di controllo a comandi liberi \bar{C}' coincide con quello a comandi bloccati \bar{C} , come dimostrato nel paragrafo 2.4.2.

Nelle tabella 4.6 si riportano le posizioni adimensionali (moltiplicati per un fattore non dichiarato) del punto neutro nei casi a comandi bloccati e a comandi liberi.

	Com. bloccati	Com. liberi (valore medio)
$M = 0.2$	-0.138	-0.143
$M = 0.5$	-0.153	-0.159

Tabella 4.5: Punto neutro adimensionale ($\xi_{\bar{N}} - \xi_G$) in volo rettilineo uniforme.

Manovra

Il punto di manovra sia in virata corretta che in richiamata può ritenersi indipendente dall'incidenza per $-5^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$ e la sua distanza dal punto neutro, e quindi dal centro di massa, aumenta con la velocità di volo. Al contrario, per entrambe le manovre, all'aumentare della quota (ed all'aumentare dell'angolo di *bank* Φ nella virata corretta), si assiste ad un avanzamento del punto di manovra. I risultati numerici sono riportati nella tabella 4.7.

	Virata corretta, $\Phi = 15^\circ$	Richiamata
$M = 0.2$	-0.710	-0.362
$M = 0.5$	-0.840	-0.427

Tabella 4.6: Valori medi del punto neutro adimensionale in manovra ($\xi_{\bar{M}} - \xi_{\bar{N}}$) a quota zero.

Il punto di controllo in manovra dipende in maniera limitata da α negli stessi intervalli individuati per il volo rettilineo uniforme.

Il punto di incidenza equivalente, per il velivolo considerato, non può essere ritenuto un punto fisso del velivolo, poiché, come già osservato, $C_{L/\hat{q}}$ non è costante.

Complessivamente i risultati numerici hanno dimostrato la validità della teoria semplificata in regime subsonico a basse incidenze.

Volo in condizioni terminali

Dall'analisi dei dati è emerso che l'utilizzo degli ipersostentatori ha un effetto instabilizzante, come si può notare confrontando le tabelle 4.7 e 4.5. Inoltre, il punto neutro nelle diverse configurazioni di decollo e atterraggio risulta essere praticamente coincidente.

<i>Decollo</i>	<i>Atterraggio</i>	<i>Decollo + effetto suolo</i>	<i>Atterraggio+ effetto suolo</i>
-0.131	-0.122	-0.244	-0.241

Tabella 4.7: Punto neutro adimensionale ($\xi_{\bar{N}} - \xi_G$) in configurazioni con flap estesi con e senza effetto suolo, $M = 0.2$.

In prossimitá del suolo, tuttavia, si nota che, grazie all'effetto suolo, la stabilitá statica longitudinale aumenta in maniera molto rilevante (tabella 4.7).

I risultati sono in linea con la teoria elaborata da C. Wieselsberger [9] e che ha trovato conferma in diversi esperimenti, alcuni dei quali condotti dalla NASA (National Aeronautics and Space Administration) [10].

Inoltre, l'elaborazione dei dati ha evidenziato che sono trascurabili gli effetti del carrello d'atterraggio sulla stabilitá statica longitudinale in prossimitá del terreno.

Il punto di controllo nelle configurazioni con flap é lo stesso della configurazione *clean*, in quanto calcolato secondo la (2.98).

Alla luce dei risultati ottenuti, si conclude che, a bassi numeri di Mach e piccole incidenze, la teoria semplificata puó essere applicata anche nelle configurazioni utilizzate nelle fasi terminali.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo studio la teoria semplificata per il controllo e la stabilità statica longitudinali, valida sotto le ipotesi di aerodinamica lineare e di volo simmetrico stazionario, è stata applicata al database aerodinamico del velivolo da addestramento MB-339CD.

In condizioni di volo rettilineo uniforme, a $Mach=0.2$ e $Mach=0.5$, sono stati determinati il punto neutro ed il punto di controllo a comandi bloccati. Relativamente al punto neutro i risultati hanno dimostrato che, a basse incidenze, sono trascurabili gli effetti della resistenza e che può ritenersi un punto fisso sull'asse longitudinale del velivolo. Questi aspetti sono stati confermati anche dall'applicazione della teoria estesa di Phillips, Alley e Niewoehner che, per la determinazione del centro aerodinamico, oltre alla resistenza ed alle non linearità trigonometriche, tiene conto degli effetti dovuti alle non linearità aerodinamiche. Relativamente al punto di controllo è stata riscontrata una dipendenza dall'incidenza maggiore rispetto quella del punto neutro. L'intervallo d'incidenza in cui questo punto caratteristico può considerarsi fisso è più piccolo rispetto a quello in cui può ritenersi trascurabile lo spostamento del punto neutro. Nella trattazione a comandi liberi, il punto neutro è risultato praticamente coincidente con il punto neutro a comandi bloccati.

Per entrambe le manovre simmetriche stazionarie prese in esame, virata corretta e richiamata a $Mach=0.2$ e $Mach=0.5$, la dipendenza del punto di manovra dall'incidenza è del tutto trascurabile. Il punto di incidenza equivalente, al contrario, ha evidenziato una forte dipendenza dall'incidenza, dovuta al fatto che la derivata della portanza rispetto alla velocità di beccheggio non è costante al variare di questa grandezza.

Anche nel caso di utilizzo degli ipersostentatori in volo rettilineo ed in condizioni di effetto suolo, la posizione del punto neutro risulta con buona approssimazione costante.

In definitiva, l'analisi svolta permette di apprezzare il valore della teoria semplificata proposta dal Prof. Borri già a partire dai corsi di Meccanica del

Volo del Vecchio Ordinamento presso il Politecnico di Milano ed in alcune pubblicazioni scientifiche. Infatti, con riferimento ad un caso realistico, caratterizzato da aerodinamica non perfettamente lineare ed includendo anche condizioni di flap estesi e di effetto suolo, oltre che di volo rettilineo ed in manovra simmetrica, si mostra come si possano ritenere sostanzialmente costanti non solo la posizione dei punti neutro e di manovra, ma anche del punto di controllo e di quello di incidenza equivalente, entrambe nozioni innovative introdotte nella teoria semplificata, che permettono di scrivere le condizioni di equilibrio del velivolo in modo estremamente intuitivo e compatto.

Ulteriori applicazioni a velivoli di cui sia noto il database aerodinamico permetteranno di caratterizzare ulteriormente l'ambito di validità delle ipotesi della teoria semplificata e la convenienza nella rappresentazione delle azioni aerodinamiche mediante due sole forze concentrate in punti sostanzialmente solidali per valutazioni di equilibrio, controllo e stabilità.

Bibliografia

- [1] M. Borri e L. Trainelli, *A Simple Framework for the Study of Airplane Equilibrium and Stability*, AIAA paper no. 2003-5620, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, Austin (TX), USA, 2003.
- [2] M. Borri e L. Trainelli, *Airplane Equilibrium and Stability: a Simplified Teaching Approach*, XVII AIDAA National Conference, Roma, Italia, 2003.
- [3] M. Borri, L. Trainelli, *Basic Airplane Equilibrium and Stability Revisited*, ICASAT 2007 – International Conference on Aeronautical Science and Air Transportation, Tripoli, Libia, 2007.
- [4] B. Etkin e L.D. Reid, *Dynamics of Flight: Stability and Control*, terza edizione, Wiley, 1996.
- [5] F. G. Irving, *An introduction to the longitudinal static stability of low-speed aircraft*, Pergamon Press Ltd, 1966.
- [6] W. F. Phillips, *Mechanics of Flight*, John Wiley & Sons, 2004.
- [7] W.F. Phillips, N.R. Alley e R.J. Niewoehner, *Effects of Nonlinearities on Subsonic Aerodynamic Center*, Journal of Aircraft, 2008.
- [8] E. Torenbeek, *Synthesis of Subsonic Airplane Design*, Delft University Press, 1996.
- [9] C. Wieselsberger, *Wing Resistance Near the Ground*, Technical Memorandum No.77, National Advisory Committee for Aeronautics, 1922.
- [10] A.W. Carter, *Effect of Ground Proximity on The Aerodynamic Characteristics of Aspect-Ratio-1 Airfoils With and Without End Plates*, Technical Note D-970, National Aeronautics And Space Administration, 1961.

- [11] L. Trainelli, *Lezioni di Meccanica del Volo*, dispense del corso di Fondamenti di Meccanica del Volo Atmosferico, Politecnico di Milano, 2010.

Appendice A

Sistemi di riferimento e cinematica del velivolo

A.1 Sistemi di riferimento

Il materiale presentato è largamente basato sul riferimento [11].

A.1.1 Riferimento orizzonte locale

Il sistema di riferimento orizzonte locale (*local horizon frame*) \mathcal{F}^h ha origine nel punto materiale P che rappresenta il velivolo ed assi ortonormali (x^h, y^h, z^h) con il piano (x^h, y^h) tangente alla superficie terrestre ed asse z^h diretto verso il basso. I relativi versori sono indicati con la terna $(\mathbf{e}_x^h, \mathbf{e}_y^h, \mathbf{e}_z^h)$.

A.1.2 Riferimento solidale

Il sistema di riferimento assi corpo (*body axes*) \mathcal{F}^b ha origine in un punto P del velivolo ed assi ortonormali (x^b, y^b, z^b) , tali che il piano $x^b z^b$ coincide con il piano di simmetria del velivolo. Gli assi sono così diretti:

- l'asse x , detto asse di rollio (*roll axis*), é parallelo all'asse di fusoliera ed é diretto dalla coda verso prua;
- l'asse y , detto asse di beccheggio (*pitch axis*), é diretto verso la semiala destra;
- l'asse z , detto asse di imbardata (*yaw axis*), é rivolto verso il basso.

I versori degli assi corpo sono indicati con la terna $(\mathbf{e}_x^b, \mathbf{e}_y^b, \mathbf{e}_z^b)$.

A.1.3 Riferimento aerodinamico

Nel sistema di riferimento aerodinamico (*wind axes* o *air trajectory frame* oppure *flight path frame*) \mathcal{F}^a l'asse x^a é allineato con la velocità di volo, l'asse z^a é contenuto nel piano di simmetria del velivolo tale da formare un angolo acuto con l'asse z^b , mentre l'asse y^a é tale da completare la terna ortonormale (x^a, y^a, z^a) . L'origine del sistema di riferimento é fissata in un punto P del velivolo, mentre la terna $(\mathbf{e}_x^a, \mathbf{e}_y^a, \mathbf{e}_z^a)$ indica i versori degli assi. In questo sistema di riferimento l'espressione della velocità di volo é:

$$\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x^a \quad (\text{A.1})$$

A.2 Cinematica del velivolo

A.2.1 Velivolo rigido

Nell'ipotesi di velivolo rigido, il moto puó essere rappresentato con una terna centrata in un punto (tipicamente baricentro) che si muove rispetto il riferimento terrestre \mathcal{F}^e . In generale, il moto di un sistema di riferimento puó essere espresso attraverso tre parametri di traslazione (coordinate della terna mobile rispetto la terna fissa) e nove parametri di rotazione, i coseni direttori, ossia i coseni degli angoli tra i versori della terna mobile e quelli della terna fissa. Per i vincoli di ortonormalità delle terne i coseni direttori non sono tutti indipendenti tra loro, ma sei sono sovrabbondanti e possono essere espressi in funzione degli altri tre. In definitiva, é quindi possibile rappresentare il moto della terna mobile, e quindi il velivolo rigido, attraverso 6 variabili indipendenti, tre per la traslazione e tre per la rotazione.

A.2.2 Atto di moto rigido

Per la descrizione del moto rigido consideriamo le seguenti due grandezze vettoriali (e quindi sei parametri scalari):

- la velocità di un punto appartenente al corpo, ad esempio quella dell'origine P , \mathbf{v}_P ;
- la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$.

Le formule di Poisson permettono di esprimere le derivate dei versori della terna mobile attraverso la velocità angolare:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_x^b &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x^b \\ \dot{\mathbf{e}}_y^b &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_y^b \\ \dot{\mathbf{e}}_z^b &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z^b \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Tra due generici punti del corpo P e Q vale la *regola del trasporto delle velocità*:

$$\boxed{\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (Q - P)} \quad (\text{A.3})$$

Grazie a quest'ultima equazione é possibile valutare la velocità in qualsivoglia punto del velivolo rigido. Proprio perché varia da punto a punto, si rende necessario definire la velocità di volo \mathbf{V} come la velocità di un punto materiale notevole, tipicamente il baricentro nominale¹.

A.2.3 Componenti della velocità

Le componenti scalari della velocità di volo nel riferimento \mathcal{F}^b vengono indicate con la terna (u, v, w) e sono definite come:

$$\begin{aligned} u &:= \mathbf{e}_x^b \cdot \mathbf{V} \\ v &:= \mathbf{e}_y^b \cdot \mathbf{V} \\ w &:= \mathbf{e}_z^b \cdot \mathbf{V} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La velocità di volo può essere quindi scritta come:

$$\mathbf{V} = u \mathbf{e}_x^b + v \mathbf{e}_y^b + w \mathbf{e}_z^b \quad (\text{A.5})$$

A.2.4 Componenti della velocità angolare

Le componenti scalari della velocità angolare nel riferimento \mathcal{F}^b vengono indicate con la terna (p, q, r) e sono definite come:

$$\begin{aligned} p &:= \mathbf{e}_x^b \cdot \boldsymbol{\omega} \\ q &:= \mathbf{e}_y^b \cdot \boldsymbol{\omega} \\ r &:= \mathbf{e}_z^b \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La velocità angolare può essere quindi scritta come:

$$\boldsymbol{\omega} = p \mathbf{e}_x^b + q \mathbf{e}_y^b + r \mathbf{e}_z^b \quad (\text{A.7})$$

A.2.5 Angoli aerodinamici

L'orientazione della velocità di volo viene caratterizzata dai seguenti angoli aerodinamici:

¹A rigore, il baricentro durante il volo si sposta per effetto delle variazioni di massa dovute, ad esempio, al consumo di carburante o allo spostamento dei passeggeri.

- l'*angolo di incidenza (angle of attack)* α , definito come l'angolo formato tra la proiezione della velocità di volo nel piano di simmetria del velivolo e l'asse x^b , con verso positivo dall'asse z^b all'asse x^b :

$$\alpha := \arctan \frac{\mathbf{e}_z^b \cdot \mathbf{V}}{\mathbf{e}_x^b \cdot \mathbf{V}} \quad (\text{A.8})$$

con $\alpha \in [-\pi, \pi)$;

- l'*angolo di deriva (angle of sideslip)* β , definito come l'angolo formato dalla velocità di volo ed il piano di simmetria $x^b z^b$ del velivolo, con verso positivo in direzione della semiala destra:

$$\beta := \arcsin \frac{\mathbf{e}_y^b \cdot \mathbf{V}}{V} \quad (\text{A.9})$$

con $\beta \in [-\pi/2, \pi/2)$.

A.2.6 Angoli di traiettoria

Al fine di caratterizzare ulteriormente la velocità di volo vengono introdotti i seguenti angoli di traiettoria:

- l'*angolo di rampa (flight path angle)* γ , definito come l'angolo formato dalla velocità di volo ed il piano orizzontale $x^h y^h$, con verso positivo verso l'alto:

$$\gamma := -\arcsin \frac{\mathbf{e}_z^h \cdot \mathbf{V}}{V} \quad (\text{A.10})$$

con $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2)$;

- l'*angolo di rotta (track angle)* χ , definito come l'angolo tra la proiezione della velocità di volo sul piano orizzontale e l'asse x^h , con verso positivo da x^h verso y^h :

$$\chi := \arctan \frac{\mathbf{e}_y^h \cdot \mathbf{V}}{\mathbf{e}_x^h \cdot \mathbf{V}} \quad (\text{A.11})$$

con $\chi \in [0, 2\pi)$.

A.2.7 Angoli di Eulero

Per descrivere l'orientazione del riferimento solidale rispetto al riferimento orizzonte locale, spesso nella Meccanica del Volo vengono utilizzati i seguenti angoli, detti di Eulero:

- l'angolo di azimut ψ ;

- l'angolo di elevazione (*elevation*) θ ;
- l'angolo di rotazione propria (*rotation*) ϕ .

Essi vengono definiti attraverso una successione di rotazioni parziali che permette la trasformazione della terna del riferimento \mathcal{F}^h in quella del riferimento \mathcal{F}^b [11].

Le componenti della velocità angolare sono legati agli angoli di Eulero dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ q &= \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{aligned} \tag{A.12}$$

Per la caratterizzazione delle manovre viene inoltre definito un ulteriore angolo chiamato *angolo di inclinazione laterale (bank)* Φ , definito come l'angolo formato dall'asse y^b con il piano dell'orizzonte locale $x^h y^h$, con verso positivo verso il basso:

$$\Phi := \arcsin(\mathbf{e}_y^b \cdot \mathbf{e}_z^h) \tag{A.13}$$

legato agli angoli di Eulero dalla seguente relazione:

$$\sin \Phi = \cos \theta \sin \phi \tag{A.14}$$

Appendice B

Equazioni del moto

B.1 Forze agenti sul velivolo

Il materiale presentato è largamente basato sul riferimento [11].

Su un velivolo di massa m in movimento con velocità \mathbf{V} agiscono la forza aerodinamica \mathbf{F} , la spinta \mathbf{T} e la forza peso \mathbf{W} . L'equazione del moto libero del velivolo é:

$$\boxed{m \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{W}} \quad (\text{B.1})$$

Il risultante delle azioni aerodinamiche può essere inteso come somma vettoriale di resistenza D , devianza Q e portanza L :

$$\boxed{\mathbf{F} = -(D \mathbf{e}_x^a + Q \mathbf{e}_y^a + L \mathbf{e}_z^a)} \quad (\text{B.2})$$

dove:

$$\begin{aligned} D &:= -\mathbf{e}_x^a \cdot \mathbf{F} \\ Q &:= -\mathbf{e}_y^a \cdot \mathbf{F} \\ L &:= -\mathbf{e}_z^a \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Alternativamente, ponendosi in assi corpo, il risultante delle azioni aerodinamiche può essere inteso come somma vettoriale di una forza longitudinale X , di una forza laterale Y e di una forza trasversale Z , così definite:

$$\begin{aligned} X &:= \mathbf{e}_x^b \cdot \mathbf{F} \\ Y &:= \mathbf{e}_y^b \cdot \mathbf{F} \\ Z &:= \mathbf{e}_z^b \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Conseguentemente:

$$\boxed{\mathbf{F} = X \mathbf{e}_x^b + Y \mathbf{e}_y^b + Z \mathbf{e}_z^b} \quad (\text{B.5})$$

La spinta é espressa da:

$$\mathbf{T} = T \mathbf{e}_T \quad (\text{B.6})$$

dove \mathbf{e}_T é un versore fisso nel riferimento assi corpo e $T := \|\mathbf{T}\|$ la spinta scalare. Considerato che l'asse di rollio può essere scelto arbitrariamente, si assume che $\mathbf{e}_T \equiv \mathbf{e}_x^b$ e che, pertanto:

$$\boxed{\mathbf{T} = T \mathbf{e}_x^b} \quad (\text{B.7})$$

La forza peso é, in generale:

$$\mathbf{W} = m \mathbf{g} \quad (\text{B.8})$$

dove \mathbf{g} é l'intensitá del campo gravitazionale che, nell'ipotesi di Terra piatta e non rotante, può essere espressa come $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z^h$, per cui:

$$\boxed{\mathbf{W} = m g \mathbf{e}_z^h = W \mathbf{e}_z^h} \quad (\text{B.9})$$

in cui $W := \|\mathbf{W}\| = m g$ rappresenta il peso scalare e $g := \|\mathbf{g}\| = 9.81 \text{ m/s}^2$ (valore di riferimento pari al valor medio misurato a quota zero alla latitudine 45° Nord), secondo l'approssimazione di campo gravitazionale di intensitá uniforme ($\mathbf{g} = \text{const}$).

B.2 Equazioni del volo rettilineo

Supponiamo che il volo avvenga nelle seguenti condizioni:

- volo simmetrico ($\beta = 0$), per cui tutte le azioni latero-direzionali sono nulle;
- contributo trascurabile delle azioni propulsive al momento di beccheggio.

Si assuma inoltre che l'asse corpo longitudinale sia coincidente con l'asse orientato del vettore spinta \mathbf{T} .

Dal bilancio delle forze nella direzione parallela al vettore velocitá di volo \mathbf{V} , nella direzione normale al moto e dal bilancio dei momenti rispetto al baricentro, si ricavano le equazioni di equilibrio relative ad un generico volo rettilineo centrato:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos \alpha - D - W \sin \gamma \\ 0 &= T \sin \alpha + L - W \cos \gamma \\ 0 &= M_G \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

dove M_G é il momento di beccheggio rispetto al centro di massa.

B.2.1 Equazioni del volo rettilineo stazionario

Nel caso di volo stazionario é nulla l'accelerazione ($\dot{V} = 0$), pertanto le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, verticale ed al momento diventano:

$$\begin{aligned} 0 &= T \cos \alpha - D - W \sin \gamma \\ 0 &= T \sin \alpha + L - W \cos \gamma \\ 0 &= M_G \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Se si assume che il volo avviene ad incidenze moderate ($\alpha \ll 1$ rad) e ad efficienze aerodinamiche medie o elevate ($E \geq O(1)$), trascurando il contributo della spinta T in direzione verticale (in cui prevale la portanza L) e ponendo $T \cos \alpha \approx T$, le precedenti equazioni si semplificano nelle seguenti:

$$\begin{aligned} 0 &= T - D - W \sin \gamma \\ 0 &= L - W \cos \gamma \\ 0 &= M_G \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Le equazioni appena scritte valgono per il volo stazionario orizzontale ($\gamma = 0$), in salita ($\gamma > 0$) ed in discesa ($\gamma < 0$).

B.3 Manovre notevoli

B.3.1 Fattore di carico

Si definisce fattore di carico (*load factor*) \mathbf{n} il vettore adimensionale dato dal rapporto tra il peso apparente del velivolo e quello effettivo:

$$\boxed{\mathbf{n} := \frac{1}{W}(\mathbf{W} - m\dot{\mathbf{V}})} \quad (\text{B.13})$$

Utilizzando la (B.1), il fattore di carico puó essere scritto come:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{W}(\mathbf{T} + \mathbf{F}) \quad (\text{B.14})$$

Definiamo le componenti di \mathbf{n} rispetto agli assi corpo:

$$n_x^b := \mathbf{e}_x^b \cdot \mathbf{n}, \quad n_y^b := \mathbf{e}_y^b \cdot \mathbf{n}, \quad n_z^b := \mathbf{e}_z^b \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.15})$$

Inserendo le espressioni (B.5) e (B.7) nella (B.14) si ha:

$$n_x^b = -\frac{T + X}{W}, \quad n_y^b = -\frac{Y}{W}, \quad n_z^b = -\frac{Z}{W} \quad (\text{B.16})$$

Il fattore di carico normale n_z^b é quello che assume i valori maggiori, essendo Z tipicamente maggiore di Y e di $(T + X)$. Considerando la relazione tra gli assi del sistema di riferimento assi vento e quelli del riferimento assi corpo, si puó dimostrare che:

$$Z = -(D \sin \alpha \cos \beta - Q \sin \alpha \sin \beta + L \cos \alpha) \quad (\text{B.17})$$

Supponendo che il volo avvenga ad incidenze e derive moderate ($\alpha \ll 1$ rad, $\beta \ll 1$ rad), la (B.17) si semplifica in:

$$\begin{aligned} Z &= -(D \alpha - Q \alpha \beta + L) \\ &= -\left(1 + \frac{D}{L} \alpha\right) L + Q \alpha \beta \\ &= -\left(1 + \frac{\alpha}{E}\right) L + Q \alpha \beta \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

dove chiaramente si é fatto uso della definizione di efficienza aerodinamica ($E := L/D$). Supponendo inoltre che il volo si svolga ad efficienze aerodinamiche medie o elevate ($E \geq O(1)$), sia α/E che $\alpha\beta$ risultano $\ll 1$ rad e quindi si possono trascurare rispetto ad 1. Con buona approssimazione risulta quindi:

$$Z = -L \quad (\text{B.19})$$

Indichiamo con n il rapporto portanza/peso (*lift to weight ratio*):

$$\boxed{n := \frac{L}{W}} \quad (\text{B.20})$$

Sotto le condizioni assunte, si puó confondere il fattore di carico normale con il rapporto portanza/peso:

$$n_z^b = n \quad (\text{B.21})$$

B.3.2 Virata corretta

Le equazioni di equilibrio relative ad un generico volo orizzontale, simmetrico e centrato sono:

$$\begin{aligned} m \dot{V} &= T \cos \alpha - D \\ m V \dot{\chi} &= (T \sin \alpha + L) \sin \Phi \\ 0 &= (T \sin \alpha + L) \cos \Phi - W \\ 0 &= M_G \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Nel caso di incidenze moderate ($\alpha \ll 1$ rad) ed efficienze aerodinamiche medie o elevate ($E \geq O(1)$), trascurando il contributo della spinta T in direzione

verticale ($T \sin \alpha$) in cui prevale la portanza L , e ponendo $T \cos \alpha \approx T$, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} m \dot{V} &= T - D \\ m V \dot{\chi} &= L \sin \Phi \\ 0 &= L \cos \Phi - W \\ 0 &= M_G \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Imponendo il moto uniforme $\dot{V} = 0$, e stazionario $\dot{\chi} = \Omega = \text{const}$, si ottengono le equazioni che reggono la virata corretta stazionaria:

$$\begin{aligned} 0 &= T - D \\ m V \Omega &= L \sin \Phi \\ 0 &= L \cos \Phi - W \\ 0 &= M_G \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

La costante Ω é chiamata velocità di virata o rateo di virata.

Dalla penultima delle (B.24) si ricava la componente verticale del fattore di carico:

$$n = \frac{1}{\cos \Phi} \quad (\text{B.25})$$

Inoltre, considerato che $W = m g$, vale la seguente relazione:

$$m = \frac{L \cos \Phi}{g} \quad (\text{B.26})$$

che, sostituita nella seconda delle (B.23) porta a scrivere:

$$\dot{\chi} = \frac{g}{V} \tan \Phi \quad (\text{B.27})$$

Dalla (A.14) si ricava $\cos \theta$ in funzione di Φ e θ :

$$\cos \theta = \frac{\sin \Phi}{\sin \phi} \quad (\text{B.28})$$

Nel caso di virata corretta l'angolo di deriva é nullo ($\beta = 0$), pertanto c'è coincidenza tra l'angolo di rotta e l'angolo di azimut ($\chi \equiv \psi$). Inoltre, é costante l'angolo di pitch ($\theta = \text{const}$), conseguentemente si avrà che $\dot{\theta} = 0$. Sostituendo nella seconda equazione delle (A.12) $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} \equiv \dot{\chi}$ ed utilizzando le (B.27) e (B.28), si ricava di la velocità angolare di beccheggio q in funzione di Φ :

$$q = \frac{g \sin^2 \Phi}{V \cos \Phi} \quad (\text{B.29})$$

da cui si ottiene, facendo uso della (B.25), l'espressione di q in funzione di n :

$$\boxed{q_{turn} = \frac{g}{V} \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right)} \quad (\text{B.30})$$

Allo stesso risultato si perviene nel seguente modo. In direzione orizzontale vale l'equazione:

$$L \sin \Phi = m \frac{V^2}{R_h} \quad (\text{B.31})$$

dove R_h é il raggio della circonferenza descritta dal velivolo durante la manovra, in cui il velivolo ruota con rateo di virata Ω :

$$\Omega = \frac{V}{R_h} \quad (\text{B.32})$$

Inoltre, poiché il velivolo é inclinato di un angolo di bank Φ , la componente della velocità di virata sull'asse di beccheggio sar :

$$q = \Omega \sin \Phi = \frac{V}{R_h} \sin \Phi \quad (\text{B.33})$$

Moltiplicando ambo i membri della (B.31) per $\sin \Phi$ si ha:

$$L \sin^2 \Phi = m V q = n W \sin^2 \Phi \quad (\text{B.34})$$

da cui si ricava:

$$q = \frac{g}{V} n (1 - \cos^2 \Phi) = \frac{g}{V} \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right) \quad (\text{B.35})$$

B.3.3 Richiamata e affondata

Le manovre di richiamata ed affondata si sviluppano nel piano di simmetria verticale ed hanno lo scopo di cambiare l'angolo di rampa γ mentre l'angolo di rotta si mantiene costante ($\chi = \text{const}$). Si parla di richiamata se $\dot{\gamma} > 0$, mentre si parla di affondata se $\dot{\gamma} < 0$.

Equazioni del volo simmetrico nel piano verticale

In condizioni di volo simmetrico ($\beta = 0$) ed assumendo l'asse longitudinale parallelo al vettore spinta \mathbf{T} , le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale sono:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos \alpha - D - W \sin \gamma \\ mV\dot{\gamma} &= T \sin \alpha + L - W \cos \gamma \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Se il volo si svolge ad incidenze moderate ($\alpha \ll 1$ rad) e ad efficienze aerodinamiche medie o elevate ($E \geq O(1)$), le equazioni precedenti si semplificano nelle seguenti:

$$\boxed{\begin{aligned} m\dot{V} &= T - D - W \sin \gamma \\ mV\dot{\gamma} &= L - W \cos \gamma \end{aligned}} \quad (\text{B.37})$$

Dividendo per W la seconda delle (B.37), tenuto conto che il fattore di carico normale é $n = L/W$, si ottiene:

$$n = \frac{V}{g}\dot{\gamma} + \cos \gamma \quad (\text{B.38})$$

Equazioni delle richiamata stazionaria

In generale, non é possibile che tutte le grandezze (V , α , $\dot{\gamma}$) siano costanti nel tempo. La manovra si puó intendere stazionaria dal punto di vista della traiettoria quando sono costanti V e $\dot{\gamma}$. Ponendo $\Gamma = \dot{\gamma} = \text{const}$, le equazioni di equilibrio diventano:

$$\begin{aligned} 0 &= T - D - W \sin(\Gamma t + \gamma_0) \\ mV\Gamma &= L - W \cos(\Gamma t + \gamma_0) \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

essendo $\gamma = \Gamma t + \gamma_0$. Nel caso di richiamata stazionaria il fattore di carico é:

$$n = \frac{V}{g}\Gamma + \cos \gamma \quad (\text{B.40})$$

con V e Γ costanti. Vediamo ora di ricavare l'espressione della velocità angolare di beccheggio. Durante la manovra il velivolo descrive un arco di circonferenza con raggio R . Nella fase iniziale della manovra, quando é massimo il fattore di carico, (ovvero quando $\gamma = 0$), l'equilibrio in direzione verticale é:

$$L - W = \frac{mV^2}{R} \quad (\text{B.41})$$

Tenuto conto che, in questa particolare manovra, la velocità angolare di beccheggio é:

$$q = \frac{V}{R} \quad (\text{B.42})$$

manipolando la (B.41) si trova infine:

$$\boxed{q_{\text{pull-up}} = (n - 1) \frac{g}{V}} \quad (\text{B.43})$$