

POLITECNICO DI MILANO
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria dell'Automazione
Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria



Approcci “data-based” diretti per il progetto di controllori
robusti con applicazione in ambito automotive

Relatore: Prof. Simone GARATTI
Correlatore: Ing. Simone FORMENTIN

Tesi di laurea di:
Matteo VANONCINI Matr. 801160

Anno Accademico 2013–2014

Ai miei genitori...

Sommario

Nella trattazione che segue si cercherà di fornire una serie di approcci 'data-based' diretti per il progetto di controllori robusti rispetto a variazioni della dinamica del sistema da controllare. Lo scopo della tesi è quello di elaborare e presentare delle estensioni del metodo adattativo diretto VRFT (Virtual Reference Feedback Tuning [4]) in modo da fornire alla soluzione garanzie di robustezza che possano essere impostate dal progettista. La prima cosa fatta durante l'attività svolta consiste nella presentazione dello stato dell'arte e della tecnica VRFT classica. Si è passati quindi alla modifica dell'algoritmo VRFT tramite l'utilizzo di una variabile strumentale estesa al fine di fornire una tecnica in grado di rendere la sintesi del controllore unbiased rispetto al rumore usando un solo dataset. Si ha poi affrontato il problema centrale della trattazione cioè l'elaborazione e la presentazione degli approcci *Greedy VRFT* e *Scenario VRFT*. Nello svolgimento della trattazione sono stati verificati i diversi livelli di garanzie di robustezza della soluzione che le due metodologie sono in grado di fornire legati anche al diverso costo computazionale richiesto. Definiti i diversi approcci si è passati all'applicazione di questi metodi ad un sistema lineare incerto con la proposta di una nuova architettura di controllo. Infine si è testata l'efficacia e l'applicabilità delle metodologie trovate su di un problema in ambito automotive come il controllo della velocità di rotazione di un veicolo in curva tramite angolo di sterzo. Si è dimostrato come l'applicazione di un controllo sintetizzato con un approccio di questo tipo sia in grado di aumentare la controllabilità del veicolo in curva rispetto a diverse condizioni di contatto ruota-strada.

Indice

1	Introduzione e motivazione	1
1.1	Introduzione e presentazione del problema	1
1.2	Contributi innovativi	5
1.3	Struttura della tesi	5
2	Stato dell'arte: l'approccio VRFT per il progetto del controllore	7
2.1	Formulazione del problema	7
2.1.1	Comparazione con altri metodi	8
2.2	Idea base VRFT	8
2.2.1	Scelta del filtro	10
2.2.2	Analisi del filtro proposto	12
2.3	Caso con disturbo additivo	14
2.4	Variabile strumentale estesa	14
3	L'approccio VRFT robusto	17
3.1	Structure	18
3.1.1	Esperimenti sull'impianto incerto	18
3.2	Greedy VRFT	19
3.3	Scenario VRFT	20
3.3.1	Proprietà di robustezza dello Scenario VRFT	21
3.4	VRFT robusto con rumore addizionale sull'uscita	22
4	Esempio numerico	25
4.1	Caso senza rumore	25
4.1.1	Descrizione del problema	25
4.1.2	Cifre di merito utilizzate	27
4.1.3	Caso modello di riferimento comparabile	27
4.1.4	Caso modello di riferimento non comparabile	31
4.1.5	Commenti	34
4.2	Caso con rumore	34
4.2.1	Descrizione del problema	34
4.2.2	Cifre di merito utilizzate	35

4.2.3	Caso modello di riferimento comparabile	36
4.2.4	Caso modello di riferimento non comparabile	39
4.2.5	Commenti	42
4.3	Conclusioni	43
5	Applicazione in ambito automotive	45
5.1	Descrizione dell'architettura di controllo	46
5.1.1	Modello del veicolo	46
5.1.2	Architettura del controllo	48
5.1.3	Incertezza del sistema	50
5.2	Risultati in simulazione	51
	Conclusioni	55
	Bibliografia	59

Elenco delle figure

1.1	impianto da controllare	2
1.2	sistema in anello chiuso	3
1.3	linearizzazione sistema non lineare S	3
1.4	architettura di controllo caso sistema S non lineare.	4
1.5	mappa statica tra angolo di sterzo e velocità di rotazione alla velocità del veicolo di $10m/s$	4
2.1	sistema di controllo nel caso classico di applicazione VRFT.	8
3.1	sistema di controllo nel caso VRFT robusto rispetto all'incertezza δ sul sistema.	17
3.2	Rappresentazione grafica del teorema, tratta da [3].	22
3.3	sistema di controllo nel caso di rumore addizionale sull'uscita.	23
4.1	processo incerto da controllare.	26
4.2	anello di controllo utilizzato negli esempi numerici.	26
4.3	famiglia di funzioni di trasferimento da controllare con smorzamento e banda variabile	27
4.4	risposta allo scalino caso $\alpha = 0.4$ e $d = 9$	28
4.5	diagramma di bode caso $\alpha = 0.4$ e $d = 9$	29
4.6	valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.4$ e $d = 9$	29
4.7	risposta allo scalino caso $\alpha = 0.4$ e $d = 20$	30
4.8	diagramma di bode caso $\alpha = 0.4$ e $d = 20$	30
4.9	valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.4$ e $d = 20$	31
4.10	risposta allo scalino caso $\alpha = 0.6$ e $d = 9$	32
4.11	diagramma di bode caso $\alpha = 0.6$ e $d = 9$	32
4.12	valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.6$ e $d = 9$	33
4.13	risposta allo scalino caso $\alpha = 0.6$ e $d = 20$	33
4.14	diagramma di bode caso $\alpha = 0.6$ e $d = 20$	33
4.15	valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.6$ e $d = 20$	34
4.16	sistema di controllo nel caso di rumore addizionale sull'uscita.	35
4.17	risposta allo scalino caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$	37

4.18	diagramma di bode caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$	37
4.19	valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$	38
4.20	risposta allo scalino caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$	38
4.21	diagramma di bode caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$	39
4.22	valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$	39
4.23	risposta allo scalino caso $\alpha = 0.6$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$	40
4.24	diagramma di bode caso $\alpha = 0.6$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$	40
4.25	valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.6$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$	41
4.26	risposta allo scalino caso $\alpha = 0.8$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$	41
4.27	diagramma di bode caso $\alpha = 0.8$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$	42
4.28	valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.8$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$	42
5.1	veicolo in curva con β angolo di deriva ed $\dot{\psi}$ velocità di rotazione (cioè lo yaw rate).	45
5.2	modello del veicolo in curva.	46
5.3	processo da controllare.	48
5.4	architettura del controllo di un veicolo in curva	49
5.5	andamento coefficienti di attrito in funzione del sideslip angle (parametro α descritto in precedenza)	50
5.6	mappa statica alla velocità di $10m/s$	51
5.7	velocità di rotazione del veicolo in curva con angolo di sterzo di 13° .	53
5.8	velocità di rotazione del veicolo in curva con angolo di sterzo di 16° .	53

Capitolo 1

Introduzione e motivazione

1.1 Introduzione e presentazione del problema

Nella trattazione che segue si cercherà di fornire una serie di approcci 'data-based' diretti per il progetto di controllori robusti rispetto a variazioni della dinamica del sistema da controllare. Sono stati presi in considerazione metodi diretti in quanto hanno il vantaggio che, nel caso di incertezza presente nell'impianto, la preliminare identificazione di un modello matematico adeguato per il sistema risulta a livello computazionale molto onerosa e soprattutto non utile al fine che ci si è prefissati, cioè il progetto di un controllore adeguato. Capita spesso infatti a livello pratico che si debba progettare il controllo di un impianto non perfettamente conosciuto o affetto da incertezza per cui non è possibile trovare un modello matematico lineare rigoroso in grado di descrivere con esattezza tutte le dinamiche del sistema. Inoltre gli approcci basati sulla fisica e non sui dati sono soggetti a molte approssimazioni. Di conseguenza tanto vale partire direttamente dai dati per il progetto del controllore senza curarsi della corretta identificazione del modello. In questi casi è possibile affrontare il problema trattando l'impianto come un modello black box, cioè un modello per cui è possibile studiarne il comportamento esclusivamente analizzando le risposte che esso produce a fronte delle sollecitazioni che riceve. Affrontando il problema in questo modo il punto di partenza è la creazione di un set di dati che comprenda l'ingresso somministrato al sistema e l'uscita prodotta da tale sistema. A questo punto un metodo che si può utilizzare per la sintetizzazione del controllore partendo dal set di dati appena definito è il metodo VRFT (virtual reference feedback tuning) [4].

Il VRFT è un metodo adattativo per il progetto del controllore. In particolare è off-line, nel senso che l'algoritmo di sintesi del controllore osserva il sistema per un certo lasso di tempo e progetta il controllore in base ai dati raccolti in questa fase; una volta sintetizzato, il controllore non è più modificato durante il funzionamento dell'impianto. Il VRFT inoltre è un metodo diretto, infatti non si preoccupa della

corretta identificazione del processo che deve andare a controllare ma sintetizza il controllore ammettendo una non completa conoscenza del processo.

Gli ingredienti per una corretta applicazione del metodo sono il sistema incerto che si vuole controllare $y(t) = P(z)u(t)$, dove $P(z)$ non è nota, $u(t)$ è il segnale di ingresso al sistema, $y(t)$ è il conseguente segnale di uscita, e la classe di controllori parametrica in θ tale che:

$$\mathcal{C} = \{C(z, \theta)\}; \quad \theta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_d \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

teoricamente il metodo funziona per qualsiasi classe \mathcal{C} , la dipendenza da θ può essere qualsiasi. Tuttavia di particolare rilevanza per il contesto presentato nei capitoli successivi è la classe di controllori lineare in θ del tipo seguente.

$$C(z, \theta) = \vartheta_1\beta_1(z) + \dots + \vartheta_d\beta_d(z) \quad (1.2)$$

La specifica di controllo nel VRFT è fatta tramite la definizione di un modello di riferimento $M(z)$, cioè la funzione di trasferimento desiderata per il sistema in anello chiuso.

Nella trattazione che segue si andrà ad affrontare il problema di controllo di un impianto che può essere soggetto a variazioni della sua dinamica durante il funzionamento. Verranno perciò descritti e confrontati, in particolare, due tipi di approcci robusti aventi entrambi come base il metodo VRFT. Si cercherà di fornire dei metodi in grado di gestire questo tipo di problema e si analizzeranno le garanzie di robustezza che si è in grado di ottenere. Il tipo di impianto per cui si dovrà progettare il controllo è quello in Figura 1.1 dove le diverse condizioni di lavoro sono rappresentate dal parametro incerto δ .

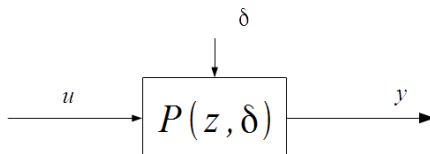


Figura 1.1: impianto da controllare

Il controllore sintetizzato dovrà essere in grado di fornire buone prestazioni rispetto a tutte le condizioni di lavoro dell'impianto facendo aderire la risposta in frequenza in anello chiuso (mostrata in Figura 1.2) al modello di riferimento impostato.

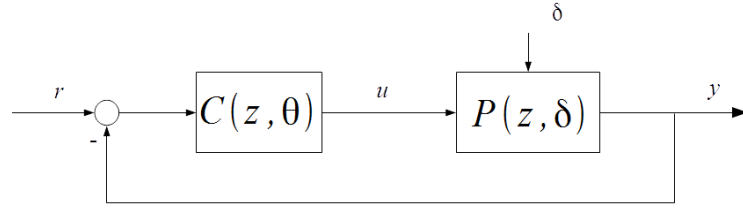


Figura 1.2: sistema in anello chiuso

Nella prima tecnica presentata, *Greedy VRFT*, viene descritta la tecnica più naturale per affrontare questo tipo di problema senza introdurre ulteriore matematica, nel senso che è l'applicazione più generale del metodo VRFT classico a tutto il set di dati raccolti nelle diverse condizioni di lavoro. Nella seconda tecnica, lo *Scenario VRFT*, si cerca invece di cautelarsi rispetto al caso peggiore dal punto di vista controllistico modificando il problema di ottimizzazione e cercando di fornire garanzie di robustezza probabilistiche sui risultati ottenuti.

Per dare più forza ai metodi presentati si considererà anche il caso di disturbo additivo sull'uscita e si presenterà un metodo in grado di sintetizzare il controllore anche in questo caso, si utilizzerà il metodo della variabile strumentale estesa per rendere il VRFT unbiased rispetto al rumore usando un solo dataset.

Può capitare di dover progettare un controllo per sistemi non lineari. In caso di sintesi di controllori per questo tipo di sistema si può progettare un'architettura di controllo in grado di riportare il problema al caso descritto sopra. I sistemi non lineari possono lavorare in diverse condizioni di equilibrio e, nell'intorno di ogni condizione di equilibrio, possono essere approssimati ad un sistema lineare. Un metodo per linearizzare il sistema non lineare nell'intorno dell'equilibrio può essere quello proposto in Figura 1.3. La caratteristica infatti tra $du(t)$ e $dy(t)$ è lineare una volta definiti \bar{u} e \bar{r} di equilibrio.

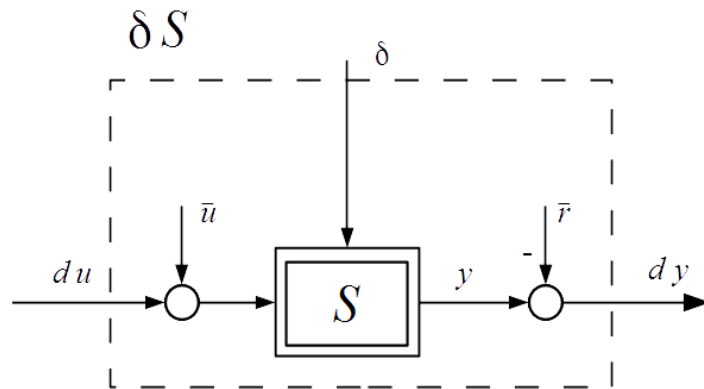


Figura 1.3: linearizzazione sistema non lineare S .

A questo punto ci si è ricondotti al problema descritto sopra. Il sistema non

lineare che lavora a diversi equilibri ora, tra $du(t)$ e $dy(t)$, può essere visto come una famiglia di sistemi lineari incerti per i quali si può tarare un controllore con le tecniche elencate. L'architettura di controllo che si può utilizzare è quella mostrata in Figura 1.4.

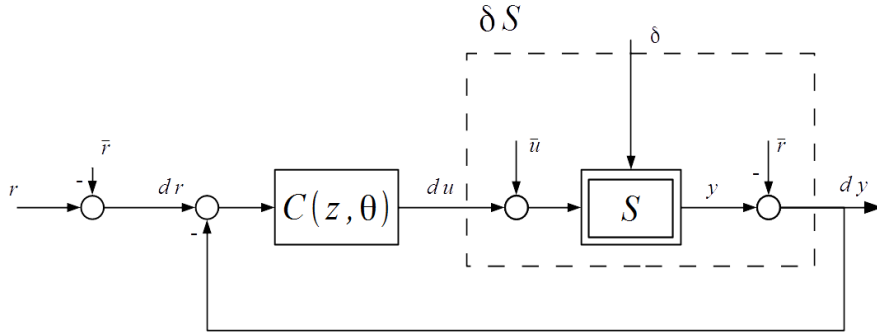


Figura 1.4: architettura di controllo caso sistema S non lineare.

In questo lavoro, i due algoritmi proposti verranno testati in ambito automotive. In particolare, sul problema di controllo dell'angolo di sterzo di un veicolo in curva. In questo tipo di problema ci si prefigge come obiettivo quello di sintetizzare un controllore che sia in grado di ottenere buone prestazioni in curva del veicolo indipendentemente dalle diverse condizioni di contatto ruota-strada, cioè fare in modo che anche in condizioni in cui la tenuta in curva del veicolo risulti particolarmente complessa il controllore sia in grado di rendere comunque controllabile il veicolo per il guidatore ed aumentare prestazioni e tenuta di strada in curva. Ogni tipo di contatto ha infatti una diversa caratteristiche che lega l'angolo di sterzo con la velocità di rotazione del veicolo in curva, come si può vedere chiaramente dalla Figura 1.5 che ne mostra la mappa statica nelle diverse condizioni (alla velocità di $10m/s$).

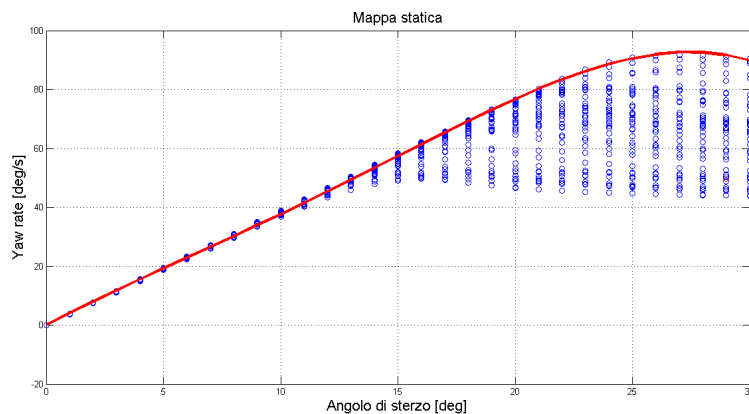


Figura 1.5: mappa statica tra angolo di sterzo e velocità di rotazione alla velocità del veicolo di $10m/s$.

Ci si troverà quindi a dover controllare un sistema non lineare che lavora in diverse condizioni legate al diverso valore assunto dai parametri del modello. Si dovrà quindi progettare un'architettura di controllo che richiami quella di Figura 1.4 per rendere lineare il sistema. Si progetterà poi il controllore secondo le tecniche presentate prima ed in base al set di dati comprendente $du(t)$ e $dy(t)$, che in questo specifico caso saranno rispettivamente variazioni dell'angolo di sterzo e variazioni della velocità di rotazione.

1.2 Contributi innovativi

Il lavoro svolto ha delle componenti innovative in quanto sono presenti delle estensioni del metodo VRFT atte a risolvere tipi di problemi non ancora affrontati dal punto di vista letterario. In particolare l'algoritmo VRFT è stato modificato per renderlo unbiased rispetto al rumore usando un solo dataset. Ciò è stato possibile farlo tramite l'utilizzo di una variabile strumentale estesa che renderà possibile la minimizzazione della correlazione tra l'input del sistema e l'errore di matching. Questo fornirà al metodo il tipo di robustezza rispetto ad un rumore additivo si stava cercando.

Inoltre vengono proposti due diversi approcci, *Greedy VRFT* e *Scenario VRFT*, robusti rispetto a variazioni della dinamica del sistema anche questi non presenti in letteratura. Sono stati ricavati utilizzando criteri diversi e in grado di fornire diversi tipi di garanzie sulla robustezza della soluzione.

Definiti i diversi approcci si è passati all'applicazione di questi metodi in ambito non lineare con la proposta di una nuova architettura di controllo. Infine si è testata l'efficacia e l'applicabilità delle metodologie trovate su di un problema in ambito automotive come il controllo della velocità di rotazione di un veicolo in curva tramite angolo di sterzo.

1.3 Struttura della tesi

Nella trattazione che segue prima si presentano le tecniche utilizzate attraverso una presentazione a livello teorico. Successivamente si passerà alla presentazioni di alcuni esempi numerici esplicativi per mostrare nella maniera più generica i risultati che possono essere raggiunti con le tecniche presentate. Infine si applicheranno i diversi approcci ad un problema più concreto in ambito automotive come il controllo della velocità di rotazione di un veicolo in curva.

In particolare nel capitolo 2 verrà trattato lo stato dell'arte, presentando l'approccio VRFT per il progetto di un controllore. Questo capitolo conterrà una breve spiegazione del metodo VRFT classico in assenza di disturbo additivo e la presen-

tazione del metodo della variabile strumentale estesa che verrà utilizzato nel caso di presenza di disturbo additivo sull'uscita del sistema da controllare.

Nel capitolo 3 invece si passerà alla presentazione dell'approccio VRFT robusto. In particolare verranno presentate le tecniche *Greedy VRFT* e *Scenario VRFT* per la sintesi di controllori robusti rispetto ad una lenta tempo-varianza del sistema, ne verranno descritte le peculiarità e le caratteristiche principali.

Nel capitolo 4 verranno riportati gli esempi numerici ed i risultati ottenuti con le tecniche presentate nei capitoli precedenti. Si descriverà il problema dell'impianto da controllare e verranno affrontati problemi di controllo senza rumore e con rumore additivo sull'uscita. Verranno anche mostrati i risultati con modello di riferimento comparabile e non comparabile con il sistema lineare da controllare.

Una volta mostrate le prestazioni dei diversi approcci nei casi più generali nel capitolo 5 si passa all'applicazione in ambito automotive. In questo capitolo viene descritta l'architettura del controllo che si può applicare nel caso di controllo del veicolo in curva e vengono mostrati i risultati ottenuti in simulazione utilizzando gli approcci descritti nei capitoli precedenti.

Infine nelle conclusioni verranno fatti alcuni commenti sui risultati ottenuti e verranno descritti sviluppi futuri che possono prendere spunto da questa trattazione.

Capitolo 2

Stato dell'arte: l'approccio VRFT per il progetto del controllore

In molte applicazioni di controllo non è possibile arrivare ad una rigorosa descrizione matematica dell'impianto a causa della non completa conoscenza di esso o dell'incertezza che può affliggere i parametri del modello, perciò il controllore può essere sintetizzato sulla base di misure effettuate sull'impianto stesso. Questo problema ha attirato l'attenzione di ingegneri del controllo a partire da Ziegler and Nichols (1942) [8], che concentrarono il loro lavoro sulla sintesi di controllori industriali PID. Dopo Ziegler and Nichols molte nuove tecniche iniziarono a prendere piede sia come estensione del metodo di Ziegler and Nichols, sia sviluppando il controllo in nuove direzioni. La più importante caratteristica di questa tecnica è che può essere facilmente implementata attraverso esperimenti sul processo. Il metodo VRFT richiede in generale una singola serie di esperimenti sull'impianto per tarare il controllore.

Nel capitolo che segue si farà riferimento a [4].

2.1 Formulazione del problema

Sia assunto che l'impianto sia un sistema SISO *lineare* a tempo discreto e che la dinamica sia descritta da una funzione di trasferimento razionale $P(z)$. La funzione di trasferimento è sconosciuta ed un insieme di dati I/O, raccolti durante un esperimento sull'impianto, siano disponibili per la sintesi del controllore.

Le specifiche di controllo sono assegnate tramite un modello di riferimento $M(z)$. Questo descrive la funzione di trasferimento desiderata del sistema in anello chiuso. Il controllore sintetizzato dipenderà linearmente da un vettore di parametri, la classe del controllore $\{C(z; \theta)\}$ prenderà per ciò la seguente forma $C(z; \theta) = \beta^T(z)\theta$, dove $\beta(z) = \begin{bmatrix} \beta_1(z) & \beta_2(z) & \cdots & \beta_n(z) \end{bmatrix}^T$ è un vettore conosciuto di funzioni di trasferimento lineari e discrete, mentre $\theta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \cdots & \vartheta_n \end{bmatrix}^T$ è il vettore di

n -dimensioni dei parametri.

L'obiettivo del controllo è la minimizzazione del seguente criterio model-reference:

$$J_{MR}(\theta) = \left\| \left(\frac{P(z)C(z; \theta)}{1 + P(z)C(z; \theta)} - M(z) \right) W(z) \right\|_2^2, \quad (2.1)$$

Dove $W(z)$ è la funzione peso in frequenza scelta dal progettista ed utilizzata per fornire una diversa importanza alle varie frequenze dell'espressione della cifra di merito.

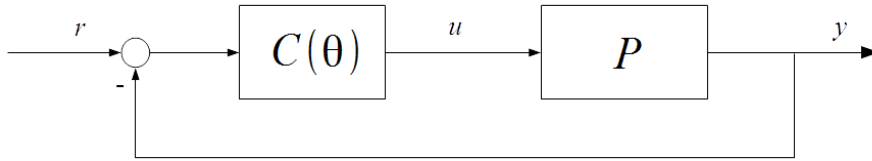


Figure 2.1: sistema di controllo nel caso classico di applicazione VRFT.

2.1.1 Comparazione con altri metodi

Il problema di controllo implementato dal VRFT è un problema di controllo con modello di riferimento, dove il progettista può specificare gli obiettivi del controllo scegliendo opportunamente il modello di riferimento $M(z)$. Questo può essere un vantaggio rispetto ai metodi classici per la taratura di controllori industriali, dove la specifica del controllo è data in modo empirico, in quanto in questo modo si vanno a fornire specifiche di progetto su tutto il transitorio del processo controllato e non solo rispetto ad una determinata caratteristica che deve assumere il segnale d'uscita. Inoltre il campo di applicazione del VRFT non è ristretto a quello del controllore PID.

Vale la pena notare che il VRFT ha alcune caratteristiche simili ad alcuni schemi iterativi per la taratura di impianti sviluppati in letteratura. Tra questi metodi l'iterative feedback tuning (IFT) proposto da Hjalmarsson e coautori [1] condivide con il VRFT la caratteristica di essere un metodo *diretto*; Sia VRFT che IFT non fanno uso di un passo di costruzione intermedia del modello e puntano direttamente alla selezione del controllore più adatto. Usando un'idea intelligente per ricostruire il gradiente del criterio di costo a partire dai dati, IFT sintetizza un controllore attraverso una procedura iterativa. Al contrario, VRFT non è iterativo e la sua caratteristica più rilevante è la semplicità di utilizzo.

2.2 Idea base VRFT

Supponiamo che un controllore $C(z; \theta)$ faccia in modo che il sistema in anello chiuso abbia funzione di trasferimento $M(z)$. Quindi se il sistema in anello chiuso

riceve in ingresso un segnale di riferimento $r(t)$, l'output del sistema sarà uguale a $M(z)r(t)$. Perciò una condizione necessaria per il sistema in AC per avere la stessa funzione di trasferimento del modello di riferimento è che l'output dei due sistemi sia lo stesso per un dato $\bar{r}(t)$ a meno del rumore.

Il metodo model reference standard impone come prima condizione necessaria la selezione di un riferimento $\bar{r}(t)$ e poi la scelta di $C(z; \theta)$ così che la specifica sia soddisfatta. Tuttavia per un generico $\bar{r}(t)$ è di difficile realizzazione se l'impianto non è conosciuto. L'idea base dell'approccio virtual reference è la selezione accurata del riferimento $\bar{r}(t)$ così che diventi facile la determinazione del controllore.

Supponiamo di avere a disposizione i set di dati corrispondenti agli ingressi sull'impianto ed alle relative uscite (supponiamo per ora questo set di dati noise-free). Date delle misure $y(t)$, si consideri un riferimento $\bar{r}(t)$ tale che $M(z)\bar{r}(t) = y(t)$, dove $M(z)$ è il modello di riferimento desiderato per il sistema in anello chiuso che vogliamo progettare. In questo modo il riferimento viene chiamato "virtuale" in quanto non è quello usato per generare il segnale $y(t)$. Da notare che $y(t)$ è l'output desiderato del sistema in anello chiuso quando il segnale di riferimento è $\bar{r}(t)$. Ora è possibile calcolare il corrispondente *errore virtuale* $e(t) = \bar{r}(t) - y(t)$. Il processo $P(z)$ è sconosciuto, ciò che è conosciuto è che $P(z)$, quando eccitato da un ingresso $u(t)$ (l'attuale segnale in ingresso misurato), genera il segnale $y(t)$ in uscita. Pertanto, un buon controllore è quello che genera $u(t)$ quando riceve in ingresso come segnale di errore $e(t)$. L'idea è proprio quella di trovare tale controllore. Quando entrambi i segnali $u(t)$ e $e(t)$ sono conosciuti il tutto si riduce al *problema di identificazione* della dinamica descritta dalla relazione tra $e(t)$ ed $u(t)$.

L'idea descritta sopra può essere implementata dall'algoritmo a 3 passi seguente (dove viene considerato un filtraggio dei dati attraverso un filtro $L(z)$ scelto dall'utente). Questi passaggi rappresentano il nucleo fondamentale del metodo VRFT.

Dato un set di dati I/O misurati sul sistema $\{u(t), y(t)\}_{t=1, \dots, N}$, è necessario seguire i seguenti passaggi:

1. calcolare:

- riferimento virtuale $\bar{r}(t)$ così che $y(t) = M(z)\bar{r}(t)$, e
- il corrispondente *errore virtuale* $e(t) = \bar{r}(t) - y(t)$ (assumiamo $M(z) \neq 1$);

2. filtrare i segnali $e(t)$ e $u(t)$ con il filtro $L(z)$ adatto:

$$e_L(t) = L(z)e(t), \quad u_L(t) = L(z)u(t),$$

3. selezionare il vettore dei parametri del controllore, detto $\hat{\theta}_N$, che minimizza il seguente criterio:

$$J_{VR}^N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (u_L(t) - C(z; \theta)e_L(t))^2. \quad (2.2)$$

Da notare che quando $C(z; \theta) = \beta^T(z)\theta$, la formula (2.2) può essere data da

$$J_{VR}^N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (u_L(t) - \varphi_L^T(t)\theta)^2, \quad (2.3)$$

$$\varphi_L(t) = \beta(z)e_L(t)$$

ed il vettore dei parametri $\hat{\theta}_N$ può essere calcolato come segue:

$$\hat{\theta}_N = \left[\sum_{t=1}^N \varphi_L(t)\varphi_L(t)^T \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi_L(t)u_L(t)$$

Nella prossima sezione verrà mostrato come tramite un'accurata scelta del prefiltro $L(z)$, il controllore $C(z; \hat{\theta}_N)$ è vicino al punto ottimo del criterio di costo (2.1), infatti il controllore sintetizzato sarà il controllore appartenente alla propria classe che riesce a rendere la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso più simile possibile a quella del modello di riferimento scelto $M(z)$. In caso di matching perfetto come $L(z)$ può essere presa qualunque funzione di trasferimento.

2.2.1 Scelta del filtro

Considerando l'indice $J_{MR}(\theta)$ del problema di controllo con modello di riferimento Eq. (2.1) ed il criterio che utilizza l'approccio virtual reference Eq. (2.2) le loro cifre di merito sembrano differenti. In questa sezione verrà dimostrato che, tramite la scelta di un opportuno filtro $L(z)$, le due cifre di merito verranno rese simili nell'intorno della cifra di merito. In questo modo l'approccio virtual reference può essere usato per risolvere un problema di controllo a modello di riferimento descritto in precedenza.

Molto importante notare che nello sviluppo seguente non viene ipotizzato che il controllore appartenga alla classe dei controllori tali per cui si ottiene un matching perfetto. Ciò non sarebbe realistico. Anche la presenza di rumore in questa sezione non viene presa in considerazione e viene assunto che i segnali $u(t)$ e $y(t)$ siano noise-free. Il caso di sistema in presenza di rumore verrà trattato successivamente.

Per iniziare si parte dalla definizione di norma-2 di una funzione di trasferimento lineare e discreta, $J_{MR}(\theta)$ può essere scritta perciò come:

$$J_{MR}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{P(e^{j\omega})C(e^{j\omega}; \theta)}{1 + P(e^{j\omega})C(e^{j\omega}; \theta)} - M(e^{j\omega}) \right|^2 |W(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

oppure in maniera più compatta omettendo l'argomento $e^{j\omega}$:

$$J_{MR}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{PC(\theta)}{1+PC(\theta)} - M \right|^2 |W|^2 d\omega \quad (2.4)$$

Introduciamo ora la funzione razionale $C_0(z)$ che risolve esattamente il problema model.matching. Definiamo $C_0(z)$ nel modo seguente ($C_0(z)$ esiste in quanto $M(z) \neq 1$)

$$\frac{P(z)C_0(z)}{1+P(z)C_0(z)} = M(z). \quad (2.5)$$

Da notare che, in generale, $C_0(z)$ non appartiene alla famiglia dei controllori parametrizzati $\{C(z; \theta)\}$ e non sarà una funzione razionale propria. Tuttavia possiamo notare che non è garantito che $C_0(z)$ produca un sistema in anello chiuso stabile dato che è possibile una cancellazione tra polo-zero instabile nel prodotto $P(z)C_0(z)$. $C_0(z)$ è utilizzato nel seguito solo a scopo di analisi.

Utilizzando $C_0(z)$, con gli opportuni accorgimenti, si può riscrivere la cifra di merito (2.4) come

$$J_{MR}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|P|^2 |W|^2}{|1+PC(\theta)|^2} \frac{|C(\theta) - C_0|^2}{|1+PC_0|^2} d\omega. \quad (2.6)$$

Consideriamo ora il criterio $J_{VR}^N(\theta)$. Questa cifra di merito è conosciuta in quanto i segnali misurati $u(t)$ e $y(t)$ possono essere considerati realizzazioni stazionarie e stocastiche del processo quando il numero di dati raccolti cresce ($N \rightarrow \infty$). In questo caso infatti si può dire che:

$$J_{VR}^N(\theta) \rightarrow J_{VR}(\theta) = E [(u_L(t) - C(z; \theta)e_L(t))^2]. \quad (2.7)$$

$J_{VR}(\theta)$ è la controparte asintotica di $J_{VR}^N(\theta)$. Coerentemente con ciò, per $N \rightarrow \infty$, il minimo $J_{VR}^N(\theta)$, con parametri $\hat{\theta}_N$, convergerà al minimo di $J_{VR}(\theta)$, con parametri $\hat{\theta}$. Successivamente $J_{VR}(\theta)$, a scopo di analisi, verrà utilizzato per indicare anche $J_{VR}^N(\theta)$.

Utilizzando la definizione di $u_L(t)$ e $e_L(t)$ data nella sezione precedente, la definizione di $C_0(z)$ alla (2.5), ed il teorema di Parseval, il criterio asintotico (2.7) può essere espresso dalla seguente cifra di merito nel dominio delle frequenze:

$$J_{VR}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P|^2 |C(\theta) - C_0|^2 |1 - M|^2 \frac{|L|^2}{|M|^2} \Phi_u d\omega, \quad (2.8)$$

dove Φ_u è la densità spettrale di $u(t)$.

Confrontando $J_{MR}(\theta)$ e $J_{VR}(\theta)$ (Eqs. (2.6) e (2.8) rispettivamente) possono essere fatte le seguenti osservazioni:

- se $C_0(z) \in \{C(z; \theta)\}$ e $J_{VR}(\theta)$ ha un solo minimo, la minimizzazione di $J_{VR}(\theta)$

produrrà $C_0(z)$, indipendentemente dalla scelta di $L(z)$.

- Supponiamo invece che $C_0(z) \notin \{C(z; \theta)\}$. Se è soddisfatta la seguente condizione:

$$|L|^2 = \frac{|M|^2 |W|^2}{|1 + PC(\theta)|^2} \frac{1}{\Phi_u}, \quad \forall \omega \in [-\pi; \pi], \quad (2.9)$$

quindi $J_{VR}(\theta) = J_{MR}(\theta)$. Di conseguenza, minimizzando $J_{VR}(\theta)$ si minimizza anche $J_{MR}(\theta)$.

Chiaramente la scelta di un prefiltro che soddisfi la Eq. (2.9) non è possibile in quanto il processo $P(z)$ non è conosciuto ed inoltre l'espressione dipende da θ . Viene perciò di seguito proposta una scelta di $L(z)$ alternativa:

- si sceglie $L(z)$ tale che:

$$|L|^2 = |1 - M|^2 |M|^2 |W|^2 \frac{1}{\Phi_u}, \quad \forall \omega \in [-\pi; \pi], \quad (2.10)$$

Ora tutte le grandezze sulla parte destra dell'Eq. (2.10) sono conosciute quindi $L(z)$ può ora essere calcolata (infatti Φ_u può essere considerato conosciuto solo quando il segnale di input è scelto dal progettista. In altre situazioni invece deve essere stimato). L'espressione (2.10) è equivalente all'espressione

$$|L|^2 = \frac{|M|^2 |W|^2}{|1 + PC(\theta)|^2} \frac{1}{\Phi_u}, \quad \forall \omega \in [-\pi; \pi],$$

in cui al termine $|1 + PC(\theta)|^2$ è stato sostituito con $|1 + PC_0|^2$ nella Eq. (2.9), ci si aspetta infatti che per $\theta = \bar{\theta}$ si abbia che $|1 + PC(\theta)|^2 \approx |1 + PC_0|^2$, dove $\bar{\theta}$ è il minimo di $J_{MR}(\theta)$.

Si ricorda che l'analisi proposta si basa su risultati asintotici. Ciò significa che è richiesto un numero significativo di dati per giungere ai risultati mostrati.

2.2.2 Analisi del filtro proposto

Si imposta $\Delta C(z) = C_0(z) - \beta^T(z)\bar{\theta}$, dove $\bar{\theta}$ è il vettore dei parametri che minimizza $J_{MR}(\theta)$. Da notare che $\Delta C(z)$ è la parte di $C_0(z)$ che non può essere descritta dalla famiglia di controllori scelta. Ovviamente, se $C_0(z) \in \{C(z; \theta)\}$, si avrà che $\Delta C(z) = 0$.

Introduciamo ora il seguente vettore esteso di funzioni di trasferimento:

$$\beta^+(z) = \left[\beta_1(z) \quad \beta_2(z) \quad \cdots \quad \beta_n(z) \quad \Delta C(z) \right]^T$$

ed il seguente vettore di parametri esteso

$$\theta^+ = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \cdots & \vartheta_n & \vartheta_{n+1} \end{bmatrix}^T$$

Definiamo quindi una famiglia estesa di controllori $C^+(z; \theta^+) = \beta^+(z)^T \theta^+$. Chiaramente, $C_0(z) = C^+(z; \bar{\theta}^+)$, con $\bar{\theta}^+ = \begin{bmatrix} \bar{\theta}^T & 1 \end{bmatrix}^T$. Consideriamo infine la seguente cifra di merito estesa:

$$J_{MR}^+(\theta^+) = \left\| \left(\frac{P(z)C^+(z; \theta^+)}{1 + P(z)C^+(z; \theta^+)} - M(z) \right) W(z) \right\|_2^2$$

Da notare che la differenza tra $J_{MR}(\theta)$ e $J_{MR}^+(\theta^+)$ è che il secondo è parametrizzato da una famiglia di controllori $\{C^+(z; \theta^+)\}$. L'espansione di Taylor del secondo ordine attorno al minimo globale $\bar{\theta}^+$ è indicata come $\bar{J}_{MR}^+(\theta^+)$, la cui espressione è la seguente:

$$J_{MR}^+(\theta^+) = \bar{J}_{MR}^+(\theta^+) + o\left(\|\theta^+ - \bar{\theta}^+\|_2^2\right)$$

Otteniamo così il seguente risultato.

Proposition 1. *Il vettore dei parametri $\bar{\theta}$ che minimizza la cifra di merito $J_{MR}(\theta)$, ed il vettore dei parametri $\hat{\theta}$ che minimizza $J_{VR}(\theta)$ quando $L(z)$ è scelto secondo la (2.10) sono tali che:*

$$\bar{\theta} = \arg \min_{\theta} J_{MR}^+ \left(\begin{bmatrix} \theta^T & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.11)$$

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \bar{J}_{MR}^+ \left(\begin{bmatrix} \theta^T & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.12)$$

Il risultato descritto sopra è interessante in quanto fornisce una relazione formale tra il vettore dei parametri $\hat{\theta}$ ottenuto utilizzando l'approccio con riferimento virtuale ed il vettore dei parametri ottimo $\bar{\theta}$, il quale minimizza la cifra di merito iniziale $J_{MR}(\theta)$. In particolare, la preposizione precedente dice che $\bar{\theta}$ minimizza, secondo il vettore n-dimensionale dei primi n elementi di θ^+ , la cifra di merito $J_{MR}^+(\theta^+)$, mentre $\hat{\theta}$ minimizza secondo lo stesso vettore l'espansione del secondo ordine (nell'intorno di $\bar{\theta}^+$) della cifra di merito estesa $J_{MR}^+(\theta^+)$. Per la scelta fatta nella (2.10) si ottiene $J_{VR}(\theta)$ uguale a $\bar{J}_{MR}^+ \left(\begin{bmatrix} \theta^T & 0 \end{bmatrix} \right)$. Basandosi su questo risultato, è possibile concludere che se la funzione di trasferimento $\Delta C(z)$ gioca un ruolo marginale nella determinazione di $C_0(z)$, cioè la famiglia di controllori $\{C(z; \theta)\}$ risulta solo sottoparametrizzata, $C(z; \hat{\theta})$ è una buona approssimazione di $C(z; \bar{\theta})$ fintanto che $J_{MR}^+(\theta^+)$ è ben approssimata dall'espansione del secondo ordine nell'intorno del suo minimo da $\bar{J}_{MR}^+(\theta^+)$.

2.3 Caso con disturbo additivo

In questa sezione verrà discusso il comportamento del metodo VRFT nel caso in cui l'output del sistema $y(t)$ sia affetto da un rumore additivo $d(t)$, cioè l'output misurato sarà $\tilde{y}(t) = P(z)u(t) + d(t)$. Assumeremo che ingresso $u(t)$ e disturbo $d(t)$ siano incorrelati, cioè che i dati siano raccolti quando il sistema sta lavorando in anello aperto.

Se l'algoritmo visto nel caso precedente fosse applicato al set di dati $\{u(t), \tilde{y}(t)\}_{t=1, \dots, N}$, si otterrebbe un vettore di parametri affetto da un bias e ciò produrrebbe un significativo deterioramento delle prestazioni del controllo. Ciò si può facilmente capire dall'espressione nel dominio delle frequenze del criterio asintotico $J_{VR}(\theta)$ confrontando il caso con e senza rumore.

- Criterio asintotico utilizzando dati non affetti da rumore $\{u(t), y(t)\}_{t=1, \dots, N}$:

$$J_{VR}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P|^2 |C(\theta) - C_0|^2 |1 - M|^2 \frac{|L|^2}{|M|^2} \Phi_u d\omega \quad (2.13)$$

- Criterio asintotico utilizzando dati affetti da rumore $\{u(t), \tilde{y}(t)\}_{t=1, \dots, N}$:

$$J_{VR}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[|P|^2 |C(\theta) - C_0|^2 |1 - M|^2 \frac{|L|^2}{|M|^2} \Phi_u + \frac{|C(\theta)|^2}{|P|^2 |C_0|^2} |L|^2 \Phi_d \right] d\omega \quad (2.14)$$

(dove Φ_d è la densità spettrale del rumore).

I minimi delle cifre di merito (2.13) e (2.14) sono diversi a causa del disturbo $d(t)$ che nella (2.14) dipende da θ . Infatti mentre se nel primo addendo della (2.14) per minimizzare la cifra di merito il vettore di parametri θ deve tendere all'ottimo, nel secondo θ dovrebbe tendere a zero per rendere minima l'espressione. Questo genera un errore nella corretta determinazione dei parametri del controllore.

Per ovviare a questo tipo di problema è necessario ricorrere all'utilizzo di una variabile strumentale. Definendo $\zeta(t)$ come variabile strumentale, che si può secondo varie tecniche, il vettore dei parametri può essere calcolato secondo la seguente equazione

$$\hat{\theta}_N^{IV} = \left[\sum_{t=1}^N \zeta(t) \varphi_L(t)^T \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \zeta(t) u_L(t) \quad (2.15)$$

2.4 Variabile strumentale estesa

L'utilizzo del metodo della variabile strumentale estesa prende spunto dal *Correlation Approach*, che fa riferimento all'articolo [2]. Rispetto al metodo della variabile strumentale classica, che prevede l'utilizzo di due set di dati (presentato nel [4]), ha il

vantaggio di avere bisogno di un solo esperimento per risalire al vettore dei parametri, mentre ha come svantaggio il dover tagliare il dataset in base al parametro l , che rappresenta i passi di correlazione tra input ed errore di matching (diventa un parametro di tuning), e verrà scelto secondo i passi che la funzione legata al modello di riferimento impiega per esaurire la sua risposta all'impulso (fatto dato dall'esperienza).

L'idea principale di un approccio di questo tipo è che i parametri del controllore θ siano scelti in modo che $[u_L(t) - \theta^T \varphi_L(t)]$ risulti incorrelato con il segnale in ingresso $u(t)$. Questo per ridurre l'effetto del rumore sulla scelta dei parametri al minimo. La funzione di correlazione è definita come

$$f(\theta) = E \{ \zeta(t) [u_L(t) - \theta^T \varphi_L(t)] \} \quad (2.16)$$

dove $E\{\cdot\}$ è la media e $\zeta(t)$ un vettore di variabili strumentali correlato con $u(t)$ ma scorrelato con $d(t)$ dato da

$$\zeta(t) = \left[u(t+l) \quad u(t+l-1) \quad \dots \quad u(t) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-l) \right]^T \quad (2.17)$$

dove $u_L(t) = L(z)u(t)$, in cui $L(z)$ è il prefiltro ottimo della sezione precedente ricavato secondo la (2.10) ed l sufficientemente grande tale da fare esaurire la risposta all'impulso del modello di riferimento $M(z)$. Il vettore di parametri del controllore ottimo deve minimizzare il criterio di correlazione definito come la norma-due della funzione di correlazione:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J_c(\theta) = f^T(\theta) f(\theta) \quad (2.18)$$

Da notare che $J_c(\theta)$ tramite manipolazioni e facendo a ritroso le operazioni effettuate nella sezione precedente può essere ricondotta ad un criterio a modello di riferimento standard che si ha quando il processo è conosciuto

$$J_{MR}(\theta) = \left\| \left(M(z) - \frac{C(\theta)P(z)}{1 + C(\theta)P(z)} \right) W(z) \right\|_2^2 \quad (2.19)$$

Per utilizzare correttamente la variabile strumentale estesa bisogna definire la funzione $\hat{f}(\theta)$ valida per un numero finito di dati N :

$$\hat{f}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_L(t) [u_L(t) - \theta^T \varphi_L(t)]. \quad (2.20)$$

Definiamo ora la nuova cifra di merito come

$$\hat{J}_c(\theta) = \hat{f}^T(\theta) \hat{f}(\theta) \quad (2.21)$$

I parametri del controllore ottimo possono così essere calcolati attraverso la mini-

mizzazione della cifra di merito $\hat{J}_c(\theta)$ che può essere ottenuta attraverso l'algoritmo least-squares :

$$\hat{\theta} = (Q^T Q)^{-1} Q^T Z \quad (2.22)$$

dove

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_L(t) \varphi_L^T(t) \quad , \quad Z = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_L(t) u_L(t)$$

e $Q^T Q$ non singolare.

Da notare che $\hat{J}_c(\theta)$ converge a $J_c(\theta)$ quando N tende all'infinito, che, a sua volta, ben approssima la (2.19).

Capitolo 3

L'approccio VRFT robusto

L'obiettivo di questo capitolo è quello di presentare delle metodologie per la taratura di controllori robusti che si basano sulla teoria del VRFT presentata nel capitolo precedente. In altre parole in questa sezione si suppone che il sistema da controllare sarà incerto. I controllori sintetizzati dovranno essere in grado di ottenere buone prestazioni non soltanto per una singola funzione di trasferimento ma per tutte le funzioni di trasferimento all'interno della famiglia di incertezza. Lo schema di controllo è mostrato in Figura 3.1

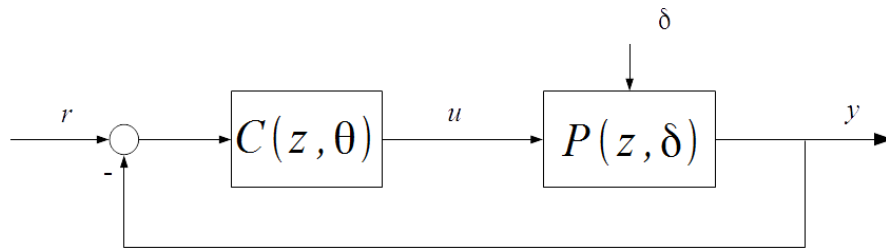


Figure 3.1: sistema di controllo nel caso VRFT robusto rispetto all'incertezza δ sul sistema.

L'incertezza del sistema è data dal parametro δ che porterà l'impianto $P(\delta)$ ad assumere diverse configurazioni. Il controllore $C(\theta)$ invece va tarato una volta per tutte in modo da funzionare correttamente per ogni configurazione dell'impianto facendo tendere il comportamento del sistema in anello chiuso a quello del modello di riferimento $M(z)$ impostato. Come tipo di controllore utilizzato si suppone appartenente alla classe di controllori lineari nei parametri rappresentata dall'espressione che segue.

$$C(z, \theta) = \theta^T \beta(z) = \vartheta_1 \beta_1(z) + \dots + \vartheta_d \beta_d(z) \quad (3.1)$$

Nel capitolo seguente si farà dapprima riferimento al caso in assenza di rumore. In questa fase verranno proposte due cifre di merito robuste rispetto al problema spiegato sopra. Successivamente invece si inserirà del rumore addizionale sull'uscita.

Si estenderanno quindi le cifre di merito trovate al metodo che utilizza la *variabile strumentale estesa*, presentato nel capitolo precedente, rendendo così la soluzione rubusta anche nel caso con rumore .

3.1 Structure

3.1.1 Esperimenti sull'impianto incerto

Al fine di ottenere un controllore robusto in accordo alla metodologia VRFT si suppone di potere eseguire i seguenti esperimenti sull'impianto incerto:

- si considera il sistema in M condizioni di funzionamento e si misura il corrispondente parametro incerto. In questo modo si ottengono M valori del parametro incerto : $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(M)}$;
- per ogni condizione vista, cioè per ogni valore di $\delta^{(i)}$, si esegue un esperimento I/O sul sistema corrispondente: si inietterà un ingresso $u(t)$ per $t = 1, \dots, N$, con N che deve essere la stessa per tutte le condizioni, e si misura l'uscita corrispondente $y^{(i)}(t)$ con $t = 1, \dots, N$.

In questo modo si viene a costruire la tabela di dati seguente:

$$\left. \begin{array}{l} \delta^{(1)} \\ \delta^{(2)} \\ \vdots \\ \delta^{(M)} \end{array} \right\} \begin{array}{cccccc} u(1) & \dots & u(N) & y^{(1)}(1) & \dots & y^{(1)}(N) \\ u(1) & \dots & u(N) & y^{(2)}(1) & \dots & y^{(2)}(N) \\ & & & & & \\ u(1) & \dots & u(N) & y^{(M)}(1) & \dots & y^{(M)}(N) \end{array}$$

dove ciascuna riga fa riferimento ad un esperimento in una condizione di incertezza differente.

Per ciascuna riga viene poi calcolato il riferimento virtuale corrispondente $r^{(i)}(t) = M(z)^{-1}y^{(i)}(t)$ e di conseguenza si risale all'errore virtuale $e_v^{(i)} = r^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)$. Si costruisce poi $\varphi^{(i)}(t) = \beta(z)e_v^{(i)}(t)$ e tutti i segnali calcolati vengono filtrati con il prefiltro ottimo, il cui ricavo è stato mostrato nei capitoli precedenti

$$L(z) = (1 - M(z))M(z)W(z)\frac{1}{\Phi_u} \quad (3.2)$$

A questo punto si ottiene la base di dati

$$\left. \begin{array}{l} \delta^{(1)} \\ \delta^{(2)} \\ \vdots \\ \delta^{(M)} \end{array} \right\} \begin{array}{cccccc} u_L(1) & \dots & u_L(N) & \varphi_L^{(1)}(1) & \dots & \varphi_L^{(1)}(N) \\ u_L(1) & \dots & u_L(N) & \varphi_L^{(2)}(1) & \dots & \varphi_L^{(2)}(N) \\ & & & & & \\ u_L(1) & \dots & u_L(N) & \varphi_L^{(M)}(1) & \dots & \varphi_L^{(M)}(N) \end{array}$$

attraverso la quale si calcolerà e sintetizzerà il controllore VRFT robusto.

3.2 Greedy VRFT

Il primo metodo che verrà presentato è il *Greedy VRFT*. Questo metodo utilizza lo stesso algoritmo presentato nel capitolo precedente. L'idea base di un approccio di questo tipo è quella di eseguire un unico *grande esperimento* in cui un segnale di ingresso $u(t)$ viene somministrato al processo $P(\delta)$ che andrà a lavorare in M configurazioni passando in modo continuo da una all'altra. M è il numero di configurazioni in cui viene eccitato il processo, che lavorerà in $\delta^1, \dots, \delta^i, \dots, \delta^M$. M non è soggetto a nessun vincolo particolare tranne che la ragionevolezza del progettista nel testare l'impianto nel maggior numero di configurazioni. Verrà così prodotto un dataset del segnale in uscita dal sistema $y(t)$. Una volta che viene così definito il set di dati I/O misurati sul sistema $\{u(t), y(t)\}_{t=1, \dots, NM}$ (dove N sta per numero di dati raccolti per ogni configurazione M) non si fa altro che applicare l'algoritmo VRFT classico per tutto il set di dati raccolti.

La cifra di merito classica da minimizzare per ottenere il vettore dei parametri del controllore, utilizzando un controllore definito come $C(z; \theta) = \theta^T \beta(z)$, è la seguente:

$$J_{VR}^N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (u_L(t) - \varphi_L^T(t)\theta)^2 \quad (3.3)$$

dove $u_L(z) = L(z)u(t)$, $\varphi_L(t) = \beta^T(z)L(z)e(t)$ ed $L(z)$ è il prefiltra ottimo definito al capitolo precedente. Esprimiamo ora la stessa cifra di merito aggiornata al caso in esame per *Greedy VRFT*

$$J_G^{NM}(\theta) = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^N (u_L^{(i)}(t) - \varphi_L^{(i)T}(t)\theta)^2 \quad (3.4)$$

in cui l'apice i -esimo sui segnali di ingresso ed uscita indica l' i -esimo valore del parametro incerto δ in cui sono stati rilevati i campioni. Minimizzare la cifra di merito $J_G^{NM}(\theta)$ significa fare la seguente operazione

$$\min_{\theta} \left\| \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^N \varphi_L^{(i)} \varphi_L^{(i)T} \theta - \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^N \varphi_L^{(i)} u_L^{(i)}(t) \right\|_2^2 \quad (3.5)$$

Che può essere risolta dall'algoritmo standard least-square

$$\hat{\theta}_N = \left[\sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^N \varphi_L^{(i)} \varphi_L^{(i)T} \right]^{-1} \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^N \varphi_L^{(i)} u_L^{(i)}(t) \quad (3.6)$$

Da notare che l'unico cambiamento rispetto al metodo classico è che i dati raccolti non dipendono da una sola funzione di trasferimento seppur sconosciuta ma da una famiglia di funzioni di trasferimento sconosciute. Ovviamente più dati vengono

raccolti e più sono le configurazioni in cui viene eccitato il sistema più il risultato che avrò sarà robusto ed affidabile. Tuttavia un approccio di questo tipo non fornisce nessuna garanzia di robustezza in quanto la scelta del numero di configurazioni M in cui l'impianto viene testato non è legato a nessuna teoria perciò basta semplicemente fare funzionare l'impianto in un punto di lavoro tale per cui non vi sono dati raccolti che il sistema in anello chiuso rischia di comportarsi in modo non previsto.

In conclusione l'applicazione di questo metodo ha il grande vantaggio per il progettista di non dover apportare nessuna modifica all'algoritmo VRFT classico ma ha il difetto di non fornire nessun tipo di garanzia per quanto riguarda la convergenza del processo nelle diverse configurazioni al modello di riferimento impostato.

3.3 Scenario VRFT

Data la necessità di essere robusti quindi appare evidente che l'approccio *Greedy VRFT* non sia la scelta ottimale. Esso si limita infatti ad effettuare una media sulla base di tutti i dati raccolti. Tuttavia sembra più opportuno cautelarsi verso il caso pessimo tra quelli visti.

Per ogni valore del parametro incerto $\delta^{(i)}$ il VRFT classico ottiene i parametri del controllore minimizzando la cifra di merito

$$J_{VR}^{N(i)}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (u_L(t) - \varphi_L^{(i)T}(t)\theta)^2 \quad (3.7)$$

lo scenario VRFT quindi per cautelarsi contro il caso peggiore utilizzerà il seguente tipo di minimizzazione

$$\min_{\theta} \max_{i=1\dots M} J_{VR}^{N(i)}(\theta) \quad (3.8)$$

sebbene questo problema non ammetta una soluzione analitica, come nel caso del *Greedy VRFT* e dell'approccio classico, si può riformulare il problema nel seguente modo

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma, \theta} \gamma \\ \text{subject to: } & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (u_L(t) - \varphi_L^{(i)T}(t)\theta)^2 \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (3.9)$$

Essendo i vincoli del problema di ottimizzazione in questione quadratici il problema è convesso in (θ, γ) e quindi si tratta di un problema di ottimizzazione con cifra di merito dipendente da θ ed M , numero finito, vincoli convessi, quadratici per la precisione. Impostato il problema in questo modo esistono risultati numerici che permettono di calcolarne la soluzione ad un costo computazionale elevato.

La soluzione si suppone essere definita come θ^* , parametri del controllore ottimo, e come γ^* , valore di costo ottimo, tali da rendere vera la seguente disequaglianza.

$$J_{VR}^{N(i)}(\theta^*) \leq \gamma^* \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (3.10)$$

3.3.1 Proprietà di robustezza dello Scenario VRFT

La diseguanza (3.10) vale solo per gli M impianti estratti ma non si è in grado di affermare nulla per le situazioni non considerate. Esiste a questo proposito una teoria molto utile in grado di fornire garanzie al problema proposto e fa riferimento agli articoli [3] e [6].

Definiamo ora la cifra di merito considerando l'incertezza data del parametro δ supponendo che possa assumere infiniti valori nel suo range

$$J_{VR}^N{}^{(i)}(\theta^*, \delta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (u_L(t) - \varphi_L^{(i)T}(t, \delta)\theta^*)^2 \quad (3.11)$$

dove $u_L(t)$ è lo stesso di prima mentre $\varphi_L(t, \delta)$ rappresenta una condizione dell'impianto generico $P(\delta)$. Ipotizzando le configurazioni estratte siano $\delta^{(i)}$, $i = 1, \dots, M$ e siano state estratte da una probabilità P in Δ (che rappresenta il dominio dei valori che può assumere δ) vale il seguente teorema

Teorema. $\forall \beta \in (0, 1)$, vale che

$$P \{ J_{VR}^N(\theta^*, \delta) > \gamma^* \} \leq \frac{d + \ln \frac{1}{\beta} + \sqrt{2d \ln \frac{1}{\beta}}}{M} \quad (3.12)$$

con confidenza $1 - \beta$, dove d è il numero di parametri utilizzati per l'ottimizzazione.

Commenti

L'espressione

$$\{ \delta : J_{VR}^N(\theta^*, \delta) > \gamma^* \} \quad (3.13)$$

altro non rappresenta che le situazioni in cui il controllore Scenario VRFT non è robusto, cioè i casi in cui le prestazioni fornite dal controllore in anello chiuso sono peggiori del caso peggiore considerato nella risoluzione del problema di ottimizzazione.

In particolare

$$P \{ J_{VR}^N(\theta^*, \delta) > \gamma^* \}$$

rappresenta la dimensione delle situazioni per cui il controllore Scenario VRFT non è robusto. Il teorema in questione è importante in quanto mostra che tale quantità è molto piccola e tende rapidamente a zero al crescere di M . Di conseguenza è chiaro che scegliendo M in modo opportuno si può rendere questa dimensione piccola a piacere. Ovviamente più si sceglierà M grande più il controllore sarà robusto ma si avrà un alto costo computazionale, più M sarà piccolo meno robustezza si avrà ma il costo computazionale sarà basso (M infatti rappresenta il numero di vincoli). Importante a questo punto per la scelta del parametro M effettuare un trade-off tra le due esigenze illustrate.

Il modo tipico di procedere è quello di scegliere un livello di robustezza ϵ e calcolare M in modo tale che:

$$\frac{d + \ln \frac{1}{\beta} + \sqrt{2d \ln \frac{1}{\beta}}}{M} = \epsilon \quad (3.14)$$

cioè

$$M = \frac{d + \ln \frac{1}{\beta} + \sqrt{2d \ln \frac{1}{\beta}}}{\epsilon} \quad (3.15)$$

Per la scelta di β invece si deve considerare che è il parametro che indica che il risultato sarà garantito con confidenza $1 - \beta$. Da notare che il risultato non potrà essere garantito con esattezza in quanto esso dipende dal campione $\delta^{(1)} \delta^{(2)} \dots \delta^{(N)}$ estratto che potrà non essere rappresentativo di tutte le possibili configurazioni ma avrà appunto una certa confidenza definita da $1 - \beta$.

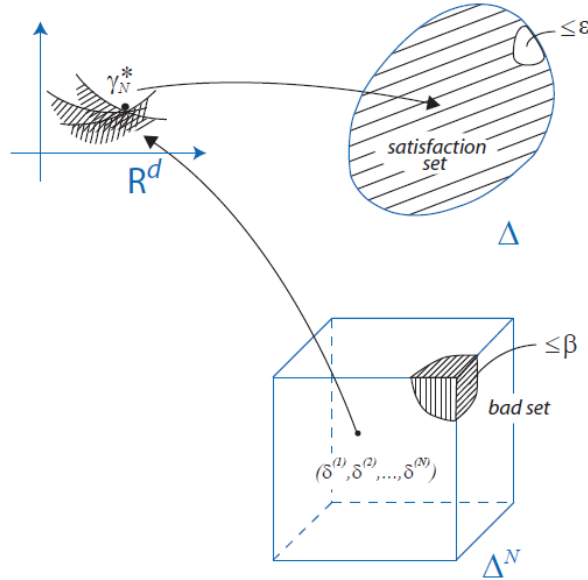


Figure 3.2: Rappresentazione grafica del teorema, tratta da [3].

D'altra parte β inciderà solo marginalmente nel calcolo del valore di M in quanto è passato attraverso il logaritmo naturale $\ln \frac{1}{\beta}$. Per fare un esempio se si prendesse il valore di $\beta = 10^{-10}$, confidenza altissima tale da rendere il risultato praticamente certo, il valore di M cambia di molto poco $\ln 10^{10} = 10 \ln 10 = 22$.

3.4 VRFT robusto con rumore addizionale sull'uscita

Si considera ora il caso in cui sia presente del rumore addizionale sull'uscita. Si cerca quindi di estendere le cifre di merito presentate in questo capitolo, robuste rispetto a variazione del sistema da controllare, al metodo presentato nel capitolo

precedente della *variabile strumentale estesa*, in modo tale da rendere la soluzione robusta anche rispetto alla presenza di rumore sull'uscita. Il sistema di controllo in questo caso è quindi rappresentato dalla Figura 3.3 in cui il segnale $d(t)$ non è altro che un rumore bianco a media nulla e deviazione standard σ .

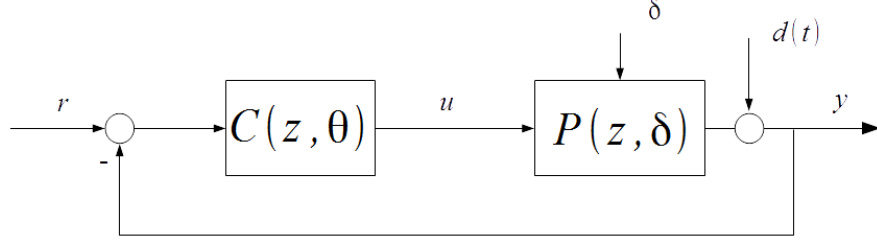


Figura 3.3: sistema di controllo nel caso di rumore addizionale sull'uscita.

L'estensione quindi del *Greedy VRFT* e dello *Scenario VRFT* al metodo con *variabile strumentale estesa* è banale ed è descritto dalle seguenti cifre di merito:

- Scenario VFRT

$$f_{sc}^{(i)}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(t) \left(u_L^{(i)}(k) - C(\theta) e_L^{(i)}(k) \right),$$

$$J_{sc}^{(i)} = f_{sc}^{(i)}(\theta)^T \cdot f_{sc}^{(i)}(\theta),$$

$$\min_{\theta} \max_i J_{sc}^{(i)};$$

- Greedy VRFT

$$f_G(\theta) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \zeta(t) \left(u_L^{(i)}(k) - C(\theta) e_L^{(i)}(k) \right),$$

$$J_G = f_G(\theta)^T \cdot f_G(\theta),$$

$$\min_{\theta} J_G.$$

Dove $\zeta(t)$ è la variabile strumentale estesa utilizzata per incorrelare segnale di disturbo e scelta dei parametri ed è definita come:

$$\zeta(t) = \left[u(t+l) \quad u(t+l-1) \quad \dots \quad u(t) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-l) \right]^T,$$

mentre ovviamente $u_L(t) = L(z)u(t)$ ed $L(z)$ è il prefiltro ottimo già definito nei capitoli precedenti. Il parametro l rappresenta i passi di correlazione tra input ed errore di matching. Il parametro M è dato dall'approccio scenario [3] mentre N è il numero di campioni prelevati per ogni diversa configurazione.

N dovrà essere sufficientemente alto in quanto il sistema è affetto da rumore quindi si avrà bisogno di più campioni.

Capitolo 4

Esempio numerico

Dopo aver definito le tecniche *Greedy VRFT* e *Scenario VRFT* si va ad applicarle ad un esempio numerico. In questo tipo di problema le tecniche in questione verranno applicate ad un sistema lineare incerto con uscita dapprima non affetta da rumore e poi affetta da rumore. L'obiettivo è quello di verificare le maggiori proprietà di robustezza dello scenario VRFT garantite dalla teoria che ne sta alla base. Per controllare il sistema si avrà a disposizione un controllore di tipo FIR con la seguente caratteristica e dipendente dal vettore di parametri $\theta = [\vartheta_0 \ \vartheta_1 \ \dots \ \vartheta_d]^T$

$$C(z, \theta) = \vartheta_0 + \vartheta_1 \frac{z}{z-1} + \vartheta_2 z^{-1} + \dots + \vartheta_d z^{-d+2}. \quad (4.1)$$

4.1 Caso senza rumore

4.1.1 Descrizione del problema

Si descrive ora il sistema con cui si andrà a lavorare nelle simulazioni di seguito. L'obiettivo di queste simulazioni sarà quello di controllare il comportamento di un sistema lineare incerto. Si andrà così a definire di seguito il sistema che si andrà a controllare negli esempi riportati in seguito

$$P = \begin{cases} x(t+1) = A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) = C(\delta)x(t) + D(\delta)u(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

definendo inoltre $r(t)$ come segnale di riferimento e δ che rappresenta l'incertezza che affligge i parametri del sistema si ottiene il seguente sistema da controllare rappresentato in Figura 4.1.

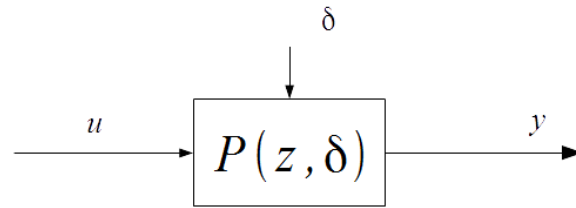


Figura 4.1: processo incerto da controllare.

Il sistema lineare incerto da controllare sarà per ciò $P(z, \delta)$ e sarà fortemente influenzato dall'incertezza δ che porterà il sistema ad assumere diverse configurazioni.

L'anello di controllo sarà quindi quello mostrato in Figura 4.2.

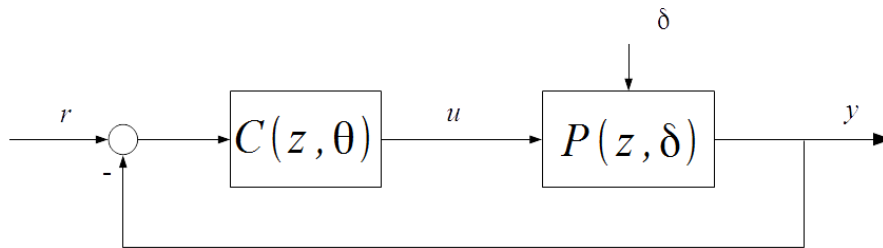


Figura 4.2: anello di controllo utilizzato negli esempi numerici.

A questo punto si definisce la famiglia dei sistemi da controllare $P(z, \delta)$ come un insieme di funzioni di trasferimento del secondo ordine, dipendenti dal parametro δ e con smorzamento variabile del tipo seguente:

$$Y(z, \bar{e}) = \frac{1 - 2\tau \cos(\sigma) + \tau^2}{z^2 - 2\tau \cos(\sigma) + \tau^2} u(z) \quad (4.3)$$

dove $\delta \sim U[1, 5]$ è il parametro incerto scelto con densità uniforme in modo da avere doppio polo e smorzamento variabile, $\tau = e^{-0.1\frac{1}{\delta}}$ ed infine $\sigma = 0.0019\delta^2 - 0.0208\delta + 0.1217$. Così facendo si otterrà un sistema discreto del secondo ordine con doppio polo che può variare da 0.9 fino a 0.98. Questo permette di ottemere delle funzioni di trasferimento aventi il seguente diagramma di Bode.

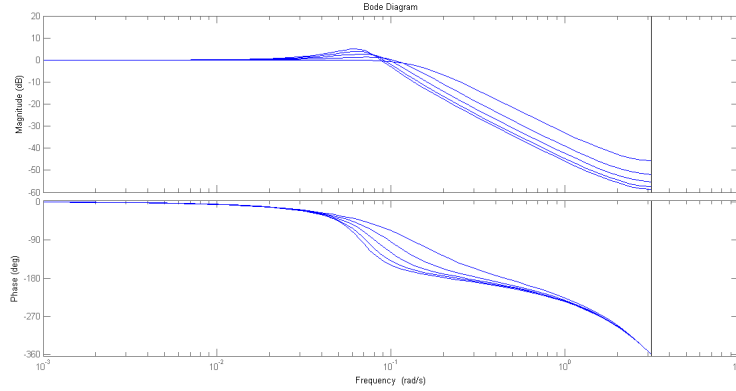


Figura 4.3: famiglia di funzioni di trasferimento da controllare con smorzamento e banda variabile

4.1.2 Cifre di merito utilizzate

Le cifre di merito utilizzate per controllare il sistema nel caso senza rumore e per essere confrontate tra di loro sono le seguenti:

- Scenario VFRT

$$\min_{\theta} \max_i \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(u_L(k) - C(\theta) e_L^{(i)}(k) \right)^2$$

- Greedy VFRT

$$\min_{\theta} \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \left(u_L(k) - C(\theta) e_L^{(i)}(k) \right)^2$$

- VFRT applicato al caso nominale (*nom*) sta per configurazione nominale dell'impianto)

$$\min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(u_L(k) - C(\theta) e_L^{(nom)}(k) \right)^2$$

Dove il parametro M indicherà il numero di configurazioni del sistema da testare e sarà ricavato dal metodo dell'approccio scenario [3]. Il parametro N invece indicherà il numero di campioni raccolti per ogni configurazione e deve essere scelto in base al numero di variabili di progetto che si ha a disposizione (parametro d).

4.1.3 Caso modello di riferimento comparabile

Come primo set di prove si analizza il caso in cui il modello di riferimento impostato nell'algorithm VFRT sia comparabile con il sistema da controllare nel senso che

modello di riferimento e famiglia di sistemi da controllare siano dello stesso ordine e dello stesso tipo, cioè di secondo grado. Il modello di riferimento sarà dipendente dal parametro α che modificherà il doppio polo della funzione di trasferimento in modo da testare il comportamento dei vari algoritmi con diverse richieste da parte del progettista. Il modello di riferimento sarà quindi il seguente:

$$M(z, \alpha) = \frac{(1 - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2}. \quad (4.4)$$

Negli esperimenti mostrati di seguito si imposta il parametro α e si fa variare la complessità del controllore FIR attraverso il parametro d in modo da verificare come i risultati del sistema in anello chiuso siano influenzati da questi due parametri. Ovviamente più il parametro α sarà basso e più il modello di riferimento sarà veloce quindi l'anello di controllo dovrà svolgere un compito più arduo. Per sollecitare sufficientemente il controllo in modo da evidenziare le caratteristiche dei vari algoritmi nelle simulazioni che seguono verrà utilizzato un valore di α uguale a 0.4.

Analizziamo ora il caso con complessità del controllore a disposizione $d = 9$. Nelle Figure 4.4 e 4.5 sono rappresentate le risposte allo scalino dei sistemi in anello chiuso ottenuti e i diagrammi di bode corrispondenti. In particolare in blu è rappresentato il comportamento in AC dello Scenario VRFT, in verde il Greedy VRFT mentre in nero il comportamento del VRFT classico calcolato solo nel caso nominale. In rosso invece è rappresentato il comportamento del modello di riferimento che si vuole ottenere

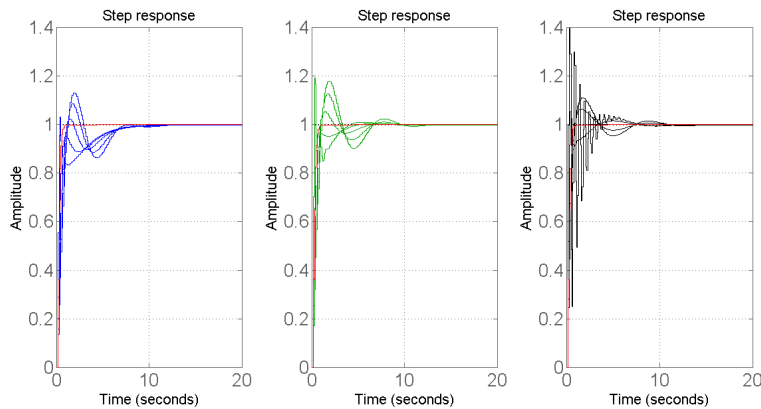


Figura 4.4: risposta allo scalino caso $\alpha = 0.4$ e $d = 9$

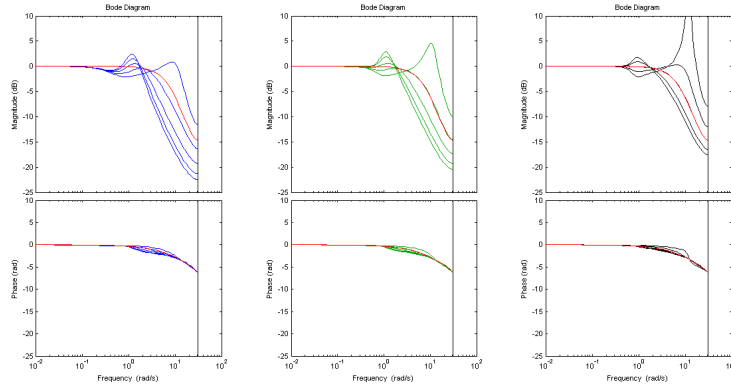


Figura 4.5: diagramma di bode caso $\alpha = 0.4$ e $d = 9$.

Si mostra ora il grafico relativo al valore della distribuzione dell'errore calcolato come

$$\left\| \frac{C(\theta^*)P(\delta)}{1 + C(\theta^*)P(\delta)} - M(z) \right\|_2^2 \quad (4.5)$$

che è il valore a cui tende la cifra di merito ($\approx J_{VR}^N(\theta^*, \delta)$ per N grande) avente una distribuzione di probabilità indotta dalla distribuzione di probabilità del parametro incerto δ . Si ottiene così il grafico in Figura 4.6 dove sull'asse delle ascisse si trova il valore dell'errore calcolato come detto, mentre sulle ordinate il numero delle diverse configurazioni assunte dal sistema normalizzate con il numero totale di configurazioni testate.

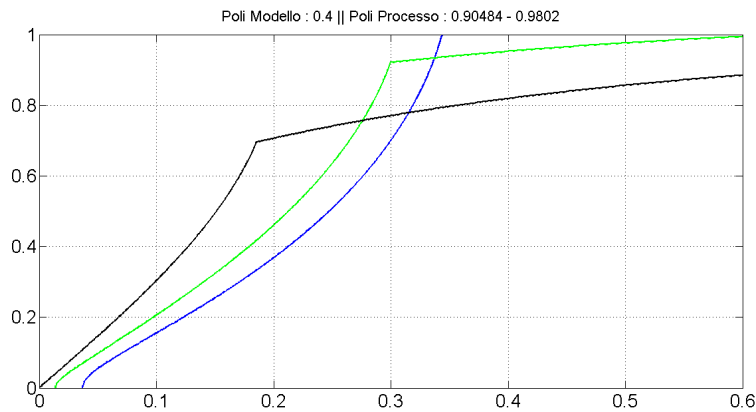


Figura 4.6: valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.4$ e $d = 9$.

Si prova ora ad aumentare le prestazioni del controllore FIR aumentando il numero di parametri di ottimizzazione e portando il valore di $d = 20$. Otteniamo così i risultati riportati nelle Figure 4.7 e 4.8.

4. Esempio numerico

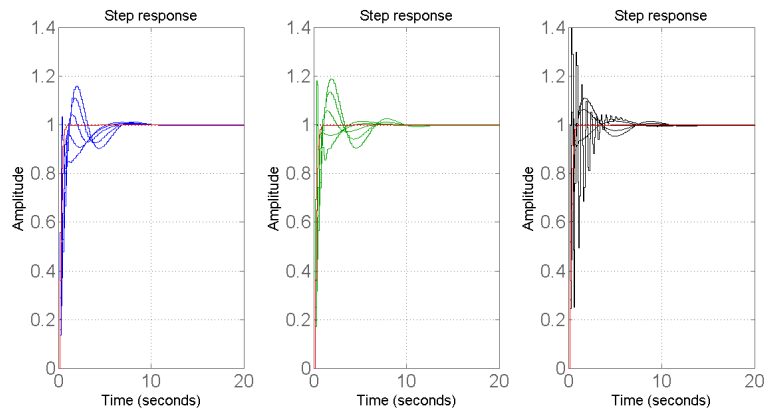


Figura 4.7: risposta allo scalino caso $\alpha = 0.4$ e $d = 20$

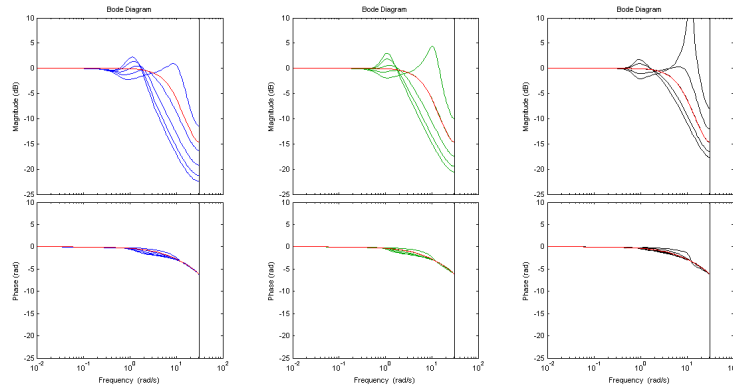


Figura 4.8: diagramma di bode caso $\alpha = 0.4$ e $d = 20$.

Si mostra ora il grafico relativo al valore della distribuzione dell'errore calcolato come

$$\left\| \frac{C(\theta^*)P(\delta)}{1 + C(\theta^*)P(\delta)} - M(z) \right\|_2^2 \quad (4.6)$$

ottenendo così il grafico mostrato in Figura 4.9.

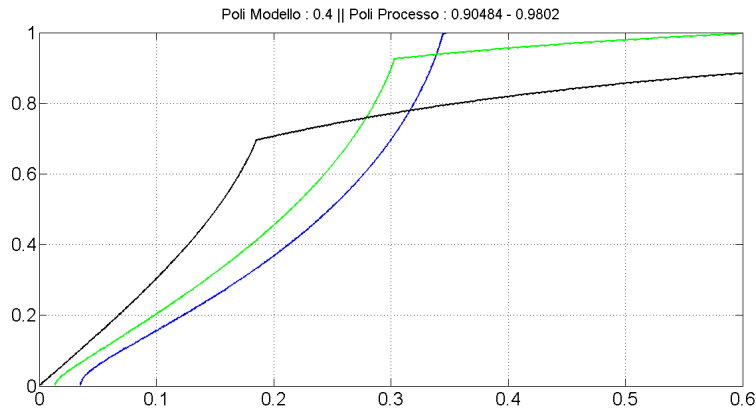


Figura 4.9: valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.4$ e $d = 20$.

4.1.4 Caso modello di riferimento non comparabile

Si prova di seguito ad analizzare il caso in cui il modello di riferimento non sia comparabile con il sistema da controllare. Per non comparabile si intende un modello di riferimento dello stesso ordine ma con un polo posto ad altissima frequenza in modo che sia ininfluente nella risposta in frequenza. Ciò viene fatto in quanto nell'algoritmo VRFT, perchè il sistema in anello chiuso possa convergere al modello di riferimento, il sistema da controllare e modello di riferimento stesso devono essere dello stesso tipo. Il modello di riferimento in questo caso sarà quindi

$$M(z, \alpha) = \frac{(1 - \alpha)}{(z - \alpha) \cdot z}. \quad (4.7)$$

Dato che la convergenza ad un modello di riferimento non comparabile è di più difficile realizzazione rispetto ad uno comparabile si aumenta leggermente il valore di α rispetto al caso precedente e lo si porta a 0.6.

Valutiamo ora le prestazioni del controllo con complessità del controllore $d = 9$. Nelle Figure 4.10 e 4.11 sono rappresentate le risposte allo scalino dei sistemi in anello chiuso ottenuti e i diagrammi di bode corrispondenti. In particolare in blu è rappresentato il comportamento in AC dello Scenario VRFT, in verde il Greedy VRFT mentre in nero il comportamento del VRFT classico calcolato solo nel caso nominale. In rosso invece è rappresentato il comportamento del modello di riferimento che si vuole ottenere

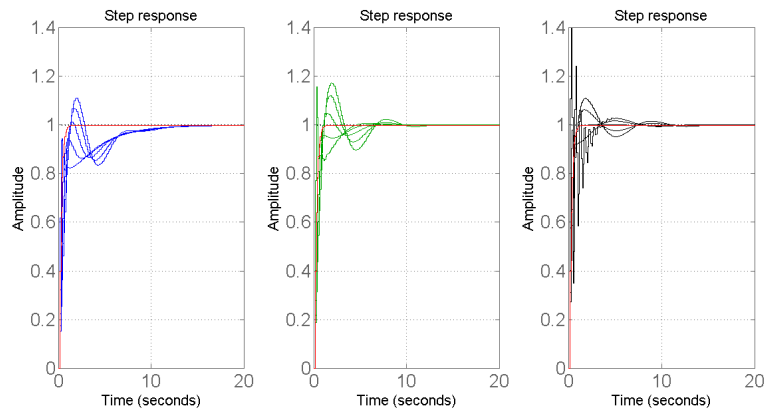


Figura 4.10: risposta allo scalino caso $\alpha = 0.6$ e $d = 9$

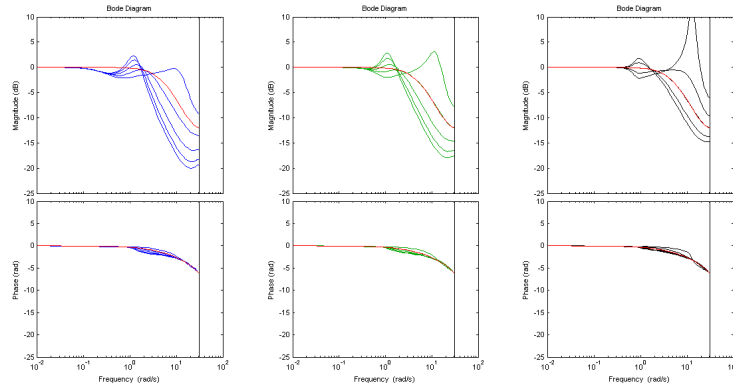


Figura 4.11: diagramma di bode caso $\alpha = 0.6$ e $d = 9$.

Si mostra ora il grafico relativo al valore della distribuzione dell'errore calcolato come

$$\left\| \frac{C(\theta^*)P(\delta)}{1 + C(\theta^*)P(\delta)} - M(z) \right\|_2^2 \quad (4.8)$$

che è il valore a cui tende la cifra di merito ($\approx J_{VR}^N(\theta^*, \delta)$ per N grande) avente una distribuzione di probabilità indotta dalla distribuzione di probabilità del parametro incerto δ . Si ottiene così il grafico in Figura 4.12 dove sull'asse delle ascisse si trova il valore dell'errore calcolato come detto, mentre sulle ordinate il numero delle diverse configurazioni assunte dal sistema normalizzate con il numero totale di configurazioni testate.

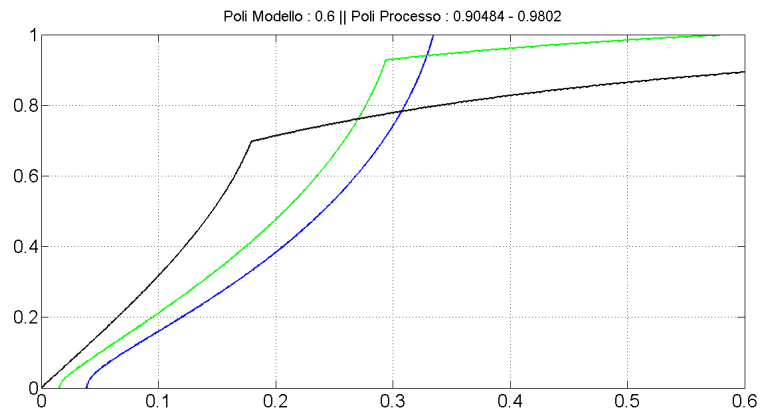


Figura 4.12: valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.6$ e $d = 9$.

Si prova ora ad aumentare le prestazioni del controllore FIR aumentando il numero di parametri di ottimizzazione e portando il valore di $d = 20$. Otteniamo così i risultati riportati nelle Figure 4.13 e 4.14.

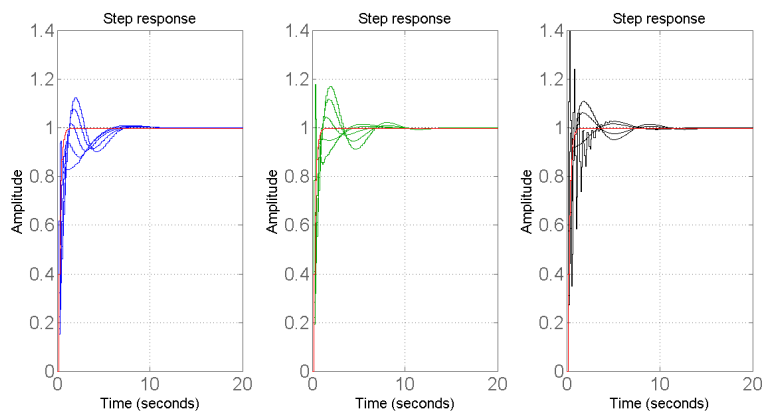


Figura 4.13: risposta allo scalino caso $\alpha = 0.6$ e $d = 20$

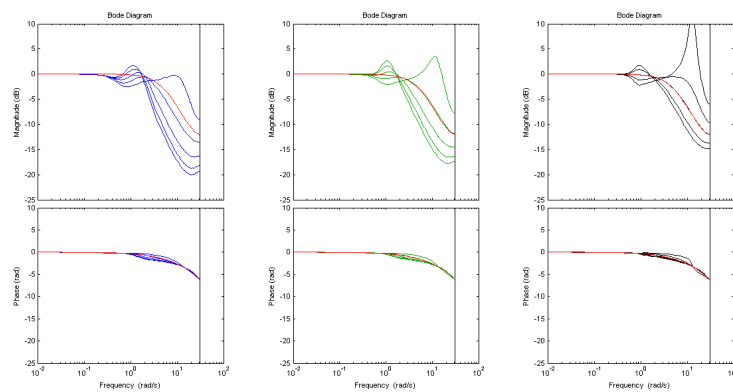


Figura 4.14: diagramma di bode caso $\alpha = 0.6$ e $d = 20$.

Si mostra ora il grafico relativo al valore della distribuzione dell'errore calcolato come

$$\left\| \frac{C(\theta^*)P(\delta)}{1 + C(\theta^*)P(\delta)} - M(z) \right\|_2^2 \quad (4.9)$$

ottenendo così il grafico mostrato in Figura 4.15.

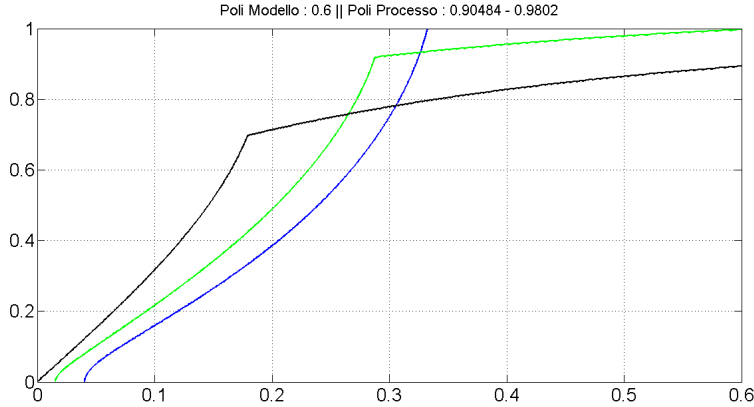


Figura 4.15: valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.6$ e $d = 20$.

4.1.5 Commenti

Dalle prove fatte e dai risultati ottenuti si possono trarre le seguenti conclusioni che sono verificate indipendentemente che si stia trattando un modello di riferimento comparabile che non:

- l'approccio Scenario VRFT è quello che riesce a mantenere il valore massimo dell'errore tra sistema AC e modello di riferimento più basso e contenuto; ciò dipende dalla logica con cui funziona l'algoritmo che appunto tende a minimizzare il valore massimo;
- l'approccio Greedy VRFT è quello che da prestazioni migliori per gran parte delle configurazioni controllate salvo poi perdere notevolmente in fatto di prestazioni per le configurazioni più difficili da controllare;
- il metodo VRFT classico ovviamente si comporterà in modo ottimo per la configurazione nominale del sistema per poi perdere notevolmente in fatto di prestazioni per tutte le altre configurazioni.

4.2 Caso con rumore

4.2.1 Descrizione del problema

Una volta analizzato il caso senza rumore si prova ora ad aggiungere un disturbo addizionale sull'uscita per testare la robustezza degli algoritmi anche in presenza

di rumore. Si mantiene la stessa famiglia di sistemi descritta in precedenza con le stesse caratteristiche. Unico cambiamento è l'aggiunta di un disturbo. La nuova architettura del sistema con cui si andrà a lavorare è quella mostrata in Figura 4.16.

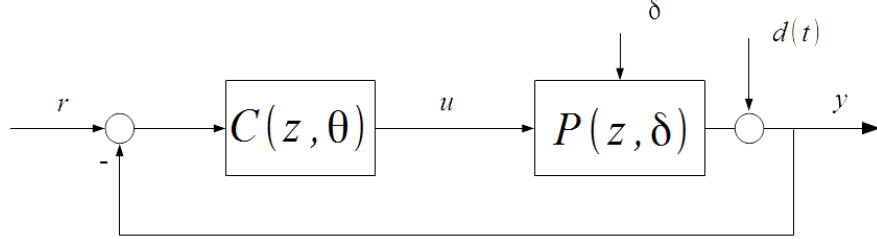


Figura 4.16: sistema di controllo nel caso di rumore addizionale sull'uscita.

Il segnale $d(t)$ in figura altro non è che un rumore bianco a media nulla deviazione standard σ_{noise} scelta come una frazione della deviazione standard del segnale in uscita σ_y .

4.2.2 Cifre di merito utilizzate

Data la presenza del rumore addizionale sull'uscita è necessario modificare leggermente le cifre di merito viste nel caso senza rumore in quanto non sono in grado di fornire un adeguato grado di robustezza. Per fare ciò può venire in aiuto il metodo della variabile strumentale estesa come discusso nel capitolo 2. Questo metodo riadattato per i vari algoritmi in questione produce le seguenti cifre di merito:

- Scenario VFRT

$$f_{sc}^{(i)}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(t) \left(u_L^{(i)}(k) - C(\theta) e_L^{(i)}(k) \right),$$

$$J_{sc}^{(i)} = f_{sc}^{(i)}(\theta)^T \cdot f_{sc}^{(i)}(\theta),$$

$$\min_{\theta} \max_i J_{sc}^{(i)};$$

- Greedy VRFT

$$f_G(\theta) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \zeta(t) \left(u_L^{(i)}(k) - C(\theta) e_L^{(i)}(k) \right),$$

$$J_G = f_G(\theta)^T \cdot f_G(\theta),$$

$$\min_{\theta} J_G;$$

- VRFT applicato al caso nominale ((*nom*) sta per configurazione nominale dell'impianto)

$$f_{nom}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta(t) \left(\delta u(k) - C(\theta) e_L^{(nom)}(k) \right),$$

$$J_{nom} = f_{nom}(\theta)^T \cdot f_{nom}(\theta),$$

$$\min_{\theta} J_{nom}.$$

Dove $\zeta(t)$ è la variabile strumentale estesa utilizzata per incorrelare segnale di disturbo e scelta dei parametri ed è definita come:

$$\zeta(t) = \left[u(t+l) \quad u(t+l-1) \quad \dots \quad u(t) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-l) \right]^T,$$

mentre ovviamente $u_L(t) = L(z)u(t)$ ed $L(z)$ è il prefiltro ottimo già definito nei capitoli precedenti. Il parametro l è legato al numero di passi che portano all'esaurimento della risposta all'impulso del modello di riferimento. Il parametro M è dato dall'approccio scenario [3] mentre N è il numero di campioni prelevati per ogni diversa configurazione. N dovrà essere sufficientemente alto in quanto il sistema è affetto da rumore quindi si avrà bisogno di più campioni.

4.2.3 Caso modello di riferimento comparabile

Anche in questo tipo di prove si analizzerà per primo il caso in cui il modello di riferimento sia comparabile:

$$M(z, \alpha) = \frac{(1 - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2}. \quad (4.10)$$

In questo tipo di prova verrà verificata la sensibilità dell'algoritmo utilizzato a diversi valori di varianza del rumore additivo agente sull'uscita. Si considera perciò un controllore di complessità $d = 25$ uguale per tutte le prove in modo che sia sufficientemente prestante per garantire un buon risultato ed un parametro $\alpha = 0.5$.

Si analizza ora il caso in cui la deviazione standard del rumore sia definita come una frazione del valore della deviazione standard all'uscita del sistema $y(t)$, cioè:

$$\sigma_{noise} = \frac{\sigma_y}{100}.$$

Nelle Figure 4.17 e 4.18 sono rappresentate le risposte allo scalino dei sistemi in anello chiuso ottenuti e i diagrammi di bode corrispondenti. In particolare in blu è rappresentato il comportamento in AC dello Scenario VRFT, in verde il Greedy VRFT mentre in nero il comportamento del VRFT classico calcolato solo nel caso nominale.

In rosso invece è rappresentato il comportamento del modello di riferimento che si vuole ottenere.

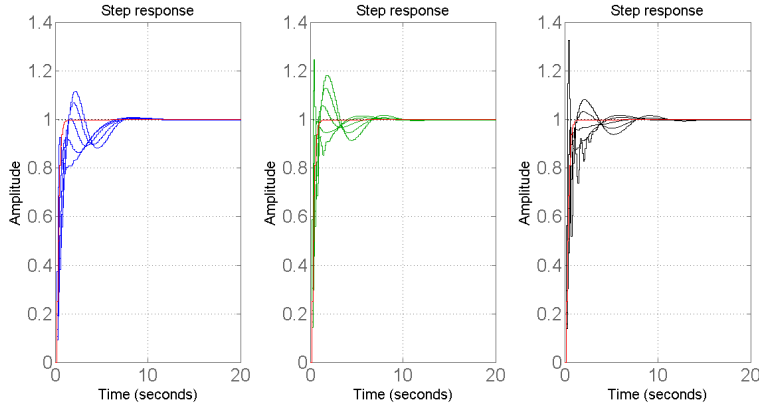


Figura 4.17: risposta allo scalino caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$.

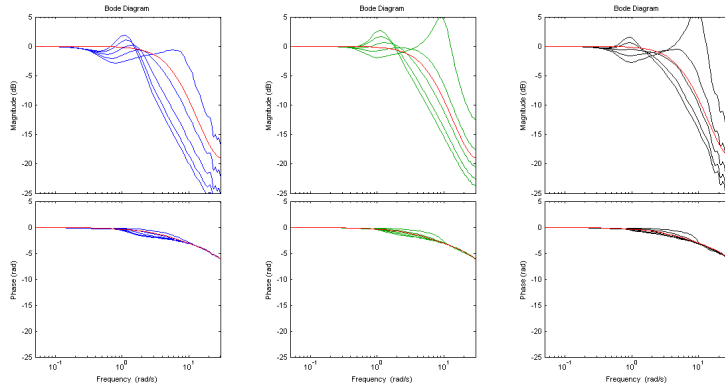


Figura 4.18: diagramma di bode caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$.

Si mostra ora il grafico relativo al valore della distribuzione dell'errore calcolato come

$$\left\| \frac{C(\theta^*)P(\delta)}{1 + C(\theta^*)P(\delta)} - M(z) \right\|_2^2 \quad (4.11)$$

che è il valore a cui tende la cifra di merito ($\approx J_{VR}^N(\theta^*, \delta)$ per N grande) avente una distribuzione di probabilità indotta dalla distribuzione di probabilità del parametro incerto δ . Si ottiene così il grafico in Figura 4.19 dove sull'asse delle ascisse si trova il valore dell'errore calcolato come detto, mentre sulle ordinate il numero delle diverse configurazioni assunte dal sistema normalizzate con il numero totale di configurazioni testate.

4. Esempio numerico

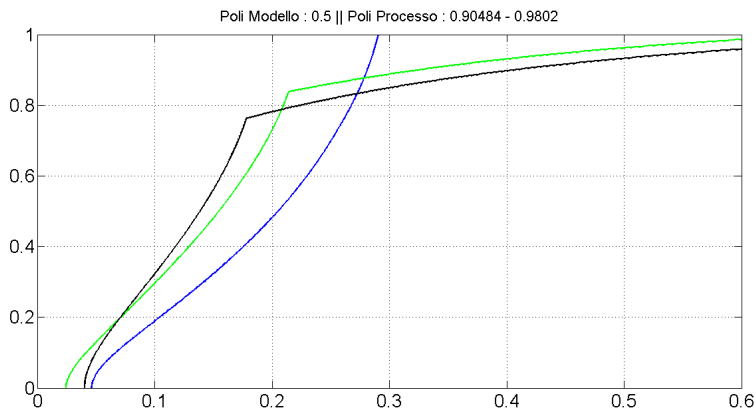


Figura 4.19: valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$.

Si prova ora a incrementare il livello di difficoltà del controllo utilizzando un segnale di rumore con una varianza più alta rispetto al caso precedente, del tipo:

$$\sigma_{noise} = \frac{\sigma_y}{10}.$$

Si otterranno così i risultati mostrati in Figura 4.20 e 4.21.

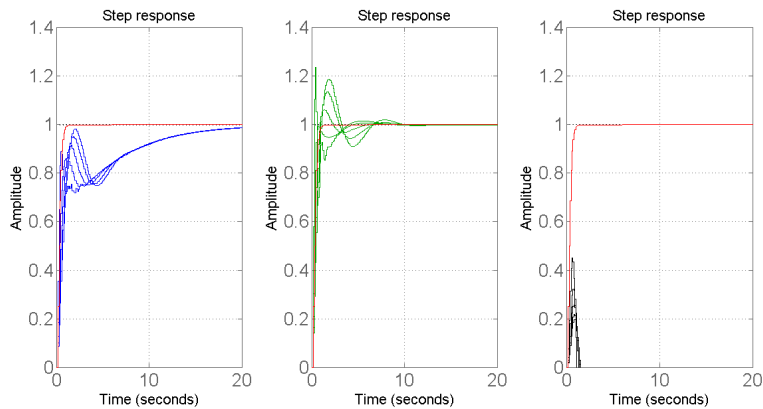


Figura 4.20: risposta allo scalino caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$.

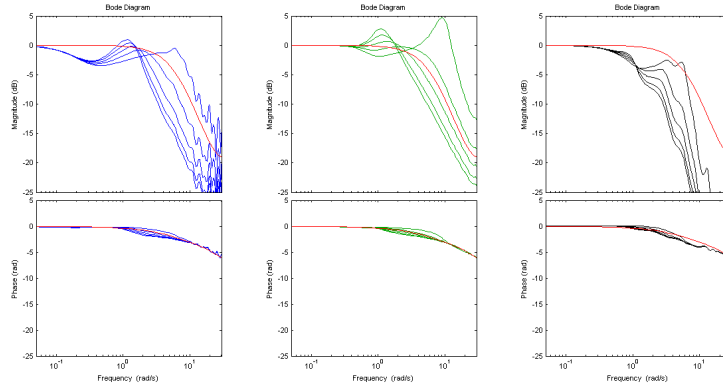


Figura 4.21: diagramma di bode caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$.

Si mostra ora il grafico relativo al valore della distribuzione dell'errore calcolato come

$$\left\| \frac{C(\theta^*)P(\delta)}{1 + C(\theta^*)P(\delta)} - M(z) \right\|_2^2 \quad (4.12)$$

ottenendo così il grafico in Figura 4.22.

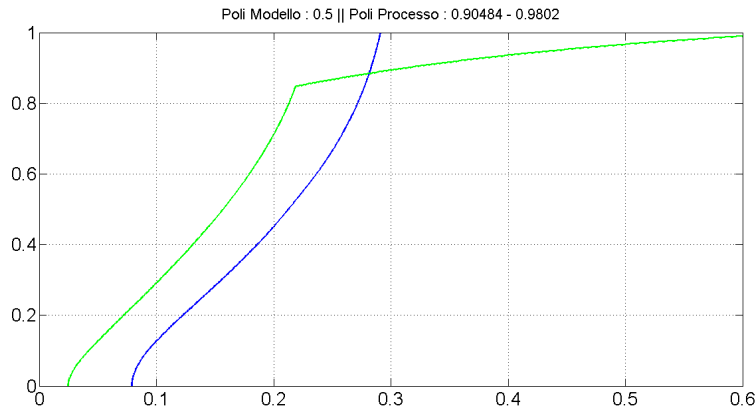


Figura 4.22: valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.5$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$.

Da notare che nel grafico sulla distribuzione di Figura 4.22 non è rappresentata la distribuzione dell'andamento dell'errore ottenuto con il controllore tarato in base alla configurazione nominale in quanto il sistema in anello chiuso è instabile e quindi in questo particolare caso perde di senso questa rappresentazione.

4.2.4 Caso modello di riferimento non comparabile

Si analizza ora il caso in cui il modello di riferimento non sia comparabile con il sistema:

$$M(z, \alpha) = \frac{(1 - \alpha)}{(z - \alpha) \cdot z}. \quad (4.13)$$

4. Esempio numerico

Come nel caso di sistema comparabile anche qui si va a verificare la sensibilità del controllo alla varianza del rumore. Inizialmente si porrà perciò la varianza del rumore al valore di

$$\sigma_{noise} = \frac{\sigma_y}{100}.$$

il valore del parametro α verrà posto uguale a 0.6 mentre la complessità del controllore sarà come nel caso precedente $d = 25$. Si otterranno quindi i grafici in Figura 4.23 e 4.24.

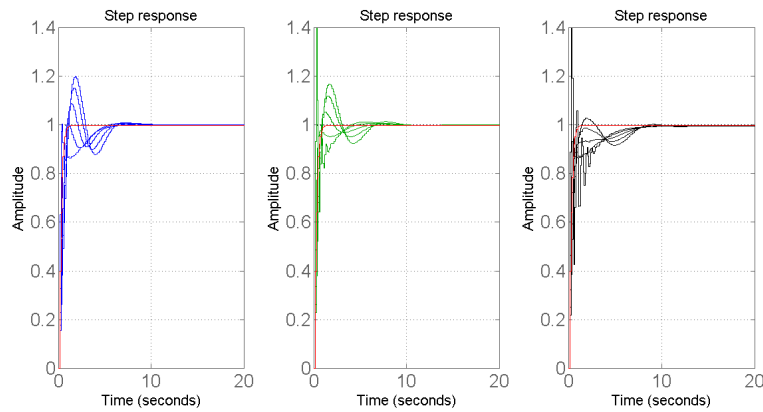


Figura 4.23: risposta allo scalino caso $\alpha = 0.6$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$.

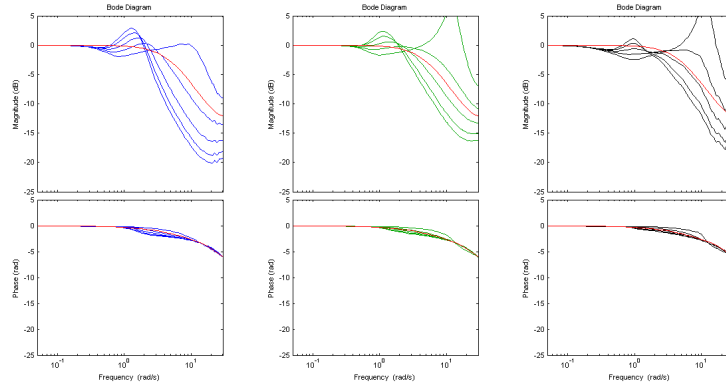


Figura 4.24: diagramma di bode caso $\alpha = 0.6$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$.

Si mostra ora il grafico relativo al valore della distribuzione dell'errore calcolato come

$$\left\| \frac{C(\theta^*)P(\delta)}{1 + C(\theta^*)P(\delta)} - M(z) \right\|_2^2 \quad (4.14)$$

ottenendo il grafico in Figura 4.24.

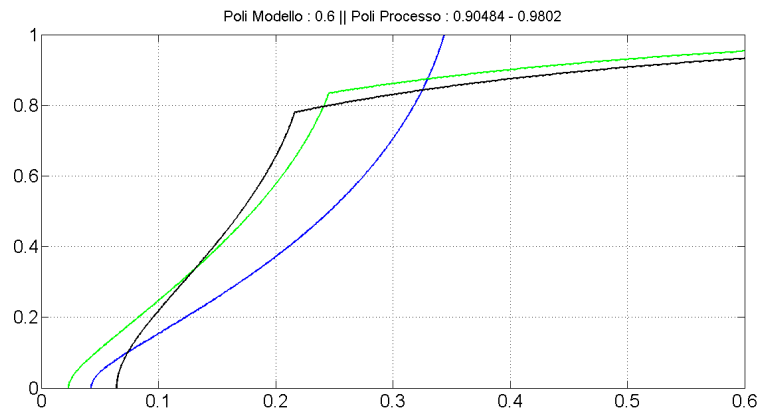


Figura 4.25: valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.6$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/100$.

Si prova ora a incrementare il livello di difficoltà del controllo utilizzando un segnale di rumore con una varianza più alta rispetto al caso precedente ed impostando $\alpha = 0.8$, del tipo:

$$\sigma_{noise} = \frac{\sigma_y}{10}.$$

Si otterranno quindi i grafici in Figura 4.26 e 4.27.

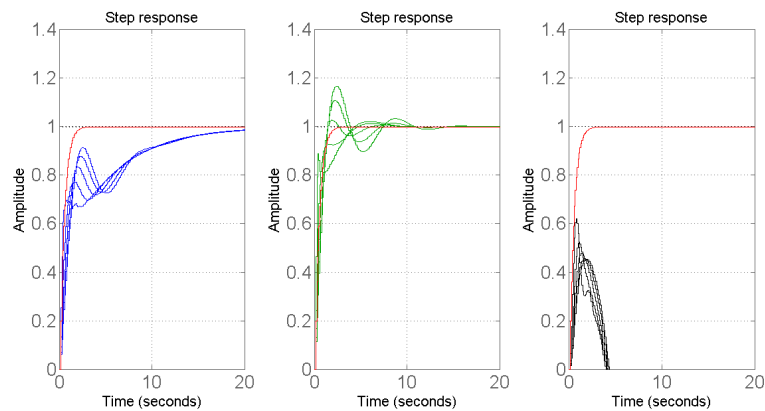


Figura 4.26: risposta allo scalino caso $\alpha = 0.8$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$.

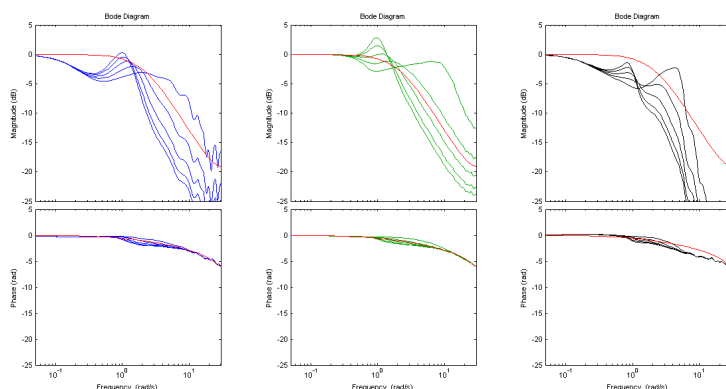


Figura 4.27: diagramma di bode caso $\alpha = 0.8$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$.

Si mostra ora il grafico relativo al valore della distribuzione dell'errore calcolato come

$$\left\| \frac{C(\theta^*)P(\delta)}{1 + C(\theta^*)P(\delta)} - M(z) \right\|_2^2 \quad (4.15)$$

ottenendo così il grafico in Figura 4.28.

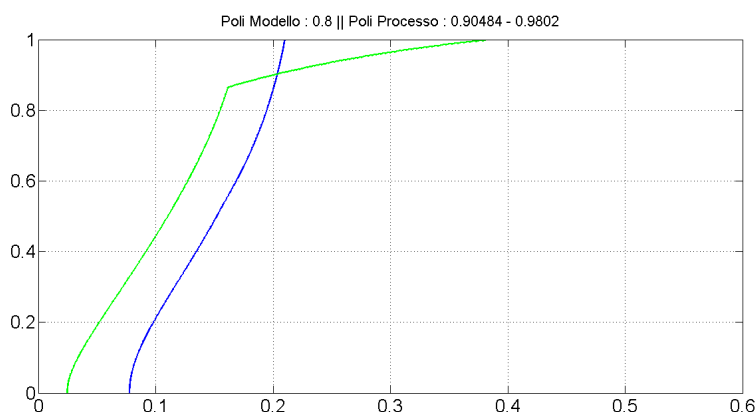


Figura 4.28: valore di distribuzione dell'errore nel caso $\alpha = 0.8$, $d = 25$ e $\sigma_{noise} = \sigma_y/10$.

Da notare che nel grafico sulla distribuzione di Figura 4.28 non è rappresentata la distribuzione dell'andamento dell'errore ottenuto con il controllore tarato in base alla configurazione nominale in quanto il sistema in anello chiuso è instabile e quindi in questo particolare caso perde di senso questa rappresentazione.

4.2.5 Commenti

I risultati trovati non fanno altro che riconfermare ciò che è stato detto nel caso in assenza di rumore. Il decadimento delle prestazioni dell'algoritmo Greedy VRFT è molto più forte e marcato, come si può notare dai grafici della distribuzione, rispetto

al caso senza rumore, questo perchè la richiesta dal punto di vista del controllo è molto maggiore ed è notevole il vantaggio dello Scenario VRFT che fornisce una robustezza prestazionale per tutte le configurazioni che assume il sistema da controllare. Il metodo VRFT nominale invece mostra i suoi limiti non riuscendo a fare aderire in modo adeguato le varie configurazioni del sistema al modello di riferimento.

4.3 Conclusioni

Le conclusioni che si possono trarre da questa serie di prove sono:

- Greedy VRFT e Scenario VRFT in caso in cui il problema di controllo non sia particolarmente impervio (senza rumore) hanno prestazioni comparabili o comunque una tecnica non è necessariamente migliore o peggiore dell'altra;
- Greedy VRFT da prestazioni migliori dello Scenario VRFT per un certo set di configurazioni salvo che per quelle più particolari, per le quali invece lo Scenario VRFT continua a lavorare in modo adeguato;
- nei casi invece (come quelli in presenza di rumore) in cui la richiesta dal punto di vista controllistico aumenta, il Greedy VRFT perde molto in termini di prestazioni per un set sempre maggiore di configurazioni che non possono più essere ignorate, lo scenario VRFT invece continua a lavorare nel modo corretto;
- il VRFT nominale non è in grado di reggere al confronto in termini di prestazioni con gli altri due algoritmi e mostra tutti i suoi limiti soprattutto nel caso con rumore.

Capitolo 5

Applicazione in ambito automotive

Nel capitolo precedente sono stati effettuati esperimenti su una famiglia di sistemi lineari testando il comportamento dei diversi approcci VRFT. Si prova ora ad applicare gli stessi algoritmi di controllo ad un caso più concreto come può essere quello del controllo del comportamento della dinamica di un veicolo in curva.

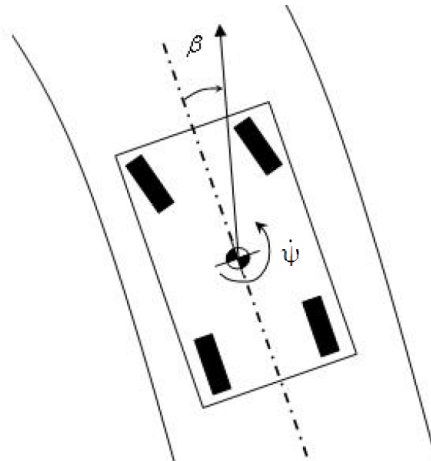


Figura 5.1: veicolo in curva con β angolo di deriva ed $\dot{\psi}$ velocità di rotazione (cioè lo yaw rate).

Un esempio di questo tipo si presta in maniera particolare alla tecnica che si sta discutendo in quanto l'incertezza è data dalla diversa configurazione del manto stradale in cui deve muoversi il veicolo (strada bagnata, presenza di ghiaccio, ecc...) e l'obiettivo che ci si pone è quello di creare un controllore PID relativamente semplice che sia in grado di fornire al guidatore un controllo della velocità di rotazione attraverso l'angolo di sterzo che sia robusto per le diverse condizioni di contatto pneumatico strada. Il risultato percepito dal guidatore e dai passeggeri del veicolo sarà quello di un confort maggiore in curva ed una controllabilità migliore del mezzo.

5.1 Descrizione dell'architettura di controllo

Fondamentale per il corretto sviluppo della simulazione la creazione di un'architettura di controllo in grado di fondersi con le tecniche fin qui presentate ma soprattutto che sia applicabile al caso reale e tenga conto delle diverse condizioni di lavoro in cui il controllo deve operare.

5.1.1 Modello del veicolo

La modellazione del veicolo in curva presentata di seguito prende spunto da quella proposta in [7] e descritta in maniera più approfondita in [5].

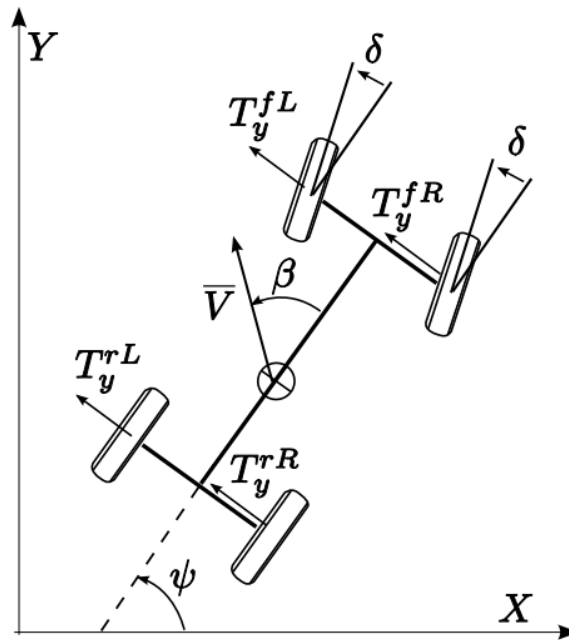


Figura 5.2: modello del veicolo in curva.

Per prima cosa si parte dal modello del veicolo in curva che sarà non lineare. Per semplicità si considera un veicolo che si muove a velocità costante V e solamente la dinamica laterale. Nel seguito x e y denoteranno gli assi longitudinali e laterali del mezzo rispettivamente. L'input del modello è l'angolo di sterzo δ , che si riferisce all'angolo tra l'asse longitudinale delle ruote anteriori e l'asse longitudinale del mezzo (supponiamo per semplicità che l'angolo di sterzo sia uguale per entrambe le ruote anteriori), l'output del modello invece è rappresentato dalla velocità di rotazione $\dot{\psi}$ (yaw rate). \bar{V} è il vettore di velocità espresso nel sistema di riferimento delle coordinate di inerzia X e Y . β rappresenta invece l'angolo di deriva (cioè l'angolo tra l'asse longitudinale del mezzo e \bar{V}). ψ angolo di imbardata (angolo tra l'asse longitudinale del mezzo e l'asse X).

Si assume che tutti gli angoli siano sufficientemente piccoli da poter approssimare la funzione sin con il suo argomento e la funzione cos con 1, il modello della dinamica laterale del veicolo come un equilibrio di forze e momenti:

$$\begin{cases} -mV(\dot{\beta} + \dot{\psi}) = T_y^{fL} + T_y^{fR} + T_y^{rL} + T_y^{rR}, \\ J\ddot{\psi} = (T_y^{fL} + T_y^{fR}) \cdot l_f - (T_y^{rL} + T_y^{rR}) \cdot l_r \\ a_y = -V(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \end{cases} \quad (5.1)$$

dove T_y devota la forza laterale generata su di un pneumatico, gli apici f , r , L e R dispinguono rispettivamente tra le ruote anteriori (front), posteriori (rear), sinistre (Left) e destre (Right). l_f ed l_r indicano la distanza tra ruote anteriori o posteriori ed il centro di massa del veicolo. Infine m e J la massa ed il momento di inerzia del veicolo rispettivamente.

Per risalire alle forze laterali generate dagli pneumatici si può ricorrere alla formula magica di Pacejka [5]:

$$T_y = D \sin \{ C \arctan [B\bar{\alpha} - E (B\bar{\alpha} - \arctan(B\bar{\alpha}))] \} + S_V \quad (5.2)$$

dove

$$\begin{aligned} S_H &= p_{H1} + p_{H2}f_z + p_{H3}\gamma, \\ S_V &= Q [(p_{V1} + p_{V2}f_z) + (p_{V3} + p_{V4}f_z)\gamma], \\ \bar{\alpha} &= \alpha + S_H, \\ C &= p_{C1}, \\ \mu &= (p_{D1} + p_{D2}f_z)(1 - p_{D3}\gamma^2), \\ D &= \mu Q, \\ E &= (p_{E1} + p_{E2}f_z) [1 - (p_{E3} + p_{E4}\gamma)\text{sign}(\bar{\alpha})], \\ K &= p_{K1}F_z \sin [2 \arctan(Q/(p_{K2} \cdot F_z))(1 - p_{K3} |\gamma|)], \\ B &= K/(C \cdot D). \end{aligned}$$

Nelle formule descritte α è lo slip angle (cioè l'angolo tra l'asse longitudinale delle ruote e la velocità delle ruote), esso si può ottenere come segue:

$$\begin{aligned} \alpha^f &= \beta + l_f \cdot \dot{\psi}/V - \delta \\ \alpha^r &= \beta - l_r \cdot \dot{\psi}/V. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il carico verticale Q che agisce sulla ruota può essere ricavato dal modello della dinamica di rollio del veicolo che è in grado di tenere conto dello spostamento del carico verticale:

$$\begin{aligned} J_r \ddot{\vartheta} + C_r \dot{\vartheta} + K_r \vartheta &= h \cdot m \cdot g \sin(\vartheta) - a_y \cdot h \cdot m \cdot \cos(\vartheta), \\ Q^R &= N \frac{l/2 - h \cos(\vartheta)}{l} \end{aligned}$$

$$Q^L = N \frac{l/2 + h \cos(\vartheta)}{l}$$

dove ϑ è l'angolo di rollio, g la accelerazione gravitazionale, h l'altezza del centro di massa, l il semiasse del veicolo, $N = m \cdot g$ il carico verticale del veicolo ed infine K_r , C_r e J_r costanti dal valore appropriato.

Tornando alla formula di Pacejka, γ definito come angolo di curvatura, è uguale a $\psi - \beta$ ed è supposto essere costante, F_z è il carico nominale sulle ruote, anch'esso costante, ed infine $f_z = (Q - F_z)/F_z$ è il carico relativo. Tutti gli altri parametri sono chiamati parametri di Pacejka e il loro valore determina la dinamica dell'interazione tra pneumatico e strada.

A questo punto è chiaro che l'incertezza del comportamento ruota-strada può essere rappresentata dall'incertezza relativa a questi parametri (soprattutto p_{K1} , p_{D2} e p_{E2}). Verrà quindi creato un range all'interno del quale questi parametri si muoveranno e rispetto al quale il controllore progettato dovrà essere robusto.

5.1.2 Architettura del controllo

Il modello descritto nel paragrafo precedente non è lineare perciò dato che il VRFT opera con sistemi lineari è necessario trovare il modo per per scriverlo come un sistema lineare incerto. Si andrà così ad interagire con un sistema strutturato come nella Figura 5.3

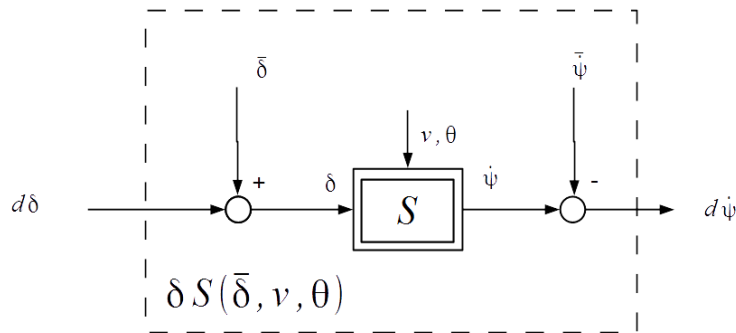


Figura 5.3: processo da controllare.

dove $S(v, \theta)$ è il sistema non lineare dipendente dal vettore θ dei parametri di Pacejka, quindi dalle condizioni ruota-strada, e dalla velocità che però si suppone essere un parametro conosciuto. Supponiamo che il segnale di angolo di sterzo in ingresso sia composto da una parte costante più una parte che sta ad indicare le piccole variazioni nell'intorno di questa costante, del tipo

$$\delta(t) = \bar{\delta} + d\delta(t),$$

stesso discorso si può fare sul segnale di output del sistema a sollecitato da tale ingresso

$$\dot{\psi}(t) = \bar{\dot{\psi}} + d\dot{\psi}(t).$$

Per fare in modo che il processo si comporti come un sistema SISO lineare si può costruire un sistema che ha per ingresso piccole variazioni dell'angolo di sterzo $d\delta(t)$ ed ha come uscita piccole variazioni di yaw rate $d\dot{\psi}$. Tra $d\delta$ ed $d\dot{\psi}$ vi sarà una relazione lineare. Quindi il sistema con cui l'algoritmo VRFT dovrà interagire sarà lineare, del tipo $\delta S(\bar{\delta}, \theta, v)$, ed avrà una funzione di trasferimento differente in base ai parametri che si suppongono conosciuti, come la velocità v , facilmente stimabili, come la componente costante dell'angolo di sterzo $\bar{\delta}$, e parametri totalmente incerti che fanno riferimento al vettore θ e rappresentano le condizioni di contatto-ruota strada.

Una volta definito il sistema con cui il controllo dovrà interagire si cerca ora di trovare un sistema di controllo con architettura tale da poter essere applicata per ogni diversa condizine di marcia del veicolo.

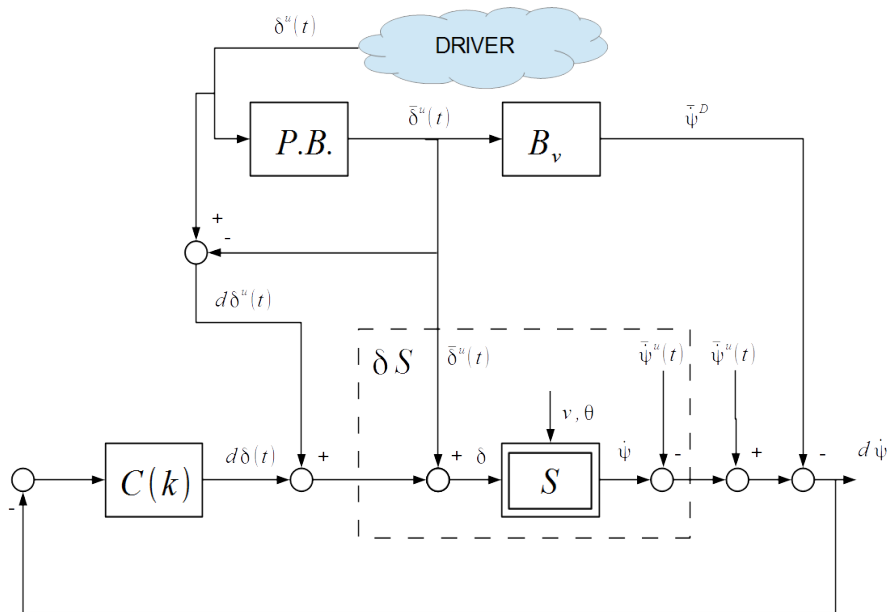


Figura 5.4: architettura del controllo di un veicolo in curva

Nel controllo mostrato in Figura 5.4 il guidatore imposta un certo angolo di sterzo $\delta^u(t)$, a questo punto il sistema tramite un filtro passa basso (che corrisponde al blocco $P.B.$ in Figura 5.4) divide la sua componente costante $\bar{\delta}^u(t)$ e il disturbo $d\delta^u(t)$. La componente di disturbo verrà sommata al segnale di controllo $d\delta(t)$ in modo da essere compensata da esso. La parte costante invece $\bar{\delta}^u(t)$ verrà utilizzata per essere sommata all'interno del sistema lineare δS e come ingresso alla mappa statica B_v . La mappa statica dipende dalla velocità v del veicolo, che sarà conosciuta,

e serve per calcolare la componente costante dello yaw rate $\bar{\psi}^D$ da sottrarre all'uscita del sistema. Ciò è fatto per fare tendere il comportamento della caratteristica tra angolo di sterzo e yaw rate a quella desiderata e impostata in B_v .

5.1.3 Incertezza del sistema

Come già spiegato in precedenza l'incertezza del sistema è legata esclusivamente ai parametri di Pacejka p_{K1} , p_{D2} e p_{E2} . La velocità del veicolo verrà supposta conosciuta e quindi mantenuta costante durante le prove. Il valore dei parametri incerti è preso come segue:

$$\begin{aligned} p_{D2} &\sim U [900, 1700] \\ p_{K1} &\sim U [500, 2000] \\ p_{E2} &\sim U [-20, 1] \end{aligned}$$

questo tipo di scelta, con veicolo alla velocità di $10m/s$, produrrà una caratteristica dei vari coefficienti di attrito nelle diverse configurazioni come quella indicata in Figura 5.5

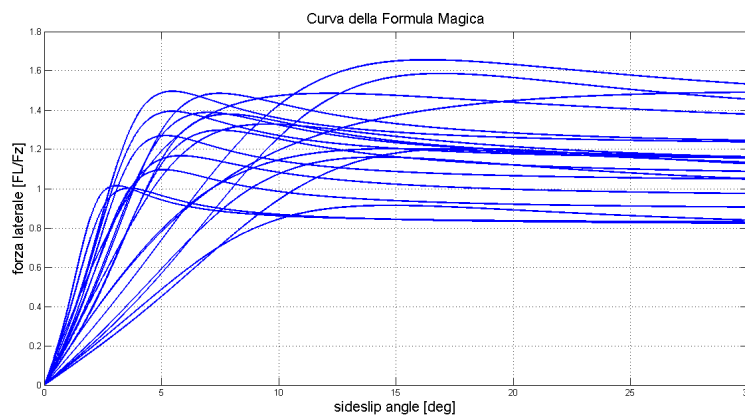


Figura 5.5: andamento coefficienti di attrito in funzione del sideslip angle (parametro α descritto in precedenza)

e la seguente mappa statica.

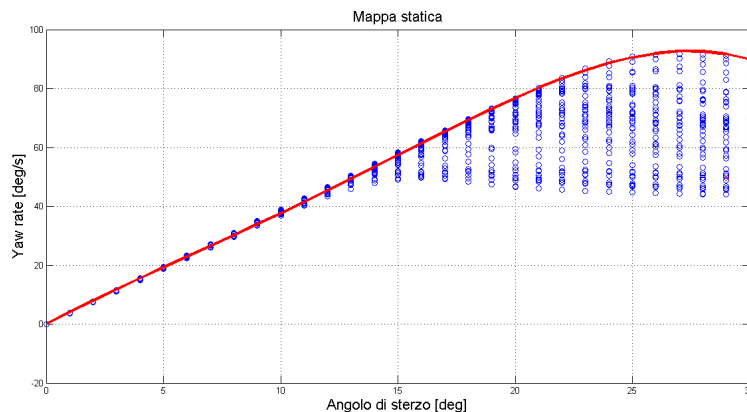


Figura 5.6: mappa statica alla velocità di $10m/s$

Dall'immagine della mappa statica in Figura 5.6 si può notare che per angoli di sterzo superiori a 13° a livello statico le differenze tra le varie condizioni di contatto ruota-strada iniziano a farsi sempre più evidenti. Intuitivo è infatti che ad un veicolo che viaggia ad una certa velocità non è possibile che il guidatore richieda lo stesso angolo di sterzo in tutte le condizioni di asfalto. Se infatti l'asfalto risulta viscido l'angolo di sterzo richiesto dal guidatore sarà minore per far sì che continui a mantenere il veicolo sotto controllo. Se l'angolo di sterzo sarà troppo elevato ad un incremento di questo non corrisponderà un incremento della velocità di rotazione e ciò porterà il veicolo a non mantenere la curva impostata dal guidatore o peggio un'uscita di strada o dalla corsia mettendo a rischio l'incolumità di guidatore e passeggeri.

5.2 Risultati in simulazione

Nella simulazione mostrata di seguito si cercherà, tramite l'applicazione dei metodi illustrati nei precedenti capitoli, di sintetizzare un controllore di tipo PID nella forma seguente

$$C(z, k) = \frac{1}{1 - z^{-1}} (k_0 + k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2}) \quad (5.3)$$

tale da essere in grado fare aderire la risposta a scalino delle diverse configurazioni assunte dal sistema allo stesso valore. Questo valore viene impostato tramite la mappa statica B_v presente nell'architettura di controllo in Figura 5.4 e dipendente dalla velocità considerata parametro noto. Così facendo si riesce ad ottenere una migliore controllabilità del veicolo nelle diverse condizioni di guida. Nel processo, dopo un determinato valore di angolo di sterzo, l'incremento di esso da parte del guidatore non produce più un aumento della velocità di rotazione, nel concreto da ciò consegue una minore tenuta di curva del veicolo. Perciò anche quando il sistema in anello aperto in particolari condizioni di contatto perde termini di prestazioni, il

sistema in anello chiuso continuerà a comportarsi in modo accettabile aumentando il range di angoli di sterzo per cui il veicolo risulta controllabile.

Andiamo ora a mostrare in dettaglio le cifre di merito utilizzate per i vari approcci in questa prova. Ovviamente i simboli indicati faranno riferimento a quelli di Figura 5.3 già spiegata nella sezione precedente. Da notare che il parametro N rappresenta i campioni rilevati sul sistema per ogni diversa condizione di lavoro, M invece è il parametro derivato dall'approccio scenario discusso nei precedenti capitoli e corrisponde al numero di configurazioni che l'impianto ha assunto durante la prova. In tutte le prove effettuate il segnale in ingresso al sistema sarà sempre lo stesso $\delta(t) = \bar{\delta} + d\delta(t)$. Le cifre di merito ed i relativi approcci saranno i seguenti:

- *Scenario VRFT*

$$\min_k \max_i \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (d\delta(t) - C(k) \cdot e_v^{(i)}(t))^2; \quad (5.4)$$

- *Greedy VRFT*

$$\min_k \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^N (d\delta(t) - C(k) \cdot e_v^{(i)}(t))^2; \quad (5.5)$$

- *VRFT nominale*

$$\min_k \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (d\delta(t) - C(k) \cdot e_v^{(nom)}(t))^2. \quad (5.6)$$

Per le prove effettuate verrà utilizzato un modello di riferimento del primo ordine non eccessivamente veloce, in modo da evitare di avere sovraelongazioni non ammissibili durante il transitorio della risposta a scalino del sistema. Il modello di riferimento sarà del tipo seguente:

$$M(z) = \frac{1 - \alpha}{z - \alpha} \quad (5.7)$$

con il parametro α posto uguale a 0.94, che, con un tempo di sample posto a 0.1s, corrisponde ad una banda di 1.1rad/s .

Le prove verranno effettuate senza nessun rumore additivo sull'uscita e senza l'utilizzo del peso in frequenza che quindi verrà posto $W(z) = 1$. Il prefiltro $L(z)$ invece verrà impostato come prefiltro ottimo già presentato nei capitoli precedenti.

In Figura 5.7 mostriamo il risultato ottenuto per un angolo di sterzo di 13°. Come si può notare non vi è molta differenza tra i tre diversi tipi di approcci utilizzati. Questo perchè essendo un angolo di sterzo basso le risposte in anello aperto del sistema in condizioni diverse non si discostano di molto le une dalle altre. Ciò rende

più facile il controllo anche attraverso un controllore tarato con il metodo *VRFT nominale* che prende in considerazione solo una configurazione generica.

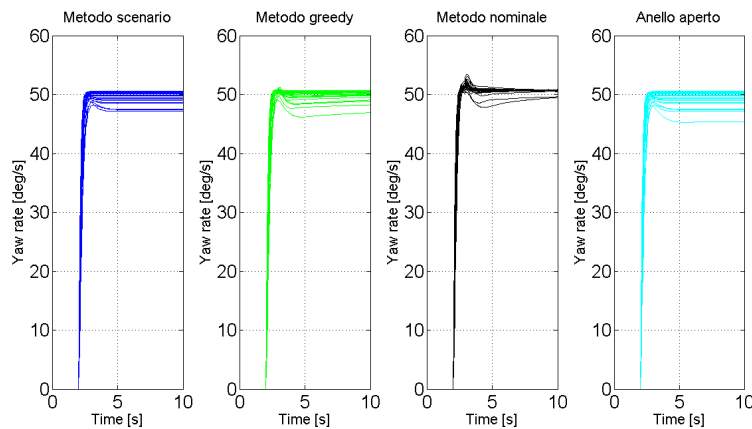


Figura 5.7: velocità di rotazione del veicolo in curva con angolo di sterzo di 13°

Se ora si aumenta anche solo di qualche grado l'angolo di sterzo, impostandolo cioè al valore di 16° , e tarando i controllori di conseguenza, si può notare dalla Figura 5.6 che le prestazioni richieste ai controllori sono più elevate. Questo porterà alla luce i limiti del *VRFT nominale*, che non è stato progettato per essere robusto in questo tipo di situazioni, ed anche quelli del *Greedy VRFT*, il quale invece seppur progettato per essere robusto non è in grado di fornire adeguate garanzie di robustezza. I risultati di questa simulazione sono mostrati in Figura 5.8 nella quale risulta chiaro che lo *Scenario VRFT* è l'unico metodo che fornisce un'adeguata risposta dell'anello chiuso senza eccessive sovraelongazioni e robustezza al controllo rispetto alle varie condizioni di lavoro.

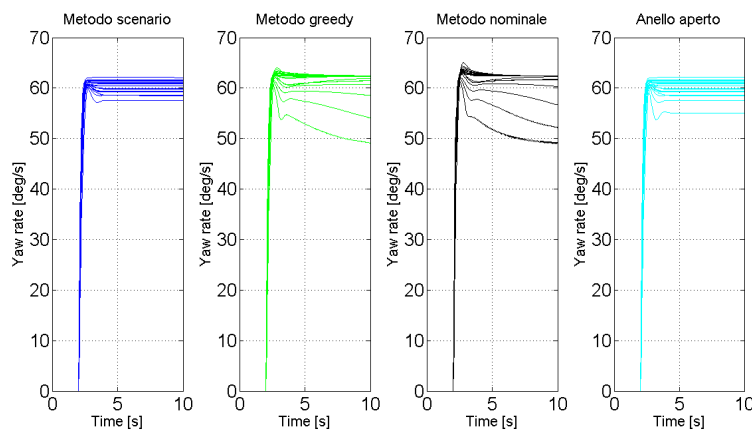


Figura 5.8: velocità di rotazione del veicolo in curva con angolo di sterzo di 16°

Conclusioni e sviluppi futuri

Nella trattazione si è discusso di una serie di approcci 'data-based' per il progetto di controllori robusti. La robustezza del controllo è rispetto all'incertezza delle condizioni di lavoro del sistema da controllare. Il sistema da controllare è incerto nel senso che può andare ad assumere, durante il suo funzionamento, diverse configurazioni ed ogni diversa configurazione sarà caratterizzata da una funzione di trasferimento diversa. Tale incertezza o variabilità dell'impianto sarà rappresentata dal parametro δ che assumerà valori diversi per ogni diversa condizione di lavoro. L'impianto può essere quindi rappresentato da una famiglia di funzioni di trasferimento lineari $P_1(z, \delta_1)$, $P_2(z, \delta_2)$, ... che possono essere infinite. Durante il suo funzionamento potrebbe passare da una configurazione all'altra in modo continuo tramite una lenta tempo-varianza del parametro δ .

Lo scopo della trattazione è stato quello di fornire una serie di metodi 'data-based' diretti che fossero in grado di poter gestire questo tipo di problema e fornirne una soluzione adeguata. Il vantaggio dell'utilizzo di metodi diretti è che, nel caso di incertezza presente nell'impianto, la preliminare identificazione di un modello matematico adeguato per il sistema risulta a livello computazionale molto onerosa e soprattutto non utile al fine che ci si è prefissati, cioè il progetto di un controllore adeguato. Il controllore progettato deve quindi essere unico ed in grado di fornire buone prestazioni per tutte le condizioni di lavoro in cui opera l'impianto.

A tal proposito si è partiti quindi da un metodo adattativo diretto e adeguato per il controllo di un processo incerto che sia in grado di sintetizzare un controllore semplice e di bassa complessità. Il metodo VRFT (Virtual Reference Feedback Tuning) [4] appartiene a questa famiglia di approcci e consente, tramite l'imposizione da parte del progettista di un modello di riferimento $M(z)$, di tarare un controllore al fine di fare aderire il comportamento del sistema in anello chiuso a quello del modello di riferimento. Si è preso come punto di partenza questo metodo e si è cercato quindi di estenderlo tramite l'elaborazione di approcci robusti rispetto a variazioni della dinamica del sistema non presenti in letteratura.

Gli approcci elaborati e confrontati tra di loro sono stati tre:

- *VRFT nominale*, rappresenta lo stato dell'arte. Consiste nell'applicazione dell'approccio VRFT nel suo modo classico. In altre parole si è scelta una con-

figurazione particolarmente rappresentativa per il processo da controllare e ci si è basati esclusivamente su quella per la sintesi del controllore. Ovviamente questo metodo è accettabile solo se le varie dinamiche che assume il processo si discostano di poco tra loro, quando invece le differenze tra le dinamiche iniziano ad essere rilevanti sono stati mostrati tutti i limiti dell'uso di un approccio di questo tipo, cioè la totale mancanza di adeguatezza e di robustezza della soluzione trovata.

- *Greedy VRFT* è l'approccio più naturale per affrontare il problema senza introdurre ulteriore matematica. In questo tipo di metodo i dati vengono raccolti con il processo che lavora in diverse condizioni. Ciò permette di sintetizzare il controllore tenendo conto delle diverse dinamiche del processo e questo fornirebbe un certo tipo di robustezza alla soluzione trovata. Questo metodo accanto al pregio di non modificare in nessun modo l'algoritmo classico ha il difetto di non fornire nessun tipo di garanzia rispetto alla soluzione trovata.
- *Scenario VRFT* è un approccio che è stato trovato modificando l'algoritmo classico per cercare di cautelarsi rispetto alla condizione di lavoro peggiore che dovrà andare a gestire il controllore sintetizzato. In questo metodo si è anche cercato di fornire delle garanzie probabilistiche sul livello di robustezza che si riesce ad ottenere attraverso tramite l'uso dell'*Approccio Scenario* [3, 6]. In questo metodo il controllore viene sintetizzato andando a minimizzare il valore massimo assunto dalla cifra di merito nelle varie configurazioni. Le garanzie probabilistiche vengono impostate tramite il numero di configurazioni assunte dal sistema durante la raccolta di dati sull'impanto. Lo svantaggio di questo metodo è che più alte sono le garanzie probabilistiche richieste, più alto sarà il costo computazionale richiesto per la sintesi di controllo. Diviene a questo punto utile cercare un buon compromesso tra le due esigenze e ciò può essere fatto attraverso l'imposizione del parametro ϵ (livello di robustezza della soluzione).

Oltre alla presentazione di questi nuovi approcci, nella trattazione è presente anche l'introduzione della *variabile strumentale estesa*, utilizzata per rendere il metodo VRFT robusto rispetto ad un disturbo additivo sull'uscita. Il concetto è quello di minimizzare la correlazione tra scelta dei parametri del controllore con il rumore presente sull'uscita. Questo tipo di variabile strumentale prende spunto dal *Correlation Approach* [2]. Essa ha lo svantaggio di dover impostare nuovo parametro l , legato al numero di passi di correlazione tra input ed errore di matching, ma ha il vantaggio di richiedere un solo set di dati per l'applicazione dell'algoritmo VRFT.

Nella trattazione per verificare a livello di esempi numerici le prestazioni fornite dai tre metodi si è partiti dal caso di sintesi di controllore robusto per una famiglia di funzioni di trasferimento lineari. Sono stati riportati i risultati ottenuti in caso di presenza di rumore additivo sull'uscita ed in caso di assenza di rumore. In tal modo

si è verificato il buon esito dell'utilizzo del metodo *VRFT con variabile strumentale estesa* e sono state confermate le aspettative a livello prestazionale dei tre metodi introdotti.

Affrontato con successo il caso lineare ci si è occupati quindi del caso in cui il sistema da controllare non sia lineare per testare le prestazioni degli algoritmi anche in questo campo. Si ha progettato quindi un'architettura di controllo che sia in grado di rendere il sistema lineare nell'intorno dei punti di lavoro in cui si trova a funzionare l'impianto. Grazie all'applicazione di questa architettura è ora possibile applicare gli algoritmi presentati precedentemente anche al caso non lineare. In questo campo il processo da controllare è uno e lavora in più condizioni. L'architettura linearizza così il sistema nell'intorno di ognuna di queste condizioni. Si vengono a creare in questo modo una famiglia di funzioni di trasferimento lineari che devono essere controllate dallo stesso controllore. A questo punto non resta che testare le varie tecniche introdotte in un ambito più concreto.

Si prende quindi ora in considerazione l'ambito automotive e si cerca di applicare gli algoritmi mostrati al caso di controllo di un veicolo in curva. Questo problema risulta di particolare interesse in questo ambito in quanto si tratta di effettuare il controllo di un sistema non lineare che deve essere robusto per le diverse condizioni di contatto ruota-strada. L'applicazione di un controllo sintetizzato con i metodi presentati permetterebbe la creazione di un unico controllore PID relativamente semplice in grado di funzionare in ogni condizione di guida. Questo potrebbe essere fondamentale per evitare perdite di controllo del veicolo soprattutto in condizioni meteorologiche avverse. Intuitivo è infatti che ad un veicolo che viaggia ad una certa velocità non è possibile che il guidatore richieda lo stesso angolo di sterzo in tutte le condizioni di asfalto. Se infatti l'asfalto risulta viscido l'angolo di sterzo richiesto dal guidatore sarà minore per far sì che continui a mantenere il veicolo sotto controllo. Se l'angolo di sterzo sarà troppo elevato ad un incremento di questo non corrisponderà un incremento della velocità di rotazione e ciò porterà il veicolo a non mantenere la curva impostata dal guidatore o peggio un'uscita di strada o dalla corsia. Come mostrato dai risultati ottenuti durante la trattazione l'utilizzo di un controllore sintetizzato con *Scenario VRFT* permetterebbe di aumentare la tenuta in curva del veicolo aumentando il range di angoli di sterzo per cui la vettura risulta controllabile in tutte le condizioni. Risulta chiaro dai risultati ottenuti i benefici che porta l'utilizzo del metodo ribusto *Scenario VRFT*, che fornisce garanzie sulla robustezza della soluzione, rispetto al metodo *Greedy VRFT* che invece non è in grado di fornire nessuna garanzia.

Questo metodi possono essere implementati facendo ulteriori analisi sulle prestazioni nel caso che il sistema da controllare sia non lineare. Inoltre si potrebbe creare un'architettura di controllo in grado di identificare il punto di lavoro nel caso il controllore debba essere applicato ad una famiglia di sistemi non lineari, in questo

caso infatti quella utilizzata nella trattazione non basterebbe. Infine sarebbe interessante utilizzare lo *Scenario VRFT* per un'applicazione con dati reali e valutarne così i vantaggi nel caso di un'applicazione concreta.

Bibliografia

- [1] Gunnarson S. Lequin O. Hjalmarsson H., Gevers M. Iterative feedback tuning: theory and applications. *IEEE Control Systems Magazine*, 18(4):26–41, 1998.
- [2] Bonvin Dominiquei Karimi Alireza, van Heusden Klaske. Noniterative data-driven controller tuning using the correlation approach. *European Control Conference 2007*, 2007.
- [3] M. Prandini M.C. Campi, S. Garatti. The scenario approach for systems and control design. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Plenary Papers, Milestone Reports & Selected Survey Papers*, 2008.
- [4] S. M. Savaresi M.C. Campi, A. Lecchini. Virtual reference feedback tuning: a direct method for the design of feedback controllers. *Automatica*, 38:1337–1346, 2002.
- [5] H. B. Pacejka. *Tire and Vehicle Dynamics*. SAE international, 2005.
- [6] M. Prandini S. Garatti. Design in presence of uncertainty: the scenario approach. *Modern Computational Science 12, Optimization*(eds. R. Leidl, A.K. Hartmann), 2012.
- [7] S. Bittanti S. Garatti. Parameter estimation in the pacejka’s tyre model through the ts method. *Proceedings of the 15th IFAC Symposium on System Identification*, pages 1304–1309, 2009.
- [8] Nichols N. B. Ziegler J. G. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, 64:759–768, 1942.

