



**Politecnico di Milano**

---

FACOLTA' DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Studio dell'injection locking in sottoarmonica di oscillatori LC**

**Candidato:**

**Segreto Daniele**

**Matricola 787258**

**Relatore:**

**Prof. Salvatore Levantino**

---

Anno Accademico 2013/2014

# RINGRAZIAMENTI

---

Desidero ringraziare chi ha contribuito alla realizzazione di questo lavoro: il Prof. Salvatore Levantino e il dottorando Giovanni Marucci; a loro va la mia gratitudine per il tempo dedicatomi in laboratorio. Li sollevo tuttavia da qualsivoglia responsabilità in merito a quanto riportato.

*Milano, dicembre 2014*

D.S.

# INDICE

---

INTRODUZIONE	1
1 CONCETTI FONDAMENTALI SUGLI OSCILLATORI	2
1.1 Criterio di Barkausen e condizione di innesco delle oscillazioni	2
1.2 Oscillatori LC ideali	3
1.3 Fattore di qualità	4
1.4 Oscillatori LC reali	5
2 INJECTION LOCKING, CONCETTI FONDAMENTALI	8
2.1 Introduzione	8
2.2 Injection locking	9
2.2.1 Lock range	9
2.2.2 Sfasamento introdotto da una rete risonante	12
2.2.3 Lock range nel caso di debole iniezione	13
2.2.4 Evoluzione temporale di fase e ampiezza in un oscillatore injection locked	14
2.2.5 Transconduttanza del componente attivo all'interno del lock range	16
2.3 Rumore di fase	17
2.3.1 Concetti fondamentali	17
2.3.2 Effetto dell'injection locking sul rumore di fase	18
3 OSCILLATORI INJECTION LOCKED CON SEGNALI IMPULSATI	23
3.1 Introduzione	23
3.2 Studio analitico	24
3.2.1 Lock range	24
3.2.2 Implementazione circuitale	28
3.2.3 Rumore di fase	30

3.3	Simulazioni di laboratorio	32
3.3.1	PRC reale e lock range	32
3.3.2	Rumore di fase	34
4	OSCILLATORE INJECTION LOCKED IN SOTTOARMONICA	36
4.1	Introduzione	36
4.2	Dimensionamento dello stadio sprovvisto dell'iniezione	37
4.2.1	Definizione delle specifiche e primi dimensionamenti	37
4.2.2	Applicazione del criterio di Barkausen allo startup	39
4.3	Dimensionamento dello stadio con injection locking	42
4.3.1	Rete equivalente	42
4.3.2	Dimensionamento della rete a 800MHz	45
	CONCLUSIONI	59
	APPENDICE A	60
	BIBLIOGRAFIA	64

# INDICE DELLE FIGURE

---

Figura 1. 1	Schema elettrico di un oscillatore LC ideale	4
Figura 1.2	Induttore e sua resistenza serie parassita	5
Figura 1. 3	Schema elettrico di un risonatore parallelo con perdite	5
Figura 1. 4	Schema di principio di un oscillatore LC (a) e schema a blocchi (b)	6
Figura 2. 1	(a) Schema concettuale di un oscillatore. (b) Sfasamento introdotto nella rete. (c) Trasferimento della rete risonante in modulo e fase. (d) Sfasamento introdotto tramite iniezione di una corrente	9
Figura 2. 2	Sfasamento tra corrente iniettata e tensione in uscita per diversi valori di $ \omega_{inj} - \omega_0 $ e $I_{inj}$	10
Figura 2. 3	Sfasamento ingresso-uscita in un oscillatore <i>injection locked</i>	14
Figura 2. 4:	Schema elettrico di un oscillatore con iniezione del riferimento	14
Figura 2. 5:	Andamento della transconduttanza differenziale in funzione della pulsazione, all'interno del <i>lock range</i>	17
Figura 2. 6:	Andamenti temporali dell'uscita ideale (a) e affetta da rumore di fase (b)	18
Figura 2. 7:	Spettri della tensione d'uscita ideale (a) e affetta da rumore di fase (b)	18
Figura 2. 8:	Accumulo del rumore di fase in assenza di iniezione del riferimento	19
Figura 2. 9:	Uscita con iniezione del segnale di riferimento al centro del <i>lock range</i> (a) e agli estremi (b)	19
Figura 2. 10:	Modello equivalente per lo studio del rumore di fase	19
Figura 2. 11:	Circuito equivalente a piccoli scostamenti dalla risonanza	21
Figura 2. 12:	Spettri di rumore dell'oscillatore <i>free running</i> e <i>injection locked</i>	22
Figura 3. 1:	Schema elettrico di un generico oscillatore impulsato	24
Figura 3. 2:	Effetto dell'iniezione del riferimento sulla tensione d'uscita (caso ideale)	26
Figura 3. 3:	Funzione $\gamma$ ideale	27
Figura 3. 4:	Schema circuitale del PILO ( <i>Pulse Injection Locked Oscillator</i> )	29
Figura 3. 5:	Segnale d'iniezione nel dominio del tempo (a) e suo spettro (b)	30
Figura 3. 6:	Figura dell'impulso utilizzato come segnale di riferimento	33
Figura 3. 7:	Andamento della funzione $\gamma$ ricavato con l'impulso reale per tre diversi valori del	

	rapporto di forma di M1	33
Figura 3. 8:	Andamento del <i>lock range</i> al variare della dimensione del transistor M1	34
Figura 3. 9:	Pendenza della funzione $\beta$ per i tre diversi valori del rapporto di forma del transistor d'iniezione	35
Figura 3. 10:	Spettro di rumore, componenti diretta e ripiegata (valori teorici: linea tratteggiate $S_{\phi}^D(f)$ $S_{\phi}^F(f)$ ); rumore totale teorico (somma dei precedenti) in linea continua; risultato delle simulazioni (quadrati)	35
Figura 4. 1:	Schema circuitale di un oscillatore <i>injection locked</i>	37
Figura 4. 2:	(a) Oscillatore sprovvisto dei transistori d'iniezione. (b) Sostituzione dei transistori ohmici con una resistenza	39
Figura 4. 3:	(a) Rete serie e (b) suo equivalente parallelo	41
Figura 4. 4:	Dimensionamento e polarizzazione della rete <i>free running</i> a 80 GHz	42
Figura 4. 5:	Rete equivalente per il dimensionamento dell' <i>injection locking</i>	43
Figura 4. 6:	Impulso disponibile con la tecnologia in uso	43
Figura 4. 7:	Capacità parassita al nodo di source e sua rilevanza nella determinazione del livello d'iniezione	44
Figura 4. 8:	Configurazione generale dell'oscillatore <i>injection locked</i>	45
Figura 4. 9:	(a) Circuito limite simmetrico e (b) oscillatore di Pierce	46
Figura 4. 10:	Dimensionamento e polarizzazione del caso <i>weak</i>	46
Figura 4. 11:	Luogo delle radici qualitativo dell'oscillatore simmetrico	48
Figura 4. 122:	Dimensionamento e polarizzazione del caso <i>strong</i>	48
Figura 4. 133:	Andamento dell'ampiezza d'oscillazione in funzione della resistenza di degenerazione	49
Figura 4. 144:	Tensione d'ingresso (onda quadra) e tensione d'uscita	50
Figura 4. 15:	(a) Segnale d'iniezione e (b) Forme d'onda ai nodi d'uscita	50
Figura 4. 156:	Polarizzazione dell'oscillatore Pierce	52
Figura 4. 17:	Luogo delle radici dell'oscillatore di figura 3.16	52
Figura 4. 168:	(a) Segnale d'ingresso. (b) Tensioni ai nodi d'uscita	54
Figura 4. 19:	Funzione $\gamma$ nel caso ideale	54
Figura 4. 20:	Andamento delle tensioni dell'oscillatore prima (a) e dopo (b)	

	l'applicazione della perturbazione	55
Figura 4. 171:	Funzione $\gamma$ ricavata dalle simulazioni	56
Figura 4. 182:	Spettro del rumore di fase dell'oscillatore <i>free running</i> e dell'oscillatore <i>injection Locked</i>	57
Figura 4. 193:	Valore del piatto dello spettro di fase a 1MHz dalla portante per tutte le frequenze di iniezione del grafico di figura 4.23	58
Figura A.1	Segnale periodico onda quadra (a) e suo spettro (b)	62

# INTRODUZIONE

---

Negli ultimi anni si è assistito ad un grande sviluppo delle comunicazioni *wireless*; nell'ambito della microelettronica questo mercato è quello col più alto tasso di crescita. La telefonia mobile è l'applicazione più significativa fin dall'inizio degli anni '90. In principio essa consisteva esclusivamente nella possibilità di comporre esclusivamente telefonate, mentre in seguito l'offerta si è estesa ai messaggi di testo, videochiamate, ecc...

In seguito sono emerse altre applicazioni non strettamente legate alla telefonia, come ad esempio il settore delle reti *wireless* locali (WLAN), le reti di sensori, l'*automotive* e l'*USB wireless*.

L'oscillatore è un componente indispensabile in tutte le applicazioni appena elencate. Le caratteristiche che ne determinano la qualità sono essenzialmente il consumo energetico e la purezza spettrale; quest'ultimo parametro è essenzialmente quantificabile tramite il rumore di fase (*Phase Noise*); solitamente questo viene abbattuto a discapito di un aumento della dissipazione di potenza. Tuttavia nei dispositivi mobili a batteria, come i telefoni cellulari, la dissipazione di potenza ne limita la durata. E' quindi opportuno investigare metodi alternativi volti alla riduzione del rumore di fase.

Questo lavoro presenta, analizza e verifica un metodo, chiamato *injection locking*, che permette di ottenere oscillatori a basso rumore mantenendo ridotto anche il consumo di potenza. L'obiettivo principale è la ricerca di una configurazione che massimizzi il *lock range* o anche, equivalentemente, riduca il più possibile il rumore di fase.

Nel primo capitolo si introdurranno i concetti fondamentali della teoria degli oscillatori relativamente alla classe maggiormente utilizzata nell'ambito delle applicazioni RF.

Il secondo capitolo illustrerà la teoria generale dell'*injection locking* applicata a oscillatori LC tramite corrente sinusoidale, quale tecnica particolarmente prestante nell'abbattimento del rumore di fase.

Nel terzo capitolo si passerà allo studio degli oscillatori impulsati, di realizzazione particolarmente comoda in tecnologia CMOS.

Infine, l'ultimo capitolo mostrerà la configurazione che, tra quelle analizzate, è dotata del *lock range* migliore. Essa sarà simulata per confermare le previsioni della teoria

Le simulazioni di laboratorio sono state effettuate in tecnologia CMOS 65 nm. L'analisi della configurazione del capitolo 4 è inizialmente effettuato a 80 GHz, ma la tecnologia imporrà il rilassamento di tale frequenza ad un centesimo del suo valore, ossia 800 MHz.

# 1 CONCETTI FONDAMENTALI SUGLI OSCILLATORI

---

## INDICE

---

1.1	Criterio di Barkausen e condizione di innesco delle oscillazioni	2
1.2	Oscillatori LC ideali	3
1.3	Fattore di qualità	4
1.4	Oscillatori LC reali	5

---

L'oscillatore elettrico consiste in un sistema in grado di fornire un'uscita variabile periodicamente nel tempo a fronte di un'alimentazione continua. Gli oscillatori elettrici si suddividono in:

- Oscillatori con risonatore (serie – parallelo - quarzo)
- Oscillatori ad anello
- Oscillatori a rilassamento

Nelle applicazioni RF la classe più utilizzata è quella appartenente agli oscillatori LC; tutti gli oscillatori per applicazioni wireless posseggono infatti risonatori LC integrati. Solitamente gli oscillatori ad anello e quelli a rilassamento, che non presentano risonatori, non riescono ad offrire buone prestazioni in termine di rumore di fase perché contengono parecchie sorgenti di rumore. Inoltre con essi si riescono ad ottenere fattori di qualità piuttosto bassi.

Prima di analizzare le singole classi di oscillatori si introduce il criterio di Barkausen, la cui applicazione risulta conveniente nello studio delle varie tipologie di oscillatori.

## 1.1 Criterio di Barkausen e condizione di innesco delle oscillazioni

Il criterio di Barkausen afferma che affinché un circuito mantenga indefinitamente l'oscillazione senza smorzarsi è necessaria l'esistenza di una pulsazione  $\bar{\omega}$  tale per cui

$$Gloop(j\bar{\omega}) = 1 \tag{1.1}$$

Concretamente ciò significa che il circuito deve presentare un anello di reazione che introduca sfasamento complessivo nullo e non alteri l'ampiezza del segnale che lo percorre da un estremo all'altro. La condizione precedente si traduce pertanto nella seguente coppia di uguaglianze:

$$arg[Gloop(j\bar{\omega})] = 1 \tag{1.2}$$

$$|Gloop(j\bar{\omega})| = 1$$

(1.3)

In tale situazione il segnale si ripresenta inalterato dopo aver percorso per intero l'anello e l'oscillazione si conserva nel tempo.

La condizione  $Gloop(j\bar{\omega}) = 1$  prevede dunque la necessità di disporre di una coppia di poli immaginari puri coniugati; tuttavia in un circuito di questo tipo, inizialmente spento, ovvero avente tutte le tensioni dei nodi e tutte le correnti nei rami nulle, l'oscillazione non può partire a meno di prendere in considerazione un guadagno d'anello avente poli complessi coniugati ma situati, inizialmente, nel semipiano destro, che garantiscono instabilità e quindi l'innescò dell'oscillazione, cioè

$$Gloop(j\bar{\omega}) > 1$$

(1.4)

La posizione dei poli nel piano è infatti gestibile tramite la scelta opportuna del parametro di taratura del luogo delle radici.

## 1.2 Oscillatori LC ideali

Idealmente esso è composto dalla serie (o dal parallelo) di elementi reattivi che si scambiano energia mantenendo indefinitamente l'oscillazione. Infatti, applicando il bilancio di Kirchhoff al sistema di figura 1.1, si può scrivere:

$$i_L(t) + i_C(t) = 0$$

(1.5)

Sostituendo le relazioni costitutive dei componenti si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau = 0$$

(1.6)

o anche:

$$\ddot{v} + \frac{1}{LC} v = 0$$

(1.7)

La seguente equazione algebrica

$$x^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

(1.8)

ha due radici complesse coniugate; è risolta, in particolare, dai valori

$$x_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

(1.9)

con  $\alpha = 0$  e  $\beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

per cui la soluzione della (1.6) è

$$\begin{aligned} v(t) &= C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) = \\ &= C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) \end{aligned}$$

(1.10)

La soluzione è quindi generalmente oscillante alla pulsazione  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , detta risonanza. Ovviamente affinché l'oscillazione sia caratterizzata da ampiezza non nulla è necessario definire delle opportune condizioni iniziali per le variabili di stato del sistema: tensione ai capi del condensatore e corrente che circola nell'induttore entrambe non nulle.

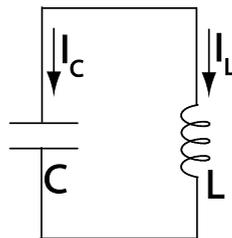


Figura 1.1: Schema elettrico di un oscillatore LC ideale

### 1.3 Fattore di qualità

Ogni componente reattivo è sempre accompagnato da elementi parassiti che inevitabilmente dissipano energia; il modello di figura 1.1 è valido solo idealmente, mentre la realtà obbliga a considerare gli effetti delle perdite. Il fattore di qualità indica, nella sua forma più semplice, il rapporto tra l'energia reattiva immagazzinata e l'energia dissipata per ciclo. In formule:

$$Q = 2\pi \frac{E_{reattiva}}{E_{diss. \text{ per ciclo}}}$$

(1.11)

Esso fornisce una stima di quanto il componente analizzato è prossimo al componente ideale privo di perdite, il quale presenta fattore di qualità infinito. Considerando ad esempio un induttore, esso avrà, nella realtà dei fatti, una resistenza di perdita serie, come in figura 1.2, e pertanto

$$Q = 2\pi \frac{E_L}{P_R T} = 2\pi \frac{\frac{L I^2}{2}}{\frac{I^2 R_S}{2} \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega L}{R_S} \quad (1.12)$$

In cui  $P_R$  è la potenza dissipata dalla resistenza serie e  $T$  è il periodo del segnale armonico di corrente  $I$ . Il componente è tanto più ideale quanto più il parassita che lo affligge è trascurabile rispetto ad esso.

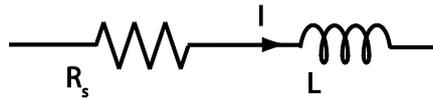


Figura 1.2: Induttore e sua resistenza serie parassita

Nel caso di rete risonante del secondo ordine, nella configurazione parallelo di figura 1.1, è possibile associare le perdite ad uno solo dei componenti reattivi. Si costruisce dunque lo schema elettrico rappresentato in figura 1.3.

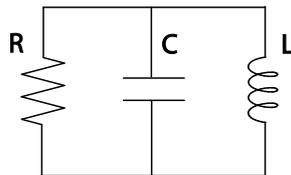


Figura 1.3: Schema elettrico di un risonatore parallelo con perdite

Ripetendo le considerazioni svolte nel caso serie, si può dunque scrivere:

$$Q = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (1.13)$$

Nella prima uguaglianza si sono associate le perdite al condensatore, nell'altra all'induttore.

## 1.4 Oscillatori LC reali

Una rete risonante gravata da perdite ha come risposta all'impulso un segnale oscillante con involuppo esponenziale decrescente. L'energia dissipata dagli elementi parassiti deve essere in qualche modo reintrodotta nel sistema per evitare l'evanescenza dell'oscillazione. In definitiva oscillatori di questo tipo sono composti, quindi, da una rete risonante che seleziona le frequenze da trasmettere e da un componente attivo che ne compensa le perdite. Figura 1.4(a) ne rappresenta lo schema generale, mentre figura 1.4(b) ne mette in evidenza lo schema a blocchi adatto al calcolo del guadagno d'anello.

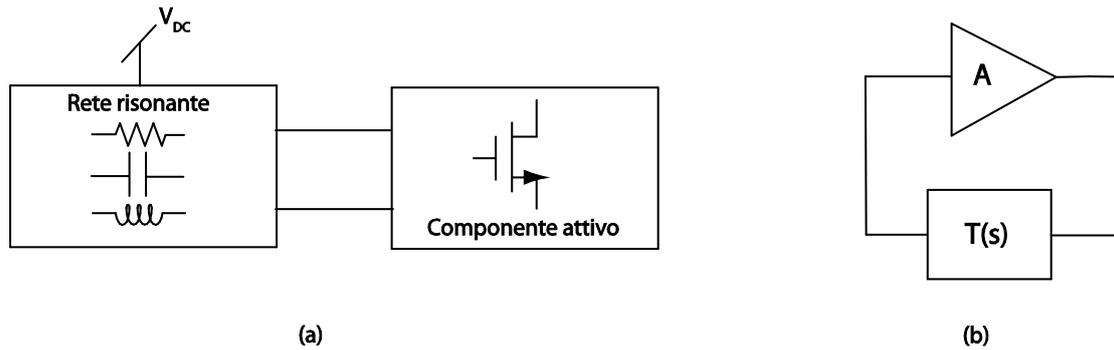


Figura 1.4: Schema di principio di un oscillatore LC (a) e schema a blocchi (b)

La realizzazione più semplice della rete risonante è la rete con uno zero nell'origine e due poli, la cui funzione di trasferimento è:

$$T(s) = \gamma \frac{s \omega_0 / Q}{s^2 + s \omega_0 / Q + \omega_0^2} \quad (1.14)$$

di cui  $\gamma$  ne è l'ampiezza di picco. Il guadagno d'anello è pari a

$$G_{loop}(s) = AT(s) = A\gamma \frac{s \omega_0 / Q}{s^2 + s \omega_0 / Q + \omega_0^2} \quad (1.15)$$

Il criterio di Barkausen impone:

$$G_{loop}(j\bar{\omega}) = AT(j\bar{\omega}) = A\gamma \frac{j\bar{\omega} \omega_0 / Q}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2 + j\bar{\omega} \omega_0 / Q} = 1 \quad (1.16)$$

La quale è soddisfatta per  $\bar{\omega} = \omega_0$  e  $A\gamma = 1$ . La frequenza di oscillazione è selezionata dal filtro mentre l'amplificazione  $A$  interviene sulla costante di taratura del luogo delle radici.

Dall'ultima considerazione si ricava anche la condizione d'innesco. Se  $A\gamma > 1$ , i poli si trovano nel semipiano destro e può avvenire lo *startup* dell'oscillatore qualora intervenga, ad esempio, del rumore elettronico che sbilanci anche di poco i nodi d'uscita. Quando l'ampiezza dell'oscillazione inizia ad aumentare, è invece indispensabile un meccanismo che riconduca i poli sull'asse immaginario, deve cioè riaversi  $G_{loop}(j\bar{\omega}) = 1$ , facendo attenzione a non sconfinare nel semipiano sinistro, per evitare di smorzare l'oscillazione. In un oscillatore LC tale meccanismo è fornito automaticamente dal componente attivo inserito per compensare le perdite. Il rapporto tra il valore della corrente all'armonica desiderata e la tensione applicata a tale componente è detto transconduttanza efficace. Se l'ampiezza dell'oscillazione aumenta, il sistema reagisce intrinsecamente distribuendo la potenza su un più vasto contenuto armonico rispetto alla sola frequenza selezionata, l'unica frequenza che sopravvive alla rete risonante, e il valore della

transconduttanza efficace cala. Viceversa, se l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce, il valore della transconduttanza efficace aumenta, i poli tornano nel semipiano destro, e garantiscono un incremento dell'ampiezza. Esiste pertanto un valore d'equilibrio per l'ampiezza a cui la rete tende ad avvicinarsi e che porta a riscrivere la condizione di Barkausen come:

$$A_{eff}\gamma = 1$$

(1.17)

(Il prodotto  $G_{m,eff}R$  è l'analogo del parametro di taratura  $A\gamma$  utilizzato nelle precedenti espressioni).

## 2 TEORIA DELL'INJECTION LOCKING

---

### INDICE

---

2.1	Introduzione	8
2.2	Injection locking	9
2.2.1	Lock range	9
2.2.2	Sfasamento introdotto da una rete risonante	12
2.2.3	Lock range nel caso di debole iniezione	13
2.2.4	Evoluzione temporale di fase e ampiezza in un oscillatore injection locked	14
2.2.5	Transconduttanza del componente attivo all'interno del lock range	16
2.3	Rumore di fase	17
2.3.1	Concetti fondamentali	17
2.3.2	Effetto dell'injection locking sul rumore di fase	18

---

### 2.1 Introduzione

L'*injection locking* di un oscillatore è una tecnica che viene utilizzata insieme a metodi tradizionali di anelli ad aggancio di fase per la progettazione di moltiplicatori di clock e sintetizzatori di frequenza. Questo meccanismo consente di ottenere sintetizzatori con una significativa riduzione del rumore di fase a bassa frequenza mantenendo un ridotto consumo di potenza. In questo contesto si sfrutta la generazione armonica operata dai componenti non lineari che applicano l'iniezione al circuito; in pratica, avendo a disposizione un segnale a bassa frequenza, è possibile, sotto opportune condizioni che si vedranno in seguito, ottenere l'aggancio di fase dell'uscita ad una delle armoniche presenti nello spettro del segnale iniettato, ottenendo in questo modo un moltiplicatore di frequenze.

In questo capitolo si analizzerà la teoria generale dell'*injection locking*, partendo dal modello circuitale sino alla presentazione della formula che esprime la banda di *lock* in funzione dei parametri del circuito. In seguito si ricaverà una coppia di equazioni differenziali che descrivono l'andamento temporale della fase e dell'ampiezza di un oscillatore *injection locked*.

Esistono in letteratura altri metodi per ottenere moltiplicatori di frequenza, come ad esempio i vettori di oscillatori accoppiati [11] -[12]. Tuttavia essi non saranno presi in considerazione.

## 2.2 Injection locking

### 2.2.1 Lock range

Nel precedente capitolo si è visto come un risonatore LC sia affetto dalle perdite degli elementi reattivi; per costruire un oscillatore è necessario un componente attivo che restituisca alla rete l'energia dissipata dalle sue stesse perdite, mantenendo indefinitamente l'oscillazione.

L'oscillatore di figura 2.1(a) è composto da una rete risonante e da un transistor inserito con la funzione appena descritta. Il buffer invertente è strettamente necessario in quanto permette il soddisfacimento della condizione di Barkausen. Infatti il transistor, inserito nella configurazione source a massa, è anch'esso notoriamente invertente e per mantenere sfasamento nullo nel guadagno d'anello è necessario compensare l'inversione di fase. In figura 2.1(c) è riportato il trasferimento (in modulo e fase) della rete risonante. Come già analizzato nel primo capitolo, il criterio di Barkausen afferma che l'oscillazione può esistere alla sola pulsazione di risonanza  $\omega_0$  e sotto opportuni valori del parametro di taratura del luogo delle radici, con il quale è possibile ottenere poli immaginari puri coniugati.

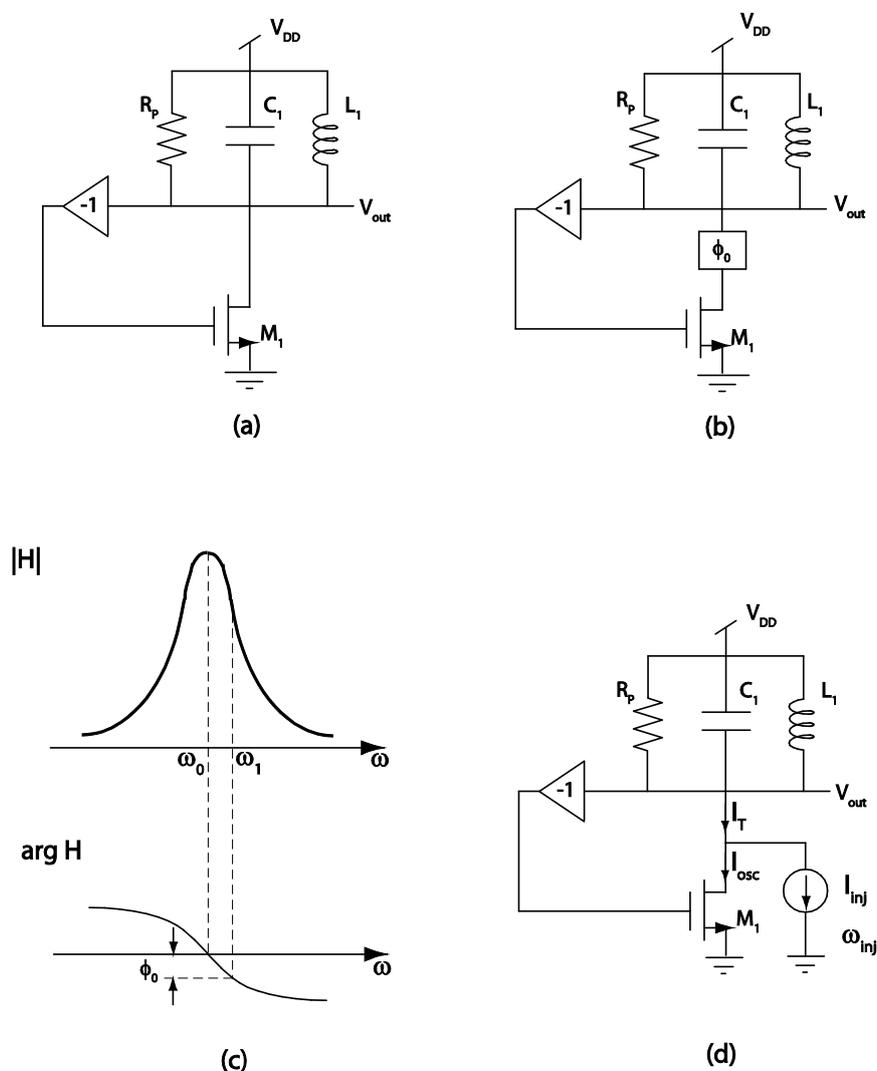


Figura 2.1: (a) Schema concettuale di un oscillatore. (b) Sfasamento introdotto nella rete. (c) Trasferimento della rete risonante in modulo e fase. (d) Sfasamento introdotto tramite iniezione di una corrente

Immaginando di inserire ora un componente che contribuisca con un ritardo di fase  $\phi_0$  aggiuntivo nell'anello, si nota facilmente, osservando la figura 2.1(b), come la rete non possa più oscillare alla stessa pulsazione, in quanto ciò corrisponderebbe ad uno sfasamento non nullo (pari, anzi, proprio a  $\phi_0$ ). L'oscillazione può ora mantenersi ad una pulsazione  $\omega_1$  tale da annullare il ritardo di fase  $\phi_0$ . In ogni caso, ipotizzando che il buffer invertente e lo stadio source a massa si compensino totalmente in termini di sfasamento introdotto, è importante notare che la corrente di drain del transistor  $M_1$  deve restare in fase con la tensione  $V_{out}$ .

Si supponga ora di produrre concretamente il ritardo  $\phi_0$  tramite l'iniezione di una corrente sinusoidale  $I_{inj}$  al drain di  $M_1$ , come in figura 2.1(d). Se l'ampiezza e la frequenza di  $I_{inj}$  sono adeguatamente scelte, il circuito oscilla a  $\omega_{inj}$  anziché a  $\omega_0$  e l'*injection locking* è effettiva. In questa condizione, la tensione  $V_{out}$  e la corrente  $I_{inj}$  devono necessariamente mantenere uno sfasamento reciproco in quanto:

1. La rete risonante contribuisce con uno sfasamento non nullo alla pulsazione  $\omega_{inj} \neq \omega_0$
2.  $I_{osc}$  resta in fase con  $V_{out}$  e pertanto sfasata rispetto a  $I_T$ . Inoltre  $I_{osc}$  non può essere in fase con  $I_{inj}$ , se così fosse  $I_T$  resterebbe in fase con  $I_{osc}$  e quindi con  $V_{out}$ .

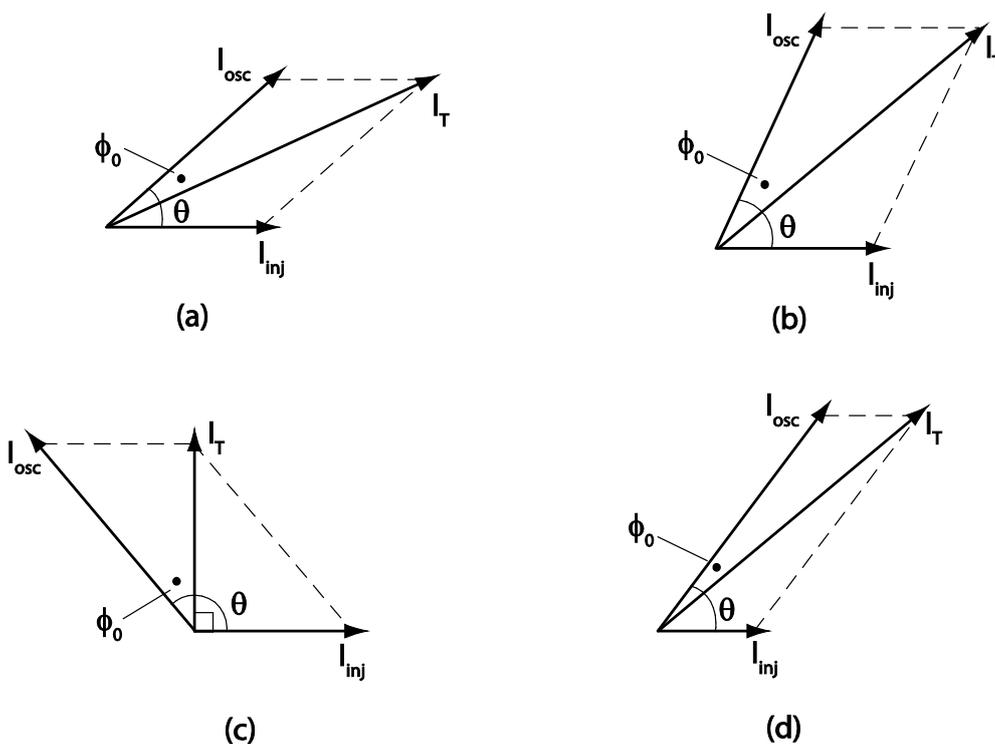


Figura 2.2: Sfasamento tra corrente iniettata e tensione in uscita per diversi valori di  $|\omega_{inj} - \omega_0|$  e  $I_{inj}$

Per determinare il *lock range* (ovvero l'insieme di frequenze  $\omega_{inj}$  alla quali avviene l'aggancio in fase) è utile il diagramma fasoriale di figura 2.2(a), ricavato dalle precedenti osservazioni, considerando  $\omega_{inj} \neq \omega_0$ . Per compensare lo sfasamento sempre maggiore introdotto dalla rete risonante quando ci si allontana dalla pulsazione *free running*, l'angolo tra  $I_{osc}$  e  $I_{inj}$  ( $\theta$ ) deve aumentare, costringendo  $I_{osc}$  a ruotare in verso antiorario e a portarsi nella situazione di figura 2.2(b). Dai teoremi della trigonometria, è noto che in

un triangolo qualsiasi si mantiene costante il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto ad esso. Dopo qualche elaborazione è possibile scrivere:

$$\sin \phi_0 = \frac{I_{inj}}{I_T} \sin \theta \quad (2.1)$$

Inoltre, applicando il teorema del coseno per ricavare  $I_T$ , la diventa

$$\sin \phi_0 = \frac{I_{inj} \sin \theta}{\sqrt{I_{osc}^2 + I_{inj}^2 + 2I_{inj}I_{osc} \cos \theta}} \quad (2.2)$$

che ha come massimo il valore

$$\sin \phi_{0,max} = \frac{I_{inj}}{I_{osc}} \quad (2.3)$$

quando

$$\cos \theta = -\frac{I_{inj}}{I_{osc}} \quad (2.4)$$

Questa condizione si traduce in un angolo di  $90^\circ$  tra la risultante e  $I_{inj}$ , come visibile in figura 2.2(c), in cui la differenza di fase tra  $I_{inj}$  e  $V_{out}$  raggiunge il massimo di  $90^\circ + \phi_{0,max}$ . I due vettori non possono essere sfasati per più di questa quantità. Per calcolare il valore di  $\omega_{inj}$  che corrisponde a questo caso, è utile ricordare che lo sfasamento introdotto dalla rete nei pressi della pulsazione di risonanza è dato da:

$$\tan \alpha \approx \frac{2Q}{\omega_0} (\omega_0 - \omega_{inj}) \quad (2.5)$$

Per la derivazione di questo risultato si veda il paragrafo 2.2.2.

Osservando la figura 2.2(c) si nota inoltre che

$$\tan \phi_0 = \frac{I_{inj}}{I_T} \quad (2.6)$$

e

$$I_T = \sqrt{I_{osc}^2 - I_{inj}^2} \quad (2.7)$$

Uguagliando la (2.5) e la (2.6) dopo aver sostituito la (2.7) nella (2.6) è possibile ricavare il massimo scostamento della pulsazione di iniezione da quella di *free running*

$$\omega_0 - \omega_{inj} = \frac{\omega_0 I_{inj}}{2Q I_{osc}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{I_{inj}^2}{I_{osc}^2}}} \quad (2.8)$$

Se si indica con  $\omega_L$  il valore della differenza appena scritta, l'insieme di frequenze  $\pm\omega_L$  attorno a  $\omega_0$  rappresenta il *lock range*. Quindi  $\omega_L$  è il *lock range* unilatero. Si fa presente che lo stesso risultato è stato ottenuto in [1] utilizzando un diverso approccio.

La dipendenza del *lock range* dal livello di iniezione è in linea ciò che ci si attende: se  $I_{inj}$  decresce,  $I_{osc}$  deve formare un angolo con  $I_{inj}$  tale da mantenere la differenza di fase tra  $I_{osc}$  e  $I_T$  pari a  $\phi_0$  (figura 2.2(d)). Quindi il circuito si sta avvicinando al bordo del *lock range*.

Anche la dipendenza dal fattore di qualità è abbastanza intuitiva: il fattore  $\omega_0/2Q$  nella (2.8) è la banda a  $-3dB$  del modulo della funzione di trasferimento della rete risonante. Per ottenere l'aggancio in fase è bene iniettare correnti a frequenze prossime alla risonanza. Se  $Q$  cresce la banda si riduce e quindi viene filtrata maggiormente la componente iniettata nella rete. Se ci si trovasse nella condizione di dover aumentare la banda di aggancio, una possibilità consisterebbe proprio nella riduzione del fattore di qualità.

### 2.2.2 Sfasamento introdotto da una rete risonante

Si vuole ricavare lo sfasamento introdotto da una rete risonante nei dintorni della pulsazione di risonanza. Una rete risonante del secondo ordine composta da induttore, capacità e resistore posti in parallelo fra loro contribuisce con uno sfasamento pari a

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{R_p} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (2.9)$$

Siccome  $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ ,  $\frac{L\omega}{R_p} = \frac{1}{Q}$  e  $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x = \tan^{-1}(x^{-1})$ , risulta

$$\tan(\alpha) \approx \frac{2Q}{\omega_0} (\omega_0 - \omega) \quad (2.10)$$

Se la corrente che fluisce nella rete è modulata in fase, ovvero  $I_{in} = I_0 \cos[\omega t + \psi(t)]$ , allora lo sfasamento può essere ottenuto sostituendo a  $\omega$ , nella (2.10), la frequenza istantanea della corrente:  $\omega + \frac{d\psi}{dt}$ . In questo modo la (2.10) diventa

$$\tan(\alpha) \approx \frac{2Q}{\omega_0} \left(\omega_0 - \omega - \frac{d\psi}{dt}\right) \quad (2.11)$$

Il risultato ottenuto è valido per modulazioni a banda stretta ( $\psi$  lentamente variabile), quindi questa approssimazione è particolarmente adatta nello studio fenomeni di iniezione.

### 2.2.3 Lock range nel caso di debole iniezione

Nel caso particolare in cui  $I_{inj} \ll I_{osc}$  la (2.2) si riduce a

$$\sin \phi_0 \approx \frac{I_{inj}}{I_{osc}} \sin \theta \quad (2.12)$$

$\phi_0$  è di conseguenza piccolo e quindi  $\sin \phi_0 \approx \tan \phi_0$ . Le equazioni (2.5) e (2.12) diventano:

$$\sin \theta \approx \frac{2Q I_{osc}}{\omega_0 I_{inj}} (\omega_0 - \omega_{inj}) \quad (2.13)$$

In questo caso particolare l'espressione del *lock range* può essere semplificata in (dalla (2.8))

$$\omega_L \approx \frac{\omega_0 I_{inj}}{2Q I_{osc}} \quad (2.14)$$

In figura 2.3 si mostra infine la differenza di fase  $\theta_{ss}$  tra ingresso e uscita all'interno del *lock range*, nella condizione di steady state successiva ad un eventuale transitorio iniziale.

$$\theta_{ss}|_{I_{inj} \ll I_{osc}} = \sin^{-1} \left( \frac{\omega_0 - \omega_{inj}}{\omega_L} \right) \quad (2.15)$$

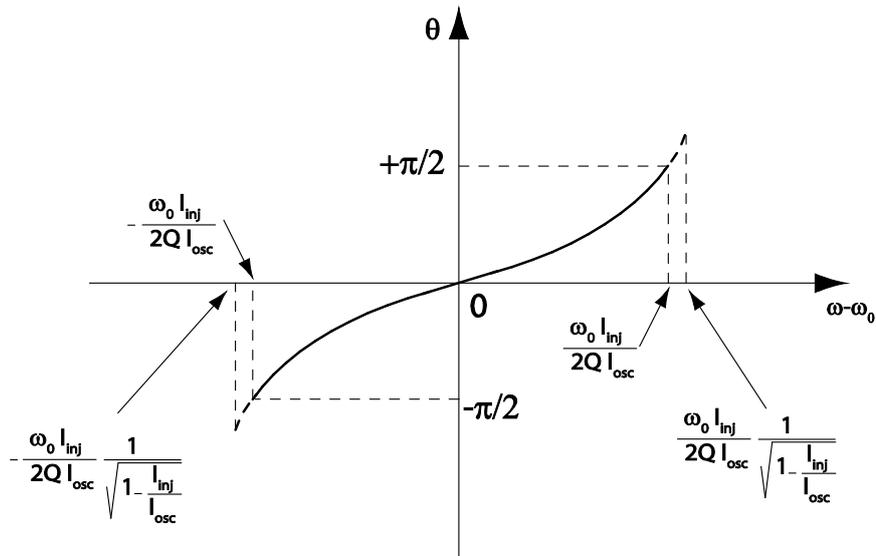


Figura 2.3: Sfasamento ingresso-uscita in un oscillatore *injection locked*

### 2.2.4 Evoluzione temporale di fase e ampiezza in un oscillatore *injection locked*

Figura 2.4 mostra lo schema semplificato di un oscillatore a cui è applicata l'iniezione di un segnale di corrente.

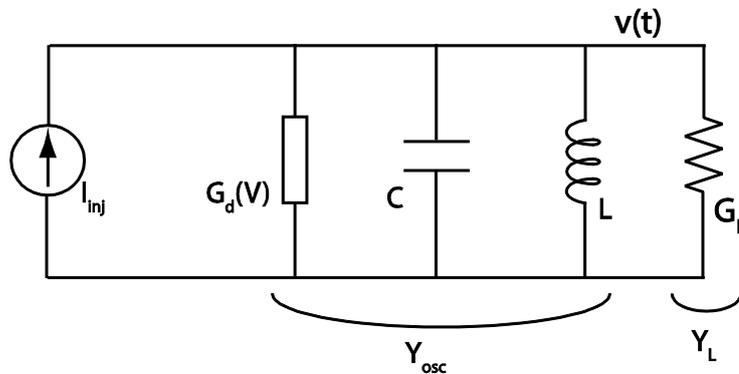


Figura 2.4: Schema elettrico di un oscillatore con iniezione del riferimento

$G_L$  rappresenta le perdite del circuito, mentre  $G_d(v)$  è la transconduttanza dell'elemento attivo. Poiché quest'ultimo è un componente non lineare, essa è dipendente dalla tensione ai capi della rete risonante. Un esempio transconduttanza non lineare è costituito dal buffer invertente e il source a massa di figura 2.1(a).

Il bilancio di corrente ad uno dei due nodi d'uscita prevede:

$$I_C + I_L + G_L v - G_d(v) v = I_{inj}$$

(2.16)

Sostituendo la relazione costitutiva del condensatore

$$I_C = C \frac{dv}{dt}$$

(2.17)

all'interno della (2.16), risulta

$$C \frac{dv}{dt} + I_L + (G_L - G_d(v)) v = I_{inj}$$

(2.18)

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{L} + (G_L - G_d(v)) \frac{dv}{dt} = \frac{dI_{inj}}{dt}$$

(2.19)

Si assumo ora

$$I_{inj}(t) = I_{inj,p} \cos(\omega_{inj}t) = \Re\{I_{inj,p} \exp(j\omega_{inj}t)\}$$

(2.20)

e

$$v(t) = A(t) \cos(\omega_{inj}t + \theta) = \Re\{A(t) \exp(j\omega_{inj}t + j\theta)\}$$

(2.21)

dove con  $A(t)$  si è indicato l'involuppo del segnale d'uscita e con  $I_{inj,p}$  l'ampiezza del segnale di corrente iniettata.

Sostituendo la (2.20) e la (2.21) nella (2.19) si ha:

$$\begin{aligned} C \frac{d^2[A(t) \cos(\omega_{inj}t + \theta)]}{dt^2} + \frac{A(t) \cos(\omega_{inj}t + \theta)}{L} + (G_L - G_d) \frac{d[A(t) \cos(\omega_{inj}t + \theta)]}{dt} \\ = \frac{d[I_{inj,p} \cos(\omega_{inj}t)]}{dt} \end{aligned}$$

(2.22)

che può essere separata nelle parti reale e immaginaria:

$$C \frac{d^2A}{dt^2} - C \left(\omega_{inj} + \frac{d\theta}{dt}\right)^2 A + (G_L - G_d) \frac{dA}{dt} + \frac{A}{L} = \omega_{inj} I_{inj,p} \sin(\theta)$$

(2.23)

$$2C \left(\omega_{inj} + \frac{d\theta}{dt}\right) \frac{dA}{dt} + C \frac{d^2\theta}{dt^2} A + (G_L - G_d) \left(\omega_{inj} + \frac{d\theta}{dt}\right) A = \omega_{inj} I_{inj,p} \cos(\theta)$$

(2.24)

E' possibile semplificare le precedenti equazioni assumendo:

1. Involuppo lentamente variabile e con variazioni trascurabili
2. intensità dell'involuppo approssimabile con il prodotto fra la corrente di picco prodotta dalla transconduttanza,  $I_{osc,p}$ , e la resistenza parallelo  $R_p = 1/G_L$
3.  $\omega_{inj}^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega_{inj})$
4.  $\omega_{inj} \approx \omega_0$
5. Fase e sua derivata lentamente variabili

Sotto queste ipotesi la (2.23) e la (2.24) diventano

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - \omega_{inj} - \frac{\omega_0 I_{inj,p}}{2Q I_{osc,p}} \sin(\theta) \quad (2.25)$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{G_L - G_d}{2C} A = \frac{I_{inj,p} \cos(\theta)}{2C} \quad (2.26)$$

La coppia di equazioni (2.25) e (2.26) descrive l'evoluzione nel tempo della fase e dell'ampiezza istantanea in uscita in risposta all'iniezione. La prima è nota come equazione di Adler [8].

Fino ad ora si è considerata l'iniezione del riferimento a frequenza che poco si discosta da quella *free running*, nulla vieta però di agganciare l'uscita ad un'armonica multipla del segnale di riferimento, ottenendo in questo modo un moltiplicatore di frequenze dall'ingresso all'uscita, che è poi la tecnica che più sovente si adopera. Per fare questo è necessario disporre di un elemento attivo distorcente il quale generi, per esempio a partire da un segnale monoarmonico, un'infinità di armoniche, delle quali una soltanto sopravvive al filtraggio effettuato dalla rete risonante. In tal caso, tutte le conclusioni a cui si è giunti, e quelle non ancora tratte, restano parimenti valide purché in esse si sostituisca l'armonica opportuna, ovvero semplicemente  $N \omega_{inj}$  anziché  $\omega_{inj}$ .

## 2.2.5 Transconduttanza del componente attivo all'interno del lock range

E' utile inoltre ricavare l'espressione della transconduttanza del componente attivo non lineare all'interno del *lock range*, ossia quando  $d\theta/dt = dA/dt = 0$ . Scrivendo  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  è possibile ricavare, esplicitando rispetto a  $\sin\theta$  e  $\cos\theta$  la (2.25) e la (2.26), la seguente identità:

$$\left(\frac{\omega_0 - \omega_{inj}}{\omega_L}\right)^2 + \left(\frac{G_L - G_d}{I_{inj,p}} A\right)^2 = 1 \quad (2.27)$$

Per  $\omega_{inj} = \omega_0$  questa si traduce in

$$G_d = G_L - \frac{I_{inj,p}}{A_p} \quad (2.28)$$

la quale si può facilmente giustificare col fatto che il circuito risponde riducendo la transconduttanza  $G_d$  dell'elemento attivo poiché l'iniezione aggiunge energia in fase all'oscillazione. Infatti, riagganciandosi alle considerazioni del paragrafo 2.2.1 e alla figura (2.2), se  $\omega_{inj} = \omega_0$  la rete risonante continua a produrre un segnale alla pulsazione di risonanza,  $I_{osc}$  e  $I_{inj}$  sono in fase tra loro e con la tensione  $V_{out}$ .

Invece, ai bordi del *lock range*, ossia per  $|\omega_0 - \omega_{inj}| = \omega_L$ , risulta  $G_d = G_L$ , come se non fosse presente l'iniezione del riferimento. In questo caso, infatti, il segnale iniettato è sfasato di  $90^\circ$  rispetto alla tensione d'uscita. Si ricorda infatti che la dimensione del *lock range* è stata ricavata nella (2.8) considerando proprio il massimo sfasamento ottenibile. E' comunque possibile effettuare uno studio analitico del valore della transconduttanza al variare della pulsazione di iniezione, di cui se ne riporta l'andamento grafico in figura 2.5.

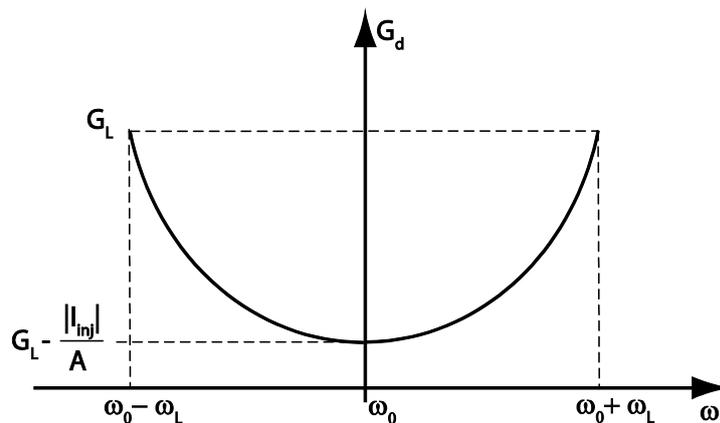


Figura 2.5: Andamento della transconduttanza differenziale in funzione della pulsazione, all'interno del *lock range*

## 2.3 Rumore di fase

### 2.3.1 Concetti fondamentali

In un oscillatore ideale l'uscita è perfettamente periodica, tale da potersi scrivere nella forma seguente:

$$x(t) = A \cos \omega_c t \tag{2.29}$$

Il suo spettro presenta un tono alla frequenza  $\omega_c$ , come in figura 2.7(a); gli attraversamenti dello zero della sinusoide in uscita avvengono a multipli interi del periodo  $T_c = 2\pi/\omega_c$ . Il rumore di fase agisce proprio su tali attraversamenti, ritardandoli o anticipandoli. La modellizzazione del rumore consiste nel rappresentare questi scostamenti temporali tramite la funzione  $\phi_n(t)$ , ossia una piccola variazione casuale che altera gli attraversamenti ideali. Il segnale di uscita diventa esprimibile, sulla base di queste considerazioni, come

$$x(t) = A \cos[\omega_c t + \phi_n(t)] \tag{2.30}$$

E' possibile visualizzare gli andamenti dell'uscita ideale e dell'uscita affetta da rumore di fase, rispettivamente in figura 2.6(a) e 2.6(b) .

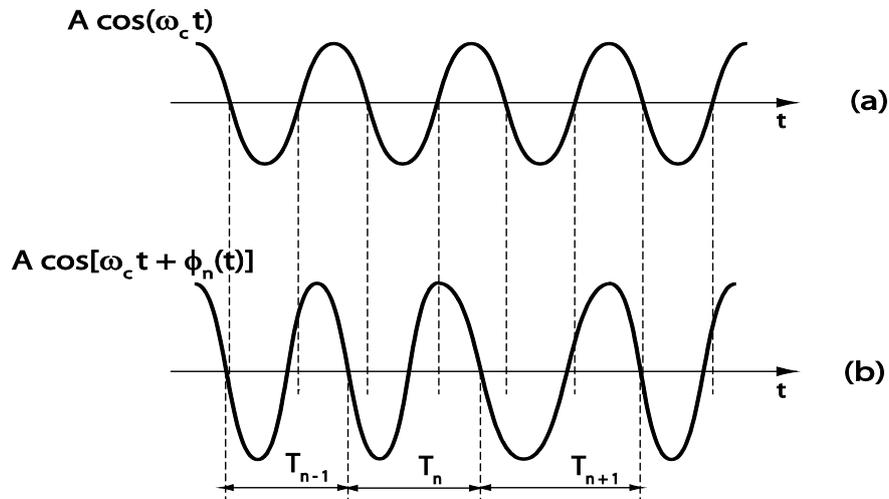


Figura 2.6: Andamenti temporali dell'uscita ideale (a) e affetta da rumore di fase (b)

In frequenza questo si traduce nell'allargamento dello spettro attorno alla pulsazione  $\omega_c$  , come in figura 2.7(b). La quantificazione dello spettro avviene tramite la valutazione della potenza di rumore contenuta in un'unità di banda ad un offset dalla portante pari a  $\Delta f$ , il tutto normalizzato per la potenza della portante. Il rapporto si esprime in *dbc/Hz* ("decibel rispetto alla portante"), proprio per indicarne il confronto.

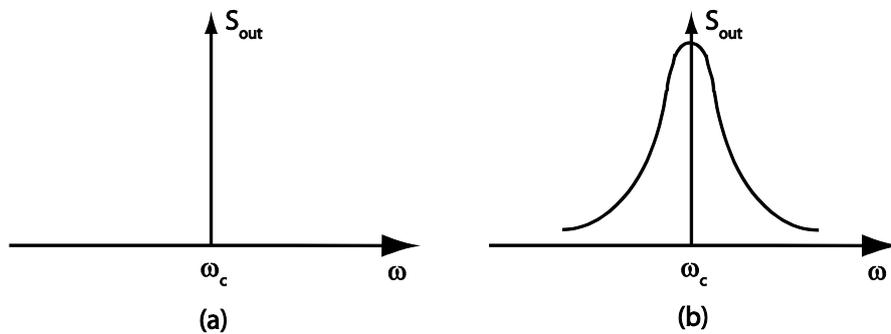


Figura 2.7: Spettri della tensione d'uscita ideale (a) e affetta da rumore di fase (b)

### 2.3.2 Effetto dell'*injection locking* sul rumore di fase

L'*injection locking* di un oscillatore permette di abbattimento del rumore di fase in uscita; in questo modo l'oscillatore può agire da sorgente *low noise*. Dal punto di vista temporale, l'iniezione del riferimento consiste nella sostituzione periodica degli attraversamenti a zero del segnale d'uscita, il *jitter* accumulato ad ogni ciclo viene pertanto ridotto. Infatti, considerando un oscillatore in *free running* privo di rumore, l'intervallo temporale tra gli attraversamenti a zero dell'uscita è costante. La presenza di rumore, invece, causa fluttuazioni di fase che danno luogo ad errori negli istanti di transizione. L'incertezza di tali istanti è descritta statisticamente ed è nota come *jitter* assoluto. Come visibile dalla figura 2.8, le fluttuazioni di fase

si ripercuotono, inalterate, ciascuna su tutti i successivi attraversamenti: si assiste pertanto all'accumulo indefinito del rumore di fase. Dal punto di vista del rumore di fase l'oscillatore agisce proprio da integratore, ad esso è associata una funzione di trasferimento con un polo nell'origine, del tipo  $1/j\omega$ . Considerando ora lo stesso oscillatore ma provvisto dell'iniezione del segnale di riferimento, si nota come gli attraversamenti a zero dell'uscita siano sostituiti da quest'ultimo. Questo è tanto più efficace quanto più la frequenza di iniezione si avvicina alla frequenza di *free-running*, ovvero per  $\omega_0 = \omega_{inj}$  (figura 2.9(a)), mentre il contributo del rumore di fase è ridotto, ma in misura minore, se l'iniezione è ai bordi del *lock range*, ossia per  $\omega_{inj} = \omega_0 \pm \Delta\omega_m$  (figura 2.9(b)). Si ricava infatti facilmente dalla (2.15), che lo sfasamento effettivamente esistente, in condizione di aggancio, tra il riferimento e il segnale d'uscita, è nullo alla pulsazione di *free running*, cresce più ci si allontana da essa, ed è massimo ai bordi dell'iniezione, in quanto la funzione arcoseno è notoriamente monotona strettamente crescente.



Figura 2.8: Accumulo del rumore di fase in assenza di iniezione del riferimento

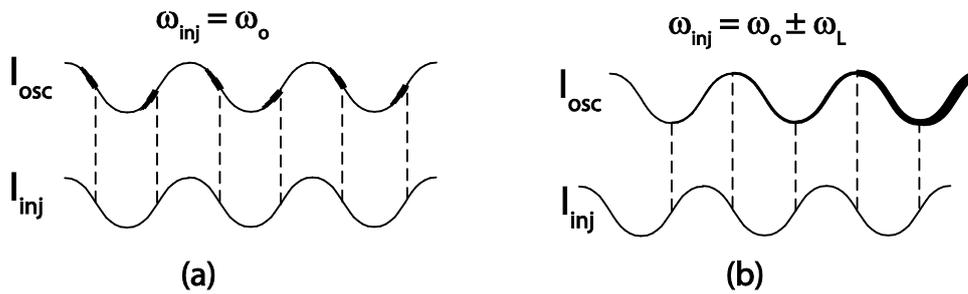


Figura 2.9: Uscita con iniezione del segnale di riferimento al centro del *lock range* (a) e agli estremi (b)

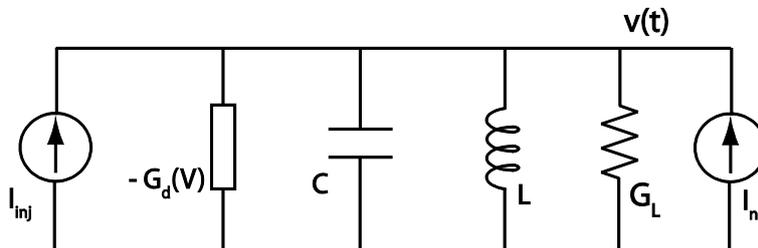


Figura 2.10: Modello equivalente per lo studio del rumore di fase

Riprendendo il modello di figura 2.4 e l'identità (2.28), è possibile stimare la riduzione del rumore di fase in un oscillatore avente come segnale di riferimento una sorgente priva di rumore. In figura 1.9 è

rappresentato il modello circuitale di rumore dell'oscillatore. Entrambe le sorgenti di rumore, il contributo della rete risonante e quello dovuto ai transistori della coppia incrociata, possono essere racchiuse in un unico generatore di corrente di rumore  $I_n$ . Considerando dapprima l'oscillatore privo di iniezione, la conduttanza della coppia incrociata elide la conduttanza di carico (sono opposte in segno) e pertanto il generatore vede esclusivamente gli elementi della rete risonante. Nei dintorni della pulsazione di risonanza  $\omega_0$ , il trasferimento del generatore è pari a

$$\left| \frac{V}{I_n}(j\omega_n) \right| \approx \frac{1}{|2C\Delta\omega|}$$

(2.31)

con  $\Delta\omega = \omega_n - \omega_0$ . Considerando infatti esclusivamente la rete risonante composta dagli elementi passivi reattivi, quindi induttanza e capacità, è possibile ricavare l'espressione dell'ammettenza equivalente alla rete stessa nei dintorni della pulsazione di risonanza. Questa è di fatto costituita da un condensatore reattanza pari a due volte il valore della capacità di partenza ma considerata alla pulsazione pari allo scostamento della pulsazione in esame dalla risonanza, indicata con  $\Delta\omega$ . Di seguito sono riportati i passaggi necessari alla giustificazione del risultato: assumendo

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

(2.32)

con  $\omega_0$  pulsazione di risonanza, si ha

$$\begin{aligned} Y_R &= j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \\ &= \frac{j}{\omega L} (\omega^2 LC - 1) = \\ &= \frac{j}{\omega L} (\omega_0^2 LC + \Delta\omega^2 LC + 2\omega_0 \Delta\omega LC - 1) \end{aligned}$$

(2.33)

Nella è possibile semplificare il primo e l'ultimo termine, in quanto effettivamente coincidenti: si rammenta che in una rete risonante di questo tipo la pulsazione di risonanza è pari a  $1/\sqrt{LC}$ . Si ottiene pertanto

$$\begin{aligned} Y_R &= \frac{j}{\omega L} (\Delta\omega^2 LC + 2\omega_0 \Delta\omega LC) = \\ &= \frac{jC}{\omega_0} (2\omega_0 \Delta\omega + \Delta\omega^2) \end{aligned}$$

(2.34)

Il secondo termine della precedente può essere omissivo in quanto, per le approssimazioni considerate ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ), risulta trascurabile rispetto al primo termine, quindi

$$Y_R = \frac{jC}{\omega_0} 2\omega_0 \Delta\omega = j2C\Delta\omega$$

(2.35)

che coincide con quanto detto prima. La rete equivalente può essere sostituita con quella di figura 2.11.

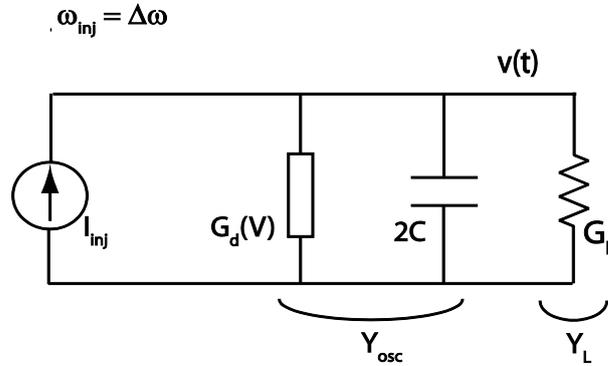


Figura 2.11: Circuito equivalente a piccoli scostamenti dalla risonanza

La (2.31) indica che la corrente di rumore dell'oscillatore si inietta in un'impedenza tanto maggiore quanto più  $\omega_n$  si avvicina a  $\omega_0$ . E' comunque possibile mostrare che, in corrispondenza e nei dintorni della pulsazione di risonanza, ovvero quella di *free running*, la funzione di trasferimento del rumore non diverge ma assume caratteristica Lorentziana e quindi un valore finito.

Ora, supponendo di applicare l'iniezione del riferimento al centro del *lock range*, quindi  $\omega_0 = \omega_{inj}$ , l'uguaglianza (2.28) prevede che l'ammettenza totale della rete aumenti sino a  $G_L - G_d = \frac{|I_{inj}|}{A}$ . In altre parole, l'impedenza offerta dalla rete e vista dal segnale di corrente di rumore passa dal valore infinito del caso senza iniezione, al valore  $A/|I_{inj}|$  del caso con iniezione. Man mano che ci si sposta dalla frequenza di iniezione, il trasferimento  $A/|I_{inj}|$  continua a dominare fino a quando il rumore in uscita del caso *injection locking* si raccorda a quello del caso *free running* (per frequenze molto distanti dalla pulsazione di *free running* si perde inevitabilmente la condizione di aggancio e pertanto il rumore coincide con il caso *free running*). Per determinare la pulsazione di raccordo, è sufficiente uguagliare la funzione di trasferimento della (2.31) con il trasferimento  $A/|I_{inj}|$ , e considerando che  $A \approx |I_{osc}|/G_L$ , e che  $C_1/G_L = Q/\omega_0$ , si ottiene

$$|\tilde{\omega}_n - \omega_0| = \frac{\omega_0 |I_{inj}|}{2Q |I_{osc}|}$$

(2.36)

Lo spettro di rumore dell'oscillatore *injection locked* si raccorda allo spettro *free running* alla pulsazione  $\tilde{\omega}_n$  che coincide pertanto ad un offset dalla pulsazione di *free running* pari al *lock range*. I risultati di queste considerazioni sono sinteticamente visibili negli spettri di rumore rappresentati in figura 2.12.

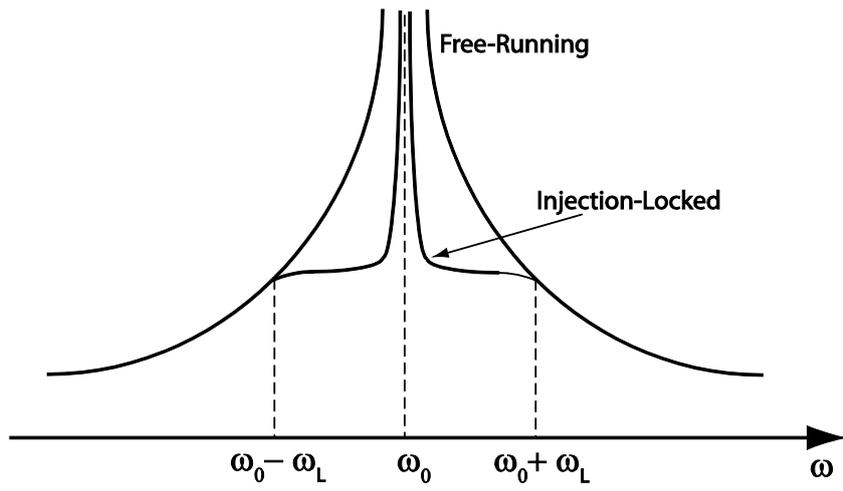


Figura 2.12: Spettri di rumore dell'oscillatore *free running* e *injection locked*

## 3 OSCILLATORI INJECTION LOCKED CON SEGNALI IMPULSATI

---

### INDICE

---

3.1	Introduzione	23
3.2	Studio analitico	24
3.2.1	Lock range	24
3.2.2	Implementazione circuitale	28
3.2.3	Rumore di fase	30
3.3	Simulazioni di laboratorio	32
3.3.1	PRC reale e lock range	32
3.3.2	Rumore di fase	34

---

### 3.1 Introduzione

L'*injection locking* rappresenta una configurazione circuitale interessante in quanto consente di ottenere notevoli prestazioni nell'ambito di moltiplicatori di frequenza a basso rumore. Questa tecnica può essere combinata all'inserimento di tali circuiti in anelli ad aggancio di fase (PLL) al fine di ottenere moltiplicatori a basso rumore e bassa potenza [9]-[10]. Nel capitolo 2 è stata analizzata la teoria generale che ha portato alla scrittura della formula della banda di aggancio ed è stato ricavato come l'*injection locking* possa agire positivamente sul rumore di fase dell'oscillatore, abbattendo il valore ottenibile in assenza di iniezione.

Una possibile implementazione circuitale di oscillatore *injection locked* è il PILO (*Pulse Injection-Locked Oscillator*): un oscillatore in cui periodicamente viene applicato un segnale di riferimento ai terminali di uscita; in condizione di aggancio l'uscita si porta alla frequenza del riferimento consentendo l'attenuazione del rumore di fase, come si vedrà in seguito.

Nel presente capitolo si partirà da una rete *LC* parallelo che funge da risonatore; ad essa è applicato un interruttore che ne cortocircuita periodicamente i due terminali. Si perverrà alla costruzione di una particolare funzione, detta *Responsività*, che sarà utilizzata per la determinazione del *lock range*. Si chiarirà infatti il motivo per cui non è possibile applicare i risultati ricavati nel caso generale del capitolo 1, ovvero il caso del risonatore *LC* con iniezione di segnale periodico, ma sarà necessario modificare l'analisi. Infine si fornirà un'implementazione circuitale e lo studio analitico vero e proprio, con le simulazioni volte a dare un riscontro alle previsioni.

## 3.2 Studio analitico

### 3.2.1 Lock range

La comodità di impiego di interruttori in tecnologia CMOS porta a pensare ad un nuovo tipo di oscillatore, costituito da una rete risonante e da un interruttore posto in parallelo ad essa, come in figura 3.1. L'interruttore viene chiuso impulsivamente (da qui la denominazione di oscillatore impulsato) annullando la differenza di fase del segnale ai capi della rete risonante e ripristinando la fase corretta.

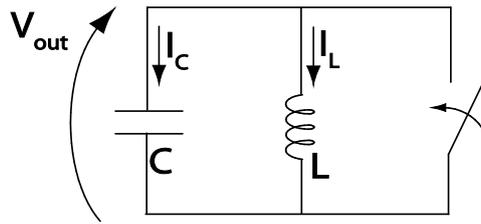


Figura 3.1: Schema elettrico di un generico oscillatore impulsato

E' immediato notare come le considerazioni del precedente capitolo non siano applicabili al caso proposto. Infatti esse prevedono l'applicazione ai capi della rete di un segnale di corrente sinusoidale, grazie al quale è stato possibile costruire il diagramma di fase con cui si è giunti all'espressione del *lock range*. Anche nel caso attuale si è comunque di fronte ad un segnale di corrente, che scorre da un capo all'altro della rete attraverso il cortocircuito, tuttavia esso è di natura impulsiva.

L'oscillatore può essere analizzato in *free running*. Il segnale d'uscita in tale condizione, sprovvisto cioè del segnale di iniezione, può scriversi come

$$v_{out}(t) = p(\omega_0 t) \tag{3.1}$$

in cui  $p$  rappresenta la forma di un generico segnale periodico avente pulsazione  $\omega_0$  e fase pari a  $\omega_0 t$ .

Si consideri ora anche l'interruttore di figura, posto in parallelo alla rete risonante. Sia esso comandato dal segnale

$$v_{inj}(t) = s(\omega_{inj} t + \theta_{inj}) \tag{3.2}$$

dove  $s$  rappresenta un generico segnale avente fase istantanea  $\omega_{inj} t + \theta_{inj}$  e pulsazione pari a  $\omega_{inj}$ . In questo caso si è scelto un segnale impulsivo alla frequenza  $f_{inj}$ , ovvero sia una successione infinita di segnali a  $\delta$  di Dirac.

E' possibile esprimere lo sfasamento del segnale di uscita rispetto al segnale d'iniezione; è facile verificare, considerando banalmente una circonferenza goniometrica e l'angolo al centro spazzato dal raggio alle due pulsazioni in esame, che tale sfasamento è pari a

$$\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_s = -\Delta\omega T_{inj} \quad (3.3)$$

con  $\Delta\omega = \omega_{inj} - \omega_0$ .  $\Delta\omega$  rappresenta la differenza tra la frequenza del segnale d'iniezione e la pulsazione di risonanza della rete in *free running*.

Analizzando il circuito nel dominio del tempo, si nota che l'applicazione degli impulsi causano periodicamente il cortocircuito dei terminali d'uscita, imprimendo una considerevole perturbazione dell'oscillazione, relativamente all'ampiezza e alla fase del segnale in uscita. La perturbazione di ampiezza si smorza nel giro di qualche periodo, mentre la fase si mantiene, in prima approssimazione, costante anche nei periodi a seguire e pari allo sfasamento introdotto dalla perturbazione stessa.

La seguente uguaglianza descrive la risposta dell'oscillatore sottoposto all'iniezione del riferimento:

$$v_{PILLO}(t) = p[(\omega_0 + \Delta\omega)] = p[\omega_{lock}t + \theta(t)] \quad (3.4)$$

in cui  $\theta(t)$  rappresenta la deviazione di fase dal valore desiderato  $\omega_{lock}t$ , cioè quello relativo al segnale iniettato (se  $\theta(t) = 0$  il riferimento e il segnale d'uscita sono esattamente in fase fra loro). Per lo studio della variazione di fase è stato ricavato l'effetto dell'impiego del singolo impulso su quest'ultima: dopo un periodo di iniezione, ossia a  $t + T_{inj}$ , si osserva lo sfasamento introdotto dalla perturbazione all'istante di tempo  $t$ . Si giunge così alla costruzione della funzione  $\gamma$ , detta responsività della fase, così definita:

$$\gamma(\theta(t) - \theta_{inj}) = \theta(t + T_{inj}) - \theta(t) \quad (3.5)$$

Tale funzione è stata introdotta in diversi contesti con nomi differenti, tra cui *Phase Domain Response (PDR)* [2] oppure *Phase Response Curve (PRC)* [3].

La costruzione di questa curva è relativamente semplice: prendendo i due segnali, quello di iniezione e quello dell'oscillatore in *free running*, si fa variare in sostanza l'istante di applicazione della perturbazione a intervalli discreti lungo il periodo del segnale  $p$ , e si ricava lo sfasamento a regime, che per quanto detto sopra corrisponde a quello istantaneo, tra il segnale d'uscita e quello imperturbato.

Durante l'applicazione di un impulso l'interruttore viene chiuso istantaneamente, cortocircuitando i due terminali della rete e quindi si annulla repentinamente il segnale differenziale. L'andamento della tensione da questo istante in poi è determinato dalla condizione imposta dall'induttore ed in particolare dalla continuità della corrente in esso circolante. E' possibile determinare il verso di tale corrente considerando l'andamento della derivata prima della tensione d'uscita, che rappresenta, a meno della costante pari al valore della capacità, la corrente che fluisce nel condensatore, secondo la nota relazione

$$I_C = C \frac{dV_{out}}{dt} \quad (3.6)$$

Durante tutto il fronte di salita della tensione d'uscita, questa derivata si mantiene positiva e di conseguenza la corrente che fluisce nell'induttore risulta negativa, relativamente alla convenzione dei segni stabiliti in figura 3.1. Quando l'interruttore viene chiuso, esso cortocircuita i terminali del condensatore

causando una brusca variazione del valore della derivata prima della tensione  $V_{out}$ , la quale torna al valore precedente la chiusura solo all'istante successivo alla riapertura dell'interruttore, poiché nel condensatore torna a fluire, per ovvi motivi di bilancio di Kirchhoff, la corrente fissata dall'induttore. Ciò si traduce, ai fini del valore della funzione  $\gamma$ , in due possibili situazioni:

1. Nell'ansa positiva, un ritardo pari alla distanza temporale tra l'istante di iniezione rispetto al precedente attraversamento dello zero della sinusoide sul fronte di salita (figura 3.2(a));
2. Nell'ansa negativa, un anticipo di fase pari alla frazione di periodo residua al successivo attraversamento (figura 3.2(b)).

Le stesse considerazioni sono ripetibili analizzando il fronte di discesa, caratterizzato da derivata e quindi corrente che fluisce nell'induttore entrambe negative. A ciò corrisponde:

3. Nell'ansa positiva un anticipo di fase pari al tempo residuo al successivo attraversamento a zero (figura 3.2(c))
4. Nell'ansa negativa un ritardo di fase equivalente all'intervallo di tempo che intercorre tra il precedente attraversamento a zero e l'iniezione stessa (figura 3.2(d)).

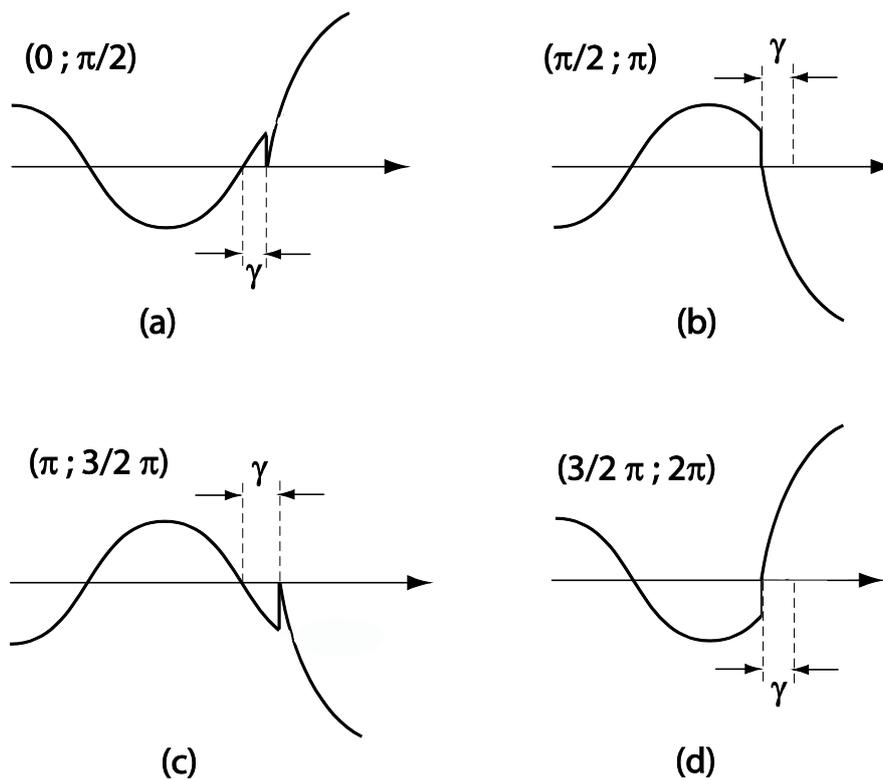


Figura 3.2: Effetto dell'iniezione del riferimento sulla tensione d'uscita (caso ideale)

E' possibile inoltre quotare i seguenti punti significativi, utili alla costruzione grafica della funzione:

1.  $\gamma(0) = 0$  : la perturbazione applicata in corrispondenza dell'attraversamento a zero sul fronte di salita non dà altera la fase del segnale;

2.  $\gamma(\pi/2) = \pm\pi/2$  : l'effetto della perturbazione è massimo poiché si assiste ad un inversione del segnale;
3.  $\gamma(\pi) = 0$  : non si ha alterazione di fase, come nel primo caso;
4.  $\gamma\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \pm\pi/2$  : inversione del segnale e quindi effetto massimo della perturbazione.

La funzione, rappresentata in figura 3.3, è periodica con periodo  $T = \pi$ , è continua e lineare sul periodo, la pendenza dei tratti è unitaria: lo sfasamento introdotto è sempre equivalente allo sfasamento temporale tra l'iniezione e l'attraversamento a zero precedente, o successivo. Di questa funzione è importante notare, innanzitutto, la simmetria rispetto all'asse temporale, che si radurrà, come si vedrà in seguito, nella simmetria del *lock range* rispetto alla frequenza dell'oscillatore *free running*.

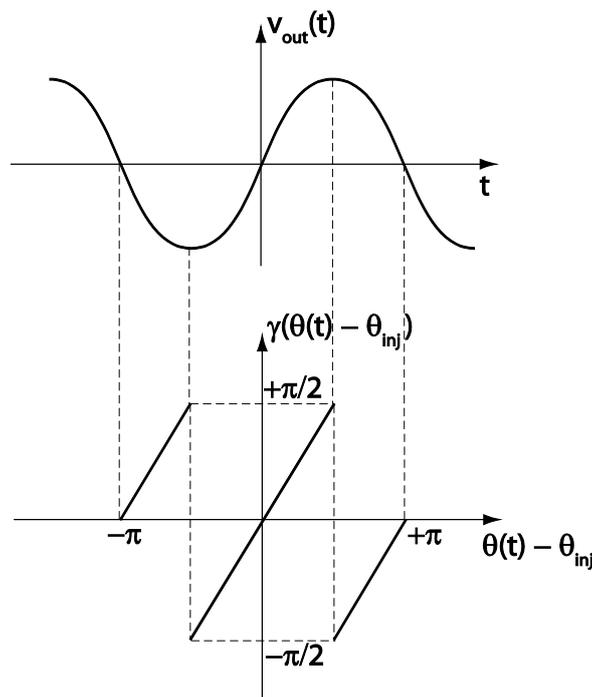


Figura 3.3: Funzione  $\gamma$  ideale

Proseguendo l'analisi condotta fino ad ora e discretizzando la fase del segnale d'uscita (considerando quindi  $\theta(t_i)$  come la variabile fase all'istante corrispondente alla  $i$ -esima iniezione) si può scrivere

$$\theta(t_{k+1}) = \theta(t_k) + \gamma(\theta(t_k) - \theta_{inj}) - \Delta\omega T_{inj} \quad (3.7)$$

Nell'uguaglianza precedente si è tenuto conto sia del ritardo di fase accumulato dal PILO in *free running*, rispetto al periodo di riferimento, come mostra la (3.3), sia del ritardo introdotto dalla perturbazione applicata e rappresentato dalla funzione responsività appena studiata. L'uscita può considerarsi in condizione di aggancio rispetto al segnale di riferimento se si ripete costantemente rispetto ad esso, cioè se la fase si mantiene invariata ad ogni istante di iniezione. In formule ciò si traduce in:

$$\theta(t_k) = \theta(t_{k+1}) = \theta_{ss} \quad (3.8)$$

Imponendo questa condizione nell'uguaglianza precedente si ottiene:

$$\gamma(\theta_{ss} - \theta_{inj}) = \Delta\omega T_{inj} \quad (3.9)$$

Questo fornisce i due risultati fondamentali dell'analisi condotta fino ad ora:

1. l'iniezione è efficace solo qualora la retta  $\Delta\omega T_{inj}$  intersechi la funzione  $\gamma$
2. dall'intersezione fra la retta e la curva si può ricavare lo sfasamento del segnale d'uscita rispetto al segnale d'iniezione

Il primo risultato permette di determinare l'ampiezza del *lock range*  $\Delta\omega$ , che è legata al codominio della funzione  $\gamma$ : essendo questo definito da  $-\frac{\pi}{2}$  a  $+\frac{\pi}{2}$  si ricava

$$-\frac{\pi}{2} \leq \Delta\omega T_{inj} \leq +\frac{\pi}{2} \quad (3.10)$$

da cui

$$-\frac{\pi}{2T_{inj}} \leq \Delta\omega \leq +\frac{\pi}{2T_{inj}} \quad (3.11)$$

In definitiva il *lock range* bilatero (espresso in Hertz) è pari a

$$LR = \frac{\pi}{T_{inj}} \frac{1}{2\pi} = \frac{f_{inj}}{2} [Hz] \quad (3.12)$$

Teoricamente esso è pari, quindi, a metà della frequenza di iniezione. Il risultato è molto differente da quello che si è ottenuto nella teoria generale del capitolo 2. In particolare è sparita la dipendenza dal fattore di qualità della rete risonante. Si ribadisce a tal proposito che la nuova tecnica consiste nel fornire periodicamente la condizione di fase del segnale di riferimento al segnale d'uscita e il filtraggio operato dalla rete risonante non svolge alcun ruolo.

E' bene puntualizzare che la condizione di aggancio è verificata solo se la pendenza della curva in corrispondenza all'intersezione è negativa. La relazione (3.7) dimostra questa affermazione: dove la curva presenta pendenza negativa, un'iniziale perturbazione che determina incremento di  $\theta(t_k)$  rispetto al valore di aggancio  $\theta_{ss}$  determina una riduzione di  $\gamma$ , presente al secondo membro. I due effetti, al primo ordine, tendono a compensarsi, mantenendo l'aggancio di fase.

### 3.2.2 Implementazione circuitale

Le perdite della rete risonante devono essere compensate, come ormai è noto, da elementi attivi. La scelta tipica consiste in una coppia di transistori incrociati che caricano il circuito con un'impedenza negativa. Figura 3.4 rappresenta lo schema elettrico.

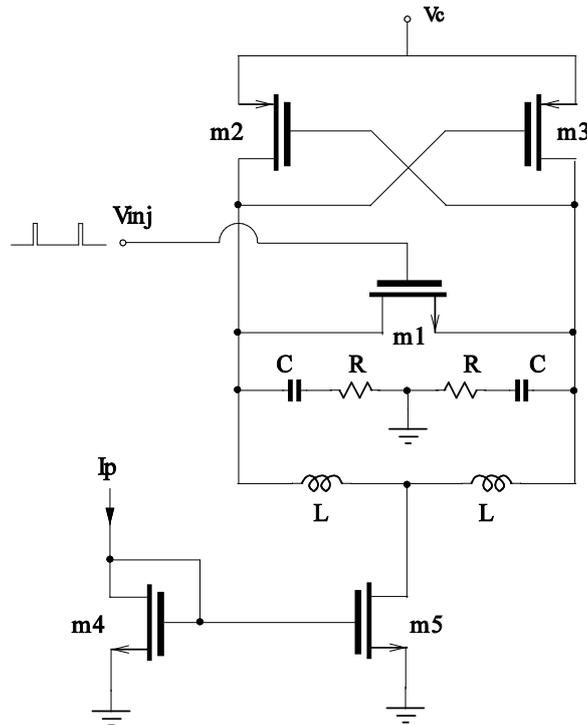


Figura 3.4: Schema circuitale del PILO (*Pulse Injection Locked Oscillator*)

I transistori dello specchio  $M_4$  ed  $M_5$  sono inseriti per polarizzare lo stadio;  $M_1$  è pilotato dal segnale  $v_{inj}$ , visto all'inizio del paragrafo 3.2.1. Il transistoro  $M_1$  è in grado di generare armoniche multiple della frequenza del segnale ad esso applicato, oppure di ampliarne l'ampiezza nel caso il riferimento abbia già uno spettro più o meno vasto. E' compito della rete risonante filtrare la componente localizzata nei dintorni della pulsazione  $\omega_0$ . In questo modo il circuito è utilizzato come moltiplicatore di frequenze con l'uscita che viene agganciata ad una frequenza multipla della frequenza del riferimento. L'analisi svolta nel precedente paragrafo resta comunque valida purché si sostituisca  $\omega_{inj}$  con  $N\omega_{inj}$ . Si modifica in particolare il *lock range* riferito all'ingresso, che risulta pari a quello in uscita diviso per il fattore di moltiplicazione della rete.

$$LR_{in} = \frac{f_{inj}}{2N} [Hz]$$

(3.13)

Nel caso in esame il segnale di riferimento è composto dalla ripetizione di impulsi a frequenza  $f_{inj}$  e area  $A$  (dipendente in realtà dalla durata e dall'ampiezza del tipo di segnale utilizzato), ovvero un treno di Dirac. Questo è esprimibile, nel dominio del tempo, come

$$v_{inj}(t) = A \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT)$$

(3.14)

Ed è rappresentato in figura 3.5(a).

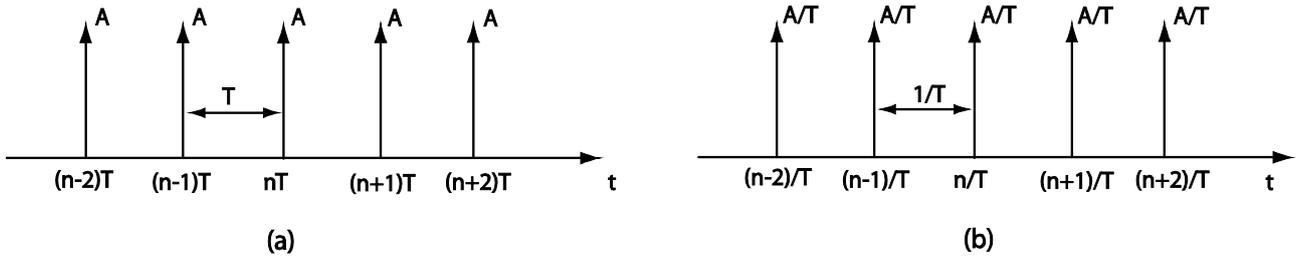


Figura 3.5: Segnale d'iniezione nel dominio del tempo (a) e suo spettro (b)

Il suo spettro, calcolato tramite trasformata di Fourier, è riportato qui di seguito:

$$X(f) = \frac{A}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta\left(f - k \frac{1}{T}\right) \quad (3.15)$$

ovvero consiste anch'esso nella ripetizione infinita di impulsi a delta di Dirac di area  $A/T$ , aventi spaziatura pari all'inverso della spaziatura temporale, come si può notare in figura 3.5(b). E' chiaro, in questo caso, che il segnale presenta, di per sé, un contenuto di armoniche molto ampio (idealmente infinito), che viene ulteriormente ampliato dalla generazione armonica del componente non lineare. Nell'appendice A è svolto uno studio più dettagliato del fenomeno.

### 3.2.3 Rumore di fase

Nel capitolo 2 è stato analizzato in generale il rumore di fase all'interno di un generico oscillatore *injection locked*. Esso comporta l'alterazione degli attraversamenti a zero del segnale all'uscita dell'oscillatore. Analiticamente ciò è quantificabile dalla funzione  $\phi_n(t)$ , la quale modifica l'uscita in

$$v_{out}(t) = p[\omega_0 t + \phi_n(t)] \quad (3.16)$$

e tiene conto, appunto, delle variazioni di fase indotto dalle sorgenti interne di rumore. Gli effetti di tutte queste sorgenti possono essere racchiusi in un unico generatore di rumore. La funzione  $\phi_n(t)$  è data dall'integrazione temporale di tale sorgenti [4]-[5]. In simboli

$$\phi_n(t) = \omega_0 \int_{-\infty}^t n_{eq}(\tau) d\tau = \omega_0 \int_{-\infty}^t [n_w(\tau) + n_f(\tau)] d\tau \quad (3.17)$$

Come si può notare la sorgente è stata modellizzata tramite i due contributi di rumore bianco complessivo  $n_w(\tau)$ , il quale contribuisce con la sua Densità Spettrale di Potenza (PSD)

$$S_w(f) = A_w$$

(3.18)

costante in frequenza, e il rumore *flicker* complessivo  $n_f(\tau)$ , avente PSD pari a

$$S_f(f) = \frac{A_f}{f}$$

(3.19)

ovvero di entità inversamente proporzionale alla frequenza.

Scrivendo la (3.17) nel dominio delle frequenze, applicando cioè una trasformazione di Fourier, si giunge così all'espressione della PSD dell'oscillatore *free running*:

$$S_{\phi_n}(f) = f_0^2 \left( \frac{A_w}{f^2} + \frac{A_f}{f^3} \right)$$

(3.20)

I valori  $A_w$  e  $A_f$  sono caratteristici di ogni singolo circuito poiché ne rappresentano il rumore in uscita. Per ricavarne il valore è pertanto indispensabile effettuare una simulazione del circuito, tramite opportuni strumenti.

Il rumore non può che avere, ovviamente, ragguardevole impatto sulla fase dell'uscita,  $\theta(t)$ . E' possibile ricavare come lo scostamento dal valore steady state  $\theta_{ss}$  si manifesta per tutti i periodi di iniezione. E' sufficiente, a partire dalla (3.7), modificare l'argomento della funzione  $\gamma$  e sommare il contributo del rumore accumulato fra due istanti di iniezione successivi

$$\phi(t_{k+1}) = \phi(t_k) + \gamma(\theta_{ss} + \phi(t_k) - \theta_{inj}) - \Delta\omega T_{inj} + \omega_0 \int_{t_k}^{t_{k+1}} n_{eq}(\tau) d\tau$$

(3.21)

Questa uguaglianza fornisce l'evoluzione temporale della variabile  $\phi$  in corrispondenza degli istanti  $t_i$ .

Il rumore di fase all'uscita dell'oscillatore provvisto di iniezione del riferimento è dato dalla somma di due contributi [6]:

1. il contributo del rumore di fase dell'oscillatore *free running* direttamente trasferito in uscita,  $S_{\phi}^D(f)$
2. il contributo dello spettro ripiegato (sottoposto ad operazione di *folding*), dovuto cioè al sottocampionamento del rumore effettuato dal treno di impulsi,  $S_{\phi}^F(f)$

Quindi

$$S_{\phi}(f) = S_{\phi}^D(f) + S_{\phi}^F(f)$$

(3.22)

con

$$S_{\phi}^D(f) = S_{\phi_n}(f) |1 - T(f)|^2$$

(3.23)

$$S_{\phi}^F(f) = \sum_{k, k \neq 0} S_{\phi_n} \left( f - \frac{k}{T_{inj}} \right) |T(f)|^2$$

(3.24)

in cui  $T(f)$  è una funzione che dipende dal periodo del segnale d'iniezione  $T_{inj}$  e dal parametro  $\beta$  (il valore opposto in segno alla pendenza della curva  $\gamma$  in corrispondenza dell'intersezione con la retta  $\Delta\omega T_{inj}$ )[6].

Per comprendere come varia la densità spettrale in funzione della frequenza è utile valutarla per frequenze molto piccole, o comunque al di sotto della frequenza d'iniezione, e per frequenze al di sopra della frequenza di corner. Nel primo caso si ottiene

$$S_{\phi}^D(f) \approx \pi^2 N^2 \left( \frac{2}{\beta} - 1 \right)^2 \left( A_w + \frac{A_f}{f} \right)$$

(3.25)

$$S_{\phi}^F(f) \approx \pi^2 N^2 \frac{A_w}{3} + 2.4 T_0 N^3 A_f$$

(3.26)

Nel restante caso

$$\lim_{f \rightarrow 0} S_{\phi}(f) \approx \pi^2 N^2 \left[ \left( \frac{2}{\beta} - 1 \right)^2 + \frac{1}{3} \right] A_w$$

(3.27)

L'ultima relazione fornisce i parametri che determinano il livello di rumore: il valore delle sorgenti interne di rumore  $A_w$ , il parametro  $\beta$  caratteristico del PILO e il fattore di moltiplicazione  $N$ . A frequenze molto maggiori di  $f_{inj}$  si può analiticamente mostrare [6] che il contributo  $S_{\phi}^D(f)$  approssima molto bene il valore di *free-running*  $S_{\phi_n}(f)$ , come ci si può ben attendere considerando che si è perso l'aggancio di fase. Tuttavia non va dimenticato il contributo dello spettro ripiegato  $S_{\phi}^F(f)$ , che contribuisce con un *ripple* nello spettro di rumore in corrispondenza delle frequenze multiple della frequenza d'iniezione  $f_{inj}$ .

### 3.3 Simulazioni di laboratorio

#### 3.3.1 PRC reale e lock range

Le simulazioni di laboratorio sono effettuate per dare un riscontro a ciò che si è studiato. In particolare si vuole ricavare la funzione  $\gamma$ , l'ampiezza del *lock range*, e una simulazione del rumore di fase.

L'ampiezza del *lock range* può essere limitata, rispetto al valore teorico, dall'impossibilità di ottenere impulsi a  $\delta$  di Dirac, mentre è necessario ricorrere a delle approssimazioni, le quali impatteranno notevolmente sulla forma della funzione  $\gamma$ . Si è utilizzato un impulso trapezoidale, rappresentato in figura, avente durata  $50ps$ , tempo di salita e di discesa di  $20ps$  e ampiezza pari alla tensione di alimentazione disponibile, in questo caso  $1.2V$ . Solo il caso reale fornisce, d'altro canto, un metodo efficace al raggiungimento dell'aggancio in fase. Infatti, per quanto detto relativamente alla pendenza della curva, il

caso ideale non può fornire condizioni di aggancio stabili poiché la pendenza di  $\gamma$  è sempre positiva. Nel caso reale le discontinuità si attenuano e originano fronti a pendenza negativa, in corrispondenza dei quali è possibile raggiungere l'aggancio.

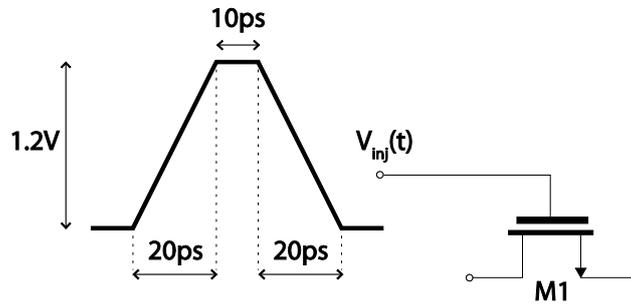


Figura 3.6: Rappresentazione dell'impulso utilizzato come segnale di riferimento

Inizialmente si è simulato il circuito di figura 3.4 in *free running*. L'ampiezza dell'oscillazione è pari a 1.9V, la pulsazione è di  $\omega_0 = 2\pi * 3.2 * 10^9 \text{ rad/s}$  (periodo  $T_0 = 312.7\text{ps}$ ). Di questo si è estratto il rumore di fase tramite analisi *pnoise*. È possibile, tramite corrispondenza con la (3.20), estrarre i parametri  $A_w = 8.7 * 10^{-20} \text{ rad}^2/\text{Hz}$  e  $A_f = 4.5 * 10^{-19} \text{ rad}^2$ . In seguito si è applicata l'iniezione del riferimento, come quello rappresentato in figura 3.6. Il valore di picco del segnale è impostato alla tensione di alimentazione, mentre l'intensità dell'iniezione è modulata variando la larghezza  $W_1$  del transistor d'iniezione  $M_1$ . Si sono usati in particolare i valori  $W_1 = 80 \mu\text{m}$ ,  $W_1 = 160 \mu\text{m}$ ,  $W_1 = 320 \mu\text{m}$ , con iniezione del riferimento ogni 10 periodi dell'uscita ( $N = 10$ ); i corrispondenti grafici della funzione  $\gamma$  sono riportati in figura 3.7. Da questa si evince che un transistor più largo comporta un *lock range* maggiore (oppure, equivalentemente, la funzione  $\gamma$  presenta un codominio più esteso), facilmente spiegabile tramite la minore resistenza offerta dal MOS d'iniezione e quindi una migliore approssimazione del cortocircuito della  $\delta$  di Dirac.

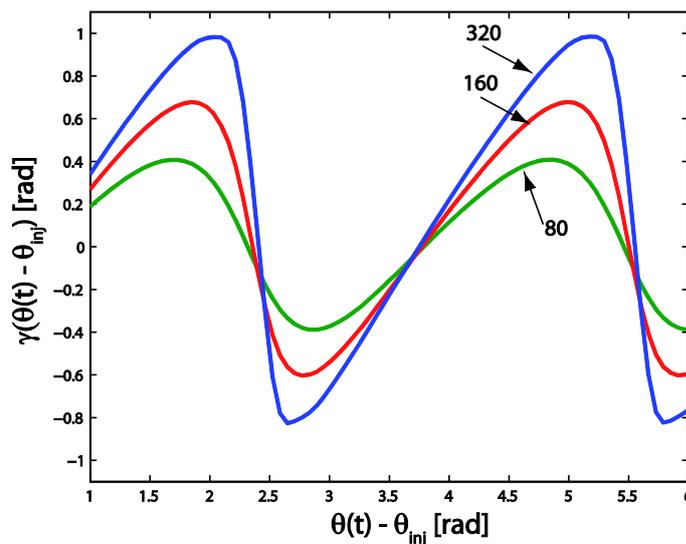


Figura 3.7: Andamento della funzione  $\gamma$  ricavato con l'impulso reale per tre diversi valori del rapporto di forma di M1

Nel caso  $W_1 = 80 \mu m$  la funzione responsività presenta massimo e minimo pari, rispettivamente, a  $0.4 rad$  e  $-0.4 rad$  circa. Il *lock range* risulta pari, secondo la, a  $\frac{0.4+0.4}{2\pi T_{inj}} = 40,7 MHz$ .

Con  $W_1 = 160 \mu m$  si ottiene, analogamente,  $LR = \frac{0.7+0.6}{2\pi T_{inj}} = 66MHz$  ; con  $W_1 = 320 \mu m$   $LR = \frac{1+0.8}{2\pi T_{inj}} = 94MHz$ . Per ottenere i rispettivi valori all'ingresso è sufficiente dividere per il fattore di moltiplicazione  $N$ .

Questi valori di *lock range* e quelli ricavati con altri valori del rapporto di forma sono riportati nel grafico di figura 3.8, detto "lingua di Arnold" [7].

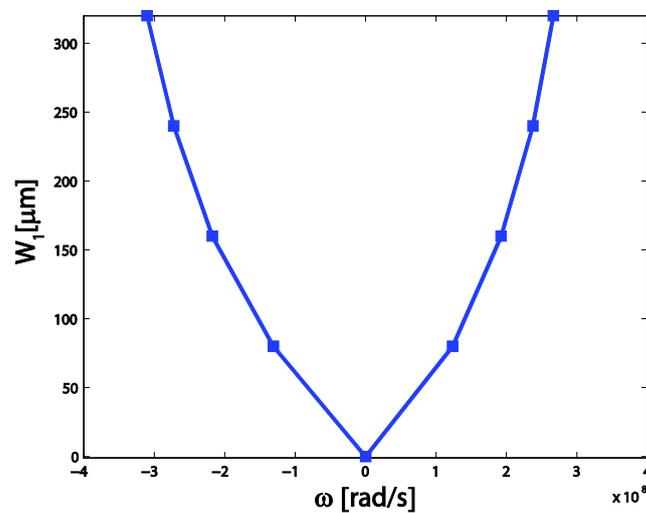


Figura 3.8: Andamento del *lock range* al variare della dimensione del transistor M1

### 3.3.2 Rumore di fase

La pendenza della curva  $\gamma$  valutata all'intersezione con la retta  $\Delta\omega T_{inj}$  fornisce il valore del parametro  $-\beta(\Delta\omega)$ , il quale è determinante nella costruzione dello spettro di rumore di fase. Figura 3.9 riporta i valori di  $-\beta$  in corrispondenza dei rapporti di forma  $W_1 = 80 \mu m$ ,  $W_1 = 160 \mu m$ ,  $W_1 = 320 \mu m$  e per diverse frequenze d'iniezione.

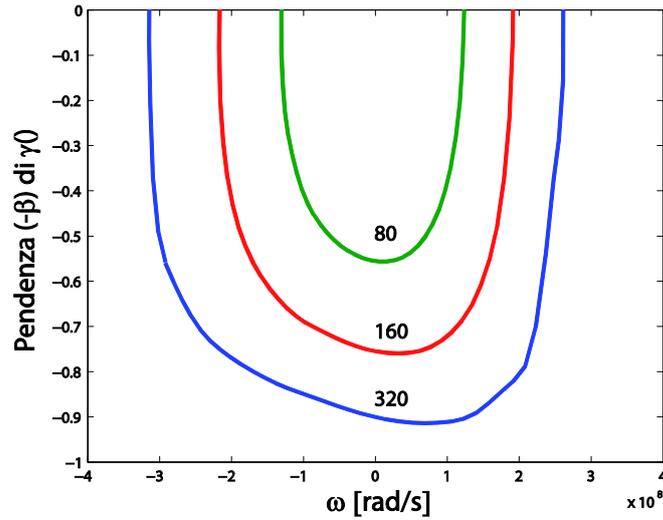


Figura 3. 11: Pendenza della funzione  $\gamma$  per i tre diversi valori del rapporto di forma del transistore d'iniezione

I valori di  $\beta$  sono poi sostituiti all'interno della funzione  $T(f)$  e a sua volta all'interno delle espressioni che forniscono il rumore di fase diretto  $S_{\phi}^D(f)$  e ripiegato  $S_{\phi}^F(f)$ , considerando fattore di moltiplicazione  $N = 10$ ,  $\Delta\omega \approx 0$  e  $W_1 = 320 \mu m$ . Si nota come il contributo di rumore diretto domina la potenza di rumore a basse frequenze mentre la componente ripiegata è responsabile di un *ripple* non trascurabile ad alte frequenze. La somma delle due componenti  $S_{\phi}(f)$  fornisce il rumore totale teorico, riportato in figura (3.10). Si nota come i risultati delle simulazioni (quadrantini) seguono piuttosto fedelmente il valore teorico calcolato dalla somma delle componenti diretta e ripiegata.

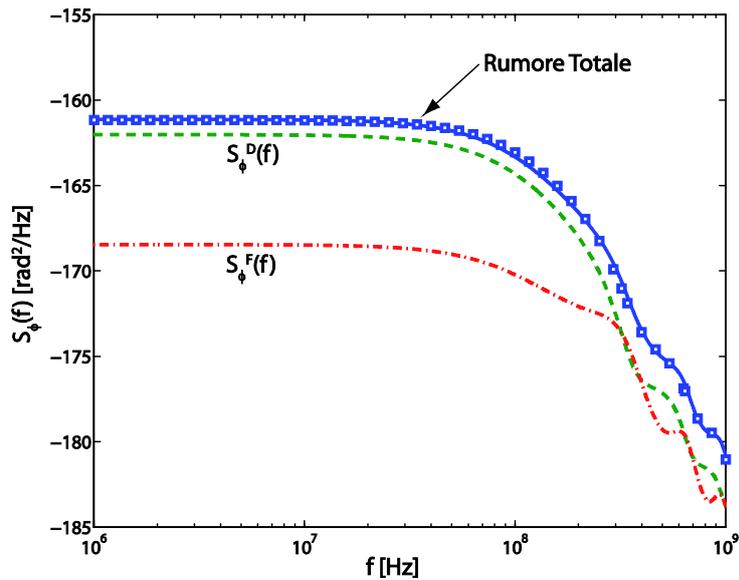


Figura 3. 12: Spettro di rumore, componenti diretta e ripiegata (valori teorici: linea tratteggiate  $S_{\phi}^D(f)$  e  $S_{\phi}^F(f)$ ); rumore totale teorico (in linea continua); risultato delle simulazioni (quadrantini)

## 4 OSCILLATORE INJECTION LOCKED IN SOTTOARMONICA

---

### INDICE

---

4.1	Introduzione	36
4.2	Dimensionamento dello stadio sprovvisto dell'iniezione	37
4.2.1	Definizione delle specifiche e primi dimensionamenti	37
4.2.2	Applicazione del criterio di Barkausen allo startup	39
4.3	Dimensionamento dello stadio con injection locking	42
4.3.1	Rete equivalente	42
4.3.2	Dimensionamento della rete a 800MHz	45

---

### 4.1 Introduzione

Fino ad ora si è analizzata una configurazione circuitale (il PILO), per cui non è possibile applicare la teoria dell'*injection locking* in quanto non prevede l'iniezione di un segnale di riferimento sinusoidale, ma l'iniezione consiste nel rifasamento dell'uscita con il segnale di riferimento (o con una armonica multipla). Teoricamente essa prevede un *lock range* pari a metà della frequenza di iniezione. Si ricorda che tale configurazione è stata introdotta per la facilità con cui è possibile ottenere interruttori in tecnologia CMOS.

In questo capitolo si prenderà in considerazione un'altra configurazione (Figura 4.1) per capire se essa introduca un vantaggio in termini di ampiezza della banda di aggancio. Nel caso ideale non è possibile applicare rigorosamente le considerazioni proposte nel capitolo 2, per analoghe ragioni a quelle del PILO. I transistori  $M_{1,L}$  e  $M_{1,R}$  di figura 4.1 sono infatti degli interruttori; i rami del circuito sono di conseguenza alternativamente spenti. Si ha a che fare con correnti che variano repentinamente, e non sinusoidalmente. Se invece si considerano situazioni in cui gli interruttori non sono ideali, per esse continuerà ad essere applicabile la teoria dell'*injection locking*, e con essa le dipendenze dal fattore di qualità e dal livello d'iniezione, poiché in tale caso si avrebbe iniezione paragonabile a quella di un generatore di corrente sinusoidale.

Nella topologia presentata si è optato per l'aggancio di fase alla quinta armonica del segnale d'ingresso; ciò significa che, dovendo disporre in uscita di un segnale sinusoidale alla frequenza di 80 GHz, l'ingresso avrà di conseguenza frequenze nell'intorno di 16 GHz. Per la generazione della quinta armonica si è fatto affidamento ad una coppia di transistori pilotati da un'onda quadra, la quale a sua volta potrebbe essere ricavata a partire da un'onda sinusoidale mediante squadratura ad opera di una serie di invertitori. Questi infatti riducono l'ampiezza della componente fondamentale all'ingresso ma al contempo incrementano l'ampiezza delle componenti dispari. Il meccanismo di amplificazione della quinta armonica consiste poi nella somma di due effetti: l'amplificazione lineare dello stadio differenziale e un contributo dovuto all'intermodulazione del terzo ordine tra la prima e la terza armonica. Nell'appendice A è analizzato

quantitativamente come il transistore MOS produca questo contributo. E' bene far presente che i due contributi sono approssimativamente in fase, pertanto si sommano nelle rispettive intensità; ciò rappresenta un concreto meccanismo di incremento dell'ampiezza del *lock range*. I transistori  $M_B$  hanno il compito di impostare parzialmente la corrente di polarizzazione dei transistori della coppia incrociata  $M_O$ .

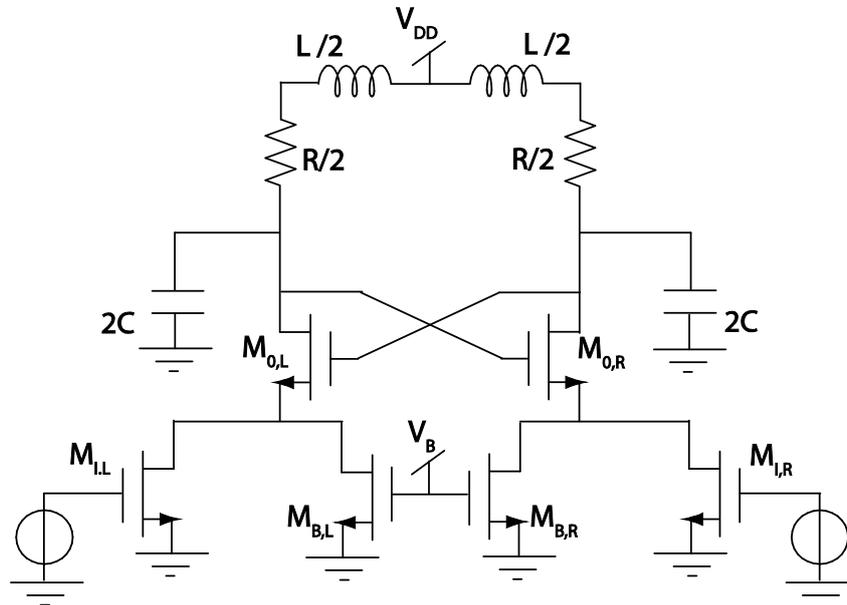


Figura 4.1: Schema circuitale di un oscillatore *injection locked*

Inizialmente lo studio sarà relativo all'oscillatore considerato privo di iniezione del riferimento, con uscita oscillante a  $80\text{ GHz}$ . In questo modo sarà possibile concentrarsi su alcune specifiche della rete, quali ampiezza dell'oscillazione e potenza dissipata. In seguito si provvederà all'implementazione dell'iniezione, che renderà necessaria, come si motiverà più avanti, la riduzione della frequenza di oscillazione a  $800\text{ Mhz}$ . Verranno proposte alcune possibilità di dimensionamento, per ognuna delle quali si fornirà il *lock range* ottenuto dalle simulazioni.

## 4.2 Dimensionamento dello stadio sprovvisto dell'iniezione

### 4.2.1 Definizione delle specifiche e primi dimensionamenti

Per prima cosa è stato dimensionato l'oscillatore sprovvisto dei transistori dell'iniezione, così come è rappresentato in figura 4.2(a), prendendo in considerazione:

1. La condizione sulla dissipazione di potenza: allo stadio è stato assegnato un consumo di potenza pari a  $25\text{ mW}$  dai quali è possibile ricavare la corrente di polarizzazione totale

$$I = \frac{P}{V} = \frac{25\text{ mW}}{1.2\text{ V}} = 20\text{ mA}$$

(4.1)

Dividendo per 2 si ottiene la corrente circolante in ciascun ramo, pari quindi a  $10\text{ mA}$ .

2. La condizione sull'ampiezza dell'oscillazione differenziale, per cui

$$A = \frac{4 I}{\pi 2} R_P$$

(4.2)

Imponendo un'ampiezza doppia rispetto alla tensione d'alimentazione si ottiene

$$R_P = \frac{\pi V_{DD}}{I} \approx \frac{3.14 * 1.2 V}{20 mA} = 190 \Omega$$

(4.3)

Dove con  $V_{DD}$  si è indicata la tensione di alimentazione e con  $R_P$  la resistenza equivalente parallelo della rete risonante. In pratica non è possibile raggiungere tale ampiezza in quanto comporterebbe un'oscillazione pari, sul singolo nodo d'uscita, alla tensione di alimentazione, ma la tensione  $V_{DS}$  dei transistori non si può annullare. In fase di simulazione si provvederà ad impostare correttamente i parametri per garantire un adeguato margine di tensione drain e source per tutti i transistori.

3. I transistori MOS di degenerazione, i quali sono polarizzati in zona triodo. Infatti i transistori della coppia incrociata devono portare una considerevole corrente di polarizzazione, pari a  $10 mA$ , come ricavato al punto 1. Per evitare di dover impiegare un rapporto di forma, e quindi occupazione d'area, eccessivi, si polarizzano con una tensione  $V_{GS}$  sostenuta. Di conseguenza ai MOS di degenerazione viene assegnata una  $V_{DS}$  piccola pari a  $200 mV$ ; questi sono pertanto polarizzati in zona ohmica e nel prosieguo dell'analisi saranno sostituiti da una resistenza, portando alla configurazione di figura 4.2(b). Il valore di tale resistenza è tale per cui

$$IR_B = 200 mV$$

(4.4)

Da cui

$$R_B = \frac{200 mV}{10 mA} = 20 \Omega$$

(4.5)

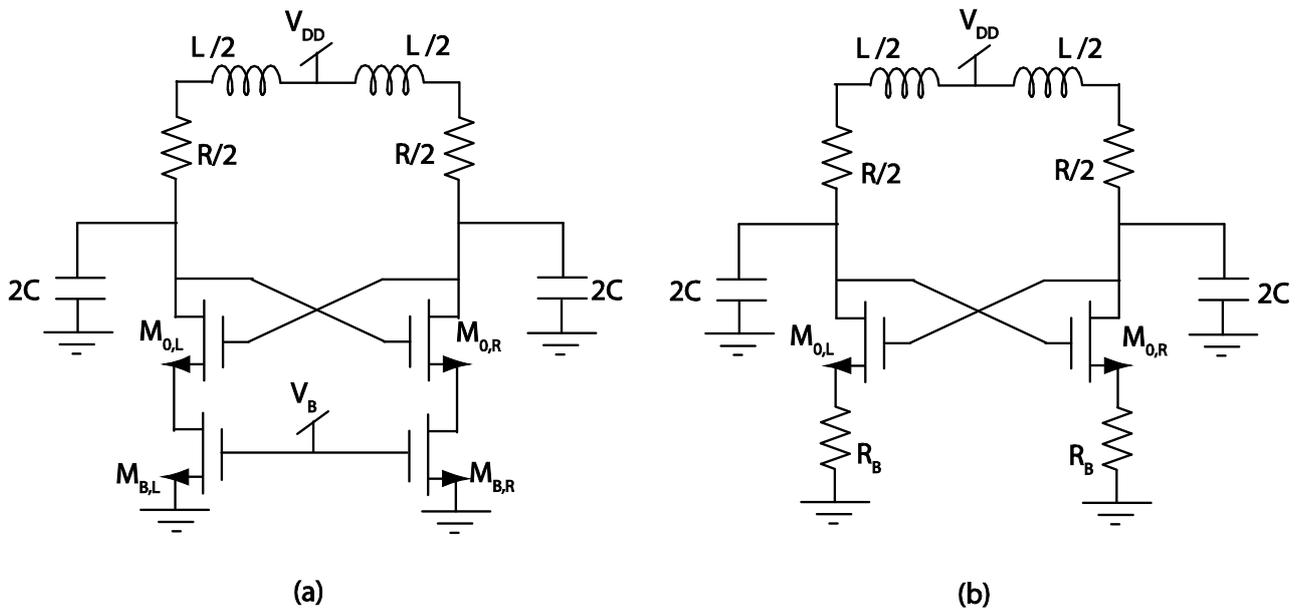


Figura 4.2: (a) Oscillatore sprovvisto dei transistori d'iniezione. (b) Sostituzione dei transistori ohmici con una resistenza

#### 4.2.2 Applicazione del criterio di Barkausen allo startup

Per poter utilizzare il criterio di Barkausen è necessario scrivere l'espressione del guadagno d'anello, calcolato eseguendo un taglio nel circuito a monte dei transistori della coppia incrociata, applicando un generatore di tensione e calcolando dunque la tensione che questi generano dopo la moltiplicazione per l'impedenza della rete risonante.

$$G_{loop}(s) = \frac{R_p}{\frac{2}{g_m} + 2R_B} \frac{\frac{s}{R_p C}}{s^2 + \frac{s}{R_p C} + \frac{1}{L_p C}}$$

(4.6)

e quindi

$$G_{loop}(j\omega) = \frac{R_p}{\frac{2}{g_m} + 2R_B} \frac{\frac{j\omega}{R_p C}}{\frac{j\omega}{R_p C} + \frac{1}{L_p C} - \omega^2}$$

(4.7)

dove con  $L_p$  si è indicata l'induttanza equivalente parallelo, pari dunque a

$$L_p = L \frac{1 + Q_s^2}{Q_s^2}$$

(4.8)

da cui si ricava

- La frequenza di oscillazione  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- La condizione di innesco dell'oscillazione:  $R_P > \frac{2}{g_m} + 2R$

Riscrivendo quest'ultima condizione si ottiene

$$g_m > \frac{2}{R_P - 2R}$$

(4.9)

ossia

$$\frac{2I}{V_{OV}} > \frac{2}{R_P - 2R}$$

(4.10)

Risolvendo la disuguaglianza è possibile ottenere una condizione sull'*overdrive* dei transistori della coppia incrociata (*cross-coupled transistors*):

$$V_{OV} < 1.5 V$$

(4.11)

Ciò significa che, per garantire l'innesco, è necessario polarizzare i transistori con una tensione  $V_{GS}$  inferiore a  $2.2V$  (considerando che la soglia alla tecnologia in uso è circa pari a  $0.7 V$ ). Il dimensionamento dei componenti eseguito nel precedente paragrafo è pertanto coerente con le ultime osservazioni, e fornisce un margine tanto maggiore quanto più si aumenta il rapporto di forma dei transistori incrociati.

Restano da dimensionare capacità  $C$ , induttanza  $L$  e fattore di qualità  $Q$  della rete risonante. Le seguenti relazioni forniscono i criteri di dimensionamento delle restanti grandezze:

$$\omega^2 = \frac{1}{L_P C}$$

(4.12)

$$Q_P = \frac{R_P}{\omega L_P}$$

(4.13)

Imponendo  $Q_s = 10$  nella rete serie composta da induttanza e resistenza parassita si ottiene

$$L_P = \frac{R_P}{\omega Q_P} = \frac{190 \Omega}{2\pi * 80 * 10^9 \text{ Hz} * 10} = 38 \text{ pH}$$

(4.14)

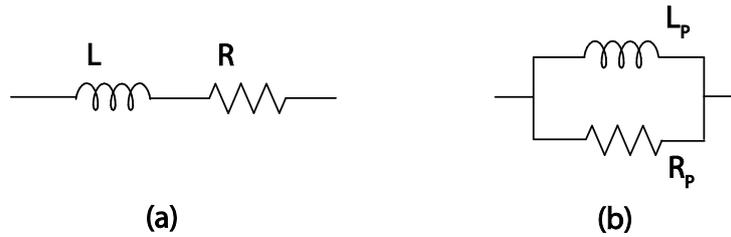


Figura 4.3: (a) Rete serie e (b) suo equivalente parallelo

Si fa presente, infatti, che vale l'uguaglianza  $Q_s = Q_p$ , in quanto le reti delle figure 4.3(a) e 4.3(b) devono essere equivalenti dal punto di vista delle perdite, e quindi, per definizione, hanno lo stesso fattore di qualità. Applicando le corrette trasformazioni si ottiene il dimensionamento dei componenti della rete serie LR

$$L = \frac{L_p Q^2}{1 + Q^2} \approx L_p = 38 \text{ pH} \quad (4.15)$$

$$R = \frac{R_p}{2(1 + Q^2)} \approx \frac{R_p}{2Q^2} = \frac{190 \Omega}{2 * 100} = 0.95 \Omega \quad (4.16)$$

Infine, dalla relazione (4.12) si ottiene

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L_p} = 104 \text{ fF} \quad (4.17)$$

E' bene precisare capacità  $C$  di cui si parla nella presente analisi non si riferisce al componente passivo inserito appositamente nella rete. Bisogna infatti tenere conto dei parassiti che afferiscono ai nodi dell'oscillatore i quali potrebbero contribuire alla capacità complessiva. Se i transistori incrociati sono sufficientemente piccoli in termini di aree, i loro parassiti contribuiranno in misura trascurabile alla capacità, viceversa se saranno abbastanza grossi la capacità che determinerà la pulsazione  $\omega_0$  sarà data dal parallelo (e quindi la somma in termini algebrici) della capacità intrinseca e delle capacità parassite afferenti ai nodi d'uscita. In definitiva il suo valore è infatti impostato in fase di simulazione per garantire la corretta frequenza di risonanza del circuito.

In ultimo, è stato impostato il valore del rapporto di forma dei transistori incrociati. Esso deve soddisfare, in ciascun ramo del circuito, la seguente equazione:

$$K_o (V_{GS,o} - V_T)^2 = \frac{V_{S,o}}{R} \quad (4.18)$$

In cui  $K_o$  è proporzionale al rapporto di forma  $\frac{W}{L_o}$  tramite la capacità dell'ossido e la mobilità elettronica. Coma già analizzato, si è preferito polarizzare tali transistori con una  $V_{GS}$  sostenuta per evitare di ottenere

un rapporto di forma, e quindi occupazione d'area, troppo consistenti. Tuttavia il criterio di Barkausen richiede l'opposto, e cioè aumentare  $K_o$  sino al valore  $\overline{K_o}$  tale da rendere possibile all'innescio dell'oscillazione. Questo è rischioso dal punto di vista della dissipazione di potenza, ma è possibile in ogni caso avviare al problema aggiustando in crescendo il valore della resistenza di degenerazione. I valori sono stati ricavati in fase di simulazione e sono di seguito elencati:

$$\frac{W}{L_o} = 25$$

(4.19)

$$R_B = 20 \Omega$$

(4.20)

che garantiscono una corrente di polarizzazione di  $11\text{mA}$  in ogni ramo.

Figura 4.4 ricapitola quanto fin qui dimensionato, riportando i valori estratti durante le simulazioni.

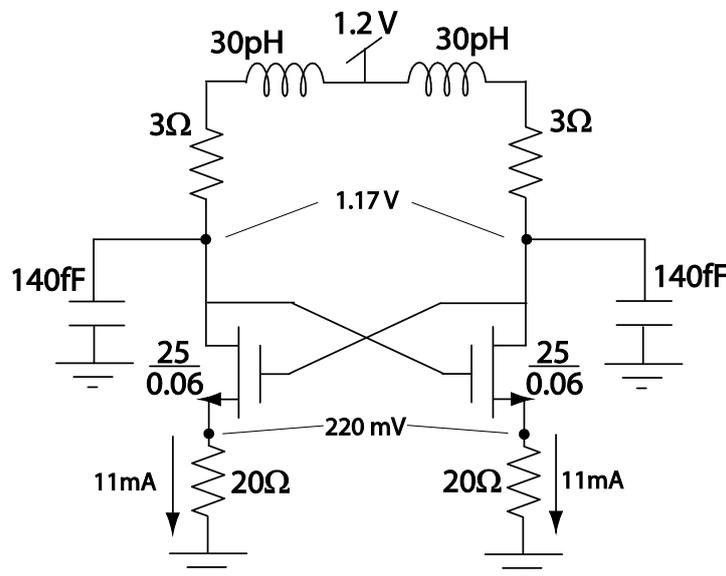


Figura 4.4: Dimensionamento e polarizzazione della rete *free running* a 80 Ghz

## 4.3 Dimensionamento dello stadio con injection locking

### 4.3.1 Rete equivalente

Il passo successivo consiste nello studio dell'*injection locking* vero e proprio. Per il dimensionamento dei componenti, è stata effettuata un'analisi a partire da una rete equivalente semplificata, visibile in figura 4.5. Di fatti si nota che la rete non è altro che l'alternarsi nel tempo, su periodi pari all'inverso della frequenza di iniezione, di due distinte configurazioni, le quali sono identiche l'una rispetto all'altra ma ripetute sui due diversi terminali in ingresso. Nella coppia di iniezione si ha, nella prima fase, il transistor  $M_{O,L}$  acceso (il segnale che lo pilota si trova nella fase alta) e  $M_{O,R}$  spento (il segnale che lo pilota si trova

nella fase bassa). Nella configurazione studiata si è scelto, in prima approssimazione, di porre un cortocircuito al posto del transistore acceso, il quale opera da bassa impedenza, mentre il transistore spento è stato sostituito con una resistenza, e non da un circuito aperto è a causa del transistore  $M_{I,R}$  di figura 4.1 posto in parallelo, il quale contribuisce con una impedenza finita.

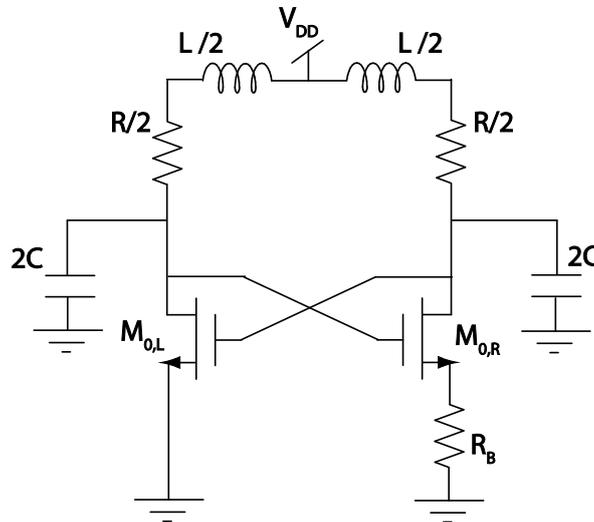


Figura 4.5: Rete equivalente per il dimensionamento dell'*injection locking*

Nello studio del *PILO* la principale criticità consisteva nella disponibilità di impulsi a  $\delta$  di Dirac. Questi, nella forma ideale, sono costruiti a partire da rettangoli nel tempo dei quali si è fatta tendere a zero la durata, mantenendo però l'area (per semplicità unitaria); ciò significa che l'ampiezza deve necessariamente aumentare all'infinito. Ovviamente ciò non è praticamente realizzabile a meno di considerare delle approssimazioni del segnale stesso. In effetti il segnale è reso disponibile con fronti la cui pendenza è funzione della tecnologia in uso, infatti i segnali si ottengono a partire da un generatore sinusoidale mediante squadratura tramite invertitori; con la tecnologia a disposizione, i tempi di salita sono circa  $40 \text{ ps}$ . Facendo riferimento all'impulso di figura 4.6, questo avrebbe durata complessiva pari alla somma delle tre durate temporali, pertanto pari a  $100 \text{ ps}$ , mentre un singolo periodo dell'oscillatore alla frequenza di  $80 \text{ GHz}$  è pari a  $12.5 \text{ ps}$ . Risulta quindi chiaro come, in presenza della tecnologia in uso, non sia possibile effettuare lo studio desiderato alla frequenza di risonanza richiesta. L'approssimazione del segnale di comando del transistore responsabile del cortocircuito dei terminali d'uscita è tanto più vera quanto più si abbassa la frequenza di risonanza.

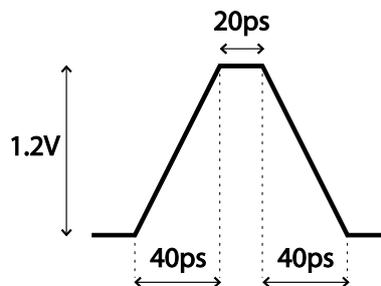


Figura 4.6: Impulso disponibile con la tecnologia in uso

Pertanto, se si volesse svolgere uno studio significativo sarebbe necessario rilassare la frequenza d'oscillazione, ad esempio, da  $80 \text{ GHz}$  a  $800 \text{ MHz}$  (cioè a  $1/100$  del valore iniziale) e di conseguenza la

frequenza di iniezione da 16 GHz a 160 MHz. Con le nuove condizioni operative il periodo di oscillazione supera abbondantemente il nanosecondo e l'approssimazione dell'impulso alla  $\delta$  di Dirac è da considerarsi valida.

Nel circuito in esame, ciò che potrebbe effettivamente limitare il *lock range* è la corrente iniettata nella rete risonante e il fattore di qualità della rete stessa. Nel circuito più generale analizzato nel capitolo 2, rappresentato in figura 2.4, si era giunti alla seguente relazione:

$$LR = \frac{\omega_0 |I_{inj}|}{2Q |I_{osc}|}$$

(4.21)

la quale mette in evidenza la dipendenza diretta dall'intensità dell'iniezione  $|I_{inj}|$ , e la dipendenza inversa dal fattore di qualità. Entrambe sono abbastanza ovvie: il *lock range* aumenta se si dispone di una topologia avente un livello di iniezione elevato, mentre cala se il fattore di qualità della rete aumenta, cioè se la rete diventa più selettiva, attenuando in questo modo l'intensità della quinta armonica del segnale di iniezione. Queste considerazioni sono state già espresse nel capitolo 2. Esse continuano ad essere valide in quanto non si sta analizzando ancora la situazione limite a cui si accennava nell'introduzione di questo capitolo.

L'intensità dell'iniezione è limitata, in questo caso, dalla capacità parassita totale che afferrisce al nodo di *drain* dei transistori dell'iniezione, indicata con  $C_{par}$ . La sua impedenza è pari a  $1/sC_{par}$ ; ad alta frequenza essa tende a cortocircuitare i suoi due estremi, causando una perdita di segnale dovuto alla corrente che si inietta nella bassa impedenza del nodo di *drain*; la figura 4.7 chiarisce la situazione esposta. Il fenomeno è tanto più significativo quanto più l'onda quadra in ingresso ha fronti non troppo ripidi in salita e discesa; in tal caso la componente alla quinta armonica potrebbe avere ampiezza limitata. Dalla stessa relazione è possibile notare una dipendenza diretta dalla frequenza di oscillazione, che farebbe preferire l'utilizzo di alte frequenze per l'oscillazione. Tuttavia dalle simulazioni si è ricavato un *lock range* pari al più ad un paio di gigahertz ad alta frequenza, quindi del tutto insufficiente. L'obiettivo è quello di ottenere valori dell'ordine di grandezza della frequenza d'iniezione, nel caso 16 GHz. Risulta pertanto necessario rilassare la frequenza di oscillazione ad un valore prossimo di 800 MHz, circa 1/100 del valore di partenza. Non è stato riportato il criterio di dimensionamento dei componenti rimanenti fino ad ora non coinvolti, lo si farà solo nel caso successivo, più significativo.

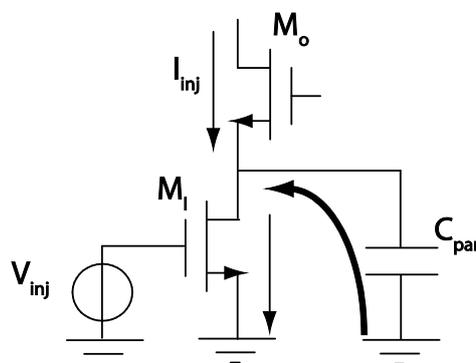


Figura 4.7: Capacità parassita al nodo di source e sua rilevanza nella determinazione del livello d'iniezione

### 4.3.2 Dimensionamento della rete a 800MHz

Nel passaggio al nuovo dimensionamento si sono fatte rimanere costanti

- l'ampiezza dell'oscillazione
- la potenza dissipata dal circuito

D'ora in avanti si farà riferimento al circuito modello di figura 4.8, scalato opportunamente a seconda delle configurazioni che di seguito verranno presentate.

Dalle precedenti considerazioni sono state estratte due possibili configurazioni, contraddistinte l'una da livello di accoppiamento *weak*, l'altra da livello di accoppiamento *strong*. E' la resistenza di degenerazione che determina la distinzione. In particolare, il caso *weak* contempla i dimensionamenti in cui la resistenza è relativamente bassa, in modo tale da mantenere le correnti nei due rami circa uguali, nel contesto di una configurazione simmetrica. Viceversa, il caso *strong* rappresenta i dimensionamenti aventi resistenza alta, con correnti nei due rami sbilanciate e configurazione asimmetrica. I casi limite sono l'oscillatore perfettamente simmetrico di figura 4.9(a), in cui l'iniezione è praticamente assente perché la bassa impedenza cortocircuita comunque anche il ramo in cui il transistor d'iniezione è spento. Il caso opposto è l'oscillatore di Pierce, in figura 4.9(b), talmente sbilanciato da poterne considerare acceso, e quindi implementare, un ramo solo. Ogni caso proposto rappresenta un dimensionamento particolare della rete di figura 4.8. Il dimensionamento avrà ovviamente impatto sul *lock range*, crescente in funzione dell'asimmetria dello stadio. Il caso limite simmetrico presenta, per quanto appena detto, iniezione assente e quindi *lock range* nullo. Per il caso opposto, quello dell'oscillatore di Pierce, si è usato lo stesso criterio impiegato nel PILO. In effetti l'iniezione applicata all'oscillatore Pierce può ricondursi al segnale impulsivo applicato al PILO per il cortocircuito dei suoi estremi.

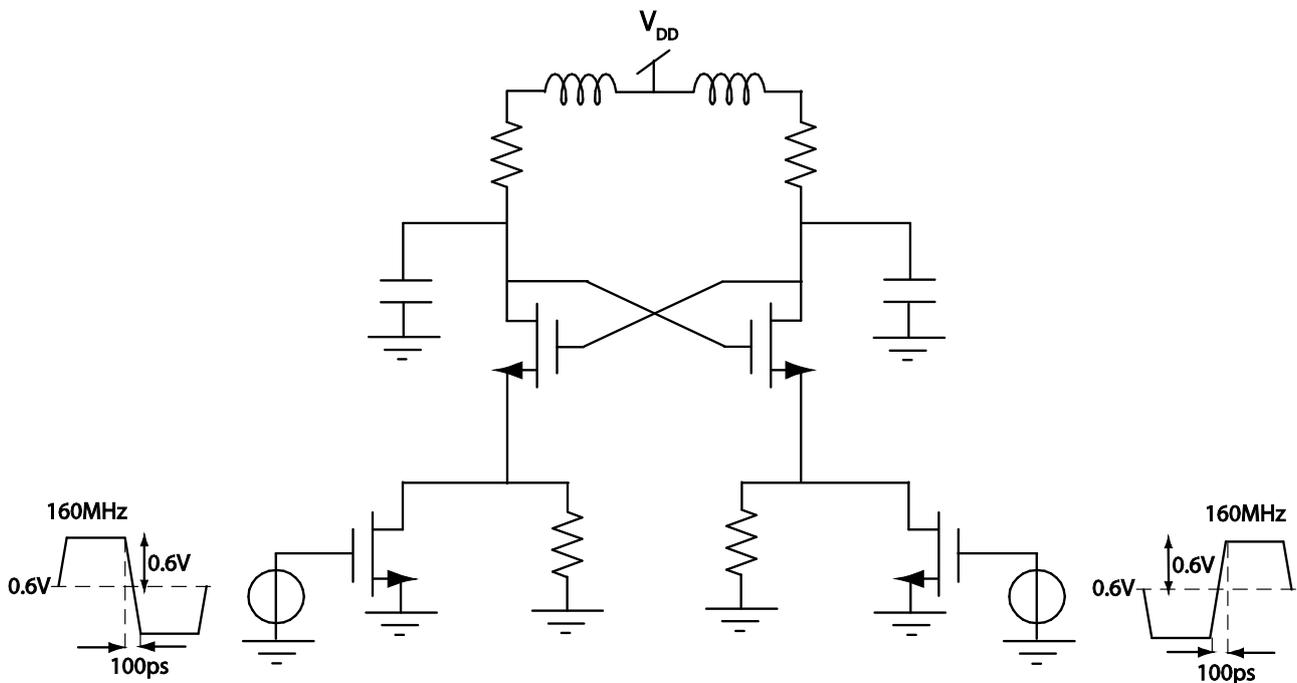


Figura 4.8: Configurazione generale dell'oscillatore *injection locked*

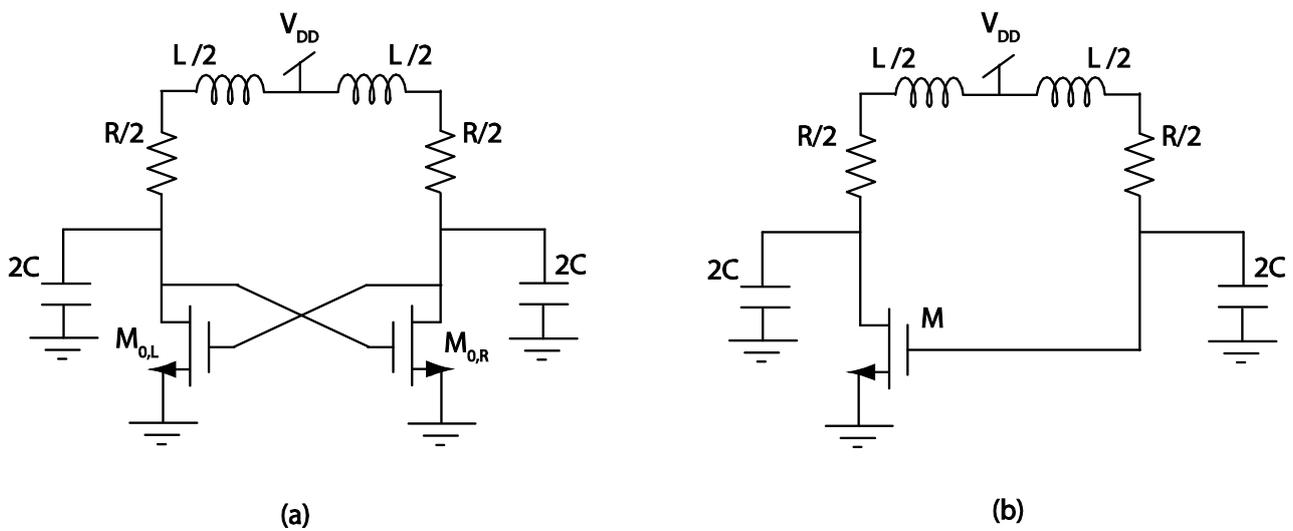


Figura 4.9: (a) Circuito limite simmetrico e (b) oscillatore di Pierce

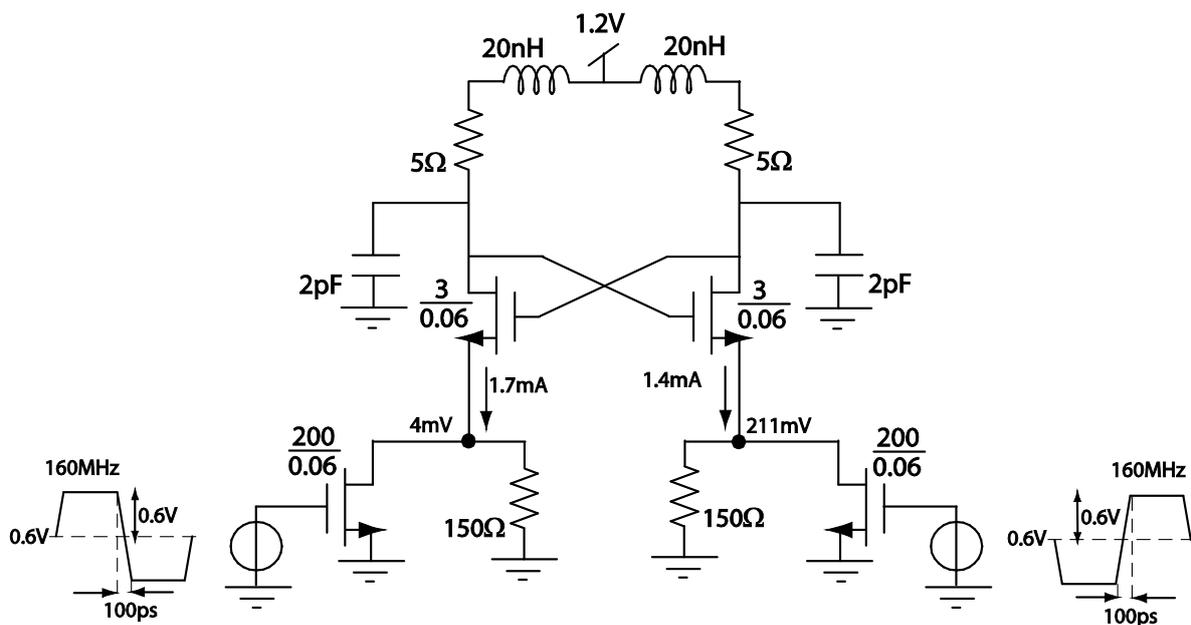


Figura 4.10. Dimensionamento e polarizzazione del caso weak

### Caso 1: Weak coupling

Nel caso di accoppiamento debole, la cui polarizzazione è visibile in figura 4.10, si è utilizzata una resistenza di degenerazione pari a  $150\ \Omega$ . La scelta della resistenza ha seguito il criterio dell'approssimazione del cortocircuito da parte di essa stessa sul lato del transistor spento; ovviamente tale criterio è maggiormente rispettato tanto più la resistenza è infinitesima, ma ci si ricondurrebbe al caso estremo,

mentre qui si intende ricavare una situazione intermedia. Si è osservato tramite le simulazioni che la configurazione in esame è piuttosto simmetrica e in polarizzazione scorre circa la stessa corrente nei due rami. La dimensione dei transistori dell'iniezione è stata impostata risolvendo il bilancio di Kirchhoff al nodo di iniezione del transistor acceso; il transistor dell'iniezione deve approssimare il più possibile un cortocircuito, è pertanto polarizzato in zona triodo, o meglio ancora nell'origine delle caratteristiche, quello della coppia incrociata ha *drain* e *gate* alla stessa tensione e pertanto lavora in zona di saturazione. Si ha, trascurando effetto Early per entrambi i transistori:

$$K_O(V_{DD} - V_T)^2 = 2K_I \left[ (V_{DD} - V_T)V_X - \frac{V_X^2}{2} \right] + \frac{V_X}{R_S} \quad (4.22)$$

dove con  $V_X$  si intende il nodo di source del transistor incrociato e con  $R_S$  la resistenza di degenerazione da 150  $\Omega$ .

Siccome  $V_X$  è circa nulla, la corrente che scorre nella resistenza è irrilevante, e l'ultimo termine della precedente può essere tranquillamente omesso. Per soddisfare l'uguaglianza deve necessariamente aversi

$$K_I \gg K_O \quad (4.23)$$

Si è scelto arbitrariamente di impostare

$$\frac{W}{L_I} = \frac{200}{0.06} \quad (4.24)$$

Il guadagno d'anello si avvicina, sotto queste ipotesi di funzionamento, al valore

$$G_{loop}(s) = \frac{g_{m,o}}{2} R_P \frac{\frac{s}{R_P C}}{s^2 + \frac{s}{R_P C} + \frac{1}{L_P C}} \quad (4.25)$$

Figura 4.11 mostra il luogo delle radici qualitativo della configurazione in esame, da cui si evince come impostando correttamente il parametro di taratura si riesca effettivamente ad ottenere un'oscillazione indefinita. La condizione di *startup* risulta

$$g_{m,o} > \frac{2}{R_P} \quad (4.26)$$

Tramite simulazione si è scelto il valore del rapporto di forma dei transistori incrociati

$$\frac{W}{L_I} = \frac{3}{0.06} \quad (4.27)$$

Il minimo indispensabile per rendere possibile l'innesco.

In ultimo, il valore della resistenza della rete risonante, e quindi di induttanza e capacità, è stato scelto per garantire una discreta ampiezza all'oscillazione.

Il *lock range* ottenibile in questa situazione è comunque abbastanza ridotto, pari soltanto a circa 20 MHz, in ragione proprio della simmetria dello stadio.

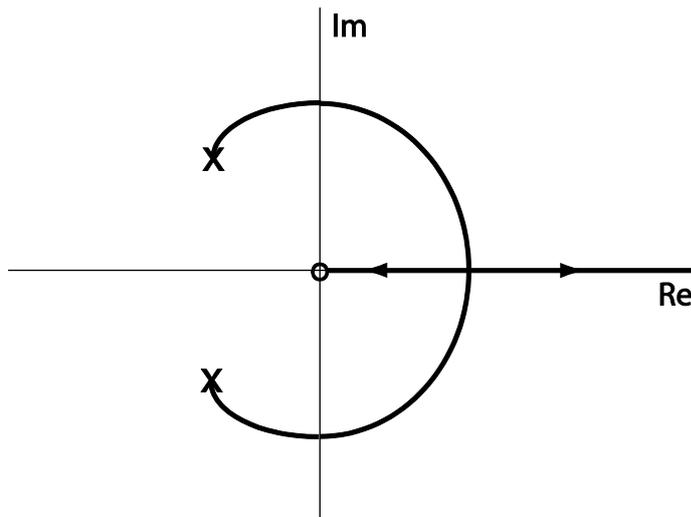


Figura 4.11: Luogo delle radici qualitativo dell'oscillatore simmetrico

### Caso 2: Strong coupling

Il dimensionamento di figura 4.12, presenta impedenze molto sbilanciate sui due rami. E' stato simulato con una resistenza di degenerazione pari a  $3\text{ k}\Omega$ , quindi il ramo con il transistore acceso resta cortocircuitato dal transistore stesso (il rapporto di forma dei transistori dell'iniezione è stato dimensionato in modo analogo al caso *weak*) mentre il restante ramo offre al circuito un'elevata impedenza.

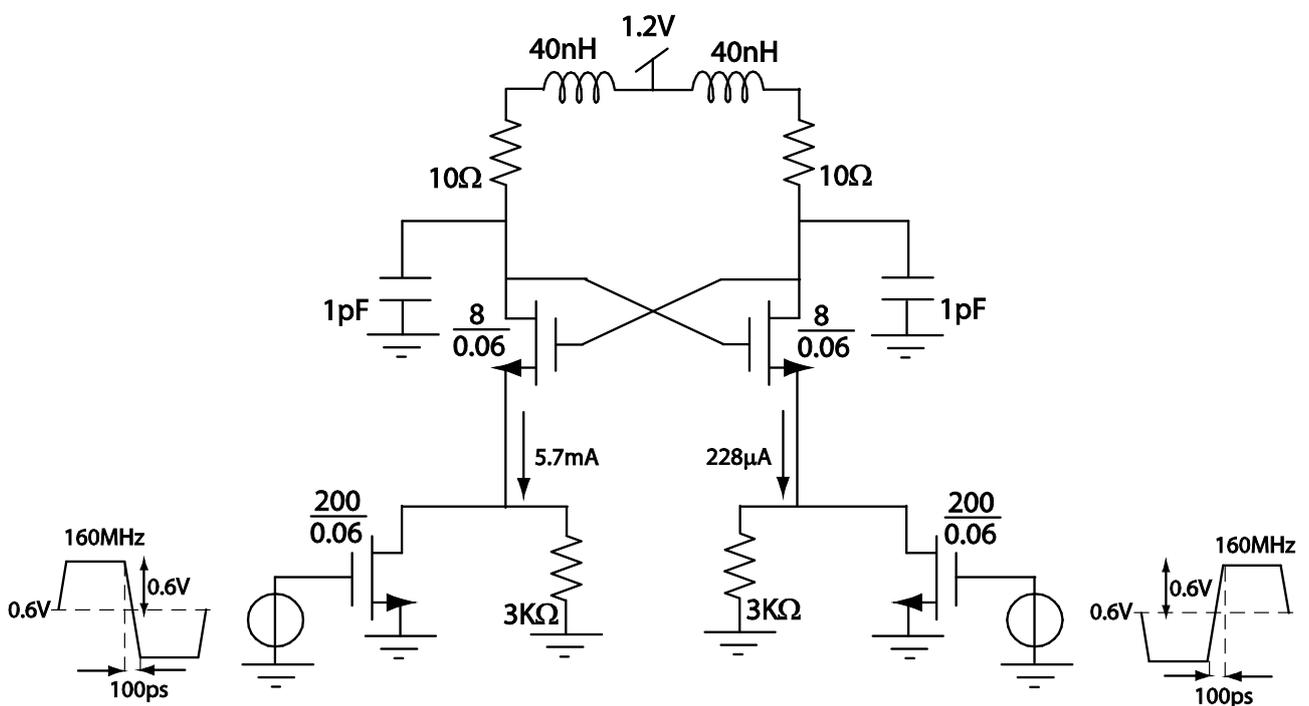


Figura 4.12: Dimensionamento e polarizzazione del caso *strong*

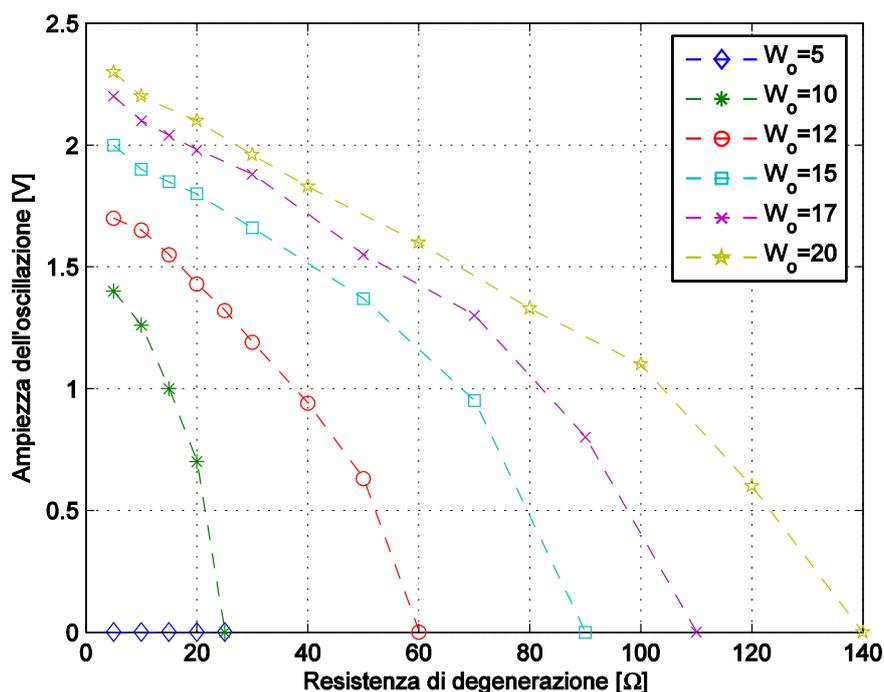
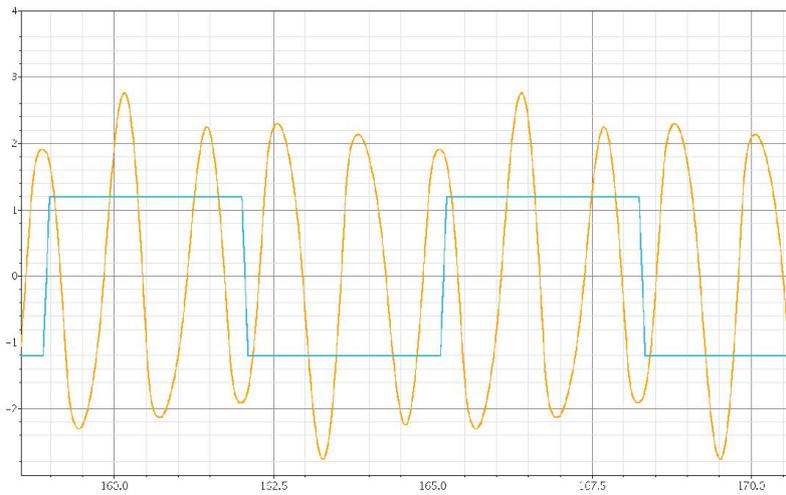
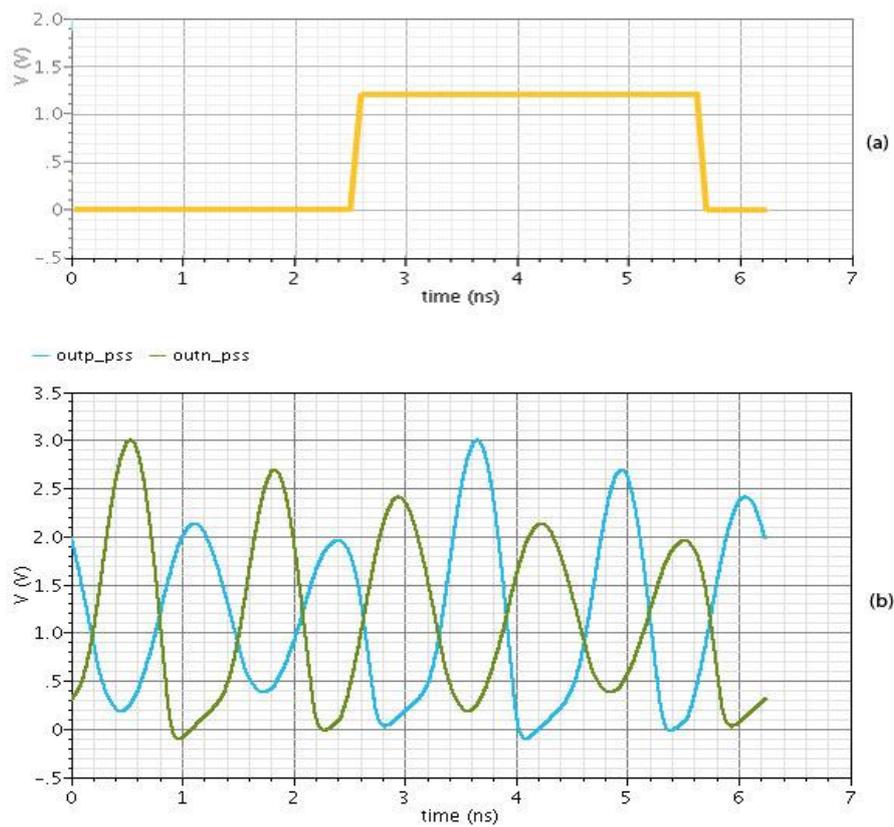


Figura 4.13: Andamento dell'ampiezza d'oscillazione in funzione della resistenza di degenerazione

Per la scelta dell'entità della degenerazione si è fatto affidamento al risultato di alcune simulazioni, in cui si è parametrizzato il valore del rapporto di forma dei transistori incrociati, e si è lasciata variabile la resistenza di degenerazione, riferendosi al circuito di figura 4.8. Si è ottenuta ampiezza decrescente all'aumentare di tale resistenza; intuitivamente ciò può essere giustificato dal fatto che cala la corrente nel ramo degenerato tanto più la degenerazione stessa è rilevante, pertanto cala anche l'ampiezza della componente alla prima armonica e con essa il valore della transconduttanza efficace. D'altro canto, variando il rapporto di forma ci si sposta fra le varie curve con ampiezza crescente all'aumentare di  $W/L$ , come ci si deve attendere: di fatti aumenta la corrente in ciascun ramo se si mantiene costante la resistenza di degenerazione (la corrente aumenta sensibilmente nel ramo non degenerato, di meno nell'altro). Quest'ultimo effetto è comunque via via meno rilevante all'aumentare di  $W/L$  e le curve si avvicinano sempre più l'una all'altra, come in figura 4.13. Le simulazioni sono state eseguite fino ad ottenere un'ampiezza pari a circa il doppio della tensione di alimentazione. È stato scelto  $R = 3K\Omega$ , non presente fra le simulazioni di figura 4.13, per poter disporre di più margine nell'aggiustamento dell'ampiezza della corrente di polarizzazione e soprattutto per ottenere un caso significativamente più sbilanciato (alta impedenza sul lato spento) rispetto al *weak*.



**Figura 4.14: Tensione d'ingresso (onda quadra) e tensione d'uscita**



**Figura 4.15: (a) Segnale d'iniezione e (b) Forme d'onda ai nodi d'uscita**

In questa situazione le correnti nei due rami sono molto differenti in polarizzazione, con un rapporto di 1:25 e le tensioni ai nodi d'uscita sono notevolmente distorte. Nelle figure 4.14 e 4.15 è possibile osservare, rispettivamente, un caso di aggancio al segnale d'ingresso e le tensioni d'uscita. Quando il

segnale di iniezione è alto il ramo su cui insiste il transistoro acceso è attraversato da una corrente notevole, che causa un *clamping* dell'uscita verso la tensione di massa. Nell'altro ramo, che resta degenerato dalla resistenza da  $3K\Omega$ , la corrente circolante è inferiore e la tensione d'uscita corrispondente risulta molto meno distorta.

Il guadagno d'anello è stato calcolato effettuando un taglio a monte di uno dei due transistori incrociati.

$$G_{loop}(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{g_{m,o,L}}{1 + g_{m,o,R} R_S} g_{m,o,R} \left(\frac{R_P}{2}\right)^2 \left(\frac{\frac{s}{R_P C}}{s^2 + \frac{s}{R_P C} + \frac{1}{L_P C}}\right)^2 = 1 \quad (4.28)$$

Ricavare la condizione di startup e disegnare il luogo delle radici di questo circuito è piuttosto oneroso; è comunque chiaro che entra nuovamente in gioco il rapporto di forma dei transistori della coppia incrociata, impostato in fase di simulazione.

Il *lock range* ottenibile in tale situazione è pari a circa 80 MHz, quindi un valore già migliore al precedente. L'obiettivo è infatti quello di ottenere valori dell'ordine della frequenza d'iniezione.

### Caso 3: Oscillatore Pierce

La configurazione analizzata nel caso 2 (*strong coupling*) è una situazione intermedia tra il caso di oscillatore simmetrico e il caso limite dell'oscillatore di Pierce, di figura 4.9(b), in cui un ramo è polarizzato a corrente così bassa da potersi considerare del tutto spento.

Per la condizione di oscillazione si è utilizzato il criterio di Barkausen, approssimando il circuito a quello di figura 4.9(b).

$$G_{loop}(s) = -\frac{g_m}{s} \frac{R_P + j\omega L_P}{4R_P L_P C^2} \frac{1}{s^2 + \frac{s}{R_P C} + \frac{1}{L_P C}} \quad (4.29)$$

$$G_{loop}(j\omega) = -\frac{g_m}{j} \frac{R_P + j\omega L_P}{4\omega R_P L_P C^2} \frac{1}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{R_P C} + \frac{1}{L_P C}} \quad (4.30)$$

La condizione relativa allo sfasamento si esprime in:

$$\begin{aligned} \arg G_{loop}(j\omega) &= \pi - \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{\omega L_P}{R_P} - \tan^{-1} \frac{\frac{\omega}{R_P C}}{\frac{1}{L_P C} - \omega^2} = \\ &= \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{\omega L_P}{R_P} - \tan^{-1} \frac{\frac{\omega}{R_P C}}{\frac{1}{L_P C} - \omega^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

e fornisce la pulsazione di risonanza, effettivamente esistente se e solo se la rete ha fattore di qualità elevato. Infatti se  $Q \gg 1$ , ossia

$$\omega L_P \ll R_P \quad (4.32)$$

risulta

$$\tan^{-1} \frac{\frac{\omega}{R_p C}}{\frac{1}{L_p C} - \omega^2} = \frac{\pi}{2} \quad (4.33)$$

soddisfatta per

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_p C}} \quad (4.34)$$

Mentre la condizione sul modulo è:

$$|G_{loop}(j\omega)| = \frac{g_m}{\omega 4 R_p C^2 L_p} \frac{\sqrt{(\omega L_p)^2 + R_p^2}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{R_p C}\right)^2 + \frac{1}{L_p C} - \omega^2}} = 1 \quad (4.35)$$

La quale, dopo aver sostituito l'espressione della pulsazione di risonanza ricavata nel caso di  $Q \gg 1$  ed esplicitata rispetto a  $g_m$ , diventa:

$$g_m = \frac{4}{\sqrt{R_p^2 + \frac{L_p}{C}}} \quad (4.36)$$

Si mostra come il caso opposto ( $Q \ll 1$ ) sia privo di senso. Infatti si avrebbe

$$\omega L_p \ll R_p \quad (4.37)$$

e cioè

$$\tan^{-1} \frac{\frac{\omega}{R_p C}}{\frac{1}{L_p C} - \omega^2} = \pi \quad (4.38)$$

che risulta ovviamente impossibile.

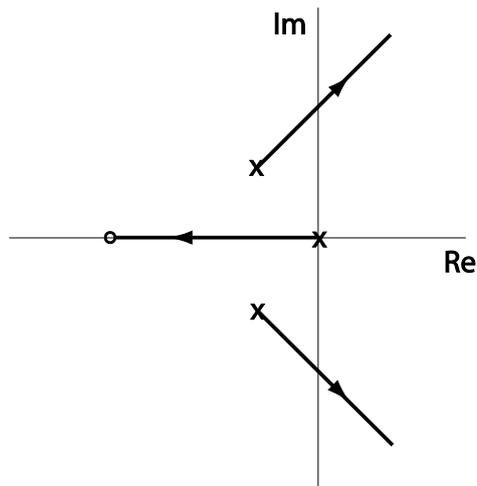


Figura 4.16: Luogo delle radici dell'oscillatore di figura 3.16

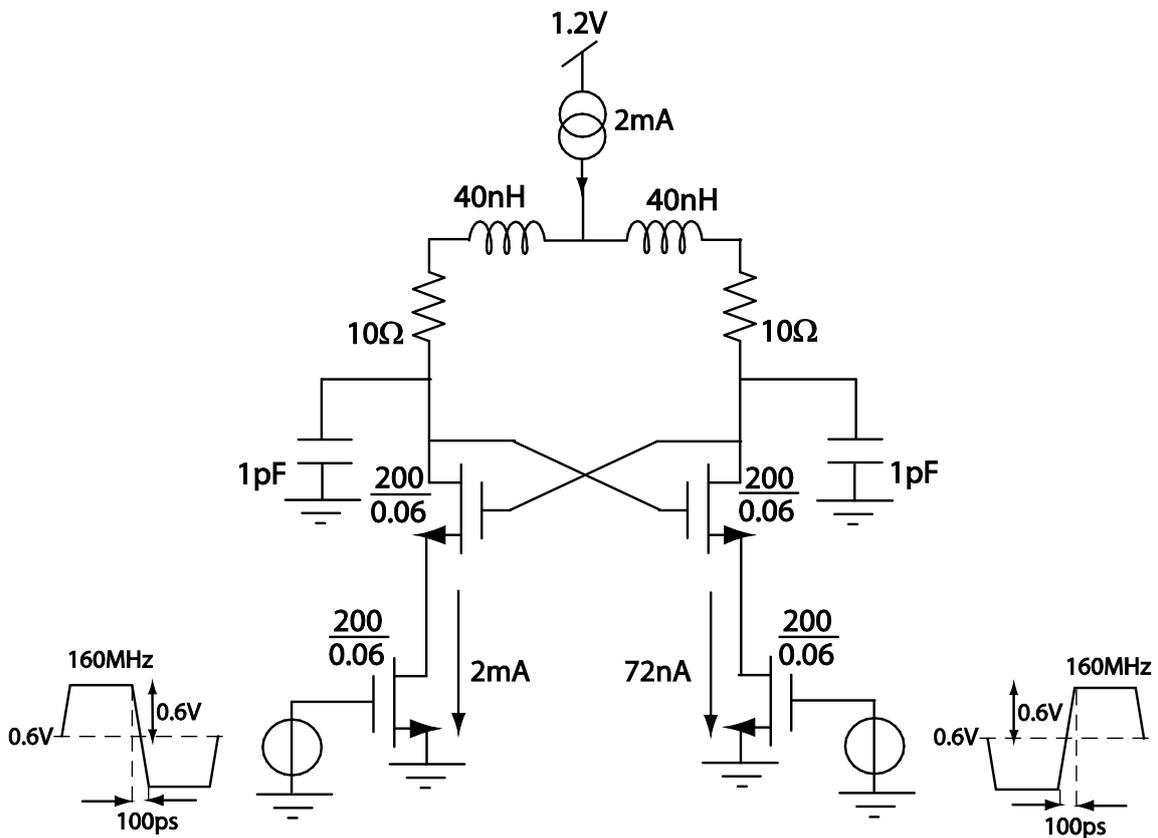


Figura 4.17: Polarizzazione dell'oscillatore Pierce

Figura 4.16 mostra il luogo delle radici qualitativo dell'oscillatore Pierce di figura 4.9(b), per il caso  $Q \gg 1$ . Si noti come il parametro di taratura del luogo sia effettivamente implicato nella condizione di *startup*: esso deve essere tale da posizionare i poli all'istante di accensione nel semipiano destro. Tale oscillatore è stato poi dimensionato per garantire ampiezza d'oscillazione pari a 1V. La polarizzazione è riportata in figura 4.17, mentre in figura 4.18 si notano le forme d'onda delle tensioni e delle correnti

ottenute tramite analisi PSS (*periodic steady state*). Da quest'ultima è possibile rendersi conto di quanto l'oscillatore abbia effettivamente comportamento da stadio in classe D, con gli elementi attivi che non operano nella zona di funzionamento di saturazione, ma si comportano da *switch*.

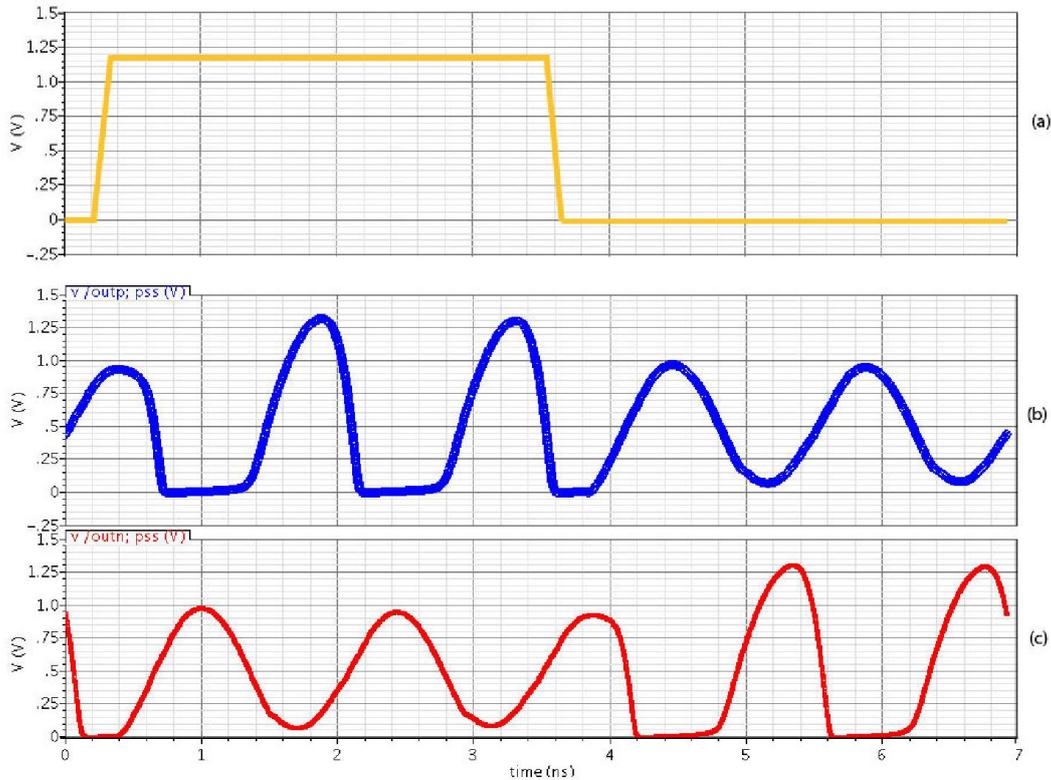


Figura 4.18: (a) Segnale d'ingresso. (b) Tensioni ai nodi d'uscita

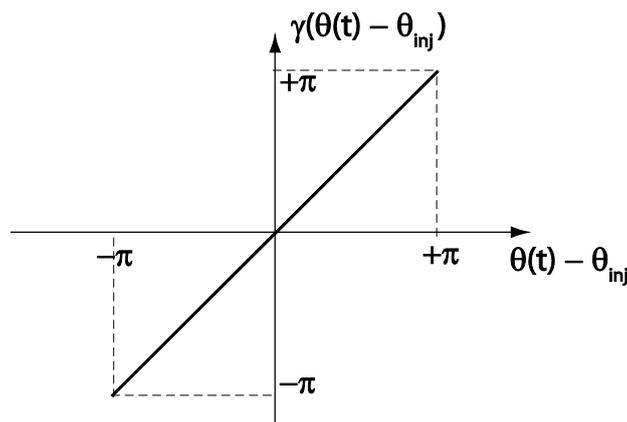


Figura 4.19: Funzione  $\gamma$  nel caso ideale

Per il *lock range* dell'oscillatore Pierce si è svolta un'analisi simile a quella relativa al PILO. E' necessario costruire un'analogia funzione  $\gamma$  valida per il caso attuale, e dunque valutare lo sfasamento di regime introdotto dall'applicazione della perturbazione. In questo caso si è infatti di fronte ad una configurazione



La funzione  $\gamma$  a cui si perviene in seguito alle simulazioni svolte in laboratorio è rappresentata in figura 4.21.

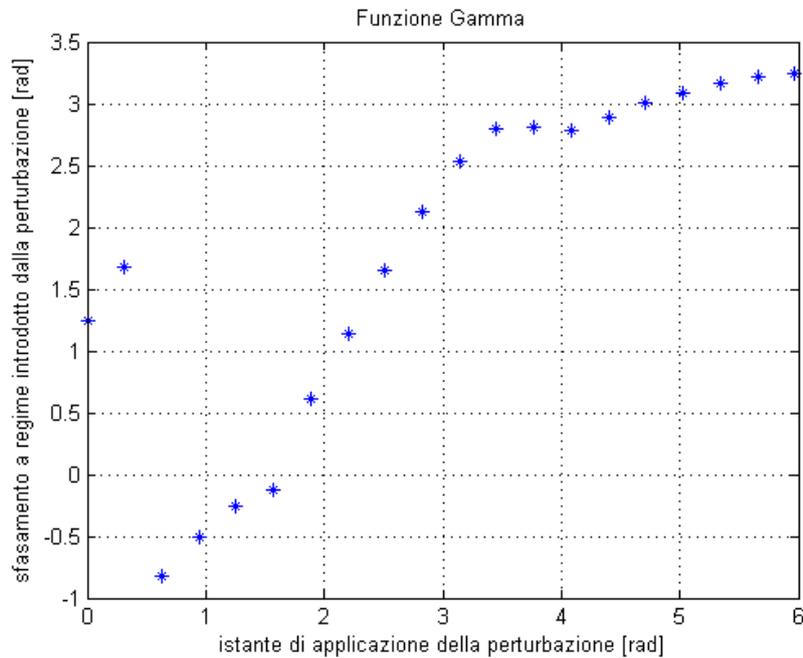


Figura 4.21: Funzione  $\gamma$  ricavata dalle simulazioni

L'analisi può essere nuovamente ripetuta con i dati estratti dal grafico di figura 4.21.

$$-1 \leq \Delta\omega T_{inj} \leq \pi \tag{4.42}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \leq \frac{\Delta f}{f_{inj}} \leq \frac{1}{2} \tag{4.43}$$

$$\frac{\Delta f}{f_{inj_{TOT}}} = 0.66 \tag{4.44}$$

Ciò significa che il *lock range* ottenuto è pari al 66% della frequenza d'iniezione, ossia 96 MHz. Si sono dunque superate le prestazioni ottenute con l'oscillatore impulsato, che permetteva di ottenere al più, nel caso ideale, un *lock range* pari al 50% della frequenza di iniezione .

In seguito si è analizzato il rumore di fase, nelle situazioni di *free running* e *injection locking*. Il risultato delle simulazioni è mostrato in figura 4.22, che riporta entrambi i casi, e con diverse frequenze d'iniezione, in

particolare da 134 MHz a 151 MHz, ovvero quelle per le quali si è raggiunto l'aggancio. Il centro del *lock range* corrisponde alla pulsazione per cui si ottiene lo spettro inferiore. Lo spettro di rumore *free running* e lo spettro *injection locked* si raccordano a circa 100 MHz. Tale risultato è concorde a quello ottenuto tramite simulazione della funzione gamma. Tuttavia entrambi si discostano parecchio da quello che si era atteso; il *lock range* teorico è pari alla frequenza d'iniezione, e cioè 160MHz. La discrepanza è dovuta alla non idealità del caso analizzato: per raggiungere il limite è necessario sbilanciare ulteriormente lo stadio.

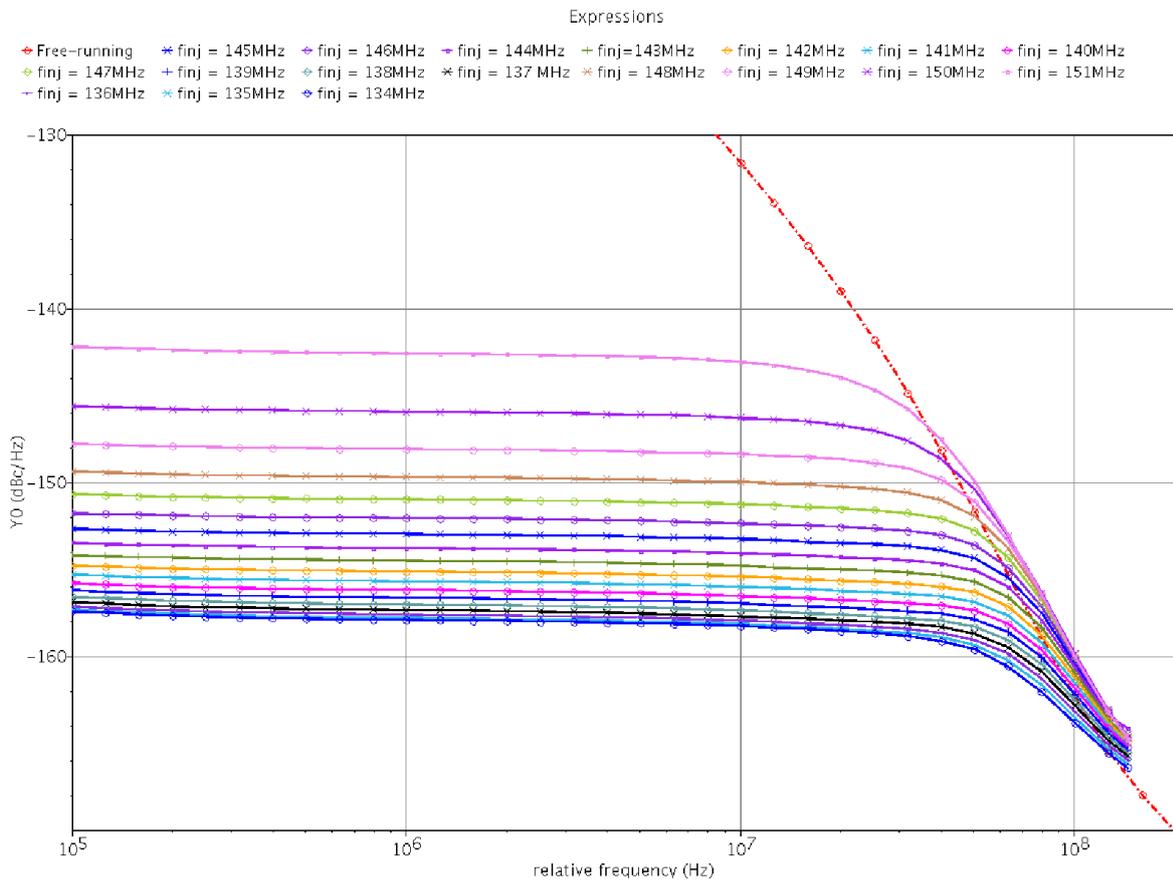


Figura 4.22: Spettro del rumore di fase dell'oscillatore *free running* e dell'oscillatore *injection locked*

Il grafico di figura 4.23 mostra i valori dello spettro di fase per frequenze di iniezione nei dintorni della pulsazione *free running*, ovvero il valore del piatto degli spettri di rumore ottenuti nella simulazione di figura. 4.22.

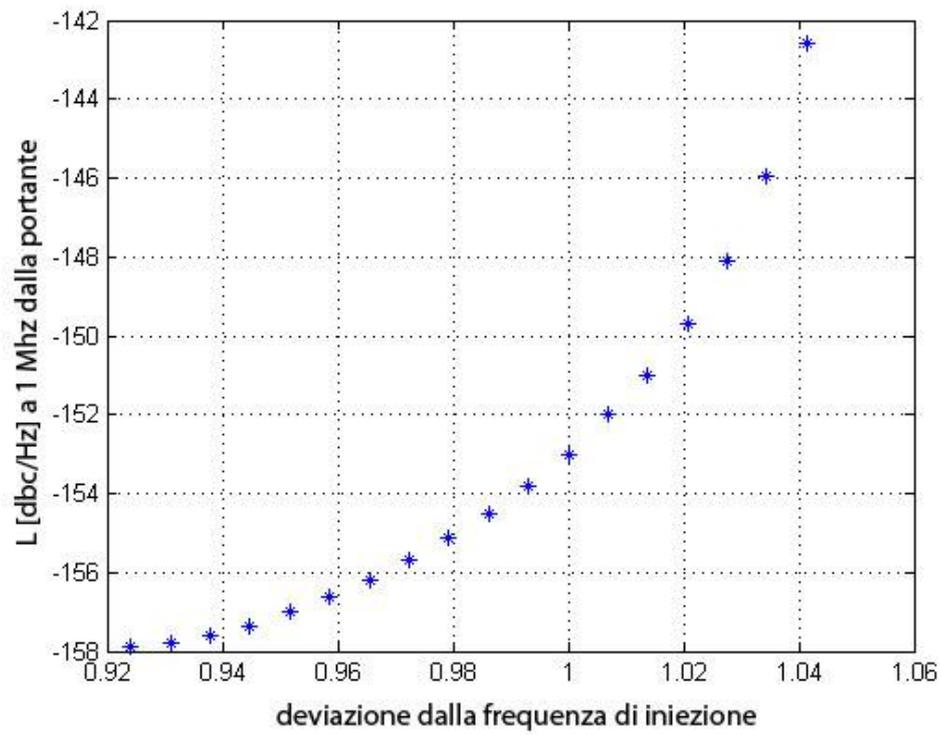


Figura 4.23: Valore del piatto dello spettro di fase a 1MHz dalla portante per tutte le frequenze di iniezione del grafico di figura 4.22

## CONCLUSIONI

---

E' stata svolta l'analisi di differenti configurazioni circuitali *injection locked*; si è prestata particolare attenzione all'ampiezza del lock range che esse riescono a garantire, strettamente legata all'efficacia nell'abbattimento del rumore di fase. In alcune è applicabile la teoria generale dell'*injection locking* presentata nel secondo capitolo: sono quelle in cui l'iniezione del riferimento è sinusoidale. In altre configurazioni, come il PILO (capitolo 3), la teoria non è strettamente applicabile. Si è quindi analizzato un metodo alternativo per lo studio del *lock range* e del rumore di fase, che ha permesso di stabilire il lock range ottenibile nel caso ideale, pari a metà della frequenza di iniezione.

La configurazione studiata e sottoposta alle verifiche di laboratorio è stata proposta nel capitolo 4. I dimensionamenti ricavati, a partire dai casi estremi simmetrico e asimmetrico, sono stati simulati in laboratorio. Impiegando una frequenza di iniezione pari a  $1/5$  della frequenza di free running (e cioè  $f_{inj} \approx 160 MHz$ ) si sono ottenuti seguenti valori di lock range:

- caso weak:  $LR = 20 MHz$
- caso strong:  $LR = 80 MHz$
- caso limite asimmetrico (Oscillatore di Pierce):  $LR = 96 MHz$

Si nota come il *lock range* sia correlato positivamente all'asimmetria dello stadio. Una configurazione molto simmetrica difficilmente riesce ad ottenere buone prestazioni in termini di rumore di fase. Per l'ultima configurazione analizzata (oscillatore di Pierce), è stata svolta un'analisi simile a quella studiata per l'oscillatore PILO. Essa prevede un *lock range* teorico pari alla frequenza d'iniezione. Si è giunti quindi ad un configurazione interessante in quanto supera il limite teorico ottenibile del PILO. Tuttavia i risultati delle simulazioni si discostano non di poco dalle previsioni. Per avvicinarsi al valore teorico si dovrebbe sbilanciare ulteriormente lo stadio. Nel caso esaminato si può ancora notare come la pulsazione di raccordo tra il rumore free running e il rumore injection locked coincida, con buona approssimazione, alla banda di lock ottenuta tramite l'impiego della funzione  $\gamma$ . Non era comunque intenzione fornire una teoria per la stima del rumore di fase in oscillatori di questo tipo.

# APPENDICE A: GENERAZIONE ARMONICA DI UN COMPONENTE NON LINEARE

---

Per ottenere aggancio di fase in sottoarmonica, e fare in modo che il circuito agisca da moltiplicatore di frequenze, è necessario disporre di un componente non lineare in grado di ampliare il contenuto spettrale del segnale in ingresso, concentrato a bassa frequenza. In particolare la generazione armonica dovrà generare una discreta ampiezza verso la frequenza prossima alla frequenza di *free running*. E' bene precisare in cosa consiste il fenomeno di generazione. Supponendo di disporre di un segnale d'ingresso monoarmonico alla generica pulsazione  $\omega$ , quindi del tipo

$$x(t) = A \cos(\omega t) \tag{A.1}$$

applicato ad un componente lineare, avente caratteristica

$$y(t) = \alpha x(t) \tag{A.2}$$

questo produrrebbe in uscita un segnale  $y(t)$  avente la medesima pulsazione e ampiezza amplificata (o attenuata), in ragione del fattore  $\alpha$ . Si ha dunque

$$y(t) = \alpha A \cos(\omega t) \tag{A.3}$$

Questo componente è pertanto del tutto inutile ai fini della moltiplicazione di frequenze. Anche disponendo di un segnale  $x(t)$  avente più componenti nello spettro, ad esempio

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + A_3 \cos(3\omega t) \tag{A.4}$$

Ciò non sarebbe sufficiente ad ampliarlo e le uniche armoniche presenti in uscita sarebbero esattamente le stesse, eventualmente amplificate o attenuate.

La necessità di aggancio ad una sottoarmonica rende dunque inevitabile l'impiego di un componente non lineare, avente, ad esempio, la seguente caratteristica:

$$y(t) = \alpha_1 x(t) + \alpha_2 x^2(t) + \alpha_3 x^3(t) \tag{A.5}$$

Ovviamente il numero di termini è valido solo ai fini dell'esempio e va adattato a seconda della situazione. Il segnale  $x(t)$  viene amplificato dal componente non lineare e l'uscita può essere ricavata analiticamente come:

$$\begin{aligned} y(t) = & \alpha_1 [A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t)] + \\ & + \alpha_2 [A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t)]^2 + \\ & + \alpha_3 [A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t)]^3 \end{aligned}$$

(A.6)

Le formule trigonometriche sono indispensabili per un'analisi accurata dell'uscita. Ciò che più conta del risultato sono i prodotti di intermodulazione del terzo ordine, ossia i toni introdotti nello spettro d'uscita dal componente non lineare alle frequenze  $\omega_{IM,1} = 2\omega_1 \pm \omega_2$  e  $\omega_{IM,2} = 2\omega_2 \pm \omega_1$ .

Il generico segnale  $x(t)$  periodico, avente periodo  $T$  e frequenza fondamentale  $f_m = 1/T$  e pulsazione

$$\omega_m = 2\pi f_m = \frac{2\pi}{T}$$

(A.7)

è rappresentabile tramite lo sviluppo di Fourier nella notazione trigonometrica:

$$x_F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_m t) + b_n \sin(n\omega_m t))$$

(A.8)

in cui

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

(A.9)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(n\omega_m t) dt$$

(A.10)

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin(n\omega_m t) dt$$

(A.11)

In figura A.1(a) è rappresentato il segnale ad onda quadra in ingresso a ciascuno dei due transistori d'iniezione, che rappresentano i componenti non lineari; il segnale ha valor medio e ampiezza uguali e pari ad  $A$ . La funzione  $x(t)$  è notoriamente pari, pertanto contano soltanto i termini coseno

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} A dt = \frac{2AT}{T \cdot 4} = \frac{A}{2}$$

(A.12)

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{+T/2} x(t) \cos(n\omega_m t) dt = \frac{4A}{T} \int_0^{+T/4} \cos(n\omega_m t) dt = \frac{4A}{n\omega T} [\sin(n\omega_m t)]_0^{T/4} = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

(A.13)

Lo sviluppo in serie di Fourier risulta:

$$x_F(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_m t)$$

(A.14)

Considerando solo le prime armoniche ciò corrisponde a:

$$x_F(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cos(\omega_m t) - \frac{2A}{3\pi} \cos(3\omega_m t) + \frac{2A}{5\pi} \cos(5\omega_m t) - \dots$$

(A.15)

Lo spettro del segnale  $x(t)$  è rappresentato, nel suo modulo  $|X(f)|$ , in figura A.1(b). Esso presenta toni alle frequenze multiple della frequenza d'ingresso e con ampiezza scalata in ragione del multiplo in considerazione. Si fa presente che lo spettro di figura A.1(b) è stato rappresentato nella sua forma bilatera, pertanto presenta componenti con intensità dimezzata rispetto ai coefficienti calcolati nella (A.15).

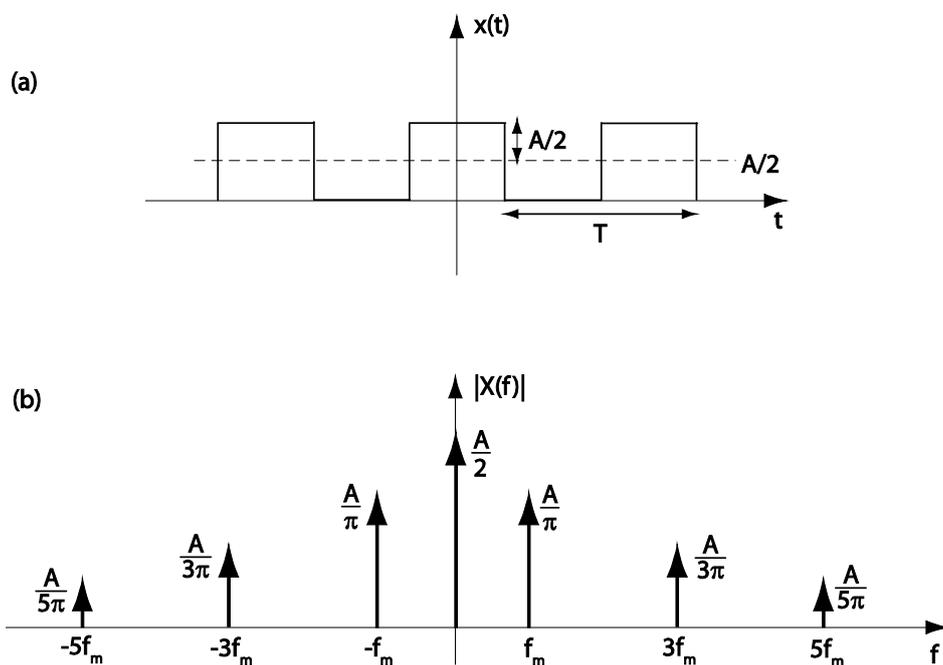


Figura A.1: Segnale periodico onda quadra (a) e suo spettro (b)

Ora è possibile giustificare l'incremento dell'ampiezza del tono in uscita alla quinta armonica. Esso è infatti uno dei prodotti di intermodulazione tra la prima e la terza armonica, ovvero

$$\omega_{IM,1} = 2\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_m + 3\omega_m = 5\omega_m$$

(A.16)

L'amplificazione esaminata va a sommarsi all'amplificazione lineare dello stadio, garantendo una discreta intensità all'armonica cui si desidera agganciarsi.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] L.J. Paciorek, "Injection locking of oscillators" *Proc. IEEE*, vol 53, pp.1723-1727
- [2] D. Dunwell and A. C. Carusone, "Modeling oscillator injection locking using the phase domain response" *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, vol. 60, no. 11, pp. 2823-2833, Nov. 2013
- [3] E. M. Izhikevich, "Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting". Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2007
- [4] A. Demir, "Computing timing jitter from phase noise spectra for oscillators and phase-locked loops with white and noise," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, vol. 53, no. 9, pp. 1859–1874, Sep. 2006.
- [5] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, "Random Perturbations of Dynamical Systems". Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1984.
- [6] P. Maffezzoni and S. Levantino, "Phase Noise of Pulse Injection-Locked Oscillators", *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, vol. 61, no. 10, Oct 2014.
- [7] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, "Synchronization". Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [8] R. Adler, "A study of locking phenomena in oscillators," *Proc. IEEE*, vol. 61, pp. 1380–1385, Oct. 1973.
- [9] N. Da Dalt, "An analysis of phase noise in realigned VCOs" *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Exp. Briefs*, vol. 61, no. 3, pp. 143–147, Mar. 2014
- [10] J. Borremans, J. Ryckaert, C. Desset, M. Kuijk, P. Wambacq, and J. Craninckx, "A low-complexity, low-phase-noise, low-voltage phasealigned ring oscillator in 90 nm digital CMOS," *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 44, no. 7, pp. 1942–1949, Jul. 2009
- [11] A. S. Landsman and I. B. Schwartz, "Predictions of ultraharmonic oscillations in coupled arrays of limit cycle oscillators," *Phys. Rev. E*, vol. 74, no. 3, pp. (036204)1–(036204)23, Sep. 2006.
- [12] A. Palacios et alii, "Multifrequency synthesis using two coupled nonlinear oscillator arrays," *Phys. Rev. E*, vol. 72, no. 1, pp. (026211)1–(026211)9, Aug. 2005