

# POLITECNICO DI MILANO

Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione  
Dipartimento di Energia

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica



## ANALISI CFD CON INTERAZIONE FLUIDO-STRUTTURA PER LA CARATTERIZZAZIONE ACUSTICA DI SILENZIATORI PER MOTORI A COMBUSTIONE INTERNA

Relatore: Prof. Gianluca MONTENEGRO

Co-relatore: Prof. Angelo ONORATI  
Ing. Augusto DELLA TORRE

Tesi di Laurea di:

Luca SPINA    Matricola 799181

Anno Accademico: 2013-2014



# RINGRAZIAMENTI

---

Vorrei ringraziare il Professor Gianluca Montenegro per avermi permesso di svolgere questo lavoro di tesi sotto la sua guida e prima ancora per avermi fornito le solide basi necessarie per potermi muovere in maniera autonoma all'interno dello sconfinato mondo della fluidodinamica computazionale.

Un ringraziamento particolare anche all'ingegnere Augusto Della Torre per la sconfinata pazienza e disponibilità mostrata in questi mesi di lavoro insieme, vedendo sempre qualcosa di positivo anche laddove io vedevo tutto completamente nero.

Un grazie doveroso va anche ai miei genitori che durante il mio intero percorso di studi mi hanno sempre supportato sotto qualunque aspetto si possa pensare.

Ultimi ma non meno importanti ci sono gli amici di sempre, dentro e fuori l'ambito universitario, che con una battuta e una risata sono riusciti a farmi superare i momenti di maggior nervosismo e tensione.

Infine un ringraziamento a parte vorrei riservarlo a mia sorella Valentina che ha sopportato i miei malumori durante questi mesi di lavoro ma mi ha sempre spronato a dare il meglio di me in ogni situazione.



# INDICE

---

<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>16</b>
<b>CAPITOLO PRIMO: IL RUMORE IN AMBITO AUTOMOBILISTICO .....</b>	<b>20</b>
<b>1.1 GRANDEZZE CARATTERISTICHE DI UN CAMPO ACUSTICO .....</b>	<b>20</b>
<b>1.2 ONDA PIANA E SFERICA .....</b>	<b>22</b>
<b>1.3 RUMORE GASDINAMICO.....</b>	<b>24</b>
<b>1.4 TIPI DI SILENZIATORE .....</b>	<b>25</b>
1.4.1 Silenziatori reattivi con espansione singola .....	27
1.4.2 Silenziatori reattivi con volume in parallelo .....	28
1.4.3 Silenziatori reattivi a colonna.....	29
1.4.4 Silenziatori dissipativi .....	29
<b>1.5 INFLUENZA DELLO SPESSORE DELLA LAMIERA .....</b>	<b>31</b>
<b>CAPITOLO SECONDO: APPROCCIO ALE PER LO STUDIO DI PROBLEMI DI INTERAZIONE FLUIDO-STRUTTURA.....</b>	<b>33</b>
<b>2.1 DEFINIZIONI GENERALI .....</b>	<b>33</b>
<b>2.2 DEFINIZIONE MATEMATICA DI DERIVATA IN DIVERSI DOMINI .....</b>	<b>35</b>
<b>2.3 EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE NEL DOMINIO FLUIDO .....</b>	<b>38</b>
Conservazione della massa .....	38
Conservazione della quantità di moto.....	39
Conservazione dell'energia .....	39
<b>2.4 EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE NEL DOMINIO SOLIDO .....</b>	<b>41</b>
<b>2.5 METODO RISOLUTIVO DEL SISTEMA D'EQUAZIONI.....</b>	<b>43</b>
<b>CAPITOLO TERZO: ANALISI ACUSTICA E CALCOLO DELLA TRANSMISSION LOSS.....</b>	<b>46</b>
<b>3.1 SERIE DI FOURIER E TRASFORMATA DI FOURIER.....</b>	<b>46</b>
<b>3.2 AUTOSPETTRO E CROSSPETTRO .....</b>	<b>48</b>
<b>3.3 ALIASING E LEAKAGE .....</b>	<b>50</b>
<b>3.4 TEORIA DELLA DECOMPOSIZIONE DI UN SEGNALE IN UN CONDOTTO .....</b>	<b>53</b>
3.4.1 Ipotesi d'applicazione.....	53
3.4.2 Formulazione matematica .....	54
<b>3.5 IMPLEMENTAZIONE PRATICA DELLA TEORIA.....</b>	<b>57</b>

<b>CAPITOLO QUARTO: METODI NUMERICI .....</b>	<b>59</b>
<b>4.1 METODI NUMERICI PER LA DISCRETIZZAZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI .....</b>	<b>59</b>
<b>4.2 TIPOLOGIE DI GRIGLIA.....</b>	<b>60</b>
<b>4.3 DISCRETIZZAZIONE DI UN'EQUAZIONE DI TRASPORTO CON IL METODO DEI VOLUMI FINITI .....</b>	<b>61</b>
4.3.1 <i>Discretizzazione di un integrale di superficie.....</i>	63
4.3.2 <i>Discretizzazione di un integrale di volume .....</i>	63
4.3.3 <i>Discretizzazione del termine di trasporto convettivo e diffusivo .....</i>	64
4.3.4 <i>Discretizzazione del termine di derivata temporale .....</i>	64
<b>4.4 SOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE E SOTTORILASSAMENTO DELLA SOLUZIONE .....</b>	<b>65</b>
<b>4.5 METODO DEGLI ELEMENTI FINITI PER LO STUDIO DI SISTEMI MECCANICI .....</b>	<b>66</b>
<b>CAPITOLO QUINTO: IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE DEL SOLUTORE .....</b>	<b>69</b>
<b>5.1 SEQUENZA OPERATIVA DEL SOLUTORE .....</b>	<b>69</b>
<b>5.2 CASO TEST PER IL DOMINIO FLUIDO.....</b>	<b>71</b>
<b>5.3 RISULTATI DEL CASO TEST .....</b>	<b>74</b>
<b>5.4 CASO TEST PER IL DOMINIO SOLIDO.....</b>	<b>76</b>
5.4.1 <i>Calcolo dello deformata statica per un elemento trave .....</i>	76
5.4.2 <i>Definizione delle frequenze proprie per un sistema continuo tipo trave .....</i>	78
<b>CAPITOLO SESTO: CALCOLO DELLA TRANSMISSION LOSS PER UN SILENZIATORE A SINGOLA CAMERA .....</b>	<b>84</b>
<b>6.1 CARATTERISTICHE GENERALI DELLE SIMULAZIONI.....</b>	<b>84</b>
<b>6.2 ORGANIZZAZIONE DELLE CARTELLE PER UNA SIMULAZIONE IN OPENFOAM .....</b>	<b>86</b>
6.2.1 <i>Time directory e 0 directory per il dominio fluido.....</i>	87
6.2.2 <i>Time directory e 0 directory per il dominio solido .....</i>	89
6.2.3 <i>Constant directory .....</i>	90
6.2.4 <i>System directory per il dominio fluido .....</i>	91
6.2.4.1 <i>ControlDict .....</i>	91
6.2.4.2 <i>fvSolution .....</i>	92
6.2.4.3 <i>fvSchemes .....</i>	93
<b>6.3 PRESENTAZIONE DEI RISULTATI .....</b>	<b>93</b>
6.3.1 <i>Camera singola con parete infinitamente rigida .....</i>	94
6.3.2 <i>Camera singola con parete spessa (rigidezza elevata).....</i>	99
6.3.3 <i>Camera singola con parete sottile: caso assialsimmetrico .....</i>	105
6.3.4 <i>Camera singola con parete sottile: caso tridimensionale completo.....</i>	113
<b>CONCLUSIONI.....</b>	<b>122</b>
<b>LISTA DEI SIMBOLI.....</b>	<b>125</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>127</b>

# ELENCO DELLE IMMAGINI

---

Figura 1.1: curve di pari intensità sonora di Fletcher e Munson .....	21
Figura 1.2: livelli di pressione sonora per diversi tipi di motore a combustione .....	23
Figura 1.3: attenuazione strutturale di un motore a combustione interna.....	24
Figura 1.4: spettro in frequenza del rumore gasdinamico emesso da un motore al variare del regime di rotazione rilevato ad un metro di distanza .....	25
Figura 1.5: schematizzazione di un silenziatore isolato per il calcolo della transmission loss.....	26
Figura 1.6: schematizzazione del processo di calcolo della insertion loss .....	27
Figura 1.7a: esempio di silenziatore reattivo con camera d'espansione in serie .....	27
Figura 1.7b: andamento della curva di transmission loss per una camera in serie .....	27
Figura 1.8a: esempi di silenziatore con camera in parallelo .....	28
Figura 1.8b: andamento della curva di transmission loss per un silenziatore con risonatore di Helmholtz in parallelo .....	28
Figura 1.9a: esempio di silenziatore con elementi forati. Nel dettaglio si schematizza la formazione di vortici all'uscita dei fori con conseguente dissipazione d'energia .....	30
Figura 1.9b: andamento della curva di transmission loss per un silenziatore dissipativo .....	30
Figura 1.10: misurazioni sperimentali di transmission loss per una camera ad espansione in serie al variare dello spessore della parete esterna .....	32
Figura 1.11: confronto tra le curve di transmission loss ottenute numericamente e sperimentalmente per un silenziatore a doppia camera in cui lo spessore del materiale che compone il condotto centrale è di appena 0.8 mm.....	32
Figura 2.1: rappresentazione grafica dei tre diversi approcci: lagrangiano (sopra), euleriano (centro), ALE (basso) .....	34

Figura 2.2: analisi della deformazione di una griglia. In a) si ha la griglia di partenza; nelle figure b) e c) si rappresenta la griglia 1 ms dopo l'esplosione ottenuta con il metodo ALE ed il metodo lagrangiano. La qualità della mesh realizzata con il metodo ALE risulta essere nettamente migliore rispetto a quella realizzata con approccio lagrangiano.....	34
Figura 2.3: rappresentazione grafica del dominio materiale, spaziale e di riferimento con i relativi sistemi di coordinate e le funzioni per passare da un sistema ad un altro .....	35
Figura 2.4: rappresentazione semplificata di un problema fsi. A sinistra il dominio fluido visto come un corpo la cui rigidità è funzione della comprimibilità; a destra il dominio solido rappresentato come un sistema massa-molla Nella zona d'interfaccia si ha la congruenza degli sforzi e degli spostamenti tra i due domini .....	43
Figura 2.5: schema grafico dell'approccio monolitico. In esso le equazioni che regolano il comportamento del dominio fluido e del dominio solido vengono risolte ad ogni istante temporale come un unico sistema.....	44
Figura 2.6: schema grafico dell'approccio partizionato. In esso le equazioni dei due domini vengono risolte separatamente una o più volte per ogni istante temporale e le informazioni di congruenza vengono scambiate attraverso l'interfaccia esistente tra le due regioni .....	44
Figura 3.1: esempio d'applicazione della trasformata di Fourier. Lo stesso segnale viene rappresentato in maniera differente a seconda del dominio in cui viene osservato.....	47
Figura 3.2: risultato dell'operazione di ricostruzione di un segnale al variare del rapporto tra la frequenza di campionamento e la frequenza del segnale osservato .....	50
Figura 3.3: rappresentazione nel dominio delle frequenze del fenomeno di leakage; la seconda armonica non è presente nello spettro discretizzato e la sua energia viene ripartita sulle frequenze adiacenti .....	51
Figura 3.4: effetto del numero di campioni considerato in ogni finestra temporale.....	52
Figura 3.5: schematizzazione dell'apparato sperimentale utilizzato nella teoria della decomposizione. Da sinistra a destra si ha: la sorgente sonora, i microfoni 1e 2 posizionati a monte del silenziatore per poter calcolare la componente incidente e riflessa , silenziatore da studiare visto come una black box, microfono 3 per l'acquisizione del segnale trasmesso e l'uscita perfettamente anecoica (solamente in teoria) .....	54
Figura 4.1: esempio di griglia di calcolo strutturata con elementi non ortogonali.....	60
Figura 4.2: esempio di griglia strutturata a blocchi utilizzata per lo studio dei profili alari .....	61
Figura 4.3: esempio di griglia di calcolo in cui non è possibile individuare un'unica tipologia di griglia...	62
Figura 4.4: esempio di volume finito utilizzato per la discretizzazione delle equazioni differenziali; in maiuscolo sono indicati i punti riferiti al centro-cella mentre in minuscolo sono indicati i punti riferiti al centro-faccia.....	62
Figura 4.5: esempio di un generico elemento utilizzato per un'analisi di tipo FEM con indicate le principali grandezze geometriche considerate .....	67
Figura 5.1: schema operativo con cui vengono richiamati i singoli file durante la simulazione di un istante temporale.....	70
Figura 5.2: geometria del problema test considerato per il confronto dei risultati tra solutore comprimibile ed incompressibile .....	72
Figura 5.3: griglia di calcolo realizzata per la risoluzione del problema descritto in figura 5.2. in rosso è definita l'interfaccia tra dominio fluido (esterno) e dominio solido (interno) .....	73
Figura 5.4: campo di velocità calcolato per $t=1$ s con il solutore incompressibile (sopra) e con il solutore comprimibile (sopra) .....	74



Figura 5.5: campo di pressione calcolato per $t=1$ s con il solutore incompressibile (sopra) e con il solutore comprimibile (sopra).....	75
Figura 5.6: campo di temperatura per $t=1$ s calcolato con il solutore comprimibile.....	76
Figura 5.7: spostamento dell'elemento solido definito in figura calcolato con il metodo della linea elastica (teoria), con il metodo dei volumi finiti (OpenFOAM) e con il metodo degli elementi finiti (Abaqus).....	78
Figura 5.8: griglia di calcolo utilizzata per la determinazione delle frequenze proprie di un elemento solido elastico. Nel riquadro rosso è contenuto il dominio solido mentre la restante parte è costituita dal dominio fluido .....	80
Figura 5.9: spettro in frequenza della risposta dell'elemento elastico ad un'eccitazione di tipo random (white noise). Nello specifico è possibile notare i picchi corrispondenti alle frequenze naturali del sistema solido .....	81
Figura 6.1: geometria iniziale del silenziatore con camera d'espansione singola utilizzato per il confronto tra dati numerici e risultati sperimentali .....	84
Figura 6.2: denominazione delle facce nel caso di griglia wedge per lo studio della sola fluidodinamica della camera ad espansione singola.....	85
Figura 6.3 denominazione delle facce nel caso di griglia wedge per lo studio dell'interazione tra fluido ed elemento elastico per una camera ad espansione singola. La superficie contactWalls rappresenta l'area in cui si ha lo scambio di informazioni tra dominio fluido e solido.....	85
Figura 6.4 organizzazione delle cartelle fondamentali e delle eventuali sottocartelle per il dominio fluido e per il dominio solido.....	86
Figura 6.5: campo di pressione calcolato per $t=0.4$ ms in cui si mostra la perturbazione sonora percorrere il condotto fino al raggiungimento del silenziatore .....	94
Figura 6.6: campo di pressione calcolato per $t=0.4$ ms mettendo in evidenza come le linee a pressione costante vadano a formare un fronte d'onda piano.....	94
Figura 6.7: campo di pressione calcolato per $t=0.6$ ms in cui si nota la transizione tra onda piana ed onda sferica all'ingresso del silenziatore.....	95
Figura 6.8: campo di pressione calcolato per $t=0.6$ ms in cui le linee a pressione costante evidenziano il passaggio da perturbazione piana a perturbazione sferica all'interno del silenziatore .....	95
Figura 6.9: campo di pressione calcolato per $t=1.3$ ms. Una nuova onda di pressione raggiunge l'ingresso della camera mentre la precedente è in parte riflessa dalle pareti ed in parte viene trasmessa nel condotto a valle .....	96
Figura 6.10: campo di pressione calcolato per $t = 1.3$ ms in cui le linee a pressione costante evidenziano come il fronte d'onda piano avanzi all'interno dei condotti, diventando sferico una volta all'interno della camera d'espansione .....	96
Figura 6.11: campo di velocità nel condotto di scarico calcolato per $t = 5$ ms .....	97
Figura 6.12: campo di velocità nel condotto di scarico per $t = 9$ ms. In evidenza il fatto che non ci siano componenti di velocità riflesse che percorrono il dominio da valle verso monte .....	97
Figura 6.13-6.14: campo termico calcolato per $t=4$ ms e per $t=500$ ms. Al passare del tempo il campo termico si mantiene costante con variazioni di qualche decimo di grado kelvin .....	97
Figura 6.15: confronto tra le curve di transmission loss ottenute dalla soluzione numerica (curva rossa) e dalla teoria (curva verde), dalle rilevazioni sperimentali (curva blu).....	99
Figura 6.16: confronto tra la griglia di calcolo utilizzata nel caso di parete con spessore elevato (a sinistra) e nel caso di parete sottile (a destra). In rosso l'interfaccia fluido-solido.....	100
Figura 6.17: campo di pressione calcolato per $t = 0.4$ ms. Si può notare come la perturbazione propaghi per onde piane all'interno del condotto d'ingresso alla camera d'espansione .....	101

Figura 6.18: campo di pressione calcolato per $t = 250$ ms. La perturbazione propaga per onde piane nei condotti d'ingresso ed uscita. Al termine del condotto d'ingresso ed al centro della camera si ha propagazione per onde sferiche.....	102
Figura 6.19: campo di pressione calcolato per $t = 250$ ms in cui le linee a pressione costante evidenziano come il fronte d'onda piano avanzi all'interno dei condotti. È possibile notare come in corrispondenza delle pareti laterali della camera si abbia una parziale riflessione delle perturbazioni ed una leggera alterazione legata alle vibrazioni della cassa esterna .....	102
Figura 6.20: confronto tra lo stato di sforzo/spostamento all'interno della parete solida calcolato per $t=0.4$ ms (immagini a,c ed e) e $t=250$ ms (immagini b,d ed f) .....	103
Figura 6.21: confronto tra la curva di transmission loss derivante dalla teoria (curva verde), con parete infinitamente rigida (curva rossa), con parete spessa e rigidità finita (curva blu) e rilievi sperimentali (curva nera) .....	104
Figura 6.22: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 350 Hz. La sezione del componente permette di notare la deformazione assialsimmetrica ottenuta .....	106
Figura 6.23: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 797 Hz. La sezione del componente permette di notare la deformazione assialsimmetrica ottenuta .....	106
Figura 6.24: spostamento assiale (a sinistra) e radiale (a destra) delle celle della griglia di calcolo indotto dalla vibrazione delle pareti laterali della camera .....	107
Figura 6.25: confronto tra la curva di transmission loss per camera con parete a rigidità elevata e camera con pareti mosse dall'esterno .....	108
Figura 6.26: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 611Hz .....	110
Figura 6.27: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 1170Hz .....	111
Figura 6.28: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 1436Hz .....	111
Figura 6.29: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 1807Hz .....	112
Figura 6.30: confronto tra la curva di transmission loss ottenuta con eccitazione impulsiva (curva nera) e la curva sperimentale (curva rossa) .....	113
Figura 6.31: griglia di calcolo utilizzata per simulazioni 3D. Il dominio solido è stato sezionato per permettere una visualizzazione migliore del dominio fluido contenuto .....	114
Figura 6.32: campo di pressione calcolato per $t=0.05$ s in cui si rappresentano le linee isobare all'interno del dominio fluidodinamico .....	116
Figura 6.33: campo di pressione calcolato per $t=0.05$ s in cui si può notare la propagazione radiale delle perturbazioni sonore.....	116
Figura 6.34: sforzo equivalente agente sulla parete solida esterna calcolato per $t=0.025$ s .....	117
Figura 6.35: campo di spostamento della parete solida calcolato per $t=0.05$ s. Si può notare la transizione tra il primo modo di vibrare (lato destro) ed il secondo modo di vibrare (lato sinistro) .....	117
Figura 6.36: campo di spostamento calcolato per $t=0.05$ s lungo l'asse cartesiano z .....	119
Figura 6.37: confronto tra le curve di transmission loss ottenute nell'ipotesi di parete sottile 2D (curva verde), parete sottile 3D (curva nera) e rilievi sperimentali (curva rossa).....	120

# ELENCO DELLE TABELLE

---

Tabella 1: caratteristiche meccaniche e fisiche dell'elemento solido-elastico (indicato in figura 5.3) .....	72
Tabella 2: caratteristiche fisiche e termodinamiche del dominio fluido (indicato in figura 5.3) .....	72
Tabella 3: caratteristiche geometriche, fisiche e meccaniche dell'elemento solido considerato .....	76
Tabella 4: coefficienti moltiplicativi per il calcolo delle frequenze naturali per un elemento di tipo trave al variare delle condizioni al contorno imposte .....	79
Tabella 5: caratteristiche geometriche, fisiche e meccaniche del dominio solido (indicato in figura 5.8) utilizzate per il calcolo numerico delle frequenze proprie .....	80
Tabella 6: frequenze naturali determinate utilizzando la teoria della meccanica dei solidi.....	81
Tabella 7: confronto tra le frequenze proprie calcolate utilizzando l'approccio teorico e l'approccio numerico .....	82
Tabella 8: confronto tra le frequenze proprie calcolate numericamente utilizzando il metodo degli elementi finiti ed il metodo dei volumi finiti .....	109



# SOMMARIO

---

Negli ultimi anni la progettazione dei silenziatori ha iniziato a richiedere maggiori attenzioni rispetto a quanto avveniva in passato a causa dell'abbassamento dei livelli d'inquinamento sonoro deciso dalle normative internazionali.

Il bisogno di ridurre il tempo che intercorre tra la progettazione del componente e la sua effettiva commercializzazione è diventato incompatibile con le campagne sperimentali condotte in ambito industriale.

Per questi motivi l'utilizzo di solutori numerici per caratterizzare ciascun componente, in tempi ragionevoli, sta diventando essenziale durante tutte le fasi di sviluppo.

In questo lavoro di tesi si descriverà lo sviluppo di un solutore per l'interazione tra fluido comprimibile e struttura e le attività di post-processing necessarie per calcolare la curva di transmission loss, data una generica configurazione del silenziatore.

Questo solutore utilizzerà l'approccio partizionato ossia il dominio fluido e quello solido verranno risolti utilizzando solutori separatamente e poi saranno accoppiati lungo l'interfaccia condivisa.

Le equazioni sia per il dominio fluido sia per quello solido sono scritte utilizzando la formulazione arbitrary Lagrangian-Eulerian e discretizzate usando il metodo dei volumi finiti.

L'attività di post-processing si basa sulla teoria della decomposizione per scomporre l'onda di pressione nelle sue componenti incidente e riflessa necessarie per il calcolo della transmission loss.

**Parole chiave:** camera ad espansione singola; OpenFOAM; interazione fluido-struttura; teoria della decomposizione; transmission loss

# ABSTRACT

---

In recent years the design phase of the silencers has required more attention than before due to the lower noise levels which have been established by the acoustic international standards.

The need to reduce the time to market has become incompatible with the long experimental campaigns carried out by industry.

For this reasons the usage of numerical solvers for the determination of the specific characteristics for every single component, in a reasonable time, it is becoming essential during the design phases.

In this thesis we will see the development of a new compressible fluid-structure interaction solver and the post-processing activities for the determination of the curve of transmission loss for a generic muffler.

In this solver the partitioned approach is used so the fluid domain and the solid domain are resolved using separate solvers and coupled along the interface shared by the two domains.

Equations for both fluid and solid domain are written using the arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation and discretized using the finite volume method (as implemented in OpenFOAM software).

The post-processing activity is based on the decomposition theory to decompose the pressure wave into its incident and reflected component necessary for the calculation of the transmission loss.

**Key words:** decomposition theory; fluid-structure interaction; OpenFOAM; single expansion chamber; transmission loss



# INTRODUZIONE

---

Il suono è una perturbazione di carattere ondulatorio che si propaga in un mezzo elastico di qualsivoglia stato fisico (solido, liquido o gassoso).

Il mezzo di trasmissione più comune in ambito fluidodinamico è l'aria, dove le oscillazioni che danno origine al fenomeno sonoro sono provocate o da variazioni di pressione indotte dalle vibrazioni di un corpo (la sorgente sonora) o da variazioni delle condizioni termodinamiche del fluido.

Si definisce rumore un *“Insieme di suoni contemporanei che si combinano in vibrazioni irregolari provocando spesso una sensazione di fastidio”*.

Anche in ambito automobilistico, l'abbattimento del rumore è diventato nell'ultimo decennio di fondamentale importanza al fine di limitare o eliminare i danni provocati all'uomo e all'ambiente.

Una buona progettazione ed ottimizzazione dei sistemi atti alla riduzione del disturbo sta diventando in questi anni sempre più importante affinché i nuovi veicoli risultino conformi alle normative italiane ed europee più stringenti per quanto riguarda l'inquinamento acustico.

Soprattutto nell'industria moderna l'ottenimento dei risultati desiderati in tempi contenuti, accompagnato da una progressiva riduzione dei costi di ricerca e sviluppo, ha accelerato la diffusione di programmi di calcolo particolarmente flessibili (di cui OpenFOAM è un esempio) che permettessero di diminuire il numero di prove sperimentali da svolgere, con conseguente diminuzione dei costi connessi.

La necessità di ridurre i costi di produzione e di alleggerire i componenti per massimizzare le prestazioni dei mezzi ha avuto come soluzione la riduzione dello spessore dei materiali impiegate durante il processo di fabbricazione.

Se da un lato questa riduzione ha avuto gli effetti benefici sopra citati, non è però possibile trascurare alcune problematiche che sono emerse da studi successivi, volti a caratterizzare la risposta dei silenziatori al variare delle geometrie considerate e dagli spessori di parete utilizzati.

Se lo spessore della parete è elevato (dove per elevato si intende superiore ai 5-10 millimetri) la cassa esterna del silenziatore può essere assunta come perfettamente rigida, per cui la fluidodinamica è legata solamente alla geometria del componente.



Se lo spessore viene ridotto per i motivi detti in precedenza, la rigidità delle pareti diminuisce e si inizia ad avere una certa interazione tra il fluido considerato e la parte solida.

Sperimentalmente si vede che questa interazione modifica la risposta attesa del componente, in termini di curva di transmission loss, rispetto a quella data dalla sola geometria.

Diventa quindi imprescindibile studiare contemporaneamente sia il comportamento del fluido sia il comportamento del dominio solido esterno.

Come mostrato in [1], quando si esegue uno studio che l'interazione tra un fluido ed un elemento solido le simulazioni vengono portate avanti in maniera indipendente sfruttando un programma per la soluzione del dominio solido (normalmente basato sugli elementi finiti) ed un programma per la soluzione del dominio fluido (può essere anch'esso basato sugli elementi finiti oppure sul metodo dei volumi finiti).

Il trasferimento delle informazioni dal dominio fluido a quello solido e viceversa è gestito da un terzo programma, che normalmente non è integrato nei due precedenti solutori ed è ottimizzato solamente per il trasferimento dati, senza possibilità di eseguire calcoli numerici.

Alcuni esempi pratici di questo modo di procedere sono riportati in [1] dove è possibile notare anche la diversità dei campi d'applicazione in cui si può considerare l'interazione tra un fluido ed uno o più elementi solidi.

Con questo lavoro di tesi si vuole descrivere lo sviluppo di un solutore numerico per la caratterizzazione acustica di silenziatori automobilistici, in particolare per il calcolo della transmission loss, in cui le equazioni che regolano il comportamento del dominio fluido, del dominio solido e lo scambio delle informazioni per garantire la congruenza all'interfaccia sono gestiti da unico software.

Questo nuovo solutore va quindi a modificare due aspetti fondamentali nello studio dell'interazione tra fluido e parete solida descritto precedentemente:

- utilizza per entrambi i domini il metodo dei volumi finiti al posto del metodo degli elementi finiti;
- passa da tre solutori separati (uno per definire il comportamento della struttura elastica, uno per caratterizzare la fluidodinamica a valle dell'analisi strutturale e uno per gestire la comunicazione tra i due domini) ad un unico solutore in grado di gestire contemporaneamente questi tre aspetti.

L'utilizzo di un unico software per l'intera analisi fluido-strutturale permette:

- di ridurre i costi poiché il programma OpenFOAM, utilizzato in questo lavoro di tesi, è completamente gratuito e consente la personalizzazione del codice sorgente, contrariamente a quanto avviene con i software commerciali disponibili per questa tipologia di studi quali Abaqus e Fluent;
- ridurre la difficoltà legata al set-up iniziale del caso poiché il problema solido e quello fluido vengono gestiti nello stesso modo dal medesimo solutore mentre, procedendo con solutori differenti è necessario saper lavorare su due piattaforme differenti (normalmente Abaqus per l'analisi meccanica e Fluent per l'analisi fluidodinamica).

Il passaggio dal modello ad elementi finiti ai volumi finiti è principalmente conseguenza del software utilizzato per implementare il solutore, ma rappresenta anche una semplificazione concettuale poiché si passa da un metodo rigoroso (elementi finiti), che però tende a mascherare un po' il significato fisico dei vari termini che compongono le equazioni risolventi, ad un metodo più intuitivo in cui si preserva il significato fisico dei singoli fattori (volumi finiti).

Entrambi risultano comunque essere modelli validi ed affermati; gli elementi finiti sono utilizzati principalmente per lo studio del comportamento di sistemi meccanici mentre i volumi finiti vengono impiegati per lo studio fluidodinamico.

Indipendentemente dal metodo utilizzato si arriva a definire un sistema di equazioni che, una volta risolto direttamente o numericamente, descrive il comportamento dei due domini (a titolo di esempio si confrontino le equazioni di Navier-Stokes discretizzate con il metodo degli elementi finiti disponibile in [2] con le stesse equazioni discretizzate con il metodo dei volumi finiti disponibile in [3]).

Come detto e dimostrato dall'elevato numero di articoli scientifici disponibili in rete, lo studio dell'interazione tra un fluido ed un solido non rappresenta di per sé un elemento d'innovazione, dato che in ambito biomedico o edile questa tipologia di problemi viene affrontata da diversi anni.

Il contributo dato da questo studio è legato alla possibilità di avere un solutore fluidodinamico che tenga in considerazione gli effetti di comprimibilità del flusso.

In questo modo, con un unico solutore, si potranno affrontare sia problemi in cui il comportamento del fluido è normalmente assimilabile a quello incomprimibile ma per motivi particolari non è possibile accettare questa modellazione (ad esempio nello studio della propagazione di onde sonore in flussi a basso numero di Mach) oppure per risolvere problemi in cui la modellazione di flusso incomprimibile non è utilizzabile sotto nessuna ipotesi (ad esempio nello studio di flussi con numero di Mach superiore a 0.5).

Anche l'attività di post-processing, presentata nel seguito di questa tesi e necessaria per la caratterizzazione del comportamento acustico del componente, ha richiesto un'attenzione specifica poiché non era presente all'interno del programma OpenFOAM e si basa su una teoria particolarmente interessante poiché richiede una sola simulazione numerica per poter essere attuata senza utilizzare il metodo delle matrici di trasferimento.

Chiariti i motivi e gli scopi che la nascita e lo sviluppo di questo lavoro di tesi, è possibile descrivere in maniera meno concisa il percorso che si seguirà partendo dalla definizione di tutti gli strumenti teorici che sono stati utilizzati per la scrittura del nuovo solutore e del successivo post-processing, per finire con il confronto tra i valori determinati numericamente e i dati sperimentali.

Il lavoro che segue è composto di sei capitoli, così suddivisi:

Capitolo primo: introduzione al rumore nel campo dell'autotrasporto in cui si daranno le definizioni delle grandezze utilizzate per la descrizione di un campo sonoro e si metteranno in evidenza le principali tipologie di silenziatore attualmente impiegate con i relativi parametri caratteristici, con introduzione al problema dell'interazione tra fluido di lavoro e parete solida;

Capitolo secondo: presentazione delle equazioni matematiche utilizzate per descrivere il comportamento del dominio fluido (sia in forma integrale sia in forma differenziale) e del dominio solido (utilizzando l'approccio update-lagrangian) con accenno alle metodologie risolutive dei sistemi che si vengono a definire;

Capitolo terzo: elementi d'analisi in frequenza dei segnali dove si descriveranno i passaggi per ottenere la curva della transmission loss partendo dal campionamento del segnale, sfruttando la teoria della decomposizione che sta alla base di tutta l'attività di post-processing svolta in questo lavoro;

Capitolo quarto: elementi di calcolo numerico in cui s'introduurranno i principali concetti legati al metodo dei volumi finiti, in cui si mostrerà la discretizzazione dei principali operatori matematici all'interno del software OpenFOAM, ed al metodo degli elementi finiti;

Capitolo quinto: implementazione del solutore e validazione dei risultati forniti dove s'illustrerà il funzionamento del nuovo solutore comprimibile realizzato per la soluzione dell'interazione tra fluido e struttura e si confronteranno i risultati ottenuti con quelli ricavati utilizzando solutori alternativi o con formule teoriche per problemi particolarmente semplici ricavate in forma chiusa;

Capitolo sesto: calcolo della transmission loss considerando vari spessori della lamiera in cui si riporteranno i risultati numerici ottenuti con il nuovo solutore confrontandoli, in seguito, con i valori sperimentali disponibili.

# CAPITOLO PRIMO: IL RUMORE IN AMBITO AUTOMOBILISTICO

---

## 1.1 Grandezze caratteristiche di un campo acustico

Una buona progettazione dei dispositivi di abbattimento acustico non può essere portata avanti se non è presente una conoscenza approfondita delle cause che generano disturbi sonori.

In un motore a combustione interna le fonti d'emissione principali possono essere suddivise in tre categorie, così come suggerito in [4]:

- Rumore di combustione dovuto al rapido incremento di pressione all'interno del cilindro, da cui derivano forze di intensità e direzione variabile che si trasmettono inizialmente al sistema pistone-biella ed infine ai supporti del motore;
- Rumore meccanico generato dagli urti che riguardano i principali accoppiamenti cinematici del motore;
- Rumore gasdinamico causato dal moto dei gas all'interno dei condotti dovuto al ciclico ricambio del fluido di lavoro nei cilindri.

Prima di descrivere meglio le fonti di rumore accennate sopra, è necessario introdurre alcuni parametri utilizzati per la caratterizzazione di un generico campo sonoro.

La principale grandezza utilizzata per descrivere la propagazione di un suono in un fluido comprimibile è la variazione di pressione oppure, in maniera del tutto analoga, la variazione di densità.

In generale la pressione all'interno di un campo sonoro può variare in maniera complessa sia nello spazio sia nel tempo; può quindi essere utile considerare, anziché il valore istantaneo variabile da punto a punto, un valore medio o efficace definito come

$$p_e(x, y, z) = \sqrt{\bar{p}^2} = \sqrt{\frac{1}{T_w} \int_0^T p^2(x, y, z, t) dt} \quad (1.1)$$

Si definisce pressione acustica (o sonora) e viene indicata con  $\Delta p$ , la differenza in un punto tra la pressione fluido al passaggio della perturbazione sonora e la pressione dell'ambiente indisturbato, definita come  $p_0$ , prima dell'arrivo dell'onda.

Queste oscillazioni di pressione anche nei casi estremi di maggiore intensità non superano i 90-100 Pa (intesi come valori efficaci) mentre la minima variazione percepibile dall'orecchio umano alla frequenza di 1 kHz (si vedrà in seguito l'effetto della frequenza di emissione delle onde sonore sul suono percepito) è dell'ordine di  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa.

Lavorare con una scala lineare risulterebbe quindi poco significativo poiché si andrebbero a confrontare valori con ordini di grandezza estremamente differenti tra loro.

Per questo motivo si è soliti riportare tutte le perturbazioni sonore rispetto ad un valore di riferimento e successivamente rappresentare i risultati impiegando una scala logaritmica anziché una lineare; dopo questa trasformazione l'unità di misura con cui si esprimono in valori non è più il Pascal ma il Bel.

Questa trasformazione permette di ridurre il campo dei valori considerati da sette ordini di grandezza ad uno o due ordini solamente.

Quindi, anziché considerare il valore di pressione, si definirà un livello di pressione sonora

$$L_p = 10 \log_{10} \left( \frac{p_e^2}{p_0^2} \right) \quad (1.2)$$

dove  $p_0$  è il valore efficace di pressione assunta come riferimento ed è pari a  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa.

Secondo quanto detto, un livello di pressione pari a 0 dB corrisponde alla soglia di udibilità.

La definizione del valore nullo per il livello di pressione sonora è quindi legata alla percezione umana, ma la definizione data dall'espressione (1.2) può essere applicata indifferentemente ad ogni rilevazione compiuta, tenendo conto che un valore negativo di  $L_p$  corrisponde a suoni che non possono essere uditi dall'orecchio umano.

Dalla figura 1.1 si può notare come livelli di pressione anche molto differenti tra di loro possano essere percepiti dall'orecchio umano in ugual modo al variare della frequenza d'emissione.

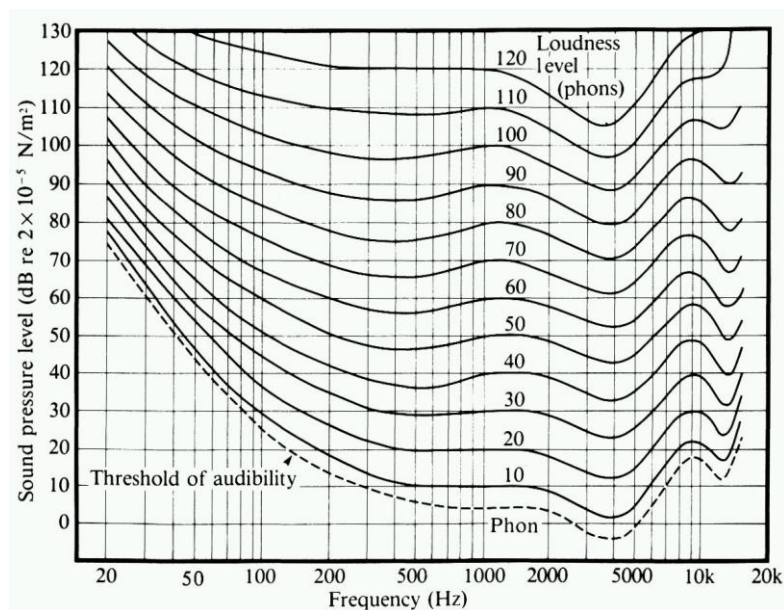


Figura 1.1: curve di pari intensità sonora di Fletcher e Munson

In particolare si può vedere come onde con livelli di pressione sonora elevati emesse a bassa frequenza (nell'ordine di qualche decina di Hertz) hanno sull'apparato umano gli stessi effetti causati da onde di pressione emesse a frequenze medio - alte (nell'ordine delle migliaia di Hertz) ma con livelli di pressione molto più bassi.

Per questo motivo il comportamento dei sistemi atti a ridurre l'emissione acustica viene solitamente ponderato, utilizzando appositi filtri all'interno del sistema d'acquisizione dati, per ottenere l'effetto reale sull'orecchio umano.

Analogamente a quanto fatto per la pressione, è possibile definire la potenza sonora di un campo

$$W = \frac{p^2}{\rho a} S \quad (1.3)$$

Come si può notare la potenza dipende sia dalle condizioni termofluidodinamiche (pressione, densità e temperatura) sia dalla geometria del problema considerato.

La potenza sonora può variare da  $10^4$  W (per un aereo in partenza) a  $10^{-9}$  W (per un bisbiglio) per cui l'adozione di un sistema di classificazione lineare è scomodo e poco utile, come fatto notare in precedenza definendo il livello di pressione sonora.

In analogia con quanto detto prima per la pressione sonora, si definisce ora il livello di potenza sonora

$$L_W = 10 \log_{10} \left( \frac{W}{W_0} \right) \quad (1.4)$$

dove  $W_0$  rappresenta la potenza di riferimento convenzionalmente assunta pari a  $10^{-12}$  W.

## 1.2 Onda piana e sferica

Si introducono le definizioni d'onda piana e d'onda sferica poiché la distinzione tra le diverse tipologie di propagazione delle perturbazioni sarà molto importante per l'applicabilità dell'attività di trattamento dei dati descritta nel seguito di questo lavoro.

Durante questa trattazione si considereranno soprattutto onde piane poiché le rilevazioni dei valori termodinamici saranno fatte all'interno di condotti dal diametro limitato (massimo 0.04 metri), mentre se si fosse studiato l'andamento delle variabili all'interno del silenziatore l'ipotesi di onda piana non poteva più essere ritenuta valida.

Un campo sonoro è considerato costituito da onde piane quando assume la forma di un fascio di linee isotermodinamiche parallele alla sorgente sonora e quest'ultima può essere vista come un piano che vibra in direzione normale alla superficie stessa.

Ciò vuol dire che pressione, velocità, densità e temperatura dipendono dall'istante temporale considerato e dalla coordinata assiale lungo cui propaga il fronte d'onda.

Un campo di onde sferiche è quello prodotto da una sorgente puntiforme che diffonde un suono nello spazio circostante.

I fronti d'onda non sono quindi paralleli tra loro, come nel caso delle onde piane, e le variabili termodinamiche, lungo una stessa sezione, sono funzione del raggio e dell'anomalia considerata.

In genere, si accetta la modellizzazione tramite onda piana quando la lunghezza d'onda è molto maggiore di una grandezza caratteristica della geometria studiata (nel caso dei condotti la grandezza assunta è il diametro nominale o quello idraulico se la sezione non è circolare).

Dopo aver definito i parametri caratteristici di un generico campo sonoro, è possibile descrivere più accuratamente le varie fonti di rumore all'interno di un motore a combustione interna.

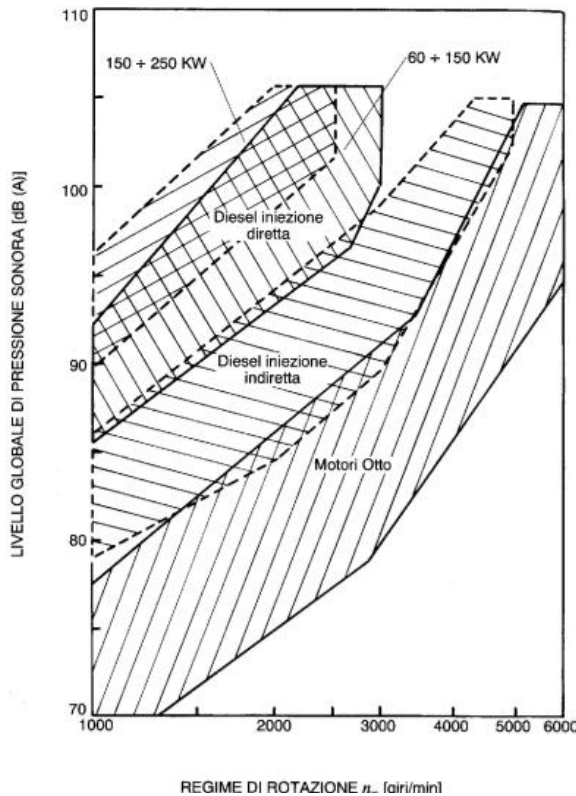


Figura 1.2: livelli di pressione sonora per diversi tipi di motore a combustione

### 1.3 Rumore di combustione e meccanico

Durante il funzionamento del motore, la pressione nel cilindro varia in maniera molto marcata e repentina, soprattutto negli istanti successivi all'avvio del processo di combustione.

Quest'andamento e il moto alternativo tipico del pistone danno origine a forze variabili in modulo, direzione e verso, facenti sì che gli accoppiamenti cinematici direttamente coinvolti nel fenomeno della combustione subiscano continui urti emettendo onde sonore.

Dalla figura 1.2 si può notare come il tipo di ciclo termodinamico realizzato all'interno del motore influenzi sensibilmente il livello di pressione sonora misurato; in particolare si può vedere come, a pari regime di rotazione dell'albero motore e a carico fissato, i motori con ciclo termodinamico Otto sono caratterizzati da livelli di pressione più bassi rispetto ai motori con ciclo termodinamico Diesel.

Questo fatto può essere spiegato considerando la legge di combustione del carburante ed il conseguente aumento di temperatura e pressione all'interno del cilindro: nel caso del ciclo Diesel questo rilascio avviene più repentinamente rispetto a quello che si ha nel ciclo Otto, generando gradienti di pressione più elevati che si trasmettono in seguito a tutti le parti collegate facendole vibrare.

Sempre dalla stessa figura si può vedere come il limite massimo di pressione sonora misurato sia sostanzialmente indipendente dalla velocità di rotazione e dal ciclo termodinamico adottato.

Da quanto detto finora si può capire come la variabile fondamentale dei fenomeni descritti sia la velocità con cui varia la pressione all'interno del cilindro.

Nota questo andamento e quello della pressione sonora rilevata all'esterno del propulsore, è possibile definire la curva di attenuazione come differenza tra i livelli di pressione dati.

Nella figura 1.3 si riporta una curva di attenuazione ricavata sperimentalmente: si può notare come la curva dipenda solamente dai materiali scelti (dalla loro capacità di assorbire

parte dell'energia irradiata) e dalla geometria delle parti stesse, mentre risulta abbastanza indipendente dal regime di rotazione.

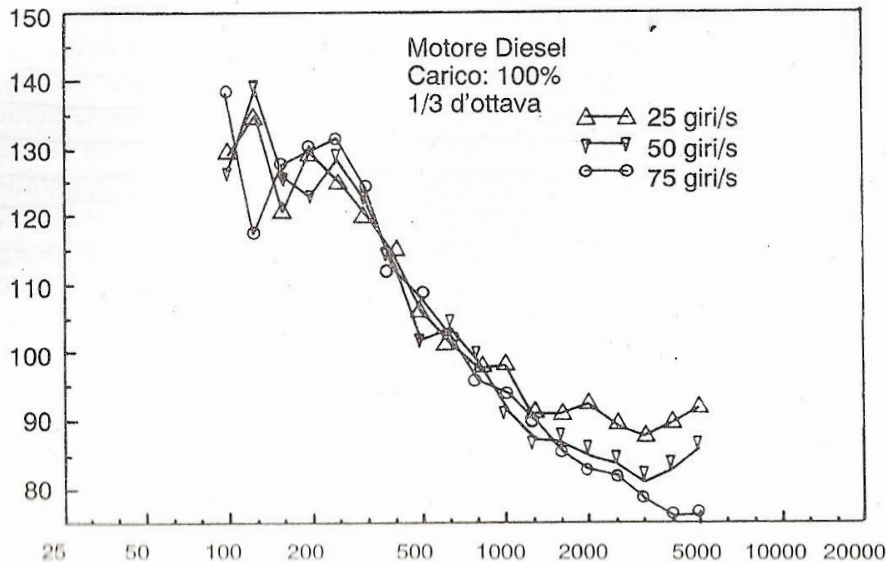


Figura 1.3: attenuazione strutturale di un motore a combustione interna. In ascissa si hanno le frequenze espresse in hertz mentre in ordinata si ha l'attenuazione prodotta in decibel

### 1.3 Rumore gasdinamico

Il susseguirsi delle aperture e delle chiusure delle luci d'aspirazione e scarico sulla testata del cilindro genera nei rispettivi condotti delle variazioni di pressione che si propagano lungo tutto l'impianto attraverso il mezzo fluido (gas combusti o aria a seconda del caso).

La geometria del sistema, come la presenza di eventuali brusche variazioni nelle sezioni dei condotti, determina poi la presenza di riflessioni totali o parziali delle onde che quindi interagiscono tra loro in modo complesso.

Non essendo perfettamente rigide, le pareti dei condotti e le estremità del sistema trasmettono onde sonore verso l'esterno classificate come rumore gasdinamico.

La figura 1.4 rappresenta nel dominio delle frequenze la pressione sonora misurata a un metro di distanza dal terminale di scarico di un propulsore monocilindrico, anche se le stesse considerazioni qualitative potrebbero essere fatte per casi multi - cilindro.

In essa si possono notare picchi di elevata intensità a basse frequenze legate al processo di sostituzione del fluido di lavoro che avviene con la frequenza fondamentale pari a

$$f_0 = n_c * \frac{n}{\varepsilon} \quad (1.5)$$

e picchi d'intensità più moderata ma a frequenza più elevata dovuti all'eccitazione prodotta dal distacco dei vortici all'interno della vena fluida.

I silenziatori automobilistici vengono realizzati per fornire le massime prestazioni d'attenuazione delle perturbazioni sonore con frequenza compresa tra i 200 e i 2000 Hz, dove l'orecchio umano risulta essere più sensibile (come già illustrato nella figura 1.1).

Poiché l'attenuazione strutturale non è sufficiente per ridurre le emissioni sonore al di sotto dei limiti fissati dalle normative, i sistemi di aspirazione e di scarico dovranno prevedere



uno o più silenziatori per smorzare l'intensità delle oscillazioni di pressione prima che queste raggiungano l'ambiente esterno.

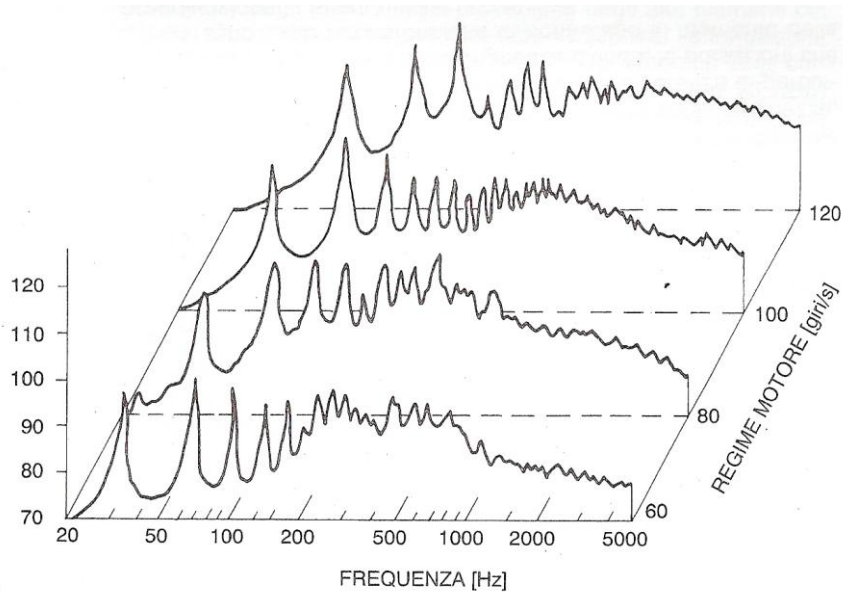


Figura 1.4: spettro in frequenza del rumore gasdinamico emesso da un motore al variare del regime di rotazione rilevato a un metro di distanza

#### 1.4 Tipi di silenziatore

Indipendentemente dalla geometria e dai materiali che compongono i silenziatori, a questi elementi viene richiesto di:

- limitare le onde di pressione sia a bassa frequenza (perché hanno un elevato contenuto energetico) sia a frequenza media - alta (perché l'orecchio umano è più sensibile);
- limitare le perdite fluidodinamiche per non ridurre eccessivamente la potenza utile erogata dal propulsore;
- garantire un'adeguata solidità strutturale, minimizzando al tempo stesso il peso e l'ingombro all'interno del veicolo.

A prescindere dal principio fisico con cui si riducono le oscillazioni di pressione, la bontà di un silenziatore è valutata attraverso due parametri: la transmission loss e l'insertion loss.

La transmission loss è definita come differenza tra il livello di potenza sonora incidente misurata nella sezione d'ingresso del componente (indicata con 1 nella figura 1.5) ed il livello di potenza sonora trasmessa misurata nella sezione d'uscita (indicata con 2 nella figura 1.5), ossia

$$TL = 10 \log_{10} \left( \frac{W_I}{W_T} \right) \quad (1.6)$$

Se le oscillazioni di pressione dell'onda incidente sono di entità contenuta, la transmission loss (abbreviata comunemente con TL) è un coefficiente rappresentativo delle capacità del silenziatore, considerato come un dispositivo separato dal resto del sistema, di

abbattere il rumore in funzione esclusivamente dalla configurazione geometrica del componente e dalla frequenza dell'onda.

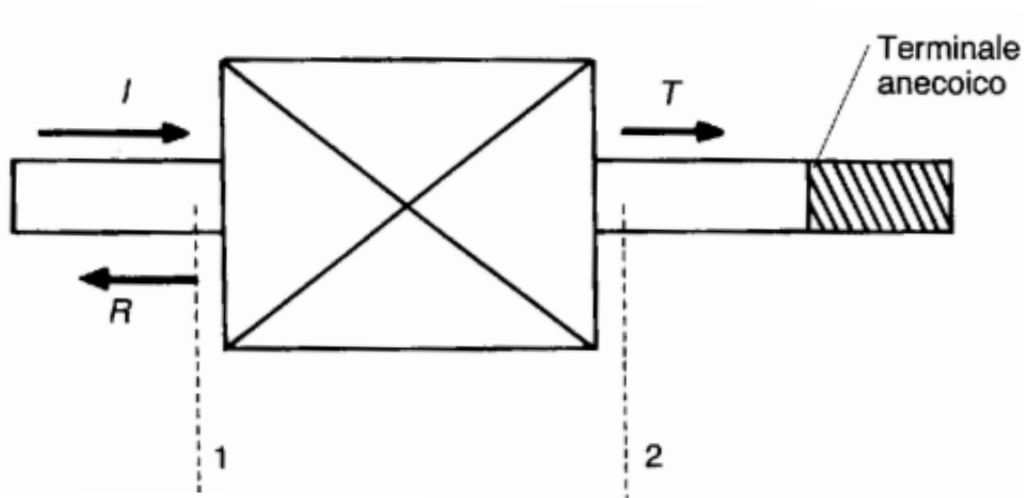


Figura 1.5: schematizzazione di un silenziatore isolato per il calcolo della transmission loss

Se così non fosse, si aggiungerebbe una dipendenza dell'intensità sonora e quindi una variabilità anche del tipo di fluido utilizzato e delle sue condizioni termodinamiche.

Affinché tale parametro sia determinato correttamente è indispensabile non avere una componente sonora riflessa nel condotto di scarico ossia è necessario che il terminale risulti anecoico.

Al momento attuale la realizzazione di un terminale realmente anecoico risulta molto complesso sia in ambito sperimentale sia in ambito numerico, per cui questa difficoltà implementativa viene normalmente superata acquisendo i dati in più punti anche nel condotto a valle del dispositivo ed effettuando più prove in cui si modificano le condizioni a monte o a valle del silenziatore (per maggiori dettagli si rimanda a [11]).

Quando il silenziatore è inserito all'interno del sistema propulsivo il suo comportamento si modifica a causa dell'interazione con gli altri componenti e contemporaneamente influisce sulla risposta globale del sistema.

Per valutare questi effetti si utilizza l'insertion loss definito come differenza tra il livello di pressione sonora in un punto dell'impianto misurata prima e dopo l'inserimento del silenziatore.

$$IL = 10 \log_{10} \left( \frac{p_{e0}^2}{p_{es}^2} \right) \quad (1.7)$$

dove  $p_{e0}$  e  $p_{es}$  rappresentano la pressione valutata prima e dopo l'inserimento del silenziatore.

Normalmente l'insertion loss è il parametro che viene impiegato per le valutazioni sull'inquinamento ambientale prodotto dall'intero sistema di propulsione poiché il silenziatore è sempre parte di un sistema più complesso e non si trova mai isolato dal resto dell'impianto.

Una volta chiariti i coefficienti che permettono di valutare la bontà del componente, si possono analizzare le varie famiglie di silenziatore, facendo attenzione a quali parametri geometrici influenzano maggiormente la risposta finale.

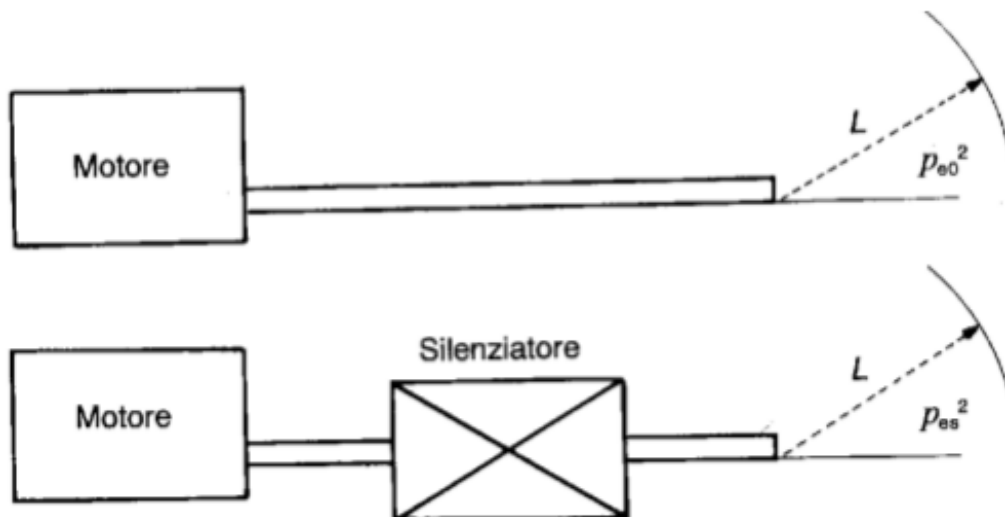


Figura 1.6: schematizzazione del processo di calcolo della insertion loss; si può notare come la misurazione della pressione venga fatta prima e dopo l'inserimento del silenziatore all'interno del sistema mantenendo la stessa distanza dal condotto finale

### 1.4.1 Silenziatori reattivi con espansione singola

La tipologia più semplice è quella dei silenziatori reattivi in cui si sfruttano le variazioni di sezione del sistema e la comprimibilità del fluido per assorbire energia e rilasciarla sfasata nel tempo.

La capacità di attenuare il rumore in funzione della frequenza dipende strettamente dalla geometria del volume che s'introduce.

Quando la variazione di volume è posta in serie al flusso dei gas si realizza il silenziatore reattivo più semplice possibile.

Il dispositivo è inefficace in corrispondenza della frequenza fondamentale

$$f_0 = \frac{a}{2L} \quad (1.8)$$

e le sue multiple intere.

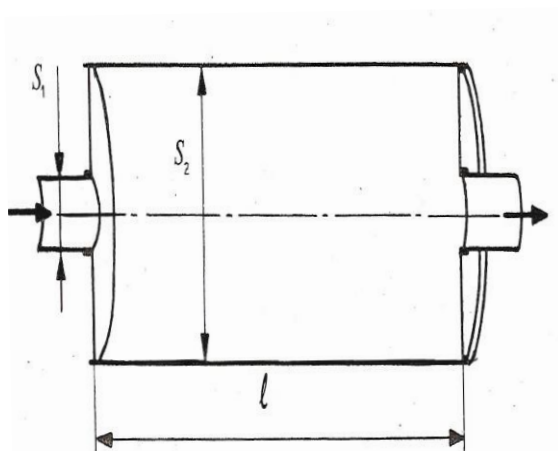


Figura 1.7a: esempio di silenziatore reattivo con camera d'espansione in serie; in figura sono indicati i principali parametri geometrici che influenzano i valori di TL ottenuti

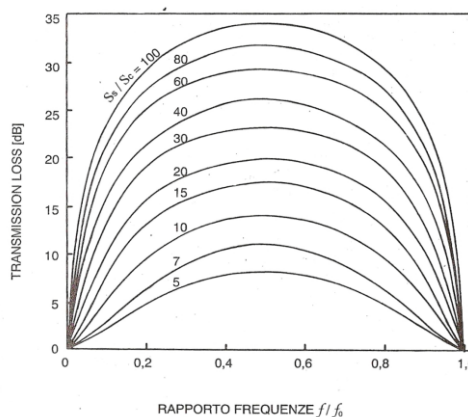


Figura 1.7b: andamento della curva di transmission loss per una camera in serie; in ordinata si hanno i valori di TL in dB; in ascissa le frequenze normalizzate rispetto alla trasparenza della camera.

Queste particolari frequenze sono dette trasparenze perché la camera si comporta come se fosse trasparente ossia lascia passare inalterata l'onda di pressione producendo un'attenuazione nulla.

Come si può notare dalla figura 1.7b l'effetto di attenuazione aumenta all'aumentare del rapporto tra la sezione del corpo centrale del silenziatore e la sezione del condotto in ingresso perché maggiore è l'effetto di riflessione che si ha all'ingresso del silenziatore.

### 1.4.2 Silenziatori reattivi con volume in parallelo

Se il volume d'aria da mandare in risonanza è posto in parallelo al condotto principale anziché in serie si crea il cosiddetto risonatore di Helmholtz oppure il risonatore a colonna (a seconda della geometria del volume).

Quando il volume in parallelo entra in risonanza assorbe quella frequenza vibrando al posto del fluido che scorre nel tubo e producendo l'effetto dissipativo cercato.

Il funzionamento risulta essere quindi diametralmente opposto rispetto ad una camera d'espansione in serie in cui l'assorbimento del sistema risultava nullo in corrispondenza della frequenza fondamentale.

Nel caso più semplice di risonatore di Helmholtz si ha un singolo volume aggiuntivo  $V_s$  interfacciato direttamente con il condotto principale oppure collegato con un generico tubo di lunghezza  $L$  e diametro  $d$ .

Qualunque sia la configurazione del silenziatore, la frequenza di risonanza è data da

$$f_0 = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{V_s}} \quad (1.9)$$

dove il parametro  $k$  è detto conduttività fluidodinamica e dipende solamente da grandezze geometriche del risonatore come si può notare dalla sua definizione

$$k = \frac{\pi R^2}{\left(L + \frac{\pi R}{2}\right)} \quad (1.10)$$

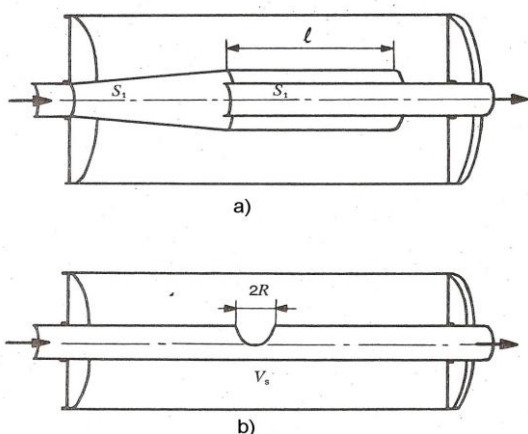


Figura 1.8a: esempi di silenziatori con camera in parallelo. Nel primo caso si ha un "collo" d'ingresso di lunghezza  $l$  mentre nel secondo caso questo collegamento è assente

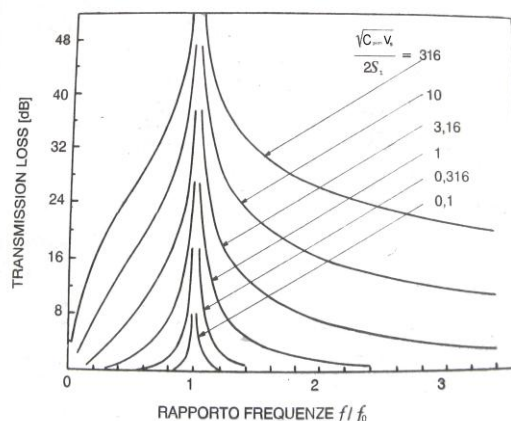


Figura 1.8b: andamento della curva di transmission loss per un silenziatore con risonatore di Helmholtz in parallelo. In ordinata si hanno i valori di TL di dB mentre in ascissa si hanno le frequenze normalizzate rispetto a quella di risonanza

Per frequenze differenti da quella di risonanza la capacità di attenuazione del rumore decresce in funzione del parametro  $\sqrt{kV_s}/2S_c$  in cui viene messa in risalto l'importanza della forma del risonatore rispetto alla sezione del condotto.

Si nota che più la differenza tra i due aumenta (cioè il rapporto diventa più grande) e più l'effetto attenuante prodotto si estende anche a frequenze lontane da quella di risonanza (come è possibile notare nell'immagine 1.8b).

Bisogna comunque considerare che allo stesso modo cresce la massa, e quindi l'inerzia, del fluido che vibra e l'ingombro del silenziatore all'interno del veicolo per cui potrebbe essere necessario raggiungere un compromesso tra la capacità d'abbattimento voluta e lo spazio disponibile.

### 1.4.3 Silenziatori reattivi a colonna

Se il volume posto in parallelo ha dimensioni paragonabili con quelle del condotto in cui transitano i gas si parlerà di silenziatori a colonna.

In questo caso la frequenza di risonanza del sistema è

$$f_0 = \frac{a}{4L} \quad (1.11)$$

Quando il sistema in parallelo è sollecitato in corrispondenza della frequenza di risonanza oppure delle sue multiple dispari assorbe l'energia contenuta nel fluido generando il massimo effetto dissipativo (corrispondentemente si avrà un massimo nella curva di transmission loss).

Dalla relazione (1.11) si può notare come per avere frequenze di risonanza basse (quelle a maggior contenuto energetico come mostrato in figura 1.4) siano necessarie lunghezze dei risonatori spesso non trascurabili che portano a realizzare condotti con geometrie non banali al fine di minimizzare l'ingombro complessivo all'interno del veicolo.

### 1.4.4 Silenziatori dissipativi

Il susseguirsi di repentine espansioni e compressioni introduce una serie di perdite di carico che influenzano negativamente le prestazioni dell'intero sistema.

Per tali motivi in alcuni casi, soprattutto in ambito sportivo dove la limitazione dei pesi e la massimizzazione delle prestazioni sono due richieste fondamentali per ogni componente, può risultare più interessante l'impiego di silenziatori dissipativi che utilizzano materiali fonoassorbenti per abbattere il rumore emesso.

L'attenuazione prodotta è proporzionale alla superficie di contatto tra gas e materiale fonoassorbente e allo spessore di materiale impiegato (questo effetto è più marcato alle basse frequenze mentre tende ad essere meno evidente alle frequenze medio - alte).

Date le buone capacità d'isolamento termico fornite dai materiali fonoassorbenti attualmente impiegati nell'industria è possibile impiegare per l'involucro esterno dei silenziatori materiali più leggeri ed innovativi senza preoccuparsi che il calore rilasciato dai gas ne alteri l'integrità strutturale.

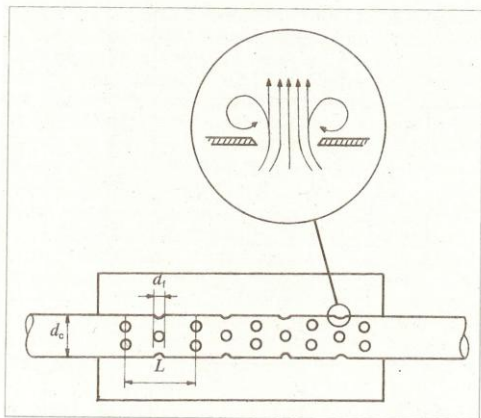


Figura 1.9a: esempio di silenziatore con elementi forati. Nel dettaglio si schematizza la formazione di vortici all'uscita dei fori con conseguente dissipazione d'energia

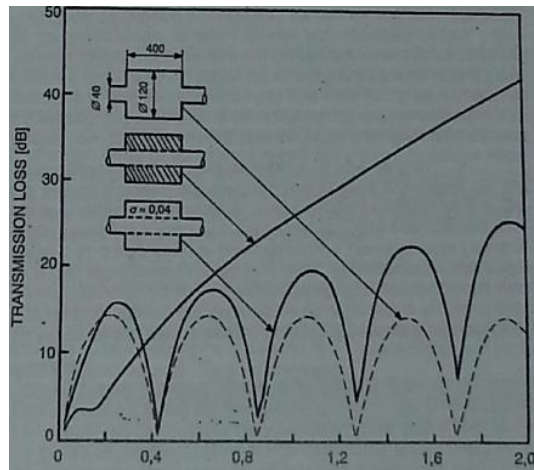


Figura 1.9b: andamento della curva di transmission loss per un silenziatore dissipativo. In ordinata si hanno i valori di TL di dB mentre in ascissa si hanno le frequenze espresse in kilohertz

Indipendentemente dal principio fisico utilizzato per dissipare energia, è possibile prevedere la presenza di fori dal diametro relativamente piccolo sulla superficie laterale dei condotti interni al silenziatore.

Come si vede dal dettaglio della figura 1.9a, quando i gas passano attraverso i fori tendono a formare dei vortici laterali che parzialmente dissipano l'energia contenuta nel fluido.

Per questo tipo di silenziatori il parametro discriminante è la porosità intesa come rapporto tra la superficie totale dei fori e la superficie laterale del condotto considerato

$$\sigma = \frac{n_{fori} \pi d_{fori}^2}{4 \pi d_{condotto} L} \quad (1.12)$$

Dalla figura 1.9b si può vedere come all'aumentare della porosità le curve di transmission loss tendano ad assumere un andamento sempre più simile a quello dei silenziatori reattivi con camera d'espansione in serie.

Infatti, se idealmente la porosità assumesse valore unitario, il condotto centrale sarebbe interamente forato e quindi non sarebbe più presente all'interno del silenziatore.

Per porosità tendente al valore nullo l'abbattimento diventa trascurabile perché i gas rimangono confinati nel condotto principale senza subire dissipazioni energetiche.

A causa dei costi inferiori, del miglior funzionamento alle basse frequenze e costanza nel tempo delle prestazioni d'abbattimento fornite, gli elementi forati stanno sempre più sostituendo l'utilizzo di materiale fonoassorbente nei silenziatori dissipativi.

Anche nei silenziatori reattivi gli elementi forati sono sempre più impiegati come collegamento tra le camere poiché ne migliorano l'abbattimento sonoro alle alte frequenze.

Dato che i silenziatori dissipativi non rappresentano l'oggetto principale di questo lavoro di tesi si preferisce terminare questa breve dissertazione rimandando ad eventuali testi più specifici.

Nonostante la classificazione netta delle varie tipologie di silenziatore fatta finora, nelle applicazioni reali i componenti vengono realizzati utilizzando più principi fisici dando origine a geometrie finali molto complesse.

## 1.5 Influenza dello spessore della lamiera

Tutte le curve di transmission loss considerate finora sono ricavate nell'ipotesi che la rigidità strutturale del silenziatore impedisca qualsiasi tipo di vibrazione indotta dal passaggio delle perturbazioni acustiche ovvero l'effetto della vibrazione della parete del silenziatore sull'abbattimento della pressione sonora è trascurabile rispetto a quello prodotto dalla sola conformazione del componente considerato.

Come si può vedere dalla figura 1.10, che riporta i rilievi sperimentali per il calcolo della transmission loss seguendo la procedura definita in [5], quest'ipotesi può ritenersi valida fintantoché la geometria del silenziatore o lo spessore dei materiali impiegati per la sua realizzazione sono tali per cui le frequenze proprie del sistema solido-elastico non vanno a ricadere nel campo di frequenze studiato numericamente o sperimentalmente.

Diminuendo lo spessore della lamiera alcune frequenze naturali iniziano ad essere eccitate dal moto oscillatorio dei gas, imposto dall'alternarsi delle fasi d'aspirazione e scarico (o da qualsiasi altra sorgente sonora prescelta nel caso di prove con componente isolato).

In queste condizioni il dominio fluido e quello solido non possono più essere considerati in maniera indipendente ma devono essere studiati congiuntamente per capire come il comportamento di uno influenza la risposta dell'altro (per questo motivo si parla di problemi con interazione tra fluido e struttura o, abbreviando, problema FSI).

Infatti l'energia sonora contenuta nel fluido, anziché essere dissipata, come è normale attendersi da un silenziatore acustico, è aumentata o diminuita in si somma o si sottrae l'energia introdotta dai modi propri di vibrare del sistema solido analizzato.

In questo modo si amplifica la potenza sonora in uscita dal silenziatore e quindi, per l'espressione (1.6), diminuisce il valore di transmission loss.

Dato che le onde sonore prodotte durante una prova sperimentale difficilmente superano i 500 Pa di ampiezza, le vibrazioni che si vogliono cogliere saranno molto contenute ma gli effetti che producono non lo sono sicuramente.

Osservando la figura 1.10 infatti si può vedere come la differenza tra le curve ricavate considerando o tralasciando la possibilità che i due domini possano interagire tra loro non è certamente limitata e trascurabile.

Confrontando i risultati riportati in figura 1.10 e nell'immagine 1.11 si può apprezzare ancora meglio quanto la vibrazione delle pareti esterne o di piccoli componenti interni possa modificare l'andamento reale delle curve rispetto a quello atteso.

Inoltre si può vedere come all'aumentare della complessità della configurazione geometrica scelta per il componente (intesa come numero di camere che compongono il silenziatore, presenza di condotti interni eventualmente forati, possibilità che i condotti a monte e a valle possano entrare all'interno delle camere del silenziatore, ecc.) si registri un aumento nel distacco tra i valori di transmission loss calcolati trascurando l'interazione tra i diversi domini ed i rilievi sperimentali che necessariamente tengono in considerazione questo aspetto .

Infatti mentre nel caso semplice di una camera singola con espansione le difformità erano sempre limitate entro i 5-10 dB, nel secondo caso le differenze tra valori numerici e sperimentali supera anche i 20 dB.

A fronte di questi errori di previsione appare evidente come il problema dell'interazione fluido-struttura non possa essere considerato come accessorio rispetto alla realizzazione del componente finale, ma debba essere studiato in maniera attenta e approfondita per compensarne gli effetti con eventuali modifiche del progetto studiato.

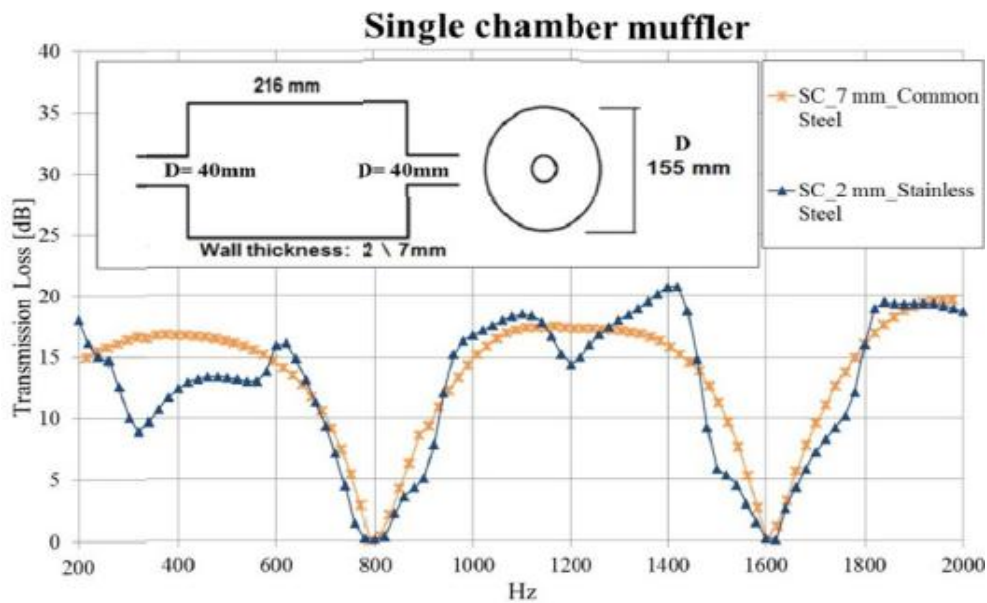


Figura 1.10: misurazioni sperimentali di transmission loss per una camera ad espansione in serie al variare dello spessore della parete esterna

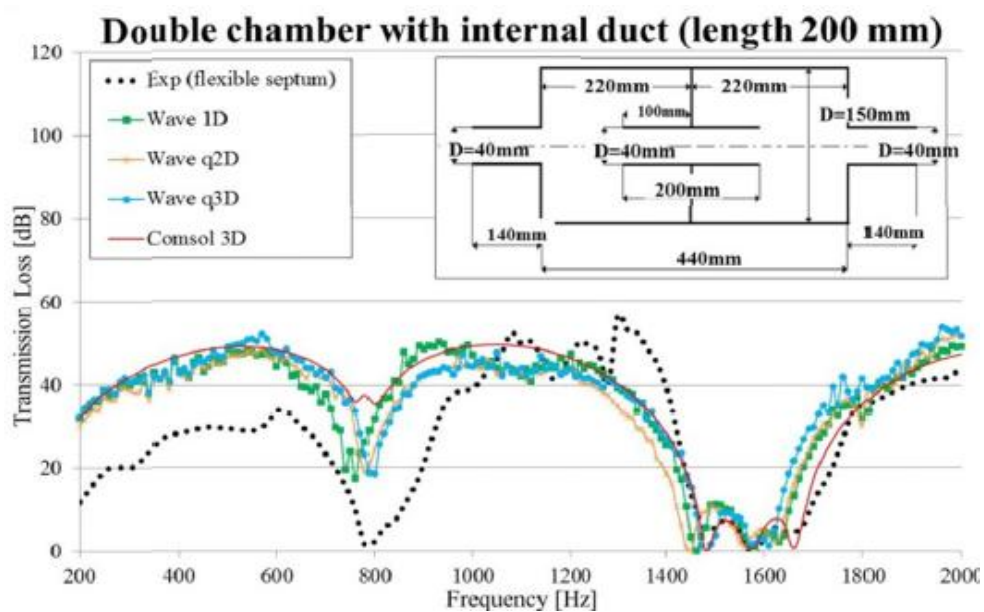


Figura 1.11: confronto tra le curve di transmission loss ottenute numericamente e sperimentalmente per un silenziatore a doppia camera in cui lo spessore del materiale che compone il condotto centrale è di appena 0.8 mm

Nelle prossime pagine si cercheranno di illustrare le caratteristiche e le possibilità di un nuovo solutore in grado di risolvere l'interazione tra fluido di lavoro e struttura solida elastica.

In questo modo la simulazione acustica verrà corretta includendo gli effetti legati all'eventuale vibrazione delle pareti del silenziatore indotta dalle perturbazioni acustiche che propagano all'interno del dispositivo.



# CAPITOLO SECONDO: APPROCCIO ALE PER LO STUDIO DI PROBLEMI DI INTERAZIONE FLUIDO-STRUTTURA

---

## 2.1 Definizioni generali

Dato sistema continuo, in cui cioè la scala dei fenomeni osservati è diversi ordini di grandezza superiore alla scala atomica degli elementi costituenti, è possibile descriverne il l'evoluzione nel tempo seguendo due approcci:

- lagrangiano in cui ogni singolo punto della griglia di calcolo segue una e una sola particella materiale durante tutto il suo moto.

Questo tipo di approccio è particolarmente indicato quando si devono studiare i fenomeni che avvengono all'interfaccia tra due o più domini differenti o quando il comportamento del materiale dipende dalla sua storia pregressa.

La descrizione lagrangiana diventa poco pratica quando intervengono fenomeni che coinvolgono grandi deformazioni dell'oggetto considerato perché molto tempo è speso nella rigenerazione della griglia di calcolo quando questa non presenta più caratteristiche qualitative adeguate;

- euleriano in cui la griglia di calcolo rimane fissa nello spazio ed il sistema studiato si muove rispetto a quest'ultima.

Quest'approccio è particolarmente utilizzato in ambito fluidodinamico perché permette di trattare deformazioni anche di entità non trascurabile senza aggravio nei tempi di calcolo (i vortici che si formano all'interno di un flusso vengono normalmente descritti durante una simulazione CFD).

Proprio per l'impossibilità di muovere la griglia di calcolo l'approccio euleriano non permette di descrivere con precisione i fenomeni con interfaccia variabile nel tempo.

Per cercare di correggere gli svantaggi di ciascun approccio è stato introdotto un terzo metodo definito arbitrary lagrangian-eulerian method (normalmente abbreviato con ALE method) in cui i punti della griglia di calcolo possono essere mossi seguendo perfettamente il

mezzo (come nell'approccio lagrangiano), mantenuti fermi (come nell'approccio euleriano) oppure mossi in maniera arbitraria.

Quanto detto finora è illustrato nella figura 2.1, dove viene mostrato il funzionamento dei tre diversi approcci per mezzo di una rappresentazione grafica.

Nella descrizione lagrangiana i nodi di calcolo ed i punti materiali coincidono sempre, indipendentemente dall'istante temporale considerato; nella descrizione euleriana i nodi di calcolo rimangono fissi nello spazio mentre i punti materiali si muovono al variare del tempo; la descrizione ALE è sostanzialmente una via di mezzo tra le due precedenti in cui il l'eventuale moto dei nodi è disaccoppiato da quello dei punti materiali.

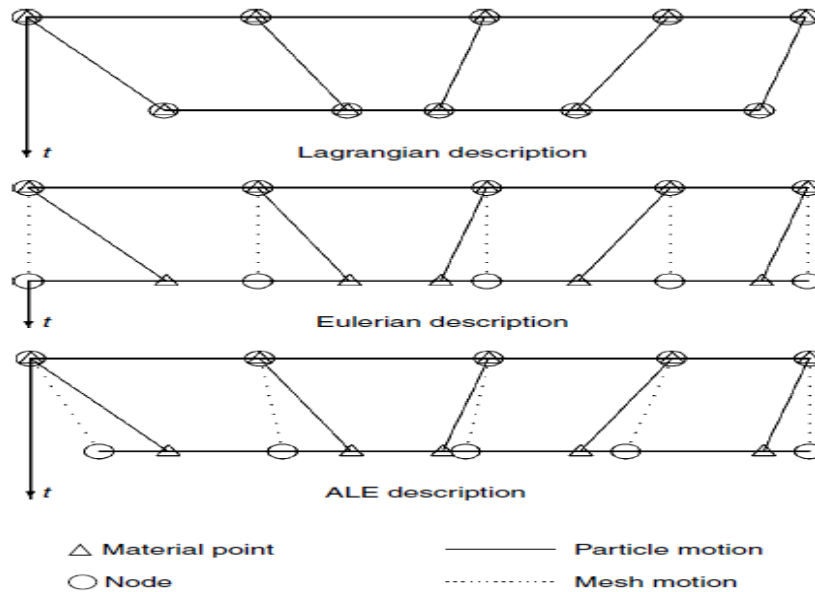


Figura 2.1: rappresentazione grafica dei tre diversi approcci: lagrangiano (sopra), euleriano (centro), ALE (basso)

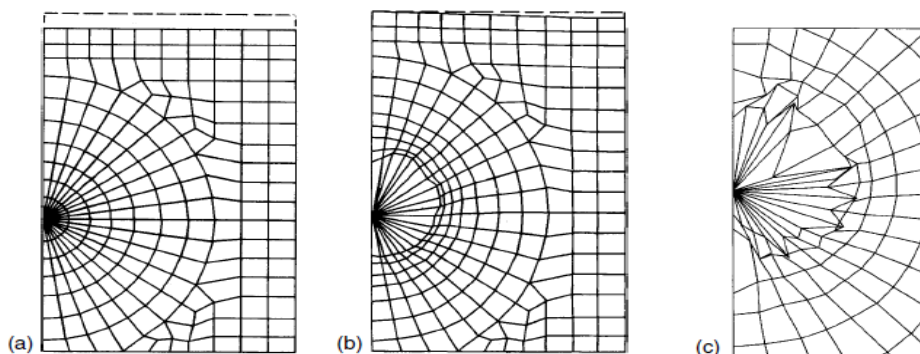


Figura 2.2: analisi della deformazione di una griglia. In a) si ha la griglia di partenza; nelle figure b) e c) si rappresenta la griglia 1 ms dopo l'esplosione ottenuta con il metodo ALE ed il metodo lagrangiano. La qualità della mesh realizzata con il metodo ALE risulta essere nettamente migliore rispetto a quella realizzata con approccio lagrangiano

L'efficacia dell'approccio ALE è ulteriormente sottolineata se si considera parte di un esempio descritto in [6] e di cui si riporta la figura 2.2 come dimostrazione visiva.

L'immagine a) rappresenta il dominio iniziale costituito da un recipiente parzialmente riempito d'acqua ed una carica esplosiva sul lato sinistro, che verrà fatta detonare all'inizio della simulazione.

Le figure b) e c) rappresentano come la griglia di calcolo si deforma dopo un millisecondo dall'esplosione della carica ed è possibile notare come l'utilizzo del metodo ALE (immagine b) permette di descrivere grandi deformazioni senza che la qualità della griglia peggiori sensibilmente, come accade invece ricorrendo ad un approccio puramente lagrangiano (immagine c).

Prima di scrivere le equazioni di conservazione di massa, quantità di moto ed energia secondo la formulazione ALE è necessario definire il concetto di derivata temporale totale che tornerà utili nel seguito della trattazione.

## 2.2 Definizione matematica di derivata in diversi domini

Per proseguire la trattazione è necessario definire tre domini chiamati rispettivamente:

- Materiale costituito dalle particelle che effettivamente compongono l'oggetto dello studio;
- Spaziale formato dai punti dello spazio scelti per descrivere il moto dell'oggetto considerato;
- Referenziale composto dai punti della griglia scelti per caratterizzare il problema.

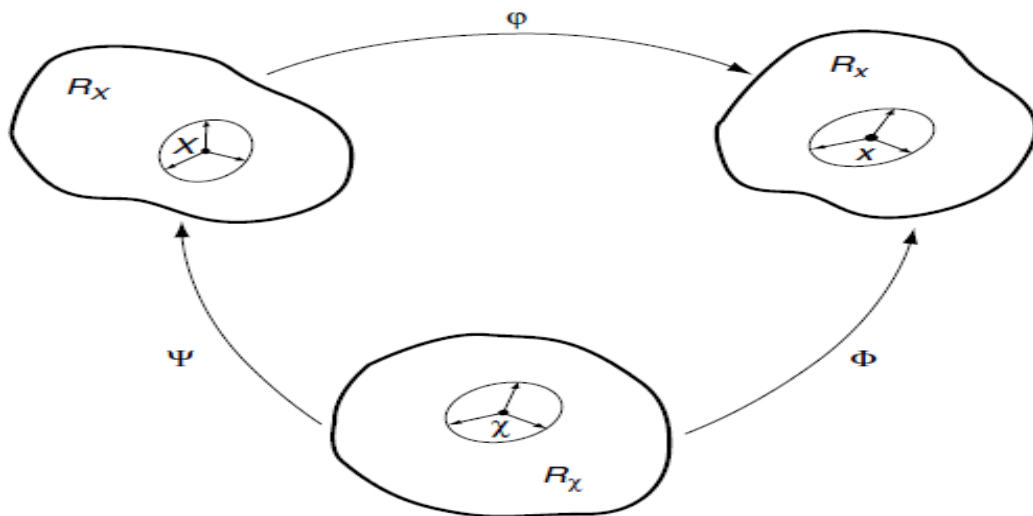


Figura 2.3: rappresentazione grafica del dominio materiale, spaziale e di riferimento con i relativi sistemi di coordinate e le relative funzioni per passare da un sistema ad un altro

Come appare dalla figura 2.3, disponibile in [6], questi tre domini non sono completamente indipendenti l'uno dall'altro ma sono legati tra loro dalle funzioni  $\varphi(\mathbf{X}, t)$ ,  $\phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\psi(\mathbf{x}, t)$ .

Poiché i tre spazi non sono indipendenti tra loro, gli spostamenti e le velocità espresse secondo un set di coordinate potranno essere espresse in un altro dominio sfruttando le relazioni funzionali sopra evidenziate.

Definiamo  $\varphi = \Phi \circ \psi^{-1}$  e deriviamo entrambi i membri rispetto alle rispettive coordinate spaziali e temporali.

$$\frac{\partial \phi}{\partial (\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial (\mathcal{X}, t)}(\psi^{-1}(\mathbf{X}, t)) \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial (\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial (\mathcal{X}, t)}(\mathcal{X}, t) \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial (\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

Saltando alcuni passaggi puramente matematici (si rimanda a [6] per una trattazione completa) e ricorrendo alla formulazione matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{v} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathcal{X}} & \hat{\mathbf{v}} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{w} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

che, dopo l'opportuno sviluppo del prodotto tra matrici, permette di ricavare:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{w} \frac{\partial x}{\partial \mathcal{X}} \quad (2.3)$$

Dall'espressione (2.3) si può notare come la velocità di movimento delle singole particelle nel dominio materiale è pari alla velocità di movimento della mesh cui si somma un termine legato al moto relativo rispetto al volume di riferimento.

Si definisce la velocità convettiva

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{w} \frac{\partial x}{\partial \mathcal{X}} \quad (2.4)$$

che rappresenta la velocità con cui si muove una particella visto dal dominio spaziale e non va confusa con la velocità di moto relativa della mesh

Infatti quest'uguaglianza vale solamente se  $\frac{\partial x}{\partial \mathcal{X}} = [I]$  cioè nel caso in cui il moto della mesh è puramente traslazionale senza rotazioni o distorsioni.

Dall'equazione generica (2.4) è possibile ricondursi all'approccio lagrangiano in cui non si ha moto relativo tra dominio materiale e spaziale e quindi  $\mathbf{w} = 0$  oppure si può utilizzare l'approccio euleriano in cui la griglia di calcolo è mantenuta fissa nello spazio e quindi  $\hat{\mathbf{v}} = 0$ .

Chiarite le definizioni delle velocità nei diversi domini e le relazioni che le legano tra loro, è possibile osservare come anche l'espressione della derivata totale di una generica grandezza  $f$  si modifica a seconda dello spazio in cui è calcolata.

Si assume:

- $f^{**}$  la funzione che descrive la grandezza nel dominio materiale;
- $f^*$  la funzione che descrive la grandezza nel dominio referenziale;
- $f$  la funzione che descrive la grandezza nel dominio spaziale.

Poiché il valore della grandezza fisica deve rimanere lo stesso, indipendentemente dal dominio su cui è osservata, vale la relazione

$$f^{**}(\mathbf{X}, t) = f^*(\mathbf{x}, t) = f(\varphi(\mathbf{X}, t)) = f \circ \varphi \quad (2.5)$$

Calcolando il gradiente di entrambi i membri ed esprimendo il risultato in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^{**}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial f^{**}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{v} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

da cui si ricava  $\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  che, riscritta tralasciando gli asterischi, diventa la ben nota espressione della derivata totale utilizzata nell'approccio puramente euleriano

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} * \nabla f \quad (2.7)$$

Nell'espressione (2.7) si mostra come la variazione nel tempo di una generica grandezza sia dovuta a una variazione locale nel tempo a cui si aggiunge un termine convettivo per tenere conto del moto relativo tra dominio materiale e dominio spaziale.

Ripetendo ora gli stessi passaggi matematici ma considerando il funzionale  $f^*$  anziché  $f$  si ottiene

$$f^{**}(\mathbf{X}, t) = f^*(\boldsymbol{\chi}, t) = f(\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{X}, t)) = f \circ \boldsymbol{\psi}^{-1} \quad (2.8)$$

$$\left( \frac{\partial f^{**}}{\partial \mathbf{X}} \quad \frac{\partial f^{**}}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial f^*}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad \frac{\partial f^*}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{w} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t} + \mathbf{w} \frac{\partial f^*}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad (2.10)$$

Dall'equazione (2.10) si può vedere come per valutare la derivata nel tempo nel dominio materiale sia necessario valutare il gradiente della generica grandezza nel dominio di riferimento.

Quest'operazione può essere fatta anche se normalmente risulta più comodo operare nel dominio spaziale piuttosto che in quello referenziale.

Dunque l'equazione (2.10) può essere modificata introducendo la velocità convettiva  $\mathbf{c}$  definita nell'espressione (2.4) ottenendo

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.11)$$

che, riscritta tralasciando gli asterischi, diventa

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} * \nabla f \quad (2.12)$$

In quest'ultima relazione si mostra come la variazione totale di una grandezza sia legata alla sua variazione locale nel dominio di riferimento più un termine convettivo che tiene conto del moto relativo tra il materiale ed il sistema di riferimento scelto.

Per arrivare a scrivere le equazioni di conservazione in forma integrale, che regolano il comportamento di un qualsiasi fluido o solido, è necessario definire matematicamente il concetto di derivata temporale di una quantità integrata su un volume che varia nel tempo.

Per fare questo consideriamo un volume materiale  $V_t$  ossia una porzione di spazio che, indipendentemente dall'istante temporale considerato, contiene sempre lo stesso numero di punti che si muovono con velocità  $\mathbf{v}$ , è continuo e definito dalla superficie chiusa  $S_t$ .

Definiamo un volume di controllo  $V_c$  fisso nello spazio delimitato dalla superficie  $S_c$  che coincide con il volume materiale solamente all'istante iniziale.

Sfruttando quindi il teorema di Reynolds possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_c \equiv V_t} \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \int_{S_c \equiv S_t} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_c} \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) \right) dV \quad (2.13)$$

in cui nell'ultima uguaglianza è stato utilizzato il teorema di Gauss per trasformare un integrale di superficie in uno di volume.

Per passare dalla formulazione classica a quella ALE è sufficiente sostituire la velocità assoluta o materiale  $\mathbf{v}$  nell'equazione (2.13) con la velocità convettiva  $\mathbf{c}$ .

### 2.3 Equazioni di conservazione nel dominio fluido

A questo punto è possibile scrivere le equazioni di conservazione della massa, del momento della quantità di moto e dell'energia partendo dalla formulazione euleriana e apportando successivamente le modifiche necessarie per tenere in considerazione la possibilità di muovere la griglia di calcolo.

Le equazioni saranno scritte sia nella forma integrale, utilizzata per commentare il significato fisico attribuito a ciascun termine che compone l'espressione, sia nella forma indefinita, utile per mostrare come le equazioni vengono implementate all'interno del solutore.

#### - Conservazione della massa

Considerato un volume generico  $V_t$  ad un generico istante temporale, la massa contenuta in questo volume sarà pari a

$$m = \int_{V_t} \rho dV \quad (2.14)$$

L'equazione di conservazione afferma che la variazione di massa in  $V_t$ , associata a variazioni locali nel tempo della densità, debba essere compensata dal flusso totale di massa attraverso la superficie  $S_t$ , cioè:

$$\int_{V_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_t} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.15)$$

che può essere riscritta utilizzando il teorema di Gauss:

$$\int_{V_t} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad (2.16)$$

ottenendo l'espressione integrale della legge di conservazione della massa.

Poiché quest'uguaglianza deve valere qualunque sia il volume  $V_t$  scelto, si può rimaneggiare l'equazione (2.16) ottenendo la sua forma indefinita

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.17)$$

Per ottenere l'equivalente relazione con il metodo ALE è sufficiente sostituire la velocità assoluta del corpo  $\mathbf{v}$  con l'equivalente velocità convettiva  $\mathbf{c}$ , per tenere conto dell'eventuale movimentazione della griglia.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{c}) = 0 \quad (2.18)$$

- **Conservazione della quantità di moto**

La conservazione della quantità di moto  $Q$  è strettamente legata al secondo principio della dinamica, ossia:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (2.19)$$

La relazione (2.19) può essere applicata sia al dominio solido, le cui equazioni saranno sviluppate in seguito, sia al dominio fluido ottenendo:

$$\int_{V_t} \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} dV + \int_{S_t} \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS = \int_{V_t} \mathbf{f}dV + \int_{S_t} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n})dS \quad (2.20)$$

Il primo membro dell'equazione è la somma della variazione locale della quantità di moto nel volume  $V_t$  e del flusso totale attraverso la superficie  $S_t$  del dominio, mentre a destra del segno d'uguaglianza si introducono le forze di volume  $\mathbf{f}$  applicate al volume fluido (come ad esempio la gravità) e la risultante degli sforzi, viscosi e idrostatici, applicati sulla superficie  $S_t$ .

Sfruttando il teorema di Gauss e ricordando che l'equazione così ottenuta deve valere per un qualsiasi volume scelto si perviene alla forma indefinita della conservazione della quantità di moto

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \rho\mathbf{g} + \nabla \left( p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot (\mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)) \quad (2.21)$$

Nel RHS è stata sostituita la generica forza di volume con la forza di gravità, che è l'unica d'interesse nel caso di problemi acustici, e gli sforzi viscosi sono stati espressi in funzione gradiente di velocità del fluido.

Per passare dall'approccio euleriano dell'equazione (2.21) all'approccio ALE è sufficiente modificare il termine convettivo per tenere in considerazione il moto della griglia

$$\frac{\partial(\rho\varphi\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{c}\mathbf{v}) = \rho\mathbf{g} + \nabla \left( p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot (\mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)) \quad (2.22)$$

Della relazione (2.22) verrà tralasciato il contributo legato al termine gravitazionale poiché è trascurabile rispetto agli altri termini.

- **Conservazione dell'energia**

Il principio di conservazione afferma che la variazione di energia totale in un fluido è pari alla variazione di potenza meccanica e termica nel volume  $V_t$  considerato.

Indicando con  $h_T$  l'entalpia totale ( $h_t = e_0 + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2$ ) si ottiene la forma integrale

$$\int_{V_t} \frac{\partial(\rho h_T)}{\partial t} dV + \int_{S_t} \rho h_T(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS = \int_{V_t} \frac{\partial p}{\partial t} dV + \int_{V_t} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})dV + \int_{S_t} ((\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v})dS - \int_{S_t} ((p \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v})dS + \int_{S_t} k(\nabla T \cdot \mathbf{n})dS + \int_{S_t} (-q \cdot \mathbf{n})dS \quad (2.23)$$

l'equivalente forma indefinita con approccio euleriano

$$\frac{\partial(\rho h_T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h_T \mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial t} + \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot (p \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left( \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho Q \quad (2.24)$$

e con approccio ALE

$$\frac{\partial(\varphi h_T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h_T \mathbf{c}) = -\frac{\partial p}{\partial t} + \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot (p \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left( \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho Q \quad (2.25)$$

Il primo membro dell'equazione è dato dalla somma del termine di variazione instazionario e del flusso di energia attraverso le superfici del dominio mentre il secondo introduce diversi termini che è meglio analizzare singolarmente :

- $-\frac{\partial p}{\partial t}$  rappresenta un termine instazionario che nasce dalla necessità di avere come variabile l'entalpia totale e non l'energia totale;
- $\rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v})$  esprime il lavoro compiuto dalla forza di gravità e, a seconda dei testi considerati, può essere incluso all'interno del termine di entalpia totale oppure definito separatamente; in questo caso verrà trascurato poiché si è deciso di non considerare gli effetti gravitazionali nelle equazioni (2.21-2.22);
- $-\nabla \cdot (p \cdot \mathbf{v})$  rappresenta il lavoro introdotto o assorbito in seguito all'interazione tra fluido e pareti mobili, come ad esempio le pale di una turbina o di un compressore in ambito turbomacchinistico o la lamiera deformabile nel caso di problemi con interazione tra fluido e struttura. Questo contributo non va confuso con il lavoro di pulsione (già compreso nel calcolo dell'entalpia totale) che ha la stessa espressione, ma la pressione considerata è quella agente sulle superfici immateriali d'ingresso e uscita del dominio;
- $\nabla \cdot \left( \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{v})$  è il termine relativo all'energia normalmente dissipata a causa dell'azione degli sforzi viscosi;
- $\nabla \cdot (k \nabla T)$  è l'energia scambiata dal fluido con l'ambiente circostante a causa di un gradiente termico.  
Poiché tutti i fenomeni studiati coinvolgono variazioni di temperatura molto contenute, nell'ordine di 4-5 gradi Kelvin, questo termine è presente nell'equazione completa ma non sarà realmente implementato all'interno del solutore;
- $\rho Q$  indica una generica sorgente di energia presente all'interno del dominio quale potrebbe essere un fenomeno di combustione.  
Poiché in questo lavoro di tesi si studieranno fenomeni esterni al cilindro non saranno prese in considerazione sorgenti d'energia.

Per chiudere il problema è necessario introdurre le equazioni di stato per descrivere il legame tra le grandezze termodinamiche considerate, cioè

$$p = p(\rho, T)$$

$$e = e(T)$$

$$h = h(T)$$



In particolare, ritenendo il comportamento del fluido assimilabile a quello di un gas perfetto, si avrà

$$\begin{aligned} p &= \rho R_{aria} T \\ e &= C_v T \\ h &= C_p T \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le equazioni fin qui definite, se opportunamente risolte, sarebbero sufficienti a risolvere sia il dominio fluido sia quello solido.

Le condizioni all'interfaccia tra fluido e struttura saranno date dalla congruenza negli spostamenti e l'uguaglianza degli sforzi agenti cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{solido} &= \mathbf{U}_{fluido} \\ [\sigma_{solido}] &= [\sigma_{fluido}] \end{aligned} \quad (2.27)$$

## 2.4 Equazioni di conservazione nel dominio solido

Poiché l'equazione (2.21) descrive il secondo principio della dinamica per un dominio fluido dove la grandezza d'interesse è la velocità  $\mathbf{v}$ , per poter essere applicata anche al dominio solido deve essere modificata, in maniera tale che la variabile principale diventi lo spostamento dei singoli punti.

Cominciamo riscrivendo l'equazione di conservazione della quantità di moto utilizzando un approccio puramente lagrangiano, come descritto anche in [7]

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_t} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS + \int_{V_t} \rho \mathbf{f} dV \quad (2.28)$$

$$\int_{V_{t_0}} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV_0 = \int_{S_{t_0}} \mathbf{n}_0 \cdot (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{F}^T) dS_0 + \int_{V_{t_0}} \rho_0 \mathbf{f} dV_0 \quad (2.29)$$

dove il pedice 0 indica la configurazione assunta come riferimento,  $\mathbf{F}$  è il tensore gradiente di deformazione definito come

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + (\nabla \mathbf{U})^T \quad (2.30)$$

e  $\boldsymbol{\Sigma}$  rappresenta il tensore di sforzo di Piola-Kirchhoff legato al tensore di sforzo di Cauchy dalla relazione

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.31)$$

Partendo dalla versione integrale dall'equazione (2.29), in cui si considera un incremento dei valori infinitesimo, si passa alla versione incrementale, in cui si considera un incremento piccolo a piacere ma finito.

Quest'approccio, definito updated-lagrangian, è stato il primo ad essere implementato a livello numerico, poiché la necessità di memorizzare una sola configurazione per istante temporale ben si adattava alle limitate risorse computazionali disponibili.

L'altro approccio, definito total-lagrangian, è stato sviluppato negli anni successivi perché richiedeva spazi in memoria superiori (dato che per ogni istante temporale è necessario

ricordare almeno due configurazioni della struttura solida) ma permette di ricostruire interamente il comportamento del materiale.

$$\int_{V_{t_0}} \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial t} dV_0 = \int_{S_{t_0}} \mathbf{n}_0 \cdot \left( \delta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{F}^T + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{F}^T + \delta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{F}^T \right) dS_0 + \int_{V_{t_0}} \rho_0 \delta \mathbf{f} dV_0 \quad (2.32)$$

A questo punto s'introduce il legame costitutivo del materiale che coinvolge il tensore di Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\Sigma}$ , il tensore di Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  ed i coefficienti di Lamé  $\mu$  e  $\lambda$

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2 \mu \mathbf{E} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T + \nabla \mathbf{U} \cdot (\nabla \mathbf{U})^T] \quad (2.34)$$

Infine si assume che la configurazione di riferimento sia sempre l'ultima calcolata.

Sostituendo l'equazione (2.34) nell'equazione (2.33) e passando all'espressione incrementale di  $\boldsymbol{\Sigma}$  si riesce a esprimere il tensore di Piola-Kirchhoff in funzione solamente dello spostamento  $\mathbf{U}$  del punto della griglia

$$\delta \boldsymbol{\Sigma} = \mu [\nabla \delta \mathbf{U} + (\nabla \delta \mathbf{U})^T] + \lambda \operatorname{tr}(\nabla \delta \mathbf{U}) \mathbf{I} + \mu \nabla \delta \mathbf{U} \cdot (\nabla \delta \mathbf{U})^T + \frac{1}{2} \lambda (\nabla \delta \mathbf{U} : \nabla \delta \mathbf{U}) \mathbf{I} \quad (2.35)$$

Sostituendo l'equazione (2.35) nell'equazione (2.32) si ottiene l'equazione di conservazione della quantità di moto per un solido con comportamento lineare, in cui la variabile principale è lo spostamento  $\mathbf{U}$

$$\int_{V_t} \rho \frac{\partial \delta v}{\partial t} dV - \int_{S_t} \mathbf{n} \cdot (2\mu + \lambda) \nabla \delta \mathbf{U} dS_0 = \int_{S_t} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS + \int_{V_t} \rho \delta \mathbf{f} dV \quad (2.36)$$

$$\mathbf{q} = \mu (\nabla \delta \mathbf{U})^T + \lambda \operatorname{tr}(\delta \mathbf{U}) \mathbf{I} - (\mu + \lambda) \nabla \delta \mathbf{U} + \mu \nabla \delta \mathbf{U} \cdot (\nabla \delta \mathbf{U})^T + \frac{1}{2} \lambda (\nabla \delta \mathbf{U} : \nabla \delta \mathbf{U}) \mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{F}^T + \delta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \delta \mathbf{F}^T \quad (2.37)$$

Possiamo notare come a sinistra del segno d'uguaglianza si hanno solamente termini che dipendono linearmente dallo spostamento mentre a destra il termine  $\mathbf{q}$  racchiude tutti i termini non lineari dovute alle varie sostituzioni fatte in precedenza.

Per determinare una soluzione univoca per l'equazione (2.36) è necessario definire una condizione al contorno che tenga in considerazione la pressione e gli sforzi tangenziali applicati dall'esterno del dominio ed esprimere l'incremento di spostamento  $\delta \mathbf{U}$  in funzione di questi valori, così da continuare a mantenere un'unica variabile d'integrazione.

Dopo alcuni passaggi matematici che non saranno riportati, ma che sono disponibili in [7], quello che si ottiene è

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 \cdot \nabla \delta \mathbf{U} = & \left( (\delta t - p \mathbf{n}) \frac{dS}{dS_0} - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_0 \cdot \delta \mathbf{F}_0^T \right) \cdot \frac{(\mathbf{F}_0^{-1})^T}{(2\mu + \lambda)} - \\ & - \mathbf{n}_0 \cdot \frac{\mu (\nabla \delta \mathbf{U})^T + \lambda \operatorname{tr}(\delta \mathbf{U}) \mathbf{I} - (\mu + \lambda) \nabla \delta \mathbf{U} + \mu \nabla \delta \mathbf{U} \cdot (\nabla \delta \mathbf{U})^T + \frac{1}{2} \lambda (\nabla \delta \mathbf{U} : \nabla \delta \mathbf{U}) \mathbf{I}}{(2\mu + \lambda)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

A questo punto tutti gli elementi sono disponibili per definire lo stato della regione solida. Infatti:

- combinando le espressioni (2.36) e (2.38) è possibile determinare l'entità dell'incremento dello spostamento di ogni punto della griglia  $\delta \mathbf{U}$  e lo spostamento aggiornato  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \delta \mathbf{U}$ ;
- noto l'incremento degli spostamenti è possibile determinare la variazione degli elementi del tensore di Piola-Kirchhoff  $\delta \boldsymbol{\Sigma}$  tramite la relazione (2.35) ed i valori complessivi  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 + \delta \boldsymbol{\Sigma}$ ;
- noto il tensore di Piola-Kirchhoff e calcolato il tensore  $\mathbf{F}$ , è possibile determinare il tensore degli sforzi secondo Cauchy all'interno di tutto il componente.

Scritte le espressioni che regolano il comportamento della regione fluida e di quella solida è necessario scegliere come andare a risolvere il sistema d'equazioni così ottenuto.

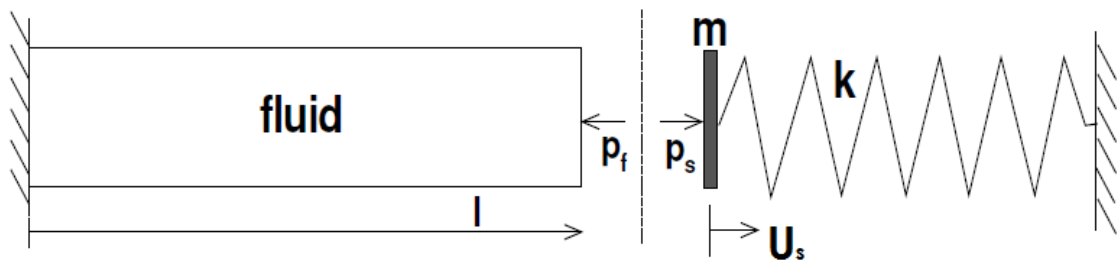


Figura 2.4: rappresentazione semplificata di un problema FSI. A sinistra il dominio fluido visto come un corpo la cui rigidità è funzione della comprimibilità; a destra il dominio solido rappresentato come un sistema massa-molla. Nella zona d'interfaccia si ha la congruenza degli sforzi e degli spostamenti tra i due domini.

## 2.5 Metodo risolutivo del sistema d'equazioni

Esistono sostanzialmente due metodi per trattare l'accoppiamento tra le due regioni:

- monolitico;
- partizionato.

Con l'approccio monolitico il dominio fluido-solido viene considerato nella sua interezza e tutte le equazioni presentate in precedenza vengono risolte attraverso un unico sistema, come mostrato ad esempio in [2] e [8].

Questo metodo prevede la definizione di una singola griglia di calcolo comprensiva di entrambi i domini; in queste condizioni il problema dello scambio accurato d'informazioni all'interfaccia tra i due domini viene risolto eliminando direttamente l'interfaccia.

L'approccio monolitico permette di risolvere l'interazione fluido-struttura con estrema precisione poiché, non essendo presente una reale separazione tra i due domini, si elimina la fase d'interpolazione dei valori all'interfaccia che costituisce una delle principali fonti d'approssimazione della soluzione.

Inoltre un metodo monolitico risulta essere energeticamente conservativo, così come affermato e dimostrato in [9], per cui la scelta dell'entità dell'avanzamento temporale è legata solamente all'accuratezza che si vuole avere nella soluzione ma non ne influenza la stabilità finale.

La necessità di risolvere l'intero sistema di equazioni simultaneamente rende questo metodo estremamente dispendioso sia a livello temporale sia a livello di risorse.

computazionali richieste (necessità di memorizzare e risolvere una matrice che comprende i punti sia del dominio fluido sia di quello solido).

Per tali motivi l'approccio monolitico richiede codici estremamente efficienti e dedicati per il problema considerato, nel tentativo di ottimizzare le prestazioni e minimizzare i tempi. Tutto quanto è stato espresso viene riassunto nella figura 2.4

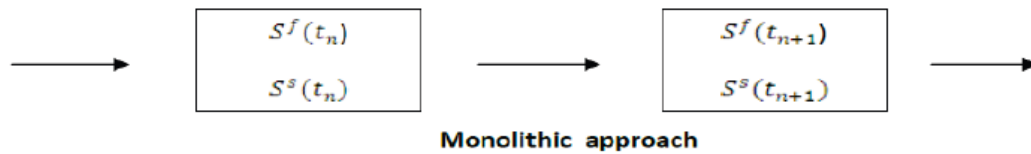


Figura 2.5: schema grafico dell'approccio monolitico. In esso le equazioni che regolano il comportamento del fluido e quelle che regolano il comportamento del solido sono risolte per ogni istante temporale come un unico sistema

Con l'approccio partizionato il dominio fluido ed il dominio solido vengono trattati separatamente considerando le rispettive griglie di calcolo e algoritmi risolutivi.

In questo caso i due domini comunicano tra di loro attraverso le condizioni imposte all'interfaccia per cui diventano fondamentali le operazioni di determinazione della posizione della zona di contatto (che normalmente non è nota a priori) d'interpolazione delle grandezze dalla superficie fluida a quella solida e viceversa.

Come detto in [9], l'approccio partizionato tende a non essere energeticamente conservativo, per cui il sistema che ne deriva risulta instabile se l'entità del passo temporale scelto è eccessiva.

L'utilizzo di un metodo partizionato è indicato quando si vogliono studiare problemi in cui sono coinvolti geometrie particolarmente complesse, riducendo il tempo d'elaborazione grazie all'ottimizzazione dei singoli algoritmi sviluppati per la fluidodinamica e per la meccanica dei solidi.

Questa riduzione dei tempi di calcolo viene però parzialmente mitigata dalla necessità di adottare un avanzamento temporale minore rispetto all'approccio monolitico.

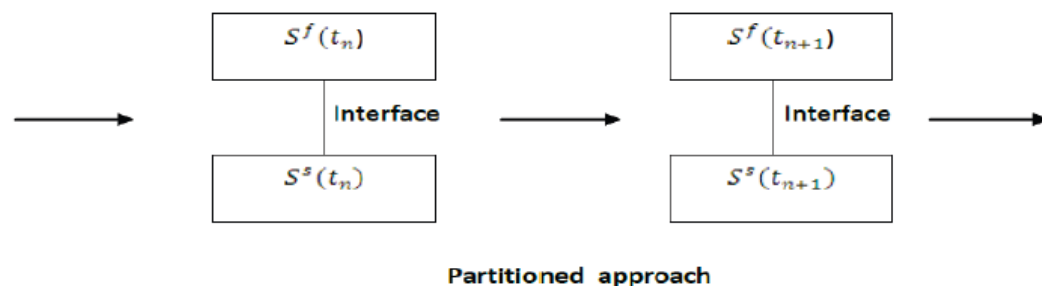


Figura 2.6: schema grafico dell'approccio partizionato. In esso le equazioni dei due domini sono risolte separatamente una o più volte per ogni istante temporale e le informazioni di congruenza sono scambiate attraverso l'interfaccia esistente tra le due regioni

A seconda del valore assunto dal rapporto tra la densità del solido e la densità del fluido l'accoppiamento sarà:

- debole (o *weakly coupled*) se il rapporto è superiore a 50: la densità della regione solida è molto maggiore della densità della regione fluida (casi di interazione fluido-struttura di interesse ingegneristico) per cui la velocità d'adeguamento del dominio solido (legata alla sua inerzia) alle variazioni di stato della regione fluida è trascurabile.

Questa considerazione permette, ad istante temporale fissato, di risolvere le equazioni che regolano la parte fluida e quella solida una sola volta;

- forte (o *strongly coupled*) se il rapporto è inferiore a 10: l'ordine di grandezza delle densità è simile tra i due domini (casi di interazione fluido-struttura di interesse biomedico) per cui la deformazione del campo fluido si riflette in maniera consistente sulla deformazione del campo solido.

Questo fatto fa sì che, ad istante temporale fissato, sia necessario risolvere più volte sia le equazioni fluidodinamiche sia le equazioni del solido fino a quando la differenza tra due soluzioni consecutive trovate non è inferiore ad una certa tolleranza.

Nell'ottica di implementare un solutore più accurato e stabile e che potesse adattarsi al maggior numero di casi possibili, si è deciso di utilizzare un approccio partizionato con accoppiamento forte tra dominio solido e fluido.

Nel caso di accoppiamento debole il solutore potrebbe risultare particolarmente inefficiente, in quanto si andrebbe a risolvere l'accoppiamento fluido-solido qualche volta in più rispetto a quelle effettivamente necessarie.

# CAPITOLO TERZO: ANALISI ACUSTICA E CALCOLO DELLA TRANSMISSION LOSS

---

Definite le equazioni che regolano il comportamento della regione fluida e solida, questo capitolo servirà a richiamare i concetti necessari per passare da una rappresentazione dei segnali nel dominio del tempo ad una rappresentazione nel dominio delle frequenze.

Una volta realizzata questa trasformazione, sarà illustrata la teoria utilizzata per l'attività di post-processing indicando, infine, come questa sia realmente applicata nella determinazione della curva di transmission loss per il componente considerato.

## 3.1 Serie di Fourier e trasformata di Fourier

Iniziamo considerando una generica funzione periodica  $f(t)$  di periodo  $T$ ; purché  $f(t)$  sia sufficientemente regolare, cioè sia continua o al più presenti un numero finito di discontinuità di prima specie, è possibile descriverla con una sommatoria di funzioni periodiche

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N \left[ a_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] \quad (3.1)$$

Se si utilizza un numero finito di armoniche, nell'equazione (3.1) varrà l'uguaglianza stretta tra i due membri solamente se la funzione considerata a sinistra è composta rigorosamente da funzioni trigonometriche; in tutti gli altri casi la sommatoria sarà solamente un'approssimazione della funzione di partenza, tanto migliore quanto più  $N$  è elevato.

Se anziché considerare un numero finito di funzioni periodiche si ha  $N \rightarrow \infty$  si ottiene una serie armonica di Fourier.

Ricorrendo ad un numero infinito di armoniche è possibile ricostruire qualsiasi funzione, anche quelle non necessariamente periodica.

Il punto più critico dell'intera teoria è la determinazione dei coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  definiti come

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega n t) dt \quad (3.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega n t) dt \quad (3.3)$$

dove si è indicato la pulsazione fondamentale come  $\omega=2\pi/T$ .

La risoluzione delle equazioni (3.2-3.3) è tanto più complicata quanto più  $f(t)$  risulta complessa e, per questo motivo, spesso è necessario ricorrere a metodi numerici approssimativi in sostituzione della soluzione in forma chiusa.

L'equazione (3.1) può essere riscritta in forma compatta ricorrendo alla notazione complessa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{-i\omega n t} \quad \gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\omega n t} dt \quad (3.4)$$

Poiché  $\gamma_n$  è un numero complesso può essere scomposto nel suo modulo, creando lo spettro delle ampiezze, e nella sua fase, creando lo spettro delle fasi.

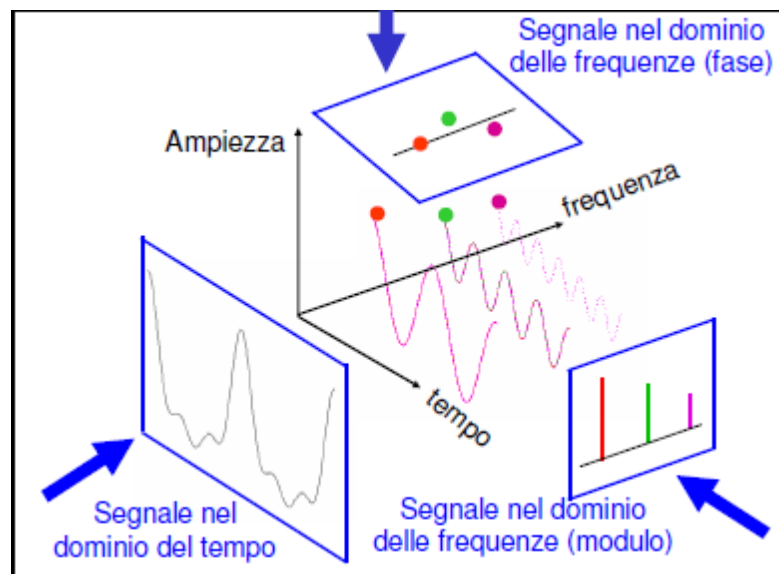


Figura 3.1: esempio d'applicazione della trasformata di Fourier. Lo stesso segnale è rappresentato in maniera differente a seconda del dominio in cui viene osservato

L'applicazione della trasformata di Fourier nella realtà così com'è stata presentata non sarebbe fattibile poiché le ipotesi iniziali sono troppo restrittive affinché possano essere soddisfatte tutte contemporaneamente.

Una delle caratteristiche principali di una serie di dati reali è, infatti, quella di essere frutto di un processo di campionamento per cui, anche se teoricamente  $f(t)$  fosse continua come richiesto dalla teoria, nella pratica si avrebbero due discretizzazioni:

- la prima legata al fatto che un qualsiasi strumento di campionamento per quanto preciso dispone di un numero finito di cifre mentre i fenomeni reali sono generalmente caratterizzati da numeri irrazionali;
- la seconda legata al fatto che lo strumento di misura ha una frequenza di acquisizione limitata per cui il segnale continuo è ricostruito tramite un numero di punti finito.

Risulta perciò fondamentale adattare uno strumento matematico importante come la trasformata di Fourier anche a funzioni discrete.

Osserviamo due differenze sostanziali tra la trasformata di un segnale a discretizzato nel tempo, avente energia finita, e un segnale continuo nel tempo ma anch'esso ad energia finita.

La prima differenza è che la trasformata del segnale continuo può avere frequenze nell'insieme  $(-\infty, +\infty)$  mentre per segnali a tempo discreto il range di frequenze è unico nell'intervallo  $[0, f_{\text{camp}}/2]$  per poi ripetersi periodico.

La seconda differenza è che la trasformata a tempo discreto è definita come sommatoria di un numero finito di elementi mentre quella a tempo continuo è un integrale, quindi una sommatoria di infiniti elementi.

Fatte le dovute considerazioni possiamo definire la trasformata discreta di Fourier (abbreviata normalmente con DFT) come

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i \frac{2\pi kn}{N}} \quad (3.5)$$

dove  $k$  rappresenta una frequenza multipla della fondamentale definita come l'inverso del periodo d'acquisizione  $\tau$ ,  $N = \tau f_{\text{camp}}$  indica il numero totale di campioni acquisiti,  $n$  è l'elemento dell'acquisizione attualmente considerato.

Se si eseguisse il calcolo della trasformata così com'è stato definito con l'espressione (3.5) il tempo d'elaborazione risulterebbe molto elevato soprattutto per set di dati con numero di campionamenti di non trascurabile.

Per questo motivo gli algoritmi che effettuano l'operazione di trasformata discreta di Fourier tentano di fattorizzare il numero di campioni  $N$  e dividere il problema di partenza in più sottoproblemi con un numero inferiore di elementi in modo da velocizzare il calcolo.

Questa prassi nota come fast Fourier transform (abbreviata FFT) fa ottenere nella maggior parte dei casi degli spettri meno accurati ma con tempi d'elaborazione più contenuti passando da  $N^2$  operazioni di somma/prodotto ad  $N \cdot \log N$  operazioni (ipotizzando 100 campioni si passa da 10000 a 200 operazioni).

### 3.2 Autospettro e Crosspettro

Si definiranno ora i concetti di autospettro e crosspettro (nel dominio delle frequenze) di un segnale o autocorrelazione e cross correlazione (se il segnale è studiato nel dominio temporale).

Come si mostrerà successivamente, queste l'autospettro ed il crosspettro rivestono un ruolo chiave per arrivare a determinare il valore finale di transmission loss.

Consideriamo due segnali indicati con  $g(t)$  ed  $h(t)$ , le cui rispettive trasformate discrete di Fourier saranno indicate con  $G(f)$  ed  $H(f)$ ; chiameremo autospettro del segnale

$$\begin{aligned} S_{GG} &= G(f) \overline{G(f)} \\ S_{HH} &= H(f) \overline{H(f)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove con la barratura si indica il valore complesso coniugato della grandezza sottostante.

L'autospettro di un segnale è uno strumento molto utile perché permette di stimare la potenza contenuta nel segnale al variare della frequenza considerata.

Per dimostrare quest'affermazione ipotizziamo di aver decomposto le funzioni  $g(t)$  o  $h(t)$  e concentriamoci su una sola armonica che indicheremo con



$$g_k(t) = A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi) \quad (3.7a)$$

$$G_k(f) = A_k e^{i\varphi} \quad (3.7b)$$

Ricordiamo che noto l'andamento istantaneo è possibile calcolare la potenza media del segnale come

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [g_k(t)]^2 dt \quad (3.8)$$

Sostituendo l'espressione (3.7a) nell'uguaglianza (3.8) otteniamo  $P = \frac{A_k^2}{2}$ , come dimostrato anche in [10].

Se ora sostituiamo l'espressione (3.7b) nella definizione (3.6) otteniamo  $S_{GG} = A_k^2$  mostrando come il risultato finale sia quello enunciato in precedenza ossia che l'autospettro del segnale è indicativo della potenza contenuta.

Come lo spettro di un segnale è la rappresentazione nel dominio delle frequenze dello stesso segnale osservato nel dominio del tempo, così la funzione autospettro è la trasposizione nel dominio delle frequenze della funzione di autocorrelazione del un segnale definita come

$$R_{gg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t)g(t + \tau) dt \quad (3.9)$$

L'autocorrelazione è una funzione molto utilizzata nella pratica poiché permette di ripulire il segnale da fenomeni di disturbo esterno o di determinare il periodo fondamentale osservando la posizione dei massimi della funzione al variare del parametro  $\tau$ .

Se estendiamo quanto esposto finora al confronto tra due segnali differenti anziché a quello di un segnale con se stesso si arriva ai concetti di crosscorrelazione e crosspettro che sono una la trasformata dell'altro.

Il crosspettro di due segnali è definito come:

$$\begin{aligned} S_{GH} &= G(f)\overline{H(f)} \\ S_{HG} &= H(f)\overline{G(f)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

I crosspettri sono in questo caso quantità complesse nelle quali il modulo è pari al prodotto dei moduli dei due segnali mentre la fase è la somma delle fasi.

Il crosspettro esprime l'affinità tra i due segnali considerati permettendo, per quanto riguarda gli obiettivi di questa tesi, di scomporre il segnale di partenza nella sua componente incidente e riflessa.

È possibile definire la funzione di crosscorrelazione, che è il duale del crosspettro nel dominio temporale, come

$$R_{gh}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t)h(t + \tau) dt \quad (3.11)$$

Poiché il calcolo della curva di transmission loss richiede un'analisi in frequenza dei segnali acquisiti, anche la crosscorrelazione, così come l'autocorrelazione, costituisce ambito marginale per gli scopi di questo lavoro di tesi e dunque non sarà approfondita ulteriormente.

Prima di passare a descrivere la teoria della decomposizione di un segnale, che sta alla base delle operazioni di post-processing per ricavare la curva di transmission loss, si ritiene

doveroso far luce su alcuni problemi comuni durante il campionamento di un segnale e le relative misure da adottare per limitarli o eliminarli.

### 3.3 Aliasing e leakage

Parlando della trasformata discreta di Fourier si è definita la frequenza di campionamento come parametro determinante per delimitare il dominio su cui i dati possono essere ritenuti ragionevolmente corretti.

La scelta della frequenza di campionamento è sostanzialmente legata a quella dei fenomeni che si vogliono studiare tramite il teorema di Nyquist-Shannon.

Tale teorema afferma che, dato un segnale  $g(t)$  in cui sono presenti armoniche con frequenza massima pari ad  $f$ , affinché il segnale sia acquisito correttamente è necessario che la frequenza di campionamento dello strumento sia almeno pari a  $2f$ .

Se tale vincolo non è rispettato il segnale viene ricostruito in maniera errata inserendo componenti armoniche che non sono realmente presenti, ossia si commette un errore denominato aliasing.

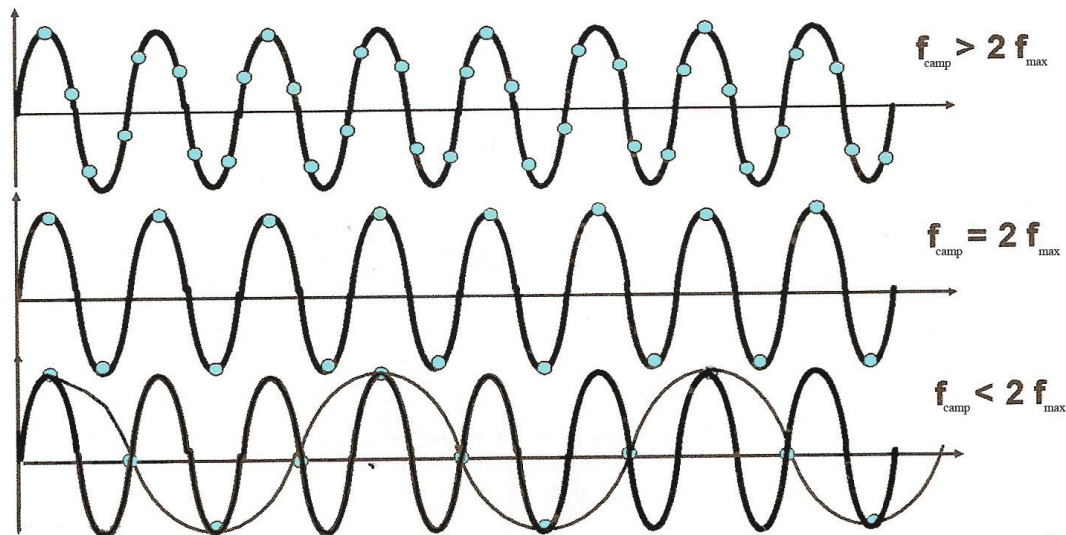


Figura 3.2: risultato dell'operazione di ricostruzione di un segnale al variare del rapporto tra la frequenza di campionamento e la frequenza del segnale osservato. Nel primo caso il teorema di Nyquist-Shannon è rispettato o la ricostruzione è corretta; nell'ultimo caso il teorema non è rispettato ed il risultato del campionamento è completamente errato

Evitare di commettere errore di aliasing è di fondamentale importanza nelle applicazioni pratiche poiché il segnale non è noto a priori e quindi non è possibile capire se l'acquisizione è corretta o meno.

A causa dell'impossibilità di sapere se il campionamento è esatto o meno, l'aliasing non è correggibile a posteriori ma può essere limitato inserendo prima dello strumento d'acquisizione un filtro passa - basso per eliminare tutte le frequenze superiori a quella concessa dal teorema di Nyquist-Shannon.

Nel caso delle simulazioni numeriche questo problema è meno sentito poiché non si sono limiti alla frequenza di campionamento, se non quelli imposti dal minimo avanzamento temporale stabilito (che normalmente è molto minore rispetto al periodo dei fenomeni considerati).

Ci sono altri due aspetti da considerare quando si lavora con i segnali:

- i record di campionamento hanno durate legate al tempo d'acquisizione;
- qualunque sia la provenienza, i dati hanno una componente aleatoria indipendente dalla fisica del problema che altera i risultati (ad esempio lo strumento d'acquisizione potrebbe introdurre un'oscillazione legata al rumore magnetico).

La prima considerazione fa sì che, dato un segnale qualsiasi alcune armoniche (che per l'espressione 3.1 si ipotizza compongano la funzione originale) non siano campionate per un numero intero di periodi.

Poiché il passaggio dal dominio temporale al dominio delle frequenze tramite l'operazione di trasformata conserva l'energia totale del segnale (altrimenti la trasformazione non potrebbe essere reversibile), l'energia legata al segnale acquisito in eccesso o in difetto è attribuita a frequenze che non sono realmente presenti nel segnale originale.

Questo errore è definito leakage ed è particolarmente grave poiché, contrariamente a quanto succede per l'aliasing, non può essere evitato a meno di non trattare segnali particolarmente semplici.

La figura 3.2 fornisce un'interpretazione visiva del fenomeno di leakage e degli effetti che produce.

Delle tre armoniche che compongono il segnale originale, la prima e l'ultima sono ricostruite correttamente (poiché sono un multiplo intero della frequenza fondamentale definita come  $1/t_{acquisizione}$ ) mentre l'energia della seconda viene assegnata a frequenze non corrette

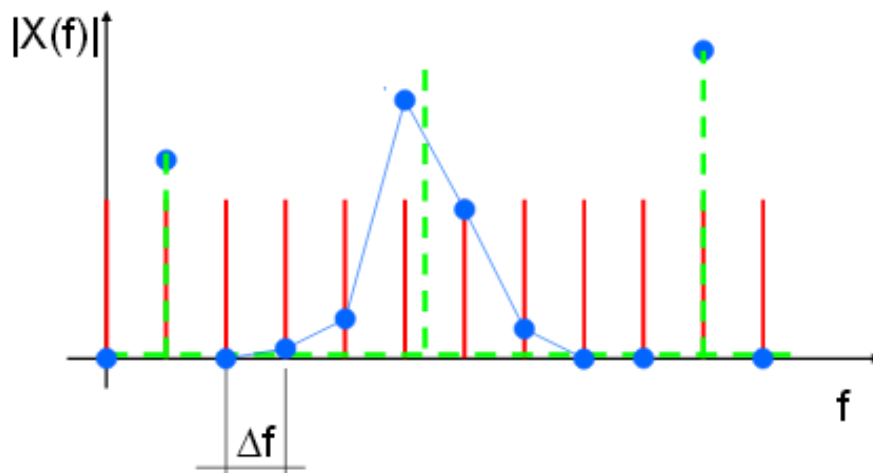


Figura 3.3: rappresentazione nel dominio delle frequenze del fenomeno di leakage; la seconda armonica non è presente nello spettro discretizzato e la sua energia è ripartita sulle frequenze adiacenti

Una soluzione per ridurre tale fenomeno può essere:

- acquisire dati per un periodo più lungo, in maniera tale che lo spettro sia realizzato con un  $\Delta f$  molto piccolo, ma questa soluzione non è sempre praticabile soprattutto se il fenomeno che si sta analizzando ha una durata finita;
- finestrare il segnale acquisito ossia moltiplicarlo per un'opportuna funzione peso (detta appunto finestra temporale) che tende ad annullarsi all'inizio e al termine del periodo d'acquisizione.

In questo modo i periodi incompleti che sono acquisiti durante i primi e gli ultimi istanti del campionamento vengono abbattuti e la loro presenza nello spettro delle frequenze, anche se non viene eliminata completamente, viene limitata parzialmente.

La presenza di rumore non correlato con il segnale acquisito è l'ultimo errore che va corretto o limitato prima di poter operare con i dati.

Poiché il rumore è per definizione un fenomeno di natura casuale, esso può essere eliminato mediando più record nel dominio del tempo o in quello delle frequenze; infatti il disturbo, se fosse veramente randomico, avrebbe un valore medio nullo o comunque trascurabile mentre la parte deterministica rimarrebbe disponibile per analisi successive.

L'efficacia di questa operazione cresce quanto più il numero di sottoperiodi creati è elevato poiché sarà più facile che le componenti aleatorie del rumore si compensino tra di loro.

Se il segnale non è periodico, come ad esempio potrebbe essere la risposta di un sistema ad una sollecitazione impulsiva, il time averaging è ancora possibile ma non più come definito in precedenza.

In questo caso non è possibile individuare una durata per cui tutte le armoniche sono acquisite per un numero intero di periodi e quindi la media sarebbe fatta su record non correlati tra loro.

È però possibile effettuare un'operazione di filtraggio dei dati tramite un'opportuna funzione (come avveniva nel caso della finestrazione per ridurre il leakage).

Questa tecnica prevede di calcolare il valor medio per un primo record di valori la cui lunghezza dipende della finestra temporale utilizzata (i pesi assegnati a ciascuna rilevazione cambiano secondo il filtro utilizzato); successivamente un nuovo campione è incluso nella finestra mentre il primo campione utilizzato viene escluso e si ripete l'operazione di media fino all'esaurimento dei dati disponibili.

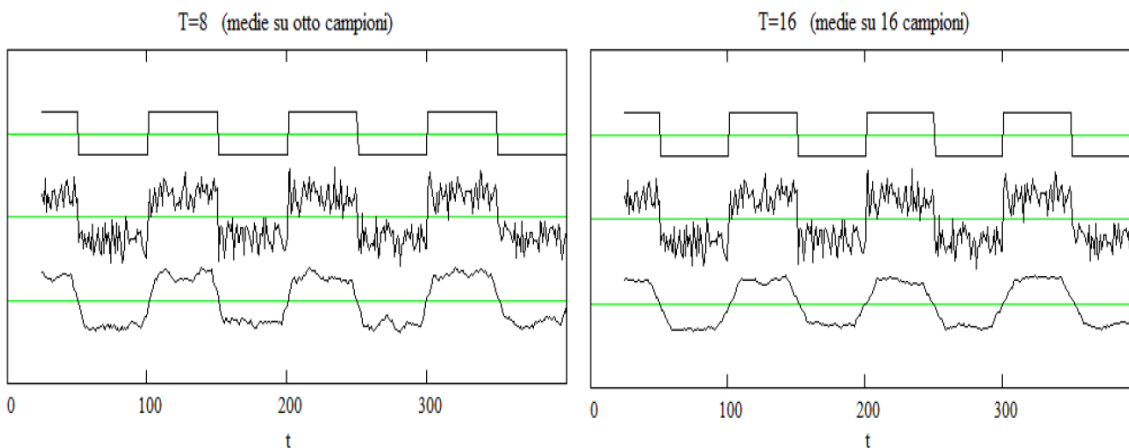


Figura 3.4: effetto del numero di campioni considerato in ogni finestra temporale. Nell'immagine di sinistra in cui si considerano solo otto campioni il segnale finale risulta più simile al segnale teorico anche se presenta elementi di disturbo ben visibili; nell'immagine di destra le fluttuazioni aleatorie sono molto meno visibili anche se il segnale tende ad essere distorto in corrispondenza delle brusche variazioni di valori

La scelta della lunghezza della finestra temporale è un parametro fondamentale per ottenere un buon risultato finale.

Una finestra molto breve permette di descrivere rapide variazioni nell'andamento del segnale ma non elimina il disturbo in maniera soddisfacente mentre una finestra molto lunga

permette di eliminare il disturbo ma contemporaneamente tende ad appiattire i gradienti marcati.

Le due modalità di time averaging descritte si basano entrambe su due ipotesi fondamentali che non sempre risultano verificate nella realtà, ossia:

- il rumore ha valore atteso nullo;
- il rumore interagisce con il segnale in maniera lineare ossia la componente aleatoria è semplicemente aggiunta o sottratta alla componente deterministica.

### **3.4 Teoria della decomposizione di un segnale in un condotto**

Dopo avere descritto gli errori da evitare ed i vincoli da rispettare durante il campionamento di un segnale e dopo aver introdotto i principali strumenti matematici utilizzati nel dominio delle frequenze, si presenterà ora la teoria della decomposizione utilizzata per il post-trattamento dei dati ed il calcolo successivo della transmission loss.

Questa teoria è stata sviluppata sul finire degli anni settanta come metodo per la caratterizzazione del campo sonoro nei condotti ed è applicabile a qualsiasi tipo di fluido, sia esso liquido o gassoso.

#### **3.4.1 Ipotesi d'applicazione**

I principali vantaggi che hanno permesso alla teoria della decomposizione di essere applicata in svariati campi sono la sua relativa facilità e velocità di applicazione.

Infatti con solo tre punti di misura e poche prove sperimentali o simulazioni numeriche è possibile caratterizzare il campo sonoro in maniera completa, mentre altri metodi più accurati come il metodo dei due carichi o il metodo delle due sorgenti, descritti in [11], sono più laboriosi da implementare poiché necessitano di quattro sonde e di almeno due serie di prove per estrarre i valori cercati, una con la sorgente sonora a monte e una con sorgente a valle del silenziatore.

I principali svantaggi di tale teoria sono legati alle ipotesi preliminari che devono essere soddisfatte affinché i risultati ottenuti siano corretti, come sottolineato in [12].

Innanzitutto è necessario che la perturbazione propaghi all'interno del condotto con un fronte piano dato che l'intera teoria è sviluppata per casi monodimensionali.

Come si mostrerà nel capitolo sesto, questo fatto non rappresenta una forte limitazione a patto di porsi sufficientemente lontano da brusche variazioni geometriche; infatti in presenza di discontinuità il fronte d'onda tende a diventare sferico facendo cadere la modellizzazione d'onda piana.

La seconda richiesta è che il terminale del condotto d'uscita sia anecoico ossia non rifletta onde di pressione da valle verso monte.

Questa necessità è data dal fatto che a valle del silenziatore è presente un solo strumento di misura per cui, se il terminale dovesse riflettere parte delle perturbazioni, non sarebbe possibile determinare quale sia l'energia effettivamente dissipata dal silenziatore poiché alcune componenti verrebbero considerate più volte.

In realtà l'uscita anecoica perfetta è solo un'astrazione teorica ed una minima riflessione sarà sempre presente sia nelle simulazioni numeriche sia nelle prove sperimentali.

L'impossibilità di avere un'uscita non riflettente e l'errore che ne deriva applicando ugualmente tale teoria sono una possibile causa delle lievi oscillazioni che si potrebbero avere nelle curve di transmission loss.

La figura 3.4 è una schematizzazione del sistema che verrà considerato da ora in avanti, dove il silenziatore è visto come una scatola nera i cui effetti vengono rilevati dai microfoni 1-2-3.

### 3.4.2 Formulazione matematica

Obiettivo del metodo della decomposizione sarà di scomporre la perturbazione sonora generata dalla sorgente nella sua parte incidente (indicata con AA) e nella sua parte riflessa (indicata con BB) a partire dalle acquisizioni dei microfoni 1 e 2.

Nota l'andamento nel tempo della pressione totale nei punti di misura è possibile calcolare il segnale equivalente nel dominio delle frequenze e successivamente determinare gli autospettri ed il crosspettro che saranno indicati con  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  e  $S_{12}$ .

In particolare il crosspettro dei segnali è opportuno che venga rappresentato come somma della sua parte reale e della sua parte immaginaria ossia  $S_{12} = C_{12} + jQ_{12}$ .

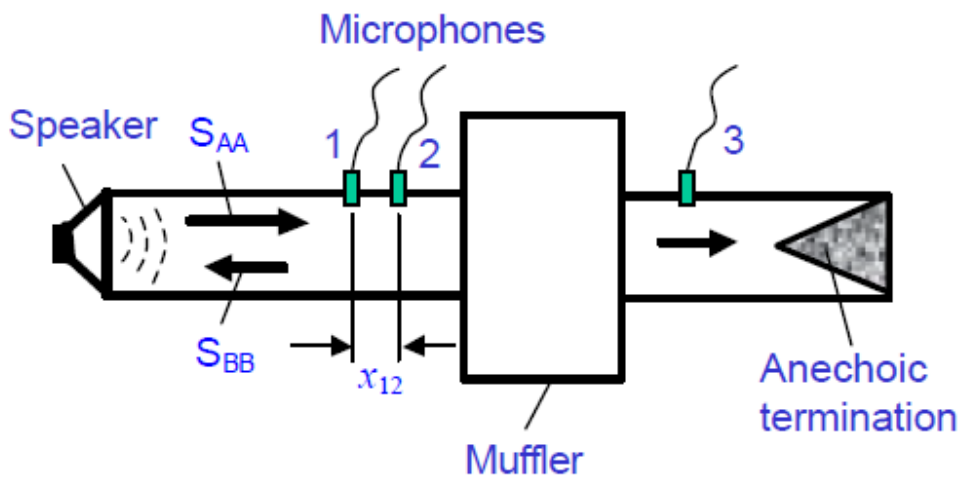


Figura 3.5: schematizzazione dell'apparato sperimentale utilizzato nella teoria della decomposizione. Da sinistra a destra si ha: la sorgente sonora, i microfoni 1e 2 posizionati a monte del silenziatore per poter calcolare la componente incidente e riflessa, silenziatore da studiare visto come una black box, microfono 3 per l'acquisizione del segnale trasmesso e l'uscita perfettamente anecoica (solamente in teoria)

Definite le quattro grandezze per ogni frequenza dello spettro, è possibile determinare la parte incidente e riflessa della perturbazione sonora, risolvendo il sistema algebrico lineare

$$[A][S_{AA} \ S_{BB} \ C_{AB} \ Q_{AB}]^T = [S_{11} \ S_{22} \ C_{12} \ Q_{12}]^T \quad (3.12)$$

Nell'equazione (3.12) la matrice  $[A]$  ha dimensioni  $4 \times 4$  ed è composta dagli elementi così definiti

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1 \\ a_{13} &= 2\cos(k_i + k_r)x_1 \\ a_{14} &= 2\sin(k_i + k_r)x_1 \\ a_{23} &= 2\cos(k_i + k_r)x_2 \\ a_{24} &= 2\sin(k_i + k_r)x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \cos(k_i(x_1 - x_2)) \\
a_{32} &= \cos(k_r(x_1 - x_2)) \\
a_{33} &= \cos(k_i x_2 + k_r x_1) + \cos(k_i x_1 + k_r x_2) \\
a_{34} &= \sin(k_i x_2 + k_r x_1) + \sin(k_i x_1 + k_r x_2) \\
a_{41} &= \sin(k_i(x_1 - x_2)) \\
a_{42} &= -\sin(k_r(x_1 - x_2)) \\
a_{43} &= \sin(k_i x_2 + k_r x_1) - \sin(k_i x_1 + k_r x_2) \\
a_{44} &= \cos(k_i x_2 + k_r x_1) - \cos(k_i x_1 + k_r x_2)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

dove  $k_i = \frac{k}{1+M}$ ,  $k_r = \frac{k}{1-M}$ ,  $k = \frac{2\pi f}{a}$  indica il numero d'onda,  $a$  è la velocità del suono nel fluido,  $M$  è il numero di Mach ed  $x_1$  e  $x_2$  sono la distanza delle due sonde dal bordo d'ingresso del silenziatore.

Nelle prove di transmission loss condotte, le velocità istantanee del flusso sono estremamente basse (nell'ordine di 0.1-0.01 m/s) per cui il numero di Mach che ne deriva è vicino al valore nullo.

In virtù di tale fatto nella trattazione che segue si riterrà valida l'ipotesi che  $k_i = k_r = k$ ; se ciò non dovesse essere un'approssimazione accettabile il metodo descritto continua a rimanere valido a patto di distinguere il numero d'onda della parte incidente e della parte riflessa come fatto nelle espressioni (3.13).

La teoria esposta finora entra in crisi quando la velocità media del flusso si avvicina a valori sonici (cioè per  $M \approx 1$ ) poiché l'argomento delle funzioni trigonometriche non è più definito.

Dato che il sistema (3.12) è algebrico e non differenziale, è possibile trovare una soluzione analitica in forma chiusa senza dover ricorrere al calcolo numerico, come mostrato nel dettaglio in [12].

Nello specifico è sufficiente invertire la matrice  $[A]$  per ottenere la soluzione

$$[S_{AA} \ S_{BB} \ C_{AB} \ Q_{AB}]^T = [A]^{-1} [S_{11} \ S_{22} \ C_{12} \ Q_{12}]^T \tag{3.12}$$

dove  $[A]^{-1}$  ha la seguente forma

$$[A]^{-1} = \frac{1}{4 \sin^2 \left[ \frac{2k(x_1 - x_2)}{2} \right]} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2a_{32} & -2a_{42} \\ 1 & 1 & -2a_{31} & -2a_{41} \\ -a_{23}/2 & -a_{13}/2 & a_{33} & a_{43} \\ -a_{24}/2 & -a_{14}/2 & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Come chiarito in precedenza la funzione autospettro è, a meno di una costante moltiplicativa, rappresentativo della potenza contenuta nel segnale vista nel dominio delle frequenze.

Appare quindi una logica conseguenza utilizzare gli autospettri della potenza incidente e di quella trasmessa per il calcolo della curva di transmission loss.

Scriviamo l'espressione dell'autospettro della potenza incidente derivante dalla soluzione del sistema (3.12):

$$S_{AA} = \frac{S_{11} + S_{22} - 2C_{12} \cos[k(x_1 - x_2)] + 2Q_{12} \sin[k(x_1 - x_2)]}{4 \sin^2[k(x_1 - x_2)]} \quad (3.14)$$

mentre la potenza trasmessa sarà pari a  $S_{33}$  ritenendo corretta l'ipotesi di terminale anecoico (con tutte le conseguenze discusse in precedenza).

Per tentare di correggere l'effetto dell'uscita perfettamente non riflettente si potrebbe pensare di inserire un quarto punto d'acquisizione dati ed applicare la teoria della decomposizione anche sul condotto a valle.

Tuttavia a valle del silenziatore non è presente una sorgente sonora che impone un campo ben definito e quindi la componente "incidente" che si determinerebbe sarebbe composta sia dalla parte trasmessa dal silenziatore sia dalla parte che è stata doppiamente riflessa nel condotto (una prima volta dal terminale non anecoico e una seconda volta dalla discontinuità geometrica rappresentata dal silenziatore).

Nel caso la realizzazione di un terminale anecoico rappresenti una limitazione tecnologica non superabile, è possibile utilizzare il metodo delle due sorgenti, come è stato fatto ad esempio in [5] e [11].

Noti gli autospettri si può calcolare l'andamento delle pressioni totali nel dominio delle frequenze utilizzando la relazione

$$\begin{aligned} p_{AA} &= \sqrt{S_{AA}} \\ p_{33} &= \sqrt{S_{33}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sfruttando le relazioni (1.3) e (1.6) è possibile giungere all'espressione finale della transmission loss nell'ipotesi, non troppo forte, che le condizioni termodinamiche del fluido non cambino in maniera significativa tra la sezione d'ingresso e d'uscita del silenziatore

$$TL(f) = 20 \log_{10} \left( \frac{p_{AA}(f)}{p_{33}(f)} \right) + 10 \log_{10} \left( \frac{S_{in}}{S_{out}} \right) \quad (3.16)$$

Osservando con maggiore attenzione l'espressione (3.13) si può notare che in funzione del parametro  $x_1 - x_2$ , ossia della distanza tra le sonde 1 e 2, esistono valori del numero d'onda, chiamati numeri d'onda caratteristici, che rendono il sistema indeterminato poiché annullano il determinante della matrice  $[A]$ .

Nel caso generale i numeri d'onda che annullano il determinante si trovano risolvendo

$$-16 \sin^4[(k_i + k_j)(x_1 - x_2)/2] = 0 \quad (3.17)$$

da cui si ottiene

$$k_n = \frac{n\pi(1-M^2)}{x_1 - x_2} \quad (3.18)$$

$$f = \frac{n(1-M^2)a}{2(x_1 - x_2)} \quad (3.19)$$

Dall'espressione (3.19) si può osservare che maggiore è la distanza tra le sonde e minore sarà la prima frequenza cui si verificherà il problema della singolarità.

Ipotizzando che  $M=0$  per un valore di  $x_1 - x_2$  di 10 millimetri la prima frequenza critica vale 17150 Hz, per un valore di 50 mm, distanza che potrebbe essere assunta in alcune applicazioni pratiche, è di 3430 Hz.



Questi esempi mostrano come, in funzione del campo d'interesse che si vuole considerare, sia possibile scegliere in modo opportuno la distanza tra le sonde.

Nel caso di vincoli esterni sulla scelta della posizione è possibile prevedere una terza sonda in modo tale che, qualora una delle due distanze assuma un valore critico, si possa lavorare con una coppia diversa di trasduttori.

### 3.5 Implementazione pratica della teoria

Dopo aver mostrato la teoria che permette di passare dalle acquisizioni dei sensori al calcolo della potenza incidente in un condotto, in questo paragrafo si mostrerà come tutti i concetti esposti finora vengono utilizzati all'interno di un'applicazione (scritta in linguaggio python) per la determinazione della curva di transmission loss.

Innanzitutto è necessario riprodurre all'interno del caso numerico l'equivalente dei sensori utilizzati nelle prove sperimentali.

Per far ciò è sufficiente definire tre *cellZone* (il numero varia a seconda della teoria utilizzata) su cui verranno acquisiti i valori di pressione e velocità al progredire del tempo simulato.

A livello numerico queste tre zone potrebbero avere anche l'estensione di una singola cella anche se questa scelta non è opportuna poiché non riproduce la reale acquisizione fatta con i sensori.

Infatti, nonostante i sensori abbiano dimensioni sempre più contenute, non riusciranno mai a realizzare un'acquisizione puntuale e risentiranno sempre del campo di moto circostante.

Considerando un volume più esteso le grandezze acquisite possono essere mediate tenendo in considerazione i valori su più celle, dando quindi un'informazione più completa dello stato all'interno del condotto rispetto a ciò che si otterrebbe con una semplice acquisizione puntuale.

Tendenzialmente non ci sono vincoli precisi per la scelta della posizione dei punti d'acquisizione se non quello imposto dalla distanza tra le sonde per non annullare il determinante dell'equazione (3.13) all'interno del range di frequenze studiato.

In pratica si vedrà che è meglio mantenere una certa distanza anche dalle sezioni d'ingresso e d'uscita dove le perturbazioni iniziano la loro transizione da onda piana ad onda sferica e quindi la teoria esposta non è più applicabile.

Un parametro molto importante è quello legato alla frequenza con cui i valori di pressione e velocità vengono calcolati e scritti in un apposito file, utilizzato nel proseguo dell'analisi.

Anche in questo caso non ci sono imposizioni particolari per la scelta di questo parametro purché sia rispettato il vincolo imposto dal teorema di Shannon-Nyquist.

Nota la pressione statica e la velocità del flusso è possibile calcolare la pressione totale che è la vera variabile d'interesse per i calcoli futuri:

$$P_{tot} = p + \frac{1}{2} \rho_{fluid} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \quad (3.20)$$

Nota l'andamento temporale della pressione totale durante l'intera simulazione, è possibile considerare sottoperiodi più brevi, la cui durata è data dall'inverso della minima frequenza che si vuole considerare, ed effettuare l'operazione di media d'insieme per pulire il segnale da disturbi incorrelati con l'eccitazione in ingresso.

A questo punto si applica l'operazione di trasformata per passare dal dominio temporale a quello delle frequenze in cui è sviluppata la teoria della decomposizione descritta nel paragrafo precedente.

Una volta nota la potenza sonora incidente in ingresso al componente e quella trasmessa a valle del silenziatore al variare della frequenza si può applicare l'espressione (3.16) per determinare l'andamento della curva di transmission loss

# CAPITOLO QUARTO: METODI NUMERICI

---

In questo capitolo saranno presentati i principali elementi teorici utilizzati nel calcolo numerico, mostrando come questi elementi vengono utilizzati all'interno del software OpenFOAM per la risoluzione delle equazioni differenziali.

Qualunque sia il metodo numerico scelto, il punto di partenza è sempre il modello matematico che si vuole andare a rappresentare ossia le equazioni differenziali che si vogliono risolvere con le relative condizioni al contorno e iniziali.

Poiché non è possibile trovare una soluzione in forma chiusa per il sistema di equazioni descritte nel secondo capitolo (se non in casi di geometrie molto semplici e regimi di moto particolari), una volta scelto il modello matematico che si vuole descrivere è necessario definire come andare a discretizzare i vari termini sia a livello temporale sia a livello spaziale.

## 4.1 Metodi numerici per la discretizzazione di equazioni differenziali

I tre metodi di discretizzazione dello spazio sono:

- Differenze finite è il primo metodo numerico per la risoluzione delle equazioni alle derivate parziali ad essere stato studiato e sviluppato nel diciottesimo secolo. In esso le equazioni differenziali vengono risolte suddividendo il dominio in più nodi e sostituendo alla derivata parziale la differenza tra i valori della funzione valutata su due nodi adiacenti. Si ottiene così tante equazioni algebriche quanti sono i nodi della griglia utilizzata che dovranno essere risolte contemporaneamente per determinare lo stato del sistema. In ogni espressione le incognite sono le grandezze definite sul nodo considerato e su quelli a lui connessi. La relativa facilità concettuale si scontra però con il grosso svantaggio della limitazione a geometrie semplici discretizzate con griglie strutturate (in cui le dimensioni degli elementi sono costanti), come sostenuto in [3];
- Volumi finiti si basano sulla forma integrale delle equazioni definite nel capitolo due, che saranno risolte per ciascun volume in cui è suddiviso il dominio.

Al centro di ciascun volume c'è un nodo d'integrazione cui vengono assegnate le grandezze calcolate mentre sulle superfici del volume i valori vengono trovati con varie tecniche interpolanti (approccio co-located).

Anche in questo caso si ottiene un sistema di equazioni algebriche da risolvere in maniera diretta o iterativa a seconda della complessità del problema.

Si può adattare a geometrie semplici o complesse ed è abbastanza intuitivo da implementare grazie al significato fisico che conservano i termini delle equazioni;

- Elementi finiti è molto simile a quello dei volumi finiti poiché integrano le equazioni di conservazione su opportuni volumi in cui viene suddiviso il dominio.

La differenza principale è che le equazioni, prima di essere integrate sul dominio, sono moltiplicate per una funzione peso, detta funzione di forma.

Questo metodo può essere impiegato per studiare geometrie sia semplici sia complesse indipendentemente dalla discretizzazione adottata.

Esistono altri metodi che però sono utilizzati per particolari classi di problemi e quindi non saranno citati nel presente lavoro.

Se la griglia di calcolo realizzata è realizzata in maniera accurata, la soluzione cui si perviene è la stessa indipendentemente dal metodo scelto; la decisione finale spetterà dunque allo sviluppatore del codice seconda i criteri che riterrà più opportuni.

## 4.2 Tipologie di griglia

Come accennato in precedenza, la definizione della griglia di calcolo può influenzare sia il metodo risolutivo scelto sia i risultati ottenuti (in termini di qualità e tempo di calcolo per ottenerli).

Seguendo la stessa suddivisione adottata in [3], le tipologie di griglia che si possono avere sono strutturate, strutturate a blocchi o non strutturate.

Nella prima categoria le celle non sono mai sovrapposte e ogni nodo può essere univocamente definito da tre coordinate cartesiane. Nel caso bidimensionale ogni elemento è circondato da altri quattro mentre nel caso tridimensionale da altri sei.

La matrice derivante dal sistema di equazioni algebriche presenta una disposizione regolare degli elementi non nulli che può essere sfruttata per sviluppare algoritmi risolutivi ottimizzati, riducendo di molto i tempi computazionali necessari per l'ottenimento della soluzione.

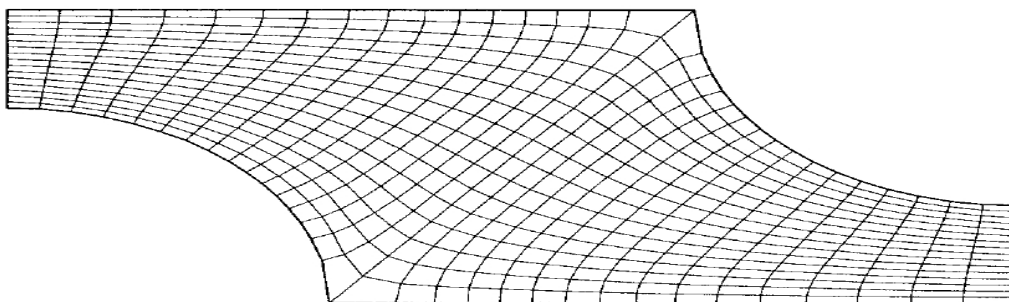


Figura 4.1: esempio di griglia di calcolo strutturata con elementi non ortogonali

Gli svantaggi che s'incontrano sono essenzialmente due:

- non si riescono a trattare geometrie particolarmente complesse;
- non sempre vi è completo controllo sulla distribuzione dei nodi di calcolo nel dominio.

La necessità di avere un numero elevato di nodi per regioni di accuratezza potrebbe generare in altre zone della griglia una piccola spaziatura senza motivo.

Come mostrato nella figura 4.1 una griglia strutturata non implica necessariamente che i suoi elementi siano tutti perfettamente ortogonali tra loro.

Le griglie strutturate a blocchi tentano di risolvere il problema della distribuzione dei nodi suddividendo l'intero dominio in sottodomini di dimensioni inferiori, ognuno discretizzato utilizzando una griglia strutturata ma con un numero di elementi non necessariamente uguale a quelli presenti negli altri blocchi adiacenti.

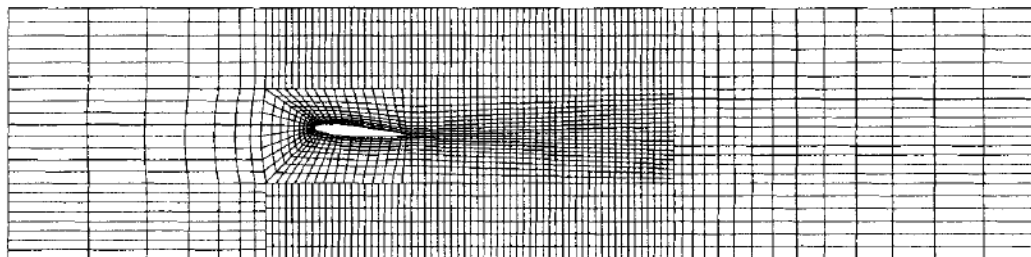


Figura 4.2: esempio di griglia strutturata a blocchi utilizzata per lo studio dei profili alari

Le griglie strutturate a blocchi generano sistemi algebrici più complessi e richiedono l'implementazione di metodi dedicati per gestire lo scambio d'informazioni tra le interfacce di blocchi con dimensione di cella differenti.

Tuttavia è possibile di studiare in maniera più accurata flussi per geometrie più complesse e articolate rispetto a quanto si potrebbe fare utilizzando una griglia strutturata pura.

Infine si hanno le griglie non strutturate utilizzate nel caso di geometrie molto complesse e/o irregolari.

Con questo tipo di griglia ogni elemento può avere un numero qualsiasi di nodi e ogni nodo può essere condiviso da un numero qualsiasi di elementi.

Questa flessibilità viene pagata ottenendo matrici algebriche estremamente disordinate per cui la convergenza verso la soluzione cercata è molto più lenta rispetto delle griglie di calcolo strutturate.

Ovviamente è possibile generare griglie di calcolo in cui si uniscono più tipologie tra loro; nell'immagine 4.3 si può notare una griglia strutturata attorno al profilo circolare mentre allontanandosi le dimensioni tendono ad aumentare e ad essere sempre meno regolari.

### 4.3 Discretizzazione di un'equazione di trasporto con il metodo dei volumi finiti

A questo punto il sistema di equazioni differenziali di partenza anziché essere risolto sull'intero dominio viene calcolato per ogni singolo elemento che compone la griglia di calcolo.

Normalmente il sistema di equazioni che si ottiene non può essere risolto analiticamente e in forma chiusa, per cui è necessario applicare le discretizzazioni numeriche derivanti dal metodo scelto (differenze finite, volumi finiti oppure elementi finiti) per trasformare il sistema di equazioni differenziali in un sistema di equazioni algebriche.

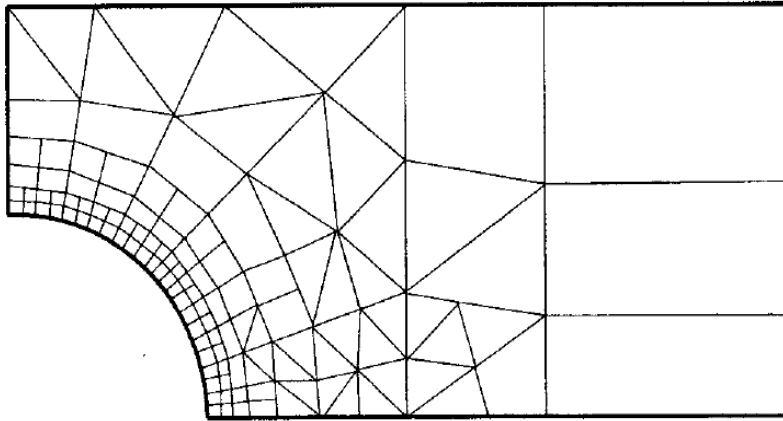


Figura 4.3: esempio di griglia di calcolo in cui non è possibile individuare un'unica tipologia di griglia

Vediamo come una generica equazione di trasporto della quantità  $\phi$  in regime stazionario (il termine temporale sarà introdotto in seguito) possa essere discretizzata numericamente utilizzando il metodo dei volumi finiti.

$$\int_S \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_V q dV \quad (4.1)$$

in cui il termine convettivo è bilanciato da quello diffusivo più un eventuale termine sorgente o assorbente.

Quest'approccio generico al problema è giustificato dal fatto che la discretizzazione dipende solamente dall'operatore considerato e non dall'appartenenza a una specifica legge di conservazione.

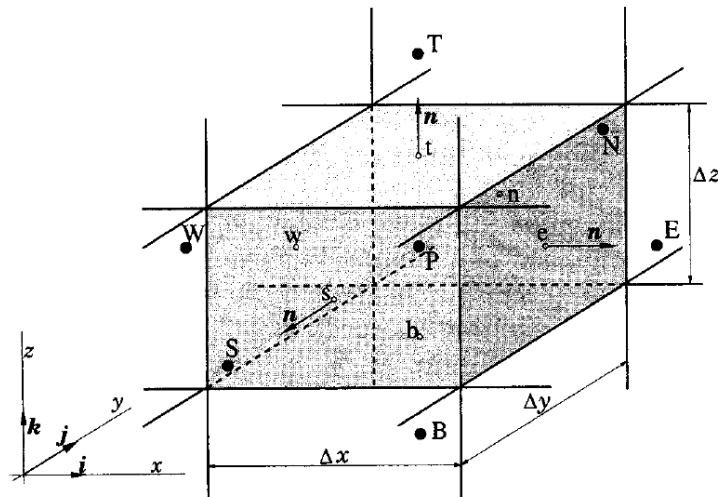


Figura 4.4: esempio di volume finito utilizzato per la discretizzazione di equazioni differenziali; in maiuscolo sono indicati i punti riferiti al centro-cella mentre in minuscolo sono indicati i punti riferiti al centro-faccia

Ragionando sulla (4.1) si può sviluppare l'argomento nella maniera più generica possibile, salvo poi sostituire al termine  $\phi$  la grandezza termodinamica più opportuna.

Seguendo i passaggi delineati all'inizio del capitolo, una volta chiarito quale sia l'equazione considerata, è necessario definire il metodo per discretizzarla e la griglia di calcolo utilizzata per rappresentare la geometria del problema.

Nel programma OpenFOAM è implementato il metodo dei volumi finiti con metodo co-located (in cui le grandezze termodinamiche calcolate sono attribuite al centro di ciascun volumetto come valore medio dell'intera cella) in alternativa all'approccio staggered (in cui alcune grandezze vengono attribuite al centro delle facce che delimitano il volume), per cui l'intera trattazione verrà sviluppata seguendo questa scelta.

Nella figura 4.4 è rappresentato un generico volume in cui il dominio completo è suddiviso; per semplicità si è assunto un elemento regolare anche se, come già detto in precedenza, si può utilizzare una forma qualsiasi.

Le matrici che si ottengono dalle equazioni differenziali sono spesso sparse (ossia gran parte dei suoi elementi sono costituiti da valore nullo) e, se la mesh di partenza è strutturata quasi tutti i valori non nulli saranno posti sulla diagonale principale o su quelle immediatamente sopra o sotto a essa.

### 4.3.1 Discretizzazione di un integrale di superficie

Per risolvere l'equazione (4.1) è innanzitutto necessario risolvere gli integrali di superficie. Facendo riferimento alla figura 4.4 è possibile suddividere l'integrale sulle superfici laterali in una sommatoria fatta sulle singole facce

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f dS \quad (4.2)$$

dove con  $f$  s'indica il generico termine convettivo o diffusivo valutato sulla faccia.

La risoluzione dell'espressione (4.2) introduce un doppio livello d'approssimazione:

- un primo livello legato al fatto che la grandezza  $f$  è calcolata esattamente solo nel centro della cella nel centro della faccia deve essere ricavata a partire dai valori noti nel centroide (l'approssimazione è legata al processo d'interpolazione);
- un secondo livello legato al fatto che l'integrale dell'espressione (4.2) è stimato utilizzando un numero discreto di punti presi sulla singola faccia (all'aumentare del numero di punti migliora l'approssimazione ma il processo diventa più laborioso).

Il metodo di approssimazione più semplice è quello del punto medio: si sviluppa la funzione  $f$  secondo Taylor e se ne calcola l'integrale sulla superficie (che rappresenta il valore medio  $f_e$ ). Infatti

$$F_e = \int_S f dS = \int_S \left[ f_e + \frac{\partial f_e}{\partial x} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \frac{\partial^2 f_e}{\partial x^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)^2 \right] dS = f_e S + \int_S \left[ \frac{\partial^2 f_e}{\partial x^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)^2 \right] dS \quad (4.3)$$

L'approssimazione con il metodo del punto medio ha un'accuratezza del secondo ordine rispetto alle dimensioni della cella ossia l'errore che si commette nel calcolo dell'integrale diminuisce in maniera quadratica rispetto alla spaziatura  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ .

Algoritmi con accuratezza maggiore possono essere applicati ma in tre dimensioni sono molto difficili da implementare e richiedono la conoscenza di più di un punto sulla superficie per la stima delle derivate di ordine superiore al primo.

### 4.3.2 Discretizzazione di un integrale di volume

Per approssimare gli integrali di volume della (4.1) si segue un procedimento concettualmente analogo a quello del punto medio utilizzato per il calcolo degli integrali di superficie in cui si sfrutta lo sviluppo in serie di Taylor e la definizione di centroide per eliminare il termine lineare dello sviluppo.

L'integrale di volume è perciò sostituito dal prodotto tra il valore medio della quantità integranda (che è calcolata nel centro della cella) e il volume della cella:

$$Q_P = \int_V q dV = q_P V + \int_V \left[ \frac{\partial^2 q_P}{\partial x^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)^2 \right] dV \quad (4.3)$$

A differenza degli integrali di superficie, il valore del termine sorgente a centro cella è calcolato senza passare da un processo interpolativo.

L'errore introdotto è dovuto solamente al calcolo dell'integrale assumendo un valore costante all'interno dell'intera cella.

Se invece s'implementano metodi d'approssimazione di ordine superiore è necessario conoscere più valori all'interno del volume definito (utilizzando ad esempio i nodi di Gauss) da utilizzare per le interpolazioni successive.

#### 4.3.3 Discretizzazione del termine di trasporto convettivo e diffusivo

Utilizzando tutte le affermazioni fatte finora possiamo riscrivere i termini dell'equazione (4.1), sfruttando la stessa notazione impiegata in [3]:

$$\int_V (\nabla \cdot \rho \phi \mathbf{u}) dV = \int_S \rho \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_k \mathbf{S}_k \cdot (\rho \mathbf{u} \phi)_k = \sum_k (S_k \rho u_n) \phi_k = \sum_k F_k \phi_k$$

$$\int_V \Gamma (\nabla \phi) dV = \int_S \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = \sum_k \Gamma_k [S_k (\nabla \phi)_k + \mathbf{r} (\nabla \phi)_k] \quad (4.4)$$

$$(\nabla \phi)_k = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{|d|}$$

Nelle equazioni (4.4) è stata formulata l'ipotesi che tutte le grandezze termodinamiche ad eccezione di  $\phi$  siano note; nella realtà quest'assunzione non sarà accettabile ed è il motivo per cui le varie equazioni di conservazione risultano non lineari ed accoppiate tra loro.

La valutazione della grandezza  $\phi$  sulle varie facce dipende fortemente dal metodo numerico scelto e una decisione errata può modificare anche in maniera non indifferente la soluzione finale calcolata.

#### 4.3.4 Discretizzazione del termine di derivata temporale

La scelta della discretizzazione temporale può ricadere sostanzialmente all'interno di due categorie:

- metodo esplicito in cui le grandezze nel nodo al tempo  $t+1$  dipendono solamente dalle grandezze calcolate nell'istante temporale  $t$ .  
E' il metodo più veloce per l'avanzamento temporale, poiché le equazioni algebriche che si trovano possono essere risolte in maniera diretta, ma è condizionatamente



stabile ossia la scelta dell'entità dell'avanzamento temporale deve essere limitata se si vuole avere una soluzione stabile.

In particolare il  $\Delta t$  scelto deve garantire che una perturbazione che si muove con velocità  $U$  deve essere catturata da due celle adiacenti.

Questa condizione in OpenFOAM si traduce nella definizione del numero di Courant  $\frac{\Delta t * U}{\Delta x}$ ; nel caso siano presenti anche perturbazioni sonore come nel caso considerato il numero di Courant diventa  $\frac{\Delta t * (U+a)}{\Delta x}$ .

Nel caso di metodo stabile tale numero deve essere minore di uno poiché la distanza percorsa dalla perturbazione sia minore della spaziatura della griglia di calcolo.

- metodo implicito in cui le grandezze nel nodo al tempo  $t+1$  dipendono dai valori assunti sui nodi adiacenti al tempo  $t+1$ .  
Il sistema di equazioni che si ottiene va risolto in maniera iterativa poiché non è possibile esprimere le singole incognite in maniera indipendente dalle altre; per questo motivo metodo implicito è più lento rispetto all'avanzamento esplicito.  
Il metodo implicito è incondizionatamente stabile ossia la soluzione ottenuta è stabile anche per avanzamenti temporali di entità più elevata (per una discretizzazione di  $10^{-6}$  secondi utilizzata con un metodo esplicito è possibile avere un avanzamento di  $10^{-3}$  secondi nel caso di metodo implicito).  
Tuttavia più il  $\Delta t$  scelto è di entità elevata e più la soluzione sarà affetta da errore.

#### 4.4 Soluzione di un sistema di equazioni algebriche e sottorilassamento della soluzione

Qualunque siano i metodi di discretizzazione adottati, il punto di arrivo è un sistema di equazioni algebriche normalmente non lineari, che deve essere risolto per ottenere la soluzione finale.

Esistono svariati algoritmi risolutivi per questo genere di problemi che si dividono essenzialmente in due categorie:

- i metodi diretti in cui le equazioni sono risolte una alla volta in maniera sequenziale;
- i metodi iterativi in cui le equazioni sono risolte più volte a partire da una soluzione ipotizzata e correggendola successivamente.

Ad eccezione dei casi più semplice, la soluzione viene trovata in maniera iterativa correggendo di volta in volta la soluzione calcolata al passo precedente

$$\mathbf{d}_{i+1}^t = \mathbf{d}_i^t + \omega \mathbf{r}_i^t = \mathbf{d}_i^t + \omega (\mathbf{d}_{i+1}^t - \mathbf{d}_i^t) \quad (4.5)$$

dove  $\mathbf{d}_{i+1}^t$  e  $\mathbf{r}_i^t$  rappresentano la soluzione calcolata e il residuo per l'istante temporale  $t$  all'  $(i+1)$ -esima iterazione.

La soluzione del sistema algebrico ottenuta assumendo  $\omega = 1$  potrebbe risultare instabile o con una velocità di convergenza estremamente bassa (intesa come numero di iterazioni necessarie al raggiungimento della tolleranza imposta).

Per tale motivo si è soliti introdurre un sottorilassamento della correzione apportata che permette di accelerare il processo di convergenza.

Seguendo la stessa classificazione proposta in [8], la scelta di  $\omega$  può essere fatta:

- imponendo un valore fisso per tutte le iterazioni. Questa scelta è la più semplice dal punto di vista implementativo ma la più complessa dal punto di vista della buona riuscita della simulazione numerica poiché il coefficiente deve essere piccolo abbastanza da smorzare le oscillazioni della soluzione ma grande a sufficienza da accelerare il processo risolutivo evitando inutili iterazioni.
- calcolando in maniera dinamica il valore di  $\omega$  in funzione delle soluzioni trovate ai passi precedenti. Tra i vari metodi esistenti quello utilizzato in questo lavoro di tesi è il sottorilassamento di Aitken con la seguente espressione

$$\omega_{i+1} = -\omega_i \frac{(r_i^t)^T (r_i^t - r_{i-1}^t)}{|r_i^t - r_{i-1}^t|^2} \quad (4.6)$$

Come si può vedere dalla (4.6) prima di poter calcolare un valore di sottorilassamento con il metodo di Aitken è necessario disporre di almeno tre soluzioni approssimate relative all'iterazione  $i$ ,  $i-1$  e  $i-2$  che dovranno essere trovate con un altro metodo di rilassamento dinamico oppure con un metodo fisso.

È importante ricordare che il valore scelto per  $\omega$  non influenza la soluzione trovata ma modifica il numero di iterazioni necessarie a calcolarla.

In questo lavoro di tesi non è stato usato sottorilassamento per la risoluzione delle equazioni definite sui singoli sottodomini mentre il sottorilassamento dinamico è stato impiegato per la risoluzione dell'accoppiamento tra fluido e struttura (se l'accoppiamento è risolto in meno di tre iterazioni il metodo dinamico non può essere utilizzato per il motivo detto in precedenza).

#### 4.5 Metodo degli elementi finiti per lo studio di sistemi meccanici

A conclusione di questo capitolo si ritiene utile discutere brevemente degli aspetti matematici che stanno alla base del metodo degli elementi finiti in quanto il programma Abaqus, utilizzato nel seguito di questo lavoro di tesi per la convalida dei risultati ottenuti, si basa su questa metodologia risolutiva.

In questo caso la trattazione sarà fatta utilizzando un dominio bidimensionale ma le considerazioni che saranno fatte possono essere ritenute valide anche per domini tridimensionali a patto di considerare la complicazione legata alla presenza di una terza dimensione.

Iniziamo considerando un generico elemento di lunghezza  $l_j$  (il pedice  $j$  è necessario perché non necessariamente tutti gli elementi devono avere la stessa lunghezza) in cui :

- $Z$  indica lo spostamento verticale del nodo considerato;
- $X$  indica lo spostamento orizzontale del nodo considerato;
- $\vartheta$  indica la rotazione (positiva se antioraria) del nodo considerato rispetto al sistema di riferimento adottato;

Lo spostamento generico  $w$  è ottenuto dagli spostamenti calcolati per i nodi del dominio utilizzando le funzioni peso citate all'inizio del capitolo, meglio note come funzioni di forma.

Queste funzioni possono avere un andamento qualsiasi (l'andamento più semplice che si possa assumere è quello lineare ma non è necessariamente il più adatto per ogni tipologia di problema) e permettono di calcolare gli spostamenti all'interno dell'elemento partendo dai valori calcolati numericamente sui nodi, in maniera molto simile a quanto avviene nel metodo

dei volumi finiti quando le grandezze nei centri-faccia sono determinate a partire dai valori calcolati nei centri-cella.

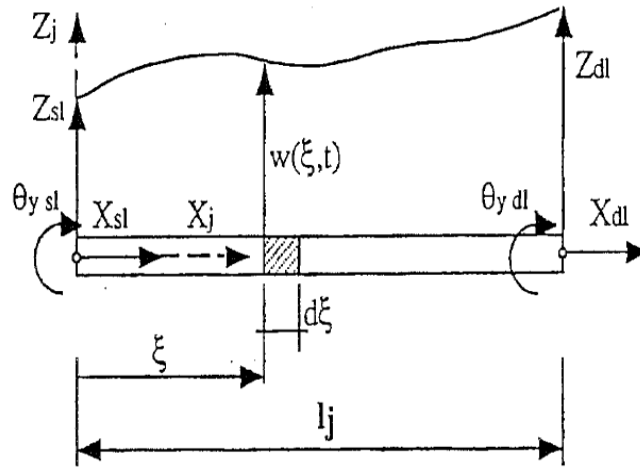


Figura 4.5: esempio di un generico elemento utilizzato per un'analisi di tipo FEM con indicate le principali grandezze geometriche considerate

Il generico spostamento  $w(\xi, t)$  potrà essere quindi espresso come

$$w = \mathbf{f}_{ij}(\xi)^T \mathbf{X}_{ij}(t) \quad (4.7)$$

dove  $\mathbf{f}_{ij}(\xi)$  rappresenta il vettore contenente le funzioni di forma e dipende esclusivamente dalla coordinata spaziale considerata mentre  $\mathbf{X}_{ij}(t)$  rappresenta il vettore contenente gli spostamenti nodali calcolati e dipende esclusivamente dalla coordinata temporale.

Questa suddivisione così netta delle dipendenze è un'ipotesi fatta per semplificare la trattazione analitica ma non è necessariamente vincolante per quanto riguarda le conclusioni finali cui si arriverà.

Omettendo alcuni semplici passaggi matematici, eventualmente disponibili in [13], si arriva a scrivere la ben nota equazione che regola il moto di un sistema meccanico

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$[\Lambda]^T [M] [\Lambda] \ddot{\mathbf{X}} + [\Lambda]^T [R] [\Lambda] \dot{\mathbf{X}} + [\Lambda]^T [K] [\Lambda] \mathbf{X} = \{F\} \quad (4.9)$$

dove :

- $m_j = \int_0^{l_j} m_j \mathbf{f}_{uj}(\xi) \mathbf{f}_{uj}(\xi)^T d\xi + \int_0^{l_j} m_j \mathbf{f}_{wj}(\xi) \mathbf{f}_{wj}(\xi)^T d\xi$  ;
- $k_j = EA_j \int_0^{l_j} \bar{\mathbf{f}}_{uj}(\xi) \bar{\mathbf{f}}_{uj}(\xi)^T d\xi + EJ \int_0^{l_j} \bar{\mathbf{f}}_{wj}(\xi) \bar{\mathbf{f}}_{wj}(\xi)^T d\xi$  ;<sup>1</sup>
- $r_j = a * m_j + b * k_j$  ;
- $\mathbf{f}_j = \mathbf{F}_{ij}^T \mathbf{f}_{ij}(\xi)$  ;

- $\alpha$  indica l'angolo compreso tra il sistema di riferimento locale dell'elemento e il sistema di riferimento assoluto definito per la struttura completa.

Definita l'espressione generale che regola il moto della struttura considerata, il calcolo della deformata statica e la determinazione delle pulsazioni naturali possono essere visti come casi particolari derivabili dall'espressione (4.9).

In particolare la deformata statica si otterrà imponendo velocità e accelerazione nulle per cui

$$[\Lambda]^T [K] [\Lambda] \mathbf{X} = [K_{tot}] \mathbf{X} = \{F\} \quad (4.10)$$

Per il calcolo delle pulsazioni proprie ed i modi di vibrare della struttura si annullano tutte le componenti di smorzamento presenti nella struttura (sia smorzatori concentrati sia smorzamenti strutturali distribuiti) e le forzanti esterne applicate, ottenendo

$$[\Lambda]^T [M] [\Lambda] \ddot{\mathbf{X}} + [\Lambda]^T [K] [\Lambda] \mathbf{X} = [M_{tot}] \ddot{\mathbf{X}} + [K_{tot}] \mathbf{X} = \{0\} \quad (4.11)$$

Imponendo che lo spostamento dei nodi sia del tipo  $\mathbf{X} = X_{ij} e^{i\omega t}$  si ottiene l'equazione finale per il calcolo delle pulsazioni proprie e dei modi di vibrare

$$[K_{tot} - \omega^2 M_{tot}] \mathbf{X} = \{0\} \quad (4.12)$$

Risolviendo  $\det[K_{tot} - \omega^2 M_{tot}] = 0$  è possibile determinare le pulsazioni naturali del sistema e successivamente le frequenze proprie, utili per capire dove aspettarsi variazioni nella curva di transmission loss in seguito alla vibrazione della struttura solida.

Noti i valori di  $\omega$  si possono ricavare le deformate per i singoli modi di vibrare risolvendo prima l'equazione (4.12) sui singoli nodi del dominio e successivamente estendendo gli spostamenti anche all'interno degli elementi sfruttando la relazione (4.7).

*1: con il punto si indica la derivata fatta rispetto al tempo mentre con la barratura si indica la derivata fatta rispetto alle coordinate spaziali*

# CAPITOLO QUINTO: IMPLEMENTAZIONE E VALIDAZIONE DEL SOLUTORE

---

Definiti i passaggi matematici necessari per passare da un sistema di equazioni differenziale a uno algebrico, in questo capitolo sarà presentato il solutore numerico utilizzato durante questo lavoro di tesi soffermandosi, di volta in volta, sui problemi più caratteristici che è stato necessario risolvere.

## 5.1 Sequenza operativa del solutore

Punto di partenza è il solutore `icoFsiElasticNonLinULSolidFoam` implementato nella versione extend 3.0 di OpenFOAM.

Questo solutore permette di risolvere l'interazione tra fluido e struttura elastica nell'ipotesi che il fluido sia incomprimibile, ossia non esista un legame termodinamico tra la pressione e la densità di quest'ultimo.

L'incomprimibilità semplifica molti problemi (perché riduce il numero di equazioni da risolvere) ma nel caso delle simulazioni acustiche non è un'ipotesi sfruttabile.

Infatti in un fluido incomprimibile le perturbazioni sonore si trasmetterebbero da monte verso valle con velocità idealmente tendenti ad infinito (nella realtà le velocità sono molto elevate ma comunque finite) per cui l'abbattimento prodotto dal silenziatore non sarebbe calcolabile.

Per tale motivo è stato necessario modificare il solutore iniziale inserendo la comprimibilità del flusso fluido.

In questo modo le perturbazioni sonore possono propagare all'interno del sistema subendo le attenuazioni legate alla geometria del componente.

Come già anticipato nel secondo capitolo entrambi i solutori sono stati scritti nell'ipotesi di forte accoppiamento tra dominio solido e dominio fluido ossia che modifiche nel campo di moto fluido influenzino la deformazione della regione solida e viceversa.

Nel presente lavoro di tesi le proprietà inerziali dei due domini sono estremamente differenti per cui tutte le simulazioni l'accoppiamento sarebbe di tipo debole, ma in molte applicazioni di grande interesse soprattutto in ambito biomedicale, in cui l'inerzia del fluido

(sangue) è spesso poco inferiore all'inerzia delle pareti organiche circostanti si ha normalmente a che fare con accoppiamenti forti (studi su interazione sangue-atrio cardiaco o sangue-parete di vena/arteria sono mostrati e discussi in [2]).

Nella figura 5.1 è riportato lo schema delle operazioni eseguite durante un singolo istante temporale nel caso del solutore incomprimibile; nel caso di solutore comprimibile la sequenza è formalmente la stessa con la sola modifica delle equazioni risolte all'interno di `solveFluid.H`.

Nel caso incomprimibile infatti le equazioni di continuità e di conservazione della quantità di moto sono sufficienti a determinare lo stato del dominio fluido mentre nel caso comprimibile è necessario risolvere anche l'equazione di conservazione dell'energia per vedere come pressione, densità e temperatura s'influenzano vicendevolmente.

Descriviamo brevemente le operazioni compiute ad ogni passo, rimandando a [13] chi fosse interessato ai dettagli dell'implementazione.

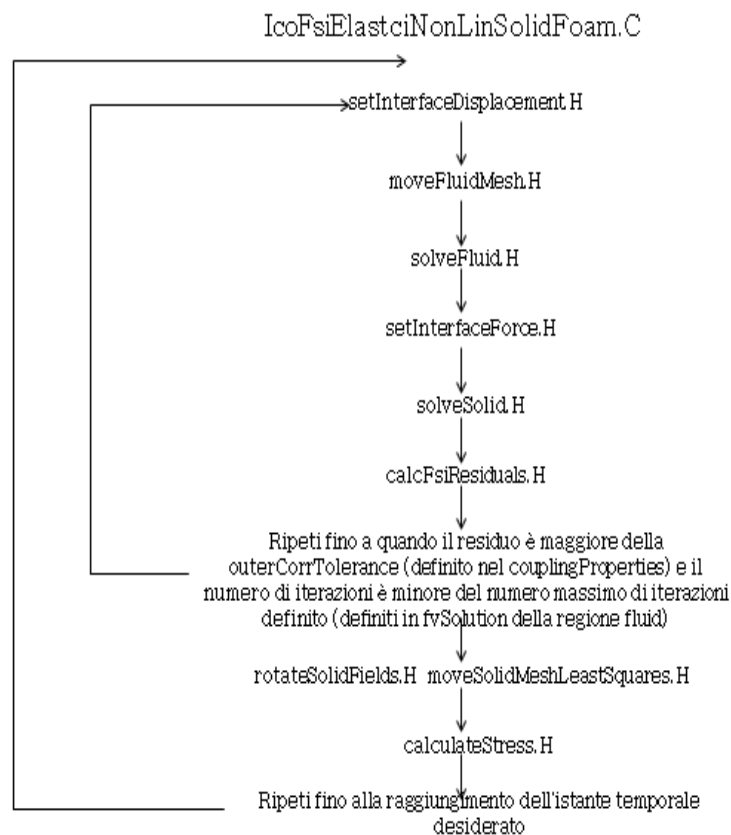


Figura 5.1: schema operativo con cui sono richiamati i singoli file durante la simulazione di un istante temporale

- `setInterfaceDisplacement.H`: acquisisce lo spostamento delle celle che formano l'interfaccia e le interpola da centro-cella a centro-faccia (lato solido), da centro-faccia (lato solido) a centro-faccia (lato fluido), da centro-faccia a centro-cella (lato fluido). L'incremento è modulato introducendo un sottorilassamento della soluzione che, come è stato descritto nel capitolo precedente, può essere statico o dinamico;
- `moveFluidMesh.H`: risolve l'equazione di diffusione di Laplace coerentemente con le condizioni al contorno derivanti dal passo precedente. La deformazione della mesh

- introdurrà delle perturbazioni nel dominio fluido per cui sarà necessario ricalcolare la soluzione definita all'iterazione precedente;
- `solveFluid.H`: risolve le equazioni definite sul dominio fluido utilizzando l'algoritmo risolutivo PISO;
  - `setInterfaceForce.H`: determina i valori di pressione e di sforzi tangenziali agenti sulle celle che costituiscono l'interfaccia del dominio fluido con il dominio solido. Successivamente questi valori sono interpolati da centro-cella a centro-faccia (lato fluido), da centro-faccia (lato fluido) a centro-faccia (lato solido), da centro-faccia a centro-cella (lato solido);
  - `solveSolid.H`: risolve le equazioni di equilibrio e conservazione in termini di incremento di spostamento rispetto alla configurazione derivante dall'istante temporale precedente;
  - `calcFsiResiduals.H`: calcola il residuo fsi ossia somma la distanza tra i centri cella del dominio fluido e i centri cella del dominio solido;
  - il residuo è confrontato con valore minimo che s'impone a inizio simulazione: minore è il valore soglia e migliore sarà la risoluzione del contatto tra fluido e solido ma maggiore sarà il numero di correzioni da fare alla soluzione parziale calcolata prima di passare all'istante temporale successivo;
  - `rotateSolidFields.H` e `moveSolidMeshLeastSquare.H`: se la condizione sul residuo è soddisfatta è possibile calcolare gli sforzi agenti all'interno del materiale elastico a partire dagli spostamenti precedentemente determinati e successivamente deformare la mesh solida definendo la nuova configurazione di riferimento da cui si calcoleranno i nuovi spostamenti per l'istante temporale successivo;
  - `calculateStress.H`: calcola uno sforzo equivalente a partire dal tensore degli sforzi di Cauchy determinato al passo precedente.

## 5.2 Caso test per il dominio fluido

Per valutare l'efficacia del nuovo solutore comprimibile si è deciso di confrontare i risultati ottenuti per un problema molto semplice, di cui esistono numerose varianti riassunte in [15], con quelli forniti da `icoFsiElasticNonLinULSolidFoam`, il solutore incomprimibile originariamente implementato nella versione extend di OpenFOAM.

Il solutore incomprimibile lavora calcolando le variazioni di pressione rispetto ad un valore di riferimento arbitrario perché sono le variazioni che modificano il campo di velocità (la pressione non modifica la densità poiché è costante) mentre nel caso comprimibile la pressione viene calcolata in termini assoluti.

Questo fatto è di particolare importanza poiché nel caso comprimibile la pressione all'interfaccia tra dominio fluido e solido va determinata sottraendo dal valore assoluto calcolato dal solutore la pressione per cui la parete solida ha deformata nulla (in questo caso la pressione di riferimento è la pressione atmosferica pari a 101325 Pa) mentre nel caso incomprimibile la pressione calcolata è già il valore che è assegnato all'interfaccia.

Per completezza si riportano anche i valori numerici adottati sia per quanto riguarda la geometria (tutti i valori sono espressi in metri) sia per quanto riguarda il fluido di lavoro utilizzato.

- Il dominio ha lunghezza  $L=2.5$  ed altezza  $H=0.41$ ;
- La geometria circolare ha centro in  $(0.2, 0.2)$  misurato dal lato sinistro e raggio  $r=0.05$ ;
- La struttura elastica ha lunghezza  $l=0.35$  ed altezza  $h=0.02$  con l'estremo sinistro completamente vincolato alla struttura circolare e l'estremo destro libero di oscillare sotto l'azione del campo di moto che si verrà a creare.

Per l'elemento elastico sono state assunte le seguenti proprietà:

Grandezza	Unità di Misura	Valore
Densità	kg/m <sup>3</sup>	50
Modulo Elastico	MPa	1.4e9
Coefficiente di Poisson	-	0.4

Tabella 1: caratteristiche meccaniche e fisiche dell'elemento solido-elastico (indicato in figura 5.3)

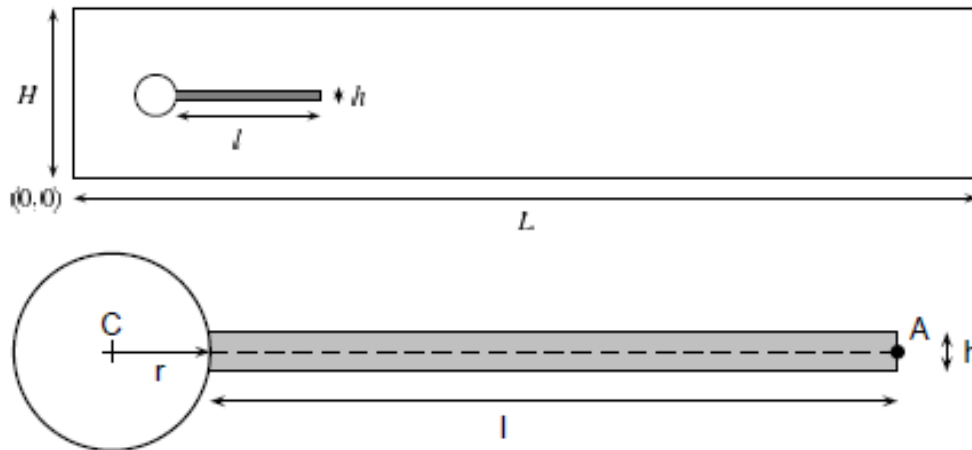


Figura 5.2: geometria del problema test considerato per il confronto dei risultati tra solutore comprimibile ed incomprimibile

Tali valori non corrispondono a nessun materiale effettivamente presente in natura ma sono stati assunti in maniera arbitraria come media tra le caratteristiche di un metallo, che avrebbe portato ad avere spostamenti non apprezzabili visivamente ma solo numericamente, e un materiale plastico, con elevate deformazioni ma di scarso interesse per questo lavoro di tesi.

Il fluido è in entrambi i casi aria con le seguenti proprietà fisiche (ritenute costanti ed indipendenti dalla temperatura):

Grandezza	Unità di Misura	Valore
Densità	kg/m <sup>3</sup>	1
Massa Molare	kg/kmol	28.9
Calore specifico (p costante)	J/(kg K)	1007
Viscosità cinematica	m <sup>2</sup> /s	1e-3
Numero di Prandtl	-	0.7

Tabella 2: caratteristiche fisiche e termodinamiche del dominio fluido (indicato in figura 5.3)

La viscosità cinematica utilizzata è molto maggiore rispetto al valore che realmente caratterizza l'aria (1.84e-5 m<sup>2</sup>/s) ma probabilmente viene assunta da molti autori per aumentare il fenomeno diffusivo e stabilizzare la soluzione ottenuta nonostante l'impiego di metodi numerici di ordine elevato (che invece tendono a rendere la soluzione instabile soprattutto in corrispondenza di elevati gradienti nelle grandezze calcolate).

L'utilizzo dell'aria anche nel caso incomprimibile è possibile poiché, come sarà mostrato meglio in seguito, le velocità massime raggiunte nella simulazione non superano mai i 10 m/s



per cui il numero di Mach che si ottiene è  $M=0.028$ , ben sotto la soglia di comprimibilità fissata a  $M=0.3$ .

Anche l'ipotesi di indipendenza delle grandezze dalla temperatura può essere ritenuta accettabile perché le variazioni di temperatura calcolate durante l'intera simulazione non sono mai superiori a 5 K.

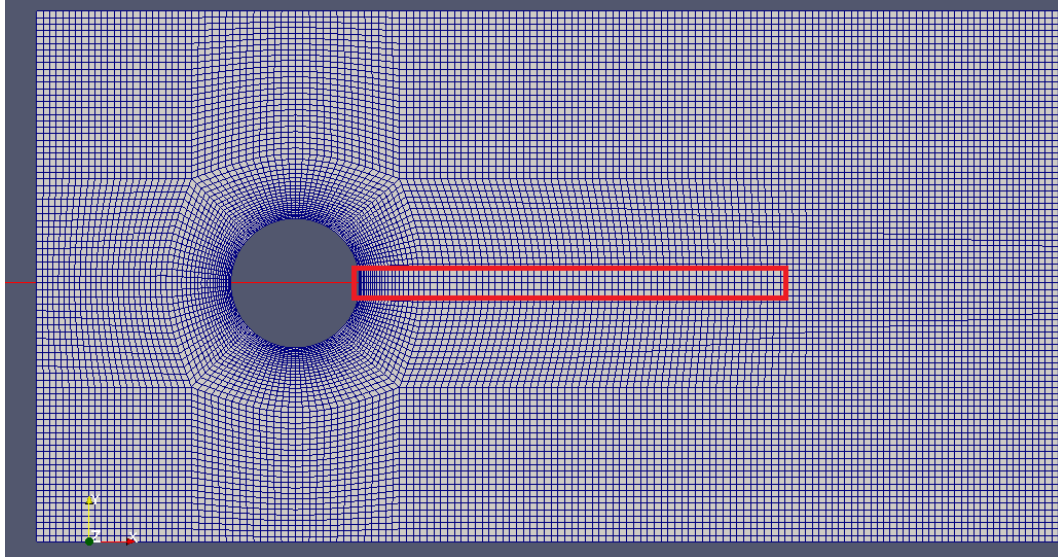


Figura 5.3: griglia di calcolo realizzata per la risoluzione del problema descritto in figura 5.2. In rosso è definita l'interfaccia tra dominio fluido (esterno) e dominio solido (interno)

Ulteriore caratteristica del caso test considerato è la condizione al contorno imposta sulla velocità in ingresso del dominio fluido.

```

inlet
{
  type                transitionalParabolicVelocity;
  maxValue            5;
  n                   ( 1 0 0 );
  y                   ( 0 1 0 );
  transitionPeriod    0.1;
  boundingBoxMin      ( 0 0 -0.025334 );
  boundingBoxMax      ( 0 0.41 0.025334 );
  value               uniform (0 0 0);
}

```

Per avere un lento incremento della velocità e non generare instabilità nella risoluzione del problema la condizione imposta implica in realtà due condizioni che dipendono dall'istante temporale considerato.

$$u = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi t}{2} \right) \right] u_{\infty} \quad \text{se } t < \text{transitionPeriod} \quad (5.1)$$

$$u = u_{\infty} = 1.5 U_{medio} \frac{y(H-y)}{(H/2)^2} \quad \text{se } t > \text{transitionPeriod} \quad (5.2)$$

dove  $U_{medio}$  sarà determinato di volta in volta come  $\frac{maxValue}{1.5}$  e riveste un ruolo molto importante nella determinazione dell'istante temporale in cui s'inizia ad avere il distacco dei vortici sul dorso della geometria circolare, con conseguente vibrazione dell'elemento elastico.

### 5.3 Risultati del caso test

In questa sezione confrontiamo i risultati numerici ottenuti utilizzando il solutore incompressibile `icoFsiElasticNonLinULSolidFoam` con quelli ottenuti utilizzando il solutore comprimibile modificato nel corso di questo lavoro di tesi `rhoPisoDyMFsiFoam`.

Ricordiamo che questo confronto è possibile solamente perché il numero di Mach è estremamente basso per cui gli effetti di comprimibilità, che l'aria mostra a velocità elevate, risultano essere trascurabili.

Iniziamo osservando che gli estremi del campo di velocità determinati numericamente sono molto simili, anche se l'immagine del caso incompressibile è un po' più pulita rispetto al caso comprimibile.

Una possibile spiegazione è legata al fatto che le seppur piccole oscillazioni presenti nel campo termico provochino piccole variazioni nel campo di pressione (i due sono legati tramite l'equazione di stato scelta) che si riflettono a loro volta sul campo di velocità.

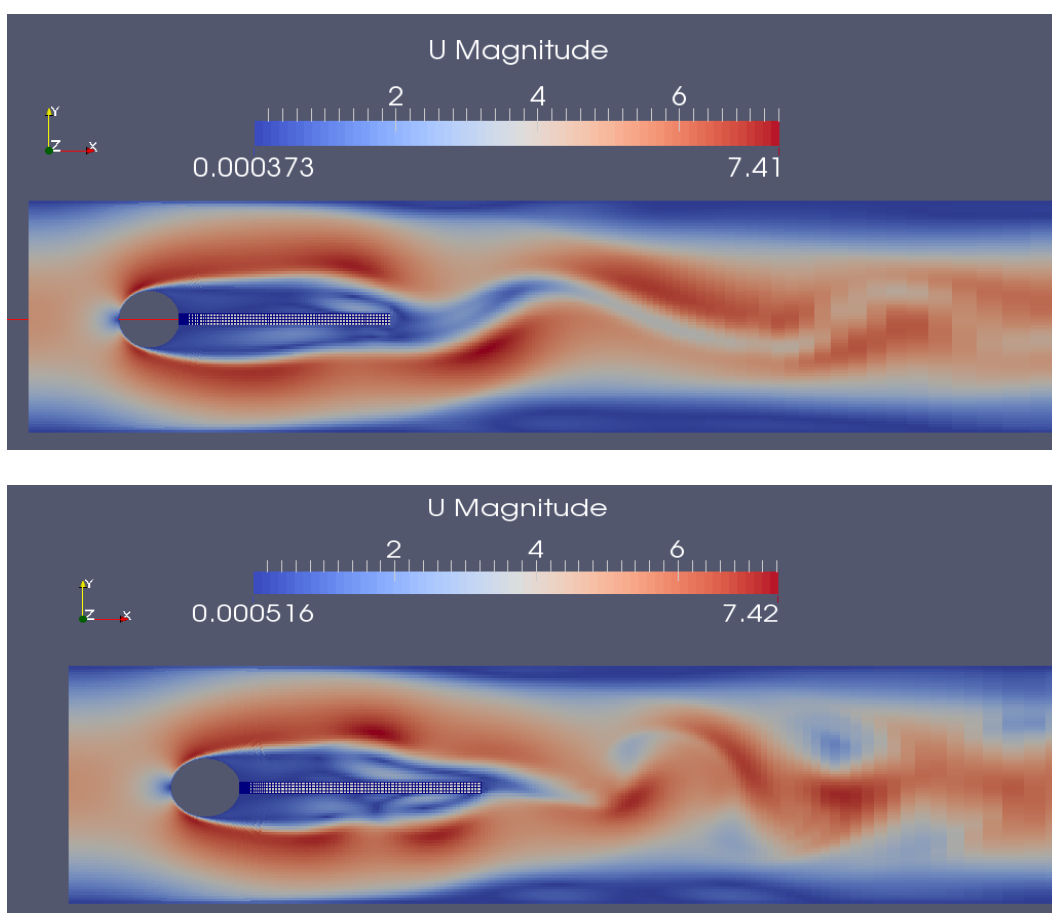


Figura 5.4: campo di velocità per  $t=1$  s calcolato con il solutore incompressibile (sopra) e con il solutore comprimibile (sotto)

Per quanto riguarda il campo di pressione calcolato possiamo notare che in entrambi i casi il massimo valore di pressione si ha in corrispondenza del punto di attacco del profilo circolare a causa della trasformazione dell'energia cinetica posseduta dal fluido in energia di pressione.

Si può vedere la presenza di zone a pressione inferiore coincidenti con i vortici che si distaccano dal profilo circolare e vanno a sollecitare ciclicamente il profilo elastico retrostante.

Questi vortici percorrono l'intero elemento agendo come una forzante esterna e quindi, per particolari accoppiamenti geometria-materiale, potrebbero anche mandare in risonanza la struttura.

Si osserva poi che, una volta terminato il dominio solido, i vortici tendono a proseguire verso valle, anche se nel caso incomprimibile sono riassorbiti più velocemente.

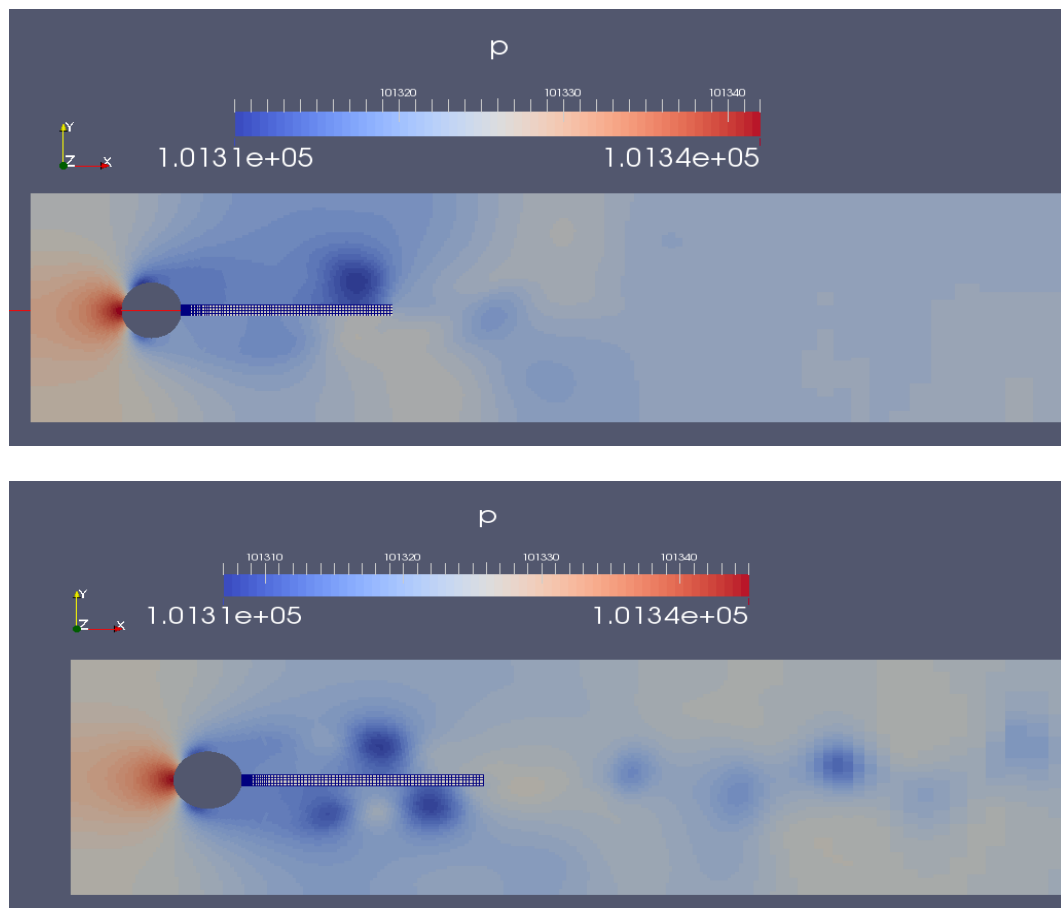


Figura 5.5: campo di pressione per  $t=1$  s calcolato con il solutore incomprimibile (sopra) e con il solutore comprimibile (sotto)

Infine si riporta un'immagine con il campo termico che si viene a creare dopo un secondo di simulazione; si può vedere come partendo da una situazione di temperatura uniforme pari a 300 K si ha un aumento di 0.01 K in corrispondenza del naso cilindrico in cui l'arresto, non perfettamente isoentropico, genera una dissipazione con conseguente aumento di temperatura mentre si ha una diminuzione di 0.03 K in seguito al miscelamento provocato dai vortici.

Complessivamente si ha una variazione di 0.05 K per cui possiamo ritenere corretta l'ipotesi che le proprietà siano indipendenti dalla temperatura ossia rimangano costanti rispetto al valore definito all'interno del dizionario `thermophysicalProperties`.

Anche nella simulazione per il calcolo della transmission loss questa ipotesi potrà essere ritenuta corretta poiché non ci saranno né fenomeni particolarmente dissipativi all'interno del

flusso né flussi termici da o verso il fluido considerato che causeranno variazioni significative del campo termico.

Quest'assunzione semplifica enormemente il problema perché non è necessario implementare all'interno del solutore le curve teoriche o sperimentali che descrivono il comportamento delle proprietà termofisiche al variare della temperatura.

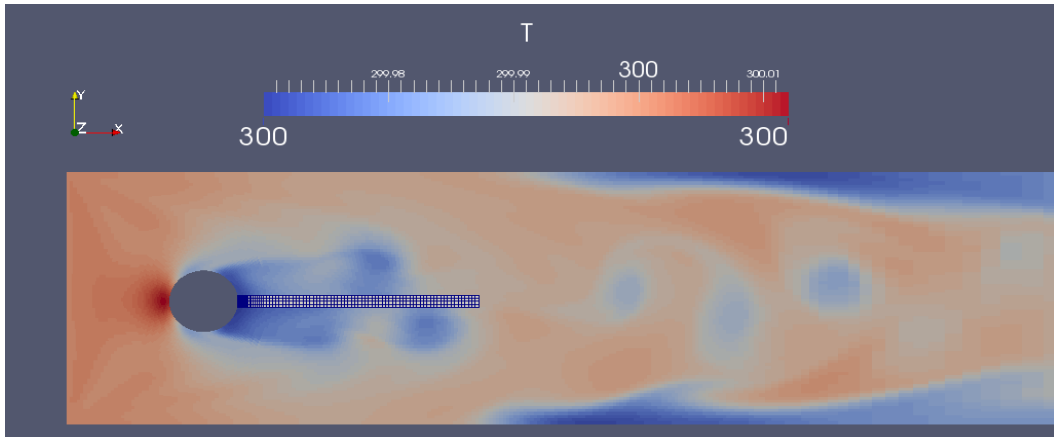


Figura 5.6: campo di temperatura per  $t = 1$  s calcolato con il solutore comprimibile

#### 5.4 Caso test per il dominio solido

Verificato che il nuovo solutore fluidodinamico comprimibile riesce a riprodurre correttamente la soluzione trovata con il solutore incomprimibile, si deve testare anche il solutore utilizzato per risolvere il dominio solido.

In particolare si vuole verificare che il comportamento statico e dinamico previsto dal solutore sia coerente con i valori definiti dal calcolo della linea elastica e dalla teoria della vibrazione dei sistemi continui.

Si riportano in tabella i dati geometrici, meccanici e fisici che sono stati utilizzati nelle simulazioni numeriche e nei calcoli teorici.

Grandezza	Unità di Misura	Valore
Larghezza	m	0.010
Spessore	m	0.002
Lunghezza	m	0.250
Densità	kg/m <sup>3</sup>	7800
Modulo d'elasticità lineare	Pa	2.02e11
Carico Applicato	Pa	8675

Tabella 3: caratteristiche geometriche, fisiche e meccaniche dell'elemento solido considerato

Iniziamo illustrando brevemente le due teorie per poi procedere ad un confronto con i valori determinati numericamente.

##### 5.4.1 Calcolo dello deformata statica per un elemento trave

Ricordiamo che scrivendo le equazioni di equilibrio nella direzione verticale e alla rotazione per un concio di trave di dimensione infinitesima  $dx$  otteniamo

$$\frac{dT(x)}{dx} = q(x) \quad (5.3)$$

$$\frac{dM_f(x)}{dx} = -T(x) \quad (5.4)$$

dove si è indicato con  $q$  il generico carico variabile in funzione della coordinata agente sulla trave,  $T$  è l'azione di taglio ed  $M_f$  è il momento flettente agente alle estremità del concio di trave.

Ricordiamo poi che l'equazione di partenza per la determinazione della linea elastica per una trave sottile è data da

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_f(x)}{EJ} \quad (5.5)$$

dove si è indicato con  $w$  lo spostamento lungo la direzione verticale rispetto all'asse della trave ed  $EJ$  rappresenta la rigidezza flessionale dell'elemento considerato.

Sostituendo le espressioni (5.3) e (5.4) all'interno dell'equazione (5.5) otteniamo infine il legame tra il carico applicato e lo spostamento che ne deriva

$$\frac{d^4w}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EJ} \quad (5.6)$$

Integrando 4 volte l'espressione (5.6) nell'ipotesi di carico applicato costante al variare di  $x$  ed applicando le opportune condizioni al contorno, che nel caso attuale corrispondono ad un doppio incastro, si ottiene

$$w(x) = \frac{qx^2(L-x)^2}{24EJ} \quad (5.7)$$

dove con  $L$  s'intende la lunghezza complessiva della trave considerata.

Questa espressione sarà confrontata con la soluzione numerica determinata utilizzando una simulazione a volumi finiti con OpenFOAM ed una simulazione ad elementi finiti con Abaqus.

Osservando l'immagine 5.7 si può notare come la soluzione definita dall'equazione (5.7) e la soluzione determinata numericamente utilizzando il nuovo solutore rhoPisoDyMFsiFoam siano molto vicine tra loro per una parte rilevante del dominio mentre tendono a distaccarsi leggermente avvicinandosi alla mezzeria della trave.

La differenza nelle soluzioni rimane comunque contenuta sia in termini assoluti ( $f_{\max,teorica} = 0.71$  mm e  $f_{\max,OpenFOAM} = 0.706$  mm) sia in termini relativi con una differenza inferiore allo 0.5% del valore trovato con la soluzione teorica.

Confrontando lo spostamento calcolato tramite il solutore di OpenFOAM con la deformata calcolata utilizzando il metodo degli elementi finiti si può vedere come la differenza tra i valori si mantiene ancora contenuta.

La differenza massima si ha in corrispondenza della mezzeria della trave ma è comunque inferiore a 0.03 mm.

Questo confronto dimostra anche quanto affermato all'inizio del quarto capitolo per cui, se la griglia di calcolo è realizzata in maniera corretta ed ottimale, i risultati a cui si giunge non dipendono dal metodo di discretizzazione numerica adottata.

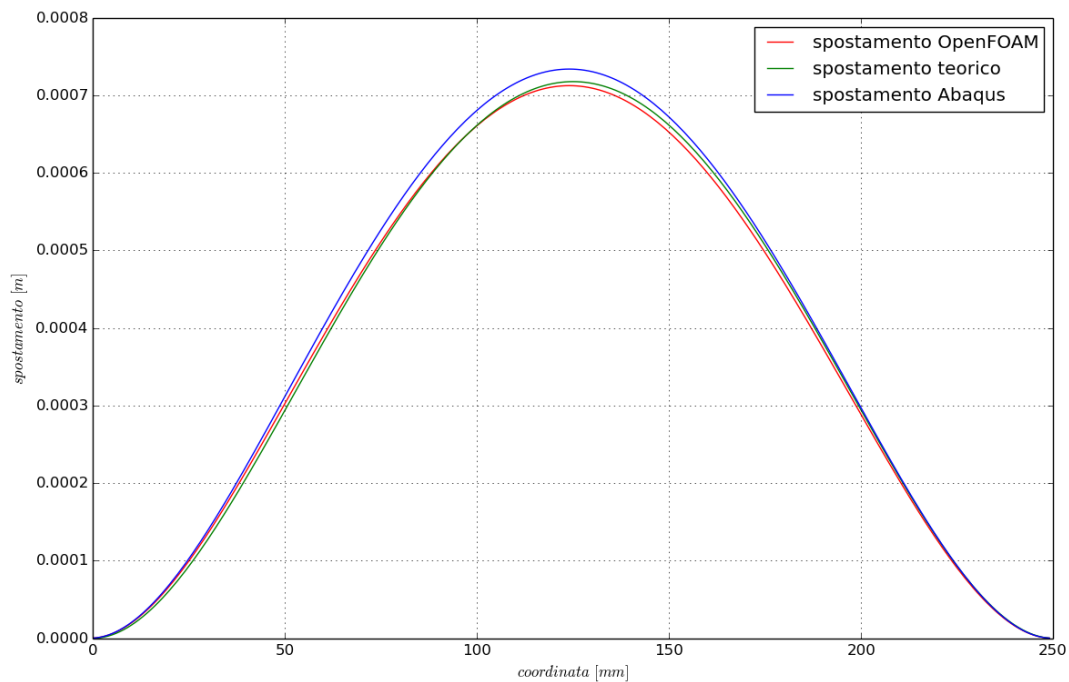


Figura 5.7: spostamento dell'elemento solido calcolato con il metodo della linea elastica (teoria), con il metodo dei volumi finiti (OpenFOAM) e con il metodo degli elementi finiti (Abaqus)

#### 5.4.2 Definizione delle frequenze proprie per un sistema continuo tipo trave

Per il calcolo delle frequenze proprie si ritengano valide le ipotesi:

- la trave è omogenea ossia la sezione  $A$ , la rigidità flessionale  $EJ$  e la densità  $\rho$  sono costanti lungo tutta la lunghezza;
- non sono presenti carichi assiali;
- $w$  rappresenta lo spostamento a partire dalla condizione di equilibrio (che dovrà essere determinata in qualche modo) per cui la forza peso agente sulla struttura non compare esplicitamente nelle equazioni che verranno scritte successivamente (così come non compariranno tutte le altre forze costanti che contribuiscono a definire la deformata statica di partenza);
- le vibrazioni sono piccole rispetto alle dimensioni della trave.

Sotto le precedenti ipotesi l'unico carico agente sull'elemento infinitesimo di trave è dato dalla forza d'inerzia definita come

$$q = \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5.8)$$

Unendo le espressioni (5.3-5.4-5.5) con la relazione (5.8) si ricava

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5.9)$$

in cui si ritrova che, in assenza di smorzamento e di forzanti esterne, il termine di forza inerziale è bilanciato dal termine di forza elastica (il classico  $m\ddot{x} + kx = 0$  che si ottiene per i sistemi discreti).

Ipotizziamo ora che la soluzione all'equazione (5.9) possa essere espressa come il prodotto di due funzioni di cui una dipende unicamente dalla variabile spaziale  $x$  e l'altra dipende unicamente dalla variabile temporale  $t$  ossia  $w = \phi(x)G(t)$ . In questo modo l'espressione (5.9) diventa

$$\frac{EJ}{\phi} \frac{d^4 \phi}{dx^4} = -\frac{\rho A}{G} \frac{d^2 G}{dt^2} \quad (5.10)$$

Da notare la sostituzione nella (5.10) delle derivate parziali con le derivate totali poiché le funzioni considerate ora hanno una sola variabile indipendente.

Affinché l'uguaglianza scritta in (5.10) sia rispettata è necessario che entrambi i membri siano uguali ad una costante  $K$ ; in caso contrario poiché  $\phi$  e  $G$  dipendono da variabili differenti l'uguaglianza non potrebbe essere rispettata.

Inoltre poiché il sistema è conservativo e non espansivo deve valere  $-\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dt^2} = \omega^2$  in maniera tale che la soluzione sia oscillante e non divergente.

Omettendo alcuni passaggi puramente matematici disponibili in [14], la soluzione all'equazione (5.10) sarà

$$w(x, t) = [F_1 \sin(\gamma x) + F_2 \cos(\gamma x) + F_3 \sinh(\gamma x) + F_4 \cosh(\gamma x)] * [A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)] \quad (5.11)$$

dove  $\gamma^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EJ}$ .

Imponendo le condizioni al contorno di doppio incastro (il vincolo è considerato rigido e non cedevole ossia non cambia al passare del tempo) si ottiene un sistema di equazioni algebrico non lineare che nella maggior parte dei casi deve essere risolto numericamente poiché non esiste una soluzione in forma analitica.

Per determinare le pulsazioni proprie dell'elemento trave è necessario risolvere

$$\det[H(\gamma)] = 0 \quad (5.12)$$

dove  $H(\gamma)$  è la matrice del sistema di equazioni ottenuto dopo l'imposizione delle condizioni al contorno.

Utilizzando il legame che esiste tra  $\gamma$  e  $\omega = 2\pi f$  è possibile infine determinare le frequenze proprie del sistema vibrante.

In generale varrà l'espressione

$$f = \frac{1}{2\pi} K_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \quad (5.13)$$

dove  $K_n$  è un valore tabulato che dipende dalle condizioni al contorno imposte e  $n$  rappresenta l' $n$ -esima frequenza che si vuole calcolare.

Estremo 1	Estremo 2	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$
Appoggio	Appoggio	1	1	1	1
Incastro	Incastro	2.27	1.56	1.36	1.26
Incastro	Appoggio	1.56	1.26	1.17	1.13
Incastro	Libero	0.36	0.56	0.69	0.77
Libero	Libero	2.27	1.56	1.36	1.26

Tabella 4: coefficienti moltiplicativi per il calcolo delle frequenze naturali per un elemento di tipo trave al variare delle condizioni al contorno imposte

Per il caso numerico si considera un semplice problema bidimensionale in cui una trave rettilinea di lunghezza 0.2 metri è sollecitata da un fluido comprimibile (non è possibile utilizzare un solutore incomprimibile, anche se le velocità sono estremamente basse, perché la velocità di propagazione delle onde di pressione tenderebbe ad  $\infty$  e quindi non si riuscirebbe ad introdurre energia nel dominio solido) le cui condizioni d'ingresso variano in continuazione sfruttando la condizione di white noise che verrà descritta meglio nel seguito della trattazione.

Sfruttando il fatto che lo spettro del rumore bianco interessa tutte le frequenze d'interesse si riesce ad ottenere la risposta in frequenza del materiale solido con una sola simulazione numerica, risparmiando in questo modo tempo e risorse.

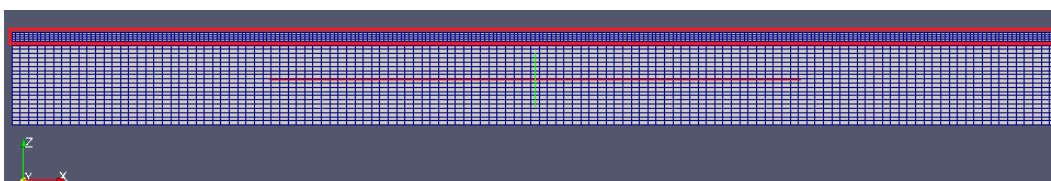


Figura 5.8: griglia di calcolo utilizzata per la determinazione delle frequenze proprie di un elemento solido elastico. Nel riquadro rosso è contenuto il dominio solido mentre la restante parte è costituita dal dominio fluido

Coerentemente con le ipotesi fatte all'inizio della trattazione teorica, anche nel caso test implementato in OpenFOAM si è assunto un elemento elastico con le caratteristiche geometriche ed elastiche riportate in Tab. 5.

Grandezza	Unità di Misura	Valore
Larghezza	m	0.010
Spessore	m	0.003
Lunghezza	m	0.200
Sezione	m <sup>2</sup>	3e-5
Momento d'inerzia lungo z	m <sup>4</sup>	2.25e-11
Densità	kg/m <sup>3</sup>	7800
Modulo d'elasticità lineare	Pa	2.02e11

Tabella 5: caratteristiche geometriche, fisiche e meccaniche del dominio solido (indicato in figura 5.8) utilizzate per il calcolo numerico delle frequenze proprie

Si ricorda che le caratteristiche meccaniche attribuite all'elemento solido sono state scelte sulla base delle seguenti esigenze:

- avere un materiale la cui rigidità flessionale non fosse eccessivamente elevata così da riuscire a eccitare le frequenze proprie anche con una piccola quantità di energia introdotta (energia data dalla variazione di pressione interna al fluido);
- avere un componente le cui frequenze naturali più basse non richiedessero intervalli di tempo simulati eccessivamente elevati (ricordando che la frequenza è l'inverso del periodo per cui per definire frequenze molto basse servono periodi simulati molto ampi).

Sostituendo nell'espressione (5.13) i valori definiti nella tabella 5.4 ed i coefficienti dati nella tabella 4 per il caso incastro-incastro si trovano le frequenze naturali, riportate in tabella 6



Modo di vibrare	Frequenza (Hz)
1	392.87
2	1079.95
3	2118.36

Tabella 6: frequenze naturali determinate utilizzando la teoria della meccanica dei solidi

La trattazione teorica del problema è stata sviluppata nell'ipotesi che gli elementi potessero essere assimilati a travi, ossia avessero uno sviluppo principalmente bidimensionale; le stesse considerazioni potrebbero essere sviluppate per il caso tridimensionale sfruttando la teoria delle piastre sviluppata nella meccanica dei solidi.

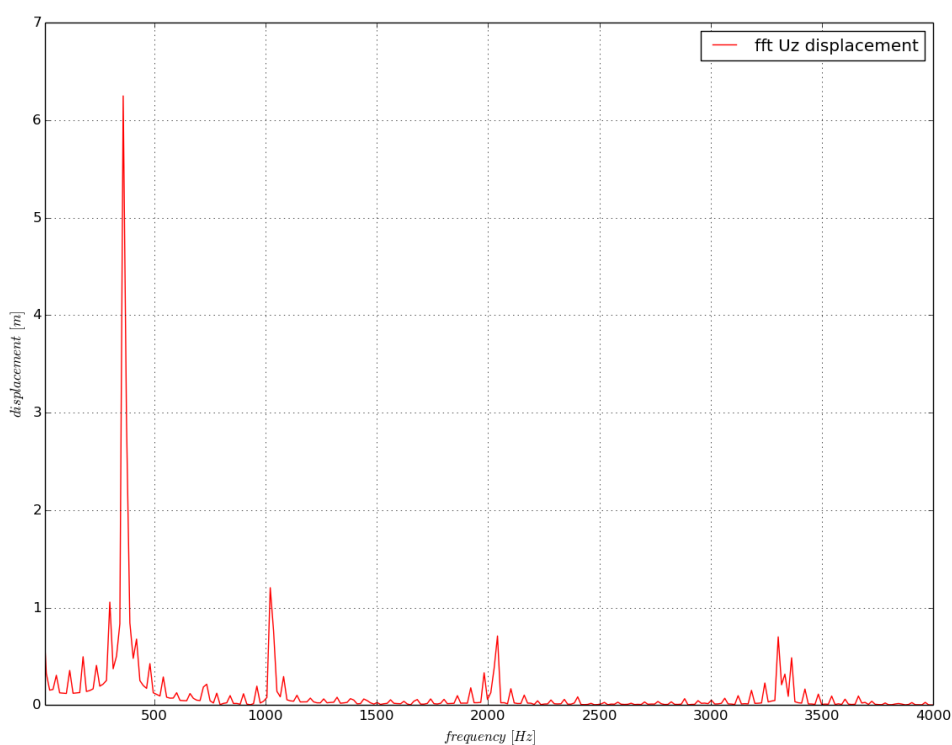


Figura 5.9: spettro in frequenza della risposta dell'elemento elastico ad una eccitazione di tipo random (white noise). Nello specifico è possibile notare i picchi corrispondenti alle frequenze naturali del sistema solido

Questo comporterebbe però un aumento sia nella difficoltà della trattazione teorica, perché la soluzione in forma chiusa per le equazioni che regola il comportamento delle piastre rettangolari esiste solamente sotto forma di sviluppi in serie e perciò richiede lo sviluppo in serie anche per condizioni di carico estremamente semplici come il caso di forza applicata uniforme, sia dei tempi d'elaborazione per la soluzione numerica a causa dell'aggiunta della terza dimensione lungo cui risolvere le equazioni di conservazione.

A differenza dei casi considerati precedentemente, questo test ha richiesto un tempo di calcolo di appena qualche ora (corrispondente a una simulazione di 0.2 secondi) poiché non è stato necessario arrivare a definire una condizione di regime come è invece accaduto per il calcolo della deformata statica e per il campo fluidodinamico con il distacco dei vortici.

L'unico vincolo che è necessario rispettare in questa simulazione è quello imposto dalla teoria di Shannon-Nyquist per non commettere errore di aliasing durante il campionamento del segnale.

Poiché è stata utilizzata una frequenza di campionamento pari a 20000 Hz (che nel caso del calcolo numerico equivale ad avere 20000 cartelle per ogni secondo di simulazione prodotto) a fronte di una frequenza minima richiesta di 8000 Hz (due volte la massima frequenza che si vuole osservare nel segnale reale), si può affermare che durante l'acquisizione dei dati non è stato commesso errore di aliasing.

L'utilizzo di un white noise come condizione d'eccitamento rende invece il segnale affetto da leakage poiché il periodo campionato (o in questo caso di simulato) non è un multiplo intero di tutte le armoniche presenti nel segnale in ingresso e non avrebbe potuto esserlo visto che, in teoria, il white noise contiene un numero infinito di armoniche.

Per ridurre l'errore commesso, il segnale rappresentativo dell'oscillazione verticale dell'elemento elastico è stato opportunamente trattato utilizzando una finestra di Hanning per abbattere le oscillazioni compiute negli ultimi istanti dell'acquisizione, diminuendo così l'energia che verrebbe erroneamente assegnata ad alcune frequenze dello spettro.

Ciononostante nella figura 5.9 è possibile notare un certo disturbo soprattutto alle basse frequenze dove è maggiore la frazione di periodo campionata, in eccesso o in difetto, rispetto ad un'acquisizione eseguita correttamente e non affetta da problemi di leakage.

Dato che l'operazione di trasformata dal dominio temporale a quello delle frequenze è reversibile, deve avvenire preservando l'energia complessiva contenuta nel segnale considerato.

Per garantire questa conservazione l'eccesso d'energia legato alla frazione di armonica campionata in eccesso viene comunque assegnato alle frequenze più vicine disponibili nello spettro, in aggiunta a quella effettivamente presente, dando origine all'andamento altalenante che si vede nell'immagine 5.9.

Chiarita l'origine dell'andamento non perfettamente pulito ottenuto dalla rappresentazione in frequenza, si può osservare che in generale i picchi delle risonanze presenti nello spettro a basse frequenze sono più marcati rispetto a quelli che si hanno a frequenze più alte.

Questa differenza è ancora una volta legata all'energia introdotta nel sistema solido relativamente al particolare modo di vibrare che risulta essere inversamente proporzionale alla frequenza considerata.

Dopo un'analisi qualitativa dei risultati ottenuti verifichiamo a livello quantitativo la correttezza dei valori numerici trovati definendo l'errore percentuale  $\varepsilon = \frac{|f_{teorica} - f_{numerica}|}{f_{teorica}} * 100$ .

Modo di vibrare	Frequenza teorica (Hz)	Frequenza calcolata (Hz)	Errore (%)
1	392.87	369.56	5.93
2	1079.95	1069.82	0.94
3	2118.36	2096.36	1.04

Tabella 7: confronto tra le frequenze proprie calcolate utilizzando l'approccio teorico e l'approccio

Dai risultati riportati nella tabella 7 si può vedere che la differenza tra i valori calcolati numericamente e quelli trovati dalla teoria delle travi è sempre inferiore ai trenta Hertz, con una tendenza a diminuire quando si vanno a considerare frequenze via via crescenti.

In questi casi il confronto in termini assoluti è spesso poco significativo poiché non riesce a rendere l'idea di quanto buoni siano i risultati calcolati numericamente rispetto a quelli definiti dalla teoria.

Passando ad un confronto relativo le differenze vengono rapportate rispetto ai valori considerati, per cui si riesce ad esprimere in maniera quantitativa quanto il solutore riesca a riprodurre in maniera corretta il comportamento dell'elemento solido.

Da questo confronto si può notare come la differenza tra i valori sia contenuta sempre in sei punti percentuali (normalmente i risultati numerici sono ritenuti attendibili se stanno in un range che, a seconda del campo di applicazione varia tra il 5% ed il 10%) mostrando, anche in questo caso, una rapida diminuzione all'aumentare della frequenza considerata.

A conclusione di questo capitolo si può affermare che:

- 1) per test a basso  $Ma$  (variabile tra 0 e 0.05) il nuovo solutore comprimibile fornisce risultati in accordo con il solutore incompressibile. È importante ricordare che questo confronto può essere fatto esclusivamente se le velocità del flusso sono estremamente basse poiché, solamente in questo caso gli effetti di comprimibilità del fluido sono trascurabili;
- 2) sia per quanto riguarda il comportamento statico (deformazione con carico costante) sia per quanto riguarda il comportamento dinamico (eccitazione a varie frequenze) il solutore per il dominio solido si comporta in accordo con la teoria (definita sia per i sistemi dinamici sia per la meccanica dei solidi) e con i risultati forniti da altri solutori in cui è implementato il metodo degli elementi finiti (Abaqus).

Questo permette di valutare sia l'efficacia del solutore in sé sia di avere un raffronto quantitativo sull'utilizzo del metodo dei volumi finiti rispetto al metodo degli elementi finiti.

# CAPITOLO SESTO:

## CALCOLO DELLA TRANSMISSION LOSS PER UN SILENZIATORE A SINGOLA CAMERA

---

In questo capitolo si mostreranno i risultati ottenuti al termine dei vari casi studiati utilizzando il nuovo solutore fluido - struttura nel tentativo di riprodurre le curve ricavate sperimentalmente nella figura 1.10.

### 6.1 Caratteristiche generali delle simulazioni

Come primo caso test si è assunta una geometria molto semplice costituita da una camera con una singola espansione, la cui risposta in termini di curva di transmission loss è ben conosciuta anche in termini d'espressioni analitiche.

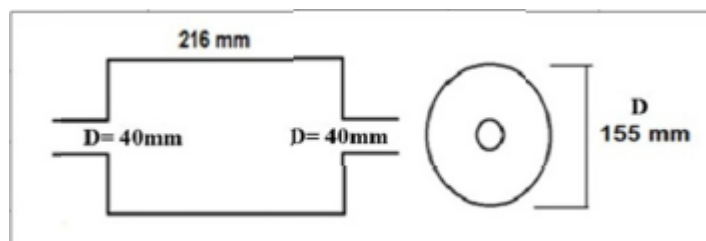


Figura 6.1: geometria iniziale del silenziatore con camera d'espansione singola utilizzato per il confronto tra dati numerici e risultati sperimentali

Questo lavoro è stato suddiviso in tre fasi:

- inizialmente si è considerato solamente il dominio fluidodinamico per verificare la corretta implementazione della teoria della decomposizione del segnale nel condotto d'ingresso. Infatti trascurando l'interazione fluido-parete (ipotesi di parete infinitamente rigida) si riesce a capire velocemente se il post-processing funziona in maniera corretta oppure sono necessarie ulteriori modifiche;

- successivamente si è introdotta l'interazione tra fluido e struttura elastica ma assumendo uno spessore di parete tale per cui la cassa esterna risulti ancora sufficientemente rigida da non essere posta in vibrazione dalla perturbazione sonora che percorre il sistema (in questo caso si è adottato uno spessore di sette millimetri coerentemente con quanto fatto per i rilievi sperimentali riportati in [5]);
- infine si riduce lo spessore della parte elastica a due millimetri (sempre per avere un confronto con i rilievi sperimentali) in maniera tale favorire la vibrazione delle pareti esterne che produrrà alterazioni nella curva di transmission loss (in corrispondenza delle frequenze naturali della struttura).

Per le prime due fasi l'assenza di vibrazione della lamiera permette l'adozione di una griglia di calcolo semplificata che consiste solamente in un settore circolare di  $5^\circ$  in sostituzione dell'intera geometria tridimensionale.

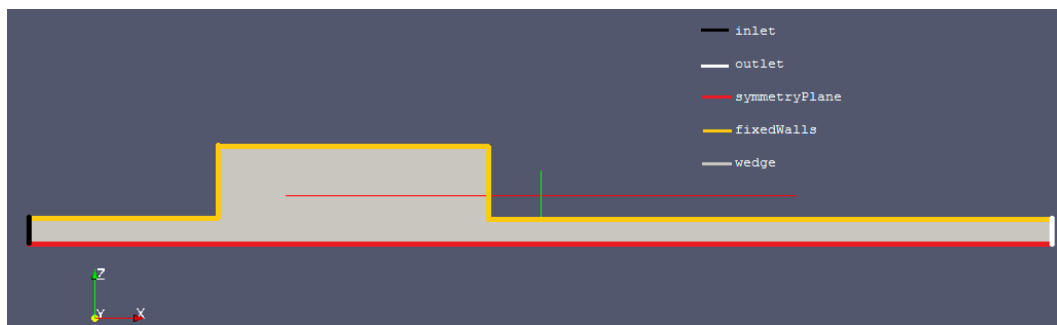


Figura 6.2: denominazione delle facce nel caso di griglia wedge per lo studio della sola fluidodinamica della camera ad espansione singola

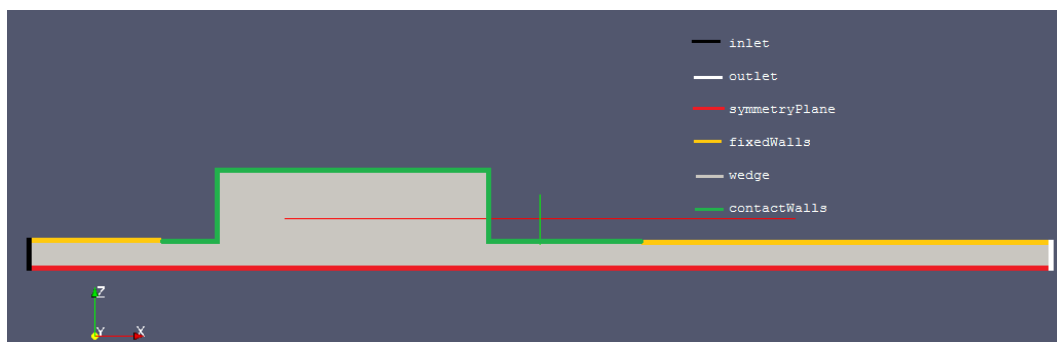


Figura 6.3: denominazione delle facce nel caso di griglia wedge per lo studio dell'interazione tra fluido ed elemento elastico per una camera ad espansione singola. La superficie contactWalls rappresenta l'area in cui si ha lo scambio di informazioni tra dominio fluido e solido

Nell'ultima fase la scelta della mesh da utilizzare dipende dai modi di vibrare che si dovranno descrivere in corrispondenza delle frequenze proprie:

- se i modi di vibrare che cadono nel campo d'interesse sono tutti assialsimmetrici è possibile utilizzare la stessa tipologia di mesh sfruttata per le simulazioni precedenti;
- se i modi di vibrare non dovessero essere perfettamente assialsimmetrici sarà necessario implementare una griglia di calcolo necessariamente tridimensionale.

Iniziamo descrivendo la struttura generale del problema intesa come gerarchia delle cartelle ed il loro contenuto partendo dal caso in cui si prevede l'interazione tra fluido e struttura poiché rappresenta la situazione più generale che si possa trattare.

Gli altri problemi analizzati rappresentano casi particolari rispetto alla formulazione più generale.

## 6.2 Organizzazione delle cartelle per una simulazione in OpenFOAM

Inizialmente i domini vengono considerati come due casi a sé stanti e come tali devono essere dotati di una serie di sottocartelle fondamentali, come mostrato nella figura 6.4: la constant directory, la system directory e la time directory.

In constant sono presenti tutte le informazioni riguardanti la topologia della mesh (posizione dei punti, come questi sono uniti tra di loro a formare i vari volumi finiti, come le facce di boundary vengono aggregate e rinominate) e le proprietà fisiche del dominio fluido o della regione solida.

In system sono contenute tutte le specifiche associate alla risoluzione del problema quali lo start/end time, il time step per regolare l'avanzamento temporale, i metodi numerici che verranno utilizzati per discretizzare gli operatori matematici, i metodi risolutivi delle varie equazioni con le tolleranze (relative o assolute) ed eventuali dizionari specifici per il singolo caso.

Infine la time directory iniziale, denominata 0, in cui si definiranno le condizioni iniziali e quelle al contorno per tutti i campi d'interesse del problema.

In tutte le simulazioni si assumerà che il campo di moto sia laminare poiché la velocità del flusso è estremamente basse e quindi non ci sono le condizioni per lo sviluppo di moti turbolenti.

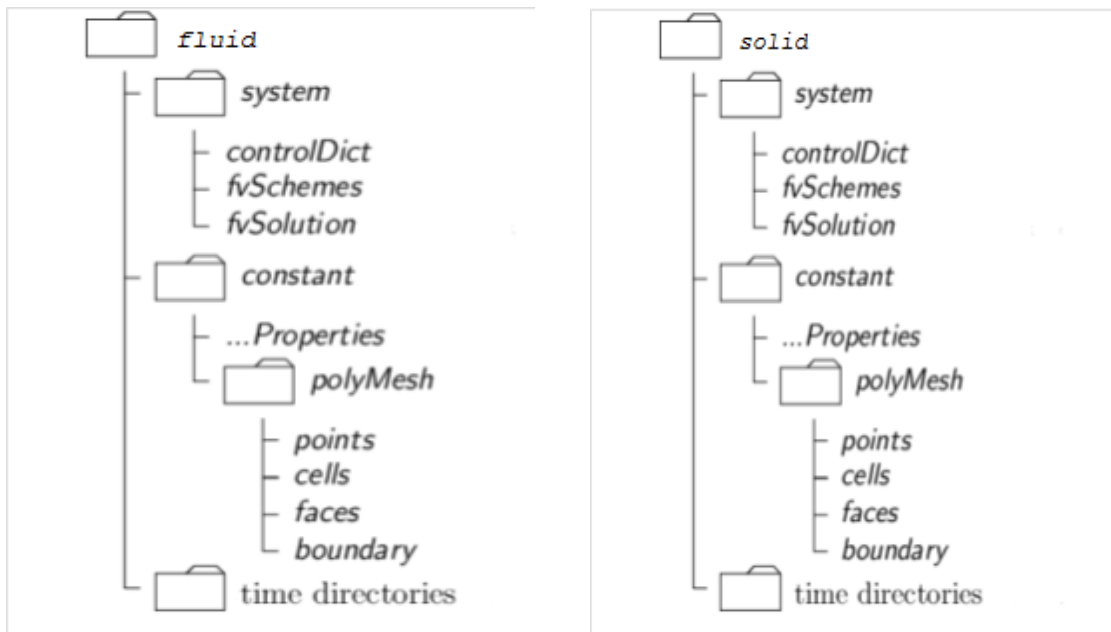


Figura 6.4: organizzazione delle cartelle fondamentali e delle eventuali sottocartelle per il dominio fluido e per il dominio solido.

### 6.2.1 Time directory e 0 directory per il dominio fluido

La scelta delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno riveste un peso non indifferente durante lo svolgimento di una simulazione numerica, poiché è il momento in cui si traspongono i vincoli fisici del problema in valori numerici utilizzati durante la risoluzione del sistema di equazioni algebriche.

A titolo d'esempio si considerino le condizioni iniziali ed al contorno per il campo di pressione assunte sul dominio fluido.

Prima di procedere con la descrizione è utile fare una distinzione tra condizioni al contorno fisiche e numeriche: le prime corrispondono a grandezze reali e misurabili del fluido (ad esempio il valore di pressione applicato in ingresso) mentre le ulteriori relazioni imposte per ricavare tutte le variabili che non corrispondono a nessun comportamento reale sono dette appunto condizioni numeriche (ad esempio la condizione di wedge applicata sulle pareti laterali).

Nella seconda categoria si hanno le condizioni più semplici di tipo `wedge` e `symmetryPlane`. La prima è utilizzata nel caso di mesh di calcolo assialsimmetriche per definire quali sono le superfici immateriali che delimitano lo spicchio circolare mentre la condizione di `symmetryPlane` non ha una funzione fisica, ma serve per non generare errori durante la fase di soluzione delle equazioni su volumi eccessivamente distorti.

Infine si hanno le condizioni applicate in corrispondenza delle pareti materiali suddivise tra `fixedWalls`, dove non si ha interazione fluido-struttura, e `contactWalls`, dove si ha interazione fluido-struttura; in entrambi i casi è stato imposto un vincolo di gradiente di pressione nullo ossia il valore di pressione calcolato nel centro cella più vicino alla parete viene riportato in maniera costante fino a raggiungere la parete stessa.

Le condizioni fisiche sono quelle più complesse e si hanno in corrispondenza dell'ingresso e dell'uscita del dominio, dove è necessario riprodurre la sorgente generatrice di `white noise` ed il terminale anecoico.

Se si imponesse allo scarico del condotto una pressione fissata (ad esempio la pressione ambiente pari a 101325 Pa) il solutore numerico dovrebbe generare un'onda di pressione, di intensità pari alla differenza tra il valore numerico calcolato ed il valore fissato in uscita, che ripercorrerebbe a ritroso il sistema fino a dissiparsi all'interno del silenziatore.

In questo modo verrebbe a mancare un'ipotesi fondamentale per l'applicazione della teoria della decomposizione ossia quella di uscita anecoica.

La condizione di `waveTransmissive` posta all'outlet permette alle onde di pressione che raggiungono l'uscita del condotto di non essere riflesse verso il silenziatore, realizzando in parte la condizione di terminale non riflettente.

Partendo dai valori definiti nel campo `fieldInf` e `lInf`, che rappresentano rispettivamente il campo indisturbato a valle e la distanza di questo dalla sezione considerata, la boundary condition va a calcolare il valore di pressione che non genera onde riflesse in corrispondenza dell'outlet del dominio.

Da quanto detto si può capire come la scelta del parametro `lInf` sia di fondamentale importanza per la rappresentazione numerica di un terminale anecoico:

- se il valore è troppo basso significa che il campo indisturbato è "vicino" all'outlet e quindi sarebbe come imporre all'uscita del condotto una pressione prossima al valore definito in `fieldInf`;
- se il valore è troppo elevato significa non imporre all'uscita nessuna pressione e lasciare che questa sia determinata semplicemente risolvendo le equazioni di conservazione (condizione che in OpenFOAM è indicata con `zeroGradient`) ma il problema a questo punto sarebbe semplicemente spostato sul determinare allo

scarico un profilo di velocità per cui il campo di pressione che ne deriva non generi onde riflesse.

Dopo una serie di prove si è visto che valori di `lInf` inferiori a 0.5 o superiori a 1.5 generavano curve di transmission loss estremamente “sporche” (inteso come presenza di oscillazioni non fisiche all’interno degli spettri in frequenza determinati), segno che la condizione imposta non era realmente anecoica.

Alla luce di questa considerazione si è deciso di optare per un valore intermedio ai due proposti pari a 1.

Lo sviluppo della condizione di white noise imposta all’ingresso si è basata sull’osservazione che tale segnale può essere composto, tramite sviluppo di Fourier, in un numero infinito di armoniche tutte di uguale ampiezza.

Le parti principali del codice implementato per la nuova boundary condition sono riportate di seguito:

```
if(randomPhases_)
{
    sum+=(sin(constant::mathematical::twoPi*f_*t +
              constant::mathematical::twoPi*faseRandom_[count]));
}
else
{
    sum+=(sin(constant::mathematical::twoPi*f_*t));
}
count++;
}
return sum/count;

faseRandom_[i]=RanGen_.scalar01();

patchField = amplitude_*currentScale() + refValue_;
```

Nel primo blocco si ha l’implementazione del concetto espresso dallo sviluppo in serie di Fourier ossia che ogni segnale può essere rappresentato, a meno di un certo errore, come sommatoria di un numero finito di armoniche.

Il numero di funzioni periodiche utilizzate è definito attraverso i tre parametri `maxFrequency`, `minFrequency` e `deltaFrequency` ossia  $n_{armoniche} = \frac{\text{maxFrequency} - \text{minFrequency}}{\text{deltaFrequency}}$ .

Eventualmente è possibile rendere il segnale in ingresso ancora più simile ad un rumore bianco attivando il flag relativo all’introduzione di uno sfasamento generati in maniera pseudo-casuale.

Questo sfasamento viene realizzato moltiplicando l’anomalia massima (pari a  $2\pi$ ) per un coefficiente, variabile tra 0 ed 1, generato per ogni armonica ad ogni passo temporale considerato.

Ovviamente l’utilizzo di uno sfasamento casuale rispetto ad uno sfasamento fisso rende l’input molto più simile alla condizione reale che si intende rappresentare ma complica anche tutta la fase di post-processing dei dati perché diventerà praticamente impossibile ottenere risultati non affetti da errore di leakage.

Poiché si è visto che in tutte le simulazioni fatte lo spettro in ingresso era abbastanza simile a quello atteso per un rumore bianco anche senza utilizzare lo sfasamento casuale, si è deciso di disattivare il flag privilegiando l’ottenimento di curve di transmission loss più pulite senza penalizzare eccessivamente il lato fisico del problema.



Sommati tutti i contributi delle diverse funzioni utilizzate, si va a normalizzare il risultato ottenuto rispetto al numero di armoniche impiegate per evitare che l'intensità della pressione sonora fornita in ingresso dipenda da tale fattore arbitrariamente scelto.

In questo modo si ottiene un coefficiente che oscilla in maniera periodica, ma casuale all'interno di un singolo periodo, tra 0 (quando tutte le armoniche assumono valore nullo) e 1 (quando tutte le armoniche assumono valore massimo).

Tale valore sarà poi moltiplicato per l'ampiezza dell'oscillazione di pressione indicato in `amplitude`, ottenendo così l'effettiva pressione sonora fornita in ingresso.

Poiché la boundary condition è applicata al campo di pressione per un caso comprimibile, non è sufficiente specificare l'entità della variazione di pressione ma è necessario stabilire il valore di pressione in termini assoluti sommando all'oscillazione un valore di riferimento (in questo caso assunto pari alla pressione ambiente).

Una seconda tipologia d'eccitazione del dominio fluido può essere costituito da un singolo impulso iniziale oppure da una serie di impulsi all'inizio di ogni nuovo periodo calcolato.

L'utilizzo dell'impulso ha il vantaggio di aumentare il contenuto energetico fornito in ingresso al sistema ma si corre il rischio di rendere instabile la soluzione calcolata poiché le velocità iniziali generate dalla variazione repentina di pressione potrebbero non rispettare più il vincolo imposto dal numero di Courant.

```
if (t<(n*tMin+0.0005))
{
    patchField = amplitude_*currentScale()/100+10*amplitude_+refValue_;
}
else
{
    patchField = amplitude_*currentScale() + refValue_;
}
```

Dal codice riportato sopra si può vedere come l'eccitazione impulsiva venga rappresentata attraverso un repentino aumento di pressione (in questo caso espresso come multiplo dell'ampiezza definita prima nella condizione di white noise) mantenuto per una frazione di periodo.

In questo modo l'impulso di pressione aumenterà l'ampiezza delle vibrazioni delle pareti solide rendendo più visibile l'effetto della risonanza nelle curve di transmission loss.

### 6.2.2 Time directory e 0 directory per il dominio solido

Per il dominio solido le condizioni al contorno ed iniziali vengono imposte solamente sullo spostamento  $U$  (nel caso di approccio puramente lagrangiano) oppure sull'incremento di spostamento  $\delta U$  (nel caso di update lagrangian).

Come nel caso precedente della pressione statica per il dominio fluido, anche per lo spostamento è possibile definire un valore uniforme per i punti interni alla mesh oppure imporre una deformata particolare all'elemento elastico definendo un valore di spostamento differente per ogni centro-cella.

In seguito si definiscono le condizioni su ogni superficie che compone la geometria considerata.

Tolta la condizione imposta sulle superfici laterali di tipo `wedge`, le cui proprietà sono già state definite nel paragrafo precedente, le altre condizioni meritevoli di spiegazioni sono `solidTraction` e `solidTractionFree`, imposte rispettivamente all'interfaccia fluido-solido e sulle pareti esterne della geometria.

La seconda condizione citata impone che sulle superfici non è presente alcuna azione di compressione/trazione e/o sforzo tangenziale.

La condizione di `solidTraction` è esattamente l'opposto della condizione definita in precedenza perché permette di imporre uno sforzo di compressione/trazione e/o sforzo tangenziale sulle facce cui viene applicata.

Inoltre è possibile specificare il metodo con il quale si calcola lo spostamento tra `updatedLagrangian` e `lagrangian` (la scelta non è completamente libera ma deve essere fatta coerentemente con il tipo di solutore utilizzato per determinare lo stato del dominio solido).

### 6.2.3 Constant directory

Nella constant directory oltre al `blockMesh` dictionary, necessario per la definizione dei punti principali, dei collegamenti topologici tra i vertici ed il numero di celle da utilizzare, sono presenti altri dizionari necessari per dichiarare:

- le caratteristiche termofisiche del fluido e quelle meccaniche dell'elemento solido;
- le tolleranze ed il metodo di sottorilassamento utilizzato per la risoluzione del contatto fluido-struttura;
- le opzioni necessarie per risolvere il movimento della mesh fluida.

Di seguito si riportano i dizionari citati commentando brevemente le voci la cui scelta dei parametri è più influente sui risultati ottenuti a fine simulazione.

```
thermoType
hPsiThermo<pureMixture<constTransport<specieThermo<hConstThermo<perfectGas>>>>>;
mixture          air 1 28.9 1007 0 1.84e-05 0.7;
```

Il dizionario per la definizione delle proprietà termofisiche del fluido è suddiviso in due parti.

Nella prima parte si specificano tutte le caratteristiche possedute dal modello di fluido che si va ad utilizzare nella simulazione fluidodinamica mentre nella seconda parte si riportano i valori specifici delle singole grandezze per il cui significato si rimanda alla tabella 5.2.

In questo caso specifico il modello utilizzato prevede:

- `hPsiThermo`: definisce come grandezza fondamentale l'entalpia e le variabili termodinamiche sono legate da relazioni che tengono conto della comprimibilità del fluido. L'utilizzo dell'entalpia o dell'energia interna come variabile nell'equazione dell'energia dipende dal solutore scelto e dalla versione di OpenFOAM utilizzata (poiché a pari solutore, scelto l'implementazione può cambiare da una versione ad un'altra);
- `pureMixture`: stabilisce che il fluido considerato è omogeneo e non reagente. Ovviamente è possibile prevedere la presenza di più fasi diverse (ad esempio liquido-gas o liquido-liquido con proprietà differenti) ma al momento attuale il solutore non ha implementate al suo interno le equazioni necessarie per risolvere problemi multi-fase (potrebbe essere uno sviluppo futuro nel caso di necessità);
- `constTransport`: definisce che la viscosità del fluido è costante nello spazio e nel tempo ed è indipendente dalla temperatura. Come spiegato nel capitolo precedente tale ipotesi può essere utilizzata anche nel caso considerato senza che ciò pregiudichi i risultati finali. Esiste comunque la possibilità di utilizzare modelli più complessi, come quello di Sutherland, nel caso gli effetti termici non siano più trascurabili;

- `specieThermo`: le proprietà termofisiche delle specie derivano dal calore specifico, dall'entalpia e/o dall'entropia;
- `hConstThermo`: i calori specifici sono ritenuti costanti ed indipendenti dalla temperatura. Come detto per la viscosità è possibile utilizzare modelli che tengano conto di tale dipendenza implementandone la relativa classe all'interno del solutore;
- `perfectGas`: stabilisce che le variabili termodinamiche sono correlate tra di loro dall'equazione dei gas perfetti  $pv = RT$ . Anche quest'assunzione deve essere attentamente vagliata a seconda del problema considerato poiché non è sempre detto che tale ipotesi rappresenti correttamente la realtà.

Anche per l'elemento elastico è necessario definire le proprietà meccaniche e fisiche principali nel dizionario `rheologyProperties`.

Grande importanza è assegnata al flag `planeStress` perché cambia il modo con cui sono calcolati i coefficienti di Lamè utilizzati nella risoluzione delle equazioni definite sul dominio solido.

```
planeStress      no;
rheology
{
  type            linearElastic;
  rho             rho [1 -3 0 0 0 0 0] 7800;
  E               E [1 -1 -2 0 0 0 0] 2.02e11;
  nu              nu [0 0 0 0 0 0 0] 0.33;
}
```

Infine c'è il dizionario `dynamicMeshDict` inserito per la movimentazione della sola mesh fluida utilizzando uno dei solutore già presenti all'interno del programma OpenFoam

```
dynamicFvMesh    dynamicMotionSolverFvMesh;
twoDMotion       no;
solver           laplace;
diffusivity      quadratic inverseDistance 1(contactWalls);
```

## 6.2.4 System directory per il dominio fluido

La system directory risulta essere costituita dai dizionari `controlDict`, `fvSchemes`, `fvSolution` e altri dizionari di importanza minore necessari per passare da una mesh bidimensionale ad una rappresentante un settore circolare con apertura angolare complessiva pari a  $5^\circ$ .

### 6.2.4.1 ControlDict

Nel `controlDict` sono riportati i dati di input relativi al controllo del tempo e alla lettura e scrittura dei risultati.

Innanzitutto viene stabilito l'istante temporale di inizio simulazione (`startTime`), fine della simulazione (`endTime`) ed infine il `deltaT`, ossia il passo di discretizzazione temporale, espressi in secondi.

La scelta del passo temporale deve essere sufficientemente grande da non protrarre eccessivamente la durata della simulazione ma anche sufficientemente piccolo da far sì che la soluzione trovata risulti stabile.

Ricordiamo che la stabilità temporale della soluzione, nel caso di griglia monodimensionale, è verificata se

$$Co = \frac{\Delta t (u + a)}{\Delta x} < 1$$

ossia l'entità dell'avanzamento temporale è tale per cui la perturbazione sonora (che si muove ad una velocità pari alla somma tra la velocità del suono nel mezzo e quella del flusso medio) viene catturata da due celle adiacenti.

Nel caso di simulazioni per il calcolo della transmission loss, essendo  $u \approx 0$  (effetto del flusso medio nullo), il Courant number diviene

$$Co = \frac{\Delta t a}{\Delta x} < 1$$

Nella sezione function viene gestita l'acquisizione dei dati di pressione e velocità sui piani di misurazione che sono utilizzati per la successiva attività di post-processing descritta al termine del terzo capitolo.

Al termine della simulazione, per ogni zona definita (il numero di punti d'acquisizione varia a seconda della teoria adottata per la scomposizione delle onde nelle sue componenti incidente e riflessa), per ogni istante temporale saranno disponibili i valori di pressione statica e velocità rappresentativi del valore che mediamente si registra nella sezione considerata.

#### 6.2.4.2 fvSolution

Il dizionario fvSolution è utilizzato per definire quali algoritmi numerici impiegare per risolvere ogni grandezza termodinamica.

Poiché il sistema di equazioni algebriche che deriva dalla discretizzazione delle equazioni differenziali ha dimensioni troppo elevate perché si possa pensare di risolverlo con un metodo diretto, è necessario utilizzare metodi iterativi per la determinazione della soluzione per cui è necessario stabilire un criterio d'arresto del processo.

Tale criterio d'arresto, normalmente basato sul concetto di residuo, può essere di tipo:

- assoluto quando tra un'iterazione e la successiva il residuo calcolato è minore del valore specificato in tolerance;
- relativo quando tra un'iterazione e la successiva il residuo calcolato risulta essersi ridotto di un fattore definito in relTol.

La scelta di un criterio rispetto all'altro è strettamente connessa al numero d'iterazioni correttive necessarie: se sono previste più correzioni della soluzione può avere senso imporre una tolleranza relativa per velocizzare la singola risoluzione mentre nel caso d'iterazione singola è meglio privilegiare una tolleranza assoluta.

In generale le tolleranze più basse sono imposte sulle grandezza di maggiore interesse per lo sviluppo del problema con l'interazione tra fluido e struttura esterna ossia la pressione e la velocità per il dominio fluido e lo spostamento o l'incremento di spostamento per il dominio solido.

Le altre grandezze termodinamiche e meccaniche hanno un peso minore all'interno della soluzione finale per cui le tolleranze scelte saranno in generale uno o due ordini di grandezza superiori rispetto alle precedenti.

È importante ricordare che in generale non conviene scegliere ordini di tolleranza troppo diversi per le varie grandezze poiché tutte le equazioni risultano comunque accoppiate

tra loro e, risolvendone male una o più, si finisce inevitabilmente per alterare i risultati ottenuti dalle altre espressioni risolte con errori ammessi molto inferiori.

L'algoritmo PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) è un metodo appartenente alla famiglia dei cosiddetti predictor-corrector. Ciò significa che ad ogni iterazione verrà svolto un calcolo partendo da una grandezza ipotizzata (ad esempio lo stesso valore della condizione al contorno o il valore calcolato all'istante temporale precedente).

La soluzione così ottenuta verrà poi utilizzato in equazioni implicite i cui risultati correggeranno l'ipotesi fatta inizialmente.

Il numero di correzioni fatte è stabilito dai parametri nCorrectors (numero di correzioni fatte utilizzando la sola equazione della pressione) ed nOuterCorrectors (numero di correzioni fatte risolvendo le equazioni della velocità e della pressione accoppiate tra loro).

Nel caso di utilizzo dell'algoritmo PISO non sono previste correzioni sul campo di velocità contrariamente a quanto è possibile fare utilizzando l'algoritmo PIMPLE.

### 6.2.4.3 fvSchemes

In fvSchemes vengono gestiti i metodi numerici di discretizzazione dei vari operatori temporali e spaziali.

In tutti i casi sono stati utilizzati metodi numerici del secondo ordine ossia l'errore commesso nella discretizzazione numerica tende ad annullarsi in maniera quadratica quando l'avanzamento spaziale (inteso come distanza tra due celle) o temporale tende a zero.

L'utilizzo di metodi di ordine elevato è necessario soprattutto nei casi in cui sono coinvolte perturbazioni sonore per evitare che la diffusione numerica introdotta dai metodi del prim'ordine smorzino eccessivamente i picchi o le rapide variazioni di pressione.

L'utilizzo di metodi più accurati viene pagato con la necessità di avere una griglia di calcolo più fitta ed un avanzamento temporale più limitato per evitare che la soluzione numerica calcolata diventi instabile in corrispondenza di celle con elevati gradienti delle grandezze considerate.

A livello di discretizzazione temporale si è evitato di utilizzare il classico metodo di Eulero poiché era numericamente troppo dissipativo e le curve di transmission loss evidenziavano un maggior abbattimento delle onde sonore all'aumentare della frequenza che non aveva nessuna giustificazione fisica.

Ricordiamo che l'utilizzo di metodi numerici di ordine superiore al secondo oltre ad essere difficilmente implementabile, soprattutto se applicati a problemi tridimensionali, è inutile se la stima delle grandezze dal centro cella ai punti d'interpolazione avviene con metodi d'ordine inferiore.

Questo perché l'ordine dell'errore commesso non è dato dal metodo più accurato ma da quello più approssimativo impiegato.

## 6.3 Presentazione dei risultati

In questa sezione saranno discussi i risultati ottenuti nei diversi casi seguendo la logica presentata ad inizio capitolo.

Questo permetterà di trarre conclusioni di carattere generale ragionando con una configurazione del silenziatore elementare che trascura l'interazione fluido-struttura.

Definita una condizione di riferimento per tutte le altre simulazioni sarà possibile mettere in evidenza le analogie e le differenze che, di volta in volta, interesseranno il singolo caso.

### 6.3.1 Camera singola con parete infinitamente rigida

Nella figura 6.5 possiamo notare la prima oscillazione di pressione imposta all'inlet della geometria propagarsi lungo il condotto a monte del silenziatore.

Osservando l'andamento della pressione all'interno del condotto si può vedere come l'ipotesi di onda piana, necessaria per l'applicazione della teoria della decomposizione, sia pienamente rispettata anche nella simulazione numerica.

Aiutandosi con la scala cromatica, riportata in alto nella figura, si può vedere come i valori della pressione dipendano solamente dalla coordinata assiale (in questo caso la coordinata x) mentre risultano indipendenti dalle altre due direzioni cartesiane adottate.

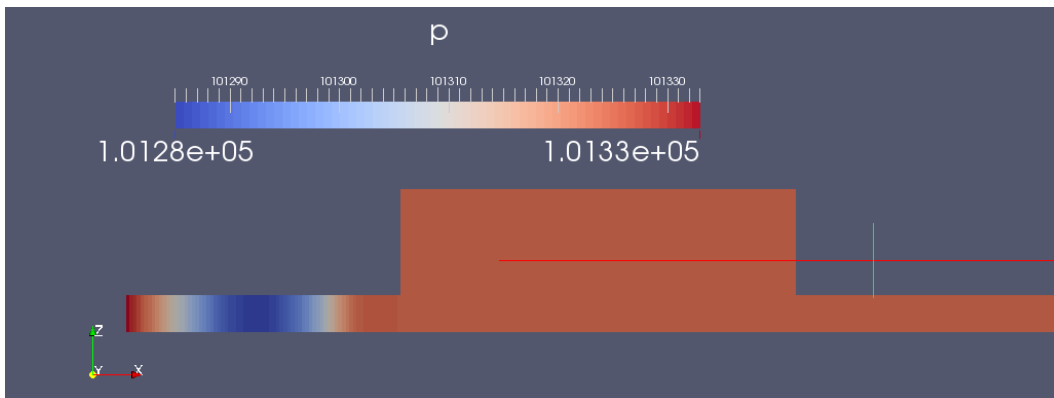


Figura 6.5: campo di pressione calcolato per  $t = 0.4$  ms in cui si mostra la perturbazione sonora percorrere il condotto fino al raggiungimento del silenziatore

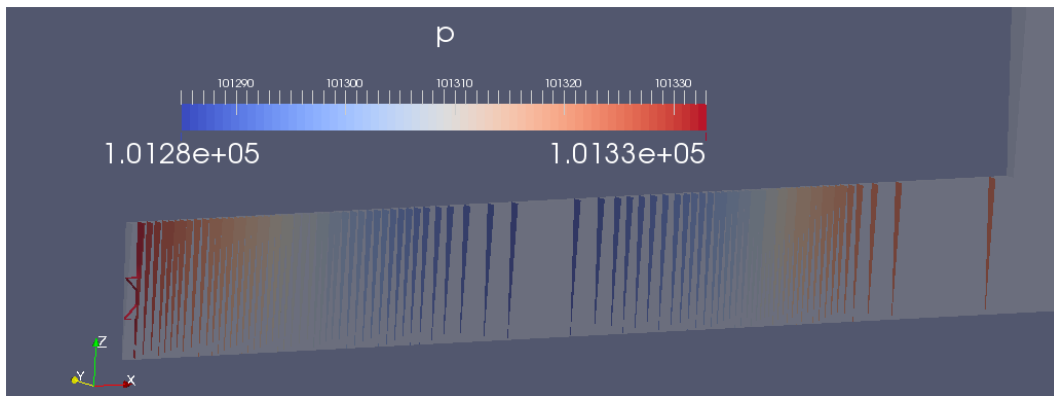


Figura 6.6: campo di pressione calcolato per  $t = 0.4$  ms mettendo in evidenza come le linee a pressione costante vadano a formare un fronte d'onda piana

Passando ad una rappresentazione con curve di livello isobare del campo di pressione riportato in figura 6.5 si ottiene la figura 6.6 in cui si nota in maniera chiara come l'ipotesi di propagazione della perturbazione per onde piane sia pienamente accettabile fintantoché si rimane all'interno del condotto.

Si osserva che le linee ottenute sono perfettamente parallele le une alle altre e si muovono ortogonalmente al piano che contiene la sorgente sonora così come è stato detto quando si è definito il concetto di onda piana nel primo capitolo.

Quando la perturbazione raggiunge l'ingresso della camera d'espansione l'ipotesi di onda piana decade in quanto il fronte della perturbazione assume un profilo molto simile ad un arco di cerchio.

Nella figura 6.7 si può notare come la transizione da onda piana ad onda sferica inizi leggermente prima di arrivare alla variazione di sezione per cui, come è stato detto a conclusione del terzo capitolo, sarebbe meglio non posizionare le sonde o i punti di campionamento troppo vicino all'ingresso del silenziatore per evitare che la teoria della decomposizione non possa più essere applicata.

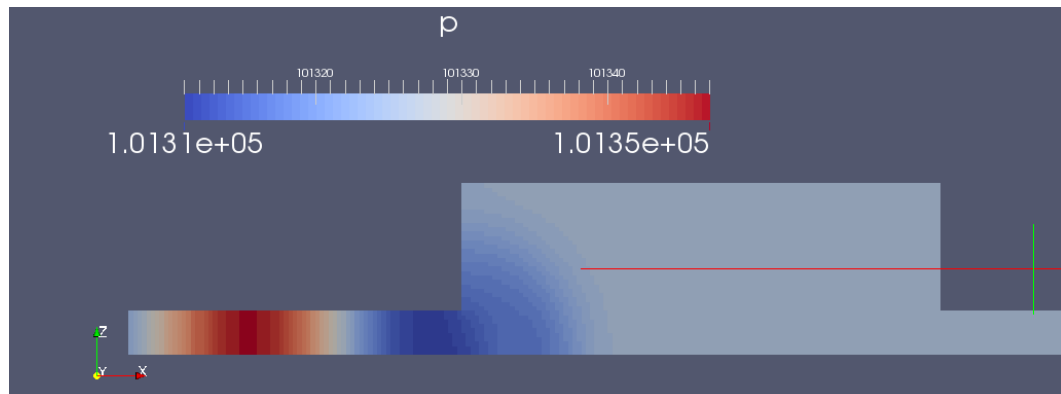


Figura 6.7: campo di pressione calcolato per  $t = 0.6$  ms in cui si mostra la transizione tra onda piana ed onda sferica all'ingresso del silenziatore

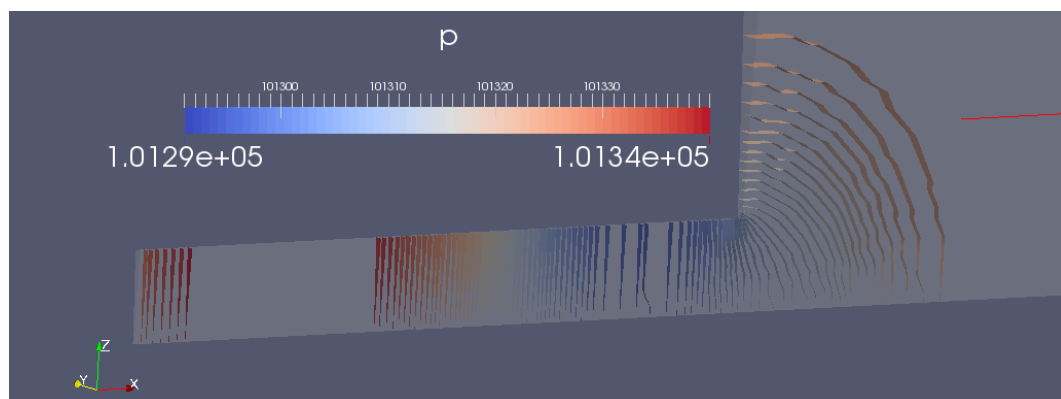


Figura 6.8: campo di pressione calcolato per  $t = 0.6$  ms in cui le linee a pressione costante evidenziano il passaggio da perturbazione piana a perturbazione sferica all'interno del silenziatore

Passando da una rappresentazione continua del campo di pressione ad una con curve di livello isobare si può apprezzare meglio il passaggio da onda piana, all'interno del condotto, ad onda sferica, all'interno della camera del silenziatore.

Sempre nella figura 6.7 si può osservare come più la superficie della perturbazione aumenta e più l'ampiezza dell'onda sonora tende a diminuire passando da qualche centinaio di pascal a solamente qualche decina.

La spiegazione di tale fenomeno è legata al fatto che la potenza sonora contenuta nella perturbazione è finita e tende a conservarsi passando dal condotto al silenziatore.

Sfruttando la relazione (1.3) si può vedere come all'aumentare della superficie interessata la conservazione della potenza imponga un'uguale diminuzione della pressione sonora, coerentemente con quanto si osserva nelle figure.

considerando un istante temporale successivo, si vede una nuova perturbazione in ingresso al silenziatore mentre quella precedente è stata in parte riflessa dalle pareti solide ed in parte esce dal condotto posto a valle del componente.

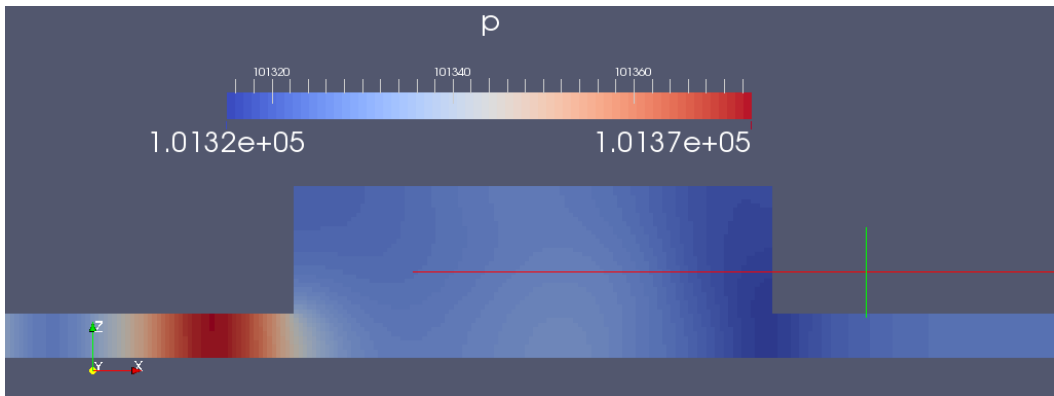


Figura 6.9: campo di pressione calcolato per  $t = 1.3$  ms. Si può notare una nuova onda di pressione in ingresso mentre la precedente è in parte riflessa dalle pareti ed in parte viene trasmessa nel condotto a valle

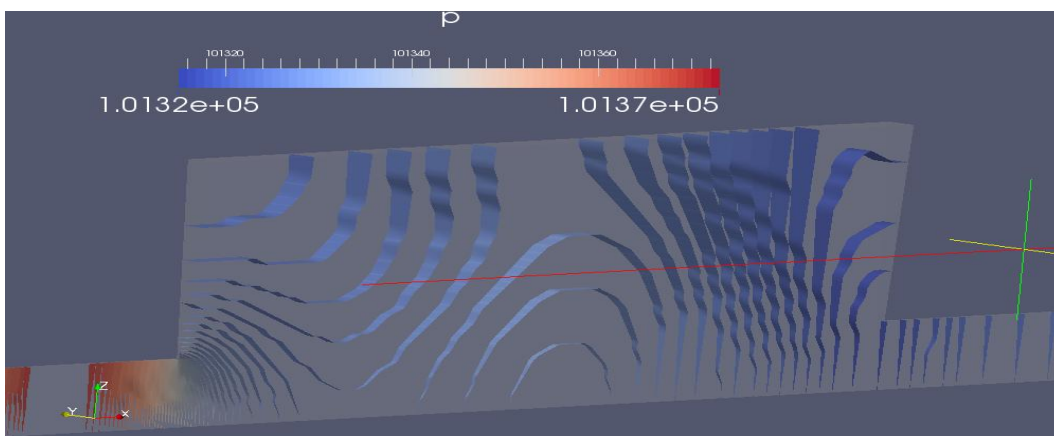


Figura 6.10: campo di pressione calcolato per  $t = 1.3$  ms in cui le linee a pressione costante evidenziano come il fronte d'onda piano avanzi all'interno dei condotti, diventando sferico una volta all'interno della camera d'espansione

Nelle immagini 6.9 e 6.10 si può notare come il fronte d'onda torni ad essere piano una volta entrato all'interno del condotto di scarico, come richiesto dalla teoria della decomposizione.

Nella figura 6.10 si vede come i fronti d'onda derivanti dalla riflessione delle pareti si incontrino all'incirca a metà del dispositivo e, interagendo tra di loro, aumentano ulteriormente l'effetto dissipativo che si ottiene.

Prima di procedere con l'attività di post-processing dei dati è necessario verificare che anche l'ipotesi di terminale anecoico sia rappresentata correttamente all'interno del simulatore numerico.

Se il terminale non fosse realmente anecoico genererebbe delle onde di pressione riflesse e quindi parte del fluido percorrerebbe il condotto da valle verso monte.



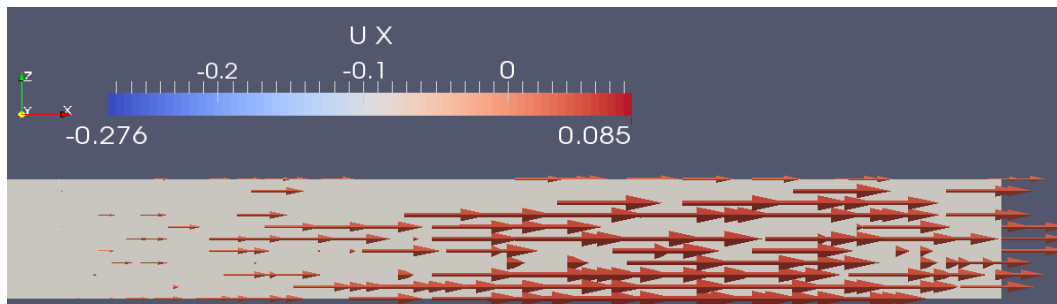


Figura 6.11: campo di velocità nel condotto di scarico calcolato per  $t = 5$  ms

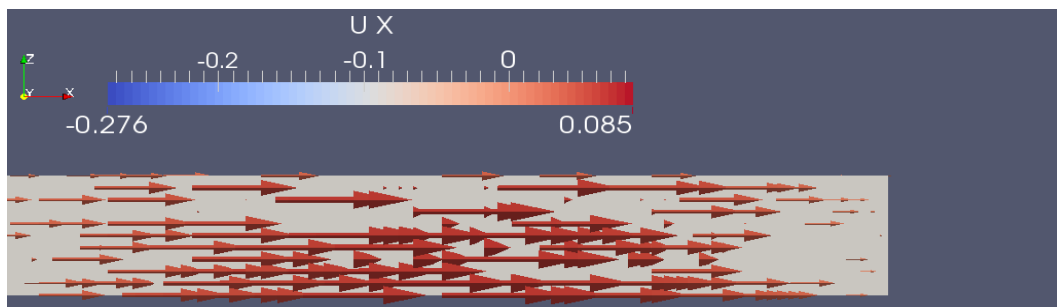


Figura 6.12: campo di velocità nel condotto di scarico per  $t = 9$  ms. In evidenza il fatto che non ci siano componenti di velocità riflesse che percorrono il dominio da valle verso monte

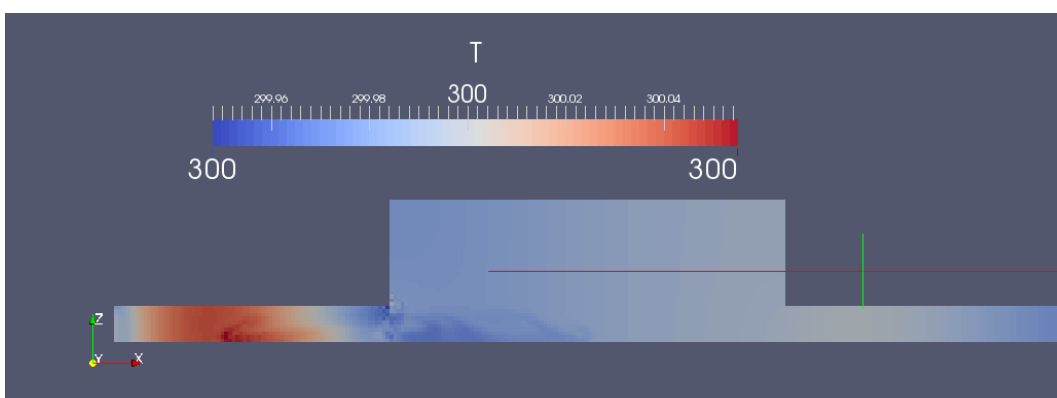
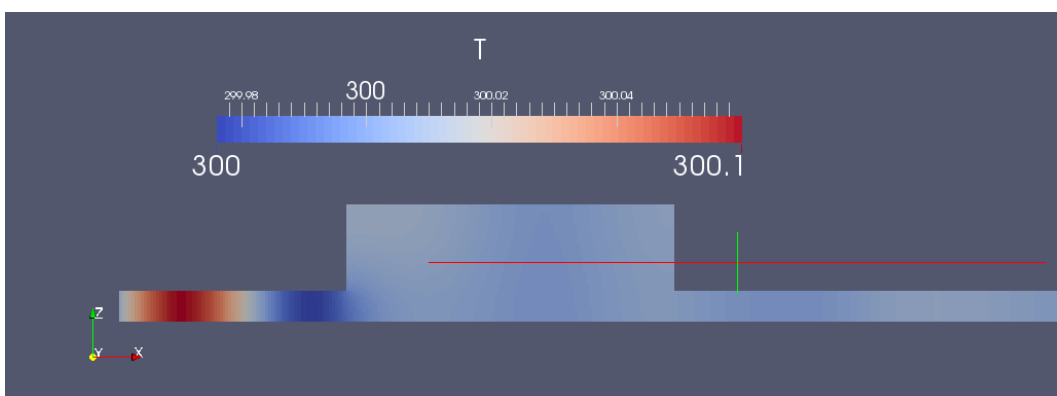


Figura 6.13-6.14: campo termico calcolato per  $t = 4$  ms e per  $t = 500$  ms. Si può notare come al passare del tempo il campo termico si mantenga costante con variazioni di qualche decimo di grado kelvin

Osservando le figure 6.11 e 6.12 possiamo notare come la direzione del flusso dei gas (indicato dalle frecce) rimanga sempre la stessa all'interno di tutto il condotto, per cui si può affermare che la condizione al contorno di anecoicità è stata realizzata correttamente.

Riportiamo infine nelle immagini 6.13 e 6.14 il campo di temperatura determinato per istanti temporali differenti per mostrare come l'ipotesi d'indipendenza delle proprietà fisiche del fluido dalla temperatura possa essere ritenuta sostanzialmente corretta.

Questa costanza nel campo di temperatura del fluido è possibile sia perché non si hanno fenomeni particolarmente dissipativi e turbolenti sia perché non sono presenti sorgenti termiche interne o esterne al dominio.

Dopo aver osservato quello che accade a livello fisico all'interno del dominio e dopo aver verificato che tutte le ipotesi fatte durante la trattazione teorica trovano riscontro nella soluzione numerica è possibile passare alla fase ossia di confronto tra le varie curve di transmission loss.

Data la geometria molto semplice del problema, sono disponibili in letteratura (come ad esempio in [16]) diverse espressioni analitiche che consentono di riprodurre la curva analitica nell'ipotesi di propagazione di onde piane.

L'equazione più utilizzata è

$$TL = 10 \log_{10} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( m - \frac{1}{m} \right)^2 \sin^2 k l_{chamber} \right] \quad (6.1)$$

dove  $m$  rappresenta il rapporto tra la sezione della camera d'espansione e la sezione del condotto in ingresso,  $k$  è il numero d'onda dipendente dalla frequenza considerata e dalla velocità del suono nel mezzo e  $l_{chamber}$  indica la lunghezza della camera d'espansione analizzata.

Si può notare che se la perturbazione è tale da generare un campo di pressione piano le caratteristiche d'abbattimento del componente dipendono esclusivamente dalla geometria considerata e dalla frequenza dell'oscillazione, così come era stato detto all'inizio di questo lavoro di tesi.

Procediamo quindi con un primo confronto tra la curva definita dall'equazione (6.1), la curva determinata con i risultati numerici ottenuti considerando la parete della camera infinitamente rigida ed i risultati sperimentali descritti in [5].

Osservando la figura 6.15 si può notare come l'accordo tra le curve dipende dalla frequenza considerata:

- fino a 600 Hz circa si ha un buon accordo tra i risultati sperimentali ed i risultati teorici mentre la simulazione numerica tende a sovrastimare l'effetto dissipativo prodotto dalla camera;
- tra i 600 Hz ed i 1700 Hz le tre curve sono spesso sovrapposte e comunque la differenza tra i risultati numerici ed i risultati teorici non è mai superiore agli 0.8 dB;
- Oltre i 1800 Hz la differenza tra i valori sperimentali/numerici e quelli teorici diventa più marcata (superiore ai 2-3 decibel) perché la potenza sonora all'interno della camera inizia ad essere dissipata anche attraverso gli high order modes che aumentano l'abbattimento complessivo della camera. Questa dissipazione non può essere colta dalla curva teorica che dipende solamente dalla geometria della camera mentre sia la curva sperimentale sia quella numerica continuano a rimanere pressoché sovrapposte fino al termine del dominio considerato.

Come riportato in molti testi tra cui [17], una prima stima della frequenza cui s'iniziano a sentire gli effetti degli h.o.m. può essere ottenuta tramite la seguente espressione

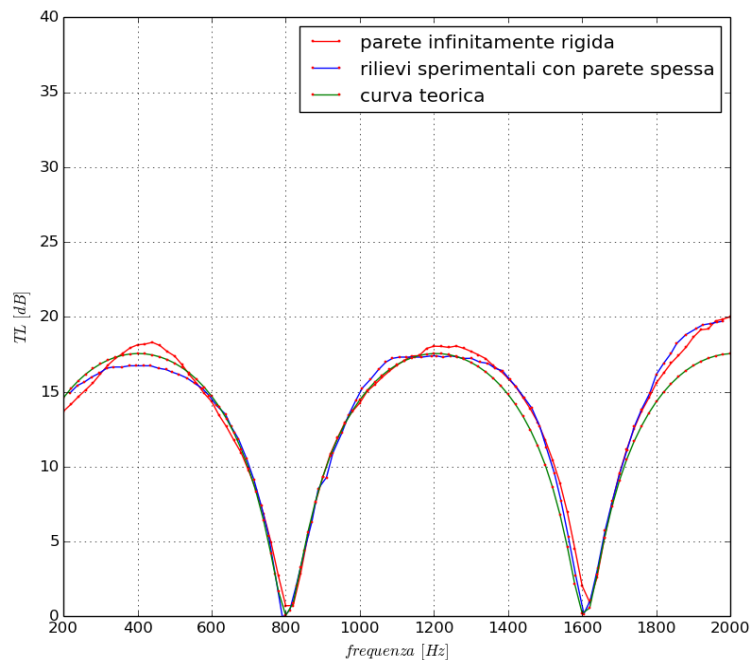


Figura 6.15: confronto tra le curve di transmission loss ottenute dalla soluzione numerica (curva rossa), dalla teoria (curva verde), dalle rilevazioni sperimentali (curva blu)

$$f_{h.o.h.} = 3.83 \frac{a}{\pi D} \quad (6.2)$$

dove  $a$  rappresenta la velocità del suono nel mezzo considerato e  $D$  indica il diametro della camera considerata.

Assumendo una temperatura del gas circa costante e pari a 300 K, per cui si ottiene una velocità del suono di circa 347 m/s, ed un diametro della camera di 0.155 m si ottiene una frequenza di soglia di circa 2730 Hz.

Come si può notare anche questo parametro, così come la transmission loss, è indipendente dall'ampiezza della perturbazione imposta all'ingresso del sistema ma dipende solamente dalla configurazione della camera e dalla temperatura del fluido che, come già mostrato in precedenza, può ritenersi costante sia nello spazio sia nel tempo.

Notiamo inoltre che la curva numerica non diventa mai rigorosamente nulla in corrispondenza delle trasparenze della camera poiché la leggera dissipazione introdotta dagli schemi numerici impedisce il perfetto trasferimento di potenza attraverso la camera generando sempre una lieve attenuazione che si riflette poi sui risultati finali.

In generale si può affermare che i risultati numerici riescono a riprodurre i rilievi sperimentali in maniera più che soddisfacente, a testimonianza del fatto che l'attività di post-processing può essere ritenuta corretta.

### 6.3.2 Camera singola con parete spessa (rigidezza elevata)

A questo punto è possibile rilassare l'ipotesi di parete infinitamente rigida passando a considerare un problema FSI in cui la parete è caratterizzata da una rigidezza elevata ma finita.

Volendo avere un riferimento sperimentale da utilizzare nel seguito per validare i risultati numerici si è deciso di adottare gli stessi parametri geometrici e meccanici

dell'elemento elastico indicato nelle prove riportate in [5], i cui valori assoluti sono riportati nel dizionario `rheologyProperties`.

Trattandosi di un problema in cui dominio fluido e solido sono contemporaneamente presenti è necessario definire le superfici di separazione tra i due lungo le quali avverrà lo scambio di informazioni che si riferiscono alla pressione e allo spostamento.

Come indicato nella figura 6.3 questa zona è stata denominata `contactWalls` e comprende il corpo della camera in aggiunta ad una piccola parte dei condotti d'ingresso ed uscita.

Sia nel caso con lamiera spessa che in quello con lamiera sottile è stato verificato che l'utilizzo di un'interfaccia fluido-solido che comprenda interamente i condotti non modifica i risultati finali ottenuti in termini di `transmission loss` ma aumenta i tempi d'elaborazione necessari risolvere il problema.

La scelta del numero di celle utilizzate per discretizzare i domini è stata oggetto di prove per determinare il valore ottimale che permettesse di ottenere risultati soddisfacenti con tempi di calcolo che non eccedessero i 3-4 giorni.

Anche in questo caso l'attenzione maggiore è stata richiesta dal dominio solido, soprattutto per scegliere il numero di celle da utilizzare lungo lo spessore dell'elemento elastico poiché:

- un numero di elementi basso avrebbe generato un materiale con una rigidità superiore a quella reale per cui gli spostamenti e le frequenze naturali della camera sarebbero state calcolate in maniera errata;
- un numero di elementi elevato avrebbe comportato un allungamento inaccettabile dei tempi di calcolo. Ad esempio il passaggio da tre a quattro celle (nel caso in cui lo spessore della lamiera sia pari a 2 mm) comportava un raddoppiamento delle iterazioni per singolo istante temporale.

Il numero di volumi utilizzati lungo l'asse del dominio ha mostrato minore influenza sia sui risultati ottenuti sia sui tempi di calcolo richiesti.

L'unica attenzione è stata quella di utilizzare un numero di celle tale per cui gli elementi ottenuti non fossero eccessivamente allungati lungo una direzione preferenziale; se ciò non fosse vero il materiale non sarebbe più perfettamente isotropo ma la sua rigidità dipenderebbe dalla direzione considerata.

Al termine della serie di prove, le dimensioni ottimali sono risultate essere:

- 2x2 mm per il dominio fluido sia nella simulazione con parete spessa che in quella con parete sottile;
- 2x1 mm per il dominio solido nel caso di parete spessa;
- 1x0.5 mm per il dominio solido nel caso di parete sottile.

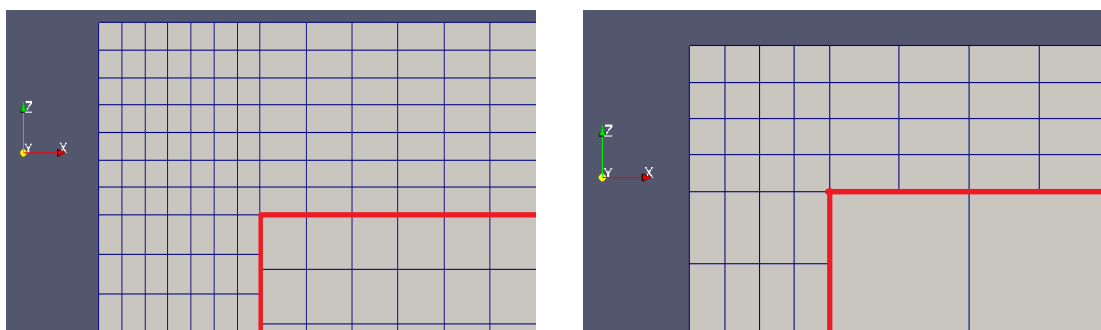


Figura 6.16: confronto tra la griglia di calcolo utilizzata nel caso di parete con spessore elevato (a sinistra) e nel caso di parete sottile (a destra). In rosso l'interfaccia fluido-solido

Un utilizzo di celle con dimensioni inferiori sarebbe possibile a patto di accettare un allungamento dei tempi di calcolo necessari per l'ottenimento della simulazione

Nella figura 6.16 si sono riportate le mesh utilizzate nelle simulazioni CFD quando si considera l'interazione tra il dominio fluido ed il dominio solido-elastico.

Notiamo che nell'immagine di sinistra, in cui la parete ha una rigidità elevata e l'interazione tra fluido e struttura è limitata, è possibile utilizzare un numero di celle superiore al valore definito come ottimale (3-4 volumi nello spessore) perché le iterazioni necessarie per risolvere lo stato dell'elemento elastico è comunque inferiore a 200.

Infatti ad ogni avanzamento temporale, essendo la parete estremamente rigida, la variazione tra uno stato del sistema ed il successivo è limitato e velocemente determinabile.

Questo fatto aiuta anche a diminuire il numero di cicli da compiere per risolvere l'accoppiamento tra i due domini poiché le variazioni termodinamiche del fluido influenzano minimamente la meccanica del dominio solido.

Nell'immagine di destra si può notare come al diminuire dello spessore considerato è possibile diminuire il numero di celle impiegate fermo restando che, anche per spessori limitati, sono sempre necessarie almeno due celle per descrivere la deformazione dell'elemento elastico.

La necessità di mantenere una certa regolarità nella geometria dei volumi finiti implica che diminuendo lo spessore della parete sia necessario ridurre le dimensioni della cella anche lungo le altre direzioni.

Questa considerazione appare evidente confrontando le dimensioni della cella fluida (mantenute fisse 2x2 mm in tutte le simulazioni condotte) con quelle della cella solida: nel caso di parete rigida il rapporto è quasi 1:1 mentre nel caso di parete deformabile il rapporto diventa 2:1 o anche di più se si desidera utilizzare un numero di volumi finiti maggiore nel dominio solido.

Chiariti alcuni aspetti critici per la realizzazione della griglia di calcolo da utilizzare nelle varie simulazioni, si può passare a commentare i risultati ottenuti nel caso di interazione tra fluido di lavoro e la parete esterna spessa, confrontandoli poi con i risultati presentati nel caso di parete infinitamente rigida.

Le immagini 6.17 e 6.18 mostrano come anche nel caso di silenziatore con parete esterna spessa l'ipotesi di propagazione delle perturbazioni tramite onde piane può ritenersi corretta purchè si considerino sezioni dei condotti d'ingresso e d'uscita sufficientemente lontani dalla camera d'espansione.

In questo caso la condizione necessaria per l'applicazione della teoria della decomposizione è rispettata e quindi tutta l'attività di post processing per il calcolo della transmission loss, spiegata nel terzo capitolo, continua a rimanere valida.

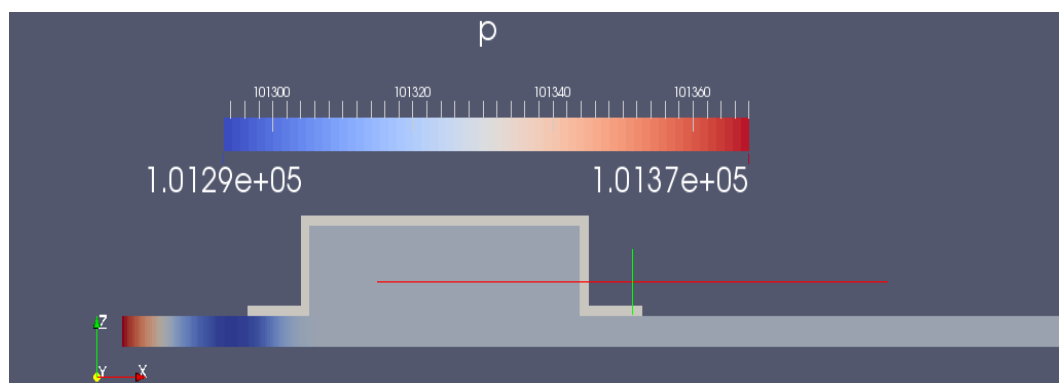


Figura 6.17: campo di pressione calcolato per  $t=0.4$  millisecondi. Si può notare come la perturbazione propaghi per onde piane all'interno del condotto d'ingresso alla camera d'espansione

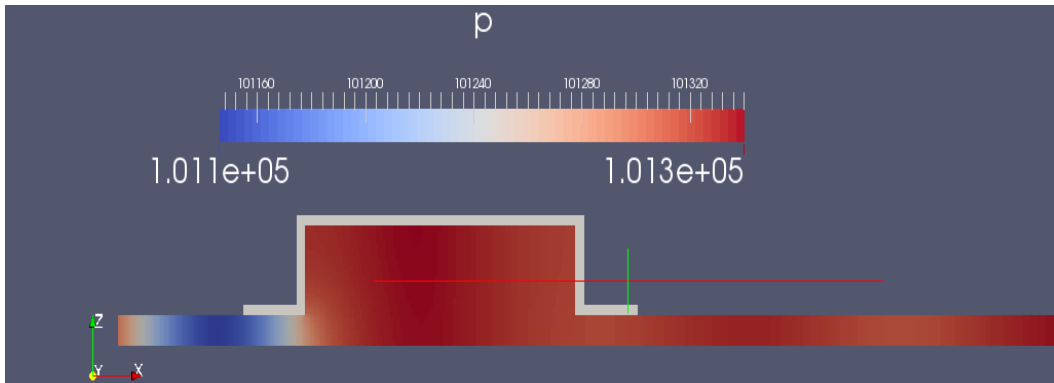


Figura 6.18: campo di pressione calcolato per  $t=250$  ms. Si può notare come la perturbazione propaghi per onde piane nei condotti d'ingresso ed uscita. Al termine del condotto d'ingresso ed al centro della camera, dove una minima vibrazione della parete modifica il modo in cui si propagano le onde all'interno del corpo centrale, si ha propagazione per onde sferiche

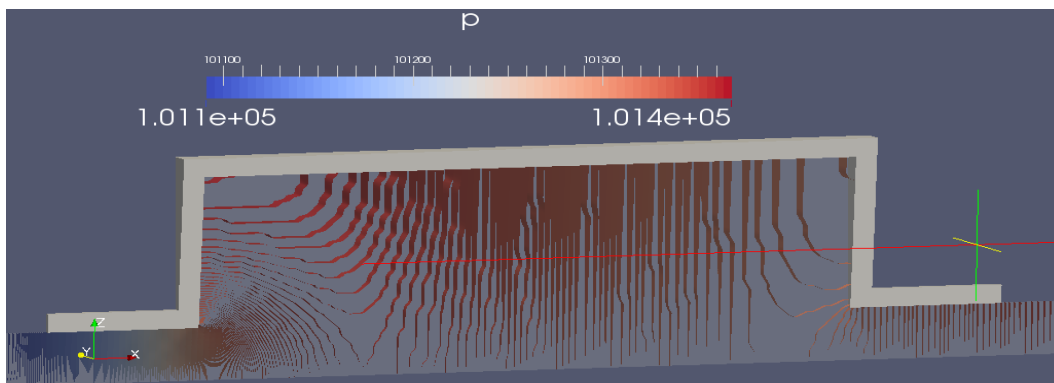


Figura 6.19: campo di pressione calcolato per  $t=250$  millisecondi in cui le linee a pressione costante evidenziano come il fronte d'onda piano avanzi all'interno dei condotti. È possibile notare come in corrispondenza delle pareti laterali della camera si abbia una parziale riflessione delle perturbazioni ed una leggera alterazione legata alle vibrazioni della cassa esterna

Nell'immagine 6.19 si possono notare alcuni aspetti già evidenziati in precedenza. In particolare:

- Lontano dai bruschi allargamenti e dai bruschi restringimenti le perturbazioni propagano con fronti d'onda piana;
- Vicino alle pareti esterne le onde di pressione interagiscono con l'elemento solido venendo riflesse più volte verso il centro della camera, aumentando l'effetto dissipativo complessivo;
- L'elevata rigidità impedisce alle pareti della camera di vibrare in maniera significativa e questo è visibile dal fatto che non si hanno disturbi nel moto ondoso generati in prossimità del dominio solido.

Per quanto detto finora è lecito aspettarsi che i risultati della simulazione numerica non saranno molto diversi da quelli ottenuti assumendo la parete esterna infinitamente rigida.

Prima di commentare la curva di transmission loss si preferisce dare visione anche dei risultati ottenuti per il dominio solido.

Nella serie di immagini si confronta lo stato all'interno dell'elemento solido elastico a due diversi istanti temporali, rispettivamente pari a 0.4 ms (immagini a sinistra) e 250 ms (immagini a destra).

A 0.4 ms la prima onda di pressione, generata all'inizio del domini fluido, comincia ad interagire con la parete solida e ciò è visibile osservando sia il campo di spostamento  $\mathbf{U}$  sia il campo degli sforzi rappresentato con un unico valore dato dallo sforzo equivalente.

Lo spostamento è praticamente trascurabile ma non è uniforme il che prova l'interazione tra fluido e struttura.

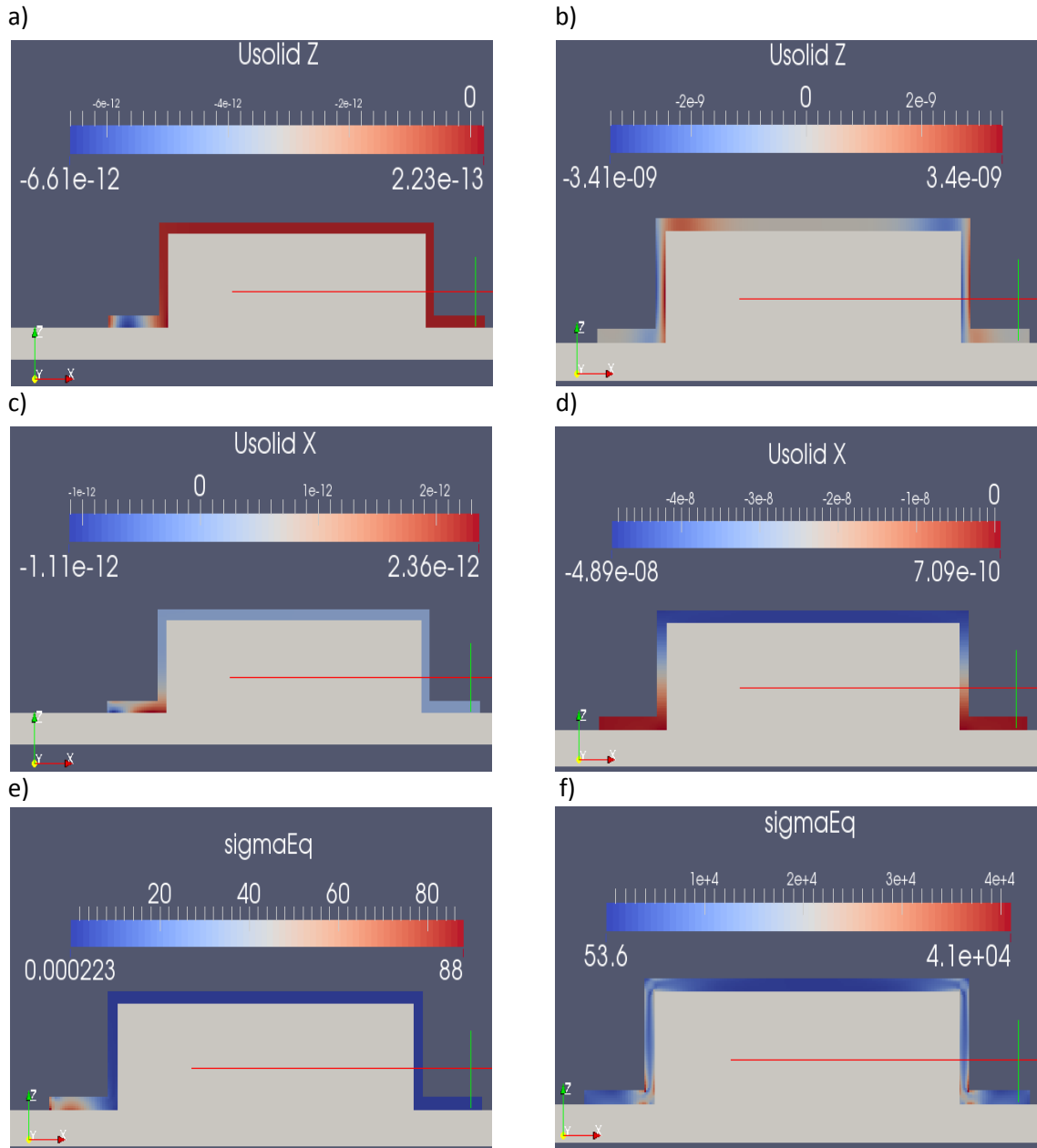


Figura 6.20: confronto tra lo stato di sforzo/spostamento all'interno della parete solida calcolato per  $t=0.4$  millisecondi (immagini a,c ed e) e  $t=250$  millisecondi (immagini b,d ed f)

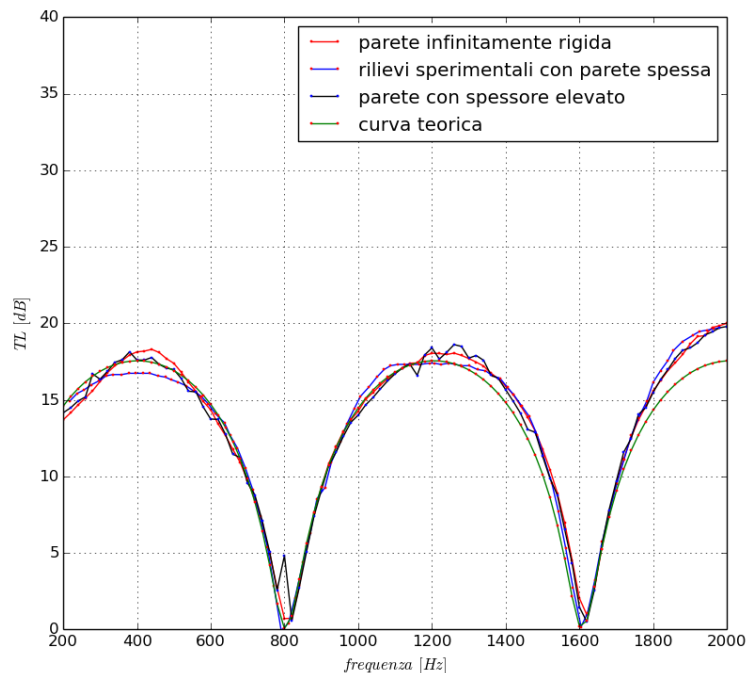


Figura 6.21: confronto tra la curva di transmission loss derivante dalla teoria (curva verde), con parete infinitamente rigida (curva rossa), con parete spessa e rigidità finita (curva blu) e rilievi sperimentali (curva nera)

Guardando l'immagine 6.18 si può vedere come la perturbazione generata nei primissimi istanti della simulazione sia di soli 35-40 Pa che, in aggiunta alle buone proprietà meccaniche dell'acciaio impiegato per la realizzazione del silenziatore, giustifica la scarsissima deformazione subita dalla parete esterna

Anche osservando lo stato di sforzo interno alla parete si può vedere come il massimo valore, raggiunto in corrispondenza dell'"incastro" all'inizio dell'elemento elastico, sia di soli 90 Pa.

Considerando la simulazione a metà del tempo totale studiato, le onde di pressione raggiungono la loro massima intensità e ciò è visibile anche osservando i risultati nel dominio solido dato che l'entità degli spostamenti aumenta dai due ai quattro ordini di grandezza rispetto agli istanti iniziali.

Si noti tuttavia che l'entità massima dello spostamento si attesta intorno ai  $10^{-8}$  metri per cui la lastra esterna può considerarsi ancora sostanzialmente indeformata.

Anche gli sforzi interni alla parete aumentano sensibilmente rispetto ai primi istanti della simulazione, anche se la loro entità rimane abbondantemente al di sotto del limite di snervamento o di rottura di un qualsiasi acciaio utilizzato in ambito industriale.

Dall'immagine 6.20f si nota come gli sforzi massimi si hanno in corrispondenza dei raccordi tra i condotti d'ingresso e d'uscita e le pareti laterali della camera d'espansione.

Questo era prevedibile poiché in corrispondenza dei raccordi ad angolo retto il coefficiente d'intensificazione degli sforzi assume il valore massimo possibile.

Come è noto anche dalla teoria dei solidi, in corrispondenza di brusche variazioni di sezione sarebbe meglio prevedere raccordi con raggi ampi per diminuire l'intensificazione degli sforzi all'interno del materiale.

Osservando le figure 6.20b e 6.20d si vede come in corrispondenza delle pareti laterali della camera si hanno i massimi spostamenti sia in direzione radiale sia in direzione assiale perché su queste superfici è massima l'interazione tra fluido e struttura circostante.



Terminata la veloce panoramica sui risultati qualitativi ottenuti dalla simulazione numerica con parete spessa della cassa esterna è possibile passare ad un'analisi più quantitativa confrontando le curve di transmission loss ottenute.

In questo caso si riportano le curve ottenute nell'ipotesi di parete infinitamente rigida, parete spessa, la curva analitica già utilizzata nel confronto precedente ed i risultati sperimentali.

Dalla figura 6.21 si può vedere come vi sia un buon accordo tra i risultati ottenuti nell'ipotesi di parete infinitamente rigida e parete spessa.

Come nel caso precedente i risultati numerici non riescono a fornire una transmission loss perfettamente nulla in corrispondenza delle frequenze di trasparenza della camera a causa della lieve diffusione introdotta dai metodi numerici utilizzati per discretizzare gli operatori matematici.

Si può notare come la rigidità finita della parete non le impedisce di vibrare impercettibilmente introducendo delle oscillazioni di qualche decimo di decibel nell'andamento della curva.

Questo disturbo prodotto dalla vibrazione della parete esterna, anche se meno evidente, si ha anche guardando i rilievi sperimentali tra gli 1000 Hz ed i 1600 Hz.

Anche in questo caso si vede come l'accordo con la curva teorica è più limitato all'aumentare della frequenza poiché intervengono meccanismi dissipativi che non sono più descrivibili considerando solamente un problema bidimensionale, come fa la teoria utilizzata per ricavare l'espressione analitica della curva di transmission loss.

A meno di piccole oscillazioni, i risultati numerici presentati finora sono in totale sintonia con i rilievi sperimentali presentati all'inizio di questo lavoro di tesi nell'immagine 1.10 segno che le condizioni iniziali e le condizioni al contorno imposte all'interno del modello numerico ben rispecchiano quanto avviene nella realtà.

### **6.3.3 Camera singola con parete sottile: caso assialsimmetrico**

Dopo aver verificato che i risultati ottenuti utilizzando il nuovo solutore sono confrontabili con quelli definiti dalla teoria o determinati sperimentalmente, è possibile diminuire ulteriormente la rigidità della parete esterna ovvero diminuire lo spessore della lamiera utilizzata passando da 7 millimetri a 2 millimetri.

In questo modo la parete esterna vibrerà sotto l'azione delle onde di pressione che attraversano la camera d'espansione, aumentando o diminuendo l'effetto dissipativo prodotto dal silenziatore a seconda di quanto la frequenza della perturbazione si avvicina alla frequenza naturale della cassa esterna.

Come anticipato all'inizio del capitolo, la vibrazione della parete esterna rende necessario uno studio preliminare sul comportamento del dominio solido al variare della frequenza d'eccitazione.

Infatti le griglie di calcolo di tipo wedge, utilizzate in tutte le simulazioni presentate finora, permettono di descrivere comportamenti assialsimmetrici sia per il dominio fluido sia per la parte solida-elastica.

Se dall'analisi meccanica dovesse risultare che alcuni modi di vibrare della struttura non rispettino tale condizione di assialsimmetria, sarebbe necessario passare a considerare una griglia di calcolo completamente tridimensionale, con un conseguente aggravio dei tempi d'elaborazione.

Dalle immagini 6.22 e 6.23 si può vedere come i primi due modi di vibrare della struttura solida-elastica che interessano il campo d'indagine (che si ricorda essere limitato all'intervallo di frequenze 200-2000 Hz) siano rispettivamente a 350 Hz e a 797 Hz.

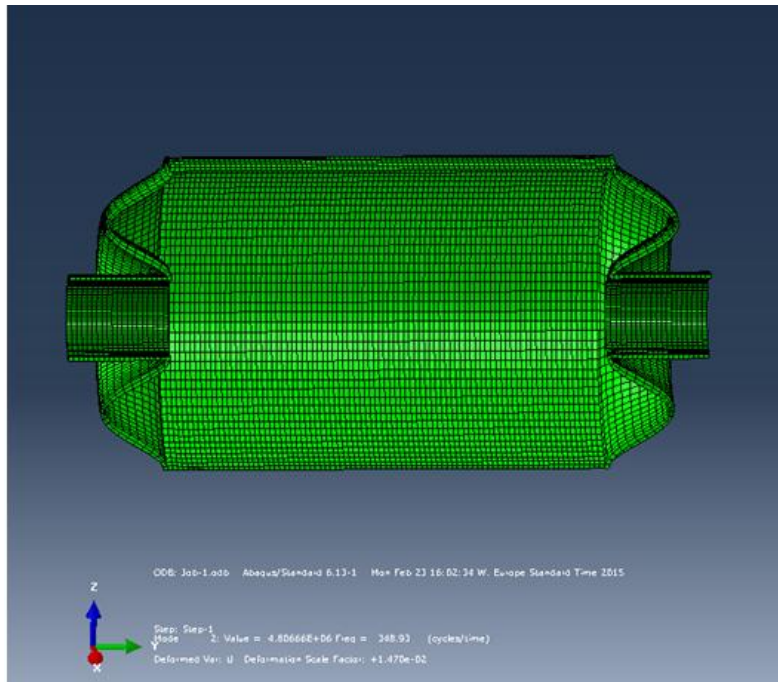


Figura 6.22: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 350 Hz. La sezione del componente permette di notare la deformazione assialsimmetrica ottenuta

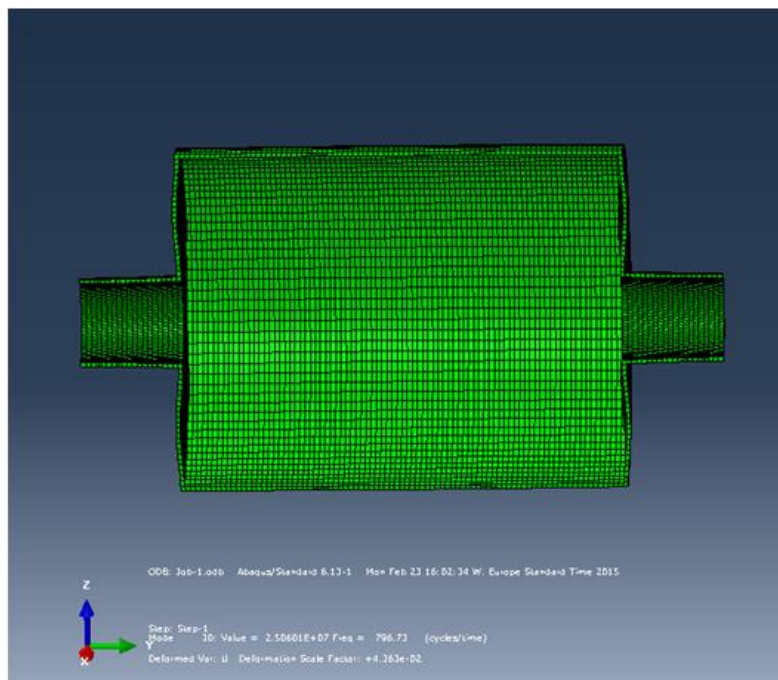


Figura 6.23: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 797 Hz. La sezione del componente permette di notare la deformazione assialsimmetrica ottenuta

Osservando la figura 1.10 si può notare come in corrispondenza di queste frequenze si hanno i primi cali del valore di transmission loss rispetto al caso con parete rigida.

Le sezioni della struttura permettono di verificare come i modi di vibrare calcolati risultino effettivamente assialsimmetrici, per cui l'utilizzo di una griglia di calcolo di tipo wedge è ancora possibile ed i risultati ottenuti potranno essere considerati corretti o quantomeno non alterati dalla meshatura utilizzata.

Data la semplicità delle deformate che si stanno analizzando, è possibile ricostruire i due modi di vibrare con una particolare condizione al contorno che riproduca il comportamento della parete esterna.

Lo studio degli effetti della parete vibrante deve essere limitato ad un intorno della frequenza naturale considerata, poiché la condizione di moto implementata riproduce il comportamento dell'elemento solido solamente in corrispondenza della frequenza propria.

Se si decidesse di studiare l'effetto della vibrazione della parete su tutto il campo di frequenze considerato, considerando solamente il dominio fluidodinamico, il processo diverrebbe più complicato e laborioso.

Questo perché non basterebbe più conoscere la deformata della parete esterna in corrispondenza delle frequenze naturali, ma diverrebbe necessario ricavare la risposta dinamica dell'intera struttura per mapparla successivamente sul dominio fluidodinamico.

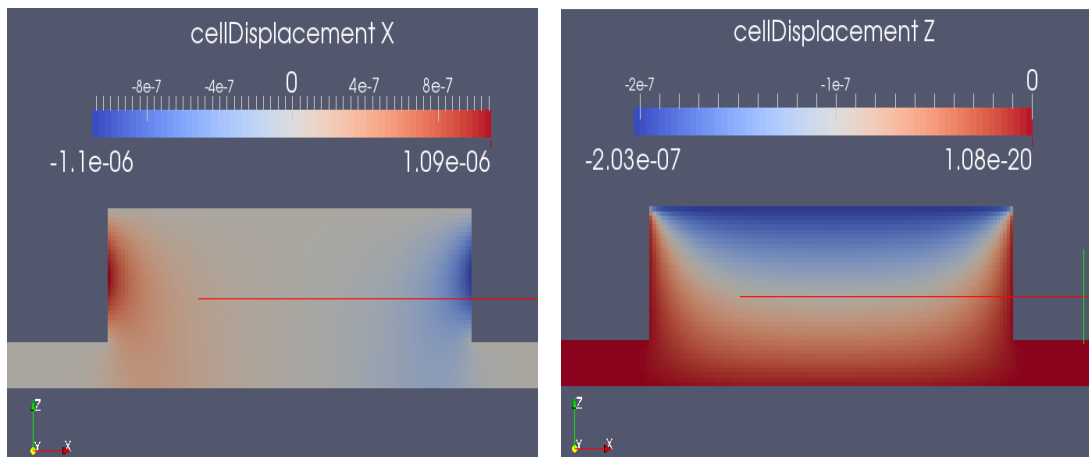


Figura 6.24: spostamento assiale (a sinistra) e radiale (a destra) delle celle della griglia di calcolo indotto dalla vibrazione delle pareti laterali della camera

Osservando le immagini della figura 6.24 si può vedere come il moto delle pareti esterne si trasmette in maniera non trascurabile anche alla porzione di fluido contenuta all'interno della camera d'espansione.

Questo significa che la propagazione delle onde sonore all'interno della camera del silenziatore subirà delle modifiche che si rifletteranno anche sull'andamento della transmission loss al variare della frequenza considerata.

Nell'immagine 6.25 si riporta la nuova curva di transmission loss ottenuta imponendo la vibrazione delle pareti sovrapposta alla curva determinata con l'ipotesi di parete con rigidità elevata (caso con spessore di parete pari a 7 mm) in cui la vibrazione del dominio solido può essere ritenuta trascurabile.

Si può vedere come l'effetto del moto delle pareti laterali lungo l'asse del sistema (modo di vibrare a 350 Hz) sia molto più marcato rispetto alla variazione prodotta dal moto radiale (modo di vibrare a 800 Hz).

Inoltre, si può notare come la curva ottenuta sia ancora ben lontana da quella riportata nella figura 1.10.

Tuttavia, questa simulazione non aveva la pretesa di ottenere gli stessi risultati ricavati sperimentalmente, poiché si è modellizzato il comportamento dell'elemento solido solamente

in un range molto limitato di frequenze e per modi di vibrare particolarmente semplici da descrivere.

Semplicemente si voleva mostrare come vibrazioni anche di entità contenuta (in queste simulazioni lo spostamento massimo imposto è stato di  $1 \cdot 10^{-6}$  m) possa modificare significativamente la risposta del silenziatore rispetto a quell'attesa nell'ipotesi di parete indeformabile.

Per frequenze superiori ai 900 Hz si notano dei discostamenti rispetto alla curva ricavata nell'ipotesi di parete rigida che però non sono legati ad introduzione o assorbimento d'energia dalla vena fluida.

Queste oscillazioni che "sporcano" la curva sono imputabili sostanzialmente al basso numero di periodi utilizzati per l'operazione di media d'insieme con cui si pulisce il segnale acquisito da eventuali disturbi non correlati con le perturbazioni sonore generate in ingresso (ad esempio la non perfetta non riflettività della condizione in uscita introduce piccole oscillazioni che tendono a perdersi in seguito all'operazione di media).

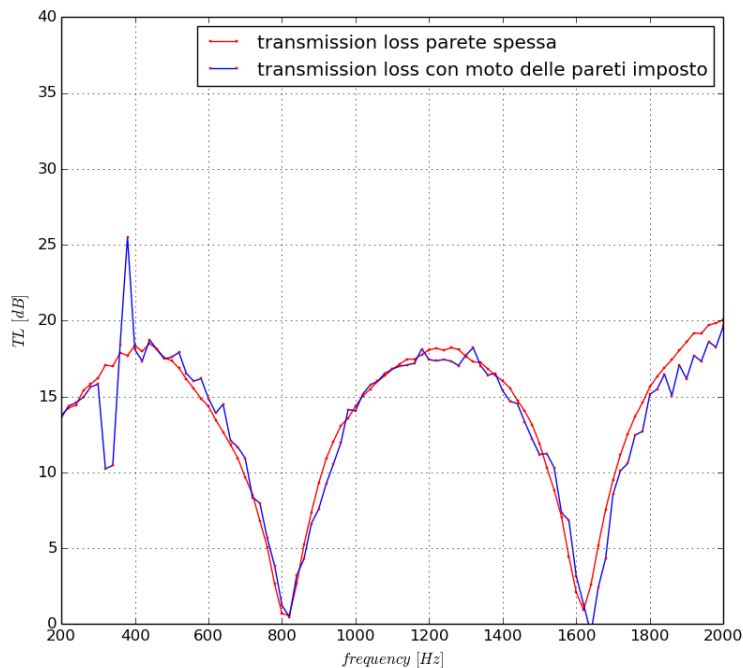


Figura 6.25: confronto tra la curva di transmission loss per camera con parete a rigidità elevata e camera con pareti mosse dall'esterno

Nella simulazione condotta considerando uno spessore di parete di 7 mm, l'operazione di media è stata fatta utilizzando diciannove periodi successivi al primo in cui sono contenuti i principali disturbi legati al transitorio iniziale.

Nel secondo caso, invece, sono stati utilizzati solamente cinque periodi successivi al primo per cui il disturbo legato al transitorio iniziale della simulazione viene limitato ma non completamente rimosso.

Confrontando l'immagine 6.25 con l'immagine 1.10 possiamo però notare un fenomeno che accomuna entrambi i casi: in seguito ad un abbassamento della curva, in corrispondenza delle frequenze naturali della struttura, si genera un aumento dei valori di transmission loss ottenuti per le frequenze immediatamente adiacenti.

Tornando ad esaminare i risultati ottenuti dalla sola analisi strutturale si riporta l'elenco di tutte le frequenze naturali calcolate.

frequenza FEM (Hz)	frequenza FVM (Hz)	errore %
30.04	-	-
-	82.88	-
-	270.09	-
348.93	343.5	1.58
360.53	-	-
382.66	-	-
474.73	-	-
552.77	532.33	3.84
611.38	-	-
740.17	-	-
782.61	-	-
796.73	805.81	1.14
971.55	961.59	1.04
1010.2	-	-
1170.4	1088.33	7.54
1235	1229.37	0.46
1320.1	1352.02	2.42
1400.5	1417.43	1.21
1435.9	-	-
1505.9	1572.78	4.44
1661.7	-	-
1720.5	-	-
1735.4	1758.8	1.35
1801.7	1791.5	0.57
1843.3	-	-
1922.3	1903.93	0.96
1968	1960.16	0.40
2028.4	-	-
2110	-	-
2197.3	-	-

*Tabella 8: confronto tra le frequenze proprie calcolate numericamente utilizzando il metodo degli elementi finiti ed il metodo dei volumi finiti*

Si specifica fin da ora che gli autovalori trovati risolvendo il sistema con gli elementi finiti sono più numerosi di quelli riportati nella tabella 8 (il programma Abaqus calcola circa 120 frequenze naturali all'interno del campo di frequenza 0-2200 Hz) ma molti di questi autovalori hanno una molteplicità superiore ad uno.

Questo significa che la stessa frequenza propria si ripete più volte poiché si riferisce a modi di vibrare uguali tra loro ma descritti su piani di riferimento differenti (ad esempio il modo di vibrare 2-1 ha la stessa frequenza propria del modo di vibrare 1-2).

Iniziamo dicendo che la frequenza di campionamento adottata nella simulazione numerica con il metodo dei volumi finiti è tale per cui, rispettando le condizioni imposte dal teorema di Shannon-Nyquist, non è possibile descrivere fenomeni oscillatori superiori ai 2000 Hz, motivo per cui nelle ultime righe non è possibile effettuare un raffronto tra i risultati.

Una prima cosa che si può notare è la differenza a livello quantitativo tra le frequenze calcolate con i due diversi metodi: dei trenta autovalori riportati da Abaqus, solamente la metà viene trovata anche dal solutore implementato in OpenFOAM.

In realtà altre componenti sarebbero presenti nello spettro dello spostamento delle pareti solide, ma la loro entità è molto contenuta e non è possibile discernere se tale oscillazione è legata alla perturbazione sonora oppure è solamente legata ad approssimazioni numeriche.

Vediamo però che dove entrambi i metodi rilevano una frequenza naturale, la differenza tra i valori restituiti è spesso trascurabile e comunque difficilmente si ha una variazione superiore al 5%.

Per quanto detto e mostrato finora sembrerebbe che la griglia di tipo wedge possa essere utilizzata anche nel caso di simulazioni con parete esterna a spessore limitato, anche se i risultati ottenuti non saranno perfettamente sovrapponibili a quelli ricavati sperimentalmente.

Osservando però altri modi di vibrare, determinati sempre con il programma Abaqus, ci si può rendere conto di come molti comportamenti dell'elemento solido siano fortemente non assialsimmetrici.

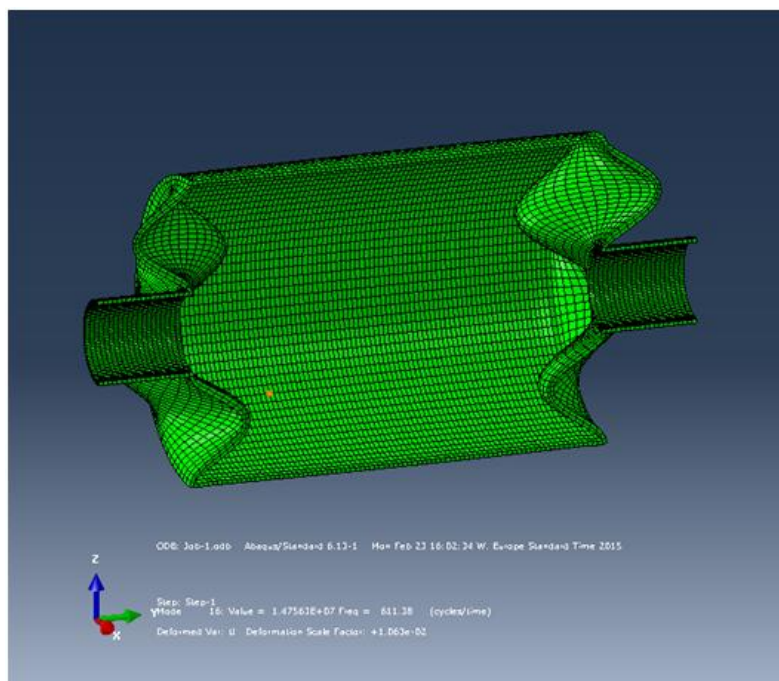


Figura 6.26: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 611Hz

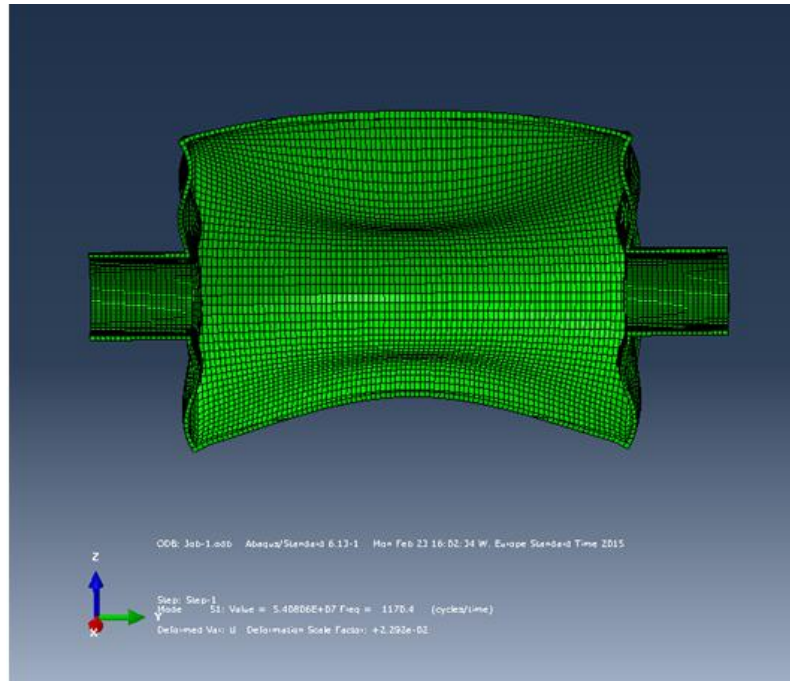


Figura 6.27: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 1170 Hz

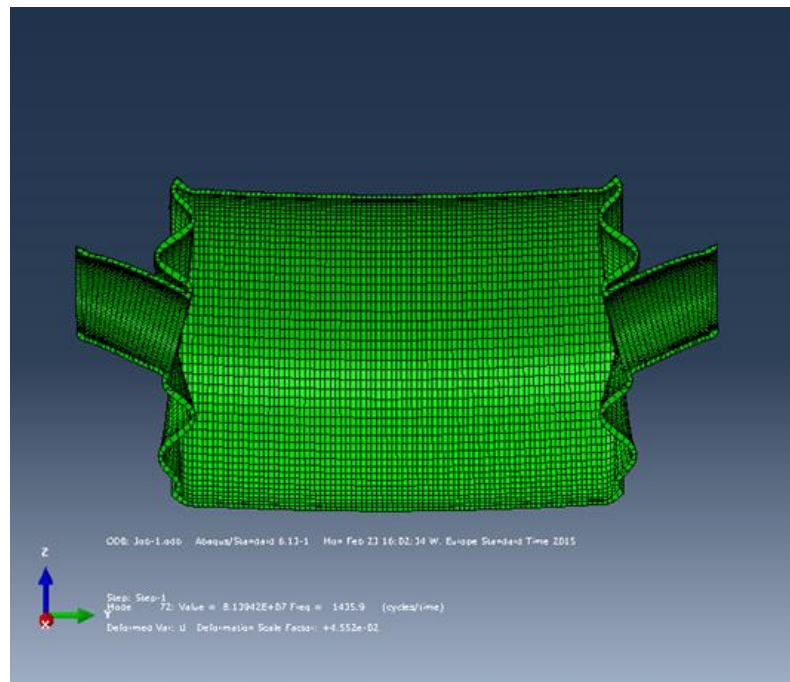


Figura 6.28: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 1436 Hz

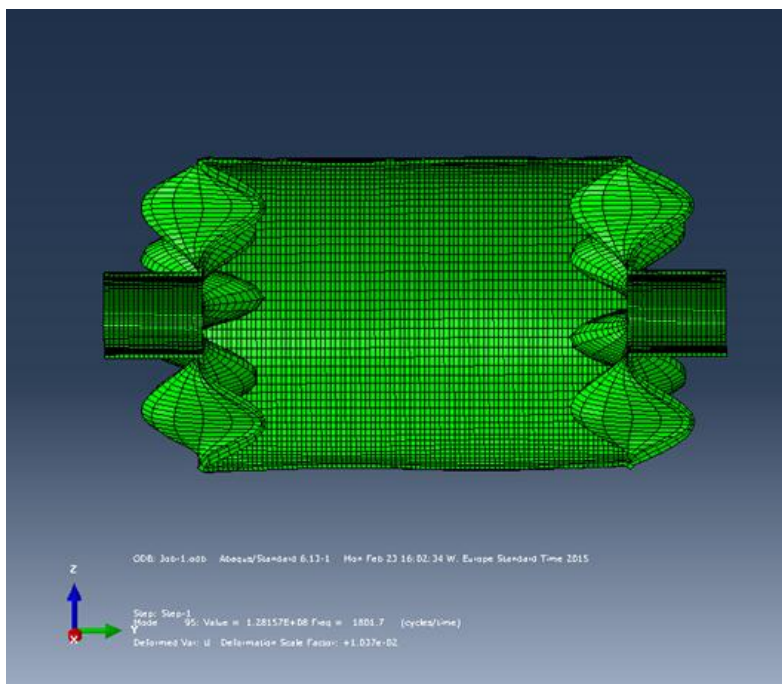


Figura 6.29: modo di vibrare della cassa esterna del silenziatore a 1807 Hz

Le figure da 6.26 a 6.29 permettono di evidenziare sostanzialmente due aspetti:

- il primo è che all'aumentare della frequenza propria considerata si ha un aumento della complessità del modo di vibrare da descrivere per cui anche l'utilizzo del metodo di studio semplificato diventa impraticabile anche con configurazioni geometriche elementare come quella considerata in questo lavoro di tesi;
- l'utilizzo di una griglia assialsimmetrica non è più possibile soprattutto osservando che, all'aumentare della frequenza osservata, il modo di vibrare corrispondente è sempre più lontano dalla condizione di assialsimmetricità.

L'inadeguatezza della mesh assialsimmetrica appare evidente anche osservando le curve di transmission loss ottenute a valle della simulazione e riportate in figura 6.30

Indipendentemente dalla tipologia di fonte sonora simulata (sorgente impulsiva o white noise) si può vedere come i risultati siano ancora molto lontani da quelli sperimentali descritti in figura 1.10.

Infatti, nonostante gli effetti della vibrazione della parete siano visibili nell'andamento della curva, ancora si possono notare sensibili differenze sia per il posizionamento sia per il valore assoluto che i picchi e le valli dovrebbero avere.

Il massimo accordo si ha nell'intervallo di frequenze compreso tra i 600 Hz ed i 1400 Hz circa utilizzando la sollecitazione impulsiva descritta all'inizio di questo capitolo.

Questo fatto può essere spiegato ricordando che la parete è libera di vibrare secondo le sue frequenze proprie, per cui si ha l'introduzione e la dissipazione d'energia che si riscontra nell'immagine 6.30, ma tali variazioni sono diverse da quelle che si hanno nella realtà poiché si riproduce un modo di vibrare differente da quello caratteristico del componente.



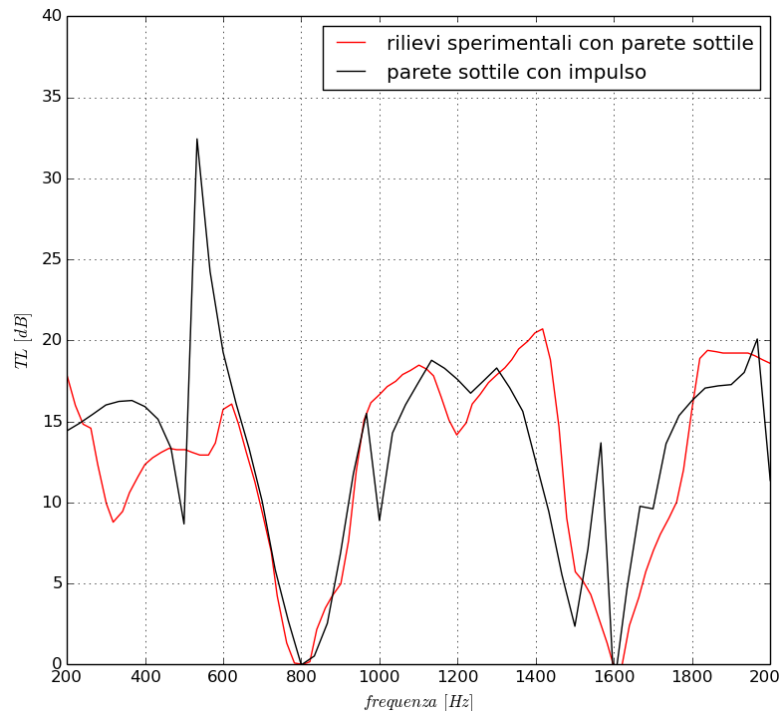


Figura 6.30: confronto tra la curva di transmission loss ottenuta con eccitazione impulsiva (curva nera) e la curva sperimentale (curva rossa)

### 6.3.4 Camera singola con parete sottile: caso tridimensionale completo

Alla luce dei risultati riportati nel paragrafo precedente appare evidente come l'utilizzo di una griglia di calcolo completamente tridimensionale diventi imprescindibile nel caso in cui si voglia portare avanti uno studio corretto del comportamento del componente.

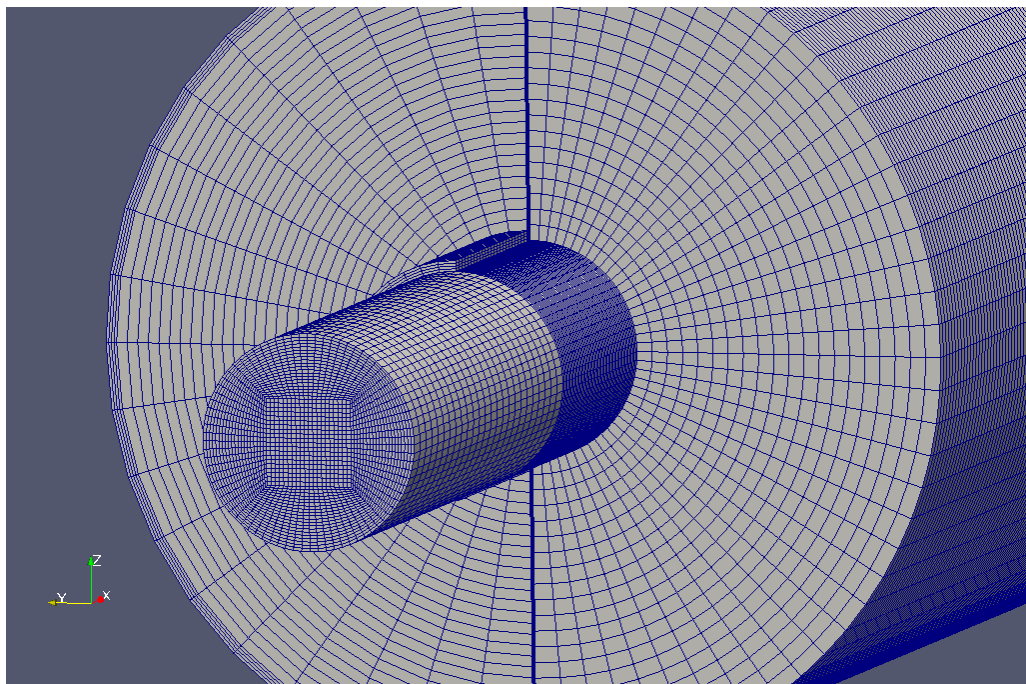
La prima difficoltà che si deve affrontare quando si studia un componente tridimensionale è l'ottenimento di una buona mesh da utilizzare per la simulazione successiva. Infatti, tale griglia dovrà avere:

- il minor numero di elementi possibile per ridurre i tempi di calcolo necessari (a pari elaboratore i tempi di calcolo passano da giorni, nel caso assialsimmetrico, a settimane, nel caso tridimensionale completo);
- il maggior numero di elementi possibile sia per ricostruire correttamente il dominio fluido e quello solido (soprattutto nel caso in cui la geometria preveda la presenza di setti o condotti interni con spessori molto limitati) sia per avere risultati corretti al termine della simulazione.

Tenuto conto di questi aspetti, nella figura 6.31 è riportata la griglia di calcolo con le migliori caratteristiche che si è riusciti ad ottenere.

La realizzazione della griglia rappresentativa dell'elemento solido-elastico è stata relativamente veloce.

Infatti è stato sufficiente ruotare di 360° il profilo bidimensionale definito nelle precedenti simulazioni assialsimmetriche per ottenere la geometria tridimensionale desiderata.



*Figura 6.31: griglia di calcolo utilizzata per simulazioni 3D. Il dominio solido è stato sezionato per permettere una visualizzazione migliore del dominio fluido contenuto*

La realizzazione della griglia per il dominio fluido, invece, ha richiesto maggior tempo e maggiori attenzioni rispetto al suo complementare.

In questo caso non è stato possibile utilizzare un'estrusione circolare del profilo bidimensionale poiché, tale operazione, avrebbe generato celle molto allungate e distorte in prossimità dall'asse di rivoluzione.

Poiché nelle simulazioni FSI la qualità della soluzione e la velocità di convergenza dipendono fortemente dalla bontà della griglia realizzata, è stato necessario adottare una soluzione differente in cui la mesh, anziché essere formata da un unico blocco, viene suddivisa in più regioni.

Come si può facilmente notare nella figura 6.31, il problema delle celle degeneri in corrispondenza dell'asse di rivoluzione è stato risolto introducendo un blocco rettangolare che percorre il dominio lungo tutta la sua lunghezza.

In questo modo alle celle piramidali allungate si sostituiscono geometrie esaedriche regolari che eliminano le distorsioni e gli errori durante la fase di risoluzione del sistema fluidodinamico.

Una certa deformazione dei volumi di calcolo è però inevitabile, soprattutto in corrispondenza dell'unione tra il blocco centrale esaedrico ed i blocchi esterni che vanno a caratterizzare la geometria circolare dei condotti.

Un ulteriore aspetto da tenere in considerazione, oltre alla qualità generale delle mesh utilizzate, è costituito dalle dimensioni delle celle dei due domini.

Mentre per il dominio solido è possibile mantenere le stesse dimensioni di cella rispetto al caso assialsimmetrico, in quanto il numero di volumi rimane comunque limitato (si passa da circa 1600 a circa 36000 celle), per il dominio fluidodinamico la scelta deve essere più attenta e ragionata.

Infatti mantenendo la stessa spaziatura del caso wedge si otterrebbe un dominio formato da più di  $2 \cdot 10^6$  celle, rendendo di fatto impossibile ottenere risultati accettabili in tempi ragionevoli.

Aumentando le dimensioni delle celle soprattutto nei condotti d'ingresso ed uscita del sistema e lontano dalle pareti del corpo centrale del silenziatore, dove l'interazione fluido parete è scarsa o nulla, si riesce a ridurre il numero di volumi a quasi un decimo di quelli definiti in precedenza (al momento attuale si utilizza un dominio formato da circa  $3.1 \cdot 10^5$  celle).

In questo modo, sfruttando anche la possibilità di parallelizzare il caso considerato su più processori (almeno 3-4 processori dalle buone caratteristiche per avere tempi d'elaborazione inferiori alle due settimane), è possibile ottenere risultati commentabili con tempi d'attesa accettabili.

Come è stato detto in precedenza, le due griglie per i domini sono state realizzate unendo più blocchi di celle in un solo elemento finale tramite l'utility `blockMesh`, disponibile in qualsiasi versione di OpenFAM.

Nel caso in cui si considerino geometrie più complesse della camera circolare, il processo realizzativo tramite l'utility `blockMesh` diventerebbe troppo lungo e spesso inconcludente.

In questi casi l'utilizzo dell'utility `snappyHexMesh` risulta più funzionale all'obiettivo finale di realizzare griglie di calcolo utili per le simulazioni fluido-struttura.

Utilizzando `snappyHexMesh` è possibile realizzare mesh estremamente complicate partendo da un blocco definibile con l'ausilio di `blockMesh` (per maggiori dettagli si rimanda ad una qualsiasi guida on-line del programma OpenFOAM).

Nonostante la possibilità di realizzare geometrie più elaborate della semplice camera, non va dimenticato che l'ottenimento di griglie di calcolo con buone qualità con l'utility `snappyHexMesh` normalmente richiede tempi d'elaborazione che variano da qualche minuto a qualche ora a seconda del livello di dettaglio che si vuole realizzare.

Tuttavia, indipendentemente dal modo con cui si definiscono le mesh per il dominio fluido e solido, il tempo richiesto per la generazione delle griglie risulta trascurabile rispetto al tempo totale necessario per ottenere i risultati finali (si parla di qualche ora in rapporto a qualche settimana).

Per quanto riguarda le condizioni iniziali e le condizioni al contorno non si hanno sostanziali differenze rispetto alle simulazioni assialsimmetriche descritte nei paragrafi precedenti poiché queste dipendono dalla fisica del problema e non dalla geometria che si studia.

Come nei casi wedge si è adottata una sorgente sonora di tipo white noise, dato che l'eccitazione impulsiva non ha fornito risultati estremamente differenti (le differenze sono solo a livello quantitativo ma non a livello qualitativo) ma allunga il tempo richiesto per risolvere il problema in quanto sono necessari incrementi temporali minori (rispetto al caso con eccitazione white noise il  $\Delta t$  passa da  $1 \cdot 10^{-05}$  a  $1 \cdot 10^{-06}$ ) per descrivere le onde di pressione ad elevata velocità generate dall'impulso iniziale.

Una volta descritte le principali criticità a cui prestare attenzione durante la fase iniziale di pre-processing, è possibile passare al commento dei risultati ottenuti al termine della simulazione.

Come fatto per tutte le simulazioni precedenti, prima di procedere con il calcolo della curva di transmission loss, è necessario verificare che le condizioni di applicabilità della teoria della decomposizione siano rispettate.

Per chiarezza si ricorda che le principali condizioni sono:

- propagazione delle perturbazioni per onde piane all'interno dei condotti a monte e a valle del dispositivo;
- anecoicità del terminale all'output del dominio fluido.

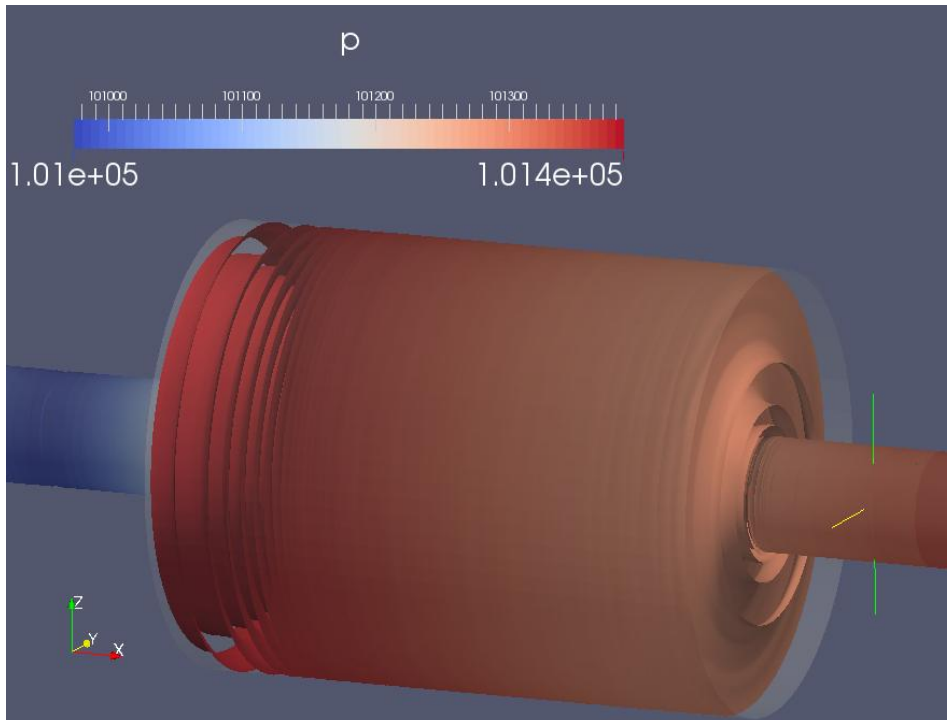


Figura 6.32: campo di pressione calcolato per  $t=0.05$  s in cui si rappresentano le linee isobare all'interno del dominio fluidodinamico

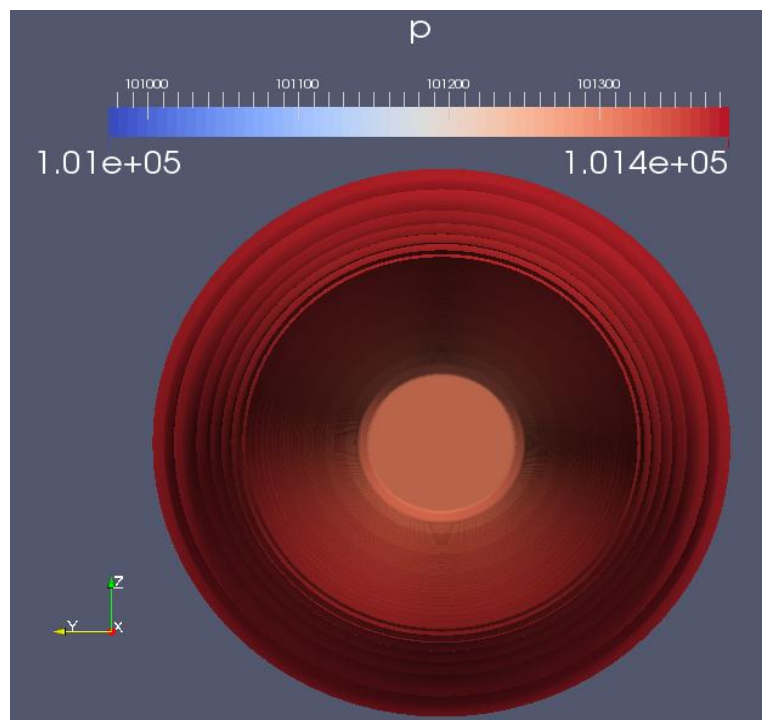


Figura 6.33: campo di pressione calcolato per  $t=0.05$  s in cui si può notare la propagazione radiale delle perturbazioni sonore

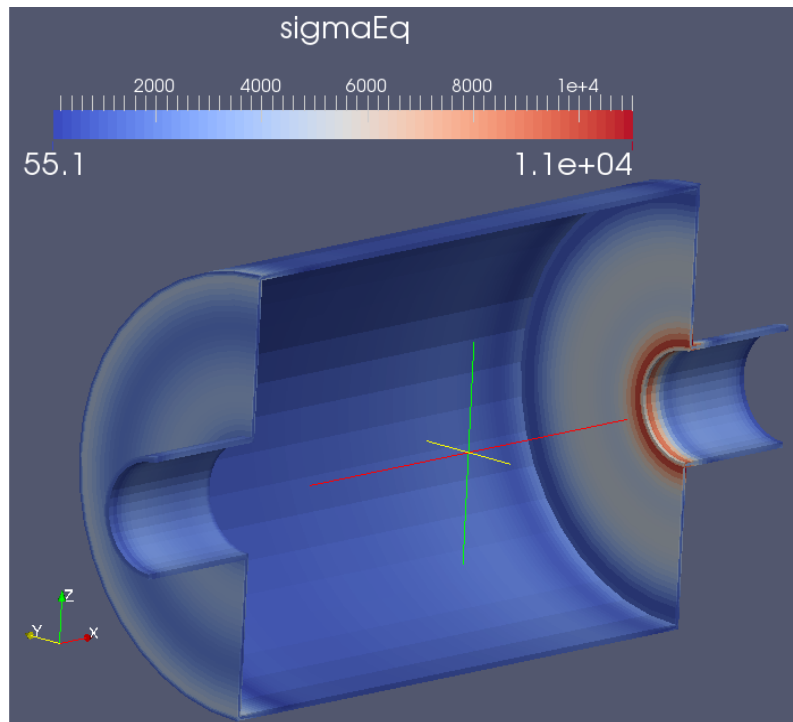


Figura 6.34: sforzo equivalente agente sulla parete solida esterna calcolato per  $t=0.025$  s

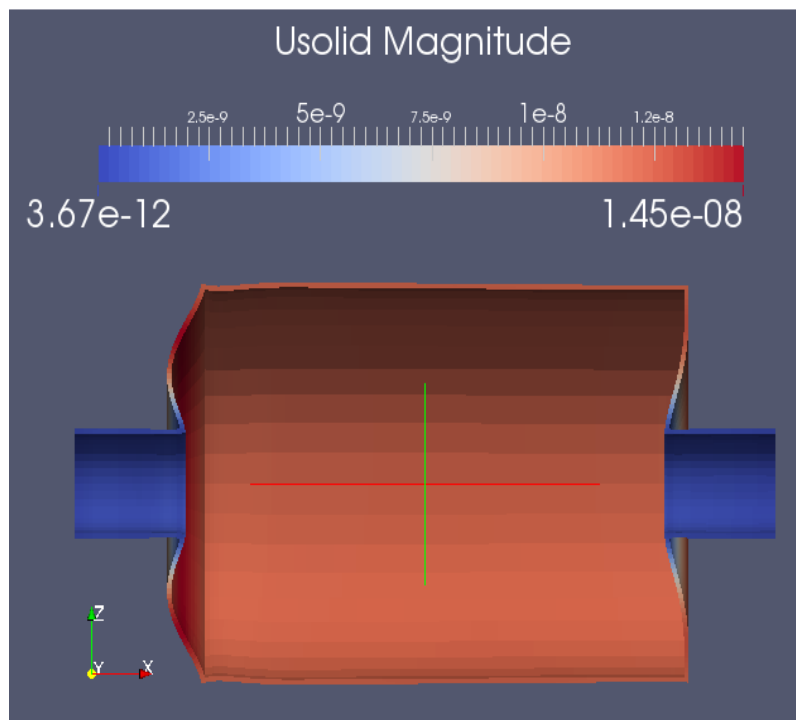


Figura 6.35: campo di spostamento della parete solida calcolato per  $t=0.05$  s. Si può notare la transizione tra il primo modo di vibrare (lato destro) ed il secondo modo di vibrare (lato sinistro)

Come possiamo vedere dall'immagine 6.32, anche nel caso completamente tridimensionale, la propagazione delle perturbazioni sonore all'interno dei condotti avviene

per onde piane, rendendo sufficienti due piani d'acquisizione a monte della camera definiti all'inizio della simulazione.

Questo risultato non dovrebbe sorprendere poiché, come detto all'inizio di questo lavoro, la tipologia di propagazione dipende principalmente dal rapporto tra la lunghezza d'onda della componente considerata ed una dimensione caratteristica del condotto (normalmente il diametro).

Nel caso in cui l'ipotesi di onda piana non fosse verificata, sarebbe necessario introdurre ulteriori piani di misura per poter scomporre l'onda nelle sue componenti incidente e riflessa.

Una volta entrata nella camera del silenziatore la perturbazione assume un fronte sferico, come appare in maniera evidente guardando l'immagine 6.33.

Nonostante l'effetto ottico che si viene a creare, è bene ricordare che la camera ha sezione circolare costante lungo l'asse.

Osservando i risultati calcolati per il dominio solido riportati in figura 6.34-6.35 si possono cogliere due aspetti:

- lo stato di sforzo interno al materiale è molto contenuto, come accadeva anche nelle simulazioni assialsimmetriche, a testimonianza del fatto che non sono necessarie grandi deformazioni delle pareti esterne per modificare la fluidodinamica del componente.

I valori massimi di sforzo si hanno in corrispondenza della brusca variazione di sezione tra i condotti e la camera centrale a causa dell'aumento del coefficiente d'intaglio, così come si era rilevato anche nelle simulazioni wedge, anche se rimangono abbondantemente al di sotto della soglia di snervamento del materiale;

- come anticipato nei paragrafi precedenti, la deformazione delle pareti solide può essere anche molto complessa ma questo non rappresenta un problema poiché, risolvendo in maniera simultanea sia il problema fluidodinamico sia quello di meccanica dei solidi, non vi è necessità di ricostruire gli spostamenti per mapparli da un dominio all'altro.

Osservando l'immagine 6.35, ottenuta ingrandendo di un fattore  $1 \cdot 10^6$  la reale deformazione del componente solido, si possono rintracciare alcuni modi di vibrare determinati precedentemente con il software Abaqus.

Poiché la sorgente sonora di tipo white noise eccita contemporaneamente tutto il campo di frequenze considerato, difficilmente si riusciranno ad individuare i singoli modi di vibrare, com'è invece possibile fare sfruttando l'analisi in frequenza del programma ad elementi finiti.

Tuttavia, osservando con attenzione, si possono riconoscere le deformate caratteristiche dei primi modi di vibrare (quelli compresi fino a 400 Hz circa).

Per vedere le deformate corrispondenti a frequenze superiori sarebbero necessari fattori di scala che distorcerebbero eccessivamente la griglia nel suo complesso.

Dalle immagini riportate finora si nota come sia il campo di pressione all'interno del dominio fluido sia il campo di sforzo equivalente del dominio solido siano perfettamente assialsimmetrici, per cui l'utilizzo di una simulazione tridimensionale sembrerebbe un inutile aggravio in termini di tempo d'elaborazione.

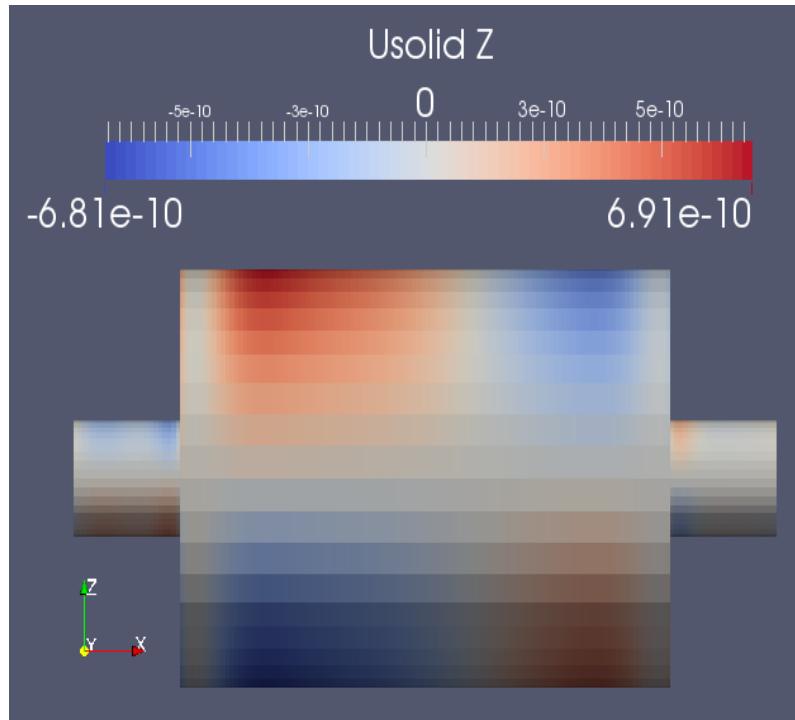


Figura 6.36: campo di spostamento calcolato per  $t=0.05$  s lungo l'asse cartesiano  $z$

Osservando la figura 6.36 si può vedere come sia gli spostamenti lungo l'asse  $z$  sia gli spostamenti lungo l'asse  $y$  (anche se questi non sono stati riportati) non rispettino la condizione di assialsimmetria e quindi non potevano essere descritti correttamente utilizzando la griglia di tipo wedge.

È bene ricordare che nonostante l'entità delle vibrazioni rappresentate possa essere trascurabile in qualunque applicazione meccanica, ciò non è assolutamente vero nel campo acustico.

Infatti, come mostrato durante le simulazioni semplificate con moto delle pareti imposto, anche uno spostamento teoricamente marginale è sufficiente per modificare in maniera sensibile il comportamento atteso del componente (uno spostamento di  $1 \cdot 10^{-06}$  metri produceva variazioni di 10-15 dB nella curva di transmission loss).

La necessità di avere una griglia di calcolo completa è legata principalmente ai modi di deformarsi dell'elemento solido che, anche in condizione di dominio isolato come mostrato dalle simulazioni Abaqus, sono completamente tridimensionali.

Poiché di base il suo comportamento sarebbe assialsimmetrico, per il dominio fluido il problema sarebbe di per sé affrontabile con mesh più semplici.

Tuttavia l'accoppiamento con il dominio elastico, impone l'utilizzo di griglie tridimensionali anche nello studio delle configurazioni più semplici.

A conclusione di questo capitolo e di questo lavoro riportiamo la curva di transmission loss calcolata numericamente con geometria del silenziatore completa con quella ricavata sperimentalmente utilizzata come termine di confronto per valutare l'attendibilità dei risultati.

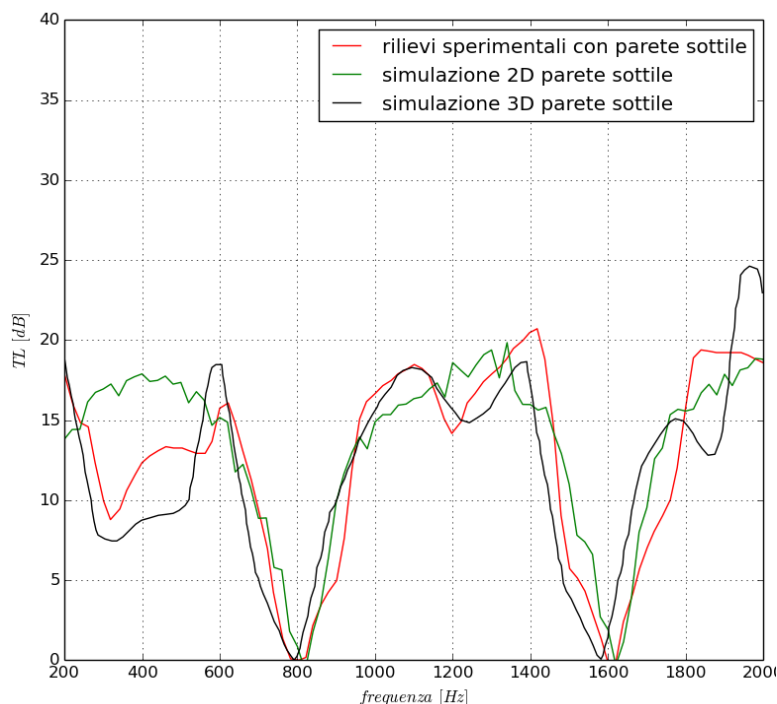


Figura 6.37: confronto tra le curve di transmission loss ottenute nell'ipotesi di parete sottile 2D (curva verde), parete sottile 3D (curva nera) e rilievi sperimentali (curva rossa)

Osservando la figura 6.37 si può immediatamente notare il miglioramento dei risultati ottenuti in termini di curva di transmission loss dovuto al passaggio dalla mesh assialsimmetrica al caso completamente tridimensionale.

Si osserva come l'effetto della vibrazione della parete, che nel caso assialsimmetrico era poco più che un disturbo, diventa chiaramente visibile e non più trascurabile.

Per quanto riguarda il confronto tra i risultati del calcolo numerico ed i valori determinati sperimentalmente è ancora presente una certa discrepanza che varia in funzione della frequenza considerata.

Si può notare come l'andamento numerico si avvicini molto a quello sperimentale nell'intervallo 200-1600 Hz, soprattutto per quel che riguarda la posizione dei picchi e delle valli, mentre per frequenze superiori alla seconda trasparenza sostanzialmente non si ha alcuna corrispondenza tra le due curve.

Va ricordato però che nelle rilevazioni sperimentali il rapporto tra tempo acquisito e tempo trascorso è unitario (per acquisire 10 secondi di segnale è necessario che trascorrono 10 secondi reali) mentre questo non è assolutamente vero nel caso delle simulazioni numeriche, dove per ottenere un secondo d'acquisizione sono spesso necessarie settimane di calcolo.

Questa considerazione serve a spiegare come nel caso reale non è un problema registrare una storia temporale di durata relativamente breve e poi mediarla su un numero elevato di periodi per pulire il segnale da disturbi incorrelati (basta pensare che con due secondi di acquisizione si riesce a mediare su quaranta sottoperiodi) mentre nel caso della simulazione CFD è stato possibile mediare solamente su un numero limitato di periodi, considerando che il primo contiene il transitorio iniziale in cui spesso è presente la maggiore quantità di disturbo e deve quindi essere scartato.

Alla luce di queste considerazioni, possiamo concludere come i risultati numerici presentati nella figura 6.37, nonostante non rappresentino esattamente l'andamento sperimentale utilizzato come termine di confronto, fanno ben sperare nel caso in cui ci fosse



l'opportunità di poter mediare i risultati su un numero maggiore di sottoperiodi (servirebbero almeno 5-6 periodi oltre al transitorio iniziale per poter dare un giudizio finale sul corretto funzionamento del solutore).

# CONCLUSIONI

---

In questo lavoro di tesi si è sviluppato un nuovo solutore numerico applicato allo studio del comportamento acustico di un silenziatore, tenendo in considerazione la possibilità che fluido e parete esterna possano influenzarsi vicendevolmente.

Il lavoro può essere suddiviso in due fasi principali: la prima in cui si è modificato il solutore incomprimibile già implementato in OpenFOAM, riscrivendo le equazioni di conservazione del dominio fluido per tenere in considerazione della comprimibilità del fluido di lavoro.

Questo passaggio è indispensabile per poter descrivere la propagazione delle onde sonore all'interno del dominio studiato, anche se gli effetti di comprimibilità legate al flusso sono trascurabili date le basse velocità con cui si muove il fluido.

Dopo aver validato il nuovo solutore, tramite calcoli teorici o raffronti con risultati ottenuti utilizzando software, è stato possibile passare alla seconda fase di questo lavoro in cui si è tentato di riprodurre il comportamento di un reale silenziatore, anche se con una geometria estremamente semplificata rispetto a quelle realmente utilizzate nell'industria moderna.

In questa fase si è partiti dall'ipotesi di parete infinitamente rigida, in cui la curva di transmission loss dipendeva solamente dalla geometria della camera d'espansione, introducendo, ad ogni nuova simulazione, prima l'ipotesi di parete a rigidità elevata ma finita ed infine l'ipotesi di parete con spessore sottile.

Le diverse simulazioni hanno confermato indubbiamente che l'effetto di una riduzione degli spessori di materiale impiegato ha conseguenze non trascurabili sul comportamento atteso dal componente, rendendo di fatto impossibile risolvere la fluidodinamica interna al dispositivo senza considerare l'effetto che ha la vibrazione delle pareti esterne.

La risoluzione dei problemi d'interazione tra fluido e struttura ha altresì evidenziato alcuni problemi, che dovranno essere risolti in futuro, per rendere questo nuovo solutore utilizzabile a livello industriale.

Questo lavoro di tesi ha dimostrato che, indipendentemente dalla geometria del silenziatore considerato, l'utilizzo di una griglia di calcolo completamente tridimensionale è imprescindibile se si vuole descrivere correttamente il comportamento dinamico della struttura solido-elastica su un campo significativo di frequenze (per campi d'indagine molto limitati sarebbe possibile l'utilizzo dell'approccio "semplificato").

Dato il numero elevato di elementi che normalmente compongono sia il dominio fluido che quello solido, l'utilizzo di più processori per la risoluzione dei sistemi numerici che si vengono a determinare è inevitabile se si vogliono ottenere soluzioni in tempi accettabili, soprattutto quando le geometrie delle camere non sono semplici come quella considerata in questo lavoro.

Un punto molto importante per riuscire a caratterizzare in maniera corretta l'abbattimento delle perturbazioni sonore al variare della frequenza è la scelta della tipologia di sorgente sonora utilizzata.

Tale sorgente deve garantire l'eccitazione di ogni componente dell'intervallo di frequenze considerato in una sola simulazione e con la stessa intensità (l'alternativa sarebbe svolgere un numero elevato di prove numeriche in cui si sollecita una singola componente alla volta).

A valle di questo lavoro si è potuto verificare come l'utilizzo di una sorgente di rumore bianco o di una modalità impulsiva riescono a coprire l'intero range di frequenze considerato come richiesto, anche se si è potuto verificare come la scelta dell'ampiezza complessiva della sollecitazione fornita riveste un ruolo non trascurabile affinché l'onda sonora riesca a far vibrare la struttura solida

Infatti i valori normalmente utilizzati per il calcolo della transmission loss di 5-20 Pa risultano sufficienti per ricavare il comportamento del silenziatore nel caso di parete infinitamente rigida, ma sono inadeguati nello studio di problemi FSI poiché l'energia introdotta non è sufficiente a mandare in risonanza l'intera struttura in maniera tale da avere effetti visibili sull'andamento della curva.

Bisogna altresì prestare attenzione a non eccedere con l'ampiezza della sollecitazione per non uscire dal campo di linearità tra intensità dell'onda sonora ed abbattimento prodotto, altrimenti la riduzione della potenza sonora tra monte e valle del silenziatore non dipenderebbe più solo dalla geometria del componente ma sarebbe funzione anche del fluido impiegato durante la simulazione o la prova sperimentale.

Quanto presentato finora ha mostrato come, anche per un caso particolarmente semplice come quello considerato, la quantità di parametri che possono influire sulla buona riuscita della simulazione numerica non è trascurabile e riguardano sia questioni puramente numeriche (generazione di una griglia di calcolo adeguata al problema considerato) sia questioni fisiche (generazione della perturbazione sonora fornita in ingresso).

Sia i risultati sperimentali sia le simulazioni numeriche confermano come l'effetto dell'interazione tra fluido e parete solida, quando questa si trova a vibrare in condizione di risonanza, è maggiore alle basse frequenze, dove la distanza tra i risultati ottenuti nell'ipotesi fissa e quelli ricavati con la parete vibrante è superiore ai 6 dB.

All'aumentare della frequenza considerata la differenza tra i valori tende a diminuire perché l'ampiezza delle vibrazioni diminuisce e quindi diminuisce l'energia trasferita dalla parete esterna alla vena fluida.

È bene ricordare che sebbene le differenze ottenute considerando o trascurando l'interazione fluido parete sembrano contenute e porterebbero a vedere lo studio FSI come un'inutile complicazione, la rappresentazione dei risultati avviene utilizzando una scala logaritmica e quindi, piccole variazioni nella curva di transmission loss possono tradursi in variazioni di potenza sonora spesso non trascurabili e forse dannose per l'ambiente.

Per tale ragione è molto importante prendere atto dell'esistenza del problema analizzato in questo lavoro, che si presenta quando gli spessori di materiale adottato non sono più tali da garantire un'elevata rigidità strutturale

Eventuali sviluppi futuri potranno essere volti sia al miglioramento dell'efficienza del solutore al fine di ridurre i tempi di calcolo e l'assorbimento di risorse sia per studiare geometrie e configurazioni più vicine all'ambito industriale di quanto non si è fatto in questo lavoro.

Anche l'accoppiamento tra OpenFOAM e solutore monodimensionale per analizzare il comportamento dell'intero sistema propulsivo potrebbe rappresentare un possibile ampliamento del lavoro presentato finora.

Questo permetterebbe di calcolare l'insertion loss del componente che, come detto nel capitolo primo, rappresenta il vero parametro d'interesse perché permette di valutare l'efficienza dei vari silenziatori una volta inseriti all'interno del sistema propulsivo completo.

# LISTA DEI SIMBOLI

---

$a$	velocità del suono
$a_{mn}$	coefficiente della matrice di trasferimento per il calcolo della componente incidente di una perturbazione sonora
$a_n$	coefficiente della serie di Fourier per le funzioni dispari
$b_n$	coefficiente della serie di Fourier per le funzioni pari
$c$	velocità convettiva
$C_p$	calore specifico a pressione costante
$C_v$	calore specifico a volume costante
$e$	energia interna
$E$	tensore degli sforzi di Green-Lagrange
$f$	forza specifica per unità di volume
$f_{ij}(\xi)$	funzione di forma utilizzata nel metodo degli elementi finiti
$f_{\text{camp}}$	frequenza di campionamento
$f_0$	frequenza fondamentale
$F$	tensore del gradiente di deformazione
$G(f)$	spettro in frequenza del segnale $g(t)$
$\overline{G(f)}$	spettro in frequenza coniugato del segnale $g(t)$
$h_T$	entalpia totale
$IL$	insertion loss
$k$	conduttività fluidodinamica – conduttività termica – numero d'onda
$L$	lunghezza della camera
$L_p$	livello di pressione sonora
$L_W$	livello di pressione sonora
$m$	massa del sistema - rapporto tra sezione della camera e sezione del condotto
$M$	numero di Mach
$p$	pressione istantanea
$p_e$	pressione media effettiva
$q$	sorgente d'energia per unità di volume
$R_{gg}(\tau)$	autocorrelazione del segnale $g(t)$
$R_{gh}(\tau)$	crosscorrelazione del segnale $g(t)$
$S_{GG}$	autospettro della funzione $g(t)$
$S_{GH}$	crossspettro della funzione $g(t)$
$S_t$	superficie di controllo
$T$	temperatura termodinamica
$T_w$	tempo d'osservazione/campionamento del fenomeno
$TL$	transmission loss
$v$	velocità assoluta
$V_t$	volume di controllo
$W$	potenza sonora
$w$	velocità relativa – spostamento lungo l'asse $z$ dell'elemento solido
$X_{ij}(t)$	spostamento calcolato dei nodi con il metodo degli elementi finiti
$\rho$	densità
$\sigma$	porosità di un condotto

$[\sigma]$	tensore degli sforzi di Cauchy
$\Sigma$	tensore degli sforzi di Piola-Kirchhoff
$\Gamma$	coefficiente di diffusione di una grandezza
$\varphi(\mathbf{X}, t)$	dominio materiale
$\phi(\boldsymbol{\chi}, t)$	dominio spaziale
$\psi(\boldsymbol{\chi}, t)$	dominio referenziale
$\mu$	viscosità dinamica
$\boldsymbol{\tau}$	tensore degli sforzi viscosi
$\omega$	pulsazione propria di un sistema – fattore di sottorilassamento

# BIBLIOGRAFIA

---

- [1] Fluid Structure Interaction Analysis with Abaqus and FLUENT, Abaqus Technology Brief, aprile 2007
- [2] Hron J., Turek S., "A monolithic FEM/Multigrid solver for ALE formulation of fluid structure interaction with application in biomechanics"
- [3] Ferziger J. H., Peric M., "Computational methods for fluid dynamics", ed. Springer 2002
- [4] Ferrari G., "Motori a Combustione Interna, ed. Il Capitello, 2008"
- [5] Ferrara G., "Acoustic characterization of automotive mufflers. Part I: test rig design and evaluation of acoustic properties", SAE International, 12AC-0073/2012-01-0800
- [6] Donea J., Huerta A., Ponthot J.-Ph., Rodríguez-Ferran A., "Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods", capitolo 14
- [7] Tukovic Z., Jasak H., "Update lagrangian finite volume solver for large deformation dynamic response of elastic body"
- [8] Küttler U., Wall W. A., "Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation"
- [9] Michler C., Hulshoff S.J., van Brummelen E.H., de Borst R., "A monolithic approach to fluid-structure interaction"
- [10] Sito del corso di Misure al Politecnico di Milano, materiale didattico online del corso, <http://misure.mecc.polimi.it/>, 2010
- [11] Tao Z., Seybert F. A., "A review of current techniques for measuring muffler transmission loss", SAE International, 2003-01-1653
- [12] Seybert F. A., "Two-sensor methods for the measurement of sound intensity and acoustic properties in ducts"
- [13] Sito da cui è possibile scaricare la versione OpenFOAM extend-3.0, <http://www.extend-project.de/>

- [14] Diana G., Cheli F., "Dinamica e vibrazione dei sistemi", Utet Libreria S.r.l., 2013
- [15] Turek S., Hron J., Razzaq M., Wobker H., Schafer M., "Numerical benchmarking of fluid-structure interaction: A comparison of different discretization and solution approaches"
- [16] Magrab E. B., "Environmental noise control", John Wiley & Sons, 1975
- [17] Montenegro G., Della Torre A., Onorati A., Fairbrother R., "A nonlinear quasi-3D approach for the modeling of mufflers with perforated elements and sound-absorbing material", Hindawi Publishing Corporation, 2013