

# POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea in  
Ingegneria Meccanica



Identificazione della forza assiale in tiranti per strutture civili  
con condizioni al contorno incerte

Relatore: Prof. Stefano MANZONI

Tesi di Laurea di:

Francesca, Maria Rosaria di MATTEO Matr. 799212

Anno Accademico 2013 - 2014



*Alla mia “bionda” ed al mio “fidanzato”,  
meglio noti come mamma e papà*



# Ringraziamenti

La prima persona che ringrazio con tutto il cuore per la riuscita di questo lavoro è senza dubbio il prof. Stefano Manzoni. Grazie per avermi guidata, grazie per tutta la gentilezza e la simpatia mostrata in questi mesi, grazie per il supporto e soprattutto grazie per avermi sopportata. Non potevo desiderare relatore migliore.

Un ringraziamento va anche a tutte le persone che ho conosciuto e con cui, anche se trasversalmente, ho avuto a che fare nel Dipartimento di Misure meccaniche e termiche ed in C4. In primis ringrazio Marta per avermi teso una mano d'aiuto e consigliato quando sembrava che tutto stesse per andare a rotoli. Grazie anche a Luciano per i sorrisi e le risate che mi ha strappato in ogni giorno di lavoro. Grazie ad Alessio che oltre al suo tesista si è ritrovato con un'altra impertinente abusiva di mezzo. Grazie a Gianluca, Andrea, Davide e Marco per aver reso questi mesi, tra una battuta e l'altra, ancora più divertenti.

Sono giunta alla fine ed il Politecnico non è stato solo un'opportunità di crescita, ma è il luogo in cui ho trovato una seconda famiglia. Per cui un grazie infinito, colmo di affetto, stima e gioia va ai miei fantastici bomber (o laidi, se proprio ci tenete!): Samuele, Giacomo, Filippo ed Andrea. Le nostre decisioni inevitabilmente ci allontaneranno fisicamente, ma per quanto mi riguarda sappiate che continuerò a darvi fastidio per molto, molto, molto ma moltissimo tempo! E chi vi lascia più! Siete stati il miglior gruppo di amici, compagni di studi e fratelli mancati che avrei mai potuto desiderare. Grazie per avermi fatta sentire a casa, grazie per il privilegio di aver trascorso con voi questi anni, grazie per le risate, per gli scherzi, per i litigi, grazie anche per i colpi di sole gratis dopo i pranzi al 125... vi voglio bene! Non c'è altro da aggiungere.

Un grazie è di dovere anche al fenomenale "Gruppo della Madonna". Grazie per la spensieratezza che mi avete trasmesso, per le serate, per le cavolate fatte insieme e per avermi insegnato che lo studio non è tutto. Sono stati cinque anni fantastici anche per merito vostro.

Ci sono poi due persone che tengo a ringraziare singolarmente, perché in questo percorso sono state LE amiche: Emanuela e Jessica. Non vi conoscete, siete tanto diverse, ma siete due delle persone a cui mi sono legata di più. Grazie per la vostra amicizia disinteressata, per aver ascoltato le mie paranoie, per aver condiviso con me i momenti più belli ed anche quelli che non lo erano. Se potessi vi ringrazierei con mille abbracci al giorno.

Un ringraziamento speciale va anche a Tecla e Mari. Non sentire le vostre risate e chiacchierare con voi ogni sera dopo lunghe giornate all'università mi manca parecchio.

Un pensiero è di dovere anche per i miei coinquilini Ginevra, Fulvio e Francesco. Siamo un mix eccezionale, non c'è che dire!

Ma adesso abbandoniamo Milano e torniamo alle radici...

Inizio ringraziando tutti gli amici che ogni volta che torno a Matera mi ricordano quanto sia meraviglioso essere a casa. Ma in particolar modo dico grazie a Ciccio perché davvero non mi capicito di come faccia a volermi bene e sopportarmi ancora dopo tutti questi anni che lo infastidisco in mille modi. Sei il numero uno indiscusso!

Grazie a mio cugino Donato, perché per certe cose come mi capisce lui, non ci riesce nessuno.

C'è poi una persona che non ha avuto l'opportunità di starmi accanto, ma so che se gliene avessi dato modo sarebbe stato sempre al mio fianco. Le nostre strade si sono separate, siamo cambiati, siamo cresciuti, ma se adesso sono la persona che sono è anche grazie a te che mi hai dato tanto prima: grazie Luigi. Oggi io raggiungo il primo dei miei traguardi, spero che i tuoi siano non solo numerosi, ma soprattutto ricchi di gioia come questo lo è per me.

Dulcis in fundo il ringraziamento più grande ed importante di tutti va alla metà destra ed alla metà sinistra del mio cuore: mamma e papà.

Mamma, se dovessi scegliere un aggettivo per descriverti sarei nei guai, l'indecisione sarebbe troppa. Spero che "straordinaria" ti piaccia. Tu sei la mia colonna portante, sei la migliore consigliera che esiste, sei la mia compagna di "strignate", sei il conforto quando sto male, sei la forza motrice che mi sprona ad andare avanti, a migliorare. Te ne ho fatte vedere di tutti i colori, ti ho fatto arrabbiare non so quante volte e ci sei sempre, ci sarai sempre. Mi hai detto spesso che da piccola ero una monella che sbatteva i piedi se le si prospettava l'idea di avere un fratello o una sorella. Posso essere onesta? Lo farei ancora, non potrei proprio dividerti con qualcun altro!

Papà, ti ho mai detto che sei la persona che mi fa sentire più al sicuro al mondo? Se non l'ho fatto, te lo dico ora. Da bambina ero la tua ombra, ti cercavo sempre e volevo essere portata sulle spalle solo da te, ti ricordi? Adesso sono un bel po' più pesante, ma tu continui a sorreggermi, a sostenermi, in un certo senso a portarmi ancora tra le tue braccia. Grazie per farlo, grazie per farmi sentire ancora piccola e bisognosa di protezione, grazie per tutto quello che mi dai e che continuerai a darmi, grazie per essere un meraviglioso raggio di sole nella mia vita.

Mamma e papà, questa laurea è anche vostra, questa laurea è nostra. Grazie per avermi fatto fare le mie scelte liberamente e, nel contempo, per avermi guidato. Grazie infine per il vostro amore incondizionato ed anche se non ve lo dimostro quasi mai, credetemi, anche il mio verso di voi lo è.

# Indice Generale

<b>Sommario</b> .....	1
<b>1 Introduzione al problema e sua modellazione</b> .....	3
1.1 Modellazione fisica della catena.....	7
1.2 Modellazione numerica della catena.....	10
1.3 Sintesi della tecnica di identificazione del tiro .....	12
1.3.1 Ipotesi per la modellazione della catena.....	12
1.3.2 Caratteristiche dei modelli utilizzati.....	14
1.3.3 Prima stima del tiro assiale.....	15
1.3.4 Stima della rigidezza del sistema di vincolo .....	17
1.3.5 Stima finale del tiro .....	20
1.3.6 Conclusioni ed obiettivi del presente lavoro .....	21
<b>2 Metodo di stima della lunghezza effettiva</b> .....	23
2.1 Nuova modellazione della catena .....	23
2.2 Analisi mediante l'indice CoMAC .....	24
2.3 Analisi mediante l'indice CoMAC per una catena di lunghezza incrementata .....	31
2.3.1 Influenza della snellezza $\lambda$ .....	33
2.3.2 CoMAC relativo ad un modello appoggio-appoggio .....	36
2.4 Andamento CoMAC tra modello reale e 20% modello di confronto .....	38
2.4.1 Influenza della lunghezza effettiva della catena sull'andamento del CoMAC .....	41
2.4.2 Influenza della snellezza $\lambda$ .....	45
2.4.3 Influenza del modulo elastico $E$ .....	48
2.5 Implementazione del metodo di stima della lunghezza effettiva della catena.....	51
2.5.1 Sensibilità del punto di massimo CoMAC alle variabili del modello.....	52
2.5.2 Determinazione del modello lineare.....	57
2.5.3 Influenza della discretizzazione del modello sulla regressione lineare .....	61
2.6 Determinazione degli intervalli di errore ammissibili con analisi Monte Carlo .....	63
2.6.1 Definizione del processo di analisi.....	64
2.6.2 Risultati dell'analisi Monte Carlo .....	65

<b>3</b>	<b>Attività sperimentale</b> .....	71
3.1	Progetto del sistema di sperimentazione .....	72
3.1.1	Elementi strutturali aggiuntivi .....	73
3.1.2	Strumenti di misura .....	75
3.1.3	Taratura del ponte estensimetrico .....	77
3.2	Impostazione delle prove sperimentali .....	79
3.2.1	Set-up sperimentale delle prove .....	79
3.2.2	Tipologia di forzamento e funzioni di risposta in frequenza .....	81
3.3	Risultati delle prove sperimentali .....	82
3.3.1	Prove ad elevata rigidità e basso tiro .....	83
3.3.2	Prove ad elevata rigidità e tiro incrementato .....	86
3.3.3	Prove a bassa rigidità e basso tiro .....	88
3.3.4	Prove a bassa rigidità e tiro incrementato .....	89
3.3.5	Valutazione complessiva dei risultati .....	91
<b>4</b>	<b>Ottimizzazione del metodo di stima della lunghezza effettiva</b> .....	95
4.1	Analisi dei modi di vibrare .....	95
4.2	CoMAC tra 20% modello di confronto e catena reale .....	99
4.2.1	Calcolo del CoMAC rispetto al modello di confronto incastro-incastro .....	99
4.2.2	Influenza del modulo elastico $E$ .....	101
4.2.3	Influenza della lunghezza effettiva della catena ed analisi di sensibilità .....	102
4.3	Modello di regressione lineare .....	105
4.4	Analisi Monte Carlo .....	107
4.5	Validazione sperimentale .....	110
<b>5</b>	<b>Metodo di stima della lunghezza effettiva applicato a modelli asimmetrici</b> .....	117
5.1	Analisi del CoMAC per modello di catena asimmetrico .....	118
5.1.1	Analisi del CoMAC per modello di catena asimmetrico con lunghezza effettiva maggiore della luce visibile .....	120
5.2	Andamento del CoMAC tra modello reale e punto al 20% del modello di confronto .....	122
5.2.1	Confronto dei risultati del modello di catena con sistema di vincolo asimmetrico con quelli del modello simmetrico .....	125
5.3	Validazione sperimentale della tecnica di stima .....	129
5.4	Applicazione della <i>retta di stima</i> ottimizzata a modelli di catena con sistema di vincolo asimmetrico .....	133
5.5	Validazione sperimentale della tecnica di stima ottimizzata .....	138



<b>6</b>	<b>Stima del tiro per catena con sistema di vincolo asimmetrico.....</b>	<b>143</b>
6.1	Estensione della stima del tiro a modelli asimmetrici .....	143
6.1.1	Stima di entrambe le rigidzze del sistema di vincolo .	144
6.1.2	Stima del tiro per strutture asimmetriche .....	146
6.2	Validazione numerica del metodo di stima del tiro .....	146
6.3	Validazione sperimentale del metodo di stima del tiro.....	149
6.3.1	Risultati delle prove sperimentali per catena con lunghezza corretta .....	151
6.3.2	Risultati delle prove sperimentali per catena con lunghezza errata .....	152
	<b>Conclusioni .....</b>	<b>155</b>
	<b>Bibliografia .....</b>	<b>159</b>



## Elenco delle Figure

1. 1	Catene nella navata centrale della basilica di Sant' Ambrogio a Milano .....	3
1. 2	Esempio di posizionamento di una catena in una struttura ad arco .....	4
1. 3	Cinematica della deformazione di un elemento di trave inflessa.....	8
1. 4	Modellazione fisica della catena .....	10
1. 5	Schema operazioni e cooperazione Matlab-Abaqus .....	12
1. 6	Modello di vincolo .....	14
1. 7	Modello finale di catena.....	14
1. 8	Sezione della catena e posizionamento del sistema di riferimento .....	15
1. 9	Analisi di sensibilità delle frequenze proprie della catena al variare dei suoi parametri .....	16
1. 10	Curva $R3.5,9.5sum$ al variare della rigidezza .....	18
1. 11	Interpolazione per il calcolo degli estremi dell'intervallo di variazione della rigidezza .....	19
1. 12	Analisi di sensibilità delle frequenze proprie della catena a valle della limitazione sull'intervallo di rigidezze ammissibili.....	20
2. 1	Modello finale di catena.....	24
2. 2	Esempio quarto modo di vibrare al variare della rigidezza dei vincoli.....	25
2. 3	Esempio quarto modo di vibrare al variare del tiro assiale.....	25
2. 4	Quarto modo di vibrare, nel tratto di luce visibile, al variare delle condizioni al contorno per una trave maggiorata del 5%.....	25
2. 5	Quarto modo di vibrare, nel tratto di luce visibile, al variare delle condizioni al contorno per una trave maggiorata del 10%.....	26
2. 6	Modelli di confronto, rispettivamente incastro-incastro ed appoggio-appoggio.....	27
2. 7	Modalità di calcolo del CoMAC.....	28
2. 8	Andamento del CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello ed il modello appoggio-appoggio al variare del tiro agente.....	29
2. 9	Andamento del CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello ed il modello incastro-incastro al variare del tiro agente .....	29
2. 10	Andamento del CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello ed il modello appoggio-appoggio al variare della rigidezza dei vincoli .....	29
2. 11	Andamento del CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello ed il modello incastro-incastro al variare della rigidezza dei vincoli.....	30
2. 12	Confronto dei minimi del CoMAC al variare di rigidezza dei vincoli e tiro .....	31
2. 13	Modalità di calcolo del CoMAC per una catena più lunga del modello di confronto .....	32

2. 14 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con $l=1.05l_0$ ed il modello incastro-incastro al variare del tiro .....	32
2. 15 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con $l=1.05l_0$ ed il modello incastro-incastro al variare della rigidità dei vincoli.....	32
2. 16 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con $l=1.05l_0$ ed il modello incastro-incastro al variare del tiro per una trave di maggiore snellezza.....	34
2. 17 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con $l=1.05l_0$ ed il modello incastro-incastro al variare della rigidità dei vincoli per una trave di maggiore snellezza.....	34
2. 18 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con $l=1.05l_0$ ed il modello incastro-incastro al variare del tiro per una trave con elementi tozzi	35
2. 19 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con $l=1.05l_0$ ed il modello incastro-incastro al variare della rigidità dei vincoli per una trave con elementi tozzi .....	35
2. 20 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con $l=1.05l_0$ ed il modello appoggio-appoggio al variare del tiro assiale.....	36
2. 21 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con $l=1.05l_0$ ed il modello appoggio-appoggio al variare della rigidità dei vincoli .....	37
2. 22 Nuova modalità di calcolo del CoMAC .....	38
2. 23 CoMAC tra 20% del modello appoggiato (4000 mm) e catena reale (4000 mm) a $N/N_{sn}$ variabile.....	39
2. 24 CoMAC tra 20% del modello incastrato (4000 mm) e catena reale (4000 mm) a $N/N_{sn}$ variabile.....	39
2. 25 CoMAC tra 20% del modello appoggiato (4000 mm) e catena reale (4000 mm) a $k_t/k_{t,eq}$ variabile .....	39
2. 26 CoMAC tra 20% del modello incastrato (4000 mm) e catena reale (4000 mm) a $k_t/k_{t,eq}$ variabile .....	40
2. 27 Massimi del CoMAC con modello di confronto appoggiato .....	41
2. 28 Massimi del CoMAC con modello di confronto incastrato.....	41
2. 29 Incremento di lunghezza del 5%, confronto con modello appoggiato, $N$ variabile .....	42
2. 30 Incremento di lunghezza del 5%, confronto con modello incastrato, $N$ variabile .....	42
2. 31 Incremento di lunghezza del 5%, confronto con modello appoggiato, $k_t$ variabile .....	43
2. 32 Incremento di lunghezza del 5%, confronto con modello incastrato, $k_t$ variabile .....	43
2. 33 Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e $k_t$ con modello incastrato.....	44
2. 34 Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e $N$ con modello incastrato.....	44

2. 35	Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e $k_t$ con modello incastrato per catena meno snella.....	46
2. 36	Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e $N$ con modello incastrato per catena meno snella.....	46
2. 37	Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e $k_t$ con modello appoggiato per catena meno snella .....	46
2. 38	Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e $N$ con modello appoggiato per catena meno snella .....	47
2. 39	Confronto posizioni massimo CoMAC al variare di $\lambda$ e $N/N_{sn}$ .....	48
2. 40	Confronto posizioni massimo CoMAC al variare di $\lambda$ e $k_t/k_{t,eq}$ .....	48
2. 41	CoMAC al variare di $E$ per catena in acciaio.....	49
2. 42	CoMAC al variare di $E$ per catena in alluminio.....	49
2. 43	Effetto del modulo elastico $E$ sulle curve del CoMAC.....	50
2. 44	CoMAC tra 80% del modello appoggiato e catena reale a $N/N_{sn}$ variabile .....	51
2. 45	CoMAC tra 80% del modello appoggiato e catena reale a $k_t/k_{t,eq}$ variabile .....	51
2. 46	Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per diverse lunghezze effettive della catena e lunghezza visibile di 4000 mm.....	54
2. 47	Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per diverse lunghezze effettive della catena e lunghezza visibile di 10000 mm.....	55
2. 48	Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per una luce visibile di 4000 mm .....	56
2. 49	Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per una luce visibile di 10000 mm .....	57
2. 50	Retta di regressione per la stima della lunghezza effettiva delle catene ....	59
2. 51	Residui della rette di regressione per la stima della lunghezza effettiva ...	59
2. 52	Schema di funzionamento del metodo .....	60
2. 53	Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per diverse lunghezze effettive della catena, lunghezza visibile di 4000 mm e risoluzione di 5 mm.....	61
2. 54	Retta di regressione per la stima della lunghezza effettiva delle catene con mesh con elementi da 5 mm.....	62
2. 55	Residui della rette di regressione per la stima della lunghezza effettiva con mesh da elementi da 5 mm.....	63
2. 56	Intervalli di errore Metodo Monte Carlo.....	65
2. 57	Lunghezza stimata a partire dagli intervalli d'errore del Metodo Monte Carlo.....	67
2. 58	Lunghezza stimata a partire dalla correzione della sottostima sugli intervalli di errore del Metodo Monte Carlo .....	67
2. 59	Retta di regressione per la stima della lunghezza effettiva delle catene – acciaio .....	68
2. 60	Intervalli di errore Metodo Monte Carlo – acciaio .....	69

2. 61 Lunghezza stimata a partire dalla correzione della sottostima sugli intervalli di errore del Metodo Monte Carlo – acciaio .....	69
3. 1 Modello di catena usato per le simulazioni .....	71
3. 2 Disegno quotato della catena .....	73
3. 3 Componenti sistema di vincolo .....	74
3. 4 Tenditore a cannula.....	74
3. 5 Schema del sistema sperimentale impiegato per la validazione del metodo	75
3. 6 Martello dinamometrico .....	75
3. 7 Cella di carico .....	76
3. 8 Ponte estensimetrico .....	76
3. 9 Condizionatori di misura HBM Scout 55 .....	77
3. 10 Moduli di condizionamento .....	77
3. 11 Chassis cDAQ 9172.....	77
3. 12 Regressione lineare in fase di carico e scarico .....	78
3. 13 Regressione lineare complessiva per la taratura del ponte estensimetrico	78
3. 14 Schema del set-up di misura .....	80
3. 15 CoMAC 1% tiro basso, rigidezza dei vincoli alta .....	84
3. 16 CoMAC 5% tiro basso, rigidezza dei vincoli alta .....	85
3. 17 CoMAC 10% tiro basso, rigidezza dei vincoli alta .....	85
3. 18 CoMAC 1% tiro alto, rigidezza dei vincoli alta .....	86
3. 19 CoMAC 5% tiro alto, rigidezza dei vincoli alta .....	87
3. 20 CoMAC 10% tiro alto, rigidezza dei vincoli alta .....	87
3. 21 CoMAC 1% tiro basso, rigidezza dei vincoli bassa .....	88
3. 22 CoMAC 5% tiro basso, rigidezza dei vincoli bassa .....	88
3. 23 CoMAC 10% tiro basso, rigidezza dei vincoli bassa .....	89
3. 24 CoMAC 1% tiro alto, rigidezza dei vincoli bassa .....	89
3. 25 CoMAC 5% tiro alto, rigidezza dei vincoli bassa .....	90
3. 26 CoMAC 10% tiro alto, rigidezza dei vincoli bassa .....	90
3. 27 Posizione errori sperimentali rispetto alle forchette dell'analisi Monte Carlo .....	93
3. 28 Posizione dei massimi del CoMAC sperimentali rispetto alla retta di regressione .....	94
4. 1 Terzo modo di vibrare al variare della rigidezza dei vincoli $k_t/k_{t,eq}$ .....	96
4. 2 Terzo modo di vibrare al variare del tiro assiale $N/N_{sn}$ .....	96
4. 3 Sesto modo di vibrare al variare della rigidezza dei vincoli $k_t/k_{t,eq}$ .....	97
4. 4 Sesto modo di vibrare al variare del tiro assiale $N/N_{sn}$ .....	97
4. 5 Ottavo modo di vibrare al variare della rigidezza dei vincoli $k_t/k_{t,eq}$ .....	98
4. 6 Ottavo modo di vibrare al variare del tiro assiale $N/N_{sn}$ .....	98
4. 7 CoMAC al variare del tiro $N/N_{sn}$ – m.d.v. dal 6° al 9° .....	100
4. 8 CoMAC al variare della rigidezza dei vincoli - m.d.v. dal 6° al 9° .....	100
4. 9 Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello.....	101
4. 10 Posizione del massimo CoMAC per $k_t/k_{t,eq}$ diverse al variare del modulo elastico E.....	102

4. 11 CoMAC al variare della lunghezza effettiva per condizioni al contorno fissate.....	103
4. 12 Sensibilità della posizione del massimo CoMAC ai parametri del modello .....	104
4. 13 Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per una luce visibile di 4000 mm .....	105
4. 14 Retta di regressione ottimizzata .....	106
4. 15 Residui della retta di regressione ottimizzata.....	106
4. 16 Intervalli di errore determinate dall' Analisi Monte Carlo .....	108
4. 17 Lunghezza effettiva della catena vs. Lunghezza stimata dal metodo .....	109
4. 18 Lunghezza effettiva della catena vs. Lunghezza stimata dal metodo con correzione .....	109
4. 19 CoMAC per incremento di lunghezza dell' 1% .....	111
4. 20 CoMAC per incremento di lunghezza del 5% .....	112
4. 21 CoMAC per incremento di lunghezza del 10% .....	112
4. 22 Posizione errori sperimentali rispetto agli intervalli statistici.....	114
4. 23 Posizione dei massimi del CoMAC sperimentali rispetto alla retta di regressione.....	115
5. 1 Modello di catena a rigidità differente .....	118
5. 2 CoMAC rispetto ad un modello incastrato ed al variare del tiro $N/N_{sn}$ per una catena da 4000mm con $k_{ta}/k_{t,eq}=20$ e $k_{tb}/k_{t,eq}=30$ .....	119
5. 3 CoMAC rispetto ad un modello incastrato ed al variare del tiro $N/N_{sn}$ per una catena da 4000mm con $k_{ta}/k_{t,eq}=100$ e $k_{tb}/k_{t,eq}=110$ .....	119
5. 4 CoMAC rispetto ad un modello incastrato ed al variare del tiro $N/N_{sn}$ per una catena da 4000mm con $k_{ta}/k_{t,eq}=30$ e $k_{tb}/k_{t,eq}=130$ .....	120
5. 5 CoMAC al variare di $N/N_{sn}$ per una catena da 4200mm con rigidità differenti di 100.....	121
5. 6 CoMAC al variare di $N/N_{sn}$ per una catena da 4400mm con rigidità differenti di 100.....	121
5. 7 CoMAC al variare del tiro $N/N_{sn}$ per una catena con $k_{t1}/k_{t,eq}=20$ e $k_{t2}/k_{t,eq}=30$ .....	123
5. 8 CoMAC al variare del tiro $N/N_{sn}$ per una catena con $k_{t1}/k_{t,eq}=100$ e $k_{t2}/k_{t,eq}=110$ .....	123
5. 9 CoMAC al variare delle rigidità $k_{t1}/k_{t,eq}$ e $k_{t2}/k_{t,eq}$ per una catena con tiro $N/N_{sn}=0.5$ .....	123
5. 10 CoMAC al variare della lunghezza effettiva e del tiro $N/N_{sn}$ per una catena con $k_{ta}/k_{t,eq}=100$ e $k_{tb}/k_{t,eq}=110$ .....	124
5. 11 CoMAC al variare della lunghezza effettiva e del tiro $N/N_{sn}$ per una catena con $k_{ta}/k_{t,eq}=20$ e $k_{tb}/k_{t,eq}=30$ .....	124
5. 12 CoMAC al variare della lunghezza effettiva e del tiro $N/N_{sn}$ per una catena con $k_{ta}/k_{t,eq}=30$ e $k_{tb}/k_{t,eq}=130$ .....	125
5. 13 Posizioni del massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva e delle condizioni al contorno della catena.....	127

5. 14 Posizioni del massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva e delle condizioni al contorno della catena - elevata differenza di rigidità.....	128
5. 15 CoMAC per incremento di lunghezza dell' 1% .....	130
5. 16 CoMAC per incremento di lunghezza del 5% .....	131
5. 17 CoMAC per incremento di lunghezza del 10% .....	131
5. 18 CoMAC al variare del tiro $N/N_{sn}$ per una catena con $k_{t1}/k_{t,eq}=30$ e $k_{t2}/k_{t,eq}=130$ .....	134
5. 19 CoMAC al variare del tiro $N/N_{sn}$ per una catena con $k_{t1}/k_{t,eq}=130$ e $k_{t2}/k_{t,eq}=30$ .....	134
5. 20 Ingrandimento del CoMAC al variare del tiro $N/N_{sn}$ per una catena con $k_{t1}/k_{t,eq}=130$ e $k_{t2}/k_{t,eq}=30$ .....	134
5. 21 CoMAC al variare della lunghezza effettiva per una catena con $k_{t1}/k_{t,eq}=30$ e $k_{t2}/k_{t,eq}=130$ e $N/N_{sn}=0.5$ .....	135
5. 22 CoMAC al variare della lunghezza effettiva per una catena con $k_{t1}/k_{t,eq}=130$ e $k_{t2}/k_{t,eq}=30$ e $N/N_{sn}=0.5$ .....	135
5. 23 Posizioni del massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva e delle condizioni al contorno della catena – metodo ottimizzato .....	136
5. 24 Posizioni del massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva e delle condizioni al contorno della catena - elevata differenza di rigidità – metodo ottimizzato .....	137
5. 25 CoMAC per incremento di lunghezza dell' 1% - caso ottimizzato .....	138
5. 26 CoMAC per incremento di lunghezza del 5% - caso ottimizzato .....	139
5. 27 CoMAC per incremento di lunghezza del 10% - caso ottimizzato .....	140
6. 1 Modello di catena asimmetrico.....	143
6. 2 Intervallo di variazione del $k_{t1}/k_{t,eq}$ .....	145
6. 3 Intervallo di variazione del $k_{t2}/k_{t,eq}$ .....	145
6. 4 Set-up utilizzato per le prove sperimentali per la stima del tiro.....	150
6. 5 Set-up utilizzato per le prove sperimentali con lunghezza nominale errata .....	150
6. 6 Errori di stima del tiro assiale per catena sperimentale di lunghezza corretta .....	151
6. 7 Errori di stima del tiro assiale per catena sperimentale di lunghezza errata .....	153



## Elenco delle Tabelle

1. 1 Sezioni, materiali e lunghezze delle catene simulate .....	15
1. 2 Intervalli di variazione dei parametri della catena per l'analisi di sensibilità .....	16
1. 3 Valori critici dei parametri del modello .....	19
1. 4 Valori iniziali e limiti per la procedura di minimizzazione .....	21
2. 1 Valori delle variabili combinabili per i modelli FEM.....	58
2. 2 Parametri impostati per il modello di catena.....	64
3. 1 Caratteristiche della catena impiegata per le prove in laboratorio .....	73
3. 2 Caratteristiche dell'accelerometro impiegato .....	76
3. 3 Risultati della regressione per la tarature del ponte estensimetrico .....	78
3. 4 Risultati prove sperimentali nel caso $l_{effettiva}=1.01*l_{visibile}$ .....	91
3. 5 Risultati prove sperimentali nel caso $l_{effettiva}=1.05*l_{visibile}$ .....	91
3. 6 Risultati prove sperimentali nel caso $l_{effettiva}=1.1*l_{visibile}$ .....	92
4. 1 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata dell'1% .....	113
4. 2 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata del 5% .....	113
4. 3 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata del 10% .....	113
5. 1 Risultati prove sperimentali del metodo per lunghezza incrementata dell'1% .....	132
5. 2 Risultati prove sperimentali del metodo per lunghezza incrementata del 5% .....	132
5. 3 Risultati prove sperimentali del metodo per lunghezza incrementata del 10% .....	132
5. 4 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata dell'1% .....	140
5. 5 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata del 5% .....	140
5. 6 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata del 10% .....	140
6. 1 Valori critici dei parametri del modello asimmetrico .....	145
6. 2 Caratteristiche dei modelli di tipo A .....	147
6. 3 Caratteristiche dei modelli di tipo B .....	147
6. 4 Vincoli per la minimizzazione del funzionale $z$ .....	147
6. 5 Errori stima azione assiale per modelli di lunghezza nominale.....	148
6. 6 Errori stima azione assiale per modelli di lunghezza errata.....	148

6. 7 Risultati della minimizzazione vincolata per catena sperimentale con lunghezza corretta.....	151
6. 8 Risultati della minimizzazione vincolata per catena sperimentale con lunghezza errata.....	152

## Sommario

Il presente lavoro si prefigge di ottimizzare il metodo proposto nella tesi di S. Campagnari per identificare il tiro assiale nei tiranti utilizzati nelle strutture civili. Questi elementi strutturali, detti catene, sono necessari a bilanciare i carichi assiali alla base di archi e volte. Nel lavoro prima citato l'azione assiale è stimata tramite tecniche di analisi modale ed in particolare studiando le frequenze proprie ed i modi di vibrare della struttura. Limite del metodo proposto è però l'incertezza che caratterizza i suoi output a causa sia della non conoscenza della lunghezza effettiva delle catene, che della loro modellazione come strutture simmetriche. Nella presente tesi si risolveranno entrambe queste due criticità. In primis verrà quindi implementato un algoritmo utile alla stima della lunghezza effettiva delle catene. Per far ciò ci si baserà sull'uso dell'indice di correlazione CoMAC calcolato tra i modi di vibrare della struttura in analisi e di una ideale scelta come riferimento. Infine sia l'algoritmo appena citato, che quello per l'identificazione del tiro verranno estesi al caso di struttura asimmetrica, cioè caratterizzata da un sistema di vincolo a differente rigidità. In questo modo entrambe le tecniche potranno essere considerate applicabili senza restrizioni ad ogni tipo di catena.

**Parole chiave:** Catene, tiranti, analisi modale, tiro, CoMAC, lunghezza effettiva

## Abstract

This work aims to optimize the method proposed in S. Campagnari's thesis to identify the axial load in tie-rods used in civil structures. These structural elements are needed to balance axial loads at the base of arcs and vaults. In the work previously mentioned the axial load is estimated with the use of modal analysis techniques and, more specifically, studying tie-rods' eigenfrequencies and modes shapes. The main problem of the proposed method is the uncertainty of its outputs due to the fact that the actual length of the tie-rod is unknown and it is also modelled as a symmetric structure. In this work both these two problems will be solved. Thus, first an algorithm to estimate the actual length of tie-rods will be implemented. To do that the analysis will be based on the use of the CoMAC correlation index. It will be calculated between the mode shapes of the tie-rod and the ones of an ideal structure chosen as a reference. At last, both the algorithm just mentioned and the one for the axial load identification will be adapted to the case of an asymmetric structure, more specifically characterized by constraints with different stiffness. In this way both these techniques could be used without any restriction to every kind of tie-rod.

**Keywords:** Tie-rods, modal analysis, axial load, CoMAC, actual length



# Capitolo 1

## Introduzione al problema e sua modellazione

Le catene, più semplicemente note come tiranti, sono elementi strutturali metallici generalmente siti alla base di archi o volte. Sebbene siano tuttora utilizzate in applicazioni moderne, esse sono presenti soprattutto in edifici storici. La loro funzione principale è quella di contenere gli sforzi laterali che si vengono a creare nelle pareti delle strutture in cui sono applicate. Nella fotografia in Fig.(1.1) se ne riporta un esempio di impiego.

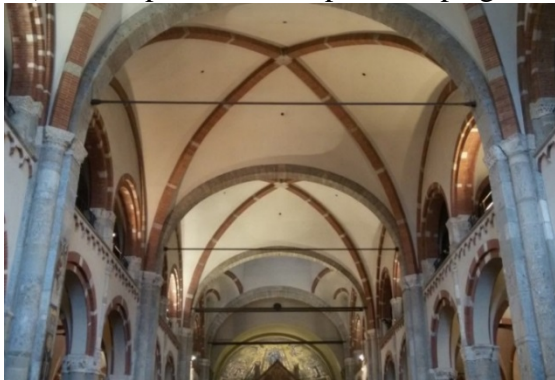


Figura 1. 1 Catene nella navata centrale della basilica di Sant’Ambrogio a Milano

Le catene, come si può quindi intuire, forniscono un importante contributo strutturale e monitorarne lo stato di salute è fondamentale. Se in seguito a fenomeni di elevato forzamento ambientale (per esempio attività sismica), o ad opere di restauro non adeguatamente programmate se ne andasse ad inficiare l’operatività in sicurezza, si potrebbe andare incontro a modifiche del loro stato di equilibrio statico con conseguenti danni o, peggio, cedimenti. Per evitare ciò è importante poter conoscere, ed in caso non fossero note poter stimare, quelle che sono le grandezze che le caratterizzano.

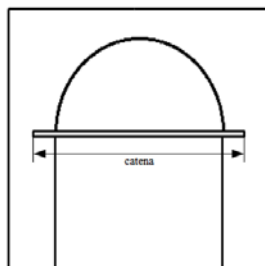
È da premettere che a livello fisico le pareti dell’edificio agiscono come vincolo. Tale vincolo, per come le catene sono alloggiare nelle loro sedi, non è un incastro perfetto, ma presenterà una certa cedevolezza. Inoltre giacché la loro funzione strutturale è quella di contenere gli sforzi laterali, esse sono anche soggette ad una azione assiale che in letteratura viene comunemente definita *tiro*. Una conoscenza a priori sia del tiro assiale, che della cedevolezza (o dualmente rigidità) del sistema di vincolo costituito dalla pareti non è disponibile, ma necessita di appositi algoritmi di stima.

Tra i vari metodi messi a punto al fine di ottenere una quantificazione di questi parametri, ed in particolar modo dell’azione assiale, uno che si è dimostrato

molto efficaci, anche a valle di prove sperimentali, è quello messo a punto da S. Campagnari [1].

Pur permettendo di ottenere risultati affetti da errori ritenuti accettabili (in media inferiori al 10%), l'algoritmo [1] presenta due limiti che concorrono ad aumentare l'incertezza che accompagna la stima finale del tiro e che in questa tesi si cercherà di superare. Il primo riguarda la non conoscenza della lunghezza effettiva della catena. Il secondo invece concerne il modello di tirante utilizzato. In [1] si suppone infatti che la catena possa essere modellata come una struttura perfettamente simmetrica. La descrizione del modello con tutte le ipotesi annesse verrà meglio illustrata nei paragrafi successivi, ma è utile premettere già da ora che tale semplificazione, specialmente per quanto riguarda il sistema di vincolo, è molto forte. In particolar modo per le applicazioni negli edifici storici, le pareti in cui le catene alloggiavano sono costituite da materiali non uniformi e non omogenei. Di conseguenza non si può assumere con certezza che l'effetto di vincolo esercitato ad entrambe le estremità del tirante sia caratterizzato da pari rigidità.

Ritornando al primo limite, come si evince da Fig.(1.2), le catene sono posizionate all'interno delle pareti della struttura, di conseguenza la luce visibile dall'esterno non corrisponde al loro completo sviluppo. Sia in [1], che in altri studi, per tenere conto di ciò, viene imposta una discrepanza al massimo del 5% tra la lunghezza effettiva del tirante e la sua luce visibile. Sebbene questa soglia di maggiorazione sia ritenuta ragionevole dall'autore, resta comunque arbitraria. Infatti non è possibile stabilire a priori per quanto le catene si protendano all'interno delle pareti. È quindi necessario almeno poter stimare se in una situazione reale ci si trovi ad avere a che fare con tiranti di lunghezza effettiva appartenente a questo range o, nel caso questa percentuale sia maggiore, di quanto lo sia. Inoltre conoscere la lunghezza effettiva delle catene, come sopra anticipato, è utile anche per evitare problemi di cedimento qualora in sede di restauro o lavori sugli edifici la loro sede venga danneggiata.



**Figura 1. 2 Esempio di posizionamento di una catena in una struttura ad arco**

Primo obiettivo del presente lavoro non sarà quindi semplicemente l'implementazione di un metodo di stima della lunghezza effettiva, ma l'ottenimento di una tecnica caratterizzata da un valore di incertezza limitato al massimo al 5%, proprio per migliorare l'accuratezza della stima dell'azione assiale secondo quanto proposto in [1].

Per procedere con ordine, questo nuovo algoritmo di stima verrà prima implementato per modelli di catena simmetrici analoghi a quello di [1] e successivamente esteso al caso di tirante con sistema di vincolo asimmetrico.

Fatto ciò, per poter ritenere la tecnica di stima del tiro di [1] di valenza generale, si passerà infine ad adattarla anche al caso di struttura asimmetrica.

Prima di poter mettere a punto un metodo sia per stimare la lunghezza effettiva delle catene, sia per tenere in conto la loro asimmetria nella stima del tiro, è innanzitutto necessario considerare attraverso che tipo di modalità è conveniente approcciarsi al problema in senso pratico. Dato che la loro posizione all'interno degli edifici le rende spesso difficilmente raggiungibili, le installazioni di impalcature e strumentazione in loco per poter effettuare le misurazioni possono risultare complesse ed anche costose. A valle di questa considerazione è importante quindi avere a disposizione un metodo di indagine rapido, poco invasivo ed il più possibile economico.

L'approccio con cui affrontare uno studio di questo tipo può appartenere a tre macro-categorie, tutte presenti in letteratura:

- *Metodi statici*: sfruttano misure di spostamento e deformazione dei tiranti, supponendo che essi siano soggetti ad un carico concentrato costante e noto;
- *Metodi dinamici*: si basano su misure di vibrazione delle catene;
- *Metodi ibridi*: usano entrambe le misure di vibrazione meccanica e le deflessioni dovute ad un carico concentrato e noto.

In letteratura [2] i *metodi statici* sono stati applicati non per stima della lunghezza effettiva delle catene, ma per misure del tiro assiale a cui esse sono soggette. Si basano sulla scrittura di equazioni di equilibrio della trave supponendo che essa sia snella ed omogenea. Qualora queste due ipotesi non fossero più rispettate tali metodi perderebbero di validità. Un altro svantaggio di questo tipo di metodi è che richiedono la realizzazione di set-up sperimentali non banali che possono causare un aggravio nei costi, per esempio per l'applicazione accurata di estensimetri o l'installazione di trasduttori di spostamento per cui è necessario avere un riferimento assoluto.

I *metodi dinamici*, invece, si caratterizzano per dare dei risultati in modo rapido e semplice a partire dalla conoscenza delle frequenze proprie e dei modi di vibrare della struttura. I più semplici tra questi modellano la catena come una fune tesata o una trave semplicemente appoggiata. Sebbene per casi del genere si possa arrivare a soluzioni del problema dinamico in forma chiusa, i risultati sono approssimati in quanto si trascurano gli effetti della rigidità flessionale e dei vincoli.

In letteratura si ritrovano metodi dinamici applicati ancora una volta alla stima del tiro assiale nelle catene, ma non della loro lunghezza effettiva. In ogni caso all'interno di questa famiglia di metodi si possono individuare a loro volta due

sotto-categorie: metodi che usano un approccio continuo e metodi che usano un approccio numerico agli elementi finiti.

I metodi basati sull'ipotesi del continuo come quello di Lagormarsino e Calderini [3] modellano la catena come una trave bidimensionale, semplicemente appoggiata, omogenea, soggette ad un carico  $N$ , di sezione  $A$ , rigidezza flessionale  $EJ$  e massa per unità di lunghezza  $m$  costanti lungo la luce. Il vincolo viene realizzato mediante due molle torsionali di rigidezza  $k_1$  e  $k_2$  alle estremità. Le caratteristiche meccaniche e fisiche vengono supposte note e si utilizza il modello di trave di Eulero-Bernoulli [4], trascurando così la deformazione a taglio e l'inerzia rotazionale. Viene così scritta l'equazione differenziale del moto nel piano trasversale della trave corredata dalla relative condizioni al contorno. Annullando il determinante delle condizioni al contorno si perviene quindi all'equazione caratteristica del sistema (1.1):

$$g(\rho, l, A, EJ, k_1, k_2, N, \omega_n) = 0 \quad (1.1)$$

La risoluzione del problema diretto della (1.1) permette di calcolare, seppur in modo approssimato, le frequenze proprie del sistema. I metodi di stima dinamici, al contrario, risolvono il problema inverso, ovvero a partire dalle frequenze proprie stimano le grandezze fisiche o meccaniche di interesse. Limite di questo approccio resta comunque l'elevata difficoltà di modellazione e risoluzione del problema che può causare anche tempi di risoluzione molto lunghi.

I metodi dinamici basati su un approccio agli elementi finiti come quello di Livingston et al. [5] prevedono di modellare la trave mediante l'ausilio di un software ad elementi finiti e, imponendo le condizioni al contorno del problema, ricavare in maniera numerica le frequenze proprie ed i relativi autovettori normalizzati da eventualmente utilizzare in funzioni di minimizzazione per la stima dei parametri di interesse. Vantaggi di questi metodi sono senz'altro la possibilità di modellare la catena sia in 2D, che in 3D, e di poter eventualmente tener conto degli effetti di deformabilità a taglio, al contrario di quanto prevede l'ipotesi di trave euleriana. Inoltre tali metodi, previa un'accurata modellazione della catena, possono portare in tempi brevi a risultati che, seppure approssimati, sono comunque accettabili.

I *metodi ibridi*, ancora applicati alla sola stima del tiro assiale, come ad esempio quello di Blasi e Sorace [6], infine, prevedono l'utilizzo di entrambe misurazioni di tipo statico (deformazioni o spostamenti sperimentali) e dinamico (frequenza proprie, stimate al FEM e poi da validare sperimentalmente). Questi metodi permettono, a patto di modellare in modo appropriato la catena, di risolvere per via indiretta un sistema formato da un'equazione statica ed una dinamica. Il rischio connesso al loro impiego è però di incorrere in pesanti approssimazioni a causa di stime dei parametri di primo tentativo per permettere la collaborazione della parte numerica con quella sperimentale. Da un punto di vista pratico tali metodi ripropongono poi le stesse difficoltà citate per quelli statici.



Si torna comunque a sottolineare che tutti i lavori sopracitati sono finalizzati non alla stima della lunghezza effettiva delle catene, ma del loro carico assiale  $N$ . Questi restano comunque importanti in quanto indicano delle ipotesi e delle procedure di carattere generale e solo in seguito specializzate per un dato obiettivo.

Alla luce dei pro e dei contro di tutte le tipologie di analisi, nel presente lavoro si decide di impiegare un metodo di tipo dinamico con approccio agli elementi finiti.

Si elaborerà quindi una tecnica di stima della lunghezza effettiva delle catene basata sull'analisi modale. Questa sarà poi seguita da un'analisi sperimentale ai fini della sua validazione. Tale metodo verrà in ultimo ottimizzato al fine di ottenere un risultato il più accurato possibile.

## **1.1 Modellazione fisica della catena**

Prima di poter definire un metodo di stima della lunghezza effettiva delle catene è innanzitutto necessario stabilire l'approccio alla modellazione delle stesse.

La prima operazione da effettuare riguarda la definizione del grado di approssimazione che si vuole adottare per il problema in analisi. Pensare infatti di poter svolgere uno studio di analisi modale basandosi su una rappresentazione sia del tirante, sia del sistema di pareti comprensivo di tutte le caratteristiche fisiche e geometriche presenti in realtà porterebbe a varie complicazioni. Innanzitutto il problema risulterebbe di difficile implementazione, ma soprattutto rischierebbe di essere anche poco accurato, considerate tutte le incognite delle analisi, e difficilmente generalizzabile qualora una o più caratteristiche della catena cambiassero.

Per questo motivo in tutto il presente lavoro si decide di adottare una semplificazione fondamentale: il tirante viene modellato come una trave vincolata agli estremi.

In letteratura sono presenti due approcci per descrivere il comportamento delle travi: la EBBT (Eulero-Bernoulli Beam Theory) [4], che tiene in considerazione l'energia cinetica dovuta agli spostamenti laterali e l'energia di deformazione dovuta alla flessione, e la TBT (Thick Beam Theory) [7] sviluppata da Timoshenko negli anni '20. Vantaggio di quest'ultimo approccio è prevede risultati in ottimo accordo con quelli ottenuti da attività sperimentali [8]. La peculiarità della teoria di Timoshenko sta nell'aver introdotto gli effetti della deformazione a taglio [9] [10] che, come è stato dimostrato dall'autore stesso, sono quattro volte più importante dell'inerzia rotazionale introdotta da Rayleigh nel modello EBBT[11]. Timoshenko mostrò inoltre che le equazioni della trave di Eulero-Bernoulli e di Rayleigh sono casi particolari del suo risultato.

Per lo svolgimento di questo lavoro, al fine di ottenere dei risultati il quanto più accurati e completi possibile, si decide di basarsi proprio sulla TBT.

Secondo questa teoria le vibrazioni trasversali della trave dipendono sia dalle proprietà geometriche e del materiale, sia dalle condizioni al contorno.

Le proprietà geometriche si riferiscono alla lunghezza della trave  $l$ , dimensioni e forma della sua sezione  $A$ , momento di inerzia  $J$  riferito all'asse centrale di flessione e al coefficiente di taglio di Timoshenko  $k_y$ . Quest'ultimo permette di tenere in conto la distribuzione dello sforzo di taglio in modo che l'effettiva area di taglio sia pari a  $k_y A$ . Come proprietà del materiale ci si riferisce alla sua densità  $\rho$ , al modulo di Young, o modulo elastico,  $E$  ed al modulo di rigidità, o modulo di taglio,  $G$ .

Le conseguenze dell'effetto di taglio sopracitato sono mostrate in Fig.(1.3) insieme alla cinematica della deformazione di un elemento di trave deflessa lungo  $dx$  alla posizione  $x$ . A causa dell'effetto di taglio, la forma rettangolare dell'elemento indeformato diventa simile ad un parallelogramma con i lati leggermente curvi.

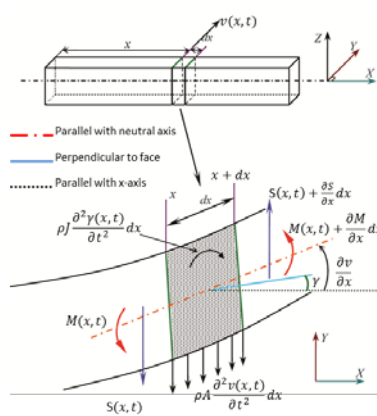


Figura 1. 3 Cinematica della deformazione di un elemento di trave inflessa

Le equazioni di equilibrio della forza trasversale e del momento per la sezione di una trave caricata assialmente sono date dalle equazioni (1.2) e (1.3):

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + N \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$S(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = \rho J \frac{\partial^2 \gamma(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

In accordo con la TBT, la forza di taglio  $S(x, t)$  e il momento flettente  $M(x, t)$  possono essere espressi in funzione dello spostamento trasversale dell'asse della trave  $v(x, t)$  e della rotazione della sezione  $\gamma(x, t)$  così come mostrato in Fig.(1.3) e riportato nelle equazioni (1.4) e (1.5)

$$S(x, t) = k_y GA \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - \gamma(x, t) \right) \quad (1.4)$$

$$M(x, t) = EJ \frac{\partial \gamma(x, t)}{\partial x} \quad (1.5)$$

Eliminando  $\gamma(x, t)$  dalle Eq.(1.3), (1.4) e (1.5) si ottiene un'equazione alle derivate parziali in funzione del solo spostamento trasversale  $v(x, t)$ :

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{EJN}{k_y GA} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{EJ\rho}{k_y G} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho J \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{N\rho J}{k_y GA} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{k_y G} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0 \quad (1.6)$$

La (1.6) è l'equazione del moto libero della trave e può essere trasformata in una equazione differenziale ordinaria tramite una separazione di variabili, ovvero assumendo che lo spostamento trasversale  $v(x, t)$  sia armonico con pulsazione  $\omega$ , secondo la (1.7):

$$v(x, t) = \hat{v}(x) \sin(\omega t) \quad (1.7)$$

Introducendo la (1.7) nella (1.6) si ottiene la seguente equazione differenziale ordinaria (1.8):

$$a \frac{d^4 \hat{v}(x)}{dx^4} + b \frac{d^2 \hat{v}(x)}{dx^2} + c \hat{v}(x) = 0 \quad (1.8)$$

I parametri  $a, b$  e  $c$  sono definiti in accordo alla (1.9):

$$\begin{aligned} a &= EJ \left( 1 + \frac{N}{k_y GA} \right) \\ b &= -N + \frac{EJ\rho\omega^2}{k_y G} + \rho J\omega^2 + \frac{N\rho J\omega^2}{k_y GA} \\ c &= -\rho A\omega^2 + \frac{\rho^2 J\omega^4}{k_y G} \end{aligned} \quad (1.9)$$

La soluzione dell'Eq.(1.8) per un fissato valore di  $N$  è data dalla (1.10):

$$\hat{v}(x) = \sum_{k=1}^4 C_k \exp(\beta_k x) \quad (1.10)$$

dove:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, & \beta_2 &= -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ \beta_3 &= \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, & \beta_4 &= -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

I parametri  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) della (1.11) dipendono dalle caratteristiche della trave, ovvero il suo modulo elastico  $E$ , la densità  $\rho$ , il coefficiente di deformazione a taglio  $k_y$ , il modulo di rigidità  $G$ , la sezione  $A$  ed il momento di

inerzia  $J$ . I coefficienti  $C_i$  dipendono invece dalle condizioni al contorno, ovvero dalla tipologia di vincolo e dal carico assiale  $N$ .

In letteratura, i lavori basati sulla teoria di Timoshenko[12] [13], assumono  $k_y$  e  $G$  come noti. Di conseguenza le variabili di cui si terrà conto in tutto il seguito della trattazione e che caratterizzano la catena sono, dal punto di vista geometrico, la sua sezione trasversale  $A$  e la sua lunghezza  $l$ , mentre fisicamente il suo modulo elastico  $E$  e la sua densità  $\rho$ .

Passando ora alla modellazione delle pareti in cui la catena alloggia, si precisa che sarebbero state possibili varie opzioni, ma quella adottata in questo lavoro prevede che esse siano simulate mediante dei vincoli concentrati alle estremità della trave. Per la precisione tali vincoli corrispondono a due cerniere con molla torsionale di rigidezza  $k_{t1}$  e  $k_{t2}$  secondo un approccio molto comune in letteratura [3], [13], [14]. Ciò si giustifica per il fatto che quando i tiranti sono soggetti a deformazioni, anche dovute al semplice peso proprio, alle loro estremità è concessa una piccola libertà di rotazione che, però, viene contenuta dalle pareti stesse. Sempre basandosi sugli stessi riferimenti trovati in letteratura, il tiro viene modellato definendo l'azione  $N$  che, per l'equilibrio del sistema, deve essere di ugual valore ad entrambe le estremità della catena. Il modello fisico complessivo viene rappresentato per maggiore chiarezza in Fig.(1.4).

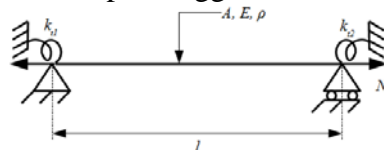


Figura 1. 4 Modellazione fisica della catena

In merito ai valori che tutti questi parametri dovranno assumere, si rimanda al Capitolo 2 circa la definizione del metodo di stima della lunghezza effettiva. In questa prima fase si vuole esclusivamente dare una base per la trattazione successiva.

## 1.2 Modellazione numerica della catena

Cercare di improntare uno studio della lunghezza effettiva delle catene e del tiro a cui sono soggette basandosi sulle sole equazioni analitiche inerenti le leggi costitutive del materiale, la geometria della struttura e la sua dinamica risulterebbe troppo complesso. Si avrebbe a che fare con equazioni alle derivate parziali che presentano soluzioni in forma chiusa solo per un numero limitato di casi semplici. Non sarebbe quindi fattibile, al fine di avere una disposizione una casistica il più ampia e generale possibile, variare parametri e condizioni al contorno in modo arbitrario. È quindi necessario abbandonare la meccanica del continuo e passare a quella del discreto. Così facendo non si avrà a che fare con un sistema complesso di equazioni alle derivate parziali, ma con uno algebrico risolvibile al calcolatore. Con tale approccio si riescono infatti ad ottenere delle

soluzioni per ogni tipo di problema, a patto di accettare delle approssimazioni nei risultati.

In questo lavoro si sceglie in particolar modo l'approccio agli elementi finiti. Seguendo questa strada è quindi necessario creare un modello numerico di catena. Questo consiste in una griglia di calcolo, detta *mesh*, costituita da più elementi finiti collegati tra loro mediante punti detti *nodi*. Assegnate le condizioni al contorno, le equazioni relative alla fisica del problema verranno così risolte solo ai nodi del modello numerico. Per avere invece valori lungo l'intero sviluppo della catena si ricorre ad una interpolazione proprio tra i risultati nei punti nodali. Nel lavoro in questione il software FEM che si decide di utilizzare per le analisi è Abaqus.

Mediante questo software la catena viene modellata come una struttura tridimensionale composta da una successione di elementi finiti di tipo *beam*. Tali elementi, a differenza dei *bar*, permettono di calcolare non solo l'azione assiale agente ai nodi del singolo elemento, ma anche l'azione di taglio ed il momento flettente. In particolar modo vengono scelti gli elementi *beam B31* [15] che si caratterizzano oltre per le caratteristiche sopracitate, anche per presentare un'interpolazione parabolica delle azioni interne tra i nodi e per essere basati sul modello di Timoshenko [7] per tenere in considerazione, così come spiegato in modo estensivo nel paragrafo precedente, gli effetti di taglio per strutture tozze.

Il modello di catena non viene definito dall'utente mediante l'interfaccia di Abaqus per ogni simulazione, ma si ricorre all'utilizzo del software Matlab per una generazione automatica della mesh. Si precisa che le funzioni di Matlab in tutto il presente lavoro possono riassumersi in tre principali applicazioni:

- Definire le funzioni e gli algoritmi di calcolo generici;
- Generare un file di input *.inp* per il software FEM e lanciarne l'analisi;
- Elaborare i dati in uscita dall'analisi ad elementi finiti.

In particolare il file *.inp* sopracitato è di tipo parametrico, ovvero basato sull'utilizzo di variabili simboliche concernenti le caratteristiche della catena. Queste, simulazione per simulazione, assumeranno valori specifici in base alla situazione da testare. Per far ciò al file *.inp* è stata aggiunta la riga di comando *\*INCLUDE* che permette l'inclusione di altre righe di testo.

Per la sostituzione vera e propria delle variabili si ricorre alla generazione, sempre mediante Matlab, di un file *.inp* secondario contenente la stringa *\*PARAMETER* e i valori numerici specifici, ordinati per righe, da assegnare al problema.

Il file *.inp* principale viene infine utilizzato per lanciare l'analisi ad elementi finiti con Abaqus che, in output, restituisce un file *.dat* contenente i modi di vibrare e le frequenze proprie del sistema.

La gestione di queste operazioni è affidata alla funzione Matlab *mSYS.m*.

In Fig.(1.5) si riportalo schema del processo appena descritto.

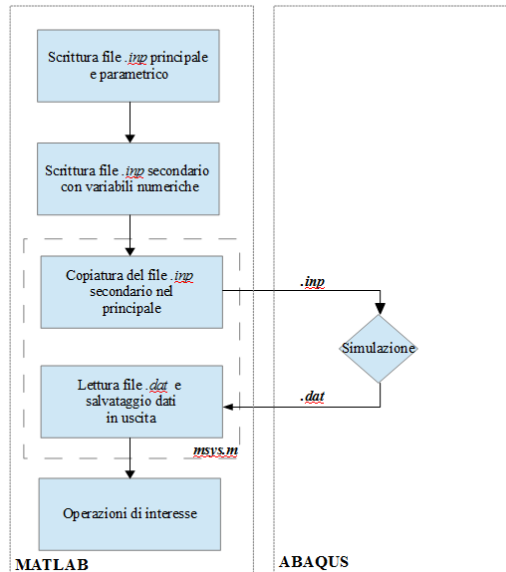


Figura 1. 5 Schema operazioni e cooperazione Matlab-Abaqus

Bisogna inoltre specificare che nel file di input principale viene definita automaticamente la mesh del modello in termini di numero di nodi, connettività tra gli stessi e tipologia di elementi finiti da impiegare.

In questa tesi si avrà a che fare, se non diversamente specificato, con catene discretizzate lungo il loro asse con un numero di nodi tale per cui la dimensione degli elementi finiti sia di 2 cm. Ciò in quanto si vuole garantire la medesima risoluzione dei dati per tutte le analisi e le lunghezze prese in esame. Questa dimensione per gli elementi finiti risulta sufficiente in quanto si avrà a che fare con modelli di catena al minimo lunghi 4 m. Gli aspetti relativi alla discretizzazione ed alla risoluzione verranno comunque poi approfonditi nel Capitolo 2 in cui si daranno tutte le specifiche per i casi studiati.

### 1.3 Sintesi della tecnica di identificazione del tiro

Esposte le tematiche di cui ci si vuole occupare in questa tesi e le caratteristiche di base concernenti i modelli fisici e numerici per affrontare lo studio delle catene, si vuole adesso introdurre l’algoritmo di identificazione del tiro proposto in [1], con una descrizione sia delle ipotesi su cui si fonda, sia dei passaggi che permettono di perseguire l’obiettivo finale.

#### 1.3.1 Ipotesi per la modellazione della catena

Come anticipato nel Paragrafo 1.1, al fine di poter applicare le tecniche di analisi modale alle catene, e quindi la tecnica di stima [1], è innanzitutto

necessario definire un modello che, seppur semplificato, permetta di tenere in conto tutte le variabili che in un caso reale influiscono sul loro comportamento.

I primi parametri da tenere in considerazione discendono in primis dalla geometria e dal materiale della catena stessa. Questi, fatta eccezione per le dimensioni della sezione  $A$  del tirante, si preferirà non assumerli come noti, ma variarli per far sì che non vi siano pesanti assunzioni sul modello che vadano ad inficiare la sua generalità.

Entrando più nel dettaglio, per quanto concerne il materiale della catena, del modulo elastico  $E$  e della densità  $\rho$  in genere si conoscono solo i valori nominali. Ciò in quanto in un caso reale si può facilmente riconoscere la tipologia di materiale, ma non la lega nello specifico a meno che non si proceda ad effettuare un test distruttivo. Ciò sarebbe al limite possibile se si avesse a disposizione un campione di materiale utilizzato per catene relative ad edifici moderni, ma di certo è infattibile su edifici storici.

Riguardo la geometria del tirante le variabili sono essenzialmente due, ovvero la lunghezza  $l$  e la sezione  $A$ , entrambe facilmente assumibili come note in quanto direttamente misurabili in situ. Si assume inoltre che la sezione  $A$  sia costante in termini di forma e dimensione per tutta l'estensione della catena.

In merito alle pareti in cui il tirante alloggia, è utile ricordare le altre variabili che ne modellano l'effetto di vincolo, ovvero le rigidità  $k_{t1}$  e  $k_{t2}$  e dell'azione assiale  $N$  che scaturisce dal fissaggio della catena stessa.

Fatte queste prime considerazioni è quindi necessario introdurre le semplificazioni ed ipotesi sul modello che sono alla base del lavoro:

- La catena è omogenea, di materiale isotropo e vincolata solo alle estremità;
- Le caratteristiche meccaniche sono anch'esse omogenee;
- Il coefficiente di Poisson  $\nu$  del materiale è noto e costante;
- La catena non presenta danneggiamenti, né difetti del materiale;
- La catena non è soggetta a momenti concentrati o carichi trasversali esterni lungo la luce, fatta eccezione per il suo peso proprio;
- La densità  $\rho$  è considerata costante una volta definito il materiale. Questo in quanto in strutture moderne per materiali quali l'acciaio e l'alluminio che verranno utilizzati in questo lavoro, tale grandezza è nota in modo abbastanza accurato e caratterizzata da un errore medio dello 0.1% [6]. Per quanto concerne invece edifici antichi, di cui non si ha una così precisa conoscenza delle proprietà del materiale, si è comunque dalla parte della sicurezza in quanto precedenti studi [16] hanno dimostrato che variazioni di  $\rho$  anche del  $\pm 2\%$  non causano una fonte apprezzabile di variabilità nel comportamento della catena. Da queste evidenze tale ipotesi risulta quindi giustificata.

- La condizione di vincolo è simulata da due molle torsionali agli estremi della catena di uguale rigidezza  $k_t$  così come mostrato in Fig.(1.6). La struttura è quindi geometricamente simmetrica;



Figura 1. 6 Modello di vincolo

- I vincoli sono ideali, olonomi e non presentano contatti o interazioni con altri elementi strutturali.

A valle di ciò i parametri da tenere in considerazione nel modello e che potranno essere variati nelle varie simulazioni sono i seguenti:

- Tiro assiale della catena  $N$ ;
- Rigidezza dei vincoli  $k_t$ ;
- Modulo elastico del materiale  $E$ ;
- Dimensioni della sezione  $A$ ;
- Lunghezza della catena  $l$ ;

In Fig.(1.7) viene riportato il modello finale, comprensivo dei parametri indicati per la sua realizzazione.

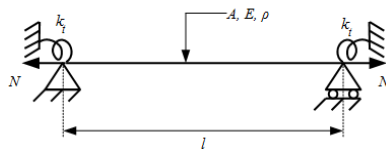


Figura 1. 7 Modello finale di catena

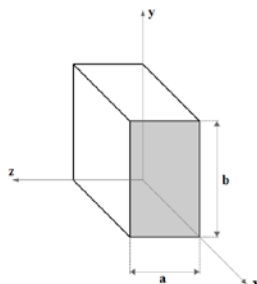
### 1.3.2 Caratteristiche dei modelli utilizzati

Definita in termini generici la tipologia di modello utilizzato, si vogliono ora caratterizzare nello specifico le caratteristiche delle catene impiegate nelle analisi a seguire.

In questo lavoro, così come in [1], ci si riferisce sempre a catene di sezione rettangolare per due ragioni. In primo luogo perché questa geometria è quella maggiormente impiegata nelle situazioni reali ed in seconda analisi, perché nonostante in ambito sperimentale le tecniche di identificazione modale sono applicabili ad ogni geometria, un tipo di sezione tonda, a causa dell'accoppiamento dei modi di vibrare lungo le direzioni longitudinale e trasversale, introdurrebbe solo delle complicazioni pratiche non aggiungendo nulla allo studio del problema rispetto a quanto accadrebbe con una sezione più semplice. Per cui si preferisce una sezione rettangolare solo per una maggiore rapidità delle analisi.

La sezione  $A$  viene orientata spazialmente secondo la Fig.(1.8), ovvero con la dimensione maggiore parallela all'asse gravitazionale  $y$ , sempre per rispettare quanto avviene nella maggioranza delle applicazioni reali.




**Figura 1. 8 Sezione della catena e posizionamento del sistema di riferimento**

Nella Tabella (1.1) si riportano le caratteristiche di geometria e materiale che sono state combinate in tutti i modi possibili per avere un campione di catene relativamente ampio.

La scelta dell'alluminio come materiale alternativo all'acciaio discende anche dalla necessità di validare sia il metodo di stima della lunghezza effettiva, che l'estensione di quello di stima del tiro per struttura asimmetrica attraverso delle prove in laboratorio. Definendo  $N_{sn} = \sigma_{sn} A$  il carico di snervamento di una struttura, si ha che con una catena in alluminio il raggiungimento di valori di tiro assiale adimensionale  $N/N_{sn}$  elevati con operazioni di carico manuali risulta più agevole (si specifica che con  $\sigma_{sn}$  si indica lo sforzo di snervamento del materiale): Con l'acciaio invece sarebbero necessari sia un sistema di vincolo, che di carico dalle caratteristiche elevate e più complesse di quelle a disposizione. Tale aspetto comunque verrà poi approfondito nel Capitolo 3 concernente le attività sperimentali.

<i>Sezione <math>axb</math> [mm<sup>2</sup>]</i>	<i>Materiale</i>	
15x25	<i>Tipo</i>	Acciaio Alluminio
30x50	<i>Modulo elastico <math>E</math> [MPa]</i>	206000 68670
<i>Lunghezza visibile [mm]</i>	<i>Sforzo di snervamento <math>\sigma_{sn}</math> [MPa]</i>	300 40
4000	<i>Coefficiente di Poisson <math>\nu</math></i>	0.3 0.3
10000	<i>Densità <math>\rho</math> [kg/m<sup>3</sup>]</i>	7860 2690

**Tabella 1. 1 Sezioni, materiali e lunghezze delle catene simulate**

### 1.3.3 Prima stima del tiro assiale

Per implementare una metodologia utile alla stima del tiro assiale mediante tecniche di analisi modale, [1] parte dallo studio delle frequenze proprie della catena.

In particolar modo, fissata la sezione  $A$  del tirante, sono state effettuate varie simulazioni FEM al variare delle caratteristiche del materiale (modulo elastico  $E$  e densità  $\rho$ ), della geometria (lunghezza  $l$ ) e delle condizioni al contorno (rigidezza dei vincoli adimensionale  $k_t/k_{t,eq}$  e tiro adimensionale  $N/N_{sn}$ ). In tal modo si voleva infatti determinare se vi fossero uno o più parametri a cui le frequenze proprie della catena risultavano essere maggiormente sensibili.

Si precisa che l'utilizzo di condizioni al contorno normalizzate è introdotto per rispettare una pratica molto comune in letteratura. In particolare il tiro è viene normalizzato rispetto al valore di snervamento per la catena  $N_{sn}$ , mentre la rigidezza rispetto al suo valore equivalente  $k_{t,eq}=EJ/l$ . Con  $J$  si indica il momento di inerzia principale della catena.

Basandosi sui range di valori riportati in Tabella (1.2), in Fig.(1.9) si riporta, a titolo di esempio, l'analisi di sensibilità delle prime sei frequenze proprie di una catena in acciaio di sezione  $A=15 \times 25 \text{ mm}^2$ .

<i>Parametro</i>	<i>Valore nominale</i>	<i>Intervallo di variazione</i>
$N/N_{sn}$	0.5	0 ÷ 1
$k_t/k_{t,eq}$	150	0 ÷ 300
$E [MPa]$	206000	±5%
$\rho [kg/m^3]$	7860	±2%
$l [mm]$	4000	+5%

Tabella 1. 2 Intervalli di variazione dei parametri della catena per l'analisi di sensibilità

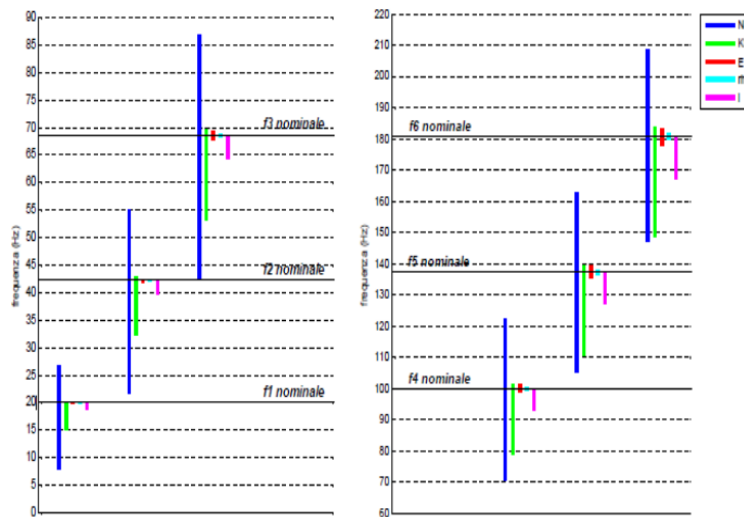


Figura 1. 9 Analisi di sensibilità delle frequenze proprie della catena al variare dei suoi parametri

Da Fig.(1.9) emerge chiaramente che le due variabili che hanno la maggiore influenza sui valori delle frequenze proprie sono il tiro  $N/N_{sn}$  e la rigidezza del sistema di vincolo  $k_t/k_{t,eq}$ . Tra i due parametri comunque l'effetto del primo è senza dubbio il preponderante.

A partire da questa evidenza la conclusione che è stata tratta in [1] è che, se si conoscesse il valore di  $k_t/k_{t,eq}$  e si considerasse trascurabile l'effetto delle altre variabili del sistema, sarebbe possibile ottenere una prima stima dell'azione assiale  $N/N_{sn}$  proprio a partire dal valore delle frequenze proprie del sistema. A tal proposito [1] mette a punto la seguente procedura:

1. A valle di test sperimentali si identificano le prime  $n$  frequenze proprie della catena;

2. Attraverso apposite tecniche di analisi modale e test sperimentali si stima la rigidezza del sistema di vincolo  $k_t/k_{t,eq}$ ;
3. Si crea un modello FEM di catena per cui  $E$ ,  $\rho$  e  $l$  sono fissati ai valori nominali riportati in Tabella (1.1) e  $k_t/k_{t,eq}$  corrisponde a quello stimato al punto 2;
4. Il modello FEM del punto 3 viene utilizzato per effettuare simulazioni a tiro  $N$  variabile (da 0 al carico di snervamento  $N_{sn}$ ). In tal modo si ricavano le  $n$  relazioni esistenti tra l'azione assiale ed i valori delle prime  $n$  frequenze numeriche in accordo alla (1.12).

$$\begin{aligned} N &= g(f_1) \\ N &= h(f_2) \\ &\vdots \\ N &= l(f_n) \end{aligned} \quad (1.12)$$

5. Per ogni  $i$ -esima frequenza propria del punto 1, grazie all' $i$ -esima relazione del punto 4, si ricava una stima dell'azione assiale  $N_{stima,i}$ ;
6. La prima stima del tiro  $N_{stima,0}$  viene ottenuta come media dei valori ricavati nel punto 4, secondo l'Eq.(1.13):

$$N_{stima,0} = \frac{\sum_{i=2}^{N_r} N_{stima,i}}{N_r - 1} \quad (1.13)$$

Si specifica che con  $N_r$  si intende la massima frequenza propria considerata. Inoltre l'indice della sommatoria parte volutamente da 2 in quanto la prima frequenza viene trascurata a causa della sua forte dipendenza dalla deflessione statica del tirante.

In ogni caso l'azione assiale così ricavata non tiene conto del fatto che in una situazione reale i valori dei parametri caratterizzanti la catena possano essere differenti da quelli imposti al punto 3. Per questo motivo  $N_{stima,0}$  costituisce solo un valore di stima di primo tentativo, mentre per quella definitiva si utilizza un funzionale di minimizzazione che verrà descritto nel Paragrafo 1.3.5.

### 1.3.4 Stima della rigidezza del sistema di vincolo

Nel sotto-paragrafo precedente è stato specificato che per ricavare una stima dell'azione assiale a partire dalle frequenze proprie del sistema è necessario conoscere il valore della rigidezza del sistema di vincolo.

Proseguendo nello studio delle grandezze dinamiche della catena, in [1] è emerso che i modi di vibrare sono molto sensibili proprio alla rigidezza  $k_t/k_{t,eq}$ , mentre l'influenza del tiro è limitata. Di conseguenza, per ottenere una stima del  $k_t/k_{t,eq}$  è stato definito, in accordo all'Eq.(1.14), l'indice  $R_{y1,y2}^{sum}$ :

$$R_{y1,y2}^{sum} = \sum_{q=2}^4 \left( \frac{\phi_{q,y1}}{\phi_{q,y2}} \right)^2 = \sum_{q=2}^4 \left( \frac{\Psi_{q,y1}}{\Psi_{q,y2}} \right)^2 \quad (1.14)$$

dove con  $\phi_{q,y}$  si intende la componente nel punto  $y$  lungo la catena dell'autovettore scalato relativo al  $q$ -esimo modo di vibrare. Per  $\Psi_{q,y}$  la definizione è analoga ad eccezione del fatto che ci si riferisce ad autovettori non scalati.

Secondo [1], costruendo una curva di  $R_{y_1,y_2}^{sum}$  in funzione di  $k_t/k_{t,eq}$  è possibile ottenere in modo semplice ed immediato una stima della rigidezza dei vincoli della catena.

Sempre in [1] si specifica che le posizioni  $y_1$  e  $y_2$  non sono qualsiasi, ma sono scelte in modo che l'indice  $R_{y_1,y_2}^{sum}$  presenti la maggior sensibilità possibile alla rigidezza del sistema di vincolo e la minore possibile al tiro assiale. In seguito a varie simulazioni i punti prescelti sono stati:

- $y_1=9.5\%$  della lunghezza della catena;
- $y_2=3.5\%$  della lunghezza della catena.

A partire da questo risultato è stata quindi implementata la seguente procedura per la stima di  $k_t/k_{t,eq}$ :

1. Attraverso due accelerometri posti in  $y_1$  e  $y_2$  si misura la risposta dinamica della catena in modo da poter stimare  $\Psi_{q,y_1}$  e  $\Psi_{q,y_2}$ . Noti questi si può quindi calcolare  $R_{3.5,9.5}^{sum}$  sperimentale;
2. Mediante un modello FEM di catena soggetto a diversi valori di rigidezza si costruisce la curva che lega  $k_t/k_{t,eq}$  a  $R_{3.5,9.5}^{sum}$  (se ne riporta un esempio in Fig.(1.10)). In particolare il modello utilizzato prevede che  $E$ ,  $\rho$  e  $l$  siano fissati ai loro valori nominali, mentre il tiro  $N$  sia pari a  $0.5N_{sn}$  in quanto centrale rispetto a tutti i valori possibili;

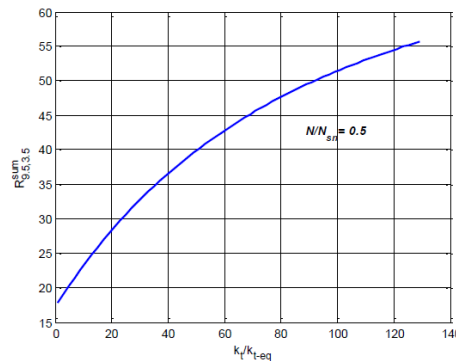


Figura 1. 10 Curva  $R_{3.5,9.5}^{sum}$  al variare della rigidezza

3. Entrando sull'asse delle ordinate di Fig.(1.10) con il valore di  $R_{3.5,9.5}^{sum}$  sperimentale del punto 1 ed intersecando la curva raffigurata si ottiene la stima della rigidezza  $k_{t,R,stimato}$ .

L'algoritmo, se applicato così come esposto sopra, permette sì di ottenere una stima del parametro di rigidezza, ma questa deriva da assunzioni troppo forti in merito alle variabili del modello. Affermare che esse siano esattamente pari a dei valori nominali non rispecchia infatti la molteplicità dei casi reali.

Per questa ragione in [1] è stato trovato un modo per determinare, per ogni rigidezza stimata, un intervallo ad essa associato in cui apparterrà il valore vero del  $k_t/k_{t,eq}$  per una qualsiasi catena con stessa sezione  $A$  del modello FEM, ma caratterizzata da proprietà diverse da quelle nominali.

Per determinare gli estremi di questo intervallo di rigidezze in [1] sono stati definiti dei casi critici di tirante, ma comunque realistici, grazie alla combinazione delle variabili riportate in Tabella (1.3).

$N/N_{sn}$	$E$	$\rho$	$l$
0.2	$E_{nom}-5\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$l_{nom}$
0.8	$E_{nom}+5\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$l_{nom}+5\%$

Tabella 1. 3 Valori critici dei parametri del modello

Più nello specifico, supponendo di fissare un valore di  $k_t/k_{t,eq}$ , per ognuno degli  $m=2^4$  modelli critici di catena sono stati ripetuti i tre step sopra descritti ottenendo così  $m$  stime di rigidezza. Tra queste il valore massimo  $k_{t,R,max}$  ed il valore minimo  $k_{t,R,min}$  riscontrati definiscono gli estremi dell'intervallo di variazione della rigidezza del sistema di vincolo. Procedendo in questo modo per più valori di  $k_t/k_{t,eq}$  è quindi possibile costruire grafici come quello di Fig.(1.11).

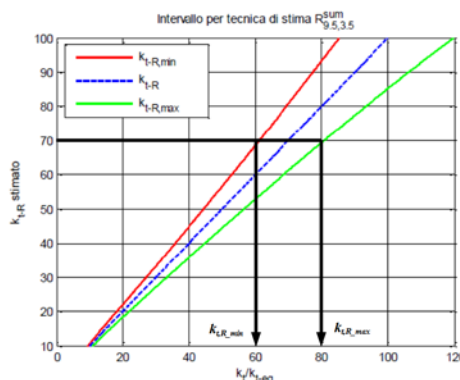


Figura 1. 11 Interpolazione per il calcolo degli estremi dell'intervallo di variazione della rigidezza

La funzione di tale grafico è spiegata dalle frecce in nero. Utilizzando il modello FEM con tutti i parametri nominali si ricava un valore di  $k_{t,R,stimato}$ . Con questo si entra nell'asse delle ordinate di Fig.(1.11) e, tracciando una retta parallela all'asse delle ascisse, dalle intersezioni con le curve in rosso ed in verde si ottiene il range di rigidezze a cui apparterrà il valore vero  $k_t/k_{t,eq}$  (linea tratteggiata in blu).

Un ulteriore beneficio dell'aver individuato un intervallo limitato per le rigidezze è poi illustrato in Fig.(1.12).

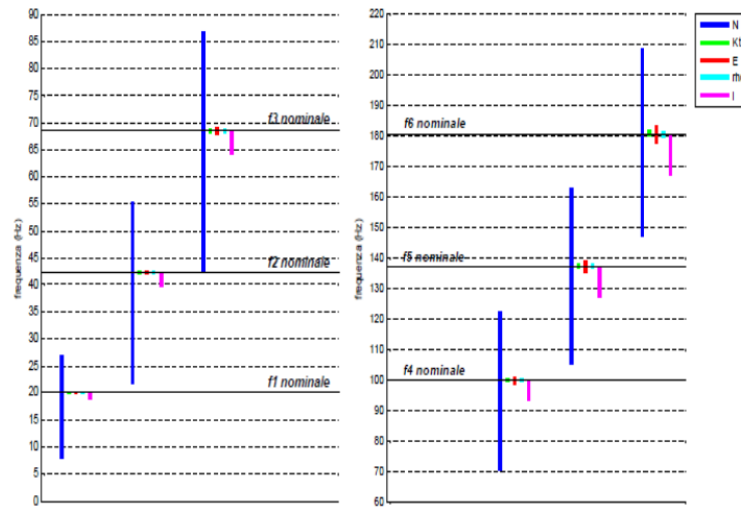


Figura 1.12 Analisi di sensibilità delle frequenze proprie della catena a valle della limitazione sull'intervallo di rigidzze ammissibili

Fig.(1.12) mostra gli esiti di un'analisi di sensibilità delle frequenze proprie analoga a quella illustrata in Fig.(1.9), ma questa volta effettuata utilizzando come intervallo di variazione della rigidezza al range sopra determinato. Confrontando i due grafici è facile concludere che la limitazione sul  $k_t/k_{t,eq}$  permette di rendere trascurabile la sua influenza sulle frequenze proprie e, quindi, di poter procedere ad una stima più accurata dell'azione assiale. Da Fig.(1.12) emerge altresì che per una stima ottimale è però necessario ridurre anche l'incertezza associata alla lunghezza  $l$  della catena, obiettivo che verrà perseguito in questo lavoro nel Capitolo 2.

### 1.3.5 Stima finale del tiro

Ottenuta una stima della rigidezza del sistema di vincolo  $k_{t,R,stimato}$  con relativo intervallo di variabilità e, mediante la procedura esposta nel Paragrafo 1.3.4, anche un primo valore di stima del tiro  $N_{stima,0}$ , basandosi sull'approccio utilizzato in [12] e [16], in [1] viene implementato un updating del modello per ottenere una stima finale del tiro  $N$  il più accurata possibile.

Questa procedura in particolare richiede che venga minimizzata una funzione  $z$ , definita nell'Eq.(1.15), dipendente dalle frequenze proprie della catena.

$$z = \sum_{i=2}^{N_r} (f_{num,i} - f_{exp,i})^2 \quad (1.15)$$

Si specifica che nella (1.14) con  $f_{num,i}$  si intende la  $i$ -esima frequenza propria ottenuta da un modello FEM della catena, mentre  $f_{exp,i}$  è quella identificata dai test sperimentali.  $N_r$  nel caso di modello di tirante perfettamente simmetrico come quello di [1] è posto pari a 4.

La minimizzazione di  $z$  procede cambiando iterativamente tutti i parametri del modello, ovvero la lunghezza  $l$ , il modulo di Young  $E$ , la densità  $\rho$ , il tiro  $N$  e la rigidezza dei vincoli  $k_t$ . Tale modifica delle variabili non è libera ma, per garantire realistica al risultato finale, è vincolata e parte da dei valori iniziali prestabiliti. I dati relativi ai valori iniziali ed ai vincoli della minimizzazione utilizzati in [1] sono riportati in Tabella (1.4).

Valori iniziali					Vincoli minimizzazione				
$k_t$	$N$	$E$	$\rho$	$l$	$k_t$	$N$	$E$	$P$	$L$
$k_{t,R,stimato}$	$N_{stima,0}$	$E_{nom}$	$\rho_{nom}$	$l_{vis}$	$k_{t,R,min} \div k_{t,R,max}$	$0 \div N_{sn}$	$E_{nom} \pm 5\%$	$\rho_{nom} \pm 2\%$	$1 \pm 5\%$

Tabella 1. 4 Valori iniziali e limiti per la procedura di minimizzazione

Infine, svolta la procedura di minimizzazione del funzionale  $z$ , [1] conclude affermando che il set di parametri per cui si arriva a convergenza è quello che meglio descrive la catena sperimentale sotto studio. Di conseguenza il valore di tiro ad esso associato viene dichiarato come valore definitivo della stima  $N_{stima,finale}$ .

### 1.3.6 Conclusioni ed obiettivi del presente lavoro

Alla luce di quanto esposto fino a questo momento emergono due criticità relative al metodo [1] che in questo lavoro ci si propone di risolvere.

La prima riguarda la non conoscenza della lunghezza effettiva della catena. Come emerso da Fig.(1.12), a valle della stima della rigidezza dei vincoli si ha che le frequenze proprie del sistema dipendono, oltre che dal tiro  $N$ , anche dalla lunghezza del tirante. In particolar modo in [1] è stato mostrato per ottenere delle stime affidabili dell'azione assiale è importante che la lunghezza della catena sia nota al più con il 5% di incertezza. Perciò, proprio per garantire l'accuratezza degli output di [1], ci si propone di implementare un metodo che permetta di ottenere una stima della lunghezza effettiva caratterizzata da un'incertezza inferiore o al più pari proprio al prima menzionato 5%.

Secondo obiettivo del lavoro è l'estensione sia di [1], che dell'algorithmo di stima della lunghezza al caso di un modello di tirante non più simmetrico. Come anticipato, specialmente per quanto concerne le applicazioni negli edifici storici, ipotizzare che le pareti della struttura esercitino un effetto di vincolo di pari rigidezza non è realistico. Di conseguenza, mantenendo valide tutte le assunzioni introdotte nei paragrafi precedenti, si procederà a distinguere tra la rigidezza del vincolo sinistro  $k_{t1}$  e del vincolo destro  $k_{t2}$ . Così facendo il nuovo modello si differenzierà dal precedente solo per la presenza di una variabile aggiuntiva a descriverlo.

Perseguendo questi due obiettivi non solo il metodo di stima del tiro [1] risulterà ottimizzato, ma potrà essere considerato di valenza generale ed applicabile a qualsiasi tipo di catena.





## Capitolo 2

### Metodo di stima della lunghezza effettiva

Nel presente Capitolo si vuole affrontare la descrizione dei passi che hanno portato all'implementazione di una metodologia efficace per una prima stima della lunghezza effettiva delle catene a partire dalla conoscenza della sola luce visibile.

Si inizierà descrivendo brevemente il modello di catena a cui ci si riferisce per perseguire l'obiettivo prefissatosi. Fatto ciò, si utilizzeranno delle tecniche di analisi modale, ed in particolar modo l'indice di correlazione CoMAC calcolato a partire dai primi sei modi di vibrare della struttura in esame, per procedere all'implementazione della tecnica di stima della lunghezza vera e propria.

Tutte le simulazioni verranno riferite a modelli di tirante con caratteristiche di volta in volta differenti in modo da individuare comportamenti analoghi che permettano di individuare trend globali e significativi per l'identificazione.

#### 2.1 Nuova modellazione della catena

Nel Capitolo 1, introducendo la tecnica di stima del tiro assiale [1], sono state illustrate tutte le caratteristiche geometrico-fisiche e le ipotesi che accompagnano la modellazione delle catene sotto studio in questo lavoro.

Nel presente Capitolo queste continueranno ad essere ritenute valide e non si procederà a modificare il modello fatta eccezione per un unico parametro, ovvero quello di lunghezza  $l$ .

Giacché al momento l'obiettivo è l'implementazione di un algoritmo di stima della lunghezza effettiva  $l_{effettiva}$  dei tiranti, si distinguerà in maniera netta tra questa e la lunghezza della luce visibile  $l_{visibile}$ .

La prima, che costituisce l'incognita fondamentale di questa parte della trattazione, non veniva accuratamente né definita, né quantificata in [1] e al più si ammetteva che potesse essere pari a  $1.05 * l_{visibile}$ . Adesso invece si specifica che con questo termine si intende quella totale, ovvero comprendente anche i tratti bloccati all'interno delle pareti della struttura in cui la catena alloggia.

La seconda, invece, coincide con quello che era il parametro  $l$  del Capitolo 1 e continuerà ad essere considerata come nota essendo misurabile in casi pratici.

In questo modo i parametri da tenere in considerazione nel modello e che saranno opportunamente modificati nelle varie analisi sono:

- Tiro assiale adimensionale della catena  $N/N_{sn}$ ;
- Rigidezza adimensionale dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$ ;
- Modulo elastico del materiale  $E$ ;

- Dimensioni della sezione  $A$ ;
- Lunghezza visibile della catena  $l_{visibile}$ ;
- Lunghezza effettiva della catena  $l_{effettiva}$ .

In Fig.(2.1) si illustra quindi il nuovo modello finale del tirante.

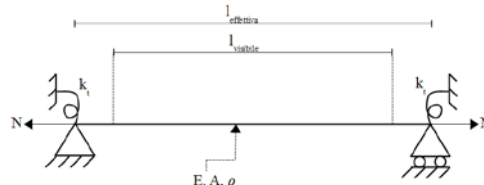


Figura 2. 1 Modello finale di catena

Si specifica altresì che in un caso reale non è detto che la differenza tra  $l_{effettiva}$  e la  $l_{visibile}$  sia equamente ripartita tra le estremità della catena così come raffigurato in Fig.(2.1). Questa è una semplificazione adottata nel presente lavoro per rispettare la condizione di simmetria della struttura.

In merito all'orientamento della sezione del modello ed alle tipologie di materiale e sezione che da qui in avanti verranno utilizzate si rimanda a Fig.(1.8) e alla Tabella (1.1) del Capitolo 1.

## 2.2 Analisi mediante l'indice CoMAC

Allo scopo di definire un metodo di stima della lunghezza effettiva delle catene basato sull'analisi modale, sono state svolte varie tipologie analisi per indagare se vi fossero dei fenomeni o comportamenti delle strutture significativi.

Le prime analisi hanno riguardato lo studio dei modi di vibrare restituiti dal modello FEM della catena. Si è supposto, per garantire generalità ai risultati complessivi, che essa fosse soggetta a condizioni di vincolo  $k_v/k_{t,eq}$  e carico  $N/N_{sn}$  differenti. In particolar modo ci si è soffermati sulle prime sei forme modali. Analizzare modi di ordine superiore risultava prematuro per uno studio preliminare. Nelle Fig.(2.2) e (2.3) si riporta a titolo d'esempio la quarta forma modale di una catena in acciaio lunga 4000 mm e di sezione  $15 \times 25 \text{ mm}^2$ . Ciò che si evince è che i modi di vibrare hanno forte dipendenza dalla rigidità del sistema di vincolo e, seppure in maniera minore, dal tiro assiale. Tale considerazione si è rivelata poi valida indipendentemente dal tipo di materiale, dalla lunghezza della luce visibile del modello e dalle dimensioni della sezione della catena. Non vengono riportati ulteriori esempi solo per questioni di brevità.

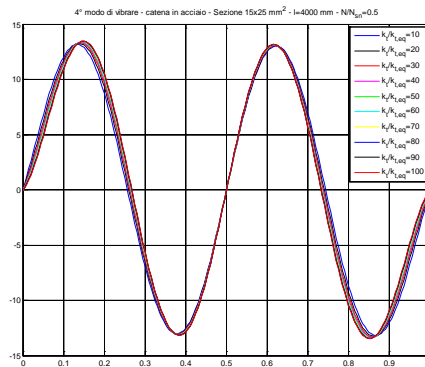


Figura 2. 2 Esempio quarto modo di vibrare al variare della rigidità dei vincoli

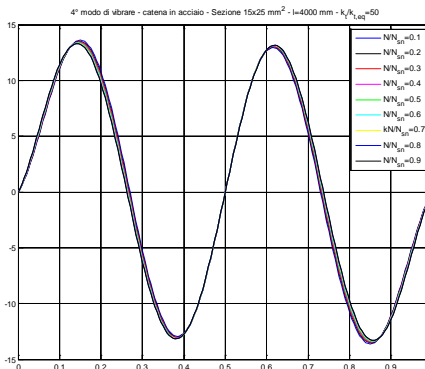


Figura 2. 3 Esempio quarto modo di vibrare al variare del tiro assiale

Per quanto riguarda invece l'influenza della variazione di lunghezza effettiva rispetto a quella visibile, sono state testate sia catene in cui la prima supera la seconda del 5% e del 10%. Riferendosi allo stesso materiale e sezione dell'esempio sopracitato, nella Fig.(2.4) si riporta la quarta forma modale al variare delle condizioni di vincolo e carico, nel tratto corrispondente alla sola luce visibile (4000 mm) di una catena di lunghezza effettiva di 4200 mm, mentre in Fig.(2.5) di una da 4400 mm.

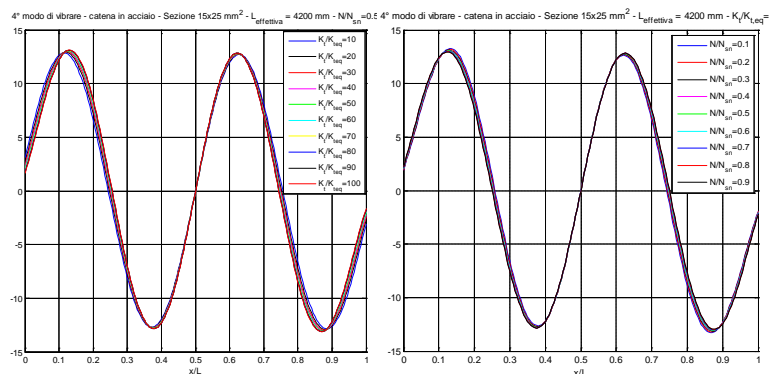
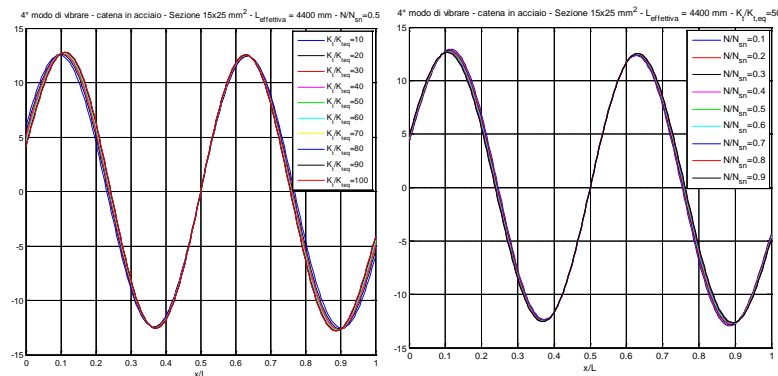


Figura 2. 4 Quarto modo di vibrare, nel tratto di luce visibile, al variare delle condizioni al contorno per una trave maggiorata del 5%



**Figura 2. 5 Quarto modo di vibrare, nel tratto di luce visibile, al variare delle condizioni al contorno per una trave maggiorata del 10%**

È facile notare che tra i modi di vibrare di Fig.(2.4) e (2.5) e quelli delle Fig.(2.2) e (2.3) l'unica vera differenza che si riscontra è l'ampiezza che la forma modale ha nella coordinata  $x/L=0$ , o dualmente  $x/L=1$ . Questa passa da 0 a un valore prossimo a 5 (o -5) per un aumento di lunghezza effettiva del 10%. Ciò è solo dovuto al fatto che si sta rappresentando il modo di vibrare esclusivamente nel tratto di luce visibile, trascurando la parte di catena ancorata nelle pareti in cui l'ampiezza tende a riportarsi a zero. Comunque cercare di risalire alla lunghezza effettiva della catena basandosi sull'ampiezza dei suoi modi di vibrare in questi due punti non sarebbe utile, in quanto gli effetti di una variazione delle condizioni al contorno ( $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$ ) portano a distinguere con difficoltà lunghezze diverse già per le sole simulazioni FEM. In ambito sperimentale, con tutte le fonti di incertezza e di errore che potrebbero presentarsi, ciò sarebbe ancora più complesso. Per il resto queste figure non mostrano macro-differenze significative, ad esempio in termini di spostamento dei nodi o ampiezze del modo di vibrare nei suoi punti di massimo o minimo, utili per ricavare in modo semplice una stima della lunghezza effettiva.

Si è quindi deciso di provare a cambiare approccio e vedere se l'uso di un indice di correlazione potesse aiutare. Il primo indice calcolato è stato il MAC[17] la cui funzione viene ora illustrata.

Prendendo in considerazione, per esempio, i modi di vibrare di una struttura identificati sperimentalmente e quelli ricavati da un modello numerico della stessa, il MAC permette di valutare la correlazione che esiste tra le varie deformate modali. È da sottolineare che tale indice permette solo di stabilire se vi è correlazione o no tra il modo vibrare  $i$ -esimo di una struttura reale con il  $j$ -esimo di una numerica, ma non per quali gradi di libertà della struttura ciò avvenga. In questo lavoro, sebbene la modellazione della catena sia stata di tipo 3D, i gradi di libertà presi in considerazione sono gli spostamenti in direzione verticale dei nodi.

Chiamando  $X$  il modello sperimentale ed  $Y$  il modello numerico, è possibile definire le matrici modali  $\Psi_X$  e  $\Psi_Y$  come nella (2.1):

$$\begin{aligned} [\Psi_X] &= [ (\underline{\Phi}_X)_1 \quad (\underline{\Phi}_X)_2 \quad \dots \quad (\underline{\Phi}_X)_i \quad \dots \quad (\underline{\Phi}_X)_n ] \\ [\Psi_Y] &= [ (\underline{\Phi}_Y)_1 \quad (\underline{\Phi}_Y)_2 \quad \dots \quad (\underline{\Phi}_Y)_i \quad \dots \quad (\underline{\Phi}_Y)_n ] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Nella (2.1) le matrici modali  $\Psi_X$  e  $\Psi_Y$  sono ottenute affiancando per colonne i vettori  $(\underline{\Phi}_X)_i$  e  $(\underline{\Phi}_Y)_i$ . Questi vettori corrispondono agli autovettori associati all'i-esima forma modale rispettivamente per la struttura sperimentale e per quella modellata numericamente. Si specifica che nel corso del presente lavoro questi saranno sempre normalizzati a massa modale unitaria.

A questo punto è possibile definire in forma vettoriale il MAC secondo la (2.2):

$$MAC(X, Y) = \frac{|{\Psi_X}^T {\Psi_Y}|^2}{({\Psi_X}^T {\Psi_X}) \cdot ({\Psi_Y}^T {\Psi_Y})} \quad (2.2)$$

Il MAC, come ogni indice normalizzato, assume valori tra 0 ed 1. Un valore unitario implica la massima correlazione tra le forme modali, ovvero i due modi coincidono, 0 invece un'assenza di correlazione.

Per analizzare il comportamento di una catena genericamente caricata e vincolata, si è valutato l'andamento del MAC tra un modello FEM di questa, che ha il compito di simulare la struttura reale, e due strutture di riferimento che fanno invece da modelli numerici. Si specifica che modelli numerici e modello reale hanno la medesima sezione e materiale. La lunghezza totale dei modelli numerici corrisponde poi alla luce visibile del modello reale.

Per il modello di catena reale la lunghezza effettiva è sempre stata imposta a priori, mentre il tiro assiale  $N$  a cui essa è soggetta e la rigidezza dei vincoli  $k_t$  sono stati fatti variare. Per la precisione si sono valutati valori di queste due variabili adimensionale ed i range di variazione imposti sono stati  $N/N_{sn}=[0.1 \div 0.9]$  e  $k_t/k_{t,eq}=[10 \div 100]$ .

I due modelli numerici di confronto presentano invece azione assiale  $N/N_{sn}$  nulla. In quanto alla rigidezza dei vincoli, questi corrispondono rispettivamente ad una situazione di appoggio-appoggio e di incastro-incastro perfetti. Il modello perfettamente appoggiato è ottenuto imponendo un valore di  $k_t/k_{t,eq}$  che, in accordo con la teoria, vale 0 mentre il modello incastrato è realizzato fissando a zero tutti gli spostamenti e rotazioni ammissibili ai due nodi di estremità (ciò simula un valore di  $k_t/k_{t,eq}$  tendente a infinito ma non quantificabile in modo preciso con il FEM). I modelli di riferimento, da qui in avanti definiti *modelli di confronto*, sono illustrati in Fig.(2.6).



Figura 2. 6 Modelli di confronto, rispettivamente incastro-incastro ed appoggio-appoggio

Senza dilungarsi nel riportare i risultati delle singole simulazioni, si anticipa che il calcolo dell'indice MAC non ha dato risultati significativi per lo studio. Indipendentemente dalla lunghezza di catena simulata (sia visibile, che

effettiva), dalla sezione e dal materiale, il MAC è risultato essere molto elevato ( $MAC \geq 0.9$ ) per i modi di vibrare dello stesso ordine del modello numerico e per quello sperimentale, mentre per forme modali di ordine differente i suoi valori erano sempre prossimi allo 0.

Giacché l'analisi dei modi di vibrare e dell'indice MAC non hanno portato a risultati significativi, si è deciso di provare a fare riferimento al calcolo di un altro indice di correlazione denominato CoMAC [17].

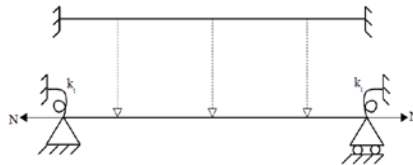
Prendendo nuovamente in considerazione i modi di vibrare di una struttura identificati sperimentalmente e quelli ricavati da un suo modello numerico, il CoMAC permette di valutare, per ogni grado di libertà, la correlazione che esiste tra più deformate modali.

In forma vettoriale il CoMAC è definito secondo la (2.3):

$$CoMAC(j) = \frac{(\sum_{n=1}^N |\phi_{X_n}(j) \cdot \phi_{Y_n}(j)|)^2}{\sum_{n=1}^N (\phi_{X_n}(j))^2 \cdot \sum_{n=1}^N (\phi_{Y_n}(j))^2} \quad (2.3)$$

Dove con  $j$  si intende il  $j$ -esimo grado di libertà (ovvero punto della struttura considerato) e con  $n$  la  $n$ -esima coppia di modi di vibrare, con  $1 < n < N$ . Come il MAC, anche il CoMAC assume valori tra 0 ed 1 e la sua tendenza all'unità indica una correlazione tra i modi di vibrare nel punto considerato.

Si precisa che il calcolo del CoMAC in queste prime analisi viene effettuato tra gradi di libertà corrispondenti tra il modello di confronto ed il modello di catena reale in analisi così come schematizzato in Fig.(2.7).



**Figura 2. 7 Modalità di calcolo del CoMAC**

Si riportano adesso a titolo di esempio nelle Fig.(2.8), (2.9), (2.10) e (2.11) gli andamenti del CoMAC ottenuti per una catena di acciaio ( $E=206000$  MPa,  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>) di sezione  $A=15 \times 25$  mm<sup>2</sup> e lunghezza  $l_{visibile}=l_{effettiva}=4000$  mm.

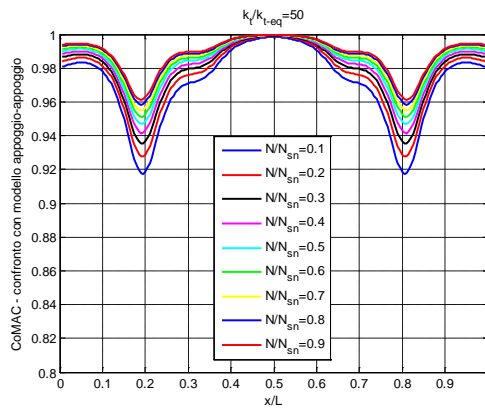


Figura 2. 8 Andamento del CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello ed il modello appoggio-appoggio al variare del tiro agente

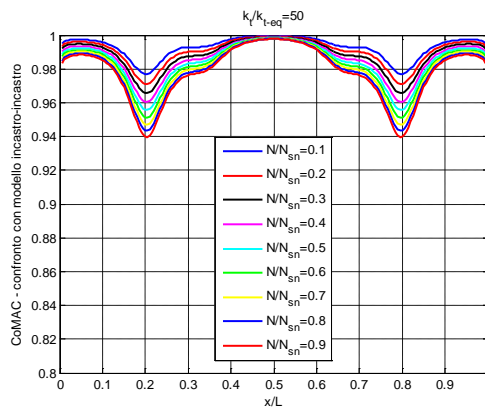


Figura 2. 9 Andamento del CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello ed il modello incastro-incastro al variare del tiro agente

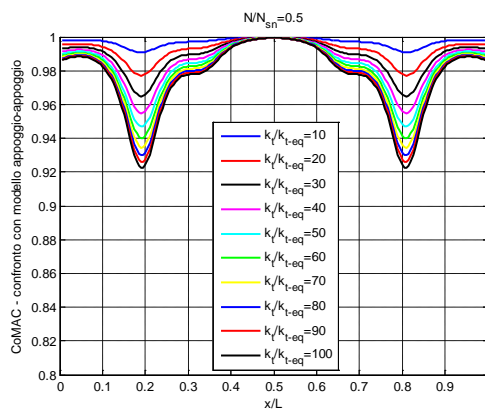
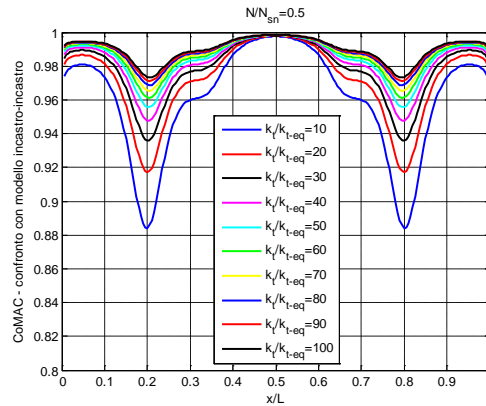


Figura 2. 10 Andamento del CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello ed il modello appoggio-appoggio al variare della rigidezza dei vincoli



**Figura 2. 11 Andamento del CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello ed il modello incastro-incaastro al variare della rigidità dei vincoli**

Come si può notare, anche al variare dei parametri del modello, l'indice CoMAC presenta dei punti di minimo assoluti, sempre in posizioni simmetriche, poste a circa il 20% e l'80% della lunghezza visibile. L'andamento simmetrico dell'indice lungo la luce è poi giustificabile dal fatto che sia i modelli di confronto, sia quello di catena reale sono simmetrici in termini di condizioni di vincolo e carico ed inoltre il materiale è, per ipotesi, isotropo ed omogeneo.

Sebbene i valori del CoMAC siano sempre tendenzialmente alti, si nota dalle Fig.(2.10) e (2.11) come i set di condizioni al contorno ( $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$ ) che garantiscono nel caso di confronto con il modello appoggio-appoggio i valori delle curve più alti, siano quelli per cui si riscontrano i valori più bassi nel confronto con l'incastro-incaastro. Come ci si aspetta, infatti, qualora si imponga ad esempio un basso valore di rigidità dei vincoli, maggiore sarà la correlazione con i modi di vibrare di un modello appoggiato, al contrario un modello con  $k_t/k_{t,eq}$  elevato sarà più affine ad una struttura incastrata.

Soffermandosi esclusivamente sui punti di minimo CoMAC, a partire dal range di valori che essi assumono al variare dei parametri in gioco, si evince che l'effetto della rigidità dei vincoli è decisamente maggiore rispetto a quello del tiro. Ciò è meglio visibile da Fig.(2.12) in cui si apprezza anche come le curve a rigidità variabile risultino tra l'altro più distanziate rispetto a quelle a tiro variabile.



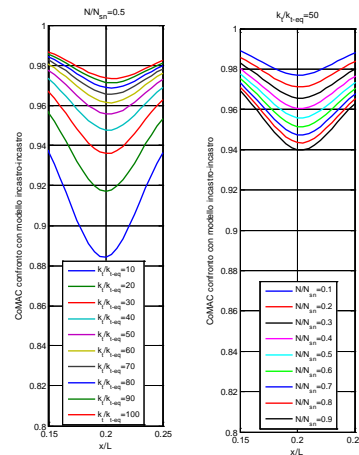


Figura 2. 12 Confronto dei minimi del CoMAC al variare di rigidezza dei vincoli e tiro

In ogni caso, dal momento che la posizione dei minimi, modificando le condizioni di vincolo e carico assiale e cambiando la tipologia di catena (sezione, lunghezza e materiale), subisce solo dei piccolissimi shift dal 20% ed 80% della luce che non presentano grossa influenza sui risultati, si ritiene ragionevole presupporre che tali punti siano significativi nello studio del comportamento delle catene e da ritenere quindi quali riferimento per ulteriori analisi.

### 2.3 Analisi mediante l'indice CoMAC per una catena di lunghezza effettiva incrementata

Scopo del presente lavoro non è la constatazione di evidenze sul comportamento delle catene dovute alle loro condizioni di carico e di vincolo, bensì alla loro lunghezza effettiva.

Nel paragrafo precedente è stato appurato che dal calcolo dell'indice CoMAC tra i modi di vibrare di una catena genericamente caricata e vincolata con quelli di una struttura di confronto della medesima lunghezza o perfettamente appoggiata, o perfettamente incastrata, si riscontravano due punti di minimo assoluti sostanzialmente fissi al 20% e 80% della luce.

Si vuole adesso analizzare se tale riscontro sia ancora valido qualora si abbia a che fare con catene di maggiore estensione, a parità di luce visibile, in modo da poter eventualmente quantificare l'influenza della lunghezza effettiva sui risultati.

Si specifica che il valore di luce visibile, uguale alla lunghezza complessiva dei modelli di confronto incastro-incastro ed appoggio-appoggio, verrà mantenuto costante e pari a 4000 mm così come fatto nel Paragrafo 2.2.

Per una prima analisi si impone che la lunghezza effettiva della catena sia maggiore del 5% rispetto a quella visibile.

Il calcolo del CoMAC è stato per la precisione effettuato tra l'intera lunghezza dei modelli di confronto perfettamente appoggiato ed incastrato con i soli gradi di libertà appartenenti alla luce visibile del modello di catena in esame, così come illustrato in Fig.(2.13):

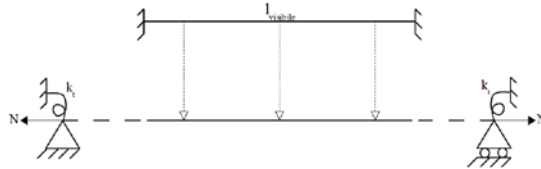


Figura 2. 13 Modalità di calcolo del CoMAC per una catena più lunga del modello di confronto

Per una maggiore completezza tutte le simulazioni sono state effettuate non solo al variare di tiro assiale e rigidità dei vincoli, ma anche confrontando sezioni, materiale e lunghezze visibili di catena differenti.

Si riportano di seguito nelle Fig.(2.14) e (2.15) gli andamenti dell'indice CoMAC valutato tra il modello di confronto incastrato e una catena in acciaio di sezione  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  e lunghezza effettiva di  $4200 \text{ mm}$ .

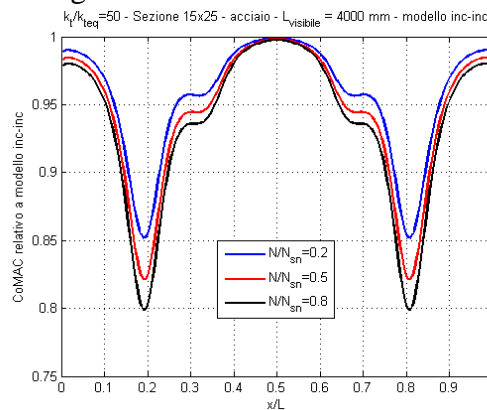


Figura 2. 14 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con  $l=1.05l_0$  ed il modello incastrato-incastrato al variare del tiro

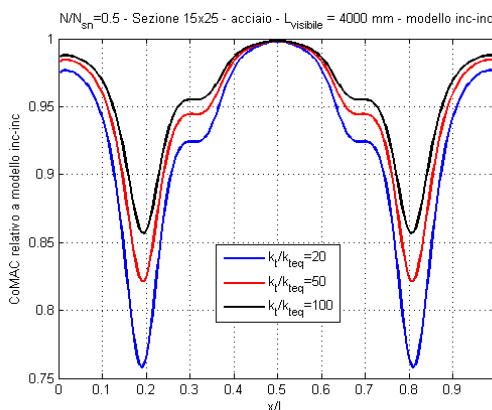


Figura 2. 15 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con  $l=1.05l_0$  ed il modello incastrato-incastrato al variare della rigidità dei vincoli

Come si può notare dalle Fig.(2.14) e (2.15), nel caso di confronto con un modello incastrato il CoMAC presenta lo stesso andamento del paragrafo precedente per quanto riguarda la posizione dei punti di minimo. Se si fa un confronto diretto con le Fig.(2.9) e (2.11) si può notare che adesso i valori del CoMAC sono più bassi. Soffermandosi sull'effetto dei parametri di rigidità dei vincoli e di tiro assiale, si nota come il primo sia più influente, infatti le curve di Fig.(2.15) sono visibilmente più distanziate di quelle di Fig.(2.14).

Si possono perciò trarre due conclusioni. La prima è che la posizione dei punti di minimo delle curve del CoMAC resta simmetrica negli intorni del 20% e dell'80% della luce visibile e non è quindi distinguibile alcun effetto della variazione della lunghezza della catena. La seconda è che l'aumento di lunghezza effettiva della catena causa una diminuzione generale del valore dell'indice CoMAC. Tale diminuzione risulta in particolar modo accentuata nei punti di minimo. Se ottenere valori del CoMAC sempre più bassi all'aumentare della lunghezza effettiva della catena fosse un effetto sistematico, si potrebbe pensare di studiare la diminuzione di questo indice proprio nei punti di minimo per ricavare poi una stima della lunghezza.

Prima di procedere a tale analisi è però bene tenere in considerazione e valutare l'influenza degli altri parametri del modello, come per esempio la snellezza della catena, ma anche vedere cosa comporta calcolare il CoMAC con un di modello di confronto che non sia quello perfettamente incastrato.

### 2.3.1 Influenza della snellezza $\lambda$

Nella trattazione precedente si è evinto che aumentando la lunghezza effettiva della catena è possibile notare che, sebbene la posizione del minimo CoMAC non si sposti dal 20% e 80% della luce visibile, i valori di quest'indice tendono ad abbassarsi.

L'analisi del CoMAC su catene di lunghezze differenti non è però utile soltanto a valutare l'effetto della lunghezza in sé, ma anche a mostrare l'influenza sui risultati di un'altra grandezza, ovvero la snellezza  $\lambda$  del modello.

L'indice di snellezza  $\lambda$  per una trave di sezione rettangolare è definito, in accordo con la (2.4), come il rapporto tra la sua lunghezza di libera inflessione  $l$  e la dimensione massima della sezione in pianta:

$$\lambda = \frac{l}{b} \quad (2.4)$$

È possibile altresì definire l'indice di snellezza  $\lambda$  anche per il singolo elemento finito, considerando come valore di  $l$  la distanza tra i due nodi che lo delimitano. Allo scopo di mostrare l'effetto del parametro  $\lambda$  nelle due accezioni sopra spiegate si svolgeranno due diversi confronti.

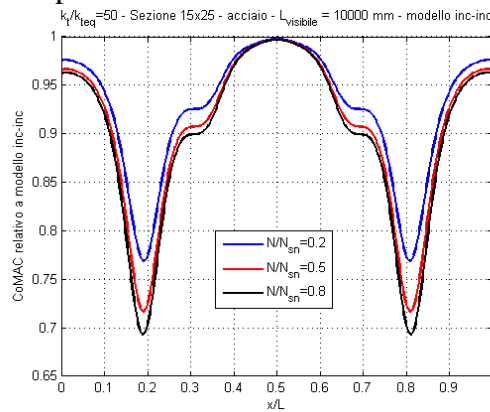
Il primo confronto viene effettuato tra la sopraccitata catena in acciaio di sezione  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  e lunghezza effettiva di  $4200 \text{ mm}$  con un'altra catena in acciaio con la stessa sezione ma lunghezza effettiva di  $10500 \text{ mm}$ . In questo modo si vuole

analizzare l'effetto della snellezza della trave in sé, non dell'elemento finito. Il valore di  $\lambda$  per la catena aumenta da 168 a 420, mentre quello del singolo elemento finito resta costante e pari a 8.

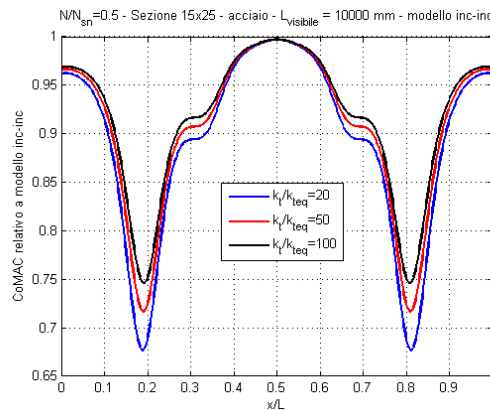
Il secondo confronto verrà effettuato tra la catena in acciaio di lunghezza effettiva 4200 mm e sezione 15x25 mm<sup>2</sup> discretizzata con elementi finiti lunghi 2 cm, con una catena in acciaio della medesima lunghezza effettiva e sezione ma discretizzata con elementi da 1 cm. In questo caso il valore di  $\lambda$  valutato sull'intera catena non si modifica (resta pari a 168), ma quello del singolo elemento finito si dimezza da 8 a 4.

I risultati sono riferiti sempre al calcolo dell'indice CoMAC con i modi di vibrare del modello di catena perfettamente incastrato. Il caso appoggio-appoggio verrà discusso in seguito.

Per quanto riguarda il primo confronto, si riportano ora in Fig.(2.16) e (2.17) gli andamenti del CoMAC per la trave con valore di snellezza pari a 420.



**Figura 2. 16 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con  $l=1.05l_0$  ed il modello incastro-incastro al variare del tiro per una trave di maggiore snellezza**

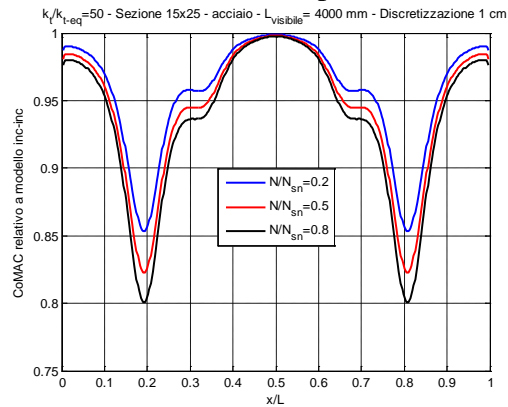


**Figura 2. 17 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con  $l=1.05l_0$  ed il modello incastro-incastro al variare della rigidezza dei vincoli per una trave di maggiore snellezza**

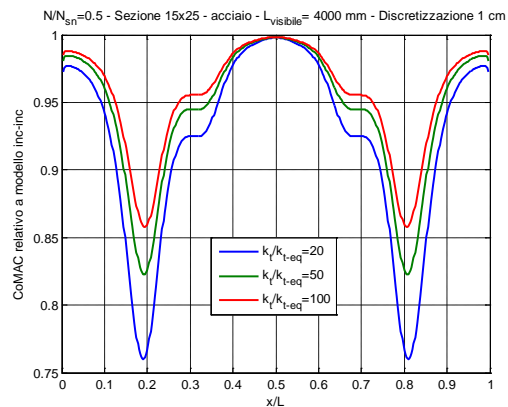
Se si confrontano le Fig.(2.16) e (2.17) con le Fig.(2.14) e (2.15), si nota come una trave con un valore maggiore di snellezza, pur presentando un andamento

del CoMAC di ugual forma, mostra una maggiore sensibilità al tiro assiale, mentre quella relativa alla rigidezza dei vincoli rimane circa invariata in termini percentuali. Nel medesimo confronto i valori del CoMAC risultano ora anche più bassi.

Passando invece al confronto basato sulla snellezza del singolo elemento finito, si riporta nelle Fig.(2.18) e (2.19) l'andamento del CoMAC nel caso di catena discretizzata con elementi finiti di snellezza pari a 4.



**Figura 2. 18 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con  $l=1.05l_0$  ed il modello incastro-incastro al variare del tiro per una trave con elementi tozzi**



**Figura 2. 19 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con  $l=1.05l_0$  ed il modello incastro-incastro al variare della rigidezza dei vincoli per una trave con elementi tozzi**

Le Fig.(2.18) e (2.19), sempre ripetendo il confronto con le Fig.(2.14) e (2.15), mostrano come una trave descritta da elementi finiti tozzi non dia risultati differenti, al variare influenze di tiro assiale e rigidezza dei vincoli, rispetto ad un modello con elementi finiti snelli. I valori assunti dall'indice di correlazione nelle Fig.(2.18) e (2.19) risultano più alti in media di soli 5 millesimi rispetto al caso di catena discretizzata ogni 2 cm.

Ciò conferma e permette di concludere che aver scelto un tipo di elementi finiti basati sulla TBT [7] consente di avere la stessa accuratezza dei risultati

indipendentemente dalla discretizzazione della mesh e, quindi, dalla  $\lambda$  valutata sul singolo elemento finito.

Se invece ci si concentra sulla snellezza della catena, la conclusione a cui ha portato l'analisi sopraesposta è che per diversi valori di  $\lambda$  il comportamento generale della struttura in termini di forma dell'indice CoMAC non varia. Tuttavia al crescere del valore di snellezza l'indice di correlazione sarà progressivamente più sensibile alle variazioni del tiro assiale  $N/N_{sn}$ , mentre per catene con valore di  $\lambda$  decrescente l'effetto preponderante sarà quello della rigidità dei vincoli  $k_v/k_{t,eq}$ .

Visto però che la variazione della snellezza  $\lambda$  non aggiunge informazioni rilevanti per l'analisi della stima della lunghezza, il suo effetto verrà da qui in avanti considerato come di minore interesse rispetto a quello delle altre variabili del modello.

### 2.3.2 CoMAC relativo ad un modello appoggio-appoggio

Le analisi finora svolte, seppur variando le condizioni di carico, vincolo e lunghezza della catena, non permettono ancora di avere un quadro completo circa il comportamento dell'indice CoMAC.

Al fine di valutare se vi sia effettivamente un comportamento generale negli andamenti del CoMAC in termini sia di diminuzione del suo valore all'aumentare della lunghezza della catena, sia di posizione sei punti di minimo fisse al 20% e 80% della luce visibile, per completezza quest'indice è stato ricalcolato anche nel caso in cui si usassero i modi di vibrare di un modello appoggio-appoggio.

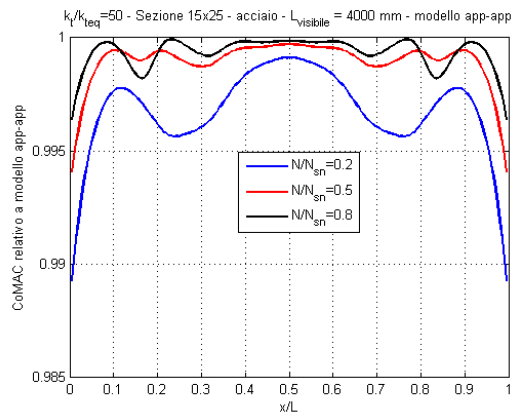
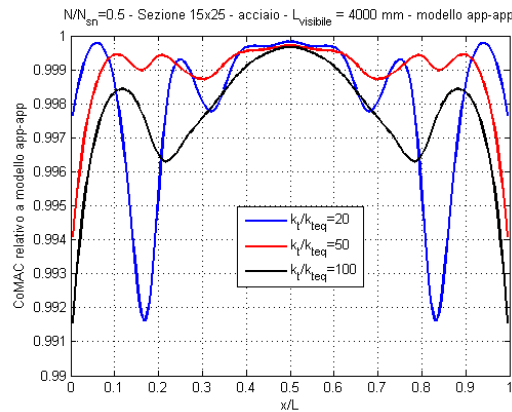


Figura 2. 20 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con  $l=1.05l_0$  ed il modello appoggio-appoggio al variare del tiro assiale



**Figura 2. 21 CoMAC calcolato lungo la luce della catena tra il modello con  $l=1.05l_0$  ed il modello appoggio-appoggio al variare della rigidità dei vincoli**

Nel caso di confronto con un modello appoggio-appoggio, come si nota dalle Fig.(2.20) e (2.21), non è più possibile riconoscere nelle curve le caratteristiche peculiari precedentemente sottolineate. In primis non solo i punti di minimo non si collocano più negli intorno del 20% e dell'80% della luce della catena, ma non è nemmeno possibile distinguere dei trend che permettano di risalire alla loro nuova posizione e quindi di individuare un comportamento generale del sistema al variare delle sue proprietà.

Con catene di lunghezza effettiva maggiore rispetto a quella visibile si dimostra quindi che il comportamento non è duale rispetto al modello di confronto scelto per l'analisi. Se per un confronto con il modello incastrato sarà sempre possibile riscontrare punti di minimo CoMAC nell'intorno del 20% e dell'80% della luce visibile indipendentemente dalle condizioni al contorno imposte ( $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$ ), ciò non avviene calcolando il CoMAC rispetto ad una struttura perfettamente appoggiata.

Si può quindi concludere che calcolando il CoMAC rispetto ad un modello perfettamente appoggiato non si è in grado di risalire all'influenza della lunghezza effettiva della catena. Viceversa con il modello incastro-incastro l'incremento di lunghezza comporta sempre una diminuzione del CoMAC, accentuata in particolare nelle posizioni in cui raggiunge il valore minimo (20% e 80% della luce visibile). Sebbene indagare su questa riduzione dell'indice di correlazione possa essere una strada valida ai fini la stima della lunghezza effettiva della catena, vista la forte influenza sui risultati dei parametri di tiro e rigidità dei vincoli, essa risulta complessa. Si è perciò preferito svolgere un'altra tipologia di analisi. Questa sarà ancora basata sull'impiego del CoMAC, ma questo verrà però calcolato rispetto ad un unico punto del modello di confronto scelto *ad hoc*.

## 2.4 Andamento CoMAC tra modello reale e punto al 20% del modello di confronto

Nel paragrafo precedente si sono considerate due tipologie di catena. Una, di lunghezza prefissata, è stata definita quale modello di confronto ed è caratterizzata dall'essere soggetta ad una azione assiale di valore nullo e da condizioni di vincolo o di incastro perfetto, o di appoggio perfetto. L'altra presenta invece condizioni di vincolo e carico generiche, luce visibile pari all'estensione del modello di confronto e la sua lunghezza effettiva è stata progressivamente aumentata del 5% e del 10% proprio a partire dal valore imposto come visibile. È stato quindi valutato l'indice CoMAC tra le due catene considerando tutti i gradi di libertà del modello di confronto e quelli appartenenti alla sola luce visibile per il modello di catena generica, così come illustrato in Fig.(2.13). Si è evinto che non è possibile con questo tipo di analisi trovare degli indicatori che permettano di valutare in modo semplice l'effetto della lunghezza della catena per poi riuscire a stimarla.

In questo paragrafo, basandosi sulle stesse tipologie di catena sopracitate, si propone un'analisi alternativa. Adesso infatti si decide di calcolare il CoMAC tra il solo punto corrispondente al 20% della lunghezza del modello di confronto incastrato (o dualmente appoggiato) con tutti i punti del modello reale appartenenti alla luce visibile della catena. La scelta di questo particolare punto deriva dalla sua significatività illustrata nel Paragrafo 2.2, ovvero quella di essere il punto per cui si ha la minima correlazione tra i modi di vibrare.

In Fig.(2.22) si riporta a titolo di esempio la schematizzazione della procedura di calcolo nel caso di struttura di riferimento incastro-incastro:

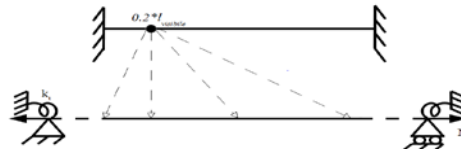


Figura 2. 22 Nuova modalità di calcolo del CoMAC

Per motivi legati alla generalizzazione del problema, sono state effettuate simulazioni in Abaqus al variare della sezione, lunghezza visibile, materiale, tiro e rigidità dei vincoli. Il modulo elastico  $E$  è stato invece posto al valore nominale per entrambi i materiali. L'influenza di una sua variazione sui risultati sarà discussa in seguito.

Si riportano per semplicità i soli risultati concernenti una catena in acciaio, di sezione  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  e lunghezza di 4 m in quanto i trend per tutte le altre tipologie di catena sono conformi ai seguenti.



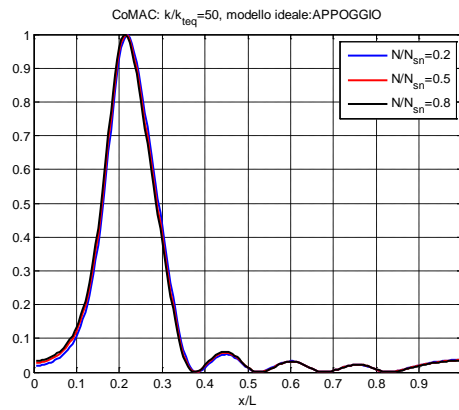


Figura 2. 23 CoMAC tra 20% del modello appoggiato (4000 mm) e catena reale (4000 mm) a  $N/N_{sn}$  variabile

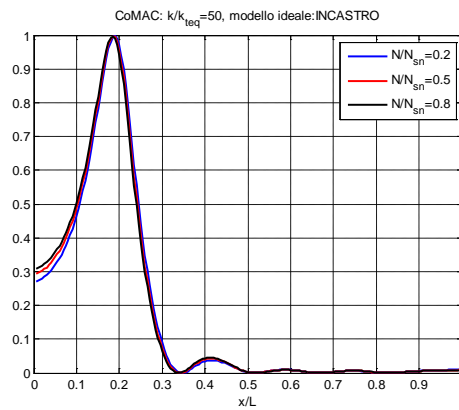


Figura 2. 24 CoMAC tra 20% del modello incastrato (4000 mm) e catena reale (4000 mm) a  $N/N_{sn}$  variabile

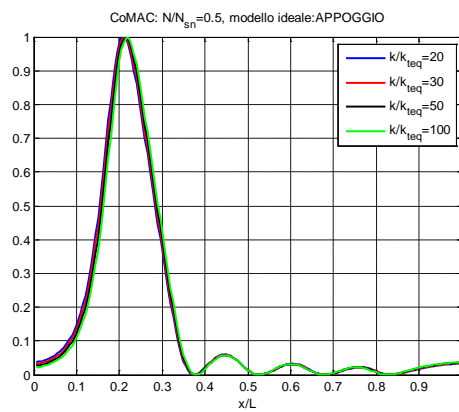
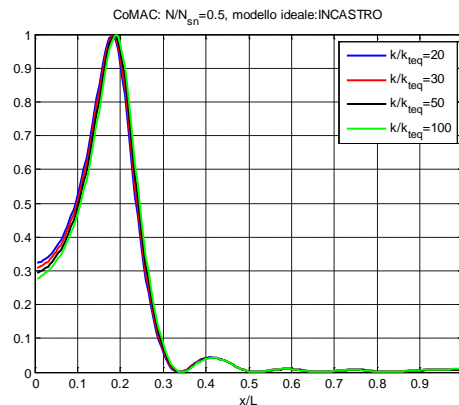


Figura 2. 25 CoMAC tra 20% del modello appoggiato (4000 mm) e catena reale (4000 mm) a  $k_t/k_{t,eq}$  variabile



**Figura 2. 26 CoMAC tra 20% del modello incastrato (4000 mm) e catena reale (4000 mm) a  $k_t/k_{t,eq}$  variabile**

Come si nota dalle Fig.(2.23), (2.24), (2.25) e (2.26) soprariportate, l'andamento del CoMAC presenta la medesima forma indipendentemente dal tipo di modello di confronto rispetto a cui viene calcolato questo indice. Si evince quindi che tale andamento del CoMAC ha valenza generale ed è quindi possibile utilizzarlo come punto di partenza per analisi successive.

Il risultato significativo è però costituito dalla presenza di un unico punto di massimo assoluto, ad indicare che vi sarà sempre una diretta ed alta correlazione tra il punto prefissato del modello di riferimento (incastrato o appoggiato) ed un solo punto della catena che si vuole studiare che, tra l'altro, può essere individuato lungo la luce visibile senza alcuna ambiguità.

Soffermandosi sul confronto con il modello appoggiato delle Fig.(2.23) e (2.25) si nota che questo massimo, rispetto all'ascissa corrispondente al 20% della luce visibile, si posiziona verso la parte centrale della catena. Al contrario quando il CoMAC è calcolato rispetto ad un modello incastrato, come nelle Fig.(2.24) e (2.26), il massimo il punto di massimo tende ad allontanarsi dal centro della catena.

Riguardo l'influenza dei parametri del modello sui risultati, si nota che la posizione del punto di massimo, sebbene risenta di entrambi il tiro  $N/N_{sn}$  e la rigidità dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$ , mostra una maggiore dipendenza da quest'ultima. Ciò si può facilmente evincere dalla maggiore variabilità della posizione del punto di massimo per le curve a rigidità variabile rispetto a quelle a tiro variabile riportate nelle Fig.(2.27) e (2.28).

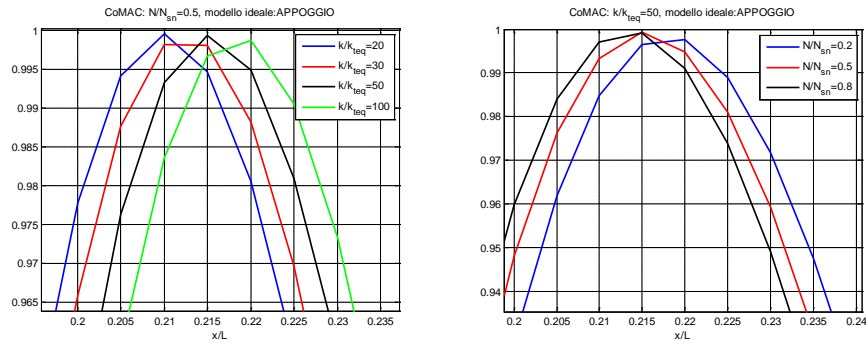


Figura 2.27 Massimi del CoMAC con modello di confronto appoggiato

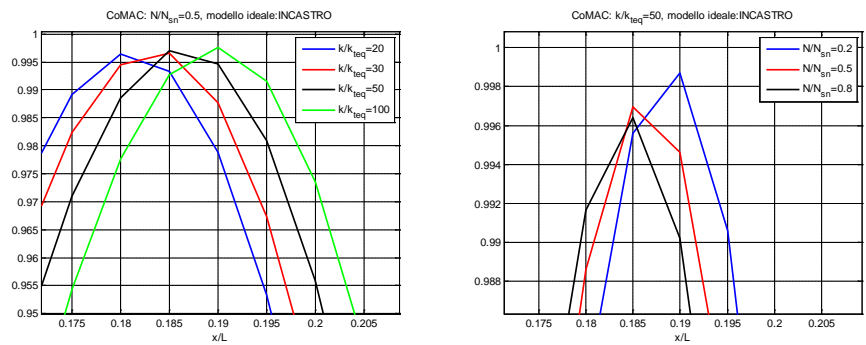


Figura 2.28 Massimi del CoMAC con modello di confronto incastrato

I risultati esposti sopra hanno permesso di mettere in luce un importante risultato, ovvero che qualora si calcoli l'indice CoMAC tra un modello di catena ed un punto specifico appartenente ad un modello di confronto della medesima lunghezza, vi sarà sempre un unico punto di massima correlazione. Tale risultato continua ad esser valido anche qualora si decidesse di ripetere le simulazioni con un materiale, sezione e lunghezza nominale differenti.

### 2.4.1 Influenza della lunghezza effettiva della catena sull'andamento del CoMAC

Dal momento che ciò che interessa in questo lavoro è lo studio del comportamento di una catena al variare della sua lunghezza, un'analisi del CoMAC che si soffermi esclusivamente su un solo valore (pari, tra l'altro, alla luce visibile) non è sufficiente, sebbene abbia messo in evidenza la presenza di un unico punto d'osservazione preferenziale per valutare l'indice di correlazione (il suo massimo).

Di conseguenza, al fine di investigare la presenza sempre di un unico punto di massima correlazione tra il modello di confronto e quello di catena sotto analisi, le stesse simulazioni del Paragrafo 2.4 sono state ripetute per una catena di lunghezza effettiva superiore rispetto ai 4000 mm di luce visibile.

In particolar modo si decide di operare mantenendo le medesime caratteristiche geometriche e proprietà del materiale del paragrafo precedente, ma utilizzando

una catena di lunghezza effettiva maggiorata del 5%. I modelli di confronto perfettamente incastrato ed appoggiato continuano invece ad essere lunghi 4000 mm.

Dal momento che nelle analisi precedenti era stato riscontrato che il punto di massima correlazione era nei dintorni del 20% della luce visibile, per semplicità ci si sofferma sull'analisi di metà della struttura. I risultati sono riportati nelle Fig.(2.29), (2.30), (2.31) e (2.32)

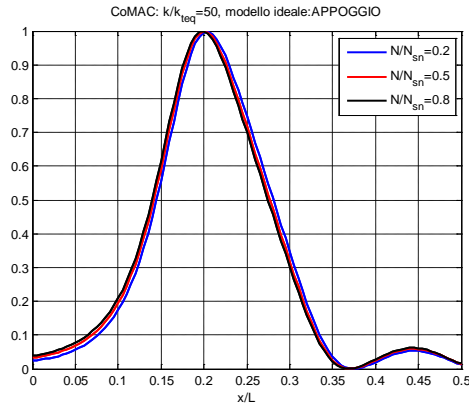


Figura 2. 29 Incremento di lunghezza del 5%, confronto con modello appoggiato, N variabile

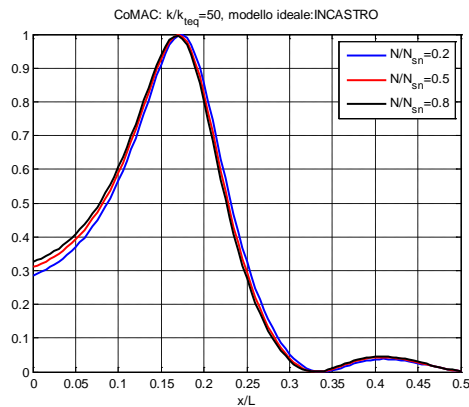


Figura 2. 30 Incremento di lunghezza del 5%, confronto con modello incastrato, N variabile

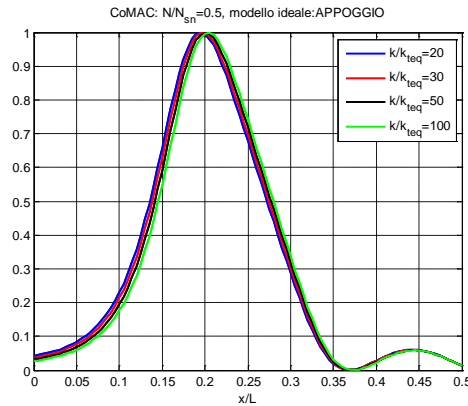


Figura 2. 31 Incremento di lunghezza del 5%, confronto con modello appoggiato,  $k_t$  variabile

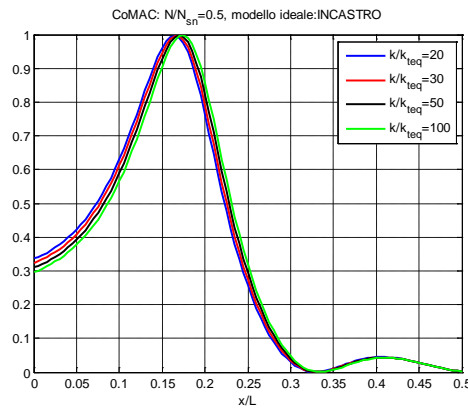


Figura 2. 32 Incremento di lunghezza del 5%, confronto con modello incastrato,  $k_t$  variabile

Si può facilmente evincere che il comportamento dell'indice CoMAC in termini di forma è assolutamente universale ed indipendente anche dalla lunghezza effettiva della catena. Il tiro assiale e la rigidità dei vincoli mantengono lo stesso effetto del caso precedente se si effettua un confronto diretto con le Fig.(2.23), (2.24), (2.25) e (2.26).

Il risultato interessante su cui però si vuole richiamare l'attenzione riguarda la posizione in cui adesso il massimo CoMAC va a collocarsi. In seguito all'aumento della lunghezza effettiva della catena il punto di massima correlazione si è spostato verso la sinistra dei grafici, ovvero tende ad allontanarsi dal centro della catena.

Allo scopo di verificare se questo spostamento del punto di massimo CoMAC abbia un trend che permetta di risalire in qualche maniera alla lunghezza effettiva della catena, si è proceduto a ripetere le simulazioni con una struttura ulteriormente allungata. In particolar modo si è scelta una lunghezza effettiva maggiore del 10% rispetto ai 4000 mm di luce visibile così da avere un set di risultati ottenuti per incrementi regolari del 5%.

Per semplicità si riportano nelle Fig.(2.33) e (2.34) i risultati relativi al calcolo rispetto al solo modello perfettamente incastrato per tutte e tre le lunghezze effettive di catena testate. Nella Fig.(2.33) si andrà a notare in particolar modo l'influenza della rigidezza dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$  una volta fissato il tiro  $N/N_{sn}$ , mentre nella Fig.(2.34) si illustra il caso duale.

I risultati relativi al modello appoggiato, per quanto detto prima, sarebbero i medesimi, solo traslati verso valori più prossimi al 20% della luce.

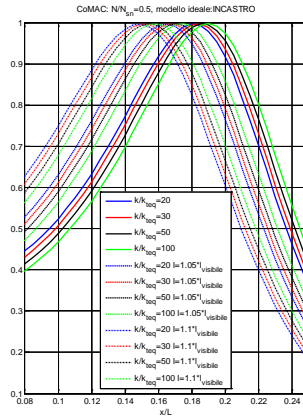


Figura 2. 33 Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e  $k_t$  con modello incastrato

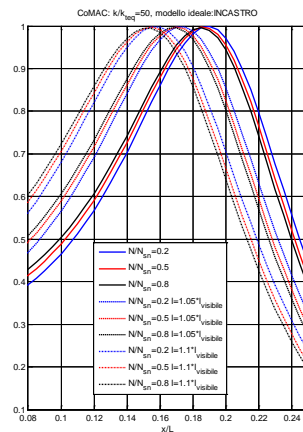


Figura 2. 34 Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e N con modello incastrato

Con quest'analisi di insieme è facilmente visibile la presenza di un trend nell'allontanamento progressivo del punto di massimo CoMAC dalla mezzeria della catena che può aiutare a stimare la lunghezza della stessa.

Tale evidenza risulta ancora più importante se si considera che il punto di massima correlazione si trova in posizioni distanziate di circa la medesima quantità ogni 5% di incremento della lunghezza effettiva della catena e che le influenze di  $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$  non inficiano la distinzione tra le curve a lunghezza differenza. Di conseguenza, sebbene  $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$  costituiscano delle fonti di

variabilità sulla posizione del massimo CoMAC, l'effetto della lunghezza effettiva della catena resta quello preponderante.

Ciò fa presupporre che vi possa essere un legame se non lineare, ad esso vicino, che lega la posizione del massimo CoMAC all'incremento della lunghezza effettiva della catena rispetto a quella visibile su cui vale la pena indagare. Se tale evidenza venisse confermata si avrebbero quindi le basi per determinare un metodo di stima della lunghezza effettiva della catena efficace.

Prima di poter analizzare tale trend nel dettaglio è importante valutare anche il ruolo giocato da parametri quali la snellezza della catena  $\lambda$  e soprattutto dalla variazione del modulo elastico  $E$ . Sebbene infatti quest'ultimo sia sempre stato posto come pari al suo valore nominale, a causa delle inevitabili non uniformità presenti nei casi reali, potrebbe presentare valori diversi ed è quindi bene quantificare la sua influenza nelle analisi FEM.

#### 2.4.2 Influenza della snellezza $\lambda$

Tutte le analisi ed evidenze illustrate finora si riferiscono esclusivamente ad una prefissata tipologia di catena. Affinché si possa affermare che il trend ritrovato nello spostamento del punto di massimo CoMAC sia universale, bisogna tener conto anche di tutti gli altri parametri che possono in qualche modo influenzare il modello ed eventualmente viziare i risultati.

La prima grandezza di cui si decide di valutare l'influenza sui risultati è la snellezza  $\lambda$  della catena.

A tal proposito le simulazioni sono ripetute per un tirante in acciaio avente la stessa lunghezza di libera inflessione pari a 4000 mm, ma una sezione di 30x50 mm<sup>2</sup>. In tal modo il valore di  $\lambda$  scende per la catena da 160 a 80, mentre per il singolo elemento finito da 8 a 4.

Bisogna sottolineare che poiché il rapporto tra lunghezza della catena e la massima dimensione in pianta della sezione risulta maggiore di 8, in accordo con la teoria di Timoshenko [7], non è corretto definire quest'ultimo modello come *tozzo*. Risultano invece *tozzi* gli elementi finiti che lo compongono a causa discretizzazione con risoluzione di 2 cm. Per correttezza si indicherà quindi la trave di sezione 30x50 mm<sup>2</sup> come *meno snella* rispetto a quella di sezione 15x25 mm<sup>2</sup>, ma i suoi elementi finiti sono invece *tozzi*. Aver scelto però elementi *beam B31* che, come detto nel Capitolo 1 e dimostrato nel Paragrafo 2.3.1, tengono conto della deformabilità a taglio consente non solo di non avere problemi nell'attendibilità dei risultati del calcolo, ma anche di trascurare la modifica del valore di  $\lambda$  sul singolo elemento finito.

Gli esiti delle simulazioni sono riportati nelle Fig.(2.35), (2.36), (2.37) e (2.38).

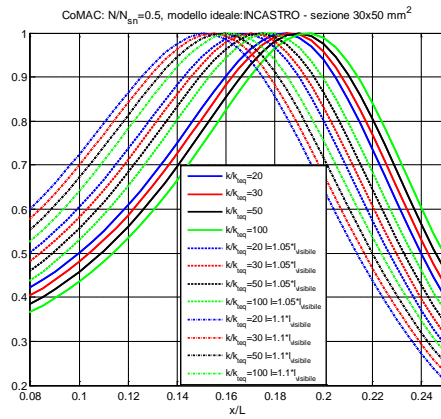


Figura 2. 35 Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e  $k_t$  con modello incastrato per catena meno snella

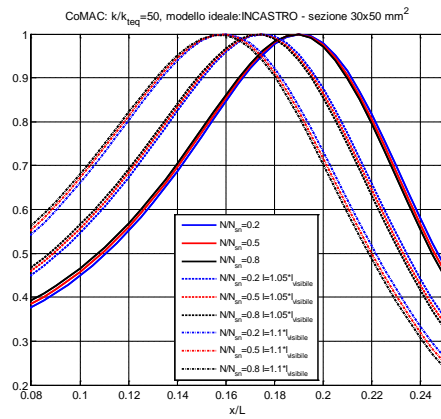


Figura 2. 36 Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e  $N$  con modello incastrato per catena meno snella

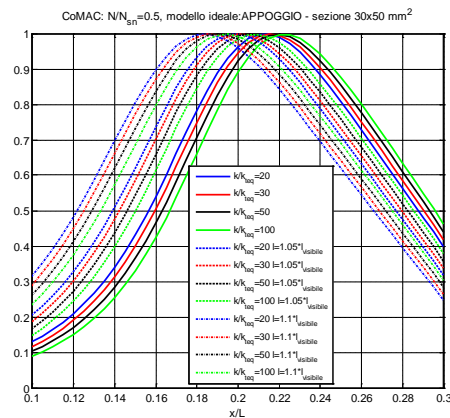


Figura 2. 37 Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e  $k_t$  con modello appoggiato per catena meno snella



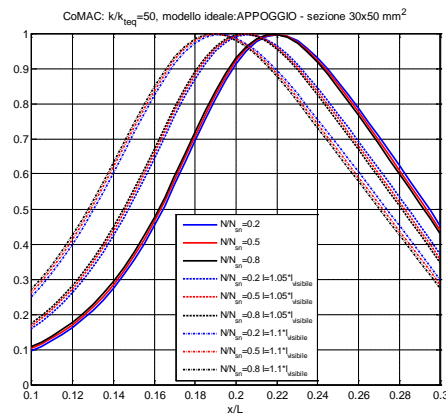


Figura 2. 38 Posizione massimo CoMAC al variare di lunghezza e N con modello appoggiato per catena meno snella

A partire dalle figure riportate sopra è possibile trarre le seguenti conclusioni:

- L'andamento complessivo dell'indice CoMAC non è variato nella forma rispetto a quello del Paragrafo 2.4.1, di conseguenza la snellezza  $\lambda$  non modifica il comportamento generale del sistema;
- Il CoMAC presenta un unico punto di massimo distinguibile senza ambiguità;
- Anche variando il parametro  $\lambda$  è possibile distinguere un trend nello spostamento del punto di massima correlazione al variare della lunghezza effettiva della catena. Tale trend è dello stesso tipo di quello del Paragrafo 2.4.1 e ciò dimostra ancora una volta che la snellezza non ha influenza sulla tipologia dei risultati;
- Le considerazioni in merito all'influenza del tiro assiale  $N/N_{sn}$  e della rigidezza dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$  rimangono invariate rispetto a tutte le analisi precedentemente svolte, ovvero quest'ultima ha un maggiore effetto sulla posizione del massimo CoMAC.

Interessante è però anche il confronto diretto, ma questa volta in termini quantitativi, tra la posizione del punto di massima correlazione tra la catena di sezione  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  con quella della catena di sezione  $30 \times 50 \text{ mm}^2$ . Dalle Fig.(2.39) e (2.40) risulta chiaro come per una trave meno snella il massimo CoMAC si abbia in un punto più centrale della luce e la sua posizione sia meno influenzata dal tiro, anche qualora questo spazi tra valori molto differenti come quelli mostrati in legenda. Soffermandosi però esclusivamente sulla snellezza  $\lambda$  della catena, è lecito presupporre che se questa continuasse a diminuire, fino ad arrivare ad una struttura tozza, si otterrebbe in risposta dal modello FEM un progressivo allontanamento del punto di massimo dal vincolo sinistro.

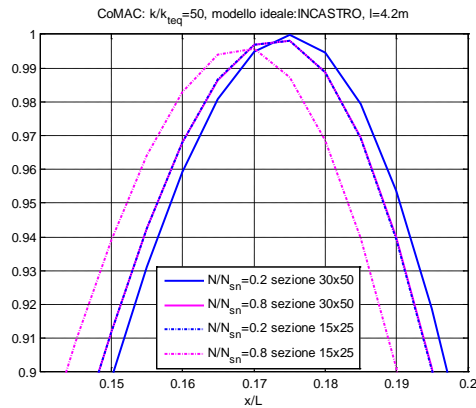


Figura 2. 39 Confronto posizioni massimo CoMAC al variare di  $\lambda$  e  $N/N_{sn}$

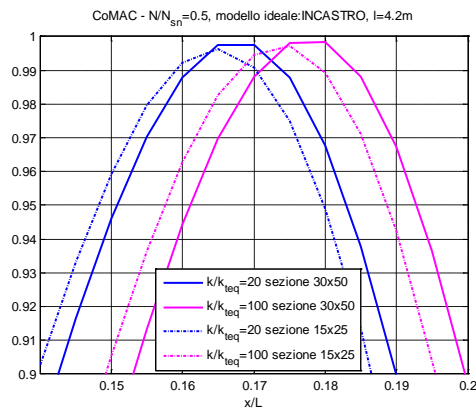


Figura 2. 40 Confronto posizioni massimo CoMAC al variare di  $\lambda$  e  $k/k_{t,eq}$

In ogni caso si può concludere che la presenza del medesimo tipo di trend al variare della lunghezza sia per travi tozze, che per travi snelle permette di porre le basi per un metodo che, sulla base dello spostamento del punto di massimo CoMAC, permetta di risalire alla lunghezza effettiva della catena. Ovviamente tale metodo dovrà essere di volta in volta aggiornato con le informazioni relative alle dimensioni effettive della sezione della catena in esame, misurabili in situ, ed al materiale per essere il più accurato possibile.

### 2.4.3 Influenza del modulo elastico $E$

Ultimo passo necessario per confermare la generalità del comportamento di una catena qualora si calcoli il CoMAC tra i modi di vibrare della stessa e quelli di un modello di confronto relativi ad un unico punto prestabilito, è quello di valutare l'influenza dell'ultima variabile che si presume possa in qualche modo portare a modifiche dei risultati: il modulo elastico  $E$ .

Sebbene nelle analisi finora illustrate sia sempre stato considerato pari al valore nominale, date le inevitabili non idealità del materiale, i trattamenti termici a cui è sottoposto, le lavorazioni (in particolar modo quelle per deformazione

plastica), la specifica composizione chimica della lega metallica o più semplicemente all'anisotropia cristallina, questo valore si scosta da quello precedentemente impostato.

In casi reali tali scostamenti tendono comunque ad essere contenuti, nell'ordine di pochi punti percentuali. Generalmente in letteratura [6][16] variazioni di  $E$  del 5% sono già da ritenersi importanti, ma per motivi cautelativi nelle analisi seguenti si è imposto un intervallo di variazione del  $\pm 10\%$  rispetto al valore nominale. Si specifica che la variazione del modulo elastico riguarda i soli modelli che simulano una catena reale, per quelli di confronto incastro-incastro ed appoggio-appoggio, che devono rappresentare dei casi ideali, esso rimane costante e pari a quello nominale.

Senza entrare nuovamente nel merito dell'influenza di parametri come il tiro  $N/N_{sn}$  e la rigidezza  $k_r/k_{t,eq}$ , nelle Fig.(2.41) e (2.42) si riportano i risultati ottenuti a tiro fissato per due catene di lunghezza visibile  $l$  pari a 4000 mm e sezione  $A$  di  $15 \times 25 \text{ mm}^2$ , rispettivamente in acciaio ed in alluminio.

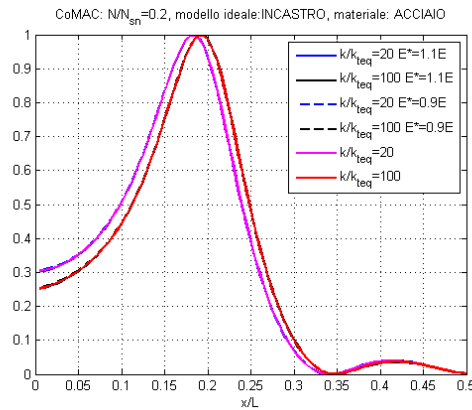


Figura 2. 41 CoMAC al variare di E per catena in acciaio

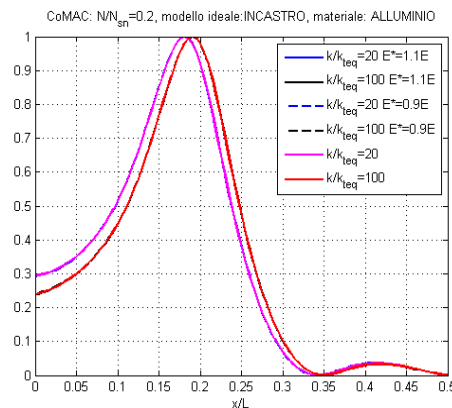


Figura 2. 42 CoMAC al variare di E per catena in alluminio

Dalle immagini sopra riportate, in cui non risultano praticamente distinguibili le curve a modulo elastico  $E$  variabile, è già possibile notare come la variazione di

questo parametro abbia un effetto infimo rispetto alle altre variabili del modello. Risulta difficile distinguere variazioni delle curve in termini sia di valori che esse assumono, sia di posizione di punti specifici come, in particolare, il massimo.

Di conseguenza aver finora ritenuto il modulo elastico  $E$  costante e pari al valore nominale non ha senz'altro costituito una rilevante causa di errore. Per poter apprezzare infatti la traslazione che questo parametro induce nelle curve del CoMAC è necessario ricorrere ad ingrandimenti molto spinti come quelli riportati nella Fig.(2.43).

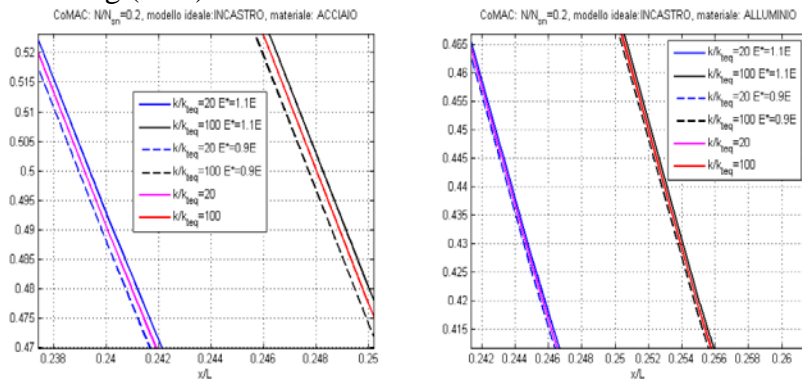


Figura 2. 43 Effetto del modulo elastico  $E$  sulle curve del CoMAC

Dalle immagini ancora una volta si evince che sebbene vi sia una traslazione verso sinistra delle curve del CoMAC per moduli elastici  $E$  minori, queste siano comunque poco distinguibili tra di loro nonostante i valori scelti appartengano ad un intervallo volontariamente molto esteso. In ragione di ciò, qualora si usasse per le analisi un modulo elastico  $E$  arbitrariamente scelto all'interno dei valori ammissibili per un determinato materiale, non necessariamente pari al nominale da catalogo, i risultati sarebbero estendibili senza problemi a tutte le strutture di medesimo materiale, geometria e condizioni di vincolo e carico.

Prima di passare allo studio successivo si ritiene importante precisare che se l'intera metodologia sopra illustrata fosse stata ripetuta fissando a priori il punto posto all'80% della luce del modello di confronto, i risultati ottenuti sarebbero stati i medesimi, solo specchianti rispetto al punto centrale della catena a causa della simmetria dei modelli di catena implementati. Si riportano per maggiore chiarezza nelle Fig.(2.44) e (2.45) due esempi che corrispondono al calcolo duale delle Fig.(2.23) e (2.25).

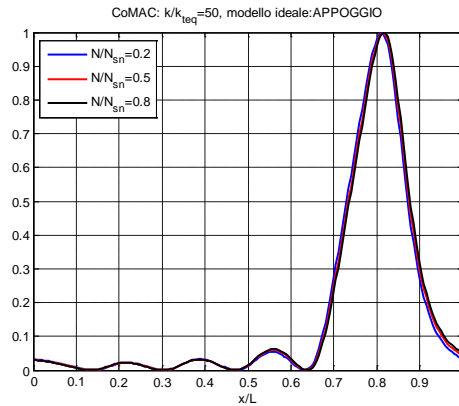


Figura 2. 44 CoMAC tra 80% del modello appoggiato e catena reale a  $N/N_{sn}$  variabile

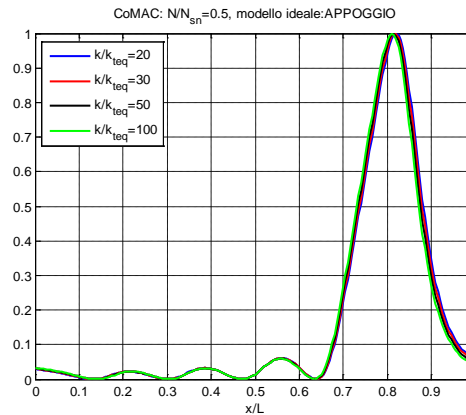


Figura 2. 45 CoMAC tra 80% del modello appoggiato e catena reale a  $k_t/k_{t,eq}$  variabile

## 2.5 Implementazione del metodo di stima della lunghezza effettiva della catena

Il calcolo dell'indice CoMAC tra il punto sito al 20% della lunghezza di uno qualsiasi dei modelli incastro-incastro o appoggio-appoggio con tutti i nodi appartenenti alla luce visibile del modello di catena reale ha mostrato come si possa distinguere un comportamento generale della struttura al variare della sua lunghezza effettiva.

Indipendentemente dai valori specifici che vengono assunti per il modello di catena in termini di tiro assiale  $N/N_{sn}$ , rigidezza dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$ , snellezza della struttura  $\lambda$  e modulo elastico  $E$ , le curve del CoMAC presentano sempre un unico punto di massimo assoluto.

La posizione di tale punto di massimo risente in maniera debole, fissando la lunghezza della catena, di tutte le variabili citate. Tuttavia all'aumentare della lunghezza effettiva esso presenta un progressivo allontanamento dalla mezzeria della catena.

In particolar modo si è evinto che, confrontando catene di lunghezza effettiva differente di volta in volta del 5%, lo spostamento del punto di massima correlazione avviene secondo quantità circa costanti.

Le considerazioni fatte finora permettono di mettere in luce che una possibilità di indagine per la stima della lunghezza effettiva delle catene sia la definizione di una relazione di tipo lineare.

Questa relazione lineare deve più specificatamente legare la lunghezza effettiva della catena alla posizione lungo la luce visibile del punto per cui si ha la massima correlazione con il modello di confronto prescelto.

Poiché sia l'utilizzo del modello appoggio-appoggio che incastro-incastro hanno mostrato trend analoghi, d'ora in avanti per semplicità si farà riferimento solo a quest'ultimo.

Si ritiene utile anticipare che giacché la relazione lineare che verrà individuata dovrà essere validata a posteriori mediante prove sperimentali prima di essere ritenuta affidabile ed efficace, tutti i risultati illustrati nel presente paragrafo sono da attribuirsi ad un modello di catena in alluminio di sezione  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  e lunghezza della luce visibile di  $4000 \text{ mm}$ . Questo set di parametri permette infatti di simulare il comportamento di una struttura che sia fisicamente il più simile possibile a quella che si ha a disposizione per le prove in laboratorio. Tuttavia è bene sottolineare che l'impiego dell'alluminio pone in una situazione svantaggiosa. Se si confrontassero i risultati di questa catena con quelli di un'altra di medesima geometria ma in acciaio, si noterebbe che questi ultimi hanno una minore dispersione. Per brevità i risultati sulle catene in acciaio non vengono riportati, ma si può ben presupporre che se il metodo che si vuole qui implementare garantisce riscontri positivi per l'alluminio, ciò sarà a maggior ragione vero anche per l'acciaio.

### **2.5.1 Sensibilità del punto di massimo CoMAC alle variabili del modello**

Prima di poter implementare una relazione che permetta di stimare la lunghezza effettiva delle catene a partire dalla sola conoscenza della luce visibile, è necessario cercare di analizzare in modo più approfondito l'influenza che i parametri hanno sul sistema. In particolar modo ci si sofferma ora sugli effetti che il tiro assiale, la rigidità dei vincoli ed il modulo elastico hanno sulla posizione del massimo CoMAC. Si ribadisce ancora una volta che l'indice di correlazione è calcolato tra i modi di vibrare di una catena con condizioni di vincolo e carico generiche rispetto a quelli relativi ad un unico punto (posto al 20% della luce) di un modello numerico di confronto.

Il materiale scelto per tale studio, come anticipato, è l'alluminio, la lunghezza della luce visibile è di  $4000 \text{ mm}$  e la sezione di  $15 \times 25 \text{ mm}^2$ .

Il calcolo del CoMAC ha originato delle curve della stessa forma di quelle riportate nel paragrafo precedente (ad esempio Fig.(2.23) e successive), ovvero caratterizzate dalla presenza di un unico punto di massimo assoluto. È stato inoltre possibile riscontrare, come ci si aspettava, anche lo stesso trend di

allontanamento di tale punto di massima correlazione dalla mezzeria della catena all'aumentare delle lunghezza effettiva della stessa.

Per questioni di brevità e dal momento che non aggiungono nulla rispetto a quanto prima spiegato e riportato nei paragrafi precedenti, non verranno riportate le immagini relative all'andamento del CoMAC per ogni set di condizioni al contorno ( $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$ ) simulati, ma si illustreranno solo i dati relativi alla posizione del punto di massimo.

L'influenza dei parametri di tiro assiale, rigidità dei vincoli e modulo elastico è stata inoltre valutata per quattro lunghezze differenti di catena. Fissando a priori una lunghezza visibile  $l_{visibile}$ , sono state considerate quali  $l_{effettiva}$  suoi incrementi del 1%, 2%, 5% e 10%.

Dal momento che per l'analisi di sensibilità che si vuole portare avanti non interessano casi specifici, ma importa valutare l'effetto dei parametri in casi estremi in modo da avere un'idea di quanto ampio è l'intervallo di variazione, sono state svolte per ogni lunghezza testata dodici simulazioni. Ogni simulazione è ottenuta combinando in modo diverso le seguenti caratteristiche:

- Tiro  $N/N_{sn}=0.2$  e  $N/N_{sn}=0.8$  per valutare le situazioni di basso ed alto carico assiale;
- Rigidità dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}=20$  e  $k_t/k_{t,eq}=100$  per simulare entrambi i casi di bassa ed alta rigidità;
- Modulo elastico  $E$ . Per questo sono stati imposti il valore nominale dell'alluminio di  $68670 MPa$  e quelli pari al  $\pm 5\%$  di variazione di quest'ultimo.

In Fig.(2.46) si riportano le posizioni dei massimi, con relativa sensibilità alle variabili sopracitate per una lunghezza di luce visibile di  $4000$  mm. Si specifica che i grafici sono stati ricavati a partire da valori di  $N/N_{sn}=0.2$  e  $k_t/k_{t,eq}=20$ , evidenziati dalla linea in blu.

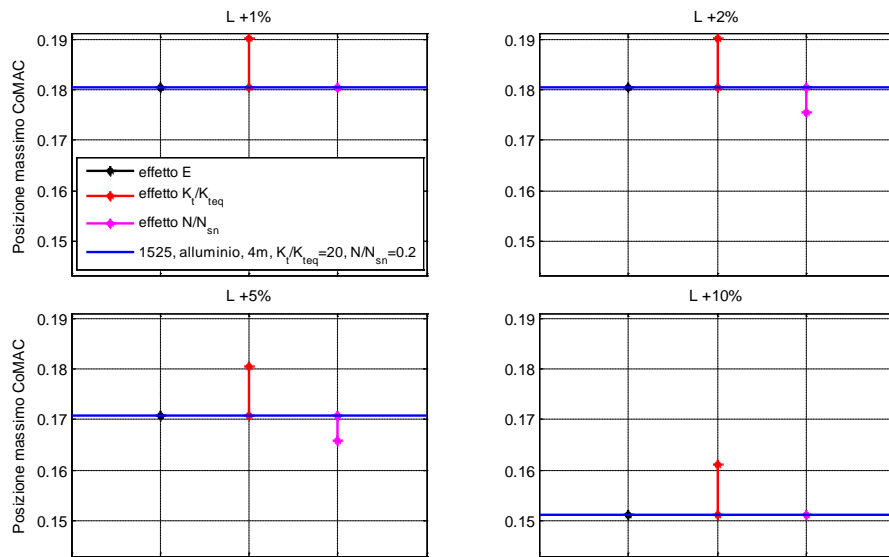


Figura 2. 46 Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per diverse lunghezze effettive della catena e lunghezza visibile di 4000 mm

Dall'immagine sopra-riportata si nota come il parametro che presenta una maggiore influenza sulla posizione del massimo è senza dubbio la rigidità dei vincoli. In particolar modo quando il valore  $k_t/k_{t,eq}$  aumenta il massimo tende a posizionarsi in un punto più centrale della luce della catena.

In merito al tiro assiale si evince come non sempre esso abbia influenza sulla posizione del massimo CoMAC (ad esempio grafico in basso a destra in Fig.(2.46)), ma qualora ce l'abbia un suo aumento si manifesta in maniera opposta rispetto a quanto faccia la rigidità, ovvero allontana il punto di massimo dalla mezzeria della catena.

L'influenza del modulo elastico  $E$  è invece praticamente assente indipendentemente da quanto il modello di catena reale sia lungo.

L'ultimo parametro rilevante di cui resta da valutare l'influenza è la snellezza  $\lambda$  della catena. In Fig.(2.47) si illustrano perciò le posizioni dei massimi relativi a catene con una lunghezza di luce visibile di 10000 mm.



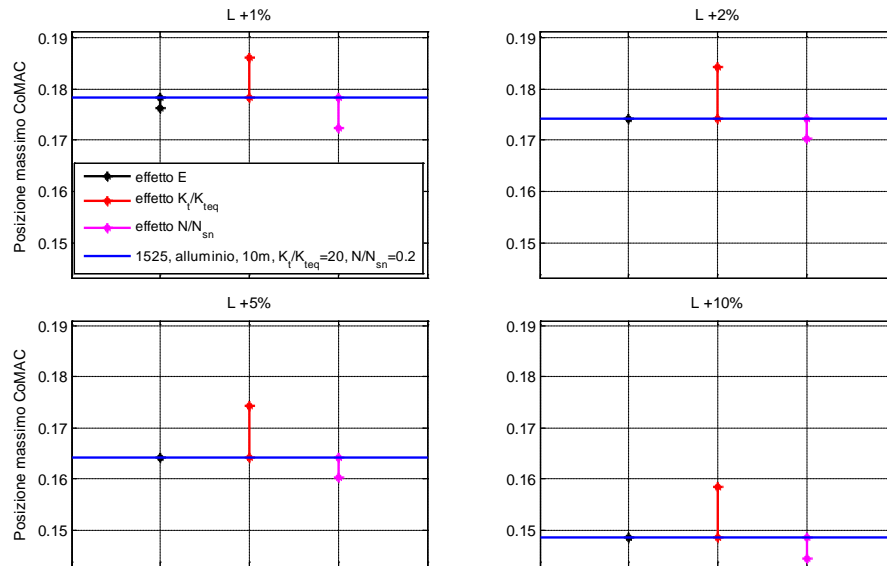


Figura 2. 47 Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per diverse lunghezze effettive della catena e lunghezza visibile di 10000 mm

Con una catena più snella è possibile osservare che l'influenza del parametro di rigidità, sebbene resti il preponderante, ha un effetto minore rispetto a quello riportato in Fig.(2.46). Al contrario l'azione assiale, come ci si aspettava dalla conclusioni dei Paragrafi 2.3.1 e 2.4.2, mostra adesso una maggior rilevanza, andando ad agire in maniera riconoscibile su tutte le lunghezze simulate. Il modulo elastico invece, ad eccezione di un piccolo effetto per l'incremento di lunghezza dell'1%, continua a non far sentire la sua influenza.

Al di là dell'influenza della snellezza, che non interessa ai fini di questo lavoro, è possibile comunque trarre delle conclusioni di carattere generale circa i risultati di quest'analisi di sensibilità.

In primis viene confermato che all'aumentare della lunghezza effettiva della catena il punto di massimo tende ad avvicinarsi al vincolo più vicino, nello specifico verso il vincolo sinistro della catena.

In secondo luogo si nota che non si è in grado di distinguere tra loro piccole variazioni percentuali di lunghezza come quelle tra l'1% ed il 2%. Un modo per migliorare teoricamente tale problematica può essere quello di migliorare la risoluzione del metodo mediante l'impiego di un maggior numero di elementi finiti. Tale aspetto verrà comunque approfondito in seguito.

Come terza conclusione si può addurre che qualora si stabilisca a priori un valore del modulo di Young  $E$  non si incorrerebbe in errori rilevanti, mentre non si può dire lo stesso per il tiro ed in particolar modo per la rigidità dei vincoli che, di conseguenza, è sempre meglio continuare a considerare come incogniti.

Si riportano ora nelle Fig.(2.48) e (2.49) le posizioni dei punti del massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva del modello, rispettivamente per una catena con luce visibile di 4 m e di 10 m, per i casi ottenuti combinando le

situazioni di alto e basso carico assiale, con quelle di alta e bassa rigidezza dei vincoli.

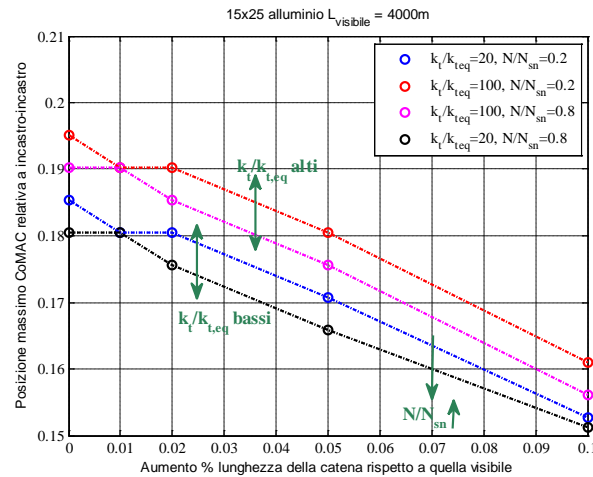


Figura 2. 48 Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per una luce visibile di 4000 mm

Dalla Fig.(2.48) si nota come siano nettamente distinguibili le posizioni del massimo CoMAC nei casi di alta e bassa rigidezza dei vincoli. In particolar modo viene ribadito come per valori alti di rigidezza il punto di massima correlazione si trova in posizioni tendenti al centro della catena. Tale tendenza verso zone centrali viene poi aiutata da diminuzioni del tiro assiale. Quindi si può affermare che  $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$  si manifestano con effetti opposti sul comportamento della catena.

Si nota meglio inoltre che per variazioni di lunghezza inferiori al 2%, per l'alluminio non è mai possibile distinguere nettamente le posizioni del massimo CoMAC, infatti vi è la presenza di due tratti orizzontali nel grafico. Per lunghezze superiori si nota sia uno spostamento progressivo del massimo che viene ben descritto da un trend lineare, sia che le varie combinazioni di parametri danno origine a curve che non solo non si intersecano, ma restano circa parallele tra di loro. Si può quindi affermare che se nella realtà, oltre alle dimensioni della sezione ed alla tipologia di materiale, fossero noti anche il tiro assiale e la rigidezza del sistema di vincolo, sarebbe possibile definire un trend univoco nello spostamento del massimo tale da permettere di ben stimare la lunghezza effettiva della catena.

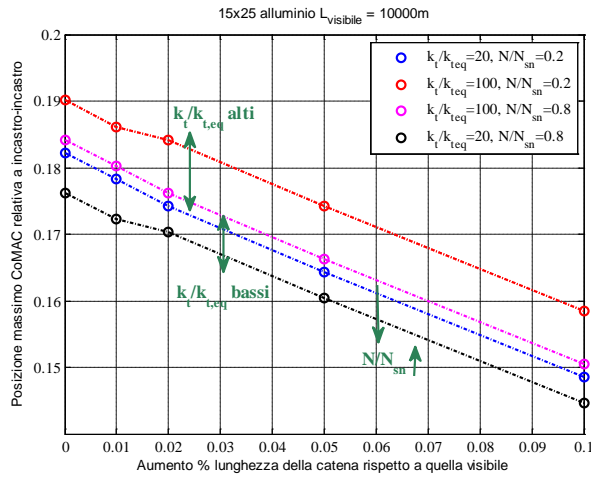


Figura 2. 49 Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per una luce visibile di 10000 mm

A partire dalla Fig.(2.49) si possono fare qualitativamente le medesime considerazioni della Fig.(2.48), ma emergono alcune evidenze.

Innanzitutto per una catena più snella risulta più semplice distinguere piccole variazioni percentuali di lunghezza, infatti si nota l'assenza di tratti orizzontali come quelli presenti in Fig.(2.48). In secondo luogo vi è ora una maggiore distanza tra i risultati relativi ad una rigidità dei vincoli alta ma con tiro differente. Viene quindi ribadito che uno degli effetti principe dell'aumento del parametro  $\lambda$  è una maggiore sensibilità tiro assiale  $N/N_{sn}$  ed una minore della rigidità dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$ .

Si può quindi concludere che fissati il materiale, la sezione e le condizioni di carico e vincolo, la posizione del punto di massimo CoMAC normalizzato sulla lunghezza di luce visibile dipende solo dagli incrementi percentuali di lunghezza e non da quanto la catena sia effettivamente lunga.

### 2.5.2 Determinazione del modello lineare

Viste tutte le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti, si vuole ora determinare quale sia il modello lineare che meglio permetta di stimare la lunghezza effettiva della catena. Per far ciò ci si baserà sull'equazione della retta generica:  $y = mx + q$ , in cui:

- $y$  corrisponde alla posizione del massimo CoMAC, espressa in termini adimensionali come rapporto tra la sua distanza dal vincolo sinistro della catena e la sua luce visibile;
- $x$  è la percentuale di cui maggiorare la lunghezza della luce visibile per stimare quella reale, ovvero in accordo alla (2.5):

$$l_{effettiva} = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot l_{visibile} \quad (2.5)$$

- $m$  e  $q$  dipenderanno dalla distribuzione dei dati in analisi. In particolare modo il coefficiente angolare  $m$  sarà negativo in modo da garantire un avvicinamento del punto di massimo CoMAC al vincolo all'aumentare della lunghezza, mentre per  $q$  ci si aspetta la posizione del massimo CoMAC quando la lunghezza effettiva eguaglia quella visibile.

In questo lavoro tale relazione è da utilizzarsi nella sua forma inversa secondo la (2.6):

$$x = \frac{y - q}{m} \quad (2.6)$$

Idealmente sarebbe possibile definire una retta specifica per ogni set di condizioni del problema. Dal momento che in un caso reale il valore del modulo di Young  $E$ , del tiro assiale  $N/N_{sn}$  e della rigidità dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$  sono incogniti, è più utile definire una sola retta che permetta di descrivere il comportamento di una catena di lunghezza e dimensione della sezione pari a quelle misurabili in situ, ma che possa essere di una qualsiasi lega di alluminio, oltre che genericamente vincolata e caricata. Da qui in avanti questa retta verrà definita come *retta di stima*.

Per determinare il coefficiente angolare  $m$  e l'intercetta  $q$  di tale *retta di stima* si è ricorsi all'utilizzo di una regressione lineare, con annessa minimizzazione ai minimi quadrati.

Come parametri di ingresso della regressione sono stati utilizzati, secondo la nomenclatura precedentemente definita, i punti  $(x_{fem}, y_{fem})$  ricavati dai risultati delle simulazioni Abaqus per tutte le combinazioni delle variabili nella Tabella (2.2). Si ricorda nuovamente che la sezione  $A$  è sempre di  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  e la lunghezza visibile della catena, nonché lunghezza effettiva del modello di confronto incastro-incastro, è di  $4000 \text{ mm}$ .

$l_{eff} [mm]$	$E [MPa]$	$N/N_{sn}$	$k_t/k_{t,eq}$
4040	65237	0.2	20
4080	68670	0.8	100
4200	72104		
4400			

Tabella 2. 1 Valori delle variabili combinabili per i modelli FEM

I risultati, sia in termini di punti  $(x,y)$ , che come equazione della retta interpolante, sono riportati nella Fig.(2.50) insieme al coefficiente di determinazione  $R^2$ . Quest'ultimo indica la bontà della regressione. Più esso tende all'unità, più i dati si dispongono effettivamente in accordo alla retta prevista dal modello regressivo. Avendo a che fare con un  $R^2$  pari circa a 0.81 si può ancora una volta ritenere ragionevole l'utilizzo di una relazione lineare.

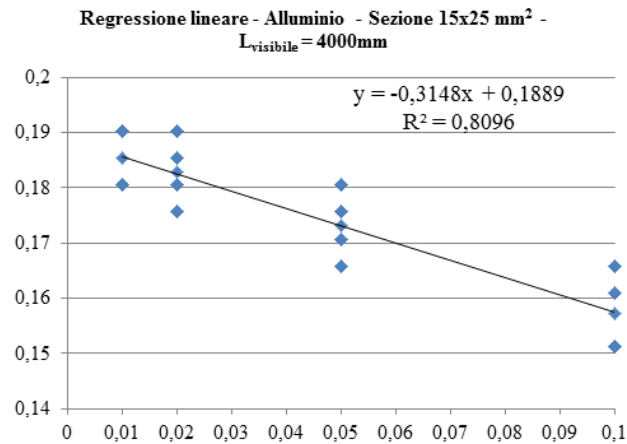


Figura 2. 50 Retta di regressione per la stima della lunghezza effettiva delle catene

Riguardo la dispersione dei dati attorno a questa retta, rifacendosi alle considerazioni delle Fig.(2.48) e (2.49), qualora ci si trovi al di sopra di essa è lecito aspettarsi di avere a che fare con un modello ad alta rigidezza dei vincoli e, tanto più i valori saranno alti, tanto più basso sarà il tiro assiale. Il comportamento contrario sarà invece presente per i valori che si trovano al di sotto della retta di regressione.

In Fig.(2.51) si riportano anche i valori dei residui  $\varepsilon$  che l'utilizzo di tale modello lineare comporta. Questi sono calcolati, imposta a priori la lunghezza effettiva della catena, in accordo all'Eq.(2.7):

$$\varepsilon = y_{fem} - y_{regr} \quad (2.7)$$

dove  $y_{fem}$  è appunto il valore che Abaqus calcola, caso per caso, al variare di tiro e rigidezza dei vincoli, mentre  $y_{regr}$  è la posizione del massimo CoMAC predetta dalla *retta di stima*.

Giacché i residui non mostrano la presenza di alcun trend si può ritenere la relazione lineare trovata come affidabile.

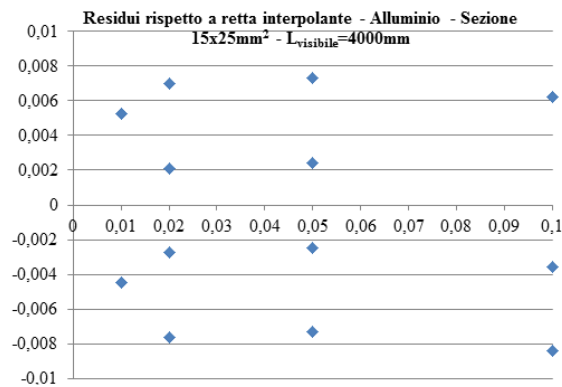


Figura 2. 51 Residui della rette di regressione per la stima della lunghezza effettiva

In Fig.(2.52) infine si illustra in modo semplificato come il metodo di stima verrà impiegato e come entrano in gioco i residui sopraccitati:

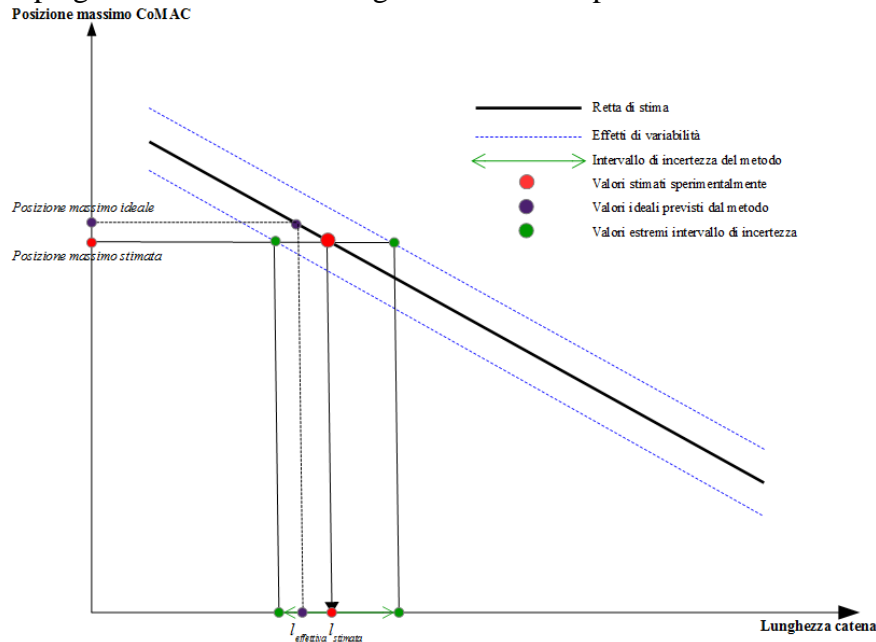


Figura 2. 52 Schema di funzionamento del metodo

La *retta di stima*, rappresentata dalla linea spessa in nero, definisce una relazione media tra la posizione del massimo CoMAC e la lunghezza della catena. Questa relazione permette, almeno a livello teorico, di stimare la lunghezza effettiva della catena a partire dalla posizione teorica del massimo CoMAC (punti in viola). Poiché la *retta di stima* è ottenuta attraverso un fitting di dati derivanti da casi specifici, che introducono quindi una certa dispersione ed incertezza nel metodo, in un caso pratico la lunghezza stimata potrebbe essere affetta da errore (punto in rosso sull'asse delle ascisse). Si hanno così degli scostamenti dal modello ideale. Questi definiscono l'intervallo in cui può manifestarsi la variabilità nei risultati, in termini sia di sovrastime che di sottostime. L'ampiezza di tali scostamenti (rappresentata dalle linee blu tratteggiate sopra e sotto la *retta di stima*) è comunque limitata e determinata dai valori massimi e minimi dei residui.

In ambito sperimentale la procedura che si seguirà per poter utilizzare il metodo di stima è la seguente: a valle delle misurazioni si individua sulla catena la posizione del massimo CoMAC. Questa posizione costituisce nel grafico di Fig.(2.52) il valore di entrata sull'asse delle ordinate (punto in rosso). A partire da questo valore sull'asse y, tracciando una retta parallela all'asse x ed intersecando con la retta di stima, si ricava la stima della lunghezza effettiva della catena (punto in rosso sull'asse delle ascisse). Questa, come detto sopra, potrebbe essere affetta da errore. Le intersezioni con le rette tratteggiate in blu (punti in verde) aiutano in questo senso fornendo un intervallo di incertezza

(doppia freccia in verde) in cui ci si aspetta trovare il valore vero della lunghezza effettiva (punto in viola sull'asse delle ascisse).

Sebbene si confidi nell'applicabilità della tecnica di stima, prima di validare la relazione lineare trovata a livello sperimentale, è opportuno procedere ad un'analisi sull'attendibilità dei risultati finora ottenuti.

Per far questo si ricorrerà al metodo Monte Carlo che, inoltre, permetterà di stimare gli intervalli d'errore percentuale del metodo proposto.

Comunque, prima di far ciò, si analizzerà l'influenza quantitativa della discretizzazione della mesh sul modello lineare regressivo messo a punto in questo paragrafo.

### 2.5.3 Influenza della discretizzazione del modello sulla regressione lineare

La relazione lineare individuata per la stima della lunghezza effettiva delle catene è stata ottenuta a partire da modelli discretizzati con elementi finiti della lunghezza di 2 cm.

In questo paragrafo si vuole studiare l'influenza dell'infittimento della mesh sull'estrazione dei dati che fanno poi da input alla procedura di regressione. Si ritiene infatti che, con un maggior numero di nodi a disposizione, la posizione del massimo CoMAC possa essere diversa da quella precedentemente rilevata. Si è scelto quindi di discretizzare i modelli di catena del paragrafo precedente ogni 5 mm.

Si riportano in Fig.(2.53) le posizioni dei massimi, con relativa sensibilità alle variabili sopracitate, per una catena la cui luce visibile è di 4000 mm in modo da avere un confronto diretto con i risultati di Fig.(2.46).

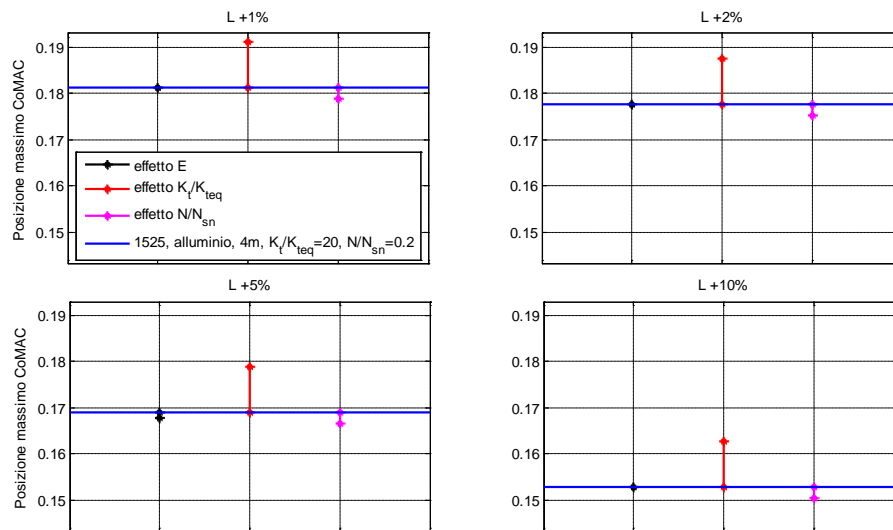


Figura 2. 53 Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per diverse lunghezze effettive della catena, lunghezza visibile di 4000 mm e risoluzione di 5 mm

Analogamente a quanto ricavato nel Paragrafo 2.1.1, è possibile notare come la variazione del modulo di Young  $E$ , anche migliorando la risoluzione, continui a non avere effetto sui risultati. Riguardo la rigidità dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$  ancora una volta si dimostra essere il parametro più rilevante, mentre il tiro assiale  $N/N_{sn}$  causa spostamenti del massimo di entità inferiori. L'influenza di queste ultime due variabili causa adesso gli stessi spostamenti percentuali del massimo CoMAC per ogni lunghezza testata (aumenti di circa 1% per  $k_t/k_{t,eq}$ , diminuzioni di 0.4% per  $N/N_{sn}$ ). Invece nel caso con risoluzione di 2 cm di Fig.(2.48), invece, per uguali variazioni dello stesso parametro si hanno spostamenti di entità diversa del massimo CoMAC in funzione della lunghezza della catena sotto esame.

In merito alle posizioni specifiche assunte dai punti di massimo CoMAC rispetto al caso di Fig.(2.46) si può notare che si ha a che fare con valori in ordinata minori. Ciò indica che ci si è avvicinati verso il vincolo sinistro della struttura.

Se si presta attenzione agli incrementi di lunghezza dell'1% e del 2% di Fig.(2.46) e a quelli di Fig.(2.53), si nota che in quest'ultima è possibile distinguere le due posizioni base del massimo (linee in blu), mentre con una risoluzione di 2 cm no. Tuttavia a causa della variabilità introdotta da  $k_t/k_{t,eq}$  e  $N/N_{sn}$ , all'atto pratico le due lunghezze risultano ancora non discernibili. Si può quindi trarre la conclusione che anche con mesh più fitte il metodo continua a confondere variazioni di lunghezza percentualmente piccole.

Ripetendo quanto fatto con i dati delle simulazioni su mesh meno fitta, si riporta in Fig.(2.54) il risultato della regressione lineare:

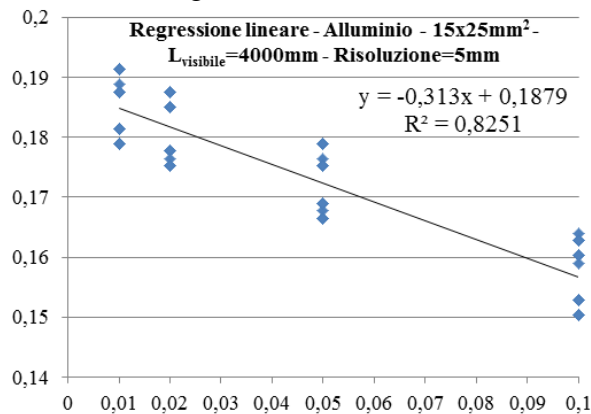


Figura 2. 54 Retta di regressione per la stima della lunghezza effettiva delle catene con mesh con elementi da 5 mm

Rispetto al caso precedente l'equazione della retta di regressione è variata in modo minimo in termini di coefficiente angolare e di intercetta. Tuttavia si può notare che, come detto sopra, i punti sono maggiormente distinguibili, permettendo una maggiore distinzione degli effetti di tiro e rigidità dei vincoli. Inoltre il coefficiente di determinazione  $R^2$  è aumentato di circa l'2.5%, a



dimostrare una maggiore tendenza dei dati a disporsi secondo un modello lineare.

Per quanto concerne l'analisi dei residui in Fig.(2.55) si nota che ancora una volta essi non presentano trend. In termini di dispersione massima e minima dei risultati non si riscontrano però miglioramenti significativi rispetto a Fig.(2.51).

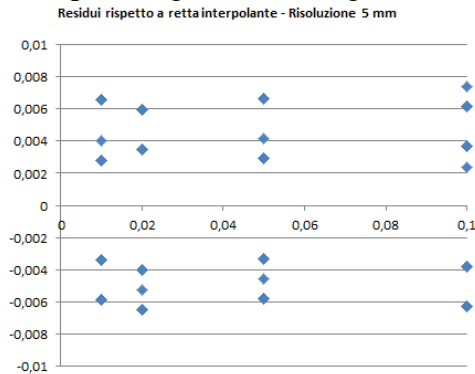


Figura 2. 55 Residui della rette di regressione per la stima della lunghezza effettiva con mesh da elementi da 5 mm

Si potrebbe quindi concludere che infittendo progressivamente la mesh si sarebbe in grado di distinguere variazioni di lunghezza via via più piccole. In merito all'accuratezza dei risultati non si avrebbero però miglioramenti.

In ogni caso, a causa delle difficoltà pratiche si avrebbero per via sperimentale a campionare tratti di catena così limitate con strumenti di dimensioni paragonabili alla lunghezza scelta per gli elementi finiti si preferisce continuare lo studio con mesh ancora una volta discretizzate ogni 2 cm.

## 2.6 Determinazione degli intervalli di errore ammissibili con analisi Monte Carlo

Per avere un'adeguata valutazione statistica della tecnica di stima della lunghezza effettiva delle catene proposta nel paragrafo precedente si implementa ora un'analisi Monte Carlo [18]. In particolar modo ciò a cui si mira è la determinazione, a parità di luce visibile, degli intervalli di errore associati a prefissati valori di lunghezza effettiva.

Dal momento che nei paragrafi precedenti si è simulata come lunghezza effettiva massima quella corrispondente ad un incremento del 10% della luce visibile, si è deciso di determinare dieci intervalli d'errore, corrispondenti ad incrementi percentuali di lunghezza dall'1% al 10%.

Riguardo l'utilizzo del metodo e la sua implementazione si rimanda al sottoparagrafo seguente.

Si anticipa che affinché i risultati di un'analisi Monte Carlo siano statisticamente attendibili è necessario svolgere un numero di simulazioni estremamente alto. Visto il numero di casi da testare e poiché il costo computazionale di ogni

simulazione non è trascurabile, sempre riferendosi a [18] è stato ritenuto sufficiente un numero di simulazioni pari a 200 per ogni lunghezza esaminata, per un totale di 2000 simulazioni complessive.

### 2.6.1 Definizione del processo di analisi

Lo svolgimento dell'intero processo d'analisi Monte Carlo, messo a punto per determinare statisticamente l'accuratezza del metodo di stima della lunghezza effettiva delle catene, si basa sulla seguente procedura iterativa:

1. Si definisce il modello di confronto incastro-incastro di lunghezza pari a quella visibile (4000 mm discretizzati ogni 2 cm nel caso in esame), sezione 15x25 mm<sup>2</sup>, modulo elastico  $E$  pari a quello nominale per l'alluminio e si calcolano i suoi modi di vibrare;
2. Si imposta a priori la lunghezza effettiva del modello reale da testare (e che viene mantenuta costante per le 200 simulazioni) partendo da  $l_{effettiva} = l_{visibile} \cdot 1.01$ ; la sezione della catena e la dimensione degli elementi finiti sono le medesime del modello di confronto;
3. Si calcolano i modi di vibrare dell' $i$ -esimo modello reale i cui valori di modulo di Young  $E$ , tiro assiale adimensionale  $N/N_{sn}$  e rigidezza dei vincoli  $k_v/k_{teq}$  sono estratti in modo random dai loro intervalli di variazione ammissibili. Tali intervalli sono riportati in Tabella (2.3);

Parametro	Range
$N/N_{sn}$	rand(0.1 ÷ 0.9)
$E$	rand(68670·0.95 ÷ 60670·2.05)
$k_v/k_{teq}$	rand(10 ÷ 300)

Tabella 2. 2 Parametri impostati per il modello di catena

4. Si calcola il CoMAC tra i modi di vibrare del modello incastrato e quelli dell' $i$ -esimo modello reale. Si determina quindi la posizione del massimo;
5. Nota la posizione del massimo CoMAC, che funge da variabile  $y$ , si calcola, mediante l'utilizzo dell'Eq.(2.6), la percentuale  $x$  di cui incrementare la luce visibile per la stima della lunghezza effettiva della catena in accordo all'Eq.(2.5). I coefficienti  $m$  e  $q$  dell'equazione (2.6) sono naturalmente quelli della retta di regressione riportata nel Paragrafo 2.1.2;
6. Si calcola l'errore percentuale  $e_{i\%}$  di stima della lunghezza per l' $i$ -esima simulazione in accordo all'Eq. (2.8):

$$e_{i\%} = \frac{l_{stima} - l_{effettiva}}{l_{effettiva}} \cdot 100 \quad (2.8)$$

Dall'Eq.(2.8) discende che un errore percentuale negativo implica una sottostima della lunghezza effettiva della catena, mentre un valore positivo una sovrastima.

7. Si iterano i punti dal 3 al 6 per gli  $N=200$  casi dell'analisi;
8. Si calcola l'errore medio percentuale  $E_{\%}$  per la lunghezza effettiva sotto analisi secondo l'Eq.(2.9):

$$E_{\%} = \frac{\sum_{i=1}^N e_{i\%}}{N} \quad (2.9)$$

Riguardo il segno dell'errore percentuale medio  $E_{\%}$  valgono le stesse considerazioni fatte per  $e_{i\%}$  al punto 4. Il calcolo della deviazione standard  $\sigma_E$  non viene riportato perché, seppur dando un'idea sulla dispersione dei risultati rispetto alla media, non fornisce indicazioni in termini di incertezza ed intervalli di confidenza. Ciò presupporrebbe infatti l'ipotesi che i dati si dispongano come una distribuzione gaussiana.

9. Si ripetono i punti dal 3 all'8 per altre 9 volte, ciascuna incrementando la lunghezza effettiva della catena dell'1% ma lasciando quella visibile invariata, in modo da testare le dieci lunghezze prefissate.

### 2.6.2 Risultati dell'analisi Monte Carlo

Si procede ora alla presentazione dei risultati ottenuti dall'esecuzione delle dieci serie di prove Monte Carlo.

In Fig.(2.56) si riportano, per ogni aumento percentuale di lunghezza effettiva della catena rispetto alla visibile, gli intervalli d'errore del metodo. Questi sono stati valutati in termini di differenza tra errore massimo  $E_{\%,massimo}$  ed errore minimo  $E_{\%,minimo}$  individuati da ciascun set di simulazioni. Si riporta anche il valore dell'errore medio percentuale  $E_{\%}$  in quanto dà per l'appunto l'idea sul valore di errore che generalmente ci si aspetta avere dal metodo.

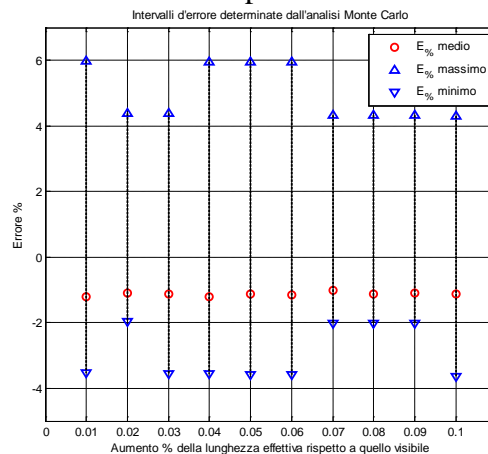


Figura 2. 56 Intervalli di errore Metodo Monte Carlo

Come si evince dalla figura soprariportata, il metodo tende mediamente a sottostimare la lunghezza effettiva della catena. Indipendentemente da quanto sia il valore di quest'ultima l'errore medio percentuale  $E\%$  tende ad attestarsi sempre intorno ad una sottostima del -1.1%. L'ampiezza degli intervalli d'errore presenta invece una maggiore variabilità in base alla lunghezza testata. Innanzitutto si nota come mediamente le percentuali di lunghezza minore (fino al 6%) siano quelle soggette ad errori massimi e minimi più alti.

In merito ai valori di errore massimo, che come ben si nota sono molto distanti dall'errore medio, si specifica che da un'analisi più attenta dei risultati delle singole simulazioni si è evinto che essi sono dovuti a combinazioni di rigidezza dei vincoli molto elevata ( $k_t/k_{t,eq} > 200$ ) congiunte a carichi bassissimi ( $N/N_{sn} < 0.05$ ). Dal momento che tali condizioni di vincolo e carico sono realisticamente poco plausibili, si può presupporre che in ambito pratico difficilmente si rischi di incorrere in errori così elevati.

Considerazione aggiuntiva riguarda i casi tali per cui  $l_{effettiva} = (1.01 \div 1.03) l_{visibile}$ . Per queste lunghezze si riscontrano infatti errori minimi in modulo maggiori rispettivamente del -1%, -2% e -3%. Per questi errori e quelli di valore assoluto ancora superiore il metodo stima una lunghezza effettiva minore della visibile. Dal momento che tale stima non è realistica, in un caso pratico si dichiarerebbe proprio la luce visibile come valore di output del metodo. In questo modo si andrebbe così a commettere un errore minore di quello teorico, in quanto per gli incrementi di lunghezza dell'1%, 2% e 3% l'errore minimo verrebbe automaticamente imposto al -1%, -2% e -3%. Tale considerazione è facilmente apprezzabile a partire dalle Fig.(2.57) e (2.58) rappresentanti il confronto tra lunghezza effettiva della catena e lunghezza stimata dal metodo rispettivamente per il caso senza e con correzione della sottostima. È bene evidenziare che i grafici delle Fig.(2.57) e (2.58), essendo basati sugli errori provenienti dalle simulazioni Monte Carlo, sono peggiorativi rispetto ad un caso reale. Come detto prima, infatti, con tali simulazioni gli errori massimi e minimi vengono determinati per combinazioni di condizioni al contorno non realistiche (in particolare catena con sistema di vincolo tendente ad un incastro perfetto e scarica assialmente, oppure catena soggetta ad un tiro prossimo allo snervamento e con vincoli schematizzabili come appoggi).

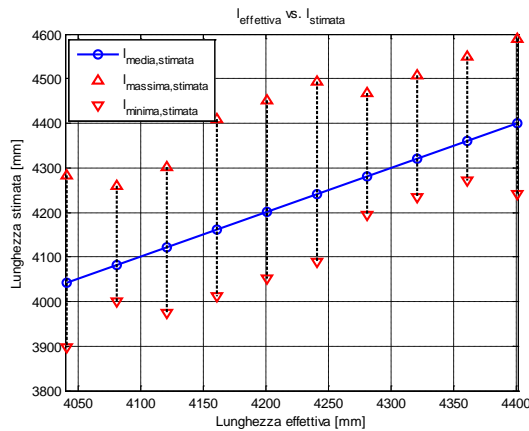


Figura 2. 57 Lunghezza stimata a partire dagli intervalli d'errore del Metodo Monte Carlo

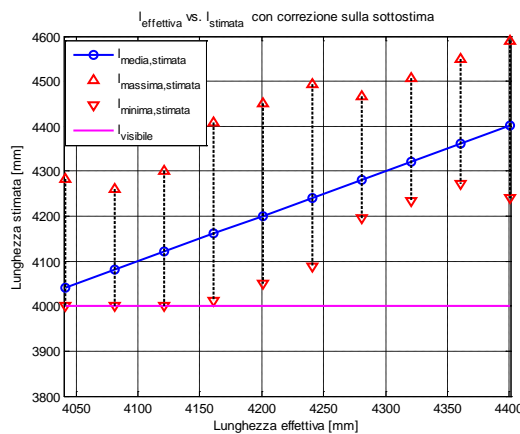


Figura 2. 58 Lunghezza stimata a partire dalla correzione della sottostima sugli intervalli di errore del Metodo Monte Carlo

Rispetto a Fig.(2.57), in Fig.(2.58) è ben visibile il limite di stima inferiore del metodo, pari come detto sopra alla luce visibile. Infatti tutte le lunghezze minori di 4000 mm sono state ritenute non ammissibili in modo automatico e corrette proprio con questo valore.

A partire dalla Fig.(2.58) è possibile fare considerazioni analoghe a quelle di Fig.(2.56). In particolar modo la Fig.(2.58) può essere letta in due sensi. Il primo è quello dell'approccio con cui tale grafico è stato ottenuto a valle delle analisi Monte Carlo. Ovvero supponendo che la lunghezza effettiva della catena sia nota a priori è possibile conoscere l'intervallo di lunghezze che il metodo di stima darà in uscita in base alla variabilità dei parametri in gioco (indicato dai segmenti tratteggiati delimitati dai triangoli in rosso). La seconda modalità di lettura di Fig.(2.58) è quella che verrebbe utilizzata in ambito pratico. Ad esempio, nota a valle di attività sperimentali la lunghezza stimata, che costituisce l'ingresso y nel grafico, è possibile risalire, tracciando una retta parallela all'asse x, ad un range di lunghezze effettive plausibili basandosi sulla

prima e sull'ultima intersezione con gli intervalli di variabilità (segmenti verticali tratteggiati). Questo range di lunghezze permetterebbe così di avere un'idea di quanto al massimo o al minimo la catena è realmente lunga. Per il caso attuale di catena di alluminio si nota come se si tracciassero effettivamente queste linee parallele all'asse  $x$ , verrebbero intersecati al più 8 segmenti verticali. Ciò indica che al massimo l'incertezza che accompagna la lunghezza stimata è del 7%. Se però lo stesso grafico venisse invece riprodotto utilizzando come errore massimo ed errore minimo non quelli del metodo Monte Carlo, ma quelli provenienti dai set di condizioni al contorno di  $N/N_{sn}=0.2-k_t/k_{t,eq}=100$  e  $N/N_{sn}=0.8-k_t/k_{t,eq}=20$ , che tra i casi realistici si erano dimostrati i più critici per la *retta di stima*, si riscontrerebbe un'incertezza massima del 5%. Di conseguenza, giacché il metodo deve essere applicato in ambito sperimentale, dove condizioni critiche come quelle delle analisi Monte Carlo non sono riscontrabili, si può concludere che l'incertezza massima che accompagna le stime relative a catene in alluminio è del 5%.

Dal momento che nel Capitolo 1 era stato specificato che per permettere anche una stima accurata del tiro assiale  $N/N_{sn}$  [1] è importante ottenere incertezze contenute e proprio nell'ordine del 5%, il metodo qui implementato risponde bene a questa esigenza. Se poi si considerano i risultati inerenti all'acciaio, che è il materiale per cui in realtà si trova il maggior numero di applicazioni, si nota che tale affermazione è ancora più veritiera.

Si riportano nelle Fig.(2.59), (2.60) e (2.61) la *retta di stima*, gli intervalli d'errore del Metodo Monte Carlo e il confronto tra lunghezza effettiva e lunghezza stimata per una catena in acciaio, di sezione  $A 15x25 \text{ mm}^2$  e luce visibile di  $4000 \text{ mm}$ .

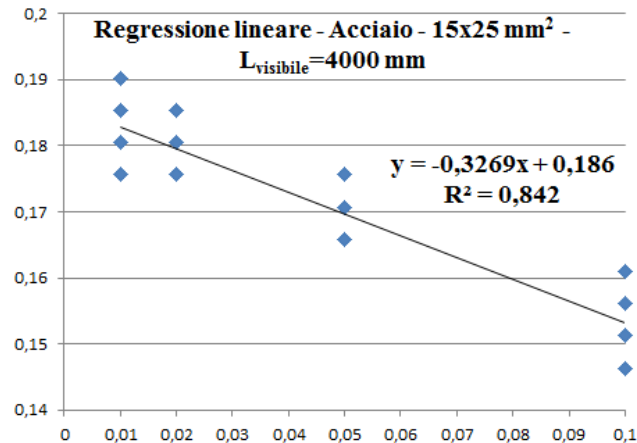


Figura 2. 59 Retta di regressione per la stima della lunghezza effettiva delle catene – acciaio

Confrontando Fig.(2.59) con Fig.(2.50) si nota come per l'acciaio la *retta di stima* presenti sia una pendenza in valore assoluto maggiore, sia un coefficiente di determinazione  $R^2$  più elevato. Il primo valore indica che adesso risulterà più semplice discernere lunghezze effettive differenti in quanto gli intervalli di

variabilità tenderanno a sovrapporsi meno. Il secondo valore, essendo più alto di oltre il 3%, mostra che i dati sono meno dispersi e si accordano meglio al fitting lineare di quanto non avvenisse per l'alluminio. Dalla sola valutazione di pendenza e  $R^2$  ci si aspetta, quindi, che le analisi successive dimostrino che per l'acciaio il metodo sia caratterizzato da incertezze minori.

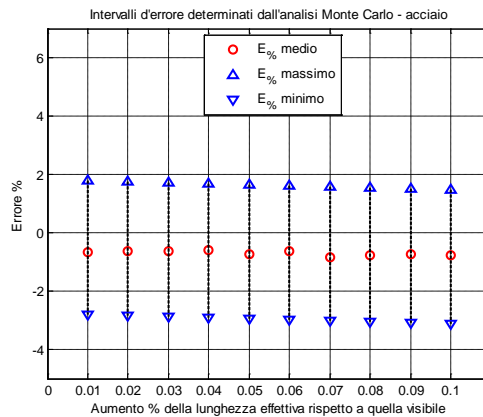


Figura 2. 60 Intervalli di errore Metodo Monte Carlo – acciaio

Confrontando Fig.(2.60) con Fig.(2.56) si nota subito come per l'acciaio gli intervalli d'errore che il Metodo Monte Carlo restituisce sono nettamente inferiori. L'errore massimo è limitato al 2% rispetto al 6% dell'alluminio, il minimo al -3% ed anche l'errore medio  $E_{\%}$ , pur indicando che il metodo continua mediamente a sottostimare la lunghezza effettiva, si è ridotto dall'essere circa del -1.1% al -0.7%. In merito al bias del metodo si evince poi che esso riguarda adesso solo i casi di lunghezza incrementate dell'1% e del 2%.

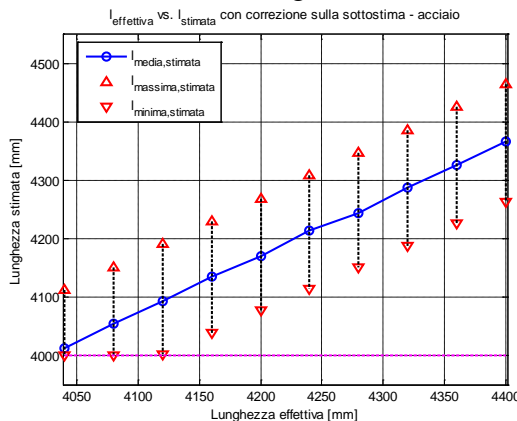


Figura 2. 61 Lunghezza stimata a partire dalla correzione della sottostima sugli intervalli di errore del Metodo Monte Carlo – acciaio

Infine da Fig.(2.61), facendo il paragone con Fig.(2.58), è possibile apprezzare che la spezzata indicante la lunghezza media stimata (in blu) ha una maggiore pendenza. Dal momento che idealmente con una pendenza di  $45^\circ$  si avrebbe

esatta corrispondenza tra lunghezza effettiva e lunghezza stimata, il metodo di stima applicato a catene in acciaio si dimostra senz'altro più preciso.

La considerazione più importante riguarda però l'incertezza di cui la stima della lunghezza effettiva è affetta. Si era infatti detto che per l'alluminio questa era al più del 7% se si consideravano i casi peggiorativi del metodo Monte Carlo e che per l'acciaio ci si aspettava un valore inferiore. Tracciando idealmente delle linee parallele all'asse  $x$  in Fig.(2.61) si noterebbe come, nel peggiore dei casi, verrebbero intersecati al più sette intervalli di variabilità (segmenti tratteggiati in nero) e che quindi l'incertezza si attesta al 6%. Tale risultato dimostra quindi come già in un caso peggiorativo il comportamento dell'acciaio sia migliore rispetto a quello dell'alluminio. Se anche Fig.(2.61), come detto per Fig.(2.58), venisse però riprodotta sfruttando gli errori massimi e minimi provenienti da set di condizioni al contorno realistici, si riscontrerebbe che l'incertezza massima che caratterizza le stime di lunghezza per le catene in acciaio è al più del 4%. Tale risultato è molto buono non solo ai fini dell'identificazione della lunghezza in sé, ma anche per una corretta stima del tiro assiale  $N/N_{sn}$  [1].

Concludendo, ciò che il metodo implementato in questo capitolo fornisce all'utente è in primis la possibilità di avere una stima della lunghezza effettiva di una catena indipendentemente da come questa sia allocata nelle pareti della struttura. Sono sufficienti esclusivamente i dati geometrici e del materiale reperibili in situ oltre che, naturalmente, le informazioni relative ai modi di vibrare della catena. Riguardo quest'ultimi, non interesserà conoscerli lungo l'intero sviluppo della struttura, ma solo in pochi punti significativi. Questi, come verrà meglio spiegato nel capitolo relativo alla validazione sperimentale, corrisponderanno alla posizione in cui il metodo regressivo prevede il massimo CoMAC e da un numero punti adiacenti, scelto arbitrariamente dall'utente, al fine di riconoscere dove effettivamente il massimo vada a collocarsi nel caso reale. Il metodo è quindi esente da forzature relative ad ipotesi non verificabili circa gli altri parametri della struttura. La stima viene inoltre arricchita dalla conoscenza di quanto essa possa scostarsi dal valore reale grazie a degli intervalli di variabilità ottenuti combinando situazioni di vincolo e carico estremi. Tale informazione, come anticipato sia sopra, sia nel Capitolo 1, può essere molto utile in situazioni pratiche. Per esempio, qualora debbano essere effettuati lavori in un edificio che presenti catene, avere un'idea di quanto queste possano protendersi nelle pareti previene dal rischio di danneggiarle o di danneggiarne la sede. In una situazione del genere si potrebbero infatti avere serie ripercussioni sull'equilibrio statico della struttura e sull'assestamento degli sforzi assiali nelle pareti. Inoltre, come già specificato, tale metodo risponde all'obiettivo di ottenere stime della lunghezza caratterizzate da un livello di incertezza prossimo al 5% (e addirittura inferiore qualora le catene siano in acciaio) in modo da poter ricavare, con l'utilizzo dell'algoritmo [1], anche una accurata identificazione anche del tiro assiale  $N/N_{sn}$



## Capitolo 3

### Attività sperimentale

Nel Capitolo 2, attraverso varie simulazioni FEM basate sull'analisi modale, sono state messe in luce alcune peculiarità riguardanti il comportamento delle catene al variare sia della loro lunghezza effettiva, che delle condizioni di carico assiale  $N/N_{sn}$  e di rigidità del sistema di vincolo  $k_t/k_{t,eq}$ . Il tutto è stato finalizzato all'identificazione di un qualche comportamento di carattere generale che permettesse di stimare proprio la lunghezza effettiva delle catene.

Per far ciò ci si è riferiti sempre ad analisi basate sul calcolo dell'indice di correlazione CoMAC. Questo è stato valutato tra le prime sei forme modali di un modello FEM di catena del tipo riportato in Fig.(3.1), con quelle di un modello di confronto perfettamente incastrato. Si ricorda dal Paragrafo 2.2 che il modello di confronto non è soggetto ad alcun carico assiale, ha lunghezza pari a quella visibile della catena in Fig.(3.1), stessa sezione ed è nominalmente dello stesso materiale di quest'ultima. Il CoMAC, per la precisione, è stato calcolato per tutti i punti della catena appartenenti alla sua luce visibile rispetto al solo punto del modello incastrato sito al 20% della sua luce.

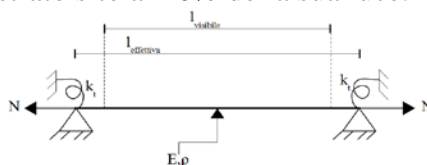


Figura 3. 1 Modello di catena usato per le simulazioni

Sempre nel capitolo precedente è stato quindi definito il metodo di stima della lunghezza effettiva di una catena. Questo si basa esclusivamente sulla conoscenza delle sole grandezze misurabili in situ, ovvero lunghezza della luce visibile, sezione del tirante e tipologia generica di materiale. Le altre caratteristiche ( $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$ ) sono invece state considerate come non note e non imposte a priori per non viziare in alcun modo il processo di definizione ed applicabilità del metodo. È stata quindi identificata una relazione lineare che permette di legare la lunghezza effettiva delle catene alla posizione in cui si rileva il massimo CoMAC. Questa retta è stata ottenuta tramite un processo regressivo ai minimi quadrati basato sui risultati di simulazioni FEM effettuate con valori dei parametri fisici del modello scelti *ad hoc*. Infine, in seguito a delle serie di simulazioni Monte Carlo, si è quantificata l'accuratezza del metodo di stima in termini statistici.

Ciò di cui ora necessita questo metodo di stima per esser considerato effettivamente applicabile, è un processo di validazione sperimentale. Questo sarà l'oggetto del presente capitolo.

Si anticipa brevemente che sebbene con le analisi Monte Carlo del Paragrafo 2.6 siano state testate molte combinazioni random di parametri del modello di catena reale, l'analisi di sensibilità condotta nel Paragrafo 2.5.1 ha messo in luce che il caso più critico è quello con basso tiro ed alta rigidità dei vincoli ( $k_t/k_{t,eq}=100$ ,  $N/N_{sn}=0.2$ ). Questo infatti, per entrambe le tipologie di catena con luce visibile di 4 m e 10 m, presenta i maggiori scostamenti della posizione del massimo CoMAC rispetto a quelli predetti dal modello regressivo implementato. Si ritiene quindi opportuno testare innanzitutto questo caso e, per una maggior completezza, le situazioni di alta rigidità e tiro più elevato e due casi a bassa rigidità (con azione assiale di valore intermedio o basso). Non si testano tiri assiali molto elevati (superiori al 60% del carico di snervamento) in quanto tali valori sono poco plausibili in applicazioni reali. Si svilupperebbero infatti eccessive tensioni nelle pareti della struttura in cui la catena alloggia.

Si procede ora innanzitutto alla descrizione del set-up sperimentale messo a punto. In seguito verranno introdotte la tipologia di forzamento utilizzato e la tecnica di identificazione modale impiegata per poter calcolare l'indice CoMAC. Infine si esporranno e verranno discussi in modo estensivo i risultati ottenuti.

### 3.1 Progetto del sistema di sperimentazione

Ciò che si vuole portare avanti in questo capitolo è l'ottenimento di un processo di validazione sperimentale del metodo di stima della lunghezza effettiva delle catene proposto nel Capitolo 2. Per poter far ciò è necessario ricreare in laboratorio delle condizioni che si avvicinino il più possibile almeno ad uno dei casi simulati con le analisi agli elementi finiti.

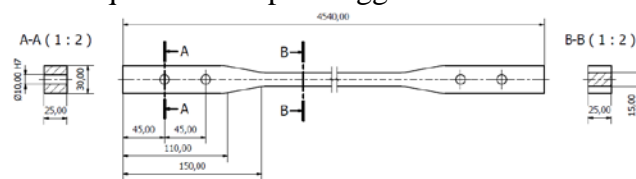
Il caso teorico con cui si sceglie di effettuare la validazione è quello di catena in alluminio, di lunghezza di 3996 mm e sezione  $A$  di  $15 \times 25$  mm<sup>3</sup>. A tal scopo è stato quindi utilizzato in laboratorio un tirante con le caratteristiche elencate in Tabella (3.1):

<b>Caratteristiche catena utilizzata</b>		
<b>Materiale Al 3003</b>		
$E_{nom}$	66552	MPa
$\rho$	2690	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma_{sn}$	40	MPa
<b>Sezione rettangolare</b>		
a	15	mm
b	25	mm
A	375	mm <sup>2</sup>
J	19531	mm <sup>4</sup>
$N_{sn}$	15000	N
<b>Lunghezza</b>		
$l_{effettiva}$	3996	mm

**Tabella 3. 1** Caratteristiche della catena impiegata per le prove in laboratorio

Questa catena è stata inoltre sottoposta a condizioni di carico e vincolo differenti in modo da poter avere una casistica completa del comportamento della stessa durante la validazione del metodo. Tali condizioni verranno poi descritte nei paragrafi successivi, ma si anticipa che la scelta dell'alluminio è stata finalizzata, sin dal principio di questo lavoro, alla possibilità di raggiungere carichi assiali elevati con semplici operazioni manuali. Un catena di un materiale con un modulo di Young più elevato, come per esempio l'acciaio, avrebbe comportato in tal senso delle maggiori complicazioni.

Si specifica inoltre che la lunghezza che da qui in avanti verrà indicata come effettiva è quella che presenta la sezione A desiderata. La catena infatti ha una lunghezza complessiva maggiore con estremità di sezione differente rispetto a quella prima citata. Tali zone servono solo per poter ancorare in modo adeguato il tirante alle strutture di prova e non hanno influenza né sullo svolgimento dei test, né sulle caratteristiche delle condizioni di vincolo che si vogliono simulare. In Fig.(3.2) si illustra quanto detto per maggiore chiarezza.



**Figura 3. 2** Disegno quotato della catena

### 3.1.1 Elementi strutturali aggiuntivi

Come anticipato, per la realizzazione delle prove era fondamentale sia che la catena venisse bloccata da elementi che simulassero l'effetto del vincolo delle pareti, sia avere la possibilità di applicare ad essa un determinato tiro assiale  $N/N_{sn}$  ed eventualmente variarlo.

Per la prima necessità si è ricorsi ad un sistema composto da tre elementi: una squadra per il fissaggio, una morsa ed un porta-morsa, tutti in acciaio Fe430. La scelta di questo materiale permette di mettersi dal punto di vista della sicurezza qualora si decidesse di applicare carichi elevati al tirante. Tale sistema è illustrato in Fig.(3.3).



Figura 3. 3 Componenti sistema di vincolo

La squadra costituisce l'elemento di vincolo a terra. Su di essa viene collegato mediante bulloni M18 il porta-morsa, formato da una piastra inferiore ed una superiore, che fungerà invece da elemento di fissaggio per la morsa. Quest'ultima è l'elemento che collega la catena al sistema di vincolo; è costituita anch'essa da due piastre sovrapposte spesse 2 cm e serrate tramite otto bulloni M13. Si anticipa che proprio tra queste due piastre, quando si vorrà analizzare l'effetto di una variazione della rigidezza  $k_t/k_{t,eq}$  del sistema di vincolo, verrà interposta della gomma ai fini di aumentarne la cedevolezza. Per quanto riguarda l'applicazione del tiro si è ricorso all'utilizzo di un tenditore M12 come quello in Fig.(3.4). Questo è stato posizionato a valle del sistema di vincolo in modo da non influire sulla dinamica della catena. Esso infatti non costituisce una massa concentrata di cui tenere ulteriormente conto nel modello.



Figura 3. 4 Tenditore a cannula

Se da una parte il tenditore è collegato mediante un perno al sistema di vincolo della catena, dall'altro è collegato ad una cella di carico che permette di misurare in tempo reale il tiro assiale  $N/N_{sn}$  che viene applicato alla struttura. Si specifica che per come è stato realizzato il sistema di vincolo, una volta chiuse le morse, anche se si annullasse il tiro sul tenditore, la catena rimarrebbe comunque caricata assialmente. Da qui discende anche l'ininfluenza del tenditore da un punto di vista dinamico.

Il sistema sopra descritto è rappresentato in modo schematico nella Fig.(3.5):

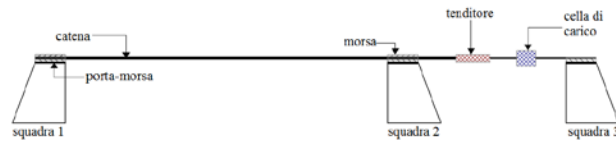


Figura 3. 5 Schema del sistema sperimentale impiegato per la validazione del metodo

La terza squadra riportata in Fig.(3.5) è stata utilizzata solo per tenere in asse il sistema di perni a cui si collegano il tenditore e la cella di carico, non ha altre funzioni ai fini dello studio.

### 3.1.2 Strumenti di misura

Per eseguire tutte le prove e poter avere a disposizione i dati risultanti dalle misurazioni che si intende effettuare, è stata utilizzata la seguente strumentazione:

- **Martello dinamometrico.** È stato impiegato per imporre una forzante di tipo impulsivo al sistema. La punta è stata scelta in modo da eccitare tutte le frequenze utili all'analisi. Poiché nel caso in esame per identificare tutte le forme modali di interesse è necessario lo spettro della catena da 0 Hz a 600 Hz, si è scelta una punta in gomma in quanto garantisce uno spettro piatto fino a circa 800 Hz. Il martello impiegato per le prove è un PCB modello 086C03 con una sensibilità di  $3.361 \text{ mV/N}$  come quello riportato in Fig.(3.6).



Figura 3. 6 Martello dinamometrico

- **Accelerometro.** È stato posizionato di volta in volta in punti specifici della catena per misurarne l'accelerazione conseguente al forzamento co-localizzato lungo l'asse gravitazionale  $y$ . Per l'identificazione dei primi sei modi di vibrare della struttura è stato scelto un modello di accelerometro con una banda passante ed un fondo scala adeguati. Sebbene si utilizzi poi un solo accelerometro, viste le dimensioni della catena e la necessità di non interferire sulla sua dinamica con problemi di effetto di carico, il sensore deve essere piccolo e di massa ridotta. Per tutte le motivazioni presentate la scelta è ricaduta sul modello PCB 333B30 le cui caratteristiche sono riportate in Tabella (3.2).


<b>Sensore</b> 	piezoelettrico tipo shear ICP ceramico
<b>Sensibilità nominale</b>	10.34 mV/m/s <sup>2</sup>
<b>Sensibilità trasversale</b>	≤5%
<b>Banda passante</b>	0.5 a 3000 Hz
<b>Banda passante per la fase (a 21 °C)</b>	2 a 3000 Hz
<b>Peso</b>	4 g
<b>Dimensioni (l x p x h)</b>	10.2mm x 16mm x 10.2mm

Tabella 3. 2 Caratteristiche dell'accelerometro impiegato

- **Cella di carico.** È utilizzata in fase di carico per misurare il tiro indotto nella catena in seguito alla progressiva chiusura del tenditore. Si utilizza una cella di carico HBM modello U2b [Fig.(3.7)] con fondo scala di 20 kN. Tale fondo scala risulta adatta al caso in esame in quanto si prevede di non superare gli 8 kN nell'applicazione del tiro.



Figura 3. 7 Cella di carico

- **Ponte estensimetrico.** Per tenere sotto controllo la misura del tiro assiale anche quando la cella di carico rimane isolata in seguito alla chiusura delle morse, si è ricorsi all'utilizzo di un ponte estensimetrico. In particolar modo la deformazione rilevata dagli estensimetri è convertita in un segnale in tensione da cui si può ricavare una diretta proporzionalità con tiro applicato alla catena. La configurazione adottata è quella di ponte intero per misure di deformazione assiale, con compensazione della flessione e dell'effetto della temperatura così come illustrato in Fig.(3.8) [19]. Vengono utilizzati estensimetri HBM modello Ly1 specifici per l'applicazione su alluminio. La taratura del ponte estensimetrico avviene con il confronto diretto con la cella di carico e la sua modalità e risultati saranno discussi in seguito.



Figura 3. 8 Ponte estensimetrico

- **Elettronica di condizionamento.** Per eseguire l'acquisizione dei dati saranno utilizzati amplificatori/condizionatori di misura HBM Scout 55 [Fig.(3.9)] e un sistema Daq National Instruments. Gli amplificatori/condizionatori di misura Scout 55 servono a visualizzare i dati in uscita dalla cella di carico e dal ponte estensimetrico al fine di controllare sia che il tiro sia quello desiderato, sia la coerenza tra i due valori così come previsto dalla curva di taratura del ponte estensimetrico. Per l'acquisizione dei segnali provenienti dall'accelerometro, dal martello dinamometrico, dalla cella e dagli estensimetri è stato utilizzato un sistema National Instruments composto da due moduli di condizionamento NI-9234 [Fig.(3.10)] montati in uno chassis cDAQ 9172 [Fig.(3.11)]. Quest'ultimo si interfaccia a un PC via USB e l'acquisizione dati avviene attraverso un apposito programma LabView.



Figura 3.9 Condizionatori di misura HBM Scout 55



Figura 3.10 Moduli di condizionamento



Figura 3.11 Chassis cDAQ 9172

### 3.1.3 Taratura del ponte estensimetrico

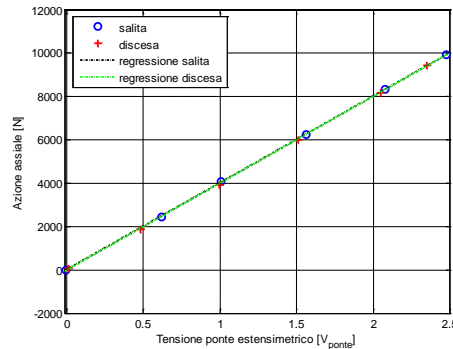
Come anticipato, per controllare che il valore di tiro desiderato sia lo stesso applicato alla catena e che questo non cambi nel tempo (per effetti dovuti alla temperatura, umidità o progressiva perdita di tenuta del sistema di serraggio) è stata eseguita la taratura del ponte estensimetrico.

Il processo di taratura avviene mediante un semplice confronto diretto tra il dato in tensione in uscita dal ponte estensimetrico  $V_{ponte}$  e quello della cella di carico  $V_{cc}$ . In particolar modo, avendo impostato una Scout 55 in modo che la sensibilità relativa alla cella di carico sia di  $0.5 \text{ V/kN}$ , si lega la tensione in uscita dal ponte estensimetrico  $V_{ponte}$  al carico applicato mediante una relazione lineare del tipo:

$$N = (mV_{ponte} + q) \cdot V_{cc} \cdot 0.5 \quad (3.1)$$

Dove  $m$  e  $q$  sono i coefficienti ottenuti attraverso una regressione lineare sui dati acquisiti.

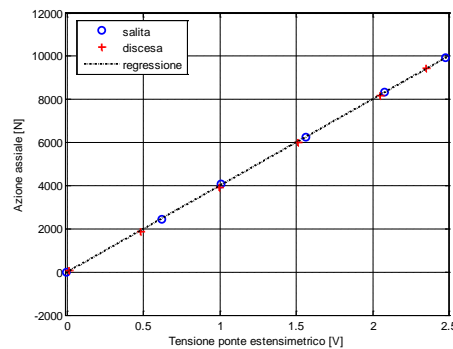
Si specifica che i dati per la taratura sono stati ottenuti prima caricando la catena in modo progressivo e poi scaricandola. In tal modo si voleva valutare che non vi fossero fenomeni di isteresi nel comportamento della struttura di prova. In Fig.(3.12) si riportano i dati campionati in discesa ed in salita e le due rette di regressione distinte.



**Figura 3. 12 Regressione lineare in fase di carico e scarico**

Come si può notare le rette di regressione risultano praticamente indistinguibili, si ha quindi la conferma di non essere in presenza di fenomeni di carattere isteretico ed è possibile utilizzare un'unica regressione su tutti i punti.

I risultati di quest'ultima regressione sono riportati in Fig.(3.13) ed i parametri della retta di regressione, comprensivi di coefficiente di determinazione  $R^2$  in Tabella (3.3):



**Figura 3. 13 Regressione lineare complessiva per la taratura del ponte estensimetrico**

$m$ [1/V]	$q$	$R^2$
<b>4016.2</b>	<b>-16.876</b>	<b>0.999</b>

**Tabella 3. 3 Risultati della regressione per la tarature del ponte estensimetrico**

Essendo il valore del coefficiente di determinazione  $R^2$  decisamente prossimo all'unità si ha la conferma che il fitting lineare dei dati per la taratura del ponte estensimetrico è assolutamente affidabile.



## 3.2 Impostazione delle prove sperimentali

Una volta descritte, nel Paragrafo 3.1, tutte le caratteristiche generali della strumentazione a disposizione in laboratorio per validare sperimentalmente il metodo di stima della lunghezza delle catene illustrato nel Capitolo 2, si vuole ora spiegare nel dettaglio la modalità di esecuzione delle prove effettuate.

### 3.2.1 Set-up sperimentale delle prove

Nota analiticamente il metodo di stima che si vuole validare ed una volta svolte tutte le prime operazioni necessarie alla taratura della strumentazione per la successiva acquisizione dei dati, si è passati allo svolgimento delle prove vere e proprie.

Per valutare il comportamento del metodo proposto nel Capitolo 2, si è deciso di testarlo per tre valori di lunghezza. In particolar modo, dal momento che l'estensione della catena è prefissata e non modificabile, si considererà questa come  $l_{effettiva}$  costante per tutte le prove. La lunghezza che verrà variata sarà invece la  $l_{visibile}$ . Questa sarà calcolata in modo che la variazione percentuale rispetto alla lunghezza effettiva corrisponda all'1%, al 5% ed al 10%. Sebbene nel Paragrafo 2.5 siano stati utilizzati tra i dati in ingresso per la regressione alla base del metodo di stima anche quelli relativi ad una variazione di lunghezza del 2%, questa casistica non verrà testata. Ciò in quanto già nelle analisi FEM i risultati delle simulazioni all'1% ed al 2% erano raramente distinguibili, per cui in un caso reale, con inevitabili errori di misura, fattori casuali e visto l'ingombro dello stesso accelerometro utilizzato, si rischierebbe di incorrere nella medesima situazione, non aggiungendo alcuna significatività allo studio.

Poiché il modello, così come descritto nelle ipotesi del Capitolo 2, deve essere simmetrico, si è supposto inoltre che la luce visibile sia in una posizione centrata rispetto alla lunghezza effettiva della catena.

A questo punto, noti i parametri geometrici del caso sperimentale, basandosi sulla *retta di stima* ottenuta nel Capitolo 2, sono state calcolate le posizioni sulla catena in cui ci si aspetta, almeno a livello teorico, di avere il massimo CoMAC per tutte e tre le variazioni percentuali di lunghezza. Proprio in questi punti verrà posizionato l'accelerometro per la successiva identificazione dei modi di vibrare.

Giacché la *retta di stima* è stata ottenuta a partire da un fitting di dati specifici, nonostante il suo indice di determinazione  $R^2$  sia elevato essa porta con sé un certo livello di incertezza nella stima della lunghezza effettiva. Ciò è dovuto in primis agli effetti delle varie combinazioni di condizioni di vincolo ( $k_v/k_{t,eq}$ ) e di carico ( $N/N_{sn}$ ) della catena. Questi infatti provocano degli shift nella posizione del punto di massimo CoMAC. Per esser quindi sicuri di stimare la lunghezza effettiva della catena basandosi sulla posizione in cui l'indice di correlazione ha il valore maggiore, le misure di accelerazione sono state effettuate non solo in

quella prevista teoricamente dal modello regressivo, ma anche in altri quattro punti distanti  $\pm 2$  cm e  $\pm 4$  cm, così come illustrato in Fig.(3.14). In questo modo si potrà infatti ricostruire l'andamento sperimentale della curva del CoMAC e individuarne il massimo.

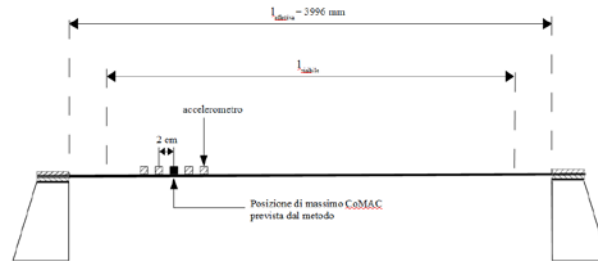


Figura 3. 14 Schema del set-up di misura

La scelta di tali spostamenti dell'accelerometro rispecchia la discretizzazione della mesh descritta nel Capitolo 1 di questo lavoro, ovvero che la catena sia composta da una successione di elementi finiti lunghi 2 cm.

Una volta acquisiti i dati relativi a questi cinque punti, il CoMAC verrà poi calcolato tra i modi di vibrare identificati per la catena sperimentale e quelli del punto sito al 20% della luce di un modello FEM incastro-incastro.

Come anticipato nel Paragrafo 3.1 tutte le prove sono state effettuate al variare di tiro e rigidità. In particolare si è deciso di combinare i seguenti casi:

- Tiro assiale adimensionale  $N/N_{sn} = [0.25, 0.5]$ ;
- Rigidità dei vincoli elevata e bassa.

In merito al tiro assiale  $N/N_{sn}$  i valori sopra riportati sono indicativi in quanto nel caso reale non si riesce ad imporlo esattamente viste le inevitabili incertezze dovute alla chiusura manuale del tenditore.

Per quanto riguarda la rigidità dei vincoli  $k_t/k_{req}$  non è possibile stabilire dei valori a priori. Ma dal momento che per le analisi da effettuare importa solo rappresentare le due macro-categorie di alta e bassa rigidità, non interessa impostare un valore numerico specifico. Per distinguere i due tipi di prove ci si basa sulla tipologia di contatto che la catena ha con il sistema di vincolo. Più specificatamente per le prove ad alta rigidità il tirante è stato direttamente bloccato tra le morse in acciaio, con un contatto metallo-metallo, mentre nel caso di bassa rigidità si avrà un contatto gomma-metallo. La gomma in particolare è stata introdotta in modo da ricoprire le piastre costituenti le morse prima di procedere al serraggio delle stesse.

Dalle considerazioni effettuate nel Capitolo 2 a valle dell'analisi di sensibilità del sistema, qualora non si riesca, a causa di tutte le fonti di incertezza, a stimare correttamente la lunghezza effettiva della catena, ci si aspetta che nei casi soggetti ad alta rigidità dei vincoli si vada mediamente incontro a delle sottostime. Per come è stata definita la *retta di stima*, gli errori di sottostima saranno facilmente riconoscibili dal fatto che il massimo CoMAC, invece di

essere riscontrato nel punto centrale dei cinque testati, si trovi alla sua destra, ovvero in uno dei due protesi verso la mezzeria del tirante.

### 3.2.2 Tipologia di forzamento e funzioni di risposta in frequenza

Per validare il metodo di stima della lunghezza effettiva delle catene ciò di cui si ha bisogno è la conoscenza delle costanti modali in pochi punti di quella a disposizione in laboratorio. In questo studio per scelta arbitraria i punti, come anticipato, sono cinque. Le costanti modali relative a quello sito al 20% della luce del modello di confronto perfettamente incastrato sono invece già note grazie alle simulazioni agli elementi finiti in Abaqus.

Per l'identificazione dei modi di vibrare sperimentali si è deciso di optare per un forzamento di tipo impulsivo mediante martello dinamometrico. La scelta è ricaduta su questo tipo di forzamento in quanto permette di ottenere delle misurazioni in modo rapido, non interferisce con la dinamica del sistema dal momento che non introduce una massa di cui tener conto e, nel range in cui lo spettro è piatto, l'energia è idealmente equi-ripartita tra tutte le frequenze.

Essendo possibile, mediante il sistema di acquisizione e nota la sensibilità del martello, misurare l'entità della forza applicata, sarà altresì possibile effettuare un'analisi dei modi di vibrare scalati a massa modale unitaria come quelli ottenuti dai modelli Abaqus.

Dal momento che l'analisi non prevede alcuna ipotesi o vincolo circa il punto di applicazione della forzante, si è deciso di effettuare delle martellate in posizioni co-locate rispetto all'accelerometro. Ciò ovviamente è stato fatto previo accertamento di non essere in alcun punto nodale per tutti i modi di vibrare di interesse. In caso contrario infatti il valore dell'indice CoMAC tenderebbe a zero e non sarebbe possibile identificare alcuna correlazione.

Per poter identificare le forme modali della catena è necessario avere a disposizione la sua FRF (Frequency Response Function). Questa non viene restituita in modo immediato a partire dai dati acquisiti sul martello e sull'accelerometro, ma deve essere stimata a partire da altre grandezze.

Acquisiti quindi i segnali in frequenza relativi a più forzamenti sia per il martello dinamometrico (segnale di ingresso) che per l'accelerometro (segnale di uscita), si sono innanzitutto calcolati l'auto-spettro mediato sull'ingresso  $G_{xx}$  ed il cross-spettro  $G_{xy}$  [17] tra ingresso ed uscita. Tali grandezze sono definite in accordo alle Eq.(3.2) e (3.3):

$$G_{xx}(f) = \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{n_d} X_i^*(f)X_i(f) \quad (3.2)$$

$$G_{xy}(f) = \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{n_d} X_i^*(f)Y_i(f) \quad (3.3)$$

Dove con  $X_i(f)$  si intende la  $i$ -esima trasformata di Fourier del forzamento in input al sistema, con  $Y_i(f)$  la  $i$ -esima trasformata di Fourier del segnale di output dell'accelerometro, con  $X^*(f)$  il complesso coniugato di  $X(f)$  ed  $n_d$  è il numero totale di martellate su cui si effettua l'operazione di media. Nelle prove sperimentali  $n_d$  è pari a 10.

Il calcolo di auto e cross-spettro è stato necessario per ricavare lo stimatore  $H_I$  [17] della FRF della catena. Lo stimatore  $H_I$  viene definito nell'Eq.(3.4) e la scelta è ricaduta su di esso in quanto non è sensibile al rumore incorrelato sull'uscita del sistema.

$$H_1 = \frac{G_{xy}}{G_{xx}} \quad (3.4)$$

Le FRF così ricavate sono state poi utilizzate quali dati di input per l'algoritmo di analisi modale PolyMAX [20].

Mediante l'utilizzo del PolyMAX è stato possibile infatti identificare i valori delle frequenze proprie del sistema e le ampiezze dei modi di vibrare associati nei cinque punti di misura. Queste forme modali, come già detto, vengono direttamente utilizzate per il calcolo dell'indice CoMAC rispetto ad un modello numerico perfettamente incastrato.

### 3.3 Risultati delle prove sperimentali

Nei paragrafi precedenti, basandosi sulla formulazione numerica del metodo di stima della lunghezza effettiva delle catene descritto nel Capitolo 2, si è proceduto a descrivere l'impostazione utilizzata per le prove sperimentali al fine di validare il metodo stesso. Per ogni lunghezza testata è stato deciso di effettuare l'analisi non solo nel punto in cui teoricamente ci si aspetta di ottenere il massimo CoMAC, ma anche in altri quattro punti. Questi sono stati posti simmetricamente rispetto al punto teorico (che quindi è il centrale dei cinque) a distanze corrispondenti a multipli della lunghezza degli elementi finiti scelti per i modelli numerici (2 cm). Sono inoltre state definite le grandezze di auto e cross-spettro medio  $G_{xx}$  e  $G_{xy}$  utili per definire lo stimatore  $H_I$  della FRF del sistema attraverso cui, mediante l'algoritmo di analisi modale PolyMAX, è stato possibile identificare i modi di vibrare sperimentali della struttura.

Tutto ciò è stato fatto finora attraverso una mera descrizione qualitativa, mentre ciò che si vuole fare adesso è invece illustrare singolarmente i risultati effettivamente ottenuti per tutti i casi analizzati.

Si ricorda a tal proposito che nel Paragrafo 2.5.2 era stata ottenuta mediante regressione lineare la seguente equazione per la *retta di stima*:

$$y = -0.3148x + 0.1889 \quad (3.5)$$

in cui  $x$  corrisponde alla percentuale di cui la lunghezza effettiva della catena supera la visibile in accordo all'Eq.(2.4), mentre  $y$  indica la posizione in cui ci si

aspetta il massimo CoMAC lungo la catena. Tale posizione è espressa in termini di ascissa normalizzata rispetto alla sola luce visibile in accordo alla (3.2).

$$y = \frac{\text{distanza dal vincolo sinistro}}{l_{\text{visibile}}} \quad (3.6)$$

A partire dall'equazione (3.5), imponendo come variabile  $x$  i tre incrementi di lunghezza citati nel Paragrafo 3.2.1, vengono ricavate le seguenti posizioni teoriche del massimo CoMAC:

- $y=0.1857$  per  $x=0.01$ ;
- $y=0.1732$  per  $x=0.05$
- $y=0.1574$  per  $x=0.1$ .

Dal momento che è stato ampiamente specificato che le misure di accelerazione verranno effettuate in cinque posizioni differenti, si sottolinea nuovamente che le posizioni  $y$  soprariportate corrispondono al punto centrale, così come precedentemente illustrato in Fig.(3.14).

Da un punto di vista puramente teorico se il massimo CoMAC venisse riscontrato proprio nella posizione centrale, la stima della lunghezza della catena non dovrebbe essere affetta da errore. Tuttavia è bene anticipare che nella pratica si ha a che fare sempre con piccoli errori dovuti, ad esempio, all'ingombro dell'accelerometro, all'incertezza degli strumenti di misura, ad arrotondamenti per il posizionamento del sensore ed altri fattori che impediscono di effettuare la misurazione esattamente nella posizione teorica. In particolare gli errori provocati da arrotondamenti per il posizionamento dell'accelerometro spiegano perché nei risultati in seguito illustrati possano essere evidenziate delle lievi sovrastime o sottostime della lunghezza della catena anche qualora il massimo CoMAC si trovi nel punto centrale dei cinque considerati.

Si precisa inoltre che, pur rendendosi conto che il suo uso è improprio, si impiegherà il termine di *errore* nella descrizione dei casi in cui la lunghezza effettiva stimata sarà differente da quella reale della catena presente in laboratorio (pari a 3996 mm).

In particolar modo nella trattazione successiva si quantificherà l'errore di stima  $e_{i\%}$  in accordo alla (2.8) del Capitolo 2.

Si procede ora a descrivere singolarmente i risultati delle quattro tipologie di prove effettuate.

### 3.3.1 Prove ad elevata rigidità e basso tiro

Per l'esecuzione delle prove ad alta rigidità, come anticipato nel Paragrafo 3.1.1, la catena è stata posizionata direttamente nel sistema di serraggio, con un conseguente contatto di tipo metallo-metallo. Il tiro assiale adimensionale, invece, è stato imposto mediante chiusura del tenditore ad un valore  $N/N_{sn}=0.25$ .

Si riporta in Fig.(3.15) la curva di valori di CoMAC ottenuta simulando una differenza tra lunghezza effettiva e lunghezza visibile del tirante dell'1%.

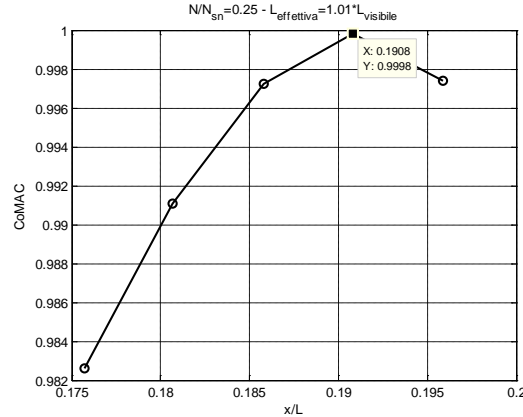
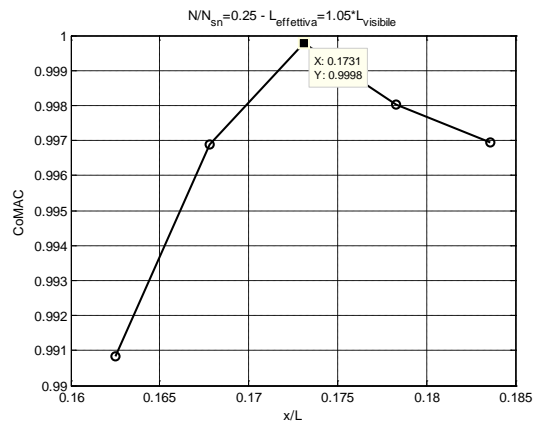


Figura 3. 15 CoMAC 1% tiro basso, rigidità dei vincoli alta

Dalla figura soprariportata si nota che l'andamento sperimentale del CoMAC è coerente con quello ricavato numericamente, ovvero con un unico massimo. La posizione in cui si riscontra la massima correlazione dei modi di vibrare non è però quella centrale, cioè corrispondente a quella in cui il modello regressivo prevede il massimo CoMAC ( $x/L=0.1857$ ), ma è più lontana dal vincolo sinistro della catena ( $x/L=0.1908$ ). Inserendo la posizione del massimo sperimentale di Fig.(3.15) come variabile  $y$  nell'equazione (3.1), si riscontra un errore  $e_{i\%}$  del -1.6% rispetto alla lunghezza effettiva. Tale errore comporta che venga stimata una lunghezza effettiva minore di quella visibile. Questo valore non ha fisicamente senso. Di conseguenza, essendo in presenza di un bias del metodo, si dichiarerà come lunghezza effettiva del tirante il valore della luce visibile, andando così anche a ridurre l'errore  $e_{i\%}$  commesso (che diventa del -1%, ovvero pari in modulo all'incremento percentuale di lunghezza simulato).

Da questa prima analisi viene confermato quanto anticipato nel Paragrafo 3.2.1, cioè che se il massimo CoMAC è riscontrato a destra del punto centrale dei cinque di misurazione, ovvero si allontana dal vincolo sinistro della struttura, si avrà a che fare con sottostime della lunghezza effettiva. Al contrario quando la massima correlazione è riscontrata a sinistra del punto centrale si avranno delle sovrastime. Tale considerazione risulta inoltre più chiara riferendosi, come esempio, alla Fig.(2.54)

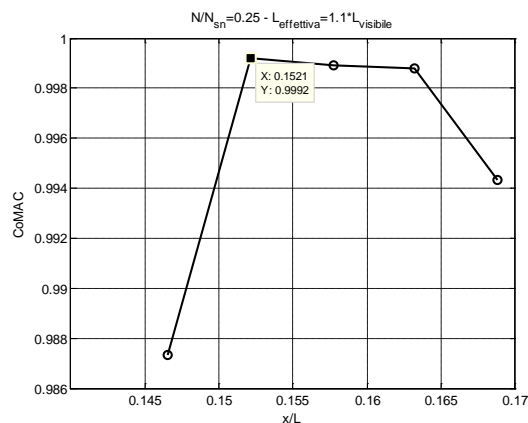
Si passa ora a testare un aumento di lunghezza del 5%.



**Figura 3.16 CoMAC 5% tiro basso, rigidità dei vincoli alta**

Nel caso di Fig.(3.16) si nota che con una variazione percentuale di lunghezza del 5% il massimo CoMAC si ha nel punto centrale dei cinque considerati. Il metodo da un punto di vista teorico sembra ora ben stimare la lunghezza effettiva della catena ma in realtà, anche in questo caso, si ha una piccola sovrastima ( $e_{i\%}$  di circa 0.03%) rispetto al modello numerico regressivo dell'Eq.(3.1) per le ragioni esposte nell'introduzione a questo paragrafo in merito al posizionamento dell'accelerometro.

Infine per questa combinazione di tiro assiale e rigidità dei vincoli si va a testare una variazione di lunghezza del 10 % i cui risultati sono illustrati in Fig.(3.17).



**Figura 3.17 CoMAC 10% tiro basso, rigidità dei vincoli alta**

Confrontando la Fig.(3.17) con la (3.15) si nota che per il caso al 10% non si riscontra più un errore di sottostima, ma essendo il massimo CoMAC a sinistra del punto centrale, il metodo commette ora un errore  $e_{i\%}$  di sovrastima (dello 1.5%).

In ogni caso si può concludere che per il caso ad elevata rigidità e basso tiro le prove sperimentali danno un riscontro positivo rispetto al modello teorico. Le

posizioni del massimo CoMAC rientrano infatti negli intervalli di variabilità definiti dai valori di massimo e minimo residuo nel Paragrafo 2.5.2 e gli errori, come verrà approfondito in seguito, negli intervalli determinati con l'analisi Monte Carlo nel Paragrafo 2.6.

### 3.3.2 Prove ad elevata rigidità e tiro incrementato

A partire dalla stessa tipologia di vincolo illustrata nel Paragrafo 3.3.1, si vogliono adesso analizzare i risultati conseguenti all'incremento dell'azione assiale a cui la catena è sottoposta ( $N/N_{sn}=0.5$ ).

Non si è ritenuto opportuno testare un valore di carico superiore, così come fatto per l'implementazione numerica del metodo, in quanto alcuni metodi di stima, ed in particolar modo quello per la stima del tiro  $N/N_{sn}$  in [1], tendono ad essere meno accurati proprio quando l'azione assiale a cui la catena è soggetta è bassa. Si inizia ancora una volta con le misurazioni relative ad un incremento di lunghezza dell'1%.

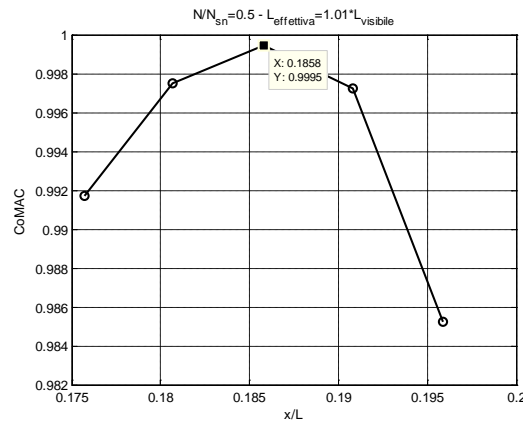
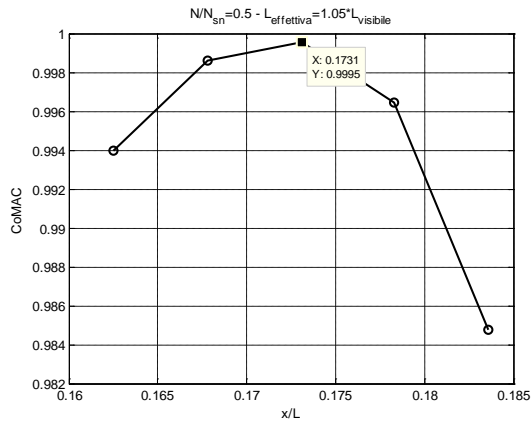


Figura 3. 18 CoMAC 1% tiro alto, rigidità dei vincoli alta

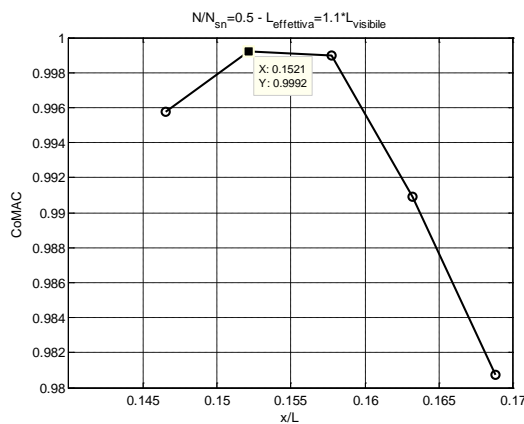
Da Fig.(3.18) si evince come con una maggiore azione assiale la stima tenda a diventare più precisa rispetto al caso analogo in Fig.(3.15). Infatti non solo ora il massimo CoMAC si riscontra nel punto centrale dei cinque testati, ma l'errore  $e_{i\%}$  si riduce al -0.03% rispetto al -1.6% del caso con tiro inferiore. Ciò è in accordo con quanto previsto dal metodo a livello teorico nel Paragrafo 2.5.1, ovvero che al crescere dell'azione assiale  $N/N_{sn}$  la posizione del massimo CoMAC tende ad allontanarsi dalla mezzeria della catena. Sempre nel Paragrafo 2.5.1 era stato poi specificato che un allontanamento progressivo della posizione del CoMAC dalla mezzeria della catena si manifesta con un passaggio da errori di sottostima ad errori di sovrastima. In tal senso la riduzione dell'errore di sottostima di Fig.(3.18) rispetto a quello di Fig.(3.15) si dimostra essere perfettamente coerente.





**Figura 3.19 CoMAC 5% tiro alto, rigidità dei vincoli alta**

Per quanto concerne i risultati della variazione di lunghezza del 5% riportati in Fig.(3.19) le considerazioni sono analoghe a quelle di Fig.(3.16) per il caso ad azione assiale inferiore e non ci si dilunga oltre. Il fatto che nonostante l'aumento del tiro  $N/N_{sn}$  non vi sia stato uno spostamento della posizione del massimo CoMAC (errore  $e_{i\%}$  di sovrastima costante al 0.03%) potrebbe essere imputabile ai vari fattori di incertezza che caratterizzano le prove, ma ciò non costituisce un problema perché il dato rientra abbondantemente nell'intervallo di errore determinato con l'analisi Monte Carlo.



**Figura 3.20 CoMAC 10% tiro alto, rigidità dei vincoli alta**

Passando infine al caso di variazione di lunghezza del 10% di Fig.(3.20) si riscontra il massimo CoMAC a sinistra del punto centrale. Così come avveniva per lo stesso incremento di lunghezza ma con tiro inferiore, si è quindi in presenza di una sovrastima ( $e_{i\%}$  dello 1.5%).

Come conclusione generale, anche con una maggiore azione assiale, si riscontra una buona conformità dei risultati sperimentali rispetto a quelli teorici in quanto le stime della lunghezza rientrano ancora nelle fasce di variabilità previste del metodo.

### 3.3.3 Prove a bassa rigidezza e basso tiro

Noto il comportamento della catena nel caso in cui la tipologia di vincolo realizzato tenda a modellare un incastro, si mostra ora ciò che accade quando questo viene reso cedevole frapponendo della gomma tra le morse. Tale situazione, come anticipato nell'introduzione del paragrafo, tende a meglio rappresentare una casistica reale in quanto per natura materiali come il cemento, la pietra costruttiva o simili sono sicuramente più cedevoli ed elastici dell'acciaio del sistema di morse messo a punto. Il valore del tiro assiale adimensionale è nuovamente pari a  $N/N_{sn}=0.25$ .

In Fig.(3.21) si riporta il risultato ottenuto per il caso di incremento di lunghezza dell'1%.

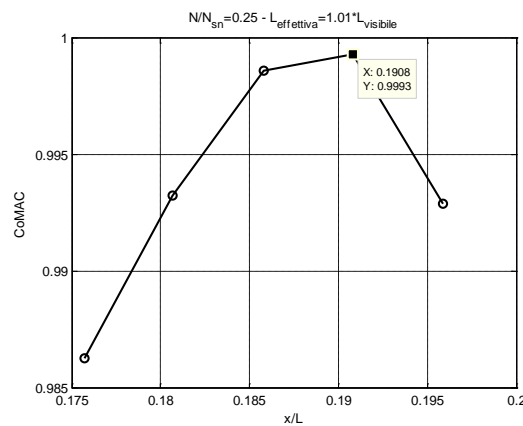


Figura 3. 21 CoMAC 1% tiro basso, rigidezza dei vincoli bassa

Così come avveniva per il caso a basso tiro ed alta rigidezza di Fig.(3.15), simulando una variazione di lunghezza dell'1% si incorre in una sottostima della lunghezza effettiva tale da evidenziare un bias del metodo. Di conseguenza si dichiarerà come lunghezza effettiva quella visibile riducendo nuovamente l'errore  $e_{l\%}$  commesso ad una sottostima del -1%.

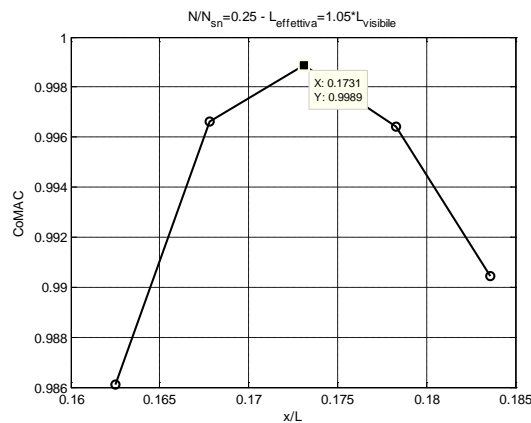


Figura 3. 22 CoMAC 5% tiro basso, rigidezza dei vincoli bassa

Da Fig.(3.22) si nota invece che simulando una discrepanza di lunghezza del 5% la catena si comporta in accordo alle previsioni *retta di stima* in quanto il massimo CoMAC si ha nel punto centrale dei cinque testati.

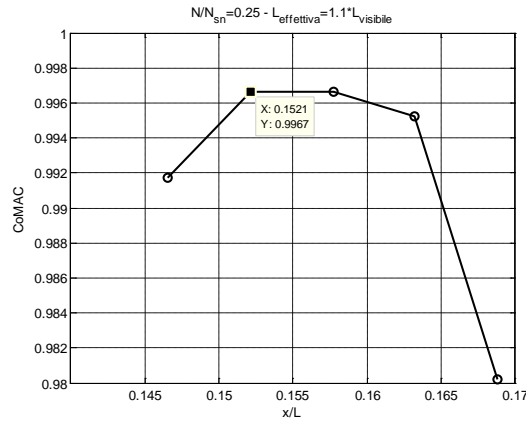


Figura 3. 23 CoMAC 10% tiro basso, rigidezza dei vincoli bassa

Passando alla Fig.(3.23) il massimo CoMAC è a sinistra del punto centrale, portando ad un errore  $e_{i\%}$  di sovrastima (1.5%) per il caso con lunghezza effettiva maggiorata del 10%.

Ancora una volta comunque le posizioni del massimo CoMAC rientrano negli intervalli previsti con l'analisi dei residui nel Paragrafo 2.5.2 e gli errori in quelli dell'analisi Monte Carlo del Paragrafo 2.6. Si può perciò concludere che anche tali risultati sono coerenti con il metodo di stima implementato.

### 3.3.4 Prove a bassa rigidezza e tiro incrementato

Per completare la casistica dei test, si passa ora alla situazione in cui il vincolo a minor rigidezza viene testato nuovamente con un'azione assiale aumentata a  $N/N_{sn}=0.5$ .

Si illustra in Fig.(3.24) quanto ottenuto per il test all'1%.

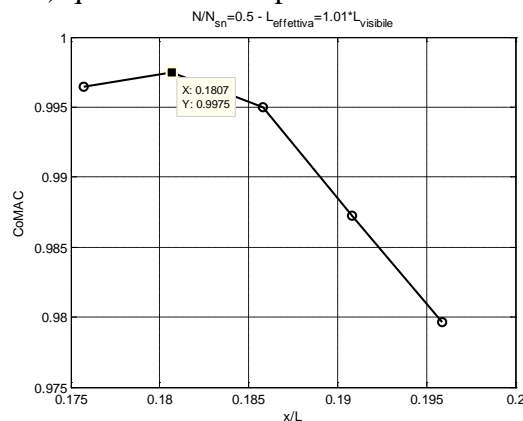


Figura 3. 24 CoMAC 1% tiro alto, rigidezza dei vincoli bassa

Il massimo CoMAC si riscontra ora a sinistra del punto centrale. In accordo con i risultati dell'analisi di sensibilità del Capitolo 2, una combinazione di maggior cedevolezza del vincolo ed aumento del tiro assiale porta il metodo a sovrastimare la lunghezza effettiva della catena, anche per piccole variazioni percentuali di lunghezza come quella in esame.

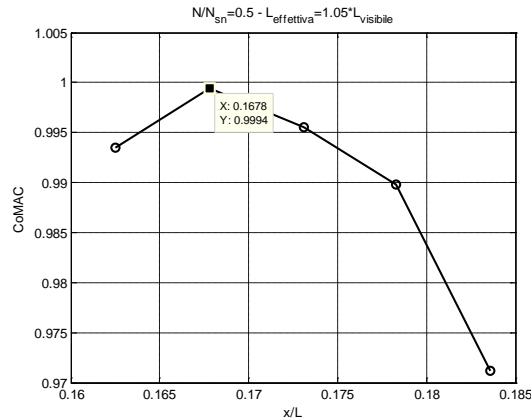


Figura 3. 25 CoMAC 5% tiro alto, rigidezza dei vincoli bassa

Per la simulazione al 5% di Fig.(3.25) si ha ancora una sovrastima e, senza dilungarsi in ripetizioni, valgono le medesime considerazioni fatte per il caso dell'1%.

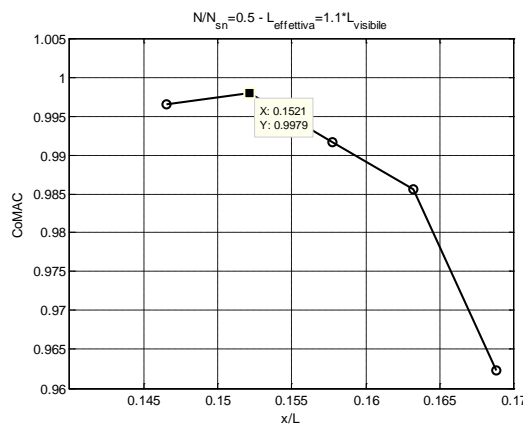


Figura 3. 26 CoMAC 10% tiro alto, rigidezza dei vincoli bassa

Infine, per il test al 10% in Fig.(3.26) si ha a che fare ancora una volta con una sovrastima della lunghezza effettiva. Tale sovrastima risulta essere della medesima entità di quella illustrata in Fig.(3.23), ovvero  $e_{i0\%}$  di circa l'1.5%.

In ogni caso tutte e tre le posizioni di massimo CoMAC, con i conseguenti errori di stima, rientrano ancora negli intervalli definiti dai valori dei residui massimo e minimo nel Paragrafo 2.5.3.

Infine si può quindi concludere che per tutti e quattro i set di condizioni al contorno ( $N/N_{sn}$  e  $k_f/k_{t,eq}$ ) testati, indipendentemente dalla variazione di

lunghezza simulata, le stime sperimentali sono sempre coerenti con quanto previsto dal modello teorico. Di quanto siano in accordo e valgano più specificatamente gli errori commessi dal metodo si discute nel paragrafo successivo.

### 3.3.5 Valutazione complessiva dei risultati

A valle dell'esposizione qualitativa dei risultati delle prove sperimentali condotta nel paragrafo precedente, si riportano questi in modo riassuntivo nelle Tabelle (3.4), (3.5) e (3.6) per delle considerazioni anche quantitative.

Si specifica che per il calcolo della lunghezza stimata, dell'errore percentuale sulla singola prova  $e_{i\%}$  e dell'errore medio  $E_{\%}$  riportati nelle tabelle sottostanti ci si riferisce rispettivamente alle Eq.(2.5), (2.8) e (2.9) del Capitolo 2.

1%	Senza gomma		Con gomma	
	N/Nsn=0.25	N/Nsn=0.5	N/Nsn=0.25	N/Nsn=0.5
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1908	0.1858	0.1908	0.1807
Incremento di lunghezza % previsto	-0.006	0.010	-0.006	0.026
Lvisibile [mm]	3956.0	3956.0	3956.0	3956.0
Lstima [mm]	3932.1	3995.0	3932.1	4059.0
<b>Errore <math>e_{i\%}</math></b>	<b>-1.60</b>	<b>-0.03</b>	<b>-1.60</b>	<b>1.58</b>
<b>MONTECARLO</b>				
<b>Intervallo errore %</b>	<b>Errore medio <math>E_{\%}</math></b>		<b>Dev. standard</b>	
<b>[ -4.54 ; 5.99 ]</b>	<b>-1.21</b>		<b>1.53</b>	

Tabella 3. 4 Risultati prove sperimentali nel caso  $l_{effettiva}=1.01^*l_{visibile}$

5%	Senza gomma		Con gomma	
	N/Nsn=0.25	N/Nsn=0.5	N/Nsn=0.25	N/Nsn=0.5
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1731	0.1731	0.1731	0.1678
Incremento di lunghezza % previsto	0.050	0.050	0.050	0.067
Lvisibile [mm]	3806	3806	3806	3806
Lstima [mm]	3997	3997	3997	4061.1
<b>Errore <math>e_{i\%}</math></b>	<b>0.26</b>	<b>0.26</b>	<b>0.26</b>	<b>1.63</b>
<b>MONTECARLO</b>				
<b>Intervallo errore %</b>	<b>Errore medio <math>E_{\%}</math></b>		<b>Dev. standard</b>	
<b>[ -4.58 ; 5.95 ]</b>	<b>-1.13</b>		<b>1.64</b>	

Tabella 3. 5 Risultati prove sperimentali nel caso  $l_{effettiva}=1.05^*l_{visibile}$

	Senza gomma		Con gomma	
	N/Nsn=0.25	N/Nsn=0.5	N/Nsn=0.25	N/Nsn=0.5
<b>10%</b>				
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1521	0.1521	0.1521	0.1521
Incremento di lunghezza % previsto	0.117	0.117	0.117	0.117
Lvisibile [mm]	3632	3632	3632	3632
Lstima [mm]	4056.6	4056.6	4056.6	4056.6
<b>Errore <math>e_{i\%}</math></b>	<b>1.52</b>	<b>1.52</b>	<b>1.52</b>	<b>1.52</b>
<b>MONTECARLO</b>				
<b>Intervallo errore %</b>	<b>Errore medio <math>E_{\%}</math></b>		<b>Dev. standard</b>	
<b>[ -4.63 ; 5.31 ]</b>	<b>-1.14</b>		<b>1.70</b>	

**Tabella 3. 6 Risultati prove sperimentali nel caso  $l_{effettiva}=1.1 \cdot l_{visibile}$**

Innanzitutto è facile evidenziare come per tutte le prove effettuate, anche per i due casi in rosso per cui la sottostima mette in luce un bias del metodo, i risultati ottenuti siano sempre ampiamente all'interno degli intervalli di errore stimati nel Capitolo 2 con l'analisi Monte Carlo.

Nel caso in cui si simulino variazioni di lunghezza del 5% e del 10% si ottengono dalle prove sperimentali sempre delle sovrastime della lunghezza effettiva. Al contrario simulando variazioni di lunghezza dell'1%, fatta eccezione per il caso con bassa rigidità ed alto tiro, si incorre in delle sottostime. Tale risultato è in accordo con quanto ottenuto dalle simulazioni FEM. Infatti andando ad analizzare più attentamente la distribuzione delle posizioni del massimo CoMAC utilizzate come dati d'ingresso per la regressione lineare rispetto alla *retta di stima* ottenuta si nota che:

- Per un aumento di lunghezza dell'1% le posizioni del massimo CoMAC si distribuiscono mediamente sopra la *retta di stima*, quindi dalla parte degli errori di sottostima;
- Per il caso al 5% la distribuzione delle posizioni del massimo CoMAC ha una leggera prevalenza sotto la *retta di stima*, per cui si ha una maggiore tendenza agli errori di sovrastima;
- Per l'incremento percentuale di lunghezza del 10% la distribuzione delle posizioni del massimo CoMAC tende a collocarsi sotto *retta di stima*, quindi dalla parte degli errori di sovrastima.

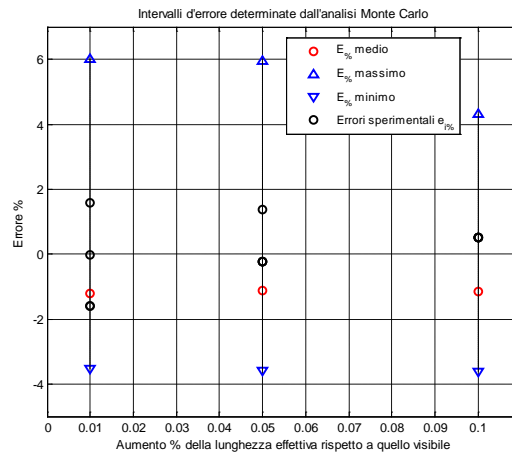
Il caso di lunghezza incrementata del 5% è quello per cui mediamente si riscontrano gli errori più bassi (in 3 casi su 4). Seppur quindi vi sia una certa distanza tra l'errore sulla singola prova  $e_{i\%}$  e l'errore medio  $E_{\%}$ , la stima in questa situazione risulta essere la più accurata.

Quando si testa un aumento di lunghezza dell'1% si riscontra la maggior variabilità della stima rispetto alle condizioni al contorno. Si nota infatti che ad eccezione dei due casi in cui si impone automaticamente un errore di sottostima

del -1% a causa di una lunghezza stimata minore di quella visibile, si hanno sempre risultati, e quindi errori, differenti.

Al contrario con una variazione di lunghezza del 10% l'errore di stima è costante al variare delle condizioni di carico e vincolo.

In Fig.(3.27) si riportano ora gli errori derivanti dalle prove sperimentali all'interno degli intervalli statistici determinati con le simulazioni Monte Carlo.



**Figura 3. 27 Posizione errori sperimentali rispetto alle forchette dell'analisi Monte Carlo**

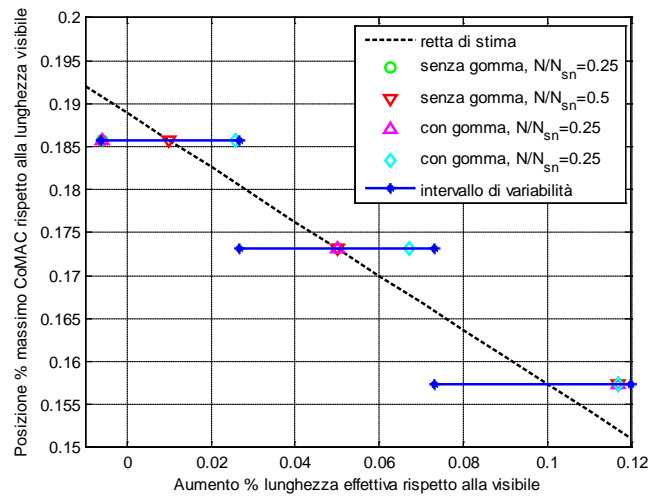
Innanzitutto da Fig.(3.27) si nota che per ogni lunghezza testata gli errori sperimentali  $e_{i\%}$  non sono mai prossimi sia ai valori minimi, sia a quelli massimi, ma sono sempre confinati in un range del [-2%;+2%].

Per i test su lunghezza incrementata dell'1% si riscontrano i due casi (sovrapposti) in cui si ha la massima vicinanza all'errore medio  $E_{0\%}$ . Questi però corrispondono alle situazioni in cui si stima una lunghezza minore di quella visibile e portano, come detto nel Paragrafo 3.4.1, ad una automatica riduzione del livello d'errore al -1%.

Sia per il caso di variazione di lunghezza dell'1%, che per quello del 5% si nota che vi sono delle situazioni in cui l'errore  $e_{i\%}$  è prossimo allo 0%. Ciò testimonia che il metodo a livello pratico può portare a risultati soddisfacenti.

Per i test con variazione di lunghezza del 10%, come detto prima, si evince chiaramente che le quattro prove restituiscono lo stesso errore  $e_{i\%}$ , al contrario di quanto avviene nel caso all'1% in cui si ottengono stime differenti caso per caso.

Infine si conclude riportando in Fig.(3.28) gli incrementi percentuali di lunghezza ricavati sperimentalmente rispetto alla retta *retta di stima*.



**Figura 3.28** Posizione dei massimi del CoMAC sperimentali rispetto alla retta di regressione

Da Fig.(3.28) si nota ancora una volta che i risultati delle prove in laboratorio rientrano sempre negli intervalli di variabilità determinati nel Paragrafo 2.5.2 dal massimo e minimo residuo rispetto alla *retta di stima* (linee in blu).

Nonostante il caso con variazione di lunghezza del 10% sembri in questa figura al limite della validità, in quanto la posizione dei punti sperimentali è sempre prossima al limite destro dell'intervallo di variabilità, esso non è problematico in quanto, come detto commentando la Fig.(3.27), i risultati delle stime rientrano nell'intervallo d'errore dell'analisi Monte Carlo.

Per variazioni di lunghezza intermedie come quella del 5%, i dati sperimentali tendono ad accordarsi meglio con quelli teoricamente previsti dal metodo collocandosi in maggiore prossimità alla *retta di stima*. Infatti tale lunghezza si è dimostrata essere anche quella per cui si incorre mediamente in stime affette da errori minori.

Con variazioni di lunghezza piccole (1%) si nota che, a causa della maggiore sensibilità alle condizioni al contorno, i risultati sono più dispersi attorno alla *retta di stima*, ma sempre appartenenti all'intervallo di variabilità calcolato.

Infine, a valle degli esiti delle prove sperimentali e di tutte le considerazioni fatte, si può affermare che il metodo proposto per la stima della lunghezza effettiva delle catene mostra un comportamento affidabile e rispettoso delle previsioni teoriche, per cui si può considerarlo validato.

Sviluppo successivo di questo lavoro può essere, a questo punto, l'ottimizzazione della tecnica stima al fine di ridurre la dipendenza o dal tiro assiale  $N/N_{sn}$ , o dalla rigidità dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$  in modo da conseguire una diminuzione del livello di incertezza che lo caratterizza.



## Capitolo 4

### Ottimizzazione del metodo di stima della lunghezza effettiva

Nel Capitolo 2 è stato implementato un metodo di stima della lunghezza effettiva delle catene basato sul calcolo dell'indice di correlazione CoMAC secondo la modalità illustrata in Fig.(2.22).

L'indice ha un andamento caratterizzato da un unico punto di massimo assoluto la cui posizione è fortemente dipendente dalla lunghezza effettiva della struttura. A partire da una regressione lineare sulle posizioni in cui è riscontrata la massima correlazione per catene dalle caratteristiche ritenute significative, si è ricavata l'equazione di una *retta di stima*. Questa ha come variabile indipendente  $x$  l'incremento percentuale da assegnare alla luce visibile del tirante per calcolarne la lunghezza effettiva e come variabile dipendente  $y$  la posizione in cui il CoMAC è massimo.

Peculiarità di questa metodologia è che necessita di conoscere solo tre caratteristiche della catena: la sua sezione  $A$ , la sua luce visibile  $l_{visibile}$  e la tipologia generica di materiale che la compone.

Come spiegato nel Capitolo 3, la tecnica ha mostrato un comportamento efficace e coerente con le previsioni teoriche anche in sede di validazione sperimentale, per cui è stata ritenuta effettivamente applicabile.

Tuttavia nel Capitolo 2, a valle di una serie di simulazioni Monte Carlo [18], è stato altresì evidenziato che, a causa dell'influenza dei parametri di tiro assiale  $N/N_{sn}$  e rigidità dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$ , le stime di lunghezza sono affette da un'incertezza prossima al 5%. Quindi, per ottimizzare il metodo aumentandone l'accuratezza, nel presente Capitolo si cercherà di diminuire la dipendenza, o eliminare l'influenza sugli output di almeno una delle due variabili citate sopra. Ottenere stime più accurate della lunghezza effettiva permetterebbe inoltre anche di migliorare l'identificazione del tiro assiale  $N/N_{sn}$  [1] a cui le catene sono soggette.

#### 4.1 Analisi dei modi di vibrare

Nel Capitolo 2 e nell'introduzione del presente Capitolo è stato messo in luce che la rigidità equivalente dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$  ed il tiro assiale  $N/N_{sn}$  sono le principali fonti di incertezza del metodo di stima della lunghezza delle catene.

Ciò a cui si mira adesso è di ridurre gli effetti di almeno uno di questi due parametri in modo da poter mettere a punto un metodo di stima più accurato.

La trattazione precedente ha supposto poi di basarsi solo sui primi modi di vibrare della struttura, ma non è stato approfondito come le due variabili prima citate agiscano su forme modali di ordine più elevato. Facendo perciò un passo indietro, si ritorna ad analizzare le proprietà dinamiche di base del sistema.

Questo studio è stato effettuato per varie tipologie di tiranti i cui valori di sezione, lunghezza e materiale sono quelli riportati in Tabella (1.1) nel Capitolo 1. Dal momento che i risultati ottenuti sono stati di validità generale, per questioni di brevità nelle immagini seguenti ci si riferirà ad una catena in alluminio, di sezione  $A$  di  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  e lunghezza  $l$  di  $4000 \text{ mm}$ . In questa prima fase non ci si occupa della distinzione tra lunghezza effettiva e lunghezza visibile del tirante.

Nelle Fig.(4.1) e (4.2) si riporta l'andamento del terzo modo di vibrare al variare rispettivamente della rigidezza dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$  e del tiro  $N/N_{sn}$ .

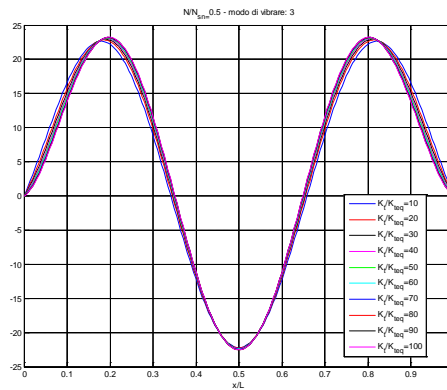


Figura 4. 1 Terzo modo di vibrare al variare della rigidezza dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$

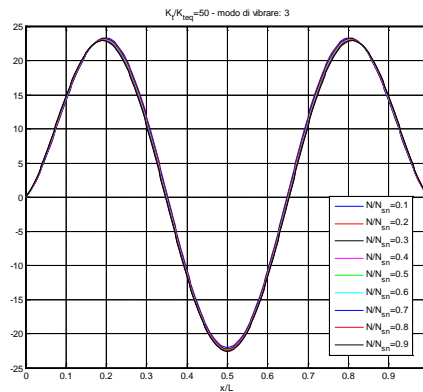


Figura 4. 2 Terzo modo di vibrare al variare del tiro assiale  $N/N_{sn}$

Come si può facilmente evincere ed era anche stato mostrato nel Capitolo 1, entrambi i parametri causano delle variazioni al modo di vibrare. Si riscontrano infatti piccoli shift sia dei valori massimi e minimi di ampiezza, sia della posizione dei nodi con conseguenti traslazioni delle curve.

Da Fig.(4.1) si nota inoltre che l'effetto della rigidità dei vincoli è senz'altro il preponderante, ma anche al variare del tiro, seppure in misura minore, è possibile distinguere in Fig.(4.2) differenti curve per la forma modale.

Oltretutto se l'effetto del tiro  $N/N_{sn}$  si manifesta lungo tutta la catena, ovvero è possibile distinguere curve differenti in ogni punto sull'asse delle ascisse, quello della rigidità  $k_v/k_{t,eq}$  ha maggiore influenza in prossimità dei vincoli, dove le curve sono più distanti tra di loro, mentre verso la mezzeria della struttura tendono a sovrapporsi.

Si passa adesso ad osservare cosa succede per forme modali di ordine più elevato. Si sceglie in primis la sesta perché è l'ultima presa in considerazione per il calcolo del CoMAC in tutta la trattazione precedente.

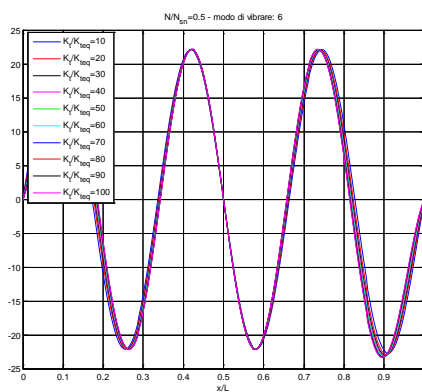


Figura 4.3 Sesto modo di vibrare al variare della rigidità dei vincoli  $k_v/k_{t,eq}$

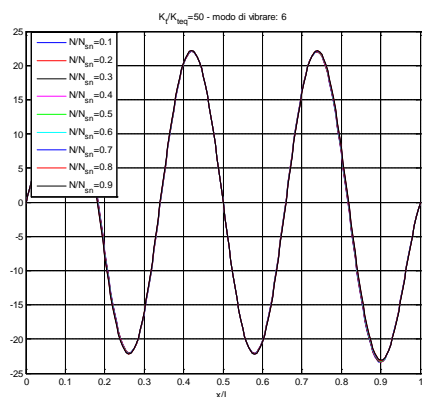


Figura 4.4 Sesto modo di vibrare al variare del tiro assiale  $N/N_{sn}$

Ancora una volta da Fig.(4.3) è possibile apprezzare in modo netto l'influenza della rigidità del sistema di vincolo sul modo di vibrare, in particolar modo in prossimità agli estremi della catena. Nell'intorno della mezzeria invece si conferma lo scarso effetto della variazione del parametro  $k_v/k_{t,eq}$ . A partire da Fig.(4.4) è invece possibile fare una interessante osservazione. Per un modo di vibrare più alto l'influenza del tiro  $N/N_{sn}$  si è ridotta notevolmente. Le curve

adesso tendono a sovrapporsi quasi perfettamente e, al contrario di quanto avveniva in Fig.(4.2), distinguerle risulta difficile. Per verificare che questo fenomeno sia proprio di tutti i modi alti e non solo di quello preso ad esempio, nelle Fig.(4.5) e (4.6) si riporta l'andamento dell'ottava forma modale.

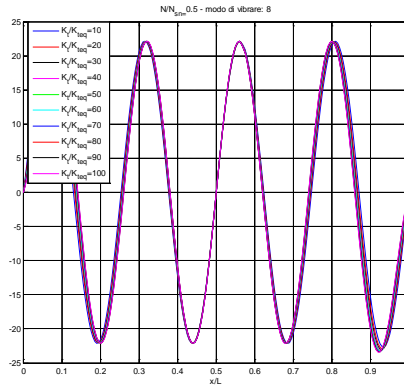


Figura 4. 5 Ottavo modo di vibrare al variare della rigidezza dei vincoli  $k_v/k_{t,eq}$

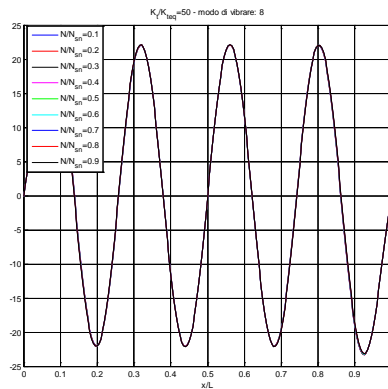


Figura 4. 6 Ottavo modo di vibrare al variare del tiro assiale  $N/N_{sn}$

Dalla Fig.(4.5) viene confermata ancora una volta l'elevata influenza della rigidezza dei vincoli, vista la distinzione dei modi soprattutto all'estremità della catena. Tuttavia non si riescono ad individuare caratteristiche rilevanti, in termini, per esempio, di shift nella posizione dei nodi, dei massimi o minimi, tali per cui si riescano a distinguere in maniere univoca e quindi stimare i vari  $k_v/k_{t,eq}$ . Invece dalla Fig.(4.6) si nota che con un modo di ordine ancora più elevato il tiro  $N/N_{sn}$  diventa praticamente influente sul sistema. Infatti non risulta più possibile discernere modi di vibrare derivanti da condizioni di carico differenti, tutte le curve sono perfettamente sovrapposte.

Si può quindi concludere che più si alza l'ordine delle forme modali considerate, più si tenderà ad una situazione in cui l'unico parametro di influenza sulla dinamica della catena è la rigidezza dei vincoli  $k_v/k_{t,eq}$ .

Alla luce di questa considerazione, una potenziale via per ottimizzare il metodo di stima potrebbe essere quella di ripetere il calcolo del CoMAC utilizzando esclusivamente i modi di vibrare superiori al sesto.

Se sarà possibile distinguere negli andamenti del CoMAC un nuovo trend che leghi la posizione di uno o più punti caratteristici alla lunghezza effettiva della catena, si potrà ragionevolmente presupporre di poter definire un metodo di stima caratterizzato da un minore livello di incertezza rispetto a quello del Capitolo 2.

## **4.2 CoMAC tra 20% modello di confronto e catena reale**

Viste le considerazioni fatte nel paragrafo precedente, ovvero che i modi di vibrare della catena dal sesto in poi tendono a non risentire delle variazioni del tiro assiale  $N/N_{sn}$ , in analogia con quanto fatto nel Capitolo 2 si è deciso di ripetere il calcolo del CoMAC tra il punto sito al 20% della lunghezza dei modelli di confronto (perfettamente incastrato e perfettamente appoggiato), con tutti i nodi appartenenti alla luce visibile della catena sotto studio, ma questa volta utilizzando esclusivamente i modi di vibrare più alti.

La scelta è in particolar modo ricaduta tra le forme modali dalla sesta, per cui l'effetto dell'azione assiale inizia a diventare trascurabile, fino alla nona.

Seppur sia possibile utilizzare modi di ordine ancora superiore si è preferito non spingersi oltre per due ragioni. La prima è che l'estrazione di modi di vibrare via via più alti richiede tempi di calcolo delle simulazioni FEM non trascurabili. La seconda è che non tanto con le analisi con Abaqus, ma soprattutto in caso di eventuali prove sperimentali con tutte le fonti di errore e incertezza che le accompagnano, aumenterebbe la probabilità di trovare punti nodali in prossimità di zone magari significative per l'analisi. L'utilizzo delle tecniche di identificazione modale potrebbe in questo caso diventare più difficoltoso.

Si passa adesso ad illustrare i risultati delle simulazioni preliminari svolte.

### **4.2.1 Calcolo del CoMAC rispetto al modello di confronto incastro-incastro**

Al fine di ricercare una qualche significatività nel comportamento delle catene anche per i modi di vibrare di ordine elevato, in primis si è deciso di valutare il CoMAC tra il modello di confronto incastro-incastro ed una struttura con lunghezza visibile ed effettiva coincidenti e pari a 4000 mm.

Questa analisi è stata effettuata non per prendere in considerazione gli effetti della lunghezza del modello, ma esclusivamente per rendersi conto di come e se si modifica l'andamento che il CoMAC assume rispetto a quello mostrato nel Capitolo 2. In Fig.(4.7) e (4.8) si riportano i risultati relativi ad una catena in alluminio di sezione  $A$  da 15x25 mm<sup>2</sup>.

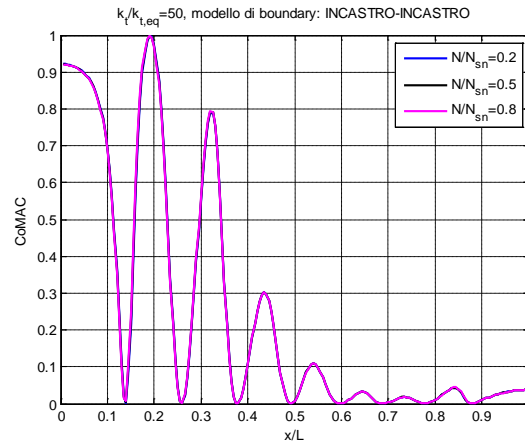


Figura 4. 7 CoMAC al variare del tiro  $N/N_{sn}$  – m.d.v. dal 6° al 9°

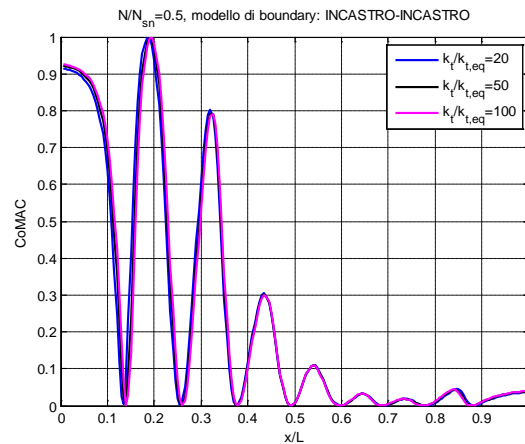


Figura 4. 8 CoMAC al variare della rigidezza dei vincoli - m.d.v. dal 6° al 9°

Come si evince dalle Fig.(4.7) e (4.8), l'andamento dell'indice di correlazione ha una forma differente da quella illustrata nel Capitolo 2 (si vedano, ad esempio, le Fig.(2.24) e (2.26)), ma nonostante ciò è ancora possibile riscontrare un unico punto di massimo assoluto ben distinguibile dagli altri massimi relativi. Si può quindi concludere che, indipendentemente dalle forme modali scelte per il calcolo del CoMAC, esso continuerà a presentare la sua caratteristica fondamentale, ovvero la presenza di un solo massimo assoluto nell'intorno del 20% della luce visibile.

Sempre dalle Fig.(4.7) e (4.8) si nota come la posizione di tale punto di massimo risulta influenzata in modo più significativo dalla rigidezza dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$ , mentre l'effetto del tiro  $N/N_{sn}$ , come ci si aspettava dall'analisi sui singoli modi di vibrare, risulta praticamente infimo.

In Fig.(4.9) si mostra per maggiore chiarezza un ingrandimento delle curve sopra riportate nell'intorno del punto di massimo assoluto. Si ha quindi la conferma che al variare del tiro assiale  $N/N_{sn}$  il punto di massima correlazione

non si sposta, è sempre lo stesso lungo la luce della catena, mentre al variare della rigidità dei vincoli sì. In particolar modo, poi, il massimo tende a spostarsi verso il vincolo sinistro della catena al diminuire della rigidità del sistema di vincolo  $k_v/k_{t,eq}$ .

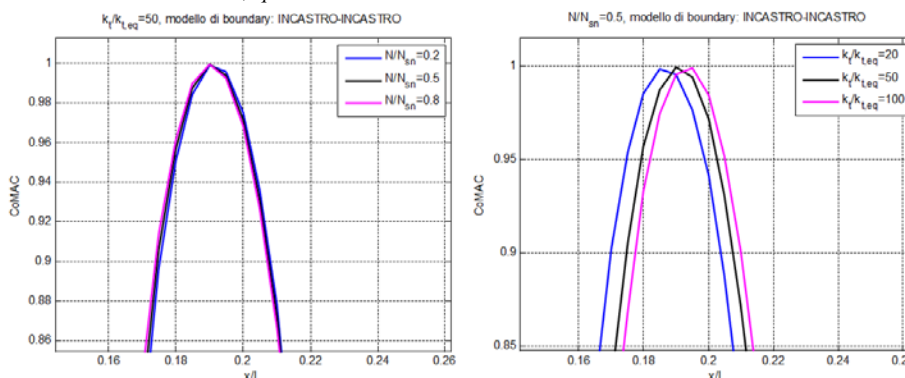


Figura 4. 9 Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello

Si può quindi concludere che considerando forme modali superiori alla sesta il calcolo dell'indice CoMAC permette, così come fatto nel Capitolo 2, di focalizzare l'attenzione su un solo punto privilegiato lungo la luce visibile della catena. La posizione di tale punto, in questo caso, appare poi essere influenzata dal solo parametro di rigidità dei vincoli  $k_v/k_{t,eq}$ .

Si specifica infine che nel caso di calcolo dell'indice CoMAC rispetto ai modi di vibrare di un modello numerico perfettamente appoggiato, i risultati sono qualitativamente gli stessi, a meno di piccoli shift sulla posizione del massimo. Dal momento che il comportamento del sistema è quindi duale rispetto al tipo di modello numerico di confronto, sarebbe inutilmente prolisso riportare anche questi risultati nella trattazione.

#### 4.2.2 Influenza del modulo elastico $E$

Evidenziato che i modi di vibrare di ordine elevato, e di conseguenza l'indice CoMAC, tendono a non risentire dell'influenza del tiro  $N/N_{sn}$ , si vuole verificare che altrettanto si possa dire per l'effetto del modulo elastico  $E$ , così come era stato verificato nel Paragrafo 2.4.3 per le prime forme modali. In particolare, per mettersi dalla parte della sicurezza, si considereranno variazioni di modulo elastico del  $\pm 10\%$  rispetto al valore nominale del materiale.

In Fig.(4.10), fissato il tiro a metà del carico di snervamento  $N_{sn}$ , si mostra l'effetto sulle curve del CoMAC del modulo di Young  $E$  in situazioni caratterizzate da diversa rigidità dei vincoli. Il modello di confronto è ancora una volta quello perfettamente incastrato ed a questo è stato assegnato un valore di modulo di Young pari a quello nominale per l'alluminio. Per maggiore chiarezza dell'immagine non si riportano le curve lungo tutto lo sviluppo della catena, ma ci si sofferma in particolar modo sull'intorno del punto di massima correlazione.

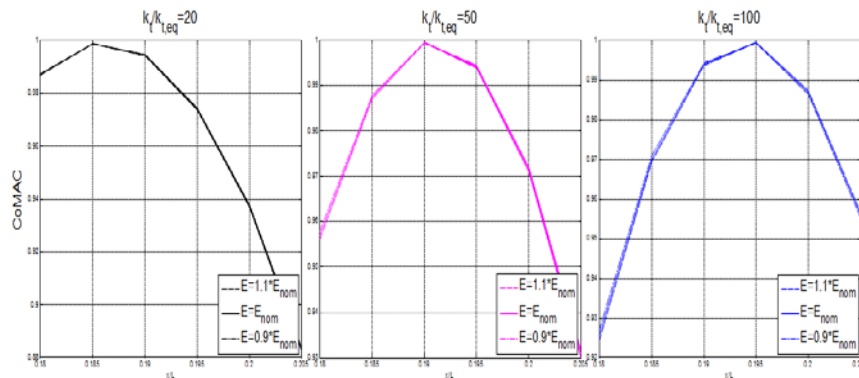


Figura 4. 10 Posizione del massimo CoMAC per  $k_t/k_{t,eq}$  diverse al variare del modulo elastico  $E$

Così come avveniva per le analisi mostrate nel Capitolo 2, la sensibilità dell'indice CoMAC al modulo di Young risulta trascurabile. Imponendo un diverso valore di  $E$  le curve presentano lievissime traslazioni, difficilmente distinguibili se non con forti zoom dell'immagine. Queste traslazioni non avvengono però lungo la luce della catena, con conseguenti shift del punto di massimo, ma sono lungo l'asse delle ordinate. In particolar modo le curve traslano verso l'alto quando il valore del modulo di Young  $E$  aumenta.

A valle di quest'altra evidenza si può affermare che, definita la lunghezza del modello di catena, l'unica variabile che causa dispersione nella posizione del punto di massimo CoMAC è la rigidità dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$ . Tale effetto, nota la risoluzione della mesh utilizzata, che in questo caso è di 2 cm, si quantifica comunque in spostamenti piccoli, al più di 4 cm qualora si considerassero due valori estremi di rigidità ( $k_t/k_{t,eq}=20$  e  $k_t/k_{t,eq}=100$ ), ovvero nell'intorno dell'1% della lunghezza della trave in questione.

#### 4.2.3 Influenza della lunghezza effettiva della catena ed analisi di sensibilità

Dal momento che l'obiettivo di questo lavoro è quello di poter stimare la lunghezza effettiva delle catene, si decide nuovamente di aumentare quest'ultima del 5% e del 10% e di calcolarne il CoMAC per la sola porzione di luce visibile. Ciò a cui si auspica è di riscontrare nuovamente la presenza di uno shift nella posizione del punto di massima correlazione direttamente legato proprio alla lunghezza della struttura. Il calcolo è effettuato ancora una volta per una catena in alluminio di sezione  $A$  di  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  e luce visibile di 4000 mm.

Esclusivamente per motivi di leggibilità dell'immagine in Fig.(4.11) si riportano le curve del CoMAC a tiro assiale  $N/N_{sn}$  e rigidità dei vincoli  $k_t/k_{t,eq}$  fissati. In questo modo si vuole valutare il solo effetto della variazione di lunghezza della struttura.



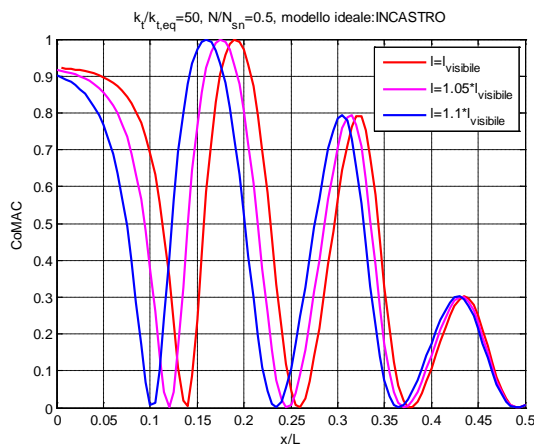


Figura 4. 11 CoMAC al variare della lunghezza effettiva per condizioni al contorno fissate

Analogamente a quanto avveniva considerando i primi sei modi di vibrare della catena, anche con i modi dal sesto al nono si ha una traslazione del punto di massima correlazione verso il vincolo sinistro all'aumentare della lunghezza effettiva. Tale traslazione continua ad essere circa della stessa quantità per incrementi di lunghezza di ugual valore, per cui l'utilizzo di un modello regressivo da cui ottenere una relazione di stima lineare si mostra ancora una valida opzione.

Prima di ricercare nuovamente un'equazione per una *retta di stima*, è però bene valutare in modo definitivo la sensibilità del modello a tutti i parametri in gioco supponendo di variarli tutti contemporaneamente e non uno per volta come fatto finora.

Analogamente a quanto spiegato nel Capitolo 2, per avere un'idea del comportamento della catena in condizioni di vincolo e carico estreme e con materiale anche molto differente, tutte le analisi sono state condotte supponendo i seguenti intervalli di variazione dei parametri:

- Il modulo elastico  $E$  varia del  $\pm 10\%$  rispetto al valore nominale;
- I valori di tiro rappresentano due casi estremi di azione assiale molto elevata o bassa, ovvero  $N/N_{sn}=0.8$  e  $N/N_{sn}=0.2$ ;
- Per la rigidezza si simulano una situazione tendente all'appoggio con  $k_t/k_{t,eq}=20$  e una tendente all'incastro con  $k_t/k_{t,eq}=100$ .

Si riportano quindi in Fig.(4.12) i risultati dell'analisi di sensibilità ottenuti a partire da un caso con basso tiro, bassa rigidezza dei vincoli e modulo elastico pari al nominale.

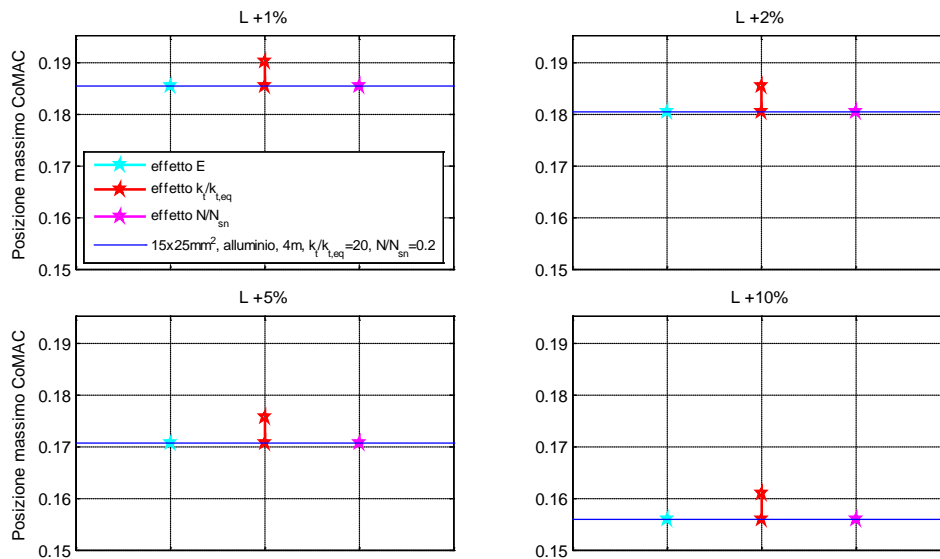


Figura 4. 12 Sensibilità della posizione del massimo CoMAC ai parametri del modello

Come si evince chiaramente dalla figura, né modulo elastico  $E$ , né tiro assiale  $N/N_{sn}$  hanno influenza apprezzabile sullo spostamento del massimo CoMAC.

Solo la rigidità dei vincoli  $k_v/k_{t,eq}$  ha effetto. In particolare modo si conferma che all'aumentare del valore di  $k_v/k_{t,eq}$  il punto di massimo si sposta verso la mezzeria della catena. La sua influenza tra l'altro, se si paragona Fig.(4.12) con Fig.(2.46) del Capitolo 2, risulta inferiore visto che il range di valori ammissibili per la posizione del massimo CoMAC si riduce. Ciò indica che tendendo ad eliminare l'effetto di un parametro del sistema, in questo caso il tiro assiale  $N/N_{sn}$ , anche l'altro, ovvero la rigidità del sistema di vincolo  $k_v/k_{t,eq}$ , avrà un'azione minore.

Un'altra osservazione riguarda i risultati ottenuti dalle simulazioni con lunghezza incrementata dell'1% e del 2%. Eliminata l'influenza del tiro assiale risulta possibile distinguere in maniera netta la posizione di base (linea blu) del massimo CoMAC per catene di lunghezza molto poco differente. Al contrario nel Capitolo 2 bisognava ricorrere ad infittimenti della mesh molto spinti (5 mm) per apprezzare uno scostamento di questi due valori. Tuttavia, anche in questo caso, a causa dell'effetto della rigidità del sistema di vincolo, non si può affermare di essere in grado di distinguere variazioni di lunghezza così piccole.

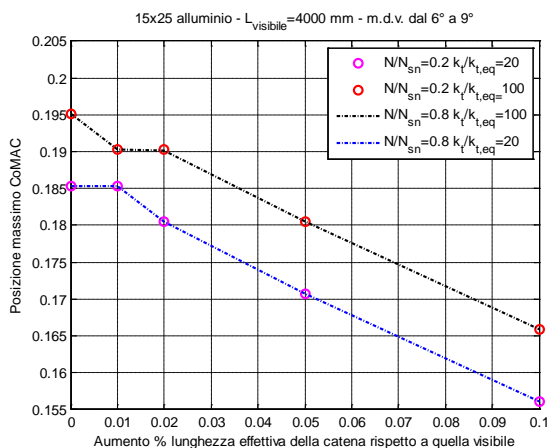


Figura 4. 13 Posizione del massimo CoMAC al variare dei parametri del modello per una luce visibile di 4000 mm

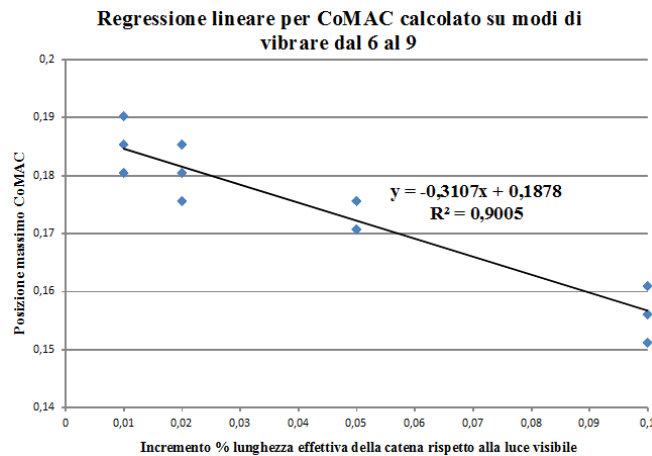
In Fig.(4.13) viene riportata la posizione del massimo CoMAC in funzione della lunghezza effettiva della catena per i quattro set di condizioni al contorno sopra citati. Si nota benissimo come, ad eccezione dei dati concernenti incrementi di lunghezza effettiva inferiori al 2%, i risultati si dispongono sempre in accordo ad una simil-retta. In particolar modo la presenza di sole due spezzate a rigidezza dei vincoli  $k_f/k_{t,eq}$  differente, al contrario delle quattro distinte illustrate in Fig.(2.48) nel Capitolo 2, conferma nuovamente che questa è l'unica variabile di influenza sul sistema, mentre una modifica dell'azione assiale  $N/N_{sn}$  non origina altro che risultati perfettamente sovrapposti.

A questo punto si procede prima all'implementazione di un nuovo modello regressivo, che ci si aspetta essere più accurato del precedente, e poi a delle analisi Monte Carlo per una valutazione statistica dei risultati.

### 4.3 Modello di regressione lineare

Per l'implementazione del metodo di stima della lunghezza effettiva delle catene ottimizzato, analogamente a quanto fatto nel Capitolo 2, ci si riferirà ancora a modelli in alluminio, di sezione  $A$  di  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  e lunghezza visibile pari a  $4000 \text{ mm}$ .

Avendo quindi a disposizione, a partire dai risultati di simulazioni FEM in cui si sono combinate le condizioni al contorno utilizzate nel Paragrafo 4.2.3 per l'analisi di sensibilità, le posizioni corrispondenti al punto di massimo CoMAC per incrementi di lunghezza effettiva dell'1%, 2%, 5% e 10%, si procede ad utilizzarli come parametri di ingresso di una regressione lineare basata nuovamente sul metodo dei minimi quadrati.

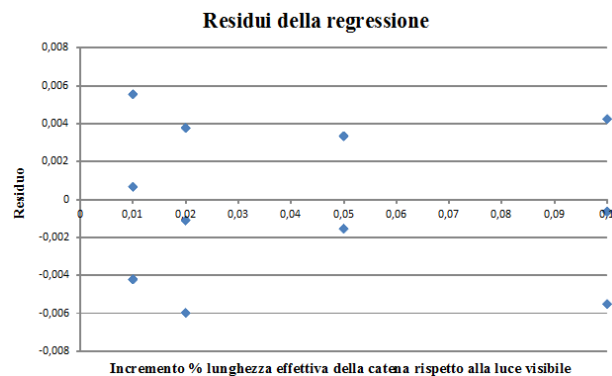


**Figura 4. 14** Retta di regressione ottimizzata

Come si evince dalla Fig.(4.14) il fitting dei dati appare soddisfacente. Questi risultano visibilmente poco dispersi attorno alla nuova *retta di stima* ed il valore del coefficiente di correlazione  $R^2$  è migliorato di circa il 9% rispetto al caso non ottimizzato, passando da 0.81 a 0.9. Ciò dimostra che questo nuovo modello si adatta meglio a descrivere i dati in output dalle simulazioni in Abaqus rispetto a quello ottenuto nel Capitolo 2.

Se si confronta l'equazione della *retta di stima* in Fig.(4.14) con quella di Fig.(2.50) si nota che i valori di pendenza ed intercetta sono diminuiti rispettivamente del 1.3% e 0.6%. Tali variazioni, essendo però piccole, permettono di affermare che la *retta di stima* non ottimizzata comunque permette di descrivere bene il comportamento del sistema al variare della sua lunghezza. Ora tuttavia, eliminata l'influenza del tiro assiale e con un valore del coefficiente di determinazione della regressione più elevato, si prevede che le stime siano più precise.

Per completezza è stata ripetuta l'analisi dei residui  $\varepsilon$  della regressione. Questi sono stati calcolati in accordo all'Eq.(2.7) riportata nel Capitolo 2.



**Figura 4. 15** Residui della retta di regressione ottimizzata

Dalla Fig.(4.15) si evince che i residui  $\varepsilon$  non presentano trend di alcun tipo e quindi la regressione, anche in questo caso, non è viziata dall'effetto sistematico delle variabili del modello.

Se si confronta poi Fig.(4.15) con Fig.(2.51) si nota che la dispersione dei risultati, valutata in termini di differenza tra massimo e minimo residuo, è adesso inferiore. L'unico caso che fa eccezione è quello con lunghezza incrementata dell'1%, per cui, invece, questa differenza è la stessa. Si può quindi concludere, ancora una volta, che l'utilizzo della nuova *retta di stima* tende a dimostrarsi più accurato.

Di conseguenza, visti i risultati rassicuranti, si può procedere allo svolgimento delle analisi Monte Carlo per la determinazione dei nuovi intervalli di errore che statisticamente caratterizzano il metodo quando applicato a catene caratterizzate da lunghezze e condizioni al contorno differenti.

#### 4.4 Analisi Monte Carlo

Al fine di dare una validazione statistica al nuovo metodo di stima della lunghezza effettiva si è proceduto a delle simulazioni Monte Carlo [18].

Ogni ciclo di analisi, per garantire attendibilità statistica ai risultati, prevede un numero di ripetizioni pari a 200 [18].

Queste sono state effettuate in maniera analoga a quanto fatto nel Capitolo 2, ma si riprende brevemente l'impostazione della procedura.

Imponendo a priori la differenza percentuale tra lunghezza effettiva e visibile della catena, si è calcolato l'indice CoMAC tra tutti i nodi appartenenti alla luce visibile della stessa ed il punto al 20% di modello di confronto incastro-incastro. Si ribadisce che il modello di confronto ha lunghezza pari a quella visibile del tirante, stessa sezione e modulo elastico pari a quello nominale del materiale scelto. La catena in analisi invece presenta modulo elastico e condizioni di vincolo e carico random. Per gli intervalli in cui tali valori random sono estratti si rimanda alla Tabella (2.3) del Capitolo 2 ma si tiene a sottolineare che questi presuppongono come estremi l'utilizzo di condizioni di carico e rigidità irrealistici per poter valutare anche i peggiori casi possibili.

Si estrae quindi la posizione del massimo CoMAC e la si utilizza come variabile  $y$  nell'equazione della *retta di stima*. Si ricava così, basandosi sull'Eq.(2.6), il valore di  $x$  che corrisponde alla percentuale di cui incrementare la luce visibile per ottenere la stima della lunghezza effettiva. A partire da questa stima e noto il valore reale della lunghezza della catena, viene calcolato l'errore sulla singola simulazione  $e_i\%$ . In seguito alle 200 simulazioni, sulla base dei singoli errori riscontrati, viene calcolato anche l'errore medio percentuale  $E\%$ . Per la definizione di entrambi gli errori si rimanda alle Eq.(2.8) e (2.9).

Tutto ciò è stato ripetuto a parità di luce visibile per 10 lunghezze effettive differenti, corrispondenti ad incrementi percentuali dall'1% al 10%.

In Fig.(4.16) si riportano quindi gli intervalli di errore ottenuti dai dieci cicli di simulazioni Monte Carlo:

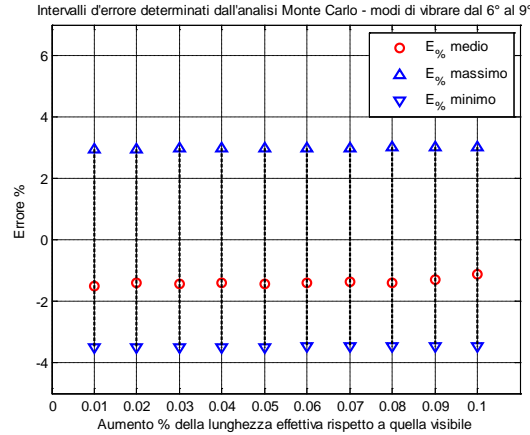


Figura 4. 16 Intervalli di errore determinate dall'Analisi Monte Carlo

Se si confronta il grafico sopra riportato con il corrispettivo del Capitolo 2 (Fig.(2.56)) si evidenzia subito come ora gli intervalli di errore si siano ridotti, a dimostrare una maggiore precisione del nuovo modello regressivo. Se prima inoltre l'ampiezza di questi intervalli variava in base alla lunghezza testata, adesso si mantiene costante indipendentemente dal caso considerato e sempre appartenente al  $[-3.5\%, +3\%]$ . Ciò dimostra che il livello di accuratezza statistica che il metodo ora raggiunge è sempre lo stesso ed è, tra l'altro, anche quasi simmetrico rispetto allo 0.

Se relativamente al caso non ottimizzato di Fig.(2.56) si riscontra che gli errori minimi a cui il metodo dà origine o non sono variati, o sono aumentati da circa il -2% al -3.5%, un forte miglioramento si ha nel senso degli errori massimi. Questi infatti sono stati notevolmente abbattuti, con passaggi dal 6% al 3%. In merito all'errore medio  $E\%$ , con questo modello si tende a sottostimare maggiormente la lunghezza effettiva della catena, essendo passati da un valore di circa il -1.15% del Capitolo 2, al -1.4% attuale. Tale variazione non è comunque così grande da poter essere letta in chiave negativa, soprattutto se si considera ancora una volta il livello di cui è stato abbattuto l'errore massimo.

Ritornando alla valutazione degli errori di sottostima, anche con questa ottimizzazione si riscontra un bias del metodo per i casi in cui  $l_{effettiva}=(1.01 \div 1.03)l_{visibile}$ . Potenzialmente si potrebbero infatti stimare lunghezze effettive di valore minore della luce visibile. Qualora ci si trovasse in questa situazione, come era stato esposto nel Capitolo 1, per i tre incrementi di lunghezza citati sopra il livello d'errore minimo ammissibile viene automaticamente stabilito al -1%, -2% e -3%. In questo modo si andrebbe perciò a dichiarare come risultato della stima lo stesso valore di luce visibile.

Per completezza e maggior chiarezza in Fig.(4.17) si riporta adesso il confronto tra la lunghezza effettiva della catena e quella che il metodo stima considerando

gli intervalli di errore restituiti dall'analisi Monte Carlo. In Fig.(4.18) si mostra invece il medesimo confronto, ma questa volta escludendo gli errori che metterebbero in luce il bias del metodo.

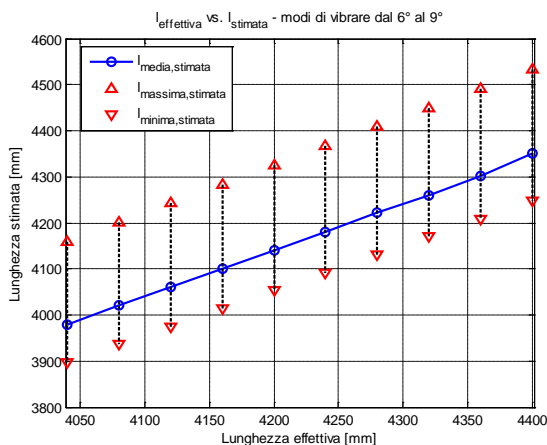


Figura 4. 17 Lunghezza effettiva della catena vs. Lunghezza stimata dal metodo

Se si confronta Fig.(4.17) con Fig.(2.57) si nota ancora una volta che utilizzando il CoMAC calcolato con modi di vibrare di ordine elevato, la stima apparirà ad un intervallo di variabilità di ampiezza sempre costante.

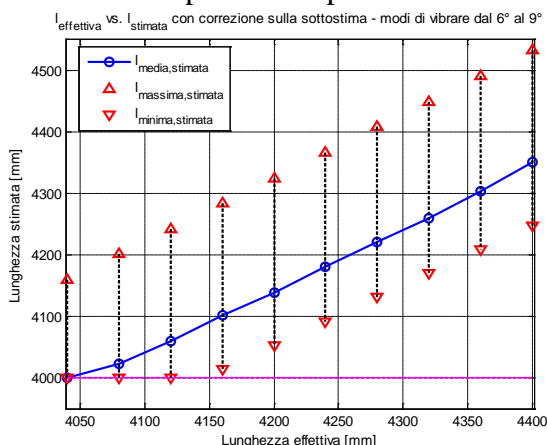


Figura 4. 18 Lunghezza effettiva della catena vs. Lunghezza stimata dal metodo con correzione

La stessa considerazione fatta per il confronto tra le Fig.(4.17) e (2.57), vale per il raffronto tra Fig.(4.18) e (2.58) a meno, ovviamente, dell'ulteriore riduzione dell'intervallo di variabilità della stima per gli incrementi di lunghezza fino al 3% per cui non ci si dilunga oltre.

In merito all'incertezza che accompagna la stima, se per Fig.(4.18), analogamente a quanto fatto per Fig.(2.58), si tracciassero idealmente delle linee parallele all'asse  $x$ , si noterebbe che l'incertezza massima che caratterizza il metodo è del 7%. Rispetto a Fig.(2.58) i casi in cui si incorre in questo valore di incertezza sono in numero inferiore, per cui mediamente la tecnica di stima

ottimizzata si comporta meglio della precedente. Si ribadisce però ancora una volta che tali intervalli sono quelli determinati in una condizione peggiorativa, che presuppone combinazioni di strutture scariche e soggette a rigidzze elevatissime e di catene con tiri prossimi allo snervamento ed appoggiate. Se lo stesso grafico di Fig.(4.18) venisse rigenerato con condizioni al contorno limite realistiche ( $N/N_{sn}=0.2 - k_v/k_{t,eq}=100$  e  $N/N_{sn}=0.8 - k_v/k_{t,eq}=20$ ), per l'alluminio si riscontrerebbe un'incertezza media del metodo del 4%, quindi migliorata rispetto al caso non ottimizzato. Nel Capitolo 2 si era poi anche dimostrato che il livello di incertezza che caratterizza le catene in alluminio è più alto rispetto a quello relativo ai tiranti in acciaio. Tale affermazione risulta ancora valida infatti, ripetendo le stesse analisi per un modello di catena in acciaio con condizioni al contorno realistiche, l'incertezza media riscontrata sulle stime è di circa il 3.5%. Si può quindi affermare che l'algoritmo implementato è tanto più accurato, tanto più il materiale che compone la catena ha un modulo elastico  $E$  elevato.

Concludendo, anche considerando i soli modi di vibrare dal sesto al nono, il metodo di stima, noti esclusivamente i dati geometrici misurabili in situ e la tipologia generica di materiale, consente di ottenere delle stime affidabili della lunghezza effettiva delle catene. Queste stime, rispetto a quelle ottenute nel Capitolo 2, saranno caratterizzate dal non risentire degli effetti dell'azione assiale  $N/N_{sn}$ . Ciò comporta, come è stato dimostrato nel presente paragrafo, la riduzione del livello di incertezza che caratterizza il metodo.

Per cui si può affermare che utilizzando le stime di lunghezza fornite dalla *retta di stima* ottimizzata in [1] si otterranno anche delle stime del tiro assiale  $N/N_{sn}$  più accurate.

## 4.5 Validazione sperimentale

Svolto lo studio preliminare per la definizione dell'ottimizzazione del metodo di stima e le annesse analisi statistiche, adesso risulta importante validare sperimentalmente quanto ottenuto. Per far ciò si ricorre ancora una volta alla tipologia di catena, forzamento, strumentazione e tecnica di identificazione modale (PolyMAX [20]) descritti nel Capitolo 3 nei Paragrafi 3.1 ed 3.2.

Si specifica che non verranno testate tutte le diverse combinazioni di condizioni di carico e vincolo come fatto in precedenza, ma soltanto una.

La scelta è ricaduta sul caso un tiro assiale  $N/N_{sn}$  basso, nello specifico si è lavorato con un valore di  $N/N_{sn}=0.25$ , ed anche una rigidzza dei vincoli  $k_v/k_{t,eq}$  bassa grazie all'interposizione della gomma nel sistema di serraggio della catena.

La scelta di questo particolare set di condizioni al contorno è dovuta alle seguenti ragioni:

- L'utilizzo di un valore di tiro assiale non elevato è quello per cui si metteva in luce anche sperimentalmente il bias del metodo di



stimare una lunghezza effettiva minore della visibile. Si vuole quindi vedere se ciò accade ancora e se l'eventuale sottostima sia più contenuta rispetto al caso per cui il CoMAC veniva calcolato con le prime sei forme modali;

- Le strutture reali è più comune che siano soggette a tiri bassi. Si è specificato più volte infatti che alti valori di azione assiale non solo sono rari, ma sono tipici di situazioni critiche per quanto riguarda il contenimento degli sforzi a cui le pareti della struttura sono soggette;
- Sempre facendo riferimento alle pareti in cui le catene alloggiavano, considerato che nella maggioranza delle situazioni esse sono fatte di materiali cementizi o pietra, è senz'altro più ragionevole presupporre che la loro rigidità sia inferiore rispetto a quella dell'acciaio del sistema di morse utilizzato in laboratorio. Da qui la decisione di testare il caso con sistema di vincolo con gomma;

In accordo con l'equazione della *retta di stima* di Fig.(4.14), decidendo di valutare ancora i casi di lunghezza effettiva incrementata dell'1%, 5% e 10% e ponendo tali valori come variabile  $x$ , a livello teorico ci si aspetta di riscontrare il massimo valore del CoMAC nelle seguenti posizioni percentuali  $y$ :

- $y=0.1847$  per il caso  $l_{effettiva}=1.01 \cdot l_{visibile}$ ;
- $y=0.1722$  per il caso  $l_{effettiva}=1.05 \cdot l_{visibile}$ ;
- $y=0.1567$  per il caso  $l_{effettiva}=1.1 \cdot l_{visibile}$ .

Si rimanda all'Eq.(3.6) per la definizione della posizione percentuale  $y$  rispetto allo sviluppo longitudinale della catena.

Premesso ciò, si illustrano ora nelle Fig.(4.19), (4.20) e (4.21) i risultati delle prove effettuate.

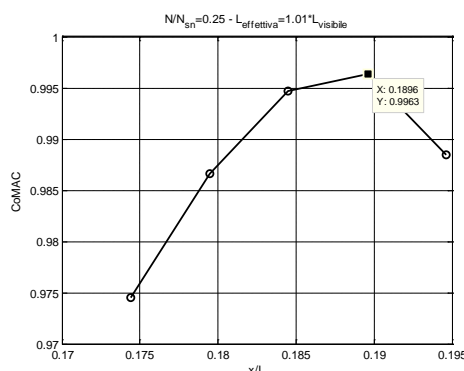


Figura 4. 19 CoMAC per incremento di lunghezza dell'1%

Da Fig.(4.19) si evince che la posizione del punto di massimo CoMAC nel caso di lunghezza maggiorata dell'1% non è rilevata nel punto mediano dei cinque testati, cioè corrispondente al valore previsto dalle rette di regressione, ma in un altro maggiormente proteso verso la mezzeria della catena. Per come è stata

definita la *retta di stima* si ha così a che fare con una sottostima della lunghezza effettiva. Così come avveniva per il caso con analoghe condizioni al contorno ma con metodo non ottimizzato del Capitolo 3, anche adesso l'errore di sottostima mette in luce il bias del metodo.

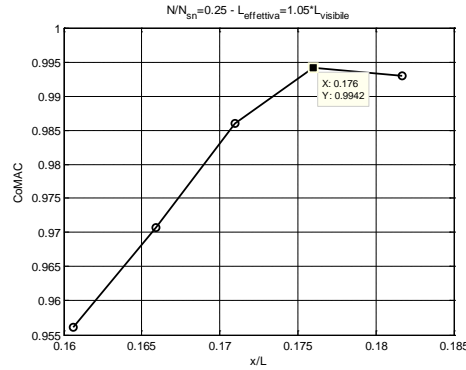


Figura 4. 20 CoMAC per incremento di lunghezza del 5%

Passando ora ad osservare il grafico di Fig.(4.20), si riscontra una sottostima della lunghezza effettiva anche per il caso di incremento di lunghezza del 5%. Come verrà meglio illustrato in seguito a livello numerico, tale sottostima rientra però ampiamente negli intervalli di errore previsti dall'analisi Monte Carlo, quindi il risultato ottenuto è comunque accettabile.

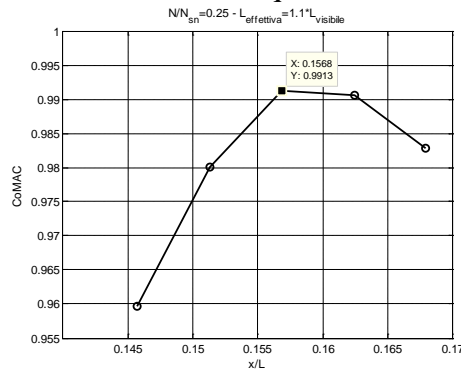


Figura 4. 21 CoMAC per incremento di lunghezza del 10%

Per l'ultimo caso testato, ovvero quello con lunghezza effettiva aumentata del 10%, si nota da Fig.(4.21) che il massimo CoMAC è sito nel punto centrale dei cinque testati. Con questa lunghezza si può quindi concludere che il metodo teorico si accorda molto bene con i risultati sperimentali e, di conseguenza, l'errore di stima sarà minimo. Questo sarà infatti al più dovuto o ai fattori di incertezza, o agli errori casuali caratterizzanti le prove in laboratorio.

Nelle Tabelle (4.1), (4.2) e (4.3) si riassumono infine tutti i risultati nel dettaglio.

	Con gomma			
<b>1%</b>	<b>N/Nsn=0.25</b>			
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1896			
Incremento di lunghezza % previsto	-0.006			
Lvisibile [mm]	3956	<b>MONTECARLO</b>		
Lstima [mm]	3933.1	<b>Intervallo errore %</b>	<b>Errore medio</b>	<b>Dev. standard</b>
<b>Errore %</b>	<b>-1.57</b>	<b>[ -3.43 ; 3.05 ]</b>	<b>-1.70</b>	<b>0.87</b>

Tabella 4. 1 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata dell'1%

	Con gomma			
<b>5%</b>	<b>N/Nsn=0.25</b>			
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.176			
Incremento di lunghezza % previsto	0.038			
Lvisibile [mm]	3806	<b>MONTECARLO</b>		
Lstima [mm]	3950.5	<b>Intervallo errore %</b>	<b>Errore medio</b>	<b>Dev. standard</b>
<b>Errore %</b>	<b>-1.14</b>	<b>[ -3.44 ; 3.14 ]</b>	<b>-1.65</b>	<b>0.89</b>

Tabella 4. 2 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata del 5%

	Con gomma			
<b>10%</b>	<b>N/Nsn=0.25</b>			
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1568			
Incremento di lunghezza % previsto	0.099			
Lvisibile [mm]	3632	<b>MONTECARLO</b>		
Lstima [mm]	3994.4	<b>Intervallo errore %</b>	<b>Errore medio</b>	<b>Dev. standard</b>
<b>Errore %</b>	<b>-0.04</b>	<b>[ -3.46 ; 3.02 ]</b>	<b>-1.12</b>	<b>1.47</b>

Tabella 4. 3 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata del 10%

Innanzitutto si nota come, utilizzando il calcolo del CoMAC sui modi di vibrare più alti, i risultati delle prove sperimentali, pur presentando degli errori, restituiscano sempre delle stime valide. In particolar modo i casi all'1% ed al 5% presentano errori prossimi a quelli medi delle simulazioni Monte Carlo. Per queste lunghezze si può quindi concludere che i dati sperimentali si accordano molto bene con quelli statisticamente previsti dal metodo. Per quanto concerne il caso di variazione di lunghezza del 10% invece si riscontra la maggiore distanza dall'errore percentuale medio, ma la stima è la più precisa. Se si confrontano a livello numerico i tre errori riscontrati si evince, e si può quindi concludere, che con lunghezze via via crescenti il metodo ottimizzato tende ad essere sempre più accurato.

Se si confrontano poi i risultati nelle Tabelle sopra riportate con quelli del caso analogo delle Tabelle (3.4), (3.5) e (3.6) Capitolo 3 si possono fare alcune considerazioni.

Innanzitutto adesso non si incorre più in delle sovrastime, ma si riscontrano solo sottostime, anche per una lunghezza effettiva del 10% superiore rispetto alla luce visibile. Con il metodo non ottimizzato, invece, simulando una variazione di lunghezza del 10% si erano ottenute sempre delle sovrastime dell'1.5% indipendentemente dalle condizioni di vincolo e carico.

Se ci si sofferma sul caso dell'1% sia il dato in Tabella (4.1), che quello in Tabella (3.4) mostrano che, indipendentemente dai modi di vibrare su cui ci si basa per il calcolo del CoMAC, si ottengono sempre stime che evidenziano il bias del metodo. Adesso però l'errore di sottostima, privo dell'influenza dell'azione assiale  $N/N_{sn}$ , in valore assoluto è minore a dimostrare comunque un miglioramento nei risultati.

Riguardo il caso al 5%, si nota che adesso le prove restituiscono un errore di sottostima, mentre prima era di sovrastima, ed è anche più grande in termini di valore assoluto. Per questa lunghezza sembrerebbe quindi che il metodo sia meno preciso. Tuttavia se per entrambe le Tabelle (4.2) e (3.5) si confrontano l'errore sperimentale e l'errore medio percentuale  $E\%$ , si riscontra come utilizzando il metodo ottimizzato i risultati sperimentali siano maggiormente in accordo con quanto ci si aspetta dal comportamento statistico del metodo.

Per quanto concerne poi l'incremento di lunghezza del 10% si nota, paragonando il risultato attuale in Tabella (4.3) con quello di Tabella (3.6), un netto miglioramento nella stima.

Si può quindi concludere che l'utilizzo della retta di regressione ottimizzata permette via via di ottenere stime più accurate all'aumentare della lunghezza della catena, mentre quello non ottimizzato ha mostrato una maggiore precisione per lunghezze intermedie.

In Fig.(4.22) si riportano ora gli errori riscontrati sperimentalmente rispetto ai risultati dell'analisi Monte Carlo.

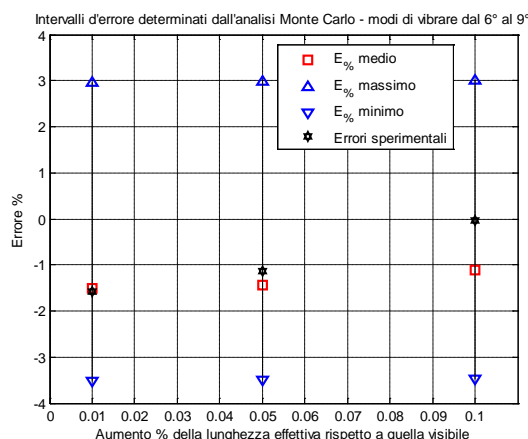


Figura 4. 22 Posizione errori sperimentali rispetto agli intervalli statistici

È facile notare ancora una volta come non solo gli errori delle prove in laboratorio rientrino ampiamente negli intervalli statistici, ma è soprattutto evidente il concetto già ribadito più volte della diminuzione progressiva dell'entità errore all'aumentare della lunghezza effettiva della catena. Infine in Fig (4.23) si riportano per maggiore chiarezza le posizioni del punto di massimo CoMAC trovate sperimentalmente rispetto alla retta di regressione ed agli intervalli di variabilità determinati con l'analisi dei residui del Paragrafo 4.3.

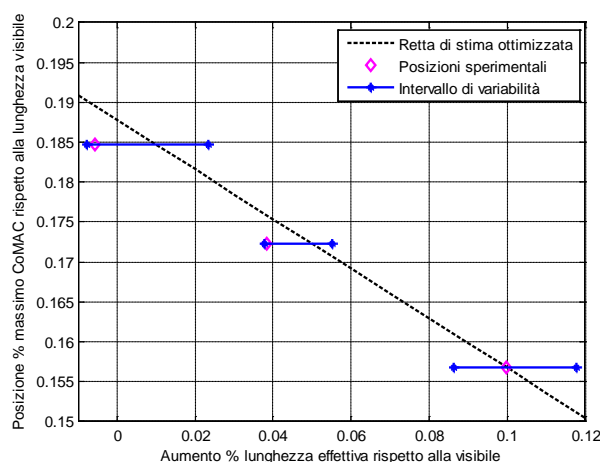


Figura 4. 23 Posizione dei massimi del CoMAC sperimentali rispetto alla retta di regressione

Ancora una volta si evince, così come accadeva nel Capitolo 3, che i dati sperimentali risultano all'interno degli intervalli di variabilità determinati dal massimo e dal minimo residuo attorno alla *retta di stima*. Inoltre, giacché questi intervalli sono più stretti rispetto a quelli riscontrati con il metodo non ottimizzato, i risultati sperimentali sono di conseguenza anche meno dispersi.

A valle di tutta la trattazione svolta nel presente Capitolo si può quindi affermare che il metodo di stima della lunghezza effettiva delle catene implementato, privo dell'influenza dell'azione assiale  $N/N_{sn}$  grazie al calcolo del CoMAC con i modi di vibrare dal sesto al nono, si dimostra sia da un punto di vista statistico, che da un punto di vista sperimentale, più accurato e preciso.

In particolar modo la precisione tende ad essere sempre più elevata al crescere della differenza tra luce visibile e lunghezza effettiva della catena. Handicap dell'ottimizzazione sta nei tempi richiesti per l'identificazione delle forme modali più elevate sia con le simulazioni FEM, che in ambito sperimentale.

In ogni caso si conclude che l'utilizzo di entrambe le *rette di stima* del Capitolo 2 e del presente hanno mostrato risultati soddisfacenti. Ovviamente, qualora l'utente finale avesse bisogno di dati affetti dal minor livello di incertezza possibile, ad esempio per l'identificazione del tiro assiale  $N/N_{sn}$  [1], essere in grado di rendere trascurabile l'effetto di una delle fonti di variabilità dei risultati, permette di rispondere pienamente a questa esigenza.



## Capitolo 5

### Metodo di stima della lunghezza effettiva applicato a modelli asimmetrici

Tutta la trattazione svolta finora ha perseguito l'obiettivo di mettere a punto un metodo per la stima della lunghezza effettiva delle catene basato su tecniche di analisi modale. In particolar modo la grandezza principe che ha permesso di far ciò è l'indice di correlazione CoMAC [17] valutato sulle prime sei forme modali del sistema.

L'indice CoMAC, quando calcolato secondo le modalità esposte nel Paragrafo 2.4, presenta la caratteristica di avere un unico punto di massimo assoluto lungo la luce visibile del tirante. Nel Capitolo 2 si è quindi proceduto ad implementare, mediante regressione lineare ai minimi quadrati, l'equazione di una *retta di stima* in grado di legare la lunghezza effettiva della catena alla posizione del punto di massima correlazione. Nel Capitolo 3 l'attendibilità dei risultati derivanti dall'utilizzo di tale relazione è stata validata per mezzo di prove sperimentali.

Limitazione della presente tecnica di stima è però la sua sensibilità alle condizioni al contorno del tirante, ovvero la rigidità del sistema di vincolo  $k_t/k_{t,eq}$  ed il tiro assiale  $N/N_{sn}$ . Questi due parametri infatti provocano degli shift nella posizione del massimo CoMAC e di conseguenza anche un certo livello di incertezza sulla stima.

Per ovviare a questo inconveniente nel Capitolo 4 si è proceduto ad una ottimizzazione del metodo. Calcolando l'indice CoMAC tra forme modali di ordine più elevato (dalla sesta alla nona) si è ottenuta una nuova *retta di stima* che tende a non risentire dell'influenza del tiro assiale  $N/N_{sn}$ . Anche questa nuova relazione è stata validata in laboratorio e si è quindi così riusciti a conseguire l'obiettivo prefissatosi.

Tutte le analisi svolte nei Capitoli precedenti si sono basate su un modello di catena con sistema di vincolo perfettamente simmetrico. Si è infatti supposto che le entrambe le pareti dell'edificio in cui alloggiavano le due estremità del tirante agiscano su di esso come molle torsionali di pari rigidità.

Se per edifici moderni questa ipotesi può descrivere abbastanza bene la realtà, in quanto i materiali impiegati per la costruzione sono generalmente sottoposti a lavorazioni che permettono di considerarli uniformi, ciò non è detto per edifici antichi in cui, tra l'altro, si trova un grandissimo impiego delle catene. Soprattutto riferendosi a questi nasce quindi l'esigenza di utilizzare un modello che permetta di considerare il fatto che i tiranti alloggiino in un sistema di pareti

con diverso valore di rigidezza  $k_v/k_{t,eq}$ . In questo Capitolo, perciò, si vuole studiare se la tecnica di stima implementata è valida anche per modelli di catena con sistema di vincolo asimmetrico, o se sarà necessario correggerla, se non addirittura metterne a punto una nuova.

### 5.1 Analisi del CoMAC per modello di catena asimmetrico

Come anticipato nell'introduzione del presente Capitolo, l'ipotesi che una catena abbia la medesima rigidezza del sistema di vincolo ad entrambe le estremità può essere discutibile quando ci si riferisce al suo impiego in edifici storici. In queste applicazioni si ritiene infatti che la pietra costruttiva o il materiale laterizio utilizzato non presentino delle caratteristiche di omogeneità tali da poter ritenere questa assunzione sempre valida. Per questo motivo da qui in avanti ci si riferirà a modelli di tirante come quello riportato in Fig.(5.1).

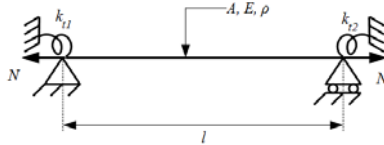


Figura 5. 1 Modello di catena a rigidezza differente

In merito alle caratteristiche fisiche e geometriche, il modello riportato sopra continua a presentare omogeneità del materiale ( $E$  e  $\rho$  costanti) ed uniformità della sezione  $A$  lungo tutto il suo sviluppo. Riguardo le condizioni al contorno, invece, si ha la medesima azione assiale  $N$  agli estremi del tirante (e questa ipotesi deve sempre essere rispettata per garantire l'equilibrio statico della struttura), ma i vincoli sono ora schematizzati con molle torsionali con rigidezze  $k_{t1}$  e  $k_{t2}$  differenti. Anche in questo Capitolo si affronterà lo studio sfruttando le grandezze adimensionali, per cui il tiro verrà valutato in termini di  $N/N_{sn}$ , con  $N_{sn}$  pari al carico di snervamento della catena, e la rigidezza del sistema di vincolo in termini di  $k_v/k_{t,eq}$ , con  $k_{t,eq}$  pari alla rigidezza equivalente. Per la definizione di  $N_{sn}$  e  $k_{t,eq}$  si rimanda al Paragrafo 1.3 del Capitolo 1.

Non viene fatta nessuna ipotesi circa quale delle due rigidezze sia maggiore dell'altra. Per garantire generalità all'analisi entrambe potranno infatti assumere un qualsiasi valore.

A questo punto la prima cosa fatta, in analogia con la metodologia messa a punto nel Capitolo 2, è stato ripetere il calcolo del CoMAC sui primi sei modi di vibrare, grado di libertà per grado di libertà, tra il nuovo modello di catena di Fig.(5.1) ed uno di confronto perfettamente incastrato, così come illustrato in Fig.(2.7) nel Paragrafo 2.2. Si specifica inoltre che il modello di confronto, illustrato in Fig.(2.6), presenta il medesimo materiale ( $E$ ,  $\rho$ ) e la stessa sezione  $A$  della catena in studio, ma non è soggetto ad alcun tiro assiale.

In questa fase preliminare non si bada alla distinzione tra lunghezza visibile ed effettiva della catena, ma si vuole solo analizzare il comportamento del sistema



con la nuova condizione di vincolo. Di conseguenza si impostano le simulazioni FEM supponendo che la lunghezza effettiva del tirante coincida con la sua luce visibile ed abbia la stessa estensione del modello di confronto incastro-incastro. Nelle Fig.(5.2) e (5.3) si riportano i risultati relativi a catene in alluminio ( $E=68670$  MPa), sezione  $A=15 \times 25$  mm<sup>2</sup> e lunghezza  $l=4000$  mm. Come rigidzze adimensionali  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$  sono stati scelti sia dei valori bassi, che dei valori alti per avere una panoramica del comportamento del tirante. Inoltre per questioni di generalità si è deciso di ripetere le analisi supponendo che il vincolo a rigidzza maggiore fosse prima il destro e poi il sinistro.

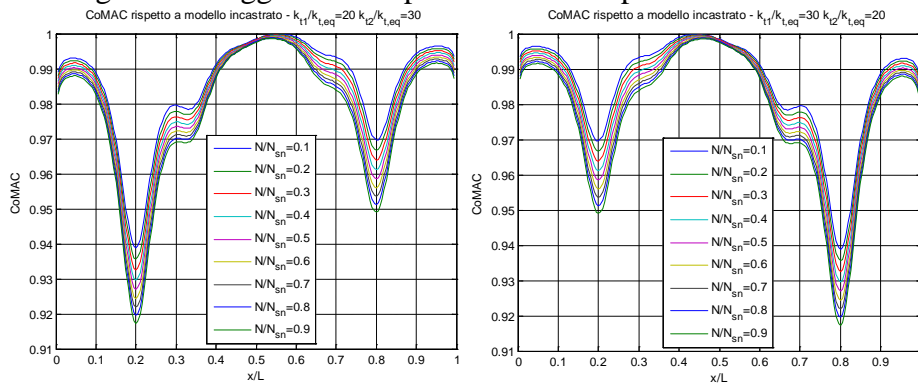


Figura 5.2 CoMAC rispetto ad un modello incastrato ed al variare del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena da 4000mm con  $k_{ta}/k_{t,eq}=20$  e  $k_{tb}/k_{t,eq}=30$

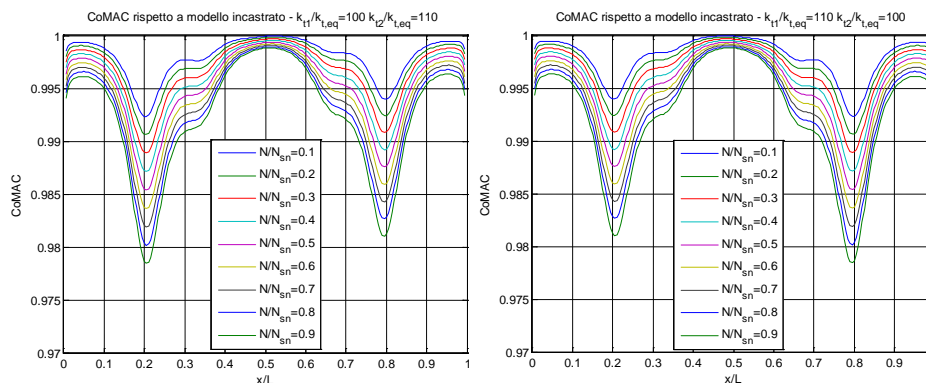


Figura 5.3 CoMAC rispetto ad un modello incastrato ed al variare del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena da 4000mm con  $k_{ta}/k_{t,eq}=100$  e  $k_{tb}/k_{t,eq}=110$

Come si evince, indipendentemente dai valori di tiro, il CoMAC mostra un andamento con la presenza di due punti di minimo, in posizioni simmetriche, negli intorno del 20% e dell'80% della luce della catena. In particolare tra i due minimi quello assoluto è riscontrato nel lato il cui vincolo ha la minore rigidzza equivalente. Il comportamento del sistema, quindi, è duale rispetto ai valori di assegnati come  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$ , ovvero se questi vengono invertiti si ottengono curve speculari.

Se infine ci si sofferma sulla posizione dei minimi al variare delle condizioni al contorno della catena, si notano dei piccoli shift, ma essendo di entità pari al più

a 1 cm a fronte di 4 m di tirante, questi si possono ritenere trascurabili. Perciò si può ragionevolmente approssimare affermando che le minori correlazioni sono riscontrate nelle medesime posizioni.

Le prove fin qui effettuate riguardano però catene per cui la differenza relativa tra le rigidezze adimensionali del sistema di vincolo  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$  è contenuta. Per avere la conferma che questo sia un comportamento universale, sebbene ci si renda conto che questa è una situazione non realistica, si effettua a scopo cautelativo un ulteriore test per un tirante per cui i valori di  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$  differiscono di 100 volte. Si riportano in Fig.(5.4) gli andamenti del CoMAC ottenuti dalle simulazioni FEM.

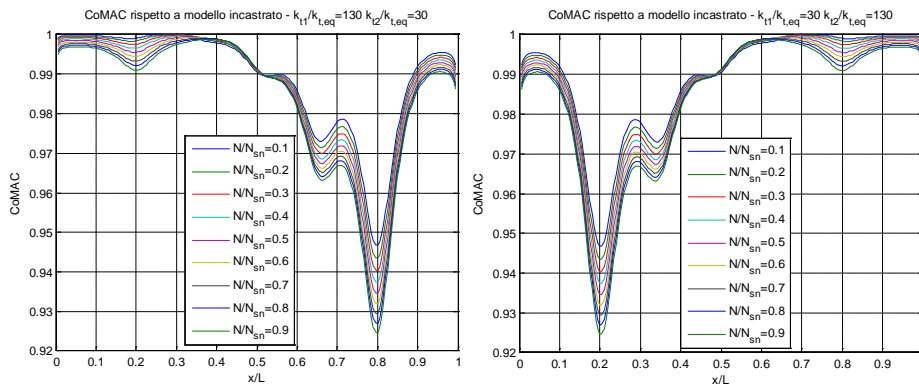


Figura 5. 4 CoMAC rispetto ad un modello incastrato ed al variare del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena da 4000mm con  $k_{ta}/k_{t,eq}=30$  e  $k_{tb}/k_{t,eq}=130$

La Fig.(5.4) mostra ancora una volta che la minima correlazione è riscontrata ad una distanza pari a circa il 20% della luce rispetto al vincolo a minor rigidezza. Dal lato del vincolo a rigidezza maggiore è invece adesso più corretto parlare di punto minimo solo se si considera metà dello sviluppo del tirante.

Da un punto di vista prettamente numerico Fig.(5.4) permette quindi di concludere che maggiore è la differenza tra  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$ , maggiore sarà la discrepanza tra i valori del CoMAC nei due punti al 20% e 80% della luce. Invece basandosi sulle Fig.(5.2) e (5.3) si ha che, a parità di differenza tra  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$ , le situazioni caratterizzate da basse rigidezze saranno quelle che vedranno una maggiore differenza tra i valori del CoMAC nei punti di minimo.

Dal momento che risultati analoghi sono stati ottenuti anche per catene in acciaio ( $E=206000$  MPa) e con lunghezze e sezioni differenti ( $l=10000$  mm e  $A=30 \times 50$  mm<sup>2</sup>), come fatto nel Capitolo 2, si può concludere che questi due punti sono da ritenersi significativi ai fini dell'analisi.

### 5.1.1 Analisi del CoMAC per modello di catena asimmetrico con lunghezza effettiva maggiore della luce visibile

Definito che anche per catene con sistema di vincolo asimmetrico i punti significativi per lo studio del CoMAC corrispondono a due minimi e che questi sono posti circa nelle medesime posizioni, si vuole analizzare cosa succede

quando la lunghezza effettiva è maggiore della luce visibile. In questo caso il calcolo del CoMAC viene effettuato su tutti i gradi di libertà del modello perfettamente incastrato rispetto a quelli appartenenti alla sola porzione visibile del modello di catena reale, così come schematizzato in Fig.(2.13) nel Capitolo 2. Si illustrano a tal proposito i risultati ottenuti per due catene in alluminio, sezione  $A=15 \times 25 \text{ mm}^2$  e luce visibile  $l_{\text{visibile}}=4000 \text{ mm}$ , ma con lunghezza effettiva  $l_{\text{effettiva}}$  incrementata rispettivamente del 5% e del 10% rispetto a quest'ultimo valore.

Sia per ragioni di brevità, che per motivi cautelativi nello studio, nelle Fig.(5.8) e (5.9) si riportano gli andamenti dell'indice di correlazione solo per un caso con una differenza tra le rigidezze normalizzate  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$  pari a 100. Si specifica altresì che per le situazioni in cui la differenza tra i due valori di rigidezza è minore si ottengono risultati analoghi, quindi i commenti alle figure sono di valenza generale.

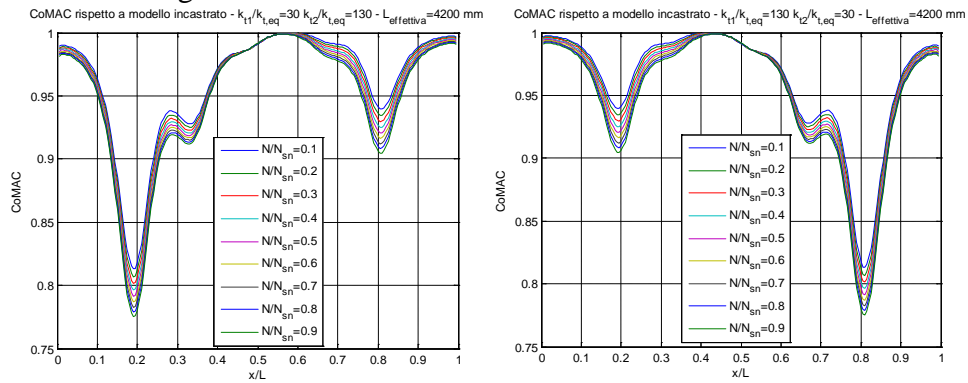


Figura 5. 5 CoMAC al variare di  $N/N_{sn}$  per una catena da 4200mm con rigidezze differenti di 100

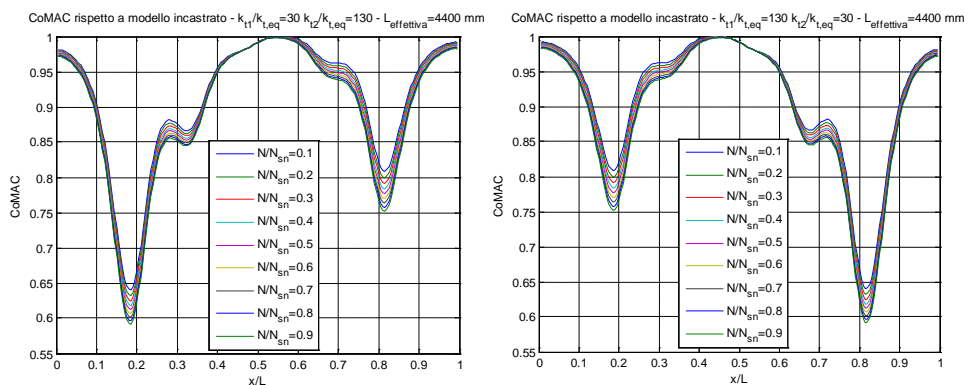


Figura 5. 6 CoMAC al variare di  $N/N_{sn}$  per una catena da 4400mm con rigidezze differenti di 100

I grafici riportati sopra mostrano che aumentando la lunghezza effettiva della catena l'andamento del CoMAC conserva la sua peculiarità, ovvero la presenza di due punti di minimo a circa 1/5 e 4/5 della luce visibile della catena. Rispetto alle simulazioni svolte nel paragrafo precedente questi hanno subito dei

piccolissimi shift in posizione che, vista la lunghezza del tirante, non sono particolarmente significativi.

Un'importante cambiamento rispetto al paragrafo precedente è che, se si fa un confronto con Fig.(5.4), si nota poi che il minimo sito in prossimità del vincolo a rigidità maggiore è adesso sempre ben riconoscibile. A parte ciò, la vera e sostanziale differenza che si riscontra all'aumentare della lunghezza effettiva è la progressiva diminuzione dei valori dell'indice di correlazione, in particolare proprio nei suoi punti di minimo. Questa evidenza potrebbe indicare una strada potenziale per la stima della lunghezza effettiva, ovvero collegare quest'ultima al decremento del CoMAC. Dal momento che l'indice di correlazione assume però valori diversi sia in base alla rigidità assegnata (alti o bassi  $k_t/k_{t,eq}$ ), sia a seconda del lato in cui si impone un valore maggiore, sia al variare dell'azione assiale  $N/N_{sn}$ , ciò risulterebbe complesso.

Di conseguenza, esattamente come era accaduto nel Capitolo 2, si conclude che questa metodologia di calcolo, sebbene mostri delle possibilità per risalire ad una procedura di stima, viene per il momento messa da parte auspicando di trovarne una più semplice. Si procede perciò ad attuare una nuova strategia.

### **5.2 Andamento del CoMAC tra modello reale e punto al 20% del modello di confronto**

Tutte le simulazioni condotte finora hanno mostrato che i due punti che presentano caratteristiche significative nello studio delle catene sono posti a circa il 20% e 80% della loro luce visibile. Non è però stato possibile individuare un metodo che in modo semplice permetta di risalire alla lunghezza effettiva dei tiranti basandosi sul valore del CoMAC in queste posizioni. Perciò, in analogia a quanto fatto nel Capitolo 2, si ripete il calcolo dell'indice di correlazione tra tutti i gradi di libertà appartenenti alla luce visibile della catena sotto studio e, vista la sua importanza, il solo posto al 20% della lunghezza del modello di confronto perfettamente incastrato (si veda Fig.(2.22) per maggiore chiarezza). Ciò a cui si auspica è, come descritto del Paragrafo 2.4.1, di riscontrare un trend che permetta di risalire alla lunghezza effettiva della catena. Si riportano nelle Fig.(5.7), (5.8) e (5.9) i risultati relativi ad una catena in alluminio di sezione  $A=15 \times 25 \text{ mm}^2$  e lunghezza di  $l=4000 \text{ mm}$ . In questa fase preliminare non si considererà l'influenza della lunghezza effettiva della catena, che quindi viene fatta coincidere con la sua luce visibile, e la variazione di rigidità tra un vincolo e l'altro è volutamente limitata.

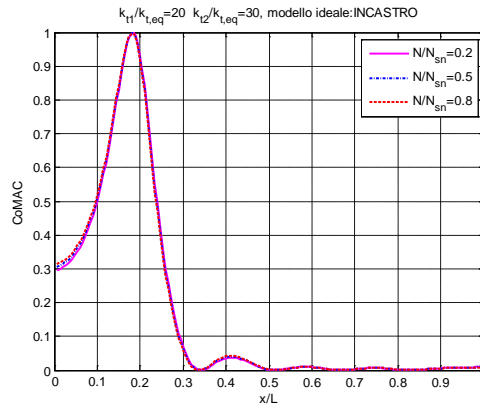


Figura 5. 7 CoMAC al variare del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena con  $k_{t1}/k_{t,eq}=20$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}=30$

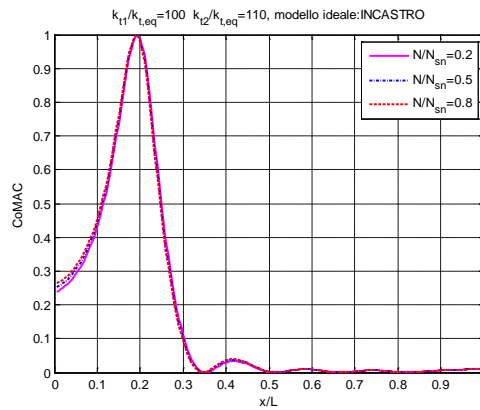


Figura 5. 8 CoMAC al variare del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena con  $k_{t1}/k_{t,eq}=100$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}=110$

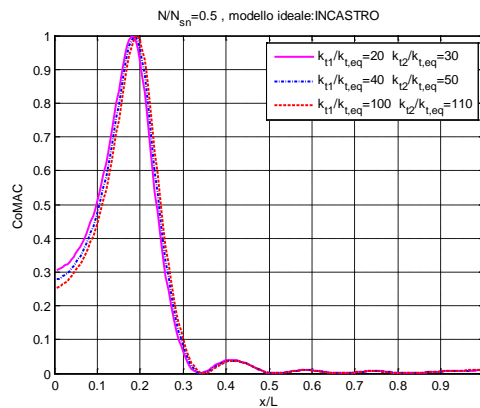


Figura 5. 9 CoMAC al variare delle rigidzze  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$  per una catena con tiro  $N/N_{sn}=0.5$

Come si evince dalle figure riportate sopra, così come avveniva nel Capitolo 2, l'indice CoMAC si caratterizza per presentare un unico punto di massimo assoluto. La sua posizione risente poi dell'effetto sia della rigidzza del sistema di vincolo, sia dell'azione assiale. Tuttavia il primo parametro, come si può

riscontrare soffermandosi meglio su Fig.(5.9), è il preponderante, mentre gli shift sulle curve di Fig.(5.7) e Fig.(5.8) dovuti al tiro sono molto meno distinguibili.

A questo punto, per valutare se anche la lunghezza del tirante abbia un qualche effetto sul CoMAC, si è proceduto a ripetere la stessa analisi per catene con lunghezza effettiva incrementata del 5% e del 10% rispetto alla luce visibile. Si è inoltre deciso di valutare, per maggiore generalità, anche modelli di catena con differenze di rigidezza spinte tra i due vincoli.

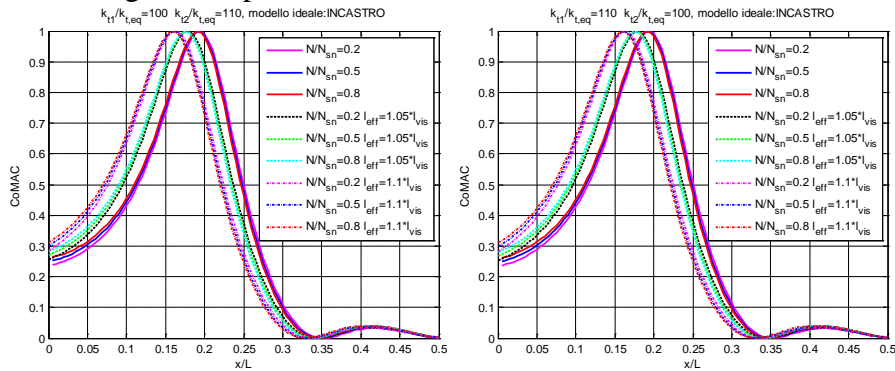


Figura 5. 10 CoMAC al variare della lunghezza effettiva e del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena con  $k_{ta}/k_{t,eq}=100$  e  $k_{tb}/k_{t,eq}=110$

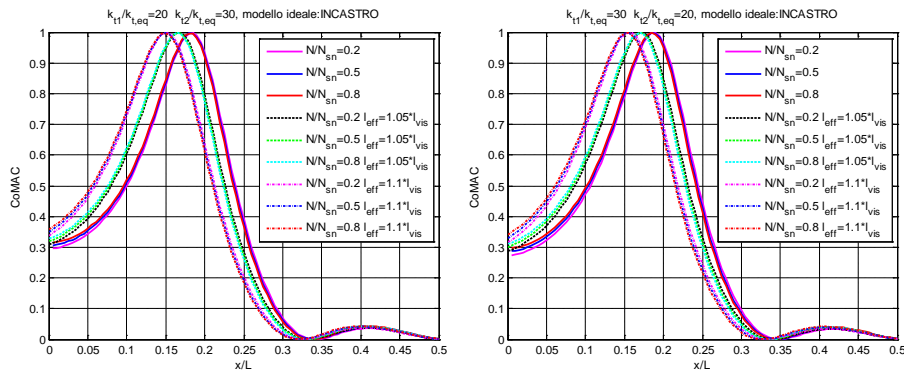


Figura 5. 11 CoMAC al variare della lunghezza effettiva e del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena con  $k_{ta}/k_{t,eq}=20$  e  $k_{tb}/k_{t,eq}=30$

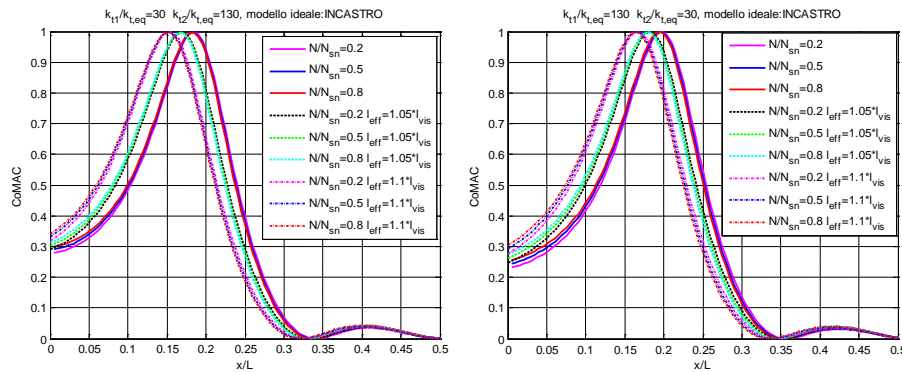


Figura 5.12 CoMAC al variare della lunghezza effettiva e del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena con  $k_{11}/k_{t,eq}=30$  e  $k_{12}/k_{t,eq}=130$

Dalle Fig.(5.10), (5.11) e (5.12) si evince che aumentando la lunghezza effettiva della catena il punto di massimo CoMAC tende progressivamente a traslare sempre verso il vincolo sinistro. Tale traslazione, come avveniva nel Capitolo 2, è inoltre circa della stessa entità ogni 5% di incremento della lunghezza. Confrontando le figure si può però notare ancora una volta che anche i parametri di tiro assiale  $N/N_{sn}$  e rigidezze dei vincoli  $k_{11}/k_{t,eq}$  e  $k_{12}/k_{t,eq}$  inducono degli shift nella posizione del massimo; sebbene la rigidezza dei vincoli abbia un effetto maggiore rispetto al carico, questo resta comunque di minore rilevanza in confronto alla variazione di lunghezza. Interessante è anche il fatto che queste considerazioni sono valide anche quando la differenza tra le rigidezze  $k_{11}/k_{t,eq}$  e  $k_{12}/k_{t,eq}$  dei due vincoli è molto forte come nel caso di Fig.(5.12).

A valle di queste evidenze si può quindi concludere che anche nel caso di modello di catena con sistema di vincolo non simmetrico si riscontra un trend presumibilmente lineare nello spostamento del punto di massima correlazione in funzione della lunghezza effettiva della catena. Di conseguenza, una volta nota l'equazione della *retta di stima* descrivente questo modello di tirante, sarà possibile ottenere delle stime circa la sua lunghezza.

### 5.2.1 Confronto dei risultati del modello di catena con sistema di vincolo asimmetrico con quelli del modello simmetrico

Nel paragrafo precedente è stato appurato che anche per le catene con sistema di vincolo a rigidezza differente è possibile evidenziare un trend nello spostamento del massimo CoMAC in funzione della lunghezza effettiva.

A questo punto sembrerebbe logico procedere in maniera analoga a quanto fatto nel Capitolo 2, ovvero cercare di ottenere, mediante regressione lineare, una *retta di stima* che permetta con un margine di incertezza limitato di stimare la lunghezza effettiva della catena.

A differenza di quanto fatto nel Capitolo 2, nel caso di tirante asimmetrico tale procedura regressiva potrebbe presentare delle potenziali forzature nella sua implementazione.

Nel caso di modello simmetrico infatti erano stati utilizzati come dati di input per la regressione le posizioni del massimo CoMAC per catene di lunghezza differente soggette a condizioni al contorno specifiche. In particolar modo venivano combinati valori estremi di tiro assiale e rigidezza dei vincoli (per i dettagli si rimanda al Paragrafo 2.5.1).

Per i modelli analizzati nel presente Capitolo, sebbene l'imposizione di valori di carico assiale alti o bassi non presenti particolari problematiche, l'utilizzo di un sistema di vincolo asimmetrico introduce delle criticità. In primis, risulta forzato stabilire a priori la differenza tra i valori di rigidezza  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$  da assegnare ai vincoli. Supponendo che entrambe le estremità della catena siano allocate in strutture murarie dello stesso materiale, vi saranno sempre delle non uniformità della composizione che causeranno una discrepanza tra  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$ . Stabilire se queste non uniformità causino una piccola o una grande differenza tra le due rigidezze non è immediato ed azzardare un valore arbitrario potrebbe essere fuorviante. In seconda analisi bisogna considerare che la posizione del massimo CoMAC subisce dei piccoli shift in base a quale dei due vincoli abbia una maggiore rigidezza, quindi il comportamento del sistema non è duale se in una simulazione i valori di  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$  vengono scambiati. A valle di queste due considerazioni la costruzione di un nuovo modello regressivo dovrebbe essere condotta con più attenzione e considerando più casistiche di quanto fatto nel caso di modelli simmetrici.

Se si riprende la Fig.(2.48) del Capitolo 2 è possibile notare che per modelli simmetrici i due set di condizioni al contorno di  $N/N_{sn}=0.2$  e  $k_t/k_{t,eq}=100$  e  $N/N_{sn}=0.8$  e  $k_t/k_{t,eq}=20$  permettevano di definire, per ogni lunghezza della catena, un intervallo in cui erano contenuti i possibili shift in posizione del massimo CoMAC. Prima di procedere ad una nuova regressione, si vuole quindi vedere se i risultati relativi ai modelli di tirante asimmetrico rientrano o meno in questi intervalli. In caso positivo si potrà ragionevolmente pensare di utilizzare l'equazione della *retta di stima* per catene simmetriche del Capitolo 2 anche per quelle asimmetriche, senza quindi implementare una nuova relazione con tutti gli accorgimenti che ne derivano.

Per effettuare tale verifica sono state svolte varie simulazioni FEM su modelli di tirante asimmetrico modificandone di volta in volta le caratteristiche di lunghezza effettiva, carico e vincolo. Per un confronto diretto proprio con i dati di Fig.(2.48) ci si riferirà a tiranti in alluminio, sezione A di  $15 \times 25 \text{ mm}^2$  e luce visibile di  $4000 \text{ mm}$ . Il numero delle simulazioni, poi, è stato tale da garantire tutte le possibili combinazioni tra i parametri sotto elencati:

- Sono state considerate lunghezze effettive della catena superiori dell'1%, 2%, 5% e 10% rispetto alla luce visibile;
- Sono stati assegnati valori di tiro adimensionale  $N/N_{sn}=0.2$  e  $N/N_{sn}=0.8$  per valutare le situazioni sia di basso che di alto carico assiale;



- Per studiare entrambi i casi di bassa ed alta rigidezza dei vincoli sono stati scelti come valori di partenza  $k_t/k_{t,eq}=20$  e  $k_t/k_{t,eq}=100$ ;
- Fissato per il vincolo sinistro uno dei due valori di rigidezza citati al punto sopra, al destro ne è stato assegnato uno incrementato prima di 5, poi di 10 ed infine di 20 volte. Le stesse analisi sono state ripetute scambiando i valori di rigidezza tra le due estremità della catena;
- Si è valutato per tutte le cinque lunghezze di catena e per entrambi i valori di tiro cosa succede quando la differenza di rigidezza tra i due vincoli è estremamente alta. Per cui sono state svolte simulazioni con  $k_{t1}/k_{t,eq}=30$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}=130$  e viceversa con  $k_{t1}/k_{t,eq}=130$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}=30$ .

I risultati delle simulazioni FEM, in termini di posizione del massimo CoMAC in funzione della lunghezza effettiva della catena, frutto della combinazione di tutte queste variabili, sono riportati nelle Fig.(5.13) e (5.14).

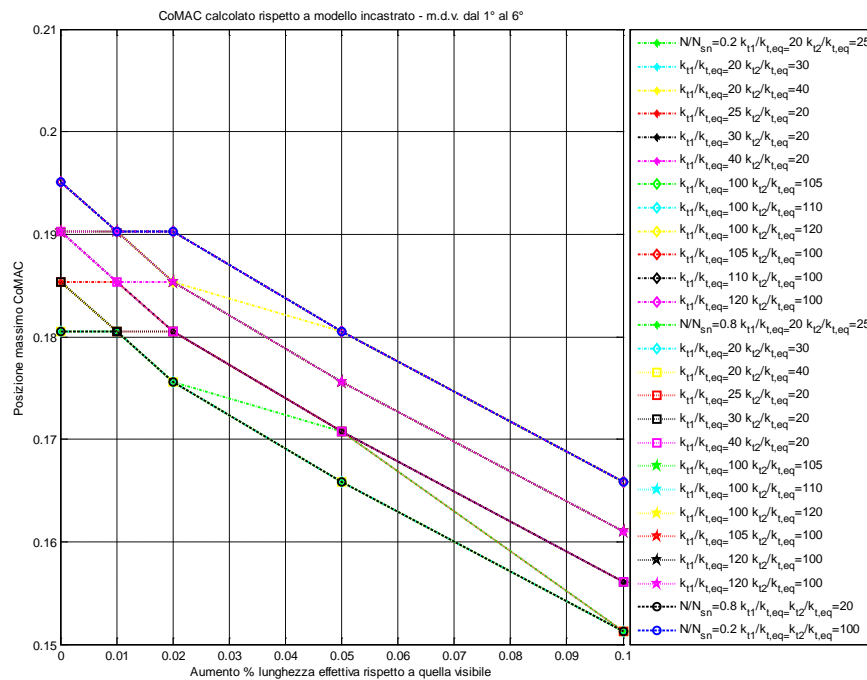
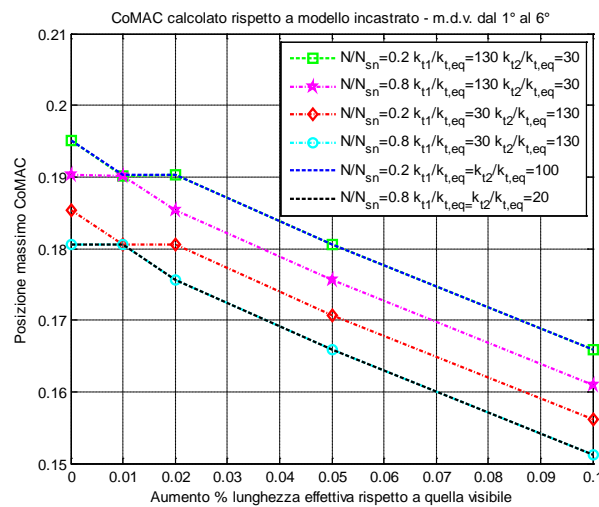


Figura 5. 13 Posizioni del massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva e delle condizioni al contorno della catena



**Figura 5. 14** Posizioni del massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva e delle condizioni al contorno della catena - elevata differenza di rigidezza

In entrambe le Fig.(5.13) e (5.14) le spezzate in blu e nero definiscono, per ogni aumento percentuale di lunghezza, l'ampiezza massima degli intervalli in cui la posizione del massimo CoMAC può variare per un modello di catena simmetrico. Come si può notare anche nel caso in cui si studi un tirante con condizioni di vincolo asimmetriche, le posizioni che il massimo dell'indice di correlazione assume sono sempre all'interno di questa fascia di variabilità, o al più coincidenti con i suoi estremi.

Andando ad analizzare più attentamente i grafici, ed in particolar modo quello di Fig.(5.14) risulta più esplicativo visto il minor numero di curve riportate, si nota che aumentando il valore del tiro assiale  $N/N_{sn}$  il massimo CoMAC si allontana dalla mezzeria della catena, spostandosi verso il vincolo sinistro. Riferendosi alla Fig.(2.48) del Capitolo 2 si può evidenziare che nel caso di modello simmetrico si aveva lo stesso riscontro. Si può concludere quindi che l'effetto dell'azione assiale  $N/N_{sn}$  è qualitativamente lo stesso indipendentemente dalle condizioni di vincolo della catena.

In merito all'effetto della rigidità dei vincoli, si nota che quando l'estremità sinistra della catena presenta un valore di  $k_{t1}/k_{t,eq}$  minore del  $k_{t2}/k_{t,eq}$  del vincolo destro, il CoMAC si sposta invece verso la mezzeria della catena.

In ogni caso, giacché i risultati hanno mostrato che al variare delle condizioni al contorno il massimo CoMAC per modelli asimmetrici rientra sempre nelle fasce di variabilità determinate per quelli simmetrici, per le stime della lunghezza effettiva si può ragionevolmente pensare di utilizzare la *retta di stima* del Capitolo 2. Tale affermazione è inoltre vera anche per modelli di catena in acciaio per cui sono state ripetute tutte le analisi fin qui svolte e che non sono state riportate solo per questioni di brevità.

In ogni caso, se le prove sperimentali su catena asimmetrica confermeranno che tramite la *retta di stima* del Capitolo 2 si ottengono risultati affetti da errori in linea con quelli massimi riscontrati numericamente per modelli simmetrici, allora si potrà concludere che la tecnica messa a punto è affidabile, indipendentemente dalla tipologia delle condizioni di vincolo a cui il tirante è soggetto.

### 5.3 Validazione sperimentale della tecnica di stima

Nel paragrafo precedente è stato mostrato che il calcolo del CoMAC sui modi di vibrare dal primo al sesto per modelli di catena con sistema di vincolo asimmetrico ha restituito risultati affini a quelli di modelli simmetrici. In particolare gli shift della posizione del massimo dell'indice di correlazione sono sempre contenuti negli intervalli di variabilità definiti per catene simmetriche.

A questo punto si ritiene utile verificare sperimentalmente se la *retta di stima* ricavata nel Capitolo 2 sia efficace anche quando i vincoli hanno, per l'appunto, rigidità differente.

Per far ciò si ricorre alla tipologia di catena, forzamento, strumentazione e tecnica di identificazione modale (PolyMAX [20]) illustrati nel Capitolo 3 nei Paragrafi 3.1 e 3.2.

Come condizioni al contorno si è deciso di imporre alla struttura presente in laboratorio un tiro assiale medio-basso, pari a  $N/N_{sn}=0.4$ . Questo in quanto con l'utilizzo di valori di carico non elevati sia nel Capitolo 3, che nel Capitolo 4 si metteva in luce il bias del metodo di stimare una lunghezza effettiva minore della visibile. Inoltre in letteratura alcuni metodi di stima, come ad esempio [1], presentano minore efficacia proprio quanto l'azione assiale a cui la catena è soggetta è bassa.

Per differenziare la rigidità del sistema di vincolo, considerando che la catena viene materialmente bloccata tramite due morse, si è deciso di interporre della gomma tra le piastre componenti una di queste (Fig.(3.3)). L'altra morsa invece viene fissata direttamente sul tirante determinando così un contatto metallo-metallo a maggiore rigidità.

Riferendosi a Fig.(5.1) si specifica inoltre che il vincolo caratterizzato dal valore minore di rigidità è il sinistro. Tale scelta risulta utile in quanto, se si prende ad esempio il grafico di Fig.(5.14), in questa situazione teoricamente ci si aspetta di rilevare il punto di massimo CoMAC in zone prossime all'estremo superiore del suo intervallo di ammissibilità. Si vuole quindi verificare che anche all'atto pratico eventuali errori di stima restino confinati nelle fasce di incertezza previste dal modello di catena simmetrico e non si manifestino, invece, comportamenti anomali.

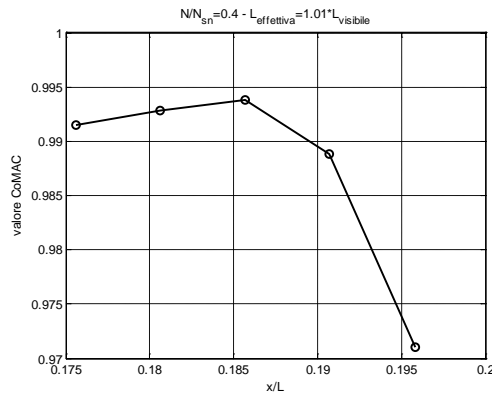
Si decide anche per questa configurazione, così come fatto nei Capitoli 3 e 4, di valutare le stime derivanti da tre variazioni di lunghezza. Queste corrispondono

ad incrementi percentuali della lunghezza effettiva rispetto a quella visibile dell'1%, 5% e 10%. In accordo con l'equazione della *retta di stima* di Fig.(2.50) ponendo tali valori come variabile  $x$ , a livello teorico ci si aspetta di riscontrare la massima correlazione nelle seguenti posizioni percentuali  $y$  (dove  $y$  viene definito in accordo all'Eq.(3.6)):

- $y=0.1857$  per il caso  $l_{\text{effettiva}}=1.01 \cdot l_{\text{visibile}}$ ;
- $y=0.1732$  per il caso  $l_{\text{effettiva}}=1.05 \cdot l_{\text{visibile}}$ ;
- $y=0.1574$  per il caso  $l_{\text{effettiva}}=1.1 \cdot l_{\text{visibile}}$ .

Per ogni lunghezza testata le misure verranno effettuate non solo nelle posizioni riportate sopra, ma anche in altri quattro punti, due a destra e due a sinistra, equispaziati di 2 cm per rispettare la discretizzazione della mesh utilizzata nei modelli Abaqus.

Fatte tutte queste premesse si illustrano nelle Fig.(5.15), (5.16) e (5.17) i risultati ottenuti.



**Figura 5. 15 CoMAC per incremento di lunghezza dell' 1%**

Da Fig.(5.15) si evince che per un incremento di lunghezza dell'1% il punto di massima correlazione sperimentale corrisponde a quello numerico previsto dalla *retta di stima*. Per questo caso si può quindi concludere che l'utilizzo di una tecnica di stima basata su modelli simmetrici si dimostra affidabile anche quando applicato a catene presentante una forte condizione di asimmetria del sistema di vincolo.

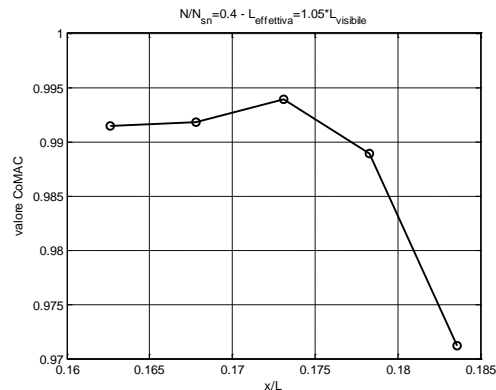


Figura 5. 16 CoMAC per incremento di lunghezza del 5%

Anche per differenza del 5% tra luce visibile ed effettiva, come quella di Fig.(5.16), si riscontra il massimo CoMAC nel punto centrale dei cinque in cui sono avvenute le misure di accelerazione. Si otterrà perciò anche in questo caso una buona stima della lunghezza effettiva della catena nonostante le differenti condizioni di serraggio della catena.

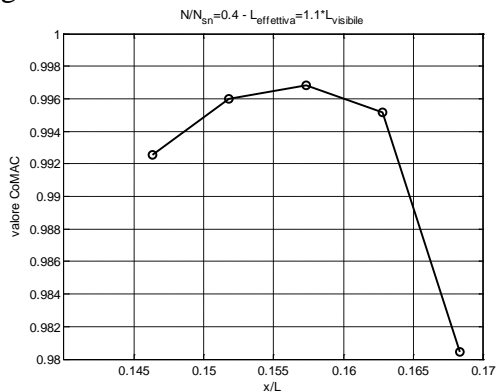


Figura 5. 17 CoMAC per incremento di lunghezza del 10%

Infine in Fig.(5.17), per il caso lunghezza effettiva maggiorata del 10%, si ha ancora una volta a che fare con una curva del CoMAC con punto di massimo in posizione centrale. Di conseguenza le considerazioni sono analoghe a quelle delle due figure precedenti.

Per completezza dell'analisi, dopo aver illustrato qualitativamente i risultati delle prove sperimentali, si riportano nelle Tabella (5.1), (5.2) e (5.3) anche quelli quantitativi. Per la modalità di calcolo della lunghezza effettiva stimata  $l_{stima}$  e la definizione dell'errore sulla singola stima  $e_i\%$  e dell'errore medio percentuale  $E\%$  si rimanda rispettivamente alle Eq.(2.5) e (2.8) del Capitolo 2.

1%	N/N <sub>sn</sub> =0.4
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1858
Incremento di lunghezza % previsto	0.0098
Lvisibile [mm]	3956
Lstima [mm]	3995
<b>Errore <math>e_{i\%}</math></b>	<b>-0.03</b>

**Tabella 5. 1 Risultati prove sperimentali del metodo per lunghezza incrementata dell'1%**

5%	N/N <sub>sn</sub> =0.4
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1731
Incremento di lunghezza % previsto	0.0502
Lvisibile [mm]	3806
Lstima [mm]	3997
<b>Errore <math>e_{i\%}</math></b>	<b>0.03</b>

**Tabella 5. 2 Risultati prove sperimentali del metodo per lunghezza incrementata del 5%**

10%	N/N <sub>sn</sub> =0.4
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1573
Incremento di lunghezza % previsto	0.1004
Lvisibile [mm]	3633
Lstima [mm]	3997.7
<b>Errore <math>e_{i\%}</math></b>	<b>0.04</b>

**Tabella 5. 3 Risultati prove sperimentali del metodo per lunghezza incrementata del 10%**

Come si evince dalle tabelle riportate sopra, gli errori di stima  $e_{i\%}$  che si riscontrano sono prossimi allo zero. Il fatto che essi non siano esattamente pari a zero, visto che il massimo CoMAC è riscontrato nel punto centrale dei cinque di misura, è dovuto alle fonti di errore casuale nel posizionamento dell'accelerometro sulla catena. Infatti l'ingombro stesso del sensore, gli arrotondamenti nel suo posizionamento e l'incertezza degli strumenti di misura utilizzati sono tra le cause che impediscono di effettuare la misurazione esattamente dove richiede la *retta di stima*.

In ogni caso, nonostante si riscontri una differenza sempre intorno all'1% tra i valori dell'errore sulla singola prova  $e_{i\%}$  e l'errore medio  $E_{\%}$ , i primi rientrano ampiamente negli intervalli d'errore determinati con le simulazioni Monte Carlo per modelli simmetrici (Paragrafo 2.6), quindi i risultati sono statisticamente attendibili.

Si può quindi concludere che la *retta di stima* per catene simmetriche si comporta in modo affidabile anche qualora la struttura in analisi presenti valori differenti della rigidità del sistema di vincolo alle sue estremità.

La presente tecnica di stima, come si evince sia dalle Fig.(5.13) e (5.14) di questo Capitolo, sia dall'analisi di sensibilità per modelli simmetrici svolta nel Paragrafo 2.5.1, risente però anche dell'influenza dei valori di tiro assiale  $N/N_{sn}$  e rigidità del sistema di vincolo  $k_{t1}/k_{t,eq}$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}$ . Nonostante ciò, essa restituisce comunque delle stime appartenenti ad un intervallo di variabilità ritenuto accettabile. Infatti uno degli obiettivi di questa tesi era quello di mettere a punto un metodo di stima della lunghezza effettiva con una soglia di incertezza del 5% (Paragrafo 1.3.6). Nel Paragrafo 2.6.2 del Capitolo 2 era stato esposto

che la *retta di stima*, quando utilizzata con modelli di catena presentanti condizioni al contorno realistiche, riusciva nell'intento sia per catene in alluminio (stime affette mediamente dal 5% di incertezza), che per catene in acciaio (incertezza media del 4%). Poiché il suo impiego ha portato risultati soddisfacenti anche per tiranti asimmetrici sia numericamente con le simulazioni FEM, sia sperimentalmente con le prove in laboratorio, si può ritenere che la soglia massima di incertezza che ci si era prefissi non viene superata.

Si conclude quindi che, indipendentemente dalle condizioni al contorno a cui la catena è soggetta, per ottenere una relazione in grado di stimare la lunghezza effettiva con un'incertezza ragionevole, note la sua sezione e tipologia di materiale (dati reperibili in situ), è sufficiente mettere a punto una regressione lineare. L'implementazione della *retta di stima* richiederà come dati in ingresso esclusivamente le posizioni del massimo CoMAC per prefissati rapporti tra lunghezza effettiva e visibile e per pochi set di condizioni al contorno su modelli di catena perfettamente simmetrici (per i dettagli si rimanda al Paragrafo 2.5.2 del Capitolo 2) e sarà applicabile anche quando l'ipotesi di simmetria del sistema di vincolo non è rispettata.

#### **5.4 Applicazione della *retta di stima* ottimizzata a modelli di catena con sistema di vincolo asimmetrico**

Nel Capitolo 4 del presente lavoro è stato messo in luce che calcolando l'indice di correlazione CoMAC non con i primi modi di vibrare delle catene, ma con quelli di ordine superiore (in particolare dal sesto al nono), è possibile implementare una *retta di stima* ottimizzata. La nuova relazione lineare restituisce infatti delle stime su cui gli effetti di incertezza dovuti al tiro assiale  $N/N_{sn}$  sono trascurabili. Come mostrato nelle Fig.(4.4) e (4.6) del Capitolo 4, è di fatto molto difficile distinguere modifiche nell'andamento dei modi di vibrare di ordine elevato al variare dell'azione assiale.

Evidenziato nel paragrafo precedente che la *retta di stima* non ottimizzata del Capitolo 2 permette di ottenere dei risultati validi anche nel caso di modelli di catena con sistema di vincolo asimmetrico, si è deciso di valutare se la stessa cosa può dirsi di quella ottimizzata.

Così come fatto nel Paragrafo 5.2, si ripete quindi il calcolo del CoMAC sfruttando esclusivamente le forme modali dalla sesta alla nona. Nelle Fig.(5.18), (5.19), e (5.20) si riportano gli andamenti dell'indice di correlazione per una catena in alluminio di sezione  $A 15 \times 25 \text{ mm}^2$ , luce visibile di  $4000 \text{ mm}$  e con una forte differenza di rigidità nel sistema di vincolo per valutarne gli effetti di una grande asimmetria.

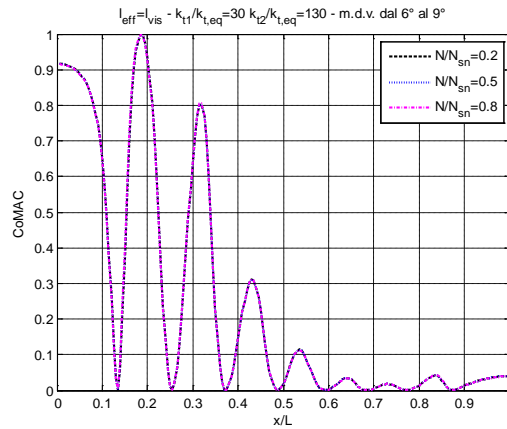


Figura 5. 18 CoMAC al variare del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena con  $k_{t1}/k_{t,eq}=30$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}=130$

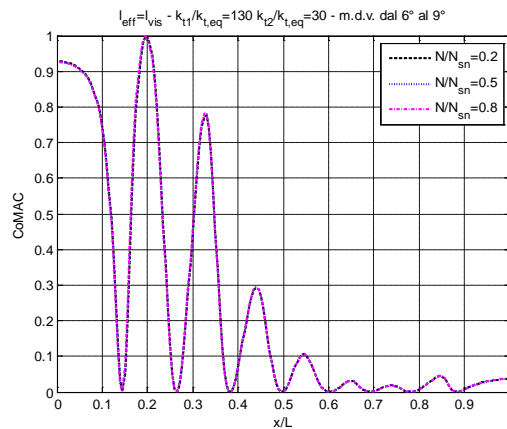


Figura 5. 19 CoMAC al variare del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena con  $k_{t1}/k_{t,eq}=130$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}=30$

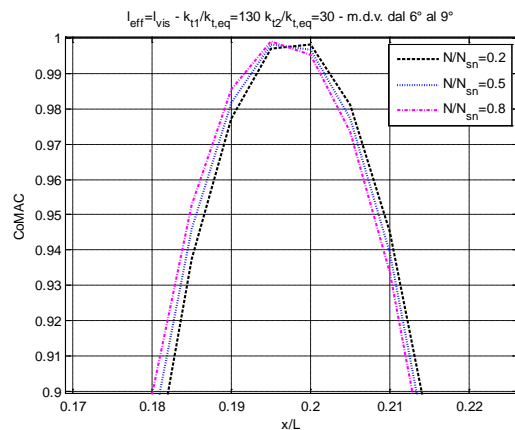


Figura 5. 20 Ingrandimento del CoMAC al variare del tiro  $N/N_{sn}$  per una catena con  $k_{t1}/k_{t,eq}=130$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}=30$

Dalle Fig.(5.18) e (5.19) si riscontra, così come avveniva nel Capitolo 4, che il CoMAC non solo si caratterizza per presentare ancora un unico punto di



massimo assoluto, ma la sensibilità al tiro assiale  $N/N_{sn}$  è molto ridotta. Le curve infatti sembrano perfettamente sovrapposte e solo con degli ingrandimenti come quello di Fig.(5.20) si nota una lieve traslazione delle stesse, cosa che invece non avveniva nel caso di modelli simmetrici. Si può quindi concludere che sfruttando modi di vibrare di ordine superiore al quinto nel caso di catene asimmetriche, sebbene non si riesca ad eliminare del tutto l'influenza dell'azione assiale, questa viene comunque notevolmente ridotta.

Se ancora una volta in Fig.(5.18) e (5.19) ci si sofferma più attentamente sulla posizione in cui il massimo viene riscontrato, si nota che questo ha dei piccoli shift al variare della rigidezza del sistema di vincolo. Si conclude quindi che utilizzando i modi di vibrare di ordine superiore si riesce a limitare l'influenza solo di una delle variabili del sistema.

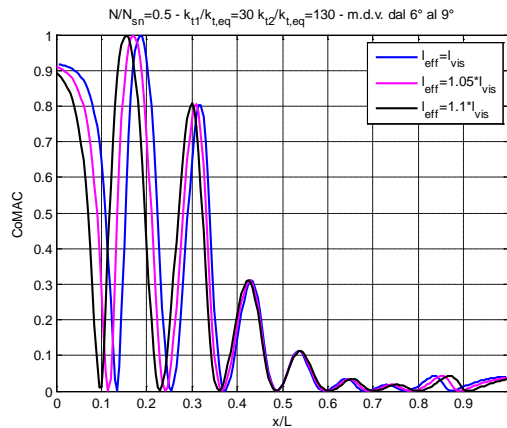


Figura 5. 21 CoMAC al variare della lunghezza effettiva per una catena con  $k_{t1}/k_{t,eq}=30$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}=130$  e  $N/N_{sn}=0.5$

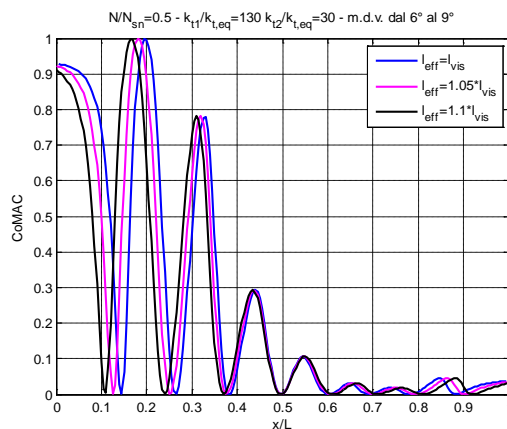


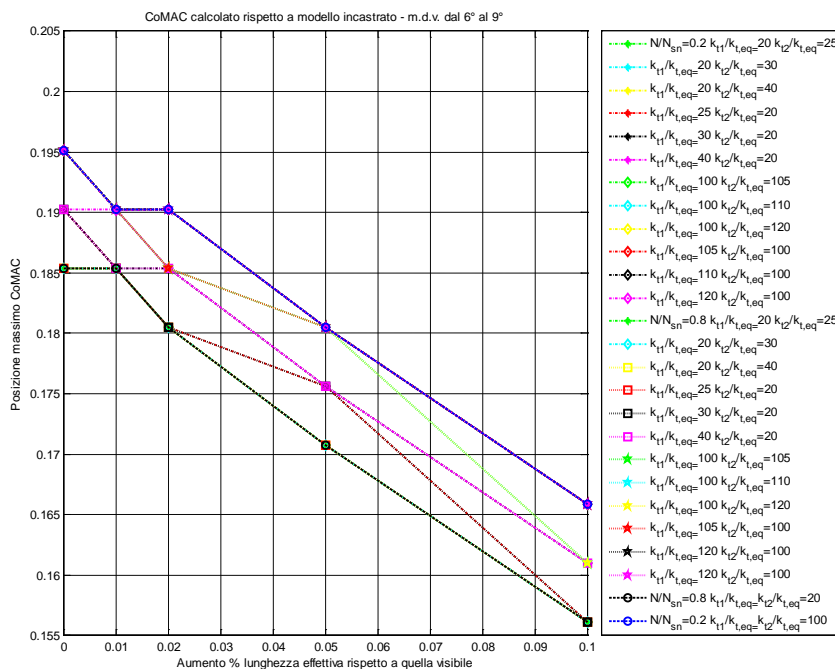
Figura 5. 22 CoMAC al variare della lunghezza effettiva per una catena con  $k_{t1}/k_{t,eq}=130$  e  $k_{t2}/k_{t,eq}=30$  e  $N/N_{sn}=0.5$

Nelle Fig.(5.21) e (5.22) si vuole invece illustrare l'effetto che causa un aumento della lunghezza effettiva della catena. Ancora una volta si ha una traslazione del

punto di massima correlazione verso il vincolo sinistro della catena all'aumentare dello sviluppo assiale del tirante. L'entità di tale traslazione risulta poi anche in questo caso circa della medesima quantità ogni 5% di incremento della lunghezza. In ragione di ciò si può confidare che l'utilizzo di una relazione lineare possa essere anche in questa situazione un utile strumento per l'ottenimento di stime di lunghezza.

In ogni caso si può concludere che anche per un modello di catena con sistema di vincolo asimmetrico, calcolando l'indice di correlazione CoMAC con modi di vibrare di ordine elevato, la variabile che ha un effetto preponderante sulla posizione del massimo assoluto è la lunghezza effettiva della catena. Le condizioni al contorno della stessa o hanno importanza ridotta nel caso si parli della rigidezza del sistema di vincolo, o tendono ad essere ininfluenti nel caso dell'azione assiale.

Ripetendo quanto fatto nel Paragrafo 5.2, invece di implementare direttamente una nuova *retta di stima*, si valuta se al variare della lunghezza della catena e delle sue condizioni di vincolo, il massimo CoMAC rientra ancora nelle fasce di variabilità per modelli simmetrici delimitate dalle spezzate riportate in Fig.(4.13) nel Capitolo 4.



**Figura 5. 23** Posizioni del massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva e delle condizioni al contorno della catena – metodo ottimizzato

Da Fig.(5.23) si evince che variando sia le condizioni di carico, che quelle di vincolo, le posizioni del massimo CoMAC rientrano sempre, o al più sono uguali, a quelle limite determinate nel caso di modello di catena simmetrico (spezzate tratteggiate in blu e nero). Si potrebbe quindi ragionevolmente

concludere che anche in questa situazione è possibile utilizzare la *retta di stima* per modelli simmetrici ricavata nel Capitolo 4 sull'ottimizzazione del metodo. Nella figura riportata sopra sono state però considerate delle differenze tra la rigidezza dei due vincoli limitate. Per cautelarsi in Fig.(5.24) si riportano invece le posizioni del punto di massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva della catena qualora la differenza di rigidezza tra i due vincoli sia pari a 100.

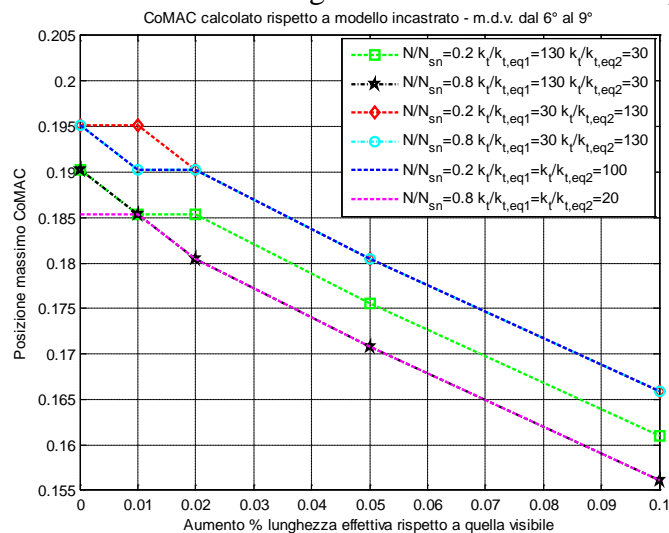


Figura 5. 24 Posizioni del massimo CoMAC al variare della lunghezza effettiva e delle condizioni al contorno della catena - elevata differenza di rigidezza – metodo ottimizzato

Da Fig.(5.24) si nota subito come, ad eccezione di un unico punto, nel caso di modello fortemente asimmetrico le posizioni del massimo CoMAC continuano ad essere all'interno o al più sovrapposte alle spezzate in blu e magenta relative alle catene con sistema di vincolo simmetrico. Tra l'altro l'unico punto fuori dall'intervallo di variabilità si allontana dall'estremo superiore (definito dalla spezzata in blu) di soli 2 cm a fronte di una luce visibile di 4 m. Tale differenza risulta di per sé piccola e poiché è messo in luce sia nel Capitolo 2, sia nel Capitolo 4 che la tecnica di stima non riesce a distinguere variazioni di lunghezza inferiori al 2%, ciò non costituisce un dato preoccupante.

Ripetendo inoltre le analisi effettuate in questo paragrafo su modelli in acciaio è poi risultato che tutte le caratteristiche riscontrate e le considerazioni fatte finora continuano ad essere valide. Per cui anche la *retta di stima* ottimizzata per tiranti simmetrici in acciaio può dualmente essere applicata a catene con differente rigidezza del sistema di vincolo.

Quindi la conclusione a cui si giunge è che se le prove sperimentali daranno risultati compatibili con le analisi Monte Carlo [18] svolte nel Paragrafo 4.4, si potrà affermare che anche la *retta di stima* ottimizzata per modelli simmetrici restituisce risultati attendibili indipendentemente dalle condizioni al contorno e dalla simmetria o asimmetria del sistema di vincolo.

## 5.5 Validazione sperimentale della tecnica di stima ottimizzata

Nel paragrafo precedente è stato mostrato che calcolando l'indice CoMAC sui modi di vibrare di ordine elevato di modelli di catena asimmetrici si ottengono risultati all'interno degli intervalli di variabilità per i modelli simmetrici determinati nel Capitolo 4.

Si vuole quindi adesso verificare se l'utilizzo dell'equazione della *retta di stima* ottimizzata riportata in Fig.(4.14) permette di ottenere risultati validi anche in applicazioni sperimentali.

Senza dilungarsi si premette che si ricorrerà alle medesime condizioni di vincolo e carico descritte nel Paragrafo 5.3. Per ulteriori dettagli riguardanti quindi la tipologia di forzamento, di analisi, la scelta del carico e la modalità con cui è stata realizzata la differenziazione di rigidità del sistema di vincolo si rimanda a questo paragrafo ed al Capitolo 3 (Paragrafi 3.1 e 3.2). Si ritiene utile invece sottolineare nuovamente che, riferendosi alla Fig.(5.1), il vincolo a rigidità inferiore in queste prove corrisponde al sinistro.

Anche in questo caso si opta per effettuare test su sole tre lunghezze effettive della catena, corrispondenti ad incrementi della luce visibile dell'1%, 5% e 10%. In accordo con l'equazione della *retta di stima* ottimizzata di Fig.(4.14), ponendo questi valori percentuali come variabile  $x$ , le posizioni  $y$  in cui ci si aspetta di riscontrare la massima correlazione sono ( $y$  è definito in accordo all'Eq.(3.6)):

- $y=0.1847$  per il caso  $l_{effettiva}=1.01 \cdot l_{visibile}$ ;
- $y=0.1722$  per il caso  $l_{effettiva}=1.05 \cdot l_{visibile}$ ;
- $y=0.1567$  per il caso  $l_{effettiva}=1.1 \cdot l_{visibile}$ .

Per ognuna delle lunghezze testate le misure verranno effettuate in cinque punti, equispaziati di 2 cm come le mesh in Abaqus, e tali per cui la posizione centrale corrisponde a quelle sopra riportate.

Fatte tutte queste premesse si illustrano nelle Fig.(5.25), (5.26) e (5.27) i risultati ottenuti.

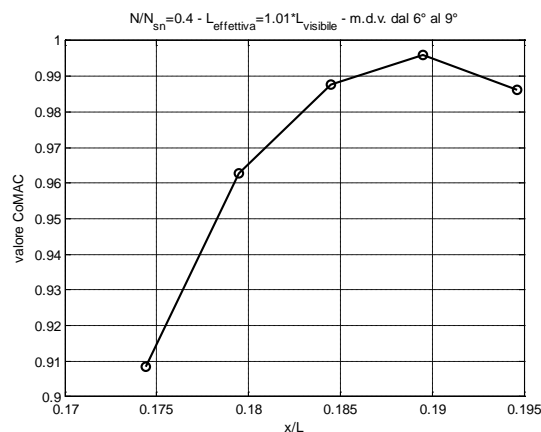


Figura 5. 25 CoMAC per incremento di lunghezza dell'1% - caso ottimizzato

Da Fig.(5.25) si evince che, con una lunghezza effettiva maggiore dell'1% rispetto alla visibile, la massima correlazione non si ha nel punto centrale, cioè quello previsto dalla *retta di stima*, ma tende verso la mezzeria della catena. Per come è stata definita la *retta di stima* tale spostamento verso destra del massimo CoMAC provoca una sottostima della lunghezza effettiva. In particolar modo l'errore di sottostima  $e_i\%$  che si rileva mette in luce il bias del metodo di stimare una lunghezza inferiore a quella visibile. Dato il non senso fisico di questo valore, la luce visibile viene dichiarata come risultato della stima, abbattendo automaticamente l'errore  $e_i\%$  al -1%. La presenza di questo bias non costituisce però fonte di grande preoccupazione per due ragioni. La prima è che questo fenomeno si manifestava per incrementi di lunghezza così piccoli anche nei Capitoli 3 e 4. La seconda ragione è che l'errore commesso rientra abbondantemente negli intervalli determinati dalle analisi Monte Carlo nel Capitolo 4 ed in questo senso il dato sperimentale è coerente con quello statistico.

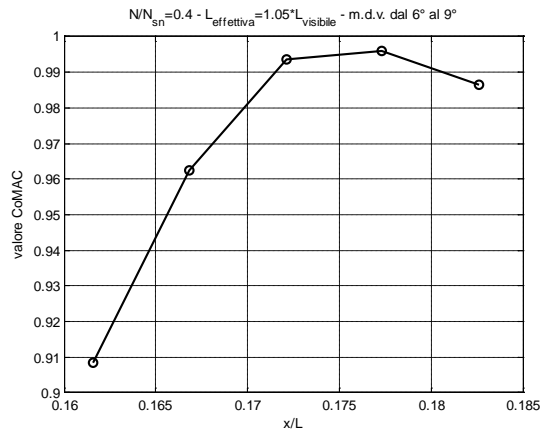


Figura 5. 26 CoMAC per incremento di lunghezza del 5% - caso ottimizzato

Passando ad una variazione di lunghezza del 5%, come è mostrato in Fig.(5.26), si riscontrerà anche in questo caso un errore  $e_i\%$  di sottostima della lunghezza effettiva della catena. Tale dato ancora una volta è ritenuto accettabile in quanto rientra ancora nell'intervallo di incertezza delle analisi Monte Carlo.

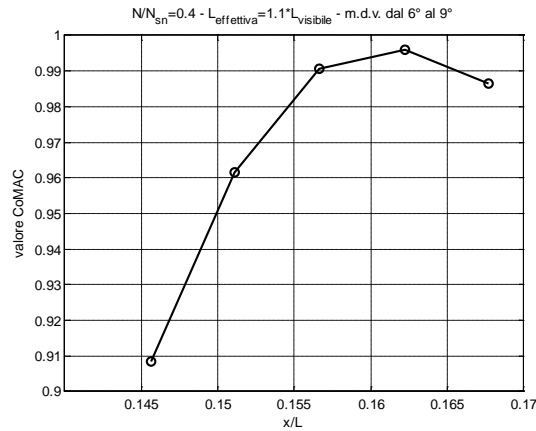


Figura 5.27 CoMAC per incremento di lunghezza del 10% - caso ottimizzato

Infine in Fig.(5.27) è riportato l'andamento del CoMAC relativo ad un aumento di lunghezza del 10%. Così come avveniva per le due lunghezze precedentemente testate, vista la posizione del massimo si è ancora di fronte alla presenza di un errore di sottostima, per cui valgono i medesimi commenti dei casi precedenti.

Per completezza si riportano ora i risultati delle prove anche a livello numerico nelle Tabelle (5.4), (5.5) e (5.6).

1%	N/Nsn=0.4
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1895
Incremento di lunghezza % previsto	-0.005
Lvisibile [mm]	3956
Lstima [mm]	3934.4
<b>Errore e1%</b>	<b>-1.54</b>

Tabella 5.4 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata dell'1%

5%	N/Nsn=0.4
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.177
Incremento di lunghezza % previsto	0.035
Lvisibile [mm]	3806
Lstima [mm]	3938.3
<b>Errore e1%</b>	<b>-1.44</b>

Tabella 5.5 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata del 5%

10%	N/Nsn=0.4
Posizione x/L max CoMAC [%]	0.1622
Incremento di lunghezza % previsto	0.082
Lvisibile [mm]	3633
Lstima [mm]	3932.3
<b>Errore e1%</b>	<b>-1.59</b>

Tabella 5.6 Risultati prove sperimentali del metodo ottimizzato per lunghezza incrementata del 10%

Soffermandosi sui risultati delle tabelle riportate sopra si possono fare alcune considerazioni. La prima, già ribadita analizzando gli andamenti del CoMAC, è che indipendentemente dalla lunghezza testata, quella effettiva risulta sempre

sottostimata. La seconda considerazione è che tale comportamento non è anomalo se si considerano sia gli intervalli d'errore percentuale che i valori dell'errore medio  $E\%$  frutto delle simulazioni Monte Carlo. Infatti la tecnica di stima implementata, come era stato anche sottolineato nel Capitolo 4, tende mediamente a sottostimare le lunghezze (si veda la Fig.(4.16)). Perciò i dati sperimentali qui illustrati sono pienamente coerenti con quelli numerici.

Se poi ci si sofferma sulla Fig.(5.24), si vede che quando la rigidità tra i due vincoli è molto marcata e quello sinistro, come nel caso testato in laboratorio, presenta un valore inferiore di  $k_t/k_{t,eq}$ , la posizione del massimo CoMAC si riscontra verso il limite superiore dell'intervallo di ammissibilità (spezzata in blu nel grafico). Questo significa che non solo il punto di massima correlazione tende ad avvicinarsi alla mezzera della catena, ma si posiziona sopra la *retta di stima*, cioè dalla parte degli errori di sottostima per come essa è stata definita. Per cui ancora una volta il comportamento dei dati sperimentali è assolutamente in linea con quelli derivanti dalle simulazioni FEM.

Giacché le stime sono tutte accettabili ed affette da errori sempre appartenenti sia agli intervalli statistici delle analisi Monte Carlo, che a quelli ottenuti con l'analisi dei residui attorno alla *retta di stima* ottimizzata, si può affermare che quest'ultima è utilizzabile anche in quelle situazioni in cui il tirante è soggetto a condizioni di vincolo asimmetriche.

Si conclude perciò che, a prescindere dalle condizioni di carico o vincolo di una catena, una volta note le sue caratteristiche misurabili in situ, ovvero dimensioni della sezione  $A$ , lunghezza della luce visibile e tipologia di materiale, è possibile risalire ad una stima accurata della sua lunghezza effettiva.

Per far ciò è sufficiente calcolare l'indice di correlazione CoMAC tra tutti i punti appartenenti alla luce visibile del tirante ed uno posto al 20% di un modello FEM perfettamente incastrato di lunghezza pari alla luce visibile e caratterizzato dal medesimo materiale e sezione. L'andamento dell'indice di correlazione, indipendentemente dal fatto che venga calcolato sui primi modi di vibrare della struttura, o su forme modali di ordine superiore (qualora si voglia ridurre l'effetto del carico assiale  $N/N_{sn}$  sul modello), presenterà infatti sempre un solo punto di massimo assoluto. La posizione del massimo si è dimostrata essere legata proprio alla lunghezza effettiva della catena e per cui è possibile, tramite una regressione ai minimi quadrati, ricavare l'equazione di una *retta* che permette di stimarla. La procedura regressiva viene in particolar modo effettuata utilizzando come parametri di ingresso i dati relativi a modelli FEM di catena simmetrici diversi tra loro per i valori di lunghezza effettiva, azione assiale e rigidità del sistema di vincolo.

Le stime di lunghezza restituite dalla *retta di stima* si sono dimostrate accurate sia a livello numerico, che a livello sperimentale, non solo al variare delle condizioni di carico  $N/N_{sn}$  e di vincolo  $k_t/k_{t,eq}$  della catena, ma anche quando l'ipotesi di simmetria del sistema di vincolo non viene rispettata. Ciò permette, di conseguenza, di affermare che il metodo messo a punto è affidabile ed

efficacie in modo generale, nonché applicabile anche a tiranti situati in edifici storici in cui difficilmente il materiale costruttivo delle pareti in cui essi alloggiavano presenta caratteristiche di uniformità ed omogeneità.

Inoltre questa tecnica risponde in pieno al secondo obiettivo della tesi, ovvero di restituire stime soggette ad una incertezza contenuta, al più del 5% (Paragrafo 1.3.6). Il fatto di avere un'incertezza non superiore a questa soglia è fondamentale non solo ai fini della bontà della stima stessa, ma anche per l'ottenimento di risultati accurati nel calcolo del tiro  $N/N_{sn}$ . In letteratura si trovano, infatti, algoritmi per la stima dell'azione assiale, come ad esempio [1], caratterizzati dall'handicap di non restituire risultati accurati qualora l'incertezza sulla lunghezza del tirante sia superiore proprio al 5%. Aver riscontrato, già nel caso di tecnica non ottimizzata, un'incertezza media del 4% per catene in acciaio e del 5% per catene in alluminio (Paragrafo 2.6.2 del Capitolo 2), permette quindi di rimarcare senza problemi il raggiungimento dell'esigenza prefissata.



## Capitolo 6

### Stima del tiro per catene con sistema di vincolo asimmetrico

Nel Capitolo 1 è stato introdotto il metodo [1] per la stima dell'azione assiale nelle catene. Pur mostrando buoni risultati [1] presenta due limiti.

Il primo, che contribuisce ad aumentare l'incertezza dei risultati delle stime, è la non conoscenza della lunghezza effettiva del tirante. Il secondo è che tale metodo si basa sull'ipotesi di struttura perfettamente simmetrica. Tale assunzione, quando riferita alla rigidezza del sistema di vincolo, è però molto forte, tanto da diventare critica nello studio di applicazioni in edifici storici.

Nei Capitoli dal 2 al 4 il primo limite di [1] è stato risolto implementando un algoritmo per la stima della lunghezza effettiva. Peculiarità di tale metodo è che si caratterizza per restituire output affetti da un'incertezza inferiore al 5%. Nel Capitolo 5 poi, l'utilizzo di tale metodo è stato validato anche per catene con vincoli a rigidezza differente.

Ciò che ci si propone adesso è di risolvere la seconda problematica di [1], ovvero estendere la sua applicabilità al caso di tiranti asimmetrici.

#### 6.1 Estensione della stima del tiro a modelli asimmetrici

Nel Capitolo 1, introducendo l'algoritmo di stima del tiro assiale  $N$  [1] ci si è sempre riferiti a modelli di catena perfettamente simmetrici. Come stato già anticipato, quest'ipotesi è critica per quanto concerne il sistema di vincolo della struttura. Ciò che adesso ci si propone è, quindi, di estendere [1] a modelli di tirante come quello di Fig.(6.1).

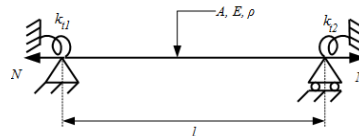


Figura 6. 1 Modello di catena asimmetrico

Le ipotesi alla base del modello introdotte nei Paragrafi 1.3.1 e 1.3.2 non sono modificate. Vengono però distinte le rigidzze dei due vincoli con la notazione  $k_{t1}$  e  $k_{t2}$ . In questo modo si aggiunge una variabile a descrivere la struttura rispetto a quelle introdotte nel Capitolo 1.

Ritornando alla stima del tiro e richiamando quanto esposto nel Paragrafo 1.3, si ricorda che in [1] è stato dimostrato che le frequenze proprie del sistema sono molto sensibili all'azione assiale. È quindi possibile ricavare una relazione che,

legando i valori delle frequenze al tiro, permette di ricavare una stima di quest'ultimo. Nel Paragrafo 1.3.4 è stato però premesso che prima di far ciò è necessario disporre di una stima della rigidezza del sistema di vincolo. Questo sarà il punto di partenza dello studio di seguito esposto.

### 6.1.1 Stima di entrambe le rigidezze del sistema di vincolo

Nel Paragrafo 1.3.4 è stato spiegato il modo in cui in [1], tramite lo studio dei modi di vibrare dal secondo al quarto della catena ed il calcolo dell'indice  $R_{y_1, y_2}^{sum}$  (si veda l'Eq.(1.14) per la sua definizione), viene stimata la rigidezza dei vincoli  $k_t$ .

Le posizioni  $y_1$  e  $y_2$  lungo il tirante utili al calcolo dell'indice sono quelle che ne massimizzano la sensibilità alla rigidezza  $k_t$  e la minimizzano al tiro  $N$ . In particolare in [1] è stato evidenziato che questi punti corrispondono ad una distanza dal vincolo sinistro pari rispettivamente al 3.5% ed al 9.5% della sua lunghezza. Di conseguenza l'indice utilizzato è stato denominato  $R_{3.5, 9.5}^{sum}$ .

Dato che  $R_{3.5, 9.5}^{sum}$  è calcolato basandosi su un modello FEM i cui parametri sono impostati a dei valori ritenuti nominali e non specifici del caso in analisi, in [1] la stima di rigidezza è sempre accompagnata da un intervallo di variazione. Questo definisce un range a cui appartiene il vero  $k_t$  quando si ha a che fare con un tirante caratterizzato da proprietà differenti rispetto al caso nominale. Gli estremi di tale intervallo in [1] sono calcolati servendosi di opportuni modelli critici di catena. Si ricorda che tali modelli critici vengono ottenuti combinando valori di condizioni al contorno ( $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$ ) e caratteristiche geometrico-fisiche ( $l$ ,  $E$ ,  $\rho$ ) corrispondenti agli estremi dei range di variazione che realisticamente sono associabili a queste variabili. Si rimanda al Paragrafo 1.3.4 per ulteriori dettagli.

Dal momento che con una struttura asimmetrica si necessita di una doppia stima della rigidezza, in questo lavoro si è deciso di apportare alla procedura di [1] le seguenti modifiche:

- Vengono calcolati due distinti  $R_{y_1, y_2}^{sum}$ . Il primo, utile alla stima di rigidezza del vincolo sinistro  $k_{t1}$ , viene calcolato nelle stesse posizioni identificate da [1], perciò si parla ancora di  $R_{3.5, 9.5}^{sum}$ . Il secondo, invece, è calcolato simmetricamente sui punti al 3.5% e 9.5% di distanza dal vincolo destro  $k_{t2}$  del tirante. In questo caso si parla perciò di  $R_{96.5, 90.5}^{sum}$ . Costruendo quindi le curve che legano  $R_{3.5, 9.5}^{sum}$  a  $k_{t1}$  e  $R_{96.5, 90.5}^{sum}$  a  $k_{t2}$ , si possono ottenere le due stime  $k_{t1\_R, stimato}$  e  $k_{t2\_R, stimato}$ ;
- Per entrambi  $k_{t1\_R, stimato}$  e  $k_{t2\_R, stimato}$  viene determinato l'annesso intervallo di variazione, ovvero  $[k_{t1\_R, stima, min}; k_{t1\_R, stima, max}]$  e  $[k_{t2\_R, stima, min}; k_{t2\_R, stima, max}]$ . Con l'aggiunta di una variabile al sistema, i casi critici utili a calcolare questo range, invece che  $m=2^4$  come nel Capitolo 1, diventano  $m=2^5$ . In Tabella (6.1) si riportano i parametri che vengono combinati per l'ottenimento dei modelli FEM critici.

$N/N_{sn}$	$E$	$\rho$	$l$	$k_{tj}$
0.2	$E_{nom}-5\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$l_{nom}$	$20 \cdot k_{t,eq}$
0.8	$E_{nom}+5\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$l_{nom}+5\%$	$150 \cdot k_{t,eq}$

Tabella 6. 1 Valori critici dei parametri del modello asimmetrico

Si specifica che in Tabella (6.1) con  $k_{tj}$  si intende la rigidezza del vincolo opposto a quello di cui si sta calcolando l'intervallo di variazione.

Nelle Fig.(6.2) e (6.3) si riportano, a titolo di esempio, i possibili intervalli di rigidezza associati ad ogni singola stima della rigidezza  $k_t$  rispettivamente per il vincolo sinistro e destro. Questi sono stati ottenuti tramite simulazioni su una catena in alluminio di sezione  $A=15 \times 25 \text{ mm}^2$  e lunghezza nominale  $l_{nom}=4000 \text{ mm}$ . Per le modalità di utilizzo dei grafici si rimanda al Paragrafo 1.3.4.

Come si può notare le curve nelle due figure sono le stesse. Questo indica che il comportamento del sistema è il medesimo sia che si consideri il vincolo destro, sia che si consideri il sinistro. A fronte di ciò si può quindi concludere che l'estensione di [1] per la stima della rigidezza del sistema di vincolo porta risultati soddisfacenti e può essere utilizzata per la fase successiva dello studio.

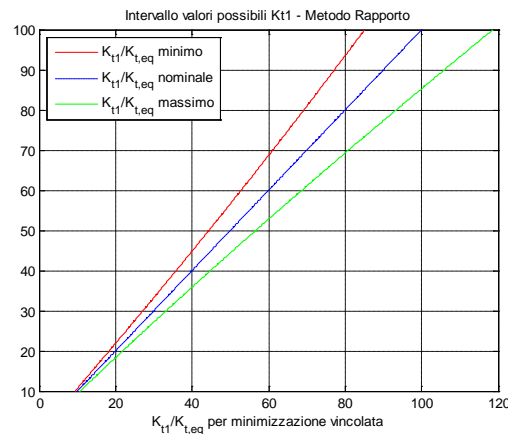


Figura 6. 2 Intervallo di variazione del  $k_{t1}/k_{t,eq}$

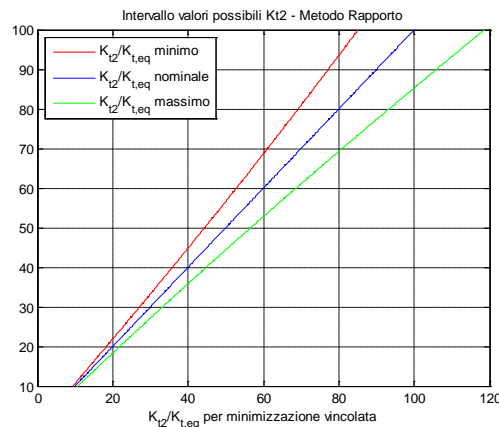


Figura 6. 3 Intervallo di variazione del  $k_{t2}/k_{t,eq}$

### 6.1.2 Stima del tiro per strutture asimmetriche

Determinate, per entrambi i vincoli della catena, le relazioni che consentono di ottenerne una stima della rigidezza, si può procedere ad identificare il tiro assiale utilizzando le frequenze proprie secondo quanto previsto dall'algoritmo di [1].

Richiamando i Paragrafi 1.3.3 e 1.3.5, si ricorda che per ottenere una stima erano necessari due passaggi: identificare un valore di tiro di primo tentativo  $N_{stima,0}$  secondo l'Eq.(1.13) ed in seguito minimizzare un funzionale  $z$  definito in accordo all'Eq.(1.15). Senza ripetere la procedura del metodo, per cui si rimanda appunto al Capitolo 1, si sottolinea che ciò veniva fatto utilizzando le frequenze proprie del sistema dalla seconda alla quarta. In questa sede non si apportano modifiche sostanziali alla procedura ma, visto che il nuovo modello di catena presenta una variabile aggiuntiva, per la stima del tiro si rende necessario eseguire la procedura di minimizzazione su una frequenza in più, per cui verranno considerate quelle dalla seconda alla quinta. Di conseguenza la stima di primo tentativo dell'azione assiale  $N_{stima,0}$  ed il funzionale  $z$  verranno calcolati d'ora in avanti secondo le Eq.(6.1) e (6.2).

$$N_{stima,0} = \frac{\sum_{i=2}^5 N_{stima,i}}{4} \quad (6.1)$$

$$z = \sum_{i=2}^5 (f_{num,i} - f_{exp,i})^2 \quad (6.2)$$

## 6.2 Validazione numerica del metodo di stima del tiro

Nel paragrafo precedente sono state esposte le modifiche apportate all'algoritmo [1] per la stima del tiro assiale in catene con sistema di vincolo asimmetrico.

Prima di procedere ad una validazione sperimentale del metodo, si vuole innanzitutto verificare se questo fornisce risultati accettabili a livello numerico.

A tal proposito si è analizzato il caso di una catena in alluminio di sezione  $A=15 \times 25 \text{ mm}^2$  e lunghezza nominale  $l=4000 \text{ mm}$ . La scelta di questa tipologia di tirante dipende dal fatto che in [1] sia le simulazioni FEM, che i test sperimentali l'avevano identificata come caso critico. Infatti le stime del tiro relative a questo tipo di catena erano quelle affette dagli errori maggiori. Se i risultati delle analisi si dimostreranno soddisfacenti in questa situazione, ragionevolmente si potrà concludere che in casi meno problematici il comportamento dell'algoritmo sarà soddisfacente.

Nello specifico i test numerici si sono basati sull'utilizzo di due modelli FEM di tirante, denominati rispettivamente modello A e modello B. Nelle Tabelle (6.2) e (6.3) si riportano i parametri caratterizzanti i due tipi di catena la cui funzione viene di seguito spiegata.

<i>Modello A</i>		
$k_{t1}/k_{t,eq}$	$N/N_{sn}$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
30	0.2	2690+2%
100	0.8	2690-2%
$k_{t2}/k_{t,eq}$	$E$ [MPa]	$l$ [mm]
20	68670+5%	4000
120	68670-5%	4000+5%

Tabella 6. 2 Caratteristiche dei modelli di tipo A

<i>Modello B</i>					
$k_{t1}/k_{t,eq}$	$k_{t2}/k_{t,eq}$	$N/N_{sn}$	$E$ [MPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$l$ [mm]
stimato	stimato	0.5	68670	2690	4000

Tabella 6. 3 Caratteristiche dei modelli di tipo B

I modelli di tipo A sono dei modelli FEM che simulano un tirante reale, come quelli su cui si andrebbero ad effettuare delle prove sperimentali. Per questo motivo essi non vengono caratterizzati da parametri nominali come in una situazione ideale. In particolare in Tabella (6.2)  $E$  e  $\rho$  sono stati scelti in modo da considerare i valori estremi che potrebbero essere riscontrati in un'applicazione reale per l'alluminio. Per l'azione assiale si è optato per dei valori medio-bassi in quanto in questi casi [1] presenta le maggiori difficoltà nell'identificazione. Infine per le rigidità sono stati scelti sia dei valori bassi, tendenti quindi ad un appoggio, che alti, per simulare un simil-incastro, ma sempre tali da garantire che la struttura sia asimmetrica. Dal momento che le variabili di Tabella (6.2) sono state combinate in ogni modo possibile, si disporrà di 64 modelli di tipo A. Il modello di tipo B è invece quello su cui si effettua la minimizzazione del funzionale  $z$  per la stima finale del tiro  $N$ . Ad eccezione delle rigidità, che vengono stimate grazie al calcolo degli indici  $R_{3,5,9,5}^{sum}$  e  $R_{96,5,90,5}^{sum}$ , il modello di tipo B presenta caratteristiche nominali. Questi però sono solo dei dati iniziali e verranno iterativamente modificati affinché la minimizzazione di  $z$  giunga a convergenza. Il set di parametri che garantisce il minimo  $z$  e per cui, quindi, le frequenze del modello di tipo B sono quelle che meglio approssimano quelle dell' $i$ -esimo modello di tipo A, fornirà la stima finale dell'azione assiale. Come spiegato nel Capitolo 1, i valori delle variabili per cui  $z$  deve convergere non possono essere però qualsiasi, ma devono rispettare dei vincoli. Questi ultimi sono riportati in Tabella (6.4).

$k_{t1}$	$k_{t2}$	$N$	$E$	$\rho$	$L$
$k_{t1\_Rstima,min} \div$	$k_{t2\_Rstima,min} \div$	$0 \div$	$E_{nom}-5\% \div$	$\rho_{nom}-2\% \div$	$l_{nom} \div$
$k_{t1\_Rstima,max}$	$k_{t2\_Rstima,max}$	$N_{sn}$	$E_{nom}+5\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$l_{nom}+5\%$

Tabella 6. 4 Vincoli per la minimizzazione del funzionale  $z$

Infine per ogni caso testato si valuterà l'errore percentuale  $Er$  commesso dal metodo in accordo all'Eq.(6.3):

$$Er = \frac{N_{stima,finale} - N_{rif}}{N_{rif}} \cdot 100 \quad (6.3)$$

Si specifica che con  $N_{stima,finale}$  si intende il tiro per cui la minimizzazione di  $z$  giunge a convergenza, mentre con  $N_{rif}$  l'azione assiale assegnata al modello di tipo A studiato.

Nelle Tabelle (6.5) e (6.6) si riportano gli errori di stima  $Er$  ottenuti per tutte le simulazioni effettuate.

$l = l_{nom}$								
$k_{t1}/k_{t,eq}=30 \quad k_{t2}/k_{t,eq}=20$				$k_{t1}/k_{t,eq}=30 \quad k_{t2}/k_{t,eq}=120$				
$N/N_{sn}=0.2$		$N/N_{sn}=0.5$		$N/N_{sn}=0.2$		$N/N_{sn}=0.5$		
	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$
$E_{nom}-5\%$	0,24	-1,72	0,60	1,01	1,85	-1,20	1,23	0,06
$E_{nom}+5\%$	-1,13	-5,36	0,37	-3,19	6,12	-4,69	-3,88	-3,22
$k_{t1}/k_{t,eq}=100 \quad k_{t2}/k_{t,eq}=20$				$k_{t1}/k_{t,eq}=100 \quad k_{t2}/k_{t,eq}=120$				
$N/N_{sn}=0.2$		$N/N_{sn}=0.5$		$N/N_{sn}=0.2$		$N/N_{sn}=0.5$		
	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$
$E_{nom}-5\%$	-2,30	0,54	1,54	0,55	-0,31	-0,26	1,92	-0,73
$E_{nom}+5\%$	-2,36	-4,74	0,75	-3,32	1,96	-4,39	-0,33	-2,98

Tabella 6. 5 Errori stima azione assiale per modelli di lunghezza nominale

$l = l_{nom}+5\%$								
$k_{t1}/k_{t,eq}=30 \quad k_{t2}/k_{t,eq}=20$				$k_{t1}/k_{t,eq}=30 \quad k_{t2}/k_{t,eq}=120$				
$N/N_{sn}=0.2$		$N/N_{sn}=0.5$		$N/N_{sn}=0.2$		$N/N_{sn}=0.5$		
	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$
$E_{nom}-5\%$	-6,29	-6,01	-3,81	-6,26	-8,01	-3,46	-3,40	-6,63
$E_{nom}+5\%$	-5,53	-10,58	-5,53	-11,89	-9,69	-12,06	-6,01	-10,80
$k_{t1}/k_{t,eq}=100 \quad k_{t2}/k_{t,eq}=20$				$k_{t1}/k_{t,eq}=100 \quad k_{t2}/k_{t,eq}=120$				
$N/N_{sn}=0.2$		$N/N_{sn}=0.5$		$N/N_{sn}=0.2$		$N/N_{sn}=0.5$		
	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$	$\rho_{nom}-2\%$	$\rho_{nom}+2\%$
$E_{nom}-5\%$	-4,61	-3,67	-4,53	-6,47	-5,87	-3,67	5,29	-6,45
$E_{nom}+5\%$	-5,87	-11,68	-6,55	-10,90	-7,67	-11,94	-3,77	-11,97

Tabella 6. 6 Errori stima azione assiale per modelli di lunghezza errata

Analizzando i risultati nelle Tabelle riportate sopra si possono fare alcune considerazioni.

Si riscontra innanzitutto che a parità di lunghezza  $l$  del modello e di condizioni al contorno ( $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$ ), le situazioni più critiche, cioè quelle per cui si rilevano le peggiori stime, nella maggior parte dei casi sono quelle caratterizzate da modulo elastico  $E$  e densità  $\rho$  superiori rispetto al valore nominale.

Svolgendo invece un'analisi degli errori  $Er$  in funzione della lunghezza imposta ai modelli di tipo A, si riscontra che quando questa è pari a quella nominale

(Tabella (6.5)) si ottengono stime più accurate rispetto al caso in cui è errata (Tabella (6.6)). In particolare si nota che nelle prima situazione gli errori  $Er$  in modulo restano al più contenuti al 5.5%, mentre nella seconda si rilevano valori assoluti superiori anche al 10% (al massimo 12%). Si ha la conferma quindi che anche per una struttura asimmetrica una buona stima della lunghezza della catena permette di migliorare le stime dell'azione assiale.

Ritornando invece agli errori massimi, in termini di modulo, che sono stati riscontrati nelle Tabelle (6.5) e (6.6), si ha che la loro entità non è preoccupante per due motivi. In primis si ricorda che si sta volutamente analizzando quella che in [1] si era dimostrata essere la peggiore tipologia di catena a cui applicare il metodo. In secondo luogo in [1], per la stessa tipologia di catena qui studiata, da un'analisi statistica basata sul metodo Monte Carlo [18] si riscontravano distribuzioni d'errore caratterizzate, al variare delle condizioni al contorno, da code nell'intorno di valori superiori anche -15%. Di conseguenza i risultati delle Tabelle (6.5) e (6.6), anche se derivanti da modelli asimmetrici, si allineano con quelli che il metodo originale riscontra rientrando abbondantemente nelle sue distribuzioni di errore.

La naturale conclusione di quest'analisi è quindi che sia l'algoritmo [1] originale, che quello riadattato al caso di struttura asimmetrica, sono più accurati quando è nota la lunghezza effettiva della catena.

A questo punto l'ultimo step dello studio è la validazione sperimentale dell'algoritmo di stima del tiro modificato.

### **6.3 Validazione sperimentale del metodo di stima del tiro**

Evidenziato che le modifiche introdotte all'algoritmo di stima del tiro [1] a livello numerico hanno portato a risultati soddisfacenti, si procede ad una validazione della procedura tramite test in laboratorio.

In particolar modo ci si riferirà alla stessa catena in alluminio ed alla medesima strumentazione introdotte nel Paragrafo 3.1. La struttura continuerà ad essere eccitata mediante forzamento impulsivo con martello dinamometrico e come tecnica di identificazione modale verrà ancora utilizzata il PolyMAX [20]. Si rimanda al Capitolo 3 per ulteriori dettagli. Per quanto riguarda invece le misurazioni, in Fig.(6.4) si illustra il nuovo set-up sperimentale.

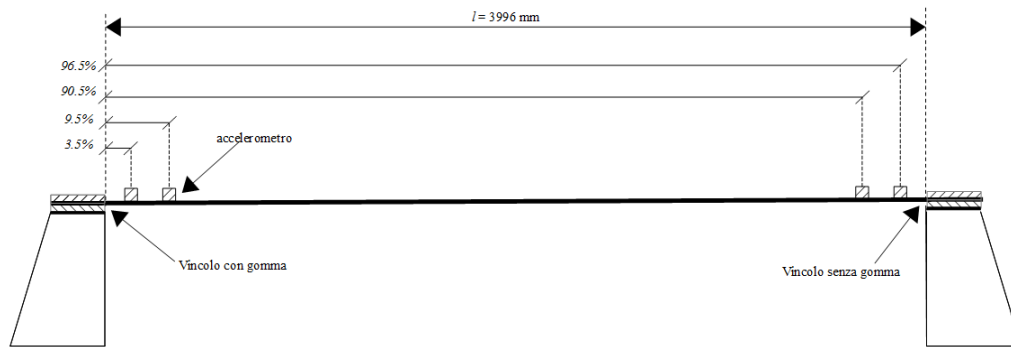


Figura 6. 4 Set-up utilizzato per le prove sperimentali per la stima del tiro

Per differenziare la rigidità dei vincoli del tirante, esattamente come fatto nel Capitolo 5, è stata interposta della gomma tra le morse della sola estremità sinistra della catena. Il vincolo destro, invece, presentando un contatto diretto tra l'acciaio delle morse e l'alluminio della catena, sarà quello ad alta rigidità. Dal momento che per identificare l'azione assiale è necessario disporre di una stima della rigidità dei vincoli tramite il calcolo degli indici  $R_{3.5,9.5}^{sum}$  e  $R_{96.5,90.5}^{sum}$ , si è posizionato un accelerometro in ognuno dei quattro punti di cui interessa rilevare le componenti dei modi di vibrare. Il sensore posto al 9.5% della lunghezza effettiva della catena è poi quello su cui si calcolerà la FRF co-locata. In merito alle singole prove effettuate si specifica che il tirante è stato sottoposto a tre differenti livelli di tiro corrispondenti a  $N/N_{sn}=0.2$ ,  $N/N_{sn}=0.35$  e  $N/N_{sn}=0.6$ . In questo modo si vuole così esaminare se anche per i test sperimentali si riscontrano le maggiori difficoltà di identificazione, e quindi i maggiori errori, per basse azioni assiali.

Ognuno dei tre carichi è poi stato applicato a due differenti valori di lunghezza della catena. La prima corrisponde a quella effettiva del tirante sperimentale di Fig.(6.4) e da qui in avanti verrà definita  $l_{nom}$ . La seconda invece sarà pari a  $0.97l_{nom}$  ed è utile per valutare il comportamento dell' algoritmo quando la lunghezza del tirante è nota con un certo margine di incertezza. In questo caso, supponendo che il 3% di sviluppo assiale non noto sia equamente ripartito tra le due estremità della catena, il posizionamento degli accelerometri varia in accordo alla Fig.(6.5).

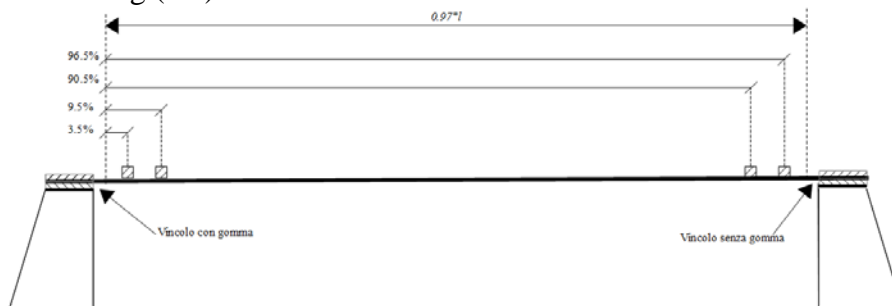


Figura 6. 5 Set-up utilizzato per le prove sperimentali con lunghezza nominale errata



### 6.3.1 Risultati delle prove sperimentali per catena con lunghezza corretta

Il primo ciclo di prove effettuate è stato quello sulla catena con lunghezza nominale pari a quella effettiva.

Come anticipato nel paragrafo precedente si è proceduto ad applicare al tirante tre diversi livelli di tiro.

A valle dell'acquisizione dei dati e dell'elaborazione di questi, si è utilizzato l'algoritmo di stima [1] imponendo come limiti della minimizzazione vincolata quelli di Tabella (6.4).

Si riportano in Tabella (6.7) ed in Fig.(6.6) i risultati ottenuti

	Lunghezza corretta - l = 3996 mm		
	1° livello di tiro	2° livello di tiro	3° livello di tiro
$N_{\text{vero}}$ [N]	3077	4882	9030
$N_{\text{stima\_finale}}$ [N]	3209	4906	8581
Errore %	4.28	-0.68	-4.97
$k_{t1,\text{finale}}/k_{t,\text{eq}}$	53	56	70
$k_{t2,\text{finale}}/k_{t,\text{eq}}$	251	173	183
$l_{\text{finale}}$ [mm]	4002	3947	3946
$E_{\text{finale}}$ [MPa]	66657	65802	65965
$\rho_{\text{finale}}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2655	2721	2721

Tabella 6. 7 Risultati della minimizzazione vincolata per catena sperimentale con lunghezza corretta

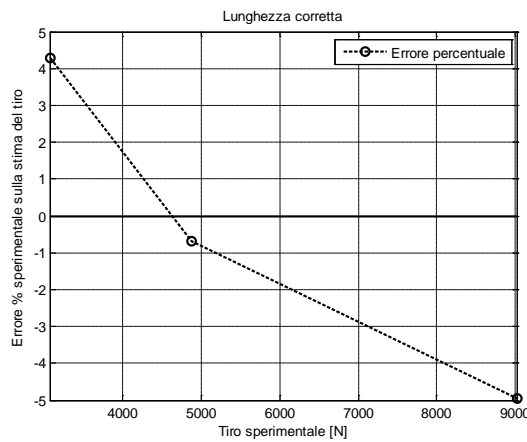


Figura 6. 6 Errori di stima del tiro assiale per catena sperimentale di lunghezza corretta

Sia da Tabella (6.7) che da Fig.(6.6) si evince che aumentando progressivamente il valore del tiro si passa da errori di sovrastima ad errori di sottostima. Tale andamento era però riscontrato anche nei test sperimentali di [1], di conseguenza il comportamento della catena è coerente con quanto ci si aspetta. In merito ai singoli valori di errore  $Er$  si può notare che essi in modulo sono sempre inferiori al 5%. Perciò si può concludere che le stime ottenute non solo sono accurate se si considera il valore di errore in sé, ma sono anche coerenti con i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche del paragrafo precedente.

Per completezza si analizza ora il comportamento della minimizzazione vincolata di  $z$  relativamente ai parametri di modulo elastico  $E$ , densità  $\rho$  e lunghezza della catena  $l$ .

Riguardo la prima variabile si specifica che i test sperimentali di [1] erano stati effettuati esattamente sullo stesso tirante utilizzato in questo lavoro. In seguito ad una prova di shunt, in [1] il modulo elastico della catena stimato era pari a  $E_{rif}=66552$  MPa. Dai valori in Tabella (6.7) si evince chiaramente che la minimizzazione, partendo dal modulo elastico nominale ( $E_{nom}=68670$  MPa), restituisce valori tendenti proprio ad  $E_{rif}$ , di conseguenza si comporta in modo coerente con quello che è il caso reale.

Per la densità l'unico dato che si ha a disposizione è quello nominale ( $\rho_{nom}=2690$  kg/m<sup>3</sup>) noto con un'incertezza al più del  $\pm 2\%$ . Con tutti e tre i livelli di carico si ottiene un risultato appartenente a questa fascia di variazione, quindi il metodo rispetta sempre il vincolo imposto per giungere ad un risultato.

Infine in merito alla lunghezza della catena, che nelle prove di laboratorio è in realtà un parametro noto, la minimizzazione restituisce sempre un valore che appartiene all'intervallo  $[l_{nom}; l_{nom}+5\%]$  imposto come vincolo della procedura.

Di conseguenza, visti tutti i risultati, si può affermare che per questi test l'algoritmo di stima si dimostra assolutamente efficace.

### 6.3.2 Risultati delle prove sperimentali per catena con lunghezza errata

Si illustrano adesso in Tabella (6.8) e Fig.(6.7) i risultati delle prove su catena con lunghezza volutamente errata.

	Lunghezza errata - $l = 3880$ mm		
	1° livello di tiro	2° livello di tiro	3° livello di tiro
$N_{vero}$ [N]	3077	4882	9031
$N_{stima\_finale}$ [N]	2935	4924	8532
<b>Errore %</b>	4.62	0.85	-5.52
$k_{t1,finale}/k_{t,eq}$	77	65	65
$k_{t2,finale}/k_{t,eq}$	202	175	155
$l_{finale}$ [mm]	3969	3980	3953
$E_{finale}$ [MPa]	65798	65587	65666
$\rho_{finale}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2727	2717	2715

Tabella 6. 8 Risultati della minimizzazione vincolata per catena sperimentale con lunghezza errata

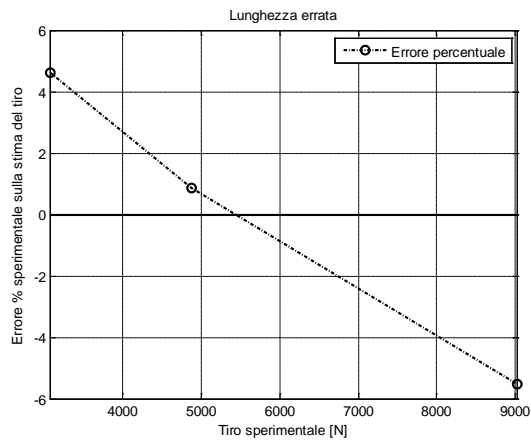


Figura 6. 7 Errori di stima del tiro assiale per catena sperimentale di lunghezza errata

Ancora una volta, così come evidenziato nel caso di lunghezza corretta della catena e nelle prove sperimentali di [1], si ha che l'errore di stima  $Er$  passa dalla sovrastima alla sottostima all'aumentare del tiro.

Per quanto riguarda il modulo elastico  $E$ , analogamente a quanto mostrato nel paragrafo precedente, l'algoritmo restituisce sempre un valore che tende a quello di  $E_{rif}$  individuato in [1] con una prova di shunt. Inoltre per entrambe la densità  $\rho$  e la lunghezza  $l$  finali si riscontra che per tutti i livelli di tiro i vincoli sulla minimizzazione sono rispettati.

Se poi ci si sofferma ancora sui singoli valori plottati in Fig.(6.7) e li si confronta con quelli di Fig.(6.6), si nota che l'aver imposto una lunghezza errata ha fatto aumentare in modulo gli errori  $Er$ . Tale aumento, oltre ad essere coerente con quanto risultava dalla validazione numerica del metodo, essendo contenuto al massimo a mezzo punto percentuale non è preoccupante.

Va inoltre ricordato che anche in [1], testando una lunghezza della catena volutamente errata del 3%, non solo l'errore di stima cresceva ma, anzi, subiva aumenti ben più importanti di quelli qui riscontrati. Se per esempio si considera il test case con  $N/N_{sn}=0.2$  e la medesima catena utilizzata in queste prove, in [1], indipendentemente dal fatto che i vincoli fossero a bassa o ad alta rigidità, si riscontravano peggioramenti della stima del tiro anche del 4%, mentre adesso è solo dello 0.34%.

Si può quindi concludere che l'estensione dell'algoritmo di stima [1] al caso di struttura asimmetrica permette, da un punto di vista qualitativo, di ottenere risultati coerenti con quello originale, mentre da un punto di vista quantitativo si caratterizza per portare a stime del tiro affette mediamente da errori più contenuti. Si ha perciò la conferma che l'ipotesi di pari rigidità del sistema di vincolo della catena è non solo non realistica, ma è effettivamente una delle due cause che concorrono a diminuire l'accuratezza del metodo [1] originale insieme alla non conoscenza della lunghezza effettiva dei tiranti.

Dal momento che nei vari Capitoli entrambe le problematiche sono state affrontate e risolte con un margine di incertezza ritenuto soddisfacente, si può concludere questa tesi affermando che sia l'algoritmo [1] qui modificato, che quello di stima della sola lunghezza effettiva delle catene sono accurati, applicabili ed efficaci per ogni tipologia di tirante, indipendentemente dalle condizioni al contorno, materiale e sezione che lo caratterizzano.

## Conclusioni

Nella presente tesi è stato ottimizzato l'algoritmo [1] proposto da S. Campagnari per la stima del tiro assiale  $N$  in catene per strutture civili.

Peculiarità di [1] è che restituisce delle stime basandosi sui valori delle frequenze proprie del sistema, richiedendo come parametri in ingresso solo la tipologia generica di materiale (modulo elastico  $E$  e densità  $\rho$ ), le dimensioni della sezione  $A$  e la lunghezza della luce visibile  $l_{visibile}$  del tirante.

[1] presenta però due limiti che concorrono ad aumentare l'incertezza dei suoi output.

Il primo riguarda la lunghezza effettiva della catena, definita come la somma tra la porzione di luce visibile ed i tratti di tirante, di estensione non nota, che alloggiavano nelle pareti dell'edificio. Poiché la lunghezza effettiva della catena influenza in modo rilevante i valori delle frequenze proprie, non conoscerla impedisce una stima accurata del tiro.

La seconda problematica di [1] è la modellazione del tirante come una struttura perfettamente simmetrica. Tale ipotesi, specialmente per quanto riguarda l'impiego negli edifici storici, risulta poco realistica relativamente al sistema di vincolo. Infatti il materiale costruttivo delle pareti in cui le catene sono posizionate presenta generalmente caratteristiche di non uniformità e non omogeneità tali da non poter ritenere che l'effetto di vincolo esercitato sia di pari rigidità.

Riguardo la prima criticità è stato messo a punto un metodo innovativo, basato sulle tecniche di analisi modale, per la stima della lunghezza effettiva delle catene.

In particolare si è impiegato l'indice di correlazione CoMAC valutato sui primi sei modi di vibrare del modello FEM del tirante che si vuole studiare ed un punto prestabilito di una struttura di confronto perfettamente incastrata.

L'indice, relativamente alla sola luce visibile della catena, mostra un andamento caratterizzato da un unico punto di massimo assoluto. Quest'ultimo poi, a parità di luce visibile, al crescere della lunghezza effettiva si avvicina progressivamente al vincolo sinistro del tirante.

A partire da questa evidenza è stata effettuata una regressione lineare sulle posizioni in cui è riscontrato il massimo CoMAC per modelli FEM di catena con caratteristiche ( $E$ ,  $l_{effettiva}$ ,  $\rho$ ,  $N/N_{sn}$  e  $k_t/k_{t,eq}$ ) ritenute significative. Si è ottenuta così l'equazione di una *retta di stima* che lega la posizione del punto di massima correlazione alla percentuale di cui incrementare la lunghezza visibile del tirante per ottenere quella effettiva.

L'utilizzo di tale relazione lineare è stato poi verificato sia statisticamente, mediante analisi Monte Carlo [18], che sperimentalmente con test in laboratorio. Visti gli esiti di queste prove e di un'analisi sui residui della regressione, si è

concluso che il metodo restituisce delle stime caratterizzate da un'incertezza di circa il 5% per quanto riguarda le catene in alluminio e del 4% per quelle in acciaio.

Tuttavia uno studio di sensibilità sulla posizione del massimo CoMAC rispetto alle variabili del modello ha mostrato che questa, seppur dipendente in maniera preponderante dalla lunghezza effettiva della catena, risente anche dell'influenza del tiro assiale  $N/N_{sn}$  e della rigidità del sistema di vincolo  $k_t/k_{t,eq}$ .

Di conseguenza, per migliorare l'accuratezza delle stime di lunghezza, si è proceduto ad ottimizzare la tecnica in modo da limitare l'effetto di almeno una di queste due variabili.

Attraverso un'analisi dei modi di vibrare della struttura si è evinto che quelli di ordine superiore al quinto tendono a non risentire degli effetti del carico assiale  $N/N_{sn}$ . Perciò è stato ripetuto il calcolo del CoMAC secondo le stesse modalità utilizzate in precedenza, ma considerando le forme modali dalla sesta alla nona.

Anche in questa situazione il CoMAC presenta un unico massimo assoluto in una posizione dipendente dalla lunghezza effettiva della catena.

Effettuando una nuova regressione si è ricavata una *retta di stima ottimizzata*. Sono state quindi svolte nuove analisi Monte Carlo ed ulteriori prove sperimentali che hanno permesso di validarne l'impiego.

Sempre basandosi su un'analisi dei residui si è poi potuto quantificare l'incertezza del metodo come del 4% per quanto riguarda l'alluminio e di circa il 3.5% per l'acciaio, quindi migliorata rispetto al caso non ottimizzato.

A questo punto è stato verificato se l'algoritmo di stima potesse essere utilizzato anche su strutture con sistema di vincolo asimmetrico.

In primis è stato calcolato l'indice CoMAC secondo la procedura non ottimizzata.

È risultato che, indipendentemente dalla differenza di rigidità imposta tra i due vincoli, l'indice di correlazione presenta un solo punto di massimo. Inoltre la posizione di questo non solo continua a dipendere dalla lunghezza effettiva della catena, ma appartiene sempre alle fasce di variabilità determinate per modelli simmetrici con l'analisi dei residui della regressione lineare.

Di conseguenza con dei test in laboratorio si è voluto verificare se utilizzando la *retta di stima* per catene simmetriche su una struttura con vincoli a differente rigidità si ottenessero effettivamente delle stime accurate. Le prove hanno dato esito positivo per cui si è deciso, come ultimo passo, di appurare che ciò valesse anche per il metodo ottimizzato. Sia i test numerici che quelli sperimentali sono stati ancora soddisfacenti.

Si è quindi potuto affermare che il metodo implementato può essere utilizzato indipendentemente dalla tipologia di vincolo a cui la catena è soggetta, mentre il grado di accuratezza richiesto dalle analisi determinerà la scelta tra la versione non ottimizzata e quella ottimizzata.

Aver elaborato una tecnica che consente di ottenere una stima accurata della lunghezza effettiva delle catene risolve quindi una delle due problematiche principali di [1].

Per ovviare al suo secondo limite, analogamente a quanto fatto per la stima della lunghezza, si è quindi proceduto ad estendere [1] al caso asimmetrico.

Si ricorda quindi che i tre passi con cui [1] arriva al risultato finale sono:

1. Stimare la rigidità dei vincoli mediante un indice denominato  $R_{3.5,9.5}^{sum}$ ;
2. Identificare un valore di tiro di primo tentativo  $N_{stima,0}$ ;
3. Ottenere la stima finale del tiro assiale  $N$  mediante la minimizzazione di un funzionale  $z$ .

Gli ultimi due passaggi in particolar modo si basano sull'analisi delle frequenze proprie del sistema dalla seconda alla quarta. Per l'estensione al caso asimmetrico le variazioni su [1] sono state le seguenti:

- Si stimano entrambe le rigidità sfruttando gli indici  $R_{3.5,9.5}^{sum}$  e  $R_{90.5,96.5}^{sum}$ ;
- Vista l'aggiunta di una variabile a descrivere il modello, per l'identificazione di  $N_{stima,0}$  e la minimizzazione di  $z$  si considerano le frequenze proprie dalla seconda alla quinta.

Infine la versione aggiornata di [1] è stata validata con 64 test cases numerici e 6 prove sperimentali, riportando stime affette da errori minori di quelli riscontrati da S. Campagnari. Per cui si è ritenuto raggiunto il secondo obiettivo dello studio.

Alla luce di tutti i risultati raggiunti si è infine potuto concludere che il lavoro svolto in questa tesi è pienamente riuscito nell'intento prestabilitosi e che, quindi, entrambi gli algoritmi di stima in esso utilizzati, sia della lunghezza effettiva, che del tiro, possono essere considerati di valenza generale ed applicabili ad ogni tipologia di catena.





## Bibliografia

- [1] S. Campagnari, «Sviluppo di un algoritmo per l'identificazione della forza assiale in tiranti per strutture civili attraverso analisi modale sperimentale e operativa», 2014
- [2] S. Briccoli Bati e U. Toniatti, « Experimental method for estimating in situ tensile force in tie-rods», *Journal of Engineering Mechanics* 127, pp. 1275-1283, 2001
- [3] S. Lagomarsino e C. Calderini, «The dynamical identification of the tensile force in ancient tie-rods», *Engineering Structures* 27, pp. 846-856, 2005
- [4] L. Meirovitch, «Fundamentals of Vibrations», McGraw-Hill, 1996
- [5] T. Livingston, J. G. Béliveau e D. R. Huston, «Exstimation of axial load in prismatic members using flexural vibrations», *Journal of Sound and Vibration* 179, pp. 899-908, 1995
- [6] C. Blasi e S. Sorace, «Determining the axial force in metallic rods», *Structural Engineering International (IABSE)* 4, pp. 241-246, 1994
- [7] S. P. Timoshenko e J. M. Gere, Goodier, «Theory of elastic stability», Auckland: Mc Graw-Hill, 1963
- [8] P. Trail-Nash e A. R. Collar, «The effects of shear flexibility and rotary inertia on the bending vibrations of beams», *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 6, n. 2, pp. 186-222, 1953
- [9] S. P. Timoshenko, «On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars», *Philosophical Magazine Series 6*, vol. 41, n. 245, pp. 744-746, 1921.
- [10] S. P. Timoshenko, «On the transverse vibrations of bars of uniform cross section», *Philosophical Magazine Series 6*, vol. 43, n. 253, pp. 125-131, 1922.
- [11] J. W. S. Rayleigh, «The Theory of Sound», New York: Dover Publications Inc., 2003.
- [12] R. Garziera, M. Amabili e L. Collini, «A hybrid method for nondestructive evaluation of the axial load in structural tie-rods», *Nondestructive Testing and Evaluation*, vol. 26, n. 2, pp. 197-208, 2011
- [13] K. Maes, J. Peeters, E. Reynders, G. Lombaert e G. De Roeck, «Identification of axial force in beam members by local vibration

- measurements», *Journal of Sound and Vibration* 332, pp.5417-5432, 2013
- [14] F. Bulgarelli, «Sviluppo di un metodo innovativo per l'identificazione della forza assiale in tiranti per strutture civili», 2013
- [15] Dassault Systems, «Abaqus 6.13 Online Documentation», 2013
- [16] C.—Gentilini, A. Marzani e M. Mazzotti, «Nondestructive characterization of tie-rods by means of dynamic testing, added masses and genetic algorithms», *Journal of Sound and Vibration* 332, pp. 76-101, 2013
- [17] D. J. Ewins, «Modal testing: theory, practice and application», Baldock, England: Research studies press ltd., 2000
- [18] JCGM 100:2008, «Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”- Propagation of distributions using a Monte Carlo method», pp.27-33, 2008
- [19] A. Cigada, L. Comolli e S. Manzoni, « Estensimetria elettrica», Novara: CittàStudi edizioni, 2006.
- [20] B. Peeters, H. Van der Auweraer, P. Gullame e J. Leuridan, «The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation?», *Shock and Vibration*, pp. 395-409, 11 2004.