POLITECNICO DI MILANO

SCUOLA D'INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE

LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MATEMATICA

Counterparty Credit Risk: Exposure e Credit Value Adjustment per prodotti derivati OTC

Relatore: Prof. Daniele MARAZZINA

Tesi di Laurea di:
Stefano VISCARDI
Matr. n. 786824

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

Alle mie nonne,
Carla e Dina,
che mi hanno cresciuto.

Indice

1 Abstract **7**

2 Introduzione al mondo del Rischio di Credito e Controparte **8**

2.1 Che cosa s'intende con rischio di controparte 8

2.2 Normative di riferimento per la definizione del rischio di controparte: Basilea III 11

2.2.1 Cosa sono gli accordi di Basilea e quali obiettivi si pongono 11

2.2.2 Da Basilea 2 a Basilea 3: quali cambiamenti in vista . . . 11

3 Il rischio di controparte e le misure di valutazione **15**

3.1 Credit Exposure 15

3.2 Expected exposure & Potential Future Exposure 17

3.3 Quantificazione dell'esposizione creditizia 19

3.4 Come ridurre e prevenire il rischio di controparte 20

3.4.1 La tecnica di netting 21

3.4.2 La tecnica di collateralization 22

3.5 Esempio EE &PFE per un contratto Forward 25

4 Calcolo del Rischio di Controparte **28**

4.1 I derivati OTC e il Credit Value Adjustment 28

4.1.1 Una prima stima del Credit Value Adjustment unilaterale 29

4.1.2 Il Credit Value Adjustment come spread in riferimento al rating della controparte 33

4.2 Estensioni del modello di calcolo del CVA: introduzione di tecniche di netting e collateralization 35

4.3 Estensioni del modello di calcolo del CVA: Bilateral Credit Value Adjustment 37

4.4 Wrong-way risk ed impatto su CVA 39

5 Calcolo di CVA per alcuni prodotti OTC **42**

5.1 Opzioni plain vanilla Europee 43

5.1.1 Introduzione al prodotto e alla sua dinamica *risk-free* 44

5.1.2 Introduzione del rischio di controparte e *wrong-way risk* . . 46

5.2 Interest Rate Swap 53

5.2.1 Introduzione e prezzo *risk-free* di un contratto IRS 53

5.2.2 Introduzione per un prodotto Swaption 55

5.2.3 Calcolo dell'Expected Exposure e Potential Future Exposure . . . 57
5.2.4 Calcolo Credit Value Adjustment . . . 60
5.2.5 Interest Rate Swap attraverso un semi-analytical approach 63
5.3 Credit Default Swap . . . 66
5.3.1 Calcolo del CVA per un CDS . . . 68
5.3.2 Analisi di mercato relativa ai paesi Europei e ai loro spread 72

6 Conclusioni 76

A Unilateral CVA 78

B Bilateral CVA 80

Elenco delle figure

1 EE, PFE, EPE per un portafoglio 18
2 EE & PFE per un contratto Forward con distribuzione normale e $\mu = 1\%$ & $\sigma = 4\%$ 26
3 Semi-analytical method per un contratto Forward 27
4 Prezzo opzione Europea in relazione alla correlazione ρ 50
5 Prezzo di un'opzione Put Europea a differenti Strike Price in relazione alla correlazione 51
6 Prezzo di un'opzione Call Europea a differenti Strike Price in relazione alla correlazione 52
7 Expected Exposure per un IR Swap con maturity a 5 e 6 anni . . 58
8 Potential Future Exposure per un IR Swap con maturity a 5 e 6 anni 59
9 Probabilità di Default per le due istituzioni, EE & NEE nello scenario base 61
10 CVA&DVA in relazione dello spread delle due differenti istituzioni nello scenario base 62
11 CVA&DVA in relazione dello spread delle due differenti istituzioni per i due differenti metodi 65

Elenco delle tabelle

1 Requisiti fondamentali per le Banche introdotti con gli accordi di Basilea III . . . 14
2 Valore dell'*exposure* per il contratto preso in considerazione . . . 27
3 Parametri dell'opzione plain vanilla Europea . . . 49
4 Prezzi opzioni Call e Put Europee *risk-free* . . . 49
5 Prezzo Put e Call Europee in presenza di rischio di controparte . 49
6 Parametri del modello *mean-reverting* di Vasicek . . . 57
7 Expected Exposure per un IRS . . . 58
8 Potential Future Exposure per un IRS . . . 60
9 Variabili di mercato legati alle due parti coinvolte nei tre possibili scenari . . . 60
10 Misure di Exposure e CVA legate ai tre differenti scenari . . . 62
11 CVA e DVA come spread . . . 63
12 Parametri della Swaption . . . 63
13 Calcolo CVA legate ai tre differenti scenari . . . 64
14 Errore relativo percentuale tra CVA e DVA calcolati nei due differenti approcci al variare dello spread fra le due istituzioni . . . 64
15 Caratteristiche contratto CDS . . . 70
16 Probabilità di default di Reference Entity e controparte . . . 71
17 Probabilità di default congiunte di Reference Entity e controparte 71
18 Spread relativo al CDS e CVA . . . 72
19 Nazione europea e spread associato . . . 73
20 Probabilità di default di *Reference Entity* e controparte alla data 27/03/2015 . . . 74
21 Probabilità di default di *Reference Entity* e controparte alla data 01/04/2014 . . . 74
22 CVA e CDS_{spread} analitici alla data 27/03/2015 . . . 75
23 CVA e CDS_{spread} analitici alla data 01/04/2014 . . . 75

1 Abstract

Questa tesi si propone come obiettivo principale quello di dare una panoramica generale sul mondo del rischio di credito e di controparte (Credit and Counterparty Risk) e di valutare come i fattori legati a tali rischi influenzino il prezzo dei prodotti Over The Counter (OTC). Il rischio di controparte deriva dall'eventualità che un istituto possa fallire con conseguenti perdite, più o meno considerevoli, per i propri creditori. Il concetto fondamentale che racchiude l'essenza di queste possibili perdite è il concetto di *exposure*: esistono diverse misure che permettono di quantificare l'esposizione creditizia durante l'intera vita di un prodotto.

Concetti come l'*Expected Exposure, Potential Future Exposure* o *Expected Positive Exposure* sono ausiliari alla definizione della grandezza fondamentale Credit Value Adjustment (CVA). Tale fattore definisce il vero prezzo rischioso di un prodotto rappresentando per definizione la differenza tra il valore *risk-free* di un contratto (o più genericamente di un portafoglio) e il valore reale che tenga conto della possibilità di fallimento o di modifica della qualità creditizia della controparte. Verranno infine analizzati tre esempi teorici di prodotti OTC: Interest Rate Swap, Opzioni *plain vanilla* Europee e un contratto CDS legato all'andamento degli spread dei maggiori titoli europei. Di essi verranno calcolati i prezzi *risk-free* e rischiosi mediante due diverse tecniche: la prima si basa sulle simulazioni Montecarlo mentre la seconda sfrutta un approccio analitico e ricerca di una formula chiusa. Per alcuni dei prodotti presentati si studieranno i prezzi in presenza di *wrong-way risk* e *right-way risk.*

2 Introduzione al mondo del Rischio di Credito e Controparte

2.1 Che cosa s'intende con rischio di controparte

<< If history repeats itself, and the unexpected always happens,
how incapable must Man be of learning from experience.>> G.B.Shaw.

Negli ultimi anni la crisi mondiale ha imposto agli istituti bancari norme e regole sempre più ferree nel tentativo di prevenire ed evitare gli errori commessi nel passato. Le banche sono state infatti le prime a doversi confrontare con la nuova situazione di criticità a livello globale. Esse però, pur dovendo rispettare i nuovi vincoli imposti, non potevano ne volevano rinunciare ad una delle proprie componenti più sostanziose del loro portafoglio d'investimenti: quella dei titoli derivati. Proprio per questo la valutazione del rischio di credito ed in particolare del rischio di controparte è diventata una delle attività principali per tutti i soggetti che vogliono agire all'interno di questo mercato.

La globalizzazione del mercato ha fatto sì che gli istituti di credito fossero sempre più portati ad incrementare il volume internazionale degli scambi dei cosiddetti prodotti derivati; queste politiche hanno contribuito ad aumentare la complessità di tali strumenti e si è reso pertanto necessario lo sviluppo di modelli sempre più complessi ma allo stesso tempo precisi per il calcolo dei rischi connessi per mettere in condizione il soggetto che intenda stipulare un contratto di tale natura sia conscio dell'esposizione al rischio propria di tali prodotti.

Ogni giorno nascono nuovi strumenti finanziari che rendono il mercato capace di far fronte alle richieste sempre più complesse di finanziamenti ed investimenti ma, nello stesso tempo, più volatile ed incerto. Questa volatilità ha condotto le banche a doversi adeguare destinando una considerevole parte delle proprie forze al calcolo ed implementazione di modelli quantitativi in grado di stare al passo con l'evoluzione dei derivati.

La maggior parte degli strumenti in questione fa parte della classe dei cosiddetti *Over The Counter* (OTC) che racchiude al suo interno tutti quei prodotti che non vengono scambiati sul mercato regolamentare e che quindi non devono sottostare alle normative dei circuiti borsistici internazionali. I prodotti OTC vengono liberamente scambiati tra due differenti controparti secondo norme predefinite.
Il fatto che lo scambio avvenga su accordo tra due differenti interlocutori esemplifica bene il concetto di rischio bilaterale di credito: ognuna delle due parti si assume il rischio che la controparte possa fallire o mancare i pagamenti necessari dovuti[P10].

Il rischio di controparte è quindi un aspetto particolare del rischio di credito ed è fortemente legato alle possibili fluttuazioni temporali dei fattori di mercato; gli istituti finanziari non possono quindi permettersi di trascurare questa componente, come successo in passato: una sottovalutazione potrebbe, qualora si presentasse una nuova crisi, stravolgere completamente il mondo economico così come lo conosciamo.

Proprio per questo anche le normative sono state riviste e modificate per salvaguardare un mercato in cui le transazioni aumentano sempre più in volume e complessità. La crisi economico-finanziaria ha evidenziato le lacune della maggior parte degli istituti finanziari nell'analizzare i possibili rischi derivanti da uno shock economico a livello mondiale. Le metodologie inizialmente utilizzate sono risultate spesso inadeguate ed insoddisfacenti

Il settore più colpito e fortemente messo a dura prova è stato quello legato al mondo del rischio di credito che è la componente più importante e complessa dal punto di vista quantitativo che la banca deve tenere sotto stretto controllo. Essa rappresenta uno dei punti cruciali per la determinazione dei rendimenti e dei prezzi degli strumenti finanziari che ogni giorno tutti gli istituti finanziari si scambiano regolarmente.

Il rischio di credito rappresenta la possibilità che un debitore, esposto nei confronti di una banca, non sia in grado di rimborsare il capitale erogato o non sia più in grado di adempire ai suoi obblighi di pagamento degli interessi. E' una componente intrinseca in tutte le attività bancarie legate al prestito e di conseguenza influenza le scelte d'investimento di banca, intermediari finanziari ed investitori in titoli obbligazionari.

Tale rischio è influenzato sia dal ciclo economico che dagli eventi legati al debitore: qualora infatti il debitore verso cui la banca è esposta subisca un peggioramento del proprio merito creditizio (come un declassamento di rating) la conseguenza sarà una variazione inattesa del valore di mercato della posizione creditoria.

Non avremo quindi più solamente il rischio di insolvenza della controparte, ma anche il rischio di downgrading della stessa ad impattare sul valore delle proprie attività finanziarie.

Il rischio di credito può essere classificato secondo tre differenti modelli:

- *rischio specifico:* legato alla possibile insolvenza della controparte che non sarà più in grado di rimborsare il proprio debito a qualunque scadenza.
- *rischio di regolamento:* legato alla possibilità che il debito non venga rimborsato a scadenza
- *rischio di controparte:* legato all'incremento del costo o al mancato guadagno in contratti bilaterali qualora una delle due parti divenga insolvente prima della scadenza pattuita.

Quest'ultimo è forse il più complicato da analizzare e calcolare in quanto è un rischio il cui volume delle eventuali perdite non dipende dalle possibilità del creditore bensì da elementi a lui esterni quali la variazione dei tassi d'interesse o dell'andamento borsistico dei titoli. Il rischio di controparte si differenzia quindi dagli altri rischi di credito per due differenti aspetti: il primo è l'impossibilità di valutare nel futuro il valore di un contratto OTC e la conseguente difficoltà di calcolo ad una possibile data di default. Il secondo riguarda la natura bilaterale dei prodotti che, prevedendo uno scambio tra due differenti enti, entrambi potenzialmente a rischio fallimento, potrà portare ad avere valori del contratto, nei vari istanti di tempo futuri, positivi o negativi.

2.2 Normative di riferimento per la definizione del rischio di controparte: Basilea III

2.2.1 Cosa sono gli accordi di Basilea e quali obiettivi si pongono

Gli accordi di Basilea hanno generato una serie di regole e normative che hanno lo scopo di definire una regolamentazione prudenziale di vigilanza bancaria per la gestione del rischio di settore; tali accordi sono stati stipulati per la prima volta nel 1988 dal comitato di Basilea (*the Basel Committee on Banking Supervision*), ossia un'organizzazione internazionale costituita dai governatori delle banche centrali dei 10 paesi più industrializzati del mondo. L'obiettivo di tale organizzazione era quella di promuovere la collaborazione fra le differenti nazioni al fine di mantenere una stabilità monetaria e finanziaria.

Il comitato non ha alcun potere legislativo, ma formula proposte che dovranno essere in seguito recepite nell'ambito dei singoli ordinamenti nazionali, con la speranza che il maggior numero di Stati possibili accetti tali provvedimenti al fine di rendere il più omogenee possibili le normative di vigilanza bancaria.

Il trattato, stipulato non solo tra paesi membri del comitato, ma tra oltre 100 paesi internazionali, è un accordo di vigilanza prudenziale che stabilisce i requisiti minimi di capitale che ogni banca debba avere in relazione alle proprie attività creditizie e finanziarie.

Nel corso degli anni, con lo svilupparsi e il complicarsi del mondo finanziario, anche gli accordi hanno subito dei miglioramenti e delle modifiche per restare al passo con questo settore. Fino ad oggi si contano 3 versioni ufficiali rilasciate dal comitato di Basilea e l'ultima, in continuo aggiornamento, risale al dicembre del 2010.

2.2.2 Da Basilea 2 a Basilea 3: quali cambiamenti in vista

I nuovi provvedimenti introdotti in quest'ultima versione mirano al conseguimento di tre obiettivi principali:

- miglioramento del settore bancario nell'assorbimento di shock derivanti da tensioni finanziarie ed economiche, indipendentemente dalla loro origine;
- miglioramento della *governance* e della gestione del rischio;
- rafforzamento della trasparenza e dell'informativa;

e si sviluppano secondo due differenti ordini di grandezza:

- microprudenziale: riguardante il singolo istituto che deve essere rafforzato nelle fasi di stress;
- macroprudenziale: riguardante l'intero sistema finanziario in modo tale che sia in grado di far fronte ad un'eventuale crisi sistemica e prociclica nel tempo.

Le nuove regole imposte agli intermediari finanziari sono in linea con quelle già stabiliti nelle due precedenti versioni, ma migliorano ed innalzano il livello patrimoniale di copertura di eventuali rischi attraverso l'introduzione di requisiti minimi di liquidità, la definizione di capitale regolamentare unitamente a requisiti patrimoniali più elevati, l'inserimento di misure anticicliche. L'obiettivo è quello di ridurre la prociclicità delle regole prudenziali, il contenimento della leva finanziaria ed infine, forse l'aspetto di maggiore importanza ed interesse, il miglioramento della copertura dal rischio di mercato e di Controparte[P12].

In questo ambito le banche saranno costrette a rispettare nuovi requisiti patrimoniali per il calcolo e la prevenzione del rischio, soprattutto per quanto riguarda prodotti derivati, Repos e finanziamento titoli e, se stipuleranno contratti con controparti più sicure e centralizzate, riceveranno sostanziali incentivi come premio per aver contribuito a stabilizzare e rendere più sicuro il mercato globale.

Analizziamo brevemente gli aspetti chiave di ognuno dei punti presentati in precedenza.

Per quanto riguarda gli standard di liquidità avremo che il parametro LCR(Liquidity Coverage Ratio) dovrà rispettare il vincolo:

$$LCR = \frac{\text{Attività liquide ad elevata qualità}}{\text{Deflussi di cassa totali netti in 30 giorni}} \geq 100\%$$

affinché le banche possano sopperire ad uscite straordinarie in un periodo limitato mediante proprie risorse liquide, senza dover ricorrere al mercato o al rifinanziamento presso la Banca Centrale.

Viene confermata la funzione del patrimonio come presidio necessario per la stabilità degli intermediari finanziari; attraverso la definizione di livelli di capitale adeguati e di migliore qualità si garantisce la maggiore o minore capacità degli Istituti a far fronte a perdite nei momenti di ribasso e la propensione ad avere un ruolo di supporto a famiglie ed imprese per la crescita e lo sviluppo economico in periodi di ripresa con l'erogazione di finanziamenti.

Come spiega il documento ufficiale rilasciato dal *Basilee Committee*(2010) [B3] esistono sostanzialmente due livelli d'azione per raggiungere l'obiettivo di rafforzamento patrimoniale.
Un primo livello è quello legato alla ricomposizione dei requisiti patrimoniali verso gli strumenti di liquidità più elevata: sono previsti requisiti più stringenti in termini di elevata qualità patrimoniale e lasciata sostanzialmente invariata all'8% la richiesta minima patrimoniale complessiva in rapporto alle attività ponderate per il rischio.

Il parametro *Common Equity*, calcolabile come il capitale definito dalle azioni ordinarie più tutte le riserve, come mostrato nella Tabella 1, sale di 2,5 punti percentuale, mentre il parametro *Tier 1* [1] passa dal 4 al 6% in rapporto alle attività ponderate per il rischio.

Quest'ultimo requisito minimo di capitale, unito ad altri vincoli che lo rapportino al totale dell'attivo non ponderato per il rischio (*leverage ratio*), dovrebbe impedire alle banche di sviluppare livelli di debito eccessivi, cogliendo, per quanto possibile, tutte le attività in e fuori bilancio di una banca.
Un secondo livello, che dovrebbe garantire la riduzione della prociclicità delle regole prudenziali, prevede invece di mantenere un ulteriore cuscinetto minimo del 2,5% (*capital conservation buffer*) tale che assicuri stabilità patrimoniale per periodi di stress economici e finanziari eccezionali; tale soglia potrà essere aumentata in caso di fasi di surriscaldamento del credito e dovrà essere composto di capitale di elevata qualità.

[1] Secondo gli accordi di Basilea il patrimonio di una banca può essere suddiviso in due classi (*Tier*): una classe principale, *Tier 1*, che viene calcolata sommando il capitale azionario, quindi azioni ordinarie più azioni privilegiate e riserve di bilancio provenienti da utili non distribuiti al netto delle imposte, ed una classe secondaria *Tier 2*, il cui rapporto rispetto all'One non dovrà mai essere inferiore al 100%, composto principalmente da obbligazioni di breve durata .

Tabella 1: Requisiti fondamentali per le Banche introdotti con gli accordi di Basilea III

	2013	2014	2015	2016	2017	2018	As of January 2019
minimum Common Equity Capital Ratio	3,5%	4,0%	4,5%	4,5%	4,5%	4,5%	4,5%
minimum Tier 1 Capital	4,5%	5,5%	6,0%	6,0%	6,0%	6,0%	6,0%
Capital conservation buffer	-	-	-	0.625%	1.25%	1.875%	2.5%
minimum total Capital	8,0%	8,0%	8,0%	8,0%	8,0%	8,0%	8,0%

Il comitato di Basilea ha inoltre proposto sostanziali modifiche per aumentare la capacità dei requisiti patrimoniali di evidenziare i rischi di mercato e di controparte al fine di evitare una sottostima degli effettivi rischi presenti nelle attività di mutazione dei crediti in strumenti finanziari complessi ed insiti nelle attività di trading.

Le nuove regole prevedono quindi la definizione di nuovi parametri e misure chiave al fine di catturare questi aspetti: il concetto chiave che permette di definire quale sia l'entità di tali rischi di controparte è il cosiddetto CVA (*Credit Valuation Adjustment*). Esso permette alle banche di determinare il valore del rischio qualora avvenga una variazione della componente creditizia: si basa infatti sul calcolo del valore di un portafoglio in condizioni normali ed in condizioni di stress estremo, ossia qualora la controparte coinvolta nell'accordo sia fallita.

Tutte le regole proposte in questa nuova versione del trattato sono originate dall'idea che tutte le operazioni bancarie, dalla più semplice erogazione di crediti al più complesso utilizzo di titoli derivati, che vengono compiute da una banca comportano dei rischi e quindi intrinsecamente delle possibili perdite: più elevato è il rischio, maggiori saranno le perdite e quindi maggiore sarà il capitale a copertura da detenere per evitare il ripetersi di crisi a livello mondiale, come avvenuto in passato.

3 Il rischio di controparte e le misure di valutazione

3.1 Credit Exposure

Prodotti come Repos, derivati OTC o titoli obbligazionari hanno come comun denominatore il fatto che, fino alla cessazione del contratto, esista una possibilità che la controparte debitrice non sia in grado di ottemperare ai propri obblighi contrattuali. Potrebbe infatti essere intervenuta una situazione finanziaria di precarietà che abbia costretto la controparte a sospendere i pagamenti causando all'istituto emittente perdite inattese.

Il termine con cui vengono definite queste perdite è: *credit exposure*.
Si definisce l'esposizione creditizia come il costo necessario per sostituire la transazione qualora la controparte coinvolta fallisca e non sia più in grado di ottemperate ai pagamenti previo accordati.
L'esposizione che ne deriva dipende fortemente da più fattori di rischio che spesso risentono anche dall'andamento del mercato. E' quindi difficile per una banca determinare in modo preciso quale sia il rischio connesso alla transazione in corso.

Possiamo dividere i prodotti che sono soggetti al rischio di controparte in due grandi tipologie:

- Over The Counter(OTC) Product: Interest Rate swap, FX products, Equity contract, etc...
- Securities financing transactions: repos and reverse repos, lending, etc...

Il concetto di *credit exposure* è il concetto chiave attorno al quale ruota il calcolo di tale rischio. Come è facile immaginare è una misura estremamente sensibile al tempo dal momento che l'evento critico può avvenire in qualunque istante di vita del contratto. Bisognerà quindi essere in grado di analizzare quale sia la massima esposizione corrente e quale potrà essere quella futura.

Il concetto di esposizione è fortemente legato ad un altro concetto: quello di *Mark to Market.* Il *Mark to Market*, per semplicità di notazione d'ora in avanti MtM, corrisponde al prezzo odierno di un contratto o portafoglio il cui valore è mutevole nel tempo a causa di parametri legati a fattori di rischio del mercato; può essere quindi visto, in maniera semplificativa, come il computo di tutti i pagamenti che ci si aspetta di ricevere meno i pagamenti che sarebbero dovuti nei confronti di una specifica istituzione.

Prima di effettuare un'ulteriore analisi su tali grandezze è necessario introdurre il concetto di *Recovery Rate,* ossia il tasso che, in caso di evento negativo riguardante una o più controparti, può essere recuperato dalla banca esposta rispetto all'ammontare totale del credito.

Analizziamo quindi cosa succede qualora avvenga il default nei due differenti casi di MtM positivo e negativo:

- *MtM positivo:* la perdita sarà corrispondente al MtM meno il tasso di recovery
- *MtM negativo:* salvo specifiche clausole a riguardo, non essendo possibile uscire dal contratto in essere, ciò che dovrebbe essere corrisposto alla controparte, seppur fallita, viene ugualmente versato rendendo questo evento ininfluente rispetto ai pagamenti dovuti.

Per quanto detto in precedenza possiamo quindi dedurre che:

$$Exposure = Max(MtM, 0) = MtM^{+} \tag{1}$$

Il rischio di controparte avrà quindi un profilo asimmetrico dal momento che in caso di MtM positivo si avranno perdite, mentre il caso contrario non sarà porterà ad alcun guadagno.

Quanto definito fino ad ora rispetto al concetto di *exposure* risulta però essere insufficiente da un punto di vista valutativo ed analitico. Bisognerà introdurre delle misure che ci permettano di valutare effettivamente quale sia l'esposizione di un singolo contratto.

L'*expected MtM* rappresenta il valore atteso di una transazione in un qualunque istante futuro e, dal momento che gli orizzonti di vita dei prodotti in analisi possono essere molto elevati, tale valore può differire parecchio dal valore corrente.

3.2 Expected exposure & Potential Future Exposur

Il concetto sopra esposto è ausiliario all'introduzione delle vere misure di valutazione del rischio di controparte: l'*Expected Exposure* (EE), il *Potential Future Exposure* (PFE) e l'*Expected Positive Exposure* (EPE).

Potential Future Exposure (PFE)

Il PFE viene utilizzato dagli istituti per quantificare la sensibilità del rischio di controparte nei confronti di cambiamenti futuri di prezzi d'azioni o tassi nel mercato; esso definisce, ad un livello di confidenza prestabilito, quale sia l'esposizione ottenibile nel peggiore degli scenari possibili: conoscendo i valori di MtM odierni e passati si è in grado di effettuare delle stime future e, attraverso la caratterizzazione mediante distribuzione di probabilità, sarà possibile studiarne il profilo e analizzare i valori derivanti.

La curva della PFE, variabile nel tempo, rappresenta il profilo dell'esposizione futura fino alla scadenza del contratto o, nel caso di un portafoglio, del prodotto più duraturo. Solitamente, tale curva, si calcola attraverso modelli statistici che prevedono la simulazione del portafoglio ai differenti istanti di tempo e si ottiene prendendo il percentile d'interesse; il picco di tale curva viene definito come *Maximum Potential Future Exposure* (MPFE) e spesso viene utilizzato come confronto diretto con i limiti imposti dalle norme di vigilanza che regolamentano il mercato dei derivati.

Expected Exposure (EE)

Se la PFE definisce la peggior perdita ottenibile in caso di default, l'EE rappresenta invece il valore stesso della perdita derivante da questa situazione. Dal momento che, per quanto visto in precedenza, l'*Exposure* è legata solo ai valori positivi del MtM, lo stesso si potrà dire dell' *Expected Exposure*. Per definizione avremo quindi che esso sarà maggiore o uguale all'Expected MtM. Collegata tale grandezza potremo definire l'*Effective Expected Exposure* che definisce, ad una specifica data, il valore massimo dell'EE che si è verificato in quell'istante o in precedenza.

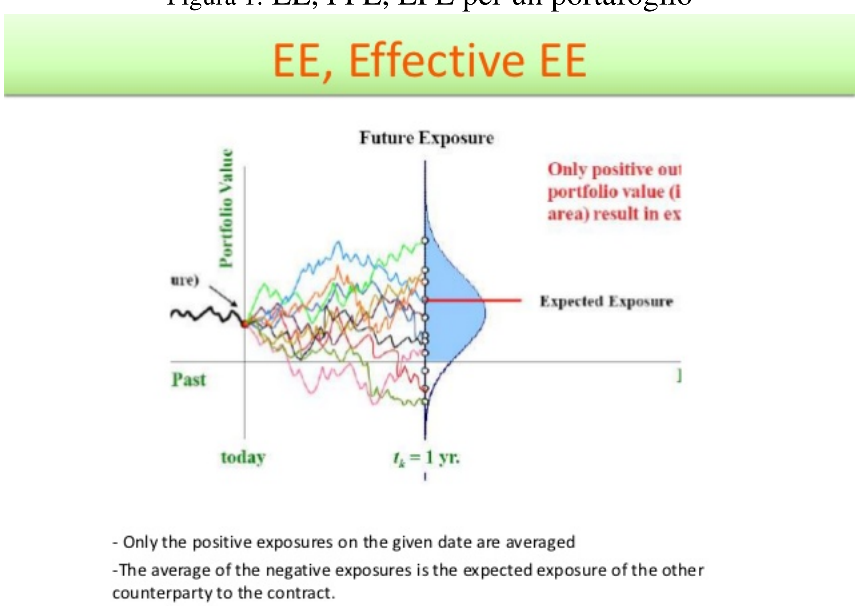
Così come per la PFE anche per l'EE è possibile tracciare una curva (spesso viene anche chiamata *credit-equivalent exposure curve*) utilizzata spesso per effettuare valutazioni circa la qualità creditizia di una controparte.

Effective Positive Exposure (EPE)

Un'ulteriore grandezza fondamentale ai fini della definizione del rischio di controparte è l'*Expected Positive Exposure* (EPE) che definisce una media pesata delle EE nel tempo. In linea con quanto visto in precedenza per l'EE saremo in grado di definire l'*Effective Expected Positive Exposure* (EEPE), costruito come media dell' Effective EE su un arco di tempo prestabilito
Tale misura ci può fornire quindi una misura univoca dell'esposizione legata a quel determinato contratto.

Dalla Figura 1[2] possiamo vedere come tutte le misure fin qui introdotte sono tra loro relazionate; possono tutte essere derivate direttamente dalla distribuzione dell'esposizione nelle date future. Per una certa data l'EE definisce il valore atteso della distribuzione in quello specifico istante, mentre PFE fornisce il valore massimo della distribuzione ad un certo livello di confidenza. La scelta della distribuzione dell'esposizione dipenderà dai fattori di mercato e dal prodotto derivato preso in considerazione.

Figura 1: EE, PFE, EPE per un portafoglio



[2]Figura presa e riadattata da Roman Kornyliuk , *Counterparty Credit Risk*

3.3 Quantificazione dell'esposizione creditizia

Una volta definite le misure necessarie affinché sia possibile effettuare una valutazione dell'esposizione relativa ad un prodotto o ad un portafoglio sarà necessario definire anche le tecniche di calcolo.

Il primo approccio, molto semplice e quindi soggetto a possibili errori di valutazione, è definito *"MtM + add-ons"* che prevede il calcolo della futura esposizione come somma della corrente e di una percentuale rappresentante l'incertezza futura legata al prodotto in esame; a seconda di alcune caratteristiche, quali ad esempio la duration e la volatilità dell'asset class in analisi, verranno definiti differenti spread che si andranno a sommare all'*exposure*. Questa tecnica ha il vantaggio di essere facile ed immediata: tenendo infatti in considerazione solo alcuni aspetti dei contratti, saremo in grado di applicare gli spread aggiuntivi in maniera istantanea così da poter effettuare una prima valutazione del prodotto in analisi e dei rischi ad esso legati. Essendo così semplice ed intuitiva, di conseguenza, alcuni aspetti verranno trascurati rendendo tale metodologia limitativa per tutte le asset class presenti sul mercato e per la moltitudine di prodotti esistenti sul mercato; per questo sarà necessario introdurre un approccio che ci permetta di effettuare un'analisi più completa possibile per tutte le asset class.

Il secondo approccio sfrutta la ben nota tecnica delle simulazioni Montecarlo e si basa fondamentalmente su 4 steps:

1. *Definizione dei fattori di rischio:* bisogna essere in grado di definire quali siano i fattori di rischio che influenzano l'esposizione e al contempo in grado di calibrarli con i dati di mercato attuali fornendone quindi una distribuzione plausibile per futuri scenari

2. *Generazione degli scenari:* una volta scelti i fattori di rischio si costruirà una griglia temporale e per ognuno degli istanti stabiliti si valuterà il valore del fattore di rischio sotto scenario

3. *Rivalutazione:* per ogni prodotto sarà quindi possibile, mediante modelli valutativi, calcolare il prezzo per ogni scenario ed istante temporale

4. *Aggregazione:* una volta ottenuto per ogni prodotto il cubo di prezzi, scenario ed istante temporale, si dovrà calcolare l'esposizione del portafoglio aggregando tutti i prodotti che possono essere raccolti nel medesimo *netting set* e definire le metriche associate calcolando la parte di esposizione che deve essere collateralizzata.

Per quanto riguarda lo step 2 (generazione degli scenari) il rischio maggiore da evitare è il *Roll-off Risk* ossia il rischio di costruzione di una griglia inadatta alle caratteristiche del prodotto. Il profilo dell'esposizione è infatti fortemente discontinuo a causa dei numerosi fattori di rischio che lo determinano e quindi la possibilità di scegliere istanti di tempo valutativi tali che non colgano appieno le caratteristiche del prodotto è alta: ad esempio qualora si considerassero prodotti che permettono esercizio anticipato si dovrà effettuare un'analisi in questi istanti temporali.
Bisognerà quindi essere in grado di effettuare una pre-analisi del possibile andamento dell'esposizione legata al singolo contratto e costruire la griglia temporale per gli scenari in modo quanto più appropriato.
Dal momento che le banche raramente effettuano la valutazione di un singolo portafoglio, la vera sfida sarà mantenere contenuto il trade-off tra numero di istanti temporali e qualità in modo tale che questi siano ottimali per il maggior numero di prodotti possibili.

Un'ulteriore tecnica a disposizione degli istituti, per il calcolo dell'esposizione, è quella definita *Semi-Analytical*. Tale metodologia è più raffinata rispetto alle precedenti e concettualmente differente dal momento che non sfrutta il metodo MonteCarlo per simulare i fattori di rischio, ma ne fornisce delle approssimazioni e distribuzioni basandosi su alcune ipotesi.
Per come è definita tale tecnica avremo quindi sarà utilizzabile solo per alcune *Asset class*; infatti le ipotesi che vengono fornite per la simulazione dei fattori di rischio sono piuttosto semplici e quindi talvolta riduttive per la varietà di prodotti che esistono sul mercato. Inoltre spesso permettono di ottenere un'unica misura di rischio invece che l'intera distribuzione. Un'ulteriore limitazione di tale metodo è l'impossibilità d'incorporare le possibili tecniche di riduzione del rischio che verranno più avanti presentate.

3.4 Come ridurre e prevenire il rischio di controparte

Abbiamo introdotto in precedenza il concetto di rischio di controparte, quali siano i fattori che lo determinano ed i metodi per definire una prima approssimazione delle grandezze necessarie ad una stima . Una volta che il rischio è stato individuato, la vera difficoltà sta nel trovare tecniche per mitigarlo: le principali sono tutte basate sul concetto di *exposure* e sulla capacità di controllo di tale valore.

Diamo di seguito una prima introduzione dei principali strumenti a nostra disposizione:

- *diversification*: dispersione del rischio di credito e quindi dell'esposizione verso più interlocutori;
- *netting*: capacità di pareggiare i contratti positivi e negativi che sono stati stipulati con la stessa controparte;
- *collateralization*: possibilità di trattenere un certo quantitativo di soldi o *securities* a titolo di garanzia;

Come è facilmente intuibile la prima tecnica è la più semplice e in teoria quella ottimale: diversificare gli acquisti che vengono effettuati porta a correre meno rischi in caso di default da parte di una singola controparte essendo in grado di coprire le perdite con gli altri prodotti. D'altro canto, però, qualora il problema sia sistemico e si verifichi una crisi a livello settoriale, come già avvenuto nel 2008, diversificare i contratti tra varie controparti non è garanzia di limitazione delle perdite. La scelta degli istituti è ricaduta quindi principalmente sulle tecniche di *netting* e *collateralization*, le cui caratteristiche principali verranno presentate nei prossimi capitoli.

3.4.1 La tecnica di netting

La tecnica di *netting* consiste sostanzialmente in un accordo di aggregazione di diversi prodotti derivati in essere tra due differenti parti: l'obiettivo è quello di creare dei pacchetti che abbiano MtM circa nullo così che, in caso di default di una delle due parti, le perdite saranno anch'esse pari o prossime a 0.
Tale tecnica può essere analizzata a due differenti livelli :

- *Payment netting*: le due parti coinvolte si accordano preventivamente affinché i *cashflows* dovuti nei medesimi istanti di tempo futuri vengano pareggiati e si effettui quindi un unico pagamento;
- *Close-out netting*: forma di copertura che prevede la cessazione anticipata dei contratti in essere tra due parti mediante computo dei rispettivi debiti dovuti e conseguente saldo dell'ammontare previsto verso l'istituto che vanta un credito maggiore.

La vera difficoltà di questa tecnica, in teoria così semplice, è quella di riuscire a creare il miglior *netting* possibile con gli strumenti a disposizione verso una singola controparte.

L'esposizione è una misura addittiva e in quanto tale, qualora non venga stipulato alcun accordo di *netting*, per calcolare quella totale nei confronti di una controparte, sarà necessario semplicemente sommare i singoli contratti; inoltre, per come è definita, un accordo di *netting* su derivati che possono avere solamente MtM positivo risulta essere inutile in quanto non porterebbe alcun vantaggio.

Sarà quindi utile e consono cercare di "impacchettare" prodotti tali che abbiano MtM con segni opposti e quindi che possibilmente presentino una certa correlazione: questa infatti porterà ad avere, sotto differenti scenari, valori alternativamente positivi e negativi dei rispettivi MtM.

3.4.2 La tecnica di collateralization

Un'altra tecnica molto utilizzata, soprattutto dopo il 2008, è quella definita *collateralization (margining)*: tale processo subentra qualora il *netting* tra due differenti parti non sia possibile, a causa della differenza elevata tra contratti positivi e negativi, oppure quando sia solamente parziale e non permetta di ridurre al minimo l'esposizione.
Viene utilizzata per creare ulteriori opportunità di business: riducendo infatti l'esposizione totale e avendo a disposizione capitale aggiuntivo l'istituto sarà in grado di rientrare nei parametri e nei vincoli imposti dalle normative vigenti e quindi di effettuare ulteriori investimenti.

L'idea fondamentale che sta alla base di questa tecnica è quella della costituzione di un *collateral,* ossia un asset, che può essere di varia natura, tale che permetta di assicurarsi legalmente verso una controparte nei cui confronti esista un rischio concreto di perdita. Gli accordi *ISDA Master Agreement* stabiliscono la documentazione necessaria relativa a questa tecnica ed in particolare specificano le caratteristiche dell'uso dell'asset in qualità di collaterale; la più importante di queste caratteristiche è la cosiddetta *treshold* che definisce la soglia sopra la quale il meccanismo di *collateralization* viene attivato e una delle due parti richiede il titolo della rispettiva controparte a garanzia del contratto.
Così come il rischio e l'esposizione, all'interno di un contratto, sono bilaterali così lo è anche il *collateral*: infatti esso varia in base all'exposure del contratto, o del portafoglio, e quindi può essere sia dovuto che esatto.

Abbiamo visto in precedenza che l'esposizione legata ad un ipotetico portafoglio è data dalla seguente formula:

$$Exposure = Max\left(V\left(t\right),0\right) = V\left(t\right)^{+}\,, \tag{2}$$

dove V(t) rappresenta il valore stesso del portafoglio verso una singola controparte.

Tale formula può essere modificata in presenza di un collaterale che, per semplicità, ipotizziamo dovuto alla banca quando il valore del portafoglio superi una certa soglia (*treshold*) $C(t)$

$$Exposure = Max\left(V\left(t\right) - C\left(t\right),0\right)\;; \tag{3}$$

quando e se il valore dovesse tornare sotto tale soglia la banca sarà tenuta alla sua restituzione.

Esistono due modelli piuttosto semplici di *collateralization*.

Il primo modello *istantaneous collateral* ipotizza che il collaterale venga consegnato immediatamente e che i singoli contratti facenti parte del portafoglio possano allo stesso modo essere liquidati con tempistiche ridotte; con queste ipotesi possiamo ipotizzare che il collaterale sia dato da:

$$C(t) = Max\left(V\left(t\right) - C,0\right)\,, \tag{4}$$

con C costante positiva.
Tale modello come si evince dalle ipotesi fatte e dalla formula presentata risulta molto semplificativo e spesso viene utilizzato dalle banche per dare una stima iniziale del proprio livello di esposizione.

Una seconda tecnica d'inclusione del collaterale nel calcolo dell'*exposure* coinvolge la definizione di un intervallo di tempo $\gamma \cdot t$, conosciuto come *margin period of risk*, definito come la differenza tra l'ultima rivalutazione del collaterale prima del default e la chiusura dei contratti con la rispettiva controparte.

Dal momento che tale grandezza non è nota per semplicità si possono fare delle assunzioni legate al contratto stipulato tra le due parti affichè venga definita come una quantità deterministica:[3]

$$C(t) = Max(V(t - \gamma \cdot t) - C, 0) \; ; \tag{5}$$

tale modello proprio per la sua natura viene definito *lagged collateral*.

Le tecniche presentate sono tutte valide per mitigare e controllare il rischio di controparte e di conseguenza la direzione in cui si sta andando è quella della ricerca di un miglioramento e di cercare della maggiore efficienza possibile.

La naturale conseguenza di questo processo è quindi quella di avere sempre più liquidità a disposizione per le banche che, sentendosi al sicuro dai rischi e dalle perdite in eventuali situazioni di default delle controparti, continuano ad investire massivamente nel mercato dei prodotti OTC rischiando così che, in caso di un'ulteriore crisi a livello mondiale e specialmodo settoriale, queste tecniche di copertura dal rischio siano vane ed insufficienti.

Dopo il 2008 si è fatto molto per evitare di ripercorrere gli stessi errori e ricadere nel clima di panico che ha paralizzato l'intera economia mondiale; gli strumenti di copertura presentati debbono quindi essere visti come mezzi di tutela e prevenzione contro gli eventi negativi e non come ulteriori fattori di rischio.

[3]A livello di *margin agreement* il *margin period of risk* può essere definito in dipendenza da due aspetti contrattuali: la frequenza con cui viene effettuata la rivalutazione del livello di collateralization e la liquidità del portafoglio; ad esempio per portafogli molto liquidi e tali che le rivalutazioni vengano effettuate giornalmente si assume che $\gamma \cdot t$ sia pari a due settimane.

3.5 Esempio EE & PFE per un contratto Forward

Per esemplificare meglio i concetti di *exposure* introdotti nei capitoli precedenti possiamo considerare un contratto Forward, ossia un prodotto finanziario mediante il quale due controparti si impegnano a scambiarsi, ad un istante futuro T , a prezzi prefissati, uno specifico Asset. Il valore finale del contratto nell'istante T sarà quindi dato dalla differenza tra il valore a pronti del sottostante a scadenza e il prezzo del Forward definito inizialmente.
Qualora la differenza sia positiva guadagnerà chi ha acquistato il prodotto mentre viceversa a guadagnarci sarà il venditore del Forward.

Ipotizziamo ora che il prodotto in esame abbia dinamica stocastica modellata seguendo un moto Browniano geometrico (W_t) [T98] :

$$F = \mu + \sigma Z, \tag{6}$$

$$dF_t = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{7}$$

dove μ indica l'Expected MtM mentre σ la sua deviazione standard. Il prodotto in esame avrà quindi MtM Normale:

$$F_\tau \sim N\left(\mu(\tau - t), \sigma\sqrt{\tau - t}\right). \tag{8}$$

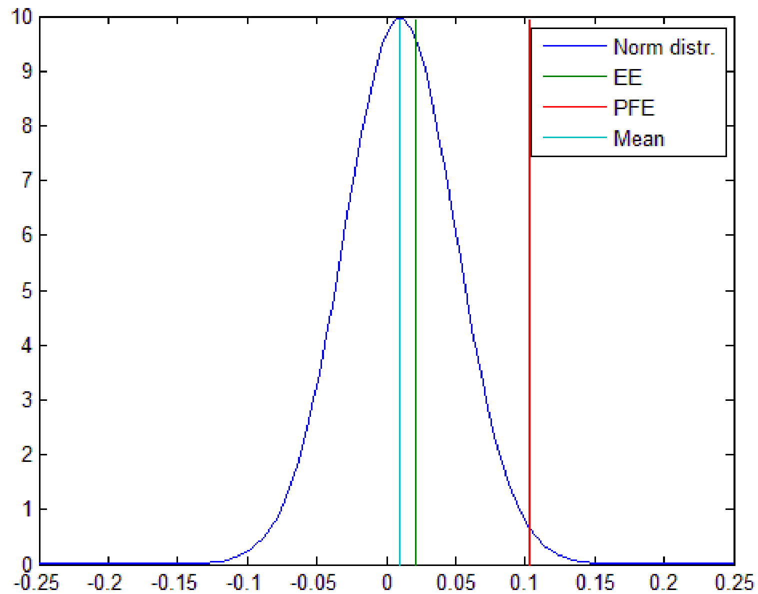
Siamo in grado di calcolare con facilità quale sia la PFE con un certo livello di confidenza α :

$$PFE_\alpha = \mu(\tau - t) + \sigma\sqrt{\tau - t}\Phi^{-1}(\alpha), \tag{9}$$

dove $\Phi^{-1}(\cdot)$ rappresenta l'inversa della funzione cumulativa della distribuzione Normale.

La misura appena ricavata indica quindi che, con una probabilità non superiore ad $1 - \alpha$, l'esposizione futura attesa non sarà superiore a tale valore.

Figura 2: EE & PFE per un contratto Forward con distribuzione normale e $\mu = 1\%$ & $\sigma = 4\%$



Per quanto visto in precedenza l'EE rappresenta la media di tutti i possibili futuri MtM positivi:

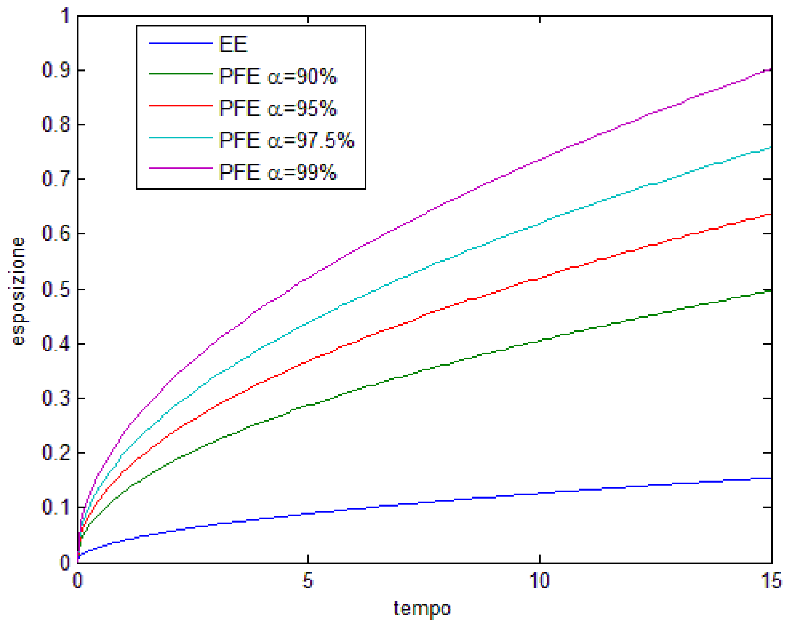
$$EE = \int_{-\mu/\sigma}^{T} (\mu + \sigma \cdot y) \cdot \varphi(y) dy \,, \tag{10}$$

$$EE = \mu(\tau - t)\Phi\left(\frac{\mu\sqrt{\tau - t}}{\sigma}\right) + \sigma\sqrt{\tau - t} \cdot \phi\left(\frac{\mu\sqrt{\tau - t}}{\sigma}\right) \,, \tag{11}$$

dove $\varphi(\cdot)$ rappresenta la distribuzione di una variabile normale standard.

Costruiamo quindi una griglia temporale che vada da $\tau = 0$ a T così che discretizzando le formule precedenti ci permetta di calcolare ad ogni istante di tempo t il valore sia dell'EE che della PFE. Come si evince dalla Figura 3 e dai dati riportati in Tabella 2 entrambe le misure sono crescenti nel tempo.

Figura 3: Semi-analytical method per un contratto Forward



Ad esempio un contratto Forward, con scadenza a 3 anni, riporta un'*Expected Exposure*, ossia una perdita media, del 7% ed una *Potential Future Exposure* oscillante tra il 22% e il 40% . Nell' 1% dei possibili scenari futuri la perdita legata a questo tipo di prodotto sarà quindi pari al 40% del nozionale investito, mentre nel 10% dei casi le eventuali perdite si attesteranno su un livello pari al 22%.

Tabella 2: Valore dell'*exposure* per il contratto preso in considerazione

Exposure	T=1	T=2	T=3	T=4	T=5
Expected Exposure	3.990%	5.640%	6.910%	7.980%	8.920%
Potential Future Exposure $\alpha = 90\%$	12.820%	18.120%	22.200%	25.630%	28.660%
Potential Future Exposure $\alpha = 97.5\%$	16.450%	23.260%	28.490%	32.900%	36.780%
Potential Future Exposure $\alpha = 95\%$	19.600%	27.720%	33.950%	39.200%	43.830%
Potential Future Exposure $\alpha = 99\%$	23.260%	32.900%	40.290%	46.530%	52.020%

4 Calcolo del Rischio di Controparte

4.1 I derivati OTC e il Credit Value Adjustment

Dalla crisi economica del 2008 i governi di tutto il mondo hanno puntato la loro lente d'ingrandimento sul settore della finanza ritenuto responsabile per le problematiche insorte in quel periodo. Analizzando la situazione si è cercato di capire quali fossero le reali cause della crisi e quali sarebbero potute essere le soluzioni future per rimediare a tale situazione. Studi statistici hanno dimostrato che oltre due terzi delle perdite di quel periodo furono dovute principalmente legate all'errata valutazione dei MtM dei singoli prodotti derivati piuttosto che ad un eventuale fallimento della controparte.

L'inclusione del rischio di controparte all'interno delle vecchie modellistiche ha impatti notevoli sulla valutazione dei prezzi dei prodotti ed ha condotto alla necessità di definire una buona misura che sia in linea con esse: tale grandezza prende il nome di *Credit Value Adjustment* (CVA).
Il CVA sarà quindi per definizione la differenza tra il valore *risk free* di un portafoglio e il valore reale che tenga conto della possibilità di fallimento o di modifica della qualità creditizia della controparte.

Questo nuovo fattore ci permetterà quindi di fornire un prezzo ad un portafoglio soggetto a rischio di controparte:

$$MtM = MtM_{Free-Risk} - CVA\,. \tag{12}$$

Dal punto di vista normativo, come accennato nei capitoli precedenti, nel 2010 venne approvata la nuova versione *Basilea III* che, in uno dei passaggi chiave propone:

"Banks will be subject to a capital charge for mark-to-market losses (i.e., credit valuation adjustment – CVA – risk) associated with a deterioration in the credit worthiness of a counterparty. While the current Basel II standard covers the risk of a counterparty default, it does not address such CVA risk, which has been a greater source of losses than those arising from outright defaults".

La maggior parte degli istituti finanziari basa la propria analisi del rischio di controparte su due modelli di valutazione per definire il capitale necessario ad assorbire le eventuali perdite: un modello *Economic Capital* che si basa su valutazioni effettuate all'interno dell'azienda ed un *Regulatory Capital model* che viene invece fornito da autorità nazionali e serve principalmente a definire una panoramica completa del livello di esposizione totale sul suolo d'appartenenza.

Come specificato da [DS11] sono tre i fattori principali che hanno condotto alla necessità di introdurre il rischio di controparte nella valutazione dei derivati e possono essere suddivisi in tre categorie: *regulation, accounting e pricing*.

Dal punto di vista della contabilità l'IFRS (*International Financial Reporting Standards*) ha richiesto che tutti i prodotti OTC, messi a libro contabile, vedessero un aggiornamento del loro *fair value* in linea con la qualità del credito connesso alla rispettiva controparte: gli istituti hanno quindi dovuto investire tempo e denaro per creare squadre di lavoro in grado di effettuare una valutazione adeguata agli standard richiesti di calcolo del CVA.

Per quanto riguarda invece la fase di definizione del prezzo del singolo contratto il MtM calcolato con le vecchie modellistiche è risultato inadeguato: tutti gli istituti hanno dovuto ricalcolare il prezzo dei prodotti OTC e di tutti i prodotti che potessero essere in qualche modo soggetti al rischio di controparte, attraverso proprio il CVA.
Ipotizziamo che un'azienda disponga di un portafoglio, formato da diversi prodotti, tutti relativi ad una singola controparte, e le venga proposto un nuovo contratto; l'obiettivo del *Risk Management* dell'azienda sarà quello di valutare se i possibili guadagni relativi alla nuova transazione siano in accordo con i vincoli normativi e se la nuova esposizione totale non superi i limiti consentiti. Per effettuare tale valutazione bisognerà calcolare quale sia il rischio effettivo di controparte che potrà scaturire dall'innesto di questo nuovo prodotto e quindi il CVA totale del portafoglio modificato.

4.1.1 Una prima stima del Credit Value Adjustment unilaterale

Seguendo la trattazione di [PR10] e di [BC08] facciamo un semplice esempio che permetta di capire meglio cosa sia questa grandezza e di dare una sua prima approssimazione.

Dato un set di derivati, tutti con medesima controparte, tali che il contratto a scadenza maggiore sia in T siamo interessati a calcolarne il *Net Present Value* (NPV) dei payoff residui nell'orizzonte temporale $[\tau, T]$.

Tale quantità sarà quindi il valore atteso del *Discounted payoff* rischioso $\widetilde{V}(t,T)$ ad un istante t di riferimento.

Ipotizzando che, qualora avvenga, il default si verifichi all'istante τ avremo due possibili scenari futuri:

1) La controparte non fallisce prima della scadenza dell'ultimo contratto (istante T) e quindi il payoff sarà dato da:

$$\Phi = I(\tau > T) \cdot V(t,T) \,. \tag{13}$$

2) La controparte fallisce in un istante antecedente T e quindi il payoff sarà composto da un termine relativo ai pagamenti che avvengono prima di quella data più un termine relativo al payoff in τ :

$$\Phi_1 = I(\tau \leq T) \cdot V(t,\tau) \,, \tag{14}$$

$$\Phi_2 = I(\tau \leq T) \cdot \left[\delta \cdot V(\tau,T)^+ + V(\tau,T)^- \right] \,, \tag{15}$$

dove:

- $I(\tau \leq T)$ rappresenta la funzione indicatrice sulla scala temporale e che quindi varrà 1 se l'istante di default τ avviene prima della Maturity T e 0 altrimenti
- $V(t,T)$ rappresenta il *Net Discounted Cash Flows risk-free* valutato in t.

Il profilo del payoff in caso di default sarà fortemente asimmetrico: se il portafoglio infatti risultasse avere NPV positivo, la banca, che avrebbe il diritto ad essere pagata dalla controparte nel frattempo fallita, vedrà recuperata solo una frazione δ del valore totale del portafoglio posseduto. In caso contrario, qualora NPV del portafoglio fosse negativo, la banca non potrebbe recedere dal pagamento del valore dovuto alla rispettiva controparte, seppur in situazione di default.

Sia quindi dato il NPV valutato nell'istante di default τ:

$$NPV(\tau) = E_\tau \left[V(\tau, T)\right] \tag{16}$$

Il valore del portafoglio rischioso è definibile come:

$$\begin{aligned} \widetilde{V}(t,T) = I(\tau > T) \cdot V(t,T) + I(\tau \leq T) \cdot V(t,\tau) + \\ + I(\tau \leq T) \cdot \left(\delta \cdot D(t,\tau) \cdot V(\tau,T)^{+} + V(\tau,T)^{-}\right), \end{aligned} \tag{17}$$

dove $D(t,\tau)$ definisce il *discount factor* tra i due istanti temporali τ e t.

Proposizione 4.1. (*General unilateral counterparty risk pricing formula*) *Nell'istante t, tale che il default non sia ancora avvenuto, il prezzo di un portafoglio che includa la possibilità di rischio di controparte sarà dato da:*

$$E_t\left[\widetilde{V}(t,T)\right] = E_t\left[V(t,T)\right] - E_t\left\{(1-\delta) \cdot I(\tau \leq T) \cdot D(t,T) \cdot NPV(\tau)^{+}\right\}. \tag{18}$$

Dimostrazione 4.1. Si veda Appendice A.

Possiamo inoltre definire come *Credit Value Adjustment* il seguente quantitativo:

$$CVA(t,T) = E_t\left\{(1-\delta) \cdot I(\tau \leq T) \cdot D(t,T) \cdot NPV(\tau)^{+}\right\}. \tag{19}$$

Ottenendo che il valore atteso del portafoglio rischioso sarà vedibile come la differenza tra valore *risk-free* e CVA[4]:

$$E_t\left[\widetilde{V}(t,T)\right] = E^{Q}\left[\widetilde{V}(t,T)\right] = E_t\left[V(t,T)\right] - CVA(t,T). \tag{20}$$

[4]D'ora in avanti verrà utilizzata indistintamente la notazione $E_t\left[\,.\,\right]$ rispetto alla più generica $E^{Q}\left[\,.\,\right]$ solitamente utilizzata per indicare la misura neutrale al rischio. La prima notazione, in cui si pone in evidenza l'istante temporale in cui viene effettuato il valore atteso verrà utilizzata in caso si debba distinguere tra due valori attesi effettuati ad istanti differenti.

Come è possibile notare dalla formula il CVA sarà quindi unicamente dipendente dal tasso di *recovery* δ, dal valore *risk-free* del portafoglio e ovviamente dall'istante di default.[5]

Ricordiamo che il nostro punto di partenza per il calcolo di tale grandezza è la probabilità di fallimento e l'*exposure* legati alla singola controparte; effettuiamo quindi un'approssimazione [P05, HW95] che ci permetta di legare queste due quantità al CVA appena calcolato sotto alcune ipotesi:

1. il valore di *recovery* sia indipendente rispetto all'evento di default e rispetto all'*exposure*
2. si possa trascurare il *wrong way risk,* ossia non esista alcuna relazione tra l'esposizione dovuta al contratto e l'evento di default della controparte.

Sia $V(u,T)^* = V(u,T)\lfloor_{\tau=u}$ il valore del portafoglio all'istante τ in cui avviene il default.

Integrando quindi su tutti i possibili istanti di default otterremo:

$$\begin{aligned} CVA(t,T) &= E^{Q}\{(1-\delta)\cdot I(\tau \leq T)\cdot D(t,T)\cdot NPV(\tau)^{+}\} = \\ &= -(1-\bar{\delta})\cdot E^{Q}\left[\int_t^T D(t,u)\cdot V^{*}(u,T)^{+}\cdot dS(t,u)\right] = \\ &= -(1-\bar{\delta})\cdot E^{Q}\left[\int_t^T D(t,u)\cdot EE(u,T)\cdot dS(t,u)\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Per l'ipotesi 1. avremo che il tasso di recovery sarà indipendente dall'evento di default e quindi risultando invariante rispetto alla misura di probabilità scelta è possibile escluderlo dal valore atteso ed assumerlo costante per ogni istante di tempo$(\bar{\delta})$.
Per quanto riguarda il termine integrale avremo che $D(t,u)$ rappresenta il *risk-free discount factor*, mentre $S(t,u)$ variabile su cui viene effettuato l'integrale, definisce la *survival probability* per la controparte.

[5] L'utilizzo della misura neutrale al rischio è in linea con la teoria di pricing dei prodotti derivati che viene utilizzata solitamente e che si basa sul principio di non arbitraggio; effettuando il valore atteso sotto questa misura saremo in grado di calcolare il prezzo fair del del portafoglio come valore atteso scontato dei differenti payoff. Ricordiamo inoltre che tale misura non è necessariamente unica a causa dell'incompletezza del mercato.

Volendo rendere la precedente espressione discreta sarà quindi possibile effettuare una semplice approssimazione dell'integrale ottenendo:

$$CVA(t,T) \approx -(1-\bar{\delta}) \cdot \sum_{i=1}^{m} D(t,t_i) \cdot EE(t,t_i) \cdot [S(t,t_{i-1}) - S(t,t_i)] \tag{22}$$

dove:

- i è l'indice dei possibili istanti temporali in cui può avvenire il default
- $1-\bar{\delta}$ rappresenta la *Loss Given Deafult* (LGD) ossia il valore atteso della perdita
- $D(t,t_i)$ rappresenta il *risk-free discount factor* all'istante i-esimo
- $EE(t,t_i)$ rappresenta l'*Expected Exposure*
- $S(t,t_{i-1}) - S(t,t_i)$ definisce la probabilità di default marginale tra gli istanti i e $i-1$ (*marginal credit spreads* $s(t_{i-1},t_i) = S(t,t_i) - S(t,t_{-1})$)

4.1.2 Il Credit Value Adjustment come spread in riferimento al rating della controparte

In precedenza sono state riportate le formule relative al calcolo del CVA, sia in forma discreta che in forma continua, e si è accennato alla qualità del credito di un'istituzione legando tale concetto a quello degli spread. Nel mercato dei derivati esistono dei prodotti chiamati Credit Default Swap (CDS) che permettono ad un soggetto A (*Protection buyer*) di assicurarsi nei confronti di una controparte B rivolgendosi ad un terzo soggetto C (*Protection seller*). Tale soggetto, avendo ricevuto per la sua prestazione un compenso fisso da parte di A (CDS_{fee}), si fa carico dell'eventuale rimborso delle perdite dovute al fallimento di B.

Il *present value* di tali premi scambiati, ad istanti di tempo prefissati, tra A e C in un contratto di questo tipo sarà quindi pari a:

$$\begin{aligned} CDS_{premium}(t,T) &= E\left[\sum_{i=1}^{n} I(\tau > t_i) \cdot D(t,t_i) \cdot \Delta(i-1,i) \cdot CDS_{fee}\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} S(t,t_i) \cdot D(t,t_i) \cdot \Delta(i-1,i) \cdot CDS_{fee}\,, \end{aligned} \tag{23}$$

dove $\Delta(i-1,i)$ rappresenta la frazione anno che intercorre tra il pagamento di due cedole.

Avremo quindi che il valore della *default leg* sarà pari all'integrale di tutti i possibili istanti di tempo di default:

$$CDS_{default}(t,T) = -E^{Q}\left[(1-\bar{\delta})\cdot D(t,\tau)\cdot I(\tau<T)\right] = (1-\bar{\delta})\int_{t}^{T} D(t,u)\cdot dS(t,u)\,, \tag{24}$$

Per un valore totale di un contratto CDS:

$$CDS = CDS_{premium}(t,T) + CDS_{default}(t,T)\,. \tag{25}$$

Definite quindi le grandezze relative a questo genere di derivati possiamo ricavare un'ulteriore formula, ancora più compatta, che prevede la definizione del CVA come uno spread variabile nel tempo. Ripartendo dalla formula (23) e ipotizzando che l'*Expected Exposure* sia fisso nel tempo [6] e possa essere ben rappresentato dalla media nel tempo e quindi dalla quantità che abbiamo definito come EPE potremo facilmente ottenere:

$$CVA(t,T) = -(1-\bar{\delta})\cdot E^{Q}\left[\int_{t}^{T} D(t,u)\cdot dS(t,u)\right]\cdot EPE = CDS_{default}(t,T)\cdot EPE\,. \tag{26}$$

Attraverso semplici passaggi si può dedurre che:

$$\frac{CVA(t,T)}{CDS_{premium}(t,T)} = \frac{CDS_{default}(t,T)}{CDS_{premium}(t,T)}\cdot EPE = spread_{CDS}\cdot EPE\,. \tag{27}$$

Tale formula rappresenta un'approssimazione accurata qualora l'ipotesi di EE costante nel tempo, effettuata in precedenza, sia rispettata.

La formula appena ricavata ci permetterà di ottenere rapidamente il valore del CVA per un eventuale nuovo prodotto derivato mediante la conoscenza di soli due parametri.

[6] Tale ipotesi prevede quindi di sostituire l'EE con un valore di EPE fisso nel tempo e tale che $EPE = \frac{\int_t^T EE(s,T)ds}{T-t} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} EE(t,t_i)$; come si vedrà anche negli esempi al capitolo 6.1 l'EE risulta avere quasi sempre un profilo simmetrico e qualora si considerino prodotti a breve durata l'ipotesi di prenderne il valore atteso risulta consona.

Ad esempio qualora alla banca servisse una rapida stima del *Credit Value Adjustment* legato ad un contratto swap da inserire all'interno di un portafoglio con una determinata controparte il cui spread si attesta attorno ai 350 basis point. Dopo una prima analisi risulterebbe un *Expected Potential Exposure* legato a questo contratto del 7,5%. Per mezzo della formula otterremo che

$$CVA_{swap} = 350\, bps \cdot 7,5\% = 26,25\, bps$$

La banca invece di pagare il prezzo pieno per entrare nello swap potrebbe avvalersi di uno sconto di 26,25 bps in virtù del rischio legato al possibile fallimento futuro della controparte prima della maturity.

D'ora in avanti non basterà più calcolare semplicemente il prezzo effettivo di un prodotto, ma saranno necessarie valutazioni ulteriori affinché a tale prezzo possa essere applicato un correttivo che consideri la possibilità del rischio di controparte.

4.2 Estensioni del modello di calcolo del CVA: introduzione di tecniche di netting e collateralization

Le formule così ricavate sono delle buone approssimazioni per il calcolo di CVA per singoli prodotti presenti sul mercato; qualora però volessimo estendere l'analisi non più a singoli contratti ma ad interi portafogli di prodotti derivati che rispettino caratteristiche ed ipotesi viste in precedenza dovremmo effettuare un'analisi più accurata e complessa del CVA.

Spesso l'introduzione di un nuovo prodotto all'interno di un portafoglio già oggetto di un contratto esistente può risultare vantaggioso in termini di riduzione dell'exposure grazie alle tecniche già presentate come *netting* e *collateralization* che permettono di ridurre l'esposizione totale [PR10, DS11].

Può essere quindi condotta una valutazione complessiva del portafoglio prima e dopo l'inserimento del il nuovo prodotto, mediante lo studio della grandezza *incremental CVA* che corrisponde alla variazione del CVA stesso nelle due differenti situazioni.

$$\Delta CVA \approx -(1-\bar{\delta})\cdot \sum_{i=1}^{m} D(t,t_i) \cdot \Delta EE(t,t_i) \cdot [S(t,t_{i-1}) - S(t,t_i)]\ . \tag{28}$$

Il differenziale di CVA così ottenuto rappresenta quindi proprio il valore del nuovo prodotto in esame.

L'espressione (28) è molto semplice da calcolare in quanto prevede lo studio della sola variazione dell'*Expected Exposure*, nei vari istanti di tempo, prima e dopo l'inserimento del nuovo derivato. Ovviamente l'*incremental CVA* non potrà essere mai maggiore rispetto al CVA di partenza perchè ciò comporterebbe un aumento del rischio di controparte legato al portafoglio e quindi sarebbe contrario alla ratio dell'utilizzo della tecnica di *netting* come mezzo di riduzione del rischio e potrebbe perfino risultare controproducente.

Nella valutazione del CVA di un portafoglio, sottoposto a *netting* o *margining*, i vari contributi che derivano dalle sue singole componenti non possono essere ricavati in maniera lineare con una semplice sottrazione. È stato pertanto necessario introdurre degli *additive CVA contributions* affichè si potesse effettuare un'analisi più dettagliata di ogni singola parte. Esiste così un secondo livello analitico che risulta essere ovviamente più laborioso ma più preciso: per estrapolare l'impatto effettivo di ogni singolo derivato all'interno di un portafoglio sarà necessario ricavare il *marginal CVA*. Tale valore dà alla banca un quadro chiaro di quanto ogni singolo derivato impatti sull'effettivo valore del CVA rispetto ad una singola controparte.

Come si evince dalla formula del CVA vista in precedenza vediamo che tale grandezza dipende direttamente dall'EE e quindi la somma dei diversi contributi, contratto per contratto, ci darà il valore totale.
Sostituendo quindi l'EE con il *marginal* EE definito dalla somma delle esposizioni su un piccolo insieme di prodotti

$$EE_{Marginal} = \sum_{k=1}^{m} EE_k \,, \tag{29}$$

saremo in grado di calcolare il marginal CVA e recuperare informazioni più precise circa il singolo *netting set*[7] di prodotti.

[7]Un netting set è l'insieme di tutti quei prodotti derivati tali che sono stati aggregati, di comune accordo con un'unica controparte, per cercare di ridurre l'esposizione totale del portafoglio

4.3 Estensioni del modello di calcolo del CVA: Bilateral Credit Value Adjustment

Fino ad ora abbiamo calcolato il valore del CVA dal punto di vista ipotetico ed unilaterale da parte di una banca o un istituto con rating elevato esposto nei confronti di una controparte avente rating peggiore e quindi più esposta al rischio di default.

Dal momento che la crisi mondiale del 2008 ha reso impraticabile il concetto di *risk-free* è necessario introdurre una nuova unità di misura che tenga in considerazione il concetto di bilateralità: il *Bilateral Credit Value Adjustment* (BCVA). Tale misura non sarà concettualmente diversa dal CVA calcolato in precedenza.

Quanto segue riprende la trattazione di base esposta da [BC09]. Si definiscano τ_I l'eventuale istante di default dell'istituto, τ_C quello della rispettiva controparte e $\tau^{first} = min(\tau_I, \tau_C)$ l'istante in cui avviene il primo default tra le due differenti parti, ipotizzando che non possano essere simultanei.

Avremo quindi che, se $\tau^{first} > T$, ne l'istituto ne la rispettiva controparte saranno fallite durante al vita del contratto ed i pagamenti ad esso legati verranno portati a termine correttamente. Qualora invece $\tau^{first} \leq T$, una delle due parti, o entrambe, saranno fallite prima della scadenza del contratto. Se $\tau^{first} = \tau_I$ e $NPV < 0$ la controparte riceverà solamente una frazione del totale dovutole dall'istituto, mentre sarà costretta a pagare l'intero quantitativo qualora $NPV > 0$.[8] In caso contrario in cui la prima a fallire sia la controparte e quindi $\tau^{first} = \tau_C$ il flusso di pagamenti dovuti sarà l'opposto (in linea con quanto visto nel Capitolo 4.2 per il CVA unilaterale) e quindi se $NPV < 0$ l'istituto dovrà pagare l'intero NPV alla controparte, mentre in situazione di *NPV* positivo verrà versata ad esso solo una frazione di *recovery*.

Come visto in precedenza possiamo definire il NPV di un contratto *risk-free* come $NPV(\tau_x) = E[V(\tau_x, T)]$ dove $x = I$, C come il valore residuo del contratto tra l'istante di default, di una delle due parti, e la scadenza del contratto.

Secondo quanto elaborato in precedenza per l'*unilateral* CVA saremo ora in grado di calcolare l'entità del rischio di un ipotetico portafoglio:

$$\begin{gathered}\widetilde{V}(t,T) = I(\tau^{first} \geq T) \cdot V(t,T) + \\ + I(\tau_C \leq min(\tau_I, T)) \cdot \{V(t,\tau_I) + D(t,\tau_I)\,(-\delta_I \cdot [-NPV(\tau_I)^+] + NPV(\tau_I)^+)\} + \\ + I(\tau_I \leq min(\tau_C, T)) \cdot \{V(t,\tau_C) + D(t,\tau_C)\,(\delta_C \cdot [NPV(\tau_C)^+] - [-NPV(\tau_I)^+])\}\end{gathered} \tag{30}$$

[8] L'intera trattazione viene fatta dal punto di vista dell'istituto

Proposizione 4.2. (*General bilateral counterparty risk pricing formula*) *Nell'istante t, tale che il default non sia ancora avvenuto, il prezzo di un portafoglio che includa la possibilità di rischio bilaterale di controparte sarà dato da*:

$$\begin{gathered} E_t\left[\widetilde{V}(t,T)\right] = E_t\left[V(t,T)\right] + \\ +E_t\left[(1-\delta_I)\cdot I(\tau_C \leq min(\tau_I,T))\cdot D(t,\tau_I)\cdot(-NPV(\tau_I))^+\right] + \\ -E_t\left[(1-\delta_C)\cdot I(\tau_I \leq min(\tau_C,T))\cdot D(t,\tau_C)\cdot(NPV(\tau_C))^+\right] \end{gathered} \tag{31}$$

Dimostrazione 4.2. Si veda Appendice B.

Come si può notare dalla formula nella proposizione il valore di un prodotto che includa il rischio di controparte può essere visto come la somma di tre differenti prodotti:

- il suo corrispettivo *risk-free*,
- un'opzione Put, con strike nullo, sul NPV residuo ipotizzando che l'istituto fallirà prima rispetto alla rispettiva controparte,
- un'opzione Call, con strike nullo, sul NPV residuo ipotizzando che invece sarà la controparte a fallire prima rispetto all'istituto.

Tale fattore correttivo è chiamato BCVA e definisce il valore del CVA dal punto di vista dell'istituto

$$\begin{gathered} BCVA = E_t\left[(1-\delta_I)\cdot I(\tau_C \leq min(\tau_I,T))\cdot D(t,\tau_I)\cdot(-NPV(\tau_I))^+\right] + \\ -E_t\left[(1-\delta_C)\cdot I(\tau_I \leq min(\tau_C,T))\cdot D(t,\tau_C)\cdot(NPV(\tau_C))^+\right], \end{gathered} \tag{32}$$

e potrà essere positivo o negativo a seconda del differenziale di qualità creditizia tra le due parti. Rispetto alla versione unilaterale quella bilaterale ha il vantaggio di essere simmetrica e quindi sia che si analizzi il problema dal punto di vista dell'istituto che da quello della controparte il valore è il medesimo.

Così come ricavato in precedenza, esiste una versione discreta della misura appena ricavata ed essa dipende dalla differenza delle esposizioni legate ai due profili delle parti coinvolte:

$$\begin{aligned} BCVA(t,T) \approx +(1-\bar{\delta})\cdot \sum_{i=1}^{m} D(t_i)\cdot EE(t,t_i)\cdot S_I(t,t_{i-1})\cdot q(t_i,t_{i-1})+ \\ -(1-\bar{\delta}_I)\cdot \sum_{i=1}^{m} D(t_i)\cdot NEE(t_i)\cdot S(t_{i-1})\cdot q_I(t_i,t_{i-1})\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Possiamo notare che il primo termine dell'espressione è identico al valore del CVA unilaterale con un fattore moltiplicativo definente la probabilità di default dell'istituto; il secondo termine, conosciuto anche come *Debt Valuation Adjustment* (DVA), è negativo e rappresenta la possibilità che, in caso di default dell'istituto prima che si verifichi questa eventualità anche per la controparte, quest'ultima avrà un guadagno qualora il MtM sia negativo ossia abbia un'esposizione negativa.

Come visto in precedenza per il CVA, ora possiamo pensare al BCVA come fosse uno spread; avremo un doppio fattore legato sia al premio derivante da entrambi i rating :

$$\begin{aligned} \frac{BCVA(t,T)}{CDS_{premium}(t,T)} = spread_{conterp}\cdot EPE - spread_{istitution}\cdot ENE = \\ = \frac{CVA(t,T)}{CDS_{premium}(t,T)} - spread_{istitution}\cdot ENE\,. \end{aligned} \tag{34}$$

4.4 Wrong-way risk ed impatto su CVA

Dal CVA vengono generate due differenti *exposure*: la prima relativa ai movimenti del mercato e dei suoi fattori di rischio e la seconda legata alla curva di spread della controparte.

Fino ad ora abbiamo calcolato tutte le grandezze necessarie (come ad esempio EE, ENE, PFE) valutandole ad un livello generale di scenari totali possibili: ad esempio l'asserzione "il PFE con un livello di confidenza del 90% per un prodotto è X" significa che nel 90% degli scenari possibili rischiosi l'esposizione per tale prodotto fosse al più minore di X.

Introduciamo ora il concetto di *"at default"* e vediamo come cambia l'affermazione fatta in precedenza: l'espressione "il PFE con un livello di confidenza del 90%, a default, per un prodotto è X" significa che nel 90% dei possibili scenari futuri in cui avviene il default della controparte, la nostra esposizione sarà inferiore ad X.

Le formule ricavate fino ad ora non coglievano la possibile dipendenza tra probabilità di default di una controparte e l'esposizione creata da un possibile contratto con la stessa. E' quindi necessario introdurre un modello matematico che permettesse di tenere in considerazione la correlazione di questi due fattori: la dipendenza positiva prende il nome di *wrong-way risk*: qualora la probabilità di default della controparte aumenti, anche l'esposizione nei confronti della stessa subirebbe una crescita. La situazione inversa, ossia una correlazione negativa, prende il nome di *right-way risk [PZ07].*

Come è facilmente intuibile la valutazione di tali fattori non è immediata ed inoltre varia a seconda della controparte e del prodotto considerati.[9]

Indichiamo due esempi piuttosto semplici, e di enorme contemporaneità, per meglio comprendere cosa sia il *wrong-way risk* sono i seguenti:

- un istituto vende ad una banca un derivato di protezione sul credito legato alla curva degli spread delle parti coinvolte; quando questa è alta anche il valore della protezione sarà elevato. Di conseguenza la banca sarà fortemente esposta verso l'istituto che, a sua volta, vedrà crescere la propria probabilità di default.

- un istituto acquista un'opzione Put sul sottostante della rispettiva controparte; affinché tale opzione abbia valore positivo lo stock, su cui è calcolata, dovrebbe scendere sotto lo *Strike price*: questo implica che le performance legate alla società venditrice stanno però peggiorando e quindi la probabilità di default è più alta. Di conseguenza l'esposizione dell'istituto nei confronti di tale controparte sarà direttamente proporzionale al valore della Put e tale sarà la sua probabilità di default.

[9]Come hanno illustrato [SL11] molto spesso, per effettuare una prima analisi circa l'impatto di tali fattori sul valore del derivato, si deve ricorrere a dati storici e serie storiche dei prezzi per poter effettuare e studiare la possibile correlazione esistente.

Come spiegato da [IRB] esistono due tipologie di *Wrong-way risk*: *specific* e *general*.
La prima si riferisce ad una dipendenza diretta tra l'evento default ed il valore della transazione. Nel caso della Put l'opzione, strutturata direttamente sullo stock della controparte, in caso di default della stessa, vedrà il proprio valore stabilizzarsi sull'intero nozionale dell'opzione stessa.

Nel caso di *general Wrong-way risk* la dipendenza non sarà invece diretta, ma legata ad altri fattori di mercato che ne impattano e determinano il valore: l'opzione Put in questo caso vedrà come sottostante non più il titolo stock della controparte ma un asset legato fortemente a quello di quest'ultima.

Nel caso di *specific risk* non avremo necessità di sviluppare ulteriori modelli di calcolo del CVA dal momento che tutte le grandezze che lo compongono incorporano già il rischio di default annesso. Per quanto riguarda il *general risk*, invece, tali considerazioni non possono essere fatte in quanto il valore dell'esposizione soggetta a default, data la sua natura stocastica, non è facilmente calcolabile.

Nel Capitolo 5 ci concentreremo sullo *specific risk* riportandone un esempio di utilizzo legato ad opzioni *plain vanilla* europee.

5 Calcolo di CVA per alcuni prodotti OTC

All'interno di questo capitolo verranno presentati differenti prodotti OTC e applicate le tecniche di calcolo di CVA ed *expoure* viste in precedenza. Nello specifico il capitolo sarà organizzato come segue:

Capitolo 5.1: introduzione alle opzioni *plain vanilla* europee (Call e Put); verrà calcolato il valore *risk-free* secondo la classica formula di Black&Scholes e poi ricavato anche il valore rischioso attraverso metodologia *semi-analytical*. Inoltre si effettuerà un'analisi riguardante l'impatto del *Wrong-way risk* sul prezzo di entrambi i prodotti.

Capitolo 5.2: introduzione ai prodotti Interest Rate Swap (IRS) e alle Swaption (Swap-Option). Si condurrà in primis un'analisi sull'esposizione legata all'IRS calcolandone EE e PFE; grazie ai valori ricavati in precedenza verrà poi calcolato il CVA mediante Simulazioni Montecarlo e attraverso un approccio *semi-analytical* sfruttante la teoria di *pricing* della Swaption. Infine verrà condotta una breve analisi sulla bontà, vantaggi e svantaggi dei due differenti modelli.

Capitolo 5.3: introduzione ad un Credit Default Swap (CDS) e calcolo del CVA mediante formula diretta[10] e mediante approssimazione di Hull-White. Si condurrà inoltre inoltre un'analisi di mercato sull'impatto del rischio di controparte per contratti CDS reali relativi ai maggiori paesi europei.

[10] In linea con le formule ricavate nel Capitolo 4

5.1 Opzioni plain vanilla Europee

Definizione 1. *Un Opzione (Put) Call è un contratto che concede all'acquirente il diritto, ma non l'obbligo, di (vendere) acquistare ad un prezzo prefissato (Strike Price) e ad un scadenza (Maturity) un particolare Asset finanziario.*

Per valutare un opzione Europea mediante il modello presentato da [BS73] saranno necessarie alcune ipotesi sul mercato:

- sia esclusa la possibilità di avere arbitraggi non rischiosi;
- il mercato risulti essere perfetto[11];
- esistano prodotti ZCB *risk-free* a qualsiasi scadenza;
- la struttura dei tassi sia deterministica e flat a livello d'intensità istantanea d'interesse r .

Per quanto riguarda invece la modellazione dell'evoluzione del sottostante avremo che:

- il prezzo del titolo sottostante S evolva secondo un modello Browniano geometrico;
- il sottostante non paghi dividendi;
- tale modello abbia costanti sia la componente di drift che la volatilità.

Il payoff a scadenza di un'opzione plain vanilla Europea sarà quindi calcolabile come: $\Phi = max(S-K)^+$ per quanto riguarda l'opzione Call e di conseguenza $\Phi = max(K-S)^+$ per quanto riguarda l'opzione Put.

[11] Un mercato perfetto e autoregolantesi è un mercato aperto a tutti i potenziali compratori e venditori e nel quale ogni singolo individuo può determinare i termini di scambio. I prezzi relativi delle merci tendono a regolare questo flusso e tutti i fattori di produzione mostrano la tendenza ad essere remunerati nella stessa misura su tutto il mercato. Inoltre non esistono costi di transazione e sono consentite le vendite allo scoperto dei titoli.

5.1.1 Introduzione al prodotto e alla sua dinamica *risk-free*

Sia S l'asset di riferimento per la nostra analisi, tale che evolva secondo il seguente modello di Wiener:

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW\,, \tag{35}$$

dove dW è una variabile aleatoria presa da una distribuzione normale a media zero e varianza dt.
Avremo quindi che la dinamica del sottostante sarà lognormale[12].

Con l'usuale notazione indichiamo con C_t il valore di un'opzione plain vanilla Call Europea all'istante t tale che abbia payoff $C_T = max(S_T - K)^+$ e con P_t quello di una Put Europea con payoff[13] $P_T = max(K - S_T)^+$.

La dinamica di C_t è definita da un processo a traiettorie continue

$$dC_t = a(S_t,t) \cdot dt + b(S_t,t) \cdot dW\,, \tag{36}$$

e, attraverso il lemma di Ito, possiamo definire i coefficienti di drift a

$$a(S_t,t) = \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\,, \tag{37}$$

e diffusione b

$$b(S_t,t) = \sigma S \frac{\partial C}{\partial S}\,. \tag{38}$$

Si definisca ora un portafoglio Π composto solamente da due prodotti:

1. un'opzione *plain vanilla* europea calcolata sullo Stock S (acquistata)
2. un quantitativo Δ dello stesso Asset S (venduto)

ottenendo quindi un portafoglio così composto: $\Pi = C + \Delta S$ la cui forma differenziale, nonchè variazione nel corso del tempo, è definita come:

$$d\Pi = dC - \Delta dS = [a(S_t,t) + \Delta\mu S] \cdot dt + [b(S_t,t) + \Delta\sigma S] \cdot dW\,. \tag{39}$$

[12]Avremo quindi che $log\frac{S_{t+\varepsilon}}{S_t} \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\varepsilon, \sigma^2\varepsilon\right)$; per verificare tale affermazione basterà applicare il lemma di Ito, derivando la dinamica $Y = f(S,t) = log(S)$

[13]Avendo che K indica lo *strike price* mentre S_T è il valore del sottostante asset finanziario a scadenza

Mediante le serie di Taylor saremo in grado di riscrivere dC approssimandolo nella seguente maniera:

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial C}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\Delta t + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial t}\Delta S \Delta t + ... \tag{40}$$

Per come è stato definito il processo in precedenza varranno le seguenti considerazioni:

1. $\Delta t \to 0$,
2. $(\Delta S)^2 \to (\sigma \cdot S)^2 \cdot dt$,

dando la possibilità di riscrivere la formula del derivato C come:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(\sigma \cdot S)^2 dt\,, \tag{41}$$

quindi inserendo tale valore all'interno di (43) otterremo:

$$d\Pi = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(\sigma \cdot S)^2 dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS - \Delta dS\,. \tag{42}$$

La formula riportata in precedenza definisce quindi l'evoluzione differenziale del portafoglio preso in considerazione; tale equazione presenta i primi due termini che evolvono secondo il fattore deterministico dt e gli altri due invece secondo il fattore stocastico dS. Qualora scegliessimo che il quantitativo di stock iniziale Δ^* fosse pari a $-\frac{\partial C}{\partial S} = -\frac{1}{S}\frac{b}{\sigma}$ otterremmo che l'evoluzione del portafoglio sarà solamente data da un termine di drift deterministico in dt.[14]

Per tale valore di Δ si ha che $\Pi^* = C_t + \Delta^* S_t$ con $d\Pi^* = [a(S_t, t) + \Delta \mu S] \cdot dt$. Il portafoglio è quindi istantaneamente non rischioso e onde evitare arbitraggi privi di rischio, il suo rendimento deve coincidere con il rendimento ottenuto da un bond *risk-free*; deve quindi essere tale che:

$$d\Pi^* = r \cdot \Pi \cdot dt\,. \tag{43}$$

[14]Tale strategia viene chiamata Delta-Hedging e prevede di ridurre il rischio associato ai movimenti del prezzo del titolo mediante l'acquisto di un quantitativo iniziale pari proprio alla variazione $\frac{\partial P}{\partial S}$

Sostituendo avremo quindi che

$$[a(S_t,t)+\Delta^*\mu S]\cdot dt = \cdot [C_t+\Delta^* S]\cdot r\cdot dt\,, \tag{44}$$

$$a(S_t,t)-\frac{b}{\sigma}\mu = r\cdot C - r\cdot\frac{b}{\sigma}\,, \tag{45}$$

$$a(S_t,t)-b(S_t,t)\frac{\mu-r}{\sigma} = r\cdot C\,. \tag{46}$$

Inserendo i valori definiti in (37) e (38) dentro la precedente formula si otterrà :

$$\frac{\partial C}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(\sigma\cdot S)^2\,dt+rS\frac{\partial C}{\partial S}=rC\,. \tag{47}$$

La risoluzione di tale equazione differenziale deterministica alle derivate parziali con condizione iniziale definita da $\Phi = max(S_T-K)^+$, sarà equivalente al calcolo del prezzo di un'opzione *plain vanilla* europea. Avremo quindi che, come ricavarono [BS73], il prezzo di una Call europea e di una Put europea sarà:

$$C(S_t,t)=S_t\cdot N(d_1)-K\cdot exp\{-r\cdot(T-t)\}\cdot N(d_2)\,, \tag{48}$$

$$P(S_t,t)=K\cdot exp\{-r\cdot(T-t)\}\cdot N(-d_2)-S_t\cdot N(-d_1)\,, \tag{49}$$

dove :

$$d_1=\frac{ln(\frac{S_t}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})\cdot(T-t)}{\sigma\cdot\sqrt{T-t}} \qquad d_2=d_1-\sigma\cdot\sqrt{T-t}\,. \tag{50}$$

5.1.2 Introduzione del rischio di controparte e *wrong-way risk*

I contratti Equity sono una classe di derivati il cui valore dipende direttamente dall'andamento del sottostante su cui vengono costruiti. Andremo ad analizzare ed a prendere in considerazione due semplici opzioni Call e Put esaminando come il rischio di controparte possa influenzarne il valore ed in modo particolare come entra in gioco il *wrong-way risk* precedentemente introdotto.

Ricollegandoci alle formule introdotte nel capitolo 5.1.1 ricordiamo che l'andamento del titolo sottostante può essere modellato seguendo un moto Browniano geometrico (W_t) :

$$dS_t=\mu dt+\sigma dW_t\,.$$

Introduciamo ora la possibilità che ad un certo istante temporale τ avvenga il default della controparte con cui l'opzione era stata stipulata, e che quindi il MtM del sottostante in tale istante sia:

$$S(\tau) = \mu(\tau - t) + \sigma\sqrt{\tau - t} \cdot Z_1, \tag{51}$$

dove Z_1 rappresenta una variabile aleatoria Gaussiana.
La *Survival probability*, ossia la probabilità che il soggetto in questione non fallisca tra l'istante 0 e un istante t sarà data da:

$$S(0,t) = exp\{-H \cdot t\}, \tag{52}$$

dove H definisce l'*Hazard rate*; di conseguenza, la probabilità di default nel periodo considerato sarà pari a:

$$PD(0,t) = 1 - S(0,t). \tag{53}$$

L'istante di default τ sarà quindi esprimibile come: $\tau = S^{-1}(1 - \Phi(Z_2))$, dove Z_2 rappresenta un'altra variabile aleatoria Gaussiana correlata con quella che guida l'andamento del sottostante dalla seguente relazione:

$$Z_1 = \rho Z_2 + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \xi, \tag{54}$$

con $\xi \sim N(0,1)$.

Seguendo quanto riportato in [G10] saremo quindi in grado di calcolare il valore delle opzioni Call e Put europee secondo il modello di Black&Scholes tenendo conto dell'impatto del rischio di controparte e quindi del possibile default dell'istituto legato all'andamento dell'asset S:

$$Call_{risky} = e^{-rT}\left(S \cdot e^{rT} \cdot A - K \cdot B\right), \tag{55}$$

$$Put_{risky} = e^{-rT}\left(K \cdot C - S \cdot e^{rT} \cdot D\right), \tag{56}$$

dove:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Phi\left[\frac{\sqrt{\rho}\cdot s + \sigma\sqrt{T} + d_2}{\sqrt{1-\rho}} \right] \cdot \Phi\left[\frac{\sqrt{\rho}\cdot s + \rho\sigma\sqrt{T} - \Phi^{-1}(1-S(T))}{\sqrt{1-\rho}} \right] \right\} \cdot \varphi(s)\cdot ds, \tag{57}$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Phi\left[\frac{\sqrt{\rho}\cdot s + d_2}{\sqrt{1-\rho}} \right] \cdot \Phi\left[\frac{\sqrt{\rho}\cdot s - \Phi^{-1}(1-S(T))}{\sqrt{1-\rho}} \right] \right\} \cdot \varphi(s)\cdot ds, \tag{58}$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Phi\left[-\frac{\sqrt{\rho}\cdot s + \sigma\sqrt{T} + d_2}{\sqrt{1-\rho}} \right] \cdot \Phi\left[\frac{\sqrt{\rho}\cdot s + \rho\sigma\sqrt{T} - \Phi^{-1}(1-S(T))}{\sqrt{1-\rho}} \right] \right\} \cdot \varphi(s)\cdot ds, \tag{59}$$

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Phi\left[-\frac{\sqrt{\rho}\cdot s + d_2}{\sqrt{1-\rho}} \right] \cdot \Phi\left[\frac{\sqrt{\rho}\cdot s - \Phi^{-1}(1-S(T))}{\sqrt{1-\rho}} \right] \right\} \cdot \varphi(s)\cdot ds. \tag{60}$$

Facciamo ora una serie di considerazioni sulle formule appena ricavate: qualora non avvenga default della controparte prima della maturity della nostra opzione e quindi la probabilità annessa sia di valore unitario e qualora la correlazione fra la variabile aleatoria Gaussiana guidante l'andamento del titolo (Z_1) e quella guidante l'istante di default (Z_2) sia nulla ($\rho = 0$), otterremo $A = \sigma\sqrt{T} + d_2$ e $B = +d_2$ per quanto riguarda l'opzione Call e $C = \sigma\sqrt{T} - d_2$ e $B = -d_2$ per l'opzione Put. In questa modo torneremo ad avere la formula *risk-free* calcolata in precedenza.

Definiamo le caratteristiche dell'opzione come in Tabella 3 ottenendo attraverso le formule (48) e (49) i prezzi *risk-free* per Call e Put come in Tabella 4[15].

[15]Il valore dello *Strike price* è stato scelto in maniera tale che l'opzione fosse "*at the money forward*" ossia tale che $K = S_0 \cdot e^{rT}$

Tabella 3: Parametri dell'opzione plain vanilla Europea

S_0	100
K	105.1
r	5%
σ	25%
T	1

Tabella 4: Prezzi opzioni Call e Put Europee *risk-free*

Opzione	Price
Call	9.9593
Put	9.9335

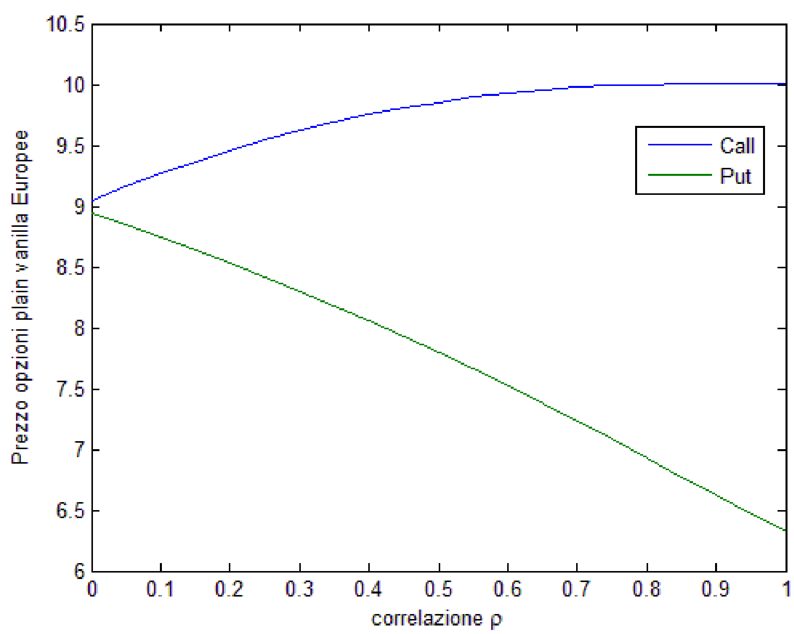
Con le medesime caratteristiche ed un *Hazard rate* (H) dell' 1% vediamo in Tabella 5 come si modificano i prezzi delle due opzioni al variare della correlazione ρ. Il prezzo di Call e Put, per come è stato scelto lo *strike price* sotto l'assunzione di assenza di correlazione, è lo stesso; il valore è ovviamente diverso dal prezzo *risk-free* ottenuto dal momento che il fattore di *Hazard*, indicante la probabilità di default della controparte come nella formula (53), è diverso da 0. Imponendo che tale valore sia nullo torneremo ad avere precisamente, per entrambe le opzioni, il prezzo *risk-free* di partenza.

Tabella 5: Prezzo Put e Call Europee in presenza di rischio di controparte

ρ	0%	10%	25%	50%	75%	100%
Call	9.0504	9.2691	9.5425	9.8541	9.9890	10.0022
Put	8.9410	8.7435	8.4182	7.7982	7.0815	6.3273

Come si evince dalle formule ed è rappresentato chiaramente in Figura 4 il valore della Call europea è direttamente proporzionale alla correlazione, mentre l'opzione Put è inversamente proporzionale. Quando aumenta la correlazione tra il valore dell'Asset e l'istante di default la probabilità che il fallimento avvenga prima della maturity sarà molto più bassa portando ad un aumento del prezzo dell'opzione Call: questo caso è un esempio piuttosto chiaro di che cosa sia il *right-way risk* e di come esso impatti sul *premium* da pagare per avere l'opzione.
Stesse considerazioni potranno essere fatte per quanto riguarda la Put: com'è facile prevedere qualora vi sia un'elevata correlazione fra il sottostante e il default della controparte, quando il valore dell'Asset decresce il prezzo dell'opzione tenderà a seguirlo di conseguenza. La decrescita dell'Asset di riferimento, però, implica che le prestazioni della società a cui esso appartiene siano in calo e quindi la probabilità che avvenga un default prima della scadenza dell'opzione sarà più alta (*wrong-way risk*).

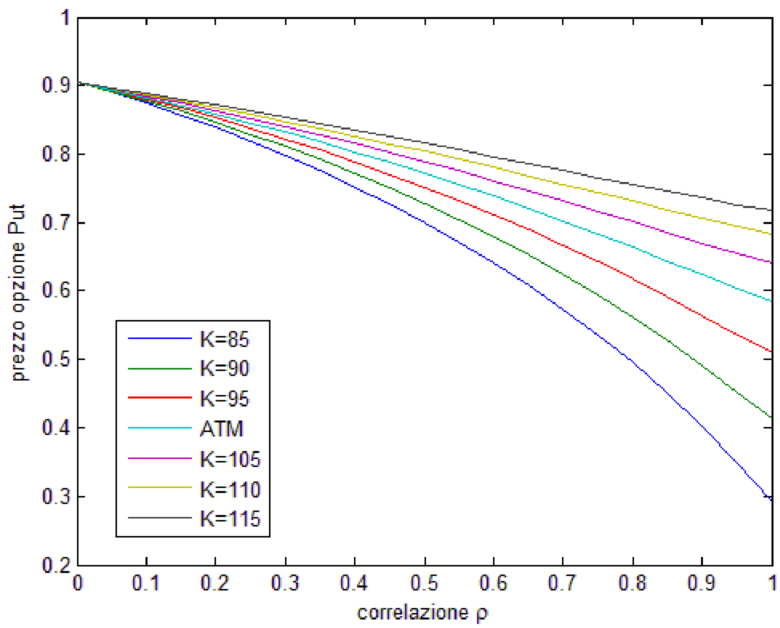
Figura 4: Prezzo opzione Europea in relazione alla correlazione ρ



Un'ulteriore considerazione che si evince immediatamente dalla Figura 4 è la magnitudine dell'impatto che *wrong&right-way risks* hanno sui prezzi dell'opzione: il primo porta ad un brusco abbassamento del prezzo di oltre il 30% rispetto al caso di non correlazione, mentre il *right-way risk*, impattante sul prezzo della Call, modifica il prezzo tra i due casi estremi solo del 10,5%.

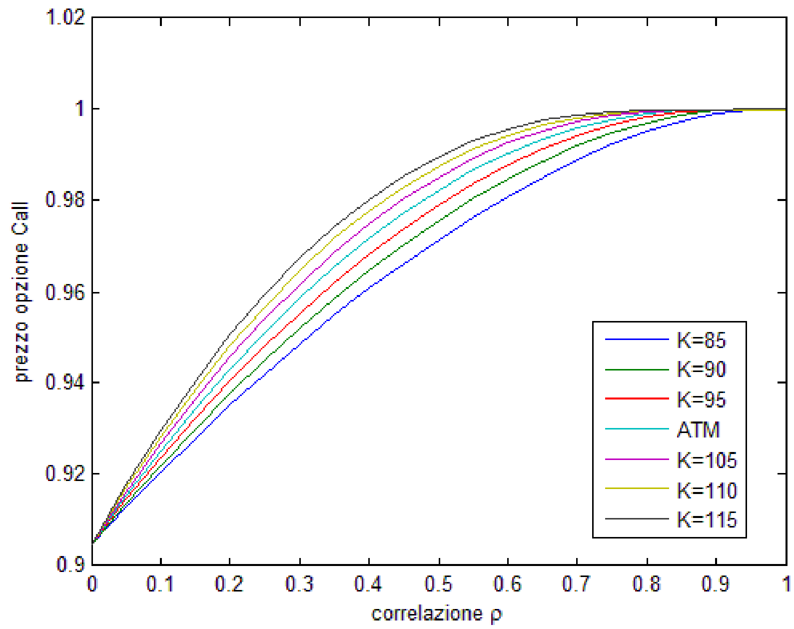
Uno studio interessante che è possibile sviluppare è la relazione che sussiste tra correlazione (ρ) e tasso rischioso definito dal rapporto tra il valore di un'opzione europea Put con e senza rischio di controparte al variare dello *strike price* K.

Figura 5: Prezzo di un'opzione Put Europea a differenti Strike Price in relazione alla correlazione



Osservando la Figura 5 notiamo che all'aumentare dello *strike price* il rapporto tra il valore *risk-free* e quello invece incorporante il fattore di rischio dovuto ad un possibile default risulta essere più elevato e quindi la presenza del *Wrong-way risk,* anche all'aumentare della correlazione, ha un impatto significativamente maggiore rispetto a quello di un prodotto con *strike* K più basso. Per opzioni Put fortemente *Out of the Money* il *wrong-way risk* cresce fortemente rispetto a prodotti che presentano *strike* più vicini al valore iniziale del sottostante.

Figura 6: Prezzo di un'opzione Call Europea a differenti Strike Price in relazione alla correlazione



Interessante è anche il caso di un'opzione Call europea come in Figura 6: possiamo notare che per tutti gli strike presentati quando la correlazione tende al 100% anche il rapporto tra il *risky premium* e il *risk-free premium* tende al 100%, portando ad un sostanziale annullamento della presenza del rischio di controparte e del *right-way risk*.

5.2 Interest Rate Swap

5.2.1 Introduzione e prezzo *risk-free* di un contratto IRS

Definizione 2. *Nella sua forma più semplice un contratto Interest Rate Swap (IRS) è un accordo che prevede lo scambio tra due parti di pagamenti legati ad un tasso fisso e ad un tasso variabile rispetto ad un nozionale prestabilito ma che non viene mai scambiato durante la vita del contratto. Gli scambi degli interessi maturati durante il singolo periodo avvengono a date prefissate che spesso sono definite in base al tasso variabile scelto come base del contratto, ma che possono anche essere stabilite ad intervalli differenti ed inoltre essere differenti per le due gambe.*

Dato un istante t, d'inizio del contratto, definiamo per semplicità scambi di pagamenti simultanei tra le due diverse gambe alle date T_i , $i = 1 : n$, tali che il periodo di intervallo sia costante e definito da δ_i (nel caso ad esempio di pagamenti semestrali sarà $\delta_i = 0.5$) e che abbia nozionale unitario.
Sia $Y(t, T_n)$ il tasso fisso valutato all'istante iniziale t nell'istante finale S_n e sia invece $L(T_{i-1}, T_i)$ il tasso variabile valutato tra due istanti di pagamento.
L'approccio classico di valutazione del prezzo del prodotto prevede di calcolare il *market value* delle due differenti gambe e, a seconda del fatto che sia un contratto *IRS-Payer* (la banca paga la gamba fissa alla rispettiva controparte e riceve la gamba float) o *IRS-Receiver* (la banca paga la gamba float e riceve la fissa), calcolare la differenza tra i due payoff.

Assumiamo che i pagamenti futuri associati ad ambedue le gambe siano scontanti sulla base della medesima *zero-coupon yield curve, e* ipotizziamo che tale curva evolva secondo il modello ad un fattore di Vasicek e quindi sia modellizzabile mediante la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dr_t = a \cdot (b - r_t)dt + \sigma dW_t \, . \tag{61}$$

Tale modello è definito *mean-reverting* in quanto prevede il ritorno verso un valor medio del tasso: se i tassi sono sotto tale valore tenderanno a risalire mentre tenderanno a scendere quando il coefficiente sarà sopra la media. Il coefficiente b viene definito come *"long term mean level"* e rappresenta il valore medio attorno al quale le traiettorie del tasso evolveranno; la velocità di aggiustamento con cui tali traiettorie tenderanno al valor medio è rappresentata dal parametro a. Il termine di diffusione sarà invece costituito dal solito processo di Wiener W_t e dalla volatilità istantanea σ del processo.

Per ricavare il prezzo di uno zero coupon bond $p(r_t,t,T)$ all'istante t e con scadenza T dovremo risolvere la seguente equazione:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+q(r_t,t)\frac{\partial p}{\partial r}-rp=0\,, \tag{62}$$

con condizione al bordo:

$$p(r_T,T,T)=1\,. \tag{63}$$

Dato che il modello di Vasicek appartiene alla categoria dei modelli affini, la soluzione della precedente equazione è tale che possa essere scritta nella seguente forma:

$$p(r_t,t,T)=exp\left\{A(t,T)-r\cdot B(t,T)\right\}\,. \tag{64}$$

Attraverso semplici passaggi matematici (sostituendo quest'ultima formula nella precedente equazione differenziale) si ricavano i seguenti valori:

$$B(t,T)=\frac{1-exp\left\{-a\cdot(T-t)\right\}}{a}\,, \tag{65}$$

$$A(t,T)=exp\left[(B(t,T)-(T-t))\cdot\left(\frac{a^2-\sigma^2/2}{a^2}\right)-\frac{\sigma^2\cdot B(t,T)^2}{4a}\right]\,. \tag{66}$$

Saremo quindi in grado di definire, piuttosto agevolmente, il *market value* della gamba fissa:

$$V^{(FX)}(t,T)=\sum_{n=1}^{N}\delta_i\cdot Y(t,T_N)\cdot p(t,T_n)\,, \tag{67}$$

mentre per quanto riguarda la gamba *float* possiamo ricorrere ad una semplice strategia d'investimento che permette di replicarne i *cash-flows* annessi.

Ipotizziamo che all'istante iniziale t un investitore venda uno *Zero-Coupon Bond*, con scadenza in T_N al valore nominale di 1€ e reinvesta il quantitativo ricavato dalla precedente vendita in un conto corrente bancario annuale strutturato sullo stesso tasso variabile dello swap: il *cash-flow* totale derivante da queste due operazioni sarà quindi pari ad $1-p(t,S_N)$.

Il Bond avrà quindi un *face-value* unitario e il deposito bancario invece renderà un tasso d'interesse $L(t,S_1)$ dove S_1 è la maturity annuale del contratto[16].

[16]Tale maturity, scelta per semplicità annuale, dovrà in realtà coincidere con la frequenza degli scambi relativi al tasso variabile

Avremo quindi che, dopo il primo anno, l'investitore riceverà $1+\delta_1 L(t,S_1)$ dato dal nozionale iniziale restituito e dall'interesse maturato durante questo periodo di tempo. L'investitore a questo punto può decidere di compiere lo stesso processo seguito in precedenza acquistando un deposito bancario ad un anno con medesime caratteristiche.

L'operazione può essere ripetuta un numero di volte pari agli istanti di tempo in cui verrebbero scambiate le cedole del contratto *IR Swap* ricevendo ad ogni istante di tempo l'interesse maturato dal conto deposito bancario $\delta_n L(S_{n-1},S_n)$ e reinvestendo il nozionale unitario in un nuovo contratto.
All'istante finale T_N il nominale non verrà più reinvestito in un nuovo contratto ma utilizzato per riacquistare il Bond venduto inizialmente.

Possiamo quindi notare che i *cash-flows* derivanti dalla precedente strategia, in assenza di arbitraggio, coincidono esattamente con quelli della gamba *float* del contratto swap: quindi all'istante iniziale t il *market value* della gamba a tasso variabile e quello della strategia d'investimento proposta sono i medesimi. Perciò il valore all'istante t della gamba fissa sarà:

$$V^{(FLT)}(t,T) = 1 - p(t,S_N) \tag{68}$$

ed il valore finale dello swap (ipotizzando che sia di natura *receiver*) sarà quindi identificato come differenza tra le due gambe:

$$V(t) = Notional \cdot \sum_{n=1}^{N} \delta_i \cdot Y(t,T_N) \cdot p(t,T_n) - 1 + p(t,S_N)\,. \tag{69}$$

5.2.2 Introduzione per un prodotto Swaption

Una Swaption sarà la combinazione di un'opzione e di uno swap sui tassi d'interesse.

Definizione 3. *Una Swaption (Swap Option) è un'opzione che permette all'acquirente di entrare in un contratto IR Swap ad una certa data futura (maturity) e ad un tasso prestabilito alla stipulazione del contratto. Colui che acquisterà questa opzione avrà quindi la possibilità, ma non l'obbligo, di decidere o meno di entrare in un contratto Swap con la rispettiva controparte pagando un tasso fisso o variabile a seconda delle caratteristiche del prodotto. Due sono le possibili tipologie di Swaption: payer, in cui l'acquirente qualora decidesse di esercitare l'opzione dovrà pagare la gamba a tasso fisso, oppure receiver, in cui l'acquirente paga la gamba a tasso variabile ricevendo quindi in cambio quella a tasso fisso.*

Seguendo il modello di [B76] possiamo quindi definire le caratteristiche di un contratto Swaption ottenendo una formula che ci permetta di prezzarlo.
Così come per un semplice IRS ipotizziamo che le date di pagamento delle due differenti gambe avvengano nei medesimi istanti temporali $t_1 < ... < t_N$ e che l'*expiry date* dell'opzione sia in $t_0 = \widetilde{T}$. Siano inoltre definite le seguenti grandezze:

- i_S che rappresenta lo *strike rate;*
- i_F che rappresenta il market swap rate alla maturity dell'opzione $\widetilde{T}$ (*forward swap rate*);
- σ_F che rappresenta la volatilità del *forward swap rate;*
- N che rappresenta il Nozionale.

Avremo quindi che il cashflow dovuto all'acquirente di una Swaption all'*expiry date* dell'opzione stessa T sarà pari a:

$$V(t) = Notional \cdot \sum_{n=1}^{N} e^{-r(t_n - \widetilde{T})} \cdot (i_F - i_S) \cdot (t_n - t_{n-1}) \ , \tag{70}$$

qualora la differenza tra i due tassi d'interesse sia ovviamente positiva (in caso contrario il valore sarà nullo dal momento che l'opzione non verrà esercitata).
Il valore ad oggi sarà dunque

$$V(t) = Notional \cdot e^{-rT} \sum_{n=1}^{N} e^{-(t_n - \widetilde{T})} \cdot (i_F - i_S) \cdot (t_n - t_{n-1}) \ ; \tag{71}$$

$$\begin{aligned} V(t) &= Notional \cdot e^{-rT} \sum_{n=1}^{N} e^{-r(t_n - \widetilde{T})} \cdot (i_F - i_S) \cdot (t_n - t_{n-1}) = \\ &= Notional \cdot \sum_{n=1}^{N} e^{-rt_n} \cdot (i_F - i_S) \cdot (t_n - t_{n-1}) \ . \end{aligned} \tag{72}$$

Avremo dunque che il valore di un singolo *coupon* tra due istanti temporali t_{n-1} e t_n corrisponderà al prezzo attuale di un'Opzione europea con scadenza in t_n:

$$V(0) = Notional \cdot e^{-r \cdot t_n} \cdot (t_n - t_{n-1}) \left[i_F \cdot N(d_1) - i_S \cdot N(d_2) \right] , \qquad (73)$$

dove

$$d_1 = \frac{ln(\frac{i_F}{i_S}) + \frac{\sigma_F^2}{2}) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \quad , \ d_2 = d_1 - \sigma_F \cdot \sqrt{T} \, . \qquad (74)$$

Quindi il valore di una payer Swaption sarà definito dalla somma delle singole componenti :

$$V_{swaption}(0) = Notional \cdot \sum_{n=1}^{N} e^{-rt_n} \cdot (t_n - t_{n-1}) \left[i_F \cdot N(d_1) - i_S . N(d_2) \right] . \qquad (75)$$

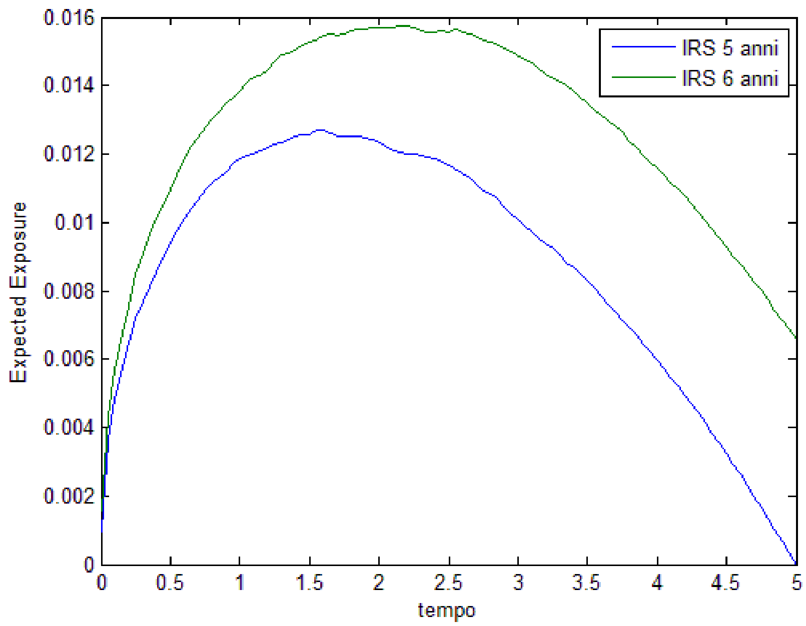
5.2.3 Calcolo dell'Expected Exposure e Potential Future Exposure

Date le formule presentate in precedenza per il calcolo del valore *risk-free* di un contratto Interest Rate Swap prendiamo due prodotti con maturity a 5 ed a 6 anni. Definiamo inoltre una griglia temporale con intervalli $\delta_n = 0.05$ e un numero di simulazioni Montecarlo pari a 10.000. Nella Tabella 6 sono riportate le caratteristiche per l'evoluzione della *yield-curve*.

Tabella 6: Parametri del modello *mean-reverting* di Vasicek

Fattore	Valore
Velocità della mean reversion (a)	10%
Equilibrio (b)	5%
Volatilità (σ)	1%

Figura 7: Expected Exposure per un IR Swap con maturity a 5 e 6 anni



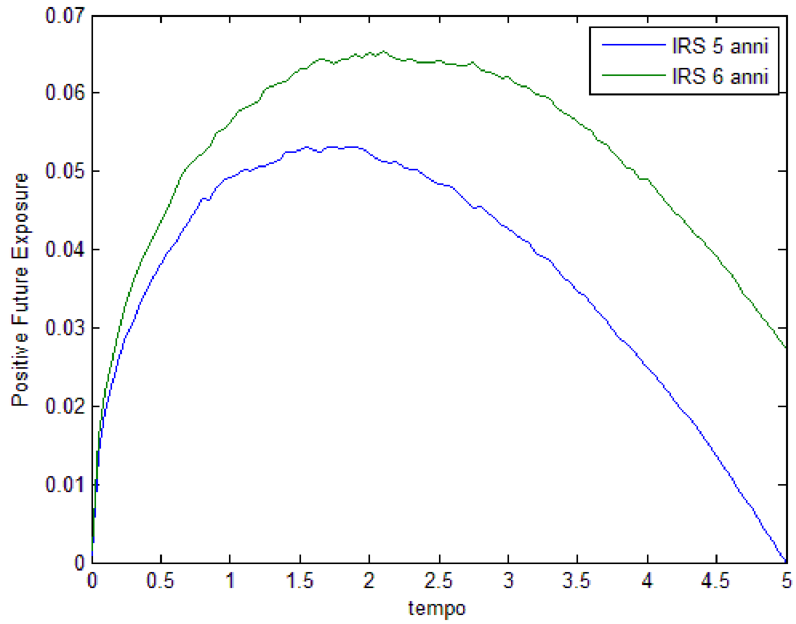
Mediante le formule (65) e (66) saremo quindi in grado di calcolare i valori dei parametri $A(t,T)$ e $B(t,T)$ in ogni istante di tempo della nostra griglia. Il valore all'istante iniziale del tasso è stato fissato a 5%, quindi in linea con il valore di riferimento d'equilibrio; attraverso (64) si può facilmente calcolare l'evoluzione del tasso per ogni istante temporale ed il valore dello Zero Coupon Bond $p(r_t,t,T)$.

Siamo quindi in grado di ricavare il valore delle due differenti gambe ad ogni punto della griglia temporale e, trattandosi di un *IR Swap Receiver*, anche il MtM totale del prodotto in esame.

Tabella 7: Expected Exposure per un IRS

tempo (anni)	IRS_5Y	IRS_6Y
1	1.19%	1.42%
2	1.28%	1.57%
3	1.05%	1.47%
4	0.62%	1.15%
5	0.03%	0.64%

Figura 8: Potential Future Exposure per un IR Swap con maturity a 5 e 6 anni



Ripetendo l'operazione sotto differenti 10.000 scenari avremo quindi un vettore di altrettanti prezzi: saremo in grado di calcolare l'EE, come media di tutti i MtM positivi ottenuti, e di conseguenza anche il PFE ad un livello di confidenza $\alpha = 95\%$.

In tabella 7 e 8 sono riportati i valori ottenuti ad ogni anno di vita del contratto swap; come si può facilmente vedere dalle Figure 7 e 8 riportanti le dinamiche delle due curve d'esposizione per i ambedue i prodotti, avremo andamento simile.

Sia EE che PFE sono crescenti per i primi anni di vita del contratto e poi, man mano che ci si avvicina alla maturity, si ottengono valori sempre più ridotti; tale andamento è dovuto alla combinazione di due differenti fattori: l'incertezza rispetto ai pagamenti futuri e il progressivo stacco delle cedole. Avvicinandosi alla maturity, infatti, un numero sempre maggiore di cedole verrà scambiato tra le due parti così che l'esposizione legata al contratto vedrà diminuire il proprio valore fino ad azzerarlo all'*expiry date* del contratto.

Tabella 8: Potential Future Exposure per un IRS

tempo (anni)	IRS_5Y	IRS_6Y
1	4.85%	5.81%
2	5.26%	6.56%
3	4.34%	6.21%
4	2.55%	4.88%
5	0.13%	2.81%

5.2.4 Calcolo Credit Value Adjustment

Ipotizziamo che tutte le condizioni poste in precedenza siano verificate e per ora che il *wrong-way risk* non venga considerato.

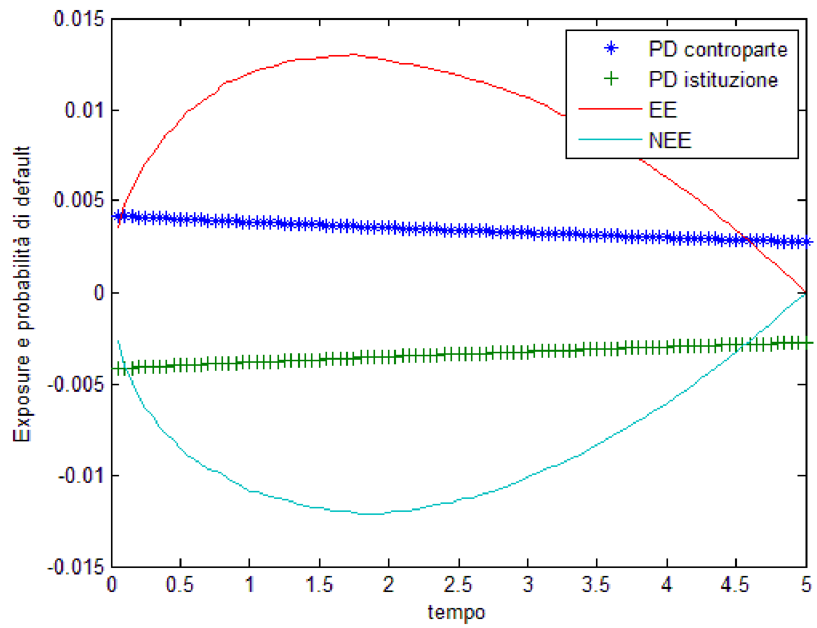
Andiamo ad analizzare le caratteristiche delle due parti stipulanti il contratto Swap e studiamo tre differenti scenari (le caratteristiche dei quali sono riportate in Tabella 9) in cui :

- *Scenario base*: l'istituzione e la controparte hanno stesso tasso di *recovery* e stessa qualità del credito definita dallo spread di un prodotto CDS;
- *Scenario 1*: l'istituzione e la controparte hanno il medesimo tasso di *recovery*, ma la qualità del credito dell'istituto è migliore rispetto a quella della controparte;
- *Scenario 2*: il tasso di *recovery* e lo spread di credito dell'istituzione sono notevolmente inferiori rispetto a quelli della controparte.

Tabella 9: Variabili di mercato legati alle due parti coinvolte nei tre possibili scenari

Variabili di mercato	Scenario Base	Scenario 1	Scenario 2
Tasso recovery controparte1	40%	40%	40%
Tasso recovery controparte 2	40%	40%	80%
Tasso spread controparte 1	500	200	100
Tasso spread controparte 2	500	500	750
Tasso spot d'interesse	5%	5%	5%
Maturity Swap T	5 anni	5 anni	5 anni

Figura 9: Probabilità di Default per le due istituzioni, EE & NEE nello scenario base



Mantenendo la medesima griglia definita in precedenza, calcoliamo per ogni istante le probabilità di default di ambedue le parti coinvolt mediante

$$PD_i = 1 - S_{i-1} \cdot \exp\left\{ \frac{(t_i - t_{i-1}) \cdot spread}{1 - recovery} \right\} \tag{76}$$

ed i valori di *Expected Exposure* e *Negative Expected Exposure* (NEE)[17].
In Figura 9 sono riportate le curve relative ad esposizione attesa e probabilità di default sia dell'istituto che della controparte nello scenario base. La probabilità di default dell'istituto è stata raffigurata con segno negativo per rendere più leggibile il grafico e come si può notare, essendo il grafico relativo allo scenario base, l'andamento è perfettamente identico per le due parti coinvolte (essendo i valori di spread e *recovery* identici).

[17]Il calcolo del NEE è equivalente a quello dell'EE però considera il punto di vista della controaprte che deve calcolare il rischio che la banca con cui ha stipulato il contratto possa fallire

Tabella 10: Misure di Exposure e CVA legate ai tre differenti scenari

Valori	Scenario Base	Scenario 1	Scenario 2
EPE	0.8921%	0.8986%	0.8856%
ENE	-0.8623%	-0.8499%	-0.8675%
CVA	0.1239%	0.1596%	0.2110%
DVA	0.1177%	0.0606%	0.0275%

Una volta ottenuti i valori di EE e PFE per i tre differenti scenari, saremo finalmente in grado di effettuare il calcolo vero e proprio del CVA e DVA sia come valore vero e proprio relativo al prodotto mediante (22) e (33) che come spread attraverso (27) e (34).

Come ci si aspettava (e si evince anche dalla Figura 10) il valore del DVA é inversamente proporzionale all'aumento della differenza tra gli spread delle due parti, mentre il CVA ha andamento contrario. In rosso viene riportato invece l'andamento del *Bilateral Credit Adjustment*, anch'esso crescente con l'aumentare del differenziale della qualità del credito tra i due istituti ($\triangle$).

Figura 10: CVA&DVA in relazione dello spread delle due differenti istituzioni nello scenario base

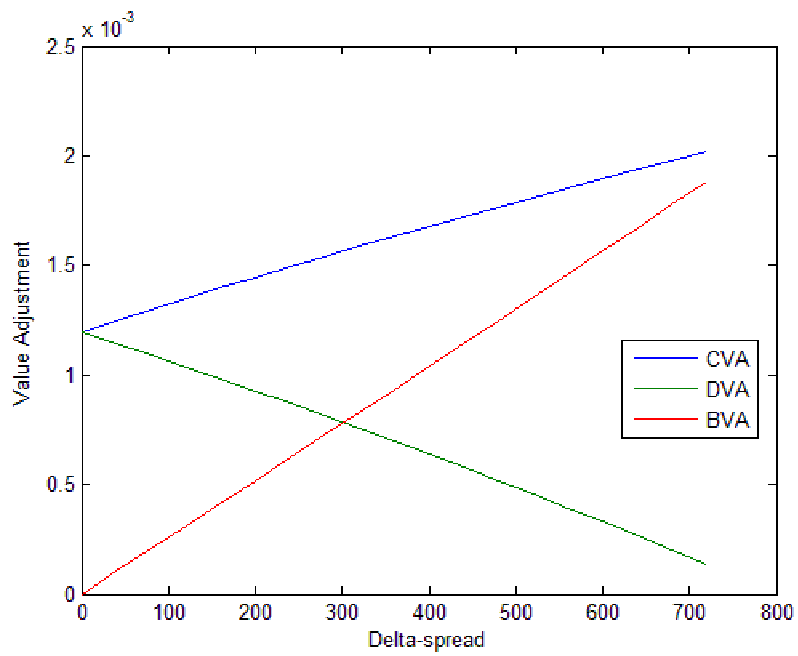


Tabella 11: CVA e DVA come spread

Valori	Scenario Base	Scenario 1	Scenario 2
CVA_spread	6.6905 bps	6.7401 bps	6.6421 bps
DVA_spread	-0.8623 bps	-0.8500 bps	-0.8675 bps

Possiamo notare, inoltre, che, quando la differenza raggiunge circa i 700 bps, il DVA è prossimo allo zero permettendo così sostanzialmente d'ipotizzare che l'istituzione si possa considerare *risk-free* e che quindi la controparte sia l'unica a dover essere sottoposta ad analisi riguardanti il rischio di controparte.

5.2.5 Interest Rate Swap attraverso un *semi-analytical approach*

Come detto in precedenza, il calcolo del CVA può essere effettuato in due differenti modi: attraverso simulazioni Montecarlo oppure mediante un approccio semi analitico che permette di avere il valore rischioso di un prodotto senza dover ricorrere ad ottimizzazioni per ridurre il costo computazionale legato al numero di simulazioni.

Ricollegandosi a quanto dimostrato da [SB94] saremo in grado di ottenere il valore del CVA legato ad un contratto IRS sfruttando le formule introdotte nel capitolo 5.3 per determinare il prezzo di una Swaption.

Data la solita griglia temporale (con istanti equidistanti $\delta = 0.05$) per prima cosa dovremo calcolare il tasso *forward swap rate* i_F

$$i_F = \frac{1 - d_N}{\sum_{n=1}^{N} d_n}, \qquad d_n = 1 - e^{r\cdot(t_i - T)}\,. \tag{77}$$

Una volta trovato tale valore per ogni istante di tempo, fissando le ulteriori grandezze per un contratto Swaption come in Tabella 12, saremo quindi in grado di calcolarne il valore mediante (75).

Tabella 12: Parametri della Swaption

Parametro	Valore
i_S	5%
σ_F	15%

Tabella 13: Calcolo CVA legate ai tre differenti scenari

Valori	Scenario Base	Scenario 1	Scenario 2
CVA Semi-anlytical	0.1366%	0.1583%	0.2092%
CVA Montecarlo	0.1239%	0.1596%	0.2110%
DVA Semi-anlytical	0.1195%	0.0649%	0.0314%
DVA Montecarlo	0.1177%	0.0606%	0.0275%

Partendo dal *risk-free value* appena calcolato possiamo ora calcolare il CVA legato al sottostante dell'opzione stessa:

$$CVA_{swap}(t,T) \approx -(1-\bar{\delta}) \cdot \sum_{i=1}^{m} V_{swaption}(0,\widetilde{T}_i,T) \cdot [S(t,t_{i-1}) - S(t,t_i)] \quad (78)$$

dove $\bar{\delta}$ è il tasso di *recovery* mentre $V_{swaption}(0,\widetilde{T}_i,T)$ rappresenta il valore all'istante iniziale della Swaption con *expiry date* dell'opzione a $\widetilde{T}_i$ e maturity in T.

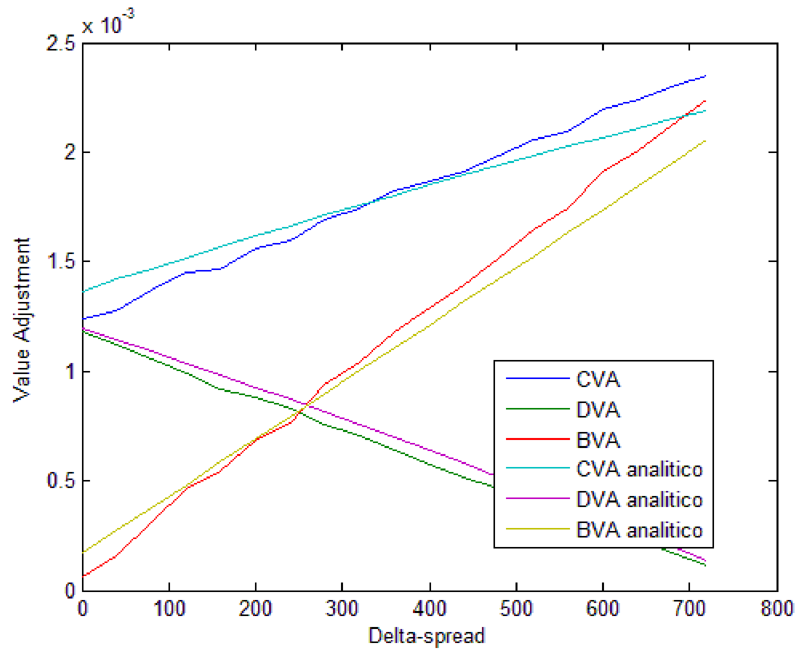
Calcolando quindi, come visto in precedenza alla formula (76), la *survival probability* saremo in grado di calcolare il CVA desiderato.
Per valutare la bontà di tale approccio semi-analitico possiamo confrontare i risultati ottenuti con quelli mediante simulazioni Montecarlo per i tre differenti scenari come riportato in Tabella 13 e graficamente in Figura 11.

Tabella 14: Errore relativo percentuale tra CVA e DVA calcolati nei due differenti approcci al variare dello spread tra le due istituzioni

numero di simulazioni	1000	2000	5000	7500	10000
Errore CVA	9.606%	8.6387%	6.458%	5.230%	3.710%
Errore DVA	7.159%	7.136%	6.975%	5.876%	4.298%

In tabella 14 sono riportati gli errori relativi alla discrepanza dovuta all'utilizzo delle due tecniche per il calcolo di CVA e DVA: si può notare che, per ottenere una buona precisione[18] di calcolo, è necessario ricorrere ad un numero di simulazioni piuttosto elevato. Questo non risulta essere un grosso problema quando in esame vi è un solo contratto, ma, per una banca che ogni giorno deve effettuare la valutazione su un portafoglio di migliaia di swap, ciò risulterebbe dal punto di vista computazionale troppo lento e macchinoso. Una volta validato il modello per il calcolo di tali grandezze mediante approccio analitico si potrà quindi ricorrere d'ora in avanti sempre ad esso[19].

Figura 11: CVA&DVA in relazione dello spread delle due differenti istituzioni per i due differenti metodi



[18] Calcoliamo l'errore per diversi scenari al variare degli spread come in Figura 11 e facciamo una media degli errori così ottenuti. Fissata come soglia accettabile per considerare i due metodi equivalenti il 5%, notiamo che ciò avverrà dopo circa 10.000 simulazioni.

[19] Come detto in precedenza purtroppo non tutti i prodotti hanno una formula chiusa per il calcolo del CVA e così, in questi casi, il metodo basato sulle Simulazioni Montecarlo risulta essere indispensabile.

5.3 Credit Default Swap

Il prodotto in esame è già stato introdotto in precedenza nel Capitolo 4.1.2; di seguito verranno ripresi i concetti anticipati e sviluppati ulteriormente per completare la trattazione ad esso associata.

Definizione 4. *Un Credit Default Swap (CDS) è un contratto d'assicurazione che ha la funzione di trasferire il rischio di credito. Tale swap è quindi uno contratto di copertura contro il possibile default di un soggetto, stipulato tra due differenti parti: una parte che acquista il prodotto (protection buyer) e una parte che lo vende (protection seller) acquisendone il rischio di credito.*

Ipotizziamo che un investitore vanti un credito nei confronti di un istituto[20]; tale soggetto potrebbe essere a rischio di fallimento e quindi I, per timore che il proprio credito diventi inesigibile o perda di valore prima che venga riscattato, acquista un prodotto, che gli funga da assicurazione, da una terza parte C. Nell'evento di default del soggetto di riferimento S avremo che il *protection seller* si impegnerà a pagare l'intero quantitativo assicurato (più spesso una sua frazione) al *protection buyer*. Qualora invece non avvenga alcun default nessuno scambio di capitale avverrà da C ad I.
Il *protection buyer,* in cambio dell'assicurazione sul proprio credito, dovrà versare un quantitativo (fisso o variabile a seconda delle caratteristiche del contratto) alla rispettiva controparte, in date prestabilite al momento della stipula del contratto, finché non si giunge a maturity dello stesso o avviene il default di S.

Definiamo ora le caratteristiche base che ci permettano di prezzare un Credit Default Swap [BM06]. Sia τ_S l'istante in cui avvenga il default di S e siano T_0 e T_N l'istante iniziale e finale del contratto.
Qualora avvenga il default di S il *protection seller* dovrà versare al *protection buyer* un certo ammontare di denaro *Loss Given Default*, definito come una percentuale rispetto al valore totale del credito detenuto da I verso S $(1-\delta)$.
Si definisca infine lo spread relativo ad un contratto CDS[21] come il tasso che rende equo il contratto al momento in cui viene stipulato: è quindi quel tasso che rende uguali i valori delle due gambe all'istante iniziale.

[20]Per semplicità di notazione definiremo come I l'investitore che acquista il CDS, C la controparte che vende il contratto ed S il soggetto contro il cui fallimento I vuole assicurarsi

[21]I contratti CDS sul mercato sono quotati in base allo Spread.

Il payoff scontato di un CDS[22] sarà dunque dato da:

$$\begin{gathered} V(t) = I(T_0 < \tau_S < T_N) \cdot D(t, \tau_S) \cdot (1-\delta) + \\ -I(T_0 < \tau_S < T_N) \cdot D(t, \tau_S) \cdot \left(\tau_S - T_{\Lambda(\tau_S)-1}\right) \cdot spread + \\ -\sum_{i=1}^{N} D(t, T_i) \cdot \alpha_i \cdot spread \cdot I(\tau_S > T_i), \end{gathered} \tag{79}$$

dove $\Lambda(t)$ rappresenta la prima data di pagamento di una cedola dopo l'istante di valutazione t, ossia $T_{\Lambda(\tau_S)-1} < t < T_{\Lambda(\tau_S)}$, $D(t, \tau_S)$ indica il *discount factor* mentre α_i è la *year fraction* che intercorre tra due diverse cedole.

Il valore di un CDS sarà quindi definito da tre termini:

- la *Loss Given Default* scontata all'istante di valutazione t;
- un fattore *accrual* che definisce l'eventuale frazione di cedola da pagare qualora il default avvenga tra due istanti di pagamento;
- la sommatoria di tutte le cedole versate dal protection buyer al protection seller qualora il default di S non sia ancora avvenuto.

Possiamo quindi calcolare il prezzo di un CDS applicando il valore atteso risk-neutral ottenendo[23]:

$$\begin{gathered} CDS(0, spread, \delta_S) = E^{Q}\left[V(0)\right] = \\ (1-\delta_S) \cdot \left\{ \int_{T_0}^{T_N} D(0,t) \cdot d\mathbb{Q}_t(\tau_S > t) \right\} + \\ -spread \cdot \left\{ \int_{T_0}^{T_N} D(0,t) \cdot \left(t - T_{\lambda(t)-1}\right) d\mathbb{Q}_t(\tau_S > t) \right\} + \\ -\sum_{i=1}^{N} spread \cdot D(t, T_i) \cdot \alpha_i \cdot \mathbb{Q}_t(\tau_S > T_i), \end{gathered} \tag{80}$$

dove $T_{\lambda(t)}$ corrisponde all'istante in cui cade la cedola successiva a t.

[22] Valutazione effettuata dal punto di vista del protection buyer I

[23] Sia definito uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ dove $\mathbb{Q}$ rappresenta la probabilità neutrale al rischio; per l'incompletezza dei mercati di credito avremo che tale misura non sarà unica. Sia essa la pricing-measure, ossia tale che la $\mathbb{Q}-$probabilità di un evento A nell'istante T sia pari al prezzo di un contratto che paga 1 in T.

Se volessimo valutare il valore residuo di un CDS all'istante del pagamento di una cedola otterremo che il suo Net Present Value sarà pari a:

$$
\begin{gathered}
CDS(T_j, spread, \delta_S) = NPV\left[T_j, T_N\right] = \\
(1-\delta_S)\cdot\left\{\int_{max\left\{T_0,T_j\right\}}^{T_N} D(0,t)\cdot d\mathbb{Q}_{T_j}(\tau_S > t)\right\} + \\
-spread\cdot I(\tau_S > T_j)\left\{\int_{max\left\{T_0,T_j\right\}}^{T_N} D(0,t)\cdot\left(t - T_{\Lambda(t)-1}\right) d\mathbb{Q}_{T_j}(\tau_S > t)\right\} + \\
-\sum_{i=max\{0,j\}+1}^{N} spread\cdot D(t,T_i)\cdot\alpha_i\cdot\mathbb{Q}_{T_j}(\tau_S > T_i)\,.
\end{gathered}
\tag{81}
$$

5.3.1 Calcolo del CVA per un CDS

Grazie a quanto definito nel capitolo 5.4 siamo in grado di calcolare il prezzo di un contratto CDS *risk-free*. Tale valore, in un mondo ideale, rappresenterebbe il vero prezzo del contratto; come si è più volte detto in precedenza le ipotesi di assenza di rischio di controparte sono oramai state superate e quindi si è spesso dovuto ricorrere ad aggiustamenti che tenessero conto delle possibilità di default di una od entrambe le parti. Proprio a tale scopo possiamo applicare la teoria del calcolo del CVA vista nel capitolo 4.

Il prezzo di un prodotto Credit Default Swap all'istante t di vita del contratto, come ricavato in precedenza, sarà dato da:

$$
\begin{gathered}
CDS(t, spread, \delta_S) = \\
(1-\delta_S)\cdot\left\{\int_{T_0}^{T_N} D(0,t)\cdot d\mathbb{Q}_t(\tau_S > t)\right\} + \\
-spread\cdot\left\{\int_{T_0}^{T_N} D(0,t)\cdot\left(t - T_{\lambda(t)-1}\right) d\mathbb{Q}_t(\tau_S > t)\right\} + \\
-\sum_{i=1}^{N} spread\cdot D(t,T_i)\cdot\alpha_i\cdot\mathbb{Q}_t(\tau_S > T_i)
\end{gathered}
\tag{82}
$$

Per quanto ricavato dalla Proposizione 4.1 saremo in grado di correggere tale prezzo applicando un fattore che tenga conto del rischio di default della controparte: in caso di *unilateral* CVA avremo che esso include nel modello di valutazione del CDS un fattore legato alla possibilità di default del *protection seller* (mentre il *protection buyer* che acquista il contratto si ipotizza essere *risk-free*).

Otterremo dunque che il valore atteso di un contratto CDS rischioso $(CDS_{risky}(t) = \widetilde{CDS(t)})$ ad un istante t sarà dato da:

$$E_t[\widetilde{CDS(t)}] = E_t[CDS(t)] - (1-\delta_S) \cdot E_t\left[I(\tau_C \leq T) \cdot D(t,T) \cdot [CDS(\tau_C)]^+\right] . \quad (83)$$

Forniamo ora un esempio in cui le precedenti formule di calcolo del prezzo di un contratto CDS, *risk-free* e corretto di un fattore rischioso, vengano utilizzate.

Analizziamo il caso in cui l'istituto (*protection buyer*, I) sia considerabile *risk-free* e quindi solamente la controparte (*protection seller*, C) e la *reference entity* (S), verso cui è stata fatta l'assicurazione, siano a rischio fallimento.

Si definisca come $S^*(t,T)$ la probabilità di sopravvivenza congiunta della controparte e di *reference entity* e di conseguenza con $\tau^* = min(\tau_C, \tau_S)$ il primo dei due possibili default.
Per simulare i differenti istanti, si definiscano due variabili aleatorie gaussiane Z_1 e Z_2 tali che i rispettivi fallimenti possano essere simulati come $\tau_S = S_S^{-1}(\Phi(Z_1))$ e $\tau_C = S_C^{-1}(\Phi(Z_2))$ e tali che esista un fattore di correlazione tra le due:

$$Z_2 = \rho \cdot Z_1 + Z_1 \cdot \sqrt{1-\rho^2}, \quad (84)$$

dove Φ rappresenta la cumulativa di una distribuzione Gaussiana (e quindi Φ^{-1} rappresenterà la sua inversa).

Per come abbiamo definito le distribuzioni dei due istanti di default saremo in grado di fornire una distribuzione statistica anche per la probabilità di sopravvivenza congiunta di C ed S:

$$S^*(t,T) = \Phi_{bidim}\left\{\Phi^{-1}(S_I(t,T)), \Phi^{-1}(S_C(t,T)); \rho\right\} , \quad (85)$$

dove Φ_{bidim} indica la funzione distribuzione cumulativa bivariata di una Gaussiana.

Siano dati i parametri del contratto come in Tabella 15, si costruisca quindi una griglia temporale in cui le cedole (*fee* che I paga a C) vengano versate ogni 4 mesi da parte del *protection buyer*[24]; mediante la forma discreta dell'espressione (82) calcoliamo innanzitutto i valori delle due gambe (*default* e *premium*).

Tabella 15: Caratteristiche contratto CDS

Parametro	Valore
Maturity T	5 anni
Spread della *Reference Entity* $spread_S$	300
Spread della controparte $spread_C$	150
Correlazione ρ	50
Tasso di *recovery Ref. Entity* δ_S	0.4
Tasso di *recovery* Controparte δ_C	0.4

In Tabella 16 e 17 sono riportate le probabilità marginali e congiunte delle due istituzioni coinvolte calcolate come segue:

- la probabilità di default delle singoli parti (PD_C e PD_S rispettivamente di controparte e *reference entity*) è calcolabile applicando la formula (76) [25];
- le probabilità di default congiunte sono calcolabili mediante la formula (85) sfruttando la funzione di distribuzione cumulativa bivariata di una Gaussiana Φ_{bidim} come segue:

$$\begin{aligned}
Def_{both} &= \Phi_{bidim}\left\{\Phi^{-1}\left(PD_S(t,T)\right),\Phi^{-1}\left(PD_C(t,T)\right);\rho\right\}, \\
Def_{reference} &= \Phi_{bidim}\left\{\Phi^{-1}\left(PD_S(t,T)\right),-\Phi^{-1}\left(PD_C(t,T)\right);\rho\right\}, \\
Def_{controp} &= \Phi_{bidim}\left\{-\Phi^{-1}\left(PD_S(t,T)\right),\Phi^{-1}\left(PD_C(t,T)\right);\rho\right\}, \\
Def_{none} &= \Phi_{bidim}\left\{-\Phi^{-1}\left(PD_S(t,T)\right),-\Phi^{-1}\left(PD_C(t,T)\right);\rho\right\}.
\end{aligned} \tag{86}$$

[24]La griglia di valutazione del valore delle singole gambe viene invece scandita da un passo $\Delta = 0.05$ così che il calcolo sia più affine alla versione continua.

[25]Il tasso di *recovery* è stato scelto fisso al 40% e la correlazione tra controparte C e *reference entity* S al 50% come definito in Tabella 14.

Tabella 16: Probabilità di default di Reference Entity e controparte

Istituto	Probabilità di default
Reference Entity	22.1199%
Controparte	11.7503%

Tabella 17: Probabilità di default congiunte di Reference Entity e controparte

$Ref.Entity$ / $Controp.$	Default	No Default
Default	6.2320%	5.5183%
No Default	15.8879%	72.3618%

Una volta definite le probabilità possiamo procedere al calcolo del CVA in due differenti modi: una prima via analitica in cui, mediante il calcolo della probabilità congiunta di fallimento S^* e dei differenti valori delle due gambe (*default* e *premium*) si è in grado di ricavare il valore del CVA come fattore di *spread* aggiuntivo per ogni anno di vita del contratto; si otterrà quindi che lo spread totale per un CDS sarà dato da :

$$CDS_{spread} = \frac{V_{default}}{V_{premium}}, \tag{87}$$

e quindi il fattore correttivo annuale CVA sarà facilmente calcolabile come $CVA = CDS_{spread} - spread_S$.

Una seconda via percorribile è quella teorizzata da [HPW2] che permette di definire il CDS_{spread} in relazione alle probabilità congiunte di default mediante la seguente relazione:

$$CDS_{spread} = spread_S \cdot \frac{(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Def_{both}}{Def_{reference}})}{(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Def_{controp.}}{Def_{reference}} + \frac{1}{3} \cdot Def_{both})}, \tag{88}$$

dove:

- Def_{both} definisce la probabilità congiunta che sia la Reference Entity che la controparte falliscano,
- $Def_{reference}$ definisce la probabilità che la Reference Entity fallisca,
- $Def_{controp}$ definisce la probabilità che la controparte fallisca.

Nella tabella 18 sono riportati i valori relativi allo spread del CDS calcolato nei due differenti modi e il relativo CVA[26]. Possiamo notare che i risultati ottenuti mediante le due diverse tecniche sono simili ma non perfettamente identici. L'approssimazione di Hull-White risulta infatti essere più conservativa e porta ad ottenere un CVA più elevato.
Il contratto CDS valutato secondo questa tecnica sarà quindi più conveniente per l'istituzione in quanto lo sconto richiedibile alla controparte, in virtu del suo possibile default e di quello della *reference entity*, sarà superiore. D'altro canto la controparte può calcolare lo spread del CVA seguento il processo analitico ottenendo che il suo valore risulta essere più basso rispetto a quello ottenuto mediante Hull-White; a questo punto, essendo entrambe le tecniche valide, le due parti si dovranno accordare e giungere ad un compromesso (che spesso è un valore intermedio) concordando il CVA consono per il contratto in esame.

Tabella 18: Spread relativo al CDS e CVA

CDS_{spread} analitico	275.5474
CDS_{spread} mediante approssimazione Hull-White	269.9141
CVA analitico	24.4526
CVA Hull-White	30.0859

5.3.2 Analisi di mercato relativa ai paesi Europei e ai loro spread

Andiamo a studiare ora un caso concreto in cui si analizzino i costi aggiuntivi che un istituzione *risk-free*, come può essere considerato attualmente la Germania a livello di panorama europeo, sia costretto a pagare per assicurarsi contro il possibile fallimento di una nazione verso la quale è esposta. Per coerenza di notazione con quanto visto in precedenza sia quindi I l'istituzione *risk-free* (Germania) mentre C sia un'istituzione rischiosa, ma abbastanza virtuoso, e quindi a basso rischio di fallimento (come ad esempio la Francia), rispetto al *Reference Entity S*.

[26] I valori riportati in tabella sono in basis point.

Nella Tabella 19 sono riportati gli spread associati ad alcune nazioni europee.[27]

Tabella 19: Nazione europea e spread associato

	27/03/2015	29/07/2014	01/04/2014
Germania	*risk-free*	*risk-free*	*risk-free*
Francia	24.43	34.47	51.51
Italia	114.25	145.04	171.28
Spagna	106.97	126.41	166.76
Portogallo	154.05	218.07	250.49
Irlanda	49.4	74.80	145.49
Belgio	27.24	27.86	64.47
Ungheria	320.09	375.52	403.98

Analizziamo quattro situazioni differenti per le due date del 27/03/2015 e del 01/04/2015:

1. Germania acquista un CDS dalla Francia per assicurare il proprio credito nei confronti dell'Italia;
2. Germania acquista un CDS dalla Francia per assicurare il proprio credito nei confronti della Spagna;
3. Germania acquista un CDS dall'Italia per assicurare il proprio credito nei confronti dell'Ungheria.

[27] I dati si riferiscono agli spread fra il rendimento dei titoli di Stato dei Paesi europei e il Bund tedesco a 10 anni; i dati sono stati forniti da MTS Group (http://www.mtsmarkets.com).

Calcoliamo e riportiamo nelle Tabelle 21 e 22, per i tre differenti prodotti considerati, le probabilità di default delle due parti coinvolte in questo contratto[28], a distanza di 1 anno, ricordando che:

- la probabilità di default della singola parte è calcolabile mediante formula (76)[29];
- le probabilità di default congiunte sono calcolabili mediante la formula (86).

Tabella 20: Probabilità di default di *Reference Entity* e controparte alla data 27/03/2015

Istituto	1	2	3
Reference Entity	17.3385%	16.3295%	41.3442%
Controparte	3.9899%	3.9899%	17.3385%
Entrambi falliscono	2.2371%	2.1654%	12.4631%
Nessuno fallisce	80.9086%	81.8460%	53.7804%
Fallisce solo Ref. Entity	15.1015%	14.1641%	28.8811%
Fallisce solo Controparte	1.7528%	1.1553%	4.8755%

Tabella 21: Probabilità di default di *Reference Entity* e controparte alla data 01/04/2014

Istituto	1	2	4
Reference Entity	24.8337%	24.2653%	48.9977%
Controparte	8.2268%	8.2268%	24.8337%
Entrambi falliscono	4.9930%	4.9284%	18.6589%
Nessuno fallisce	71.9325%	72.4363%	44.8275%
Fallisce solo Ref. Entity	19.8407%	19.3369%	30.3388%
Fallisce solo Controparte	3.2338%	3.2984%	6.1748%

[28] L'istituzione I che vuole assicurarsi dal rischio di controparte è *risk-free* e quindi le uniche probabilità di default, marginali e congiunte, da calcolare saranno quelle di C ed S.

[29] Il tasso di *recovery* è lasciato invariato rispetto al valore nell'esempio precedente e quindi per comodità fisso al 40%, mentre la correlazione tra controparte C e *reference entity* S al 50%.

Tabella 22: CVA e CDS_{spread} analitici alla data 27/03/2015

	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 4
CDS_{spread}	112.3552	104.9824	302.7800
CVA	1.8948	1.9876	17.3100

Tabella 23: CVA e CDS_{spread} analitici alla data 01/04/2014

	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 4
CDS_{spread}	165.0609	160.5142	375.4919
CVA	6.2091	6.2458	28.4881

Analizzando le Tabelle 22 e 23 possiamo notare come tra l'Aprile 2014 e l'Aprile 2015 il valore del CVA abbia visto una riduzione nel valore a causa dell'abbassamento dello spread dei titoli sovrani dei paesi europei rispetto al corrispettivo Tedesco.
Se prima la Germania (presa come riferimento di titolo *risk-free*) per assicurare il proprio credito verso paesi a basso rating come Italia, Spagna o a bassissimo rating come Ungheria[30] poteva chiedere uno sconto pari a circa 6 bps (o di addirittura di 28.5 bps per assicurarsi contro l'Ungheria), ora, con l'avviarsi delle fasi conclusive della crisi e la conseguente livellazione della qualità del credito europeo fortemente voluta dal BCE, il rischio di Controparte sarà sì ancora una componente notevole da non trascurare ma estremamente ridotto rispetto ad un anno fa.

Questo permette agli stati sovrani di finanziare il proprio debito pagando meno interessi a chiunque decida di acquistarne i titoli ed inoltre di dare ai mercati l'idea di avere economie solide ed in grado di sopportare eventuali ulteriori shock finanziari.

[30]Ad oggi il rating di Italia e Spagna secondo S&P risulta essere rispettivamente di livello BBB- e BBB mentre quello dell'Ungheria BB+.

6 Conclusioni

Preparando questa tesi magistrale ho avuto la possibilità di affrontare ed approfondire tematiche interessanti e di recente applicazione nella soluzione di problemi legati alla prevenzione dei rischi finanziari. La tesi è stata svolta in collaborazione con la società Unicredit Business Integrated Solution (UBIS) con cui ho il piacere di collaborare da quasi 8 mesi. Il tema del rischio di Credito e Controparte è uno dei temi finanziari più studiati ed analizzati negli ultimi 10 anni e numerose sono le trattazioni che provano a darne una definizione [CANM, G10, KO11].

Concetti come *Expected Exposure, Potential Future Exposure* o *Expected Positive Exposure* sono ormai indispensabili alle grandi banche per effettuare una valutazione il più possibile corretta e realistica dei rischi legati al mercato dei derivati: mercato sempre più in crescita sia per quanto riguarda la complessità dei prodotti che per il numero di scambi effettuati.

In questa fase di transizione ed uscita dalla precedente crisi, l'opinione del mondo finanziario è ancora fortemente divisa riguardo all'utilizzo di questi strumenti: da una parte coloro che sostengono che essi rappresentino una risorsa fondamentale ed indispensabile per il trasferimento e la limitazione del rischio, dall'altra, coloro che invece vedono questi prodotti come armi pericolose che, in un futuro non troppo lontano, potrebbero portare ad una nuova crisi.

La vera sfida che le banche stanno affrontando in questo momento, è legata alla definizione di CVA sempre più precisi e metodologie di calcolo sempre più ottimizzate; ogni banca o istituto ha dovuto provvedere alla formazione di gruppi di lavoro dedicati appositamente a tali valutazioni e studi. L'obiettivo è sicuramente quello di arrivare a definire dei metodi analitici per il calcolo del CVA per ogni singolo prodotto presente sul mercato: questa è una sfida veramente ardua considerato il numero di *Asset Class* presenti e la complessità di alcune di esse. Si deve poi tener presente che fattori come *wrong-way risk & right-way risk*, come visto nell'esempio delle Opzioni Europee, rischiano di avere un impatto notevole all'interno della valutazione; le differenti tecniche di *hedging*, quali *netting* e *collateralization*, sono uno strumento che gli istituti possono usare per cercare di ridurre la propria esposizione verso le controparti, ma che non devono considerare come mezzo per avere più denaro a disposizione da reinvestire in attività altrettanto rischiose.

Gli istituti finanziari devono essere consci che gli strumenti di cui sopra devono essere usati con prudenza per evitare che si trasformino in armi a doppio taglio e, forti delle esperienze passate e della capacità di analizzare e correggere i propri errori, dovranno evitare in futuro di ripetere i tragici eventi dell'ultima crisi che ha stravolto il mondo.

APPENDICE

A Unilateral CVA

La dimostrazione presentata si appoggia a [BC08].
Sia dato un portafoglio privo di rischio il cui valore è definito come:

$$V(t,T) = I(\tau > T)\cdot V(t,T) + I(\tau \leq T)\cdot V(t,T)\,; \tag{89}$$

possiamo sommare ad ambedue i membri la medesima quantità ricavando:

$$\begin{gathered} V(t,T) + (\delta - 1)I(\tau \leq T)\cdot[NPV(\tau)]^{+} = \\ I(\tau > T)\cdot V(t,T) + I(\tau \leq T)\cdot V(t,T) + \\ -I(\tau \leq T)\cdot[NPV(\tau)]^{+} + \delta\cdot I(\tau \leq T)\cdot[NPV(\tau)]^{+}\ , \end{gathered} \tag{90}$$

dove $[X]^{+} = max(X,0)$ e $[X]^{-} = min(X,0)$.
Analizziamo solamente i due termini centrali dell'espressione, condizionatamente all'informazione fino all'istante τ; il valore atteso sarà dato da:

$$\begin{gathered} E_{\tau}\left[I(\tau \leq T)\cdot V(t,T) - I(\tau \leq T)\cdot[NPV(\tau)]^{+}\right] = \\ E_{\tau}\left[I(\tau \leq T)\cdot\left\{V(t,T) + D(t,\tau)V(\tau,T) - D(t,\tau)E_{\tau}[V(\tau,T)]^{+}\right\}\right]\ . \end{gathered} \tag{91}$$

Ricordando che $V(\tau,T) = V(\tau,T)^{+} + V(\tau,T)^{-}$, e che il valore atteso viene effettuato all'istante τ, e quindi il valore atteso di un portafoglio tra t e l'istante di default τ è deterministico, possiamo vedere l'espressione precedente come:

$$\begin{aligned} &= I(\tau \leq T)\cdot\left\{V(t,\tau) + D(t,\tau)\cdot E_{\tau}\left[V(\tau,T) - (E_{\tau}[V(\tau,T)])^{+}\right]\right\} \\ &= I(\tau \leq T)\cdot V(t,\tau) - D(t,\tau)\cdot(E_{\tau}[V(\tau,T)])^{-}\ . \end{aligned} \tag{92}$$

Sfruttando le proprietà di $[.]^{+}$ e di $[.]^{-}$ possiamo riscrivere quanto trovato come:

$$\begin{aligned} &= I(\tau \leq T)\cdot V(t,\tau) - D(t,\tau)\cdot(E_{\tau}[-V(\tau,T)])^{+} \\ &= I(\tau \leq T)\cdot V(t,\tau) - D(t,\tau)\cdot(-E_{\tau}[V(\tau,T)])^{+} \\ &= I(\tau \leq T)\cdot V(t,\tau) - D(t,\tau)\cdot(-NPV(\tau))^{+}\ . \end{aligned} \tag{93}$$

Unendo quanto appena ricavato con gli altri due termini dell'espressione (78) $I(\tau > T) \cdot V(t,T) + +\delta \cdot I(\tau \leq T) \cdot [NPV(\tau)]^{+}$si ricaverà nuovamente l'espressione (18) del valore di un portafoglio rischioso:

$$\begin{aligned} \widetilde{V}(t,T) = I(\tau > T) \cdot V(t,T) + I(\tau \leq T) \cdot V(t,\tau) + \\ + I(\tau \leq T) \cdot (\delta \cdot D(t,\tau) \cdot V(\tau,T)^{+} + V(\tau,T)^{-}) \ . \end{aligned} \tag{94}$$

Siamo quindi in grado di effettuare il valore atteso rispetto a tale valore, facendo attenzione che $E_t\left[E_\tau\left[\,.\,\right]\right] = E_t\left[\,.\,\right]$, otterremo nuovamente la tesi di partenza:

$$E_t\left[\widetilde{V}(t,T)\right] = E_t\left[V(t,T)\right] - (1-\delta) \cdot E_t\left\{I(\tau \leq T) \cdot D(t,T) \cdot NPV(\tau)^{+}\right\} \ . \tag{95}$$

$\square$

B Bilateral CVA

La dimostrazione presentata si appoggia a [BC09].
Ricordiamo che il valore di un portafoglio privo di rischio è dato da

$$\begin{gathered}V(t,T)=I(\tau^{first}\geq T)\cdot V(t,T)+\\+I(\tau_C\leq min(\tau_I,T))\cdot V(t,T)+I(\tau_I\leq min(\tau_C,T))\cdot V(t,T)\,,\end{gathered}\tag{96}$$

dove τ_I rappresenta l'eventuale istante di default dell'istituto, τ_C quello della rispettiva controparte e $\tau^{first}=min(\tau_I,\tau_C)$ l'istante in cui avviene il primo default tra le due differenti parti.
Sostituendo quindi quanto appena trovato nella formula (31)

$$\begin{gathered}E_t\left[\widetilde{V}(t,T)\right]=E_t\left[I(\tau^{first}\geq T)\cdot V(t,T)+\right.\\I(\tau_C\leq min(\tau_I,T))\cdot V(t,T)+I(\tau_I\leq min(\tau_C,T))\cdot V(t,T)]+\\+E_t\left[(1-\delta_I)\cdot I(\tau_C\leq min(\tau_I,T))\cdot D(t,\tau_I)\cdot(-NPV(\tau_I))^+\right]+\\-E_t\left[(1-\delta_C)\cdot I(\tau_I\leq min(\tau_C,T))\cdot D(t,\tau_I)\cdot(-NPV(\tau_C))^+\right]\end{gathered}\quad,\tag{97}$$

otteniamo che, per la linearità dell'operatore valore atteso, i tre differenti termini possano essere racchiusi in un unico valore atteso:

$$\begin{gathered}E_t\left[\widetilde{V}(t,T)\right]=E_t\left[I(\tau^{first}\geq T)\cdot V(t,T)+\right.\\I(\tau_C\leq min(\tau_I,T))\cdot V(t,T)+I(\tau_I\leq min(\tau_C,T))\cdot V(t,T)+\\+(1-\delta_I)\cdot I(\tau_C\leq min(\tau_I,T))\cdot D(t,\tau_I)\cdot(-NPV(\tau_I))^++\\\left.-(1-\delta_C)\cdot I(\tau_I\leq min(\tau_C,T))\cdot D(t,\tau_I)\cdot(-NPV(\tau_C))^+\right]\end{gathered}\quad,\tag{98}$$

e quindi scomponendo nuovamente il valore atteso in tre termini:

$$\begin{gathered}E_t\left[\widetilde{V}(t,T)\right]=E_t\left[I(\tau_I\leq min(\tau_C,T))\cdot V(t,T)+\right.\\\left.-(1-\delta_C)\cdot I(\tau_I\leq min(\tau_C,T))\cdot D(t,\tau_I)\cdot(-NPV(\tau_C))^+\right]+\\+E_t\left[I(\tau_C\leq min(\tau_I,T))\cdot V(t,T)+\right.\\\left.+(1-\delta_I)\cdot I(\tau_C\leq min(\tau_I,T))\cdot D(t,\tau_I)\cdot(-NPV(\tau_I))^+\right]+\\+E_t\left[I(\tau^{first}\geq T)\cdot V(t,T)\right]\,.\end{gathered}\tag{99}$$

Ricordando che come sempre possiamo scrivere $V(t,T) = V(t,\tau_I) + D(t,\tau_I) \cdot V(\tau_I,T)$, calcoliamo il valore atteso condizionale all'istante τ_I per il secondo termine dell'espressione precedente:

$$\begin{gathered} E_{\tau_I}\left[I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot V(t,T) + (1-\delta_I) \cdot I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot D(t,\tau_I) \cdot (-NPV(\tau_I))^+\right] = \\ = I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot E_{\tau_I}\left[V(t,\tau_I) + D(t,\tau_I) \cdot V(\tau_I,T) + D(t,\tau_I) \cdot \{-E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)]\}^+ + \right. \\ \left. -D(t,\tau_I) \cdot (1-\delta_I) \cdot \{-E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)]\}^+\right] , \end{gathered} \tag{100}$$

cioè

$$\begin{gathered} E_{\tau_I}\left[I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot V(t,T) + (1-\delta_I) \cdot I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot D(t,\tau_I) \cdot (-NPV(\tau_I))^+\right] = \\ = I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot E_{\tau_I}\left[V(t,\tau_I) + D(t,\tau_I) \cdot V(\tau_I,T) + D(t,\tau_I) \cdot \{-E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)]\}^+ + \right. \\ \left. -D(t,\tau_I) \cdot (1-\delta_I) \cdot \{-E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)]\}^+\right] = \\ I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot \left\{V(t,\tau_I) + D(t,\tau_I) \cdot \{E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)]\}^+ \right. \\ +D(t,\tau_I) \cdot \{-E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)]\}^+ \\ \left. -D(t,\tau_I) \cdot (1-\delta_I) \cdot \{-E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)]\}^+\right\} . \end{gathered} \tag{101}$$

Usando quindi le proprietà del valore positivo $[.]^+ = -[.]^-$ avremo che l'espressione precedente può essere riscritta come:

$$\begin{gathered} I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot \{V(t,\tau_I) + D(t,\tau_I) \cdot E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)] + \\ -D(t,\tau_I) \cdot [E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)]]^- - (1-\delta_I) \cdot \{-E_{\tau_I}[V(\tau_I,T)]\}^+\} = \\ I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot \{V(t,\tau_I) + D(t,\tau_I) \cdot [NPV(\tau_I)] + \\ -(1-\delta_I) \cdot \{[NPV(\tau_I)]\}^+\} . \end{gathered} \tag{102}$$

Possiamo quindi condizionare tutta l'espressione a $t < \tau_I$ sapendo che, come visto nella precedente appendice, $E_t[E_{\tau_I}[.]] = E_t[.]$ ottenedendo quindi che:

$$E_t\left[I(\tau_C \le min(\tau_I,T)) \cdot V(t,\tau_I) + D(t,\tau_I) \cdot [NPV(\tau_I)] - (1-\delta_I) \cdot \{[NPV(\tau_I)]\}^+\right] . \tag{103}$$

In maniera del tutto simile possiamo ripetere gli stessi passaggi per il primo fattore dell'equazione (81) di partenza ottenendo:

$$E_t\left[I(\tau_I \le min(\tau_C,T)) \cdot V(t,\tau_C) - D(t,\tau_C) \cdot [-NPV(\tau_C)] + (1-\delta_C) \cdot \{[NPV(\tau_C)]\}^+\right] . \tag{104}$$

□

Riferimenti bibliografici

[B3] Basel Committee on Banking Supervision, 2010, *Basel III: A Global Regulatory Framework for More Resilient Banks and Banking Systems*

[IRB] I. Ruiz, R. Pachony and P. del Bocaz, *2013, Optimal Right and Wrong Way Risk: a methodology review, empirical study and impact analysis from a practitioner standpoint*

[PR10] M. Pykhtin and D. Rosen, 2010, *Pricing Counterparty Risk at the Trade Level and CVA allocations*

[DS11] M. Dorval and U. Schanz, 2011, *Building CVA on top of existing risk infrastructure*

[BS73] F. Black and M. Scholes, 1973, *The valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency, Journal of Finance*

[B76] F. Black, 1976, *The pricing of commodity contracts, Journal of Financial Economics*

[SB94] E. H. Sorensen and T. F.Bollier, 1994, *Pricing swap default risk*

[V78] O. A. Vasicek , 1977, *An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics*

[T98] T. Mikosch, 1998, *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View, World Scientific Publications*

[HW95] J. Hull and A. White, 1995, *The Impact of Default Risk on the Prices of Options and Other Derivative Securities, Journal of Banking and Finance*

[P05] E. Picault, 2005, *Calculating and Hedging Exposure, CVA, and Economic Capital for Counterparty Credit Risk*

[PZ07] M. Pykhtin and S. Zhu, 2007, *A guide to modelling counterparty credit risk Global Association of Risk Professionals*

[P12] M. Pykhtin, 2012, *Model foundations of the Basel III standardised CVA charge, Risk magazine*

[SL11] H. J. Stein and K. P. Lee, 2011, *Counterparty Valuation Adjustments inCredit Risk Frontiers: subprime crisis, pricing and hedging, CVA, MBS, ratings and liquidity Bloomberg*

[BC08] D. Brigo and K. Chourdakis, 2008, *Counterparty Risk for Credit Default Swaps: impact of spread volatility and default correlation*

[BC09] D. Brigo and A. Capponi, 2009, *Bilateral Counterparty risk valuation with stochastic dynamical models and application to Credit Default Swaps*

[CANM] J.B. Caoutette, E. I Altman, P. Narayanan R. Nimmo, 2008, *Managing Credit Risk: The Next Great Financial Challenge*

[G10] J. Gregory, 2010, *Counterparty Credit Risk: the new challenge for global financial markets*

[KO11] R. W. Kolb and J. A. Overdahl, 2011, *Financial Derivatives: Pricing and Risk Management*

[BM06] D. Brigo and F. Mercurio, 2006, *Interest Rate Models - Theory and Practise Springer Finance*

[P10] V. Piterbarg, 2010, *Funding beyond discounting: collateral agreements and derivatives pricing*

[HPW2] J. Hull, M. Predescu and A. White, 2002, *The relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond yields, and credit rating announcements*