

POLITECNICO DI MILANO

Facoltà di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica



**Analisi numerico-sperimentale del wave energy
converter EDS**

Relatore: Prof. Stefano Malavasi

Correlatore: Ing. Marco Negri

Tesi di Laurea di:

Nicola Incampo, Matr. 770407

Anno Accademico 2014 – 2015

Abstract

This thesis work deals with the numerical and experimental analysis of the wave energy converter *EDS* (Energy Double System), a mechanical system with two degrees of freedom for harnessing wave energy. EDS is a two oscillating-bodies point absorber: a *heaving* float and a *surging* paddle, designed to work in shallow waters.

The first part of this thesis concerns about the potentiality of wave power and its distribution on our planet. Afterwards, the existent WECs (Wave Energy Converters) are presented and classified, focusing on their structural characteristics and their operating principles. In this context, the EDS system is presented: the scale model of EDS, located in the Hydraulics Laboratory of the Politecnico di Milano, is also presented. The first part ends with the state of the art of the research about EDS, and with a summary of the results obtained in tests on the laboratory model.

The main part of the thesis are chapters 2, 3 and 4.

In chapter 2 the *Theory of the Potential Flow* is explained. It analytically defines the wave forces on the paddle and on the float, under some simplifying assumptions.

In Chapter 3, using the Lagrange equations, the equations of motion of the three non-linear mechanical systems are defined:

- The one degree of freedom system rod-float-damper;
- The one degree of freedom system rod-paddle-damper;
- The two degrees of freedom EDS overall system.

Then these equations have been linearized, thanks to the hypothesis of small displacements around the static equilibrium position; by now, the linearized equations will be the mathematical models of reference.

Once that the differential equations of motion have been defined, the related Simulink models have been built. They allow the numerical integration of the equations and the simulation of the dynamic behavior of the above systems.

However, the mathematical models constructed contain some unknown hydrodynamic parameters, whose identification is still required. These parameters are the excitation moment, the added mass and the hydrodynamic damping. Total forcing is obtained by the superposition of these contributes. In particular, using the three mathematical models above and the corresponding experimental models, it will be possible to obtain separately the hydrodynamic parameters of the float, the paddle and those of the mutual interaction between these two.

In this work there are the basis for the calculation of the hydrodynamic parameters of the float.

In the fourth chapter the laboratory tests are presented. Tests were made in the only-float configuration. This experimental campaign has led to the characterization of the rod-float-damper system, calculating the energy efficiency as a function of its location and of the mechanical parameters.

With reference to the one degree of freedom system, the experimental chapter ends by showing how it is possible to calculate its hydrodynamic parameters.

As mentioned, these hydrodynamic parameters are accounted into radiation (force that arises from the motion of the float in still water) and excitation (force that arises for the interaction between incident wave and still float).

For the calculation of these parameters, two techniques are used: analysis of the natural oscillations in still water, performed in the laboratory, which allows the calculation of radiation parameters; the second technique is a numerical procedure that allows to calculate all the hydrodynamic parameters (radiation ones and excitation ones) analyzing multiple sets of forced oscillations with different mechanical properties of the system.

Finally, the procedure for the validation of the produced mathematical model is presented.

Sommario

Il presente elaborato di tesi tratta l'analisi numerico-sperimentale del wave energy converter *EDS* (Energy Double System), sistema meccanico a due gradi di libertà atto a sfruttare il moto ondoso per la produzione di energia elettrica. *EDS* è un point absorber a due corpi oscillanti, un galleggiante in *heave* e una pala in *surge*, pensato per lavorare in acque medio-basse. Nella parte introduttiva di questa tesi si accenna alle potenzialità dell'energia del moto ondoso e di come essa sia distribuita sul nostro pianeta. Successivamente vengono presentati i diversi WEC (Wave Energy Converter) finora sviluppati e le modalità con cui essi vengono classificati, descrivendone in maniera sintetica le loro caratteristiche costruttive e i loro principi di funzionamento. In tale contesto viene presentato il sistema *EDS*, del quale già esiste un modello sperimentale in scala situato nel canale ondogeno del Laboratorio di Idraulica del Politecnico di Milano; la parte introduttiva si conclude con la descrizione dello stato di avanzamento della ricerca sul sistema *EDS*, cioè con un riepilogo dei risultati ottenuti nei test su modello di laboratorio.

Il corpo vero e proprio del lavoro di tesi riguarda i capitoli 2, 3 e 4.

Nel capitolo 2 si spiega la *Teoria del Flusso Potenziale* con la quale si definiscono in maniera matematica le forzanti d'onda di pala e di galleggiante, a valle di opportune ipotesi semplificative.

Nel capitolo 3, tramite le *Equazioni di Lagrange*, si definiscono le equazioni di moto non lineari dei tre sistemi meccanici:

- Sistema ad un grado di libertà asta-galleggiante-smorzatore;
- Sistema ad un grado di libertà asta-pala-smorzatore;
- Sistema *EDS* complessivo a due gradi di libertà.

Si è provveduto poi linearizzare tali equazioni, forti dell'ipotesi di piccoli spostamenti attorno alla posizione di equilibrio statico, le quali costituiranno per il momento i modelli matematici di riferimento.

Una volta definite le equazioni differenziali di moto si sono costruiti i corrispondenti modelli in Simulink, atti all'integrazione numerica di tali equazioni per così simulare il comportamento dinamico dei sopraccitati sistemi.

Tuttavia i modelli matematici costruiti contengono dei parametri idrodinamici incogniti, per i quali è ancora necessaria l'identificazione. Questi parametri sono il momento di eccitazione, la massa aggiunta, lo smorzamento idrodinamico. In merito ad essi, viene sfruttato il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, dati i tre modelli matematici di cui sopra e i corrispondenti modelli sperimentali, si potranno ricavare

separatamente i parametri idrodinamici di pala, galleggiante e mutua interazione tra questi due.

In questo elaborato si sono gettate le basi per il calcolo dei parametri idrodinamici del solo galleggiante

Nel quarto capitolo, di impronta prettamente sperimentale, vengono presentate le prove effettuate sul modello di laboratorio, nella configurazione di solo galleggiante; l'analisi di queste prove ha portato alla caratterizzazione del sistema asta-galleggiante-smorzatore, calcolandone il rendimento energetico in funzione della sua posizione e dei parametri meccanici.

Con riferimento al solo sistema ad un grado di libertà asta-galleggiante-smorzatore, il capitolo sperimentale termina mostrando come è possibile calcolare i parametri idrodinamici relativi all'interazione del galleggiante con onde monocromatiche.

Come accennato, tali parametri idrodinamici si suddividono in *parametri di radiazione* (forzamento che nasce dal moto del galleggiante in acqua ferma) e *parametri di eccitazione* (forzamento che nasce per l'interazione tra galleggiante fermo e onda incidente).

Per il calcolo di questi parametri, sono state utilizzate due tecniche: analisi di oscillazioni naturali in acqua ferma, realizzate in laboratorio, che però permette il calcolo dei soli parametri di radiazione; la seconda è una procedura numerica alternativa che permette di calcolare tutti i parametri idrodinamici (di radiazione e eccitazione) analizzando congiuntamente più serie di oscillazioni forzate, ma con differenti proprietà meccaniche del sistema.

Infine, viene presentato il procedimento per la validazione del modello matematico prodotto.

Indice

Abstract.....	3
Sommario.....	5
Elenco delle figure	11
Elenco delle tabelle	17
1 Introduzione.....	18
1.1 Risorsa globale dell'energia delle onde	19
1.2 Principali tecnologie WEC.....	24
1.2.1 Classificazione in base alla posizione.....	25
1.2.2 Dimensioni del dispositivo e caratteristiche direzionali delle onde.....	26
1.2.3 Principi di funzionamento.....	27
1.3 Un innovativo sistema WEC: l'EDS.....	31
1.3.1 Stato dell'arte delle prestazioni dell'EDS.....	33
2 Fluidodinamica delle onde monocromatiche e loro interazione con strutture galleggianti.....	38
2.1 Descrizione analitica delle onde monocromatiche.....	38
2.2 La teoria del flusso potenziale.....	40
2.2.1 Le condizioni al contorno	42
2.2.1.1 Superficie libera: condizioni al contorno cinematica e dinamica.....	43
2.2.1.2 Condizione al contorno sul fondale	44
2.2.1.3 Condizione al contorno di impermeabilità del corpo	44
2.3 Soluzione del problema differenziale per il caso di onde lineari	45
2.4 Espressione generale delle componenti di forza agenti su un corpo libero investito da onde.....	47
2.5 Esplicitazione delle componenti di forza per un WEC in alzata.....	49
2.6 Esplicitazione delle componenti di forza per un WEC a due corpi oscillanti.....	59
3 Modellazione matematica del sistema EDS	61
3.1 Modellazione delle forzanti di interazione onda-galleggiante e onda-pala.....	61

3.1.1	Il modello di forzamento al galleggiante	62
3.1.2	Il modello di forzamento alla pala	64
3.1.3	I modelli delle forzanti per galleggiante e pala nel sistema EDS globale ...	67
3.2	Equazioni di moto costruite per il sistema EDS.....	70
3.2.1	Modelli ad un grado di libertà del sistema EDS	71
3.2.1.1	Il sistema asta-galleggiante.....	73
3.2.1.2	Il sistema asta-pala.....	87
3.2.1.3	Il sistema EDS completo a due gradi di libertà	98
3.2.2	Simulazione dei sistemi dinamici costruiti attraverso Simulink.....	112
3.2.2.1	Schemi del sistema asta-galleggiante	113
3.2.2.2	Schemi del sistema asta-pala	119
3.2.2.3	Schemi del sistema complessivo a 2 g.d.l.	121
4	Sistema EDS di laboratorio	134
4.1	Il modello fisico	134
4.1.1	La catena di misura	138
4.1.2	Caratterizzazione sperimentale dell'EDS	139
4.1.2.1	La media in fase sui segnali di misura.....	140
4.1.2.2	Analisi di performance sul modello EDS ad un grado di libertà.....	142
4.2	Taratura dei modelli matematici su basi sperimentali.....	150
4.2.1	Calcolo della cinematica del sistema	151
4.2.1.1	Equazioni di chiusura complesse.....	152
4.2.1.2	Uso della DFT sulle coordinate libere per il caso linearizzato.....	165
4.2.2	Ricerca dei parametri di smorzamento strutturale	169
4.2.3	Sistemi ad un grado di libertà: ricerca di alcuni parametri di forzamento.	175
4.2.3.1	Parametri di forzamento al galleggiante con il modello nel dominio delle frequenze	177
4.2.3.2	Calcolo dei parametri di radiazione con il metodo delle oscillazioni libere	186
5	Conclusioni e sviluppi futuri	196
6	Appendice.....	202
6.1	Scrittura equazione del moto di un generico sistema ad 1 g.d.l.	202
6.2	Scrittura equazioni di moto di sistemi a 2 g.d.l.	211

Riferimenti218

Elenco delle figure

Figura 1.1: Flusso totale di energia attraverso l'atmosfera terrestre ([8])	20
Figura 1.2: Esempio di mappa dei venti medi tipici dei mesi estivi ([9]).....	20
Figura 1.3: Trasferimento dell'energia dal vento al moto ondoso ([10])	21
Figura 1.4: Mappa di stima delle potenze d'onda medie annuali sul nostro pianeta, espressa in kW/m, calcolate su un periodo di 10 anni ([24])	23
Figura 1.5: Distribuzione in Europa della potenza media annuale, in kW/m ([26]).....	24
Figura 1.6: Posizione dei convertitori d'energia d'onda a varie distanze dalla costa ([13])	25
Figura 1.7: Classificazione dei dispositivi WEC in base alle dimensioni: (a) OPT point absorber, (b) Pelamis attenuator e (c) Wave Dragon terminator ([6]).....	26
Figura 1.8: Schema di OWC ([29]).....	27
Figura 1.9: WEC oscillanti con moto verticale ([30])	28
Figura 1.10: Schema di un Sistema Overtopping ([31])	28
Figura 1.11: Aquamarine Power's Oyster ([32])	29
Figura 1.12: Raccolta dei principali convertitori, suddivisi in base alle classificazioni proposte ([6])	29
Figura 1.13: Schema del sistema EDS, vista laterale e dall'alto ([1])	31
Figura 1.14: Dispositivo WEC di Wavestar in esercizio ([36]).....	32
Figura 1.15: Schema e fotografia del modello sperimentale dell'EDS ([1])	33
Figura 1.16: Canale di lavoro dell'EDS; nello schema di sinistra viene evidenziata la zona di prova mentre nell'immagine a destra si nota la presenza del battitore d'onda ([1])	34
Figura 1.17: Onda armonica teorica ([38])	34
Figura 1.18: Curve di rendimento per il caso di solo galleggiante, per diversi valori di smorzamento strutturale, al variare della posizione del sistema lungo la spiaggia; nella parte bassa si nota, con colore diverso, c'è anche la curva dell'ampiezza d'onda, come.....	35
Figura 1.19: Curve di rendimento per il caso di sistema completo, per diversi valori di smorzamento strutturale, al variare della posizione del sistema lungo la spiaggia e della distanza pala galleggiante ([1]).....	36
Figura 1.20: Migliori configurazioni dell'EDS completo confrontate con le migliori del solo galleggiante ([1])	37
Figura 2.1: Rappresentazione spaziale di un'onda armonica.....	39
Figura 2.2: Dominio di fluido in cui è applicata la teoria del potenziale.....	41
Figura 2.3: Gradi di libertà di un generico natante non vincolato	47
Figura 2.4: Moto di alzata di un sistema di WEC, progettato per onde a largo.....	49
Figura 2.5: Corpo con sezione circolare investito da un'onda a bassa ripidezza ([5])	50
Figura 2.6: Generico sistema WEC, caratterizzato da moto di heave, vincolato al fondale per mezzo del PTO ([5])	51
Figura 2.7: Configurazione del sistema per avere dalla cella di carico la misura della componente di eccitazione ([5]).....	52
Figura 2.8: Il contributo di radiazione dovuto al moto del sistema in acqua ferma	53
Figura 2.9: Esplicitazione dell'elemento PTO con un parallelo molla-smorzatore ([5]) ..	53

Figura 2.10: Molla lineare equivalente facente le veci del contributo idrostatico di restoring ([5])	55
Figura 2.11: Equilibrio dinamico del sistema WEC analizzato ([5]).....	55
Figura 2.12: In alto, andamenti di massa aggiunta e smorzamento idrodinamico per il caso di boa sferica di raggio pari a $r=5$ [mt] posta in acque profonde (100 metri circa), in funzione della frequenza dell'onda incidente. In basso, si ha invece l'andamento del modulo della forza di eccitazione	58
Figura 2.13: Esempio di WEC costituito da due corpi oscillanti in heave ([5]).....	59
Figura 3.1: Moto del galleggiante roto-traslativo rispetto alla superficie dell'acqua	62
Figura 3.2: Distinzione concettuale tra i contributi di eccitazione (a sinistra) e quello di radiazione/idrostatico.....	63
Figura 3.3: Schema totale del sistema EDS a 2 gradi di libertà.....	64
Figura 3.4: Sistema ad un grado di libertà asta-pala.....	64
Figura 3.5: Distinzione concettuale tra i contributi di eccitazione (a sinistra) e quello di radiazione.....	65
Figura 3.6: Coppia di sistemi di riferimento necessaria a descrivere il moto della pala quando si consideri il sistema globale a due gradi di libertà	66
Figura 3.7: Forzamento alla pala rappresentato come una forza orizzontale agente in C più il momento di trasporto.....	67
Figura 3.8: Esempi di sistemi WEC in heave a due corpi oscillanti o a due gradi di libertà ([5])	68
Figura 3.9: Esempi di sistemi WEC in heave a due corpi oscillanti o a due gradi di libertà ([5])	68
Figura 3.10: Rappresentazione dei termini di forzamento per pala e galleggiante nei due sistemi ad un grado di libertà	69
Figura 3.11: Rappresentazione dei termini di forzamento per pala e galleggiante nel sistema complessivo a 2 g.d.l.....	70
Figura 3.12: In alto, sistema ad un grado di libertà asta-smorzatore-galleggiante; in basso, sistema ad un grado di libertà asta-smorzatore-pala	71
Figura 3.13: Il sistema EDS completo	72
Figura 3.14: Il sistema ad un grado di libertà asta-galleggiante; i due dispositivi evidenziati permettono il flusso di energia attraverso il sistema.....	73
Figura 3.15: I contributi inerziali del sistema analizzato.....	74
Figura 3.16: Approssimazione del sistema smorzante in cui il moto verticale dello stelo è uguale dell'estremità dell'asta AB; nella figura il sistema è in posizione di equilibrio statico	76
Figura 3.17: Posizione dello stelo iniziale e al generico istante, per lo schema utilizzato in merito alla parte di smorzamento.....	76
Figura 3.18: A sinistra, sistema dotato del moto in piccolo ipotizzato per il caso EDS; a destra, moto in grande, dove si notano vistose rotazioni per il galleggiante	78
Figura 3.19: Sistema elastico equivalente con cui viene modellata la spinta idrostatica del sistema.....	78
Figura 3.20: Area di base della calotta sferica immersa da cui dipenderà il valore della rigidità di restoring.....	79

Figura 3.21: Schema per il calcolo dell'allungamento dinamico della molla fittizia di restoring	79
Figura 3.22: Le due componenti di eccitazione e di radiazione del forzamento d'onda al galleggiante M_{gall}	82
Figura 3.23: Il sistema asta-pala ad un grado di libertà	88
Figura 3.24: Il sistema asta-pala con evidenziati i contributi inerziali	89
Figura 3.25: Sistema nella generica posizione di moto; rilevamento altezza dei centri di massa.....	90
Figura 3.26: Variazione di lunghezza dello smorzatore	91
Figura 3.27: I due contributi del forzamento d'onda agente sulla pala	92
Figura 3.28: Spostamento virtuale del punto di applicazione del forzamento d'onda sulla pala.....	93
Figura 3.29: Sistema sottoposto a piccole e grandi oscillazioni	95
Figura 3.30: Schema del sistema complessivo dell'EDS a 2 g.d.l.....	98
Figura 3.31: Distribuzione delle masse per il sistema a due gradi di libertà	99
Figura 3.32: Configurazione deformata del sistema EDS	100
Figura 3.33: In rosso viene indicata in via schematica lo smorzatore FD nella generica configurazione di moto	103
Figura 3.34: Masse concentrate che andranno a costituire il contributo di energia potenziale gravitazionale.....	104
Figura 3.35: Forzamenti d'onda e rispettivi spostamenti virtuali	107
Figura 3.36: Rappresentazione qualitativa dei due modi di vibrare del sistema	111
Figura 3.37: Schema a blocchi del sistema asta-galleggiante non lineare, per analisi diretta	113
Figura 3.38: Schema a blocchi del sistema asta-galleggiante linearizzato, per analisi diretta	113
Figura 3.39: Schema a blocchi complessivo, per analisi diretta, per sistema non lineare e linearizzato.....	114
Figura 3.40: Confronto tra i sistemi non lineare e linearizzato, per forzamenti a	116
Figura 3.41: Schemi Simulink d'analisi inversa; sopra, costruzione del momento forzante a partire dai termini strutturali, sotto invece calcolo di questo a partire dai contributi di eccitazione e di radiazione	117
Figura 3.42: Andamento forzante d'onda ricostruita: in blu si ha l'andamento a partire dalla parte strutturale, in rosso invece quello relativo alla somma dei contributi di eccitazione e di radiazione.....	118
Figura 3.43: Schema a blocchi del sistema asta-pala non lineare, per analisi diretta	119
Figura 3.44: Schema a blocchi del sistema asta-pala linearizzato, per analisi diretta	120
Figura 3.45: Schema a blocchi del sistema asta-pala linearizzato per analisi inversa.....	121
Figura 3.46: Schema a blocchi del sistema asta-pala linearizzato per analisi inversa.....	121
Figura 3.47: Schema a blocchi per analisi diretta del sistema totale a 2 g.d.l.	124
Figura 3.48: Posizione relativa tra sistema EDS e onda incidente	124
Figura 3.49: Forzamento a bassa intensità e relativo andamento delle coordinate libere per sistema non lineare e linearizzato	126
Figura 3.50: Forzamento ad elevata intensità e relativo andamento delle coordinate libere per sistema non lineare e linearizzato	127

Figura 3.51: Rappresentazione forzanti di galleggiante e di pala sul sistema EDS completo	128
Figura 3.52: Schema a blocchi per ricostruire i termini di forzamento partendo dalla parte strutturale dell'equazione di moto	129
Figura 3.53: Schema a blocchi per ricostruire i termini di forzamento partendo dalle componenti di eccitazione e di radiazione	133
Figura 4.1: Modello di laboratorio del sistema EDS ([1]).....	134
Figura 4.2: Schema del sistema EDS	135
Figura 4.3: Schema del canale sperimentale ([1])	136
Figura 4.4: In alto, onda monocromatica prodotta dal battitore; in basso, il motore e la paratoia, che hanno il compito di mettere in movimento l'acqua del canale.....	137
Figura 4.5: Centralina che comanda in anello aperto il moto sincrono del battitore.....	137
Figura 4.6: I sensori di misura del modello sperimentale dell'EDS: in alto, fotocellule di distanza e celle di carico; in basso, la wave gauge o misuratore del livello dell'acqua ..	138
Figura 4.7: La catena di misura con cui è strumentato il modello sperimentale dell'EDS	139
Figura 4.8: Segnale completo dell'allungamento nel tempo dello smorzatore posto sotto G	140
Figura 4.9: Spacchettamento del segnale di partenza in N segnali a singolo periodo	141
Figura 4.10: Segnale mediato in fase	141
Figura 4.11: Il modello di laboratorio dell'EDS ad un grado di libertà: in alto, sistema complessivo; in basso, dettagli relativi a galleggiante, smorzatore e dispositivi di misura adoperati.....	143
Figura 4.12: Segnale di velocità, ricavato derivando quello di spostamento.....	143
Figura 4.13: Forza da cella di carico (curva blu) e forza di dissipazione (curva rossa) ..	144
Figura 4.14: Curva di potenza istantanea dissipata dallo smorzatore; si riportano anche i valori delle energie dissipate in salita e discesa, rappresentate rispettivamente dall'area verde e da quella rossa	145
Figura 4.15: Potenza media e istantanea di dissipazione allo smorzatore	146
Figura 4.16: Andamento delle creste (η_{max}), dei cavi (η_{min}) e dell'altezza d'onda ($H=\eta_{max}-\eta_{min}$) in funzione della profondità. I pedici 1 e 2 sulle grandezze η e H identificano le sonde utilizzate per le misure ([1])	147
Figura 4.17: Risultati sperimentali relativi all'indice di rendimento CWR, al variare dell'onda testata (a, b, c), della posizione nel canale e dello smorzamento strutturale imposto.....	149
Figura 4.18: Schema di calcolo per ricavare l'andamento delle coordinate libere a partire dai segnali delle due fotocellule.....	152
Figura 4.19: Il quadrilatero articolato, vettori complessi rappresentativi di telaio e corpi rigidi del sistema	153
Figura 4.20: Segno del segnale della fotocellula, positivo se lo stelo va verso l'alto	154
Figura 4.21: Vettori complessi per l'equazione di chiusura del sistema in configurazione statica	154
Figura 4.22: Vettori complessi per l'equazione di chiusura del sistema nella generica configurazione di moto	155

Figura 4.23: Meccanismo ad un grado di libertà, plottato in Matlab, nella configurazione di equilibrio statico.....	158
Figura 4.24: Variazione di lunghezza dello smorzatore e relative rotazioni dell'asta AB, per il caso di cinematica linearizzata e non lineare; prova sperimentale forzata con ONDA 2000	158
Figura 4.25: Montaggio della fotocellula relativa allo smorzatore FD e convenzione di segno del suo segnale.....	159
Figura 4.26: Vettori complessi per i meccanismi all'istante iniziale (a sinistra) e al generico istante di moto (a destra).....	160
Figura 4.27: Vettori complessi per i meccanismi all'istante iniziale (a sinistra) e al generico istante di moto (a destra).....	162
Figura 4.28: Vettori complessi per il cinematismo CFD, relativo al sistema a due gradi di libertà, nell'istante iniziale e finale	163
Figura 4.29: Andamento delle coordinate libere a partire da variazioni di lunghezza degli smorzatori durante una prova sperimentale; risultati relativi a legami cinematici non lineare (curva rossa) e linearizzati (curva blu).....	165
Figura 4.30: Trasformazione dei segnali di allungamento degli smorzatori nei relativi segnali delle coordinate libere	166
Figura 4.31: Schema del processo di ricostruzione del segnale $\theta_{1d}(t)$ tramite DFT	167
Figura 4.32: Segnale $\theta_{1d}(t)$ ricostruito con una, due e tre armoniche, multipli interi di quella fondamentale	168
Figura 4.33: Confronto tra segnali mono-armonici a media nulla e diversa da zero.....	169
Figura 4.34: Dischi in PVC e olio, attori principali dello smorzamento strutturale dell'EDS	170
Figura 4.35: Forza di smorzamento e velocità dello stelo GH ([1])	170
Figura 4.36: Vettori di forza e velocità di smorzamento, tra loro in contro-fase	171
Figura 4.37: Sistema EDS rappresentato con gli smorzatori rotazionali viscosi equivalenti	172
Figura 4.38: Momenti smorzanti messi al posto delle forze smorzanti misurate dalle celle di carico.....	172
Figura 4.39: Schemi riassuntivi per il calcolo dei coefficienti di smorzamento viscosi equivalenti attraverso approccio dinamico e approccio energetico	174
Figura 4.40: Coefficienti di smorzamento rotazionali equivalenti in funzione della posizione del canale, del tipo d'onda e del diametro del disco in PVC che scorre in olio	175
Figura 4.41: Variazione di lunghezza dello smorzatore BH e relativa rotazione dell'asta AB, per il caso di ONDA 2000.....	178
Figura 4.42: Spostamento angolare dell'asta AB effettivo (curva in blu) e andamento approssimato a valor medio nullo, relativo alla sola prima armonica (curva in rosso) ...	179
Figura 4.43: Parametri incogniti calcolati da fsolve, in funzione della posizione nel canale, per le ONDE 2000, 1013, 3000 (a, b, c); nella parte bassa sono in realtà rappresentate le fasi relative tra momento di eccitazione e spostamento del sistema, ossia $\varphi_{xj} - \phi_j \quad j = 1,2,3$	184

Figura 4.44: In alto, esempio di spostamenti angolari dell'asta AB per un tripletta di prove sperimentali utilizzata per la risoluzione del sistema non lineare; in basso, vettori rappresentativi degli stessi spostamenti	185
Figura 4.45: Segnale di oscillazione libera di un sistema sotto-smorzato, sfruttato per il calcolo del decremento logaritmico	187
Figura 4.46: Sistemi ad un grado di libertà senza smorzatori, da utilizzare per i test di radiazione	188
Figura 4.47: Posizione delle fotocellule nelle prove di oscillazione libera	189
Figura 4.48: Esempio di transitori di oscillazioni libere smorzate per il sistema EDS ...	190
Figura 4.49: Andamento di pulsazione naturale (a), smorzata (b) e coefficiente di smorzamento adimensionale (c) in funzione dell'inerzia strutturale; si riportano i valori medi e le deviazioni standard ricavati attraverso le prove sperimentali	192
Figura 4.50: Schema e fotografia del modello in scala 1:20 del sistema Wavestar ([22])	192
Figura 4.51: Andamento dei coefficienti di radiazione per il galleggiante del sistema Wavestar ([22])	193
Figura 4.52: Coefficienti idrodinamici di radiazione del sistema EDS sovrapposti a quelli di Wavestar, quest'ultimi opportunamente riscaldati in similitudine di Froude.....	194
Figura 5.1: Processo di validazione del modello matematico linearizzato ad un grado libertà del sistema asta-galleggiante: procedura basata sull'analisi diretta (a) e su quella inversa (b).....	198
Figura 5.2: Processo di ottimizzazione dell'EDS basato sul modello matematico costruito	201
Figura 6.1: Diverse configurazioni di un generico elemento elastico: lunghezza statica, dinamica e in configurazione indeformata.....	204
Figura 6.2: Pendolo in posizione di equilibrio statico orizzontale, analogo al sistema ad un grado di libertà asta-galleggiante [21]	209
Figura 6.3: Pendolo in posizione di equilibrio statico orizzontale, analogo al sistema ad un grado di libertà asta-pala [21]	210

Elenco delle tabelle

Tabella 1: Caratteristiche delle onde monocromatiche utilizzate in [1]	35
Tabella 2: Masse degli elementi dell'EDS.....	72
Tabella 3: Dimensioni degli elementi dell'EDS	72
Tabella 4: Caratteristiche principali delle onde monocromatiche utilizzate nei test	146
Tabella 5: Dati principali, geometrici e strutturali, del sistema in prova.....	148

1 Introduzione

Partendo dalla seconda rivoluzione industriale, avvenuta a metà dell'Ottocento, fino ai giorni nostri, la richiesta di energia elettrica da parte della popolazione mondiale è aumentata in maniera esponenziale e molto probabilmente il trend rimarrà praticamente invariato per i prossimi decenni.

In verità è molto probabile che la richiesta subisca una ulteriore impennata visto che negli ultimi anni si sono affacciate sul mercato energetico altre potenze economiche quali Cina, India e Brasile aventi delle popolazioni che riunite arrivano quasi alla metà di quella mondiale.

Per dare dei numeri, si stima che per il 2040 il consumo energetico globale sarà circa del 30 % più alto rispetto al 2010, con il 40 % di essa costituito da energia di tipo elettrica.

Attualmente, nonostante i passi da gigante compiuti nei settori eolico, solare e idroelettrico, la maggior parte dell'energia continua ad essere prodotta attraverso fonti fossili quali petrolio, carbone e gas naturale che, secondo gli esperti, si esauriranno da qui a quarant'anni circa.

Per sopperire alla diminuzione di queste risorse energetiche di finita disponibilità, è importante investire sul rinnovabile nelle sue diverse forme, così da garantire energia elettrica pulita alle popolazioni del futuro. In effetti non pochi sforzi sono stati compiuti per lo sviluppo di sistemi per lo sfruttamento dell'energia solare (termica e fotovoltaica) ed eolica, le quali attualmente costituiscono le principali fonti di energia rinnovabile.

Accanto a queste preziosissime risorse di energia messe a disposizione dalla natura, in sordina si sta facendo strada un'altra importantissima risorsa con un elevato potenziale energetico, ossia l'energia delle onde marine. Contrariamente a ciò che uno potrebbe pensare, l'energia delle onde non è stata scoperta troppo di recente in quanto ci sono delle testimonianze storiche che vedono addirittura il popolo cinese sfruttare il moto ondoso per azionare i mulini.

Tuttavia il primo brevetto è stato depositato nel 1799 da Girard e figlio in Francia [4].

Prima di vedere una significativa applicazione in età contemporanea bisogna attendere il 1910 quando il francese Praceique-Bochaux sfruttò l'energia delle onde per fornire elettricità alla sua casa a Royan, attraverso un sistema pneumatico simile a quello che è oggi conosciuto come OWC (Oscillating Water Column). Successivamente, il giapponese Yoshio Masuda (Giappone 1940) sviluppò in maniera sistematica l'intero concetto di OWC [5].

Negli anni successivi tale concetto fu sviluppato anche in Occidente.

Da un lato in Europa Stephen Salter e Kjell Budal, spinti dalla crisi del petrolio che attanagliava il vecchio continente in quegli anni, hanno compiuto innumerevoli studi relativi alla OWC.

Dall'altro lato, in America, Michael E. McCormick fu il primo accademico a lavorare con questa tecnologia [6].

Ma, mentre negli anni '70, a causa della grave crisi petrolifera, università e ricercatori concentrarono i propri sforzi per promuovere e sviluppare la tecnologia della *wave energy*, foraggiati da finanze provenienti da governi e enti privati, all'inizio degli anni '80 la ridiscesa repentina del prezzo del greggio frenò bruscamente lo sviluppo di questo particolare settore energetico [7].

Poi, all'inizio del terzo millennio, si è presentata nuovamente una forte crisi energetica accostata ad un'emergenza ambientale, con una immediata ripresa dello sviluppo di tutte le principali tecnologie di energia rinnovabile, tra cui quelle legate al moto ondoso.

In questo capitolo viene descritta in via generale la tecnologia legata alla conversione dell'energia delle onde, con lo scopo di fissare ed analizzare i principali concetti necessari a raggiungere una discreta confidenza con l'argomento.

In primo luogo si forniranno informazioni circa la distribuzione di tale risorsa energetica sul nostro pianeta, indicando i punti con la più alta intensità energetica.

In seguito verranno classificati i diversi dispositivi sviluppati per lo sfruttamento di tale risorsa, in relazione anche al sistema EDS, oggetto di questo lavoro di tesi.

1.1 Risorsa globale dell'energia delle onde

Prima di approfondire il discorso legato alle potenzialità energetiche del nostro pianeta in merito all'energia delle onde marine, verrà mostrata in maniera molto sintetica l'origine di tale fonte di energia.

Il sistema Terra è soggetto a scambi energetici con lo spazio circostante: in ingresso energia solare, sotto forma di energia luminosa e termica, in uscita la riflessione di buona parte di questa energia (Figura 1.1). Parte dell'energia non riflessa viene sfruttata dal nostro pianeta per mettere in moto l'aria della bassa atmosfera, detta troposfera, creando così i venti, i quali comandano le condizioni climatiche che si hanno giorno per giorno nei vari punti del pianeta [8].

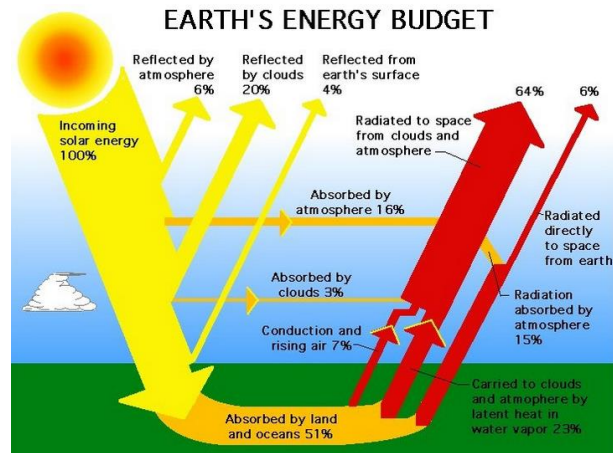


Figura 1.1: Flusso totale di energia attraverso l'atmosfera terrestre ([8])

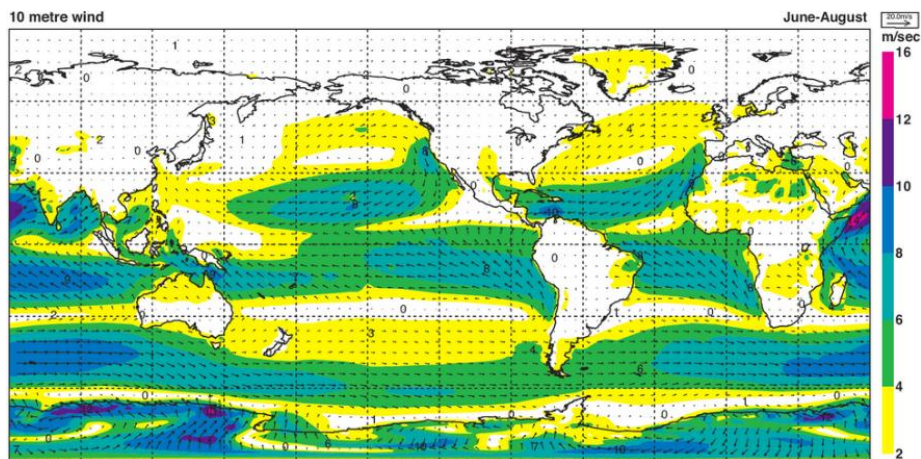


Figura 1.2: Esempio di mappa dei venti medi tipici dei mesi estivi ([9])

I venti che interessano il nostro pianeta, e quindi anche i suoi mari, variano giorno per giorno in maniera non deterministica, dipendendo da una serie di fenomeni particolarmente complessi, funzioni di numerose variabili. Tuttavia i dati accumulati fino ad oggi su velocità e direzioni dei venti (attraverso misure anemometriche) mostrano una certa stagionalità per queste grandezze. In Figura 1.2: Esempio di mappa dei venti medi tipici dei mesi estivi ([9]) si riporta un esempio di mappa dei venti, tipica dei mesi estivi, ad un'altezza di 10 m dal livello del mare [9].

Il vento è a sua volta la causa principale del moto ondoso.

La corrente ventosa, lambendo la superficie degli oceani, ne trasferisce energia per pezzo di azioni di pressione e di taglio, mettendo in moto l'acqua e generando così le onde (Figura 1.3). Le caratteristiche delle onde che si svilupperanno per l'interazione con aria sovrastante dipenderanno da vari fattori, come la velocità del vento rispetto a quella dell'acqua, la durata del vento e il *fetch*, ossia la distanza ininterrotta lungo la quale il vento soffia senza significanti cambi di direzione [10].

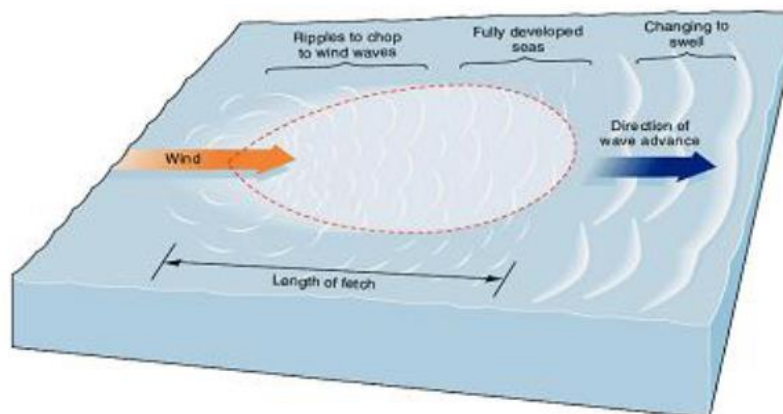


Figura 1.3: Trasferimento dell'energia dal vento al moto ondoso ([10])

Il potenziale energetico delle onde marine è enorme; tale forma di energia è inoltre più concentrata rispetto ad altre fonti rinnovabili, poiché la sua densità è pari a circa 3 Kw/m^2 , maggiore di quella dell'energia eolica ($0,5 \text{ Kw/m}^2$) e solare ($0,2 \text{ Kw/m}^2$) [4].

La potenza globale legata al moto ondoso è di circa 3 TW; essa presenta picchi in mare aperto e livelli più modesti, ma non meno appetibile, nelle zone a ridosso delle coste, a causa della dissipazione per attrito con i più bassi fondali e per i fenomeni di frangimento delle stesse onde.

Paradossalmente livelli di potenza marittima troppo elevati non sono visti di buon grado in quanto metterebbero a dura prova un ipotetico impianto di conversione WEC (*Wave Energy Converter*), nel peggiore dei casi con effetti distruttivi.

Altri vantaggi dell'energia delle onde vengono qui riportati:

- Le onde possono percorrere elevate distanze subendo piccolissime perdite energetiche; ad esempio le tempeste originate nella parte occidentale dell'oceano atlantico viaggeranno verso le coste dell'Europa occidentale subendo piccolissime perdite [4], [11];
- Le percentuali temporali in cui un WEC genererebbe potenza sono molto alte, fino a valori del 90% (invece per impianti eolici o solari, si supera a fatica il 30 %) [11], [12];
- La disponibilità energetica di un sito di mare è valutabile con maggiore accuratezza rispetto al caso eolico in cui, pur avendo ormai accumulato molti dati per la costruzione di mappe eoliche, rimane un'elevata componente random [11], [13];
- C'è una forte correlazione tra risorsa e domanda, poiché circa il 37% della popolazione mondiale vive in un'area costiera larga appena 90 km [13];
- L'energia ondosa è ampiamente disponibile, avendo un elevatissimo numero di siti adatti all'impiego, dai litorali alle zone a largo [13]; in merito a quest'ultimo

particolare, si anticipa che uno dei modi per classificare i WEC si basa proprio sulla loro posizione, *shoreline* (sulla costa), *nearshore* (profondità 10-30 m), *off-shore* (al largo). Il sistema EDS, oggetto del presente lavoro di tesi, è un sistema ideato per la zona costiera/nearshore. Un altro esempio di sistema concepito per acque basse, oltre all'EDS, è il *Mutriku OWC wave plant* posizionato in una diga sulla costa [14]; invece esempi di sistemi pensati per acque profonde sono il *Wave Hub test-site*, posizionato a 15 km dalla costa [15], il *Wave Dragon* [16], il *Pelamis* [17] e l'*OE Buoy* [18].

- Basso impatto ambientale. Oltretutto, i sistemi che lavorano in acque basse andrebbero a smorzare le onde frangenti, limitando l'erosione dell'area costiera [4], [11], [13].

Nessuno dei sistemi precedentemente nominati è ad oggi presente in larga scala sul mercato energetico; inoltre, oltre a quelli citati, ne esistono molti altri ancora sotto forma di modello in scala di laboratorio, esattamente come il caso dell'EDS.

Questo perché ci sono innumerevoli sfide che questa tecnologia deve ancora affrontare prima di poter diventare commercialmente competitiva nel mercato energetico mondiale:

- La conversione del moto ondoso, che è lento (circa 0,1 Hz), random e oscillatorio, in un moto idoneo per la connessione ad un generatore (50 Hz in Europa), così da ottenere un output adatto per la rete.
La variabilità delle onde in altezza e periodo, quindi in potenza, impone l'uso di sistemi di accumulo energetico per garantire un segnale elettrico regolare in uscita: per esempio, serbatoi d'acqua per dispositivi di tipo *Overtopping*, accumulatori di gas in circuiti pneumatici ad alta pressione, grosse capacità e volani elettrici. Nei siti *off-shore*, la direzione delle onde cambia spesso e quindi, per catturare la maggior quantità di energia possibile, i dispositivi dovrebbero allinearsi con tale direzione; per impianti *near-shore* invece, tali direzioni si possono determinare in anticipo [4], [11].
- I convertitori *off-shore* devono resistere a condizioni di mare molto mosso, spesso in tempesta; inoltre le operazioni di manutenzione sono molto costose, perché lontani dalla costa. Un altro importante ostacolo al perfezionamento e alla diffusione di questo settore energetico è il problema dei finanziamenti. Esso deve competere con tecnologie più mature che hanno già ricevuto e che continuano a ricevere grossi investimenti.
Inoltre, nell'attuale contesto di crisi economica in cui viviamo, l'investimento in nuove tecnologie diventa molto difficile.
Compito della comunità scientifica è rendere questa tecnologia più praticabile, conveniente ed efficiente [4], [11].

Per lo sviluppo della tecnologia legata allo sfruttamento all'energia delle onde e per la selezione dei siti adatti all'installazione degli impianti WEC, è necessario conoscere la distribuzione della potenza del moto ondoso sul pianeta (Figura 1.4).

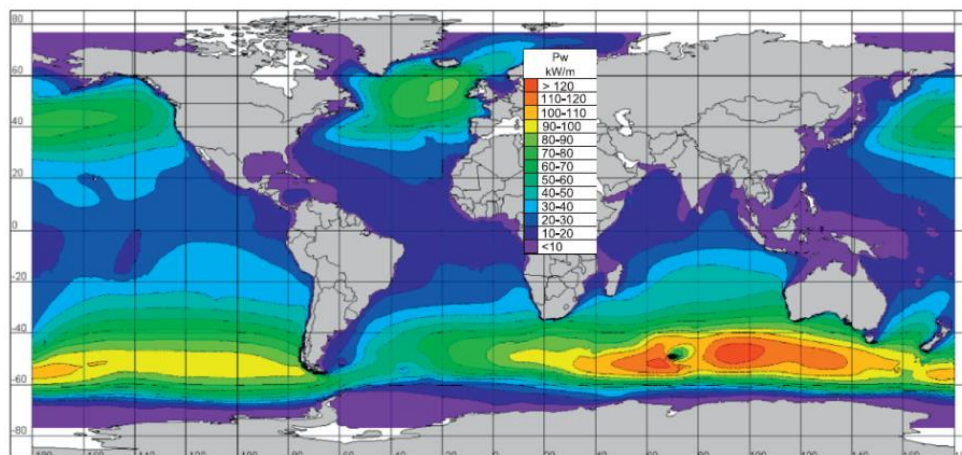


Figura 1.4: Mappa di stima delle potenze d'onda medie annuali sul nostro pianeta, espressa in kW/m, calcolate su un periodo di 10 anni ([24])

Analizzando questa figura si possono trarre alcune conclusioni molto interessanti; se ne riportano alcune, di maggior impatto:

- Le aree più ricche da un punto di vista energetico sono quelle comprese tra i 40° e i 60° in entrambi gli emisferi. Se l'emisfero settentrionale e l'emisfero meridionale vengono paragonati, quest'ultimo ha potenza media annuale maggiore e variazioni stagionali minori [25], [26].
- Nell'emisfero australe, l'energia disponibile delle onde è particolarmente alta nelle zone nella parte Sud dell'Oceano Indiano e vicino le coste meridionali d'Australia, Nuova Zelanda, Sud Africa e Cile; in quest'area la potenza annuale media è maggiore di 120 kW/m . Nell'emisfero boreale, i più alti valori si trovano nel Nord-Atlantico, a largo delle coste occidentali delle Isole Britanniche, di Islanda e Irlanda, con valori compresi tra gli 80 e i 90 Kw/m ; questi valori scendono gradualmente fino a 20 Kw/m in prossimità del ventesimo grado Nord. Anche nel Pacifico, sulla costa occidentale di Canada e Stati Uniti, ci sono buoni livelli di potenza, ma più bassi rispetto ai precedenti, poiché variano dai 20 ai 60 kW/m all'aumentare della latitudine [24], [26].
- Il valore massimo di potenza mensile è simile per i due emisferi, superiore a 200 Kw/m . Mari con questa potenza sono inadatti allo sfruttamento energetico, a causa dell'elevata distanza dalle coste e poiché nessun dispositivo rimarrebbe indenne a onde del genere [25], [26].
- Per quanto riguarda invece la parte a ridosso delle coste, nell'emisfero Nord i più alti livelli sono quelli registrati sulle coste occidentali delle Isole Britanniche, d'Islanda e d'Irlanda. In quello Sud invece i più alti livelli di energia si trovano nel Sud del Cile, nel Sud Africa e nell'intera parte a ridosso delle coste sud occidentali di Australia e Nuova Zelanda.

Valori medi attorno ai 15-20 kW/m sono presenti nelle acque equatoriali, con le zone più energetiche a ridosso delle coste settentrionali del Perù e dell'Ecuador [26].

Un altro importante fattore per definire e valutare la risorsa energetica del moto ondoso è la sua variabilità durante l'anno. Siti in cui si hanno flussi d'energia d'onda più stazionari e moderati sono più appropriati rispetto a siti dove la risorsa è più energetica ma non stazionaria. Questo è dovuto al fatto che, se un sito ha una elevata variabilità di potenza del moto ondoso, il WEC dovrà essere molto sovradimensionato rispetto alla potenza dell'onda media; inoltre, gli stati di mare tempestosi, caratterizzanti zone ad alto contenuto energetico, possono danneggiare il WEC.

Osservando la Figura 1.5 si nota che l'Europa è una tra le aree più ricche del mondo di questa risorsa energetica pulita.

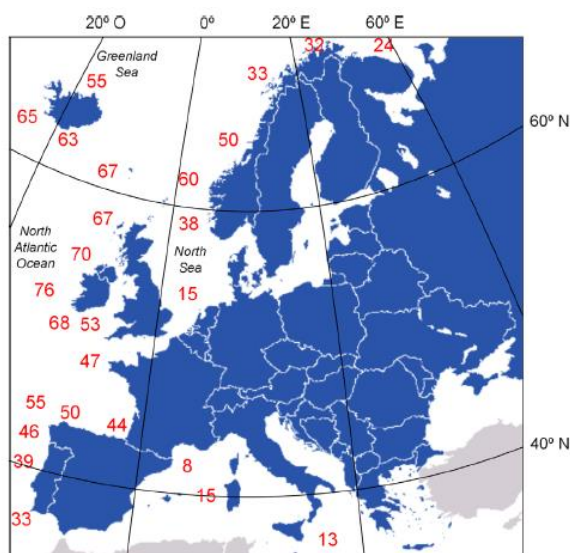


Figura 1.5: Distribuzione in Europa della potenza media annuale, in kW/m ([26])

Nei mari italiani, l'area con il più alto valore di potenza delle onde è quella della Sardegna occidentale, con valori di potenza media annuale di circa 10 kW/m.

Vengono ora elencate le principali tecnologie di WEC esistenti.

1.2 Principali tecnologie WEC

Oggi giorno esiste una grande varietà di sistemi WEC: ci sono più di mille prototipi ([12], [27]) che, in termini generali, si possono classificare in base a tre principali caratteristiche: posizione, taglia e principio di funzionamento. Per la loro classificazione ci rifaremo alle review di Lopez *et al.* 2013 [6].

Di seguito si riportano le classificazioni relative ai tre aspetti precedentemente esposti.

1.2.1 Classificazione in base alla posizione

A seconda della distanza dalla costa si possono distinguere tre tipi di convertitori: dispositivi di tipo *onshore* (o *shoreline*), *nearshore* e *offshore* (Figura 1.6), i quali lavorano rispettivamente con bassi, medi ed alti fondali.

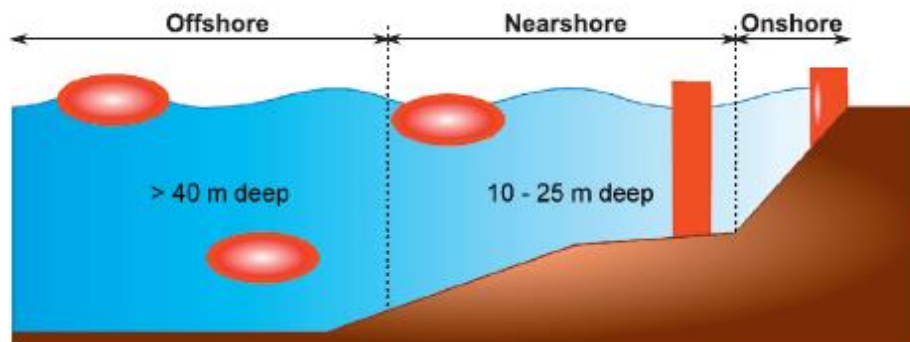


Figura 1.6: Posizione dei convertitori d'energia d'onda a varie distanze dalla costa ([13])

I dispositivi *onshore* sono posizionati sulla costa e possono essere piazzati sul mare (in acque basse), integrati in un sistema frangi-flutti, in una diga, oppure fissati ad una scogliera. Il principale vantaggio di questi convertitori è la loro agevole manutenzione e installazione, essendo il sito facilmente accessibile nella maggior parte dei casi. Inoltre essi non necessitano di alcun sistema di ancoraggio e di lunghi sistemi di cavi marini per la connessione alla rete elettrica. D'altro canto, uno svantaggio di questi dispositivi è che generalmente sulla costa la potenza delle onde è minore che al largo, a causa della interazione con il fondale.

I dispositivi *nearshore* vengono installati a poche centinaia di metri dalla costa, in acque di moderata profondità (10-25 m). Tali dispositivi di solito poggiano sul fondale marino (evitando ancoraggi) ma la struttura deve reggere a sollecitazioni che nascono quando le onde la investono. In altri casi, tali dispositivi possono anche essere di natura galleggiante.

I Dispositivi *offshore* vengono posizionati in acque profonde (profondità superiori ai 40 m), lontani dalla costa, e costruiti sotto forma di struttura galleggiante o semimmersa, ancorata al fondale marino. Grazie alla loro posizione, dovrebbero essere in grado di sfruttare moti ondosi ben più potenti di quelli che caratterizzano le altre due classi di dispositivi; d'altro canto, i costi di gestione e manutenzione, l'affidabilità e la sopravvivenza di questi dispositivi rappresentano un grosso problema.

1.2.2 Dimensioni del dispositivo e caratteristiche direzionali delle onde

Riguardo alla taglia e alla direzione del dispositivo rispetto all'onda in arrivo, i convertitori si possono classificare come segue:

- *Attenuator*: si tratta di lunghe strutture rispetto alla lunghezza dell'onda forzante, posizionate in parallelo rispetto alla direzione d'onda. In sostanza, essi "attenuano" l'ampiezza dell'onda.

In Figura 1.7 viene mostrato Pelamis, prototipo di un convertitore da 750 kW [17], tipico esempio di questo genere di dispositivi. Pelamis è composto da una serie di sezioni cilindriche collegate tra loro per mezzo di giunti flessibili di tipo cerniera, che permettono alle varie sezioni di avere tra loro un moto relativo di tipo rotazionale e di sfruttarlo per produrre energia elettrica.

- *Point absorber*: sono dispositivi di dimensioni piccole in confronto alla lunghezza d'onda.

Diversamente da altri dispositivi, il point absorber raccoglie l'energia in tutte le direzioni attraverso i suoi movimenti. Solitamente sono sistemi oscillanti in una o più direzioni, messi in moto dalla spinta dell'onda. Un esempio è fornito dalla tecnologia OPT PowerBuoy da 150 kW (Figura 1.7) [28].

- *Terminator*: tali dispositivi sono simili agli attenuatori, poiché si tratta allo stesso modo di lunghe strutture. La differenza è però che questi ultimi sono posizionati in maniera perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda; in sostanza, "terminano" l'azione dell'onda. Un esempio potrebbe essere il Wave Dragon terminator (Figura 1.7) [16].

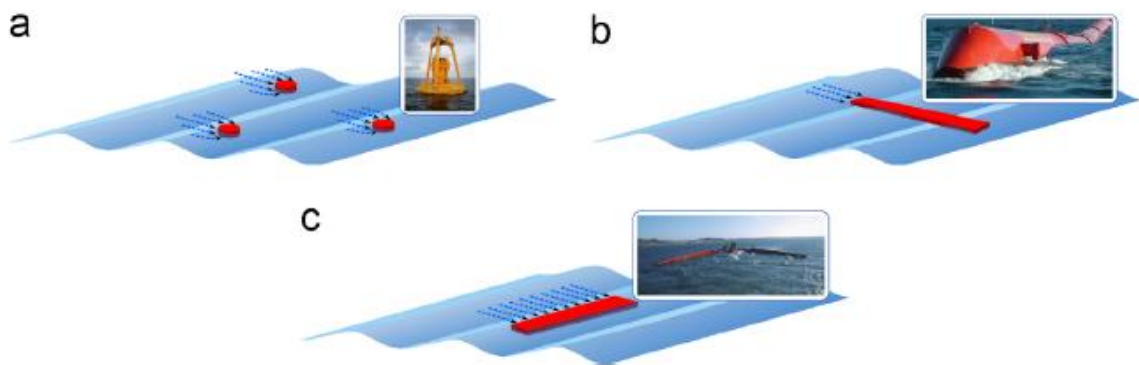


Figura 1.7: Classificazione dei dispositivi WEC in base alle dimensioni: (a) OPT point absorber, (b) Pelamis attenuator e (c) Wave Dragon terminator ([6])

1.2.3 Principi di funzionamento

Un'altra classificazione di questi dispositivi è basata sul loro principio di funzionamento.

Gli OWC (*Oscillating Water Columns*) sono dispositivi che sfruttano la differenza di pressione prodotta dal movimento dell'acqua per muovere aria attraverso delle turbine (Figura 1.8).

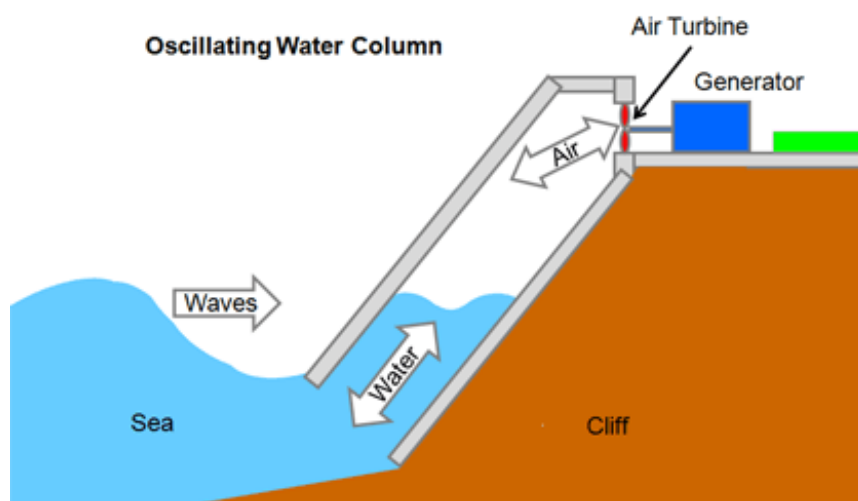


Figura 1.8: Schema di OWC ([29])

Esempi di tale tecnologia si possono trovare nel *Limpet power plant* da 500 kW (Figura 1.12), come struttura fissa sulla costa; invece l'*Oceanlix project* da 500 kW (Figura 1.12) come struttura a ridosso della costa.

I WEC a corpi oscillanti sono dispositivi messi in moto oscillatorio dalle onde, il quale può essere verticale, orizzontale, rotazionale o una combinazione di questi (Fig. 1.8). Inoltre, questo movimento può essere indotto o da un moto assoluto tra un corpo oscillante e un sistema di riferimento esterno fisso, oppure su due o più corpi tra loro interconnessi.

Esempi sono il *Searaser WEC* come singola struttura oscillante, e il *Wavestar* come struttura multipla oscillante (Figura 1.12).

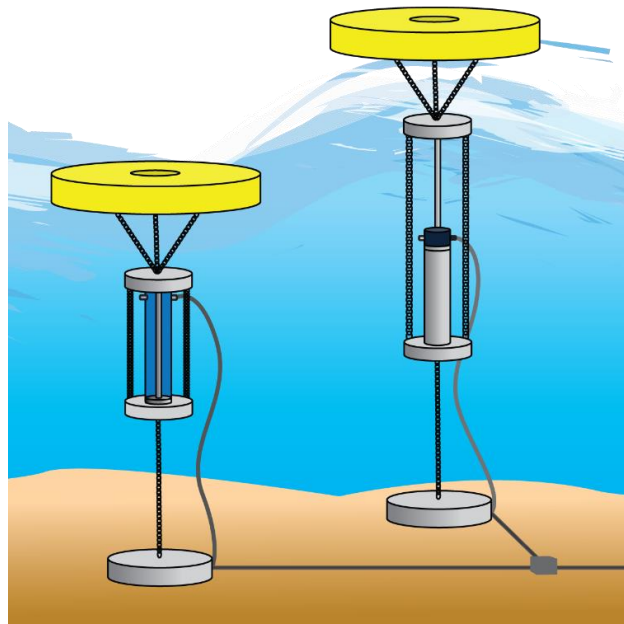


Figura 1.9: WEC oscillanti con moto verticale ([30])

I sistemi overtopping sfruttano il run-up delle onde per accumulare acqua ad un livello maggiore della quota media del mare; successivamente l'acqua contenuta nel serbatoio viene turbinata e raggiunge nuovamente il mare (Figura 1.10).

Esempi di questo genere di convertitori sono il *Wave Dragon* da 4-10 MW a seconda di quanto è energetico il clima delle onde nel sito di installazione e l'*SSG WEC* (progetto pilota da 150 kW posto nell'isola di Kvitsoy, Norvegia) (Figura 1.12).

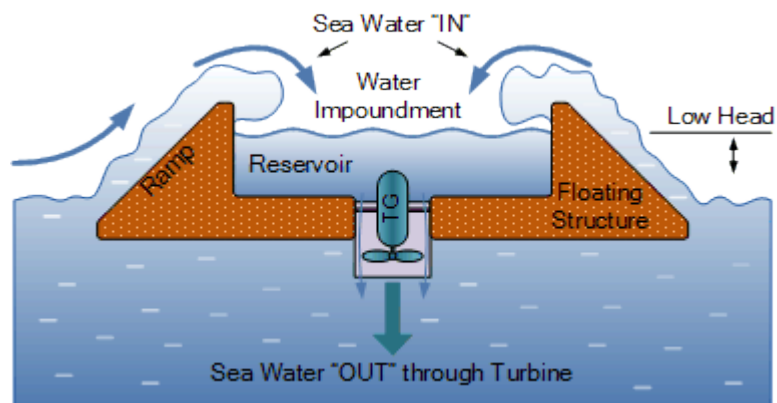
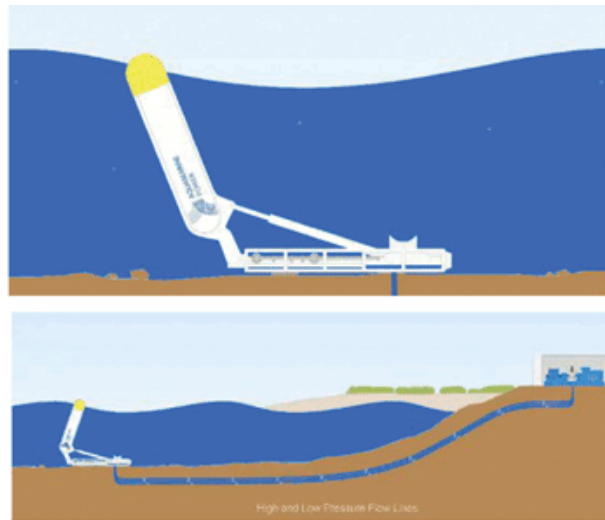


Figura 1.10: Schema di un Sistema Overtopping ([31])

Gli *Impact devices* sono strutture articolate o flessibili posizionate in maniera perpendicolare alla direzione dell'onda. Così, il deflettore si muove avanti e indietro grazie all'impatto delle onde. Un esempio è rappresentato dall'*Aquamarine Power Oyster* da 800 kW [32]. La Figura 1.11 mostra questo dispositivo.



Aquamarine Power's Oyster device is a wave-powered pump which pushes high pressure water to drive an onshore hydro-electric turbine.

Figura 1.11: Aquamarine Power's Oyster ([32])

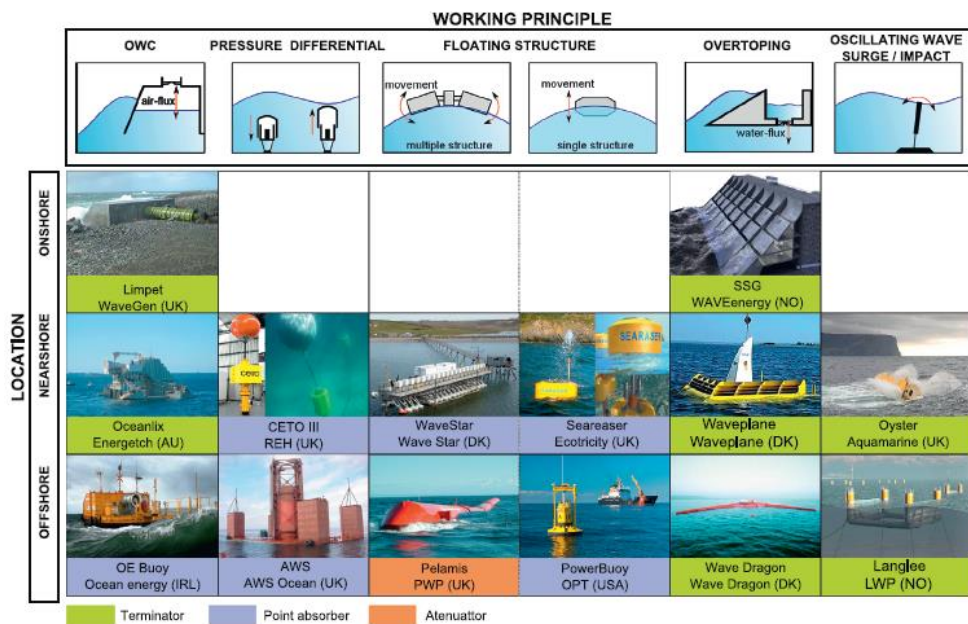


Figura 1.12: Raccolta dei principali convertitori, suddivisi in base alle classificazioni proposte ([6])

Dunque ci sono un elevato numero e varietà di convertitori di energia d'onda, che variano da un punto di vista tecnologico e del progetto. In generale questi dispositivi sono ancora in una fase di sviluppo iniziale rispetto ad altre tecnologie rinnovabili come il solare e l'eolico o rispetto agli impianti convenzionali da combustibile fossile.

Soltanto di alcuni esistono prototipi in scala reale e sono dunque stati testati in reali condizioni del mare, ma nessuno di essi è ancora pronto ad essere commercializzato su larga scala.

Il sistema EDS è un WEC a due corpi oscillanti, di tipo *onshore*, costituito da una pala e da un galleggiante per prelevare l'energia meccanica del moto ondoso.

Avendo questi dispositivi delle dimensioni contenute rispetto alle tipiche lunghezze d'onda che si hanno a ridosso della costa, per la terza classificazione proposta l'EDS è da considerarsi un WEC di tipo *Point Absorber*. Al momento di questo sistema è disponibile un modello sperimentale in scala, situato nel Laboratorio di Idraulica G. Fantoli del Politecnico di Milano.

Nei paragrafi successivi l'EDS viene descritto in maniera più dettagliata da un punto di vista tecnologico, per poi convergere sullo stato dell'arte delle sue prestazioni.

1.3 Un innovativo sistema WEC: l'EDS

In questo capitolo viene presentato il dispositivo studiato nel presente lavoro di tesi: EDS, ovvero *Energy Double System*.

In precedenza sono stati menzionati i principali vantaggi e svantaggi che caratterizzano le installazioni di tipo costiere e quelle offshore. Riguardo alla diversa quantità di energia contenuta dalle onde nei due casi, negli ultimi anni è stato appurato da esperti del settore che la reale energia delle onde a disposizione in acque basse non è poi tanto inferiore rispetto alle posizioni offshore, perlomeno fino ad una profondità di circa 8 m. La *breaker-zone* è dunque la porzione a ridosso della costa in cui le onde iniziano a frangere, con profondità tipiche che vanno dai 5 ai 10 m (questi valori di profondità dipendono anche dalla morfologia del fondale e dal contenuto in frequenza dello spettro d'onda).

Diversi studi (e.g. J.C.C. van Nieuwkoop-McCall *et al.* 2012, Folley and Whittaker 2009), dimostrano che il contenuto energetico delle onde prima che esse frangano può essere una buona parte di quello offshore, in funzione soprattutto della pendenza del fondale. Infatti, in questa zona, l'energia dell'onda è dissipata soprattutto attraverso l'attrito con il fondale e infine per lo stesso fenomeno del frangimento; se la pendenza del fondale è elevata si avranno minori dissipazioni per la minore distanza che l'onda dovrà percorrere in acque basse. Per cui in siti marittimi con fondali ad elevata pendenza l'onda, prima di rompersi, può contenere ancora una grossa fetta dell'energia che possedeva offshore; per questa ragione, una *breaker-zone* di questo tipo potrebbe essere l'ultima posizione vantaggiosa per sfruttare le onde prima che esse dissipino la maggior parte della loro energia.

EDS è un dispositivo concepito per sfruttare appunto le onde in procinto di frangere. L'originalità di EDS è di sfruttare le forze d'onda di *heave* (alzata) e di *surge* (spinta orizzontale) con un'unica macchina; ciò avviene per mezzo di un galleggiante e di una pala montati sullo stesso braccio.

La pala ed il galleggiante sono allineati lungo la direzione di propagazione dell'onda (Figura 1.13), con la prima montata subito dietro la seconda ([35]).

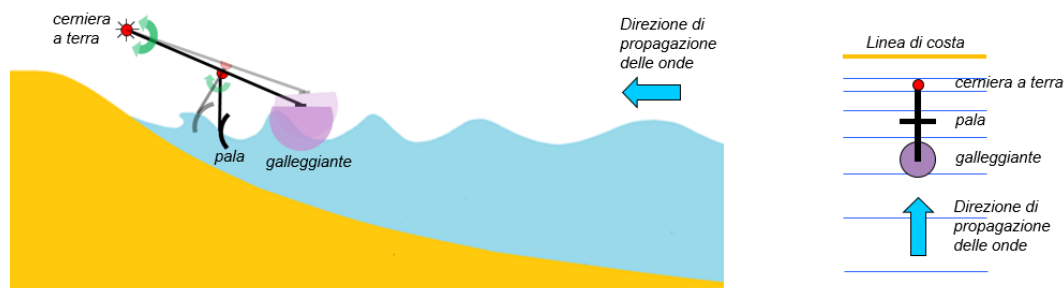


Figura 1.13: Schema del sistema EDS, vista laterale e dall'alto ([1])

Il galleggiante dell'EDS è molto simile a quello di Wavestar ([22], Figura 1.14); esso ha il compito di raccogliere la forza di *heave* o di alzata. La pala dell'EDS invece ha il ruolo di raccogliere la spinta orizzontale, che in acque basse è notevole.

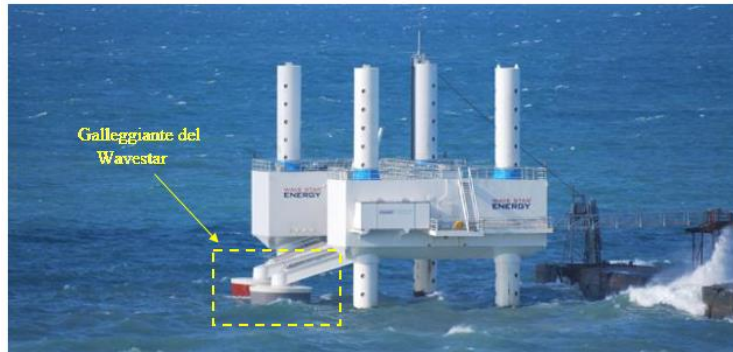


Figura 1.14: Dispositivo WEC di Wavestar in esercizio ([36])

La pala ha un'inerzia molto bassa rispetto a quella del galleggiante; essa ha una immersione confrontabile a quella dell'ampiezza d'onda, e lavora bene con onde frangenti, poiché esse possiedono un elevato trasporto di massa.

La sfida dell'EDS è di unire i due dispositivi che, presi singolarmente, lavorano al meglio con due diverse tipologie d'onda, e quindi in diverse posizioni: il galleggiante, che viene generalmente progettato per siti offshore, e la pala, che lavora in maniera significativa solo se le onde sono vicine al loro frangimento. Infatti, una pala molto simile è stata già testata in presenza di onde non frangenti da *Hazlett et al. 2009*, mostrando dei valori di efficienza piuttosto bassi.

Il sistema EDS è adatto a profondità che vanno dai 3 ai 10 m, a seconda delle caratteristiche del sito e dello spettro d'onda. La posizione di installazione è quindi uno dei parametri di ottimizzazione del sistema EDS, insieme alle sue caratteristiche geometriche e meccaniche. La procedura di ottimizzazione può essere eseguita sia su un modello sperimentale che su un modello matematico, a patto che quest'ultimo sia stato tarato con opportuni test in laboratorio o con simulazioni numeriche.

Lavorare su un modello sperimentale comporta dei costi e dei tempi ben più elevati rispetto ad utilizzare un modello matematico. Questo perché, mentre nel primo caso bisogna eseguire numerose prove sperimentali per arrivare alla configurazione ottimale, nel secondo caso si possono usare tecniche di ottimizzazione numerica e analisi di sensitività per giungere rapidamente a soluzioni ottimali; questo può essere ottenuto a costi e tempi ben più contenuti.

Per cui in questo lavoro di tesi si getteranno le basi di un modello analitico per la modellazione sia della dinamica del sistema meccanico che dell'interazione fluido-struttura. Per questi argomenti, si rimanda ai successivi capitoli.

In questa sede, fatta un'introduzione generale di questo innovativo sistema a due gradi di libertà, ci si limiterà a presentare i risultati finora raccolti in merito alla sua ottimizzazione di tipo sperimentale [1].

1.3.1 Stato dell'arte delle prestazioni dell'EDS

Lo scopo dell'EDS è dunque quella di ricavare la massima energia possibile dal moto ondoso frangente, sfruttando il "lavoro di squadra" di pala e galleggiante che lavorano rispettivamente grazie alla quantità di moto orizzontale e verticale delle onde.

Per dimostrare sperimentalmente se la complicazione del sistema, rispetto ad un classico WEC di tipo *Point Absorber* ad un grado di libertà, che si ha con l'aggiunta del corpo pala porti i benefici di rendimento energetico sperati, sono state analizzate in [1] le configurazioni d'EDS con e senza pala (quindi le configurazioni rispettivamente a due e ad un grado di libertà), avendo premura di garantire per i due casi lo stesso momento d'inerzia ridotto alla cerniera a terra O di Figura 1.15.

Viene riportato in Figura 1.15 uno schema dettagliato del sistema EDS, accanto ad una fotografia del modello fisico di laboratorio. Si rimanda tuttavia ai capitoli successivi 3 e 4 per una descrizione minuziosa dei diversi elementi costituenti tale modello.

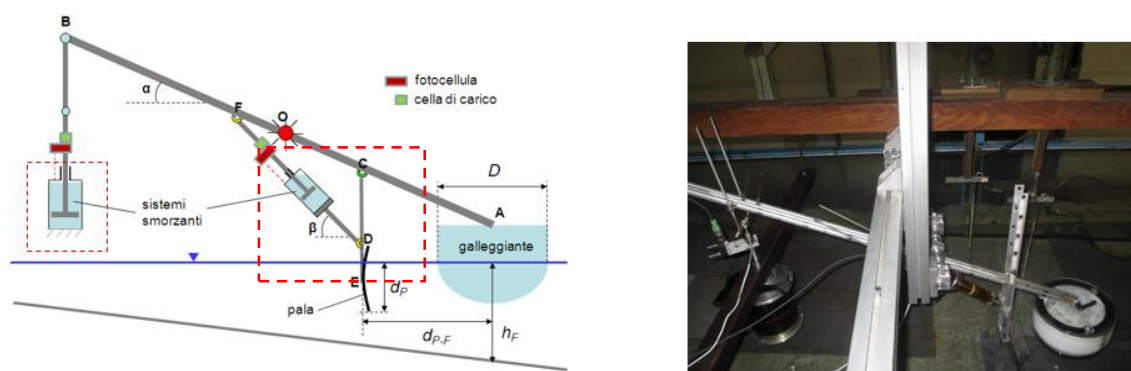


Figura 1.15: Schema e fotografia del modello sperimentale dell'EDS ([1])

Val la pena introdurre da subito il rapporto *CWR* (*Capture Width Ratio*), che definisce il rendimento energetico del sistema in questo modo:

$$CWR = \frac{P_{tot}}{P_W \cdot D} \quad (1.1)$$

In questa formula il numeratore $P_{tot} [W]$ rappresenta la potenza totale assorbita dal sistema EDS mentre $P_W \cdot D [W]$ rappresenta il prodotto della potenza per metro di fronte d'onda $P_W [W/m]$ per il diametro del galleggiante $D [m]$. Successivamente si riporteranno le

relazioni matematiche con cui queste due grandezze vengono ricavate a partire dalle misure sperimentali.

In Figura 1.16 viene riportato il canale, presente nel laboratorio, in cui è alloggiato il sistema EDS; nella stessa figura vengono riportate le principali caratteristiche geometriche del canale e viene evidenziata la zona in cui il modello è stato testato in [1], ossia lungo la spiaggia.

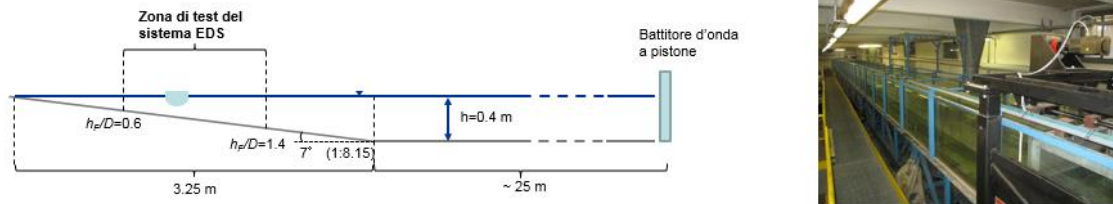


Figura 1.16: Canale di lavoro dell'EDS; nello schema di sinistra viene evidenziata la zona di prova mentre nell'immagine a destra si nota la presenza del battitore d'onda ([1])

Il limite inferiore per h_F/D , rapporto tra profondità dell'acqua al galleggiante e diametro di quest'ultimo, è posto pari a 0.6 per evitare il contatto tra la pala e il fondale.

Le onde utilizzate in questa campagna sperimentale sono di tipo monocromatico; attualmente gli studi sull'EDS vengono solo compiuti solo su onde di questo tipo, per non complicare troppo l'analisi.

Queste onde, create grazie all'azione di un battitore a pistone posto nell'estremo destro del canale (Figura 1.16), vengono misurate sperimentalmente.

Dalla teoria delle onde è noto come per onde monocromatiche piane l'ampiezza sia costante lungo la sua direzione di sviluppo, come mostrato in Figura 1.17.

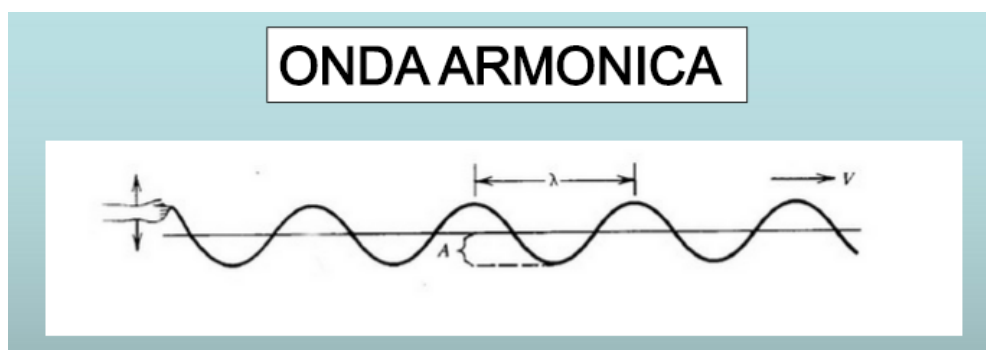


Figura 1.17: Onda armonica teorica ([38])

Tuttavia, nel canale sperimentale in cui lavora l'EDS, a causa della spiaggia posta nell'estremo sinistro (Figura 1.16), si creano dei fenomeni di riflessioni che danno origine ad un'ampiezza d'onda variabile lungo la spiaggia ed il canale stesso.

Dunque anche in caso di onde monocromatiche l'ampiezza d'onda diventa una variabile di progetto dell'EDS che, come sarà presto mostrato, incide e non poco sulle prestazioni del sistema.

Si riportano in Tabella 1 le caratteristiche delle onde utilizzate per questa campagna sperimentale, misurate attraverso delle wave gauges capacitive, nella parte a profondità costante del canale, senza il modello EDS posto al suo interno.

Tabella 1: Caratteristiche delle onde monocromatiche utilizzate in [1]

	a_i [mm]	a_R [mm]	T [s]	L_{th} [m]	L_{exp} [m]	P_i [W/m]	r [%]
wave 1	24.4	1.6	1.02	1.52	1.50	2.70	6.4
wave 4	25.4	1.6	1.36	2.29	2.30	3.97	6.2
wave 2	31.7	2.1	1.20	1.92	1.91	5.45	6.8

In questa tabella a_i e a_r rappresentano le ampiezze d'onda incidente e riflessa, T è il periodo d'onda, L_{th} e L_{exp} le lunghezze d'onda teorica e sperimentale, P_i è la potenza d'onda incidente per metro (precedente indicata anche con P_w), r è il coefficiente di riflessione percentuale.

In merito alle prove eseguite sui sistemi EDS con e senza pala, al variare della posizione nel canale (Figura 1.16), del tipo di onda utilizzato e del livello di smorzamento $b_{1ed,A}$ [Ns/m] (coefficiente di smorzamento viscoso equivalente dello smorzatore del galleggiante), si riportano innanzitutto i valori di rendimento CWR ottenuti per il caso di sistema con solo galleggiante:

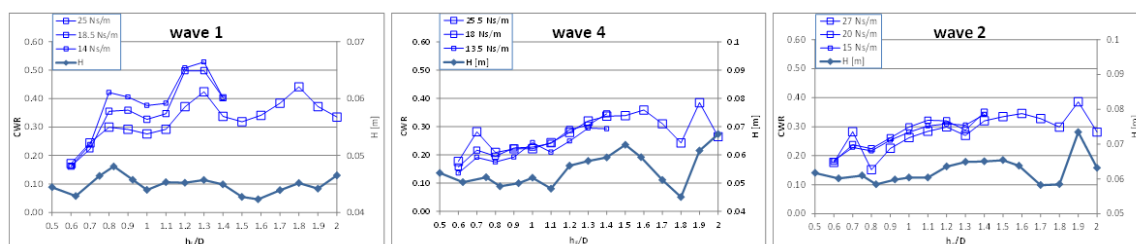


Figura 1.18: Curve di rendimento per il caso di solo galleggiante, per diversi valori di smorzamento strutturale, al variare della posizione del sistema lungo la spiaggia; nella parte bassa si nota, con colore diverso, c'è anche la curva dell'ampiezza d'onda, come

Dai grafici di Figura 1.18 si può notare come gli andamenti dei rendimenti vadano a ricalcare gli andamenti dell'ampiezza d'onda in funzione di h_F/D .

Dagli stessi grafici si può anche notare che dove l'acqua è più bassa lo smorzamento ottimale è più elevato. Per l'onda 1, a causa dei limiti del modello sulla corsa del galleggiante, non è stato possibile raggiungere lo smorzamento ottimale.

Parlando dei test sul sistema completo invece, essi sono stati compiuti variando la distanza pala galleggiante d_{p-F} e, come prima, lo smorzamento del galleggiante $b_{1eq,A}$ e la profondità di acqua al galleggiante h_F , lasciando invariati tutti gli altri parametri del sistema.

Si riportano i risultati di rendimento relativi al sistema completo, in Figura 1.19

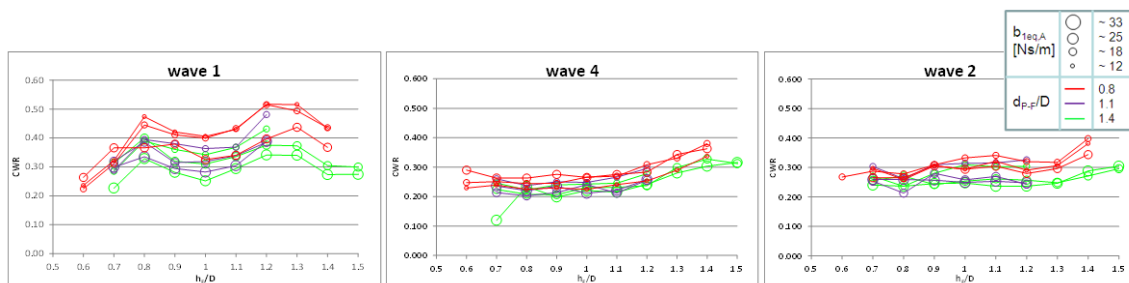


Figura 1.19: Curve di rendimento per il caso di sistema completo, per diversi valori di smorzamento strutturale, al variare della posizione del sistema lungo la spiaggia e della distanza pala galleggiante ([1])

Dai test effettuati appare che la configurazione migliore per l'EDS completo si ha quando la pala si trova molto vicino al galleggiante, in particolare per $d_{p-F}/D = 0.8$.

Lo smorzamento $b_{1eq,A}$ ottimale trovato per le tre onde nella configurazione solo galleggiante, vale anche nel sistema completo, per cui non risente della presenza della pala.

Anche qui, come per il caso a solo galleggiante, si notano picchi di rendimento in concomitanza di quelli dell'altezza d'onda. Il rendimento ottenibile con il sistema completo è in generale maggiore di quello del solo galleggiante, almeno per queste profondità indagate. La differenza maggiore di ha per $h_F/D = 0.6$, dove la differenza è del 10 %.

A completamento di questa parte relativa allo stato dell'arte del sistema EDS sperimentale, si riportano in Figura 1.20 il rendimento di EDS completo accostato a quello del solo galleggiante ottenuto nelle migliori configurazioni.

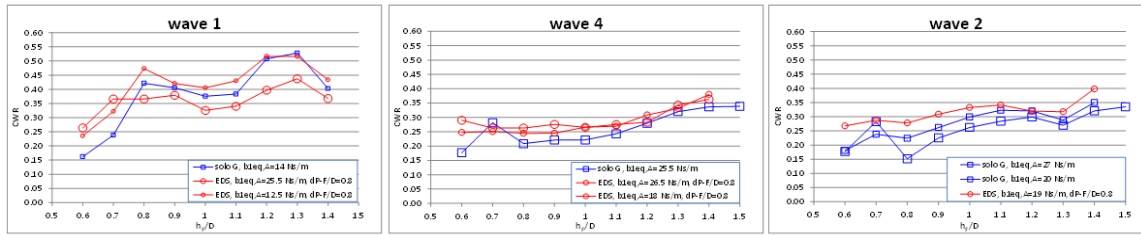


Figura 1.20: Migliori configurazioni dell'EDS completo confrontate con le migliori del solo galleggiante ([1])

In merito alla fase di ottimizzazione del sistema è ovvio che bisognerà procedere con tante altre campagne sperimentali per indagare l'influenza dei restanti parametri del sistema (ad esempio variando lo smorzamento di pala, provando altre posizioni nel canale, sottoponendo il sistema ad altre onde etc..).

Presentando questa parte sullo stato dell'arte del sistema EDS, oltre a mostrare che l'aggiunta della pala potrebbe portare a vantaggi energetici consistenti, si è indirettamente mostrato quanto laborioso sia cercare di ottimizzare il sistema basandosi sul solo modello di laboratorio, giustificando il seguente lavoro di tesi (più gli sviluppi successivi ad esso) volto a definire un modello matematico per il sistema WEC in analisi, attraverso il quale si potrà giungere in modo molto più rapido alla definizione di un sistema ottimo.

2 Fluidodinamica delle onde monocromatiche e loro interazione con strutture galleggianti

Per determinare le forze che nascono dall'interazione onda-struttura è bene conoscere innanzitutto le leggi fisiche e le equazioni matematiche che governano il campo di moto ondoso.

La principale teoria che descrive analiticamente il moto ondoso e le forze esercitate dalle onde su un corpo galleggiante è quella nota con il nome di *Teoria del flusso potenziale* [39]. Essa è una teoria consolidata nell'ambito del complicato problema che si sta affrontando e vale solo se si rispettano determinate ipotesi che saranno a breve elencate; nel momento in cui una o più di esse non venissero a pieno rispettate, si introdurrebbero degli errori che dovranno essere opportunamente quantificati. La prima parte di questo capitolo riguarderà la descrizione analitica delle onde mono-cromatiche indisturbate; successivamente, con adeguati strumenti matematici, si vedrà come ricostruire il campo di moto in presenza di un generico corpo solido posto sulla superficie del fluido, per poi arrivare a definire in forma simbolica le forze scambiate tra onda e corpo solido.

2.1 Descrizione analitica delle onde monocromatiche

Dato un fluido perturbato dalla sua posizione di quiete attraverso azioni interne ed esterne, esso si metterà in movimento, dando origine a delle onde che assumeranno differente aspetto a seconda del tipo di perturbazione considerata.

Aldilà delle azioni che danno origine alle onde, se il liquido in cui esse si formano è soggetto alla sola forza peso, allora si parlerà di onde gravitazionali, che sono il tipo di onde a cui ci si riferirà in questa parte teorica del lavoro di tesi.

Dunque, dato un liquido posto in posizione di equilibrio, se gli si applica una perturbazione esterna esso inizierà a compiere delle oscillazioni che si propagheranno nel mezzo. Si fanno le seguenti ipotesi relative al flusso creatosi:

1. Onde bi-dimensionale sinusoidali, che propagano lungo la direzione x e si elevano lungo la direzione z ;
2. Vengono trascurate la forza di Coriolis e la viscosità del fluido;

Un'onda sinusoidale è descrivibile in maniera sintetica attraverso le seguenti grandezze:

- λ [m]: *lunghezza d'onda*, ossia la distanza tra due creste o due cavi consecutivi;
- $k = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{rad}{m} \right]$: *numero d'onda*;
- A [m]: *ampiezza d'onda*;
- H [m]: *altezza d'onda*, pari a $2A$;

- $T [s]$: periodo d'onda;
- $\omega = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{rad}{s} \right]$: pulsazione d'onda.

Si riporta in forma analitica la generica onda sinusoidale che propaga in direzione x:

$$\eta(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

Questa stessa onda è rappresentata nello spazio in Figura 2.1.

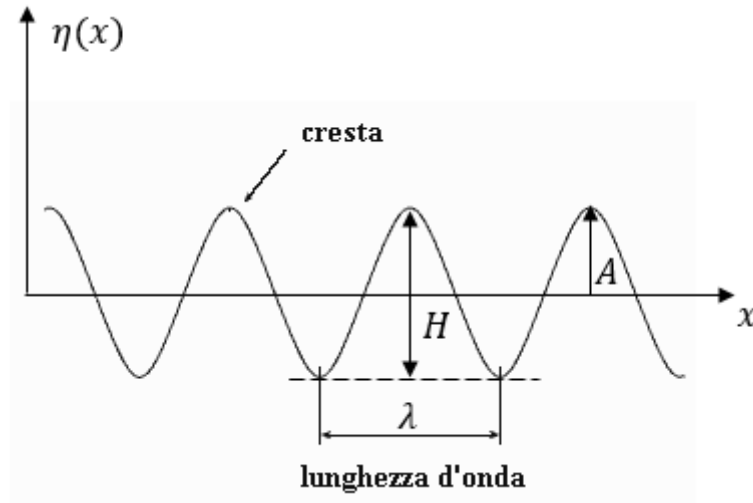


Figura 2.1: Rappresentazione spaziale di un'onda armonica

Ricorrendo ad una notazione fasoriale la stessa onda viene così riespressa:

$$\eta(x, t) = \text{Re}(Ae^{i(\omega t - kx + \phi)})$$

Fissando la posizione x in cui viene osservata l'onda, le due precedenti espressioni diventano funzioni solo del tempo:

$$\eta(x, t) = A \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(Ae^{i(\omega t + \phi)})$$

Le onde gravitazionali si classificano in stazionarie o progressive a seconda che la forma spaziale cambi o meno nel tempo. Ad esempio, le onde generate dall'azione del vento o dal passaggio di una nave sono di natura progressiva; invece le onde utilizzate nelle prove sperimentali dell'EDS, create dal moto del battitore a pistone, sono di natura stazionaria (paragrafo 1.3.1).

Un'altra importante grandezza che caratterizza un'onda piana è la velocità di propagazione c , funzione del periodo e della lunghezza d'onda:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega \lambda}{2\pi}$$

A causa della variabilità della forzante ventosa e dell'irregolarità delle condizioni al contorno, le onde di mare reali sono raramente monocromatiche ma al contrario presentano un profilo irregolare, e vengono definite onde random o appunto irregolari. Esse sono caratterizzate da uno spettro di frequenze e altezze d'onda, e vengono modellate attraverso sovrapposizione di più onde monocromatiche. Tuttavia non ci si occuperà della loro trattazione teorica in quanto non sono state utilizzate in questo lavoro, essendo il primo passo nello sviluppo del modello del sistema EDS.

Per cui si ritiene sufficiente aver dato una descrizione della morfologia delle sole onde sinusoidali.

2.2 La teoria del flusso potenziale

Con l'ipotesi di flusso irrotazionale, la velocità del fluido ammette potenziale, ed è possibile esprimere la velocità come gradiente del potenziale:

$$\vec{V} = \nabla\phi$$

che in un sistema di coordinate cartesiano diventa:

$$\vec{V} = \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = (u, v, w)$$

In questa relazione \vec{V} rappresenta la velocità della vena fluida e ϕ è la funzione potenziale.

In generale l'ipotesi di irrotazionalità è valida in regioni dove non si hanno ricircoli, scie, vortici.

Il rotore della velocità è definito come:

$$\text{rot}\vec{V} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Applicando l'operatore rotore alla velocità definita dal potenziale, si verifica l'assunzione di flusso irrotazionale:

$$\nabla \wedge \vec{V} = \nabla \wedge \nabla\phi = 0$$

L'ipotesi di incomprimibilità del fluido, cioè densità costante $\rho \cong \text{cost}$, permette di semplificare l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{V}) = 0$$

nel seguente modo:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Quindi, inserendo la velocità ricavata dal potenziale si ottiene:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Quest'ultima relazione è detta equazione di Laplace o di continuità del flusso potenziale che in un sistema di coordinate cartesiano diventa:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

In Figura 2.2 è riportato uno schema di un moto ondoso piano che vede rappresentati il dominio fluido e le pareti che lo delimitano, ossia il fondale e la superficie libera dell'acqua a contatto con l'aria:

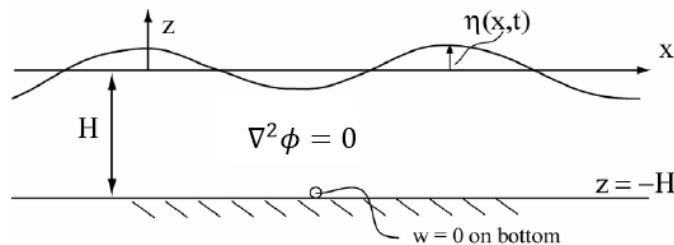


Figura 2.2: Dominio di fluido in cui è applicata la teoria del potenziale

Nel sistema di coordinate x, y, z con origine posta sulla superficie libera, asse z positivo verso l'alto e asse y trasversale al piano del foglio, il potenziale $\phi(x, y, z, t)$ è funzione delle coordinate spaziali e del tempo, e permette di definire la velocità in ogni punto del dominio fluido.

Il risultato espresso nell'equazione di Laplace è molto importante poiché possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, ossia, se ϕ_1 e ϕ_2 sono due soluzioni dell'equazione di Laplace, ciò significa che lo è anche $\phi_1 + \phi_2$.

L'equazione che regola la dinamica del problema è quella di Bernoulli, che possiamo usare introducendo anche l'ipotesi di fluido inviscido. Tale equazione dice che ad un incremento/decremento della velocità del fluido corrisponde una tendenza inversa della pressione o un equivalente cambiamento dell'energia potenziale.

L'equazione di Bernoulli dunque, nelle particolari ipotesi in cui ci si è ricondotti, restituisce il valore della pressione p in funzione del potenziale scalare ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \frac{1}{\rho}(p + \rho g z) = C(t)$$

con $C(t)$ generica funzione del tempo.

Le forze idrodinamiche agenti su un corpo investite da moto ondoso sono perciò ricavabili per integrazione della pressione esercitata dal fluido sulla superficie immersa S_B .

Si può dunque concludere che il potenziale deve obbedire alle equazioni di Laplace e di Bernoulli, che devono essere vere in qualunque punto del campo fluido; da esso è poi possibile calcolare analiticamente la pressione sulle superfici immerse del corpo.

In realtà il problema è molto complesso da risolvere analiticamente e determinare così le forze agenti su un corpo soggetto a moto ondoso.

Esistono dei software (Ansys Aqwa, Comsol Multiphysics, Wamit) che risolvono numericamente le suddette equazioni e sono quindi in grado di calcolare le forze dovute al moto ondoso su oggetti di qualsiasi geometria.

Per risolvere l'equazione alle derivate parziali di Laplace è necessario imporre delle determinate condizioni al contorno di tipo cinematico e dinamico, che vengono di seguito riportate.

2.2.1 Le condizioni al contorno

Per un sistema di WEC che lavora a largo, ad una sufficiente distanza dalla costa, i limiti fisici del fluido sono solamente due, il fondale e la superficie libera (profilo dell'onda).

Qualora venissero a mancare l'ipotesi di lontananza dalla costa e/o l'elevata profondità del mare, le conseguenti interazioni tra l'acqua e il fondale/costa renderebbero inesatte le equazioni che ci si accinge a ricavare.

Poiché questo è proprio il caso di EDS, volutamente concepito per lavorare vicino alla costa, si è consci di compiere un'approssimazione la cui entità andrebbe a posteriori quantificata con una elaborata campagna sperimentale.

Si andranno ora a definire in modo rigoroso le condizioni fisiche in cui si espande il fluido, ossia

le condizioni al contorno fondamentali a chiudere il cerchio relativo al calcolo in forma analitica delle azioni esercitate dalle onde su un generico corpo.

Con riferimento alla Figura 2.2, tali condizioni verranno definite alla superficie libera dell'acqua, sulle pareti del corpo in esame e sul fondo marino; esse saranno usate per completare la trattazione analizzando la teoria lineare di Airy, in cui avverrà una semplificazione delle stesse.

La prima condizione che si presenterà è quella sulla superficie libera d'acqua, la quale verrà divisa in una di carattere cinematico e in un'altra di carattere dinamico.

2.2.1.1 Superficie libera: condizioni al contorno cinematica e dinamica

Le particelle d'acqua situate sulla superficie libera varieranno di continuo la loro posizione nel tempo, ma giaceranno sempre su di essa. Matematicamente ciò equivale ad imporre che il potenziale è legato alla derivata temporale di $\eta(x, t)$ nel seguente modo:

$$\frac{d\eta(x, t)}{dt} = \frac{\partial\eta(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial\eta(x, t)}{\partial x}u = w = \frac{\partial\phi}{\partial z}_{z=\eta}$$

Nel caso particolare in cui l'altezza dell'onda è molto piccola rispetto alle altre grandezze del moto (profondità e lunghezza d'onda), è possibile, trascurando i termini non lineari, ottenere:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z}_{z=\eta}$$

La condizione dinamica invece esprime l'influenza che le forze agenti sulla superficie libera hanno su quest'ultima, e per descriverla si parte dall'equazione di Bernoulli.

La pressione alla superficie libera del fluido è pari a quella atmosferica; se si assume trascurabile la tensione superficiale, allora la pressione netta all'interfaccia fluido-atmosfera è nulla, cioè:

$$P_\eta = P_{atm} = 0$$

Allora l'equazione di Bernoulli diviene:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p-p_a}{\rho} + gz = C(t) \quad p - p_a = 0$$

↓

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gz = C(t)$$

È dimostrabile che il termine $C(t)$ può essere considerato nullo; inoltre, nel caso di onde di tipo lineari aventi un'altezza molto minore rispetto alla lunghezza, $h \ll \lambda$, il termine $\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2$ diventa trascurabile poiché di ordine superiore.

Così, con l'eliminazione della seconda non linearità, si linearizza l'equazione di Bernoulli ed imponendo la condizione $z = \eta$ si ottiene la condizione dinamica:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad z = 0$$

Per cui, combinando quest'ultima con quella cinematica, si ottiene:

$$g \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad z = 0$$

2.2.1.2 Condizione al contorno sul fondale

Per quanto riguarda il fondale, si impone che esso sia impenetrabile. Inoltre, data l'elevata profondità a cui ci si trova, si imporrà anche che la velocità ortogonale al fondale sia nulla, ossia quest'ultimo è "sordo" agli spostamenti di masse d'acqua superficiali.

La somma di queste due ipotesi equivale ad affermare che il flusso attraverso il fondale sia nullo, quindi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = -h$$

2.2.1.3 Condizione al contorno di impermeabilità del corpo

Come fatto per il fondale, anche per il corpo galleggiante si imporrà la condizione di impermeabilità, ossia che le particelle di fluido abbiano velocità normali alla sua superficie nulle.

A questo punto si introduce l'ipotesi di linearità del problema, scomponendo il potenziale $\hat{\phi} = \varphi$ nella somma di due potenziali di velocità φ_A e φ_r :

- Potenziale φ_A derivante dall'interazione fra il corpo galleggiante, considerato fermo nello spazio, e l'onda incidente; quest'ultima frange per la presenza dell'ostacolo, devia il suo percorso originale e varia la sua ampiezza. Da ciò nasce la cosiddetta onda di diffrazione.

Per cui φ_A , secondo il principio di sovrapposizione degli effetti, può essere visto come la somma dei due termini incidente e di diffrazione:

$$\varphi_A = \varphi_{Ai} + \varphi_{Ad}$$

- Potenziale φ_r di radiazione, il quale è indotto dal movimento del corpo galleggiante in assenza di moto ondoso (mare piatto).

Imporre l'assenza di penetramento vuol dire, per i due contributi φ_A e φ_r , scrivere le seguenti relazioni analitiche:

$$\frac{\partial \varphi_A}{\partial n}_{S_B} = \frac{\partial (\varphi_{Ai} + \varphi_{Ad})}{\partial n}_{S_B} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial \varphi_{Ai}}{\partial n}_{S_B} = -\frac{\partial \varphi_{Ad}}{\partial n}$$

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial n}_{S_B} = n_j \quad j = 1, 2, 3$$

(per un'ampiezza unitaria della velocità di spostamento del corpo)

dove S_B indica la superficie bagnata del corpo.

2.3 Soluzione del problema differenziale per il caso di onde lineari

La teoria di Airy (1845), successivamente ripresa anche da Stokes (1847), tratta in forma matematica chiusa il problema legato alle onde di natura periodica.

Tale teoria riesce ad esplicitare una forma analitica per il potenziale di velocità, purché si ipotizzi che l'altezza delle onde sia relativamente modesta, ossia che valga la relazione:

$$H \ll \lambda$$

Tale forma analitica la si ottiene linearizzando le condizioni cinematiche e dinamiche sulla superficie libera, descritte nei paragrafi precedenti.

Nel caso di onde sinusoidali, si può ricorrere alla rappresentazione complessa del potenziale, ossia:

$$\phi(x, y, z, t) = \text{Re}(\hat{\phi}(x, y, z)e^{i\omega t})$$

dove $\hat{\phi}(x, y, z)$ è l'ampiezza del potenziale di velocità nello spazio di definizione (x, y, z) .

Si limiterà il problema al caso di onde regolari piane, lavorando del piano (x, y) . Fatte queste precisazioni, si può procedere con la linearizzazione del problema.

Si riformula innanzitutto il problema differenziale per un'onda sinusoidale piana:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi(x, z, t) = \text{Re} \left(\left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} \right) e^{i\omega t} \right) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \text{ (condizione sul fondale)} \\ \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \text{ (condizione cinematica)} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \text{ (condizione dinamica)} \end{array} \right.$$

Tale sistema, risolvibile con il metodo di separazione delle variabili, porta ad una soluzione del tipo:

$$\phi(x, z, t) = \text{Re}(\hat{\phi}(x, z)e^{i(\omega t - kx)})$$

dove $\hat{\phi}(x, z)$ è l'ampiezza complessa:

$$\hat{\phi}(x, z) = -i \frac{gH}{2\omega} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)}$$

Proiettando il fasore rotante ottenuto sull'asse reale si ottiene:

$$\phi = \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

dove H è l'altezza d'onda, pari alla distanza tra cavo e cresta, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è il numero d'onda con λ lunghezza d'onda. Il termine ω è la frequenza angolare d'onda $\omega = \frac{2\pi}{T}$, con T periodo d'onda.

Per la superficie libera si ha:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

La pulsazione ω risulta legata alla lunghezza d'onda e alla profondità mediante la relazione di dispersione:

$$\omega^2 = gk(\tanh(kh))$$

Questa soluzione vale solamente nel caso in cui l'ampiezza dell'onda sia piccola, in modo che le condizioni al contorno possano essere linearizzate.

Nel caso l'ampiezza delle onde non possa ritenersi piccola, esistono altre soluzioni di ordine maggiore, come quella di Stokes. Tornando alle onde di piccola ampiezza, l'energia totale in esse contenuta è data dalla somma di energia cinetica e potenziale, le quali si equivalgono.

Si dimostra che l'energia totale per unità di area $E \left[\frac{J}{m^2} \right]$ risulta:

$$E = E_c + U = \frac{1}{2} \rho g A^2$$

dove con ρ si è indicata la densità dell'acqua del mare ($\approx 1020 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$), con g l'accelerazione di gravità e $A = \frac{H}{2}$.

Le onde di piccola ampiezza non trasportano massa, ma comunque trasportano energia. Il flusso di energia è dato dal prodotto dell'energia E per la velocità di trasporto dell'energia C_g . Esso rappresenta la potenza dell'onda (per metro di fronte d'onda):

$$P = EC_g$$

La velocità di trasporto dell'energia è detta celerità di gruppo, ed è funzione della pulsazione d'onda e della profondità:

$$C_g = C \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$$

Dove C è la celerità d'onda:

$$C = \frac{L}{T}$$

2.4 Espressione generale delle componenti di forza agenti su un corpo libero investito da onde

Dai concetti teorici esposti nei paragrafi precedenti, è assodato come determinando il flusso potenziale in un dominio fluido possa portare alla determinazione del campo di pressioni che si crea sulla superficie bagnata di un corpo galleggiante.

La variazione nel tempo di tali pressioni è alla base del movimento del corpo che, se libero, avviene tramite tre movimenti di traslazione e tre di rotazione, relativi ai sei gradi di libertà che ha un corpo rigido libero di muoversi nello spazio.

Questi gradi di libertà posseduti dal generico natante sono qui elencati e rappresentati in Figura 2.3:

- *Traslazioni*: Avanzamento (1.surge), Ondeggiamento (2.sway), Alzata (3.heave)
- *Rotazioni*: Rollio (4.roll), Beccheggio (5.pitch), Imbardata (6.yaw)

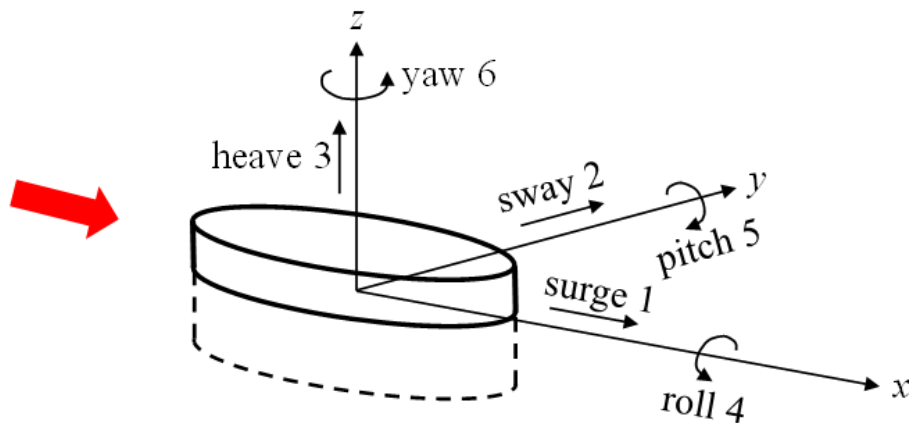


Figura 2.3: Gradi di libertà di un generico natante non vincolato

Nei casi che si andranno ad esaminare relativi all'EDS, si studieranno le interazioni onda-galleggiante e onda-pala.

Essendo questi due elementi vincolati a compiere determinati movimenti permessi dal meccanismo, si considereranno solo le componenti di forza e di momenti relativi a tali movimenti.

L'applicabilità del principio di sovrapposizione degli effetti permette di esprimere il potenziale totale come somma di due contributi, relativi ai due casi:

- *Corpo fisso investito dalle onde*. Questo caso può essere visto ancora come la sovrapposizione di onda incidente (onda indisturbata) e onda diffratta (dovuta alla presenza del corpo);

- Corpo in moto armonico in acqua ferma: la reazione del fluido sul corpo genera onde. Tale forza è funzione del movimento del corpo.

Questo si traduce in:

$$\hat{\phi} = (\hat{\phi}_A + \hat{\phi}_r)e^{i\omega t}$$

Come già detto il potenziale ϕ_A è dato dalla somma del potenziale dell'onda incidente ϕ_{Ai} e quello dell'onda diffratta ϕ_{Ad} . Il potenziale di radiazione sarà pari a:

$$\hat{\phi}_r = \sum_{j=1}^6 \hat{u}_j \varphi_j$$

Esso sarà costituito dalla sovrapposizione lineare dei potenziali generati nell'oscillazione dei 6 gradi di libertà del sistema.

Sostituendo le due precedenti equazioni nell'equazione di Bernoulli e isolando la pressione si ottiene:

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right) = -\rho Re \left[i\omega \left(\sum_{j=1}^6 \hat{u}_j \varphi_j(x, z) + \hat{\phi}_A(x, z) \right) e^{i\omega t} \right] - \rho gz$$

dove il termine $\frac{(\nabla \phi)^2}{2}$ presente nell'equazione di Bernoulli, date le onde di ampiezza modesta considerate, si può trascurare in modo da rifarsi ad un problema linearizzato.

Definendo con n_k il versore normale a ciascun punto della superficie immersa secondo i 6 g.d.l. del sistema galleggiante, le forze F_k che nei sei gradi di libertà si ottengono integrando l'espressione della pressione appena ricavata secondo le componenti normali ai sei gradi di libertà n_k .

Ciò si traduce nel seguente calcolo delle forze:

$$F_k = \iint_{S_B} n_k p ds = \iint_{S_B} n_k \left(-\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right) \right) ds$$

$$k = 1 \dots 6$$

Riportando in essa l'espressione ricavata in precedenza per la pressione si ha:

$$F_k = -\rho g \iint_{S_B} n_k z ds - \rho Re \left[i\omega \sum_{j=1}^6 \hat{u}_j e^{i\omega t} \iint_{S_B} n_k \varphi_j ds \right] -$$

$$\rho Re \left[i\omega \sum_{j=1}^6 e^{i\omega t} \iint_{S_B} n_k \hat{\phi}_A ds \right]$$

$$k = 1 \dots 6$$

oppure, in forma più compatta:

$$F_k = F_{h_k} + F_{r_k} + F_{x_k}$$
$$k = 1 \dots 6$$

In particolare: F_{h_k} rappresenta la spinta idrostatica, F_{r_k} la forza di radiazione e F_{x_k} la forza di eccitazione.

E' bene notare che i termini forzanti relativi a $k = 4,5,6$ sono in realtà dei momenti rotatori e non delle forze vere e proprie, agenti dunque su delle rotazioni e non su degli spostamenti lineari.

Ad esempio, per il caso di una boa vincolata a muoversi nella sola direzione verticale, l'unico movimento in questione è l'alzata (movimento 3, heave), a cui corrisponde la relativa forza F_3 , a sua volta somma delle tre componenti:

$$F_3 = F_{h_3} + F_{r_3} + F_{x_3}$$

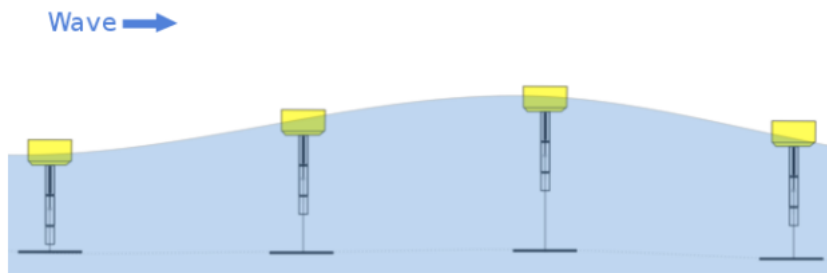


Figura 2.4: Moto di alzata di un sistema di WEC, progettato per onde a largo

Nel momento in cui si andranno ad esplicitare le forzanti per il galleggiante e per la pala dell'EDS, sarà necessario capire, in virtù dei movimenti a cui sono soggetti questi elementi, quali componenti delle sei considerare, individuando la natura dei movimenti concessi dai vincoli a questi corpi rigidi.

2.5 Esplicitazione delle componenti di forza per un WEC in alzata

In Figura 2.5 si riporta un esempio di corpo a sezione cilindrica, con diametro pari ad a , sottoposto all'azione di una generica onda caratterizzata da lunghezza d'onda λ e da ampiezza A_w .

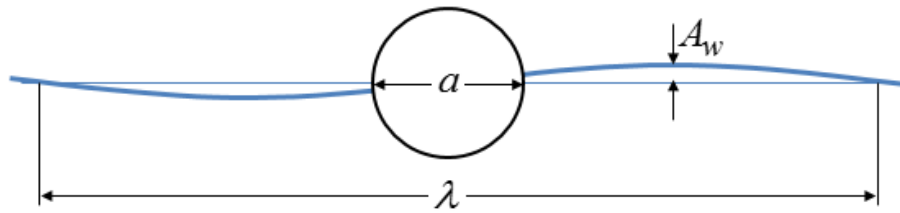


Figura 2.5: Corpo con sezione circolare investito da un'onda a bassa ripidezza ([5])

Se valgono le ipotesi:

- *Corpi stretti*: lunghezza d'onda $\lambda \gg a$, dimensione caratteristica del galleggiante; tale dimensione caratteristica, per il caso di galleggiante sferico, la si ritrova nel suo diametro mentre, per un galleggiante cilindrico (con area di base parallela alla direzione di propagazione dell'onda) è pari al diametro di base dello stesso;
- *Onde poco "ripide"*: ampiezza d'onda $A_w \ll \lambda$;

allora è applicabile la teoria linearizzata mostrata in precedenza per determinare in maniera analitica i diversi contributi che vanno a formare le azioni d'onda su un corpo semimmerso.

Il corpo di generica geometria a cui si fa ora riferimento è rappresentato in Fig. 2.6 in cui:

- ξ = spostamento verticale del sistema a partire dalla posizione di equilibrio statico;
- m = la massa del corpo;
- mg = peso del corpo; in assenza di onde, mg viene detta forza di galleggiamento e $\xi = 0$;

Nell'equazione dinamica che verrà scritta si considereranno soltanto le perturbazioni al sistema posto nella condizione di equilibrio, quindi non apparirà il contributo dovuto alla forza peso. Per essere chiari questo non vale in generale ma dipende dalle caratteristiche geometriche e cinematiche del sistema meccanico interagente con le onde. Questo discorso sarà approfondito nel momento in cui verrà analizzato il lato prettamente meccanico del sistema.

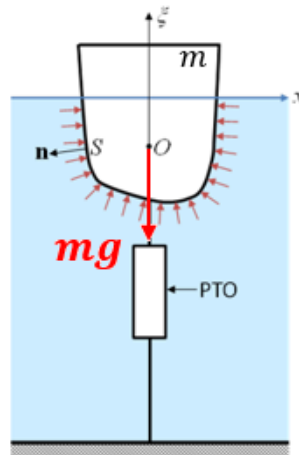


Figura 2.6: Generico sistema WEC, caratterizzato da moto di heave, vincolato al fondale per mezzo del PTO ([5])

In Figura 2.6 si nota la presenza del dispositivo PTO, *Power Take-Off*, che rappresenta la presa di potenza del sistema il quale, in un ipotetico sistema WEC reale trasformerebbe l'energia meccanica in energia elettrica, ma che, in un modello in scala di laboratorio, viene rimpiazzato con un sistema volto alla dissipazione di energia, quale può essere ad esempio uno smorzatore viscoso o coulombiano, spesso posto in parallelo ad un elemento elastico.

Si analizzano i singoli contributi previsti dalla teoria lineare:

- Campi d'onda incidente ϕ_i e diffratta ϕ_d

Contributi che danno luogo alle azioni esercitate dal moto ondoso sul corpo in analisi considerato fisso nello spazio. Questi due campi presi singolarmente soddisfano le condizioni al contorno sul fondo e alla superficie libera dell'acqua, mentre la loro composizione soddisfa anche la condizione al contorno sulla superficie bagnata del corpo, rappresentata dalla seguente relazione:

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \quad \text{Sulla superficie bagnata } S$$

La pressione di eccitazione dovuta a questi due campi d'onda che, integrata, provoca la spinta sul corpo, è pari a:

$$p_e = -\rho \frac{\partial(\phi_d + \phi_i)}{\partial t}$$

in cui ρ rappresenta la densità dell'acqua. Integrando il campo di pressioni che si ha sulla superficie bagnata e proiettandola lungo la direzione verticale si ottiene la componente di spinta di eccitazione sul corpo lungo la direzione di *heave*:

$$F_e = - \int_S n_z p_e dS$$

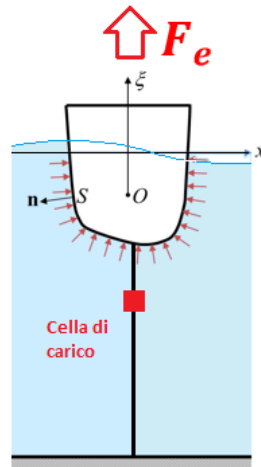


Figura 2.7: Configurazione del sistema per avere dalla cella di carico la misura della componente di eccitazione ([5])

In Figura 2.7 si può osservare la cella di carico per la lettura della forza di eccitazione, considerando perfettamente rigide le due asta tra cui la cella è montata.

- Campo d'onda di radiazione ϕ_r

Contributo funzione del moto del corpo in acqua ferma; tale contributo soddisfa le condizioni al contorno sul fondo, alla superficie libera e sulla superficie bagnate del corpo in movimento:

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial n} = \frac{d\xi}{dt} n_z \quad \text{Sulla superficie } S \text{ bagnata}$$

La pressione dovuta al campo di radiazione che, integrata sulla superficie bagnata del corpo e proiettata in direzione verticale fornisce la componente radiativa di *heaving*, si calcola nel seguente modo:

$$p_r = -\rho \frac{\partial \phi_r}{\partial t}$$

La relativa forza vale invece:

$$F_r = - \int_S n_z p_r dS$$

Per analogia con il caso di eccitazione, si riporta in Figura 2.8 il corpo in moto in direzione verticale sul quale agisce la componente di forza di radiazione F_r che, essendo funzione del moto del sistema, rientra nell'insieme delle cosiddette *Forze di campo*.

Le forze di campo che in generale possono essere funzioni di accelerazione, velocità e spostamento del sistema su cui agiscono (in questo caso il sistema in esame è rappresentato dalla semplice boa vincolata al fondale), vanno dunque a modificare quelle che sono le caratteristiche strutturali del sistema, ossia le proprietà inerziali, di smorzamento ed elastiche del sistema.

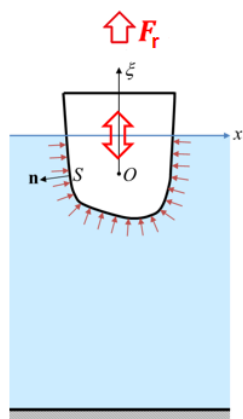


Figura 2.8: Il contributo di radiazione dovuto al moto del sistema in acqua ferma

In questo semplice caso di galleggiante con un grado di libertà (quello verticale di *heaving*), vincolato a terra tramite il PTO, le proprietà strutturali del sistema sono la massa del corpo e lo smorzamento e la rigidità del PTO, ipotizzandolo composto dal parallelo di una molla di rigidità K e da uno smorzatore viscoso di costante C .

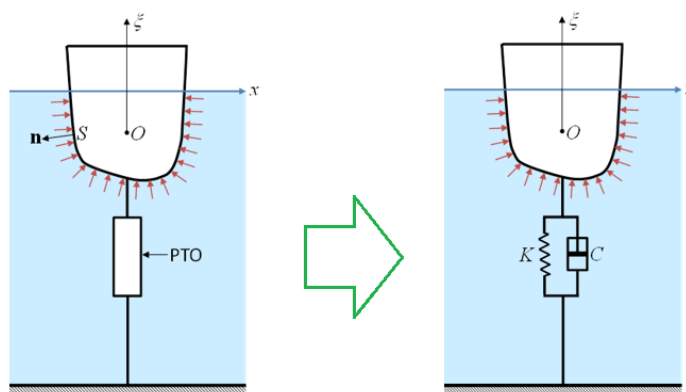


Figura 2.9: Esplicitazione dell'elemento PTO con un parallelo molla-smorzatore ([5])

Le forze sviluppate da un tale PTO sono dunque date dalla somma di un contributo elastico e di uno di smorzamento, quindi da un termine proporzionale allo spostamento tramite la costante K e da un altro proporzionale alla velocità tramite la costante C .

Considerando queste con verso opposto a quello del moto, preso quest'ultimo positivo verso l'alto, si esprimono come segue:

$$F_{PTO} = -C\dot{\xi} - K\xi$$

- Forza idrostatica di restoring

Se, in assenza di onde incidenti, il corpo viene fissato ad una quota $\xi \neq 0$, la forza di galleggiamento (o spinta di Archimede) in tal caso non andrebbe a bilanciare la forza peso. La differenza tra i due dà origine alla *forza idrostatica di restoring* F_{st} .

La spinta di Archimede è pari al prodotto:

$$F_{Arch} = g\rho V_{imm}$$

dove g , ρ e V_{imm} rappresentano rispettivamente costante di accelerazione gravitazionale, densità dell'acqua e volume del corpo immerso.

La forza di *restoring*, legata alla variazione di volume immerso nel tempo, in generale si esprime così:

$$F_{st} = g\rho\Delta V_{imm}$$

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti attorno alla posizione di equilibrio statica la variazione di volume immerso nel tempo si può così approssimare:

$$\Delta V_{imm} \approx -S_{cs}\xi$$

in cui S_{cs} rappresenta l'area racchiusa dal perimetro definito dal battente idrostatico sul corpo galleggiante; il segno meno è dovuto alla convenzione con cui è stata scelta la coordinata libera.

La forza di restoring assume dunque la seguente forma:

$$F_{st} = -g\rho S_{cs}\xi$$

in cui il prodotto $g\rho S_{cs}$ può essere visto come una costante elastica equivalente di restoring, indicata con k_{rest} , misurata in $[N/m]$.

Per cui, in relazione al contributo idrostatico, ricordando le ipotesi di piccoli spostamenti, è equivalente considerare al suo posto una molla fittizia avente costante di rigidità pari a k_{rest} , come riportato in Figura 2.10.

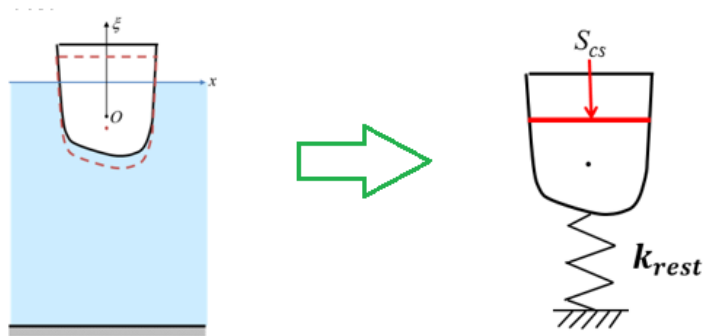


Figura 2.10: Molla lineare equivalente facente le veci del contributo idrostatico di restoring ([5])

Anche il contributo idrostatico, come quello di radiazione, ha le caratteristiche di una forza di campo essendo proporzionale allo spostamento del sistema, quindi tale da modificare il comportamento elastico della struttura a cui viene applicato.

Considerando ora tutte le forze presentate con i rispettivi versi e scrivendo l'equilibrio dinamico in direzione verticale, si ottiene l'equazione di moto del sistema meccanico galleggiante, vincolato a terra tramite il PTO, soggetto alla forzante d'onda composta, a sua volta, dai tre contributi di radiazione, di eccitazione e di restoring; in Figura 2.11 vengono riportati tutti questi contributi, non esplicitati, presi positivi verso l'alto nella scrittura dell'equazione di equilibrio.

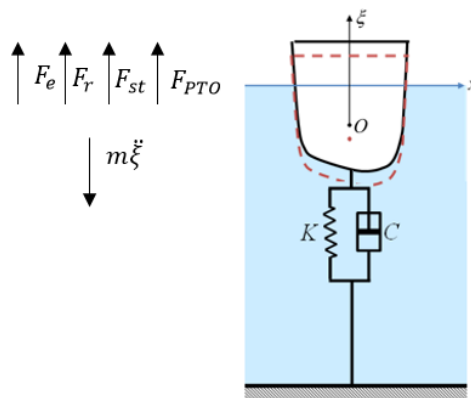


Figura 2.11: Equilibrio dinamico del sistema WEC analizzato ([5])

L'equazione di equilibrio dinamico del sistema in direzione verticale vale:

$$F_e + F_r + F_{st} + F_{PTO} - m\ddot{\xi} = 0$$

$$F_e + F_r - k_{rest}\xi - C\dot{\xi} - K\xi - m\ddot{\xi} = 0$$

Isolando in un membro dell'equazione i termini strutturali e nell'altro quelli di forzamento, si ottiene:

$$m\ddot{\xi} + C\dot{\xi} + K\xi = F_e + F_r - k_{rest}\xi$$

Vista la semplicità del sistema, è stato possibile esplicitare sia il termine di forzamento del sistema che scrivere l'equazione del moto del sistema attraverso gli equilibri dinamici in direzione verticale; non sarà possibile fare ciò per EDS, essendo la geometria e la cinematica molto più complesse rispetto al WEC in alzata qui considerato, per cui si utilizzerà il metodo delle equazioni di Lagrange, che consiste nella scrittura di determinate forme energetiche del sistema da derivare successivamente per la stesura delle equazioni di moto.

Non sono ancora stati esplicitati i termini di eccitazione e di radiazione poiché è necessario fare una ulteriore ipotesi circa il contenuto in frequenza dell'onda che investe il sistema.

A riguardo si considererà il caso di onda incidente monocromatica, esprimibile, in forma complessa, nel seguente modo:

$$\phi_i = \Phi_i(z)\exp[i(\omega t - kx)]$$

Allora il sistema essendo lineare sia per quel che riguarda la parte strutturale che quella di forzamento, può essere espresso da un modello scritto nel dominio delle frequenze, in cui è possibile eliminare la dipendenza dal tempo, essendo tutte le grandezze di tipo armoniche.

Per cui si esprimono i vettori complessi rotanti di spostamento, forza di eccitazione e forza di radiazione:

$$\vec{\xi}(t) = X e^{i\omega t} \quad \vec{f}_e(t) = F_e e^{i\omega t} \quad \vec{f}_r(t) = F_r e^{i\omega t}$$

in cui X , F_e e F_r sono le ampiezze di tipo complesso dei suddetti vettori rotanti.

Si esprime il modello matematico del sistema (equazione del moto forzato) nel dominio dei numeri complessi:

$$m\ddot{\vec{\xi}}(t) = \vec{f}_e(t) + \vec{f}_r(t) + \vec{f}_{st}(t) + \vec{f}_{PTO}(t)$$

in cui i vettori rotanti $\vec{f}_{st}(t)$ e $\vec{f}_{PTO}(t)$ vengono esplicitati nel seguente modo:

$$\vec{f}_{st}(t) = -g\rho S_{cs}\vec{\xi}(t) = -k_{rest}\vec{\xi}(t) \quad \vec{f}_{PTO}(t) = -C\dot{\vec{\xi}}(t) - K\vec{\xi}(t)$$

E' dunque possibile eliminare la dipendenza dal tempo nell'equazione complessa, giungendo al modello lineare nel dominio delle frequenze del sistema analizzato:

$$\begin{aligned} -\omega^2 m X e^{i\omega t} &= (F_e + F_r - k_{rest}X - i\omega CX - KX)e^{i\omega t} \\ -\omega^2 m X - F_r + k_{rest}X + i\omega CX + KX &= F_e \end{aligned}$$

Nel caso di onda monocromatica, la forza di radiazione si scompone a sua volta in due contributi, uno proporzionale all'accelerazione e l'altro alla velocità, entrambi chiaramente di tipo armonico.

Si riportano i casi del dominio del tempo in forma scalare e complessa, per poi anche qui considerare soltanto i vettori ampiezza complessa:

- *Espressione scalare:* $F_r(t) = -A\ddot{\xi}(t) - B\dot{\xi}(t)$

- *Espressione complessa:* $\vec{f}_r(t) = -A\ddot{\xi}(t) - B\dot{\xi}(t)$

I termini A e B rappresentano i coefficienti di *massa aggiunta* [kg] e di *smorzamento idrodinamico* [Ns/m]; esse, in generale, sono funzione della pulsazione d'onda che investe il sistema ma, per il caso di moto armonico, assumono valore costante. Quindi è solo in presenza di onde del genere che è possibile esprimere il contributo di radiazione nella precedente forma.

L'equazione del modello del sistema espresso nel dominio delle frequenze è dunque il seguente:

$$\{-\omega^2(m + A) + i\omega(B + C) + (\rho g S_{cs} + K)\}X = F_e$$

I termini A , B e F_e sono tutti e tre funzione della pulsazione d'onda ω .

Essi, per i casi di acque profonde e di geometrie del galleggiante abbastanza semplici, sono ricavabili da bibliografia (Figura 2.12).

Nel caso invece la geometria del natante assume una geometria più complessa e/o non si rispetta l'ipotesi di lavorare in acque profonde, si può ricorrere a simulazioni numeriche, ad esempio a codici commerciali basati sul Boundary-Element-Method (BEM), attraverso alcuni software come Wamit, Ansys/Aqua, Aquaplug etc..

Oppure, un'altra via è quella di strumentare opportunamente un modello in scala di laboratorio e ricavare queste grandezze sperimentalmente.

Si riportano in Figura 2.12 gli andamenti di massa aggiunta e smorzamento idrodinamico, in funzione della pulsazione d'onda, per un caso di boa sferica e in acque profonde [20].

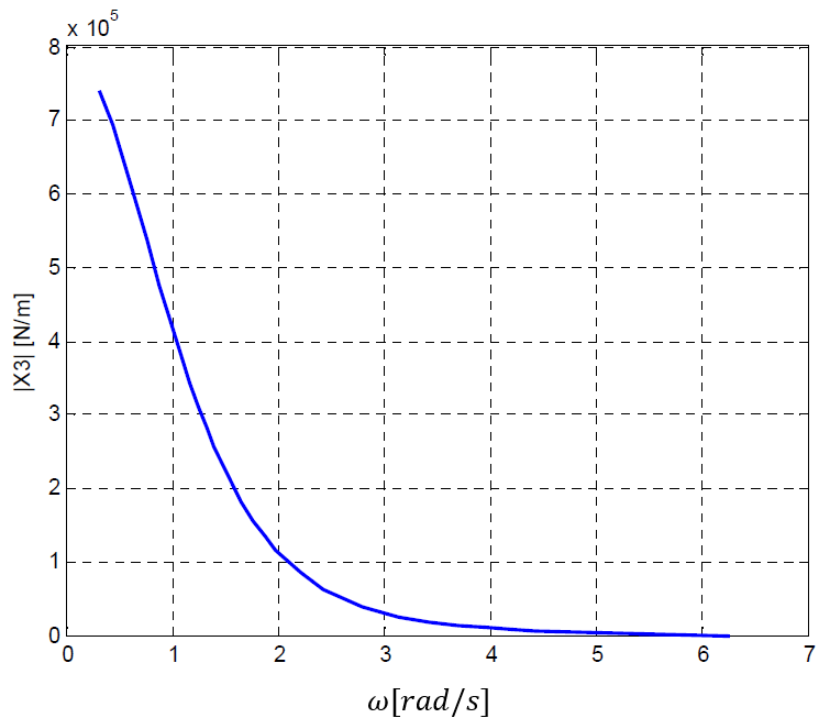
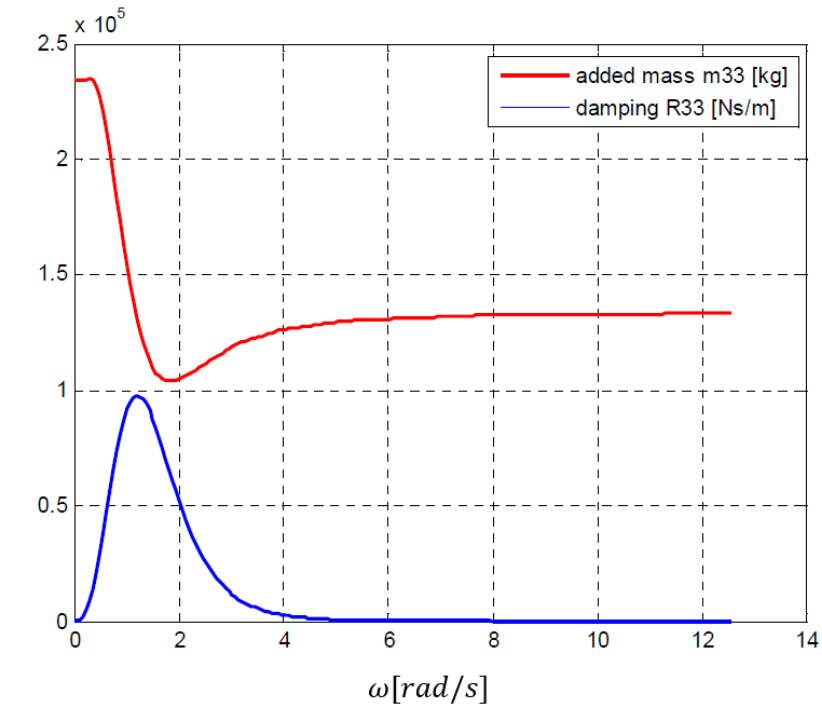


Figura 2.12: In alto, andamenti di massa aggiunta e smorzamento idrodinamico per il caso di boa sferica di raggio pari a $r=5$ [mt] posta in acque profonde (100 metri circa), in funzione della frequenza dell'onda incidente. In basso, si ha invece l'andamento del modulo della forza di eccitazione

La cosa più giusta da fare sarebbe quella di adoperare entrambi i metodi, cercando di ottenere una mutua validazione di essi.

In realtà, per il caso di acque basse, condizione in cui lavora il sistema EDS, il modello matematico del flusso potenziale potrebbe non essere valido a causa dell'insorgere di non-linearità., di cui si parlerà meglio nei capitoli 3 e 4, relativi alle fasi di costruzione delle equazioni di moto del sistema e di taratura sperimentale dei parametri strutturali ma, soprattutto, di quelli di forzamento.

Preso coscienza di questo fatto, l'idea è quella di capire se l'errore che si commette nell'adoperare questo modello per acque basse è accettabile ed eventualmente cercare dei termini correttivi. Tale strategia si è resa necessaria poiché in letteratura c'è poco materiale riguardo alla modellazione analitica di forze esercitate da onde in acque basse.

2.6 Esplicitazione delle componenti di forza per un WEC a due corpi oscillanti

Come anticipato nel capitolo introduttivo, il sistema EDS è un WEC a due corpi oscillanti che lavorano in maniera molto ravvicinata tra loro: la pala con moto prevalente di *surge*, mentre il galleggiante avente una evidente componenti in *heave*.

Per cui val la pena di considerare l'esempio di un sistema analogo, riportato in Figura 2.13, costituito anch'esso da due corpi oscillanti, aventi però entrambi moto di *heave*:

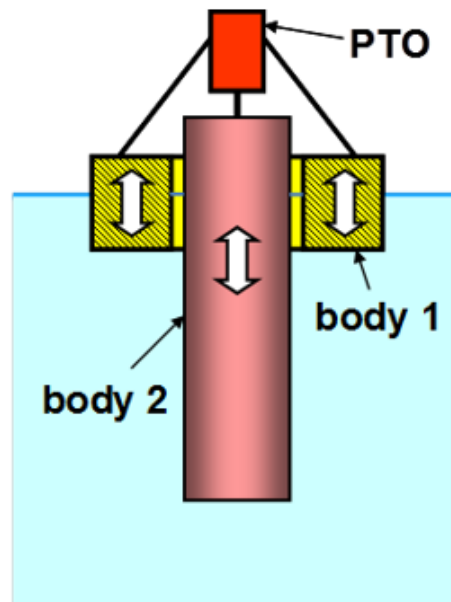


Figura 2.13: Esempio di WEC costituito da due corpi oscillanti in heave ([5])

In questo particolare caso, l'accoppiamento tra i due corpi è dovuto principalmente alle forze del PTO e in via secondaria alle forze associate ai campi d'onda di diffrazione e di

radiazione. La forza di eccitazione su uno dei due corpi dipende dalla presenza dell'altro corpo.

Invece, in assenza di onde incidenti, il campo d'onda radiata indotto dal moto di uno dei due corpi produce una forza di radiazione sia sul corpo stesso mobile che sull'altro.

Tutto quello che è stato appena raccontato viene espresso matematicamente nelle seguenti equazioni di moto del sistema:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = f_{e,1} + f_{r,11} + f_{r,12} - g\rho S_{cs,1} \xi_1 + f_{PTO} \\ m_2 \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = f_{e,2} + f_{r,22} + f_{r,21} - g\rho S_{cs,2} \xi_2 - f_{PTO} \end{cases}$$

I termini di accoppiamento tra i due sottosistemi, oltre alla forza trasmessa per il PTO, sono i contributi di eccitazione e quelli di radiazione, ossia $f_{e,1}$, $f_{e,2}$, $f_{r,11}$, $f_{r,12}$, $f_{r,21}$ e $f_{r,22}$. Anche per questo caso, essendo il sistema lineare, se si considerano onde forzanti monoarmoniche allora è possibile portare il modello nel dominio delle frequenze.

La forza del PTO viene espressa funzione del moto relativo tra i due corpi:

$$f_{PTO} = -C \frac{d(\xi_1 - \xi_2)}{dt} - K(\xi_1 - \xi_2)$$

Si definiscono i vettori complessi rotanti:

$$\vec{\xi}_i(t) = X_i e^{i\omega t} \quad \vec{f}_{e,i}(t) = F_{e,i} e^{i\omega t} \quad \vec{f}_{r,ij}(t) = F_{r,ij} e^{i\omega t} \quad (i, j = 1, 2)$$

La forza di radiazione può a sua volta essere divisa nei suoi due contributi inerziale e di smorzamento:

$$F_{r,ij} = (\omega^2 A_{ij} - i\omega B_{ij}) X_j \quad (i, j = 1, 2)$$

Da notare che i coefficienti A_{ij} e B_{ij} non possono essere negativi; inoltre si può provare che

$$A_{12} = A_{21} \text{ e } B_{12} = B_{21}.$$

Quindi si riporta il modello a due gradi di libertà per il dominio delle frequenze:

$$\begin{cases} \{-\omega^2(m_1 + A_{11}) + i\omega(B_{11} + C) + (g\rho S_{cs1} + K)\} X_1 + \{-\omega^2(A_{12}) + i\omega(B_{12} - C) - K\} X_2 = F_{e,1} \\ \{-\omega^2(m_2 + A_{22}) + i\omega(B_{22} - C) + (g\rho S_{cs2} - K)\} X_2 + \{-\omega^2(A_{12}) + i\omega(B_{12} + C) + K\} X_1 = F_{e,2} \end{cases}$$

3 Modellazione matematica del sistema EDS

In questo capitolo, che rappresenta il cuore del lavoro di tesi, si presentano tutti i passaggi concettuali che hanno portato alla definizione del modello analitico-numerico del sistema EDS.

Si partirà innanzitutto dando una forma alle forzanti del sistema che nascono dall'interazione del moto ondoso con pala e galleggiante.

Successivamente verrà curata la parte prettamente meccanica del sistema, ossia si mostreranno in maniera dettagliata i passaggi che portano alla scrittura delle equazioni del moto dello stesso.

In un primo momento i sistemi asta-pala e asta-galleggiante verranno trattati separatamente, scrivendo per ognuno di essi l'equazione di equilibrio dinamico. Successivamente, verranno scritte le equazioni di equilibrio del sistema EDS completo (due gradi di libertà). Grazie al principio di sovrapposizione degli effetti sarà possibile utilizzare alcuni dei risultati ottenuti sulla modellazione dei due sistemi singoli a vantaggio del sistema completo.

Tutte le equazioni di moto che si scriveranno saranno prontamente riportate in Simulink, strumento molto efficace in fase di integrazione delle equazioni differenziali, grazie al quale si riuscirà a simulare il comportamento dinamico del sistema in tempo reale.

3.1 Modellazione delle forzanti di interazione onda-galleggiante e onda-pala

Nel capitolo 2 è stato affrontato il discorso relativo alla *Teoria del flusso potenziale*, dove si è visto che il forzamento esercitato dalle onde su un generico corpo galleggiante non vincolato è costituito, per ognuno dei 6 gradi di libertà, dalla somma di tre componenti:

- *Componente Idrostatica*
- *Componente di Radiazione*
- *Componente di Eccitazione*

In un primo momento, come anticipato, si analizzeranno separatamente i due sistemi ad un grado di libertà asta-galleggiante e asta-pala; tali sistemi non sono altro che due aste incernierate a terra, per cui sono dotati di grado di libertà rotazionale.

Per poter definire però le forzanti secondo il precedente approccio teorico bisogna ben conoscere il moto relativo tra i corpi a contatto con il fluido (il galleggiante e la pala) e le onde che investono il sistema. Una volta definito questo moto, si potrà procedere

all'espressione dei singoli termini della sovrapposizione lineare degli effetti dettata dalla teoria del flusso potenziale; si anticipa che questi contributi saranno funzione di certi parametri fluidodinamici che, per il caso di acque basse, non sono presenti in letteratura. Per cui sarà necessario ricorrere tecniche sperimentali o numeriche per la loro definizione. Prima di analizzare i casi specifici relativi all'EDS, si affronta un esempio di WEC di geometria generica dotato soltanto del moto di alzata, detto moto di *heave*.

3.1.1 Il modello di forzamento al galleggiante

Il movimento del galleggiante rispetto all'acqua, considerando il sistema EDS di tipo piano, sarebbe a rigore rappresentata dalla sovrapposizione dei tre movimenti di *heave*, *pitch* e *surge* contemplati dal generico moto di un corpo rigido nel piano xOy , avente origine nella cerniera O del sistema (Figura 3.1), che genererebbero un moto roto-traslatorio, come si può notare nella Figura 3.1 in cui il galleggiante varia nel tempo la propria posizione lungo l'asse x , l'asse y e il proprio orientamento.

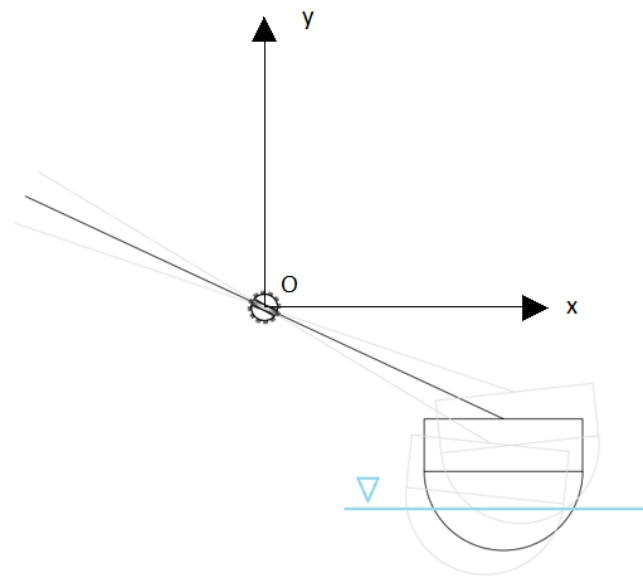


Figura 3.1: Moto del galleggiante roto-traslatorio rispetto alla superficie dell'acqua

Quindi se si vuol modellare il forzamento riferendosi in maniera rigorosa alla teoria del flusso potenziale, si dovrebbero quantificare i tre contributi idrostatici, di radiazione e di eccitazione per i tre tipi di movimenti definiti:

$$F_k = F_{h_k} + F_{r_k} + F_{x_k}$$

$$k = 1, 3, 5$$

dove i numeri 1, 3, 5 individuano rispettivamente i moti di *heave*, *surge* e *pitch*.

Per ogni tipo di movimento andrebbero poi calcolati i parametri fluidodinamici di massa aggiunta, smorzamento idrodinamico, ampiezza e fase relativa della forza di eccitazione, funzioni della frequenza di moto, per un totale di dodici incognite. Per la validità del principio di sovrapposizione degli effetti, è possibile ricondurre il forzamento nei tre moti di *heave*, *surge*, *pitch* ad un unico forzamento rotazionale in O.

Per cui la forzante del sistema interagente con il moto ondoso sarebbe un momento totale composto dalla somma lineare dei tre contributi stabiliti dalla teoria del flusso potenziale:

$$M_{gall} = M_h + M_r + M_x$$

Analogamente a quanto definito nell'esempio del WEC dotato del solo moto di alzata, verranno espressi i contributi idrostatici e di radiazione in funzione del moto del sistema, i quali vanno a modificare le caratteristiche strutturali del sistema di partenza.

Si rimanda questa fase al paragrafo 1.2.3.1 in cui verrà scritta l'equazione di moto del sistema asta-galleggiante. A conclusione di questa parte, si riportano in Figura 3.2 i contributi di forzamento, distinguendo la parte di eccitazione da quelle idrostatica e di radiazione:

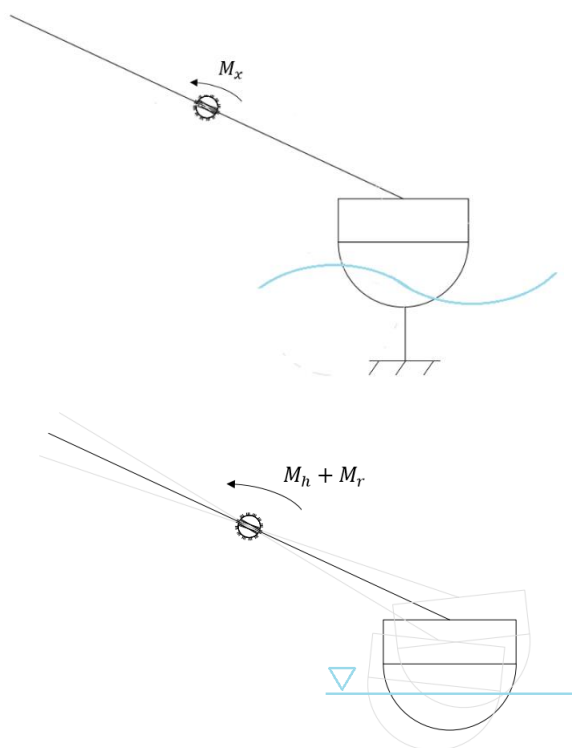


Figura 3.2: Distinzione concettuale tra i contributi di eccitazione (a sinistra) e quello di radiazione/idrostatico

3.1.2 Il modello di forzamento alla pala

La differenza tra la pala e il galleggiante, oltre a riguardare la geometria, concepita per sfruttare due diverse forzanti del moto ondoso, consiste anche nell'aver un moto differente a seconda che venga considerato il modello ad uno o due gradi di libertà.

In particolare, per come è costruito il sistema (Figura 3.3), mentre il moto del galleggiante (e quindi le ipotesi che si fanno su di esso) rimane invariato nel passare dal sistema ad un grado di libertà a quello completo, quello della pala invece varia in quanto nel caso ad un grado di libertà, la cerniera C è a terra, mentre nel sistema completo C ruota attorno a O.

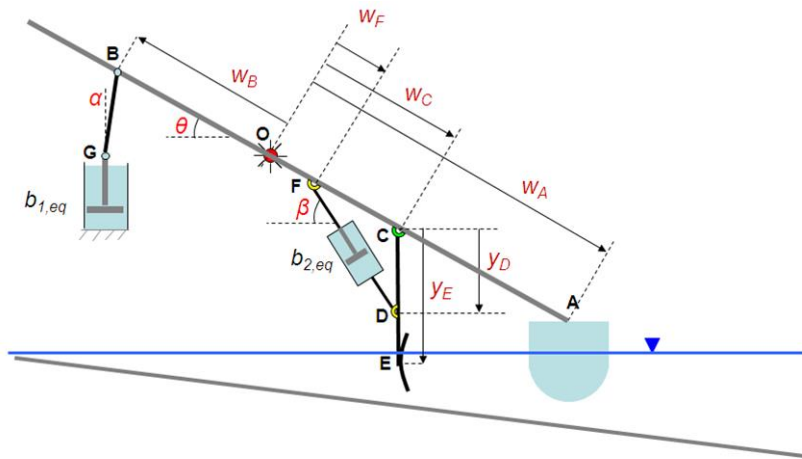


Figura 3.3: Schema totale del sistema EDS a 2 gradi di libertà

Partendo dal caso di sistema ad un grado di libertà, per determinare il movimento della pala considerando la cerniera in C a terra, è sufficiente considerare un sistema di riferimento inerziale xOy con origine coincidente proprio con il punto C (Figura 3.4).

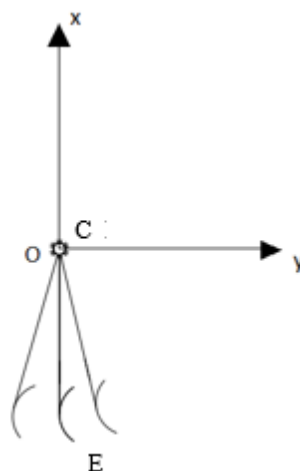


Figura 3.4: Sistema ad un grado di libertà asta-pala

Anche per questo sistema, soggetto a moto piano come nel caso dell'asta-galleggiante, ci sono alcune componenti di moto della pala che si possono trascurare, almeno in questa fase iniziale del problema.

Se si considerano delle rotazioni contenute per l'asta CE, si può considerare che la pala il solo moto di surge (ossia di spostamento nella direzione di propagazione delle onde), trascurando le componenti di *heave* e di *pitch*.

Se lo spessore della pala è piccolo, e il suo sviluppo in direzione orizzontale y è contenuto, si può considerare la forzante d'onda prevalentemente orizzontale; essa viene di seguito riportata, suddivisa nelle sue componenti di eccitazione e di radiazione:

$$F_{pala} = F_r + F_x$$

La spinta idrostatica sulla pala si può ritenere costante al variare dell'angolo di rotazione, in quanto, trattandosi di piccole oscillazioni, il volume della parte immersa di pala non varia molto.

Analogamente a quanto fatto per il caso galleggiante, si riportano in Figura 3.5 i due contributi di eccitazione e di radiazione in maniera separata.



Figura 3.5: Distinzione concettuale tra i contributi di eccitazione (a sinistra) e quello di radiazione

Nel sistema EDS completo la cerniera C è mobile: essa ruota attorno al punto O, compiendo uno spostamento prevalentemente verticale, poiché l'inclinazione di OC rispetto all'orizzontale è contenuta. In Figura 3.6 sono riportati i due sistemi di riferimento per descrivere il movimento della pala in maniera accurata:

- Sistema di riferimento assoluto $x_a O_a y_a$, fisso nello spazio, con origine nel punto O, ossia dov'è posizionata la cerniera a terra dell'EDS;
- Sistema di riferimento roto-traslante $x_t O_t y_t$ con origine nel punto C in cui l'asta CE è connessa all'asta AB con un vincolo interno di tipo cerniera.

Il moto complessivo della pala, visto nel sistema di riferimento assoluto, è dato dalla somma di uno di trascinamento, rappresentato dal moto del sistema $x_t O_t y_t$ rispetto a quello inerziale $x_a O_a y_a$, più uno relativo, rappresentato dal moto della pala visto da un osservatore solidale al sistema di riferimento $x_t O_t y_t$ (Figura 3.6).

Per cui, a valle di tutto questo, andrebbero rivisitate le componenti di *heave*, *pitch* e *surge* della pala.

Facendo l'ipotesi di considerare il moto della cerniera C contenuto e l'ipotesi già citata prima di piccolo spessore della pala (di modo che la forza di heave su di essa sia trascurabile), la componente della forza di *surge* rimane preponderante.

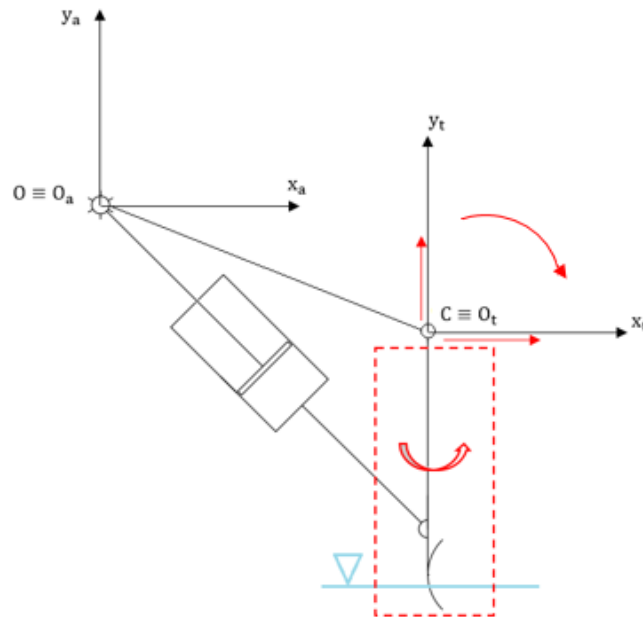


Figura 3.6: Coppia di sistemi di riferimento necessaria a descrivere il moto della pala quando si consideri il sistema globale a due gradi di libertà

Le variazioni cinematiche del sistema pala nel passare da un grado di libertà a due gradi libertà non sono quindi tali da modificare il tipo di forze che nascono dall'interazione onda-pala, che concettualmente saranno uguali a quelle che si vedono in Figura 3.7.

La sostanziale differenza, come si vedrà nei prossimi paragrafi, è che il moto della pala nel sistema a due gradi di libertà sarà funzione di tutte e due le coordinate libere.

Come mostrato in Figura 3.7 (con l'ausilio della Figura 3.3), da un punto di vista dinamico, poiché il forzamento agisce sia sul moto dell'asta della pala CE che su quello dell'asta principale AB, lo smorzatore presente sotto il punto G (Figura 3.3) avrà l'onere di dissipare sia l'energia introdotta dal galleggiante che quella della pala, ammesso che il momento forzante M_{gall} e il momento agente sulla asta AB generato dalla forza di pala F_{pala} siano concordi, ad esempio con M_{gall} anti-orario e F_{pala} che spinge verso destra.

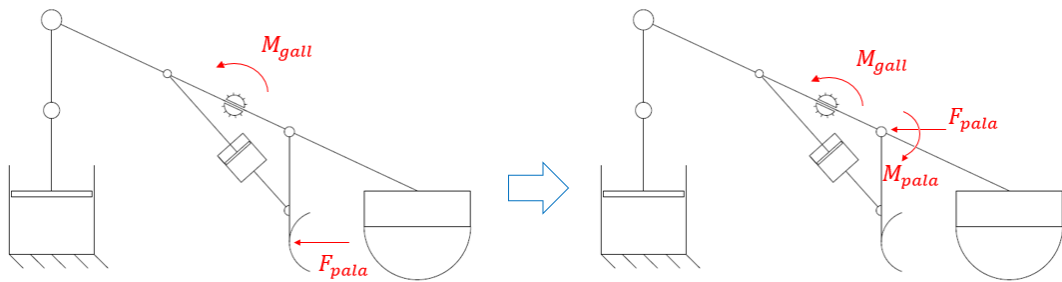


Figura 3.7: Forzamento alla pala rappresentato come una forza orizzontale agente in C più il momento di trasporto

Se invece malauguratamente il momento agente sull'asta AB prodotto dalla pala fosse discorde a quello del galleggiante, allora ci sarebbe addirittura un calo dell'energia raccolta (o meglio dissipata in questo caso) dal dispositivo smorzante GH.

Questo potrebbe essere un aspetto molto importante da considerare in merito alla convenienza nel complicare un sistema WEC ad un grado di libertà (con l'aggiunta appunto della pala) e in vista di una futura ottimizzazione della performance dell'EDS.

3.1.3 I modelli delle forzanti per galleggiante e pala nel sistema EDS globale

Le ragioni per cui un dispositivo WEC ad un grado di libertà oscillante venga complicato e portato a due (o più) gradi di libertà sono soprattutto due:

- Aumentare l'efficienza energetica, come nel caso dell'EDS;
- Evitare di vincolare il sistema al fondale, soprattutto in acque profonde (dai 40 m in su).

In Figura 3.8 vengono riportati degli esempi di sistemi WEC a due corpi oscillanti concepiti per risolvere il problema dell'ancoraggio al fondale.

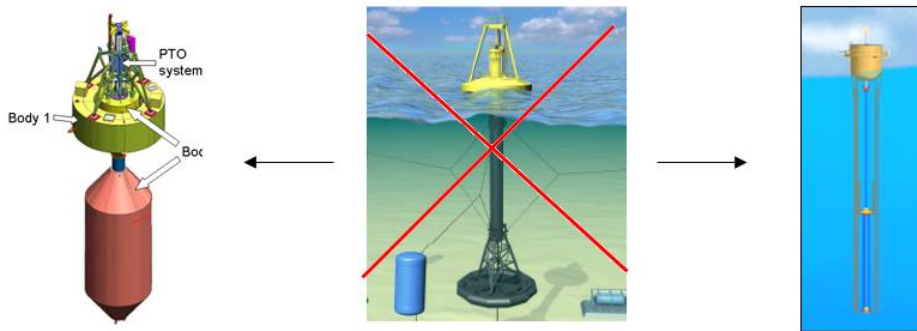


Figura 3.8: Esempi di sistemi WEC in heave a due corpi oscillanti o a due gradi di libertà ([5])

Indipendentemente dalla motivazione per cui si hanno più gradi di libertà, va affrontato il discorso della mutua interazione tra gli elementi galleggianti, che si esprime in una riscrittura dei contributi di forzamento sempre schematizzati secondo la teoria del flusso potenziale.

Con riferimento al semplice sistema a due gradi libertà riportato in Figura 3.9 si proporrà una strategia basata sempre sul principio di sovrapposizione degli effetti per trattare il suddetto problema di interazione.

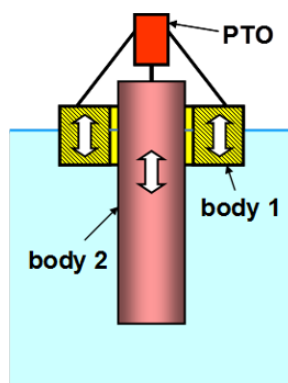


Figura 3.9: Esempi di sistemi WEC in heave a due corpi oscillanti o a due gradi di libertà ([5])

L'accoppiamento tra i corpi 1 e 2 è dovuto principalmente alle forze del PTO e in via secondaria alle forze associate alla diffrazione e alla radiazione delle onde.

Del fatto che questi due dispositivi vadano ad interagire con entrambi i sotto-sistemi asta-pala e asta-galleggiante ne viene tenuto conto nella parte strutturale delle equazioni di moto. Tornando all'esempio, anche la forza di eccitazione su uno dei due corpi è disturbata dalla presenza dell'altro.

In assenza di onde incidenti, il campo d'onda radiato indotto dal moto di uno dei corpi produce una forza di radiazione sul corpo stesso in movimento ma anche sull'altro.

Riconsideriamo le forzanti espresse per il galleggiante e per la pala per i due sistemi ad un grado di libertà, riportate in Figura 3.10:

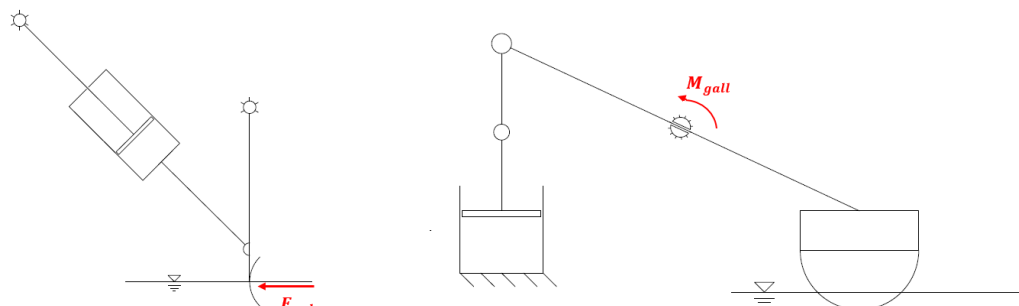


Figura 3.10: Rappresentazione dei termini di forzamento per pala e galleggiante nei due sistemi ad un grado di libertà

Matematicamente tali forzanti, uno di tipo forza e l'altro di tipo momento, sono date dalle seguenti relazioni:

$$F_{pala} = F_r + F_x$$

$$M_{gall} = M_h + M_r + M_x$$

Tralasciando per ora il contributo idrostatico al galleggiante M_h , il quale come si vedrà darà origine ad un termine di richiamo elastico equivalente che verrà considerato tra i termini strutturali del sistema, per entrambe le forzanti si hanno i due contributi di radiazione e di eccitazione.

Adesso, affrontando il problema complessivo relativo all'EDS a due gradi di libertà, bisognerà introdurre il discorso legato alla mutua interazione dei due corpi in movimento che andranno a modificare le forzanti del sistema espresse nei casi separati.

Esse continueranno ad essere un momento ed una forza, in virtù del fatto che anche nel sistema completo i moti relativi di pala e galleggiante rispetto all'onda incidente non vengono stravolti, ma saranno ora costituiti dalla somma di termini aggiuntivi che nascono per la distanza molto ravvicinata tra i due corpi in esercizio, come spiegato nel capitolo 2 per il caso semplice di WEC a moto verticale.

Dunque, dato il sistema completo, vengono modificate le forzanti come segue:

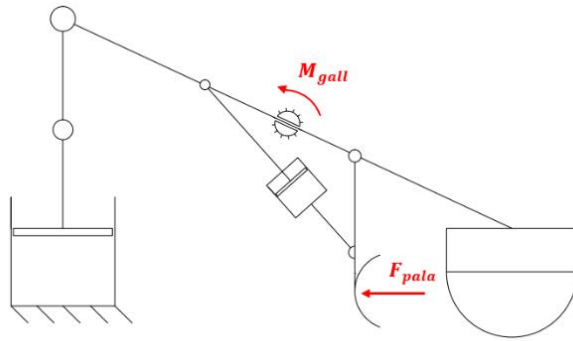


Figura 3.11: Rappresentazione dei termini di forzamento per pala e galleggiante nel sistema complessivo a 2 g.d.l.

Le espressioni analitiche delle forze modificate a seguito di quanto affermato diventano:

- *Corpo 1: Galleggiante* $M_{gall} = M_h + M_{r11} + M_{r12} + M_x$
- *Corpo 2: Pala* $F_{pala} = F_{r22} + F_{r21} + F_x$

Le espressioni appena riportate sottintendono l'ipotesi che le componenti di eccitazione M_x e F_x non siano molto diverse nei casi di galleggiante e pala considerati singolarmente e nel sistema completo.

Come sarà mostrato nella fase conclusiva del capitolo, per l'aggiunta di questi termini aumenterà il numero di parametri incogniti da determinare per calcolare queste componenti, rispetto al considerare i due sistemi separati ad un grado di libertà.

3.2 Equazioni di moto costruite per il sistema EDS

Dopo aver esplicitato in forma concettuale le componenti di forzamento dovute all'interazione delle onde con la pala ed il galleggiante, si analizza la parte meccanico-strutturale del sistema scrivendone le equazioni del moto.

In un primo momento si scriveranno le equazioni di moto dei due sistemi ad un grado di libertà, relativi alla dinamica di asta-galleggiante e di asta-pala (Figura 3.12).

In una fase successiva si affronterà la stesura del sistema di equazioni di moto inerente al sistema EDS completo a due gradi di libertà.

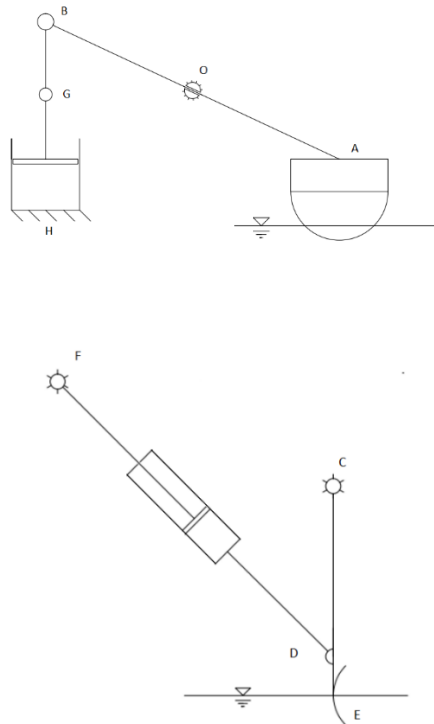


Figura 3.12: In alto, sistema ad un grado di libertà asta-smorzatore-galleggiante; in basso, sistema ad un grado di libertà asta-smorzatore-pala

Prima di passare all'analisi dei componenti dell'EDS, si mostra in generale la procedura da seguire per scrivere le equazioni di moto di un sistema ad uno o a più gradi di libertà.

3.2.1 Modelli ad un grado di libertà del sistema EDS

I due sistemi ad un grado di libertà in questione sono quelli riportati in Figura 3.13.

Essi fanno riferimento ai due sotto-sistemi asta-galleggiante e asta-pala costituenti il sistema EDS globale.

Di entrambi si affronterà prima la scrittura dell'equazione non lineare; successivamente questa sarà linearizzata attorno alla posizione del sistema in quiete.

Attraverso lo strumento Simulink si vanno poi a simulare i comportamenti dinamici dei sistemi ottenuti; in questa prima fase lo strumento Simulink servirà soltanto a dimostrare quanto il comportamento del sistema linearizzato si discosti da quello non lineare.

Di seguito in tabella 1 e 2 vengono riportati i principali dati dimensionali e di massa del sistema EDS complessivo.

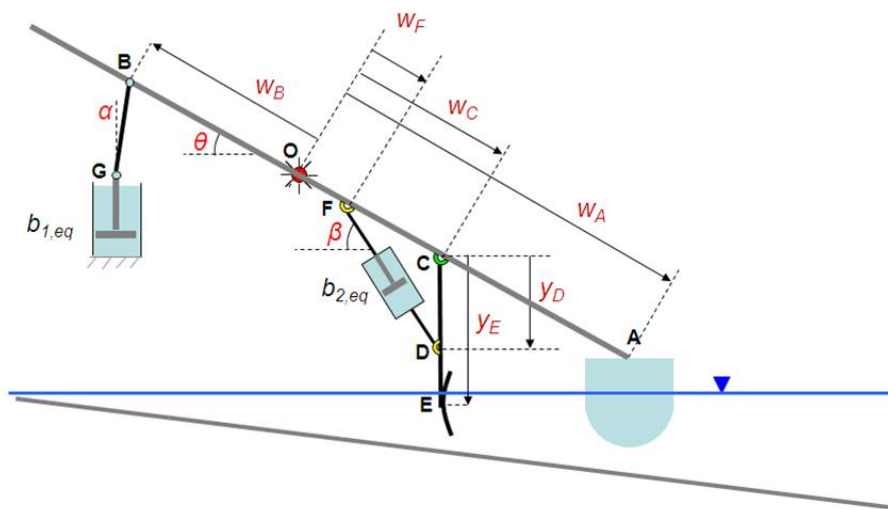


Figura 3.13: Il sistema EDS completo

Tabella 2: Masse degli elementi dell'EDS

Componente	Massa [kg]
Galleggiante + peso da 0.5 kg:	1.219
Asta principale AB	0.55
Asta GB	0.144
Disco smorzante galleggiante (quello che sta sotto G)	0.202
Asta CE +pala	0.302
Cilindro pala (la parte di smorzatore attaccata in D)	0.188

Tabella 3: Dimensioni degli elementi dell'EDS

Componente	Lunghezza [m]
w_A	0.4
w_B	0.45
w_C	0.103
w_F	-0.155
y_D	0.185
y_E	0.25

3.2.1.1 Il sistema asta-galleggiante

Esso è composto dall'asta pesante AB lunga L di densità costante vincolata a terra tramite una cerniera nel punto O. Tale asta, tramite la biella BG, è collegata allo stelo dello smorzatore GH.

Nell'estremo A invece è incastrato il galleggiante che ha il compito di trasferire l'energia meccanica dal moto ondoso al sistema stesso, interagendo con le onde incidenti.

Un altro attore principale del sistema è lo smorzatore, avente il compito di dissipare l'energia meccanica introdotta nel sistema; tale smorzatore andrebbe ad emulare l'effetto dell'apparato per la conversione meccanico-elettrica dell'energia.

Prima di avviarsi alla scrittura dell'equazione di moto seguendo la procedura illustrata in precedenza si preannuncia che verranno fatte una serie di ipotesi che porteranno alla scrittura dell'equazione di moto in maniera più agevole, facendo tuttavia attenzione a mantenere una certa equivalenza coi carichi del caso effettivo.

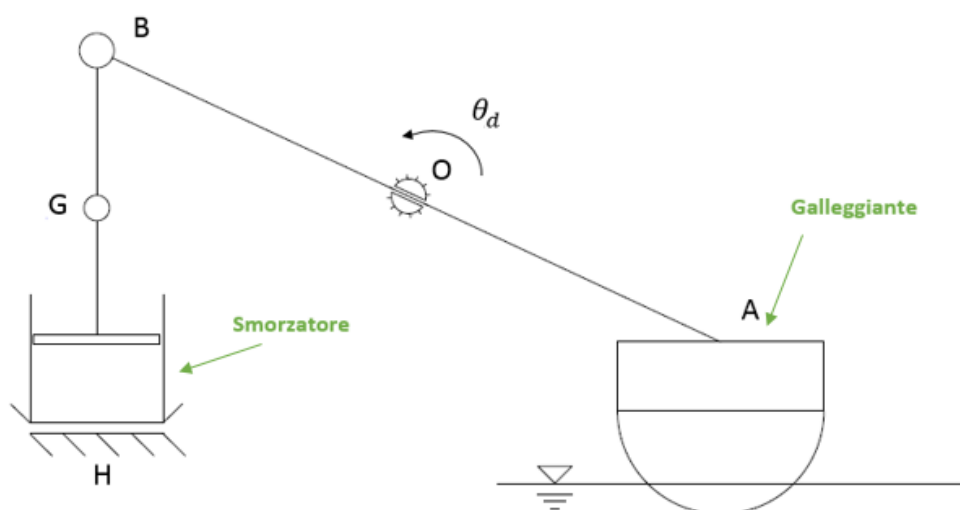


Figura 3.14: Il sistema ad un grado di libertà asta-galleggiante; i due dispositivi evidenziati permettono il flusso di energia attraverso il sistema

Tali ipotesi verranno introdotte e chiarite man mano che vengono analizzati i termini di energia cinetica, funzione dissipativa, energia potenziale e lavoro virtuale delle forze attive. La coordinata libera scelta per la descrizione della dinamica del sistema è rappresentata da θ_d , ossia la rotazione dinamica dell'asta AB misurata a partire dalla posizione di equilibrio statica, presa con convenzione anti-oraria positiva (Figura 3.14).

Energia cinetica

Il primo passo è quello di definire tutti gli oggetti pesanti del sistema in moto, che vanno così a determinare il suo campo d'inerzia.

I principali oggetti mobili dotati di massa sono l'asta AB, il galleggiante in A, la biella e il corpo stelo-disco dello smorzatore.

Tutti questi oggetti sono stati modellati con delle masse concentrate meno l'asta AB, che sarà dunque dotata anche di un momento d'inerzia di tipo baricentrico.

Di seguito una lista dei termini inerziali del sistema che andranno a caratterizzare il termine di energia cinetica:

- Momento d'inerzia baricentrico J_G e massa m_G dell'asta pesante AB;
- Massa m_A del galleggiante più quella di opportuni pesi calibrati vincolati al galleggiante utilizzati per aumentare l'inerzia totale del sistema;
- Massa m_B concentrata in B che comprende quella della biella BG, dello stelo e del disco dello smorzatore.

Per cui concentrando le masse in B si sta facendo l'ipotesi di trascurare il termine rotazionale della biella BG, ipotesi accettabile se l'angolo statico dell'asta AB non è abbastanza piccolo.

In Figura 3.15 è riportato lo schema inerziale del sistema relativo a quanto appena descritto. L'espressione dell'energia cinetica può essere inizialmente scritta mediante coordinate fisiche di comodo:

$$E_C = \frac{1}{2} J_G \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} m_G v_G^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

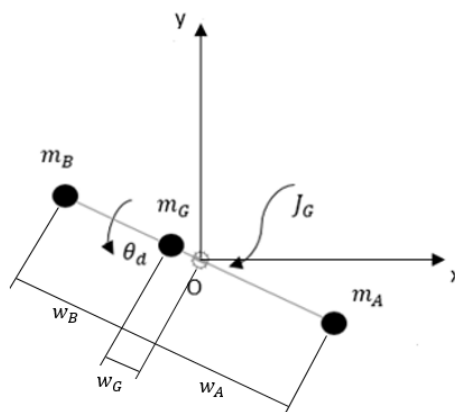


Figura 3.15: I contributi inerziali del sistema analizzato

In questa equazione ω_{AB} indica la velocità angolare assoluta dell'asta AB, mentre v_G , v_A e v_B indicano le velocità lineari assolute rispettivamente del baricentro dell'asta AB, del

galleggiante e della massa fittizia concentrata in B; tutte queste grandezze sono riferite al sistema di riferimento inerziale xOy centrato nella cerniera O (Figura 3.15).

Si elencano ora i semplici legami cinematici che permetteranno di esprimere l'energia cinetica in funzione della coordinata libera del sistema:

$$v_G = w_G \dot{\theta}_d \quad v_A = w_A \dot{\theta}_d \quad v_B = w_B \dot{\theta}_d \quad \omega_{AB} = \dot{\theta}_d$$

in cui le lunghezze w_G , w_A e w_B rappresentano le distanze dalla cerniera fissa O di, rispettivamente, dei punti G (baricentro dell'asta AB), A e B.

Per cui l'energia cinetica si può esprimere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}_d + \frac{1}{2} m_G (w_G \dot{\theta}_d)^2 + \frac{1}{2} m_A (w_A \dot{\theta}_d)^2 + \frac{1}{2} m_B (w_B \dot{\theta}_d)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (J_G + m_G w_G^2 + m_A w_A^2 + m_B w_B^2) \dot{\theta}_d^2 = \\ &= \frac{1}{2} J^* \dot{\theta}_d^2 \end{aligned}$$

Il termine $J^* = J_G + m_G w_G^2 + m_A w_A^2 + m_B w_B^2$ rappresenta il momento d'inerzia generalizzato alla coordinata libera.

Il fatto che J^* non sia funzione della coordinata libera permette all'energia cinetica di presentarsi già in forma quadratica e questo particolare significa che nell'equazione di moto non si presenteranno termini di non linearità legati alla parte inerziale.

La funzione dissipativa

La dissipazione di energia avviene principalmente per mezzo dello smorzatore GH.

Per quanto riguarda questo dispositivo, si farà l'ipotesi di considerare il moto verticale dello stelo uguale a quello che compie il punto B visto come appartenente all'asta AB.

Uno schema appropriato del sistema che garantisca da un punto di vista cinematico l'ipotesi fatta per il moto del punto B è riportato in Figura 3.16.

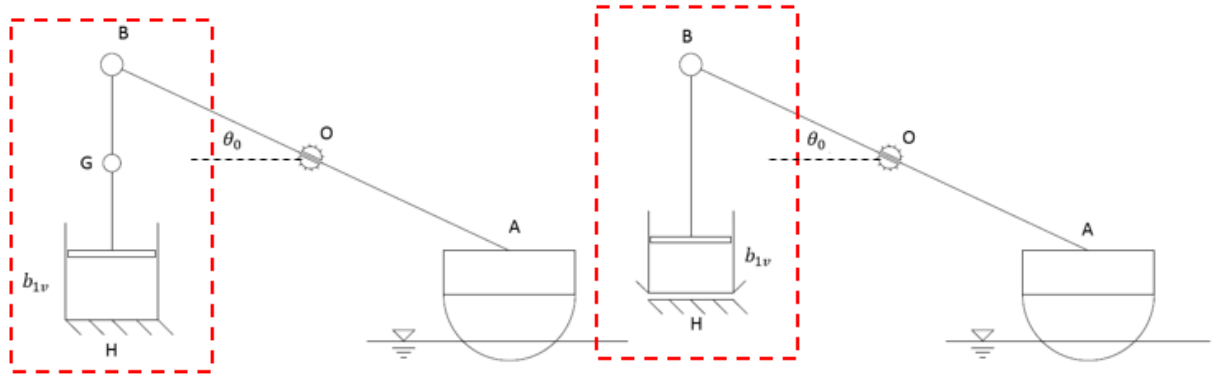


Figura 3.16: Approssimazione del sistema smorzante in cui il moto verticale dello stelo è uguale dell'estremità dell'asta AB; nella figura il sistema è in posizione di equilibrio statico

Il pattino sotto lo smorzatore non è chiaramente presente nel sistema sperimentale dell'EDS; esso è fittizio ed è stato inserito al solo scopo di garantire la mobilità al sistema a seguito dell'ipotesi fatta e proseguire con lo schema equipollente scelto per la parte di smorzamento.

La variazione di lunghezza dello smorzatore è legata al solo moto dello stelo, essendo il cilindro vincolato a terra tramite un pattino orizzontale nella schematizzazione di Figura 3.16.

In particolare, per come è stato scelto il sistema di riferimento assoluto, tale grandezza sarà espressa come variazione della proiezione dell'asta OB lungo la direzione verticale (Figura 3.7):

$$\Delta l_{smorz} = l_{fin} - l_{iniz} = w_B \sin(\theta_0 - \theta_d) - w_B \sin(\theta_0)$$

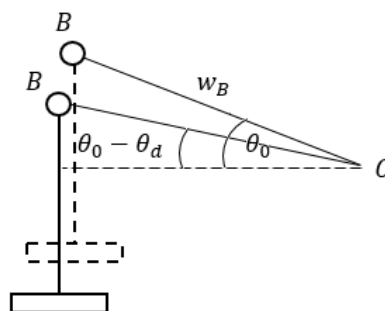


Figura 3.17: Posizione dello stelo iniziale e al generico istante, per lo schema utilizzato in merito alla parte di smorzamento

L'angolo θ_0 rappresenta l'inclinazione dell'asta AB rispetto alla direzione orizzontale quando il sistema è in quiete, nella posizione di equilibrio statico. θ_0 è assunto positivo.

Per la funzione dissipativa è però necessario calcolarsi la derivata rispetto al tempo dell'allungamento del medesimo smorzatore:

$$\dot{\Delta}l_{smorz} = -w_B \cos(\theta_0 - \theta_d) \dot{\theta}_d$$

Per cui la funzione dissipativa diviene:

$$D = \frac{1}{2} b_{1v} \dot{\Delta}l_{smorz}^2 = \frac{1}{2} b_{1v} w_B^2 \cos^2(\theta_0 - \theta_d) \dot{\theta}_d^2$$

La grandezza b_{1v} misurata in [Ns/m] rappresenta il coefficiente di smorzamento viscoso dello smorzatore ricavabile attraverso un approccio sperimentale del tutto simile a quello che verrà mostrato nel paragrafo 4.2.2. del capitolo 4, dedicato alla taratura dei parametri di smorzamento strutturale.

Come si avrà modo di vedere successivamente, i due smorzatori montati sull'EDS non sono viscosi, poiché le forze di dissipazione, ricavate sperimentalmente attraverso le due celle di carico, non sono perfettamente proporzionali alle velocità di sfilo dei cilindri.

Energia potenziale

Adesso si va ad analizzare l'energia potenziale composta dalla somma dei due termini gravitazionale ed elastico.

Per quanto riguarda la parte gravitazionale, essa si calcola in maniera abbastanza rapida individuando le quote delle masse in gioco al generico istante di moto, in funzione della coordinata libera del sistema θ_d , rispetto al sistema di riferimento assoluto di Figura 3.18:

$$V_g = m_B g w_B \sin(\theta_0 - \theta_d) + m_G g w_G \sin(\theta_0 - \theta_d) - m_A g w_A \sin(\theta_0 - \theta_d)$$

Invece per quanto riguarda il contributo elastico, esso ha origine in realtà dalla variazione della spinta idrostatica di Archimede agente sul galleggiante (su un corpo immerso in un fluido agisce una spinta verso l'alto proporzionale al volume immerso tramite il valore ρg), non essendo presenti elementi elastici nel sistema.

Tale contributo, in realtà, andrebbe considerato nel forzamento del fluido, dove, come mostrato nel capitolo 2, rappresenta la forza di campo funzione dello spostamento del sistema, relativo al sistema in movimento in acqua ferma; ma, per rimanere allineati con la procedura dettata dalle equazioni di Lagrange e con la prassi di modellazione dei WEC, si è deciso di anticipare l'esplicitazione di questo termine di forzamento posizionandola nella parte dell'energia potenziale di tipo elastica.

Ribadendo l'ipotesi di rotazioni contenute per l'asta AB (piccoli spostamenti) che si traducono in un moto prevalentemente di alzata per il galleggiante (Figura 3.18), è possibile approssimare il contributo idrostatico alla sola componente di *heave*.

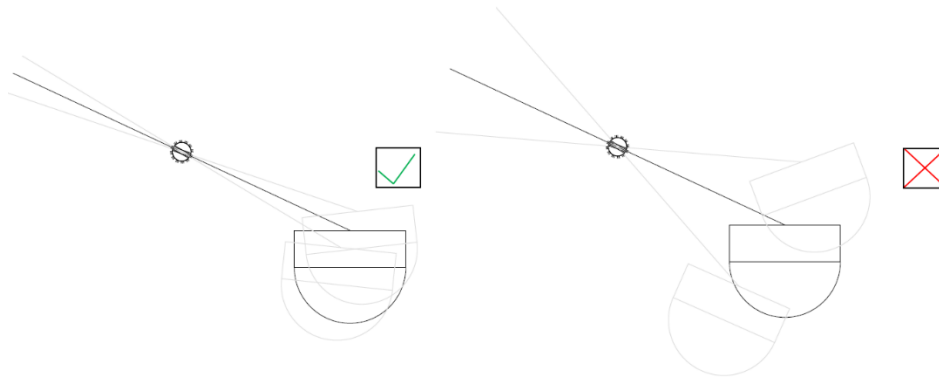


Figura 3.18: A sinistra, sistema dotato del moto in piccolo ipotizzato per il caso EDS; a destra, moto in grande, dove si notano vistose rotazioni per il galleggiante

Quindi il sistema elastico equivalente per tener conto della variazione di spinta idrostatica nel tempo è riportato in Figura 3.19.

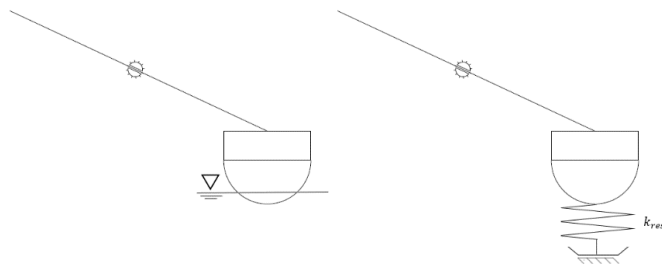


Figura 3.19: Sistema elastico equivalente con cui viene modellata la spinta idrostatica del sistema

Nel momento in cui si andrà a raffinare il modello del sistema, sarà necessario rivedere la modellistica di questo particolare che può essere fonte di elevati errori a causa della geometria del galleggiante dell'EDS nella parte inferiore. La costante di rigidità di restoring k_{rest} si calcola nel seguente modo:

$$k_{rest} = \rho g A_b$$

in cui A_b rappresenta l'area di base della calotta sferica immersa quando il sistema è nella posizione di equilibrio statica.

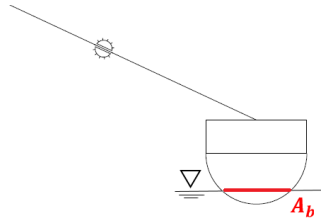


Figura 3.20: Area di base della calotta sferica immersa da cui dipenderà il valore della rigidezza di restoring

Purtroppo, l'ipotesi di tenere A_b e quindi k_{rest} costante è molto debole in quanto l'area A_b varia sensibilmente anche per spostamenti contenuti del galleggiante.

In realtà k_{rest} è funzione di θ_d , ricavabile geometricamente. Considerare k_{rest} variabile con θ_d renderebbe il termine di richiamo non lineare, per cui non sarebbe più valida la modellazione nel dominio della frequenza che si sta eseguendo; si renderebbe quindi necessaria la modellazione nel dominio del tempo, operazione che va oltre lo scopo di questa tesi, che però rappresenta il naturale prosieguo di questo lavoro.

Tornando alla scrittura dell'energia potenziale di tipo elastico, bisogna calcolare l'allungamento funzione del moto della molla fittizia.

Come raccontato in precedenza, la variazione di lunghezza totale di un elemento elastico è dato dalla somma di un contributo statico e di uno dinamico.

Analogamente a quanto fatto per lo smorzatore, il contributo dinamico dell'allungamento si può calcolare misurando la variazione della proiezione del segmento w_A (distanza cerniera in O-galleggiante) lungo la verticale:

- *Allungamento dinamico*: $\Delta l_d = l_{fin} - l_{iniz} = w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d)$;
- *Allungamento totale*: $\Delta l = \Delta l_0 + \Delta l_d = \Delta l_0 + w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d)$;

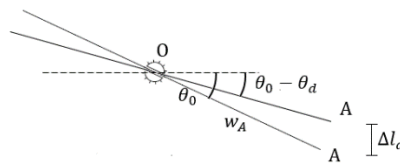


Figura 3.21: Schema per il calcolo dell'allungamento dinamico della molla fittizia di restoring

L'allungamento statico della molla Δl_0 , corrispondente all'altezza della calotta sferica immersa nella condizione di equilibrio statica, si può misurare in laboratorio o calcolare analiticamente, vedendo se i due valori mostrano una buona corrispondenza.

Per determinare Δl_0 analiticamente si possono percorrere due strade:

- Scrivere opportune equazioni di equilibrio statico, che potrebbero sfruttare anche il calcolo delle reazioni vincolari; in particolare l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera in O che potrà anche essere ricavata dall'equazione di moto finale del sistema (di equilibrio dinamico) annullando tutti i termini che dipendono da accelerazione e velocità e i termini di forzamento dinamici;
- Ricercare i punti di stazionarietà dell'energia potenziale, ovvero annullando la derivata prima di tale quantità rispetto alla coordinata libera:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_d} = 0$$

Il contributo di energia potenziale elastico si calcola:

$$V_k = \frac{1}{2} k_{rest} (\Delta l_0 + w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d))^2$$

Per cui l'energia potenziale totale è data dalla somma di V_k e V_g :

$$\begin{aligned} V &= V_k + V_g = \\ &= m_B g w_B \sin(\theta_0 - \theta_d) + m_G g w_G \sin(\theta_0 - \theta_d) - m_A g w_A \sin(\theta_0 - \theta_d) \\ &\quad + \frac{1}{2} k_{rest} (\Delta l_0 + w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d))^2 \end{aligned}$$

Per la questione del calcolo del precarico della molla Δl_0 , si adotta lo schema basato sulla ricerca dei punti stazionari dell'energia potenziale.

Il valore della coordinata libera nella posizione di equilibrio statica, per come è stata scelta, non può che valere per $\theta_d = \theta_{d0} = 0$, essendo una coordinata di tipo dinamica che individua la rotazione dell'asta AB misurata proprio a partire dalla condizione di equilibrio statico.

Valutando la derivata del potenziale in questa posizione, si riesce a calcolare il precarico della molla:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta_d}(\theta_d = 0) &= -m_B g w_B \cos(\theta_0) - m_G g w_G \cos(\theta_0) + m_A g w_A \cos(\theta_0) \\ &\quad + k_{rest} \Delta l_0 w_A \cos(\theta_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta l_0 = \frac{m_B g w_B + m_G g w_G - m_A g w_A}{k_{rest} w_A}$$

In realtà nell'ultima equazione il termine k_{rest} è anche funzione dell'affondamento statico o precarico della molla Δl_0 attraverso la seguente relazione che a partire da quest'ultima grandezza restituisce l'area di base della calotta sferica immersa:

$$A_b = \pi(2|\Delta l_0|R - \Delta l_0^2)$$

Da cui:

$$k_{rest} = \rho g A_b = \rho g \pi(2|\Delta l_0|R - \Delta l_0^2)$$

Il motivo per cui c'è $|\Delta l_0|$ è che questa grandezza, che rappresenta fondamentale la variazione di lunghezza statica della molla, potrebbe anche essere di segno negativo nel caso in cui la molla risultasse compressa quando il sistema è in posizione di equilibrio statico, come in questo caso, fondamentale a causa della distribuzione delle masse del sistema.

Ma nella formula per il calcolo di A_b , Δl_0 rappresenta un'altezza, il cui valore non può che essere positivo; quindi usando il modulo nella precedente relazione, si mettono a posto eventuali incongruenze di natura fisico-matematica.

Per cui, se si decide di non usare il valore dell'affondamento statico misurato in laboratorio ma di ricavarlo analiticamente, è necessario risolvere numericamente la seguente equazione nell'incognita Δl_0 :

$$\Delta l_0 = \frac{m_B g w_B + m_G g w_G - m_A g w_A}{\rho g \pi(2|\Delta l_0|R - \Delta l_0^2) w_A}$$

Essendo un'equazione di natura non lineare, viene risolta numericamente usando la funzione *fsolve* di Matlab.

Comunque il valore Δl_0 andrebbe confrontato con il valore misurato in laboratorio per avere un primo riscontro sulla bontà del modello matematico che si sta costruendo.

E' molto probabile che ci sarà una piccola differenza tra i due valori poiché nel modello matematico non si sta tenendo conto del contributo di spinta idrostatica esercitata dall'olio dello smorzatore sul disco in PVC e sulla parte di stelo metallico immerso e dell'attrito di natura statica-coulombiana presente nella cerniera in O.

Per il calcolo della rigidità di *restoring* si utilizzerà quindi il valore misurato in laboratorio, pur avendo mostrato per completezza la procedura analitica, così da non introdurre una ulteriore approssimazione nel problema.

Lavoro delle forze attive

La forza attiva agente sul sistema EDS ad un grado di libertà nasce dall'interazione galleggiante-onda.

Essa istante per istante sarebbe figlia dell'integrazione del campo di pressioni e sforzi di taglio che si creano sulla superficie bagnata del galleggiante.

Come abbiamo precedentemente supposto, il forzamento d'onda relativo al galleggiante si traduce nel momento risultante agente sull'asta AB, il quale va a sua volta scomposto nelle rimanenti componenti di eccitazione e di radiazione, in quanto la componente idrostatica è stata assorbita nel contributo dell'energia potenziale.

La fortuna di avere un siffatto forzamento d'onda che agisce direttamente sulla coordinata libera scelta, vuol dire aver in lei già la componente lagrangiana:

$$\delta^* L = M_{gall} \delta^* \theta_{M_{gall}} = M_{gall} \delta^* \theta_d$$

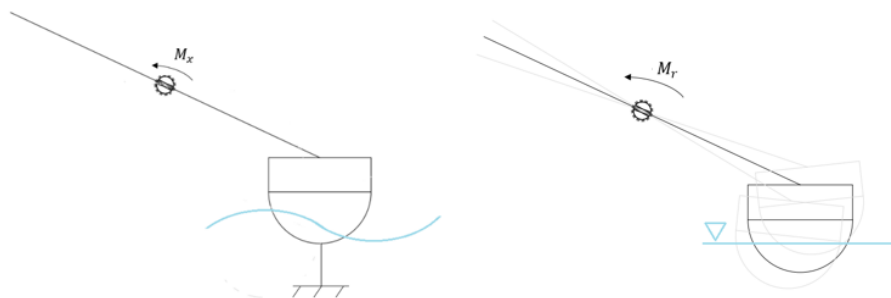


Figura 3.22: Le due componenti di eccitazione e di radiazione del forzamento d'onda al galleggiante M_{gall}

Sviluppo termini energetici per la stesura dell'equazione del moto

Come mostrato in precedenza, una volta definite le singole forme di energia le si può sviluppare secondo la procedura dell'equazione di Lagrange per arrivare così alla definizione dell'equazione di moto non lineare del sistema.

Di seguito tutti gli sviluppi di cui sopra:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}_d} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta_d} = J^* \ddot{\theta}_d ;$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_d} = b_{1v} w_B^2 \cos^2(\theta_0 - \theta_d) \dot{\theta}_d ;$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_d} = -m_B g w_B \cos(\theta_0 - \theta_d) - m_G g w_G \cos(\theta_0 - \theta_d) + m_A g w_A \cos(\theta_0 - \theta_d) + k_{rest} (\Delta l_0 + w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d)) w_A \cos(\theta_0 - \theta_d).$$

In quest'ultima, sostituendo l'espressione analitica ricavata per Δl_0 , si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta_d} &= -m_B g w_B \cos(\theta_0 - \theta_d) - m_G g w_G \cos(\theta_0 - \theta_d) + m_A g w_A \cos(\theta_0 - \theta_d) \\ &+ k_{rest} \left(\frac{m_B g w_B - m_G g w_G - m_A g w_A}{k_{rest} w_A} + w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d) \right) w_A \cos(\theta_0 - \theta_d) = \\ &= k_{rest} (w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d)) w_A \cos(\theta_0 - \theta_d)\end{aligned}$$

Il contributo gravitazionale sparisce, essendo questo dispositivo di tipo pendolo orizzontale, simile a quello di Figura 6.2 riportato in appendice; per cui anche il moto in grande di questo sistema non dipende dal richiamo gravitazionale.

Si anticipa come ciò non varrà per il caso di asta-pala, poiché in quest'altro caso, trattandosi di un sistema di tipo pendolo verticale, il campo gravitazionale fornirà un termine di richiamo elastico equivalente di tipo stabilizzante poiché si tratta di un pendolo rivolto verso il basso.

Per quanto riguarda il lavoro virtuale della sollecitazione attiva, come detto, si ottiene una componente lagrangiana esattamente pari al momento forzante d'onda:

$$\frac{\delta^* L}{\delta^* \theta_d} = Q_{gall} = M_{gall}.$$

L'equazione di moto non lineare risulta dunque:

$$\begin{aligned}J^* \ddot{\theta}_d + b_{1v} w_B^2 \cos^2(\theta_0 - \theta_d) \dot{\theta}_d + k_{rest} (w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d)) w_A \cos(\theta_0 - \theta_d) = \\ = M_{gall}\end{aligned}$$

Il forzamento d'onda M_{gall} viene ora espresso come somma dei suoi due contributi di radiazione e di eccitazione, dei quali il primo, essendo funzione del moto del sistema, va a modificare le caratteristiche strutturali del sistema, come sarà presto chiarito.

Anche il contributo idrostatico è di questo tipo e infatti ha introdotto un termine di rigidità equivalente nel sistema.

Invece il termine radiativo va ad introdurre dei contributi inerziali e di smorzamento equivalenti, essendo dato dalla somma di due termini proporzionali rispettivamente all'accelerazione e alla velocità del sistema:

$$\begin{aligned}M_{gall}(\ddot{\theta}_d(t), \dot{\theta}_d(t), t) &= M_x(t) + M_r(\ddot{\theta}_d(t), \dot{\theta}_d(t)) = \\ &= M_x(t) - I_{add}(\omega) \ddot{\theta}_d(t) - b_{hyd}(\omega) \dot{\theta}_d(t)\end{aligned}$$

Le costanti da ricercare per esprimere il momento di radiazione sono l'*inerzia aggiunta* [kgm^2] e lo *smorzamento idrodinamico*, entrambe funzioni della pulsazione dell'onda forzante; esse sono incognite. In letteratura si trovano questi coefficienti per forme simili in acque profonde. Lavorando in acque basse, è necessario ricorrere a metodi numerici o sperimentali per il calcolo di questi coefficienti.

Anche il momento di eccitazione, funzione della frequenza e ampiezza d'onda, e, nel nostro caso, del modellino dell'EDS di laboratorio, della posizione assunta nel canale, rappresenta una incognita del problema che, come I_{add} e b_{hyd} , va ricercata per via numerica o sperimentale.

Nei capitoli successivi, si mostrano alcune possibili strade da percorrere per il calcolo di queste grandezze in modo che, data posizione del sistema nel canale e pulsazione dell'onda d'esercizio, si riuscirà a ricostruire numericamente il forzamento d'onda previsto dalla *Teoria del flusso potenziale*.

Tale forzante va poi confrontata con quella sperimentale per la validazione del modello messo a punto, per la verifica della ipotesi fatte e per capire se la teoria del potenziale, concepita per acque profonde, può valere anche per il caso di acque basse, almeno in una fase d'inquadramento generale del problema.

Linearizzazione dell'equazione di moto attorno alla posizione di equilibrio statico

L'equazione di moto precedentemente ottenuta si presta bene per la descrizione del moto in grande del sistema meccanico analizzato.

Se lo scopo è invece quello di riprodurre la dinamica in piccolo attorno alla posizione di equilibrio statico, è possibile allora utilizzare una equazione di moto linearizzata.

Partendo dall'equazione di moto non lineare:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{1v} w_B^2 \cos^2(\theta_0 - \theta_d) \dot{\theta}_d + k_{rest} (w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d)) w_A \cos(\theta_0 - \theta_d) = M_{gall}$$

essa può essere linearizzata direttamente linearizzando tutti i termini di non linearità, oppure seguendo la procedura più generale di rendere quadratiche le forme di energia in modo che la successiva applicazione di Lagrange dia luogo ad una equazione differenziale di secondo ordine a coefficienti costanti, che descrive la dinamica di un sistema lineare o meglio, in tal caso, linearizzato.

Per quanto riguarda l'energia cinetica, lo sviluppo al secondo ordine nell'intorno della posizione di equilibrio, indicata con $\theta_d = \theta_{d0} = 0 / \dot{\theta}_d = 0$, è pari a :

$$E_C \cong E_{C_{\theta_{d0}, \dot{\theta}_d=0}} + \frac{\partial E_C}{\partial \theta_d}_{\theta_{d0}, \dot{\theta}_d=0} (\theta_d - \theta_{d0}) + \frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}_d}_{\theta_{d0}, \dot{\theta}_d=0} \dot{\theta}_d +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_C}{\partial \theta_d^2} \Big|_{\theta_{d0}, \dot{\theta}_d=0} (\theta_d - \theta_{d0})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_C}{\partial \dot{\theta}_d^2} \Big|_{\theta_{d0}, \dot{\theta}_d=0} \dot{\theta}_d^2 + \frac{\partial^2 E_C}{\partial \theta_d \partial \dot{\theta}_d} \Big|_{\theta_{d0}, \dot{\theta}_d=0} (\theta_d - \theta_{d0}) \dot{\theta}_d$$

dove l'unico termine non nullo è $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_C}{\partial \dot{\theta}_d^2} \Big|_{\theta_{d0}, \dot{\theta}_d=0} \dot{\theta}_d^2$ ossia la forma quadratica dell'energia cinetica si ottiene valutando il momento d'inerzia generalizzato in corrispondenza della posizione di equilibrio.

Nel presente caso però l'energia cinetica si presenta già come forma quadratica poiché il momento d'inerzia generalizzato è costante, ossia non è funzione della coordinata libera θ_d :

$$E_C = \frac{1}{2} J^* \dot{\theta}_d^2$$

La funzione dissipativa D si riduce ad una forma quadratica valutando il coefficiente di smorzamento generalizzato ridotto alla coordinata libera nella posizione di equilibrio:

$$b_{eq\theta} = b_{1v} w_B^2 \cos^2(\theta_0 - \theta_d)$$

$$b_{eq\theta}(\theta_d = \theta_{d0} = 0) = b_{eq\theta_0} = b_{1v} w_B^2 \cos^2(\theta_0)$$

Per cui la funzione dissipativa scritta in forma quadratica diviene:

$$D \cong \frac{1}{2} b_{eq\theta_0} \dot{\theta}_d^2$$

Lo sviluppo dell'energia potenziale nell'intorno della posizione di equilibrio è:

$$V \cong V_{\theta_d=\theta_{d0}} + \frac{\partial V}{\partial \theta_d} \Big|_{\theta_d=\theta_{d0}} (\theta_d - \theta_{d0}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_d^2} \Big|_{\theta_d=\theta_{d0}} (\theta_d - \theta_{d0})^2$$

in cui il primo termine è costante, il secondo è nullo poiché si valuta nella posizione di equilibrio, ovvero in un punto di stazionarietà del potenziale mentre il terzo termine fornisce la forma quadratica dell'energia potenziale. Si procede con il calcolo delle derivate dell'energia potenziale; la derivata prima viene riespressa come segue:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_d} = (-m_B g w_B - m_G g w_G + m_A g w_A + k_{rest} \Delta l_0 w_A + k_{rest} w_A^2 \sin \theta_0) \cos(\theta_0 - \theta_d)$$

+

$$-\frac{1}{2}k_{rest}w_A^2\sin(2\theta_0 - 2\theta_d)$$

in cui esplicitando il valore di Δl_0 si semplificano alcuni termini:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_d} = k_{rest}w_A^2 \sin \theta_0 \cos(\theta_0 - \theta_d) - \frac{1}{2}k_{rest}w_A^2\sin(2\theta_0 - 2\theta_d)$$

La derivata seconda assume la seguente forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_d^2} = k_{rest}w_A^2 \sin \theta_0 \sin(\theta_0 - \theta_d) + k_{rest}w_A^2(\cos^2(\theta_0 - \theta_d) - \sin^2(\theta_0 - \theta_d))$$

Per cui, riprendendo la formula della forma quadratica, si ha:

$$V \cong \frac{1}{2}(k_{rest}w_A^2\cos^2\theta_0)\theta_d^2$$

Per quanto riguarda il lavoro virtuale delle forze attive, il momento forzante entra già nel sistema in forma lineare, anche una volta esplicitati i termini di eccitazione e di radiazione. Quindi, riapplicando la procedura di Lagrange a tutte le forme di energia quadratiche si arriva a definire l'equazione di moto linearizzata attorno alla posizione di equilibrio statico che si presta soltanto alla rappresentazione della dinamica del sistema se viene rispettata l'ipotesi di piccole oscillazioni. Successivamente, attraverso delle simulazioni in Simulink sui due sistemi non lineare e linearizzato, si mostreranno le differenze tra i due man mano che si aumenta l'entità delle oscillazioni del sistema.

La componente inerziale dovuta all'energia cinetica resta invariata per i motivi prima chiariti:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}_d}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta_d} = J^*\ddot{\theta}_d$$

Le componenti di smorzamento ed elastiche divengono:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_d} = b_{eq\theta_0}\dot{\theta}_d$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_d} = (k_{rest}w_A^2\cos^2\theta_0)\theta_d = k_{rest\theta_0}\theta_d$$

Raggruppando i termini calcolati secondo Lagrange, si ottiene infine l'equazione linearizzata:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta 0} \dot{\theta}_d + k_{rest\theta 0} \theta_d = M_{gall}$$

Osservando le due equazioni non lineare e linearizzata, la differenza principale riguarda la parte di smorzamento: nell'equazione non lineare è funzione sia della velocità $\dot{\theta}_d$ che della posizione θ_d ; ciò equivale a considerare uno smorzatore con smorzamento non costante, funzione della posizione; viceversa grazie alla linearizzazione, si è ottenuto un coefficiente di smorzamento equivalente costante $b_{eq\theta 0}$.

In maniera del tutto simile verranno di seguito trattati prima il sistema ad un grado di libertà asta-pala e successivamente il sistema EDS completo a due gradi di libertà.

Una nota comune a tutti i sistemi che si affronteranno vuol precisare che il fatto di lavorare su sistemi linearizzati ci permette di utilizzare determinate tecniche, tra cui quella di lavorare del dominio delle frequenze, di usare determinate metodologie per il calcolo di dei parametri idrodinamici e, in futuro, di affrontare il problema del controllo sfruttando le ben più collaudate tecniche applicabili a sistemi lineari.

3.2.1.2 Il sistema asta-pala

Viene costruito il modello meccanico analitico ad un grado di libertà focalizzato sulla dinamica dell'asta avente all'estremità la pala, l'altro elemento che, assieme al galleggiante, ha il compito di introdurre energia nel sistema.

Nell'EDS completo questo sistema è soggetto ad un moto costituito dalla sovrapposizione del moto di trascinamento dato dal movimento dell'asta AB più il moto relativo rilevabile in un sistema di riferimento roto-traslante, con origine nel punto C (Figura 3.6).

Nell'analisi ad un grado di libertà invece l'asta CE viene considerata incernierata a terra nei punti F (attraverso lo smorzatore FD) e C.

Lo schema di riferimento per questo sistema viene di seguito riportato.

In analogia con quanto fatto per il sistema asta-galleggiante, anche per questo caso viene scelta una coordinata libera di tipo dinamico, ossia la rotazione θ_d , presa oraria positiva, misurata a

partire dalla posizione di equilibrio statico.

In tal caso, essendo l'asta in quiete verticale, la coordinata dinamica definita costituisce anche l'angolo formato dall'asta CE rispetto alla direzione verticale.

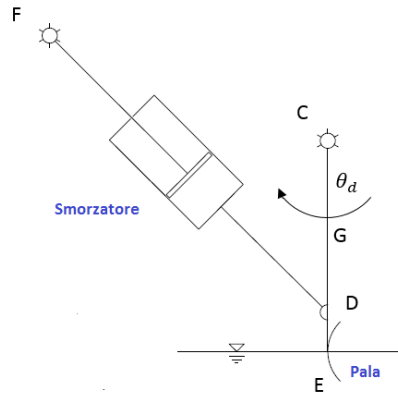


Figura 3.23: Il sistema asta-pala ad un grado di libertà

Anche per la scrittura dell'equazione di moto di questo sistema si utilizzerà il procedimento di Lagrange.

Per cui si definiranno prima le diverse forme di energia, spiegando anche qui le varie ipotesi semplificative fatte per trattare in maniera più agevole soprattutto i contributi inerziali.

Si anticipa che anche in questo caso si otterrà in un primo momento un'equazione differenziale non lineare, la quale verrà poi linearizzata attorno alla posizione di equilibrio statico per ottenere l'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti.

Energia cinetica

I contributi all'energia cinetica provengono dalle proprietà inerziali dell'asta pesante CE, dalla pala in E e dal cilindro dello smorzatore FD.

L'approssimazione dei carichi inerziali consiste nel modellizzare l'asta OE come asta pesante provvisto di momento d'inerzia baricentrico J_G e massa m_G posizionata nel punto G, baricentro dell'asta CE.

La pala posta in E viene invece modellizzata con una sola massa concentra m_E , trascurando il contributo rotazionale.

L'ultimo elemento pesante in moto è il cilindro dello smorzatore FD, di massa m_D , che viene modellizzata con una massa concentrata posta nel punto D.

Il pistone dello stesso smorzatore non sarà qui considerato, in quanto dotato di un moto traslazionale quasi inesistente e di rotazioni anch'esse molto modeste

Di seguito in Figura 3.24 si evidenziano gli elementi pesanti del sistema.

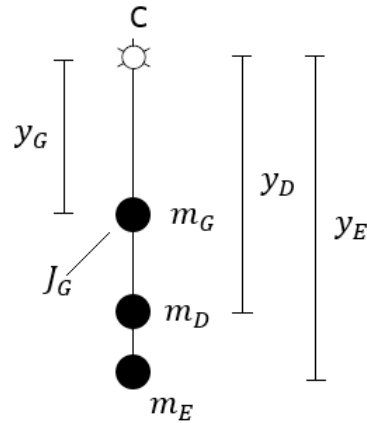


Figura 3.24: Il sistema asta-pala con evidenziati i contributi inerziali

L'energia cinetica, utilizzando delle coordinate fisiche di comodo, si scrive:

$$E_C = \frac{1}{2} J_G \omega_{CE}^2 + \frac{1}{2} m_G v_G^2 + \frac{1}{2} m_E v_E^2 + \frac{1}{2} m_D v_D^2$$

In questa relazione ω_{CE} rappresenta la velocità angolare dell'asta CE, mentre v_G , v_E e v_D sono le velocità traslazionali delle masse concentrate del baricentro dell'asta CE, della pala e del punto d'attacco dello smorzatore.

I legami cinematici che permettono di esprimere le coordinate fisiche ω_{CE} , v_G e v_E , e quindi l'energia cinetica, in funzione della coordinata libera del sistema sono i seguenti:

$$\omega_{CE} = \dot{\theta}_d \quad v_G = \frac{y_E}{2} \dot{\theta}_d \quad v_E = y_E \dot{\theta}_d \quad v_D = y_D \dot{\theta}_d$$

Per cui l'energia cinetica diviene:

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}_d^2 + \frac{1}{2} m_G \frac{y_E^2}{4} \dot{\theta}_d^2 + \frac{1}{2} m_E y_E^2 \dot{\theta}_d^2 + \frac{1}{2} m_D y_D^2 \dot{\theta}_d^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(J_G + m_G \frac{y_E^2}{4} + m_E y_E^2 + m_D y_D^2 \right) \dot{\theta}_d^2 = \\ &= \frac{1}{2} J^* \dot{\theta}_d^2 \end{aligned}$$

in cui J^* rappresenta il momento d'inerzia totale generalizzato del sistema secondo il grado di libertà θ_d .

Quindi, anche per il caso asta-pala, l'energia cinetica appare già in forma quadratica e dunque non andrà ad introdurre non linearità nell'equazione di moto finale.

Energia potenziale

L'energia potenziale è dovuta soltanto a contributi gravitazionali, in quanto si trascura la componente dovuta alla spinta di Archimede, che si suppone non vari rispetto a θ_d . Detto questo, l'energia potenziale si esprime per mezzo delle altezze delle masse del sistema misurate nel sistema di riferimento fisso avente origine nel punto C, con il meccanismo nella generica posizione di moto:

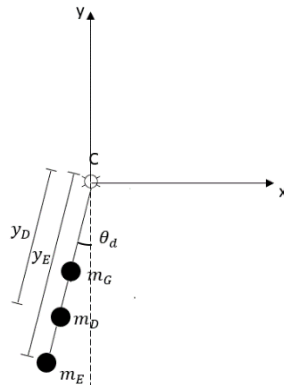


Figura 3.25: Sistema nella generica posizione di moto; rilevamento altezza dei centri di massa

$$\begin{aligned} V &= V_g = m_G g h_G + m_D g h_D + m_E g h_E = \\ &= -m_G g \frac{y_E}{2} \cos \theta_d - m_D g y_D \cos \theta_d - m_E g y_E \cos \theta_d \end{aligned}$$

Funzione dissipativa

La dissipazione energetica del sistema avviene per mezzo dello smorzatore montato tra i punti F e D:

$$D = \frac{1}{2} b_{2v} \dot{\Delta} l_{smorz}^2$$

Poiché in questo caso di studio del sistema ad un grado di libertà la cerniera in F è fissa, la variazione di lunghezza nel tempo per lo smorzatore dipenderà soltanto dal moto del punto D.

Per definire la funzione dissipativa di tale smorzatore, avente costante di smorzamento b_{2v} stimata sperimentalmente come per l'altro smorzatore, è necessario calcolare la sua variazione di lunghezza nel tempo in funzione della coordinata libera.

Di seguito si riporta il sistema in studio, con enfatizzate le lunghezze dello smorzatore nell'istante generico di moto (FD') e nell'istante iniziale, quando il sistema è in quiete (FD).

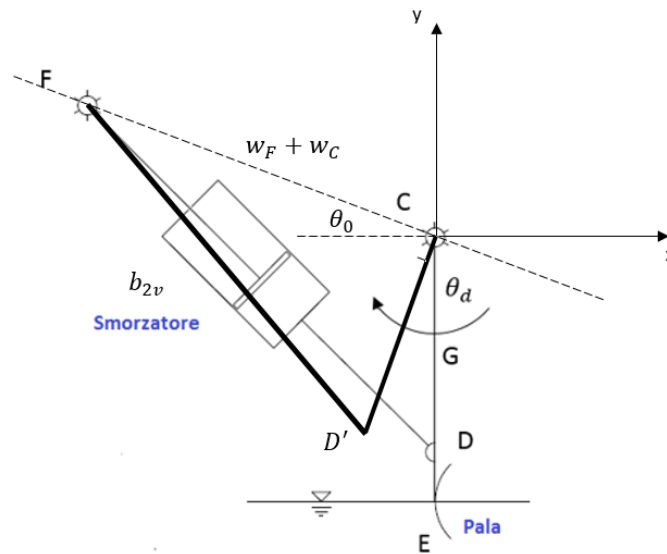


Figura 3.26: Variazione di lunghezza dello smorzatore

La variazione di lunghezza dello smorzatore sarà pari a:

$$\Delta l_{smorz} = l_{fin} - l_{iniz}$$

Lavorando nel sistema di riferimento fisso, centrato nel punto C, queste due grandezze si calcolano nel seguente modo:

$$\begin{aligned} l_{fin} = FD' &= \sqrt{(x_F - x_{D'})^2 + (y_F - y_{D'})^2} = \\ &= \sqrt{(-(w_F + w_C)\cos\theta_0 + y_D\sin\theta_d)^2 + ((w_F + w_C)\sin\theta_0 + y_D\cos\theta_d)^2} = \dots \\ &= \sqrt{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D(w_F + w_C)\sin(\theta_0 - \theta_d)} \\ l_{iniz} = FD &= \sqrt{(x_F - x_D)^2 + (y_F - y_D)^2} = \\ &= \sqrt{(-(w_F + w_C)\cos\theta_0)^2 + ((w_F + w_C)\sin\theta_0 + y_D)^2} = cost \end{aligned}$$

Ma per la funzione dissipativa c'è bisogno della variazione nel tempo di Δl_{smorz} :

$$\dot{\Delta}l_{smorz} = \dot{l}_{fin} = - \frac{y_D(w_F + w_C)\cos(\theta_0 - \theta_d)}{\sqrt{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D(w_F + w_C)\sin(\theta_0 - \theta_d)}} \dot{\theta}_d$$

Quindi la forma di energia in questione si scrive:

$$D = \frac{1}{2} b_{2v} \frac{y_D^2 (w_F + w_C)^2 \cos^2(\theta_0 - \theta_d)}{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D(w_F + w_C)\sin(\theta_0 - \theta_d)} \dot{\theta}_d^2$$

Al contrario dell'energia cinetica, sia il contributo dissipativo che gravitazionale presentano forme energetiche non in forma quadratica che daranno quindi origine a delle non linearità nell'equazione del moto.

Lavoro virtuale delle forze attive

In precedenza sono state fatte le ipotesi che hanno portato a considerare il forzamento d'onda alla pala agente in direzione prettamente orizzontale, composto anch'esso dalla somma dei contributi di eccitazione e di radiazione:



Figura 3.27: I due contributi del forzamento d'onda agente sulla pala

Il contributo idrostatico in questo caso non viene conteggiato visto che, grazie alla geometria piana di questo componente, il valore del volume immerso, che darebbe origine alla spinta di Archimede, è molto basso.

Per cui, il forzamento totale sulla pala dà origine al seguente lavoro virtuale:

$$\delta^* L = F_{pala} \delta^* x_{pala}$$

dove x_{pala} rappresenta lo spostamento virtuale del punto di applicazione della forza nella sua direzione, che espressa in funzione della coordinata libera diviene:

$$x_{pala} = y_E \sin \theta_d$$

$$\delta^* x_{pala} = \frac{\partial x_{pala}}{\partial \theta_d} \delta^* \theta_d = y_E \cos \theta_d \delta^* \theta_d$$

La forma di energia viene, come di consueto, espressa in funzione della coordinata libera del sistema:

$$\delta^* L = F_{pala} y_E \cos \theta_d \delta^* \theta_d$$

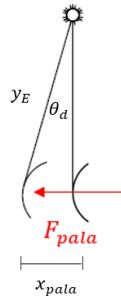


Figura 3.28: Spostamento virtuale del punto di applicazione del forzamento d'onda sulla pala

Il termine di forzamento sarà esplicitato a valle del calcolo dell'equazione di moto con il procedimento di Lagrange.

Qui saranno messi in evidenza i diversi parametri idrodinamici, incogniti, che andrebbero determinati attraverso procedure numeriche e/o sperimentali del tutto simili a quelle che si utilizzeranno per il caso galleggiante.

Sviluppo termini energetici per la stesura dell'equazione del moto

Una volta espresse le quantità energetiche si può procedere con le varie derivate previste dall'equazione di Lagrange per così giungere alla definizione dell'equazione di moto non lineare:

- $\frac{d}{dt} \frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}_d} = J^* \ddot{\theta}_d$
- $\frac{\partial E_C}{\partial \theta_d} = 0$
- $\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_d} = b_{2v} \frac{y_D^2 (w_F + w_C)^2 \cos(\theta_0 - \theta_d)^2}{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D(w_F + w_C) \sin(\theta_0 - \theta_d)} \dot{\theta}_d$
- $\frac{\partial V}{\partial \theta_d} = m_G g \frac{y_E}{2} \sin \theta_d + m_D g y_D \sin \theta_d + m_E g y_E \sin \theta_d$

- $\frac{\delta^*L}{\delta^*\theta_d} = F_{pala}y_E \cos\theta_d$

Componendo i diversi termini, si ottiene il modello analitico non lineare relativo alla dinamica del sistema ad un grado di libertà asta-pala:

$$J^*\ddot{\theta}_d + b_{2v} \frac{y_D^2(w_F + w_C)^2 \cos(\theta_0 - \theta_d)^2}{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D(w_F + w_C) \sin(\theta_0 - \theta_d)} \dot{\theta}_d + m_G g \frac{y_E}{2} \sin\theta_d + m_D g y_D \sin\theta_d + m_E g y_E \sin\theta_d = F_{pala} y_E \cos\theta_d$$

In questo caso il forzamento d'onda entra nel sistema in maniera non lineare essendo moltiplicato per il termine $\cos\theta_d$.

Dunque il processo di linearizzazione stavolta riguarderà anche il termine del lavoro virtuale.

Per definire la forzante di pala nei suoi diversi termini, è necessario conoscere la cinematica orizzontale del punto E, in direzione parallela a quella ipotizzate per questa forzante, così da poter esprimere i contributi inerziale e di smorzamento della componente di radiazione. Lo spostamento, velocità e accelerazione di tal punto in funzione della coordinata libera del sistema θ_d sono:

$$\begin{aligned} x_E &= y_E \sin\theta_d \\ \dot{x}_E &= y_E \cos\theta_d \dot{\theta}_d \\ \ddot{x}_E &= y_E \cos\theta_d \ddot{\theta}_d - y_E \sin\theta_d \dot{\theta}_d^2 \end{aligned}$$

Dunque la forzante della pala si esprime nel seguente modo:

$$\begin{aligned} F_{pala}(\ddot{x}_E(t), \dot{x}_E(t), t) &= F_x(t) + F_r(\ddot{x}_E(t), \dot{x}_E(t)) = \\ &= F_x(t) - m_{add}(\omega) \ddot{x}_E(t) - b_{hyd}(\omega) \dot{x}_E(t) = \\ &= F_x(t) - m_{add}(\omega) (y_E \cos\theta_d \ddot{\theta}_d - y_E \sin\theta_d \dot{\theta}_d^2) - b_{hyd}(\omega) y_E \cos\theta_d \dot{\theta}_d \end{aligned}$$

Per cui, per come è stata ipotizzata la forza della pala, pur essendo una somma di termini lineari, assume un aspetto non lineare quando i termini di radiazione vengono espressi in funzione della coordinata libera scelta.

Quindi la linearizzazione di questa componente sarà un aspetto ben più complesso, necessario per riassetare la parte di forzamento.

In realtà, potevamo anche per questo sistema considerare un momento complessivo applicato all'asta, così da non introdurre non linearità cinematiche. Si è scelta invece la

forza orizzontale per rimanere allineati con la tipologia di moto prevalentemente di *surge* ipotizzata per la pala.

Si passa subito alla fase di linearizzazione attorno alla posizione di equilibrio statico, che vede l'asta CE verticale con $\theta_d = 0$.

Linearizzazione dell'equazione di moto attorno alla posizione di equilibrio statico

Per piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio statico si può descrivere la dinamica del sistema con equazioni linearizzate, facendo errori teoricamente contenuti rispetto all'uso della non lineare, qui riportata:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{2v} \frac{y_D^2 (w_F + w_C)^2 \cos(\theta_0 - \theta_d)^2}{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D (w_F + w_C) \sin(\theta_0 - \theta_d)} \dot{\theta}_d + m_G g \frac{y_E}{2} \sin\theta_d + m_D g y_D \sin\theta_d + m_E g y_E \sin\theta_d = F_{pala} y_E \cos\theta_d$$



Figura 3.29: Sistema sottoposto a piccole e grandi oscillazioni

Dunque, guardando la Figura 3.29, si ottengono risultati soddisfacenti da un'equazione linearizzata se si è nel caso di destra mentre bisogna ricorrere forzatamente al modello non lineare se le escursioni del sistema sono importanti, come riportato nella parte sinistra della stessa figura.

Nella posizione di equilibrio il valore della coordinata libera di tipo dinamica non può che assumere valore nullo $\theta_d = 0$.

Per quanto riguarda l'energia cinetica, essa appare già in forma quadratica:

$$E_c = \frac{1}{2} J^* \dot{\theta}_d^2$$

con

$$J^* = J_G + m_G \frac{y_E^2}{4} + m_E y_E^2 + m_D y_D^2$$

La forma quadratica della funzione dissipativa si ottiene rapidamente valutando il coefficiente di smorzamento generalizzato secondo la coordinata libera scelta in prossimità della posizione di equilibrio:

$$b_{eq\theta}(\theta_d) = b_{2v} \frac{y_D^2 (w_F + w_C)^2 \cos(\theta_0 - \theta_d)^2}{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D (w_F + w_C) \sin(\theta_0 - \theta_d)}$$

$$b_{eq\theta_0} = b_{eq\theta}(\theta_d = 0) = b_{2v} \frac{y_D^2 (w_F + w_C)^2 \cos(\theta_0)^2}{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D (w_F + w_C) \sin(\theta_0)}$$

Per cui si ottiene la forma quadratica per la funzione dissipativa:

$$D \cong \frac{1}{2} b_{2v} \frac{y_D^2 (w_F + w_C)^2 \cos(\theta_0)^2}{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D (w_F + w_C) \sin(\theta_0)} \dot{\theta}_d^2 = \frac{1}{2} b_{eq\theta_0} \dot{\theta}_d^2$$

L'energia potenziale, in tal caso costituito soltanto da un contributo gravitazionale, si rende quadratica valutando la sua derivata seconda nella posizione di equilibrio:

$$V \cong \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_d^2} \Big|_{\theta_d=0} \theta_d^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(m_G g \frac{y_E}{2} + m_D g y_D + m_E g y_E \right) \theta_d^2 = \frac{1}{2} k_g \theta_d^2$$

in cui k_g rappresenta la rigidezza equivalente dovuta al campo gravitazionale.

Poiché il sistema non è altro che un pendolo, tale valore di rigidezza viene positivo, a prova del fatto che la posizione di equilibrio è di tipo stabile, ossia se si perturba il sistema posto in posizione di quiete, esso ci ritorna in un tempo più o meno lungo (a seconda di quanto il sistema è smorzato).

Rimane da linearizzare la parte di forzamento per la quale non si cercherà di ottenere una forma energetica quadratica.

Riscriviamo il forzamento, o meglio la componente lagrangiana di questo, esplicitata in tutti i suoi termini:

$$Q_{pala}(\theta_d, \dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t) =$$

$$= (F_x(t) - m_{add}(\omega) (y_E \cos \theta_d \ddot{\theta}_d - y_E \sin \theta_d \dot{\theta}_d^2) - b_{hyd}(\omega) y_E \cos \theta_d \dot{\theta}_d) y_E \cos \theta_d =$$

Per avere l'andamento di questa grandezza per il sistema linearizzato basterà valutarlo in prossimità della posizione di equilibrio statico:

$$Q_{pala}(\theta_d = 0, \dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t) = Q_{pala}(\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t) =$$

$$= (F_x(t) - m_{add}(\omega) y_E \ddot{\theta}_d - b_{hyd}(\omega) y_E \dot{\theta}_d) y_E =$$

$$= F_x(t) y_E - m_{add}(\omega) y_E^2 \ddot{\theta}_d - b_{hyd}(\omega) y_E^2 \dot{\theta}_d$$

Nel caso di sistema linearizzato dunque è possibile ricondursi ad un problema del tutto simile a quello del galleggiante, ragionando in termini di momenti e non di forze:

$$Q_{pala}(\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t) = M_x(t) - I_{add}(\omega) \ddot{\theta}_d - b_{hyd\theta}(\omega) \dot{\theta}_d$$

Il tipo e il numero di incognite da determinare è uguale al caso del galleggiante e per la loro stima si useranno dunque le stesse tecniche sperimentali.

Dunque, tornando alla linearizzazione, si applicano nuovamente le derivate di Lagrange per arrivare all'equazione del moto linearizzata.

Le operazioni sono da eseguire solo per funzione dissipativa ed energia potenziale:

- $\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_d} = b_{eq\theta_0} \dot{\theta}_d$
- $\frac{\partial V}{\partial \theta_d} = k_g \theta_d$

L'equazione del moto linearizzata sarà dunque:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta_0} \dot{\theta}_d + k_g \theta_d = Q_{pala}(\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t) = M_x(t) - I_{add}(\omega) \ddot{\theta}_d - b_{hyd\theta}(\omega) \dot{\theta}_d$$

Valgono praticamente le stesse considerazioni fatte per il caso del galleggiante.

La differenza maggiore di natura fisica tra i due sistemi ad un grado di libertà visti sta nel termine di rigidità che, mentre per il caso galleggiante è dovuto all'azione idrostatica di Archimede, per il caso pala è dovuto al campo gravitazionale.

3.2.1.3 Il sistema EDS completo a due gradi di libertà

Dopo le analisi semplificative sui sistemi ad un grado di libertà volti a definire separatamente la dinamica dei sistemi asta-galleggiante e asta-pala, si affronterà la scrittura dell'equazione di moto vettoriale riguardante il sistema EDS completo.

I passi che si seguiranno saranno uguali a quelli visti per le altre due equazioni di moto, soltanto che tutte le forme energetiche saranno espresse in funzione delle due coordinate libere che si sceglieranno e le derivate di Lagrange sarà necessario svolgere per entrambe queste coordinate.

Dato il sistema, che si ottiene “agganciando” tra loro i due sistemi ad un grado, in particolare incernierando il sistema smorzatore-asta-pala all'asta AB e non a terra, le coordinate libere che vengono scelte sono le seguenti:

- θ_{1d} : rotazione assoluta dell'asta AB, misurata a partire dalla posizione di equilibrio statica, presa con convenzione anti-oraria positiva;
- θ_{2d} : rotazione relativa dell'asta CE rispetto all'asta AB misurata in un sistema di riferimento traslante con origine in C, presa con convenzione oraria positiva.

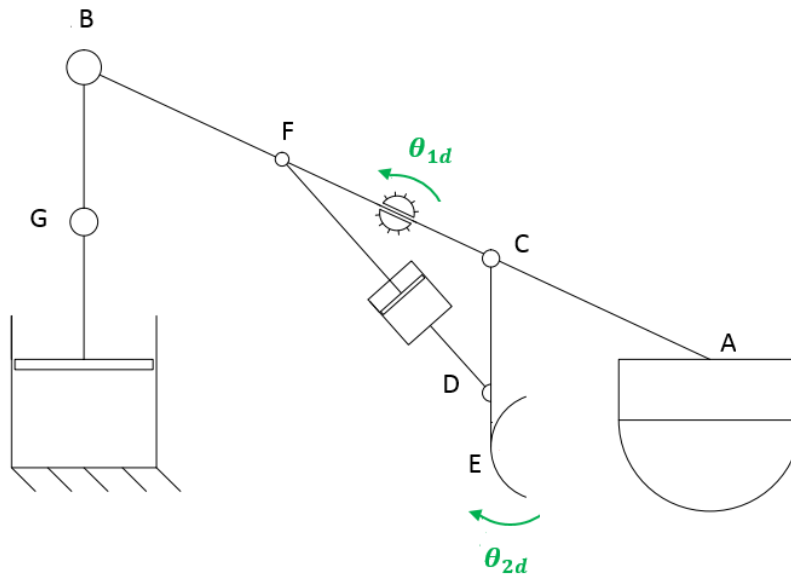


Figura 3.30: Schema del sistema complessivo dell'EDS a 2 g.d.l.

Tutti gli elementi contenuti in questo sistema sono già stati descritti in precedenza, per cui si procederà subito con la definizione delle varie forme di energia.

Energia cinetica

Valgono le stesse ipotesi di prima di considerare tutti i contributi pesanti come masse concentrate all'infuori delle aste AB e CE, dotate anche di momento d'inerzia.

L'unico componente pesante che passando alla configurazione completa subisce movimento è lo stelo dello smorzatore FD, che sarà modellato con la massa concentrata m_F .

Di seguito uno schema dell'EDS con rappresentati tutti i contributi inerziali per la scrittura dell'energia cinetica.

Si riporta una lista dei diversi contributi con i componenti fisici a cui sono riferiti:

- J_{G1}, J_{G2} : momenti d'inerzia baricentrici delle aste AB e CE;
- m_{G1}, m_{G2} : masse della aste AB e CE, concentrate nei baricentri G_1 e G_2 delle due aste;
- m_B : massa disco e stelo dello smorzatore del galleggiante più quella della biella GB;
- m_A : massa del galleggiante più eventuali altre masse poste su di esso;
- m_D : massa cilindro pala, parte dello smorzatore attaccato in D;
- m_E : massa pala;
- m_F : massa pistone pala, parte dello smorzatore attaccato in F.

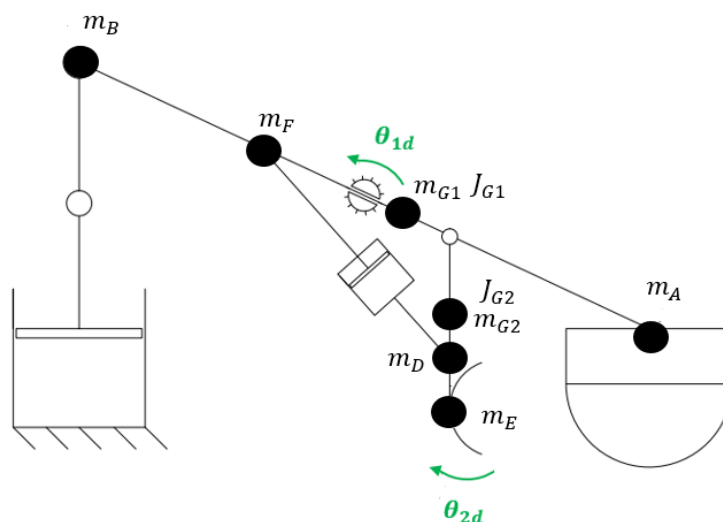


Figura 3.31: Distribuzione delle masse per il sistema a due gradi di libertà

L'energia cinetica espressa per mezzo di coordinate fisiche di comodo vale:

$$E_c = \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_F v_F^2 + \frac{1}{2} m_{G1} v_{G1}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_{G2} v_{G2}^2 + \frac{1}{2} m_D v_D^2 + \frac{1}{2} m_E v_E^2 + \frac{1}{2} J_{G2} \omega_{CE}^2 + \frac{1}{2} J_{G1} \omega_{AB}^2$$

Tutte le velocità in questione vengono espresse in funzione delle due coordinate libere del sistema.

Per la velocità angolare ω_{AB} e per le masse appartenenti all'asta AB, tali legami cinematici sono uguali a quelli mostrati per il caso ad un grado di libertà di asta-galleggiante:

$$v_A = w_A \dot{\theta}_{1d} \quad v_B = w_B \dot{\theta}_{1d} \quad v_F = w_F \dot{\theta}_{1d} \quad v_{G1} = w_{G1} \dot{\theta}_{1d} \quad \omega_{AB} = \dot{\theta}_{1d}$$

dove le lunghezze w_A , w_B , w_F e w_{G1} rappresentano le distanze dalla cerniera a terra O dei punti A, B, F e G1, quest'ultimo che individua il centro di massa di AB.

Invece per la velocità angolare dell'asta CE e per le masse concentrate poste su di essa, è necessario studiare con cura il moto in grande del sistema, riferendosi ad un sistema di riferimento inerziale con origine del punto O.

In Figura 3.32 al sistema in posizione di equilibrio statico viene sovrapposta, in forma schematica, la configurazione delle aste in un generico istante di moto.

Dall'inclinazione dell'asta CE rispetto alla direzione verticale (che assume a sistema fermo), misurata oraria positiva, si calcola la sua velocità angolare attraverso un'operazione di derivazione nel tempo:

$$\theta_{CE} = \theta_{2d} - \theta_{1d} \quad \omega_{CE} = \dot{\theta}_{2d} - \dot{\theta}_{1d}$$

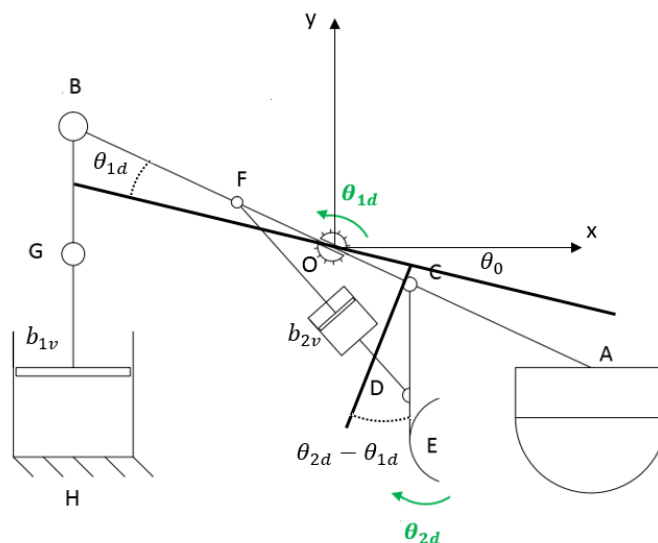


Figura 3.32: Configurazione deformata del sistema EDS

Per i punti G2 (baricentro dell'asta CE), D ed E appartenenti all'asta CE, le loro velocità assolute vengono ricavate in maniera analoga, poiché l'unica differenza tra di loro consiste nella diversa distanza lungo l'asta CE dal punto d'attacco C.

Quindi, è necessario individuare le posizioni di questi punti nel sistema di riferimento xOy:

$$\begin{aligned}x_D &= w_C \cos(\theta_0 - \theta_{1d}) - y_D \sin(\theta_{2d} - \theta_{1d}) \\y_D &= -w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) - y_D \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_E &= w_C \cos(\theta_0 - \theta_{1d}) - y_E \sin(\theta_{2d} - \theta_{1d}) \\y_E &= -w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) - y_E \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{G2} &= w_C \cos(\theta_0 - \theta_{1d}) - \frac{y_D}{2} \sin(\theta_{2d} - \theta_{1d}) \\y_{G2} &= -w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) - \frac{y_D}{2} \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})\end{aligned}$$

Derivando le due componenti e calcolando con il teorema di Pitagora le velocità totali, già al quadrato così da utilizzarle direttamente nella formula dell'energia cinetica, si ha:

$$\begin{aligned}v_D^2 &= (w_C^2 + y_D^2 + 2w_C y_D \sin(\theta_0 - \theta_{2d})) \dot{\theta}_{1d}^2 + y_D^2 \dot{\theta}_{2d}^2 \\&\quad - 2(y_D^2 + w_C y_D \sin(\theta_0 - \theta_{2d})) \dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_E^2 &= (w_C^2 + y_E^2 + 2w_C y_E \sin(\theta_0 - \theta_{2d})) \dot{\theta}_{1d}^2 + y_E^2 \dot{\theta}_{2d}^2 \\&\quad - 2(y_E^2 + w_C y_E \sin(\theta_0 - \theta_{2d})) \dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_{G2}^2 &= (w_C^2 + y_{G2}^2 + 2w_C y_{G2} \sin(\theta_0 - \theta_{2d})) \dot{\theta}_{1d}^2 + y_{G2}^2 \dot{\theta}_{2d}^2 \\&\quad - 2(y_{G2}^2 + w_C y_{G2} \sin(\theta_0 - \theta_{2d})) \dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d}\end{aligned}$$

dove $y_{G2} = y_E/2$.

L'energia cinetica può così essere riscritta in funzione delle coordinate libere del sistema:

$$E_c = \frac{1}{2} \bar{m}_1(\theta_{2d}) \dot{\theta}_{1d}^2 + \frac{1}{2} \bar{m}_2 \dot{\theta}_{2d}^2 - \frac{1}{2} \bar{m}_3(\theta_{2d}) \dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d}$$

con:

$$\begin{aligned}\bar{m}_1(\theta_{2d}) &= m_B w_B^2 + m_A w_A^2 + m_F w_F^2 + J_{G1} + m_{G1} w_{G1}^2 + J_{G2} + m_D w_C^2 + m_D y_D^2 + \\&\quad + 2m_D w_C y_D \sin(\theta_0 - \theta_{2d}) + m_{G2} w_C^2 + m_{G2} y_{G2}^2 + 2m_{G2} w_C y_{G2} \sin(\theta_0 - \theta_{2d}) + \\&\quad + m_E w_C^2 + m_E y_E^2 + 2m_E w_C y_E \sin(\theta_0 - \theta_{2d})\end{aligned}$$

$$\bar{m}_2 = J_{G2} + m_D y_D^2 + m_{G2} y_{G2}^2 + m_E y_E^2$$

$$\begin{aligned}\bar{m}_3(\theta_{2d}) = & 2(J_{G2} + m_D y_D^2 + m_D w_C y_D \sin(\theta_0 - \theta_{2d}) + m_{G2} y_{G2}^2 + \\ & + m_{G2} w_C y_{G2} \sin(\theta_0 - \theta_{2d}) + m_E y_E^2 + m_E w_C y_E \sin(\theta_0 - \theta_{2d})\end{aligned}$$

Rispetto ai precedenti casi, l'energia cinetica è ora funzione delle coordinate e libere e ciò vuol dire che, quando sarà derivata, darà origine anch'essa a termini non lineari.

Si riporta la scrittura di tal forma energetica mettendo in evidenza la matrice di massa generalizzata $M(\theta_{2d})$ che, per quanto detto prima, non sarà costante:

$$\begin{aligned}E_c = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} & \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{m}_1(\theta_{2d}) & -\bar{m}_3(\theta_{2d})/2 \\ -\bar{m}_3(\theta_{2d})/2 & \bar{m}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} \\ = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} & \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} [M(\theta_{2d})] \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Scrivendo tale energia in questa forma sarà poi immediato ricavare la forma quadratica nel momento in cui saranno linearizzate le equazioni.

Funzione dissipativa

La dissipazione energetica è dovuta all'azione congiunta dei due smorzatori GH e FD. Per ricavare questa forma energetica è necessario calcolare le velocità di allungamento degli elementi smorzanti:

$$D = \frac{1}{2} b_{1v} \dot{\Delta}l_{smorz1}^2 + \frac{1}{2} b_{2v} \dot{\Delta}l_{smorz2}^2$$

L'espressione della velocità di allungamento dello smorzatore 1 è la stessa di quella scritta per il sistema ad un grado di libertà asta-galleggiante, a patto di sostituire $\dot{\theta}_{1d}$ e θ_{1d} al posto di $\dot{\theta}_d$ e θ_d :

$$\dot{\Delta}l_{smorz1} = -w_B \cos(\theta_0 - \theta_{1d}) \dot{\theta}_{1d}$$

La scrittura di $\dot{\Delta}l_{smorz2}$ è anch'essa molto simile a quella ricavata per il caso ad un grado di libertà, a patto stavolta di considerare mobile la cerniera in F:

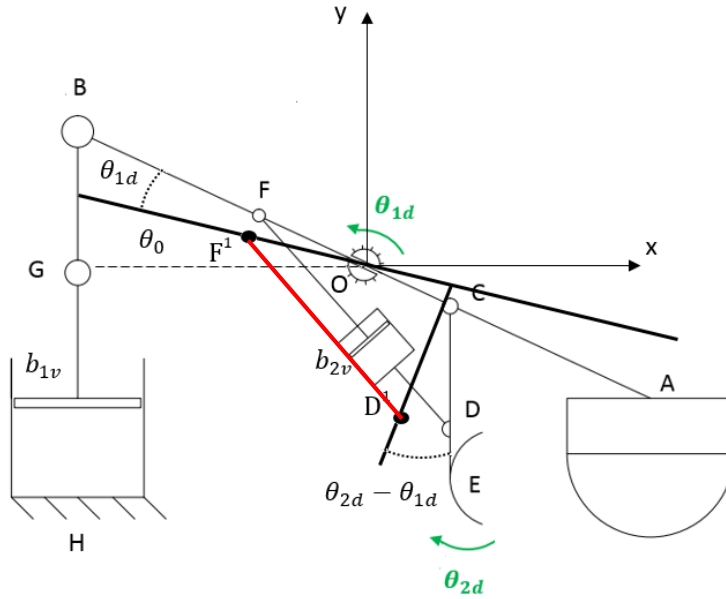


Figura 3.33: In rosso viene indicata in via schematica lo smorzatore FD nella generica configurazione di moto

$$\Delta l_{smorz2} = l_{fin} - l_{iniz} = l_{F^1D^1} - l_{FD}$$

Saltando qualche passaggio matematico si giunge alla definizione di questa grandezza:

$$\Delta l_{smorz2} = \frac{(w_F - w_C)y_D \cos(\theta_{2d} - \theta_0)}{\sqrt{(w_F - w_C)^2 + y_D^2 + 2(w_F - w_C)y_D \sin(\theta_{2d} - \theta_0)}} \dot{\theta}_{2d}$$

La forma di energia D diviene:

$$D = \frac{1}{2} b_{1v} w_B^2 \cos(\theta_0 - \theta_{1d})^2 \dot{\theta}_{1d}^2 + \frac{1}{2} b_{2v} \frac{(w_F - w_C)^2 y_D^2 \cos(\theta_{2d} - \theta_0)^2}{(w_F - w_C)^2 + y_D^2 + 2(w_F - w_C)y_D \sin(\theta_{2d} - \theta_0)} \dot{\theta}_{2d}^2$$

Appare dunque la dipendenza da entrambe le coordinate libere.

Anche per la funzione dissipativa si decide di esprimerla mettendo in evidenza una matrice di smorzamento generalizzata, sempre con il fine di agevolare le operazioni di linearizzazione:

$$D = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_{1d} \ \dot{\theta}_{2d}) \begin{bmatrix} b_{1v} w_B^2 \cos(\theta_0 - \theta_{1d})^2 & 0 \\ 0 & b_{2v} \frac{(w_F - w_C)^2 y_D^2 \cos(\theta_{2d} - \theta_0)^2}{(w_F - w_C)^2 + y_D^2 + 2(w_F - w_C)y_D \sin(\theta_{2d} - \theta_0)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d}) [R(\theta_{1d}, \theta_{2d})] \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix}$$

Si vuol fare un'osservazione.

Al momento della linearizzazione, la matrice di smorzamento generalizzata verrà valutata nella posizione di equilibrio e, chiaramente, non potrà che risultare diagonale.

Questo vuol dire che i due modi di vibrare del sistema, uno prevalentemente dato dal moto dell'asta del galleggiante e l'altro invece dato dal moto dell'asta della pala, saranno disaccoppiati per quanto riguarda i termini di smorzamento, mentre di sicuro presenteranno un accoppiamento per i termini inerziali e di rigidità visto che le rispettive matrici generalizzate sono piene.

Energia potenziale

L'energia potenziale elastica è data dal solo contributo relativo alla molla fittizia che va a modellizzare la variazione di spinta idrostatica nel tempo agente sul galleggiante.

La variazione di lunghezza di tal elemento elastico è funzione del solo moto dell'asta AB, dunque si calcola proprio come è stato fatto in precedenza sul sistema ad un grado:

$$V_k = \frac{1}{2} k_{rest} (\Delta l_0 + w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_{1d}))^2$$

Anche in questo caso, per quanto riguarda l'affondamento statico del galleggiante Δl_0 (o la pre-compressione dell'elemento elastico) da cui dipenderà anche il valore della rigidità di restoring k_{rest} , si può decidere di calcolarli analiticamente attraverso l'analisi statica del sistema oppure di misurarli in laboratorio.

L'energia potenziale gravitazionale si calcola misurando le altezze dei centri di massa del sistema nella generica configurazione di moto:

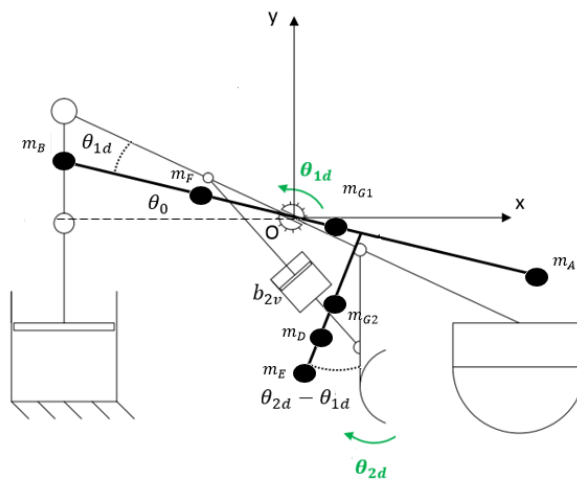


Figura 3.34: Masse concentrate che andranno a costituire il contributo di energia potenziale gravitazionale

$$\begin{aligned}
V_g = & m_B g w_B \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + m_F g w_F \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) - m_{G_1} g w_{G_1} \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + \\
& -m_A g w_A \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) - m_{G_2} g (w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + y_{G_2} \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})) + \\
& -m_D g (w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + y_D \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})) + \\
& -m_E g (w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + y_E \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d}))
\end{aligned}$$

Complessivamente l'energia potenziale è data dalla somma di questi due contributi:

$$\begin{aligned}
V = V_g + V_k = \\
= & m_B g w_B \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + m_F g w_F \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) - m_{G_1} g w_{G_1} \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + \\
& -m_A g w_A \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) - m_{G_2} g (w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + y_{G_2} \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})) + \\
& -m_D g (w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + y_D \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})) + \\
& -m_E g (w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + y_E \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})) + \\
& + \frac{1}{2} k_{rest} (\Delta l_0 + w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_{1d}))^2
\end{aligned}$$

Compattano i termini di questa relazione si ottiene:

$$\begin{aligned}
V = & m g_1 \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + m g_2 \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d}) + \\
& + \frac{1}{2} k_{rest} (\Delta l_0 + w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_{1d}))^2
\end{aligned}$$

dove:

$$m g_1 = m_B g w_B + m_F g w_F - m_{G_1} g w_{G_1} - m_A g w_A - m_{G_2} g w_C - m_D g w_C - m_E g w_C$$

$$m g_2 = -m_{G_2} g y_{G_2} - m_D g y_D - m_E g y_E$$

In tal caso non è possibile isolare una matrice di rigidità generalizzata come fatto per le precedenti due forme di energia.

Infatti la procedura per ottenere una forma quadratica per il contributo del potenziale prevede il calcolo di una matrice hessiana, ma questo verrà mostrato in dettaglio in fase di linearizzazione.

Per completezza di esposizione si valuta adesso il precarico statico della molla per via analitica, sfruttando la proprietà che vede annullarsi il gradiente dell'energia potenziale V nei punti di equilibrio statico del sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta_{1d}}(\vec{q}_0) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_{2d}}(\vec{q}_0) = 0 \end{cases}$$

dove \vec{q}_0 rappresenta il vettore delle coordinate libere del sistema valutate nella posizione di equilibrio, che in tal caso valgono entrambe zero.

Saltando i passaggi matematici, si mostra direttamente il risultato finale:

$$\Delta l_0 = \frac{mg1}{k_{rest}w_A}$$

Lavoro virtuale delle forze attive

In questa sede verranno considerate in forma compatta i due termini di forzamento M_{gall} e F_{pala} .

Il lavoro virtuale da esse prodotto è pari a:

$$\delta^*L = F_{pala}\delta^*x_{F_{pala}} + M_{gall}\delta^*\theta_{M_{gall}}$$

dove chiaramente i termini $\delta^*x_{F_{pala}}$ e $\delta^*\theta_{M_{gall}}$ rappresentano gli spostamenti virtuali in direzione delle forze applicate.

La rotazione virtuale $\delta^*\theta_{M_{gall}}$ in direzione del momento forzante M_{gall} è dato dal solo contributo della coordinata libera θ_{1d} :

$$\theta_{M_{gall}} = \theta_{1d}$$

Invece lo spostamento del punto E nella direzione orizzontale della forza della pala sarà in questo caso funzione delle rotazioni di entrambe le aste AB e CE:

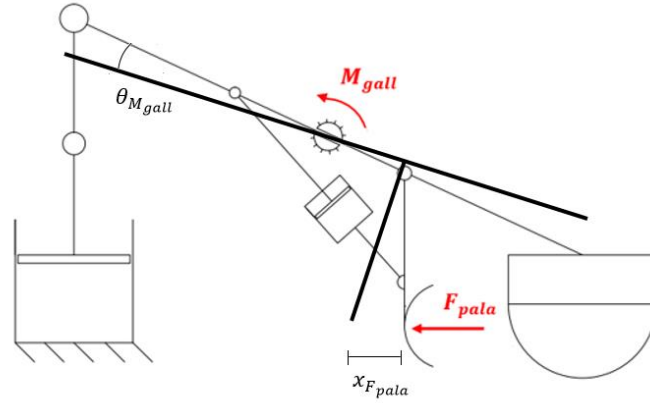


Figura 3.35: Forzamenti d'onda e rispettivi spostamenti virtuali

$$x_{F_{pala}} = w_C \cos \theta_0 - (w_C \cos(\theta_0 - \theta_{1d}) - y_E \sin(\theta_{2d} - \theta_{1d}))$$

Per cui, il lavoro virtuale delle forze attive, grandezza scalare, in funzione delle coordinate libere diventa:

$$\begin{aligned} \delta^* L &= (M_{gall} \quad F_{pala}) \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_{M_{gall}}}{\partial \theta_{1d}} & \frac{\partial \theta_{M_{gall}}}{\partial \theta_{2d}} \\ \frac{\partial x_{F_{pala}}}{\partial \theta_{1d}} & \frac{\partial x_{F_{pala}}}{\partial \theta_{2d}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta^* \theta_{1d} \\ \delta^* \theta_{2d} \end{pmatrix} \\ &= (M_{gall} \quad F_{pala}) [\Lambda(\theta_{1d}, \theta_{2d})] \begin{pmatrix} \delta^* \theta_{1d} \\ \delta^* \theta_{2d} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolando le derivate di $\Lambda(\theta_{1d}, \theta_{2d})$, detta matrice jacobiana, si ottiene:

$$\delta^* L = (M_{gall} \quad F_{pala}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) - y_E \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d}) & y_E \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta^* \theta_{1d} \\ \delta^* \theta_{2d} \end{pmatrix}$$

Sviluppo termini energetici per la stesura dell'equazione del moto

Sviluppando i termini energetici attraverso le seguenti derivate si ottengono le due equazioni di moto non lineari del sistema EDS completo a due gradi di libertà:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}_{1d}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta_{1d}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_{1d}} + \frac{\partial V}{\partial \theta_{1d}} = \frac{\delta^* L}{\delta^* \theta_{1d}} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}_{2d}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta_{2d}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_{2d}} + \frac{\partial V}{\partial \theta_{2d}} = \frac{\delta^* L}{\delta^* \theta_{2d}} \end{cases}$$

Qui di seguito viene riportato direttamente il risultato finale, essendo i procedimenti del tutto simili a quelli mostrati per i sistemi ad un grado di libertà.

Prima si vogliono esprimere alcune funzioni, costanti o funzione delle coordinate libere, per permettere una scrittura più compatta delle equazioni dinamiche:

- $m_1(\theta_{2d}) = m_B w_B^2 + m_A w_A^2 + m_F w_F^2 + J_{G1} + m_{G1} w_{G1}^2 + J_{G2} + m_D w_C^2 + m_D y_D^2 +$
 $+ 2m_D w_C y_D \sin(\theta_0 - \theta_{2d}) + m_{G2} w_C^2 + m_{G2} y_{G2}^2 + 2m_{G2} w_C y_{G2} \sin(\theta_0 - \theta_{2d})$
 $+ m_E w_C^2 +$
 $+ m_E y_E^2 + 2m_E w_C y_E \sin(\theta_0 - \theta_{2d})$
- $m_2(\theta_{2d}) = -\frac{1}{2}(2J_{G2} + 2m_D y_D^2 + 2m_D w_C y_D \sin(\theta_0 - \theta_{2d}) + 2m_{G2} y_{G2}^2 +$
 $+ 2m_{G2} w_C y_{G2} \sin(\theta_0 - \theta_{2d}) + 2m_E y_E^2 + 2m_E w_C y_E \sin(\theta_0 - \theta_{2d}))$
- $m_3(\theta_{2d}) = -2(m_D w_C y_D + m_{G2} w_C y_{G2} + m_E w_C y_E) \cos(\theta_0 - \theta_{2d})$
- $m_4(\theta_{2d}) = (m_D w_C y_D + m_{G2} w_C y_{G2} + m_E w_C y_E) \cos(\theta_0 - \theta_{2d})$
- $m_5 = J_{G2} + m_D y_D^2 + m_{G2} y_{G2}^2 + m_E y_E^2$
- $m_6(\theta_{2d}) = -\frac{1}{2}(2J_{G2} + 2m_D y_D^2 + 2m_D w_C y_D \sin(\theta_0 - \theta_{2d}) + 2m_{G2} y_{G2}^2 +$
 $+ 2m_{G2} w_C y_{G2} \sin(\theta_0 - \theta_{2d}) + 2m_E y_E^2 + 2m_E w_C y_E \sin(\theta_0 - \theta_{2d}))$
- $b_{eq1}(\theta_{1d}) = b_{1v} w_B^2 \cos(\theta_0 - \theta_{1d})^2$
- $b_{eq2}(\theta_{2d}) = b_{2v} \frac{(w_F - w_C)^2 y_D^2 \cos(\theta_{2d} - \theta_0)^2}{(w_F - w_C)^2 + y_D^2 + 2(w_F - w_C) y_D \sin(\theta_{2d} - \theta_0)}$
- $k_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) = -mg_1 \cos(\theta_0 - \theta_{1d}) + mg_2 \sin(\theta_{2d} - \theta_{1d}) +$
 $+ k_{rest}(\Delta l_0 + w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_{1d})) w_A \cos(\theta_0 - \theta_{1d}) =$

$$= mg2\sin(\theta_{2d} - \theta_{1d}) + k_{rest}(w_A \sin\theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_{1d}))w_A \cos(\theta_0 - \theta_{1d})$$

- $k_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) = -mg2\sin(\theta_{2d} - \theta_{1d})$
- $Q_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) = M_{gall} - F_{pala}(w_C \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + y_E \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d}))$
- $Q_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) = F_{pala}y_E \cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})$

Osservando le componenti lagrangiane delle forze d'onda, si nota come il momento del galleggiante agisca solo ed esclusivamente sul modo dell'asta AB, invece la forza alla pala introduce energia sia in questo modo che in quello dell'asta CE.

Così si possono scrivere le equazioni di moto non lineari in forma più compatta:

$$\begin{cases} m_1(\theta_{2d})\ddot{\theta}_{1d} + m_2(\theta_{2d})\ddot{\theta}_{2d} + m_3(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}\dot{\theta}_{2d} + m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d}^2 + b_{eq1}(\theta_{1d})\dot{\theta}_{1d} + k_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) = Q_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \\ m_5\ddot{\theta}_{2d} + m_6(\theta_{2d})\ddot{\theta}_{1d} + m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}^2 + b_{eq2}(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d} + k_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) = Q_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \end{cases}$$

Integrando passo-passo in Simulink questa equazione è possibile simulare la dinamica del sistema.

Se l'interesse è volto a studiare il moto in piccolo attorno alla configurazione di equilibrio statico, si può anche qui ricorrere alla linearizzazione.

Linearizzazione dell'equazione di moto attorno alla posizione di equilibrio statico

Si conclude il discorso della scrittura analitica dei modelli dell'EDS linearizzando l'equazione di moto vettoriale del sistema a due gradi di libertà attorno alla configurazione di equilibrio statico, in cui le due coordinate libere scelte hanno valore nullo:

$$\vec{q}_0 = \begin{cases} \theta_{1d0} = 0 \\ \theta_{2d0} = 0 \end{cases}$$

Le forme quadratiche per energia cinetica e funzione dissipativa si valutano immediatamente valutando le matrici di massa e di smorzamento generalizzato nella posizione di equilibrio:

$$E_c \cong \frac{1}{2}(\dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d}) \begin{bmatrix} \bar{m}_1(\theta_{2d} = 0) & -\bar{m}_3(\theta_{2d} = 0)/2 \\ -\bar{m}_3(\theta_{2d} = 0)/2 & \bar{m}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d})[M] \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix}$$

$$m_{11} = \bar{m}_1(\theta_{2d} = 0) \quad m_{12} = m_{21} = -\bar{m}_3(\theta_{2d} = 0)/2 \quad m_{22} = \bar{m}_2$$

$$D \cong \frac{1}{2} (\dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d}) \begin{bmatrix} b_{1v} w_B^2 \cos(\theta_0)^2 & 0 \\ 0 & b_{2v} \frac{(w_F - w_C)^2 y_D^2 \cos(\theta_0)^2}{(w_F - w_C)^2 + y_D^2 + 2(w_F - w_C) y_D \sin(\theta_0)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d}) \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_{1d} \dot{\theta}_{2d}) [R] \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix}$$

[M] e [R] sono che le matrici di massa e di rigidità che andranno a costituire l'equazione dinamica del sistema linearizzato.

Si nota come la matrice di massa risulti piena, al contrario di quella di smorzamento, a testimonianza di un accoppiamento inerziale tra i modi di galleggiante e di pala.

Ossia, detto in parole più semplici, i due sottosistemi asta-pala e asta-galleggiante comunicano tra loro attraverso i termini inerziali e, come si vedrà presto, attraverso i termini elastici e gravitazionali dell'energia potenziale.

Riguardo a quest'ultimo, non è possibile avere direttamente la forma quadratica, ma bisogna ricavare la sua matrice hessiana e valutarla nella posizione di equilibrio.

Essa andrà a definire la matrice di rigidità generalizzata, figlia in tal caso sia di contributi gravitazionali che elastici:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vec{q}^2_{\vec{q}_0}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_{1d}^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_{1d} \partial \theta_{2d}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_{2d} \partial \theta_{1d}} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_{2d}^2} \end{bmatrix}_{\vec{q}_0} = [K]$$

Per cui si procede con il calcolo dei termini di questa matrice, a conclusione della fase di linearizzazione per i termini strutturali:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_{1d}^2} = -mg2\cos(\theta_{2d} - \theta_{1d}) + k_{rest} w_A^2 \sin\theta_0 \sin(\theta_0 - \theta_{1d}) + k_{rest} w_A^2 \cos(2\theta_0 - 2\theta_{1d})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_{1d} \partial \theta_{2d}} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_{2d} \partial \theta_{1d}} = mg2\cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_{2d}^2} = -mg2\cos(\theta_{2d} - \theta_{1d})$$

La matrice di rigidità equivalente sarà:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg2 + k_{rest}w_A^2 \sin^2 \theta_0 + k_{rest}w_A^2 \cos 2\theta_0 & mg2 \\ mg2 & -mg2 \end{bmatrix}$$

Come preannunciato anche questa matrice è di tipo piena e ciò vuol dire che l'accoppiamento tra le due equazioni è dovuto a termini inerziali ed elasto-gravitazionali. Dunque, ad essere precisi, i due modi di vibrare del sistema, vista la natura di queste ultime due matrici, saranno costituiti da entrambi i contributi del moto dell'asta galleggiante e dell'asta pala; in uno i due corpi rigidi si muoveranno in fase mentre nell'altro saranno in controfase.

Di seguito si riporta una figura in cui si mettono in risalto i due modi di vibrare del sistema, focalizzandosi sui moti dei dispositivi pala e galleggiante:

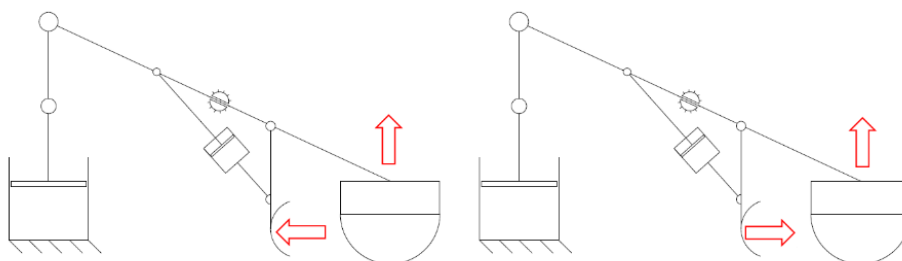


Figura 3.36: Rappresentazione qualitativa dei due modi di vibrare del sistema

In questa sede, le frequenze proprie e modi della struttura non verranno discussi, ma guardando la figura si può comprendere come nel primo modo, in cui i dispositivi si muovono in fase, mentre il galleggiante sale (o meglio dire mentre l'asta AB ruota in senso anti-orario) la pala si muove verso sinistra (l'asta CE ruota in senso orario).

Viceversa nel secondo modo di moto in controfase per i due dispositivi, mentre il galleggiante si muove verso l'alto, la pala si muove verso destra.

Attraverso un'analisi quantitativa poi sarà possibile, per ognuno dei due modi, conoscere il contributo proveniente dal moto dell'asta AB e dal moto dell'asta CE.

Riguardo al lavoro virtuale delle forze attive è sufficiente valutare la matrice jacobiana che permette il calcolo delle componenti lagrangiane nella posizione di equilibrio:

$$\Lambda(\theta_{1d0}, \theta_{2d0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w_C \sin(\theta_0) - y_E & y_E \end{bmatrix}$$

L'equazione di moto del sistema linearizzato si scrive allora:

$$[M]\ddot{\vec{q}} + [R]\dot{\vec{q}} + [K]\vec{q} = \vec{Q}$$

dove le matrici di massa, smorzamento e rigidità sono in precedenza state ricavate mentre il vettore delle componenti lagrangiane si calcola come:

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} M_{gall} - F_{pala}(w_C \sin(\theta_0) + y_E) \\ F_{pala}y_E \end{pmatrix}$$

3.2.2 Simulazione dei sistemi dinamici costruiti attraverso Simulink

Si affronta ora il tema dell'integrazione numerica delle due equazioni di moto non lineare e linearizzata; in questa fase di *Work in Progress* in cui i modelli matematici non sono ancora stati tarati, ci si limiterà a mostrare le caratteristiche costruttive degli schemi a blocchi e a capire i limiti applicativi delle equazioni di moto linearizzate.

In particolare si vedrà come aumentando l'ampiezza di oscillazione del sistema, i due modelli mostreranno dei comportamenti differenti in quanto il modello linearizzato si limita a funzionare solo se si hanno piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio statico, mentre il non lineare funziona per tutte le condizioni di moto.

In merito agli schemi in Simulink, essi saranno a loro volta distinti, a seconda che si affronti un'*Analisi Diretta* e un'*Analisi Inversa*.

Per quanto riguarda lo schema a blocchi dell'analisi diretta, esso viene costruito in modo che, data la forzante d'onda, fornisce in uscita i segnali relativi alla cinematica del sistema (spostamento, velocità, accelerazione).

Invece nel caso di analisi inversa, la cinematica rappresenta l'input dello schema a blocchi (proveniente da misure in laboratorio; in particolare, mentre i segnali di spostamento sono relativi proprio a misure di fotocellule di distanza montate sul sistema, quelli di velocità e di accelerazione sono ricavati dal primo mediante operazioni di filtraggio e derivazione), mentre si ottengono in uscita gli andamenti delle forzanti d'onda.

Su schemi di analisi inversi si baseranno le procedure volte a validare la forzante d'onda modellata secondo quanto raccontato dalla Teoria del Flusso Potenziale.

In particolare si confronterà la forza ricostruita attraverso la somma dei termini strutturali (inerziali, di smorzamento, gravitazionali ed elastici) con quella ottenuta invece dalla somma dei contributi idrostatici, di radiazione e di eccitazione.

Quindi, per l'ottenimento del modello matematico per l'EDS, hanno un più elevato valore strategico gli schemi a blocchi dell'analisi inversa.

Tuttavia vengono riportati anche quelli dell'analisi diretta che in questo contesto vengono utilizzati per il confronto tra il sistema non lineare e quello linearizzato.

Seguono tre paragrafi in cui si mostrano i vari schemi per i tre sistemi di cui si dispone di equazioni dinamiche, ossia dei due sistemi ad un grado di libertà asta-pala e asta-galleggiante e del sistema complessivo a due gradi di libertà.

3.2.2.1 Schemi del sistema asta-galleggiante

Schemi a blocchi Simulink d'analisi diretta

Si riportano gli schemi a blocchi per il sistema linearizzato e per quello non lineare:

- Schema del sistema non lineare:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{1v} w_B^2 \cos^2(\theta_0 - \theta_d) \dot{\theta}_d + k_{rest} (w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d)) w_A \cos(\theta_0 - \theta_d) = M_{gall}$$

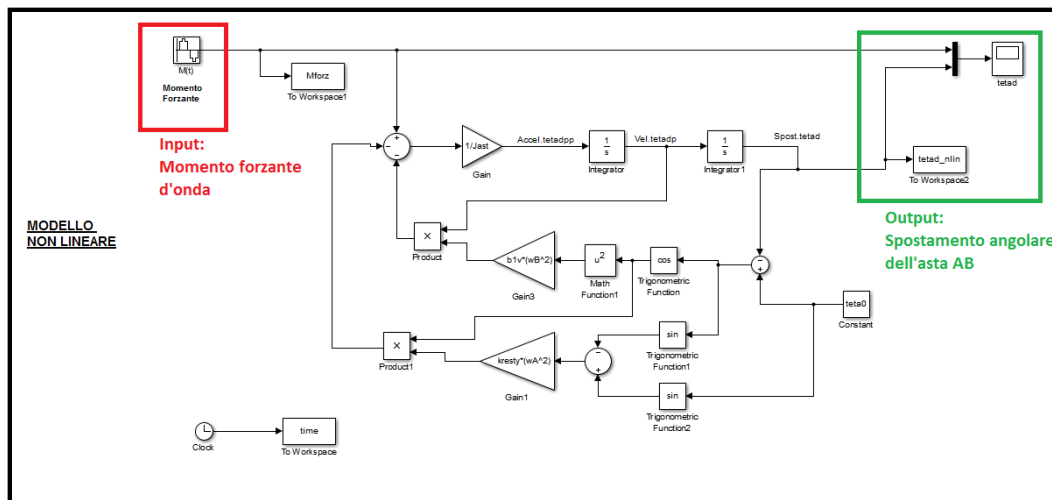


Figura 3.37: Schema a blocchi del sistema asta-galleggiante non lineare, per analisi diretta

- Schema del sistema linearizzato:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta} \dot{\theta}_d + k_{rest} \theta_d = M_{gall}$$

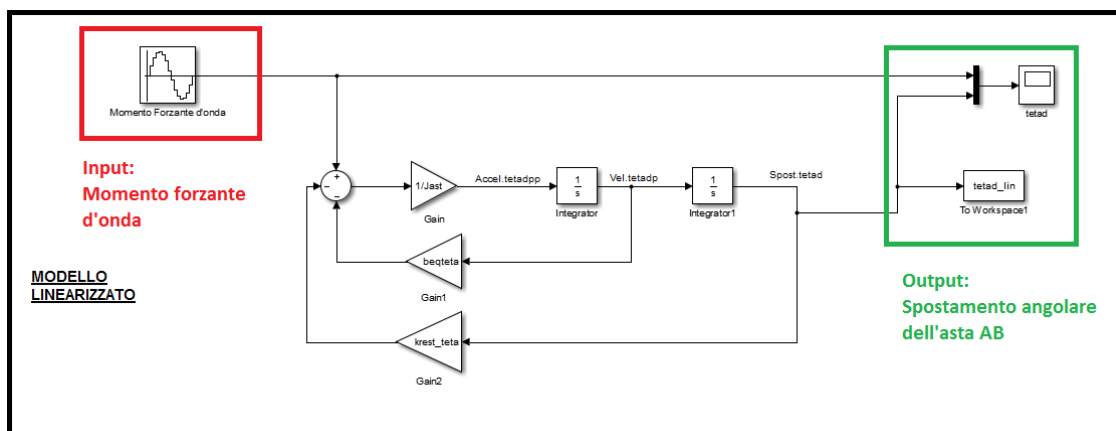


Figura 3.38: Schema a blocchi del sistema asta-galleggiante linearizzato, per analisi diretta

Al di là della maggiore complessità schematica per il caso non lineare, dove è stato utilizzato qualche blocco in più per eseguire operazioni algebriche più complesse, il principio con cui essi sono stati costruiti è lo stesso.

L'operazione di partenza consiste nell'isolare il termine di accelerazione nelle due equazioni.

A valle di una prima ed una seconda integrazione della grandezza così isolata, si ottengono la velocità e lo spostamento angolari dell'asta AB:

1)

$$\ddot{\theta}_d = (-b_{1v}w_B^2 \cos^2(\theta_0 - \theta_d) \dot{\theta}_d - k_{rest}(w_A \sin \theta_0 - w_A \sin(\theta_0 - \theta_d))w_A \cos(\theta_0 - \theta_d) + M_{gall})/J^*$$

$$\ddot{\theta}_d = (-b_{eq\theta_0} \dot{\theta}_d - k_{rest\theta} \theta_d + M_{gall})/J^*$$

2)

$$\dot{\theta}_d = \int \ddot{\theta}_d dt + \dot{\theta}_{d0}$$

$$\theta_d = \int \dot{\theta}_d dt + \theta_{d0}$$

Per concludere la parte legata agli schemi d'analisi diretta, si riporta uno schema a blocchi complessivo che riunisce entrambi i sistemi non lineare e linearizzato.

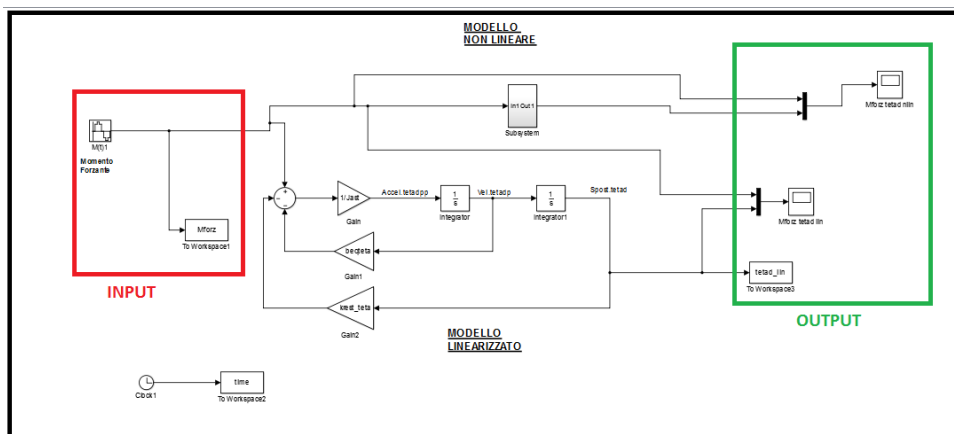


Figura 3.39: Schema a blocchi complessivo, per analisi diretta, per sistema non lineare e linearizzato

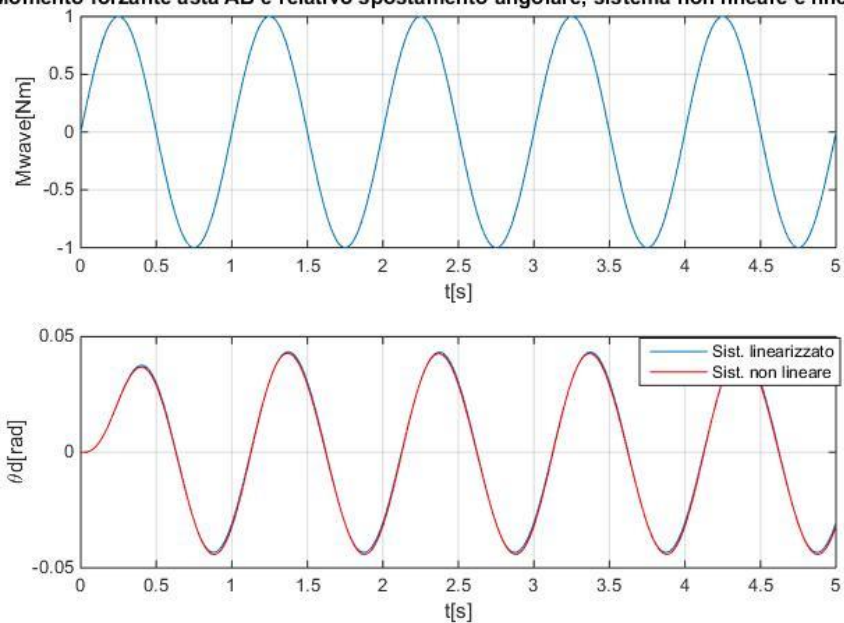
Per vedere i limiti della linearizzazione legata al discorso delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio statico, si sceglieranno tre momenti forzanti armonici in ingresso di piccola, media ed alta intensità.

Poiché ad un forzamento a maggior intensità corrisponde un moto più importante, si attendono degli scostamenti tra il non lineare ed il linearizzato crescenti all'aumentare dell'energia con cui il sistema viene movimentato.

In particolare sono stati provati tre casi di forzamento sinusoidale aventi tutti la stessa pulsazione, pari a $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$, ma ampiezze crescenti pari rispettivamente 1, 3 e 6 Nm.

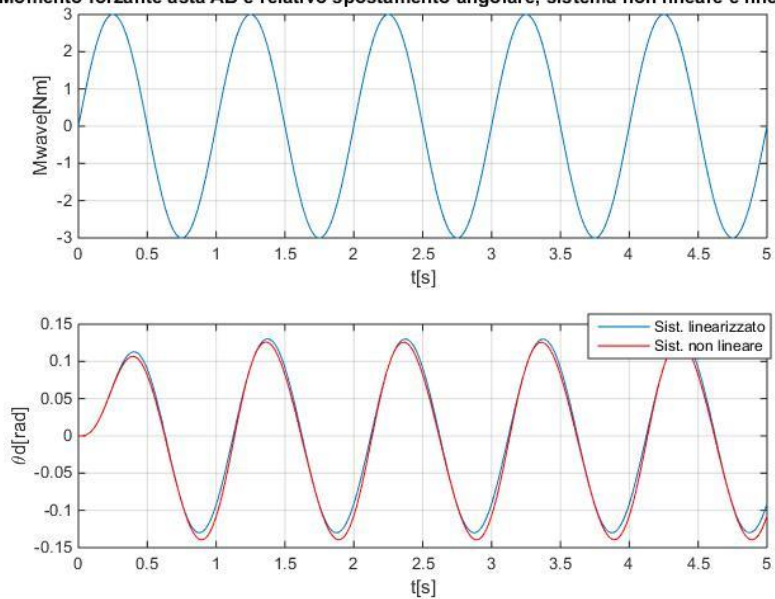
a. $M_{gall} = 1 \cdot \sin(\omega t)$

Momento forzante asta AB e relativo spostamento angolare, sistema non lineare e linearizzato



b. $M_{gall} = 3 \cdot \sin(\omega t)$

Momento forzante asta AB e relativo spostamento angolare, sistema non lineare e linearizzato



c. $M_{gall} = 6 \cdot \sin(\omega t)$

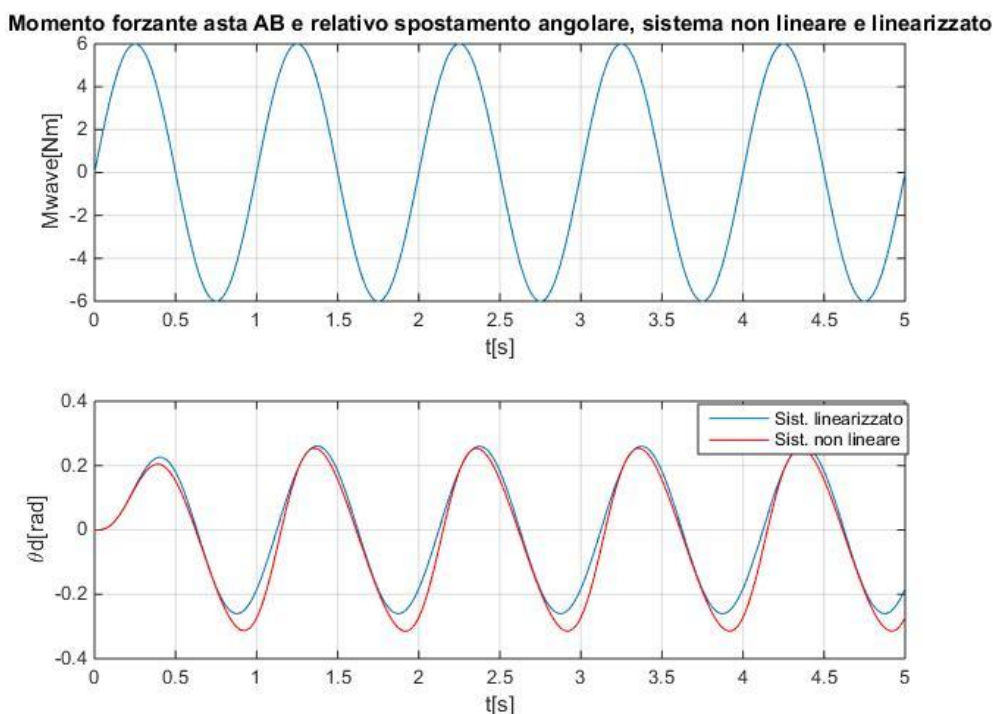


Figura 3.40: Confronto tra i sistemi non lineare e linearizzato, per forzamenti a diversa intensità

Quindi si ha la conferma che all'aumentare dell'ampiezza del forzamento, che dà luogo ad ampiezze di moto maggiori, aumentano le differenze tra i segnali di spostamento per i due sistemi, sia per quanto riguarda l'ampiezza e sia per quanto riguarda la fase relativa rispetto al forzamento.

Inoltre, facendo attenzione alle figure, per il sistema non lineare si nota che il segnale presenta un valor medio diverso da zero, pur essendo il forzamento di tipo sinusoidale a media nulla.

Schemi a blocchi Simulink d'analisi inversa

Vengono mostrati gli schemi a blocchi per l'analisi inversa, ossia lo schema che ricostruisce il forzamento d'onda a partire dai termini strutturali e di forzamento.

In questa sede si mostreranno soltanto i dettagli costruttivi degli schemi a blocchi che hanno lo scopo di ricavare il forzamento d'onda partendo dai termini strutturali (quelli a sinistra dell'equazione di moto) e da quelli fluidodinamici relativi alla modellazione del forzamento basato sulla Teoria Lineare del Flusso Potenziale.

Mentre per quanto riguarda il primo caso è già possibile ricavare l'andamento della forzante essendo i termini della parte strutturale noti, per quello proveniente dalla somma dei termini fluidodinamici è necessario definire i parametri incogniti necessari alla definizione di forza di radiazione e di forza di eccitazione.

Quindi per questo secondo schema si ipotizzeranno dei valori di buon senso per I_{add} , b_{hyd} (inerzia aggiunta e smorzamento idrodinamico) e per M_{ex} e φ_{ex} (modulo e fase relativa rispetto allo spostamento del momento di eccitazione) e si ricaverà il relativo valore del momento forzante che, ovviamente, non avrà alcun senso fisico vista l'origine dei parametri fluidodinamici.

Invece, una volta stimati gli effettivi valori di questi ultimi, si ricaverà il momento forzante che andrà confrontato con quello costruito a partire dai termini strutturali.

Si anticipa che, poiché per la stima dei parametri fluidodinamici ci si è per il momento appoggiati a strumenti propri dei sistemi lineari, è lecito ricostruire il momento forzante con i termini strutturali del sistema linearizzato, per così avere un riferimento diretto per quello ricavato dalla somma dei termini a destra dell'uguale proveniente dall'approccio, anch'esso lineare, della Teoria del Flusso:

$$M_{gall1} = J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta_0} \dot{\theta}_d + k_{rest\theta} \theta_d$$

$$M_{gall2} = -I_{add} \ddot{\theta}_d - b_{hyd} \dot{\theta}_d + F_{ex}$$

Il modello scelto si riterrà validato se i due segnali M_{gall1} e M_{gall2} risulteranno ben sovrapponibili.

Di seguito i due schemi a blocchi per la costruzione del momento forzante con le due modalità spiegate.

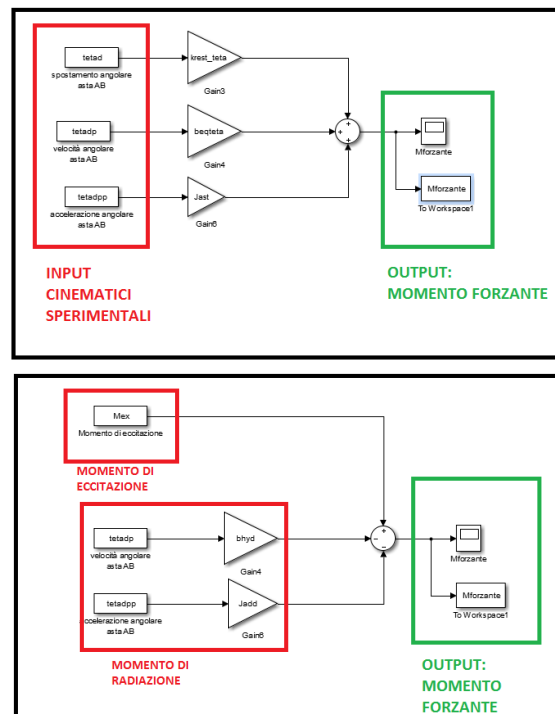


Figura 3.41: Schemi Simulink d'analisi inversa; sopra, costruzione del momento forzante a partire dai termini strutturali, sotto invece calcolo di questo a partire dai contributi di eccitazione e di radiazione

Si riportano gli andamenti dei momenti forzanti d'onda, ricostruiti secondo le due modalità, ipotizzando un andamento sinusoidale per lo spostamento angolare dell'asta AB (e quindi anche per velocità e accelerazione):

$$\theta_d(t) = \Theta \sin(\omega t)$$

in cui $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$ e $\Theta = 5^\circ$ (pari a circa 0.0873 rad)

I parametri strutturali, come detto, sono noti; invece per i parametri idrodinamici sono stati posti dei valori inventati ma in linea con i valori trovati in letteratura, per un sistema molto simile all'EDS:

- *Inerzia aggiunta* $I_{add} : 1 \text{ kgm}^2$;
- *Smorzamento idrodinamico* $b_{hyd} : 1 \text{ Nms/rad}$

Il momento di eccitazione ovviamente sarà anche di tipo sinusoidale, ipotizzato con ampiezza $|M_{ex}| = 1 \text{ Nm}$ e fase relativa rispetto allo spostamento $\varphi_{ex} = 30^\circ$ (pari a circa 0.5236 rad):

$$M_{ex}(t) = M_{ex} \sin(\omega t + \varphi_{ex})$$

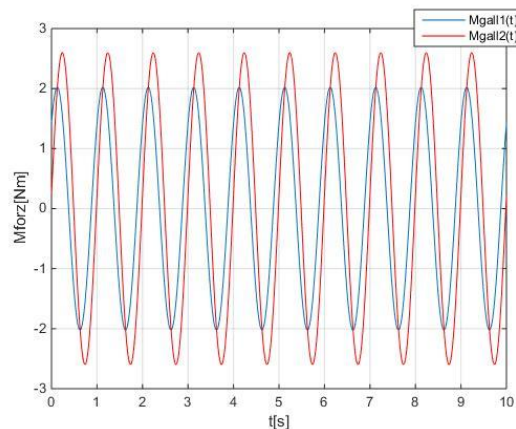


Figura 3.42: Andamento forzante d'onda ricostruita: in blu si ha l'andamento a partire dalla parte strutturale, in rosso invece quello relativo alla somma dei contributi di eccitazione e di radiazione

In Figura 3.42 non si ha perfetta sovrapposizione, come ci si aspettava, data la provenienza dei parametri idrodinamici.

Tuttavia si nota come i valori effettivi di tali parametri non dovrebbero essere tanto lontani da quelli ipotizzati in quanto le due curve non sono totalmente scorrelate tra loro.

In realtà lo schema in Simulink per questa fase non era strettamente necessario in quanto, a differenza dell'analisi diretta, non vengono eseguite operazioni di integrazione dell'equazione differenziale, ma si effettuano soltanto operazioni di tipo algebrico, per cui

si poteva svolgere il tutto anche con un semplice script in Matlab o addirittura usando Microsoft Excel.

Tuttavia per chiarezza espositiva, si è preferito continuare il discorso sfruttando gli schemi a blocchi, anche perché quando il modello dell'EDS verrà complicato (introducendo le parti non lineari oppure i componenti per la conversione dell'energia o qualsiasi altro elemento che adesso non viene ancora preso in considerazione), non si potrà fare a meno di lavorare in questo ambiente di calcolo quindi, tanto vale, iniziare fin da subito ad abituarci.

3.2.2.2 Schemi del sistema asta-pala

In via del tutto simile si mostrano gli schemi in Simulink per il caso asta-pala.

Schemi a blocchi Simulink d'analisi diretta

Si riportano gli schemi a blocchi per il sistema linearizzato e per quello non lineare:

- Schema del sistema non lineare:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{2v} \frac{y_D^2 (w_F + w_C)^2 \cos(\theta_0 - \theta_d)^2}{(w_F + w_C)^2 + y_D^2 + 2y_D (w_F + w_C) \sin(\theta_0 - \theta_d)} \dot{\theta}_d + m_G g \frac{y_E}{2} \sin \theta_d + m_D g y_D \sin \theta_d + m_E g y_E \sin \theta_d = F_{pala} y_E \cos \theta_d$$

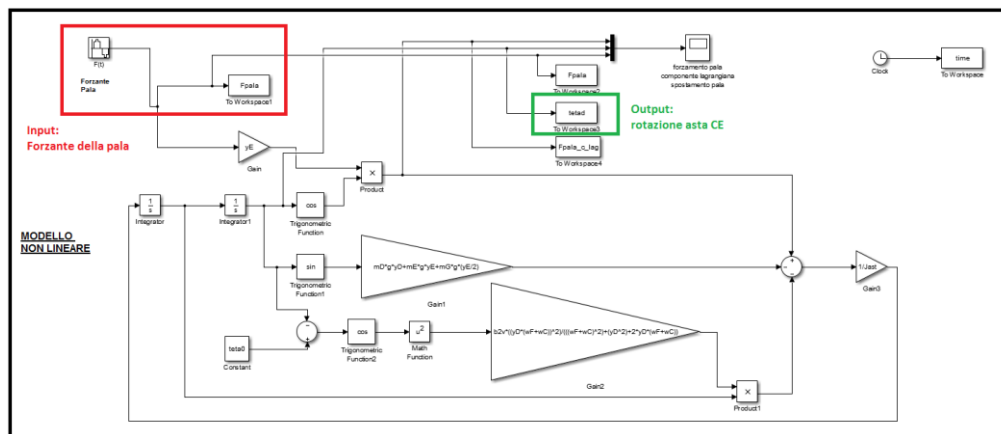


Figura 3.43: Schema a blocchi del sistema asta-pala non lineare, per analisi diretta

Si può notare come in questo caso la forzante della pala (Figura 3.43, riquadro rosso in alto a sinistra) dia origine ad una componente lagrangiana non lineare poiché moltiplicata per il termine $y_E \cos \theta_d$.

Segue anche qui lo schema per il caso linearizzato, dove si noteranno ancora notevoli semplificazioni nello schema a blocchi data la maggior semplicità dell'equazione da integrare.

- Schema del sistema linearizzato:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta\theta} \dot{\theta}_d + k_g \theta_d = Q_{pala}(\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t)$$

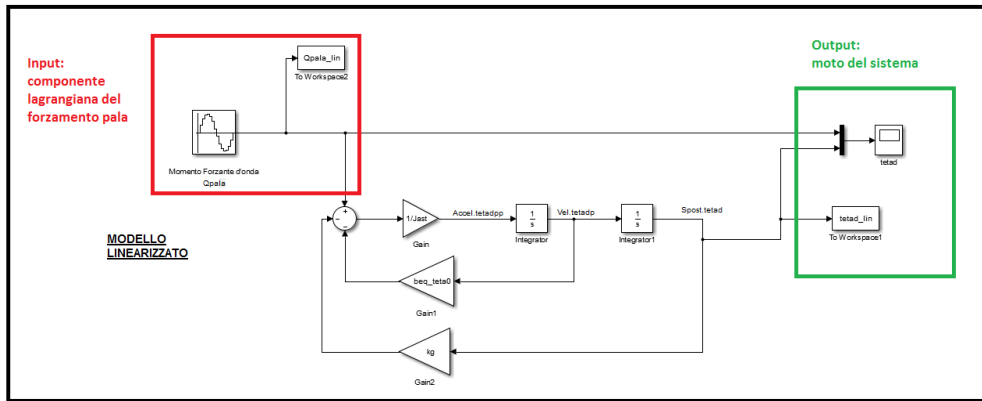


Figura 3.44: Schema a blocchi del sistema asta-pala linearizzato, per analisi diretta

Non si aggiungerà altro per i sistemi appena presentati poiché valgono le stesse osservazioni fatte per il caso asta-galleggiante.

Schemi a blocchi Simulink d'analisi inversa

Vengono mostrati gli schemi a blocchi per l'analisi inversa per la ricostruzione del forzamento d'onda sia partendo dai termini strutturali che dai termini della sovrapposizione lineare della teoria del potenziale.

Anche qui verranno semplicemente mostrati gli schemi a blocchi, saltando commenti ridondanti.

Ovviamente ci si riferirà ai soli modelli linearizzati, sia per quanto riguarda la parte strutturale a sinistra dell'uguale che quella di forzamento a destra dell'uguale.

Per cui l'equazione di riferimento è la seguente:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta\theta} \dot{\theta}_d + k_g \theta_d = Q_{pala}(\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t) = M_x(t) - I_{add}(\omega) \ddot{\theta}_d - b_{nyd\theta}(\omega) \dot{\theta}_d$$

Di seguito gli schemi a blocchi che, data in ingresso la cinematica del sistema θ_d , $\dot{\theta}_d$ e $\ddot{\theta}_d$, e noti sia i parametri strutturali che quelli idrodinamici di forzamento, restituiscono i segnali Q_{pala1} e Q_{pala2} che si calcolano nel seguente modo:

$$Q_{pala1}(t) = J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta\theta} \dot{\theta}_d + k_g \theta_d$$

$$Q_{pala2}(t) = M_x(t) - I_{add}(\omega) \ddot{\theta}_d - b_{nyd\theta}(\omega) \dot{\theta}_d$$

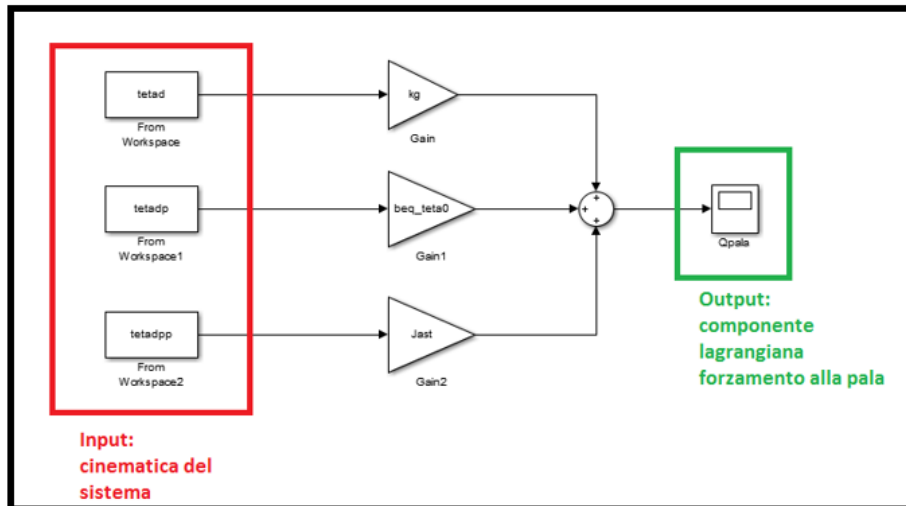


Figura 3.45: Schema a blocchi del sistema asta-pala linearizzato per analisi inversa

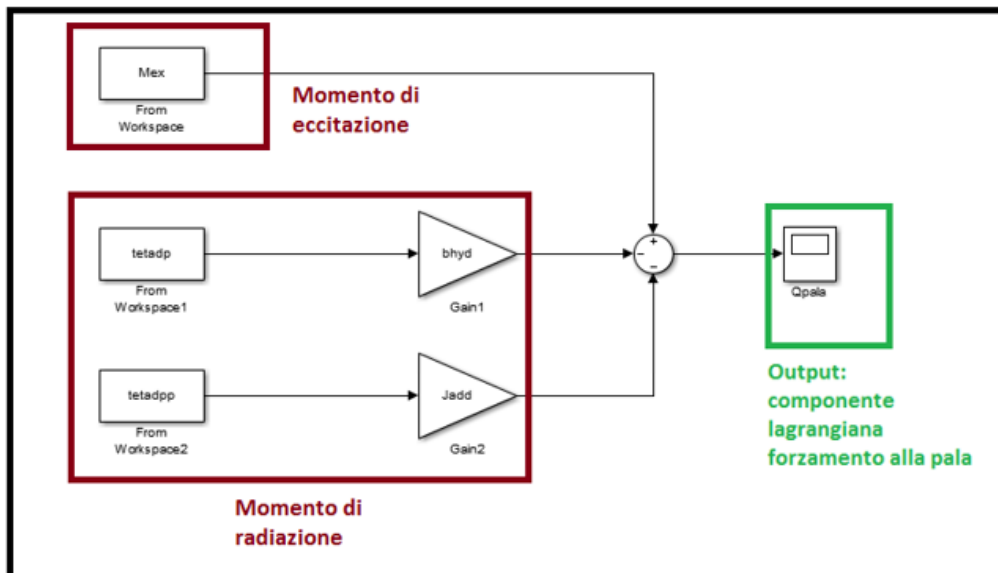


Figura 3.46: Schema a blocchi del sistema asta-pala linearizzato per analisi inversa

3.2.2.3 Schemi del sistema complessivo a 2 g.d.l.

Per ultimi vengono mostrati gli schemi d'analisi diretta e inversa per il sistema a due gradi di libertà.

E' ormai noto che, almeno in una prima fase di taratura del modello, si effettuerà l'analisi inversa lavorando sul modello linearizzato.

Per l'analisi diretta tuttavia si mostreranno gli schemi d'integrazione sia del sistema effettivo non lineare che di quello linearizzato, mostrando gli schemi di integrazione per entrambi.

Successivamente verranno mostrati risultati di simulazioni di piccoli e grandi spostamenti per evidenziare ancora una volta le differenze tra i due sistemi quando il moto inizia ad avere ampiezze importanti.

Schemi a blocchi Simulink d'analisi diretta

Per il sistema a due gradi di libertà non lineare, uno dei modi per integrare l'equazione del moto prevede, innanzitutto, che vengano isolati i termini inerziali, come di seguito riportato:

$$\begin{cases} m_1(\theta_{2d})\ddot{\theta}_{1d} + m_2(\theta_{2d})\ddot{\theta}_{2d} = -m_3(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}\dot{\theta}_{2d} - m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d}^2 - b_{eq1}(\theta_{1d})\dot{\theta}_{1d} - k_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) + Q_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \\ m_5\ddot{\theta}_{2d} + m_6(\theta_{2d})\ddot{\theta}_{1d} = -m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}^2 - b_{eq2}(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d} - k_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) + Q_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \end{cases}$$

Successivamente si affiancano a queste due equazioni le seguenti identità, arrivando ad un sistema di quattro equazioni differenziali non lineari:

$$\begin{cases} m_1(\theta_{2d})\ddot{\theta}_{1d} + m_2(\theta_{2d})\ddot{\theta}_{2d} = -m_3(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}\dot{\theta}_{2d} - m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d}^2 - b_{eq1}(\theta_{1d})\dot{\theta}_{1d} - k_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) + Q_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \\ m_5\ddot{\theta}_{2d} + m_6(\theta_{2d})\ddot{\theta}_{1d} = -m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}^2 - b_{eq2}(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d} - k_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) + Q_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \\ \dot{\theta}_{1d} = \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} = \dot{\theta}_{2d} \end{cases}$$

Definito il vettore di stato \underline{x} nel seguente modo:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \\ \theta_{1d} \\ \theta_{2d} \end{pmatrix}$$

si riscrive il sistema precedente in questa forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} m_1(\theta_{2d}) & m_2(\theta_{2d}) & 0 & 0 \\ m_6(\theta_{2d}) & m_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -m_3(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}\dot{\theta}_{2d} - m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d}^2 - b_{eq1}(\theta_{1d})\dot{\theta}_{1d} - k_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) + Q_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \\ -m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}^2 - b_{eq2}(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d} - k_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) + Q_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \\ \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} m_1(\theta_{2d}) & m_2(\theta_{2d}) & 0 & 0 \\ m_6(\theta_{2d}) & m_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -m_3(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}\dot{\theta}_{2d} - m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d}^2 - b_{eq1}(\theta_{1d})\dot{\theta}_{1d} - k_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) + Q_1(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \\ -m_4(\theta_{2d})\dot{\theta}_{1d}^2 - b_{eq2}(\theta_{2d})\dot{\theta}_{2d} - k_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) + Q_2(\theta_{1d}, \theta_{2d}) \\ \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix}$$

Dunque, per integrare l'equazione di moto passo-passo, si ricostruiscono istante per istante i termini a destra dell'uguale, che vanno a costituire il vettore di stato derivato nel tempo.

Attraverso una successiva integrazione di quest'ultimo si ottiene il vettore di stato e, dunque, l'andamento delle coordinate libere del sistema e le loro derivate temporali. Per il sistema linearizzato, si procede definendo il modello dinamico in forma di stato, partendo dal sistema di equazioni del secondo ordine:

$$[M]\ddot{\vec{q}} + [R]\dot{\vec{q}} + [K]\vec{q} = \vec{Q}$$

Analogamente al sistema non lineare, il vettore di stato è definito come:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \dot{\vec{q}} \end{pmatrix}$$

Dunque, affiancando al sistema del secondo ordine la medesima identità mostrata in precedenza, si isola a sinistra dell'uguale il vettore delle variabili di stato derivate:

$$\begin{cases} [M]\ddot{\vec{q}} + [R]\dot{\vec{q}} + [K]\vec{q} = \vec{Q} \\ [M]\dot{\vec{q}} = [M]\dot{\vec{q}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} [M] & [R] \\ [0] & [M] \end{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{cases} [0] & -[K] \\ [M] & [0] \end{cases} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{Q}$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} [M] & [R] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [0] & -[K] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} [M] & [R] \\ [0] & [M] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{Q}$$

$$\dot{\underline{x}} = [A]\underline{x} + [B]\vec{Q}$$

L'ultima equazione è la forma di stato del sistema meccanico EDS a due gradi di libertà linearizzato; in particolare la matrice A è detta matrice di stato del sistema e racchiude in se le caratteristiche strutturali del sistema.

La matrice B è nota invece come matrice di input.

Si riporta lo schema Simulink complessivo dei sistemi non lineare e linearizzato in cui è possibile riconoscere i principali attori del problema:

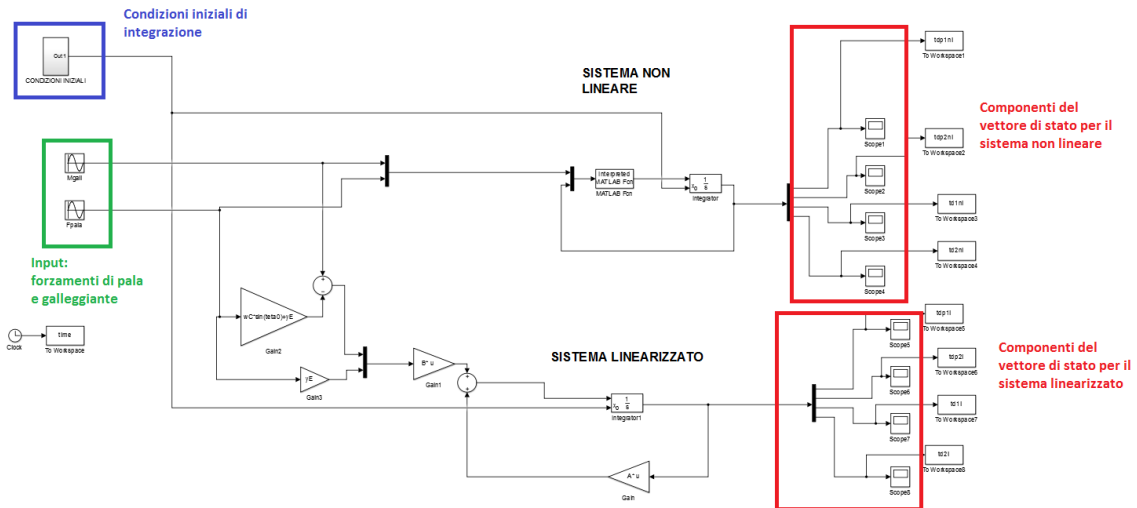


Figura 3.47: Schema a blocchi per analisi diretta del sistema totale a 2 g.d.l.

A conclusione della parte di analisi diretta, si riportano gli andamenti delle coordinate libere per due valori di ampiezze di forzamento d'onda per pala e galleggiante.

Per i forzamenti sui due dispositivi, per restare quanto più fedeli alla effettiva fisica del problema, si ipotizzerà anche uno sfasamento temporale legato alla disposizione dell'EDS rispetto all'onda incidente:

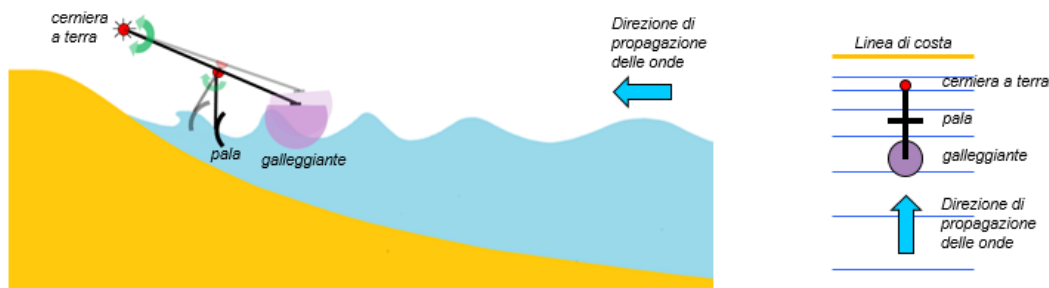


Figura 3.48: Posizione relativa tra sistema EDS e onda incidente

Dalla figura si può facilmente concludere che i forzamenti su galleggiante e pala sono sfasati nel tempo in virtù del fatto che l'onda incidente, proveniente da destra, incontrerà prima il galleggiante e poi la pala.

Dunque F_{pala} sarà in ritardo rispetto a M_{gall} .

Per cui, tornando al discorso delle simulazioni dinamiche del sistema, si ipotizzeranno le seguenti coppie di forzamento, con pulsazione costante pari a $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$:

$$1. \quad M_{gall}(t) = M_{gall1} \sin(\omega t) \quad F_{pala}(t) = F_{pala1} \sin(\omega t - \varphi_1)$$

con $M_{gall1} = 1Nm$, $F_{pala1} = 1N$ e $\varphi_1 = \pi/3$

$$2. \quad M_{gall}(t) = M_{gall2}\sin(\omega t) \quad F_{pala}(t) = F_{pala2}\sin(\omega t - \varphi_2)$$

con $M_{gall2} = 5Nm$, $F_{pala2} = 5N$ e $\varphi_2 = \pi/3$

In Figura 3.49 e Figura 3.50 si riportano gli andamenti delle coordinate libere per i due casi di forzamento.

Da notare i maggiori scostamenti tra le due equazioni di moto per il secondo caso, in cui cade evidentemente la condizione di moto in piccolo.

La differenza per gli andamenti delle variabili riguarda soprattutto θ_{2d} perché evidentemente le maggiori non linearità cinematiche dell'EDS sono concentrate nel sottosistema relativo all'asta della pala e al suo smorzatore.

Dunque, nel momento in cui si eseguiranno le simulazioni di analisi inversa per ricostruire gli effettivi termini di forzamento del sistema, bisognerà verificare che per la specifica situazione analizzata le forzanti ricostruite coi termini strutturali del sistema linearizzato, che faranno da riferimento per quelli ricostruiti con i termini fluidodinamici, non ci siano troppe diverse da quelle ricostruite con i termini strutturali del sistema non lineare.

In tal caso per la costruzione delle forzanti di riferimento si deve forzatamente ricorrere al modello non lineare e, di conseguenza, bisognerebbe correggere la componente lagrangiana ricostruita con le regole della teoria del flusso potenziale, introducendo anche qua le non linearità di tipo cinematico.

Tuttavia, non è detto che anche a valle di queste correzioni, i risultati siano soddisfacenti poiché si utilizzano dei coefficienti fluidodinamici, in tal caso misurati sperimentalmente, basandosi su una teoria completamente linearizzata.

Se, a valle della verifica numerica in Simulink, non si avrà corrispondenza, vorrà dire che il modello utilizzato per la sintesi analitica della forze non funziona per il caso dell'EDS e si dovrà di conseguenza correggere il modello stesso in qualche modo fino a convergere ad un risultato soddisfacente.

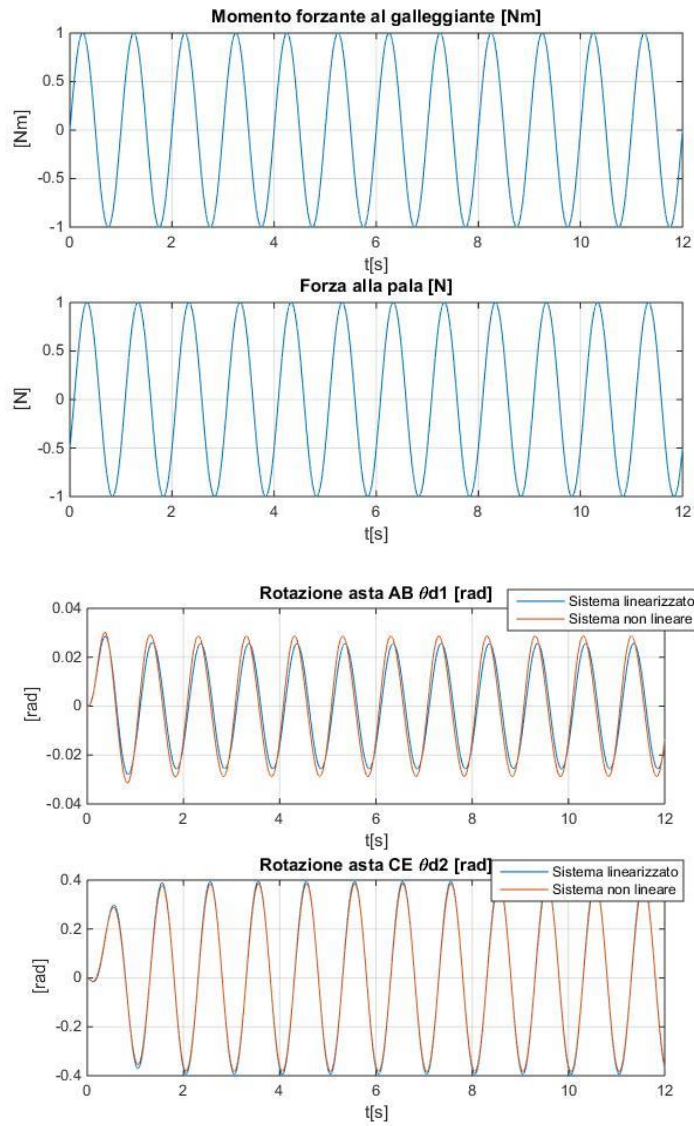


Figura 3.49: Forzamento a bassa intensità e relativo andamento delle coordinate libere per sistema non lineare e linearizzato

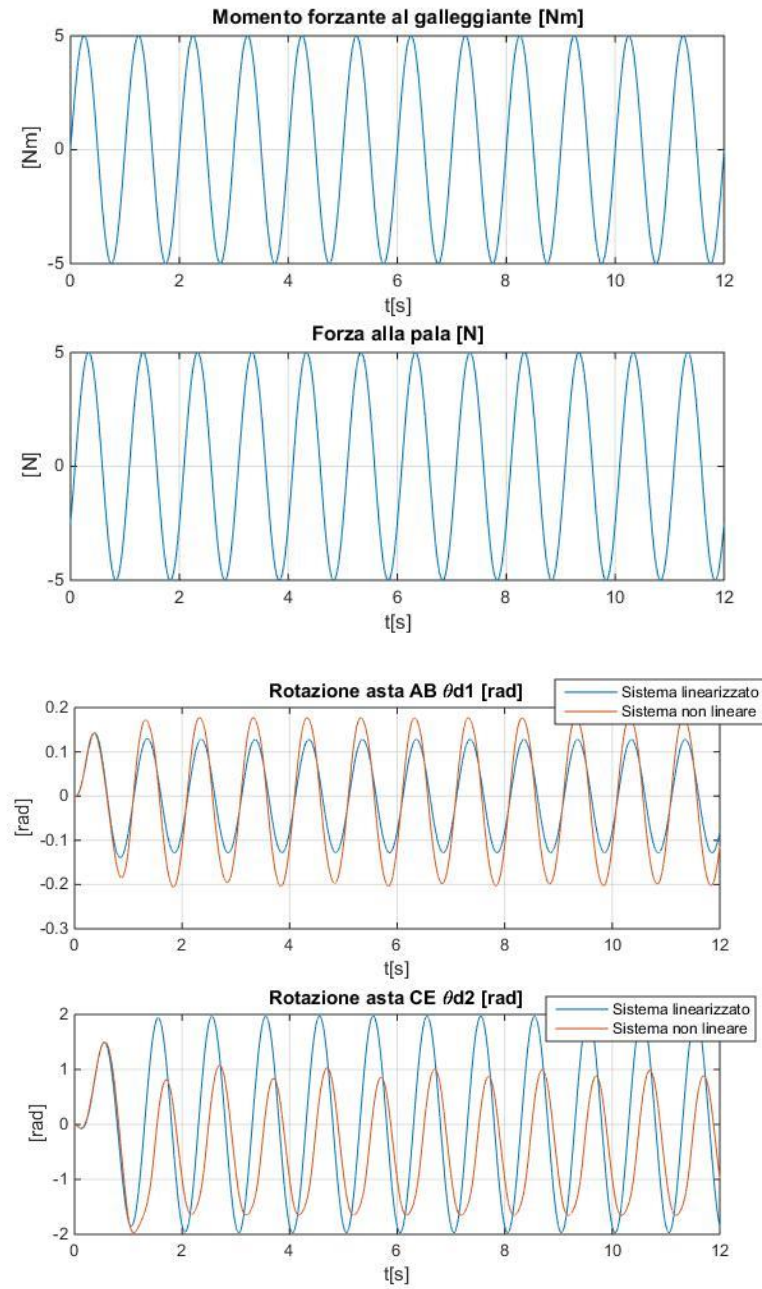


Figura 3.50: Forzamento ad elevata intensità e relativo andamento delle coordinate libere per sistema non lineare e linearizzato

Schemi a blocchi Simulink d'analisi inversa

Per gli schemi di analisi inversa si mostreranno soltanto quelli relativi al sistema linearizzato in quanto, per il momento, ci si basa sull'ipotesi che le equazioni che descrivono la dinamica di quest'ultimo vadano bene purché le ampiezze di oscillazione del sistema siano contenute attorno alla posizione di equilibrio statico.

Si riprendono le equazioni dinamiche del sistema linearizzato in cui verranno ora esplicitate le diverse componenti di eccitazione e di radiazione:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{1d} \\ \ddot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1d} \\ \theta_{2d} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{gall} - F_{pala}(w_C \sin(\theta_0) + y_E) \\ F_{pala}y_E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

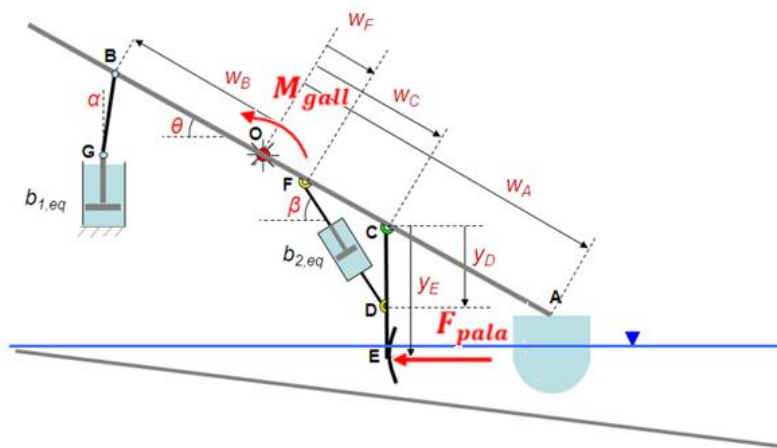


Figura 3.51: Rappresentazione forzanti di galleggiante e di pala sul sistema EDS completo

Analogamente a quanto visto per i sistemi ad un grado di libertà, si tratta di ricostruire le forzanti d'onda partendo sia dai termini strutturali che da quelli della teoria del flusso.

Dunque, in ingresso si ha la cinematica del sistema, i parametri strutturali e quelli fluidodinamici (questi ultimi saranno a breve esplicitati). Viene subito indicato lo schema della parte strutturale del sistema. La cinematica del sistema è nota grazie a due fotocellule installate sul sistema sperimentale di laboratorio.

Come sarà mostrato nel prossimo capitolo, tali fotocellule, per come sono installate, in realtà misurano le variazioni di lunghezza nel tempo degli smorzatori.

Da esse, sfruttando determinati legami cinematici e operazioni di filtraggio e derivazione dei segnali, si risalirà agli andamenti di $\ddot{\theta}_{1d}$, $\ddot{\theta}_{2d}$, $\dot{\theta}_{1d}$, $\dot{\theta}_{2d}$, θ_{1d} e θ_{2d} .

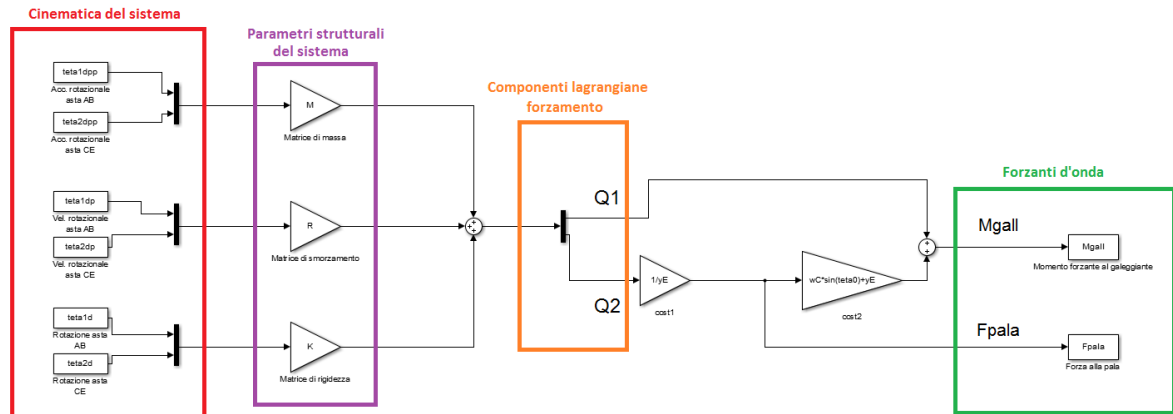


Figura 3.52: Schema a blocchi per ricostruire i termini di forzamento partendo dalla parte strutturale dell'equazione di moto

Per quanto riguarda invece la ricostruzione delle forzanti d'onda a partire dai termini di radiazione e di eccitazione, i modelli analitici definiti in precedenza sono:

$$M_{gall} = M_h + M_{r11} + M_{r12} + M_x$$

$$F_{pala} = F_{r22} + F_{r21} + F_x$$

dove in realtà il termine idrostatico di M_{gall} è stato tradotto in un termine strutturale equivalente e dunque tale forzante va rielaborata a meno di M_h :

$$M_{gall} = M_{r11} + M_{r12} + M_x$$

Per il caso di onde monocromatiche che si traduce in forzanti di tipo monoarmoniche per il sistema e, considerando il sistema linearizzato, le grandezze cinematiche saranno caratterizzate dalla medesima pulsazione delle forzanti.

Grazie a questa importante ipotesi è possibile spostare il problema nel dominio dei numeri complessi in cui ogni grandezza è caratterizzato da un fasore avente una certa fase iniziale e rotante a velocità ω , pulsazione temporale d'onda.

Si inizia definendo i vettori rotanti delle coordinate libere $\theta_{1d}(t)$ e $\theta_{2d}(t)$:

$$\vec{\theta}_{1d}(t) = \Theta_{1d} e^{i\omega t} \quad \vec{\theta}_{2d}(t) = \Theta_{2d} e^{i\omega t}$$

in cui Θ_{1d} e Θ_{2d} sono ampiezze di tipo complesse o fasori rappresentativi.

Esplicitando per queste ultime i valori delle fasi iniziali si ottiene:

$$\vec{\theta}_{1d}(t) = |\Theta_{1d}| e^{i\varphi_1} e^{i\omega t} = |\Theta_{1d}| e^{i(\omega t + \varphi_1)} \quad \vec{\theta}_{2d}(t) = |\Theta_{2d}| e^{i\varphi_2} e^{i\omega t} = |\Theta_{2d}| e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

Queste due grandezze sono ricavabili direttamente da misure sperimentali.

Come spiegato in precedenza in merito al sistema WEC a due gradi di libertà caratterizzato dal solo moto d'alzata, le componenti di eccitazione e di radiazione riguardanti ognuno dei due corpi saranno influenzati dalla presenza e dal moto dell'altro.

Per quanto riguarda le componenti di eccitazione, esse avranno un modulo ed una fase modificati rispetto al considerare separatamente i due sistemi semplicemente perché la semplice presenza dell'altro corpo va a modificare il campo di fluido attorno a quello dell'altro e viceversa.

Formalmente esse si esprimono esattamente come per i casi dei due sistemi ad un grado di libertà analizzati singolarmente:

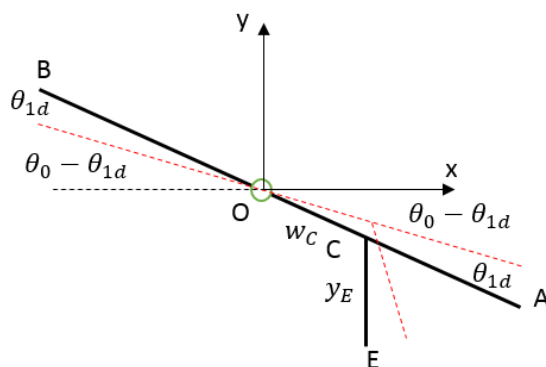
$$\vec{M}_x(t) = |M_x| e^{i(\omega t + \varphi_{M_x})}$$

$$\vec{F}_x(t) = |F_x| e^{i(\omega t + \varphi_{F_x})}$$

Invece, per quanto riguarda la componente di radiazione, poiché stiamo considerando l'ipotesi di piccoli spostamenti, è possibile valutare i set di parametri idrodinamici da calcolare usando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Quindi si sbloccheranno separatamente le due coordinate libere del sistema valutando il moto dei due dispositivi interagenti con acqua ferma.

Muovendo il sistema con la sola coordinata libera θ_{1d} si avrà:



Gli spostamenti virtuali presi positivi se concordi al verso di applicazione delle forze sono:

$$\theta_{M_{gall}} = \theta_{1d}$$

$$x_{F_{pala}} = -(w_C \cos(\theta_0 - \theta_{1d}) + y_E \sin(\theta_{1d}) - w_C \cos\theta_0)$$

Quest'ultimo in caso di piccoli spostamenti può così essere approssimato:

$$x_{F_{pala}} \cong -y_E \theta_{1d}$$

Dunque, si definiscono le forme vettoriali rotanti per queste due grandezze:

$$\vec{\theta}_{M_{gall}}(t) = \vec{\theta}_{1d}(t) = |\Theta_{1d}| e^{i\varphi_1} e^{i\omega t} = |\Theta_{1d}| e^{i(\omega t + \varphi_1)} =$$

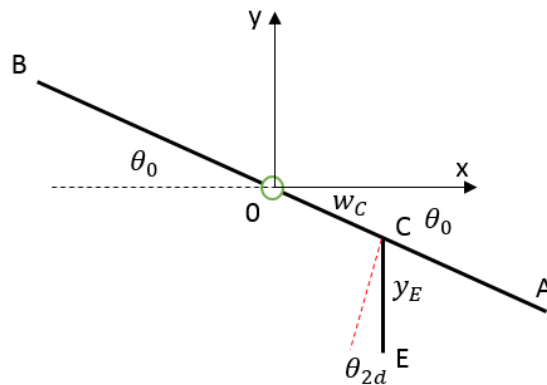
$$\vec{x}_{F_{pala}}(t) = -y_E \vec{\theta}_{1d}(t) = -y_E |\Theta_{1d}| e^{i(\omega t + \varphi_1)}$$

I contributi di radiazione dovuto a questa coordinata libera saranno dunque:

$$\vec{M}_{r\theta_{1d}}(t) = (\omega^2 I_{add\theta_{1d}} - i\omega b_{hydx\theta_{1d}}) (|\Theta_{1d}| e^{i(\omega t + \varphi_1)})$$

$$\vec{F}_{r\theta_{1d}}(t) = (\omega^2 m_{add\theta_{1d}} - i\omega b_{hydx\theta_{1d}}) (-y_E |\Theta_{1d}| e^{i(\omega t + \varphi_1)})$$

Sbloccando invece la sola coordinata libera θ_{2d} si metterà in movimento soltanto l'asta della pala CE, ossia non ci sono ulteriori contributi radiativi per il momento al galleggiante. Per cui bisogna valutare lo spostamento virtuale relativo soltanto alla forza sulla pala, preso positivo se ad essa concorde:



$$x_{F_{pala}} = y_E \sin(\theta_{2d})$$

che per piccoli spostamenti si può approssimare con:

$$x_{F_{pala}} \cong y_E \theta_{2d}$$

Il vettore rotante che gli corrisponde e la corrispondente forza di radiazione saranno:

$$\vec{x}_{F_{pala}}(t) = y_E \vec{\theta}_{2d}(t) = y_E |\Theta_{2d}| e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

$$\vec{F}_{r\theta_{2d}}(t) = (\omega^2 m_{add\theta_{2d}} - i\omega b_{hyd\theta_{2d}})(y_E |\Theta_{2d}| e^{i(\omega t + \varphi_2)})$$

Riassumendo, le componenti di forzamento modellate secondo la teoria del flusso potenziale per il sistema EDS, espresse nel dominio complesso, saranno date dalla sovrapposizione dei termini di eccitazione e dai due contributi di radiazione.

Di seguito si riportano le due forze complesse con evidenziate le incognite del problema da individuare per via sperimentale:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{gall}(t) &= \vec{M}_x(t) + \vec{M}_{r\theta_{1d}}(t) = \\ &= |M_x| e^{i(\omega t + \varphi_{M_x})} + (\omega^2 I_{add\theta_{1d}} - i\omega b_{hyd\theta_{1d}})(|\Theta_{1d}| e^{i(\omega t + \varphi_1)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{pala}(t) &= \vec{F}_x(t) + \vec{F}_{r\theta_{1d}}(t) + \vec{F}_{r\theta_{2d}}(t) = \\ &= |F_x| e^{i(\omega t + \varphi_{F_x})} + (\omega^2 m_{add\theta_{1d}} - i\omega b_{hyd\theta_{1d}})(-y_E |\Theta_{1d}| e^{i(\omega t + \varphi_1)}) + \\ &\quad + (\omega^2 m_{add\theta_{2d}} - i\omega b_{hyd\theta_{2d}})(y_E |\Theta_{2d}| e^{i(\omega t + \varphi_2)}) \end{aligned}$$

Dunque il numero di incognite non è pari alla somma delle incognite relative ai due problemi ad un grado di libertà analizzati separatamente ma se ne aggiungono due a causa dell'accoppiamento che si ha tra le coordinate libere del sistema dinamico.

Riguardo alle fasi iniziali delle componenti di eccitazioni, è possibile eliminare uno delle due.

Ad esempio, se si riesce a calcolare la fase iniziale del momento d'eccitazione al galleggiante φ_{M_x} , noti la forma spaziale dell'onda e la sua velocità di propagazione (lungo la direzione del canale) è possibile ricavarsi indirettamente anche la fase iniziale del forzamento alla pala.

Prima di mostrare lo schema Simulink che, noti i parametri fluidodinamici, permetta di ricavare gli andamenti delle forze, si proiettano i vettori rotanti sull'asse reale così da ricavare relativi segnali temporali scalari:

$$\begin{aligned} M_{gall}(t) &= |M_x| \cos(\omega t + \varphi_{M_x}) - \omega^2 I_{add\theta_{1d}} |\Theta_{1d}| \cos(\omega t + \varphi_1) + \\ &\quad - \omega b_{hyd\theta_{1d}} |\Theta_{1d}| \sin(\omega t + \varphi_1) = |M_x| \cos(\omega t + \varphi_{M_x}) - I_{add\theta_{1d}} \ddot{\theta}_{1d} - b_{hyd\theta_{1d}} \dot{\theta}_{1d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{pala}(t) &= |F_x| \cos(\omega t + \varphi_{F_x}) + \omega^2 m_{add\theta_{1d}} y_E |\Theta_{1d}| \cos(\omega t + \varphi_1) + \\
&+ \omega b_{hydx\theta_{1d}} y_E |\Theta_{1d}| \sin(\omega t + \varphi_1) - \omega^2 m_{add\theta_{2d}} y_E |\Theta_{2d}| \cos(\omega t + \varphi_2) + \\
&\quad - \omega b_{hydx\theta_{2d}} y_E |\Theta_{2d}| \sin(\omega t + \varphi_2) = \\
&= |F_x| \cos(\omega t + \varphi_{F_x}) + m_{add\theta_{1d}} y_E \ddot{\theta}_{1d} + b_{hydx\theta_{1d}} y_E \dot{\theta}_{1d} + \\
&\quad - m_{add\theta_{2d}} y_E \ddot{\theta}_{2d} - b_{hydx\theta_{2d}} y_E \dot{\theta}_{2d}
\end{aligned}$$

Per concludere si riporta lo schema a blocchi d'analisi inversa che permette il calcolo delle forzanti d'onda a partire dai parametri fluidodinamici ricavati con una procedura sperimentale che sarà chiarita nel prossimo capitolo in cui si parlerà del setup sperimentale e delle modalità con cui si intendono ricavare i parametri fluidodinamici.

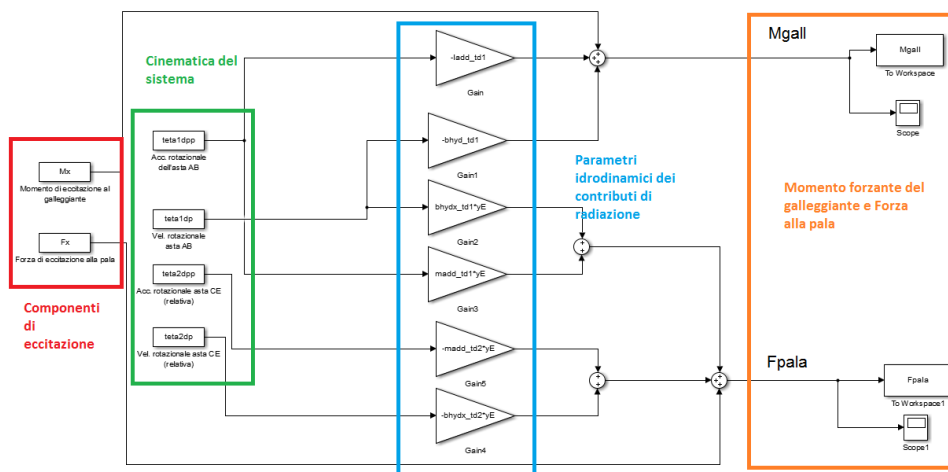


Figura 3.53: Schema a blocchi per ricostruire i termini di forzamento partendo dalle componenti di eccitazione e di radiazione

4 Sistema EDS di laboratorio

In questo capitolo si affronteranno le tematiche relative all'apparato sperimentale del sistema EDS, partendo da una descrizione del modello fisico del WEC e delle modalità con cui esso viene caratterizzato sperimentalmente.

Successivamente si parlerà di come il modello sperimentale venga sfruttato per il calcolo della cinematica dei modelli matematici, partendo dalle misure di cui si dispone, e per la taratura di questi stessi modelli calcolando i coefficienti idrodinamici (vedi capitolo 3).

4.1 Il modello fisico

Il modello fisico del sistema EDS, situato nel Laboratorio di Idraulica del Politecnico di Milano, viene riportato in Figura 4.1, dove vengono evidenziati i suoi componenti principali, ovvero la pala ed il galleggiante, che hanno il compito di introdurre energia nel sistema, e gli smorzatori, i quali hanno invece lo scopo di dissiparla.

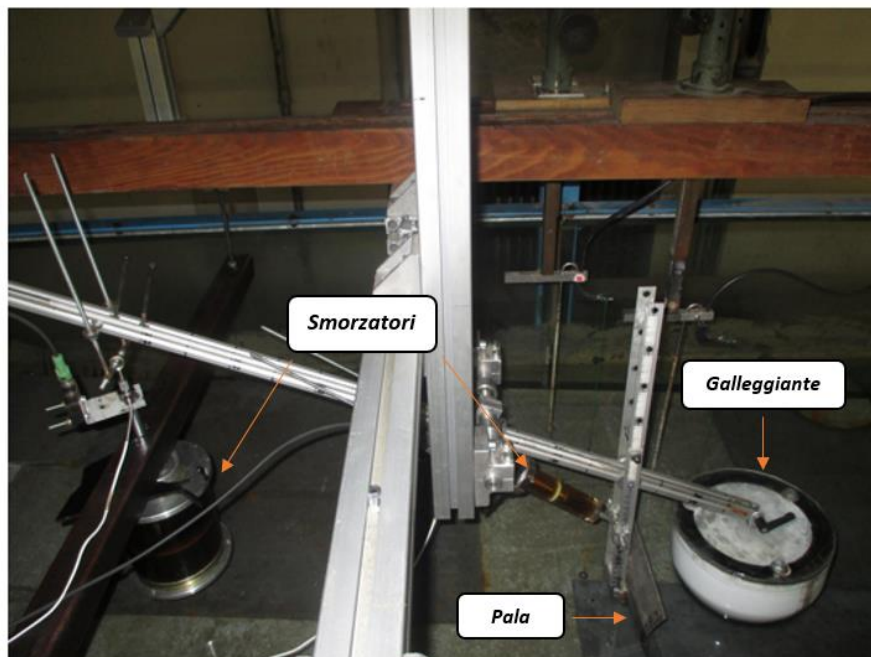


Figura 4.1: Modello di laboratorio del sistema EDS ([1])

Il modello sperimentale dell'EDS è in scala 1:25. Il galleggiante, avente diametro pari a 20 cm, è costituito da una parte superiore cilindrica e da una inferiore sferica, per un'altezza totale pari a 13.7 cm. L'asta AB, incernierata a terra in O 25 cm sopra il livello dell'acqua, presenta nell'estremo A il galleggiante e nel punto B è collegata allo stelo dello smorzatore tramite la biella BG (Figura 4.2).

All'estremità di questo stelo è presente un disco in PVC che, scorrendo nell'olio contenuto nel cilindro dello smorzatore, dissipa energia.

L'asta della pala CE è incernierata a quella principale AB tramite una cerniera posta nel punto C, compreso tra la cerniera a terra in O e il galleggiante in A.

Un altro smorzatore collega l'asta CE a quella AB, ed è incernierato nei punti F, posto a sinistra della cerniera O, e D, situato sopra la pala, sull'asta CE.

Il principio di funzionamento di questo smorzatore è lo stesso di quello posto sotto il punto B.

Per entrambi gli smorzatori è possibile cambiare i diametri dei dischi che scorrono in olio per variarne la resistenza e la dissipazione energetica.

Ad esempio, per lo smorzatore montato sotto il punto G (Figura 4.2), per cambiare lo smorzamento strutturale viene variato il diametro dei dischi in PVC che scorrono nell'olio, indicati con le sigle PVC93, PVC96 e PVC99, dove i numeri rappresentano i valori dei loro diametri espressi in millimetri. Sempre per via sperimentale sono stati tarati i gradi di smorzamento di questi dischi, ottenendo valori maggiori all'aumentare del diametro, come verrà mostrato nei paragrafi successivi.

Nell'estremo E dell'asta CE si trova incastrata la pala, una lamina avente piccolissimo spessore, con un'altezza pari a 12 cm e larghezza, misurata in direzione ortogonale al foglio, pari al diametro D del galleggiante.

Si riporta in Figura 4.2 uno schema dell'EDS in cui si vedono tutti gli elementi appena presentati.

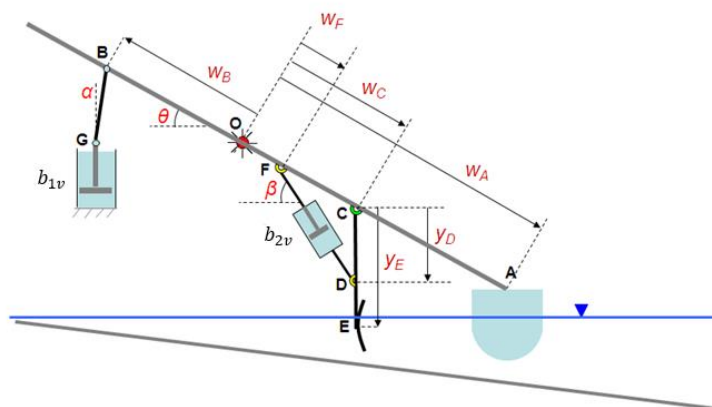


Figura 4.2: Schema del sistema EDS

Il sistema EDS è alloggiato nel canale di prova lungo 30 m e largo 1 m (Figura 4.3); in particolare esso è montato in modo da poter scorrere su dei binari, posti sulle pareti del canale, e così cambiare in maniera rapida la sua posizione nel canale.

La zona di lavoro dell'EDS è in acque medio-basse, perciò il modello è stato testato su uno scivolo con pendenza di 7° che andrebbe a simulare l'innalzamento del fondale che si ha a ridosso della costa. Questo è un passaggio chiave, poiché uno degli scopi principali delle verifiche sperimentali è quello di capire quanto la profondità dell'acqua, e quindi le caratteristiche dell'onda, incidano sulle performance del sistema.

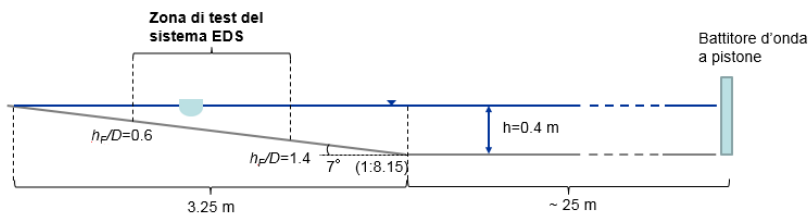


Figura 4.3: Schema del canale sperimentale ([1])

La profondità dell'acqua nel canale, al di fuori dello scivolo, è 40 cm.

Come appare nella Figura 4.4, nella parte destra del canale è posizionato il battitore d'onda a pistone.

Si tratta di una paratoia mossa a un motore sincrono controllato in modo da generare l'onda voluta.



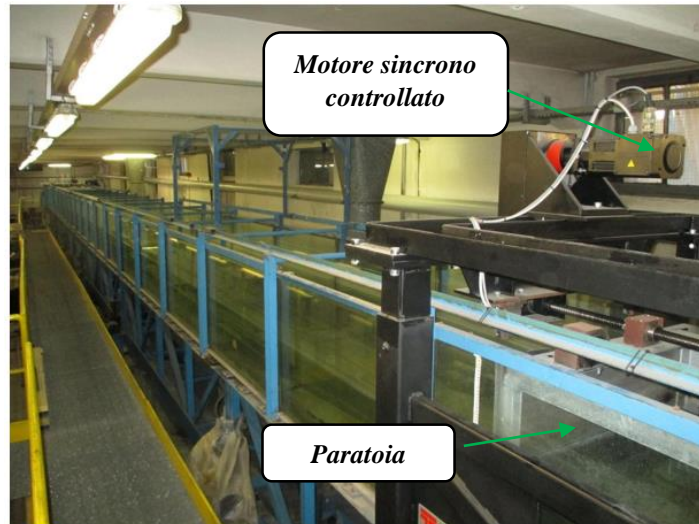


Figura 4.4: In alto, onda monocromatica prodotta dal battitore; in basso, il motore e la paratoia, che hanno il compito di mettere in movimento l'acqua del canale

Per cambiare la tipologia d'onda è sufficiente selezionare quella desiderata dalla centralina che comanda il motore del battitore, di cui si riporta una foto in Figura 4.5.



Figura 4.5: Centralina che comanda in anello aperto il moto sincrono del battitore

4.1.1 La catena di misura

Dopo aver parlato degli elementi fisici del sistema sperimentale, viene passata in rassegna la sua catena di misura, descrivendo brevemente i sensori con cui è strumentato il sistema, la parte di conversione e lettura dei segnali di misura.

Per quanto riguarda la parte sensoristica, sul modello sperimentale dell'EDS sono presenti due celle di carico e due misuratori di distanza, montati in modo da misurare rispettivamente le forze resistenti e le variazioni di lunghezza dei due smorzatori.

Oltre a questi quattro sensori che danno informazioni cinematiche e dinamiche sul sistema fisico EDS, ci sono due wave gauges capacitivi che misurano il livello d'acqua istantaneo in corrispondenza di galleggiante e pala (Figura 4.6).

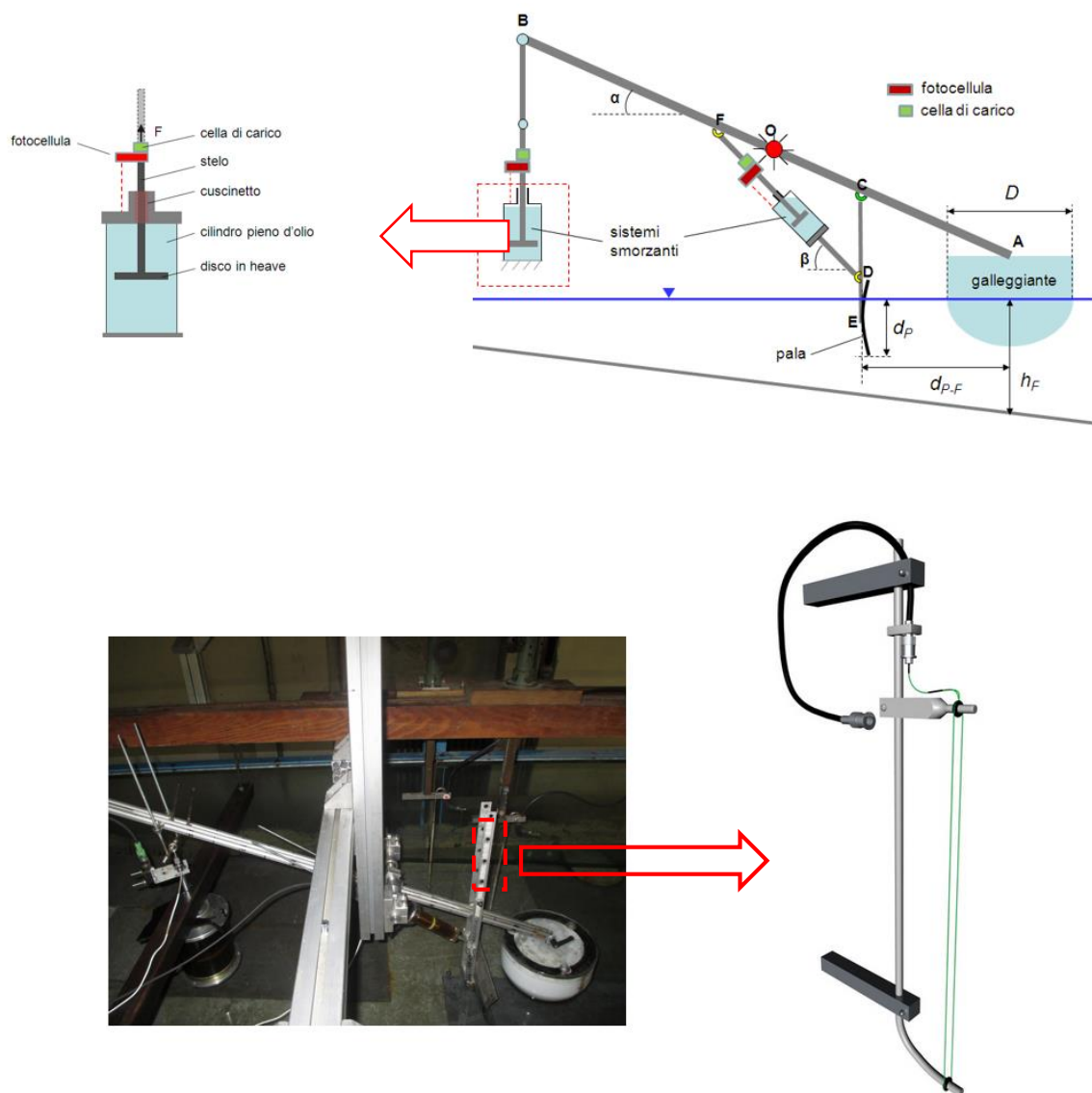


Figura 4.6: I sensori di misura del modello sperimentale dell'EDS: in alto, fotocellule di distanza e celle di carico; in basso, la wave gauge o misuratore del livello dell'acqua

Tutti e sei i sensori, essendo di tipo attivi, vengono alimentati da un generatore di tensione continua.

I segnali di misura forniti da ciascuno strumento sono anch'essi in tensione e, prima di essere importati nel PC di laboratorio, vengono digitalizzati attraverso una scheda di conversione ADC multicanale della National Instrument.

Tale scheda è connessa fisicamente al PC attraverso uno chassis dotato di uscita USB.

Uno volta digitalizzati, i segnali possono essere processati, visualizzati e salvati sul PC grazie ad una routine sviluppata in Labview, software della stessa National Instrument.

Si riporta in Figura 4.7 uno schema generale della catena di misura appena introdotta.

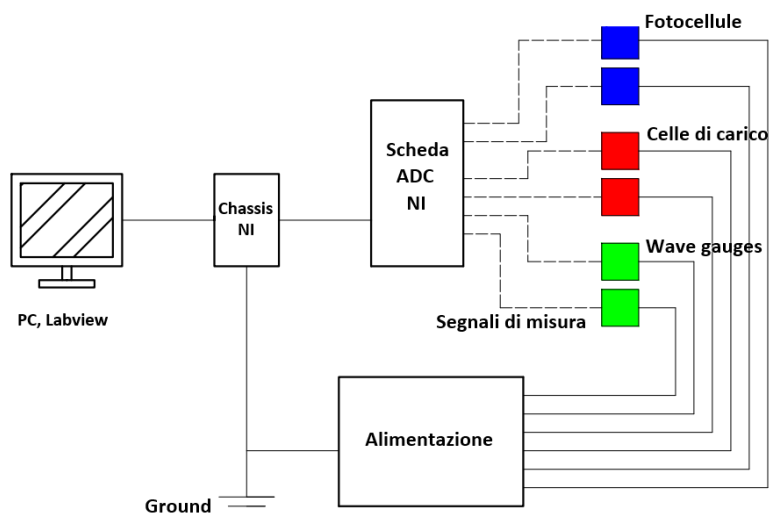


Figura 4.7: La catena di misura con cui è strumentato il modello sperimentale dell'EDS

E' stato possibile utilizzare delle misure in tensione in quanto il banco su cui è posizionato il PC ed il sistema di conversione ADC è a ridosso del sistema EDS durante le prove; quindi non si hanno cadute di tensione nei cavi di trasmissione dei segnali (che sono spesso causa di errori di misura sistematici), essendo la loro lunghezza molto contenuta.

4.1.2 Caratterizzazione sperimentale dell'EDS

Per indagare il rendimento energetico del sistema EDS vengono eseguite delle prove con onde stazionarie monocromatiche generate dal battitore d'onda precedentemente descritto. Tra una prova e l'altra vengono variati i parametri di EDS per capire quanto questi incidano sulla quantità di energia recuperata dal sistema EDS.

Prima di esporre la procedura e i risultati sperimentali, si intende parlare della media in fase applicata ai segnali di misura acquisiti, operazione possibile grazie alla natura periodica di questi ultimi.

4.1.2.1 La media in fase sui segnali di misura

Una volta azionati il battitore e l'alimentazione degli strumenti, si attende la stabilizzazione dell'onda all'interno del canale, per poi partire con l'acquisizione dei segnali di misura.

I segnali acquisiti dai sensori di distanza, dalle celle di carico e dalle wave gauges dovrebbero essere di natura periodica, fondamentalmente perché è periodico il forzamento dovuto al moto ondoso. Per cui una volta esaurita la fase transitoria in cui l'onda nel canale va a stabilizzarsi, sarebbe sufficiente acquisire un solo periodo da ogni sensore per poter chiudere la prova. Tuttavia si è deciso volutamente di acquisire un elevato numero di periodi in ogni prova per poi applicare l'operazione di media in fase, con lo scopo di eliminare le fluttuazioni random tipiche delle prove sperimentali.

Si riporta in Fig. 4.8 un'acquisizione completa relativa alla variazione di lunghezza dello smorzatore posto sotto il punto G (Figura 4.2). Si nota che l'ampiezza del segnale non è perfettamente costante ma è variabile, seppur il sistema ha superato il transitorio iniziale.

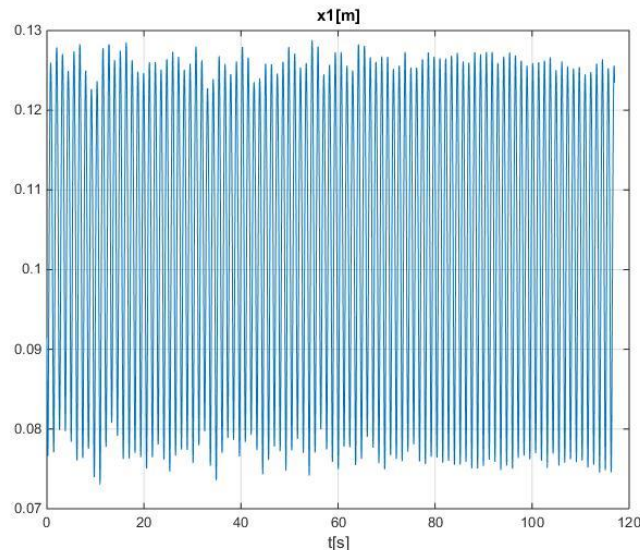
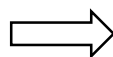


Figura 4.8: Segnale completo dell'allungamento nel tempo dello smorzatore posto sotto G

Dunque l'operatore media in fase, dato in ingresso un segnale "sporco" discreto $x_i(t_i)$, composto da N periodi, ne fornisce uno "medio" in uscita formato da un solo periodo.

Partendo dal segnale completo, si individuano i periodi tramite zero-crossing. Detto N il numero di periodi individuati, ognuno composto da un numero variabile di campioni M_n , con $n = 1 \dots N$, e detto N_c il numero totale di campioni presente nel segnale completo, si ha:

$$N_c = \sum_{n=1}^N M_n$$



$$\underline{x}_i(t_i) \in \mathfrak{R}^{N_c} \qquad \underline{x}_n \in \mathfrak{R}^{M_n} \quad n = 1 \dots N$$

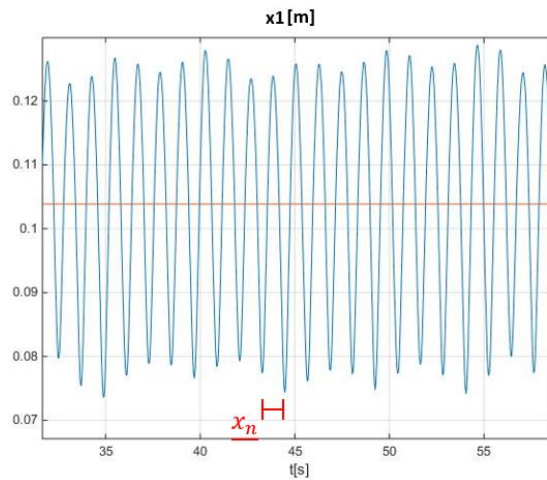


Figura 4.9: Spacchettamento del segnale di partenza in N segnali a singolo periodo

Dopo tale processo di “spacchettamento”, segue l’operazione di media vera e propria, in cui i periodi vengono “sovrapposti” così da ottenere il segnale discreto mediato in fase \underline{x}_{ph} :

$$\underline{x}_{ph} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underline{x}_n$$

Si riporta in Figura 4.10 il segnale mediato in fase relativo a quello di Figura 4.8.

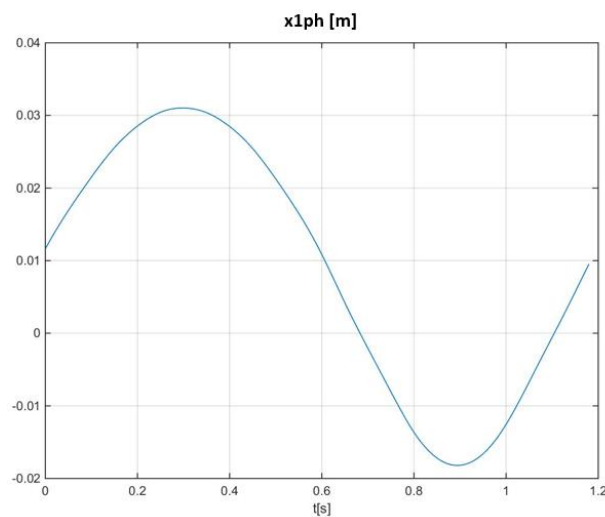


Figura 4.10: Segnale mediato in fase

Questa operazione, che permette anche di compattare i dati ottenuti in una prova sperimentale, è stata applicata sistematicamente a tutte le grandezze acquisite.

Per cui d'ora in avanti si farà soltanto riferimento a segnali mediati in fase, sulla base del periodo T dell'onda, riferendoci al ciclo medio di oscillazione del sistema EDS.

4.1.2.2 Analisi di performance sul modello EDS ad un grado di libertà

In questo paragrafo si affrontano le tematiche relative allo svolgimento delle prove sperimentali per la valutazione delle prestazioni del sistema EDS sperimentale.

In particolare si analizzeranno i dettagli esecutivi delle prove svolte durante il lavoro di tesi sul sistema ad un grado di libertà relativo al solo galleggiante.

I risultati di queste prove andranno a sommarsi a quelli presentati nel capitolo introduttivo in cui si è parlato dello stato dell'arte del sistema EDS sperimentale ([1]).

La procedura sperimentale

Smontando dall'asta AB lo smorzatore FD e la pala CE si ottiene il sistema ad un grado di libertà, relativo al solo galleggiante, riportato in Figura 4.11.



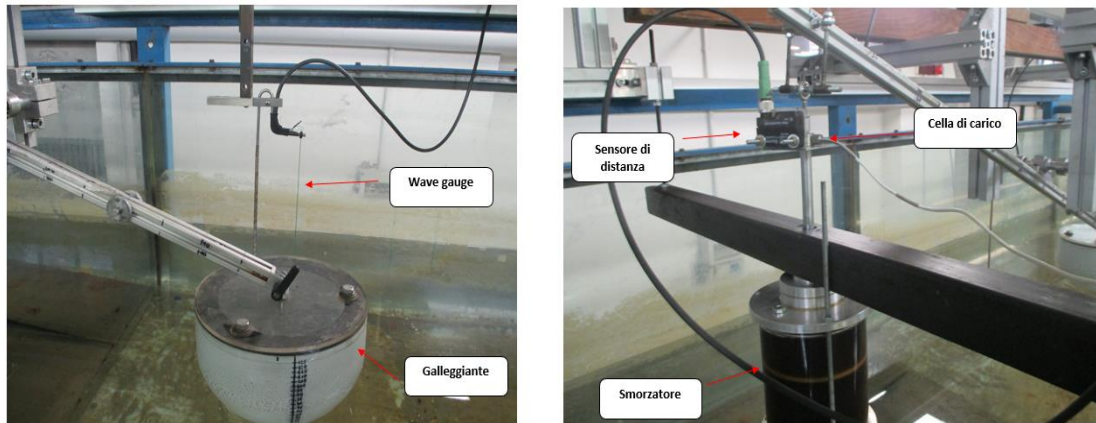


Figura 4.11: Il modello di laboratorio dell'EDS ad un grado di libertà: in alto, sistema complessivo; in basso, dettagli relativi a galleggiante, smorzatore e dispositivi di misura adoperati

Per ogni prova sperimentale, grazie alle misure fornite dalla cella di carico e dal misuratore di distanza (fotocellula di Figura 4.6), si ricava la potenza istantanea di dissipazione dello smorzatore, data dal prodotto della forza di smorzamento per la velocità dello stelo:

$$P_D(t) = F_D(t) \cdot \dot{x}_{ph}(t)$$

Le due grandezze $F_D(t)$ e $\dot{x}_{ph}(t)$ non corrispondono direttamente ai segnali dei due sensori con cui è strumentato lo stelo; per quanto riguarda la velocità $\dot{x}_{ph}(t)$, essa viene ricavata derivando numericamente il segnale di spostamento mediato in fase $x_{ph}(t)$.

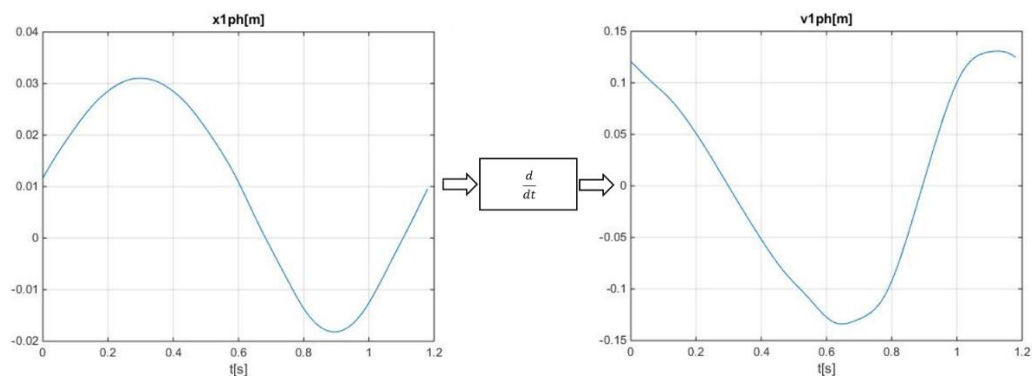


Figura 4.12: Segnale di velocità, ricavato derivando quello di spostamento

A sua volta il segnale mediato in fase dell'accelerazione sarà ricavato derivando quello di velocità.

La forza misurata dalla cella di carico si esprime nel seguente modo:

$$F_1 = (m + m_A) \cdot \ddot{x}_1 + F_D(\dot{x}_1) + (W - B(x_1))$$

in cui:

- F_1 *forza misurata dalla cella di carico*
- $x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1$ *cinematica dello stelo dello smorzatore*
- m *massa delle parti sottostanti la cella di carico, solidali ad essa*
- m_A *massa aggiunta del disco nell'olio*
- F_D *forza di smorzamento, in controfase con la velocità dello stelo*
- W *peso delle parti sottostanti la cella di carico, solidali ad essa*
- B *forza di Archimede sulle parti solidali alla cella immersa nell'olio*

Il coefficiente di massa aggiunta m_A è stato calcolato in precedenti lavori ed è pari circa a 6 kg; il suo valore ha comunque una influenza pressoché nulla sul calcolo di F_D . W , m e B sono facilmente misurabili. Noti questi parametri si potrà invertire la precedente equazione, ottenendo la forza di dissipazione.

Di seguito vengono riportati degli esempi di segnali mediati in fase della forza misurata e di quella di dissipazione epurata dai suddetti contributi.

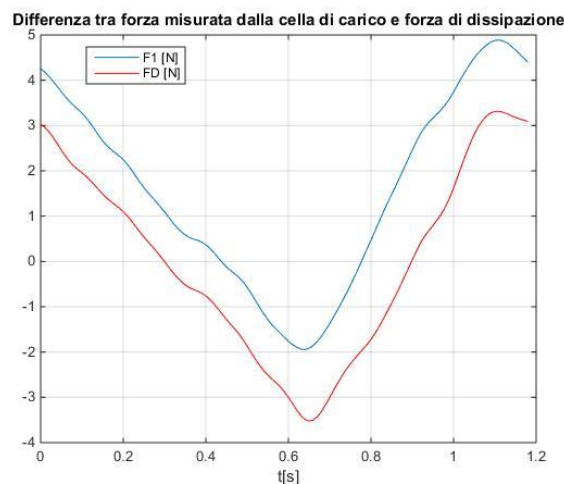


Figura 4.13: Forza da cella di carico (curva blu) e forza di dissipazione (curva rossa)

Per ogni prova, integrando nel tempo l'andamento della potenza dissipata nello smorzatore, si calcolano le energie dissipate in fase di salita (Δt_{up}) e di discesa (Δt_{down}) del galleggiante, come riportato di seguito:

$$E_{up} = \int_{\Delta t_{up}} F_D(t) \cdot \dot{x}_{ph}(t) dt \quad E_{down} = \int_{\Delta t_{down}} F_D(t) \cdot \dot{x}_{ph}(t) dt$$

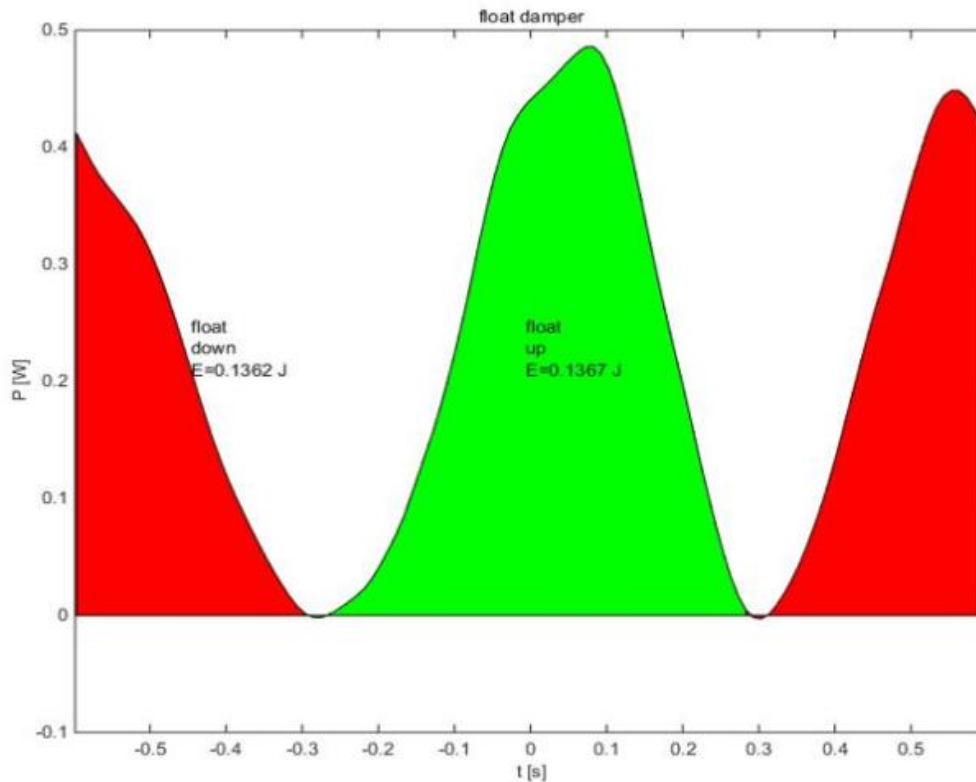


Figura 4.14: Curva di potenza istantanea dissipata dallo smorzatore; si riportano anche i valori delle energie dissipate in salita e discesa, rappresentate rispettivamente dall'area verde e da quella rossa

Il rendimento del sistema (*CWR*, *Capture Width Ratio*) per il caso ad un grado di libertà si calcola come il rapporto tra la potenza media assorbita dal galleggiante P_{float} (cioè dissipata nello smorzatore, Figura 4.15) e la potenza del fronte d'onda che investe il sistema, $P_W \cdot D$, dove P_W è la potenza per metro di fronte d'onda e D è il diametro del galleggiante:

$$CWR = \frac{P_{float}}{P_W \cdot D}$$

con:

$$P_{float} = \frac{E_{up} + E_{down}}{T}$$

Il valore di T [s], periodo di oscillazione, è pari al periodo dell'onda imposta durante la prova.

Data un'onda monocromatica, la potenza per metro di fronte d'onda si calcola nel seguente modo (vedi capitolo 2):

$$P_W = \frac{1}{8} \rho g H^2 c_g$$

dove ρ , g , H sono rispettivamente la densità dell'acqua, la costante gravitazionale e l'altezza d'onda, mentre la grandezza c_g si calcola come:

$$c_g = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$$

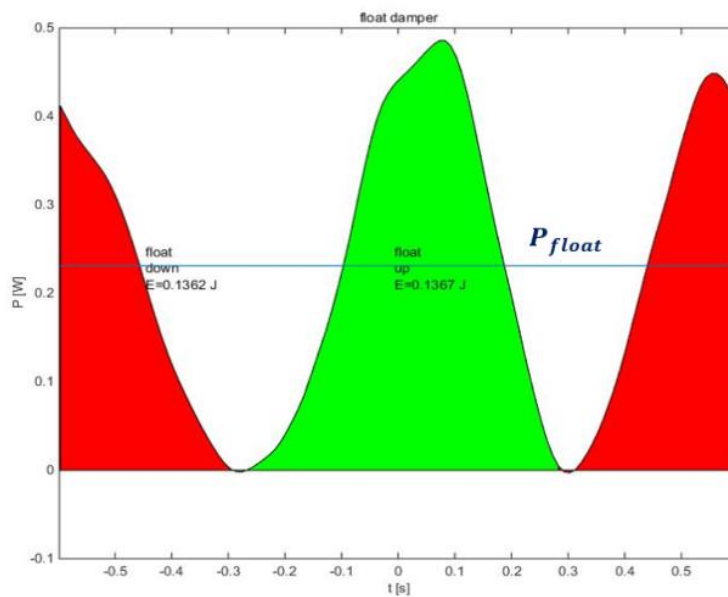


Figura 4.15: Potenza media e istantanea di dissipazione allo smorzatore

Le onde utilizzate nei test sono tre, di tipo mono-armonico, indicate con le sigle 2000, 1013 e 3000. Queste tre onde sono caratterizzate da altezza, periodo, lunghezza e potenza d'onda differenti (Tabella 1).

Tabella 4: Caratteristiche principali delle onde monocromatiche utilizzate nei test

Onda	H [mm]	T [s]	ω_{wave} [rad/s]	L [m]	P_W [W]
2000	48.8	1.02	6.22	1.52	2.70
1013	50.8	1.36	4.65	2.29	3.97

3000	63.4	1.20	5.28	1.92	5.45
------	------	------	------	------	------

Tali caratteristiche sono state ricavate per mezzo di misure svolte con le due wave gauges capacitivi, lontani dal battitore d'onda e dalla spiaggia, senza il modello dell'EDS montato nel canale. La lunghezza d'onda L stata valutata attraverso la relazione di dispersione. Chiaramente, nel calcolo del rendimento energetico del sistema, si fa l'ipotesi di trascurare la dissipazione energetica a cui è soggetta l'onda nel percorrere la spiaggia, essendo la spiaggia corta rispetto alla lunghezza d'onda, ed essendo l'onda intercettata dal sistema EDS prima che franga. Come mostrato nei risultati di [1], a causa della spiaggia posta in fondo al canale, il profilo d'onda che si forma nel canale è dato dalla sovrapposizione dell'onda incidente provocata dal battitore e dell'onda riflessa dalla spiaggia; questa causa variabilità di altezza d'onda lungo il canale. Inoltre, lungo la spiaggia, l'altezza d'onda aumenta a causa dello shoaling. In Figura 4.16 si può vedere come, per le onde 1013 e 3000, si abbia un repentino aumento dell'altezza d'onda, indice di incipiente frangimento.

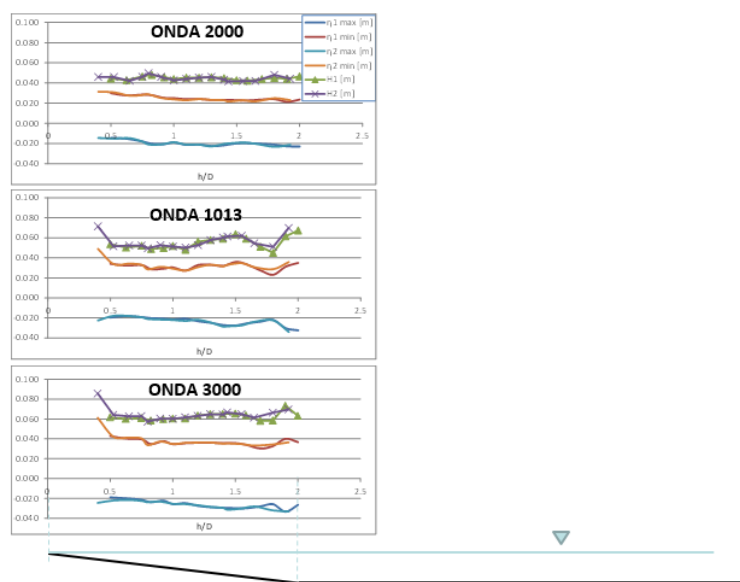


Figura 4.16: Andamento delle creste (η_{max}), dei cavi (η_{min}) e dell'altezza d'onda ($H=\eta_{max}-\eta_{min}$) in funzione della profondità. I pedici 1 e 2 sulle grandezze η e H identificano le sonde utilizzate per le misure ([1])

Partendo dai risultati già raccolti sulle prestazioni del solo galleggiante, presentati nel capitolo introduttivo, sono state eseguite ulteriori prove, per caratterizzare il sistema a solo galleggiante dal punto di vista del rendimento. Queste prove permetteranno anche di ricavare dati inerenti alla cinematica del sistema, i quali si potranno poi usare per validare il modello matematico linearizzato ad un grado di libertà relativo allo stesso sistema fisico testato, la cui equazione differenziale viene qui riportata come promemoria:

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta} \dot{\theta}_d + k_{\theta} \theta_d = M_{gall}$$

Le principali caratteristiche geometriche e strutturali del sistema analizzato vengono riportate in Tabella 2.

Tabella 5: Dati principali, geometrici e strutturali, del sistema in prova

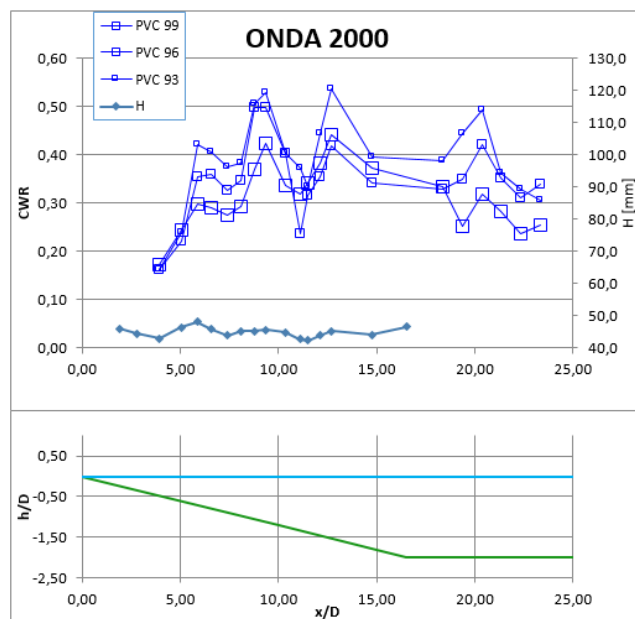
J^* [kg*m ²): momento d'inerzia totale del sistema	h_{stat} [m]: affondamento statico del galleggiante	w_A [m]: lunghezza del braccio del galleggiante	θ_0 [°]: inclinazione statica dell'asta AB	k_{θ} [Nm/rad]: rigidezza rotazionale del sistema	ω_N [rad/s]: pulsazione naturale del sistema meccanico
0.346	0.053	0.4	24°	34.56	9.81

Il discorso legato al calcolo dello smorzamento strutturale, in funzione del disco montato sullo stelo dello smorzatore, verrà affrontato successivamente; per il momento basta sapere che aumentando il diametro del disco aumenta lo smorzamento.

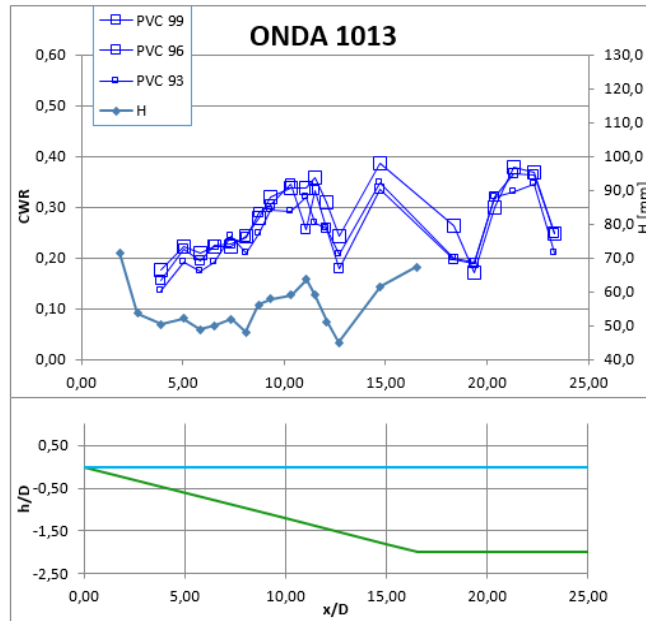
Dunque, montato uno dei tre dischi nello smorzatore, per ogni posizione scelta nel canale si sono eseguite le prove con le tre onde.

Con le modalità descritte in precedenza sono state ricavate le informazioni energetiche e quindi di rendimento del sistema; si riportano a tal proposito in Figura 4.17 i grafici dell'indice CWR al variare dell'onda imposta, della posizione nel canale e dello smorzamento strutturale:

a.



b.



c.

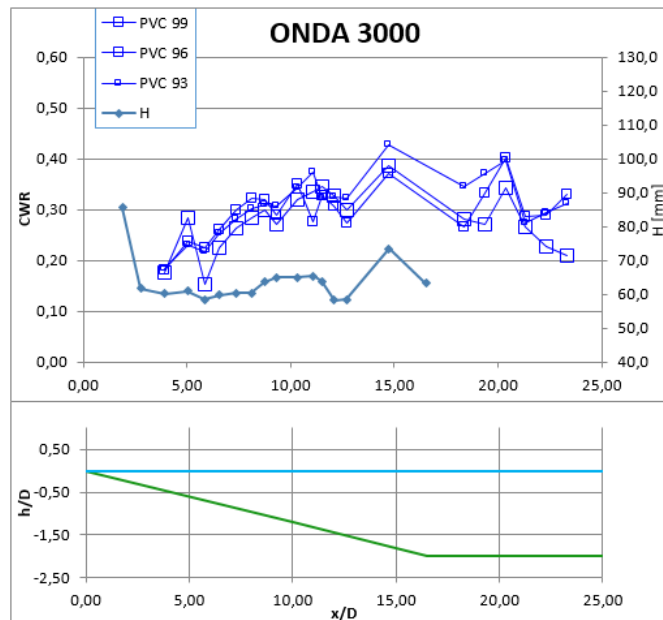


Figura 4.17: Risultati sperimentali relativi all'indice di rendimento CWR, al variare dell'onda testata (a, b, c), della posizione nel canale e dello smorzamento strutturale imposto

Nelle figure precedenti x [m] è l'ascissa legata alla posizione del galleggiante nel canale, misurata a partire dalla linea di costa, mentre h è l'altezza dell'acqua; entrambi questi valori sono stati adimensionalizzati in base al diametro del galleggiante.

Questi risultati sono in accordo con quello trovato in [1], ossia che l'andamento del rendimento lungo il canale è correlato all'andamento dell'altezza d'onda incidente.

La posizione ad efficienza massima per il galleggiante dipende sia dall'onda che dallo smorzamento considerati. Per quanto riguarda l'ONDA 2000, si ottiene un CWR massimo superiore a 0.5 alle distanze x pari a circa 9 m e 13 m, con il livello di smorzamento offerto dal disco PVC 93.

Per le restanti due onde, i valori massimi di rendimento si aggirano attorno al valore di 0.4 e si ottengono alle distanze di circa 15 m e poco superiori ai 20 m; più in particolare, i massimi per l'ONDA 1013 si hanno con il disco PVC 99, mentre per la 3000 con il PVC 93.

Facendo un discorso medio invece, mentre per l'ONDA 2000 la curva del PVC 93 è regolarmente sopra le altre (tranne nel tratto all'estrema sinistra, dove le curve sono praticamente sovrapposte, Figura 4.17a), per i restanti due regimi ondosi tali curve si intersecano più volte lungo x , tranne in un tratto compreso tra i 12 e i 20 m circa, in cui per l'ONDA 1013 lo smorzamento migliore è quello del PVC 99, mentre per la 3000 è quello del PVC 93.

4.2 Taratura dei modelli matematici su basi sperimentali

Scopo di questa parte del lavoro è mostrare le modalità con cui vengono ricavati alcuni elementi necessari per poter compiere in futuro la validazione dei modelli linearizzati presentati nel capitolo 3:

- *Modello ad un grado di libertà del solo galleggiante*

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta_0} \dot{\theta}_d + k_{rest\theta} \theta_d = Q_{gall}(\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t) = M_x(t) - I_{add}(\omega) \ddot{\theta}_d - b_{hyd\theta}(\omega) \dot{\theta}_d$$

- *Modello ad un grado di libertà della sola pala*

$$J^* \ddot{\theta}_d + b_{eq\theta_0} \dot{\theta}_d + k_g \theta_d = Q_{pala}(\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t) = M_x(t) - I_{add}(\omega) \ddot{\theta}_d - b_{hyd\theta}(\omega) \dot{\theta}_d$$

- *Modello completo a due gradi di libertà*

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{1d} \\ \ddot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1d} \\ \dot{\theta}_{2d} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1d} \\ \theta_{2d} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{gall} - F_{pala}(w_C \sin(\theta_0) + y_E) \\ F_{pala}y_E \end{pmatrix}$$

con:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1v}w_B^2 \cos(\theta_0)^2 & 0 \\ 0 & b_{2v} \frac{(w_F - w_C)^2 y_D^2 \cos(\theta_0)^2}{(w_F - w_C)^2 + y_D^2 + 2(w_F - w_C)y_D \sin(\theta_0)} \end{bmatrix}$$

$$M_{gall} = M_{r11} + M_{r12} + M_x$$

$$F_{pala} = F_{r22} + F_{r21} + F_x$$

Gli elementi da calcolare sono raggruppabili in tre gruppi:

1. Cinematica del sistema: $\theta_{1d}, \dot{\theta}_{1d}, \ddot{\theta}_{1d}$ e $\theta_{2d}, \dot{\theta}_{2d}, \ddot{\theta}_{2d}$
2. Smorzamento strutturale: b_{1v} e b_{2v} o, in maniera equivalente, i valori di smorzamento rotazionale equivalente come $b_{eq\theta_0}$.
3. Parametri fluidodinamici delle forzanti d'onda su pala e galleggiante.

Per quanto riguarda quelli del gruppo 1 e del gruppo 2, si sfruttano le prove di moto forzato utilizzate per caratterizzare l'EDS, del tutto simili a quelle del paragrafo precedente.

Invece per i parametri delle forzanti bisogna effettuare delle prove ad hoc, che saranno a breve spiegate.

Si ribadisce che le modalità di taratura sperimentale qui affrontate valgono solo ed esclusivamente per i modelli matematici linearizzati; nel momento in cui la validazione dovesse risultare fallace, si dovrà ricorrere ad un altro modello analitico a cui seguiranno diverse tecniche sperimentali (o numeriche) volte alla sua validazione.

4.2.1 Calcolo della cinematica del sistema

Si presentano ora le tecniche analitiche con cui, partendo dalle misure dei sensori di distanza montati sul sistema (Figura 4.6), si risale all'andamento delle coordinate libere scelte per definire la cinematica del sistema; ossia dati in ingresso i segnali mediati in fase degli allungamenti degli smorzatori FD e GH, verranno scritte delle relazioni cinematiche opportune, da risolvere istante per istante, per avere in uscita il relativo andamento delle coordinate libere.

In Figura 4.18 viene riportato lo schema di questa procedura per il caso di sistema completo a due gradi di libertà.

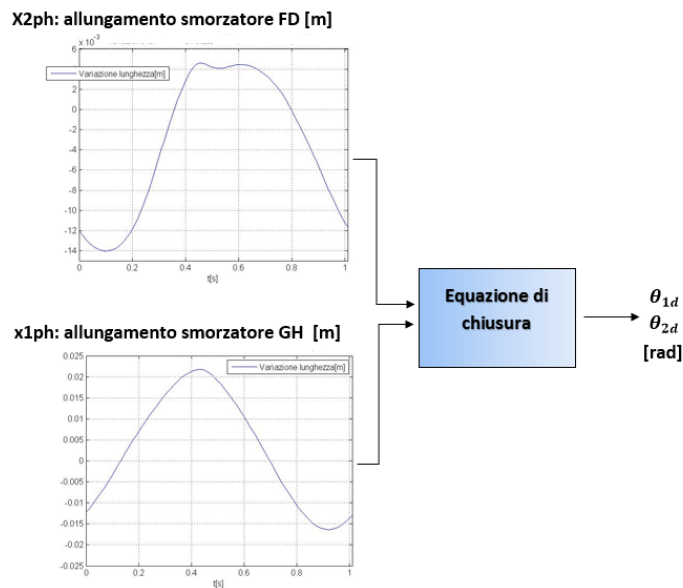


Figura 4.18: Schema di calcolo per ricavare l'andamento delle coordinate libere a partire dai segnali delle due fotocellule

Scrivendo le suddette equazioni di chiusura, si risale alle cinematica esatta non lineare inerente al sistema EDS. Dunque, come fatto per la scrittura delle equazioni di moto, si presenterà prima il problema non lineare, per i sistemi ad un grado di libertà e per quello completo a due gradi, per poi utilizzare l'ipotesi di piccoli spostamenti e linearizzare così il risultato.

Infine verrà introdotta un'ulteriore approssimazione del problema che consiste nel considerare soltanto le prime armoniche dei segnali θ_{1d} e θ_{2d} ottenuti dalla procedura di Figura 4.18.

4.2.1.1 Equazioni di chiusura complesse

Vengono presentate le suddette equazioni complesse, utili per determinare la cinematica di un generico sistema meccanico articolato, come il sistema EDS.

Prima di affrontare il caso in esame, si dà qualche accenno generale su questo strumento matematico molto caro al mondo meccanico.

Fondamenti sulle equazioni di chiusura

Un'equazione di chiusura di tipo complesso è una relazione che esprime in maniera estremamente sintetica la cinematica di un generico meccanismo.

Dato un generico sistema meccanico, del quale si vuol descrivere il suo movimento nel tempo, prima di partire con la scrittura dell'equazione di chiusura bisogna individuare le seguenti cose:

- Il *telaio*: è rappresentato dai vincoli a terra a cui il meccanismo è agganciato;
- Il numero di corpi rigidi che costituiscono il meccanismo;
- Le tipologie di vincoli interni e a terra che caratterizzano il meccanismo.

Seguita questa prassi, si cercherà di schematizzare tutti i componenti del meccanismo, compreso il telaio, con dei vettori complessi dotati di un modulo e di un'anomalia; questi ultimi saranno gli attori principali dell'equazione di chiusura.

A titolo di esempio si riporta il caso di un quadrilatero articolato:

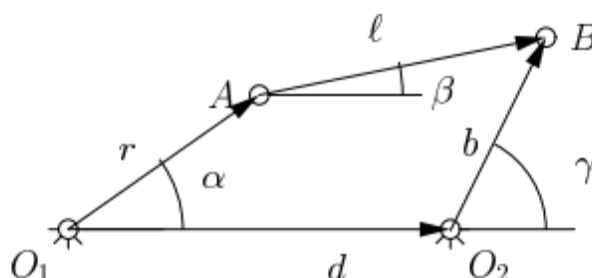


Figura 4.19: Il quadrilatero articolato, vettori complessi rappresentativi di telaio e corpi rigidi del sistema

$$\overline{AO_1} + \overline{BA} = \overline{O_2O_1} + \overline{BO_2}$$

$$re^{i\alpha} + \ell e^{i\beta} = d + be^{i\gamma}$$

Nel meccanismo di Figura 4.19, il segmento \$O_2O_1\$ rappresenta il telaio del sistema, invece i vettori \$AO_1\$, \$BO_2\$ e \$BA\$ rappresentano i suoi corpi rigidi, ossia rispettivamente la manovella, il bilanciante e la biella. Tutti i vincoli presenti nel sistema, sia quelli interni che quelli a terra, sono di tipo cerniera.

Dunque, l'equazione di chiusura si esprime eguagliando il vettore \$BO_1\$ costruito con \$AO_1\$ e \$BA\$ a quello costruito con \$O_2O_1\$ e \$BO_2\$.

Proiettando i vettori complessi di questa equazione lungo l'asse reale e lungo quello immaginario, si ricavano due equazioni scalari che, nel caso dell'EDS, si sfrutteranno per ricavare le incognite del problema, ovvero sia istante per istante il valore della/e coordinate libere.

Sistema ad un grado di libertà asta AB-smorzatore-galleggiante

Per tale sistema si scriverà un'equazione di chiusura volta a definire in maniera esatta il legame tra il moto verticale dello stelo dello smorzatore e la rotazione dell'asta AB.

Dunque, dato in ingresso il segnale della fotocellula $x_{1ph}(t)$, si otterrà in uscita l'andamento di $\theta_d(t)$. Si ricorda che i segnali di entrambe le fotocellule assumono valori positivi per allungamenti degli smorzatori e valori negativi in caso di accorciamento, come mostrato nella seguente immagine:

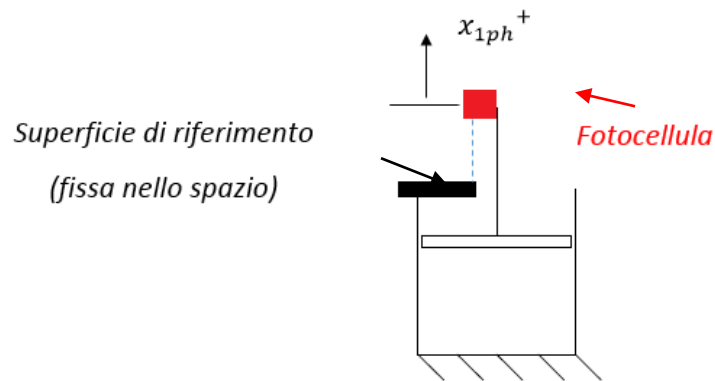


Figura 4.20: Segno del segnale della fotocellula, positivo se lo stelo va verso l'alto

Il sistema ad un grado di libertà, nella posizione iniziale, viene qui riportato con accanto i vettori complessi che andranno a comporre l'equazione di chiusura:

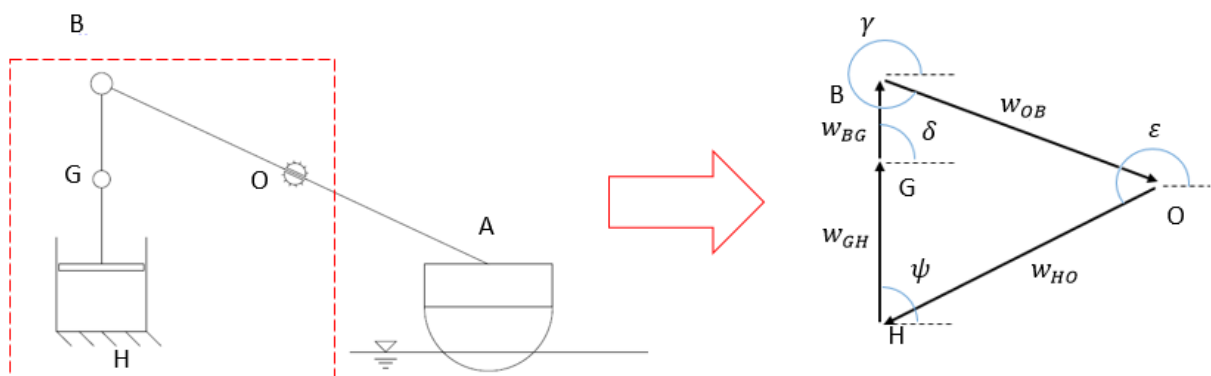


Figura 4.21: Vettori complessi per l'equazione di chiusura del sistema in configurazione statica

Un modo equivalente per scrivere l'equazione di chiusura consiste nel collocare i vettori come mostrato in Figura 4.21, sfruttando la nota proprietà che afferma come la somma di vettori sistemati in modo da formare un anello chiuso (la punta dell'ultimo vettore coincidente con la coda del primo) faccia zero:

$$w_{GH}e^{i\psi} + w_{BG}e^{i\delta} + w_{OB}e^{i\gamma} + w_{HO}e^{i\varepsilon} = 0$$

L'altro passo da fare prima di riuscire ad esprimere il dato fornito dalla fotocellula, consiste nello scrivere l'equazione di chiusura anche per l'istante generico di moto, in cui lo smorzatore si trova in configurazione allungata.

Una volta espressa quest'altra equazione complessa, le verrà sottratta quella statica di partenza, portando all'eliminazione del termine $w_{HO}e^{i\varepsilon}$, unico vettore costante nel tempo in modulo e fase, poiché rappresenta il telaio del sistema:

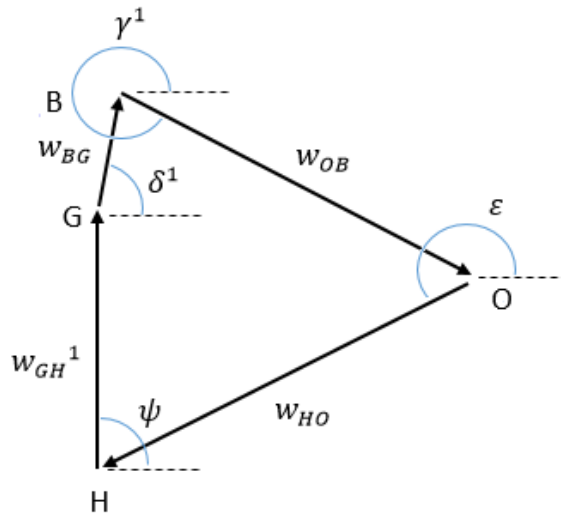


Figura 4.22: Vettori complessi per l'equazione di chiusura del sistema nella generica configurazione di moto

$$w_{GH}^1 e^{i\psi} + w_{BG} e^{i\delta^1} + w_{OB} e^{i\gamma^1} + w_{HO} e^{i\varepsilon} = 0$$

Nell'ultima equazione l'apice "1" è stato posto alle grandezze (moduli e fasi) che sono variate nel passare dalla configurazione statica a quella del generico istante di moto.

Sottraendo membro a membro le ultime due equazioni si ottiene:

$$w_{GH}^1 e^{i\psi} + w_{BG} e^{i\delta^1} + w_{OB} e^{i\gamma^1} - w_{GH} e^{i\psi} - w_{BG} e^{i\delta} - w_{OB} e^{i\gamma} = 0$$

L'ultimo passaggio consiste nell'esplicitare, per ogni vettore, i termini reali ed immaginari, considerando che $\psi = \frac{\pi}{2} = \text{cost}$:

$$i(w_{GH}^1 - w_{GH}) + w_{BG}(\cos\delta^1 - \cos\delta) + iw_{BG}(\sin\delta^1 - \sin\delta) +$$

$$+w_{OB}(\cos\gamma^1 - \cos\gamma) + iw_{OB}(\sin\gamma^1 - \sin\gamma) = 0$$

$$x_{1ph} = w_{GH}^1 - w_{GH}$$

$$ix_{1ph} + w_{BG}(\cos\delta^1 - \cos\delta) + iw_{BG}(\sin\delta^1 - \sin\delta) +$$

$$+w_{OB}(\cos\gamma^1 - \cos\gamma) + iw_{OB}(\sin\gamma^1 - \sin\gamma) = 0$$

Isolando le parti immaginarie e quelle reali, si arriva alla scrittura delle due equazioni scalari che equivalgono a quella complessa, in cui vengono evidenziate in rosso le due incognite, relative all'inclinazione dell'asta OB e della biella BG al generico istante:

$$\begin{cases} x_{1ph} + w_{BG}(\sin\delta^1 - \sin\delta) + w_{OB}(\sin\gamma^1 - \sin\gamma) = 0 \\ w_{BG}(\cos\delta^1 - \cos\delta) + w_{OB}(\cos\gamma^1 - \cos\gamma) = 0 \end{cases}$$

I termini w_{BG} e w_{OB} rappresentano le lunghezze delle relative aste BG e OB, dati geometrici ovviamente noti. Le anomalie iniziali dei loro vettori rappresentativi si riesprimono così:

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma = 2\pi - \theta_0$$

in cui θ_0 rappresenta l'inclinazione iniziale dell'asta AB del galleggiante rispetto all'orizzontale.

Allo stesso modo γ^1 vale:

$$\gamma^1 = 2\pi - \theta = 2\pi - (\theta_0 - \theta_d) = 2\pi - \theta_0 + \theta_d$$

Per cui il precedente sistema diviene:

$$\begin{cases} x_{1ph} + w_{BG}(\sin\delta^1 - 1) + w_{OB}(\sin(2\pi - \theta_0 + \theta_d) - \sin(2\pi - \theta_0)) = 0 \\ w_{BG}\cos\delta^1 + w_{OB}(\cos(2\pi - \theta_0 + \theta_d) - \cos(2\pi - \theta_0)) = 0 \end{cases}$$

Dati in ingresso i dati geometrici del sistema e l'andamento del segnale x_{1ph} , risolvendo istante per istante tale sistema non lineare è possibile ricavare gli andamenti esatti di δ^1 (inclinazione della biella BG) ma soprattutto della coordinata libera del sistema θ_d (che ricordiamo rappresenta la rotazione dell'asta AB misurata a partire dalla condizione di equilibrio statica, presa con convenzione anti-oraria positiva).

Questo sarebbe il sistema da considerare se si considerasse il sistema dinamico non lineare per mancato rispetto dell'ipotesi di piccoli spostamenti nel sistema in esercizio.

Come spesso ribadito nelle pagine precedenti, in questa fase ci si basa su modelli matematici linearizzati, per cui è possibile linearizzare anche la precedente equazione non lineare come segue:

$$\delta^1 \approx \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\delta^1 \approx 1, \cos\delta^1 \approx 0$$

$$\sin(2\pi - \theta_0 + \theta_d) - \sin(2\pi - \theta_0) \approx \theta_d$$

$$\cos(2\pi - \theta_0 + \theta_d) - \cos(2\pi - \theta_0) \approx 0$$

Per cui il sistema si riduce ad una sola equazione, poiché la seconda è divenuta un'uguaglianza:

$$\begin{cases} x_{1ph} + w_{OB}\theta_d = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \theta_d = -\frac{x_{1ph}}{w_{OB}}$$

Quindi, ricorrendo al sistema linearizzato, la relazione per risalire all'andamento della coordinata libera partendo dal segnale della fotocellula diventa molto più semplice.

Per il caso del galleggiante si riportano anche risultati numerici sia per il caso non lineare esatto che per quello linearizzato, prendendo atto dell'errore che si compie nel ricorrere a tale approssimazione. Il sistema non lineare è stato risolto numericamente in Matlab attraverso la funzione *fsolve*.

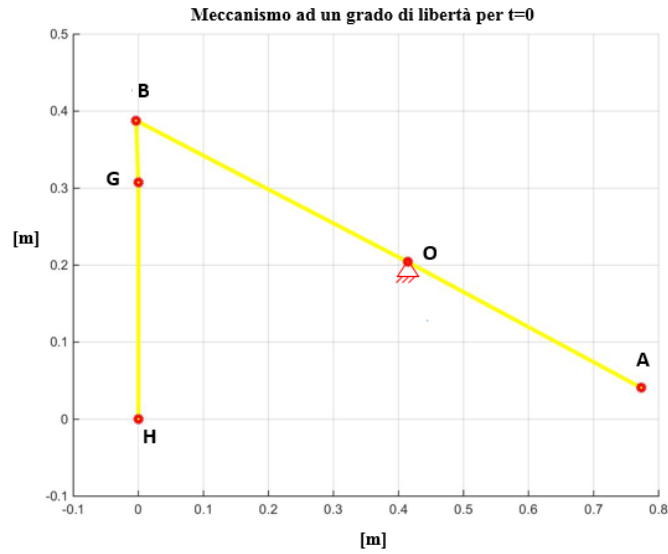


Figura 4.23: Meccanismo ad un grado di libertà, plottato in Matlab, nella configurazione di equilibrio statico

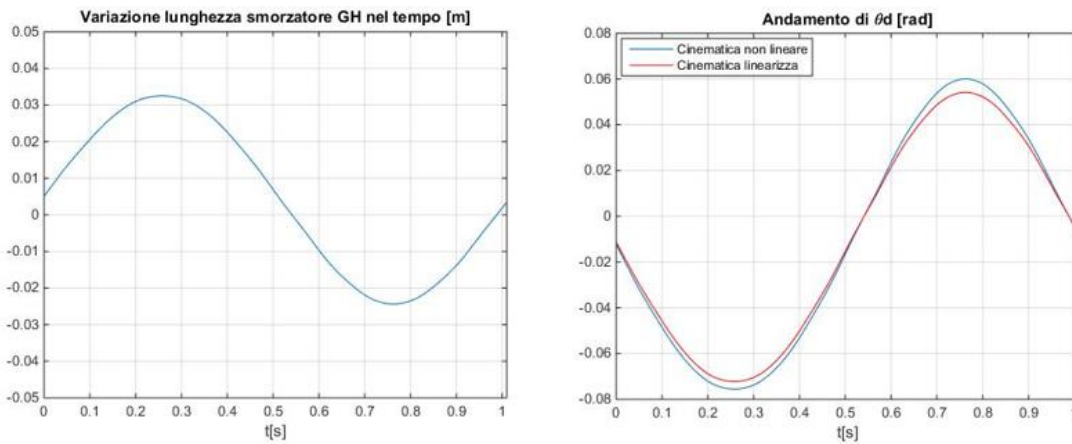


Figura 4.24: Variazione di lunghezza dello smorzatore e relative rotazioni dell'asta AB, per il caso di cinematica linearizzata e non lineare; prova sperimentale forzata con ONDA 2000

Preso coscienza dell'errore che si compie utilizzando la cinematica linearizzata in luogo di quella non lineare, nel prosieguo dell'analisi si utilizzeranno solo le relazioni linearizzate, più semplici da manovrare numericamente.

Nel momento in cui, eventualmente, ci si riporterà ad un modello matematico dell'EDS non lineare, si dovrà di pari passo ricorrere anche alla cinematica non lineare.

Sistema ad un grado di libertà asta CE-smorzatore-pala

Analogamente a quanto visto per il caso del galleggiante, verrà mostrata l'equazione di chiusura e i passaggi che da questa portano a definire la coordinata libera del sistema (rotazione θ_d dell'asta CE presa con convenzione oraria positiva), partendo dalla misura fornita dalla seconda fotocellula inerente alla variazione di lunghezza dello smorzatore FD nel tempo.

Anche per questo caso il segnale viene fornito positivo quando lo smorzatore è in configurazione allungata rispetto al caso statico.

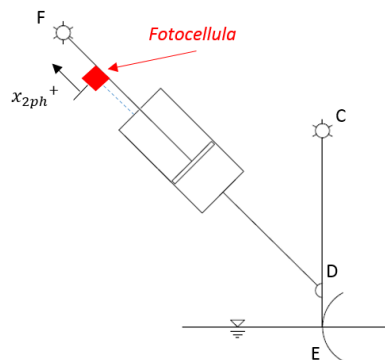


Figura 4.25: Montaggio della fotocellula relativa allo smorzatore FD e convenzione di segno del suo segnale

Il telaio del sistema in tal caso è rappresentato dalle due cerniere a terra in F e in C. L'equazione di chiusura verrà scritta sul quadrilatero articolato FCD degenere, in cui un vettore è rappresentato dal telaio FC, uno dallo smorzatore FD e l'ultimo dal biella CE. Si scrivono subito le equazioni vettoriali sia per la configurazione statica iniziale che per quella al generico istante di moto t:

$$w_{FD}e^{i\chi} + w_{CF}e^{i\phi} + w_{DC}e^{i\sigma} = 0$$

$$w_{FD}^1e^{i\chi^1} + w_{CF}e^{i\phi} + w_{DC}e^{i\sigma^1} = 0$$

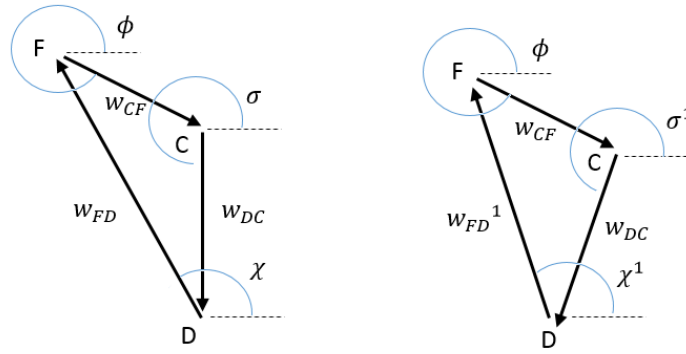


Figura 4.26: Vettori complessi per i meccanismi all'istante iniziale (a sinistra) e al generico istante di moto (a destra)

Sottraendo la prima equazione dalla seconda ed esplicitando per ogni vettore le componenti reali ed immaginarie si ottiene:

$$w_{FD}^1(\cos\chi^1 + i\sin\chi^1) - w_{FD}(\cos\chi + i\sin\chi) + \\ + w_{DC}(\cos\sigma^1 + i\sin\sigma^1) - w_{DC}(\cos\sigma + i\sin\sigma) = 0$$

Il segnale fornito dalla fotocellula x_{2ph} è contenuto nel termine w_{FD}^1 :

$$w_{FD}^1 = w_{FD} + x_{2ph}$$

Isolando la parte reale e quella immaginaria dell'equazione si ricava il sistema di due equazioni scalari non lineari che, risolte per via numerica, danno in uscita le due incognite σ^1 e χ^1 :

$$\begin{cases} (w_{FD} + x_{2ph})\cos\chi^1 - w_{FD}\cos\chi + w_{DC}(\cos\sigma^1 - \cos\sigma) = 0 \\ (w_{FD} + x_{2ph})\sin\chi^1 - w_{FD}\sin\chi + w_{DC}(\sin\sigma^1 - \sin\sigma) = 0 \end{cases}$$

Poiché l'anomalia iniziale del vettore CD (inclinazione dell'asta della pala) è pari a $\frac{3\pi}{2}$, il sistema può essere semplificato nel seguente modo:

$$\begin{cases} (w_{FD} + x_{2ph})\cos\chi^1 - w_{FD}\cos\chi + w_{DC}\cos\sigma^1 = 0 \\ (w_{FD} + x_{2ph})\sin\chi^1 - w_{FD}\sin\chi + w_{DC}(\sin\sigma^1 + 1) = 0 \end{cases}$$

La coordinata libera del sistema ad un grado di libertà θ_d è contenuta nel termine σ^1 e, date le convenzioni scelte (oraria positiva), vale la seguente relazione:

$$\sigma^1 = \sigma - \theta_d$$

che porterà alla forma definita del sistema non lineare:

$$\begin{cases} (w_{FD} + x_{2ph})\cos\chi^1 - w_{FD}\cos\chi + w_{DC}\cos(\sigma - \theta_d) = 0 \\ (w_{FD} + x_{2ph})\sin\chi^1 - w_{FD}\sin\chi + w_{DC}(\sin(\sigma - \theta_d) + 1) = 0 \end{cases}$$

Dunque, dati in ingresso i dati geometrici e il segnale mediato in fase della fotocellula, risolvendo istante per istante questa equazione non lineare si ricaveranno i relativi valori di χ^1 (inclinazione dello smorzatore) e della coordinata libera del sistema θ_d . In analogia a quanto visto per l'altro sistema ad un grado di libertà, si provvede a dare una forma più semplice di tale equazione per il caso linearizzato.

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, valgono le seguenti approssimazioni:

$$\begin{aligned} \cos\chi^1 &\approx \cos\chi \\ \sin\chi^1 &\approx \sin\chi \end{aligned}$$

Inoltre si sviluppano in serie di Taylor le funzioni $\sin(\sigma - \theta_d)$ e $\cos(\sigma - \theta_d)$ attorno al valore $\theta_d = 0$:

$$\sin(\sigma - \theta_d) \approx \sin\sigma - \cos\sigma\theta_d$$

$$\cos(\sigma - \theta_d) \approx \cos\sigma + \sin\sigma\theta_d$$

Dunque il sistema può essere riscritto nella seguente forma non lineare:

$$\begin{cases} x_{2ph}\cos\chi + w_{DC}(\cos\sigma + \sin\sigma\theta_d) = 0 \\ x_{2ph}\sin\chi + w_{DC}(\sin\sigma - \cos\sigma\theta_d + 1) = 0 \end{cases}$$

Si nota come a valle della linearizzazione sia sparita l'incognita χ^1 legata all'inclinazione dello smorzatore nel tempo.

Per il calcolo di θ_d quindi può essere utilizzata indifferentemente una delle due equazioni precedenti.

Sistema completo a due gradi di libertà

Per il sistema completo si dovranno chiudere simultaneamente i due sottosistemi OHGB e CDF, evidenziati in Figura 4.26.

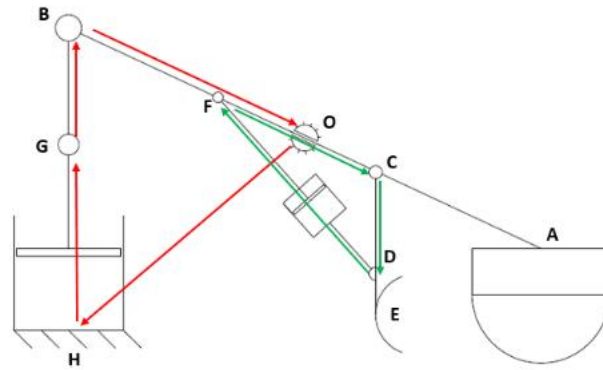


Figura 4.27: Vettori complessi per i meccanismi all'istante iniziale (a sinistra) e al generico istante di moto (a destra)

Per quanto riguarda il meccanismo OHGB, è uguale al caso ad un grado di libertà, a meno di sostituire θ_{1d} al posto di θ_d .

Si riporta direttamente il risultato finale, non lineare e linearizzato, il quale ci permette di ricavare la rotazione nel tempo dell'asta AB e della biella GB a partire da moto dello stelo dello smorzatore:

- *Sistema non lineare*

$$\begin{cases} x_{1ph} + w_{BG}(\sin\delta^1 - 1) + w_{OB}(\sin(2\pi - \theta_0 + \theta_{1d}) - \sin(2\pi - \theta_0)) = 0 \\ w_{BG}\cos\delta^1 + w_{OB}(\cos(2\pi - \theta_0 + \theta_{1d}) - \cos(2\pi - \theta_0)) = 0 \end{cases}$$

- *Sistema linearizzato*

$$\begin{cases} x_{1ph} + w_{OB}\theta_{1d} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \theta_{1d} = -\frac{x_{1ph}}{w_{OB}}$$

Anche per l'altro meccanismo non ci sono notevoli differenze rispetto al caso ad un grado di libertà, se non per il fatto che l'asta FC stavolta rappresenta un telaio che compie rotazioni assolute pari a θ_{1d} . Dati i meccanismi in Figura 4.27, si riportano le loro equazioni di chiusura:

$$w_{FD}e^{i\chi} + w_{CF}e^{i\phi} + w_{DC}e^{i\sigma} = 0$$

$$w_{FD}^1e^{i\chi^1} + w_{CF}e^{i\phi^1} + w_{DC}e^{i\sigma^1} = 0$$

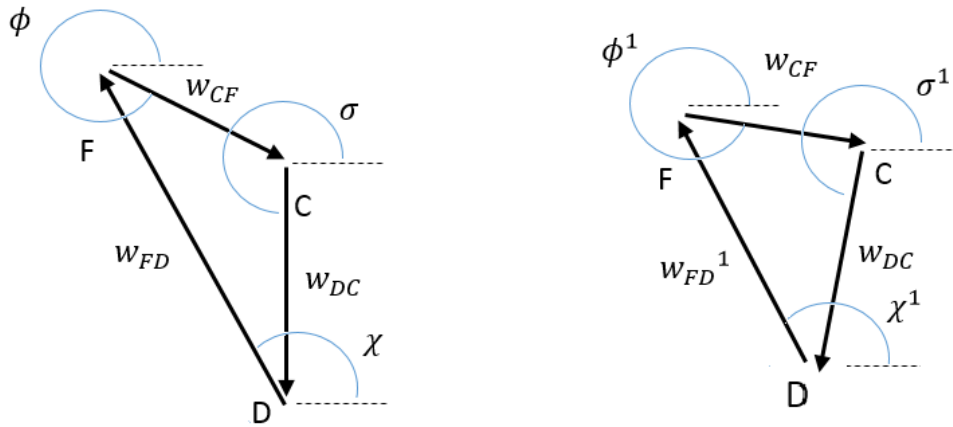


Figura 4.28: Vettori complessi per il cinematico CFD, relativo al sistema a due gradi di libert , nell'istante iniziale e finale

Sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda e proiettando lungo l'asse reale e lungo quello immaginario, si ottiene la seguente equazione:

$$\begin{aligned}
 &w_{FD}^1(\cos\chi^1 + i\sin\chi^1) - w_{FD}(\cos\chi + i\sin\chi) + \\
 &+w_{DC}(\cos\sigma^1 + i\sin\sigma^1) - w_{DC}(\cos\sigma + i\sin\sigma) + \\
 &+w_{CF}(\cos\phi^1 + i\sin\phi^1) - w_{CF}(\cos\phi + i\sin\phi) = 0
 \end{aligned}$$

Isolando parte reale e parte immaginaria ed eguagliandole a zero si ottiene il sistema di due equazioni scalari in due incognite:

$$\begin{cases}
 w_{FD}^1\cos\chi^1 - w_{FD}\cos\chi + w_{DC}(\cos\sigma^1 - \cos\sigma) + w_{CF}(\cos\phi^1 - \cos\phi) = 0 \\
 w_{FD}^1\sin\chi^1 - w_{FD}\sin\chi + w_{DC}(\sin\sigma^1 - \sin\sigma) + w_{CF}(\sin\phi^1 - \sin\phi) = 0
 \end{cases}$$

Il segnale x_{2ph}   contenuto nel termine w_{FD}^1 :

$$w_{FD}^1 = w_{FD} + x_{2ph}$$

Dunque:

$$\begin{cases}
 (w_{FD} + x_{2ph})\cos\chi^1 - w_{FD}\cos\chi + w_{DC}(\cos\sigma^1 - \cos\sigma) + w_{CF}(\cos\phi^1 - \cos\phi) = 0 \\
 (w_{FD} + x_{2ph})\sin\chi^1 - w_{FD}\sin\chi + w_{DC}(\sin\sigma^1 - \sin\sigma) + w_{CF}(\sin\phi^1 - \sin\phi) = 0
 \end{cases}$$

Adesso vengono esplicitate le coordinate libere del sistema, contenute nei termini ϕ^1 e σ^1 :

$$\phi^1 = \phi + \theta_{1d}$$

$$\sigma^1 = \sigma - \theta_{2d} + \theta_{1d}$$

Essendo $\sigma = \frac{3}{2}\pi$, le equazioni non lineari che risolvono la cinematica di FCD diventano:

$$\begin{cases} (w_{FD} + x_{2ph})\cos\chi^1 - w_{FD}\cos\chi + w_{DC}\cos(\sigma - \theta_{2d} + \theta_{1d}) + w_{CF}(\cos(\phi + \theta_{1d}) - \cos\phi) = 0 \\ (w_{FD} + x_{2ph})\sin\chi^1 - w_{FD}\sin\chi + w_{DC}(\sin(\sigma - \theta_{2d} + \theta_{1d}) + 1) + w_{CF}(\sin(\phi + \theta_{1d}) - \sin\phi) = 0 \end{cases}$$

in cui in rosso sono evidenziate le incognite del problema.

Unendo queste due equazioni alle prime due ricavate per l'altro sottosistema OHGB, si ha il sistema non lineare di quattro equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} x_{1ph} + w_{BG}(\sin\delta^1 - 1) + w_{OB}(\sin(2\pi - \theta_0 + \theta_{1d}) - \sin(2\pi - \theta_0)) = 0 \\ w_{BG}\cos\delta^1 + w_{OB}(\cos(2\pi - \theta_0 + \theta_{1d}) - \cos(2\pi - \theta_0)) = 0 \\ (w_{FD} + x_{2ph})\cos\chi^1 - w_{FD}\cos\chi + w_{DC}\cos(\sigma - \theta_{2d} + \theta_{1d}) + w_{CF}(\cos(\phi + \theta_{1d}) - \cos\phi) = 0 \\ (w_{FD} + x_{2ph})\sin\chi^1 - w_{FD}\sin\chi + w_{DC}(\sin(\sigma - \theta_{2d} + \theta_{1d}) + 1) + w_{CF}(\sin(\phi + \theta_{1d}) - \sin\phi) = 0 \end{cases}$$

Si noti che per semplificare la risoluzione di questo sistema è possibile risolvere separatamente le due coppie di equazioni ricavate per i due sottosistemi, ricavando dalle prime due le incognite δ^1 e θ_{1d} , mentre dalle rimanenti si ricaveranno a questo punto θ_{2d} e χ^1 .

A conclusione di questa parte si riportano le due equazioni in due incognite linearizzate, valevoli per ipotesi di piccoli spostamenti:

$$\begin{cases} \theta_{1d} = -\frac{x_{1ph}}{w_{OB}} \\ x_{2ph}\sin\chi + w_{DC}(\sin\sigma - \cos\sigma(\theta_{2d} - \theta_{1d}) + 1) = 0 \end{cases}$$

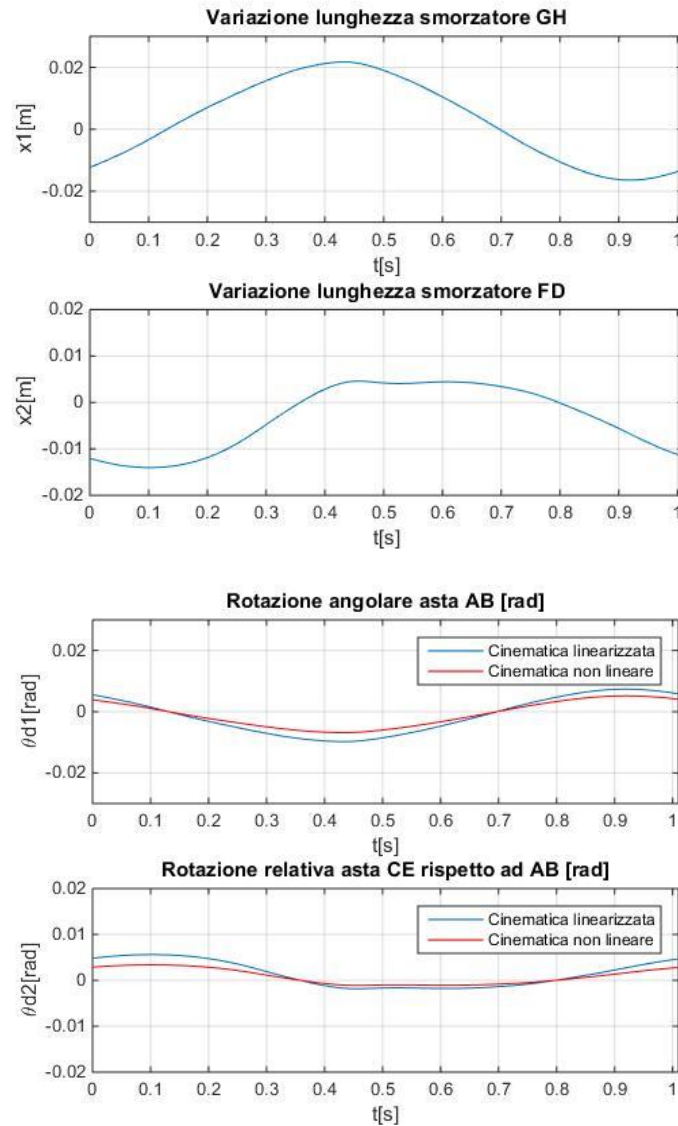


Figura 4.29: Andamento delle coordinate libere a partire da variazioni di lunghezza degli smorzatori durante una prova sperimentale; risultati relativi a legami cinematici non lineare (curva rossa) e linearizzati (curva blu)

4.2.1.2 Uso della DFT sulle coordinate libere per il caso linearizzato

In virtù della linearizzazione attuata per i modelli matematici, sulla parte strutturale e su quella di forzamento, e data l'ipotesi di forzamento da moto onduoso di tipo armonico, si procederà a rendere tale anche l'andamento delle coordinate libere ricavate dal procedimento spiegato nel paragrafo precedente 4.2.1.1..

Si tratterà il problema analiticamente per tutte e due le coordinate θ_{1d} e θ_{2d} , per poi mostrare dei grafici numerici per il sistema ad un grado di libertà relativo al galleggiante.

Come mostrato in precedenza, per ricavare l'andamento delle coordinate libere a partire dai segnali mediati in fase delle due fotocellule, si potranno usare tranquillamente i legami cinematici linearizzati senza andare in contro a grossi errori :

$$\begin{cases} \theta_{1d} = -\frac{x_{1ph}}{w_{OB}} \\ x_{2ph} \sin\chi + w_{DC}(\sin\sigma - \cos\sigma(\theta_{2d} - \theta_{1d}) + 1) = 0 \end{cases}$$

Ne consegue che il contenuto armonico dei segnali che si ricavano sarà pari a quello di x_{1ph} e di x_{2ph} . A titolo di esempio si riportano due segnali mediati in fase delle due fotocellule e i relativi andamenti delle coordinate libere, per una prova sperimentale sul sistema completo eseguita con l'ONDA 2000, avente periodo T pari a 1.02 s (Figura 4.29). Si può notare che entrambi i segnali ottenuti siano lontani dall'essere di tipo armonico, soprattutto per la rotazione relativa della pala (θ_{2d}). Infatti questi sono costituiti da un valor medio diverso da zero e da contributi in frequenza maggiori rispetto alla pulsazione fondamentale propria dell'onda incidente. Per cui si fa un'approssimazione molto forte nel riferirsi a segnali a valor medio nullo formati dalle sole armoniche fondamentali.

Tale approssimazione è più forte per il secondo grado di libertà a causa del disco smorzante utilizzato nel cilindro FD, avente smorzamento diverso a seconda che lo stelo sia in ingresso o in uscita. Questo dettaglio sarà rivisto nel momento in cui si agirà con la taratura dei parametri di forzamento d'onda alla pala.

Per quanto riguarda invece la rotazione dell'asta AB, il segnale si presenta molto meglio a tale approssimazione, avendo un valor medio quasi nullo e il maggior quantitativo di energia nell'armonica fondamentale.

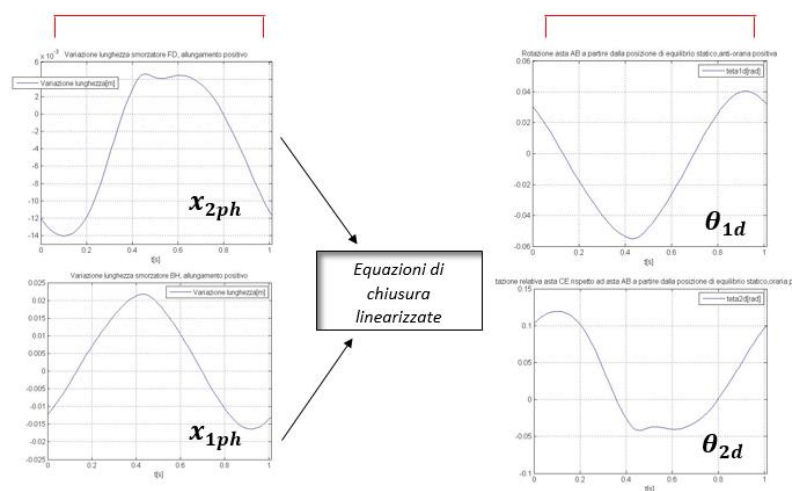


Figura 4.30: Trasformazione dei segnali di allungamento degli smorzatori nei relativi segnali delle coordinate libere

Dunque, la trattazione verrà sviluppata fino in fondo solo su θ_{1d} , vista la miglior “armonicità” che lo caratterizza.

Utilizzando una routine di Matlab basata sulla DFT (*Discrete Fourier Transform*), si calcolano sia il valor medio del segnale che le ampiezze e le fasi iniziali delle varie armoniche.

Essendo il segnale mediato in fase secondo l’armonica fondamentale, , le armoniche contenute nel segnale potranno essere solo multipli interi di quella fondamentale.

Per cui a valle della DFT sarà possibile ricostruire il segnale nel seguente modo:

$$\theta_{1d}(t) \cong \Theta_{1d} + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

in cui Θ_{1d} è il valor medio del segnale e ω rappresenta la pulsazione fondamentale pari alla pulsazione d’onda incidente.

Lo schema relativo a questa operazione viene qui riportato.



Figura 4.31: Schema del processo di ricostruzione del segnale $\theta_{1d}(t)$ tramite DFT

Si riportano anche in Figura 4.31 esempi di ricostruzione dei segnali con un diverso numero di armoniche, notando come all’aumentare di questo si vada assottigliando l’errore rispetto al caso effettivo.

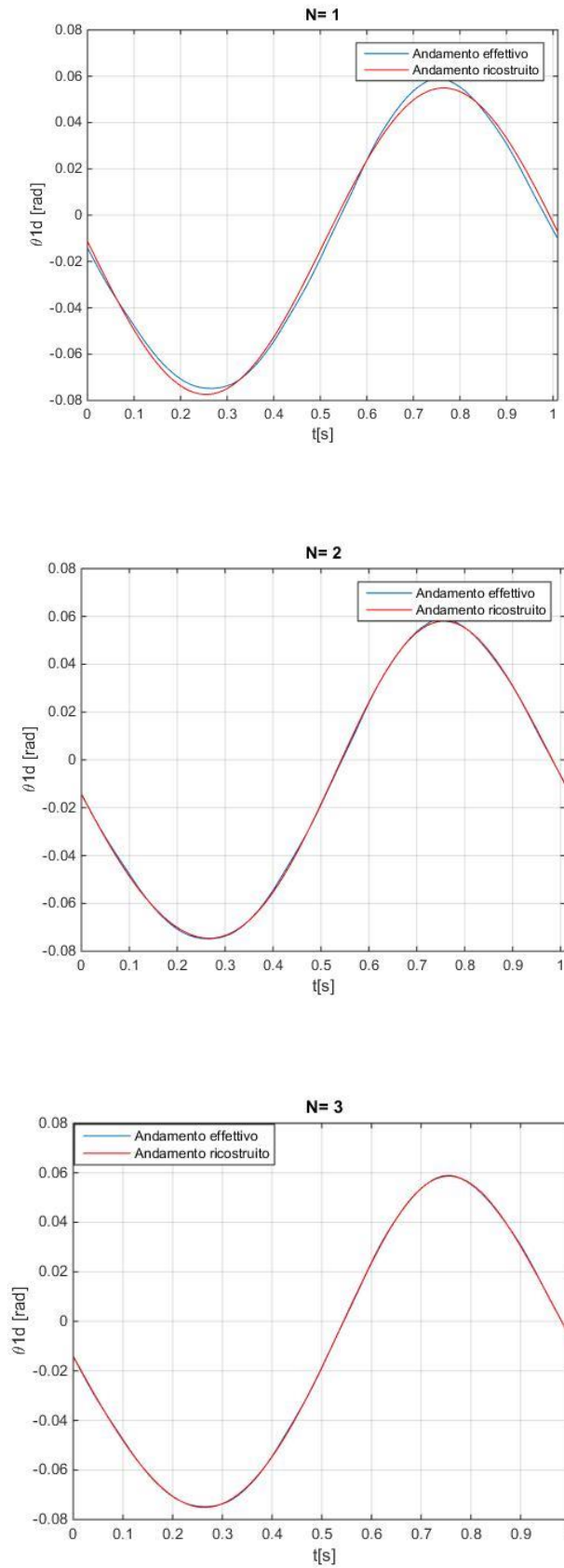


Figura 4.32: Segnale $\theta_{1d}(t)$ ricostruito con una, due e tre armoniche, multipli interi di quella fondamentale

Tuttavia l'approssimazione con una sola armonica sembra essere più che accettabile. Concludendo, si va ad eliminare il valor medio dal segnale ricostruito per avere esatta corrispondenza con le forze ricostruite con la teoria del flusso potenziale. Ossia, in merito al processo d'analisi inversa, risulterà che sia le forzanti ricostruite con i termini strutturali che quelle valutate a partire dai contributi del flusso potenziale saranno di tipo armonico a valor medio nullo.

Si riporta in Figura 4.32 il confronto tra segnale a media nulla e segnale a media diversa da zero, per il caso di ricostruzione tramite la sola armonica fondamentale.

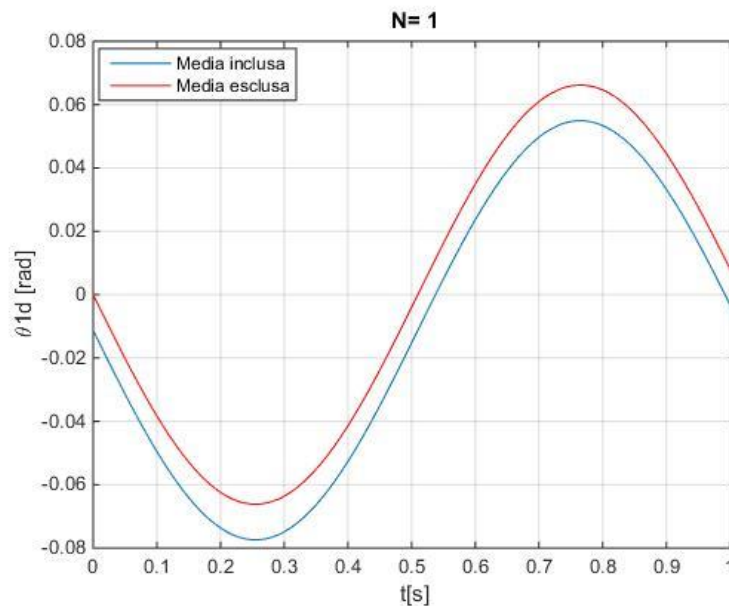


Figura 4.33: Confronto tra segnali mono-armonici a media nulla e diversa da zero

L'approssimazione è più evidente, ma per il momento, vista la strada scelta, bisogna accettarla e valutare a posteriori quando essa incida sui risultati finali.

A questo punto si cercheranno delle modifiche da apportare al modello sperimentale così da avere anche per il secondo grado di libertà θ_{2d} un valor medio prossimo allo zero.

4.2.2 Ricerca dei parametri di smorzamento strutturale

Trascurando le dissipazioni energetiche per attrito coulombiano che si hanno nelle cerniere reali del sistema e nelle guide in cui scorrono gli steli degli smorzatori, lo smorzamento strutturale dell'EDS viene attribuito soltanto allo scorrimento dei dischi in PVC nell'olio contenuto nei cilindri GH e FD (Figura 4.33).

Come mostrato in precedenza, la forza dissipativa ricavata con le celle di carico non è direttamente proporzionale alla velocità di sfilamento degli smorzatori, per cui essi non possono ritenersi di natura viscosa.

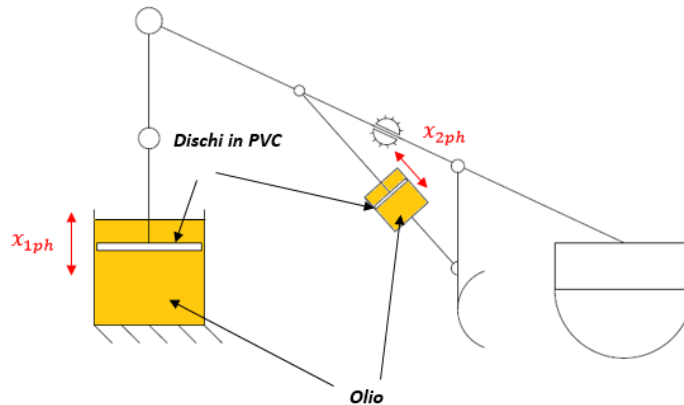


Figura 4.34: Dischi in PVC e olio, attori principali dello smorzamento strutturale dell'EDS

Ai fini della modellazione matematica di questo sistema, tali smorzatori vengono tuttavia schematizzati come viscosi equivalenti, visto che, come mostrato in Figura 4.34, si ha una buona correlazione tra i segnali F_{D1ph} e \dot{x}_{1ph} :

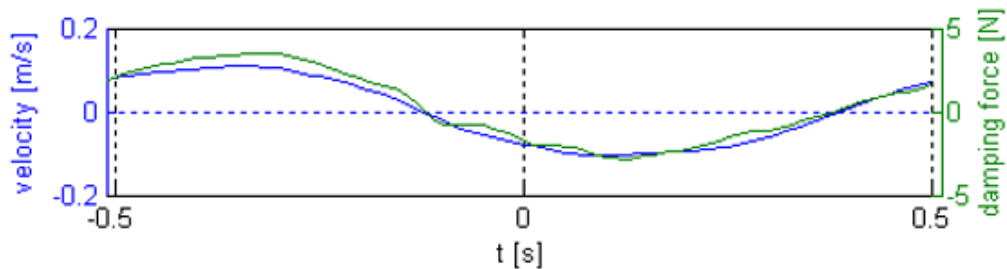


Figura 4.35: Forza di smorzamento e velocità dello stelo GH ([1])

In Fig. 4.34 si fa riferimento a dei segnali dello GH ma, visto che lo smorzatore FD ha le stesse caratteristiche costruttive, andamenti simili qui non riportati si hanno per F_{D2} e \dot{x}_{2ph} . Dunque è giustificato l'utilizzo di coefficienti di smorzamento, come si fa con quelli di natura viscosa, che leghi i moduli di forza smorzante e velocità di sfilamento attraverso un legame di diretta proporzionalità:

$$F_{D1} \cong b_{1v} \dot{x}_{1ph}$$

$$F_{D2} \cong b_{2v} \dot{x}_{2ph}$$

in cui b_{1v} e b_{2v} rappresentano i coefficienti di smorzamento viscosi equivalenti per i cilindri GH e FD (Figura 4.34), aventi unità di misura $[\frac{Ns}{m}]$, da stimare sperimentalmente.

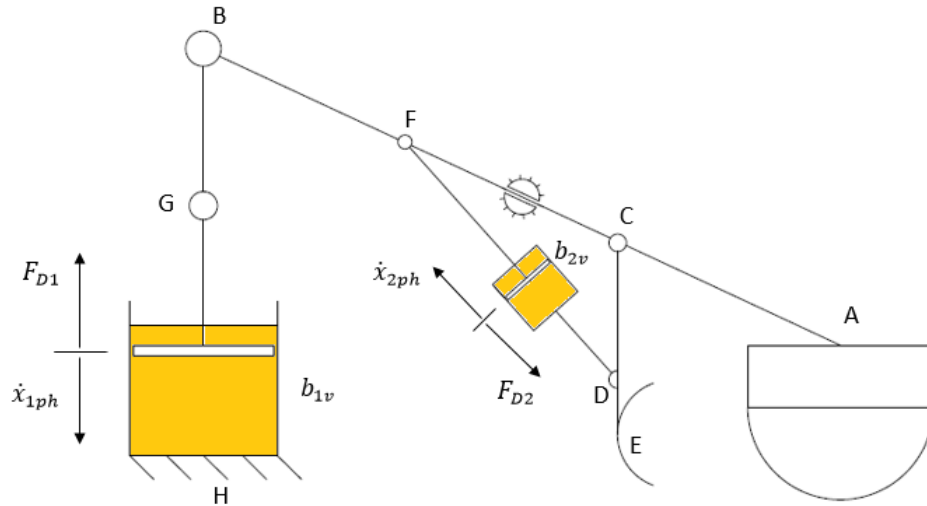


Figura 4.36: Vettori di forza e velocità di smorzamento, tra loro in contro-fase

Vista la variabilità di tali segnali di forza e velocità (anche a parità di onda impressa e di disco montato) il calcolo di tali coefficienti di smorzamento viene effettuata per ogni prova. Dunque si avranno coefficienti di smorzamento variabili a seconda della prova analizzata. Tuttavia, non trattandosi di smorzatori viscosi ed essendo la matrice di smorzamento diagonale, è stato possibile riferirsi a dei coefficienti di smorzamento viscosi equivalenti rotazionali $b_{eq\theta10}$ e $b_{eq\theta20}$ $[Nms/rad]$, da moltiplicare direttamente per le velocità $\dot{\theta}_{1d}$ e $\dot{\theta}_{2d}$:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1v}w_B^2 \cos(\theta_0)^2 & 0 \\ 0 & b_{2v} \frac{(w_F - w_C)^2 y_D^2 \cos(\theta_0)^2}{(w_F - w_C)^2 + y_D^2 + 2(w_F - w_C)y_D \sin(\theta_0)} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} b_{eq\theta10} & 0 \\ 0 & b_{eq\theta20} \end{bmatrix}$$

Quindi, da un punto di vista modellistico, gli smorzatori dell'EDS si possono rappresentare in quest'altro modo:

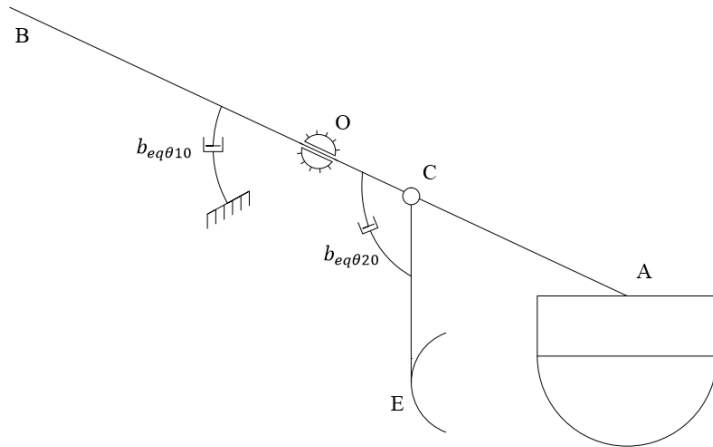


Figura 4.37: Sistema EDS rappresentato con gli smorzatori rotazionali viscosi equivalenti

Dunque, si parte dagli andamenti delle coordinate libere θ_{1d} e θ_{2d} , ricavate dai legami cinematici prodotti dalle equazioni di chiusura, e dagli andamenti dei momenti smorzanti M_{D1} , M_{D2} , calcolabili nel seguente modo fin tanto che si resta in ipotesi di piccoli spostamenti:

$$M_{D1} = F_{D1} w_B \cos \theta_0$$

$$M_{D2} = F_{D2} y_D \cos \chi$$

in cui w_B e y_D rappresentano le lunghezze dei segmenti OB e CD mentre θ_0 e χ sono le inclinazioni iniziale dell'asta AB e dello smorzatore FD.

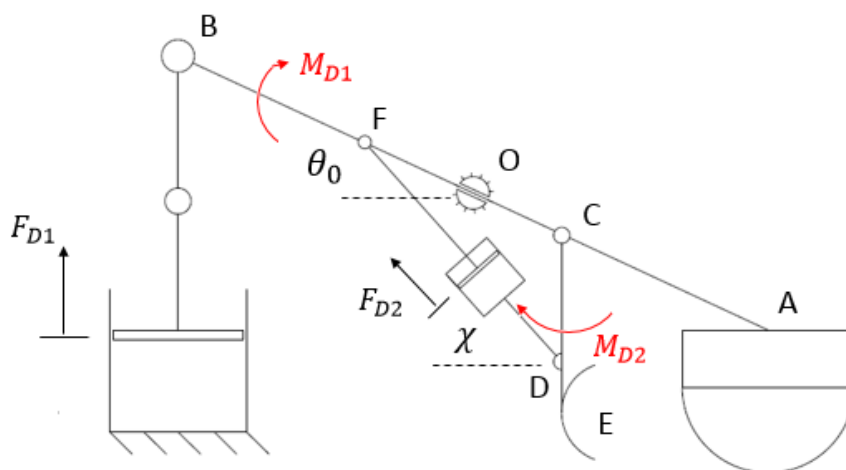


Figura 4.38: Momenti smorzanti messi al posto delle forze smorzanti misurate dalle celle di carico

Una volta ricavati questi andamenti, si applica la DFT su entrambi e si può proseguire o con un approccio *energetico* o con uno *dinamico*, che vengono di seguito elencati.

Per utilizzare tale approccio, si parte innanzitutto dalle energie dissipate ad ogni ciclo di oscillazione dagli smorzatori, integrando sul periodo di oscillazione l'andamento della potenza dissipata, ricavata sperimentalmente, come mostrato nel paragrafo 4.1.2.2.

Quindi, per i due smorzatori GH e FD si ricaveranno rispettivamente le energie dissipate E_{diss1} e E_{diss2}

Nota questa energia, ipotizzando degli smorzatori rotazionali equivalenti, si calcolando i coefficienti di smorzamento come segue:

$$E_{diss1} = \int_T b_{eq\theta10} \dot{\theta}_{1d,DFT}^2 dt \quad \rightarrow \quad b_{eq\theta10} = \frac{E_{diss1}}{\int_T \dot{\theta}_{1d,DFT}^2 dt}$$

$$E_{diss2} = \int_T b_{eq\theta20} \dot{\theta}_{2d,DFT}^2 dt \quad \rightarrow \quad b_{eq\theta20} = \frac{E_{diss2}}{\int_T \dot{\theta}_{2d,DFT}^2 dt}$$

L'approccio dinamico consiste semplicemente nel dividere le ampiezze dei segnali dei momenti di smorzamento armonici, definiti come $M_{D1,DFT}$ e $M_{D2,DFT}$, rispettivamente per le ampiezze dei segnali $\dot{\theta}_{1d,DFT}$ e $\dot{\theta}_{2d,DFT}$:

$$b_{eq\theta10} = Amp(M_{D1,DFT})/Amp(\dot{\theta}_{1d,DFT})$$

$$b_{eq\theta20} = Amp(M_{D2,DFT})/Amp(\dot{\theta}_{2d,DFT})$$

In Figura 4.38 viene riportato uno schema riassuntivo dei due approcci appena presentati.

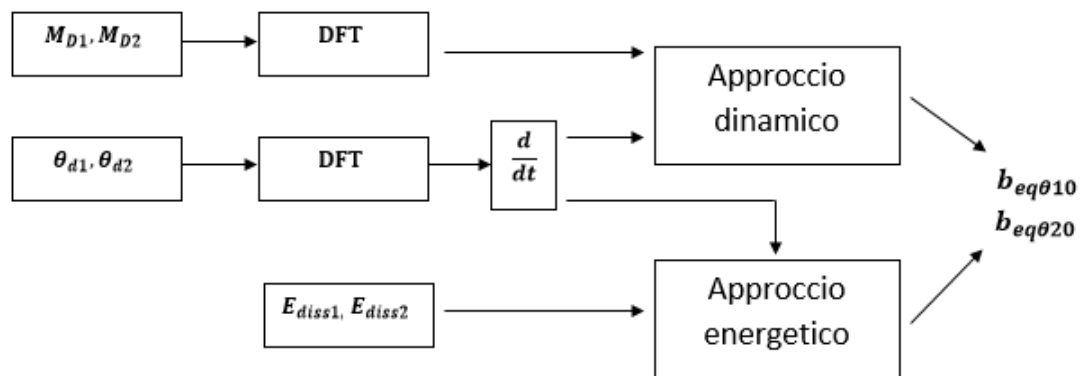
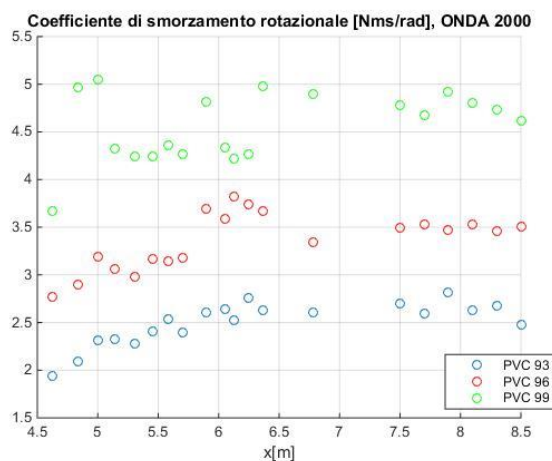


Figura 4.39: Schemi riassuntivi per il calcolo dei coefficienti di smorzamento viscosi equivalenti attraverso approccio dinamico e approccio energetico

Si riportano in Figura 4.39 i risultati relativi a $b_{eq\theta_{10}}$, calcolati con il metodo dinamico, per il caso di solo galleggiante.

Si nota una variabilità di tali coefficienti in funzione della posizione nel canale di prova; essa è dovuta sempre alla variazione dell'ampiezza dell'onda lungo lo stesso canale, causata dai fenomeni riflessivi della spiaggia.

Quindi, al variare della posizione lungo il canale, varieranno forze e velocità di allungamento agli smorzatori, da cui dipenderanno a loro volta i valori numerici dei coefficienti di smorzamento equivalenti, come è possibile constatare nei tre diagrammi di Figura 4.39.



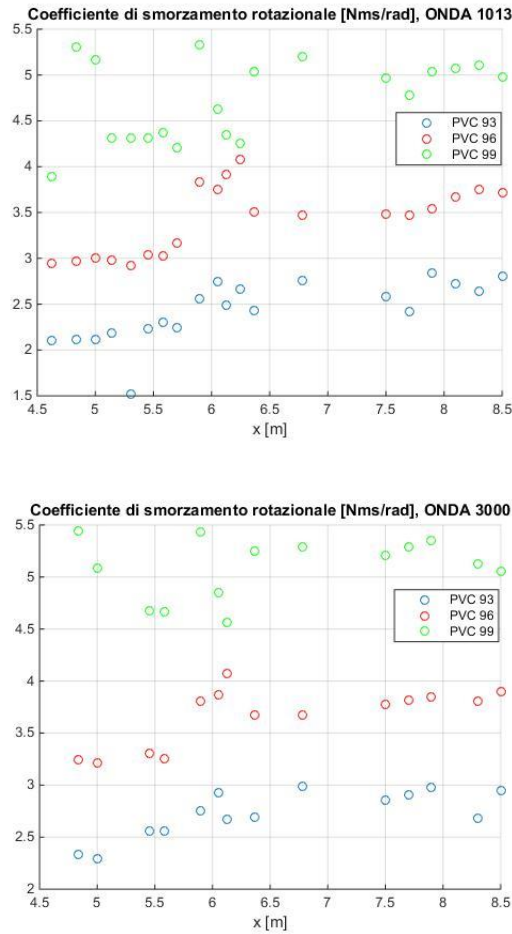


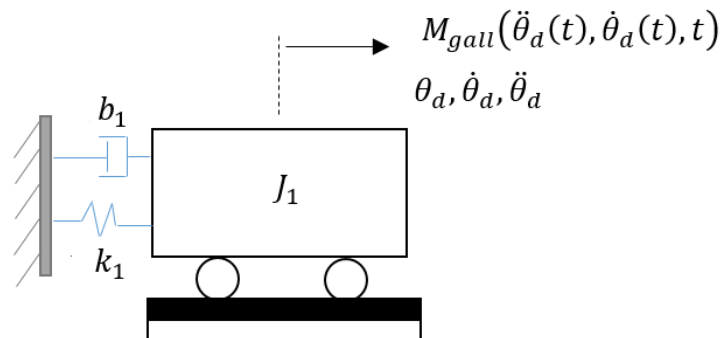
Figura 4.40: Coefficienti di smorzamento rotazionali equivalenti in funzione della posizione del canale, del tipo d'onda e del diametro del disco in PVC che scorre in olio

4.2.3 Sistemi ad un grado di libertà: ricerca di alcuni parametri di forzamento

Si riprendono i modelli dinamici linearizzati ad un grado di libertà di pala e galleggiante ricavati nel capitolo 3.

Per alleggerire la scrittura, i termini strutturali vengono espressi in forma compatta; inoltre si adopera il pedice 1 ai parametri del galleggiante e il pedice 2 ai parametri della pala.

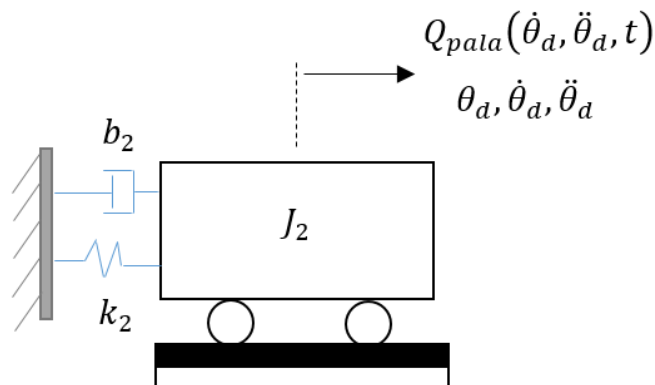
- *Modello linearizzato asta-galleggiante:*



$$J_1 \ddot{\theta}_d + b_1 \dot{\theta}_d + k_1 \theta_d = M_{gall}(\ddot{\theta}_d(t), \dot{\theta}_d(t), t) =$$

$$= M_{x1}(t) - I_{add1}(\omega) \ddot{\theta}_d(t) - b_{hyd1}(\omega) \dot{\theta}_d(t)$$

- *Modello linearizzato asta-pala:*



$$J_2 \ddot{\theta}_d + b_2 \dot{\theta}_d + k_2 \theta_d = Q_{pala}(\dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d, t) =$$

$$= M_{x2}(t) - I_{add2}(\omega) \ddot{\theta}_d - b_{hyd2}(\omega) \dot{\theta}_d$$

A conclusione di questa parte relativa alle tecniche di taratura dei modelli matematici linearizzati dell'EDS, si intende spiegare rapidamente le tecniche sperimentali per il calcolo dei parametri fluidodinamici necessari per esplicitare le componenti di radiazione e di eccitazione delle forzanti d'onda. Per queste grandezze, al contrario dello smorzamento strutturale, non si potranno utilizzare le prove sperimentali accumulate per analizzare le prestazioni dell'EDS.

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, su cui è basata la teoria del flusso potenziale, si cercherà di riprodurre sperimentalmente le condizioni adatte a questo processo di taratura:

- *Oscillazioni libere* in acqua ferma per le componenti di radiazione;
- *Moto forzato* su sistema fermo per le componenti di eccitazione.

In una prima fase si provvederà alla taratura dei due modelli ad un grado di libertà separati; una volta ricostruite le due forze di pala e di galleggiante, se esse supereranno le rispettive prove di validazione basate sull'analisi inversa, verranno sottoposte anche al modello matematico del sistema completo, così da capire quanto si approssima il problema nel non considerare i termini di mutua interazione che nascono quando pala e galleggiante sono contemporaneamente in esercizio.

Si passa adesso a parlare della strategia analitico-sperimentale volta alla determinazione dei parametri fluidodinamici; quelli legati alla componente di radiazione sono funzioni della pulsazione d'onda, invece la forza di eccitazione dipende, oltre che dalla stessa pulsazione, anche dall'ampiezza d'onda che, come spiegato in 4.1.2.2., varia lungo il canale anche nel caso di onde monocromatiche, a causa della riflessione dovuta alla spiaggia.

Dunque, rispettando le ipotesi di onde mono-armoniche e data una certa posizione per il sistema EDS nel canale di prova, i parametri da determinare sono:

- $I_{add1,2}$: coefficienti di inerzia aggiunta [kgm^2];
- $b_{hyd1,2}$: coefficienti di smorzamento idrodinamico [Nms/rad];
- $M_{x1,2}$ e $\varphi_{rel1,2}$: modulo del momento di eccitazione [Nm] e fase relativa rispetto allo spostamento del sistema [rad].

Purtroppo la fase operativa della ricerca dei parametri non è stata conclusa in questa tesi; il lavoro svolto ha riguardato il calcolo dei parametri di radiazione per il caso del solo galleggiante.

Vengono di seguito mostrate due strade alternative intraprese per questa causa, le quali purtroppo non hanno portato a dei risultati confortanti.

4.2.3.1 Parametri di forzamento al galleggiante con il modello nel dominio delle frequenze

Sfruttando l'equazione linearizzata attorno alla posizione di equilibrio statica e le ipotesi di moto armonico alla pulsazione d'onda ω , si introduce quest'altro metodo per il calcolo dei parametri di radiazione per il caso del solo galleggiante, basato sulla espressione nel modello dinamico nel dominio delle frequenze.

Come noto, l'equazione del moto di tale sistema è la seguente:

$$J_1 \ddot{\theta}_d + b_1 \dot{\theta}_d + k_1 \theta_d = M_{gall}(\ddot{\theta}_d(t), \dot{\theta}_d(t), t) =$$

$$= M_{x1}(t) - I_{add1}(\omega) \ddot{\theta}_d(t) - b_{hyd1}(\omega) \dot{\theta}_d(t)$$

La prima operazione effettuata è stata quella di trasformare il record di laboratorio relativo alla variazione di lunghezza dello smorzatore BH in una storia delle relative rotazione dell'asta principale AB, attraverso le relazioni basate sull'equazione di chiusura ricavate nel paragrafo 4.2.1.1.

Si riportano in Figura 4.41 i segnali mediati in fase della variazione di lunghezza di BH e della relativa rotazione dell'asta AB.

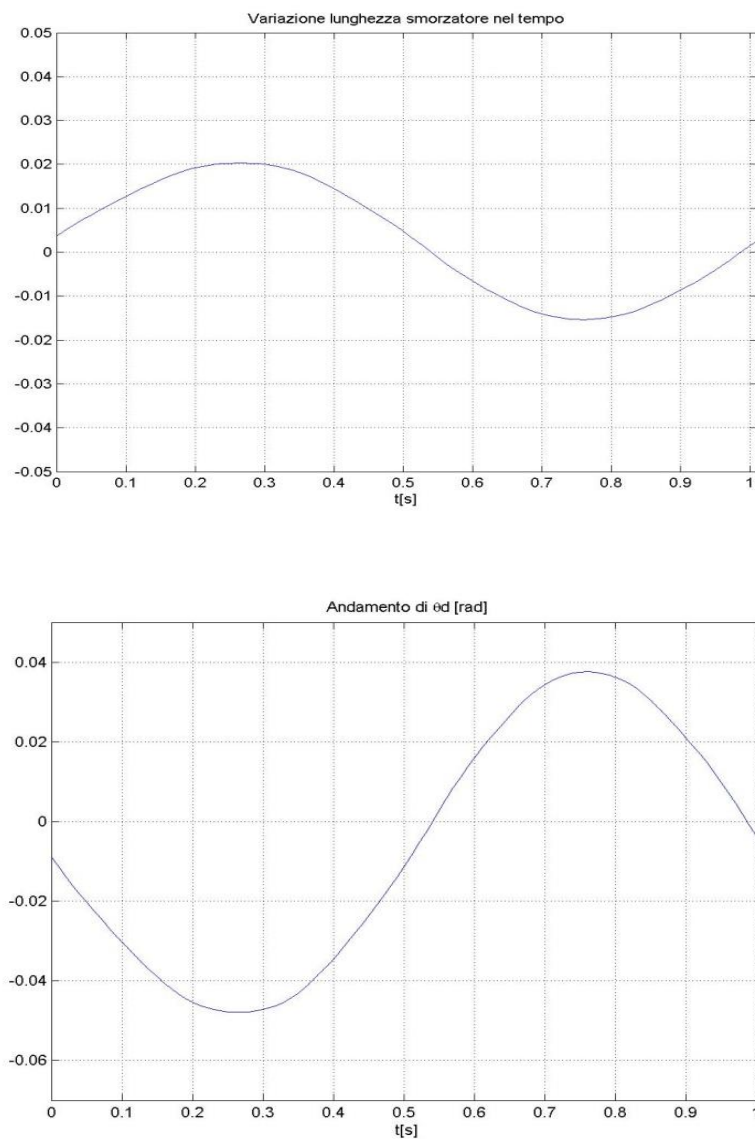


Figura 4.41: Variazione di lunghezza dello smorzatore BH e relativa rotazione dell'asta AB, per il caso di ONDA 2000

Come precedentemente anticipato, si è deciso di ridurre il problema ad uno di tipo armonico, nel senso che per le principali grandezze di moto quali spostamenti, velocità, forze/momenti si considererà soltanto la prima componente armonica, ossia la fondamentale che contiene anche la maggior parte dell'energia di segnale.

Per la storia di laboratorio considerata, si riportano in Figura 4.42 gli andamenti dello spostamento angolare effettivo e quello ricostruito usando soltanto la prima armonica fondamentale, attraverso la routine di Matlab basata sulla DFT, precedentemente descritta:

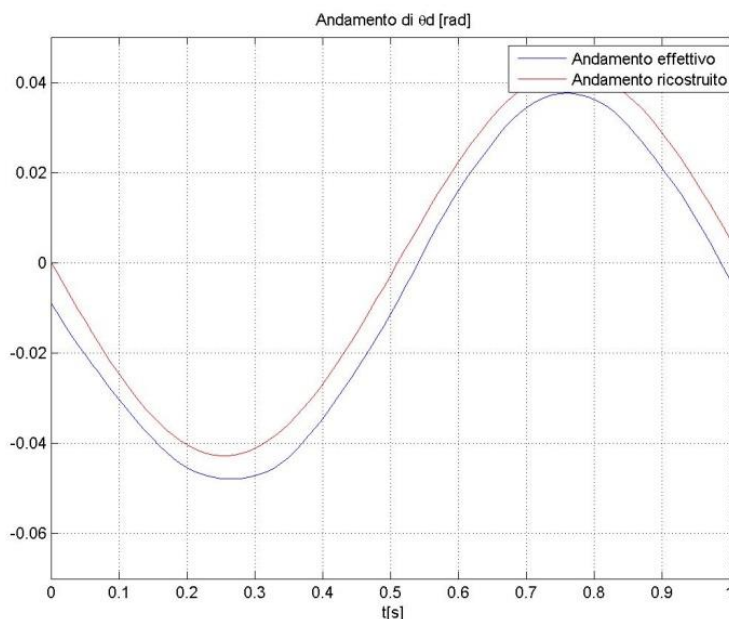


Figura 4.42: Spostamento angolare dell'asta AB effettivo (curva in blu) e andamento approssimato a valor medio nullo, relativo alla sola prima armonica (curva in rosso)

Lo spostamento angolare a cui ci si riferirà in questa parte del lavoro è dunque del tipo:

$$\theta_d(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi)$$

Esso è definito con un coseno avente pulsazione angolare ω , fase iniziale ϕ e ampiezza Θ . Questa funzione può essere vista come la proiezione sull'asse reale di un vettore complesso rotante alla velocità angolare ω in senso anti-orario, avente la fase iniziale pari a ϕ :

$$\vec{\theta}_d(t) = \Theta e^{j(\omega t + \phi)} = \Theta e^{j\omega t} \cdot e^{j\phi} = \underline{\Theta} \cdot e^{j\omega t}$$

dove $\underline{\Theta}$ è il vettore rappresentativo della grandezza armonica $\theta_d(t)$, ossia il vettore rotante all'istante $t=0$.

Lavorando nello spazio dei numeri complessi è possibile calcolarsi il vettore rappresentativo del momento forzante al galleggiante M_{gall} , passando per l'equazione del moto:

$$\vec{\theta}_d(t) = j\omega \cdot \underline{\Theta} \cdot e^{j\omega t} \quad \ddot{\theta}_d(t) = -\omega^2 \cdot \underline{\Theta} \cdot e^{j\omega t}$$

Il momento forzante ricostruito con i termini di eccitazione e di radiazione, anch'essi armonici, sarà:

$$M_{gall}(t) = M_{x1}(t) - I_{add1}(\omega)\ddot{\theta}_d(t) - b_{hyd1}(\omega)\dot{\theta}_d(t)$$

$$M_{x1}(t) = M_{x1} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{x1})$$

$$M_{rad}(t) = -J_{add}\ddot{\theta}_d - b_{hyd}\dot{\theta}_d$$

Come ormai noto, i parametri M_{x1} , φ_{x1} , I_{add1} , b_{hyd1} sono incogniti.

L'equazione di moto può così essere riscritta come:

$$(J_1 + I_{add1})\ddot{\theta}_d + (b_1 + b_{hyd1})\dot{\theta}_d + k_1\theta_d = M_{x1}\cos(\omega t + \varphi_{x1})$$

A questo punto si riporta l'equazione nel campo dei numeri complessi, eliminando poi la dipendenza dal tempo e giungendo alla scrittura del modello dinamico, ancora complesso, ma t-invariante:

$$[\Theta \cdot e^{j\phi}(-\omega^2(J_1 + I_{add1}) + i\omega(b_1 + b_{hyd1}) + k_1)] e^{j\omega t} = [M_{x1}e^{i\varphi_{x1}}] e^{j\omega t}$$

$$\Theta \cdot e^{j\phi}(-\omega^2(J_1 + I_{add1}) + i\omega(b_1 + b_{hyd1}) + k_1) = M_{x1}e^{i\varphi_{x1}}$$

$$\Theta e^{i(\phi - \varphi_{x1})}(-\omega^2(J_1 + I_{add1}) + i\omega(b_1 + b_{hyd1}) + k_1) = M_{x1}$$

Considerando la seconda equazione scritta, la parte reale del membro di sinistra deve essere pari a M_{x1} mentre la parte immaginaria pari a 0:

$$\begin{cases} M_{x1} = \Theta \left(-\omega^2(J_1 + I_{add1})\cos(\phi - \varphi_{x1}) - \omega(b_1 + b_{hyd1})\sin(\phi - \varphi_{x1}) + k_1\cos(\phi - \varphi_{x1}) \right) \\ -\omega^2(J_1 + I_{add1})\sin(\phi - \varphi_{x1}) + \omega(b_1 + b_{hyd1})\cos(\phi - \varphi_{x1}) + k_1\sin(\phi - \varphi_{x1}) = 0 \end{cases}$$

Dato quest'ultimo sistema non lineare di due equazioni scalari nelle quattro incognite M_{x1} , φ_{x1} , I_{add1} , b_{hyd1} , evidenziate in rosso, è chiaro che non è possibile ottenere una soluzione, essendo il sistema sotto determinato.

A tal scopo, si sfrutta una importante proprietà dei parametri incogniti; in particolare si ha che a parità di pulsazione d'onda ω , di altezza del galleggiante dal fondo, di parametri inerziali del sistema, ma variando lo smorzamento strutturale del sistema b_1 (questo si ottiene cambiando il disco all'interno dello smorzatore), l'unica grandezza che varia è φ_{x1} , mentre le rimanenti tre b_{hyd1} , M_{x1} , I_{add1} rimangono costanti.

Per cui, seguendo questo semplice ragionamento, sono state prese tre storie temporali relative a tre prove nelle quali l'unico parametro che varia è proprio b_1 , per cui si hanno i tre valori b_{11} , b_{12} , b_{13} .

Le altre cose che variano tra le tre storie temporali sono modulo e fase iniziale dello spostamento $\theta_d(t)$, ossia Θ e ϕ , per cui avremo rispettivamente i valori Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 e ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 .

Detto questo, è possibile costruire un sistema di 3 equazioni complesse in 6 incognite, ossia 6 equazioni scalari in 6 incognite, arrivando così ad un sistema determinato:

$$\begin{cases} \Theta_1 e^{i(\phi_1 - \varphi_{x1})} (-\omega^2 (J_1 + I_{add1}) + i\omega (b_{11} + b_{hyd1}) + k_1) = M_{x1} \\ \Theta_2 e^{i(\phi_2 - \varphi_{x2})} (-\omega^2 (J_1 + I_{add1}) + i\omega (b_{12} + b_{hyd1}) + k_1) = M_{x1} \\ \Theta_3 e^{i(\phi_3 - \varphi_{x3})} (-\omega^2 (J_1 + I_{add1}) + i\omega (b_{13} + b_{hyd1}) + k_1) = M_{x1} \end{cases}$$

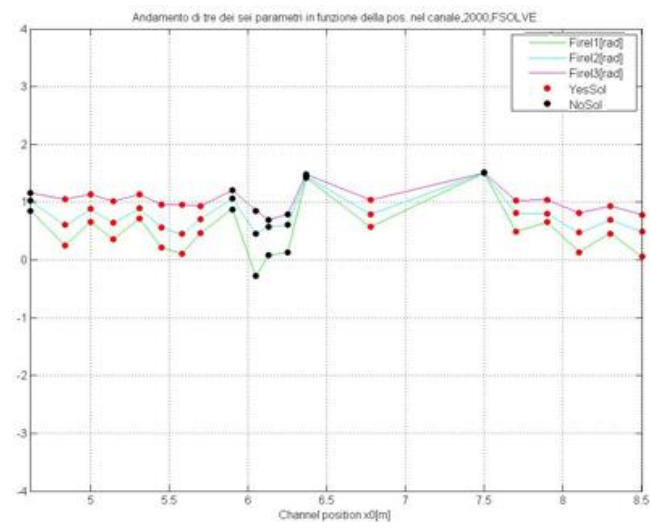
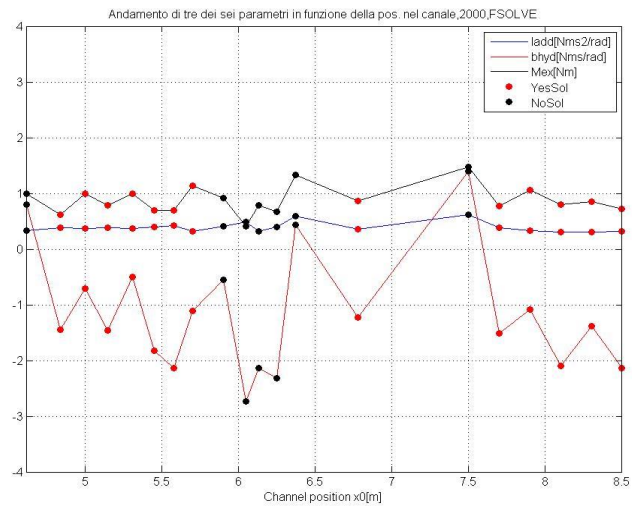
$$\begin{cases} M_{x1} = \Theta_1 \left(-\omega^2 (J_1 + I_{add1}) \cos(\phi_1 - \varphi_{x1}) - \omega (b_{11} + b_{hyd1}) \sin(\phi_1 - \varphi_{x1}) + k_1 \cos(\phi_1 - \varphi_{x1}) \right) \\ \quad -\omega^2 (J_1 + I_{add1}) \sin(\phi_1 - \varphi_{x1}) + \omega (b_{11} + b_{hyd1}) \cos(\phi_1 - \varphi_{x1}) + k_1 \sin(\phi_1 - \varphi_{x1}) = 0 \\ M_{x1} = \Theta_2 \left(-\omega^2 (J_1 + I_{add1}) \cos(\phi_2 - \varphi_{x2}) - \omega (b_{12} + b_{hyd1}) \sin(\phi_2 - \varphi_{x2}) + k_1 \cos(\phi_2 - \varphi_{x2}) \right) \\ \quad -\omega^2 (J_1 + I_{add1}) \sin(\phi_2 - \varphi_{x2}) + \omega (b_{12} + b_{hyd1}) \cos(\phi_2 - \varphi_{x2}) + k_1 \sin(\phi_2 - \varphi_{x2}) = 0 \\ M_{x1} = \Theta_3 \left(-\omega^2 (J_1 + I_{add1}) \cos(\phi_3 - \varphi_{x3}) - \omega (b_{13} + b_{hyd1}) \sin(\phi_3 - \varphi_{x3}) + k_1 \cos(\phi_3 - \varphi_{x3}) \right) \\ \quad -\omega^2 (J_1 + I_{add1}) \sin(\phi_3 - \varphi_{x3}) + \omega (b_{13} + b_{hyd1}) \cos(\phi_3 - \varphi_{x3}) + k_1 \sin(\phi_3 - \varphi_{x3}) = 0 \end{cases}$$

L'equazione così definita viene risolta numericamente utilizzando la funzione di Matlab *fsolve*.

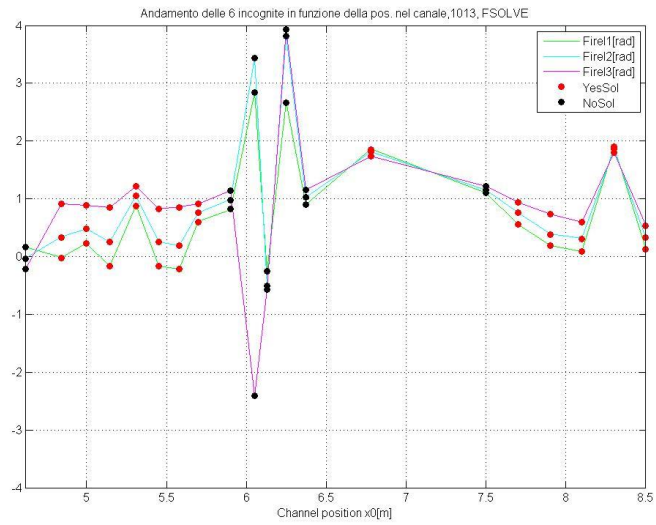
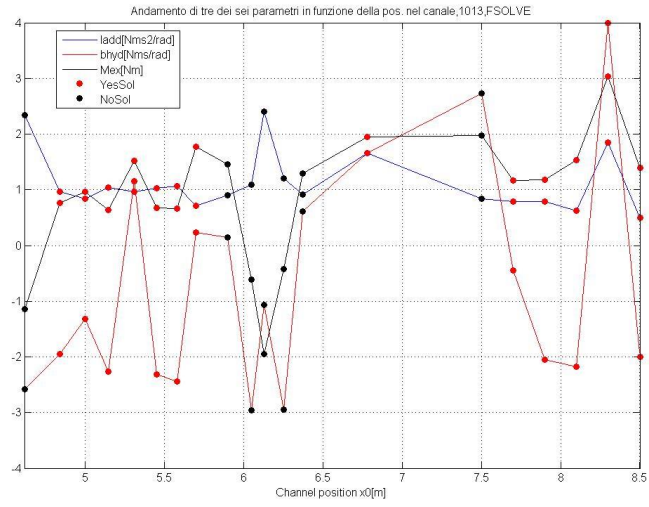
Noti i parametri del sistema meccanico per le configurazioni considerate J_1 , $b_{11,2,3}$, k_1 e noti i tre vettori rappresentativi degli spostamenti angolari $\underline{\Theta}_{1,2,3}$, di cui viene riportato un esempio vengono riportati in Figura 4.44, si ricavano le soluzioni del sistema, attraverso la funzione *fsolve* di Matlab per triplette di prove sperimentali a pulsazione d'onda e posizione del canale variabili.

In Figura 4.43 si riportano gli andamenti dei sei parametri incogniti, in funzione della posizione del canale per i casi di ONDA 2000, 1013, 3000; sulla stessa si riconoscono le posizioni per cui la funzione *fsolve* è arrivata a convergenza (pallini rossi) fornendo delle soluzioni "matematiche" esatte e quelle in cui si ha solo una soluzione approssimata (pallini neri), in cui dunque *fsolve* non è riuscito a convergere.

a.



b.



c.

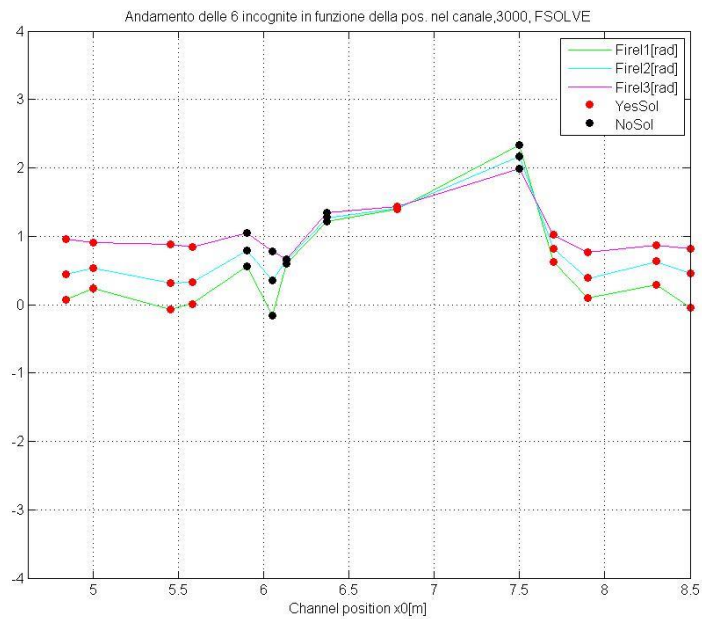
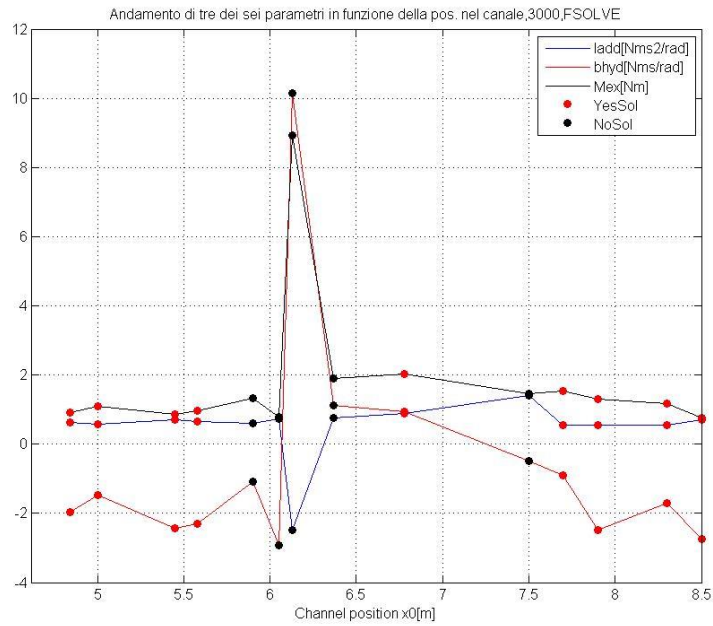


Figura 4.43: Parametri incogniti calcolati da fsolve, in funzione della posizione nel canale, per le ONDE 2000, 1013, 3000 (a, b, c); nella parte bassa sono in realtà rappresentate le fasi relative tra momento di eccitazione e spostamento del sistema, ossia $\varphi_{x_j} - \phi_j \quad j = 1,2,3$

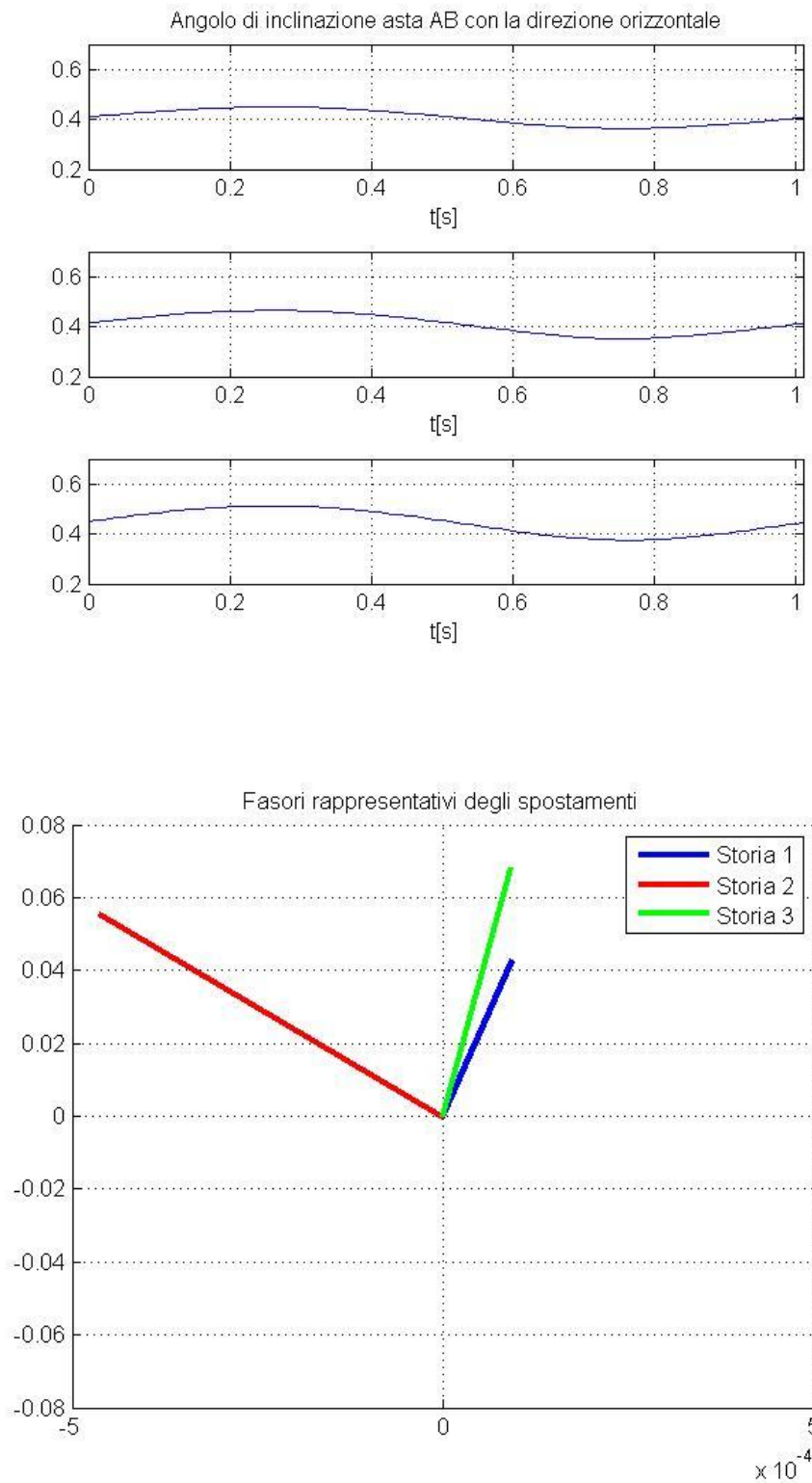


Figura 4.44: In alto, esempio di spostamenti angolari dell'asta AB per un tripletta di prove sperimentali utilizzata per la risoluzione del sistema non lineare; in basso, vettori rappresentativi degli stessi spostamenti

Purtroppo, vedendo i risultati a cui questa strada ha portato, ci si rende conto che essi non sono accettabili, poiché nella maggior parte delle posizioni analizzate la funzione *fsolve* converge fornendo soluzioni matematiche e non fisiche del problema, poiché sistematicamente o quasi il valore dello smorzamento idrodinamico è negativo, probabilmente a causa del vettore di partenza fornito al solutore numerico, ossia dei valori iniziali dei parametri ricercati dai quali *fsolve* inizia a calcolare.

Tale vettore iniziale è scelto in maniera arbitrario al momento, basandosi su range di variazione sensati per questi parametri; probabilmente riprendendo in un secondo momento tale strategia, andando a perfezionare la questione dei punti iniziali, si potrà arrivare a delle soluzioni sensate anche da un punto di vista fisico.

Nello svolgimento della tesi però, visto l'esito prodotto dal precedente metodo, si è deciso di trovare un metodo sperimentale per il calcolo delle stesse grandezze, o meglio di alcune di esse.

Viene così presentato il metodo delle oscillazioni libere volte a calcolare però i soli parametri fluidodinamici della componente di radiazione.

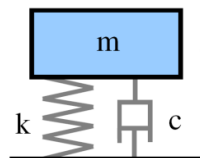
4.2.3.2 Calcolo dei parametri di radiazione con il metodo delle oscillazioni libere

Per il calcolo dei parametri di radiazione è opportuno svolgere delle prove di oscillazione libera in acqua ferma. Per il momento sono state svolte soltanto le prove relative al galleggiante, rimandando all'immediato futuro quelle per la pala.

Detto questo, per risalire ai valori di smorzamento idrodinamico e di inerzia aggiunta, si sfrutteranno delle relazioni valide per sistemi lineari ad un grado di libertà.

Dato un sistema generico massa-molla smorzatore, non forzato, di equazione:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



si definiscono le seguenti grandezze, ricavate a partire dai parametri strutturali del sistema m , c e k :

- Pulsazione naturale del sistema libero: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [rad/s];
- Periodo di oscillazione naturale: $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ [s];
- Coefficiente di smorzamento adimensionale: $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$;

- Pulsazione smorzata: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ [rad/s];
- Periodo di oscillazione smorzata: $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ [s];

Per un sistema di questo genere, in caso di smorzamento incognito, si può procedere con la tecnica sperimentale basata sul calcolo del *Decremento Logaritmico* δ .

Tale grandezza è un indicatore di come diminuisce l'ampiezza in un'oscillazione libera sotto-smorzata e si determina dalla lettura del relativo segnale.

Date due ampiezze di oscillazione successive x_1 e x_2 , corrispondenti agli istanti t_1 e t_2 distanziati dal periodo di oscillazione smorzata T_D , il decremento logaritmico si calcola come:

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

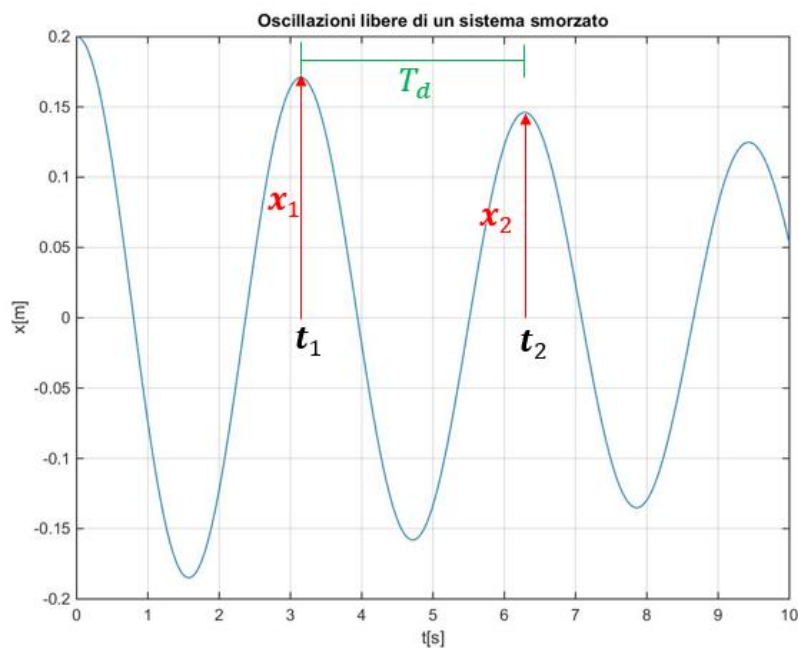


Figura 4.45: Segnale di oscillazione libera di un sistema sotto-smorzato, sfruttato per il calcolo del decremento logaritmico

Saltando i passaggi matematici, si riporta il risultato che lega questo dato sperimentale ai parametri strutturali del modello matematico:

$$\delta = \zeta \omega_n T_d$$

Tornando al caso dei sistemi EDS ad un grado di libertà, al fine di identificare il solo smorzamento idrodinamico, si è deciso di effettuare le prove d'oscillazione libera scollegando i due smorzatori GH ed FD (Figura 4.45); inoltre, per lo smorzatore del galleggiante, si è notato che esso fornisce uno smorzamento di tipo *iper critico* tale da non permettere al sistema di oscillare, quindi sarebbe stato impossibile utilizzare il metodo del decremento logaritmico.

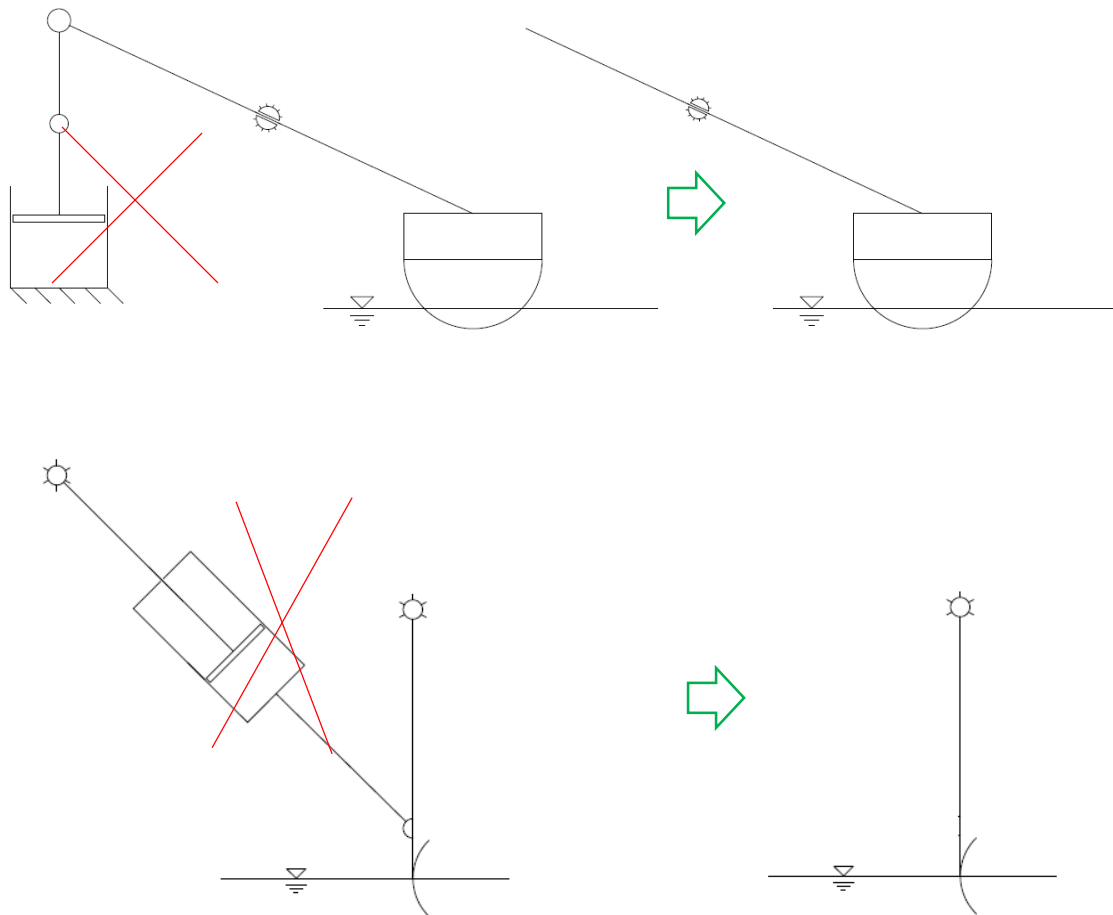


Figura 4.46: Sistemi ad un grado di libertà senza smorzatori, da utilizzare per i test di radiazione

Le equazioni di moto relative a questi due sistemi, scritte in forma compatta, sono:

$$J_{1,2}^{NS} \ddot{\theta}_d + k_{1,2} \theta_d = -I_{add1,2} \ddot{\theta}_d - b_{hyd1,2} \dot{\theta}_d$$

$$(J_{1,2}^{NS} + I_{add1,2}) \ddot{\theta}_d + b_{hyd1,2} \dot{\theta}_d + k_{1,2} \theta_d = 0$$

dove $J_{1,2}^{NS}$ rappresenta il valore d'inerzia generalizzata del sistema senza il contributo degli smorzatori. Adattando le formule definite per il generico sistema meccanico ai casi dell'EDS ed eseguendo prove di oscillazione libera per il calcolo del decremento logaritmico δ , del periodo smorzato T_d e della pulsazione naturale ω_n , si ricava il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite $I_{add1,2}$ e $b_{hyd1,2}$:

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{k_{1,2}}{J_{1,2}^{NS} + I_{add1,2}}} \\ \delta = \zeta \omega_n T_d \end{cases}$$

in cui:

$$b_{hyd1,2} = 2\zeta(J_{1,2}^{NS} + I_{add1,2})\omega_n$$

Le prove di oscillazione libera si eseguono dando al sistema una perturbazione iniziale, avendo cura di sistemare opportunamente il sensore di distanza, come riportato in Figura 4.46.

Per variare la pulsazione naturale del sistema è sufficiente variare il momento d'inerzia strutturale $J_{1,2}^{NS}$ aggiungendo dei pesi concentrati al sistema, per cui andando ad abbassare la pulsazione.

Per ricavare dei risultati più robusti, si è deciso di effettuare più prove per ogni valore d'inerzia strutturale, andando poi a mediare i risultati. Quindi in uscita dalle prove di oscillazione libera si avranno pulsazione naturale, pulsazione smorzata e smorzamento adimensionale.

Vista la poca confidenza che si ha con questi parametri in acque basse, si è deciso di effettuare anche le prove di radiazione in diverse posizioni del canale, per vedere se questa variabile incida anche su tali grandezze.

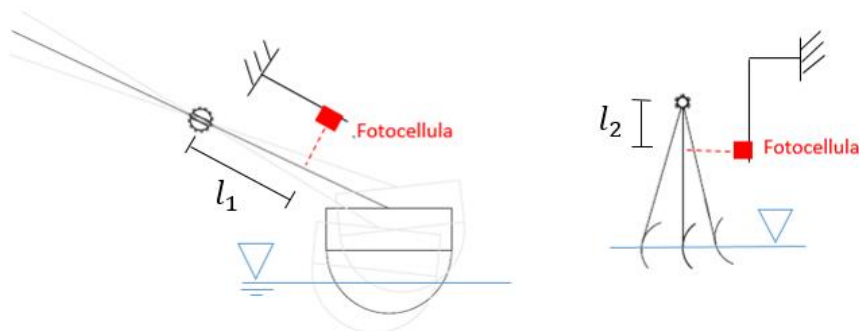


Figura 4.47: Posizione delle fotocellule nelle prove di oscillazione libera

Trattandosi di sensori di distanza lineare, le misure devono essere convertite nelle corrispondenti rotazioni delle aste, dividendo i segnali per i bracci l_1 ed l_2 ; l'approssimazione che si ha è buona solo nel caso di piccole oscillazioni, per cui bisogna perturbare il sistema in modo da fargli compiere un moto contenuto in ampiezza.

Alcuni risultati: parametri di radiazione per il sistema a solo galleggiante

Per il caso del galleggiante, sono state effettuate delle prove di oscillazione libera a pulsazione naturale variabile, per tre diverse posizioni nel canale di prova.

Per variare la pulsazione naturale del sistema è stato variato il momento d'inerzia strutturale del sistema, aggiungendo delle masse concentrate calibrate sul sistema, avendo cura di tenere costante l'affondamento statico del galleggiante da cui dipende la rigidezza k_1 del sistema.

Quindi, per ogni prova, è stato ripetutamente perturbato il sistema, per un totale di circa dieci transitori di oscillazioni smorzate.

In Figura 4.47 si riporta un esempio di segnale acquisito in questo tipo di campagna sperimentale.

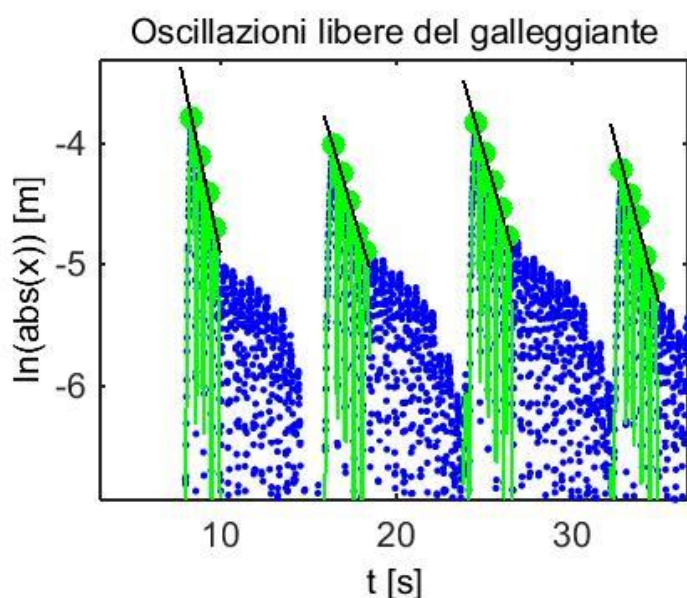


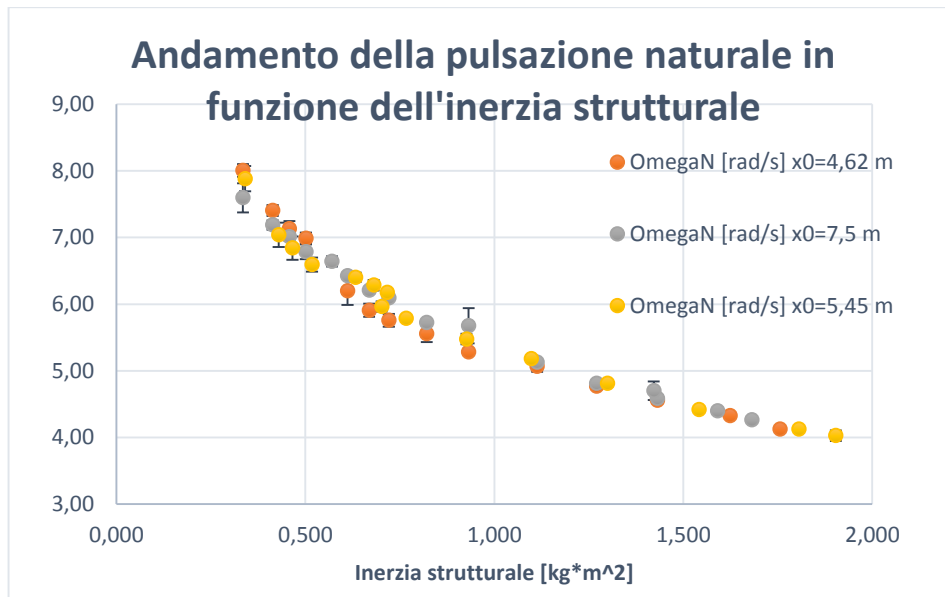
Figura 4.48: Esempio di transitori di oscillazioni libere smorzate per il sistema EDS

Prima di giungere ad un segnale come quello di Figura 4.47, al segnale originale è stato applicato l'operatore valor assoluto (così da portare le parti negative a valor positivo e sfruttare anche questa parte di segnale per il calcolo del decremento logaritmico) e l'operatore di logaritmo naturale, così il calcolo del decremento logaritmo si ha dalla sottrazione di due picchi successivi.

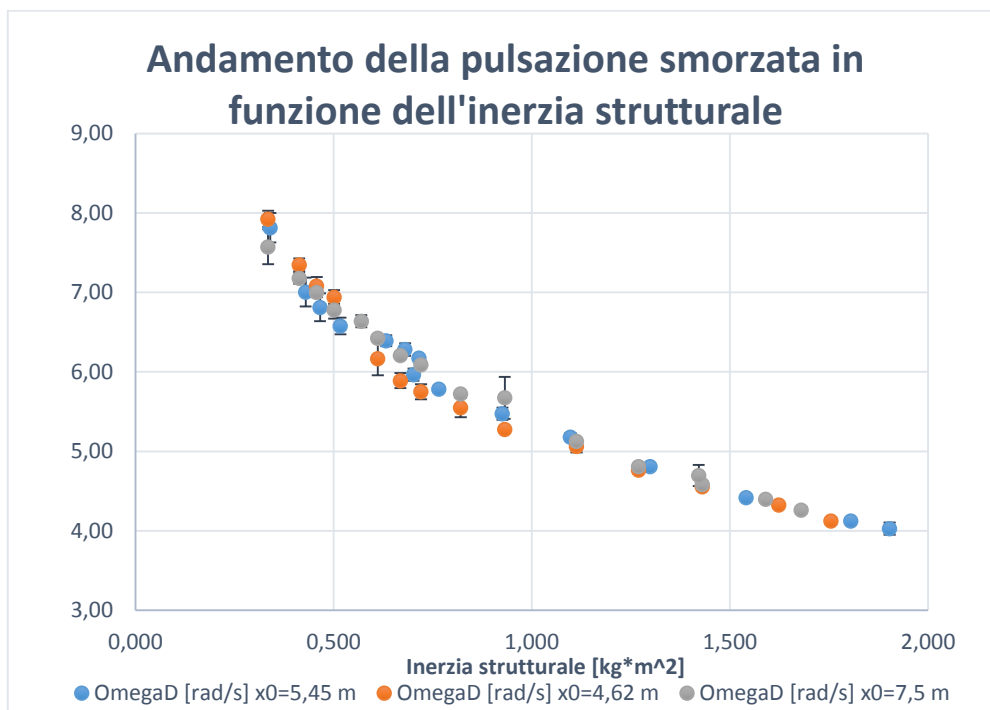
Per ogni prova, dato in ingresso il momento d'inerzia strutturale del sistema J_1^{NS} , vengono calcolati valor medio e deviazione standard di pulsazione naturale, smorzata e del coefficiente di smorzamento adimensionale.

Vengono riportati in Fig. 4.48 gli andamenti di queste grandezze in funzione del momento d'inerzia strutturale del sistema, per le tre posizioni analizzate per queste prove di oscillazioni libere.

a.



b.



c.

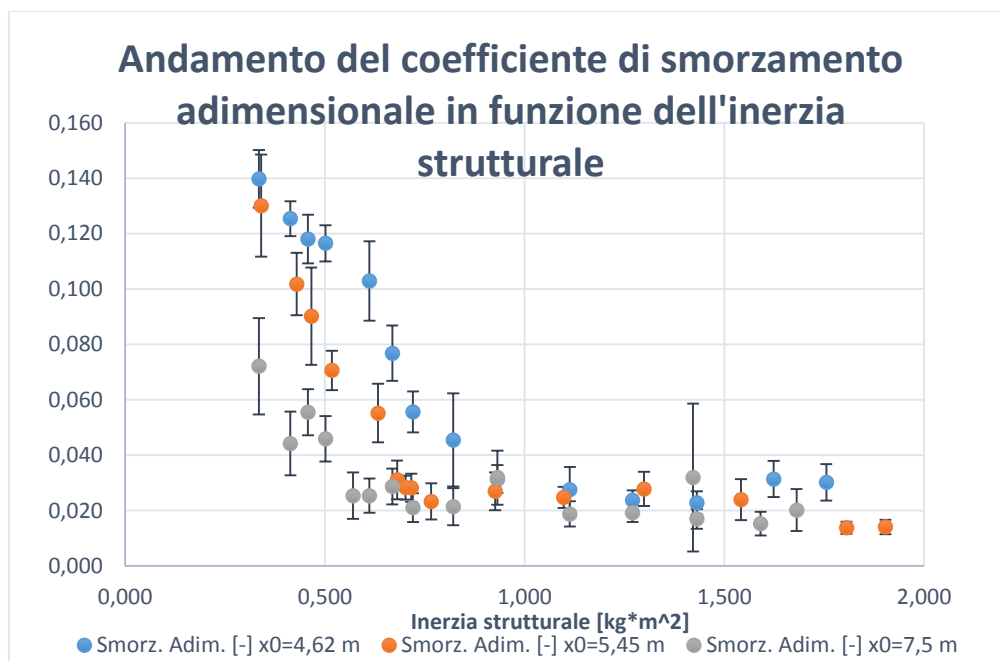


Figura 4.49: Andamento di pulsazione naturale (a), smorzata (b) e coefficiente di smorzamento adimensionale (c) in funzione dell'inerzia strutturale; si riportano i valori medi e le deviazioni standard ricavati attraverso le prove sperimentali

I risultati sperimentali ottenuti sono stati confrontati con quelli relativi al sistema Wavestar ([22]), sistema ad un grado di libertà molto simile all'EDS, ma concepito per lavorare in acque profonde (Figura 4.50 e Figura 4.51).

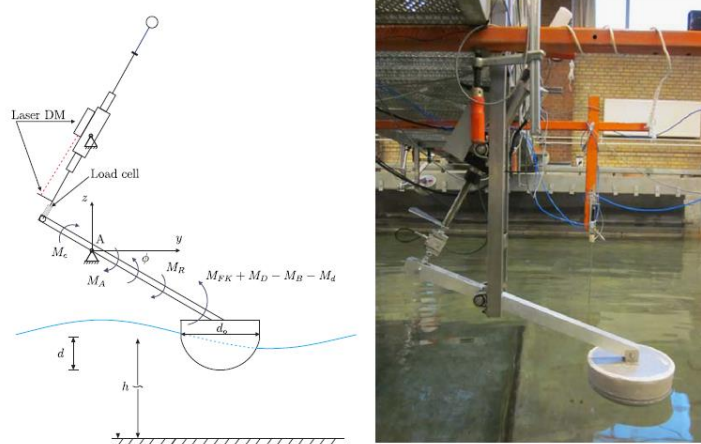


Figura 4.50: Schema e fotografia del modello in scala 1:20 del sistema Wavestar ([22])

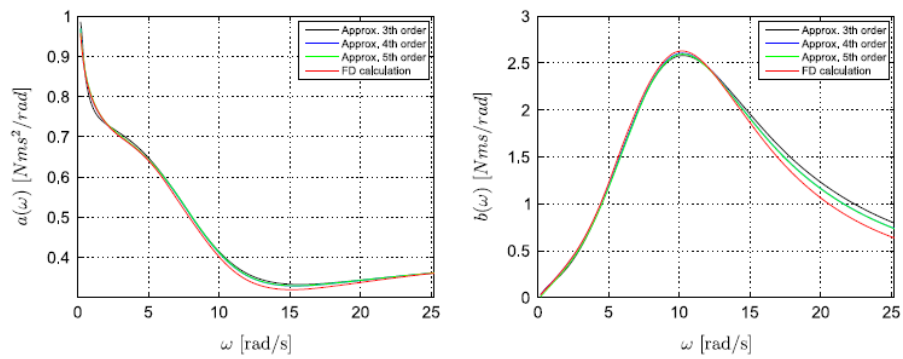
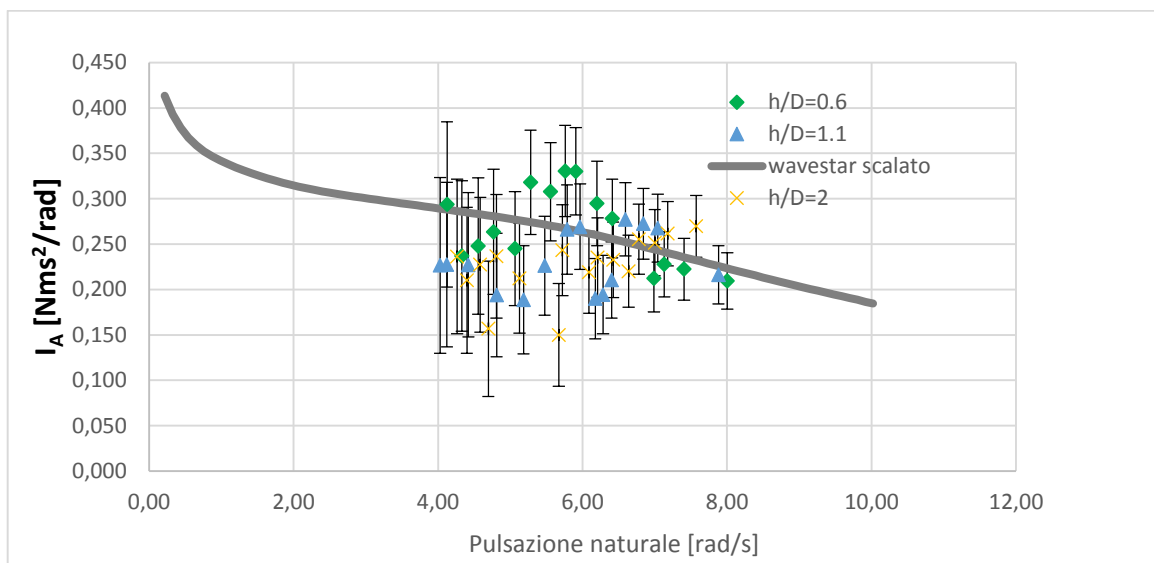


Figura 4.51: Andamento dei coefficienti di radiazione per il galleggiante del sistema Wavestar ([22])

Si menziona che, prima di sovrapporre i risultati del sistema EDS su quelli del Wavestar, date le diverse geometrie e masse in gioco, è stato necessario riscalarle le curve del sistema Wavestar secondo similitudine di Froude.

A valle di questi calcoli, si riportano in Figura 4.52 i risultati dell'EDS, sovrapposti a quelli del Wavestar riscaltati.



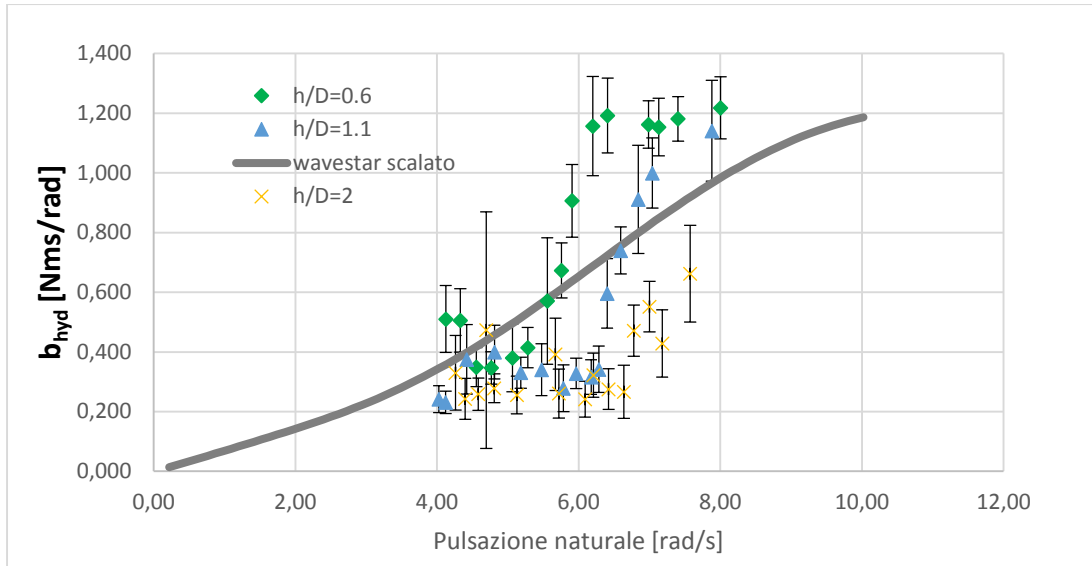


Figura 4.52: Coefficienti idrodinamici di radiazione del sistema EDS sovrapposti a quelli di Wavestar, quest'ultimi opportunamente riscaldati in similitudine di Froude

Si nota che le curve sperimentali dell'EDS seguono abbastanza bene quella del sistema Wavestar. Inoltre si nota anche una certa dipendenza dalla posizione lungo il canale, rappresentata dal rapporto h/D , ossia altezza dell'acqua sul diametro del galleggiante.

Nei grafici sono anche riportati le incertezze legate alle grandezze calcolate, ricavate a partire dai principi di propagazione degli errori che afferma come le incertezze di grandezze fisiche derivate (in tal caso rappresentate dall'inerzia aggiunta e dallo smorzamento idrodinamico) dipendano da quelle delle grandezze fisiche a partire dalle quali sono calcolati.

Dunque, date le formule per il calcolo di $I_{add1}[kgm^2]$ e $b_{hyd1}[Nms/rad]$ a partire dalle grandezze di input del problema:

$$I_{add1} = \frac{k_1}{\omega_n^2} - J_1^{NS}$$

$$b_{hyd1} = 2\zeta \sqrt{k_1(J_1^{NS} + I_{add1})}$$

le incertezze derivate di queste due grandezze dipendono da quelle dei parametri strutturali J_1^{NS} e k_1 e da quelle di ω_n e ζ ricavate dalle prove sperimentali; esse si calcolano con la nota formula dell'incertezza derivata:

$$s_{I_{add1}} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_{add1}}{\partial k_1}\right)^2 s_{k_1}^2 + \left(\frac{\partial I_{add1}}{\partial J_1^{NS}}\right)^2 s_{J_1^{NS}}^2 + \left(\frac{\partial I_{add1}}{\partial \omega_n}\right)^2 s_{\omega_n}^2 =}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\omega_n^4} s_{k_1}^2 + s_{J_1^{NS}}^2 + \left(-\frac{1}{2} \frac{k_1}{\omega_n^3}\right)^2 s_{\omega_n}^2}$$

$$s_{b_{hyd1}} = \sqrt{\left(\frac{\partial b_{hyd1}}{\partial \zeta}\right)^2 s_{\zeta}^2 + \left(\frac{\partial b_{hyd1}}{\partial J_1^{NS}}\right)^2 s_{J_1^{NS}}^2 + \left(\frac{\partial b_{hyd1}}{\partial I_{add1}}\right)^2 s_{I_{add1}}^2 + \left(\frac{\partial b_{hyd1}}{\partial k_1}\right)^2 s_{k_1}^2 =}$$

$$= \sqrt{4k_1(J_1^{NS} + I_{add1})s_{\zeta}^2 + \frac{\zeta^2}{k_1(J_1^{NS} + I_{add1})}(k_1 s_{I_{add1}}^2 + k_1 s_{J_1^{NS}}^2 + (J_1^{NS} + I_{add1})^2 s_{k_1}^2)}$$

Come si può notare in Figura 4.49 le incertezze di pulsazione naturale e pulsazione smorzata sono molto contenute, mentre assumono valore consistente quelle dello smorzamento adimensionale.

L'incertezza legata al momento d'inerzia strutturale è stato calcolato ed ha un valore:

$$s_{J_1^{NS}} = 0.02 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

La causa principale della elevata incertezza delle grandezze I_{add1} e b_{hyd1} è legata all'errore grossolano che si sta compiendo nello stimare la rigidità del sistema k_1 , legata alla variazione della forza di Archimede agente sul galleggiante:

$$s_{k_1} = 1.5 \text{ [N/m]}$$

Per cui è evidente che si fa una forte approssimazione nell'assimilare la forza idrostatica agente sul galleggiante ad una di tipo elastica.

Per rimediare a questo errore, andrebbe introdotto un richiamo idrostatico di tipo non lineare, come fatto con il Wavestar [22], cambiando di conseguenza la tecnica sperimentale di calcolo dei parametri idrodinamici inerzia aggiunta e smorzamento idrodinamico.

Questo perché la tecnica basata sul decremento logaritmico è applicabile soltanto a sistemi lineari.

5 Conclusioni e sviluppi futuri

Il lavoro di tesi ha riguardato principalmente lo sviluppo di un modello matematico del sistema EDS, atto a prevedere il suo comportamento in funzione dell'onda incidente e della sua posizione nel canale di prova.

Lavorando sinergicamente con la teoria delle equazioni di Lagrange, per la parte prettamente meccanica, e con la teoria del flusso potenziale per la parte d'interazione onda-struttura, sono state costruite le equazioni differenziali del secondo ordine che governano la dinamica del sistema.

Successivamente tali equazioni sono state linearizzate, basandosi sulle ipotesi di piccoli spostamenti del sistema meccanico attorno alla configurazione di equilibrio statico.

La fase di definizione dei modelli linearizzati può dunque ritenersi conclusa da un punto di vista formale, in quanto sono stati definiti matematicamente tutti i contributi relativi sia alla sua parte strutturale che a quella di interazione con il moto ondoso.

Questa fase puramente teorica è stata effettuata per tre sistemi:

- Sistema ad un grado di libertà asta-pala-smorzatore;
- Sistema ad un grado di libertà asta-galleggiante-smorzatore;
- Sistema EDS complessivo a due gradi di libertà.

Il motivo per cui sono stati sviluppati sia i due sotto-modelli ad un grado di libertà che, successivamente, il modello del sistema EDS completo (a due gradi di libertà), è stato quello di poter indagare in futuro su quanto siano influenti i termini di mutua interazione tra pala e galleggiante, montati a distanze molto ravvicinate.

Per cui in fase di taratura sperimentale, basandosi sul principio di sovrapposizione degli effetti, si potranno quantificare separatamente i parametri di forzamento idrodinamici di pala e galleggiante e quelli relativi all'interazione tra questi due

Riguardo questi parametri, tenendo presente l'ulteriore ipotesi di moto armonico fatta per il sistema, bisognerà definire quelli relativi al contributo di radiazione attraverso prove di oscillazioni libere in acqua ferma e quelli di eccitazione attraverso prove con onde incidenti su sistema fermo, ossia:

- Inerzia aggiunta e smorzamento idrodinamico rotazionale del momento di radiazione e modulo e fase del momento di eccitazione per il caso di solo galleggiante;
- Massa aggiunta e smorzamento idrodinamico traslazionale della forza di radiazione e modulo e fase della forza di eccitazione per il caso di solo pala;
- I parametri idrodinamici sul sistema completo a due gradi di libertà, o meglio i termini che nascono per la mutua interazione tra pala e galleggiante.

Una volta determinati tutti i parametri di cui sopra in funzione di pulsazione d'onda e profondità dell'acqua, il modello completo di EDS potrà essere validato in base a dati sperimentali di prove di EDS in esercizio con onde armoniche.

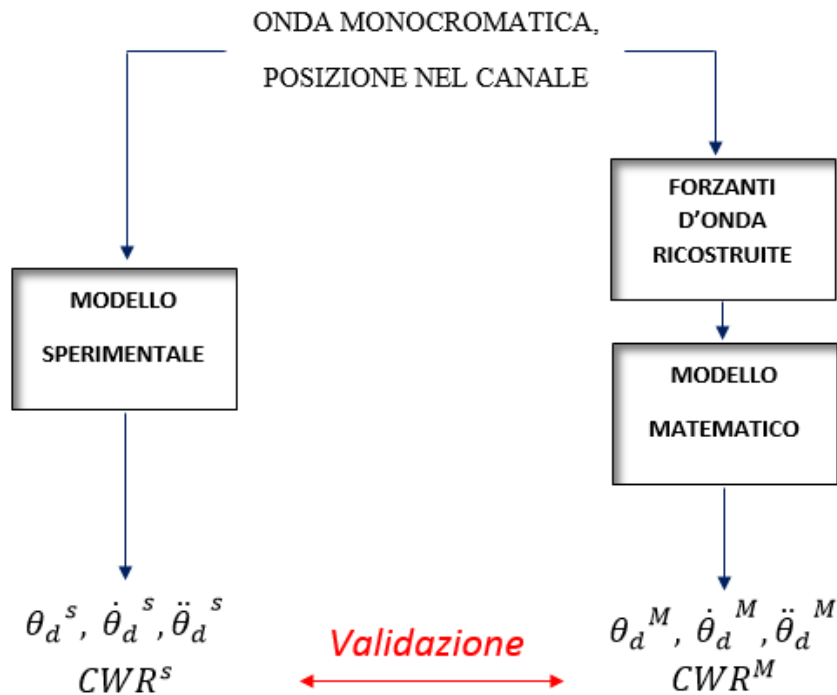
A seconda della strategia di validazione che si sceglierà, si potranno chiamare in causa o gli schemi Simulink di analisi diretta oppure quelli di analisi inversa, entrambi ricavati nel capitolo 3 a valle della definizione dei modelli matematici.

Con gli schemi d'analisi diretta, date le forzanti d'onda ricostruite, si andranno a confrontare gli spostamenti e rendimenti energetici sperimentali (rapporto CWR) con quelli ricavati dal modello matematico.

Invece la validazione attraverso gli schemi di analisi inversa, data in ingresso la cinematica del sistema ricavata dalle prove sperimentali, si può avere confrontando le componenti lagrangiane delle forzanti ricostruite con i termini strutturali con quelle ricavate a partire dai termini dello stesso forzamento.

In Figura 5.1 vengono riportati in via schematica i due processi di validazione presentati, per il caso di sistema ad un grado di libertà, relativo al solo galleggiante, in cui la componente lagrangiana coincide proprio con il termine di forzamento.

a.



b.

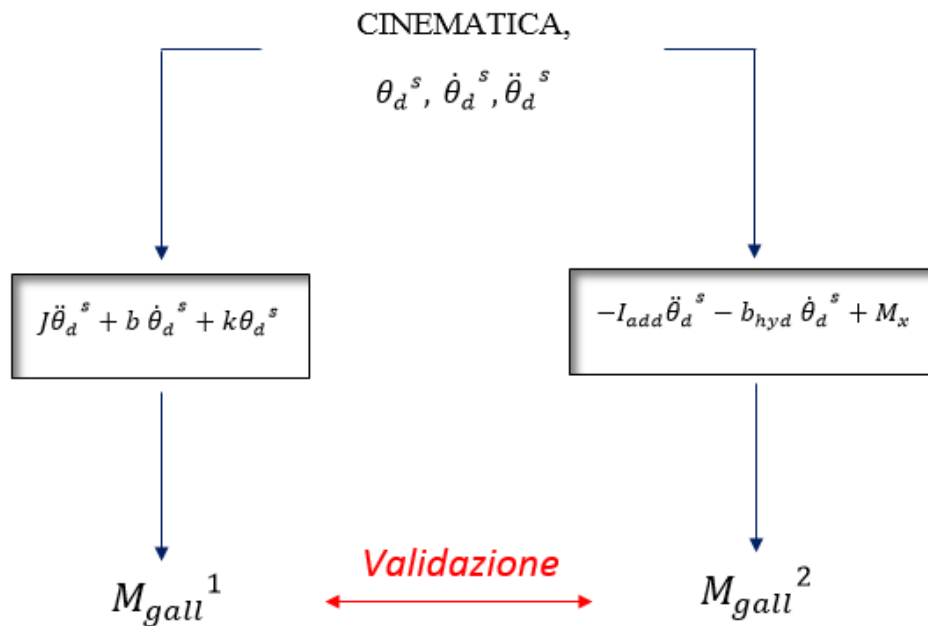


Figura 5.1: Processo di validazione del modello matematico linearizzato ad un grado libertà del sistema asta-galleggiante: procedura basata sull'analisi diretta (a) e su quella inversa (b)

In realtà per lavorare in maniera corretta sarà opportuno, prima di partire con il processo di validazione, calcolare le componenti lagrangiane delle forzanti d'onda sia con la parte strutturale non lineare che con quella linearizzata e vedere se i risultati si sovrappongono bene (paragrafo 3.2.4.1).

Questo importante passaggio serve a verificare l'ipotesi di piccoli spostamenti per l'EDS attorno alla posizione di equilibrio statico; tale ipotesi è una delle più importanti e ha permesso di ottenere il modello analitico linearizzato, semplice da gestire, con il quale si può accedere a tutta una serie di tecniche applicabili solo a sistemi dinamici di questo tipo, in primis il poter lavorare nel dominio delle frequenze, nel quale è possibile descrivere il comportamento dinamico di un sistema vibrante come l'EDS in maniera sintetica ed efficace.

La parte sperimentale del lavoro di tesi si è sviluppata su diversi punti.

Il primo punto ha riguardato prove di verifica sperimentale sulle prestazioni di EDS con solo galleggiante. Sono state testate diverse posizioni nel canale di prova, in particolare lungo la spiaggia di questo, utilizzando tre onde monocromatiche e tre valori di smorzamento del sistema.

Come mostrato in [1], anche per queste prove si ha un andamento del rendimento energetico del sistema molto correlato a quello dell'ampiezza d'onda, quest'ultima variabile lungo il canale, nonostante si lavori con onde armoniche, in virtù di fenomeni di riflessione dovuti alla presenza della spiaggia (paragrafo 4.1.2.2).

Negli stessi grafici si nota un andamento crescente delle curve all'aumentare della profondità dell'acqua (almeno nel primo tratto, poi i valori di rendimento sembrano stabilizzarsi); questo è probabilmente dovuto alla propensione del dispositivo galleggiante a rendere meglio in acque più alte, dove la componente di spinta verticale delle onde è decisamente più alta rispetto alle zone a profondità più basse, in cui iniziano a pesare i fenomeni di frangimento e acquistano invece importanza componenti di spinta orizzontali. Il secondo punto sperimentale si è incentrato sul calcolo del coefficiente di smorzamento viscoso equivalente (rotazionale) per il modello linearizzato ad un grado di libertà del solo galleggiante.

Come si nota nel paragrafo 4.2.2, tali coefficienti di smorzamento variano in funzione della posizione del canale e del tipo di onda incidente, indice della effettiva non viscosità degli smorzatori con cui l'EDS è equipaggiato.

L'ultima fetta sperimentale del percorso di tesi ha riguardato il calcolo dei parametri di radiazione del forzamento al galleggiante, attraverso delle prove di oscillazione libera in acqua ferma.

In particolare, variando la pulsazione naturale del sistema attraverso l'aggiunta di massa (avendo premura di mantenere costante l'affondamento statico del galleggiante, da cui dipende la rigidità del sistema, paragrafo 3.2.3.1), basandosi su relazioni valide per sistemi linearizzati e sul calcolo del decremento logaritmico, sono stati calcolati i coefficienti di smorzamento idrodinamico e di inerzia aggiunta.

Questa procedura è stata ripetuta per tre posizioni lungo il canale, a bassa, media ed alta profondità dell'acqua. Dalle curve riportate nel paragrafo 4.4.1.1 si nota come i risultati ottenuti siano in buon accordo con quelli del sistema Wavestar ([22]) a cui l'EDS è ispirato. Si nota anche, per lo smorzamento idrodinamico, una dipendenza dalla profondità dell'acqua; in particolare, all'aumentare di questa, i valori di smorzamento idrodinamico diminuiscono.

Sugli stessi grafici vengono anche riportate le incertezze legate a queste due grandezze, parecchio elevate; essendo tali incertezze legate soprattutto all'aver ipotizzato un richiamo idrostatico al galleggiante di tipo elastico equivalente, si può già affermare che bisognerà rivedere questa parte di modello ed eventualmente quantificarla con altri metodi sperimentali oppure basati su simulazioni numeriche.

Riprendendo il discorso del modello matematico costruito, gli sviluppi successivi alla validazione dipenderanno dal suo esito. In caso esso risulti positivo, il modello potrà essere utilizzato per prevedere il funzionamento di EDS in situazioni reali, e per trovarne le configurazioni ottimali dal punto di vista del recupero energetico.

Se invece venissero rilevate delle discrepanze nel processo di Figura 5.1, sarà necessario aggiustare il modello matematico, calcolare eventuali nuovi parametri strutturali e/o idraulici e ripetere la fase di validazione. Le correzioni da apportare porterebbero inesorabilmente ad un modello matematico non lineare, più complicato da trattare, ma senz'altro più preciso.

In merito alla parte strutturale, potrebbe essere raffinata l'equazione di moto, considerando un più precisa distribuzione delle masse e la natura non viscosa degli smorzatori.

Tuttavia è sulla parte di forzamento d'onda che si dovranno eventualmente apportare le modifiche più sostanziali. Si riportano le due principali leve su cui agire:

- Considerare il valore esatto del momento di restoring del galleggiante, istante per istante.
- Considerazione i contributi di drag su galleggiante e soprattutto pala, considerando l'elevata non linearità delle onde in procinto di frangere.

In parallelo alla eventuale complicazione del modello matematico, ci dovranno essere dei corrispondenti metodi sperimentali e/o dei metodi basati sulla fluidodinamica computazionale necessari per una nuova fase di taratura.

Si intende concludere il discorso mettendo in evidenza la potenza di un modello matematico nel processo di ottimizzazione dell'EDS.

Nel capitolo precedente è stata mostrata la procedura con cui vengono eseguite le prove sperimentali sul modello EDS. Tale approccio si presta molto bene in fase di analisi delle prestazioni del sistema in esame; d'altro canto appare un'impresa lunga e faticosa, se non impossibile, quella di ottimizzare l'EDS basandosi su ripetute prove sperimentali, vista la mole di parametri che ne definiscono il comportamento.

Avendo invece a disposizione un modello matematico validato dell'EDS, si possono "vestire" su di esso problemi di ottimizzazione atti a ricercare il set di parametri di processo che ne massimizzano l'efficienza energetica.

In verità, prima dell'ottimizzazione vera e propria, sarebbe opportuna un'analisi di sensitività poiché, come detto, il numero totale di parametri che regolano il comportamento del sistema è elevato. Tale analisi di sensitività consiste nel variare una ad una le variabili del sistema, tenendo costanti tutte le altre, capendo quali di esse incidono maggiormente sul valore del rendimento del sistema.

Fatto ciò, sarà definito un sottoinsieme di parametri, detti di progetto, sul quale lavorerà la routine di ottimizzazione per cercare il set di valori ottimi che vanno a massimizzare il rendimento del sistema.

Si conclude riportando in Figura 5.2 uno schema a blocchi che riporta in maniera molto sintetica la ben più complessa procedura di ottimizzazione presentata.

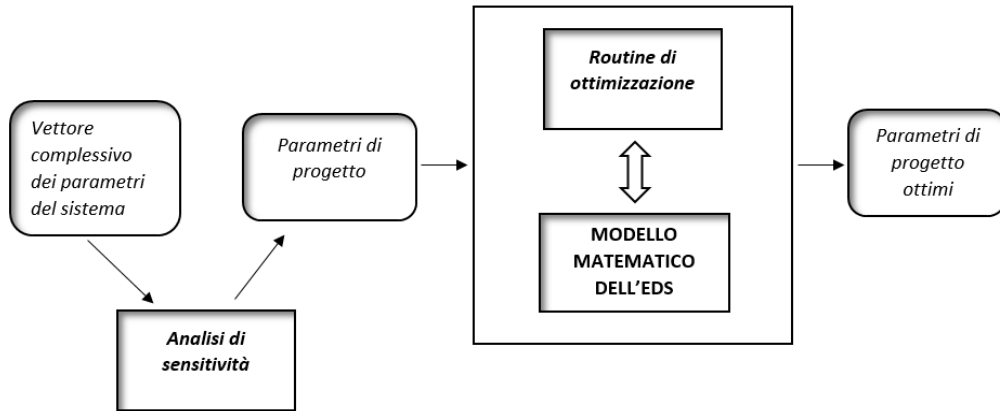


Figura 5.2: Processo di ottimizzazione dell'EDS basato sul modello matematico costruito

6 Appendice

6.1 Scrittura equazione del moto di un generico sistema ad 1 g.d.l.

Un sistema meccanico lineare ad un grado di libertà è un particolare tipo di sistema dinamico retto da un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti del tipo:

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

dove la parte a sinistra dell'uguale, detta omogenea associata, dipende dalle proprietà inerziali, di smorzamento ed elastiche del sistema mentre la parte a destra dell'uguale è composta dai termini di forzamento, in tal caso posta funzione solo del tempo t , ma talvolta può anche dipendere dal moto della struttura stessa, per cui assume carattere più generale scrivere la precedente equazione in quest'altra forma:

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = F(\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), t)$$

Quando una forzante è di questo tipo viene detta *Forza di campo* e talvolta può essere una forzante di questo genere ad introdurre non linearità nella dinamica del sistema.

Un sistema meccanico non lineare ad un grado di libertà invece è retto da un'equazione differenziale di forma più complicata e generale, esprimibile come segue:

$$f(\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t)) = F(\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), t)$$

Le difficoltà maggiori nell'affrontare un sistema non lineare rispetto ad uno lineare o linearizzato non risiedono tanto nella costruzione dell'equazione di moto che, come vedremo, avviene in modo abbastanza automatico se si opta per il procedimento di Lagrange; il problema vero riguarda la soluzione dell'equazione differenziale, che nel novanta per cento dei casi non può avvenire in forma analitica chiusa (cosa invece possibile per il lineare) e si deve perciò ricorrere a tecniche di integrazione numeriche usando strumenti come Matlab o Simulink.

Quest'ultimo permette l'integrazione passo-passo dell'equazione differenziale simulando in tempo reale il comportamento dinamico del sistema.

Inoltre per i sistemi non lineari non è possibile svolgere analisi nel dominio delle frequenze, che permettono di caratterizzare un sistema dinamico in maniera molto sintetica.

Le cause principali di non linearità relative ad un sistema meccanico forzato sono le seguenti:

- *Legami cinematici* non lineari;
- *Massa* del sistema variabile nel tempo;
- *Molle* con costante di rigidezza k funzione del moto;
- *Smorzatori* di natura non perfettamente viscosa;
- *Dissipazioni energetiche* dovute ad isteresi del materiale o ad attriti coulombiani;
- *Forzanti* funzioni del moto del sistema, come forze aeroelastiche o forze derivanti dall'interazione con onde marine; in generale forze derivanti dall'interazione fluido struttura sono spesso di natura non lineare;
- Giochi e zone di moto "morte";
- Etc...

Le equazioni di moto di sistemi meccanici si possono costruire usando molteplici strumenti di calcolo quali gli equilibri dinamici di D'Alembert, l'equazione di Lagrange, il teorema dell'energia cinetica o il teorema delle potenze.

Verrà approfondito soltanto la seconda tecnica che verrà poi implementata per la costruzione delle equazioni di moto per il sistema E.D.S. ad uno e a due gradi di libertà. Si partirà affrontando la scrittura dell'equazione generica non lineare per poi convergere sul caso linearizzato, decisamente più utile per quelli che sono gli scopi attuali della modellazione analitica di questo sistema.

La scrittura delle equazioni di moto di un generico sistema non lineare ad un grado di libertà, affrontata con l'equazione di Lagrange, porta alla seguente relazione:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q$$

dove E_C è l'energia cinetica del sistema, D è la funzione dissipativa dovuta all'eventuale presenza di smorzatori viscosi, V è l'energia potenziale del sistema mentre con Q si indica la componente lagrangiana delle sollecitazioni attive, ossia di tutte le forze che sono applicate al sistema ed i cui effetti non sono contenuti nelle precedenti forme di energia.

La coordinata libera q è la variabile indipendente scelta per definire il moto del sistema. Per cui è necessario definire le forme di energia E_C , V , D ed il lavoro virtuale delle forze attive in funzione di tale coordinata.

In generale l'energia cinetica del sistema può essere espressa nel generico istante considerato come:

$$\frac{1}{2} m^*(q) \dot{q}^2$$

dove $m^*(q)$ è la massa generalizzata del sistema secondo il grado di libertà q .

Applicando Lagrange, i termini relativi all'energia cinetica che saranno presenti nell'equazione di moto possono essere così espressi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial q} = m^*(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial m^*(q)}{\partial q} \dot{q}^2$$

L'energia potenziale dovuta alle molle ed al campo gravitazionale può essere scritta come:

$$V = V_k + V_g$$

Ponendo attenzione all'energia potenziale dovuta alle molle si ha, in generale, che nel generico istante di tempo:

$$V_k = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k (\Delta l_d(q) + \Delta l_0)^2$$

dove $\Delta l_d(q)$ e Δl_0 sono rispettivamente l'allungamento dinamico, espresso dalla variazione di lunghezza dell'elemento elastico rispetto alla dimensione assunta nella posizione iniziale, funzione della coordinata libera q , ed il precarico statico della molla, ossia la variazione di lunghezza subita dall'elemento passando dalla condizione di molla scarica alla posizione iniziale.

In Figura 6.1 è definito l'allungamento statico e dinamico della generica molla.

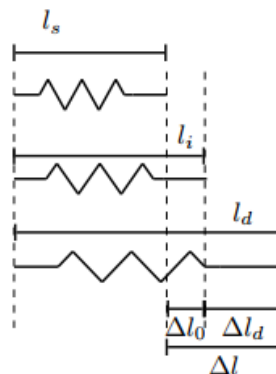


Figura 6.1: Diverse configurazioni di un generico elemento elastico: lunghezza statica, dinamica e in configurazione indeformata

In particolare si ha che l_s è la lunghezza della molla indeformata, l_i è la lunghezza assunta dalla molla nella posizione di equilibrio statico mentre l_d è la lunghezza che ha la molla durante il moto del sistema ad un generico istante di tempo.

Applicando Lagrange si ottiene:

$$\frac{\partial V_k}{\partial q} = k(\Delta l_d(q) + \Delta l_0) \frac{\partial \Delta l_d(q)}{\partial q} = \underbrace{k \Delta l_d(q) \frac{\partial \Delta l_d(q)}{\partial q}}_{\text{uno}} + \underbrace{k \Delta l_0 \frac{\partial \Delta l_d(q)}{\partial q}}_{\text{due}}$$

dove il termine *due* esiste solo se le molle sono precaricate nella posizione di equilibrio, ovvero se Δl_0 è diverso da 0.

L'energia potenziale dovuta al campo di forze gravitazionale è invece:

$$V_g = mgh(q)$$

dove $h(q)$ rappresenta l'altezza del baricentro in funzione della coordinata libera q .

Derivando l'energia potenziale secondo Lagrange, diventa:

$$\frac{\partial V_g}{\partial q} = mg \frac{\partial h(q)}{\partial q}$$

La forma generale della funzione dissipativa risulta essere:

$$D = \frac{1}{2} r \dot{\Delta l}_r(q)^2$$

con r caratteristica viscosa del generico smorzatore e $\dot{\Delta l}_r$ la derivata rispetto al tempo dell'allungamento del generico smorzatore.

Tale termine, essendo funzione della coordinata libera, può essere riscritto come:

$$\dot{\Delta l}_r(q) = \frac{d}{dt} \Delta l_r(q) = \frac{\partial \Delta l_r}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \Delta l_r}{\partial q} \dot{q}$$

dove è stata omessa la dipendenza dalla coordinata libera per alleggerire la scrittura.

La funzione dissipativa può allora essere scritta come:

$$D = \frac{1}{2} r \left(\frac{\partial \Delta l_r}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2$$

Applicando Lagrange si ottiene il generico termine dell'equazione di moto dovuto alla forza generata dallo smorzatore in analisi:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = r \left(\frac{\partial \Delta l_r}{\partial q} \right)^2 \dot{q}$$

La componente lagrangiana della sollecitazione attiva dovuta ad una generica forza F applicata in un punto del sistema si ottiene dalla scrittura del lavoro virtuale:

$$\delta^* L = F \delta^* x_F = F \frac{\partial x_F}{\partial q} \delta^* q$$

dove con F si è indicata la forzante mentre con $\delta^* x_F(q)$ ci si riferisce allo spostamento virtuale del punto di applicazione della forzante, funzione della coordinata libera del sistema.

Applicando Lagrange si calcola la componente lagrangiana come:

$$Q = \frac{\delta^* L}{\delta^* q} = F \frac{\partial x_F}{\partial q}$$

L'equazione di moto non lineare di un generico sistema forzato dalla forza F può dunque essere scritta in forma simbolica come:

$$\begin{aligned} m^*(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial m^*(q)}{\partial q} \dot{q}^2 + r \left(\frac{\partial \Delta l_r}{\partial q} \right)^2 \dot{q} + k \Delta l_d(q) \frac{\partial \Delta l_d(q)}{\partial q} + k \Delta l_0 \frac{\partial \Delta l_d(q)}{\partial q} + mg \frac{\partial h(q)}{\partial q} \\ = F \frac{\partial x_F(q)}{\partial q} \end{aligned}$$

Per la scrittura dell'equazione di moto non lineare vanno dunque calcolate le seguenti derivate:

$$\frac{\partial m^*(q)}{\partial q} \quad \frac{\partial h(q)}{\partial q} \quad \frac{\partial \Delta l_d(q)}{\partial q} \quad \frac{\partial \Delta l_r}{\partial q} \quad \frac{\partial x_F(q)}{\partial q}$$

Calcolo della posizione di equilibrio statico

Il calcolo della posizione di equilibrio statico si può affrontare tramite la ricerca di un punto di stazionarietà dell'energia potenziale, ovvero dev'essere nulla la derivata di tale quantità rispetto alla coordinata libera:

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

oppure tramite la scrittura di opportune equazioni di equilibrio statico, che permettono anche il calcolo delle reazioni vincolari, se necessarie ai fini dell'analisi che si sta svolgendo.

Va osservato che l'equazione che descrive l'equilibrio statico del sistema si ricava direttamente dall'equazione di moto, che descrive invece la condizione di equilibrio dinamico del sistema stesso, imponendo che siano nulli i termini che dipendono dalla velocità, dall'accelerazione e da eventuali forze funzioni del tempo.

Inoltre, nota la posizione di equilibrio è possibile anche valutarne la stabilità in piccolo analizzando il segno della derivata seconda dell'energia potenziale valutata nella posizione

di equilibrio analizzata; in caso si segno positivo, la posizione di equilibrio considerata si dice stabile e a fronte di una piccola sollecitazione il sistema inizierà ad oscillare per poi arrestarsi dopo un tempo più o meno lungo nella posizione iniziale.

Viceversa la posizione di equilibrio sarebbe di tipo instabile e ciò vuol dire che a fronte di una piccola perturbazione esso se ne allontanerebbe indefinitamente.

Linearizzazione

L'equazione di moto che descrive il moto in grande del sistema meccanico in analisi può essere linearizzata se l'interesse è volto alla determinazione delle piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio. A tal fine, oltre alla linearizzazione diretta dell'equazione di moto in grande, si possono rendere quadratiche le forme di energia in modo che la successiva applicazione di Lagrange dia luogo ad un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti.

Per quanto riguarda l'energia cinetica, lo sviluppo al secondo ordine nell'intorno della posizione di equilibrio, indicata con q_0 , è pari a :

$$E_C \cong E_{C_{q_0, \dot{q}=0}} + \frac{\partial E_C}{\partial q}_{q_0, \dot{q}=0} (q - q_0) + \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}}_{q_0, \dot{q}=0} \dot{q} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_C}{\partial q^2}_{q_0, \dot{q}=0} (q - q_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_C}{\partial \dot{q}^2}_{q_0, \dot{q}=0} \dot{q}^2 + \frac{\partial^2 E_C}{\partial q \partial \dot{q}}_{q_0, \dot{q}=0} (q - q_0) \dot{q}$$

dove l'unico termine non nullo è $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_C}{\partial \dot{q}^2}_{q_0, \dot{q}=0} \dot{q}^2$ ossia la forma quadratica dell'energia cinetica si ottiene valutando il momento d'inerzia generalizzato in corrispondenza della posizione di equilibrio:

$$E_C \cong \frac{1}{2} m^*(q_0) \dot{q}^2$$

Lo sviluppo dell'energia potenziale nell'intorno della posizione di equilibrio è:

$$V \cong V_{q_0} + \frac{\partial V}{\partial q}_{q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}_{q_0} (q - q_0)^2$$

in cui il primo termine è costante, il secondo è nullo poiché si valuta nella posizione di equilibrio, ovvero sia in un punto di stazionarietà del potenziale mentre il terzo termine fornisce la forma quadratica dell'energia potenziale.

La funzione dissipativa D si riduce ad una forma quadratica valutando il coefficiente di smorzamento generalizzato ridotto alla coordinata libera nella posizione di equilibrio; ossia, data la forma energetica di partenza:

$$D = \frac{1}{2} b_{eqq} \dot{q}^2$$

si valuta b_{eqq} nella posizione di equilibrio:

$$b_{eqq_0} = b_{eqq}(q = q_0)$$

per poi esprimere ancora la funzione dissipativa in forma quadratica:

$$D \cong \frac{1}{2} b_{eqq_0} \dot{q}^2$$

Il lavoro virtuale delle sollecitazioni attive non viene portata in forma quadratica, ma semplicemente si valuta il legame cinematico che lega la forza o il momento forzante in questione alla coordinata libera, nella posizione di equilibrio:

$$\delta^* L = F \delta^* x_F \cong F \frac{\partial x_F}{\partial q_{q_0}} \delta^* q$$

A valle di tutti questi accorgimenti, riapplicando l'equazione di Lagrange, si ottiene la seguente equazione del moto linearizzata attorno alla posizione di equilibrio:

$$m^*(q_0)\ddot{q} + b_{eqq_0}\dot{q} + (k_g + k_{el})q = Q$$

dove si hanno un'inerzia e i coefficiente di smorzamento e rigidità generalizzati costanti, mentre la componente lagrangiana delle forze attive non dipende dal moto della struttura. Da notare la presenza della costante k_g che rappresenta la costante di rigidità equivalente relativa al campo gravitazionale.

Richiamo gravitazionale

In merito alle equazioni che si andranno a scrivere per i due sistemi dell'EDS ad un grado di libertà, è interessante verificare quando il termine di richiamo gravitazionale compare nelle equazioni di moto non lineare e linearizzata nell'intorno della posizione di equilibrio (nel secondo caso appare sotto forma di contributo elastico equivalente).

Come detto tale contributo alla definizione della rigidità complessiva del sistema è presente quando la derivata seconda delle quote verticali dei baricentri, fatta rispetto alla coordinata libera, risulta essere nulla se valutata nella posizione di equilibrio.

In Figura 6.2 si riporta un sistema meccanico formato da un pendolo omogeneo, lungo L , con massa m e momento d'inerzia baricentrico J , incernierato in un estremo e sostenuto in posizione di equilibrio orizzontale da una molla precaricata di rigidità k posta dell'altra estremità:

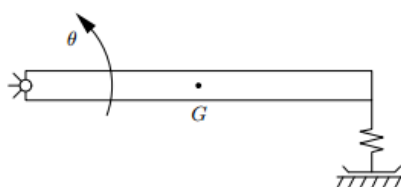


Figura 6.2: Pendolo in posizione di equilibrio statico orizzontale, analogo al sistema ad un grado di libertà asta-galleggiante [21]

Questo sistema, come si vedrà nel seguito, si avvicina molto al sistema ad un grado di libertà relativo alla sola parte del galleggiante del sistema EDS.

Come detto, la configurazione rappresentata in Fig. 3.14 è la posizione di equilibrio statico del sistema, ovvero per $\theta = 0$, dove θ è la coordinata libera del sistema che definisce la posizione angolare dell'asta stessa partendo dalla posizione orizzontale.

La quota verticale del baricentro di questo sistema misurato da un sistema di riferimento con origine nella cerniera a terra si scrive:

$$h_G = mgh_G = mg \frac{L}{2} \sin\theta$$

e la sua derivata seconda fatta rispetto a θ , valutata per $\theta = 0$, è pari a zero, per cui ci si aspetta che il contributo gravitazionale scompaia dall'equazione di moto linearizzata attorno alla posizione di equilibrio.

Senza scrivere tutto il procedimento che porta all'equazione di moto, se ne riporta direttamente il risultato finale:

$$J^* \ddot{\theta} + mg \frac{L}{2} \cos\theta + kL^2 \sin\theta \cos\theta + k\Delta l_0 L \cos\theta = 0$$

In tale equazione rimane incognito il termine di precarico della molla che garantisce che $\theta = 0$ sia la posizione di equilibrio statico del sistema.

Tale valore di precarico risulta essere tale da annullare la derivata prima dell'energia potenziale rispetto alla coordinata libera valutata in $\theta = 0$:

$$V = \frac{1}{2}k(\Delta l_0 + L\sin\theta)^2 + mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\frac{L}{2}\cos\theta + kL^2\sin\theta\cos\theta + k\Delta l_0L\cos\theta$$

Per cui valutando l'ultima quantità per $\theta = 0$:

$$mg\frac{L}{2} + k\Delta l_0L = 0 \rightarrow \Delta l_0 = -\frac{mg}{2k}$$

Sostituendo questo valore nell'equazione di moto si elimina completamente il contributo di richiamo gravitazionale, ovvero neanche il moto in grande del sistema dipende dalla forza peso:

$$J^*\ddot{\theta} + kL^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

Linearizzando l'equazione di moto nell'intorno della posizione di equilibrio si nota che chiaramente neanche qui è presente il suddetto termine:

$$J^*\ddot{\theta} + kL^2\theta = 0$$

Considerando ora un sistema analogo al precedente, in cui però l'asta si trova in posizione di equilibrio quando è disposta secondo la direzione verticale ed è vincolata a terra tramite una cerniera nella sua estremità superiore, mentre la molla è posta nell'estremo inferiore, come riportato in Figura 6.3:

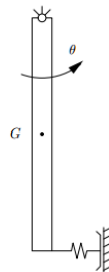


Figura 6.3: Pendolo in posizione di equilibrio statico orizzontale, analogo al sistema ad un grado di libertà asta-pala [21]

Tale sistema è invece molto simile al modello meccanico ad un grado di libertà relativo alla parte della pala dell'EDS, a meno della molla posta nella parte bassa.

Affinché la posizione indicata in Figura 6.3 sia di equilibrio, la molla posta nell'estremo libero inferiore dev'essere scarica per $\theta = 0$, con θ coordinata libera che definisce la posizione angolare dell'asta partendo dal riferimento verticale, ovvero:

$$\Delta l_0 = 0$$

La quota verticale del baricentro di questo sistema misurato da un sistema di riferimento con origine nella cerniera a terra si scrive:

$$h_G = mgh_G = -mg \frac{L}{2} \cos\theta$$

Stavolta la sua derivata seconda, valutata per $\theta = 0$, è diversa da zero, per cui è atteso un contributo di richiamo gravitazionale nell'equazione di moto.

Infatti, saltando anche qui i passaggi matematici, l'equazione non lineare ottenuta è:

$$J^* \ddot{\theta} + kL^2 \sin\theta \cos\theta + mg \frac{L}{2} \sin\theta = 0$$

dove si nota la mancanza del precarico statico e un termine di richiamo gravitazionale positivo, per cui stabilizzante, ossia va ad incrementare la rigidità complessiva del sistema.

L'equazione di moto lineare nell'intorno della posizione di equilibrio è invece:

$$J^* \ddot{\theta} + kL^2 \theta + mg \frac{L}{2} \theta = 0$$

dove il termine $k_g = mg \frac{L}{2}$ è detto costante di richiamo elastico gravitazionale equivalente.

6.2 Scrittura equazioni di moto di sistemi a 2 g.d.l.

Un sistema dinamico non lineare a più gradi di libertà è rappresentato da un'equazione del tutto simile a quella del caso ad un grado di libertà, solo che sarà di tipo vettoriale.

Detto \vec{q} il vettore che raccoglie le n coordinate libere scelte per la descrizione della dinamica del sistema, l'equazione del moto vettoriale per sistemi non lineari, costituita da n equazioni scalari, si esprime con la seguente relazione generale:

$$\vec{f}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}) = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, t)$$

Chiaramente per il caso del sistema EDS completo il numero di equazioni sarà pari a due. Analogamente, un sistema linearizzato o lineare (per mantenere un parallelo con il caso ad un grado si mostrerà lineare solo la parte strutturale a sinistra dell'uguale, lasciando la generica espressione non lineare per il forzamento a destra dell'uguale) per il caso multigrado si scrive come:

$$[M]\ddot{\vec{q}} + [R]\dot{\vec{q}} + [K]\vec{q} = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, t)$$

A seguire si mostrerà come passare dall'uno all'altro se siamo nelle condizioni di piccoli spostamenti attorno alla posizione di equilibrio statico.

Si riprende il discorso della stesura delle equazioni di moto tramite la tecnica di Lagrange. Usare la procedura di Lagrange per la costruzione delle equazioni di moto di un sistema meccanico permette di trattare in maniera agevole anche sistemi molto complessi e a più gradi di libertà, rispetto ad utilizzare altre tecniche come ad esempio gli equilibri dinamici. In questa sede si tratterà il caso di sistemi a due gradi di libertà, relativo proprio all'EDS. La sostanziale differenza rispetto al caso di sistemi ad un grado di libertà riguarda l'aspetto delle forme di energia che, adesso, saranno in generale funzione di tutte e due le coordinate libere scelte per la descrizione della dinamica del sistema.

Per cui, date le coordinate q_1 e q_2 con le corrispettive derivate nel tempo \dot{q}_1 e \dot{q}_2 , le grandezze cinematiche che verranno adesso elencate, necessarie per la scrittura delle forme energetiche, saranno in generale funzioni di entrambi i gradi di libertà:

- Velocità traslazionali e angolari dei baricentri degli n_p corpi pesanti del sistema, necessarie alla definizione dell'energia cinetica del sistema:

$$\begin{aligned} v_i &= v_i(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \\ \omega_i &= \omega_i(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \quad i = 1 \dots n_p \end{aligned}$$

- Quote dei baricentri degli n_p corpi pesanti del sistema, necessarie alla definizione dell'energia potenziale di tipo gravitazionale del sistema:

$$h_i = h_i(q_1, q_2) \quad i = 1 \dots n_p$$

- Variazioni di lunghezza degli n_k elementi elastici presenti nel sistema, necessari alla definizione dell'energia potenziale di tipo elastica:

$$\Delta l_i = \Delta l_i(q_1, q_2) \quad i = 1 \dots n_k$$

- Velocità di variazione delle lunghezze degli n_s smorzatori viscosi presenti nel sistema, necessari alla definizione della funzione dissipativa:

$$\dot{\Delta} l_i = \Delta \dot{l}_i(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \quad i = 1 \dots n_s$$

- Spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle n_F forzanti agenti sul sistema:

$$x_i = x_i(q_1, q_2) \quad i = 1 \dots n_F$$

Di conseguenza le forme energetiche, basate sulle grandezze cinematiche, saranno a loro volta funzione delle coordinate libere e delle loro derivate temporali:

$$\begin{aligned} E_c &= E_c(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \\ V &= V(q_1, q_2) \\ D &= D(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \\ \delta^* L &= \delta^* L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \end{aligned}$$

Per ottenere il sistema di equazioni differenziali che rappresentano il modello analitico del meccanismo in esame, è sufficiente replicare le varie derivate suggerite dal metodo di Lagrange per entrambe le coordinate libere:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\delta^* L}{\delta^* q_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\delta^* L}{\delta^* q_2} \end{cases}$$

Tutti gli accorgimenti relativi al calcolo della posizione di equilibrio statico, ai precarichi delle molle e al contributo del campo gravitazionale sono identici a quelli esposti per i sistemi a un grado.

L'unica cosa che val la pena di presentare anche per questa seconda tipologia di sistemi è la questione relativa alla linearizzazione delle equazioni di moto attorno ad una posizione di equilibrio statico.

Linearizzazione dell'equazione vettoriale attorno ad una configurazione di equilibrio statico

Dato il vettore che raccoglie le due coordinate libere:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

la ricerca delle posizioni di equilibrio avviene in modo del tutto analogo a quanto visto per il caso ad un grado di libertà, imponendo le seguenti condizioni:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{q}}\right)^T = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

Tale condizione equivale a quella che si ottiene dall'equazione di moto una volta eliminati i termini di velocità e accelerazione.

Per cui, da questa operazione, si ricavano le diverse posizioni di equilibrio statico del sistema, siano esse di natura stabile o instabile.

Per linearizzare le equazioni di moto attorno ad una di queste posizioni:

$$\vec{q}_0 = \begin{cases} q_{10} \\ q_{20} \end{cases}$$

anche qui bisogna esprimere le energie cinetiche e potenziale e la funzione di dissipazione in forma quadratica; per il lavoro virtuale delle forze attive invece basta valutare in questa posizione la matrice jacobiana che contiene i legami cinematici necessari a calcolare le componenti lagrangiane a partire dalle forze attive agenti sul sistema.

Si definisce innanzitutto il vettore degli scostamenti delle coordinate libere rispetto ai valori assunti da queste quando il sistema è nella posizione di equilibrio, assieme alle sue derivate rispetto nel tempo:

$$\underline{\vec{q}} = \begin{cases} q_1 - q_{10} \\ q_2 - q_{20} \end{cases}$$

$$\underline{\dot{\vec{q}}} = \dot{\vec{q}}$$

$$\underline{\ddot{\vec{q}}} = \ddot{\vec{q}}$$

Per quanto riguarda energia cinetica e funzione dissipativa, le operazioni per arrivare a delle forme quadratiche sono abbastanza immediate; date le loro generiche espressioni:

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T [M(\vec{q})] \dot{\vec{q}}$$

$$D = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T [R(\vec{q})] \dot{\vec{q}}$$

è sufficiente valutare le matrici di massa e di smorzamento generalizzate, funzione del moto, nella posizione di equilibrio statica, ottenendo:

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T [M(\vec{q} = \vec{q}_0)] \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T [M] \dot{\vec{q}}$$

$$D = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T [R(\vec{q} = \vec{q}_0)] \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T [R] \dot{\vec{q}}$$

Le matrici $[M]$ ed $[R]$ di massa e di smorzamento assumono ora valore costante.

Derivando ora le nuove forme di energia secondo Lagrange, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\vec{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial E_c}{\partial \vec{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\vec{q}}} \right)^T &= \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} \end{cases} = [M] \ddot{\vec{q}} + [R] \dot{\vec{q}} = \\ &= [M] \underline{\ddot{\vec{q}}} + [R] \underline{\dot{\vec{q}}} \end{aligned}$$

Invece, per quanto riguarda l'energia potenziale bisogna svolgere qualche passaggio in più prima di giungere alla sua corrispondente forma quadratica.

Come fatto per il caso ad un grado di libertà, si esegue lo sviluppo in serie di Taylor della forma energetica originaria in prossimità della posizione di equilibrio statico a cui si è interessati:

$$V \cong V_{\vec{q}_0} + \frac{\partial V}{\partial \vec{q}_{\vec{q}_0}} (\vec{q} - \vec{q}_0) + \frac{1}{2} (\vec{q} - \vec{q}_0)^T \frac{\partial^2 V}{\partial \vec{q}_{\vec{q}_0}^2} (\vec{q} - \vec{q}_0)$$

I primi due termini non vengono considerati in quanto il primo è costante, per cui una volta derivato secondo Lagrange darà contributo nullo.

Il secondo termine invece si annulla poiché è presente la relazione di equilibrio statico del sistema:

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{q}_{\vec{q}_0}} = 0$$

Dunque l'unico contributo dello sviluppo in serie da considerare è il terzo termine della somma, in cui si nota la presenza di una matrice hessiana valutata nella posizione di equilibrio, che assume dunque valore costante, che rappresenta la matrice di rigidità generalizzata equivalente, figlia sia di termini gravitazionali che di termini elastici:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vec{q}^2} \Big|_{\vec{q}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} \Big|_{\vec{q}_0} = [K]$$

Quindi derivando secondo Lagrange l'energia potenziale espressa in forma quadratica, si ottiene il termine elastico e gravitazionale dell'equazione di moto:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{q}} \right)^T = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1} \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} \end{cases} = [K] \underline{\vec{q}}$$

L'ultimo termine da trattare ai fini della linearizzazione è il lavoro virtuale delle forze attive.

In generale, nell'equazione del moto del sistema non lineare, le componenti lagrangiane delle forze attive sono legate alle forzanti del sistema attraverso una matrice jacobiana $[\Lambda(\vec{q})]$:

$$\vec{Q}(\vec{q}, t) = [\Lambda(\vec{q})]^T \vec{F}(t)$$

Per rendere lineare questo termine è sufficiente valutare la matrice jacobiana in prossimità della posizione di equilibrio statica:

$$\Lambda_0 = \Lambda(\vec{q} = \vec{q}_0)$$

Quindi la componente lagrangiana sarà ora solo funzione del tempo.

Nel caso più complicato in cui le forze attive contenute nel vettore \vec{F} siano funzioni non lineari del moto del sistema (forze di campo non lineari), sarà necessario procedere con lo sviluppo in serie di Taylor del termine $\vec{Q}(\vec{q}, t)$ arrestandosi al primo ordine.

A valle di questo sviluppo, si avranno dei termini stavolta funzioni lineari di spostamento, velocità e accelerazione del sistema che andranno a modificare rispettivamente le caratteristiche elastiche, di smorzamento e inerziali del sistema contenute in $[K]$, $[R]$ ed $[M]$.

Riassumendo, l'equazione di moto linearizzata attorno ad una posizione di equilibrio statica del sistema a due gradi libertà è rappresentata dalla seguente relazione matriciale:

$$[M] \ddot{\underline{\vec{q}}} + [R] \dot{\underline{\vec{q}}} + [K] \underline{\vec{q}} = \vec{Q}(t)$$

Una volta presentata in generale la procedura di Lagrange volta alla descrizione dinamica di un generico sistema meccanico, essa verrà applicata a tutti i sistemi considerati per la modellazione del sistema EDS.

Riferimenti

1. M. Negri e S. Malavasi (2014). “Analisi sperimentale di un WEC per la zona dei frangenti”.
XXXIV Convegno Nazionale di Idraulica e Costruzioni Idrauliche (IDRA14).
2. M. Negri, S. Malavasi, F. Clerici (2013). “Harvesting breaking wave energy”.
Young Coastal Scientists and Engineers Conference (YCSEC).
3. M. Negri, F. Clerici, S. Malavasi (2013). “A breaker-zone wave energy converter”.
International Conference on Renewable Energies and Power Quality (ICREPQ13).
4. A. Clement, P. McCullen, A. Fiorentino, F. Gardner, K. Hammarlund et Hammarlund K et al. (2002). “Wave energy in Europe: current status and perspectives, Renewable and Sustainable Energy Reviews”.
5. A. Falcao (2010). “Wave energy utilization: a review of the technologies”.
Renewable and Sustainable Energy Reviews.
6. I. Lopez, J. Andreu, S. Ceballos, I. Martinez de Alegria, I. Kortabarria (2013).
“Review of wave energy technologies and the necessary power-equipment”.
Renewable and Sustainable Energy Reviews.
7. J. Falnes (2007). “A review of wave-energy extraction”. Marine Structures.
8. Earth’s Energy Budget, NASA. EDRO, Seeding Socioeconomic Avalanches.
[Online]. Disponibile: <https://edro.wordpress.com/energy/earths-energy-budget/>.
9. “Introduction to Physical Oceanography” (2005). Department of Oceanography,
Texas A&M University. [Online]. Disponibile:
<http://ancona.ismar.cnr.it/IPO/ipo.htm>.
10. Electrical Power Research Institute, EPRI, (2005), “Ocean Tidal and Wave
Energy”, Renewable Energy Technical Assessment Guide.
11. B. Drew, A. Plummer, M. Sahinkaya (2009). “A review of wave energy converter
technology”. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers.
12. R. Pelc., RM. Fujita (2002). “Renewable energy from the ocean”. Marine Policy.
13. J. Villate (2010). “Situacion actual de las energias marinas y perspectivas de futuro.
Seminario Annual de Automatica, Electronica e Instrumentacion.
14. Torre-Enciso (2009). “Planta de energia de las olas de mutriku. Jornada
Internacional de Energia Marina.
15. [Online]. Disponibile: <http://www.wavehub.co.uk/>.
16. [Online]. Disponibile: <http://www.wavedragon.net/>.
17. [Online]. Disponibile: <http://www.pelamiswave.com/>.
18. [Online]. Disponibile: <http://oceanenergy.ie/>.
19. A.F.O. Falcao (2014). “Modelling of wave energy conversion”. Instituto Superior
Tecnico, Universidade de Lisboa.
20. Tesi di Laurea di Matteo Carraro (2010). “Estrazione di energia dalle onde tramite
boa a moto verticale: modellizzazione e controllo”. Università degli Studi di Paova.

21. M. Belloli, R. Corradi, D. Rocchi (2009). "Dinamica dei Sistemi Meccanici, Esercizi".
22. A.S. Zurkinden, F. Ferri, S. Beatty, J.P. Kofoed, M.M. Kramer (2014). "Non-linear numerical modeling and experimental testing of a point absorber wave energy converter". *Ocean Engineering*.
23. S. Bruni (1998/99). "Cinematica di sistemi articolati piani con il metodo dei numeri complessi". *Laboratori di Meccanica Applicata alle Macchine*.
24. V. Cornett (2008). "A global wave energy resource assessment". In: *International offshore and polar engineering conference (ISOPE)*, vol. 1.
25. S. Barstow, G. Mork, D. Mollison, J. Cruz (2008). "The wave energy resource". In: *Ocean wave energy*, vol. 1, Berlin Heidelberg: Springer.
26. S. Barstow, G. Mork, L. Lonseth, J. Mathisen (2009). "Worldwaves wave energy resource assessments from the deep ocean to the coast". In: *European wave and tidal energy conference*, vol. 1.
27. *Boletín de inteligencia tecnológica, tecnologías para el aprovechamiento de la energía de las olas y de las corrientes marinas* (2009). Technical Report, Fundación INNOVAMAR.
28. [Online]. Disponibile: <http://www.oceanpowertechnologies.com/>.
29. [Online]. Disponibile: <http://www.mpoweruk.com/>.
30. [Online]. Disponibile: <http://www.science4hope.blogspot.com/>.
31. [Online]. Disponibile: <http://www.alternative-energy-tutorials.com/>.
32. [Online]. Disponibile: <http://www.powerselectronics.com/>.
33. J.C.C. van Nieuwkoop-McCall, H.C.M. Smith, K.A. Edwards (2012). "Effect of water depth on the wave energy resource and extreme conditions". *4th International Conference on Ocean Energy*.
34. M. Folley, T.J.T. Whittaker (2009). "Analysis of the nearshore energy resource". *Renewable Energy* 34.
35. [Online]. Disponibile: <http://www.techflue.it/>.
36. [Online]. Disponibile: <http://wvestarenergy.com/>.
37. B.D. Hazlett, I.I. Incullet, D.R. Incullet (2009). "Electric power generation by "Surfing" water waves". *Renewable Energy* 34.
38. [Online]. Disponibile: <http://slideplayer.it/slide/591670/>.
39. J.N. Newman (1977). "Marine hydrodynamics". The MIT Press Cambridge, Massachusetts, and London.